UNIVERIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂMICA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

Comportamento Dinâmico de um "Riser" Rígido de Produção

Autor**: Hélio Yoshikazu Kubota**
Orientador: **Celso K. Morooka**

21/03

UNIVERIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂMICA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

Comportamento Dinâmico de um "Riser" Rígido de Produção

Autor: **Hélio Yoshikazu Kubota**
Orientador: **Celso K. Morooka**

Curso: Ciências e Engenharia de Petróleo

Dissertação de mestrado apresentada à Subcomissão de Pós-Graduação Interdisciplinar de Ciências e Engenharia de Petróleo (FEM e IG), como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo.

Campinas, 2003
SP - Brasil

UNIVERIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂMICA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Comportamento Dinâmico de um "Riser" Rígido de Produção

Autor: **Hélio Yoshikazu Kubota**
Orientador: **Celso K. Morooka**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Celso K. Morooka, Presidente
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP

Prof. Dr. Júlio R. Meneghini
Escola Politécnica – USP

Dr. José A. Ferrari Junior
Petrobrás - RJ

Prof. Dr. Sérgio N. Bordalo
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP

Campinas, 14 de março de 2003

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Celso K. Morooka, por direcionar meus estudos de forma que sempre me mantivesse no rumo certo e pudesse desenvolver meu trabalho de forma segura e objetiva.

A ANP, Agência Nacional de Petróleo, que financiou este projeto através da bolsa de estudo de mestrado permitindo que pudesse me dedicar exclusivamente à realização desse trabalho.

Ao Prof. Dr. Kazuo Nishimoto, pela disposição de ajudar no desenvolvimento do trabalho e pela cooperação em disponibilizar equipamentos que não estavam disponíveis na Unicamp.

Ao Dr. Alfredo Ferrari Jr., por todos os esclarecimentos e a pronta ajuda no desenvolvimento das novas implementações.

A aluna de iniciação cientifica Fernanda P. Martins pela ajuda prestada no desenvolvimento do código computacional utilizado neste trabalho.

Aos meus pais, que forneceram os recursos necessários para que eu pudesse ter a melhor educação possível e por todo apoio dado ao longo de minha vida.

Resumo

KUBOTA, Hélio Yoshikazu. *Comportamento Dinâmico de um "Riser" Rígido de Produção*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003. 121 p. Dissertação (Mestrado).

O "riser" rígido de produção é um elemento tubular que interliga a cabeça do poço petrolífero a embarcação flutuante na superfície do mar. Além do movimento induzido pela própria embarcação, o "riser" também está sujeito a ação de carregamento devido à onda e corrente marítima. O presente trabalho apresenta os fundamentos de cálculo envolvidos no comportamento dinâmico de um "riser" rígido tanto para direção "in-line", no mesmo sentido da onda, quanto para transversal, perpendicular a propagação da onda. Resultados de cálculo são ilustrados e discussões são conduzidas quanto aos deslocamentos máximos do "riser" em diferentes condições dos esforços ambientais e dos movimentos da plataforma flutuante. Através de um estudo paramétrico os resultados são comparados com dados experimentais e de cálculo disponíveis na literatura podendo-se determinar a influência das principais variáveis no comportamento dinâmico do "riser".

Palavras chave

- "Riser" rígido, Produção Marítima de Petróleo, VIV, Comportamento Dinâmico.

Abstract

KUBOTA, Hélio Yoshikazu. *Dynamic Behavior of a Rigid Production Riser*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003. 121 p. Dissertação (Mestrado).

A production rigid riser is a tubular element that connects the well head to the vessel on the sea surface. The riser is subject to loads due to the wave and marine current and the movement induced by the vessel. The present work presents the foundations of the calculation involved in the dynamic behavior of a rigid riser in the "in-line" and in the traversal directions. Calculation results are conduced and discussions are driven for the maximum displacements of the riser in different environmental loads conditions and of the movements of the floating platform. Through a parametric study the results are compared with experimental data and with calculation available in the literature. The main variables in the dynamic behavior of the riser was also studied.

Key Words

- Rigid riser, Offshore Production, VIV, Dynamic behavior

Índice

Apêndices

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Nomenclatura

A_0 - Área transversal interna do “riser” e espessura

A_i - Área transversal do furo do “riser”

A_S - Área transversal da parede do “riser” ($=A_0$-A_i)

[B] - Matriz de amortecimento

C_M - Coeficiente de inercia

C_D- Coeficiente de arrasto

C_A- Coeficiente de massa adicional

D - Diâmetro do “riser”

$\{f\}$ - Vetor força

F_x - Força “in-line”

k - Parâmetro de rugosidade

[K] - Matriz de rigidez

L - Comprimento de onda

[M]- Matriz de massa

N - Força externa normal ao “riser”

P_0 - Pressão externa

P_i - Pressão interna

t - tempo

T_w - Período da onda

T - Tensão de topo

u - Velocidade da particular deágua

u_0 - Velocidade horizontal da particular de água

U_c - Velocidade da correnteza

U - Velocidade instantânea do fluxo oscilatório.

v_0 - Velocidade vertical da particular de água

x - Deslocamento do "riser" na direção "in-line"

γ_0 - Peso específico do fluido externo

γ_i - Peso espercífico do fluido interno

γ_S - Peso específico do material do "riser"

ρ - Densidade da água

ν - Viscosidade cinemática

φ - Diferença de fase entre a resposta do "riser" e a força transversal.

$\bar{C}_t$ - Amplitude média do coeficiente transversal de força.

$\bar{f}_S$ - Freqüência média dos vórtices

$\bar{U}$ - Velocidade média do fluxo oscilatório

KC - Número de Keulegan-Carpenter

Re - Número de Reynolds

St - Número de Strouhal

VIV – Vibração Induzida por Vórtices

D/L- Parametro de difração

EI - Rigidez a flexão

Capítulo 1

Introdução

As grandes descobertas de petróleo, na atualidade em nosso País, localizam-se em áreas marítimas e em grandes profundidades. Na explotação desse petróleo, isto é, na sua produção de forma economicamente viável, utiliza-se corpos tubulares que interligam o poço de petróleo no fundo do mar ao navio ou à plataforma flutuante na superfície, mais conhecido como "riser". A Figura 1.1 mostra um sistema flutuante de produção com completação seca que se utiliza "riser" rígido vertical de produção.

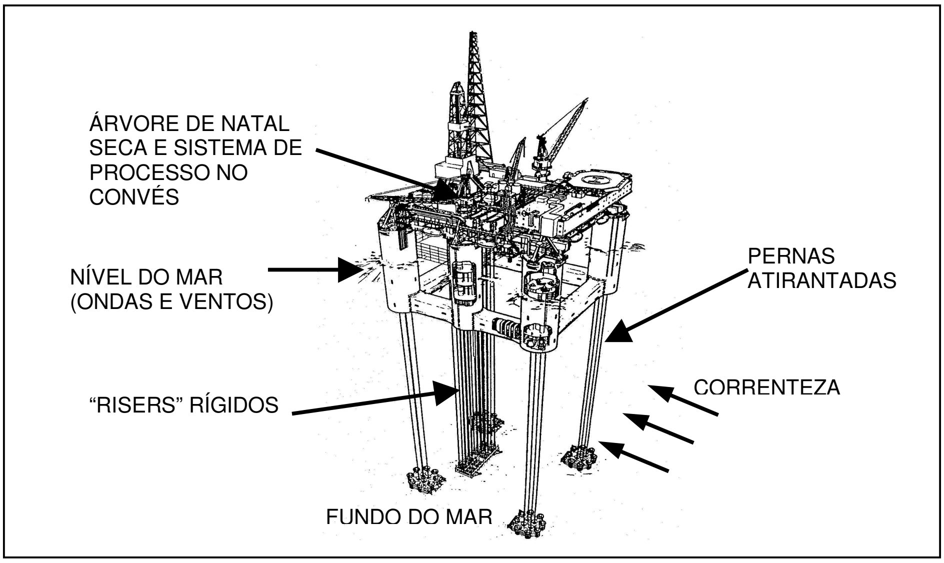


Figura 1. 1 - Típica configuração de "riser" e plataforma (TLP)

Na modelagem matemática de um "riser" rígido com aplicação em grandes profundidades, este elemento tubular pode ser considerado como sendo um corpo esbelto sujeito aos movimentos induzidos pelo navio ou plataforma flutuante sob a ação de ondas marítimas, correntezas e ventos, onde o “riser” também está sujeito a ação direta destes mesmos agentes externos.

Vários métodos numéricos têm sido propostos, para simular o processo de geração de vórtices e sua difusão (Meneghini(2000)), utilizando-se as equações de Navier-Stokes com dependência no tempo. Em linhas gerais, a maioria destes métodos está limitada a escoamentos bidimensionais em relativamente baixo número de Reynolds (Re), onde o escoamento na esteira é laminar e a esteira de vórtices bidimensional. Até mesmo os modelos que consideram números de Reynolds próximos ao limite do escoamento crítico, não podem ainda ser considerados como ferramentas seguras de projeto visto que as interações hidrodinâmicas ao longo do "riser" não são levadas em consideração, i.e., apenas a solução bidimensional para cada seção da estrutura é usualmente avaliada. No sentido exato, o modelo ideal para projeto deveria considerar as forças hidrodinâmicas seccionais, co-lineares e transversais, agindo no "riser" a cada instante. O presente trabalho baseia-se no modelo Ferrari&Bearman (1999) para a solução numérica do problema do escoamento levando-se em consideração a interação fluido-estrutura ao longo do "riser".

Em geral, existem dois tipos de “risers”, são eles os rígidos e os flexíveis, e sua utilização depende do tipo de operação que se deseja realizar. Na perfuração é utilizado o “riser” rígido que é responsável pelo transporte do fluido de perfuração e por guiar a broca de perfuração desde a embarcação até a cabeça do poço. O diâmetro desse tipo de “riser” varia entre 0,50m a 1,00m e não são projetados para suportar grandes deflexões. Esse tipo de “riser” rígidos, em geral, pode ser desconectado hidraulicamente da cabeça do poço por razões de segurança quando a embarcação atinge o máximo deslocamento horizontal (“offset”) permissível. Também existe a possibilidade de se utilizar o “riser” rígido em operações de produção. O “riser” flexível é utilizado na produção. Esse tipo de “riser” é utilizado em forma similar a catenária tendo o diâmetro externo variando de 0,064m (2,5”) a 0,41m (16,0”).

O “riser” rígido vertical também pode ser utilizado na produção, desde que ele obedeça a certos limites operacionais. O “riser” não pode sofrer grandes deslocamentos e deve estar sempre tracionado. No presente trabalho, o “riser” é considerado fixo a um dispositivo de topo, denominado tensionador, para a compensação dos deslocamentos verticais induzidos pela embarcação. Em geral, o “riser” rígido de produção possui diâmetros na ordem de 0,25m e são utilizados em concepções de produção, como em estruturas flutuantes tais como TLP´s, plataformas SPAR, dentre outros que apresentam pequenos movimentos de translação vertical possibilitando a utilização desse tipo de “riser”.

Dentre vários fatores que influenciam o comportamento do “riser”, talvez os mais importantes sejam as forças ambientais, ou seja, as forças de correnteza e de onda agindo diretamente sobre o “riser”, e o movimento induzido pela embarcação sob o efeito de ondas, vento e correnteza. Além disso, as propriedades mecânicas do “riser”, assim como a pressão hidrostática do fluido interno e externo tem efeitos que não podem ser desprezados. Uma atenção especial deve ser dada à vibração induzida por vórtices. Embora o “riser” seja projetado para suportar um elevado nível de tensão, deve-se notar que a combinação da vibração induzida por vórtices e a induzida pelo movimento da embarcação devido a ondas e correnteza, resultam na diminuição da vida útil do “riser”.

Foram estudados inicialmente dois tópicos em especial: a determinação dos coeficientes hidrodinâmicos e os modelos para descrição das forças de vibração induzidas por vórtices, ou simplesmente VIV. O estudo da evolução do método aplicado na determinação dos coeficientes hidrodinâmicos, cuja correta determinação está diretamente ligada à precisão da estimativa da força que age sobre o “riser”, permite a escolha do resultado que melhor se aplica às necessidades desse trabalho. O mesmo raciocínio se aplica à força de VIV, com o estudo mais detalhado desse tema, foi possível entender melhor o principio físico por trás desse fenômeno e seu equacionamento.

A correta determinação dos coeficientes de arrasto (C_D) e massa (C_M) é muito importante para o calculo da força hidrodinamica a qual o “riser” é submetido. Esses coeficientes são determinados empiricamente. Sarpkaya (1981) faz uma breve descrição de alguns experimentos realizados com o objetivo de determinar valores de C_D e C_M, mas devido às diferenças entre as condições de testes e métodos de medição dos dados, não se realizou uma avaliação critica dos valores dos coeficientes hidrodinamicos obtidos em cada experimento, por isso, foi feita apenas a descrição dos principais resultados obtidos com a realização de alguns testes.

Existem vários métodos para se descrever os efeitos da vibração induzida por vórtices (VIV) em estruturas “offshore” delgadas. Esses métodos apresentam diferenças significativas em relação às considerações básicas, à utilização de coeficientes hidrodinamicos e à aproximação matemática utilizada. Isso significa que cada método deve ter uma aplicação particular onde os resultados são de fato consistentes. Larsen, et al. (1995) descreve detalhes sobre cada modelo, suas principais características, suas limitações e recomendações de uso.

Tendo em vista esse cenário, o objetivo principal do presente trabalho foi estudar e aprimorar o modelo desenvolvido por Ferrari (1998), que calcula o comportamento dinâmico do “riser” rígido de produção no domínio do tempo. Esse modelo considera o “riser” com diâmetro constante ao longo de seu comprimento e os coeficientes hidrodinâmicos são fornecidos como dados de entrada e utilizados de forma uniforme ao longo do seu comprimento e constante no tempo. Para implementar as melhorias, o primeiro passo foi realizar o estudo dos fundamentos teóricos utilizados no desenvolvimento do modelo, e só em seguida foram realizadas as implementações, que basicamente consistem em permitir a utilização de coeficientes hidrodinâmicos variáveis ao longo do “riser”, possibilitar a variação de seu diâmetro e tipos de materiais, e assim verificar o efeito da variação desses parâmetros no comportamento de um “riser” rígido de produção.

Assim sendo, foi realizada uma divisão em capítulos, conforme a seguir.

O primeiro passo para calcular o comportamento dinâmico do “riser” é determinar a sua posição estática devido a forças de natureza estática, como por exemplo a correnteza e a diferença de pressão entre o fluido externo e interno do “riser”. O procedimento de cálculo, assim como a dedução da equação estática pode ser visto no capítulo 2. A resolução da equação estática utilizando o Método de Galerkin e a verificação do equacionamento, comparando-se às soluções numéricas e analíticas, são descritas no Apêndice A.

O Capítulo 3 mostra os fundamentos envolvidos no cálculo das forças hidrodinâmicas, tanto na direção “in-line”, isto é, paralela à direção do escoamento, quando na transversal, isto é, na direção perpendicular ao fluxo. Para determinação da força na direção “in-line” foi utilizada a equação de Morsion modificada para o caso de velocidade relativa e a teoria de onda empregada para a determinação da cinemática da onda, ou seja, para o cálculo da velocidade e aceleração das partículas de água, foi a teoria de onda de Stokes de 5ª. ordem. Para a direção transversal foi utilizado o modelo desenvolvido por Ferrari & Bearman (1999) que calcula a freqüência de formação de vórtices com base na velocidade média cumulativa do fluxo.

A dinâmica do “riser” rígido e sua resolução é descrito no Capítulo 4. Para a resolução da equação dinâmica foi empregado o integrador numérico conhecido como método de Newmark β, com $\beta = 1/4$ que garante uma convergência incondicional para solução do problema. O Apêndice C mostra a com mais detalhes a solução da equação dinâmica utilizando o método de Newmark β. No Apêndice B são mostradas as formas de determinação das matrizes de massa, amortecimento estrutural e rigidez do “riser” rígido.

No Capítulo 5 são mostrados os principais resultados obtidos com os aprimoramentos feitos no programa original de Ferrari (1998). Após tornar o programa mais amigável, foram realizados alguns testes com o intuito de verificar o correto funcionamento do programa utilizado no presente trabalho, foram seguidos os testes de validação feitos por Ferrari (1998) e algumas comparações com dados experimentais. Um estudo paramétrico foi conduzido para se determinar a influência de cada variável no comportamento do “riser” e os resultados foram comparados com informações obtidas na literatura. Além disso, são apresentados alguns testes feitos com as várias formas de se utilizar os coeficientes hidrodinâmicos para se determinar qual a vantagem e desvantagem de cada um deles.

No Capítulo 6 são apresentadas as principais conclusões obtidas com o desenvolvimento do trabalho.

Capítulo 2

Estática do “Riser” Rígido

O “riser” vertical pode ser considerado como uma viga sob a ação de um carregamento lateral sujeita a pressões hidrostáticas internas e externas. O modelo apresentado a seguir utiliza um modelo de viga de Euler-Bernoulli e um modelo de viga tracionada para representar a estrutura de um “riser”. Assim como uma viga, o “riser” está sujeito a deslocamentos e rotações devido a carregamentos axiais e laterais. A análise estrutural utilizada no presente trabalho é baseada num “riser” de geometria arbitrária e restrita a duas dimensões. Considerando um segmento infinitesimal do “riser”, temos o seguinte diagrama de corpo livre:

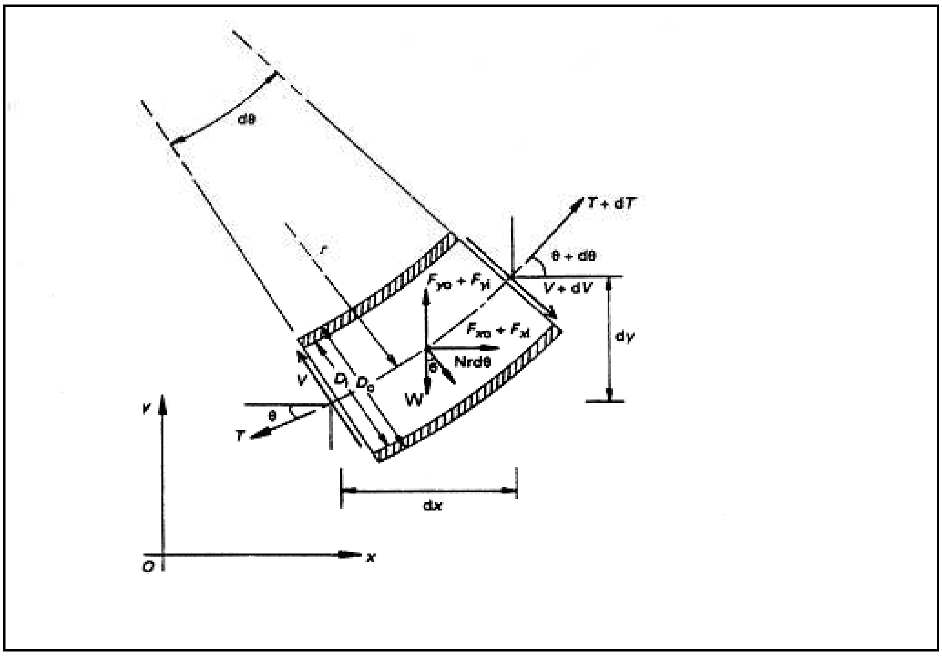


Figura 2. 1- Diagrama de copo livre para segmento infinitesimal do "riser"(Ferrari (1998))

As forças estáticas agindo sobre o “riser” são:

Tensão axial ou tensão de topo (T)
Força horizontal devido a resultante das pressões interna e externa (F_{xo}+Fx_i)
Força vertical devido a resultante das pressões interna e externa (F_{yo}+F_{yi})
Força de arrasto devido à correnteza (N)
Peso próprio do elemento (W)

As equações de equilíbrio para o segmento se “riser” ilustrado na Figura 2.1 são obtidas fazendo-se a soma das componentes de força nas direções x e y (“in-line” e transversal respectivamente) conforme mostrado a seguir:

Direção x: $\Sigma Fx = 0$

$$(T + dT)\cos(\theta + d\theta) - \cos\theta + (V + dV)sin(\theta + d\theta) - Vsin\theta + F_{xe} + F_{xi}) + Nsin\theta rd\theta = 0 \tag{2.1}$$

Direção y: $\Sigma Fy = 0$

$$\begin{aligned}&(T + dT)sin(\theta + d\theta) - Tsin\theta - (V + dV)\cos(\theta + d\theta)\\&+V\cos\theta + (F_{xe} + F_{xi}) - W - N\cos\theta rd\theta = 0\end{aligned} \tag{2.2}$$

Considerando dθ pequeno e aplicando as relações trigonométricas,

$$\operatorname{sen}(\theta + d\theta) = \operatorname{sen}\theta.\cos d\theta + \operatorname{sen} d\theta.\cos\theta$$
$$\cos(\theta + d\theta) = \cos\theta.\cos d\theta - \operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen} d\theta$$

pode-se simplificar a equação (2.1) e (2.2) e reescreva-las da seguinte forma:

$$-(T\operatorname{sen}\theta - V\cos\theta)d\theta + dT\cos\theta + dV\operatorname{sen}\theta + (F_{x0} + F_{xi}) + N\operatorname{sen}\theta rd\theta = 0 \tag{2.3}$$

$$(T\cos\theta - V\,\mathrm{sen}\,\theta)d\theta + dT\,\mathrm{sen}\,\theta - dV\cos\theta + (F_{x0} + F_{xi}) - W_R - N\cos\theta r d\theta = 0 \qquad (2.4)$$

Multiplicando a equação (2.3) por senθ e a (2.4) por cosθ e combinando essas expressões temos:

$$Td\theta - dV + (F_{yi} + F_{yo} - W)\cos\theta - (F_{xo} + F_{xi})\,\mathrm{sen}\,\theta - nrd\theta = 0 \qquad (2.5)$$

Para se prosseguir com a análise, é necessário definir das forças (F_x e F_y) que agem no elemento cilíndrico devido as pressões hidrostáticas. Um tubo cilíndrico submerso em um fluido e contendo outro em seu interior, irá sofrer pressão hidrostática de ambos os fluidos e assume-se que o fluido interno não está em movimento. Isso ocorre devido ao desconhecimento do padrão de fluxo no interior do "riser" (slug, anular, churn, etc) e conseqüentemente, não se pode determinar a variação do gradiente de pressão.

A força resultante, que age no cilindro de geometria arbitrária, é obtida através da integração da pressão em uma seção do elemento, onde apenas são consideradas as forças agindo na parede do cilindro. As forças nas extremidades dos elementos não necessitam ser consideradas, pois o cilindro é considerado muito longo e o extremo de um elemento, geralmente, acopla-se a outro elemento de tal forma que o efeito resultante da pressão seja nulo.

Segundo Patel e Witz (1991), as forças devido a pressão hidrostática podem ser escritas da seguinte forma:

$$F_{xo} + F_{xi} = [(p_i A_i - p_o A_o) + (\gamma_i A_i - \gamma_o A_o) r(\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta d\theta)]\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta \qquad (2.6)$$

$$F_{yo} + F_{yi} = [(p_o A_o - p_i A_i) + (\gamma_o A_o - \gamma_i A_i) r(\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta d\theta)]\cos\theta d\theta \qquad (2.7)$$

onde:

p_i = Pressão hidrostática interna

p_o =Pressões hidrostáticas externa

A_o =Área da seção transversal total (parede do "riser" + furo)

A_i =Área corresponde ao furo

γ_i = Peso específico do fluido interno

γ_o = Peso específico do fluido externo

Substituindo as Equações (2.6) e (2.7) na Equação (2.5) e realizando as simplificações, tem-se:

$$(T + p_o A_o - p_i A_i)d\theta - dV + ((\cos\theta - \operatorname{sen}\theta d\theta)(\gamma_o A_o - \gamma_i A_i) - \gamma_s A_s.\cos\theta - N)rd\theta = 0 \quad (2.8)$$

com

$$W = \gamma_s A_s rd\theta \quad (2.9)$$

onde γ_s é o peso específico do material do "riser" e A_s é a área da seção transversal da parede do "riser".

Para alterar a Equação (2.8) da forma polar para coordenadas cartesianas é necessário fazer uma aproximação mais geral. Assumindo que a curva de deflexão do "riser" é significativa, tem-se:

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{dy}{ds} = \frac{dy/dx}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.11)$$

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{r}=\frac{d\left(\arctan\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}\frac{dx}{ds}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{2.12}$$

A Equação (2.12) representa a equação exata da curvatura

$$\frac{dV}{ds}=\frac{dV}{dx}\frac{dx}{ds}=\frac{dV}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

e dividindo a Equação (2.8) por ds, tem-se:

$$(T+p_0A_0-p_iA_i)\frac{d^2y}{dx^2}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-1}-\frac{dV}{dx}+(\gamma_oA_o-\gamma_iA_i-\gamma_sA_s)-N\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0 \tag{2.14}$$

A Equação (2.14) é a equação estática geral do “riser”. O termo $(T+p_0A_0-p_iA_i)$ é chamado de tensão efetiva levando em conta a tensão axial do “riser” somada ao efeito lateral da pressão interna e externa. Quanto maior a lâmina d´água e o diâmetro, mais significante será o efeito lateral. O termo $(\gamma_oA_o-\gamma_iA_i-\gamma_sA_s)$ representa o peso por unidade de comprimento do “riser”e seu conteúdo lavando em conta o empuxo devido ao fluido externo. È possível simplificar a Equação (2.14) transformando-a em uma equação de catenária simples com o objetivo de verificar sua validade.

Assumindo β um ângulo genérico do “riser” em relação a horizontal e H a componente horizontal da tensão T no ponto onde β é avaliado, podem ser obtidas as seguintes relações:

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=1+\tan^2\beta=\sec^2\beta \tag{2.15}$$

$$\frac{d^{2y}}{dx^2} = \frac{d\beta}{ds}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{d\beta}{ds}\sec^3\beta \qquad (2.16)$$

Para força de arrasto e força cortante nula, e considerando $A_o p_o \approx 0$, $p_i=0$, $A_o=A_s$, $\gamma_i=0$, $T=H\sec\beta$, $w=(\gamma_s - \gamma_o)A_s$, tem-se:

$$H = \sec^2\beta\frac{d\beta}{ds} = w \qquad (2.17)$$

A Equação (2.17) é a equação inelástica para um segmento de catenária de composição arbitrária. A integração da equação (2.17) pode ser feita para se encontrar uma expressão mais genérica para uma catenária simples,

$$H\int_0^{\beta_t}\sec^2\beta d\beta = w\int_0^L ds \quad \Rightarrow H\tan\beta_t = wL \qquad (2.18)$$

onde L representa o comprimento suspenso e não alongado do segmento e β_t o ângulo de topo.

A equação (2.14) pode ser simplificada para um tubo vertical assumindo que o "riser" irá sofrer apenas pequenas deflexões, ou seja, para ângulos de "offset" inferiores a 10^o em relação a vertical. Com base na equação de viga fletida, tem-se a seguinte relação:

$$\frac{dV}{dy} = -\frac{d^2}{dy}\left(EI\frac{d^2x}{dy^2}\right) \qquad (2.19)$$

onde E é o Módulo de Young e I é o momento de inércia de área e a relação EI é a rigidez a flexão do tubo.

Multiplicando a equação (2.14) por dx/dy, usando a equação de flexão (2.19) e assumindo que o termo $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$ possa ser igualado a unidade para pequenas deflexões, tem-se:

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right)-(T+p_oA_o-p_iA_i)\frac{d^2x}{dy^2}=N+(\gamma_sA_s+\gamma_iA_i-\gamma_oA_o)\frac{dx}{dy} \tag{2.20}$$

A equação (2.20) é a equação diferencial estática para o “riser” rígido sob carregamento na direção “in line”. O sistema global de coordenadas considera y medido a partir do fundo e positivo para cima, enquanto x representa o deflexão horizontal em relação a linha vertical que passa pela base do “riser”. O ângulo de rotação é positivo no sentido horário. A validação da equação (2.20) é demonstrada no Apêndice A, onde são realizadas comparações entre dados analíticos obtidos para o caso de uma viga sem peso simplesmente apoiada e dados numéricos obtidos a partir de um código computacional desenvolvido a partir da equação estática (2.20). Ainda no Apêndice A, é descrito um método particular de resíduos ponderados, conhecido como Método de Galerkin, que é utilizado para se determinar a solução da equação (2.20). A análise é feita em duas dimensões por questão de simplicidade e o “riser” ´idealizado como um conjunto de elementos de viga. Cada elemento envolve seis graus de liberdade, sendo dois de translação e um de rotação em cada extremidade.

Capítulo 3

Carregamento de Onda e Correnteza

3.1. Direção “In-line”

A determinação das forças hidrodiâmicas em uma estrutura “offshore” é uma das principais tarefas no projeto desse tipo de estrutura. Essa também é uma das tarefas mais difíceis devido à complexidade envolvida na interação entre a onda e corrente com a estrutura. Além disso, há a dificuldade de se descrever analiticamente a natureza aleatória das ondas e determinar o carregamento provocado por elas na estrutura. No entanto, nos dias de hoje, algumas teorias estão disponíveis. Estas teorias envolvem o entendimento dos fenômenos de interação, testes em laboratório e no próprio mar, e são razoavelmente precisas nos cálculos de carregamento de onda nas mais diversas estruturas “offshore”.

