ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA POR ANDRÉ PEREIRA SANTANA E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA EM 24/11/2008

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Formulações dinâmicas do método dos elementos de contorno aplicado a análise de placas finas de compósitos laminados

Autor: André Pereira Santana
Orientador: Éder Lima de Albuquerque
Co-orientador: Paulo Sollero

101/2008

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Formulações dinâmicas do método dos elementos de contorno aplicado a análise de placas finas de compósitos laminados

Autor: André Pereira Santana
Orientador: Éder Lima de Albuquerque
Co-orientador: Paulo Sollero

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2008
S.P . – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Sa59f	Santana, André Pereira Formulações dinâmicas do método dos elementos de contorno aplicado a análise de placas finas de compósitos laminados / André Pereira Santana. --Campinas, SP: [s.n.], 2008. Orientadores: Éder Lima de Albuquerque, Paulo Sollero. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica. 1. Métodos de elementos de contorno. 2. Placas (Engenharia). 3. Materiais compostos. I. Albuquerque, Éder Lima. II. Sollero, Paulo. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Título em Inglês: Dynamic formulations of the boundary element method applied to thin plates of composite laminates
Palavras-chave em Inglês: Boundary elements methods, Plates (Engineering), Composite materials
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânica
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Carlos Henrique Daros, Carlos Friedrich Loeffer Neto
Data da defesa: 24/11/2008
Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADEMICO

Formulações dinâmicas do método dos elementos de contorno aplicado a análise de placas finas de compósitos laminados

Autor: André Pereira Santana
Orientador: Éder Lima de Albuquerque
Co-orientador: Paulo Sollero

Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque, Presidente
FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Carlos Henrique Daros
FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto
UFES

Campinas, 24 de novembro de 2008

Dedicatória

Aos meus pais e meus dois irmãos.

Agradecimentos

- Inicialmente, a Deus pela vida.

- Aos meus pais, Alteredo e Francisca, e irmãos, Alfran e Élida que, apesar das adversidades financeiras sempre incentivaram meus estudos, pelo apoio e participação em todas as minhas pequenas conquistas. Sem eles, nada seria possível.

- Ao meu orientador, Professor Éder Lima de Albuquerque, pela extraordinária orientação, comprometimento, apoio, paciência, por tantos conhecimentos transmitidos, pela amizade e estímulo constante para o bom decorrer do trabalho.

- Ao Professor Paulo Sollero à co-orientação, pelos ensinamentos, pela oportunidade de ter realizado o Estágio Docente e está sempre disposto à ajudar.

- A meu tio e segundo pai Salomão, pelo apoio e amizade.

- Aos amigos da República (Flávio, Hairton, Kerlles, Louryval Gordin e Lourival Magrin) pelo companherismo, amizade e risadas durante todos os dias de convivência.

- Ao meu grande amigo de República e companheiro de todas as horas, Adilto.

- Aos amigos Adriana e Fabiano pela amizade, conhecimento e por estarem sempre dispostos a me ajudar no que fosse necessário, além das brincadeiras.

- Aos amigos Rafael Kawano, Karlos, Moraes, Valdeir Almeida e Vilson pela amizade.

- Ao professor Jairo da Colômbia que forneceu o programa de elementos finitos para comparar nossos resultados.

- Ao amigo Belissário pela companhia nos finais de semana na UNICAMP.

- Aos amigos do DMC (Alexandre, Marcel e Martin) pela amizade nesse período.

- Aos professores (Keyl, Rivas Mercury e Socorro) do CEFET-MA pela amizade, apoio e serem meus incentivadores.

- Aos Professores Doval e Rubens do CEFET-MA pelo grande incentivo na graduação e durante todo o mestrado.

- Ao amigo e Professor do CEFET-MA Flávio Politi por ter me ensinado com grande maestria Resistência dos Materiais e por sempre me incentivar antes e durante o curso de mestrado.

- Aos amigos do CEFET-MA Adriano Magalhães, Edson Jota, Carlos Eduardo, Felizardo, Victor Morfeu, Nilton, José Reinan, Thiago Gléria e Tainá pela amizade, companherismo e apoio.

- A todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuiram para a realização deste trabalho e que aqui não foram citados.

- A CAPES pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

- A AFOSR (Air Force Office of Scientific Research, USA) pelo suporte financeiro para realização deste trabalho.

A inveja é a homenagem que a inferioridade tributa ao mérito.

(Puiseux)

Resumo

Santana, André Pereira, *Formulações dinâmicas do método dos elementos de contorno aplicado a análise de placas finas de compósitos laminados*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2008. 114 p. Dissertação (Mestrado)

Este trabalho apresenta formulações dinâmicas do método dos elementos de contorno para a análise de placas finas anisótropicas. As formulações utilizam soluções fundamentais da elasto-estática e os termos de inércia são tratados como forças de corpo. As integrais de domínio provenientes de forças de corpo são transformadas em integrais de contorno usando o método da reciprocidade dual (DRM) e o método da integração radial (RIM). No DRM, é escolhida uma solução particular e a função de aproximação é obtida usando a equação de equilíbrio. No RIM, quatro funções de aproximação são usadas. São implementados formulações para análise modal e análise transiente de placas finas. Na análise modal, a formulação integral é transformada em um problema de auto-valores e auto-vetores onde os auto-valores estão relacionados às frequências naturais e os auto-vetores são os modos de vibrar. Na análise transiente, a integração no tempo é realizada usando o método de Houbolt. Apenas o contorno é discretizado em todas as formulações implementadas. Os resultados numéricos mostram boa concordância com os resultados disponíveis na literatura e também com resultados do método dos elementos finitos.

Palavras Chave

Métodos dos elementos de contorno, método da integração radial, método dos elementos de contorno de reciprocidade dual, placas, materiais compósitos, dinâmica de placas.

Abstract

Santana, André Pereira, *Dynamic formulations of the boundary element method applied to thin plates of composite laminates*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2008. 114 p. Dissertação (Mestrado)

This work presents dynamic formulations of the boundary element method for the analysis of anisotropic thin plates. Formulations use elastostatic fundamental solutions and inertia terms are treated as body forces. Domain integrals that come from body forces are transformed into boundary integrals using the dual reciprocity boundary element method (DRM) and the radial integration method (RIM). In the DRM, a particular solution is chosen and a approximation function is obtained using the equilibrium equation. In the RIM, four different approximations functions are used. Formulations for modal and transient analysis are implemented. In the modal analysis, the integral formulation is transformed in a eigen-value and eigen-vector problem where the eigen-values are related to natural frequencies and the eigen-values stand for vibration shape modes. In the transient analysis, the time integration is carried out using the Houbolt method. Only the boundary is discretized in all implemented formulations. Numerical results show good agreement with results available in literature as well as finite element results.

Key Words

Boundary element method, radial integration method, dual reciprocity boundary element method, plates, composite materials, dynamic of plates.

Sumário

Símbolos

Letras gregas

α = Ângulo.

ε = Deformação normal.

ϕ = Ângulo.

Γ = Contorno.

γ = Deformação cisalhante.

μ = Raíz do polinômio característico.

ν = Razão de Poisson.

Ω = Domínio.

θ = Ângulo.

ρ = Distância.

σ = Tensão normal.

τ = Tensão cisalhante.

Letras arábicas

b = Força de corpo.

C, K = Constantes.

$\mathbf{D}$ = Matriz de rigidez de flexão.

$\mathbf{D}'$ = Matriz $\mathbf{D}$ transformada.

d_i = Parte real de μ.

E = Módulo de elasticidade.

e_i = Parte imaginária de μ.

g = Força elementar.

M, m = Momentos.

N = Função de interpolação.

$\mathbf{n}$ = Vetor normal ao contorno.

Q = Ponto campo.

$\mathbf{Q}$ = Matriz de rigidez.

$\overline{\mathbf{Q}}$ = Matriz de rigidez transformada.

q = Força distribuída.

R_i = Função.

r_i, s_i, q_i, p_i = Constantes.

S_i = Função.

$\mathbf{T}$ = Matriz de transformação.

t = Espessura da placa.

u, v = Deslocamentos no plano.

V = Força cortante equivalente de Kirchhoff.

w = Deslocamento transversal.

z = Distância transversal do plano médio à um ponto.

Subscritos

Γ = Contorno.

Ω = Domínio.

1, 2, 3 = Direções principais.

c = Compressão, elemento contínuo.

d = Elemento descontínuo.

L = Direção longitudinal às fibras.

n = Direção normal.

s = Direção tangencial.

T = Direção transversal às fibras.

t = Tração.

x, y, z = Eixos do sistema de coordenadas.

Sobrescritos

1, 2, 3 = Nós do elemento.

$*$ = Soluções fundamentais.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho trata de três assuntos: os materiais compósitos, as placas e o método dos elementos de contorno. A seguir são apresentadas as razões para a escolha desses três assuntos como objeto de estudo, bem como um pouco de sua história.

1.1 Considerações sobre materiais compósitos

Inúmeras conquistas tecnológicas recentes, principalmente as relacionadas com as aplicações relevantes em áreas tais como aeronáutica, aeroespacial, petroquímica, naval, bioengenharia, automobilística, construção civil, de artigos esportivos, entre outras, somente se tornaram viáveis após o advento dos materiais compósitos estruturais ou simplesmente compósitos. Esta classe de materiais é bastante ampla e abrangente, compreendendo desde os polímeros reforçados com fibras, os materiais híbridos metal/compósito, os concretos estruturais e outros compósitos que incorporam matriz metálica ou cerâmica.

Embora a associação do termo compósitos esteja ligada às chamadas tecnologias de ponta, nas quais peças e dispositivos oriundos desse material são empregados em componentes utilizados em satélites, aeronaves e helicópteros, implantes ortopédicos e odontológicos biocompatíveis, veículos de Fórmula 1, plataformas marítimas de petróleo, pontes, telescópios, instrumentos músicais, e estruturas inteligentes em geral, a origem desta importante classe de materiais remonta a milhares de anos, uma vez que as madeiras, os ossos e os tecidos musculares são exemplos notáveis em termos de eficiência estrutural dos chamados compósitos naturais.

As pesquisas por materiais de alta resistência, alta rigidez e baixo peso impuseram ciclos históricos na aplicação de materiais na indústria aeronáutica. Partindo do uso da madeira, passando pelas ligas de alumínio e magnésio, chega-se ao estado atual, no qual a indústria aeroespacial está, cada vez mais, substituindo o uso de metais pelo uso de compósitos. A princípio com utilização restrita à aeroespacial, atualmente a utilização dos materiais compósitos modernos vem se estendendo aos mais diversos ramos industriais. O motivo desse crescimento é que esses materiais apresentam características bastante desejavéis para muitas aplicações em engenharia. Devido a sua grande importância, os materiais compósitos têm sido objeto de muitos estudos, com vários livros publicados sobre o assunto (Agarwal e Broutman, 1990, Gibson, 1994 e Hull e Clyne, 1996).

1.2 Considerações sobre placas anisotrópicas

A adoção de hipóteses simplificadoras, visando analisar a placa como um elemento bidimensional, fez surgir diferentes teorias para verificar o comportamento geral desta superfície estrutural. Kirchhoff (1850) estabeleceu as hipóteses fundamentais da teoria de placas finas, derivando a expressão da energia potencial para uma placa inclinada e aplicando o princípio dos trabalhos virtuais para obter uma equação diferencial, onde a rigidez a flexão foi definida em termos do módulo de Young e coeficiente de Poisson. Adicionalmente, ele percebeu que as três condições de contorno naturais propostas por Poisson (1829) não eram compatíveis com a natureza de quarta ordem da equação diferencial obtida e mostrou que estas poderiam ser reduzidas a duas condições de contorno naturais. Esta teoria não leva em conta o efeito da deformação pelo esforço cortante, assumindo-se que retas normais ao plano médio da placa permanecem normais após a deformação. As hipóteses apresentadas por Kirchoff resultaram em uma equação diferencial de quarta ordem, na qual o deslocamento é dado em função de duas coordenadas no plano médio da placa. Esta equação pode ser uma eficiente representação do comportamento de placas finas para pequenos deslocamentos, apresentando boa precisão de resultados para uma grande variedade de carregamentos e geometrias. Entretanto, a teoria desenvolvida por Kirchhoff não apresenta bons resultados quando são analisadas placas de maior espessura. Mindlin (1951) formulou uma teoria para analisar placas moderadamente espessas onde, assumindo-se que as distorções que ocorrem na espessura são constantes, as tensões são obtidas a partir da geometria imposta para as deformações. O sistema de equações diferenciais obtido é de sexta ordem e também satisfaz as três condições de contorno requeridas. As formulações apresentadas por Kirchhoff e Mindlin podem ser consideradas como expressivas contribuições para o aprimoramento da teoria bidimensional de placas.

1.3 Evolução do método dos elementos de contorno

Atualmente a simulação computacional de fenômenos físicos de problemas de engenharia tem sido uma das principais ferramentas que auxiliam os engenheiros no desenvolvimento de projetos. Vários fenômenos físicos, nas diversas áreas do conhecimento, podem ser representadas por equações diferenciais parciais. Em casos práticos porém, dificilmente essas equações possuem soluções analíticas. Por isso, métodos numéricos são empregados para se obter uma solução aproximada das equações que governam o problema. Problemas envolvendo análises térmicas, análises de tensões, escoamento de fluidos, eletromagnetismo, só para citar alguns, podem ser modelados sob as variadas condições de contorno com o objetivo de simular computacionalmente as condições reais de serviço de um determinado componente mecânico. Essa prática tem sido cada vez mais utilizada atualmente, pois proporciona uma significativa economia de tempo e recursos financeiros durante o desenvolvimento de projetos. Vários ensaios práticos e a construção de protótipos, que outrora eram indispensavéis, podem ser substituídos por uma simulação computacional adequada feita por um programa de análise numérica. Dentre os métodos númericos que mais se destacam no tratamento de problemas estruturais estão o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC). A obtenção de uma fórmulação de elementos de contorno possue como atrativo a possibilidade de reduzir o número de dimensões do problema o que leva a um conjunto reduzido de equações e a uma quantidade menor de dados requeridos para a computação. Embora a idéia de redução do número de dimensões do problema pelo uso de uma formulação integral de contorno seja conhecida desde o final do século XIX, o MEC, na forma como é apresentado hoje, só se desenvolveu quase 80 anos depois, quando Rizzo (1967) apresentou a formulação das equações integrais singulares, com as variáveis físicas acopladas umas às outras na formulação direta do método. A partir disso, o MEC se desenvolveu de forma bastante rápida, sendo atualmente um método bem estabelecido, com vasta bibliografia publicada (Brebbia e Dominguez, 1989; Dominguez, 1993; Kane, 1994; Wrobel, 2002; Aliabadi, 2002; Gaul et al., 2003). As primeiras aplicações do MEC em análise de placas anisotrópicas começaram a surgir na década de 80. Wu (1980) e Altiero et al. (1981) apresentaram a solução fundamental anisotrópica para placas numa aplicação do método indireto dos elementos de contorno. A mesma solução fundamental foi usada por Shi e Benzine (1988) e Rajamohan e Raamachandran (1999) na análise de placas anisotrópicas pelo método direto dos elementos de contorno e pelo método de simulação de carga, respectivamente. Na mesma linha dos trabalhos anteriores, Albuquerque et al. (2006) apresentaram uma análise de flexão em compósitos laminados.

Uma alternativa para se tratar problemas elastodinâmicos é o método dos elementos de contorno de reciprocidade dual (Brebbia e Nardini 1982) e integração radial (Gao, 2002 e Albuquerque, Sollero e Paiva, 2007). Nesta formulação são usadas as soluções fundamentais da elastostática para problemas dinâmicos, sendo que a integral de domínio proveniente do termo de inércia é transformada em uma soma de integrais de contorno. A primeira aplicação do método dos elementos de contorno de reciprocidade dual (DRM) para o tratamento de problemas dinâmicos em materiais anisotrópicos foi proposta por Schlar e Partridge (1993) para problemas estacionários tridimensionais e por Albuquerque, Sollero e Aliabadi (2002) para problemas transientes bidimensionais. Além destes trabalhos, o DRM também foi usado para análise materiais anisotrópicos por Albuquerque el al. (2003a, 2003b, 2004) e Kogl e Gaul (2002, 2003).

1.4 Descrição do presente trabalho

A motivação para o desenvolvimento de uma formulação de elementos de contorno para análise do comportamento mecânico dos materiais compósitos advém da crescente utilização desses materiais devido às suas excelentes propriedades mecânicas. O método dos elementos de contorno vem sendo desenvolvido há várias décadas e através dos anos se consolidando como uma ferramenta de análise computacional extremamente útil em várias disciplinas de engenharia. Entretanto, a análise de problemas de materiais anisotrópicos usando o método dos elementos de contorno ainda demanda muita pesquisa. Neste trabalho, são apresentadas formulações do método dos elementos de contorno para análise de problemas dinâmicos de placas finas. Foram abordados, a análise modal e a análise de problemas transientes. O único trabalho que faz análise modal de placas anisotrópicas encontrado na literatura foi o apresentado por Albuquerque, Sollero e Paiva (2007). Não foi encontrado na literatura qualquer trabalho que faz a análise transiente de placas anisotrópicas. A precisão dos resultados numéricos apresentados no presente trabalho é analisada pela comparação com resultados analíticos e numéricos obtidos na literatura e com resultados numéricos obtidos usando-se o método dos elementos finitos. O presente trabalho é disposto de 8 capítulos.

No Capítulo 2 é apresentada uma classificação dos compósitos quanto à sua forma e uma visão geral sobre suas características, tais como: composição, interesse e aplicações.

No Capítulo 3 são apresentados algumas considerações em que se baseiam as teorias de placas finas. Será obtida a equação de equilíbrio de placas finas em termos da deflexão.

No Capítulo 4 a formulação de elementos de contorno é apresentada de forma detalhada. Será apresentada a obtenção da equação integral de contorno. Também será apresentada a obtenção da solução fundamental anisotrópica, tratamento de integrais análiticas e numéricas e os tipos de elementos de contorno usados.

No Capítulo 5 são apresentadas três formulações alternativas para o tratamento de integrais de domínio na formulação de elementos de contorno. A primeira alternativa é fazer a transformação exata da integral de domínio proveniente da carga distribuída em integral de contorno. A segunda e terceira alternativa é transferir os efeitos da integral de domínio para o contorno usando-se o método da reciprocidade dual e da integração radial, respectivamente.

No Capítulo 6 é apresentada uma metodologia para análise modal e transiente de placas anisotrópicas.

No Capítulo 7 são apresentados alguns resultados numéricos obtidos com as rotinas implementadas. Através da análise modal são determinadas as frequências naturais e os modos de vibrar de estruturas anisotrópicas e através da análise transiente se calcula os campos de deslocamento de estruturas anisotrópicas no domínio do tempo.

Por fim, no Capítulo 8 são apresentadas as considerações finais e conclusões obtidas através da análise dos resultados apresentados nesta dissertação. Também são citados temas do presente trabalho que ainda demandam pesquisa.

Capítulo 2

Materiais Compósitos

2.1 Definição

Um material compósito (ou composto) é formado pela união de dois materiais de naturezas diferentes, resultando em um material de performance superior àquela de seus componentes tomados separadamente. O material resultante é um arranjo de fibras, contínuas ou não, de um material resistente (reforço) que são impregnados em uma matriz de resistência mecânica inferior as fibras. Após décadas de uso restrito em alguns setores da indústria, como na área de míssies, foguetes e aeronaves de geometrias complexas, os compósitos poliméricos estruturais, também denominados avançados, têm ampliado a sua utilização em diferentes setores da indústria moderna, com um crescimento de uso de 5% ao ano (Rezende e Botelho, 2008). Atualmente, a utilização de estruturas de alto desempenho e com baixo peso tem sido buscada também nas indústrias automotiva, esportiva, de construção civil, entre outras.

2.2 Componentes constituintes de um material compósito

2.2.1 Fibras

A fibra é o elemento constituinte que confere ao material compósito suas características mecânicas: rigidez, resistência à ruptura, etc. As fibras podem ser curtas, medindo centímetros, que são injetadas no momento da moldagem da peça, ou longas, que são cortadas após a fabricação da peça. Os compósitos obtidos com fibras contínuas podem apresentar reforço unidirecional, reforço bidirecional (tecidos), fibras picadas e manta contínua. Nestes casos, o material é moldado de forma que, em cada camada do compósito, as fibras são contínuas e dotadas de direções preferenciais (Figura 2.1).

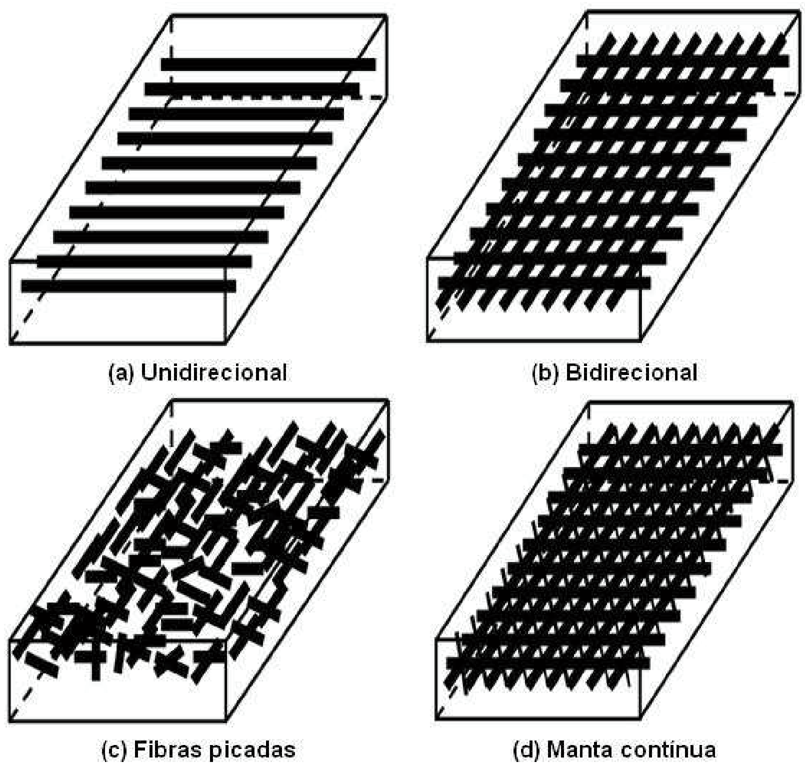

Figura 2.1: Compósitos com reforço tipo: (a) unidirecional; (b) tecido bidirecional; (c) fibras picadas; e (d) manta contínua.

Se considerarmos que os compósitos esquematizados na Figura 2.1 são fabricados a partir de uma mesma matriz e de um tipo específico de fibra e submetidos a esforços de tração longitudinais, pode-se verificar diferenças em relação à eficiência de comportamento mecânico. Os compósitos obtidos a partir de lâminas com fibras unidirecionais e tecidos bidirecionais tendem a ser muito mais eficientes estruturalmente em relação aos compósitos obtidos com fibras picadas e mantas contínuas. No caso da Figura 2.1a, a resistência mecânica e a rigidez teriam maiores valores na direção longitudinal, em relação a Figura 2.1b, onde os resultados de resistência mecânica e rigidez apresentariam valores intermediários. Nas Figuras 2.1c e 2.1d, os valores de resistência mecânica e rigidez seriam menores que nas situações anteriores. Entretanto, tal fato só se verifica para esforços mecânicos longitudinais. Se os esforços fossem aplicados transversalmente, o melhor desempenho ocorreria na Figura 2.1b, e o pior desempenho, na Figura 2.1a. Estas tendências indicam que a orientação das fibras em relação aos esforços aplicados, considerando-se o fato de serem contínuas ou não, influênciam significativamente nas propriedades mecânicas dos compósitos (Flamínio e Pardini, 2006). Os tipos mais comuns de fibras são: de vidro, de aramida (kevlar), carbono e boro.

2.2.2 Matrizes

As matrizes tem como função principal transferir as solicitações mecânicas às fibras e protegê-las do ambiente externo. As matrizes podem ser resinosas (polyester, epóxi, etc), minerais (carbono) e metálicas (ligas de alumínio). A escolha entre um tipo de fibra e uma matriz depende fundamentalmente da aplicação ao qual será dado o material compósito: características mecânicas elevadas, resistência à alta temperatura, resistência à corrosão, etc. O custo em muitos casos pode também ser um fator de escolha entre um ou outro componente. Deve ser observada também a compatibilidade entre as fibras e as matrizes.

2.3 Interesse dos materiais compósitos

O interesse dos materiais compósitos está ligado a dois fatores: econômico e desempenho. O fator econômico vem do fato do material composto ser muito mais leve que os materiais metálicos, o que implica numa economia de combustível e consequentemente, num aumento de carga útil (vantagens especiais nas áreas aeronáutica e aeroespacial). A redução na massa total do produto pode chegar a 30% ou mais, em função da aplicação dada ao material compósito. O custo de fabricação de algumas peças em material compósito pode ser também sensívelmente menor se comparado com os materiais metálicos. O fator performance está ligado à procura por um melhor desempenho de componentes estruturais, sobretudo no que diz respeito as ca-racterísticas mecânicas (resistência a ruptura, resistência à ambientes agressivos, etc.). O caráter anisotrópico dos materiais compósitos é o fator primordial para a obtenção das propriedades mecânicas requeridas pelo componente. A leveza, juntamente com as excelentes características mecânicas, faz com que os materiais compósitos sejam cada vez mais utilizados dentro de atividades esportivas.

2.4 Aplicações dos materiais compósitos

A aplicação dos materiais compósitos surgiu inicialmente na área aeronáutica devido à necessidade de estruturas de alto desempenho e baixo peso. Atualmente, uma grande variedade de peças em materiais compósitos pode ser encontrada nos aviões em substituição aos materiais metálicos: fuselagem, spoilers, portas de trem de aterrissagem, portas internas, etc. (Figura 2.2).

