

TESE DEFENDIDA POR Márcio Coelho de
Mattos E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 07/08/98
LI JI
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Alterações na Dinâmica de Sistemas com Vibroimpacto Devidas a Variações da Folga

Autor: Márcio Coelho de Mattos
Orientador: Hans Ingo Weber

17/98

M436a
35864/BC

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Alterações na Dinâmica de Sistemas com Vibroimpacto Devidas a Variações da Folga

Autor: **Márcio Coelho de Mattos**
Orientador: **Hans Ingo Weber**

Curso: **Engenharia Mecânica**
Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Tese apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica
como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas - 1998
S.P. - Brasil



3823190

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	UNICAMP
V.	M/436a
Tombo B3	35864
PROC.	395/98
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	17/11/98
N.º CPD	

CM-00118576-2

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M436a Mattos, Márcio Coelho de
Alterações na dinâmica de sistemas com vibroimpacto devidas a variações da folga. / Márcio Coelho de Mattos.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Hans Ingo Weber.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Choque (Mecânica). 2. Colisões (Física). 3. Oscilações não-lineares. 4. Dinâmica das máquinas. I. Weber, Hans Ingo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

TESE DE DOUTORADO

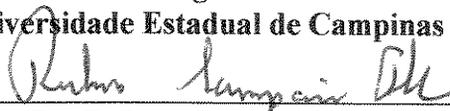
**Alterações na Dinâmica de
Sistemas com Vibroimpacto
Devidas a Variações da Folga**

Autor: **Márcio Coelho de Mattos**

Orientador: **Hans Ingo Weber**



**Prof. Dr. Hans Ingo Weber - Presidente
Universidade Estadual de Campinas**



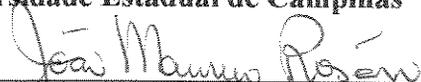
**Prof. Dr. Rubens Sampaio
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro**



**Prof. Dr. José Manoel Balthazar
Universidade Estadual Paulista**



**Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka
Universidade Estadual de Campinas**



**Prof. Dr. João Maurício Rosário
Universidade Estadual de Campinas**

Campinas - SP, 07 de agosto de 1998

Agradecimento

Manifestamos nossos sinceros agradecimentos a todas as pessoas que colaboraram conosco no desenvolvimento deste trabalho. De forma especial agradecemos ao Prof. Dr. Hans Ingo Weber, nosso orientador, pela brilhante idéia de estudar sistemas com vibroimpacto, pelos esclarecimentos e pelas críticas. Também pelo grande apoio no provimento de meios para o desenvolvimento da parte experimental do trabalho. Não poderíamos também deixar de registrar o apoio do Departamento de Projeto Mecânico da Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP, que nos recebeu em seu quadro de alunos desde nosso mestrado, em 1991, o que é para nós uma honra. Agradecemos particularmente aos técnicos do Laboratório de Projeto Mecânico e do Centro de Tecnologia da UNICAMP pela construção do sistema utilizado no estudo experimental. Da mesma forma registramos nosso agradecimento ao pessoal do Departamento de Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, que nos deu todo apoio instrumental no desenvolvimento da investigação experimental. Lembramos especialmente o apoio do Prof. Dr. Rubens Sampaio e dos alunos do Laboratório de Vibrações Mecânicas da PUC-Rio. Somos gratos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pelo apoio financeiro que recebemos. Finalmente, e de modo todo especial, somos gratos à Universidade Federal do Espírito Santo, notadamente ao Departamento de Engenharia Mecânica, pelo apoio fundamental à conclusão de nosso doutorado.

"Não te esqueças da minha lei, e o teu coração guarde os meus mandamentos;

Porque eles aumentarão os teus dias, e te acrescentarão anos de vida e paz.

Não te desapareçam a benignidade e a fidelidade; ata-as no teu pescoço,

escreve-as na tábuca do teu coração.

E acharás graça e bom entendimento aos

olhos de Deus e dos homens.

Confia no Senhor de todo o teu coração,

e não te estribes no teu próprio entendimento.

Reconhece-o em todos os teus caminhos, e Ele endireitará as tuas veredas.

Não sejas sábio aos teus próprios olhos; teme ao Senhor e aparta-te do mal.

Isto será remédio para o teu umbigo, e medula para os teus ossos."

Provérbios 3

Aos meus pais

Sumário

Sumário	i
Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	vi
Lista de Símbolos	vii
Resumo	ix
Abstract	x
1 Introdução	1
2 Revisão Bibliográfica	6
2.1 Levantamento Bibliográfico	6
2.2 Revisão da Modelagem de Impacto Apresentada na Literatura	10
2.2.1 Impactos Unidimensionais	14
2.2.2 Impactos Bidimensionais	23
2.2.3 Impactos Tridimensionais	33
2.3 Contribuição desta Tese	37
3 Estudo Numérico de Sistemas de Dois Graus de Liberdade	39
3.1 Análise de um Sistema Particular de 3gl com Impacto	40
3.2 Sobre as Propriedades de um Novo Sistema, Representativo de um Sistema Real	50
3.3 Análise da Resposta Livre do Sistema Ajustado da Seção Anterior	55
3.3.1 Migração da Primeira Frequência Característica	55
3.3.2 Sobre a Existência de outra Frequência Característica Migratória	59

3.4	Análise por Mapas de Poincaré	61
3.4.1	Toda Energia Concentrada no Segundo Modo de Vibração do Sistema Linear	61
3.4.2	Energia Distribuída entre os Modos de Vibração do Sistema Linear (10% no primeiro e 90% no segundo)	71
4	Estudo Numérico de um Sistema de Três Graus de Liberdade	75
4.1	Sobre as Propriedades do Sistema Analisado neste Capítulo	75
4.2	Migração da Primeira Frequência Característica	78
4.3	Migração das Demais Frequências Características	80
4.4	Análise por Mapas de Poincaré	82
5	Investigação Experimental da Migração de Frequências	86
5.1	Descrição do Sistema e Metodologia	86
5.2	Resultados Obtidos - Excitação até 200 Hz	92
5.3	Resultados Obtidos - Excitação até 400 Hz	102
5.4	Resultados Obtidos - Excitação até 100 Hz	111
6	Análise dos Resultados e Conclusões	113
	Bibliografia	117
	Apêndice A - Expoentes de Lyapunov	124
	Apêndice B - Modelos Discretos Reduzidos para Sistemas Contínuos	127

Lista de Figuras

- 2.1 - a: Resposta em força b: Resposta em impluso
 - 2.2 - Esquema de impacto unidimensional para o modelo de impacto instantâneo
 - 2.3 - Esquema de impacto unidimensional para o modelo de impacto linear
 - 2.4 - Situação analisada por Hunt e Crossley
 - 2.5 - Situação analisada por Chatterjee
 - 2.6 - Modelo com amortecimento não linear
 - 2.7 - Diagramas de corpo livre num impacto bidimensional
 - 2.8 - Sistema com impacto com restrição cinemática
 - 2.9 - Esquema simplificado de impacto bidimensional
 - 2.10 - Esquema de impacto com ponto de contato
 - 2.11 - Visualização de um impacto tridimensional
-
- 3.1 - Sistema de graus de liberdade com impacto - modelo 1
 - 3.2 - Sistema de graus de liberdade com impacto - modelo 2
 - 3.3 - Plano fase $\sigma = 12.4814250670842$
 - 3.4 - Plano fase para $\sigma = 12.4814250670843$
 - 3.5 - Evolução do maior expoente de Lyapunov para a resposta da figura 3.3
 - 3.6 - Evolução do maior expoente de Lyapunov para a resposta da figura 3.4
 - 3.7 - Variação da frequência característica com a folga - primeira janela resposta não caótica
 - 3.8 - Variação da frequência característica com a folga - segunda janela resposta não caótica
 - 3.9 - Variação da frequência característica com a folga - terceira janela resposta não caótica
 - 3.10 - Espectro exemplo de resposta periódica
 - 3.11 - Espectro exemplo de resposta não periódica
 - 3.12 - Ajuste da função $f(\sigma)$ proposta ao conjunto de pontos obtidos por simulação
 - 3.13 - Erro entre a frequência calculada pela expressão 3.5 e os pontos simulados
 - 3.14 - Ajuste da função $f(\sigma)$ proposta outros conjuntos de pontos simulados
 - 3.15 - Variação da frequência característica como função da folga
 - 3.16 - Erro entre os resultados da função proposta e o da simulação
 - 3.17 - Sistema contínuo com impacto
 - 3.18 - Variação da frequência característica como função da folga

- 3.19 - Erro entre os resultados da função proposta e da simulação para a figura 3.18
 - 3.20 - Variação da frequência característica como função da folga
 - 3.21 - Erro entre os resultados da função proposta e da simulação para a figura 3.18
 - 3.22 - Espectro da resposta quando $\sigma = 2.0$ mm
 - 3.23 - Espectro da resposta quando $\sigma = 4.0$ mm
 - 3.24 - Espectro da resposta quando $\sigma = 6.0$ mm
 - 3.25 - Plano fase $\sigma = 9.96$ mm
 - 3.26 - Plano fase $\sigma = 9.97$ mm
 - 3.27 - Mapa de Poincaré da resposta apresentada na figura 3.25
 - 3.28 - Mapa de Poincaré da resposta apresentada na figura 3.26
 - 3.29 - Mapa de Poincaré da resposta apresentada na figura 3.25
 - 3.30 - Mapa de Poincaré da resposta apresentada na figura 3.26
 - 3.31 - Mapas mostrando a variação do tempo entre pontos sucessivos sobre Σ
 - 3.32 - Transição para o caos para folga relativa em torno de 0.605 mm
 - 3.33 - Transição do caos para movimento regular em torno de 6.28 mm
 - 3.34 - Espectro da resposta cujo mapa é o da figura 3.33(f)
 - 3.35 - Espectro da resposta cujo mapa é o da figura 3.33(g)
 - 3.36 - Espectro da resposta cujo mapa é o da figura 3.33(i)
 - 3.37 - Plano fase $\sigma = 1.0$ mm
 - 3.38 - Plano fase $\sigma = 8.0$ mm
 - 3.39 - Mapa de Poincaré $\sigma = 1.0$ mm
 - 3.40 - Mapa de Poincaré $\sigma = 8.0$ mm
 - 3.41 - Espectro da resposta quando $\sigma = 1.0$ mm
 - 3.42 - Espectro da resposta quando $\sigma = 8.0$ mm
-
- 4.1 - Migração da frequência característica com a variação da folga
 - 4.2 - Erro entre os resultados da função proposta e da simulação para a figura 4.1
 - 4.3 - Migração da terceira frequência característica com a variação da folga
 - 4.4 - Esquema de migração das frequências
 - 4.5 - Migração da segunda frequência característica com a variação da folga
 - 4.6 - Mapas de Poincaré para várias folgas
 - 4.7 - Espectro da resposta quando $\sigma = 1.0$ mm
 - 4.8 - Espectro da resposta quando $\sigma = 5.0$ mm
 - 4.9 - Espectro da resposta quando $\sigma = 9.0$ mm
-
- 5.1 - Vista em perfil do aparato para investigação experimental
 - 5.2 - Vista geral do dispositivo utilizado nos experimentos
 - 5.3 - Detalhes da fixação do acelerômetro e do sensor de força
 - 5.4 - Detalhes do acelerômetro e da cabeça de impacto na extremidade da viga
 - 5.5 - Espectro de potência da resposta para folga maior 2.20 mm
 - 5.6 - Espectro de potência da resposta para folga de 2.20 mm

- 5.7 - Espectro de potência da resposta para folga de 2.05 mm
- 5.8 - Espectro de potência da resposta para folga de 1.90 mm
- 5.9 - Espectro de potência da resposta para folga de 1.70 mm
- 5.10 - Espectro de potência da resposta para folga de 1.60 mm
- 5.11 - Espectro de potência da resposta para folga de 1.50 mm
- 5.12 - Espectro de potência da resposta para folga de 1.30 mm
- 5.13 - Espectro de potência da resposta para folga de 1.10 mm
- 5.14 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.65 mm
- 5.15 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.50 mm
- 5.16 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.20 mm
- 5.17 - Espectro de potência da resposta para folga nula
- 5.18 - Migração da primeira frequência característica
- 5.19 - Migração da primeira frequência característica
- 5.20 - Erro entre os valores medidos e os previstos pela função proposta
- 5.21 - Erro em função da diferença de folga entre os casos das figuras 5.5 e 5.6
- 5.22 - Migração da segunda frequência característica
- 5.23 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.90 mm
- 5.24 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.85 mm
- 5.25 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.80 mm
- 5.26 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.75 mm
- 5.27 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.70 mm
- 5.28 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.65 mm
- 5.29 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.60 mm
- 5.30 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.55 mm
- 5.31 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.50 mm
- 5.32 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.45 mm
- 5.33 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.40 mm
- 5.34 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.35 mm
- 5.35 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.30 mm
- 5.36 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.25 mm
- 5.37 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.20 mm
- 5.38 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.15 mm
- 5.39 - Espectro de potência da resposta para folga de 0.10 mm
- 5.40 - Espectro de potência da resposta para folga nula
- 5.41 - Migração da primeira frequência característica
- 5.42 - Migração de outras frequências características
- 5.43 - Espectro de potência da resposta para folga de 1.50 mm
- 5.44 - Espectro de potência da resposta para folga de 1.50 mm
- 5.45 - Espectro de potência da resposta para folga de 1.50 mm
- 5.46 - Espectro de potência da resposta para folga de 1.50 mm

Lista de Tabelas

- 3.1 - Limites das janelas de caos
- 3.2 - Parâmetros das funções para os diversos conjuntos de pontos
- 3.3 - Erro máximo entre a frequência obtida pela função e os pontos simulados

- 5.1 - Características principais do aparato experimental
- 5.2 - Erros percentuais entre as frequências naturais experimentais e teóricas para a viga engastada -livre
- 5.3 - Erros percentuais entre as frequências naturais experimentais e teóricas para a viga engastada -apoiada

Lista de Símbolos

- v_i : Velocidade relativa no início do processo de impacto (impactos unidimensionais)
 v_f : Velocidade relativa no fim do processo de impacto (impactos unidimensionais)
 e : Coeficiente de restituição ou de restituição normal (impactos multidimensionais)
 Coeficiente de restituição cinético (página 28)
 m_1 e m_2 : Massa dos corpos de um par colidente (capítulo 2)
 k : Coeficiente de restituição elástica do contato (impacto com modelo linear: página 15)
 c : Coeficiente de amortecimento do contato (impacto com modelo linear: página 15)
 ζ : Fator de amortecimento (impacto com modelo linear: página 15)
 P_n : Impulso na direção normal
 P_t : Impulso na direção tangencial (impacto bidimensional)
 μ : Razão de impulso (impacto bidimensional)
 Coeficiente de atrito de Coulomb (modelo de Pfeiffer: página 29)
 e_t : Coeficiente de restituição tangencial (impacto bidimensional)
 v_{it} : Velocidade relativa transversal no início do impacto (impactos bidimensionais)
 v_{ft} : Velocidade relativa transversal no fim do impacto (impactos bidimensionais)
 v_{in} : Velocidade relativa normal no início do impacto (impactos bidimensionais)
 v_{fn} : Velocidade relativa normal no fim do impacto (impactos bidimensionais)
 \vec{V}_1 e \vec{V}_2 : Velocidades absolutas dos corpos de um par colidente
 P_{im} : Impulso desenvolvido na fase de compressão (direção normal)
 P_{mf} : Impulso desenvolvido na fase de descompressão (direção normal)
 \vec{P}_c : Impulso desenvolvido na fase de compressão (impulso total)
 M : Matriz massa local
 \vec{V}_c : Velocidade quando o estado de compressão máxima é alcançado
 V_{ct} : Velocidade tangencial no estado de compressão máxima
 P_{en} : Impulso desenvolvido na fase de expansão (modelo de Poisson: página 30)

- P_{cr} : Impulso desenvolvido na fase de compressão (modelo de Poisson: página 30)
- m_1 , m_2 e m_3 : Massas do sistema de parâmetros concentrados (capítulo 3)
- k_1 , k_2 e k_3 : Rigidezes do sistema de parâmetros concentrados (capítulo 3)
- σ : Folga absoluta
- σ_r : Folga relativa
- μ : Razão de massas (capítulo 3: página 40)
- ε : Razão de rigidezes (capítulo 3: página 40)
- ω_i : i -ésima frequência natural do sistema linear com folga infinita (circular)
- $\bar{\omega}_i$: i -ésima frequência natural do sistema linear com folga nula (circular)
- f_i : i -ésima frequência natural do sistema linear com folga infinita (ciclos/tempo)
- \bar{f}_i : i -ésima frequência natural do sistema linear com folga nula (ciclos/tempo)
- f_0 : Frequência característica da resposta quando a folga tende a zero
- f_c : Frequência característica da resposta quando o sistema entra no estado caótico
- σ_c : Folga na qual o sistema entra no estado caótico
- σ_{max} : Folga máxima para a ocorrência de impactos
- M**: Matriz massa do sistema de três graus de liberdade (capítulo 4)
- K**: Matriz rigidez do sistema de três graus de liberdade (capítulo 4)

Resumo

Mattos, Márcio Coelho de; *Alterações na Dinâmica de Sistemas com Vibroimpacto Devidas a Variações da Folga*; Campinas; Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas; 1998. 129 p. Tese (Doutorado)

Apresentamos neste trabalho uma investigação sobre as mudanças na dinâmica de sistemas com vibroimpacto. Particularmente estamos interessados no estudo da migração das frequências características destes sistemas. Podemos considerar que um dado sistema com vibroimpacto tende a um sistema com impacto degenerado quando a folga deste sistema tende a zero ou a um valor maior que a amplitude de vibração do sistema na coordenada de impacto. Podemos também denominar estes sistemas como sistemas lineares associados ao sistema com impacto, se o impacto for a única não linearidade presente no sistema. Mostramos que existe uma relação intrínseca entre a resposta do sistema com impacto e os sistemas lineares associados, ou sistemas degenerados. Para investigar esta relação, analisamos a resposta de sistemas com dois e três graus de liberdade com impacto em uma de suas coordenadas. Além disto, investigamos experimentalmente a resposta de uma viga engastada-livre excitada randomicamente e com impactos em sua extremidade livre. Observamos boa correlação entre os resultados numéricos e experimentais. Propomos uma função para a migração da primeira frequência característica da resposta de sistemas com vibroimpacto. O caminho da migração depende da distribuição da energia total fornecida ao sistema entre os diversos modos de vibração dos sistemas lineares associados.

Palavras-chaves: Oscilações não lineares, Sistemas com impactos, Impacto

Abstract

Mattos, Márcio Coelho de; *Alterations in the Dynamics of Vibroimpact Systems Due to Clearance Variations*; Campinas; Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas; 1998. 129 p. Tese (Doutorado)

This work presents an investigation on the changes in the dynamics of vibroimpact systems as their clearance is varied. Particularly we are interested in the migration of the characteristic frequencies of impact systems. We can consider that a given vibroimpact system reaches to a *degenerated impact system* when the clearance reaches to zero or to a value which is greater than the amplitude of the response of the system at the impact coordinate. We also can call these systems as *associated linear systems* of a given impact system, if the impact is the only nonlinearity which takes place. We show that there is an intrinsic relation between impact systems and their *associated linear systems*, or *degenerated systems*. To investigate this relation we consider the free response of 2-DOF and 3-DOF impact systems with impact in one of their coordinates. On the other hand, we have performed an experimental investigation in a randomly excited cantilever beam with impacts on its free end. We have found good agreement between numerical and experimental results. We have proposed a function for the migration of the first characteristic frequency of impact systems. The migration way depends on distribution of the total energy supplied to system among the vibration modes of the associated linear systems.

Keywords: Nonlinear Oscillations, Impact Systems, Impact

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho apresenta alguns desenvolvimentos no estudo de sistemas mecânicos com impacto, incluindo revisão da literatura existente sobre o assunto, discussões de hipóteses, simulações, ferramentas de análise e resultados experimentais obtidos em um sistema consistindo de uma viga engastada sujeita a impactos em sua extremidade livre. Estamos mais precisamente interessados no estudo dos sistemas com vibroimpacto, isto é, sistemas em que impactos ocorrem repetidamente devidos às vibrações. Estas vibrações podem ser provocadas por forças de várias naturezas como, por exemplo:

- as forças de desbalanceamento em eixos, motores, ...,
- as forças devidas às explosões em motores de combustão interna,
- as forças de interação entre engrenagens,
- etc...

A análise de sistemas com impacto é muito importante na engenharia de equipamentos como máquinas operatrizes, sistemas de movimentação de materiais, veículos, motores e em muitos outros tipos de estruturas onde as cargas atuantes não são estáticas. Os efeitos dos impactos são os mais diversos: desgaste, *pitting*, *scoring*, fadiga de superfície, ruído excessivo, entre outros [Bapat-1983][Han-1995] [Brach-1991]. O aumento de ruído e a redução da vida de pistões de motores de combustão interna, por exemplo, são causados pelo aumento da severidade dos impactos, os quais estão relacionados às folgas nos mancais, [Ungar-1965][Wilson-1974]. O desempenho de uma impressora matricial de agulhas está intrinsecamente ligada à questão dos impactos [Han-1995]. Com a contínua diminuição do tamanho dos motores e câmbio dos automóveis, para uma mesma potência, o estudo dos efeitos dos impactos nestes sistemas ganhou extrema importância [Hsieh-1997]. Para eliminar ou atenuar de forma eficiente os efeitos do impacto, é necessário conhecer a dinâmica do sistema em cada caso. Uma lista de preocupações dos diversos autores sobre sistemas com impacto é apresentada no capítulo 2.

Não obstante a grande aplicabilidade de sistemas onde impactos ocorrem, o desenvolvimento teórico do assunto, tanto analítico quanto numérico, tal qual toda a dinâmica não linear, teve grande avanço apenas nas últimas décadas, após a existência de meios computacionais que permitissem melhor estudo de sistemas mais complexos. As formulações básicas das leis do impacto, todavia, remontam a Newton (1642-1727), se levarmos em conta que o modelo convencional de impacto, segundo o qual este ocorre instantaneamente e a quantidade de movimento total do sistema não é alterada durante sua ocorrência, é consequência direta das leis de Newton para a dinâmica dos corpos e da conservação de energia [Resnik-1986].

A própria conceituação de impacto, ou colisão, do ponto de vista da física teórica, não é tão restrita o quanto se parece supor. Para a física, colisão é toda interação entre corpos, envolvendo forças de elevada magnitude, e que ocorre num intervalo de tempo muito pequeno, comparado ao tempo de observação. Desta forma, podem-se tratar como colisões várias interações fluido-estrutura em que o fluido impacta frontal ou obliquamente, a alta velocidade relativa, uma determinada superfície. Reações químicas podem ser tratadas, algumas vezes, como colisões. Colisões entre prótons muitas vezes sequer envolvem contato direto das partes colidentes [Resnik-1986].

Neste trabalho, no entanto, limitamos nosso conceito de impacto ao senso comum da engenharia, isto é, às interações entre dois corpos, geralmente órgãos de máquinas, que se tocam, com velocidade relativa finita (não infinita, por um lado, nem infinitesimal, por outro). Mais ainda, estamos preocupados com os sistemas em que os impactos têm um comportamento vibratório, se não no sentido estrito da palavra, com frequências bem definidas, ao menos no sentido amplo, indicando um determinado número médio (ou esperado) de impactos por unidade de tempo. Denominamos estes sistemas como sistemas vibratórios com impacto (*vibroimpact systems*). Considerações sobre diversos modelos para o impacto são apresentados no próximo capítulo.

Impactos são difíceis de modelar porque envolvem muitos fenômenos não lineares, cada um deles difícil de descrever através de um modelo simples. A mais forte suposição que se costuma fazer no estudo de sistemas com impacto é a de que os corpos são rígidos e que, portanto, não existem deformações destes corpos durante a colisão, ou estas podem ser desprezadas sem problemas para a resposta que se vai obter. Sabe-se, porém, que esta hipótese não é verdadeira para várias situações reais [Chatterjee-1997]. Se as deformações são levadas em conta, podem ser consideradas numa relação linear ou não linear com as forças que atuam na região de contato. Mas esta consideração depende não apenas das propriedades dos materiais dos corpos em colisão, como também da geometria deles.

Em várias situações também se desprezam as forças de atrito na superfície de contato. Isto não pode ser feito para muitos impactos bi-dimensionais ou tri-dimensionais, onde raramente as componentes de forças paralelas à superfície de contato serão nulas, porque raramente a normal àquela superfície passará pelo centro de massa dos corpos em colisão. Novamente, tal como no caso das deformações, se as forças de atrito são consideradas, é

necessário adotar um modelo para levá-las em conta, e este modelo pode não depender apenas das propriedades dos materiais dos corpos, mas também do estado de movimento.

A própria definição do que seja superfície de contato não é precisa, porque depende de vários fatores, tais como a rigidez dos corpos em colisão e a geometria destes corpos, além da própria intensidade das forças envolvidas no impacto, isto é, as forças envolvidas no impacto dependem da própria resposta do sistema. Por outro lado, o modelo adotado para estas forças exercem influência sobre a resposta. Transcrevendo o que Anindra Chatterjee [Chatterjee-1997] disse em sua tese de doutorado, resumimos os problema da dificuldade da modelagem como segue:

- As leis constitutivas para os problemas essenciais como atrito, fratura e deformação não linear não são precisas.
- Ainda que estas leis fossem precisamente conhecidas, elas dependem de informações geométricas e de condições do meio, que podem afetar as propriedades intrínsecas da região de contato, e várias condições iniciais que não são acuradamente conhecidas pela falta de dados suficientes para isto.
- Ainda que estes dados existissem, e que as informações sobre a geometria e condições iniciais estivessem disponíveis com a precisão necessária, os cálculos exigidos para uma predição acurada seriam muito dispendiosos do ponto de vista computacional e das técnicas numéricas.
- Ainda que estes cálculos fossem feitos, os resultados seriam aplicáveis apenas ao par específico para o qual foram desenvolvidos, no instante em que as referidas propriedades e condições do ambiente foram medidas, uma vez que as condições de contato mudam com o tempo.

Por tudo isto, os autores de análises de sistemas com impactos têm de se contentar com o indispensável e desconsiderar várias informações quando propõem o problema e, portanto, perder vários aspectos da resposta, os quais não podem ser reproduzidos pelos modelos utilizados. Todavia, em toda análise, analítica ou numérica, deve-se considerar o que é indispensável e desconsiderar o que pode ser negligenciado sem muito problema para o objetivo a que se propõe o estudo. Desta forma, um modelo precisa ser o mais completo quanto necessário e o mais simples quanto possível. Assim, muitas vezes modelos simples para a colisão são aplicados na análise de sistemas e resultados aceitáveis são obtidos. Muitas vezes aceita-se um nível de erro nas predições, como em mecanismos com controle (robôs, por exemplo) [Chatterjee-1997].

Sem dúvida alguma os impactos uni-direcionais são mais fáceis de serem analisados e, embora não reflitam a real situação de muitas aplicações, encerram aspectos qualitativos e quantitativos importantes. As vezes a captura de determinados fenômenos não é possível com a utilização de certos modelos. Assim um modelo pode não ser preciso para a análise de certos fenômenos, mas pode capturar bem a presença de outro comportamento. Um modelo

completo não existe porque não se conhecem completamente todos os fenômenos envolvidos num impacto. Além disto, as aplicações práticas sempre exigirão a captura de um fenômeno com melhor precisão que a de outro, razão porque, do ponto de vista da aplicação, sempre um modelo deve satisfazer, o melhor possível, as restrições daquela aplicação, e ainda ser o mais simples possível. Isto significa que não se deve complicar o modelo para a captura de fenômenos que não são importantes para determinada aplicação. Por exemplo, em máquinas industriais comuns provavelmente não estamos preocupados com comportamentos tipo "*super-ball*" ou "*non super-ball*"[†]. Portanto pode não ser importante a questão de se o modelo permite ou não a captura destes tipos de comportamento. No entanto, para o controle de um robô que vai jogar pingue-pongue, é importante que o modelo usado para o impacto da bola na mesa e/ou na raquete considere com melhor precisão os efeitos do deslizamento relativo devido à rotação da bola, o qual está intrinsecamente relacionado aos comportamentos tipo "*super-ball*" ou "*non super-ball*".

O mesmo ocorre com as forças atuantes na região de contato e com a própria região de contato em si. Quando a preocupação do estudo são as tensões que se desenvolvem na região de contato durante o impacto, a modelagem destas forças e a definição do que seja região de contato crescem de importância. Por outro lado, às vezes a análise das tensões não é o objetivo do estudo, mas o que se quer como resposta é o movimento como um todo. Assim, podem-se tolerar erros maiores nas tensões se estes não conduzirem a erros inadmissíveis na resposta obtida.

Em suma, tudo depende da aplicação do modelo. Nesta tese, por exemplo, não estamos preocupados com as tensões desenvolvidas durante o impacto. Nossa preocupação é a alteração do movimento do sistema quando alguns parâmetros dele são alterados. É verdade que a alteração do movimento está relacionado com a alteração das tensões e vice-versa. No entanto, via de regra, quando as tensões não são o escopo da análise, não há preocupação com a dinâmica intrínseca da região de contato, ou seja, a resposta computada não leva em conta a alteração do estado das tensões. Tendo em vista que muitos parâmetros influenciam a resposta, às vezes é necessário analisar sistemas mais simples a fim de poder separar, de certa forma, os efeitos de cada parâmetro. Como exemplo, citamos os trabalhos desenvolvidos por Shaw [Shaw-1985a-b], Kataoka [Kataoka-1986a-b] e Hsieh [Hsieh-1997], dentre outros. É neste campo da influência de determinados parâmetros sobre a resposta do sistema que procuramos dar nossa contribuição.

Visando a uma apresentação organizada do assunto, que permita ao leitor progredir da teoria básica dos sistemas com impactos, ter contato com as diversas modelagens e, após, poder observar a aplicação e contribuições deste trabalho, ele está organizado da forma como se descreve a seguir:

[†] Um comportamento tipo *superball* ocorre quando a velocidade relativa tangencial entre os corpos impactantes tem seu sentido invertido após o impacto. Isto ocorre principalmente com corpos esféricos, elipsoidais ou assemelhados. Pode ser facilmente observado em alguns impactos de uma bola contra uma raquete de tênis ou pingue-pongue, por exemplo. Este tipo de comportamento está intrinsecamente relacionado ao atrito durante o impacto.

- O capítulo 1 apresenta a introdução ao assunto, posicionando o leitor entre os avanços que se têm feito e mostrando a importância do estudo de sistemas com impactos, além de apresentar a organização do trabalho
- O capítulo 2 apresenta extenso levantamento bibliográfico para situar o estado da arte do assunto, as principais considerações sobre a modelagem encontradas na literatura e a contribuição deste trabalho.
- O capítulo 3 apresenta resultados obtidos computacionalmente analisando-se um sistema de parâmetros concentrados de dois graus de liberdade.
- O capítulo 4 apresenta resultados idênticos aos do capítulo 3, porém para um sistema de três graus de liberdade.
- O capítulo 5 apresenta o estudo experimental da migração de frequências em uma viga cantilever sujeita a impactos em sua extremidade livre.
- O capítulo 6 apresenta uma discussão dos principais pontos de todos os capítulos anteriores, as conclusões a que chegamos ao final trabalho e o que pode ser feito como uma extensão direta desta tese em trabalhos futuros.
- O apêndice A apresenta um resumo da teoria sobre expoentes de Lyapunov.
- O apêndice B apresenta os detalhes do ajuste dos sistemas discretos dos capítulos 3 e 4 ao sistema contínuo do capítulo 5.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresenta, além do levantamento bibliográfico, um resumo sobre os modelos de impacto apresentados na literatura corrente. Apresentam-se também as contribuições do trabalho para o estudo de sistemas com impacto e, por fim, a organização desta tese.

2.1 - Levantamento Bibliográfico

Os livros dedicados ao estudo de impactos existentes no mercado são poucos, considerando as citações nas publicações sobre o assunto. Chatterjee [Chatterjee-1997] cita os livros de Brach [Brach-1991], Pfeiffer [Pfeiffer-1996a], Routh¹ e Whittaker². Han *et al* [Han-1995] e Heiman *et al* [Heiman-1987] citam o livro de Kobrinski³. Além destes podemos destacar Zukas [Zukas-1992]⁴, Batra⁵ e Abrate⁶. Por outro lado, as publicações sobre sistemas com impacto nos periódicos científicos têm sido a cada ano mais frequentes na última década e o crescimento do número destas publicações está ainda na ascendente. É obvio que não utilizamos todos os artigos disponíveis em nossa pesquisa, mas estamos certos de que as referências que utilizamos nos permite precisar nossa contribuição ao estudo de sistemas com impacto.

Podemos dividir o estudo dos sistemas com impacto em quatro grupos, a saber:

- Estudos visando à determinação de propriedades de materiais, análise de colapso de

¹ Routh, E. J.; *Dynamics of a System of Rigid Bodies*; Macmillan and Co.; Londres; 6^a ed. 1897.

² Whittaker, E. T.; *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*; Dover. New York. Fourth Edition; 1944.

³ Kobrinski, A. E.; *Dynamics of Mechanisms with Elastic Connections and Impact Systems*; London, Hliffe; 1969.

⁴ Além do livro consultado, podemos relacionar (deste mesmo autor):

Zukas, J. A. ; *High Velocity Impact Dynamics*; John Wiley & Sons; 1990.

⁵ Batra, R. C.; *Impact, Waves, and Fracture*; Published by Amer Society of Mechanical Engineers; 1995.

⁶ Abrate, S; *Impact on Composite Structures*; Cambridge University Press; 1998.

- estruturas e análise de acidentes (geralmente envolvendo veículos).
- Estudos visando ao projeto de elementos sujeitos a impactos (geralmente não repetitivos).
- Dinâmica dos sistemas de partículas (particulados).
- Estudos visando ao conhecimento da dinâmica do movimento dos sistemas com impactos repetitivos (vibroimpact systems).

O primeiro grupo parece ser a especialidade de Brach [Brach-1991] e de vários autores por ele citados. No segundo grupo citamos, entre outros, Batra [Batra-1995]. Os sistemas granulados foram preocupação, por exemplo, de Araki *et al* [Araki-1983][Araki-1985]. No entanto, é no quarto grupo que nos deteremos pormenorizadamente, visto ser ele o interesse de nosso trabalho.

A preocupação com sistemas vibratórios com impactos se justifica pela existência de folgas das máquinas em geral e, por outro lado, pela dissipação de energia que existe em qualquer impacto, o que levou à idéia dos absorvedores de vibração por impacto. Vários autores se interessaram por sistemas vibratórios com impactos, como se vê a seguir.

Masri & Caughey [Masri-1966], Masri [Masri-1969] [Masri-1970a-b], Sadek & Mills [Sadek-1970a], Sadek & Willians [Sadek-1970b], Cempel [Cempel-1974], Roy [Roy-1975], Laux [Laux-1976] e, mais recentemente, Nigh & Shabana [Nigh-1983], Araki *et al* [Araki-1983][Araki-1985], Bapat & Sankar [Bapat-1985], Popplewell & Semercigil [Poppelwel-1989], Moore *et al* [Moore-1995], Semercigil *et al* [Semercigil-1992], Bapat [Bapat-1995], Chatterjee *et al* [Chatterjee-1996] and Melvin & Sandri [Melvin-1997] são exemplos de autores que se preocuparam com os absorvedores de vibração por impacto, apresentando discussões sobre o dimensionamento dos mesmos, eficiência, limitações e efeitos de sua presença sobre os demais sistemas.

Um outro conjunto de trabalhos se dedica à análise, por procedimentos analíticos, numéricos e analítico-numéricos, da dinâmica de vários sistemas particulares, nos quais a principal preocupação dos autores é análise da estabilidade de alguns tipos de movimento, condições para sua existência e análise de bifurcações. Relacionamos, dentre eles, Moon & Shaw [Moon-1983], Bapat *et al* [Bapat-1983], Shaw & Holmes [Shaw-1983], Shaw [Shaw-1985a][Shaw-1985b], Bapat & Bapat [Bapat-1988], Heiman *et al* [Heiman-1987] [Heiman-1988], Nordmark [Nordmark-1991], Budd *et al* [Budd-1995], Han *et al* [Han-1995], Van de Vorst *et al* [Vorst-1996], Kotera [Kotera-1996], Watanabe [Watanabe-1996], Toulemonde [Toulemonde-1996], Peterka [Peterka-1996], Kremer & Nagayev [Kremer-1996], Chatterjee *et al* [Chatterjee-1996a] [Chatterjee-1996a], Neilson *et al* [Neilson-1996], Awrejcewicz [Awrejcewicz-1996] e Marghitsu *et al* [Marghitsu-1997a].

Um terceiro grupo de trabalhos reúne os artigos em que os autores se preocupam com metodologias para análise de sistemas com impacto, abordando diversos problemas que surgem quando diversos modelos são considerados e soluções aproximadas são procuradas. Citamos Wong *et al* [Wong-1991], que apresenta o método do balanço harmônico incremental, Pospíšil & Brzobohatý [Pospíšil-1996], que apresentam um método baseado em

formas canônicas para sistemas autônomos, Pilipchuk [Pilipchuk-1996], que propõe uma técnica diferente utilizando uma transformação no tempo, que pode ser aplicada se a resposta satisfizer determinados requisitos, Wang & Kim [Wang-1996], que analisam vigas esbeltas através da expansão de Galerkin, utilizando a função delta de Kronecker para obter aproximações boas em certas condições, Escalom et al [Escalom-1997], que usam a propagação de ondas em barras, Salenger & Vakakis [Salenger-1997], que analisam o efeito da representação de molas infinitas por molas finitas espaçadas, Marghitu & Flowers [Marghitu-1997b], que utilizam a teoria de Floquet e Irschik *et al* [Irschik-1997], que propõem um novo algoritmo para análise da propagação uniaxial de ondas em materiais viscoelásticos. É claro que alguns trabalhos relacionados no grupo anterior também se utilizam de particularidades nas metodologias que aplicam, mas estas particularidades não são o centro do trabalho. A análise de estabilidade, naqueles casos, é feita via análise dos autovalores do mapa envolvendo impactos em situações particulares. A análise de existência de determinadas soluções é feita via equacionamento de restrições para os movimentos analisados em cada caso. A análise de bifurcação é feita via varredura do parâmetro de controle e observação das mudanças dos mapeamentos. Desta forma, os procedimentos já estão, na verdade, estabelecidos na literatura sobre o assunto [Holmes-1990] [Wiggins-1990]. Algumas adaptações são necessárias, dependendo das características dos mapeamentos.

O quarto grupo de publicações que separamos diz respeito àqueles trabalhos onde a preocupação é a micro-dinâmica do impacto, isto é, as interações na região de contato. É claro que o número de publicações neste campo é muito maior do que conjunto que vamos mencionar aqui. Isto ocorre porque nosso levantamento não buscou trabalhos que dizem respeito unicamente à mecânica do contato, mas apenas aqueles que, embora preocupados com dinâmica na região de contato, apresentam alguma relação com a macro-dinâmica, isto é, com a dinâmica do movimento dos corpos que se impactam. Hunt & Crossley [Hunt-1975], apresentam uma interessante discussão sobre o amortecimento no impacto para alguns modelos de forças na região de contato, Khulief & Shabana [Khulief-1987] preocupam-se com a continuidade do modelo de força em impactos de corpos não rígidos, Mittal & Khalili [Mittal-1994] discutem o contato durante o movimento de um corpo sobre uma placa, Rossikhin & Shitikova [Rossikhin-1995] estuda o efeito da espessura de uma placa sobre a região de contato quando uma esfera impacta a superfície desta. Jäger et al [Jäger-1996] apresentam modelos para motores com contatos ultra-sônicos. Lok & Wiercigroch [Lok-1996] discutem a utilização de funções suaves para modelar as forças na região de contato durante o impacto. Drewniak & Wojciech [Drewniak-1996] utilizam elementos de contorno no estudo de problemas envolvendo impacto, Streator [Streator-1997] simula os efeitos de adesão localizada durante impactos normais, Szwedowicz & Sotelo [Szwedowicz-1997] apresentam procedimento para a identificação dos parâmetros de modelos para as forças de contato.

Por fim colecionamos outro conjunto de publicações em que os autores parecem não focar como tema central nenhum dos aspectos já citados. São discussões a respeito de identificação, aplicações de modelos e métodos visando a alguma inferência a respeito de

sistemas reais e, portanto, particulares, compêndios sobre o estado da arte do assunto, entre outros aspectos. Uma miscelânea, portanto. Fujita & Hattori [Fujita-1980], apresentam uma investigação analítico-experimental sobre a relação entre as características do impacto e a resposta do sistema para sistemas com excitação senoidal. Fujita usa dois modelos para as forças na região de contato. Um baseado na teoria de Hertz e outro baseado numa função exponencial para facilitar a análise de um sistema de três graus de liberdade. Não encontramos nenhuma referência a este modelo exponencial em nenhum outro trabalho relacionado nesta pesquisa. Kataoka *et al* [Kataoka-1986a][Kataoka-1986b] analisam o problema das folgas em um sistema torsional de dois graus de liberdade e sua preocupação central é a influência da folga sobre a rotação dos eixos do sistema. Os autores usam o modelo convencional de impacto, baseado no coeficiente de restituição. Pfeiffer [Pfeiffer-1996b] apresenta uma bela discussão sobre impactos bidimensionais e tridimensionais, uma breve introdução aos contatos múltiplos e comentários em aplicações. É um apanhado de muitos dos trabalhos que culminaram na publicação do livro "*Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*", de Pfeiffer & Glocker [Pfeiffer-1996a]. Belyaev [Belyaev-1996] analisa a distribuição de energia entre os diversos modos de vibração de uma barra sujeita a impacto longitudinal e mostra como a energia tende a distribuir-se de forma mais uniforme entre os modos após muitos impactos repetidos. É óbvio que esta distribuição depende da frequência dos impactos. Sedláček [Sedláček-1996] analisa impactos transversais em uma viga com apoio simples. Lawen & Flowers [Lawen-1996] analisam a influência da dinâmica do alojamento do mancal sobre a resposta de um rotor flexível que contém um mancal auxiliar com folga. Concentram sua análise no domínio da frequência. Emaci *et al* [Emaci-1996] discutem a dinâmica de duas vigas (engastadas-livres) acopladas por uma mola vibrando num plano vertical, com impactos na extremidade, e apresentam alguns fenômenos não lineares interessantes. Weifang & Zhongzu [Weifang-1997] discutem a resposta de um casco cilíndrica sujeita a ondas de choque devidas a explosões debaixo d'água. Wolfsteiner & Pfeiffer [Wolfsteiner-1997] apresentam o problema da dinâmica de um alimentador vibratório discutindo vários fenômenos associados a ele, alertando sobre sua complexidade e que o trabalho está em desenvolvimento. Gau [Gau-1997] discute a influência da gravidade sobre um sistema com impacto particular. Oestreich *et al* [Oestreich-1997] apresentam resultados numéricos e experimentais para um oscilador forçado de um grau de liberdade, no qual impactos ocorrem. Utilizam-se de várias ferramentas para analisar o sistema, como os mapas de Poincaré e os expoentes de Lyapunov. Hsleh *et al* [Hsleh-1997] analisam um modelo de sistema com impacto com o objetivo de discutir a influência de determinados parâmetros no número de impactos e na sua severidade. O objetivo é inferir algo sobre a probabilidade de ocorrência de determinados eventos para aplicação no projeto de veículos. Está ainda nos primeiros passos. Bakr [Bakr-1997] analisa os efeitos de impactos em um robô. Yigit & Christoforou [Yigit-1997] apresentam uma bonita discussão sobre os efeitos da flexibilidade em impactos não frontais. Incluímos nessa miscelânea os livros de Brach [Brach-1991] e Zukas [Zukas-1992].

2.2 - Revisão da Modelagem de Impacto Apresentada na Literatura

Nesta seção fazemos uma apresentação resumida dos modelos (se não de todos, ao menos dos principais) de impactos apresentados na literatura. É comum o uso da expressão modelos de impacto, ou modelos para impacto. Embora os modelos mais comuns estejam relacionados apenas com as forças que surgem durante o impacto, desenvolvimentos mais recentes também se preocupam com a modelagem de um sistema dinâmico completo onde estas forças atuam. Desta forma, Chatterjee [Chatterjee-1997] apresenta modelagem de matrizes massa e rigidez (não somente rigidez) e enumera propriedades desejáveis para uma lei de impacto para corpos rígidos, a saber:

- 1 - *Restrições fundamentais*: Uma lei de impacto entre corpos rígidos nunca deve violar as leis fundamentais da mecânica, como a conservação de energia e invariância das quantidades de movimento linear e angular. Mais adiante abordaremos este assunto de novo (página 14).
- 2 - *Generalidade*: Dever ser aplicável a corpos de forma arbitrária, distribuição de massa arbitrária, velocidades arbitrárias e materiais de propriedades arbitrárias. É contudo razoável que certas leis sejam aplicáveis a casos particulares.
- 3 - *Consistência com outras leis*: Deve ser consistente com o entendimento de outros fenômenos que podemos modelar com algum sucesso usando outras leis menos acuradas, tais como as leis do atrito.
- 4 - *Concordância de dados para objetos simples*: As previsões de comportamento conforme a lei devem concordar com o comportamento observado em configurações de colisão simples, tais como aquelas entre esferas ou discos.
- 5 - *Captura de comportamentos para casos gerais*: Para colisões mais complicadas, a lei deve ser capaz de capturar a maior variedade possível de comportamentos entre aqueles que se podem observar, para valores de parâmetros apropriadamente escolhidos.
- 6 - *Poucos parâmetros e simplicidade como um todo*: A lei de colisão deve depender de um número razoavelmente pequeno de parâmetros e envolver cálculos razoavelmente simples. O significado de *razoável* é discutível. Chatterjee sugere que se interprete na seguinte direção: "A perda de precisão do modelo deve ser acompanhada por uma equivalente redução de esforço computacional".
- 7 - *Interpretação física dos parâmetros*: Os parâmetros de entrada do modelo devem ter interpretação física simples.
- 8 - *Mensurabilidade independente dos parâmetros*: Os parâmetros da lei devem ser mensuráveis em experimentos separados, sob condições e configurações não idênticas a da colisão particular que se está modelando.
- 9 - *Capacidade geral de predição*: Parâmetros de entrada medidos a partir de experimentos devem predizer o comportamento em experimentos subsequentes.

A despeito de todas as qualidades desejáveis para uma lei de impacto, a maioria dos autores tem mesmo trabalhado com leis mais restritas, mesmo quando corpos em impacto são considerados como rígidos. Notadamente as características 2 e 5 não são rigorosamente seguidas, uma vez que, como mencionamos no capítulo 1 (páginas 3 e 4), muitas vezes estudam-se modelos particulares, para aplicações particulares e que enfatizam fenômenos particulares. Do ponto de vista dos engenheiros que trabalham diretamente com aplicações isto é perfeitamente razoável, tanto quanto considerar rígidos corpos que são, rigorosamente falando, elásticos. Devemos lembrar, todavia, que, do ponto de vista de Chatterjee, a ocorrência de deformações nos corpos sob impacto não viola a idéia de corpos rígidos. Para Chatterjee, os corpos são rígidos quando o único movimento importante antes e depois da colisão é o movimento de corpo rígido. Portanto, as deformações têm importância durante a colisão e podem (e vão) influenciar o movimento como um todo. Uma viga sob impacto transversal, por exemplo, não se enquadra nesta hipótese. Mas uma barra, dependendo de suas propriedades físicas e geométricas, pode se enquadrar.

Uma discussão muito bem feita sobre modelos de impactos para corpos rígidos é apresentada por Chatterjee [Chatterjee-1997]. No nosso trabalho não nos aprofundaremos nas idéias de Chatterjee, visto não ser nosso estudo restrito a corpos rígidos. Vale a pena, no entanto, resumir outra bela discussão a respeito das hipóteses aplicadas ao processo de impacto apresentada na tese dele.

1 - *Rigidez*: Podemos classificar os impactos, quanto à natureza da rigidez dos corpos, em dois tipos, a saber:

a - Aqueles em que as deformações dos corpos são muito pequenas e, então, se as forças são integradas sobre o intervalo de tempo da colisão, as relações de quantidade de movimento linear e angular podem ser usadas para descrever com precisão as interações colisionais. Estes corpos são denominados *rígidos com resposta em impulso* (impulse-response rigid). Diz-se que a rigidez dos corpos (ou do contato) é *rigidez tipo resposta impulsiva* (impulse-response rigidity) e os respectivos modelos são *modelos de resposta impulsiva* (impulsive-response models). As únicas equações que governam o movimento durante a colisão são as equações de quantidade de movimento linear e angular a despeito de qualquer deformação em qualquer ponto dos corpos. Veja figura 2.1-a.

b - Aqueles em que as deformações, por não serem desprezíveis na região de contato, alteram significativamente as propriedades de rigidez e amortecimento naquela região. Assim, as forças de interação devem ser integradas sobre a região de contato, através das equações que governam as interações colisionais. Estes corpos são denominados *rígidos com resposta em força* (force-response rigid). Diz-se que a rigidez dos corpos (ou do contato) é *rigidez tipo resposta em força* (force-response rigidity) e os respectivos modelos são *modelos de resposta em força* (force-response

models). As equações que governam o movimento durante a colisão são as equações de força e aceleração. Por isto, para manter no equacionamento a suposição de corpos rígidos, as deformações só podem ocorrer na região de contato, que é suposta muito pequena. Veja figura 2.1-b.

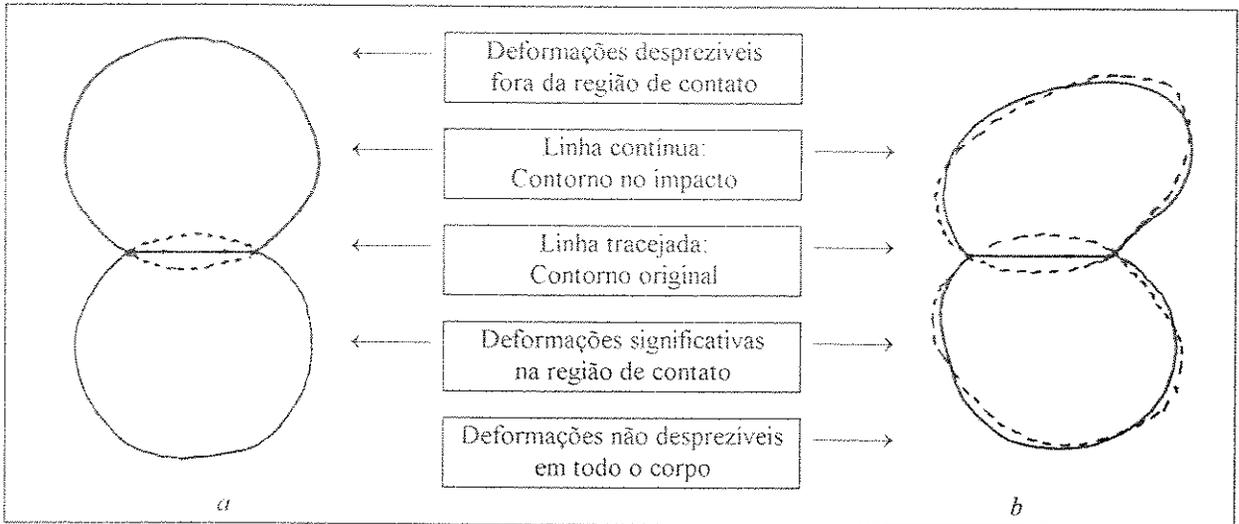


Figura 2.1

a: Resposta em força. b: Resposta em impulso

Se um modelo tipo resposta em força é aplicado para um contato onde as características de resposta impulsiva são mais aconselháveis, os valores no tempo previsto pelo modelo para as forças no contato podem ser imprecisos, levando a predições erradas para o movimento final dos corpos.

- 2 - *Pequeno intervalo de tempo:* A colisão ocorre em um intervalo de tempo muito pequeno, durante o qual as acelerações são muito grandes, as velocidades têm uma mudança finita e os deslocamentos e rotações são desprezíveis. Assim, o tensor momento de inércia não muda durante a colisão.
- 3 - *Forças finitas são desprezadas:* As fontes de impulsos outras que não as forças de contato são desprezadas. Isto porque as forças de contato são muito grandes (*"infinitas"*) e, quando comparadas a elas, as demais forças impulsivas, são desprezíveis.
- 4 - *Termos centrífugos são desprezíveis:* Durante o processo de colisão, os termos envolvendo potências quadráticas da velocidade de rotação dos corpos são supostos desprezíveis, no balanço de momentos, quando comparados com outros termos como, por exemplo, aqueles envolvendo a aceleração angular. A justificativa desta hipótese é longa e, para quem deseja maior profundidade no assunto, aconselhamos ler [Chatterjee-1997] páginas 21 e 22.
- 5 - *Corpos finitos:* As massas, os momentos de inércia e as dimensões dos corpos em colisão não são nulos e para ao menos um dos corpos são finitos. É verdade que existe um ponto de vista diferente para alguns casos, onde a rotação dos corpos é nula e somente o

movimento do centro de massa é monitorado. Neste caso, os corpos seriam tratados como partículas e, portanto, com dimensões nulas (massa não nula). No entanto, são casos particulares. Para a teoria geral, mantém-se a hipótese. Neste trabalho a suposição de dimensão zero pode ser aplicada para o sistema apresentado no capítulo 3. Para a viga, que é elástica, esta discussão não faz sentido.

- 6 - *Ponto de contato*: Os modelos de colisão de corpos rígidos partem da suposição de que as interações entre os corpos ocorrem num ponto de contato, embora corpos reais não deem suporte para esta suposição. É interessante, porém, apresentar comentários. A região de contato é muito pequena, sendo idealizada como um ponto, na medida em que é muito menor que as dimensões dos corpos em colisão. Assim, substitui-se a a força distribuída na região de contato por outra equivalente concentrada em um ponto. Este ponto, portanto, não pode mover-se no espaço durante a colisão. É claro que a hipótese falha quando um corpo penetra finitamente no outro ou ainda quando existe rolamento dos corpos na região de contato. Como Chatterjee, supomos apenas uma região de contato, devido ao objetivo do nosso trabalho (veja capítulo 1 e seção 2.3). Impactos múltiplos são mais complicados.
- 7 - *Ação e reação*: Impulsos iguais e opostos atuam nas respectivas regiões de contato dos corpos em colisão
- 8 - *Nenhum torque de contato*: Não há nenhum momento impulsivo atuando na área de contato. Isto provém do fato de a área ser muito pequena e não haver momentos distribuídos sobre ela. O momento equivalente no ponto de contato é a integral do produto vetorial da força impulsiva pelo vetor posição com relação ao ponto de contato, calculada sobre a área de contato. Mesmo considerando qualquer assimetria na distribuição das forças, do fato da área ser muito pequena advém um momento resultante muito pequeno e desprezível.
- 9 - *Dissipação de energia não-negativa*: Supomos que a energia cinética após o processo de colisão é menor ou igual (na prática, menor) à energia cinética antes da colisão, isto é, não há criação de energia no processo. Esta hipótese é violada quando a colisão envolve explosões.
- 10 - *Tangente bem definida*: Existe um plano tangente bem definido no ponto de contato. Isto é importante para a definição das direções normal e tangencial. Para colisões envolvendo vortex isto não é verdade, mas a hipótese é válida para a maioria dos casos, inclusive os desta tese.
- 11 - *Não há interpenetração finita dos corpos*: A superfície dos corpos não passam uma pela outra. Interpenetração, de todo modo, violaria a hipótese de área de contato muito pequena. Note que isto é usado apenas para o balanço de momento. Quando se deseja calcular as forças no contato, porém, pode-se perfeitamente supor uma variável que represente a interpenetração, uma vez que, do ponto de vista da mecânica do contato, as forças de contato são consequência direta da interpenetração.

Apresentada a discussão conceitual inicial, passemos aos modelos propriamente ditos. Antes de tudo, é importante definir o espaço onde ocorrem as interações de impacto. Estes podem ser unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais, dependendo dos deslocamentos dos corpos.

