

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Roberto Funes Abrahão
E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 03 / 04 / 97.

mfj
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

**DESENVOLVIMENTO DE ELEMENTOS FINITOS
QUADRILATERAIS SUBPARAMÉTRICOS PARA
ANÁLISE DE PLACAS**

Autor: Roberto Funes Abrahão o/L
Orientador: Loir Afonso Moreira o/L

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Projeto Mecânico

Tese de Doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica

Campinas, 1997
S.P. - Brasil

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	UNICAMP
Ab82d	
Ex.	
CNBSO BC/	32059
ROC.	281197
C	☐
D	☒
RECO	R\$ 11,00
ATA	15/11/97
CPD	

CM-00102102-6

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Abrahão, Roberto Funes
Ab82d Desenvolvimento de elementos finitos quadrilaterais
subparamétricos para análise de placas / Roberto Funes
Abrahão .—Campinas, SP: [s.n.], 1997.

Orientador: Loir Afonso Moreira
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Placas e cascas
elásticas. 3. Engenharia de estruturas. I. Moreira, Loir
Afonso. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

TESE DE DOUTORADO

**DESENVOLVIMENTO DE ELEMENTOS FINITOS
QUADRILATERAIS SUBPARAMÉTRICOS PARA
ANÁLISE DE PLACAS**

Autor: Roberto Funes Abrahão

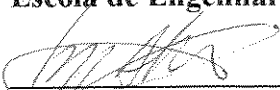
Orientador: Loir Afonso Moreira



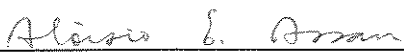
**Prof. Dr. Loir Afonso Moreira , Presidente
Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP**



**Prof. Dr. João Lirani
Escola de Engenharia de São Carlos, USP**



**Prof. Dr. Ignácio Maria Dal Fabbro
Faculdade de Engenharia Agrícola, UNICAMP**



**Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan
Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP**



**Prof. Dr. Sérgio Tonini Button
Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP**

Campinas, 03 de Abril de 1997

Dedico este trabalho
à minha esposa Valéria,
à minha filha Fernanda e,
particularmente,
ao meu filho Lucas,
por sua generosidade e despreendimento,
permitindo-me o uso do nosso computador,
em meio aos urros, tiros e ruídos gerais
dos *computer games*.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Loir Afonso Moreira pela orientação, apoio, amizade e compreensão; por criar um ambiente de pesquisa livre e estimulante; pelo rigor e seriedade e, finalmente, por oferecer um modelo de atuação como orientador que se procura seguir.

Aos amigos Marcelo de Almeida Pierossi, Amarildo Taboni Paschoalini e Marco Lúcio Bittencourt pela colaboração indispensável na implementação do programa computacional.

Aos amigos e colegas Oscar Antonio Braunbeck e Paulo Sérgio Graziano Magalhães pela ajuda preciosa relacionada às minhas obrigações docentes.

Aos colegas do Departamento de Máquinas Agrícolas por possibilitarem minha dedicação intensiva a este trabalho.

A Ana Cristina M. G. Flosi, Eliane A. Custódio, Fabiana M. da Costa e Tânia L. Garcia pela gentileza diária e pelo apoio administrativo.

Aos amigos Edgar A Lombardi e Alberto Nogueira da Costa, pelo apoio na elaboração dos desenhos e gráficos.

“todo pensamento emite um lance de dados”
S. Mallarmé

DESENVOLVIMENTO DE ELEMENTOS FINITOS QUADRILATERAIS SUBPARAMÉTRICOS PARA ANÁLISE DE PLACAS

RESUMO

Desenvolve-se, neste trabalho, um conjunto de elementos finitos quadrilaterais subparamétricos para análise de placas finas e de placas moderadamente grossas, formulados a partir do conceito de *sólido degenerado* e baseados na teoria de *Mindlin - Reissner*. A interpolação da geometria dos elementos é feita utilizando-se o elemento quadrilateral quadrático de oito nós da família Serendipity. Já o campo de deslocamento é interpolado a partir de um elemento quadrilateral de quatro nós através de polinômios associados aos nós e ao interior do elemento. São empregados seis esquemas diferentes de interpolação, produzindo seis formulações subparamétricas distintas, pelo uso de polinômios de primeiro, terceiro e quarto grau. Os graus de liberdade, para cada formulação, resumem-se a cinco graus de liberdade físicos por nó e a três graus de liberdade não físicos para cada polinômio associado ao interior do elemento. As matrizes de rigidez e vetores de carga são obtidos através de integração numérica reduzida, empregando-se (2×2) pontos de integração no plano médio das placas.

As formulações são implementadas em um programa computacional desenvolvido em linguagem C e os resultados, para diversas geometrias e condições de contorno, são comparados com o desempenho de elementos clássicos e de elementos de programas computacionais de caráter comercial.

Conclui-se que as formulações desenvolvidas neste trabalho são atrativas em função de sua simplicidade e do esforço computacional reduzido que demandam. Elege-se a formulação composta por polinômios lineares associados aos nós e por polinômios de quarto grau associados ao interior do elemento como a de melhor desempenho geral.

Palavras Chave:

Elementos Finitos, Formulação Subparamétrica, Análise de Placas

DEVELOPMENT OF QUADRILATERAL SUBPARAMETRIC FINITE ELEMENTS FOR PLATE ANALYSIS

ABSTRACT

A set of quadrilateral subparametric finite elements for thin and moderately thick plate analysis were developed using the concept of degenerated solids, based on the theory of *Mindlin-Reissner*. The elements geometry interpolation is done using the quadratic quadrilateral element with eight nodes from *Serendipity* family. The displacement field is interpolated from a four nodes quadrilateral element through polynomials associated to the nodes and to the interior of the element. Six different interpolation schemes were used, resulting in six distinct subparametric formulations, using polynomials of first, third and fourth order. Each scheme generates five physical degrees of freedom per node and three non-physical degrees of freedom associated to each internal polynomial. The stiffness matrix and load vectors are obtained through reduced numerical integration, using (2x2) points of integration in the middle plane of the plate.

Computer programs for the formulations were developed using C language. The results for several geometries and boundary conditions were compared to the performance of classical elements and those used by commercial software. The conclusion is that the formulation developed in this work is attractive due to its simplicity and computational efficiency. Nodal linear polynomials associated with internal fourth degree polynomial had the best performance.

KEY WORDS:

Finite Elements, Subparametric Formulation, Plate Analysis.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 - O Método dos Elementos Finitos.....	1
1.2 - A Análise de Placas pelo Método dos Elementos Finitos	2
1.3 - Objetivos.....	5
2 - GEOMETRIA	7
2.1 - Introdução	7
2.2 - Definição da Geometria do Elemento.....	8
2.2.1 - Determinação do vetor $\vec{r}$	8
2.2.2 - Determinação do vetor $\vec{m}$	10
2.2.3 - Determinação do vetor $\vec{R}$	15
3 - CAMPO DE DESLOCAMENTO	17
3.1 - Funções de Interpolação.....	17
3.2 - Sistemas Locais de Referência.....	33
3.2 - Campo de Deslocamento	37
4 - ESTADO DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA.....	43
4.1 - Estado de Deformação Específica com Relação ao Sistema de Referência Global....	43
4.2 - Estado de Deformação Específica com Relação ao Sistema de Referência Local	47
5 - MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE CARGA	60
5.1 - Introdução	60
5.2 - Determinação da Matriz de Rigidez do Elemento de Placa.....	66
5.2.1 - Determinação da submatriz $[K_{lij}]$	67
5.2.2 - Determinação da submatriz $[K_{li,st}]$	73
5.2.3 - Determinação da submatriz $[K_{pk,lj}]$	77
5.2.4 - Determinação da submatriz $[K_{pk,st}]$	77
5.3 - Determinação do Vetor de Carga do Elemento	80
5.3.1- Introdução	80
5.3.2 - Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento: $\{fq^e\}$	81
5.3.2.1 - Determinação da submatriz $\{fq_{li}\}$	83
5.3.2.2 - Determinação da submatriz $\{fq_{pk}\}$	85
5.3.3 - Determinação do vetor de carga correspondente às forças de corpo: $\{fb^e\}$...	86
5.3.3.1 - Determinação da submatriz $\{fb_{li}\}$	87
5.3.3.2 - Determinação da submatriz $\{fb_{pk}\}$	88

5.3.4- Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces laterais do elemento: $\{f t^e\}$	90
5.3.4.1 - Determinação do vetor de carga associado ao lado 1	92
5.3.4.2 - Determinação do vetor de carga associado ao lado 2	95
5.3.4.3 - Determinação do vetor de carga associado ao lado 3	96
5.3.4.4 - Determinação do vetor de carga associado ao lado 4	98
6 - FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA	100
6.1 - Introdução	100
6.2 - Determinação da Matriz de Rigidez Global e do Vetor de Carga Global.....	101
6.3 - Resolução do Sistema de Equações	104
6.4 - Programa Computacional.....	106
7 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	109
7.1 - Introdução	109
7.2 - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada em seus Lados.....	110
7.2.1 - Submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano	110
7.2.2 - Submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano	115
7.2.3 - Submetida à ação de uma carga distribuída senoidal, perpendicular a seu plano	119
7.3 - Placa Quadrada Engastada em seus Lados.....	124
7.3.1 - Submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano	124
7.3.2 - Submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano	128
7.4 - Placa Retangular Simplesmente Apoiada em seus Lados.....	133
7.4.1 - Submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano	133
7.4.2 - Submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano	137
7.4.3 - Submetida à ação de uma carga distribuída senoidal, perpendicular a seu plano	142
7.5 - Placa Retangular Engastada em seus Lados.....	146
7.5.1 - Submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano	146
7.5.2 - Submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano	151
8 - ANÁLISE DOS RESULTADOS	156
8.1 - Introdução	156
8.2 - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada em seus Lados.....	157
8.2.1 - Submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano	157
8.2.2 - Submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano	158
8.2.3 - Submetida à ação de uma carga distribuída senoidal, perpendicular	

a seu plano	159
8.3 - Placa Quadrada Engastada em seus Lados.....	160
8.3.1 - Submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano	160
8.3.2 - Submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano	161
8.4 - Placa Retangular Simplesmente Apoiada em seus Lados.....	162
8.4.1 - Submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano	162
8.4.2 - Submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano	163
8.4.3 - Submetida à ação de uma carga distribuída senoidal, perpendicular a seu plano	163
8.5 - Placa Retangular Engastada em seus Lados.....	164
8.5.1 - Submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano	164
8.5.2 - Submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano	165
 9 - CONCLUSÕES.....	 167
 BIBLIOGRAFIA.....	 169
 APÊNDICE A: FUNÇÕES DE FORMA DA FAMÍLIA SERENDIPITY... ..	 173
 APÊNDICE B: GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE FORMA DA FAMÍLIA SERENDIPITY.....	 176
 APÊNDICE C: DERIVADAS DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO DO CAMPO DE DESLOCAMENTO.....	 181
 APÊNDICE D: OBTENÇÃO DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ POR INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	 184

LISTA DE FIGURAS

1.1 - Uma placa e seu plano médio	2
1.2 - Obtenção de um elemento de placa pela degeneração de um sólido tridimensional	4
1.3 - (a) Elemento utilizado na interpolação da geometria; (b) Elemento utilizado na interpolação do campo de deslocamento	6
2.1 - Elemento de placa da família Serendipity, seu plano médio e os nós i associados a ele...	7
2.2 - Definição da geometria do elemento	8
2.3 - Vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, tangentes ao plano médio e vetor $\vec{r}_3$, normal ao mesmo.....	10
2.4 - Versor $\vec{v}_3$, normal ao plano médio no ponto O e versor $\vec{v}_{3i}$, normal a este plano no nó i	13
2.5 - Espessura t_i do elemento no nó i e vetores $\vec{m}_i$ e $\vec{m}$	14
2.6 - Mapeamento tridimensional do elemento, do espaço local para o espaço cartesiano	16
3.1 - Triângulo de Pascal para expansões polinomiais até o sexto grau.	18
3.2 - Função de interpolação $N_{11}(\xi, \eta)$	21
3.3 - Função de interpolação $N_{12}(\xi, \eta)$	21
3.4 - Função de interpolação $N_{13}(\xi, \eta)$	21
3.5 - Função de interpolação $N_{14}(\xi, \eta)$	22
3.6 - Função de interpolação $N_{31}(\xi, \eta)$	22
3.7 - Função de interpolação $N_{32}(\xi, \eta)$	22
3.8 - Função de interpolação $N_{33}(\xi, \eta)$	23
3.9 - Função de interpolação $N_{34}(\xi, \eta)$	23
3.10 - Função de interpolação $M_{31}(\xi, \eta)$	23
3.11 - Função de interpolação $M_{32}(\xi, \eta)$	24
3.12 - Função de interpolação. $M_{33}(\xi, \eta)$	24
3.13 - Função de interpolação $M_{34}(\xi, \eta)$	24
3.14 - Função de interpolação $M_{41}(\xi, \eta)$	25
3.15 - Função de interpolação $M_{42}(\xi, \eta)$	25
3.16 - Função de interpolação $M_{43}(\xi, \eta)$	25
3.17 - Função de interpolação $M_{44}(\xi, \eta)$	26
3.18 - Função de interpolação $M_{45}(\xi, \eta)$	26
3.19 - Sistema de referência local (x' , y' , z') associado ao ponto O	35
3.20 - Sistema de referência local (x' , y' , z') associado ao nó i	37
3.21 - Ilustração do modelo cinemático adotado.....	38
6.1 - Fluxograma do programa computacional	108
7.1 - Malhas de discretização de um quarto de placa	110
7.2 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída</i> ($t/a=0.005$ – placa fina).....	114
7.3 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída</i>	

($t/a=0.05$ – placa moderadamente grossa).....	114
7.4 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central</i> ($t/a=0.005$ – placa fina).....	118
7.5 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central</i> ($t/a=0.05$ – placa moderadamente grossa).....	119
7.6 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal</i> ($t/a=0.005$ – placa fina).....	123
7.7 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal</i> ($t/a=0.05$ – placa moderadamente grossa).....	123
7.8 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída</i> ($t/a=0.005$ – placa fina).....	127
7.9 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída</i> ($t/a=0.05$ – placa moderadamente grossa).....	128
7.10 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central</i> ($t/a=0.005$ – placa fina).....	132
7.11 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central</i> ($t/a=0.05$ – placa moderadamente grossa).....	132
7.12 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída</i> ($t/a=0.005$ – placa fina).....	136
7.13 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída</i> ($t/a=0.05$ – placa moderadamente grossa).....	137
7.14 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central</i> ($t/a=0.005$ – placa fina).....	141
7.15 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central</i> ($t/a=0.05$ – placa moderadamente grossa).....	141
7.16 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal</i> ($t/a=0.005$ – placa fina).....	145
7.17 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal</i> ($t/a=0.05$ – placa moderadamente grossa).....	146
7.18 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída</i> ($t/a=0.005$ – placa fina).....	150
7.19 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída</i> ($t/a=0.05$ – placa moderadamente grossa).....	150

7.20 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central</i> ($t/a=0.005$ – placa fina).....	154
7.21 - Convergência dos resultados com o refinamento da malha para <i>placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central</i> ($t/a=0.05$ – placa moderadamente grossa)..	155
B.1 - Função de Forma $N_1(\xi, \eta)$, associada ao nó 1 do elemento de placa.....	176
B.2 - Função de Forma $N_2(\xi, \eta)$, associada ao nó 2 do elemento de placa.....	177
B.3 - Função de Forma $N_3(\xi, \eta)$, associada ao nó 3 do elemento de placa.....	177
B.4 - Função de Forma $N_4(\xi, \eta)$, associada ao nó 4 do elemento de placa.....	178
B.5 - Função de Forma $N_5(\xi, \eta)$, associada ao nó 5 do elemento de placa.....	178
B.6 - Função de Forma $N_6(\xi, \eta)$, associada ao nó 6 do elemento de placa.....	179
B.7 - Função de Forma $N_7(\xi, \eta)$, associada ao nó 7 do elemento de placa.....	180
B.8 - Função de Forma $N_8(\xi, \eta)$, associada ao nó 8 do elemento de placa.....	180

LISTA DE TABELAS

3.1 - Esquema de interpolação nº 1	27
3.2 - Esquema de interpolação nº 2	28
3.3 - Esquema de interpolação nº 3	29
3.4 - Esquema de interpolação nº 4	30
3.5 - Esquema de interpolação nº 5	31
3.6 - Esquema de interpolação nº 6	32
7.1 - Resumo dos esquemas de interpolação	109
7.2 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (<i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída</i> - esquema de interpolação 1)	111
7.3 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (<i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída</i> - esquema de interpolação 2).	111
7.4 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (<i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída</i> - esquema de interpolação 3)	112
7.5 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (<i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída</i> - esquema de interpolação 4)	112
7.6 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (<i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída</i> - esquema de interpolação 5)	113
7.7 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (<i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída</i> - esquema de interpolação 6).	113
7.8 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (<i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central</i> - esquema de interpolação 1).	115
7.9 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (<i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central</i> - esquema de interpolação 2)	116
7.10 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (<i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central</i> - esquema de interpolação 3)	116
7.11 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (<i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central</i> - esquema de interpolação 4)	117
7.12 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (<i>placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central</i> - esquema de interpolação 5)	117

7.13 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 6)	118
7.14 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 1)	120
7.15 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 2)	120
7.16 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 3)	121
7.17 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 4)	121
7.18 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 5)	122
7.19 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 6)	122
7.20 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 1)	124
7.21 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 2)	125
7.22 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 3)	125
7.23 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 4)	126
7.24 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 5)	126
7.25 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 6)	127
7.26 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 1)	129
7.27 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 2)	129
7.28 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 3)	130
7.28 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 4)	130
7.29 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 5)	131
7.30 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 6)	131

7.32 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 1)	133
7.33 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 2)	134
7.34 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 3)	134
7.35 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 4)	135
7.36 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 5)	135
7.37 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 6)	136
7.38 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 1)	138
7.39 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 2)	138
7.40 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 3)	139
7.41 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 4)	139
7.42 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 5)	140
7.43 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 6)	140
7.44 - Deflexão w_c , para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 1)	142
7.45 - Deflexão w_c , para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 2)	143
7.46 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 3)	143

7.47 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 4)	144
7.48 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 5)	144
7.49 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 6)	145
7.50 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 1). 147	
7.51 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 2). 147	
7.52 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 3). 148	
7.53 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 4). 148	
7.54 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 5). 149	
7.55 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 6). 149	
7.56 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 1)	151
7.57 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 2)	152
7.58 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 3)	152
7.59 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 4)	153
7.60 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 5)	153
7.61 - Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 6)	154
8.1 - Esquema de interpolação nº 2	157
8.2 - Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída- malha 2×2)	158
8.3 - Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga carga concentrada central- malha 2×2).	159
8.4 - Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga carga distribuída senoidal- malha 2×2).	159
8.5 - Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - malha 3×3).	160

8.6 - Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - malha 3×3).	161
8.7 - Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - malha 2×2).	162
8.8 - Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - malha 3×3).	163
8.9 - Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - malha 2×2)	164
8.10 - Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - malha 3×3).....	165
8.11 - Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - malha 3×3).....	166

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A utilização de métodos computacionais na Engenharia moderna estendeu, de forma impensável até bem pouco tempo atrás, a capacidade analítica e preditiva do engenheiro. Virtualmente, todo processo físico de interesse da Engenharia pode, hoje, ser representado, com diferentes graus de confiabilidade, pelas ferramentas computacionais disponíveis. O desenvolvimento contínuo das áreas da matemática aplicada, programação e arquitetura de computadores, permite grande otimismo com relação a mais notável tarefa do engenheiro: a formulação matemática do processo físico e a posterior análise do modelo matemático.

Entre os métodos numéricos computacionais em uso, destaca-se o *método dos elementos finitos*. Sua grande popularidade, tanto no meio acadêmico como na indústria, deriva de sua versatilidade e abrangência. Problemas de diversas áreas da Mecânica podem ser modelados e resolvidos com alto grau de precisão. A rápida difusão de recursos computacionais, aliada à disponibilidade de programas comerciais de aplicação geral, criou condições favoráveis à popularização do método.

A idéia básica por trás do método dos elementos finitos – a representação de um domínio complexo como uma coleção de partes discretas – remonta aos matemáticos da antiguidade, que estimaram o valor de π notando que o perímetro de um polígono inscrito em um círculo se aproxima da circunferência do mesmo (REDDY, 1993).

Em 1942, Hrenikoff propõe o *framework method*, no qual um meio elástico plano era tratado como um conjunto de barras e vigas. Já Courant, em artigo publicado em 1943, utiliza interpolação polinomial e o princípio da energia potencial, em subdomínios triangulares, para estudar o problema de torção de Saint Venant. Esta é, talvez, a primeira aplicação do método tal como o conhecemos hoje.

A apresentação formal do método é atribuída a Turner, Clough, Martin e Topp (1956) e a Argyris e Kelsey (1960). Clough propôs o nome *método dos elementos finitos* para diferenciá-lo dos elementos diferenciais do cálculo. Em 1963, o método ganha uma sólida base matemática e respeitabilidade acadêmica ao ser reconhecido como a solução de um problema variacional pela minimização de um funcional (SEGERLIND, 1984).

Desde então, novas aplicações do método se sucedem. Inicialmente restrito à Mecânica Estrutural, hoje é utilizado com sucesso nas áreas da Mecânica dos Fluidos, Transferência de Calor, Eletromagnetismo, Acústica, entre outras.

O método dos elementos finitos é, atualmente, uma ferramenta analítica que faz parte da cultura básica do engenheiro.

1.2 A ANÁLISE DE PLACAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Na análise de qualquer elemento estrutural à luz da Teoria da Elasticidade, distinguem-se os seguintes componentes básicos: as equações de equilíbrio, as condições de compatibilidade e as leis constitutivas. As leis de *Newton* respondem pelas equações de equilíbrio; as condições de compatibilidade expressam as relações cinemáticas entre deformações e deslocamentos. Já as leis constitutivas exprimem a relação entre a tensão e a deformação do material.

Esses componentes são, no geral, apresentados ou como um conjunto de equações diferenciais ou vinculados a um princípio de energia. Como a sua satisfação simultânea é, para a maior parte das aplicações práticas, matematicamente inviável, desenvolveram-se simplificações e aproximações à teoria geral.

Podem ser formuladas teorias menos restritivas a partir de certas características geométricas específicas do elemento estrutural. É o caso da *teoria das placas elásticas*, que é uma aproximação da teoria da elasticidade tridimensional para duas dimensões. A sua aplicação permite determinar o estado de tensão e deformação das placas.

Uma placa é um corpo sólido, limitado por duas superfícies planas e paralelas, cujas dimensões laterais são grandes em comparação com a distância entre as superfícies planas (a espessura da placa). Essa hipótese é fundamental, pois delimita claramente a classe de problemas físicos a serem tratados.

Identifica-se, a meio caminho entre as superfícies planas, uma posição de referência chamada de *plano médio* ou *plano neutro* (Figura 1.1). As simplificações adotadas permitem considerar as deformações a partir deste plano.

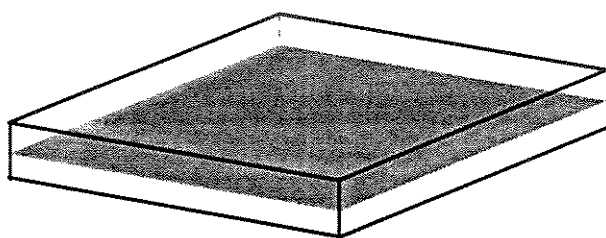


Figura 1.1: Uma placa e seu plano médio.

Segundo GOULD (1988), o passo seguinte para o estabelecimento de uma teoria simplificada de placas consiste na adoção de uma série de hipóteses a respeito da razão entre as dimensões características da placa, a magnitude relativa da deflexão de pontos da placa sujeita a carregamento externo, a rotação de uma normal com relação à posição indeformada de referência e as tensões na direção transversal da placa. Essas hipóteses foram formuladas e justificadas por matemáticos e cientistas dos séculos XVIII e XIX.

Nas teorias simplificadas, adota-se a hipótese dos pequenos deslocamentos, em comparação com a dimensão característica transversal, permitindo a formulação do equilíbrio da placa com relação à geometria indeformada inicial. Se esta hipótese não for válida para um caso particular, podem ser formuladas teorias de não linearidade geométrica.

As propriedades de flexão de uma placa dependem essencialmente de sua espessura, quando comparada com as outras dimensões (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968). São, portanto, classificadas em dois grupos: placas finas e placas moderadamente grossas. Uma placa é considerada fina quando a razão entre a espessura t e a menor dimensão lateral a é menor do que $1/20$ ($t/a < 0.05$).

A teoria da flexão de placas finas com pequenos deslocamentos é conhecida como Teoria Clássica de Placas de *Kirchhoff* e é baseada em suposições similares às adotadas na teoria de *Euler-Bernoulli* para vigas. Suas hipóteses fundamentais são (REDDY, 1984) :

(1) Um elemento reto da placa, normal ao plano médio, após a deformação, permanece reto, perpendicular ao plano e mantém seu comprimento inicial. Esta hipótese é equivalente a desconsiderar as tensões de cisalhamento atuantes na direção da espessura, assim como a deformação específica na direção perpendicular ao plano médio.

(2) As tensões normais ao plano médio são pequenas em comparação com as outras tensões e podem ser desprezadas. Esta hipótese é equivalente a desconsiderar a energia de deformação correspondente a estas tensões.

Por outro lado, se a relação entre a espessura t e a dimensão característica a da placa é maior ou igual a $1/20$ ($t/a \geq 0,05$), as tensões de cisalhamento na direção da espessura tornam-se importantes e não podem mais ser desprezadas. Neste caso, se um elemento reto da placa é normal ao plano médio, após a deformação, ele permanece reto, mantém seu comprimento inicial, mas não é mais perpendicular ao plano. Esta é a hipótese básica da teoria de *Mindlin - Reissner*, que caracteriza placa moderadamente grossa.

Observe-se que, se a teoria de placas moderadamente grossas propõe o relaxamento da restrição de *Kirchhoff* relacionada às tensões de cisalhamento na direção da espessura, ela também desconsidera o efeito das tensões normais ao plano médio.

A partir das teorias simplificadas para placas finas e moderadamente grossas, deve-se adotar um método de resolução viável. As equações diferenciais parciais que governam o comportamento estrutural das placas não podem ser resolvidas analiticamente para quaisquer geometrias, condições de contorno e carregamentos; deve-se recorrer, então, aos métodos numéricos para a solução de problemas de ordem prática. Entre eles, o mais efetivo é o método dos elementos finitos (REDDY, 1984).

Pela sua importância para a indústria moderna (especialmente civil, mecânica e aeronáutica), a análise de placas pelo método dos elementos finitos vem interessando os pesquisadores desde a década de 60. GILEWSKI e RADWANSKA (1992) estimam que, entre 1977 e 1988, foram publicados mais de 450 trabalhos sobre a análise de placas moderadamente grossas pelo método dos elementos finitos.

Adotando-se o método dos deslocamentos, o desenvolvimento de elementos finitos para placas, baseado na teoria clássica, apresenta como dificuldade principal a necessidade de garantir continuidade C^1 para as funções de interpolação. Ou seja, as funções e suas primeiras derivadas devem ser contínuas nas interfaces dos elementos. Essa necessidade reduz drasticamente o repertório de funções disponíveis e aumenta a complexidade da formulação. Além disso, a hipótese de *Kirchhoff* – a placa é infinitamente rígida na direção transversal e todos os efeitos transversais, normais ou de cisalhamento, devem ser desprezados – gera

elementos que subestimam as deflexões e superestimam as frequências naturais e cargas de flambagem. Mesmo assim, muitos elementos foram desenvolvidos baseados na teoria clássica de placas finas, sem, contudo, alcançarem os requisitos de simplicidade, boa convergência e generalidade (HUGHES *et al*, 1977).

Foi natural, portanto, que o foco de atenção dos pesquisadores se voltasse para a teoria de placas moderadamente grossas de *Mindlin - Reissner*, tomada como base para o desenvolvimento de elementos finitos para placas. Como benefício imediato dessa escolha, tem-se que, às funções de interpolação do campo de deslocamento, basta a continuidade C^0 , o que amplia consideravelmente o leque de opções para a formulação do elemento.

Reconhece-se, hoje, que os elementos finitos baseados na teoria de placas moderadamente grossas são os mais simples disponíveis em termos de formulação, implementação e aplicação a vários tipos de estruturas de placas (AVERILL e REDDY, 1992). Muito esforço tem sido empreendido no desenvolvimento desses elementos, com sucesso apenas limitado.

Uma das contribuições que mais influência tem exercido no desenvolvimento de elementos de placas e cascas baseados na teoria de *Mindlin - Reissner* é a formulação proposta por AHMAD *et al* (1970). Nela, foi exposto o conceito de sólido degenerado para a criação de elementos de placas e cascas. Através da redução de uma dimensão do sólido, as equações tridimensionais são colocadas na forma de variáveis nodais no plano médio da placa (ou na superfície média da casca). A geometria dos elementos é descrita pelas coordenadas nodais e por vetores associados aos nós do plano médio (Figura 1.2). Cada nó tem cinco graus de liberdade, sendo três translações associadas ao sistema global de coordenadas e duas rotações associadas ao sistema local.

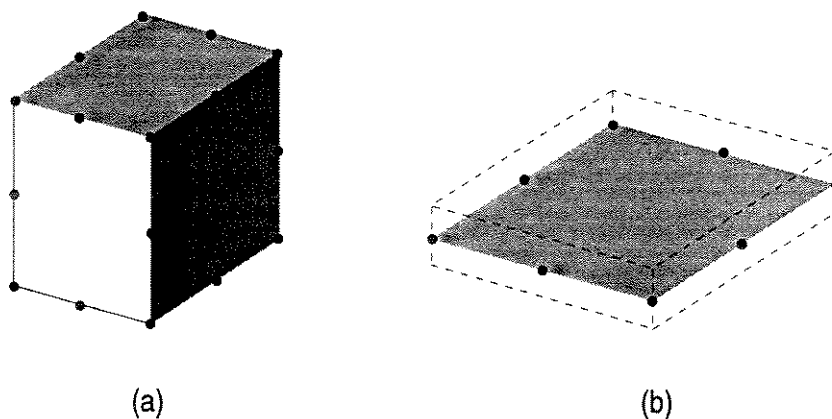


Figura 1.2: Obtenção de um elemento de placa pela degeneração de um sólido tridimensional: (a) elemento sólido, (b) elemento de placa.

O elemento proposto por *Ahmad et al* teve um excelente desempenho em aplicações de placas moderadamente grossas, atendendo, portanto, à teoria de *Mindlin - Reissner* (ZIENKIEWICZ *et al*, 1971). Com a redução da espessura, entretanto, a rigidez do elemento aumentava de forma progressiva e os resultados não tendiam, como seria de se esperar, àqueles da teoria clássica de *Kirchhoff* para placas finas.

O mesmo problema condenou, desde sua concepção, vários elementos de baixa ordem (com nove ou menos nós) para análise de placas que incluíam em sua formulação as deformações por cisalhamento na direção da espessura (HUGHES *et al*, 1977), ou seja, elementos formulados segundo a teoria de placas moderadamente grossas. Com o aumento da razão entre a menor dimensão lateral da placa e sua espessura, os deslocamentos calculados eram muito pequenos se comparados à solução exata, exibindo um comportamento que ficou conhecido como *travamento de cisalhamento*.

Várias técnicas foram desenvolvidas para corrigir esse problema e a mais popular delas é a que utiliza a integração reduzida, ou reduzida seletiva, no cálculo da matriz de rigidez do elemento. Empregada inicialmente, com grande êxito, no elemento degenerado proposto por ZIENKIEWICZ *et al* (1971), esta técnica de integração numérica emprega menos pontos do que os necessários para integrar exatamente as funções polinomiais.

A adição de termos adicionais ao campo de deslocamento, gerando elementos *não conformes*, é outra técnica empregada para evitar o travamento de cisalhamento em elementos formulados a partir da teoria de *Mindlin - Reissner*. CHOI e KIM (1992) utilizaram esta técnica em um elemento de placa, com oito nós, com integração reduzida seletiva. O elemento foi testado em problemas clássicos de flexão de placas com resultados muito bons, sem travamento de cisalhamento.

Uma série de outros métodos foram empregados para otimizar o desempenho de elementos formulados segundo a teoria de placas moderadamente grossas: formulação de elementos hierárquicos, através da versão p do método dos elementos finitos (MOREIRA e IGUTI, 1992); elementos formulados com base em um estado de deformação específica pressuposto (ONATE *et al*, 1992), (SHI e VOYIADJIS, 1991); utilização da teoria discreta de *Kirchhoff*, que impõe graus de liberdade adicionais, descartados no elemento final (COOK *et al*, 1989), (BATHE e HO, 1981), (ZHANG e KRATZIG, 1995); utilização de modelos mistos, que adotam como variáveis nodais deslocamentos e esforços (YUQIU e FEL, 1992); utilização de funções de forma físicas, que contêm características físicas e geométricas do elemento (GILEWSKI e GOMULINSKI, 1991); teorias de 3° ordem, que adotam uma distribuição quadrática da deformação por cisalhamento ao longo da espessura da placa (AVERILL e REDDY, 1992).

Entretanto, apesar do grande esforço já empreendido, ainda não se cumpriu satisfatoriamente a meta rigorosa que é o desenvolvimento de um elemento finito para placas que concilie simplicidade de formulação, generalidade na aplicação e correção de resultados.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de elementos finitos quadrilaterais subparamétricos para análise de placas finas e placas moderadamente grossas. Os elementos serão obtidos a partir da formulação de sólido degenerado, como proposto por AHMAD *et al* (1970) e formulados segundo a teoria de *Mindlin - Reissner*. A interpolação da geometria, para todos os elementos, será feita a partir do elemento quadrilateral quadrático de oito nós da família *Serendipity*. Já para a interpolação do campo de deslocamento, serão retidos apenas os nós dos vértices do elemento utilizado na interpolação da geometria (Figura 1.3). Serão estudados diferentes esquemas de interpolação com funções de forma nodais,

associadas aos quatro nós do elemento e funções de forma não nodais, do tipo bolha, associadas ao seu interior. Essas funções, de terceiro e quarto graus, devem reforçar a expansão polinomial e complementar a interpolação do campo de deslocamento, a partir de funções de primeiro e terceiro graus, associadas aos nós.

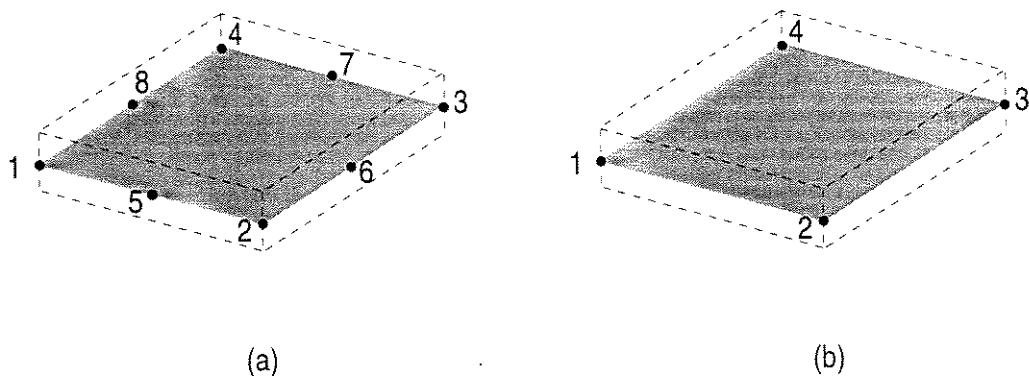


Figura 1.3: (a) Elemento utilizado na interpolação da geometria; (b) Elemento utilizado na interpolação do campo de deslocamento.

A distribuição dos graus de liberdade do elemento utilizado na interpolação do campo de deslocamento terá a seguinte disposição:

- (a) cinco graus de liberdade físicos por nó, compreendendo três translações segundo o sistema global de referência e duas rotações segundo o sistema local.
- (b) três graus de liberdade para cada função de interpolação não associada aos nós do elemento – graus de liberdade não nodais, sem um significado físico definido.

As matrizes de rigidez dos elementos serão calculadas utilizando-se *integração numérica reduzida*, empregando-se (2×2) pontos de integração no plano médio do elemento.

Os objetivos gerais do trabalho podem ser apresentados da seguinte maneira:

- Desenvolvimento de elementos finitos quadrilaterais subparamétricos para análise de placas.
- Proposta de uma formulação simples e efetiva para análise estática de placas finas e placas moderadamente grossas.
- Análise de esquemas de interpolação alternativos pela inclusão de polinômios associados ao interior do elemento.
- Análise do desempenho dos elementos propostos face a soluções analíticas existentes, a elementos clássicos e a elementos implementados em programas computacionais de caráter comercial.

CAPÍTULO 2

GEOMETRIA

2.1 INTRODUÇÃO

A geometria dos elementos propostos será interpolada quadraticamente, a partir das funções de forma da família Serendipity. A Figura 2.1 apresenta, portanto, o elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity, com 8 nós. Pela metodologia adotada, as seções, ao longo da espessura, são geradas por linhas retas. No plano médio do elemento estão dispostos os nós i e o sistema de referência local, constituído das coordenadas curvilíneas ξ e η (solidárias ao plano médio) e da coordenada linear ζ , na direção da espessura do elemento. Estas coordenadas naturais variam entre -1 e $+1$, de forma que $\xi = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$ definam as faces laterais dos elementos. Os valores ± 1 para a coordenada linear ζ definem as faces externas superior e inferior, respectivamente.

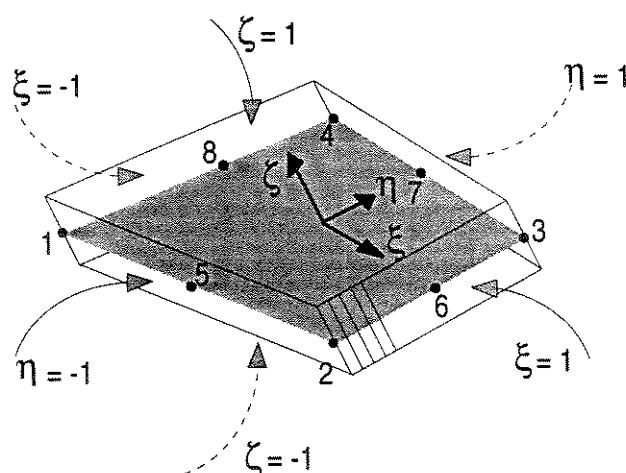


Figura 2.1: Elemento de placa da família Serendipity, seu plano médio e os nós i associados a ele.

2.2 DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA DO ELEMENTO

O estabelecimento da posição de qualquer ponto Q do elemento será obtido pela soma vetorial representada na Figura 2.2. Associa-se ao elemento um sistema cartesiano global de coordenadas (X,Y,Z) ; se $\vec{r}$ é o vetor que define a posição de qualquer ponto θ do plano médio e $\vec{m}$ o vetor que define os pontos fora deste plano, a soma destes dois vetores gera o vetor $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{m} \quad (2.1)$$

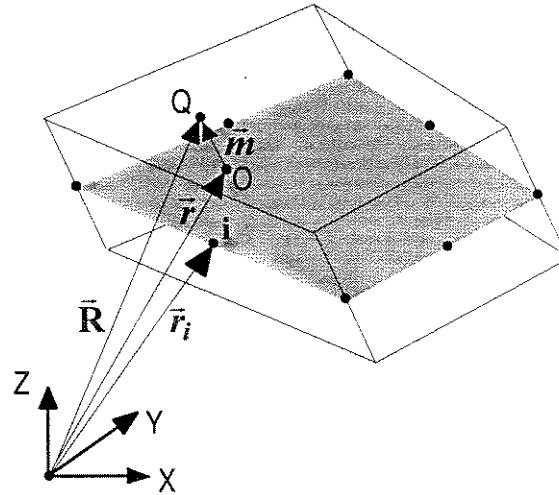


Figura 2.2 - Definição da geometria do elemento.

O vetor $\vec{R}$, portanto, define a posição de qualquer ponto Q do elemento. Os tópicos a seguir explicitam o cálculo dos vetores apresentados na Figura 2.2.

2.2.1 Determinação do vetor $\vec{r}$

O elemento apresentado na Figura 2.2 está associado a um sistema cartesiano global de referência (X,Y,Z) . Se i é um nó genérico de seu plano médio, o vetor $\vec{r}_i$, que o define, tem os componentes x_i , y_i e z_i segundo os eixos X , Y e Z , respectivamente. Dessa forma,

$$\vec{r}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Um ponto genérico θ do plano médio será dado pelo vetor $\vec{r}$, interpolado a partir dos vetores $\vec{r}_i$ e das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ de cada nó deste plano (COONS, 1967), (FORREST, 1968):

$$\vec{r}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \vec{r}_i \quad (2.3)$$

As funções de forma quadráticas da família Serendipity são dadas por (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1989):

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad \text{para os nós } i=1, 2, 3, 4 \quad (2.4)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \quad \text{para os nós } i=5, 7 \quad (2.5)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) \quad \text{para os nós } i=6, 8 \quad (2.6)$$

Nas equações acima, ξ_i e η_i são as coordenadas locais correspondentes aos nós i . As expressões completas das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ da família Serendipity, assim como suas derivadas com relação às coordenadas curvilíneas ξ e η , para cada nó do plano médio, são apresentadas no Apêndice A. Os gráficos das funções citadas estão apresentados no Apêndice B.

O vetor $\vec{r}$, que define um ponto genérico θ do plano médio do elemento, tem os componentes x , y e z , de acordo com o sistema cartesiano de referência global. Dessa forma, a Equação (2.3) pode ser reescrita como:

$$\vec{r}(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \\ z(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Individualizando-se as equações para as coordenadas globais, tem-se que:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \quad (2.8)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \quad (2.9)$$

$$z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot z_i \quad (2.10)$$

A partir das equações anteriores, pode-se interpolar as coordenadas de qualquer ponto do plano médio do elemento a partir das funções de forma e das coordenadas nodais. Está caracterizado, portanto, um mapeamento completo do plano médio do elemento, do plano local para o espaço cartesiano, a partir da relação biunívoca existente entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas curvilíneas.

2.2.2 Determinação do vetor $\vec{m}$

A Figura 2.3 apresenta os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, tangentes ao plano médio do elemento no ponto O e o vetor $\vec{r}_3$, normal a este plano. Os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são obtidos da seguinte forma (LEITHOLD, 1981).

$$\vec{r}_1(\xi, \eta) = \frac{\partial \vec{r}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad (2.11)$$

$$\vec{r}_2(\xi, \eta) = \frac{\partial \vec{r}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (2.12)$$

Já o vetor $\vec{r}_3$ é obtido pelo produto vetorial de $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$:

$$\vec{r}_3(\xi, \eta) = \vec{r}_1(\xi, \eta) \wedge \vec{r}_2(\xi, \eta) \quad (2.13)$$

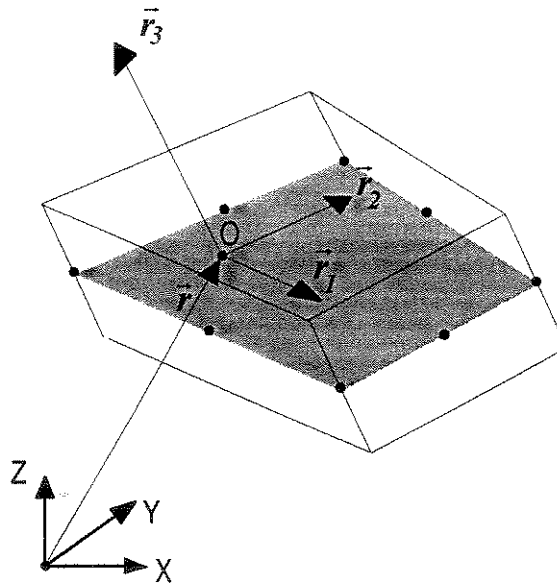


Figura 2.3 - Vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, tangentes ao plano médio e vetor $\vec{r}_3$, normal ao mesmo.

Tomando-se os componentes dos vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ segundo o sistema de referência global e levando-se em conta a Equação (2.7), pode-se escrever que:

$$\vec{r}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{11}(\xi, \eta) \\ r_{12}(\xi, \eta) \\ r_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\vec{r}_2(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{21}(\xi, \eta) \\ r_{22}(\xi, \eta) \\ r_{23}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Escrevendo-se agora as equações para cada componente, obtêm-se:

$$r_{11}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot x_i \quad (2.16)$$

$$r_{12}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot y_i \quad (2.17)$$

$$r_{13}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot z_i \quad (2.18)$$

$$r_{21}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot x_i \quad (2.19)$$

$$r_{22}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot y_i \quad (2.20)$$

$$r_{23}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot z_i \quad (2.21)$$

Associando-se ao sistema de referência global uma base triortogonal $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pode-se obter o vetor $\vec{r}_3$ e seus componentes a partir de :

$$\vec{r}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{31}(\xi, \eta) \\ r_{32}(\xi, \eta) \\ r_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{11}(\xi, \eta) & r_{12}(\xi, \eta) & r_{13}(\xi, \eta) \\ r_{21}(\xi, \eta) & r_{22}(\xi, \eta) & r_{23}(\xi, \eta) \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

Resolvendo-se o determinante, tem-se que:

$$\vec{r}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{31}(\xi, \eta) \\ r_{32}(\xi, \eta) \\ r_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{12}(\xi, \eta) \cdot r_{23}(\xi, \eta) - r_{13}(\xi, \eta) \cdot r_{22}(\xi, \eta) \\ r_{13}(\xi, \eta) \cdot r_{21}(\xi, \eta) - r_{11}(\xi, \eta) \cdot r_{23}(\xi, \eta) \\ r_{11}(\xi, \eta) \cdot r_{22}(\xi, \eta) - r_{12}(\xi, \eta) \cdot r_{21}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Substituindo-se agora os componentes dos vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ pelos valores apresentados nas Equações de (2.16) a (2.21), obtem-se que:

$$r_{31}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot (y_i z_j - z_i y_j) \quad (2.24)$$

$$r_{32}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot (z_i x_j - x_i z_j) \quad (2.25)$$

$$r_{33}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot (x_i y_j - y_i x_j) \quad (2.26)$$

Obtido o vetor $\vec{r}_3$, pode-se agora definir, no ponto θ , o versor $\vec{v}_3$, normal ao plano médio (Figura 2.4):

$$\vec{v}_3(\xi, \eta) = \frac{\vec{r}_3(\xi, \eta)}{r_3(\xi, \eta)} \quad (2.27)$$

Na equação acima, $r_3(\xi, \eta)$ é o módulo do vetor $\vec{r}_3(\xi, \eta)$, obtido da seguinte maneira:

$$r_3(\xi, \eta) = \sqrt{r_{31}^2(\xi, \eta) + r_{32}^2(\xi, \eta) + r_{33}^2(\xi, \eta)} \quad (2.28)$$

Se v_{31} , v_{32} e v_{33} são os componentes do versor $\vec{v}_3$ segundo o sistema de referência global, a Equação (2.27) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\vec{v}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{31}(\xi, \eta) \\ v_{32}(\xi, \eta) \\ v_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{r_3(\xi, \eta)} \cdot \begin{Bmatrix} r_{31}(\xi, \eta) \\ r_{32}(\xi, \eta) \\ r_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

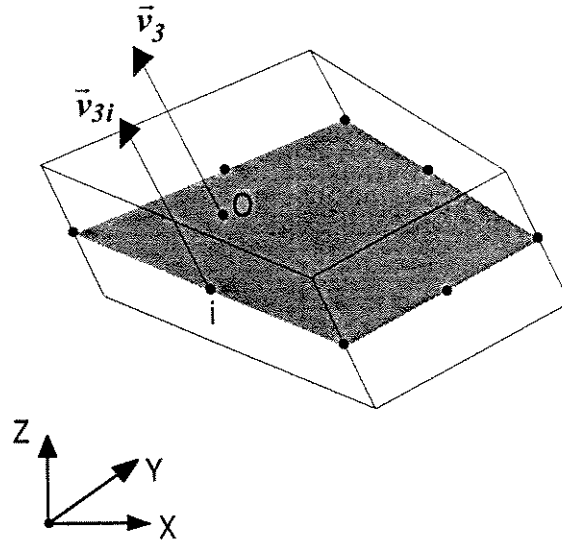


Figura 2.4 - Versor $\vec{v}_3$, normal ao plano médio no ponto O e versor $\vec{v}_{3i}$, normal a este plano no nó i .