Em muitos destes componentes, sua concepção foge da definição dada inicialmente para materiais compósitos, pois nestes casos os componentes são fabricados normalmente por placas de baixa densidade, contra-placadas por placas finas de alta resistência. Esta configuração normalmente é dita sanduíche. De uma forma mais ampla, estas configurações são também consideradas materiais compósitos, pois combinam diferentes materiais. Dentro da área aeronáutica, os helicópteros possuem também vários componentes em material

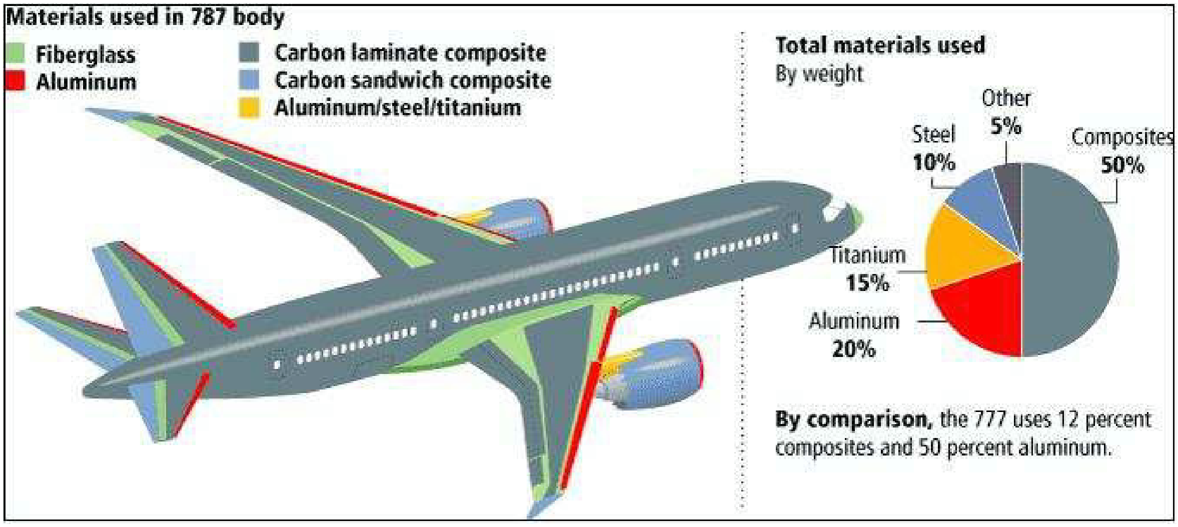

Figura 2.2: Boeing 787 - Principais aplicações estruturais em materiais compósitos. Crédito: The Boeing Company.

compósito: pás da hélice principal, hélice traseira, árvore de transmissão, fuselagem, etc.

A utilização dos materiais compósitos dentro da indústria automobilística é bem mais recente do que na área aeronáutica. Inicialmente, eram produzidos somente parachoques e tetos de automóveis. Atualmente, o material compósito é utilizado para a fabricação de capots, carters de óleo, colunas de direção, árvores de transmissão, molas laminadas, painéis, etc. Uma das grandes vantagens trazidas para o meio automobilístico pelos materiais compósitos é, além da redução do peso, a facilidade em confeccionar peças com superfícies complexas (Figura 2.3). Uma atividade esportiva notória que emprega material compósito é a Fórmula 1, que pode ser considerada como um laboratório para as inovações tecnológicas.

Em muitos casos, o que se emprega dentro dos carros de Fórmula 1 será utilizado futuramente nos carros de passeio. Neste caso, o aumento da relação potência/peso é fundamental para um bom desempenho do carro nas pistas. A configuração mais freqüentemente utilizada nestes carros é do tipo sanduíche que é utilizada para a confecção da carroceria.

Em praticamente todas as atividades esportivas, a redução do peso está diretamente ligada a redução do tempo de execução de uma prova esportiva. Como exemplo disto, pode-

Figura 2.3: Mercedes-Benz SLR McLaren - Chassi construído em fibra de carbono. Crédito: Portal Mercedes-Benz Brasil.

mos citar: barcos a vela, skis, bicicletas, etc. Em alguns casos, o que se procura é a agilidade, e a perfeição, como no tênis, com suas raquetes; no golf, com seus tacos; e no surf, com suas pranchas.

2.5 Laminados

Os materiais compósitos são, na maioria dos casos, utilizados na forma de laminados, onde as lâminas são coladas umas sobre as outras com orientações e espessura das fibras podendo ser diferentes uma das outras. Segundo Homes e Just (1983), as propriedades elásticas de uma lâmina de material compósito reforçado com fibras longas unidirecionais (Figura 2.4) podem ser avaliadas a partir de uma visão macroscópica, considerando esta lâmina como um material homogêneo. Assim, qualquer propriedade elástica (C) desta lâmina pode ser expressa como:

$$C = C(E_f, \nu_f, V_f, E_m, \nu_m, V_m) \tag{2.1}$$

onde os subscritos f e m referem-se respectivamente à fibra e à matriz. E é o módulo de elasticidade, ν é a razão de Poisson e V é a proporção em volume de cada componente da lâmina compósita.

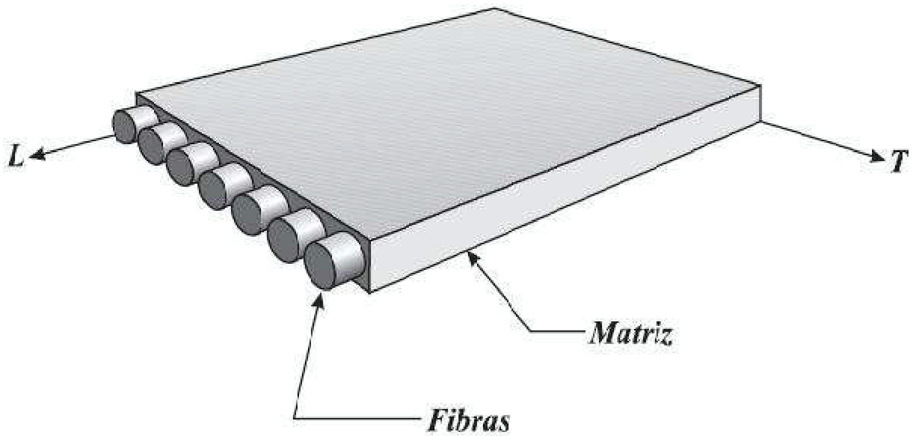

Figura 2.4: Lâmina compósita reforçada com fibras longas unidirecionais.

As propriedades elásticas necessárias para a determinação do comportamento da lâmina, e posteriormente do laminado, são:

- O módulo de elasticidade longitudinal (na direção das fibras) (E_L).
- O módulo de elasticidade transversal (ortogonal às fibras) (E_T).
- O módulo de cisalhamento (G_{LT}).
- A razão de Poisson principal (ν_{LT}).
- A razão de Poisson secundária (ν_{TL}).

Os subscritos L e T referem-se respectivamente às direções longitudinal e transversal à direção das fibras. Holmes e Just (1983) apresentam as relações entre as propriedades dos componentes da lâmina, fibra e matriz, e as propriedades da lâmina, dadas por:

$$
\begin{aligned}
E_L &= \left(E_f - E_m\right) V_f + E_m && (2.2)\\
\nu_{LT} &= \left(\nu_f - \nu_m\right) V_f + \nu_m && (2.3)\\
E_T &= \frac{E_f E_m}{E_m V_f + E_f \left(1 - V_f\right)} && (2.4)\\
\nu_{TL} &= \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L} && (2.5)\\
G_{LT} &= \frac{G_f G_m}{G_m V_f + G_f \left(1 - V_f\right)} && (2.6)
\end{aligned}
$$

onde $G_f = \frac{E_f}{2\left(1+\nu_f\right)}$ e $G_m = \frac{E_m}{2(1-\nu_m)}$.

Ainda segundo Holmes e Just (1983), estes resultados teóricos são consistentes com resultados experimentais, desconsiderando os efeitos do tempo de ensaio e da temperatura.

2.6 Equação constitutiva do laminado

Como apresentado por Agarwal e Broutman (1990), as tensões em cada lâmina pode ser calculada a partir das deformações através da relação:

$$
\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}, \tag{2.7}
$$

onde, a matriz $\left[\overline{Q}\right]$ é dada por:

$$
\left[\overline{Q}\right] = [T]^{-1} [Q] [T] . \tag{2.8}
$$

A matriz de transformação $[T]$ é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

sendo

$$m = \cos\theta \tag{2.10}$$

$$n = \operatorname{sen}\theta \tag{2.11}$$

onde θ é o ângulo entre as fibras e o sistema de referência.

A matriz de rigidez $[Q]$ é dada, em termos das constantes de engenharia por:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

As tensões nas direções longitudinal e transversal do reforço com fibras podem ser calculadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.13}$$

Capítulo 3

Teoria da Flexão em Placas Anisotrópicas Finas

As placas são elementos estruturais limitados por duas superfícies planas e paralelas (Figura 3.1) distanciadas entre si de uma grandeza designada por espessura.

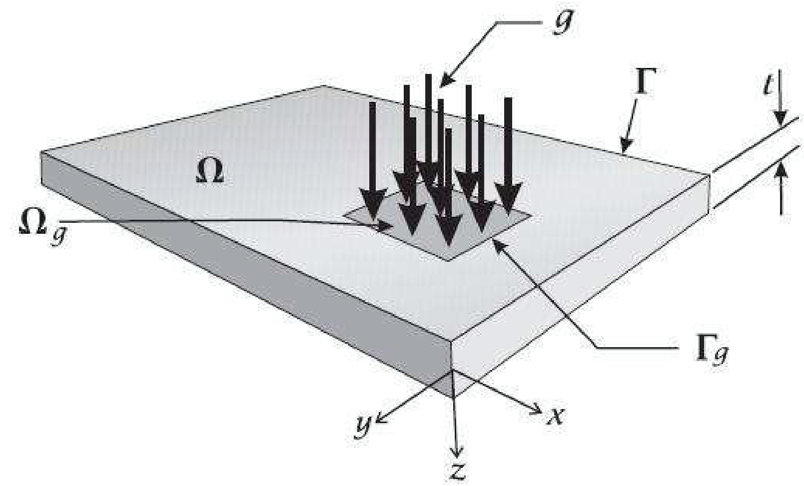

Figura 3.1: Placa Fina.

No caso da dimensão da espessura ser muito menor que as dimensões das superfícies planas limitantes, as placas são designadas por placas finas. O plano equidistante das superfícies planas externas é designado por plano médio da placa. Considerando as propriedades do material, uma placa pode ser anisotrópica, com diferentes propriedades em diferentes direções, ou isotrópica, com propriedades iguais em todas as direções. Dependendo de sua espessura, uma placa pode ser considerada fina ou espessa. Neste trabalho, será desenvolvida a formulação do método dos elementos de contorno para placas finas anisotrópicas. A teoria de flexão em placas finas anisotrópicas está baseada nos seguintes pressupostos:

1. Os pontos pertencentes à normal ao plano médio da placa antes da deformação permanecem na normal à superfície média fletida.
2. A tensão normal σ_z na direção normal ao plano médio é desprezível.

3.1 Relações básicas para placas finas

Considere um elemento de placa seguindo os pressupostos já definidos. A Figura 3.2 mostra este elemento com um estado de tensões agindo nele e uma força distribuída aplicada em sua superfície.

Integrando as componentes de tensão ao longo da espessura da placa podemos definir os momentos e forças (Figura 3.3):

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \tag{3.1}$$

$$m_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \tag{3.2}$$

$$m_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz, \tag{3.3}$$

$$q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz, \tag{3.4}$$

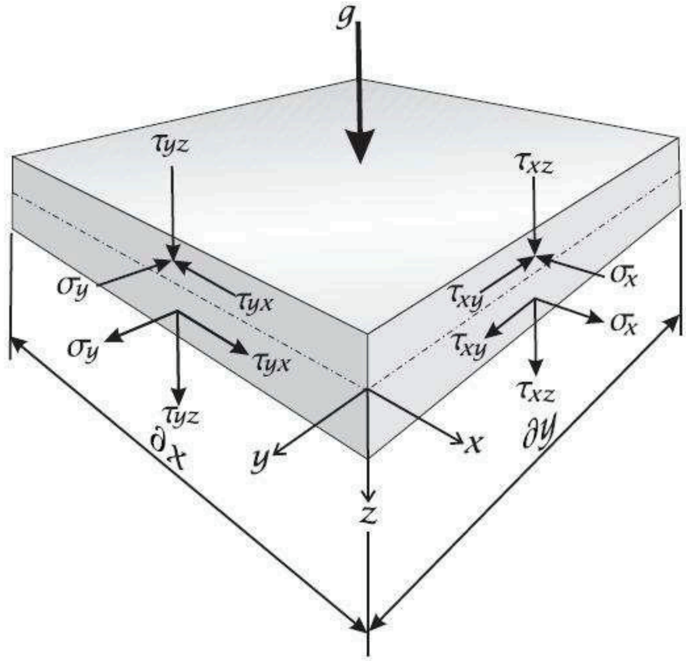

Figura 3.2: Tensões em um elemento de placa

e

$$q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz. \tag{3.5}$$

Do equilíbrio de forças e momentos, podemos escrever:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + g = 0, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x = 0, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0. \tag{3.8}$$

Resolvendo as equações (3.7) e (3.8) para q_x e q_y, respectivamente, substituindo a equação (3.6) e considerando a simetria de momentos ($m_{xy} = m_{yx}$), temos:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -g. \tag{3.9}$$

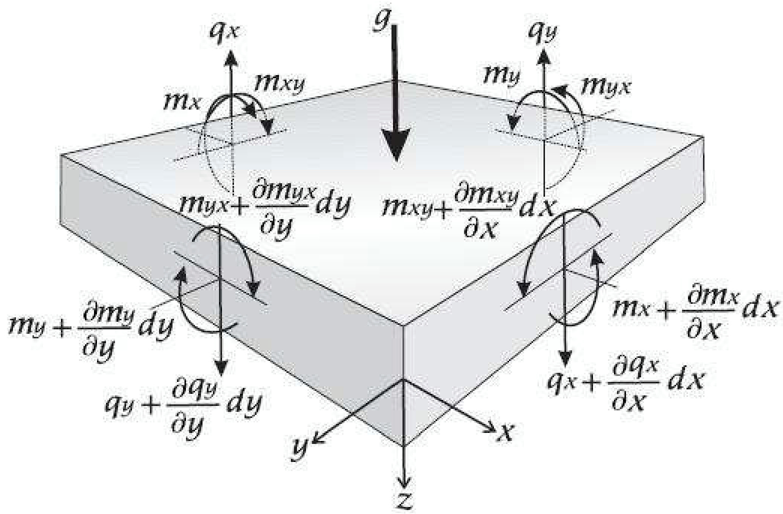

Figura 3.3: Forças e momentos em um elemento da placa

Considere as posições inicial e final de um elemento da placa dado por $abcd$ paralelo ao plano médio com lados ab e ad paralelos aos eixos x e y, respectivamente, a uma distância z do plano médio (Figura 3.4).

Assumindo que, durante a flexão da placa, os pontos a, b, c e d, movem-se para a', b', c' e d', chamando as componentes de deslocamento u_0 e v_0 do ponto a nas direções x e y (Figura 3.4), respectivamente, o deslocamento do ponto b na direção x é dado por:

$$b'_x - b_x = u_o + \frac{\partial u}{\partial x}dx. \tag{3.10}$$

Então, o incremento do comprimento dx na direção x é dado por:

$$\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x}dx, \tag{3.11}$$

e a deformação na direção x é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{3.12}$$

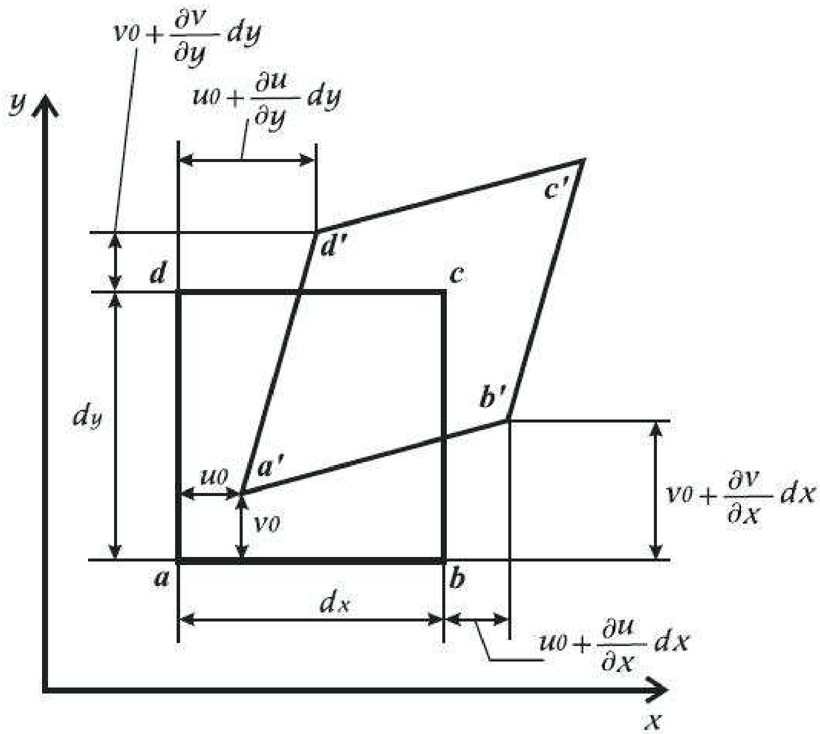

Figura 3.4: Deformação em um elemento da placa.

Da mesma forma, podemos escrever:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{3.13}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.14}$$

A Figura 3.5 mostra as posições inicial e final de uma seção da placa, paralela ao plano xz, que contém os pontos a, b, n_1 e n_2. A rotação do elemento an_1, inicialmente na posição vertical, é igual a $\frac{\partial w}{\partial x}$ (Figura 3.5). Então, o deslocamento do ponto na direção x, a uma distância z da superfície média pode ser escrita como:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{3.15}$$

Seguindo um procedimento similar, o deslocamento de um ponto na direção y é dado

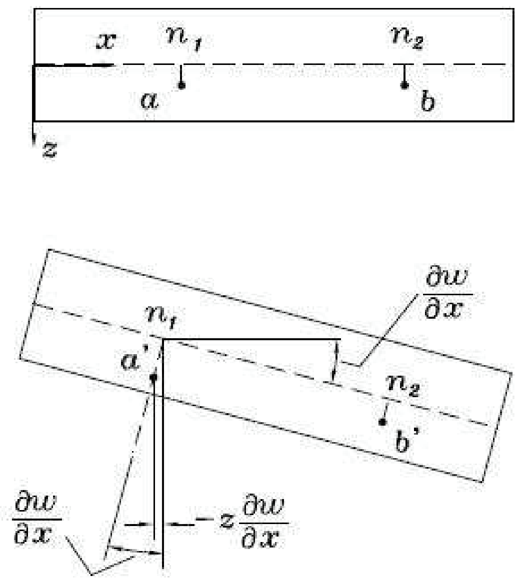

Figura 3.5: Posições inicial e final de um elemento de placa.

por:

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{3.16}$$

Substituindo as equações (3.15) e (3.16) nas equações (3.12), (3.13) e (3.14) pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z\kappa_x, \\
\varepsilon_y &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z\kappa_y, \\
\gamma_{xy} &= -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = z\kappa_{xy}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde κ_x, κ_y e κ_{xy} são as curvaturas da placa dadas por:

$$
\left\{ \begin{array}{c} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \tag{3.18}
$$

Integrando ao longo da espessura (Figura 3.6) as equações (3.1), (3.2) e (3.3) obtém-se:

$$
\left\{ \begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}_k z\, dz \tag{3.19}
$$

Usando-se as equações (2.7) e (3.17), a equação (3.19) pode ser escrita para um laminado como:

$$
\left\{ \begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^{N} \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\begin{array}{ccc} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right\} z^2\, dz \right\} \tag{3.20}
$$

ou

$$
\left\{ \begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right\} \tag{3.21}
$$

onde

$$
D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{Q}_{ij} \right)_k \left(h_k^3 - h_{k-1}^3 \right) \tag{3.22}
$$

onde h_k é a distância do plano médio do laminado até a interface k (Figura 3.6).

A equação (3.21) também pode ser escrita como:

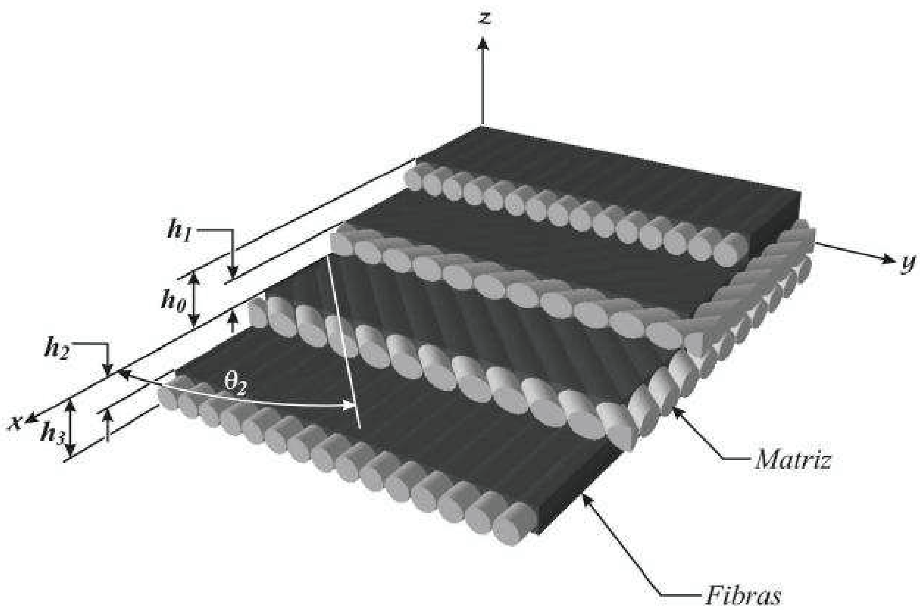

Figura 3.6: Compósito laminado com quatro lâminas

$$
\begin{aligned}
m_x &= -\left(D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right), \\
m_y &= -\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right), \\
m_{xy} &= -\left(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right).
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Substituindo as equações (3.23) nas equações (3.7) e (3.8), pode-se escrever:

$$
\begin{aligned}
q_x &= -\left[D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right], \\
q_y &= -\left[D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right].
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

A equação (3.9) pode então ser reescrita usando as equações (3.23) como:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = g. \tag{3.25}$$

A equação (3.25) pode ser integrada no plano característico complexo:

$$z = x + \mu y \tag{3.26}$$
$$\mu = d + ie$$

onde d e e são as partes real e imaginária de μ, respectivamente. Usando a equação (3.26) e considerando as forças de corpo nulas, a equação (3.25) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^4}\left[D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11}\right] = 0. \tag{3.27}$$

A solução geral para w na equação (3.25) depende das raízes μ_1, μ_2, $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ da equação característica dada por:

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0. \tag{3.28}$$

As raízes desta equação, como mostrado por Lekhnitskii (1968), são sempre complexas para materiais homogêneos. As raízes complexas $\mu_1 = d_1 + e_1 i$ e $\mu_2 = d_2 + e_2 i$ são conhecidas como parâmetros complexos de deflexão. Em geral, estas raízes são números complexos distintos. Uma expressão geral para a deflexão tem a forma:

1. no caso de parâmetros complexos distintos ($\mu_1 \neq \mu_2$):

$$w = w_o + 2\text{Re}[w_1(z_1) + w_2(z_2)]. \tag{3.29}$$

2. no caso de parâmetros complexos iguais ($\mu_1 = \mu_2$):

$$w = w_o + 2\text{Re}[w_1(z_1) + \bar{z}_1 w_2(z_1)]. \tag{3.30}$$

onde w_0 é uma solução particular da equação (3.25) que depende da força distribuída q nas superfícies da placa, $w_1(z_1)$ e $w_2(z_2)$ são funções analíticas arbitrárias de variáveis complexas $z_1 = x + \mu_1 y$ e $z_2 = x + \mu_2 y$. Baseada nas equações (3.23) e (3.24), podem ser obtidas expressões gerais para forças e momentos como (para o caso $\mu_1 \neq \mu_2$):

$$\begin{aligned}
m_x &= m_x^o - 2\text{Re}[p_1 w''(z_1) + p_2 w''(z_2)], \\
m_y &= m_y^o - 2\text{Re}[q_1 w''(z_1) + q_2 w''(z_2)], \\
m_{xy} &= m_{xy}^o - 2\text{Re}[r_1 w''(z_1) + r_2 w''(z_2)], \\
q_x &= q_x^o - 2\text{Re}[\mu_1 s_1 w'''(z_1) + \mu_2 s_2 w'''(z_2)], \\
q_y &= q_y^o - 2\text{Re}[s_1 w'''(z_1) + s_2 w'''(z_2)].
\end{aligned} \tag{3.31}$$

onde m_x^0, m_y^0, m_{xy}^0, q_x^0 e q_y^0 são momentos e forças cisalhantes correspondentes a função w_0 calculada pelas equações (3.23) e (3.24). As outras constantes são dadas por:

$$p_1 = D_{11} + D_{12}\mu_1^2 + 2D_{16}\mu_1, \qquad p_2 = D_{11} + D_{12}\mu_2^2 + 2D_{16}\mu_2,$$

$$q_1 = D_{12} + D_{22}\mu_1^2 + 2D_{26}\mu_1, \qquad q_2 = D_{12} + D_{22}\mu_2^2 + 2D_{26}\mu_2,$$

$$r_1 = D_{16} + D_{26}\mu_1^2 + 2D_{66}\mu_1, \qquad p_2 = D_{16} + D_{26}\mu_2^2 + 2D_{66}\mu_2,$$

$$s_1 = \frac{D_{11}}{\mu_1} + 3D_{16} + D_{12} + D_{66}\mu_1 + D_{26}\mu_1^2, \tag{3.32}$$

$$s_2 = \frac{D_{11}}{\mu_2} + 3D_{16} + D_{12} + D_{66}\mu_2 + D_{26}\mu_2^2,$$

$$s_1 - r_1 = \frac{p_1}{\mu_1}, \qquad s_2 - r_2 = \frac{p_2}{\mu_2},$$

$$s_1 + r_1 = -q_1\mu_1, \qquad s_2 + r_2 = -q_2\mu_2.$$

Expressões similares podem ser obtidas para o caso onde $\mu_1 = \mu_2$. Estes casos ocorrem quando:

$$D_{11}\ D_{22} = (D_{12} + 2D_{66})^2 \tag{3.33}$$

e

$$D_{16} = D_{26} = 0 \tag{3.34}$$

Contudo este caso não será apresentado neste trabalho (Shi e Bezine, 1988).