Com base nas dimensões da estrutura “offshore”, podem ser utilizadas diferentes formulações para se determinar a força aplicada pela onda. Basicamente há duas formas de se calcular a força devido a onda:

- Equação de Morison
- Teoria de Difração

A Equação de Morison assume que a força sobre a estrutura é composta por duas parcelas de força, uma devido ao arraste e outra devida à inércia, agindo simultaneamente. Os coeficientes de arrasto e inércia necessários para se determinar a força são obtidos experimentalmente. A

Equação de Morison é utilizada quando o efeito viscoso é significante, ou seja, quando a estrutura é pequena em comparação com o comprimento de onda.

Quando as dimensões da estrutura são comparáveis ao comprimento de onda, é esperado que sua presença altere o campo de corrente, assim como o campo de onda nas proximidades, nesse caso a difração das ondas pela superfície da estrutura deve ser levada em conta no cálculo da força. Essa formulação é conhecida como Teoria de Difração.

A determinação de um critério para utilização dessas teorias pode ser obtida através de uma análise dimensional. A força *f*, devido à ação da onda na estrutura, pode ser definida por uma dimensão característica, D (diâmetro do "riser" rígido vertical) pode ser escrito como a seguinte função:

$$f = \psi(t, T, D, \lambda, k, u_0, v_{0,} \rho, \nu) \tag{3.1}$$

onde t é o tempo, T o período da onda, λ o comprimento da onda, k a dimensão característica da rugosidade da superfície do corpo, u_0 a máxima velocidade horizontal da partícula fluida, ρ a densidade do fluido e ν é a viscosidade cinemática. Nesta análise, a componente horizontal da velocidade do fluxo oscilatório é descrita por $u_0 \cos(\omega.t)$ e a componente vertical por $v_0 \,\text{sen}(\omega.t)$, com $\omega = 2\pi / T$ Nota-se que a aceleração da partícula de água é obtida a partir da velocidade. No sistema M-L-T (massa, comprimento, tempo) tem-se seis variáveis adimensionais ao se aplicar o teorema de Pi de Buckingham para nove variáveis dimensionais, dessa forma, obtém-se uma força adimensional que pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{F}{\rho u_0^2 D} = \psi\left(\frac{t}{T}, \frac{k}{D}, \frac{u_0 T}{D}, \frac{u_0 D}{\nu}, \frac{u_0}{v_0}, \frac{D}{\lambda}\right) \tag{3.2}$$

onde t/T é o tempo adimensional, k/D o parâmetro de rugosidade, $u_0T/D = KC$ (Numero de Keuligan-Carpenter), $u_0\nu/D = Re$ (Número de Reynolds), u_0/v_0 é o parâmetro de velocidade da partícula de água e D/λ o parâmetro de difração.

O KC está relacionado com a importância do efeito da força viscosa devido ao carregamento de onda, enquanto que o parâmetro de difração determina a importância do efeito de difração da onda. Nota-se pela definição da força pela Equação (3.2) que quando KC é grande o parâmetro de difração é pequeno e vice-versa. Em outras palavras, isso quer dizer que para grandes efeitos de difração necessariamente tem-se pequena influência da componente de arrasto e inversamente, quando a componente de arrasto é grande o efeito de difração pode ser desconsiderado. Assim, com base nessa análise dimensional para o caso do "riser" rígido, conclui-se que arrasto é a componente dominante no cálculo das forças hidrodinamicas e o efeito de difração é praticamente nulo.

Caso o "riser", além do carregamento de onda, esteja sujeito a ação de correnteza, mais uma variável U_c, velocidade uniforme de corrente, deverá ser acrescentada à função ψ da função (3.1), dessa forma, surgirá mais um parâmetro adimensional, relacionando a velocidade da corrente com a máxima velocidade horizontal (U_c/u_0) chamado de Número Relativo de Corrente. Assim, a força adimensional para o caso de onda e corrente agindo no "riser" pode ser descrita da seguinte forma:

$$\frac{F}{\rho u_0^2 D} = \psi\left(\frac{t}{T}, \frac{k}{D}, \frac{u_0 T}{D}, \frac{u_0 D}{\nu}, \frac{u_0}{v_0}, \frac{D}{\lambda}, \frac{U_c}{u_0}\right) \tag{3.3}$$

No caso do "riser" estar sujeito apenas a ação de corrente uniforme, a força por unidade de comprimento pode ser expressa a partir da seguinte função:

$$F = \psi(D, k, \rho, \nu, U_c) \tag{3.4}$$

A força adimensional para esse caso pode ser escrita como função de dois adimensionais, Número de Reynolds e Parâmetro de Rugosidade, que são independentes do tempo.

$$\frac{F}{\rho U_c^2 D} = \psi\left(\frac{k}{D}, \frac{U_c D}{\nu}\right) \tag{3.5}$$

A Equação de Morison foi desenvolvida por Morison, O´Brien, Johnson, e Shaaf (1950) para descrever a força horizontal de onda que age sobre um cilindro vertical que se estende desde o fundo até a superfície livre, conforme pode ilustrado na Figura 3.1.

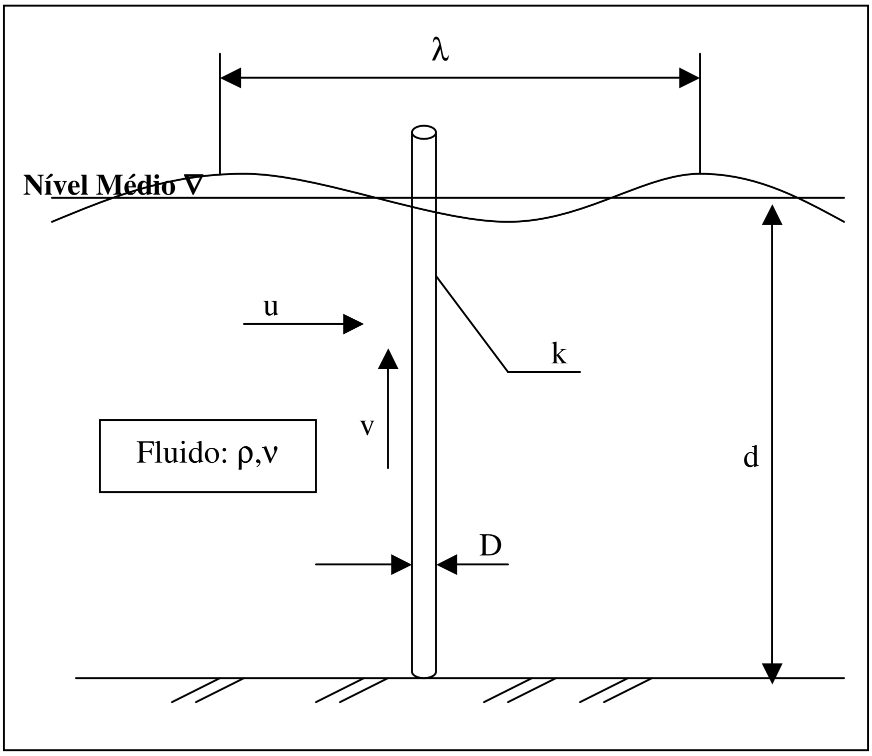


Figura 3. 1– "Riser" vertical fixo na presença de onda

Segundo Morison, et al. A força devido à onda é composta por duas parcelas, uma de arrasto e outra de inércia. O princípio da força de inércia está na quantidade de movimento que uma partícula de água carrega consigo. Quando a partícula passa pelo cilindro ela é acelerada e em seguida desacelerada, o que requer uma força para alterar este movimento. A força incremental em um pequeno segmento de cilindro induzido pela aceleração da partícula de água é:

$$df_1 = C_M \rho \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds \tag{3.6}$$

onde df_I é a força de inércia sobre um segmento ds do cilindro vertical, D é o diâmetro do cilindro, $\partial u/\partial t$ é a aceleração da partícula de água em relação a linha de centro do cilindro representado na Figura 3.1 e C_M é o coeficiente de inércia. Pela Equação (3.6) nota-se que a força de inércia é proporcional a aceleração local da partícula de água. Essa força é linear se, para a determinação da aceleração, for usada a Teoria Linear de Onda. Por outro lado, o termo de inércia será não linear se a aceleração horizontal considerar os termos convectivos.

A causa principal da força de arrasto em um cilindro é a diferença de pressão criada pela passagem do fluxo ao redor deste cilindro, essa diferença de pressão promove o fenômeno de separação da camada limite. Em um fluxo oscilatório, é utilizado o valor absoluto da velocidade da partícula de água na Equação de Morison para garantir que a força de arrasto esteja na mesma direção da velocidade, dessa forma, a força pode ser escrita como:

$$df_D = \frac{1}{2} C_D \rho D \,|\, u \,|\, u ds \qquad (3.7)$$

onde df_D é a força de arrasto no segmento de cilindro, u é a velocidade instantânea da partícula de água e C_D é o coeficiente de arrasto. Combinando as componentes de inércia e arrasto, a Equação de Morison para um cilindro fixo na presença de ondas é escrita como:

$$f = C_M A_I \frac{\partial u}{\partial t} + C_D A_D \,|\, u \,|\, u \qquad (3.8)$$

onde f é a força por unidade de comprimento de um cilindro vertical, $A_I = \rho \frac{\pi}{4} D^2$ e $A_D = \frac{\rho D}{2}$.

Deve-se notar que a Equação de Morison não prevê forças oscilatórias devido ao desprendimento de vórtices na direção transversal, isso é, perpendicular à direção de propagação das ondas. Várias tentativas tem sido feitas para melhorar a Equação de Morison ou para desenvolver uma nova formulação. Sarpkaya e Isaacson (1981) descreveram métodos para melhorar a Equação de Morison, comparando os resultados obtidos analiticamente com resultados medidos experimentalmente e introduzindo novos termos na equação original para obter melhor concordância. Entretanto, a equação original com os dois termos tem se mostrado bastante confiável em prever forças devido à onda na direção “in-line”. Além disso, está disponível uma vasta literatura sobre dados experimentais de C_D e C_M, disponibilizados por vários laboratórios, e em alguns casos foram realizados testes de campo, que possibilitam a escolha adequada desses coeficientes hidrodinamicos. Em linhas gerais, pode-se dizer que esses coeficientes são obtidos em função de três parâmetros adimensionais: Numero de Reynolds (Re), Numero de Keulegan-Carpenter (KC) e rugosidade relativa (K/D).

Para determinação dos coeficientes hidrodinamicos em laboratório, os testes mais comuns são o de utilizar um cilindro oscilatório em água parada ou então o de um fluxo de água passando por um cilindro estacionário. Sarpkaya (1981), utilizou-se de um tubo em U para obter os coeficientes hidrodinamicos para um fluxo planar passando por elementos curtos com diferentes seções transversais. Testes em tubos em U proporcionaram um grande entendimento do fenômeno de formação de vórtice em um fluxo oscilatório passando por uma estrutura delgada. Além disso, as técnicas de visualização do fluxo, que são mais fáceis de se realizar em tubos em U, também têm ajudado os pesquisadores a validar seus cálculos numéricos. Entretanto, a aplicação dos resultados obtidos com o tubo em U para estruturas “offshore” devem ser feitas com alguns cuidados, pois esses testes não levam em conta a tridimensionalidade (cinemática da partícula de água e efeitos de superfície livre) das condições reais ao qual o “riser” está submetido.

Para utilizar a Equação de Morison em região de superfície livre é preciso realizar uma estimativa precisa da cinemática (velocidade e aceleração) da partícula de água na crista e no vale da onda, ou seja, a Equação de Morison deve ser usada com uma formulação apropriada de onda que leve em conta os efeitos de superfície livre para se calcular o carregamento de onda. Quando onda e corrente agem simultaneamente, normalmente se faz a soma vetorial da velocidade induzida pela onda e da velocidade da corrente no termo de arrasto da Equação de Morison, assim, deve-se notar que os coeficientes C_D e C_M também são influenciados pela presença da corrente.

A Equação de Morison também pode ser aplicada para cilindros inclinados. Ela deve ser escrita em termos dos vetores de velocidade e aceleração normal e paralela ao eixo do cilindro. Em termos vetoriais a força pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{f} = C_M A_I \dot{\vec{w}} + C_D A_D |\vec{w}| \vec{w} \tag{3.9}$$

onde as setas representam os vetores e $w, \dot{w}$ são componentes da velocidade e aceleração normal ao cilindro inclinado. Por outro lado, a força por unidade de comprimento em um cilindro orientado aleatoriamente pode ser estimada através das seguintes expressões assumindo três eixos ortogonais.

$$f_x = C_M A_I \frac{\partial u_x}{\partial t} + C_D A_D |\vec{w}| u_x \tag{3.10}$$

$$f_y = C_M A_I \frac{\partial u_y}{\partial t} + C_D A_D |\vec{w}| u_y \tag{3.11}$$

$$f_z = C_M A_I \frac{\partial u_z}{\partial t} + C_D A_D |\vec{w}| u_z \tag{3.12}$$

Onde $|\vec{w}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

Além das forças de inércia e arrasto, as forças agindo na direção transversal em relação à direção de propagação da onda, também serão distribuídas entre essas componentes. A formulação descrita anteriormente para cilindro inclinada é baseada no chamado principio de independência. Segundo esse principio, as forças sobre um cilindro inclinado podem ser decompostas em componentes normais e tangenciais onda. As componentes tangenciais podem ser desprezadas, assim como ocorre no caso de um cilindro vertical onde são levadas em conta apenas as componentes de forças normais. Assumindo, por exemplo, um cilindro de seção circular imerso, sujeito à ação de onda, onde a direção de propagação da onda é ortogonal ao eixo do cilindro (direção y), as Equações (3.10), (3.11) e (3.12) assumem a seguinte forma:

$$f_x = C_M A_I \frac{\partial u_x}{\partial t} + C_D A_D u_x \sqrt{u_x^2 + u_z^2} \tag{3.13}$$

$$f_y = 0 \tag{3.14}$$

$$f_z = C_M A_I \frac{\partial u_z}{\partial t} + C_D A_D u_x \sqrt{u_x^2 + u_z^2} \tag{3.15}$$

As forças sobre um cilindro inclinado no plano para um fluxo oscilatório harmônico e periódico podem ser encontrados em Sarpkaya (1981).

A formulação da equação de Morison pode variar de acordo com a movimentação do fluxo e do cilindro, isto é, se o cilindro está fixo na presença de um campo de onda e correnteza, se o cilindro oscila em água parada ou então se o cilindro oscila na presença de um campo de onda e correnteza. Para o caso do "riser offshore", a situação mais comum é aquela onde ele oscila na presença de um campo de onda e de correnteza, dessa forma, a equação de Morison pode ser escrita da seguinte forma:

$$f = A_I \dot{u} + C_A A_I (\dot{u} - \ddot{x}) + C_D A_D \,|\, u + U_c - \dot{x} \,|\, (u + U_c - \dot{x}) \tag{3.16}$$

onde f é a força por unidade de comprimento, $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ são respectivamente a velocidade e aceleração do cilindro, $C_A = C_M - 1$ é o coeficiente de massa adicional e C_D é o coeficiente de arrasto. Sendo essa Equação (3.16) utilizada no presente trabalho para de determinar as forças hidrodinamicas "in-line" que agem sobre o "riser".

Como visto em Chakrabarti (1987), esse modelo é conhecido como Modelo de Velocidade Relativa. Nesse caso, o Número de Reynolds (Re) e o Numero de Keulegan-Carpenter (KC) são definidos em termos da velocidade relativa $v_r = u - \dot{x}$.

$$KC = \frac{|\, v_{r0} + U_c \,|\, T}{D} \tag{3.17}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{|\, v_{r0} + U_c \,|\, D}{\nu} \tag{3.18}$$

onde v_{r0} é a amplitude relativa da velocidade, T é o período da onda, e assumindo um meio ciclo positivo da velocidade relativa. Para o meio ciclo negativo v_{r0} também deve ser negativo. Uma das considerações básicas é assumir que o cilindro oscile na mesma freqüência da onda, assim a velocidade relativa será periódica com período T.

O primeiro e segundo termo da Equação (3.16) são relacionadas à força de inércia. Essas forças são compostas por uma componente de empuxo devido a um gradiente de pressão que existe na onda (Força de Froud-Krylov) e a força requerida para aumentar a quantidade de movimento do fluido defletido pelo cilindro. O terceiro termo da Equação (3.16) é a força de arrasto em termos da velocidade relativa, que tende a ser a força hidrodinâmica dominante durante a passagem da onda devido a não linearidade da velocidade.

Para que a equação de Morison descrita acima, Equação (3.16), forneça uma correta estimativa da força devido à onda, é preciso utilizar uma formulação de onda adequada na determinação da cinemática da partícula de água. Basicamente há dois modelos de onda para estruturas "offshore". Um deles, o método de onda simples, utilizado no presente trabalho, que considera apenas uma onda, a qual é representada pelo seu período e altura. Uma das razões para se utilizar essa aproximação é a simplicidade de analise e a fácil determinação da resposta devido a ondas em condições extremas. A outra aproximação para o modelo de onda leva em consideração o espectro da onda. Nesse caso é escolhido um modelo espectral adequado para representar a densidade de distribuição espectral das ondas em uma região sob determinadas condições.

Ao contrario das ondas oceânicas, toda formulação de onda simples assume que as ondas são periódicas e uniformes, com período T, altura H e comprimento L. Também assume-se que as ondas são bidimensionais no plano XY e que elas são progressivas na direção positiva de X. A Figura 3.2 apresenta esquematicamente os parâmetros utilizados na determinação do trem de onda, onde η representa a elevação da superfície, e s é a coordena vertical da partícula de água medida do fundo para cima.

A teoria de onda linear vista em Chakrabarti(1987), também conhecida como Teoria Aérea ou Teoria de Onda de Pequena Amplitude, é a teoria de onda mais simples e mais facilmente aplicada. Ela baseia-se na hipótese de que a altura de onda é pequena em comparação ao comprimento ou a lâmina de água. Essa consideração permite que as condições de contorno da superfície livre sejam linearizadas. Alem disso, essa consideração ainda permite que as condições de contorno sejam satisfeitas no nível médio de água no lugar da superfície livre oscilante.

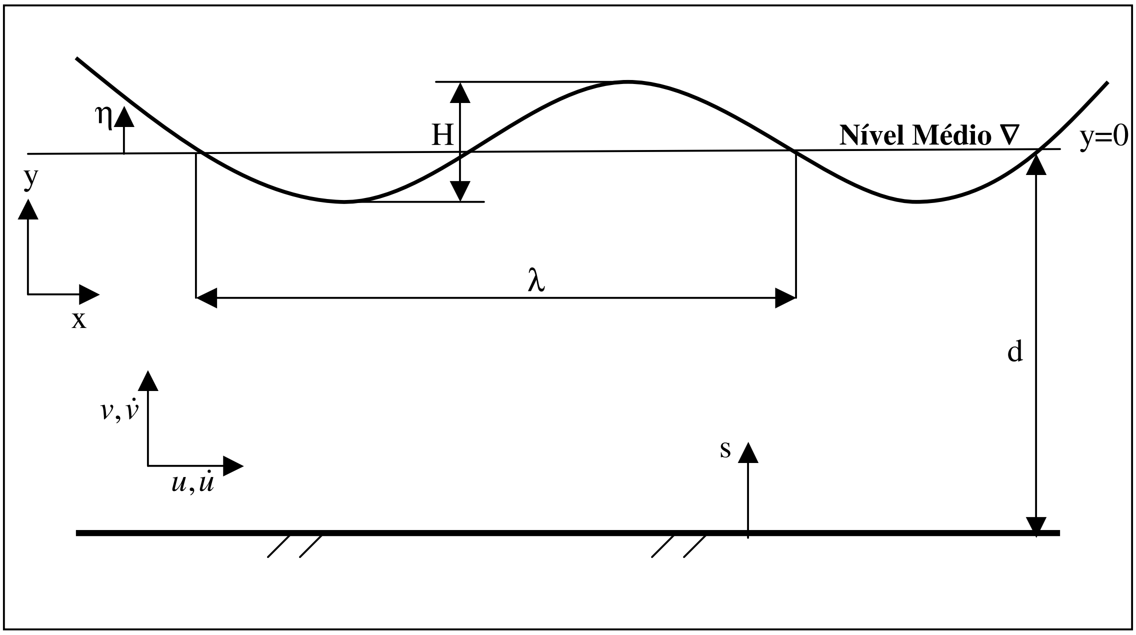


Figura 3. 2 - Esquema de um trem de ondas progressivo

Como já mencionado, as teorias de ondas simples são baseadas no principio de que as ondas são regulares, que suas propriedades permanecem constantes de um ciclo para outro. Como as ondas marítimas são de natureza aleatória, elas devem ser descritas através de suas propriedades estatísticas. Dessa forma, os parâmetros usuais da onda, baseados em termos estatísticos curtos, usados para descrever as ondas marítimas são: altura significativa da onda H_s dado pela media de 1/3 da maior altura de onda, e o período de onda correspondente T_s, definido como período médio da onda significante. Esses parâmetros estatísticos devem ser considerados no cálculo da cinemática da formulação da onda.

A determinação das forças em um membro vertical pela teoria linear é normalmente feita até o nível médio de água. Entretanto, quando a altura de onda é significativa em relação à lâmina d'água, o efeito da mudança da superfície livre no cilindro, nas proximidades do nível médio de água, tornam-se importantes no cálculo da força total da onda. Como a teoria linear considera a pressão somente até a linha média de água, e a pressão dinâmica na superfície livre é desconhecida, normalmente é realizada um interpolação do perfil de pressão e cinemática da onda para a crista e vale da onda na superfície livre. Ao contrario da teoria linear, a teoria não linear de onda (expansão de Stokes) calcula a cinemática da partícula de água até a superfície livre.

No presente trabalho é adotada a teoria de Stokes de 5^a. ordem devido a possibilidade de ser realizar o cálculo da cinemática da onda até a superfície livre, o que já não ocorre para a teoria linear. Caso essa teoria linear fosse adotada, seria necessário realizar extrapolações para se obter os valores de velocidade e aceleração acima do nível médio de água, utilizando para isso algum método adequado (por exemplo, linear, exponencial, etc.). Maiores detalhes sobre teorias de onda podem ser encontrados em Chakrabarti(1987). De qualquer forma, mesmo sem considerar a teoria de onda, ainda há outras fontes de incerteza no problema, como o cálculo dos coeficientes hidrodinâmicos, pressão dinâmica influenciada pela quebra da onda na superfície do corpo e turbulência do fluxo, que podem mudar significativamente a estimativa de força de onda. Assim, os benefícios de se aplicar uma teoria de onda mais complexa deve ser analisada com cuidado visto que existem essas outras incertezas.

3.2. Direção Transversal

Um "riser" instalado em águas profundas está sujeito ao efeito da correnteza local e onda. Esse fluxo de onda e correnteza, além das forças de arrasto, provoca também uma força oscilatória transversal ao fluxo, originada a partir do desprendimento alternado dos vórtices que se formam ao longo da superfície externa do "riser". Essa força causa oscilações que, embora de amplitude limitada à ordem de um diâmetro, podem levar a ruptura do "riser" por fadiga, devido à sua ação ininterrupta.

No escoamento ao redor de um cilindro ocorrem diferenças de pressão na sua superfície o que promove a separação do fluxo. Esta separação da camada limite ocorre em ambos os lados do cilindro, formando camadas cisalhantes que se opõem ao fluxo gerando os vórtices. A Figura 3.3 mostra esquematicamente esse fenômeno. A formação de vórtices se dá de forma alternada gerando forças assimétricas em cada lado do cilindro podendo provocar o efeito de vibração induzida por vórtice (VIV).

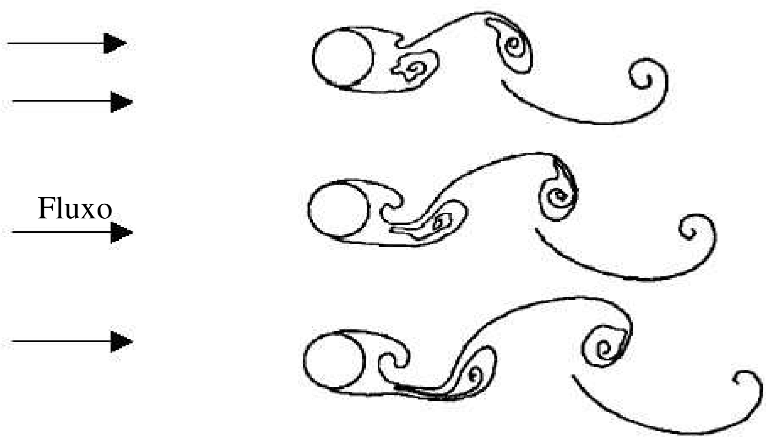


Figura 3. 3 - Formação alternada de vórtices em um elemento cilíndrico

A força oscilatória devido ao desprendimento de vórtices na direção transversal ao fluxo é convencionalmente chamada de força transversal. A força transversal surge como resultado direto da flutuação da distribuição de pressão que ocorre nos corpos bojudos durante o processo de desprendimento de vórtices. Essas forças são freqüentemente caracterizadas por sua magnitude, freqüência de oscilação (ou freqüência de desprendimento de vórtices) e algumas medidas de correlações feitas em diferentes locais ao longo do "riser". As forças transversais normalmente são definidas por um coeficiente adimensional dado por:

$$C_t = \frac{F_t}{\frac{1}{2}\rho D U^2} \tag{3.19}$$

onde ρ é a densidade do fluido, U a velocidade aproximada do fluido, D o diâmetro externo do cilindro e F_t a força transversal por unidade de comprimento.

A freqüência de formação de vórtices f_s a partir de um cilindro estacionário é dado em termos dos principais parâmetros do fluxo (Diâmetro do cilindro D, velocidade do fluxo U) através do numero adimensional de Strouhal definido por:

$$S_t = \frac{f_s D}{U} \tag{3.20}$$

Deve-se notar que f_s é o número de vórtices formados em um lado do cilindro em um segundo e U representa a componente da velocidade do fluxo normal ao eixo do cilindro. Dessa forma, dependendo do numero de Reynolds e condições experimentais, o processo de formação de vórtices varia de vórtices regulares e harmônicos, no qual f_s representa a freqüência harmônica, até formação aleatória de banda larga. No caso de banda larga, f_s representa a freqüência espectral média. O numero de Strouhal para um cilindro estacionário depende principalmente do número de Reynolds e da rugosidade do cilindro. No caso do "riser", que pode ser considerado um cilindro flexível com rugosidade superficial devido ao acabamento do processo de fabricação e ação do mar, o valor de St=0,2 parece ser apropriado considerando um regime de fluxo aparentemente crítico e com alguma turbulência no fluxo.

Nos últimos 30 anos vários experimentos foram conduzidos com o propósito de investigar a separação do fluxo e o padrão de formação de vórtices. Para o caso de um fluxo constante passando por um cilindro circular sob condições ideais (sem turbulência no fluxo), o padrão de formação de vórtices é função do número de Reynolds. Cilindros circulares sujeitos a um fluxo oscilatório também formam vórtices. Neste caso, o processo de formação é dependente do número de Keulegan-Carpenter ($KC = \frac{UT}{D}$, onde T é o período oscilatório) o qual é relacionado a distancia na qual ocorre a convecção do vórtice durante um ciclo para o diâmetro do cilindro. Quanto maior o KC mais vórtices serão gerados e mais distante ocorre a convecção em um meio ciclo do fluxo oscilatório.

A magnitude do KC também dá uma estimativa do quão longe do cilindro ocorrerá a separação do fluxo. De fato, o ponto de separação também é influenciado pelo número de Reynolds, ou pela relação entre Re e KC (parâmetro β). Valores baixos de KC indicam que o ponto de separação é próximo do cilindro (esteira estreita) ou então que a separação do fluxo não ocorreu. Por outro lado, valores grandes de KC resultam em uma grande e bem caracterizada esteira de vórtices. Blevins(1977) descreve com maiores detalhes os padrões de formação de vórtices em função de Re e KC.

Quando um cilindro flexível começa a oscilar transversalmente para o fluxo constante, algumas mudanças significativas ocorrem no processo de formação de vórtices devido às interações hidroelasticas entre o fluxo e a estrutura. Um dos efeitos mais conhecidos é a captura da freqüência de formação de vórtices pela freqüência do corpo acima do intervalo da velocidade reduzida, onde a velocidade reduzida é adimensional e dada por:

$$V_r = \frac{U}{f_n D} \tag{3.21}$$

onde f_n é a freqüência natural de vibração do cilindro. Esse fenômeno, no qual o cilindro tem controle do processo de formação de vórtices, é chamado de “lock-in” ou sincronização. Dentro da faixa de “lock-in”, para valores de $V_r > 1/St$, o cilindro é forçado a formar vórtices para uma taxa mais lenta do que faria naturalmente para um cilindro fixo. A força dos vórtices é aumentada para o cilindro vibrando sob condições de “lock-in” e a estrutura da esteira pode ser organizada dentro dos padrões correlacionados. Essa organização pode afetar a correlação de distribuição da força transversal, ou seja, um grande aumento da correlação ocorre sob condições de “lock-in”.

