

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Pedro Menezes
Santana..... E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 30/07/2009
Katia Lucchesi Cavalca
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Resposta Complexa de um Sistema Rotor-Mancais-Fundação

Autor: Pedro Menezes Santana
Orientador: Katia Lucchesi Cavalca
Co-orientador: Eduardo Paiva Okabe

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Resposta Complexa de um Sistema Rotor-Mancais-Fundação

Autor: Pedro Menezes Santana
Orientador: Katia Lucchesi Cavalca
Co-orientador: Eduardo Paiva Okabe

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2009
SP – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Sa59r Santana, Pedro Menezes
Resposta complexa de um sistema rotor-mancais-
fundação / Pedro Menezes Santana. --Campinas, SP:
[s.n.], 2009.

Orientadores: Katia Lucchesi Cavalca, Eduardo Paiva
Okabe.

Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Rotores - Dinâmica. 2. Fundações (Engenharia).
3. Metodo dos elementos finitos. 4. Mancais. I.
Cavalca, Katia Lucchesi. II. Okabe, Eduardo Paiva. III.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. IV. Título.

Título em Inglês: Complex response of a rotor-bearings-foundation system
Palavras-chave em Inglês: Rotordynamics, Foundations, Finite element method,
Bearing

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Robson Pederiva, Rodrigo Nicoletti

Data da defesa: 30/07/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

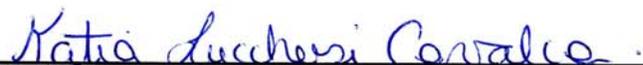
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

**Resposta Complexa de um Sistema
Rotor-Mancais-Fundação**

Autor: Pedro Menezes Santana
Orientador: Katia Lucchesi Cavalca
Co-orientador: Eduardo Paiva Okabe

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dr. Katia Lucchesi Cavalca, Presidente
UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Robson Pederiva
UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti
USP – Universidade de São Paulo

Campinas, 30 de Julho de 2009

Dedicatória:

Dedico este trabalho aos meus pais, Amauri e Maria Aparecida, aos meus irmãos, Vítor e Gustavo, e aos amigos.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

Aos meus pais pelo incentivo em todos os momentos da minha vida.

Aos meus orientadores, que me mostraram os caminhos a serem seguidos.

A todos os professores e colegas do departamento, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

Aos colegas de laboratório que, mesmo não vinculados ao meu projeto, ajudaram-me a resolver minhas dúvidas e me deram suporte moral.

Aos meus amigos de faculdade e de Goiânia, dou graças ao apoio e incentivo.

A Deus.

*“Criatividade consiste no total rearranjo
do que sabemos com o objetivo de
descobrir o que não sabemos”
(George Kneller)*

Resumo

SANTANA, Pedro Menezes, *Resposta Complexa de um Sistema Rotor-Mancais-Fundação*. 2009. 94 p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Um sistema rotativo, quando gira, pode apresentar precessão no mesmo sentido (precessão direta) ou no sentido contrário (precessão retrógrada) ao da rotação. Estes dois modos combinados podem definir o comportamento da vibração do rotor. A formulação direcional é utilizada para representar os modos de precessão, possibilitando a obtenção da resposta dos modos diretos e retrógrados, separados no domínio da frequência. O modo retrógrado, que pode ser resultado da anisotropia do sistema, deve ser evitado, já que provoca variações constantes nas tensões de tração e compressão nas fibras do eixo, o que pode propagar trincas e causar falha por fadiga. Este trabalho tem o objetivo de analisar a influência do grau de anisotropia dos mancais e da estrutura de suporte na resposta do modo retrógrado de precessão. Diversas configurações de sistema rotor-mancais foram modelados e estudados, utilizando coordenadas direcionais, para diferentes graus de anisotropia dos mancais flexíveis. Foram utilizados modelos de eixo rígido e flexível, incluindo um modelo de elementos finitos. Diferentes modelos experimentais de fundação foram incorporados ao sistema rotor-mancais. Os principais modos da fundação foram representados por coordenadas principais, e o sistema resultante é, portanto, representado por coordenadas mistas (físicas para o rotor e principais para a fundação).

Palavras Chave

- Rotores - Dinâmica, Fundações (Engenharia), Método dos elementos finitos, Mancais

Abstract

SANTANA, Pedro Menezes, *Complex Response of a Rotor-Bearings-Foundation System*. 2009. 94 p. Dissertation (Master Degree in Mechanical Engineering): Faculty of Mechanical Engineering, State University of Campinas, Campinas.

A rotating system, as it spins, can perform a whirling at the same direction (forward whirl) or at the opposite direction (backward whirl). These two whirling modes can define the rotor's vibration behavior. The directional formulation is used in modal analysis to represent the whirling modes, so it can be possible to obtain the forward and backward response separately on the frequency domain. The backward mode, that may occur as a result of the system's anisotropy, must be avoided, since it generates constant variations of the traction and compression tensions at the shaft, which can provoke fatigue failure. The objective of this work is to analyze the influence of the anisotropy degree of the bearings and supporting structure on the backward mode of whirl. Different rotor-bearings configuration where modeled and studied, using directional coordinates, for different bearings' coefficients. Rigid and flexible shaft models where used, including a finite elements model. For a better understanding of the system's response, different experimental supporting structure (foundation) models where incorporated to the rotor-bearings system, and the directional response of the rotor-bearings-foundation system was calculated. The main foundation modes were represented by modal coordinates, and the resulting system is, thus, represented by mixed coordinates (physical coordinates for the rotor and modal coordinates for the foundation).

Key Words

Rotordynamics, Foundations, Finite element method, Bearing

Lista de Figuras

Figura 3.1: Rotor Laval.	15
Figura 3.2: Massa desbalanceada.	18
Figura 3.3: Órbita do rotor.	19
Figura 3.4: Rotor rígido apoiado sobre molas ortotrópicas (Kessler, 1988).	26
Figura 3.5: Rotor flexível apoiado em mancais flexíveis.	29
Figura 3.6: Elemento cônico de viga (Genta, 1988).	32
Figura 3.7: Representação de um sistema rotor-mancais-fundação (Cavalca, 1993).	38
Figura 4.1: Fundação rígida (Okabe, 2007).	52
Figura 4.2: Fundação flexível (Okabe, 2007).	52
Figura 4.3: Fundação semi-flexível (Okabe, 2007).	53
Figura 4.4: Rigidez e amortecimento dos mancais hidrodinâmicos. (A) rigidez, (B) amortecimento.	54
Figura 4.5: Eixo do rotor Laval.	55
Figura 5.1: Resposta direcional do rotor rígido. (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.	58
Figura 5.2: Resposta direcional do rotor rígido. (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.	59
Figura 5.3: Resposta direcional do rotor rígido apoiado sobre mancais anisotrópicos (A) do caso 6 e (B) do caso 7 (tabela 4.1).	60

Figura 5.4: Resposta direcional do rotor rígido apoiado sobre mancais anisotrópicos do caso 11	61
Figura 5.5: Resposta em coordenadas cartesianas e direcionais do rotor rígido apoiado sobre molas ortotrópicas. (A), cartesianas, (B) direcionais.	62
Figura 5.6: Resposta direcional do rotor flexível do modelo de Krämer (1993). (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.	63
Figura 5.7: Resposta direcional do rotor flexível do modelo de Krämer apoiado sobre mancais anisotrópicos do caso 11 (tabela 4.1).	65
Figura 5.8: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos apoiado sobre mancais isotrópicos. (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.	66
Figura 5.9: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos, com fundação semi-flexível, apoiado sobre mancais isotrópicos. (A) RF direcional, (B) detalhe da RF direcional.	68
Figura 5.10: Resposta em coordenadas cartesianas do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos apoiado sobre mancais isotrópicos. (A) RF horizontal, (B) RF vertical.	69
Figura 5.11: Resposta direcional do mancal isotrópico do rotor flexível modelado por elementos finitos. (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.	70
Figura 5.12: Resposta direcional do mancal isotrópico do rotor flexível modelado por elementos finitos, com fundação semi-flexível.	71
Figura 5.13: Diagrama de Campbell do rotor flexível modelado por elementos finitos apoiado sobre mancais isotrópicos. (A) rotor sem flexibilidade na fundação, (B) rotor com fundação rígida, (C) rotor com fundação semi-flexível, (D) rotor com fundação flexível.	72

Figura 5.14: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos apoiado sobre mancais anisotrópicos (caso 3). (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.	73
Figura 5.15: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos, com fundação semi-flexível, apoiado sobre mancais anisotrópicos do caso 3.	74
Figura 5.16: Resposta direcional do mancal anisotrópico do rotor flexível modelado por elementos finitos com anisotropia do caso 3. (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.	75
Figura 5.17: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos apoiado sobre mancais hidrodinâmicos. (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.	76
Figura 5.18: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos, com fundação semi-flexível, apoiado sobre mancais hidrodinâmicos.	77
Figura 5.19: Resposta direcional do mancal hidrodinâmico do rotor flexível modelado por elementos finitos. (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.	77
Figura 5.20: Diagrama de Campbell do rotor flexível modelado por elementos finitos apoiado sobre mancais hidrodinâmicos. (A) rotor sem flexibilidade na fundação, (B) rotor com fundação rígida, (C) rotor com fundação semi-flexível, (D) rotor com fundação flexível.	78
Figura 5.21: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos, com fundação semi-flexível, apoiado sobre mancais anisotrópicos do caso 11.	80
Figura 5.22: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos, com fundação semi-flexível, apoiado sobre mancais ortotrópicos.	81

Figura 5.23: Resposta do modo retrógrado do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos com fundação semi-flexível apoiado sobre mancais isotrópicos, comparada com a resposta do rotor sem flexibilidade na fundação com mancais anisotrópicos. 82

Figura A.1: Elemento cônico de viga (Genta, 1988). 89

Lista de Tabelas

Tabela 4.1: Coeficientes cruzados de rigidez dos mancais utilizados nas simulações.	48
Tabela 4.2: Dados dos elementos de viga do rotor.	55

Nomenclatura

Letras Latinas

A – matriz de transformação de coordenadas direcionais para coordenadas cartesianas do rotor.

A_{ff} , A_{fb} , A_{bf} , A_{bb} – termos da inversa da matriz de resposta em frequência direcional do rotor rígido.

C – matriz de amortecimento do rotor.

C_b – matriz de amortecimento dos mancais no modelo de elementos finitos.

C_F – matriz de amortecimento da fundação.

c_F – matriz diagonal de amortecimento da fundação em coordenadas principais.

c_f – matriz diagonal de amortecimento da fundação em coordenadas principais.

c_{yy} , c_{yz} , c_{zy} , c_{zz} – coeficientes de amortecimento dos mancais.

e – número de Euler.

$f(t)$ – vetor de forças de excitação.

F_0 – força de excitação por desbalanceamento do rotor.

F_F – força transmitida pela fundação.

F_{rd} – força de desbalanceamento no rotor em coordenadas direcionais.

f_y – excitação na direção horizontal.

f_z – excitação na direção vertical.

H – Matriz de resposta em frequência.

H_d – Matriz de resposta em frequência direcional.

H_{bb} - FRF retrógrada com componente de excitação retrógrada.

H_{bf} - FRF retrógrada com componente de excitação direta.
 H_{fb} - FRF direta com componente de excitação retrógrada.
 H_{ff} - FRF direta com componente de excitação direta.
 H_{yy} - FRF horizontal com excitação horizontal.
 H_{yz} - FRF horizontal com excitação vertical.
 H_{zy} - FRF vertical com excitação horizontal.
 H_{zz} - FRF vertical com excitação vertical.
 J_P - momento de inércia polar do disco.
 J_T - momento de inércia transversal do disco.
 k - rigidez do eixo.
 K_b - matriz de rigidez dos mancais no modelo de elementos finitos.
 K_F - matriz de rigidez da fundação.
 k_F - matriz diagonal de rigidez da fundação em coordenadas principais.
 K_{rm}, K_{mr}, K_{mm} - matrizes dos coeficientes equivalentes de rigidez do filme de óleo.
 K_{rrd}, K_{rdf} - coeficientes lineares de rigidez do filme de óleo em coordenadas direcionais.
 K_y, K_z - coeficientes de rigidez de molas ortotrópicas.
 $k_{yy}, k_{yz}, k_{zy}, k_{zz}$ - coeficientes de rigidez dos mancais.
 K_{rr} - matriz de rigidez do eixo e do rotor.
 L - comprimento do rotor.
 l - comprimento do elemento de viga.
 M - matriz de massa do rotor.
 m - massa do disco.
 m_{desb} - massa desbalanceada.
 m_F - matriz diagonal de massa da fundação em coordenadas principais.
 M_F - matriz de massa da fundação.
 M_{rd}, R_{rd}, K_{rd} - matrizes de massa, amortecimento e rigidez do eixo em coordenadas direcionais.
 M_{rr} - matriz de massa do eixo e do rotor.
 p - coordenadas principais da fundação.
 \ddot{q}, \dot{q}, q - vetores de aceleração, velocidade e posição em coordenadas cartesianas.

q_F – vetor de coordenadas cartesianas da fundação.
 q_m – vetor de coordenadas cartesianas dos mancais.
 q_r – vetor de coordenadas cartesianas do rotor.
 r – raio complexo da órbita do rotor (Lee, 1993).
 r_b – amplitude do modo retrógrado de precessão do rotor.
 $r_b(\Omega)$ – resposta em frequência do modo retrógrado de precessão do rotor.
 \bar{r}_b - complexo conjugado da resposta do modo retrógrado.
 r_d – vetor de coordenadas direcionais. I – matriz identidade.
 r_{disco} – raio complexo da órbita do disco (Lee, 1993).
 $Re(y(t))$ – parte real da resposta no tempo do rotor na direção horizontal.
 $Re(z(t))$ – parte real da resposta no tempo do rotor na direção vertical.
 r_f – amplitude do modo direto de precessão do rotor.
 $r_f(\Omega)$ - resposta em frequência do modo direto de precessão do rotor.
 R_F – matriz de amortecimento da fundação.
 r_i – raio interno do elemento cônico de viga (Genta, 1988).
 r_{mancal} – raio complexo da órbita do mancal (Lee, 1993).
 R_{mr}, R_{mm} – coeficientes lineares de amortecimento do filme de óleo em coordenadas físicas.
 R_{rm}, R_{mr}, R_{mm} – matrizes dos coeficientes equivalentes de amortecimento do filme de óleo.
 r_o – raio externo do elemento cônico de viga (Genta, 1988).
 R_{rrd}, R_{rdf} – coeficientes lineares de amortecimento do filme de óleo em coordenadas direcionais.
 R_{rr} – matriz de amortecimento do eixo e do rotor.
 t – tempo.
 T_A – matriz de transformação de um par de graus de liberdade de coordenadas direcionais para coordenadas cartesianas do rotor.
 x – posição axial de um ponto do rotor.
 $Y(\Omega)$ – resposta em frequência horizontal do rotor.
 \ddot{y}, \dot{y}, y - aceleração, velocidade e posição na direção horizontal do rotor.
 $\ddot{y}_{disco}, \dot{y}_{disco}, y_{disco}$ - aceleração, velocidade e posição na direção horizontal do disco.

$Y_{\text{disco}}(\Omega)$ – resposta em frequência horizontal do disco.

$\ddot{y}_{\text{mancal}}, \dot{y}_{\text{mancal}}, y_{\text{mancal}}$ - aceleração, velocidade e posição na direção horizontal do disco.

$Y_{\text{mancal}}(\Omega)$ – resposta em frequência horizontal do mancal.

\ddot{z}, \dot{z}, z - aceleração, velocidade e posição na direção vertical de um ponto do rotor.

$Z(\Omega)$ – resposta em frequência vertical do rotor.

$\ddot{z}_{\text{disco}}, \dot{z}_{\text{disco}}, z_{\text{disco}}$ - aceleração, velocidade e posição na direção vertical do disco.

$Z_{\text{disco}}(\Omega)$ – resposta em frequência vertical do disco.

$\ddot{z}_{\text{mancal}}, \dot{z}_{\text{mancal}}, z_{\text{mancal}}$ - aceleração, velocidade e posição na direção vertical do mancal.

$Z_{\text{mancal}}(\Omega)$ – resposta em frequência vertical do mancal.

Letras Gregas

ε – excentricidade do desbalanceamento do rotor.

Φ_y, Φ_z – deslocamento angular de um nó do rotor.

ϕ – matriz modal (auto-vetores).

λ – auto-valores.

Ω - rotação do rotor.

ω – precessão do rotor.

ω_{ny} – frequência natural do rotor na direção horizontal.

ω_{nz} – frequência natural do rotor na direção vertical.

Subscritos

b – retrógrado.

d – direcional.

e – espaço de estado.

F – fundação.

f – direto.

re – parte real de um número complexo.

im – parte imaginária de um número complexo.

Siglas

FRF – função resposta em frequência.

MRF – matriz de resposta em frequência.

MRFd – matriz de resposta em frequência direcional.

RF – resposta em frequência.

Sumário

1. Introdução	1
2. Revisão Bibliográfica	4
2.1 Adaptações de análise modal para sistemas rotativos	4
2.2 Análise modal complexa: separação dos modos de precessão no domínio da frequência	7
2.3 Métodos de excitação e estimação da resposta em frequência e de parâmetros modais	9
2.4 Fundação e método das coordenadas mistas	12
2.5 Diagrama de Campbell	13
3. Modelagem e Equacionamento	15
3.1 Modos de precessão e formulação complexa	18
3.2 Modelos de rotor	23
3.2.1 Rotor rígido	23
3.2.2 Rotor flexível – modelo de Krämer (1993)	27
3.2.3 Rotor flexível modelado por elementos finitos	32
3.2.4 Sistema rotor-mancais-fundação	37
3.3 Diagrama de Campbell	44
4. Procedimentos das simulações	46
4.1 Rotor rígido	47
4.2 Rotor flexível – modelo de Krämer (1993)	49
4.3 Sistema rotor-mancais-fundação modelado por elementos finitos	51
5. Resultados e Discussões	57

5.1 Rotor rígido	57
5.2 Rotor flexível – modelo de Krämer (1993)	63
5.3 Sistema rotor-mancais-fundação modelado por elementos finitos	65
6. Conclusões	83
Referências Bibliográficas	85
Apêndice	89
A) Matrizes do elemento cônico de viga (Genta, 1988)	89

Capítulo 1

Introdução

A análise modal clássica aplicada à dinâmica dos rotores, em alguns casos, não é suficiente para identificar com clareza os modos de vibrar presentes neste tipo de máquina, pois não lida corretamente com certas características do sistema, como a assimetria inerente das matrizes de rigidez e amortecimento, geradas pelo efeito giroscópico e anisotropia de mancais e estrutura de fundação.

Devido a tantas dificuldades de se aplicar análise modal a sistemas rotativos, necessitava-se de adaptações dos métodos clássicos de análise modal para máquinas rotativas. Nordmann (1982) desenvolveu um método de combinação experimental e analítica para identificar os parâmetros modais (autovalores e modos naturais) para estudar o comportamento dinâmico de máquinas rotativas e como a mudança destes parâmetros influencia na dinâmica do sistema rotativo.

Com o tempo foi se aprofundando cada vez mais o estudo do comportamento dos rotores, considerando efeitos ainda pouco abordados, tais como os efeitos da inércia de rotação e anisotropia dos mancais, para se formular as equações de movimento. A importância de se considerar esses efeitos se dá pelo fato de esses serem os principais causadores da instabilidade da dinâmica do rotor. Estes citados resultam também no giro assíncrono e no aparecimento do modo retrógrado de precessão do rotor. Desta forma, as tensões de tração e compressão nas fibras do eixo podem variar freqüentemente no tempo, podendo causar falha por fadiga.

Portanto, falhas inesperadas devido à fadiga podem ocorrer em rotores, causadas pelo aparecimento do modo retrógrado do rotor. Os modos de precessão das máquinas rotativas devem ser obtidos e estudados para se evitar esses problemas.

Lee (1991) desenvolveu a análise modal complexa para máquinas rotativas e comparou com a análise modal clássica. Com a utilização da notação complexa, foi possível não somente distinguir com facilidade os modos direto e retrógrado, mas também separá-los no domínio da frequência, facilitando a identificação dos parâmetros modais, e possibilitando a análise do grau de anisotropia do sistema. Além disso, o esforço para se identificar os parâmetros modais adjuntos é menor em algumas condições, fazendo-se necessário de apenas uma coluna ou uma linha da matriz de resposta em frequência, no caso de sistemas dinâmicos com todas as matrizes auto-adjuntas ou hermitianas (matrizes que se igualam ao conjugado da transposta das mesmas). Este fato representa um grande avanço, quando comparado com a análise modal clássica, onde o esforço para identificação dos parâmetros é muito grande, devido ao acoplamento das funções de resposta em frequência, principalmente no caso de sistemas dinâmicos que apresentam matrizes não-hermitianas, o caso mais representativo da realidade.

Para uma melhor análise de uma máquina rotativa, é importante também considerar os efeitos da estrutura de sustentação do rotor (fundação). Muitas vezes, esses efeitos são negligenciados na modelagem do sistema, o que pode prejudicar a obtenção dos parâmetros modais do rotor durante os procedimentos de análise modal. A fundação pode apresentar rigidez elevada, e, por essa razão, muitas vezes é considerada como infinita.

A fundação é toda a estrutura que sustenta o rotor, e os mancais são os pontos de suporte. Em outras palavras, o rotor se conecta com a fundação através dos mancais. Através destas conexões, as forças causadas pelo movimento do rotor desbalanceado são transmitidas à fundação, que reage nos mancais, interferindo na resposta do rotor. Essa reação da fundação depende de seu amortecimento e rigidez.

É apresentado neste trabalho um levantamento bibliográfico envolvendo diversos temas relacionados à dinâmica de rotores e análise modal complexa, revelando parte do que já foi pesquisado e as contribuições científicas fornecidas à área. São mostradas adaptações realizadas na análise modal clássica para sistemas rotativos. Posteriormente, é feita uma introdução à análise modal complexa. Pesquisas foram realizadas também na parte experimental, envolvendo métodos de excitação e estimação de parâmetros modais a partir de medições.

Neste trabalho, ainda, a formulação complexa foi aplicada para o cálculo da resposta síncrona ao desbalanceamento de um sistema rotativo. Estes conceitos foram utilizados para desenvolver um programa para calcular a resposta em frequência de um sistema rotor-mancais-fundação, para diversas configurações, sob excitações por desbalanceamento da massa. Modelos de rotor rígido e flexível apoiado sobre mancais flexíveis foram simulados e estudados. Para um melhor entendimento da resposta do rotor e do modo retrógrado de precessão, diferentes modelos experimentais de fundação foram incorporados ao sistema rotor-mancais, modelado por elementos finitos, e a resposta direcional do sistema rotor-mancais-fundação foi calculada e comparada com a resposta direcional de um sistema equivalente rotor-mancais. Os principais modos da fundação foram representados por coordenadas principais, e o sistema resultante é, portanto, representado por coordenadas mistas (físicas para o rotor e principais para a fundação). São também apresentadas comparações entre a formulação complexa e formulação clássica. Diagramas de Campbell foram utilizados para se analisar os autovalores de cada sistema estudado. A influência dos diversos componentes na resposta direcional do rotor, através de simulações numéricas, também foi estudada. Com as simulações, foi possível analisar a influência do grau de anisotropia, tanto dos mancais quanto da estrutura de suporte, no aparecimento do modo retrógrado de precessão do rotor.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

É apresentado neste capítulo um levantamento bibliográfico envolvendo diversos temas relacionados à dinâmica de rotores e análise modal complexa, revelando parte do que já foi pesquisado e das contribuições científicas fornecidas à área. São mostradas adaptações realizadas na análise modal clássica para sistemas rotativos. Posteriormente, é feita uma introdução à análise modal complexa. Pesquisas foram realizadas também na parte experimental, envolvendo métodos de excitação e estimação de parâmetros modais a partir de medições.

2.1 Adaptações de análise modal para sistemas rotativos

Devido às dificuldades inerentes à aplicação da análise modal a sistemas rotativos, são necessárias adaptações dos métodos de análise modal clássicos para máquinas rotativas. Nordmann (1982) desenvolveu um método que combina técnicas experimental e analítica de identificação dos parâmetros modais (autovalores e modos naturais) para estudar o comportamento dinâmico de máquinas rotativas, e como a mudança destes parâmetros influencia a dinâmica do sistema rotativo.

O método utilizado consiste em três partes: montagem de um modelo mecânico e matemático, obtenção das funções de resposta em frequência e determinação dos parâmetros

modais através da aproximação de uma curva analítica, utilizando os dados medidos experimentalmente.