3.2 Transformação de coordenadas para momentos e forças cortantes

As componentes de tensão σ_n e τ_{ns}, tensões normal e cisalhante, respectivamente, estão relacionadas com as tensões σ_x, σ_y e τ_{xy} por:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy} \sin\alpha \cos\alpha, \tag{3.35}$$

$$\tau_{ns} = (\sigma_y - \sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \tag{3.36}$$

As componentes de momento, inicialmente escritas considerando os eixos x e y, podem agora ser reescritas em um sistema de coordenadas genérico n, s (Paiva, 1987). Os momentos de flexão referentes às direções n e s são dados por:

$$m_n = m_x\cos^2\alpha + m_y\sin^2\alpha + 2m_{xy}\sin\alpha\cos\alpha, \tag{3.37}$$

$$m_{ns} = (m_y - m_x)\sin\alpha\cos\alpha + m_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \tag{3.38}$$

Similarmente, q_n, a força cisalhante no eixo n, pode ser escrita como:

$$q_n ds = q_x ds\cos\alpha + q_y ds\sin\alpha, \tag{3.39}$$

ou

$$q_n = q_x\cos\alpha + q_y\sin\alpha. \tag{3.40}$$

Com o objetivo de resolver a equação diferencial da placa dada por (3.25), é necessário a imposição das condições de contorno para o deslocamento w e sua derivada $\frac{\partial w}{\partial n}$. Kirchhoff (1950) mostrou que as condições de contorno da força cisalhante q_n e momento volvente m_{ns} podem ser escritas como uma única condição dada por:

$$V_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}. \tag{3.41}$$

Como apresentado por Timoshenko e Woinowoski-Kriegr (1959), a flexão de uma placa não é alterada se as forças horizontais que resultam no binário volvente $m_{ns}ds$, agindo em um elemento de comprimento ds de uma aresta, são substituídas por duas forças verticais de magnitude m_{ns} e separadas por uma distância ds. Esta substituição não altera a magnitude dos momentos volventes e produz somente mudanças locais na distribuição de tensões na aresta da placa, deixando a distribuição de tensões no restante da placa inalterada.

A outra condição de carregamento no contorno é o momento m_n.

Capítulo 4

O Método dos Elementos de Contorno para Flexão em Placas Anisotrópicas

4.1 Formulação integral

Usando o teorema de Betti (Kane, 1994), podemos relacionar dois estados de tensão-deformação de um material linear como:

$$\int_\Omega \sigma^*_{ij}\varepsilon_{ij} d\Omega = \int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} d\Omega. \tag{4.1}$$

Escrevendo o lado direito da equação (4.1) na notação de von Karman, temos:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} d\Omega = \int_\Omega \left(\sigma_x\varepsilon^*_x + \sigma_y\varepsilon^*_y + \sigma_z\varepsilon^*_z + \tau_{xy}\gamma^*_{xy} + \tau_{xz}\gamma^*_{xz} + \tau_{yz}\gamma^*_{yz}\right) d\Omega. \tag{4.2}$$

Desconsiderando as tensões normais à superfície média da placa, a equação (4.2) é escrita como:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} d\Omega = \int_\Omega \left(\sigma_x\varepsilon^*_x + \sigma_y\varepsilon^*_y + \tau_{xy}\gamma^*_{xy}\right) d\Omega. \tag{4.3}$$

Substituindo as equações (3.16) e (3.17) na equação (4.3), pode-se escrever o primeiro termo da integral do lado direito da equação (4.3) como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Omega} \left[\int_z \left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(z \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right) dz \right] d\Omega. \tag{4.4}$$

Integrando (4.4) ao longo da espessura da placa, tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Omega} \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = - \int_{\Omega} m_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega. \tag{4.5}$$

Para obter as equações do método dos elementos de contorno, é necessário transformar as integrais de domínio em integrais de contorno. Considere duas funções $f(x)$ e $g(x)$. A derivada de seu produto pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} [f(x) g(x)] = \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x). \tag{4.6}$$

Usando a propriedade de derivação (4.6) na equação (4.5), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_x}{\partial x} \right] d\Omega. \tag{4.7}$$

Usando o teorema de Green (Kane, 1994), a equação (4.7) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Gamma} m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_x}{\partial x} d\Omega. \tag{4.8}$$

Aplicando a propriedade de derivação (4.6) no segundo termo do lado direito da equação (4.8), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Gamma} m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w^* \frac{\partial m_x}{\partial x} \right) - w^* \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} \right] d\Omega. \tag{4.9}$$

Depois, usando o teorema de Green, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos\alpha + w^* \frac{\partial m_x}{\partial x} \cos\alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} d\Omega. \tag{4.10}$$

Seguindo um procedimento similar, podemos mostrar que:

$$\int_{\Omega} \sigma_y \varepsilon_y^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin\alpha + w^* \frac{\partial m_y}{\partial y} \sin\alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} d\Omega, \tag{4.11}$$

e

$$\int_{\Omega} \tau_{xy} \gamma_{xy}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos\alpha - m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin\alpha + w^* \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \sin\alpha + \right.$$

$$\left. w^* \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \cos\alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} 2 w^* \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} d\Omega. \tag{4.12}$$

Assim, a equação (4.3) é escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = -\int_{\Gamma} \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos\alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin\alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos\alpha + \right.$$

$$\left. m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin\alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* \left[\left(\cos\alpha \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) \left(\sin\alpha \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) \right] d\Gamma -$$

$$\int_{\Omega} w^* \left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \right) d\Omega. \tag{4.13}$$

Substituindo as equações (3.7) e (3.9) e usando a equação (3.40), a equação (4.13) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = -\int_{\Gamma} \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos\alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin\alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos\alpha + \right.$$

$$\left. m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin\alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* q_n d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \tag{4.14}$$

Da relação entre dois sistemas de coordenadas (x, y) e (n, s) tem-se:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{\partial w^*}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s}\sin\alpha,$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial y} = \frac{\partial w^*}{\partial n}\sin\alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s}\cos\alpha. \tag{4.15}$$

Substituindo as equações (4.15) na equação (4.14) tem-se:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} d\Omega = -\int_\Gamma \left[m_x \cos\alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s}\sin\alpha\right) + \right.$$

$$m_y \sin\alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\sin\alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s}\cos\alpha\right) + m_{xy}\cos\alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\sin\alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s}\cos\alpha\right) +$$

$$\left. m_{xy}\sin\alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s}\sin\alpha\right)\right] d\Gamma + \int_\Gamma w^* q_n d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.16}$$

Depois de algumas manipulações algébricas, a equação (4.16) pode ser reescrita como:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} d\Omega = -\int_\Gamma \left\{\frac{\partial w^*}{\partial n}\left(m_x \cos^2\alpha + m_y \sin^2\alpha + 2m_{xy}\sin\alpha\cos\alpha\right) + \right.$$

$$\left. \frac{\partial w^*}{\partial s}\left[m_{xy}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + (m_y - m_x)\sin\alpha\cos\alpha\right]\right\} d\Gamma +$$

$$\int_\Gamma w^* q_n d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.17}$$

Substituindo as equações (3.37) e (3.38) na equação (4.17), tem-se:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} d\Omega = -\int_\Gamma \left(m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + m_{ns}\frac{\partial w^*}{\partial s} - q_n w^*\right) d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.18}$$

Calculando o segundo termo da primeira integral do lado direito da equação (4.18), temos:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = m_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma, \qquad (4.19)$$

onde Γ_1 e Γ_2 são as coordenadas dos extremos do contorno onde a integração está sendo realizada.

No caso de um contorno fechado sem canto, isto é, a função que descreve a curva de contorno e suas derivadas são contínuas, o primeiro termo do lado direito da equação (4.19) desaparece. No caso onde há cantos, a equação (4.19) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = -\sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w^*_{c_i} - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma, \qquad (4.20)$$

onde

$$R_{c_i} = m^+_{ns_i} - m^-_{ns_i}, \qquad (4.21)$$

e os termos w_{c_i}, $m^+_{ns_i}$, $m^-_{ns_i}$ são, respectivamente, os valores de deslocamentos e momentos depois e antes do canto i da placa (Figura 4.1), N_c é o número total de cantos no contorno (Paiva, 1987).

Das equações (4.18) e (4.20), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon^*_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \left(q_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w^*_{c_i} + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \qquad (4.22)$$

Das equações (4.22) e (3.41), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon^*_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \left(V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w^*_{c_i} + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \qquad (4.23)$$

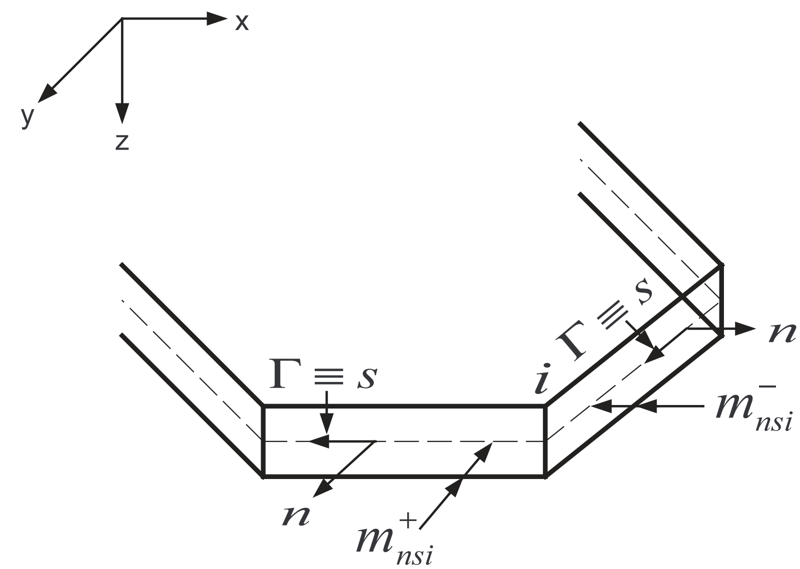

Figura 4.1: Canto i do contorno da placa.

Seguindo um procedimento similar àquele usado para obter a equação (4.23), o lado esquerdo da equação (4.1) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{*} \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \left(V_n^{*} w - m_n^{*} \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^{*} w_{c_i} + \int_{\Omega} g^{*} w d\Omega. \tag{4.24}$$

Substituindo as equações (4.23) e (4.24) na equação (4.1), pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma} \left(V_n w^{*} - m_n \frac{\partial w^{*}}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^{*} + \int_{\Omega} g w^{*} d\Omega =$$

$$\int_{\Gamma} \left(V_n^{*} w - m_n^{*} \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^{*} w_{c_i} + \int_{\Omega} g^{*} w d\Omega. \tag{4.25}$$

A equação (4.25) relaciona dois estados de um material elástico. Para aplicar esta equação para resolver problemas de flexão, precisamos considerar um dos estados como conhecido e o outro como o estado que queremos analisar. Para obter a equação integral de contorno, o estado conhecido é ajustado para que a integral de domínio dada por:

$$\int_{\Omega} g^* w d\Omega \tag{4.26}$$

desapareça. Usando as propriedades da função delta de Dirac $\delta(P,Q)$, de forma que $g^* = \delta(P,Q)$, a integral (4.26) é escrita como:

$$\int_{\Omega} \delta(P,Q) w(P) d\Omega(P) = w(Q), \tag{4.27}$$

onde Q é o ponto onde a carga é aplicada, conhecido como ponto fonte, e P é o ponto onde o deslocamento é observado, conhecido como ponto campo. O estado correspondente a um material linear sob carregamento de uma função delta de Dirac é conhecido como um estado fundamental e as variáveis da equação (4.25) relacionadas a este estado (w^*,V_n^* e m_n^*) são conhecidas como soluções fundamentais, as quais são calculadas analiticamente a partir da equação (3.25).

Considerando o estado "*"como o estado fundamental, a equação (4.25) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} Kw(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q,P) w(P) - m_n^*(Q,P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q,P) w_{c_i}(P) - \\ \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(Q,P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(Q,P) + \\ \int_{\Omega} b(P) w^*(Q,P) d\Omega. \end{aligned} \tag{4.28}$$

A equação(4.28) é a equação de placas finas para deslocamentos em pontos do domínio da placa. Esta equação fornece deslocamentos em todos os pontos do domínio da placa a partir das cortantes equivalentes (V_n), momentos de flexão na direção normal (m_n), reação de canto (R_{c_i}), deslocamentos (w) e rotações em relação à normal ($\partial w/\partial n$) conhecidos no contorno.

A constante K é introduzida para se considerar que a função delta de Dirac pode ser aplicada no domínio, no contorno ou fora do domínio. Se a função delta de Dirac é aplicada em um ponto onde o contorno é suave, então $K = 1/2$. As variáveis da equação (4.28) são deslocamentos $w(P)$, rotações $\frac{\partial w(P)}{\partial n}$, momentos $m_n(P)$, e forças $V_n(P)$. Para uma dada condição de contorno, algumas destas variáveis são conhecidas e outras desconhecidas. Para tem-se um número de equações igual ao número de variáveis desconhecidas, é necessário escrever a equação integral correspondente a derivada do deslocamento $w(Q)$ em relação ao sistema de coordenadas cartesiano fixo no ponto de origem, isto é, o ponto onde o delta de Dirac do estado fundamental é aplicado. As direções dos eixos deste sistema de coordenadas são coincidentes com as direções normal e a tangente ao contorno no ponto de origem. Para problemas de flexão em placas anisotrópicas tem-se que a equação integral de contorno escrita em termos de quatro valores de contorno básicos, isto é, deflexão w, inclinação da normal $\partial w/\partial n$, força cortante V_n e momento fletor m_n. Em um problema bem colocado dois destes quatro valores são incógnitas do problema e dois são condições de contorno conhecidas.

Pode-se verificar que num problema de flexão em placas anisotrópicas há sempre duas incógnitas a serem determinadas em qualquer ponto do contorno e consequentemente, a solução do problema requer que uma segunda equação seja estabelecida.

A segunda equação integral de contorno é obtida da derivada da equação (4.28) em relação à direção n_1 normal ao contorno no ponto fonte e também corresponde à solução do binário unitário.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial w(Q)}{\partial n_1} + \int_\Gamma \left[\frac{\partial V^*}{\partial n_1}(Q,P)w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1}(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P)\right] d\Gamma(P) + \\
&\sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q,P)w_{c_i}(P) = \int_\Gamma \left\{V_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q,P) - m_n(P)\frac{\partial}{\partial n_1}\left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P)\right]\right\} d\Gamma(P) + \\
&\qquad \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)\frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q,P) + \int_\Omega g(P)\frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q,P)d\Omega. \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

É importante dizer que é possível usar apenas a equação (4.28) em uma formulação de elementos de contorno usando como pontos fonte os nós do contorno e um número igual de pontos externos ao domínio do problema.

4.2 Solução fundamental de deflexão para uma carga pontual

A solução fundamental é a resposta à aplicação de um carregamento unitário pontual em um meio elástico infinito cujas propriedades elásticas são as mesmas do componente que se quer analisar. No caso particular de placas, a solução fundamental é dada pelo deslocamento w em um ponto P qualquer do domínio, chamado de ponto campo, devido à aplicação de uma carga unitária q em um ponto Q qualquer, chamado de ponto fonte (Figura 4.2).

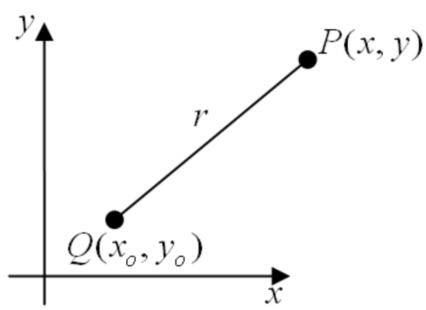

Figura 4.2: Solução fundamental

A solução fundamental do deslocamento transversal de placas fletidas é calculado fazendo o termo não-homogêneo da equação diferencial (3.25) igual a uma força concentrada dada por uma função delta de Dirac $\delta(Q, P)$, isto é:

$$\Delta\Delta w^*(Q, P) = \delta(Q, P), \tag{4.30}$$

onde $\Delta\Delta(.)$ é o operador diferencial:

$$\Delta\Delta(.) = \frac{D_{11}}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial x^4} + 4\frac{D_{16}}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial^3 \partial y} + \frac{2(D_{12}+2D_{66})}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\frac{D_{26}}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4(.)}{\partial y^4}. \qquad (4.31)$$

Como mostrado por Shi e Bezine (1988), a solução fundamental do deslocamento transversal é dada por:

$$w^*(\rho,\theta) = \frac{1}{8\pi}\left\{C_1 R_1(\rho,\theta) + C_2 R_2(\rho,\theta) + C_3\left[S_1(\rho,\theta) - S_2(\rho,\theta)\right]\right\}, \qquad (4.32)$$

onde

$$\rho = [(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2]^{1/2}, \qquad (4.33)$$

x e y são as coordenadas do ponto campo P, x_0 e y_0 são as coordenadas do ponto fonte Q,

$$\theta = \arctan\frac{y-y_o}{x-x_o}, \qquad (4.34)$$

$$C_1 = \frac{(d_1-d_2)^2 - (e_1^2-e_2^2)}{GHe_1}, \qquad (4.35)$$

$$C_2 = \frac{(d_1-d_2)^2 + (e_1^2-e_2^2)}{GHe_2}, \qquad (4.36)$$

$$C_3 = \frac{4(d_1-d_2)}{GH}, \qquad (4.37)$$

$$G = (d_1-d_2)^2 + (e_1+e_2)^2, \qquad (4.38)$$

$$H = (d_1-d_2)^2 + (e_1-e_2)^2, \qquad (4.39)$$

d_i e e_i são respectivamente as partes real e imaginária das raízes μ_i da equação característica (3.28).

$$
\begin{aligned}
R_i &= \rho^2 \left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 - e_i^2 \sin^2\theta \right] \times \\
&\left\{ \log \left[\frac{\rho^2}{a^2} \left((\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right) \right] - 3 \right\} - \\
&4\rho^2 e_i \sin\theta \, (\cos\theta + d_i \sin\theta) \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta},
\end{aligned} \tag{4.40}
$$

e

$$
\begin{aligned}
S_i &= \rho^2 e_i \sin\theta \, (\cos\theta + d_i \sin\theta) \times \\
&\left\{ \log \left[\frac{\rho^2}{a^2} \left((\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right) \right] - 3 \right\} + \\
&\rho^2 \left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 - e_i^2 \sin^2\theta \right] \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}.
\end{aligned} \tag{4.41}
$$

O índice repetido i nos termos de R_i e S_i não implicam em soma. O coeficiente a é uma constante arbitrária tomada como $a = 1$. As outras grandezas derivadas da solução fundamental são dadas por:

$$
m_n^* = -\left(f_1 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + f_2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + f_3 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right), \tag{4.42}
$$

$$
R_{c_i}^* = -\left(g_1 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + g_2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} + g_3 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right), \tag{4.43}
$$

$$
V_n^* = -\left(h_1 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} + h_2 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2 \partial y} + h_3 \frac{\partial^3 w^*}{\partial x \partial y^2} + h_4 \frac{\partial^3 w^*}{\partial y^3} \right) -
$$

$$\frac{1}{\bar{R}}\left(h_5\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}+h_6\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\partial y}+h_7\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right). \tag{4.44}$$

onde $\bar{R}$ é o raio de curvatura em um ponto suave do contorno Γ. As demais constantes são definidas como:

$$f_1 = D_{11}n_x^2+2D_{16}n_xn_y+D_{12}n_y^2, \tag{4.45}$$

$$f_2 = 2(D_{16}n_x^2+2D_{66}n_xn_y+D_{26}n_y^2), \tag{4.46}$$

$$f_3 = D_{12}n_x^2+2D_{26}n_xn_y+D_{22}n_y^2, \tag{4.47}$$

$$g_1 = (D_{12}-D_{11})\cos\beta\sin\beta+D_{16}(\cos^2\beta-\sin^2\beta), \tag{4.48}$$

$$g_2 = 2(D_{26}-D_{16})\cos\beta\sin\beta+2D_{66}(\cos^2\beta-\sin^2\beta), \tag{4.49}$$

$$g_3 = (D_{22}-D_{12})\cos\beta\sin\beta+D_{26}(\cos^2\beta-\sin^2\beta), \tag{4.50}$$

$$h_1 = D_{11}n_x(1+n_y^2)+2D_{16}n_y^3-D_{12}n_xn_y^2, \tag{4.51}$$

$$h_2 = 4D_{16}n_x+D_{12}n_y(1+n_x^2)+4D_{66}n_y^3-D_{11}n_x^2n_y-2D_{26}n_xn_y^2, \tag{4.52}$$

$$h_3 = 4D_{26}n_y+D_{12}n_x(1+n_y^2)+4D_{66}n_x^3-D_{22}n_xn_y^2-2D_{16}n_x^2n_y, \tag{4.53}$$

$$h_4 = D_{22}n_y(1+n_x^2)+2D_{26}n_x^3-D_{12}n_x^2n_y, \tag{4.54}$$

$$h_5 = (D_{12}-D_{11})\cos 2\beta-4D_{16}\sin 2\beta, \tag{4.55}$$

$$h_6 = 2(D_{26} - D_{16}) \cos 2\beta - 4D_{66} \sin 2\beta, \tag{4.56}$$

$$h_7 = (D_{22} - D_{12}) \cos 2\beta - 4D_{26} \sin 2\beta, \tag{4.57}$$

e β é o ângulo entre o sistema de coordenadas global xy e um sistema de coordenadas ns o qual tem seus eixos paralelos aos vetores n e s, normal e tangente, respectivamente, ao contorno no ponto Q. As derivadas da solução fundamental do deslocamento transversal podem ser expressas pela combinação linear das derivadas das funções R_i e S_i. Por exemplo:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} = \frac{1}{8\pi}\left[C_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2} + C_2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial y^2} + C_3 \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial y^2}\right)\right]. \tag{4.58}$$

As derivadas de R_i e S_i são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i}{\partial x} &= 2r\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)\left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left((\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right)\right] - 2\right\} - \\ & \quad 4re_i \sin\theta \arctan\frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}, \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i}{\partial y} &= 2r\left[d_i\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right) - e_i^2 \sin\theta\right] \times \\ & \quad \left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left((\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right)\right] - 2\right\} - \\ & \quad 4re_i\left(\cos\theta + 2d_i \sin\theta\right) \arctan\frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}, \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} = 2\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]\right\} \tag{4.61}$$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial x \partial y} = 2d_i \log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]\right\} -$$

$$4e_i \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}, \tag{4.62}$$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2} = 2\left(d_i^2 - e_i^2\right) \log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]\right\} -$$

$$8d_i e_i \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}, \tag{4.63}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^3} = \frac{4\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)}{r\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]}, \tag{4.64}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^2 \partial y} = \frac{4\left[d_i\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right) + e_i^2 \sin\theta\right]}{r\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]}, \tag{4.65}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x \partial y^2} = \frac{4\left[\left(d_i^2 - e_i^2\right)\cos\theta + \left(d_i^2 + e_i^2\right) d_i \sin\theta\right]}{r\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]}, \tag{4.66}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial y^3} = \frac{4\left[d_i\left(d_i^2 - 3e_i^2\right)\cos\theta + \left(d_i^4 - e_i^4\right)\sin\theta\right]}{r\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]}, \tag{4.67}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^4} = -\frac{4\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 - e_i^2 \sin^2\theta\right]}{r^2\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]^2}, \tag{4.68}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^3 \partial y} = -\frac{4}{r^2}\left\{\frac{d_i}{\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta} + \right.$$

$$\left.\frac{2e_i^2 \sin\theta\cos\theta}{\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.69}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{4}{r^2}\left\{\frac{\left(d_i^2 + e_i^2\right)}{\left(\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right)} - \right.$$

$$\left.\frac{2e_i^2 \cos^2\theta}{\left[\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.70}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x \partial y^3} = -\frac{4}{r^2}\left\{\frac{d_i\left(d_i^2 + e_i^2\right)}{\left(\left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right)} - \right.$$

$$\left.\frac{2e_i^2\cos\theta\left(2d_i\cos\theta+\left(d_i^2+e_i^2\right)\sin\theta\right)}{\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 R_i}{\partial y^4} &= -\frac{4}{r^2}\left\{\frac{\left(d_i^4-e_i^4\right)}{\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta}-\right.\\ &\left.\frac{2e_i^2\cos\theta\left[\left(3d_i^2-e_i^2\right)\cos\theta+2d_i\left(d_i^2+e_i^2\right)\sin\theta\right]}{\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\},\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_i}{\partial x} &= re_i\sin\theta\left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left(\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right)\right]-2\right\}+\\ &2r\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta},\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_i}{\partial y} &= re_i\left(\cos\theta+2d_i\sin\theta\right)\left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left(\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right)\right]-2\right\}+\\ &2r\left[d_i\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)-e_i^2\sin\theta\right]\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta},\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2} = 2\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}, \tag{4.75}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S_i}{\partial x\partial y} &= e_i\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]\right\}+\\ &2d_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta},\end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2} &= 2d_ie_i\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]\right\}+\\ &2\left(d_i^2-e_i^2\right)\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta},\end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^3} = -\frac{2e_i\sin\theta}{r\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.78}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^2 \partial y} = \frac{2e_i \cos\theta}{r\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]}, \tag{4.79}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x \partial y^2} = \frac{2e_i\left[2d_i(\cos\theta + d_i\sin\theta) - (d_i^2 - e_i^2)\sin\theta\right)}{r\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]}, \tag{4.80}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial y^3} = \frac{2e_i\left[(3d_i^2 - e_i^2)\cos\theta + 2d_i(d_i^2 + e_i^2)\sin\theta\right]}{r\left((\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]}, \tag{4.81}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^4} = \frac{4e_i \sin\theta(\cos\theta + d_i\sin\theta)}{r^2\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]^2}, \tag{4.82}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^3 \partial y} = \frac{2e_i}{r^2}\left\{\frac{1}{(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta} - \right.$$

$$\left.\frac{2\cos\theta(\cos\theta + d_i\sin\theta)}{\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.83}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{4e_i \cos\theta\left[d_i(\cos\theta + d_i\sin\theta) + e_i^2\sin\theta\right]}{r^2\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]^2}, \tag{4.84}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x \partial y^3} = -\frac{2e_i}{r^2}\left\{\frac{(d_i^2 + e_i^2)}{(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta} + \right.$$

$$\left.\frac{2(d_i^2 + e_i^2)\cos\theta(\cos\theta + d_i\sin\theta) - 4e_i^2\cos^2\theta}{\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.85}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial y^4} = -\frac{4e_i}{r^2}\left\{\frac{d_i(d_i^2 + e_i^2)}{(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta} + \right.$$

$$\left.\frac{\cos\theta\left[d_i(d_i^2 - 3e_i^2)\cos\theta + (d_i^4 - e_i^4)\sin\theta\right]}{\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta\right]^2}\right\}. \tag{4.86}$$

Como pode ser visto, as derivadas de R_i e S_i apresentam singularidades fracas ($\log r$), singularidades fortes ($1/r$), e hipersingularidades ($1/r^2$) que precisam de uma atenção especial durante sua integração.