Segundo Ferrari (1998), o modelo “Quasi-Steady” pode ser utilizado para se determinar as forças transversais em um cilindro flexível. Esse modelo ajusta dados experimentais extremamente bem e reproduz a amplitude e freqüência de modulação visto no histórico de tempo da força transversal em um cilindro fixo. Agora, o ponto é que o cilindro, isto é, o “riser”, está vibrando tanto na direção “in-line” quanto na transversal ao fluxo. Assim, sob o ponto de vista do modelo “quasi-steady”, a média cumulativa da velocidade relativa na direção “in-line” tem que considerar a velocidade $\dot{x}$ "in-line" do "riser". Essa media instantânea da velocidade relativa é utilizada para calcular a freqüência de formação de vórtices para cada meio ciclo do fluxo oscilatório. Nota-se que essa formulação para a força transversal é esperado um resultado melhor para altos valores de KC, onde $KC = \frac{|v_{r0} + U_c| T}{D}$ e v_{r0} é a amplitude da velocidade relativa do fluxo oscilatório.

De acordo com o modelo "quasi-steady" para um "riser" oscilando na direção "in-line", Ferrari (1998) desenvolveu a seguinte formulação para a freqüência de formação de vórtices,

$$\bar{f}_s = \frac{|\overline{U}| S_t}{D}, \text{ onde } \overline{U} = \frac{\int_0^t (u - \dot{x}) + U_c dt}{(t - t_0)} \tag{3.22}$$

onde u representa a velocidade instantânea da partícula fluida induzida somente pela onda, U_c a velocidade constante da corrente, $\dot{x}$ a velocidade "in-line" do "riser", $\overline{U}$ é a velocidade média cumulativa, que leva em conta o efeito de memória do fluxo, e t_0 refere-se ao inicio do meio ciclo do fluxo oscilatório dado por *(u-* $\dot{x}$ *)*. Está claro que U_c=0 para um "riser" sujeito a somente um fluxo oscilatório. A Figura 3.4 ilustra graficamente o procedimento para se calcular a media cumulativa da velocidade relativa de um fluxo.

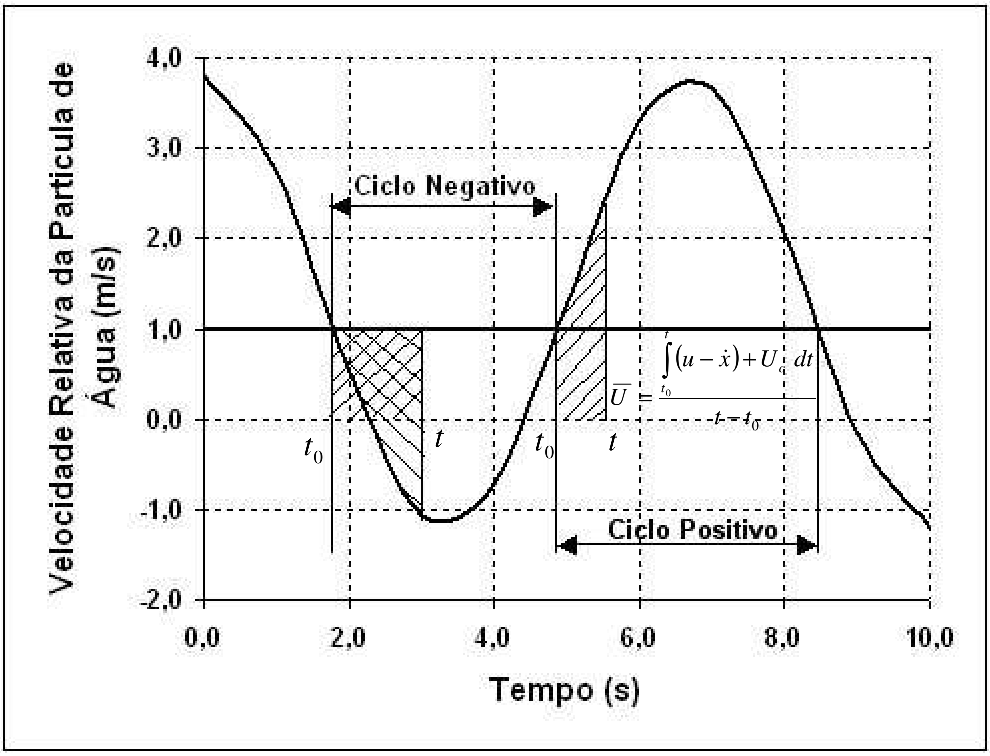


Figura 3. 4 – Descrição gráfica do método para determinação de $\overline{U}$

Como dito anteriormente na seção referente às forças na direção “in-line”, a cinemática da onda é melhor determinada por uma teoria de onda não linear porque ela leva em conta os efeitos de superfície livre. Isso significa que a velocidade e aceleração da partícula de água não pode mais ser representada por uma função harmônica. Além disso, a solução geral da equação de movimento no domínio do tempo, onde o arrasto é considerado não linear, gera uma resposta não linear do “riser” assim como da velocidade. Já que o termo $(u-\dot{x})$ não pode ser determinado por uma função harmônica, cuja integração seria direta, a integral apresentada na equação (3.22) deve ser calculada passo a passo para cada meio ciclo do fluxo oscilatório. Assim, a força de vibração induzida por vórtices será:

$$F_{VIV} = \frac{1}{2}\rho\left(\left(u-\dot{x}\right)+U_c\right)^2 D\overline{C}_t \cos\left(2\pi\bar{f}_s t'+\varphi\right) \quad \text{t´ varia de 0 a T}^* \qquad (3.23)$$

onde a fase da força transversal φ é calculada por meio do mesmo procedimento descrito para o caso do cilindro/ “riser” fixo. Percebe-se que φ irá variar, assim para satisfazer as necessidades de

F_{VIV} associada com o fluxo uniforme deve ser encontrado para cada fim de meio ciclo, onde a contribuição do oscilação relativa do fluxo $(u-\dot{x})$ para o processo de formação de vórtices é zero. Na ausência de um fluxo constante, o mesmo ângulo de fase φ é considerado o mesmo para cada meio ciclo de um fluxo oscilatório relativo. O período T^* representa o meio período correspondendo a cada meio ciclo não linear do fluxo oscilatório relativo. Nota-se que a soma de T^* para o ciclo positivo e negativo serão equivalentes ao período da onda. Também deve-se perceber que F_{VIV} não leva em conta a reação do fluido quando o "riser" está em movimento.

Além da força de VIV é necessário considerar o efeito da reação do fluido ao movimento da direção transversal. Aplicando-se os conceitos vistos para se determinar a força na direção "in-line" (equação de Morison), chega-se a seguinte equação de força para direção transversal

$$F_y = F_{VIV} - \underbrace{C_D A_D |V_r| \dot{y} - C_A A_I \ddot{y}}_{\text{Re}\mathit{ação\ do\ Fluido}} \tag{3.24}$$

onde $|V_r| = \sqrt{(u-\dot{x}) + \dot{y}^2}$ e os demais coeficientes são os mesmos definidos anteriormente.

Substituindo-se a equação (3.23) em (3.24), chega-se à equação completa da força por unidade de comprimento para direção transversal, que pode ser escrita como:

$$F_y = \frac{1}{2}\rho\left((u-\dot{x}) + U_C\right)^2 D\overline{C}_t \cos\left(2\pi\bar{f}_s t' + \varphi\right) - C_A A_I \ddot{y} - C_D A_D |V_r| \dot{y} \tag{3.25}$$

A equação (3.25) difere um pouco da equação do tipo Morison no termo de amortecimento, onde ao invés de se utilizar $C_D A_D |\dot{y}| \dot{y}$, como seria de se esperar, foi utilizada a velocidade relativa V_r. Segundo Ferrari (1998), essa formulação para o amortecimento da força transversal é mais realista por levar em conta a influência do fluxo na direção "in-line" na resposta da direção transversal.

Capítulo 4

Dinâmica de “Riser” Rígido

A equação diferencial de um sistema que governa o movimento de um sistema com muitos graus de liberdade pode ser escrita como:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[B]\dot{x}+[k]x=\{f\} \tag{4.1}$$

onde [M] é matriz de massa, [B] o de amortecimento estrutural, [K] a matriz de rigidez global, $\{\ddot{d}\},\{\dot{d}\}$ e {d} são respectivamente os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento, e {F} o vetor força. No modelo estático, descrito no Capitulo 2, a matriz de rigidez foi obtida na forma consistente, ou seja, todos os seis graus de liberdade relativo ao elemento de viga são considerados com o propósito de montar a matriz de massa estrutural do sistema. No modelo dinâmico as matrizes utilizadas são construídas na forma concentrada ou “lumped”, que distribui a massa do elemento de viga uniformemente entre os nós de forma de massa concentrada. Embora do ponto de vista teórico, a matriz consistente de massa possa gerar resultados mais precisos para o deslocamento do “riser”, acredita-se que esse aumento é pequeno em relação aos resultados obtidos com a matriz concentrada. Alem disso, a formulação de matriz de massa concentrada é mais fácil de ser aplicada devido ao menor quantidade de graus de liberdade que estão envolvidos, levando a uma definição mais simples das propriedades do elemento. Por essa razão é que o modelo simplificado para forças de inércia é escolhido para a analise já que o pequeno aumento na precisão obtida com a forma consistente é contra-balanceada pelo esforço computacional necessário que deve ser feito para essa implementação.

Vale comentar que a formulação concentrada se aplica muito bem ao problema aqui analisado, isto porque o cálculo das forças hidrodinamicas se dá por meio de faixas bidimensionais de escoamento, portanto, forças verticais não podem ser calculadas.

É necessário montar dois sistemas independentes, do tipo da equação (4.1), para se determinar os deslocamentos na direção "in-line", isto é, na direção paralela ao escoamento (direção x) e transversal, isto é, na direção perpendicular ao escoamento (direção y). A ligação entre esses dois sistemas se dará apenas pelo fluido. Então, são montados um sistema em "x" e outro em "y". Substituindo-se as equações de força (3.16) e (3.25) que agem sobre o "riser" na direção "in-line" e transversal respectivamente, apresentadas no Capítulo 3, na equação dinâmica (4.1), chega-se as seguintes equações matriciais para a dinâmica do "riser" rígido:

$$[M]_x \ddot{x} + [B]_x \dot{x} + [K]_x x = C_M A_I \frac{\partial u}{\partial t} + C_D A_D |V_r| (u + U_C - \dot{x}) - C_A A_I \ddot{x} \tag{4.2}$$

$$[M]_y \ddot{y} + [B]_y \dot{y} + [K]_y y = \frac{1}{2} \rho ((u - \dot{x}) + U_c)^2 D \overline{C}_t \cos(2\pi \bar{f}_s t' + \varphi) - C_A A_I \ddot{y} - C_D A_D |V_r| \dot{y} \tag{4.3}$$

onde $|V_r| = \sqrt{(u + U_c - \dot{x})^2 + y^2}$, e os subscritos x e y representam s direções "in-line" e transversal respectivamente. A solução das equações (4.2) e (4.3) é iterativa em termos das velocidades $\dot{x}$ e $\dot{y}$ respectivamente. Além disso, a cinemática da onda na direção "in-line" u e $\partial u / \partial t$ dependem do deslocamento x do "riser", o qual só será conhecido depois de solucionar a equação (4.2).

Na analise dinâmica, as matrizes das equações (4.2) e (4.3) são constante durante todo o procedimento de cálculo. $\ddot{x}$, $\dot{x}$ e x são respectivamente a aceleração, velocidade e deslocamento dos nós na direção do escoamento, enquanto que $\ddot{y}$, $\dot{y}$ e y são respectivamente a aceleração, velocidade e deslocamento dos nós na direção perpendicular ao escoamento.

A matriz de massa concentrada será calculada assumindo-se a massa do elemento concentrada em seus nós. A matriz de rigidez é construída com base na matriz de rigidez consistente, obtida no Capitulo 2 para o modelo estático, isolando-se o grau de liberdade horizontal dos demais. Lembrando que, na direção do escoamento, a matriz de rigidez representará um "riser" fletido e o estudo das vibrações se dará em torno dessa configuração média. Na direção transversal ao escoamento, as vibrações são estudadas em torno da configuração neutra, ou seja, o "riser" está na vertical sem sofrer flexão.

Já a matriz de amortecimento é obtida considerando-se o sistema como um todo. Ela é construída pelo método de amortecimento proporcional de Rayleigh.

No Apêndice B são mostrados, com mais detalhes, os métodos utilizados na construção das matrizes de massa, amortecimento e rigidez. A seguir será mostrado o método de resolução da equação dinâmica que governa o comportamento dinâmico do "riser" rígido.

As equações de movimento que regem o comportamento do "riser" rígido (equações (4.2) e (4.3)) não são lineares devido ao termo de arrasto da equação de Morison. Basicamente há três tipos de aproximação que podem ser utilizadas para solucionar equações desse tipo:

1) Aproximação estática, como descrito no Capitulo 2, no qual os termos dependentes do tempo $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ são desprezados e é adotado um valor constante, normalmente o de maior magnitude, para a cinemática da partícula de água e a movimentação da embarcação flutuante.

2) Linearização dos termos de arrasto da equação de Morison com o objetivo de reduzir as equações de movimentos não-lineares (equações (4.2) e (4.3)) a equações diferenciais ordinárias para se obter uma solução quase estática (domínio da freqüência).

3) Integração numérica no domínio do tempo. Embora a solução no domino da freqüência necessite de uma carga computacional menor, espera-se que a aproximação utilizando o domínio do tempo forneça uma solução mais confiável para as equações de movimento (4.2) e (4.3), desde que o carregamento devido ao fluido seja descrito de maneira adequada.

No presente trabalho é utilizada a integração numérica no domínio do tempo para resolver as equações dinâmicas. As matrizes básicas de massa, amortecimento e rigidez podem ser determinadas da mesma forma para ambas as direções, entretanto, a matriz de rigidez poderá ser levemente diferente na direção transversal em relação a “in-line”, pois na direção “in-line” o “riser” sofre influência do “offset” da embarcação e da correnteza e a dinâmica é considerada para o “riser” fletido, já no plano transversal isso não ocorre, a posição inicial do “riser” é considerada na vertical, assim, a matriz de rigidez e os modos de vibração podem ser ligeiramente diferentes para as duas direções.

Basicamente, o método de análise no domino do tempo envolve a integração da equação geral de movimento através de passos discretos de tempo, levando em conta a não linearidade do termo de arrasto. Isso permite que a cinemática da onda seja calculada de forma mais precisa através de uma teoria de onda não linear, como é o caso da Teoria de Stokes de 5ª. ordem. Além disso, os movimentos de primeira e segunda ordem do sistema flutuante podem ser considerados no calculo da translação do nó de topo do “riser”. Comparando-se este método com o método no domínio da freqüência, no qual as velocidades da corrente não são levadas em conta na solução dinâmica, a análise no domínio do tempo considera que as velocidades de corrente e da partícula de água devem ser somadas para se determinar a velocidade relativa a cada intervalo de tempo. Mas, na análise no domino da freqüência, o valor constante da velocidade da corrente deve ser tratada estaticamente para se montar a matriz de rigidez. No domínio da freqüência a matriz de rigidez é mais representativa, correspondendo a uma configuração média do “riser”.

Para se determinar a solução da equação dinâmica de movimento, muitos métodos de integração numérica podem ser utilizados. Métodos de integração no tempo tem como característica fundamental aproximar as derivadas que aparecem, nos sistema de equações do movimento, e gerar uma solução passo a passo com intervalor de tempo Δt. A solução dos deslocamentos, no final de cada intervalo, fornece as condições para o começo do intervalo seguinte. Um dos métodos de integração numérica comumente utilizado para determinar a resposta de estruturas é o Método de Newmark β, o qual será utilizado para resolução da equação dinâmica no presente trabalho e descrito a seguir.

O Método de Newmark é um integrador de passo simples, ou seja, as equações de integração desse método são funções apenas do deslocamento, velocidade e aceleração no instante de tempo t, que serão utilizados para encontrar a solução de uma equação de movimento de segunda ordem (equação (4.2) e (4.3)) para o instante de tempo $t+\Delta t$. O Método de Newmark pode ser considerado como uma extensão do método da Aceleração Média, obtido através da expansão da série de Taylor dos deslocamentos e velocidades.

O Apêndice C mostra maiores detalhes sobre o método de integração no domínio do tempo utilizando Newmark β.

As implementações realizadas no presente trabalho foram feitas na parte relativa a determinação das forças atuante sobre o "riser", através das diversas opções para a determinação dos coeficientes hidrodinâmicos, e também na montagem das matrizes de massa, amortecimento e rigidez, pois foi implementada a possibilidade de inclusão de diâmetros e materiais diferentes ao longo do "riser".

Para resolver e compreender melhor o problema do comportamento dinâmico do "riser" rígido vertical, Ferrari (1998) desenvolveu um modelo computacional, utilizando-se dos fundamentos apresentados no presente trabalho, cujo funcionamento é ilustrado na Figura 4.1. Com o objetivo de verificar o correto funcionamento do programa após a realização das implementações, foram realizas alguns testes comparando os resultados obtidos numericamente com alguns casos bases descritos no Boletim API16J (1992), e com dados experimentais obtidos por Maeda (2001).

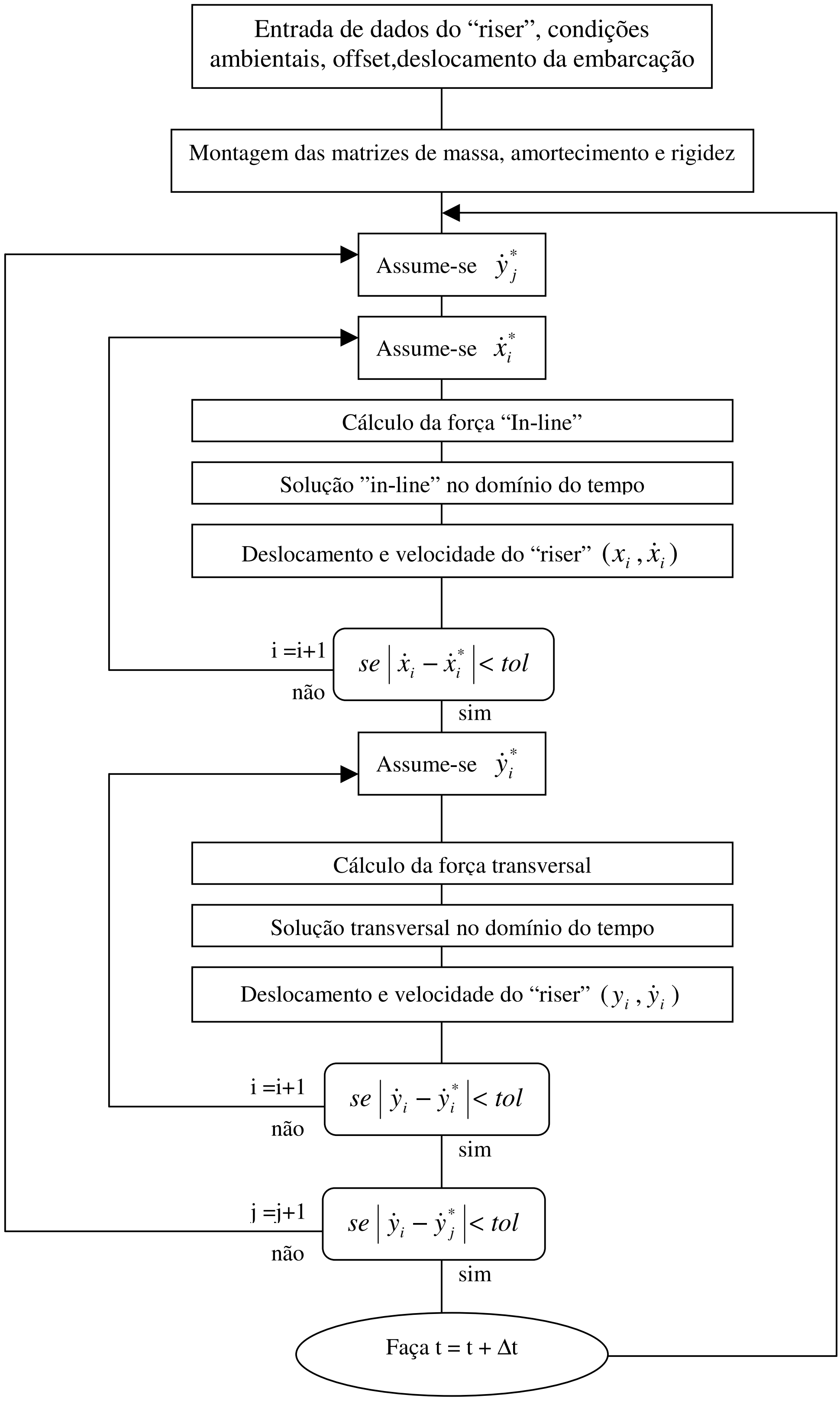


Figura 4. 1- Fluxograma do funcionamento do programa

O boletim API apresenta uma comparação de performance do “riser” rígido para carregamento estático e dinâmico. Um certo número de membros participante enviou soluções para vários casos testes para permitir que a API realizasse as comparações. Devido a grande discrepância entre os resultados compilados, o que não permitia uma simples comparação de dados tabelados, a API apresentou os resultados de forma gráfica através do envelope formado pelos deslocamentos máximos e mínimos. O principal objetivo desse trabalho da API foi mostrar o grau de concordância entre um grupo representativo de análise de “riser” realizada com auxilio de programas computacionais, e não de apenas comparar soluções específicas. Um objetivo secundário da publicação foi a de auxiliar na validação de outro código computacionais que fossem desenvolvidos para análise de “riser”.

Foram realizadas quatro comparações com casos API cujos resultados comparativos podem ser vistos nas figuras (4.2) a (4.5).

Os dados de entrada comum a esses quatro casos são:

“Riser” rígido de perfuração	
Diâmetro externo	0,5334m
Diâmetro interno	0,5080m
Diâmetro externo do “choke” e “kill line”	0,1016m
Diâmetro interno do “choke” e “kill line”	0,0762m
“Offset” do “choke” e “kill line”	0,4034m
Módulo de elasticidade	260915,0 MN/m^2
Peso específico do fluido ao redor do “riser”	1025 kgf/m^3
Peso específico do fluido no interior do “riser”	1438,2 kgf/m^3
Peso /comprimento do “riser”	261,9196kgf/m
Distancia do leito marinho ao topo do LMPR	9,144m
Distancia do nível médio de água ao tensionador	15,24m
Altura de onda	12,192m
Período da onda	12,8s
Amplitude do movimento da embarcação	4,0691m
Perfil de corrente	1,0288m/s(topo) e 0,2058m/s (fundo)
Coeficiente de arrasto	0,7
Coeficiente de inércia	1,5

Tabela 4. 1- Dados do gerais do "riser"

Os dados específicos para cada caso são:

Caso API	Lâmina dágua [m]	Tensão de topo [kN]	"Offset" estático [m]	Ângulo de fase da embarcação (graus)
500-40-1-D	152,4	756,3	4,572	90,0
500-40-2-D	152,4	1067,7	4,572	90,0
1500-40-2-D	457,2	2669,2	13,716	90,0
1500-40-2-D2	457,2	2669,2	13,716	-90,0

Tabela 4. 2- Dados específicos do "riser"

Caso 500-40-1-D

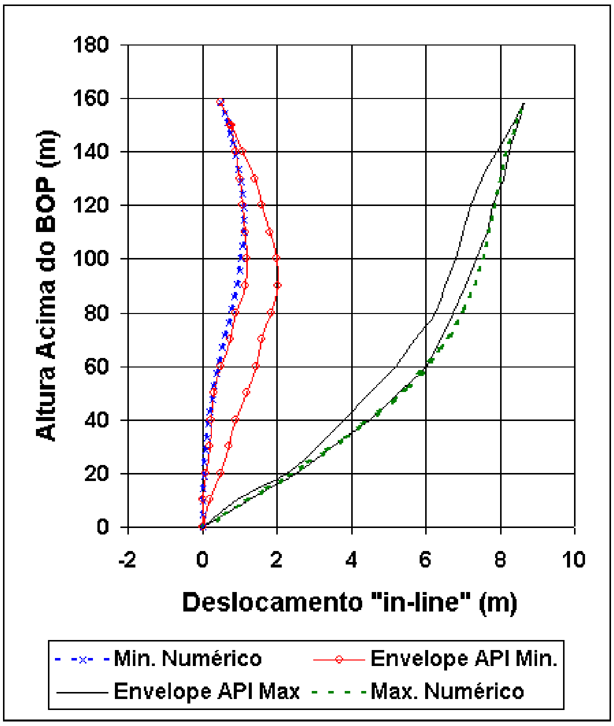


Figura 4. 2- Comparação do caso API 500-40-1-D com dados numéricos

Caso 500-40-1-D

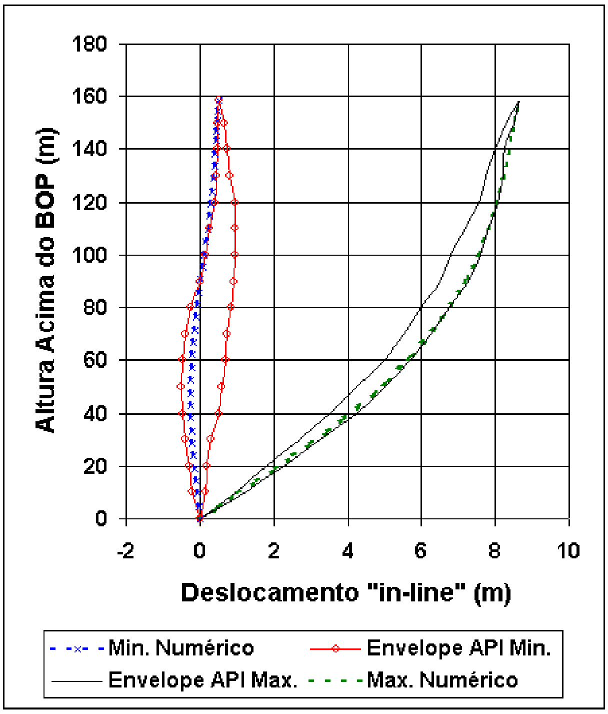


Figura 4. 3- Comparação do caso API 500-40-2-D com dados numéricos

Caso 1500-40-2-D

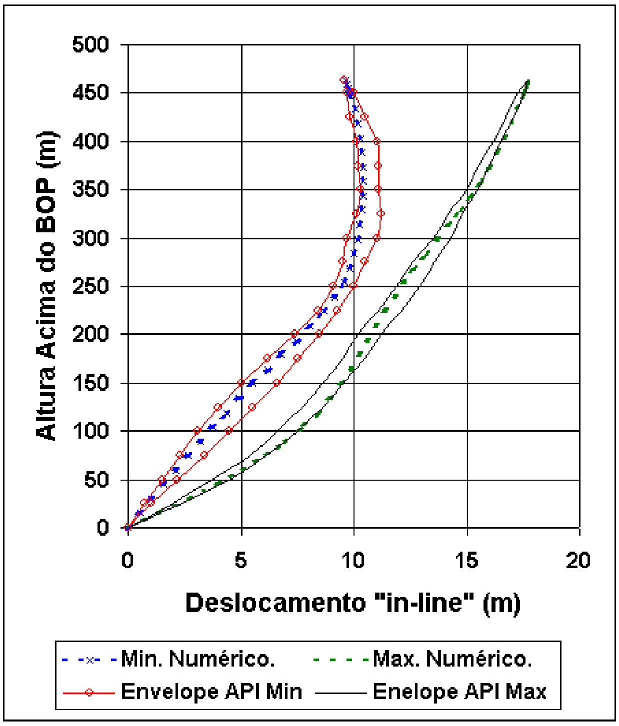


Figura 4. 4- Comparação do caso API 1500-40-2-D com dados numéricos

Caso 1500-40-2-D2

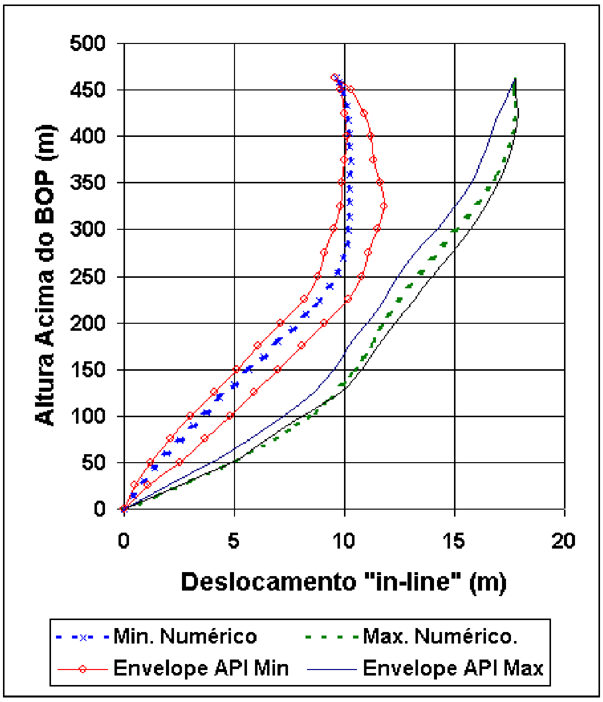


Figura 4. 5 - Comparação do caso API 1500-40-2-D2 com dados numéricos

Além dos dados API, foram feitas comparações dos dados obtidos numericamente com dados obtidos experimentalmente por Maeda (2001). Ele realizou diversos testes com “riser” em escala reduzida de 1/50 em relação ao comprimento do “riser”. A Figura 4.6 mostra o esquema de montagem do aparato experimental.

