

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A
TESE DEFENDIDA POR JOÃO FRANCISCO
FOGANHOLI E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 15/08/1997
Renato Pavanello
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Estudo de Estimadores de Erros
de Elementos Finitos em Elasticidade
Linear Bidimensional**

Autor: **João Francisco Foganholi**
Orientador: **Dr Renato Pavanello**

22/97

F687e

32025/BC

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**Estudo de Estimadores de Erros
de Elementos Finitos em Elasticidade
Linear Bidimensional**

Autor: **João Francisco Foganholi**
Orientador: **Renato Pavanello** - O.D.

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Dissertação de mestrado apresentada a comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1997
S.P. - Brasil



8696145
9719598

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	F687e
V.	Ex.
T. VED. BC/	32.025
PRUC.	281194
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	13/11/97
N.º CPD	

CM-00102099-2

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

F687e Foganholi, João Francisco
Estudo de estimadores de erros em elasticidade linear bidimensional. / João Francisco Foganholi.--Campinas, SP: [s.n.], 1997.

Orientador: Renato Pavanello.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Elasticidade. 3. Resistência de materiais. 4. Deformações e tensões. I. Pavanello, Renato. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Estudo de Estimadores de Erros
de Elementos Finitos em Elasticidade
Linear Bidimensional**

Autor: **João Francisco Foganholi**
Orientador: **Renato Pavanello**



**Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP**



**Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira
ICI-Escola Federal de Engenharia de Itajubá**



**Prof. Dr. Fernando Iguti
DMC/FEM/UNICAMP**

Campinas, 15 de Agosto de 1997

Toda longa caminhada começa com um simples passo.

Agradecimentos

A Nosso Senhor Jesus Cristo.

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas as quais presto minha homenagem:

A minha família pelo incentivo em todos os momentos da minha vida.

Ao meu orientador, pelo constante apoio, dedicação e paciência.

A todos os professores e colegas do departamento, que ajudaram de forma direta indireta na conclusão deste trabalho.

Conteúdo

1-INTRODUÇÃO	1
1.1-Discussão Inicial	1
1.2-Aspéctos Gerais	2
1.3-Alguns trabalhos nessa área	4
1.4 Abordagem desse trabalho	7
1.5-Descrição do trabalho	8
2-EQUAÇÕES DE ELASTICIDADE LINEAR BIDIMENSIONAL	10
2.1-Introdução	10
2.2-Estado Geral de Tensão	10
2.3-Estado Plano de Tensão	13
2.4-Relação entre Deformações e Deslocamentos: Modelo Cinemático	15
2.5-Equações Diferenciais de Equilíbrio	21
2.6-Princípio dos Trabalhos Virtuais	27
3-APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS	32
3.1-Introdução	32
3.2-Aproximação Nodal	33
3.3-Funções de Interpolação	35
3.4-Matriz de Rigidez e Força Nodal Equivalente dos Elementos	38
3.5-Elementos Isoparamétricos	43
3.6-Integração Numérica e Avaliação das Matrizes Elementares	47
3.7-Pós Processamento: Cálculo das Tensões	55
3.8-Conclusão	56
4-ESTIMADORES DE ERROS	57
4.1-Introdução	57
4.2-Estimativa do Erro	58
4.3-Estimadores de Erros	58
4.4-Erro para Elemento Triangular Linear	67
4.5-Erro para Elemento Triangular Quadrático	72
4.6-Erro para Elemento Quadrilateral Linear	73
4.7-Estimativa de Erro baseada na descontinuidade em tensão	75
4.8-Estimativa de Erro baseada nas tensões médias-Estimador ZZ1	77
4.9-Estimador ZZ2	80

5-TESTES E RESULTADOS NUMÉRICOS	82
5.1-Introdução	82
5.2-Exemplos de Chapas submetidas à Tração	83
5.3-Exemplos de Chapas submetidas à Flexão	84
5.4-Cilindro de parede espessa-Comparação com solução analítica	94
5.5-Exemplos com Cilindro de parede espessa submetido a pressão interna	99
5.6-Índice de Efetividade	106
5.7-Comentários	109
6-COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES	110
7-REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	113

Lista de Figuras

2.1	Seis componentes de tensão atuando num ponto interior do corpo	11
2.2	Chapa Fina sujeita a forças coplanares	13
2.3	Três componentes de tensão (Estado Plano)	14
2.4	Ponto "P" no interior de um corpo elástico submetido à forças externas	16
2.5	Ponto "P" de um paralelepípedo de dimensões infinitesimais	17
2.6	Deformação no plano x-y do ponto "P"	18
2.7	Equilíbrio das forças internas e externas um paralelepípedo de dimensões infinitesimais	22
2.8	Componentes de Tensão no ponto "O" de um corpo sólido	24
2.9	Tetraedro elementar no ponto "O" e suas componentes médias de tensão	24
3.1	Domínio discretizado por elementos finitos	33
3.2	Elemento triangular linear(ETL)	35
3.3	Elemento triangular quadrático(ETQ)	36
3.4	Elemento quadrilateral linear(EQL)	37
3.5	Mapeamento do ETL	43
3.6	Mapeamento do ETQ	44
3.7	Mapeamento do EQL	45
3.8	Três pontos de integração para o ETQ	52
3.9	Quatro pontos de integração para o EQL	55
4.1	Nó (i) pertencente a dois elementos	59
4.2	Erro de aproximação em deslocamento e tensão para problemas de uma dimensão e função de forma linear	60
4.3	Chapa fina discretizada por ETL	67
4.4	Chapa fina discretizada por ETQ	73
4.5	Chapa fina discretizada por EQL	74
4.6	Chapa fina discretizada por ETL (Nastran)	75
4.7	Pontos de Integração do EQL	77
4.8	Chapa fina discretizada por EQL (Ansys)	79
4.9	Recuperador de Tensão média nodal-(ZZ2)	81
5.1	Chapa fina submetida a tração e discretizada por ETL	83
5.2	Chapa fina submetida a tração e discretizada por ETQ	84
5.3	Chapa fina submetida a tração e discretizada por EQL	84
5.4	Chapa fina submetida a flexão e discretizada por ETL	85
5.5	Norma do Erro em Energia em função do número de elementos para caso de flexão para ZZ e ZZ1	86
5.6	Porcentagem do Erro em função do número do ETL para caso de flexão para ZZ e ZZ1	86
5.7	Salto em tensão em função do número do ETL para o caso de flexão	87
5.8	Chapa fina submetida a flexão discretizada por 6 ETQ	88
5.9	Norma do Erro em Energia em função do número do 6 ETQ para caso de flexão	

5.10	Percentagem do Erro em função do número do ETQ para caso de flexão para ZZ e ZZ1	89
5.11	Chapa fina discretizada por 3 ETQ para caso de flexão	90
5.12	Norma do Erro em Energia em função do número do EQL para caso de flexão para ZZ e ZZ1	91
5.13	Percentagem do Erro em função do número do EQL para caso de flexão para ZZ e ZZ1	91
5.14	Chapa fina submetida a flexão discretizada com EQL	92
5.15	Norma do Erro em Energia em função do número do EQL para caso flexão	93
5.16	Percentagem do Erro em Energia em função do número do EQL para caso flexão	93
5.17	Cilindro de parede espessa submetido a pressão interna	95
5.18	Cilindro submetido a pressão interna discretizado com 12 EQL	96
5.19	Cilindro submetido a pressão interna discretizado com 48 EQL	96
5.20	Tensões Radiais em função do raio para cilindro de parede espessa (12 EQL)	97
5.21	Tensões Tangenciais em função do raio para cilindro de parede espessa (12 EQL)	98
5.22	Tensões Radiais em função do raio para cilindro de parede espessa (48 EQL)	98
5.23	Tensões Tangenciais em função do raio para cilindro de parede espessa (48 EQL)	99
5.24	Norma e Percentagem do erro para 31 ETL (ZZ)	100
5.25	Norma e Percentagem do erro para 77 ETL (ZZ)	101
5.26	Norma e Percentagem do erro para 77 ETL (ZZ1)	102
5.27	Norma e Percentagem do erro para 16 EQL (ZZ)	102
5.28	Norma e Percentagem do erro para 48 EQL (ZZ)	103
5.29	Norma e Percentagem do erro para 31 ETQ (ZZ)	104
5.30	Norma e Percentagem do erro para 77 ETQ (ZZ)	104
5.31	Estimativa do erro por 77 ETL segundo salto em tensões	105
5.32	Norma e Percentagem do erro por 77 ETL (ZZ2)	106
5.33	Norma exata do erro por 77 ETL	107
5.34	Índice de Efetividade para 77 ETL (ZZ)	107
5.35	Índice de Efetividade para 77 ETL (ZZ1)	108
5.36	Índice de Efetividade para 77 ETL (ZZ2)	108

Lista de Tabelas

3.1	Derivadas das funções de forma para ETQ	51
3.2	Derivadas das funções de forma para EQL	53
4.1	Conectividade	68
5.1	Percentagem de erro para ETL	85
5.2	Percentagem de erro para ETQ	88
5.3	Percentagem de erro para 6 EQL	90
5.4	Percentagem de erro para 6 EQL	92

Nomenclatura

Letras Latinas:

A	Área
{a}	Vetor deslocamento
a_1	Raio interno do cilindro
b_1	Raio externo do cilindro
[B]	Matriz derivadas das funções de forma
[C]	Matriz das constantes elásticas do material
dx, dy, dz	Dimensões infinitesimais no espaço global
du, dv, dw	Dimensões infinitesimais no espaço local
E	Módulo de Elasticidade longitudinal do material
$e_{NASTRAN}$	Estimativa do erro segundo Nastran
{e}	Vetor erro em deslocamento
{ e_σ }	Vetor erro em tensão
$\ \{e\} \ $	Norma do erro em deslocamento
$\ \{e_\sigma\} \ $	Norma do erro em tensão
$\ \{e\} \ _{ANSYS}$	Norma do erro segundo Ansys
{f}	Vetor força
f	Fator empírico
F	Magnitude da Força
G	Módulo de Elasticidade transversal do material
h	Tamanho do elemento
[J]	Matriz jacobiana
[K]	Matriz de rigidez
l,m,n	Cossenos diretores
[M]	Matriz de Massa
[N]	Matriz das funções de forma
p	Grau do polinômio
p_i	Pressão interna
r	Raio do cilindro
S_x, S_y, S_z	Componentes das forças de superfície
\bar{T}	Tensão Média
[TRA]	Matriz transformação das tensões nos pontos de integração para os nós
{ T_σ }	Tensor tensão
u,v,w	Deslocamentos no referencial local
{ \hat{u} }	Campo de deslocamento pelo MEF
W	Fator de ponderação
x,y,z	Coordenadas no referencial global
{ X_v, Y_v, Z_v }	Forças por unidade de volume

Letras Gregas:

β	Percentagem de erro segundo (ZZ)
β_{ANSYS}	Percentagem de erro segundo Ansys
$\{\delta u\}, \{\delta v\}$	Deslocamento virtual
$\{\varepsilon\}$	Tensor das deformações específicas
$\Delta\varepsilon$	Razão entre erros
γ	Variação angular
Γ	Funcional
η, ξ	Referencial local
ν	Coefficiente de Poisson
θ	Índice de efetividade
σ_R	Tensão radial
σ_θ	Tensão tangencial
$\{\hat{\sigma}\}$	Tensor tensão pelo MEF
$\{\sigma\}$	Tensor tensão da Elasticidade
$\{\bar{\sigma}^*\}$	Tensões normais recuperadas (ponderadas pelas áreas)
$\{\sigma^*\}$	Tensões melhoradas (suavizadas)
$\{\ \hat{\sigma}\ \}$	Norma da tensão pelo MEF
$\{\bar{\tau}^*\}$	Tensões de cisalhamento recuperadas (ponderadas pelas áreas)
ψ	Integrando

Abreviaturas:

EQL	Elemento Quadrilateral Linear
ETL	Elemento Triangular Linear
ETQ	Elemento Triangular Quadrático
MEF	Método de Elementos Finitos
ZZ	ZIENKIEWICZ/ZHU

Resumo

FOGANHOLI, João Francisco, Estudo de Estimadores de Erros de Elementos Finitos em Elasticidade Linear Bidimensional, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997, 117p. Dissertação(Mestrado)

Nesse trabalho é realizado um estudo de alguns estimadores de erros aplicados a elementos finitos para resolução de problemas de estado plano de elasticidade linear. Três tipos de estimadores são estudados: o primeiro proposto por ZIENKIEWICZ/ZHU em 1987, o segundo usado pelo pacote comercial ANSYS que é similar ao primeiro, e o terceiro, proposto nesse trabalho, que usa o estimador ZZ, porém com uma técnica melhorada para recuperar o campo de tensões.

Foram descritas detalhadamente as formulações teóricas dos estimadores de erros, técnicas de recuperação de tensão e implementadas rotinas computacionais para a avaliação dos seguintes parâmetros: campo de deslocamentos, campo de tensões nos pontos de integração, campo de tensões nos nós, campo de tensões médias nodais, campo de tensões melhoradas, erro nos pontos de integração, erro nos nós, norma em energia para o erro por elemento, percentagem de erro por elemento e percentagem de erro global. Para a discretização usou-se elementos triangulares lineares, triangulares quadráticos e quadriláteros lineares.

Foram feitos exemplos e comparações com o estimador proposto no pacote comercial Ansys, aqui denominado [ZZ1] que é similar ao estimador [ZZ] e também com os resultados obtidos com o estimador baseado no salto de tensões proposto no programa Nastran. Os resultados obtidos são analisados e comparados, variando-se o tipo de problema e o refinamento das malhas.

O estudo feito nesse trabalho é importante na aplicação de Elementos Finitos onde se requer refinamentos do tipo (h), pois, indica quais elementos devem ser refinados e quando o processo de iteração deve ser interrompido.

Abstract

FOGANHOLI, João Francisco, Estudo de Estimadores de Erros de Elementos Finitos em Elasticidade Linear Bidimensional, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997, 117p. Dissertação(Mestrado)

In this work, a study of some error estimators for some finite elements applied to linear elasticity plane state problems is realized. Three types of estimators are studied: the first is the one proposed by ZIENKIEWICZ/ZHU in 1987, the second used by ANSYS is similar to the first and the third proposed in this work is an improvement of the ZIENKIEWICZ/ZHU stress recovery technique.

The theoretical formulations of these error estimators and stress recovery techniques are analyzed in detail. Some computational routines for the calculation of: nodal displacements, stresses at the integration points, nodal stresses, nodal mean stresses, smooth stresses, error at the integration points, error at the nodal points, energy norm of the elementary errors, elementary error percentage and global error percentage are implemented. Linear triangular, quadratic triangular and linear quadrilateral elements are used in the discretization process.

Some examples are presented considering the ANSYS error estimator ZZ1, which is similar to the ZZ estimator, and the results are compared with the ones obtained considering the estimator used by NASTRAN. The results obtained are analysed and compared considering different types of problems and different types of discretization.

Error estimators are important in the application of the Finite Element Method when h-type mesh refinement is needed, because error estimators can indicate which elements should be refined and when the iteration process should be interrupted.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1-Discussão inicial

O Método de Elementos Finitos (MEF) foi desenvolvido na década de 40 para aplicações em engenharia. Com o posterior interesse de matemáticos, desenvolveu-se uma sólida base teórica para o método. De um modo geral, pode-se considerar o MEF como um método numérico para a resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais.

Devido a evolução da indústria eletrônica e da informática, a aplicação do método tornou-se viável, levando-se em consideração o tempo de processamento e o custo computacional.

A generalidade e as potencialidades do método tem levado engenheiros, matemáticos e físicos a aperfeiçoarem cada vez mais essa técnica, contando para isso com a ajuda de uma formulação adequada e programas computacionais de uso geral , que englobam desde a modelagem geométrica até o pós processamento dos resultados, passando por diferentes modelos de resolução, onde o ME é efetivamente implementado.

Assim, o MEF tem sido largamente utilizado como uma técnica poderosa para a resolução de problemas voltados para as áreas de engenharia mecânica, civil, elétrica, aeronáutica, aeroespacial, etc.

Na engenharia mecânica algumas das aplicações do método estão voltadas para a termodinâmica, mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, etc.

O método quando aplicado a simulações em mecânica computacional tem por objetivo aproximar o comportamento de um meio elástico contínuo, através de sua discretização, por um número finito de elementos. Esses elementos caracterizados por nós, definem certas porções do meio contínuo, denominando-se elementos finitos. O método converge para a solução exata do problema a medida que o número de elementos tende a infinito. Como o meio contínuo foi discretizado por um número finito de elementos, pode-se resolver um sistema de equações algébricas ao invés de um sistema de equações diferenciais.

Esse trabalho está voltado para resolução estática de problemas estruturais de mecânica dos sólidos, no espaço bidimensional.

O meio contínuo será discretizado em elementos, sendo cada elemento formado por nós, as incógnitas serão os deslocamentos desses nós. Admite-se então que tendo sido encontrados os deslocamentos nodais, pode-se determinar o campo de deslocamentos em qualquer ponto do elemento. Visto que o MEF é uma solução aproximada do problema, existe então, uma diferença entre a solução exata e a solução obtida pelo método. Essa diferença é o erro.

Para se estimar a norma do vetor erro quando o método é aplicado, usam-se estimadores de erro que serão o tema principal dos capítulos seguintes desse trabalho.

1.2-Aspectos Gerais

O MEF tem demonstrado ser uma das técnicas numéricas mais utilizadas para a solução de problemas de engenharia. No entanto, um modelo impróprio de elementos finitos pode produzir erros significativos na solução final.

Nos últimos anos muitas pesquisas têm sido realizadas com o objetivo de se desenvolver elementos que se adaptem melhor à solução de problemas da engenharia estrutural, buscando-se formas automáticas para se avaliar a efetividade da solução encontrada.

Para se testar a efetividade da solução pelo MEF é necessário saber o quanto ela diverge da solução exata do problema, que pode em alguns casos, ser encontrada analiticamente, ou fazendo-se um refinamento homogêneo acentuado na malha.

Após uma estimativa inicial dos erros encontrados no modelo, pode-se propor métodos automáticos para redução dos mesmos. Os métodos mais usuais para redução dos erros estimados são: refinamento tipo (r), onde as coordenadas nodais são simplesmente realocadas, sendo que, as funções de forma e o número de elementos são mantidos, refinamento tipo (p), o número e a distribuição de elementos sobre a malha discretizada permanecem fixos, entretanto, o número e o grau das funções de interpolação são aumentados progressivamente e o refinamento tipo (h) onde a malha dos elementos é refinada através da diminuição sucessiva do tamanho dos elementos. Nesse tipo de refinamento, o número e as funções de interpolação permanecem fixos a nível de elemento. O refinamento tipo (h) é a prática comum na análise por elementos finitos, que consiste em resolver um problema várias vezes, até que a solução pelo método convirja para a solução exata ou otimizada. Existem também os refinamentos mistos, que são composições dos tipos anteriores, por exemplo, o refinamento (h-p).

Para qualquer tipo de refinamento se faz necessário uma ferramenta para indicar a região (ou regiões) da malha onde deverá ocorrer o refinamento. Os estimadores de erros permitem, a partir de uma análise inicial, determinar o erro relacionado com os resultados obtidos. Então, com base nesses dados, a malha é refeita (total ou parcialmente), com o objetivo de se reduzir o erro referente aos resultados.

Três tipos de erros comumente ocorrem quando se emprega um método numérico, tal como o método dos elementos finitos, [RIBEIRO,1986]. O primeiro e o

mais importante é o erro devido a discretização, que se traduz no não cumprimento das equações diferenciais que regem os problemas. O segundo é devido aos truncamentos, ocorridos durante o cálculo computacional, os quais podem ser minimizados utilizando-se computadores de alta precisão. O terceiro tipo de erro é causado pelas simplificações envolvidas na construção do modelo matemático representativo do problema.

Nesse trabalho a preocupação está voltada para o primeiro tipo de erro, o erro de discretização.

1.3-Alguns Trabalhos nessa área

Em 1987, [ZIENKIEWICZ/ZHU], apresentaram um estimador de erro de razoável precisão e de fácil implementação. Esse estimador permite estimar o erro global na norma de energia e faz uma estimativa do erro a nível local. Este pode ser combinado com um processo de refinamento adaptativo ou simplesmente dar uma direção para se construir uma nova malha, permitindo assim obter-se resultados desejáveis de precisão. Quando combinado com gerador automático de malha consegue-se um processo de análise bastante eficiente. Alguns trabalhos matemáticos pioneiros nessa linha foram apresentados por [BABUSKA/RHEINBOLDT,1978], [ZIENKIEWICZ/CRAIG,1984] e foram posteriormente utilizados na engenharia.

No tópico de estimativa de erro para solução de problemas de elementos finitos e posterior análise adaptativa, na qual a aproximação é sucessivamente refinada para atingir determinados padrões de precisão, o estimador de erro é de fundamental importância.

Nesse trabalho são estudados três estimadores de erro aplicados ao problema da elastoestática linear. Posteriormente à resolução da equação, o erro é avaliado através da norma de energia a nível de elemento, procedendo assim para todos os elementos da malha. Dessa maneira então, o estimador avalia a porcentagem de erro global, que pode ser comparado com um valor pré determinado e aceitável de erro. Se

a percentagem de erro for maior que a estabelecida, a malha deverá ser refinada, caso contrário, a malha poderá ser mantida. Os elementos a serem refinados são aqueles que possuem o erro maior que um valor previsto. Esse processo termina quando se atinge um determinado número de iterações ou quando a porcentagem de erro a nível global fique menor ou igual a porcentagem de erro pré estabelecida.

Em 1989, [AINSWORTH. et al]. mostraram ser efetivo e convergente o estimador proposto por ZIENKIEWICZ/ZHU. Analisaram também outras classes de estimadores que comprovaram ser assintoticamente exatos, dentre eles, o proposto por ZIENKIEWICZ/ZHU.

ZIENKIEWICZ/ZHU em 1990 apresentaram uma técnica de recuperação de tensões superconvergente utilizada em conjunto com estimadores de erro a posteriori para problemas unidimensionais. Resultados numéricos de erros estimados medidos na norma de energia e na norma máximo, foram apresentados. Mostraram também a relação entre dois tipos de estimadores, o primeiro baseado no pós-processamento, o segundo tipo, o residual, apresentado por [BABUSKA/RHEINBOLDT,1978]. O estimador tipo pós processamento é computado pelo uso de técnicas de recuperação de tensões obtidas a partir de alguma forma de projeção (por exemplo, suavizando pelo mínimos quadrados ou obtendo-se média de tensões). Segundo ZIENKIEWICZ/ZHU, uma das principais vantagens em se usar estimador de erro a posteriori para solução de problemas usando elementos finitos é que o erro estimado pode ser avaliado global e localmente.

LAWRENCE et al,1991, apresentaram uma forma fechada para matrizes de rigidez juntamente com o uso de estimador de erro para elementos triangulares hierárquicos planos para a resolução de problemas de elementos finitos. Os cálculos do estimador foram feitos elemento por elemento e comprovaram que o método é eficiente e de boa precisão. Segundo o autor, as soluções de alguns problemas conhecidos usando o indicador de erro para refinamentos seletivos de regiões, indica convergência acelerada quando comparado com a razão de convergência usando refinamento de malha uniforme. Concluíram também que a avaliação para as matrizes

de rigidez e do estimador de erro usando formulação explícita é bem mais rápida que integração numérica.

A solução de problemas de elasticidade pelo MEF fornece um campo contínuo de deslocamentos, sendo que para as tensões e deformações esses campos nem sempre são contínuos, em função da aproximação adotada. Algumas técnicas têm sido usadas para lidar com tais campos de descontinuidades: valores médios nodais, valores nos pontos de Gauss, extrapolação, etc. [CANTIN. et al,1978] por exemplo, apresentaram um algoritmo iterativo para se construir ambos os campos contínuos de tensões e deformações, partindo da solução clássica pelo MEF, utilizando a técnica de valores médios nodais, tal procedimento de suavização das tensões é parte fundamental para construção dos estimadores de erros a posteriori.

Trabalhos sobre técnicas de recuperação de tensão tiveram início com [HINTON/CAMPBELL,1974] que introduziram uma forma de suavizar as tensões a nível local e global, usando o método dos mínimos quadrados para funções descontínuas de tensões. Estabeleceram também a relação entre a suavização local e a técnica de integração reduzida para elementos isoparamétricos parabólicos. O principal atrativo desse processo de suavização é a facilidade de implementação, pois envolve apenas uma matriz de transformação, que faz uma extrapolação polinomial das tensões dos pontos de integração para os nós do elemento. Os pontos de integração são considerados pontos ótimos para o cálculo das tensões em modelos de elementos finitos, [BARLOW,1976].

Alguns trabalhos mais recentes sobre recuperadores de tensão para posterior uso de estimativa de erro e análise adaptativa foram apresentados por ZIENKIEWICZ/ZHU, [1992,a,b], onde é desenvolvida uma técnica de recuperação, tomando-se uma expansão polinomial da função descrevendo as tensões. Considera-se para cada nó, os elementos que o compartilham e realiza-se a expansão ao longo dos pontos superconvergentes dos elementos.

Quando se emprega a técnica de recuperação, fazendo-se uma expansão polinomial, verifica-se uma taxa de convergência superior para os nós internos em

relação àquela encontrada para os nós de contorno, [WIBERG/ABDULWAHAB,1993], além disso, as tensões recuperadas não satisfazem a equação de equilíbrio do problema. Um procedimento utilizado para se evitar este problema é o de acoplar as componentes de tensão através das equações de equilíbrio. A equação de equilíbrio e o uso de polinômios de interpolação de tensão de uma ordem maior, produz uma diminuição significativa no erro, mesmo para os nós do contorno.

Em 1994 [LI/WIBERG] usaram o estimador [ZZ] e técnicas de recuperação de tensões para análise adaptativa, baseadas no pós-processamento para determinação de soluções mais precisas, feito pelo ajuste de expansão polinomial tomando os pontos de superconvergência dos elementos. Essa expansão é feita pelo método dos mínimos quadrados. O erro estimado é calculado diretamente das soluções melhoradas. Com o uso desse estimador de erro é feito refinamento adaptativo versão (h) para problemas de elasticidade linear.

[MUTHUKRISHNAN. et al,1995] usam o estimador proposto por [ZZ] e apresentam um algoritmo simples com refinamento adaptativo usando malhas tridimensionais para soluções de problemas de elasticidade linear pelo MEF.

1.4-Abordagem desse trabalho

Esse trabalho tem como base a resolução de problemas estruturais estáticos bidimensionais pelo MEF, resolvendo dessa forma um sistema de equações do tipo $\{F\} = [K]\{u\}$, onde as variáveis desconhecidas são os deslocamentos nodais. Tendo sido encontrado esse campo de deslocamentos, avalia-se as tensões nos elementos. Com o campo de tensões a nível de elemento, avaliado nos pontos de integração, pode-se avaliar as tensões nodais, calcula-se, então, a tensão média por nó e usando-se as funções de forma, calcula-se por vários métodos, o campo de tensões melhoradas, (suavizadas). Com os dois campos de tensões avalia-se o erro local, pela norma de energia. Com o erro local avaliado para todos os elementos da malha calcula-se o erro global, usando para isso os Estimadores de Erro de ZIENKIEWICZ/ZHU [1987], o

estimador baseado no salto de tensões do software NASTRAN e o estimador segundo o software ANSYS.

Sendo esse trabalho o primeiro do grupo em termos de estimativa e estimadores de erro, foi elaborado para ser didático e detalhado, onde trabalhos futuros poderão utilizar o estimador implementado para refinamentos e processos adaptativos.

1.5-Descrição do trabalho

No capítulo 2 são desenvolvidas as equações básicas de elasticidade linear, inicialmente para o estado geral de tensão e posteriormente para o estado plano de tensão, assim como relações entre deformações e deslocamentos utilizando as equações de equilíbrio para serem usadas no princípio dos trabalhos virtuais.

No capítulo 3 mostra-se a discretização por elementos finitos, e os elementos que serão utilizados para se implementar o estimador de erro, assim como as funções de forma desses elementos e suas derivadas. Também é apresentada a formulação para obtenção das matrizes de rigidez dos elementos, que serão isoparamétricos. Os pontos de integração para os elementos propostos são evidenciados assim como a relação entre coordenadas globais e locais. São equacionados também os campos de deformações específicas e o de tensões para esses elementos, que serão utilizados no capítulo 4.

No capítulo 4 são mostrados os equacionamentos para a estimativa do erro em norma de energia, salto de tensões e o método pelo qual o pacote comercial Ansys avalia a norma do erro. É descrito também a formulação do recuperador de tensão nodal, média aritmética simples conforme Ansys, e segundo ZZ, a média ponderada pelas áreas dos elementos que compartilham um mesmo nó, e é proposta uma nova formulação para recuperação de tensões baseada em uma média ponderada, onde a ponderação é um produto de áreas. A obtenção das tensões melhoradas usando interpolação pelas funções de forma, para os três tipos de elementos propostos

também é mostrada. Finalmente o estimador de erro e a descrição da técnica proposta por Zienkiewicz/Zhu para refinamentos e adaptatividade são apresentados.