4.3 Integrais analíticas e numéricas

Integrais singulares da ordem (log r) podem ser avaliadas eficientemente pela quadratura de Gauss com uma transformação de variáveis cúbica, conforme proposto por Telles (1987), que cancela exatamente a singularidade logarítmica. Uma outra possibilidade é o uso da quadratura logarítmica de Gauss, apresentada por Stroud e Secrest (1966). De acordo com este método, os termos incluindo singularidades logarítmicas podem ser integrados por:

$$I = \int_0^1 \log\left(\frac{1}{\xi}\right) f(\xi)d(\xi) \simeq \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi),$$

onde N é o número de pontos de Gauss. A coordenada do ponto de integração ξ e o fator peso w_i podem ser encontrados na literatura (Brebbia e Domínguez 1989).

Neste trabalho, os termos não singulares das matrizes **H** e **G** são integrados utilizando-se quadratura de Gauss padrão com 10 pontos de integração. Os termos singulares de **G** são do tipo log (r) sendo integrados usando quadratura logarítmica de Gauss com 10 pontos de integração. Já os termos singulares de **H** são do tipo $1/r$ e $1/r^2$ precisam ser calculados no sentido do valor principal de Cauchy e de Hadamard, respectivamente. Estes termos são calculados analiticamente.

4.4 Elementos Quadráticos

Uma vez que é muito difícil encontrar soluções analíticas gerais para as equações integrais de contorno (4.28) e (4.29), torna-se necessário o uso de soluções numéricas. Quando soluções numéricas são usadas, o contorno é aproximado por elementos discretos. Estes elementos discretos são chamados elementos de contorno.

Considere a Figura 4.3 onde o contorno de uma placa é aproximado por uma série de segmentos (elementos de contorno) Γ_i, cujo número e forma são escolhidos para representá-lo adequadamente.

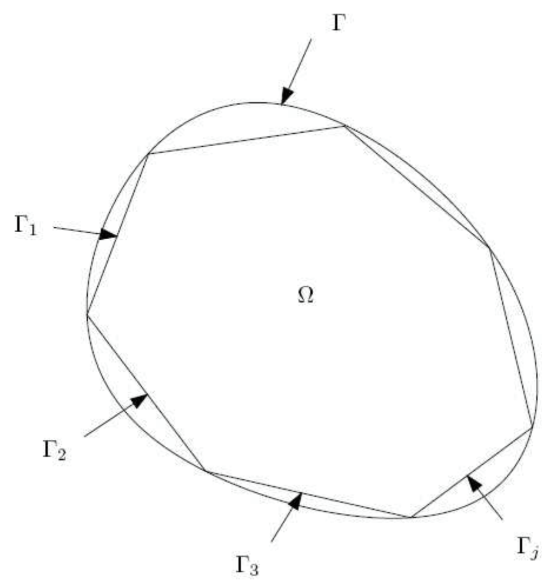

Figura 4.3: Domínio bidimensional dividido em elementos de contorno.

A cada elemento de contorno associam-se um ou mais pontos chamados nós ou pontos nodais e os valores das variavéis associadas a eles são denominados valores nodais. Os deslocamentos e esforços ao longo de cada elemento serão aproximados por funções polinomiais em função das quais é definido o número de pontos nodais do elemento.

Visando aumentar a convergência dos resultados para a formulação apresentada aqui, foram implementados os elementos quadráticos, os quais são os mais simples capazes de representar qualquer contorno curvo. Como a formulação tem integrais com integrandos singulares, estas integrais precisam ser calculadas no sentido de Cauchy, no caso de singularidades fortes, ou no sentido de Hadamard, no caso de hipersingularidades. A integração no sentido de Hadamard requer a continuidade de Holder nos nós. Devido a esse fato, os elementos descontínuos são fortemente indicados. Neste trabalho são usados os elementos quadráticos descontínuos para representar os elementos físicos e os elementos quadráticos contínuos para representar os elementos geométricos.

Nos elementos quadráticos, os deslocamentos e as forças podem ser representados como:

$$\left\{ \begin{array}{c} w \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w^{(1)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(1)} \\ w^{(2)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(2)} \\ w^{(3)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(3)} \end{array} \right\} \tag{4.87}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} V_n \\ m_n \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} & 0 \\ 0 & N_d^{(1)} & 0 & N_d^{(2)} & 0 & N_d^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} V_n^{(1)} \\ m_n^{(1)} \\ V_n^{(2)} \\ m_n^{(2)} \\ V_n^{(3)} \\ m_n^{(3)} \end{array} \right\} \tag{4.88}$$

Nos elementos quadráticos descontínuos os nós são colocados em $\xi = -2/3$, $\xi = 0$ e $\xi = +2/3$, como mostrado na Figura 4.4.

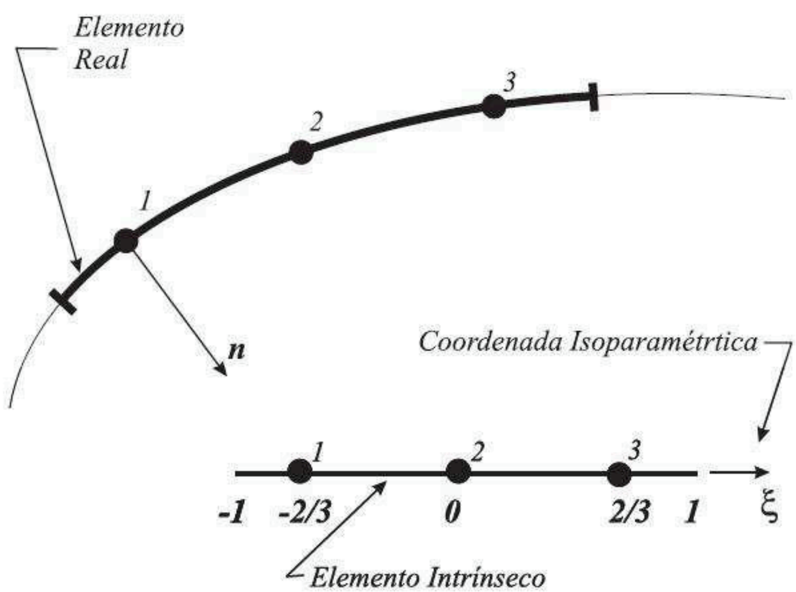

Figura 4.4: Elemento quadrático descontínuo.

A equação de interpolação quadrática para a geometria mostrada pode ser derivada pela determinação dos coeficientes da expressão quadrática, ou seja:

$$N_d = A\xi^2 + B\xi + C \tag{4.89}$$

Substituindo os valores de ξ correspondentes aos nós na equação (4.89), temos:

$$\begin{Bmatrix} N_d^{(1)} \\ N_d^{(2)} \\ N_d^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/9 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/9 & +2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} \tag{4.90}$$

Resolvendo o sistema linear (4.90) chegamos às funções de interpolação ou funções de forma para estes elementos dadas por:

$$N_d^{(1)} = \xi\left(\frac{9}{8}\xi - \frac{3}{4}\right); \tag{4.91}$$

$$N_d^{(2)} = \left(1 - \frac{3}{2}\xi\right)\left(1 + \frac{3}{2}\xi\right); \tag{4.92}$$

$$N_d^{(3)} = \xi\left(\frac{9}{8}\xi + \frac{3}{4}\right). \tag{4.93}$$

onde ξ é a coordenada adimensional ao longo do elemento (Figura 4.4).

A geometria do elemento também pode ser considerada como quadrática e é representada por coordenadas nodais na forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_c^{(1)} & 0 & N_c^{(2)} & 0 & N_c^{(3)} & 0 \\ 0 & N_c^{(1)} & 0 & N_c^{(2)} & 0 & N_c^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} \end{array} \right\} \tag{4.94}$$

porém, utilizando as funções de interpolação para elementos quadráticos contínuos dadas por:

$$N_c^{(1)} = \frac{1}{2}\xi\left(\xi - 1\right); \tag{4.95}$$

$$N_c^{(2)} = \left(1 - \xi^2\right); \tag{4.96}$$

$$N_c^{(3)} = \frac{1}{2}\xi\left(\xi + 1\right). \tag{4.97}$$

4.5 Equação matricial

Com o objetivo de calcular as variáveis de contorno desconhecidas, o contorno Γ é discretizado em N_e elementos curvos e as variáveis de contorno w, $\partial w/\partial n$, m_n e V_n são assumidas com uma variação quadrática ao longo de cada elemento. Tomando um nó d como o ponto fonte, as equações (4.28) e (4.29) podem ser escritas na forma matricial como:

$$
\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} w^{(d)} \\ \\ \frac{\partial w}{\partial n_1}^{(d)} \end{array}\right\} + \sum_{i=1}^{N_e}\left(\left[\begin{array}{cccccc} h_{11}^{(i,d)} & h_{12}^{(i,d)} & h_{13}^{(i,d)} & h_{14}^{(i,d)} & h_{15}^{(i,d)} & h_{16}^{(i,d)} \\ h_{21}^{(i,d)} & h_{22}^{(i,d)} & h_{23}^{(i,d)} & h_{24}^{(i,d)} & h_{25}^{(i,d)} & h_{26}^{(i,d)} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} w^{(i,1)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,1)} \\ w^{(i,2)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,2)} \\ w^{(i,3)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,3)} \end{array}\right\}\right) =
$$

$$
\sum_{i=1}^{N_e}\left(\left[\begin{array}{cccccc} g_{11}^{(i,d)} & g_{12}^{(i,d)} & g_{13}^{(i,d)} & g_{14}^{(i,d)} & g_{15}^{(i,d)} & g_{16}^{(i,d)} \\ g_{21}^{(i,d)} & g_{22}^{(i,d)} & g_{23}^{(i,d)} & g_{24}^{(i,d)} & g_{25}^{(i,d)} & g_{26}^{(i,d)} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} V_n^{(i,1)} \\ m_n^{(i,1)} \\ V_n^{(i,2)} \\ m_n^{(i,2)} \\ V_n^{(i,3)} \\ m_n^{(i,3)} \end{array}\right\}\right) +
$$

$$
\sum_{i=1}^{N_c}\left(\left\{\begin{array}{c} R_1^{(i,d)} \\ R_2^{(i,d)} \end{array}\right\} w_c^{(i)}\right) + \sum_{i=1}^{N_c}\left(\left\{\begin{array}{c} c_1^{(i,d)} \\ c_2^{(i,d)} \end{array}\right\} R_c^{(i)}\right) + \left\{\begin{array}{c} P_1^{(d)} \\ P_2^{(d)} \end{array}\right\}. \tag{4.98}
$$

Os termos da equação (4.98) são integrais dadas por:

$$
h_{11}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} V_n^* d\Gamma, \qquad h_{12}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(1)} m_n^* d\Gamma, \tag{4.99}
$$

$$
h_{13}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} V_n^* d\Gamma, \qquad h_{14}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(2)} m_n^* d\Gamma, \tag{4.100}
$$

$$
h_{15}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} V_n^* d\Gamma, \qquad h_{16}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(3)} m_n^* d\Gamma, \tag{4.101}
$$

$$
h_{21}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad h_{22}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \tag{4.102}
$$

$$
h_{23}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad h_{24}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \tag{4.103}
$$

$$h_{25}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad h_{26}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \tag{4.104}$$

$$g_{11}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} w^* d\Gamma, \qquad g_{12}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.105}$$

$$g_{13}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} w^* d\Gamma, \qquad g_{14}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.106}$$

$$g_{15}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} w^* d\Gamma, \qquad g_{16}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.107}$$

$$g_{21}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad g_{22}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(1)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.108}$$

$$g_{23}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad g_{24}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(2)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.109}$$

$$g_{25}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad g_{26}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} N^{(3)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.110}$$

$$c_1^{(i,d)} = w_{ci}^*, \qquad c_2^{(i,d)} = \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n_1}, \tag{4.111}$$

$$R_1^{(i,d)} = R_{ci}^*, \qquad R_2^{(i,d)} = \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial n_1}, \tag{4.112}$$

$$P_1^{(d)} = \int_{\Omega} g w^* d\Omega, \qquad P_2^{(d)} = \int_{\Omega} g \frac{\partial w}{\partial n_1} d\Omega. \tag{4.113}$$

sendo o contorno Γ dado por:

$$\Gamma = \sum_{e=1}^{N_e} \Gamma_e, \tag{4.114}$$

onde, N_e é o número de elementos.

O desenvolvimento das integrais ao longo do elemento na equação (4.98) requer o uso do jacobiano, já que as funções de forma são expressas em termos da coordenada adimensional e as integrais são resolvidas ao longo do contorno Γ_e. O jacobiano desta transformação é dado por:

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} = \frac{d\Gamma_e}{d\xi}. \tag{4.115}$$

Assim:

$$d\Gamma_e = J(\xi) d\xi. \tag{4.116}$$

A equação matricial (4.98) tem duas equações e $6N_e + N_c$ variáveis desconhecidas. Para se obter um sistema linear solucionável, o ponto fonte é colocado sucessivamente em cada nó do contorno ($d = 1, ..., 6N_e$) bem como em cada nó de canto ($d = 6N_e + 1, ..., 6N_e + N_c$). É importante notar que enquanto ambas as equações, (4.28) e (4.29), são usadas para cada nó de contorno (fornecendo as primeiras $6N_e$ equações), somente a equação (4.28) é usada para cada canto (fornecendo outras N_c equações). Então, a seguinte equação matricial é obtida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{bn} \; \mathbf{V}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix}, \tag{4.117}$$

onde, $\mathbf{w}_{bn}$ contém o deslocamento transversal e a rotação de cada nó de contorno, $\mathbf{V}_{bn}$ contém a força cisalhante e o momento torsor de cada nó de contorno, $\mathbf{P}_{bn}$ contém a integral de domínio para cada nó de contorno, $\mathbf{w}_c$ contém o deslocamento transversal de cada canto, $\mathbf{V}_c$ contém a reação de canto para cada canto, $\mathbf{P}_c$ contém a integral de domínio para cada canto. Os termos $\mathbf{H}'$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{R}'$ e $\mathbf{G}'$ são matrizes que contém os respectivos termos da equação (4.98) escritos para os N_e nós de contorno. Os termos $\mathbf{H}''$, $\mathbf{C}''$, $\mathbf{R}''$ e $\mathbf{G}''$ são matrizes que contém os respectivos primeiros termos da equação (4.98) escrita para os N_c cantos.

A equação (4.117) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{Hw} = \mathbf{GV} + \mathbf{P}, \tag{4.118}$$

onde,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix}, \tag{4.119}$$

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix}, \tag{4.120}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix}, \tag{4.121}$$

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{bn} \\ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix}, \tag{4.122}$$

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix}. \tag{4.123}$$

Aplicando as condições de contorno, a equação (4.117) pode ser rearranjada como:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4.124}$$

que pode ser resolvida pelo procedimento padrão para sistemas lineares.

Capítulo 5

Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno para flexão em placas anisotrópicas

A aplicação do método dos elementos de contorno requer, preferencialmente, que a solução fundamental para o problema em consideração seja conhecida. Essa solução fundamental deve levar em conta todos os termos da equação governante de forma a obter uma formulação onde apenas o contorno é discretizado. Quando isso não for possível, tornam-se necessárias técnicas especiais para o tratamento desses termos de domínio. A primeira alternativa é fazer a transformação exata da integral de domínio proveniente da carga distribuída em integral de contorno para o problema de flexão de placas anisotrópicas. A segunda alternativa é transferir os efeitos da integral de domínio para o contorno usando-se o método de elementos de contorno de reciprocidade dual ou da integração radial.

5.1 Transformação exata

Como pôde ser visto nas equações (4.28) e (4.29), há integrais de domínio na formulação devido a carga distribuída no domínio. Estas integrais podem ser calculadas por integração direta na área Ω_g (veja Figura 3.1). Contudo, a formulação dos elementos de contorno perde seu principal atrativo que é a discretização somente no contorno. Neste trabalho, as integrais de domínio oriundas das cargas distribuídas são transformadas em integrais de contorno por uma transformação exata.

Considere a placa da Figura 3.1 sob um carregamento g aplicado em uma área Ω_g. Assumindo que o carregamento g tem uma distribuição linear $(Ax + By + C)$ na área Ω_g, a integral de domínio pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_g} g w^* d\Omega = \int_{\Omega_g} (Ax + By + C) w^* \rho d\rho d\theta, \tag{5.1}$$

ou

$$\int_{\Omega_g} g w^* d\Omega = \int_{\theta} \int_0^r (Ax + By + C) w^* \rho d\rho d\theta, \tag{5.2}$$

onde, r é o valor de ρ em um ponto do contorno Γ_g.

Definindo F^* como a seguinte integral:

$$F^* = \int_0^r (Ax + By + C) w^* \rho d\rho, \tag{5.3}$$

pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_g} g w^* d\Omega = \int_{\theta} F^* d\theta. \tag{5.4}$$

Considerando um ângulo infinitesimal $d\theta$ (Figura 5.1), a relação entre o comprimento do arco $r d\theta$ e o comprimento infinitesimal do contorno $d\Gamma$, pode ser escrito como:

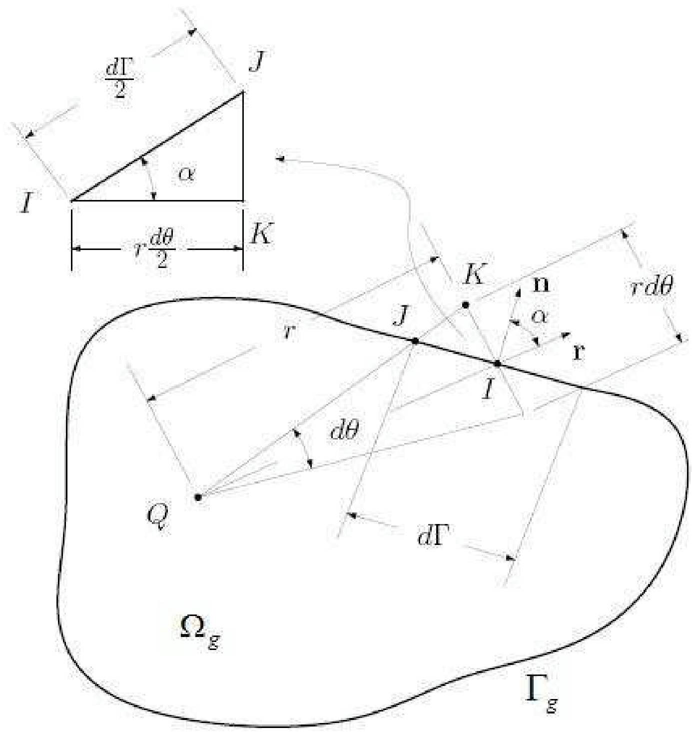

Figura 5.1: Transformação da integral de domínio em integral de contorno.

$$\cos\alpha = \frac{r\frac{d\theta}{2}}{\frac{d\Gamma}{2}}, \tag{5.5}$$

ou

$$d\theta = \frac{\cos\alpha}{r} d\Gamma. \tag{5.6}$$

Usando as propriedades do produto interno dos vetores unitários **n** e **r**, indicados na Figura 5.1, podemos escrever:

$$d\theta = \frac{\mathbf{n.r}}{r} d\Gamma. \tag{5.7}$$

Finalmente, substituindo a equação (5.7) na equação (5.4), a integral de domínio da equação (4.28) pode ser escrita como uma integral de contorno dada por:

$$\int_{\Omega_g} g w^* d\Omega = \int_{\Gamma_g} \frac{F^*}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma. \tag{5.8}$$

Sabendo que

$$x = \rho \cos \theta \tag{5.9}$$

e

$$y = \rho \sin \theta, \tag{5.10}$$

a integral F^* pode ser escrita como:

$$F^* = \int_0^r \frac{1}{8\pi} (A\rho \cos \theta + B\rho \sin \theta + C) \left[C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2) \right] \rho d\rho, \tag{5.11}$$

onde C_1, C_2 e C_3 são dados pelas equações (4.35), (4.36) e (4.37), respectivamente. A equação (5.11) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{1}{8\pi} \left\{ (A \cos \theta + B \sin \theta) \int_0^r \rho^2 \left[C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2) \right] d\rho + \right. \\ & \left. C \int_0^r \rho \left[C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 (S_1 - S_2) \right] d\rho \right\}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Seguindo um procedimento similar para obter a equação (5.12), o termo de domínio da equação (4.29) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega_g} g \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Omega = \int_{\theta} G^* d\theta, \tag{5.13}$$

onde

$$G^* = \int_0^r (Ax + By + C)\frac{\partial w^*}{\partial n_1}\rho d\rho \tag{5.14}$$

ou

$$G^* = \frac{1}{8\pi}\left\{(A\cos\theta + B\sin\theta)\int_0^r \rho^2\left[C_1\frac{\partial R_1}{\partial n_1} + C_2\frac{\partial R_2}{\partial n_1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. C_3\left(\frac{\partial S_1}{\partial n_1} - \frac{\partial S_2}{\partial n_1}\right)\right]d\rho + C\int_0^r \rho\left[C_1\frac{\partial R_1}{\partial n_1} + C_2\frac{\partial R_2}{\partial n_1} + C_3\left(\frac{\partial S_1}{\partial n_1} - \frac{\partial S_2}{\partial n_1}\right)\right]d\rho\right\}. \tag{5.15}$$

Como pode ser visto, as equações (5.12) e (5.15) não são dependentes de θ. Por integração analítica, podemos obter:

$$\begin{aligned}\int_0^r R_i\rho d\rho \quad = \quad & \frac{r^4}{16}\left\{-16e_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}\sin\theta\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right) - \right.\\ & \left[-7 + 2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta + (\cos\theta + d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\times\\ & \left.\left[-1 - d_i^2 + e_i^2 + \left(-1 + d_i^2 - e_i^2\right)\cos 2\theta - 2d_i\sin 2\theta\right]\right\},\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r S_i\rho d\rho \quad = \quad & \frac{r^4}{16}\left\{2e_i\left[-7 + 2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta + (\cos\theta + d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\times\right.\\ & \sin\theta\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right) + 2\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta}\times\\ & \left.\left[1 + d_i^2 - e_i^2 + \left(1 - d_i^2 + e_i^2\right)\cos 2\theta + 2d_i\sin 2\theta\right]\right\},\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\int_0^r R_i \rho^2 d\rho = \frac{r^5}{50} \left\{ -40 e_i \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta} \sin\theta \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right) - \right.$$

$$\left[-17 + 5 \log \frac{r^2 \left(e_i^2 \sin^2\theta + \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 \right)}{a^2} \right] \times$$

$$\left. \left[-1 - d_i^2 + e_i^2 + \left(-1 + d_i^2 - e_i^2 \right) \cos 2\theta - 2 d_i \sin 2\theta \right] \right\}, \tag{5.18}$$

$$\int_0^r S_i \rho^2 d\rho = \frac{r^5}{50} \left\{ 2 e_i \left[-17 + 5 \log \frac{r^2 \left(e_i^2 \sin^2\theta + \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 \right)}{a^2} \right] \times \right.$$

$$\sin\theta \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right) + 5 \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta} \times$$

$$\left. \left[1 + d_i^2 - e_i^2 + \left(1 - d_i^2 + e_i^2 \right) \cos 2\theta + 2 d_i \sin 2\theta \right] \right\}, \tag{5.19}$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial x} \rho d\rho = \frac{2r^3}{9} \left\{ -6 e_i \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta} \sin\theta + \right.$$

$$\left. \left[-8 + 3 \log \frac{r^2 \left(e_i^2 \sin^2\theta + \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right)^2 \right)}{a^2} \right] \left(\cos\theta + d_i \sin\theta\right) \right\}, \tag{5.20}$$

$$\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial y} \rho d\rho = \frac{2r^3}{9} \left\{ -6 e_i \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta} \left(\cos\theta + 2 d_i \sin\theta\right) + \right.$$

$$\left[-8+3\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\left[d_i\cos\theta+\left(d_i^2-e_i^2\right)\sin\theta\right]\Bigg\}, \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial x}\rho d\rho &= \frac{r^3}{9}\Bigg\{e_i\left[-8+3\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\sin\theta+ \\ & 6\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)\Bigg\},\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial y}\rho d\rho &= \frac{r^3}{9}\Bigg\{e_i\left[-8+3\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\times \\ & (\cos\theta+2d_i\sin\theta)-6\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\left[d_i\cos\theta+\left(d_i^2-e_i^2\right)\sin\theta\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial x}\rho^2 d\rho &= \frac{r^4}{4}\Bigg\{-4e_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\sin\theta+ \\ & \left[-5+2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)\Bigg\},\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{\partial R_i}{\partial y}\rho^2 d\rho &= \frac{r^4}{4}\Bigg\{-4e_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\left(\cos\theta+2d_i\sin\theta\right)+ \\ & \left[-5+2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\left[d_i\cos\theta+\left(d_i^2-e_i^2\right)\sin\theta\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial x}\rho^2 d\rho = \frac{r^4}{8}\left\{e_i\left[-5+2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right]\sin\theta + 4\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)\right\}, \tag{5.26}$$

$$\int_0^r \frac{\partial S_i}{\partial y}\rho^2 d\rho = \frac{r^4}{8}\left\{e_i\left[-5+2\log\frac{r^2\left(e_i^2\sin^2\theta+(\cos\theta+d_i\sin\theta)^2\right)}{a^2}\right](\cos\theta+2d_i\sin\theta)+4\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}\left[d_i\cos\theta+\left(d_i^2-e_i^2\right)\sin\theta\right]\right\}. \tag{5.27}$$

Embora neste trabalho as cargas de domínio são consideradas como linearmente distribuídas, o procedimento apresentado nesta seção pode ser estendido para outras cargas de ordem superior.