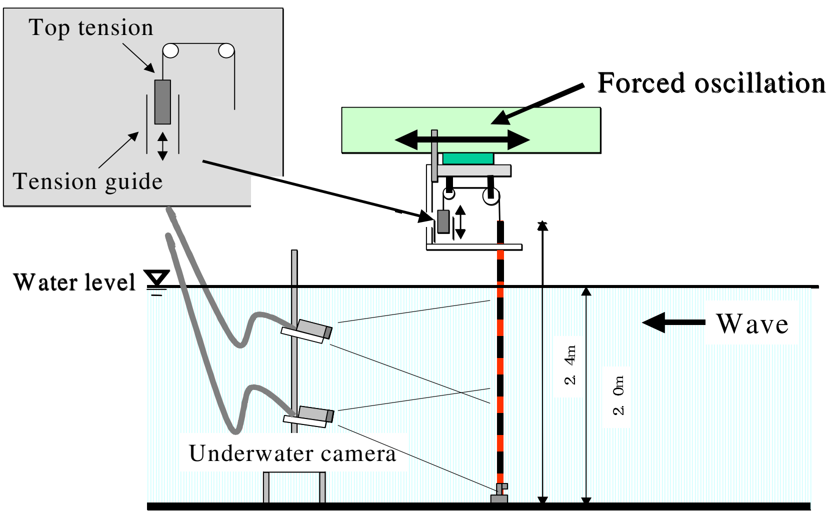


Figura 4. 6- Esquema da montagem para medição do comportamento do "riser" (Maeda(2001)).

O tanque utilizado no experimento tem dimensões de 50m de comprimento, 30m de largura e 2m de profundidade. Conforme lustrado na Figura 4.6, o modelo de “riser” tem 2,4m de comprimento e está sendo acoplado a um tensionador fixo a uma base móvel que proporciona a oscilação forçada. As propriedades do modelo podem ser vistas na tabela 4.3 e as condições do experimento na tabela 4.4. O movimento do “riser” foi registrado pelas câmeras subaquáticas, tanto na direção “in-line” quanto na transversal.

O modelo analisado por Maeda (2001) tem as seguintes características:

	“Riser” Real	Modelo (escala 1/50)	
Material	Aço	Teflon (PTFE)	Latão
Diâmetro Externo (m)	0,25	0,0050	0,0020
Diâmetro Interno (m)	0,21106	0,0020	-
Mod. de Elasticidade (N/m^2)	$2{,}1\text{x}10^{11}$	$0{,}4\text{x}10^{9}$	$1{,}006\text{x}10^{11}$
Densidade do Material (kg/m^3)	7860	2170	8600
Lamina dágua	100	2,0	
Comprimento do “Riser”(m)	120	2,4	
Tensão de Topo (N)	$5{,}0\text{x}10^{5}/1{,}4\text{x}10^{5}$	4,185 / 1,172	
Massa / Comprimento (kg/m)	197,01	0,08244	

Tabela 4. 3- Propriedades do modelo e do "riser" real (Maeda (2001))

Caso	Onda		Oscilação Forçada		Coeficientes Hidrodinâmicos		
	Período (s)	Amplitude (mm)	Amplitude (mm)	Período (s)	C_D	C_M	C_t
A	1,0	2,0	40,0	1,0	2,0	1,0	1,0
B	1,0	2,0	-	-	0,55	1,9	0,3

Tabela 4. 4- Condições do experimento

A título de verificação do programa, foram tomados dois casos. No primeiro o modelo foi submetido a um campo de onda cujo período era de 1,0s e altura $2{,}0\text{x}10^{-3}$ m. Já o segundo apresenta a mesma onda, mas o “riser” está sujeito a uma oscilação forçada, cuja amplitude de movimento é de $40{,}0\text{x}10^{-3}$ m e período de 1,0s. Os resultados das comparações podem ser vistos nas Figuras 4.7 e 4.8.

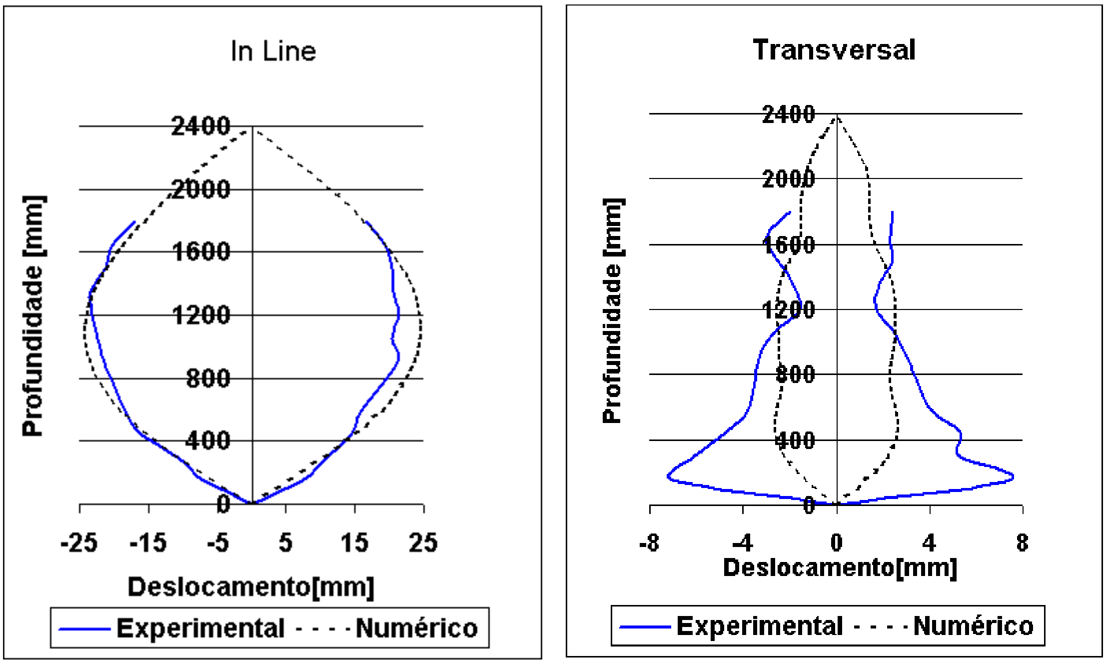


Figura 4. 7- Comparação com dados experimentais na direção "in-line" e transversal para o caso de apenas efeito de onda.

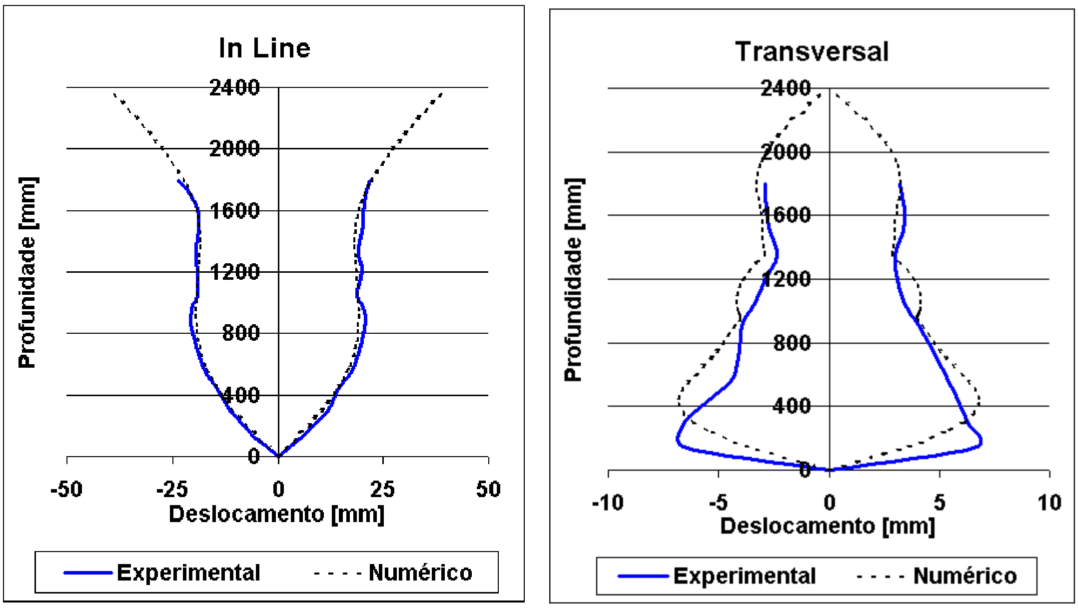


Figura 4. 8- Comparação com dados experimentais na direção "in-line" e transversal para o caso de onda e oscilação forçada.

A partir das comparações, pode-se dizer que o código computacional utilizado no presente trabalho apresentou boa concordância com os dados do Boletim API 16J (1992) e dados experimentais (Maeda(2001)).

As comparações entre os dados API e os resultados obtidos numericamente, por meio do modelo código computacional, apresentaram boa concordância entre si. Nos dois primeiros casos mostrados nas Figuras (4.2) e (4.3) as curvas numéricas apresentam trechos que estão levemente fora da envoltória de máximos e mínimos, isso ocorreu devido à inclusão da força transversal na resolução da equação geral de movimento do “riser”, força essa não considerada no Boletim 16J da API. Ferrari (1998) realizou esses testes sem a inclusão da força devido à vibração induzida por vórtices e obteve resultados que estão exatamente dentro do envelope API.

Comparações com dados experimentais de Maeda (2001) mostram uma boa concordância com resultado numérico na direção “in-line”, entretanto, para o caso da direção transversal houve variação. Há duas possibilidades para a ocorrência dessa discrepância. A primeira é a de erro numérico, pois a amplitude de movimento é pequena e pode levar o programa a cometer erros numéricos de ponto flutuante provocando uma propagação do erro. Foram feitas outras comparações com diversas condições de onda e oscilação forçada e, em linha geral, os resultados sempre seguiram esse mesmo comportamento, ou seja, na direção “in-line” os resultados foram mais exatos, enquanto que na direção transversal a concordância foi bem menor, mas mesmo assim os resultados sempre se mantiveram a mesma ordem de grandeza. Já a segunda hipótese diz respeito à diferença de rigidez entre o modelo utilizado e o “riser” na escala real. Caso não seja possível obter um modelo, cuja rigidez, entre outros parâmetros, seja equivalente em escala reduzida, podem ocorrer diferenças entre os modos de vibração excitados fazendo com que a comportamento do modelo não seja o mesmo do real. Para realizar essa verificação e obter resultados mais conclusivos, seria necessário fazer novos testes verificando se os dados, em escala reduzida, estão compatíveis com os dados em escala real.

4.1. Implementações

Depois de estudar o método desenvolvido por Ferrari (1998), iniciou-se o trabalho de implementar os novos recursos para ampliar a possibilidade de utilização do programa. Nessa etapa foram realizadas as seguintes implementações:

• C_D Variável ao Longo do “Riser” Determinado como Dado de Entrada

O modelo original desenvolvido por Ferrari (1998) considera o coeficiente de arrasto C_D constante ao longo do “riser”, mas em determinadas situações, pode-se desejar utilizar valores diferentes desse coeficiente para determinados trechos do “riser”.

Os valores de C_D são definidos nas posições desejadas. Os valores intermediários entre dois trechos consecutivos são obtidos através de uma aproximação linear, conforme pode ser visto na Figura 4.9. Em outras palavras, a partir de valores e posições de C_D definidos como dados de entrada do programa, é criado um “perfil” de coeficiente de arrasto ao longo do “riser”, onde a aproximação entre dois valores é feita por meio de uma reta.

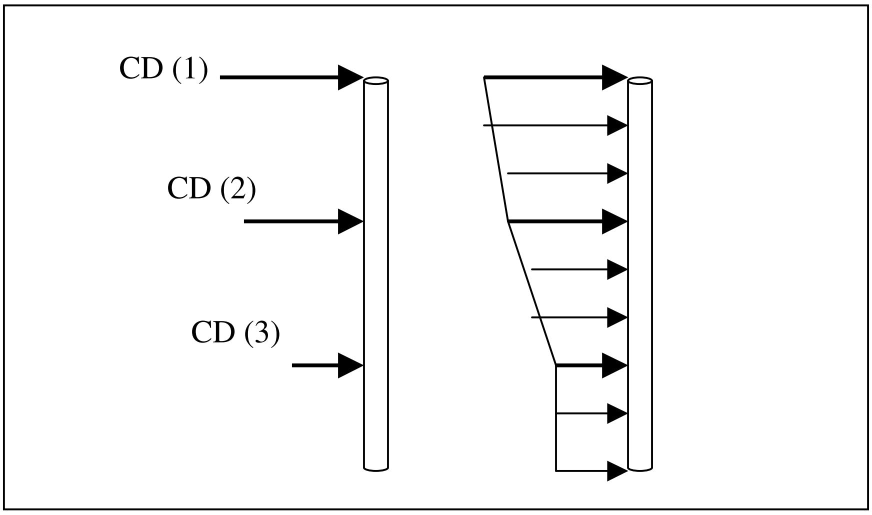


Figura 4. 9- Esquema de definição de CD variável ao longo do “riser”

• Coeficiente de Arrasto (C_D) Determinado pelo Programa.

O coeficiente de arrasto C_D é um parâmetro normalmente determinado de forma experimental e seu valor pode ser fornecido por meio de gráficos, em função de parâmetros adimensionais. O cálculo de C_D pelo programa tem como base às curvas obtidas por Sarpkaya (1981). Ele realizou testes com um cilindro instrumentado, de seção circular, fixos nas duas extremidades, na parte horizontal de um tubo em U sujeito a um fluxo harmônico obtido a partir do deslocamento da coluna de fluido contido no interior do tubo.

A partir dessas curvas foram montadas equações que, em função dos parâmetros KC e β, onde $\beta = \frac{\text{Re}}{KC}$, fornecem os valores de C_D. Figura 4.10 mostra graficamente esse processo. Por exemplo, para uma determinada situação, deseja-se estimar o valor de um coeficiente de arrasto qualquer, definido como C_{Dx}. Inicialmente, é calculado o valor de KC e Re, através das expressões $KC = \frac{|u - \dot{x} + U_c| T}{D}$ e $\text{Re} = \frac{|u - \dot{x} + U_c| D}{\nu}$, que já foram apresentadas no Capítulo 3. Com esses valores é possível obter o $\beta_{x.}$ correspondente a esse KC e Re. Uma vez conhecidos os valores de β_x, e KC_x, pode-se interpolar esse resultado com os valores já conhecidos β_2, β_3, C_{D2}, C_{D3}, conforme mostrado na Equação (4.4) e assim obter o valor de C_{Dx}.

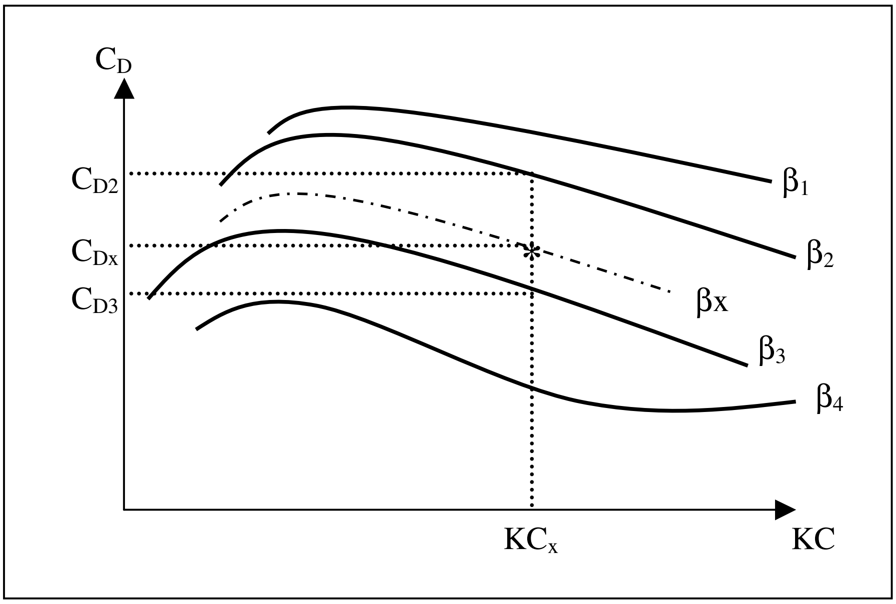


Figura 4. 10 - Esquema de determinação de CD

$$C_{DX} = \frac{(\beta_x - \beta_3)(C_{D2} - C_{D3})}{\beta_2 - \beta_3} + C_{D3} \qquad 4.4$$

Com esse procedimento, pode-se estimar o valor do coeficiente de arrasto ao longo do "riser" e utilizar esse resultado de duas formas diferentes, a primeira seria considerar um valor médio e constante de C_D e utiliza-lo para todo “riser”, e a outra é utilizar o valor de C_D calculado para cada trecho. Para valores de KC fora da escala, tanto para o caso de escoamento laminar quanto para o turbulento, adotou-se o valor de KC=1.0, conforme visto na literatura.

A Figura 4.11 mostra um comparativo entre os diversos métodos de utilização do coeficiente de arrasto descrito no presente trabalho.

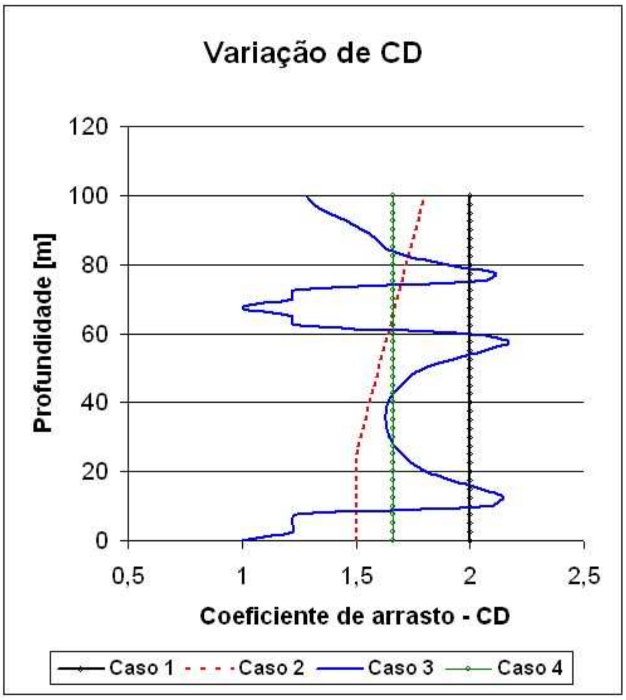


Figura 4. 11- Comparação da variação de C_D para cada caso

Onde:

Caso1 – C_D constante definido como dado de entrada

Caso2 – C_D variável definido como dado de entrada

Caso3 – C_D calculado pelo programa utilizando valores distintos para cada elemento

Caso4 – C_D médio calculado pelo programa.

- Possibilidade de Utilização de Diâmetros e Materiais Diferentes ao Longo do “Riser”

Em determinadas situações pode-se desejar analisar a influência, no comportamento dinâmico, de algum elemento fixado ao corpo do “riser”, como por exemplo, um flutuador. Coma possibilidade de se realizar escalonamentos e de se determinar às características do material em determinados trechos do “riser”, essa análise torna-se possível. Maiores detalhes sobre esse recurso serão apresentados no próximo capítulo.

Capítulo 5

Resultados

5.1. Estudo Paramétrico

Segundo (Maison 1977), as exigências para uma análise dinâmica de qualquer projeto de "riser" estão bem estabelecidas. Enquanto as ferramentas matemáticas estão disponíveis para tal analise, o projetista tem que confiar em experiências passadas para desenvolver o projeto do "riser" a ser analisado. A tarefa de projetar o "riser" pode ser simplificada caso o projetista tenha uma certa "sensibilidade" sobre os efeitos que algumas variáveis exercem no comportamento do "riser". Além disso, essa "sensibilidade" permite que o projetista avalie a importância e as conseqüências das variações causadas por condições ambientais inesperadas ou mudança nos procedimentos de operação.

Maison (1977), através de seu estudo, concluiu que as principais variáveis independentes que devem ser analisadas em um estudo de sensibilidade, em termos de tensão, são: tensão de topo, altura de onda, peso da lama de perfuração, diâmetro do "riser" e a lâmina dágua. Ele estudou a influência desses parâmetros em um "riser" de 152,4m (500ft) e concluiu que as variáveis mais importantes são a tensão de topo e altura de onda.

A seguir será feita uma análise para se determinar a influência de algumas dessas variáveis, entre outras, no comportamento dinâmico do "riser" em termos do deslocamento máximo e mínimo ao qual ele está sujeito. E em seguida será realizada uma comparação entre a conclusão obtida por Maison e aquelas obtidas através do estudo paramétrico desenvolvido no presente trabalho.

As condições gerais estabelecidas para o presente estudo paramétrico são:

"Riser"		Onda Padrão	Oscil. Forçada Padrão
Diam. Externo = 0,25m	L = 152,0m	Altura = 2,0m	Amplitude 2,0m
Diâm. Interno = 0,2116m	Lsub = 132,0m	Período = 7,0s	Período = 7,0s

Tabela 5. 1– Dados gerais do estudo paramétrico

Onde L e Lsub são o comprimento total e o comprimento submerso do "riser" respectivamente.

Os parâmetros considerados na análise são a Tensão de topo, a altura de onda, o Coeficiente de arrasto C_D, o Coeficiente transversal ou "lift" (C_t), o Módulo de elasticidade e o peso do fluido interno. Dois casos serão considerados para cada parâmetro, um com apenas efeito de onda e outro com onda e oscilação forçada.

Para a verificar da influência da tensão de topo foram considerados os seguintes parâmetros:

Coeficientes Hidrodinâmicos			Fluido Interno	Fluido Externo	Módulo de Elasticidade
CD = 1,0	CA = 1,0	Ct = 0,5	$\rho = 800 kgf / m^3$	$\rho = 1025 kgf / m^3$	$E = 2,1x10^{11} N / m^2$

Tabela 5. 2 - Dados específicos para tensão de topo

A variação do comportamento do "riser" em função da alteração da tensão de topo, para o caso de apenas onda e oscilação forçada com onda, podem ser vistas nas Figuras 5.1 e 5.2 respectivamente.

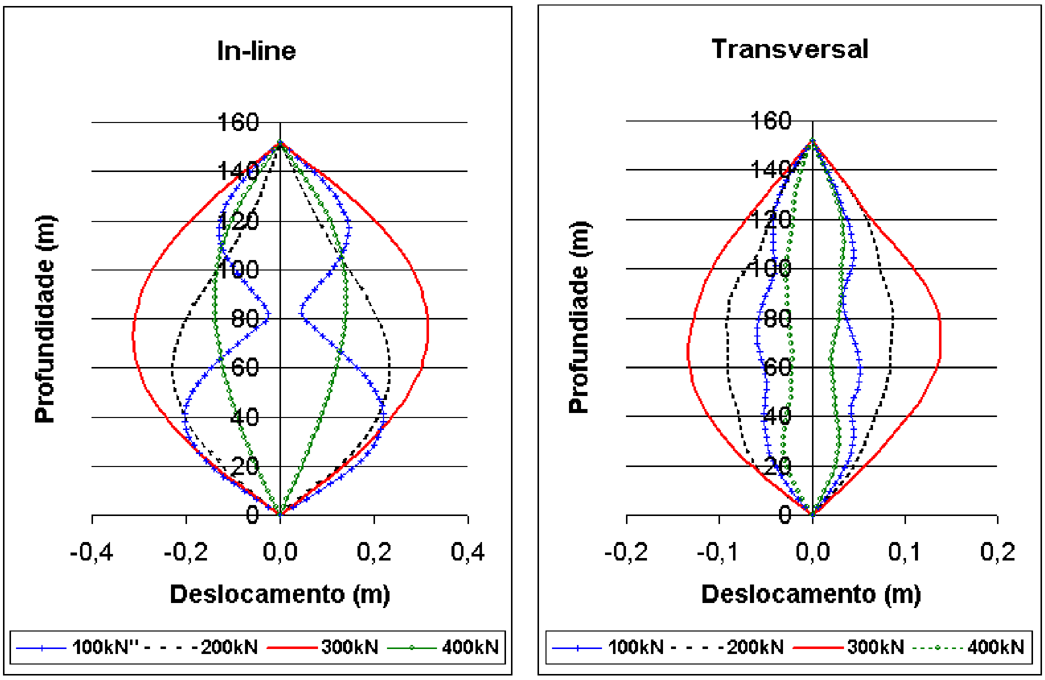


Figura 5. 1- Comportamento do "riser" em função da tensão de topo – somente onda

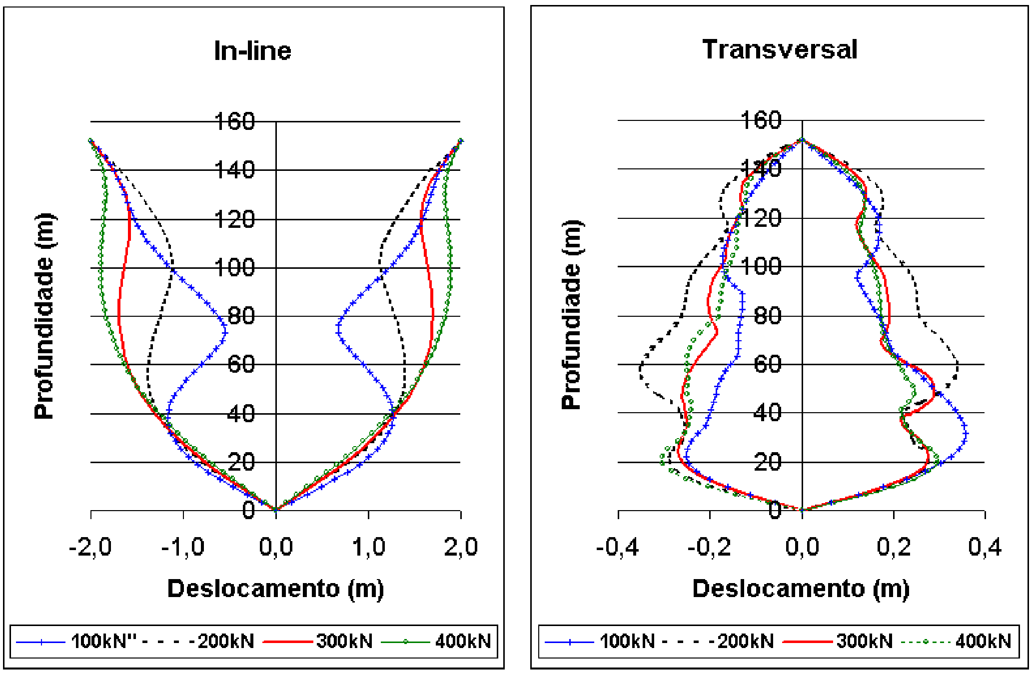


Figura 5. 2- Comportamento do "riser" em função da tensão de topo – onda e oscilação forçada

Pode-se observar pelas Figuras 5.1 e 5.2 que essa variável tem grande influência no comportamento dinâmico do "riser" tanto para o caso com onda e oscilação forçada, quanto para o caso com apenas onda. Com o aumento da tensão de topo, ocorreu a diminuição da amplitude de deslocamento do "riser", assim como os modos de vibração, tanto na direção "in-line quanto na transversal. Esse comportamento já era esperado e ocorre devido ao aumento da rigidez global do "riser" com a tensão de topo.

Para verificar a influência da altura de onda foram considerados os seguintes parâmetros:

Tesão de topo	Coeficientes Hidrodinâmicos			Fluido Interno	Fluido Externo	Módulo de Elasticidade
196,0 kN	CA = 1,0	Ct = 0,5	CD = 1,0	ρ = 800 kgf/m^3	ρ = 1025 kgf/m^3	E = 2,1x10^{11}N/m^2

Tabela 5. 3 -Dados específicos para altura de onda

A variação do comportamento do "riser" em função da alteração da altura de onda, para o caso de apenas onda e oscilação forçada com onda, podem ser vistas nas Figuras 5.3 e 5.4 respectivamente.