2.2.1 - Impactos Unidimensionais

Para impactos unidimensionais podemos destacar os seguintes modelos:

- O modelo convencional baseado nas leis de Newton
- O modelo linear para as forças de deformação e de amortecimento
- O modelo de Hertz (não linear para as forças de deformação)
- O modelo Hunt e Crossley (não linear para as forças de deformação e de amortecimento)
- O modelo de massas separadas
- O modelo de restituição dependente da velocidade de impacto (caso particular do modelo de Hunt e Crossley)

O modelo convencional, que pode ser chamado de modelo de Kane e Levinson¹ para impactos unidimensionais, se baseia nas idéias de Newton sobre impacto, e utiliza o coeficiente de restituição para representar a perda de energia durante a colisão, conforme a relação (veja figura 2.2),

$$v_f = -ev_i, \quad 0 \leq e \leq 1 \quad (2.1)$$

onde os subscritos i e f indicam os estados imediatamente antes e depois do impacto, v é a velocidade relativa dos corpos em impacto e e é o coeficiente de restituição. Desta forma, o modelo usa a hipótese de que o impacto ocorre instantaneamente e todas as deformações provenientes das forças dele resultantes não interferem no movimento dos corpos após a colisão. Na verdade, o coeficiente proposto por Newton, conhecido como coeficiente de restituição cinético, é a razão entre as quantidades de movimento lineares de cada um dos cor-

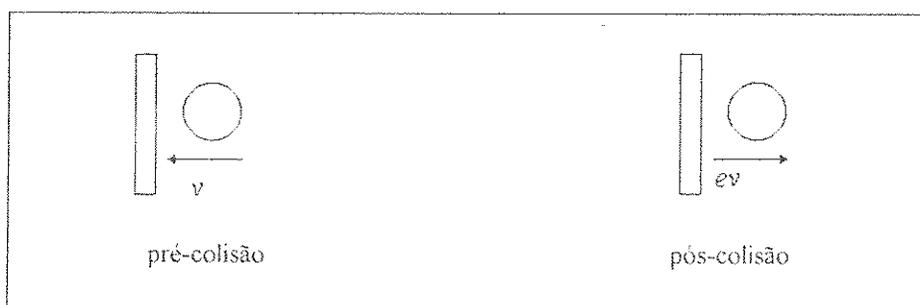


figura 2.2 - Esquema de impacto unidimensional para o modelo de impacto instantâneo

¹ Conforme [Chatterjee-1997] página 51.

pos sob impacto depois e antes do choque. Brach, no entanto, mostra que o coeficiente de restituição cinético e aquele expresso por 2.1, denominado cinemático, são iguais.

Em princípio pode parecer que há um paradoxo na proposta do coeficiente de restituição cinemático. Tomemos, por exemplo, o caso de uma partícula impactando contra uma parede imóvel. Assim, a equação que representa a conservação da quantidade de movimento total do sistema, se levada em conta que as velocidades inicial e final da parede são nulas, indicaria, em princípio, que a velocidade da partícula também não seria alterada, o que constitui um absurdo. Na verdade, a forma sensata de considerar uma parede fisicamente imóvel é "*atribuir-lhe*" inércia infinita. Assim, se levarmos em conta a conservação da quantidade de movimento, aplicarmos a equação 2.1, resolvermos o sistema de equações resultante para obter a resposta final e, então, tomarmos a resposta quando a massa da parede tender ao infinito, veremos que a solução é exatamente a esperada se tomarmos apenas a equação 2.1. Isto indica que a lei expressa por 2.1 não viola a conservação da quantidade de movimento. Por outro lado, não viola também a conservação de energia, visto que a energia cinética do sistema após o impacto será no máximo igual à energia cinética antes do mesmo, conforme a primeira propriedade a ser satisfeita por uma lei de impacto (veja página 9).

O modelo baseado no coeficiente de restituição tem a vantagem de ser simples e facilitar a construção de programas para simulação em computador. Por outro lado, não se considera a ação direta das forças na região de impacto. Talvez por isto mesmo, e porque este modelo satisfaz, para impactos unidimensionais, muitas das boas características exigidas para um modelo de impacto, muitos autores o utilizam em suas análises, como detalharemos um pouco mais adiante. Uma das críticas mais comuns a este modelo é que ele não considera a variação da perda de energia como função da velocidade de choque, fato que se pode observar em várias situações práticas. Brach [Brach-1991] afirma que, definitivamente, o coeficiente de restituição não é constante para todas as velocidades de impacto. Todavia, é possível encontrar um valor que represente estatisticamente aquele que pode ser usado como constante, em vários casos. De todo modo, isto pode funcionar bem para impactos singulares, onde, entre muitos impactos, pode-se aceitar um comportamento médio. Tomem-se, porém, os sistemas vibratórios com impactos, onde não se conhece *a priori* as velocidades de choque. Neste caso, rigorosamente falando, a cada impacto podemos ter um coeficiente de restituição diferente e a dinâmica global do sistema pode ser totalmente diferente se considerarmos ou não a variação do coeficiente de restituição. Não obstante, como já antecipamos, muitos autores trabalham com este modelo para estudar sistemas vibratórios, dentre os quais podemos citar Shaw [Shaw-1985a] [Shaw-1985b], Bapat [Bapat-1988], Nordmark [Nordmark1991], Han [Han-1995], Kotera [Kotera-1996] e Melvin [Melvin-1997]. É interessante apresentar uma relação entre um dado modelo e um coeficiente de restituição equivalente a ele, quando isto puder ser feito. Pode-se mostrar, veja [Brach-1991], que o coeficiente de restituição equivalente a um modelo cujas forças na região de contato durante o impacto são expressas pela função $F(\alpha, \dot{\alpha}, t)$ é dado pela seguinte expressão (impactos

unidimensionais):

$$e^2 = 1 - \frac{2}{\bar{m} \dot{\alpha}_0^2} \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} F(\alpha, \dot{\alpha}, t) d\alpha, \quad \bar{m} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \quad (2.2)$$

onde α é o deslocamento relativo entre os dois corpos, t é a variável que representa o tempo, o sobrepono indica a derivada com relação ao tempo e $\dot{\alpha}_0$ é a velocidade relativa de impacto dos corpos colidentes no início da colisão. m_i ($i=1,2$) são as massas dos corpos colidentes. Notemos que a integral é calculada sobre o deslocamento, desde o início até o fim do impacto.

O segundo modelo utiliza uma relação linear para o amortecimento (baseado no coeficiente de amortecimento viscoso) e para as deformações (baseado no módulo de Young). Veja figura 2.3. Reclama-se que o modelo não representa a realidade, uma vez que uma velocidade relativa inicial causa uma força descontínua num amortecedor viscoso linear. No entanto, o uso de mola e amortecedores lineares em sistemas com descontinuidades é comum na análise de vibrações [Shaw-1982][Chatterjee-1996][Lok-1996][Yano-1996][Neilson-1996][Awrejcewicz-1996]. Não é difícil expressar um coeficiente de restituição equivalente para este modelo. Levando em conta que, para o modelo linear em questão as forças de contato são expressas por

$$F(\alpha, \dot{\alpha}, t) = k\alpha + c\dot{\alpha} \quad (2.3)$$

e que é possível obter a solução temporal das deformações na região de contato a partir da velocidade relativa inicial, obtém-se que a relação entre o coeficiente de amortecimento viscoso e o coeficiente de restituição equivalente é dada por ([Brach-1991][Chatterjee-1997])

$$e = \exp\left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos^{-1}(2\zeta^2 - 1)\right), \quad \zeta < 1 \quad (2.4)$$

onde

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k\bar{m}}} \quad (2.5)$$

é o fator de amortecimento do sistema massa-mola-amortecedor do contato. Brach [Brach-1991] supõe, de antemão, que $\zeta \ll 1$ e, portanto, $\cos^{-1}(2\zeta^2 - 1) \approx \pi$. Por outro lado, Chatterjee [Chatterjee-1997] propõe a utilização de uma expressão aproximada para o coeficiente de restituição equivalente, conforme a expressão

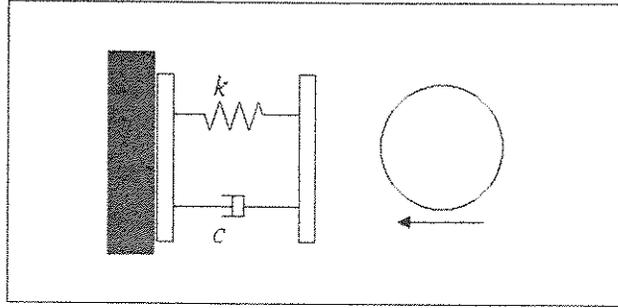


figura 2.3 - Esquema de impacto unidimensional para o modelo de impacto linear

$$e \approx \frac{1}{1 + 2.5\zeta + 4\zeta^2} \quad (2.6)$$

que resulta num erro máximo de 6% com relação à solução exata dada pela equação 2.4.

Deve-se notar que, embora exista uma relação precisa entre o coeficiente de amortecimento viscoso e o coeficiente de restituição, as respostas temporais obtidas pela utilização dos dois modelos são qualitativa e quantitativamente diferentes. Apenas a relação entre as velocidades após e antes o impacto é a mesma. Notemos que o modelo linear da figura 2.3 prevê um coeficiente de restituição equivalente independente da velocidade de impacto e dependente da massa dos corpos em colisão.

O modelo de Hertz considera as deformações como calculadas pela análise das deformações de acordo com a geometria da superfície de contato e as propriedades dos materiais dos corpos colidentes, baseada na teoria da elasticidade. Por enquanto apresentaremos os resultados apenas para superfícies esféricas (caso mais comum de aplicação). A partir da teoria de Hertz (1887-1975) é possível mostrar que, se uma força F comprime dois corpos esféricos de raios R_1 e R_2 , um contra o outro, tendo como linha de ação a reta que passa pelo centro das duas esferas, as tensões na região de contato devem satisfazer

$$\left. \begin{aligned} (k_1 + k_2) \frac{q_0 \pi^2}{4a} (2a^2 - r^2) &= \alpha - \beta r^2 \\ q_0 &= \frac{3F}{2\pi a^2} \\ \beta &= \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2} \\ \alpha &= (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0}{4\beta} \\ \alpha &= (k_1 + k_2) q_0 \frac{\pi^2 a}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

onde

$$k_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}, \quad i = 1, 2 \quad (2.8)$$

sendo ν o coeficiente de Poisson e E o módulo de elasticidade. Nas equações 2.7, α é o deslocamento relativo entre os dois centros das esferas e a é o raio de um hemisfério que representa a distribuição de pressão sobre a região de contato de forma que a primeira equação de (2.7) seja satisfeita. Para mais detalhes, veja [Timoshenko-1980] e [Brach-1991].

Desta forma, se considerarmos as relações entre a força de contato e o deslocamento relativo, podemos escrever

$$F = F(\alpha, \dot{\alpha}, t) = F_1(\alpha) + F_2(\dot{\alpha}) = k\alpha^{3/2} + F_2(\dot{\alpha}) \quad (2.9)$$

onde

$$k = \frac{4}{3\pi(K_1 + k_2)\sqrt{\beta}} \quad (2.10)$$

e $F_2(\dot{\alpha})$ inclui a modelagem para o amortecimento devido ao impacto. O modelo de Hertz constitui uma boa aproximação para as deformações durante o impacto de superfícies esféricas ou cilíndricas de corpos feitos de materiais duros [Brach-1991]. Hunt & Crossley [Hunt-1975] utilizaram este modelo para aço liga com módulo de elasticidade igual a 207 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0.30.

Como se pode ver, o modelo de Hertz se preocupa, originalmente, apenas com a rigidez de contato. Isto porque, na verdade, Hertz pesquisou tensões de contato que, mais tarde foram usadas para a modelagem de impactos. Embora a teoria faça uso extensivo das características da superfície, está longe de ser restrita demais. Devemos lembrar que muitos contatos em juntas ocorrem entre superfícies cilíndricas por exemplo. Os rolamentos de rolos e esferas são muito utilizados, de forma que, do ponto de vista de aplicação, a teoria de Hertz é muito bem vinda e utilizada.

O modelo de Hunt e Crossley parte do modelo de Hertz, a partir do qual seus autores propõem algumas considerações de caráter mais geral para a rigidez e um modelo para o amortecimento. Considere uma massa m impactando contra uma parede imóvel, conforme a figura 2.4. Hunt e Crossley estabelecem que

$$F(\alpha, \dot{\alpha}, t) = F_1(\alpha, t) + F_2(\alpha, \dot{\alpha}, t). \quad (2.11)$$

Para $F_1(\alpha, t)$ estabelecem

$$F_1(\alpha, t) = k\alpha^n. \quad (2.12)$$

Após várias considerações sobre as propriedades de um laço histerético conveniente para o impacto, Hunt e Crossley propõem que a perda de energia ΔE durante o impacto seja proporcional à massa m e ao cubo da velocidade inicial de impacto, isto é:

$$\Delta E = \beta m v_i^3 \quad (2.13)$$

Por outro lado, se a perda de energia no contato é muito pequena, o trabalho realizado pela força elástica durante a primeira parte do impacto (início até velocidade zero) é muito próxima à energia cinética inicial. Desta forma pode-se escrever

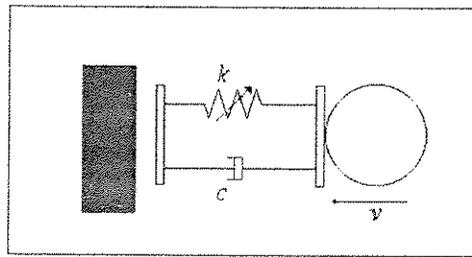


Figura 2.4: Situação analisada por Hunt e Crossley

$$\frac{1}{2} m v_i^2 = \int_0^{\alpha_m} F_1(\alpha, t) d\alpha \quad (2.14)$$

onde α_m é o deslocamento máximo durante o impacto. Tomando 2.12 e substituindo em 2.14, escreve-se

$$v_i = \sqrt{\frac{2k}{m(n+1)}} \alpha_m^{(n+1)/2} \quad (2.15)$$

Para uma posição intermediária α ($0 < \alpha < \alpha_m$),

$$v = \sqrt{\frac{2k}{m(n+1)}} \sqrt{\alpha_m^{n+1} - \alpha^{n+1}} \quad (2.16)$$

A perda de energia total durante o impacto, supondo que a dissipação durante a compressão é praticamente igual à dissipação durante a expansão, é

$$\Delta E = 2 \int_0^{\alpha_m} F_2(\alpha, \dot{\alpha}, t) d\alpha \quad (2.17)$$

Supondo que a força de amortecimento seja proporcional à velocidade, que o

coeficiente de amortecimento possa variar ao longo do deslocamento, e lembrando que $v = \dot{\alpha}$ na equação 2.16, temos que, para satisfazer as equações 2.14 e 2.13, a função $F_2(\alpha, \dot{\alpha}, t)$ deve ter a forma

$$F_2(\alpha, \dot{\alpha}, t) = \frac{3}{2} \beta k \alpha^n \dot{\alpha} \quad (2.18)$$

Assim, as forças durante o impacto são expressas por

$$F(\alpha, \dot{\alpha}, t) = k \alpha^n \left(\frac{3}{2} \beta \dot{\alpha} + 1 \right) \quad (2.19)$$

Lembramos que Hunt e Crossley usam um expoente genérico n na função que representa a rigidez de contato (equação 2.12) porque consideram que a rigidez real pode ser diferente da prevista pelo modelo de Hertz. No entanto, deve manter uma forma parecida com a prevista. Encontramos poucas referências ao modelo de Hunt e Crossley na literatura consultada.

É possível mostrar que o coeficiente de restituição equivalente para o modelo de Hunt e Crossley pode ser calculado pela seguinte aproximação¹

$$e \approx \frac{1}{\exp(-0.4a) + a} \quad (2.20)$$

onde

$$a = \beta m \dot{\alpha}_0 \quad (2.21)$$

Note que a resituição neste caso depende tanto da velocidade inicial quanto da massa do sistema.

O modelo de massas separadas (split-mass model) é discutido por Chatterjee² [Chatterjee-1997]. É, de fato, um modelo muito interessante em sua forma de representar as interações na região de contato. Curiosamente, mesmo antes de tomar conhecimento desta referência, nós também pensamos em algo semelhante para resolver os problemas de impactos a baixa velocidade em sistemas vibratórios com impactos com vários graus de liberdade que, embora não tão bem formalizado, usa essencialmente o mesmo princípio. No entanto, o desenvolvimento desta idéia exige ainda bastante trabalho e não está no escopo desta tese, de forma que o deixamos para trabalhos futuros.

¹ O procedimento é exatamente o mesmo que Chatterjee utilizou para calcular o coeficiente de restituição equivalente para o modelo com restituição dependente da velocidade de impacto (apresentado pouco mais adiante), a menos da definição do coeficiente a .

² Segundo Chatterjee, o modelo unidimensional foi apresentado por R. D. Mindlin em 1945, no paper *Dynamics of Package Cushioning*, publicado em *The Bell System Technical Journal* Vol 24, pag 353-461. No entanto, a generalização para um modelo de impacto, inclusive tridimensional, é devida a Chatterjee, segundo ele próprio.

Considere a figura 2.5, que apresenta um impacto contra uma parede imóvel. A velocidade de aproximação, tanto de m_1 quanto de m_2 é $\dot{\alpha}$. Ao iniciar o contato, a massa m_2 não é rebatida, mas permanece em contato com a parede. A mola é então comprimida devida à inércia da massa m_1 até que esta atinja o repouso, quando então é rebatida pela força elástica da mola. No momento em que a mola estiver descomprimida e o contato se finda, a velocidade de m_1 é $\dot{\alpha}$, mas em sentido contrário. Assim, o coeficiente de restituição equivalente a este modelo é

$$e = \frac{m_1 \dot{\alpha}}{(m_1 + m_2) \dot{\alpha}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (2.21)$$

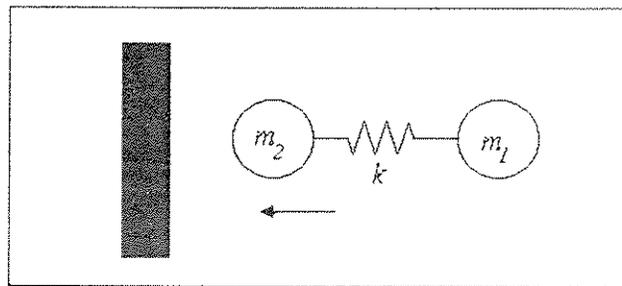


Figura 25: Situação analisada por Chatterjee

De todo modo, este modelo pode ser facilmente entendido na prática quando as duas massas são fisicamente distintas. Todavia, quando um corpo impacta uma superfície, o modelo se torna complicado porque, neste caso, se a mola for interpretada como a rigidez do contato, a interpretação física das massas fica prejudicada. A massa m_1 seria uma inércia do contato. Isto nunca foi mencionado, até onde sabemos, na literatura e merece uma reflexão mais profunda.

Mesmo quando as massas são fisicamente distintas, Chatterjee chama a atenção para o fato de nem sempre as interações ocorrerem do modo previsto anteriormente. Suponhamos que, ao tocar a parede, a massa m_1 seja rebatida com coeficiente de restituição e_1 . Desta forma, logo após o impacto, o momento linear do sistema é dado por $(e_1 m_1 \dot{\alpha} - m_2 \dot{\alpha})$, de forma que o coeficiente efetivo de restituição neste caso é

$$e = \frac{(e_1 m_1 - m_2) \dot{\alpha}}{(m_1 + m_2) \dot{\alpha}} = \frac{e_1 m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.22)$$

Por fim vale a pena abordar o modelo de restituição dependente da velocidade de impacto, que usa a seguinte expressão para as forças na região de contato¹

¹ Segundo Chatterjee [Chatterjee-1997], este modelo foi discutido por O. Walton no livro *Particulate Two-Phase Flow*, capítulo 25 - Butterworth/Heinmann - Boston - 1992 - Editado por M. C. Roco.

$$F(\alpha, \dot{\alpha}, t) = k\alpha + c\alpha\dot{\alpha} \quad (2.23)$$

É fácil notar que este modelo constitui uma particularidade do modelo de Hunt e Crossley. Para este modelo, porém, Chatterjee calculou um coeficiente de restituição equivalente. Consideremos uma massa m impactando contra uma parede imóvel, como mostra a figura 2.6.

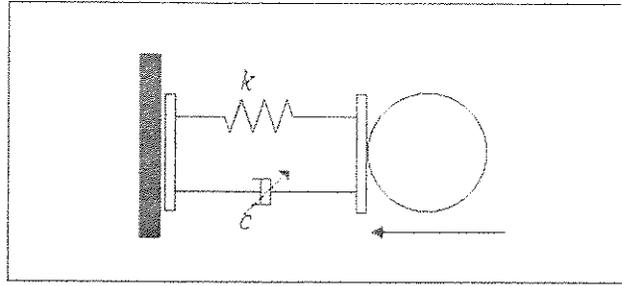


Figura 2.6: Modelo com amortecimento não linear

Durante o impacto a equação que governa o movimento da massa m é

$$m\ddot{\alpha} + c\alpha\dot{\alpha} + k\alpha = 0, \quad \alpha(0) = 0, \quad \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0 \quad (2.24)$$

Mudando a base de tempo para $\tau = \sqrt{k/m}t$ e definindo $\alpha = \sqrt{m/k} \dot{\alpha}_0 x$, podemos escrever

$$\ddot{x} + \frac{c\dot{\alpha}_0}{k} x\dot{x} + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1 \quad (2.25)$$

onde o sobrepono (para indicar a derivada com relação a τ) não foi alterado apenas por questão de conveniência. Desta forma, a magnitude de \dot{x} quando $x = 0$ pela primeira vez após o impacto é o coeficiente de restituição equivalente.

Seja $a = c\dot{\alpha}_0/k$. O coeficiente de restituição é dado pela magnitude da raiz negativa da seguinte equação (veja Chatterjee para detalhes)¹:

$$-e - \frac{1}{a} \ln(1 - ae) = 1 - \frac{1}{a} \ln(1 + a) \quad (2.26)$$

A solução do coeficiente de restituição como função do parâmetro a é encontrada numericamente. Chatterjee, todavia, propõe uma função ajustada com erro máximo de 1.5% e, então, estabelece

¹ Esta é exatamente a mesma equação a ser resolvida para o modelo de Hunt e Crossley, com a definição do parâmetro a é dada pela equação 2.21.

$$e \approx \frac{1}{\exp(-0.4a) + a} \quad (2.27)$$

Como o parâmetro a é função crescente de $\dot{\alpha}_0$, conclui-se que o coeficiente de restituição diminui quando a velocidade de impacto aumenta, o que está de acordo, qualitativamente, com as observações de Brach [Brach-1991].

2.2.2- Impactos Bidimensionais

Embora julgemos importante apresentar aspectos relevantes sobre os modelos de impactos bidimensionais e tridimensionais, não nos aprofundaremos nestes modelos, visto não serem o foco principal do trabalho. Destacamos os seguintes modelos para impactos bidimensionais:

- Os modelos de Brach
- O modelo de Kane e Levinson, ou modelo de Whittaker
- O modelo de Smith
- O modelo de Routh
- O modelo de Pfeiffer e Glocker
- O modelo de Mindlin-Deresiewicz
- Modelos de Ponto de Contato
- Modelo bilinear

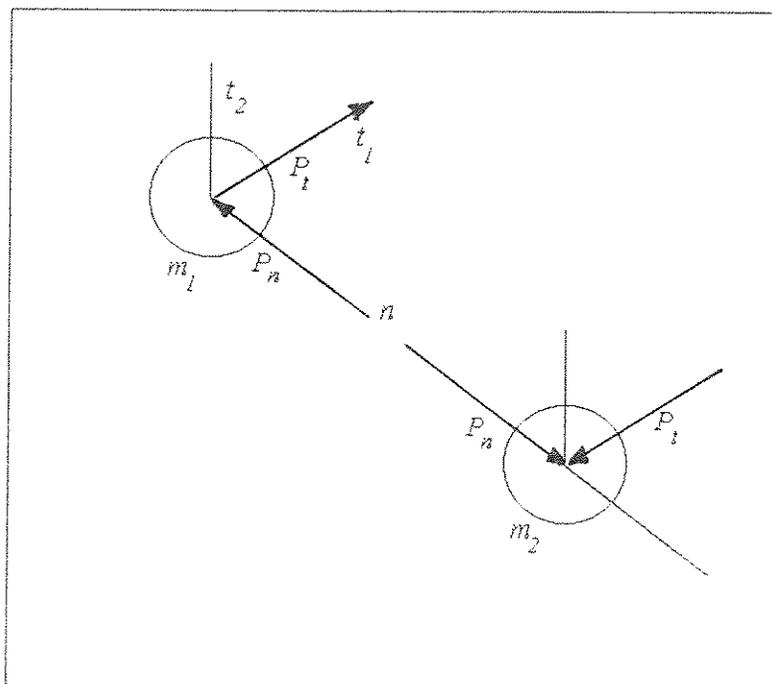


Figura 2.7: Diagramas de corpo livre num impacto bidimensional

Os modelos de Brach são chamados por Chatterjee [Chatterjee-1997] de modelos em que todas as equações são lineares. De fato, o próprio Brach [Brach-1991] enfatiza esta condição quando apresenta os modelos. Para impactos bidimensionais Brach define dois parâmetros adimensionais que regem as interações colisionais. O primeiro deles é o próprio coeficiente de restituição que, neste caso, é chamado de coeficiente de restituição normal, por reger as interações na direção normal ao plano tangente à superfície dos corpos no ponto de contato. Para as interações na direção tangencial, isto é, paralelamente à reta tangente à superfície dos corpos no ponto de contato, Brach usa o mesmo conceito do atrito de Coulomb, embora reconheça que estas não podem ser usadas para todos os impactos. Consideremos a figura 2.7, que mostra os diagramas de corpo livre no processo de impacto bidimensional.

P_n e P_t são as variações das quantidades de movimentos lineares nas direções normal e tangencial, respectivamente, durante o impacto. Sendo t_1 e t_2 os instantes do início e fim do processo de impacto, respectivamente, e sendo as forças oriundas do impacto as únicas forças a atuarem nos corpos que colidem, então a seguinte equação é verdadeira:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \vec{V}_1(t_2) - m_1 \vec{V}_1(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \vec{P} \\ m_2 \vec{V}_2(t_2) - m_2 \vec{V}_2(t_1) &= - \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = -\vec{P} \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

onde $\vec{F}(t)$ é a força na região de contato durante o impacto. Note que usamos o símbolo \vec{V} para representar as velocidades absolutas. Também temos que

$$\vec{P} = P_n \vec{u}_n + P_t \vec{u}_t, \text{ e } P = \sqrt{P_n^2 + P_t^2} \quad (2.29)$$

onde \vec{u}_n e \vec{u}_t são os vetores unitários nas direções normal e tangencial.

Brach, então, define uma relação similar ao coeficiente de atrito, que ele denomina razão de impulso, dada por

$$\mu = \frac{P_t}{P_n} \quad (2.30)$$

e considera que o parâmetro μ pode ser medido e, a partir daí, ser tratado como um parâmetro conhecido, que representa uma das propriedades do impacto.

Desta forma, para impactos bidimensionais, temos dois parâmetros independentes que determinam a lei que rege o choque. O movimento após o choque pode ser completamente determinado pelas equações 2.1, 2.30 e 2.28. A grande crítica a esta lei é que ela não obedece

ao requisito de *mensurabilidade independente dos parâmetros* (veja página 9), uma vez que a taxa de impulso depende, na prática, do ângulo entre as componentes normal e tangencial das velocidades relativas antes do impacto [Chatterjee-1997]. Desta forma, o parâmetro μ não pode ser medido para um par colidente, mas para um par impactando sob determinada condição cinemática. É óbvio que a taxa de impulso não pode ser tratada como um parâmetro independente. Tomemos o caso de um impacto particular onde a velocidade relativa inicial na direção tangencial é nula. É claro que, neste caso, a velocidade relativa tangencial após o impacto é também esperada ser nula e não há nada que nos leve a esperar o contrário. No entanto, se o parâmetro μ for interpretado como universalmente aplicável, um impacto perfeitamente normal poderia ter como efeito uma resposta na direção tangencial.

De todo modo, o próprio Brach chama atenção para o fato de o parâmetro μ ser modelado de acordo com a situação em estudo. Assim, a própria forma de aplicar e estimar este parâmetro deve levar em consideração o mecanismo de desenvolvimento das interações na direção tangencial.

Outra proposta abordada por Brach [Brach-1991] é a definição de um coeficiente de restituição tangencial, análogo ao coeficiente de restituição normal, expresso por

$$v_{fi} = -e_t v_{ii} \quad (2.31)$$

onde, como na equação 2.1, os subscritos i e f indicam os estados imediatamente antes e depois do impacto, v_i é a velocidade tangencial relativa dos corpos em impacto e e_t é coeficiente de restituição tangencial. O estado final do sistema é completamente determinado pelas equações 2.1, 2.31 e 2.28.

Embora seja sempre possível, dadas as velocidades relativas iniciais e os coeficientes de restituição normal e tangencial, encontrar uma taxa de impulso que faça o mesmo papel do coeficiente de restituição tangencial, é preciso ter em mente que, quando se utiliza o coeficiente de restituição tangencial, a idéia que se faz das interações tangenciais no impacto é substancialmente diferente da idéia que se tem utilizando a taxa de impulso, uma vez que o coeficiente de restituição tangencial já traz em si embutida uma idéia mais restritiva das interações na direção tangencial. Note que, se a velocidade relativa inicial é nula, velocidade relativa final nula é consequência direta do modelo. A relação entre a taxa de impulso e os coeficientes de restituição normal e tangencial é dada por

$$\mu = \left(\frac{1 + e_t}{1 + e} \right) \frac{v_{ii}}{v_{in}} \quad (2.32)$$

Note também que a ausência de interações na direção tangencial é representada por $e_t = -1$, que corresponde a $\mu = 0$.

Equacionamentos mais complexos aparecem à medida que se consideram choques oblíquos, quando o movimento final dos corpos envolve rotação e translação, e não somente translação. Isto é comum em mecanismos, por exemplo. No entanto, nada se acrescenta às leis de impacto. As equações que se adicionam referem-se às restrições dos movimentos. São portanto, provenientes da cinemática, e não da dinâmica. É o caso da figura 2.8, que apresenta o impacto de um pêndulo contra uma superfície. Note que, embora as restrições cinemáticas possam produzir importantes efeitos dinâmicos, nenhuma alteração na lei de contato é consequência daquelas restrições. Por isto não vamos nos ater em discussões sobre mecanismos, pois nosso objetivo aqui são as leis de impacto. Brach [Brach-1991] e Pfeiffer [Pfeiffer-1996] apresentam várias situações de impactos com restrições cinemáticas.

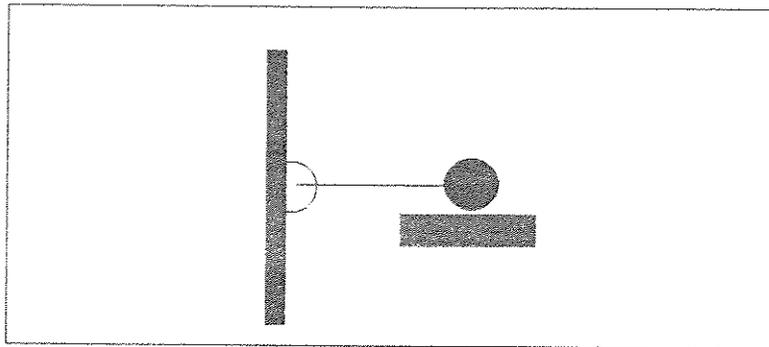


Figura 2.8: Sistema com impacto com restrição cinemática

O modelo de Kane e Levinson [Chatterjee-1997], ou modelo de Whittaker, utiliza o coeficiente de restituição, tal como definido na equação 2.1, para equacionar as interações na direção normal, da mesma forma que os modelos de Brach. Para a direção tangencial o modelo estabelece:

$$v_{\beta} = 0 \quad \text{e} \quad \|P_t\| \leq \mu P_n$$

ou

$$P_t = -\mu P_n \frac{v_{\beta}}{\|v_{\beta}\|} \quad (2.33)$$

Repare que este modelo representa mais fielmente a idéia do atrito de Coulomb. A primeira parte da equação 2.32 diz apenas que a velocidade relativa final será nula se a magnitude da variação da quantidade de movimento tangencial for inferior a determinado valor. Isto é análogo a dizer que, para dois corpos com interação por atrito, só haverá escorregamento se a resultante das demais forças for suficiente para vencer a força de atrito estático. Só após isto é que a força de atrito será igual ao produto do coeficiente de atrito dinâmico (que muitas vezes é considerado igual ao estático) pela força normal. Isto é expresso pela segunda parte de 2.33, que diz que a variação da quantidade de movimento tangencial é igual ao produto da taxa de impulso pela quantidade de movimento normal. O sinal menos

caracterizando a razão da velocidade relativa pelo seu módulo, apenas indica que a quantidade de movimento tangencial se opõe à velocidade relativa dos corpos. O problema é que temos a velocidade relativa final sendo usada na determinação do quantidade de movimento tangencial, isto é, a resposta na determinação da causa dela mesma. De toda forma, note que apenas o sinal é importante e fato semelhante ocorre quando se trabalha com atrito seco, caso em que a ação da força de atrito depende do sinal da velocidade relativa entre as superfícies onde o atrito atua. É preciso ter cuidado com o aspecto da energia envolvida no impacto. Chatterjee [Chatterjee-1997] chama a atenção para o fato do modelo de Kane e Levinson violar a conservação de energia para alguns valores dos parâmetros e e μ . Consideremos o caso de dois corpos que se impactam conforme mostra a figura 2.9.

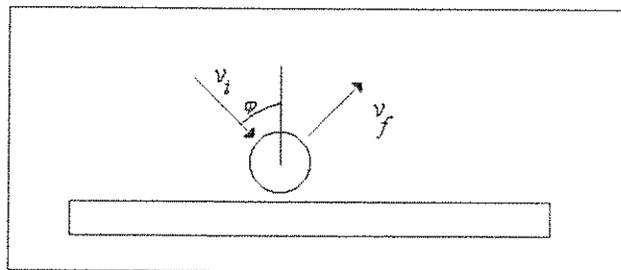


Figura 2.9: Esquema simplificado de impacto bidimensional

Consideremos as seguintes definições:

- V_{i1n} : velocidade normal inicial do corpo 1,
- V_{i2n} : velocidade normal inicial do corpo 2,
- V_{i1t} : velocidade tangencial inicial do corpo 1,
- V_{i2t} : velocidade tangencial inicial do corpo 2.

Analogamente, trocando o subscrito i por f , indicamos as velocidades finais. Tomando as equações de conservação das quantidades de movimentos (equação 2.28), a equação 2.1 e a equação 2.33 (segunda parte), obtemos os seguintes valores para as velocidade finais:

$$\left. \begin{aligned}
 V_{f1n} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left[-m_2 e (V_{i1n} - V_{i2n}) + m_1 V_{i1n} + m_2 V_{i2n} \right] \\
 V_{f2n} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left[-m_1 e (V_{i1n} - V_{i2n}) + m_1 V_{i1n} + m_2 V_{i2n} \right] \\
 V_{f1t} &= \frac{-\mu (m_1 V_{f1n} - m_1 V_{i1n}) + m_1 V_{i1t}}{m_1} \\
 V_{f2t} &= \frac{m_1 V_{i1t} + m_2 V_{i2t} - m_1 V_{f1t}}{m_2}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Se a massa m_2 está inicialmente em repouso e é extremamente maior que m_1 , então m_2 permanecerá em repouso após o impacto e teremos,

$$\left. \begin{aligned} V_{fn} &= -eV_{in} \\ V_{ft} &= \mu(e-1)V_{in} + V_{it} \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Desta forma a energia cinética após o impacto é dada por

$$E_f = \frac{m_1}{2} \left\{ \left[e^2 + \mu^2(1+e)^2 \right] V_{in}^2 + V_{it}^2 \right\} \quad (2.36)$$

Levando em conta que a energia cinética inicial é dada por

$$E_i = \frac{m_1}{2} \left\{ V_{in}^2 + V_{it}^2 \right\}, \quad (2.37)$$

concluimos que, para este caso, a conservação de energia só é obedecida se

$$e^2 + \mu^2(1+e)^2 \leq 1 \quad (2.38)$$

No caso de usarmos o coeficiente de restituição tangencial, a conservação de energia fica garantida se $|e_t| \leq 1$.

O modelo de Smith [Smith-1991][Smith-1992-a][Smith-1992-b] corrige o problema do modelo de Kane e Levinson. Para tanto, Smith utiliza uma ponderação entre as velocidades iniciais e finais e mostra que não é possível que a energia cinética do sistema aumente após o impacto se este modelo é utilizado. Para a direção normal continua valendo a aplicação do coeficiente de restituição, conforme a equação 2.1. Para a direção tangencial temos

$$P_T = -\mu P_n \frac{\|v_{it}\|v_{it} + \|v_{ft}\|v_{ft}}{\|v_{it}\|^2 + \|v_{ft}\|^2} \quad (2.39)$$

Assim, as equações 2.28, 2.1 (direção normal) e 2.39 determinam completamente o estado final, dado o estado inicial. O problema é que uma solução iterativa é necessária pelo fato da equação 2.39 introduzir um forte acoplamento não linear entre os estados antes e após a colisão.

Quando o ângulo de incidência se torna muito pequeno e a taxa de impulso é diferente de zero, o coeficiente de restituição tangencial equivalente ao modelo de Smith tende à

unidade para impacto entre esferas[†]. O mesmo é previsto para taxas de impulso grandes combinadas com matrizes completas. Desta forma, este modelo pode capturar comportamentos tipo *superball*. Note que o modelo de Smith não entra em detalhes de como as interações de atrito ocorrem, mas apenas supõe um determinado modelo. O impulso desenvolvido durante a colisão é determinado por:

$$P_n \left\{ -\mu \frac{1}{\|v_{ii}\| \|v_{ii}\| + \|v_{ff}\| \|v_{ff}\|} \right\} = M \left\{ \begin{array}{l} -(1+e)v_m \\ v_f - v_i \end{array} \right\} \quad (2.40)$$

Outra discussão que se faz a respeito do modelo de Smith diz respeito à unicidade de solução. Pode-se mostrar que, para $\mu = 0$ a solução é única. Para $\mu \neq 0$, prova-se apenas a existência de solução [Sithigh-1995]. A questão da unicidade, até onde sabemos, continua em aberto.

O modelo de Routh [Chatterjee-1997][Wang-1992] para impactos bidimensionais permite a integração das equações diferenciais para obter uma uma solução em forma fechada. É portanto um modelo algébrico. O coeficiente de restituição normal é definido como uma razão de impulsos, porém, não é equivalente ao coeficiente de restituição da equação 2.1, sendo, ao invés, expresso por

$$e = \frac{P_{mf}}{P_{im}} \quad (2.41)$$

onde P_{mf} indica o impulso desenvolvido na direção normal durante a expansão da região de contato, isto é, o impulso do ponto de compressão máxima (indicado pelo subscrito m) até ao fim do contato (indicado pelo subscrito f). Analogamente, P_{im} indica o impulso desenvolvido durante a compressão, isto é, o impulso desde o início do contato (subscrito i) até ao ponto de compressão máxima. Algumas vezes denomina-se o coeficiente expresso por (2.41) por coeficiente de restituição cinético. Fala-se ainda em modelo de Poisson, que foi quem originalmente propôs a utilização da relação [Wang-1992].

Para a direção tangencial o modelo de Routh prevê apenas a ocorrência do atrito de Coulomb, que se manifesta apenas se a velocidade relativa tangencial for diferente de zero. Assim escrevemos

$$\begin{aligned} V_f = 0 \text{ e } |P_t| \leq \mu P_n \\ \text{ou} \\ P_t = -\mu P_n \frac{V_f}{|V_f|} \end{aligned} \quad (2.42)$$

[†] Na verdade, o coeficiente de restituição tende à unidade para qualquer par colidente que resulte numa matriz de massa local diagonal. O conceito de matriz de massa local será apresentado na subseção seguinte.

onde P representa o impulso durante todo o processo de colisão. Note que μ representa o coeficiente de atrito e a primeira das equações representa o limite para que o movimento relativo na região de contato na direção transversal se estabeleça.

Uma vez que é impossível que apenas o atrito provoque a reversão da velocidade relativa tangencial, não há como capturar um comportamento tipo *superball*. A grande questão refere-se à determinação do ponto de máxima compressão. Deve-se notar que não se pode determinar o ponto de máxima compressão a partir de experimentos apenas, pois conhecer os estados final e inicial de movimento numa colisão não leva ao conhecimento do ponto de máxima compressão, a menos que se conheça a relação de deformações na região de contato [Chatterjee-1997].

O modelo de Pfeiffer e Glocker [Pfeiffer-1996] utiliza o coeficiente de restituição cinético de Poisson para modelar as interações na região de contato, tal como o modelo de Routh. No entanto, faz algumas considerações para um tratamento unificado de contato unilaterais. Portanto, depende da determinação do ponto de máxima compressão. Para o processo de compressão, Pfeifer e Glocker utilizam a relação (impactos singulares)

$$\vec{P}_c = M(\vec{V}_c - \vec{V}_i) \text{ e } V_{cn} = 0 \quad (2.43)$$

onde \vec{P}_c é o impulso desenvolvido durante a fase de compressão, M é a matriz massa local, \vec{V}_c é a velocidade relativa quando a máxima compressão é alcançada e \vec{V}_i é a velocidade relativa inicial. V_{cn} é velocidade normal no estado de máxima compressão. Sobre a computação da matriz massa local falaremos na próxima sub-subseção. Note que, diferentemente da simbologia utilizada para o modelo de Routh, \vec{P}_c é o impulso total, não apenas o impulso na direção normal. Portanto, $P_c \neq P_{im}$.

Além das equações 2.43, as interações na fase de compressão devem obedecer

$$\begin{aligned} V_{ct} = 0 \text{ e } |P_{ct}| \leq \mu P_{cn} \\ \text{ou} \\ P_{ct} = -\mu P_{cn} \frac{V_{ct}}{|V_{ct}|} \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde V_{ct} é a velocidade tangencial no estado de máxima compressão, P_{ct} e P_{cn} são os impulsos desenvolvidos na fase de compressão nas direções tangencial e normal, respectivamente. μ é o coeficiente de atrito de Coulomb.

Note que as relações expressas em (2.43) nada mais são que o cálculo do impulso desenvolvido na fase de compressão (primeira equação) e a definição do estado de compressão máxima (segunda equação). Repare que pode existir velocidade relativa

tangencial no estado de compressão máxima. A primeira das equações (2.44) "diz" que, se o módulo do impulso transversal for menor que o coeficiente de atrito multiplicado pelo impulso normal, então a velocidade relativa transversal é zero. Caso contrário, passa a valer a segunda das equações (2.44). A analogia com atrito de Coulomb é perfeita, com a particularidade de que, neste caso, os coeficientes de atrito estático e dinâmico são iguais. A modelagem de Pfeiffer e Glocker é nitidamente diferente da modelagem de Brach[Brach-1992]. No modelo de Brach não há condição limite para aplicação da taxa de impulso, que é definida de forma similar. O parâmetro μ do modelo de Brach tem sentido diferente do coeficiente de atrito.

Para a fase de expansão utiliza-se o coeficiente de restituição normal, tal como definido por Poisson e temos

$$P_{en} = eP_{cn} \quad (2.45)$$

onde P_{en} é impulso na direção normal na fase de expansão. Note que a definição é mesma de 2.41 ($P_{im} = P_{cn}$ e $P_{mf} = P_{en}$). Para a direção tangencial as interações são modeladas de forma um pouco mais complexas. Seja

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\mu^* = \frac{1 - \alpha}{\mu} \quad (2.46)$$

$$P_t^* = \alpha \mu P_{en}$$

As interações na direção tangencial na fase de expansão são modeladas pelas relações

$$\begin{aligned} |P_{ct} - P_t^* \text{sign}(P_{ct})| \leq \mu^* P_{en} \quad \text{e} \quad V_{ft} = 0 \\ \text{ou} \\ P_{ct} = P_t^* \text{sign}(P_{ct}) - \mu^* P_{en} \text{sign}(V_{ft}) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Pfeiffer e Glocker definem P_t^* como o impulso armazenado na direção tangencial, em função do impulso normal, que por sua vez é facilmente calculado a partir do coeficiente de restituição normal. Note que a primeira das equações (2.47) define limites para que a segunda equação possa ser aplicada. Em suma, ela "diz" que se a magnitude do impulso transversal efetivo for inferior a um determinado coeficiente de atrito multiplicado pelo impulso normal, então a velocidade relativa transversal final é zero. Caso contrário, o impulso transversal é dado pela segunda equação. Tendo em mente que P_t^* é proporcional a P_{en} (equação 2.46), é fácil ver que a segunda equação expressa o fato de que o impulso transversal na fase de expansão é, quando a equação for aplicável, proporcional ao impulso normal. Apenas que o

coeficiente multiplicador do impulso normal depende do sinal da velocidade final e do sinal do impulso normal na fase de compressão. Isto é natural para que se possa representar o deslizamento positivo, negativo ou a ausência de deslizamento na região de contato. Assim, embora mais complicado em sua representação, as interações na direção tangencial na fase de expansão seguem, no fundo, a mesma idéia do atrito de Coulomb. A inovação fica por conta do impulso armazenado, que permite a captura de comportamento tipo *superball*. Note que é possível obter um impulso transversal final que inverta a velocidade relativa transversal inicial dos corpos colidentes.

A limitação do parâmetro α e a definição do parâmetro μ em 2.46 visam a garantir a não criação de energia durante o choque, isto é, garantir um modelo que satisfaça as leis fundamentais. A prova de que o modelo garante a não criação de energia é dada, para impactos singulares, por Pfeiffer [Pfeiffer-1996].

A mesma consideração feita para o modelo de Routh com relação à determinação do ponto de máxima compressão vale para o modelo de Pfeiffer e Glocker.

O modelo de Mindlin-Deresiewicz [Mindlin-1953][Jaeger-1994] é uma extensão do modelo de Hertz para impactos bidimensionais e tridimensionais e supõe que a forma dos corpos na região de contato pode ser aproximada por uma superfície esférica. As interações na direção normal são regidas pelo modelo de Hertz, de forma análoga ao modelo unidimensional de Hertz (ver página 16). Para a direção tangencial Mindlin e Deresiewicz consideram a tensão cisalhante associada às deformações tangenciais que se manifestam sobre círculos cujos raios são função da complacência normal. Desta forma, existe um forte acoplamento entre as interações nas duas direções. Para considerar este acoplamento, Mindlin e Deresiewicz desenvolvem uma longa série de cálculos envolvendo as deformações normais e tangenciais na região de contato. Como as deformações fazem parte da formulação do problema, as interações devem ser calculadas iterativamente. Limitações do modelo de Hertz implicam, conseqüentemente, em limitações do modelo Mindlin-Deresiewicz. Se o raio da superfície na região de contato é muito pequeno (isto pode acontecer em alguns fluxos granulares), a teoria de Hertz pode não valer porque pressupõe que as escalas da deformação e dos raios originais dos corpos são muito diferentes. Em geral, as deformações têm de ser uma microescala dos raios. Chatterjee [Chatterjee-1997] traz algumas observações sobre as restrições deste modelo e suas imprecisões.

Os modelos baseados em ponto de contato não se preocupam com nenhuma relação explícita envolvendo as interações ou deformações na região de contato. O importante é ter um elemento que possa representar as forças naquela região, tais como massas, molas e amortecedores. Muitas vezes supõe-se atrito de Coulomb como mecanismo de dissipação na direção tangencial. Um exemplo pode ser visto na figura 2.10, que mostra uma partícula impactando um superfície imóvel. Os elementos normal e tangencial podem ou não ser acoplados através de alguma relação algébrica. Podem ser lineares ou não lineares. De todo modo, toda a ação dos elementos é suposta ocorrer no ponto de contato. Pode-se ajustar os

elementos de forma que, em algumas situações sejam equivalentes a outros modelos em um ou mais aspectos. Por exemplo, É possível ajustar as rigidezes dos elementos normal e tangencial para obter um coeficiente de restituição tangencial análogo ao procedimento de Brach [Brach-1991] (veja página 23) ou Jekins [Jekins-1992]. Stronge [Stronge-1994] utiliza em seu trabalho uma mola tangencial (elemento sem dissipação) e um elemento não linear na direção normal, cuja dissipação é consistente com a definição de um coeficiente de restituição energético. Considera ele que o processo de colisão termina quando a força normal é nula.

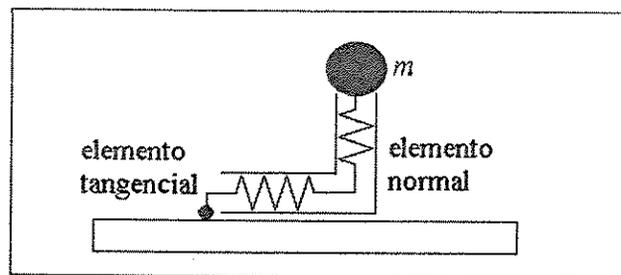


Figura 2.10: Esquema de impacto com ponto de contato

O modelo bilinear, por envolver muitas considerações sobre a matriz massa local, que, por ora, ainda não apresentamos formalmente, será tratado juntamente com os modelos tridimensionais.

2.2.3- Impactos Tridimensionais

Os impactos tridimensionais caracterizam-se pelo fato do vetor velocidade relativa dos corpos após o impacto e o vetor velocidade relativa antes do mesmo não estarem no mesmo plano. Desta forma a componente tangencial do impulso desenvolvido durante o choque ainda deve ser decomposto em duas outras componentes, como mostra a figura 2.11.

Se para impactos bidimensionais as hipóteses são variadas, a extensão de todas as idéias para impactos tridimensionais levaria a um volume muito extenso. Portanto, para impactos tridimensionais preferimos fazer comentários de natureza mais geral.

Os modelos de Brach (veja página 24) podem todos ser estendidos para impactos tridimensionais. Assim, dever-se-ia definir duas razões de impulso, cada qual para uma das duas direções tangenciais. O mesmo se deveria fazer com os coeficientes de restituição tangenciais (veja página 25). O problema é que, se para impactos bidimensionais já existe o problema da mensurabilidade da razão de impulso, para impactos tridimensionais o problema se torna ainda maior. De todo modo, Brach sempre procura este caminho pelo fato de os modelos serem algébricos e permitirem manipulações relativamente fáceis das formas matriciais dos equacionamentos. Todavia os modelos são imprecisos em muitas situações, tais

como nos impactos onde existe deslizamento tangencial ou onde as forças na direção tangencial provocam momentos que induzem ao movimento de rotação dos corpos após o impacto.

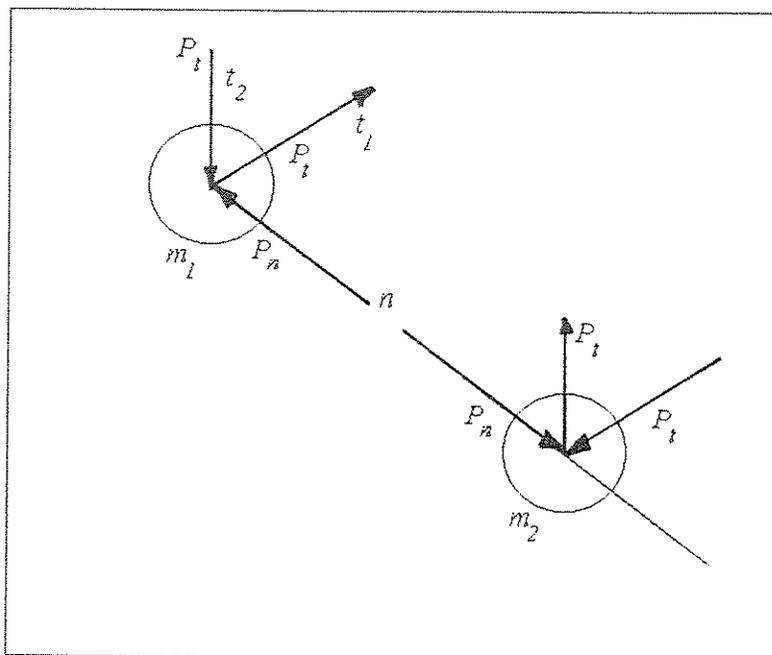


Figura 2.11: Visualização de um impacto tridimensional

Para se determinar completamente o estado do sistema após um impacto tridimensional entre dois corpos rígidos, temos, para o caso geral, doze variáveis a determinar, a saber: as velocidades de translação e rotação dos dois corpos. Mais seis variáveis surgem devidas aos impulsos (lineares e angulares) que agem nos corpos durante o impacto, totalizando 18 variáveis. Da dinâmica dos corpos rígidos podemos escrever seis equações que regem o processo de impacto, dadas pela conservação das quantidades de movimento lineares. Mais seis equações podem ser escritas para as quantidades de movimentos angulares. Se utilizarmos o coeficiente de restituição normal, teremos mais uma equação proveniente da representação das interações nesta direção. Utilizando as taxas de impulso para representar as interações nas duas direções tangenciais, temos mais duas equações. Assim temos, por enquanto, 15 equações. Mais três equações podem ser obtidas através dos modelos supostos para as interações rotacionais, dadas pelos impulsos angulares, totalizando as 18 equações necessárias. Dependendo das suposições para as diversas interações, é possível que o estado final do sistema possa ser obtido pela solução de um sistema de doze equações a doze incógnitas. Pela metodologia de Brach [Brach-1991], que sempre procura usar modelos algébricos para as interações, o sistema a ser resolvido será um sistema algébrico. Brach, por exemplo, propõe a utilização de um coeficiente de momento para fazer o mesmo papel do coeficiente de restituição normal para as interações envolvendo a rotação em torno do eixo correspondente à direção normal. No entanto, muitos modelos exigirão soluções integradas numericamente e, algumas delas, de forma iterativa.

As taxas de impulso podem ser substituídas pelos coeficientes de restituição tangencial ou qualquer outro modelo proposto para as interações tangenciais, mesmo um modelo análogo ao de Smith [Smith-1991], ou ainda análogo ao de Mindlin-Deresiewicz [Mindlin-1953]. Uma extensão do modelo de Glocker e Pfeiffer [Pfeiffer-1996] para impactos tridimensionais parece não estar ainda disponível. O modelo de Rough [Chatterjee-1997] pode ser estendido para impactos tridimensionais.

Agora vamos tratar das interações locais em termos de inércia. Pode-se definir uma matriz massa local no ponto de impacto. Para tanto, parte-se das acelerações do pontos de contato nos dois corpos antes do impacto iniciar. Depois, calculam-se novas acelerações deste pontos quando supostas forças unitárias atuam no ponto de contato em cada direção. Com isto, é possível calcular as acelerações relativas dos corpos (em cada direção) no ponto de contato e as acelerações relativas produzidas pelas forças unitárias naquele ponto. É possível então calcular uma matriz de acelerações relativas devidas às forças aplicadas em cada direção. A inversa desta matriz representa a inércia envolvida na resposta do sistema, que é a matriz massa local. As forças interativas \vec{F} na região de contato podem ser expressas por

$$M\ddot{\vec{\alpha}} = \vec{F} = M\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{P}} \quad (2.48)$$

onde M é a matriz massa local e $\vec{\alpha}$ é o vetor das deformação no *ponto de contato*, embora deformações não possam, a rigor ocorrer em um ponto. A variação da quantidade de movimento em qualquer dos corpos é dada por

$$M(\vec{v}_f - \vec{v}_i) = \vec{P} \quad (2.49)$$

onde, conforme já citado, \vec{v} é a velocidade relativa entre os dois corpos e os subscritos i e f representam os estados antes e depois da colisão. Agora abrem-se novas possibilidades para a modelagem das interações.