Portanto, os componentes de $\vec{v}_3(\xi, \eta)$ serão dados por:

$$v_{31}(\xi, \eta) = \frac{r_{31}(\xi, \eta)}{r_3(\xi, \eta)} \quad (2.30)$$

$$v_{32}(\xi, \eta) = \frac{r_{32}(\xi, \eta)}{r_3(\xi, \eta)} \quad (2.31)$$

$$v_{33}(\xi, \eta) = \frac{r_{33}(\xi, \eta)}{r_3(\xi, \eta)} \quad (2.32)$$

O versor $\vec{v}_{3i}$, (Figura 2.4), normal ao plano médio no nó i (coordenadas ξ_i e η_i), é dado por:

$$\vec{v}_{3i} = \vec{v}_3(\xi_i, \eta_i) \quad (2.33)$$

Decompondo-se, agora, o versor $\vec{v}_{3i}$ em seus componentes segundo os eixos X , Y e Z do sistema de referência global, tem-se que:

$$v_{31i} = v_{31}(\xi_i, \eta_i) \quad (2.34)$$

$$v_{32i} = v_{32}(\xi_i, \eta_i) \quad (2.35)$$

$$v_{33i} = v_{33}(\xi_i, \eta_i) \quad (2.36)$$

A partir da Figura 2.5, se t_i é a espessura da placa no nó i , qualquer ponto P ao longo da espessura será dado pelo vetor $\bar{m}_i$, obtido da seguinte maneira:

$$\bar{m}_i(\zeta) = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \bar{v}_{3i} \quad (2.37)$$

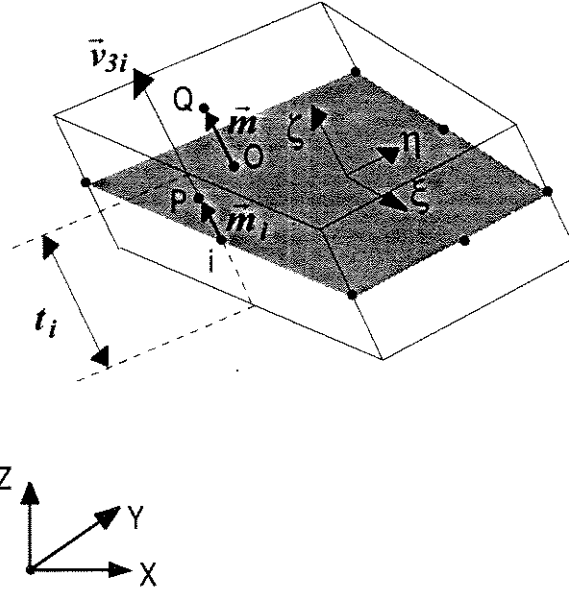


Figura 2.5 - Espessura t_i do elemento no nó i e vetores $\bar{m}_i$ e $\bar{m}$.

Pode-se, agora, interpolar o vetor $\bar{m}$ a partir dos vetores $\bar{m}_i$ e das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ de cada nó do plano médio:

$$\bar{m}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{m}_i(\zeta) \quad (2.38)$$

Substituindo-se o vetor $\bar{m}_i$ pelo seu valor dado na Equação (2.37), obtem-se que:

$$\bar{m}(\xi, \eta, \zeta) = \zeta \cdot \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \bar{v}_{3i} \quad (2.39)$$

O vetor $\bar{m}$, portanto, define qualquer ponto Q fora do plano médio. Observe-se que, pela Equação (2.39), quando $\zeta=1$, tem-se um ponto no plano superior do elemento e quando $\zeta=-1$, um ponto do plano inferior.

2.2.3 Determinação do vetor $\vec{R}$

A partir das Equações (2.1), (2.3) e (2.39), pode-se definir o vetor $\vec{R}$, que posiciona qualquer ponto Q do elemento, como:

$$\vec{R}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \vec{r}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \vec{v}_{3i} \quad (2.40)$$

Reescrevendo-se a Equação (2.40) com os componentes dos vetores segundo o sistema de referência global, obtém-se que:

$$\vec{R}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{31i} \\ v_{32i} \\ v_{33i} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

Tomando-se agora as equações para cada componente de $\vec{R}$:

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot x_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{31i} \quad (2.42)$$

$$y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{32i} \quad (2.43)$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot z_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{33i} \quad (2.44)$$

As Equações (2.42), (2.43) e (2.44) fornecem, então, as coordenadas globais x , y e z de qualquer ponto do elemento.

A Figura 2.6 ilustra o mapeamento do elemento do espaço local para o espaço cartesiano.

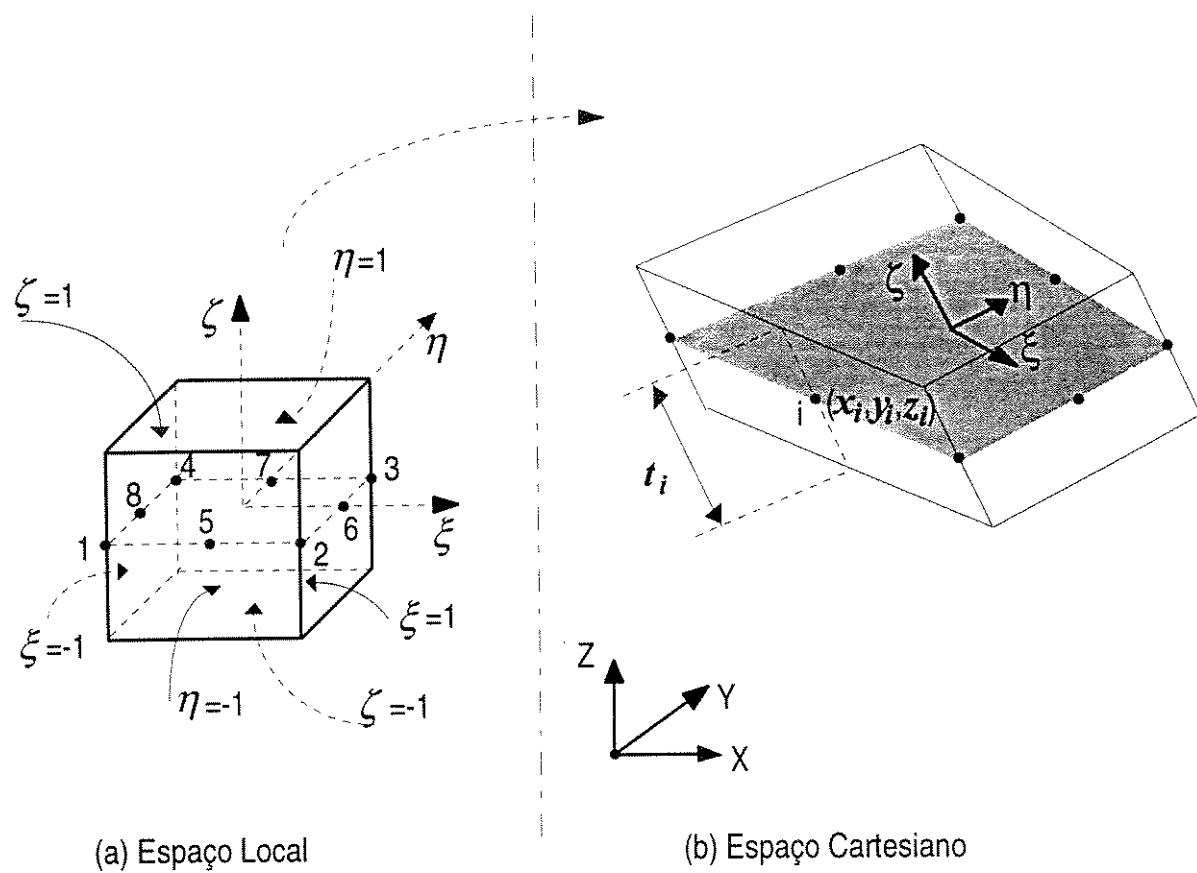


Figura 2.6 - Mapeamento tridimensional do elemento, do espaço local para o espaço cartesiano.

CAPÍTULO 3

CAMPO DE DESLOCAMENTO

3.1 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Nas análises que utilizam o Método dos Elementos Finitos, tem-se, usualmente, uma função Φ que se pretende aproximar numericamente. Esta função é aplicável em um determinado domínio Ω e deve atender a certas condições no contorno Γ do domínio (ZIENKIEWICZ e MORGAN, 1983). O domínio é discretizado em subdomínios Ω^e (elementos finitos) e o que se busca é uma solução aproximada para Φ .

Se a formulação adotada para o método for a dos deslocamentos, como neste trabalho, então Φ corresponde ao campo de deslocamento e pode ser interpolado da seguinte maneira (COOK *et al*, 1989):

$$\phi = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (3.1)$$

onde a_i ($i=1,2,\dots,n$) corresponde aos deslocamentos dos n nós e que são os graus de liberdade do problema, a serem calculados pela resolução de equações algébricas. As funções N_i são polinômios interpoladores definidos para os n pontos nodais do elemento, escolhidos de tal forma que, para o nó i , o polinômio assume valor unitário e para os demais nós, valor nulo:

$$N_i(x_i, y_i) = 1 \quad (3.2)$$

$$N_i(x_k, y_k) = 0 \quad (3.3)$$

As funções de interpolação, também chamadas funções de deslocamento, devem satisfazer determinados critérios, para que se garanta uma convergência monotônica para a solução do problema. Esses critérios de convergência, se atendidos, asseguram ao elemento o “status” da *compatibilidade* e *completeza*, qualificando-o como um elemento *conforme* (BATHE, 1982). A utilização de elementos conformes garante o aumento contínuo da precisão dos resultados com o refinamento da malha.

Os critérios de convergência podem ser expostos da seguinte maneira (HUEBNER, 1975):

- a) As funções de deslocamento devem permitir a representação do estado de deformação específica nula, em consequência de movimento de corpo rígido. Como o estado de deformação específica é obtido a partir da derivada de primeira ordem da função de deslocamento, na expansão polinomial deve existir o termo constante.

- b) As funções de deslocamento devem permitir a representação do estado de deformação específica constante. Tal estado pode ocorrer pela diminuição, ao limite, do tamanho do elemento, ou como característica própria do campo de deslocamento produzido pelos deslocamentos nodais. Para que esse critério seja satisfeito, a expansão polinomial deve conter polinômio completo de primeiro grau.
- c) As funções de deslocamento, além de naturalmente contínuas no interior do elemento, também devem ser contínuas na interface entre elementos. Isto as classifica como funções de continuidade C^0 , o que garante deformações específicas finitas na interface entre elementos.

Uma questão importante corresponde ao *grau* de aproximação pretendido. Um campo de interpolação linear pode ser adequado se o número de elementos gerados pela discretização for grande; já elementos baseados em campos quadráticos ou cúbicos podem fornecer uma aproximação melhor do campo real, a um custo computacional mais baixo –nesse caso, a contrapartida é a complexidade maior dos elementos. Além disso, se forem conhecidas *a priori* as características do campo real, que se deseja aproximar, a escolha do grau de aproximação é bastante facilitada: por exemplo, se o campo real for um polinômio exato de grau p , a escolha da aproximação com grau igual ou maior que p implica na solução exata. Raramente, entretanto, a solução é um polinômio exato (ZIENKIEWICZ e MORGAN, 1983).

Para que a interpolação se efetive no grau pretendido, a expansão polinomial utilizada deve ser completa, com todos os termos definidos pelo triângulo de Pascal para o grau desejado (Figura 3.1).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & \xi & \eta \\
 & & & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \\
 & & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 & \\
 & \xi^4 & \xi^3\eta & \xi^2\eta^2 & \xi\eta^3 & \eta^4 & \\
 & \xi^5 & \xi^4\eta & \xi^3\eta^2 & \xi^2\eta^3 & \xi\eta^4 & \eta^5 \\
 \xi^6 & \xi^5\eta & \xi^4\eta^2 & \xi^3\eta^3 & \xi^2\eta^4 & \xi\eta^5 & \eta^6
 \end{array}$$

Figura 3.1: Triângulo de Pascal para expansões polinomiais até o sexto grau.

Se os polinômios N_i , selecionados para interpolar o campo de deslocamento, não contiverem todos os termos definidos no triângulo de Pascal, para o grau de aproximação desejado, pode-se utilizar polinômios complementares M_{pk} , associados ao interior do elemento, para completar a expansão polinomial. Nesta expressão, p indica o grau e k numera o polinômio. Levando-se em conta a adição de polinômios complementares, não associados a nós, para completar a expansão polinomial no grau desejado, a Equação (3.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\phi = \sum_{i=1}^n N_i a_i + \sum_{k=1}^{nf} M_{pk} a_{pk} \quad (3.4)$$

Nesta expressão, nf representa o número de polinômios não associados a nós incluídos na interpolação; a_{pk} , por sua vez, representa um parâmetro não nodal e sem um significado físico definido. Esses parâmetros podem ser classificados de graus de liberdade *numéricos*, em contraposição aos graus de liberdade físicos a_i (ZIENKIEWICZ e MORGAN, 1983).

Na formulação paramétrica do método dos elementos finitos, pode-se adotar graus diferentes de interpolação para a geometria e para o campo de deslocamento. Quando isso ocorre, pode-se, a rigor, falar em dois elementos independentes utilizados na análise: um para a aproximação da geometria e outro para a aproximação da variável dependente. Este trabalho adota a formulação *subparamétrica* do método dos elementos finitos, onde o grau de interpolação da geometria é menor do que o grau de interpolação do campo de deslocamento. Como exposto anteriormente, a geometria será representada por elementos de 8 nós da família de Serendipity e a interpolação realizada por polinômios quadráticos. Já para a interpolação do campo de deslocamento será utilizado o elemento quadrilateral de 4 nós. Portanto, do elemento de 8 nós utilizado na representação da geometria, retêm-se os 4 nós dos vértices do quadrilátero para a aproximação do campo de deslocamento. Serão utilizadas uma gama de funções associadas aos nós e ao interior do elemento para a interpolação do campo de deslocamento. Essas funções serão combinadas formando seis esquemas diferentes de interpolação.

A identificação dos polinômios interpoladores é feita utilizando-se dois índices. Para os polinômios associados aos nós – N_{il} – l indica o grau do polinômio e i o nó a ele associado; para os polinômios associados ao interior do elemento – M_{pk} – p indica o grau e k numera o polinômio.

Apresentam-se, a seguir, os polinômios utilizados na interpolação do campo de deslocamento:

(a) polinômios associados aos nós do elemento :

$$N_{11}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad (3.5)$$

$$N_{12}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (3.6)$$

$$N_{13}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad (3.7)$$

$$N_{14}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (3.8)$$

$$N_{31}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3\right) \quad (3.9)$$

$$N_{32}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3\right) \quad (3.10)$$

$$N_{33}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\eta^3\right) \quad (3.11)$$

$$N_{34}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\eta^3\right) \quad (3.12)$$

(b) polinômios associados ao interior do elemento :

$$M_{31}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (3.13)$$

$$M_{32}(\xi, \eta) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (3.14)$$

$$M_{33}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (3.15)$$

$$M_{34}(\xi, \eta) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (3.16)$$

$$M_{41}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (3.17)$$

$$M_{42}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (3.18)$$

$$M_{43}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4\right) \quad (3.19)$$

$$M_{44}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4\right) \quad (3.20)$$

$$M_{45}(\xi, \eta) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4\right) \quad (3.21)$$

Os gráficos dos polinômios referentes as Equações de (3.5) a (3.21) são apresentados a seguir:

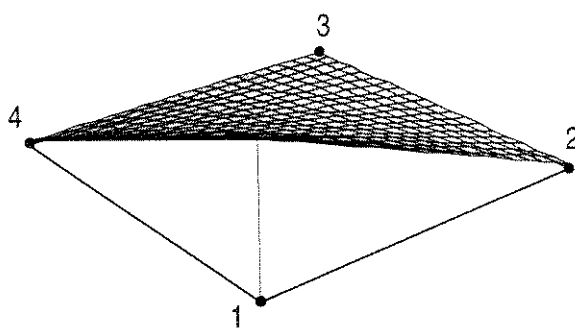


Figura 3.2: Função $N_{11}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$.

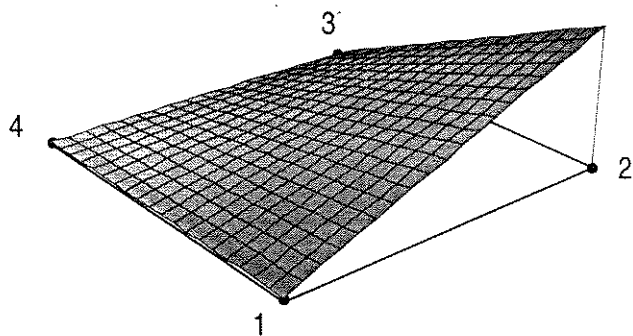


Figura 3.3: Função $N_{12}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$.

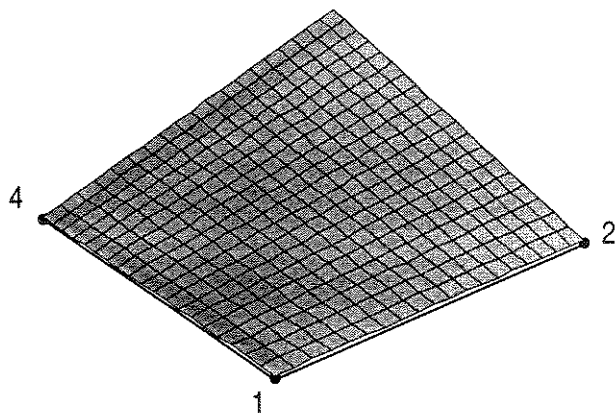


Figura 3.4: Função $N_{13}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$

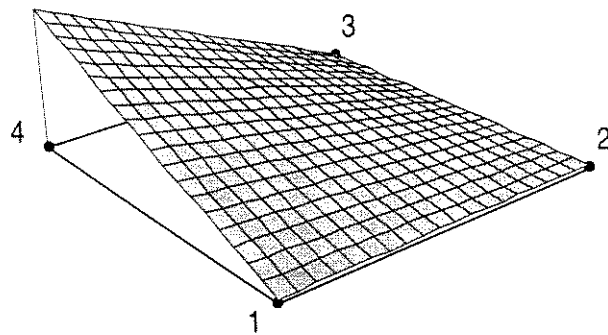


Figura 3.5: Função $N_{14}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$

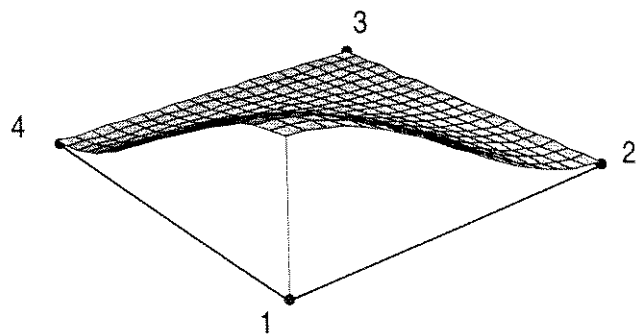


Figura 3.6: Função $N_{31}(\xi, \eta) = (\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3)(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3)$

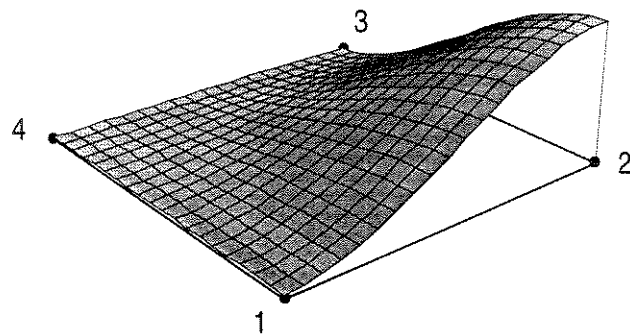


Figura 3.7: Função $N_{32}(\xi, \eta) = (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3)(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3)$.

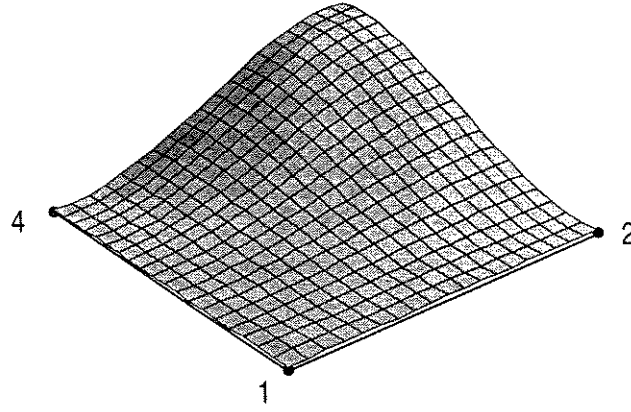


Figura 3.8 : Função $N_{33}(\xi, \eta) = (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3)(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\eta^3)$

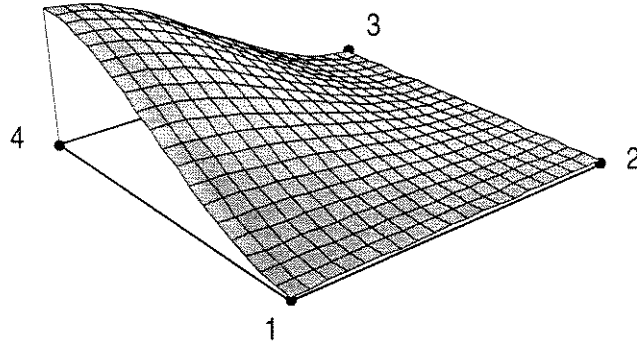


Figura 3.9 : Função $N_{34}(\xi, \eta) = (\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3)(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\eta^3)$.

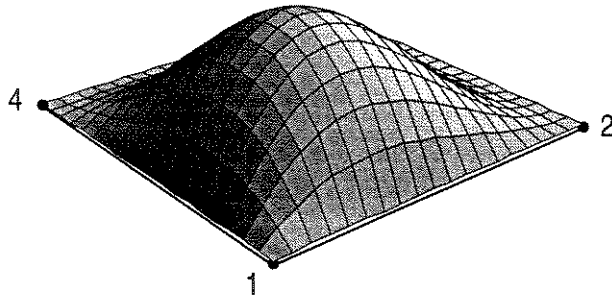


Figura 3.10 : Função $M_{31}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$

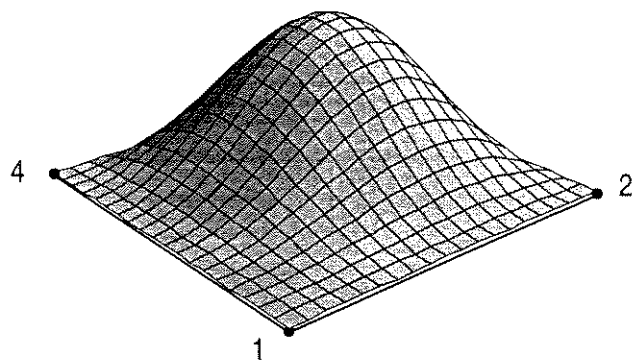


Figura 3.11 : Função $M_{32}(\xi, \eta) = (-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$

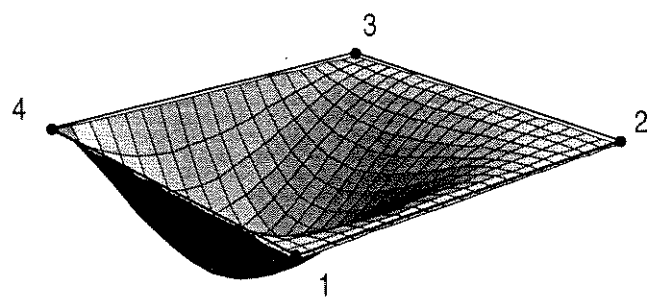


Figura 3.12 : Função $M_{33}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$

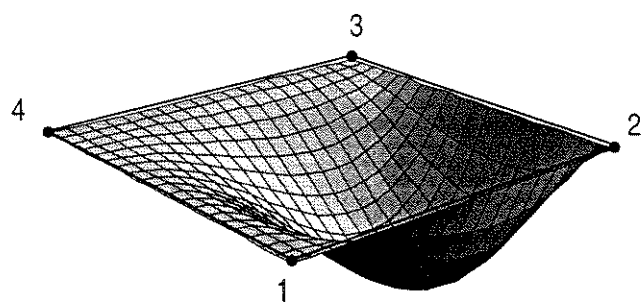


Figura 3.13 : Função $M_{34}(\xi, \eta) = (-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$

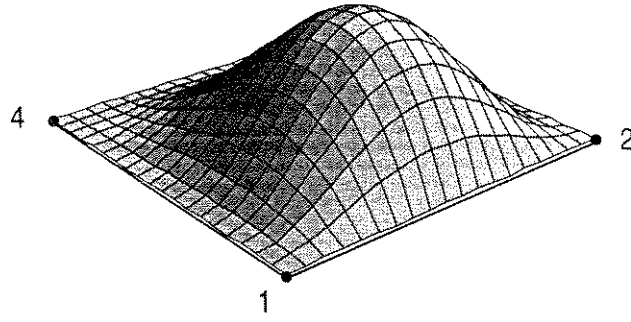


Figura 3.14 : Função $M_{41}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4)(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$

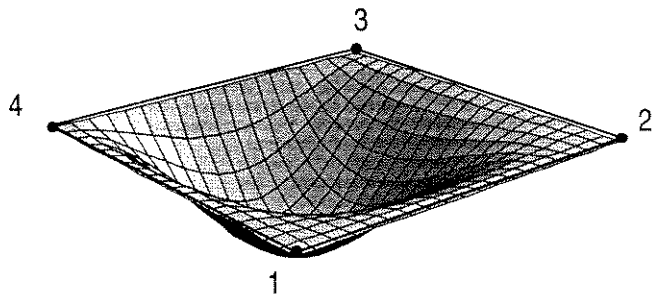


Figura 3.15 : Função $M_{42}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4)(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$

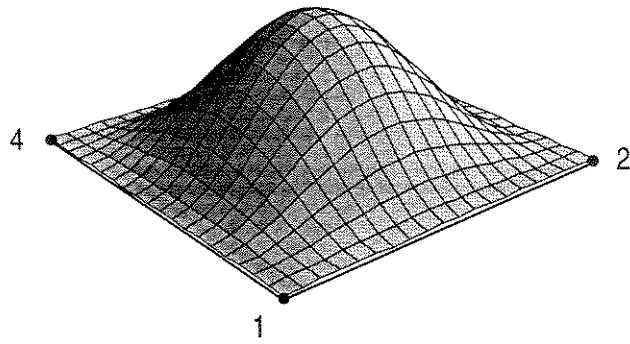


Figura 3.16 : Função $M_{43}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4)(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4)$

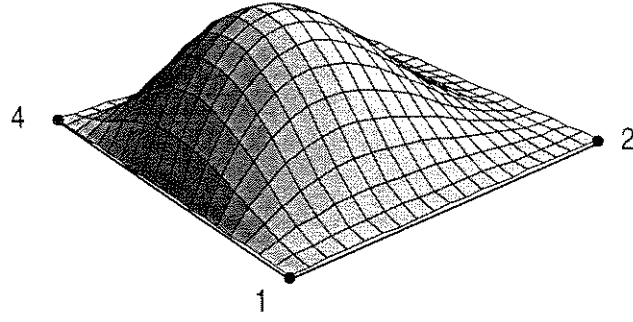


Figura 3.17 : Função $M_{44}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4)$

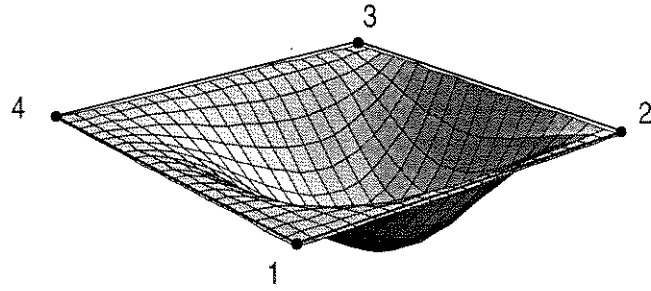


Figura 3.18 : Função $M_{45}(\xi, \eta) = (-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4)$

Os polinômios apresentados nas Equações de (3.5) até (3.21) foram combinados em seis diferentes esquemas de interpolação, apresentados nas Tabelas de 3.1 a 3.6:

Tabela 3.1 - Esquema de interpolação nº 1.

ESQUEMA 1	
FUNÇÕES NODAIS	$N_{11}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad N_{12}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$ $N_{13}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad N_{14}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$
FUNÇÕES NÃO NODAIS (BOLHAS)	$M_{31}(\xi,\eta) = (\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\xi-\frac{1}{8}\xi^2+\frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\eta-\frac{1}{8}\eta^2+\frac{1}{8}\eta^3)$ $M_{32}(\xi,\eta) = (-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\xi+\frac{1}{8}\xi^2+\frac{1}{8}\xi^3)(-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\eta+\frac{1}{8}\eta^2+\frac{1}{8}\eta^3)$ $M_{33}(\xi,\eta) = (\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\xi-\frac{1}{8}\xi^2+\frac{1}{8}\xi^3)(-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\eta+\frac{1}{8}\eta^2+\frac{1}{8}\eta^3)$ $M_{34}(\xi,\eta) = (-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\xi+\frac{1}{8}\xi^2+\frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\eta-\frac{1}{8}\eta^2+\frac{1}{8}\eta^3)$

Tabela 3.2 - Esquema de interpolação nº 2.

ESQUEMA 2	
FUNÇÕES NODAIS	$N_{11}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad N_{12}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$ $N_{13}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad N_{14}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$
FUNÇÕES NÃO NODAIS (BOLHAS)	$M_{41}(\xi,\eta) = (\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{8}\xi^4)(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\eta-\frac{1}{8}\eta^2+\frac{1}{8}\eta^3)$ $M_{42}(\xi,\eta) = (\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{8}\xi^4)(-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\eta+\frac{1}{8}\eta^2+\frac{1}{8}\eta^3)$ $M_{43}(\xi,\eta) = (\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{8}\xi^4)(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\eta^2+\frac{1}{8}\eta^4)$ $M_{44}(\xi,\eta) = (\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\xi-\frac{1}{8}\xi^2+\frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\eta^2+\frac{1}{8}\eta^4)$ $M_{45}(\xi,\eta) = (-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\xi+\frac{1}{8}\xi^2+\frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\eta^2+\frac{1}{8}\eta^4)$

Tabela 3.3 - Esquema de interpolação nº 3.

ESQUEMA 3	
FUNÇÕES NODAIS	$N_{11}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$ $N_{12}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$ $N_{13}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$ $N_{14}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$
FUNÇÕES NÃO NODAIS	$M_{31}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$
(BOLHAS)	$M_{32}(\xi, \eta) = (-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$
	$M_{33}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$
	$M_{34}(\xi, \eta) = (-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$
	$M_{41}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4)(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$
	$M_{42}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4)(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$
	$M_{43}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4)(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4)$
	$M_{44}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4)$
	$M_{45}(\xi, \eta) = (-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4)$

Tabela 3.4 - Esquema de interpolação nº 4.

ESQUEMA 4	
FUNÇÕES NODAIS	$N_{31}(\xi, \eta) = (\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3)(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3)$ $N_{32}(\xi, \eta) = (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3)(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3)$ $N_{33}(\xi, \eta) = (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3)(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\eta^3)$ $N_{34}(\xi, \eta) = (\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3)(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\eta^3)$
FUNÇÕES NÃO NODAIS (BOLHAS)	$M_{31}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$ $M_{32}(\xi, \eta) = (-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$ $M_{33}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$ $M_{34}(\xi, \eta) = (-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$

Tabela 3.5 - Esquema de interpolação nº 5.

ESQUEMA 5	
FUNÇÕES NODAIS	$N_{31}(\xi,\eta) = (\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\xi+\frac{1}{4}\xi^3)(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\eta+\frac{1}{4}\eta^3)$ $N_{32}(\xi,\eta) = (\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\xi-\frac{1}{4}\xi^3)(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\eta+\frac{1}{4}\eta^3)$ $N_{33}(\xi,\eta) = (\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\xi-\frac{1}{4}\xi^3)(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\eta-\frac{1}{4}\eta^3)$ $N_{34}(\xi,\eta) = (\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\xi+\frac{1}{4}\xi^3)(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\eta-\frac{1}{4}\eta^3)$
FUNÇÕES NÃO NODAIS (BOLHAS)	$M_{41}(\xi,\eta) = (\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{8}\xi^4)(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\eta-\frac{1}{8}\eta^2+\frac{1}{8}\eta^3)$ $M_{42}(\xi,\eta) = (\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{8}\xi^4)(-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\eta+\frac{1}{8}\eta^2+\frac{1}{8}\eta^3)$ $M_{43}(\xi,\eta) = (\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{8}\xi^4)(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\eta^2+\frac{1}{8}\eta^4)$ $M_{44}(\xi,\eta) = (\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\xi-\frac{1}{8}\xi^2+\frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\eta^2+\frac{1}{8}\eta^4)$ $M_{45}(\xi,\eta) = (-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\xi+\frac{1}{8}\xi^2+\frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\eta^2+\frac{1}{8}\eta^4)$

Tabela 3.6 - Esquema de interpolação nº 6.

ESQUEMA 6	
FUNÇÕES NODAIS	$N_{31}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3\right)$ $N_{32}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3\right)$ $N_{33}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\eta^3\right)$ $N_{34}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\eta^3\right)$
FUNÇÕES NÃO NODAIS (BOLHAS)	$M_{31}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right)$ $M_{32}(\xi, \eta) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right)$ $M_{33}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right)$ $M_{34}(\xi, \eta) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right)$ $M_{41}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right)$ $M_{42}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right)$ $M_{43}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4\right)$ $M_{44}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4\right)$ $M_{45}(\xi, \eta) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4\right)$

3.2 SISTEMAS LOCAIS DE REFERÊNCIA

Para a definição do campo de deslocamento do elemento de placa, deve-se utilizar sistemas locais de referência; a definição desses sistemas é feita a seguir.

A Figura 3.19 mostra um ponto genérico O do plano médio do elemento de placa e um sistema de referência local (x', y', z') , gerado a partir dos versores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ e $\bar{v}_3$. Como o versor $\bar{v}_3$ já foi definido (Equação (2.27)), resta definir $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$, a partir dos seguintes produtos vetoriais:

$$\bar{v}_1(\xi, \eta) = \frac{\bar{i} \wedge \bar{v}_3(\xi, \eta)}{|\bar{i} \wedge \bar{v}_3(\xi, \eta)|} \quad (3.22)$$

$$\bar{v}_2(\xi, \eta) = \bar{v}_3(\xi, \eta) \wedge \bar{v}_1(\xi, \eta) \quad (3.23)$$

onde $\bar{v}_3$ é o versor normal ao plano médio e $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$, versores tangentes ao mesmo; $\bar{i}$ é o versor da direção X do sistema global de referência. Se, eventualmente, houver coincidência na direção dos versores $\bar{i}$ e $\bar{v}_3$, $\bar{i}$ pode ser substituído pelo versor $\bar{j}$, associado à direção Y do sistema global.

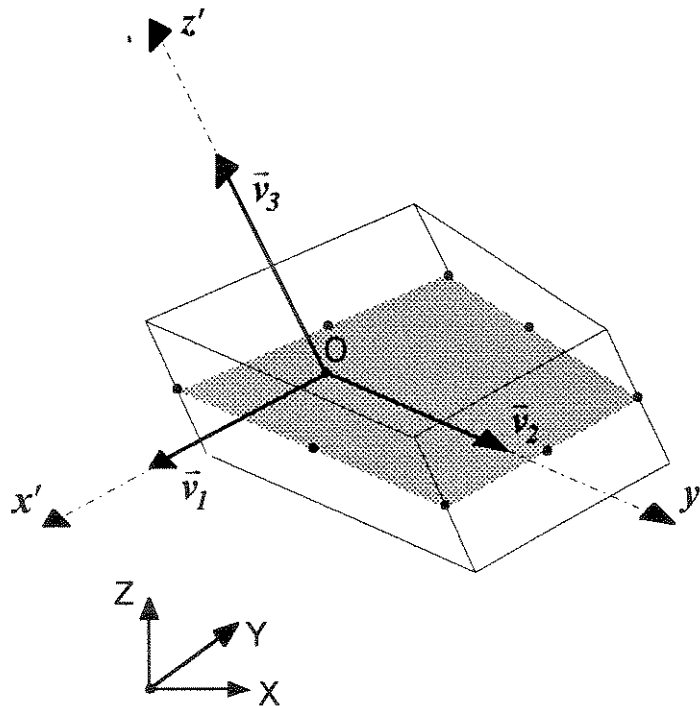


Figura 3.19: Sistema local de referência (x', y', z') associado ao ponto O .

A determinação do versor $\bar{v}_1$ será feita em duas etapas. Primeiro, considere-se o vetor $\bar{V}_1$, dado por :

$$\bar{V}_1(\xi, \eta) = \bar{i} \wedge \bar{v}_3(\xi, \eta) \quad (3.24)$$

No cálculo do produto vetorial, dado pela equação anterior, substituem-se os versores envolvidos pelos seus componentes segundo o sistema de referência global. Portanto,

$$\bar{V}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} V_{11}(\xi, \eta) \\ V_{12}(\xi, \eta) \\ V_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ v_{31}(\xi, \eta) & v_{32}(\xi, \eta) & v_{33}(\xi, \eta) \end{vmatrix} \quad (3.25)$$

Resolvendo-se o determinante, obtém-se que:

$$\bar{V}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} V_{11}(\xi, \eta) \\ V_{12}(\xi, \eta) \\ V_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -v_{33}(\xi, \eta) \\ v_{32}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

ou,

$$V_{11}(\xi, \eta) = 0 \quad (3.27)$$

$$V_{12}(\xi, \eta) = -v_{33}(\xi, \eta) \quad (3.28)$$

$$V_{13}(\xi, \eta) = v_{32}(\xi, \eta) \quad (3.29)$$

A partir do vetor $\bar{V}_1$, pode-se obter o versor $\bar{v}_1$ através da seguinte equação:

$$\bar{v}_1(\xi, \eta) = \frac{\bar{V}_1(\xi, \eta)}{V_1(\xi, \eta)} \quad (3.30)$$

onde $V_1(\xi, \eta)$ é o módulo do vetor $\bar{V}_1(\xi, \eta)$, dado por :

$$V_1(\xi, \eta) = \sqrt{V_{11}^2(\xi, \eta) + V_{12}^2(\xi, \eta) + V_{13}^2(\xi, \eta)} \quad (3.31)$$

Reescrevendo-se a Equação (3.30) e considerando-se os componentes do versor $\bar{v}_1$, tem-se que:

$$\bar{v}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{11}(\xi, \eta) \\ v_{12}(\xi, \eta) \\ v_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{V_1(\xi, \eta)} \cdot \begin{Bmatrix} V_{11}(\xi, \eta) \\ V_{12}(\xi, \eta) \\ V_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

ou,

$$v_{11}(\xi, \eta) = \frac{V_{11}(\xi, \eta)}{V_1(\xi, \eta)} \quad (3.33)$$

$$v_{12}(\xi, \eta) = \frac{V_{12}(\xi, \eta)}{V_1(\xi, \eta)} \quad (3.34)$$

$$v_{13}(\xi, \eta) = \frac{V_{13}(\xi, \eta)}{V_1(\xi, \eta)} \quad (3.35)$$

Tomando-se os valores de V_{11} , V_{12} e V_{13} , dados nas Equações (3.27), (3.28) e (3.29), as equações anteriores tornam-se:

$$v_{11}(\xi, \eta) = 0 \quad (3.36)$$

$$v_{12}(\xi, \eta) = \frac{-v_{33}(\xi, \eta)}{V_1(\xi, \eta)} \quad (3.37)$$

$$v_{13}(\xi, \eta) = \frac{v_{32}(\xi, \eta)}{V_1(\xi, \eta)} \quad (3.38)$$

onde

$$V_1(\xi, \eta) = \sqrt{v_{33}^2(\xi, \eta) + v_{32}^2(\xi, \eta)} \quad (3.39)$$

A determinação do versor $\bar{v}_2$ é feita a partir do produto vetorial especificado pela Equação (3.23):

$$\bar{v}_2(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{21}(\xi, \eta) \\ v_{22}(\xi, \eta) \\ v_{23}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_{31}(\xi, \eta) & v_{32}(\xi, \eta) & v_{33}(\xi, \eta) \\ v_{11}(\xi, \eta) & v_{12}(\xi, \eta) & v_{13}(\xi, \eta) \end{vmatrix} \quad (3.40)$$

Resolvendo-se o determinante, obtém-se que:

$$\bar{v}_2(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{21}(\xi, \eta) \\ v_{22}(\xi, \eta) \\ v_{23}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{32}(\xi, \eta) \cdot v_{13}(\xi, \eta) - v_{12}(\xi, \eta) \cdot v_{33}(\xi, \eta) \\ v_{33}(\xi, \eta) \cdot v_{11}(\xi, \eta) - v_{31}(\xi, \eta) \cdot v_{13}(\xi, \eta) \\ v_{31}(\xi, \eta) \cdot v_{12}(\xi, \eta) - v_{32}(\xi, \eta) \cdot v_{11}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

ou ainda,

$$v_{21}(\xi, \eta) = v_{32}(\xi, \eta) \cdot v_{13}(\xi, \eta) - v_{12}(\xi, \eta) \cdot v_{33}(\xi, \eta) \quad (3.42)$$

$$v_{22}(\xi, \eta) = v_{33}(\xi, \eta) \cdot v_{11}(\xi, \eta) - v_{31}(\xi, \eta) \cdot v_{13}(\xi, \eta) \quad (3.43)$$

$$v_{23}(\xi, \eta) = v_{31}(\xi, \eta) \cdot v_{12}(\xi, \eta) - v_{32}(\xi, \eta) \cdot v_{11}(\xi, \eta) \quad (3.44)$$

Como o componente de $\vec{v}_1$ segundo o eixo X é nulo, as equações anteriores tornam-se:

$$v_{21}(\xi, \eta) = v_{32}(\xi, \eta) \cdot v_{13}(\xi, \eta) - v_{12}(\xi, \eta) \cdot v_{33}(\xi, \eta) \quad (3.45)$$

$$v_{22}(\xi, \eta) = -v_{31}(\xi, \eta) \cdot v_{13}(\xi, \eta) \quad (3.46)$$

$$v_{23}(\xi, \eta) = v_{31}(\xi, \eta) \cdot v_{12}(\xi, \eta) \quad (3.47)$$

Portanto, o sistema local de referência (x' , y' , z') associado ao ponto O , é completamente definido pelos componentes dos versores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, dados pelas Equações (3.36), (3.37), (3.38), (3.45), (3.46), (3.47), (2.30), (2.31) e (2.32). Pode-se, agora, associar ao nó i , de coordenadas ξ_i e η_i , um sistema cartesiano de referência local (x' , y' , z'), a partir dos seguintes versores (Figura 3.20):

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_1(\xi_i, \eta_i) \quad (3.48)$$

$$\vec{v}_{2i} = \vec{v}_2(\xi_i, \eta_i) \quad (3.49)$$

$$\vec{v}_{3i} = \vec{v}_3(\xi_i, \eta_i) \quad (3.50)$$

Os componentes dos versores v_{1i} e v_{2i} , segundo o sistema global de referência, são dados por:

$$\vec{v}_{11i} = \vec{v}_{11}(\xi_i, \eta_i) \quad (3.51)$$

$$\vec{v}_{12i} = \vec{v}_{12}(\xi_i, \eta_i) \quad (3.52)$$

$$\vec{v}_{13i} = \vec{v}_{13}(\xi_i, \eta_i) \quad (3.53)$$

$$\vec{v}_{21i} = \vec{v}_{21}(\xi_i, \eta_i) \quad (3.54)$$

$$\vec{v}_{22i} = \vec{v}_{22}(\xi_i, \eta_i) \quad (3.55)$$

$$\vec{v}_{23i} = \vec{v}_{23}(\xi_i, \eta_i) \quad (3.56)$$

Os componentes do versor $\vec{v}_{3i}$ já foram obtidos e são dados pelas Equações (2.34), (2.35) e (2.36).

Pode-se definir, portanto, a partir das Equações (3.51), (3.52), (3.53), (3.54), (3.55), (3.56), (2.34), (2.35) e (2.36), o sistema de referência local (x' , y' , z'), associado ao nó i .