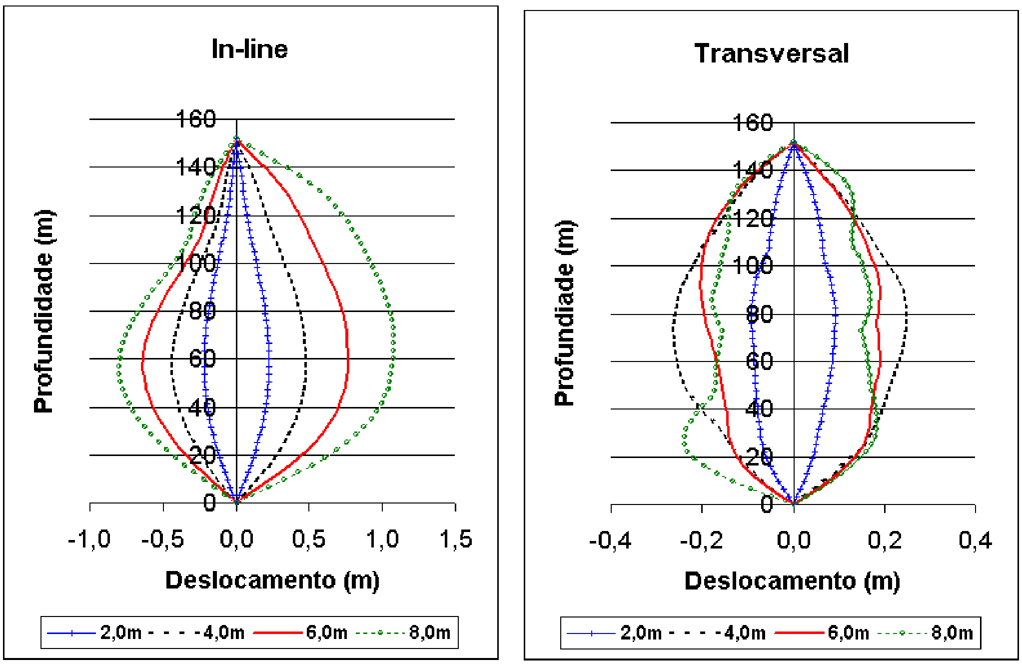


Figura 5. 3- Comportamento do "riser" em função da altura de onda – somente onda

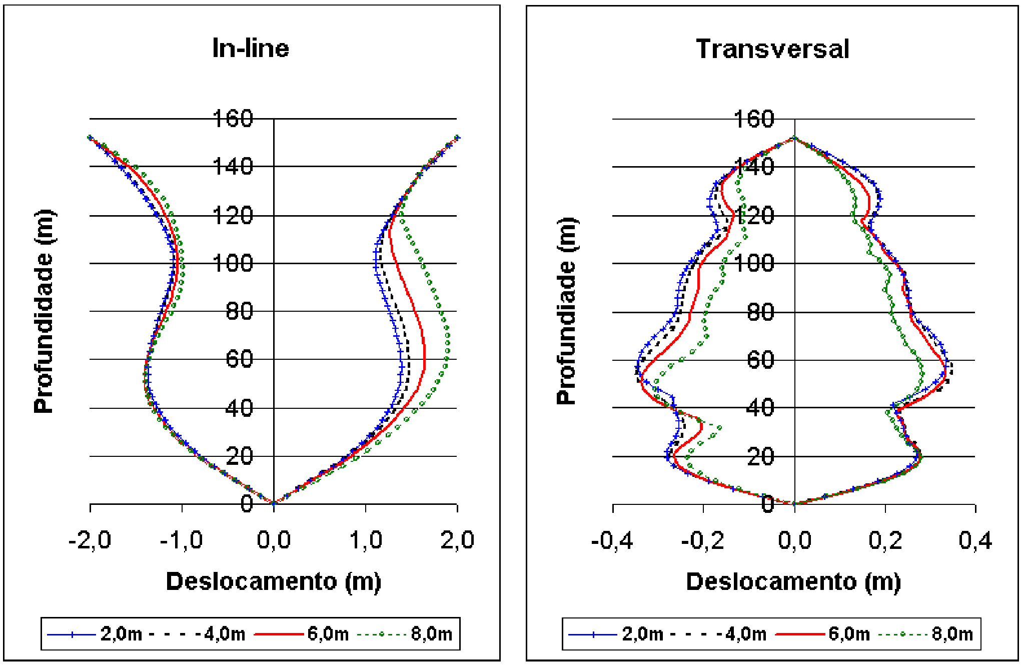


Figura 5. 4- Comportamento do "riser" em função da altura de onda – onda e oscilação forçada

Através dessas figuras 5.3 e 5.4 nota-se que a influência desse parâmetro é maior no caso com apenas efeito de onda do que no caso com oscilação forçada. Com o aumento da altura de onda, observa-se que houve um aumento do deslocamento do "riser", tanto na direção "in-line" quanto na transversal, mas esse aumento não foi simétrico, a curva de deslocamento máximo (valores positivos de x e y) sofreu maior influência. Como já era esperado, o aumento da altura de onda, significa que ela possui maior energia e, conseqüentemente, a força aplicada ao "riser" é maior provocando assim um maior deslocamento.

Para verificar a influência do Coeficiente de Arrasto (C_D) foram considerados os seguintes parâmetros:

Tesão de topo	Coeficientes Hidrodinâmicos		Fluido Interno	Fluido Externo	Módulo de Elasticidade
196,0 kN	CA = 1,0	Ct = 0,5	ρ = 800 kgf/m^3	ρ = 1025 kgf/m^3	E = 2,1x10^{11}N/m^2

Tabela 5. 4 -Dados específicos para C_D

A variação do comportamento do “riser” em função da alteração do coeficiente de arrasto, para o caso de apenas onda e oscilação forçada com onda, podem ser vistas nas Figuras 5.5 e 5.6 respectivamente.

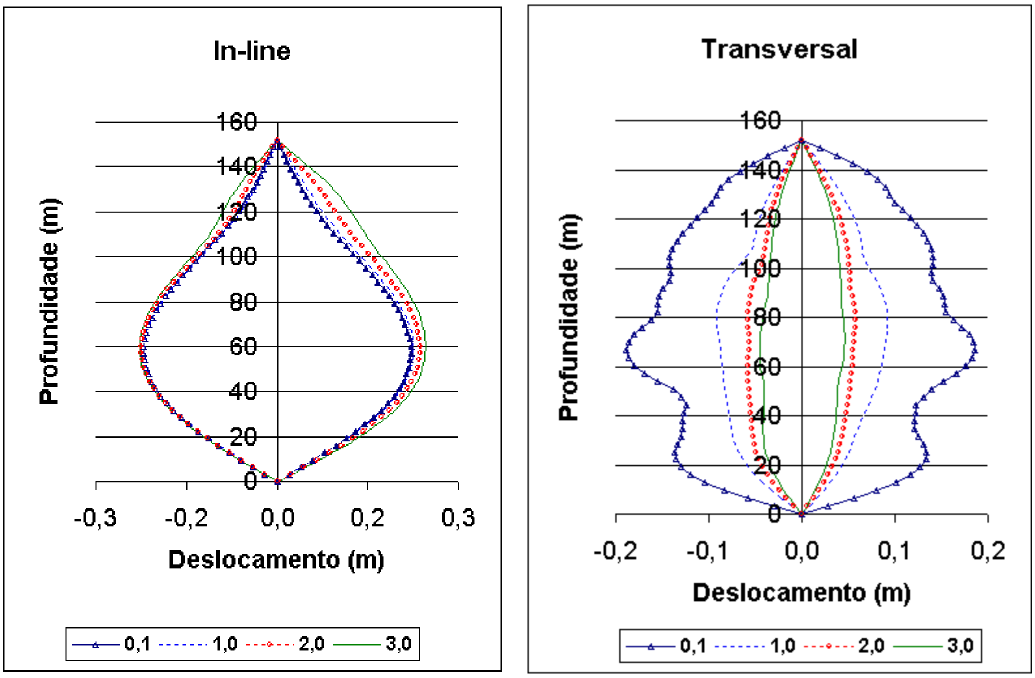


Figura 5. 5- Comportamento do "riser" em função da CD – somente onda

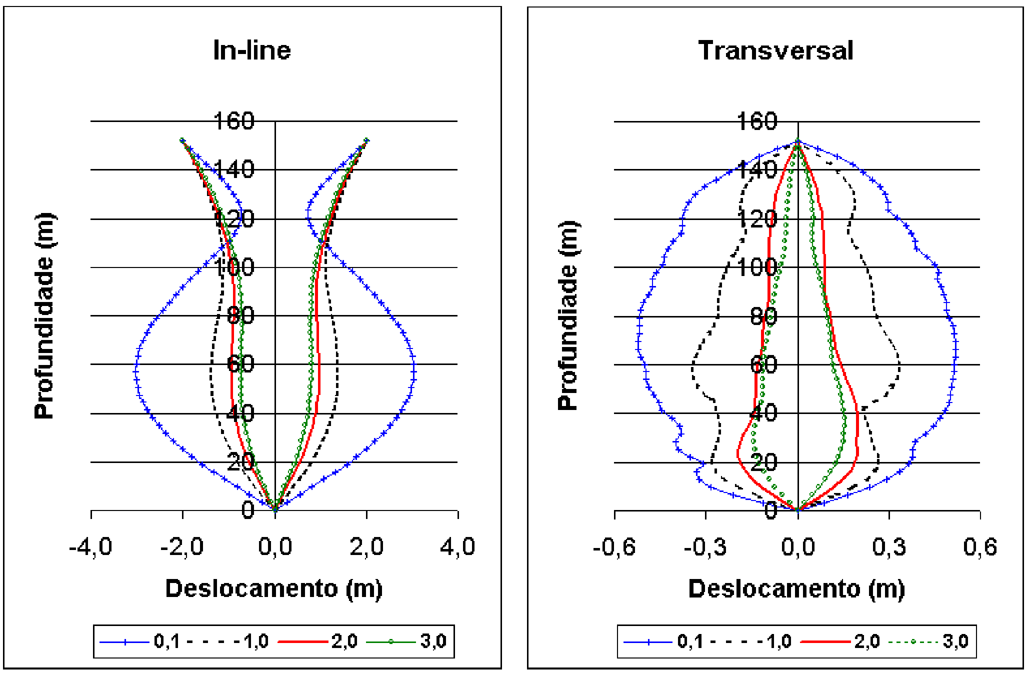


Figura 5. 6 - Comportamento do "riser" em função e CD – onda e oscilação forçada

Através dessas figuras 5.5 e 5.6 observa-se que esse parâmetro tem grande influência no comportamento do “riser”, principalmente na direção transversal para o caso de apenas efeito de onda e em ambas a direções quando o “riser” é submetido à oscilação forçada na presença de onda. A grande variação do comportamento do “riser”, devido à influência desse parâmetro, mostra a importância de sua correta determinação para se estimar as forças hidrodinâmicas atuantes no “riser”.

Para verificar a influência do Módulo de Elasticidade foram considerados os seguintes parâmetros:

Tesão de topo	Coeficientes Hidrodinâmicos			Fluido Interno	Fluido Externo
196,0 kN	CA = 1,0	Ct = 0,5	CD = 1,0	ρ = 800 kgf/m^3	ρ = 1025 kgf/m^3

Tabela 5. 5 -Dados específicos para E

A variação do comportamento do “riser” em função da alteração do módulo de elasticidade, para o caso de apenas onda e oscilação forçada com onda, podem ser vistas nas Figuras 5.7 e 5.8 respectivamente.

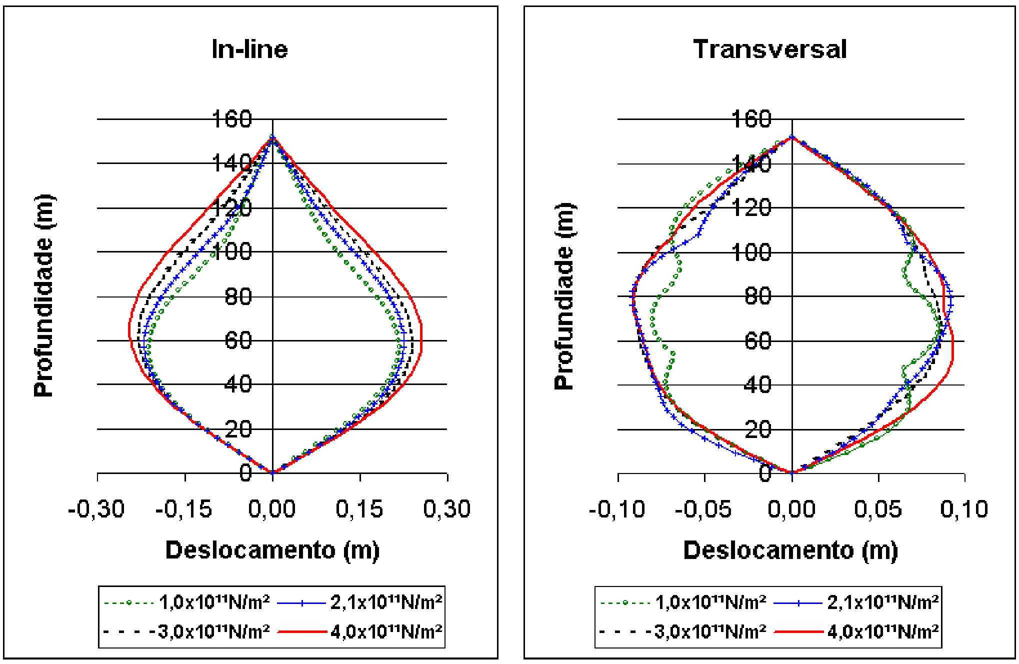


Figura 5. 7 - Comportamento do "riser" em função do módulo de elasticidade – somente onda

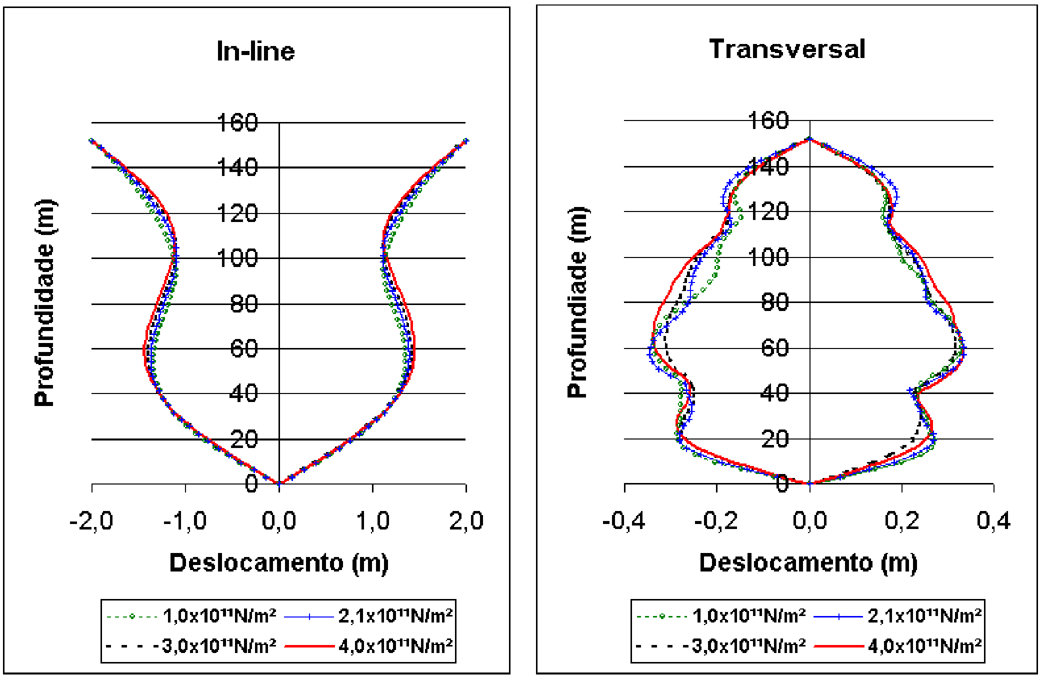


Figura 5. 8 - Comportamento do "riser" em função do módulo de elasticidade – onda e oscilação forçada

O aumento do módulo de elasticidade, não acarretou em grandes alterações no comportamento dinâmico do “riser” na direção in-line” e nem na transversal apesar de ter ocorrido o aumento da rigidez a flexão E.I do “riser”. Onde I é o momento de inércia.

Para verificar a influência do Coeficiente Transversal (C_t) foram considerados os seguintes parâmetros:

Tesão de topo	Coeficientes Hidrodinâmicos		Fluido Interno	Fluido Externo	Módulo de Elasticidade
196,0 kN	CA = 1,0	CD = 1,0	ρ = 800 kgf/m^3	ρ = 1025 kgf/m^3	E = 2,1x10^{11}N/m^2

Tabela 5. 6 -Dados específicos para C_t

A variação do comportamento do “riser” em função da alteração do coeficiente transversal, para o caso de apenas onda e oscilação forçada com onda, podem ser vistas nas Figuras 5.9 e 5.10 respectivamente.

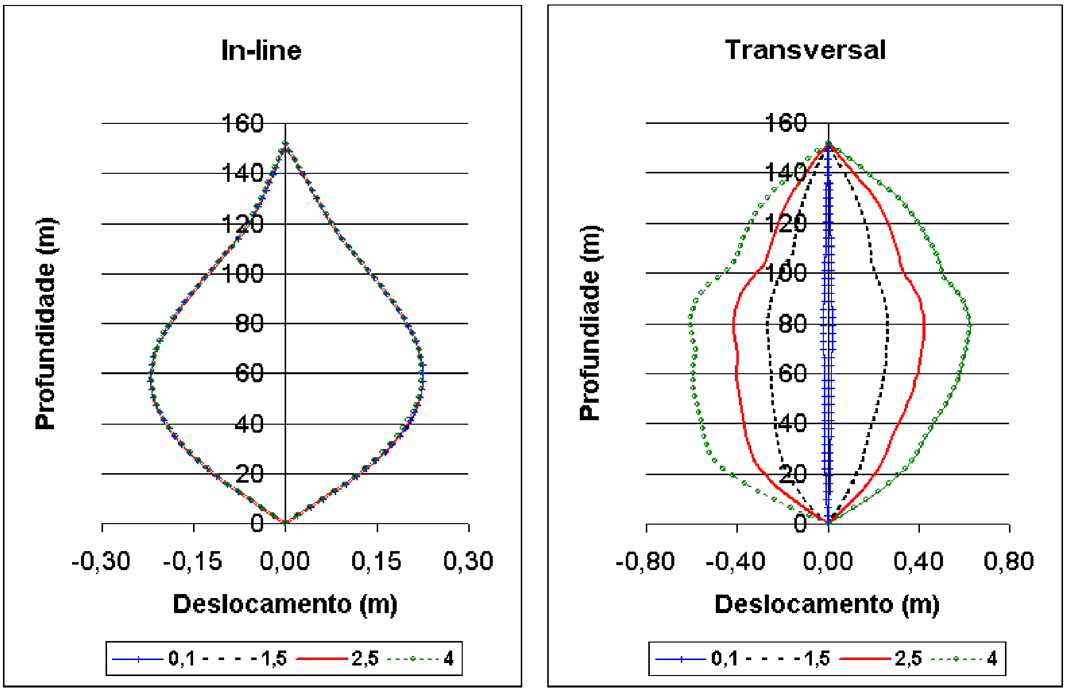


Figura 5. 9 - Comportamento do "riser" em função e Ct – somente onda

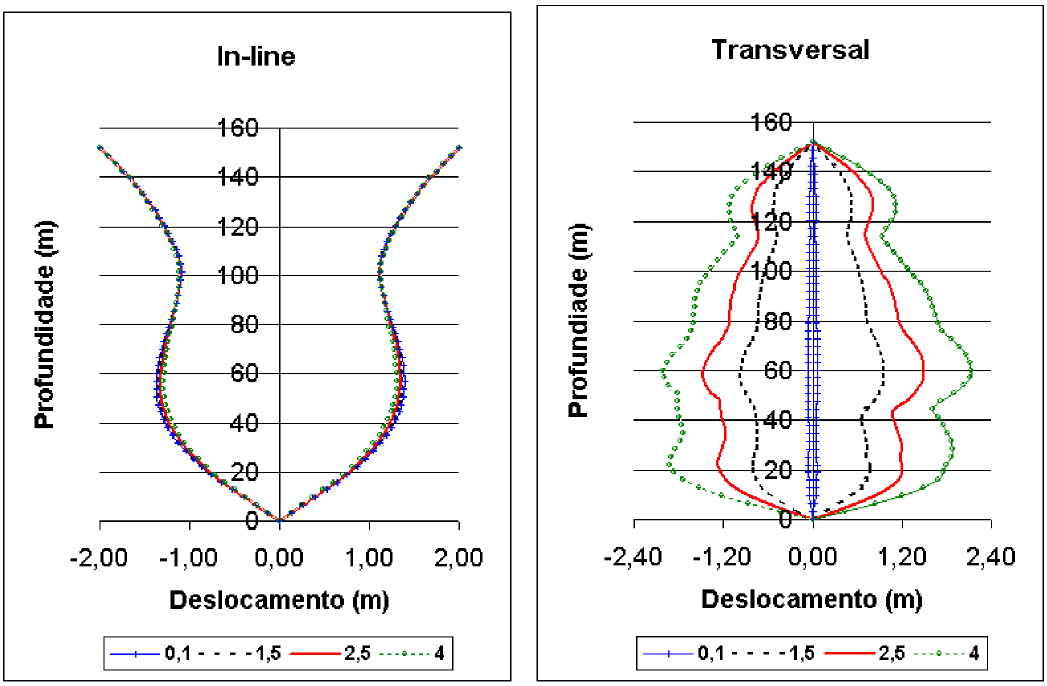


Figura 5. 10 - Comportamento do "riser" em função e Ct – onda e oscilação forçada

A influência de Ct, observada nas Figuras 5.9 e 5.10, praticamente ficou restrita a direção transversal. Isso ocorre porque as forças na direção "in-line" não apresentam dependência em relação a esse parâmetro. Entretanto, houve uma pequena variação nessa direção que se deve ao acoplamento dos planos "in-line" e transversal, feita através do fluido, conforme mostrado no Capítulo 4.

Para verificar a influência o fluido interno foram considerados os seguintes parâmetros:

Tesão de topo	Coeficientes Hidrodinâmicos			Fluido Externo	Módulo de Elasticidade
196,0 kN	CA = 1,0	CD = 1,0	Ct = 0,5	ρ = 1025 kgf/m^3	E = 2,1x10^{11}N/m^2

Tabela 5. 7 -Dados específicos para fluido interno.

A variação do comportamento do "riser" em função da alteração do fluido interno, para o caso de apenas onda e oscilação forçada com onda, podem ser vistas nas Figuras 5.11 e 5.12 respectivamente.

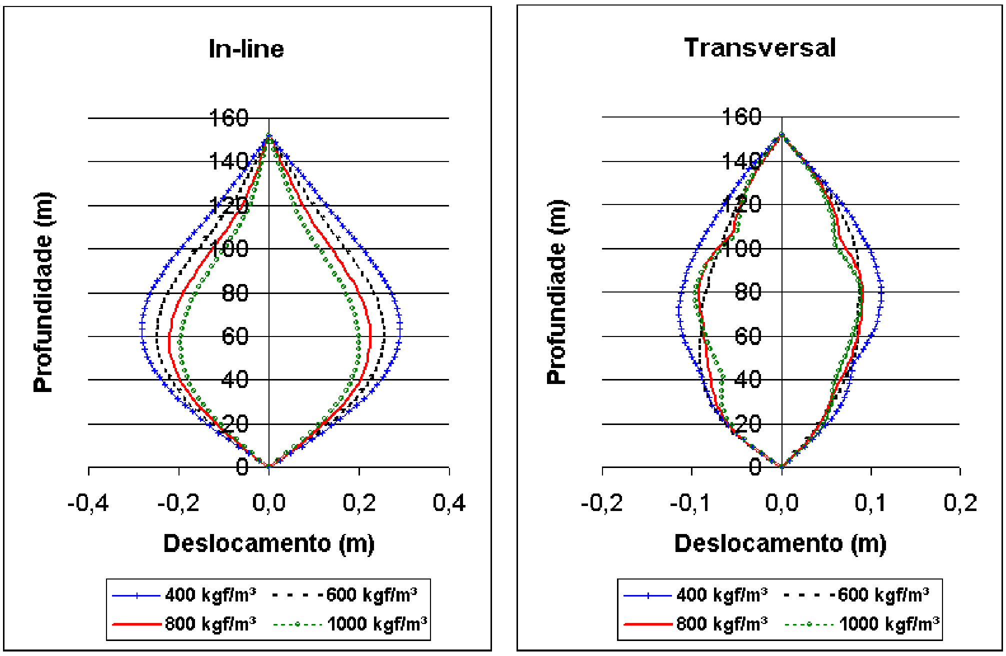
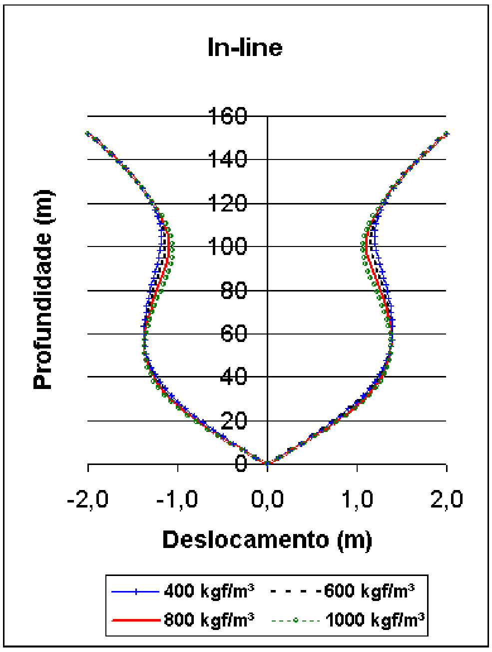


Figura 5. 11 - Comportamento do "riser" em função da densidade do fluido interno – somente onda



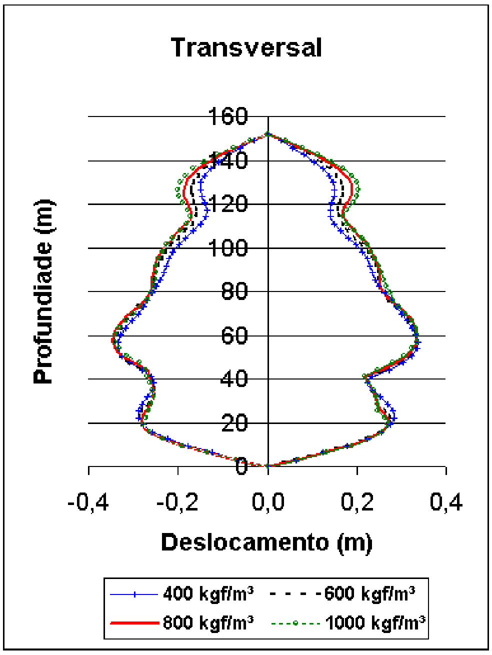


Figura 5. 12 - Comportamento do "riser" em função da densidade do fluido interno – onda e oscilação forçada

A variação da densidade do fluido interno mostrou-se um parâmetro importante a ser considerado em um projeto de "riser", pois seu aumento implica no aumento do peso do sistema como um todo ("riser" + fluido interno) acarretando na diminuição do deslocamento ao qual o "riser" é sujeito.

Assim como observado por Maison (1977), os parâmetros que mostraram maior influência no comportamento do "riser" foram a tensão de topo e a variação da altura de onda. Isso significa que essas variáveis são importantes na determinação da vida útil do "riser" devido à fadiga causada pela tensão dinâmica a qual ele é submetido, como também no dimensionamento das operações que podem ser realizadas pelo sistema ("riser" + embarcação) evitando que seja atingido deslocamentos críticos que possam levar a ruptura ou desconexão do "riser".

5.2. Variação de C_D, Diâmetro e Material do "Riser"

A seguir serão apresentados os resultados obtidos a partir das implementações realizadas para variação do coeficiente de arrasto C_D e do diâmetro e material do "riser".

- Coeficiente de Arrasto C_D.

A Figura 5.13 mostra a influência das varias possibilidades de se utilizar o coeficiente de arrasto C_D no cálculo do comportamento dinâmico do "riser" na tentativa de se ajustar a curva obtida numericamente a um curva experimental.

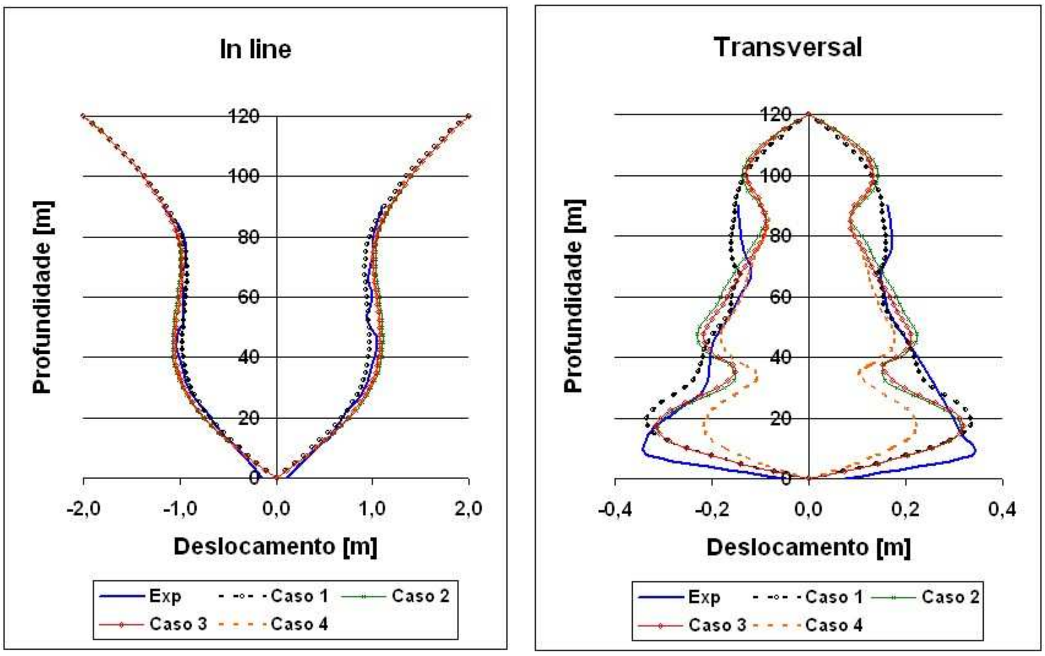


Figura 5. 13 - Comparação entre os métodos de se utilizar CD

Onde:

Caso1 – C_D constante definido como dado de entrada

Caso2 – C_D variável definido como dado de entrada

Caso3 – C_D calculado pelo programa utilizando valores distintos para cada elemento

Caso4 – C_D médio calculado pelo programa.