De posse da definição da matriz massa local, voltemos ao modelo bilinear referenciado entre os impactos bidimensionais. Este modelo refere-se ao caso especial de quando a matriz massa local é diagonal. Sejam λ_1 , λ_2 e λ_3 os valores da diagonal da matriz massa e seja a velocidade relativa antes da colisão dada por $\vec{v}_i = \{-v_m, -v_u, 0\}^T$ para alguns escalares ($v_m, v_u > 0$). A velocidade relativa após a colisão é dada por

$$\vec{v}_f = \left\{ e_n v_m, -v_u + \min \left[(1 + e_t) v_u, \mu (1 + e_n) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_m \right], 0 \right\}^T \quad (2.50)$$

onde $0 \leq e_n \leq 1$ é o coeficiente de restituição normal, $-1 \geq e_t \geq 1$ é o coeficiente de restituição tangencial e μ , diferente do parâmetro definido em (2.30), é o coeficiente de atrito. Note que

que não há interação em uma das direções, razão porque este modelo é, de fato, para impactos bi-dimensionais. O impulso desenvolvido durante a colisão é dado por

$$\vec{P} = \left\{ \lambda_1(1 + e_n)v_m, \min\left[(1 + e_t)\lambda_2 v_u, \mu(1 + e_n)\lambda_1 v_m \right], 0 \right\}^T \quad (2.51)$$

Note que as interações na direção normal são regidas somente pelo coeficiente de restituição normal. As interações na direção tangencial são regidas pelo coeficiente de restituição tangencial, desde que este não viole as condições de atrito de Coulomb. Por isto o uso da função mínimo. A exigência de matriz diagonal deve-se ao fato que, se a matriz massa local for diagonal, não há acoplamento explícito entre as três direções do impacto. Desta forma, o referencial pode ser escolhido de forma que a velocidade relativa antes da colisão e, conseqüentemente, após, tenha apenas duas componentes.

Chatterjee [Chatterjee-1997] apresenta três novas propostas de modelos para impactos, utilizando hipóteses para os impulsos durante a colisão. Na primeira proposta Chatterjee supõe que a variação da quantidade de movimento linear \vec{P} seja função (pressuposta, não a da equação (2.49), que é consequência direta da lei de Newton) da velocidade relativa antes do choque. Como se deseja um modelo algébrico, parte-se do princípio de que a direção dos impulsos sobre os corpos seja conhecida. Desta forma, apenas o módulo fica como incógnita. Seja \hat{P}_D o vetor unitário na direção da ação dos impulsos sobre os corpos. Conseqüente o impulso será dado por $a\hat{P}_D$, onde a é um escalar. A suposição inicial é de que a variação da quantidade de movimento linear tem a mesma direção da variação segundo o modelo bilinear, dado pela equação (2.51). Calculam-se então as velocidades finais. Se as velocidades calculadas são compatíveis com a conservação de energia, está tudo bem e isto indica que o modelo bilinear é que rege a colisão. Se não, ainda existem duas opções. Como primeira hipótese, pode ser que a direção do impulso esteja correta, mas sua magnitude tenha de ser reduzida para satisfazer o critério de não criação de energia. Assim, pode-se calcular o valor de a que permite satisfazer este critério. Isto indica apenas que o valor usado anteriormente para o coeficiente de restituição normal era incompatível com o modelo proposto. Na segunda hipótese, a direção pressuposta para o impulso estava incorreta, de forma que se torna necessária uma correção da direção. Isto pode ser feito tomando-se projeções do impulso sobre a direção normal até que o critério de conservação de energia seja satisfeito. Na verdade, tanto a projeção sobre a normal quanto a multiplicação por um coeficiente são projeções do impulso para o interior do espaço que determina a conservação de energia, o qual é limitado, para impactos tri-dimensionais, por um elipsóide, que representa o fato de $v_f^T M v_f \leq v_i^T M_i v_i$. Para matrizes massa diagonais, este modelo automaticamente se reduz ao modelo bilinear.

Chatterjee [Chatterjee-1997] indica os apêndices de sua tese como fonte para detalhes, mas o nosso exemplar, ao menos, não contém estes apêndices. De todo modo, os pseudo-

códigos computacionais que Chatterjee apresenta em sua tese [Chatterjee-1997] (páginas 70 e 71) são muito bons (não só para esta proposta, mas também para as outras duas).

Em sua segunda proposta Chatterjee estabelece que o impulso que age nos corpos sob o processo de impacto depende não apenas das velocidades iniciais, mas das quantidades de movimentos iniciais. A suposição inicial é de que o impulso está no plano que contém o vetor que indica a direção normal e que também contém o vetor que determina a quantidade de movimento relativa inicial. A partir de algumas considerações geométricas no espaço que determina as interações colisionais e dentro de algumas restrições de valores, calcula-se o valor do impulso. Se estiver de acordo com a conservação de energia, tudo bem. Se não, é preciso corrigir o cálculo do impulso através de projeções para dentro do espaço que rege a conservação de energia.

Na terceira proposta, Chatterjee propõe uma espécie de generalização dos coeficientes de restituição para impactos tri-dimensionais. Desta forma, pode-se dizer que as velocidades finais seriam diretamente relacionadas às velocidades iniciais. O fato de utilizar tantos parâmetros independentes pode, como nas situações anteriores, levar à não observância da conservação de energia. Neste caso o impulso deve ser projetado para o interior do espaço que garante esta observância. É claro que esta projeção implica, na prática, em corrigir os valores dos parâmetros usados. Deve-se notar, todavia, que esta correção obedece a uma restrição inicial, que é a validade qualitativa do modelo.

2.3 - Contribuição desta Tese

A modelagem dos sistemas com impactos é sempre muito importante e, como apresentado até aqui, envolve muitos aspectos a serem levados em conta de acordo com o objetivo do modelo e as características do sistema. De tudo o que pudemos estudar na literatura corrente, é certo que um modelo completo, que possa ser aplicado em muitas situações, está fora de cogitação. Mesmo o belo trabalho de Chatterjee [Chatterjee-1997], que se preocupa com uma parametrização eficiente sob muitos aspectos, não é concluído com nenhuma proposta de caráter mais geral, e nem poderia ser, dada a natureza particular de seu estudo, que se restringiu a impactos singulares. Não há nenhuma garantia de que um modelo eficiente para impactos singulares seja eficiente, do ponto de vista dinâmico, para impactos repetitivos, dado que o tempo gasto para as interações pode ser extremamente mais importante para impactos repetitivos do que para impactos singulares.

Não obstante vários estudos aplicados realizados por Pfeiffer [Pfeiffer-1996], Brach [Brach-1991], Zukas [Zukas-1992] e alguns outros autores, um estudo comparando a dinâmica prevista por vários modelos de impactos, acompanhado de estudo experimental, utilizando um sistema contínuo flexível, isto é, considerando colisões entre corpos não

rígidos, não foi encontrado. Também não encontramos resultados de estudos cuja preocupação seja a influência da folga na alteração da dinâmica de sistemas com impacto

Não se trata apenas de modelar um mesmo sistema utilizando diferentes teorias, mas também de discutir como os diversos modelos captam ou não fenômenos observados experimentalmente. Embora o protótipo experimental utilizado apresente apenas impactos unidimensionais, ainda assim estamos certos de que a discussão que apresentamos neste trabalho não está disponível na literatura corrente. De fato, utilizam-se impactos unidimensionais exatamente porque já se sabe que alguns fenômenos são complexos e devem ser estudados passo a passo se quisermos identificar que parâmetros do sistema são importantes para a ocorrência ou não de determinados fenômenos.

O trabalho envolve duas partes distintas. A primeira consiste em estudar experimentalmente um protótipo. Para tanto utilizam-se os seguintes recursos:

- Sensoramento da excitação e da resposta do sistema
- Análise da resposta do sistema no domínio da frequência.
- Análise geométrica: mapas de Poincaré, Expoentes de Lyapunov, bifurcações, etc...
- Verificação da migração das frequências características da resposta do sistema.

A segunda parte consiste da simulação computacional do sistema utilizando um dos modelos e aplicando as mesmas ferramentas da análise experimental. Notadamente a análise de migração das frequências características da resposta do sistema, tal como apresentada neste trabalho, não se comenta na literatura. A metodologia usada para captá-la também não parece ter sido aplicada aos sistemas com impactos.

Capítulo 3

Estudo Numérico de Sistemas de Dois Graus de Liberdade

Neste capítulo apresentamos o estudo numérico de sistemas vibratórios de dois graus de liberdade com parâmetros concentrados e com impactos em uma de suas massas, como apresentado nas figuras 3.1 e 3.2. Inicialmente analisamos, na seção 2.1, um sistema particular do tipo da figura 3.2, apresentando alguns fenômenos e algumas propriedades da resposta deste sistema. Após, na seção 3.2, apresentamos um modelo ajustado a partir de um sistema real. Nas demais seções apresentam-se resultados para o modelo da seção 3.2.

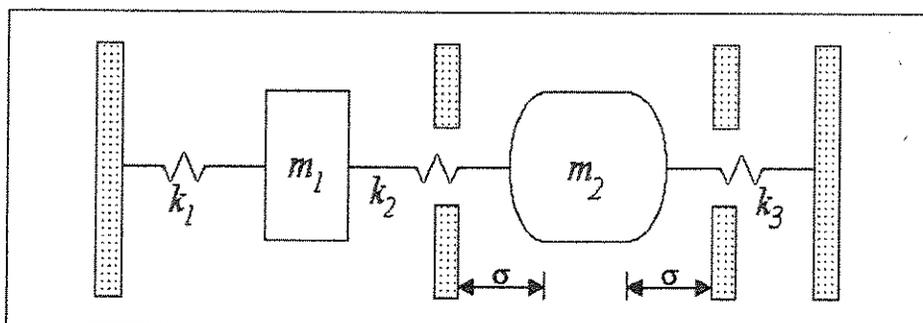


Figura 3.1 - Sistema de dois graus de liberdade com impacto (modelo físico 1)

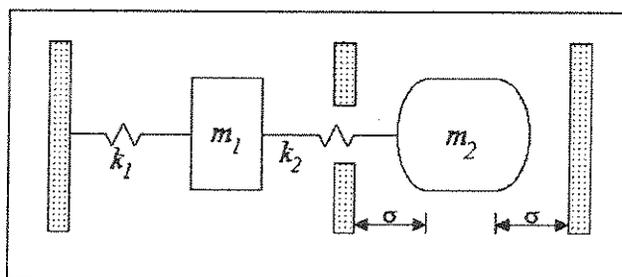


Figura 3.2 - Sistema de dois graus de liberdade com impacto (modelo físico 2)

3.1 - Análise de um Sistema Particular de 2gl com Impacto

Nesta seção apresentamos a análise de um sistema de dois graus de liberdade não amortecido, o qual consiste de duas massas e molas lineares, conforme a figura 3.2. Os deslocamentos são medidos a partir das posições de equilíbrio das molas e a massa m_2 pode mover-se entre duas posições extremas com uma folga simétrica 2σ . Muitos dos resultados desta seção foram apresentados no 1997' Design Technical Engineering Conferences - 16th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise [Mattos-1997].

As equações que governam o sistema são

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + (1 + \varepsilon)x_1 - \varepsilon x_2 &= 0 \\ \mu \ddot{x}_2 + \varepsilon x_2 - \varepsilon x_1 &= 0, |x_2| \leq \sigma \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde os sobre pontos indicam a derivada com relação ao tempo adimensional $\tau = t\sqrt{m_1/k_1}$ e $\mu = m_2/m_1$ e $\varepsilon = k_2/k_1$. O choque é introduzido no sistema através da mudança das condições iniciais da primeira das equações 3.1. Considerando o modelo de Newton, a velocidade da massa m_2 é, então, invertida cada vez que seu deslocamento atingir o valor de $\pm\sigma$.

Quando a massa m_2 está em movimento, as duas frequências naturais do sistema linear em questão são[†]:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\mu} \mp \sqrt{\varepsilon^2 - 2\mu\varepsilon + 2\varepsilon^2\mu + \mu^2 + 2\varepsilon\mu^2 + \varepsilon^2\mu^2}} \quad (3.2)$$

Quando a massa m_2 não se move, o sistema tem apenas uma frequência natural, a saber:

$$\bar{\omega} = \sqrt{1 + \varepsilon} \quad (3.3)$$

Assim, podemos formular a seguinte questão:

"As frequências características da resposta do sistema com impacto, quando a folga variar, serão uma combinação clara das frequências naturais de seus sistemas lineares associados, as quais são dadas acima?"

Para o primeiro passo nesta direção, consideramos o mais simples sistema com impacto com mais de um grau de liberdade. Para evitar a influência de frequências externas, tomamos um sistema não excitado, de forma que, para esta análise, teremos de considerar um sistema

[†] Utilizaremos sempre a letra ω (com seus subscritos indicativos) para representar a frequência circular em rad/tempo e a letra f (com seus subscritos indicativos) para representar a frequência em ciclos/tempo. Assim, $f = \omega / 2\pi$ sempre que aparecer no texto.

não amortecido a fim de analisarmos respostas que se mantêm ao longo do tempo. Para analisar o sistema computamos a resposta exata do mesmo quando $|x_2| \leq \sigma$. O instante da reversão é computado e novas condições iniciais são pré-fixadas para o intervalo de tempo subsequente. A resposta é conferida durante a simulação para garantir que se obtenha uma solução numérica consistente com a solução física do problema.

A importância do controle da folga pode ser sentida pela análise das figuras 3.3 e 3.4, as quais apresentam o plano fase da coordenada que representa o movimento da massa não impactante, para dois valores distintos da folga e para as mesmas condições iniciais. As posições iniciais das massas são nulas. Os valores pré-estabelecidos para as velocidades (ver figuras), sem razão de ser à primeira vista, foram assim fixados para resultar numa amplitude de valor inteiro quando o sistema não impacta. Isto não altera em nada as conclusões do trabalho e facilita comparar os valores da folga com a folga máxima em que impactos ainda ocorrem. Na verdade, como veremos mais adiante, estas condições iniciais refletem uma distribuição particular da energia total do sistema entre os dois modos de vibração do sistema de dois graus de liberdade sem impactos. É obvio que a distribuição de energia afeta a dinâmica do sistema. No caso apresentado, ocorrem impactos quando a folga é inferior a 20, ou seja, 20 é o valor limite da folga para a ocorrência de impactos. Para a presente simulação temos $\mu = 1$ e $\varepsilon = (400 + 4\sqrt{199})/8$, de forma que:

$$\begin{aligned} f_1 &= 0.7055 \\ f_2 &= 10.7055 \\ \bar{f} &= 1.2126 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Tomamos a liberdade de apresentar as frequências e as condições iniciais (ver figuras) com este elevado número de casas decimais por causa da sensibilidade dos sistemas não lineares nas regiões de transição envolvendo alterações em sua dinâmica.

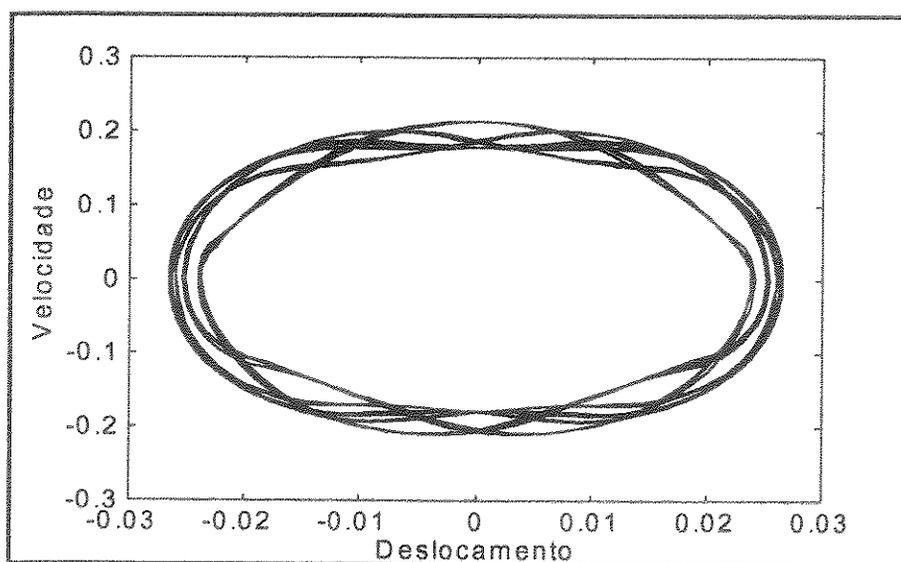


Figura 3.3 - Plano fase $\sigma = 12.4814250670842$
 $\dot{x}_1 = 0.2141111177577943$, $\dot{x}_2 = -0.2122429289211338$

Há um acréscimo de 94% na amplitude de movimento da massa m_1 sem nenhum aumento prático da folga. A velocidade máxima também aumenta. A menos que a presença de amortecimento altere sensivelmente este quadro, esta pode ser uma situação onde um absorvedor de vibração por impacto tenha uma eficiência muito baixa, ou até um efeito contrário ao desejado.

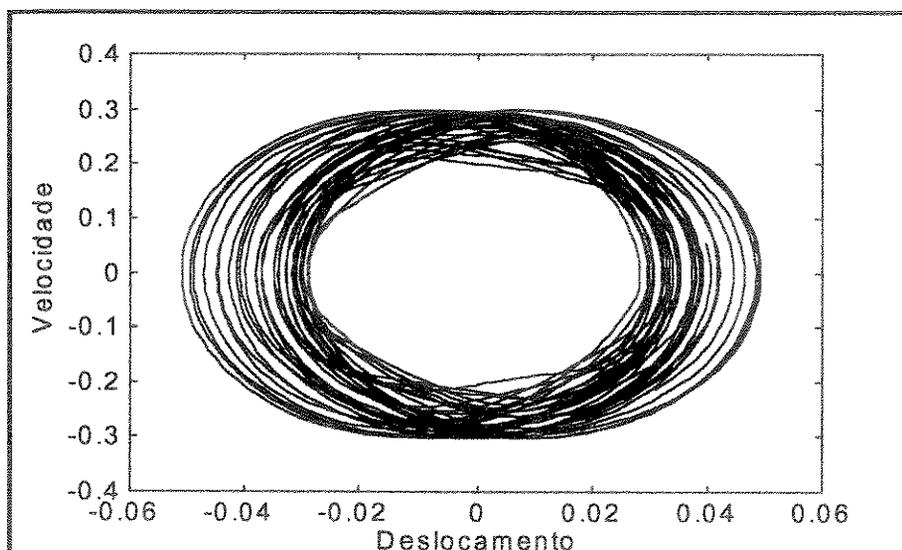


Figura 3.4 - Plano fase para $\sigma = 12.4814250670843$

$$\dot{x}_1 = 0.2141111177577943, \quad \dot{x}_2 = -0.2122429289211338$$

As figuras 3.5 e 3.6 mostram a evolução do cálculo do maior expoente de Lyapunov para as respostas cujos planos fase são apresentados na figuras 3.3 e 3.4, respectivamente. Para este cálculo utilizamos um programa computacional cujo código foi adaptado do trabalho de Wolf [Wolf-1986], utilizando a mesma metodologia. Notamos que a resposta é caótica para $\sigma = 12.4814250670843$. Informações sobre a teoria dos expoentes de Lyapunov e a metodologia de cálculo são apresentadas no apêndice A.

Encontramos três janelas com resposta caótica quando variamos a folga de zero até 20, janelas cujos limites são apresentados na tabela 3.1.

Janela	Limite inferior	Limite superior
1	≈ 12.481	≈ 13.109
2	≈ 15.297	≈ 15.298
3	≈ 19.443	20 (máximo)

Tabela 3.1 - Limites das janelas de caos

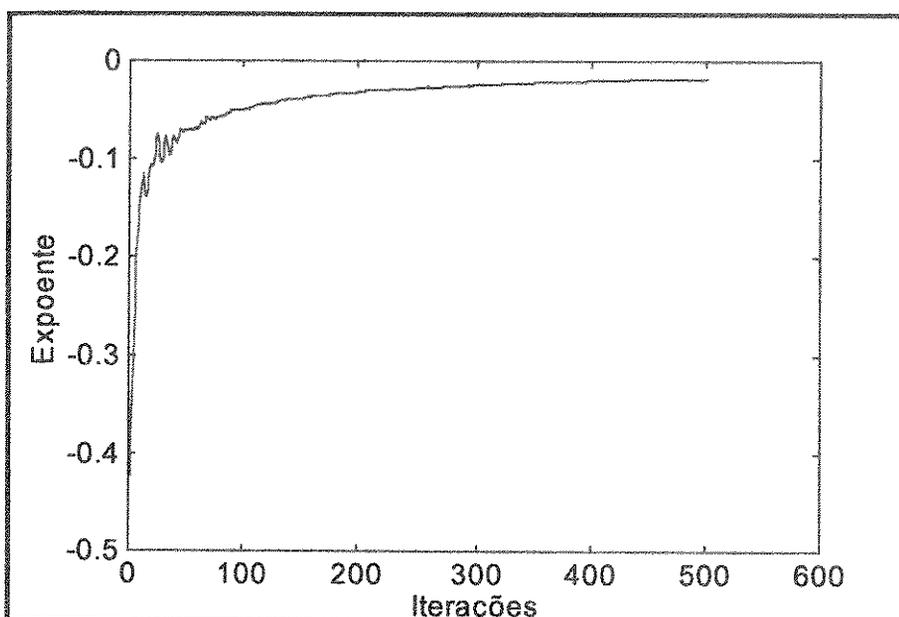


Figura 3.5 - Evolução do maior expoente de Lyapunov para a resposta da figura 3.3

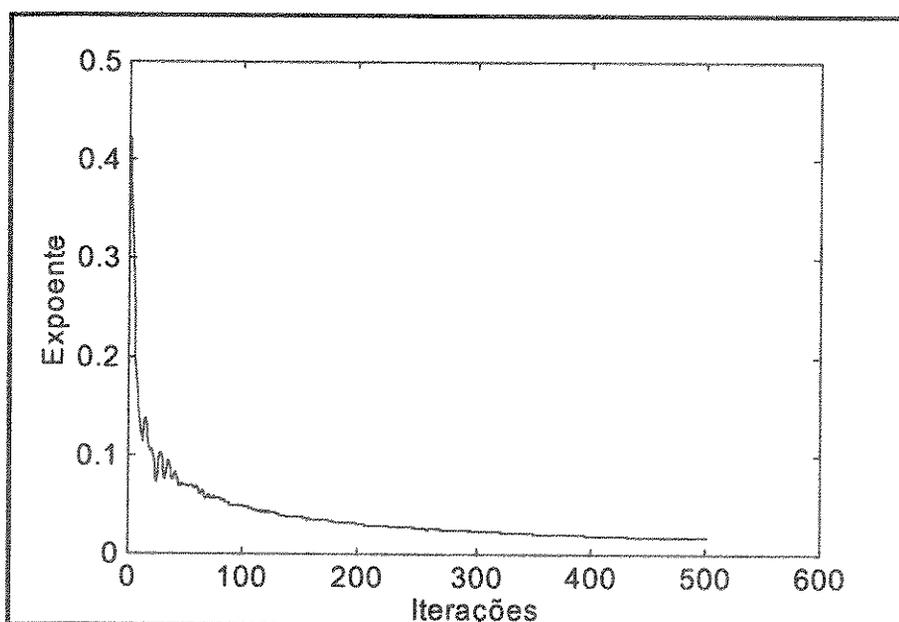


Figura 3.6 - Evolução do maior expoente de Lyapunov para a resposta da figura 3.4

As figuras 3.7, 3.8 e 3.9 apresentam a variação da frequência característica da resposta quando a folga é variada na primeira, na segunda e na terceira janela de resposta não caótica, respectivamente. Consideramos frequência característica da resposta, neste caso, o harmônico de maior contribuição na resposta. Se houver harmônicos múltiplos, deve-se tomar o harmônico de ordem 1. Voltaremos a este assunto logo à frente.

Notamos que, na ausência de caos, a variação da frequência é uma função bem comportada da variação da folga. Na presença de caos não é fácil, se não impossível, definir uma frequência característica, embora uma resposta caótica possa ter uma faixa de frequência que se sobressaia com relação às demais.

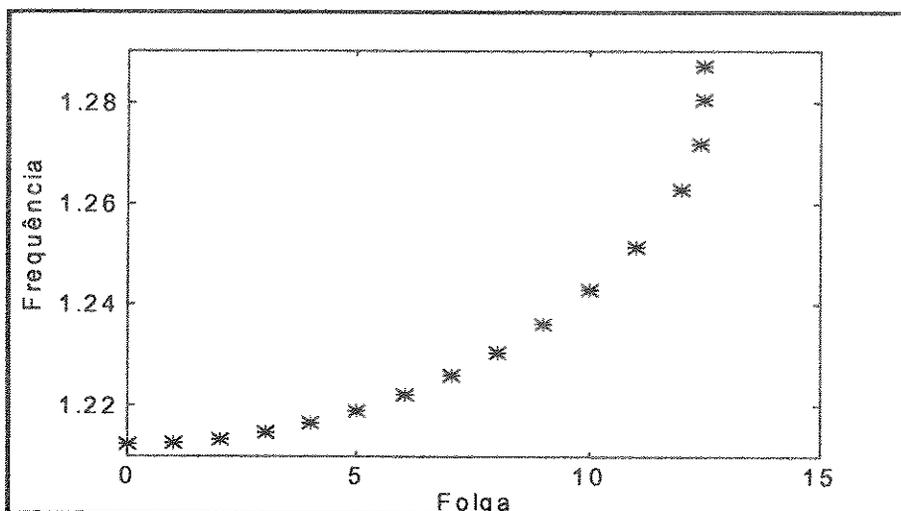


Figura 3.7 - Variação da frequência característica como função da folga na primeira janela de resposta não caótica

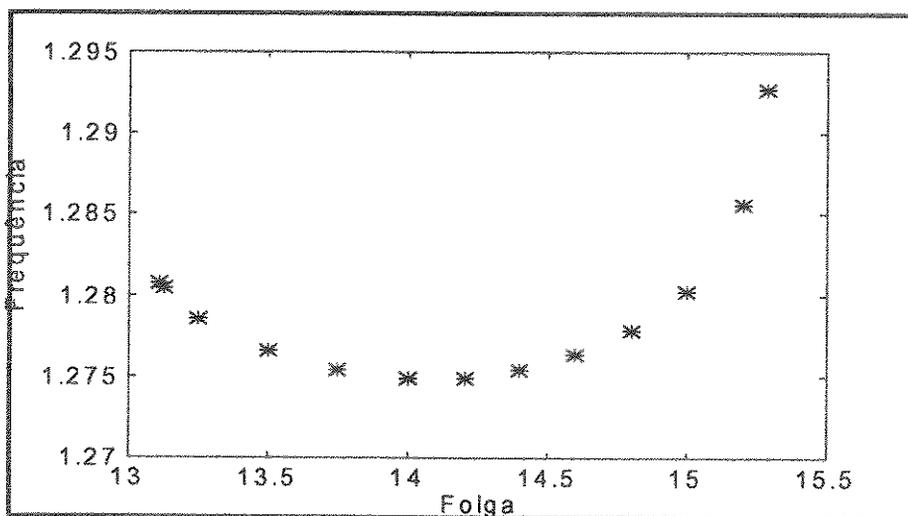


Figura 3.8 - Variação da frequência característica como função da folga na segunda janela de resposta não caótica

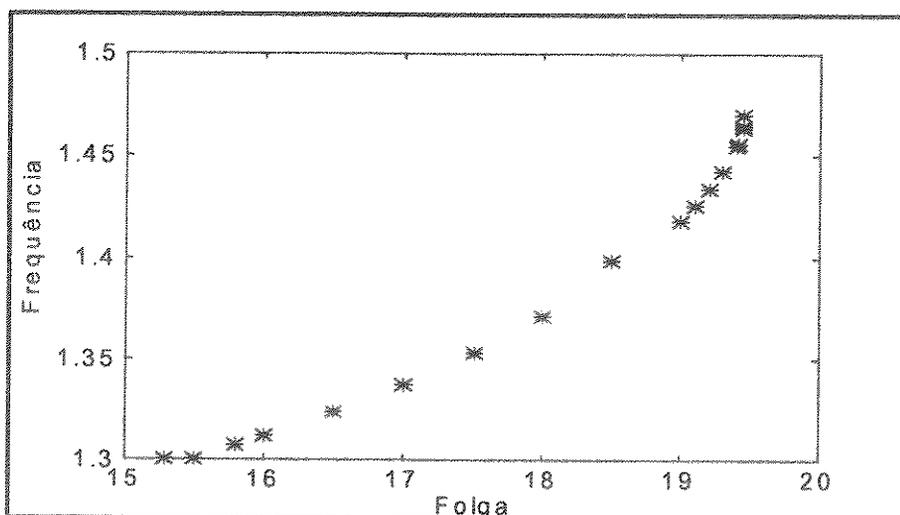


Figura 3.9 - Variação da frequência característica como função da folga na terceira janela de resposta não caótica

Para tornar a explicação sobre os a contribuição dos harmônicos mais clara, reparemos o espectro da figura 3.10, que é de uma resposta de um sistema com impacto. Reparamos espectros múltiplos (a escala de frequência está normalizada), de forma que excluimos a possibilidade de mais de uma frequência característica. Note que, para cada inteiro ímpar há um pico no espectro e uma família de frequências associadas. O harmônico de ordem 1 tem uma contribuição muito maior que os demais. Este fato é camuflado por causa da aplicação da função logaritmo ao eixo das ordenadas. A aplicação do logaritmo ocorre justamente para que os harmônicos de ordem superior se tornem visíveis. Se houvesse um outro pico sem relação de multiplicidade com as demais frequências, teríamos outra frequência característica. É claro que, de fato, a resposta pode ter várias frequências que a caracterizam, as quais estão, de algum modo, relacionadas com os parâmetros do sistema e com a excitação. A figura 3.11 apresenta um caso mais complexo, porque é o espectro de um estado caótico. Embora caótico, é claro que a resposta evidencia uma frequência característica. Note que o fato de o sistema ter uma frequência característica não garante uma resposta livre periódica.

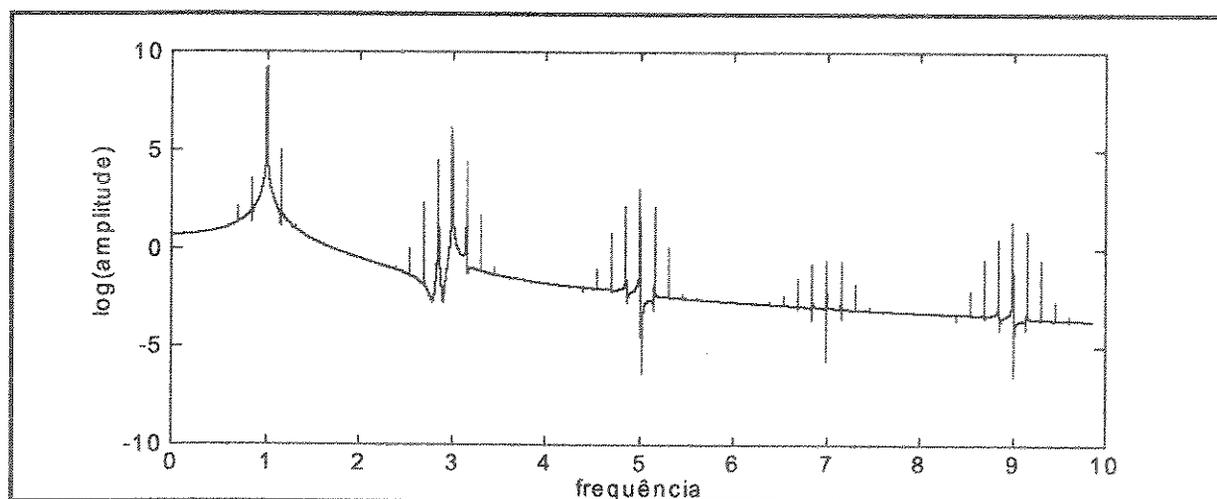


Figura 3.10 - Espectro exemplo de resposta periódica

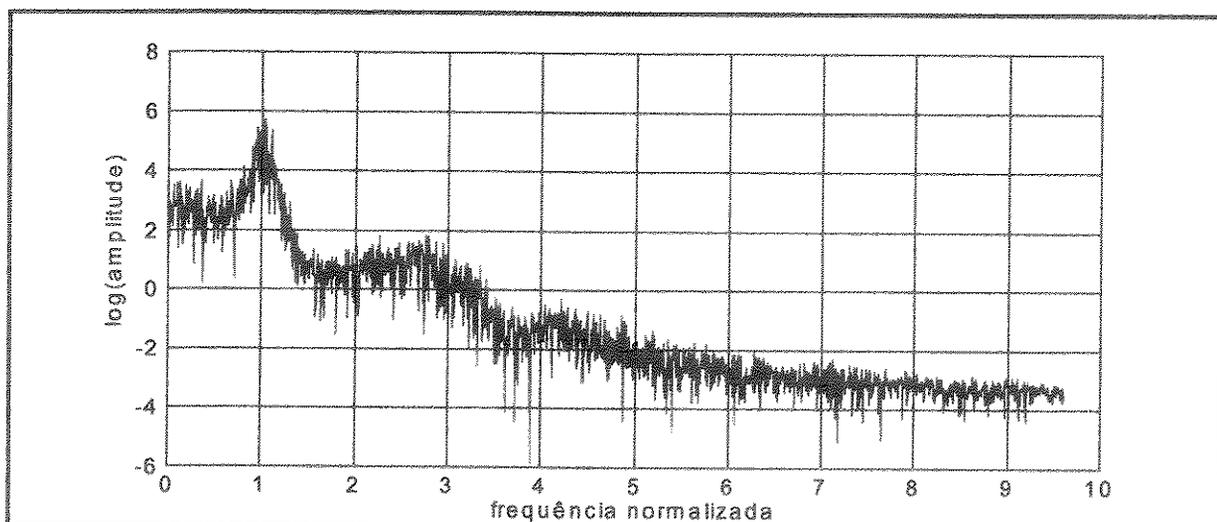


Figura 3.11 - Espectro exemplo de resposta não periódica

O próximo passo é encontrar, se possível, uma relação algébrica entre a variação da folga e a variação da frequência. Denotemos por $f(\sigma)$ a função procurada. Após exaustiva procura por tal relação e, analisando muitos resultados obtidos da simulação de vários sistemas, simulados a partir de várias condições iniciais, conjecturamos:

"A derivada da função $f(\sigma)$ com relação a folga σ tende a zero quando a folga é nula"

"O módulo da derivada da função $f(\sigma)$ com relação a folga σ tende ao infinito quando o sistema está na iminência de um estado caótico"

"O módulo da derivada da função $f(\sigma)$ com relação a folga σ tende ao infinito quando o sistema está na iminência de perder a condição de impacto (próximo da folga máxima), se o estado não for caótico nesta região"

A comprovação de que todas as conjecturas não são contraditadas pelo exemplo é fácil. No entanto, o problema de encontrar uma função não está resolvido. Apenas foram conjecturadas algumas condições para ela. Vamos então passo a passo. Propomos encontrar uma função que represente a variação da frequência característica da resposta quando a folga é variada até que entremos na primeira janela de caos. Seja σ_c o valor da folga que determina o início da primeira janela de caos. Devemos propor uma função que tenha derivada nula para folga nula, isto é:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f'(\sigma) = 0$$

A gama de funções que preenchem este requisito é grande. Por outro lado, a derivada da função deve tender ao infinito para um valor finito da folga, σ_c , isto é:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_c} f'(\sigma) = \infty$$

Procuramos uma função com derivada infinita para um valor finito da folga. No entanto, a própria função deve ter valor finito para a referida folga. O valor da função neste ponto denominamos genericamente por f_c . O ramo (um quarto) de uma elipse cujos eixos são paralelos aos eixos cartesianos é uma função que satisfaz as duas exigências dos extremos da função procurada. Podemos pensar ainda na utilização de escalas logarítmicas. A figura 3.12 apresenta os pontos da figura 3.7 sobrepostos à função proposta na equação 3.5, cujos parâmetros, para o presente caso, são dados na equação em 3.6. A figura 3.13 apresenta o erro entre a frequência calculada pela expressão proposta e a frequência real da resposta simulada. Nota-se que função se ajusta muito bem ao conjunto de pontos em questão. O erro máximo neste conjunto de pontos é de 0.505 %.

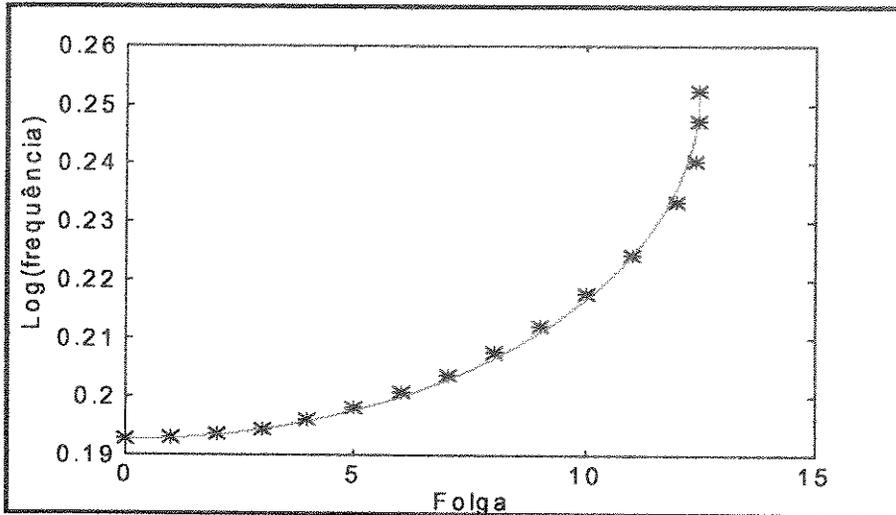


Figura 3.12 - Ajuste da função $f(\sigma)$ proposta ao conjunto de pontos obtidos por simulação.

$$\ln[f(\sigma)] = \ln(f_c) - \sqrt{[\ln(f_c) - \ln(f_0)]^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_c^2}\right)} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} f_c &= 1.287109375 \\ f_0 = \bar{f} &= 1.212645450982487 \\ \sigma_c &= 12.48142504882814 \end{aligned} \quad (3.6)$$

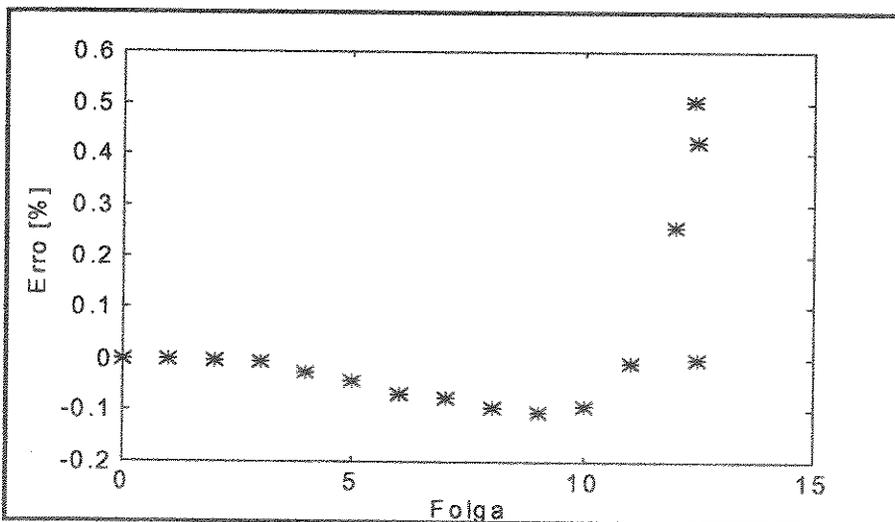


Figura 3.13 - Erro entre a frequência calculada pela expressão 3.5 e os pontos simulados

Temos de argumentar que estes resultados são um caso muito particular. É verdade, mas vamos passo a passo. A figura 3.14 apresenta mais três conjuntos de pontos, obtidos através da simulação da resposta do sistema para outras condições iniciais e com diferentes distribuições de energia entre os modos do sistema sem impacto. Os valores de σ_c e f_c para estes conjuntos de pontos são apresentados na tabela 3.2.

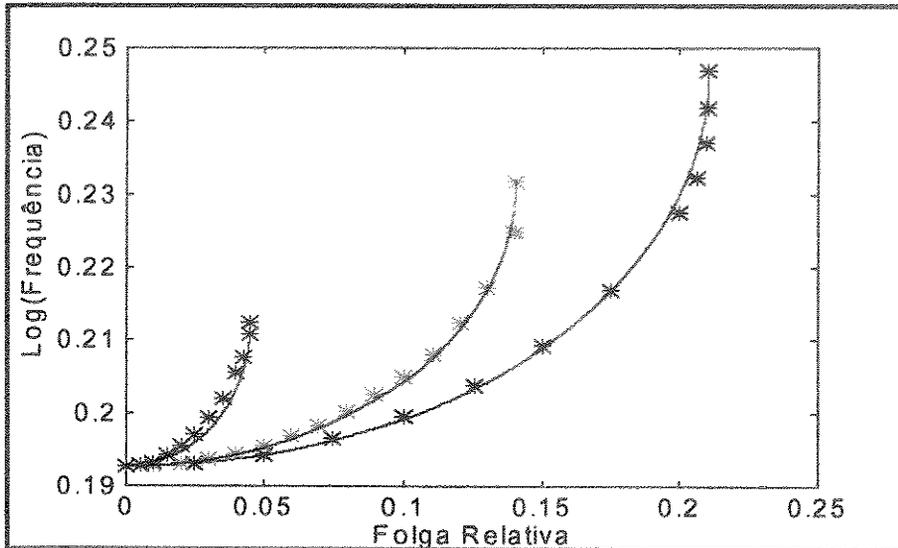


Figura 3.14 - Ajuste da função $f(\sigma)$ proposta para outros conjuntos de pontos simulados
 vermelho: 99% da energia no segundo modo do sistema sem impacto
 verde: idem 95% da energia; azul: idem 90 % da energia

Energia 2º modo	f_c	σ_c
99 %	1.280273437500000	0.2104463666677475
95 %	1.260927567221609	0.1403369140625000
90 %	1.236816406250000	0.0452162318969726

Tabela 3.2 - Parâmetros das funções para os diversos conjuntos de pontos

Nota-se que a figura 3.14 apresenta a legenda "folga relativa" para a abcissa. Definimos folga relativa como a razão entre a folga e o máximo valor da folga para a qual ainda ocorrem impactos, quando o sistema alcança o estado estacionário ou responde caoticamente por um longo período de tempo. Assim, a folga relativa depende das condições iniciais (para sistemas não amortecidos) e da excitação.

A tabela 3.3 apresenta os erros máximos para os três conjuntos de pontos da figura 3.16 e nela se pode notar que a função se ajusta muito bem aos resultados da simulação.

Energia 2º modo	Erro máximo (%)
99 %	0.451
95 %	0.645
90 %	0.227

Tabela 3.3 - Erro máximo entre a frequência obtida pela função e os pontos simulados

Embora seja possível ajustar ramos de elipses para as janelas sem resposta caótica em vários casos, apenas a primeira janela permite um ajuste sistemático da função proposta (em todos os casos testados). Por exemplo, é possível ajustar um ramo de elipse para o ramo

direito da curva da figura 3.8. A concordância é quase perfeita. É também possível ajustar ao ramo da esquerda. No entanto, é muito ruim a concordância da terceira janela não caótica (figura 3.9) com um ramo de elipse. Desta forma, a única coisa que podemos afirmar, e ainda dependemos de confirmações posteriores é que *"na primeira janela de resposta não caótica, a frequência característica da resposta varia de acordo com o ramo de elipse da equação 3.5"*.

No entanto, levando o raciocínio ao extremo, devemos esperar que, se nenhuma janela caótica for encontrada durante a varredura da folga, então a frequência característica da resposta do sistema migrará da frequência do sistema linear com folga nula para as frequências naturais do sistema linear com folga infinita[†], isto é, o sistema com uma folga tão grande que não permite a ocorrência de impactos. Deste modo, a resposta à pergunta apresentada na página 40 estaria completa. No entanto ainda são necessárias mais análises para uma conclusão segura. Na verdade, como veremos mais adiante, a função proposta para a migração continuará válida mesmo que a migração ocorra com um estado caótico. Os pontos que porventura se desviam bastante da função proposta são aqueles próximos à uma mudança *"radical"* na dinâmica sistema como, por exemplo, passar do movimento periódico para o caos e vice-versa.

Consideremos a figura 3.15, que mostra a variação da frequência característica da resposta contra a variação da folga em toda a faixa, até ao início da última janela de caos. Na mesma figura apresentamos, em linha contínua, a função proposta em 3.5, mas agora ajustada para toda a faixa, até ao início da última janela de caos. Não ajustamos a função para o valor da folga máxima por causa da janela de caos próxima à folga máxima para a ocorrência de impactos.

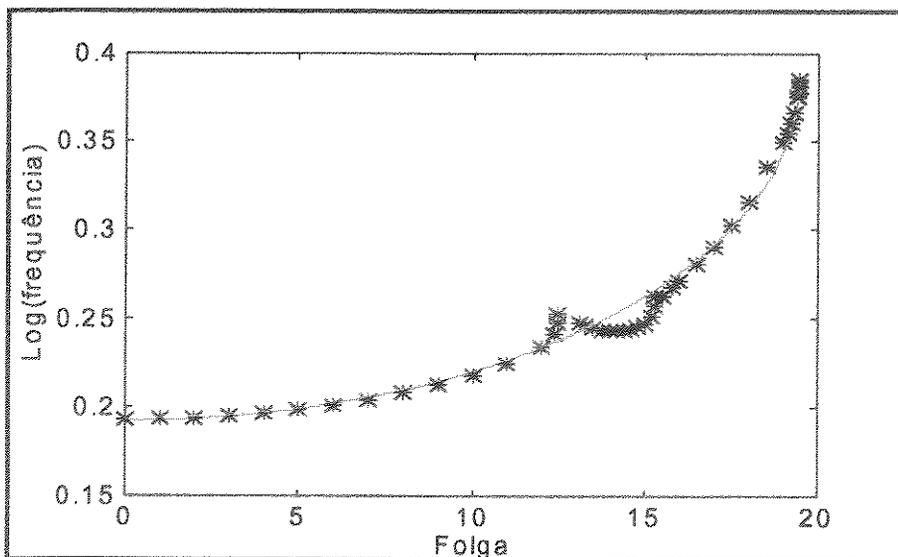


Figura 3.15 - Variação da frequência característica como função da folga
 pontos: simulação linha contínua: função proposta

[†] A partir de agora chamaremos o sistema cuja folga não permite a ocorrência de impactos de sistema com folga infinita, onde o termo infinito sugere um universo ilimitado para o movimento do sistema.

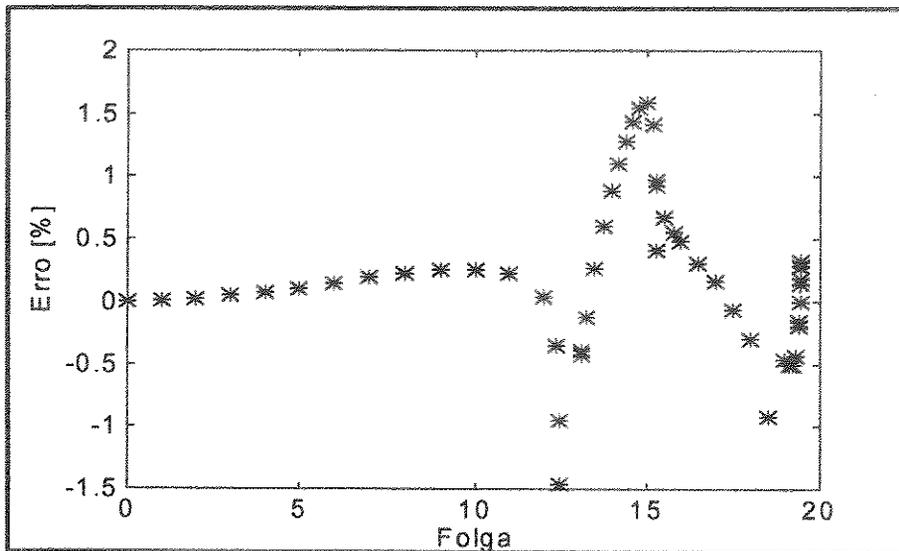


Figura 3.16 - Erro entre os resultados da função proposta e o da simulação

Nota-se que, excetuando as folgas próximas às janelas de caos intermediárias, a função continua se ajustando muito bem ao conjunto de pontos. O erro máximo entre a frequência calculada com o uso da função proposta e a frequência da resposta simulada é de 1.5 %. Se excluirmos os pontos próximos à janela de caos intermediária (pontos azuis nas figura 3.15 e 3.16), que, no caso, são os pontos próximos aos valores de folga para os quais ocorre uma mudança radical na dinâmica do sistema, este erro máximo é menor que 1 %. No caso do ajuste para a faixa em questão temos os seguintes parâmetros para a elipse:

$$\begin{aligned}
 f_0 &= 1.212645450982487 \\
 \sigma_e &= 19.44221 \\
 f_c &= 1.47023828125
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

3.2 - Sobre as Propriedades de um Novo Sistema Representativo de um Sistema Real

Na seção anterior analisamos um sistema particular sem a preocupação inicial de que aquele sistema representasse, segundo algum critério, um sistema real já conhecido. De todo modo, podemos garantir que o sistema analisado não viola qualquer lei física, embora possa ser de construção muito mais difícil que outros sistemas. Um sistema ainda particular, mas representativo de um sistema real conhecido previamente, pode ser obtido via técnicas de ajuste de modelos.

Nesta seção apresentamos o resultado do ajuste de um modelo do tipo da figura 3.1 a um sistema real, constituído de uma viga engastada com impactos na extremidade livre, conforme comentado mais adiante. Consideramos o impacto na extremidade de uma viga

como uma não linearidade localizada perturbando um sistema linear[†]. Desta forma, simplificamos muito o problema e ele ainda é suficientemente complexo para ser interessante. O modelo particular da figura 3.2, se representativo do sistema real que se quer modelar, é obtido naturalmente quando se considera o modelo mais completo da figura 3.1. O ajuste deve sempre ser aplicado ao caso mais geral, porque nem sempre é possível ajustar um caso muito particular a um sistema real [Mattos-1993] Slany[1992].

Pelo fato de usarmos um modelo ajustado, os valores usados para as massas e rigidezes são particulares e obedecem a um critério específico, a fim de que tenham alguma relação com o sistema contínuo que se quer representar. No presente caso, queremos um sistema discreto de dois graus de liberdade que tenha alguma relação com o sistema analisado no capítulo 5. Para facilitar a explanação, apresentamos aqui brevemente a descrição do sistema analisado no capítulo 5, o qual consiste de uma viga engastada numa extremidade e livre na outra, conforme mostra a figura 3.17. Na extremidade livre existem dois batentes contra os quais a extremidade da viga pode chocar-se. A folga existente entre os batentes e a viga pode ser controlada, bem como a magnitude e frequência da força de excitação F aplicada ao meio da viga. Desta forma, quando o movimento da viga é tal que a amplitude do movimento na extremidade desta não ultrapassa a folga, temos uma viga engastada-livre. Por outro lado se a folga tende a zero, temos uma viga, para um apoio idealizado, engastada-apoiada.

A mesma pergunta feita no caso do sistema discreto da seção anterior pode ser feita para o sistema contínuo, a saber:

"As frequências características da resposta da viga com impacto, quando a folga variar, serão uma combinação clara das frequências da viga engastada-livre e engastada-apoiada?"

Assim, desejamos que o sistema discreto da figura 3.1 tenha alguma relação com o sistema da figura 3.17. Esta relação é estabelecida pelos seguintes critérios:

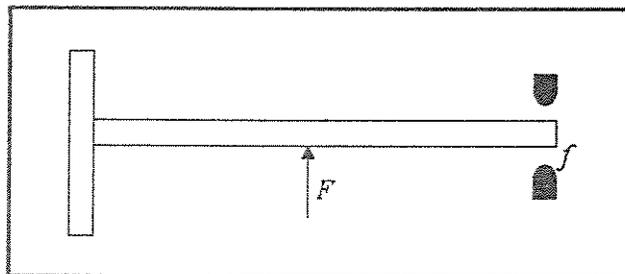


Figura 3.17 - Sistema contínuo com impacto

- As frequências naturais do sistema discreto devem ser *equivalentes* às duas primeiras frequências naturais da viga analisada no capítulo 5.

[†] É verdade que existem muitos fenômenos não lineares que podem se fazer presentes em uma viga. No entanto, esperamos que a contribuição destas outras não linearidades (geométricas e de material) não introduzam complexidades tais que descaracterizem os modelos lineares convencionais utilizados para a maioria das vigas.

- Os dois autovetores correspondentes a estas frequências devem ser *equivalentes* aos respectivos autovetores da viga, medidos em alguns pontos da mesma.
- As energias cinéticas (ou potenciais) modais do sistema discreto devem ser *equivalentes* às respectivas energias modais da viga.

O sentido do termo equivalente nos critérios anteriores deve ser o mais forte possível, isto é, deve se aproximar o quanto possível do termo igual. O problema de usar o termo igual é que as restrições podem ser muito fortes, porque propomos um sistema inercialmente desacoplado como representativo de um sistema contínuo. A obtenção de um sistema discreto inercialmente desacoplado equivalente, no máximo possível, a um sistema contínuo pode conduzir a um problema de difícil solução. Propostas de solução e dificuldades encontradas neste problemas são expostas por Santos [Santos-1988], Slany [Slany-1992] e Mattos [Mattos-1993]. Aqui não vamos nos ater ao problema em si. Apresentaremos o sistema discreto e comentaremos as semelhanças que ele tem com a viga engastada apresentada no capítulo 5. Detalhes dos cálculos são apresentados no apêndice B.

Consideremos uma viga prismática com comprimento de 510 mm, seção transversal de 25 x 5 mm, módulo de Young igual a 210 GPa e massa específica igual a 7.86 g/cm³, com movimento na direção de menor dimensão. Desta forma, considerando o modelo de Euler para a viga, as duas primeiras frequências naturais da viga engastada-livre são[†]

$$f_{c1} = 16.051 \text{ Hz} \quad f_{c2} = 100.591 \text{ Hz} \quad (3.8)$$

As energias cinéticas modais normalizadas para amplitude modal unitária na extremidade da viga são (unidades do SI):

$$E_{c1} = 6.370728 \text{ E} + 002 \quad E_{c2} = 2.502036 \text{ E} + 004 \quad (3.9)$$

Sobre os autovetores tomados discretamente em alguns pontos da viga discutiremos um pouco mais à frente. Considerando que o ponto de impacto está a 20 milímetros da extremidade livre da viga, a primeira frequência natural da viga engastada-apoiada que se obtém quando a folga tende a zero é[†]

$$\bar{f}_c = 76.250 \text{ Hz} \quad (3.10)$$

A energia cinética modal do primeiro modo normalizada para amplitude modal unitária a 61.82 %^{††} do comprimento da mesma é (SI):

$$\bar{E}_c = 2.471987\text{E} + 004 \quad (3.11)$$

[†] O subscrito *c* indica que os valores se referem ao sistema contínuo. Os subscritos *1* e *2* referem-se aos modos. Para o sistema discreto, cujos valores dos respectivos parâmetros serão apresentados mais adiante, não será utilizado nenhum símbolo (subscrito) para indicar o sistema discreto. Apenas omitiremos o subscrito *c*.

[†] Neste caso estamos desprezando o efeito dos dez milímetros após o ponto de impacto.

^{††} A razão deste valor ficará mais clara com as explicações apresentadas na página seguinte..

Os valores "arbitrados" para as massas e rigidezes do sistema discreto, quando se considera o modelo físico da figura 3.1, são os seguintes (unidades do sistema internacional):

$$\begin{aligned} m_1 &= +0.377290 \\ m_2 &= +0.108976 \\ k_1 &= +2.754937 \text{ E} + 04 \\ k_2 &= +2.596977 \text{ E} + 04 \\ k_3 &= -1.199458 \text{ E} + 04 \end{aligned} \quad (3.12)$$

A metodologia para se chegar a estes valores é, como referido anteriormente, apresentada no apêndice B. Com estes valores as frequências naturais do sistema discreto sem restrições^{†††} são (compare com 3.8)

$$f_1 = 16.051 \text{ Hz} \quad f_2 = 100.591 \text{ Hz} \quad (3.13)$$

Quando a folga se reduz a zero, a frequência natural do sistema de um grau de liberdade resultante é (compare com 3.10)

$$\bar{f} = 76.250 \text{ Hz} \quad (3.14)$$

Os autovetores do sistema sem restrições são

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} +0.166933 \\ +1.000000 \end{bmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} -1.730270 \\ +1.000000 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Os autovetores acima são os autovetores da viga da figura 3.17 tomados discretamente em alguns pontos. Particularmente, eles representam discretamente os respectivos modos quando observados na extremidade da viga (segunda coordenada do autovetor) e num ponto localizado a 61.82 %[†] do comprimento da mesma. Para isto estamos considerado a viga engastada-livre. Observados nestes dois pontos, a relação entre o deslocamento no ponto intermediário da viga e o deslocamento na extremidade da mesma é a mesma que os autovetores em 3.12, para os dois primeiros modos da viga.