No capítulo 5 são colocados alguns exemplos nos quais são usados os estimadores de erros implementados nesse trabalho com o objetivo de estimar o percentual de erro por elemento e o percentual de erro global e a efetividade dos estimadores implementados.

No capítulo 6 apresenta-se as conclusões do presente trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros nessa área de pesquisa.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES DE ELASTICIDADE LINEAR BIDIMENSIONAL

2.1-Introdução:

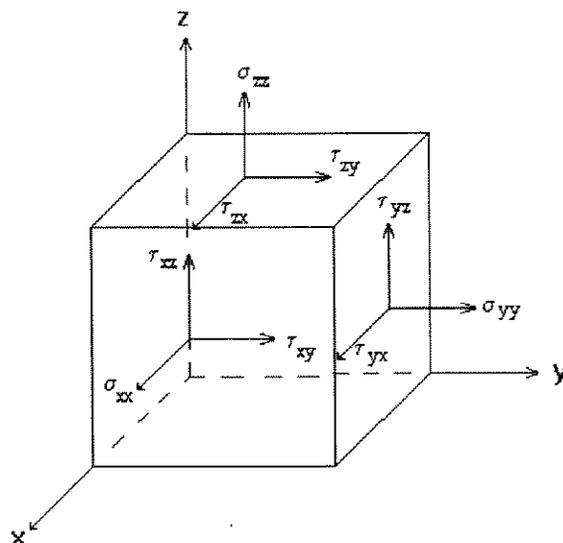
Neste capítulo são apresentadas as equações básicas da elasticidade, considerando o caso de pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

A modelagem é baseada nas hipóteses de material homogêneo e isotrópico sendo que os esforços não ultrapassam o regime elástico, isto é, o material é suposto perfeitamente linear elástico.

São apresentadas as equações para o estado geral de tensões e para o estado plano de tensões. Às equações da elasticidade é finalmente aplicado o princípio dos trabalhos virtuais a fim de se obter uma expressão para o equilíbrio do sistema.

2.2-Estado Geral de Tensão

Considera-se um elemento infinitesimal do interior de um corpo e supõe-se que este esteja submetido a um estado geral de tensão, conforme mostrado na Figura (2.1), [TIMOSHENKO/GOODIER,1980]



**Figura 2.1-As seis componentes de tensão atuando num ponto interior do corpo.
(Estado geral de solitação)**

As tensões normais (σ) são responsáveis pelas deformações específicas (ϵ) e as tensões tangenciais (τ), ou tensões de cisalhamento correspondem às deformações angulares (γ) ou distorções.

Levando-se em consideração as hipóteses adotadas em relação ao material, (homogêneo, isotrópico e perfeitamente elástico), de acordo com a lei de Hooke, as deformações específicas e distorções são dadas por

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] \quad (2.1)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right] \quad (2.2)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] \quad (2.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \quad (2.5)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{xz}}{G} \frac{2(1+\nu)}{E} \quad (2.6)$$

onde:

- σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{zz} : tensões normais aos respectivos planos
 τ_{xy}, τ_{yx} e τ_{zx} : tensões tangenciais aos respectivos planos
 ϵ_x, ϵ_y e ϵ_z : deformações específicas longitudinais nas direções dos eixos
 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$: deformações angulares

As equações (2.1) a (2.6) definem a Lei de Hooke generalizada e caracterizam o estado de deformação específica em qualquer ponto do material.

De forma matricial as equações (2.1) a (2.6) tornam-se

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

e de forma compacta a equação (2.7) pode ser escrita da seguinte forma

$$\{\epsilon\} = [C] \{\sigma\} \quad (2.8)$$

onde:

- $\{\epsilon\}$: Vetor das componentes das deformações específicas e distorções do ponto.
 $[C]$: Matriz quadrada das constantes elásticas do material.
 $\{\sigma\}$: Vetor das componentes de tensões no sistema (x , y , z)

A equação (2.8) pode ser formulada para as tensões, tem-se então:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.9)$$

sendo:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1-2\nu}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1-2\nu}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1-2\nu}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

2.3 - Estado Plano de Tensão

A figura (2.2) mostra um conjunto de forças aplicadas no contorno de uma chapa fina. Se essas forças estão distribuídas uniformemente ao longo da espessura e são paralelas ao plano da chapa, as componentes de tensão σ_z , τ_{yz} e τ_{zx} são nulas em ambas as faces da chapa e pode-se admitir que são nulas também no interior da chapa. O estado de tensão é então especificado somente por σ_x , σ_y e τ_{xy} e é denominado de estado plano de tensão.

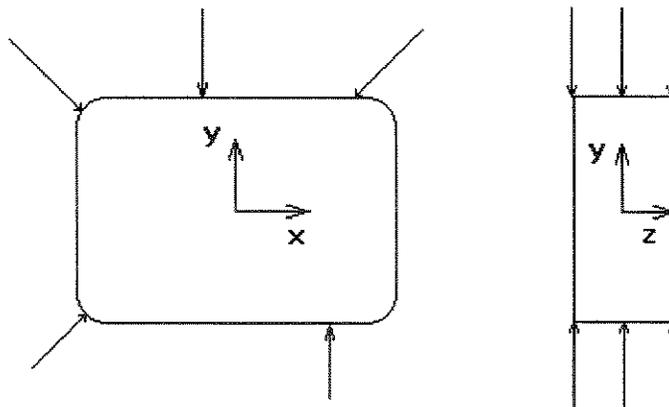


Figura 2.2-Placa fina sujeita à forças coplanares

Na figura (2.3) é representado então um elemento diferencial de um corpo que esteja submetido a um estado plano de tensão com suas respectivas componentes σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} .

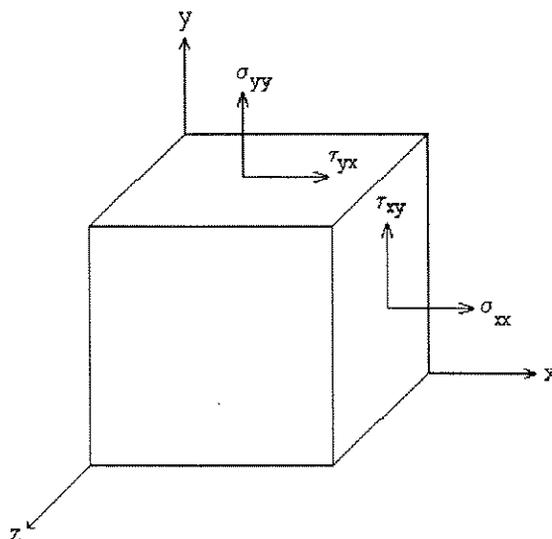


Figura 2.3-As três componentes de tensão (Estado Plano de tensão)

Para este caso as equações (2.1) a (2.6) tornam-se:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \quad (2.13)$$

pois:

$$\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

De forma matricial as equações (2.11) a (2.13) tornam-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

ou de forma compacta:

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (2.15)$$

onde:

$\{\varepsilon\}$: Vetor das componentes das deformações específicas e distorção no ponto.

$[C]$: Matriz quadrada das constantes elásticas do material.

$\{\sigma\}$: Vetor das componentes de tensões atuantes nos planos x,y,z.

Formulando a equação (2.15) para as tensões fica:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.16)$$

2.4 - Relação entre Deformações e Deslocamentos-Modelo Cinemático

Considera-se um corpo elástico qualquer, em equilíbrio, e imagina-se um ponto (P) no seu interior, segundo esquema apresentado na Figura (2.4).

Deseja-se neste ítem, mostrar o modelo cinemático que governa as relações entre os deslocamentos e deformações, definindo-se os padrões de movimento dos corpos.

Pela ação do carregamento $\{F\}$, o ponto (P) sofre um deslocamento e ocupa uma nova posição (P'). O deslocamento PP' é uma função das variáveis x, y, z. Por outro lado, as componentes destes deslocamentos, segundo os eixos x, y e z são também funções dessas variáveis. Assim chamam-se essas componentes de

$$u = u(x,y,z) \quad (2.17)$$

$$v = v(x,y,z) \quad (2.18)$$

$$w = w(x,y,z) \quad (2.19)$$

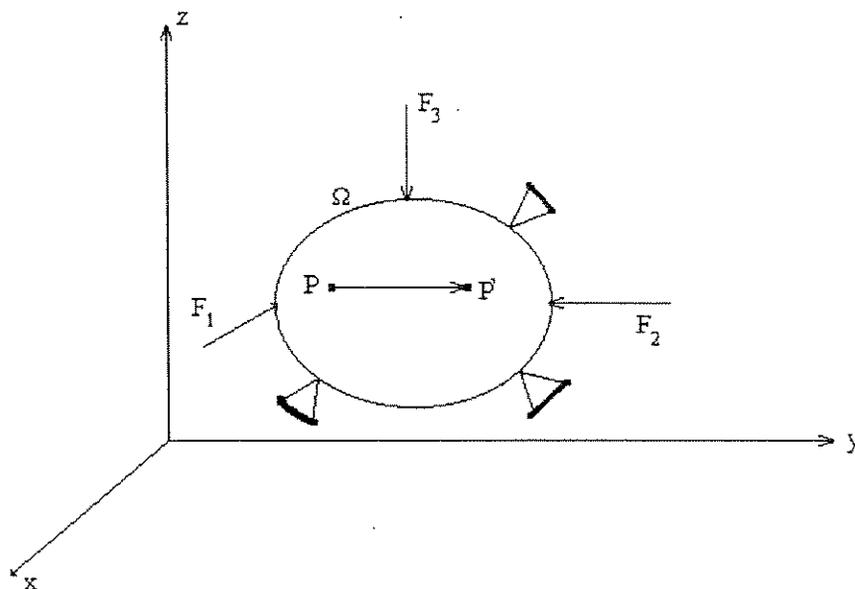


Figura 2.4- Ponto "P" no interior de um corpo elástico submetido à forças externas

Considera-se agora um paralelepípedo infinitesimal, de lados d_x , d_y e d_z , apresentado na Figura (2.5). Após o carregamento, o ponto (P) passa a ocupar a posição (P_1) cuja projeção no plano xy está sendo representado por (P'). Para melhor compreensão amplia-se o que ocorre no plano xy, e de acordo com a figura (2.6). A deformação específica (ϵ_{xx}) na direção x será:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.20)$$

na direção y:

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.21)$$

e na direção z:

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.22)$$

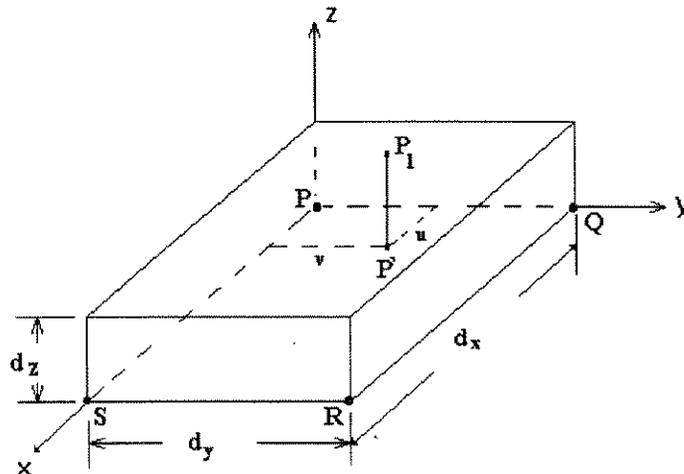


Figura 2.5-Ponto "P" de um paralelepípedo de dimensões infinitesimais dx,dy,dz

Para a determinação das distorções apresentadas no plano xy, considera-se a Figura (2.6). A distorção é dada pela soma dos ângulos γ_1 e γ_2 , indicando especificamente a variação dos ângulos $\widehat{Q\hat{P}S}$ e $\widehat{R\hat{Q}P}$.

Então:

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 \quad (2.23)$$

As dimensões infinitesimais (d_u) e (d_v) nas direções y e x, são dadas respectivamente por:

$$d_u = \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (2.24)$$

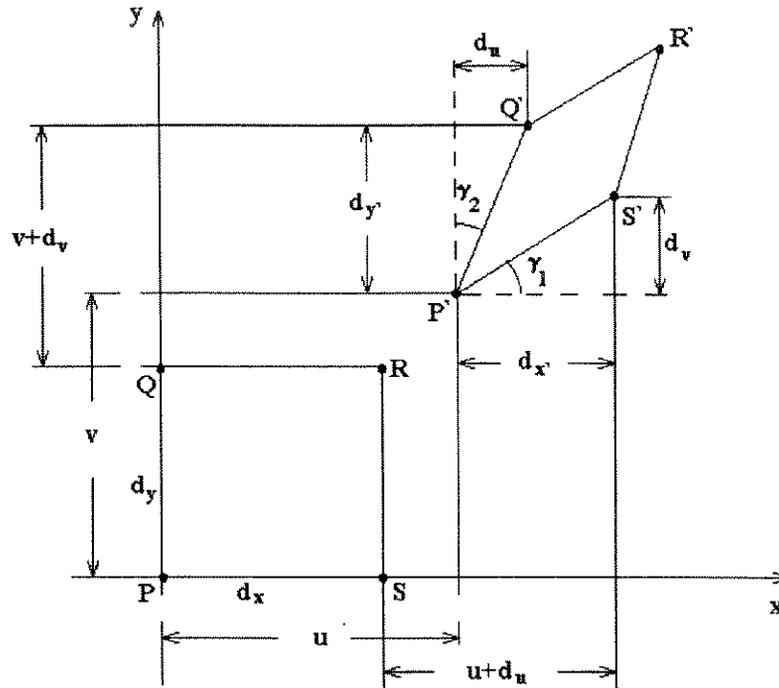


Figura 2.6-Deformação no plano x-y do ponto "P"

$$d_v = \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (2.25)$$

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)} \quad (2.26)$$

mas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_{xx} \quad (2.27)$$

onde ϵ_{xx} é muito pequeno em relação à unidade,

então:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.28)$$

Analogamente acha-se a tangente de γ_2 por:

$$\operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \epsilon_{yy}} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.29)$$

As deformações específicas são pequenas e pode-se aproximar as tangentes de γ_1 e γ_2 pelos próprios ângulos, ou seja:

$$\gamma_1 \cong \operatorname{tg}\gamma_1 \quad (2.30)$$

$$\gamma_2 \cong \operatorname{tg}\gamma_2 \quad (2.31)$$

Outra consideração feita é que as deformações específicas ϵ_{xx} e ϵ_{yy} são muito pequenas quando comparadas com a unidade, podendo-se aproximar o denominador da equação (2.29) igual a unidade, então, conforme a equação (2.23) a distorção no plano x-y será:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.32)$$

Fazendo o mesmo procedimento para os plano x-z e y-z as distorções apresentadas são respectivamente:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.33)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.34)$$

As equações para as deformações específicas e distorções constituem o modelo cinemático do problema, que neste caso é limitado a pequenos deslocamentos e pequenas deformações. Na forma matricial o modelo cinemático pode ser dado por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

A equação (2.35) pode ser escrita de forma compacta através de:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} \quad (2.36)$$

onde:

$\{\varepsilon\}$: Vetor das componentes das deformações específicas no ponto

$[L]$: Operador Diferencial

$\{u\}$: Vetor coluna com as componentes de deslocamento no ponto

Considerando as hipóteses de estado plano de tensão, o modelo cinemático pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

A expressão (2.37) será usada para a construção do modelo estudado neste trabalho.

2.5- Equações Diferenciais de Equilíbrio

Com o objetivo de se escrever as condições de equilíbrio em sua forma diferencial, usa-se uma formulação diferencial clássica.

Considere o paralelepípedo infinitesimal de arestas d_x , d_y e d_z , apresentado na Figura (2.7), onde as componentes X_v, Y_v, Z_v são forças por unidade de volume, e estão aplicadas no centro de gravidade deste elemento. Nesse paralelepípedo, são conhecidas as tensões nas faces definidas pelos planos coordenados e as tensões em faces situadas em planos distantes de dx , dy e dz .

Para condição de equilíbrio à translação do elemento deve-se ter:

$$\sum F_x = 0 \quad (2.38)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (2.39)$$

$$\sum F_z = 0 \quad (2.40)$$

Aplicando-se a equação (2.38) tem-se:

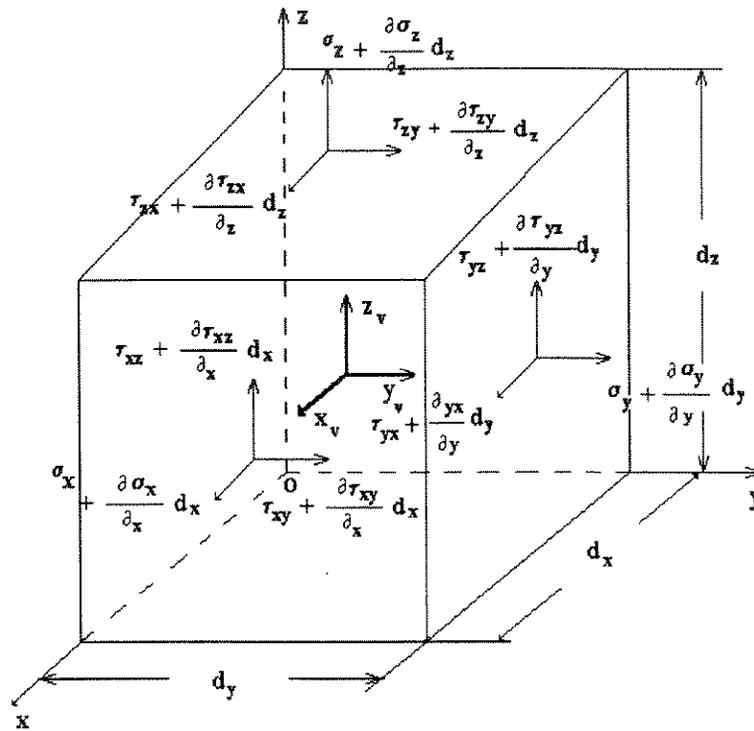


Figura 2.7-Equilíbrio das forças internas e externas num paralelepípedo de dimensões infinitesimais

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_{xx} dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X_v dx dy dz = 0 \quad (2.41)$$

Distribuindo-se a equação (2.41) e fazendo-se a soma dos termos semelhantes, obtém-se:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz + X_v dx dy dz = 0 \quad (2.42)$$

dividindo-se a equação (2.42) por $dx dy dz$ tem-se finalmente:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X_v = 0 \quad (2.43)$$

A equação (2.43) é a condição de equilíbrio à translação na direção do eixo x.

Usando-se o mesmo procedimento para $\sum F_y = 0$ e $\sum F_z = 0$, tem-se respectivamente:

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + Y_v = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z_v = 0 \quad (2.45)$$

As equações (2.43, 2.44 e 2.45) devem ser satisfeitas em todos os pontos ao longo do corpo elástico. No contorno, estas tensões devem estar em equilíbrio com as forças externas na superfície do sólido, cujas componentes são T_{nx} , T_{ny} e T_{nz} .

Considera-se o corpo sólido mostrado na figura (2.8) submetido ao sistema de forças indicado. Pretende-se determinar a tensão T_n atuante num ponto "O" do seu interior quando passa-se por ele o plano genérico (n), definido por sua normal, n, dada com relação ao sistema de referência por seus cossenos diretores: l, m, n, figura (2.9).

Sendo (A) a área da face BCD do tetraedro, tem-se que as áreas das demais faces são:

$$\text{Área da face OCD} = A.l$$

$$\text{Área da face OBC} = A.m$$

$$\text{Área da face OBD} = A.n$$

Será substituída a distribuição de tensão que existe em cada face por sua respectiva tensão média.

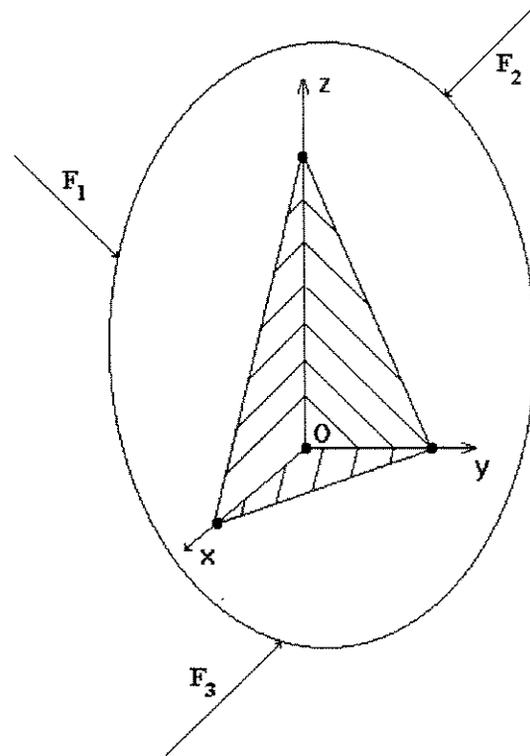


Figura 2.8-Componentes de tensão no ponto "O" de um corpo sólido

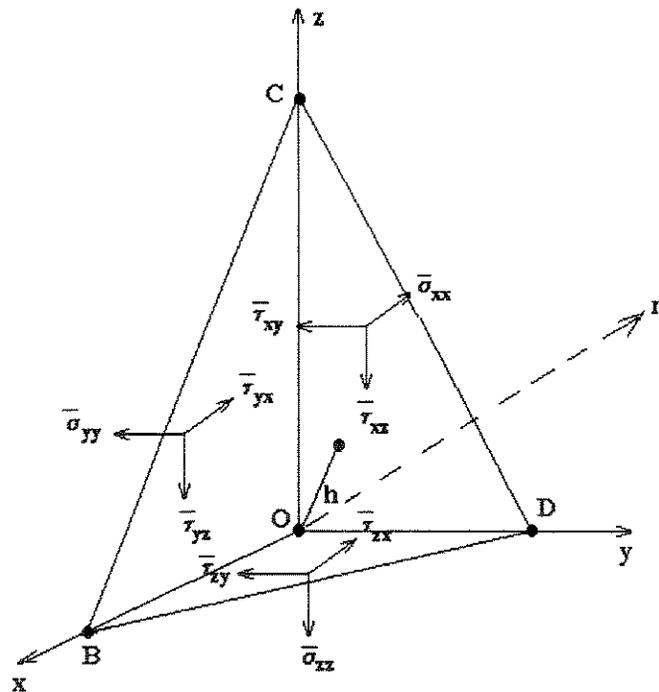


Figura 2.9-Tetraedro elementar no ponto "O" e suas componentes médias de tensão

Definindo-se as tensões médias nas faces, como sendo:

$$\{\bar{T}_x\} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{xx} \\ \bar{\tau}_{xy} \\ \bar{\tau}_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\{\bar{T}_y\} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{yy} \\ \bar{\tau}_{yx} \\ \bar{\tau}_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\{\bar{T}_z\} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{zz} \\ \bar{\tau}_{zx} \\ \bar{\tau}_{zy} \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

e na face definida pela normal $\{n\}$, face BDC, como sendo:

$$\{\bar{T}_n\} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_{nx} \\ \bar{T}_{ny} \\ \bar{T}_{nz} \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

Impondo-se a condição de equilíbrio das forças nas direções x,y e z em cada face do tetraedro, obtem-se para a direção x

$$\bar{T}_{nx} = \bar{\sigma}_{xx}l + \bar{\tau}_{yx}m + \bar{\tau}_{zx}n \quad (2.50)$$

Analogamente para as direções y e z tem-se:

$$\bar{T}_{ny} = \bar{\tau}_{xy}l + \bar{\sigma}_{yy}m + \bar{\tau}_{zy}n \quad (2.51)$$

$$\bar{T}_{nz} = \bar{\tau}_{xz}l + \bar{\tau}_{yz}m + \bar{\sigma}_{zz}n \quad (2.52)$$

Fazendo-se agora a altura (h) do tetraedro tender a zero, o plano (n) passará pelo ponto "O" e as tensões médias em cada face tendem às tensões no ponto, então, as equações (2.50) a (2.52) tornam-se:

$$T_{nx} = \sigma_{xx}l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n \quad (2.53)$$

$$T_{ny} = \tau_{xy}l + \sigma_{yy}m + \tau_{zy}n \quad (2.54)$$

$$T_{nz} = \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_{zz}n \quad (2.55)$$

De forma matricial as equações (2.53, 2.54 e 2.55) ficam:

$$\begin{Bmatrix} T_{nx} \\ T_{ny} \\ T_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

De forma compacta:

$$\{T_n\} = [T_\sigma]\{N\} \quad (2.57)$$

$\{T_n\}$:Vetor com as componentes de tensão no ponto "O" nas direções x,y,z, segundo o plano (n).

$[T_\sigma]$:Matriz com as componentes de tensão no ponto "O" segundo os três planos coordenados x,y,z

$\{N\}$:Vetor com os cossenos diretores da normal (n) do plano n.

Portanto, no contorno do corpo estas tensões devem estar em equilíbrio com as forças externas na superfície do corpo. Estas equações de equilíbrio são determinadas utilizando-se as relações (2.53, 2.54 e 2.55) substituindo-se T_{nx} , T_{ny} e T_{nz} pelas componentes S_x , S_y e S_z das forças de superfície. Logo:

$$S_x = \sigma_{xx}l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n \quad (2.58)$$

$$S_y = \tau_{xy}l + \sigma_{yy}m + \tau_{zy}n \quad (2.59)$$

$$S_z = \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_{zz}n \quad (2.60)$$

Assim sendo, as equações (2.58) a (2.60) constituem a condição de equilíbrio entre as forças externas e internas do sólido considerado.

2.6 - Princípio dos Trabalhos Virtuais

O objetivo deste item é o de escrever o problema de equilíbrio em uma forma integral, utilizando-se para isso o Princípio dos Trabalhos Virtuais [TIMOSHENKO/GOODIER,1980].

Considera-se um corpo sólido, elástico, submetido à forças de superfície {S} cujas componentes são S_x , S_y , S_z e ainda forças de volume {V} cujas componentes são V_x , V_y , V_z , segundo o sistema de referência x,y,z.

Se os deslocamentos u, v e w apresentados pelos pontos do corpo, em consequência do carregamento atuante, sofrerem respectivamente os incrementos δu , δv e δw , denominados de deslocamentos virtuais, o estado de deformação específica nestes pontos tornam-se:

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x} \quad (2.61)$$

$$\delta \epsilon_y = \frac{\partial \delta v}{\partial y} \quad (2.62)$$

$$\delta \epsilon_z = \frac{\partial \delta w}{\partial z} \quad (2.63)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \quad (2.64)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \quad (2.65)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \quad (2.66)$$

Estes incrementos de deformações específicas e distorções são as deformações específicas virtuais.

Como o corpo está em equilíbrio, os pontos situados sobre sua superfície externa satisfazem as equações (2.58) a (2.60) e os pontos do seu interior satisfazem as equações de equilíbrio apresentadas por (2.43) a (2.45).