5.2 Método da reciprocidade dual - DRM

O procedimento apresentado na Seção 5.1 para transformar a integral de domínio em integral de contorno é adequado quando forças de corpo são constantes ou funções das coordenadas x e y ao longo do domínio. Quando estas forças de corpo são funções da deflexão w, como em problemas dinâmicos por exemplo, a transformação exata não é possível. Neste caso, aproximações pelo método da reciprocidade dual é muito adequado. Considere que o termo b da equação (4.28) é aproximado por uma soma de produtos de funções de base radial f^m e coeficientes desconhecidos γ^m, isto é:

$$b(P) = \sum_{m=1}^{M}\gamma^m f^m. \tag{5.28}$$

Nessa equação, γ^m é um conjunto de coeficientes a serem determinados, f^m é uma função de aproximação que depende apenas da geometria do problema e M é o número de total de nós do contorno e nós internos.

Assim, a integral de domínio (4.28) pode ser escrita como:

$$P_1(Q) = \int_{\Omega_g} b(P)w^*(Q,P)d\Omega = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m \int_{\Omega_g} f^m w^*(Q)d\Omega. \tag{5.29}$$

A solução particular $\hat{w}$ pode ser obtida resolvendo a seguinte equação:

$$D_{11}\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x \partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial y^4} = f^m. \tag{5.30}$$

A relação recíproca entre a solução fundamental e a solução particular pode ser escrita assim:

$$\begin{aligned} &K\hat{w}(Q) + \int_{\Gamma}\left[V_n^*(Q,P)\hat{w}(P) - m_n^*(Q,P)\frac{\partial \hat{w}(P)}{\partial n}\right]d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q,P)\hat{w}_{c_i}(P) = \\ &\int_{\Gamma}\left[\hat{V}_n(P)w^*(Q,P) - \hat{m}_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P)\right]d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c}\hat{R}_{c_i}(P)w_{c_i}^*(Q,P) + \\ &\int_{\Omega} f(P)w^*(Q,P)d\Omega. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Substituindo a equação (5.31) na equação (5.29), nos temos:

$$\begin{aligned} P_1(Q) = \int_{\Omega} g w^* d\Omega = \sum_{m=1}^{M}\gamma_n^m \Bigg\{ &K\hat{w}(Q) + \int_{\Gamma}\left[V_n^*(Q,P)\hat{w}(P) - m_n^*(Q,P)\frac{\partial \hat{w}(P)}{\partial n}\right]d\Gamma(P) + \\ &\sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q,P)\hat{w}_{c_i}(P) - \int_{\Gamma}\left[V_n(P)w^*(Q,P) - \hat{m}_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P)\right]d\Gamma(P) - \\ &\sum_{i=1}^{N_c}\hat{R}_{c_i}(P)w_{c_i}^*(Q,P)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Seguindo o mesmo procedimento, a integral de domínio da equação (4.29) pode ser aproximada assim:

$$P_2(Q) = \int_{\Omega_g} b \frac{\partial w^*(Q,P)}{\partial n_1} d\Omega = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m \int_{\Omega_g} f^m \frac{\partial w^*(Q)}{\partial n_1} d\Omega, \tag{5.33}$$

Usando o método de elementos de contorno de reciprocidade dual, a integral P_2, dada por uma soma de integrais de domínio (5.33), é transformada em uma soma de integrais de contorno.

Seguindo o mesmo procedimento para obter a equação (5.32), a equação (5.33) pode ser escrita assim:

$$\begin{aligned} P_2(Q) = \int_{\Omega_g} b(P) \frac{\partial w^*(Q,P)}{\partial n_1} d\Omega = \sum_{m=1}^{M} \gamma_n^m \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{w}(Q)}{\partial n_1} + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V^*}{\partial n_1}(Q,P) \hat{w}(P) - \right.\right. \\ \left. \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1}(Q,P) \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q,P) \hat{w}_{c_i}(P) - \\ \int_{\Gamma} \left\{ \hat{V}_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q,P) - \hat{m}_n(P) \frac{\partial}{\partial n_1} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q,P) \right] \right\} d\Gamma(P) - \\ \left. \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q,P) \right\}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

As equações (5.32) e (5.34) são a base do método da reciprocidade dual para a formulação de placas finas. A solução particular precisa satisfazer a equação de equilibrio (5.30). A solução tradicional para resolver a equação diferencial (5.30) quando o problema é isotrópico, é assumir uma função de aproximação de base radial, $f^m = 1 + R$ por exemplo, e calcular a solução particular correspondente. Este procedimento é muito difícil de se aplicar a materiais anisotrópicos, pois a anisotrópia aumenta o número de constantes na equação de equilíbrio. Um procedimento alternativo é assumir uma solução particular $\hat{w}$ e obter a função de aproximação correspondente f^m. Esta abordagem foi proposta por Schclar (1994) para problemas anisotrópicos em três dimensões e mais tarde ela foi usada por diferentes pesquisadores em diferentes problemas anisotrópicos (Albuquerque, Sollero e Aliabadi, 2002; Albuquerque, Sollero e Fedelinski, 2003a; Albuquerque, Sollero e Fedelinski, 2003b; Albuquerque, Sollero e Aliabadi, 2004; Kogl e Gaul, 2000a; Kogl e Gaul, 2000b; Kogl e Gaul, 2003).

Neste trabalho, a solução particular usada é dada por:

$$\hat{w} = c_1 \ r^4 + c_2 \ r^5 + c_3 \ r^6 + c_4 \ r^7 \tag{5.35}$$

onde $c_1, \ c_2, \ c_3 \ e \ c_4$ são constantes arbitrárias. A função de aproximação f^m é obtida pela equação (5.30) usando as derivadas da solução particular (5.35). Outras grandezas derivadas da solução particular são dadas por:

$$\hat{m}_n = -\left(f_1 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + f_2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x \partial y} + f_3 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right), \tag{5.36}$$

$$\hat{R}_{c_i} = -\left(g_1 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + g_2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x \partial y} + g_3 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right), \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_n &= -\left(h_1 \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial x^3} + h_2 \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial x^2 \partial y} + h_3 \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial x \partial y^2} + h_4 \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial y^3} \right) - \\ & \frac{1}{R} \left(h_5 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + h_6 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x \partial y} + h_7 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Embora as soluções particulares são dadas por expressões conhecidas, elas são aproximadas no contorno pelas mesmas funções de forma usadas na aproximação de variavéis desconhecidas. Assim, usando discretização de elementos de contorno, as equações (5.32) e (5.34) podem ser escritas na forma de matriz como:

$$\mathbf{P} = \left[\mathbf{H} \hat{\mathbf{w}} - \mathbf{G} \hat{\mathbf{V}} \right] \gamma \tag{5.39}$$

onde

$$\hat{\mathbf{w}} = \left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{w}}_{bn} \\ \hat{\mathbf{w}}_{c} \end{array} \right\}, \tag{5.40}$$

$$\hat{\mathbf{V}} = \left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{V}}_{bn} \\ \hat{\mathbf{V}}_{c} \end{array} \right\}, \tag{5.41}$$

$\hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{bn}}$ contém a solução particular de deslocamento e rotação para cada nó do contorno, $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{bn}}$ contém a solução particular de força cortante e momento torsor para cada nó do contorno, $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{bn}}$ contém a solução particular de deslocamento para cada nó do contorno e $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{c}}$ contém a solução particular da reação de canto para cada nó do contorno.

Definindo

$$\mathbf{S} = \left[\mathbf{H}\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{V}} \right] \tag{5.42}$$

A equação (5.39) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}\gamma \tag{5.43}$$

A equação (5.28) pode ser escrita em forma de matriz, considerando todos os nós do contorno e pontos internos, como pontos de reciprocidade dual:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\gamma \tag{5.44}$$

Assim, γ pode ser escrito como:

$$\gamma = \mathbf{F^{-1}b} \tag{5.45}$$

Os termos P_1 e P_2 da equações (5.29) e (5.33) podem ser escritos em forma de matriz, considerando com pontos fonte todos os pontos internos e nós do contorno, como:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} \tag{5.46}$$

Para problemas dinâmicos estacionários, o vetor força de corpo é dado por:

$$\mathbf{b} = \rho h \omega^2 \mathbf{w} \tag{5.47}$$

onde ρ é a densidade do material, h é a espessura da placa e ω é a frequência circular de vibração.

Assim, a equação (5.46) pode ser escrita como:

$$\mathbf{P} = \omega^2 \rho h \mathbf{S}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{w} \tag{5.48}$$

ou

$$\mathbf{P} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{w} \tag{5.49}$$

onde $\mathbf{M}$ é a matriz de massa dada por:

$$\mathbf{M} = \rho h \mathbf{S}\mathbf{F}^{-1} \tag{5.50}$$

Finalmente, a equação (4.118) para problemas dinâmicos estacionários podem ser escritos como:

$$\mathbf{H}\mathbf{w} = \mathbf{G}\mathbf{V} + \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{w} \tag{5.51}$$

5.3 Método da integração radial - RIM

Assim como no DRM, o RIM aproxima a força de corpo b como uma soma de M produtos de funções de aproximação f^m e coeficientes a determinar γ^m, ou seja:

$$b(P) = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m f^m \tag{5.52}$$

para as funções de aproximação baseadas puramente em funções de base radiais, ou:

$$b(P) = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m f^m + ax + by + c \tag{5.53}$$

e

$$\sum_{m=1}^{M} \gamma^m x_m = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m y_m = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m = 0 \tag{5.54}$$

para as funções de aproximação expandidas por polinômios. A integral de domínio da equação (5.29) pode ser escrita como:

$$P_1(Q) = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m \int_{\Omega_g} f^m w^*(Q,P) \rho d\rho d\theta \tag{5.55}$$

ou

$$P_1(Q) = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m \int_{\theta} \int_0^r f^m w^*(Q,P) \rho d\rho d\theta, \tag{5.56}$$

onde r é o valor de ρ em um ponto no contorno Γ_g (ver Figura 5.1):

Definindo $F^m(Q)$ como:

$$F^m(Q) = \int_0^r f^m w^*(Q,P) \rho d\rho, \tag{5.57}$$

pode-se escrever:

$$P_1(Q) = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m \int_{\theta} F^m(Q) d\theta. \tag{5.58}$$

Substituindo a equação (5.7) na equação (5.58), a equação integral de domínio da equação (4.28) pode ser escrita na seguinte integral de contorno dada por:

$$P_1(Q) = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m \int_{\Gamma_g} \frac{F^m(Q)}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma. \tag{5.59}$$

Seguindo procedimentos similares aos usados para obter a equação (5.59), o termo de domínio da equação (5.33) pode ser escrito assim:

$$P_2(Q) = \int_{\Omega_g} b \frac{\partial w^*(Q,P)}{\partial n_1} d\Omega = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m \int_{\Gamma_g} \frac{G^m(Q)}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma, \tag{5.60}$$

onde

$$G^m(Q) = \int_0^r f^m \frac{\partial w^*(Q,P)}{\partial n_1} \rho d\rho. \tag{5.61}$$

Assim, a integral de domínio da equação (4.98) pode ser escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{c} P_1^{(d)} \\ P_2^{(d)} \end{array} \right\} = \sum_{m=1}^{M} \gamma^m \sum_{i=1}^{N_e} \left\{ \begin{array}{c} p_1^{(d,m)} \\ p_2^{(d,m)} \end{array} \right\}, \tag{5.62}$$

onde

$$p_1^{(d,m)} = \int_{\Gamma_i} \frac{F^{(d,m)}}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma, \qquad p_2^{(d,m)} = \int_{\Gamma_i} \frac{G^{(d,m)}}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma. \tag{5.63}$$

As funções de aproximação f^m serão funções de base radial escritas em termos de R, onde R é a distância entre o centro S da função de base radial e o ponto de integração P. Da Figura 5.2, pode-se escrever:

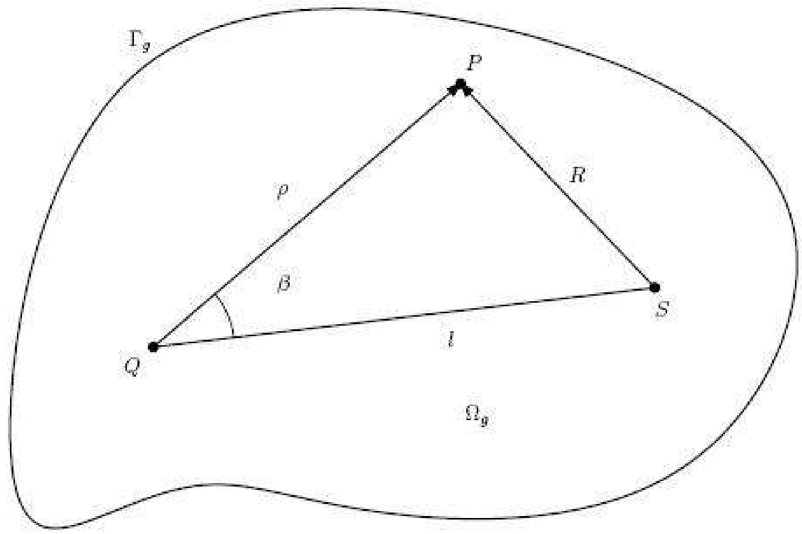

Figura 5.2: Posição dos pontos no domínio.

$$R = \sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos\beta}, \tag{5.64}$$

onde l é a distância entre os pontos S e Q e β é o ângulo entre ρ e l.

O custo computacional do RIM é maior que do DRM uma vez que as integrais dadas pelas equações (5.57) e (5.61) não podem ser calculadas analiticamente para a maioria das funções de aproximação. Por exemplo, se $f^m = R$, a equação (5.57) é escrita como:

$$F^m(Q) = \int_0^r c_1\sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos\beta}\,\log(c_2\rho)\rho^3 d\rho, \tag{5.65}$$

onde c_1 e c_2 são coeficientes que não dependem de ρ. A integral da equação (5.65) não pode ser calculada analiticamente. O cálculo numérico desta integral torna mais alto o custo computacional do RIM, uma vez que no DRM não se faz nenhuma integração numérica na transformação da integral de domínio em integrais de contorno. A vantagem mais interessante do RIM sobre o DRM para formulações que envolvam materiais anisotrópicos é que as funções de aproximação f_m podem ser escolhidas livremente, pois o RIM não usa as soluções particulares $\hat{w}_m$ obtidas da equação diferencial (3.25).

Estas soluções particulares são necessárias no DRM, o que restringe a escolha das funções de aproximação devido a complexidade da equação (3.25).

Foram analisadas quatro funções de aproximação. As duas primeiras são funções de base radiais que já foram extensivamente usadas no DRM para os mais diferentes problemas isotrópicos:

$$f_{m_1} = 1 + R, \tag{5.66}$$

e

$$f_{m_2} = 1 + R + R^3. \tag{5.67}$$

A terceira função é a função radial conhecida como função *spline* de placas finas, ou TPS (*thin plate spline*):

$$f_{m_3} = R^2 \log(R). \tag{5.68}$$

Alguns trabalhos da literatura (Golberg, 1999) mostraram que esta função possui uma alta taxa de convergência quando usadas na forma aumentada por polinômios, ou seja, quando a aproximação da força de corpo é dada pelas equações (5.53) e (5.54). Neste caso ela é chamada de função *spline* de placas finas aumentada, ou ATPS (*augmented thin plate spline*).

A quarta função de aproximação tem sido usada com sucesso em muitos métodos sem malha (Atluri e Shen, 2002 e Gao et al., 2005). Trata-se de uma *spline* de quarta ordem dada por:

$$f_{m_4} = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{R}{d_A}\right)^2 + 8\left(\frac{R}{d_A}\right)^3 - 3\left(\frac{R}{d_A}\right)^4 & , 0 \leq R \leq d_A \\ 0 & , R > d_A \end{cases} \tag{5.69}$$

onde d_A é o tamanho suporte para o ponto de aplicação A.

As funções de aproximação f_{m1} e f_{m2} dadas pelas equações (5.66) e (5.67) são usadas na forma padrão, com a aproximação da força de corpo dada pela equação (5.28), enquanto que as funções de aproximação f_{m3} e f_{m4} dadas pelas equações (5.68) e (5.69) são usadas na forma aumentada, com a aproximação dadas pelas equações (5.53) e (5.54).

A equação (5.28) ou as equações (5.53) e (5.54) podem ser escritas na forma matricial como:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\gamma \tag{5.70}$$

Deste modo, γ pode ser calculado por:

$$\gamma = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} \tag{5.71}$$

Uma das vantagens da função de aproximação (5.69) é que a ela apresenta o máximo ($f_{4m} = 1$) quando $R = 0$ e se anula para $R > d_A$. Isto vai ocasionar, no caso da formulação não aumentada, uma matriz $\mathbf{F}$ com 1 na diagonal e com valores entre 0 e 1 fora da diagonal, sendo que muitos deles são iguais a zero. A consequência é um melhor condicionamento da matriz $\mathbf{F}$ que pode ser importante em problemas de muitos graus de liberdade. É importante notar que no caso das demais funções de aproximação, dadas pelas equações (5.66), (5.67) e (5.68), a matriz $\mathbf{F}$ tem valores mínimos na diagonal, iguais a 1 ou zero, e fora da diagonal pode-se ter valores muito grande.

Capítulo 6

Formulações dinâmicas para elementos de contorno

Neste capítulo é mostrado o equacionamento para problemas de vibração livre e análise transiente de placas finas anisotrópicas. Para tanto, tomou-se como referências principais os trabalhos de Albuquerque (2001) e Dominguez (1993).

6.1 Problemas de vibrações livres sem amortecimento

Com o objetivo de transformar a equação (5.51) em um problema de auto-valores e auto-vetores, o contorno é dividido em Γ_1 e Γ_2 (Figura 6.1), onde Γ_1 corresponde a parte do contorno onde há restrições de deslocamentos e em Γ_2 corresponde a parte que não possui restrições de deslocamento.

Assim, a equação (5.51) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H_{11}} & \mathbf{H_{12}} \\ \mathbf{H_{21}} & \mathbf{H_{22}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w_1} \\ \mathbf{w_2} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G_{11}} & \mathbf{G_{12}} \\ \mathbf{G_{21}} & \mathbf{G_{22}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V_1} \\ \mathbf{V_2} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M_{11}} & \mathbf{M_{12}} \\ \mathbf{M_{21}} & \mathbf{M_{22}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w_1} \\ \mathbf{w_2} \end{Bmatrix}, \quad (6.1)$$

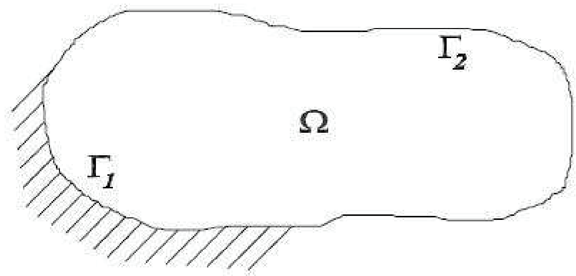

Figura 6.1: Domínio com o contorno Γ_1 restrito e o contorno Γ_2 livre.

onde os índices 1 e 2 correspondem às equações obtidas com os pontos fontes nos contornos Γ_1 e Γ_2, respectivamente.

Uma vez que $\mathbf{w_1} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{V_2} = \mathbf{0}$, a equaçõe (6.1) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{H_{12}w_2} - \mathbf{G_{11}V_1} &= \omega^2 \mathbf{M_{12}w_2}, \\ \mathbf{H_{22}w_2} - \mathbf{G_{21}V_1} &= \omega^2 \mathbf{M_{22}w_2}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

ou

$$\hat{\mathbf{H}}\mathbf{w_2} = \omega^2 \hat{\mathbf{M}}\mathbf{w_2}, \tag{6.3}$$

onde $\hat{\mathbf{H}}$ e $\hat{\mathbf{M}}$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}} &= \mathbf{H_{22}} - \mathbf{G_{21}G_{11}^{-1}H_{12}}, \\ \hat{\mathbf{M}} &= \mathbf{M_{22}} - \mathbf{G_{21}G_{11}^{-1}M_{12}}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

A equação matricial (6.3) pode ser rearranjada de forma a se ter um problema de auto-valor e auto-vetor padrão, ou seja:

$$\mathbf{A}\mathbf{w_2} = \lambda \mathbf{w_2}, \tag{6.5}$$

onde

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{H}}^{-\mathbf{1}}\hat{\mathbf{M}}, \tag{6.6}$$

λ é o auto-valor que pode ser escrito como:

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}, \tag{6.7}$$

sendo $\mathbf{w}$ a frequência natural e $\mathbf{w_2}$ é o auto-vetor que é equivalente aos modos de vibrar da placa.

O número de frequências naturais possíveis em um sistema discretizado é igual ao número de graus de liberdade da estrutura. Porém, o erro numérico é maior nas frequências mais altas. Entretanto, na maioria dos casos de engenharia, o interesse é pelas frequências mais baixas ou primeiras frequências.

Um vez que $\mathbf{A}$ é não simétrico, os auto-valores e auto-vetores da equação (6.5) podem ser calculados usando procedimentos númericos padrões para matrizes não simétricas.

6.2 Problemas transientes

O método dos elementos de contorno de reciprocidade dual e integração radial serão aplicados ao cálculo dos campos de deslocamentos para problemas transientes no domínio do tempo. A integração no tempo será realizada utilizando o método proposto por Houbolt (1950) por já ter sido mostrado por Loeffler e Mansur (1987) que o método de Houbolt é o mais apropriado para se usar na integração direta no tempo junto com o método dos elementos de contorno de reciprocidade dual. Uma importante característica do método de Houbolt é que ele tem um alto amortecimento numérico. Este amortecimento torna os resultados obtidos pelo método dos elementos de contorno de reciprocidade dual ou da integração radial mais suaves que os obtidos por outras formulações do método dos elementos de contorno aplicadas a elasto-dinâmica (Fedelinski et al., 1996 e Chirino et al., 1994). Porém, o amortecimento numérico pode ser reduzido usando-se passos de tempo menores. Algumas vezes, para se conseguir reduzir o passo de tempo e obter uma maior precisão dos resultados é necessário refinar a malha ou aumentar o número de nós internos.

Considere que as únicas forças de corpo presente num corpo de domínio Ω e contorno Γ são devido ao campo de aceleração $\ddot{\mathbf{w}}$, ou seja:

$$\mathbf{b} = \rho h \ddot{\mathbf{w}}. \tag{6.8}$$

O esquema de Houbolt está enquadrado entre os métodos de múltiplos passos, pois o mesmo não se utiliza apenas dos valores do passo anterior para determinar os valores atuais e sim de três outros passos passados. Para se proceder a integração no tempo durante um período $\mathcal{T}$, este período é dividido em N intervalos iguais $\Delta\tau$ ($\mathcal{T} = N\Delta\tau$). A aceleração em $\tau + \Delta\tau$ é aproximada pela expressão de diferenças finitas:

$$\ddot{\mathbf{w}}_{\tau+\Delta\tau} = \frac{1}{\Delta\tau^2}\left(2\mathbf{w}_{\tau+\Delta\tau} - 5\mathbf{w}_{\tau} + 4\mathbf{w}_{\tau-\Delta\tau} - \mathbf{w}_{\tau-2\Delta\tau}\right). \tag{6.9}$$

onde:

$\tau + \Delta\tau \rightarrow$ passo de tempo atual;

$\tau \rightarrow$ passo de tempo imediatamente anterior ao passo atual $\tau + \Delta\tau$;

$\tau - \Delta\tau \rightarrow$ passo de tempo imediatamente anterior ao passo τ;

$\tau - 2\Delta\tau \rightarrow$ passo de tempo imediatamente anterior ao passo $\tau - \Delta\tau$;

$\Delta\tau \rightarrow$ intervalo de tempo entre passos consecutivos de tempo.

Desde que $\mathbf{w}_{\tau}$, $\mathbf{w}_{\tau-\Delta\tau}$ e $\mathbf{w}_{\tau-2\Delta\tau}$ sejam conhecidos, pode-se calcular $\mathbf{w}_{\tau+\Delta\tau}$ através de um sistema, da forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{\tau+\Delta\tau} = \mathbf{y}_{\tau+\Delta\tau} \tag{6.10}$$

onde $\mathbf{x}_{\tau+\Delta\tau}$ é o vetor de variáveis desconhecidas e $\mathbf{y}_{\tau+\Delta\tau}$ é o vetor de variáveis conhecidas, sendo que seus elementos são calculados a partir dos valores de $\mathbf{w}$ dos passos de tempo anteriores e das condições de contorno no tempo $\tau + \Delta\tau$.

Uma vez que o sistema (6.10) é resolvido, o vetor $\mathbf{w}_{\tau+\Delta\tau}$ é conhecido e a solução pode então ser encontrada para o próximo passo de tempo.