Para realizar a aquisição de dados, Nordmann excitou um rotor com um martelo e determinou os deslocamentos e as forças com sensores. A resposta em frequência foi calculada a partir desses sinais. Os parâmetros modais foram determinados por ajuste da curva da resposta em frequência. A FRF determinada experimentalmente foi comparada com a analítica.

Os trabalhos de Nordmann representaram uma inovação na visão da dinâmica de rotores. Com o tempo, a partir de então, foi se aprofundando o estudo do comportamento dos rotores, considerando efeitos ainda pouco abordados, tais como os efeitos da inércia de rotação e anisotropia dos mancais, para se formular as equações de movimento. A importância de se considerar esses efeitos se dá pelo fato de estes serem os principais causadores da instabilidade na dinâmica do rotor. Estes efeitos citados resultam também no giro assíncrono e no aparecimento do modo retrógrado de precessão do rotor. Desta forma, as tensões de tração e compressão nas fibras do eixo podem variar freqüentemente no tempo, podendo causar falha por fadiga.

Para entender e estudar esses efeitos, em 1987, Lee et al. desenvolveram um método de análise modal para rotores com mancais isotrópicos, modelo de Rayleigh, para determinar as frequências naturais, os modos operacionais e a identificação dos modos diretos e retrógrados. O método consiste em obter a resposta forçada a partir da formulação de equações modais de movimento, representando uma série de infinitas equações diferenciais ordinárias complexas de primeira ordem independentes.

Neste trabalho (Lee et al., 1987) o deslocamento do rotor é representado em notação complexa (direcional). Assim, foi possível identificar os modos operacionais diretos e retrógrados, cada um com o respectivo problema de valor próprio. A análise foi realizada para o caso do rotor bi-apoiado e do rotor fixo em uma das extremidades. Para o primeiro caso, foi mostrado que ambos os modos são idênticos, apontando a influência da isotropia dos mancais nos modos de vibrar.

O método de Galerkin, um método de solução aproximada, também foi apresentado para depois ser comparado com a análise modal. Os dois métodos foram utilizados para analisar a resposta de um rotor Rayleigh com carga axial. Nas simulações, foram determinadas as frequências naturais dos modos diretos e retrógrados e os modos operacionais de cada modo. Foi mostrado que ambos os métodos apresentaram resultados corretos, e que o método de Galerkin foi mais fácil de implementar, além de ter fornecido uma boa aproximação.

Lee (1988) estende a aplicação deste mesmo método de análise modal (Lee et al. 1987) para rotores com diversas condições de contorno, sendo estas de natureza isotrópica ou anisotrópica. Investigaram os efeitos da assimetria na dinâmica do sistema para variadas condições de contorno nas extremidades do eixo, introduzindo equações que representam as condições de contorno do rotor. As condições de contorno isotrópicas estudadas para rotores foram eixo apoiado em uma extremidade e livre em outra (cantilever) e eixo apoiado em um suporte de molas isotrópico nas extremidades. Para sistema com anisotropia nos mancais, foram analisados um rotor com condições dissimilares de fixação nas extremidades em dois planos perpendiculares e um rotor suportado nas extremidades por molas ortotrópicas (molas que apresentam coeficientes de rigidez cruzados nulos e coeficientes de rigidez diretos distintos).

É mostrado que as velocidades de precessão e os modos operacionais diretos e retrógrados variam com a velocidade de rotação do rotor. O estudo do caso do rotor *cantilever* anisotrópico em suportes isotrópicos mostrou que a frequência natural do modo direto aumenta, enquanto que a do modo retrógrado diminui, à medida que a velocidade de rotação do rotor aumenta.

A análise do rotor suportado por molas ortotrópicas e mancais anisotrópicos mostrou que a inclinação das molas afeta o comportamento da resposta do rotor. As velocidades de precessão variam significativamente com a variação do ângulo de posição das molas. Quando não há inclinação, os modos passam a ser reais e planares.

Lee (1992) realizou este mesmo método de análise modal, mas desta vez para um sistema rotor-mancais assimétrico, também do tipo Rayleigh, com discos rígidos e assimétricos e mancais

isotrópicos, e desenvolveram um método de solução para a análise de vibração do rotor. Foram estudados, neste trabalho, as velocidades de precessão e os modos operacionais do rotor assimétrico, bem como os efeitos que as condições de contorno e a assimetria do rotor têm sobre as propriedades modais e a estabilidade. Foram mostrados, também, os efeitos do peso do rotor e da posição angular do desbalanceamento sobre a resposta forçada do rotor.

2.2. Análise modal complexa: separação dos modos de precessão no domínio da frequência

Até então, tinham sido desenvolvidas análises modais capazes de identificar os modos diretos e retrógrados, bem como os modos operacionais, como mostrado em Lee et al. (1987) e em Lee (1988). Baseando-se nos resultados analíticos como os desses trabalhos, Lee (1991) desenvolveu a análise modal complexa para máquinas rotativas e comparou com a análise modal clássica. Com a utilização da notação complexa, ou das coordenadas direcionais, foi possível não somente distinguir com facilidade os modos diretos e retrógrados, mas também separá-los no domínio da frequência, facilitando a identificação dos parâmetros modais, e possibilitando a análise do grau de anisotropia do sistema. É um grande avanço quando comparado com a análise modal clássica, onde o esforço para identificação dos parâmetros é muito grande devido ao acoplamento das funções de resposta em frequência, principalmente no caso de sistemas dinâmicos que apresentam matrizes não-hermitianas de dimensões elevadas, o caso mais representativo da realidade. Para se resolver os problemas de valores próprios de sistemas com matrizes de dimensões elevadas, são utilizados métodos matemáticos, como, por exemplo, a decomposição triangular, para facilitar o cálculo do determinante, entre outros. Quando estas matrizes são hermitianas, o esforço computacional exigido para realizar tais métodos é reduzido, pois o fato de existirem termos repetidos na matriz facilita os cálculos. Vale também ressaltar o fato de que, quando as matrizes são não-hermitianas, podem aparecer termos imaginários nos auto-valores, o que não acontece nas matrizes hermitianas.

Para demonstrar a diferença entre a análise modal clássica e a complexa, Lee realiza simulações de um rotor rígido suportado por mancais isotrópicos, como primeiro exemplo, e mancais anisotrópicos, como segundo exemplo.

Nas simulações, o autor apresenta os resultados através dos diagramas de Nyquist e *Co-quad*. Os resultados da análise modal clássica mostram a sobreposição dos modos direto e retrógrado. Os primeiros modos direto e retrógrado são iguais, pois são associados com o movimento de translação simples do rotor. Os segundos modos são diferentes, porém não podem ser distinguidos pelos gráficos apresentados pelo autor. Já os gráficos obtidos pela análise modal complexa mostraram que o método permite a clara separação dos segundos modos direto e retrógrado.

No segundo exemplo, a análise modal clássica novamente mostra a sobreposição entre os modos, e não se sabe se a causa da separação dos modos é devido à anisotropia do sistema ou devido ao efeito giroscópico.

Já a análise modal complexa mostra, mais uma vez, a clara separação entre os modos diretos e retrógrados. É possível também observar o grau de anisotropia indicado nas pequenas distorções dos gráficos de Nyquist. Neste exemplo, as distorções são pequenas, portanto o grau de anisotropia é pequeno.

Com o conhecimento de como separar totalmente os modos diretos e retrógrados no domínio da frequência, Kessler (1998) usou variáveis complexas para representar vetores girantes que descrevem modos naturais e respostas forçadas em máquinas rotativas. Desta forma, foi mostrado que os vetores girantes direto e o retrógrado combinados podem representar o movimento do rotor e as forças planares, permitindo associar uma direção a uma função de resposta em frequência (função de resposta em frequência direcional) e separar os modos diretos e retrógrados no domínio da frequência.

Kessler simulou a resposta de um sistema rotativo simples, composto por um rotor rígido e simétrico apoiado em mancais flexíveis. Para apresentar os resultados, os autores utilizaram

diagramas de termos da matriz de resposta em frequência (MRF) pelo método clássico em função da frequência, comparando-os com o diagrama de termos da matriz de resposta em frequência direcional (MRFd).

Os resultados mostraram que o modelo apresenta dois picos de frequência. O diagrama dos termos da MRFd separa claramente os modos, mostrando que o movimento direto do rotor é responsável pelo segundo modo e o movimento retrógrado é responsável pelo primeiro.

2.3. Métodos de excitação e estimação da resposta em frequência e de parâmetros modais

Uma das dificuldades da análise modal de máquinas rotativas é a aplicação de excitação externa. A dificuldade se dá porque, em geral, o equipamento atuador, que está estacionário, aplica força em um eixo que está girando. Para um caso de um atuador harmônico, a transmissão de força para o eixo girante é intermediada por um rolamento ou uma bucha, que são necessários para conectar o atuador estacionário com o sistema em rotação. A presença do rolamento pode interferir na dinâmica do sistema rotativo. Além disso, parte da energia é dissipada neste componente. O amortecimento e rigidez estruturais do rolamento geralmente não são considerados. No caso de utilização de um martelo para excitar o sistema, ocorre força de atrito que dissipa energia. Assim, as medições e resultados são prejudicados.

Outra dificuldade da análise modal aplicada a sistemas rotativos é o fato de o sistema apresentar desbalanceamento de massa e desalinhamento. Sabe-se que a presença de componentes rotativos na dinâmica das máquinas rotativas gera forças e resulta em matrizes assimétricas da equação de movimento do rotor, e, conseqüentemente, em problemas de valor próprio não-auto-adjunto, ou seja, problema de valor próprio onde a matriz do sistema é não-hermitiana. Essas forças geradas influenciam na resposta, mas muitas vezes são negligenciadas. Na prática, isso dificulta a realização de medidas e aplicação de excitação externa.

Um fator que diferencia a análise modal complexa da clássica é o uso das FRFs para relacionar as entradas e saídas complexas. Por isso, os métodos de excitação para a análise modal

complexa, bem como as formas de medição e estimativas das FRFs, devem ser diferentes para uma melhor obtenção dos parâmetros modais. Joh (1993) propõe métodos de excitação e identificação de parâmetros modais para análise modal complexa, para o acesso direto ou indireto às FRFs de dois lados (frequências positivas e negativas) e funções de coerência entre os sinais de entrada e as saídas complexas. Os métodos de excitação apresentados foram: unidirecional, bidirecional rotativa e bidirecional estacionária.

O método de excitação unidirecional consiste em excitar unidirecionalmente o rotor, aplicando um ruído branco.

A excitação bidirecional rotativa consiste em excitar o modo direto ou retrógrado através de dois atuadores unidirecionais agindo em sincronia. Simultaneamente é medido o par de forças e deslocamentos complexos num determinado ponto, possibilitando a obtenção das FRFs associadas às entradas e saídas complexas.

Na excitação bidirecional estacionária, ocorre excitação simultânea de dois atuadores perpendiculares agindo de forma independente. As FRFs associadas aos sinais de entrada e saída complexos podem ser obtidas, desde que as excitações horizontal e vertical não estejam completamente correlacionadas. Ou seja, a excitação bidirecional estacionária se assemelha a um clássico método de excitação com duas entradas e uma saída. Geralmente, a excitação é um impulso ou um sinal aleatório.

Joh (1993) realiza experimentos de teste modal complexo em um sistema rotor-mancais flexível. Através de um atuador eletromagnético desenvolvido em laboratório, foram testados diversos métodos de excitação, a fim de determinar as vantagens, desvantagens e requerimentos para utilização de cada um. O atuador eletromagnético foi escolhido por permitir excitações bidirecionais com boa precisão. Neste trabalho, também é desenvolvida uma teoria de teste modal complexo para rotores anisotrópicos, baseado no método de ajuste de curvas da função de resposta em frequência para identificação de parâmetros modais complexos. Com isso, pode-se determinar o primeiro e o segundo modos de flexão do rotor. O método é baseado na técnica de

ajuste de parâmetros de funções de resposta em frequência com coeficientes reais desenvolvida por Brown et al. (1979) e Kim (1987), adaptando-a para o caso de funções de resposta em frequência com coeficientes complexos.

A partir disso, e do método dos mínimos quadrados apresentado no referente trabalho, três procedimentos iterativos de ajuste de parâmetros são apresentados. O primeiro é utilizado para identificação de apenas um modo de flexão do rotor, em uma determinada faixa de frequência a ser definida. O segundo é para identificar um número de modos a ser escolhido, dentro da faixa de frequência escolhida. O terceiro é utilizado para identificar apenas um modo, sob influência do efeito de outros modos.

Em laboratório, dois atuadores eletromagnéticos foram utilizados para excitar o rotor na direção vertical e horizontal. Um par de sensores de proximidade mediu os deslocamentos nestas direções, e os sinais de excitação foram medidos por um dinamômetro. Os dados foram utilizados para identificar as FRFs. Os métodos de excitação utilizados no experimento foram a unidirecional, a bidirecional rotativa e a bidirecional estacionária. Os experimentos mostraram que a excitação bidirecional estacionária permite estimações mais precisas, tanto para rotores anisotrópicos quanto para os isotrópicos.

Dando seqüência no aprofundamento do estudo do comportamento dinâmico dos rotores, Lee (1997) desenvolveu uma teoria de teste modal complexo para sistemas de rotor-mancais assimétricos, utilizando o método de excitação unidirecional apresentado por Joh (1993). As equações de movimento foram escritas somente para sistema de coordenadas estacionário. Foi mostrado que esta técnica permite estimar satisfatoriamente as funções de resposta em frequência direcionais direto e retrógrado, além de proporcionar menor esforço do que o teste com excitação bidirecional.

Peeters et al. (2001) utilizou a análise modal complexa, bem como a convencional, para identificação de parâmetros de sistemas rotor-mancais no domínio da frequência. O trabalho foi realizado em duas partes. A primeira consistiu na estimação da função de resposta em frequência

de um sistema de múltiplas entradas/múltiplas saídas (multiple inputs/multiple outputs – MIMO), baseado no estimador de probabilidade máxima. A segunda parte consistiu em estimar os parâmetros modais, também com base no estimador de probabilidade máxima.

Os experimentos foram realizados numa bancada com um *Rotor Kit RK4* de Bentley Nevada. Foram utilizados dois atuadores para a excitação: um na vertical e outro na horizontal. Os deslocamentos resultantes foram medidos por sensores de proximidade. Mostrou-se que excitações harmônicas multi-senos com fases aleatórias resultam em melhores medições das FRFs do que excitações aleatórias. O principal motivo é o fato destas permitirem total controle das propriedades de seus espectros. Foi concluído que ambos os métodos de análise modal resultam numa excelente estimativa da FRF, com erros pequenos, devido à utilização do modelo “erro-em-variáveis”. A utilização do estimador de probabilidade máxima permitiu a quantificação da qualidade das medidas realizadas pelos métodos.

2.4. Fundação e método das coordenadas mistas

Cavalca et al. (2006) apresentou uma metodologia para analisar a influência da fundação no sistema rotor-mancais e comparar a resposta do sistema rotor-mancais com o sistema rotor-mancais-fundação. É utilizado um modelo de elementos finitos do rotor e um modelo experimental da fundação.

A fundação, quando incorporada ao sistema rotor-mancais, aumenta a complexidade do modelo, resultando em um sistema com maior número de graus de liberdade. A aproximação modal é aplicada para reduzir o número de graus de liberdade do modelo da fundação, considerando apenas os modos mais significativos na faixa de frequência operacional do rotor. Os parâmetros modais da fundação são obtidos através de análise modal.

Os graus de liberdade relacionados aos modos mais significativos da fundação são transformados para coordenadas principais, permitindo, assim, representar diretamente esses modos. Portanto, o sistema final é modelado com uma equação de movimento com coordenadas

mistas (Cavalca, 1993): coordenadas físicas para o rotor e coordenadas principais para a fundação.

As coordenadas principais permitem a diagonalização das matrizes de massa, amortecimento e rigidez da fundação. O método das coordenadas mistas tem também como vantagem dispensar a necessidade de inversão da matriz de flexibilidade da fundação para obtenção da matriz de impedância mecânica. Esses fatores facilitam os cálculos da resposta do sistema completo.

Os autores ainda dividem o modelo do sistema rotor-mancais-fundação em dois sub-sistemas (rotor-mancais e fundação), sendo cada um deles analisado separadamente. A resposta do sistema completo é obtida juntando-se as respostas dos dois sub-sistemas.

Okabe (2007), em seu trabalho, investigou os efeitos da fundação e dos mancais hidrodinâmicos no comportamento dinâmico de uma máquina rotativa. Análises experimentais foram feitas na fundação e seus parâmetros modais foram obtidos através da análise modal das funções resposta em frequência. Utilizando o método das coordenadas mistas (Cavalca, 1993), a fundação foi incorporada ao sistema rotor-mancais. Análise modal complexa foi realizada no sistema rotor-mancais-fundação e a influência dos efeitos da fundação na resposta do rotor foram analisados.

2.5. Diagrama de Campbell

Em 1924, Wilfred Campbell utilizou diagramas de frequência de vibração por rotação pela primeira vez para avaliar a vibração axial de volantes de disco de turbinas a gás em função da rotação. O objetivo foi contribuir para estudos das várias formas de vibração axial e propagação de ondas nos discos, pela General Electric Company. Estudos foram realizados para investigar as constantes falhas por fadiga observadas nos equipamentos da empresa.

A função do diagrama de frequência-rotação, que mais tarde passou a ser conhecido como diagrama de Campbell, é determinar as frequências naturais de vibração do sistema,

determinando-se, nas curvas, quais frequências coincidiam com a frequência de rotação. Campbell (1924) utiliza o diagrama de Campbell para registrar as frequências de onda de corrente elétrica de bobinas que detectavam, por variação do fluxo de campo magnético, a aproximação e o afastamento do volante do disco, devido às vibrações axiais. Com a frequência da corrente elétrica das bobinas, podia-se obter a frequência de vibração axial do disco. Bobinas estacionárias eram capazes de diferenciar duas formas de vibração axial do disco caracterizadas pela forma de propagação: a direta, onde a vibração se propaga no mesmo sentido de rotação da turbina, e a retrógrada, onde a propagação ocorre em sentido oposto.

Desde então, o diagrama de Campbell tem grande importância na dinâmica de rotores. Ele pode ser obtido analiticamente calculando-se os autovalores do sistema em função da rotação. É amplamente utilizado em projetos de máquinas rotativas para prever prováveis regiões de ressonância.

Capítulo 3

Modelagem e Equacionamento do Sistema Rotativo

Neste capítulo, será apresentado o equacionamento utilizado nas simulações numéricas de um rotor Laval suportado por mancais flexíveis. A figura a seguir representa um rotor Laval, que consiste num rotor de eixo flexível de seção transversal cilíndrica, apoiado por mancais flexíveis em ambas as extremidades, e com um disco rígido posicionado na distância média entre os mancais.

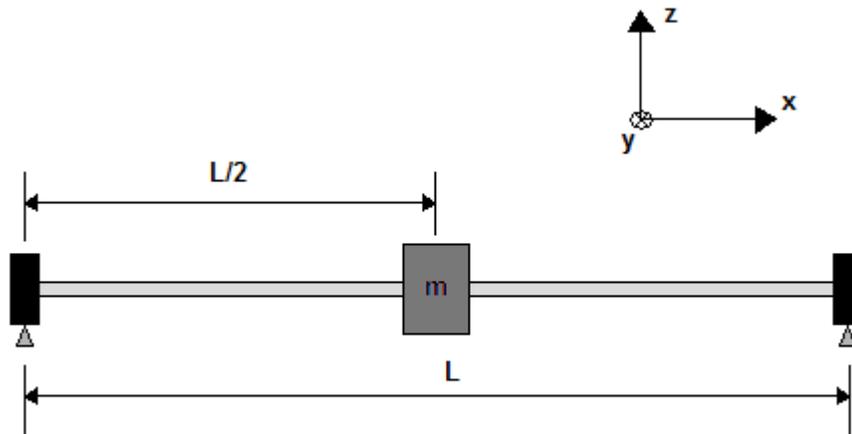


Figura 3.1: Rotor Laval.

O referencial mostrado na figura 3.1 foi adotado neste trabalho. O eixo do rotor está na direção x . A direção z é vertical e y é horizontal.

A equação diferencial de movimento de um sistema rotativo, como o da figura 3.1, é:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.1)$$

Onde q é o vetor deslocamento, f é o vetor das forças de excitação externas, $[M]$ é a matriz de massa, $[C]$ é a matriz de amortecimento e $[K]$ é a matriz de rigidez. Para cada par de graus de liberdade (y e z), tem-se que:

$$\{q(t)\} = \begin{Bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} \quad \{f(t)\} = \begin{Bmatrix} f_y(t) \\ f_z(t) \end{Bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{yy} & m_{yz} \\ m_{zy} & m_{zz} \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

A matriz de massa $[M]$ é simétrica e positiva definida. As matrizes de amortecimento $[C]$ e de rigidez $[K]$ são matrizes que, eventualmente, podem ser não-simétricas.

A equação 3.1 pode ser transformada para o domínio da frequência ao se fazer $y(t) = Ye^{j\Omega t}$ e $z(t) = Ze^{j\Omega t}$ e substituir na equação 3.1, resultando em:

$$Q(\Omega) = H(\Omega)F(\Omega) \quad (3.3)$$

Onde

$$Q(\Omega) = \begin{Bmatrix} Y(\Omega) \\ Z(\Omega) \end{Bmatrix}$$

$$H = [-\Omega^2 M + j\Omega C + K]^{-1}$$

$$F = \begin{Bmatrix} F_y(\Omega) \\ F_z(\Omega) \end{Bmatrix}$$

sendo que Q é a resposta em frequência, F é a excitação no domínio da frequência e H é a matriz de resposta em frequência.

Para cada par de graus de liberdade de um sistema de n graus de liberdade, existe uma submatriz de resposta em frequência 2×2 . Desta forma, para um sistema com apenas dois graus de liberdade (y e z), a matriz de resposta em frequência é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} H_{yy} & H_{yz} \\ H_{zy} & H_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

H_{yy} é a FRF horizontal com excitação horizontal;

H_{zz} é a FRF vertical com excitação vertical;

H_{yz} é a FRF horizontal com excitação vertical;

H_{zy} é a FRF vertical com excitação horizontal;

O modelo de rotor utilizado neste trabalho apresenta desbalanceamento da massa do disco. Quando o rotor gira, devido ao fato de o centro de massa não coincidir com o centro geométrico do disco, forças radiais são geradas no rotor. Em outras palavras, a presença do desbalanceamento da massa, como vetor girante, resulta em uma excitação harmônica.

A figura a seguir representa a dinâmica da massa desbalanceada

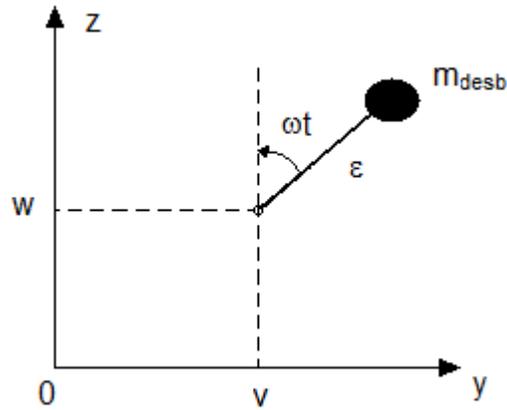


Figura 3.2: Massa desbalanceada.

A massa desbalanceada m_{desb} gira com uma frequência ω , a uma distância ϵ do centro do disco. A força gerada por essa massa girando pode ser obtida aplicando-se a equação de Lagrange na equação de energia cinética da massa desbalanceada, conforme Lalanne (1990):

$$f(t) = m_{desb} \epsilon \omega^2 e^{j\omega t} = m_{desb} \epsilon \omega^2 \begin{Bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Quando a precessão do rotor é sincronizada com a rotação, tem-se que $\Omega = \omega$.

3.1 Modos de precessão e formulação complexa

Ao girar, o rotor pode apresentar dois comportamentos de precessão. A precessão direta ocorre no mesmo sentido da rotação do rotor. A precessão retrógrada ocorre no sentido oposto.

Os modos direto e retrógrado de precessão se associam não somente à órbita do rotor como também ao sentido desta. A figura a seguir esquematiza a órbita descrita por um ponto no rotor.

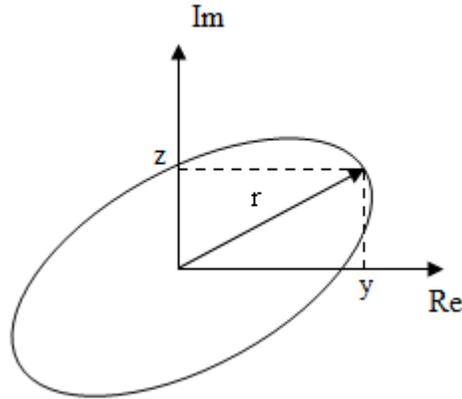


Figura 3.3: Órbita do rotor.