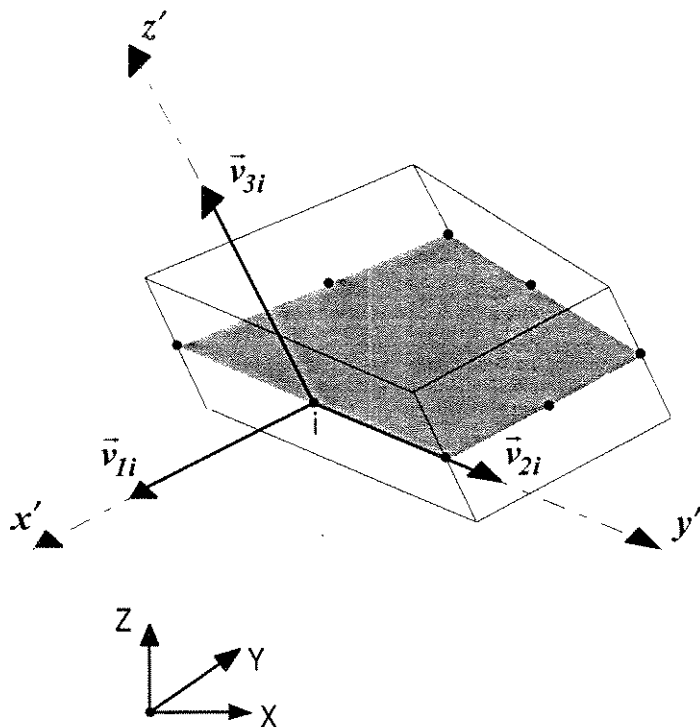


Figura 3.20: Sistema de referência local (x' , y' , z') associado ao nó i .

3.3 CAMPO DE DESLOCAMENTO

O modelo cinemático convencional para elementos de placa é baseado nas hipóteses de *Kirchhoff*, que estabelecem que linhas retas normais ao plano médio do elemento permanecem retas e normais, após a deformação, mantendo seus comprimentos iniciais. Essa hipótese equivale a considerar nulas as distorções $\gamma_{x'z'}$ e $\gamma_{y'z'}$, assim como a deformação específica $\epsilon_{z'}$, segundo o sistema de referência local. Esse modelo, portanto, desconsidera as tensões de cisalhamento ao longo da espessura do elemento. No desenvolvimento deste trabalho, entretanto, adota-se o modelo cinemático de *Mindlin - Reissner*, que permite levar em conta as tensões de cisalhamento transversais. Neste modelo, as linhas retas normais ao plano médio permanecem retas após a deformação, mantendo seu comprimento inicial. As linhas, no entanto, não permanecem mais normais ao plano médio. Portanto, o estado de deformação específica para o elemento de placa, ao adotar-se o modelo de *Mindlin - Reissner*, deve incluir os seguintes componentes, com relação ao sistema de referência local: $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$, $\gamma_{x'y'}$, $\gamma_{x'z'}$ e $\gamma_{y'z'}$. A Figura 3.21 ilustra o modelo cinemático adotado. Ao sofrer solicitação, o elemento se deforma e o nó i de seu plano médio apresenta o deslocamento $\vec{\delta}_i$. Este deslocamento pode ser decomposto nos componentes u_i , v_i e w_i , segundo as direções X , Y e Z .

referência global. O vetor $\vec{m}_i$, que antes da deformação, é normal ao plano médio, define o ponto P fora deste plano. Após a deformação, o vetor $\vec{m}_i$ não permanece normal ao plano médio, mas sim sofre duas rotações : α_i , em torno do eixo y' e β_i , em torno de x' . Como consequência , o ponto P desloca-se para a posição P' (Figura 3.21). Admitindo-se a hipótese de deslocamentos e deformações pequenos, o deslocamento $\vec{\Delta}_i$ do ponto P é dado por :

$$\vec{\Delta}_i = \vec{\delta}_i + m_i \cdot \alpha_i \cdot \vec{v}_{1i} - m_i \cdot \beta_i \cdot \vec{v}_{2i} \quad (3.57)$$

onde m_i é módulo de $\vec{m}_i$, dado por (Equação (2.37)):

$$m_i(\zeta) = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \quad (3.58)$$

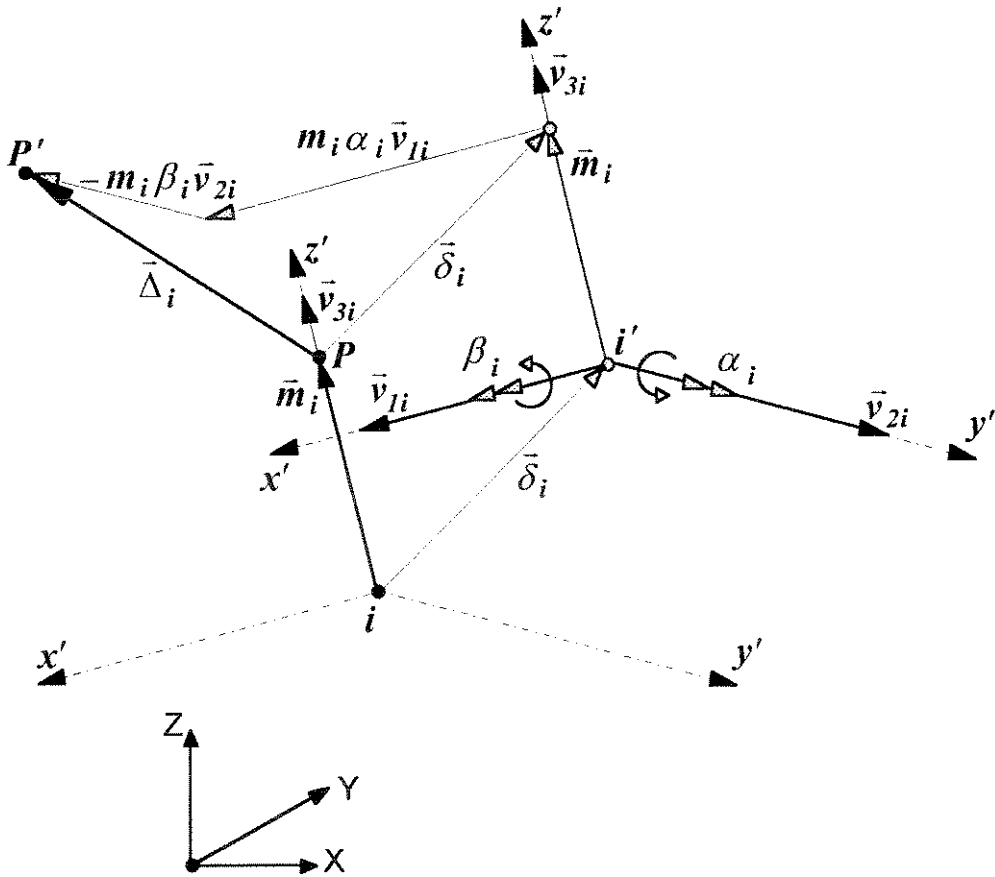


Figura 3.21 - Ilustração do modelo cinemático adotado.

A Equação (3.57) torna-se, então:

$$\bar{\Delta}_i(\zeta) = \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \alpha_i \cdot \bar{v}_{1i} - \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \beta_i \cdot \bar{v}_{2i} \quad (3.59)$$

A Equação (3.59) permite calcular o deslocamento de qualquer ponto P situado ao longo da espessura t_i do nó i . Tomando-se agora um ponto Q genérico do elemento, seu deslocamento $\bar{\Delta}$ pode ser interpolado a partir dos deslocamentos $\bar{\Delta}_i$ e das funções de forma $N'_i(\xi, \eta)$ de cada nó do plano médio (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1989):

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N'_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\Delta}_i(\zeta) \quad (3.60)$$

onde n é o número de nós do elemento. Se o elemento fosse isoparamétrico, as funções $N'_i(\xi, \eta)$ seriam iguais às funções $N_i(\xi, \eta)$, utilizadas na interpolação da geometria do elemento e apresentadas no Capítulo 2 deste trabalho. Entretanto, o elemento desenvolvido neste trabalho é subparamétrico e a interpolação do campo de deslocamento será feita a partir de um elemento com quatro nós pelas funções $N_{ii}(\xi, \eta)$, associadas aos nós e pelas funções complementares $M_{pk}(\xi, \eta)$, associadas ao interior do elemento, conforme especificado no item 3.1. Portanto,

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N_{ii}(\xi, \eta) \cdot \bar{\Delta}_i(\zeta) + \sum_{k=1}^n M_{pk}(\xi, \eta) \cdot \bar{\Delta}_{pk} \quad (3.61)$$

Na expressão anterior, $\bar{\Delta}_{pk}$ é um vetor de parâmetros não físicos, associados ao interior do elemento e n é o número de funções não nodais utilizadas na interpolação. Substituindo-se $\bar{\Delta}_i$ dado pela Equação (3.59), tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^4 N_{ii}(\xi, \eta) \cdot \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N_{ii}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N_{ii}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i + \sum_{k=1}^n M_{pk}(\xi, \eta) \cdot \bar{\Delta}_{pk} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Na Equação (3.62), $\bar{\Delta}_{pk}$ é o vetor de parâmetros associados ao interior do elemento. Como discutido no item 3.1 deste capítulo, não há um significado físico associado a esse vetor. Decompondo-se agora os vetores segundo as direções X, Y e Z do sistema de referência global, tem-se que :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = & \sum_{i=1}^4 N_{ii}(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N_{ii}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{11i} \\ v_{12i} \\ v_{13i} \end{Bmatrix} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N_{ii}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{21i} \\ v_{22i} \\ v_{23i} \end{Bmatrix} \cdot \beta_i + \sum_{k=1}^n M_{pk}(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} a_{pk} \\ b_{pk} \\ c_{pk} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.63)$$

ou ainda,

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i + \sum_{k=1}^n M_{pk}(\xi, \eta) \cdot a_{pk} \quad (3.64)$$

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i + \sum_{k=1}^n M_{pk}(\xi, \eta) \cdot b_{pk} \quad (3.65)$$

$$w(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i + \sum_{k=1}^n M_{pk}(\xi, \eta) \cdot c_{pk} \quad (3.66)$$

Pode-se expressar as equações para os deslocamentos na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 [N_{li}(\xi, \eta, \zeta)] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^n [M_{pk}(\xi, \eta)] \begin{Bmatrix} a_{pk} \\ b_{pk} \\ c_{pk} \end{Bmatrix} \quad (3.67)$$

onde $[N_{li}(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (3×5) constituída das funções de deslocamento $N_{li}(\xi, \eta)$ e dos parâmetros (espessura t_i e componentes dos versores $\bar{v}_{1i}$ e $\bar{v}_{2i}$) referentes ao nó i :

$$[N_{li}(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} N_{li}(\xi, \eta) & 0 & 0 & \zeta \cdot N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -\zeta \cdot N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & N_{li}(\xi, \eta) & 0 & \zeta \cdot N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -\zeta \cdot N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & N_{li}(\xi, \eta) & \zeta \cdot N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -\zeta \cdot N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

e $[M_{pk}(\xi, \eta)]$ uma matriz (3×3) constituída das funções de deslocamento $M_{pk}(\xi, \eta)$ associadas ao interior do elemento:

$$[M_{pk}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} M_{pk}(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_{pk}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_{pk}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Fazendo-se agora:

$$\{a_{li}\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

e

$$\{a_{pk}\} = \begin{Bmatrix} a_{pk} \\ b_{pk} \\ c_{pk} \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

pode-se reescrever a Equação (3.67) na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \left[[N_{l1}(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [N_{li}(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [N_{l4}(\xi, \eta, \zeta)], [M_{p1}(\xi, \eta)], \dots, [M_{pk}(\xi, \eta)], \dots, [M_{pn}(\xi, \eta)] \right] \begin{Bmatrix} \{a_{l1}\} \\ \vdots \\ \{a_{li}\} \\ \vdots \\ \{a_{l4}\} \\ \{a_{p1}\} \\ \vdots \\ \{a_{pk}\} \\ \vdots \\ \{a_{pn}\} \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

Escrevendo-se a equação anterior de uma forma compacta:

$$\{u\} = [N] \cdot \{a\} \quad (3.73)$$

onde $\{u\}$ é uma matriz coluna (3×1) formada pelos deslocamentos $u(\xi, \eta, \zeta)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$ e $w(\xi, \eta, \zeta)$; $[N]$ é uma matriz que, dependendo do esquema de interpolação adotado, pode ter as dimensões (3×32), (3×35) ou (3×47), formada pelas funções de deslocamento $N_{li}(\xi, \eta)$ e $M_{pk}(\xi, \eta)$; $\{a\}$, uma matriz coluna de dimensões (32×1), (35×1) ou (47×1), constituída pelos deslocamentos nodais u_i , v_i , w_i , α_i , β_i e pelos parâmetros não nodais a_{pk} , b_{pk} e c_{pk} . A partir da Equação (3.72), pode-se escrever, então, que:

$$[N] = \left[[N_{l1}], \dots, [N_{li}], \dots, [N_{l4}], [M_{p1}], \dots, [M_{pk}], \dots, [M_{pn}] \right] \quad (3.74)$$

CAPÍTULO 4

ESTADO DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA

4.1 ESTADO DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA COM RELAÇÃO AO SISTEMA DE REFERÊNCIA GLOBAL

O estado de deformação específica de um ponto genérico Q do elemento de placa, com relação ao sistema de referência global (X, Y, Z) , pode ser expresso pelas seguintes equações (PRZEMIENIECKI, 1968):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} \quad (4.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} \quad (4.4)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} \quad (4.5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} \quad (4.6)$$

onde $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$ são os deslocamentos apresentados pelo ponto Q segundo o sistema global de referência.

Segundo as Equações (2.42), (2.43) e (2.44), as coordenadas x , y e z do ponto Q são funções das coordenadas naturais curvilíneas ξ e η e da coordenada natural linear ζ ; já as Equações (3.64), (3.65) e (3.66) definem os deslocamentos u , v e w como funções, também, do mesmo sistema de coordenadas. Pode-se, portanto, aplicar a regra da derivação em cadeia:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \zeta} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (4.15)$$

Se $[J]$ é a matriz Jacobiano da transformação (KAPLAN, 1971), dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

então, as Equações de (4.7) a (4.15) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = [J] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Pode-se, agora, reescrever a matriz $[J]$, levando-se em conta que x , y e z são os componentes do vetor $\vec{R}$, segundo o sistema de referência global (Figura 2.2) e que $\vec{R}$ é a soma dos vetores $\vec{r}$ e $\vec{m}$ (Equação (2.1)):

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{r} + \vec{m}) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} (\vec{r} + \vec{m}) \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\vec{r} + \vec{m}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Reconhecendo-se que (ZIENKIEWICZ *et al*, 1971):

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial \xi} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial \eta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} = \vec{0} \quad (4.19)$$

a Equação (4.18) torna-se :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \vec{m}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

ou ainda,

$$[J] = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

onde $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são os vetores tangentes ao plano médio, dados pelas Equações (2.14) e (2.15). $\vec{V}_3$ é um vetor normal ao plano médio, obtido a partir da Equação (2.39) da seguinte forma:

$$\vec{V}_3(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \vec{v}_{3i} \quad (4.22)$$

Na equação acima, $N_i(\xi, \eta)$ são as funções da família *Serendipity*, dadas pelas Equações (2.4), (2.5) e (2.6). Escrevendo-se, agora, os componentes V_{31} , V_{32} e V_{33} de $\vec{V}_3$ segundo os eixos X , Y e Z do sistema de referência global, tem-se que:

$$\vec{V}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} V_{31}(\xi, \eta) \\ V_{32}(\xi, \eta) \\ V_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{31i} \\ v_{32i} \\ v_{33i} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Portanto,

$$V_{31}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{31i} \quad (4.24)$$

$$V_{32}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{32i} \quad (4.25)$$

$$V_{33}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{33i} \quad (4.26)$$

As derivadas dos deslocamentos u , v e w com relação às coordenadas globais podem ser obtidas da seguinte forma :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Na equação anterior, $[J]^{-1}$ é a inversa da matriz Jacobiano, dada por (KAPLAN, 1971):

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot [\vec{r}_2 \wedge \vec{V}_3, \vec{V}_3 \wedge \vec{r}_1, \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2] \quad (4.28)$$

$|J|$ é o determinante da matriz $[J]$, obtido a partir de (KAPLAN, 1971):

$$|J| = \vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \vec{V}_3) \quad (4.29)$$

Tomando-se a equação anterior e resolvendo-se os produtos vetorial e escalar, obtém-se que:

$$\begin{aligned} |J(\xi, \eta)| &= r_{11}(\xi, \eta) \cdot [r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta)] \\ &\quad - r_{12}(\xi, \eta) \cdot [r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)] \\ &\quad + r_{13}(\xi, \eta) \cdot [r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Na equação anterior, os componentes dos vetores $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são dados nas Equações de (2.16) a (2.21); os componentes de $\vec{V}_3$, nas Equações de (4.24) a (4.26).

4.2 ESTADO DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA COM RELAÇÃO AO SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL

Se u' , v' e w' são os deslocamentos apresentados pelo ponto Q segundo o sistema de referência local (x' , y' , z'), associado ao ponto O (Figura 3.19), o estado de deformação específica do ponto Q segundo esse mesmo sistema será dado por :

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad (4.31)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\partial v'}{\partial y'} \quad (4.32)$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \quad (4.33)$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \quad (4.34)$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \quad (4.35)$$

Deve-se, agora, obter as derivadas dos deslocamentos locais (u' , v' , w') em relação às coordenadas locais (x' , y' e z') através da seguinte transformação (PIPES e HOVANESSIAN, 1969):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot [\theta] \quad (4.36)$$

Na expressão anterior, $[\theta]$ é uma matriz quadrada formada pelos cossenos diretores do sistema de referência local com relação ao sistema de referência global:

$$[\theta] = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3] \quad (4.37)$$

Os versores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ e $\bar{v}_3$ já foram obtidos anteriormente, sendo dados pelas Equações (3.32), (3.41) e (2.29), respectivamente.

Pode-se reescrever, agora, a Equação (4.36) a partir da Equação (4.27):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \cdot [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot [\theta] \quad (4.38)$$

Levando-se em conta as Equações (4.28) e (4.37), pode-se escrever que :

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{r}_2 \wedge \bar{r}_3 & \bar{r}_3 \wedge \bar{r}_1 & \bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

ou ainda,

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{r}_3) & \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \\ \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{r}_3) & \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \\ \bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{r}_3) & \bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Pela orientação dos vetores gerados pelos produtos $(\bar{r}_2 \wedge \bar{r}_3)$, $(\bar{r}_3 \wedge \bar{r}_1)$ e $(\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2)$, tem-se que :

$$\bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{r}_3) = \bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_3 \wedge \bar{r}_1) = \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) = \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) = 0 \quad (4.41)$$

Portanto,

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

onde,

$$A_{11}(\xi, \eta) = \bar{v}_1(\xi, \eta) \cdot (\bar{r}_2(\xi, \eta) \wedge \bar{r}_3(\xi, \eta)) \quad (4.43)$$

$$A_{21}(\xi, \eta) = \bar{v}_2(\xi, \eta) \cdot (\bar{r}_2(\xi, \eta) \wedge \bar{r}_3(\xi, \eta)) \quad (4.44)$$

$$A_{12}(\xi, \eta) = \bar{v}_1(\xi, \eta) \cdot (\bar{V}_3(\xi, \eta) \wedge \bar{r}_1(\xi, \eta)) \quad (4.45)$$

$$A_{22}(\xi, \eta) = \bar{v}_2(\xi, \eta) \cdot (\bar{V}_3(\xi, \eta) \wedge \bar{r}_1(\xi, \eta)) \quad (4.46)$$

$$A_{33}(\xi, \eta) = \bar{v}_3(\xi, \eta) \cdot (\bar{r}_1(\xi, \eta) \wedge \bar{r}_2(\xi, \eta)) = \bar{v}_3(\xi, \eta) \cdot \bar{r}_3(\xi, \eta) \quad (4.47)$$

Após a efetivação dos produtos escalar e vetorial, as equações anteriores tornam-se:

$$\begin{aligned} A_{11}(\xi, \eta) = & v_{11}(\xi, \eta) \cdot (r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta)) \\ & - v_{12}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) \\ & + v_{13}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} A_{21}(\xi, \eta) = & v_{21}(\xi, \eta) \cdot (r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta)) \\ & - v_{22}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) \\ & + v_{23}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} A_{12}(\xi, \eta) = & v_{11}(\xi, \eta) \cdot (V_{32}(\xi, \eta) \cdot r_{13}(\xi, \eta) - V_{33}(\xi, \eta) \cdot r_{12}(\xi, \eta)) \\ & - v_{12}(\xi, \eta) \cdot (V_{31}(\xi, \eta) \cdot r_{13}(\xi, \eta) - V_{33}(\xi, \eta) \cdot r_{11}(\xi, \eta)) \\ & + v_{13}(\xi, \eta) \cdot (V_{31}(\xi, \eta) \cdot r_{12}(\xi, \eta) - V_{32}(\xi, \eta) \cdot r_{11}(\xi, \eta)) \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} A_{22}(\xi, \eta) = & v_{21}(\xi, \eta) \cdot (V_{32}(\xi, \eta) \cdot r_{13}(\xi, \eta) - V_{33}(\xi, \eta) \cdot r_{12}(\xi, \eta)) \\ & - v_{22}(\xi, \eta) \cdot (V_{31}(\xi, \eta) \cdot r_{13}(\xi, \eta) - V_{33}(\xi, \eta) \cdot r_{11}(\xi, \eta)) \\ & + v_{23}(\xi, \eta) \cdot (V_{31}(\xi, \eta) \cdot r_{12}(\xi, \eta) - V_{32}(\xi, \eta) \cdot r_{11}(\xi, \eta)) \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$A_{33}(\xi, \eta) = v_{31}(\xi, \eta) \cdot r_{31}(\xi, \eta) + v_{32}(\xi, \eta) \cdot r_{32}(\xi, \eta) + v_{33}(\xi, \eta) \cdot r_{33}(\xi, \eta) \quad (4.52)$$

Os componentes do versor $\bar{v}_1$ já foram obtidos e são dados nas Equações de (3.36) a (3.38); igualmente, para o versor $\bar{v}_2$, Equações de (3.45) a (3.47), versor $\bar{v}_3$, Equações de (2.30) a (2.32) e vetor $\bar{r}_3$, Equações de (2.24) a (2.26).

Pode-se, agora, escrever a Equação (4.38) da seguinte maneira :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Como há desacoplamento, pode-se escrever que :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \cdot A_{33} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Após a efetivação dos produtos matriciais e a utilização e reorganização das Equações de (4.31) a (4.35) sob forma matricial, pode-se escrever, para o estado de deformação específica segundo o sistema de referência local, que:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial w} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

onde

$$[d(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{47} & d_{48} & d_{49} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & d_{57} & d_{58} & d_{59} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} d_{11}(\xi, \eta) &= A_{11}(\xi, \eta) \cdot v_{11}(\xi, \eta) \\ d_{12}(\xi, \eta) &= A_{11}(\xi, \eta) \cdot v_{12}(\xi, \eta) \\ d_{13}(\xi, \eta) &= A_{11}(\xi, \eta) \cdot v_{13}(\xi, \eta) \\ d_{14}(\xi, \eta) &= A_{12}(\xi, \eta) \cdot v_{11}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{15}(\xi, \eta) &= A_{12}(\xi, \eta) \cdot v_{12}(\xi, \eta) \\
d_{16}(\xi, \eta) &= A_{12}(\xi, \eta) \cdot v_{13}(\xi, \eta) \\
d_{21}(\xi, \eta) &= A_{21}(\xi, \eta) \cdot v_{21}(\xi, \eta) \\
d_{22}(\xi, \eta) &= A_{21}(\xi, \eta) \cdot v_{22}(\xi, \eta) \\
d_{23}(\xi, \eta) &= A_{21}(\xi, \eta) \cdot v_{23}(\xi, \eta) \\
d_{24}(\xi, \eta) &= A_{22}(\xi, \eta) \cdot v_{21}(\xi, \eta) \\
d_{25}(\xi, \eta) &= A_{22}(\xi, \eta) \cdot v_{22}(\xi, \eta) \\
d_{26}(\xi, \eta) &= A_{22}(\xi, \eta) \cdot v_{23}(\xi, \eta) \\
d_{31}(\xi, \eta) &= A_{21}(\xi, \eta) \cdot v_{11}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) \cdot v_{21}(\xi, \eta) \\
d_{32}(\xi, \eta) &= A_{21}(\xi, \eta) \cdot v_{12}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) \cdot v_{22}(\xi, \eta) \\
d_{33}(\xi, \eta) &= A_{21}(\xi, \eta) \cdot v_{13}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) \cdot v_{23}(\xi, \eta) \\
d_{34}(\xi, \eta) &= A_{22}(\xi, \eta) \cdot v_{11}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) \cdot v_{21}(\xi, \eta) \\
d_{35}(\xi, \eta) &= A_{22}(\xi, \eta) \cdot v_{12}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) \cdot v_{22}(\xi, \eta) \\
d_{36}(\xi, \eta) &= A_{22}(\xi, \eta) \cdot v_{13}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) \cdot v_{23}(\xi, \eta) \\
d_{41}(\xi, \eta) &= A_{11}(\xi, \eta) \cdot v_{31}(\xi, \eta) \\
d_{42}(\xi, \eta) &= A_{11}(\xi, \eta) \cdot v_{32}(\xi, \eta) \\
d_{43}(\xi, \eta) &= A_{11}(\xi, \eta) \cdot v_{33}(\xi, \eta) \\
d_{44}(\xi, \eta) &= A_{12}(\xi, \eta) \cdot v_{31}(\xi, \eta) \\
d_{45}(\xi, \eta) &= A_{12}(\xi, \eta) \cdot v_{32}(\xi, \eta) \\
d_{46}(\xi, \eta) &= A_{12}(\xi, \eta) \cdot v_{33}(\xi, \eta) \\
d_{47}(\xi, \eta) &= A_{33}(\xi, \eta) \cdot v_{11}(\xi, \eta) \\
d_{48}(\xi, \eta) &= A_{33}(\xi, \eta) \cdot v_{12}(\xi, \eta) \\
d_{49}(\xi, \eta) &= A_{33}(\xi, \eta) \cdot v_{13}(\xi, \eta) \\
d_{51}(\xi, \eta) &= A_{21}(\xi, \eta) \cdot v_{31}(\xi, \eta) \\
d_{52}(\xi, \eta) &= A_{21}(\xi, \eta) \cdot v_{32}(\xi, \eta) \\
d_{53}(\xi, \eta) &= A_{21}(\xi, \eta) \cdot v_{33}(\xi, \eta) \\
d_{54}(\xi, \eta) &= A_{22}(\xi, \eta) \cdot v_{31}(\xi, \eta) \\
d_{55}(\xi, \eta) &= A_{22}(\xi, \eta) \cdot v_{32}(\xi, \eta) \\
d_{56}(\xi, \eta) &= A_{22}(\xi, \eta) \cdot v_{33}(\xi, \eta) \\
d_{57}(\xi, \eta) &= A_{33}(\xi, \eta) \cdot v_{21}(\xi, \eta) \\
d_{58}(\xi, \eta) &= A_{33}(\xi, \eta) \cdot v_{22}(\xi, \eta) \\
d_{59}(\xi, \eta) &= A_{33}(\xi, \eta) \cdot v_{23}(\xi, \eta)
\end{aligned} \tag{4.58}$$

O estado de deformação específica do ponto Q com relação ao sistema de referência local fica completamente determinado com a obtenção das derivadas dos deslocamentos u , v e w com relação às coordenadas naturais ξ , η e ζ . Tomando-se como base as Equações (3.64), (3.65) e (3.66), pode-se escrever que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{1i}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{1i}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i \\
&\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{1i}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot a_{pk}
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot b_{pk} \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot c_{pk} \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} = & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot a_{pk} \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} = & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot b_{pk} \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} = & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_{li}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot c_{pk} \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^4 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \quad (4.67)$$

As derivadas dos polinômios $N_{li}(\xi, \eta)$ e $M_{pk}(\xi, \eta)$ com relação às coordenadas curvilíneas ξ e η são apresentadas no Apêndice C.

Expressando as equações anteriores na forma matricial, obtém-se que:

$$\begin{Bmatrix}
 \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\
 \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\
 \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\
 \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\
 \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\
 \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\
 \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\
 \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\
 \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta}
 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 [G_{ii}(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^n [G_{pk}(\xi, \eta)] \cdot \begin{Bmatrix} a_{pk} \\ b_{pk} \\ c_{pk} \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

Nesta expressão, $[G_{ii}(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (9×5), dada por :

$$[G_{ii}(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix}
 \frac{\partial N_{ii}}{\partial \xi} & 0 & 0 & \zeta \cdot \frac{\partial N_{ii}}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -\zeta \cdot \frac{\partial N_{ii}}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\
 0 & \frac{\partial N_{ii}}{\partial \xi} & 0 & \zeta \cdot \frac{\partial N_{ii}}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -\zeta \cdot \frac{\partial N_{ii}}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\
 0 & 0 & \frac{\partial N_{ii}}{\partial \xi} & \zeta \cdot \frac{\partial N_{ii}}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -\zeta \cdot \frac{\partial N_{ii}}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \\
 \frac{\partial N_{ii}}{\partial \eta} & 0 & 0 & \zeta \cdot \frac{\partial N_{ii}}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -\zeta \cdot \frac{\partial N_{ii}}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\
 0 & \frac{\partial N_{ii}}{\partial \eta} & 0 & \zeta \cdot \frac{\partial N_{ii}}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -\zeta \cdot \frac{\partial N_{ii}}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\
 0 & 0 & \frac{\partial N_{ii}}{\partial \eta} & \zeta \cdot \frac{\partial N_{ii}}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -\zeta \cdot \frac{\partial N_{ii}}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \\
 0 & 0 & 0 & N_{ii} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -N_{ii} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\
 0 & 0 & 0 & N_{ii} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -N_{ii} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\
 0 & 0 & 0 & N_{ii} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -N_{ii} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i}
 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

e $[G_{pk}(\xi, \eta)]$, uma matriz (9×3) dada por :

$$[G_{pk}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Fazendo-se, agora, a substituição da Equação (4.68) na Equação (4.56), tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot [G_{li}(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot [G_{pk}(\xi, \eta)] \cdot \begin{Bmatrix} a_{pk} \\ b_{pk} \\ c_{pk} \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

Se forem feitas as seguintes substituições :

$$[B_{li}(\xi, \eta, \zeta)] = \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot [G_{li}(\xi, \eta, \zeta)] \quad (4.72)$$

e

$$[B_{pk}(\xi, \eta)] = \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot [G_{pk}(\xi, \eta)] \quad (4.73)$$

a Equação (4.71) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 [B_{li}(\xi, \eta, \zeta)] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^n [B_{pk}(\xi, \eta)] \begin{Bmatrix} a_{pk} \\ b_{pk} \\ c_{pk} \end{Bmatrix} \quad (4.74)$$

Nesta expressão, $[B_{li}(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (5×5) dada por :

$$[B_{li}(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} B_{11li} & B_{12li} & B_{13li} & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot B_{14li} & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot B_{15li} \\ B_{21li} & B_{22li} & B_{23li} & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot B_{24li} & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot B_{25li} \\ B_{31li} & B_{32li} & B_{33li} & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot B_{34li} & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot B_{35li} \\ B_{41li} & B_{42li} & B_{43li} & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot B_{44li} + \frac{t_i}{2} \cdot C_{44li} & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot B_{45li} + \frac{t_i}{2} \cdot C_{45li} \\ B_{51li} & B_{52li} & B_{53li} & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot B_{54li} + \frac{t_i}{2} \cdot C_{54li} & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot B_{55li} + \frac{t_i}{2} \cdot C_{55li} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

e $[B_{pk}(\xi, \eta)]$ uma matriz (5×3) dada por :

$$[B_{pk}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} B_{11pk} & B_{12pk} & B_{13pk} \\ B_{21pk} & B_{22pk} & B_{23pk} \\ B_{31pk} & B_{32pk} & B_{33pk} \\ B_{41pk} & B_{42pk} & B_{43pk} \\ B_{51pk} & B_{52pk} & B_{53pk} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Os elementos da matriz $[B_{li}(\xi, \eta, \zeta)]$ são dados por:

$$B_{11li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{11} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{14} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.77)$$

$$B_{21li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{21} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{24} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.78)$$

$$B_{31li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{31} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{34} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.79)$$

$$B_{41li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{41} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{44} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.80)$$

$$B_{51li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{51} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{54} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.81)$$

$$B_{12li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{12} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{15} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.82)$$

$$B_{22li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{22} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{25} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.83)$$

$$B_{32li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{32} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{35} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.84)$$

$$B_{42li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{42} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{45} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.85)$$

$$B_{52li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{52} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{55} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.86)$$

$$B_{13li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{13} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{16} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.87)$$

$$B_{23li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{23} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{26} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.88)$$

$$B_{33li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{33} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{36} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.89)$$

$$B_{43li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{43} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{46} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.90)$$

$$B_{53li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{53} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} + d_{56} \cdot \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta}) \quad (4.91)$$

$$B_{14li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left[\frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} (d_{11} \cdot v_{11i} + d_{12} \cdot v_{12i} + d_{13} \cdot v_{13i}) + \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta} (d_{14} \cdot v_{11i} + d_{15} \cdot v_{12i} + d_{16} \cdot v_{13i}) \right] \quad (4.92)$$

$$B_{24li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left[\frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} (d_{21} \cdot v_{11i} + d_{22} \cdot v_{12i} + d_{23} \cdot v_{13i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta} (d_{24} \cdot v_{11i} + d_{25} \cdot v_{12i} + d_{26} \cdot v_{13i}) \right] \quad (4.93)$$

$$B_{34li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left[\frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} (d_{31} \cdot v_{11i} + d_{32} \cdot v_{12i} + d_{33} \cdot v_{13i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta} (d_{34} \cdot v_{11i} + d_{35} \cdot v_{12i} + d_{36} \cdot v_{13i}) \right] \quad (4.94)$$

$$B_{44li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left[\frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} (d_{41} \cdot v_{11i} + d_{42} \cdot v_{12i} + d_{43} \cdot v_{13i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta} (d_{44} \cdot v_{11i} + d_{45} \cdot v_{12i} + d_{46} \cdot v_{13i}) \right] \quad (4.95)$$

$$C_{44li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot [N_{li} \cdot (d_{47} \cdot v_{11i} + d_{48} \cdot v_{12i} + d_{49} \cdot v_{13i})] \quad (4.96)$$

$$B_{54li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left[\frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} (d_{51} \cdot v_{11i} + d_{52} \cdot v_{12i} + d_{53} \cdot v_{13i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta} (d_{54} \cdot v_{11i} + d_{55} \cdot v_{12i} + d_{56} \cdot v_{13i}) \right] \quad (4.97)$$

$$C_{54li}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot [N_{li} \cdot (d_{57} \cdot v_{11i} + d_{58} \cdot v_{12i} + d_{59} \cdot v_{13i})] \quad (4.98)$$

$$B_{15li}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \cdot \left[\frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} (d_{11} \cdot v_{21i} + d_{12} \cdot v_{22i} + d_{13} \cdot v_{23i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta} (d_{14} \cdot v_{21i} + d_{15} \cdot v_{22i} + d_{16} \cdot v_{23i}) \right] \quad (4.99)$$

$$B_{25li}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \cdot \left[\frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} (d_{21} \cdot v_{21i} + d_{22} \cdot v_{22i} + d_{23} \cdot v_{23i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta} (d_{24} \cdot v_{21i} + d_{25} \cdot v_{22i} + d_{26} \cdot v_{23i}) \right] \quad (4.100)$$

$$B_{35li}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \cdot \left[\frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} (d_{31} \cdot v_{21i} + d_{32} \cdot v_{22i} + d_{33} \cdot v_{23i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta} (d_{34} \cdot v_{21i} + d_{35} \cdot v_{22i} + d_{36} \cdot v_{23i}) \right] \quad (4.101)$$

$$B_{45li}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \cdot \left[\frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} (d_{41} \cdot v_{21i} + d_{42} \cdot v_{22i} + d_{43} \cdot v_{23i}) \right. \\ \left. + \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta} (d_{44} \cdot v_{21i} + d_{45} \cdot v_{22i} + d_{46} \cdot v_{23i}) \right] \quad (4.102)$$

$$C_{45li}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \cdot [N_{li} \cdot (d_{47} \cdot v_{21i} + d_{48} \cdot v_{22i} + d_{49} \cdot v_{23i})] \quad (4.103)$$

$$B_{55li}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \cdot \left[\frac{\partial N_{li}}{\partial \xi} (d_{51} \cdot v_{21i} + d_{52} \cdot v_{22i} + d_{53} \cdot v_{23i}) + \frac{\partial N_{li}}{\partial \eta} (d_{54} \cdot v_{21i} + d_{55} \cdot v_{22i} + d_{56} \cdot v_{23i}) \right] \quad (4.104)$$

$$C_{55li}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \cdot [N_{li} \cdot (d_{57} \cdot v_{21i} + d_{58} \cdot v_{22i} + d_{59} \cdot v_{23i})] \quad (4.105)$$

Já os elementos da matriz $[B_{pk}(\xi, \eta)]$ são dados por :

$$B_{11pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{11} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{14} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.106)$$

$$B_{21pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{21} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{24} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.107)$$

$$B_{31pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{31} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{34} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.108)$$

$$B_{41pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{41} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{44} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.109)$$

$$B_{51pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{51} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{54} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.110)$$

$$B_{12pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{12} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{15} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.111)$$

$$B_{22pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{22} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{25} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.112)$$

$$B_{32pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{32} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{35} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.113)$$

$$B_{42pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{42} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{45} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.114)$$

$$B_{52pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{52} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{55} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.115)$$

$$B_{13pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{13} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{16} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.116)$$

$$B_{23pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{23} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{26} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.117)$$

$$B_{33pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{33} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{36} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.118)$$

$$B_{43pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{43} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{46} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.119)$$

$$B_{53,pk}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot (d_{53} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \xi} + d_{56} \cdot \frac{\partial M_{pk}}{\partial \eta}) \quad (4.120)$$

Pode-se, agora, apresentar a Equação (4.74) na seguinte forma matricial :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \left[[B_{l1}(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [B_{li}(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [B_{l4}(\xi, \eta, \zeta)], \right. \\ \left. [B_{p1}(\xi, \eta)], \dots, [B_{pk}(\xi, \eta)], \dots, [B_{pn}(\xi, \eta)] \right] \begin{Bmatrix} \{a_{l1}\} \\ \vdots \\ \{a_{li}\} \\ \vdots \\ \{a_{l4}\} \\ \{a_{p1}\} \\ \vdots \\ \{a_{pk}\} \\ \vdots \\ \{a_{pn}\} \end{Bmatrix} \quad (4.121)$$

De uma maneira compacta, pode-se escrever que:

$$\{\varepsilon'\} = [B] \cdot \{a\} \quad (4.122)$$

onde $\{\varepsilon'\}$ é uma matriz coluna (5×1) formada pelas deformações específicas no ponto Q segundo o sistema de referência local; $[B]$, uma matriz que, dependendo do esquema de interpolação adotado, pode ter dimensão (5×32), (5×35) ou (5×47), sendo constituída pelas derivadas das funções de deslocamento $N_{li}(\xi, \eta)$ e $M_{pk}(\xi, \eta)$ e $\{a\}$, uma matriz coluna de dimensão (32×1), (35×1) ou (47×1), constituída pelos deslocamentos nodais u_i, v_i, w_i, α_i e β_i e pelos parâmetros não nodais a_{pk}, b_{pk} e c_{pk} . A matriz $[B]$, portanto, relaciona o estado de deformação específica com os deslocamentos nodais e parâmetros não nodais:

$$[B] = \left[[B_{l1}(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [B_{li}(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [B_{l4}(\xi, \eta, \zeta)], [B_{p1}(\xi, \eta)], \dots, [B_{pk}(\xi, \eta)], \dots, [B_{pn}(\xi, \eta)] \right] \quad (4.123)$$

CAPÍTULO 5

MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE CARGA

5.1 INTRODUÇÃO

Admitindo-se que o elemento de placa esteja submetido a forças de corpo $\vec{b}$ e forças de superfície $\vec{q}$, decompostas, segundo o sistema de referência local, nas componentes b_x , b_y , b_z , q_x , q_y e q_z , pode-se escrever, para um ponto Q genérico do elemento de placa, o seguinte conjunto de equações diferenciais de equilíbrio de tensão (RILEY e DALLY, 1965):

$$\frac{\partial \sigma_{x'x'}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial y'} + \frac{\partial \tau_{x'z'}}{\partial z'} + b_{x'} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma_{y'y'}}{\partial y'} + \frac{\partial \tau_{y'z'}}{\partial z'} + b_{y'} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{x'z'}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{y'z'}}{\partial y'} + b_{z'} = 0 \quad (5.3)$$

As equações relacionadas com o equilíbrio no contorno, por sua vez, são dadas por (TIMOSHENKO e GOODIER, 1970):

$$q_{x'} = l \cdot \sigma_{x'x'} + m \cdot \tau_{x'y'} + n \cdot \tau_{x'z'} \quad (5.4)$$

$$q_{y'} = l \cdot \tau_{x'y'} + m \cdot \sigma_{y'y'} + n \cdot \tau_{y'z'} \quad (5.5)$$

$$q_{z'} = l \cdot \tau_{x'z'} + m \cdot \tau_{y'z'} \quad (5.6)$$

Nas expressões acima, os coeficientes l , m e n são os cossenos diretores da normal à superfície do contorno, com relação aos eixos x' , y' e z' , respectivamente.

Para se obter as características do elemento de placa, ou seja, a matriz de rigidez e o vetor de carga, utiliza-se o *Princípio dos Trabalhos Virtuais*, que pode ser expresso da seguinte forma: o estado de equilíbrio de um corpo elástico impõe que, para qualquer deslocamento virtual aplicado ao corpo, compatível com as condições de contorno, o trabalho virtual interno total é igual ao trabalho virtual externo total.

Para a aplicação do princípio, considerem-se, agora, as equações de equilíbrio interno de tensão (Equações (5.1), (5.2) e (5.3)). Estas serão multiplicadas pelos deslocamentos virtuais $\delta u'$, $\delta v'$ e $\delta w'$, integradas sobre o volume V do elemento e adicionadas umas às outras:

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{x'x'}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial y'} + \frac{\partial \tau_{x'z'}}{\partial z'} + b_{x'} \right) \cdot \delta u' \cdot dV + \int_V \left(\frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma_{y'y'}}{\partial y'} + \frac{\partial \tau_{y'z'}}{\partial z'} + b_{y'} \right) \cdot \delta v' \cdot dV \\ & + \int_V \left(\frac{\partial \tau_{x'z'}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{y'z'}}{\partial y'} + b_{z'} \right) \cdot \delta w' \cdot dV = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Rearranjando,

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial \sigma_{x'x'}}{\partial x'} \delta u' \cdot dV + \int_V \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial y'} \delta u' \cdot dV + \int_V \frac{\partial \tau_{x'z'}}{\partial z'} \delta u' \cdot dV + \int_V b_{x'} \delta u' \cdot dV \\ & + \int_V \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial x'} \delta v' \cdot dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{y'y'}}{\partial y'} \delta v' \cdot dV + \int_V \frac{\partial \tau_{y'z'}}{\partial z'} \delta v' \cdot dV + \int_V b_{y'} \delta v' \cdot dV \\ & + \int_V \frac{\partial \tau_{x'z'}}{\partial x'} \delta w' \cdot dV + \int_V \frac{\partial \tau_{y'z'}}{\partial y'} \delta w' \cdot dV + \int_V b_{z'} \delta w' \cdot dV \end{aligned} \quad (5.8)$$

Aplica-se, agora, à Equação (5.8), a primeira identidade de *Green*, que estabelece que (KREYSZIG, 1988):

$$\int_V \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x} \cdot dV = \int_A \phi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot l \cdot dA - \int_V \phi \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot dV \quad (5.9)$$

$$\int_V \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial y} \cdot dV = \int_A \phi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot m \cdot dA - \int_V \phi \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \cdot dV \quad (5.10)$$

$$\int_V \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial z} \cdot dV = \int_A \phi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot n \cdot dA - \int_V \phi \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \cdot dV \quad (5.11)$$

Nestas expressões, $\phi(x, y, z)$ e $\psi(x, y, z)$ são duas funções contínuas quaisquer, A é a área da superfície de contorno e l , m e n os cossenos diretores da normal à superfície de contorno, com relação aos eixos x' , y' e z' . Portanto,

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{x'x'}}{\partial x'} \cdot \delta u' \cdot dV = \int_A \sigma_{x'x'} \cdot l \delta u' \cdot dA - \int_V \sigma_{x'x'} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} (\delta u') \cdot dV \quad (5.12)$$

$$\int_V \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial y'} \cdot \delta u' \cdot dV = \int_A \tau_{x'y'} \cdot m \delta u' \cdot dA - \int_V \tau_{x'y'} \cdot \frac{\partial}{\partial y'} (\delta u') \cdot dV \quad (5.13)$$

$$\int_V \frac{\partial \tau_{x'z'}}{\partial z'} \cdot \delta u' \cdot dV = \int_A \tau_{x'z'} \cdot n \delta u' \cdot dA - \int_V \tau_{x'z'} \cdot \frac{\partial}{\partial z'} (\delta u') \cdot dV \quad (5.14)$$

$$\int_V \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial x'} \cdot \delta v' \cdot dV = \int_A \tau_{x'y'} \cdot l \delta v' \cdot dA - \int_V \tau_{x'y'} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} (\delta v') \cdot dV \quad (5.15)$$

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{y'y'}}{\partial y'} \cdot \delta v' \cdot dV = \int_A \sigma_{y'y'} \cdot m \delta v' \cdot dA - \int_V \sigma_{y'y'} \cdot \frac{\partial}{\partial y'} (\delta v') \cdot dV \quad (5.16)$$

$$\int_V \frac{\partial \tau_{y'z'}}{\partial z'} \cdot \delta v' \cdot dV = \int_A \tau_{y'z'} \cdot n \delta v' \cdot dA - \int_V \tau_{y'z'} \cdot \frac{\partial}{\partial z'} (\delta v') \cdot dV \quad (5.17)$$

$$\int_V \frac{\partial \tau_{x'z'}}{\partial x'} \cdot \delta w' \cdot dV = \int_A \tau_{x'z'} \cdot l \delta w' \cdot dA - \int_V \tau_{x'z'} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} (\delta w') \cdot dV \quad (5.18)$$

$$\int_V \frac{\partial \tau_{y'z'}}{\partial y'} \cdot \delta w' \cdot dV = \int_A \tau_{y'z'} \cdot m \delta w' \cdot dA - \int_V \tau_{y'z'} \cdot \frac{\partial}{\partial y'} (\delta w') \cdot dV \quad (5.19)$$

Substituindo-se, agora, as expressões obtidas pela aplicação da primeira identidade de Green (Equações (5.12) a (5.19)) na Equação (5.8), obtém-se que:

$$\begin{aligned} & \int_A [(\sigma_{x'x'} \cdot l + \tau_{x'y'} \cdot m + \tau_{x'z'} \cdot n) \cdot \delta u' + (\tau_{x'y'} \cdot l + \sigma_{y'y'} \cdot m + \tau_{y'z'} \cdot n) \cdot \delta v' + (\tau_{x'z'} \cdot l + \tau_{y'z'} \cdot m) \cdot \delta w'] \cdot dA \\ & + \int_V (b_{x'} \cdot \delta u' + b_{y'} \cdot \delta v' + b_{z'} \cdot \delta w') \cdot dV = \int_V [\sigma_{x'x'} \cdot \left(\frac{\partial \delta u'}{\partial x'}\right) + \sigma_{y'y'} \cdot \left(\frac{\partial \delta v'}{\partial y'}\right) + \tau_{x'y'} \cdot \left(\frac{\partial \delta u'}{\partial y'} + \frac{\partial \delta v'}{\partial x'}\right) \\ & + \tau_{x'z'} \cdot \left(\frac{\partial \delta w'}{\partial x'} + \frac{\partial \delta u'}{\partial z'}\right) + \tau_{y'z'} \cdot \left(\frac{\partial \delta v'}{\partial z'} + \frac{\partial \delta w'}{\partial y'}\right)] \cdot dV \end{aligned} \quad (5.20)$$

Levando-se em conta, agora, as Equações (5.4), (5.5) e (5.6) e as expressões do estado de deformação específica do ponto Q , em (4.31) a (4.35), pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} & \int_A (q_{x'} \cdot \delta u' + q_{y'} \cdot \delta v' + q_{z'} \cdot \delta w') \cdot dA + \int_V (b_{x'} \cdot \delta u' + b_{y'} \cdot \delta v' + b_{z'} \cdot \delta w') \cdot dV = \\ & \int_V (\sigma_{x'x'} \cdot \delta \varepsilon_{x'} + \sigma_{y'y'} \cdot \delta \varepsilon_{y'} + \tau_{x'y'} \cdot \delta \gamma_{x'y'} + \tau_{x'z'} \cdot \delta \gamma_{x'z'} + \tau_{y'z'} \cdot \delta \gamma_{y'z'}) \cdot dV \end{aligned} \quad (5.21)$$

Fazendo-se agora :

$$\{\delta u'\} = \begin{Bmatrix} \delta u' \\ \delta v' \\ \delta w' \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

e

$$\{\delta \varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_{x'} \\ \delta \varepsilon_{y'} \\ \delta \gamma_{x'y'} \\ \delta \gamma_{x'z'} \\ \delta \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

pode-se reescrever a Equação (5.21) como:

$$\int_A \{\delta u'\}^T \cdot \{q'\} \cdot dA + \int_V \{\delta u'\}^T \cdot \{b'\} \cdot dV = \int_V \{\delta \varepsilon'\}^T \cdot \{\sigma'\} \cdot dV \quad (5.24)$$

onde,

$$\{q'\} = \begin{Bmatrix} q_{x'} \\ q_{y'} \\ q_{z'} \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

$$\{b'\} = \begin{Bmatrix} b_{x'} \\ b_{y'} \\ b_{z'} \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

$$\{\sigma'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

O trabalho virtual externo δW realizado pelo carregamento externo (forças de corpo e forças de superfície) é representado pelo lado esquerdo da Equação (5.24), enquanto que o trabalho virtual interno, correspondente à energia de deformação virtual δU armazenada no elemento, em função do estado de tensão $\{\sigma'\}$ em seus pontos e do estado de deformação específica virtual $\{\delta\epsilon'\}$, é representado pelo lado direito.