Capítulo 7

Resultados numéricos

São apresentados a seguir alguns resultados obtidos com as rotinas implementadas. Esses resultados são comparados com resultados obtidos pelo método dos elementos finitos (Useche, 2008) e resultados presentes na literatura.

Nos resultados seguintes, as funções de aproximações f_{m1} e f_{m2} são usadas na forma não aumentada enquanto f_{m3} e f_{m4} são usadas na forma aumentada por polinômios.

A solução particular (equação 5.35) usada no DRM será dada por:

$$\hat{w} = c_1 \, r^4 - c_2 \, r^5 \tag{7.1}$$

onde: $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$.

7.1 Aplicação do DRM e RIM na análise modal de placas ortotrópicas

Com o objetivo de comparar a precisão de diferentes funções de aproximação e do DRM, o método é aplicado em um problema de vibração livre. Considere uma placa retangular simplemente apoiada com as seguintes dimensões: comprimento $a = 450$ mm, largura $b = 350$ mm e espessura $h = 2.1$ mm (Figura 7.1). A placa é ortotrópica e tem as propriedades: $E_1 = 120$ GPa, $E_2 = 10$ GPa, $G_{12} = 4.8$ GPa, $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1510$ kg/m^3.

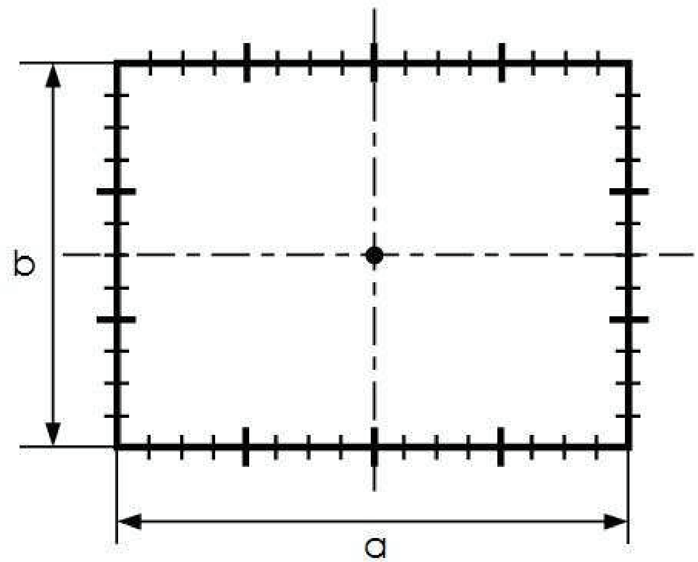

Figura 7.1: Discretização da placa retangular.

A vibração livre desta placa é analisada usando-se quatro funções de base radial, dadas pelas equações (5.66), (5.67), (5.68) e (5.69), com uma malha de 20 elementos quadráticos descontínuos no contorno e 25 pontos internos.

Tabela 7.1: Frequências naturais calculadas analiticamente e obtidas pelo DRM e pelo RIM.

Modos	Exata	DRM		f_{m1}		f_{m2}		f_{m3}		f_{m4}	
	$\omega/(2\pi)$ (Hz)	$\omega/(2\pi)$ (Hz)	Diff. (%)	$\omega/(2\pi)$ (Hz)	Diff. (%)	$\omega/(2\pi)$ (Hz)	Diff. (%)	$\omega/(2\pi)$ (Hz)	Diff. (%)	$\omega/(2\pi)$ (Hz)	Diff. (%)
1	52.77	53.99	2.31	53.27	0.95	53.31	1.02	52.80	0.06	53.19	0.80
2	103.28	128.79	24.70	108.20	4.76	108.26	4.82	104.19	0.88	104.43	1.11
3	176.57	185.60	5.11	187.42	6.15	187.62	6.26	179.08	1.42	181.44	2.76
4	199.83	251.03	25.62	205.13	2.65	205.16	2.67	202.32	1.25	204.96	2.57
5	211.09	295.69	40.08	223.60	5.92	223.80	6.02	213.52	1.15	214.97	1.84

A Tabela 7.1 mostra as cinco primeiras frequências naturais calculadas pelo DRM e pelo RIM, usando quatro funções de aproximação, e solução analítica exata apresentada por Gibson (1994). Na função de aproximação f_{m4}, os resultados são calculados considerando $d_A = b/3$.

As Figuras 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6 mostram os modos de vibrar da placa livre.

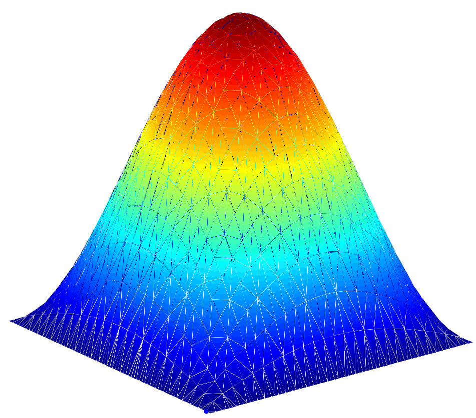

Figura 7.2: Modo 1 (Simplesmente apoiada).

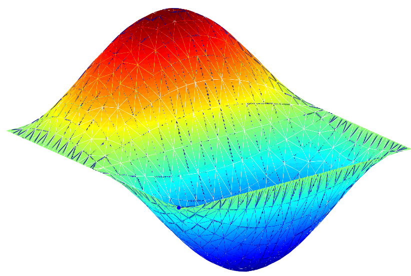

Figura 7.3: Modo 2 (Simplesmente apoiada).

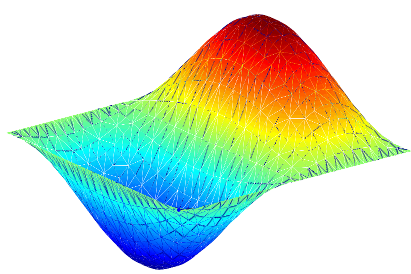

Figura 7.4: Modo 3 (Simplesmente apoiada).

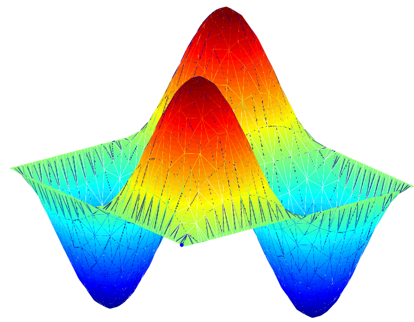

Figura 7.5: Modo 4 (Simplesmente apoiada).

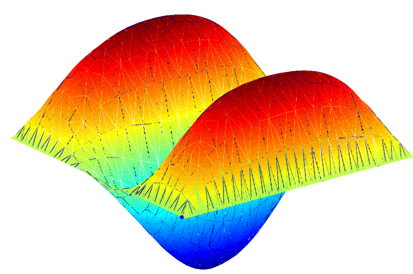

Figura 7.6: Modo 5 (Simplesmente apoiada).

Dos resultados, podemos concluir que as funções de base radial aumentadas por polinômios f_{m3} e f_{m4} apresentam melhor performance em comparação com as não aumentadas f_{m1} e f_{m2}. Pode-se ver que o RIM apresentou para todas as frequências e praticamente para todas as funções de aproximação, resultados melhores que o DRM. O RIM é mais adequado para a análise dos problemas estruturais de materiais anisotrópicos usando o BEM, porque permite a aproximação das integrais domínio com funções de aproximação de excelente desempenho e que não podem ser utilizadas no DRM para este tipo de problema (Albuquerque, Santana e Sollero 2007).

7.2 Aplicação do DRM e RIM na análise transiente de placas ortotrópicas

Nesta seção, resultados numéricos são apresentados para placas sob cargas de impacto dependentes do tempo. Os valores obtidos para o deslocamento em algum ponto da placa são comparados com resultados obtidos pelo método dos elementos finitos (Useche, 2008). Em todos os cálculos numéricos, placas ortotrópicas são sujeitas a cargas transversais distribuídas uniformemente.

7.2.1 Placa quadrada apoiada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída

Considere uma placa apoiada (Figura 7.7) carregada no instante $\tau_o = 0$ s por uma carga $q = 2,07 \times 10^6$ N/m^2 tipo degrau (Figura 7.8). A placa é ortotrópica e apresenta as seguintes propriedades e dimensões: $E_2 = 6895$ MPa, $E_1 = 2E_2$, $G_{12} = 265.19$ MPa, $\nu_{12} = 0.3$, $\rho = 7166$ kg/m^3, $a = 254$ mm e espessura $h = 12.7$ mm. Este problema é equivalente ao problema proposto por Sladek et al. (2006) que foi analisado usando a fórmulação do método sem malha Petrov-Galerking (MLPG). O deslocamento vertical estático do nó central da placa é dado por $w_{stat} = 23,42 \times 10^{-3}$ m e o fator de normalização do tempo por $t_o = a^2/(4\sqrt{\rho h/D})$.

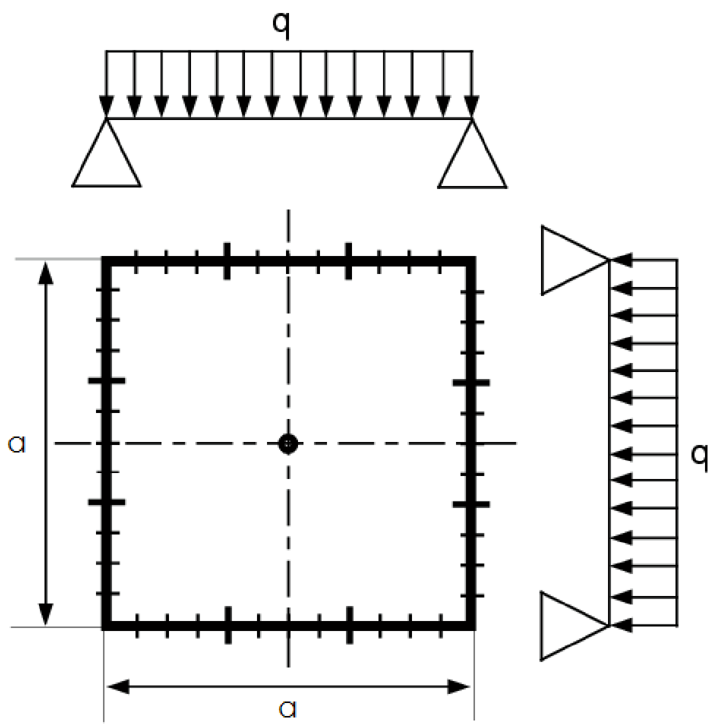

Figura 7.7: Placa quadrada ortotrópica apoiada.

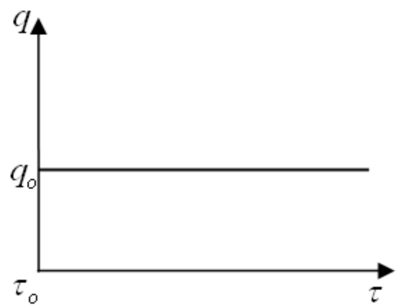

Figura 7.8: Carregamento tipo função degrau.

7.2.1.1 Sensibilidade ao número de pontos internos do DRM

A placa foi discretizada usando-se 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento e passo de tempo $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-5}$ s. O problema foi analisado utilizando-se 1, 9 e 25 pontos internos distribuídos uniformemente. A Figura 7.9 mostra o deslocamento vertical do nó central da placa em função do tempo.

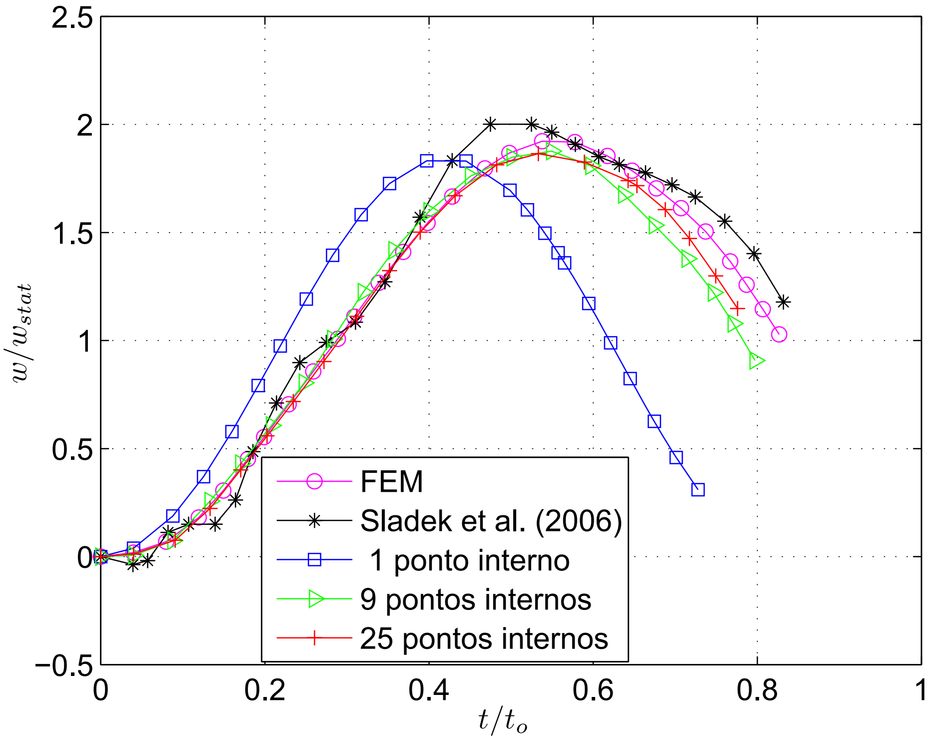

Figura 7.9: Deslocamento vertical do nó central da placa com o tempo sujeita a variação de pontos internos.

Pode-se obsevar que o uso de pontos internos é necessário para se obter uma maior precisão dos resultados obtidos pelo DRM. Neste caso, o resultado obtido com 25 pontos internos foi mais próximo da solução de elementos finitos e do MLPG que os resultados com 1 e 9 pontos internos.

7.2.1.2 Sensibilidade ao número de elementos do DRM

A placa foi discretizada usando-se 9 pontos internos e passo de tempo $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-5}$ s. O problema foi analisado pelo DRM utilizando-se 4, 8 e 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento. A Figura 7.10 mostra o deslocamento vertical do nó central da placa em função do tempo.

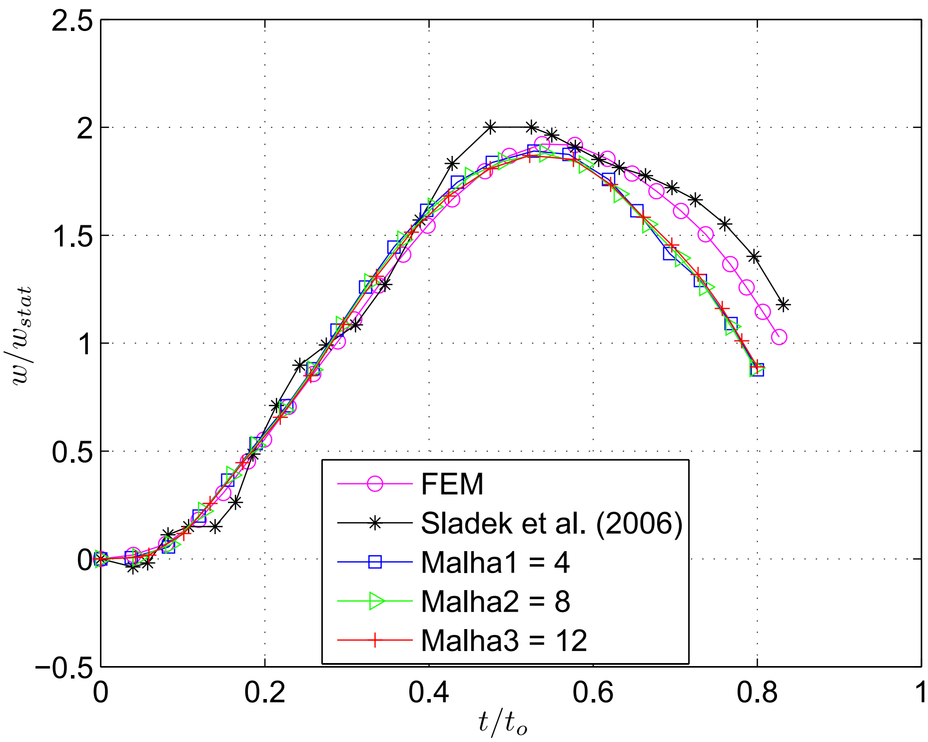

Figura 7.10: Deslocamento vertical do nó central da placa em função do tempo sujeita a variação do número de elementos.

Pode-se observar na Figura 7.10 que a discretização do contorno da placa afeta pouco os resultados obtidos pelo DRM. Assim, neste problema a influência do número de elementos na discretização do contorno é bastante pequena.

7.2.1.3 Sensibilidade ao passo de tempo do DRM

A placa foi discretizada usando-se 25 pontos internos e 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento. O problema foi analisado pelo DRM utilizando-se passos de tempo iguais a $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-6}$ s, $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-5}$ s e $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-4}$ s. A Figura 7.11 mostra o deslocamento vertical do nó central da placa em função do tempo.

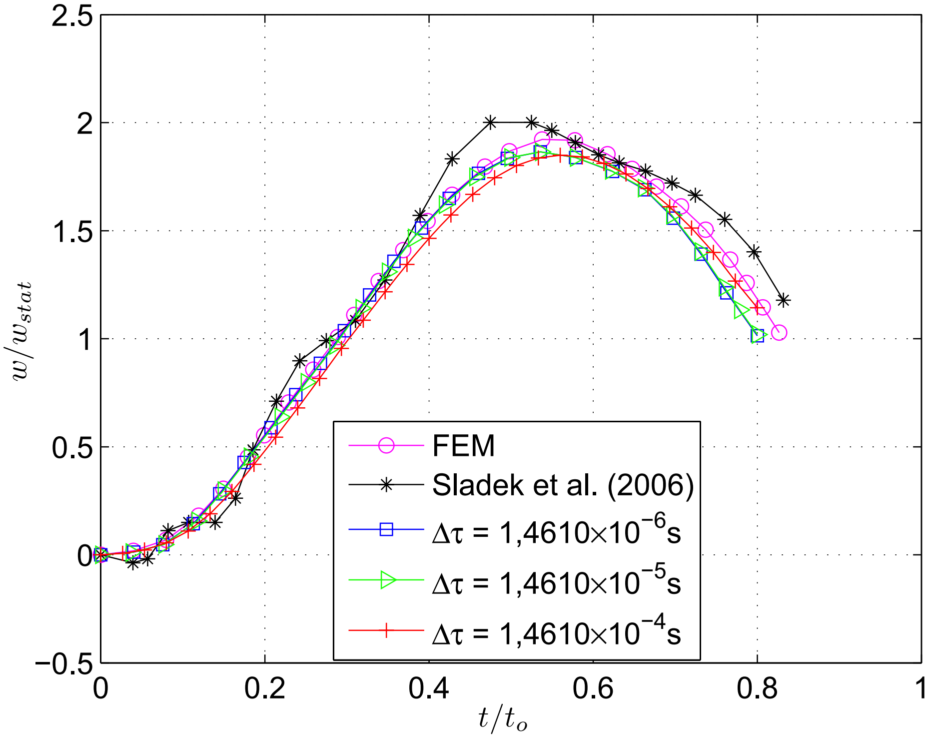

Figura 7.11: Deslocamento vertical do nó central da placa com o tempo sujeita a variação do passo de tempo.

Pode-se observar na Figura 7.11 que houve pouca dependência dos resultados quando se usou o passo de tempo $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-6}$ s, entretanto para o passo de tempo $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-4}$ s o resultado mostrou-se próximo da solução do método dos elementos finitos e do MLPG.

O mapa de cor para deslocamento do nó central na direção z para o instante de tempo $t = 0,0035\,\mathrm{s}$ pode ser visualizado na Figura 7.12.

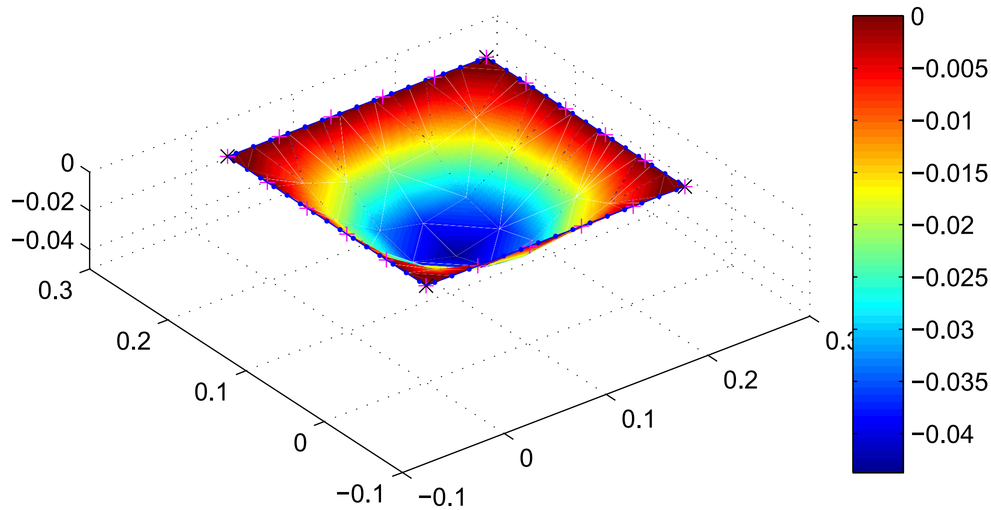

Figura 7.12: Mapa de cor do deslocamento vertical do nó central.

7.2.1.4 Análise dos resultados com diferentes funções de aproximação do RIM

Considere a placa apoiada da Figura 7.7 usando-se 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos, 9 nós internos e passo de tempo igual a $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$. A Figura 7.13 mostra o deslocamento vertical do nó central da placa, usando-se as funções de aproximação equações (5.66), (5.67), (5.68) e (5.69) no RIM. Os deslocamentos são comparados com os resultados apresentados por Sladek et al. (2006) e com resultados obtidos com elementos finitos.

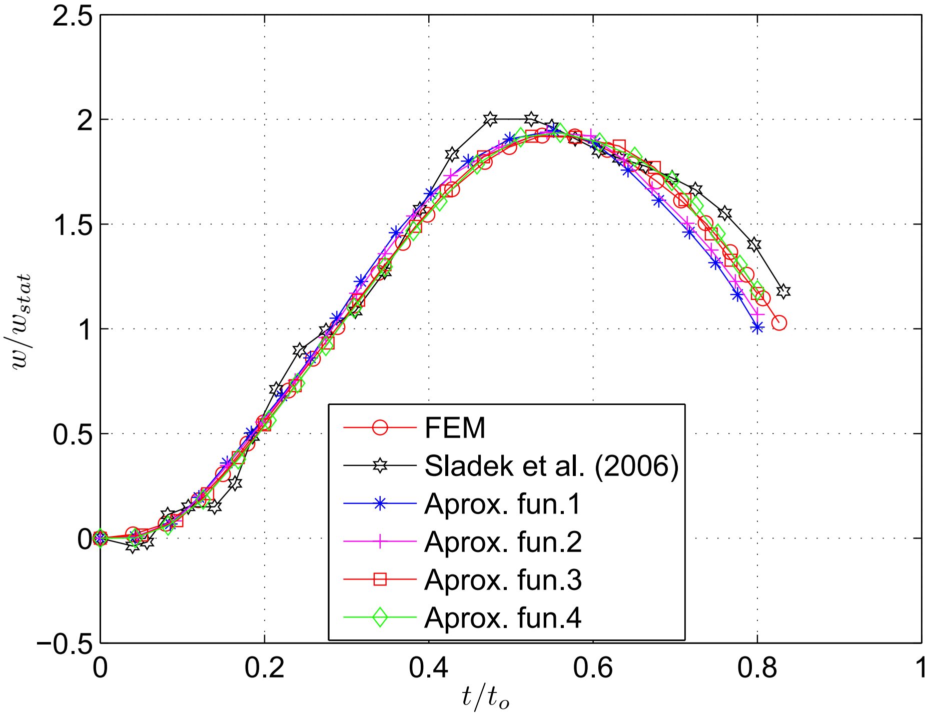

Figura 7.13: Deslocamento vertical do nó central da placa com uso de diferentes funções de aproximação.

Os resultados obtidos (Albuquerque, Sollero and Santana, 2008) com a função de aproximação de quarta ordem (equação 5.69) estão mais próximos dos resultados apresentados por Sladek et al. (2006) e também dos resultados obtidos usando elementos finitos.

7.2.1.5 Comparação entre DRM e RIM

Considere a placa apoiada da Figura 7.7. A placa foi analisada usando-se 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos, 9 nós internos e passo de tempo igual a $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-5}$ s. A Figura 7.14 mostra o deslocamento vertical do nó central da placa, usando-se a função de aproximação f_{m3} para o RIM e o DRM.

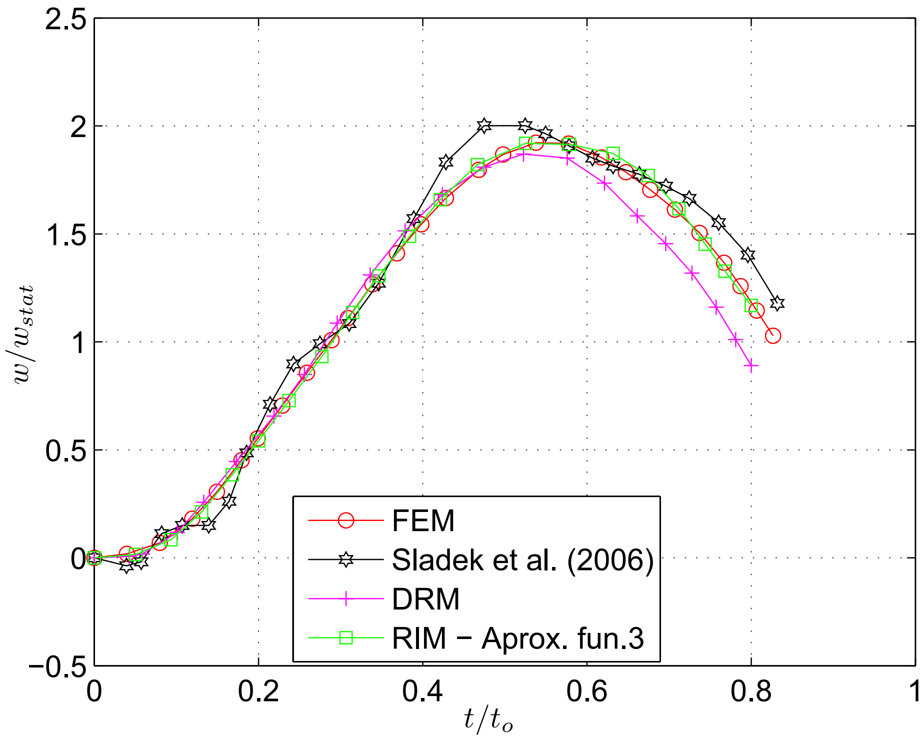

Figura 7.14: Deslocamento vertical do nó central da placa com o uso do DRM e RIM.