Como dito anteriormente, a determinação dos coeficientes hidrodinâmicos é feita de forma experimental, há uma vasta literatura sobre esse assunto e estão disponíveis diversos gráficos e tabelas para a obtenção desses coeficientes. Uma vez obtidos esses coeficientes, eles são utilizados como uma constante para o cálculo da força hidrodinâmica que agem sobre o “riser”, entretanto, o coeficiente de arrasto C_D é uma função de Re e KC, e esses parâmetros não são constantes desde a superfície até o leito marinho, ocorrem variações devido à mudança na velocidade do fluxo. Por isso, torna-se razoável supor que os valores de C_D também mudem ao longo do “riser”.

Comparando os quatro métodos de utilização dos valores de C_D, observou-se que o caso onde o C_D é calculado automaticamente pelo programa, com base em curvas obtidas na literatura, é o mais prático, pois logo na primeira execução do programa, conseguiu-se obter uma curva que se ajustasse aos dados experimentais, o que já não ocorre para os casos em que o valor do coeficiente é fornecido como um dado de entrada, é necessário realizar algumas tentativas até se conseguir o ajuste da curva. Foram feitos outros testes com condições de onda, corrente e oscilação forçada diferentes daquele apresentado na Figura 5.13, mas, o ajuste da curva sempre foi feita de modo mais rápido através da utilização do opção com cálculo de C_D pelo programa.

- Diâmetros e Materiais Diferentes ao Longo do “Riser”

As Figuras 5.15 e 5.16 mostram a influência da variação de diâmetro ao longo do “riser”. Foram analisados os casos descritos na tabela 5.8. Neste exemplo, o material do “riser” foi considerado o mesmo para cada segmento mudando-se apenas o valor do diâmetro externo, sendo que essa variação ocorre na metade do comprimento do “riser” mas, há a possibilidade de fazer essa mudança em qualquer posição desejada, e ainda podendo-se trabalhar com mais de uma variação de diâmetro realizando o escalonamento que for desejado.

Diâmetro Interno (m)	Diâmetro externo da metade superior (m)	Diâmetro externo da metade inferior (m)	status
0,21106	0,24	0,24	Diâmetro constante
0,21106	0,25	0,25	Diâmetro constante
0,21106	0,24	0,25	Diâmetro variável
0,21106	0,25	0,24	Diâmetro variável

Tabela 5. 8 - Casos analisados para diâmetro variável

"Riser" Padrão		Onda	Oscil. Forçada	Coeficientes Hidrodinâmicos
Diam. Externo = 0,25m	L = 120,0m	Altura = 2,0m	Amplitude 2,0m	$C_D = C_A = 1,0$
Diâm. Interno = 0,2116m	Lsub = 100,0m	Período = 7,0s	Período = 7,0s	$C_t = 0,5$

Tabela 5. 9- Condições gerais do experimento

A Figura 5.14 ilustra a configuração utilizada para analisar a influência da variação do diâmetro ao longo do "riser". Nesse exemplo, um "riser", de comprimento L, foi divido em duas partes iguais. A Tabela 5.9 mostra as condições gerais consideradas nessa análise.

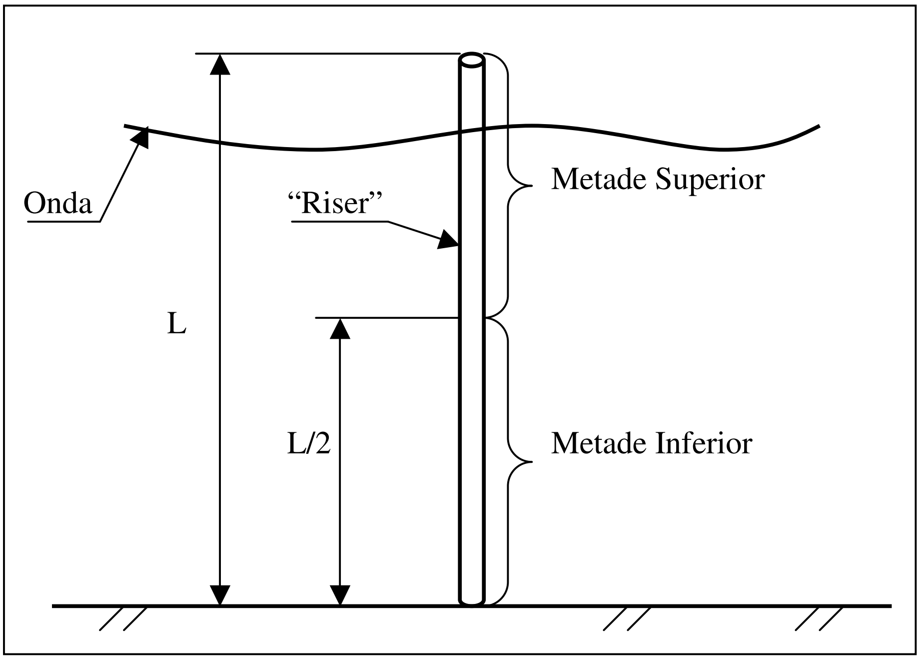


Figura 5. 14 – Esquema de divisão do "riser"

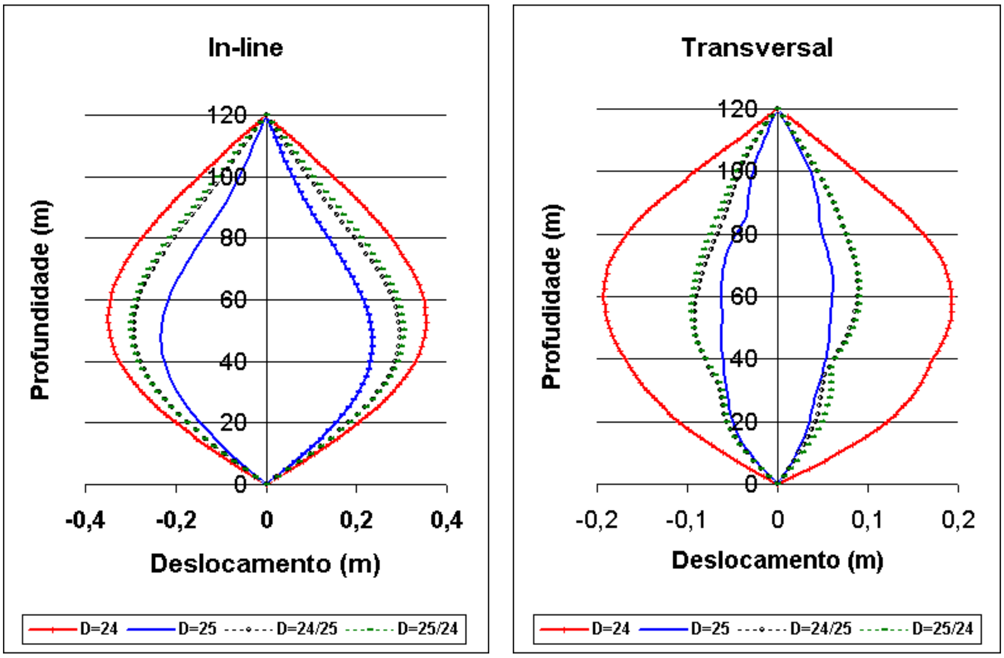


Figura 5. 15 - Influência da variação do diâmetro na direção "in-line" e transversal – apenas onda

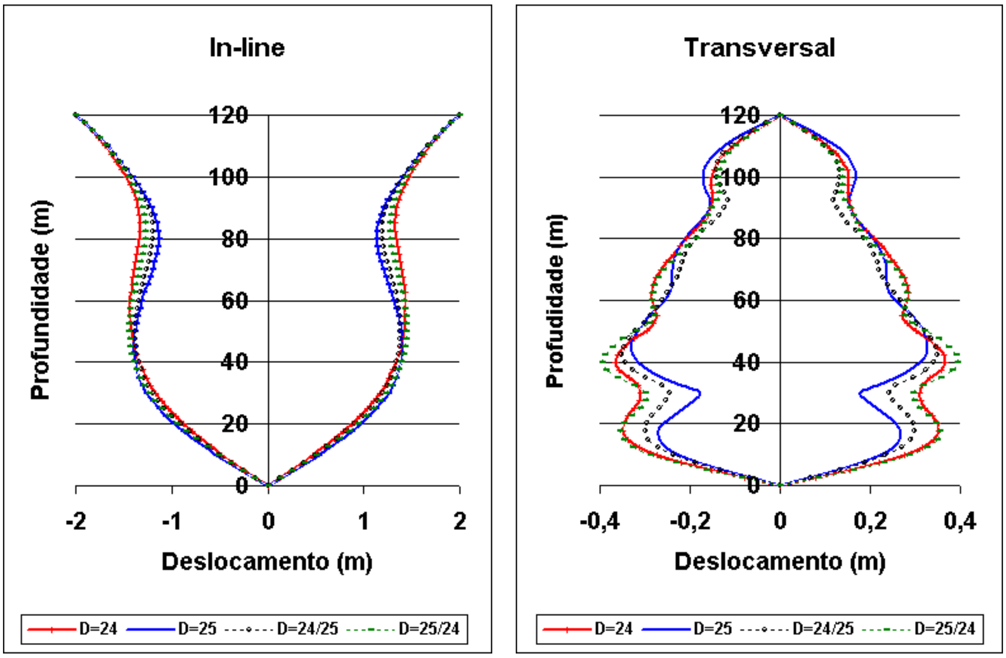


Figura 5. 16 - Influência da variação do diâmetro na direção "in-line" e transversal – onda e oscilação forçada

Onde D=24 e D=25 representa o comportamento do "riser" com diâmetro constante de 0,24 e 0,25m respectivamente, D=24/25 mostra o deslocamento sofrido por um "riser" cuja metade superior tem diâmetro de 0,24 e inferior de 0,25m, e o mesmo se aplica para o caso D=25/24

Pelos resultados mostrados nas Figuras 5.15 e 5.16, observa-se que o “riser” com diâmetro variável teve um comportamento intermediário em relação ao “riser” de diâmetro contínuo. Os deslocamentos máximos e mínimos sofrido pela “riser”, cuja metade superior tem 0,25m e inferior 0,24m, teve amplitude de movimento menor que no caso do “riser” com diâmetro constante de 0,24 e maior do que aquele com diâmetro constante de 0,25.

A mesma metodologia foi empregada para se determinar o comportamento dinâmico de um “riser” formado por dois materiais diferentes. No exemplo mostrado nas Figuras 5.17 e 5.18 o “riser” é composto por aço e titânio, onde a divisão do “riser” foi realizada na metade de seu comprimento, conforme o caso de diâmetro variável.

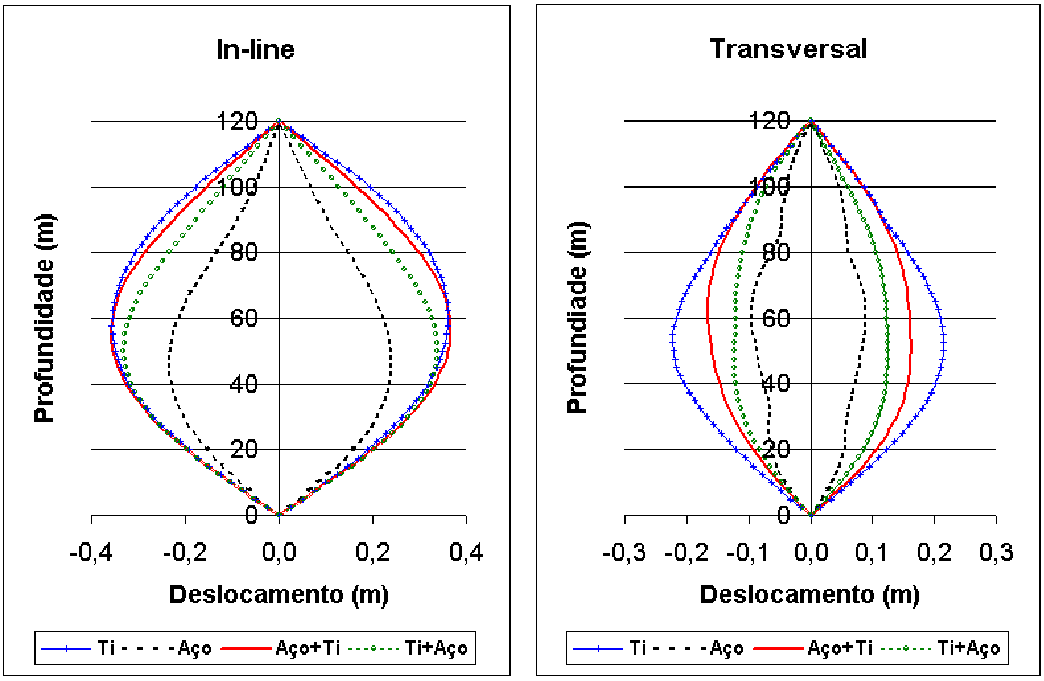


Figura 5. 17 - Influência da variação do material do "riser" no movimento na direção "in-line" e transversal – somente onda

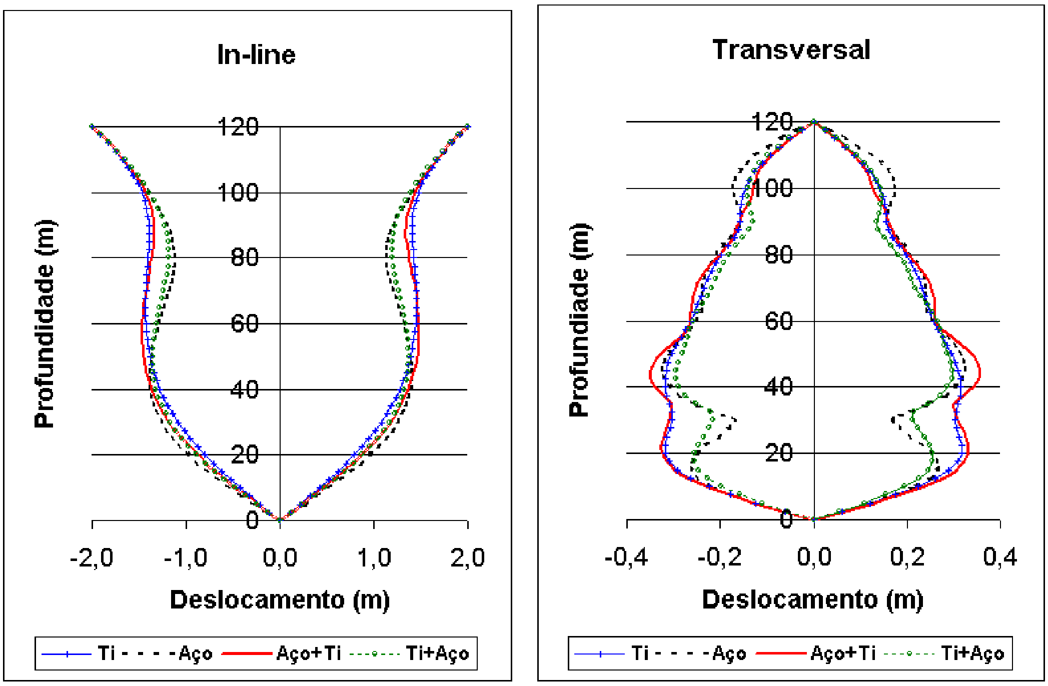


Figura 5. 18 - Influência da variação do material do "riser" no movimento na direção "in-line" e transversal – onda e oscilação forçada.

Onde Ti e Aço representam curva do "riser" feito inteiramente de titânio e Aço respectivamente, Aço+Ti representa o comportamento de um "riser" cuja metade superior é de aço e a inferior de Ti, e Ti+Aço é a curva de deslocamento máximo e mínimo para um "riser" cuja metade superior é de titânio e a inferior de Aço.

Assim como no caso de diâmetro variável, o comportamento do "riser" composto por dois materiais diferentes é intermediário em relação ao comportamento do "riser" feito inteiramente de aço ou titânio. Foram feitos outros testes com materiais e diâmetros diferentes daqueles mostrados acima, mas os resultados sempre mantiveram esse mesmo padrão de comportamento.

A possibilidade de realizar escalonamento no "riser" em qualquer posição desejada, juntamente com a possibilidade de determinar as características do material em qualquer segmento do "riser", permite determinar qual seria a influência, no comportamento dinâmico, caso fosse fixado algum elemento ao longo do "riser", como por exemplo, um flutuador.

Capítulo 6

Conclusões

No presente trabalho estudou-se os conceitos fundamentais do equacionamento do comportamento dinâmico do "riser" rígido vertical, conforme Ferrari (1998). Fez-se um estudo paramétrico para avaliar a influência de algumas das principais variáveis no comportamento do "riser" e algumas novas implementações para aumentar a possibilidade de utilização do programa.

Em sua tese de doutorado, Ferrari (1998) desenvolveu um modelo computacional para calcular o comportamento dinâmico do "riser" rígido no domínio do tempo. Esse modelo foi a base para o desenvolvimento do presente trabalho, foram feitas implementações que permitiram a utilização de diâmetro variável ao longo do "riser" e também foram desenvolvidas rotinas que auxiliam na determinação do coeficiente de arrasto C_D. Com os aprimoramentos realizados, a análise do comportamento do "riser" rígido, tornou-se mais prática, permitindo que ocorresse o aumento da velocidade de processamento do programa, sem comprometer a precisão dos resultados.

As principais conclusões obtidas com o desenvolvimento desse trabalho foram:

- A comparação entre os resultados experimentais e numéricos apresentam uma boa concordância entre si, principalmente no caso "in-line". Para o caso transversal verifica-se diferenças maiores, embora em geral, os resultados apresentem-se na mesma ordem de grandeza. Assim sendo, em função das comparações, pode-se concluir que o método utilizado é confiável.

- O estudo paramétrico é importante na avaliação da influência das varáveis determinantes do comportamento dinâmico de um "riser" rígido. Com a realização desse estudo, pode-se perceber que a variável de maior importância no comportamento do "riser" rígido é a tensão de topo e a altura de onda.

- Através do estudo paramétrico pode-se comprovar a importância da correta determinação dos coeficientes hidrodinâmicos, pois pode-se verificar a grande influência desses parâmetros no comportamento dinâmico do "riser".

- A utilização de C_D variável ao longo do "riser", calculado pelo programa com base em curvas obtidas na literatura, apresentou bons resultados. Logo na primeira tentativa foi possível ajustar a curva obtida pelo programa com uma curva gerada a partir de dados experimentais. Para os casos onde o coeficiente de arrasto é determinado como uma constante e fornecida como um dado de entrada, pode-se necessitar de várias tentativas para se conseguir um resultado semelhante.

- De uma forma geral, observou-se que o comportamento de um "riser", composto por dois segmentos de igual comprimento, com diâmetro ou material diferente, é intermediário, ou seja, seu deslocamento máximo e mínimo oscila entre as curvas geradas para "riser" com diâmetro ou material constante.

Como sugestão para trabalhos futuros, pode-se recomendar:

- A verificação da parte relativa ao comportamento dinâmico do "riser" na direção transversal, pois observou-se que houve uma discrepância entre os resultados numéricos, obtidos através do programa, e os experimentais. Isso pode ter ocorrido por diversos fatores, entre eles, pode-se destacar a precisão numérica do computador utilizado para execução do programa, pois dependendo da aritmética de ponto flutuante, podem ocorrer erros que conduzem a imprecisão dos resultados, isso pode ocorrer principalmente nos cálculos da direção transversal, devido à pequena amplitude do movimento facilitando assim a propagação desse tipo de erro.

- O desenvolvimento de uma interface gráfica para se observar a comportamento dinâmico do "riser' ao longo do tempo. Além de mostrar a animação, pode-se criar recursos para acessar as mais variadas informações referentes a cada elemento do "riser" ou dele como um todo. Esse recuso é muito útil para ajudar na melhor compreensão e interpretação dos resultados numéricos.

- A utilização do modelo hidrodinâmico desenvolvido por Ferrari (1998) para "riser" com configuração em catenária. Atualmente, a utilização do "riser" rígido em catenária está sendo bastante difundida no Brasil e a tendência é que o seu uso cresça cada vez mais devido a suas vantagens em relação ao "riser" flexível, como, por exemplo, sua maior resistência estrutural e menor custo. O modelo hidrodinâmico utilizado no presente trabalho apresentou-se adequado para o caso de "riser" rígido vertical e tudo indica que, realizando alguns ajustes, esse mesmo modelo pode ser aplicado com sucesso para "riser" rígido em catenária.

- A realização de novos experimentos com modelos de "riser" de maior comprimento para que se possa excitar mais modos de vibração.

- A criação de um banco de dados. Dessa forma, os casos analisados pelo programa poderiam ser armazenados e acessados toda vez que for necessário, sem a necessidade de executar novamente o programa, proporcionando uma economia de tempo.

Referências Bibliográficas

- API Bulletin 16J "Bulletin on Comparison of Marine Drilling Riser Analyses", 1st ed., August 1, 1992.

- Aranha, J. P. A., "Vortex-Induced Vibration ans Offshore Design", Workshop on Vortex-Induced Vibrations of Offshore Structure (WVIVOS), São Paulo, Brazil, August, 2000.

- Bearman, P. W., "Developments in Vortex Shedding Research", Workshop on Vortex-Induced Vibrations of Offshore Structure (WVIVOS), São Paulo, Brazil, August, 2000.

- Blevins, R. D., "Flow-Induced Vibration", Van Nostrand Company", 1977

- Chakrabarti, S. K., Franpton, R. E., "Review of Riser Analysis Techniques", Chicago Bridge and Iron Co, Plainfield , IL 60544, USA.

- Chakrabarti, S.K.: "Hydrodynamics of Offshore Structures", Computational Mechanics Publications, Southampton, Great Britain, 1987.

- Faltinsen O. M., "Sea Loads on Ship and Offshore Structures", Cambridge University Presse, 1990

- Ferrari, J.A, Bearman, P.W., "Hydrodynamic Loading and Response of Offshore Risers", OMAE Conference, St John's, Newfoundland, Canada, 1999.

- Ferrari, J.A., “Hydrodynamic Loading and Response of Offshore Risers”, Ph.D. thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, April 1998.

- Fox R.W., McDonald A. T., “Introdução à Mecânica dos Fluidos”, LTC - Livros Técnicos e Científicos, 4ª. edição, 1995

- Huse, E., Nielsen, F.G.: “Coupling Between In-Line and Transverse VIV Response”, OMAE Conference, Oslo, Norway, 2002.

- JIRP (Joint Industry Research Project), “Reduced Scale Experiment for Rigid Vertical Risers”, Final Internal Report, Campinas, 2001.

- Kubota, H., Y., Morooka, C. K., Ferrari J. A., Nishimoto, K., “Cálculo Quase 3D do Comportamento de “Riser” Rígido de Produção”, SOBENA 2002

- Larsen, C.M., Yttervik, R., Passano, E.: “Empirical Model for Analysis of Vortex Induced Vibrations: Theoretical Background and Case Studies”, OMAE Conference, Rio de Janeiro, Brazil, 2001.

- Larsen C. M.. “Empirical VIV Models”, Workshop on Vortex-Induced Vibrations of Offshore Structure (WVIVOS), São Paulo, Brazil, August, 2000.

- Larsen, C.M., Vandiver, J.K., Lie, H.: “Vortex Induced Vibrations of Long Marine Risers: Model Test in a Rotating”, OMAE Conference, Yokohama, Japan, 1997.

- Leite, A.J.P., Morooka, C.K., Nishimoto, K. and Ferrari Jr. J.A.: “Integrated Analysis of a Rigid Riser System on a Production Semisubmersible”, ISOPE Conference, USA, 1992.

- Maeda, H. Masuda, K., Rheem C., Itoh K., “Study on Behaviours of an Underwater Line Structure in Viscous Flow”, OMAE Conference, Rio de Janeiro, Brazil, 2001.

- Maison, J. R., “Sensitivity Analysis of Parameters Affecting Riser Performance”, Offshore Technology Conference, Huston, USA, 1977.

- Martins, C. A., “Uma Ferramenta Expedita para Estudo de Viabilidade de Risers Rígidos em Catenária”, Universidade de São Paulo, 2000.

- Meneghini, J. R., Flatschart, R.B., Saltara, F. and Siqueira, C.R.: “Numerical Simulation of Flow Interference Between Two Circular Cylinders in Tandem”, OMAE Conference, New Orleans, USA, 2000.

- Morison, J. R., O´Brien M.P., Johnson, J.W., and Schaaf, S.A., “The Fore Exerted by Surface Waves on Pile”, Petroleum Transactions, 189, pp149-157, AIME 1950

- Oliveira, M.C. and Sphaier, S. “Numerical Simulation of Vortex Induced Vibrations in Three Dimensions Using a Hybrid Method”, OMAE Conference, Rio de Janeiro, Brazil, 2001.

- Patel, M. H., “Dynamic Analysis of Offshore Structure”, Butterworth, 1979

- Sarpkaya, T., Isaacson, M., “Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures”, 1st ed., Van Nostrand & Reinhold Company, 1981.

- Strickland, G., E., Mason, A. B., “Parametric Response of Tendons – Theoretical and Numerical Analyses”, Offshore Technology Conference, Houston, 1981

- Yamamoto C. T., “Estudo de Escoamento Tridimensional ao Redor de um Agrupamento de Cilindros Lado a Lado”, Universidade de São Paulo, 2002.

Apêndice A

Validação do Modelo Estático e Análise em Elementos Finitos para "Ríser" Rígido

A.1. Validação do Modelo Estático

Utilizando a teoria descrita para o modelo estático, foi desenvolvido um código computacional para a analise estática da viga vertical, ou seja, do "riser" rígido, na presença de carregamento "in line".

A validação será feita comparando o resultado do código computacional com a solução analítica da viga vertical sem peso. Nessa comparação, ficou estabelecido também que o "riser" não possuem translações longitudinais ou transversais no nó, no extremo inferior, leito oceânico, e que também não apresente deslocamento transversal no nó superior. Essa analise, além de confirmar o procedimento computacional, ajuda também a dar uma idéia da grandeza do número de elementos que são necessários para uma certa precisão.

Assim, prosseguindo com a solução analítica, irá se partir da equação (A.1), deduzida no Capítulo 2, que governa a estática do "riser" rígido.

$$\frac{d^2}{dy^2}\left[EI\frac{d^2x}{dy^2}\right]-(T+p_oA_o-p_iA_i)\frac{d^2x}{dy^2}=N+(\gamma_sA_s+\gamma_iA_i-\gamma_oA_o)\frac{dx}{dy} \tag{A.1}$$

Hipóteses:

1) Viga sem preso → $\gamma_o A_o + \gamma_i A_i - \gamma_s A_s = 0$
2) Tração constante → $T + p_o A_o - p_i A$ =constante
3) Diâmetro e propriedades constantes ao longo do "riser" → EI=constante
4) Carregamento constante → N=constante

A equação de um "riser" sem peso fica simplificada da seguinte forma:

$$\frac{d^4 x}{dz^4} - \left(\frac{T}{EI}\right)\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{N}{EI} \tag{A.2}$$

Integrando duas vezes os dois lados da equação (A.2) obtém-se:

$$\frac{d^2 x}{dy^2} - \left(\frac{T}{EI}\right)x = N\frac{y^2}{2EI} + Ay + B \tag{A.3}$$

Assumindo $n^2 = \dfrac{T}{EI}$ e que a viga está sob tensão (T>0), tem-se:

$$\frac{d^2 x}{dy^2} - n^2 x = N\frac{y^2}{2EI} + Ay + B \tag{A.4}$$

A solução para a equação diferencial de segunda ordem será dada pela soma da solução homogênea (lado direito da Equação (A.4) igual a zero) com a solução particular. Utilizando o operador notacional ($D = \dfrac{dx}{dy}$) para equação (A.4), onde D representa a diferenciação em relação a y ($Dx = x' = \dfrac{dx}{dy}$), tem-se:

$$(D^2 - n^2)x = N\frac{y^2}{2EI} + Ay + B \tag{A.5}$$

Para esse caso, tem-se duas raízes reais e distintas (±n) para a equação homogênea $(D^2 - n^2)x = 0$, assim, a solução homogênea para a Equação (A.5) é:

$$x_0 = Ce^{ny} + De^{-ny} \tag{A.6}$$

A solução particular da Equação (A.5) pode ser expressa da seguinte forma:

$$x_p = \frac{N}{2EI}\frac{y^2}{(D^2 - n^2)} + A\frac{y}{(D^2 - n^2)} + \frac{B}{(D^2 - n^2)} \tag{A.7}$$

Encontrar a solução particular pelo uso do operador D requer a expansão formal de f(D) em serie de potência até o termo em D^m onde m é a ordem da equação diferencial. Assim, por exemplo, se $f(D) = \dfrac{1}{1-D}$, pode-se escrever:

$$f(D) = \frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + D^3 + ... + D^m + ... \tag{A.8}$$

obs: $f(D) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^m(0)}{m!} D^m$ para $|D|<1$ (Expansão de Maclaurin), onde f^m representa o m-ésimo derivativo em relação a D.