As energias cinéticas modais normalizadas pelos autovetores expressos em 3.15 são^{††} (compare com 3.9)

^{†††} Denominamos sistema sem restrições o sistema cujo movimento de nenhuma das massas é limitado por nenhuma outra parte, interna ou externa ao sistema. Em suma, é o sistema linear de dois graus de liberdade sem impactos.

[†] Este valor, preciso para qualquer avaliação prática, não é exato. Um valor mais exato seria 68.82208878923 %.

^{††} $\omega = 2\pi f$.

$$E_1 = \frac{\omega_1^2 \Phi_1^T M \Phi_1}{2} = 6.370728 \text{ E} + 002$$

$$E_2 = \frac{\omega_2^2 \Phi_2^T M \Phi_2}{2} = 2.502036 \text{ E} + 004$$
(3.16)

A energia cinética do sistema de um grau de liberdade que se obtém quando a folga é reduzida a zero, normalizada para amplitude de movimento unitária quando vibrando em sua frequência natural é (compare com 3.11)

$$\bar{E} = \frac{m_1 \bar{\omega}^2}{2} = 2.6759535 \text{ E} + 004$$
(3.17)

Nota-se um desvio positivo de 8.25 % da energia do sistema discreto de um grau de liberdade com relação à energia cinética modal do primeiro modo de vibração da viga engastada-apoiada, quando se aplica a mesma normalização em amplitude para ambos os sistemas, considerando o ponto a 61.82 % do comprimento da viga. Isto indica que é necessário menos energia para excitar, à mesma amplitude, o primeiro modo da viga engastada-apoiada do que o sistema discreto de um grau de liberdade obtido quando a folga tende a zero.

Como a energia presente no sistema de um grau de liberdade está sempre concentrada em um único modo (ele é unimodal), o problema da desigualdade de energia se restringe à diferença de amplitude de vibração entre os dois sistemas, quando o sistema contínuo vibra num único modo. Em termos de frequência, todavia, nada se altera. De todo modo, o desvio em questão não é grande, pois ocorre na energia.

Ajustado o modelo, passemos à análise de sua dinâmica. Num primeiro passo, analisamos a resposta livre do sistema. O problema de analisar a resposta livre é que, como já comentado na seção 3.1, devemos considerar um sistema não amortecido. Embora isto esteja longe de representar uma situação prática, lembramos que estamos implementando uma análise ainda não encontrada na literatura, de forma que, apesar de considerarmos um sistema extremamente ideal, os resultados obtidos com a utilização deste modelo podem revelar fenômenos interessantes que servirão de guia para estudos posteriores. Além disto, buscam-se resultados qualitativos que, espera-se, não revelem grande dependência do amortecimento, ao menos para sistemas poucos amortecidos.

3.3 - Análise da Resposta Livre do Sistema Ajustado na Seção Anterior

3.3.1 - Migração da Primeira Frequência Característica

Nesta subseção analisamos a migração de uma frequência característica do sistema. A denominação de primeira é, por enquanto, arbitrária, porque a esta altura nem ainda mostramos se o sistema tem outra frequência que seja característica do processo de vibroimpacto. Sobre isto comentamos na subseção seguinte.

As propriedades do sistema linear sem impactos já foram definidas na seção anterior e o único fenômeno que altera o comportamento do sistema é a ocorrência de impactos. Vários fatores podem influenciar a resposta com impactos, a saber:

- as propriedades intrínsecas do impacto, isto é, rigidez e amortecimento do mesmo,
- a velocidade de impacto,
- a folga do sistema.

As condições da superfície podem ser consideradas, para impactos unidirecionais, como parte das propriedades intrínsecas do contato. Isto não é necessariamente verdade para impactos multidirecionais, os quais podem ser topologicamente diferentes dependendo das condições da superfície. Desta forma, para estes impactos as condições da superfície devem ser considerados como uma dependência extra.

A velocidade de impacto pode influenciar, por exemplo, a restituição. Considerando o coeficiente de restituição, equivalente ou não, como amortecimento, lançamos mão do argumento apresentado pouco antes para não incluí-lo por ora em nossa análise.

O mais importante para nós, por enquanto, é a alteração da dinâmica do sistema por causa da folga que este possa ter. Não se conhece nenhum estudo com o enfoque que estamos dando nesta tese. Uma análise interessante, mas com outro enfoque é apresentado no trabalho de Budd et al [Budd-1996].

O sistema linear sem restrições, correspondente à equação (3.1) com os parâmetros devidamente estabelecidos, representado por variáveis de estado é escrito como:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

onde

$$\begin{aligned}
 a &= -2.117116263063305e+005 \\
 b &= 3.364368455119730e+004 \\
 c &= 1.164791833391386e+005 \\
 d &= -2.961548858879527e+004
 \end{aligned}$$

e o vetor da resposta é dado por

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_2].$$

A resposta temporal é dada por

$$x(t) = \Phi(t)x_0, \quad \Phi(t) = \exp(At) \quad (3.19)$$

e x_0 determina as condições iniciais do movimento. O pseudo-código computacional a seguir apresenta a lógica da determinação da resposta temporal do sistema. Neste esquema, σ é folga, simétrica, do sistema.

***** Pseudo-código computacional para a resposta temporal do sistema livre *****

```

x0 = [? ? ? ?];
t0 = 0;
tmax = ?;
dt = ?;
while ( t ≤ tmax),
    t1 = t0;
    t2 = solve{ |exp[A(t - t0)]*x0| = σ };
    while ( t ≤ t2 ),
        x = exp[A(t - t0)]*x0;
        t = t + dt;
    end;
    x0 = exp[A(t2 - t0)]*x0;
    x0(4) = -x0(4);
end;

```

Temos de tratar agora das condições iniciais do movimento. Uma vez que elas afetam diretamente a resposta do sistema linear sem impactos, o mesmo acontece no sistema com impacto. Sendo assim, deve-se ter cuidado com as condições iniciais. Fixamos as condições iniciais de tal modo que a energia inicial seja distribuída, segundo algum critério, entre os diversos modos de vibrar do sistema linear. Mantida a distribuição de energia, nota-se

linearidade entre o valor da energia total do sistema e a amplitude do movimento, mesmo no sistema com impacto. Interessante notar que existe também proporcionalidade entre a magnitude da energia inicial e o valor da folga relativa em que determinados fenômenos ocorrem. Como já exposto na seção anterior (página 48), define-se folga relativa como a razão entre a folga real e o valor da folga para o qual deixam de ocorrer impactos no sistema, fixadas as condições iniciais e a excitação. A última proporcionalidade a que nos referimos pode ser explicada num exemplo, como segue:

Suponhamos que, fixada a distribuição de energia e um valor inicial de energia total, a frequência principal da resposta tenha sido mudada de f para \bar{f} quando a folga foi alterada de zero para σ_0 . Então se a energia inicial for multiplicada por α , sem mudança de sua distribuição, a frequência \bar{f} passa para $\alpha\sigma_0$.

Passemos aos resultados das simulações. Ao contrário da seção anterior, começaremos observando a variação da frequência característica da resposta quando a folga é variada, o que encontramos na figura 3.18. Note que agora estamos em outro ramo da elipse. Para este ramo, a função proposta é (compare com 3.5)

$$\ln[f(\sigma)] = \ln(f_c) + \sqrt{[\ln(f_c) - \ln(f_0)]^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_c^2}\right)} \quad (3.20)$$

Os parâmetros que determinam a elipse ajustada para este caso são

$$\begin{aligned} f_c &= 16.05122887694532 \\ f_0 = \bar{f} &= 76.24994999027598 \\ \sigma_c = \sigma_{\max} &= 1.0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

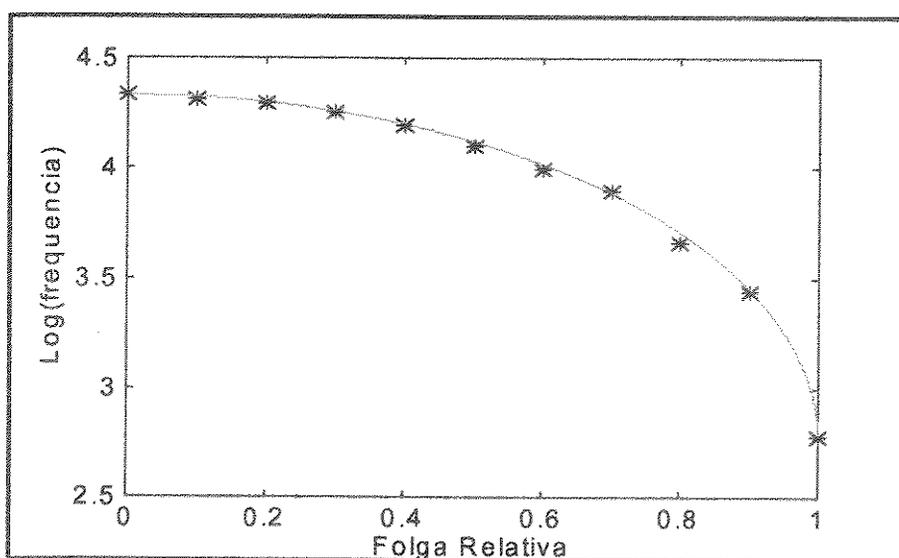


Figura 3.18 - Variação da frequência característica como função da folga
pontos: simulação; linha contínua: função proposta

Note que estamos ignorando qualquer janela de caos. A energia inicial do sistema, neste caso, foi distribuída na proporção 10%-90% entre o primeiro e o segundo modo de vibrar do sistema linear sem impacto, respectivamente. De fato, para a distribuição de energia usada, não encontramos nenhuma janela de movimento não caótico para este sistema. Se existir, deve ser muito pequena. O erro máximo é menor que 5 %, como se pode ver na figura 3.19.

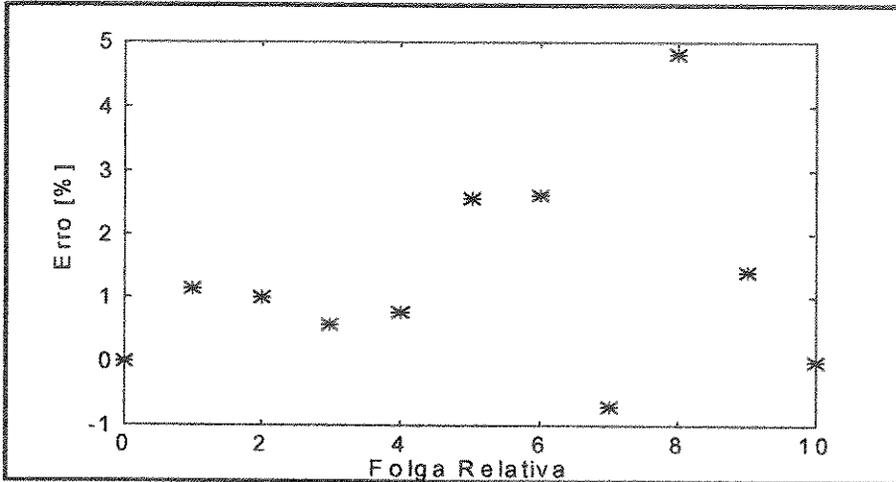


Figura 3.19 - Erro entre os resultados da função proposta e da simulação para a figura 3.18

Passamos a examinar agora o que acontece se toda a energia for concentrada no segundo modo. Neste caso, a migração da primeira frequência característica ocorre conforme a figura 3.20. Neste caso, embora a escala da figura atinja o valor unitário, ressaltamos que uma pequena janela caótica existe para folga relativa entre os valores 0.99652 e 1.0. Assim, a elipse que se ajusta ao caso é dada pela expressão 3.5, cujos parâmetros são:

$$\begin{aligned} f_0 &= 76.24994999027598 \\ \sigma_c &= 0.99652 \\ f_c &= 89.6875 \end{aligned} \quad (3.22)$$

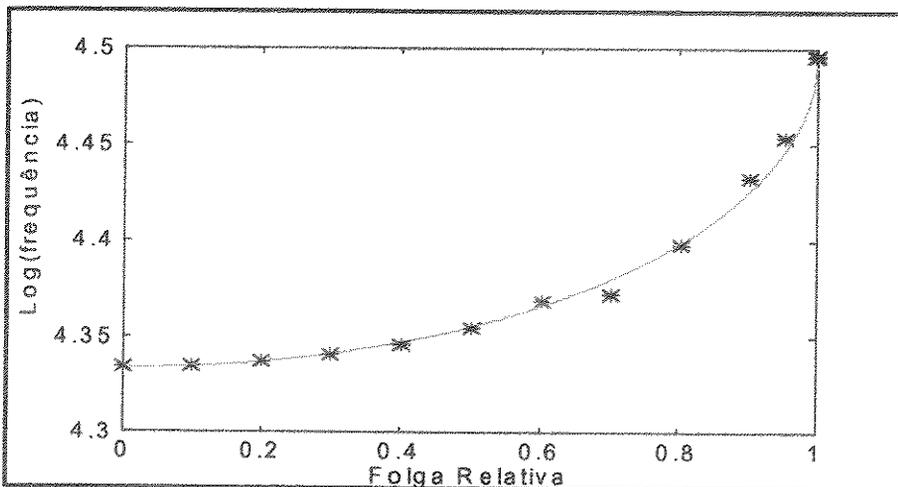


Figura 3.20 - Variação da frequência característica como função da folga
pontos: simulação; linha contínua: função proposta

A figura 3.21 apresenta o erro entre os pontos a função proposta para a variação da frequência com folga, onde podemos notar um erro máximo menor que 1 %.

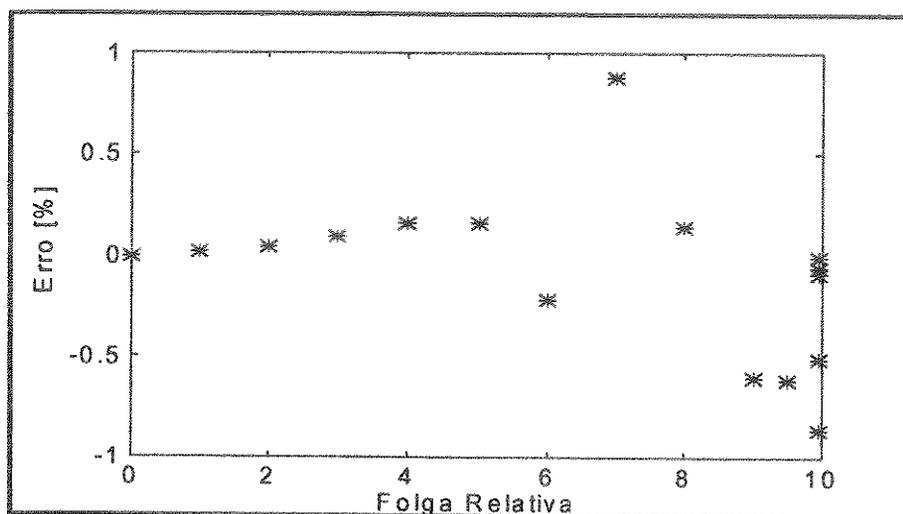


Figura 3.21 - Erro entre os resultados da função proposta e da simulação para a figura 3.18

3.3.2 - Sobre a Existência de outra Frequência Característica Migratória

Na subseção anterior apresentamos as características da migração de uma frequência característica do sistema quando a folga é variada. Fizemos isto para duas distribuições distintas de energia e vimos que, dependendo da distribuição de energia entre os diversos modos de vibrar do sistema linear associado ao sistema com impacto, a frequência característica pode migrar em uma ou outra direção. Todavia a frequência característica sempre guarda uma relação com as frequências naturais dos sistemas lineares associados.

Nesta subseção propomos comentar sobre a seguinte questão:

"Existe outra frequência característica que apresente estas mesmas características de migração, ou ainda uma característica diferente?"

A resposta completa a esta pergunta ainda não temos. Quando toda a energia é concentrada no segundo modo de vibração do sistema de 2 graus de liberdade associado, é claro que não, como veremos na seção seguinte. Quando parte da energia é direcionada ao primeiro modo, aparecem frequências outras que não a frequência característica apresentada na seção anterior. No entanto, não temos conseguido encontrar uma relação destas frequências com o sistema linear, nem uma migração bem comportada com a variação da folga. Para tornar as coisas mais claras, apresentamos nas figuras 3.22, 3.23 e 3.24 os espectros das respostas para as folgas de 2 mm, 4 mm e 6 mm. Pode-se completar a análise olhando também as figuras 3.41 e 3.42 na seção seguinte (para 1 e 8 mm). O eixo das frequências está normalizada pela frequência característica (ordem 1). As frequências múltiplas das frequências características são nítidas em alguns casos e nada nítidas em outros.

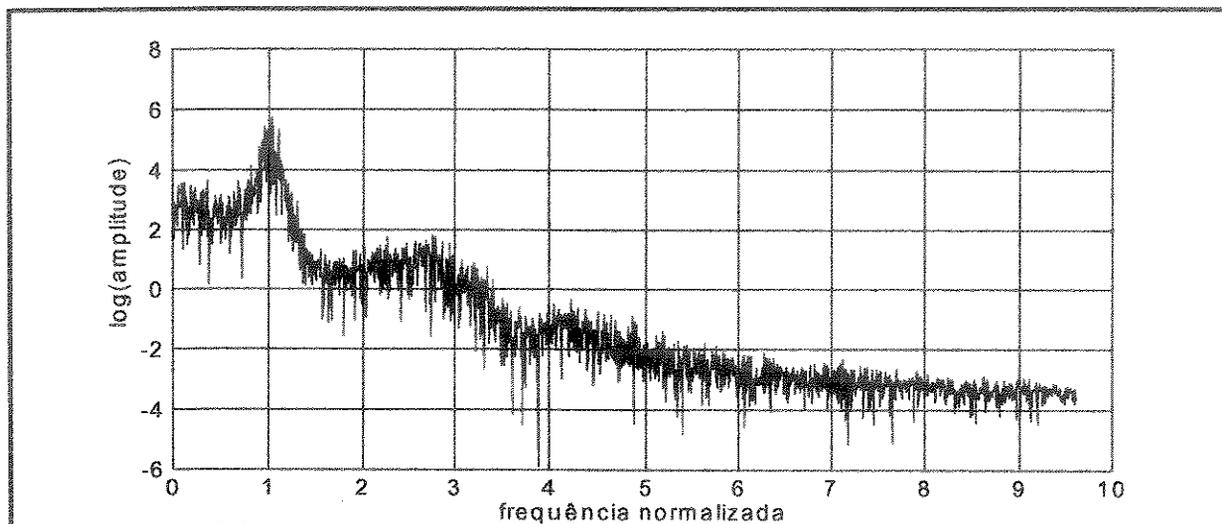


Figura 3.22 - Espectro da resposta quando $\sigma = 2.0$ mm

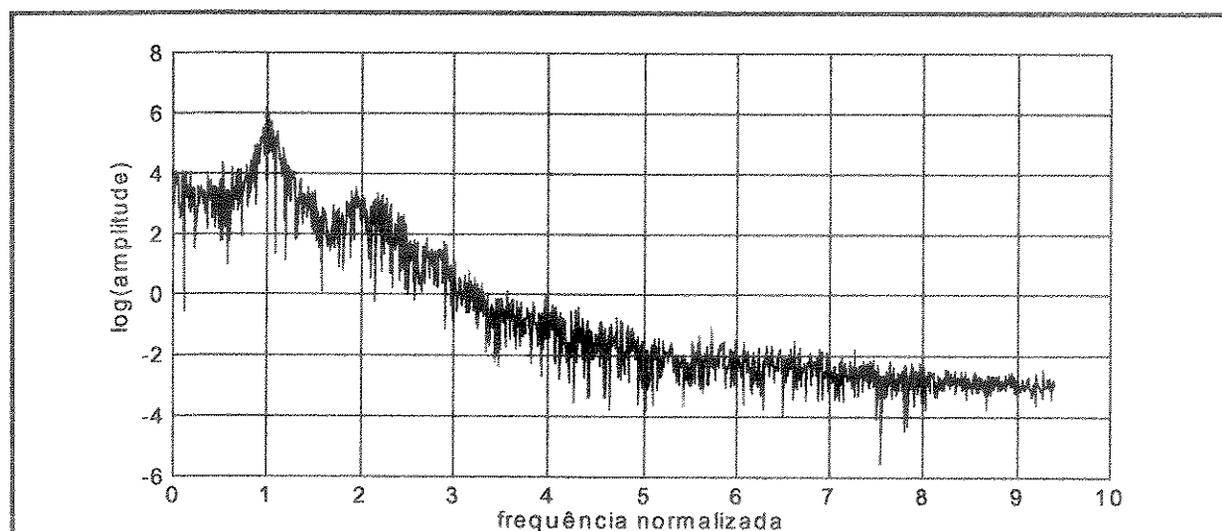


Figura 3.23 - Espectro da resposta quando $\sigma = 4.0$ mm

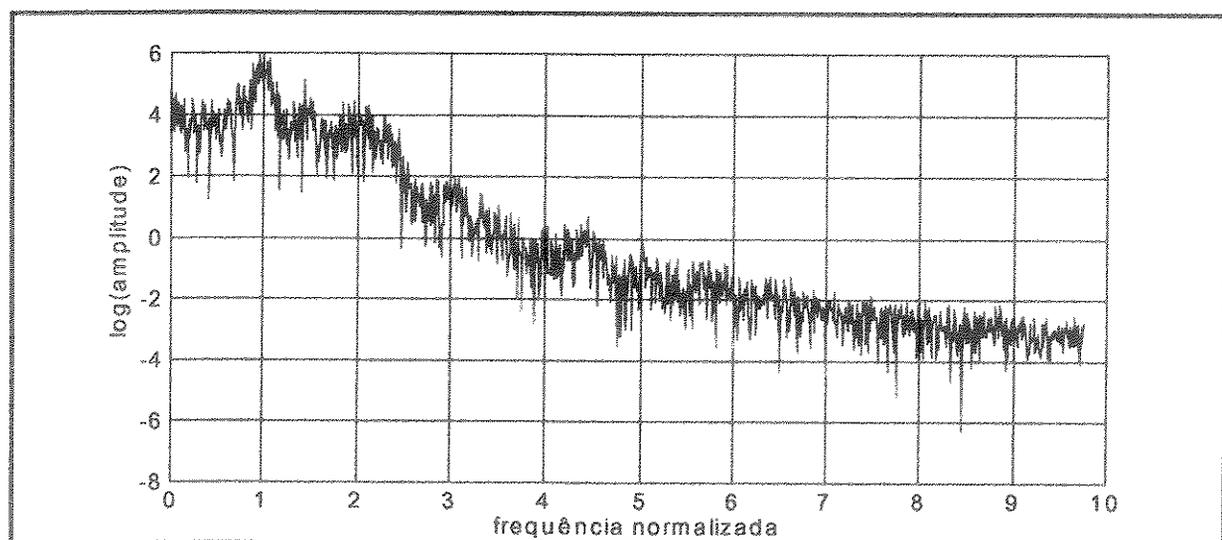


Figura 3.24 - Espectro da resposta quando $\sigma = 6.0$ mm

Observam-se também algumas frequências que não apresentam nenhuma relação aparente com as frequências inteiras. Também não observamos, até agora, nenhuma relação explícita com as frequências naturais dos sistemas associados. Isto vale para o sistema de dois graus de liberdade.

3.4 - Análise por Mapas de Poincaré

Às vezes as alterações que ocorrem na dinâmica de um determinado sistema mecânico não necessariamente precisam ser quantificadas. Em muitos casos é importante saber algo sobre a existência ou não de pontos fixos em determinadas regiões do espaço onde os parâmetros podem variar. Outras vezes procura-se conhecer algo sobre a estabilidade destes pontos fixos. Pode-se desejar ainda inferir algo sobre os mecanismos de bifurcação. Para estes casos em não é necessário quantificar a resposta temporal do sistema podem-se aplicar métodos geométricos [Strogatz-1996], isto é, métodos pelos quais se investigam as alterações qualitativas da dinâmica dos sistemas. Os mapas de Poincaré e os diagramas de bifurcação são ferramentas importantes para análise geométrica da dinâmica de sistemas.

Nesta seção apresentamos vários mapas de Poincaré e diagramas de bifurcação relativos ao sistema da seção 3.3, com os quais complementamos nossa discussão sobre a variação da dinâmica dos sistemas vibratórios com impacto quando a folga destes sistemas é variada. Para tanto recordamos que o sistema em questão é de ordem 4, conforme mostra a equação 3.18. Para uma apresentação mais clara, dividimos a apresentação em duas subseções, cada uma relativa a uma distribuição de energia entre os modos de vibração do sistema linear de dois graus de liberdade associado ao sistema com impacto em questão.

3.4.1 - Toda Energia Concentrada no Segundo Modo de Vibração do Sistema Linear

Nesta seção analisamos o sistema quando a energia inicial fornecida a ele é totalmente concentrada no segundo modo de vibração do sistema linear de dois graus de liberdade associado ao sistema com impacto. Antes de discutirmos os mapas de Poincaré, apresentamos a projeção da trajetória da massa não impactante sobre o plano formado pelos eixos $x_1 - \dot{x}_1$, isto é, seu plano fase. As figuras 3.25 e 3.26 apresentam os referidos planos fase de um estado não caótico e caótico, respectivamente. Lembramos que, para a distribuição de energia em questão, encontramos apenas uma janela caótica na varredura macroscópica, a qual ocorre quando a folga se aproxima da folga máxima para a qual ainda ocorrem impactos (folga relativa próxima da unidade). Na verdade, como veremos adiante, existe uma outra janela caótica menor intermediária. Como na seção 3.1 (figuras e 3.4), os planos fase se referem ao movimento da massa não impactante. Chamamos mais uma vez atenção para a mudança da amplitude do movimento da massa não impactante quando o movimento passa de não caótico

para caótico. Neste caso, a referida amplitude aumenta 143.32 %, saltando de 6.56 mm para 15.97 mm.

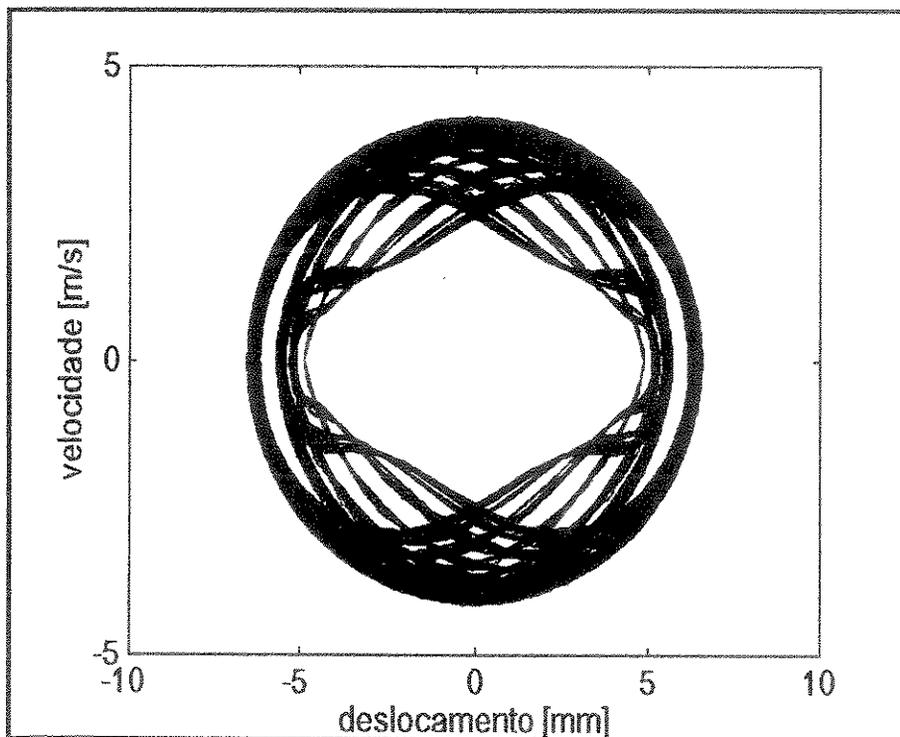


Figura 3.25 - Plano fase $\sigma = 9.96$ mm
 $\dot{x}_1 = 4.142389628176512$, $\dot{x}_2 = -6.320339937718101$

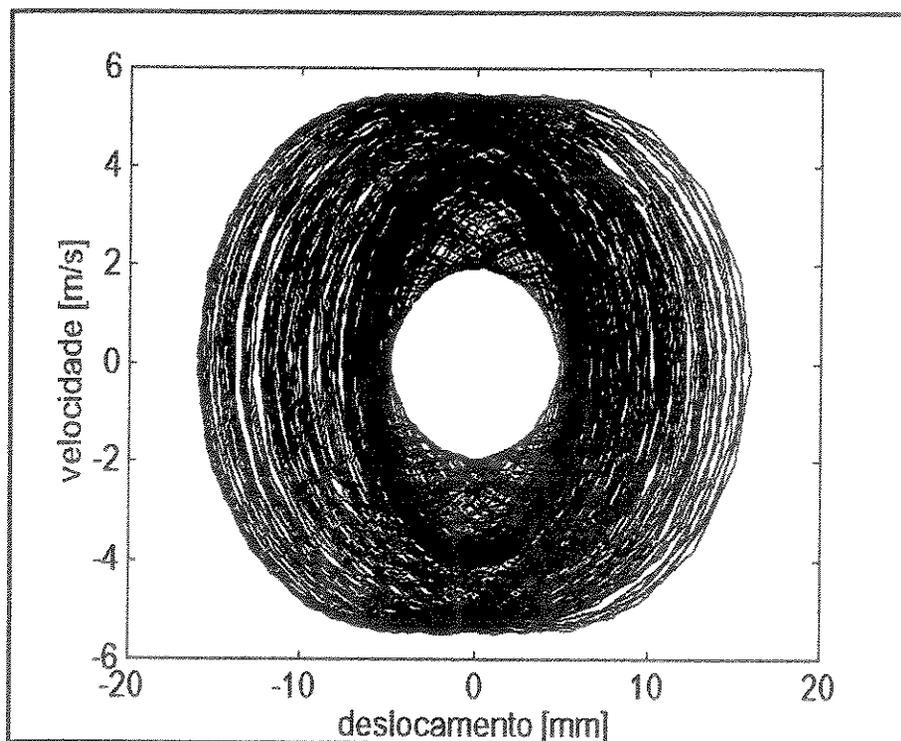


Figura 3.26 - Plano fase para $\sigma = 9.97$ mm
 $\dot{x}_1 = 4.142389628176512$, $\dot{x}_2 = -6.320339937718101$

As figuras 3.27 e 3.28 apresentam os mapas de Poincaré das respostas cujos planos fase são apresentados nas figuras 3.24 e 3.26, respectivamente. Para as escalas destas figuras consideramos $\dot{x}_i = v_i$. Para os mapas de Poincaré em questão, consideramos os pontos da trajetória do sistema sobre a seção de Poincaré definida por:

$$\Sigma = \{ (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \mid x_2 = +\sigma \} \in \mathbf{R} \quad (3.23)$$

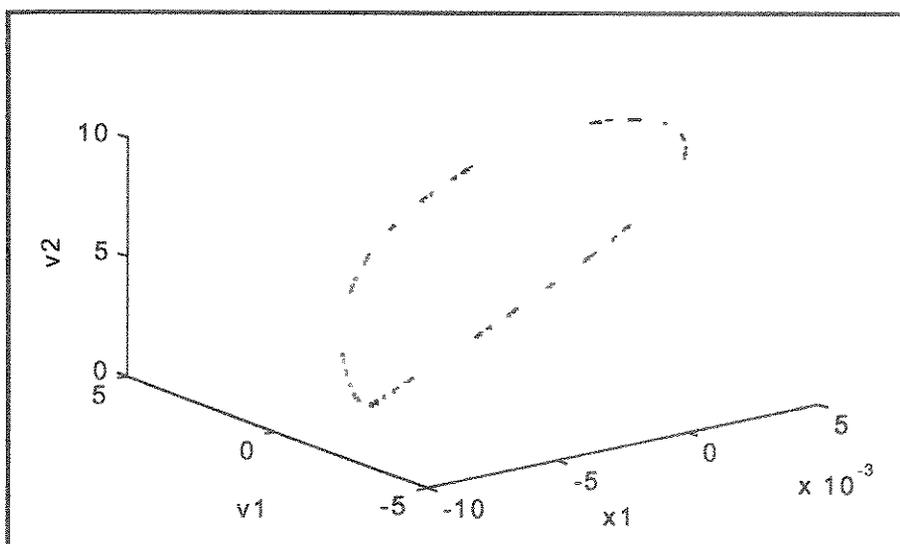


Figura 3.27 - Mapa de Poincaré da resposta apresentada na figura 3.25

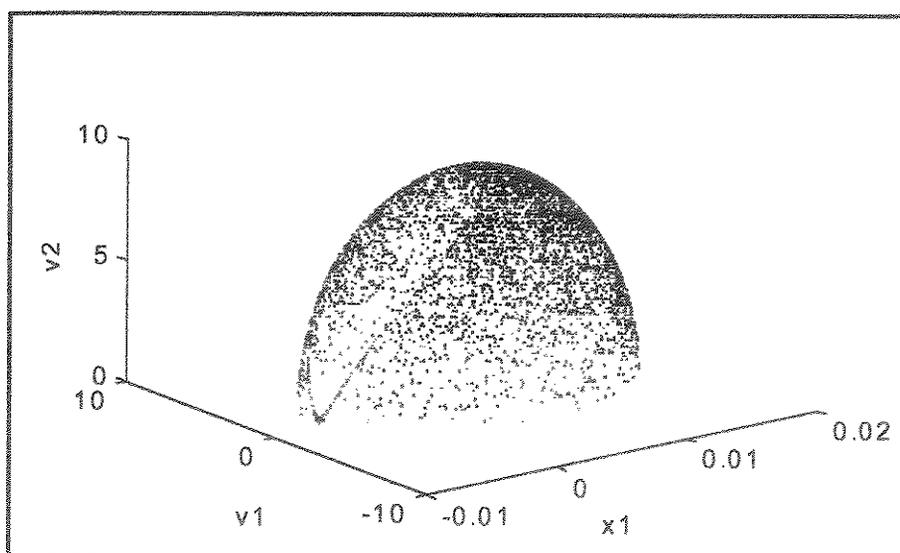


Figura 3.28 - Mapa de Poincaré da resposta apresentada na figura 3.26

É fácil notar como o espaço estado é preenchido de forma não regular sobre a seção de Poincaré definida na equação 3.23. Numa outra forma de visualizar esta irregularidade consideramos o lapso de tempo entre dois pontos consecutivos sobre a seção de Poincaré, o que vemos nas figuras 3.29 e 3.30. Neste caso, tomamos apenas uma parte do espaço estado

estendido (incluindo o tempo), a saber, a velocidade da massa impactante sobre a seção de Poincaré e o lapso de tempo entre dois pontos consecutivos sobre a referida seção. Mais uma vez se pode notar a diferença no preenchimento do espaço em que a trajetória se desenvolve. Na figura 3.29 observa-se que, para o movimento em questão, embora o lapso de tempo entre impactos seja variável, o domínio de sua variação é bastante limitado, ao contrário do que mostra a figura 3.30, que mostra uma variação muito grande dos tempos entre impactos, o que indica a presença de movimento caótico.

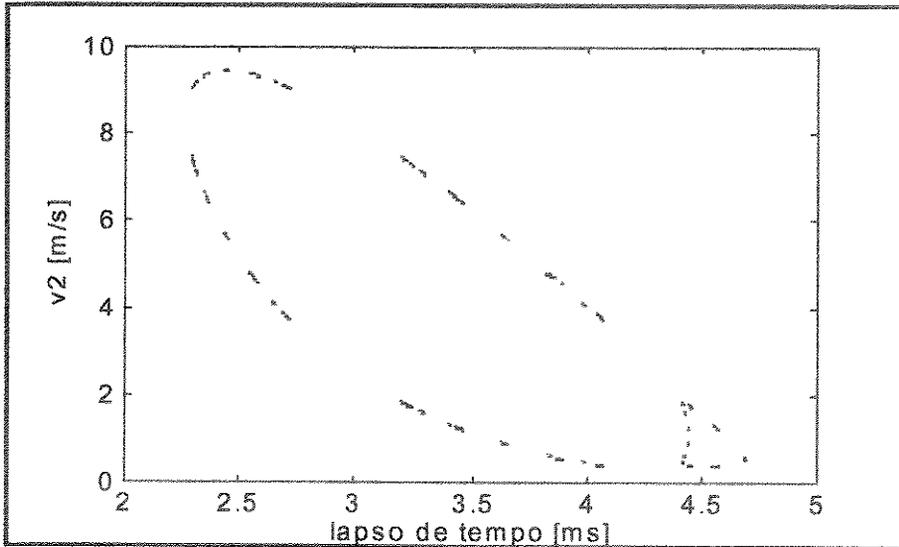


Figura 3.29 - Mapa de Poincaré da resposta apresentada na figura 3.25

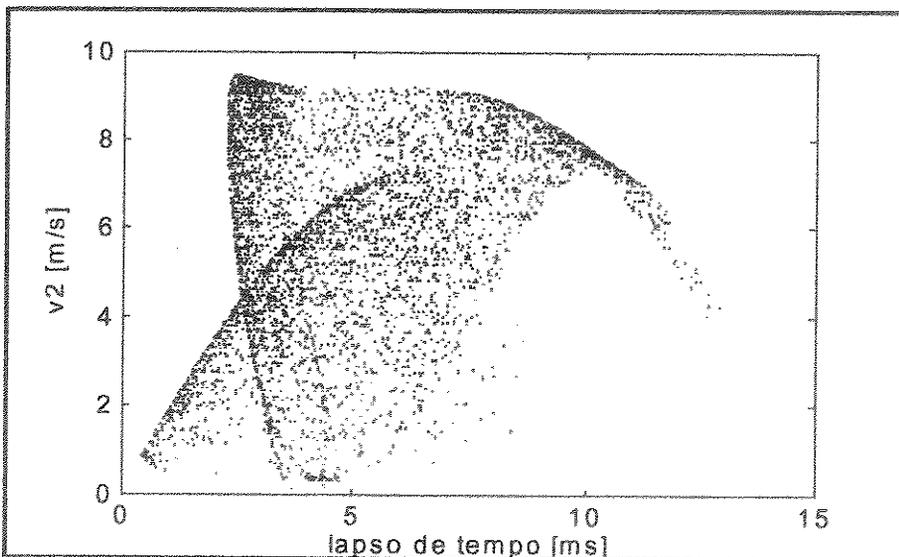
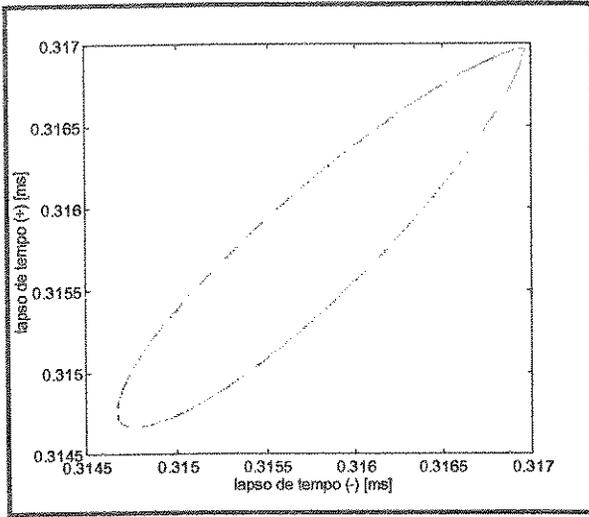
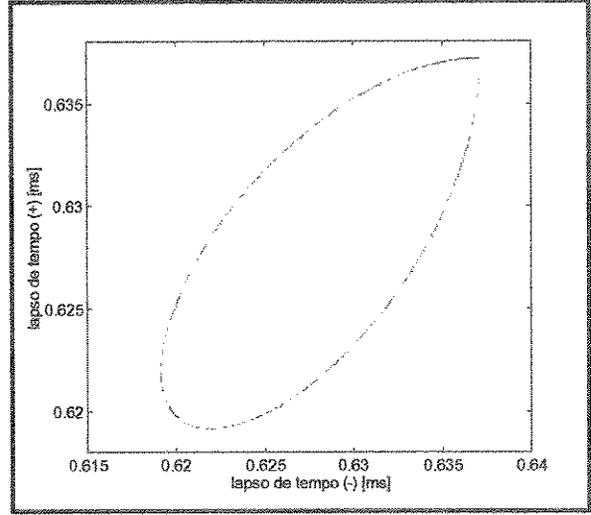
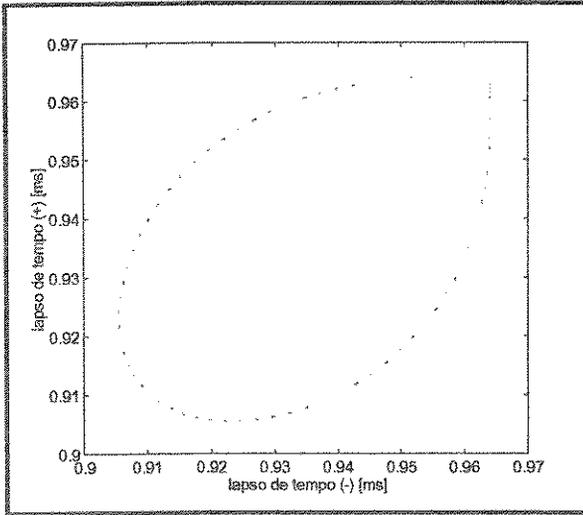
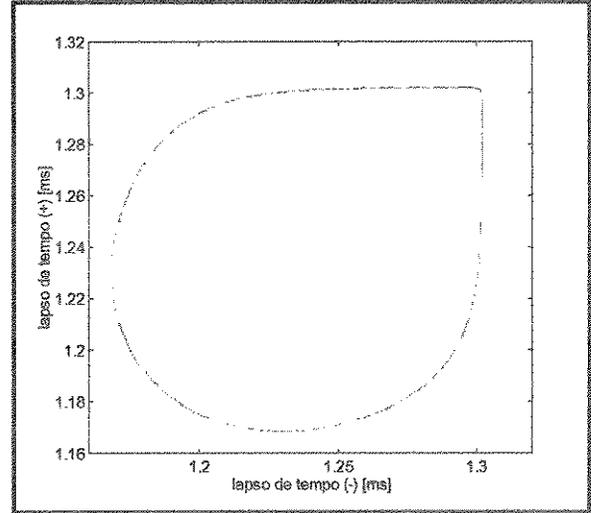
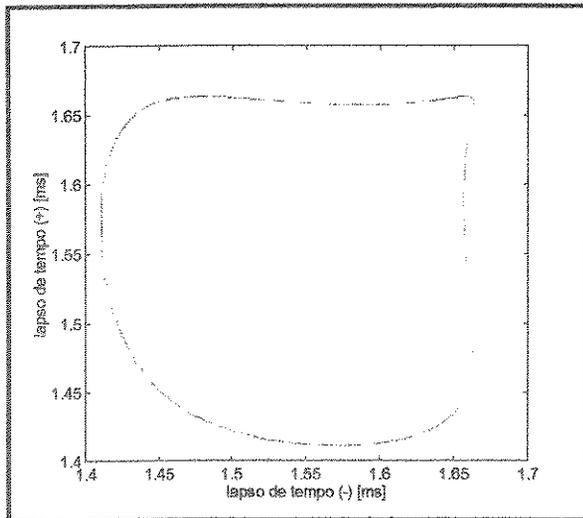
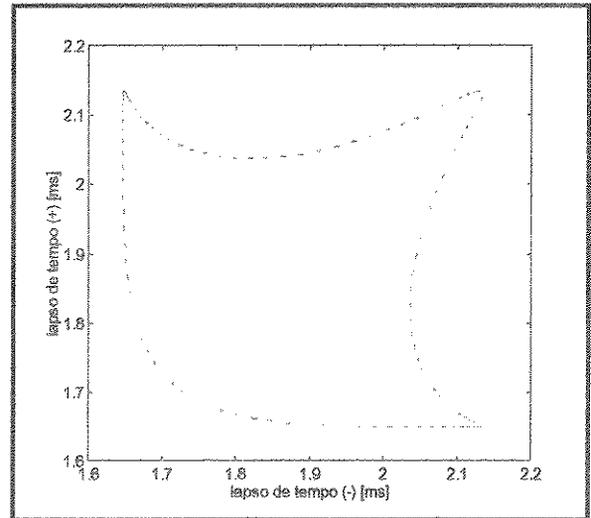


Figura 3.30 - Mapa de Poincaré da resposta apresentada na figura 3.26

Apresentamos agora uma série de mapas de Poincaré que mostram variações na dinâmica do sistema quando a folga é variada. Observe as figuras 3.31 a-j.

3.31 - (a): $\sigma = 1.0$ mm3.31 - (b): $\sigma = 2.0$ mm3.31 - (c): $\sigma = 3.0$ mm3.31 - (d): $\sigma = 4.0$ mm3.31 - (e): $\sigma = 5.0$ mm3.31 - (f): $\sigma = 6.0$ mm

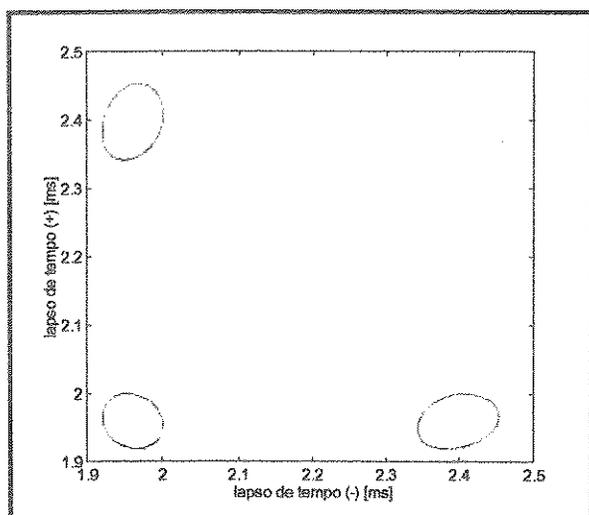
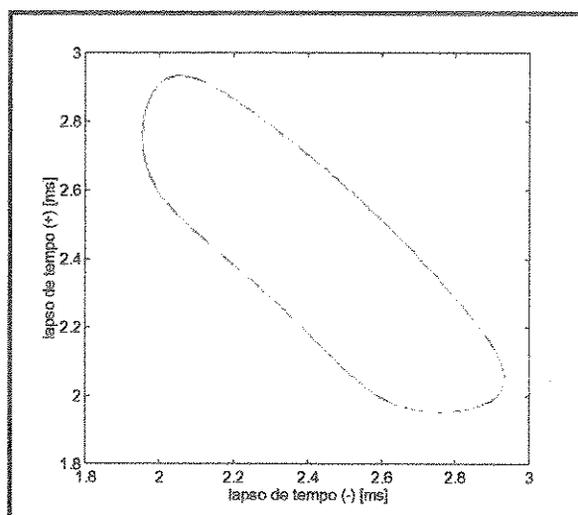
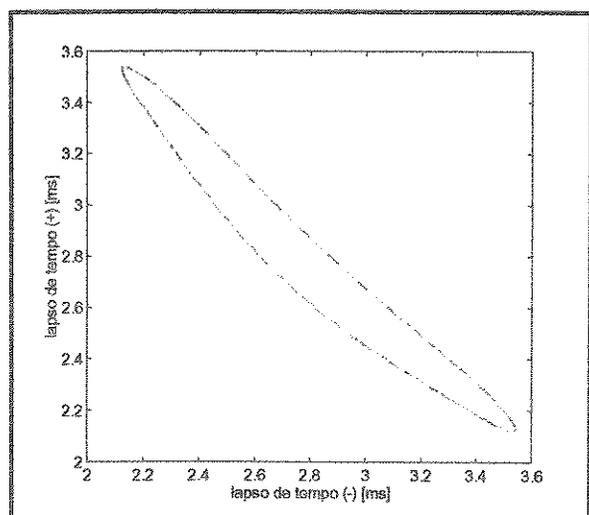
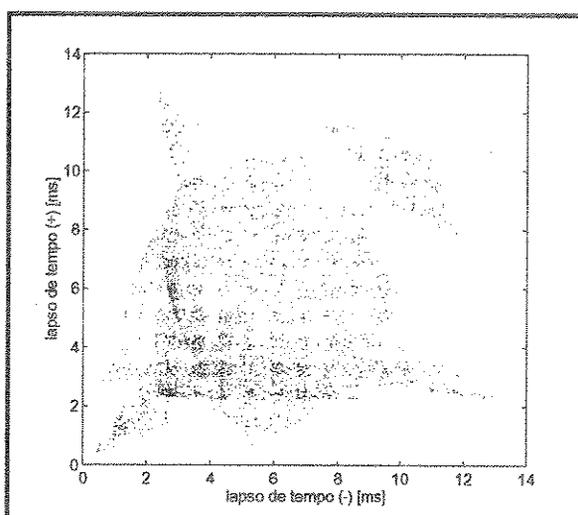
3.31 - (g): $\sigma = 7.0$ mm3.31 - (h): $\sigma = 8.0$ mm3.31 - (i): $\sigma = 9.0$ mm3.31 - (j): $\sigma = 9.997$ mm (caos)

Figura 3.31 - Mapas mostrando a variação do tempo entre pontos sucessivos sobre Σ

Pode-se notar claramente uma mudança interessante na resposta, ao menos qualitativamente, para folgas entre 6 e 7 mm. Para a folga de 7 mm, três tipos distintos de respostas periódicas ou quase-periódicas parecem coexistir estavelmente. A três ilhas na figura 3.31-g podem ainda indicar respostas que se intercalam ao longo do tempo. Todavia, esta análise pode ser feita mais tarde. Por ora vamos analisar mais refinadamente a variação nos mapas de Poincaré para folgas entre 6.0 e 7.0 mm. A figura 3.32 apresenta a transição para o caos, que ocorre em torno de 6.07 mm (folga relativa igual a 0.607). A última das figuras (3.32-d) mostra o mapa já no fim da janela caótica, em torno de 6.26 mm (folga relativa igual 0.626). Nota-se a grande variação do lapso de tempo entre pontos sucessivos sobre Σ no estado caótico. Uma análise pormenorizada do movimento pode mostrar se isto se deve à existência de movimentos com impactos em baixa velocidade, o que é provável. Quando impactos de baixa velocidade ocorrem em sistemas com vibroimpacto, ocorrem bifurcações devidas ao *grazing* (*grazing bifurcations*) [Nordmark-1991].

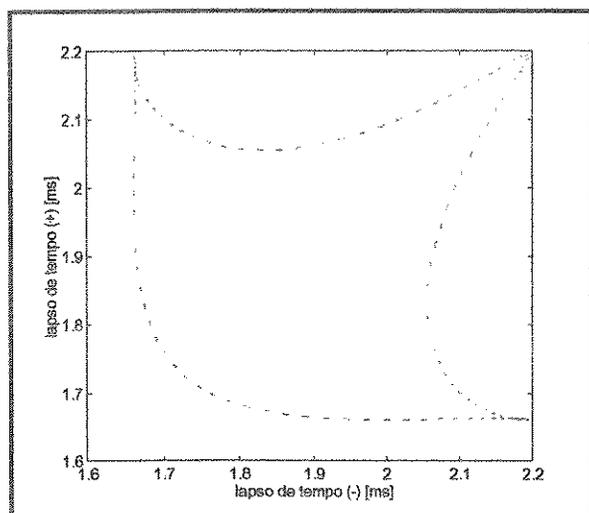
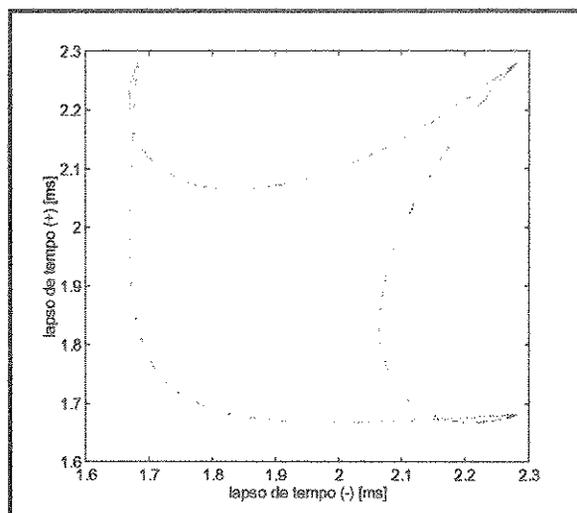
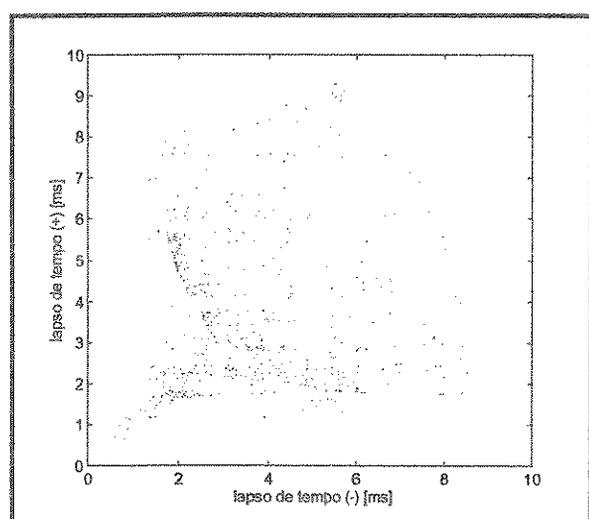
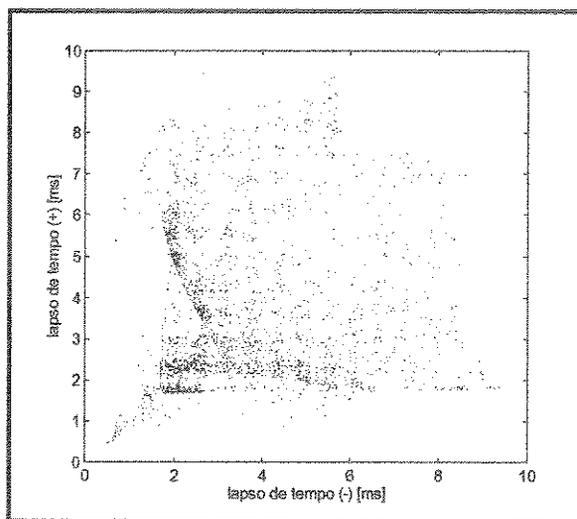
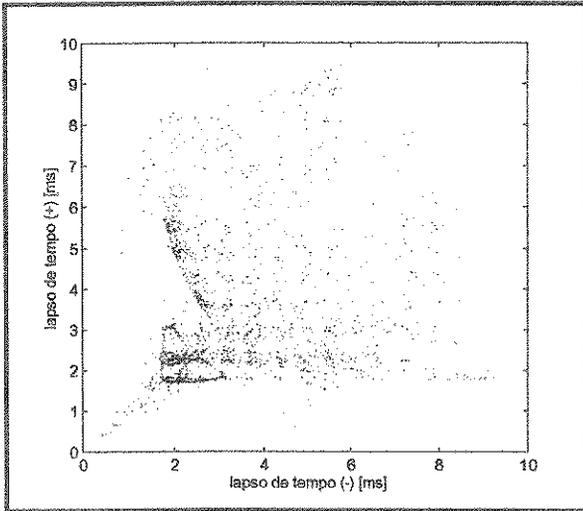
3.32 - (a): $\sigma = 6.05$ mm3.32 - (b): $\sigma = 6.074167$ mm3.32 - (c): $\sigma = 6.074168$ mm3.32 - (d): $\sigma = 6.26$ mm

Figura 3.32 - Transição para o caos para folga relativa a partir de 0.605

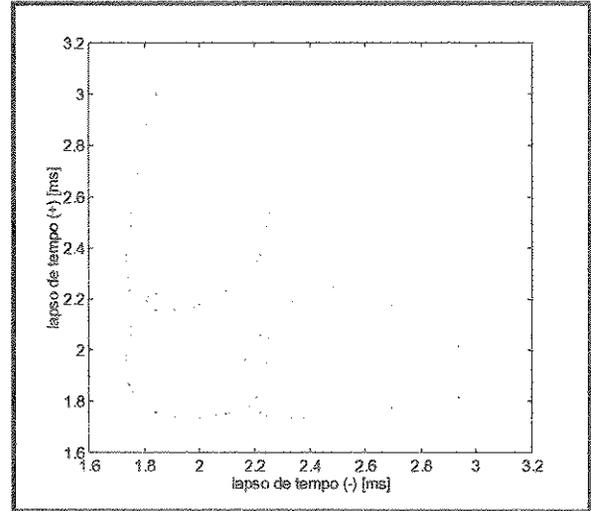
Denomina-se grazing o impacto em condições tais que a massa impactante tem, ao término do processo de impacto, aceleração de sinal contrário à sua velocidade. Desta forma, já ao final do impacto, a aceleração da massa impactante é tal que favorece a ocorrência de outro impacto, em pequeno lapso de tempo, na mesma superfície do impacto anterior. Nordmark estudou uma bifurcação associada a este fenômeno (grazing bifurcation) em um sistema de um grau de liberdade e concluiu que este tipo de bifurcação é responsável pelo aparecimento de movimentos não periódicos e caóticos em sistema com vibroimpacto.