A posição do centro de massa do rotor, em sua órbita, é determinada por y (posição horizontal) e z (posição vertical). Uma forma de se representar a posição r é através da formulação no plano complexo:

$$r = y + jz \tag{3.6}$$

O termo r é denominado por Lee (1993) como o raio complexo de precessão.

A órbita pode ser representada por uma combinação de giros de raios diferentes em sentidos contrários (Lee, 1991).

$$r = y + jz = r_f e^{j\alpha} + r_b e^{-j\alpha} \tag{3.7}$$

r_f é o módulo do modo direto (em inglês, forward), ou o raio da órbita do modo direto;

$e^{j\alpha}$ é a representação do giro direto;

r_b é o módulo do modo retrógrado (em inglês, backward), ou o raio da órbita do modo retrógrado;

$e^{-j\omega t}$ é a representação do modo retrógrado.

Sabendo-se que

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (3.8)$$

e

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t \quad (3.9)$$

então, da equação 3.7,

$$\begin{aligned} y &= (r_f + r_b) \cos \omega t \\ z &= (r_f - r_b) \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se r_f é nulo e r_b não, tem-se que $y = (r_b) \cos \omega t$ e $z = (-r_b) \sin \omega t$. Neste caso, a órbita é puramente retrógrada e circular de raio r_b . Em caso contrário, tem-se que $y = (r_f) \cos \omega t$ e $z = (r_f) \sin \omega t$, ou seja, a órbita é puramente direta e circular de raio r_f . Quando $|r_f| > |r_b| \neq 0$, a precessão resultante é direta e a órbita é elíptica. Por fim, se $|r_f| < |r_b| \neq 0$, a precessão resultante é retrógrada e a órbita é também elíptica.

Lee (1991) utiliza a equação 3.6, que representa o giro no plano complexo, na equação de movimento do rotor, para obter as respostas do modo direto (r_f) e retrógrado (r_b). Dado o sistema de equações de movimento, como o da equação 3.1, para cada par de equações do sistema, multiplica-se a segunda equação (referente ao grau de liberdade z) pela unidade imaginária j e soma-se com a primeira equação (referente ao grau de liberdade y). Posteriormente, são realizadas substituições utilizando o raio complexo $r = y + jz$, como mostrado na equação 3.6:

Utilizando essa notação na equação de movimento 3.1, obtém-se:

$$[M_f]\{\ddot{r}(t)\} + [M_b]\{\ddot{\bar{r}}(t)\} + [C_f]\{\dot{r}(t)\} + [C_b]\{\dot{\bar{r}}(t)\} + [K_f]\{r(t)\} + [K_b]\{\bar{r}(t)\} = \{g(t)\} \quad (3.11)$$

Onde:

$$2[M_f] = ([M_{yy}] + [M_{zz}]) - j([M_{yz}] - [M_{zy}])$$

$$2[M_b] = ([M_{yy}] - [M_{zz}]) + j([M_{yz}] + [M_{zy}])$$

$$2[C_f] = ([C_{yy}] + [C_{zz}]) - j([C_{yz}] - [C_{zy}])$$

$$2[C_b] = ([C_{yy}] - [C_{zz}]) + j([C_{yz}] + [C_{zy}])$$

$$2[K_f] = ([K_{yy}] + [K_{zz}]) - j([K_{yz}] - [K_{zy}])$$

$$2[K_b] = ([K_{yy}] - [K_{zz}]) + j([K_{yz}] + [K_{zy}])$$

A barra acima da variável indica o complexo conjugado: $\bar{r} = y - jz$

A partir da equação 3.11, pode-se construir a equação de movimento para se obter a resposta direcional, como segue:

$$[M_d]\{\ddot{q}_d(t)\} + [C_d]\{\dot{q}_d(t)\} + [K_d]\{q_d(t)\} = \{f_d(t)\} \quad (3.12)$$

Onde:

$$\{q_d(t)\} = \begin{Bmatrix} r(t) \\ \bar{r}(t) \end{Bmatrix} \quad \{f_d(t)\} = \begin{Bmatrix} g(t) \\ \bar{g}(t) \end{Bmatrix}$$

$$[M_d] = \begin{bmatrix} M_f & M_b \\ \bar{M}_b & \bar{M}_f \end{bmatrix} \quad [C_d] = \begin{bmatrix} C_f & C_b \\ \bar{C}_b & \bar{C}_f \end{bmatrix} \quad [K_d] = \begin{bmatrix} K_f & K_b \\ \bar{K}_b & \bar{K}_f \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
2[\overline{M}_f] &= ([M_{yy}] + [M_{zz}]) + j([M_{yz}] - [M_{zy}]) \\
2[\overline{M}_b] &= ([M_{yy}] - [M_{zz}]) - j([M_{yz}] + [M_{zy}]) \\
2[\overline{C}_f] &= ([C_{yy}] + [C_{zz}]) + j([C_{yz}] - [C_{zy}]) \\
2[\overline{C}_b] &= ([C_{yy}] - [C_{zz}]) - j([C_{yz}] + [C_{zy}]) \\
2[\overline{K}_f] &= ([K_{yy}] + [K_{zz}]) + j([K_{yz}] - [K_{zy}]) \\
2[\overline{K}_b] &= ([K_{yy}] - [K_{zz}]) - j([K_{yz}] + [K_{zy}])
\end{aligned}$$

A equação 3.12 pode ser transformada para o domínio da frequência, resultando em:

$$Q(\Omega) = H_d F \quad (3.13)$$

Sendo:

$$H_d = \begin{bmatrix} H_{ff} & H_{fb} \\ H_{bf} & H_{bb} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

H_d é a matriz de resposta em frequência direcional, que pode ser escrita em função dos termos da matriz de resposta em frequência real, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
2H_{ff} &= H_{yy} + H_{zz} - j(H_{yz} - H_{zy}) \\
2H_{fb} &= H_{yy} - H_{zz} + j(H_{yz} + H_{zy}) \\
2H_{bf} &= H_{yy} - H_{zz} - j(H_{yz} + H_{zy}) \\
2H_{bb} &= H_{yy} + H_{zz} + j(H_{yz} - H_{zy})
\end{aligned} \quad (3.15)$$

H_{ff} é a FRF direta com componente de excitação direta;

H_{fb} é a FRF direta com componente de excitação retrógrada;

H_{bf} é a FRF retrógrada com componente de excitação direta;

H_{bb} é a FRF retrógrada com componente de excitação retrógrada;

3.2. Modelos de rotor

Diferentes modelos de rotor Laval serão simulados e estudados, a saber: rotor rígido, rotor flexível (modelo de Krämer) e rotor modelado por elementos finitos, todos apoiados por mancais flexíveis. Neste último, serão inseridos modelos de fundação rígida, semi-flexível e flexível.

3.2.1 Rotor rígido

A equação de movimento de um rotor Laval rígido excitado por desbalanceamento da massa do disco é mostrada a seguir (Lalanne, 1990):

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} = m_{desb} \varepsilon \omega^2 \begin{Bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Onde $y(t)$ e $z(t)$ são as respostas no tempo nas direções horizontal e vertical, respectivamente, do disco do rotor; m é a massa do rotor concentrada no disco; c_{yy} , c_{yz} , c_{zy} e c_{zz} são os coeficientes de amortecimento dos mancais; k_{yy} , k_{yz} , k_{zy} e k_{zz} são os coeficientes de rigidez dos mancais; ω é a frequência de excitação por desbalanceamento; ε é a excentricidade do desbalanceamento; m_{desb} é a massa desbalanceada do disco.

A resposta em frequência pode ser obtida fazendo-se:

$$\begin{aligned} y &= Y e^{j\Omega t} \\ z &= Z e^{j\Omega t} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Substituindo na equação 3.16, e resolvendo para Y e Z, a resposta em frequência em coordenadas físicas é determinada:

$$\begin{Bmatrix} Y(\Omega) \\ Z(\Omega) \end{Bmatrix} = \left\{ - \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \Omega^2 + j \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \Omega + \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \right\}^{-1} m_{desb} \varepsilon \omega^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -j \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Ω é a rotação do rotor.

Dada a equação de movimento 3.16 do rotor rígido suportado por mancais flexíveis, faz-se (Lee, 1993):

[primeira equação] + j[segunda equação]

Aplica-se, então, a notação do raio complexo $r = y + jz$. Fazendo as devidas substituições, a equação a seguir é obtida:

$$m\ddot{r} + \frac{1}{2}[c_{yy} + c_{zz} + j(c_{zy} - c_{zz})]\dot{r} + \frac{1}{2}[c_{yy} - c_{zz} + j(c_{zy} + c_{yz})]\dot{\bar{r}} + \frac{1}{2}[k_{yy} + k_{zz} + j(k_{zy} - k_{yz})]r + \frac{1}{2}[k_{yy} - k_{zz} + j(k_{zy} + k_{yz})]\bar{r} = m_{desb}\omega^2 \exp(j\omega t) \quad (3.19)$$

Na equação 3.19, são efetuadas substituições do raio complexo r , como na equação 3.7. Assim, obtém-se, em forma matricial, a equação de movimento síncrono do rotor, excitado por desbalanceamento, no domínio da frequência em coordenadas direcionais:

$$\begin{bmatrix} A_{ff} & A_{fb} \\ A_{bf} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_f(\Omega) \\ \bar{r}_b(\Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{desb}e\Omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20 - a)$$

Onde:

$$A_{ff} = -m\Omega^2 + \frac{1}{2}[-\Omega(c_{zy} - c_{yz}) + k_{yy} + k_{zz} + j[\Omega(c_{yy} + c_{zz}) + k_{zy} - k_{yz}]]$$

$$A_{fb} = \frac{1}{2}[-\Omega(c_{zy} + c_{yz}) + k_{yy} - k_{zz} + j[\Omega(c_{yy} - c_{zz}) + k_{zy} + k_{yz}]]$$

$$A_{bf} = \frac{1}{2}[\Omega(c_{zy} + c_{yz}) + k_{yy} - k_{zz} - j[-\Omega(c_{yy} - c_{zz}) + k_{zy} + k_{yz}]]$$

$$A_{bb} = -m\Omega^2 + \frac{1}{2}[\Omega(c_{zy} - c_{yz}) + k_{yy} + k_{zz} - j[-\Omega(c_{yy} + c_{zz}) + k_{zy} - k_{yz}]]$$

Desenvolvendo a equação matricial acima, chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
A_{ff} r_f(\Omega) + A_{fb} \bar{r}_b(\Omega) &= m_{desb} e \Omega^2 \\
A_{bf} r_f(\Omega) + A_{bb} \bar{r}_b(\Omega) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.20 - b}$$

$r_f(\Omega)$ é a resposta do modo direto

$r_b(\Omega)$ é a resposta do modo retrógrado

Por sua vez, os mancais são isotrópicos quando os coeficientes diretos são iguais e os cruzados possuem mesmo módulo com sinais opostos.

Sendo assim, observa-se na equação 3.20-a que, para rotor com mancais isotrópicos, $A_{bf} = 0$, pois, neste caso, $c_{zy} + c_{yz} = k_{zy} + k_{yz} = 0$, $k_{yy} - k_{zz} = c_{yy} - c_{zz} = 0$, e $A_{bb} \neq 0$. Substituindo $A_{bf} = 0$ na segunda equação do sistema de equações 3.20 - b, tem-se que $A_{bb} \bar{r}_b = 0$. Se $A_{bb} \neq 0$, então a única solução desta equação é $\bar{r}_b = 0$. Ou seja, quando os mancais são isotrópicos, o modo retrógrado é nulo e o modo resultante é puramente direto. Conclui-se que, para o sistema rotor-mancais excitado por desbalanceamento (ou com excitação do modo direto), a anisotropia nos mancais é responsável pelo aparecimento do modo retrógrado.

A resposta em frequência do rotor rígido, em alguns casos, pode apresentar dois picos de amplitude, sendo um referente ao deslocamento vertical, e outro ao deslocamento horizontal do disco. A anisotropia nos suportes do rotor pode ser responsável pela separação desses modos. Esses dois modos de vibrar ficam mais evidentes na resposta em frequência quando se modela um rotor com suportes flexíveis sem amortecimento e com coeficientes de rigidez diretos com valores distintos. Portanto, uma simplificação do modelo de rotor rígido apresentado nesta seção é proposta para um melhor estudo deste comportamento do rotor. Será apresentado a seguir o equacionamento do modelo de rotor rígido suportado por molas ortotrópicas, como mostra a figura 3.4. Molas ortotrópicas são suportes com coeficientes diretos de rigidez distintos e coeficientes cruzados nulos.

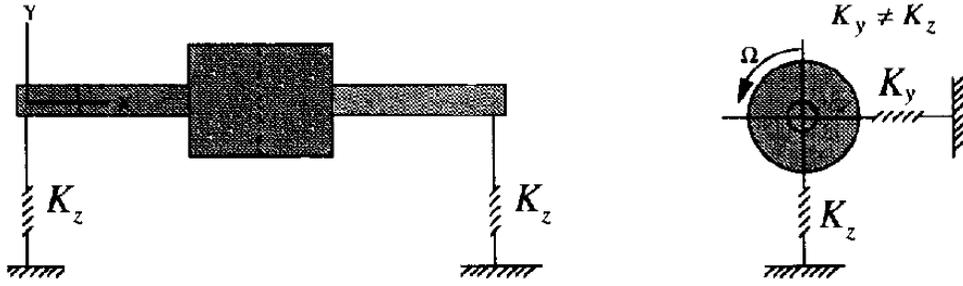


Figura 3.4: Rotor rígido apoiado sobre molas ortotrópicas (Kessler, 1998).

A equação que representa o movimento síncrono desse modelo de rotor, excitado por desbalanceamento, pode ser obtida a partir da equação (3.16), com as devidas simplificações da matriz de rigidez e eliminando a matriz de amortecimento.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_y & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} = m_{desb} \epsilon \Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

A equação 3.21 pode ser reescrita no domínio da frequência, fazendo-se $y(t) = Y e^{j\Omega t}$ e $z(t) = Z e^{j\Omega t}$, o que resulta em:

$$\left(-\Omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_y & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} Y(\Omega) \\ Z(\Omega) \end{Bmatrix} = m_{desb} \epsilon \Omega^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -j \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

A resposta direcional pode ser obtida aplicando o raio complexo de precessão, da mesma forma que na equação 3.7. A equação de movimento em coordenadas direcionais fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -m\Omega^2 + \frac{1}{2}(k_y + k_z) & \frac{1}{2}(k_y - k_z) \\ \frac{1}{2}(k_y - k_z) & -m\Omega^2 + \frac{1}{2}(k_y + k_z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_f(\Omega) \\ r_b(\Omega) \end{Bmatrix} = m_{desb} \epsilon \Omega^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Resolvendo para r_f e r_b , obtém-se:

$$r_f = \frac{(\omega_{ny}^2 + \omega_{nz}^2 - 2\Omega^2) \frac{m_{desb}}{m} \varepsilon \Omega^2}{2(\omega_{ny}^2 - \Omega^2)(\omega_{nz}^2 - \Omega^2)} \quad \text{e} \quad r_b = \frac{-(\omega_{ny}^2 - \omega_{nz}^2) \frac{m_{desb}}{m} \varepsilon \Omega^2}{2(\omega_{ny}^2 - \Omega^2)(\omega_{nz}^2 - \Omega^2)} \quad (3.24)$$

Onde ω_{ny} e ω_{nz} são as freqüências naturais do rotor nas direções horizontal e vertical, respectivamente, como mostra a equação a seguir:

$$\omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}} \quad \text{e} \quad \omega_z = \sqrt{\frac{k_z}{m}} \quad (3.25)$$

Analisando as respostas do modo direto e retrógrado, na equação 3.24, pode-se avaliar as faixas de freqüência onde predominam cada direção de precessão, quando $\omega_{ny} > \omega_{nz}$.

$$\frac{|r_f|}{|r_b|} = \begin{cases} > 1; \Omega < \omega_{nz} < \omega_{ny} \\ < 1; \omega_{nz} < \Omega < \omega_{ny} \\ > 1; \omega_{nz} < \omega_{ny} < \Omega \end{cases} \quad (3.26)$$

Quando $|r_f| > |r_b|$, a precessão direta predomina sobre a retrógrada. Em caso contrário, o modo de precessão retrógrada é predominante. A equação 3.26 mostra, portanto, que para uma rotação antes da freqüência natural da direção vertical, ou depois da freqüência natural da direção horizontal, a precessão do rotor é direta. No entanto, quando o valor da rotação se encontra entre as duas freqüências naturais, a precessão do rotor é retrógrada.

3.2.2 Rotor flexível – modelo de Krämer (1993)

Krämer (1993) define a equação de movimento síncrono do disco e dos mancais em um sistema rotativo constituído de rotor flexível, apoiado sobre mancais flexíveis idênticos nas extremidades, contendo um disco rígido no centro, excitado pelo desbalanceamento deste.

$$\begin{aligned}
m\ddot{y}_{disco} + c\dot{y}_{disco} + k(y_{disco} - y_{mancal}) &= m_{desb} \epsilon \Omega^2 \cos(\Omega t) \\
m\ddot{z}_{disco} + c\dot{z}_{disco} + k(z_{disco} - z_{mancal}) &= m_{desb} \epsilon \Omega^2 \sin(\Omega t) \\
k(y_{mancal} - y_{disco}) + 2(k_{yy} y_{mancal} + k_{yz} z_{mancal}) + 2(c_{yy} \dot{y}_{mancal} + c_{yz} \dot{z}_{mancal}) &= 0 \\
k(z_{mancal} - z_{disco}) + 2(k_{zy} y_{mancal} + k_{zz} z_{mancal}) + 2(c_{zy} \dot{y}_{mancal} + c_{zz} \dot{z}_{mancal}) &= 0
\end{aligned} \tag{3.27-a}$$

Onde:

$\begin{Bmatrix} y_{disco} \\ z_{disco} \end{Bmatrix}$ é o vetor de deslocamento do disco no plano yz;

$\begin{Bmatrix} y_{mancal} \\ z_{mancal} \end{Bmatrix}$ é o vetor de deslocamento do mancal no plano yz;

ϵ é a excentricidade do desbalanceamento;

m_{desb} é a massa desbalanceada do disco;

m , c e k são os coeficientes de massa, amortecimento e rigidez do eixo;

k_{ij} e c_{ij} ($i, j = y, z$) são os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais;

Nas equações (3.27-a), as duas primeiras equações descrevem o movimento do disco excitado por desbalanceamento na massa.

O termo $(y_{disco} - y_{mancal})$, que multiplica a rigidez k do eixo, é o deslocamento relativo entre o disco e o mancal. Representa a deflexão real do eixo, que armazena energia potencial elástica.

As duas últimas equações descrevem o movimento dos mancais.

A equação 3.27-a pode ser escrita na forma matricial:

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t) \tag{3.27-b}$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_{yy} & 2c_{yz} \\ 0 & 0 & 2c_{zy} & 2c_{zz} \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & k & 0 & -k \\ -k & 0 & k + 2k_{yy} & 2k_{yz} \\ 0 & -k & 2k_{zy} & k + 2k_{zz} \end{bmatrix}$$

$$q(t) = \begin{Bmatrix} y_{disco}(t) \\ z_{disco}(t) \\ y_{mancal}(t) \\ z_{mancal}(t) \end{Bmatrix} \quad f(t) = \begin{Bmatrix} m_{desb} \varepsilon \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m_{desb} \varepsilon \Omega^2 \sin(\Omega t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O sistema de coordenadas do disco e dos mancais do rotor flexível, utilizado nas equações 3.27, é apresentado na figura 3.5 a seguir.

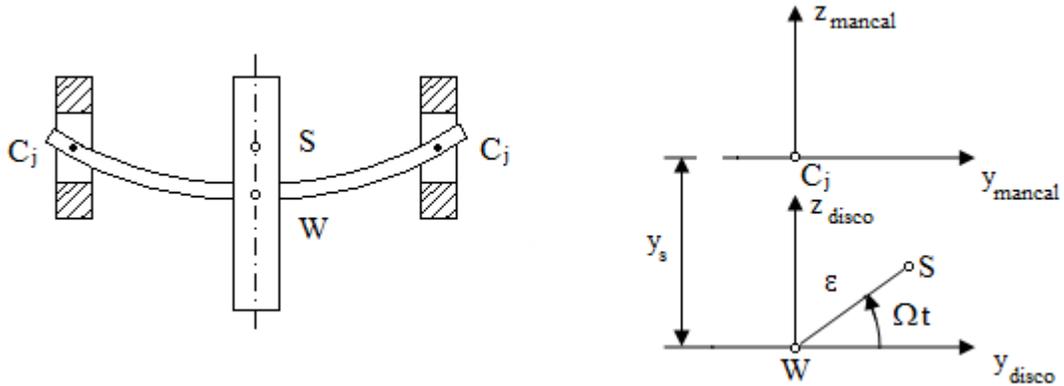


Figura 3.5: Rotor flexível apoiado em mancais flexíveis.

Para uma viga, a rigidez é determinada por:

$$k = \frac{48EI}{L^3} \quad (3.28)$$

Portanto, a resposta do rotor flexível com esta formulação depende do material e das dimensões do eixo. Estes parâmetros determinam como será a deformação e o comportamento do

eixo em rotação. Esta dependência não aparece na formulação para rotor rígido, apresentada no item 3.2.1.

Dada a equação de movimento 3.27, a resposta no domínio da frequência pode ser determinada a partir da consideração a seguir:

$$\begin{aligned} y_{disco} &= Y_{disco} e^{j\Omega t} & y_{mancal} &= Y_{mancal} e^{j\Omega t} \\ z_{disco} &= Z_{disco} e^{j\Omega t} & z_{mancal} &= Z_{mancal} e^{j\Omega t} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Substituindo na equação 3.27, a resposta em coordenadas cartesianas em frequência pode ser obtida:

$$\begin{Bmatrix} Y_{disco}(\Omega) \\ Z_{disco}(\Omega) \\ Y_{mancal}(\Omega) \\ Z_{mancal}(\Omega) \end{Bmatrix} = - \left[\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Omega^2 + j \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_{yy} & 2c_{yz} \\ 0 & 0 & 2c_{zy} & 2c_{zz} \end{bmatrix} \Omega + \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & k & 0 & -k \\ -k & 0 & k + 2k_{yy} & 2k_{yz} \\ 0 & -k & 2k_{zy} & k + 2k_{zz} \end{bmatrix} \right]^{-1} m_{desb} \epsilon \omega^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -j \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Dada a equação 3.27, aplica-se a notação complexa, inicialmente reduzindo de quatro para duas equações, conforme Lee (1991):

[primeira equação] + j[segunda equação]

[terceira equação] + j[quarta equação] (3.31)

Rearranjando os termos das duas equações resultantes e aplicando o raio complexo de órbita do disco e do mancal:

$$\begin{aligned} r_{disco} &= y_{disco} + jz_{disco} \\ r_{mancal} &= y_{mancal} + jz_{mancal} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Em seguida, faz-se a substituição, analogamente à equação 3.7:

$$\begin{aligned}
r_{disco} &= r_{disco}^f e^{j\Omega t} + r_{disco}^b e^{-j\Omega t} \\
r_{mancai} &= r_{mancai}^f e^{j\Omega t} + r_{mancai}^b e^{-j\Omega t}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

É obtido, como resultado, quatro equações de movimento em coordenadas direcionais:

$$\begin{bmatrix} Ad_{ff} & Ad_{fb} & Am_{ff} & Am_{fb} \\ Ad_{bf} & Ad_{bb} & Am_{bf} & Am_{bb} \\ Bd_{ff} & Bd_{fb} & Bm_{ff} & Bm_{fb} \\ Bd_{bf} & Bd_{bb} & Bm_{bf} & Bm_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{disco}^f(\Omega) \\ \bar{r}_{disco}^b(\Omega) \\ r_{mancai}^f(\Omega) \\ \bar{r}_{mancai}^b(\Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{desb} \epsilon \Omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

Onde

$$Am_{ff} = k$$

$$Am_{fb} = Am_{bf} = 0$$

$$Am_{bb} = -k$$

$$Ad_{ff} = -\Omega^2 m + k + j\Omega c$$

$$Ad_{fb} = Ad_{bf} = 0$$

$$Ad_{bb} = -\Omega^2 m + k + j\Omega c$$

$$Bd_{ff} = -k$$

$$Bd_{fb} = Bd_{bf} = 0$$

$$Bd_{bb} = -k$$

$$Bm_{ff} = k + k_{yy} + k_{zz} - \Omega(c_{zy} - c_{yz}) + j[k_{zy} - k_{yz} + \Omega(c_{yy} + c_{zz})]$$

$$Bm_{fb} = k_{yy} - k_{zz} - \Omega(c_{zy} + c_{yz}) - j[k_{zy} + k_{yz} + \Omega(c_{yy} - c_{zz})]$$

$$Bm_{bf} = k_{yy} - k_{zz} + \Omega(c_{zy} + c_{yz}) + j[k_{zy} + k_{yz} - \Omega(c_{yy} - c_{zz})]$$

$$Bm_{bb} = k + k_{yy} + k_{zz} + \Omega(c_{zy} - c_{yz}) - j[k_{zy} - k_{yz} - \Omega(c_{yy} + c_{zz})]$$

(3.35)

A equação 3.34 fornece a resposta dos modos direto e retrógrado tanto para os mancais quanto para o disco.