Os resultados obtidos apresentam boa concordância com os obtidos por Sladek et al. (2006) e com os resultados obtidos usando elementos finitos. Os resultados obtidos pelo RIM estão mais próximos dos resultados de elementos finitos e do método sem malha que obtidos pelo DRM.

7.2.1.6 Variação da resposta com a razão entre os módulos de elasticidade

O mesmo problema anterior foi tratado variando-se a razão entre os módulos de elasticidade E_1 e E_2 (Razão $= R = E_2/E_1$ onde E_2 assume diferentes valores e E_1 e as demais propriedades do material permanecem com seus valores inalterados). A Figura 7.15 mostra os resultados para 3 valores de R para os deslocamentos verticais do nó central da placa (Figura 7.7). Os resultados foram obtidos usando 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos, 9 nós internos e passo de tempo igual a $\Delta\tau = 4,6667 \times 10^{-4}\, s$.

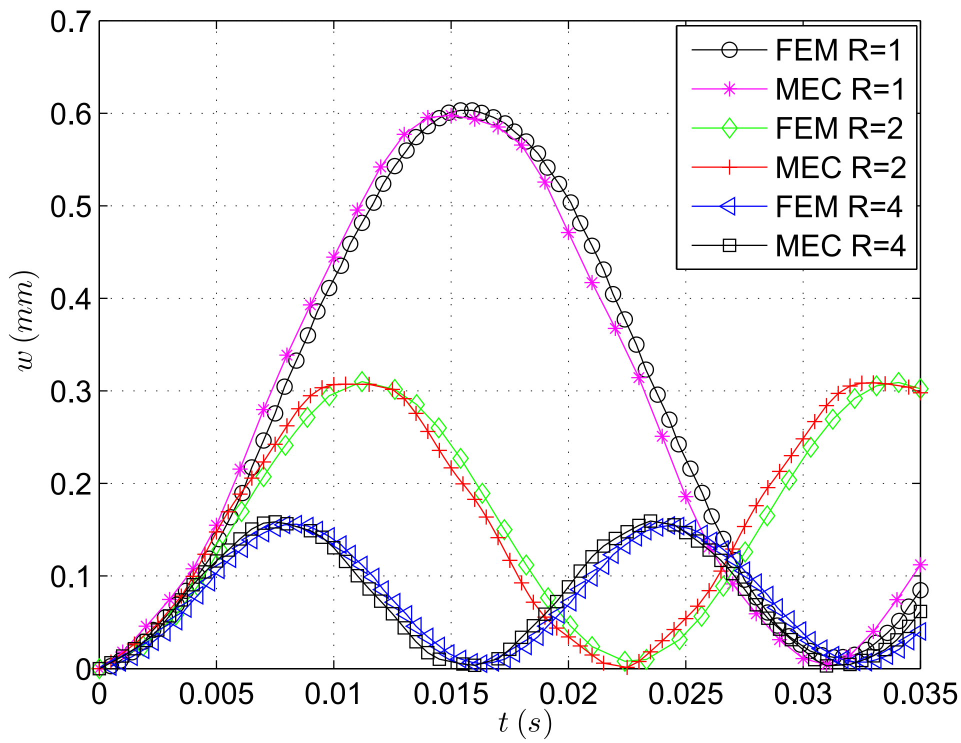

Figura 7.15: Deslocamento vertical do nó central da placa obtidos para diferentes razões entre módulos de elasticidade.

Os resultados tem o comportamento esperado, ou seja, quanto maior a razão entre E_2 e E_1, menores são os deslocamentos e maior a frequência dos ciclos. Em todos os casos os resultados são estáveis mesmo depois de vários ciclos.

7.2.2 Placa quadrada engastada nos quatro lados sob carga uniformemente distribuída

Considere uma placa engastada (Figura 7.16) carregada no instante $\tau_o = 0\,\mathrm{s}$ por uma carga tipo degrau $q = 2,07 \times 10^6\ \mathrm{N/m^2}$ (Figura 7.8). A placa considerada apresenta as mesmas propriedades e dimensões da Seção 7.2.1. A única diferença é que se encontra engastada. O deslocamento vertical estático do nó central da placa é dado por $w_{stat} = 6,74.10^{-3}\,m$ e o fator de normalização do tempo por $t_o = a^2/(4\sqrt{\rho h/D})$.

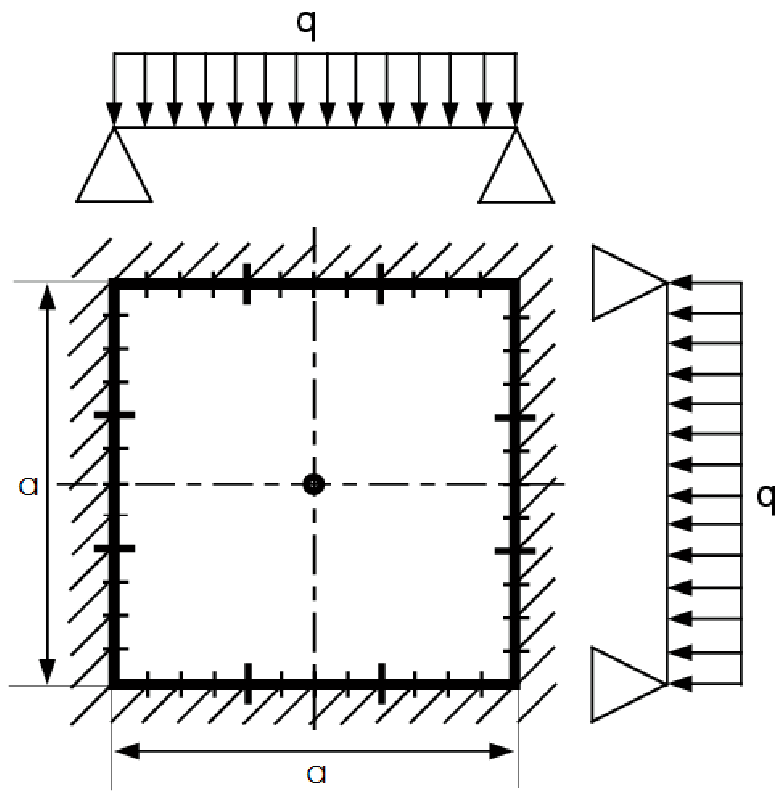

Figura 7.16: Placa quadrada ortotrópica engastada.

7.2.2.1 Sensibilidade ao número de pontos internos para o DRM

A placa foi discretizada usando-se 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento e passo de tempo $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-5}$ s. O problema foi analisado pelo DRM utilizando-se 1, 9 e 25 pontos internos uniformemente distribuídos. A Figura 7.17 mostra deslocamento vertical do nó central da placa em função do tempo.

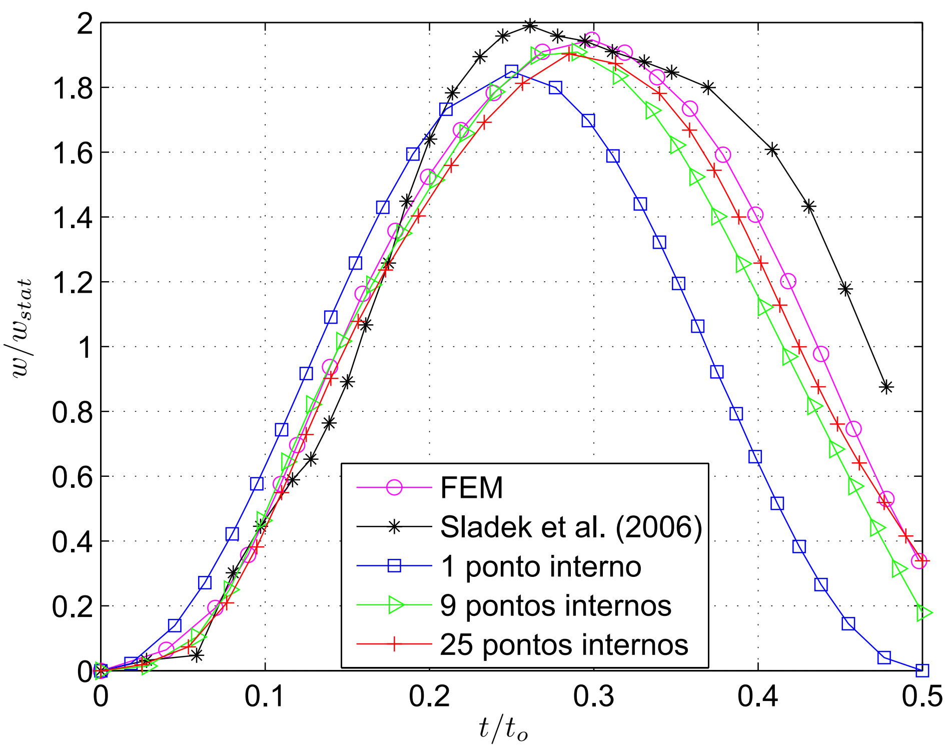

Figura 7.17: Deslocamento vertical do nó central da placa com o tempo sujeita a variação de pontos internos.

Pode-se obsevar que para se obter uma maior precisão dos resultados no DRM, o número de pontos internos foi elevado para 25, conforme mostrado na Figura 7.17 e que com apenas 1 ponto interno verifica-se uma grande diferença em relação aos demais resultados para o DRM. O resultado obtido com 25 pontos internos, apresentou pequenas diferenças e mostrou-se ligeiramente mais próximo da solução exata que os resultados com 1 e 9 pontos internos.

7.2.2.2 Sensibilidade ao número de elementos para o DRM

A placa foi discretizada usando-se 9 pontos internos e passo de tempo $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-5}$ s. O problema foi analisado pelo DRM utilizando-se 4, 8 e 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento. A Figura 7.18 mostra o deslocamento vertical do nó central da placa em função do tempo.

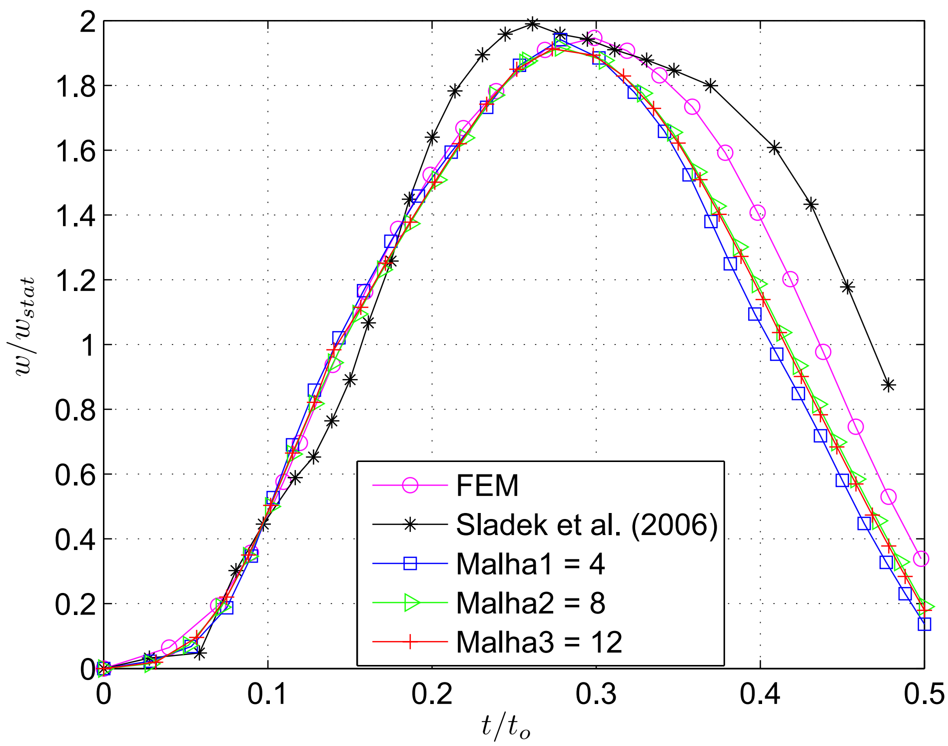

Figura 7.18: Deslocamento vertical do nó central da placa com o tempo sujeita a variação do número de elementos.

Pode-se observar na Figura 7.18 que a discretização do contorno da placa pouco afeta os resultados.

7.2.2.3 Sensibilidade ao passo de tempo pelo DRM

A placa foi discretizada usando-se 25 pontos internos e 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento. O problema foi analisado pelo DRM utilizando-se passos de tempo iguais a $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-6}$ s, $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-5}$ s e $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-4}$ s. A Figura 7.19 mostra o deslocamento vertical do nó central da placa em função do tempo.

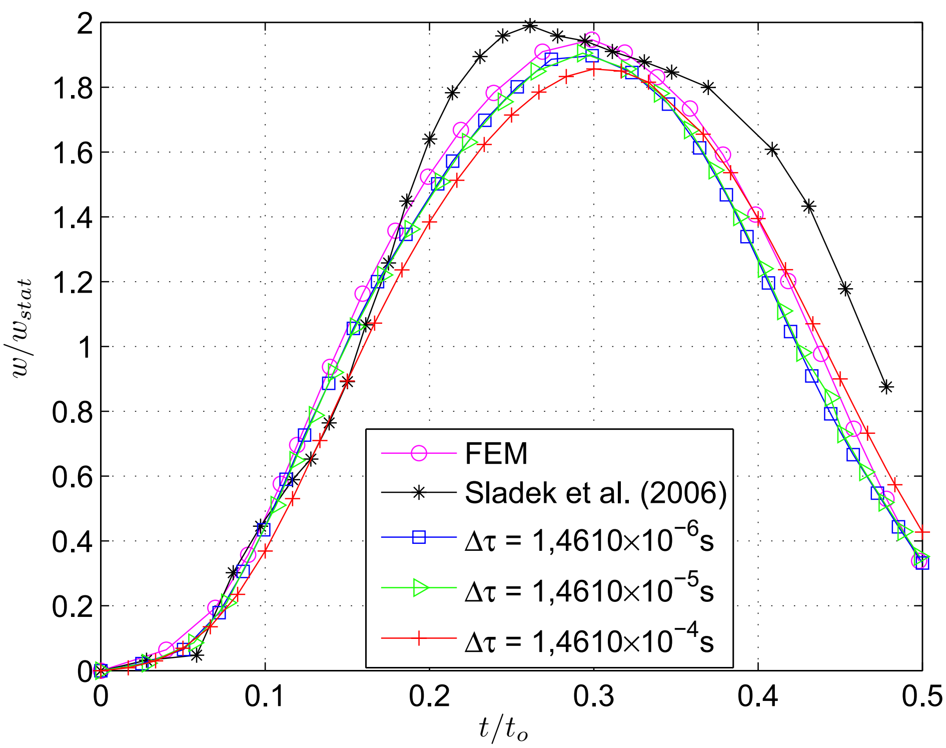

Figura 7.19: Deslocamento vertical do nó central da placa com o tempo para diferentes passos de tempo.

Pode-se observar na Figura 7.19 que houve pouca dependência dos resultados quando se usou o passo de tempo $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-6}$ s. Entretanto, para o passo de tempo $\Delta\tau = 1,4610 \times 10^{-4}$ s o resultado mostrou-se mais próximo da solução de elementos finitos e do MLPG.

O mapa de cor para deslocamento do nó central na direção z para o instante $t = 0,0022$ s, pode ser visualizado na Figura 7.20.

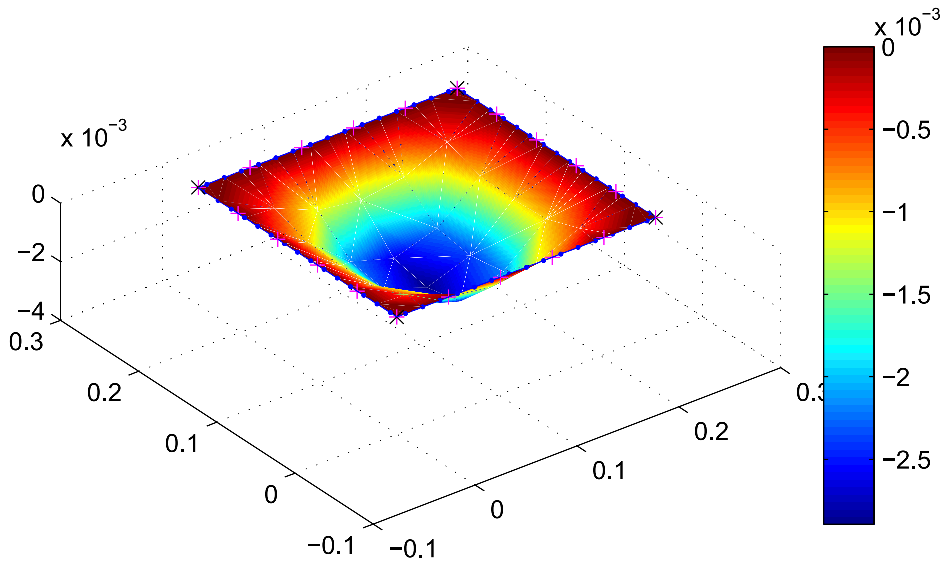

Figura 7.20: Mapa de cor do deslocamento vertical do nó central.

7.2.3 Placa engastada-livre sob carga uniformemente distribuída

Considere uma placa engastada-livre (Figura 7.21) carregada no instante $\tau_o = 0\,\text{s}$ por uma carga tipo degrau $q = 2,07 \times 10^6$ N/m^2 (Figura 7.8). A placa considerada apresenta as mesmas propriedades e dimensões da Seção 7.2.1. Este problema foi analisado tanto pelo DRM quanto pelo RIM. Porém, os resultados do DRM apresentaram elevadas instabilidades para todos os casos e não serão mostrados neste trabalho.

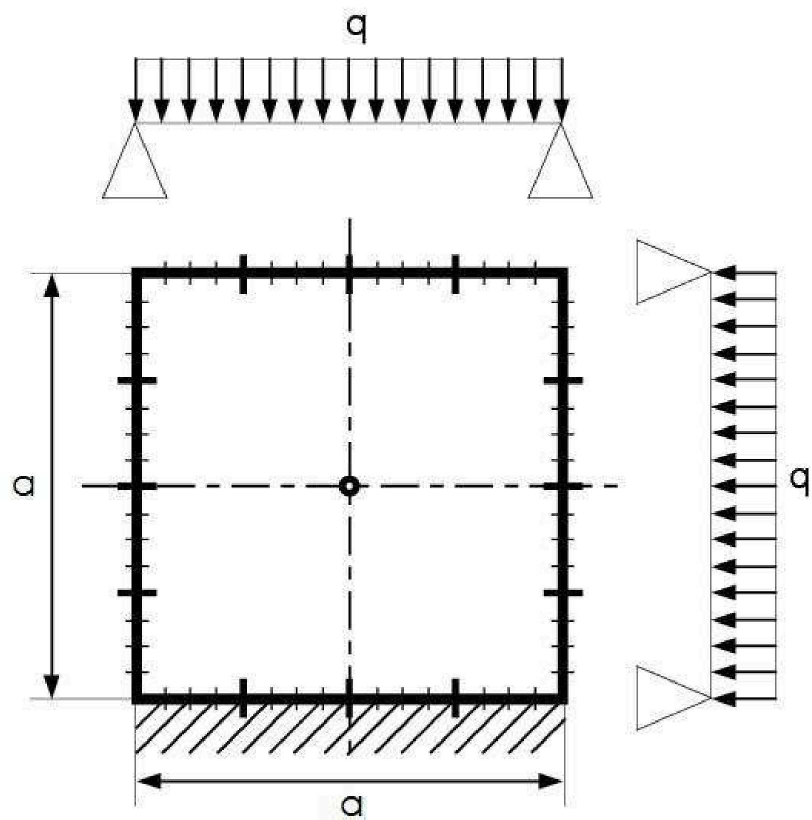

Figura 7.21: Placa quadrada ortotrópica engastada em um lado e livre em três lados.

7.2.3.1 Sensibilidade ao número de pontos internos do RIM

A placa foi discretizada usando-se 8 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento e passo de tempo $\Delta\tau = 4,6667 \times 10^{-4}\,\text{s}$. O problema foi analisado utilizando-se 1, 9 e 25 pontos internos uniformemente distribuídos. A Figura 7.22 mostra deslocamento vertical do nó central da placa em função do tempo obtido pelo RIM.

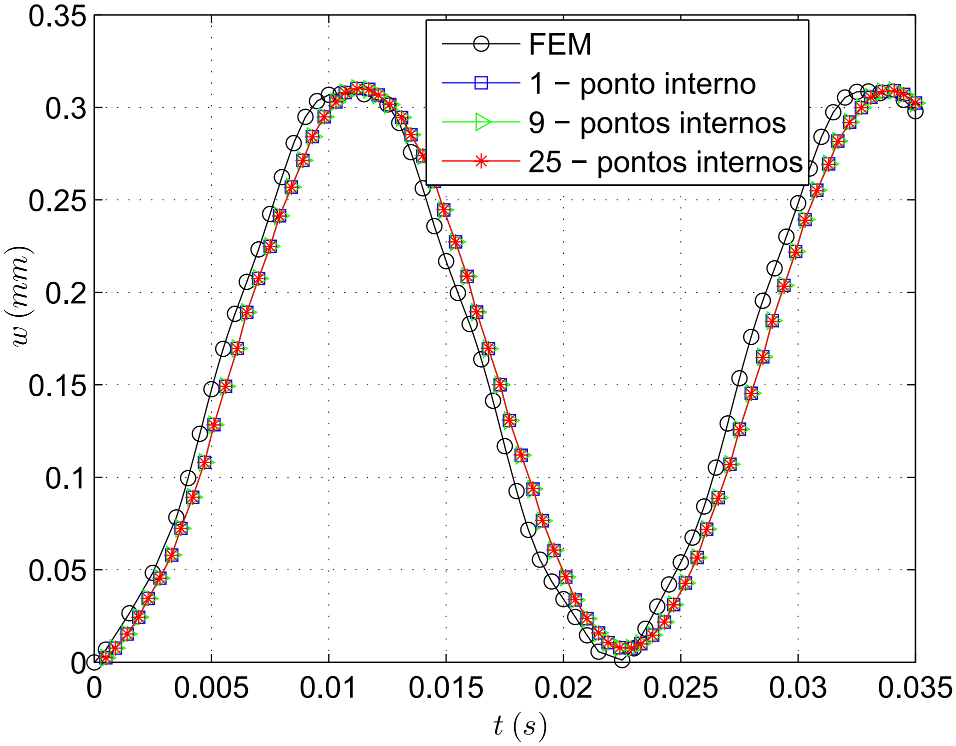

Figura 7.22: Deslocamento vertical do nó central da placa com o tempo sujeita a variação de pontos internos.

Pode-se observar na Figura 7.13 que houve pouca dependência do número de pontos internos. Os resultados mostraram-se próximo da solução de elementos finitos.

7.2.3.2 Sensibilidade ao número de elementos do RIM

A placa foi discretizada usando-se 9 pontos internos e passo de tempo $\Delta\tau = 4,6667 \times 10^{-4}$ s. O problema foi analisado utilizando-se 4, 8 e 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento. A Figura 7.23 mostra o deslocamento vertical do nó central da placa em função do tempo obtidos pelo RIM.

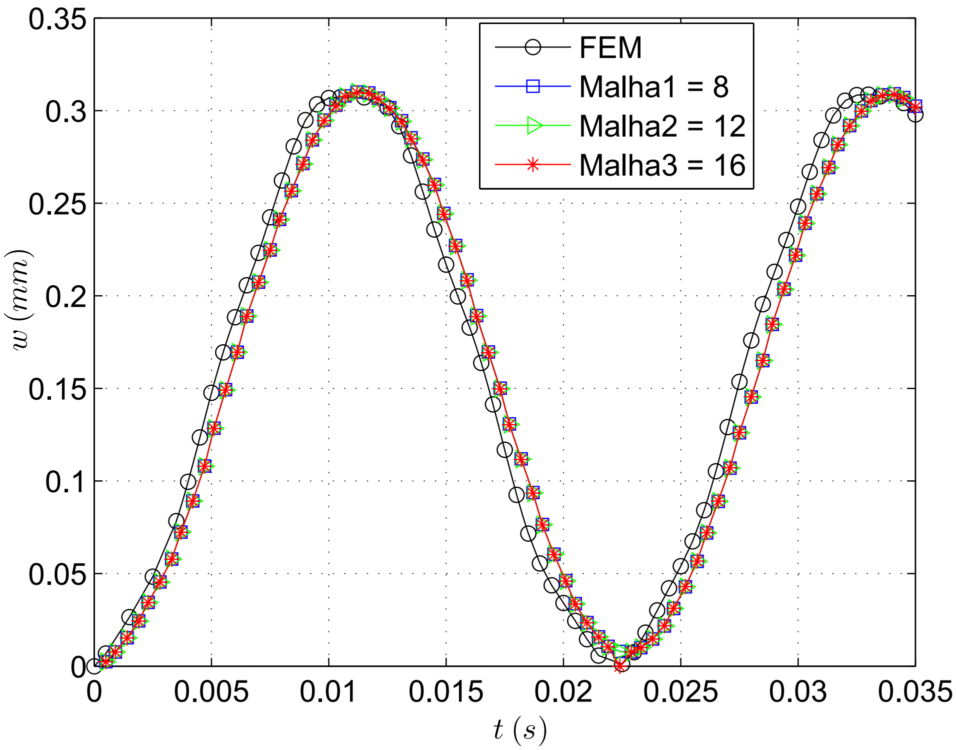

Figura 7.23: Deslocamento vertical do nó central da placa com o tempo sujeita a variação do número de elementos.