Todavia, por tratarmos de um sistema de quarta ordem, a análise destas bifurcações através do equacionamento do mapeamento implícito entre pontos sobre a superfície de Poincaré é extremamente complexa e, embora possa ter alguns aspectos explorados, está fora do objetivo deste trabalho. A figura 3.33 apresenta a transição do caos para o movimento

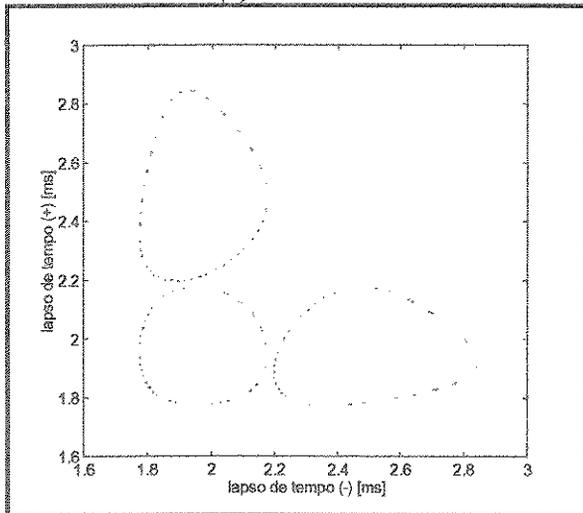
regular para folgas em torno de 6.27 mm. Atenção especial merece o mapa da figura 3.33-f, que mostra que a resposta é periódica para aquela folga, conforme mostra o espectro apresentado na figura 3.34. O eixo das frequências, neste caso, está normalizado pelo harmô-



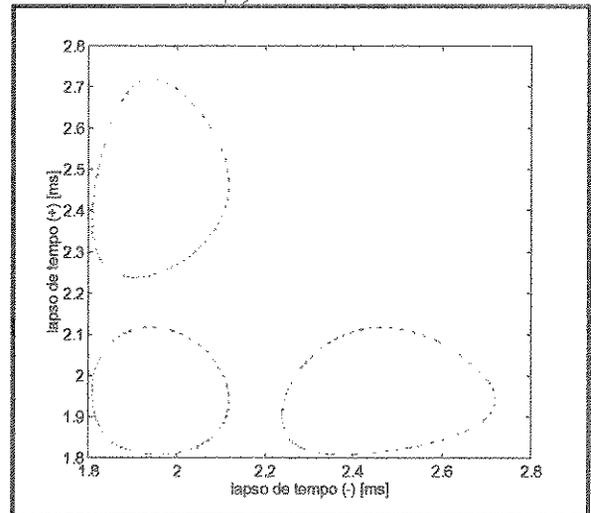
3.33 - (a): $\sigma = 6.27$ mm



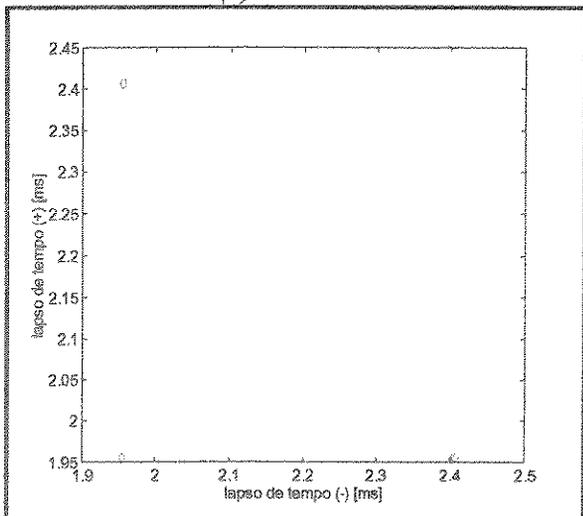
3.33 - (b): $\sigma = 6.28$ mm



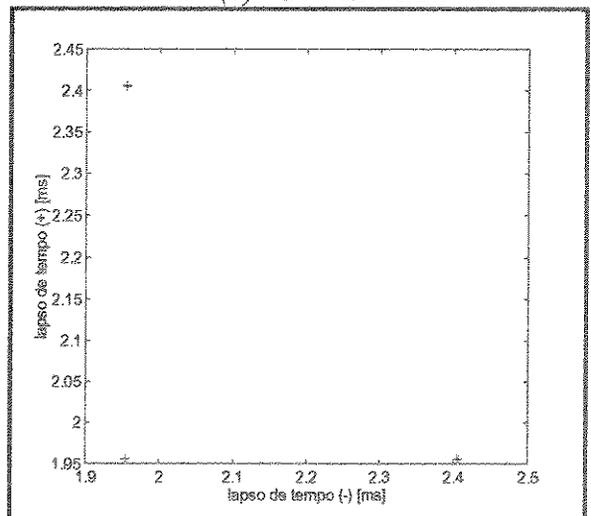
3.33 - (c): $\sigma = 6.40$ mm



3.33 - (d): $\sigma = 6.50$ mm



3.33 - (e): $\sigma = 6.88$ mm



3.33 - (f): $\sigma = 6.89$ mm

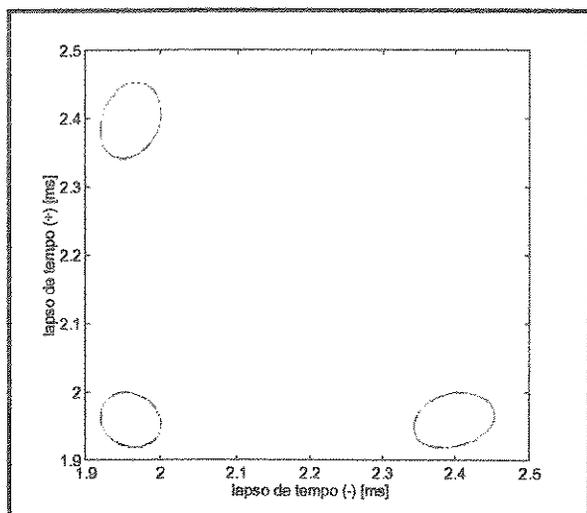
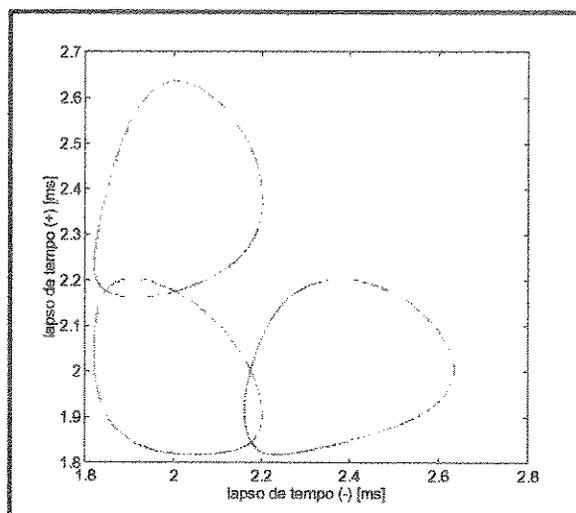
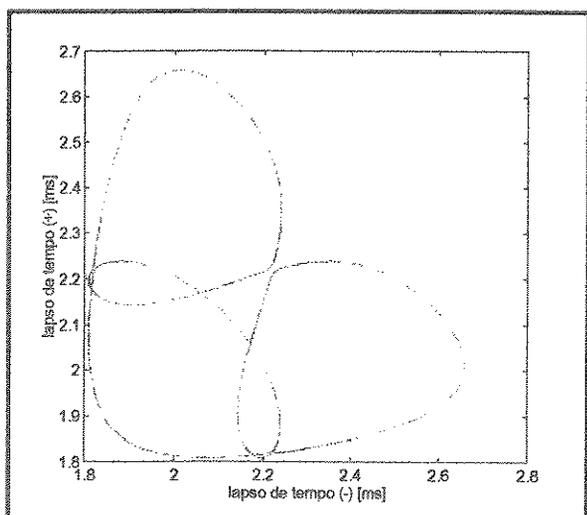
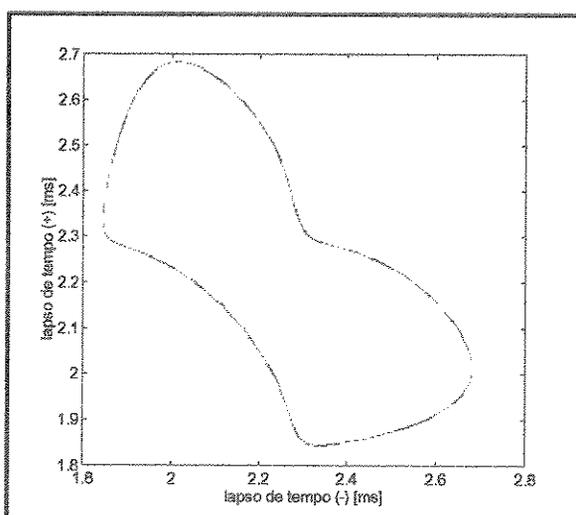
3.33 - (g): $\sigma = 7.00$ mm3.33 - (h): $\sigma = 7.40$ mm3.33 - (i): $\sigma = 7.45$ mm3.33 - (j): $\sigma = 7.50$ mm

Figura 3.33 - Transição do caos para movimento regular a partir de 6.28 mm

nico de ordem 1 da resposta, cuja frequência é 79.171875 Hz. Note que o espectro contém justamente as frequências múltiplas do harmônico fundamental, caracterizando a periodicidade do movimento. A interpretação da figura 3.33-f é a seguinte:

Observa-se que o mapa se reduz a um trio de pontos e nota-se que dois dos pontos determinam uma reta paralela ao eixo das abcissas. Outros dois determinam uma reta paralela ao eixo das ordenadas. Mas ordenada é o mesmo que a abcissa defasada. Desta forma, chegamos à conclusão de a sequência de lapsos de tempo entre impactos tem a forma da sequência $[a b a a b a \dots]$. Se plotarmos um mapa como os da figuras 3.24 e 3.25, veremos apenas três pontos sobre a seção de Poincaré e, então, concluímos que o movimento é periódico, como comprova o espectro apresentado na figura 3.34.

Quando o mapa se apresenta como uma figura convexa, podemos ter um movimento periódico de longo período ou um movimento quase-periódico. Isto é verdade porque, embora

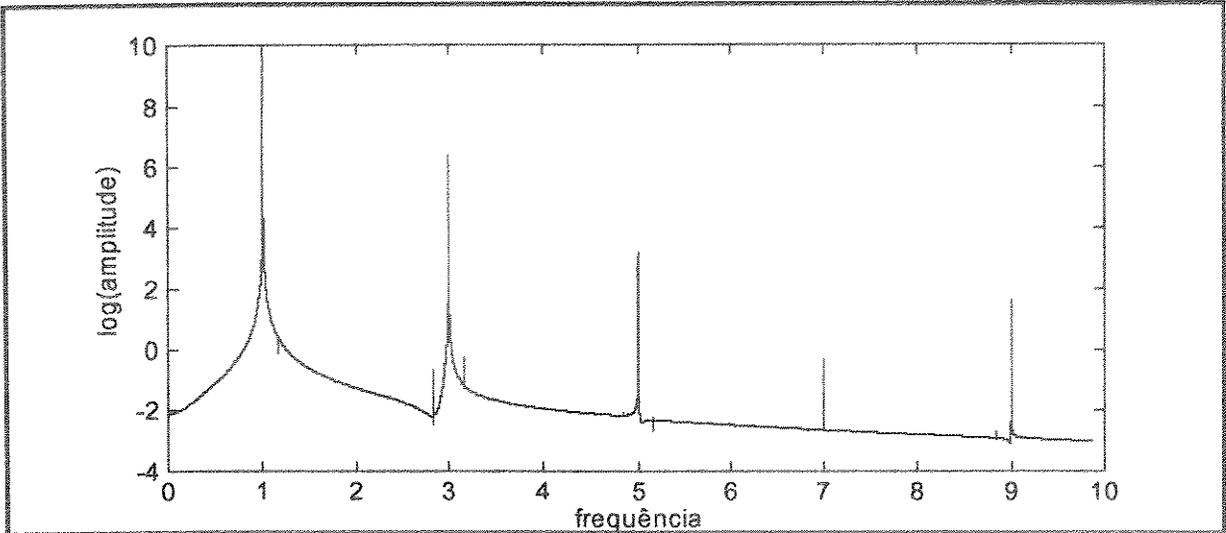


Figura 3.34 - Espectro da resposta cujo mapa é o da figura 3.33(f)

o lapso de tempo entre impactos varie, ele preenche apenas uma região muito limitada do espaço total que poderia preencher. Logo, o sistema volta ao mesmo ponto do espaço estado onde já esteve em algum instante passado, ou volta ao menos muito perto dele. Maior este tempo, maior o período do sistema. Quando o mapa apresenta ilhas separadas nada muda. Para cada ilha nos mapas mostrados, teremos uma ilha de pontos sobre a seção de Poincaré. Desde que a ilha seja bem limitada, teremos um movimento quase-periódico.

As figuras 3.35 e 3.36 mostram os espectros das respostas cujos mapas de Poincaré são apresentados nas figuras 3.33-g e 3.33-i. Embora a razão entre algumas frequências destes espectros seja um número racional, isto não pode ser garantido para todas as frequências do espectro, de forma que o máximo que podemos garantir é que a resposta é periódica ou quase-periódica. De todo modo, do ponto de vista da aplicação, periódico ou quase-periódico não faz diferença.

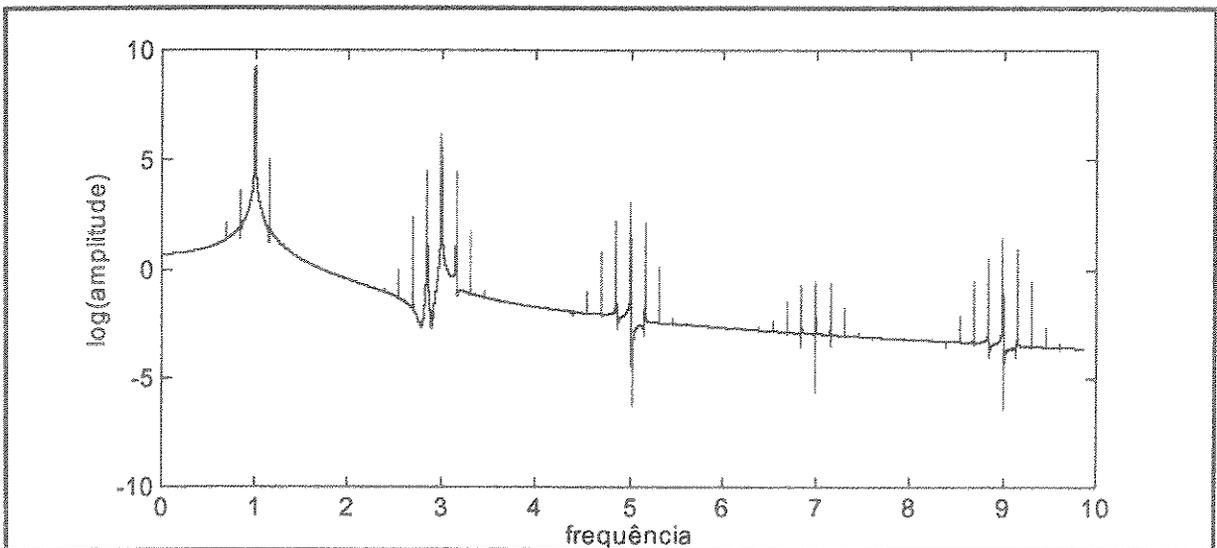


Figura 3.35 - Espectro da resposta cujo mapa é o da figura 3.33(g)

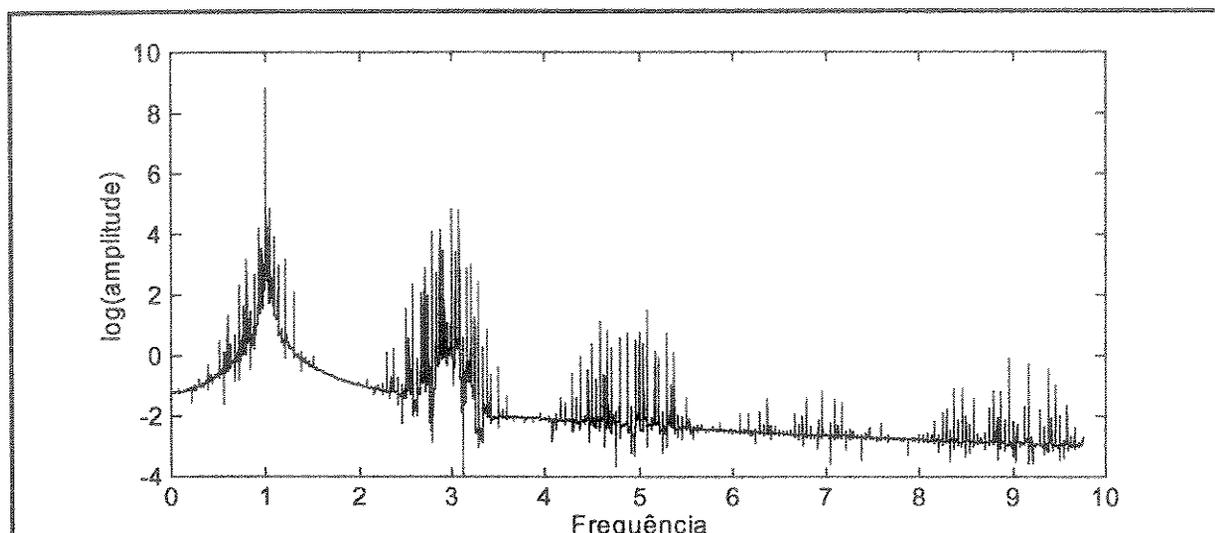


Figura 3.36 - Espectro da resposta cujo mapa é o da figura 3.33(i)

Observamos que não existe nos espectros das figuras 3.34, 3.35 3.36 nenhuma frequência relacionada com a primeira frequência natural do sistema sem impacto, o que é natural, pois toda a energia está concentrada no segundo modo de vibração (ver início da subseção 3.3.2). Outro fato que chama a atenção é o ponto de desvio máximo na figura nas figuras 3.20 e 3.21. Note que os pontos com maior desvio são justamente os pontos próximos às janelas de caos, da mesma forma como comentado na seção 3.1 (páginas 49 e 50).

3.4.2 - Energia Distribuída entre os Modos de Vibração do Sistema Linear (10 % no primeiro e 90 % no segundo)

Nesta seção analisamos o sistema quando a energia inicial fornecida para o sistema com impacto é distribuída na proporção 10%-90% entre o primeiro e o segundo modo de vibração do sistema com folga infinita. Como na subseção anterior, antes de apresentarmos os mapas de Poincaré, apresentamos a projeção da trajetória da massa não impactante sobre o plano formado pelos eixos $x_1 - \dot{x}_1$ (plano fase). As figuras 3.37 e 3.38 apresentam os referidos planos fase para uma folga de 1 mm e 8 mm, respectivamente. A folga máxima limite para ocorrência de impactos é de 10 mm.

A diferença entre os planos fase que apresentamos agora e aqueles das figuras 3.25 e 3.26 é grande. Na verdade, não encontramos nenhuma transição para o caos porque, excetuando-se as duas folgas extremas, os movimentos para todas as demais folgas analisadas são caóticos. Os movimentos cujos planos fase são apresentados nas duas figuras anteriores são caóticos, como mostra as figuras 3.39 e 3.40, que apresentam os mapas de Poincaré para as duas situações, respectivamente.

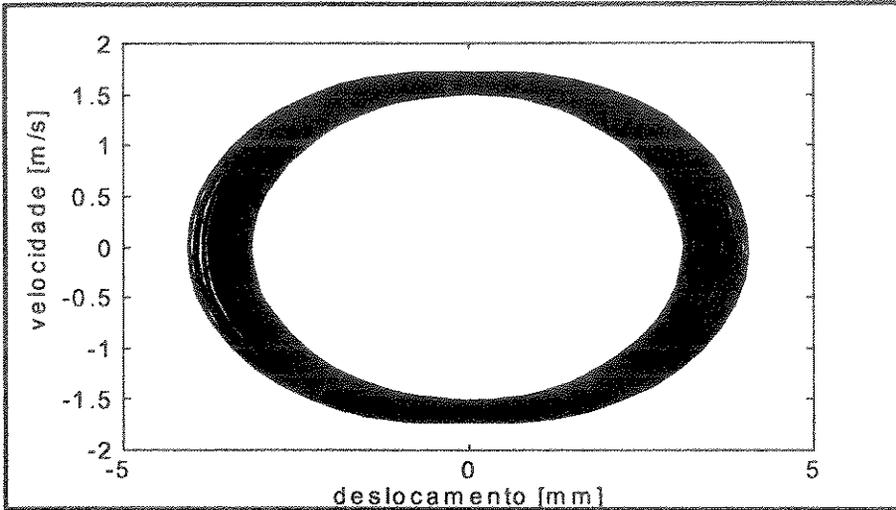


Figura 3.37 - Plano fase $\sigma = 1.0$ mm
 $\dot{x}_1 = 1.588330071594483$, $\dot{x}_2 = -1.164104058313821$

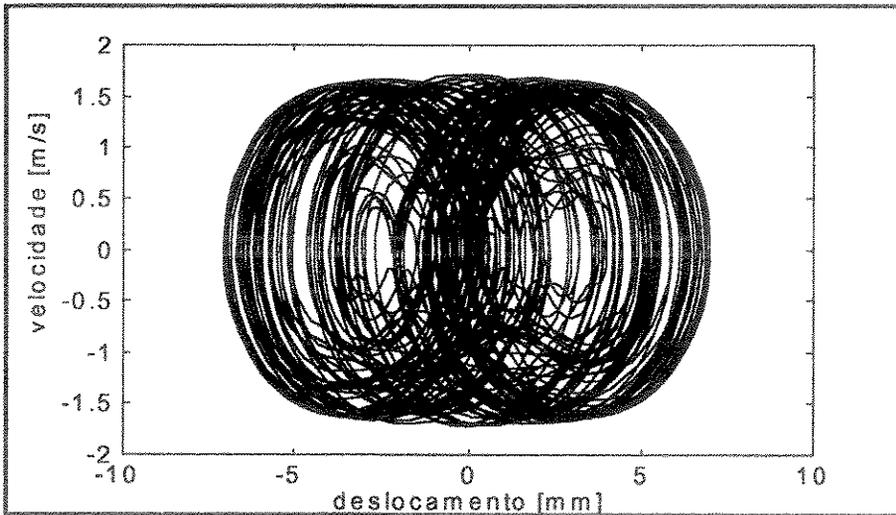


Figura 3.38 - Plano fase $\sigma = 8.0$ mm
 $\dot{x}_1 = 1.588330071594483$, $\dot{x}_2 = -1.164104058313821$

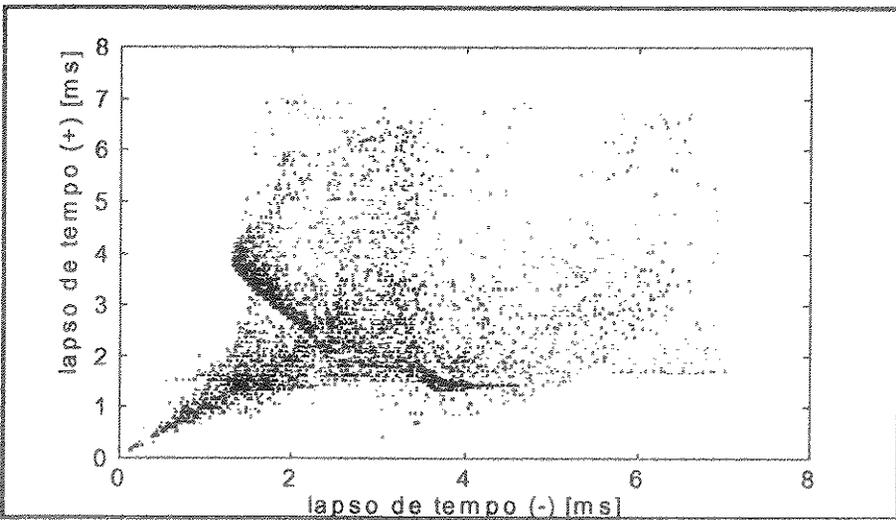


Figura 3.39 - Mapa de Poincaré $\sigma = 1.0$ mm

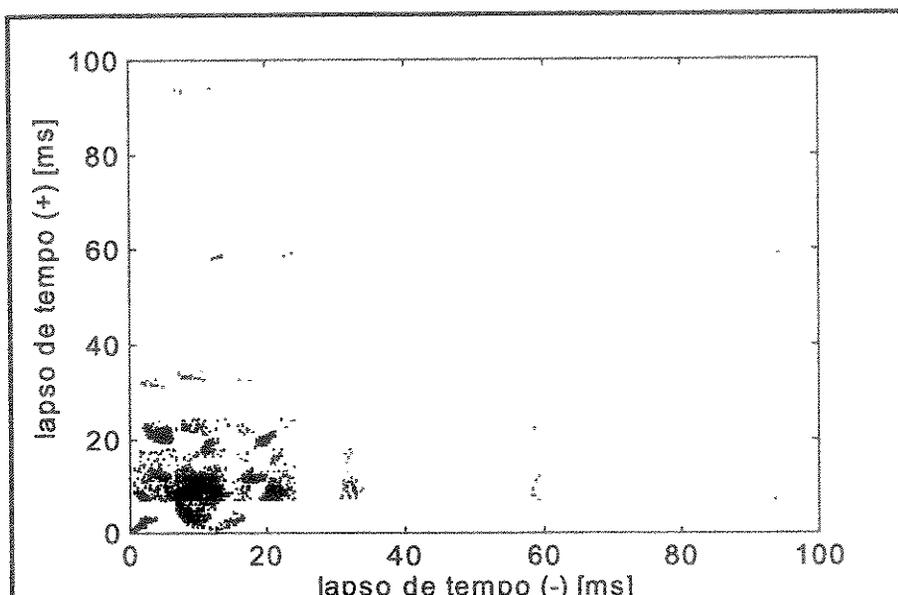


Figura 3.40 - Mapa de Poincaré $\sigma = 8.0$ mm

Apesar do estado caótico, temos um caos *menos desordenado* que aquele apresentado nas janelas caóticas obtidas com a distribuição de energia anterior. Isto fica claro quando analisamos o espectro das respostas relativas a estes mapas, os quais são apresentados nas figuras 3.41 e 3.42. Para evidenciar isto, vamos partir do princípio de que o espectro da resposta de um sistema com impacto deve provavelmente evidenciar, se evidenciar, não só a frequência característica do sistema, mas também seus múltiplos, tal como na subseção anterior. Com esta suposição é que diferenciamos a frequência característica de outra que porventura o espectro possa apresentar. Para facilitar, plotamos nas abcissas a frequência normalizada, isto é, a razão entre a frequência do sinal e aquela que julgamos ser a frequência característica do sistema. É fácil concluir que a resposta, apesar de caótica, deixa claras evidências da frequência característica do sistema. Ressaltamos que não há nada de paradoxal nisto, ainda que possa parecer. De fato, nem todos os estados caóticos são iguais e é possível que um estado caótico permita identificar, com mais ou menos clareza, algumas frequências nas quais a energia da resposta se concentra, mais do que em outras. É caso do espectro da figura 3.41, que deixa evidente uma frequência bem definida. No caso da figura 3.42, notam-se, como se espera, a frequência característica e seus harmônicos de ordem ímpar. Ressalta-se também a diferença da amplitude do movimento da massa não impactante entre os estados caóticos das figuras 3.37 e 3.38 e aquele da figura 3.26. Lá a diferença de amplitude entre os movimentos caótico e não caótico é muito menor.

Não havendo mudança significativa da dinâmica do sistema durante a variação da folga, paramos nossa investigação por aqui. É interessante notar que, não havendo bifurcações com a variação da folga neste caso, pudemos estabelecer a relação que rege a migração da frequência para toda a faixa de variação da folga (figura 3.18) sem problema. No entanto, apesar de não apresentar grandes saltos, a faixa de variação do erro entre a frequência medida e a prevista pela função proposta aumentou, chegando a quase 5%.

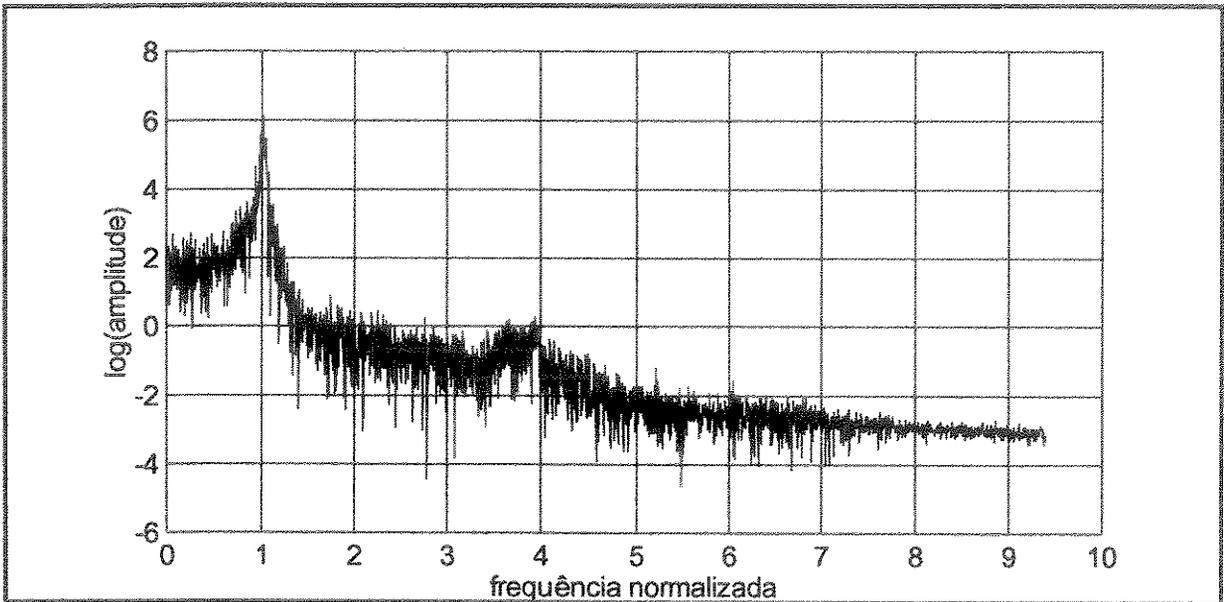


Figura 3.41 - Espectro da resposta quando $\sigma = 1.0$ mm

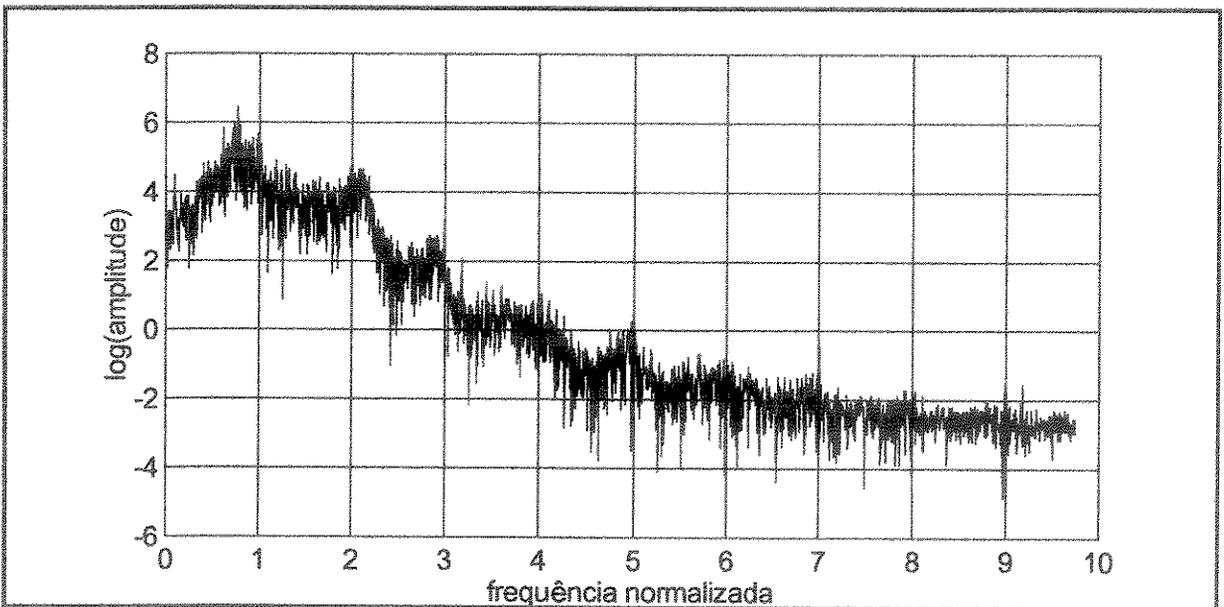


Figura 3.42 - Espectro da resposta quando $\sigma = 8.0$ mm

Capítulo 4

Estudo Numérico de um Sistema de Três Graus de Liberdade

Neste capítulo apresentamos o estudo da migração de frequências características em um sistema de três graus de liberdade. Como no capítulo anterior, consideramos um sistema particular, mas representativo de um sistema real, este último utilizado no estudo experimental apresentado no capítulo 5. Na primeira seção apresentamos as características do sistema, isto é, suas matrizes massa e rigidez. Na subseção 4.2 apresentamos a migração da primeira frequência característica. Depois, em 4.3, a análise da migração de outras frequências características. Por fim, a análise via mapas de Poincaré.

4.1 - Sobre as Propriedades do Sistema Analisado Neste Capítulo

Os detalhes do método de computação das matrizes massa e rigidez para obter um sistema equivalente ao sistema contínuo do capítulo 5 já foram abordados no capítulo anterior e são apresentados com detalhes, como já dito, no apêndice. Deste modo, apresentamos aqui apenas o resultado final e os comentários necessários sobre como satisfazer critérios de dois sistemas ao mesmo tempo.

Aplicamos o método de ajuste de um modelo discreto a um modelo contínuo, conforme apêndice, e exigimos que, para um modelo de três graus de liberdade sejam satisfeitas as seguintes condições:

- As três frequências naturais do modelo de três graus de liberdade sem impacto sejam as três primeiras frequências naturais da viga engastada que será analisada no capítulo 5[†].
- O i -ésimo autovetor do referido sistema representa a relação entre deslocamentos de alguns pontos da viga quando medidos com o sistema contínuo vibrando somente no respectivo modo de vibração. Para o sistema deste capítulo, utilizamos para os autovetores o pontos

[†] Uma apresentação prévia do sistema já foi feita no capítulo 3, seção 3.2.

localizados a 25%, 50% e 96% do comprimento da viga, como a primeira, segunda e terceira coordenada do autovetor, respectivamente. O ponto a 96 % do comprimento corresponde ao ponto de impacto da viga.

- As energias cinéticas modais do sistema discreto são as mesmas do sistema contínuo, quando obedecida a mesma normalização dos autovetores.
- Além disto, quando a folga do sistema contínuo for nula, as duas frequências naturais do sistema discreto equivalente devem se aproximar o mais possível das duas primeiras respectivas frequências naturais no sistema contínuo.

Temos relaxado, para o sistema com folga nula, os critérios de equivalência de autovetores e, conseqüentemente, também o de equivalência das respectivas energias modais. Lembramos que, segundo Slany [Slany-1992], estes critérios têm prioridade mais baixa que a equivalência de autovalores.

Outro aspecto a ser ressaltado é que relaxamos a exigência de descoplamento inercial para o sistema de três graus de liberdade. Esta exigência nos levaria a considerar muitos aspectos no ajuste de modelo, fugindo aos objetivos deste trabalho. Para o sistema de 2 graus de liberdade isto é muito mais fácil, pois temos que levar a zero apenas uma função, relativa à diagonal secundária da matriz massa[†]. No caso do sistema de três graus de liberdade, temos que levar a zero três funções distintas, mas não independentes.

Um fato é certo: Não é possível, para a viga engastada-livre, obter uma matriz massa diagonal sem alterar os critérios propostos. Todavia o descoplamento inercial, embora facilite a simulação, não é quesito essencial para os sistemas com impactos, exceto, talvez, quando se considere algum atrito. Para os sistemas com atrito seco, por exemplo, deve-se ter cuidado quando se trabalha com sistemas inercialmente acoplados.

Apresentadas as restrições iniciais, passemos ao sistema propriamente dito. O sistema discreto equivalente à viga engastada-livre do estudo experimental é representado pela seguinte matriz massa,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2.857476346807E-001 & -1.805830918915E-001 & -5.766088782105E-002 \\ -1.805830918915E-001 & 3.245929291957E-001 & 6.180603251707E-002 \\ -5.766088782105E-002 & 6.180603251707E-002 & 7.575726950608E-002 \end{bmatrix} \quad (01)$$

e pela seguinte matriz rigidez:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6.708599447198E+005 & -3.199824868254E+005 & 4.485303945517E+004 \\ -3.199824868254E+005 & 2.026786256681E+005 & -3.816595077412E+004 \\ 4.485303945517E+004 & -3.816595077412E+004 & 1.001045281038E+004 \end{bmatrix} \quad (02)$$

[†] Lembrar que a matriz massa, bem como a matriz rigidez, é simétrica.

Desta forma, as três frequências naturais do sistema são iguais às três primeiras frequências naturais da viga analisada no capítulo 5^{††}, a saber:

$$\begin{aligned} f_1 &= 16.051 \text{ Hz} \\ f_2 &= 100.591 \text{ Hz} \\ f_3 &= 281.659 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (03)$$

Da mesma forma, os autovetores do sistema podem ser representados pelos vetores,

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0.103 \\ 0.358 \\ 1.000 \end{bmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} -0.511 \\ -0.874 \\ 1.000 \end{bmatrix} \quad \Phi_3 = \begin{bmatrix} 1.037 \\ 0.282 \\ 1.000 \end{bmatrix} \quad (04)$$

cujas coordenadas são as mesmas da viga a 25%, 50% e 96%, quando a viga vibra em cada um dos seus três primeiros modos de vibração com amplitude unitária na extremidade, respectivamente. A mesma equivalência ocorre com as energias cinéticas modais, como previsto.

Se bloquearmos a terceira coordenada do sistema discreto, ele será reduzido a um sistema de dois graus de liberdade cujas matrizes massa e rigidez são exatamente as formadas pelas duas primeiras linhas e colunas das matrizes das equações 3.1 e 3.3, respectivamente. As duas frequências naturais deste sistema são

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= 76.250 \text{ Hz} \\ \bar{f}_2 &= 248.231 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (05)$$

A primeira das frequências acima é exatamente igual à primeira frequência natural da viga engastada-apoiada que se obtém quando a folga do sistema contínuo é reduzida a zero (ver equações 3.10 e 3.14). A segunda frequência da viga engastada-apoiada em questão é[†]

$$\bar{f}_{c2} = 247.099 \text{ Hz}, \quad (06)$$

existindo portanto um desvio de apenas 0.46 % da frequência do sistema discreto com relação à equivalente do sistema contínuo. Desta forma julgamos ter obtido um sistema discreto de três graus de liberdade em muitos aspectos próximo ao sistema contínuo de referência.

^{††} À página 48, quinto parágrafo, estão as características físicas principais do sistema.

[†] Aqui, como no capítulo 3, seção 3.2, o subscrito c indica sistema contínuo.

4.2 - Migração da Primeira Frequência Característica

Para verificar a migração de frequências quando a folga é variada, utilizamos o mesmo procedimento do capítulo anterior. Neste capítulo, no entanto, apresentamos o estudo para apenas uma distribuição de energia entre os modos do sistema de três graus de liberdade. Sabemos, todavia que, dependendo desta distribuição, uma frequência pode se tornar mais nítida que outras, porque um modo de vibração pode ser mais excitado que outro. Sabemos também que, dependendo da distribuição de energia, movimentos caóticos podem ocorrer com maior ou menor facilidade. Para os sistemas do capítulo 3, por exemplo, uma maior participação do modo de vibração de menor frequência na resposta do sistema parece indicar uma maior pré-disposição para ocorrência de respostas caóticas. Escolhemos arbitrariamente, neste capítulo, distribuir uniformemente a energia entre os três modos de vibração. Desta forma, excitamos igualmente todos os modos. Isto não garante que todas as frequências sejam observadas com a mesma nitidez, mas é a melhor forma, cremos, de evitar resultados mascarados. Pode-se concentrar a maior parte da energia em um modo, mas isto não apresentou grandes mudanças na nitidez das frequências nos testes iniciais que realizamos antes de decidirmos pela distribuição uniforme. Pelo contrário, como já citado, uma concentração de energia no modo mais baixo dificulta em muito a análise do conteúdo de frequência da resposta. Embora a migração pareça existir, a resposta é tão complicada que a o estudo da migração perde o sentido.

Para distribuir igualmente a energia entre os três modos de vibração do sistema fixamos a velocidade inicial (deslocamentos iniciais nulos) do sistema como:

$$v_0 = \dot{x}_0 = \alpha_1 \omega_1 \Phi_1 + \alpha_2 \omega_2 \Phi_2 + \alpha_3 \omega_3 \Phi_3 \quad (07)$$

e escolhemos os valores α_2 e α_3 de acordo com as expressões

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{r_2 \omega_1^2 \Phi_1^T M \Phi_1}{r_1 \omega_2^2 \Phi_2^T M \Phi_2}} \alpha_1 \quad \alpha_3 = \sqrt{\frac{r_3 \omega_1^2 \Phi_1^T M \Phi_1}{r_1 \omega_3^2 \Phi_3^T M \Phi_3}} \alpha_1 \quad (08)$$

onde os fatores r_1 , r_2 e r_3 são as razões entre a energia de cada modo e a energia total. Desta forma, deve-se observar que, obrigatoriamente, $r_1 + r_2 + r_3 = 1$. Qualquer dos fatores α_i pode ser escolhido de forma a ajustar um determinado nível de energia total, ou amplitude, ou velocidade. A partir deste, obtém-se os demais. Uma relação análoga pode ser usada para deslocamentos iniciais, envolvendo, obviamente, a energia potencial (matriz rigidez).

A figura 4.1 apresenta a variação da primeira frequência característica do sistema quando a folga varia de zero até infinito. Juntamente com a migração, a função proposta para a migração no capítulo 3 também é plotada. Para a análise fixamos um nível de energia tal que a folga máxima para a qual impactos podem ocorrer é de 10 mm. Desta forma, a folga

relativa é um décimo da folga real. A função proposta para o ajuste é a mesma da equação (3.20), a saber:

$$\ln[f(\sigma)] = \ln(f_c) + \sqrt{[\ln(f_c) - \ln(f_0)]^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_c^2}\right)} \quad (09)$$

com os seguintes parâmetros

$$\begin{aligned} f_c &= 16.05122887694532 \\ f_0 = \bar{f} &= 76.24994999027598 \\ \sigma_c = \sigma_{\max} &= 1.0 \end{aligned} \quad (10)$$

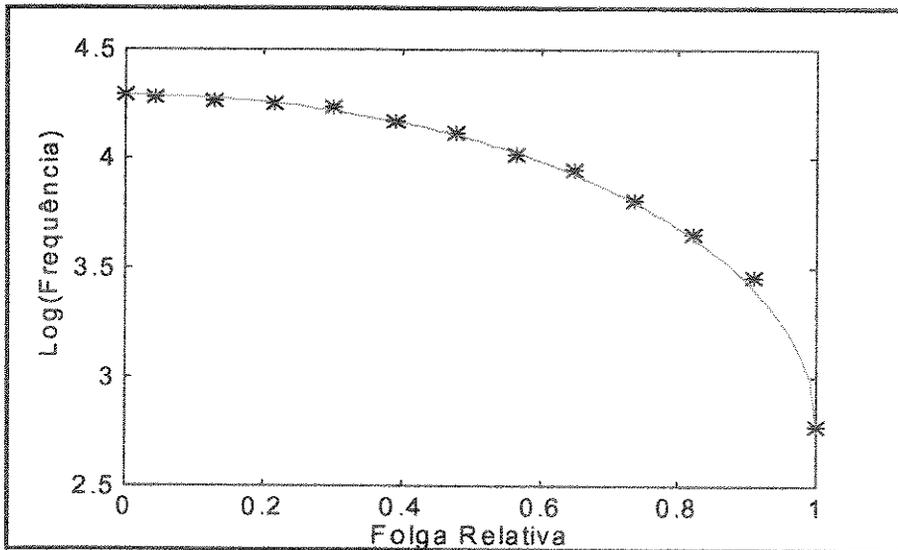


Figura 4.1 - Migração da frequência característica com a variação da folga
pontos: simulação linha contínua: função proposta

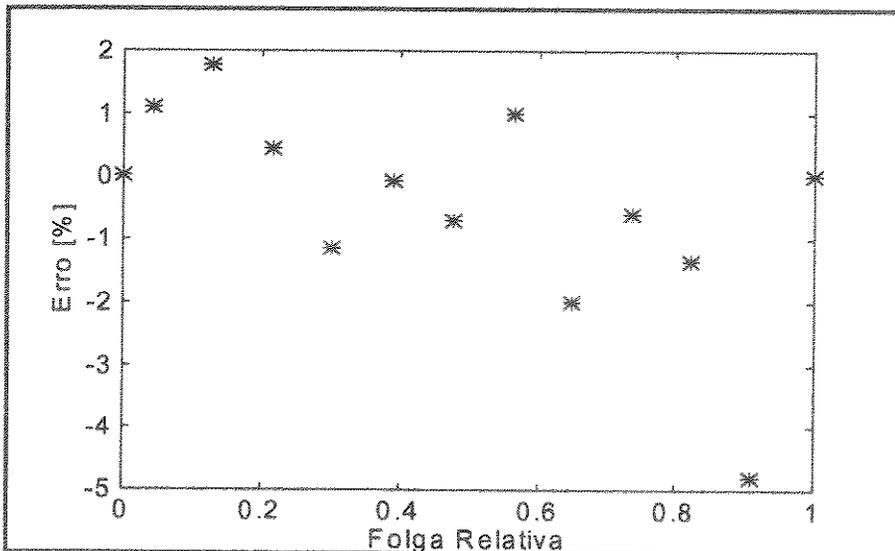


Figura 4.2 - Erro entre os resultados da função proposta e da simulação para a figura 4.1

A figura 4.2 apresenta o erro entre a frequência observada no espectro da resposta simulada e aquela prevista pela função ajustada. Nota-se que o erro continua controlado dentro de uma faixa limite de 5 %. É um ajuste bom, se levarmos em conta a complexidade da resposta.

4.3 - Migração das Demais Frequências do Espectro

É possível observar a migração de outras duas frequências, na resposta do sistema, quando a folga é variada. A figura 4.3 apresenta a variação de uma das referidas frequências, a mais alta, que denominamos terceira. Note que estamos utilizando a folga relativa. A duas linhas contínuas foram plotadas apenas para referência e correspondem à segunda frequência natural do sistema com folga nula e à terceira frequência natural do sistema com folga infinita. Assim, em nossas simulações, quando a folga varia de zero até infinito, a resposta do sistema contém uma frequência que varia da segunda frequência natural do sistema com folga nula até à terceira frequência natural do sistema com folga infinita. Todavia não temos encontrado uma relação algébrica explícita para a migração tal como para a primeira frequência característica da resposta. Parece que as seguintes observações são verdadeiras:

*"A derivada da curva que rege a migração
tende ao infinito quando a folga tende a zero."*

*"A derivada da curva que rege a migração tende a zero
quando a folga relativa tende à unidade."*

Todavia um ramo elipse está fora de cogitação, e deixamos assunto em aberto por ora.

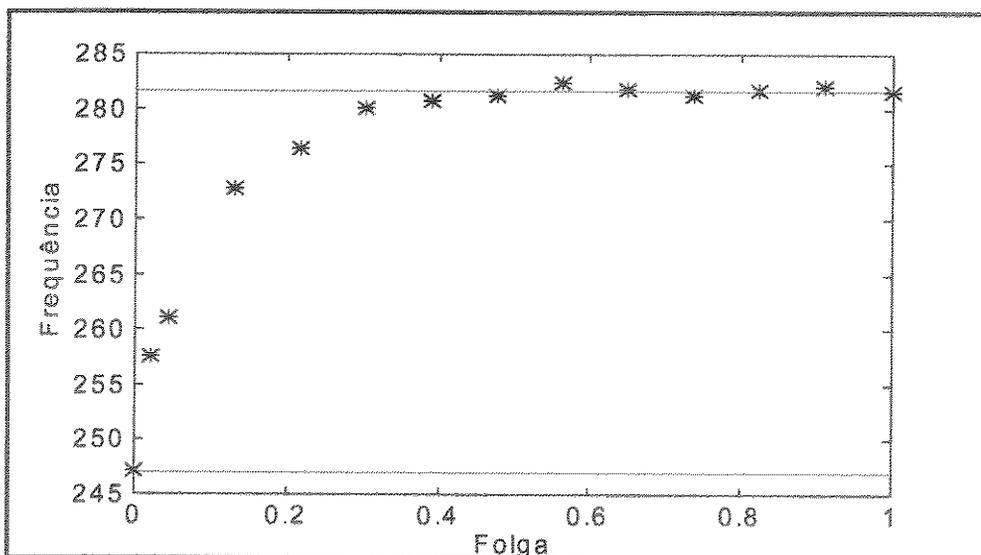


Figura 4.3 - Migração da terceira frequência característica com a variação da folga

Quanto à outra frequência ainda não temos uma posição definitiva. Para facilitar a explicação apresentamos o esquema abaixo. Tudo parece indicar que as migrações ocorrem sempre entre as frequências naturais dos sistemas lineares associados ao sistema com impacto. Consideremos à esquerda o sistema com folga nula e suas duas frequências naturais. À direita, o sistema com folga infinita e suas três frequências naturais. Pela forma como o sistema de folga nula é obtido do sistema de folga infinita, é sempre verdade que a primeira frequência natural do sistema com folga nula será um valor intermediário entre a primeira e segunda frequências naturais do sistema com folga infinita. O mesmo vale para a segunda frequência do sistema sem folga e a segunda e terceira frequências do sistema com folga infinita.

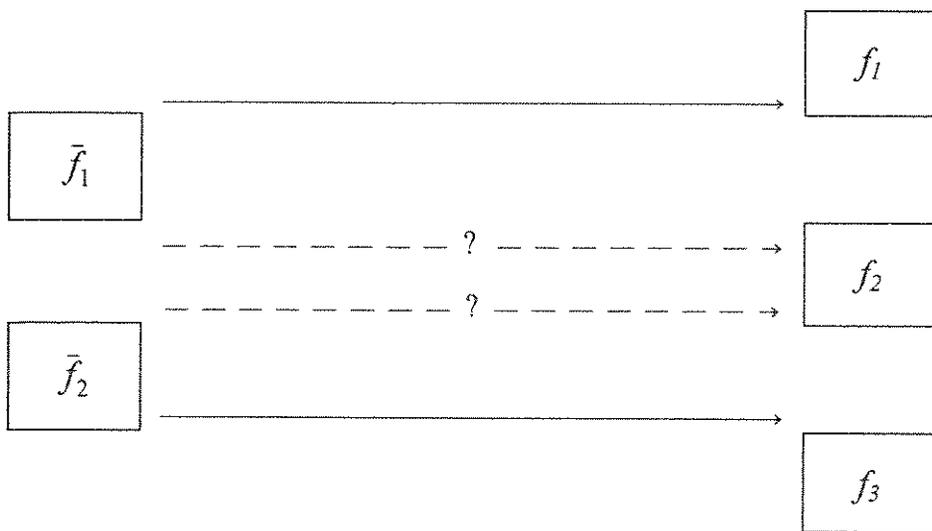


Figura 4.4 - Esquema de migração das frequências

Sabemos que, quando a folga varia de zero até infinito, uma frequência característica migra de \bar{f}_1 para f_1 de acordo com a relação proposta. Também, ao menos para o caso estudado, sabemos que outra frequência migra de \bar{f}_2 para f_3 , embora não conheçamos segundo qual relação. Quanto, à frequência f_2 , estamos certos de que alguma frequência migra para ela, mas não estamos certos se a migração parte de \bar{f}_1 , de \bar{f}_2 ou de ambos. No próximo capítulo veremos uma migração de \bar{f}_2 para f_2 . No entanto, isto não dá garantia total de que a migração a partir de \bar{f}_1 não exista. Pode apenas não ter sido observada na condição analisada. Os resultados deste capítulo parecem indicar a migração de \bar{f}_1 para f_2 . Da mesma forma, isto não garante que o outro ramo não exista em nenhuma hipótese. Pode ocorrer em outras situações.

A figura 4.5 apresenta a migração da segunda frequência característica. A interrogação nos dois ramos das curvas ajustadas por splines cúbicas aplicadas aos conjuntos de pontos indica nossa incerteza. O ajuste das splines foi usado apenas para evidenciar a possível

existência de dois ramos. Não representa de modo algum uma proposta de função para a migração. De todo modo, a migração está confirmada. Apenas uma análise mais cuidadosa precisa ser feita, para saber qual parâmetro rege a origem da migração, se de uma ou de outra, ou de ambas as frequências). Os dois pontos sobre o eixo das ordenadas na figura 4.5 correspondem exatamente às frequências \bar{f}_1 e \bar{f}_2 e a linha reta verde indica a frequência f_2 .