3.2.3 Rotor flexível modelado por elementos finitos

O sistema rotativo pode ser modelado por elementos finitos. O eixo flexível é dividido em elementos de viga. O disco apresenta inércia concentrada em um nó. Os mancais podem ser representados no sistema por seus coeficientes equivalentes de amortecimento e rigidez.

Cada nó contém quatro graus de liberdade: dois de deslocamentos por translação e dois por deslocamentos angulares, como mostra a figura 3.6 a seguir:

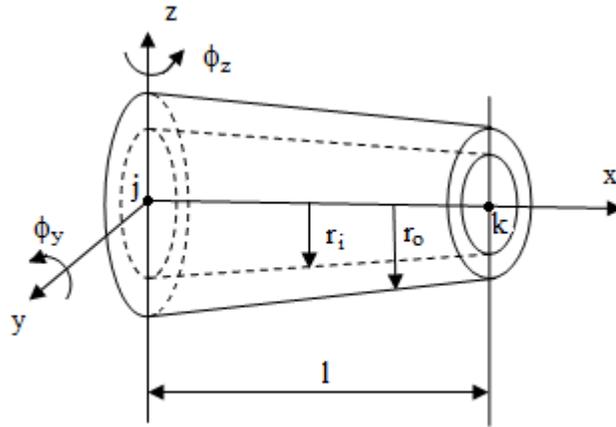


Figura 3.6: Elemento cônico de viga (Genta, 1988).

Portanto, para um sistema dividido em n nós, o vetor dos graus de liberdade é:

$$q(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ z_1(t) \\ \phi_{y_1}(t) \\ \phi_{z_1}(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \\ \dots \\ \phi_{z_n}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Onde:

y e z são os graus de liberdade de deslocamento nas direções vertical e horizontal, respectivamente;

ϕ_y e ϕ_z são os graus de liberdade de rotação em torno de y e z , respectivamente.

A equação de movimento do sistema é similar à equação 3.1:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{f(t)\}$$

Onde

$f(t)$ é o vetor de excitação por desbalanceamento;

$[M]$ é a matriz de massa do sistema global;

$[C]$ é a matriz de amortecimento do sistema global;

$[K]$ é a matriz de rigidez do sistema global.

A força de excitação (desbalanceamento) é aplicada somente no nó central do disco nas direções vertical e horizontal.

Matrizes do elemento de viga:

As matrizes de massa, amortecimento, rigidez e giroscópica dos elementos de viga são obtidas das matrizes de elemento cônico propostos por Genta (1988), que estão dispostas no Apêndice A. O elemento cônico é baseado na teoria de viga de Timoshenko.

O elemento cônico é representado pela figura 3.6, onde r_i é o raio interno, r_o é o raio externo, ϕ_y é o deslocamento angular em torno de y , ϕ_z é o deslocamento angular em torno de z e l é o comprimento do elemento. Com a utilização deste modelo, é possível montar um algoritmo em que se pode modelar o eixo do rotor utilizando elementos cônicos ou cilíndricos, maciços ou

não, a critério do projetista. Neste trabalho, no entanto, foram utilizados apenas elementos cilíndricos maciços.

Matrizes do nó de disco:

As matrizes de disco podem ser obtidas a partir da aplicação da equação de Lagrange à equação de energia de cada elemento.

Segundo Lalanne (1990):

Matriz de massa:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_P \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Matriz giroscópica:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_T \\ 0 & 0 & J_T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Onde:

m é a massa do disco;

J_P é o momento de inércia polar do disco;

J_T é o momento de inércia transversal;

Matrizes dos mancais:

As matrizes de rigidez e amortecimento dos mancais contêm os coeficientes estáticos e dinâmicos dos mesmos, obtidos a partir da formulação por volumes finitos.

Amortecimento:

$$C_b = \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} & 0 & 0 \\ c_{zy} & c_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Rigidez:

$$K_b = \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} & 0 & 0 \\ k_{zy} & k_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

A resposta em frequência do grau de liberdade do nó n pode ser obtida fazendo-se:

$$\begin{aligned} y_n(t) &= Y_n e^{j\Omega t} & \phi_{yn}(t) &= \Phi_{yn} e^{j\Omega t} \\ z_n(t) &= Z_n e^{j\Omega t} & \phi_{zn}(t) &= \Phi_{zn} e^{j\Omega t} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Substituindo na equação 3.1:

$$\begin{Bmatrix} Y_1(\Omega) \\ Z_1(\Omega) \\ \Phi_{y1}(\Omega) \\ \Phi_{z1}(\Omega) \\ \dots \end{Bmatrix} = \left\{ -[M]\Omega^2 + j[C]\Omega + [K] \right\}^{-1} m_{desb} \varepsilon \omega^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ -j \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

A excitação $m_{desb} \varepsilon \omega^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ j \end{Bmatrix}$ ocorre somente no nó do disco.

Para se calcular a resposta direcional de um sistema de n nós ($4n$ graus de liberdade, $4n$ equações) a partir da equação 3.42, faz-se:

$$\begin{aligned}
 &[\text{primeira equação}] + j[\text{segunda equação}] \\
 &[\text{terceira equação}] + j[\text{quarta equação}] \\
 &[\text{quinta equação}] + j[\text{sexta equação}] \\
 &\dots \\
 &[\text{equação (n-1)}] + j[\text{equação (n)}]
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Em seguida, aplica-se a notação complexa:

$$\begin{aligned}
 r_i &= y_i + jz_i \\
 \psi_i &= \phi_{yi} + j\phi_{zi}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

O índice $i = 1, 2, 3, \dots, n$ representa o i -ésimo nó.

Posteriormente, substitui-se r e ψ por:

$$\begin{aligned}
 r_i &= r_i^f e^{j\Omega t} + r_i^b e^{-j\Omega t} \\
 \psi_i &= \psi_i^f e^{j\Omega t} + \psi_i^b e^{-j\Omega t} \\
 i &= 1, 2, 3, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Obtém-se, como resultado, em forma matricial:

$$[H_d]^{-1} \begin{Bmatrix} r_1^f \\ \psi_1^f \\ r_2^f \\ \psi_2^f \\ \dots \\ r_n^f \\ \psi_n^f \\ \bar{r}_1^b \\ \bar{\psi}_1^b \\ \dots \\ \bar{\psi}_n^b \end{Bmatrix} = \{B\} m_{desb} \varepsilon \Omega^2 \quad (3.46)$$

Onde B é um vetor onde os elementos correspondentes aos vetores r e ψ do modo direto do disco são iguais a um, e o restante dos termos são nulos, indicando que a excitação complexa só ocorre no modo direto do disco. A matriz $[H_d]$ é a matriz de resposta em frequência direcional.

3.2.4 Sistema rotor-mancais-fundação

Os modelos anteriores não consideraram fundação como um elemento flexível, ou seja, a fundação é totalmente rígida. Neste capítulo, será modelado o sistema rotor-mancais-fundação, considerando uma certa flexibilidade na estrutura de suporte.

A fundação, por ser dotada de amortecimento e rigidez, bem como os mancais, pode ser representada por amortecedores e molas, como se pode ver na figura 3.7 a seguir:

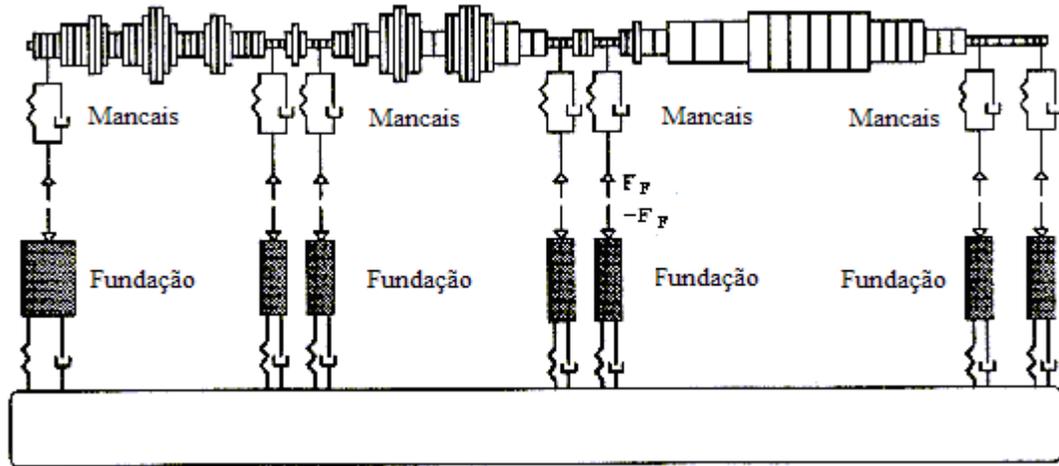


Figura 3.7: Representação de um sistema rotor-mancais-fundação (Cavalca, 1993).

A equação do sistema rotor-mancais-fundação (Cavalca et al., 2006) é montada considerando a inércia do rotor, amortecimento e rigidez do eixo, bem como os coeficientes dos mancais e efeitos giroscópicos dos discos.

$$\begin{bmatrix} M_{rr} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_r(t) \\ \ddot{q}_m(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{rr} & R_{rm} \\ R_{mr} & R_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_r(t) \\ \dot{q}_m(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rm} \\ K_{mr} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r(t) \\ q_m(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_F \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

Onde:

$\ddot{q}_r, \dot{q}_r, q_r$ são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento do rotor.

$\ddot{q}_m, \dot{q}_m, q_m$ são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento do mancal.

M_{rr}, R_{rr}, K_{rr} são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do eixo e do rotor.

R_{rm}, R_{mr}, R_{mm} são as matrizes dos coeficientes equivalentes de amortecimento do filme de óleo.

K_{rm}, K_{mr}, K_{mm} são as matrizes dos coeficientes equivalentes de rigidez do filme de óleo.

F_0 é a força de excitação por desbalanceamento do rotor.

F_F é a força transmitida pela fundação, considerada nula para fundação rígida.

O índice r corresponde ao rotor, e o índice f corresponde aos nós conexão do rotor com a fundação, ou seja, os mancais.

A equação de movimento da fundação modelada pelo método de elementos finitos é:

$$[M_F] \ddot{q}_F(t) + [R_F] \dot{q}_F(t) + [K_F] q_F(t) = F_F(t) \quad (3.48)$$

onde

M_F, R_F e K_F são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da fundação modelada por elementos finitos;

Ainda, q_F é o vetor de graus de liberdade em coordenadas físicas da fundação associados aos mancais.

Considerando uma excitação harmônica devido ao desbalanceamento do rotor, a força transmitida nos mancais pode ser representada por:

$$F_F = \{F_{F0}\} e^{j\Omega t} \quad (3.49)$$

e a resposta da fundação é:

$$q_F(t) = \{Q_{F0}\} e^{j\Omega t} \quad (3.50)$$

A resposta em frequência da fundação é apresentada a seguir:

$$(-\Omega^2 [M_F] + j\Omega [R_F] + [K_F]) \{Q_{F0}(\Omega)\} = \{F_{F0}\} \quad (3.51)$$

A equação para a força transmitida pode ser escrita em função dos deslocamentos relativos entre o rotor e a fundação, utilizando a seguinte aproximação modal:

$$q_F = [\Phi]p \quad (3.52)$$

Onde:

p é o vetor de coordenadas principais;

$[\Phi]$ é a matriz modal, determinada pela equação de movimento da fundação.

A aproximação modal permite a diagonalização das matrizes de massa e rigidez da fundação, através da matriz modal. A utilização das coordenadas modais tem a vantagem de dispensar a inversão da matriz de flexibilidade para se obter a matriz de impedância mecânica da fundação.

Os parâmetros modais da fundação podem ser obtidos experimentalmente, através da medição de FRFs do sistema. A equação de movimento para a fundação, em coordenadas principais, é:

$$[m_F] \ddot{p}(t) + [r_F] \dot{p}(t) + [k_F] p(t) = -[\Phi]^t F_F \quad (3.53)$$

onde:

$[m_F]$, $[r_F]$ e $[k_F]$ são as matrizes diagonais de massa, amortecimento e rigidez em coordenadas principais e p é o vetor de coordenadas principais associadas aos modos da fundação.

Substituindo F_F na equação 3.47, obtém-se a equação de movimento para o sistema completo, em coordenadas mistas (Cavalca, 1993):

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} M_{rr} & 0 \\ 0 & [m_F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_r(t) \\ \ddot{p}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{rr} & R_{rm}[\phi] \\ [\phi]^t R_{mr} & [r_F] + [\phi]^t R_{mm}[\phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_r(t) \\ \dot{p}(t) \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rm}[\phi] \\ [\phi]^t K_{mr} & [k_F] + [\phi]^t K_{mm}[\phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r(t) \\ p(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Considerando uma força de excitação harmônica $F = F_0 e^{j\alpha t}$, a representação da equação 3.54 no domínio da frequência fica:

$$\left(-\Omega^2 [\overline{M}_T] + j\Omega [\overline{R}_T] + [\overline{K}_T] \right) \begin{Bmatrix} Q_r(\Omega) \\ P(\Omega) \end{Bmatrix} = F_0(\Omega) \tag{3.55}$$

Onde Q_r é a resposta em frequência das coordenadas físicas do rotor, e P é a resposta em frequência das coordenadas principais da fundação.

A resposta direcional do sistema pode ser obtida aplicando-se o denominado raio complexo da equação 3.6 a partir da equação de movimento 3.54.

Segundo Cavalca (2009), a parte real do raio complexo é constituído da parte real da resposta no tempo da direção horizontal y , enquanto que a parte imaginária do raio é a parte real da resposta no tempo da direção vertical z , pois a parte real do sinal é a parte que pode ser medida. Desta forma, a equação 3.6 pode ser reescrita da seguinte forma (Cavalca, 2009):

$$r = re(y(t)) + re(z(t))j \tag{3.56}$$

Onde

$$y(t) = (Y_{re} + jY_{im})e^{j\Omega t} = (Y_{re} + jY_{im})(\cos \Omega t + j \sin \Omega t)$$

$$z(t) = (Z_{re} + jZ_{im})e^{j\Omega t} = (Z_{re} + jZ_{im})(\cos \Omega t + j \sin \Omega t)$$

Ou

$$y(t) = (Y_{re} \cos \Omega t - Y_{im} \sin \Omega t) + j(Y_{re} \sin \Omega t + Y_{im} \cos \Omega t)$$

$$z(t) = (Z_{re} \cos \Omega t - Z_{im} \sin \Omega t) + j(Z_{re} \sin \Omega t + Z_{im} \cos \Omega t)$$

Substituindo na equação 3.56, obtém-se:

$$r = (Y_{re} \cos \Omega t - Y_{im} \sin \Omega t) + j(Z_{re} \cos \Omega t - Z_{im} \sin \Omega t) \quad (3.57)$$

Já foi visto na equação 3.7 que $r = y + jz = r_f e^{j\Omega t} + r_b e^{-j\Omega t}$. As respostas dos modos direto e retrógrado podem ser reescritos da seguinte forma, segundo Cavalca (2009):

$$\begin{aligned} r_f &= r_f^{re} + jr_f^{im} \\ r_b &= r_b^{re} + jr_b^{im} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Logo, a equação 3.7 se torna:

$$\begin{aligned} r &= r_f^{re} \cos \Omega t - r_f^{im} \sin \Omega t + r_b^{re} \cos \Omega t + r_b^{im} \sin \Omega t + \\ &+ j(r_f^{re} \sin \Omega t + r_f^{im} \cos \Omega t - r_b^{re} \sin \Omega t + r_b^{im} \cos \Omega t) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Igualando a equação 3.59 com a 3.57 e comparando os termos em seno, cosseno, real e imaginário, pode-se obter as relações entre as coordenadas y e z e as coordenadas direcionais r_f e r_b , segundo Cavalca (2009):

$$\begin{aligned} Y_{re} &= r_f^{re} + r_b^{re} \\ Z_{re} &= r_f^{im} + r_b^{im} \\ -Y_{im} &= -r_f^{im} + r_b^{im} \\ -Z_{im} &= r_f^{re} - r_b^{re} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Esta relação pode ser representada em forma matricial da seguinte forma (Cavalca, 2009):

$$\begin{Bmatrix} Y(\Omega) \\ Z(\Omega) \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} r_f \\ \bar{r}_b \end{Bmatrix} \text{ ou } \begin{Bmatrix} r_f \\ \bar{r}_b \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

Onde

$\bar{r}_b = r_b^{re} - jr_b^{im}$ é o complexo conjugado de r_b ;

$Y = Y_{re} + jY_{im}$ e $Z = Z_{re} + jZ_{im}$;

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \text{ e } [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5j \\ 0,5 & -0,5j \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Para um sistema de rotor modelado por elementos finitos, a transformação de coordenadas físicas para coordenadas direcionais pode ser feita da seguinte forma:

$$\{q_r\} = [T_A] \{r_d\} \text{ ou } \{r_d\} = [T_A]^{-1} \{q_r\} \quad (3.63)$$

Onde q_r é o vetor de coordenadas físicas do rotor e r_d é o vetor de coordenadas direcionais. A matriz $[T_A]$, para cada elemento de viga do rotor, é definida a seguir:

$$[T_A] = \begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [A] \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

As coordenadas principais da fundação podem ser transformadas para coordenadas direcionais utilizando a matriz de transformação $[A]$ e a matriz modal $[\phi]$ para transformar para coordenadas físicas.

$$\{r_d\} = [T_A]^{-1} [\phi] \{p\} \quad (3.65)$$

Matrizes de massa, amortecimento e rigidez do rotor e dos mancais podem ser, então, convertidas de coordenadas cartesianas para coordenadas direcionais.

Utilizando as transformações apresentadas em 3.64 e 3.65, a equação do sistema completo pode ser reescrita em coordenadas direcionais, como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [M_{rd}] & [0] \\ [0] & [m_F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_d \\ \dot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [R_{rd}] + [R_{rrd}] & [R_{rdf}] [T_A]^{-1} [\Phi] \\ [\Phi]^T [R_{mr}] [T_A] & [r_F] + [\Phi]^T [R_{mm}] [\Phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_d \\ \dot{p} \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} [K_{rd}] + [K_{rrd}] & [K_{rdf}] [T_A]^{-1} [\Phi] \\ [\Phi]^T [K_{mr}] [T_A] & [k_F] + [\Phi]^T [K_{mm}] [\Phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_d \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{rd} \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Onde $[M_{rd}]$, $[R_{rd}]$, $[K_{rd}]$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do eixo em coordenadas direcionais; $[R_{rrd}]$, $[R_{rdf}]$ são os coeficientes lineares de amortecimento do filme de óleo em coordenadas direcionais; $[R_{mr}]$, $[R_{mm}]$ são os coeficientes lineares de amortecimento do filme de óleo em coordenadas físicas; $[K_{rrd}]$, $[K_{rdf}]$ são os coeficientes lineares de rigidez do filme de óleo em coordenadas direcionais; $[K_{mr}]$, $[K_{mm}]$ são os coeficientes lineares de rigidez do filme de óleo em coordenadas físicas; $[m_f]$, $[r_f]$ e $[k_f]$ são as matrizes diagonais de massa, amortecimento e rigidez em coordenadas principais; $\{F_{rd}\}$ é a força de desbalanceamento no rotor em coordenadas direcionais.

A equação 3.66 relaciona coordenadas direcionais e coordenadas modais, as quais descrevem o movimento do sistema rotor-mancais-fundação. Uma característica importante desta equação é que o modelo do rotor, seja este em coordenadas físicas ou direcionais, não afeta o modelo da fundação, em coordenadas modais. Os coeficientes dos mancais, por sua vez, são parcialmente modificados, devido à conexão entre rotor e fundação.

3.3 Diagrama de Campbell

Neste trabalho, o diagrama de Campbell é constituído de curvas que mostram como variam os autovalores do sistema em função da frequência de rotação do rotor. Os autovalores do sistema são obtidos a partir do problema de valor próprio.

Para se obter o problema de valor próprio do sistema, primeiramente escreve-se a equação de movimento de um sistema rotativo, conforme a equação 3.1, em forma de espaço de estado:

$$\{\dot{Q}_e\} = [A_e]\{Q_e\} + \{F_e\} \quad (3.67)$$

Onde

$$[A_e] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}$$

$$\{Q_e\} = \begin{Bmatrix} Y(\Omega) \\ Z(\Omega) \\ \dot{Y}(\Omega) \\ \dot{Z}(\Omega) \end{Bmatrix}$$

$$\{F_e\} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{F(\Omega)\} \end{bmatrix}$$

[I] é a matriz identidade.

Em seguida, os autovalores da matriz $[A_e]$ são obtidos.

$$([A_e(\Omega)] - [I]\lambda(\Omega)) = 0 \quad (3.68)$$

Onde $\lambda(\Omega)$ representa os autovalores.

Capítulo 4

Procedimentos das simulações

Diferentes modelos de rotor Laval, suportado por mancais flexíveis e excitados por desbalanceamento da massa do disco, foram simulados e estudados. São eles: rotor rígido, rotor flexível e rotor modelado por elementos finitos. Neste último, serão inseridos modelos de fundação rígida, semi-flexível e flexível, cada uma delas representada por 20 modos próprios de vibrar. As diferenças entre os modelos e suas influências na dinâmica do sistema serão mostradas através de resultados, e discutidas no capítulo 5.

Respostas síncronas direcionais ao desbalanceamento foram calculadas para cada modelo de rotor, com a finalidade de analisar a influência da anisotropia dos mancais e da fundação no comportamento dinâmico do rotor, bem como no aparecimento do modo retrógrado de precessão.

Respostas síncronas em coordenadas cartesianas (horizontal e vertical) foram calculadas para serem comparadas com as respostas em coordenadas direcionais. As diferenças de abordagem da formulação convencional e direcional serão apontadas e discutidas.

Nas simulações apresentadas neste trabalho, foram utilizados dados do rotor, como massa do disco, comprimento e diâmetro do eixo, e coeficientes dos mancais, baseados na bancada de testes do Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR), da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP.

4.1. Rotor rígido

Nesta seção serão apresentados os dados do rotor rígido apoiado sobre mancais flexíveis, e os procedimentos que serão realizados para simular este sistema.

Um rotor rígido e simétrico em relação aos mancais foi modelado pela equação 3.16. A resposta em frequência foi calculada utilizando a equação 3.18. Para calcular a resposta complexa do sistema, foi utilizada a equação 3.20.

Na simulação do rotor rígido, foi atribuída uma massa concentrada no disco (m) de 2,3 kg. A massa desbalanceada (m_{desb}) é de cinco gramas com excentricidade (ϵ) de um milímetro em relação ao centro do disco.

O estudo da influência da anisotropia dos mancais na resposta em frequência foi feito a partir de diversas simulações realizadas para diferentes coeficientes de amortecimento e rigidez dos mancais.

Primeiramente, foi simulado um rotor suportado com mancais isotrópicos. O efeito de isotropia pôde ser simulado utilizando-se coeficientes diretos iguais e coeficientes cruzados nulos ou de sinais opostos.

Posteriores simulações foram realizadas aumentando-se gradativamente a anisotropia dos mancais, variando-se os coeficientes cruzados de amortecimento e rigidez. Com estas simulações verificou-se a variação do modo retrógrado com o aumento da anisotropia. Esta verificação foi realizada por meio de diagramas de resposta em frequência e de Nyquist, utilizado a formulação complexa.

Para o estudo do rotor com mancais isotrópicos, foram utilizados os seguintes coeficientes de rigidez:

$$\begin{aligned}
 k_{yy} &= 259000 \text{ N/m} & k_{zy} &= 0 \text{ N/m} \\
 k_{yz} &= 0 \text{ N/m} & k_{zz} &= 259000 \text{ N/m}
 \end{aligned}$$

Para o estudo do rotor com mancais anisotrópicos, os valores dos coeficientes diretos de rigidez foram mantidos, e os coeficientes cruzados foram variados, como é mostrado na tabela a seguir.