Supondo-se, agora, que o material constitutivo do elemento de placa seja homogêneo, isotrópico e linearmente elástico, o estado de deformação específica do ponto Q , segundo o sistema de referência local, pode ser dado pela Lei de *Hooke* Generalizada (TIMOSHENKO, 1969), expressa na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal do material e ν seu coeficiente de *Poisson*. Expressando a Equação anterior em uma forma compacta, obtém-se que:

$$\{\sigma'\} = [D'] [\epsilon'] \quad (5.29)$$

Substituindo-se $\{\varepsilon'\}$ pela expressão dada na Equação (4.122), resulta:

$$\{\sigma'\} = [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \quad (5.30)$$

A matriz $[D']$, com dimensão (5×5) , representa as constantes elásticas do material constitutivo do elemento de placa.

A distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da espessura do elemento de placa não é linear, mas sim aproximadamente parabólica; para levar este fato em conta, acrescenta-se um fator k nos termos de $[D']$ relacionados com $\tau_{xz'}$ e $\tau_{yz'}$. Esse fator, de valor igual a 1,2, possibilita, então, considerar a distribuição parabólica da tensão de cisalhamento no cálculo da energia de deformação virtual (VOLTERRA e GAINES, 1971). Portanto,

$$[D'] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2.k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2.k} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Deve-se, agora, expressar os deslocamentos $\{u'\}$ dos pontos do elemento de placa com relação ao sistema de referência local. A Equação (3.73) os expressa segundo o sistema de referência global; utilizando-se a matriz dos cossenos diretores, pode-se escrever que:

$$\{u'\} = [\theta]^T \cdot \{u\} = [\theta]^T \cdot [N] \cdot \{a\} \quad (5.32)$$

onde a matriz $[\theta]$ é dada pela Equação (4.37). Da mesma forma, as forças de corpo e de superfície, segundo o sistema de referência local, podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\{q'\} = [\theta]^T \cdot \{q\} \quad (5.33)$$

e

$$\{b'\} = [\theta]^T \cdot \{b\} \quad (5.34)$$

onde $\{q\}$ e $\{b\}$ são, respectivamente, as forças de superfície e de corpo, segundo o sistema de referência global.

A partir das Equações (5.32) e (4.122), pode-se expressar os deslocamentos virtuais $\{\delta u'\}$ e as deformações específicas virtuais $\{\delta \varepsilon'\}$ como:

$$\{\delta u'\} = [\theta]^T \cdot [N] \cdot \{\delta a\} \quad (5.35)$$

e

$$\{\delta\epsilon'\} = [B] \{\delta a\} \quad (5.36)$$

onde $\{\delta a\}$ é a matriz coluna dos deslocamentos virtuais correspondentes aos deslocamentos nodais e aos parâmetros não nodais e $[N]$, a matriz das funções interpoladoras do campo de deslocamento (Equação (3.74)). Substituindo-se as Equações (5.30), (5.33), (5.34), (5.35) e (5.36) na Equação (5.24), obtém-se que:

$$\begin{aligned} \int_A \{\delta a\}^T [N]^T [\theta] [\theta]^T \{q\} dA + \int_V \{\delta a\}^T [N]^T [\theta] [\theta]^T \{b\} dV = \\ \int_V \{\delta a\}^T [B]^T [D'] [B] \{a\} dV \end{aligned} \quad (5.37)$$

Como $[\theta]$ é uma matriz quadrada e ortogonal,

$$[\theta][\theta]^T = [I] \quad (5.38)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade. Dessa forma, a Equação (5.37) resulta:

$$\int_A \{\delta a\}^T [N]^T \{q\} dA + \int_V \{\delta a\}^T [N]^T \{b\} dV = \int_V \{\delta a\}^T [B]^T [D'] [B] \{a\} dV \quad (5.39)$$

Como $\{\delta a\}^T$ e $\{a\}$ são constantes nas integrais de área e volume, a expressão anterior pode ser escrita como:

$$\{\delta a\}^T \left(\int_A [N]^T \{q\} dA + \int_V [N]^T \{b\} dV \right) = \{\delta a\}^T \left(\int_V [B]^T [D'] [B] dV \right) \{a\} \quad (5.40)$$

Tendo-se em conta que a equação anterior é sempre válida para qualquer valor de $\{\delta a\}^T$, pode-se escrever que:

$$\int_A [N]^T \{q\} dA + \int_V [N]^T \{b\} dV = \left(\int_V [B]^T [D'] [B] dV \right) \{a\} \quad (5.41)$$

Na Equação (5.41), pode-se distinguir os seguintes componentes:

$$\int_A [N]^T \{q\} dA = \{fq^e\} \quad (5.42)$$

que é uma matriz coluna representando o vetor de carga do elemento, correspondente às forças de superfície e

$$\int_V [N]^T \{b\} dV = \{fb^e\} \quad (5.43)$$

que é uma matriz coluna representando o vetor de carga do elemento, correspondente às forças de corpo. Já a expressão a seguir,

$$\int_V [B]^T [D'] [B] dV = [K^e] \quad (5.44)$$

é uma matriz quadrada, simétrica denominada matriz de rigidez do elemento.

As dimensões da matriz de rigidez e do vetor de carga variam, naturalmente, de acordo com o esquema de interpolação empregado. A Tabela 5.1 apresenta essas dimensões:

Tabela 5.1: Dimensões das matrizes de rigidez e dos vetores de carga.

ESQUEMA DE INTERPOLAÇÃO	MATRIZ DE RIGIDEZ	VETOR DE CARGA
	$[K^e]$	$[fq^e + fb^e]$
1	32×32	32×1
2	35×35	35×1
3	47×47	47×1
4	32×32	32×1
5	35×35	35×1
6	47×47	47×1

Pode-se, agora, reescrever a Equação (5.41) da seguinte forma:

$$[K^e]\{a\} = \{fq^e\} + \{fb^e\}$$

(5.45)

5.2 DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE PLACA

Na expressão que define a matriz de rigidez do elemento (Equação (5.44)), os termos da matriz $[B]$ são funções das coordenadas curvilíneas ξ e η e da coordenada linear ζ . Deve-se, portanto, expressar o diferencial de volume dV nesse sistema de coordenadas, o que é feito utilizando-se do determinante $|J(\xi, \eta)|$ da matriz Jacobiano, expresso na Equação (4.30) (KAPLAN, 1971):

$$dV = |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$$

(5.46)

Pode-se, agora, expressar a matriz de rigidez do elemento da seguinte forma:

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D'] [B] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$$

(5.47)

ou, na forma matricial explícita,

$$\begin{aligned}
 [K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \begin{bmatrix} [B_{l1}(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_{lj}(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_{l4}(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ [B_{p1}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [B_{pk}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [B_{pn}(\xi, \eta)]^T \end{bmatrix} [D'] \left[[B_{l1}(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [B_{lj}(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [B_{l4}(\xi, \eta, \zeta)], \right. \\
 & \left. [B_{s1}(\xi, \eta)], \dots, [B_{st}(\xi, \eta)], \dots, [B_{sn}(\xi, \eta)] \right] |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta
 \end{aligned} \quad (5.48)$$

A resolução da Equação anterior leva à matriz de rigidez do elemento, dada por:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{l11}] & \dots & [K_{l1j}] & \dots & [K_{l14}] & [K_{l1,s1}] & \dots & [K_{l1,st}] & [K_{l1,sn}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ [K_{li1}] & \dots & [K_{lij}] & \dots & [K_{li4}] & [K_{li,s1}] & \dots & [K_{li,st}] & [K_{li,sn}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ [K_{l41}] & \dots & [K_{l4j}] & \dots & [K_{l44}] & [K_{l4,s1}] & \dots & [K_{l4,st}] & [K_{l4,sn}] \\ [K_{p1,l1}] & \dots & [K_{p1,lj}] & \dots & [K_{p1,l4}] & [K_{p1,s1}] & \dots & [K_{p1,st}] & [K_{p1,sn}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ [K_{pk,l1}] & \dots & [K_{pk,lj}] & \dots & [K_{pk,l4}] & [K_{pk,s1}] & \dots & [K_{pk,st}] & [K_{pk,sn}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ [K_{pn,l1}] & \dots & [K_{pn,lj}] & \dots & [K_{pn,l4}] & [K_{pn,s1}] & \dots & [K_{pn,st}] & [K_{pn,sn}] \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

5.2.1 Determinação da submatriz $[K_{lij}]$

A submatriz $[K_{lij}]$ está associada aos deslocamentos nodais do elemento, com os nós i e j variando de 1 a 4 e o índice l indicando funções nodais lineares ($l=1$) ou cúbicas ($l=3$). Esta submatriz é dada por:

$$[K_{lij}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{li}(\xi, \eta, \zeta)]^T [D'] [B_{lj}(\xi, \eta, \zeta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.50)$$

Levando-se em conta as Equações (4.75) e (5.31), pode-se reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$[K_{lij}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{11li} & B_{21li} & B_{31li} & B_{41li} \\ B_{12li} & B_{22li} & B_{32li} & B_{42li} \\ B_{13li} & B_{23li} & B_{33li} & B_{43li} \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{14li} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{24li} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{34li} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{44li} + \frac{t_i}{2} C_{44li} \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{15li} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{25li} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{35li} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{45li} + \frac{t_i}{2} C_{45li} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11lj} & B_{12lj} \\ B_{21lj} & B_{22lj} \\ B_{31lj} & B_{32lj} \\ B_{41lj} & B_{42lj} \\ B_{51lj} & B_{52lj} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{51li} \\ B_{52li} \\ B_{53li} \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{54li} + \frac{t_i}{2} C_{54li} \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{55li} + \frac{t_i}{2} C_{55li} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11lj} & B_{12lj} \\ B_{21lj} & B_{22lj} \\ B_{31lj} & B_{32lj} \\ B_{41lj} & B_{42lj} \\ B_{51lj} & B_{52lj} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{13lj} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{14lj} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{15lj} \\ B_{23lj} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{24lj} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{25lj} \\ B_{33lj} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{34lj} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{35lj} \\ B_{43lj} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{44lj} + \frac{t_j}{2} C_{44lj} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{45lj} + \frac{t_j}{2} C_{45lj} \\ B_{53lj} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{54lj} + \frac{t_j}{2} C_{54lj} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{55lj} + \frac{t_j}{2} C_{55lj} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.51)$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se que:

$$[K_{lij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

onde

$$\begin{aligned}
k_{11} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11li} + \nu B_{21li}) \cdot B_{11lj} + (\nu B_{11li} + B_{21li}) \cdot B_{21lj} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31li} \cdot B_{31lj} \right] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41li} \cdot B_{41lj} + B_{51li} \cdot B_{51lj}) \} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned}
k_{21} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12li} + \nu B_{22li}) \cdot B_{11lj} + (\nu B_{12li} + B_{22li}) \cdot B_{21lj} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32li} \cdot B_{31lj} \right] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42li} \cdot B_{41lj} + B_{52li} \cdot B_{51lj}) \} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned}
k_{31} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13li} + \nu B_{23li}) \cdot B_{11lj} + (\nu B_{13li} + B_{23li}) \cdot B_{21lj} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33li} \cdot B_{31lj} \right] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43li} \cdot B_{41lj} + B_{53li} \cdot B_{51lj}) \} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned}
k_{41} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14li} + \nu B_{24li}) \cdot B_{11lj} + (\nu B_{14li} + B_{24li}) \cdot B_{21lj} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34li} \cdot B_{31lj} \right] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44li} \cdot B_{41lj} + B_{54li} \cdot B_{51lj}) \\
+ (C_{44li} \cdot B_{41lj} + C_{54li} \cdot B_{51lj})] \} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned}
k_{51} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15li} + \nu B_{25li}) \cdot B_{11lj} + (\nu B_{15li} + B_{25li}) \cdot B_{21lj} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35li} \cdot B_{31lj} \right] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45li} \cdot B_{41lj} + B_{55li} \cdot B_{51lj}) \\
+ (C_{45li} \cdot B_{41lj} + C_{55li} \cdot B_{51lj})] \} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned}
k_{12} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11li} + \nu B_{21li}) \cdot B_{12lj} + (\nu B_{11li} + B_{21li}) \cdot B_{22lj} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31li} \cdot B_{32lj} \right] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41li} \cdot B_{42lj} + B_{51li} \cdot B_{52lj}) \} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned}
k_{22} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12li} + \nu B_{22li}) \cdot B_{12lj} + (\nu B_{12li} + B_{22li}) \cdot B_{22lj} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32li} \cdot B_{32lj} \right] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42li} \cdot B_{42lj} + B_{52li} \cdot B_{52lj}) \} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned}
k_{32} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13li} + \nu B_{23li}) \cdot B_{12lj} + (\nu B_{13li} + B_{23li}) \cdot B_{22lj} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33li} \cdot B_{32lj} \right] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43li} \cdot B_{42lj} + B_{53li} \cdot B_{52lj}) \} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned}
k_{42} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14li} + \nu B_{24li}) \cdot B_{12lj} + (\nu B_{14li} + B_{24li}) \cdot B_{22lj} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34li} \cdot B_{32lj} \right] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44li} \cdot B_{42lj} + B_{54li} \cdot B_{52lj}) \\
+ (C_{44li} \cdot B_{42lj} + C_{54li} \cdot B_{52lj})] \} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned}
k_{52} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15li} + \nu B_{25li}) \cdot B_{12lj} + (\nu B_{15li} + B_{25li}) \cdot B_{22lj} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35li} \cdot B_{32lj} \right] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45li} \cdot B_{42lj} + B_{55li} \cdot B_{52lj}) \\
+ (C_{45li} \cdot B_{42lj} + C_{55li} \cdot B_{52lj})] \} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned}
k_{13} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11li} + \nu B_{21li}) \cdot B_{13lj} + (\nu B_{11li} + B_{21li}) \cdot B_{23lj} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31li} \cdot B_{33lj} \right] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41li} \cdot B_{43lj} + B_{51li} \cdot B_{53lj}) \} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned}
k_{23} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12li} + \nu B_{22li}) \cdot B_{13lj} + (\nu B_{12li} + B_{22li}) \cdot B_{23lj} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32li} \cdot B_{33lj} \right] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42li} \cdot B_{43lj} + B_{52li} \cdot B_{53lj}) \} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned}
k_{33} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13li} + \nu B_{23li}) \cdot B_{13lj} + (\nu B_{13li} + B_{23li}) \cdot B_{23lj} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33li} \cdot B_{33lj} \right] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43li} \cdot B_{43lj} + B_{53li} \cdot B_{53lj}) \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned}
k_{43} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14li} + \nu B_{24li}) \cdot B_{13lj} + (\nu B_{14li} + B_{24li}) \cdot \right. \\
& B_{23lj} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34li} \cdot B_{33lj}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44li} \cdot B_{43lj} + B_{54li} \cdot B_{53lj}) \\
& \left. + (C_{44li} \cdot B_{43lj} + C_{54li} \cdot B_{53lj})] \right\} \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned}
k_{53} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15li} + \nu B_{25li}) \cdot B_{13lj} + (\nu B_{15li} + B_{25li}) \cdot \right. \\
& B_{23lj} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35li} \cdot B_{33lj}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45li} \cdot B_{43lj} + B_{55li} \cdot B_{53lj}) \\
& \left. + (C_{45li} \cdot B_{43lj} + C_{55li} \cdot B_{53lj})] \right\} \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned}
k_{14} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11li} + \nu B_{21li}) \cdot B_{14lj} + (\nu B_{11li} + B_{21li}) \cdot \right. \\
& B_{24lj} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31li} \cdot B_{34lj}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{41li} \cdot B_{44lj} + B_{51li} \cdot B_{54lj}) \\
& \left. + (B_{41li} \cdot C_{44lj} + B_{51li} \cdot C_{54lj})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned}
k_{24} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12li} + \nu B_{22li}) \cdot B_{14lj} + (\nu B_{12li} + B_{22li}) \cdot \right. \\
& B_{24lj} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32li} \cdot B_{34lj}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{42li} \cdot B_{44lj} + B_{52li} \cdot B_{54lj}) \\
& \left. + (B_{42li} \cdot C_{44lj} + B_{52li} \cdot C_{54lj})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned}
k_{34} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13li} + \nu B_{23li}) \cdot B_{14lj} + (\nu B_{13li} + B_{23li}) \\
& \cdot B_{24lj} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33li} \cdot B_{34lj}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{43li} \cdot B_{44lj} + B_{53li} \cdot B_{54lj}) \\
& + (B_{43li} \cdot C_{44lj} + B_{53li} \cdot C_{54lj})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned}
k_{44} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14li} + \nu B_{24li}) \cdot B_{14lj} + (\nu B_{14li} + B_{24li}) \\
& \cdot B_{24lj} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34li} \cdot B_{34lj}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{44li} \cdot B_{44lj} + B_{54li} \cdot B_{54lj}) \\
& + \zeta (B_{44li} \cdot C_{44lj} + B_{54li} \cdot C_{54lj}) + (C_{44li} \cdot C_{44lj} + C_{54li} \cdot C_{54lj})] \\
& + \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta (C_{44li} \cdot B_{44lj} + C_{54li} \cdot B_{54lj})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned}
k_{54} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15li} + \nu B_{25li}) \cdot B_{14lj} + (\nu B_{15li} + B_{25li}) \\
& \cdot B_{24lj} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35li} \cdot B_{34lj}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{45li} \cdot B_{44lj} + B_{55li} \cdot B_{54lj}) \\
& + \zeta (B_{45li} \cdot C_{44lj} + B_{55li} \cdot C_{54lj}) + (C_{45li} \cdot C_{44lj} + C_{55li} \cdot C_{54lj})] \\
& + \frac{t_j \cdot t_i}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta (C_{45li} \cdot B_{44lj} + C_{55li} \cdot B_{54lj})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned}
k_{15} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11li} + \nu B_{21li}) \cdot B_{15lj} + (\nu B_{11li} + B_{21li}) \\
& \cdot B_{25lj} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31li} \cdot B_{35lj}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{41li} \cdot B_{45lj} + B_{51li} \cdot B_{55lj}) \\
& + (B_{41li} \cdot C_{45lj} + B_{51li} \cdot C_{55lj})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned}
k_{25} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12li} + \nu B_{22li}) \cdot B_{15lj} + (\nu B_{12li} + B_{22li}) \\
& \cdot B_{25lj} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32li} \cdot B_{35lj}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{42li} \cdot B_{45lj} + B_{52li} \cdot B_{55lj}) \\
& + (B_{42li} \cdot C_{45lj} + B_{52li} \cdot C_{55lj})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned}
 [K_{li,st}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{11li} & B_{21li} & B_{31li} & B_{41li} \\ B_{12li} & B_{22li} & B_{32li} & B_{42li} \\ B_{13li} & B_{23li} & B_{33li} & B_{43li} \\ \zeta \frac{l_i}{2} B_{14li} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{24li} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{34li} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{44li} + \frac{l_i}{2} C_{44li} \\ \zeta \frac{l_i}{2} B_{15li} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{25li} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{35li} & \zeta \frac{l_i}{2} B_{45li} + \frac{l_i}{2} C_{45li} \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} B_{51li} \\ B_{52li} \\ B_{53li} \\ \zeta \frac{l_i}{2} B_{54li} + \frac{l_i}{2} C_{54li} \\ \zeta \frac{l_i}{2} B_{55li} + \frac{l_i}{2} C_{55li} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \\
 &\quad \begin{bmatrix} B_{11st} & B_{12st} & B_{13st} \\ B_{21st} & B_{22st} & B_{23st} \\ B_{31st} & B_{32st} & B_{33st} \\ B_{41st} & B_{42st} & B_{43st} \\ B_{51st} & B_{52st} & B_{53st} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta
 \end{aligned}$$

(5.79)

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se que:

$$[K_{li,st}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} \end{bmatrix}$$

(5.80)

onde

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11li} + \nu B_{21li}) \cdot B_{11st} + (\nu B_{11li} + B_{21li}) \cdot B_{21st} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31li} \cdot B_{31st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41li} \cdot B_{41st} + B_{51li} \cdot B_{51st}) \right\} \cdot \\
 &\quad |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned}$$

(5.81)

$$\begin{aligned}
k_{21} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12li} + \nu B_{22li}) \cdot B_{11st} + (\nu B_{12li} + B_{22li}) \cdot B_{21st} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32li} \cdot B_{31st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42li} \cdot B_{41st} + B_{52li} \cdot B_{51st}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned}
k_{31} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13li} + \nu B_{23li}) \cdot B_{11st} + (\nu B_{13li} + B_{23li}) \cdot B_{21st} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33li} \cdot B_{31st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43li} \cdot B_{41st} + B_{53li} \cdot B_{51st}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned}
k_{41} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14li} + \nu B_{24li}) \cdot B_{11st} + (\nu B_{14li} + B_{24li}) \cdot B_{21st} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34li} \cdot B_{31st}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44li} \cdot B_{41st} + B_{54li} \cdot B_{51st}) \right. \\
\left. + (C_{44li} \cdot B_{41st} + C_{54li} \cdot B_{51st})] \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned}
k_{51} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15li} + \nu B_{25li}) \cdot B_{11st} + (\nu B_{15li} + B_{25li}) \cdot B_{21st} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35li} \cdot B_{31st}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45li} \cdot B_{41st} + B_{55li} \cdot B_{51st}) \right. \\
\left. + (C_{45li} \cdot B_{41st} + C_{55li} \cdot B_{51st})] \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned}
k_{12} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11li} + \nu B_{21li}) \cdot B_{12st} + (\nu B_{11li} + B_{21li}) \cdot B_{22st} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31li} \cdot B_{32st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41li} \cdot B_{42st} + B_{51li} \cdot B_{52st}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.86)$$

$$\begin{aligned}
k_{22} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12li} + \nu B_{22li}) \cdot B_{12st} + (\nu B_{12li} + B_{22li}) \cdot B_{22st} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32li} \cdot B_{32st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42li} \cdot B_{42st} + B_{52li} \cdot B_{52st}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned}
k_{32} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13li} + \nu B_{23li}) \cdot B_{12st} + (\nu B_{13li} + B_{23li}) \cdot B_{22st} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33li} \cdot B_{32st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43li} \cdot B_{42st} + B_{53li} \cdot B_{52st}) \right\} \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned}
k_{42} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14li} + \nu B_{24li}) \cdot B_{12st} + (\nu B_{14li} + B_{24li}) \cdot \right. \\
& B_{22st} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34li} \cdot B_{32st}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44li} \cdot B_{42st} + B_{54li} \cdot B_{52st}) \\
& \left. + (C_{44li} \cdot B_{42st} + C_{54li} \cdot B_{52st})] \right\} \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned}
k_{52} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15li} + \nu B_{25li}) \cdot B_{12st} + (\nu B_{15li} + B_{25li}) \cdot \right. \\
& B_{22st} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35li} \cdot B_{32st}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45li} \cdot B_{42st} + B_{55li} \cdot B_{52st}) \\
& \left. + (C_{45li} \cdot B_{42st} + C_{55li} \cdot B_{52st})] \right\} \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned}
k_{13} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11li} + \nu B_{21li}) \cdot B_{13st} + (\nu B_{11li} + B_{21li}) \cdot B_{23st} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31li} \cdot B_{33st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41li} \cdot B_{43st} + B_{51li} \cdot B_{53st}) \right\} \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned}
k_{23} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12li} + \nu B_{22li}) \cdot B_{13st} + (\nu B_{12li} + B_{22li}) \cdot B_{23st} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32li} \cdot B_{33st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42li} \cdot B_{43st} + B_{52li} \cdot B_{53st}) \right\} \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned}
k_{33} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13li} + \nu B_{23li}) \cdot B_{13st} + (\nu B_{13li} + B_{23li}) \cdot B_{23st} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33li} \cdot B_{33st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43li} \cdot B_{43st} + B_{53li} \cdot B_{53st}) \right\} \cdot \\
& |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned}
k_{43} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14li} + \nu B_{24li}) \cdot B_{13st} + (\nu B_{14li} + B_{24li}) \cdot \right. \\
\left. B_{23st} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34li} \cdot B_{33st}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44li} \cdot B_{43st} + B_{54li} \cdot B_{53st}) \right. \\
\left. + (C_{44li} \cdot B_{43st} + C_{54li} \cdot B_{53st})] \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \tag{5.94}$$

$$\begin{aligned}
k_{53} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15li} + \nu B_{25li}) \cdot B_{13st} + (\nu B_{15li} + B_{25li}) \cdot \right. \\
\left. B_{23st} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35li} \cdot B_{33st}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45li} \cdot B_{43st} + B_{55li} \cdot B_{53st}) \right. \\
\left. + (C_{45li} \cdot B_{43st} + C_{55li} \cdot B_{53st})] \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \tag{5.95}$$

5.2.3 Determinação da submatriz $[K_{pk,lj}]$

A submatriz $[K_{pk,lj}]$ representa o acoplamento entre os deslocamentos nodais e os parâmetros não nodais do elemento. Os índices p e k representam, respectivamente, o grau do polinômio associado ao interior do elemento e seu número e os índices l e j , o grau do polinômio e o nó a ele associado. Esta submatriz será dada por:

$$[K_{pk,lj}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{pk}(\xi, \eta)]^T [D'] [B_{lj}(\xi, \eta, \zeta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta = [K_{li,st}]^T \tag{5.96}$$

sendo que a submatriz $[K_{li,st}]$ já foi obtida anteriormente, no item 5.2.2.

5.2.4 Determinação da submatriz $[K_{pk,st}]$

A submatriz $[K_{pk,st}]$ está associada aos parâmetros não nodais do elemento. Os índices p e s representam o grau do polinômio, enquanto que os índices k e t numeram os polinômios. Esta submatriz será dada por:

$$[K_{pk,st}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{pk}(\xi, \eta)]^T [D'] [B_{st}(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.97)$$

Levando-se em conta as Equações (4.76) e (5.31), pode-se reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$[K_{pk,st}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{11pk} & B_{21pk} & B_{31pk} & B_{41pk} & B_{51pk} \\ B_{12pk} & B_{22pk} & B_{32pk} & B_{42pk} & B_{52pk} \\ B_{13pk} & B_{23pk} & B_{33pk} & B_{43pk} & B_{53pk} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11st} & B_{12st} & B_{13st} \\ B_{21st} & B_{22st} & B_{23st} \\ B_{31st} & B_{32st} & B_{33st} \\ B_{41st} & B_{42st} & B_{43st} \\ B_{51st} & B_{52st} & B_{53st} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.98)$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se que:

$$[K_{pk,st}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

onde

$$k_{11} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11pk} + \nu B_{21pk}) \cdot B_{11st} + (\nu B_{11pk} + B_{21pk}) \cdot B_{21st} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31pk} \cdot B_{31st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41pk} \cdot B_{41st} + B_{51pk} \cdot B_{51st}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.100)$$

$$\begin{aligned}
k_{21} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12pk} + \nu B_{22pk}) \cdot B_{11st} + (\nu B_{12pk} + B_{22pk}) \cdot B_{21st} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32pk} \cdot B_{31st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42pk} \cdot B_{41st} + B_{52pk} \cdot B_{51st}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.101)$$

$$\begin{aligned}
k_{31} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13pk} + \nu B_{23pk}) \cdot B_{11st} + (\nu B_{13pk} + B_{23pk}) \cdot B_{21st} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33pk} \cdot B_{31st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43pk} \cdot B_{41st} + B_{53pk} \cdot B_{51st}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.102)$$

$$\begin{aligned}
k_{12} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11pk} + \nu B_{21pk}) \cdot B_{12st} + (\nu B_{11pk} + B_{21pk}) \cdot B_{22st} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31pk} \cdot B_{32st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41pk} \cdot B_{42st} + B_{51pk} \cdot B_{52st}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.103)$$

$$\begin{aligned}
k_{22} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12pk} + \nu B_{22pk}) \cdot B_{12st} + (\nu B_{12pk} + B_{22pk}) \cdot B_{22st} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32pk} \cdot B_{32st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42pk} \cdot B_{42st} + B_{52pk} \cdot B_{52st}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.104)$$

$$\begin{aligned}
k_{32} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13pk} + \nu B_{23pk}) \cdot B_{12st} + (\nu B_{13pk} + B_{23pk}) \cdot B_{22st} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33pk} \cdot B_{32st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43pk} \cdot B_{42st} + B_{53pk} \cdot B_{52st}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.105)$$

$$\begin{aligned}
k_{13} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11pk} + \nu B_{21pk}) \cdot B_{13st} + (\nu B_{11pk} + B_{21pk}) \cdot B_{23st} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31pk} \cdot B_{33st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41pk} \cdot B_{43st} + B_{51pk} \cdot B_{53st}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \quad (5.106)$$

$$\begin{aligned}
k_{23} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12pk} + \nu B_{22pk}) \cdot B_{13st} + (\nu B_{12pk} + B_{22pk}) \cdot B_{23st} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32pk} \cdot B_{33st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42pk} \cdot B_{43st} + B_{52pk} \cdot B_{53st}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.107)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{33} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13pk} + \nu B_{23pk}) \cdot B_{13st} + (\nu B_{13pk} + B_{23pk}) \cdot B_{23st} \right. \\
\left. + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33pk} \cdot B_{33st}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43pk} \cdot B_{43st} + B_{53pk} \cdot B_{53st}) \right\} \cdot \\
|J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.108)
\end{aligned}$$

O processo de integração numérica utilizado neste trabalho, para as direções ξ e η , é o da *quadratura de Gauss* (BATHE, 1982). Para a direção ζ , utiliza-se integração analítica. Portanto:

$$\int_{-1}^1 d\zeta = 2, \quad \int_{-1}^1 \zeta \cdot d\zeta = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-1}^1 \zeta^2 \cdot d\zeta = \frac{2}{3} \quad (5.109)$$

A integração numérica é feita a partir das coordenadas (ξ_p, η_p) dos pontos de integração, utilizando-se o fator de ponderação W_p correspondente. Os resultados das integrais para os coeficientes k_{ij} da matriz de rigidez do elemento de placa são apresentados no Apêndice D.

5.3 DETERMINAÇÃO DO VETOR DE CARGA DO ELEMENTO

5.3.1 Introdução

Na determinação do vetor de carga do elemento, expresso pelas Equações (5.42) e (5.43), tanto o diferencial de área como o de volume são formulados segundo o sistema global de coordenadas. Os termos da matriz das funções de interpolação $[N]$, entretanto, são dados em função das coordenadas naturais curvilíneas ξ e η ; é necessário, portanto, formular os diferenciais nesse sistema de coordenadas. Essa transformação já foi feita para o diferencial de volume; para formular o diferencial de área segundo o sistema de coordenadas curvilíneas, utiliza-se o procedimento padrão (KAPLAN, 1971), que envolve o módulo, $r_3(\xi, \eta)$, do vetor $\vec{r}_3$, normal ao plano médio do elemento. Portanto, a partir da Equação (2.28):

$$dA = r_3(\xi, \eta).d\xi.d\eta \quad (5.110)$$

Na expressão que determina a força de superfície, derivada da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (Equação 5.42), a matriz $[N]^T$ é a utilizada na interpolação do campo de deslocamento; há a necessidade, entretanto, de interpolar, também, as forças de superfície, a partir de valores nodais. Para isso, utilizam-se as funções quadráticas da família Serendipity, definidas nas Equações (2.4), (2.5) e (2.6).

5.3.2 Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento : $\{fq^e\}$

Admitindo-se que a carga esteja distribuída no plano médio do elemento, onde $\zeta=0$, os deslocamentos de interesse serão aqueles relacionados com os pontos dessa superfície. Portanto, a submatriz $[N_{ii}(\xi, \eta, \zeta)]$, expressa na Equação (3.68) e que compõe a matriz $[N]^T$ da Equação (5.42) torna-se:

$$[N_{ii}(\xi, \eta, \zeta)] = [N_{ii}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} N_{ii}(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{ii}(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{ii}(\xi, \eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.111)$$

Se $\bar{q}_i$, de componentes q_{xi} , q_{yi} e q_{zi} , segundo o sistema de referência global, for a carga distribuída associada ao nó i , pode-se interpolar a carga $\bar{q}$, distribuída na superfície média do elemento, a partir das funções de interpolação $N_i(\xi, \eta)$, associadas aos nós do elemento, dadas nas Equações (2.4), (2.5) e (2.6). Portanto:

$$\bar{q}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{q}_i \quad (5.112)$$

Definindo-se os componentes de $\bar{q}$, segundo o sistema de referência global, como q_x , q_y e q_z , a equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma :

$$\bar{q}(\xi, \eta) = \{q(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} q_x(\xi, \eta) \\ q_y(\xi, \eta) \\ q_z(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{zi} \end{Bmatrix} \quad (5.113)$$

ou ainda,

$$q_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot q_{xi} \quad (5.114)$$

$$q_y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot q_{yi} \quad (5.115)$$

$$q_z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot q_{zi} \quad (5.116)$$

Definindo-se a matriz coluna $\{q_i\}$, de dimensão (5×1) , constituída pelos componentes da carga distribuída associada ao nó i , segundo o sistema de referência global, como:

$$\{q_i\} = \begin{Bmatrix} q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{zi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.117)$$

Pode-se, agora, formular a seguinte equação matricial :

$$\{q(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} q_x(\xi, \eta) \\ q_y(\xi, \eta) \\ q_z(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \left[[N_1(\xi, \eta)], \dots, [N_i(\xi, \eta)], \dots, [N_8(\xi, \eta)] \right] \begin{Bmatrix} \{q_i\} \\ \vdots \\ \{q_i\} \\ \vdots \\ \{q_8\} \end{Bmatrix} \quad (5.118)$$

Levando-se em conta as Equações (5.110), (5.111) e (5.118), pode-se escrever a Equação (5.42) da seguinte forma:

$$\{f q^e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} [N_{11}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [N_{1n}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [N_{1k}(\xi, \eta)]^T \\ [M_{p1}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [M_{pk}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [M_{pm}(\xi, \eta)]^T \end{Bmatrix} \cdot \left[[N_1(\xi, \eta)] \quad \dots \quad [N_i(\xi, \eta)] \quad \dots \quad [N_8(\xi, \eta)] \right] \begin{Bmatrix} \{q_i\} \\ \vdots \\ \{q_i\} \\ \vdots \\ \{q_8\} \end{Bmatrix} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.119)$$

A equação anterior corresponde ao vetor de carga do elemento relativo à ação da carga distribuída nas suas faces externas:

$$\{f q^e\} = \begin{Bmatrix} \{f q_{11}\} \\ \vdots \\ \{f q_{1i}\} \\ \vdots \\ \{f q_{14}\} \\ \{f q_{\rho 1}\} \\ \vdots \\ \{f q_{\rho k}\} \\ \vdots \\ \{f q_{\rho n}\} \end{Bmatrix} \quad (5.120)$$

5.3.2.1 Determinação da submatriz $\{f q_{1i}\}$

A submatriz $\{f q_{1i}\}$ está relacionada com o nó i , com i variando de 1 a 4 e é dada por:

$$\{f q_{1i}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_{1i}(\xi, \eta)]^T \cdot \sum_{j=1}^8 [N_j(\xi, \eta)] \{q_j\} r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.121)$$

Levando-se em conta as Equações (5.111) e (5.117), pode-se reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$\{f q_{1i}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_{1i}(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_{1i}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_{1i}(\xi, \eta) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \sum_{j=1}^8 \begin{bmatrix} N_j(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_j(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_j(\xi, \eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{xj} \\ q_{yj} \\ q_{zj} \\ o \\ o \end{Bmatrix} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.122)$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtem-se que:

$$\{fq_{li}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (5.123)$$

onde

$$f_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \sum_{j=1}^8 N_j(\xi, \eta) \cdot q_{xj} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.124)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \sum_{j=1}^8 N_j(\xi, \eta) \cdot q_{yj} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.125)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_{li}(\xi, \eta) \cdot \sum_{j=1}^8 N_j(\xi, \eta) \cdot q_{zj} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.126)$$

$$f_4 = 0 \quad (5.127)$$

$$f_5 = 0 \quad (5.128)$$

Fazendo-se, agora, a integração numérica nas direções ξ e η , sendo np o número de pontos de integração e W_p o fator de ponderação associado ao ponto, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = \sum_{p=1}^{np} N_{li}(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{j=1}^8 N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{xj} \cdot r_3(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.129)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{np} N_{li}(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{j=1}^8 N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{yj} \cdot r_3(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.130)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{np} N_{li}(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{j=1}^8 N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{zj} \cdot r_3(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.131)$$

$$f_4 = 0 \quad (5.132)$$

$$f_5 = 0 \quad (5.133)$$

5.3.2.2 Determinação da submatriz $\{fq_{pk}\}$

A submatriz $\{fq_{pk}\}$, relacionada às funções associadas ao interior do elemento do elemento, é dada por:

$$\{fq_{pk}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [M_{pk}(\xi, \eta)]^T \cdot \sum_{j=1}^8 [N_j(\xi, \eta)] \{q_j\} r_3(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5.134)$$

Levando-se em conta as Equações (3.69) e (5.117), pode-se reescrever a equação anterior como:

$$\{fq_{pk}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} M_{pk}(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_{pk}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_{pk}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \cdot \sum_{j=1}^8 \begin{bmatrix} N_j(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_j(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_j(\xi, \eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{xj} \\ q_{yj} \\ q_{zj} \\ o \\ o \end{bmatrix} r_3(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5.135)$$

Resolvendo-se a equação acima, obtém-se que:

$$\{fq_{pk}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (5.136)$$

onde

$$f_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_{pk}(\xi, \eta) \cdot \sum_{j=1}^8 N_j(\xi, \eta) \cdot q_{xj} \cdot r_3(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5.137)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_{pk}(\xi, \eta) \cdot \sum_{j=1}^8 N_j(\xi, \eta) \cdot q_{yj} \cdot r_3(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5.138)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_{pk}(\xi, \eta) \cdot \sum_{j=1}^8 N_j(\xi, \eta) \cdot q_{zj} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.139)$$

Fazendo-se, agora, a integração numérica nas direções ξ e η , sendo mp o número de pontos de integração e W_p o fator de ponderação associado ao ponto, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = \sum_{p=1}^{mp} M_{pk}(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{j=1}^8 N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{xj} \cdot r_1(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.140)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{mp} M_{pk}(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{j=1}^8 N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{yj} \cdot r_2(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.141)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{mp} M_{pk}(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{j=1}^8 N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{zj} \cdot r_3(\xi_p, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.142)$$

5.3.3 Determinação do vetor de carga correspondente às forças de corpo: $\{fb^e\}$

A força de corpo $\vec{b}$ pode ser decomposta, segundo o sistema de referência global, nos componentes b_x , b_y e b_z . Tendo-se em conta as expressões de $[N]$ e dV , a Equação (5.43) pode ser reescrita como:

$$\{fb^e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [N_{11}(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_{1i}(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_{14}(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ [M_{p1}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [M_{pk}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [M_{pn}(\xi, \eta)]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.143)$$

A resolução da equação anterior gera o vetor de carga do elemento correspondente às forças de corpo:

$$\{fb^e\} = \begin{Bmatrix} \{fb_{l1}\} \\ \vdots \\ \{fb_{li}\} \\ \vdots \\ \{fb_{l4}\} \\ \{fb_{p1}\} \\ \vdots \\ \{fb_{pk}\} \\ \vdots \\ \{fb_{pn}\} \end{Bmatrix} \quad (5.144)$$

5.3.3.1 Determinação da submatriz $\{fb_{li}\}$

A submatriz $\{fb_{li}\}$ está relacionada com o nó i , com i variando de 1 a 4 e é dada por:

$$\{fb_{li}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_{li}(\xi, \eta, \zeta)]^T \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.145)$$

Levando-se em conta a Equação (3.68), pode-se reescrever a equação anterior como:

$$\{fb_{li}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_{li}(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_{li}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_{li}(\xi, \eta) \\ \zeta \cdot N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & \zeta \cdot N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & \zeta \cdot N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \\ -\zeta \cdot N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} & -\zeta \cdot N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} & -\zeta \cdot N_{li}(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.146)$$

Resolvendo-se esta equação, obtém-se que:

$$\{fb_{li}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (5.147)$$

onde,

$$f_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_{li}(\xi, \eta) \cdot b_x \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.148)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_{li}(\xi, \eta) \cdot b_y \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.149)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_{li}(\xi, \eta) \cdot b_z \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.150)$$

$$f_4 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot N_{li}(\xi, \eta) \cdot (v_{11i} \cdot b_x + v_{12i} \cdot b_y + v_{13i} \cdot b_z) \right] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.151)$$

$$f_5 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[-\zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot N_{li}(\xi, \eta) \cdot (v_{21i} \cdot b_x + v_{22i} \cdot b_y + v_{23i} \cdot b_z) \right] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.152)$$

Fazendo-se, agora, a integração analítica na direção ζ (Equação 5.109) e a integração numérica nas direções ξ e η , sendo np o número de pontos de integração e W_p o fator ponderador associado ao ponto p , tem-se que:

$$f_1 = 2 \cdot \sum_{p=1}^{np} N_{li}(\xi_p, \eta_p) b_x \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.153)$$

$$f_2 = 2 \cdot \sum_{p=1}^{np} N_{li}(\xi_p, \eta_p) b_y \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.154)$$

$$f_3 = 2 \cdot \sum_{p=1}^{np} N_{li}(\xi_p, \eta_p) b_z \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.155)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.156)$$

5.3.3.2 Determinação da submatriz $\{fb_{pk}\}$

A submatriz $\{fb_{pk}\}$, relacionada às funções associadas ao interior do elemento, será dada por:

$$\{fb_{pk}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [M_{pk}(\xi, \eta)]^T \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.157)$$

Levando-se em conta a Equação (3.69), pode-se reescrever a equação anterior como:

$$\{fb_{pk}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} M_{pk}(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_{pk}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_{pk}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.158)$$

Resolvendo-se esta equação, obtém-se que:

$$\{fb_{pk}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (5.159)$$

onde

$$f_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_{pk}(\xi, \eta) \cdot b_x \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.160)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_{pk}(\xi, \eta) \cdot b_y \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.161)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_{pk}(\xi, \eta) \cdot b_z \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.162)$$

Fazendo-se, agora, a integração analítica na direção ζ (Equação (5.109)) e a integração numérica nas direções ξ e η , sendo mp o número de pontos de integração e W_p o fator ponderador associado ao ponto p , tem-se que:

$$f_1 = 2 \cdot \sum_{p=1}^{mp} M_{pk}(\xi_p, \eta_p) \cdot b_x \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.163)$$

$$f_2 = 2 \cdot \sum_{p=1}^{mp} M_{pk}(\xi_p, \eta_p) \cdot b_y \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.164)$$

$$f_3 = 2 \cdot \sum_{p=1}^{mp} M_{pk}(\xi_p, \eta_p) \cdot b_z \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.165)$$

5.3.4 Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces laterais do elemento: $\{f_l^e\}$

Admitindo-se que a carga esteja distribuída ao longo dos lados do plano médio do elemento, os deslocamentos de interesse serão aqueles relacionados aos pontos destes lados. Dessa forma, as submatrizes $[N_{li}(\xi, \eta, \zeta)]$ (Equação 3.68) e $[M_{pk}(\xi, \eta)]$ (Equação 3.69), que compõem a matriz $[N]$ da Equação (5.42), tornam-se:

(a) para o lado 1 do elemento, onde $\zeta = 0$ e $\eta = -1$:

$$[N_{li}(\xi, \eta, \zeta)] = [N_{li}(\xi, -1)] = \begin{bmatrix} N_{li}(\xi, -1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{li}(\xi, -1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{li}(\xi, -1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.166)$$

com i assumindo os valores 1 e 2, que são os nós deste lado do elemento e

$$[M_{pk}(\xi, \eta)] = [M_{pk}(\xi, -1)] = \begin{bmatrix} M_{pk}(\xi, -1) & 0 & 0 \\ 0 & M_{pk}(\xi, -1) & 0 \\ 0 & 0 & M_{pk}(\xi, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.167)$$

uma vez que as funções $M_{pk}(\xi, \eta)$ são nulas nos contornos do elemento.