Pode-se observar na Figura 7.23 que a discretição do contorno pouco afeta os resultados.

7.2.3.3 Sensibilidade ao passo de tempo do RIM

A placa foi discretizada usando-se 25 pontos internos e 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento. O problema foi analisado utilizando-se passos de tempo iguais a $\Delta\tau = 0,0012\,\mathrm{s}$, $\Delta\tau = 1,667 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$, $\Delta\tau = 3,5 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$ e $\Delta\tau = 6,0137 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$. A Figura 7.24 mostra o deslocamento vertical do nó central da placa em função do tempo.

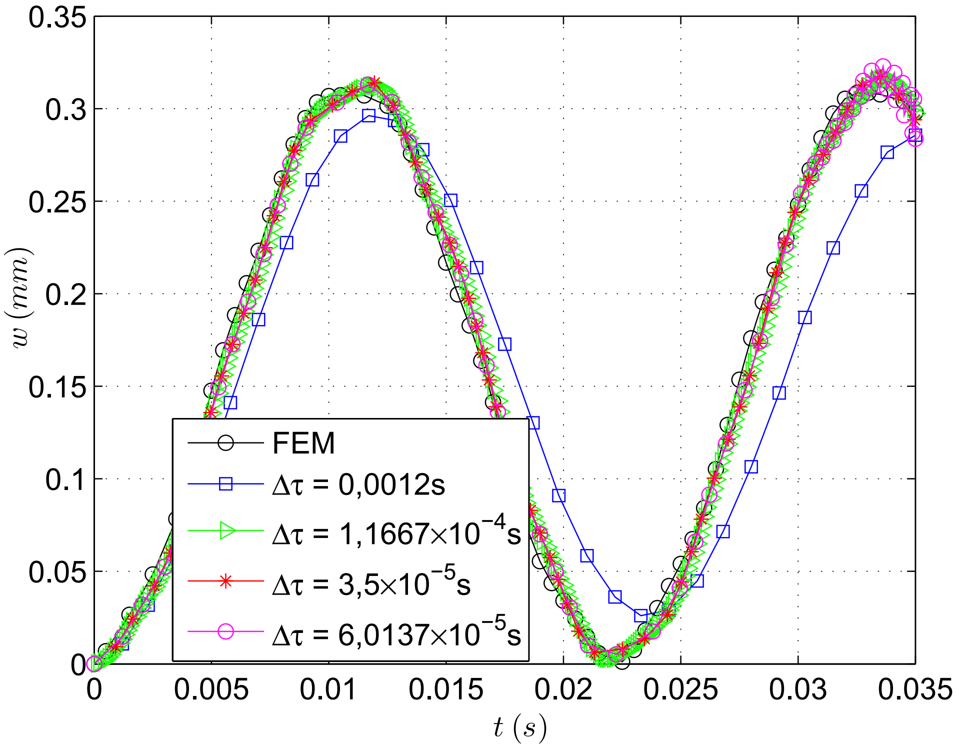

Figura 7.24: Deslocamento vertical do nó central da placa com o tempo para diferentes passos de tempo.

Pode-se observar na Figura 7.24 que os passos de tempo $\Delta\tau = 1,1667 \times 10^{-4}\,$s e $\Delta\tau = 3,5 \times 10^{-5}\,$s apresentam boa convergência com a solução de elementos finitos ao contrário do passo de tempo $\Delta\tau = 0,0012\,$s que fica um pouco distante. O passo de tempo $\Delta\tau = 6,0137 \times 10^{-5}\,$s apresenta pequenas instabilidades (Figura 7.25).

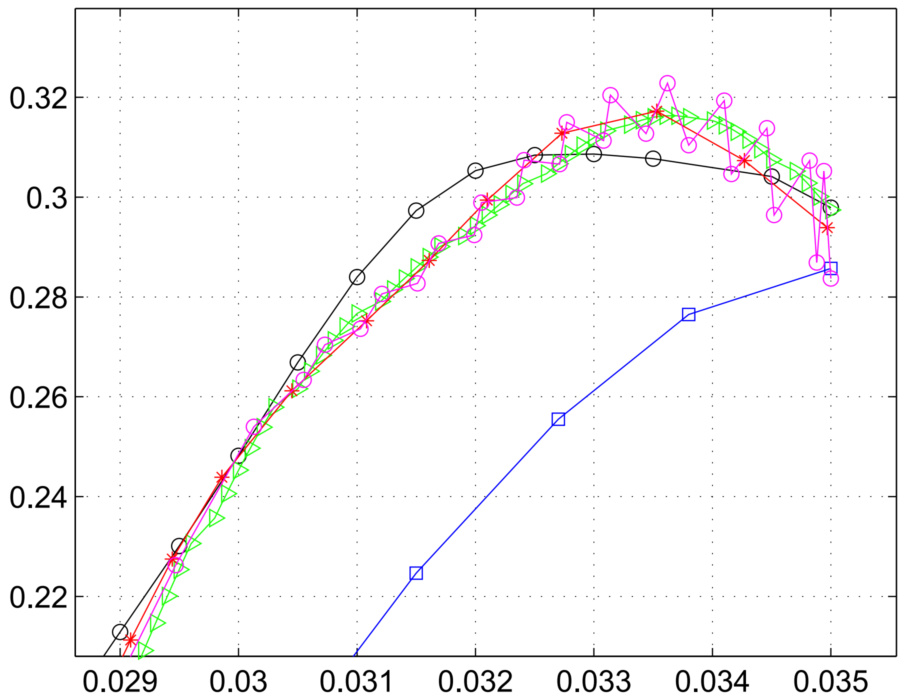

Figura 7.25: Instabilidade do passo de tempo $\Delta\tau = 6,0137 \times 10^{-5}\,$s.

O mapa de cor para deslocamento do nó central na direção z para o instante de tempo $t = 0,035\,\mathrm{s}$, pode ser visualizado na Figura 7.26.

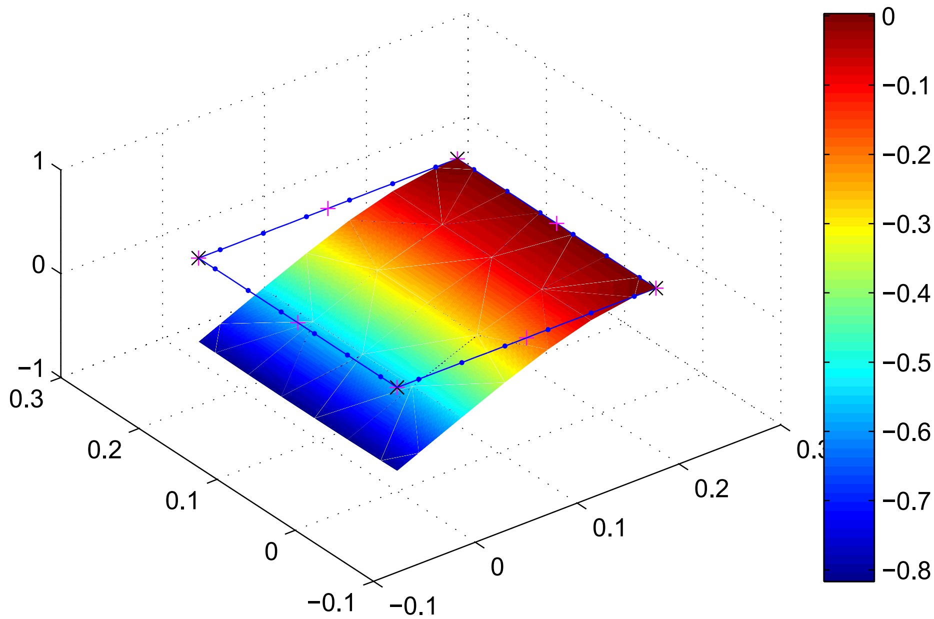

Figura 7.26: Mapa de cor de placa engastada-livre.

7.2.3.4 Influência de pontos internos no RIM

Considere uma placa engastada-livre (Figura 7.27) carregada no instante $\tau_o = 0\,\text{s}$ por uma carga tipo degrau $q = 2,07 \times 10^6$ N/m^2 (Figura 7.8). A placa considerada apresenta as mesmas propriedades e dimensões da Seção 7.2.1. Este problema foi analisado pelo RIM para verificar a influência de pontos internos.

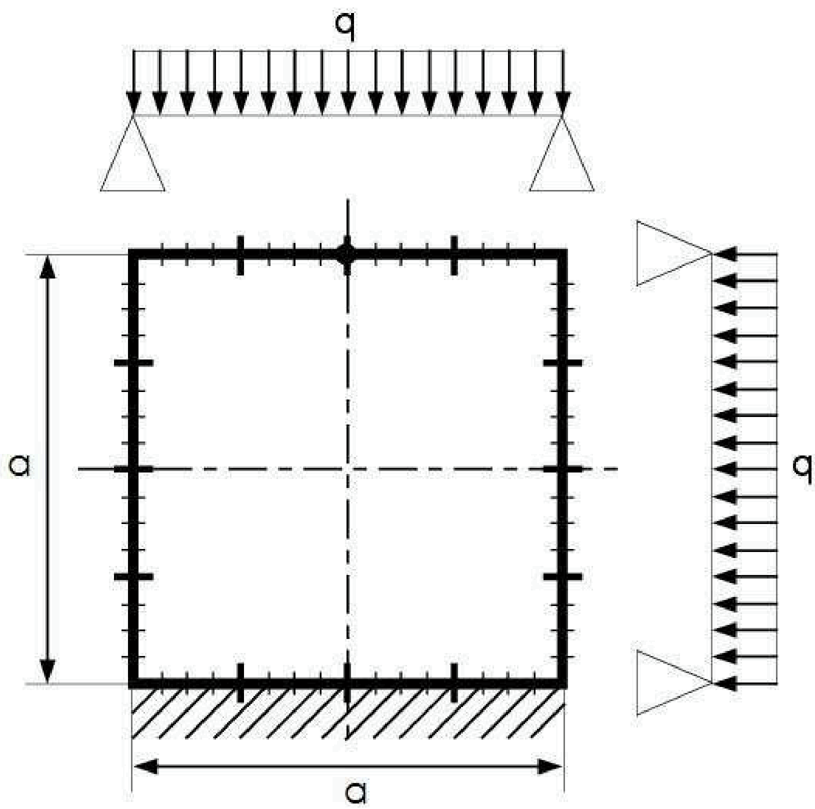

Figura 7.27: Placa quadrada ortotrópica engastada em um lado e livre em três lados.

A placa foi discretizada usando-se 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos de mesmo comprimento e passo de tempo $\Delta\tau = 0,0012\,\text{s}$. O problema foi analisado utilizando-se 0, 1 e 9 pontos internos uniformemente distribuídos. A Figura 7.28 mostra deslocamento vertical do nó central da extremidade da placa em função do tempo obtido pelo RIM.

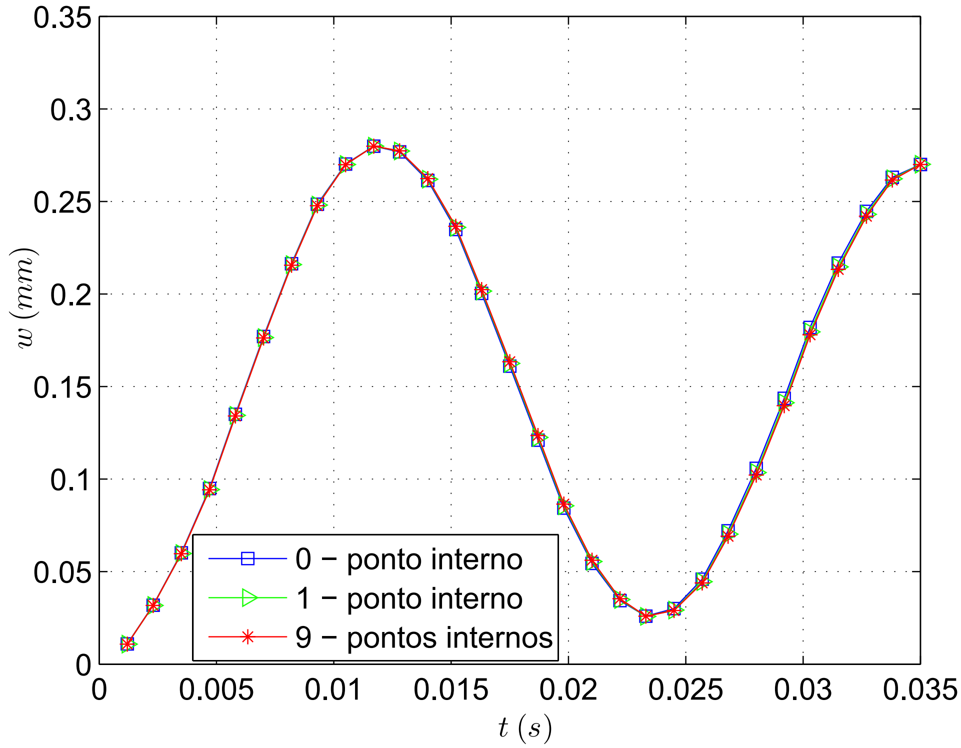

Figura 7.28: Placa quadrada ortotrópica engastada em um lado e livre em três lados.

Pode-se observar na Figura 7.28 que não houve dependência do número de pontos internos, ao contrário do DRM que tem seus resultados influênciados pelos pontos internos.

Capítulo 8

Conclusões

8.1 Considerações finais

Este trabalho apresentou uma formulação do método dos elementos de contorno para análise de problemas dinâmicos em placas finas de materiais compósitos. A formulação do método dos elementos de contorno para a análise de problemas de elastodinâmica em materiais anisotrópicos foi obtida usando soluções fundamentais da elastostática e considerando os termos de inércia como forças de corpo. Foram usados elementos quadráticos descontínuos.

As integrais de domínio provenientes dos termos de inércia foram transformadas em integrais de contorno usando o método dos elementos de contorno de reciprocidade dual e o método da integração radial.

No método da reciprocidade dual, as soluções particulares de deslocamentos foram escolhidas e as funções de aproximação foram obtidas usando a equação de equilíbrio. No método da integração radial, as funções de aproximação podem ser escolhidas livremente.

Numa comparação do DRM com o RIM, foi mostrado que o DRM é um método de custo computacional baixo, uma vez que ele não exige integrações extras para a montagem das matrizes referentes as forças de corpo, uma vez que utiliza as matrizes **H** e **G** já construídas para o cálculo dos demais termos. Porém, devido a necessidade de se calcular as soluções particulares, é um método de difícil implementação além de não permitir que as funções de aproximação sejam escolhidas livremente. Com isso mesmo possuindo um custo computacional elevado, o RIM mostrou-se mais adequado para problemas apresentados neste trabalho.

No método da integração radial, foram utilizadas funções de aproximação que apresentaram boa performance em outras formulações disponíveis na literatura. Foram utilizadas funções de aproximação de base radial, aumentadas por polinômios ou não. Os resultados mostraram que as funções de aproximação aumentadas por polinômio apresentam convergência mais rápida que as não aumentadas. Foram analisadas quatro funções de aproximação e, dentre estas quatro, a que apresentou melhor performance foi a spline de placas finas aumentadas por polinômio. Foi analisada a sensibilidade ao número de pontos internos, a malha e ao tamanho de passo de tempo para estas funções.

O RIM mostrou-se pouco sensível ao número de pontos internos utilizado no domínio e pouco sensível ao numéro de elementos no contorno e ao passo de tempo.

Como propostas para trabalhos futuros sugere-se, a implementação do cálculo das tensões no contorno e nos pontos internos, a extensão da formulação para cascas e problemas não-lineares e ainda o desenvolvimento de procedimentos para tornar menor o custo computacional do RIM.

Referências

Agarwal, B. D. and Broutman, L. J. (1990). *Analysis and performance of fiber composites.* 2nd Edition, John Wiley & Sons Inc, New York.

Albuquerque, E. L. (2001). *Análise de problemas dinâmicos em materiais anisotrópicos usando o método dos elementos de contorno.* PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas.

Albuquerque, E. L., Santana, A. P. and Sollero, P. (2007). *On the accuracy of the radial integration method applied to the modal analysis of thin anisotropic plates.* In: International Conference on Boundary Element Techniques VIII, 2007, Nápoles. International Conference on Boundary Element Techniques. Londres : EC LTD, 2007. p. 13-18.

Albuquerque, E. L., Sollero, P. and Santana, A. P. (2008). *Dynamic analysis of composite structures using the boundary element method.* Advanced Structural Mechanics and Computational Mathematics. Brazil AFOSR Workshop, 2008.

Albuquerque, E. L., Sollero, P. and Aliabadi, M. H (2002). *The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials.* International Journal of Solids and Structurres, 39:1405-1422.

Albuquerque, E. L., Sollero, P., e Paiva, W. P. (2006). *The radial integration method applied to dynamic problems of anisotropic plates.*Communications in numerical methods in engineering, 23:805-818.

Albuquerque, E. L., Sollero, P., e Paiva, W. P. (2003a). *Bending analysis of symmetric* *laminate composites using the boundary element method.* 15th International Conference on Computer Methods in Mechanics, Gliwice, Poland.

Albuquerque, E. L., Sollero, P., and Fedelinski, P. (2002). *Free vibration analysis of anisotropic material structurres using the boundary element method* Engineering Analysis with Booundary Elements, 27:977-985.

Albuquerque, E. L., Sollero, P., and Fedelinski, P. (2004). *Dual booundary element method for anisotroppic dynamic fracture mechanics.* International Journal for Numerical Method in Engineering, 59:1187-1205.

Albuquerque, E. L., Sollero, P., Venturini W. S. and Aliabadi, M. H. (2006). *Boundary element analysis of anisotropic kirchhoff plates.* International Journal of Solids and Structures, 43:4029-4046.

Albuquerque, E. L., Sollero, P., and Paiva, W. P. (2007). *The radial integration method applied to dynamic problems of anisotropic plates.* Communications in Numerical Methods in Engineering. Early view.

Aliabadi, M. H. (2002). *The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structures.* John Wiley e Sons, New York, 1st edition.

Atluri, S.N. and Shen, S. (2002). *The meshless local Petrov-Galerkin (MPLG) method.*Tech Science Press, Encino, USA.

Brebbia, C. and Dominguez, J. *Boundary Element: An Introdutory Course. Computational Mechanics Publications.* Southampton, 2nd edition.

Courbon, J. (1979). *Stress in Plates and Shells.* Eyrolles, Paris.

Deb, A. (1996). *Boundary elements analysis of anisotropic bodies under thermo mechanical body force loadings.* Computers and Structures, 58:715-726.

Dominguez, J. (1993). *Boundary elements in dynamics.* Computational Mechanics Publication, Southampton, Boston.

Gao, X. (2002). *The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary only discretization*. Eng. Analysis with Boundary Elements, 26:905-916.

Flamínio, L. N. and Pardini, L. C. (2006). *Compósitos Estruturais: ciência e tecnológia.* Edgard Blücher, São Paulo.

Gao, X., Zhang, C., Sladek J., and Sladek, V. (2005). *n Third International Workshop on Meshfree Methods for Partial.*Diferential Equations, Bonn, Germany.

Golberg M.A., Chen C.S. and Bowman H. (1999). *Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM*. Engineering Analysis with Boundary Element, 23:285-296.

Gouvêa, A. R. (2006). *Critérios de falha e otimização de estruturas de materiais compósitos usando o método dos elementos de contorno.* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas.

Gibson, R. F. (1994). *Principles of composite material mechanics*. McGraw-Hill, New York.

Holmes, M. and Just, D. J. (1983). *GRP in structural engineering.*London: Applied Science Publishers.

Hull, D. C. and Clyne, T. W. (1996). *An introduction to composite materials.* Cambridge, UK:Cambridge University Press, 1996. 326p.

Kane, J. A. (1994). *Boundary Element Analisys in Engineering Continuum Mechanics.* Prentice Hall, New Jersey.

Kirchhoff, G. R. (1950). *On the equilibrium and motion of an elastic plate*. J. Math., 40:51-58.Em alemão.

Kogl, M. and Gaul, L. (2000a). *A boundary element method for transient piezoeletric analysis.* Eng. Anal, with Boundary Elements, 24:591-598.

Kogl, M. and Gaul, L. (2000b). *A 3-d doundary element method for dynamic analysis of anisotropic elastic solids.* CMES-Comp. Model. in Eng. and Scie., 1:27-43.

Kogl, M. and Gaul, L. (2003). *Free vibration analysis of anisotropic solids with the boundary element method.* Eng. Anal. with Boundary Elements, 27:107-114.

Lekhnitskii, S. G. (1963). *Anisotropic plates*. Gordon and Breach, New York.

Loeffler, C. e Mansur, W. J. (1987). *Analysis of time integratio schemes for boundary element applications to transient wave propagation problems.*. In Brebbia, C. A. e Venturini, W. S., editors, Boundary Element techniques: Applications in stress analysis and heat transfer, pages 105122, Computational Mechanics Publications, Southhampton.

Mansfield, E.H. (1989). *The Bending and Stretching of Plates.* Pergamon Press

Mindlin, R. D. (1951). *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates.* Journal of Applied Mechanics, 18,31-38.

Nardini, D. and Brebbia, C. A. (1982). *A new approach to free vibration analysis using boundary elements.* Boundary Element Method in Engineering, England. 312-326.

Paiva, J. B. (1987). *Boundary element formulation for plate bending and its aplication in engineering*Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo,escola de Engenharia de São Carlos.

Paiva, W. P. (2005). *Análise de problemas estáticos e dinâmicos em placas anisotrópicas usando o método dos elementos de contorno* PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas.

Partridge, P. W. (2000). *Towards criteria for selection approximation functions in the dual reciprocity method* Engineering Analysis with Boundary Elements, 24:519-529.

Poisson, S. D. (1829). *Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps solides* Journal of Mathematics Physics,12(8).

Paiva, W. P., Sollero, P., e Albuquerque, E. L. (2003). *Treatment of hypersingularities in boundary element anisotropic plate bending problems.* Latin American Journal of Solids and Structures, 1:49-73.

Rajamohan, C. e Raamachandran, J. (1999). *Bending of anisotropic plates by charge simulation method*. Advances in Eng. Software. 30:369-373.

Rizzo, F. J. (1967). *An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics.* Quaterly of Applied Mathematics, 25(1), 83-95.

Rezende, M. R. e Botelho, E. C. (2008). *O uso de compósitos estruturais na insdústria aeroespacial.* Centro Técnico Aeroespacial, Instituto de Aeronáutica e Espaço.

Schclar, N. A. and Partridge, P. W. (1993). *3D anisotropic elasticity with bem using the isotropic fundamental solution.* Engineering Analysis with Boundary Elements, 11, 137-144.

Shi, G. and Bezine, G. (1988). *A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems*. J. Composite Materials, 22:694-716.

Sladek, J., Sladek, V., Zhang, Ch., Krivacek, J. and Wen, P. H. (2006). *Analysis of ortotropic thick plates by meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method*. International Journal for Methods in Engineering, 67, 1830-1850.

Somigliana, C. (1885). *Sopra l'equilibrio di corpo elastico isotropo.* Nuovo Cimento, 17, 140-148. 272-276.

Sollero, P. and Aliabadi, M. H. (1995). *Anisotropic analysis of composite laminates using the dual boundary elements methods.* Composite Structures, 31:229-234.

Schclar, N. A. (1994). *Anisotropic analysis using boundary elements*. Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston.

Telles, J. C. F. (1987). *A self-adaptive co-ordinate transformation for eficient numerical evaluation of general boundary element integrals*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24, 959-973.

Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, New York.

Torsani, F. L. (2007). *Implementação do Cálculo das Tensões em Placas Compósitas Laminadas usando o Método dos Elementos de Contorno.* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas.

Ugural, A. C. (1981). *Stress in Plates and Shells.* McGraw-Hill Book Comp.

Useche, J. (2008). *Shellcomp v3.4: Finite Element Analysis Program for Linear Static and Dynamic Analysis of Composite Shell Structures.* Universidade Tecnológica de Bolivar, Cartagena, Colômbia, 2008.

Venturini, W. S. (1988). *A study of boundary element method and it application on engineering problems.* Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Faculdade de Engenharia de São Carlos.

Wang, J. and Schweizerhof, K. (1995). *The fundamental solution of moderately thick laminated anisotropic shallow shells.* Int. J. Eng. Sci., 33:995-1004.

Wang, J. and Schweizerhof, K. (1996). *Study on free vibration of moderately thick orthotropic laminated shallow shells by boundary-domain elements.* Applied Mathmatical Modelling, 20:579-584.

Wang, J. and Schweizerhof, K. (1997). *Free vibration of laminated anisotropic shallow shells including transverse shear deformation by the boundary-domain element method.* Computers and Structures, 62:151-156.

Wrobel, L. C. (2002). *The Boundary Method: Applicattions in Thermo-Fluids and Acoustics.* John Wiley e Sons, New York, 1st edition.

Wu, B. C. (1980). *A new method for solution of anisotropic thin-plate bending porblems.* PhD thesis, Michigan State University.

Wu, B. C. and Altiero, N. J. (1981). *A new numerical method for the analysis of anisotropic thin-plate bending problems.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 25, 343-353.

Young, W. C. and Budynas, R. G. (2001). *Roark's formulas for stress and strain*. 7th Edition, McGraw-Hill, New York (2001)

Zhang, C. (2000). *Transiente elastodynamic antiplane crack analysis of anitropic solids.* Int. j. of Solids and Structures, 37, 6107-6130.