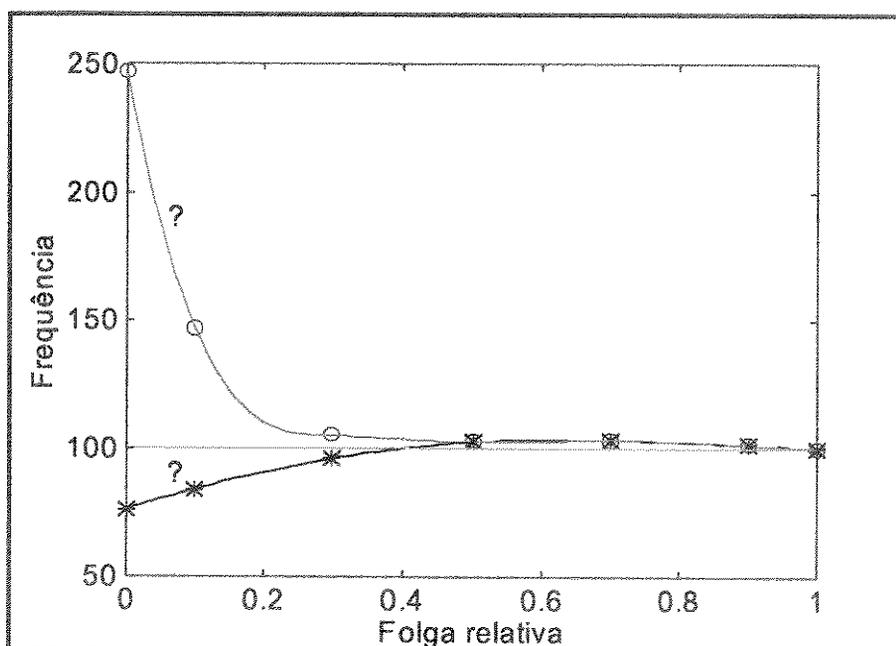


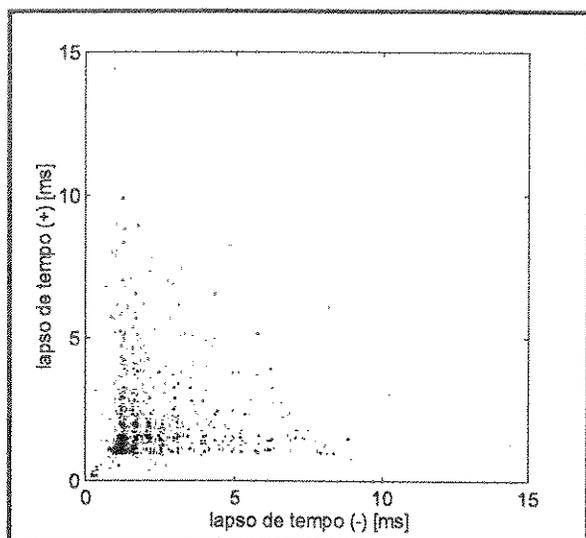
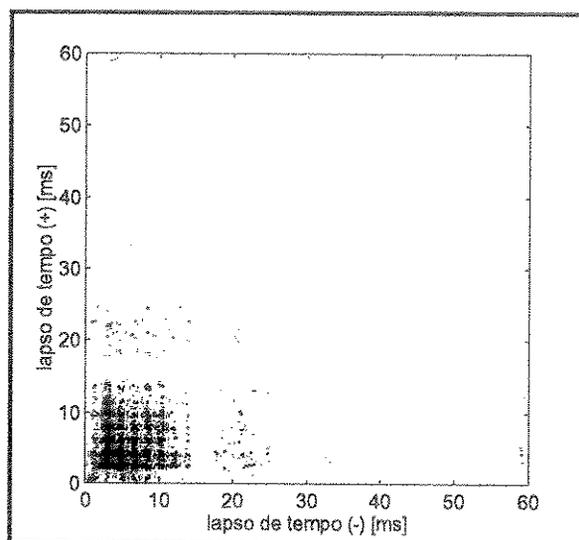
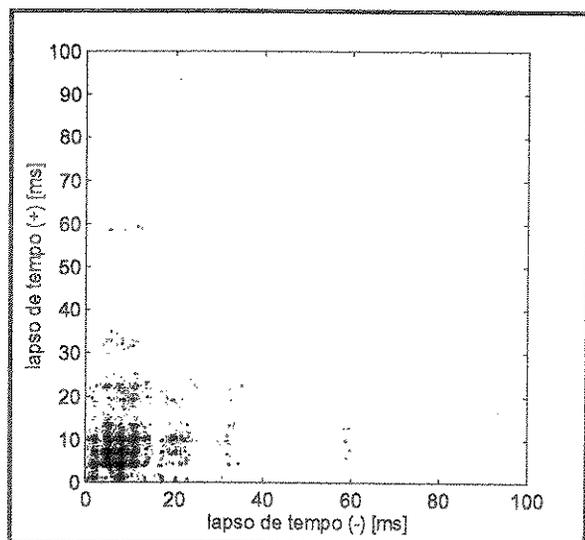
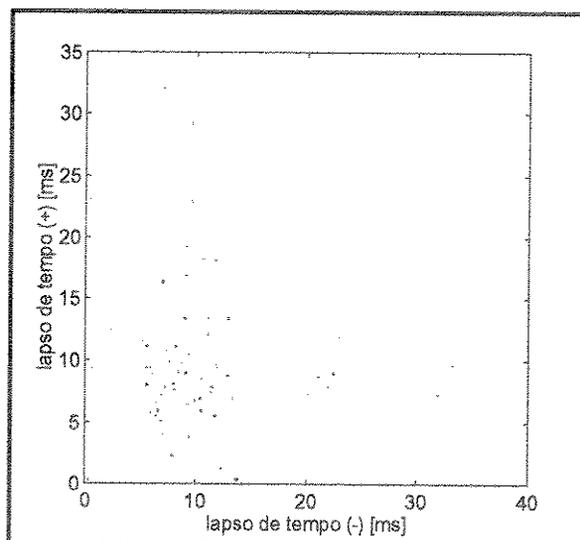
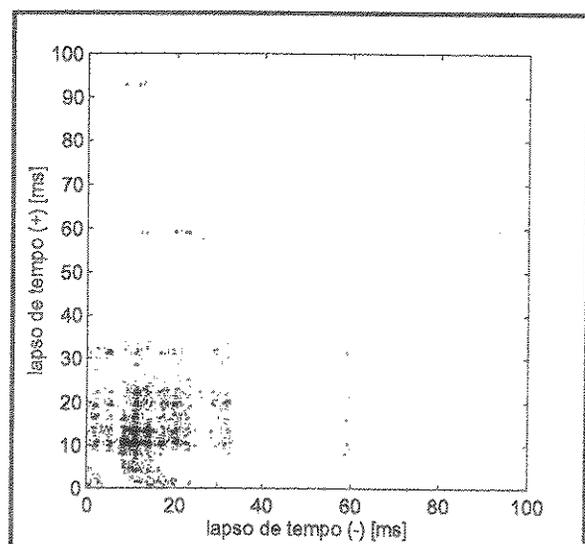
Figura 4.5 - Migração da segunda frequência característica com a variação da folga

4.4 - Análise por Mapas de Poincaré

Começamos nossa análise apresentando aspectos de alguns cortes sobre a seguinte seção de Poincaré

$$\Sigma = \left\{ (x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \mid x_3 = +\sigma \right\} \in \mathbf{R}$$

onde os vetor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ representa a posição do sistema. Utilizaremos o mesmo mapa simples, mas bem ilustrativo, para uma varredura macroscópica sobre o sistema. As figuras 4.6 (a-e) apresentam mapas que relacionam, para diversas folgas, os lapsos de tempo entre impactos subsequentes sobre a seção de Poincaré. Lembramos que a folga máxima para as condições iniciais em questão é de 10 mm.

4.6 - (a): $\sigma = 1.0$ mm4.6 - (b): $\sigma = 3.0$ mm4.6 - (c): $\sigma = 5.0$ mm4.6 - (d): $\sigma = 7.0$ mm4.6 - (e): $\sigma = 9.0$ mm

*Fig 4.6 (a-e) - Mapas de Poincaré para
várias folgas*

Observa-se uma mudança significativa do mapa para a folga de 7 mm. No entanto, uma varredura mais fina nesta região não mostrou algo significativo, como uma pequena janela periódica. O que observamos é que, em todos os casos, lapsos de tempo com muitos impactos se intercalam com grandes lapsos de tempo sem impacto, estes últimos menos frequentes.

De todo modo os espectros, apesar dos movimentos caóticos, permitem identificar, com algum trabalho, frequências que surgem devidas ao impacto, como mostram as figuras 4.7, 4.8 e 4.9. Mais uma vez o eixo da frequência foi normalizado pela frequência característica. Para certificar-se de que as frequências exibem também múltiplos, escolhemos, dentre todos os picos que se apresentam, aquele que melhor se relaciona com seus múltiplos ímpares.

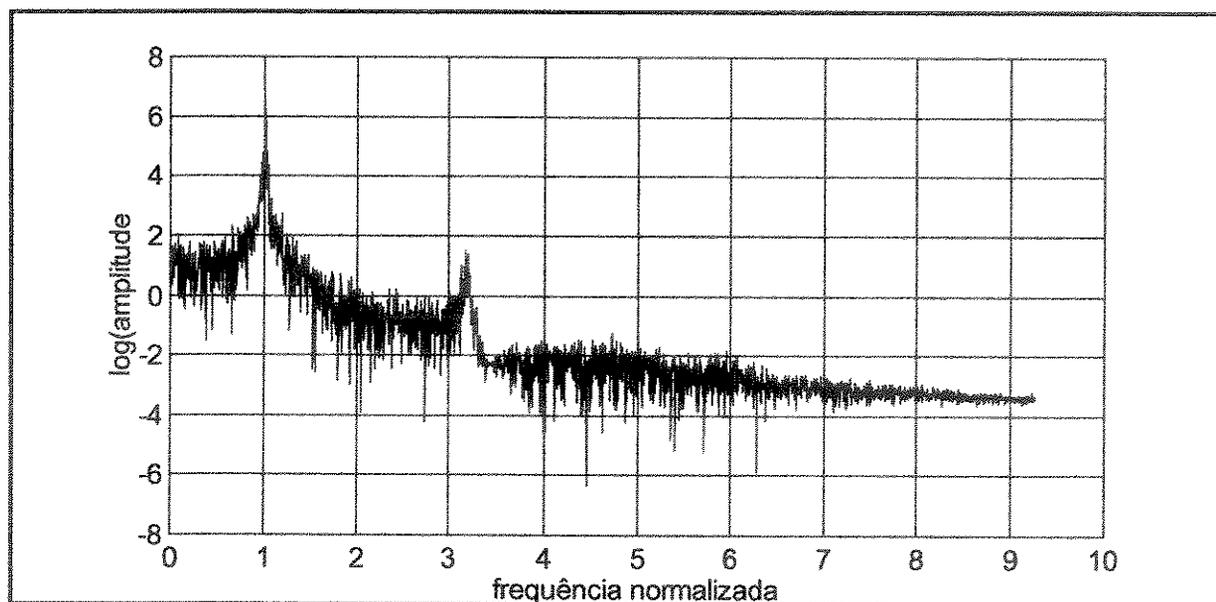


Figura 4.7 - Espectro da resposta quando $\sigma = 1.0$ mm

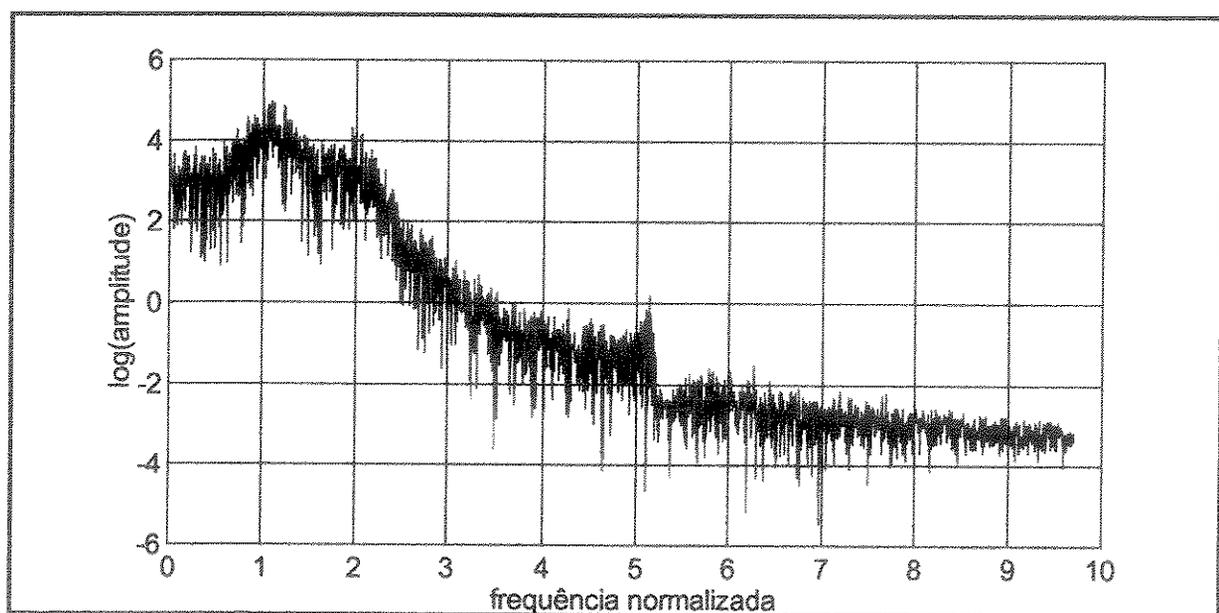


Figura 4.8 - Espectro da resposta quando $\sigma = 5.0$ mm

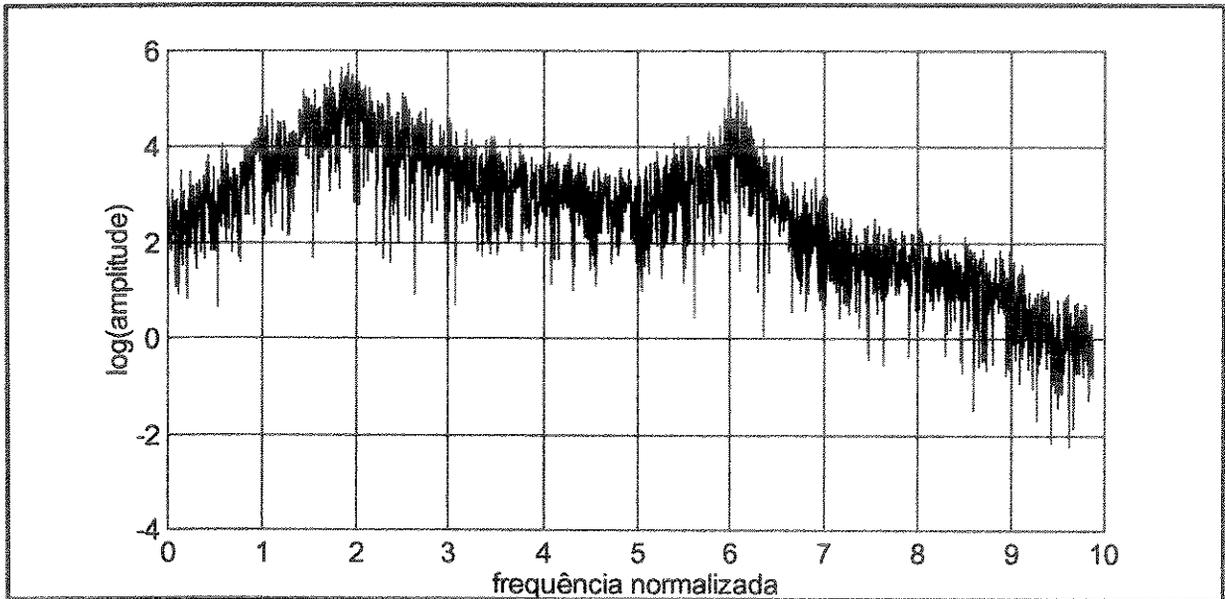


Figura 4.9 - Espectro da resposta quando $\sigma = 9.0$ mm

Não vamos nos ater aos demais mapas de Poincaré porque, em nossa análise, a resposta do sistema não apresenta, além da migração das frequências características, variações importantes em sua dinâmica. Estamos falando apenas neste caso particular. Análises envolvendo outros parâmetros, tais como, níveis de forçamento (se for o caso), amortecimento, outras distribuições de energia e variação frequência de forçamento, podem revelar alterações importantes.

Capítulo 5

Investigação Experimental da Migração de Frequências Características

Neste capítulo apresentamos o estudo experimental da migração de frequências características. Na subseção 5.1 apresentamos o sistema e a metodologia utilizada para o estudo e nas subseções seguintes os resultados para três diferentes faixas de frequência na excitação randômica, a saber, 0-200 Hz, 0-400 Hz e 0-100 Hz.

5.1 - Descrição do Sistema e da Metodologia

Para este estudo utilizamos uma viga engastada-livre com impactos na extremidade livre, conforme mostra a figura 5.1, esquematizando o sistema em perfil. A folga do sistema na extremidade é controlada por uma série de lâminas de 1 mm, 0.2 mm e 0.05 mm. No entanto, o elemento contra o qual a viga impacta não foi mudado durante a variação da folga. O detalhe da cabeça de impacto é apresentado de forma ampliada no quadro em destaque. O arredondamento da cabeça de impacto é importante para que o impacto seja unidimensional. Também garante que a região de contato tenha uma forma mais bem definida, evitando-se problemas por causa de singularidades dos corpos impactantes.

Um excitador foi conectado a meia distância do comprimento da viga. Na conexão foi instalado um sensor de força piezoelétrico. Também à meia distância do comprimento da viga, do lado oposto ao do sensor de força, instalou-se um acelerômetro. Outro acelerômetro foi instalado próximo à extremidade da viga, isto é, próximo ao ponto de impacto. Uma manta de borracha foi utilizada sob o excitador para diminuir a níveis razoáveis a transmissão de energia para a viga através do engaste. O excitador foi fixo à base principal através de tensores para evitar seu possível descolamento da base por causa do choque. Uma outra manta de borracha foi usada por baixo da base para diminuir a troca de energia entre o

sistema e seu exterior. Vários testes foram realizados para garantir que a condição de fixação da viga à base principal pudesse ser considerada como a de um engaste. Outra pequena manta de borracha sob o engaste ajuda a evitar a transmissão de energia à viga pela base. O sistema foi modificado algumas vezes até que a resposta do sistema sem impactos não apresentasse características incompatíveis com as de uma viga engastada-livre. Tais efeitos se referem a resposta em frequências outras que não as frequências naturais e níveis de aceleração indesejáveis no engaste.

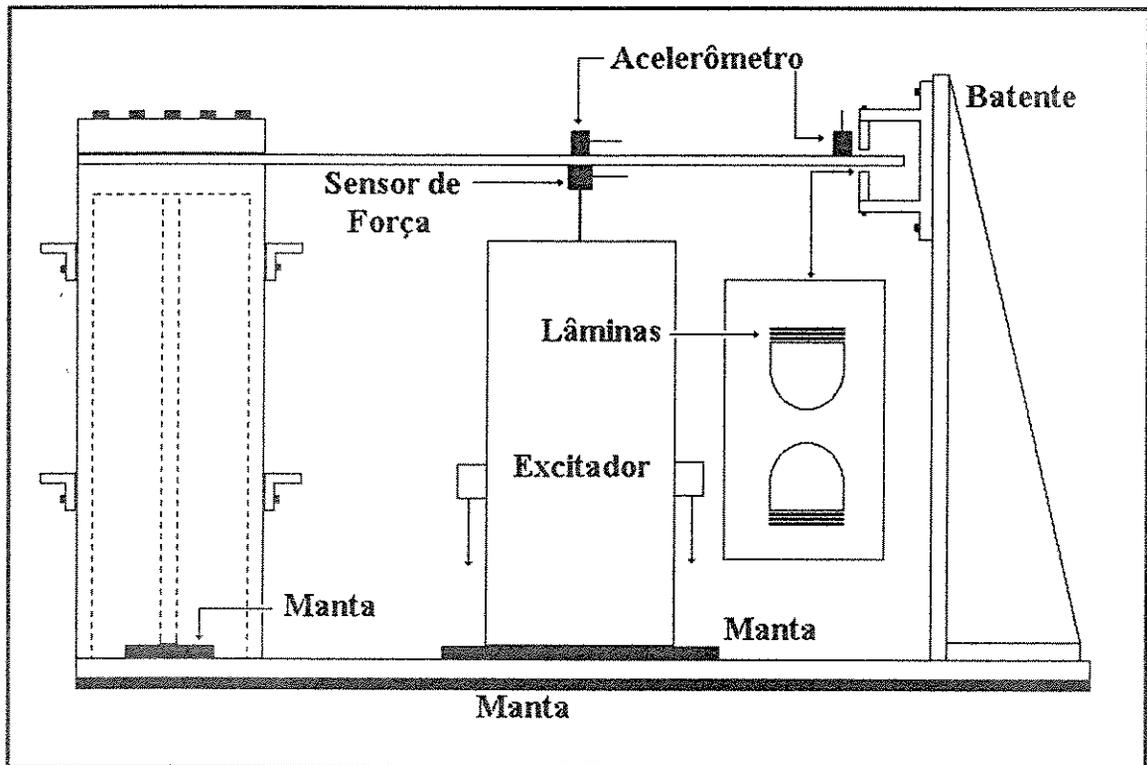


Figura 5.1 - Vista em perfil do aparato para investigação experimental

A figura 5.2 apresenta uma vista geral do sistema usado para a investigação experimental. Destacam-se na figura, no primeiro plano, o corpo principal do sistema (base + viga + batente) [01] e o excitador [02]. No segundo plano está o sistema de aquisição de dados e análise de sinais, que consiste de um microcomputador [03] e módulo de aquisição [04]. Ainda fazem parte do sistema, mas não aparecem na figura, um amplificador de potência, que alimenta o excitador, um arrefecedor a ar para o excitador e o módulo de controle de ganho dos sensores. A figura 5.3 mostra o detalhes da fixação do excitador à viga. Este é outro ponto que merece cuidado. Uma fixação muito rígida transversalmente aumenta a influência do movimento da viga sobre o próprio movimento do núcleo do excitador, introduzindo fenômenos indesejáveis ao sistema completo. A interferência do movimento da viga sobre os níveis de força do excitador deve ser a menor possível. Para isto, além de um excitador de potência correta, o elemento de fixação deve permitir que a força aplicada sobre a viga se aproxime de uma força seguidora. Observam-se também na figura 3 os fios tensores



Figura 5.2 - Vista geral do dispositivo utilizado nos experimentos

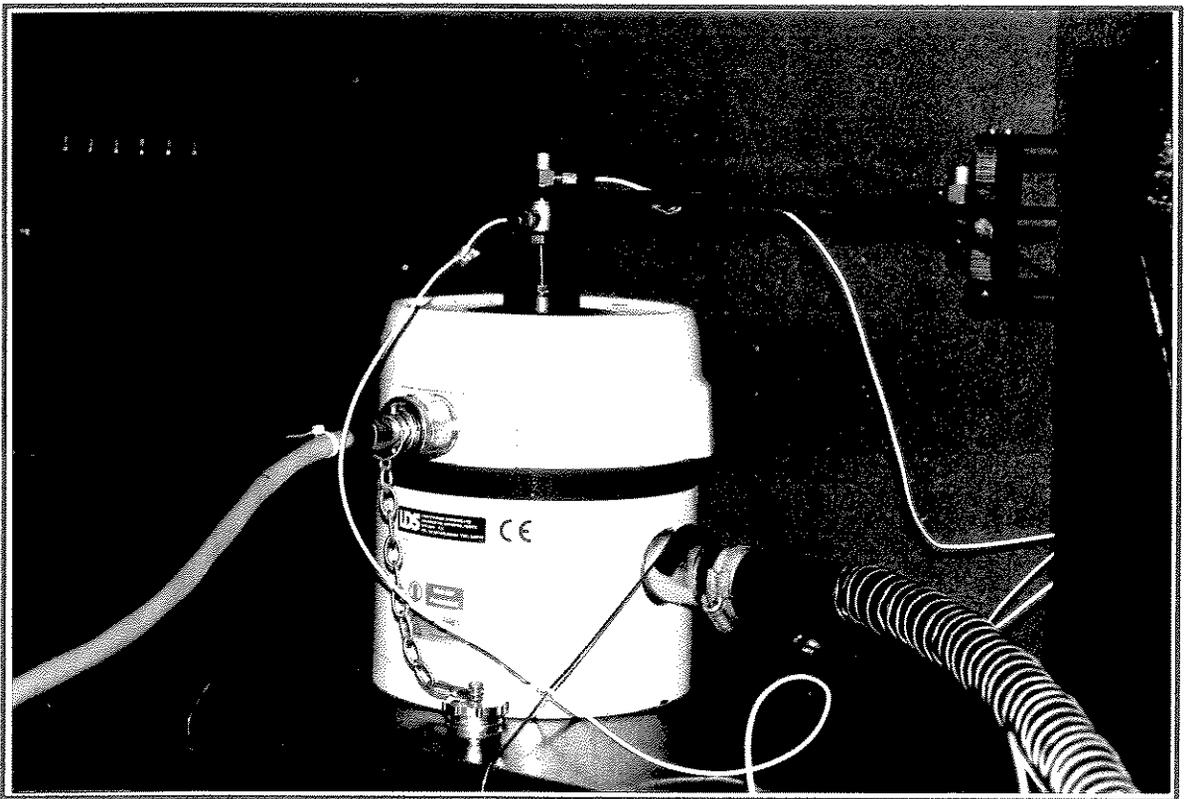


Figura 5.3 - Detalhes da fixação do acelerômetro e do sensor de força

que pressionam o excitador contra a base. Nota-se mais uma vez o elemento absorvedor entre o fio e o excitador. A figura 4 apresenta detalhes da região de impacto. Mostra as placas e a

fixação do acelerômetro. As características principais do sistema estão na tabela 5.1.

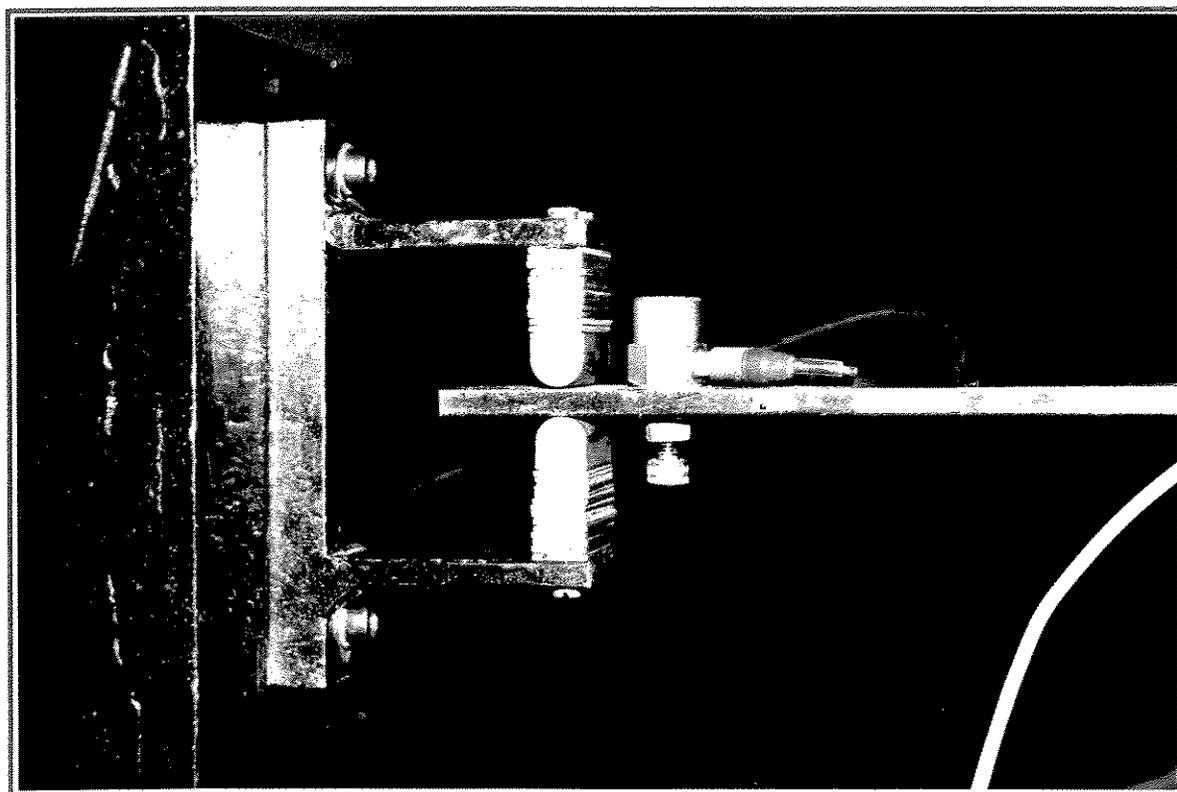


Figura 5.4 - Detalhes do acelerômetro e da cabeça de impacto na extremidade da viga

Comprimento da viga	510 mm
Comprimento até ao ponto de impacto	490 mm
Largura da viga	25 mm
Altura da viga	5 mm
Material da viga	aço SAE 1035
Material do batente	aço SAE 1035
Raio do batente	5 mm

Tabela 5.1 - Características principais do aparato experimental

Com os parâmetros acima, as três primeiras frequências naturais da viga engastada-livre, considerando o modelo de Euler, são, como já apresentado nos capítulos 3 e 4:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= 16.051 \text{ Hz} \\
 f_2 &= 100.591 \text{ Hz} \\
 f_3 &= 281.659 \text{ Hz}
 \end{aligned}
 \tag{01}$$

Quando a folga na extremidade é reduzida a zero, as três primeiras frequências naturais da viga, considerando o modelo de Euler e idealizando-a como engastada-apoiada, são:

$$\begin{aligned} f_1 &= 76.250 \text{ Hz} \\ f_2 &= 247.099 \text{ Hz} \\ f_3 &= 515.552 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (02)$$

Para nos certificarmos de que nossas suposições são razoáveis, ou não, verificamos experimentalmente as frequências naturais do sistema por dois modos, a saber:

modo 1: obter as frequências naturais via correlação entre a aceleração em um ponto da viga e a força de um impacto aplicado com o martelo de análise modal.

modo2: obter as frequências naturais através de excitação randômica com um excitador, usando a correlação entre a entrada (força) e saída (aceleração) do sistema.

As frequências obtidas para a viga engastada livre com a utilização do primeiro método são:

$$\begin{aligned} f_1 &= 16.000 \text{ Hz} \\ f_2 &= 97.250 \text{ Hz} \\ f_3 &= 273.250 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (03)$$

Analogamente, as frequências obtidas com a utilização do segundo método são:

$$\begin{aligned} f_1 &= 13.875 \text{ Hz} \\ f_2 &= 91.375 \text{ Hz} \\ f_3 &= 264.500 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (04)$$

Os erros com relação à frequência teórica são mostrados na tabela 5.2, a seguir

Frequência	Martelo	Excitador
f_1	-0.32 %	-8.11 %
f_2	-3.32 %	-9.16 %
f_3	-2.99 %	-6.09 %

Tabela 5.2 - Erros percentuais entre as frequências naturais experimentais e teóricas para a viga engastada-livre

Como esperado, as frequências obtidas experimentalmente são sempre menores que aquelas estimadas pelo modelo de Euler. O fato de as frequências obtidas com a utilização do excitador serem as menores também é um fato esperado, por causa da influência do excitador

sobre o sistema. Os erros entre as frequências obtidas pelo método 1 e as calculadas teoricamente são razoáveis e, a julgar por esses erros, não há nada de errado com o sistema para que não possa ser considerado uma viga engastada-livre. Quanto aos erros envolvendo o método 2, também podemos nos assegurar que eles advêm do uso do excitador. Se o erro fosse proveniente de outra fonte como, por exemplo, um engastamento distante do ideal, outras frequências haveriam de ser observadas para o sistema como um todo, o que não aconteceu. De todo modo, em se tratando de migração de frequência, apenas teremos de mudar nossos valores de teóricos para experimentais em nossa relação. Na ausência de qualquer outra não linearidade significativa, que não o impacto, isto é esperado como verdadeiro.

As frequências naturais medidas para o sistema com folga nula são apresentados na equação 05. Estes são valores obtidos com excitação randômica via excitador. Não temos a identificação da terceira frequência.

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= 70.025 \text{ Hz} \\ \bar{f}_2 &= 239.625 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (05)$$

Com o uso do martelo de impacto, as frequências obtidas são:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= 74.50 \text{ Hz} \\ \bar{f}_2 &= 244.50 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (06)$$

O erros entre as as frequências medidas e as identificadas experimentalmente são mostrados na tabela 5.3.

Frequência	Martelo	Excitador
f_1	-2.30 %	-8.19 %
f_2	-1.15 %	-3.02 %

Tabela 5.3 - Erros percentuais entre as frequências naturais experimentais e teóricas para a viga engastada-apoiada

Mais uma vez podemos considerar os erros razoáveis. Note que o atrito que atua na extremidade da viga quando a folga é nula não introduziu força axial suficiente para alterar significativamente o modelo.

Estando nossa previsão correta, deve ocorrer a migração de uma frequência partindo do valor de 70.025 Hz para 13.875 Hz ou 91.375 Hz, uma vez que utilizaremos o excitador para observar a migração de frequência. Esperamos que outras frequências migrem de forma análoga, como nos capítulos 3 e 4.

Para identificarmos experimentalmente uma frequência característica na resposta da viga com impacto utilizamos excitação randômica em três faixas de frequência, a saber:

- 0 a 200 Hz
- 0 a 400 Hz
- 0 a 100 Hz

O conceito convencional da função de resposta em frequência deve ser visto com reserva, se aplicado à análise do sistema com impacto, uma vez que ele se baseia na linearidade entre a resposta e a excitação. O conteúdo de frequência da resposta do sistema será, como a entrada, randômico, razão porque não é possível identificar, nos espectros convencionais de saída, as frequências características.

Um fato, no entanto, é sempre verdade: Se um determinado sistema vibra naturalmente numa frequência, ele utiliza o mínimo de energia para excitar esta frequência. Desta forma, sendo a entrada randômica, o espectro de potência (não o convencional) da saída deve conter um mínimo nas frequências características do sistema.

É verdade que a função de resposta em frequência pode ser usada como uma ferramenta auxiliar no diagnóstico, o que realmente fizemos, tendo tomado os devidos cuidados, conforme já mencionado. Na verdade temos sempre utilizado as duas ferramentas em conjunto, porque, às vezes, uma permite observação mais clara das frequências características. Não obtivemos, em nenhum caso, resultados contraditórios.

Sobre a variação da folga consideramos melhor apresentar a explanação junto com o primeiro conjunto de medições. O mesmo princípio é utilizado em todos os conjuntos de medições.

5.2 - Resultados Obtidos - zero a 200 Hz

As figuras 5.5 a 5.17 apresentam o espectro de potência da resposta medida no acelerômetro localizado a meia viga. O espectro é relativamente bem comportado e a primeira frequência onde a potência é mínima é bem nítida em todos os experimentos. Para a segunda frequência, esta nitidez é boa até a folga de 1.10 mm (folga diminuindo). A partir daí, a segunda frequência não pode mais ser identificada com segurança. De fato isto tem uma explicação relativamente simples. Quando a folga diminui, ambas as frequências estão migrando para cima. O que está ocorrendo, como veremos mais tarde, é que estamos conseguindo enxergar apenas parte da migração. Para folgas menores, a frequência varia muito. Como a migração da segunda frequência está ocorrendo para cima com a diminuição da folga ela tende a ficar fora da faixa de frequência da excitação. Daí a perda de nitidez do espectro.

A diferença de folga entre os experimentos cujos resultados são os das figuras 5.5 e 5.6 é vista com muita cautela. A folga não é realmente medida para o espectro da figura 5.5. A

diferença entre as folgas das figuras 5.5 e 5.6 diz respeito unicamente a ocorrência ou não de impactos, ainda que quase degenerados. A diferença entre as folgas é menor que o menor passo possível para variar a folga. O menor valor possível para variar a folga é 0.025 mm, isto é, metade da lâmina de menor espessura. Chegamos a esta conclusão porque procedemos da seguinte maneira em cada conjunto de medidas:

- Pré-fixamos o nível de potência de tal forma que o sistema esteja no limiar do impacto, mas de forma que não ocorram impactos. Reconhecemos que isto depende da habilidade do operador. Todavia, é possível obter razoável sensibilidade selecionando ganhos adequados no equipamento.
- Introduzimos então uma lâmina metálica de 0.05 mm no sistema de lâminas para efetuarmos a primeira medida.
- A partir daí variamos a folga com as lâminas, combinando lâminas de 1mm, 0.2 mm e 0.05 mm. Isto permite variar a folga com passo de mínimo de 0.025 mm, adicionando ou subtraindo uma lâmina de 0.05 mm em um dos lados da viga.

Procedimento semelhante foi utilizado para garantir a simetria da folga, porém com uma folha de papel. Para isto utilizamos um pré-teste com excitação periódica na primeira frequência natural. Com uma folha fina de papel (papel comum), é possível detectar a existência ou não de impactos em lado ou outro da viga. Desta forma, o conjunto contendo os batentes foi deslocado para um lado ou outro, até que os limiares de ocorrência de impactos fossem iguais dos dois lados da viga (dentro da precisão permitida pela folha de papel de aproximadamente 0.05 mm).

Passemos à análise das figuras. Nota-se na figura 5.5 um pequeno vale no espectro entre os dois valores de frequência para os quais a potência é muito pequena. A primeira frequência tem valor 13.8125 Hz e a "*frequência estranha*" tem valor 27.3125 Hz, resultando numa razão de 1.98, muito próxima, portanto, do dobro. Desta forma, identificamos esta frequência estranha como sendo apenas o harmônico de segunda ordem da resposta da primeira frequência. É verdade que nem sempre a energia é suficiente para excitar esta frequência a ponto de torná-la bem clara. Isto também aconteceu, pode-se lembrar, com os resultados simulados. É verdade também que esta clareza depende da complexidade do movimento. Como também já vimos, a folga é um dos parâmetros que alteram esta complexidade.

A mesma explanação anterior se aplica ao vale intermediário da figura 5.6. A partir da figura 5.7 os espectros começam a apresentar algumas "*sujeiras*". Para aplicarmos um critério único na determinação das frequências, consideramos sempre aquela frequência onde a potência é mínima no vale tomado como um todo, embora em valores próximos a ela possam existir outros mínimos locais. Infelizmente não temos os harmônicos múltiplos para confirmação.