Com isso, tem-se para Equação (A.7)

$$x_p = \frac{N}{2EI}\frac{1}{n^2}\left(-1 - \frac{D^2}{n^2}\right)y^2 + \frac{A}{n^2}\left(-1 - \frac{D^2}{n^2}\right)y + \frac{B}{n^2}\left(-1 - \frac{D^2}{n^2}\right) \tag{A.9}$$

Assim,

$$x_p = -\frac{N}{2EI}\left(\frac{y^2}{n^2} + \frac{2}{n^4}\right) - \frac{A}{n^2}y - \frac{B}{n^2} \qquad \text{(A.10)}$$

Dessa forma, tem-se que a solução geral da Equação (A.2) como:

$$x = x_0 + x_p = Ce^{ny} + De^{-ny} - -\frac{N}{2EI}\left(\frac{y^2}{n^2} + \frac{2}{n^4}\right) - \frac{A}{n^2}y - \frac{B}{n^2} \qquad \text{(A.11)}$$

Para se determinar os coeficientes A,B,C e D é preciso utilizar as condições seguintes de contorno do problema:

x = 0 $\rightarrow$ para y = 0 e y = L

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ $\rightarrow$ para y = 0 e y = L, onde L é o comprimento da barra.

Então, assumindo deflexão momento fletor zero nas extremidades, obtém-se os seguintes coeficientes,

$$A = -\frac{NL}{2EI}$$

$B = 0$

$$C = \frac{N}{EIn^4}\left(\frac{e^{nL} - 1}{e^{2nL} - 1}\right)$$

$$D = \frac{N}{EIn^4}\left(1 - \frac{e^{nL} - 1}{e^{2nL} - 1}\right)$$

Assim, a deflexão de uma viga vertical sem peso sob carregamento constante N pode ser expressa da seguinte forma:

$$x = \frac{N}{EIn^4}\left(\frac{e^{nL}-1}{e^{2nL}-1}\right)e^{ny} + \frac{N}{EIn^4}\left[1-\left(\frac{e^{nL}-1}{e^{2nL}-1}\right)\right]e^{-ny} - \frac{N}{EIn^4} + \frac{Ny(L-y)}{2EIn^2} \qquad (A.12)$$

Considerando que as propriedades do material da viga variem linearmente e que as rotações são pequenas, é possível obter as expressões para a rotação, momento fletor e força cortante derivando a Equação (A.12).

$$\text{Rotação}=\frac{dx}{dy} = \frac{N}{EIn^3}\left(\frac{e^{nL}-1}{e^{2nL}-1}\right)e^{ny} - \frac{N}{EIn^3}\left[1-\left(\frac{e^{nL}-1}{e^{2nL}-1}\right)\right]e^{-ny} + \frac{NL}{2EIn^2} - \frac{Ny}{EIn^2} \qquad (A.13)$$

$$\text{Momento}=EI\frac{d^2x}{d^2} = \frac{N}{n^2}\left(\frac{e^{nL}-1}{e^{2nL}-1}\right)e^{ny} + \frac{N}{n^2}\left[1-\left(\frac{e^{nL}-1}{e^{2nL}-1}\right)\right]e^{-ny} - \frac{N}{n^2} \qquad (A.14)$$

$$\text{Força cortante}=-EI\frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{N}{n}\left(\frac{e^{nL}-1}{e^{2nL}-1}\right)e^{ny} + \frac{N}{n}\left[1-\left(\frac{e^{nL}-1}{e^{2nL}-1}\right)\right]e^{-ny} \qquad (A.15)$$

Para obtenção dos resultados numéricos, foi repetido os caso analisado por Ferrari (1998), para um "riser" com 10 elementos.

Os dados do caso testes são apresentados na tabela A.1

Comprimento da viga vertical sem peso – L	100m
Diâmetro externo – Dex	0,5m
Diâmetro interno – Din	0,4m
Tensão de topo – T	500kN
Módulo de Young – E	64.000.000 kN/m^2
Momento de inércia – I	1,811x10^{-3}
Velocidade constante da corrente – U	1,0 m/s
Densidade do fluido externo - ρ	1025 kg/m^3
Coeficiente de arrasto – CD	0,7

Carregamento na direção do escoamento - N	0,179 kN/m
$n = \sqrt{\dfrac{T}{EI}}$	$6{,}5675 \times 10^{-2}$

Tabela A. 1-Dados para o caso teste

A comparação dos resultados numérico e teórico podem ser observados na tabela A.2

Profundidade (m)	**Deslocamento "in line" (m)**		**Rotação (rad)**	
	Resultado teórico	Resultado numérico	**Resultado teórico**	**Resultado numérico**
0	0,0000	0,00000	0,01249	0,01249
10	0,12156	0,12156	0,01154	0,01154
20	0,22659	0,22659	0,00932	0,00932
30	0,30593	0,30593	0,00647	0,00647
40	0,35494	0,35494	0,00330	0,00330
50	0,37149	0,37150	0,00000	0,00000
60	0,35494	0,35494	-0,00330	-0,00330
70	0,30593	0,30593	-0,00647	-0,00647
80	0,22659	0,22659	-0,00932	-0,00932
90	0,12156	0,12156	-0,01154	-0,01154
100	0,00000	0,00000	-0,01249	-0,01250

Tabela A. 2-Comparação entre resultados teórico e numérico

Como se pode observar na tabela A.2, houve uma boa concordância entre a solução teórica e numérica. Com isso, podemos concluir que a utilização do método de elementos finitos fornece resultados precisos quando comparados com os resultados teóricos. Por fim, vale lembrar que a teoria empregada para a montagem do modelo utilizado no presente trabalho assume a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas rotações de viga.

A.2. Análise por Elementos Finitos

O Método de Elementos Finitos é geralmente, utilizado para descrever estrutura de um "riser". Para análise em elementos finitos o "riser" é idealizado como um conjunto de elementos de viga, conforme mostrado na figura A.1. Cada elemento possui seis graus de liberdade, dois graus de translação e um de rotação em cada extremidade.

A equação (A.1), também conhecida como equação de Euler-Bernoulli, ao ser discretizada, fornecerá os graus de liberdade transversais ao eixo 1 e 4 e as rotações 3 e 6, conforme mostrado na figura A.1.

Os graus de liberdade na direção dos eixos 2 e 5 serão adicionados a matriz elementar da estrutura, por meio da discretização de uma outra equação, a qual rege os deslocamentos axiais de uma viga sujeita a tração. Uma equação do tipo:

$$EA\frac{d^2u(y)}{dy^2} = q$$

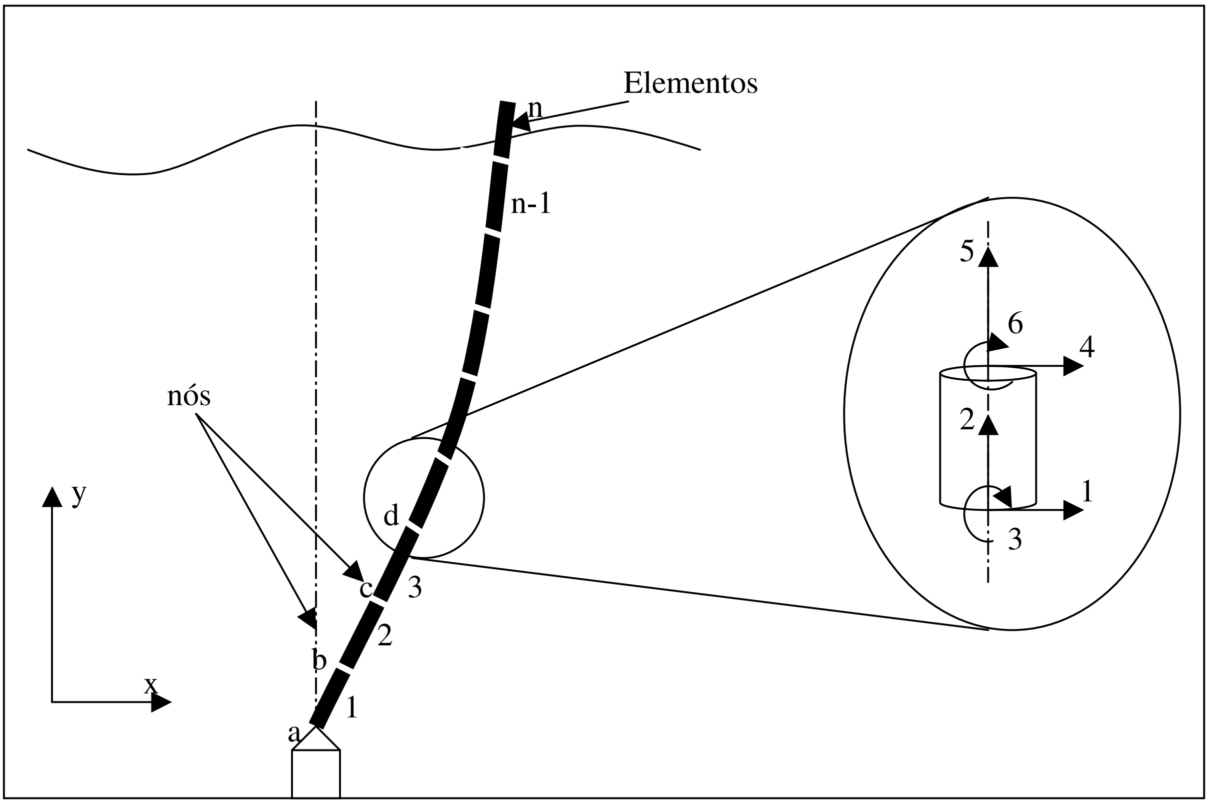


Figura A. 1- Idealização de "riser" em elementos finitos

A formulação fraca do Método de Galerkin, um caso particular do Método dos Resíduos Ponderados será utilizado para solucionar a equação (A.1), assim como visto em Ferrari (1998).

No método dos resíduos Ponderados,busca-se encontrar uma solução aproximada de uma equação diferencial do tipo $f(x)=b$, em um domínio ψ. A obtenção da solução é feita com o auxilio de uma função resíduo R, a qual também satisfaz as condições de contorno do problema. A função resíduo ou erro é dada por:

$$R = f(x_0) - b \neq 0$$

onde x_0 é um ponto no domínio ψ. O objetivo do método é fazer com que os erros sejam os menores possíveis no domínio ψ. Para isso, os erros devem ser distribuídos, e a maneira como isso é feito produz diferentes métodos. No Método dos Resíduos Ponderados, é proposto que o erro ou resíduo R seja distribuído no domínio por uma função peso ou penalidade *w*, da seguinte forma:

$$< R, w >= \int_{\psi} R w d\psi = 0$$

Por exemplo, o Método das Diferenças Finitas, um método numérico mais direto, utiliza como função peso a função delta de Dirac, assim garante-se que o resíduo seja zero nos nós de uma malha computacional. Em pontos que não são nós, espera-se que se obtenha uma aproximação da solução.

No Método dos Volumes Finitos, a função penalidade *w* é tomada como 1, o que garante que o resíduo seja zero nos volumes da discretização do domínio. No Método dos Elementos Finitos, a função peso é tomada como uma interpolante qualquer, geralmente é utilizado um interpolante linear (função polinomial), fazendo os valores do erro serem zero nos nós da malha. A qualidade da aproximação dos demais pontos depende do tipo de função interpolante utilizada. O Método dos Volumes Finitos é extensamente utilizado em problemas de fluidos, pois o uso da função penalidade com o valor de unidade, é fisicamente consistente em problemas que envolvem escoamentos. Nesse caso, a função peso, com valor unitário, implica que os fluxos sejam conservados em um elemento (volume), tornando esse método próprio para estudos nesse campo.

Já o Método dos Elementos Finitos tem sua aplicação voltada para problemas estruturais. Nesses problemas, por exemplo, o uso de interpolantes lineares, com função peso, representam as deflexões da curva da estrutura. Em resistência dos materiais, a estrutura é tradicionalmente tratada assumindo pequenas deflexões, e as deformações podem ser consideradas lineares, assim, o uso de funções lineares é condizente com o tratamento estrutural de problemas estruturais.

O Método de Galerkin, que pode ser considerado um tipo de Método de Elementos Finitos, propõe que as funções adotadas para aproximas uma função *f(x)* sejam as mesmas que a utilizadas em funções penalidade.

A analise da equação (A.1) em elementos finitos, por meio da formulação fraca do Método de Galerkin será feita a seguir. Os termos serão tratados separadamente apenas para facilitar a demonstração.

A.2 - Deslocamentos Transversais

Conforme visto em Ferrari (1998), considerando a formulação em elementos finitos da equação diferencial unidirecional de quarta ordem, advinda da teoria de viga de Euler-Bernoulli,

$$EI\frac{d^4v(y)}{dy^4} = q(y) \tag{A.16}$$

onde v(z) é a variável dependente que representa o deslocamento transversal a viga ao longo de x, q(z) é o carregamento distribuído, E o modulo de elasticidade e I o momento de inércia, EI, que representa a rigidez à flexão da viga, é tomada como constante. Na teoria de viga de Euler-Bernouli, é assumido que os planos das seções transversais, perpendiculares ao eixo da viga, permanecem planos e perpendiculares ao eixo depois da deformação.

O domínio da estrutura (comprimento da viga) é dividido em um conjunto de “n” elementos, cada um tendo dois nós em cada extremidade. Para se obter as equações elementares, isola-se um elemento típico e constrói-se a formulação fraca do Método de Galerkin no elemento.

A formulação fraca, em problemas de mecânica dos sólidos, pode ser desenvolvida tanto por meio do principio do trabalho virtual, ou seja, deslocamentos e forças virtuais, como por meio de equação diferencial que governa o caso.

Inicialmente, os objetivos principais são a construção da formulação fraca da equação diferencial e a classificação das condições de contorno associadas à equação. A qual a diferenciação é distribuída entre a variável dependente e a função penalidade, incluindo ainda as condições naturais do problema.

Movendo-se todas as expressões da equação (A.16) para o lado direito, multiplicando a equação inteira pela função peso w, e integrando no domínio ψ=(0,L) do problema, tem-se:

$$0 = \int_0^L w\left[EI\frac{d^4v}{dy^4} - q\right]dy \qquad \text{(A.17)}$$

A equação (A.17) representa o resíduo ponderado da equação diferencial (A.16). Quando v é substituído por sua aproximação, a expressão em colchetes não é identicamente igual a zero. Matematicamente, a equação (A.17) é a constatação de que o erro na equação diferencial, devido à aproximação da solução, é zero no sentido do resíduo ponderado.

A formulação fraca fornece duas características desejáveis: a primeira é a necessidade de uma continuidade menor da variável dependente; a segunda é a inclusão das condições de contornos naturais do problema e, portanto, a solução aproximada deve satisfazer, apenas, as condições de contorno essenciais do problema.

Retornando a equação (A.17), integra-se o primeiro termo da equação dias vezes por partes:

$$0 = \int_0^L w\left[EI\frac{d^4v}{dy^4} - q\right]dy$$

$$= \int_0^L \left[\frac{dw}{dy}\left(EI\frac{d^3v}{dy^3}\right) - wq\right]dy + \left[w\left(EI\frac{d^3v}{dy^3}\right)\right]_0^L \qquad \text{(A.18)}$$

$$= \int_0^L \left[EI\frac{d^2w}{dy^2}\frac{d^2v}{dy^2} - wq\right]dy + \left[w\left(EI\frac{d^3v}{dy^3}\right) - \frac{dw}{dy}\left(EI\frac{d^2v}{dy^2}\right)\right]_0^L$$

Com a integração do primeiro terno, troca-se duas diferenciações com a função peso w, enquanto mantém-se duas derivadas da variável dependente v. Em outras palavras, a diferenciação é distribuída igualmente entre a função peso, w, e variável dependente v.

A troca entre a diferenciação da variável dependente e a função peso, é ditada pela necessidade de incluir sentido físico aos termos do contorno na formulação fraca, ganhando-se assim nos efeitos da continuidade. A troca de diferenciações, entre as variáveis dependentes e a função peso, não deve ser feita se levar a termos no contorno sem sentido físico.

Nesse momento, uma necessidade importante é definir os dois tipos de condições de contorno, associadas com qualquer diferenciação: naturais e essenciais. Depois da troca e diferenciação entre a função e a variável e do exame de todos os termos do contorno da integral, pode-se ver que estes termos envolvem ambos os termos da função peso e da variável dependente. Coeficientes da função peso e suas derivadas, na expressão do contorno, constituem nas condições de contorno naturais.

As variáveis dependentes do problema expressas na mesma forma do que a função peso que aparece no termo do contorno, são chamadas de variáveis primarias, e sua especificação, no contorno, constitui as condições de contorno essenciais.

Por causa da integração por partes, aparecem duas expressões de contorno, as quais são avaliadas nos dois pontos do contorno, y=0 e y=L. Examinando-se os termos do contorno, tem-se que as condições de contorno essenciais são a deflexão v e a rotação dv/dy, uma vez que a função peso no termo do contorno aparece na sua forma original w e sai derivada dw/dy. As condições de contorno maturais envolvem as especificações do momento fletor $EI\dfrac{d^2v}{dy^2}$ e da força cortante $EI\dfrac{d^3v}{dy^3}$ nos pontos extremos do elemento.

Assim, existem duas condições de contorno essenciais e duas condições de contorno naturais. Portanto, devemos identificar v e dv/dy como variáveis primarias em cada nó, de maneira que as condições de contorno essenciais sejam incluídas na interpolação. As condições de contorno naturais sempre ficam na forma fraca e acabam no lado direito (vetor carregamento) da equação na forma matricial, sendo esses na forma.

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \left(EI\frac{d^3v}{dy^3}\right)_0, \\
Q_2 &= \left(EI\frac{d^2v}{dy^2}\right)_0 \\
Q_3 &= -\left(EI\frac{d^3v}{dy^3}\right)_L \\
Q_4 &= -\left(EI\frac{d^2v}{dy^2}\right)_L
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

onde Q_1 e Q_2 denotam as forças cortantes, e Q_2 e Q_4 os momentos fletores. Assim, as quantidades Q_i contendo os momentos fletores $\{Q_1,Q_2,Q_3,Q_4\}$, as quais também podem ser denominadas de “forças de momento”, são comumente chamadas de forças generalizadas. Os deslocamentos e rotações correspondentes são chamados de deslocamentos generalizados. Com a notação (A.19), a formulação fraca (A.18) é expressa como

$$0=\int_0^L\left(EI\frac{d^2w}{dy^2}\frac{d^2v}{dy^2}-wq\right)dy-w(0)Q_1-\left(-\frac{dw}{dy}\right)_0 Q_2-w(L)Q_3-\left(-\frac{dw}{dy}\right)_L Q_4 \tag{A.20}$$

A aproximação das variáveis, em um elemento, deve satisfazer as propriedades da interpolação, isto é, satisfazer as condições de contorno essenciais do elemento. Apenas por conveniência matemática, será adotada a notação $\phi=\frac{dv}{dy}$,

$v(0)=v_1$,

$v(L)=v_2$,

$\frac{dv(0)}{dy}=\phi(0)=\phi_1$,

$$\frac{dv(L)}{dy}=\phi(L)=\phi_2 \tag{A.21}$$

satisfazendo-se as condições de contorno essenciais (A.21), a aproximação automaticamente satisfaz as condições de continuidade. Portanto, as condições de contorno (A.21) são a base para o procedimento da interpolação.

Como existem um total de quatro condições de contorno em um elemento (duas por nó), será adotado um polinômio de terceira ordem que aproxima *v(y)*,

$$v(y)=\alpha_1+\alpha_2 y+\alpha_3 y^2+\alpha_4 y^3 \tag{A.22}$$

Os coeficientes α_i são obtidos por meio das condições de contorno do problema. Nota-se que a formulação fraca do Método de Galerkin, são necessárias apenas que as condições de contorno essenciais, relacionadas com a derivadas de ordem 0 e 1ª, *v(y),* $\frac{dv(y)}{dy}=\phi(y)$, sejam satisfeitas. As condições de contorno relacionadas com a derivadas de 2ª e 3ª ordem, $\frac{d^2 v(y)}{dy^2}\alpha$ momento e $\frac{d^3 v(y)}{dy^3}\alpha$ força cortante, não necessitam ser satisfeitas.

As condições de continuidade, existência de derivada não zero de v no elemento, é automaticamente satisfeita. O próximo passo envolve a determinação dos coeficientes α_i. Aplicando as condições de contorno, em (A.22), e escrevendo em forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \tag{A.23}$$

Na forma inversa tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} L^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 2 & L & -2 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \tag{A.24}$$

Substituindo a solução de α, da equação (A.24) e (A.22) tem-se:

$$v(y) = f_1(y)v_1 + f_2(y)\phi_1 + f_3(y)v_2 + f_4(y)\phi_2 \tag{A.25}$$

onde

$$f_1(y) = 1 - 3\left(\frac{y}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{L}\right)^3$$

$$f_2(y) = y - 2\left(\frac{y^2}{L}\right) + \left(\frac{y^3}{L^2}\right)$$

$$f_3(y) = 3\left(\frac{y}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{L}\right)^3$$

$$f_1(y) = -\left(\frac{y^2}{L}\right) + \left(\frac{y^3}{L^2}\right) \qquad \text{(A.26)}$$

As funções f_1, f_2, f_3, f_4, são conhecidas como funções de forma. A função, que representa a deflexão da curva dada pela equação (A.22), é obtida pela superposição linear das curvas produzidas pelos quatro graus de liberdade. As funções f_1, f_2, f_3, f_4 são da família de funções interpolantes hermitianas, a quais satisfazem as seguintes propriedades:

$$f_1(0)=1 \qquad f_i(0)=0 \qquad (i\neq 1)$$

$$f_3(L)=1 \qquad f_i(L)=0 \qquad (i\neq 3)$$

$$\left(-\frac{df_2}{dy}\right)_0 = 1 \qquad \left(-\frac{df_i}{dy}\right)_0 = 0 \quad (i\neq 2)$$

$$\left(-\frac{df_4}{dy}\right)_L = 1 \qquad \left(-\frac{df_i}{dy}\right)_L = 0 \quad (i\neq 4) \qquad \text{(A.27)}$$

Conforme dito anteriormente, pode-se notar na expressão (A.27), que em razão das suas propriedades, as condições de contorno serão satisfeitas automaticamente.

O modelo de Euler-Bernoulli de viga, em elementos finitos é obtido substituindo-se a interpolação (A.25) em v e as funções da forma f_i na função peso w na formulação fraca equação (A.20). Como existem quatro variáveis nodais v_i $(v_1, \phi_1,\ v_2, \phi_2)$, quatro escolhas diferentes são usadas para w, $w=f_1$, $w=f_2, w=f_3, w=f_4$, obtendo-se um conjunto de quatro equações algébricas. A *i*-ésima equação geométrica, para o modelo de elementos finitos, é

$$0 = \sum_{j=1}^{4}\left(\int_0^L EI\frac{d^2 f_i}{dy^2}\frac{d^2 f_j}{dy^2}dy\right)v_j - \int_0^L f_i q dy - Q_i \qquad \text{(A.28)}$$

ou

$$\sum_{j=1}^{4} K_{ij} v_j - F_i = 0 \tag{A.29}$$

onde

$$K_{ij} = \int_0^L EI \frac{d^2 f_i}{dy^2} \frac{d^2 f_j}{dy^2} dy \quad \text{e} \quad F_i = \int_0^L f_i q dy - Q_i \tag{A.30}$$

Nota-se que os coeficientes K_{ij} são simétricos $K_{ij}=K_{ji}$. Em notação matricial, pode-se escrever como:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \tag{A.31}$$

A equação (A.31) representa o modelo em elementos finitos da equação (A.16). [K] é a matriz de rigidez e {F} é o vetor de força do elemento de viga.

Tem-se então, para o sistema de coordenadas do elemento, a matriz [K] especificada na forma:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{simétrico} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{A.32}$$

O vetor incógnita {v} e o carregamento {F} são:

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{F\} = \frac{qL}{12}\begin{Bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \quad (q\text{=constante}) \tag{A.33}$$

onde v e ϕ são os deslocamentos transversais à viga e a rotação respectivamente.

Pode ser verificado que o vetor de forças generalizadas em (A.33) é o equivalente estático das forças e momentos, nos extremos dos nós de um elemento, devido a um carregamento uniformemente distribuído.

A.3 - Deslocamentos Axiais.

Para inserir os deslocamentos axiais da viga, representados pelos números 2 e 5 na figura A.1, utiliza-se a equação axial que governa um elemento sujeito a tração

$$EA\frac{d^2u(y)}{dy^2} = q \tag{A.34}$$

onde u(y) representa o deslocamento longitudinal da viga, EA (rigidez axial) é o módulo de Young multiplicado pela área transversal da viga. Seguindo o mesmo procedimento, adotado na equação dos deslocamentos transversais, o domínio da estrutura é dividido em "*n*" elementos. Obtêm-se as equações elementares, isolando-se um elemento típico e aplicando-se a formulação fraca do método de Galerkin.

Movendo-se todos os termos da equação (A.34) para o lado direito, multiplicando-se a equação inteira pela função peso w e integrando-se no domínio $\psi = (0, L)$ do problema, tem-se

$$0 = \int_0^L \left[w\left(EA\frac{d^2u}{dy^2} \right) - wq \right] dy \tag{A.35}$$

Integrando a equação (A.35) uma vez por partes,

$$0=\int_0^L\left[\frac{dw}{dy}\left(EA\frac{d^2u}{dy^2}\right)-wq\right]dy-w\left(EA\frac{du}{dy}\right)_0^L$$

$$=\int_0^L\left[\frac{dw}{dy}\left(EA\frac{d^2u}{dy^2}\right)-wq\right]dy-w\left(EA\frac{du}{dy}\right)_{x=0}-w\left(EA\frac{du}{dy}\right)_{x=L}$$

$$=\int_0^L\left[\frac{dw}{dy}\left(EA\frac{d^2u}{dy^2}\right)-wq\right]dy-(wQ)_0-(wQ)_L \tag{A.36}$$

Pode-se adotar uma função de aproximação para o deslocamento axial di tipo linear

$$u(y)=\alpha_1+\alpha_2 y \tag{A.37}$$

As condições de contorno essenciais, a serem respeitadas, dizem respeito, apenas, aos deslocamentos em cada um das extremidades,

$$u(0)=u_1 \text{ e } u(L)\text{-}u_2 \tag{A.38}$$

Na forma matricial,

$$\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & L\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{Bmatrix} \tag{A.39}$$

Substituindo-se as soluções de α da equação (A.39) na equação (A.37), tem-se

$$u(y)=f_1(y)u_1+f_2(y)u_2 \tag{A.40}$$

onde as funções de forma são:

$$f_1(z)=1-\frac{y}{L}$$

$$f_2(z) = \frac{y}{L} \tag{A.41}$$

Aplicando-se o Método de Galerkin na equação (A.34), de modo análogo ao procedimento feito para a viga transversal, na da equação (A.28), tem-se, no sistema de coordenada local, o modelo em elementos finitos da viga sujeita a forças axiais,

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.42}$$

o vetor incógnita $\{u\}$ e o carregamento $\{F_z\}$ são:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \text{ e } \{F_z\} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{qL}{2} \\ -\dfrac{qL}{2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \tag{A.43}$$

onde u_z e F_z são o deslocamento e a força axiais respectivamente, atuando nas extremidades do elemento.

A.4 - Viga com Deslocamentos Axiais e Transversais

Combinando a matriz unidimensional da barra co deslocamentos axiais (A.42) e a matriz bidimensional da barra fletida (A.32), pode-se compor parte da matriz de rigidez do elemento com seis graus de liberdade, mostrados na figura A.1, resultando em

$$
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\
 & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
 & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 & \text{Simétrico} & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
 & & & & & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{\phi}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\phi}_2 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} \overline{F}_{z1} \\ \overline{F}_{x1} \\ \overline{M}_1 \\ \overline{F}_{z2} \\ \overline{F}_{x2} \\ \overline{M}_2 \end{Bmatrix}
\tag{A.44}
$$

A matriz (A.44) é denominada matriz de rigidez elástica elementar. Foi obtida pela superposição da matriz de rigidez axial e da matriz que representa o modelo da viga de Euler-Bernoulli. As barras acima das incógnitas, no vetor deslocamento e nos esforços no vetor força, são apenas para realçar que a matriz se refere ao sistema de coordenadas local, o qual tem o eixo y coincidente com o eixo longitudinal da viga. A variável $\overline{u}$ denota os deslocamentos axiais a viga, direção do eixo local x, e ϕ a rotação no plano xy.

Em um caso mais geral, o "riser" pode estar inclinado e a matriz (A.44) estar escrita em um sistema de coordenadas locais com eixos na direção axial e outro transversal a este.

Pode-se passar do sistema de coordenadas locais para um sistema global, utilizando-se das seguintes relações:

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_i &= u_i \cos\beta + v_i \operatorname{sen}\beta \\
\overline{v}_i &= u_i \operatorname{sen}\beta + v_i \cos\beta \\
\overline{\phi}_i &= \phi_i
\end{aligned}
\tag{A.45}
$$

onde β representaria o ângulo formado entre o eixo global Y com o eixo local y, medido no sentido horário positivo.

A mesma filosofia adotada para resolver o problema da viga em flexão pode ser utilizada para coluna na sujeita a carregamento axial (termo $-(T+p_0A_0-p_iA_i)\dfrac{d^2v(y)}{dy^2}$ na equação (A.1)). Assumindo uma função que aproxima o termo $\dfrac{d^2v(y)}{dy^2}$, encontrando a função de forma, aplicando o Método de Galerkin, integrando por partes uma vez a relação <R,w>, sendo R a função residual igual a $-(T+p_0A_0-p_iA_i)\dfrac{d^2v(y)}{dy^2}$, tem-se como resultado no sistema local de coordenadas:

$$\pm\frac{(T+p_0A_0-p_iA_i)}{L}\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & \frac{2L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ & & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ \text{Simétrico} & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\phi}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{(A.46)}$$

onde o sinal positivo significa que o elemento do "riser" está sob tração enquanto o sinal de menos indica compressão. A matriz (A.46) é chamada de matriz de rigidez geométrica, que é função da força axial no elemento.