Considerando as variações virtuais dos deslocamentos δu , δv e δw respectivamente, e fazendo-se a integração no volume (V), tem-se para cada direção, as seguintes expressões integrais:

$$\int_v \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X_v \right) \delta u dv = 0 \quad (2.67)$$

$$\int_v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + y_v \right) \delta v dv = 0 \quad (2.68)$$

$$\int_v \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + z_v \right) \delta w dv = 0 \quad (2.69)$$

Adicionando-se estas equações membro a membro obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_v \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta u dv + \int_v \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta u dv + \int_v \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta u dv + \int_v x_v \delta u dv + \\ & \int_v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \delta v dv + \int_v \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \delta v dv + \int_v \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \delta v dv + \int_v y_v \delta v dv + \\ & \int_v \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \delta w dv + \int_v \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \delta w dv + \int_v \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \delta w dv + \int_v z_v \delta w dv = 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

Aplicando-se aos termos da equação (2.70) a primeira Identidade de Green que estabelece:

$$\int_v \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x} dv = \int_A \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dA - \int_v \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dv \quad (2.71)$$

$$\int_v \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial y} dv = \int_A \phi \frac{\partial \psi}{\partial y} m dA - \int_v \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} dv \quad (2.72)$$

$$\int_v \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial z} dv = \int_A \phi \frac{\partial \psi}{\partial z} n dA - \int_v \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} dv \quad (2.73)$$

onde:

$\phi(x, y, z)$ e $\psi(x, y, z)$ são duas funções contínuas quaisquer, (A) é a área da superfície de contorno; l, m, n, são os cossenos diretores da normal à superfície de contorno. Então, para os membros da equação (2.70) tem-se:

$$\int_v \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta u dv = \int_A \sigma_{xx} \delta u l dA - \int_v \sigma_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dv \quad (2.74)$$

$$\int_v \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta u dv = \int_A \tau_{yx} \delta u m dA - \int_v \tau_{yx} \frac{\partial \delta u}{\partial y} dv \quad (2.75)$$

$$\int_v \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta u dv = \int_A \tau_{zx} \delta u n dA - \int_v \tau_{zx} \frac{\partial \delta u}{\partial z} dv \quad (2.76)$$

$$\int_v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \delta v dv = \int_A \tau_{xy} \delta v l dA - \int_v \tau_{xy} \frac{\partial \delta v}{\partial x} dv \quad (2.77)$$

$$\int_v \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \delta v dv = \int_A \sigma_{yy} \delta v m dA - \int_v \sigma_{yy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} dv \quad (2.78)$$

$$\int_v \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \delta v dv = \int_A \tau_{zy} \delta v n dA - \int_v \tau_{zy} \frac{\partial \delta v}{\partial z} dv \quad (2.79)$$

$$\int_v \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \delta w dv = \int_A \tau_{xz} \delta w l dA - \int_v \tau_{xz} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dv \quad (2.80)$$

$$\int_v \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \delta w dv = \int_A \tau_{yz} \delta w m dA - \int_v \tau_{yz} \frac{\partial \delta w}{\partial y} dv \quad (2.81)$$

$$\int_v \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \delta w dv = \int_A \sigma_{zz} \delta w n dA - \int_v \sigma_{zz} \frac{\partial \delta w}{\partial z} dv \quad (2.82)$$

Substituindo-se os termos equivalentes na equação (2.70) e separando-se os termos em área dos termos em volume, obtém-se a seguinte forma integral:

$$\begin{aligned}
& \int_A \sigma_{xx} \delta u l dA + \int_A \tau_{yx} \delta u m dA + \int_A \tau_{zx} \delta u n dA + \int_A \tau_{xy} \delta v l dA + \int_A \sigma_{yy} \delta v m dA + \\
& + \int_A \tau_{zy} \delta v n dA + \int_A \tau_{xz} \delta w l dA + \int_A \tau_{yz} \delta w m dA + \int_A \sigma_{zz} \delta w n dA = \int_v \sigma_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dv + \\
& + \int_v \tau_{yx} \frac{\partial \delta u}{\partial y} dv + \int_v \tau_{zx} \frac{\partial \delta u}{\partial z} dv + \int_v \tau_{xy} \frac{\partial \delta v}{\partial x} dv + \int_v \sigma_{yy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} dv + \int_v \tau_{zy} \frac{\partial \delta v}{\partial z} dv + \\
& + \int_v \tau_{xz} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dv + \int_v \tau_{yz} \frac{\partial \delta w}{\partial y} dv + \int_v \sigma_{zz} \frac{\partial \delta w}{\partial z} dv
\end{aligned} \tag{2.83}$$

que pode ser reescrita na seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& \int_A \left[(\sigma_{xx} l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n) \delta u + (\tau_{xy} l + \sigma_{yy} m + \tau_{zy} n) \delta v + (\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_{zz} n) \delta w \right] dA + \\
& + \int_v (x_v \delta u + y_v \delta v + z_v \delta w) dv = \int_v \left[\left(\sigma_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial \delta w}{\partial z} \right) + \right. \\
& \left. + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial z} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial z} \right) \right] dv
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Substituindo-se as equações (2.61) a (2.66) na equação (2.84) chega-se à seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \int_A (S_x \delta u + S_y \delta v + S_z \delta w) dA + \int_v (V_x \delta u + V_y \delta v + V_z \delta w) dv = \\
& \int_v (\sigma_{xx} \delta \epsilon_x + \sigma_{yy} \delta \epsilon_y + \sigma_{zz} \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dv
\end{aligned} \tag{2.85}$$

O primeiro termo do lado esquerdo da equação (2.85) é o trabalho virtual executado pelas forças de superfície, o segundo termo é o trabalho virtual executado pelas forças de volume. O termo do lado direito é a energia de deformação virtual armazenada no corpo.

Substituindo-se os vetores $\{S\}$, $\{V\}$, $\{\delta u\}$, $\{\sigma\}$ e $\{\delta \epsilon\}$ na equação (2.85) tem-se:

$$\int_A \{\delta u\}^T \{S\} dA + \int_v \{\delta u\}^T \{V\} dv = \int_v \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} dv \quad (2.86)$$

O lado esquerdo da equação (2.86) é o trabalho virtual (δW) realizado pelo carregamento externo, em consequência dos deslocamentos virtuais (δU). O termo do lado direito constitui a energia de deformação virtual armazenada no corpo.

Escrevendo a equação (2.86) de forma reduzida fica:

$$\delta W = \delta U \quad (2.87)$$

A equação (2.87) representa o princípio dos trabalhos virtuais, que pode ser enunciado da seguinte forma: [TIMOSHENKO/GOODIER, 1980].

“Se um corpo elástico está em equilíbrio, o trabalho virtual executado pelo carregamento externo em consequência de qualquer deslocamento virtual é igual a energia de deformação virtual armazenada no corpo”

A expressão (2.87) corresponde à condição de equilíbrio do sistema e será utilizada como base para a formulação de soluções aproximadas baseadas no método dos Elementos Finitos.

CAPÍTULO 3

APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

3.1 - Introdução:

No contexto dos problemas da Elastoestática bidimensional, o MEF consiste basicamente em aproximar o comportamento de um meio contínuo, através de sua discretização, por um número finito de elementos. A partir da definição geométrica de uma malha, o meio contínuo é dividido em um número finito de elementos, como mostra a figura (3.1). Esses elementos são imaginados como interconectados através de um número discreto de pontos nodais, chamados de nós, situados em suas fronteiras. Os deslocamentos destes pontos nodais são os parâmetros básicos desconhecidos. Escolhe-se um conjunto de funções para definir, de uma maneira única, o campo de deslocamento no domínio de cada elemento, em termos dos deslocamentos nodais, e aplica-se esta aproximação nas equações da Elasticidade definidas no capítulo 2.

A formulação discreta obtida, pode, então, ser implementada em um código computacional, e utilizada para simulação de problemas com geometria e condições de contorno arbitrários.

Neste capítulo, embora o tema seja bastante clássico, é feita uma breve descrição da aplicação do MEF nas equações da Elastoestática, caracterizando o aspecto didático deste texto.

3.2-Aproximação Nodal:

Se u_i , v_i , e w_i , são os deslocamentos apresentados por um nó (i), genérico, do elemento (e), os deslocamentos u , v e w dos pontos do seu interior podem ser interpolados, a partir dos deslocamentos nodais através das seguintes equações (3.1) a (3.3), [DHATT/TOUZOT,1984]

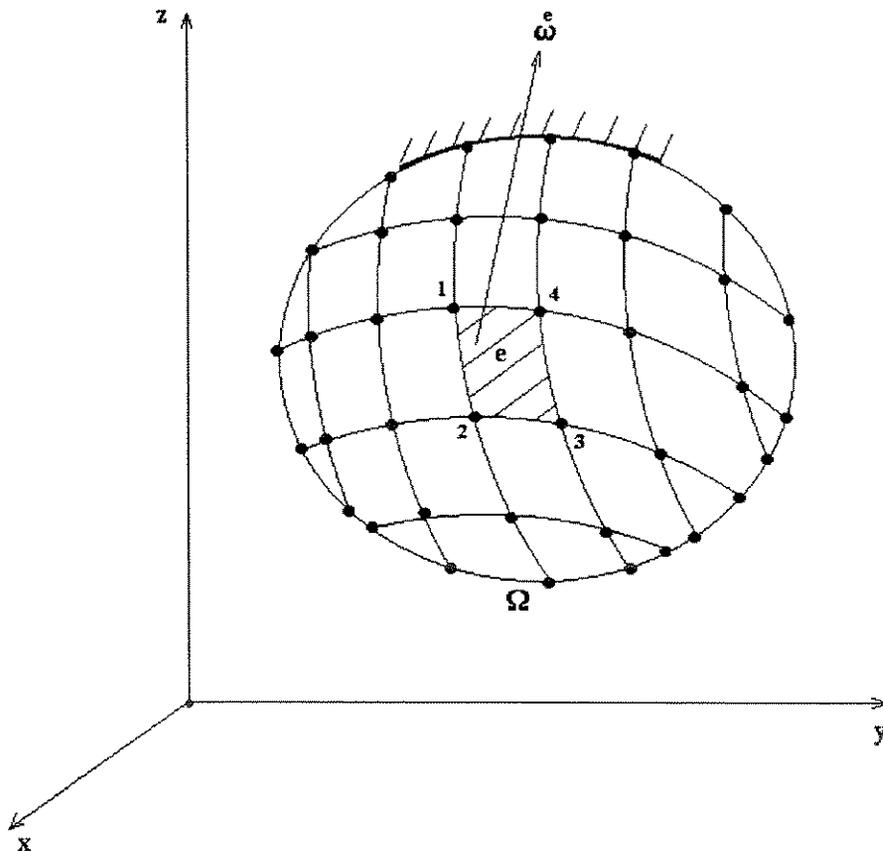


Figura 3.1-Domínio discretizado por Elementos Finitos

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) u_i \quad (3.1)$$

$$v(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) v_i \quad (3.2)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) w_i \quad (3.3)$$

onde:

u, v, w : são os deslocamentos dos pontos do domínio de cada elemento

u_i, v_i, w_i :são os deslocamentos nodais do nó (i)

$N_i(x, y, z)$:são funções de interpolação.

n :é o número de nós do elemento.

As funções de interpolação (N_i) usadas nesse trabalho, são aplicadas em cada sub-domínio e satisfazem a seguinte condição:

Ter valor unitário no nó (i) e valor nulo nos demais nós do elemento.

[DHATT/TOUZOT, 1984]. Assim:

$$N_i(x_j, y_j, z_j) = 1 \quad \text{para } i=j \quad (3.4)$$

$$N_i(x_j, y_j, z_j) = 0, \quad \text{para } i \neq j \quad (3.5)$$

Levando as propriedades das equações (3.4 e 3.5) na equação (3.1) pode-se concluir que :

$$u(x_i, y_i, z_i) = u_i \quad (3.6)$$

$$v(x_i, y_i, z_i) = v_i \quad (3.7)$$

$$w(x_i, y_i, z_i) = w_i \quad (3.8)$$

Fisicamente, isto significa que os valores do deslocamento u, v, w , nos nós (i) representam exatamente os valores numéricos dos deslocamentos u_i, v_i, w_i , o que caracteriza a aproximação do tipo nodal. Outras aproximações são também utilizadas no MEF, todavia não serão aqui detalhadas.

Devido ao fato de serem fáceis de serem integradas e derivadas, as funções de interpolação, de uma maneira geral, são tomadas como polinômios, e definem o campo de deslocamento dentro de cada elemento em termos de seus deslocamentos nodais. Se este campo é definido adequadamente, então, verifica-se a convergência da aproximação utilizada para o resultado correto.

3.3 - Funções de Interpolação

Através das funções de interpolação pode-se aproximar uma grandeza física ϕ , no interior de um elemento. Essa grandeza física pode ser ,deslocamento, força, temperatura, etc. Nesse trabalho, será atribuído à grandeza física ϕ o significado de deslocamento, e serão utilizados elementos triangulares e quadrilaterais com interpolação linear e elementos triangulares com interpolação quadrática.

Será adotado o referencial local (ξ,η) para os dois tipos de elementos: triangular e quadrilateral. A figura (3.2) mostra esse referencial, assim como os nós (i,j,k) . A relação entre o referencial global e local será tratada usando-se a teoria das transformações isoparamétricas indicada no item 3.5

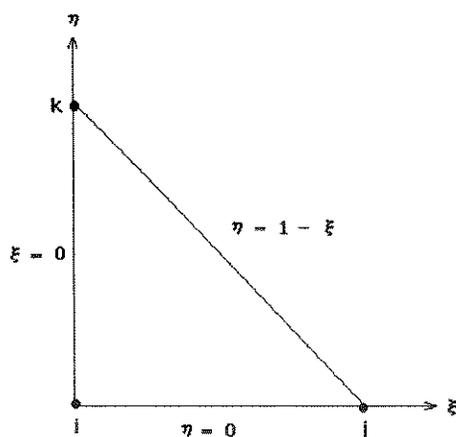


Figura 3.2-Elemento triangular linear, referencial (ξ,η)

As funções de forma para esse elemento segundo [DHATT/TOUZOT,1984] são dadas por:

$$N_i = 1 - \xi - \eta \quad (3.9)$$

$$N_j = \xi \quad (3.10)$$

$$N_k = \eta \quad (3.11)$$

A figura (3.3) mostra um elemento triangular quadrático (6 nós) no referencial local (ξ, η) , e nesse caso as funções de interpolação podem ser dadas por [DHATT/TOUZOT,1984]:

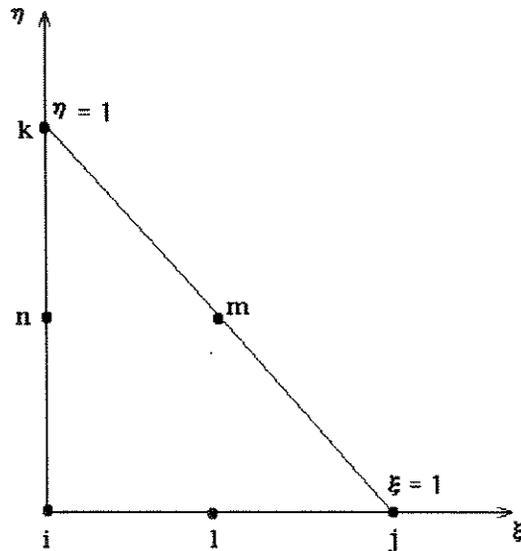


Figura 3.3-Elemento triangular quadrático, referencial local

$$N_i(\xi, \eta) = -\alpha(1 - 2\alpha) \quad (3.12)$$

$$N_j(\xi, \eta) = -\xi(1 - 2\xi) \quad (3.13)$$

$$N_k(\xi, \eta) = -\eta(1 - 2\eta) \quad (3.14)$$

$$N_l(\xi, \eta) = 4\xi\alpha \quad (3.15)$$

$$N_m(\xi, \eta) = 4\xi\eta \quad (3.16)$$

$$N_n(\xi, \eta) = 4\eta\alpha \quad (3.17)$$

onde

$$\alpha = 1 - \xi - \eta \quad (3.18)$$

A figura (3.4) mostra um elemento quadrilateral linear (4 nós) no referencial (ξ, η) cujas funções de forma são dadas por [DHATT/TOUZOT,1984]:

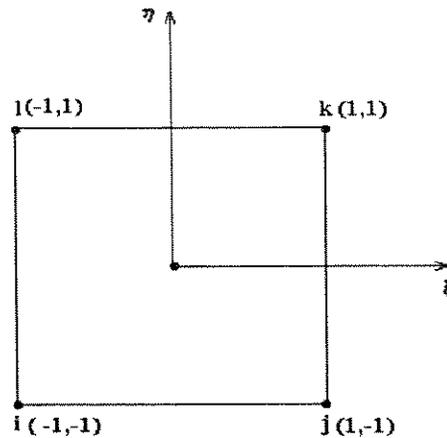


Figura 3.4-Elemento quadrilateral bilinear, referencial local

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (3.19)$$

$$N_j(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (3.20)$$

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (3.21)$$

$$N_l(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (3.22)$$

As funções de forma adotadas para representar o campo de deslocamento do elemento devem satisfazer os seguintes critérios de convergência:

Deve existir o termo constante para que possibilite o tratamento do estado de deformação específico nulo, como consequência do movimento de corpo rígido.

Deve existir o polinômio completo de primeiro grau para que possibilite o tratamento do estado de deformação específica constante, [DHATT/TOUZOT,1984].

As funções de deslocamento escolhidas devem ser tais que as deformações específicas, (derivadas de primeira ordem da função deslocamento), na interface entre elementos, sejam finitas. Este fato implica que as funções de interpolação, naturalmente contínuas dentro do elemento, sejam também contínuas na interface entre elementos.

A discretização adotada nesse ítem pode então ser aplicada às equações da Elastoestática definindo-se as Matrizes de Rigidez e Forças Nodais do problema.

3.4 - Matriz de Rigidez e Força Nodal Equivalente dos Elementos

Neste ítem, usando-se as funções de interpolação definidas em 3.3, determinam-se as matrizes de Rigidez e Força nodal equivalente para o caso da Elastoestática linear, aplicando-se a formulação integral em energia definida no capítulo 2.

Se $\{a_i\}$ é o vetor constituído dos deslocamentos apresentados por um nó (i) genérico,

$$\{a_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

e $\{u(x,y,z)\}$ o vetor constituído dos deslocamentos u,v,w apresentados pelos pontos do elemento, então, as equações (3.1,3.2 e 3.3) podem ser escritas na forma matricial:

$$\{u(x,y,z)\} = \sum_{i=1}^n [N_i(x,y,z)] \{a_i\} \quad (3.24)$$

ou de maneira simplificada:

$$\{u\} = [N]\{a\} \quad (3.25)$$

onde:

$\{u\}$:Vetor dos deslocamentos dos pontos do elemento.

$[N]$:Matriz das funções de forma associadas a cada um dos nós do elemento.

$\{a\}$:Vetor dos deslocamentos nodais do elemento.

Observa-se, nesse caso, que as funções de forma estão definidas no espaço real (x,y) . A transformação para o referencial (ξ, η) , usando-se as funções de forma definidas anteriormente será efetuada no próximo item.

Mantendo-se as funções de forma no referencial (x,y) , tem-se o campo de deslocamento do elemento interpolado através das funções de forma associadas a cada nó desse elemento e dos deslocamentos nodais. Tendo-se o campo de deslocamentos, pode se determinar o estado de deformação específica dentro do elemento, em termos de seus deslocamentos nodais.

Substituindo a equação (3.25) na equação (2.40) pode-se escrever o vetor das deformações da seguinte maneira:

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{a\} \quad (3.26)$$

Fazendo-se o produto da matriz $[L]$ pela matriz $[N]$ igual a $[B]$ a equação (3.26) torna-se:

$$\{\varepsilon\} = [B]_{x,y}\{a\} \quad (3.27)$$

sendo $[B]$ a matriz das derivadas das funções de forma que relaciona as deformações específicas e distorções com os deslocamentos nodais no elemento.

A partir das equações (3.27) e (2.12) pode-se escrever:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{a\} \quad (3.28)$$

A equação (3.28) relaciona o estado de tensão dentro do elemento em função das constantes elásticas do material e do estado de deformação específica em termos dos deslocamentos nodais.

Se os deslocamentos nodais $\{a\}$ sofrerem um incremento, $\{\delta a\}$ o campo de deslocamento $\{u\}$ dentro de cada elemento sofrerá um incremento $\{\delta u\}$, então, a equação (3.25) torna-se:

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta a\} \quad (3.29)$$

e se o estado de deformação específica sofrer um incremento $\{\delta \epsilon\}$, a equação (3.27) torna-se:

$$\{\delta \epsilon\} = [B]\{\delta a\} \quad (3.30)$$

Substituindo as equações (3.29) e (3.30) na equação (2.96) que estabelece o princípio dos trabalhos virtuais, [TIMOSHENKO/GOODIER, 1980], tem-se:

$$\int_A \{\delta a\}^T [N]^T \{S\} dA + \int_v \{\delta a\}^T [N]^T \{V\} dv = \int_v \{\delta a\}^T [B]^T \{\sigma\} dv \quad (3.31)$$

Colocando fora da integral os termos $\{\delta a\}^T$ que são as variações arbitrárias dos parâmetros nodais da aproximação, e substituindo a equação (3.28) em (3.31) fica:-

$$\{\delta a\}^T \int_A [N]^T \{S\} dA + \{\delta a\}^T \int_v [N]^T \{V\} dv = \{\delta a\}^T \int_v [B]^T [D][B] dv \{a\} \quad (3.32)$$

Evidenciando o termo $\{\delta a\}^T$ de (3.32) obtém-se:

$$\int_A [N]^T \{S\} dA + \int_v [N]^T \{V\} dv = \int_v [B]^T [D][B] dv \{a\} \quad (3.33)$$

O primeiro termo do lado esquerdo da equação (3.33) corresponde ao vetor de carga $\{f_s^e\}$ atuando no elemento que representa a ação das forças de superfície. Logo:

$$\{f_s^e\} = \int_A [N]^T \{S\} dA \quad (3.34)$$

onde:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

e S_x , S_y , S_z são forças de superfície aplicadas às faces dos elementos.

O segundo termo do lado esquerdo da equação (3.33) corresponde ao vetor de carga $\{f_v^e\}$ atuando no elemento que representa a ação das forças de volume. Então:

$$\{f_v^e\} = \int_v [N]^T \{V\} dv \quad (3.36)$$

onde:

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

e V_x , V_y , V_z são forças de volume aplicadas no domínio dos elementos

No termo do lado direito da equação (3.33) aparece uma matriz quadrada, simétrica, denotada por $[K^e]$ matriz de Rigidez do elemento. Então:

$$[K^e] = \int_v [B]^T [D] [B] dv \quad (3.38)$$

De forma compacta a equação (3.33) torna-se:

$$\{f_s\} + \{f_v\} = [K] \{a\} \quad (3.39)$$

Incorporando-se o vetor de carga $\{f_p^e\}$ dos esforços concentrados do lado esquerdo da equação (3.39) tem-se:

$$\{f_p^e\} + \{f_s^e\} + \{f_v^e\} = [K] \{a\} \quad (3.40)$$

Fazendo-se

$$\{f^e\} = \{f_p^e\} + \{f_s^e\} + \{f_v^e\} \quad (3.41)$$

e substituindo na equação (3.40) obtém-se:

$$\{f^e\} = [K^e] \{a\} \quad (3.42)$$

A equação (3.41) representa todos os carregamentos atuando simultaneamente num elemento. A equação (3.42) estabelece a relação a nível de elemento entre o vetor de carga, a matriz de rigidez e o vetor dos deslocamentos nodais.

O procedimento feito para um elemento pode ser estendido para todos os outros elementos do meio elástico discretizado, para tanto, adota-se uma numeração global de todos os nós do meio e identifica-se quais nós pertencem a quais elementos; estabelecendo-se assim a conectividade da malha dos elementos. Conhecendo-se a correspondência entre os nós do elemento e os nós do meio elástico discretizado, e utilizando-se o conceito de superposição, pode-se escrever a seguinte equação, [COOK/MALKUS/PLESHA, 1989]:

$$\{f\} = [K] \{a\} \quad (3.43)$$

onde:

$\{f\}$:Vetor de carga global.

$[K]$:Matriz de rigidez global do meio elástico discretizado.

$\{a\}$:Vetor dos deslocamentos nodais do meio elástico discretizado.

Tendo sido encontrados tanto o vetor de carga global como a matriz de rigidez global, e impondo-se as condições de contorno, pode-se resolver o sistema de equações dado pela equação (3.43) através de algum método numérico para resoluções de sistemas lineares. Nesse trabalho é adotado um método direto do tipo Gauss.

3.5- Elementos Isoparamétricos

A transformação entre o referencial local (ξ, η) e o referencial global é feita usando uma transformação paramétrica, [DHATT/TOUZOT,1984].

Da mesma forma que o campo de deslocamento de um elemento pode ser interpolado a partir das funções de forma de seus deslocamentos nodais, pode-se também interpolar a geometria do elemento a partir das funções de forma e de suas coordenadas nodais. Assim, a geometria de um elemento triangular linear de nós (i,j,k) no espaço bidimensional global (x,y) , figura (3.5), pode ser interpolado através das seguintes equações:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 \hat{N}_i(\xi, \eta) x_i \quad (3.44)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 \hat{N}_i(\xi, \eta) y_i \quad (3.45)$$

onde x_i, y_i são as coordenadas cartesianas globais de um nó (i) , genérico, e \hat{N}_i são as funções de geometria associadas ao nó (i) do elemento. Estas equações definem o mapeamento do espaço de referência (ξ, η) no espaço real (x,y) .

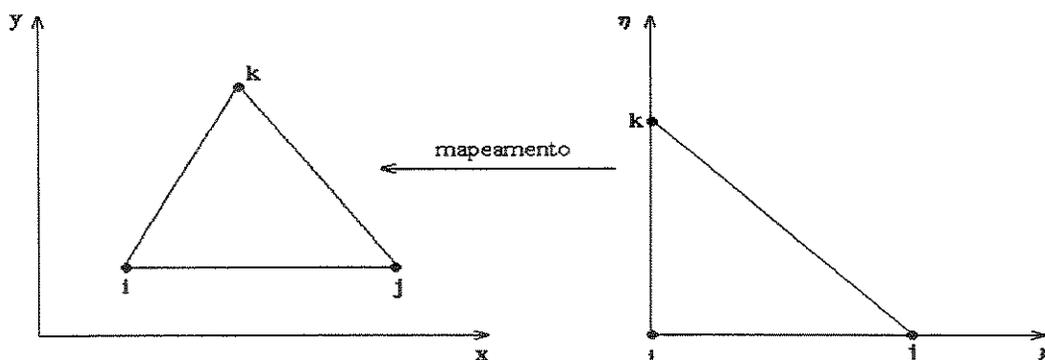


Figura 3.5 - Mapeamento do elemento triangular linear do referencial local para o global

Para elementos triangulares quadráticos (6 nós), figura (3.6)) usa-se as seguintes equações para interpolar-se a geometria dos elementos:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^6 \hat{N}_i(\xi, \eta) x_i \quad (3.46)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^6 \hat{N}_i(\xi, \eta) y_i \quad (3.47)$$

onde \hat{N}_i são as funções de geometria associadas ao elemento triangular quadrático, e x_i, y_i são as coordenadas cartesianas globais.

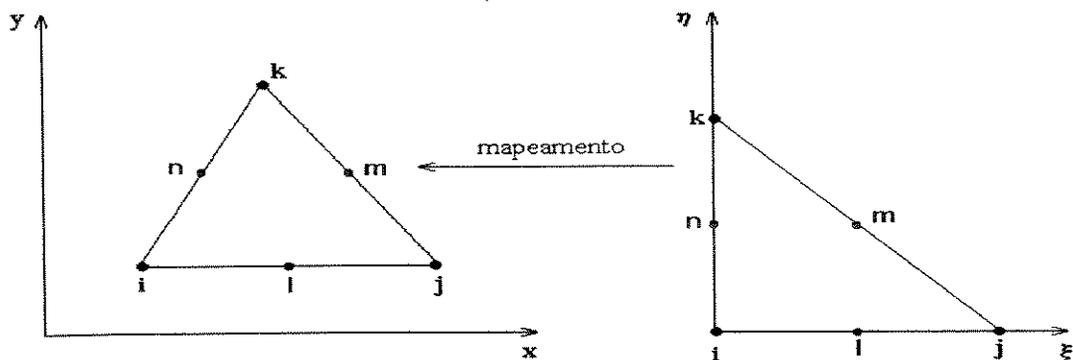


Figura 3.6 - Mapeamento do elemento triangular quadrático do referencial local para o global

Para elementos quadrilaterais lineares (4 nós), figura (3.7) usa-se as seguintes equações para interpolar-se a geometria do elemento:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \hat{N}_i(\xi, \eta) x_i \quad (3.48)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \hat{N}_i(\xi, \eta) y_i \quad (3.49)$$

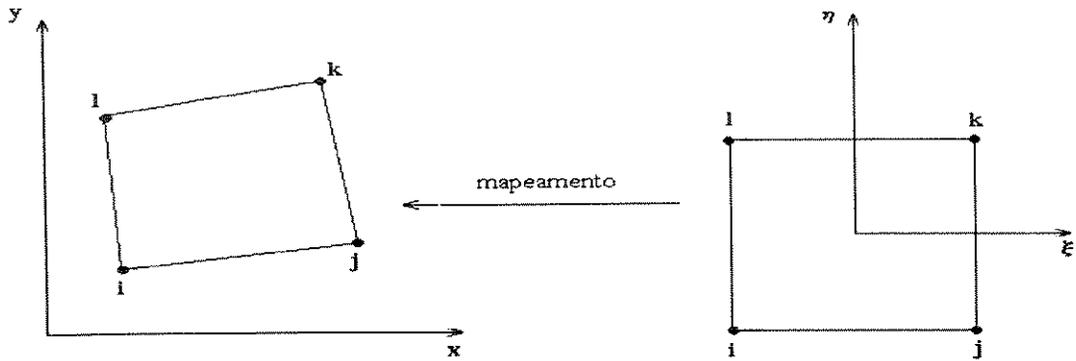


Figura 3.7-Mapeamento do elemento quadrilateral linear do referencial local para o global

Verifica-se que a cada ponto de coordenadas (ξ, η) no espaço bidimensional local, corresponde a um ponto de coordenadas (x, y) no espaço bidimensional global, conseguindo-se dessa forma um mapeamento entre os referenciais.