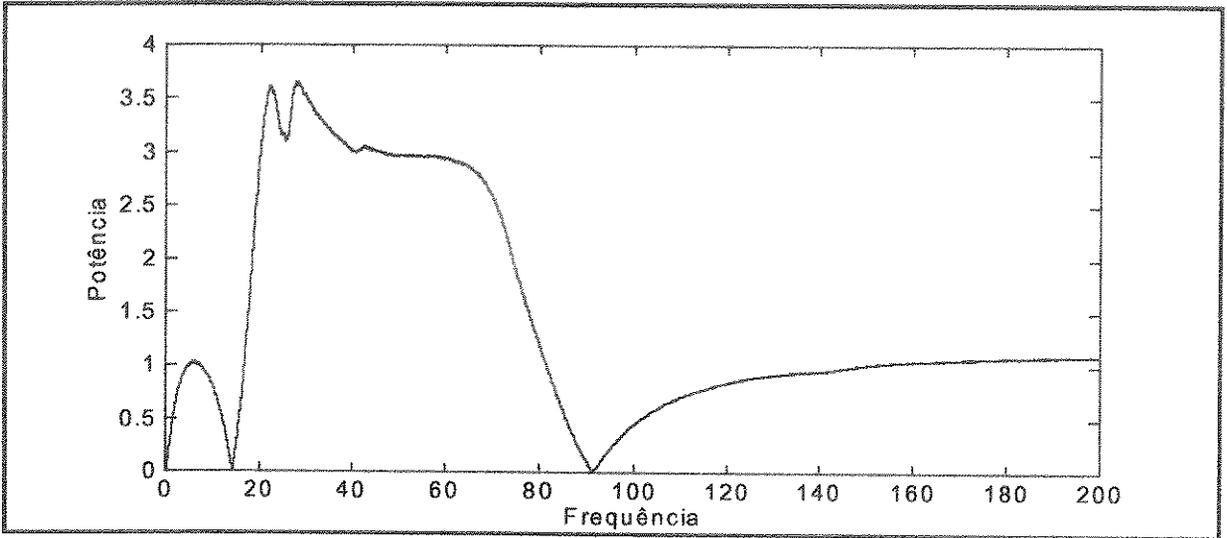


Figura 5.5: Espectro de potência da resposta para folga maior que 2.20 mm

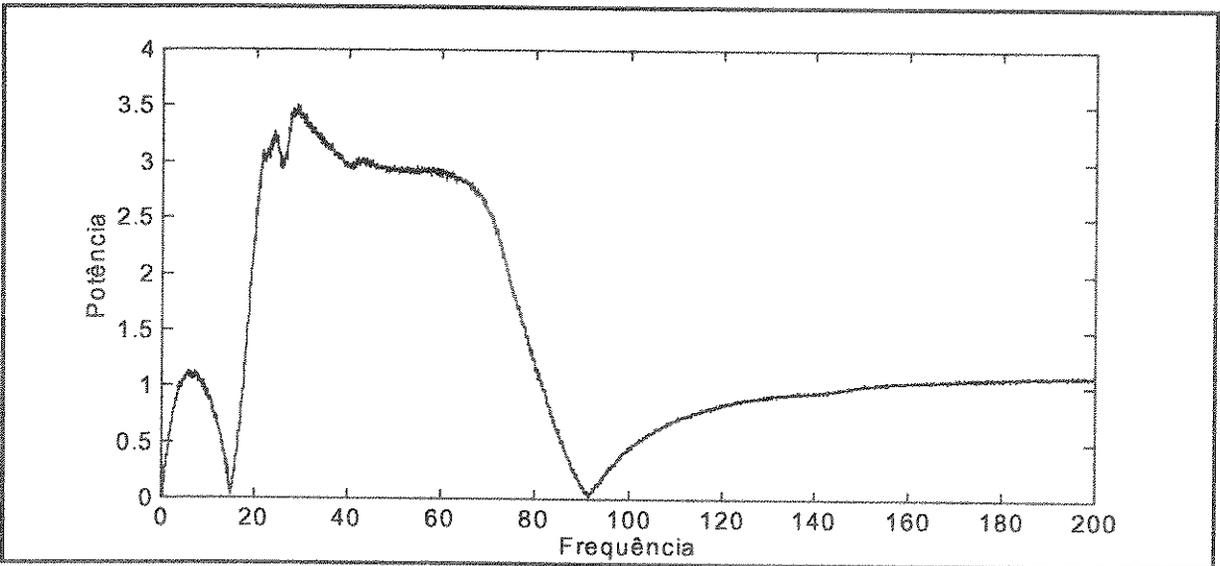


Figura 5.6: Espectro de potência da resposta para folga de 2.20 mm

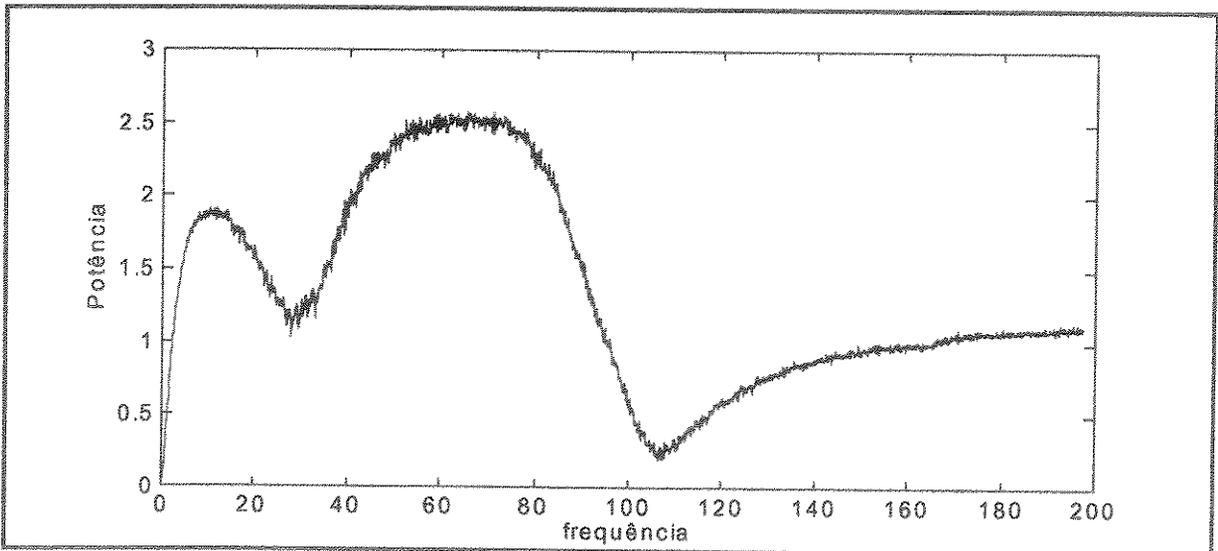


Figura 5.7: Espectro de potência da resposta para folga de 2.05 mm

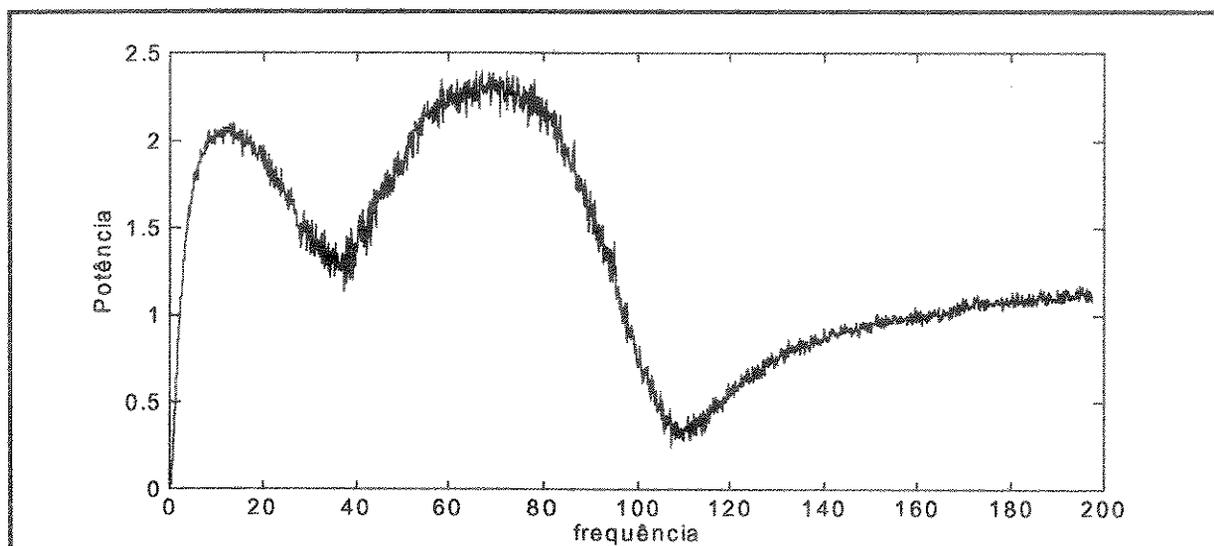


Figura 5.8: Espectro de potência da resposta para folga de 1.90 mm

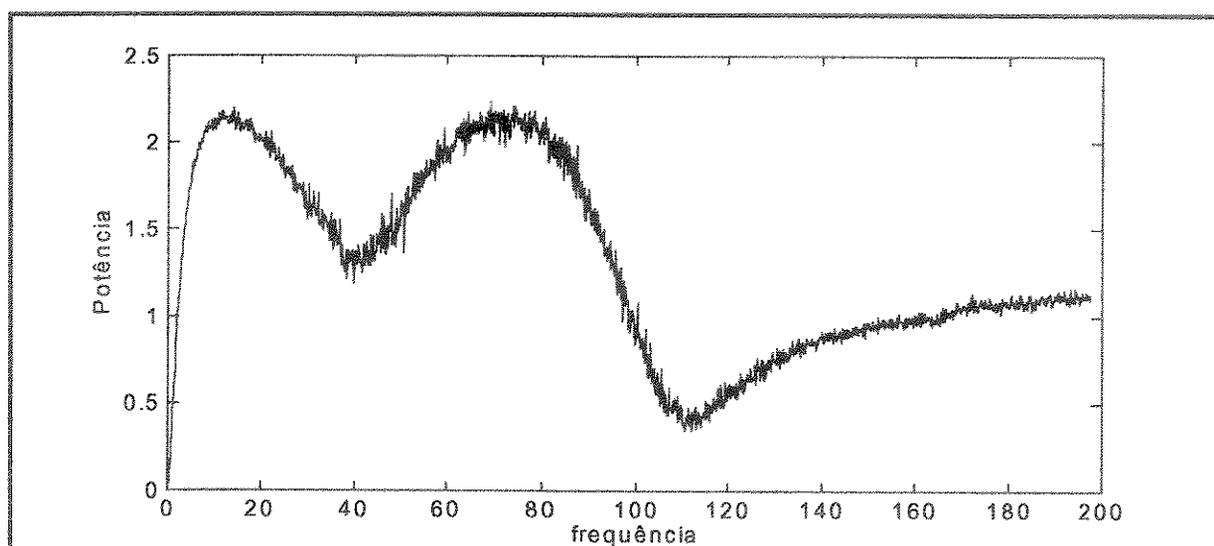


Figura 5.9: Espectro de potência da resposta para folga de 1.70 mm

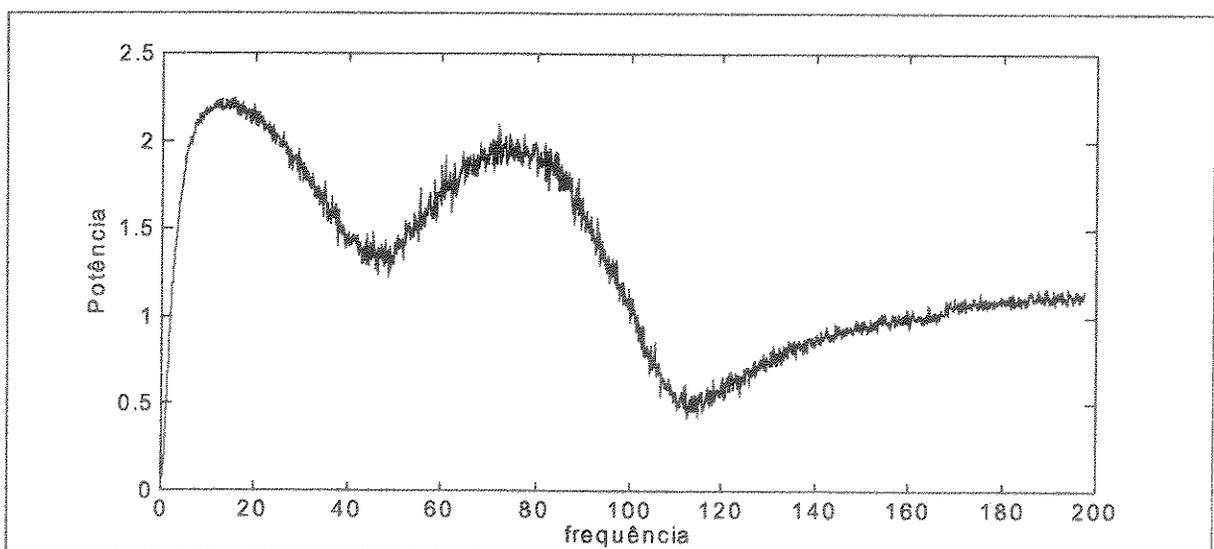


Figura 5.10: Espectro de potência da resposta para folga de 1.60 mm

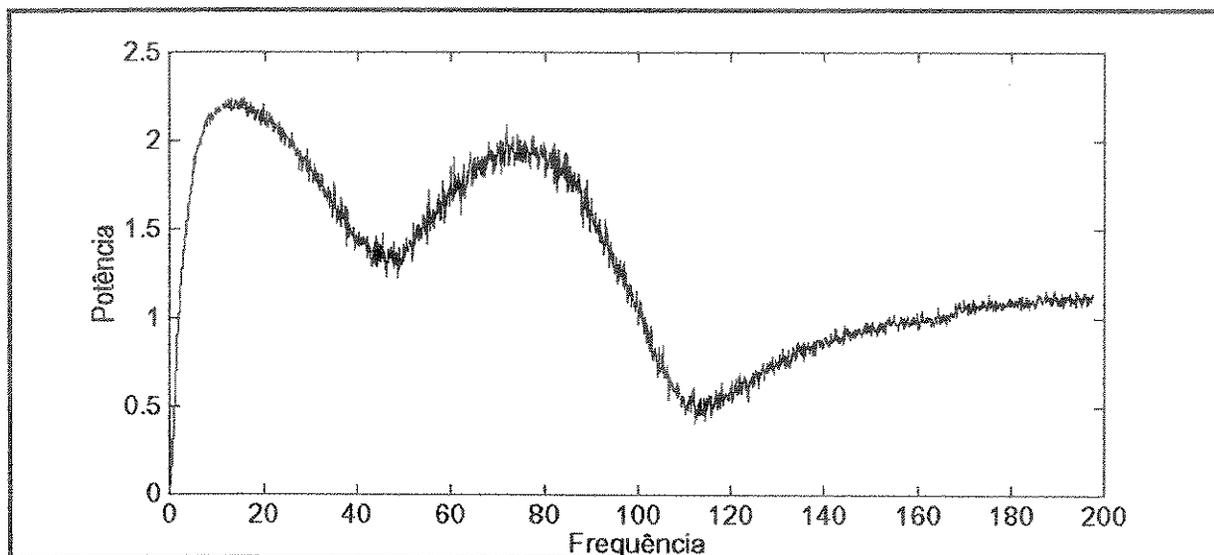


Figura 5.11: Espectro de potência da resposta para folga de 1.50 mm

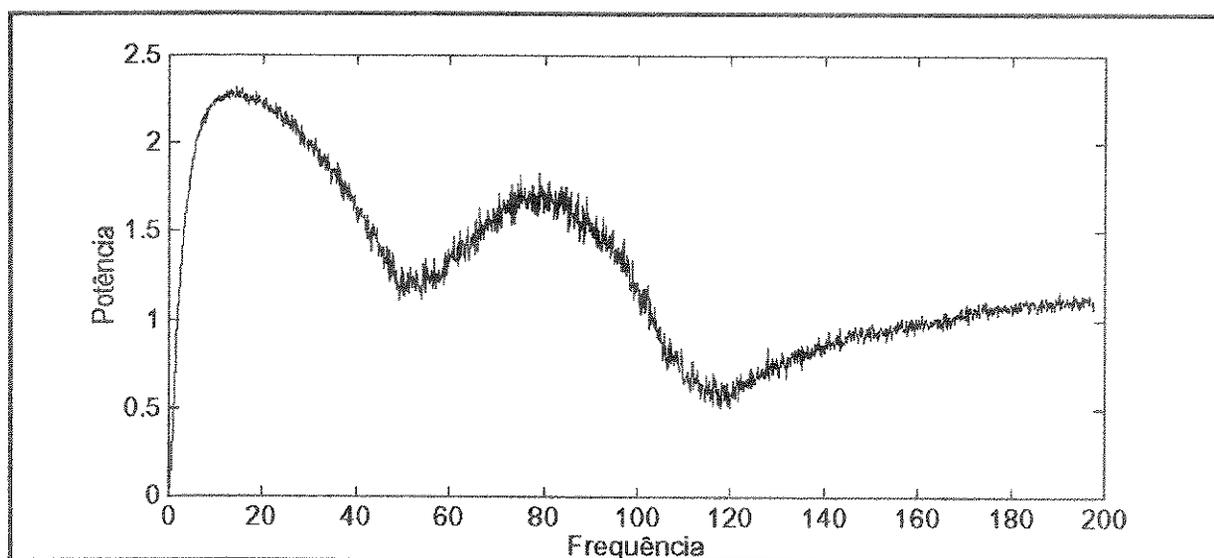


Figura 5.12: Espectro de potência da resposta para folga de 1.30 mm

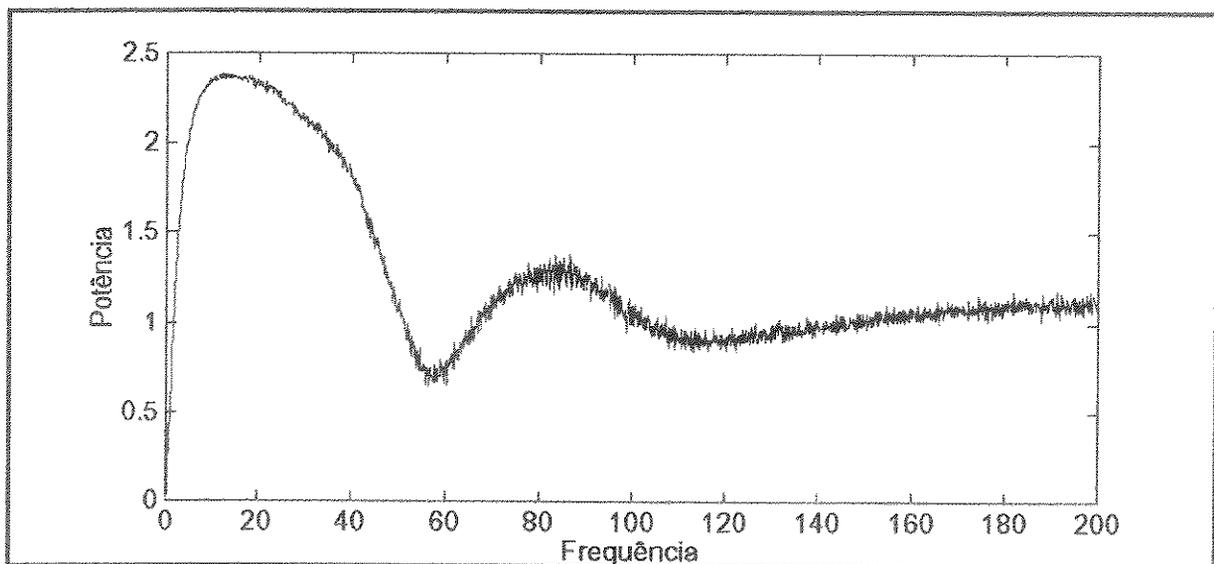


Figura 5.13: Espectro de potência da resposta para folga de 1.10 mm

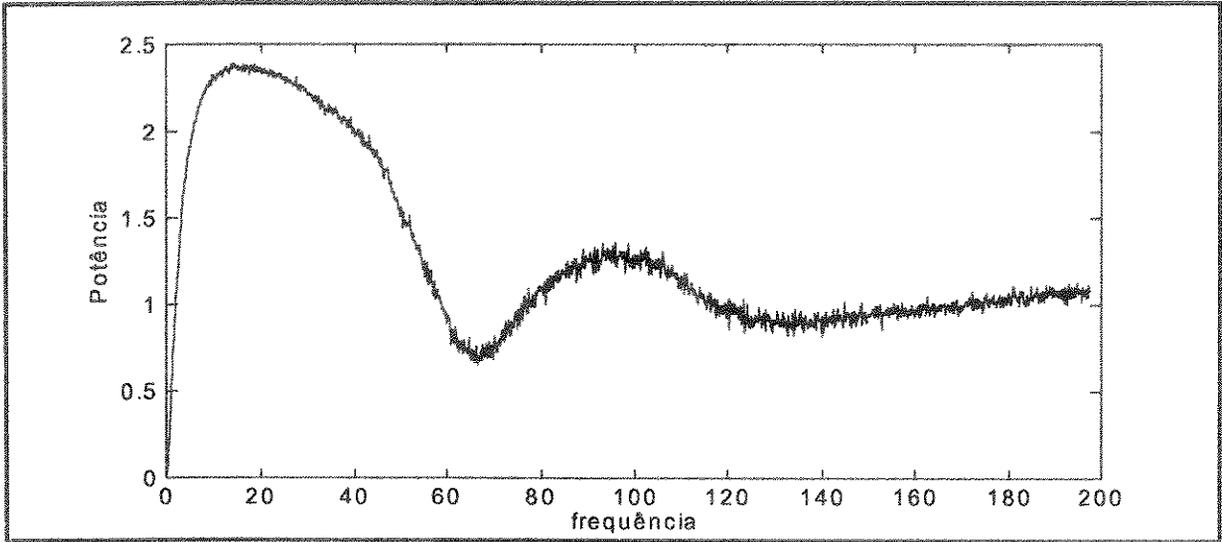


Figura 5.14: Espectro de potência da resposta para folga de 0.65 mm

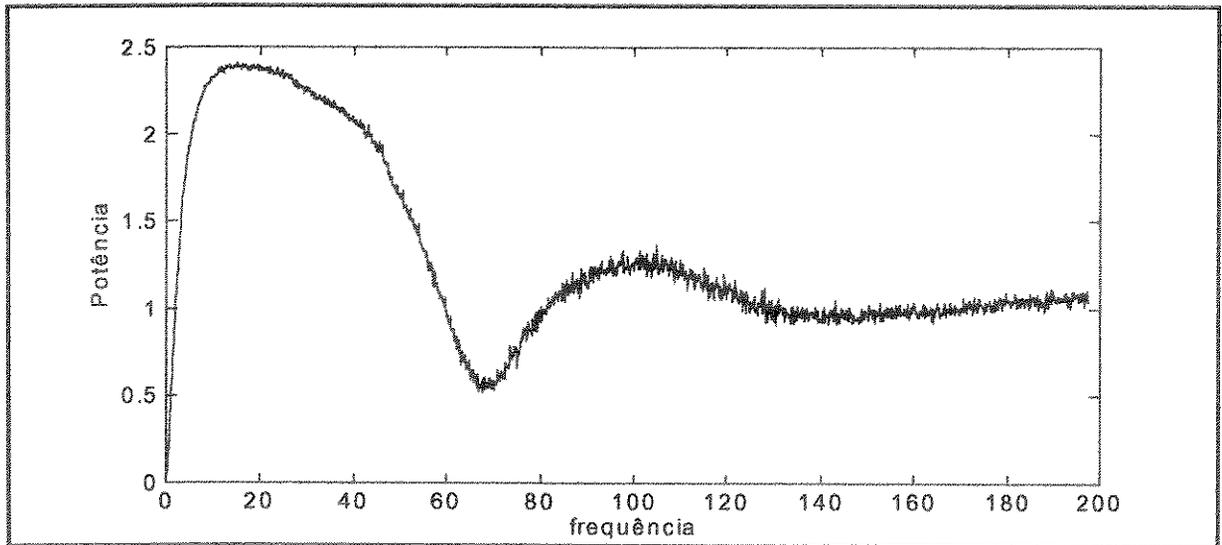


Figura 5.15: Espectro de potência da resposta para folga de 0.50 mm

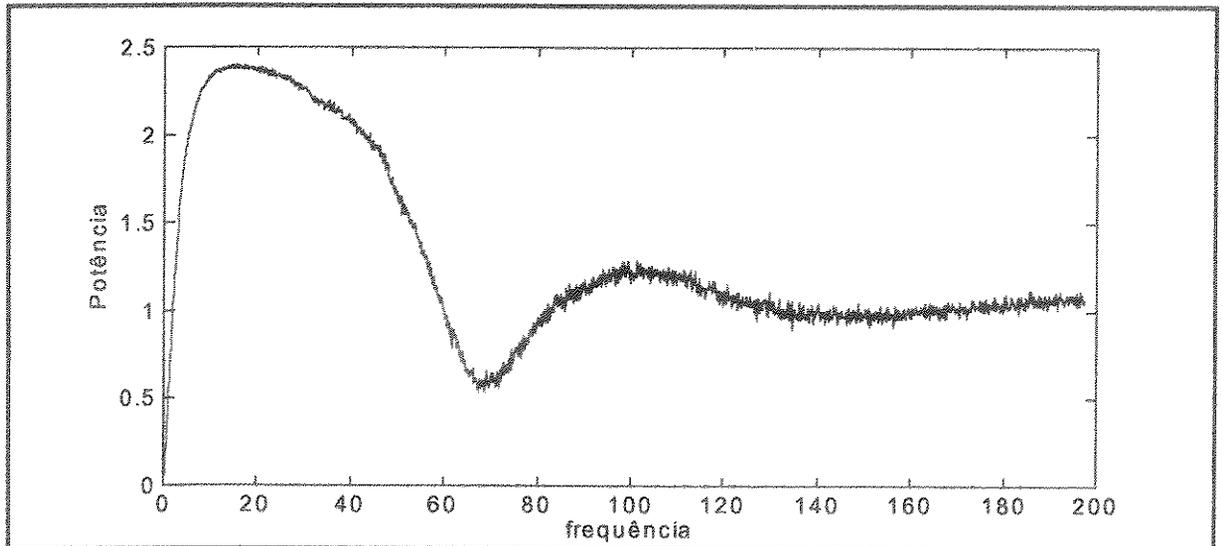


Figura 5.16: Espectro de potência da resposta para folga de 0.20 mm

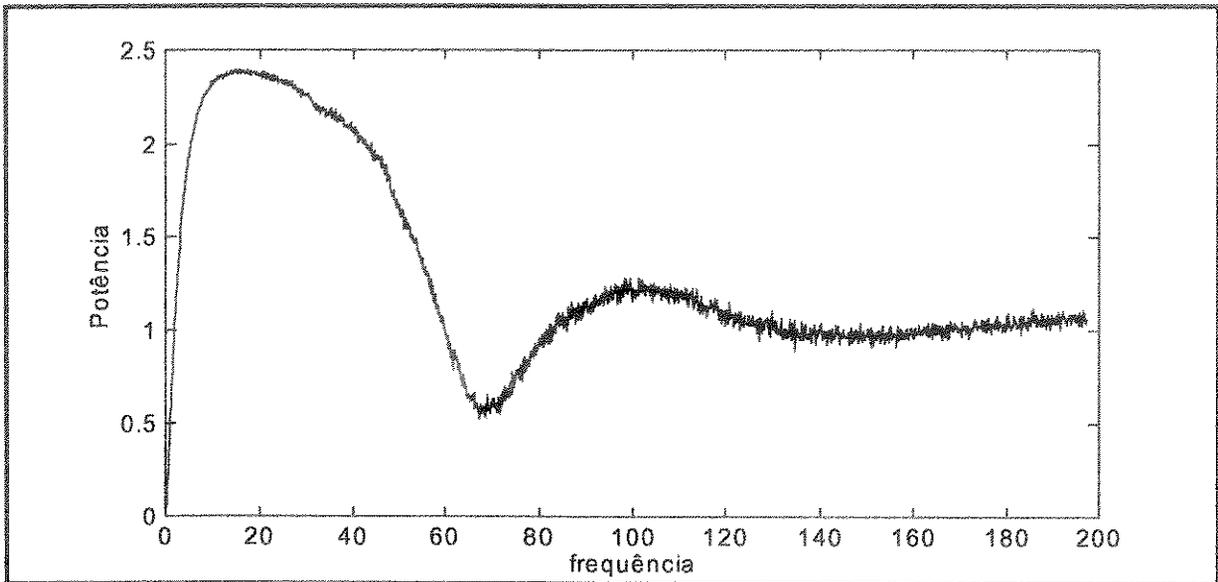


Figura 5.17: Espectro de potência da resposta para folga nula

A figura 5.18 apresenta a migração da primeira frequência característica com a variação da folga. Os valores extremos para folga nula e sistema sem impacto (folga infinita) são aqueles das equações 04 e 05, respectivamente.

$$\ln[f(\sigma)] = \ln(f_c) + \sqrt{[\ln(f_c) - \ln(f_0)]^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_c^2}\right)} \quad (07)$$

Os parâmetros que determinam a elipse ajustada para este caso são

$$\begin{aligned} f_c &= 13.8125 \\ f_0 = \bar{f} &= 70.025 \\ \sigma_c = \sigma_{\max} &= 1.0 \end{aligned} \quad (08)$$

A figura 5.19 apresenta a migração da frequência característica (asteriscos) e a função proposta para a migração (linha contínua), conforme propomos. A equação 07 reproduz a função proposta (migração para baixo com o aumento da folga) e a equação 08 apresenta os parâmetros da função para o caso em questão. A figura 5.20 apresenta o erro entre as frequências identificadas experimentalmente e aquelas previstas pela função proposta. Os resultados apresentam uma concordância muito boa. De todo modo, deve-se ter um cuidado muito grande com a medição da folga próxima à folga máxima, como comentamos a seguir.

Repare que as figuras 5.18, 5.19 e 5.20 apresentam apenas 12 pontos, contra 13 observações (figuras 5.5 a 5.17). Isto porque, propositadamente, omitimos o ponto correspondente à figura 5.6. Na verdade não sabemos qual o valor exato da folga limite para a ocorrência de impactos. Como a derivada da curva proposta tende ao infinito quando a folga

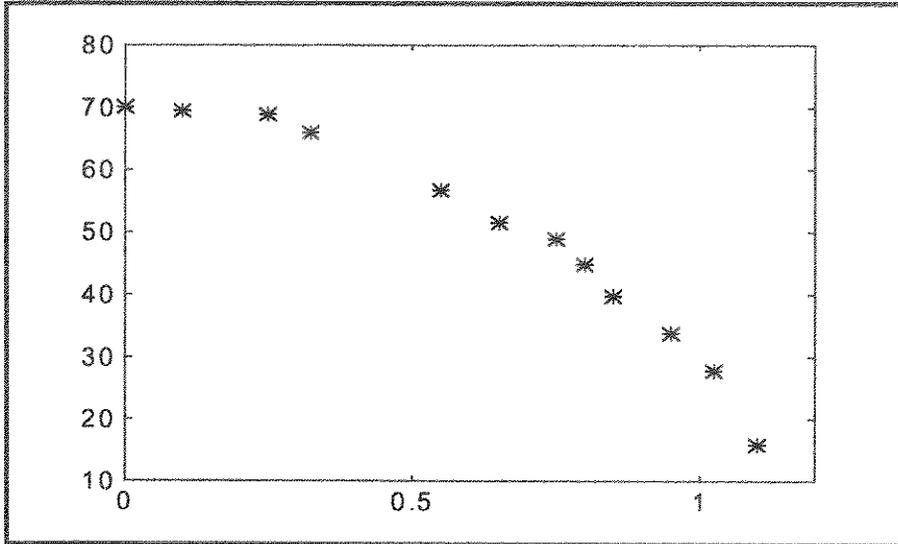


Figura 5.18: Migração da primeira frequência característica

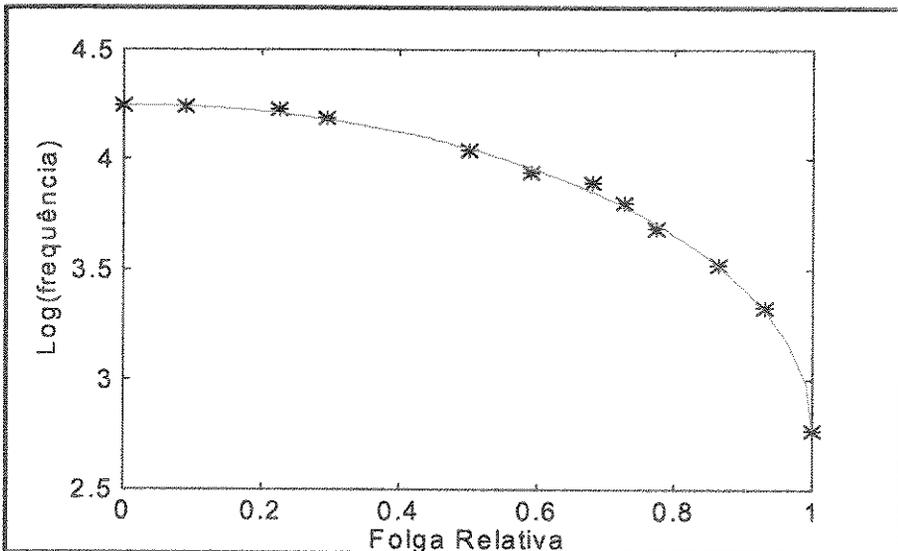


Figura 5.19: Migração da primeira frequência característica
 pontos: experimentos; linha contínua: função proposta

tende a este valor, um pequeno erro no valor da folga pode levar a um grande erro na frequência prevista. É por isto que, via de regra, os pontos próximos à folga máxima sempre apresentam os maiores erros. No caso em questão, sabemos que a folga máxima é, no máximo 0.025 mm maior que folga do caso da figura 5.6.

Dentro da variação de zero até este valor poderíamos ter um erro de até 28 % entre a frequência prevista por (07) e a medida para o caso da figura 5.6. No entanto, para o resto do conjunto de pontos, o erro continuaria controlado dentro da faixa de 6%, como veremos um pouco mais adiante. Para o caso da figura 5.19, temos considerado que a folga para o caso da figura 5.5 é igual a da figura 5.6. O erro maior, no caso em questão, sempre será do penúltimo ponto da série (folga crescendo), já que consideramos o último ponto como sendo do sistema sem impacto, o que corresponde à realidade, pois não houve impacto no experimento deste ponto.

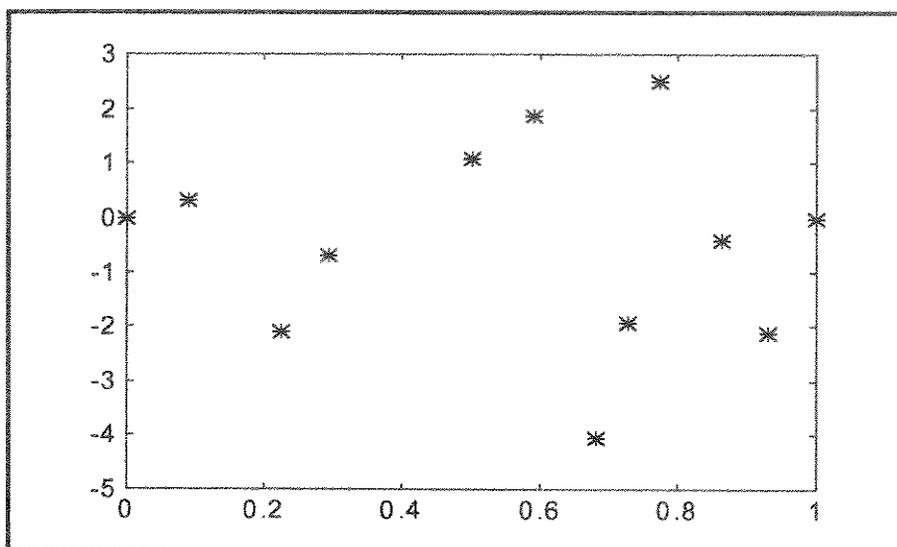
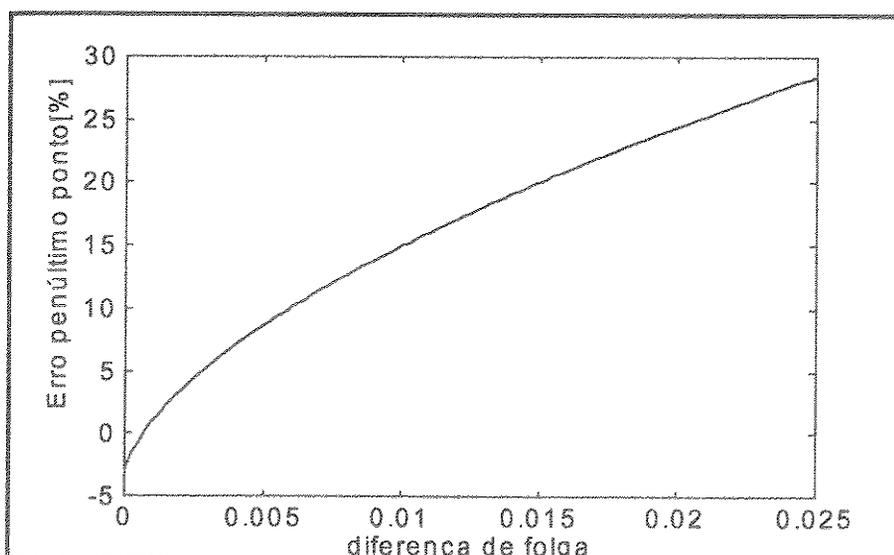


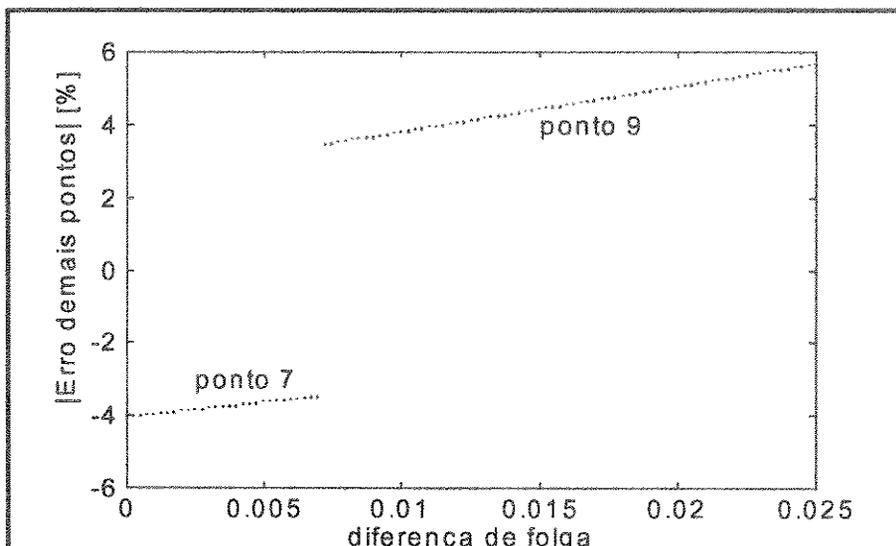
Figura 5.20: Erro entre os valores medidos e os previstos pela função proposta

A figura 5.21-a apresenta a variação do erro entre os valores da frequência característica segundo a função proposta e o experimento para o caso da figura 5.6. A figura 5.21-b apresenta o erro máximo para os outros pontos que não o da figura 5.6. Note que o erro máximo dos demais pontos que não o penúltimo (em termos absolutos) se concentra em dois pontos. O ponto marcado como 7 se refere ao caso da figura 5.11 e o ponto marcado como 9 se refere ao caso da figura 5.9. Note que, embora o erro possa ser consideravelmente grande (numa hipótese menos provável) para o penúltimo ponto (caso da figura 5.6), não se torna descontrolado para os demais.

Embora o erro, numa hipótese menos provável, possa ser grande próximo à folga limite, a baixa confiabilidade da previsão nesta região não invalida, todavia, a tendência dos dados. Para aumentarmos a precisão dos dados temos de usar um sistema que permita um controle mais refinado da folga.



5.21-a: Erro penúltimo ponto



5.21-b: Erro máximo demais pontos

Figura 5.21- Erro em função da diferença de folga entre os casos das figuras 5.5 e 5.6

A figura 5.22 apresenta a variação da segunda frequência característica. Note que apenas as folgas superiores a 1.05 mm aparecem na figura. Não é possível inferir uma tendência para a migração, a não ser que ela deve aumentar com a diminuição da folga. Não vamos fazer comentários nesta subseção. Como comentado no início desta subseção, provavelmente estamos enxergando apenas parte da migração. Confirmando-se a migração para cima, espera-se, de acordo com as simulações um aumento muito grande da frequência para folgas menores. Provavelmente o valor final (para folga nula) estará fora da faixa de frequência da excitação.

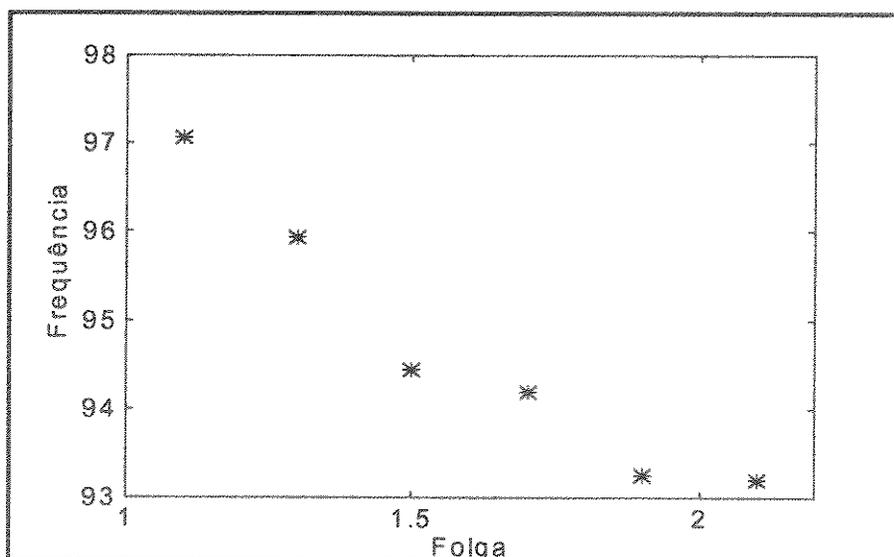


Figura 5.22: Migração da segunda frequência característica

5.3 - Resultados Obtidos - zero a 400 Hz

Para esta faixa de frequências estamos apresentando a função de resposta em frequência obtida experimentalmente para cada caso. Como já dissemos, os resultados devem ser vistos com cuidado. No entanto, temos nos cercado dos cuidados necessários, fazendo a comparação com o espectro de potência. Não observamos nenhuma discrepância entre os resultados das funções de resposta em frequência e dos espectros de potência quando identificamos as frequências características. As figuras 5.23 a 5.40 apresentam as funções de resposta em frequência para vários valores da folga. O número de figuras parece excessivo, mas nos parece necessário para permitir uma visualização do que ocorre.

Notamos duas frequências se abrindo em torno da segunda frequência característica. Isto pode indicar uma migração em dois sentidos, conforme indica a figura 4.5, que trata dos resultados da simulação. Esta abertura é que fica mais nítida quando plotamos a função de resposta em frequência. Note na figura 5.40 que os dois primeiros picos podem indicar também uma dupla migração a partir da primeira frequência do sistema com folga nula.

Notamos também que, para folgas inferiores a 0.55 mm (inclusive), a primeira frequência não pode ser determinada com segurança. Abaixo de 0.35 mm sequer podemos dizer com segurança que existe uma frequência característica inferior a 70 Hz.

Para folgas inferiores a 0.55 mm o ramo superior da abertura da segunda frequência perde a nitidez. De todo modo, em algumas situações, é possível identificar uma frequência que se sobressai com algum diferencial em relação às frequências vizinhas. Veremos mais adiante que terceira frequência característica apresenta uma migração bem comportada.

Lembramos que a limitação à faixa de 400 Hz deve-se aos problemas que surgem quando se excita randomicamente um sistema. Se a faixa de frequência é aumentada, deve-se aumentar a potência fornecida ao sistema para que se tenha uma amplitude de vibração razoável, permitindo assim uma variação mensurável da folga. Como a potência é proporcional ao quadrado da frequência, um aumento da faixa de 200 Hz para 400 Hz implica em um aumento muito grande na potência fornecida ao sistema. Decidimos limitar a faixa a 400 Hz para operarmos de forma segura os equipamentos utilizados.

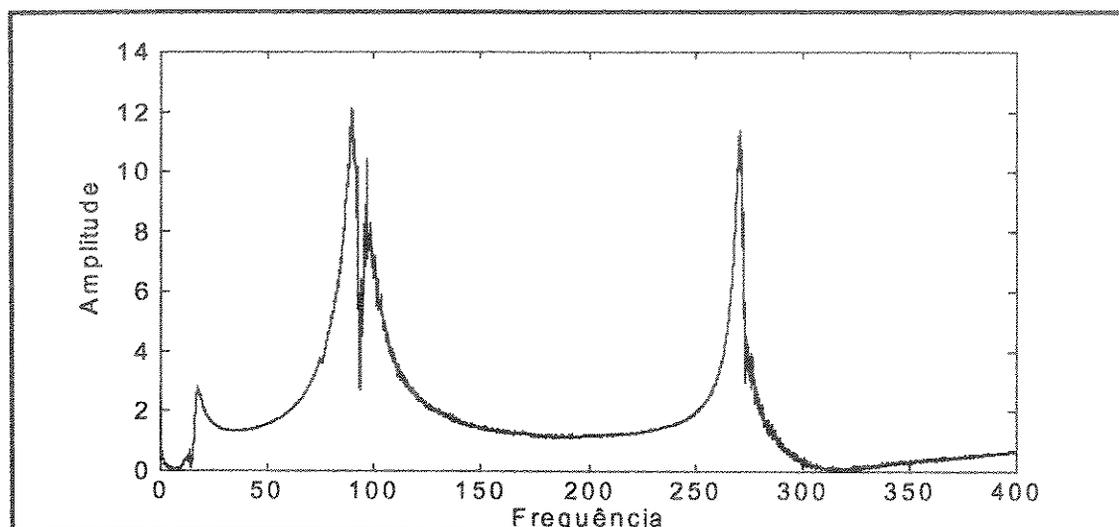


Figura 5.23: Espectro de potência da resposta para folga de 0.90 mm

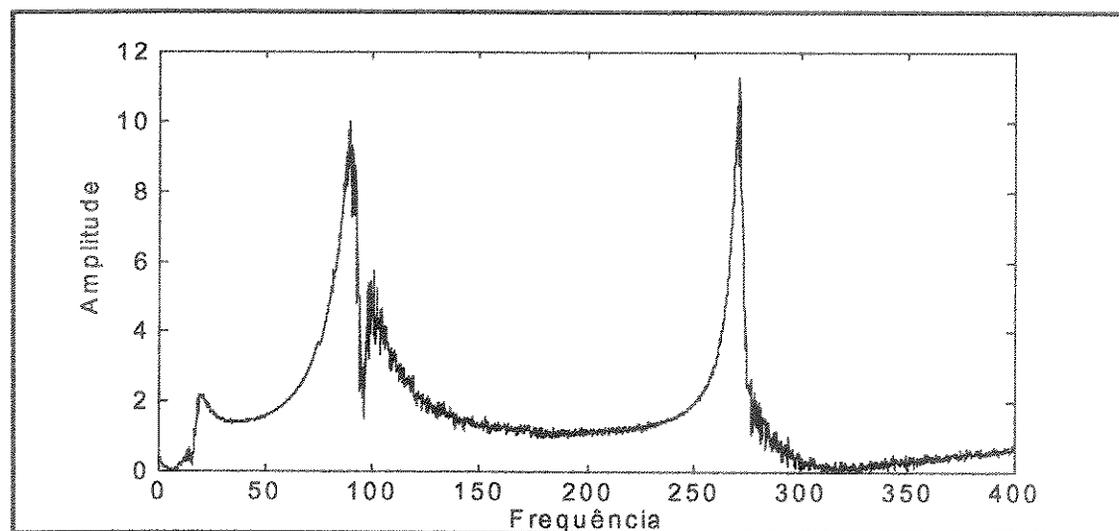


Figura 5.24: Espectro de potência da resposta para folga de 0.85 mm

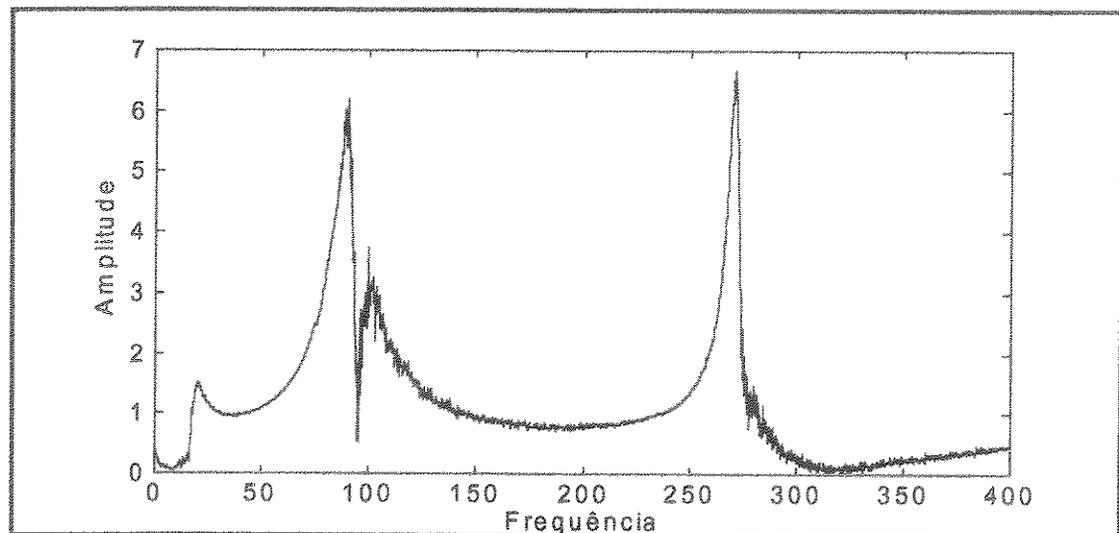


Figura 5.25: Espectro de potência da resposta para folga de 0.80 mm

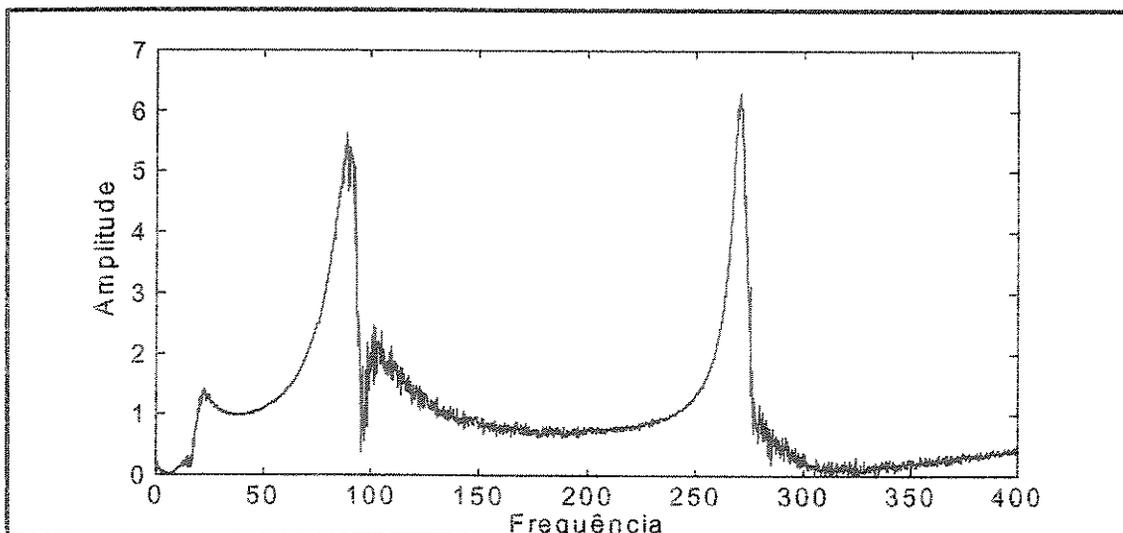


Figura 5.26: Espectro de potência da resposta para folga de 0.75 mm

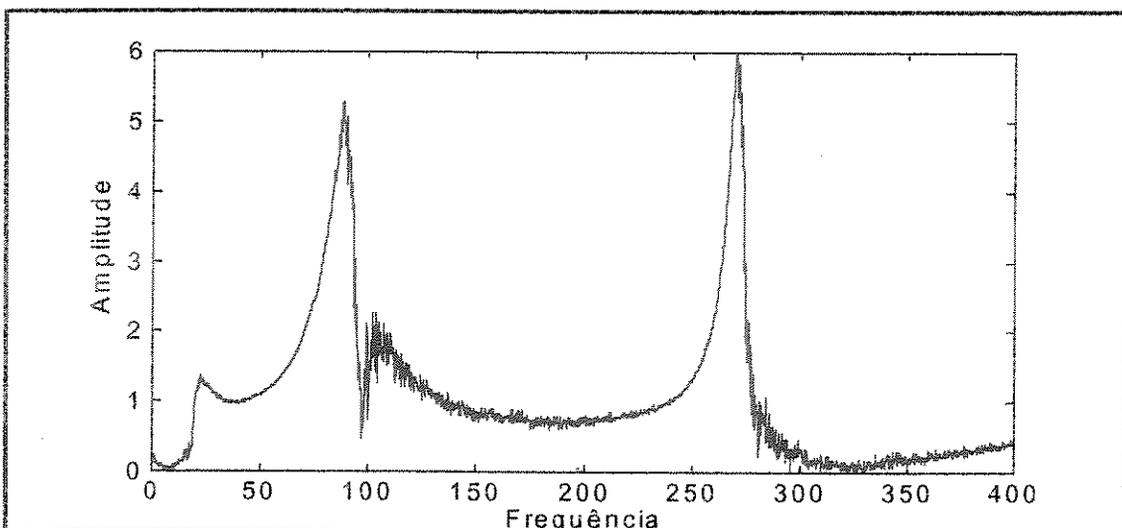


Figura 5.27: Espectro de potência da resposta para folga de 0.70 mm

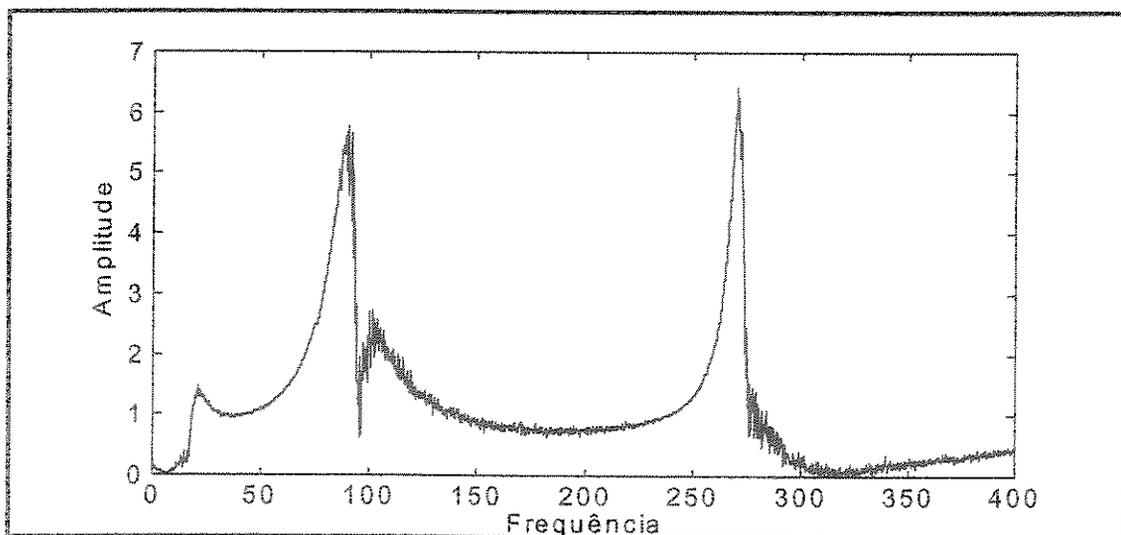


Figura 5.28: Espectro de potência da resposta para folga de 0.65 mm

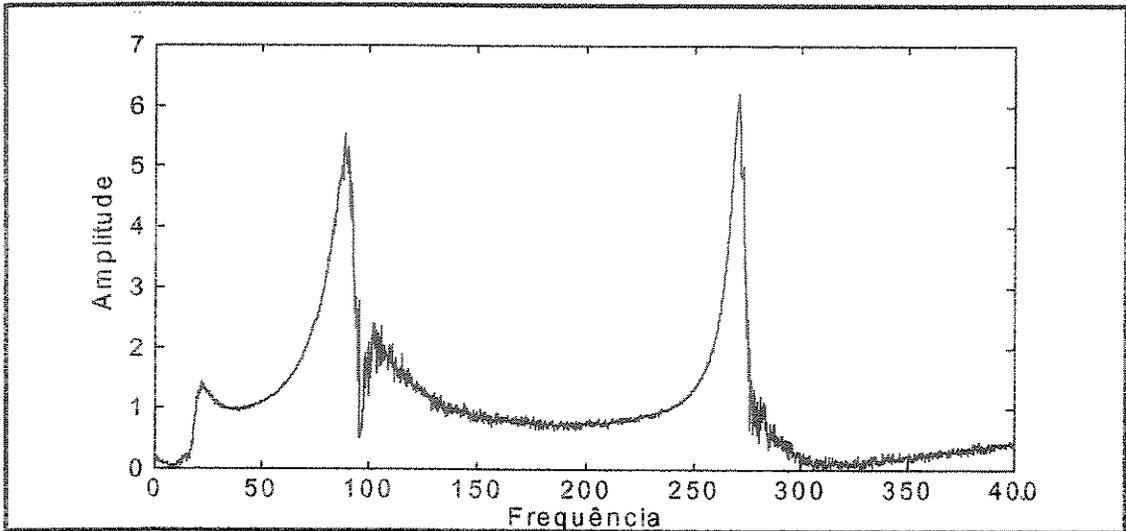


Figura 5.29: Espectro de potência da resposta para folga de 0.60 mm

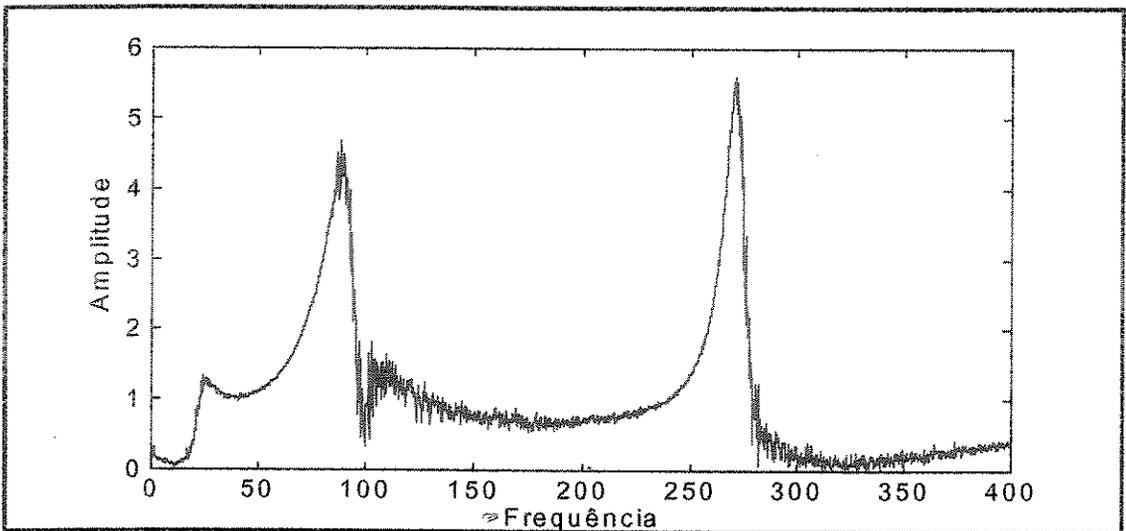


Figura 5.30: Espectro de potência da resposta para folga de 0.55 mm

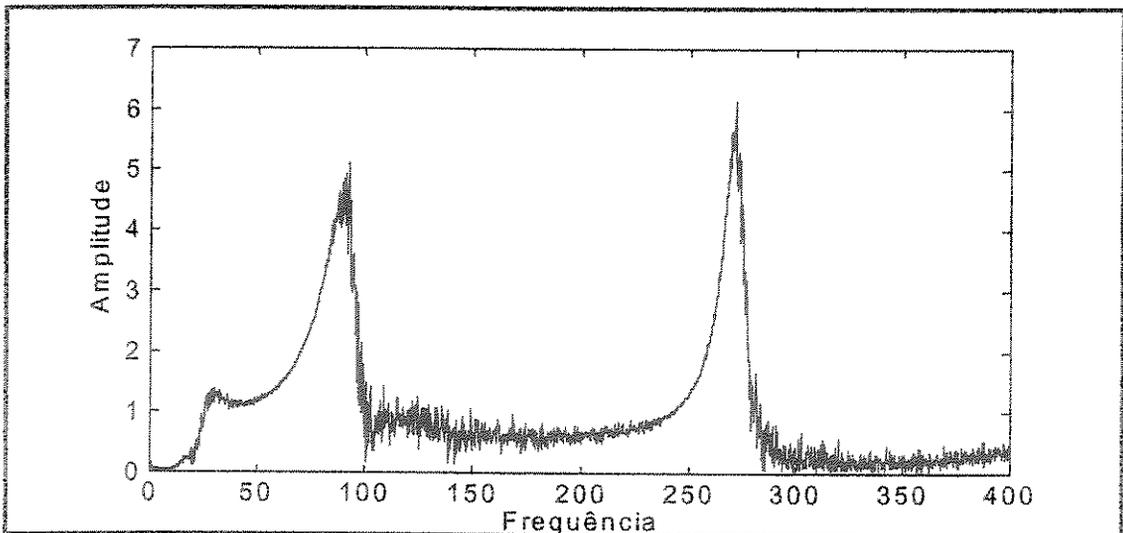


Figura 5.31: Espectro de potência da resposta para folga de 0.50 mm

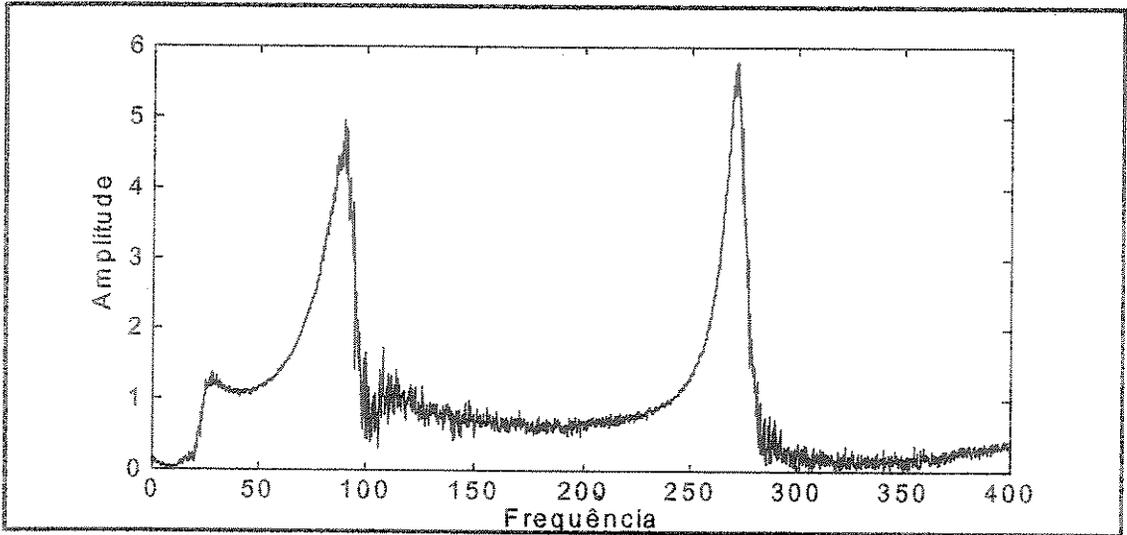


Figura 5.32: Espectro de potência da resposta para folga de 0.45 mm

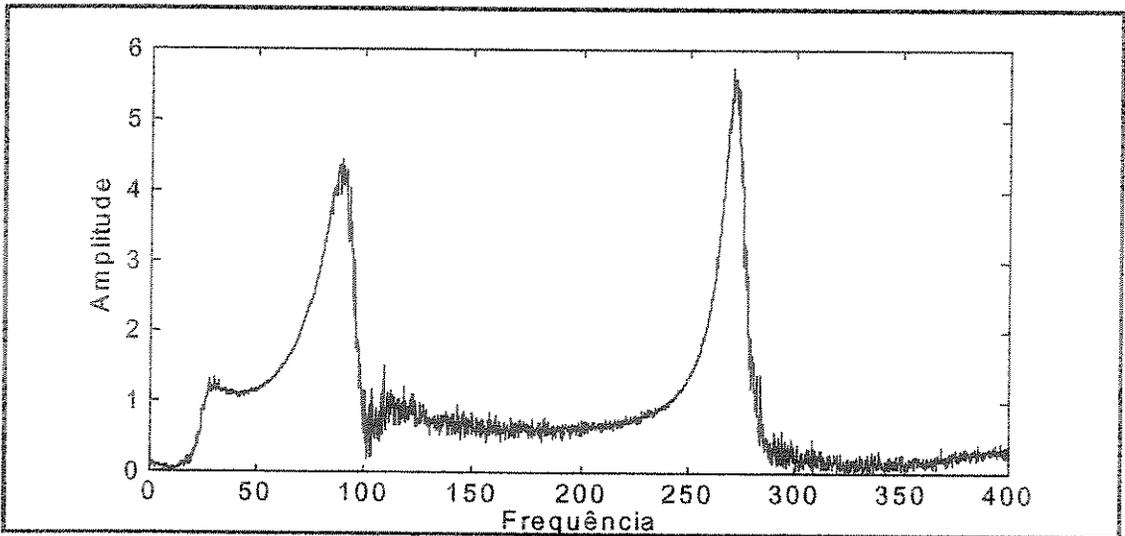


Figura 5.33: Espectro de potência da resposta para folga de 0.40 mm

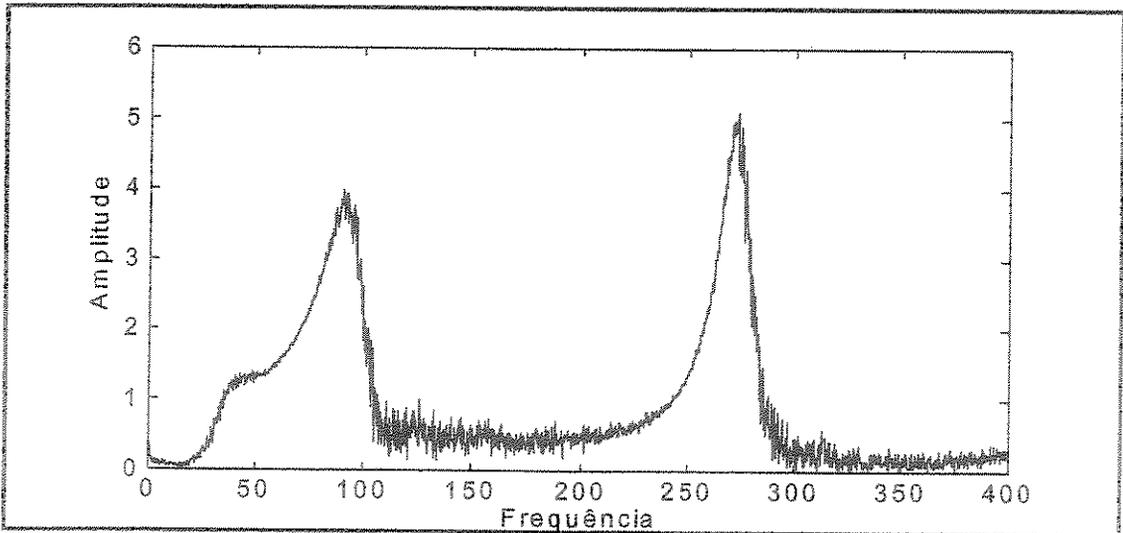


Figura 5.34: Espectro de potência da resposta para folga de 0.35 mm

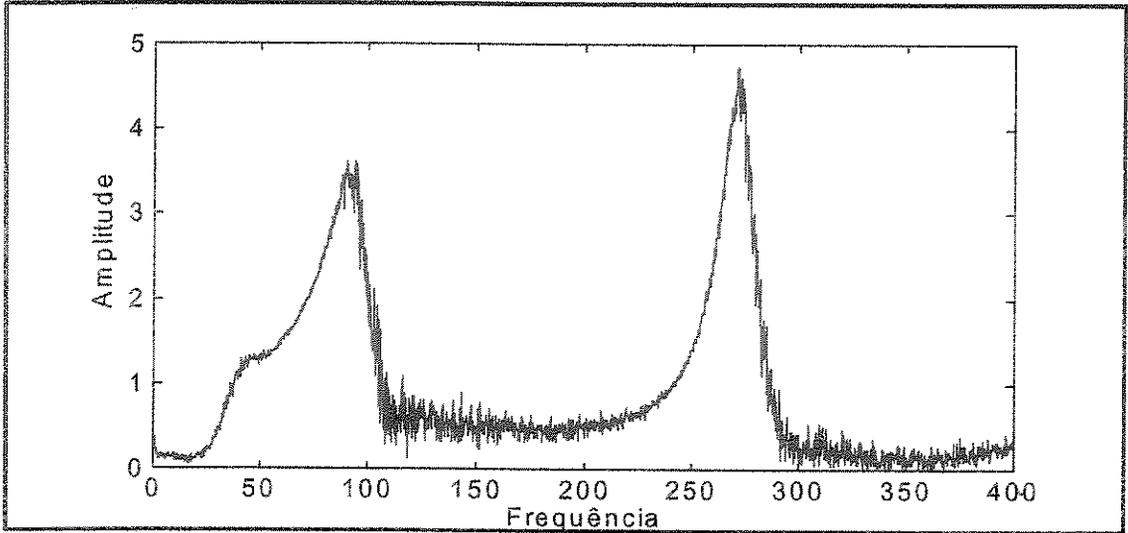


Figura 5.35: Espectro de potência da resposta para folga de 0.30 mm

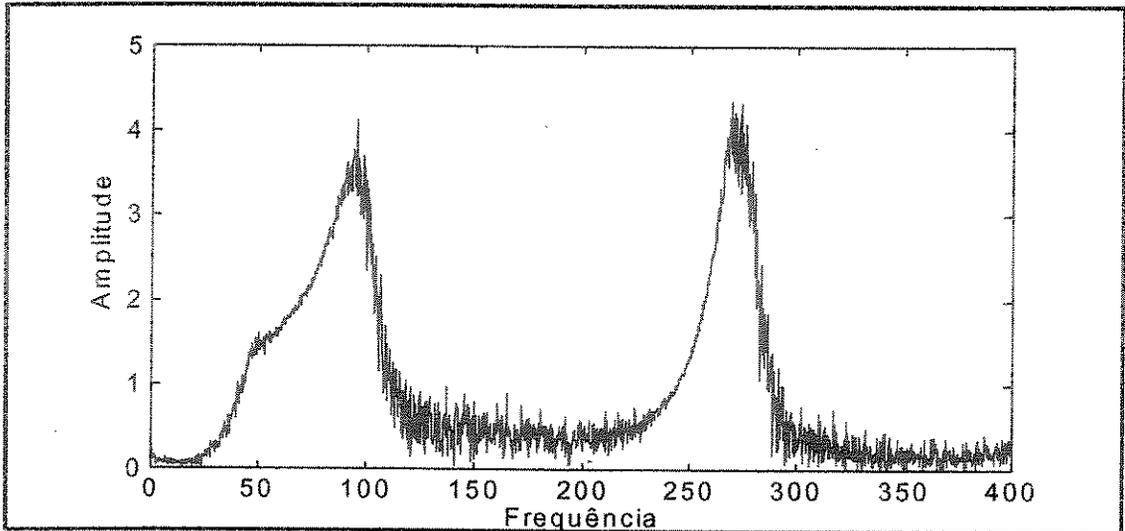


Figura 5.36: Espectro de potência da resposta para folga de 0.25 mm

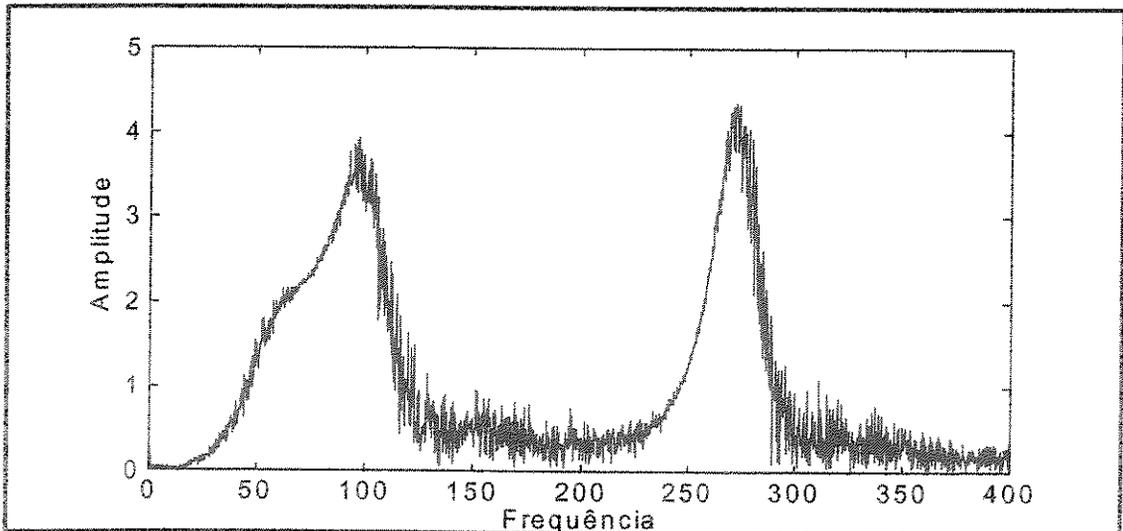


Figura 5.37: Espectro de potência da resposta para folga de 0.20 mm

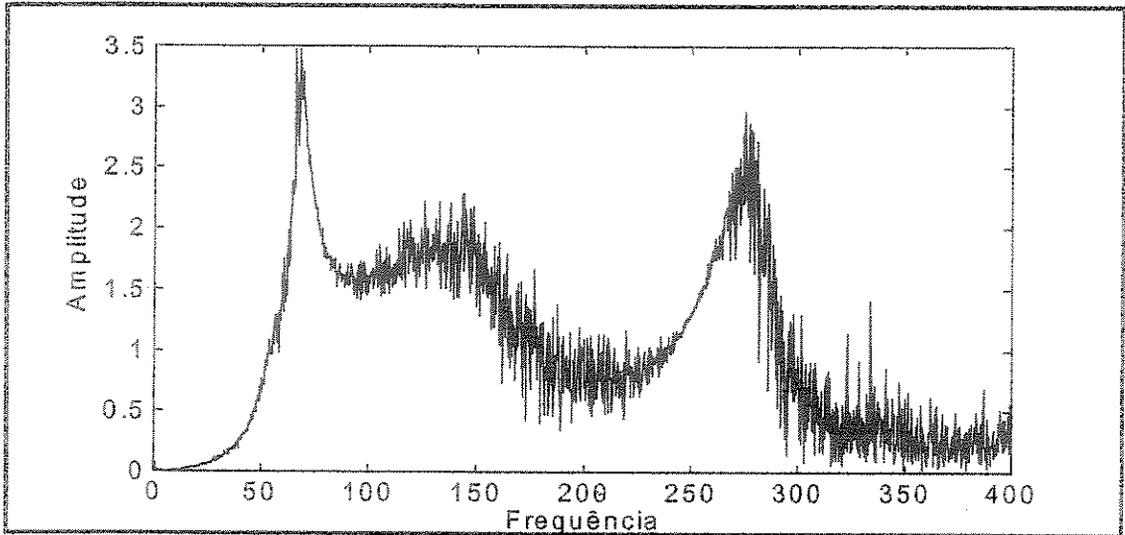


Figura 5.38: Espectro de potência da resposta para folga de 0.15 mm

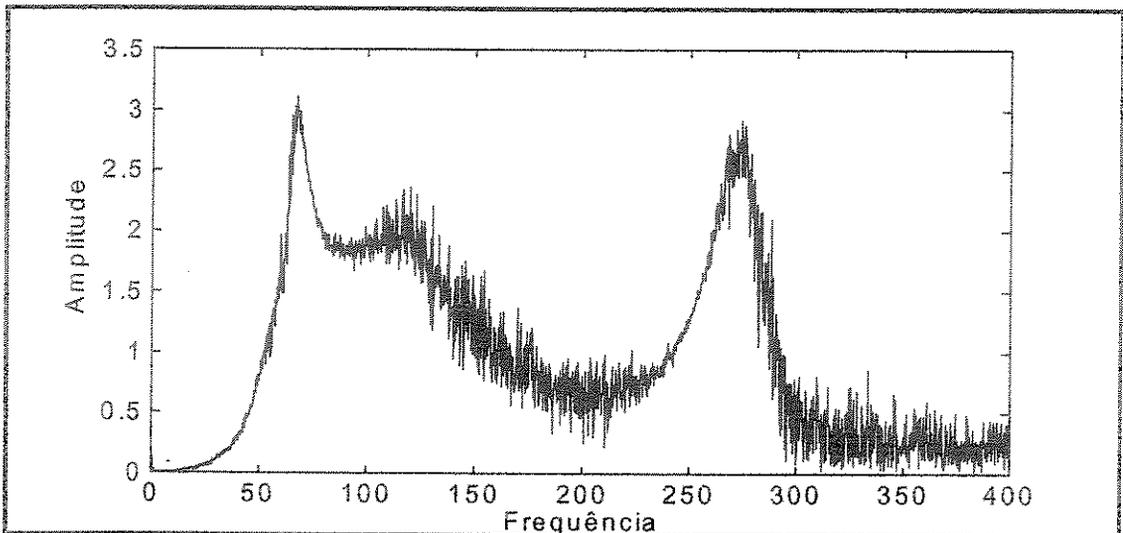


Figura 5.39: Espectro de potência da resposta para folga de 0.10 mm

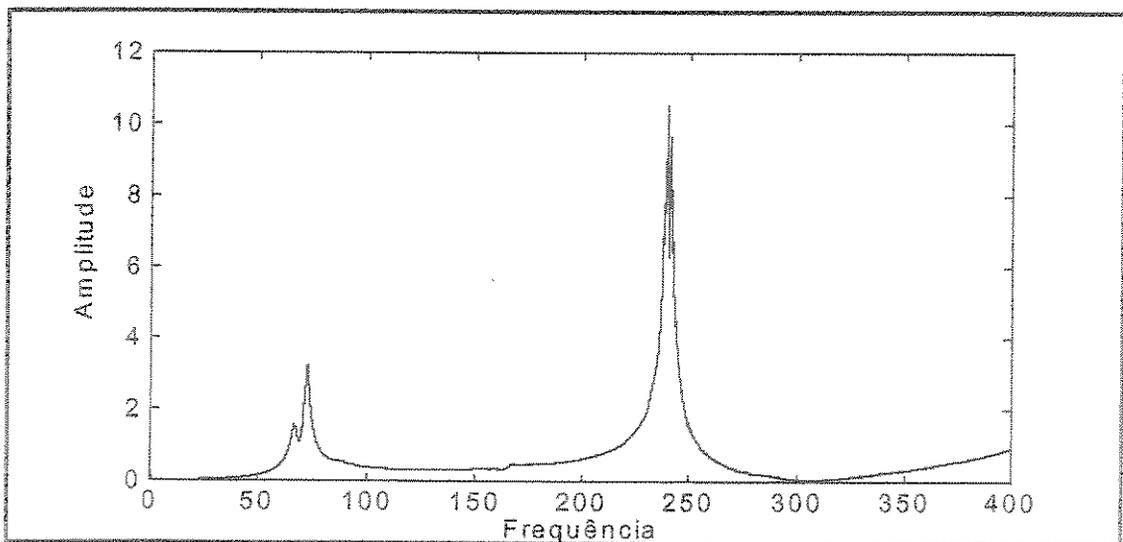


Figura 5.40: Espectro de potência da resposta para folga nula

A figura 5.41 apresenta a migração da primeira frequência. Os pontos marcados com círculos indicam que as respectivas frequências foram identificadas com insegurança, razão porque devem ser vistas com restrições. Vejamos que, embora um ajuste à função proposta para a migração esteja fora de cogitação, alguns aspectos da migração obedecem às conjecturas formuladas. Note que a derivada de uma função ajustada aos pontos deve provavelmente tender a zero quando a folga tende a zero. Da mesma forma, quando o sistema tende ao sistema sem impacto, a derivada desta mesma função provavelmente tenderá ao infinito. Note também que os pontos ficam desordenados logo após um conjunto de pontos (pontos verdes) indicar uma linha de inclinação com tendência à vertical, isto é, derivada infinita. Da mesma forma, quando um conjunto de pontos adquire alguma ordem (pontos verdes à direita), ele o faz com derivada tendendo a zero na sua esquerda. Embora tudo isto seja interessante, não faz sentido tentar ajustar ramos de elipses aos conjuntos de pontos com ordem. Para isto teríamos que ter um controle muito fino sobre a folga, o que não é o caso.