Tabela 4.1: Coeficientes cruzados de rigidez dos mancais utilizados nas simulações

Caso	Kyz (kN/m)	Kzy (kN/m)
Istot.	0	0
1	10	-15
2	10	0
3	10	15
4	10	30
5	10	50
6	10	80
7	30	80
8	80	80
9	100	100
10	150	150
11	200	200

Nos modelos utilizados neste trabalho, os coeficientes de amortecimento dos mancais são proporcionais aos coeficientes de rigidez. O fator de proporcionalidade utilizado foi 5×10^{-4} , ou seja:

$$\begin{aligned}
 c_{yy} &= 0,0005k_{yy} & c_{zy} &= 0,0005k_{zy} \\
 c_{yz} &= 0,0005k_{yz} & c_{zz} &= 0,0005k_{zz}
 \end{aligned}$$

4.2 Rotor flexível – modelo de Krämer (1993)

Os procedimentos de simulação e os dados de massa, amortecimento e rigidez do rotor flexível do modelo Krämer (1993) apoiado sobre mancais flexíveis serão mostrados nesta seção.

Este sistema rotor-mancais flexíveis foi modelado pela equação 3.27, sendo que sua resposta direcional do sistema foi obtida utilizando-se a formulação da equação 3.34.

Os resultados da resposta direcional estão representados no capítulo 5 através de diagramas de resposta em frequência e de Nyquist. Análises serão apresentadas a respeito da influência da anisotropia dos mancais na resposta direcional deste modelo de rotor. Comparações entre este modelo e o rotor rígido também estão no capítulo 5, tendo como base as respostas direcionais de ambos os modelos.

A massa do disco e os dados de desbalanceamento são os mesmos do rotor utilizado para o rotor rígido.

Disco:

- Massa: $m = 2,3kg$
- Massa desbalanceada: $m_{desb} = 0,005kg$
- Excentricidade: $\varepsilon = 0,001m$

Eixo:

- Comprimento: $L = 0,6m$
- Diâmetro: $d = 0,01m$
- Material: aço

- Módulo de elasticidade: $E = 210 \text{ GPa}$

- Rigidez:

$$k = \frac{48EI}{L^3}$$

- Amortecimento: é obtido como uma combinação linear entre a massa e a rigidez do rotor (Cavalca, 1993; Cavalca et al., 2006):

$$c = \alpha m + \beta k$$

Onde:

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 0,002$$

Mancais:

- Os coeficientes de rigidez diretos utilizados foram os mesmos da seção 4.1.

$$k_{yy} = 259000 \text{ N/m} \quad k_{zz} = 259000 \text{ N/m}$$

- Os coeficientes cruzados de rigidez dos mancais utilizados foram os mesmos dos casos isotrópico, 3, 6, 9 e 11, indicados na tabela 4.1.

- O fator de proporcionalidade entre os coeficientes de amortecimento e rigidez é o mesmo da seção 4.1.

$$\begin{aligned} c_{yy} &= 0,0005k_{yy} & c_{zy} &= 0,0005k_{zy} \\ c_{yz} &= 0,0005k_{yz} & c_{zz} &= 0,0005k_{zz} \end{aligned}$$

4.3 Sistema rotor-mancais-fundação modelado por elementos finitos

Esta seção mostra os procedimentos utilizados para a simulação de um sistema rotor-mancais-fundação, cujo equacionamento que descreve sua dinâmica está detalhada no capítulo 3.

Para as simulações, foram utilizados os modelos de fundação rígida, semi-flexível e flexível modelados por Okabe (2007) a partir da bancada de testes do Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR). Através de análise modal, Okabe obteve as matrizes de rigidez e amortecimento desses três modelos de fundação em coordenadas principais, bem como a matriz modal.

Neste trabalho, essas matrizes foram utilizadas e incorporadas no modelo de elementos finitos do sistema rotor-mancais, resultando, assim, num modelo analítico-experimental de um sistema rotor-mancais-fundação com coordenadas mistas (físicas para o rotor e principais para a fundação).

As figuras a seguir ilustram as três configurações de fundação utilizadas neste trabalho. Todas consistem em uma base metálica retangular e as caixas dos mancais.

A fundação rígida é mostrada na figura 4.1. Nesta configuração, a base metálica é suportada suportada por dez colunas rígidas distribuídas simetricamente nas laterais da base.

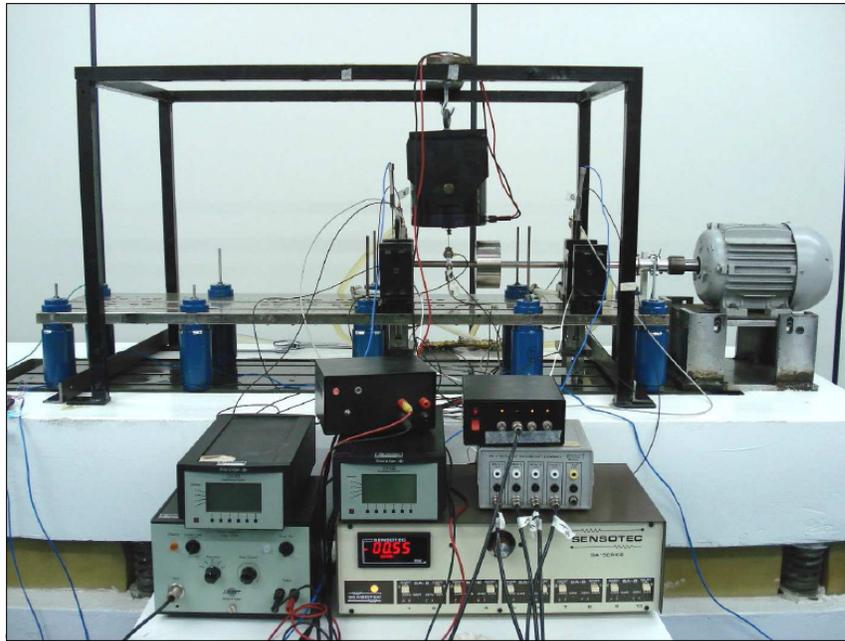


Figura 4.1: Fundação rígida (Okabe, 2007).

A figura 4.2 mostra a fundação flexível, onde a base metálica é suportada por quatro colunas rígidas em suas extremidades.

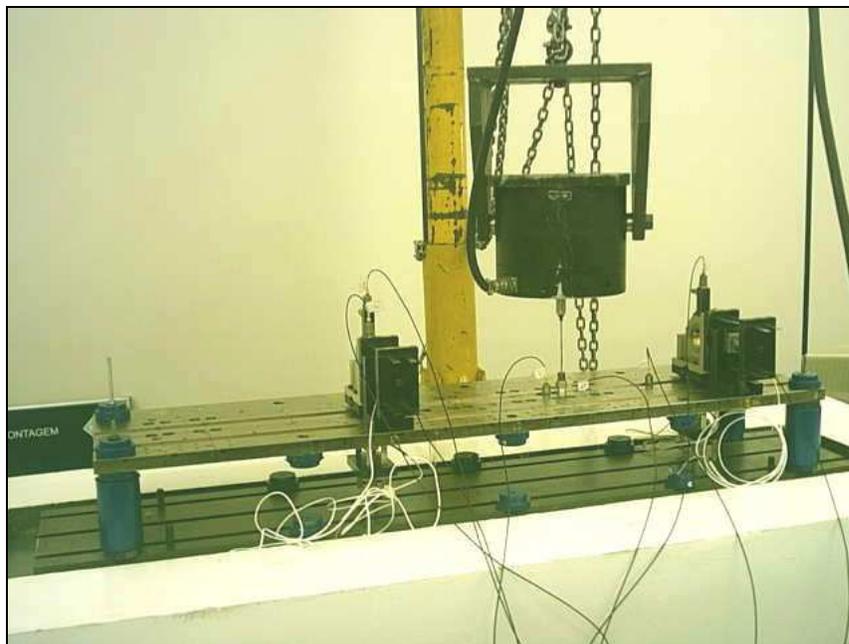


Figura 4.2: Fundação flexível (Okabe, 2007).

Na fundação denominada semi-flexível, mostrada na figura 4.3, a base metálica é suportada por quatro colunas rígidas e seis molas.

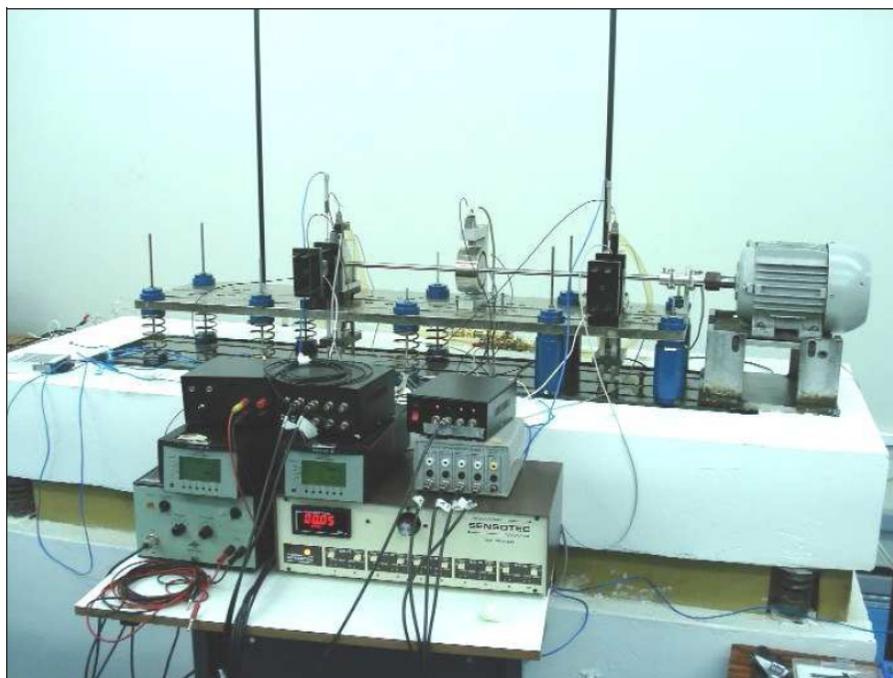


Figura 4.3: Fundação semi-flexível (Okabe, 2007).

Os coeficientes de amortecimento e rigidez dos mancais hidrodinâmicos utilizados para as simulações variam com a rotação do rotor, foram obtidos por Okabe (2006), e estão representados na figura 4.4. Os mancais são cilíndricos com 180 micrometros de folga diametral, com óleo a 25° Celsius. Quando a rotação varia, a pressão hidrodinâmica criada pelo filme de óleo pode ter variações significativas, resultando em diferentes coeficientes diretos e cruzados.

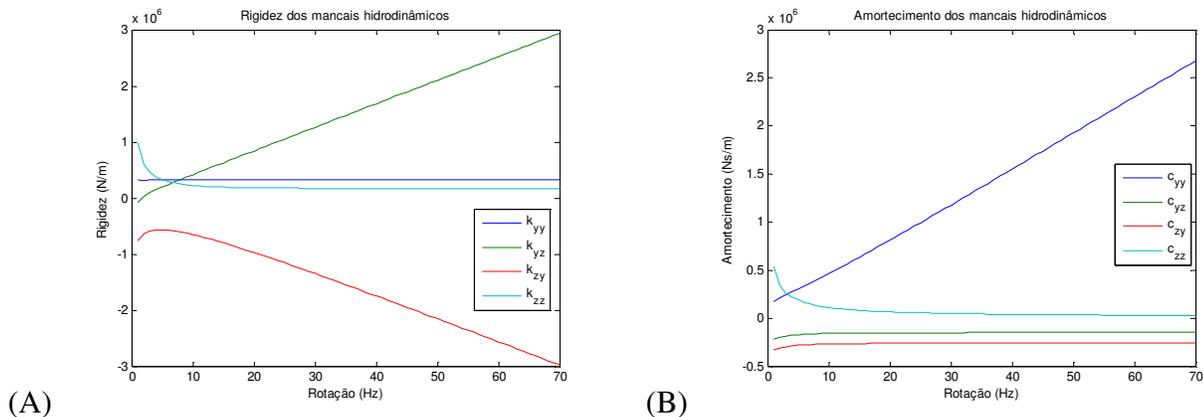


Figura 4.4: Rigidez e amortecimento dos mancais hidrodinâmicos. (A) rigidez , (B) amortecimento.

A equação de movimento do sistema rotor-mancais-fundação é representada pela equação 3.54. Sua resposta em frequência ao desbalanceamento foi obtida utilizando a equação 3.55, enquanto que a resposta direcional do sistema foi calculada através da equação 3.66.

Os elementos de viga utilizados neste modelo são os elementos propostos por Genta (1988), representados na figura 3.6. A matriz de rigidez da viga é calculada em função do fator de cisalhamento. Nas simulações realizadas, foi calculado o fator de cisalhamento de acordo com Cowper (1966).

As simulações foram realizadas para um rotor com eixo discretizado em 27 nós e 26 elementos de viga, sendo quatro elementos iguais de eixo acoplado aos mancais (dois elementos para cada mancal), dois elementos iguais de eixo acoplado ao disco e 20 elementos iguais do restante do eixo. Dados geométricos destes elementos se encontram na Tabela 4.2 e o eixo é ilustrado na figura 4.5.

A porção do eixo na qual está acoplado o disco foi discretizada em três nós e dois elementos. Ao nó central, foi sobreposto o nó do disco. É considerado também o fato de estes três elementos de eixo possuírem uma rigidez ligeiramente maior, devido ao acoplamento com o disco, o que limita sua flexão. Para reproduzir esta rigidez maior, esses elementos foram modelados com diâmetro ligeiramente maior que os demais elementos, tendo em vista que a sua

rigidez é proporcional ao momento de área do eixo. Analogamente, o eixo interno ao mancal é discretizado por elementos de viga com diâmetro maior que os demais elementos do eixo.

Os dados de entrada do rotor, utilizados nas simulações, são mostrados a seguir. Dados de massa e de desbalanceamento residual do disco são os mesmos utilizados nas simulações do rotor rígido (seção 4.1) e flexível (seção 4.2).

O comprimento total do rotor é 62 centímetros. A distância entre os nós dos mancais é de 60 cm.

Tabela 4.2: Dados dos elementos de viga do rotor

Elemento de viga do eixo	Diâmetro [cm]	Comprimento [cm]
Mancal	3,1	1,0
Eixo	1,2	2,57
Disco	2,0	2,3

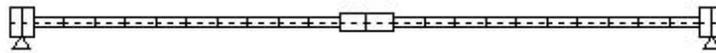


Figura 4.5: Eixo do rotor Laval

Disco:

- Massa: $m = 2,3kg$

- Massa desbalanceada: $m_{desb} = 0,005kg$

- Excentricidade: $\varepsilon = 0,001m$

Eixo:

- Comprimento: $L=0,6m$

- Diâmetro: $d=0,01m$

- Material: aço

- Módulo de elasticidade: $E=210\text{ GPa}$

- Densidade: $\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$;

- Amortecimento: é obtido como uma combinação linear entre a massa e a rigidez do rotor (Cavalca, 1993; Cavalca et al., 2006):

$$c = \alpha m + \beta k$$

Onde:

$$\alpha = 0, \beta = 0,002$$

Mancais:

- Nas simulações foram utilizados: mancais isotrópicos com coeficientes semelhantes aos utilizados na seção 4.1; mancais anisotrópicos do caso 3 da tabela 4.1; e mancais hidrodinâmicos com os coeficientes mostrados nos gráficos da figura 4.4.

Capítulo 5

Resultados e discussões

São apresentadas neste capítulo as respostas síncronas ao desbalanceamento em coordenadas direcionais e cartesianas, obtidas por simulação numérica a partir dos modelos matemáticos descritos no capítulo 3. Foram aplicados os procedimentos relatados no capítulo 4 para realização das simulações numéricas, de forma a inserir, seqüencialmente, os efeitos dos mancais flexíveis, do rotor flexível e da estrutura de fundação flexível no sistema rotativo.

O objetivo principal desta seqüência de simulações é avaliar os efeitos de anisotropia, devido aos diferentes componentes do sistema, nos modos operacionais diretos e retrógrados da máquina rotativa.

5.1. Rotor rígido

O modelo de rotor rígido apoiado em mancais flexíveis, modelado pela equação 3.16, foi simulado, com os dados de massa, amortecimento, rigidez e desbalanceamento descritos na seção 4.1. Foram desenvolvidos algoritmos para o cálculo das respostas em coordenadas cartesianas e direcionais. Os resultados são representados, nesta seção, através de diagramas de amplitude em frequência e diagrama de Nyquist.

São apresentados aqui os resultados da simulação numérica de um rotor rígido com mancais isotrópicos e anisotrópicos, dos casos 1 a 11 da tabela 4.1. As respostas ao desbalanceamento serão comparadas e análises da influência da anisotropia dos mancais na dinâmica do rotor serão realizadas.

A figura 5.1 apresenta os resultados da simulação do rotor rígido suportado por mancais isotrópicos e também anisotrópicos dos casos 1 a 6. Os gráficos das figuras 5.1(A) e 5.1(B) mostram que as anisotropias consideradas nos mancais pouco variam a resposta direta do disco. As figuras 5.1(C) e 5.1(D), no entanto, mostram que a resposta do modo retrógrado tem uma variação mais expressiva.

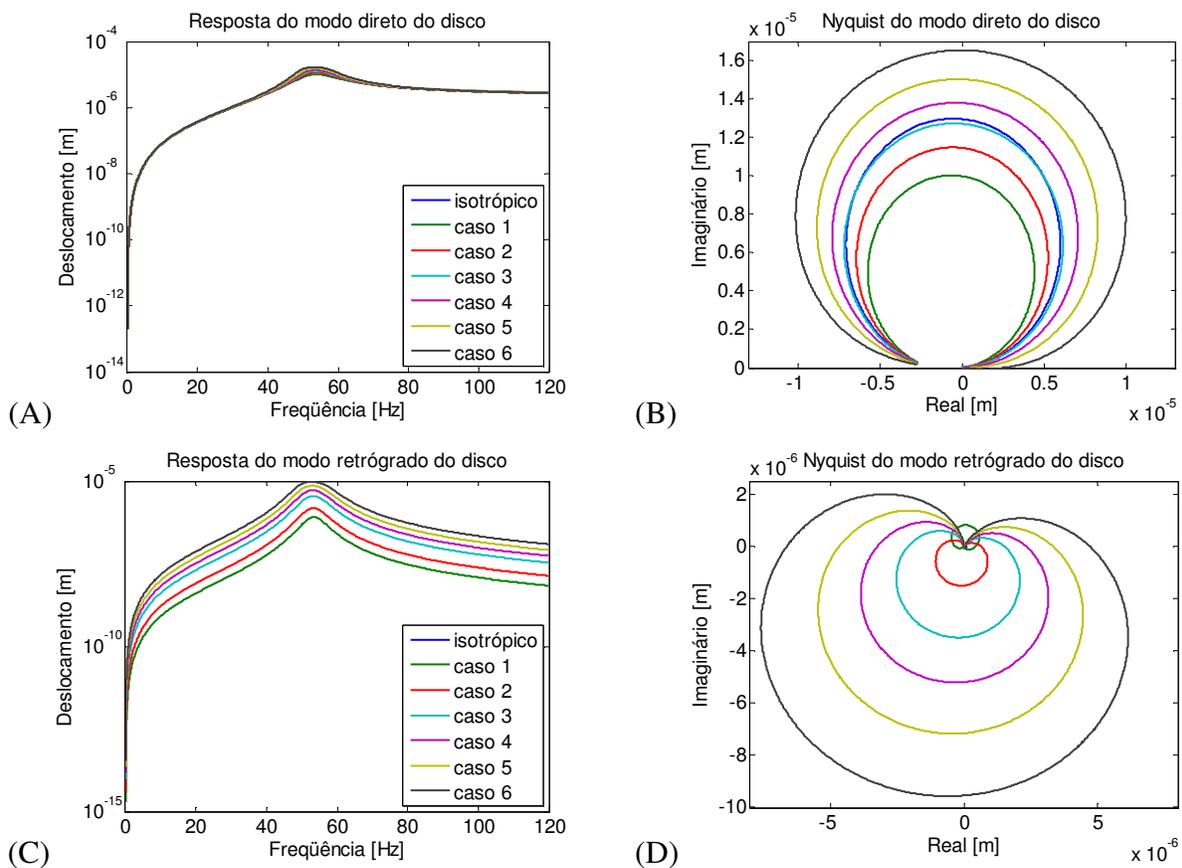


Figura 5.1: Resposta direcional do rotor rígido. (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.

Percebe-se que a resposta do modo retrógrado do rotor com mancais isotrópicos (curva azul) não aparece nos diagramas, indicando que, neste caso, a amplitude é nula. É possível notar também que, quanto maior a anisotropia, maior a resposta do modo retrógrado. Do caso 1 para o caso 6, o grau de anisotropia nos mancais cresce, assim como a amplitude da resposta retrógrada. Conclui-se que, neste modelo, a anisotropia dos mancais é a única responsável pelo aparecimento da resposta retrógrada.

Ambas as respostas direta e retrógrada, para todos os casos, apresentam pico de amplitude em torno de 53 Hz. O valor máximo para o pico de amplitude da resposta direta ocorre para o caso 6, com maior anisotropia. Os picos de amplitude da resposta retrógrada do rotor com anisotropia baixa nos mancais, como no caso 1, apresentam amplitude reduzida, devido à baixa anisotropia, enquanto que a resposta do caso 6 é significativa, indicando um grau de anisotropia considerável. Entretanto, em todos os casos, a amplitude do modo retrógrado é inferior à do modo direto em toda a faixa de frequência considerada. Conseqüentemente, a precessão resultante é direta.

As respostas direcionais do rotor com mancais isotrópicos e do rotor com anisotropia nos mancais mais elevada (casos 6 a 11) podem ser vistas na figura 5.2.

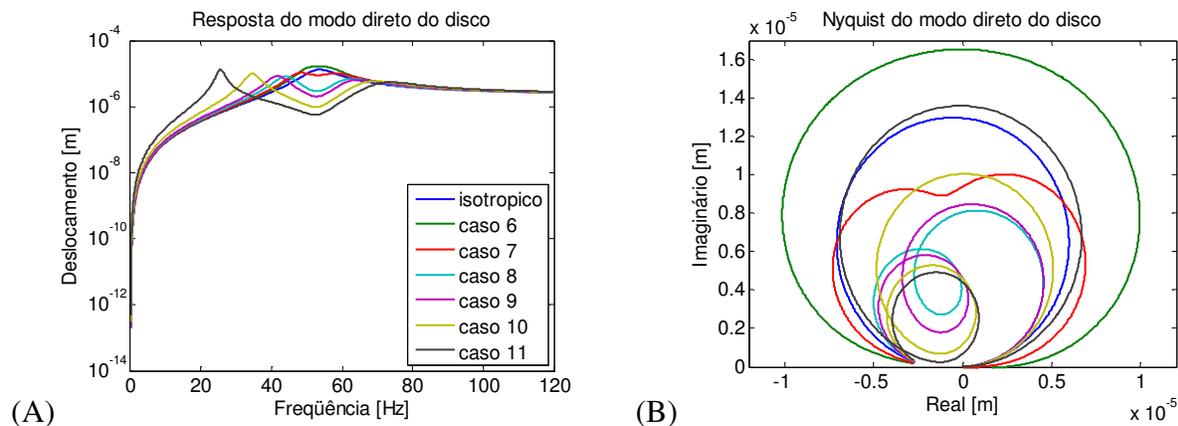


Figura 5.2: Resposta direcional do rotor rígido. (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.

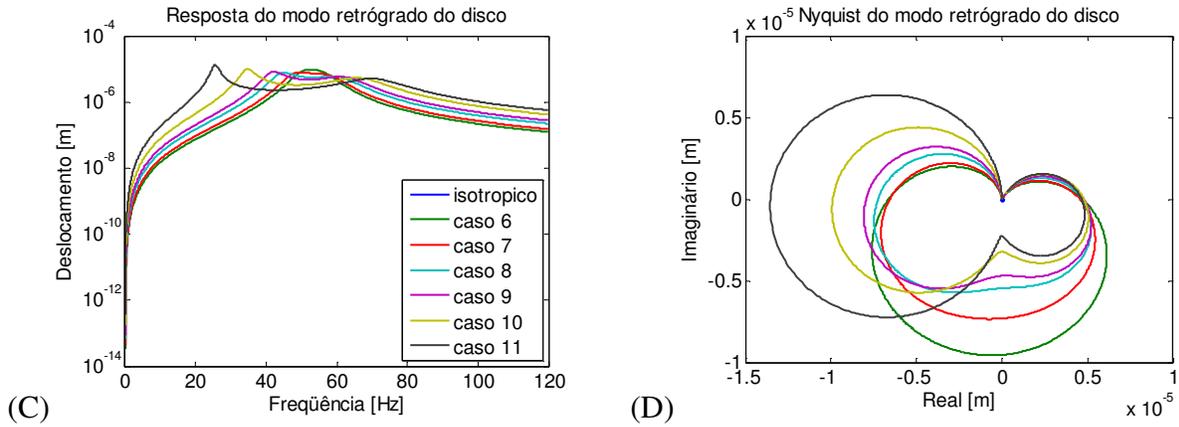


Figura 5.2 (continuação).