Nesse trabalho os elementos serão isoparamétricos, as funções de forma N_i para interpolar-se o campo de deslocamento serão as mesmas funções \hat{N}_i para interpolar-se a geometria do elemento, ou seja:

$$N_i(\xi, \eta) = \hat{N}_i(\xi, \eta) \quad (3.50)$$

A expressão geral para o cálculo da matriz de rigidez dos elementos finitos, dada em (3.38) envolve derivadas das funções de forma em relação às coordenadas globais (x, y) através da matriz de deformação $[B]$. Como as funções de interpolação estão expressas em coordenadas locais (ξ, η) deve-se usar uma relação entre o espaço global e o local. Para o estado plano de tensão o espaço global será (x, y) e o espaço local será (ξ, η) . Tal relação entre essas funções é conseguida através da regra da cadeia.

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (3.52)$$

As equações (3.51 e 3.52)) na forma matricial tornam-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

A matriz $[J]$ é denominada de matriz Jacobiana e é:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Assim, para se obter as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas globais (x,y) , deve-se inverter a matriz Jacobiana. Com $[J]^{-1}$ a equação (3.53) torna-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

Para o estado plano, e substituindo as equações (3.1,3.2 e 3.3)) na equação (3.55) obtém-se:

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Separando-se as derivadas das funções de forma das coordenadas (x,y) a equação (3.56) torna-se:-

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \cdot & \cdot \\ x_n & y_n \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

que será a forma prática adotada para o cálculo da Matriz Jacobiana da transformação.

Para usar-se a equação (3.38) em termos de coordenadas locais, deve-se ter o diferencial de volume (dv) também em termos desse referencial. Para tanto, utiliza-se a seguinte relação, [DHATT/TOUZOT, 1984]:

$$dv = \det[J] d\xi d\eta \quad (3.58)$$

Então a equação (3.38) que define a Matriz de Rigidez de um elemento, pode ser expressa no referencial isoparamétrico da seguinte maneira:

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \det[J] d\xi d\eta \quad (3.59)$$

A matriz de rigidez do elemento pode ser avaliada em termos de coordenadas locais, pois os limites de integração para ξ, η estão entre -1 e $+1$ e a matriz $[B]$, formada pelas derivadas das funções de forma, está em função de ξ, η e transformada pelos termos da inversa da matriz Jacobiana. O termo $\det[J]$ da equação (3.59) faz a transformação do diferencial de volume (dv), do espaço global (x, y), para o espaço local (ξ, η).

Nem sempre a matriz de rigidez do elemento, avaliada pela equação (3.59) pode ser efetuada analiticamente, desta forma, deve-se empregar técnicas numéricas de integração.

3.6-Integração Numérica e Avaliação das Matrizes Elementares

Mesmo sendo adotado o referencial local (ξ, η) para montar as matrizes do sistema de equações que regem os problemas de elementos finitos, nem sempre é possível determinar as

matrizes dos elementos de forma fechada. Torna-se necessário então, o uso de técnicas de integração numérica.

A quadratura de Gauss-Legendre pode ser utilizada para integrar funções de uma, duas, ou três variáveis. Para estado plano deseja-se resolver a integral do tipo:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.60)$$

que pode ser calculada numericamente através de dois somatórios, [DHATT/TOUZOT,1984]:

$$I = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} W_i W_j \psi(\xi_i, \eta_j) \quad (3.61)$$

onde n_1 e n_2 são os pontos de integração para as duas direções de coordenadas locais, ξ, η , respectivamente. W_i e W_j são os fatores de ponderação e dependem do número de pontos de integração, e $\psi(\xi_i, \eta_j)$ é função qualquer, integrando da equação (3.62).

O primeiro tipo de elemento utilizado nesse trabalho é o elemento triangular linear e utilizando a equação (3.38) para esses elementos, de espessura unitária, obtém-se:

$$[K^e] = \int_0^{1-x} \int_0^x [B]^T [D][B] \det[J] d\eta d\xi \quad (3.62)$$

As derivadas das funções de forma para elementos triangulares lineares são:

$$\frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}(1 - \xi - \eta) = -1 \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi) = 1 \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\eta) = 0 \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}(1 - \xi - \eta) = -1 \quad (3.66)$$

CAPÍTULO 4

ESTIMADORES DE ERROS

4.1-Introdução

Os métodos adaptativos de refinamentos de malhas (refinamentos r,p,h) vêm sendo utilizados em praticamente todos os campos de aplicação do MEF, análise linear, não linear, estática, dinâmica, etc. As formulações adaptativas envolvem a utilização de Estimadores de Erros para que sejam identificadas as regiões onde deve ser efetuado o refinamento. Na linha de trabalhos relacionados aos Estimadores de Erros é possível citar alguns autores que apresentam um número bastante grande de trabalhos. Autores tais como: Babuska, Szabo, Gago, Kelly, Zienkiewicz entre outros, possuem um vasto estudo relacionado ao cálculo e estimativas de erros.

Apresenta-se nesse capítulo o estudo referente aos Estimadores de Erros, o proposto por [Zienkiewicz/Zhu,1987] por ser um dos estimadores mais simples, de baixo custo computacional e de razoável precisão, o estimador em salto de tensão e o estimador similar ao [ZZ], conforme os pacotes comerciais Nastran e Ansys respectivamente. A implementação será feita para elementos triangulares lineares e quadráticos e quadrilaterais bilineares, com 3,6 e 4 nós respectivamente. Os elementos são isoparamétricos e é considerado problemas de estado plano de tensão.

$$\frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}(\xi) = 0 \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}(\eta) = 1 \quad (3.68)$$

Esses termos são constantes e podem ser colocados fora da integral, o que permite neste caso obter-se uma forma fechada para os termos da matriz de rigidez, assim a equação (3.62), considerando espessura unitária, tem-se:

$$[K^e] = [B]^T [D] [B] \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \det[J] d\xi d\eta \quad (3.69)$$

usando o resultado das equações (3.63 a 3.68) a matriz Jacobiana [J] fica:

$$[J] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

e o determinante da matriz Jacobiana é:

$$\det[J] = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (3.71)$$

e a matriz [B] é dada por:

$$[B] = [J]^{-1} [B_x] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & -(y_2 - y_1) \\ -(x_3 - x_1) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.71a)$$

Nota-se que o Jacobiano é o dobro da área do triângulo, cujas coordenadas são $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

Substituindo então $\det[J]=2A$ na equação (3.69) obtêm-se a seguinte forma fechada para a matriz de rigidez:

$$[K^e] = [B]^T [D] [B] A \quad (3.72)$$

A equação (3.72) expressa a matriz de rigidez para um elemento, triangular linear, em função da matriz das derivadas das funções de forma, da matriz das constantes elásticas do material e da área do elemento.

Para o caso dos elementos triangulares quadráticos, de espessura unitária, figura (3.8), a equação (3.38) torna-se:

$$[K^e] = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [B]^T [D] [B] \det[J] d\eta d\xi \quad (3.73)$$

Nota-se neste caso que as funções de interpolação são quadráticas e uma forma fechada para a equação (3.73) não é aplicável, então uma aproximação numérica faz-se necessária e pode ser dada por:

$$[K^e] \cong \sum_{i=1}^3 W_i \psi(\xi_i, \eta_i) \quad (3.74)$$

onde

$$\psi(\xi_i, \eta_i) = [B]^T [D] [B] |\det[J]| \quad (3.75)$$

A matriz das derivadas das funções de forma $[B]$, tendo em vista a definição das deformações em estado plano de tensão é dada, no referencial real, por:

$$[B(x, y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \dots & \dots \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Substituindo a equação (3.53) em (3.76) obtém-se a matriz [B] no referencial local (ξ, η) :

$$[B]_{\xi, \eta} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} a \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + b \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & a \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + b \frac{\partial N_j}{\partial \eta} & \dots & 0 \\ 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \dots & \vdots \\ c \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & a \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + b \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & c \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + d \frac{\partial N_j}{\partial \eta} & \dots & a \frac{\partial N_n}{\partial \xi} + b \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{3 \times 12} \quad (3.77)$$

onde: $a=J_{2,2}$; $b=-J_{1,2}$; $c=-J_{2,1}$; $d=J_{1,1}$

Neste caso, cada termo da matriz [B] é construído a partir das derivadas das funções de forma, dadas na tabela (3.1)

Tabela 3.1-Derivadas das funções de forma:Elemento triangular quadrático

Nós	$\frac{\partial N}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N}{\partial \eta}$
i	$1 - 4\alpha$	$1 - 4\alpha$
j	$-1 + 4\xi$	0
k	0	$-1 + 4\eta$
l	$4(\alpha - \xi)$	-4ξ
m	4η	4ξ
n	-4η	$4(\alpha - \eta)$

$$(\alpha = 1 - \xi - \eta)$$

Nota-se que os termos da matriz [B] não são constantes, então, torna-se necessário a integração numérica para avaliar-se a equação (3.77). A integração numérica é feita usando-se os pontos cujas coordenadas são: $(1/6, 1/6)$, $(2/3, 1/6)$ e $(1/6, 2/3)$, conforme mostrado na figura (3.8). Os pesos de ponderação correspondentes são neste caso iguais a $1/6$. Esses pontos são denominados pontos de Hammer, [DHATT/TOUZOT, 1984].

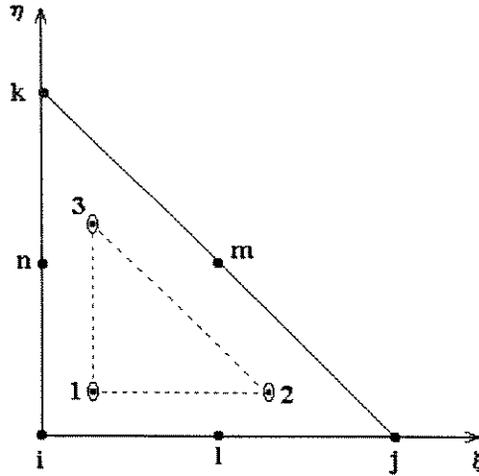


Figura 3.8-Três Pontos de Integração para Elemento Triangular Quadrático

O terceiro tipo de elemento usado nesse trabalho, são os elementos quadrilaterais bilineares.

Para esses elementos, figura (3.9) a equação (3.38) torna-se:

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \det[J] d\eta d\xi \quad (3.78)$$

Aqui novamente se aplica Técnicas de Integração numérica, conforme mostrado na equação a seguir:

$$[K^e] = \sum_{i=1}^4 W_i \psi(\xi_i, \eta_i) \quad (3.79)$$

onde:

$$\psi(\xi, \eta) = [B]^T [D] [B] \det[J] \quad (3.80)$$

e:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

A matriz das derivadas das funções de forma [B], tendo-se em vista a definição das deformações em estado plano de tensão ou deformação é dada por:

$$[B]_{\xi,\eta} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} a \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + b \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & a \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + b \frac{\partial N_j}{\partial \eta} & \dots & 0 \\ 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \dots & \vdots \\ c \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + d \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & a \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + b \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & c \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + d \frac{\partial N_j}{\partial \eta} & \dots & a \frac{\partial N_l}{\partial \xi} + b \frac{\partial N_l}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{3 \times 8} \quad (3.82)$$

Tabela 3.2-Derivadas das funções de forma: Elemento quadrilateral linear

Nós	$\frac{\partial N}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N}{\partial \eta}$
i	$-.25(1 - \eta)$	$-.25(1 - \xi)$
j	$.25(1 - \eta)$	$-.25(1 + \xi)$
k	$.25(1 + \eta)$	$.25(1 + \xi)$
l	$-.25(1 + \eta)$	$.25(1 - \xi)$

Os termos das derivadas das funções de forma são novamente obtidos no referencial (ξ, η) , e encontram-se listadas na tabela 3.2

O cálculo dos vetores de força nodal equivalente podem ser realizados também no referencial isoparamétrico, de acordo com as seguintes expressões:

$$\{f_s^e\} = \int_A [N]^T \{S\} \det[J] d\eta d\xi \quad (3.83)$$

$$\{f_v^e\} = \int_v [N]^T \{V\} \det[J] d\zeta d\eta d\xi \quad (3.84)$$

Para o caso de forças de superfície agindo no lado do triângulo $\{\bar{S}\}$, e de volume $\{\bar{V}\}$ constantes, tem-se por exemplo para o caso dos elementos triangulares lineares as seguintes forças nodais equivalentes:

$$\{f_s^e\} = \bar{S}L \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.85)$$

$$\{f_v^e\} = \frac{1}{3} \bar{V}L \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.86)$$

onde L é o lado do elemento.

Expressões análogas podem ser obtidas para os elementos triangulares quadráticos e quadrilaterais bilineares [COOK/MALKUS/PLESHA, 1989].

Após o cálculo das expressões elementares, é feita a montagem do sistema global, que pode ser resolvido para a obtenção das incógnitas do problema, neste caso os deslocamentos da cada nó.

Da mesma forma que o elemento triangular quadrático, será necessário usar a integração numérica para avaliar-se a matriz [B], a matriz Jacobiana [J] e conseqüentemente a matriz de rigidez do elemento, $[K^e]$. Nesse caso usa-se diretamente a quadratura Gaussiana, onde os pontos de integração são mostrados na figura (3.9) e tem como coordenadas: $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$,

$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Os pesos de ponderação são iguais a unidade.

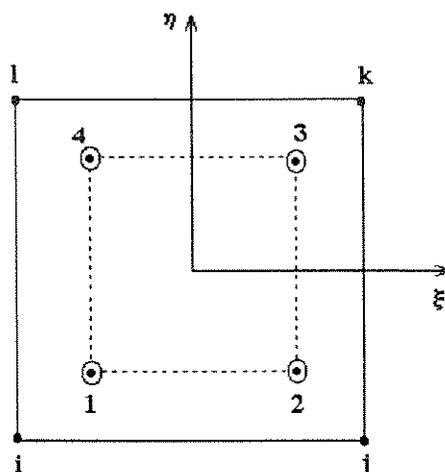


Figura 3.9-Quatro Pontos de Integração para Elementos Quadrilaterais Lineares

3.7-Pósprocessamento: Cálculo das Tensões

Após o cálculo dos deslocamentos, pode-se realizar um pós-processamento para a obtenção das tensões que aparecem em qualquer ponto do material. Estas tensões permitem a avaliação do erro da aproximação quando se usa uma norma, por exemplo norma da energia

Tendo sido avaliado o vetor deslocamento para cada elemento, $\{a^e\}$ pode-se avaliar o campo de tensões $\{\sigma\}$ usando para tal a equação (3.28).

Para elementos triangulares lineares o campo de tensão, avaliados pelo MEF, é constante, visto que, os termos da matriz $[B]$, derivadas de primeira ordem das funções de forma, são constantes. Então, avaliados os deslocamentos nos nós de um elemento genérico (e), a tensão para qualquer ponto desse elemento é avaliada diretamente pela equação (3.28), que é melhor representada por:

$$\{\sigma\}_{3 \times 1} = [D]_{3 \times 3} [B]_{3 \times 6} \{a\}_{6 \times 1} \quad (3.87)$$

Para os elementos triangulares quadráticos os termos da matriz $[B]$ não são constantes, logo o campo de tensões não é constante, e é avaliado nos pontos de integração. A equação (3.88) representa as tensões para cada ponto de integração (i) desse elemento,

$$\{\sigma_i\}_{3 \times 1} = [D]_{3 \times 3} [B(\xi_i, \eta_i)]_{3 \times 12} \{a\}_{12 \times 1} \quad (3.88)$$

onde $i=1,2,3$ para elemento triangular quadrático.

Para os elementos quadrilaterais bilineares os termos da matriz $[B]$ também não são constantes e um procedimento similar deve ser adotado. A equação (3.89) representa o campo de tensões para os quatro pontos de integração desse elemento,

$$\{\sigma_i\}_{3 \times 1} = [D]_{3 \times 3} [B(\xi_i, \eta_i)]_{3 \times 8} \{a\}_{8 \times 1} \quad (3.89)$$

onde $i=1,2,3,4$

3.8-Conclusão

Avaliados os deslocamentos nodais e as tensões para os três tipos de elementos citados anteriormente, pode-se estimar o erro por elemento através da diferença entre uma tensão melhorada e a tensão pelo MEF avaliada nos pontos de integração dos elementos. Em cada ponto de integração pode-se obter uma estimativa de um vetor erro em tensão, esse assunto será tema do capítulo seguinte.

4.2-Estimativa do Erro

No capítulo anterior avaliou-se o campo de deslocamentos $\{a\} \equiv \{\hat{u}\}$ pelo MEF. Através da resolução do sistema de equações lineares do tipo $\{f\} = [K]\{\hat{u}\}$ e das equações (3.87, 3.88 e 3.89) pode-se avaliar as tensões no interior dos elementos considerados. A solução pelo MEF tanto para o campo de deslocamentos $\{u\}$ como para o campo de tensões $\{\hat{\sigma}\}$ é uma solução aproximada, portanto, difere da solução exata $\{a\}$ e $\{\sigma\}$. Essa diferença é o erro da aproximação, que pode ser considerada em relação ao campo de deslocamentos ou em relação ao campo de tensões, então:

$$\{e\} = \{u\} - \{\hat{u}\} \quad (4.1)$$

$$\{e_\sigma\} = \{\sigma\} - \{\hat{\sigma}\} \quad (4.2)$$

As equações (4.1 e 4.2) avaliam o erro em termos de deslocamentos e tensões, respectivamente.

4.3-Estimadores de Erros

Um cálculo exato do vetor erro dada pelas equações (4.1 e 4.2) geralmente é impossível de ser obtido, a menos em casos em que se conhece a solução exata. Uma das mais comuns destas medidas de erro é a avaliada pela norma em energia, e para problemas de elasticidade linear pode ser escrita da seguinte forma [ZIENKIEWICZ/ZHU,1987]

$$\|\{e_\sigma\}\| = \left[\int_v \{e_\sigma\}^T [D]^{-1} \{e_\sigma\} dv \right]^{1/2} \quad (4.3)$$

onde:

[D] :Matriz das constantes elásticas do material

Naturalmente a solução exata para o campo de tensões $\{\sigma\}$ não é conhecida, por esta razão, calcula-se uma “estimativa” do erro cometido, mediante a utilização de um campo de

tensões melhorada $\{\sigma^*\}$, que, sob algum critério produz uma melhor aproximação de $\{\sigma\}$ que o valor $\{\hat{\sigma}\}$, obtido do campo de deslocamentos calculado.

Verificando a distribuição de tensão pelo método de elementos finitos, pode-se observar que um nó (i) compartilhado por dois elementos pode ter dois valores para as tensões. Isto ocorre porque, embora a continuidade para o campo de deslocamentos esteja garantida nas fronteiras dos elementos, a continuidade para o campo de tensões não está. A figura (4.1) mostra um nó (i) pertencente a dois elementos, podendo então, ter dois valores para as tensões, ocasionando uma descontinuidade, conforme mostrado na figura (4.2) para o caso unidimensional.

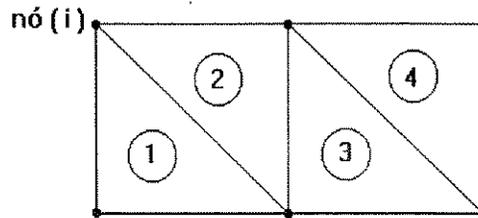


Figura 4.1-No (i) pertencente a dois elementos

Assim a estimativa do erro para um elemento avaliada em norma de energia é dada por:

$$\|\{e^e\}\|_{\sigma} = \left[\int_v \{ \{\sigma\} - \{\hat{\sigma}\} \}^T [D]^{-1} \{ \{\sigma\} - \{\hat{\sigma}\} \} dv \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

Então, é razoável assumir que, em problemas envolvendo apenas um material, a tensão real no nó esteja entre os valores calculados para cada elemento.

Uma estimativa melhorada da distribuição de tensão pode ser obtida procurando-se uma solução suave para o campo de tensões $\{\sigma^*\}$. Um tratamento usual consiste em assumir um campo de tensões proveniente da utilização das mesmas funções de interpolação que as usadas para o campo de deslocamentos, [Zienkiewicz e Zhu, 1987],

$$\{\sigma^*\} = [N]\{\bar{\sigma}^*\} \quad (4.5)$$

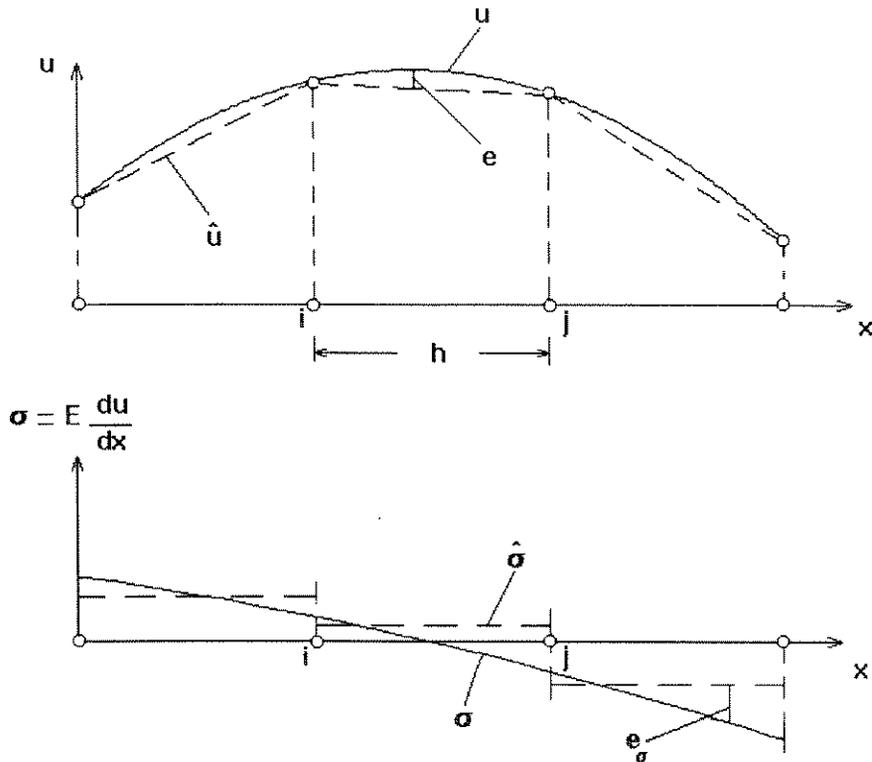


Figura 4.2-Erro de aproximação em deslocamento (u) e tensão (σ) para problemas de uma dimensão e funções de forma lineares

Assim determinam-se valores nodais $\{\bar{\sigma}^*\}$ tais que produzam o menor valor do seguinte funcional:

$$\Gamma(\{\bar{\sigma}^*\}) = \int_v \|\{e\}\|^2 dv = \int_v \|\{\sigma^*\} - \{\hat{\sigma}\}\|^2 dv \quad (4.6)$$

ou seja, calcula-se $\{\sigma^*\}$ de tal forma que, substituindo-se a equação 4.5 em 4.6 fica:

$$\Gamma(\{\bar{\sigma}^*\}) = \int_v \|\{[N]\{\bar{\sigma}^*\} - \{\hat{\sigma}\}\|^2 dv \quad (4.7)$$

Aplicando-se mínimos quadrados no funcional $\Gamma\{\bar{\sigma}^*\}$ tem-se:

$$\int_v [N]^T [N] dv \{ \bar{\sigma} \} = \int_v [N]^T \{ \hat{\sigma} \} dv \quad (4.8)$$

onde:

$\{ \bar{\sigma} \}$: vetor das tensões médias nodais

$\{ \hat{\sigma} \}$: vetor das tensões pelo MEF

$$[M] = \int_v [N]^T [N] dv \quad (4.9)$$

A equação (4.9) é a matriz de "massa" elementar.

Resolver o sistema como apresentado acima, envolve duas formas integrais de custo computacional equivalente à própria análise do MEF. Uma maneira de contornar esse fato, consiste em adotar algum critério para trabalhar com uma matriz de massa diagonal ao invés da matriz de massa consistente $[M]$.

Será adotado nesse trabalho a diagonalização por quadratura nodal, isto é, os pontos de integração serão tomados sobre os nós do elemento, Hughes, (1987). Desta maneira obtém-se uma diagonalização automática da matriz de massa $[M]$. Assumindo-se então, que o ponto de integração (p) é um nó do elemento, fica:

$$[M]_{ii} = \sum_{i=1}^n W(i) \det[J] \quad (4.10)$$

$$[M]_{ij} = 0 \quad \text{se } i \neq j \quad (4.11)$$

onde $W(i)$ são os pesos ponderados da integração e (n) é o número de nós do elemento. Para elementos triangulares lineares o determinante do Jacobiano é igual a duas vezes a área do elemento, assim, os elementos da matriz $[M]$ são, em cada grau de liberdade correspondente a um nó, proporcionais ao somatório das áreas dos elementos a este nó relacionado.

O lado direito da equação (4.8) são as forças equivalentes, a saber:

$$\{F_i\} = \sum_{i=1}^n \{\hat{\sigma}(i)\} W(i) \det[J] \quad (4.12)$$

A equação (4.12) indica que as forças equivalentes $\{F(i)\}$ para um nó do elemento, são, em cada grau de liberdade de um nó, proporcionais ao somatório do produto da área pela tensão nodal de cada elemento convergente a este nó.

Dividindo a equação (4.8) por $[M]$ resulta o seguinte sistema:

$$\{\bar{\sigma}^*\} = [M]^{-1} \int_v [N]^T \{\hat{\sigma}\} dv \quad (4.13)$$

Através da equação (4.13) consegue-se uma maneira de avaliar a tensão média nos nós dos elementos, ou seja, uma maneira de avaliar-se o campo de tensões $\{\bar{\sigma}^*\}$ através das tensões nodais dada pelo MEF, assim:

$$\{\bar{\sigma}^*\} = \frac{\sum_{j=1}^{ne} A_j \{\hat{\sigma}_j\}}{\sum_{j=1}^{ne} A_j} \quad (4.14)$$

onde:

ne : número de elementos comum a um mesmo nó

$\{\hat{\sigma}_j\}$: vetor tensão no nó em cada elemento pelo MEF comum ao mesmo nó.

A_j : área de cada elemento que converge a esse nó

$\{\bar{\sigma}_i^*\}$: vetor tensão média no nó de um elemento (e).

Em posse das tensões médias nos nós pode-se avaliar as tensões nos elementos fazendo-se a interpolação através da equação (4.5)

Com ambos os campos de tensões $\{\hat{\sigma}\}$ dado pelo MEF e $\{\bar{\sigma}^*\}$, pode-se avaliar com boa aproximação o vetor erro $\{e\}$, fazendo-se:

$$\{\sigma\} \equiv \{\sigma^*\} \quad (4.15)$$

Substituindo-se a equação (4.15) na equação (4.2) tem-se:

$$\{e_\sigma\} = \{\sigma^*\} - \{\hat{\sigma}\} \quad (4.16)$$

A inserção de (4.16) em (4.4), depois da solução do problema pelo MEF, isto é, à posteriori, pode-se computar o erro em termos de alguma norma, neste caso, em termos de norma de energia.

Embora a norma escrita como em (4.4) possa ser definida para todo o domínio, pode-se calculá-la para cada elemento, após isso, efetuar-se o somatório. Então:

$$\|\{e\}\|^2 = \sum_{i=1}^m \|\{e\}_i\|^2 \quad (4.17)$$

onde:

i : representa o número do elemento

m : representa o número de elementos da malha

A equação (4.17) representa o quadrado da norma do erro $\|e\|$ no domínio de todo o volume da malha como uma contribuição de cada elemento da malha.

Finalmente a norma corrigida avaliada globalmente pode ser dada por:

$$\|\{\sigma\}\|^2 = \|\{\hat{\sigma}\}\|^2 + \|\{e_\sigma\}\|^2 \quad (4.18)$$

onde:

$$\|\{\hat{\sigma}\}\|^2 = \sum_{i=1}^m \|\{\hat{\sigma}_i\}\|^2 \quad (4.19)$$

O valor absoluto para a norma de energia tem pouco significado físico, o erro relativo percentual (β_u) e (β_σ) é mais facilmente interpretado,

$$\beta_u = \frac{\|\{e\}\|}{\|\{u\}\|} 100\% \quad (4.20)$$

$$\beta_\sigma = \frac{\|\{e_\sigma\}\|}{\|\{\sigma\}\|} 100\% \quad (4.21)$$

As equações (4.20 e 4.21) representam, respectivamente, o erro percentual em termos do campo de deslocamentos e de tensões. Cada um deles é o Estimador de Erro em termos globais.