Combinando as equações (A.44) e (A.46) e transformando em sistema de coordenadas globais os termos da matriz de rigidez, obtém-se a equação básica de "riser" rígido cuja forma geral é dada pela seguinte expressão:

$$([KE]+[KG(d)])\{d\}=\{F\} \qquad \text{(A.47)}$$

onde [KE] é a matriz global de rigidez elasticidade que é dada pela montagem da matriz de rigidez para cada elemento. A matriz de rigidez elástica elementar é dada por:

$$
\frac{EI}{L}\begin{bmatrix}
Rc^2+\frac{12}{L^2}s^2 & \left(R-\frac{12}{L^2}\right)cs & -\frac{6}{L}s & -Rc^2-\frac{12}{L^2}s^2 & \left(-R-\frac{12}{L^2}\right)cs & -\frac{6}{L}s \\
 & Rs^2+\frac{12}{L^2}c^2 & \frac{6}{L}c & \left(-R-\frac{12}{L^2}\right)cs & -Rs^2-\frac{12}{L^2}c^2 & \frac{6}{L}c \\
 & & & \frac{6}{L}s & -\frac{6}{L}c & 2 \\
 & \text{Simétrico} & & Rc^2+\frac{12}{L^2}s^2 & \left(R-\frac{12}{L^2}\right)cs & \frac{6}{L}s \\
 & & & & Rs^2+\frac{12}{L^2}c^2 & -\frac{6}{L}c \\
 & & & & & 4
\end{bmatrix} \quad (A.48)
$$

onde Ré definido como a relação entre a área da seção transversal e o segundo momento de inércia de área (A/I), c é definido como cosβ e s como senβ.

[KG(d)] é a matriz global de rigidez geométrica que é dada pela construção da matriz de rigidez geométrica pra cada elemento. A matriz elementar de rigidez geométrica é dada por:

$$
\pm\frac{(T+p_0A_0-p_iA_i)}{L}\begin{bmatrix}
\frac{6}{5}s^2 & -\frac{6}{5}sc & -\frac{L}{10}s & -\frac{6}{5}s^2 & \frac{6}{5}sc & -\frac{L}{10}s \\
 & \frac{6}{5}c^2 & \frac{L}{10}c & \frac{6}{5}sc & -\frac{6}{5}c^2 & \frac{L}{10}c \\
 & & \frac{2L^2}{15} & \frac{L}{10}s & -\frac{L}{10}c & -\frac{L^2}{30} \\
 & & & \frac{6}{5}s^2 & -\frac{6}{5}sc & \frac{L}{10}s \\
 & \text{Simétrico} & & & \frac{6}{5}c^2 & -\frac{L}{10}c \\
 & & & & & \frac{2L^2}{15}
\end{bmatrix} \quad (A.49)
$$

{d} é o vetor de deslocamento (solução), dada por duas translações e uma rotação em cada nó.
{F} é o vetor força, dada pela força longitudinal (peso próprio), força transversal (arrasto e inércia devido a corrente e onda) e momento fletor em cada nó. Aplicando o Método de Galerkin nos termos do lado direito da equação (A.1), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -wL/2 \\ qL/2 \\ qL^2/12 \\ -wL/2 \\ qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix} \tag{A.50}$$

onde $w(\gamma_s A_s)$ é definido como o peso do aço por unidade de comprimento de "riser" no ar, e q é o carregamento distribuído devido a ação da onda e corrente e um carregamento lateral efetivo derivado do termo $(\gamma_s A_s + \gamma_s A_s - \gamma_s A_s)\dfrac{dx}{dy}$ na equação (A.1).

A soma da matriz de rigidez elástica com a matriz de rigidez geométrica fornecerá a matriz de rigidez global. A dimensão dessa matriz era depender do numero de elementos considerados na discretização do sistema. Quanto maior o numero de elementos maior será a precisão obtida no resultado final. Se, por exemplo, considerarmos um "riser" discretizado em 100 elementos com condições de contorno constantes em relação a translação ao nó mais próximo ao fundo e o deslocamento "in line" no nó da superfície, a matriz global de regidez terá 300 colunas e 300 linhas e assim se terá 300 variáveis no problema (3 variáveis para cada nó, 101 nós e 3 condições de contorno homogêneas).

Deve-se notar que a tração T na equação (A.49) é influenciada somente pelo peso do "riser" por unidade de comprimento no ar, uma vez que o "riser" é considerado fixo no fundo do mar durante a analise, assim, a tensão T ao longo do "riser" deve ser tomada como,

$$T(y) = TTOP - \gamma_s A_s (y_{top} - y) \tag{A.51}$$

onde *TTOP* é a tensão de topo, y_{top} é a coordenada do topo do "riser", y é a coordenada longitudinal do "riser".

A solução para o "riser" vertical é não-linear já que a matriz de rigidez geométrica é função do deslocamento de cada nó. De fato, a tensão axial T para cada elemento depende do esforço ao qual o próprio elemento está submetido.

Com o objetivo de encontrar a configuração estática do "riser" (vetor {d}), é adotado um procedimento incremental-iterativo. Esse procedimento é dado por uma seqüência de cálculos no qual a estrutura é submetida a um carregamento total em cada iteração. Após cada iteração, uma parte do carregamento total {F} que não é balanceada é calculada e usada em um próximo passo para se calcular um incremento adicional dos deslocamentos. Durante a aplicação de cada carregamento desbalanceado, as equações são assumidas lineares, ou seja, o valor de [K] é fixo para cada iteração. Esse processo é repetido até que o equilíbrio seja atingido. Essencialmente, o procedimento iterativo consiste em realizar correções sucessivas da solução até que o equilíbrio sobre condições de carregamento total {F} seja satisfeito. Há vários métodos para o calculo da matriz de rigidez [K] em cada iteração. Uma escolha comum é a secante de rigidez no final do passo iterativo anterior, que é uma rampa passando pela origem de {F} versus a curva {d} para cada ponto.

O método da secante segue os seguintes passos:

Equação geral: $([KE]+[KG(d)])\{d\}=\{F\}$

1) $[KE]\{d_1\}=\{F\}\rightarrow\{d_1\}$

2) $\{d_1\}\rightarrow[KG(d_1)]$ (A.52)

3) $([KE]+[KG(d_1)])\{\Delta d_1\}=\{\Delta F_1\}\rightarrow\{\Delta d_1\}$

onde $\{\Delta F_1\}$ = vetor de força desbalanceada $\rightarrow$ $\{F\}-([KE]+[KG(d_1)])\{d_1\}$

4) $\{d_2\}=\{d_1\}+\{\Delta d_1\}\rightarrow[KG(d_2)]$

.

.

5) $([KE]+[KG(d_i)])\{\Delta d_i\}=\{\Delta F_i\}\rightarrow\{\Delta d_i\}$

Se $|\Delta F_i|\leq\varepsilon\rightarrow$ equilíbrio e solução $\cong$ $\{d_{i+1}\}=\{d_i\}+\{\Delta d_i\}$

O principal efeito de grandes deslocamentos é que não se pode desprezar as mudanças de geometria causadas por esse tipo de deslocamento para se obter uma solução mais precisa do comportamento do “riser”, o vetor {ΔF} também deve ser recalculado após casa iteração levando em conta as mudanças geométricas. Esse procedimento é particularmente importante já que permite considerações da influencia da mudança no termo $w\frac{dx}{dy}$ da equação (A.1) na montagem do vetor de carregamento. Dessa forma, a matriz de rigidez assim como o vetor de carregamento devem ser recalculados após casa iteração.

Para “riser” curto, a matriz de rigidez geométrica terá pequena influencia na matriz de rigidez global. Nesse caso em particular, a matriz de rigidez geométrica pode ser ignorada sem causar erros significativos ao problema, mas, por outro lado, a matriz de rigidez geométrica aumenta sua importância no caso de “riser” longo. A nova geometria do “riser” a tensão axial elementar devem ser estimadas no fim de cada iteração assim que a matriz de rigidez e o vetor de carregamento puderem ser atualizados para a próxima iteração. Por questão de simplicidade, assume-se que o material do “riser” é linearmente elástico, ou seja, cada elemento se alonga linearmente permitindo a utilização da conhecida Lei de Hooke,

$$\sigma = \frac{T}{A} = E\varepsilon \text{ , onde } \varepsilon = \frac{dv}{dy} \qquad \text{(A.53)}$$

assumindo pequenos esforços e somente deformação axial.

Apêndice B

Montagem das Matrizes de Massa, Amortecimento e Rigidez

B.1. Matriz de Massa

A formulação de uma matriz de massa, de um elemento de viga, pode ser feita tanto de uma forma consistente, como de uma maneira concentrada. A formulação consistente seguiria a mesma metodologia para encontrar a matriz de rigidez global, feita anteriormente no Capítulo 2. Seria usada a técnica de elementos finitos e a matriz de massa seria computada utilizando-se as mesmas funções de forma usadas para derivar a matriz de rigidez. O acoplamento entre os termos fora da diagonal existiria, e todos os graus de liberdade, referentes à rotação e translações seriam considerados.

A matriz de massa consistente poderia ser obtida por meio da aplicação do Método de Galerkin nos termos de aceleração das equações que regem o fenômeno. As equações de movimento poderiam ser encontradas por meio da segunda dei de Newton, aplicada em um elemento de viga vertical de massa Δm (Ferrari (1998)), com a seguinte forma:

Para deslocamentos transversais e rotações:

$$EI(z) = \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - T(z)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{dt^2} = N(z,t) \tag{B.1}$$

Para deslocamentos axiais

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(z,t) \tag{B.2}$$

nota-se que as equações (B.1) e (B.2), a menos dos termos relativos a segunda derivada no tempo, são idênticas as equações transversais axial estáticas.

Uma formulação alternativa, para formar a matriz de massa, é utilizar uma aproximação concentrada. Nesse caso, assume-se que a massa inteira está concentrada nos nós e somente os graus de liberdade translacionais são definidos. Nesse tipo de sistema, a matriz de massa tem a forma diagonal. Termos fora da diagonal desaparecem, uma vez que a aceleração da massa, de qualquer ponto nodal, produz somente uma força de inércia naquele ponto.

A matriz de massa concentrada, para cada elemento, é obtida concentrando-se metade da massa total do material do "riser" e fluidos internos, em cada extremo do elemento, ficando da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\rho_s A_s + \rho_i A_i)L & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\rho_s A_s + \rho_i A_i)L \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

onde ρ_s é a densidade do aço, A_s é a área transversal da parede do "riser", ρ_i é a densidade do fluido interno e A_i é a área transversal somente do furo interno.

A matriz de massa total da estrutura é montada a partir da superposição das matrizes de massa elementares, matriz (B.3), a qual multiplica o vetor de acelerações dos nós do elemento, equações (4.2) e (4.3)

B.2. Matriz Concentrada de Rigidez.

Na aproximação concentrada, todos os graus de liberdade, referentes ao deslocamento vertical e a rotação devem ser eliminados da matriz de rigidez global. Realizando-se esse procedimento, tem-se uma redução substancial no armazenamento de dados e no tempo de simulação da análise dinâmica. A matriz de rigidez concentrada pode ser obtida separando-se os graus de liberdade horizontais das outras variáveis. A equação de força pode ser particionada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} K_{HH} & K_{HVR} \\ K_{VRH} & K_{VRVR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_H \\ D_{VR} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_H \\ F_{VR} \end{Bmatrix} \tag{B.4}$$

onde os subscritos H,V e R representam, respectivamente, os graus de liberdade horizontais, verticais e rotação. Por exemplo, K_{HH} representa os elementos da matriz de rigidez consistente que multiplicam os graus de liberdade horizontais.

Desprezando-se as contribuições das forças verticais e o momentos, tem-se:

$$\begin{bmatrix} K_{HH} & K_{HVR} \\ K_{VRH} & K_{VRVR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_H \\ D_{VR} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_H \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{B.5}$$

Da equação (B.5) pode-se obter,

$$[K_{VRH}]\{D_H\} + [K_{VRVR}]\{D_{VR}\} = 0 \tag{B.6}$$

$$\{D_{VR}\} = -[K_{VRVR}]^{-1}[K_{VRH}]\{D_H\} \tag{B.7}$$

$$[K_{HH}]\{D_H\} + [K_{HVR}]\{D_{VR}\} = \{F_H\} \tag{B.8}$$

$$\underbrace{\left([K_{HH}] - [K_{HVR}][K_{VRVR}]^{-1}[K_{HVR}]\right)}_{[K_{LUMPED}]}\{D_H\} = \{F_H\} \tag{B.9}$$

Assim, a matriz de rigidez condensada oi reduzida, utilizada na equação dinâmica (4.1) é dada por:

$$[K_{LUMPED}] = [K_{HH}] - [K_{HVR}][K_{VRVR}]^{-1}[K_{HVR}] \quad \text{(B.10)}$$

onde K_{LUMPED} é a matriz de rigidez concentrada.

A matriz de rigidez concentrada foi derivada da matriz de rigidez consistente, obtida no Capitulo 2. A matriz (B.10) será a matriz de rigidez [K] das equações (4.2) e (2.3), utilizadas na resolução dinâmica da estrutura no domínio do tempo. Nessa situação, diferentemente do modelo estático, onde se resolviam os graus de liberdade verticais e rotacionais juntamente com os horizontais, apenas os graus de liberdade horizontais são encontrados.

No caso da matriz de rigidez na direção "in-line", paralela ao escoamento, equação (4.2), utiliza como base a matriz na sua configuração já deformada, uma vez que a matriz de rigidez concentrada permanece constante ao longo de toda simulação. A matriz de uma configuração já deformada, aproxima-se mais de uma configuração media da estrutura, no estudo das vibrações.

No caso da matriz de rigidez na direção transversal ao escoamento, equação (4.3), a configuração média em torno da qual se dá as vibrações é a posição neutra da estrutura. É válido observar que a resolução de um sistema estático, utilizando-se a matriz de rigidez concentrada (B.10), fornecerá uma solução idêntica a solução estática, utilizando-se a matriz de rigidez consistente, com as mesmas forças verticais e momentos nulos.

B.3. Matriz de amortecimento Estrutural

O amortecimento estrutural é resultado da dissipação de energia pela estrutura, devido aos próprios componentes estruturais, por exemplo, atrito das juntas do "riser" ou ao amortecimento interno do material que constitui a estrutura. O amortecimento viscoso, originado a partir da viscosidade do fluido ao redor do "riser", não é contabilizado nessa matriz.

A matriz de amortecimento pode ser obtida de forma consistente análogo ao usado na matriz de rigidez consistente mostrado no Capitulo 2. Entretanto, como visto em Ferrari (1998), a tarefa de definir as propriedades de amortecimento do material, juntamente com a definição do atrito nas juntas, que conectam o "riser", é extremamente difícil e imprecisa, preferindo-se, então, definir o amortecimento estrutural de uma forma global, considerando o sistema como um todo, ao invés da soma de propriedades de elementos individuais.

Uma maneira de definir a matriz de amortecimento do sistema é aplicar o método de amortecimento proporcional, chamado de "amortecimento de Rayleigh", que define o amortecimento como,

$$[B]=a_0[M]+a_1[K] \tag{B.11}$$

As constantes a_0 e a_1 podem ser escolhidas de forma a produzir o efeito do amortecimento de dois modos de vibrar predominantes, desde que sejam definidos os seus fatores de amortecimento. A matriz de amortecimento é escrita como uma soma da matriz de massa [M] e de rigidez [K], ponderadas pelas constantes a_0 e a_1.

Seja (ϖ_r,ϕ_r) a freqüência natural e o autovalor correspondente a um modo r, respectivamente, de tal forma que se tenha

$$\left([K]-\varpi_r^2[M]\right)\phi_r=0 \quad r = 1,2,3... N \tag{B.12}$$

onde N é o numero de modos de vibrar.

Baseado nas propriedades de ortogonalidade dos modos naturais de vibrar, tem-se

$$\begin{aligned}\phi_r^T[M]\phi_s&=\overline{M}_r\delta_{rs}\\ \phi_r^T[M]\phi_s&=\varpi_r^2\overline{M}_r\delta_{rs}\end{aligned} \tag{B.13}$$

onde $\overline{M}$ é a massa modal do modo r, definida como $\overline{M}_r=\phi_r^T[M]\phi_r$, o sobrescrito T denota a transposta da matriz e δ_{rx} é o Delta de Kronecker que possui a seguinte propriedade:

$$\delta_{rs} = \begin{cases} \delta_{rs} = 1 & se \quad r = s \\ \delta_{rs} = 0 & se \quad r \neq s \end{cases}$$

Pela equação (B.11) o amortecimento de Rayleigh é definido como

$$\phi_r^T [B] \phi_s = \left(a_0 + a_1 \varpi_r^2\right) \overline{M}_r \delta_{rs} \tag{B.14}$$

De maneira análoga a matriz de massa modal, pode-se definir a matriz de amortecimento modal,

$$\overline{B}_r = \phi_r^T [B] \phi_r \tag{B.15}$$

e de maneira análoga a definição do fator de amortecimento, para um sistema com um único grau de liberdade,

$$\zeta = \frac{b}{2m\varpi_n} \tag{B.16}$$

onde ζ é o fator de amortecimento, m a massa, b o amortecimento e ω_n a freqüência natural do sistema com um grau de liberdade, pode-se obter a seguinte relação do amortecimento para o sistema com múltiplos graus de liberdade,

$$\overline{B}_r = \phi_r^T [B] \phi_r = 2\overline{M}_r \omega_r \zeta_r \tag{B.17}$$

onde $\overline{B}_r$ é a matriz de amortecimento modal do modo r e ζ_r é o fator de amortecimento modal correspondente ao modo.

Então, pode-se construir um sistema com os fatores de amortecimentos, igualando o lado direito da equação (B.14) com o lado direito da expressão (B.17), fornecendo,

$$\zeta_r = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{\omega_r} + a_1\omega_r\right) \quad \text{(B.18)}$$

Assim, torna-se direto construir a matriz de amortecimento de Rayleigh, uma vez definido dois modos principais em que a estrutura vibra. Fornecidos os modos, sues respectivos fatores de amortecimento ζ_r e calculando suas freqüências naturais ω_r, pode-se encontrar os coeficientes a_0 e a_1. A desvantagem desse método, de obtenção da matriz de amortecimento estrutural, reside claramente na impossibilidade de definir o amortecimento para todos os modos de interesse. Fica-se restrito a dois modos principais.

Nota-se que, para construir a matriz de amortecimento estrutural, utilizando-se o método descrito anteriormente, é necessário que se saiba previamente as freqüências naturais dos dois modos de vibrar de interesse, modos dominantes, para tanto é necessário uma analise de autovalores.

Essa analise pode ser feita numericamente, pelas matrizes de rigidez e de massa, ambas na forma consistente. Seguindo a maneira tradicional para solucionar o problema de autovalores, tem-se a equação de movimento,

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{d\} = 0 \quad \text{(B.19)}$$

A equação (B.19) é a equação do movimento para um sistema de múltiplos graus de liberdade, sem amortecimento e com oscilação livre. Sua solução usual é uma forma harmônica do tipo

$$\{x\} = \{x_0\}\cos(\omega t - \alpha) \quad \text{(B.20)}$$

onde $\{d_0\}$ é o vetor correspondente aos deslocamentos iniciais, ω é a freqüência natural e α é o ângulo de fase.

Substituindo-se a solução harmônica (B.20) na equação (B.19) tem-se,

$$\left(-\omega^2[M]+[K]\right)\{d_0\}\cos\{\omega t-\alpha\}=0 \tag{B.21}$$

Como o termo com o cosseno no pode ser igual a zero todo instante de tempo, tem-se

$$\left(-\omega^2[M]+[K]\right)\{d_0\}=\{0\} \tag{B.22}$$

A equação (B.22) descreve o problema de autovalores linearizada e, para se obter uma solução não trivial, é necessário que

$$\det\left([K]-\omega^2[M]\right)=\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0 \tag{B.23}$$

A equação (B.23) é chamada de equação característica do sistema, a sua solução fornecerá os autovalores ω^2, que são as freqüências naturais, ω, do sistema elevado ao quadrado.

Ferrari (1998) apresenta um método direto para determinação dos autovalores para o caso de um "riser" rígido vertical. Considerando-se uma viga, com seção transversal A constante e sujeita à tração axial T nos extremos, tem-se a equação descrita na seguinte forma:

$$EI\frac{\partial^4 v}{dz^4}-T\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\rho A\frac{\partial^2 v}{dt^2}=0 \tag{B.24}$$

tendo-se como condições de contorno uma viga livre para rotacionar nos extremos, a solução que satisfaz essas condições é

$$v=B\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\,sin\left(\omega_n t+\alpha\right) \tag{B.25}$$

onde L é o comprimento da viga, B é uma constante e α é uma diferença de fase.

A solução da equação (B.25) satisfaz a equação (B.24) se

$$EI\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + T\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \rho A \omega_n^2 = 0 \qquad \text{(B.26)}$$

Assim, a freqüência natural é dada por

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)\left[\frac{EI}{\rho A}\left(1 + \frac{TL^2}{n^2\pi^2 EI}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad n = 1,2,3.... \qquad \text{(B.27)}$$

Modificações na equação (B.27) podem ser feitas de modo a ajusta-la para simular o comportamento de um "riser". Inserindo-se a tração axial média na equação e considerando-se que existe fluido dentro do "riser", tem-se:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left[\frac{EI}{\rho A^*}\left(1 + \frac{\overline{T}L^2}{n^2\pi^2 EI}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad n = 1,2,3... \qquad \text{(B.28)}$$

onde $\rho A^* = \rho_s A_s - \rho_i A_i$, A_i é a área transversal somente do furo do "riser", A_s a área transversal da parede do "riser", ρ_i a densidade do fluido interno do "riser", ρ_s é a densidade do material da parede do "riser" e

$$\overline{T} = \frac{T(top) + T(fundo)}{2} \qquad \text{(B.29)}$$

Considerando-se a equação (B.28), pode-se observar que o aumento da tração no topo conseqüentemente de $\overline{T}$ provoca o aumento das freqüências naturais, por outro lado, a medida que a profundidade aumenta, o "riser" mais comprido tende a ficar mais flexível. Como descrito por Ferrari (1998), comparações entre os valores obtidos pela expressão (B.28) e os valores obtidos numericamente resolvendo-se o problema de autovalor descrito pela equação (B.23) tem boa concordância, com um erro menor que 5% entre eles. Como conclusão, a equação (B.28) pode ser utilizada como uma maneira direta de se estimar as freqüências naturais do “riser”, lembrando-se ainda que a matriz de amortecimento é obtida considerando-se o sistema como um todo, devido à dificuldade de se quantificar os vários fatores que envolvem seu calculo, o que torna o erro implícito na formulação teórica menos relevante ainda.

Apêndice C

Solução da Equação Dinâmica de "Riser" Rígido no Domínio do Tempo

Para se determinar a solução da equação dinâmica de movimento muitos métodos de integração numérica podem ser utilizados. Métodos de integração no tempo tem como característica fundamental aproximar as derivadas que aparecem, nos sistema de equações do movimento, e gerar uma solução passo a passo com intervalor de tempo Δt. A solução dos deslocamentos, no final de cada intervalo, fornece as condições para o começo do intervalo seguinte. Um dos métodos de integração numérica comumente utilizado para determinar a resposta de estruturas é o Método de Newmark β, o qual será utilizado para resolução da equação dinâmica no presente trabalho e descrito a seguir.

O Método de Newmark é um integrador de passo simples, ou seja, as equações de integração desse método são funções apenas do deslocamento, velocidade e aceleração no instante de tempo t, que serão utilizados para encontrar a solução de uma equação de movimento de segunda ordem (equação (4.2) e (4.3)) para o instante de tempo t+Δt. O Método de Newmark pode ser considerado como uma extensão do método da Aceleração Média obtido através da expansão da série de Taylor dos deslocamentos e velocidades.

As fórmulas para a solução numérica do método de Newmark β são:

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + (1-\gamma)\Delta t \ddot{x}_t + \gamma \Delta t \ddot{x}_{t+\Delta t} \tag{C.1}$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{x}_t + \Delta t^2 \beta \ddot{x}_{t+\Delta t} \tag{C.2}$$

onde as constantes γ e β são parâmetros, respectivamente associados à precisão e estabilidade do método. Quando $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{6}$, as equações (C.1) e (C.2) correspondem a uma interpolação linear da aceleração

A proposta de Newmark para um método incondicionalmente estável foi o método da aceleração média, ou seja:

$$x(t^{\prime}) = \frac{\ddot{x}_t + \ddot{x}_{t+\Delta t}}{2} \tag{C.3}$$

assume que $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$, onde t´ da equação (C.3) é o incremento no tempo.

Substituindo a equação (C.1) na (C.2) com $\beta = \frac{1}{4}$, tem-se

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \frac{2(x_{t+\Delta t} - x_t)}{\Delta t} - \dot{x}_t \tag{C.4}$$

Escrevendo a equação geral de movimento para três intervalos de tempo sucessivos, chamados de t-Δt, t, t+Δt, obtém-se:

$$[M]\ddot{x}_{t+\Delta t} + [B]\dot{x}_{t+\Delta t} + [K]x_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} \tag{C.5}$$

$$[M]\ddot{x}_t + [B]\dot{x}_t + [K]x_t = F_t \tag{C.6}$$

$$[M]\ddot{x}_{t-\Delta t} + [B]\dot{x}_{t-\Delta t} + [K]x_{t-\Delta t} = F_{t-\Delta t} \tag{C.7}$$

Multiplicando as equações (C.5) e (C.7) por $(\Delta t)^2 \beta$ e a equação (C.6) por $(\Delta t)^2(1-2\beta)$, somando, re-arranjando e substituindo na equação (C.1) e (C.2), para $\beta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$

$$\left([M_T]+\frac{1}{2}\Delta t[B]+\frac{(\Delta t)^2}{4}[K]\right)x_{t+\Delta t} = (\Delta t)^2\left[\frac{1}{4}\left(F_{t+\Delta t}+F_{t-\Delta t}\right)+\frac{1}{2}F_t\right]+\left[2[M_t]-\frac{(\Delta t)^2}{2}[K]\right]x_t - \left[[M_T]-\frac{\Delta t}{2}[B]+\frac{(\Delta t)^2}{4}[K]\right]x_{t-\Delta t} \tag{C.8}$$

onde $[M_T]=[M]+C_A\frac{\pi D_0^2}{4}\rho_0 L$, ou seja, a massa do "riser" somada a massa adicional resultando na massa total do sistema. De acordo com a aproximação de massa concentrada, a qual será utilizada aqui, metade da massa total deve ser concentrada em cada extremidade do elemento (nó) do "riser".

Como apresentado anteriormente, o valor da força de excitação F, incluído as condições de contorno do topo do riser, para um tempo t é dada por

$$\left(C_M\frac{\rho_0\pi_0 D_0^2}{4}L\right)\dot{u}_t+\frac{1}{2}C_D\rho_0 D_0 L\left|U_c+u-\dot{x}\right|_t\left(U_c+u-\dot{x}\right)_t - F_{top_t} \tag{4.9}$$

onde $F_{top_t} = [B_{AB}]\dot{x}_{top_t} + [K_{AB}]x_{top_t}$

Na equação (C.9) o sufixo B representa translação enquanto o sufixo a denota todos os outros graus de liberdade do "riser". Utilizando a equação (C.8), o vetor de deslocamento x para o tempo t+Δt pode ser obtido com o conhecimento prévio dos valores determinados do mesmo vetor e valores conhecidos do vetor de força. A equação (C.8) fornece a resposta do "riser" para tempos 2Δt, 3Δt, 4Δt,.... Para o vetor x em um tempo Δt, a forma modificada da equação (C.9) é obtida a partir das equações (C.5) e (C.6) e das equações (C.1) e (C.2) para $\beta = \frac{1}{4}$ tem-se

$$\left([M_T] + \frac{1}{2}\Delta t[B] + \frac{(\Delta t)^2}{4}[K] \right) x_{\Delta t} = \frac{(\Delta t)^2}{4}[F_{\Delta t} + F_0] \quad \text{(C.10)}$$

assumindo que para t = 0, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $x_{top0} = 0$, e $\dot{x}_{top0} = 0$. Assim, assumindo essa hipótese, a força de excitação para o tempo t = 0 será

$$\left(C_M \frac{\rho_0 \pi D_0^2}{4} L \right) \dot{u}_0 + \frac{1}{2} C_D \rho_0 D_0 L |U_c + u|_0 (U_c + u)_0 \quad \text{(C.11)}$$

Observando-se as equações (C.8) e (C.9), nota-se que o valor da velocidade $\dot{x}$ deve ser conhecido para o tempo Δt assim como o deslocamento x pode ser calculado para esse mesmo tempo. Em outras palavras, a força de excitação para o tempo Δt depende da velocidade relativa do "riser" em relação ao fluido, cujo calculo requer que a velocidade do "riser" seja previamente conhecida. Conseqüentemente, a solução da equação (C.8) é iterativa ao redor de valores da velocidade do "riser", que é atualizado para cada final de iteração e comparado com valores do inicio da iteração. Dessa forma, a equação (C.4) deve ser utilizada para estimar a velocidade do "riser" no final de cada interação. Normalmente três ou quatro iterações são suficientes para convergência.