Com a anisotropia muito elevada, as respostas apresentam dois picos de amplitude. Rigidezes cruzadas maiores nas duas direções forçam o aparecimento de dois picos de ressonância, desacoplando os modos horizontal e vertical. As figuras 5.2 (A) e 5.2 (B) evidenciam que, quanto maior a anisotropia dos mancais, mais definidos são os dois modos. Estes podem ser vistos tanto nos picos de amplitude das respostas em frequência quanto nos diagramas de Nyquist da figura 5.2.

Para os casos de anisotropia do 1 ao 7, a amplitude do modo direto é superior à do modo retrógrado em toda a faixa de frequência considerada. Conseqüentemente, a precessão resultante é direta. As respostas direta e retrógrada dos casos 6 e 7 são comparadas na figura a seguir e a predominância do modo direto pode ser observada.

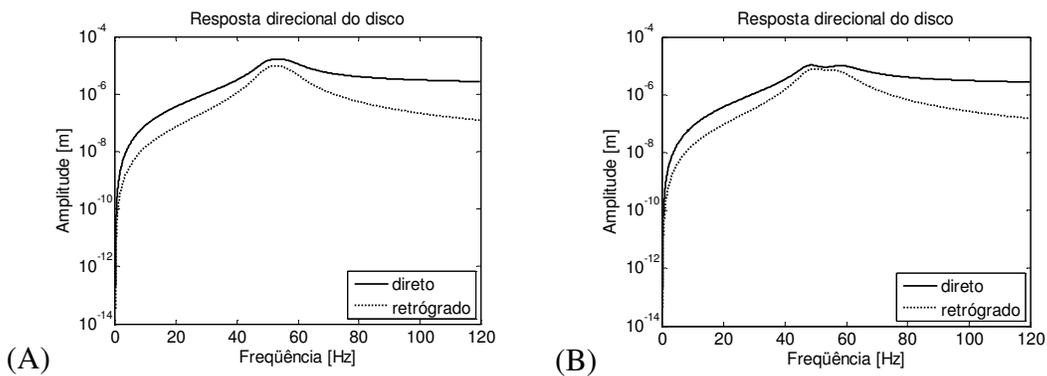


Figura 5.3: Resposta direcional do rotor rígido apoiado sobre mancais anisotrópicos (A) do caso 6 e (B) do caso 7 (tabela 4.1).

Já nos casos de maior anisotropia (8, 9, 10 e 11), o comportamento das respostas direcionais é distinto dos casos anteriores. A figura 5.4 ilustra as respostas direta e retrógrada do rotor com os mancais do caso 11.

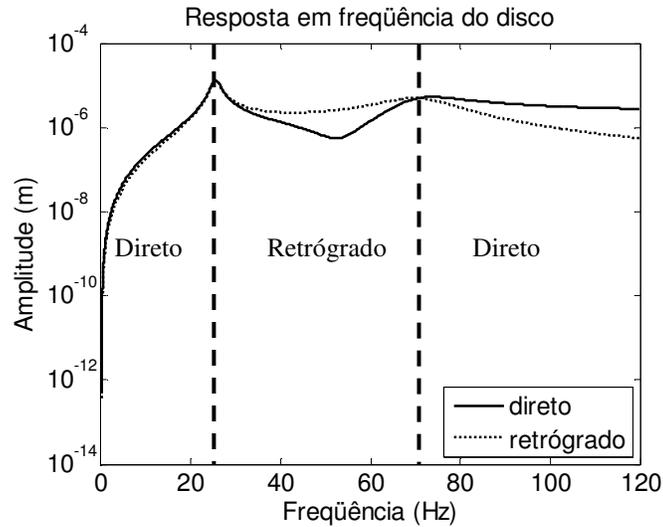


Figura 5.4: Resposta direcional do rotor rígido apoiado sobre mancais anisotrópicos do caso 11.

No caso 11, que é o de maior anisotropia, a amplitude da resposta retrógrada apresenta valores muito próximos aos da resposta direta, que chega a ser superada entre 25,6 e 73 Hz, intervalo este localizado entre as freqüências dos dois picos.

Este comportamento em particular é observado para o caso de rotor rígido suportado por mancais ortotrópicos (coeficientes diretos diferentes entre si e coeficientes cruzados nulos) sem amortecimento, como mostrado por Lee (1993). Para reproduzir este modelo, foi simulado um rotor rígido com mancais ortotrópicos com os seguintes dados de rigidez e amortecimento:

$$\begin{aligned}
 k_{yy} &= 259000 \text{ N/m} & k_{yz} &= k_{zy} = 0 \text{ N/m} \\
 k_{zz} &= 2590 \text{ N/m} & c_{yy} &= c_{zz} = c_{yz} = c_{zy} = 0 \text{ N/m}
 \end{aligned}$$

A figura 5.5 expõe os resultados da resposta em coordenadas cartesianas e direcionais deste modelo.

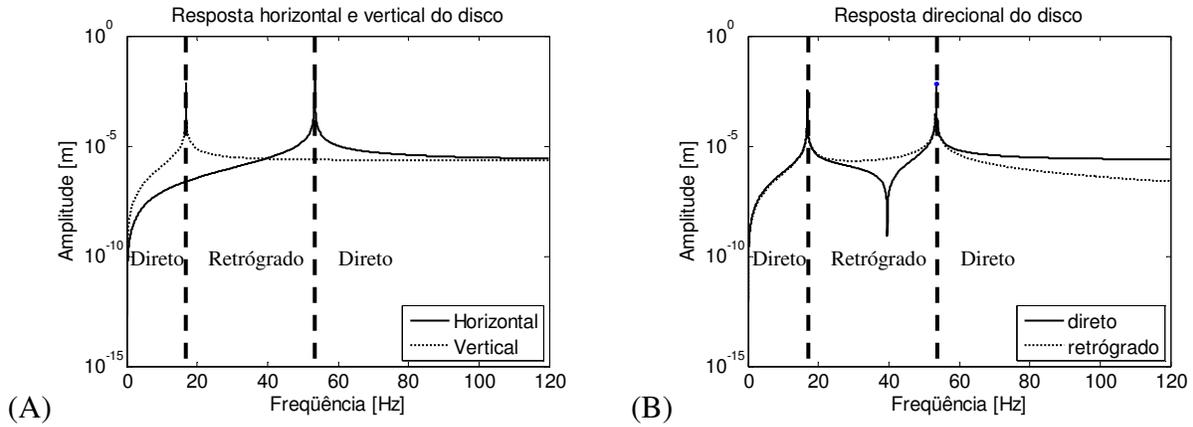


Figura 5.5: Resposta em coordenadas cartesianas e direcionais do rotor rígido apoiado sobre molas ortotrópicas. (A) cartesianas, (B) direcionais.

A figura 5.5 mostra que antes da frequência natural do deslocamento o modo direto apresenta amplitude superior à do modo retrógrado. portanto a precessão resultante do disco é direta nesta faixa. Quando a rotação ultrapassa a primeira frequência natural, ocorre inversão de fase na vibração do rotor nas duas direções, e o modo predominante passa a ser o retrógrado. Quando a segunda frequência natural é atingida, o rotor volta a vibrar em fase nas duas direções, e o modo direto volta a superar o retrógrado. Estas conclusões são as mesmas observadas e demonstradas por Lee (1993) e traduzidas pela equação (3.26).

$$\left| \frac{r_f}{r_b} \right| = \begin{cases} > 1; \Omega < \omega_{nz} < \omega_{ny} \\ < 1; \omega_{nz} < \Omega < \omega_{ny} \\ > 1; \omega_{nz} < \omega_{ny} < \Omega \end{cases} \quad (3.26)$$

Os gráficos da figura 5.5 mostram a diferença de abordagem entre a formulação em coordenadas cartesianas e direcionais. A resposta em coordenadas cartesianas (figura 5.5 (A)) mostra a amplitude dos deslocamentos horizontal e vertical do rotor. A formulação direcional permite obter a resposta do modo retrógrado e direto, e separá-los no domínio da frequência. Esta abordagem permite avaliar os efeitos dos modos de precessão na dinâmica do rotor.

5.2 Rotor flexível – modelo de Krämer (1993)

Nesta seção, serão apresentados os resultados da simulação de rotor flexível apoiado em mancais flexíveis, segundo o modelo de Krämer (1993). A equação 3.27 é a equação de movimento deste sistema.

Cálculos da resposta direcional ao desbalanceamento deste modelo foram efetuados com dados de massa, amortecimento, rigidez e desbalanceamento definidos na seção 4.2. Diagramas de amplitude em frequência e de Nyquist serão mostrados e comentados nesta seção.

Para simular este modelo de sistema rotativo, foram usados apenas alguns casos de anisotropia citados na tabela 4.1. Os resultados são ilustrados na figura 5.6.

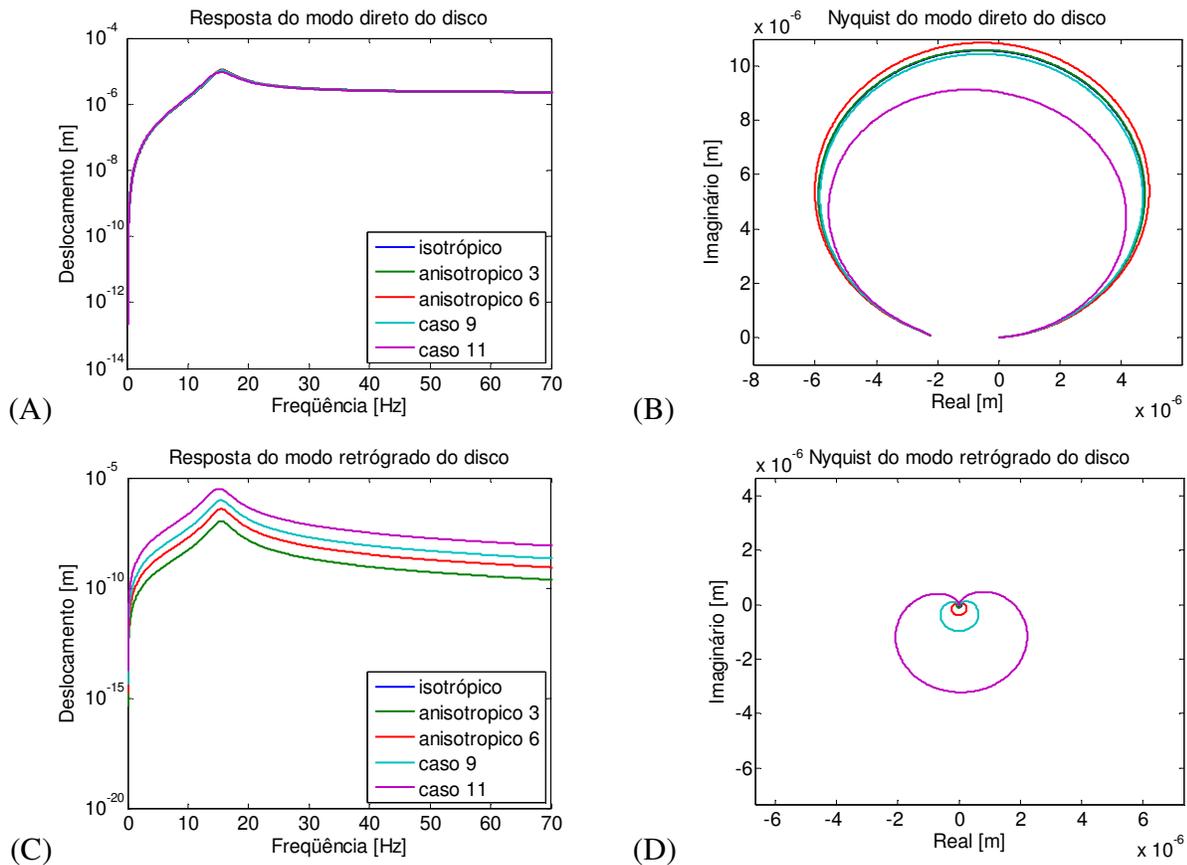


Figura 5.6: Resposta direcional do rotor flexível do modelo de Krämer (1993). (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.

As amplitudes das respostas diretas do rotor flexível praticamente não variam com a anisotropia nos coeficientes cruzados dos mancais. No entanto, a amplitude do modo retrógrado amplia com o aumento da anisotropia.

Comparações entre o modelo de rotor rígido e de rotor flexível podem ser feitas observando-se as figuras 5.1, 5.2 e 5.6. A frequência do pico de amplitude, em todos os casos do rotor flexível, está próxima a 15,5 Hz, correspondente ao modo de flexão do eixo, muito abaixo dos 53 Hz da resposta do rotor rígido. O fato da frequência de ressonância do rotor flexível ser mais baixa indica que a flexibilidade proporcionada pelo eixo flexível é superior à flexibilidade nos mancais. Deve-se destacar que a rigidez dos mancais é a mesma para os modelos de rotor rígido e flexível. Deste modo, o efeito da interação entre o disco e o eixo flexível sobrepõe o da interação entre rotor e mancais, que é a única interação que ocorre no rotor rígido. O modo resultante da interação entre o rotor e os mancais flexíveis, que foi observado na resposta do rotor rígido, embora excitado pelo desbalanceamento, não aparece na resposta do rotor flexível.

As amplitudes da resposta direta nos dois modelos de rotor, rígido (figura 5.1) e flexível (figura 5.6), apresentam valores próximos na região do pico de ressonância. No entanto, devido à interação entre o rotor e os mancais, predominante no rotor rígido, a resposta do modo retrógrado deste modelo é muito mais evidente que no rotor flexível.

Nos casos 9 e 11, na figura 5.6, o elevado grau de anisotropia não foi suficiente para a separação dos modos horizontal e vertical, como no caso do rotor rígido. É mais uma evidência de que o efeito da flexibilidade do eixo e sua interação com o disco sobrepõem o efeito de alta rigidez e amortecimento dos coeficientes cruzados dos mancais, e a única frequência de ressonância que aparece é a de flexão do eixo, sem desacoplamento algum dos modos.

Em todos os casos, o modo direto predomina sobre o modo retrógrado de precessão em toda a faixa de frequência considerada. A figura a seguir mostra a comparação entre a resposta direta e retrógrada do rotor do caso de maior anisotropia (caso 11). Pode-se observar que a amplitude do modo direto é sempre superior à do modo retrógrado. Até o pico de ressonância, a diferença de

amplitude se atenua. Contudo, após essa região, essa diferença aumenta com o aumento da rotação do rotor.

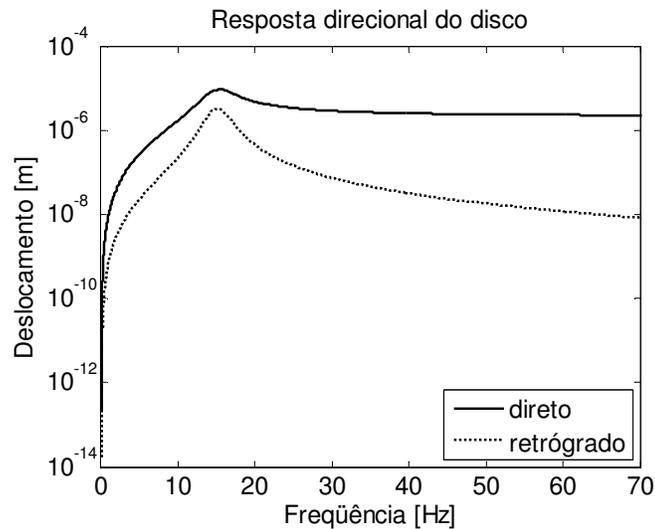


Figura 5.7: Resposta direcional do rotor flexível do modelo de Krämer apoiado sobre mancais anisotrópicos do caso 11 (tabela 4.1).

5.3 Sistema rotor-mancais-fundação modelado por elementos finitos

Nesta seção, foram calculadas as respostas em coordenadas cartesianas e direcionais de um sistema rotor-mancais e rotor-mancais-fundação, as quais estão representadas em forma de diagramas de amplitude em frequência e de Nyquist. A equação de movimento deste sistema é a equação 3.54.

O eixo foi modelado por elementos finitos. Os mancais foram representados por seus coeficientes de amortecimento e rigidez. O disco foi modelado por matrizes de inércia e amortecimento. Os dados utilizados para as simulações estão na seção 4.3.

Ao sistema rotor-mancais, foram incorporados três modelos de fundação configurados por Okabe (2007) e descritos neste trabalho na seção 4.3. Os modelos são: fundação rígida, semi-flexível e flexível. Okabe realizou a análise modal destes modelos de fundação, obtendo

parâmetros modais da estrutura. Matrizes de massa, amortecimento, rigidez e matriz modal, em coordenadas principais, para os 20 principais modos de cada modelo de fundação, foram obtidas. Estas matrizes foram utilizadas neste trabalho, incorporando a fundação ao sistema rotor-mancais. O modelo resultante é de um sistema rotor-mancais-fundação em coordenadas mistas, sendo físicas para o rotor e principais para a fundação, devidamente adaptadas para coordenadas direcionais, conforme equação 3.66.

As respostas do sistema rotor-mancais e rotor-mancais-fundação, com mancais isotrópicos, anisotrópicos (caso 3 da tabela 4.1) e hidrodinâmicos, serão mostradas e analisadas neste capítulo.

A figura 5.8 mostra a resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos e com mancais isotrópicos.

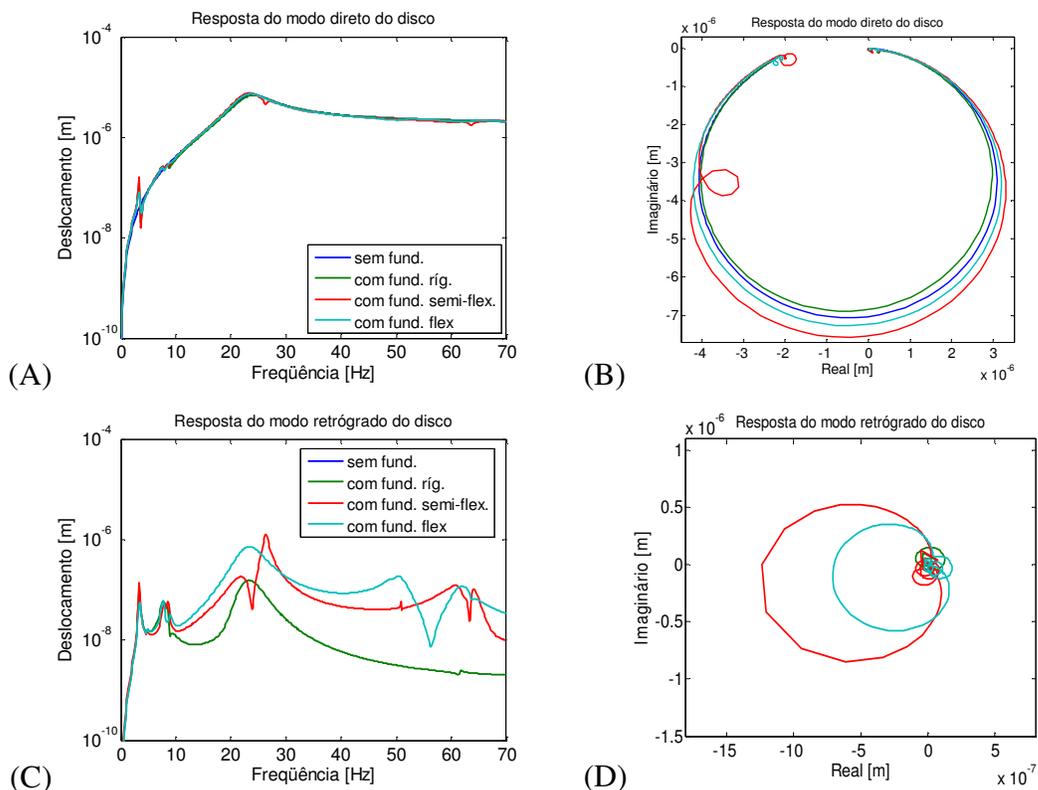


Figura 5.8: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos apoiado sobre mancais isotrópicos. (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.

O pico de ressonância ocorre em torno de 23,3 Hz.

A resposta direta do disco do rotor para os três tipos de fundação têm amplitudes parecidas. O diagrama de Nyquist da figura 5.8 (B) mostra que, na região de ressonância, o disco do rotor com fundação semi-flexível apresenta maiores amplitudes, em módulo. Observa-se também neste diagrama que a resposta do disco do rotor com fundação semi-flexível apresenta pico de ressonância com uma pequena distorção, correspondente à interferência da fundação

As figuras 5.8(C) e 5.8 (D) indicam que a resposta retrógrada do disco do rotor sem flexibilidade na fundação e com mancais isotrópicos é nula. No entanto, o rotor com flexibilidade na fundação apresenta resposta do modo retrógrado. Pode-se concluir que a fundação introduz anisotropia ao sistema.

Fica evidente também que, ao se inserir o efeito da flexibilidade na fundação, aparecem modos de amplitudes e frequências reduzidas. Nas figuras 5.8 (A) e 5.8 (C), notam-se pequenos picos de amplitude entre 0 e 10 Hz, correspondentes a modos de corpo rígido da fundação (Okabe, 2007). Esses modos podem ser observados também nos diagramas de Nyquist, representados por pequenas distorções ou círculos de amplitude reduzida, próximos ao ponto de origem, no início da curva.

Em torno de 60 Hz aparecem alguns modos de flexão da fundação (Okabe, 2007), também de baixa amplitude, da resposta do disco do rotor com fundação semi-flexível e flexível, também visíveis no diagrama de Nyquist em forma de pequenas distorções.

A resposta do modo direto pode ser comparada com a do retrógrado através do diagrama da figura 5.9 a seguir.

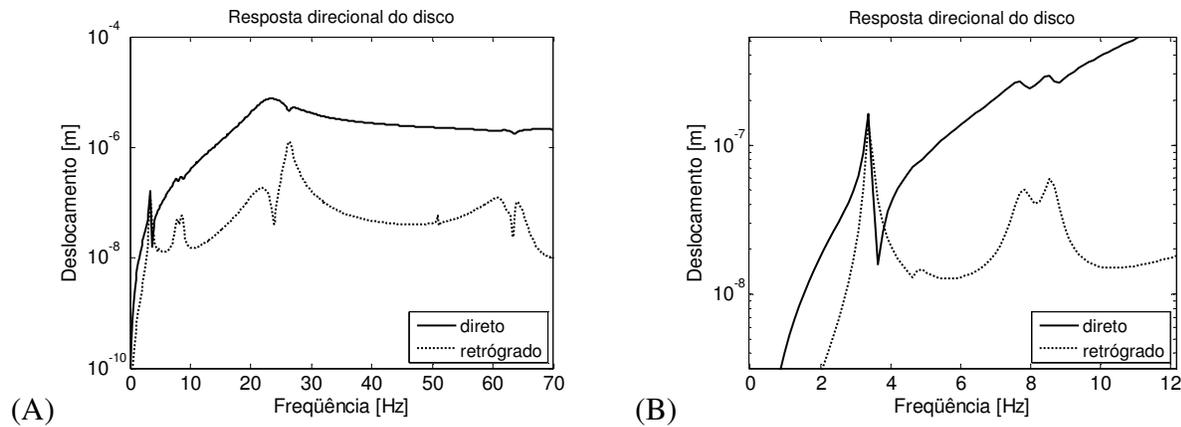


Figura 5.9: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos, com fundação semi-flexível, apoiado sobre mancais isotrópicos. (A) RF direcional, (B) detalhe da RF direcional.