Para adimensionar os valores das normas, calcula-se o quociente do erro sobre a norma de energia substituindo-se a equação (4.18) na equação (4.21),

$$\beta_\sigma = \frac{\|\{e_\sigma\}\|}{\left(\|\{\hat{\sigma}\}\|^2 + \|\{e_\sigma\}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}} 100\% \quad (4.22)$$

onde:

$$\|\{\hat{\sigma}\}\|^2 = \int_v \{\hat{\sigma}\}^T [D]^{-1} \{\hat{\sigma}\} dv \quad (4.23)$$

A equação (4.22) representa a percentagem relativa da norma do erro em termos globais para o campo de tensões.

Para problemas cuja solução é conhecida, estima-se um índice que serve de comparação para saber se o método é eficiente que é denominado de Índice de Efetividade (θ), e para qualquer Estimador de Erro é a razão entre as normas do erro estimado e do "erro exato" (erro cuja malha foi bastante refinada, ou proveniente de uma solução analítica). Então:

$$\theta = \frac{\|\{e_\sigma\}\|_{estim}}{\|\{e_\sigma\}\|_{exato}} \quad (4.24)$$

Valores estimados da porcentagem de erro são obtidos como:

$$\beta_{estim} = \frac{\|\{e_\sigma\}\|_{estim}}{\left(\|\{\hat{\sigma}\}\|^2 + \|\{e_\sigma\}\|_{estim}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.25)$$

Uma correção empírica para o estimador de erro tem sido aplicado, [Zienkiewicz/Zhu,1987]. Um fator multiplicador da porcentagem de erro estimada, simbolizado por (f), conduz a resultados mais satisfatórios. Este fator depende do tipo de elemento considerado, assim:

f=1,1 para elementos quadrilaterais lineares

f=1,3 para elementos triangulares lineares

f=1,4 para elementos triangulares quadráticos

Este valor corrigido para a porcentagem de erro estimada, é denotado por β^* , assim:

$$\beta^* = f \beta_{estim} \quad (4.26)$$

O fator empírico (f) pode também ser aplicado para o índice de efetividade θ , produzindo então, (θ^*) ou seja:

$$\theta^* = f \theta \quad (4.27)$$

Em trabalhos onde o objetivo é refinar-se a malha, refinamento (h) por exemplo, é interessante garantir a uniformidade do erro, isto é, pretende-se que em todos elementos da malha o erro não supere um valor pré estabelecido. Seja (β_{adm}) a porcentagem de erro máximo

admissível em termos globais e (e_{adm}) o erro elementar máximo admissível. Assim, ao final do processo, deseja-se que o erro seja no mínimo igual a porcentagem de erro admissível:

$$\beta \leq \beta_{adm} \quad (4.28)$$

Se o erro deve ser distribuído igualmente em todos os elementos da malha, pode-se utilizar (β_{adm}) para limitar o erro em cada elemento, então:

$$\beta_{adm} = \frac{\left(m \|\{e_{adm}^e\}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\|\{\hat{\sigma}\}\|^2 + \|\{e_{\sigma}\}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.29)$$

Isolando-se a norma do erro admissível tem-se:

$$\|\{e_{adm}^e\}\| = \beta_{adm} \frac{\left(\|\{\hat{\sigma}\}\|^2 + \|\{e_{\sigma}\}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{m}} \quad (4.30)$$

e

$$\|\{e_{\sigma}\}\|^2 = \sum_{i=1}^m \|\{e_{\sigma}\}_i\|^2 \quad (4.31)$$

$$\|\{\hat{\sigma}\}\|^2 = \sum_{i=1}^m \|\{\sigma_i}\|^2 \quad (4.32)$$

onde:

m : número de elementos

$\{e_{\sigma adm}^e\}$: erro admissível em tensão para cada elemento.

Assim, para cada elemento, calcula-se a razão entre o erro estimado na análise e o desejado,

$$\Delta \epsilon_i = \frac{\| \{ e_\sigma^c \} \|}{\| \{ e_{\sigma adm}^c \} \|} \quad (4.33)$$

Os elementos com $(\Delta \epsilon_i)$ maior que a unidade devem ser refinados, nesse caso reduzidos, e os elementos com $(\Delta \epsilon_i)$ menor ou igual a unidade podem ser mantidos. O novo tamanho dos elementos para os quais $(\Delta \epsilon_i) > 1$ é definido por:

$$h = \frac{h_i}{(\Delta \epsilon_i)^{\frac{1}{p}}} \quad (4.34)$$

onde:

- h :novo tamanho do elemento
- h_i :tamanho do elemento analisado
- p :grau do polinômio interpolador

Neste trabalho limitou-se à análise dos erros, assim não serão detalhadas as técnicas de adaptatividade.

4.4-Erro para Elementos Triangulares Lineares (ETL)

A figura (4.3) é tomada como referência para esclarecer o exposto no item anterior referente ao recuperador de tensão. Após avaliado o erro em termos de norma de energia será calculada a percentagem do erro local e globalmente.

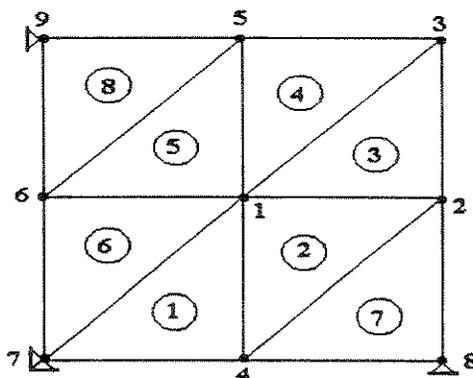


Figura 4.3-Chapa Fina discretizada por ETL

Divide-se a estrutura acima em 8 elementos e 9 nós e observa-se que o nó (1) pertence aos elementos 1,2,3,4,5 e 6, a conectividade dos elementos está mostrada na tabela (4.1). Será calculada a tensão média neste nó como segue:

Tabela (4.1)- Conectividade

Elemento i	Conectividade (j,k,l)
1	7 4 1
2	4 2 1
3	1 2 3
4	1 3 5
5	6 1 5
6	7 1 6
7	4 8 2
8	6 5 9

Sabendo-se que o determinante do Jacobiano é o dobro da área do elemento e usando-se os pontos de integração com seus pesos ponderados, as matrizes de massas concentradas $[M]$, para os elementos (1,2,3,4,5,6), avaliadas pelas equações (4.10 e 4.11) tornam-se:

$$[M_i] = \begin{matrix} & j & k & l \\ \begin{bmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & A_i & 0 \\ 0 & 0 & A_i \end{bmatrix} & j \\ & k \\ & l \end{matrix}$$

onde i indica o número do elemento e j,k,l representam os seus nós conforme definido na tabela (4.1)

Após a montagem, a matriz de massa global pode ser escrita da seguinte forma:

$$[M]_G = A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ (1,2,3,4,5,6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2,3,7) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (3,4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1,2,7) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (4,5,8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (5,6,8) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1,6) \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \quad (4.35)$$

Tendo-se as tensões para cada elemento, as forças equivalentes nodais avaliadas por (4.12) ficam:

Forças Nodais	Elemento
$F_1 = F_4 = F_7 = \hat{\sigma}_1 A_1$	1
$F_1 = F_2 = F_4 = \hat{\sigma}_2 A_2$	2
$F_1 = F_2 = F_3 = \hat{\sigma}_3 A_3$	3
$F_1 = F_3 = F_5 = \hat{\sigma}_4 A_4$	4
$F_1 = F_5 = F_6 = \hat{\sigma}_5 A_5$	5
$F_1 = F_6 = F_7 = \hat{\sigma}_6 A_6$	6

Então, o vetor força equivalente global fica:

$$\{F\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}_1 A_1 + \hat{\sigma}_2 A_2 + \hat{\sigma}_3 A_3 + \hat{\sigma}_4 A_4 + \hat{\sigma}_5 A_5 + \hat{\sigma}_6 A_6 \\ \hat{\sigma}_2 A_2 + \hat{\sigma}_3 A_3 + \hat{\sigma}_7 A_7 \\ \hat{\sigma}_3 A_3 + \hat{\sigma}_4 A_4 \\ \hat{\sigma}_1 A_1 + \hat{\sigma}_2 A_2 + \hat{\sigma}_7 A_7 \\ \hat{\sigma}_4 A_4 + \hat{\sigma}_5 A_5 + \hat{\sigma}_8 A_8 \\ \hat{\sigma}_5 A_5 + \hat{\sigma}_6 A_6 + \hat{\sigma}_8 A_8 \\ \hat{\sigma}_1 A_1 + \hat{\sigma}_6 A_6 \end{array} \right\} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \quad (4.36)$$

Substituindo o vetor força equivalente na equação (4.12) tem-se:

$$\{\bar{\sigma}^*\} = [M]^{-1} \{F_i\} \quad (4.37)$$

e para os nós (1,2,3,4,5,6) obtêm-se as tensões médias por:

$$\bar{\sigma}_1^* = \frac{\hat{\sigma}_1 A_1 + \hat{\sigma}_2 A_2 + \hat{\sigma}_3 A_3 + \hat{\sigma}_4 A_4 + \hat{\sigma}_5 A_5 + \hat{\sigma}_6 A_6}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6} \quad (4.38)$$

$$\bar{\sigma}_2^* = \frac{\hat{\sigma}_2 A_2 + \hat{\sigma}_3 A_3 + \hat{\sigma}_7 A_7}{A_2 + A_3 + A_7} \quad (4.39)$$

$$\bar{\sigma}_3^* = \frac{\hat{\sigma}_3 A_3 + \hat{\sigma}_4 A_4}{A_3 + A_4} \quad (4.40)$$

$$\bar{\sigma}_4^* = \frac{\hat{\sigma}_1 A_1 + \hat{\sigma}_2 A_2 + \hat{\sigma}_7 A_7}{A_1 + A_2 + A_7} \quad (4.41)$$

$$\bar{\sigma}_5^* = \frac{\hat{\sigma}_4 A_4 + \hat{\sigma}_5 A_5 + \hat{\sigma}_8 A_8}{A_4 + A_5 + A_8} \quad (4.42)$$

$$\bar{\sigma}_6^* = \frac{\hat{\sigma}_5 A_5 + \hat{\sigma}_6 A_6 + \hat{\sigma}_8 A_8}{A_5 + A_6 + A_8} \quad (4.43)$$

$$\bar{\sigma}_7^* = \frac{\hat{\sigma}_1 A_1 + \hat{\sigma}_6 A_6}{A_1 + A_6} \quad (4.44)$$

Com as tensões médias por nó, pode-se estimar o campo de tensões $\{\bar{\sigma}^*\}$ pela utilização da equação (4.5), conseguindo-se desta forma uma melhor aproximação da solução exata $\{\sigma\}$, que a calculada pelo MEF $\{\hat{\sigma}\}$.

Tendo-se o campo de tensões médias $\{\bar{\sigma}^*\}$ pode-se avaliar o campo de tensões $\{\sigma^*\}$. Considera-se então o elemento 3 de nós 1,2,3 (i,j,k) figura (1).

Expandindo-se a equação (4.5) para esse elemento, o vetor tensão torna-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \tau_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{N_i & N_j & N_k\} & 0 & 0 \\ & 0 & \{N_i & N_j & N_k\} & 0 \\ & 0 & 0 & \{N_i & N_j & N_k\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{ix}^* \\ \bar{\sigma}_{jx}^* \\ \bar{\sigma}_{kx}^* \\ \bar{\sigma}_{iy}^* \\ \bar{\sigma}_{jy}^* \\ \bar{\sigma}_{ky}^* \\ \bar{\tau}_{ixy}^* \\ \bar{\tau}_{jxy}^* \\ \bar{\tau}_{kxy}^* \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

Efetuando-se a multiplicação de $[N]$ por $\{\bar{\sigma}^*\}$ obtem-se:

$$\{\sigma^*\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \tau_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i(\xi, \eta)\bar{\sigma}_{ix}^* + N_j(\xi, \eta)\bar{\sigma}_{jx}^* + N_k(\xi, \eta)\bar{\sigma}_{kx}^* \\ N_i(\xi, \eta)\bar{\sigma}_{iy}^* + N_j(\xi, \eta)\bar{\sigma}_{jy}^* + N_k(\xi, \eta)\bar{\sigma}_{ky}^* \\ N_i(\xi, \eta)\bar{\tau}_{ixy}^* + N_j(\xi, \eta)\bar{\tau}_{jxy}^* + N_k(\xi, \eta)\bar{\tau}_{kxy}^* \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

As funções de forma N_i, N_j, N_k em função de (ξ, η) podem ser avaliadas nos pontos de integração para obter-se a interpolação do campo de tensões $\{\sigma^*\}$, após isso, avalia-se o vetor erro $\{e_\sigma\}$, a norma do erro a nível de elemento $\|\{e_\sigma\}\|$, a percentagem do erro a nível de elemento (β) e percentagem de erro global (β_G).

O quadrado na norma do erro da energia pode ser aproximada pelo seguinte somatório:

$$\|\{e_\sigma\}\|^2 \cong \sum_1^3 W_i \psi(\xi_i, \eta_i) \quad (4.47)$$

onde:

$$\psi(\xi_i, \eta_i) = \{e_\sigma(\xi_i, \eta_i)\}^T [D]^{-1} \{e_\sigma(\xi_i, \eta_i)\} \det[J(\xi_i, \eta_i)] \quad (4.48)$$

A equação (4.47) fornece uma aproximação do quadrado da norma do erro para elementos triangulares lineares.

4.5-Erro para Elementos Triangulares Quadráticos (ETQ)

O campo de tensões para elementos triangulares lineares dado pelo MEF é constante para qualquer ponto do elemento. Para elementos triangulares quadráticos o campo de tensões não é constante e foi avaliado nos pontos de integração, fornecendo então 3 vetores, um para cada ponto integração:

$$\{\hat{\sigma}_1\} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{1x} \\ \hat{\sigma}_{1y} \\ \hat{\tau}_{1xy} \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\{\hat{\sigma}_2\} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{2x} \\ \hat{\sigma}_{2y} \\ \hat{\tau}_{2xy} \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\{\hat{\sigma}_3\} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{3x} \\ \hat{\sigma}_{3y} \\ \hat{\tau}_{3xy} \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

O campo de tensões médias para cada elemento foi calculado usando-se o mesmo procedimento descrito no parágrafo anterior. Quando considera-se o nó (1) figura (4.4), nota-se que este pertence aos elementos (1,2,3,4,5,6) e o nó (2) pertence aos elementos (2,3,7), então a tensão média na direção (x) para o nó (1) e a tensão média na direção (y) para o nó (2) são dadas pelas equações (4.52 e 4.53):

$$\bar{\sigma}_{1x} = \frac{\hat{\sigma}_{1x}A_1 + \hat{\sigma}_{2x}A_2 + \hat{\sigma}_{3x}A_3 + \hat{\sigma}_{4x}A_4 + \hat{\sigma}_{5x}A_5 + \hat{\sigma}_{6x}A_6}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6} \quad (4.52)$$

$$\bar{\sigma}_{2y} = \frac{\hat{\sigma}_{2y}A_2 + \hat{\sigma}_{3y}A_3 + \hat{\sigma}_{7y}A_7}{A_2 + A_3 + A_7} \quad (4.53)$$

Assim, avaliam-se as tensões médias ($\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{xy}$) para todos os nós da malha, a seguir calcula-se o campo de tensões melhoradas $\{\sigma^*\}$ avaliadas pela equação (4.5), e para esse elemento (triangular quadrático) produz-se a equação (4.54).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \tau_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i(\xi_i, \eta_i)\bar{\sigma}_{ix}^* + N_j(\xi_j, \eta_j)\bar{\sigma}_{jx}^* + \dots & N_n(\xi_n, \eta_n)\bar{\sigma}_{nx}^* \\ N_i(\xi_i, \eta_i)\bar{\sigma}_{iy}^* + N_j(\xi_j, \eta_j)\bar{\sigma}_{jy}^* + \dots & N_n(\xi_n, \eta_n)\bar{\sigma}_{ny}^* \\ N_i(\xi_i, \eta_i)\bar{\tau}_{ixy}^* + N_j(\xi_j, \eta_j)\bar{\tau}_{jxy}^* + \dots & N_n(\xi_n, \eta_n)\bar{\tau}_{nxy}^* \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

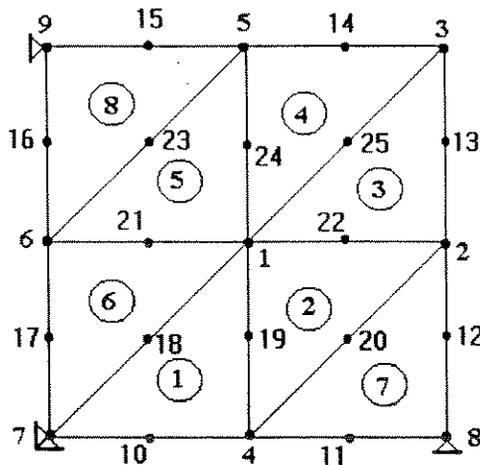


Figura 4.4-Chapa Fina discretizada por (ETQ)

Teremos então 3 vetores erros, um para cada ponto de integração, podendo então, avaliar-se a norma do erro pela utilização da equação (4.47).

4.6-Erro para Elementos Quadrilaterais Lineares (EQL)

Considera-se agora os elementos quadrilaterais lineares de nós (i,j,k,l), figura (4.5). O procedimento para cálculo do erro será o mesmo que foi feito para os elementos triangulares lineares e quadráticos. Avalia-se o campo de tensões $\{\hat{\sigma}\}$ pelo MEF nos pontos de integração, calculam-se as tensões nos nós para os elementos, acha-se a média em tensão para cada nó dos elementos que convergem para esse nó, com as tensões médias nos nós avalia-se o campo de tensões melhoradas $\{\sigma^*\}$ para cada ponto de integração. Calcula-se o vetor erro nesses pontos e posteriormente a norma do erro.

A equação para o quadrado da norma do erro para esse elemento é aproximada então pela equação (4.55)

$$\| \{e_\sigma\} \|^2 = \int_A \{e\}^T [D]^{-1} \{e\} dA = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \{e\}^T [D]^{-1} \{e\} \det[J] d\xi d\eta \quad (4.55)$$

$$\|e_\sigma\|^2 \cong \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_i W_j \psi(\xi_i, \eta_j) \quad (4.56)$$

onde :

W_i, W_j iguais a 1

$\psi(\xi_i, \eta_j)$ dada pela equação (4.48)

O vetor das tensões melhoradas para o elemento (1) de conectividade (1,2,9,8), figura (4.5), é dado pela equação (4.57):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \tau_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1(\xi_i, \eta_j) \bar{\sigma}_{ix}^* + N_2(\xi_i, \eta_j) \bar{\sigma}_{jx}^* + N_9(\xi_i, \eta_j) \bar{\sigma}_{kx}^* + N_8(\xi_i, \eta_j) \bar{\sigma}_{lx}^* \\ N_1(\xi_i, \eta_j) \bar{\sigma}_{iy}^* + N_2(\xi_i, \eta_j) \bar{\sigma}_{jy}^* + N_9(\xi_i, \eta_j) \bar{\sigma}_{ky}^* + N_8(\xi_i, \eta_j) \bar{\sigma}_{ly}^* \\ N_1(\xi_i, \eta_j) \bar{\tau}_{ixy}^* + N_2(\xi_i, \eta_j) \bar{\tau}_{jxy}^* + N_9(\xi_i, \eta_j) \bar{\tau}_{kxy}^* + N_8(\xi_i, \eta_j) \bar{\tau}_{lxy}^* \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

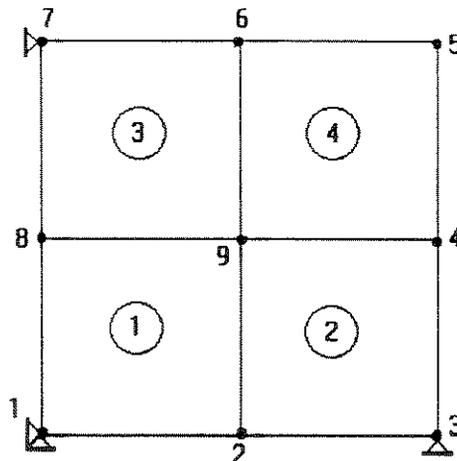
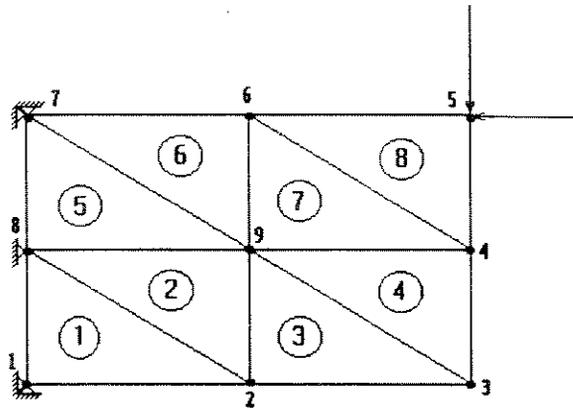


Figura 4.5-Chapa fina discretizada por (EQL)

Depois de avaliadas as normas do erro para cada elemento, calcula-se a percentagem do erro a nível elementar e a nível global empregando-se a equação (4.21).

4.7-Estimativa de Erro baseada na descontinuidade de tensões

Foi implementado também a técnica baseada na descontinuidade de tensões usada no pacote comercial Nastran [MSC/NASTRAN,1991] para avaliar a estimativa de erro por elemento. Neste, usa-se a técnica descrita anteriormente para se recuperar o campo de tensões nodais médias, ou seja, ponderação pela área dos elementos conectados a um determinado nó.



**Figura 4.6-Chapa Fina discretizada por ETL
(Estimativa de Erro segundo Nastran)**

Considera-se a figura (4.6) que representa uma placa de espessura unitária discretizada por ETL, onde ambos os campos: de tensões pelo MEF e o de tensões médias nodais foram calculados. Toma-se como referência o elemento (1) de nós (1,2,8). As tensões avaliadas pelo MEF são constantes dentro do elemento e cada um dos nós terá um vetor tensão média dado por:

$$\{\bar{\sigma}_i^*\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_{ix}^* \\ \bar{\sigma}_{iy}^* \\ \bar{\tau}_{ix}^* \end{array} \right\}, i = 1,2,8 \quad (4.58)$$

Três vetores erros são então avaliados, um para cada nó. Para o nó 1 o vetor erro fica:

$$\{e_{\sigma 1}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{1x}^* - \hat{\sigma}_{1x} \\ \bar{\sigma}_{1x}^* - \hat{\sigma}_{1y} \\ \bar{\tau}_{1x}^* - \hat{\tau}_{1xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{\sigma 1x} \\ e_{\sigma 1y} \\ e_{\tau 1xy} \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

Para os nós de números (2) e (8) tem-se respectivamente os seguintes vetores erros:

$$\{e_{\sigma 2}\} = \begin{Bmatrix} e_{\sigma 2x} \\ e_{\sigma 2y} \\ e_{\tau 2xy} \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

$$\{e_{\sigma 8}\} = \begin{Bmatrix} e_{\sigma 8x} \\ e_{\sigma 8y} \\ e_{\tau 8xy} \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

Desses três vetores erros nodais, é calculado apenas um vetor erro que representa o erro a nível elementar. Esse vetor erro é calculado fazendo-se a Raiz Média Quadrática de cada componente de tensão, assim a componente do erro na direção (x) fica:

$$e_{\sigma x}^1 = \sqrt{\frac{e_{\sigma 1x}^2 + e_{\sigma 2x}^2 + e_{\sigma 8x}^2}{3}} \quad (4.62)$$

Para as componentes (y) e (xy) do elemento (1) tem-se respectivamente:

$$e_{\sigma y}^1 = \sqrt{\frac{e_{\sigma 1y}^2 + e_{\sigma 2y}^2 + e_{\sigma 8y}^2}{3}} \quad (4.63)$$

$$e_{\sigma xy}^1 = \sqrt{\frac{e_{\tau 1xy}^2 + e_{\tau 2xy}^2 + e_{\tau 8xy}^2}{3}} \quad (4.64)$$

Obtendo, dessa forma, um vetor erro para esse elemento:

$$\{e'_\sigma\} = \begin{Bmatrix} e_{\sigma_x} \\ e_{\sigma_y} \\ e_{\sigma_{xy}} \end{Bmatrix} \quad (4.65)$$

Com esse vetor erro é calculada pela equação (4.66) a estimativa do erro segundo a seguinte expressão:

$$e_{ST} = \sqrt{\frac{e_{\sigma_x}^2 + e_{\sigma_y}^2 + e_{\sigma_{xy}}^2}{3}} \quad (4.66)$$

que representa a Raiz Média Quadrática das três componentes do vetor erro em tensão do elemento.

4.8-Estimativa de erro baseada nas tensões médias-Estimador ZZ1

Tendo sido avaliadas as tensões pelo MEF $\{\hat{\sigma}\}$ nos pontos de integração, é necessário calcular as tensões nos nós dos elementos, pois, para avaliar-se a tensão média aritmética e a tensão média ponderada pela área dos elementos, será necessário conhecer a tensão nodal. O cálculo da tensão nodal será o mesmo usado por [HINTON et al,1975], que, com as tensões nos pontos de integração dos elementos faz-se uma extrapolação para os nós dos elementos. Para elementos triangulares lineares, a tensão é constante para todo o elemento. A figura (4.7) mostra um elemento quadrilateral linear com seus pontos de integração (I, II, III, IV) e seus nós (1,2,3,4).

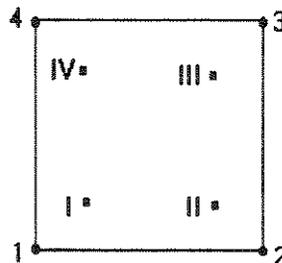


Figura 4.7-Pontos de Integração do Elemento Quadrilateral linear

A tensão nos nós (1,2,3,4) é obtida pela equação (4.67)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ c_2 & b_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 & b_2 & a_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \\ \sigma_{IV} \end{Bmatrix} \quad (4.67)$$

A matriz de extrapolação será aqui chamada de [TRA], dada pela equação (4.68)

$$[TRA] = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ c_2 & b_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 & b_2 & a_2 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

onde

$$a_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b_2 = -\frac{1}{2}$$

$$c_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para elementos triangulares quadráticos a obtenção das tensões nodais, foram calculadas tomando-se os pontos de integração como sendo as coordenadas nodais e foram avaliadas pela equação (3.88)

Com as tensões nodais faz-se a média aritmética das tensões dos elementos que concorrem àquele nó. Com os dois campos de tensões nodais $\{\hat{\sigma}\}$ e $\{\bar{\sigma}\}$ calcula-se um vetor erro par cada nó. Com esses vetores erros, usa-se a equação (4.69), para a norma do erro, [ANSYS,1994],

$$\|e_j\|_{zz1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_A \{e_i\}^T [D]^{-1} \{e_i\} dA \quad (4.69)$$

onde

$\|\{e_j\}\|_{zz1}$ é norma do erro segundo Ansys para o elemento j

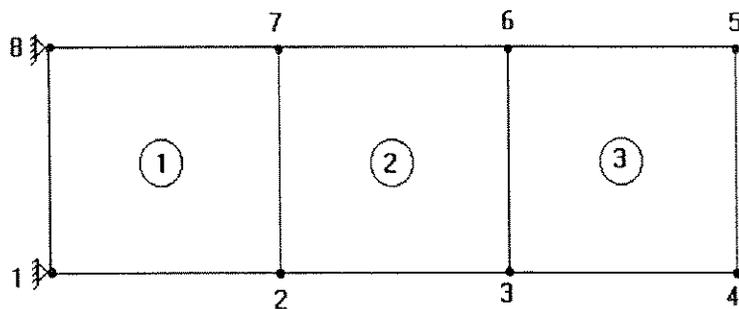
e_i erro em tensão de cada nó do elemento j

m é número de vetores erros por elemento

A equação (4.69) pode ser aproximada por:

$$\|\{e_j\}\|_{zz1} = \frac{A_j}{2k} \sum_{i=1}^4 \{e_i\}^T [D]^{-1} \{e_i\} \quad (4.70)$$

onde j é o número do elemento, $i=1,2,3,4$ são os nós desse elemento e k pode ser igual a 2, 3 ou 4.



**Figura 4.8 Chapa Fina discretizada por EQL
(Estimador de erro segundo Ansys)**

Tomando como referencia a figura (4.7) para o elemento (1) a norma do erro segundo a equação (4.70) fica:

$$\|\{e_1\}\|_{zz1} = \frac{A_1}{4} \left(\{e_2\}^T [D]^{-1} \{e_2\} + \{e_7\}^T [D]^{-1} \{e_7\} \right) \quad (4.71)$$

pois $k=2$ (nós 1 e 8) possuem erros nulos, pois pertencem a apenas um elemento.