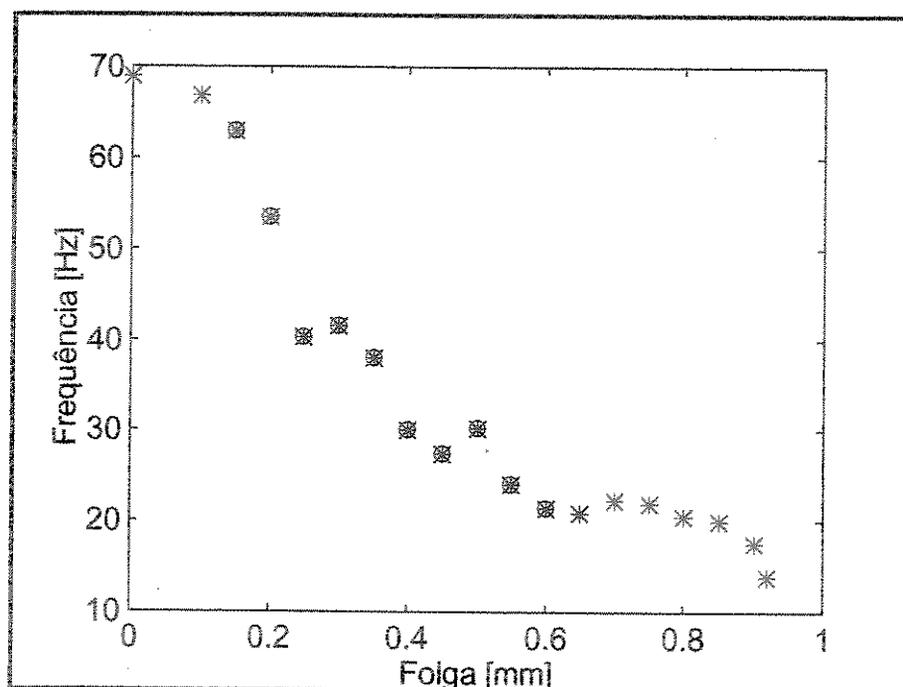


Figura 5.41: Migração da primeira frequência característica

A figura 5.42 apresenta as demais migrações. Usamos uma spline cúbica para realçar os ramos das migrações, sendo este realce o único objetivo das linhas contínuas. De modo nenhum devem ser interpretadas como uma função proposta. As duas linhas horizontais pretas indicam, de cima para baixo:

- a terceira frequência natural do sistema sem impacto.
- a segunda frequência natural do sistema sem impacto.

Os dois pontos sobre o eixo das ordenadas são, de cima para baixo:

- a primeira frequência natural do sistema com folga nula.
- a segunda frequência natural do sistema com folga nula.

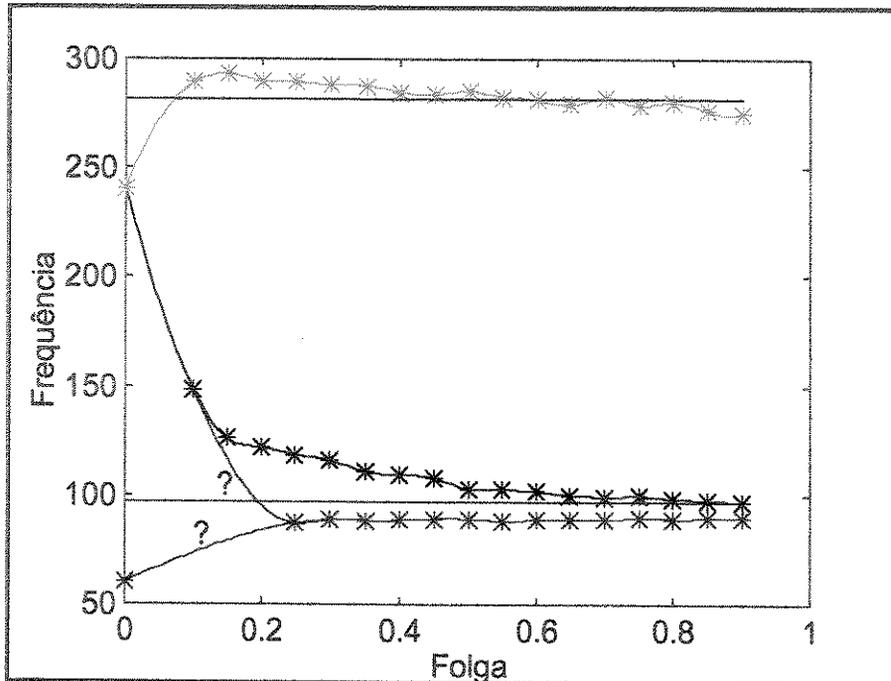


Figura 5.42: Migração de outras frequências características

As duas interrogações nos ramos azuis indicam nossa dúvida sobre a existência de um ramo inferior para a primeira frequência do sistema com folga nula quando a folga tende a zero, ou de um segundo ramo para a segunda frequência do sistema de folga nula.

A existência do ramo verde é indiscutível e confirma os resultados obtidos pela simulação da dinâmica dos sistemas equivalentes nos capítulos 3 e 4. A existência do ramo vermelho ou do ramo azul superior também é indiscutível (ao menos a existência de um deles) e, igualmente, confirma as previsões das simulações. O ramo azul inferior, no entanto, continua uma incógnita. Uma outra possibilidade seria a união de um pedaço do ramo vermelho com o ramo azul inferior, mas isto nos parece pouco provável.

Deixamos uma discussão mais completa das possibilidades para a conclusão, quando discutiremos todos os resultados da tese.

5.4 - Resultados Obtidos - zero a 100 Hz

Os resultados para esta faixa de frequência não permitem visualizar a migração das frequências, razão porque não vamos nos estender muito. As figuras 5.43 a 5.46 mostram alguns espectros de potência da saída do sistema. A folga máxima para ocorrência de impactos é de 2 mm. A segunda frequência característica (em torno de 100 Hz para o sistema sem impacto) não é nosso interesse porque está muito próximo do fim da faixa de frequência da excitação. Uma migração para baixo poderia despertar nosso interesse por esta frequência, mas isto não foi observado na prática. Para melhor visualização das características dos espectros em frequência mais baixa, a figura 5.44 apresenta apenas uma faixa mais estreita no eixo das frequências.

Não é possível dizer com o mínimo de segurança se as medições indicam a presença de uma frequência característica. O que existe em todas as medições realizadas para esta faixa de frequência é um conjunto de picos e vales no espectro em frequências muito baixas. Estes picos se estendem de 1 Hz até 12 Hz, aproximadamente. Portanto, abaixo da menor frequência natural do sistema. O aparecimento de picos em frequências muito baixas é comum em sistemas não lineares. Em geral o espectro não se estabiliza ao longo do tempo e costuma-se associar estes picos de frequência a possibilidade de movimento caótico. No entanto não analisamos estes aspectos. Pode ainda ser um problema relativo ao sistema de sensoramento, mas não cremos nesta possibilidade porque o sistema passou pelos mesmos testes em todos os conjuntos de experimentos (para as três faixas de frequência).

Outros comentários sobre a não migração, ou ao menos a não possibilidade de visualizá-la, serão feitos a conclusão.

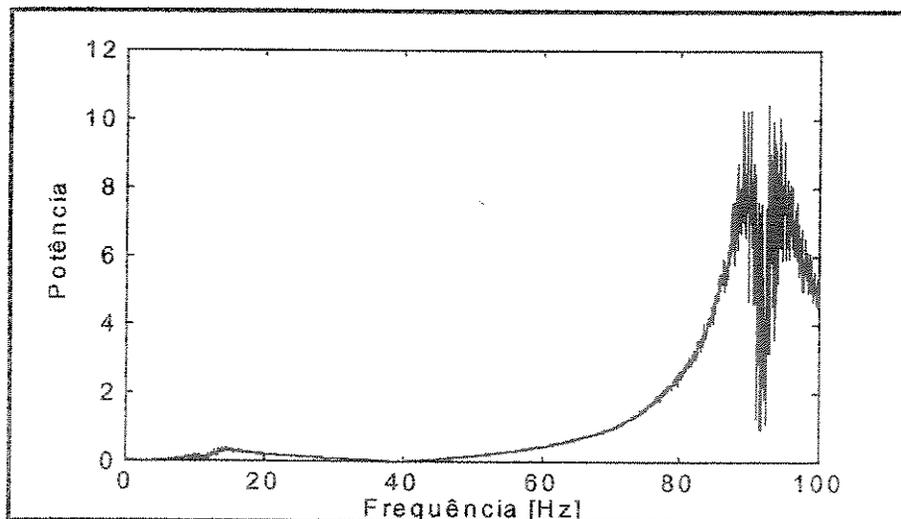


Figura 5.43: Espectro de potência da resposta para folga de 1.8 mm

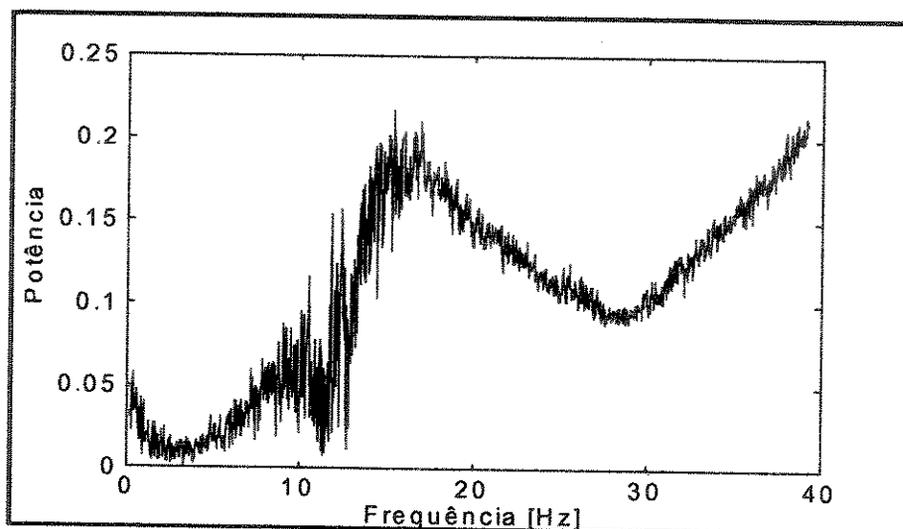


Figura 5.44: Espectro de potência da resposta para folga de 1.50 mm

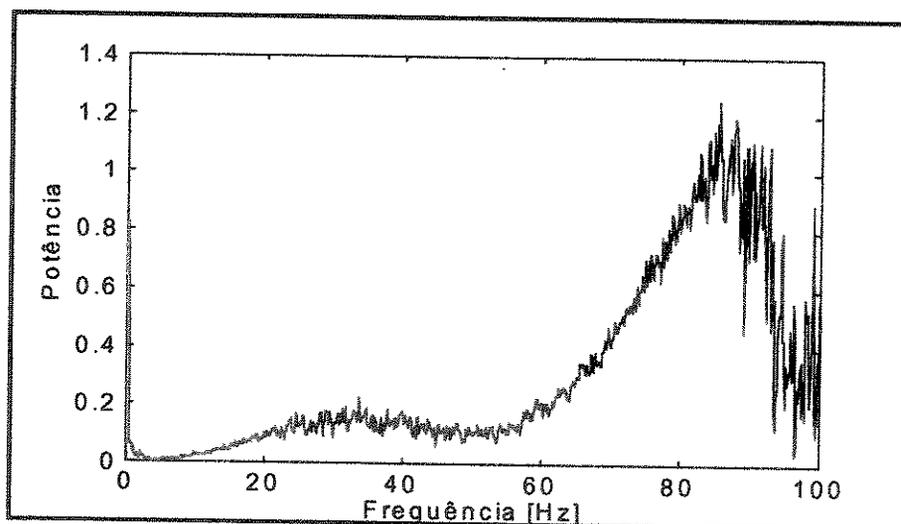


Figura 5.45: Espectro de potência da resposta para folga de 0.70 mm

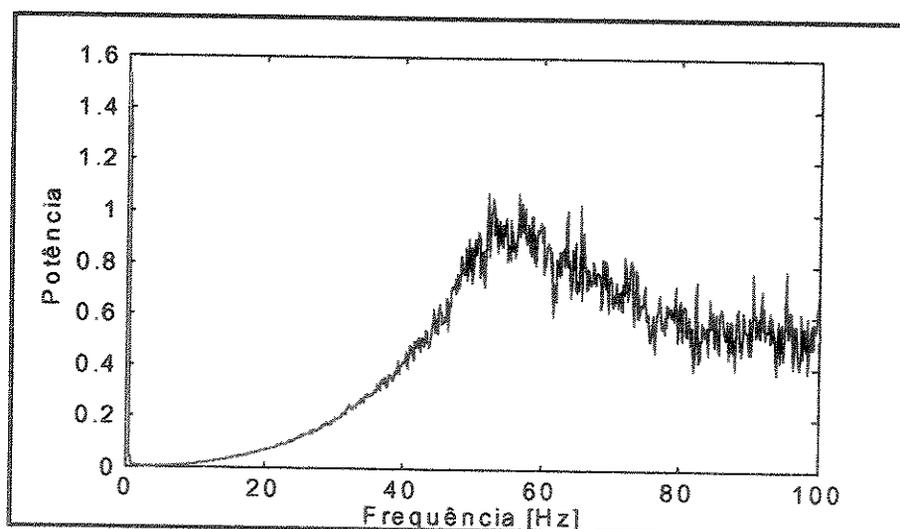


Figura 5.46: Espectro de potência da resposta para folga de 0.20 mm

Capítulo 6

Análise dos Resultados e Conclusões

O trabalho apresenta estudo sobre sistemas com impacto e podemos dividi-lo em duas partes distintas, a saber:

- Revisão da literatura sobre sistemas com impacto, abrangendo principalmente a modelagem do processo de impacto.
- Influência da variação da folga na dinâmica de sistemas com vibroimpacto.

Com ênfase apresenta-se estudo numérico e experimental sobre alterações que ocorrem na dinâmica dos sistemas com vibroimpacto quando a folga deste sistemas varia. Não obstante ser este aspecto muito importante, não encontramos na literatura especializada, durante a revisão, um trabalho com o enfoque que damos nesta tese.

Podemos enumerar algumas razões para a preocupação do comportamento do sistema com a alteração da folga do mesmo:

- O conhecimento dos fenômenos devidos às interações em um sistema dinâmico são cada vez mais importantes, de forma que sistemas complexos onde diversas partes interagem devem ser cada vez mais motivo de preocupação dos pesquisadores. A folga faz parte do conjunto de variáveis que interferem nas interações de todo processo que envolva vibroimpacto.
- Não bastassem as interações em si, a crescente diminuição de certos equipamentos, tais como motores e câmbios, de certa forma amplificam os efeitos dos impactos sobre a estrutura como um todo. Desta forma, sem dúvida, um controle cada vez mais preciso terá de ser feito sobre as folgas do sistema.
- A severidade de impactos de sistemas com vibroimpacto não é função apenas da energia que é fornecida, de alguma forma, para o sistema vibrar. Em sistemas com vibroimpacto, dependendo das características dinâmicas do sistema (frequências naturais e fatores de

amortecimento), a alteração da folga pode levar a impactos mais ou menos severos. Deste ponto de vista, a variação da folga é um parâmetro que influencia em seu próprio aumento, isto é, no desgaste de determinadas partes do sistema.

Sabe-se que a dinâmica dos sistemas com vibroimpacto é, via de regra, uma dinâmica complexa de descrever. No entanto, é razoável pensar que existe uma relação entre algumas características dos sistemas com vibroimpactos e algumas características dos sistemas que, de certa forma, os originam. O conhecimento desta relação contribuiria em muito para prever, ainda que apenas qualitativamente, determinados comportamentos do sistema.

Particularmente, temos mostrado que existe uma relação, precisa em alguns casos, entre as frequências características de sistemas com impacto e seus sistemas lineares associados. Exceto quando a dinâmica se bifurca para o caos ou do caos, os resultados da simulação numérica apresentam um comportamento migratório muito bem definido para as frequências características. Isto é muito importante para entendermos a alteração da dinâmica deste sistemas, uma vez que uma das grandezas fundamentais da dinâmica dos sistemas vibratórios é sua resposta em frequência.

Consideremos a seguinte pergunta central: *"As frequências características de um sistema com impacto são uma combinação clara das frequências naturais dos sistemas lineares a ele associados?"*

A resposta: *As frequências são uma relação das frequências naturais dos sistemas lineares associados. Para ao menos uma destas frequências características, esta relação mostrou-se clara. O problema de poder identificá-las parece ser, de fato, outro problema.*

Podemos dizer isto com base nos resultados dos capítulos 3 e 4. É verdade que esta migração pode depender do modelo. De todo modo, encontramos resultado experimental idêntico para ao menos um conjunto de dados (faixa de excitação 0 - 200 Hz).

Há uma migração da primeira frequência do sistema com folga nula para a primeira ou segunda frequência do sistema com folga infinita, dependendo da distribuição de energia entre os diversos modos de vibração do sistema com folga infinita. Na verdade, podemos falar em distribuição entre os modos de qualquer um dos sistemas associados, mas preferimos sempre nos fixar no sistema de maior número de graus de liberdade. No caso de um sistema contínuo, tal como a viga do capítulo 5, cada distribuição entre os modos do sistema com folga infinita levará a uma única distribuição entre os modos do sistema com folga nula.

Para as frequências referidas no parágrafo anterior propomos uma função que prevê a forma da migração. A função sempre apresenta bom ajuste, ressalvadas as restrições comentadas, com os resultados das simulações. Quanto aos resultados experimentais, comentaremos mais adiante.

Há também sempre uma migração da segunda frequência do sistema com folga nula para a segunda e terceira frequências do sistema com folga infinita. Não obstante esta migração ocorrer sempre de forma ordenada, tanto nas simulações quanto nos experimentos,

não encontramos uma relação explícita entre a frequência característica do sistema com impacto e as frequências dos sistemas associados.

Os resultados experimentais confirmam, de forma geral, as migrações previstas. No entanto, para a migração da primeira frequência, apenas um conjunto de experimentos apresenta boa concordância com a função proposta (faixa 0-200Hz na excitação randômica). Em outro dos casos (0-400 Hz), apenas os extremos da faixa de variação da folga apresentam características semelhantes às da função proposta. Pode ser que a dinâmica do sistema tenha sofrido radical mudança durante a variação da folga.

É difícil supor uma variação radical do modelo de impacto entre os experimentos da faixa 0-200 Hz e os da faixa 0-400 Hz. O mais provável mesmo é que a distribuição de energia entre os modos de vibração da viga, neste caso, é tal que não permite boa visualização da migração.

Este desencontro se torna maior ainda quando excitamos o sistema na faixa 0-100 Hz. Curiosamente, nos sistemas simulados, quando aumentamos a energia no modo de vibração mais baixo, os resultados também não permitiram visualizar a frequência característica. Isto fica claro quando consideramos a figura 3.14. Note que, quando aumentamos a participação do primeiro modo, rapidamente, quando a folga é aumentada, o sistema entra em caos. Analisamos o sistema em questão com até 50 % de energia no modo mais baixo. No entanto, não conseguimos visualizar nada. Talvez uma técnica mais apurada (wavelets?) permitisse um melhor exame.

Ressaltamos que o fato de procurarmos as melhores distribuições de energia não reduz a importância do trabalho no estágio em que está. O correto é interpretar que a distribuição de energia, juntamente com a folga, pode ser um importante parâmetro de controle para que determinado sistema opere em uma determinada condição. Conhecimentos mais profundos sobre a migração das frequências características podem levar ao desenvolvimento de ferramentas importantes, tanto no campo do projeto dos sistemas com folga, tanto no campo do controle destes sistemas. Outro importante campo é o da diagnose destes sistemas. Piccoli [Picoli-1994], por exemplo, analisou mudanças importantes na dinâmica de um rotor vertical sujeito a rubing.

No campo do controle podemos citar duas possibilidades. Conhecendo-se as características da migração das frequências, pode-se controlar a distribuição de energia fornecida a fim de evitar determinados fenômenos indesejáveis. Por outro lado pode-se controlar ativamente a folga (em alguns tipos de sistemas) a fim controlar as frequências características do sistema. No campo do projeto podemos evitar, a priori, frequências características indesejáveis. Estados caóticos indesejáveis também podem ser evitados. Isto pode ser feito através do controle de alguns parâmetros do projeto, tais como as frequências naturais dos sistemas lineares associados. Se as frequências características puderem ser identificadas experimentalmente, a curva que rege a migração pode, à primeira vista, ser usada como critério para inferir, sem medir, a folga do sistema. Isto é válido ao menos para os

sistemas simulados até aqui. O desvio entre a frequência real e a prevista pode ser usada como indicativo do estado caótico. Como se pode ver, a aplicabilidade dos resultados do trabalho que ora apresentamos, ainda que um trabalho inicial, são promissores.

Por fim, relacionamos alguns trabalhos futuros relacionados aos resultados desta tese:

- Estudar a relação entre os sistemas com vibroimpacto e seus sistemas associados quando se consideram outros modelos para o impacto, que não o modelo convencional, inclusive para impactos bidimensionais e tridimensionais.
- Aprofundar os estudos sobre a distribuição de energia entre os modos de vibrar do sistema. Este é um importante campo a ser explorado, tanto do ponto de vista do controle quanto do ponto de vista do projeto do sistema.
- Explorar alguns aspectos analíticos via mapeamento implícito entre os estados do sistema nos instantes do impacto. Embora de caráter extremamente complexo para sistema de maior número de graus de liberdade, esta análise pode trazer grande contribuição para o entendimento das mudanças na dinâmica do sistema.
- Como a dinâmica se altera em sistemas com forçamento periódico?
- Será possível encontrar relações de caráter mais geral em sistemas contínuos conhecidos, tais como vigas, eixos, etc...?

Bibliografia

- [01] -[Araki-1983] Araki, Y. et al; *Impact Damper with Granular Materials: Fisrt Report*; Transactions of the JSME; Vol 49; 945-950; 1983.
- [02] -[Araki-1985] Araki, Y. et al; *Impact Damper with Granular Materials: Second Report*; Transactions of the JSME; Vol 58; 1466-1472; 1985.
- [03] -[Awrejcewicz-1996] Awrejcewicz, J. et al; *Multibody Vibro-Impact Dynamics*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 9-12; Prague; 1996.
- [04] -[Bakr-1997] Bakr, E. M.; *Impact Analysis of Flexible Multi-Armed Terrestrial Robots*; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [05] -[Bapat-1983] Bapat, C. N. et al; *Stable Periodic Motions of an Impact-Pair*; Journal of Sound and Vibration; Vol 87; 19-40; 1983.
- [06] -[Bapat-1985] Bapat, C. N. & Sankar, S.; *Multi-Unit Impact damper; Re-examined*; Journal of Sound and Vibration; Vol 103; 457-469; 1985.
- [07] -[Bapat-1988] Bapat, C. N. & Bapat, C.; *Impact-pair Under Periodoc Excitation*; Journal of Sound and Vibration; Vol 1'20; 53-61; 1988.
- [08] -[Bapat-1995] Bapat, C. N.; *The General Motion of an Inclined Impact Damper with Friction*; Journal of Sound and Vibration; Vol 184; 417-427; 1995.
- [09] -[Belyaev-1996] Belyaev, A. K.; *Energy Transfer to High Frequency Modes due to Repeated Impacts*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 89-92; Prague; 1996.
- [10] -[Brach-1991] Brach, R. M.; *Mechanical Impact Dynamics: Rigid Body Collisions*; John Wiley & Sons; EUA. 260 p. 1991.
- [11] -[Budd-1995] Budd, C. et al; *The Effect of Frequency and Clearance variations on a Single-Degree-of-Freedom Impact Oscillators*; Journal of Sound and Vibration; Vol 184; 475-502; 1995.
- [12] -[Cempel-1974] Cempel, C.; *The Multipoint Impact Damper: Equivalent Continuous Force Approach*; Journal of Sound and Vibration; Vol 34; 200-209. 1974.

- [13] -[Chatterjee-1996a] Chatterjee, S.; *Impact Dampers for Controlling Self-Excited Oscillation*; Journal of Sound and Vibration; Vol 193; 1003-1014; 1996.
- [14] -[Chatterjee-1996b] Chatterjee, A. *et al.*; *Periodic Response of Piecewise Non-linear Oscillators under Harmonic Excitation*; Journal of Sound and Vibration; Vol 191; 129-144; 1996.
- [15] -[Chatterjee-1997] Chatterjee, A.; *Rigid Body Collisions: Some General Considerations, New Collisions Law, and Some Experimental Data*; PhD Thesis; Cornell Univ.; 1997.
- [16] -[Drewniak-1996] Drewniak, J. & Wojciech, S.; *Boundary Element Analysis of Impact-Contact Problems with Friction*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 223-228; Prague; 1996.
- [17] -[Emaci-1996] Emaci, E. *et al.*; *Numerical and Experimental Nonlinear Localization Phenomena in Flexible Systems with Vibro-Impact*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 153-156; Prague; 1996.
- [18] -[Escalom-1997] Escalom, J. L. *et al.*; *A New Numerical Method for the Dynamical Analysis of Impact Loads in Flexible Beams*; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [19] -[Fujita-1980] Fujita, T. & Hattori, S.; *Periodic Vibration and Impact Characteristics of a Nonlinear System with collision*; Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers; Vol 23; 409-418; 1980.
- [20] -[Gau-1997] Gau, W.; *Effect of the Gravity Force on the Propagation of a Rotating Flexible Rod After Impact*; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [21] -[Han-1995] Han, R. P. S. *et al.*; *Chaotic motion of a Horizontal Impact Pair*; Journal of Sound and Vibration; Vol 181; 231-250; 1995.
- [22] -[Heiman-1987] Heiman, M. S. *et al.*; *On the Dynamics and Stability of an Inclined Impact Pair*; Journal of Sound and Vibration; Vol 114; 535-547. 1987.
- [23] -[Heiman-1988] Heiman, M. S. *et al.*; *Periodic Motions and Bifurcations in Dynamics of an Inclined Impact Pair*; Journal of Sound and Vibration; Vol 124; 55-78. 1987.
- [24] -[Holmes-1990] Holmes, P. & Guckenheimer, G.; *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*; Applied Mathematical Sciences 42; Springer-Verlag; New York; 1990.
- [25] -[Hsleh-1997] Hsleh, S. *et al.*; *Rattle Reduction of Automotive Component: A FEM Approach*; ; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [26] -[Hunt-1975] Hunt, K. & Crossley, F.; *Coeficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact*; Journal of Applied Mechanics; Vol xx; 439-445; 1975.
- [27] -[Irschik-1997] Irschik, H. *et al.*; *Eigenstrain-Based Algorithm for Viscoelastic Uniaxial Wave Propagation due to Impact*; Proceedings DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [28] -[Jaeger-1994] Jaeger, J.; *Oblique Impact of Similar Bodies with Circular Contact*; Acta Mechanica; Vol 107; 101-115; 1994.

- [29] -[Jäger-1996] Jürgen Jäger, E.; *Non-Hertzian Contact Models for Ultrasonic Impact Motors*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 223-228; Prague; 1996.
- [30] -[Jekins-1992] Jekins, J. T.; *Bounadry Conditions for Rapid Granular Flow; Flat Frictional Walls*; Journal of Applied Mechanics; Vol 59; 120-127; 1992.
- [31] -[Kataoka-1986a] Kataoka, M. *et al*; *Forced Torsional Vibration of a Two Degrees of Freedom System with Clearance - First Report: Experiment and Simulation*; Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers; Vol 29; 3491-3498; 1986.
- [32] -[Kataoka-1986b] Kataoka, M. *et al*; *Forced Torsional Vibration of a Two Degrees of Freedom System with Clearance - Second Report: Analytical Solution*; Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers; Vol 29; 3822-3829; 1986.
- [33] -[Khulief-1987] Khulief, Y. A. & Shabana, A. A.; *A Continuous Force Model for the Impact Analysis of Flexible Multibody Systems*; Mechanical Machine Theory; Vol 22; 213-224; 1987.
- [34] -[Kotera-1996] Kotera, T.; *Chaotic Motion in a Vibro-Impacting System*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 223-228; Prague; 1996.
- [35] -[Kremer-1996], Kremer, E. B. & Nagayev, R. F; *Non-linear Oscillations in a System with the Impact-pair: Process with Infinity Number of Impacts*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 113-116; Prague; 1996.
- [36] -[Laux-1976] Laux, G. E. C.; *Absorvedores de Vibração por Impacto Aplicados a Máquinas Ferramenta*; Tese de Mestrado; COPPE - UFRJ; 1976.
- [37] -[Lawen-1996] Lawen, J. L.; *Influence of Bearing Housing Dynamics on the Response Characteristics of a Flexible Rotor System with Auxiliary Clearance Bearing*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 249-252; Prague; 1996.
- [38] -[Lok-1996] Lok, H. P. & Wiercigroch, M.; *Modelling Discontinuities in Mechanical Systems by Smooth Functions*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 113-116; Prague; 1996.
- [39] -[Marghitu-1997b] Marghitu, D. B. *et al*; *Stability Analysis of Rotordynamic Systems Using Floquet Methods*; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [40] -[Marghitu-1997b] Marghitu, D. B. *et al*; *Stability Analysis of Rotordynamic Systems Using Floquet Methods*; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [41] -[Masri-1966] Masri, S. F. & Caughey, T. K.; *On the Stability of the Impact Damper*; Journal of Applied Mechanics; Vol 33; 586-592; 1966.
- [42] -[Masri-1969] Masri, S. F.; *Analytical and Experimental Studies of Multi-Unit Impact Dampers*; Journal of Applied Mechanics; Vol 45; 1111-1117; 1969.
- [43] -[Masri-1970a] Masri, S. F.; *Periodic Excitation of Multi-Unit Impact Dampers*; Journal of Applied Mechanics; Vol 46; 1195-1207; 1970.

- [44] - [Masri-1970b] Masri, S. F.; *General Motion of Impact Dampers*; Journal of Applied Mechanics; Vol 47; 229-237; 1970.
- [44] - [Mattos-1993] Mattos, M. C.; *Sistemas Amortecidos com Atrito Seco*; Tese de Mestrado; Universidade Estadual de Campinas; 1993.
- [45] - [Mattos-1993] Mattos, M. C.; *Some Interesting Characteristics of a Simple Autonomous Impact System with Symmetric Clearance*; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [46] - [Melvin-1997] Melvin, E. K. & Sandri, G.; *Dynamics of Distributed Impact Dampers*; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [47] - Mindlin, R. D. & Deresiewicz, H.; *Elastic Spheres in Contact Under Varying Oblique Forces*; Journal of Applied Mechanics; Vol 75; 327-344; 1953.
- [48] - [Mittal-1994] Mittal, R. K. & Khalili, M. R.; *Analysis of Impact of a Moving Body on an Orthotropic Elastic Plate*; AIAA Journal; Vol 32; 1994.
- [49] - [Moon-1983] Moon, F. & Shaw, S. W.; *Chaotic Vibrations of a Beam with Non-linear Boundary Conditions*; Int. Journal of Nonlinear Mechanics; Vol 18; 465-477; 1983.
- [50] - [Moore-1995] Moore, J.J. *et al*; *A Forced Response Analysis and Application of Impact dampers to Rotordynamic Vibration Suppression in a Cryogenic Environment*; Journal of Vibration and Acoustics; Vol 117; 300-310; 1995.
- [51] - [Neilson-1996] Neilson, R. D. *et al*; *Nonlinear Response of a Parametrically Excited Beam with Limit Stops*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 125-128; Prague; 1996.
- [52] - [Nigh-1983] Nigh, M. M. & Shabana, A. A.; *Effect of an Impact damper on a Multi-degree of Freedom System*; Journal of Sound and Vibration; Vol 89; 541-557; 1983.
- [53] - [Nordmark-1991] Nordmark, A. B.; *Non-Periodic Motion caused by Grazing Incidence in an Impact Oscillator*; Journal of Sound and Vibration; Vol 145; 279-297; 1991.
- [54] - [Oestreich-1997] Oestreich, M. *et al*; *Analytical and Experimental Investigation of an Impact Oscillator*; ; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [55] - [Peterka-1996] Peterka, F.; *Dynamics of Mechanical Systems with Impact and Dry Friction*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 33-44; Prague; 1996.
- [56] - [Pfeiffer-1996a] Pfeiffer, F.; *Dynamics of Rigid Body Systems with Unilateral Contacts*; Wiley Series in Nonlinear Science. John Wiley & Sons; EUA. 260 p; 1996. Series Editors: Nayfeh, A. H. & Holden, A. V.
- [57] - [Pfeiffer-1996b] Pfeiffer, F.; *The Multiple Contact Problem of MultiBody Dynamics*; Proceedings 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 489-494; Prague; 1996.
- [58] - [Pilipchuk-1996] Pilipchuk, V. N.; *Analytical Study of Vibrating Systems with Strong Non-Linearities by Employing Saw-Tooth Time Transformations*; Journal of Sound and Vibration; Vol 192; 43-64; 1996.

- [59] -[Popplewel-1989] Popplewel, N. & Semercigil, S. E.; *Performance of the Beam Bag Impact Damper for a Sinusoidal External Force*; Journal of Sound and Vibration; Vol 113; 193-223; 1989.
- [60] -[Pospíšil-1996] Pospíšil, J. & Brzobohatý, J.; *Canonical State Models of Autonomous Piecewise-Linear Dynamic Systems*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 179-181; Prague; 1996.
- [61] -[Resnik-1986] Resnik, R. & Halliday, D.; *Física*; Vol I; Livros Técnicos e Científicos Editora; 4^a Ed. ; 348 p.; 1986.
- [62] -[Rossikhin-1995] Rossikhin, Yu. A. & Shitikova, M. V.; *The Impact of a Rigid Sphere with an Elastic Layer of Finite Thickness*; Acta Mechanica; Vol 112; 83-93; 1995.
- [63] -[Roy-1975] Roy, R.K. *et al*; *The Application of Impact Dampers to Continuous Systems*; Journal of Engineering for Industry; 1317-1324; 1975.
- [64] -[Sadek-1970a] Sadek, M. M. & Mills, B.; *Effect of Gravity on the Performance of an Impact Damper: Part 1- Steady State Motion*; Journal of Mechanical Engineering Science; Vol 12; 268-277; 1970.
- [65] -[Sadek-1970b] Sadek, M. M. & Williams, C. J. H.; *Effect of Gravity on the Performance of an Impact Damper: Part 2- Stability of Vibrational Modes*; Journal of Mechanical Engineering Science; Vol 12; 278-287; 1970.
- [66]-[Salenger-1997] Salenger, G. D & Vakakis, A. F.; *Analytical Study of Discreteness Effects in a String Resting on a Periodic Array of Vibro-Impacts Supports*; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [67]-[Santos-1988] Santos, I. F.; *Modelos Matemáticos Reduzidos para Sistemas Mecânicos Contínuos*; Tese de Mestrado; UNICAMP; 1988.
- [68] -[Sedláček -1996] Sedláček, R.; *Experimental Investigation of Transversal-Impact Vibration of a Beam Between the Rigid Stops*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 383-386; Prague; 1996.
- [69] -[Semercigil-1992] Semercigil, S. E. *et al*; *A New Tuned Vibration Absorber for Wide-Band Excitation*; Journal of Sound and Vibration; Vol 156; 445-459; 1992.
- [70] -[Shaw-1983] Shaw, S. W. & Holmes, P. J.; *A Periodically Forced Piecewise Linear Oscillator*; Journal of Sound and Vibration; Vol 90; 129-155; 1983.
- [71] -[Shaw-1985a] Shaw, S. W.; *The Dynamics of a harmonically Excited System having Rigid Amplitude Constraints - Part 1: Subharmonic Motions and Local Bifurcations*; Journal of Applied Mechanics; Vol 52; 453-458; 1985.
- [72] -[Shaw-1985b] Shaw, S. W.; *The Dynamics of a harmonically Excited System having Rigid Amplitude Constraints - Part 1: Chaotic Motions and Global Bifurcations*; Journal of Applied Mechanics; Vol 52; 453-458; 1985.

- [73] -[Sithigh] Mac Sithigh, G. P.; *Rigid-Body Impact with Friction - Various Approaches Compared*; In R. C. Batra, A. K. Mal and G. P. Sithigh editors, *Impact, Waves and Fracture*; ASME; 453-458; 1995.
- [74] -[Slany-1990] Müller-Slany, H. H.; *Modelling of Multibody Systems by Means of Optimization Procedures*; MultiCriteria Design Optimization; ; Springer-Verlag; 1990.
- [75] -[Smith-1991] Smith, C. E.; *Predicting Rebounds Using Rigid-Body Dynamics*; Journal of Applied Mechanics; Vol 58; 754-758; 1991.
- [76] -[Smith-1992-a] Smith, C. E.; *Predicting Rebounds Using Rigid-Body Dynamics*; Author's Closure; Journal of Applied Mechanics; Vol 59; 700-701; 1991.
- [77] -[Smith-1992-b] Smith, C. E.; *Coefficients of restitution*; Journal of Applied Mechanics; Vol 59; 963-969; 1992.
- [78] -[Stoianovici] Stoianovici, D.; *A Critical Study of the Applicability of the Rigid-Body Collision Theory*; Journal of Applied Mechanics; Vol 53; 307-316; 1996.
- [79] -[Streator-1997] Streater, J. L.; *Micro-Scale Simulation of Adhesive Effects During Normal Impact*; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [80] -[Strogatz-1997] Strogatz, S. H.; *Nonlinear Dynamics and Chaos*; Addison-Wesley Publishing Company. New York. 1996
- [81] -[Szwedowicz-1997] Szwedowicz, D. & Sotelo, C. A.; *Updating of Impact Models for Vibrating Cantilever Beams*; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [82] -[Timoshenko-1980] Timoshenko, S. P. & Goodier, J. N.; *Teoria da Elasticidade*; Guanabara; Rio de Janeiro; 545 p.; 1980.
- [83] -[Toulemonde-1996] Toulemonde, C.; *Periodic Behaviour of Impact Oscillators: Single Degree of Freedom and Multiple Degree of Freedom Systems, Experiment*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 471-474; Prague; 1996.
- [84] -[Ungar-1965] Ungar, E. E. & Ross, D.; *Vibrations and Noise due to Piston-Slap in Reciprocating machinery*; Journal of Sound and Vibration; Vol 2; 132-146; 1965.
- [85] -[Vorst-1996] Van de Vorst, E. L. B. *et al*; *Periodic Solutions of a Multi-DOF System with Impact*; Journal of Sound and Vibration; Vol 192; 913-925; 1996.
- [86] -[Watanabe-1996] Watanabe, T.; *Forced response of Continuous System with Collision Characteristics*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 489-494; Prague; 1996.
- [87] -[Wang-1996] Wang, C. & Kim, J.; *New Analysis Method for a Thin Beam Impacting Against a Stop Based on the Full Continuous Model*; Journal of Sound and Vibration; Vol 191; 809-823; 1996.
- [88] -[Weifang-1997], Weifang, Z. & Zhongzu, L.; *Dynamic Responses of a Cylindrical Shell Subjected to Shock Wave Induced by UnderWater Explosion*; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.

- [89] - [Wiggins-1990] Wiggins, S.; *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*; Texts in Applied Mathematics 2; Springer-Verlag; 1990.
- [90] - Wilson, R. & Fawcett, J. N.; *Dynamics of Slider-Crank Mechanism with Clearance in the Sliding Bearing*; Mechanism and Machine Theory; Vol 9; 61-80; 1974.
- [91] - [Wolf-1985] Wolf, A. et al ; *Determining Lyapunov Exponents from a Time Series*; Physica Vol 16 D . 1985.
- [92] - [Wolfsteiner-1997] Wolfsteiner, P. & Pfeiffer, F.; *Dynamics of a Vibratory Feeder*; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [93] - [Wong-1991] Wong, C. W. et al; *Periodic Forced Vibration of Unsymmetrical Piecewise-Linear Systems by Using Incremental Harmonic Balance Method*; Journal of Sound and Vibration; Vol 149; 91-105; 1991.
- [94] - [Yano-1996] Yano, S. & Kotera, T.; *Application of Asynchronous Excitations to Strongly Piecewise-Linear Mechanical Systems*; Proceedings of the 2nd European Nonlinear Oscillation Conference; 125-128; Prague; 1996.
- [95] - [Yigit-1997] Yigit, A. S. & Christoforou, A. P.; *Effect of Flexibility in Transverse Impact Problems*; Proceedings of DETC'97; Sacramento, California; 1997.
- [96] - [Zukas-1992] Zukas, J. A. et al; *Impact Dynamics*; Krieger Publishing Company; 1992

Apêndice A

Expoentes de Lyapunov

Ao conjunto de pontos no espaço estado estendido (incluindo o tempo) determinados pelos estados de um sistema durante a evolução de sua resposta denominamos trajetória. Uma trajetória depende tanto da excitação quanto das condições iniciais. Para sistemas "bem comportados", duas trajetórias que se iniciam próximas continuam próximas durante a evolução da resposta. O conceito de próximo está longe do absoluto. Deve ser encarado como algo relativo. Por outro lado, existem sistemas em que duas trajetórias que se iniciam muito próximas se afastam rapidamente. Desta forma, não se pode prever o estado deste sistema para um tempo muito longo, considerando que as condições iniciais têm, em si, uma incerteza.

Um parâmetro que quantifica a taxa de afastamento ou convergência das trajetórias do sistema são os expoentes de Lyapunov. Consideremos duas trajetórias que se afastam uma da outra de uma distância δ_0 . Seja $\delta(t)$ o afastamento destas trajetórias num instante t . Agora suponhamos uma taxa de convergência ou divergência para as trajetórias, conforma a relação

$$\|\delta(t)\| = \|\delta_0\| \exp(\lambda t)$$

As trajetórias convergirão ou divergirão dependendo do valor do parâmetro λ . Note que, se plotarmos $\ln(\|\delta(t)\|)$ versus t , os aspectos do gráfico deve ser uma reta, se o parâmetro λ for constante. Algumas observações são necessárias:

- A taxa de divergência ou convergência varia ao longo da trajetória. Desta forma, o aspecto do gráfico referido no parágrafo acima não será uma reta, mas variará em torno de uma reta.
- Se o afastamento medido for comparável, isto é, da mesma ordem, do diâmetro do atrator (espaço em que a trajetória se confina após determinado tempo), o cálculo da divergência deve parar.

- O número λ é chamado expoente de Lyapunov do sistema. Na verdade, este é o maior expoente de Lyapunov do sistema. Se o sistema tem ordem n , ele também tem n expoentes de Lyapunov. Consideremos uma esfera (no espaço n -dimensional) de diâmetro infinitesimal, dentro da qual variamos as condições iniciais do sistema. Durante a evolução da resposta, esta esfera se transformará num elipsóide n -dimensional. Denominemos por $\delta_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, o comprimento dos eixos principais deste elipsóide. Assim, podemos imaginar uma taxa de divergência para cada um dos eixos principais, pela relação,

$$\delta_k(t) = \delta_k(0) \exp(\lambda_k t)$$

onde $\lambda_k(t)$ é o k -ésimo expoente de Lyapunov. Por convenção, enumeramos os expoentes em ordem crescente.

- Como o valor obtido depende das trajetórias, devemos tomar uma média de expoentes, a fim de obtermos o valor correto do expoente do sistema.

Agora refinamos a idéia para um mapa unidimensional, a qual pode ser aplicada para o cálculo do maior expoente de Lyapunov. Dada uma condição inicial x_0 , consideremos um ponto próximo $x_0 + \delta_0$, com δ_0 muito pequeno. Após n iterações, cujo lapso de tempo não é importante por enquanto, o afastamento deve ser

$$|\delta_n| = |\delta_0 \exp(n\lambda)|$$

Note que podemos escrever

$$\delta_n = f^{(n)}[x_0 + \delta_0] - f^{(n)}[x_0]$$

onde a notação $f^{(n)}$ indica a derivada de ordem n do argumento. Assim obtemos

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^{(n)}[x_0 + \delta_0] - f^{(n)}[x_0]}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \left[f^{(n)} \right]' x_0 \right|$$

quando consideramos que $\delta_0 \rightarrow 0$.

O argumento da função logaritmo pode ser pela função

$$\left[f^{(n)} \right]' x_0 = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)$$

onde $x_i = x_0 + \delta_i$.

Então temos

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

Considerando $n \rightarrow \infty$, temos

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\}$$

Voltemos agora à questão das iterações. Cada iteração deve corresponder a um lapso de tempo maior que o maior período característico da resposta do sistema. Para sistemas periódicos, isto significaria que o lapso de tempo de uma iteração deveria ser maior que $\frac{1}{2\pi f_{\min}}$, onde f_{\min} é a menor frequência finita (não infinitesimal nem nula) da resposta. O problema é que respostas caóticas têm frequências não bem definidas. Neste caso, a melhor interpretação para o termo período característico é que ele seja um tempo suficiente longo para que manifeste todas as ocorrências importantes da dinâmica do sistema. Chama-se este lapso de tempo de tempo de retardo. Se o tempo de retardo escolhido para o cálculo do expoente (a partir de uma série) for menor que o necessário, o expoente não convergirá com o aumento do número de iterações. Se for muito maior que o necessário, será necessário um número de medidas excessivamente grande para o cálculo. Além disto outros parâmetros utilizados no cálculo terão de ser reavaliados.

Apêndice B

Modelos Discretos Reduzidos para Sistemas Contínuos

Consideremos um sistema contínuo, uma viga homogênea por exemplo, do qual queiramos obter um modelo discreto de poucos graus de liberdade. Uma das formas de obtermos modelos discretos de poucos graus de liberdade equivalentes aos sistemas contínuos consiste em impor que a relação entre os movimentos de determinados pontos do sistema determina a relação entre as coordenadas dos autovetores do sistema discreto. Isto equivale a dizer que o sistema discreto deve reproduzir, com erro admissível, o movimento de alguns pontos pré-selecionados do sistema contínuo. Outra grandeza que se costuma relacionar são as frequências naturais dos dois sistemas, contínuo e discreto. De fato, relacionam-se autovalores (frequências naturais) e autovetores simultaneamente. Uma terceira relação diz respeito às energias modais dos sistemas discreto e contínuo. Outras grandezas podem ser levadas em conta, tais como os tensores de inércia, a massa total, o centro de gravidade, etc...

Como estamos interessados apenas no movimento elastodinâmico do sistema, as relações entre os tensores de inércia, massa total e centro de gravidade podem ser consideradas de menor prioridade. Desta forma, vamos considerar três equivalências entre os sistemas contínuo e discreto, a saber:

- As frequências naturais do sistema discreto são iguais às respectivas frequências naturais do sistema contínuo.
- Os autovetores do sistema discreto representam as relações de deslocamento entre os movimentos de determinados pontos do sistema contínuo, quando vibrando nos respectivos modos de vibração.
- As energias (cinéticas ou potenciais) modais do sistema discreto são iguais às respectivas energias do sistema contínuo quando vibram com a mesma amplitude, isto é, as coordenadas do sistema discreto vibram com a mesma amplitude dos pontos do sistema contínuo selecionados para representar os autovetores.

As energias modais podem ser facilmente calculadas para sistemas como vigas e barras. Para sistemas mais complexos devem-se usar técnicas de análise modal a fim de inferir o valor das frequências e dos autovetores. Pode-se também estimar as energias modais. Se quisermos obter um sistema discreto de n graus de liberdade, devemos selecionar criteriosamente n pontos do sistema contínuo para com eles estabelecer as relações dos autovetores. Devemos também conhecer n energias cinéticas modais do sistema contínuo, bem como n frequências naturais. Assim, podemos definir as seguintes grandezas:

- $E_{n \times n}$: matriz diagonal cuja diagonal contém as energias cinéticas modais do sistema contínuo.
- $U_{n \times n}$: matriz cujas colunas são os autovetores do sistema contínuo.
- $\text{Diag}(\omega_i^2)$: matriz diagonal cuja diagonal contém as frequências naturais (circulares) do sistema contínuo.

Para que as três condições impostas sejam obedecidas em cada modo de vibrar do sistema discreto, a seguinte relação deve ser observada:

$$E_{di}^N = \frac{\omega_i^2}{2} \Phi_i^T M \Phi_i \quad (1)$$

onde o subscrito i indica o modo de vibração, Φ é o autovetor e M é a matriz massa do sistema discreto. O subscrito d indica sistema discreto e o superscrito N indica que esta é a energia normalizada de acordo com os autovetores do sistema contínuo.

Escrevendo a equação 1 para cada modo e compactando, podemos expressar as restrições por:

$$E = \frac{1}{2} \text{Diag}(\omega_i^2) U^T M U \quad (2)$$

onde o superscrito N foi omitido por já se saber que a matriz das energias deve ser aquela já definida anteriormente para o sistema contínuo.

Podemos definir uma matriz de normalização das energias, a saber:

$$\Psi = 2 \text{Diag}(\omega_i^2)^{-1} E \quad (3)$$

Repare que a única grandeza desconhecida na equação 2 é a matriz de massa M , que é, então, calculada por:

$$M = U^{-T} \Psi U^{-1} \quad (4)$$

Para o cálculo da matriz rigidez consideremos o sistema em vibração linear, de forma que a seguinte relação deve ser observada:

$$U^T K U = \text{Diag}(\omega_i^2) U^T M U \quad (5)$$

onde K é matriz de rigidez. Assim temos

$$K = U^{-T} \text{Diag}(\omega_i^2) \Psi U^{-1} \quad (6)$$

Pontos especiais podem ser selecionados se desejarmos que a matriz de massa seja diagonal, mas isto nem sempre é possível. Para uma viga com condições de apoio iguais, por exemplo, obtém-se uma matriz de massa diagonal se os pontos forem escolhidos de forma simétrica ao longo da viga. Para vigas com condições de contorno não simétricas, tal como uma viga engastada-apoiada, pode-se fazer uma varredura procurando pelos melhores pontos. Para uma matriz massa de ordem 2, temos apenas uma posição a zerar se quisermos uma matriz diagonal (a matriz é simétrica). Neste caso o trabalho é relativamente fácil. No entanto, para uma matriz de ordem 3, por exemplo, quereremos zerar três funções ao mesmo tempo e isto pode não ser possível.