A figura acima mostra a resposta direcional do rotor com fundação semi-flexível, que é a configuração que apresentou a maior amplitude do modo retrógrado, ou seja, de maior anisotropia, entre os casos estudados nesta seção, com mancais isotrópicos. Observa-se no diagrama da figura 5.9 (A) que o modo direto predomina sobre o retrógrado em quase a totalidade da faixa de frequência. A figura 5.9 (B) apresenta um detalhe ampliado da resposta. É possível notar que, após o pico de frequência próximo a 3 Hz, correspondente ao modo de corpo rígido da fundação, a vibração do rotor inverte de fase e a precessão passa a ser retrógrada, em um intervalo de frequência muito reduzido (menos de 0,5 Hz). Nesta região, a diferença de amplitude entre a resposta direta e retrógrada é também pequena. Portanto, a fundação acrescenta anisotropia ao sistema, mas, ainda assim, nos casos estudados, não é suficiente para a predominância do modo retrógrado em um intervalo de frequência significativo. Não obstante, é uma faixa de frequência que deve ser evitada.

A resposta em coordenadas cartesianas do sistema rotor-mancais e rotor-mancais-fundação com mancais isotrópicos pode ser vista na figura 5.10 a seguir.

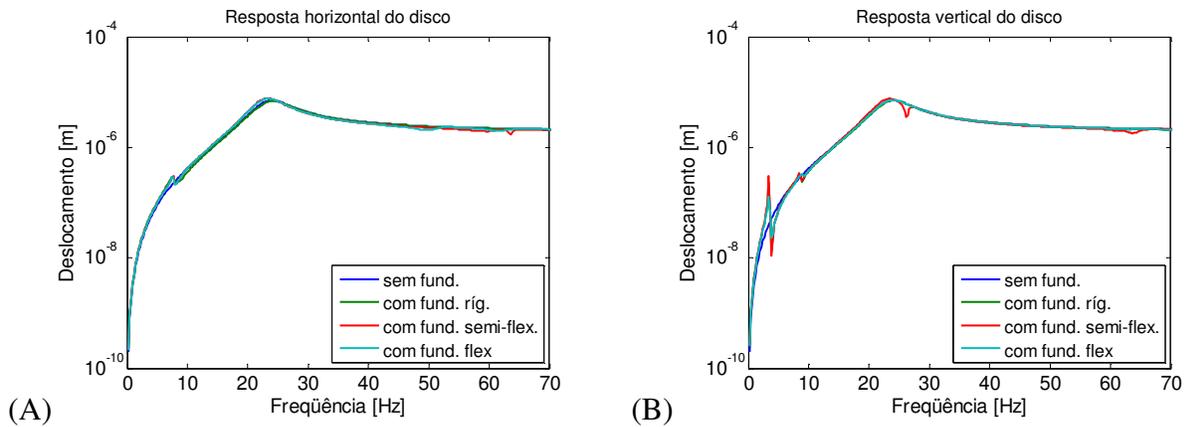


Figura 5.10: Resposta em coordenadas cartesianas do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos apoiado por mancais isotrópicos. (A) resposta horizontal, (B) resposta vertical.

A resposta vertical do rotor com fundação, disposta na figura 5.10 (B), apresenta alguns modos que não são evidentes na resposta horizontal, figura 5.10 (A). A resposta do rotor com fundação semi-flexível apresenta um modo a mais no pico de frequência próximo a 25 Hz, vista na resposta vertical. Estas análises indicam que os principais modos da fundação interferem no deslocamento vertical do rotor.

A resposta em coordenadas cartesianas tem sua importância para analisar a resposta em frequência nas direções horizontal e vertical. Portanto sua abordagem se diverge da resposta direcional (ou complexa) que tem também sua importância. Ela permite separar a resposta da precessão direta da resposta da precessão retrógrada no domínio da frequência. Essa diferença de abordagem é observada comparando-se a resposta direcional da figura 5.8 e a resposta em coordenadas cartesianas da figura 5.10.

A resposta direcional do mancal é ilustrada na figura 5.11.

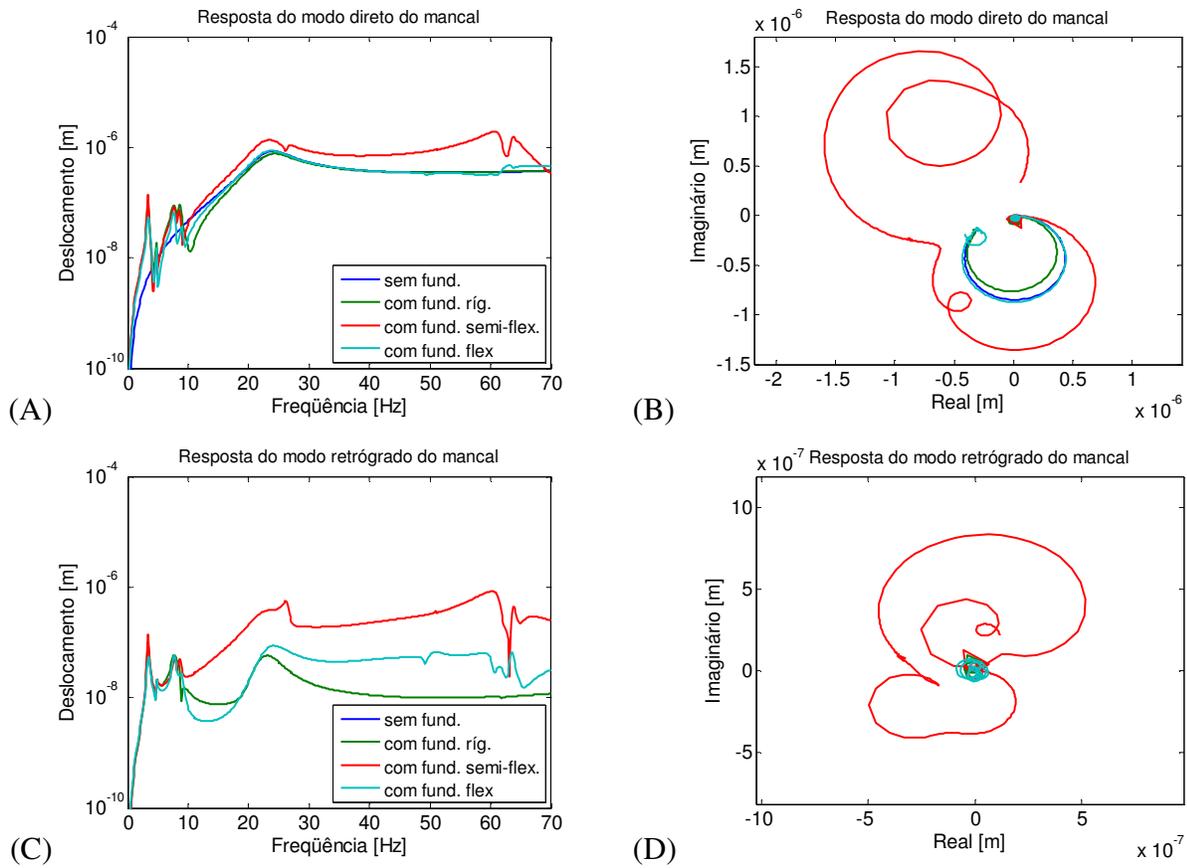


Figura 5.11: Resposta direcional do mancal isotrópico do rotor flexível modelado por elementos finitos. (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.

A resposta do mancal também apresenta pico de ressonância em torno de 23,3 Hz, além de modos de corpo rígido de baixa amplitude, resultantes da interferência da flexibilidade da fundação, entre 0 e 10 Hz e modos de flexão perto de 61 Hz, exceto para o rotor com fundação rígida.

A resposta direcional do mancal, especialmente do rotor com fundação semi-flexível, sofre maior influência da fundação do que a resposta do disco. O eixo dentro do mancal (journal) está conectado de forma direta com a fundação através do filme de óleo, enquanto que o disco está separado do journal pelo eixo. Por isso, observa-se um maior efeito da fundação no journal

(munhão). No caso do rotor com fundação semi-flexível, a interferência da fundação resulta em um modo de flexão a 61 Hz, com amplitude maior que a do modo de 23,3 Hz do rotor.

Esse fato fica evidente também no diagrama de Nyquist, da figura 5.11 (B). Na resposta direta, o diagrama de Nyquist do mancal do rotor com fundação semi-flexível mostra que o segundo modo é maior que o primeiro. Ambos os modos apresentam distorções de amplitude consideráveis, também visíveis no diagrama da figura 5.11 (A).

É possível perceber nas figuras 5.11 (C) e 5.11 (D) que a resposta retrógrada do rotor com flexibilidade na fundação apresenta maior quantidade de modos, ou sofrem maior influência da fundação, especialmente entre 0 e 10 Hz. O modo retrógrado da fundação semi-flexível predomina em quase toda a faixa de frequência, o que leva à conclusão de que este modelo de fundação é o que mais introduz anisotropia ao sistema.

Observa-se na figura 5.12 a seguir que, assim como o disco, os mancais apresentam precessão predominantemente direta em quase toda a faixa de frequência, salvo uma faixa discreta de frequência próxima a 3 Hz.

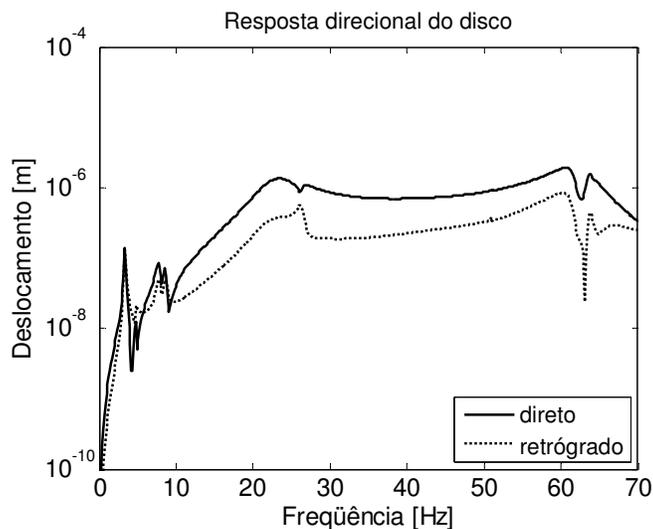


Figura 5.12: Resposta direcional do mancal isotrópico do rotor flexível modelado por elementos finitos, com fundação semi-flexível.

Os diagramas de Campbell do rotor com mancais isotrópicos, para todos os modelos de fundação, estão dispostos na figura 5.13.

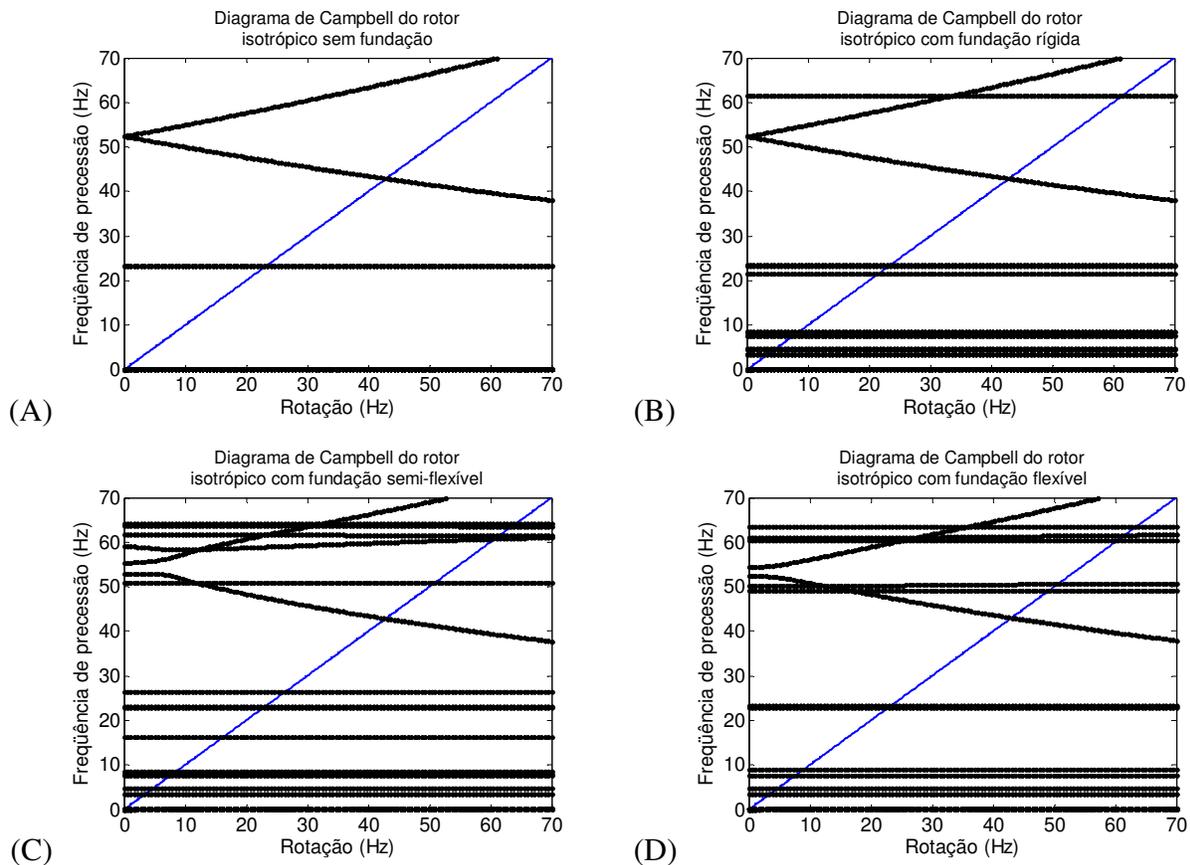


Figura 5.13: Diagrama de Campbell do rotor flexível modelado por elementos finitos apoiado sobre mancais isotrópicos. (A) rotor sem flexibilidade na fundação, (B) rotor com fundação rígida, (C) rotor com fundação semi-flexível, (D) rotor com fundação flexível.

Os diagramas mostrados na figura 5.13 apresentam um autovalor em comum, 23,3 Hz, constante em toda a faixa de frequência. Este autovalor é correspondente ao pico de ressonância do rotor observado nas figuras 5.8 a 5.12.

Dois autovalores de aproximadamente 53 Hz, quando o rotor está estático, divergem na medida em que a rotação cresce. Essa divergência ocorre devido ao efeito da matriz giroscópica do disco, disposto na equação 3.30. A região de ressonância do autovalor que decresce com a rotação, partindo de 53 Hz, ocorre a 43 Hz. No entanto, embora excitado pelo desbalanceamento,

este modo não aparece no diagrama de amplitude em coordenadas direcionais e cartesianas do rotor, nas figuras 5.8 a 5.12, pois é sobreposto pelo modo de flexão do rotor em 23,3 Hz.

Este autovalor de 53 Hz corresponde à frequência do pico de ressonância do rotor rígido, ilustrado na figura 5.1. Essa frequência decorre da interação entre o rotor e os mancais flexíveis. Contudo, mais uma vez a interação entre o disco e o eixo flexível sobrepõe essa interação rotor-mancais, e a região de ressonância de 53 Hz não aparece na resposta do rotor.

As regiões de ressonância do rotor com flexibilidade na fundação, correspondentes aos modos de corpo rígido entre 0 e 10 Hz e modos de flexão próximos a 61 Hz, visíveis nos diagramas das figuras 5.8 a 5.12, aparecem também nos diagramas de Campbell, nas figuras 5.13 (B), (C) e (D).

Os diagramas de Campbell mostram que o rotor com fundação semi-flexível apresenta mais autovalores que os demais, o que pode indicar mais regiões de ressonância, ou ainda, a presença de maior quantidade de modos, o que é confirmado pelas figuras 5.8 a 5.12. Este modelo de fundação acrescenta onze autovalores ao sistema, enquanto que a fundação flexível acrescenta nove, e a rígida, seis.

A figura 5.14 apresenta as respostas do rotor suportado por mancais anisotrópicos, com valores correspondentes ao caso 3 da tabela 4.1.

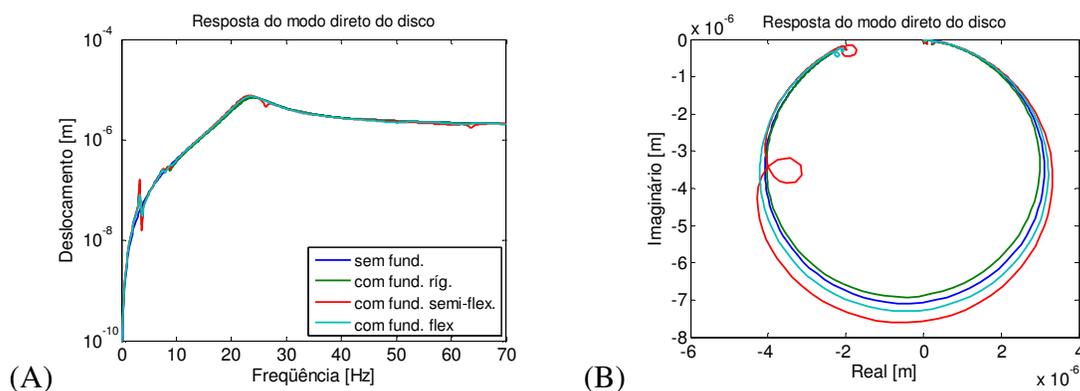


Figura 5.14: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos com mancais anisotrópicos (caso 3). (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.

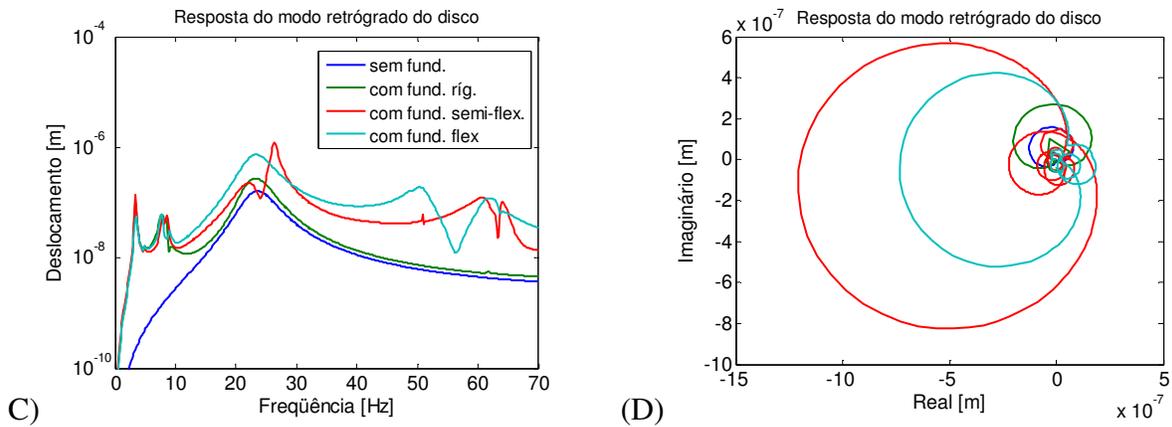


Figura 5.14 (continuação).

A anisotropia nos mancais pouco interfere na resposta direcional do rotor com flexibilidade na fundação, que é muito similar à resposta do rotor com mancais isotrópicos, ilustrado na figura 5.8. Contudo a resposta do modo retrógrado do rotor sem flexibilidade na fundação, desta vez, não é nula, como se pode notar na figura 5.14 (C). No entanto, a amplitude deste modo é menor que a amplitude da resposta do modo retrógrado do rotor com fundação rígida, semi-flexível e flexível.

A predominância do modo direto em quase toda a faixa de frequência ocorre também para o rotor com mancais anisotrópicos, como mostra a figura 5.15 a seguir.

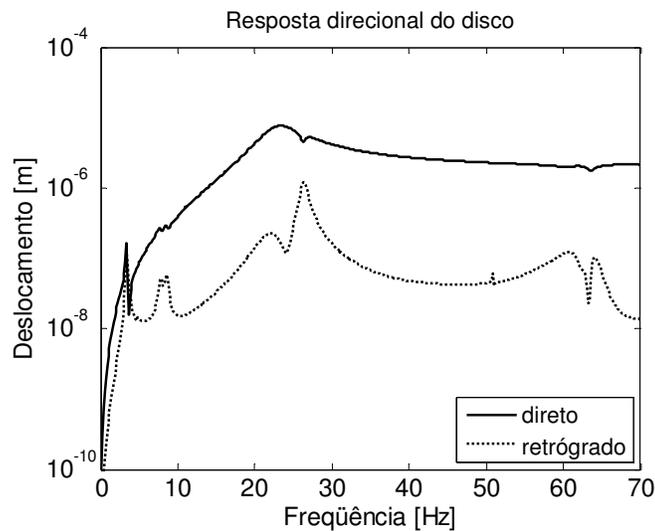


Figura 5.15: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos, com fundação semi-flexível, apoiado sobre mancais anisotrópicos do caso 3.

A resposta dos mancais é ilustrada na figura 5.16 a seguir. A resposta direta dos mancais anisotrópicos (caso 3 da tabela 4.1) é muito semelhante à resposta dos mancais isotrópicos, mostrada na figura 5.11.

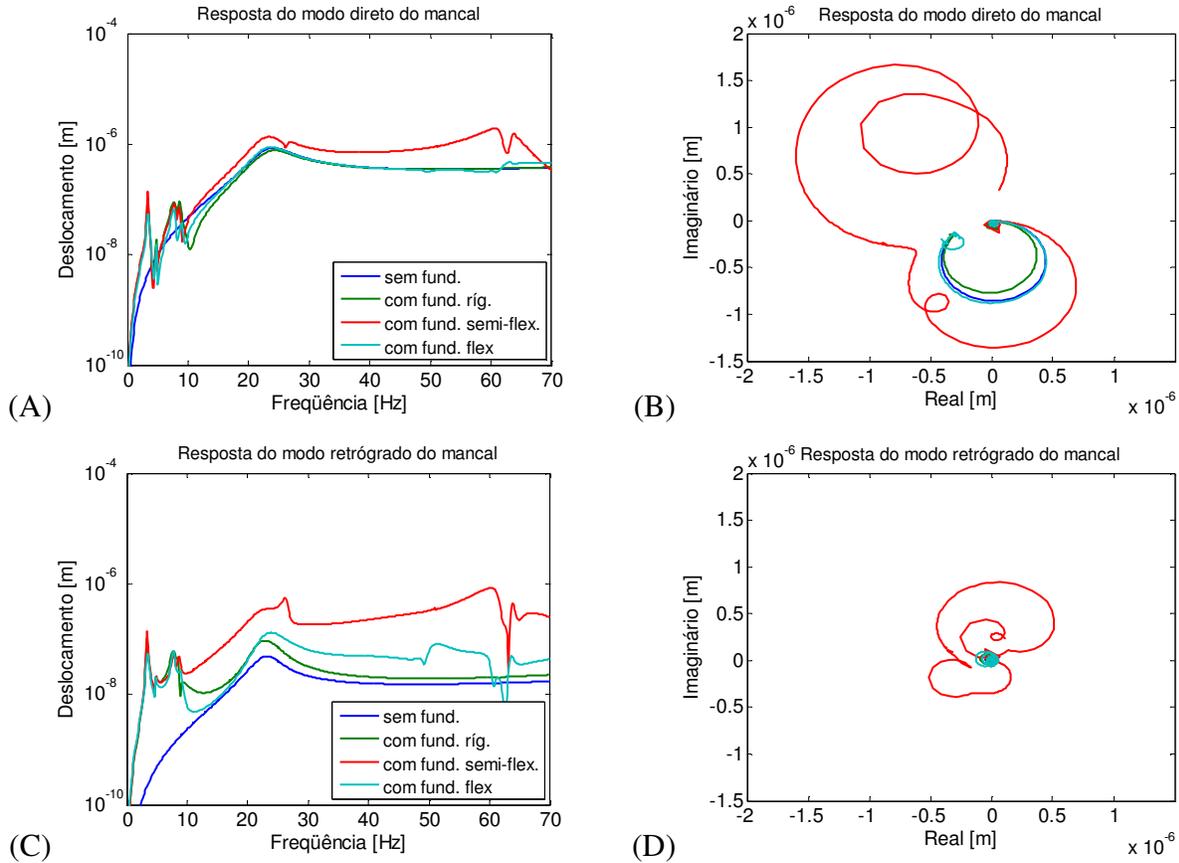


Figura 5.16: Resposta direcional do mancal anisotrópico do rotor flexível modelado por elementos finitos com anisotropia do caso 3. (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.

A resposta do modo retrógrado do mancal do rotor sem flexibilidade na fundação aparece. Na região de ressonância, a amplitude máxima do rotor, com fundação semi-flexível, é cerca de quarenta vezes maior que no caso do rotor sem o efeito de fundação. Novamente, ressalta-se que o efeito da flexibilidade da fundação, combinado com a anisotropia dos mancais, introduz uma anisotropia superior quando comparado com o efeito da anisotropia oriunda somente dos mancais.