(b) para o lado 2, onde $\zeta = 0$ e $\xi = +1$:

$$[N_{li}(\xi, \eta, \zeta)] = [N_{li}(1, \eta)] = \begin{bmatrix} N_{li}(1, \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{li}(1, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{li}(1, \eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.168)$$

com i assumindo os valores 2 e 3, que são os nós deste lado do elemento e

$$[M_{pk}(\xi, \eta)] = [M_{pk}(1, \eta)] = \begin{bmatrix} M_{pk}(1, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_{pk}(1, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_{pk}(1, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.169)$$

uma vez que as funções $M_{pk}(\xi, \eta)$ são nulas nos contornos do elemento.

(c) para o lado 3, onde $\zeta = 0$ e $\eta = +1$:

$$[N_{ii}(\xi, \eta, \zeta)] = [N_{ii}(\xi, 1)] = \begin{bmatrix} N_{ii}(\xi, 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{ii}(\xi, 1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{ii}(\xi, 1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.170)$$

com i assumindo os valores 3 e 4, que são os nós deste lado do elemento e

$$[M_{pk}(\xi, \eta)] = [M_{pk}(\xi, 1)] = \begin{bmatrix} M_{pk}(\xi, 1) & 0 & 0 \\ 0 & M_{pk}(\xi, 1) & 0 \\ 0 & 0 & M_{pk}(\xi, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.171)$$

uma vez que as funções $M_{pk}(\xi, \eta)$ são nulas nos contornos do elemento.

(d) para o lado 4, onde $\zeta = 0$ e $\xi = -1$:

$$[N_{ii}(\xi, \eta, \zeta)] = [N_{ii}(-1, \eta)] = \begin{bmatrix} N_{ii}(-1, \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{ii}(-1, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{ii}(-1, \eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.172)$$

com i assumindo os valores 1 e 4, que são os nós deste lado do elemento e

$$[M_{pk}(\xi, \eta)] = [M_{pk}(-1, \eta)] = \begin{bmatrix} M_{pk}(-1, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_{pk}(-1, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_{pk}(-1, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.173)$$

uma vez que as funções $M_{pk}(\xi, \eta)$ são nulas nos contornos do elemento.

Se $\{\bar{t}_j\}$ é uma matriz coluna (3×1) , constituída dos componentes, segundo o sistema de referência global, da carga distribuída associada a cada lado j do elemento, a Equação (5.42) deve ser integrada ao longo de cada lado. Pode-se escrever, portanto, que:

$$\{f^e\} = \int_{S_1} [N_{i1}]^T \cdot \{\bar{t}_1\} \cdot dS_1 + \int_{S_2} [N_{i2}]^T \cdot \{\bar{t}_2\} \cdot dS_2 + \int_{S_3} [N_{i3}]^T \cdot \{\bar{t}_3\} \cdot dS_3 + \int_{S_4} [N_{i4}]^T \cdot \{\bar{t}_4\} \cdot dS_4 \quad (5.174)$$

onde S_1 , S_2 , S_3 e S_4 são, respectivamente, os comprimentos dos lados 1, 2, 3 e 4 e dS_1 , dS_2 , dS_3 e dS_4 , os diferenciais correspondentes, dados por:

$$dS_1 = r_1(\xi, -1).d\xi \quad (5.175)$$

$$dS_2 = r_2(1, \eta).d\eta \quad (5.176)$$

$$dS_3 = r_1(\xi, 1).d\xi \quad (5.177)$$

$$dS_4 = r_2(-1, \eta).d\eta \quad (5.178)$$

Nas expressões anteriores, r_1 e r_2 são os módulos dos vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, tangentes ao plano médio do elemento e dados pelas Equações (2.11) e (2.12). Dessa forma,

$$r_1(\xi, -1) = \sqrt{r_{11}^2(\xi, -1) + r_{12}^2(\xi, -1) + r_{13}^2(\xi, -1)} \quad (5.179)$$

$$r_2(1, \eta) = \sqrt{r_{21}^2(1, \eta) + r_{22}^2(1, \eta) + r_{23}^2(1, \eta)} \quad (5.180)$$

$$r_1(\xi, 1) = \sqrt{r_{11}^2(\xi, 1) + r_{12}^2(\xi, 1) + r_{13}^2(\xi, 1)} \quad (5.181)$$

$$r_2(-1, \eta) = \sqrt{r_{21}^2(-1, \eta) + r_{22}^2(-1, \eta) + r_{23}^2(-1, \eta)} \quad (5.182)$$

5.3.4.1 Determinação do vetor de carga associado ao lado 1

O vetor de carga associado ao lado 1 será dado por :

$$\{f1\} = \int_{S_1} [N_{11}]^T \cdot \{\bar{t}1\}.dS_1 \quad (5.183)$$

Na Equação (5.174), $\{\bar{t}1\}$ pode ser interpolado a partir das funções quadráticas da família *Serendipity* associadas aos nós do lado 1 (nós 1, 2 e 5). Pode-se escrever, portanto, que:

$$\{\bar{t}1\} = \left[[N_1(\xi, -1)] [N_5(\xi, -1)] [N_2(\xi, -1)] \right] \cdot \begin{Bmatrix} \{\bar{t}1_1\} \\ \{\bar{t}1_5\} \\ \{\bar{t}1_2\} \end{Bmatrix} \quad (5.184)$$

onde

$$\{\bar{t}1_5\} = \begin{Bmatrix} \bar{t}1_{5x} \\ \bar{t}1_{5y} \\ \bar{t}1_{5z} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.186)$$

$$\{\bar{t}1_2\} = \begin{Bmatrix} \bar{t}1_{2x} \\ \bar{t}1_{2y} \\ \bar{t}1_{2z} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.187)$$

As expressões $\bar{t}1_{1x}$, $\bar{t}1_{1y}$, $\bar{t}1_{1z}$, $\bar{t}1_{5x}$, $\bar{t}1_{5y}$, $\bar{t}1_{5z}$, $\bar{t}1_{2x}$, $\bar{t}1_{2y}$ e $\bar{t}1_{2z}$ referem-se aos componentes, segundo o sistema de referência global, da carga distribuída associada aos nós 1, 5 e 2, respectivamente. Substituindo-se as Equações (5.175) e (5.184) na Equação (5.183), tem-se que:

$$\{f1\} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [N_{11}(\xi, -1)]'' \\ [N_{12}(\xi, -1)]'' \\ [N_{13}(\xi, -1)]'' \\ [M_{pk}(\xi, -1)]'' \end{bmatrix} \cdot \left[[N_1(\xi, -1)], [N_5(\xi, -1)], [N_2(\xi, -1)] \right] \begin{Bmatrix} \{\bar{t}1_1\} \\ \{\bar{t}1_5\} \\ \{\bar{t}1_2\} \end{Bmatrix} \cdot r_1(\xi, -1) \cdot d\xi \quad (5.188)$$

A resolução da equação anterior leva ao vetor de carga distribuída associado ao lado 1 do elemento:

$$\{f1\} = \begin{Bmatrix} \{f1_{11}\} \\ \{f1_{12}\} \\ \{f1_{13}\} \\ \{f1_{pk}\} \end{Bmatrix} \quad (5.189)$$

A submatriz $\{f1_{ii}\}$ está relacionada ao nó i , com i assumindo os valores 1 e 2. Esta submatriz é dada por:

$$\{f1_{ii}\} = \int_{-1}^1 [N_{ii}(\xi, -1)]'' \cdot \left[[N_1(\xi, -1)] \{\bar{t}1_1\} + [N_5(\xi, -1)] \{\bar{t}1_5\} + [N_2(\xi, -1)] \{\bar{t}1_2\} \right] \cdot r_1(\xi, -1) \cdot d\xi \quad (5.190)$$

ou ainda, levando-se em conta as Equações (5.166), (5.185) , (5.186) e (5.187),

$$\{f1_{li}\} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_{li}(\xi, -1) & 0 & 0 \\ 0 & N_{li}(\xi, -1) & 0 \\ 0 & 0 & N_{li}(\xi, -1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1(\xi, -1).\bar{t}1_{1x} + N_5(\xi, -1).\bar{t}1_{5x} + N_2(\xi, -1).\bar{t}1_{2x} \\ N_1(\xi, -1).\bar{t}1_{1y} + N_5(\xi, -1).\bar{t}1_{5y} + N_2(\xi, -1).\bar{t}1_{2y} \\ N_1(\xi, -1).\bar{t}1_{1z} + N_5(\xi, -1).\bar{t}1_{5z} + N_2(\xi, -1).\bar{t}1_{2z} \end{Bmatrix} r_1(\xi, -1).d\xi \quad (5.191)$$

Resolvendo-se a equação acima, tem-se que:

$$\{f1_{li}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (5.192)$$

onde

$$f_1 = \int_{-1}^1 N_{li}(\xi, -1).[N_1(\xi, -1).\bar{t}1_{1x} + N_5(\xi, -1).\bar{t}1_{5x} + N_2(\xi, -1).\bar{t}1_{2x}]r_1(\xi, -1).d\xi \quad (5.193)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 N_{li}(\xi, -1).[N_1(\xi, -1).\bar{t}1_{1y} + N_5(\xi, -1).\bar{t}1_{5y} + N_2(\xi, -1).\bar{t}1_{2y}]r_1(\xi, -1).d\xi \quad (5.194)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 N_{li}(\xi, -1).[N_1(\xi, -1).\bar{t}1_{1z} + N_5(\xi, -1).\bar{t}1_{5z} + N_2(\xi, -1).\bar{t}1_{2z}]r_1(\xi, -1).d\xi \quad (5.195)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.196)$$

Fazendo-se, agora, a integração numérica na direção ξ , com lp sendo o número total de pontos de integração e W_p o fator de ponderação correspondente, tem-se que:

$$f_1 = \sum_{p=1}^{lp} N_{li}(\xi_p, -1).[N_1(\xi_p, -1).\bar{t}1_{1x} + N_5(\xi_p, -1).\bar{t}1_{5x} + N_2(\xi_p, -1).\bar{t}1_{2x}]r_1(\xi_p, -1).W_p \quad (5.197)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{lp} N_{li}(\xi_p, -1).[N_1(\xi_p, -1).\bar{t}1_{1y} + N_5(\xi_p, -1).\bar{t}1_{5y} + N_2(\xi_p, -1).\bar{t}1_{2y}]r_1(\xi_p, -1).W_p \quad (5.198)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{lp} N_{li}(\xi_p, -1).[N_1(\xi_p, -1).\bar{t}1_{1z} + N_5(\xi_p, -1).\bar{t}1_{5z} + N_2(\xi_p, -1).\bar{t}1_{2z}]r_1(\xi_p, -1).W_p \quad (5.199)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.200)$$

A submatriz $\{ft1_{pk}\}$ está relacionada com o lado 1 do elemento, com k assumindo os valores de 1 a n e é dada por:

$$\{ft1_{pk}\} = \int_{-1}^1 [M_{pk}(\xi, -1)]^T \cdot \left[[N_1(\xi, -1)] \{\bar{t}1_1\} + [N_5(\xi, -1)] \{\bar{t}1_5\} + [N_2(\xi, -1)] \{\bar{t}1_2\} \right] r_1(\xi, -1) d\xi \quad (5.201)$$

ou ainda, levando-se em conta as Equações (5.167), (5.185), (5.186) e (5.187),

$$\{ft1_{pk}\} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} M_{pk}(\xi, -1) & 0 & 0 \\ 0 & M_{pk}(\xi, -1) & 0 \\ 0 & 0 & M_{pk}(\xi, -1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1(\xi, -1)\bar{t}1_{1x} + N_5(\xi, -1)\bar{t}1_{5x} + N_2(\xi, -1)\bar{t}1_{2x} \\ N_1(\xi, -1)\bar{t}1_{1y} + N_5(\xi, -1)\bar{t}1_{5y} + N_2(\xi, -1)\bar{t}1_{2y} \\ N_1(\xi, -1)\bar{t}1_{1z} + N_5(\xi, -1)\bar{t}1_{5z} + N_2(\xi, -1)\bar{t}1_{2z} \end{Bmatrix} r_1(\xi, -1) d\xi \quad (5.202)$$

Resolvendo-se esta equação, obtém-se que:

$$\{ft1_{pk}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (5.203)$$

onde

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0 \quad (5.204)$$

5.3.4.2 Determinação do vetor de carga associado ao lado 2

Na obtenção do vetor de carga associado ao lado 2, $\{ft2\}$, faz-se um procedimento análogo à determinação de $\{ft1\}$. Portanto,

$$\{ft2\} = \begin{Bmatrix} \{ft2_{l2}\} \\ \{ft2_{li}\} \\ \{ft2_{l3}\} \\ \{ft2_{pk}\} \end{Bmatrix} \quad (5.205)$$

sendo que:

$$\{f_{l2}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (5.206)$$

onde

$$f_1 = \sum_{p=1}^{lp} N_{li}(1, \eta_p) \cdot [N_2(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{2x} + N_6(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{6x} + N_3(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{3x}] r_2(1, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.207)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{lp} N_{li}(1, \eta_p) \cdot [N_2(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{2y} + N_6(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{6y} + N_3(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{3y}] r_2(1, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.208)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{lp} N_{li}(1, \eta_p) \cdot [N_2(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{2z} + N_6(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{6z} + N_3(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{3z}] r_2(1, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.209)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.210)$$

e

$$\{f_{pk}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (5.211)$$

onde

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0 \quad (5.212)$$

5.3.4.3 Determinação do vetor de carga associado ao lado 3

Analogamente,

$$\{ft3\} = \begin{Bmatrix} \{ft3_{l3}\} \\ \{ft3_{li}\} \\ \{ft3_{l4}\} \\ \{ft3_{pk}\} \end{Bmatrix} \quad (5.213)$$

sendo que

$$\{ft3_{li}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (5.214)$$

onde

$$f_1 = \sum_{p=1}^{lp} N_{li}(\xi_p, 1) \cdot [N_3(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{3x} + N_7(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{7x} + N_4(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{4x}] \cdot r_1(\xi_p, 1) \cdot W_p \quad (5.215)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{lp} N_{li}(\xi_p, 1) \cdot [N_3(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{3y} + N_7(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{7y} + N_4(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{4y}] \cdot r_1(\xi_p, 1) \cdot W_p \quad (5.216)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{lp} N_{li}(\xi_p, 1) \cdot [N_3(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{3z} + N_7(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{7z} + N_4(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{4z}] \cdot r_1(\xi_p, 1) \cdot W_p \quad (5.217)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.218)$$

e

$$\{ft3_{pk}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (5.219)$$

onde

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0 \quad (5.220)$$

5.3.4.4 Determinação do vetor de carga associado ao lado 4

$$\{ft4\} = \begin{Bmatrix} \{ft4_{li}\} \\ \{ft4_{li}\} \\ \{ft4_{l4}\} \\ \{ft4_{pk}\} \end{Bmatrix} \quad (5.221)$$

sendo que

$$\{ft4_{li}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (5.222)$$

onde

$$f_1 = \sum_{p=1}^{lp} N_{li}(-1, \eta_p) \cdot [N_1(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{lx} + N_8(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{8x} + N_4(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{4x}] r_2(-1, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.223)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{lp} N_{li}(-1, \eta_p) \cdot [N_1(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{ly} + N_8(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{8y} + N_4(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{4y}] r_2(-1, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.224)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{lp} N_{li}(-1, \eta_p) \cdot [N_1(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{lz} + N_8(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{8z} + N_4(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{4z}] r_2(-1, \eta_p) \cdot W_p \quad (5.225)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.226)$$

e

$$\{ft4_{pk}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (5.227)$$

onde

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0 \quad (5.228)$$

5.3.5 Determinação do vetor de carga quando todos os carregamentos atuam simultaneamente

O vetor de carga que reúne todos os carregamentos descritos anteriormente é dado por:

$$\{f^e\} = \{fq^e\} + \{fb^e\} + \{ft^e\} \quad (5.229)$$

Dessa forma, a Equação (5.45) pode ser reescrita como:

$$\{f^e\} = [K^e] \{a\} \quad (5.230)$$

CAPÍTULO 6

FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA

6.1 INTRODUÇÃO

A utilização do Princípio dos Trabalhos Virtuais impõe o equilíbrio no interior de cada elemento do sistema; resta, agora, estabelecer as condições para que cada nó do sistema discretizado esteja, também, em equilíbrio. As equações algébricas que descrevem as características de cada elemento do sistema estrutural em análise (Equação (5.230)) devem ser combinadas, formando um conjunto de equações que represente a reunião de todos os elementos.

Através de um esquema de numeração global, cada nó j do sistema discretizado é identificado. A seguir, define-se a *topologia* do sistema, que especifica a correspondência entre os nós j do sistema discretizado e os nós i dos elementos. Portanto, para que um nó j genérico do sistema esteja em equilíbrio, os componentes do vetor de carga $\{f_j\}$, correspondentes aos deslocamentos nodais e atuantes neste nó, devem ser iguais à soma dos componentes do vetor de carga $\{f_{lj}^e\}$ de cada elemento, que concorre para o nó j . Portanto,

$$\{f_j\} = \sum_{e=1}^{ne} \{f_{lj}^e\} \quad (6.1)$$

onde ne é o número total de elementos, que compõem o sistema estrutural discretizado e $\{f_{lj}^e\}$ é o vetor de carga, de cada elemento e , relacionado com os deslocamentos nodais.

Tendo-se em conta a Equação (5.230) e conhecendo-se a correspondência entre os nós dos elementos e os nós do sistema, pode-se escrever a seguinte equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \{f_{l1}^e\} \\ \vdots \\ \{f_{lj}^e\} \\ \vdots \\ \{f_{ls}^e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{l11}^e] & \cdots & [K_{l1j}^e] & \cdots & [K_{l1s}^e] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{lj1}^e] & \cdots & [K_{ljj}^e] & \cdots & [K_{ljs}^e] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{ls1}^e] & \cdots & [K_{lsj}^e] & \cdots & [K_{lss}^e] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \vdots \\ \{a_j\} \\ \vdots \\ \{a_s\} \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

onde s é o número total de nós do sistema discretizado, $\{a_1\}, \dots, \{a_j\}, \dots, \{a_s\}$ são os deslocamentos nodais do sistema, $\{f_{l1}^e\}, \dots, \{f_{lj}^e\}, \dots, \{f_{ls}^e\}$, os vetores de carga de cada

elemento e , atuantes em cada nó do sistema e relativos aos deslocamentos nodais e $[K_{11}^e], \dots, [K_{lj}^e], \dots, [K_{ls}^e]$, as submatrizes da matriz de rigidez do elemento e , relacionadas com os nós do sistema discretizado.

Resolvendo-se, agora, a Equação (6.2) para as forças nos nós, tem-se que:

$$\{f_{11}^e\} = [K_{11}^e] \cdot \{a_1\} + \dots + [K_{1j}^e] \cdot \{a_j\} + \dots + [K_{1s}^e] \cdot \{a_s\} \quad (6.3)$$

$$\vdots$$

$$\{f_{lj}^e\} = [K_{lj1}^e] \cdot \{a_1\} + \dots + [K_{lj}^e] \cdot \{a_j\} + \dots + [K_{ljs}^e] \cdot \{a_s\} \quad (6.4)$$

$$\vdots$$

$$\{f_{ls}^e\} = [K_{ls1}^e] \cdot \{a_1\} + \dots + [K_{lsj}^e] \cdot \{a_j\} + \dots + [K_{ls}^e] \cdot \{a_s\} \quad (6.5)$$

6.2 DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL E DO VETOR DE CARGA GLOBAL

Substituindo-se as equações anteriores na Equação (6.1) para cada nó do sistema discretizado e notando-se que os deslocamentos nodais do sistema dependem apenas dos nós e não dos elementos, pode-se escrever que:

$$\{f_{11}\} = \sum_{e=1}^{ne} \{f_{11}^e\} = \left(\sum_{e=1}^{ne} [K_{11}^e] \right) \cdot \{a_1\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^{ne} [K_{1j}^e] \right) \cdot \{a_j\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^{ne} [K_{1s}^e] \right) \cdot \{a_s\} \quad (6.6)$$

$$\vdots$$

$$\{f_{lj}\} = \sum_{e=1}^{ne} \{f_{lj}^e\} = \left(\sum_{e=1}^{ne} [K_{lj1}^e] \right) \cdot \{a_1\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^{ne} [K_{lj}^e] \right) \cdot \{a_j\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^{ne} [K_{ljs}^e] \right) \cdot \{a_s\} \quad (6.7)$$

$$\vdots$$

$$\{f_{ls}\} = \sum_{e=1}^{ne} \{f_{ls}^e\} = \left(\sum_{e=1}^{ne} [K_{ls1}^e] \right) \cdot \{a_1\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^{ne} [K_{lsj}^e] \right) \cdot \{a_j\} + \dots + \left(\sum_{e=1}^{ne} [K_{ls}^e] \right) \cdot \{a_s\} \quad (6.8)$$

Considerando-se, também, os vetores de carga $\{f_{pk}^e\}$, de cada elemento e , correspondentes aos parâmetros não nodais, pode-se escrever os componentes do vetor de carga total como se segue:

$$\{f_1\} = \{f_{11}\} + [K_{1,31}^1] \{a_{31}^1\} + \dots + [K_{1,pk}^e] \{a_{pk}^e\} + \dots + [K_{1,45}^{ne}] \{a_{45}^{ne}\} \quad (6.9)$$

$$\vdots$$

$$\{f_j\} = \{f_{lj}\} + [K_{j,31}^1] \{a_{31}^1\} + \dots + [K_{j,pk}^e] \{a_{pk}^e\} + \dots + [K_{j,45}^{ne}] \{a_{45}^{ne}\} \quad (6.10)$$

$$\vdots$$

$$\{f_s\} = \{f_{ls}\} + [K_{s,31}^1] \{a_{31}^1\} + \dots + [K_{s,pk}^e] \{a_{pk}^e\} + \dots + [K_{s,45}^{ne}] \{a_{45}^{ne}\} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
\{f_{31}^1\} &= [K_{31,1}^1]\{a_1\} + \dots + [K_{31,j}^1]\{a_j\} + \dots + [K_{31,s}^1]\{a_s\} + [K_{31,31}^1]\{a_{31}^1\} + \dots + [K_{pk,pk}^1]\{a_{pk}^1\} \\
& \quad + \dots + [K_{45,45}^1]\{a_{45}^1\} \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
\{f_{pk}^e\} &= [K_{pk,1}^e]\{a_1\} + \dots + [K_{pk,j}^e]\{a_j\} + \dots + [K_{pk,s}^e]\{a_s\} + [K_{pk,31}^e]\{a_{31}^e\} + [K_{pk,pk}^e]\{a_{pk}^e\} \\
& \quad + \dots + [K_{45,45}^e]\{a_{45}^e\}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
\{f_{45}^{ne}\} &= [K_{45,1}^{ne}]\{a_1\} + \dots + [K_{45,j}^{ne}]\{a_j\} + \dots + [K_{45,s}^{ne}]\{a_s\} + [K_{45,31}^{ne}]\{a_{31}^{ne}\} + [K_{45,pk}^{ne}]\{a_{pk}^{ne}\} \\
& \quad + \dots + [K_{45,45}^{ne}]\{a_{45}^{ne}\}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

onde $[K_{j,31}^1], \dots, [K_{j,pk}^e], \dots, [K_{j,45}^{ne}]$ são as submatrizes que relacionam o nó j do sistema com os parâmetros não nodais $\{a_{31}^1\}, \dots, \{a_{pk}^e\}, \dots, \{a_{45}^{ne}\}$ correspondentes aos elementos $1, \dots, e, \dots, ne$, respectivamente.

As equações anteriores podem, ainda, ser dadas na forma matricial compacta, que se apresenta a seguir:

$$\{f\} = [K]\{a\} \tag{6.15}$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez global do sistema estrutural discretizado, que, considerando que não existe acoplamento de parâmetros não nodais entre elementos, é dada por:

$$[K] = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{ne} [K_{11}^e] & \dots & \sum_{e=1}^{ne} [K_{1j}^e] & \sum_{e=1}^{ne} [K_{1s}^e] & [K_{1,31}^1] & \dots & [K_{1,pk}^e] & [K_{1,45}^{ne}] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sum_{e=1}^{ne} [K_{j1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^{ne} [K_{jj}^e] & \dots & \sum_{e=1}^{ne} [K_{js}^e] & [K_{j,31}^1] & \dots & [K_{j,pk}^e] & \dots & [K_{j,45}^{ne}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{e=1}^{ne} [K_{s1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^{ne} [K_{sj}^e] & \dots & \sum_{e=1}^{ne} [K_{ss}^e] & [K_{s,31}^1] & \dots & [K_{s,pk}^e] & \dots & [K_{s,45}^{ne}] \\ [K_{31,1}^1] & \dots & [K_{31,j}^1] & \dots & [K_{31,s}^1] & [K_{31,31}^1] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{pk,1}^e] & \dots & [K_{pk,j}^e] & \dots & [K_{pk,s}^e] & [0] & \dots & [K_{pk,pk}^e] & \dots & [0] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [K_{45,1}^{ne}] & \dots & [K_{45,j}^{ne}] & \dots & [K_{45,s}^{ne}] & [0] & \dots & [0] & \dots & [K_{45,45}^{ne}] \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

$\{f\}$ é o vetor de carga global, correspondente às forças de superfície e de corpo, relativo aos deslocamentos nodais e parâmetros não nodais:

$$\{f\} = \left[\sum_{e=1}^{ne} \{f_{11}^e\} \cdots \sum_{e=1}^{ne} \{f_{ij}^e\} \cdots \sum_{e=1}^{ne} \{f_{ls}^e\} \{f_{31}^1\} \cdots \{f_{pk}^e\} \cdots \{f_{45}^{ne}\} \right]^T \quad (6.17)$$

e $\{a\}$ é o vetor constituído dos deslocamentos nodais e parâmetros não nodais do sistema discretizado:

$$\{a\} = \left[\{a_1\} \cdots \{a_j\} \cdots \{a_s\} \{a_{31}^1\} \cdots \{a_{pk}^e\} \cdots \{a_{45}^{ne}\} \right]^T \quad (6.18)$$

Este procedimento de obtenção da matriz de rigidez global e do vetor de carga global é denominado *superposição*. O algoritmo desenvolvido neste trabalho possibilita que tão logo seja encontrado um coeficiente da matriz de rigidez ou do vetor de carga, ele possa ser colocado, imediatamente, na posição apropriada das respectivas matrizes.

Se, eventualmente, além das forças de superfície e das forças de corpo, atuarem, também, forças concentradas, o vetor de carga global será dado por:

$$\{f\} = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{e=1}^{ne} \{f_{11}^e\} + \{r_1\} \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^{ne} \{f_{ij}^e\} + \{r_j\} \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^{ne} \{f_{ls}^e\} + \{r_s\} \\ \{f_{31}^1\} \\ \vdots \\ \{f_{pk}^e\} \\ \vdots \\ \{f_{45}^{ne}\} \end{array} \right\} \quad (6.19)$$

onde $\{r_j\}$ é o vetor constituído dos componentes, segundo o sistema de referência global, da força concentrada, atuante no nó j genérico do sistema estrutural discretizado e que é dado por:

$$\{r_j\} = \left\{ \begin{array}{c} r_{jx} \\ r_{jy} \\ r_{jz} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (6.20)$$

6.3 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Tendo-se encontrado as características do sistema estrutural discretizado (matriz de rigidez global e vetor de carga global), deve-se, a seguir, resolver o sistema de equações lineares, obtido a partir da Equação (6.15). Entretanto, este sistema só pode ser resolvido para os deslocamentos nodais e parâmetros não nodais $\{a\}$, após a imposição das condições de contorno do sistema estrutural em análise. Este procedimento é efetuado por ocasião da determinação da matriz de rigidez global e do vetor de carga global, onde, para cada condição de contorno (vínculo), são eliminados da matriz de rigidez global a linha e a coluna correspondentes e do vetor de carga global, a linha correspondente. Desta forma, o sistema de equações resultante pode, então, ser resolvido através de diversos métodos numéricos. Neste trabalho, utilizou-se o método da decomposição $[L][D][L]^T$.

O procedimento a ser adotado no armazenamento da matriz de rigidez global é de fundamental importância na implementação computacional do método dos elementos finitos, uma vez que se executado adequadamente, reduz o tempo computacional gasto na montagem e resolução do sistema de equações.

Neste trabalho utilizou-se o método "Skyline", que é propício ao armazenamento das matrizes geradas pelo método dos elementos finitos (BATHE, 1982), já que este método produz matrizes esparsas; são armazenados, em um vetor $\{A\}$, somente os elementos localizados abaixo das colunas ativas da matriz de rigidez global $[K]$. A coluna ativa é a altura da coluna, ou seja, é definida pelo primeiro elemento diferente de zero localizado na coluna, a partir da 1ª linha da matriz de rigidez global.

A resolução do sistema de equações lineares é efetuada pela eliminação gaussiana da matriz de rigidez global, através da decomposição $[L][D][L]^T$ desta matriz e pela substituição reversa, realizada na sequência.

A matriz $[K]$ pode, então, ser decomposta em:

$$[K] = [L][D][L]^T \quad (6.21)$$

onde $[L]$ é a matriz triangular inferior definida como:

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

e $[D]$ é a matriz diagonal, dada por:

$$[D] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Substituindo-se as matrizes $[L]$ e $[D]$ na Equação (6.21) e realizando o produto matricial indicado, tem-se que:

$$[K] = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \text{simétrica} \\ l_{21}d_1 & l_{21}^2d_1 + d_2 & & & \\ l_{31}d_1 & l_{21}l_{31}d_1 + l_{32}d_2 & l_{31}^2d_2 + l_{32}^2d_3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ l_{n1}d_1 & l_{21}l_{n1}d_1 + l_{n2}d_2 & l_{31}l_{n1}d_1 + l_{32}l_{n2}d_2 + l_{n3}d_3 & \cdots & l_{n1}^2d_1 + l_{n2}^2d_2 + l_{n3}^2d_3 + \cdots + d_n \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Igualando-se a Equação (6.24) termo a termo, obtêm-se as seguintes expressões:

para $j=1$

$$d_j = K_{jj} \quad (6.25)$$

$$l_{ij} = \frac{K_{ij}}{d_j} \quad \text{para } i = 2, \dots, n \quad (6.26)$$

para $j = 2, \dots, n$

$$d_j = K_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 d_k \quad (6.27)$$

se $j+1 \leq n$

$$l_{ij} = \frac{\left(K_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} l_{ik} d_k \right)}{d_j} \quad \text{para } i = j+1, \dots, n \quad (6.28)$$

Pode-se observar que a decomposição em $[L][D][L]^T$ da matriz de rigidez global $[K]$ pode ser feita em colunas.

De forma geral, armazenam-se os valores d_i da matriz $[D]$ nas posições l_{ii} da diagonal da matriz $[L]$, obtendo, portanto, uma matriz $[K']$ que substitui a matriz de rigidez global $[K]$, que é dada por:

$$[K'] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & d_n \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Uma vez realizada a decomposição $[L][D][L]^T$, ou seja, tendo-se os coeficientes das matrizes $[L]$ e $[D]$, o vetor de carga $\{f\}$ necessita ser reduzido da seguinte maneira:

$$f'_1 = f_1 \quad (6.30)$$

e para $i=2, \dots, n$

$$f'_i = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki} f_k \quad (6.31)$$

O vetor reduzido $\{f'\}$ é armazenado no mesmo local onde era armazenado o vetor $\{f\}$, isto é realizado de forma a economizar espaço destinado ao armazenamento das variáveis.

Para encontrar os valores dos deslocamentos nodais e parâmetros não nodais $\{a\}$, ou seja, para resolver o sistema de equações descrito na Equação (6.15), deve-se proceder a substituição reversa, que é realizada pela seguinte equação:

$$[L]\{a\} = [D]^{-1}\{f'\} \quad (6.32)$$

Portanto, a substituição reversa é obtida através das equações apresentadas a seguir:

$$\bar{f}'^{(i-1)}_k = \bar{f}'^{(i)}_k - l_{ki} a_i \quad k = 1, \dots, i-1 \quad (6.33)$$

$$x_{i-1} = \bar{f}'^{(i-1)}_k \quad (6.34)$$

Deve-se observar que o vetor $\bar{f}'_k$ é armazenado na mesma posição em que, antes, era armazenado o vetor $\{f'\}$, ou seja, na mesma localização original do vetor $\{f\}$.

6.4 PROGRAMA COMPUTACIONAL

A partir das equações estabelecidas nos Capítulos anteriores, desenvolveu-se um programa computacional em linguagem C para implementar os elementos finitos propostos.

O fluxograma de funcionamento do programa encontra-se na Figura 6.1 O programa foi montado de forma que as rotinas fossem divididas em sub-rotinas, chamadas por um

programa principal. Foi utilizado, também, o sistema de alocação dinâmica de memória, onde o vetor é alocado, a qualquer momento, no tamanho necessário e, após sua utilização, o mesmo é desalocado, deixando este espaço de memória livre para utilização de outras variáveis (SANAL, 1994). As variáveis utilizadas em matrizes foram todas alocadas em vetores, utilizando desta maneira, para as matrizes simétricas, apenas a quantidade de memória suficiente para armazenamento do triângulo superior.

O primeiro passo realizado pelo programa é a leitura dos dados de entrada do modelo: coordenadas nodais, incidência dos nós, propriedades do material, tipos e valores dos carregamentos e restrições nodais.

Com estas informações, passa-se à montagem das matrizes dos elementos. Para a montagem destas matrizes, executam-se vários passos, realizados dentro de um processo em ciclo variando de 1 até o número total de elementos:

- Cálculo das funções de interpolação para os nós e para os pontos de integração ;
- Cálculo dos vetores e dos versores nos nós e pontos de integração (tangentes e perpendiculares ao plano médio);
- Cálculo do Jacobiano, da matriz $[A]$ e da matriz $[d]$ para cada ponto de integração;
- Cálculo da matriz $[B]$ para os pontos de integração;
- Cálculo da matriz de rigidez do elemento $[K^e]$;
- Cálculo do vetor de carga do elemento $\{f^e\}$;

Após o término da montagem das matrizes dos elementos, o próximo passo é o cálculo da matriz de rigidez global na forma "Skyline". Para completar a montagem das equações do sistema, necessita-se, ainda, montar o vetor de carga global. Na sequência, pode-se, então, resolver o sistema de equações lineares e, a seguir, imprimir os resultados. Cabe ressaltar que a eliminação dos graus de liberdade restritos é realizada na ocasião da montagem do vetor de carga global e da matriz de rigidez global.

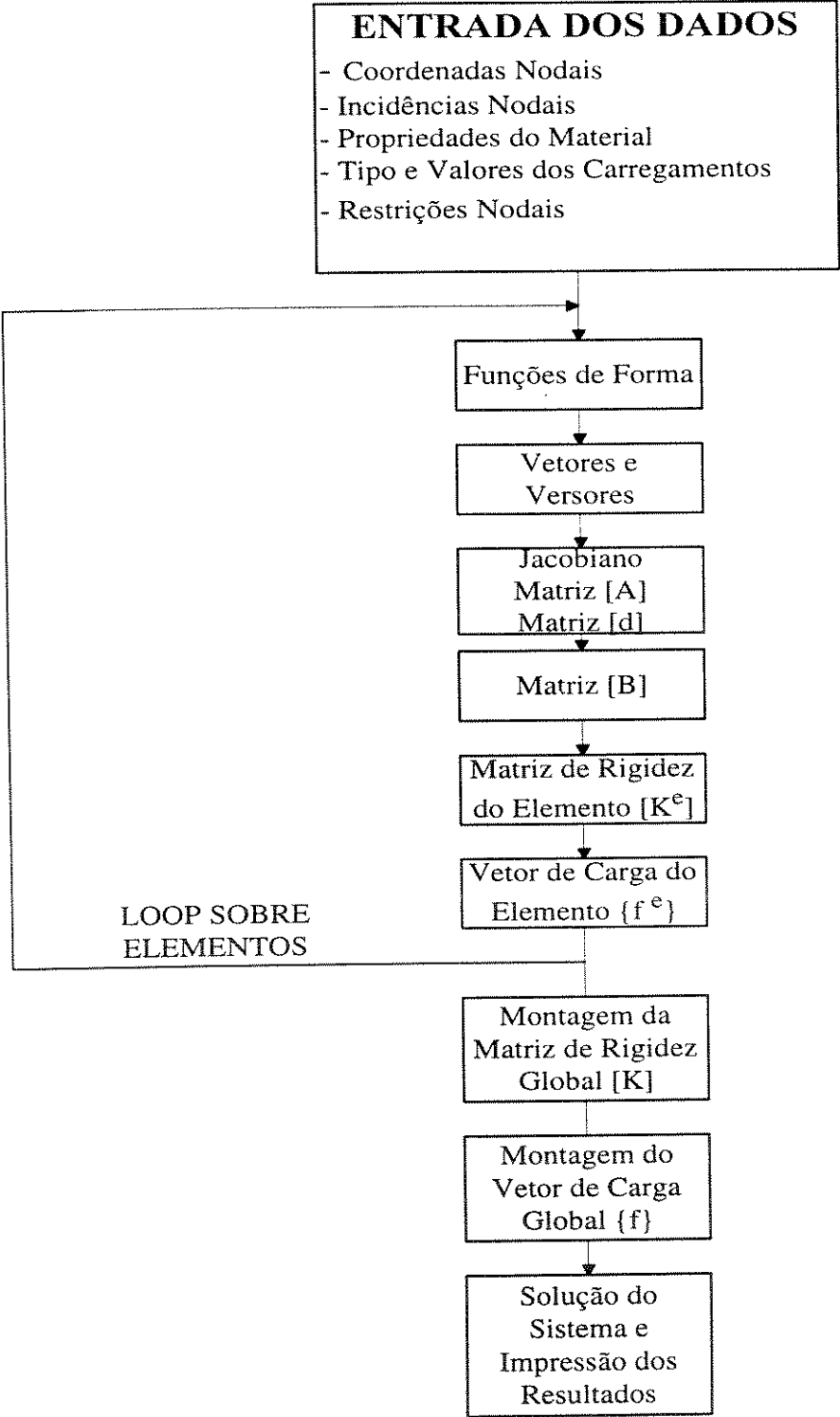


Figura 6.1 - Fluxograma do Programa Computacional.

CAPÍTULO 7

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

7.1 INTRODUÇÃO

Os elementos propostos (Tabela 7.1), formados a partir dos seis esquemas de interpolação discriminados no Capítulo 3, foram testados na análise estática de placas com diversas condições de apoio e carregamento (McNEAL e HARDER, 1985). O cálculo das matrizes de rigidez dos elementos foi feito através de integração numérica reduzida, empregando-se (2×2) pontos de integração em seu plano médio. Em função das condições gerais de simetria dos modelos, tanto geométrica quanto de carregamento, modelou-se apenas um quarto das placas, utilizando-se duas malhas de discretização para cada caso: (2×2) e (4×4) elementos (Figura 7.1). Como resultado, apresenta-se a deflexão no centro da placa, w_c , normalizada segundo diferentes fatores, obtidos a partir dos padrões de carregamento utilizados. As Tabelas de resultados apresentam, também, o número de graus de liberdade (g/l) de cada problema e o erro, calculado em função da solução exata (quando disponível) ou em função de resultados obtidos por outros elementos de eficiência reconhecida.

Tabela 7.1 - Resumo dos esquemas de interpolação

ESQUEMAS DE INTERPOLAÇÃO	FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO
	NODAIS	NÃO NODAIS (BOLHAS)
1	4 FUNÇÕES LINEARES	4 FUNÇÕES CÚBICAS
2	4 FUNÇÕES LINEARES	5 FUNÇÕES QUÁRTICAS
3	4 FUNÇÕES LINEARES	4 FUNÇÕES CÚBICAS+5 FUNÇÕES QUÁRTICAS
4	4 FUNÇÕES CÚBICAS	4 FUNÇÕES CÚBICAS
5	4 FUNÇÕES CÚBICAS	5 FUNÇÕES QUÁRTICAS
6	4 FUNÇÕES CÚBICAS	4 FUNÇÕES CÚBICAS+5 FUNÇÕES QUÁRTICAS

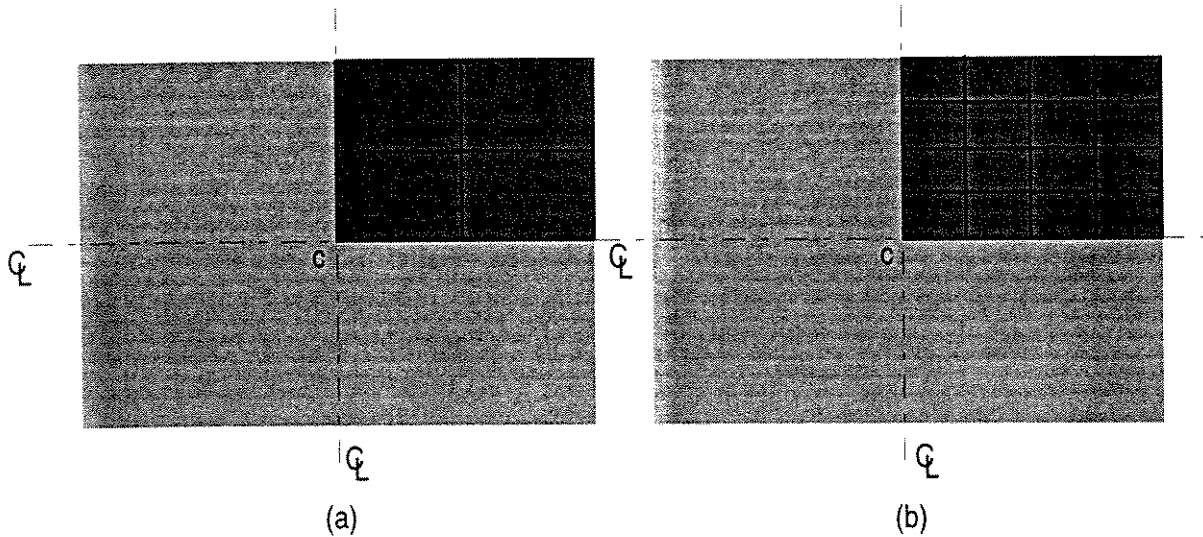


Figura 7.1: Malhas de discretização de um quarto de placa: (a) 2×2 elementos, (b) 4×4 elementos

7.2 PLACA QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA EM SEUS LADOS

7.2.1 Placa submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano

A deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{qa^4}{D}$, onde q é o valor da carga uniformemente distribuída, a o lado da placa e D , sua rigidez, que é dada por (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968):

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (7.1)$$

Os resultados obtidos (Tabelas 7.2 a 7.7) são comparados com aqueles da *Teoria da Elasticidade Tridimensional* (PAGANO, 1970), que fornece a solução exata para diferentes relações (t/a) entre a espessura t e o lado a da placa quadrada, permitindo a análise do desempenho dos elementos tanto em aplicações de placas finas ($t/a < 0.05$) como em aplicações de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$).

Tabela 7.2: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 1).

t/a	Solução exata ⁽¹⁾ α	Esquema 1 malha 2x2			Esquema 1 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,004060	0,004225	32	4,1	0,004183	120	3,0
0,010	0,004061	0,004198	32	3,4	0,004166	120	2.6
0,050	0,004111	0,004259	32	3,6	0,004235	120	3.0
0,100	0,004263	0,004558	32	6.9	0,004538	120	6.4
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$							
⁽¹⁾ (PAGANO, 1970)							

Tabela 7.3: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 2).

t/a	Solução exata ⁽¹⁾ α	Esquema 2 malha 2x2			Esquema 2 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,004060	0,004023	36	0.9	0,004053	136	0.16
0,010	0,004061	0,004058	36	0.07	0,004057	136	0.09
0,050	0,004111	0,004193	36	2.0	0,004198	136	2.1
0,100	0,004263	0,004472	36	4.9	0,004447	136	4.3
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$							
⁽¹⁾ (PAGANO, 1970)							

Tabela 7.4: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 3).

t/a	Solução exata ⁽¹⁾ α	Esquema 3 malha 2x2			Esquema 3 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,004060	0.004115	52	1.35	0.004077	200	0.43
0,010	0,004061	0.004052	52	0.22	0.004060	200	0.02
0,050	0,004111	0.004201	52	2.2	0.004203	200	2.2
0,100	0,004263	!	52	!	!	200	!
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$							
⁽¹⁾ (PAGANO, 1970) (!) erro superior a 50%							

Tabela 7.5: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 4).

t/a	Solução exata ⁽¹⁾ α	Esquema 4 malha 2x2			Esquema 4 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,004060	0.004181	32	3.0	0.004173	120	2.8
0,010	0,004061	0.004183	32	3.0	0.004174	120	2.8
0,050	0,004111	0.004249	32	3.4	0.004233	120	3.0
0,100	0,004263	0.004464	32	4.7	0.004490	120	5.3
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$							
⁽¹⁾ (PAGANO, 1970)							

Tabela 7.6: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 5).

t/a	Solução exata ⁽¹⁾ α	Esquema 5 malha 2x2			Esquema 5 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,004060	0.004024	36	0.88	0.004056	136	0.10
0,010	0,004061	0.003931	36	3.2	0.004025	136	0.87
0,050	0,004111	0.004117	36	0.17	0.004164	136	1.3
0,100	0,004263	0.004343	36	1.9	0.004448	136	4.3
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$							
⁽¹⁾ (PAGANO, 1970)							

Tabela 7.7: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 6).

t/a	Solução exata ⁽¹⁾ α	Esquema 6 malha 2x2			Esquema 6 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,004060	0.004050	52	0.23	0.004062	200	0.06
0,010	0,004061	0.004060	52	0.02	0.004022	200	0.96
0,050	0,004111	0.004117	52	0.16	0.004167	200	1.3
0,100	0,004263	!	52	!	!	200	!
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$							
⁽¹⁾ (PAGANO, 1970) (!) erro superior a 50%							

Os gráficos das Figuras 7.2 e 7.3 apresentam a convergência dos resultados obtidos pelos seis esquemas de interpolação propostos segundo três malhas de discretização (4, 9 e 16 elementos) e duas espessuras ($t/a = 0.005$ e $t/a = 0.05$). Os deslocamentos calculados são normalizados segundo o resultado de comparação, que assume valor unitário no gráfico.