Para o elemento (2) tem-se:

$$\|\{e_2\}\|_{zz1} = \frac{A_2}{8} \left(\{e_2\}^T [D]^{-1} \{e_2\} + \{e_3\}^T [D]^{-1} \{e_3\} + \{e_7\}^T [D]^{-1} \{e_7\} + \{e_8\}^T [D]^{-1} \{e_8\} \right) \quad (4.72)$$

Após a obtenção da norma do erro para todos os elementos, avalia-se a energia de deformação para cada elemento, através de:

$$U_j = \frac{1}{2} \{\hat{u}\}^T \{K_j\} \{\hat{u}\} \quad (4.73)$$

e a percentagem de erro na norma de energia é calculada por:

$$\beta_{jzz1} = \left(\frac{\|\{e_j\}\|}{\|\{e_j\}\| + U_j} \right)^{\frac{1}{2}} 100\% \quad (4.74)$$

4.9- Estimador ZZ2

Foi implementado neste trabalho um outro tipo de recuperador de tensões médias dado pela equação (4.75), e adotando o mesmo procedimento usado pelo estimador (ZZ) chegou-se a outro estimador de erro, aqui chamado de (ZZ2).

$$\{\bar{\sigma}_{zz2}\} = \frac{\sum_{i=1}^n \{\sigma_i\} A_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i}} \quad (4.75)$$

onde

$\{\bar{\sigma}_{zz2}\}$ - tensão média segundo estimador ZZ2

$\{\sigma_i\}$ - tensão no elemento i

A_i - Área do elemento i

n - número de elementos conectados ao nó i

Para elucidar a equação (4.75), calcula-se a tensão média no nó (2) da malha dada pela figura (4.8):

$$\{\bar{\sigma}_2\} = \frac{\frac{\{\sigma_1\}}{A_1} + \frac{\{\sigma_2\}}{A_2} + \frac{\{\sigma_3\}}{A_3}}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3}} = \frac{\{\sigma_1\} (A_2 A_3) + \{\sigma_2\} (A_1 A_3) + \{\sigma_3\} (A_1 A_2)}{A_2 A_3 + A_1 A_3 + A_1 A_2} \quad (4.76)$$

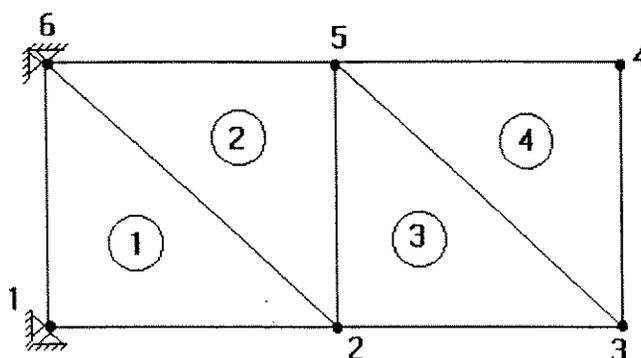


Figura 4.9-Recuperador de tensão média nodal segundo ZZ2

Nota-se, então, que o peso ponderado da equação (4.76) é um produto de áreas, ou seja, o peso ponderado para a tensão do elemento (1) é o produto $(A_2 A_3)$. Para a tensão do elemento (2) é o produto $(A_1 A_3)$ e, assim, sucessivamente.

Os métodos descritos nos itens anteriores foram implementados nesse trabalho, e os resultados obtidos para vários testes numéricos são apresentados no capítulo 5.

CAPÍTULO 5

TESTES E RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1-Introdução

Neste capítulo serão feitos alguns exemplos com o propósito de se validar as implementações realizadas dos Estimadores apresentados no capítulo 4, para os três tipos de elementos implementados, triangular linear, triangular quadrático e quadrilateral linear. Os três primeiros exemplos mostram uma chapa de espessura unitária sujeita simplesmente a tração. Posteriormente é mostrado, usando os mesmos elementos, chapas finas sujeitas a esforços de flexão e quatro exemplos tratando do problema de um cilindro espesso, sujeito a uma pressão interna. Os resultados foram obtidos para norma do erro por elemento, percentagem de erro por elemento e a percentagem de erro global.

Para elementos triangulares lineares foi implementado a estimativa de erro por elemento, baseado no salto de tensões. Depois de avaliado o campo de tensões médias nodais, calcula-se um vetor erro por nó, e, através das Raiz Média Quadrática, estima um único vetor erro para esse elemento. Para obter-se a estimativa do erro por elemento, faz novamente a Raiz Média Quadrática das três componentes de tensão desse vetor.

5.2- Exemplos de chapas submetidas a tração

As figuras (5.1), (5.2) e (5.3) mostram uma chapa de espessura unitária submetida a esforços de tração, para caracterizar erro nulo, visto que, o campo de deformação é constante para qualquer secção transversal da chapa, conseqüentemente, o campo de tensões será também constante, produzindo erro zero para qualquer ponto do elemento. Na figura (5.1) mostra-se uma discretização por elementos triangulares lineares, onde obteve-se percentagem de erro por elemento igual a zero e percentagem de erro global zero.

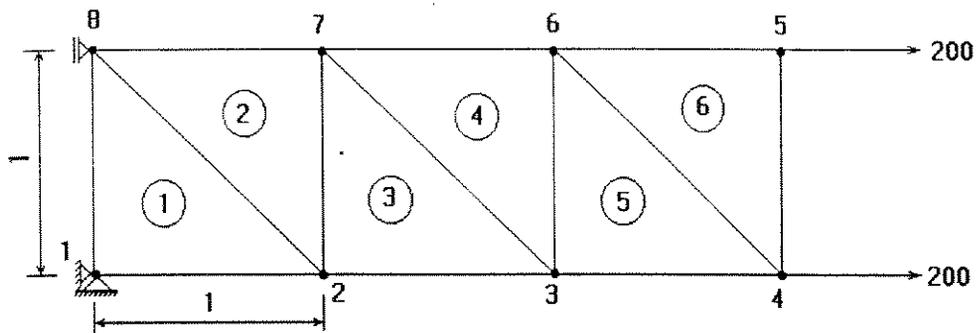


Figura 5.1- Chapa fina submetida a tração e discretizada por elementos triangulares lineares

A figura (5.2) mostra a mesma chapa discretizada por elementos triangulares quadráticos fornecendo também percentagem de erro a nível elementar igual a zero e percentagem de erro global igual a zero.

Na figura (5.3) a chapa foi discretizada por elementos quadrilaterais lineares e também submetida a tração, produzindo percentagem de erro elementares igual a zero e percentagem de erro global igual a zero.

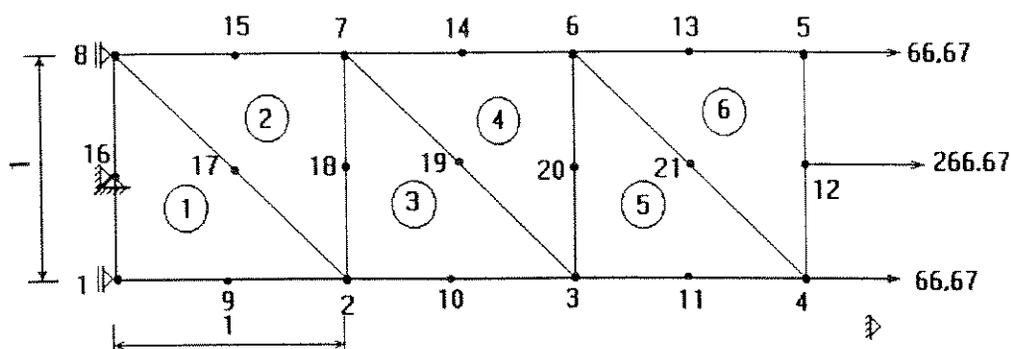


Figura 5.2 - Chapa fina submetida a tração e discretizada por elementos triangulares quadráticos

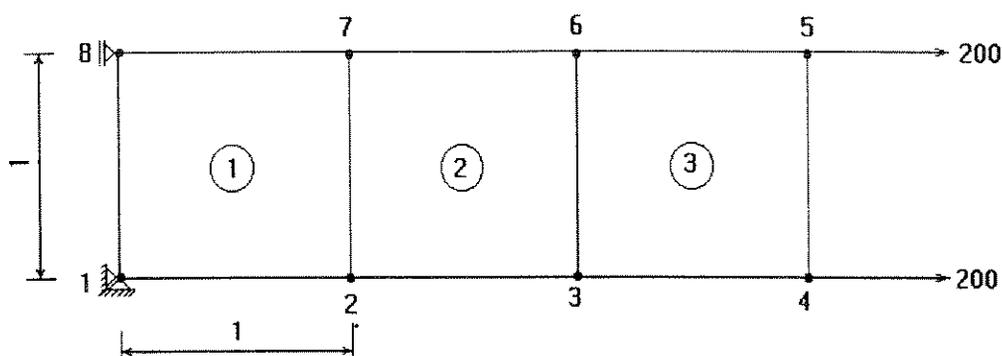


Figura 5.3 - Chapa fina submetida a tração discretizada por elementos quadrilaterais lineares

Assim, este primeiro teste, bastante simples, mostra não apenas um indicativo da qualidade das implementações dos erros, da estimativa, como também, a qualidade das implementações dos elementos.

5.3- Exemplos de chapas submetidas a flexão

As figuras (5.4), (5.8) e (5.11) mostram uma mesma chapa, de espessura unitária, submetida às forças verticais causando flexão na mesma. Esses exemplos tem como objetivo ilustrar o procedimento e avaliar as estimativas do erro, normas do erro, percentagem elementar do erro, percentagem global do erro, abrangendo os três tipos de estimadores de

erro e os três tipos de elementos implementados. A tabela (5.1) relaciona a estimativa do erro segundo os saltos de tensões, a norma do erro por elemento, a percentagem do erro por elemento e a percentagem global do erro, para a malha discretizada por Elementos Triangulares Lineares (ETL).

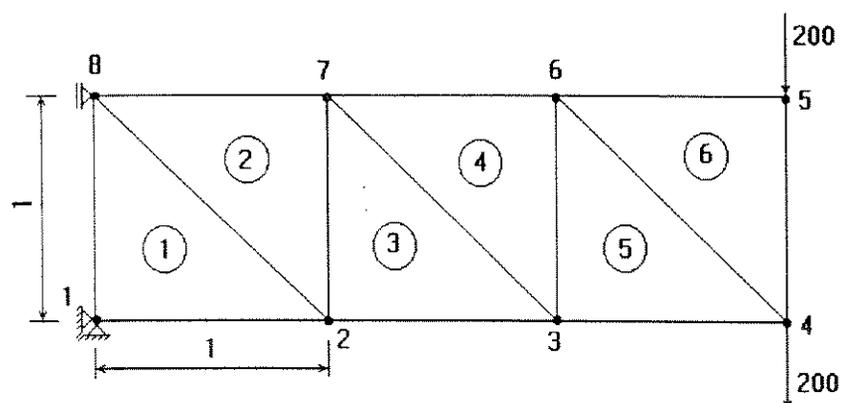


Figura 5.4 - Chapa fina submetida a flexão discretizada por Elementos triangulares lineares

Tabela 5.1- Percentagem de erro por elemento triangular linear

Elemento	Estimativa do Erro	Norma do Erro (ZZ)	Norma do Erro (ZZ1)	% de Erro (ZZ)	% de Erro (ZZ1)
1	690,35	9,65	10,54	55,65	59,05
2	921,89	14,52	11,39	81,66	74,30
3	627,02	9,54	7,69	68,46	60,34
4	446,43	6,82	5,51	73,82	66,21
5	253,85	3,78	3,12	51,94	44,85
6	108,75	1,22	1,63	28,43	36,66
% Erro Global				68,73	63,36

Na figura (5.5) é mostrado os resultados para a norma do erro (ZZ) e a norma do erro (ZZ1), norma usada pelo pacote comercial Ansys, [ANSYS,1994]. A figura (5.6) mostra as percentagens de erros por elemento pelos métodos (ZZ) e (ZZ1), e na figura (5.7) são

mostrados os resultados da estimativa de erro por elemento, método usado pelo pacote comercial Nastran, [MSC/NASTRAN/1991] que foi implementado, e é aqui denominado (ST).

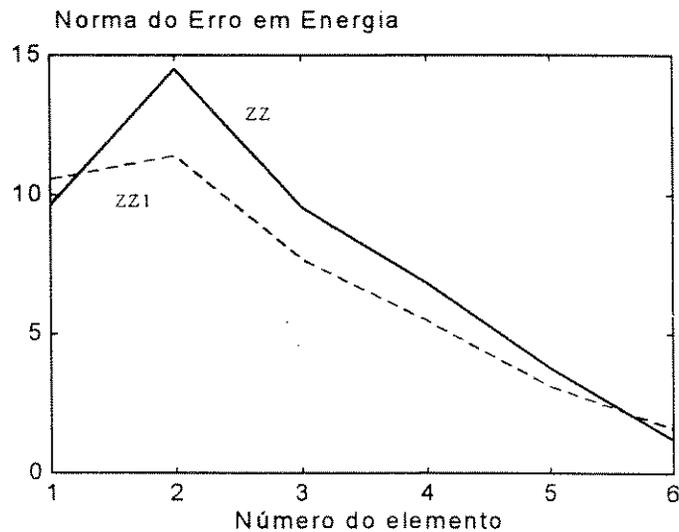


Figura-5.5-Norma do erro em Energia segundo ZZ e ZZ1 para o caso de flexão em função do número do ETL

Observa-se que para a comparação dos estimadores (ZZ) e (ZZ1) a constante meio, $(1/2)$, da equação (4.68) foi desconsiderada.

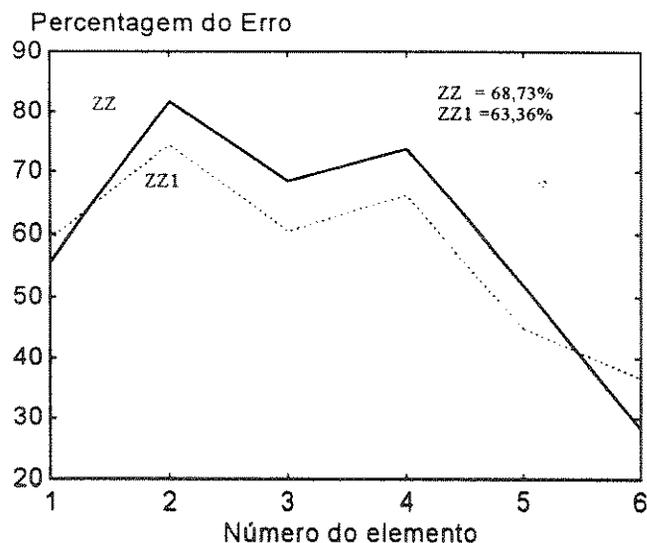


Figura 5.6-Percentagem de Erro segundo ZZ e ZZ1 para o caso de flexão em função do número do ETL

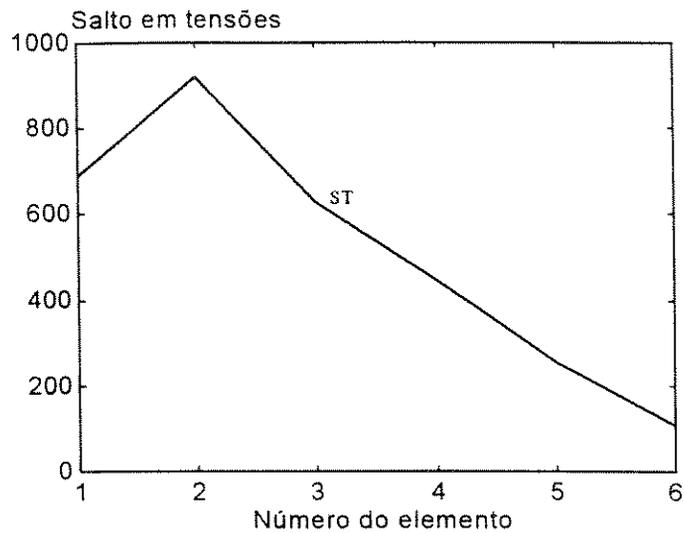


Figura 5.7-Salto em tensões em função do número do ETL para o caso de flexão

A diferença entre os métodos do estimador baseado na norma da energia (ZZ) e do (ZZ1) está basicamente na obtenção das tensões nodais médias, o primeiro calcula um campo de tensões melhoradas usando para isso as tensões médias nodais fazendo interpolação com as funções de forma, feito isso, calcula o erro por nó e avalia a norma do erro segundo a expressão (4.47). O segundo usa as tensões médias nodais extrapoladas para avaliar o erro por nó e usa a equação (5.1) para avaliar a norma do erro globalmente.

$$\|\{e\}\|_{ZZ1}^2 = \frac{1}{2} \int_A \{e\}^T [D]^{-1} \{e\} dA \quad (5.1)$$

A figura (5.8) mostra uma chapa discretizada por 6 elementos triangulares quadráticos submetida a flexão. A tabela (5.2) mostra a norma do erro por elemento usando-se o estimador (ZZ), e o (ZZ1), percentagem de erro por elemento e a percentagem de erro global. Na figura (5.9) é feita a comparação entre o Estimador (ZZ) e o (ZZ1) para a norma do erro, e na figura (5.10) em termos de percentagens de erro.

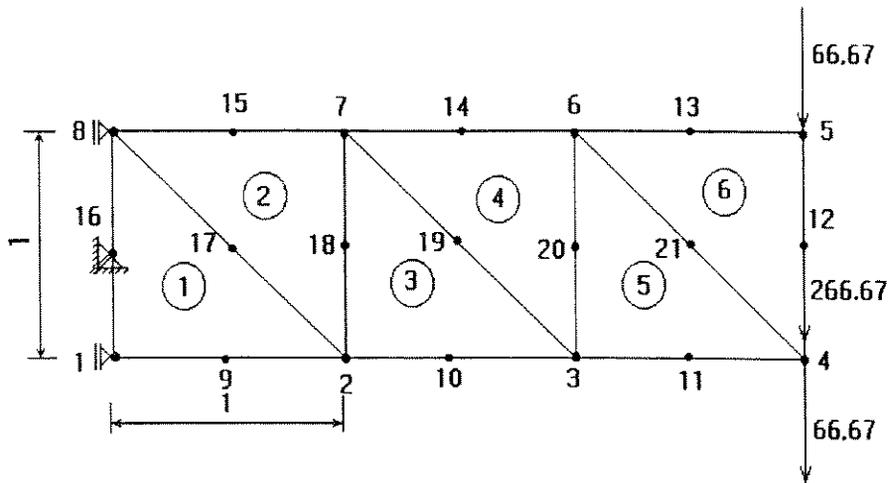


Figura 5.8- Chapa fina submetida a flexão discretizada por ETQ

Tabela 5.2-Percentagem de erro por elemento triangular quadrático

Número do elemento	Norma do erro em Energia (ZZ)	Norma do erro em Energia (ZZ1)	% de erro por elemento (ZZ)	% de erro por elemento (ZZ1)
1	2,71	2,95	10,92	16,65
2	3,29	3,35	13,33	19,02
3	2,06	2,20	13,04	19,46
4	2,27	2,43	14,57	21,74
5	2,30	2,35	30,34	41,70
6	0,68	0,74	9,64	14,05
% Global			13,51	23,08

Comparando-se a norma do erro e percentagem de erro por elemento assim como a percentagem de erro global para a malha discretizada com elementos triangulares lineares tabela (5.1) com a tabela (5.2) onde a malha foi discretizada com elementos triangulares quadráticos, pode-se notar que esses valores diminuíram.

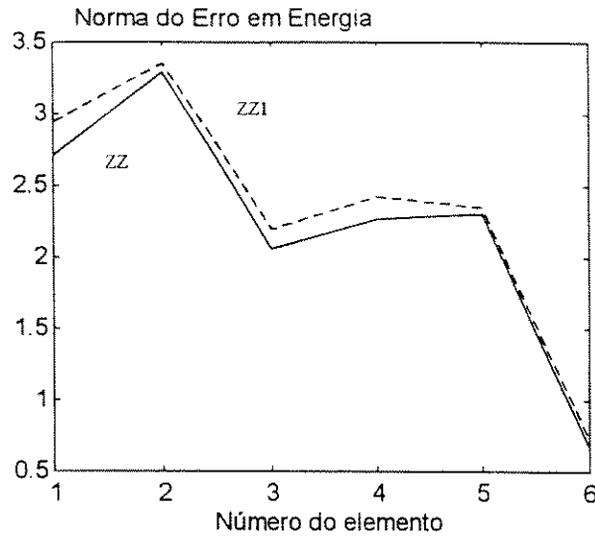


Figura 5.9-Norma do erro em Energia segundo ZZ e ZZ1 para o caso de flexão em função do número do ETQ

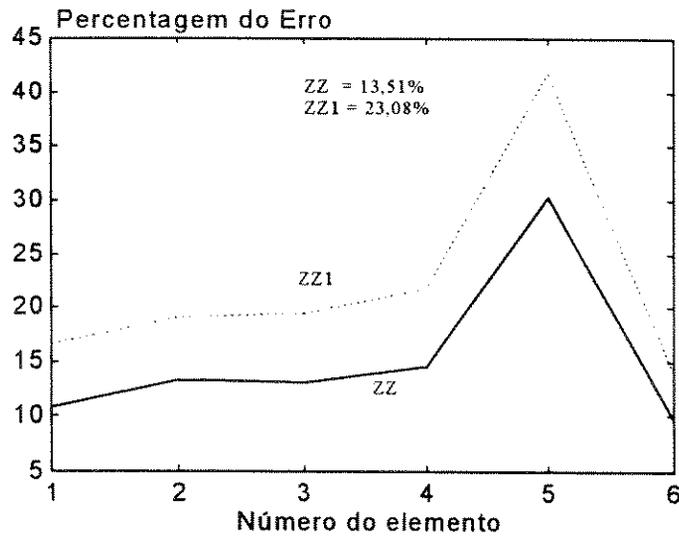


Figura 5.10- Percentagem de Erro segundo ZZ e ZZ1 para o caso de flexão em função do número do ETQ

Pode-se observar que existe uma diferença entre os dois resultados, este fato é justificado pela maneira dos métodos avaliarem as tensões médias nodais.

A figura (5.11) mostra a mesma chapa discretizada por 3 elementos quadrilaterais lineares, submetidas a flexão. A tabela (5.3) mostra os resultados numéricos das normas do erro por elemento usando-se o estimador (ZZ), norma do erro segundo (ZZ1), a percentagem

do erro por elemento e a percentagem de erro global. As figuras (5.12) e (5.13) mostram esses dados para efeito de comparação.

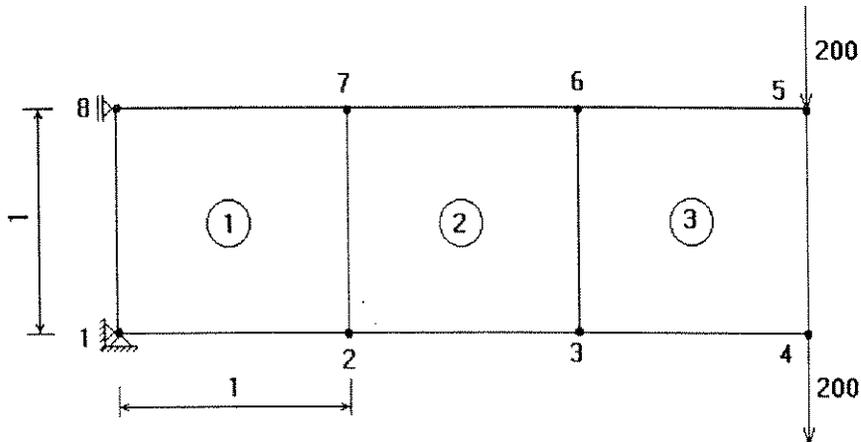


Figura 5.11-Chapa fina discretizada por 3 EQL submetida a flexão

Tabela 5.3-Percentagem de erro porEQL

Número do Elemento	Norma do Erro em Energia (ZZ)	Norma do Erro em energia (ZZ1)	Percentagem de Erro (ZZ)	Percentagem de Erro (ZZ1)
1	4,14	4,87	41,02	59,84
2	3,62	4,02	53,21	70,21
3	2,24	2,93	63,61	83,67
%global			46,86	66,00

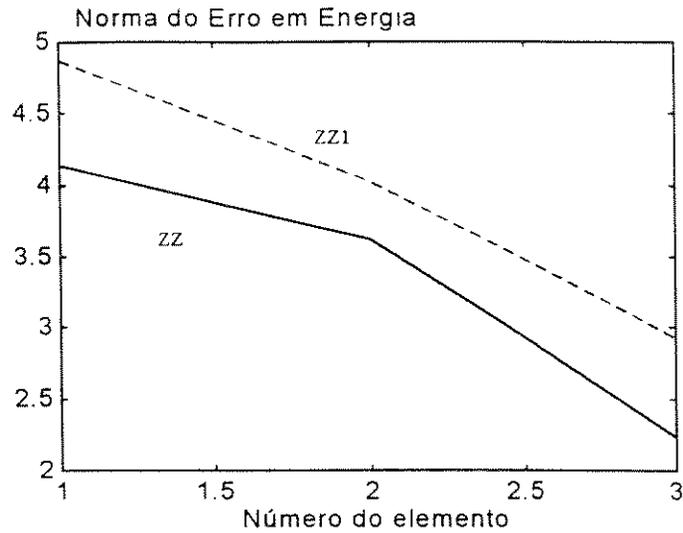


Figura 5.12-Norma do erro em Energia segundo ZZ e ZZ1 para o caso de flexão em função do número do EQL

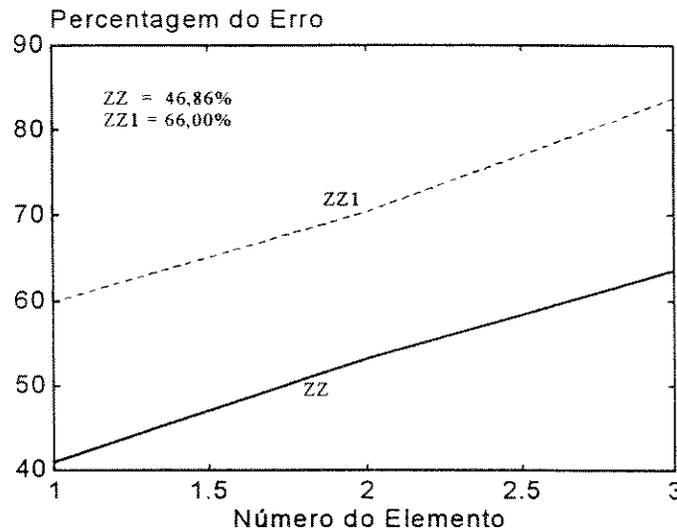


Figura 5.13-Percentagem de erro segundo ZZ e ZZ1 para o caso de flexão em função do número do EQL

A figura (5.14) mostra uma outra chapa discretizada por 10 elementos quadrilaterais lineares, submetidas a flexão. A tabela (5.4) mostra os resultados numéricos das normas do erro por elemento usando-se o estimador (ZZ), norma do erro segundo (ZZ1), a percentagem do erro por elemento, (ZZ), e a percentagem de erro global. As figuras (5.15) e (5.16) mostram esses dados para efeito de comparação.

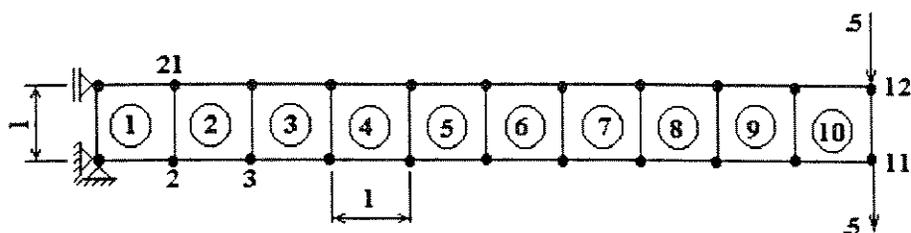


Figura 5.14- Chapa fina submetida à flexão discretizada por EQL

Tabela 5.4-Percentagem de erro por elemento quadrilateral linear

Número do Elemento	Norma do Erro (ZZ)	Norma do Erro (ZZ1)	% de erro por elemento ZZ	% de erro por elemento ZZ1
1	0,045	0,050	46,86	64,21
2	0,043	0,048	49,03	66,30
3	0,038	0,042	49,08	66,35
4	0,033	0,037	49,15	66,42
5	0,028	0,031	49,26	66,53
6	0,023	0,026	49,46	66,71
7	0,018	0,020	49,83	67,06
8	0,013	0,015	50,67	67,86
9	0,009	0,010	53,21	70,21
10	0,005	0,007	63,61	83,66
% de Erro Global			48,68	66,01

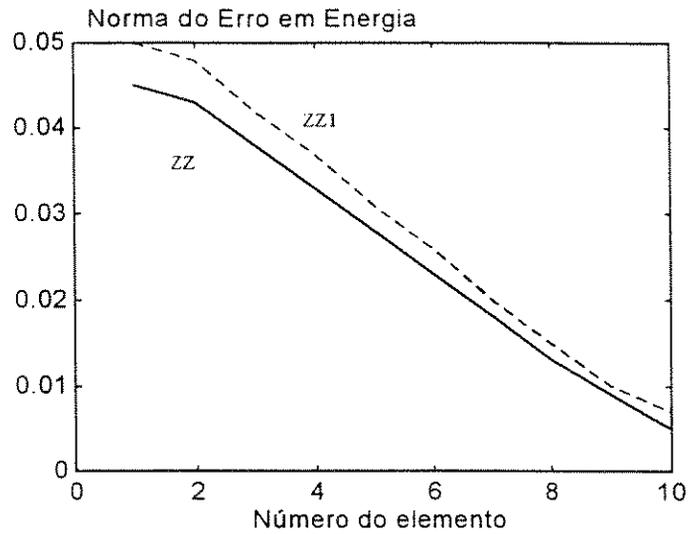


Figura 5.15- Norma do erro em Energia segundo ZZ e ZZ1 para o caso de flexão em função do número do EQL

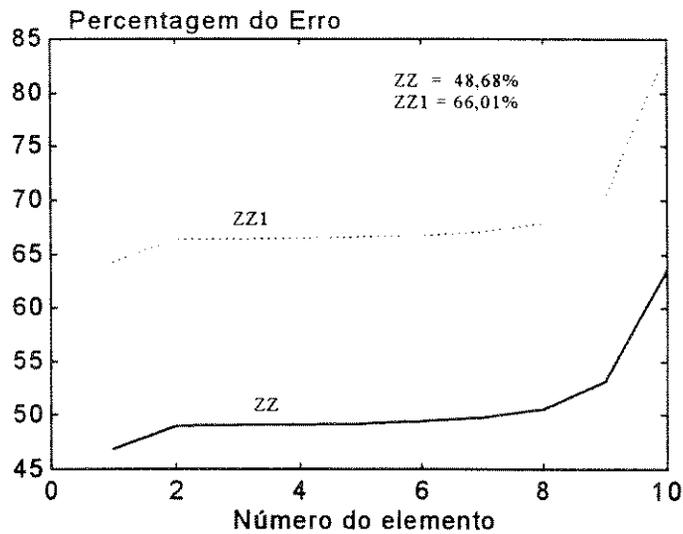


Figura 5.16- Percentagem do erro em Energia segundo ZZ e ZZ1 para o caso de flexão em função do número do EQL

Nota-se que os dados apresentados para as normas do erro calculados pelos métodos (ZZ) e (ZZ1) estão próximos e diminuem nos elementos mais distante dos vínculos.

Analisando os últimos exemplos vê-se que existe uma relação entre os métodos de se avaliar as estimativas de erros, a norma do erro, a percentagem de erro por elemento e

consequentemente a percentagem de erro global. Tal fato pode ser comprovado para os três tipos de elementos implementados, ETL, EQL e ETQ.

Observa-se também que a percentagem de erro global é uma medida que é sensível aos máximos valores de erro encontrados. Pode-se notar este fato a partir dos erros globais obtidos para as malhas das figuras (5.11) e (5.14). Isto é, a informação isolada da percentagem de erro global é insuficiente e pode não representar a qualidade do modelo.

5.4-Cilindro de parede espessa- Comparação com solução Analítica

O objetivo deste exemplo é o de utilizar uma solução analítica de referência, para verificar a tendência da estimativa de erro, na correção das tensões aproximadas obtidas pelo Método dos Elementos Finitos.

As tensões analíticas (radiais e tangenciais) para cilindro de parede espessa submetido a pressão interna, figura (5.17) são funções somente do raio (r) do cilindro, [TIMOSHENKO/GOODIER, 1980], e são dadas pelas equações (5.2) e (5.3):

$$\sigma_r = \frac{a_1^2 p_i}{b_1^2 - a_1^2} \left(1 - \frac{b_1^2}{r^2} \right) \quad (5.2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{a_1^2 p_i}{b_1^2 - a_1^2} \left(1 + \frac{b_1^2}{r^2} \right) \quad (5.3)$$

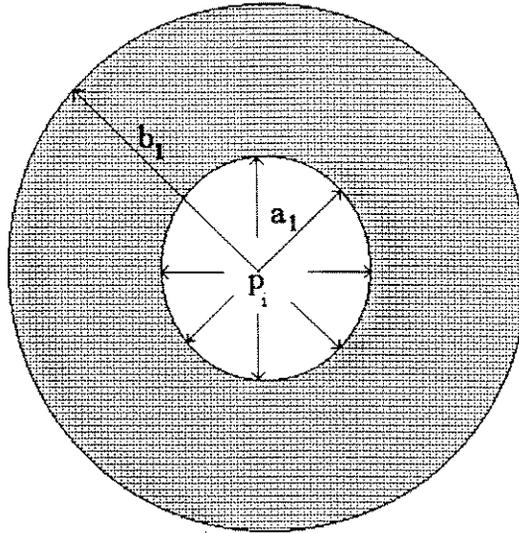


Figura 5.17 Cilindro de parede espessa submetido a pressão interna

onde a_1 é o raio interno e b_1 é o raio externo, p_i é a pressão interna e r é um raio genérico.

Considerando estado plano de tensão, [TIMOSHENKO/GOODIER,1980] o campo de tensões em coordenadas radiais e tangenciais em função das coordenadas retangulares são dadas pelas equações (5.4) e (5.5):

$$\sigma_r = \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (5.4)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (5.5)$$

Para verificação dos cálculos dos campos de tensões pelo MEF, e o de tensões melhoradas, fez-se a comparação com o campo de tensões analíticas, o que pode ser observado pelas figuras (5.20) a (5.23).

Os parâmetros seleccionados para este caso foram: $a_1=0,2$; $b_1=1,0$; $p_i=10$;
 $E=10000$; $\nu=0,3$

Por questões de simetria foi considerado apenas um quarto do cilindro e este foi discretizado inicialmente com 12 EQL num total de 20 nós, figura (5.18). Posteriormente aumentou-se o número de elementos da malha, discretizada então com 42 EQL totalizando 63 nós, figura (5.19).

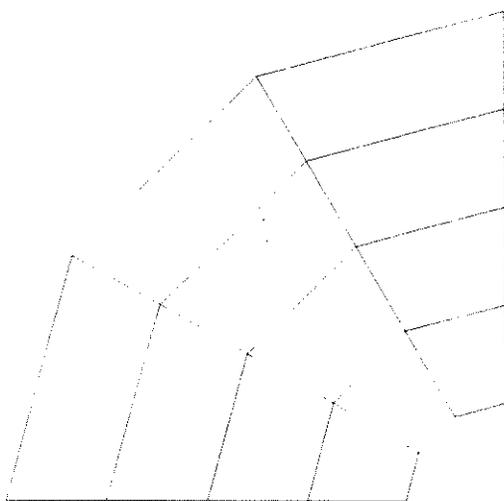


Figura 5.18-Cilindro submetido à pressão interna discretizado com 12 EQL

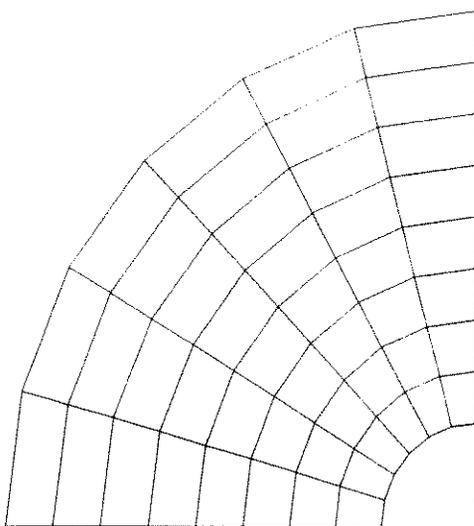


Figura 5.19-Cilindro submetido à pressão interna discretizado com 48 EQL

Nas figuras (5.20) e (5.22) são apresentados as tensões radiais analíticas, (σ_R), tensões pelo MEF, ($\hat{\sigma}_R$), e as tensões radiais corrigidas quando são considerados os erros, ou seja ($\sigma_R^* = \hat{\sigma}_R + e_R$), que são as tensões melhoradas utilizadas pelo estimador (ZZ), para 12 e 48 EQL, respectivamente.

Nas figuras (5.21) e (5.23) é feito o mesmo procedimento, agora, em relação às tensões tangenciais analíticas, (σ_θ), tensões tangenciais pelo MEF, ($\hat{\sigma}_\theta$), e as tensões tangenciais corrigidas pelo erro, ($\sigma_\theta^* = \hat{\sigma}_\theta + e_\theta$).

As tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} foram calculadas em coordenadas retangulares e foram usadas as equações (5.4) e (5.5) para se avaliar, nos pontos de integração, o campo de tensões radiais σ_R , e tangenciais σ_θ , respectivamente, em coordenadas polares.

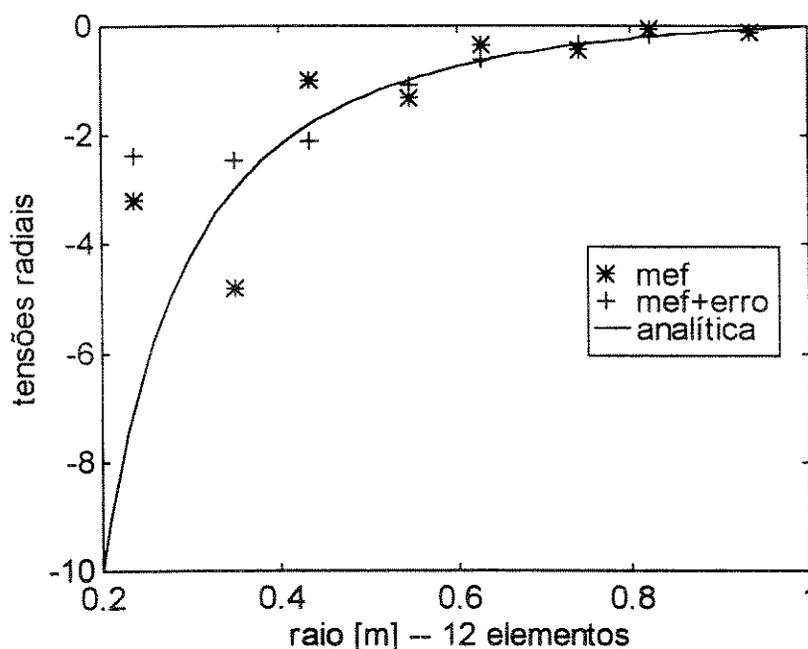


Figura 5.20-Tensões Radiais em função do raio para cilindro de parede espessa (12 EQL)

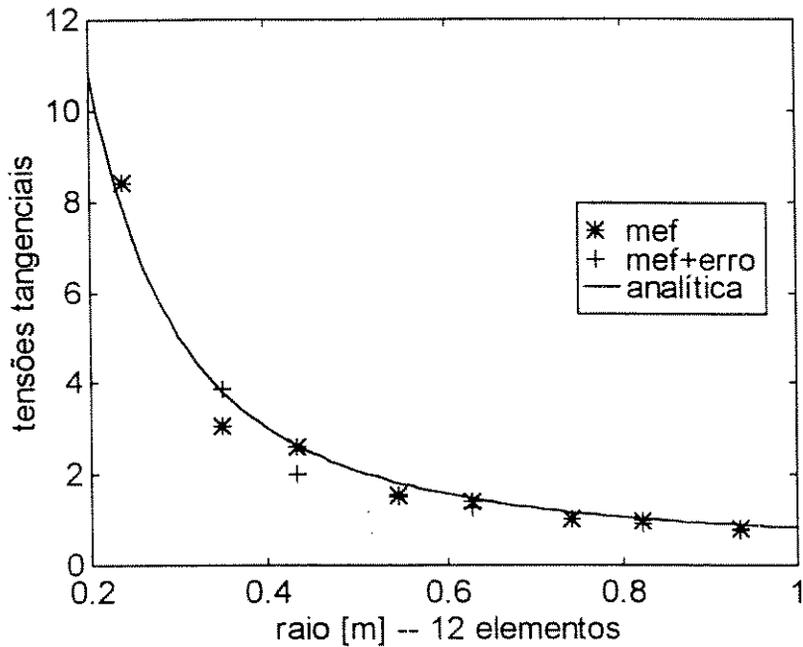


Figura 5.21- Tensões Tangenciais em função do raio para cilindro de parede espessa (12 EQL)

Na figura (5.22) e (5.23) são mostradas as tensões radiais e tangenciais respectivamente para a malha composta de 48 elementos.

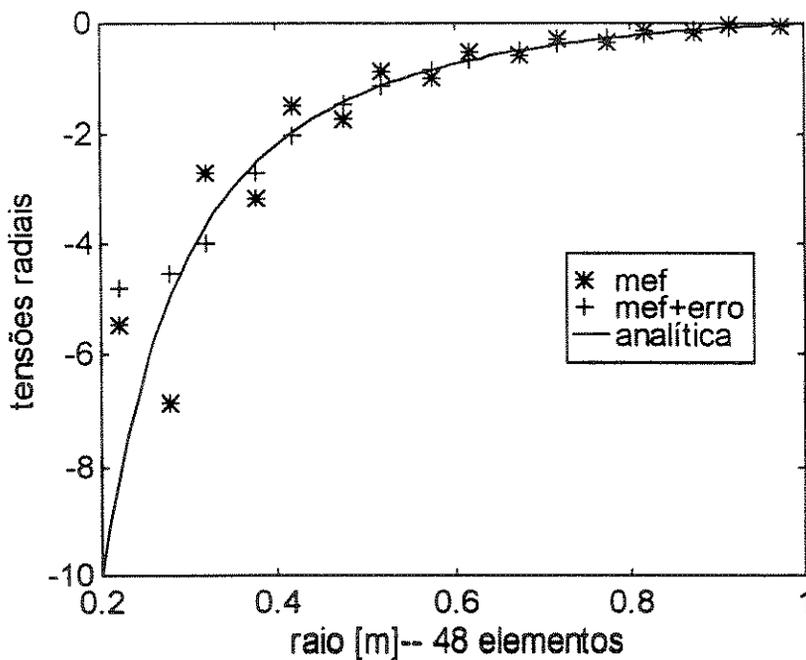


Figura 5.22- Tensões Radiais em função do Raio para cilindro de parede espessa (48 EQL)

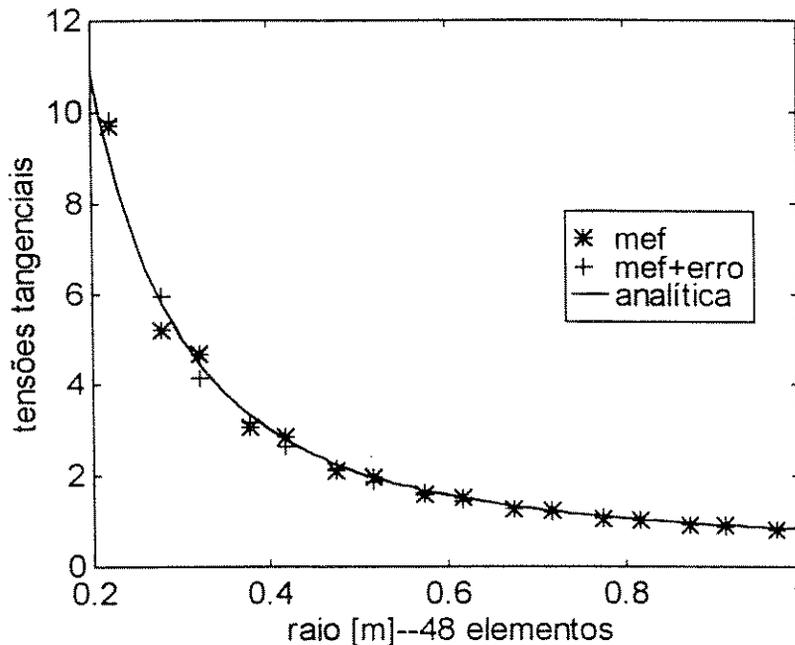


Figura 5.23-Tensões Tangenciais em função do Raio para cilindro de parede espessa (48 EQL)

Nota-se que o campo de tensões radiais e tangenciais pelos métodos (mef) como para o (mef+erro) ficam melhores a medida que o raio aumenta, e fornecem resultados mais aproximados, comparados com a solução analítica, quando a malha é discretizada por maior número de elementos.

De uma maneira geral, o erro estimado aponta na direção da solução exata, o que permite afirmar que a estimativa realizada é satisfatória para o estimador (ZZ).

5.5-Exemplos com cilindro de parede espessa submetido a pressão interna

O objetivo deste item é o de utilizar os estimadores (ZZ) e (ZZ1) e a estimativa do erro em salto de tensões (ST) com os três tipos de elementos implementados, ETL, ETQ, EQL, para se fazer comparações e tirar conclusões com respeito às normas, percentagens de erros a nível de elemento e percentagem de erro global, objetivando discutir as vantagens e desvantagens dos elementos e estimadores utilizados. Neste item também se observa as regiões que estão sujeitas a percentagem de erro acima de um valor pré-estabelecido para posterior refinamento.

O exemplo escolhido é de um cilindro de parede espessa, submetido a uma pressão interna.

Os parâmetros selecionados são: $a_1=0,05$; $b_1=0,2$; $p_i=100000$; $E=2100000$; $\nu=0,3$

Devido a simetria nos exemplos que se seguem foi tomado apenas um quarto do cilindro, e adotou-se uma malha bidimensional irregular, sendo que a pressão foi tomada como uma carga distribuída ao longo do perímetro interno do cilindro.

Foram adotadas malhas irregulares para se evidenciar a qualidade dos recuperadores de tensão.

Na figura (5.24) à esquerda é mostrado a norma do erro por elemento para o estimador (ZZ), discretizada com 31 ETL, e à direita é mostrado as percentagens de erros por elemento juntamente com a percentagem de erro global que foi de 42,55%, resultado grosseiro quando comparado com níveis aceitáveis adotados em processos de refinamento, indicando dessa forma que essa malha deve ser refinada. Os elementos sujeitos a maiores percentagens de erros são os mais internos, resultado esperado, pois, são neles aplicadas as forças externas. Observa-se também que são poucos elementos com percentagens de erros inferiores a 25%.

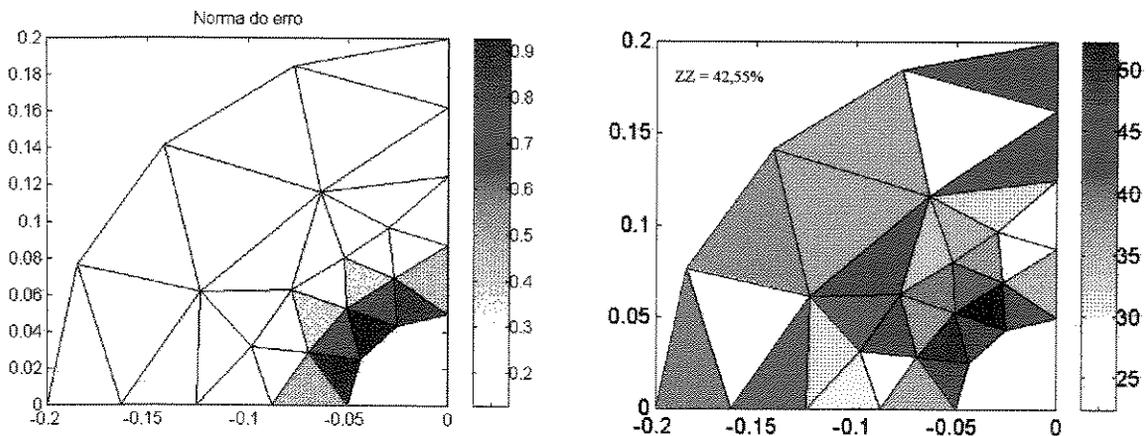


Figura 5.24-Norma e percentagem do Erro para 31 ETL (ZZ) (%Global=42,55%)

A figura (5.25), à esquerda, mostra as normas dos erros para o mesmo exemplo, agora discretizado por uma malha com 77 elementos, sem contudo se preocupar com refinamento, mas aumentando o número de elementos, principalmente na região onde os elementos estão sujeitos a maiores percentagens de erro. Devido a esse aumento do número de elementos,

consegue-se uma melhora substancial nas normas dos erros, nas percentagens dos erros por elemento, e na percentagem de erro global, que ficou em 26,22%, figura (5.25) à direita. Esse valor indica que o tamanho dos elementos deve ser diminuído, já que poucos elementos estão com percentagem de erro inferior a 15%, [FANCELO/FEIJOO/1992].

Nota-se que os elementos com maiores percentagens de erro e maiores normas são os elementos internos, ou sejam os mais próximos aos pontos de aplicação das forças, pois as deformações nessa região são maiores quando comparadas com as dos elementos mais externos.

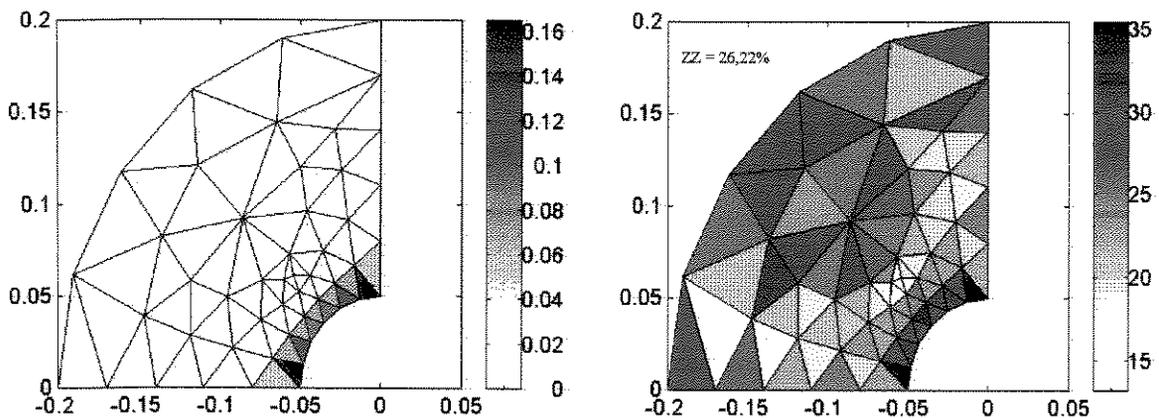


Figura 5.25-Norma e percentagem do Erro para 77 ETL (ZZ), % global =26,22%

A figura (5.26) à esquerda, mostra a norma do erro em energia e à direita a percentagem de erro por elemento segundo o estimador (ZZ1) para a malha discretizada com 77 ETL. Nota-se que os elementos com maiores normas de erro pertencem a região próxima ao raio interno do cilindro, em concordância com o estimador (ZZ). A percentagem global de erro ficou em 28,78%, valor grosseiro em termos de precisão, necessitando da malha ser refinada.

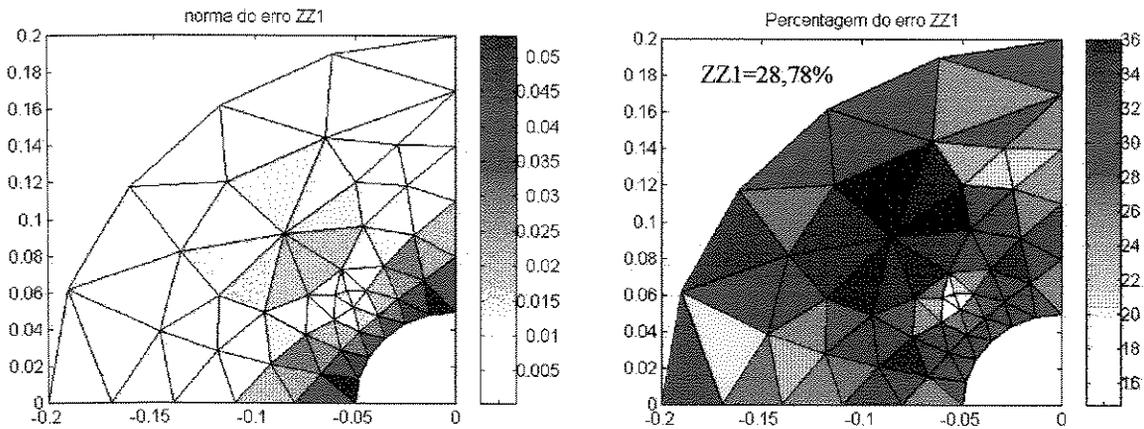


Figura 5.26-Norma e percentagem do Erro para 77 ETL (ZZ1), % global=28,78%

Na figura (5.27) o cilindro foi discretizado com elementos quadrilaterais lineares, inicialmente com 16 elementos e num segundo caso com 42 elementos, figura (5.28). A figura (5.27) à esquerda, mostra as normas dos erros, indicando os elementos mais internos possuírem maiores normas. À direita da figura (5.27), são mostradas as percentagens de erros, onde os elementos mais internos, os submetidos às forças externas, estão sujeitos também a maiores percentagens de erros, em torno de 28%. As menores percentagens de erro, elementos mais externos, estão em torno de 15%. A percentagem de erro global ficou em 25,21 %, podendo-se concluir que o modelo deve ser refinado.

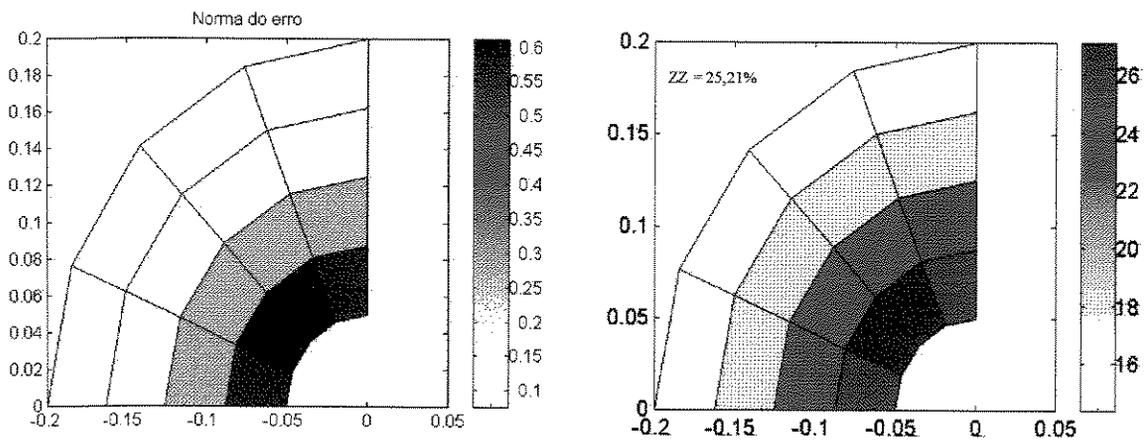


Figura 5.27-Norma e percentagem do Erro para 16 EQL (ZZ), % global=25,21%

Para 42 elementos a percentagem de erro global diminuiu, e passou a ser 17,69%. Nessa malha alguns elementos estão com percentagem de erro inferiores a 15%, resultado que começa a ser razoável em termos de refinamento, mas os elementos mais internos necessitam ser refinados, figura (5.28).

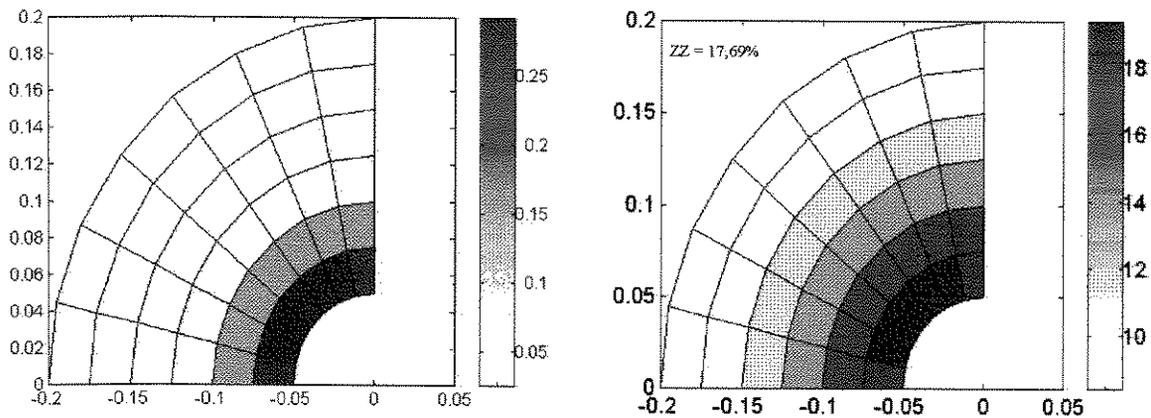


Figura 5.28-Norma e percentagem do Erro para 42 EQL (ZZ), % global=17,69%

Observa-se nas figuras anteriores que as malhas discretizadas com elementos quadrilaterais lineares, apresentam simetria, o que não ocorre com as malhas discretizadas com elementos triangulares lineares visto que, para EQL as áreas dos elementos não diferem tanto quando comparados com os ETL. Outro fator é que um nó da malha discretizada com EQL pertencem a 1,2 ou 4 elementos, já no caso da malha discretizada com ETL, um nó pode compartilhar até 9 elementos, figura (5.25), ocasionado tensões médias bem diferentes.