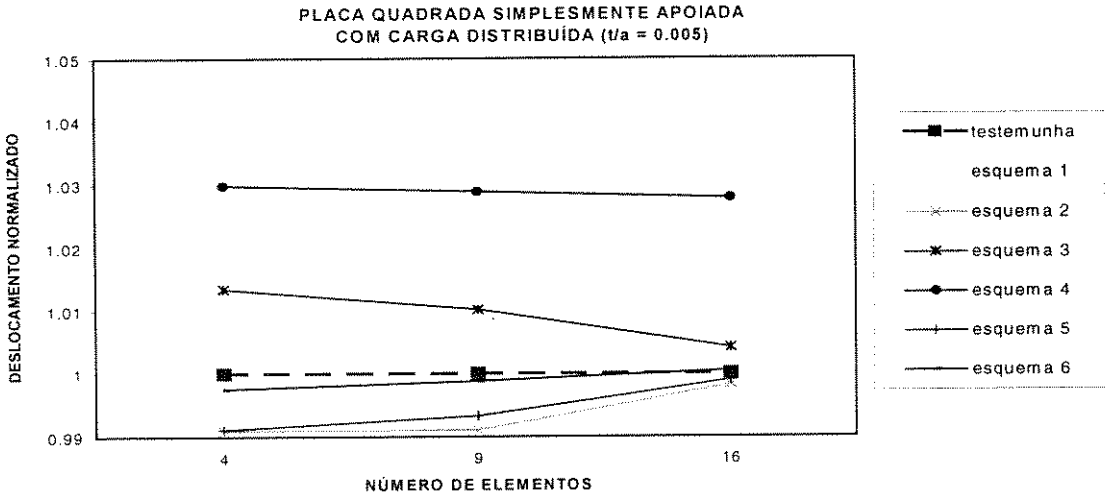


Figura 7.2: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída* ($t/a = 0.005$ - placa fina).

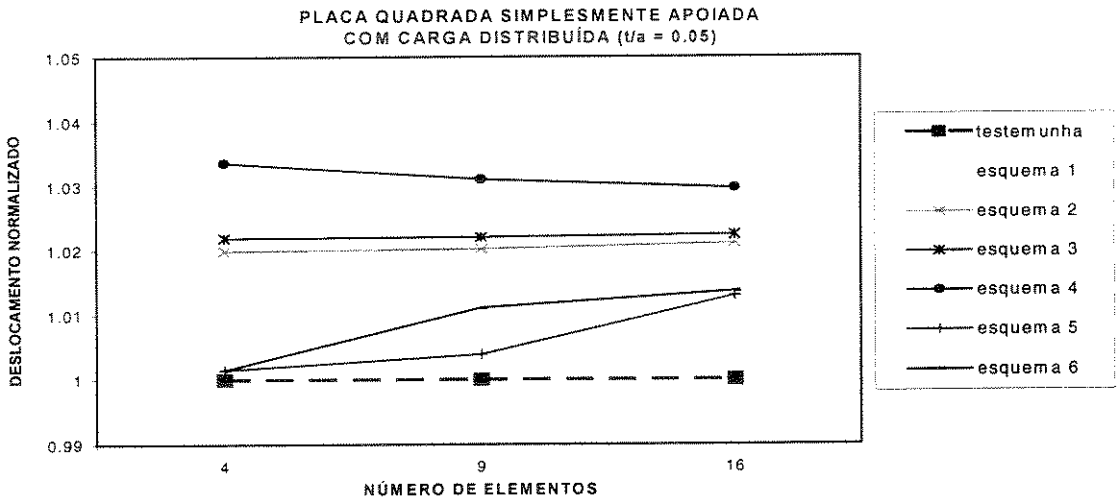


Figura 7.3: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída* ($t/a = 0.05$ - placa moderadamente grossa).

7.2.2 Placa submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano

A deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{Pa^2}{D}$, onde P é o valor da carga concentrada, a o lado da placa e D , sua rigidez, dada pela Equação (7.1).

Os resultados obtidos pelos elementos propostos (Tabelas 7.8 a 7.13) na análise de placas finas ($t/a < 0.05$) são comparados com aqueles oriundos da *Teoria Clássica de Kirchhoff* (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968); já os resultados obtidos na análise de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$) são comparados com aqueles obtidos pelo *Elemento de Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970), que é considerado um elemento excelente para a resolução desse tipo de problema (ZIENKIEWICZ *et al*, 1971).

Tabela 7.8: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 1).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 1 malha 2x2			Esquema 1 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,01160 ⁽¹⁾	0,01111	32	4.2	0,01063	120	8.3
0,010	0,01160 ⁽¹⁾	0,01113	32	4.1	0,01069	120	7.8
0,050	0,01200 ⁽²⁾	0,01164	32	3.0	0,01178	120	1.5
0,100	0,01392 ⁽²⁾	0,01303	32	6.4	0,01358	120	2.4
$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Tabela 7.9: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 2).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 2 malha 2x2			Esquema 2 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,01160 ⁽¹⁾	0,01151	36	0.7	0,01063	136	0.4
0,010	0,01160 ⁽¹⁾	0,01153	36	0.6	0,01069	136	0.3
0,050	0,01200 ⁽²⁾	0,01195	36	0.4	0,01178	136	0.9
0,100	0,01392 ⁽²⁾	0,01323	36	4.9	0,01358	136	1.6
$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Tabela 7.10: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 3).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 3 malha 2x2			Esquema 3 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,01160 ⁽¹⁾	0,01114	52	4.0	0,01144	200	1.4
0,010	0,01160 ⁽¹⁾	0,01115	52	3.9	0,01145	200	1.3
0,050	0,01200 ⁽²⁾	0,01115	52	7.1	0,01194	200	0.5
0,100	0,01392 ⁽²⁾	0,01262	52	9.3	0,01337	200	3.9
$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Tabela 7.11: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 4).

t/a	Resultados para comparação β	Esquema 4 malha 2x2			Esquema 4 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,01160 ⁽¹⁾	0,01074	32	7.4	0,01054	120	9.1
0,010	0,01160 ⁽¹⁾	0,01077	32	7.1	0,01058	120	8.8
0,050	0,01200 ⁽²⁾	0,01119	32	6.7	0,01149	120	4.2
0,100	0,01392 ⁽²⁾	0,01238	32	11.1	0,01320	120	5.2
$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff ⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Tabela 7.12: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 5).

t/a	Resultados para comparação β	Esquema 5 malha 2x2			Esquema 5 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,01160 ⁽¹⁾	0,01114	36	4.0	0,01144	136	1.4
0,010	0,01160 ⁽¹⁾	0,01115	36	3.9	0,01145	136	1.3
0,050	0,01200 ⁽²⁾	0,01151	36	4.1	0,01194	136	0.5
0,100	0,01392 ⁽²⁾	0,01262	36	9.4	0,01337	136	4.0
$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff ⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Tabela 7.13: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (*placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central* - esquema de interpolação 6).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 6 malha 2x2			Esquema 6 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,01160 ⁽¹⁾	0,01114	52	4.0	0,01144	200	1.4
0,010	0,01160 ⁽¹⁾	0,01115	52	3.9	0,01145	200	1.3
0,050	0,01200 ⁽²⁾	0,01151	52	4.1	0,01194	200	0.5
0,100	0,01392 ⁽²⁾	0,01263	52	9.3	0,01338	200	3.9
$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i>							
⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							

Os gráficos das Figuras 7.4 e 7.5 apresentam a convergência dos resultados obtidos pelos seis esquemas de interpolação propostos segundo três malhas de discretização (4, 9 e 16 elementos) e duas espessuras ($t/a = 0.005$ e $t/a = 0.05$). Os deslocamentos calculados são normalizados segundo o resultado de comparação, que assume valor unitário no gráfico.

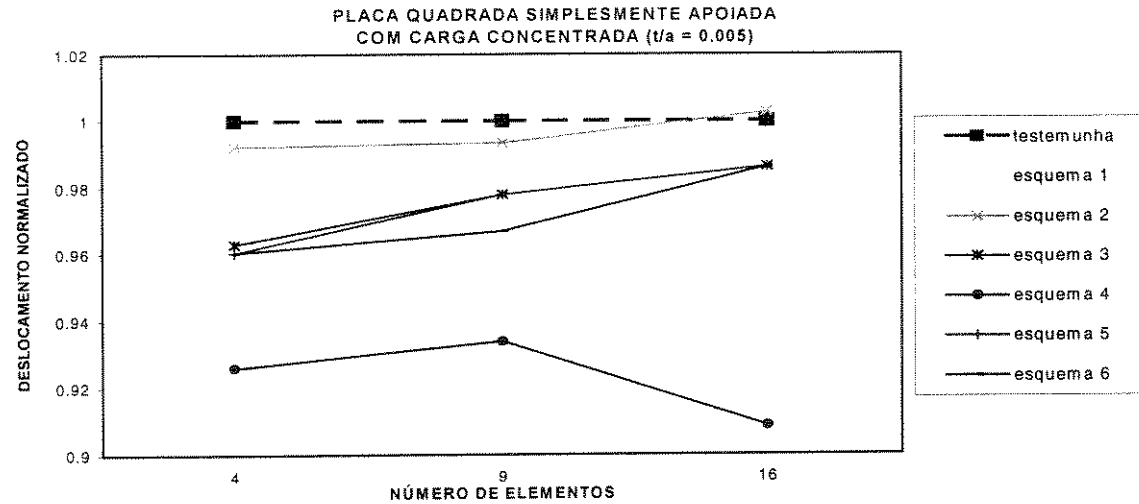


Figura 7.4: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central* ($t/a = 0.005$ - placa fina).

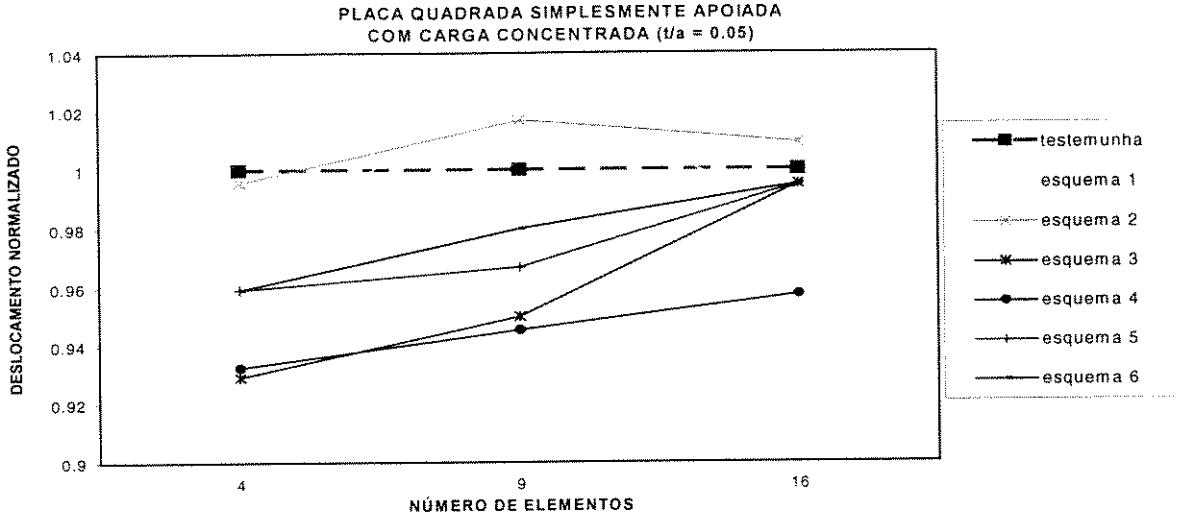


Figura 7.5: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central* ($t/a = 0.05$ - placa moderadamente grossa).

7.2.3 Placa submetida à ação de uma carga distribuída senoidal, perpendicular a seu plano

Associando-se a uma placa quadrada de lado a , simplesmente apoiada em seus lados, um sistema de referência (X , Y), pode-se submetê-la a uma carga distribuída senoidal dada pela expressão:

$$q = q_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{a} \quad (7.2)$$

onde q_0 é a intensidade da carga distribuída no centro da placa, onde ocorre a deflexão máxima que, para o caso de placas finas, é dada por (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968):

$$w = \frac{q_0 \cdot a^4}{4 \cdot \pi^4 \cdot D} \quad (7.3)$$

onde D é a rigidez da placa, dada pela Equação (7.1).

As Tabelas 7.14 a 7.19 apresentam os resultados dos elementos propostos comparados com a solução exata dada a partir da Teoria de Elasticidade Tridimensional (PAGANO, 1970), para as diferentes relações (t/a) e para as malhas de (2×2) e (4×4) elementos. A deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{q_0 a^4}{D}$. A Teoria da

Elasticidade Tridimensional fornece, neste caso, a solução exata, tanto para placas finas ($t/a < 0.05$), quanto para placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$).

Tabela 7.14: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 1).

t/a	Solução exata ⁽¹⁾	Esquema 1 malha 2x2			Esquema 1 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,01	0,002566	0,002253	32	12.2	0,002565	120	0.02
0,02	0,002566	0,002439	32	4.9	0,002569	120	0.1
0,05	0,002598	0,002511	32	3.3	0,002654	120	2.2
0,10	0,002695	0,002612	32	3.1	0,002795	120	3.7
$w_c = \alpha \cdot \frac{q_0 a^4}{D}$							
⁽¹⁾ (PAGANO, 1970)							

Tabela 7.15: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 2).

t/a	Solução exata ⁽¹⁾	Esquema 2 malha 2x2			Esquema 2 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,01	0,002566	0,002450	36	4.5	0,002522	136	1.7
0,02	0,002566	0,002420	36	5.7	0,002533	136	1.3
0,05	0,002598	0,002426	36	6.6	0,002585	136	0.5
0,10	0,002695	0,002358	36	12.5	0,002587	136	4.0
$w_c = \alpha \cdot \frac{q_0 a^4}{D}$							
⁽¹⁾ (PAGANO, 1970)							

Tabela 7.16: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 3).

t/a	Solução exata ⁽¹⁾ α	Esquema 3 malha 2x2			Esquema 3 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,01	0,002566	0,002453	52	4.4	0,002576	200	0.4
0,02	0,002566	0,002517	52	1.9	0,002595	200	1.1
0,05	0,002598	!	52	!	!	200	!
0,10	0,002695	!	52	!	!	200	!
$w_c = \alpha \cdot \frac{q_0 a^4}{D}$							
⁽¹⁾ (PAGANO, 1970) (!) erro superior a 50%							

Tabela 7.17: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 4).

t/a	Solução exata ⁽¹⁾ α	Esquema 4 malha 2x2			Esquema 4 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,01	0,002566	0,002617	32	2.0	0,002616	120	1.9
0,02	0,002566	0,002618	32	2.0	0,0022618	120	2.0
0,05	0,002598	0,002669	32	2.7	0,002683	120	3.3
0,10	0,002695	0,002817	32	4.5	0,002870	120	6.5
$w_c = \alpha \cdot \frac{q_0 a^4}{D}$							
¹⁾ (PAGANO, 1970)							

Tabela 7.18: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 5).

t/a	Solução exata ⁽¹⁾ α	Esquema 5 malha 2x2			Esquema 5 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,01	0,002566	0,002542	36	0.9	0,002604	136	1.5
0,02	0,002566	0,002486	36	3.1	0,002594	136	1.1
0,05	0,002598	0,002604	36	0.2	0,002673	136	2.9
0,10	0,002695	0,002758	36	2.3	0,002862	136	1.5
$w_c = \alpha \cdot \frac{q_0 a^4}{D}$							
⁽¹⁾ (PAGANO, 1970)							

Tabela 7.19: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 6).

t/a	Solução exata ⁽¹⁾ α	Esquema 6 malha 2x2			Esquema 6 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,01	0,002566	0,002565	52	0.04	0,002599	200	1.3
0,02	0,002566	0,002499	52	2.6	0,002573	200	0.4
0,05	0,002598	!	52	!	0,002966	200	14.2
0,10	0,002695	!	52	!	!	200	!
$w_c = \alpha \cdot \frac{q_0 a^4}{D}$							
⁽¹⁾ (PAGANO, 1970) (!) erro superior a 50%							

Os gráficos das Figuras 7.6 e 7.7 apresentam a convergência dos resultados obtidos pelos seis esquemas de interpolação propostos segundo três malhas de discretização (4, 9 e 16 elementos) e duas espessuras ($t/a = 0.005$ e $t/a = 0.05$). Os deslocamentos calculados são normalizados segundo o resultado de comparação, que assume valor unitário no gráfico.

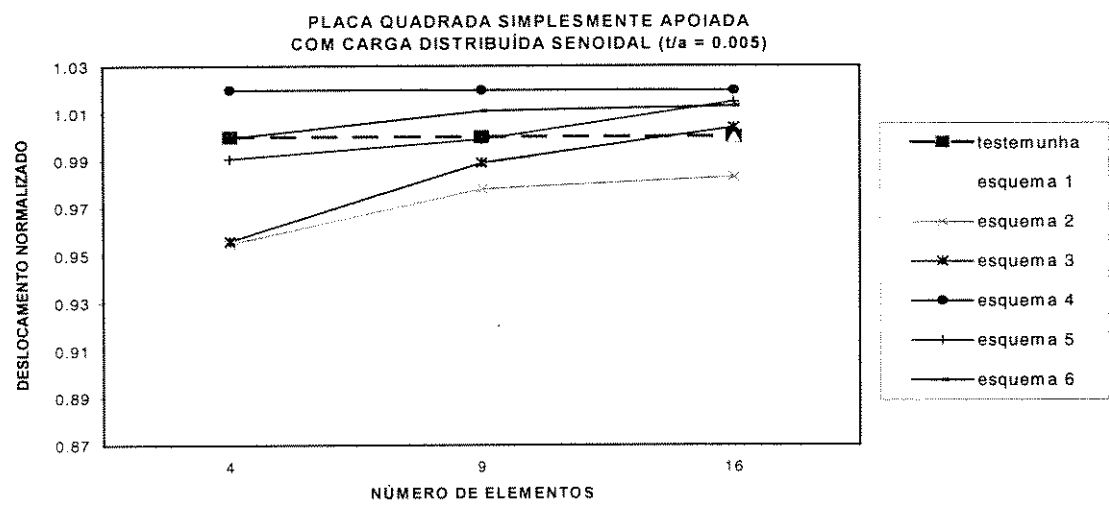


Figura 7.6: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal* ($t/a = 0.005$ - placa fina).

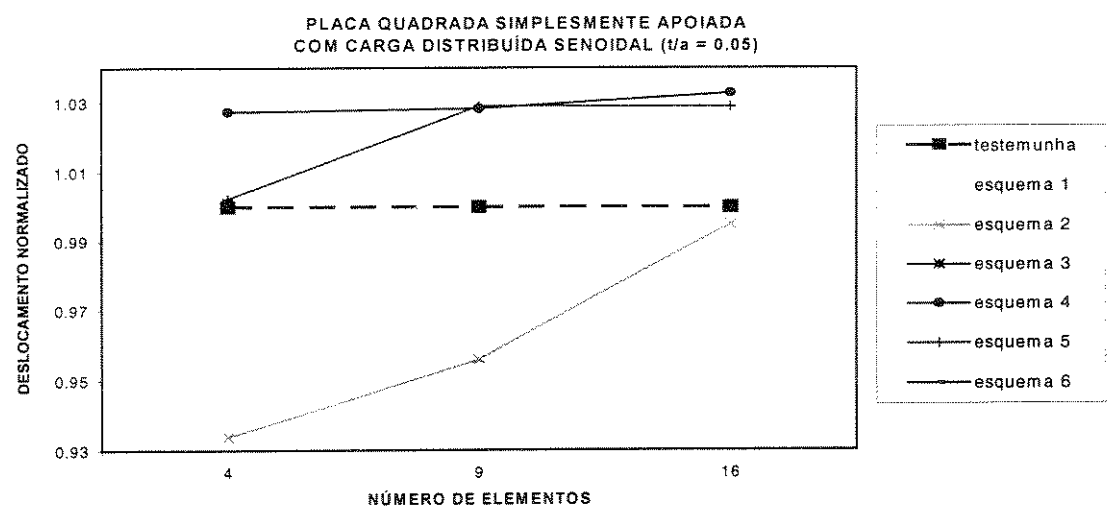


Figura 7.7: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal* ($t/a = 0.05$ - placa moderadamente grossa).

7.3 PLACA QUADRADA ENGASTADA EM SEUS LADOS

7.3.1 Placa submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano

A deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{qa^4}{D}$, onde q é o valor da carga uniformemente distribuída, a o lado da placa e D , sua rigidez, dada pela Equação (7.1). Os resultados obtidos pelos elementos propostos (Tabelas 7.20 a 7.25) na análise de placas finas ($t/a < 0.05$) são comparados com aqueles oriundos da *Teoria Clássica de Kirchhoff* (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968); já os resultados obtidos na análise de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$) são comparados com aqueles obtidos pelo *Elemento de Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970), que é um elemento excelente para a resolução deste tipo de problema (ZIENKIEWICZ, 1971).

Tabela 7.20: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 1).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 1 malha 2x2			Esquema 1 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
	α						
0,005	0,00126 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,010	0,00126 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,050	0,00127 ⁽²⁾	!	24	!	0.00099	104	22.0
0,100	0,00149 ⁽²⁾	0,00091	24	38.9	0,00134	104	10.1
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$							
(1) Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> ($\nu=0.3$)							
(2) Elemento de <i>Ahmad</i>							
(!) Erro superior a 50%							

Tabela 7.21: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 2).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 2 malha 2x2			Esquema 2 malha 4x4		
	α	α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,00126 ⁽¹⁾	0.00121	28	4.0	0.00125	120	0.8
0,010	0,00126 ⁽¹⁾	0.00121	28	4.0	0.00125	120	0.8
0,050	0,00127 ⁽²⁾	0.00127	28	0.0	0.00131	120	3.1
0,100	0,00149 ⁽²⁾	0.00143	28	4.0	0.00149	120	0.0
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff (v=0.3) ⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Tabela 7.22: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 3).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 3 malha 2x2			Esquema 3 malha 4x4		
	α	α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,00126 ⁽¹⁾	0.00121	44	4.0	0.00125	184	0.8
0,010	0,00126 ⁽¹⁾	0.00121	44	4.0	0.00125	184	0.8
0,050	0,00127 ⁽²⁾	0.00126	44	0.0	0.00131	184	3.1
0,100	0,00149 ⁽²⁾	!	44	!	!	184	!
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff (v=0.3) ⁽²⁾ Elemento de Ahmad (!) Erro superior a 50%							

Tabela 7.23: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 4).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 4 malha 2x2			Esquema 4 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
	α						
0,005	0,00126 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,010	0,00126 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,050	0,00127 ⁽²⁾	0,00084	24	33.8	0,00102	104	19.7
0,100	0,00149 ⁽²⁾	0,00098	24	34.2	0,00124	104	16.8
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (v=0.3) ⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i> (!) Erro superior a 50%							

Tabela 7.24: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 5).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 5 malha 2x2			Esquema 5 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
	α						
0,005	0,00126 ⁽¹⁾	0,00115	28	8.7	0,00124	120	2.4
0,010	0,00126 ⁽¹⁾	0,00115	28	8.7	0,00124	120	2.4
0,050	0,00127 ⁽²⁾	0,00120	28	5.5	0,00130	120	2.4
0,100	0,00149 ⁽²⁾	0,00136	28	8.7	0,00147	120	1.3
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (v=0.3) ⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							

Tabela 7.25: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (*placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída* - esquema de interpolação 6).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 6 malha 2x2			Esquema 6 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
	α						
0,005	0,00126 ⁽¹⁾	0.00119	44	5.6	0.00122	184	3.2
0,010	0,00126 ⁽¹⁾	0.00121	44	4.0	0.00125	184	0.8
0,050	0,00127 ⁽²⁾	0.00124	44	2.4	0.00129	184	1.6
0,100	0,00149 ⁽²⁾	!	44	!	!	184	!
$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (v=0.3)							
⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							
(!) Erro superior a 50%							

Os gráficos das Figuras 7.8 e 7.9 apresentam a convergência dos resultados obtidos pelos seis esquemas de interpolação propostos segundo três malhas de discretização (4, 9 e 16 elementos) e duas espessuras ($t/a = 0.005$ e $t/a = 0.05$). Os deslocamentos calculados são normalizados segundo o resultado de comparação, que assume valor unitário no gráfico.

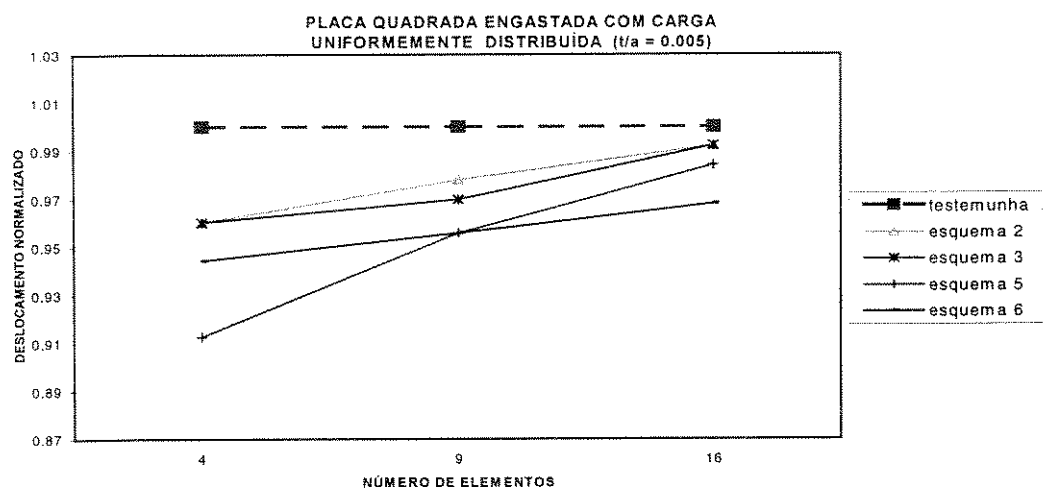


Figura 7.8: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída* ($t/a = 0.005$ - placa fina).

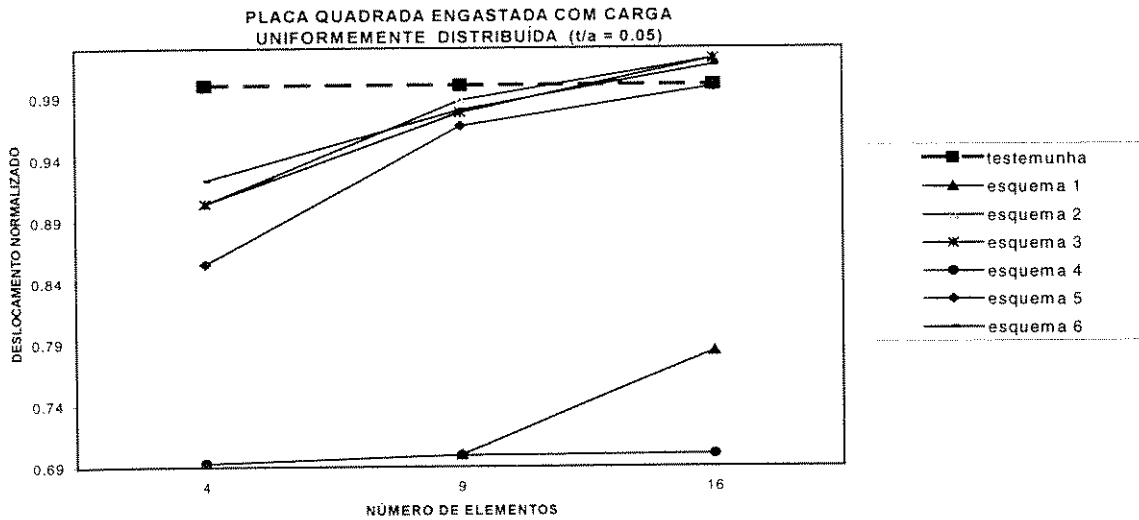


Figura 7.9: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída* ($t/a = 0.05$ - placa moderadamente grossa).

7.3.2 Placa submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano

A deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{Pa^2}{D}$, onde P é o valor da carga concentrada, a o lado da placa e D , sua rigidez, dada pela Equação (7.1).

Os resultados obtidos pelos elementos propostos (Tabelas 7.26 a 7.31) na análise de placas finas ($t/a < 0.05$) são comparados com aqueles oriundos da *Teoria Clássica de Kirchhoff* (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968); já os resultados obtidos na análise de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$) são comparados com aqueles obtidos pelo *Elemento de Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970), que é considerado um elemento excelente para a resolução desse tipo de problema (ZIENKIEWICZ *et al*, 1971).

Tabela 7.26: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 1).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 1 malha 2x2			Esquema 1 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,00560 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,010	0,00560 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,050	0,00573 ⁽²⁾	!	24	!	0.00413	104	27.9
0,100	0,00735 ⁽²⁾	0.00449	24	38.9	0.00654	104	11.0
$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (v=0.3) ⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i> (!) Erro superior a 50%							

Tabela 7.27: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 2).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 2 malha 2x2			Esquema 2 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,00560 ⁽¹⁾	0.00485	28	13.4	0.00567	120	1.2
0,010	0,00560 ⁽¹⁾	0.00532	28	5.0	0.00542	120	3.2
0,050	0,00573 ⁽²⁾	0.00518	28	9.6	0.00585	120	2.1
0,100	0,00735 ⁽²⁾	0.00620	28	14.6	0.00713	120	3.0
$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (v=0.3) ⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							

Tabela 7.28: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 3).

t/a	Resultados para comparação β	Esquema 3 malha 2x2			Esquema 3 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,00560 ⁽¹⁾	0.00485	44	13.4	0.00541	184	1.2
0,010	0,00560 ⁽¹⁾	0.00485	44	13.4	0.00542	184	3.2
0,050	0,00573 ⁽²⁾	0.00518	44	9.6	0.00585	184	2.1
0,100	0,00735 ⁽²⁾	0.00620	44	14.6	0.00714	184	2.9
$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff (v=0.3)							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Tabela 7.29: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 4).

t/a	Resultados para comparação β	Esquema 4 malha 2x2			Esquema 4 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,00560 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,010	0,00560 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,050	0,00573 ⁽²⁾	0.00397	24	30.7	0.00401	104	30.0
0,100	0,00735 ⁽²⁾	0.00488	24	33.6	0.00683	104	7.1
$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff (v=0.3)							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							
(!) Erro superior a 50%							

Tabela 7.30: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (*placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central* - esquema de interpolação 5).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 5 malha 2x2			Esquema 5 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,00560 ⁽¹⁾	0.00460	28	17.9	0.00532	120	5.0
0,010	0,00560 ⁽¹⁾	0.00461	28	17.7	0.00533	120	4.8
0,050	0,00573 ⁽²⁾	0.00490	28	14.5	0.00572	120	0.2
0,100	0,00735 ⁽²⁾	0.00580	28	21.1	0.00691	120	6.0
$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> ($\nu=0.3$)							
⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							

Tabela 7.31: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (*placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central* - esquema de interpolação 6).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 6 malha 2x2			Esquema 6 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,00560 ⁽¹⁾	0.00505	44	9.8	0.00539	184	3.7
0,010	0,00560 ⁽¹⁾	0.00476	44	15.0	0.00548	184	2.1
0,050	0,00573 ⁽²⁾	0.00529	44	7.7	0.00593	184	3.5
0,100	0,00735 ⁽²⁾	0.00644	44	12.4	0.00699	184	4.9
$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> ($\nu=0.3$)							
⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							

Os gráficos das Figuras 7.10 e 7.11 apresentam a convergência dos resultados obtidos pelos seis esquemas de interpolação propostos segundo três malhas de discretização (4, 9 e 16 elementos) e duas espessuras ($t/a = 0.005$ e $t/a = 0.05$). Os deslocamentos calculados são normalizados segundo o resultado de comparação, que assume valor unitário no gráfico

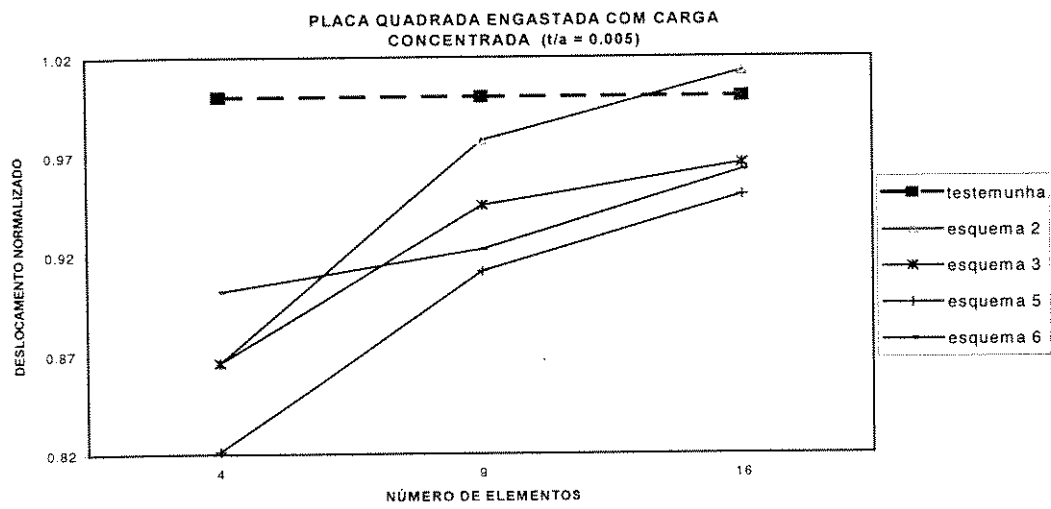


Figura 7.10: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga concentrada central ($t/a = 0.005$ - placa fina).

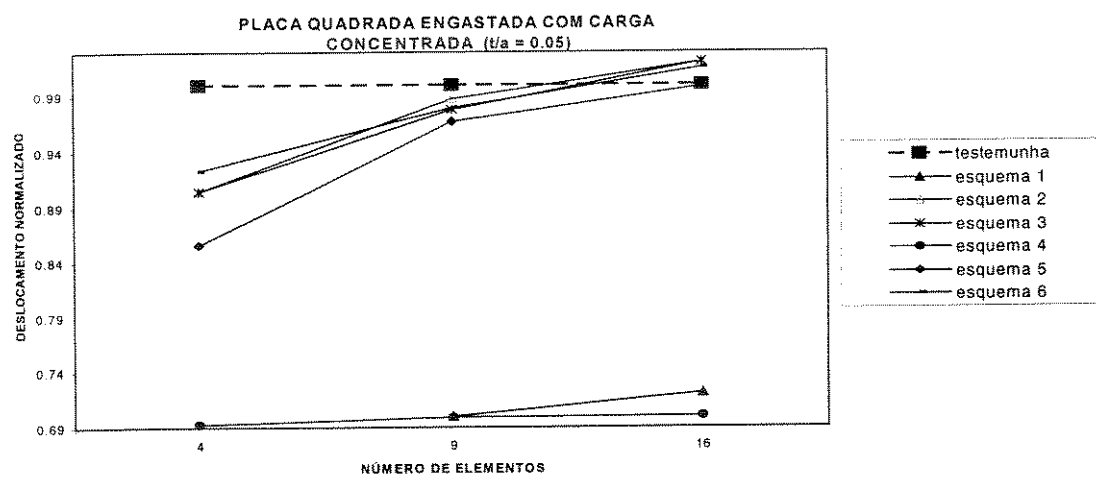


Figura 7.11: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga carga concentrada central ($t/a = 0.05$ - placa moderadamente grossa).

7.4 PLACA RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA EM SEUS LADOS

7.4.1 Placa submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano

A deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{qb^4}{D}$, onde q é o valor da carga distribuída, b o menor lado da placa e D , sua rigidez, dada pela Equação (7.1).

Os resultados obtidos pelos elementos propostos (Tabelas 7.32 a 7.37) na análise de placas finas ($t/a < 0.05$) são comparados com aqueles oriundos da *Teoria Clássica de Kirchhoff* (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968); já os resultados obtidos na análise de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$) são comparados com aqueles obtidos pelo *Elemento de Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970), que é um elemento excelente para a resolução deste tipo de problema (ZIENKIEWICZ *et al*, 1971).

Tabela 7.32: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 1).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 1 malha 2x2			Esquema 1 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,01013 ⁽¹⁾	0,01075	32	6.1	0,01068	120	5.5
0,010	0,01013 ⁽¹⁾	0,01076	32	6.2	0,01067	120	5.3
0,050	0,01065 ⁽²⁾	0,01114	32	4.6	0,01092	120	2.5
0,100	0,01207 ⁽²⁾	0,01240	32	2.7	0,01218	120	0.9
$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (a/b=2 e ν=0.3)							
⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							

Tabela 7.33: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 2).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 2 malha 2x2			Esquema 2 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
	α						
0,005	0,01013 ⁽¹⁾	0,01055	36	4.1	0,01019	136	0.6
0,010	0,01013 ⁽¹⁾	0,01018	36	0.5	0,01015	136	0.3
0,050	0,01065 ⁽²⁾	0,01083	36	1.7	0,01070	136	0.4
0,100	0,01207 ⁽²⁾	0,01205	36	0.2	0,01204	136	0.2
$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (a/b=2 e v=0.3) ⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							

Tabela 7.34: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 3).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 3 malha 2x2			Esquema 3 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
	α						
0,005	0,01013 ⁽¹⁾	0,00975	52	3.7	0,01012	200	0.1
0,010	0,01013 ⁽¹⁾	0,01001	52	1.2	0,01016	200	0.3
0,050	0,01065 ⁽²⁾	0,01081	52	1.5	0,01068	200	0.3
0,100	0,01207 ⁽²⁾	0,01215	52	0.7	0,01207	200	0.0
$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (a/b=2 e v=0.3) ⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							

Tabela 7.35: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (*placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída* - esquema de interpolação 4).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 4 malha 2x2			Esquema 4 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,01013 ⁽¹⁾	0,01058	32	4.4	0,01065	120	5.1
0,010	0,01013 ⁽¹⁾	0,01059	32	4.5	0,01064	120	5.0
0,050	0,01065 ⁽²⁾	0,01093	32	2.6	0,01090	120	2.3
0,100	0,01207 ⁽²⁾	0,01207	32	0.0	0,01208	120	0.1
$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$							
(1) Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (a/b=2 e v=0.3)							
(2) Elemento de <i>Ahmad</i>							

Tabela 7.36: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (*placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída* - esquema de interpolação 5).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 5 malha 2x2			Esquema 5 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,01013 ⁽¹⁾	0,01036	36	2.3	0,01019	136	0.6
0,010	0,01013 ⁽¹⁾	0,00995	36	1.8	0,01010	136	0.3
0,050	0,01065 ⁽²⁾	0,01051	36	1.3	0,01060	136	0.5
0,100	0,01207 ⁽²⁾	0,01162	36	3.7	0,01191	136	1.3
$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$							
(1) Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (a/b=2 e v=0.3)							
(2) Elemento de <i>Ahmad</i>							

Tabela 7.37: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 6).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 6 malha 2x2			Esquema 6 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,01013 ⁽¹⁾	0,00991	52	2.2	0,00922	200	9.0
0,010	0,01013 ⁽¹⁾	0,00986	52	2.6	0,01001	200	1.2
0,050	0,01065 ⁽²⁾	0,01043	52	2.1	0,01062	200	0.3
0,100	0,01207 ⁽²⁾	0,01174	52	2.7	0,01202	200	0.4
$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff (a/b=2 e ν=0.3)							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Os gráficos das Figuras 7.12 e 7.13 apresentam a convergência dos resultados obtidos pelos seis esquemas de interpolação propostos segundo três malhas de discretização (4, 9 e 16 elementos) e duas espessuras ($t/a = 0.005$ e $t/a = 0.05$). Os deslocamentos calculados são normalizados segundo o resultado de comparação, que assume valor unitário no gráfico.

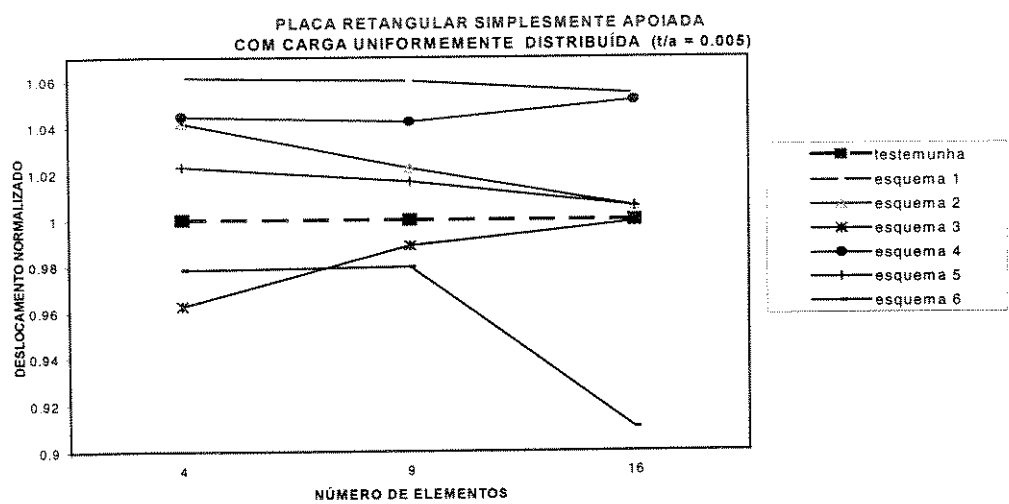


Figura 7.12: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída ($t/a = 0.005$ - placa fina).

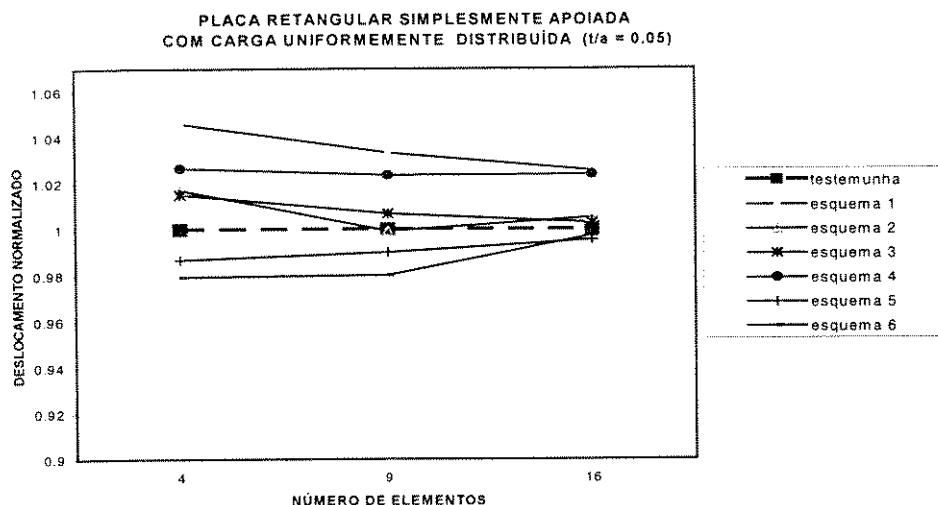


Figura 7.13: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída* ($t/a = 0.05$ - placa moderadamente grossa).

7.4.2 Placa submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano

A deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{Pb^2}{D}$, onde P é o valor da carga concentrada, b o menor lado da placa e D , sua rigidez, dada pela Equação (7.1).

Os resultados obtidos pelos elementos propostos (Tabelas 7.38 a 7.43) na análise de placas finas ($t/a < 0.05$) são comparados com aqueles oriundos da *Teoria Clássica de Kirchhoff* (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968); já os resultados obtidos na análise de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$) são comparados com aqueles obtidos pelo *Elemento de Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970), que é um elemento excelente para a resolução deste tipo de problema (ZIENKIEWICZ *et al*, 1971).

Tabela 7.38: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 1).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 1 malha 2x2			Esquema 1 malha 4x4		
	β	β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,01651 ⁽¹⁾	0,01413	32	14.4	0,01462	120	11.4
0,010	0,01651 ⁽¹⁾	0,01419	32	14.0	0,01468	120	11.1
0,050	0,01814 ⁽²⁾	0,01593	32	12.2	0,01711	120	5.7
0,100	0,02406 ⁽²⁾	0,02046	32	15.0	0,02276	120	5.4
$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff (a/b=2)							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Tabela 7.39: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 2).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 2 malha 2x2			Esquema 2 malha 4x4		
	β	β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,01651 ⁽¹⁾	0,01576	36	4.5	0,01622	136	1.7
0,010	0,01651 ⁽¹⁾	0,01557	36	5.7	0,01629	136	1.3
0,050	0,01814 ⁽²⁾	0,01695	36	6.6	0,01805	136	0.5
0,100	0,02406 ⁽²⁾	0,02105	36	12.5	0,02309	136	4.0
$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff (a/b=2)							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Tabela 7.40: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 3).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 3 malha 2x2			Esquema 3 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,01651 ⁽¹⁾	0,01533	52	7.1	0,01601	200	3.0
0,010	0,01651 ⁽¹⁾	0,01557	52	5.7	0,01629	200	1.3
0,050	0,01814 ⁽²⁾	0,01695	52	6.6	0,01805	200	0.5
0,100	0,02406 ⁽²⁾	0,02106	52	12.5	0,02310	200	4.0
$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff (a/b=2)							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Tabela 7.41: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 4).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 4 malha 2x2			Esquema 4 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,01651 ⁽¹⁾	0,01362	32	17.5	0,01349	120	18.3
0,010	0,01651 ⁽¹⁾	0,01367	32	17.2	0,01366	120	17.3
0,050	0,01814 ⁽²⁾	0,01514	32	16.5	0,01646	120	9.3
0,100	0,02406 ⁽²⁾	0,01914	32	20.4	0,02178	120	9.5
$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff (a/b=2)							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Tabela 7.42: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 5).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 5 malha 2x2			Esquema 5 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,01651 ⁽¹⁾	0,01490	36	9.7	0,01603	136	2.9
0,010	0,01651 ⁽¹⁾	0,01494	36	9.5	0,01608	136	2.7
0,050	0,01814 ⁽²⁾	0,01616	36	10.9	0,01767	136	2.6
0,100	0,02406 ⁽²⁾	0,01981	36	17.7	0,02230	136	7.3
$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff (a/b=2)							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Tabela 7.43: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 6).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 6 malha 2x2			Esquema 1 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,01651 ⁽¹⁾	0,01423	52	13.8	0,01693	200	2.5
0,010	0,01651 ⁽¹⁾	0,01494	52	9.5	0,01608	200	2.6
0,050	0,01814 ⁽²⁾	0,01616	52	10.9	0,01767	200	2.6
0,100	0,02406 ⁽²⁾	0,01982	52	17.6	0,02231	200	7.3
$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff (a/b=2)							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Os gráficos das Figuras 7.14 e 7.15 apresentam a convergência dos resultados obtidos pelos seis esquemas de interpolação propostos segundo três malhas de discretização (4, 9 e 16 elementos) e duas espessuras ($t/a = 0.005$ e $t/a = 0.05$). Os deslocamentos calculados são normalizados segundo o resultado de comparação, que assume valor unitário no gráfico

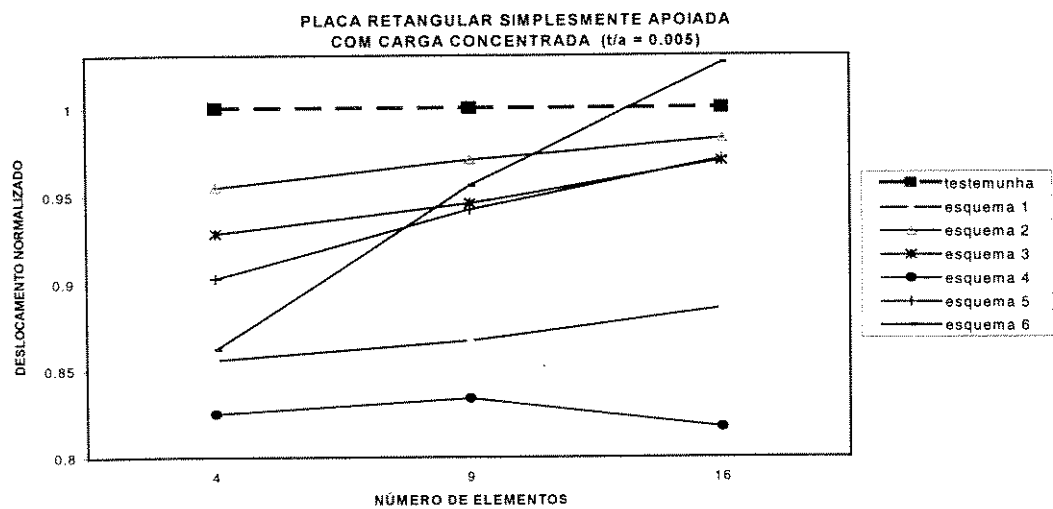


Figura 7.14: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central* ($t/a = 0.005$ - placa fina).

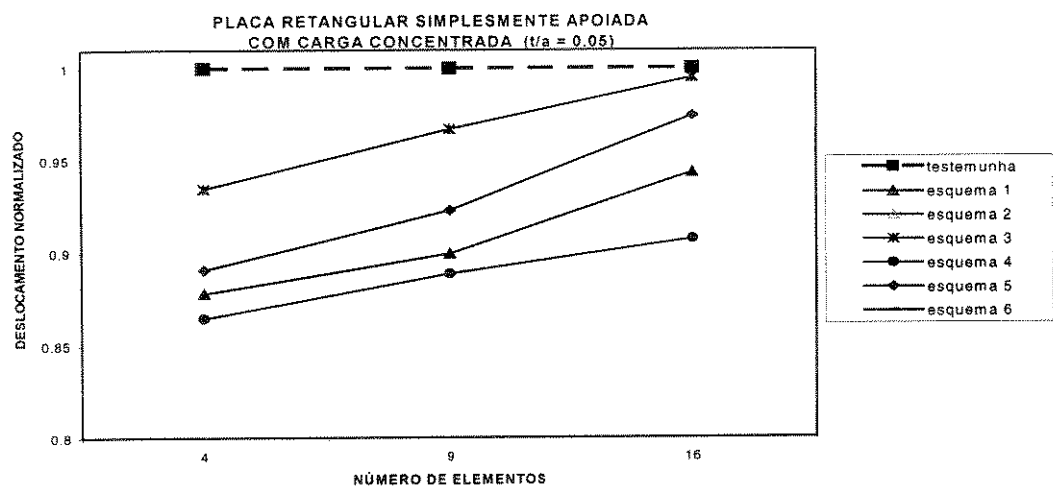


Figura 7.15: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central* ($t/a = 0.05$ - placa moderadamente grossa)

7.4.3 Placa submetida à ação de uma carga distribuída senoidal, perpendicular a seu plano

Associando-se a uma placa retangular de lados a e b , simplesmente apoiada em seus lados, um sistema de referência (X, Y) , pode-se submetê-la a uma carga distribuída senoidal dada pela expressão:

$$q = q_0 \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{a} \cdot \text{sen} \frac{\pi y}{b}$$

(7.4)

onde q_0 é a intensidade da carga distribuída no centro da placa. A deflexão máxima ocorre no centro e é dada por (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968):

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 \cdot D \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2}$$

(7.5)

onde D é a rigidez da placa, dada pela Equação (7.1).

As Tabelas 7.44 a 7.49 apresentam os resultados dos elementos propostos (a deflexão w_c no centro da placa) comparados com a solução exata dada pela Equação (7.5), para o caso de placa fina ($t/a < 0.05$) e com a solução apresentada pelo elemento de *Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970) para o caso de placa moderadamente grossa ($t/a \geq 0.05$).

Tabela 7.44: Deflexão w_c , para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 1).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 1 malha 2x2			Esquema 1 malha 4x4		
		w_c (cm)	gl	Erro (%)	w_c (cm)	gl	Erro (%)
0,005	$1.3666 \cdot 10^{-2} \text{ (1)}$	$1.3559 \cdot 10^{-2}$	32	0.8	$1.3829 \cdot 10^{-2}$	120	1.2
0,010	$1.7082 \cdot 10^{-3} \text{ (1)}$	$1.6962 \cdot 10^{-3}$	32	0.7	$1.7316 \cdot 10^{-3}$	120	1.4
0,050	$1.4214 \cdot 10^{-5} \text{ (2)}$	$1.4178 \cdot 10^{-5}$	32	0.3	$1.4586 \cdot 10^{-5}$	120	2.6
0,100	$2.0357 \cdot 10^{-6} \text{ (2)}$	$2.0026 \cdot 10^{-6}$	32	1.6	$2.0656 \cdot 10^{-6}$	120	1.5
(1) Teoria clássica de Kirchhoff (2) Elemento de Ahmad $a=8 \text{ cm}$, $b=4 \text{ cm}$, $q_0=0.1 \text{ kgf/cm}^2$, $E=21 \cdot 10^5 \text{ kgf/cm}^2$, $\nu = 0.3$							

Tabela 7.45: Deflexão w_c , para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 2).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 2 malha 2x2			Esquema 2 malha 4x4		
		w_c (cm)	gl	Erro (%)	w_c (cm)	gl	Erro (%)
0,005	$1.3666.10^{-2}^{(1)}$	$1.3515.10^{-2}$	36	1.1	$1.3776.10^{-2}$	136	0.8
0,010	$1.7082.10^{-3}^{(1)}$	$1.6515.10^{-3}$	36	3.3	$1.7195.10^{-3}$	136	0.7
0,050	$1.4214.10^{-5}^{(2)}$	$1.3979.10^{-5}$	36	1.7	$1.4501.10^{-5}$	136	2.0
0,100	$2.0357.10^{-6}^{(2)}$	$1.9668.10^{-6}$	36	3.4	$2.0549.10^{-6}$	136	0.9
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							
$a=8\text{ cm}, b=4\text{ cm}, q_0=0.1\text{ kgf/cm}^2, E=21.10^5\text{ kgf/cm}^2, \nu =0.3$							

Tabela 7.46: Deflexão w_c , para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 3).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 3 malha 2x2			Esquema 3 malha 4x4		
		w_c (cm)	gl	Erro (%)	w_c (cm)	gl	Erro (%)
0,005	$1.3666.10^{-2}^{(1)}$	!	52	!	!	200	!
0,010	$1.7082.10^{-3}^{(1)}$	$1.6996.10^{-3}$	52	0.5	$1.7198.10^{-3}$	200	0.7
0,050	$1.4214.10^{-5}^{(2)}$	!	52	!	!	200	!
0,100	$2.0357.10^{-6}^{(2)}$	$1.9238.10^{-6}$	52	5.5	$2.0973.10^{-6}$	200	3.0
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							
(!) erro superior a 50%							
$a=8\text{ cm}, b=4\text{ cm}, q_0=0.1\text{ kgf/cm}^2, E=21.10^5\text{ kgf/cm}^2, \nu =0.3$							

Tabela 7.47: Deflexão w_c , para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 4).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 4 malha 2x2			Esquema 4 malha 4x4		
		w_c (cm)	gl	Erro (%)	w_c (cm)	gl	Erro (%)
0,005	$1.3666.10^{-2}^{(1)}$	$1.3803.10^{-2}$	32	1.0	$1.3895.10^{-2}$	120	1.7
0,010	$1.7082.10^{-3}^{(1)}$	$1.7253.10^{-3}$	32	1.0	$1.7396.10^{-3}$	120	1.8
0,050	$1.4214.10^{-5}^{(2)}$	$1.4378.10^{-5}$	32	1.2	$1.4601.10^{-5}$	120	2.7
0,100	$2.0357.10^{-6}^{(2)}$	$2.0127.10^{-6}$	32	1.1	$2.0631.10^{-6}$	120	1.3
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							
$a=8\text{ cm}, b=4\text{ cm}, q_0=0.1\text{ kgf/cm}^2, E=21.10^5\text{ kgf/cm}^2, \nu =0.3$							

Tabela 7.48: Deflexão w_c , para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 5).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 5 malha 2x2			Esquema 5 malha 4x4		
		w_c (cm)	gl	Erro (%)	w_c (cm)	gl	Erro (%)
0,005	$1.3666.10^{-2}^{(1)}$	$1.3698.10^{-2}$	36	0.2	$1.3892.10^{-2}$	136	1.7
0,010	$1.7082.10^{-3}^{(1)}$	$1.6728.10^{-3}$	36	2.1	$1.7256.10^{-3}$	136	0.4
0,050	$1.4214.10^{-5}^{(2)}$	$1.4028.10^{-5}$	36	1.3	$1.4499.10^{-5}$	136	2.0
0,100	$2.0357.10^{-6}^{(2)}$	$1.9607.10^{-6}$	36	3.7	$2.0507.10^{-6}$	136	0.7
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							
$a=8\text{ cm}, b=4\text{ cm}, q_0=0.1\text{ kgf/cm}^2, E=21.10^5\text{ kgf/cm}^2, \nu =0.3$							

Tabela 7.49: Deflexão w_c , para diferentes relações t/a (*placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - esquema de interpolação 6*).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 6 malha 2x2			Esquema 6 malha 4x4		
		w_c (cm)	gl	Erro (%)	w_c (cm)	gl	Erro (%)
0,005	$1.3666.10^{-2}$ ⁽¹⁾	!	52	!	!	200	!
0,010	$1.7082.10^{-3}$ ⁽¹⁾	$1.7009.10^{-3}$	52	0.4	$1.7308.10^{-3}$	200	1.3
0,050	$1.4214.10^{-5}$ ⁽²⁾	!	52	!	!	200	!
0,100	$2.0357.10^{-6}$ ⁽²⁾	$1.9673.10^{-6}$	52	3.4	$2.0663.10^{-6}$	200	1.5
(1) Teoria clássica de Kirchhoff (2) Elemento de Ahmad (!) erro superior a 50% $a=8\text{ cm}$, $b=4\text{ cm}$, $q_0=0.1\text{ kgf/cm}^2$, $E=21.10^5\text{ kgf/cm}^2$, $\nu=0.3$							

Os gráficos das Figuras 7.16 e 7.17 apresentam a convergência dos resultados obtidos pelos seis esquemas de interpolação propostos segundo três malhas de discretização (4, 9 e 16 elementos) e duas espessuras ($t/a = 0.005$ e $t/a = 0.05$). Os deslocamentos calculados são normalizados segundo o resultado de comparação, que assume valor unitário no gráfico

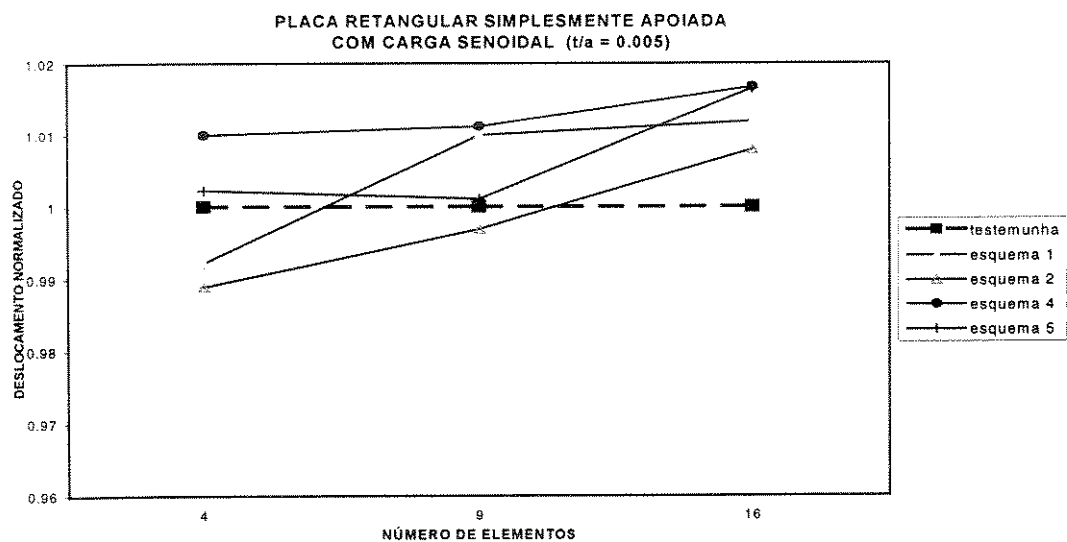


Figura 7.16: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal* ($t/a = 0.005$ - placa fina).

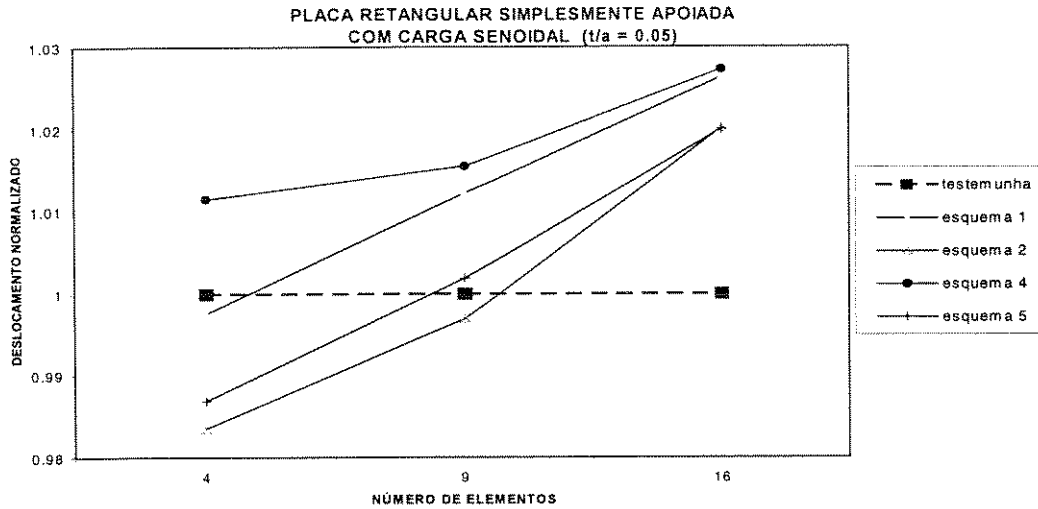


Figura 7.17: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal* ($t/a = 0.05$ - placa moderadamente grossa).

7.5 PLACA RETANGULAR ENGASTADA EM SEUS LADOS

7.5.1 Placa submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano

A deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{qb^4}{D}$, onde q é o valor da carga distribuída, b o menor lado da placa e D , sua rigidez, dada pela Equação (7.1).

Os resultados obtidos pelos elementos propostos (Tabelas 7.50 a 7.55) na análise de placas finas ($t/a < 0.05$) são comparados com aqueles oriundos da *Teoria Clássica de Kirchhoff* (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968); já os resultados obtidos na análise de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$) são comparados com aqueles obtidos pelo *Elemento de Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970), que é um elemento excelente para a resolução deste tipo de problema (ZIENKIEWICZ *et al*, 1971).

Tabela 7.50: Deflexão w_c , para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 1).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 1 malha 2x2			Esquema 1 malha 4x4		
	α	α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,00254 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,010	0,00254 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,050	0,00286 ⁽²⁾	0.00202	24	29.4	0.00266	104	7.0
0,100	0,00394 ⁽²⁾	0.00357	24	9.4	0.00385	104	2.3
$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff (a/b=2 e v=0.3) ⁽²⁾ Elemento de Ahmad (!) Erro superior a 50%							

Tabela 7.51: Deflexão w_c , para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 2).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 2 malha 2x2			Esquema 2 malha 4x4		
	α	α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,00254 ⁽¹⁾	0.00250	28	1.6	0.00251	120	1.2
0,010	0,00254 ⁽¹⁾	0.00251	28	1.2	0.00252	120	0.8
0,050	0,00286 ⁽²⁾	0.00283	28	1.0	0.00286	120	0.0
0,100	0,00394 ⁽²⁾	0.00391	28	0.8	0.00393	120	0.2
$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff (a/b=2 e v=0.3) ⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Tabela 7.52: Deflexão w_c , para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 3).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 3 malha 2x2			Esquema 3 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
	α						
0,005	0,00254 ⁽¹⁾	0.00270	44	6.3	0.00330	184	29.9
0,010	0,00254 ⁽¹⁾	0.00252	44	0.8	0.00248	184	2.4
0,050	0,00286 ⁽²⁾	0.00285	44	0.3	0.00283	184	1.1
0,100	0,00394 ⁽²⁾	0.00393	44	0.2	0.00391	184	0.8
$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (a/b=2 e v=0.3) ⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							

Tabela 7.53: Deflexão w_c , para diferentes relações t/a (placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - esquema de interpolação 4).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 4 malha 2x2			Esquema 4 malha 4x4		
		α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
	α						
0,005	0,00254 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,010	0,00254 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,050	0,00286 ⁽²⁾	0.00164	24	42.7	0.00249	104	12.9
0,100	0,00394 ⁽²⁾	0.00324	24	17.8	0.00377	104	4.3
$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (a/b=2 e v=0.3) ⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i> (!) Erro superior a 50%							

Tabela 7.54: Deflexão w_c , para diferentes relações t/a (*placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída* - esquema de interpolação 5).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 5 malha 2x2			Esquema 5 malha 4x4		
	α	α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,00254 ⁽¹⁾	0.00239	28	5.9	0.00245	120	3.5
0,010	0,00254 ⁽¹⁾	0.00240	28	5.5	0.00246	120	3.1
0,050	0,00286 ⁽²⁾	0.00272	28	4.9	0.00281	120	1.7
0,100	0,00394 ⁽²⁾	0.00374	28	5.1	0.00387	120	1.8
$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (a/b=2 e v=0.3)							
⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							

Tabela 7.55: Deflexão w_c , para diferentes relações t/a (*placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída* - esquema de interpolação 6).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 6 malha 2x2			Esquema 6 malha 4x4		
	α	α	gl	Erro (%)	α	gl	Erro (%)
0,005	0,00254 ⁽¹⁾	0.00210	44	17.3	0.00341	184	34.2
0,010	0,00254 ⁽¹⁾	0.00240	44	5.5	0.00246	184	3.1
0,050	0,00286 ⁽²⁾	0.00271	44	5.2	0.00281	184	1.7
0,100	0,00394 ⁽²⁾	0.00374	44	5.1	0.00377	184	4.3
$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (a/b=2 e v=0.3)							
⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							

Os gráficos das Figuras 7.18 e 7.19 apresentam a convergência dos resultados obtidos pelos seis esquemas de interpolação propostos segundo três malhas de discretização (4, 9 e 16 elementos) e duas espessuras ($t/a = 0.005$ e $t/a = 0.05$). Os deslocamentos calculados são normalizados segundo o resultado de comparação, que assume valor unitário no gráfico

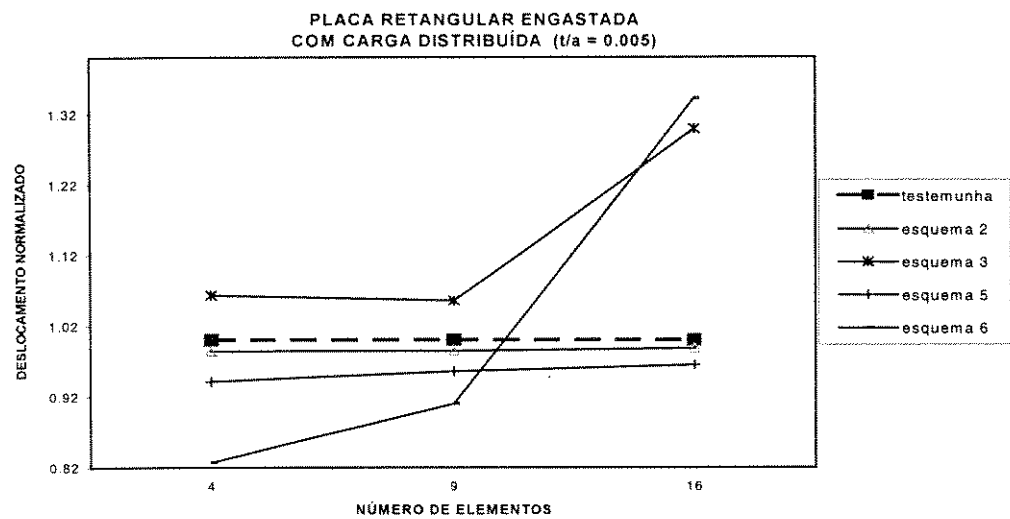


Figura 7.18: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída* ($t/a = 0.005$ - placa fina).

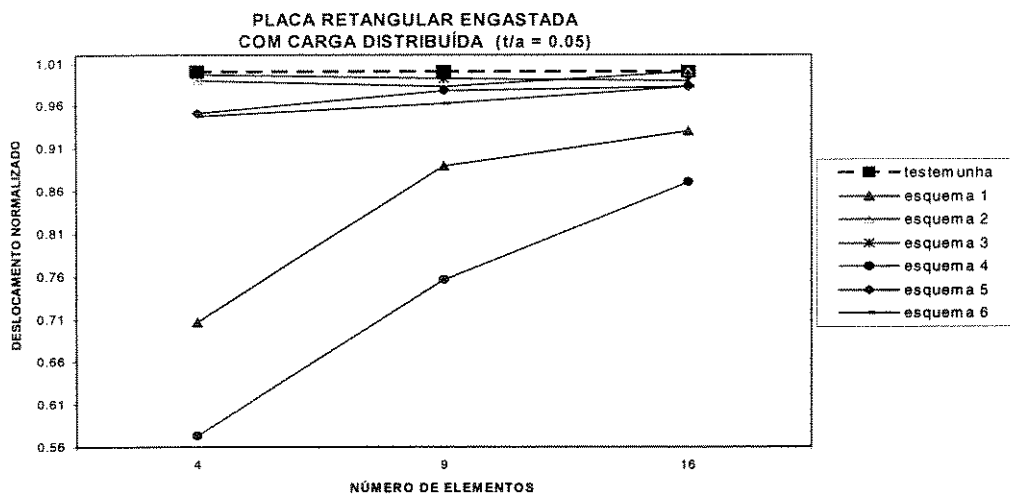


Figura 7.19: Convergência dos resultados com o refinamento da malha para *placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída* ($t/a = 0.05$ - placa moderadamente grossa)

7.5.2 Placa submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano

A deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{Pb^2}{D}$, onde P é o valor da carga concentrada, b o menor lado da placa e D , sua rigidez, dada pela Equação (7.1).

Os resultados obtidos pelos elementos propostos (Tabelas 7.56 a 7.61) na análise de placas finas ($t/a < 0.05$) são comparados com aqueles oriundos da *Teoria Clássica de Kirchhoff* (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968); já os resultados obtidos na análise de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$) são comparados com aqueles obtidos pelo *Elemento de Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970), que apresenta excelentes resultados para este tipo de problema (ZIENKIEWICZ *et al*, 1971).

Tabela 7.56: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a , para placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 1).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 1 malha 2x2			Esquema 1 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,00722 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,010	0,00722 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,050	0,00858 ⁽²⁾	0.00478	24	44.3	0.00745	104	13.2
0,100	0,01422 ⁽²⁾	0.00973	24	31.6	0.01279	104	10.1
$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (a/b=2 e v=0.3)							
⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							
(!) Erro superior a 50%							

Tabela 7.57: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a , para *placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central* - esquema de interpolação 2).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 2 malha 2x2			Esquema 2 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,00722 ⁽¹⁾	0.00504	28	30.2	0.00675	120	6.5
0,010	0,00722 ⁽¹⁾	0.00508	28	29.6	0.00681	120	5.7
0,050	0,00858 ⁽²⁾	0.00646	28	24.7	0.00838	120	2.3
0,100	0,01422 ⁽²⁾	0.01046	28	26.4	0.01316	120	7.4
$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (a/b=2 e v=0.3)							
⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							

Tabela 7.58: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a , para *placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central* - esquema de interpolação 3).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 3 malha 2x2			Esquema 3 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,00722 ⁽¹⁾	!	44	!	!	184	!
0,010	0,00722 ⁽¹⁾	0.00508	44	29.6	0.00680	184	5.7
0,050	0,00858 ⁽²⁾	0.00646	44	24.7	0.00838	184	2.3
0,100	0,01422 ⁽²⁾	0.01047	44	26.4	0.01317	184	7.4
$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (a/b=2 e v=0.3)							
⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i>							
(!) Erro superior a 50%							

Tabela 7.59: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a , para *placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central* - esquema de interpolação 4).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 4 malha 2x2			Esquema 4 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,00722 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,010	0,00722 ⁽¹⁾	!	24	!	!	104	!
0,050	0,00858 ⁽²⁾	!	24	!	0.00666	104	22.4
0,100	0,01422 ⁽²⁾	0.00855	24	39.9	0.01191	104	16.2
$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (a/b=2 e v=0.3) ⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i> (!) Erro superior a 50%							

Tabela 7.60: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a , para *placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central* - esquema de interpolação 5).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 5 malha 2x2			Esquema 5 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,00722 ⁽¹⁾	0.00479	28	33.6	0.00532	120	26.3
0,010	0,00722 ⁽¹⁾	0.00461	28	36.1	0.00533	120	26.2
0,050	0,00858 ⁽²⁾	0.00490	28	42.9	0.00572	120	33.3
0,100	0,01422 ⁽²⁾	!	28	!	!	120	!
$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de <i>Kirchhoff</i> (a/b=2 e v=0.3) ⁽²⁾ Elemento de <i>Ahmad</i> (!) Erro superior a 50%							

Tabela 7.61: Deflexão w_c , normalizada, para diferentes relações t/a , para placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - esquema de interpolação 6).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 6 malha 2x2			Esquema 6 malha 4x4		
		β	gl	Erro (%)	β	gl	Erro (%)
0,005	0,00722 ⁽¹⁾	0.00412	44	42.9	0.00599	184	17.0
0,010	0,00722 ⁽¹⁾	0.00483	44	33.1	0.00664	184	8.0
0,050	0,00858 ⁽²⁾	0.00605	44	29.5	0.00809	184	5.7
0,100	0,01422 ⁽²⁾	0.00957	44	32.7	0.01248	184	12.2
$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$							
⁽¹⁾ Teoria clássica de Kirchhoff (a/b=2 e v=0.3)							
⁽²⁾ Elemento de Ahmad							

Os gráficos das Figuras 7.20 e 7.21 apresentam a convergência dos resultados obtidos pelos seis esquemas de interpolação propostos segundo três malhas de discretização (4, 9 e 16 elementos) e duas espessuras ($t/a = 0.005$ e $t/a = 0.05$). Os deslocamentos calculados são normalizados segundo o resultado de comparação, que assume valor unitário no gráfico

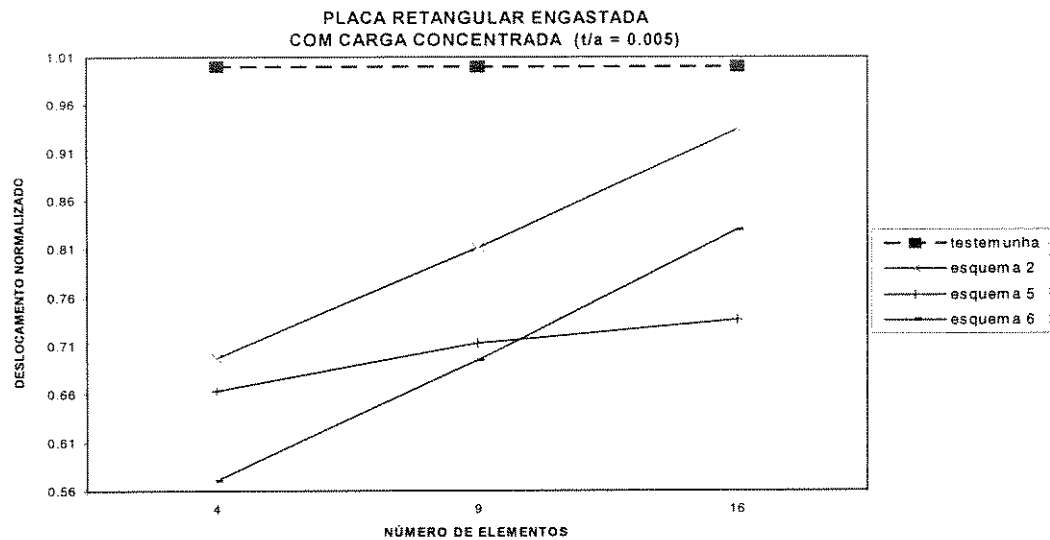


Figura 7.20: Convergência dos resultados com o refinamento da malha placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central ($t/a = 0.005$ - placa fina).

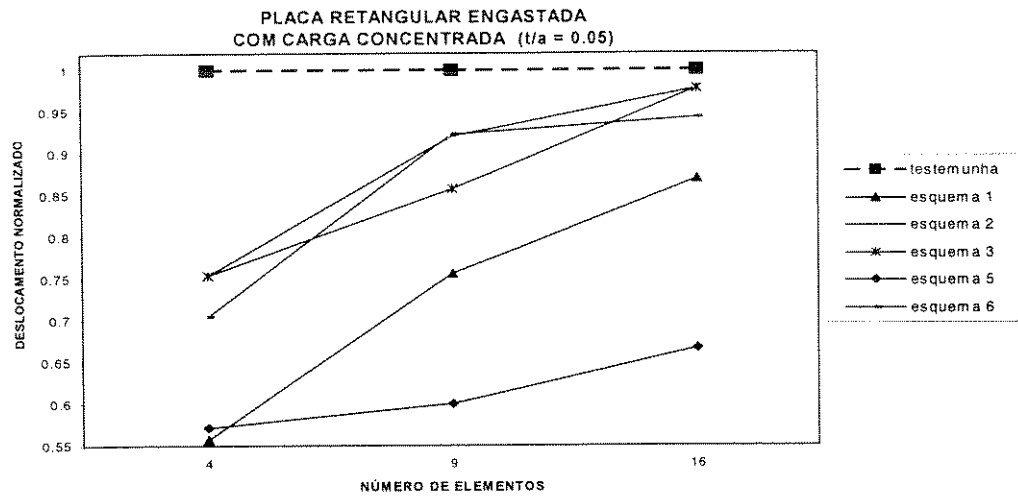


Figura 7.21: Convergência dos resultados com o refinamento da malha *placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central* ($t/a = 0.05$ - placa moderadamente grossa).

CAPÍTULO 8

ANÁLISE DOS RESULTADOS

8.1 INTRODUÇÃO

Os elementos propostos neste trabalho utilizam diferentes polinômios associados aos nós e ao interior dos elementos para efetuar a interpolação do campo de deslocamento. Esses esquemas de interpolação são resumidos na Tabela 7.1. As diversas expansões polinomiais decorrentes geram, naturalmente, formulações com eficiências variáveis, tanto no que se refere à convergência com o refino da malha de discretização, à correção dos resultados obtidos, como também, ao esforço computacional empreendido em função dos graus de liberdade envolvidos. A análise detalhada das Tabelas de 7.2 a 7.61, onde os resultados oriundos dos seis esquemas de interpolação propostos são confrontados com soluções analíticas ou com soluções numéricas clássicas, assegura esta afirmação.

Desta forma, pode-se concluir que o esquema de interpolação número 2, que associa, aos quatro nós do elemento, funções lineares e a seu interior, cinco funções quárticas, é o que exibe o melhor desempenho geral entre os esquemas propostos. Com relação ao número de graus de liberdade gerados, o esquema 2, ao lado do esquema 5, ocupa uma posição intermediária entre os esquemas propostos. Já com relação à correção de resultados, o erro exibido pelo esquema 2 no cálculo das deflexões no centro das placas, para as diversas condições de contorno e carregamento, foi, no geral, inferior ao dos demais esquemas propostos; foi, também, o esquema que, seguramente, apresentou a melhor taxa de convergência. Além disso, o desempenho do esquema 2 foi igualmente bom em situações de placas finas ($t/a < 0.05$) e de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$). As funções que compõem o esquema 2 são reapresentadas na Tabela 8.1.

As Tabelas de 8.2 a 8.60 apresentam os resultados obtidos pelo elemento proposto, que emprega o esquema de interpolação número 2, comparados ao desempenho de quatro elementos isoparamétricos, de uso consagrado, que abrigam formulações diversas. O primeiro é o elemento de *Zienkiewicz* (ZIENKIEWICZ *et al*, 1971); os outros três são elementos implementados no programa computacional ANSYS versão 5.2 (KOHNKE, 1994): elemento STIF93 (8 nós, 6 graus de liberdade por nó), elemento STIF43 (4 nós, 6 graus de liberdade por nó) e elemento STIF63 (4 nós, 6 graus de liberdade por nó). Os elementos STIF93 e STIF43 incluem em sua formulação o efeito do cisalhamento ao longo da espessura do elemento, enquanto que o elemento STIF63 desconsidera este efeito. Todos os quatro elementos utilizam integração numérica reduzida no cálculo de suas matrizes.

Tabela 8.1 - Esquema de interpolação nº 2.

ESQUEMA 2	
FUNÇÕES NODAIS	$N_{11}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$ $N_{12}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$
	$N_{13}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$ $N_{14}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$
FUNÇÕES NÃO NODAIS (BOLHAS)	$M_{41}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4)(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$
	$M_{42}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4)(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3)$
	$M_{43}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4)(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4)$
	$M_{44}(\xi, \eta) = (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4)$
	$M_{45}(\xi, \eta) = (-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3)(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4)$

8.2 PLACA QUADRADA SIMPLESMENTE APOIADA EM SEUS LADOS

8.2.1 Placa submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano

Como mencionado no Capítulo anterior, a deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{qa^4}{D}$. Portanto,

$$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$$

(8.1)

Os resultados (Tabela 8.2) são comparados com aqueles da *Teoria da Elasticidade Tridimensional* (PAGANO, 1970), para diferentes relações (t/a) entre a espessura t e o lado a da placa quadrada, permitindo a análise do desempenho dos elementos tanto em aplicações de placas finas ($t/a < 0.05$) como em aplicações de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$).

Tabela 8.2: Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída- malha 2×2).

t/a	Resultados para comparação (α)	Esquema 2 $gl = 36$ <i>Erro (%)</i>	Elemento de Zienkiewicz $gl = 44$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF93 $gl = 44$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF63 $gl = 16$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF43 $gl = 16$ <i>Erro (%)</i>
0,005	0,004060	0.9	0.1	3.2	7.4	6.2
0,010	0,004061	0.1	2.1	3.3	7.4	5.9
0,050	0,004111	2.0	4.7	4.7	6.0	0.9
0,100	0,004263	4.9	8.2	8.2	2.3	10.5

A partir da Tabela 8.2, pode-se constatar que o elemento proposto (esquema 2) apresenta, no geral, um desempenho melhor do que aquele apresentado pelos demais elementos.

8.2.2 Placa submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano

Como mencionado no Capítulo anterior, a deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{Pa^2}{D}$. Portanto,

$$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$$

(8.2)

Os resultados obtidos pelos diversos elementos (Tabela 8.3) na análise de placas finas ($t/a < 0.05$) são comparados com aqueles oriundos da *Teoria Clássica de Kirchhoff* (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968); já os resultados obtidos na análise de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$) são comparados com aqueles obtidos pelo *Elemento de Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970).

Tabela 8.3: Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (*placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga carga concentrada central- malha 2×2*).

t/a	Resultados para comparação (β)	Esquema 2 $gl = 36$ Erro (%)	Elemento de Zienkiewicz $gl = 44$ Erro (%)	Elemento STIF93 $gl = 44$ Erro (%)	Elemento STIF63 $gl = 16$ Erro (%)	Elemento STIF43 $gl = 16$ Erro (%)
0,005	0,01160	0.9	0.1	3.2	7.4	6.2
0,010	0,01160	0.07	2.1	3.3	7.4	5.9
0,050	0,01200	2.0	4.7	4.7	6.0	0.9
0,100	0,01392	4.9	8.2	8.2	2.3	10.5

A partir da Tabela 8.3, pode-se constatar que o elemento proposto (esquema 2) apresenta, no geral, um desempenho melhor do que aquele apresentado pelos demais elementos.

8.2.3 Placa submetida à ação de uma carga distribuída senoidal, perpendicular a seu plano

Os resultados obtidos pelos diversos elementos (Tabela 8.4) são comparados com a solução exata dada a partir da Teoria de Elasticidade Tridimensional (PAGANO, 1970), para as diferentes relações (t/a). Como mencionado no Capítulo anterior, a deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{q_0 a^4}{D}$. Portanto,

$$w_c = \alpha \cdot \frac{q_0 a^4}{D}$$

(8.3)

Tabela 8.4: Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (*placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga carga distribuída senoidal- malha 2×2*).

t/a	Resultados para comparação (α)	Esquema 2 $gl = 36$ Erro (%)	Elemento de Zienkiewicz $gl = 44$ Erro (%)	Elemento STIF93 $gl = 44$ Erro (%)	Elemento STIF63 $gl = 16$ Erro (%)	Elemento STIF43 $gl = 16$ Erro (%)
0,005	0,002566	4.5	1.0	6.5	12.4	12.7
0,010	0,002566	5.7	2.3	6.6	12.4	12.6
0,050	0,002598	6.6	3.9	8.1	13.5	12.0
0,100	0,002695	12.5	7.5	12.1	16.6	9.3

A partir da Tabela 8.4, pode-se constatar que o elemento de *Zienkiewicz* apresenta um desempenho melhor do que aquele apresentado pelo elemento proposto (esquema 2). Contudo, este elemento ainda se destaca em relação aos demais; deve-se ressaltar, também, que o elemento proposto tem um número menor de graus de liberdade do que o elemento de *Zienkiewicz*.

8.3 PLACA QUADRADA ENGASTADA EM SEUS LADOS

8.3.1 Placa submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano

Os resultados obtidos pelos diversos elementos (Tabela 8.5) na análise de placas finas ($t/a < 0.05$) são comparados com aqueles oriundos da *Teoria Clássica de Kirchhoff* (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968); já os resultados obtidos na análise de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$) são comparados com aqueles obtidos pelo *Elemento de Ahmad* (AHMAD *et al*, 1971).

Como mencionado no Capítulo anterior, a deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{qa^4}{D}$. Portanto,

$$w_c = \alpha \cdot \frac{qa^4}{D}$$

(8.4)

Tabela 8.5: Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - malha 3×3).

t/a	Resultados para comparação (α)	Esquema 2 $gl = 66$ <i>Erro (%)</i>	Elemento de Zienkiewicz $gl = 69$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF93 $gl = 69$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF63 $gl = 22$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF43 $gl = 22$ <i>Erro (%)</i>
0,005	0,00126	1.6	15.1	1.6	6.5	7.5
0,010	0,00126	1.6	4.0	0.8	6.5	6.7
0,050	0,00127	2.4	4.7	4.7	5.7	3.4
0,100	0,00149	1.3	1.3	1.3	10.1	6.5

A partir da Tabela 8.5, pode-se constatar que o elemento proposto (esquema 2) e o elemento STIF93 apresentam os melhores desempenhos comparativamente aos demais. O elemento proposto, entretanto, possui um menor número de graus de liberdade.

8.3.2 Placa submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano

Os resultados obtidos pelos diversos elementos (Tabela 8.6) na análise de placas finas ($t/a < 0.05$) são comparados com aqueles oriundos da *Teoria Clássica de Kirchhoff* (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968); já os resultados obtidos na análise de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$) são comparados com aqueles obtidos pelo *Elemento de Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970).

Como mencionado no Capítulo anterior, a deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{Pa^2}{D}$. Portanto,

$$w_c = \beta \cdot \frac{Pa^2}{D}$$

(8.5)

Tabela 8.6: Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa quadrada engastada em seus lados submetida à carga carga concentrada central - malha 3×3).

t/a	Resultados para comparação (β)	Esquema 2 $gl = 66$ <i>Erro (%)</i>	Elemento de Zienkiewicz $gl = 69$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF93 $gl = 69$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF63 $gl = 22$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF43 $gl = 22$ <i>Erro (%)</i>
0,005	0,00560	6.1	13.7	1.6	4.0	5.6
0,010	0,00560	5.9	4.1	0.8	4.0	5.4
0,050	0,00573	1.2	5.7	5.7	1.6	1.2
0,100	0,00735	6.2	1.9	1.9	20.8	6.8

A partir da Tabela 8.6, pode-se constatar que o elemento STIF93 apresenta um desempenho melhor do que o do elemento proposto (esquema 2) que, por sua vez, apresenta um desempenho, em geral, compatível com os demais.

8.4 PLACA RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA EM SEUS LADOS

8.4.1 Placa submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano

Os resultados obtidos pelos diversos elementos (Tabela 8.7) na análise de placas finas ($t/a < 0.05$) são comparados com aqueles oriundos da *Teoria Clássica de Kirchhoff* (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968); já os resultados obtidos na análise de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$) são comparados com aqueles obtidos pelo *Elemento de Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970).

Como mencionado no Capítulo anterior , a deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{qb^4}{D}$. Portanto,

$$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$$

(8.6)

Tabela 8.7: Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (*placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - malha 2x2*).

t/a	Resultados para comparação (α)	Esquema 2 $gl = 36$ <i>Erro (%)</i>	Elemento de Zienkiewicz $gl = 44$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF93 $gl = 44$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF63 $gl = 16$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF43 $gl = 16$ <i>Erro (%)</i>
0,005	0,01013	4.1	1.7	2.5	3.6	1.0
0,010	0,01013	0.5	2.1	2.6	3.6	0.9
0,050	0,01065	1.7	2.0	2.0	8.4	1.8
0,100	0,01209	0.3	0.7	0.7	19.3	2.6

A partir da Tabela 8.7, pode-se constatar que o elemento proposto (esquema 2) e o elemento STIF43 apresentam os melhores desempenhos comparativamente aos demais. O elemento STIF43 tem, entretanto, um número menor de graus de liberdade.

8.4.2 Placa submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano

Os resultados obtidos pelos diversos elementos (Tabela 8.8) na análise de placas finas ($t/a < 0.05$) são comparados com aqueles oriundos da *Teoria Clássica de Kirchhoff* (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968); já os resultados obtidos na análise de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$) são comparados com aqueles obtidos pelo *Elemento de Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970).

Como mencionado no Capítulo anterior, a deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{Pb^2}{D}$. Portanto,

$$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$$

(8.7)

Tabela 8.8: Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga concentrada central - malha 3×3).

t/a	Resultados para comparação (β)	Esquema 2 $gl = 36$ <i>Erro (%)</i>	Elemento de Zienkiewicz $gl = 44$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF93 $gl = 44$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF63 $gl = 16$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF43 $gl = 16$ <i>Erro (%)</i>
0,005	0,01651	2.8	1.0	0.5	2.6	2.5
0,010	0,01651	2.5	0.3	1.1	2.6	2.2
0,050	0,01814	2.5	3.3	3.3	6.6	2.5
0,100	0,02406	7.2	2.2	2.2	29.6	7.2

A partir da Tabela 8.8, pode-se constatar que os elementos de *Zienkiewicz* e *STIF93* apresentam desempenho melhor do que aquele apresentado pelo elemento proposto (esquema 2). Contudo, este elemento tem um menor número de graus de liberdade.

8.4.3 Placa submetida à ação de uma carga distribuída senoidal, perpendicular a seu plano

A Tabela 8.9 apresenta os resultados obtidos pelos diversos elementos (a deflexão w_c no centro da placa) comparados com a solução exata dada pela Equação (7.5), para o caso de placa fina ($t/a < 0.05$) e com a solução apresentada pelo elemento de *Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970) para o caso de placa moderadamente grossa ($t/a \geq 0.05$).