O cilindro foi também discretizado com elementos triangulares quadráticos, inicialmente com 31 elementos e posteriormente com 77 elementos, figuras (5.29) e (5.30), respectivamente.

A figura (5.29) à esquerda mostra as normas dos 31 elementos triangulares quadráticos, indicando ser os mais internos os sujeitos às maiores normas e conseqüentemente às maiores percentagens de erro, que ficou em torno de 65%, onde a percentagem de erro global foi de 42,95%, figura (5.29) à direita. Nota-se também que muitos elementos estão com percentagem de erro inferiores a 10%, indicando que tais elementos estão com razoável precisão quanto ao seu tamanho.

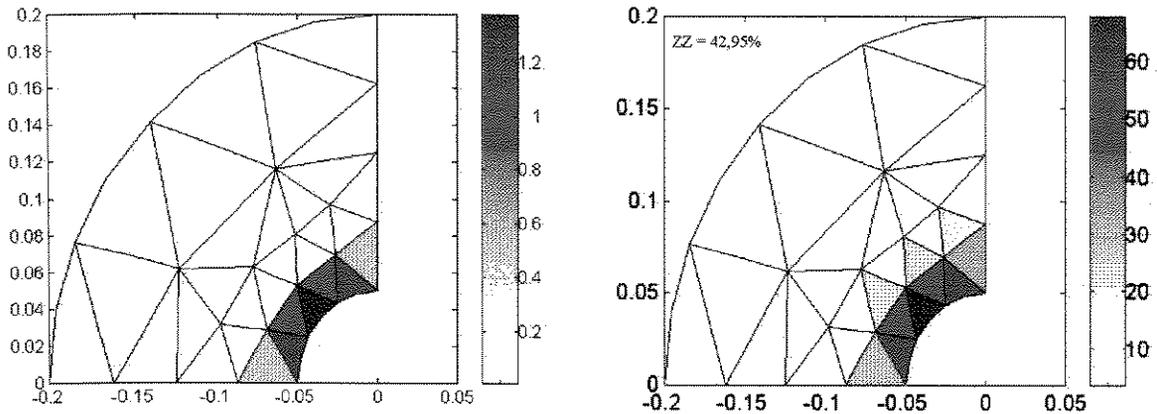


Figura 5.29-Norma e percentagem do Erro para 31 ETQ (ZZ), % global=42,95%

Elevou-se o número de elementos para 77 e na figura (5.30) à esquerda são mostradas as normas dos erros, e à direita suas respectivas percentagens. Em alguns elementos, a percentagem de erro é bastante grande, em torno de 65%. Por outro lado muitos elementos apresentaram percentagem de erro inferiores a 5%, podendo-se concluir que estão de bom tamanho. Apesar da percentagem global ter diminuído de 42,95% (31 elementos) para 33,55% (77 elementos), o processo de refinamento deve continuar, até esse valor reduzir-se a níveis aceitáveis.

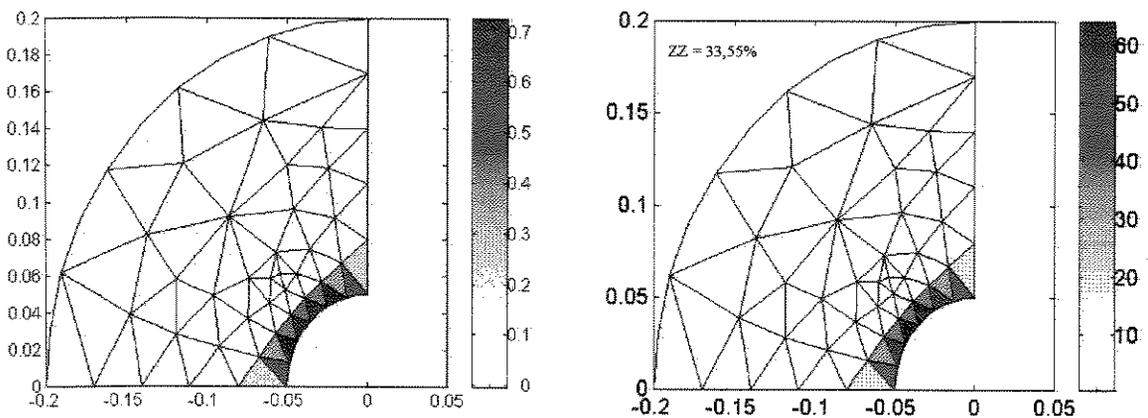


Figura 5.30-Norma e percentagem do Erro para 77 ETQ (ZZ), % global=33,55%

Na figura (5.31) é mostrada a Estimativa do erro em tensão para elementos triangulares lineares, segundo o estimador baseado no salto de tensões, para 31 elementos, à esquerda, e com 77 elementos, calculada pela equação (4.66). Mesmo sendo uma medida em tensão, a estimativa do erro baseado no salto de tensão, nota-se que este valor concorda com os estimadores no sentido de indicar qual a região com maior norma de erro e percentagem de erro, e que este valor decresce a medida que o número de elementos aumenta.

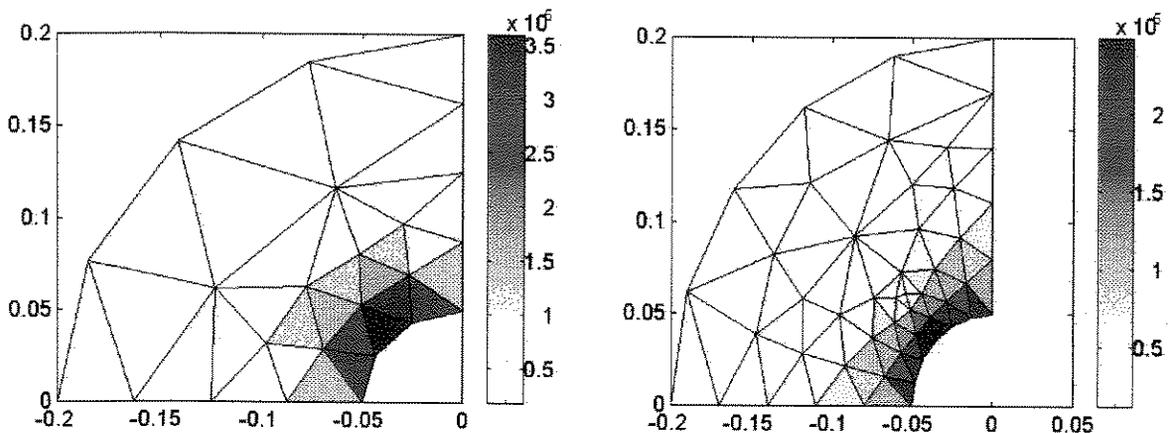


Figura 5.31-Estimativa do erro por 77 ETL segundo salto de tensões

Os elementos submetidos às forças externas, são os que possuem maiores estimativas de erros, região próxima ao raio interno de cilindro. Para efeito de comparação esse teste é importante pois concordam, com os estimadores implementados.

Na figura (5.32) são mostradas as normas do erro e a percentagem de erro utilizando o estimador (ZZ2), cuja recuperação das tensões é feita baseando-se na formulação apresentada no capítulo 4.

Este estimador, similar ao (ZZ) usa o recuperador de tensão dado pela equação (4.75) aqui denominado (ZZ2). A figura (5.32), à esquerda, mostra a norma do erro para a malha do cilindro discretizado com 77 ETL e à direita a percentagem do erro para esses elementos com a percentagem global de erro de 26,57%. Comparando a região com maiores normas o resultado concorda com os outros dois estimadores.

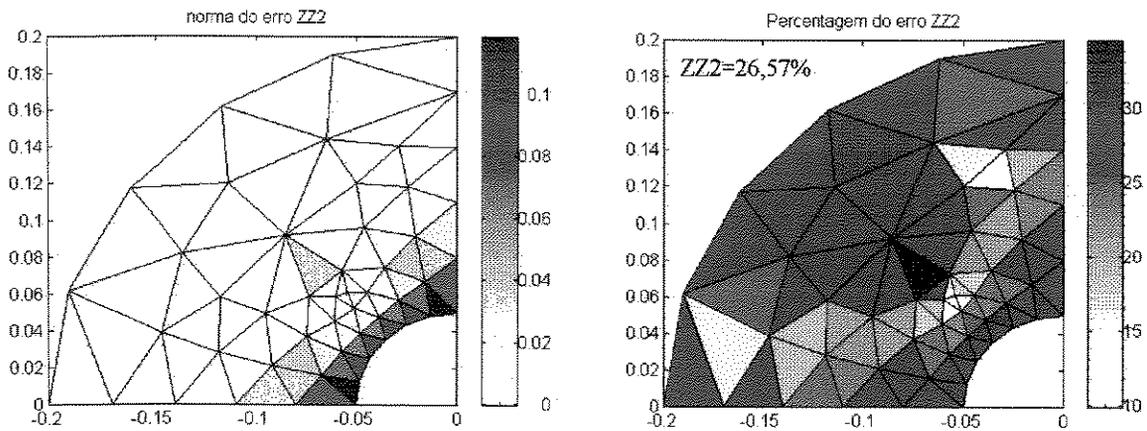


Figura 5.32-Norma e Percentagem do Erro por 77 ETL (ZZ2), % global=26,57%

5.6-Índice de Efetividade

O objetivo desse item é avaliar o índice de efetividade dos estimadores implementados, (ZZ) e (ZZ1) e (ZZ2), ou seja, avaliar o resultado da equação (4.24)

$$\theta = \frac{\|\{e_{\sigma}\}_{\text{Calc.}}\|}{\|\{e_{\sigma}\}_{\text{exato}}\|} \quad (4.24)$$

Este índice pode ser calculado quando o problema tem solução conhecida, ou solução analítica. Para os exemplos de cilindros submetidos a pressão interna, a solução analítica para o campo de tensões radiais (σ_R) e tangenciais (τ_{θ}) em qualquer ponto interno do cilindro é função somente do raio (R) do cilindro, dadas pelas equações (5.2) e (5.3).

Foi utilizado o elemento triangular linear para esse tipo de teste, onde a malha foi discretizada com 77 elementos. O campo de tensões analíticas foi avaliado nos pontos de integração dos elementos, posteriormente esse campo em coordenadas (R) e (θ) foi passado para o sistema de coordenadas retangulares (x) e (y). Como o campo de tensões pelo MEF é constante para esse elemento, foi avaliado então um erro para cada ponto de integração, podendo, dessa forma, estimar a norma exata do erro para cada elemento, figura (5.34).

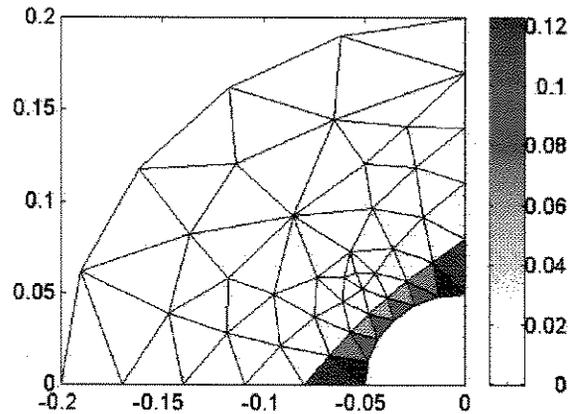


Figura 5.33-Norma exata do erro por 77 ETL

Valores ótimos para o índice de efetividade (θ) são os próximos da unidade, pois indica o quanto o campo de tensões calculado está próximo do campo de tensões analíticas, implicando então, o quanto o erro calculado diverge do erro exato. Foi considerado para efeito de comparação, o fator empírico, (f), referente a [ZIENKIEWICZ/ZHU,1987], para o cálculo do índice de efetividade do estimador (ZZ), figura (5.34); e o fator (1/2) para avaliar-se o índice de efetividade do estimador (ZZ1), [ANSYS,1994], figura (5.35). Os resultados para a efetividade (ZZ), (ZZ1) e (ZZ2) foram normalizados entre [0,1] para facilitar a visualização.

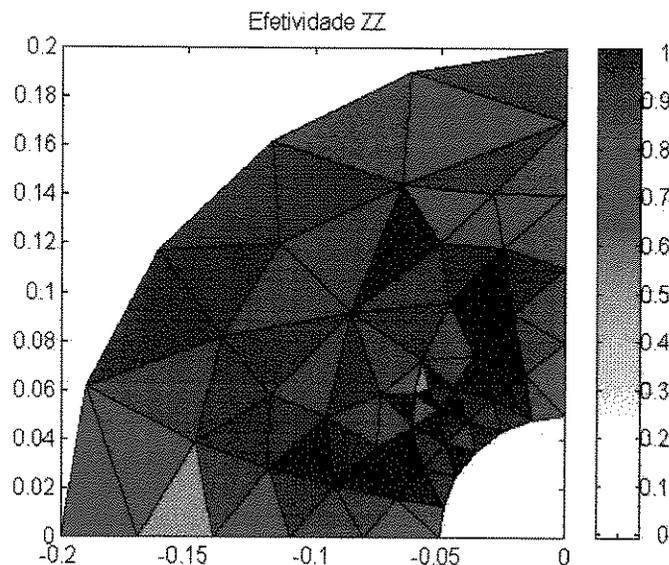


Figura 5.34-Índice de Efetividade (77 ETL)-ZZ

A figura (5.35) mostra o índice de efetividade do estimador (ZZ1) e a figura (5.36) mostra o índice de efetividade para o estimador (ZZ2).

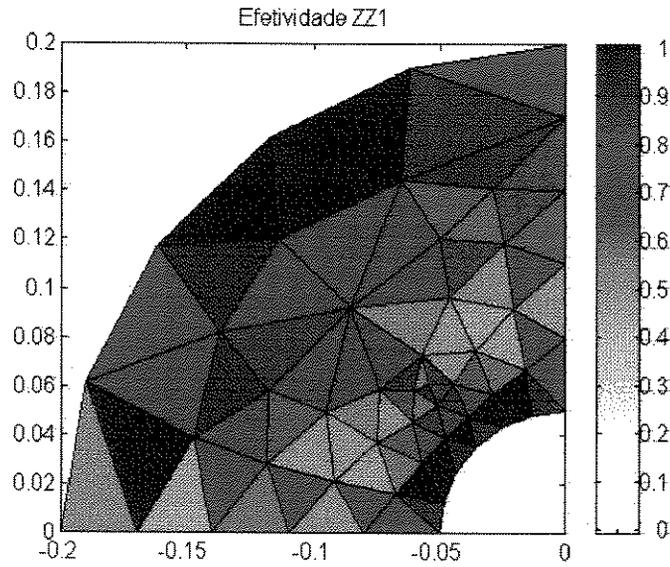


Figura 5.35-Índice de Efetividade (77 ETL)-ZZ1

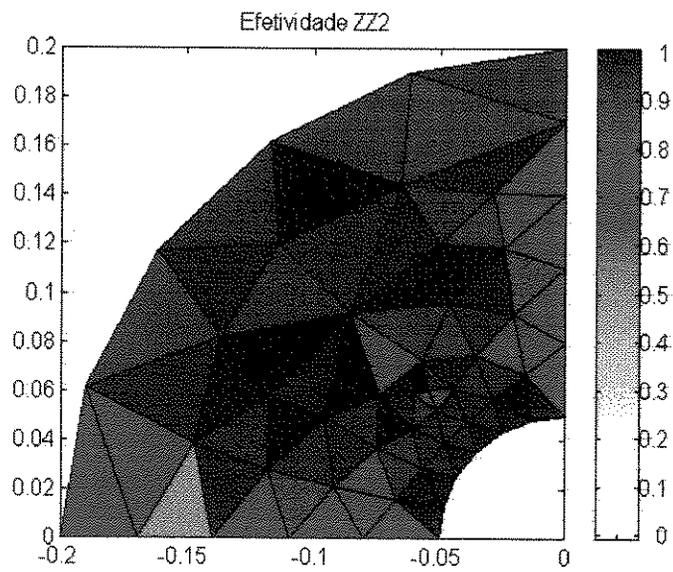


Figura 5.36-Índice de Efetividade (77 ETL)-ZZ2

Este índice é uma ferramenta adequada para a validação dos estimadores de erros, e seu valor tende a unidade à medida que as malhas são refinadas. Esta tendência foi observada para os três estimadores (ZZ), (ZZ1) e (ZZ2).

Nota-se um maior número de elementos com efetividade entre 0,7 a 1 para o estimador (ZZ) e (ZZ2), quando comparados com esse mesmo intervalo para a efetividade segundo (ZZ1), podendo-se então concluir que os estimadores (ZZ) e (ZZ2) fornecem resultados mais satisfatórios que o estimador (ZZ1).

Para esse teste a efetividade global segundo (ZZ), (ZZ1) e (ZZ2) ficaram bem próximo da unidade, um ótimo valor, porém em termos de refinamento adaptativos não é fator decisivo de parada do mesmo, pois alguns elementos estão com percentagem de erro elevada.

5.7-Comentários

Nesse capítulo foram apresentados exemplos com chapas finas submetidas a tração, a flexão, e cilindros submetidos a pressão interna, onde foi considerado estado plano de tensão, utilizando os estimadores (ZZ), (ZZ1) e (ZZ2) e a estimativa do erro em salto de tensões (ST). As malhas foram discretizadas com elementos triangulares lineares, quadrilaterais lineares e triangulares quadráticos, com três maneiras de recuperar as tensões, pela média dos elementos conectados a determinado nó, pela média ponderada pelas áreas dos elementos conectados e pelo método dado pela equação (5.6). Os resultados das normas e das percentagens de erro foram apresentados em forma de gráficos para facilitar a visualização.

Em alguns casos o campo de tensões calculado foi comparado com o campo de tensões analíticas para validar os métodos.

Nota-se que para os exemplos de cilindros, as malhas discretizadas com EQL são simétricas, o que não acontece quando são discretizadas com ETL e ETQ.

Os estimadores (ZZ) e (ZZ1) ou (ZZ2) fornecem resultados semelhantes, pois existe bastante concordância da região onde se deve fazer o refinamento, dessa forma, qualquer um pode ser utilizado com esse objetivo.

CAPÍTULO 6

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Esse trabalho foi elaborado objetivando ser detalhado e didático onde procurou-se mostrar o desenvolvimento das equações de uma forma simples, primeiro para as equações da elasticidade linear bidimensional, depois apresentou-se as equações do método da aproximação por elementos finitos. No capítulo seguinte foi apresentado as funções de forma, as funções de geometria, suas relações com as matrizes de rigidez do elemento triangular linear, triangular quadrático e quadrilateral linear, onde foi usado integração numérica para obtenção dessas matrizes. Com as matrizes de rigidez dos elementos, avaliou-se o campo de deslocamentos, o campo de deformações e o campo de tensões desses elementos.

O campo de tensões foi avaliado nos pontos de integração, o cálculo do campo de tensões nodais, foi feito por extrapolação, ou foi tomado as próprias coordenadas nodais como pontos de integração. Esse campo de tensões nodais é descontínuo, ou seja, um mesmo nó pode ter mais de um valor de tensão, devendo-se então fazer algum tipo de média para se ter um valor único de tensão nodal. Três critérios de "suavização" foram implementados: primeiro pela média aritmética das tensões dos elementos conectados àquele nó, que é o recuperador usado pelo Ansys, [ANSYS,1994], o segundo que é calculado pela média ponderada pelas áreas dos elementos que compartilham daquele nó, que é o recuperador de tensões usado pelo estimador (ZZ), [ZIENKIEWICZ/ZHU,1987], para suavizar o campo de tensões nodais. O

terceiro critério proposto, (ZZ2), baseia-se em uma média ponderada com o inverso das áreas elementares.

Testes com cilindros de parede espessa submetidos à pressão interna e discretizado com EQL foram feitos para validar esses campos de tensões, onde foram comparados com o campo de tensões analíticas.

Usando o primeiro estimador, média aritmética, calculou-se o erro por nó e conseqüentemente a norma do erro por elemento, percentagem de erro por elemento e percentagem global do erro, parâmetro principal para refinamento.

Com o segundo tipo de recuperador, média ponderada pela área dos elementos, e usando as funções de forma, avaliou-se o campo de tensões "melhoradas" nos pontos de integração, assumindo então, esse campo de tensões como sendo o campo exato de tensões, (procedimento adotado para problemas de solução não conhecida). Avaliou-se, posteriormente, um vetor erro em tensão para cada ponto de integração, e calculou-se a norma do erro por elemento, a percentagem de erro por elemento e a percentagem de erro global.

No capítulo 4 foi descrito uma maneira de como fazer refinamento, utilizando os Estimadores implementados, onde é indicado quais elementos devem ser refinados e o novo tamanho desses elementos.

Os exemplos do capítulo 5 mostram as aplicações e a validação dos Estimadores, usando os três tipos de elementos implementados: triangular linear, triangular quadrático e quadrilateral linear, assim como, testes de efetividade para o exemplo de cilindro de parede espessa submetido à pressão interna discretizado com ETL.

É implementado também a Estimativa de erro usado pelo pacote comercial Nastran, [MSC/NASTRAN,1991]. Alguns exemplos foram feitos e concordam com os estimadores, indicando os elementos a serem refinados.

Foram feitos exemplos com cilindro de parede espessa submetido à pressão interna discretizado com elementos quadrilaterais lineares utilizando o estimador (ZZ1), que é o usado pelo pacote comercial Ansys, [ANSYS,1994]. Os métodos diferem da maneira de avaliarem o erro; enquanto (ZZ) avalia o erro nos pontos de integração, (ZZ1) avalia o erro nos nós dos elementos. O estimador (ZZ) calcula as tensões melhoradas por interpolação, usando as funções de forma dos elementos, enquanto (ZZ1) usa o campo de tensões médias para avaliar o erro por nó.

Pelos exemplos anteriores nota-se que tanto (ZZ), (ZZ1) ou (ZZ2) pode ser utilizado em programas de refinamento adaptativo.

Nos testes preliminares realizados, o procedimento (ZZ2) mostrou uma boa coerência quando aplicado em malhas fortemente irregulares. Um maior número de ensaios numéricos deve ser realizado para confirmar este desempenho.

Nesse trabalho, a preocupação maior foi de desenvolver, (implementar), usando elementos finitos, um programa para o cálculo de estimadores de erros, sem portanto fazer refinamentos. Em alguns casos, simplesmente aumentou-se o número de elementos nas regiões onde os estimadores indicaram ser grande a percentagem de erro, para verificar se: diminuindo o tamanho dos elementos nessas áreas a percentagem de erro por elemento também diminuiria e conseqüentemente a percentagem global de erro, tal fato ficou evidente pelos exemplos do capítulo 5.

Para trabalhos futuros, os Estimadores e os elementos implementados poderão ser úteis na resolução de problemas de engenharia envolvendo o MEF pelo uso de técnicas e refinamentos adaptativos.

7-REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AINSWORTH M., ZHU J.Z., CRAIG A.W., ZIENKIEWICZ O. C. Analysis of the ZIENKIEWICZ-ZHU A posteriori error estimator in the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*. v.28, p.2161-2174, 1989.
- ANSYS, Theory, Volume IV, Swanson Analysis Systems, Inc,1994
- BABUSKA I., RHEINBOLDT W.C. Error estimates for adaptive finite element computacions. *SIAM Journal Numerical Analysis*. v.15, N° 4, p.736-754, 1978
- BARLOW J. Optimal stress locations in finite element models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*. v.10, p.243-251, 1976.
- CANTIN G., LOUBIGNAC G., TOUZOT G. An iterative algorithm to build continuous stress and displacement solutions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*. v.12, p.1493-1506, 1978.
- CHENG J.-H Adaptive grid optimization for structural analysis - geometry based aproach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 107, 1-22, 1993.

- COOK R.D., MALKUS D.S., PLESHA M.E. *Concepts and Applications of finite element analysis*. New York, John Wiley. 1989.630p.
- DESAI, C.S. *Elementary Finite Element Methods*. New Jersey, Prentice Hall. 1979.434p.
- DHATT G., TOUZOT G. *The Finite Element Method Displayed*. New York, John Wiley. 1984. 509p.
- FANCELLO E.A., FEIJOO R.A. Estimador de erro para problemas planos de elasticidade linear. *Laboratório Nacional de Computação Científica*, Nº 19/92.
- HINTON E. , SCOTT F.C., RICKETTS R.E. Short Communications local least squares stress smoothing for parabolic isoparametric elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*, v.9, p.235-256, 1975.
- HINTON E. CAMPBELL J.S. Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*, v.8, p.461-480, 1974.
- HUGHES T.J.R. *The Finite Element Method*, New Jersey. Prentice Hall, 1987. 803p.
- KELLY D.W. The self-equilibration of residual and complementary a posteriori error estimates in the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*, v.20, p.1491-1509, 1984.
- LAWRENCE K.L., NAMBIAR R.V. BERGMANN B. Closed form stiffness matrices and error estimators for plane hierarchic triangular element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*, v.31, p.879-894, 1991.
- LI S.D., WIBERG N.-E. A posteriori error estimate by element patch post-processing, adaptive analysis in energy and L_2 norms. *Computer & Structure*, v.53, Nº 4, p.907-919, 1994.

MASHAIE A., HUGHES E. GOLDAK J. Error estimate for finite element solutions of elliptic boundary value problems. *Computers & Structures*, v.49, p.187-198, 1993.

MSC/NASTRAN, Application Manual, The Macneal - Schwendler Corporation, 1991

MUTHUKRISHNAN S.N., SHIAKOLAS P.S., NAMBIAR R.V., LAWRENCE K.L. Simple algorithm for adaptive refinement of three-dimensional finite element tetrahedral meshes. *AIAA Journal*, v.33, N° 5, p.929-932, 1995.

OHTSUBO H., KITAMURA M. Element by element a posteriori error estimation and improvement of stress solutions for two-dimensional elastic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*, v.29, p.223-244, 1990.

OHTSUBO H., KITAMURA M. Numerical investigation of element-wise a posteriori error estimation in two and three dimensional elastic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*, v.34, p.969-977, 1992.

PERAIRE J., VAHDATI M., MORGAN K., ZIENKIEWICZ O.C. Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations. *Journal of Computational Physics*, v.72, p.449-466, 1987.

RIBEIRO F.L.B. Formulação hierárquica do método dos elementos finitos: refinamento auto-adaptativo versão p aplicado a problemas de elasticidade. *Tese de Mestrado-COPPE/UFRJ*, 1986.

ROBERT P., MELKANOFF M.A. Self-adaptive stress analysis based on stress convergence. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*, v.24, p.1973-1992, 1987.

SEGERLIND L.J. *Applied Finite Element Analysis*. New York, John Wiley, 1984. 427p.

- SHIAKOLAS P.S., LAWRENCE K.L., NAMBIAR R.V. Closed form error estimator for the linear strain and quadratic strain tetrahedron finite element. *Computers & Structures*, v.47, p.907-915, 1993.
- SILVA R.S., GARCIA E.L.M., COUTINHO A.L.G.A. Um algoritmo para o controle do erro algébrico em refinamento adaptativo. XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Brasília, Brasil, 1993.
- TESSLER A., RIGGS H.R., MACY S.C. A variational method for finite element stress recovery and error estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 111, p.369-382, 1994.
- TIMOSHENKO S.P., GOODIER J.N. *Teoria da Elasticidade*. RJ-Brasil, Guanabara Dois, 1980. 545p.
- WIBERG N.-E., ABDULWAHAB F. Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*, v.36, p.2703-2724, 1993.
- ZHU J.Z., ZIENKIEWICZ O. C. Superconvergence recovery technique and a posteriori error estimators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*, v.30, p.1321-1339, 1990.
- ZIENKIEWICZ O. C, GAGO J.P. de S.R., KELLY D.W. The hierarchical Concept in finite element analysis. *Computers & Structures*, v.16, Nº 4, p.53-65, 1983.
- ZIENKIEWICZ O. C. *The Finite Element Method*. New York, McGraw-Hill, 1977.
- ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J.Z. The superconvergent Patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*, v.33, p.1331-1364, 1992a.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J.Z. The superconvergen Patch recovery and a posteriori error estimates.Part 2: Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*, v.33, p.1365-1382, 1992b.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J.Z. Adaptivity and mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*, v.32, p.783-810, 1991.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Analysis*, v.24, p.337-357, 1987.