Tabela 8.9: Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados submetida à carga distribuída senoidal - malha 2x2).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 2 $gl = 36$	Elemento de Zienkiewicz $gl = 44$	Elemento STIF93 $gl = 44$	Elemento STIF63 $gl = 16$	Elemento STIF43 $gl = 16$
	w_c (cm)	Erro (%)	Erro (%)	Erro (%)	Erro (%)	Erro (%)
0,005	$1.3666.10^{-2}$	1.1	0.6	8.3	11.1	13.2
0,010	$1.7082.10^{-3}$	3.3	0.7	8.1	11.1	13.1
0,050	$1.4214.10^{-5}$	1.7	2.5	7.2	14.6	12.6
0,100	$2.0357.10^{-6}$	3.4	1.0	8.5	25.4	13.0

A partir da Tabela 8.9, pode-se constatar que o elemento proposto (esquema 2), juntamente com o elemento de *Zienkiewicz*, apresenta um desempenho melhor do que aquele apresentado pelos demais elementos. O elemento proposto tem, entretanto, um menor número de graus de liberdade.

8.5 PLACA RETANGULAR ENGASTADA EM SEUS LADOS

8.5.1 Placa submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano

Os resultados obtidos pelos diversos elementos (Tabela 8.10) na análise de placas finas ($t/a < 0.05$) são comparados com aqueles oriundos da *Teoria Clássica de Kirchhoff* (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968); já os resultados obtidos na análise de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$) são comparados com aqueles obtidos pelo *Elemento de Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970).

Como mencionado no Capítulo anterior, a deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{qb^4}{D}$. Portanto,

$$w_c = \alpha \cdot \frac{qb^4}{D}$$

(8.8)

Tabela 8.10: Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (*placa retangular engastada em seus lados submetida à carga uniformemente distribuída - malha 3×3*).

t/a	Resultados para comparação (α)	Esquema 2 $gl = 66$ <i>Erro (%)</i>	Elemento de Zienkiewicz $gl = 69$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF93 $gl = 69$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF63 $gl = 22$ <i>Erro (%)</i>	Elemento STIF43 $gl = 22$ <i>Erro (%)</i>
0,005	0,00254	4.3	2.0	0.2	6.6	3.7
0,010	0,00254	3.9	0.2	0.2	6.6	3.4
0,050	0,00286	2.8	1.0	1.0	5.3	2.0
0,100	0,00394	1.3	0.2	0.2	30.3	1.3

A partir da Tabela 8.10, pode-se constatar que os elementos de *Zienkiewicz* e STIF93 apresentam desempenho melhor do que aquele apresentado pelo elemento proposto (esquema 2). Contudo, este elemento tem um menor número de graus de liberdade.

8.5.2 Placa submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano

Os resultados obtidos pelos diversos elementos (Tabela 8.11) na análise de placas finas ($t/a < 0.05$) são comparados com aqueles oriundos da *Teoria Clássica de Kirchhoff* (TIMOSHENKO e KRIEGER, 1968); já os resultados obtidos na análise de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.05$) são comparados com aqueles obtidos pelo *Elemento de Ahmad* (AHMAD *et al*, 1970).

Como mencionado no Capítulo anterior, a deflexão w_c , calculada no centro da placa, é normalizada segundo o fator $\frac{Pb^2}{D}$. Portanto,

$$w_c = \beta \cdot \frac{Pb^2}{D}$$

(8.9)

Tabela 8.11: Erro no cálculo da deflexão central da placa, para diversos elementos e para diferentes relações t/a (*placa retangular engastada em seus lados submetida à carga concentrada central - malha 3×3*).

t/a	Resultados para comparação	Esquema 2 <i>gl = 66</i>	Elemento de Zienkiewicz <i>gl = 69</i>	Elemento STIF93 <i>gl = 69</i>	Elemento STIF63 <i>gl = 22</i>	Elemento STIF43 <i>gl = 22</i>
	(β)	Erro (%)	Erro (%)	Erro (%)	Erro (%)	Erro (%)
0,005	0,00722	7.1	7.6	1.7	4.9	11.0
0,010	0,00722	7.5	2.1	0.3	4.9	9.0
0,050	0,00858	4.7	5.7	5.7	11.8	8.0
0,100	0,01422	11.0	3.4	3.4	46.8	13.5

A partir da Tabela 8.11, pode-se constatar que o elemento STIF93 apresenta desempenho melhor do que aquele apresentado pelo elemento proposto (esquema 2). Contudo, este elemento tem um menor número de graus de liberdade.

CAPÍTULO 9

CONCLUSÕES

Neste trabalho foram desenvolvidos elementos finitos quadrilaterais subparamétricos para análise de placas finas e placas moderadamente grossas a partir da formulação de sólido degenerado como proposto por Ahmad *et al* e formulados de acordo com a teoria de Mindlin-Reissner. A interpolação da geometria foi feita através do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity e o campo de deslocamento interpolado através de polinômios lineares ou cúbicos, associados aos nós dos vértices e de polinômios cúbicos e/ou quárticos associados ao interior do elemento, isto é, polinômios não associados a nós; foram considerados cinco graus de liberdade físicos por nó, sendo três translações e duas rotações e três graus de liberdade sem um significado físico definido, por função de interpolação associada ao interior do elemento.

Através da análise das tabelas e gráficos apresentados no Capítulo 7 e Capítulo 8, onde os diversos elementos subparamétricos são comparados entre si e com elementos isoparamétricos de uso consagrado, pode-se concluir que a proposta de inclusão de polinômios não associados a nós para a interpolação do campo de deslocamento, a partir da versão h do método dos elementos finitos, revelou-se bem sucedida. Particularmente, deve-se destacar o esquema de interpolação número 2, que associa, aos quatro nós do elemento, funções lineares e a seu interior, cinco funções quárticas, como sendo o de melhor desempenho geral. Este elemento mostrou uma eficiência, no que concerne à taxa de convergência e correção de resultados, compatível com aquela apresentada por elementos implementados em programa de caráter comercial; em alguns casos, o desempenho do elemento foi até superior.

Uma conclusão importante que se pode auferir deste trabalho é que as funções de interpolação associadas ao interior do elemento (“bolhas”) podem ser empregadas no desenvolvimento de uma formulação do tipo hierárquica, baseada no conceito de aproximação p do método dos elementos finitos. Desta forma, partindo-se de uma expansão polinomial inicial para a interpolação do campo de deslocamento, pode-se promover um refinamento hierárquico sucessivo, aumentando a ordem da aproximação pretendida. As funções em questão apresentam a vantagem de se poder refinar cada elemento individualmente, sem que isso interfira nos elementos adjacentes, o que não se verifica, por exemplo, quando se utilizam funções hierárquicas associadas aos lados do elemento; pode-se considerar, portanto, expansões polinomiais diferentes associadas a elementos diferentes, que é uma característica essencial do refinamento adaptativo, onde novos graus de liberdade são criados desde que requeridos, a partir da magnitude do erro envolvido na análise.

Finalmente, como proposta de continuidade deste trabalho, sugere-se:

- Estudo da formulação proposta visando a inclusão de elementos distorcidos, permitindo a análise de placas circulares e cascas.
- Implementação, baseada na formulação proposta, de um elemento para análise de estabilidade de placas.
- Implementação, baseada na formulação proposta, de um elemento para análise dinâmica de placas.
- Desenvolvimento de elementos finitos hierárquicos para análise de placas, a partir do elemento superparamétrico linear e considerando-se as funções de interpolação associadas ao interior do elemento, definidas neste trabalho.
- Desenvolvimento de elementos finitos hierárquicos para análise de placas, a partir do elemento isoparamétrico quadático e considerando-se as funções de interpolação associadas ao interior do elemento, definidas neste trabalho.

Bibliografia

- AHMAD, S., IRONS, B. M., ZIENKIEWICZ, O. C. Analysis of thick and thin shell structures by curved elements. Int. J. Numer. Methods Eng., 3, 419-451, 1970.
- AVERILL, R. C., REDDY, J. N. An assesment of four noded plate finite elements based on a generalized third-order theory. Int. J. Numer. Methods Eng., 33, 1553-1572, 1992.
- BATHE, K. J. Finite element procedures in engineering analysis. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1982. 1ed. 735p.
- BATHE, K. J., HO, L. W. A simple and effective element for analysis of general shell structures. Computers & Structures, 13, 673-681, 1981.
- CHOI, C. K., KIM, S. H. Improvement of quadratic finite element for Mindlin plate bending. Int. J. Numer. Methods Eng., 34, 197-208, 1992.
- COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E. Concepts and applications of finite element analysis. New York: John Wiley & Sons, 1989. 3ed. 630p.
- COONS, S.A. Surfaces for computer aided design of space forms. M.I.T. Project MAC, MAC-TR-41, 1967.
- FORREST, A. R. Curves and surfaces for computer aided design. Computer Aided Design Group, Cambridge, England, 1968
- GILEWSKI, W. , RADWANSKA, M. A survey of finite element models for the analysis of moderately thick shells. Int. J. Numer. Methods Eng., 33, 345-367, 1992.
- GILEWSKI, W., GOMULINSKI, A. Physical shape functions in finite element analysis of moderately thick plates. Int. J. Numer. Methods Eng., 32, 1115-1135, 1991.

- GOULD, P.L. Analysis of shells and plates. New York: Springer -Verlag, 1988. 1ed. 491p.
- HUGHES, T. J. R., TAYLOR, R. L., KANUKNUKULCHAI, W. A simple and efficient finite element for plate bending. Int. J. Numer. Methods Eng., 11, 1529-1543, 1977.
- HUGHES, T. J. R., COHEN, M., HAROUN, M. Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. Nuclear Eng. Desig., 46, 203-222, 1978.
- HUEBNER, K. H. The finite element method for engineers. New York: John Wiley & Sons, 1975. 1ed. 415p.
- KAPLAN, W. Advanced calculus. New York: Addison-Wesley Publ. Co., 1971. 2ed. 512 p.
- KOHNKE, P. Ansys user's manual for revision 5.0. volume IV - theory. Swanson Analysis Systems, Inc. 1992
- KREYSZIG, E. Advanced engineering mathematics. New York: John Wiley & Sons, 1988. 1ed. 588p.
- LEITHOLD, L. The calculus with analytic geometry. New York: Harper&Row Publ. Inc., 1981. 2ed. 723p.
- McNEAL, R. H., HARDER, R. L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. Finite Elements in Analysis and Design, 1, 3 - 20, 1985.
- MOREIRA, L. A., IGUTI, F. Um elemento finito hierárquico para análise de placas. Buenos Aires: XXV Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural. 1(117-126), 1991.
- ONATE, E., ZIENKIEWICZ, O. C., SUAREZ, B., TAYLOR, R. L. A general methodology for deriving shear constrained Reissner-Mindlin plate elements. Int. J. Numer. Methods Eng., 33, 345-367, 1992.

- PAGANO, N. J. Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates. J. Comp. Mat., 4, 20-34, 1970.
- PIPES, L. A. e HOVANESSIAN, S. A. Matrix computer methods in engineering. New York: John Wiley & Sons, 1969. 1ed. 345p.
- PRZEMIENIECKI, J. S. Theory of matrix structural analysis. London: Mc Graw-Hill Book Co., 1968. 2ed. 480p.
- REDDY, J. N. An introduction to the finite element method. New York: Mc Graw-Hill Book Co., 1993. 2ed. 684p.
- REDDY, J. N. Energy and variational methods in applied mechanics. New York: John Wiley & Sons, 1984. 1ed. 545p.
- RILEY, W. F., DALLY, J. W. Experimental stress analysis. New York: Mc Graw-Hill Book Co., 1965. 2ed. 780p.
- SANAL, Z. Finite element programming and C. Comput.Struct., 51, 671-686, 1994.
- SEGERLIND, L. J. Applied finite element analysis. New York: John Wiley & Sons, 1984. 3ed. 426p.
- SHI, G., VOYIADJIS, G. Z. Simple and efficient shear flexible two-node arch/beam and four-node cylindrical shell/plate finite elements. Int. J. Numer. Methods Eng., 31, 759-776, 1991.
- STRANG, G., FIX, G. J. An analysis of the finite element method. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1973. 1ed. 535p.
- TIMOSHENKO, S. P. Resistência dos materiais. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S/A, 1969. volume 2, 3ed., 467p.

Book Co., 1968. 2ed. 580p.

TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. Theory of elasticity. New York: Mc Graw-Hill Book Co., 1970. 2ed. 532p.

VOLTERRA, E., GAINES, J. H. Advanced strength of materials. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1971. 1ed. 535p.

YUQIU, L., FEI, X. An universal method for including shear deformation in thin plate elements. Int. J. Numer. Methods Eng., 34, 171-177, 1992.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. The finite element method. London: Mc Graw- Hill Book Co., 1989, 4ed., 525 p.

ZIENKIEWICZ, O. C., TOO, J., TAYLOR, R. L. Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells. Int. J. Numer. Methods Eng., 3, 375-390, 1971.

ZIENKIEWICZ, O. C., MORGAN, K. Finite elements and approximations. New York: John Wiley & Sons, 1983. 1ed. 328p.

ZHANG, J. W., KRATZIG, W. B. A simple four-noded quadrilateral element for plates. Finite Elements in Analysis and Design, 19, 195-207, 1995.

APÊNDICE A

FUNÇÕES DE FORMA DA FAMÍLIA SERENDIPITY

A.1. Introdução

Apresentam-se, a seguir, as funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ da família Serendipity, assim como suas derivadas com relação às coordenadas curvilíneas, $\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta}$, para cada nó i do plano médio do elemento de placa.

A.2 - Funções de Forma da Família Serendipity

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1) \quad (\text{A.1})$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1) \quad (\text{A.2})$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1) \quad (\text{A.3})$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1) \quad (\text{A.4})$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \quad (\text{A.5})$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \quad (\text{A.6})$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \quad (\text{A.7})$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \quad (\text{A.8})$$

A.3 - Derivadas das Funções de Forma da Família Serendipity

$$\frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 - \eta)(-2\xi - \eta) \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta)(2\xi - \eta) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta)(2\xi + \eta) \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 + \eta)(-2\xi + \eta) \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial N_5(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\xi(1 - \eta) \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial N_6(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(1 - \eta^2) \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial N_7(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\xi(1 + \eta) \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial N_8(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(1 - \eta^2) \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(-\xi - 2\eta) \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(\xi - 2\eta) \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(\xi + 2\eta) \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(-\xi + 2\eta) \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial N_5(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(1 - \xi^2) \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial N_6(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\eta(1 + \xi) \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\partial N_7(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial N_8(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\eta(1 - \xi) \quad (\text{A.24})$$

APÊNDICE B

GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE FORMA DA FAMÍLIA SERENDIPITY

Apresentam-se, a seguir, os gráficos das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ da família Serendipity, associadas aos nós i do plano médio do elemento de placa.

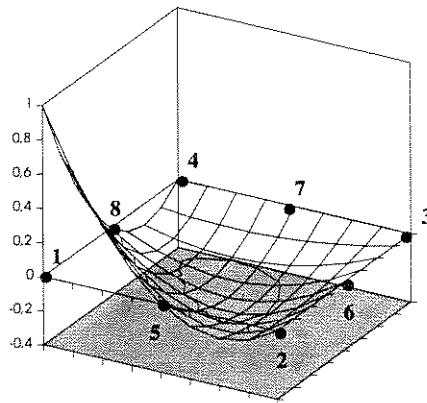


Figura B.1 - Função de Forma $N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$, associada ao nó 1 do elemento de placa.

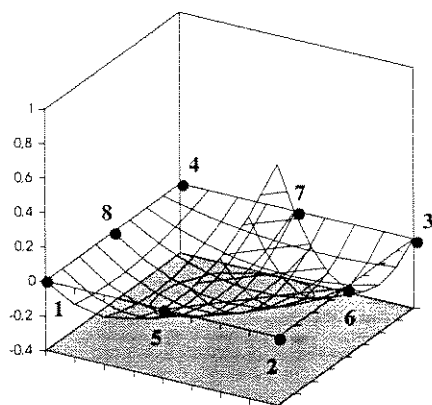


Figura B.2 - Função de Forma $N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$, associada ao nó 2 do elemento de placa

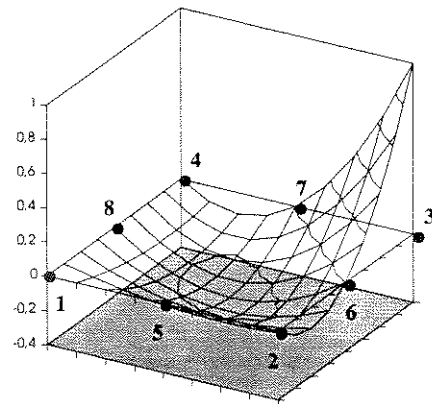


Figura B.3 - Função de Forma $N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$, associada ao nó 3 do elemento de placa.

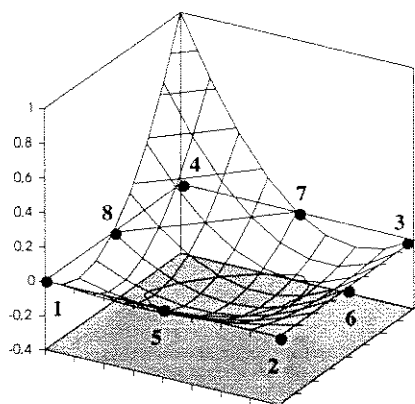


Figura B.4 - Função de Forma $N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$, associada ao nó 4 do elemento de placa.

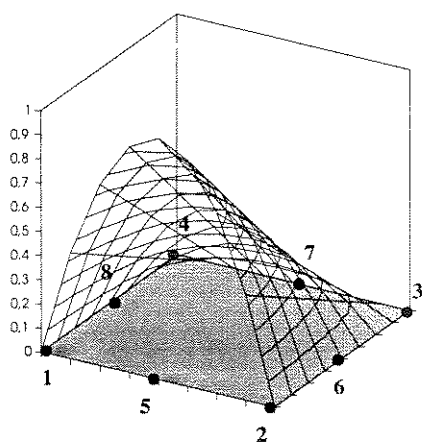


Figura B.5 - Função de Forma $N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$, associada ao nó 5 do elemento de placa.

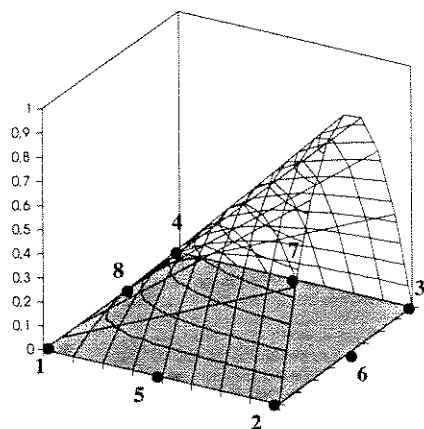


Figura B.6 - Função de Forma $N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$, associada ao nó 6 do elemento de placa.

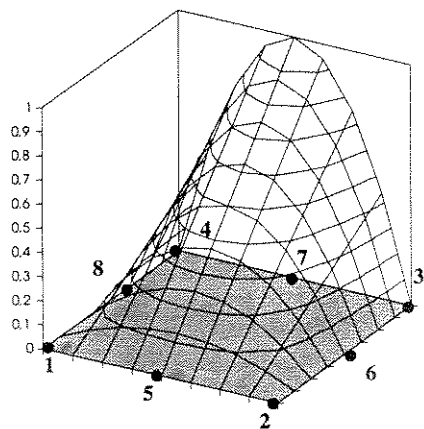


Figura B.7 - Função de Forma $N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$, associada ao nó 7 do elemento de placa.

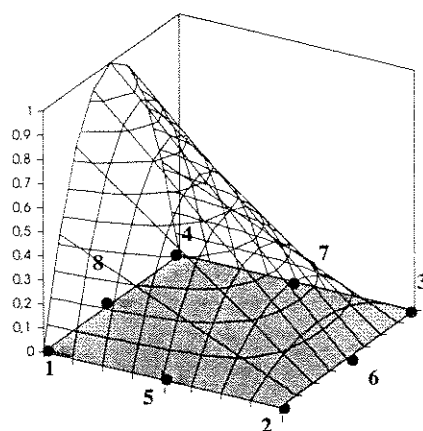


Figura B.8 - Função de Forma $N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$, associada ao nó 8 do elemento de placa.

APÊNDICE C

DERIVADAS DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO DO CAMPO DE DESLOCAMENTO

Apresentam-se, a seguir, as derivadas das funções $N_{ii}(\xi, \eta)$, associadas aos nós, e funções $M_{pk}(\xi, \eta)$, associadas ao interior do elemento, utilizadas na interpolação do campo de deslocamento: $\frac{\partial N_{ii}(\xi, \eta)}{\partial \xi}$, $\frac{\partial N_{ii}(\xi, \eta)}{\partial \eta}$, $\frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial M_{pk}(\xi, \eta)}{\partial \eta}$.

$$N_{11}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (C.1)$$

$$\frac{\partial N_{11}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 - \eta) \quad (C.2)$$

$$\frac{\partial N_{11}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 - \xi) \quad (C.3)$$

$$N_{12}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (C.4)$$

$$\frac{\partial N_{12}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta) \quad (C.5)$$

$$\frac{\partial N_{12}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 + \xi) \quad (C.6)$$

$$N_{13}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (C.7)$$

$$\frac{\partial N_{13}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta) \quad (C.8)$$

$$\frac{\partial N_{13}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi) \quad (C.9)$$

$$N_{14}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (C.10)$$

$$\frac{\partial N_{14}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 + \eta) \quad (C.11)$$

$$\frac{\partial N_{14}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi) \quad (C.12)$$

$$N_{31}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3\right) \quad (C.13)$$

$$\frac{\partial N_{31}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{3}{16}(-1 + \xi^2)(2 - 3\eta + \eta^3) \quad (C.14)$$

$$\frac{\partial N_{31}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{3}{16}(-1 + \eta^2)(2 - 3\xi + \xi^3) \quad (C.15)$$

$$N_{32}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3\right) \quad (C.16)$$

$$\frac{\partial N_{32}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{3}{16}(1 - \xi^2)(2 - 3\eta + \eta^3) \quad (C.17)$$

$$\frac{\partial N_{32}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{3}{16}(-1 + \eta^2)(2 + 3\xi - \xi^3) \quad (C.18)$$

$$N_{33}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\eta^3\right) \quad (C.19)$$

$$\frac{\partial N_{33}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{3}{16}(1 - \xi^2)(2 + 3\eta - \eta^3) \quad (C.20)$$

$$\frac{\partial N_{33}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{3}{16}(1 - \eta^2)(2 + 3\xi - \xi^3) \quad (C.21)$$

$$N_{34}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\eta^3\right) \quad (C.22)$$

$$\frac{\partial N_{34}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{3}{16}(-1 - \xi^2)(2 + 3\eta - \eta^3) \quad (C.23)$$

$$\frac{\partial N_{34}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{3}{16}(1 - \eta^2)(2 - 3\xi + \xi^3) \quad (C.24)$$

$$M_{31}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (C.25)$$

$$\frac{\partial M_{31}}{\partial \xi} = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi + \frac{3}{8}\xi^2\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (C.26)$$

$$\frac{\partial M_{31}}{\partial \eta} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta + \frac{3}{8}\eta^2\right) \quad (C.27)$$

$$M_{32}(\xi, \eta) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (C.28)$$

$$\frac{\partial M_{32}}{\partial \xi} = \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\xi + \frac{3}{8}\xi^2\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (C.29)$$

$$\frac{\partial M_{32}}{\partial \eta} = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\eta + \frac{3}{8}\eta^2\right) \quad (C.30)$$

$$M_{33}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (C.31)$$

$$\frac{\partial M_{33}}{\partial \xi} = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi + \frac{3}{8}\xi^2\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (C.32)$$

$$\frac{\partial M_{33}}{\partial \eta} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\eta + \frac{3}{8}\eta^2\right) \quad (C.33)$$

$$M_{34}(\xi, \eta) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (C.34)$$

$$\frac{\partial M_{34}}{\partial \xi} = \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\xi + \frac{3}{8}\xi^2\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (C.35)$$

$$\frac{\partial M_{34}}{\partial \eta} = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta + \frac{3}{8}\eta^2\right) \quad (C.36)$$

$$M_{41}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (C.37)$$

$$\frac{\partial M_{41}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \left(-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^3\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (C.38)$$

$$\frac{\partial M_{41}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta + \frac{3}{8}\eta^2\right) \quad (C.39)$$

$$M_{42}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (C.40)$$

$$\frac{\partial M_{42}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \left(-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^3\right)\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3\right) \quad (C.41)$$

$$\frac{\partial M_{42}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4\right)\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\eta + \frac{3}{8}\eta^2\right) \quad (C.42)$$

$$M_{43}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4\right) \quad (C.43)$$

$$\frac{\partial M_{43}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \left(-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^3\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4\right) \quad (C.44)$$

$$\frac{\partial M_{43}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4\right)\left(-\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3\right) \quad (C.45)$$

$$M_{44}(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4\right) \quad (C.46)$$

$$\frac{\partial M_{44}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{3}{8}\xi^2\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4\right) \quad (C.47)$$

$$\frac{\partial M_{44}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(-\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3\right) \quad (C.48)$$

$$M_{45}(\xi, \eta) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4\right) \quad (C.49)$$

$$\frac{\partial M_{45}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\xi + \frac{3}{8}\xi^2\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4\right) \quad (C.50)$$

$$\frac{\partial M_{45}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)\left(-\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3\right) \quad (C.51)$$

APÊNDICE D

OBTENÇÃO DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ POR INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Admitindo-se que ξ_p e η_p são as coordenadas do ponto de integração p , que W_p é o fator de ponderação associado ao ponto p e que np é o número total de pontos de integração, os coeficientes de rigidez são calculados da seguinte forma:

D.1 Coeficientes da submatriz $[K_{ij}]$

$$\begin{aligned}
 k_{11} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{11li}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \right. \\
 + (\nu \cdot B_{11li}(\xi_p, \eta_p) + B_{21li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21lj}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31lj}(\xi_p, \eta_p) \left. \right] \\
 + \frac{1}{k \cdot (1+\nu)} \cdot \left[B_{41li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41lj}(\xi_p, \eta_p) + B_{51li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{21} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{12li}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \right. \\
 + (\nu \cdot B_{12li}(\xi_p, \eta_p) + B_{22li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21lj}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31lj}(\xi_p, \eta_p) \left. \right] \\
 + \frac{1}{k \cdot (1+\nu)} \cdot \left[B_{42li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41lj}(\xi_p, \eta_p) + B_{52li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{31} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{13li}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \right. \\
 + (\nu \cdot B_{13li}(\xi_p, \eta_p) + B_{23li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21lj}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31lj}(\xi_p, \eta_p) \left. \right]
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{k.(1+v)} \cdot \left[B_{43li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41lj}(\xi_p, \eta_p) + B_{53li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \cdot \left| J(\xi_p, \eta_p) \right| \cdot W_p \quad (D.3)$$

$$k_{41} = \frac{E}{2k.(1+v)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_i \left[C_{44li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \\ \left. + C_{54li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \cdot \left| J(\xi_p, \eta_p) \right| \cdot W_p \quad (D.4)$$

$$k_{51} = \frac{E}{2k.(1+v)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_i \left[C_{45li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \\ \left. + C_{55li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \cdot \left| J(\xi_p, \eta_p) \right| \cdot W_p \quad (D.5)$$

$$k_{12} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1-v^2)} \cdot \left[(B_{11li}(\xi_p, \eta_p) + v \cdot B_{21li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \right. \\ \left. \left. + (v \cdot B_{11li}(\xi_p, \eta_p) + B_{21li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22lj}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2} \cdot B_{31li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{k.(1+v)} \cdot \left[B_{41li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42lj}(\xi_p, \eta_p) + B_{51li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \right\} \cdot \left| J(\xi_p, \eta_p) \right| \cdot W_p \quad (D.6)$$

$$k_{22} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1-v^2)} \cdot \left[(B_{12li}(\xi_p, \eta_p) + v \cdot B_{22li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \right. \\ \left. \left. + (v \cdot B_{12li}(\xi_p, \eta_p) + B_{22li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22lj}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2} \cdot B_{32li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{k.(1+v)} \cdot \left[B_{42li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42lj}(\xi_p, \eta_p) + B_{52li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \right\} \cdot \left| J(\xi_p, \eta_p) \right| \cdot W_p \quad (D.7)$$

$$k_{32} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1-v^2)} \cdot \left[(B_{13li}(\xi_p, \eta_p) + v \cdot B_{23li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (\nu \cdot B_{13li}(\xi_p, \eta_p) + B_{23li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22lj}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32lj}(\xi_p, \eta_p) \Big] \\
 & + \frac{1}{k \cdot (1+\nu)} \cdot \left[B_{43li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42lj}(\xi_p, \eta_p) + B_{53li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \Big\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

$$\begin{aligned}
 k_{42} &= \frac{E}{2k \cdot (1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_i \cdot \left[C_{44li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \\
 & \left. + C_{54li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{D.9}$$

$$\begin{aligned}
 k_{52} &= \frac{E}{2k \cdot (1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_i \cdot \left[C_{45li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \\
 & \left. + C_{55li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{D.10}$$

$$\begin{aligned}
 k_{13} &= E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{11li}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \right. \\
 & \left. + (\nu \cdot B_{11li}(\xi_p, \eta_p) + B_{21li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23lj}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \\
 & \left. + \frac{1}{k \cdot (1+\nu)} \cdot \left[B_{41li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43lj}(\xi_p, \eta_p) + B_{51li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{D.11}$$

$$\begin{aligned}
 k_{23} &= E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{12li}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \right. \\
 & \left. + (\nu \cdot B_{12li}(\xi_p, \eta_p) + B_{22li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23lj}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \\
 & \left. + \frac{1}{k \cdot (1+\nu)} \cdot \left[B_{42li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43lj}(\xi_p, \eta_p) + B_{52li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{D.12}$$

$$\begin{aligned}
 k_{33} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1-v^2)} \cdot \left[(B_{13li}(\xi_p, \eta_p) + v B_{23li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \right. \\
 \left. \left. + (v \cdot B_{13li}(\xi_p, \eta_p) + B_{23li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23lj}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2} \cdot B_{33li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \right. \\
 \left. + \frac{1}{k \cdot (1+v)} \cdot \left[B_{43li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43lj}(\xi_p, \eta_p) + B_{53li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{43} = \frac{E}{2k \cdot (1+v)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_i \left[C_{44li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \\
 \left. + C_{54li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{53} = \frac{E}{2k \cdot (1+v)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_i \left[C_{45li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \\
 \left. + C_{55li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{14} = \frac{E}{2k \cdot (1+v)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_j \left[B_{41li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \\
 \left. + B_{51li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{24} = \frac{E}{2k \cdot (1+v)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_j \left[B_{42li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \\
 \left. + B_{52li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{34} = \frac{E}{2k \cdot (1+v)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_j \left[B_{43li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \\
 \left. + B_{53li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54lj}(\xi_p, \eta_p) \right] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{44} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} & \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-v^2)} \cdot [(B_{14li}(\xi_p, \eta_p) + v \cdot B_{24li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{14lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \\
 & + (v \cdot B_{14li}(\xi_p, \eta_p) + B_{24li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{24lj}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2} \cdot B_{34li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{34lj}(\xi_p, \eta_p) \Big] \\
 & + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+v)} \cdot [B_{44li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{44lj}(\xi_p, \eta_p) + B_{54li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{54lj}(\xi_p, \eta_p)] \\
 & + \left. \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+v)} \cdot [C_{44li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44lj}(\xi_p, \eta_p) + C_{54li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54lj}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{54} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} & \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-v^2)} \cdot [(B_{15li}(\xi_p, \eta_p) + v \cdot B_{25li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{14lj}(\xi_p, \eta_p) \right. \\
 & + (v \cdot B_{15li}(\xi_p, \eta_p) + B_{25li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{24lj}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2} \cdot B_{35li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{34lj}(\xi_p, \eta_p) \Big] \\
 & + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+v)} \cdot [B_{45li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{44lj}(\xi_p, \eta_p) + B_{55li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{54lj}(\xi_p, \eta_p)] \\
 & + \left. \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+v)} \cdot [C_{45li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44lj}(\xi_p, \eta_p) + C_{55li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54lj}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{15} = \frac{E}{2k \cdot (1+v)} \cdot \sum_{p=1}^{np} & t_j \cdot [B_{41li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45lj}(\xi_p, \eta_p) \\
 & + B_{51li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55lj}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{25} = \frac{E}{2k \cdot (1+v)} \cdot \sum_{p=1}^{np} & t_j \cdot [B_{42li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45lj}(\xi_p, \eta_p) \\
 & + B_{52li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55lj}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.22)
 \end{aligned}$$

$$k_{35} = \frac{E}{2k(1+v)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_j \cdot [B_{43li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45lj}(\xi_p, \eta_p) + B_{53li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55lj}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.23)$$

$$k_{45} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-v^2)} \cdot [(B_{14li}(\xi_p, \eta_p) + v \cdot B_{24li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{15lj}(\xi_p, \eta_p) + (v \cdot B_{14li}(\xi_p, \eta_p) + B_{24li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{25lj}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2} \cdot B_{34li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{35lj}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+v)} \cdot [B_{44li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{45lj}(\xi_p, \eta_p) + B_{54li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{55lj}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+v)} \cdot [C_{44li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45lj}(\xi_p, \eta_p) + C_{54li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55lj}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.24)$$

$$k_{55} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-v^2)} \cdot [(B_{15li}(\xi_p, \eta_p) + v \cdot B_{25li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{15lj}(\xi_p, \eta_p) + (v \cdot B_{15li}(\xi_p, \eta_p) + B_{25li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{25lj}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2} \cdot B_{35li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{35lj}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+v)} \cdot [B_{45li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{45lj}(\xi_p, \eta_p) + B_{55li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{55lj}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+v)} \cdot [C_{45li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45lj}(\xi_p, \eta_p) + C_{55li}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55lj}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.25)$$

D.2 Coeficientes da submatriz $[K_{li,st}]$

$$\begin{aligned}
 k_{11} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} & \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{11li}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11st}(\xi_p, \eta_p) \right. \right. \\
 & + (\nu B_{11li}(\xi_p, \eta_p) + B_{21li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31st}(\xi_p, \eta_p) \left. \right] \\
 & + \frac{1}{k \cdot (1+\nu)} \cdot \left[B_{41li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41st}(\xi_p, \eta_p) + B_{51li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51st}(\xi_p, \eta_p) \right] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{21} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} & \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{12li}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11st}(\xi_p, \eta_p) \right. \right. \\
 & + (\nu B_{12li}(\xi_p, \eta_p) + B_{22li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31st}(\xi_p, \eta_p) \left. \right] \\
 & + \frac{1}{k \cdot (1+\nu)} \cdot \left[B_{42li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41st}(\xi_p, \eta_p) + B_{52li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51st}(\xi_p, \eta_p) \right] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{31} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} & \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{13li}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11st}(\xi_p, \eta_p) \right. \right. \\
 & + (\nu B_{13li}(\xi_p, \eta_p) + B_{23li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31st}(\xi_p, \eta_p) \left. \right] \\
 & + \frac{1}{k \cdot (1+\nu)} \cdot \left[B_{43li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41st}(\xi_p, \eta_p) + B_{53li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51st}(\xi_p, \eta_p) \right] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.28)
 \end{aligned}$$

$$k_{41} = \frac{E}{2k \cdot (1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_i \left[C_{44li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41st}(\xi_p, \eta_p) \right]$$

$$+ C_{54li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51st}(\xi_p, \eta_p) \Big] \Big| J(\xi_p, \eta_p) \Big| \cdot W_p \quad (\text{D.29})$$

$$k_{51} = \frac{E}{2k \cdot (1 + \nu)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_i \cdot \Big[C_{45li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41st}(\xi_p, \eta_p) \\ + C_{55li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51st}(\xi_p, \eta_p) \Big] \Big| J(\xi_p, \eta_p) \Big| \cdot W_p \quad (\text{D.30})$$

$$k_{12} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1 - \nu^2)} \cdot \Big[(B_{11li}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12st}(\xi_p, \eta_p) \right. \\ \left. + (\nu \cdot B_{11li}(\xi_p, \eta_p) + B_{21li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1 - \nu)}{2} \cdot B_{31li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32st}(\xi_p, \eta_p) \right] \\ \left. + \frac{1}{k \cdot (1 + \nu)} \cdot \Big[B_{41li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42st}(\xi_p, \eta_p) + B_{51li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52st}(\xi_p, \eta_p) \Big] \right\} \Big| J(\xi_p, \eta_p) \Big| \cdot W_p \quad (\text{D.31})$$

$$k_{22} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1 - \nu^2)} \cdot \Big[(B_{12li}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12st}(\xi_p, \eta_p) \right. \\ \left. + (\nu \cdot B_{12li}(\xi_p, \eta_p) + B_{22li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1 - \nu)}{2} \cdot B_{32li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32st}(\xi_p, \eta_p) \right] \\ \left. + \frac{1}{k \cdot (1 + \nu)} \cdot \Big[B_{42li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42st}(\xi_p, \eta_p) + B_{52li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52st}(\xi_p, \eta_p) \Big] \right\} \Big| J(\xi_p, \eta_p) \Big| \cdot W_p \quad (\text{D.32})$$

$$k_{32} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1 - \nu^2)} \cdot \Big[(B_{13li}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12st}(\xi_p, \eta_p) \right. \\ \left. + (\nu \cdot B_{13li}(\xi_p, \eta_p) + B_{23li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1 - \nu)}{2} \cdot B_{33li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32st}(\xi_p, \eta_p) \right] \\ \left. + \frac{1}{k \cdot (1 + \nu)} \cdot \Big[B_{43li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42st}(\xi_p, \eta_p) + B_{53li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52st}(\xi_p, \eta_p) \Big] \right\} \Big| J(\xi_p, \eta_p) \Big| \cdot W_p \quad (\text{D.33})$$

$$k_{42} = \frac{E}{2k.(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_i \left[C_{44li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42st}(\xi_p, \eta_p) \right. \\ \left. + C_{54li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52st}(\xi_p, \eta_p) \right] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.34)$$

$$k_{52} = \frac{E}{2k.(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_i \left[C_{45li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42st}(\xi_p, \eta_p) \right. \\ \left. + C_{55li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52st}(\xi_p, \eta_p) \right] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.35)$$

$$k_{13} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{11li}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13st}(\xi_p, \eta_p) \right. \right. \\ \left. \left. + (\nu \cdot B_{11li}(\xi_p, \eta_p) + B_{21li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33st}(\xi_p, \eta_p) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{k.(1+\nu)} \cdot \left[B_{41li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43st}(\xi_p, \eta_p) + B_{51li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53st}(\xi_p, \eta_p) \right] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.36)$$

$$k_{23} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{12li}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13st}(\xi_p, \eta_p) \right. \right. \\ \left. \left. + (\nu \cdot B_{12li}(\xi_p, \eta_p) + B_{22li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33st}(\xi_p, \eta_p) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{k.(1+\nu)} \cdot \left[B_{42li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43st}(\xi_p, \eta_p) + B_{52li}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53st}(\xi_p, \eta_p) \right] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.37)$$

$$k_{33} = E \cdot \sum_{p=1}^{np} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot \left[(B_{13li}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23li}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13st}(\xi_p, \eta_p) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (v.B_{13li}(\xi_p, \eta_p) + B_{23li}(\xi_p, \eta_p)).B_{23st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2}.B_{33li}(\xi_p, \eta_p).B_{33st}(\xi_p, \eta_p) \Big] \\
 & + \frac{1}{k.(1+v)} \cdot [B_{43li}(\xi_p, \eta_p).B_{43st}(\xi_p, \eta_p) + B_{53li}(\xi_p, \eta_p).B_{53st}(\xi_p, \eta_p)] \Big] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{43} = & \frac{E}{2k.(1+v)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_i [C_{44li}(\xi_p, \eta_p).B_{43st}(\xi_p, \eta_p) \\
 & + C_{54li}(\xi_p, \eta_p).B_{53st}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{53} = & \frac{E}{2k.(1+v)} \cdot \sum_{p=1}^{np} t_i [C_{45li}(\xi_p, \eta_p).B_{43st}(\xi_p, \eta_p) \\
 & + C_{55li}(\xi_p, \eta_p).B_{53st}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.40)
 \end{aligned}$$

D.3 Coeficientes da submatriz $[K_{pk, st}]$

Admitindo-se que ξ_p e η_p são as coordenadas do ponto de integração p , que W_p é o fator de ponderação associado ao ponto p e que mp é o número total de pontos de integração, os coeficientes de rigidez são calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 k_{11} = & 2.E \cdot \sum_{p=1}^{mp} \left\{ \frac{1}{(1-v^2)} \cdot [(B_{11pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{21pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{11st}(\xi_p, \eta_p) \right. \\
 & + (v.B_{11pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{21pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{21st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2}.B_{31pk}(\xi_p, \eta_p).B_{31st}(\xi_p, \eta_p)] \\
 & + \frac{1}{2k(1+v)} \cdot [B_{41pk}(\xi_p, \eta_p).B_{41st}(\xi_p, \eta_p) + B_{51pk}(\xi_p, \eta_p).B_{51st}(\xi_p, \eta_p)] \Big] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (D.41)
 \end{aligned}$$

$$k_{21} = 2.E \cdot \sum_{p=1}^{mp} \left\{ \frac{1}{(1-v^2)} \cdot [(B_{12pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{22pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{11st}(\xi_p, \eta_p) \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (v.B_{12pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{22pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{21st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2}.B_{32pk}(\xi_p, \eta_p).B_{31st}(\xi_p, \eta_p) \Big] \\
 & + \frac{1}{2k(1+v)} \cdot [B_{42pk}(\xi_p, \eta_p).B_{41st}(\xi_p, \eta_p) + B_{52pk}(\xi_p, \eta_p).B_{51st}(\xi_p, \eta_p)] \Big\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| W_p \quad (D.42)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{31} = 2.E. \sum_{p=1}^{mp} \Big\{ \frac{1}{(1-v^2)} \cdot [& (B_{1pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{23pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{11st}(\xi_p, \eta_p) \\
 & + (v.B_{13pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{23pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{21st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2}.B_{33pk}(\xi_p, \eta_p).B_{31st}(\xi_p, \eta_p) \Big] \\
 & + \frac{1}{2k(1+v)} \cdot [B_{43pk}(\xi_p, \eta_p).B_{41st}(\xi_p, \eta_p) + B_{53pk}(\xi_p, \eta_p).B_{51st}(\xi_p, \eta_p)] \Big\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| W_p \quad (D.43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{12} = 2.E. \sum_{p=1}^p \Big\{ \frac{1}{(1-v^2)} \cdot [& (B_{11pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{21pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{12st}(\xi_p, \eta_p) \\
 & + (v.B_{11pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{21pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{22st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2}.B_{31pk}(\xi_p, \eta_p).B_{32st}(\xi_p, \eta_p) \Big] \\
 & + \frac{1}{2k(1+v)} \cdot [B_{41pk}(\xi_p, \eta_p).B_{42st}(\xi_p, \eta_p) + B_{51pk}(\xi_p, \eta_p).B_{52st}(\xi_p, \eta_p)] \Big\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| W_p \quad (D.44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{22} = 2.E. \sum_{p=1}^{mp} \Big\{ \frac{1}{(1-v^2)} \cdot [& (B_{12pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{22pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{12st}(\xi_p, \eta_p) \\
 & + (v.B_{12pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{22pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{22st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2}.B_{32pk}(\xi_p, \eta_p).B_{32st}(\xi_p, \eta_p) \Big] \\
 & + \frac{1}{2k(1+v)} \cdot [B_{42pk}(\xi_p, \eta_p).B_{42st}(\xi_p, \eta_p) + B_{52pk}(\xi_p, \eta_p).B_{52st}(\xi_p, \eta_p)] \Big\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| W_p \quad (D.45)
 \end{aligned}$$

$$k_{32} = 2.E. \sum_{p=1}^{mp} \Big\{ \frac{1}{(1-v^2)} \cdot [& (B_{13pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{23pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{12st}(\xi_p, \eta_p)$$

$$\begin{aligned}
 & + (v.B_{13pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{23pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{22st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2}.B_{33pk}(\xi_p, \eta_p).B_{32st}(\xi_p, \eta_p) \Big] \\
 & + \frac{1}{2k(1+v)}.[B_{43pk}(\xi_p, \eta_p).B_{42st}(\xi_p, \eta_p) + B_{53pk}(\xi_p, \eta_p).B_{52st}(\xi_p, \eta_p)] \Big\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| W_p \quad (D.46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{13} = 2.E. \sum_{p=1}^{mp} \Big\{ \frac{1}{(1-v^2)} \cdot [& (B_{11pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{21pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{13st}(\xi_p, \eta_p) \\
 & + (v.B_{11pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{21pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{23st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2}.B_{31pk}(\xi_p, \eta_p).B_{33st}(\xi_p, \eta_p) \Big] \\
 & + \frac{1}{2k(1+v)}.[B_{41pk}(\xi_p, \eta_p).B_{43st}(\xi_p, \eta_p) + B_{51pk}(\xi_p, \eta_p).B_{53st}(\xi_p, \eta_p)] \Big\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| W_p \quad (D.47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{23} = 2.E. \sum_{p=1}^{mp} \Big\{ \frac{1}{(1-v^2)} \cdot [& (B_{12pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{22pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{13st}(\xi_p, \eta_p) \\
 & + (v.B_{12pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{22pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{23st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2}.B_{32pk}(\xi_p, \eta_p).B_{33st}(\xi_p, \eta_p) \Big] \\
 & + \frac{1}{2k(1+v)}.[B_{42pk}(\xi_p, \eta_p).B_{43st}(\xi_p, \eta_p) + B_{52pk}(\xi_p, \eta_p).B_{53st}(\xi_p, \eta_p)] \Big\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| W_p \quad (D.48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{33} = 2.E. \sum_{p=1}^{mp} \Big\{ \frac{1}{(1-v^2)} \cdot [& (B_{13pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{23pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{13st}(\xi_p, \eta_p) \\
 & + (v.B_{13pk}(\xi_p, \eta_p) + v.B_{23pk}(\xi_p, \eta_p)).B_{23st}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-v)}{2}.B_{33pk}(\xi_p, \eta_p).B_{33st}(\xi_p, \eta_p) \Big] \\
 & + \frac{1}{2k(1+v)}.[B_{43pk}(\xi_p, \eta_p).B_{43st}(\xi_p, \eta_p) + B_{53pk}(\xi_p, \eta_p).B_{53st}(\xi_p, \eta_p)] \Big\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| W_p \quad (D.49)
 \end{aligned}$$