A figura 5.17 a seguir mostra a resposta direcional do disco do rotor suportado por mancais hidrodinâmicos.

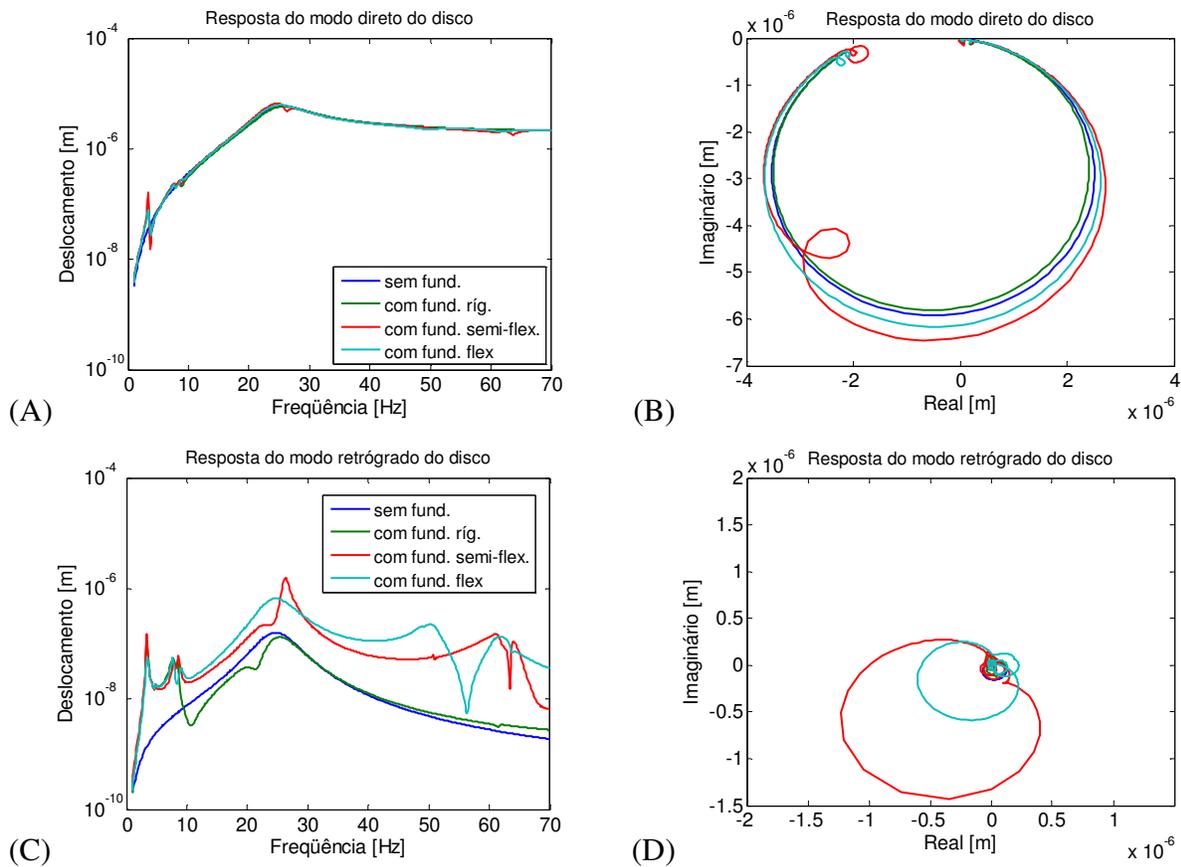


Figura 5.17: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos apoiado sobre mancais hidrodinâmicos. (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.

Como mostrado no capítulo 4, foram utilizados mancais hidrodinâmicos e os valores de rigidez e amortecimento variam com a rotação. Foram utilizados valores de amortecimento e rigidez estimados para uma faixa de rotação de 1 a 70 Hz.

A resposta do rotor, ilustrada na figura 5.17, assemelha-se à resposta do rotor com mancais isotrópicos, figura 5.8, e anisotrópicos, figura 5.14. A diferença é a frequência de ressonância. Os

mancais hidrodinâmicos deslocaram o pico de frequência para 25 Hz, diferentemente dos 23,5 Hz dos demais casos.

A resposta direcional do disco do rotor com fundação semi-flexível, disposta na figura 5.18 a seguir, permite notar que a precessão direta é predominante em quase toda a faixa de frequência.

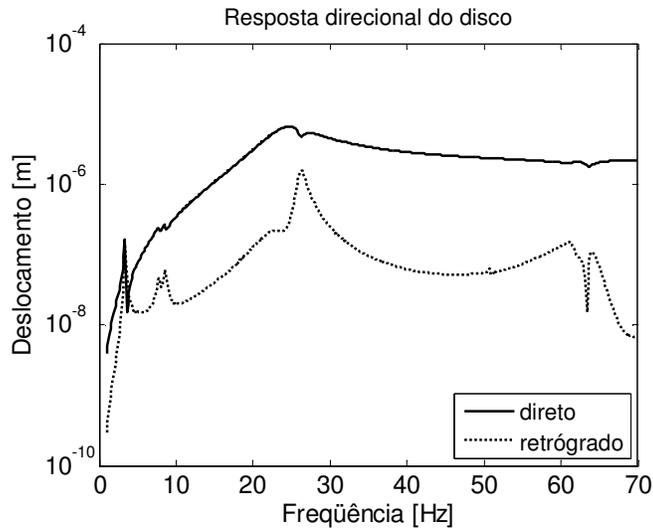


Figura 5.18: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos, com fundação semi-flexível, apoiado sobre mancais hidrodinâmicos.

A figura 5.19 mostra a resposta do mancal hidrodinâmico.

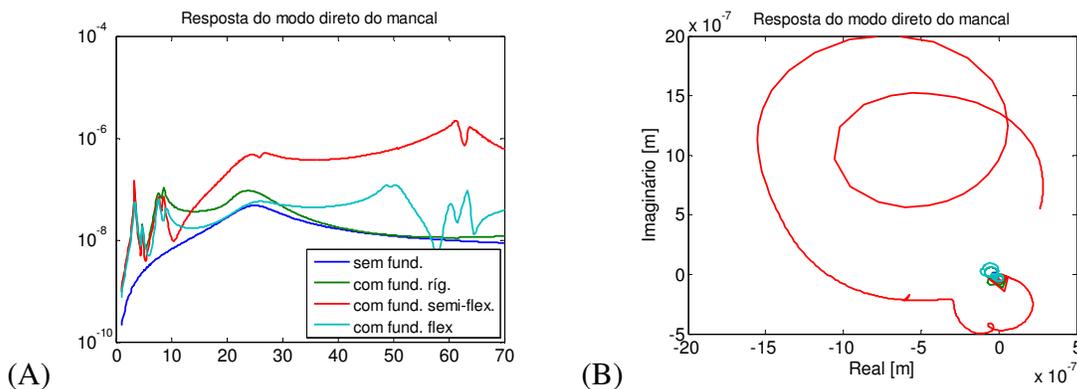


Figura 5.19: Resposta direcional do mancal hidrodinâmico do rotor flexível modelado por elementos finitos. (A) RF do modo direto, (B) diagrama de Nyquist do modo direto, (C) RF do modo retrógrado, (D) diagrama de Nyquist do modo retrógrado.

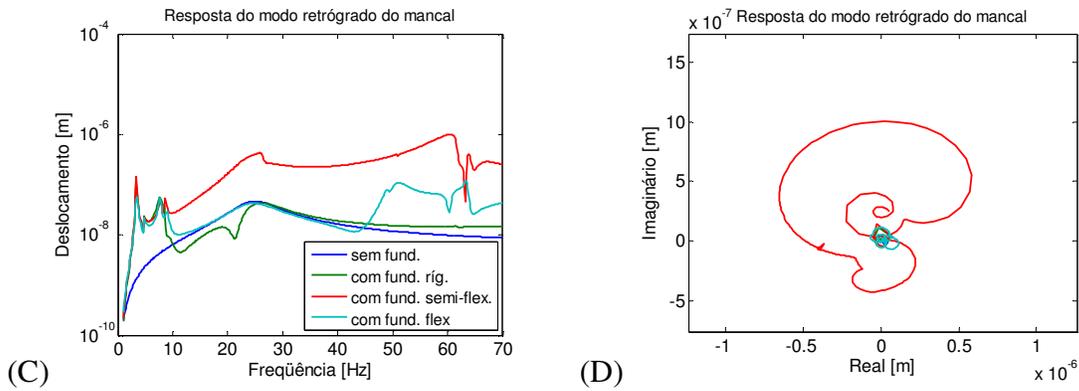


Figura 5.19 (continuação).

A região de ressonância também está em torno de 24 Hz. Os demais modos resultantes da interação com a fundação se encontram também entre 0 e 15 Hz, que são os modos de corpo rígido da fundação, e próximos a 61 Hz, correspondentes a modos de flexão.

Com mancais hidrodinâmicos, a resposta do mancal do rotor com fundação semi-flexível apresenta amplitudes maiores, comparando com os resultados do rotor com mancais isotrópicos e anisotrópicos. Isso fica mais evidente no diagrama de Nyquist.

Os diagramas de Campbell da figura 5.20 indicam as regiões de ressonância e dos modos que aparecem com a flexibilidade na fundação. Os autovalores são muito parecidos com os dos diagramas do rotor suportado por mancais isotrópicos (figura 5.13).

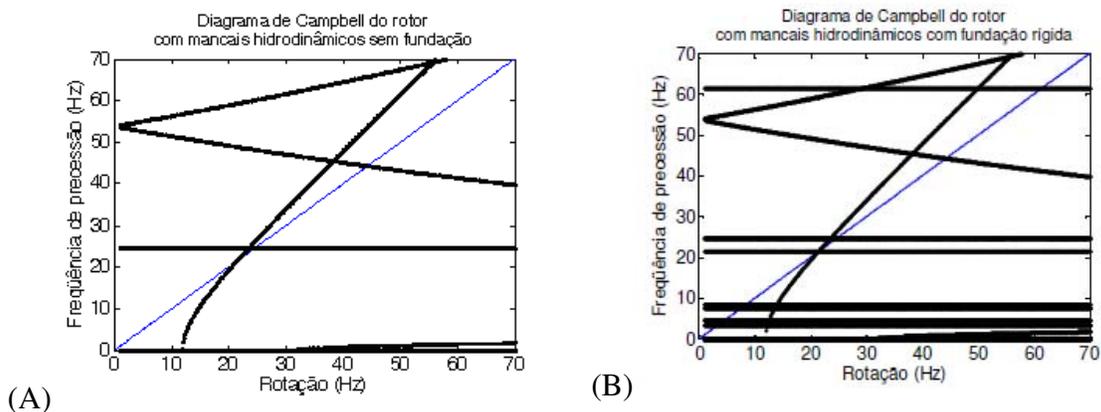


Figura 5.20: Diagrama de Campbell do rotor com mancais hidrodinâmicos. (A) rotor sem flexibilidade na fundação, (B) rotor com fundação rígida, (C) rotor com fundação semi-flexível, (D) rotor com fundação flexível.

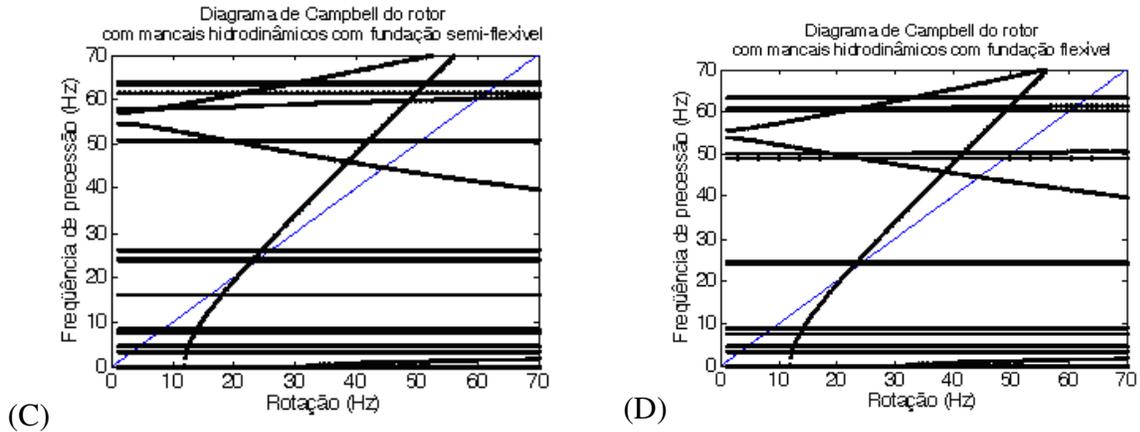


Figura 5.20 (continuação).

Em todos os diagramas da figura 5.20, um dos autovalores em particular começa a crescer em 33 Hz próximo ao eixo horizontal inferior. Os coeficientes do mancal hidrodinâmico, que variam com a rotação, são responsáveis por esse efeito. No entanto, este autovalor não cruza o eixo de rotação síncrona do rotor entre 0 e 70 Hz.

Os mancais hidrodinâmicos são também responsáveis pelo aparecimento de um autovalor que passa a ter valor diferente de zero, a partir da rotação de 12 Hz. Esse autovalor cruza o eixo de rotação síncrona em 21 Hz, que é próximo à região de ressonância do próprio rotor.

Foi realizada também a simulação de um rotor com fundação semi-flexível e apoiado sobre mancais anisotrópicos do caso 11 da tabela 4.1, que é o caso de maior anisotropia, dentre os casos estudados. O resultado se encontra na figura 5.21.

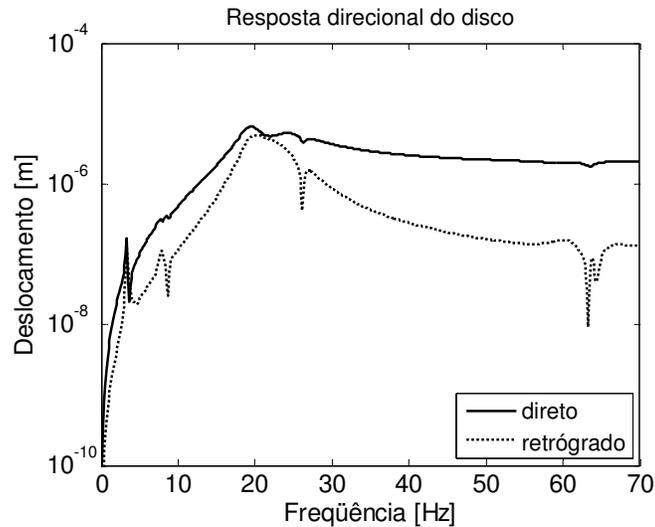


Figura 5.21: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos, com fundação semi-flexível, apoiado sobre mancais anisotrópicos do caso 11.

A alta anisotropia nos mancais, advindo dos altos coeficientes cruzados, não foi suficiente para que o modo retrógrado predomine sobre o direto em uma faixa de frequência considerável. Contudo, quando os coeficientes diretos de rigidez e amortecimento dos mancais são responsáveis pela alta anisotropia, é possível observar a predominância do modo retrógrado em uma determinada faixa de frequência. Foi simulado um rotor apoiado sobre mancais ortotrópicos com os seguintes dados de amortecimento e rigidez dos mancais:

$$\begin{array}{lll}
 k_{yy} = 259000 \text{ N/m} & c_{yy} = 0,0005k_{yy} \text{ N/m} & k_{yz} = k_{zy} = 0 \text{ N/m} \\
 k_{zz} = 2590 \text{ N/m} & c_{zz} = 0,0005k_{zz} \text{ N/m} & c_{yz} = c_{zy} = 0 \text{ N/m}
 \end{array}$$

Os resultados se encontram na figura 5.22 a seguir.

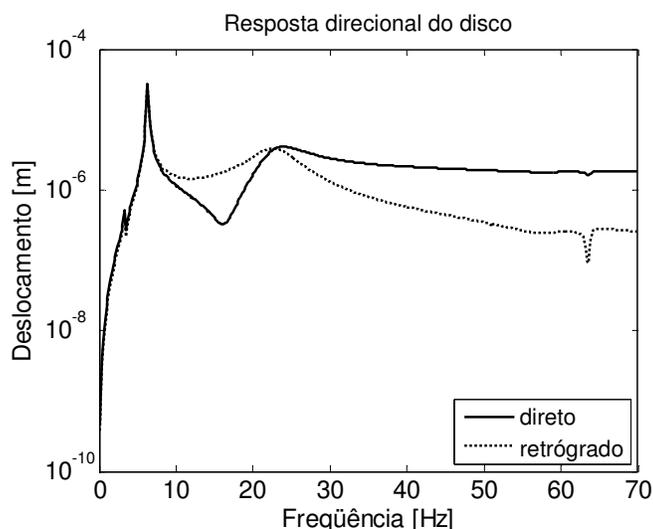


Figura 5.22: Resposta direcional do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos, com fundação semi-flexível, apoiado sobre mancais ortotrópicos.

Assim como no caso do rotor rígido com coeficientes diretos distintos, cujo resultado se encontra na figura 5.5, dois modos de flexão do rotor são visíveis, sendo o primeiro modo devido ao deslocamento vertical, e o segundo, horizontal. Após o primeiro pico de ressonância, ocorre, também neste caso, a inversão de fase na vibração do rotor, e o modo de precessão predominante passa a ser o retrógrado. O modo direto volta a predominar após o segundo pico.

Foram mostrados neste capítulo resultados de diversas simulações realizadas com a finalidade de analisar a influência da anisotropia, tanto dos mancais quanto da estrutura de suporte, no aparecimento do modo retrógrado. Observou-se, em todos os casos desta seção, que o modo retrógrado do rotor com anisotropia dos mancais combinada com a da fundação apresenta amplitude maior, comparado com o sistema com anisotropia somente dos mancais, sem fundação. No entanto, não é em todos os casos que a anisotropia da fundação é maior que a dos mancais. As amplitudes do modo retrógrado do rotor com essas configurações apresentam mesma ordem de grandeza. A figura 5.23 a seguir permite comparar o grau de anisotropia da fundação semi-

flexível e dos mancais, para grau de anisotropia dos casos 3, 5, 7, 9 e 11 e mancais hidrodinâmicos.

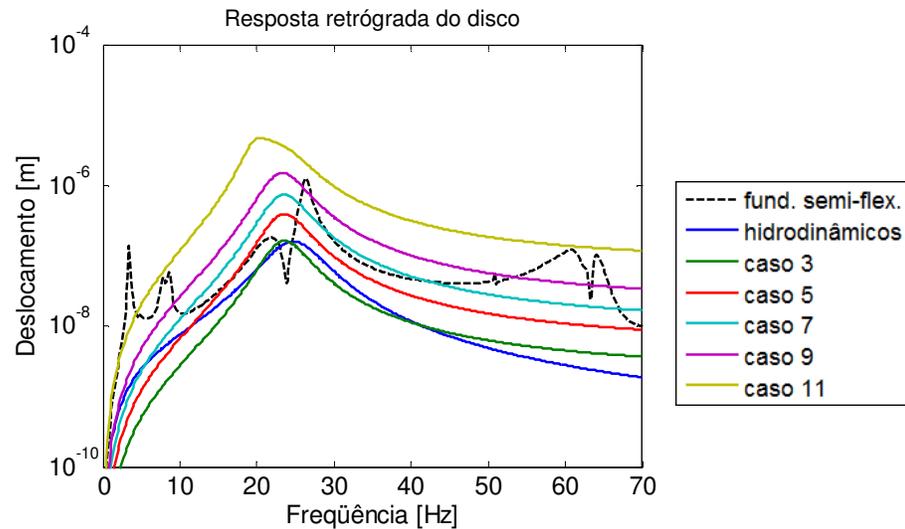


Figura 5.23: Resposta do modo retrógrado do disco do rotor flexível modelado por elementos finitos com fundação semi-flexível apoiado sobre mancais isotrópicos, comparada com a resposta do rotor sem flexibilidade na fundação com mancais anisotrópicos.

O rotor com mancais com anisotropia do caso 3, sem flexibilidade na fundação, apresenta, em quase toda a faixa de frequência, resposta retrógrada com amplitude inferior a do rotor com fundação semi-flexível, com mancais isotrópicos. Nos casos do rotor com mancais com alto grau de anisotropia, a resposta retrógrada supera, em magnitude, em boa parte da faixa de frequência, a resposta do rotor com anisotropia advinda somente da fundação.

Capítulo 6

Conclusões

O estudo bibliográfico permitiu conhecer a importância da formulação complexa na análise de máquinas rotativas. A formulação complexa permite a identificação e separação dos modos direto e retrógrado no domínio da frequência, o que não é abordado na formulação em coordenadas cartesianas.

Os equacionamentos e simulações de sistemas rotor-mancais mostraram que a anisotropia dos mancais é um importante fator responsável pelo aparecimento do modo retrógrado e que, quanto maior a anisotropia, maior a amplitude da resposta deste modo. O estudo do sistema rotor-mancais-fundação apontou que a estrutura de fundação acrescentou modos e também adicionou anisotropia ao sistema. Em alguns casos estudados, a estrutura de suporte adiciona mais anisotropia ao sistema que os mancais. Em geral, nos casos analisados neste trabalho, a resposta retrógrada devido à anisotropia da fundação apresenta amplitude na mesma ordem de grandeza que a resposta retrógrada do rotor com anisotropia somente nos mancais.

O modo retrógrado gera tensões de tração e compressão variáveis no tempo, o que é prejudicial para o rotor, que pode falhar por fadiga. Por isso, o estudo do amortecimento dos mancais e da influência da estrutura de fundação é de grande importância para melhorar o desempenho do rotor e aumentar a vida útil do mesmo.

Os cálculos das respostas em frequências, tanto com coordenadas cartesianas quanto por coordenadas direcionais, de um rotor flexível e de um rotor rígido sobre mancais flexíveis, foram efetuados, e o rotor flexível também foi modelado por elementos finitos.

As simulações apontaram divergências entre as respostas do rotor rígido e as do rotor flexível. Foi mostrado que o efeito da interação entre o disco e o eixo flexível, que ocorre no sistema de rotor flexível, supera o efeito da interação entre o rotor e os mancais, predominante no rotor rígido, resultando em região de ressonância em frequências menores e resposta do modo retrógrado com amplitudes menores.

Os resultados da resposta direcional foram comparados aos da resposta em frequência em coordenadas cartesianas, que permitiram concluir que a análise modal complexa tem a vantagem de distinguir e mostrar claramente o comportamento dos modos direto e retrógrado do rotor no domínio da frequência.

As simulações proporcionaram resultados coerentes e satisfatórios, que levaram a conclusões que validaram o que foi estudado, espelhando também um equacionamento consistente e uma modelagem correta do problema.

Referências Bibliográficas

- Brown, D. L., Allemang, R. J., Zimmerman, R., Mergeay, M. Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis. SAE Pap n. 790221, 1979, 24p.
- Campbell, W. E. The Protection of Steam-Turbine Disk Wheels from Axial Vibration. *Trans. ASME*, 1924, pp. 31 – 160.
- Cavalca, K. L. *L'Interazione tra rotori e struttura portante: metodologie per la sua modellazione*. Milano: Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Milano, 1993, 143 p. Tese (Doutorado).
- Cavalca, K.L., Cavalcante, P. F., Okabe, E. P. An investigation on the influence of the supporting structure on the dynamics of the rotor system. *Mechanical Systems And Signal Processing*, Cambridge, UK, v. 19, n. 1, pp. 157-174, 2006.
- Cavalca K.L., Okabe E.P. On the analysis of rotor-bearing-foundation systems. In: Palestra convidada (lecture ou keynote), IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics, March 23-27, 2009, New Delhi, India.
- Cowper, G. R. The shear coefficient in Timoshenko's Beam Theory. National Aeronautical Establishment, Ottawa, Canada, 1966.

- Genta, G., Gugliotta, A. A conical element for finite element rotor dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, v. 120(2.1), 1988, pp. 175-182.
- Joh, Y. D., Lee, C. W. Excitation Methods and Modal Parameter Identification in Complex Modal Testing of Rotating Machinery. *Modal Analysis: the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, v. 8, n. 3, 1993, pp. 179-203.
- Joh, Y. D., Lee, C. W. Theory of Excitation Methods and Estimation of Frequency Response Functions in Complex Modal Testing of Rotating Machinery. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 7, 1993, pp. 57-74.
- Kessler, C., Kim, J. Complex Modal Analysis and Interpretation for Rotating Machinery. University of Cincinnati, Cincinnati, Ohio, United States of America, 1998.
- Kim, K. J., Sim, C. G. A new Curve Fitting Algorithm for Modal Parameter Estimation. In: Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, Apr 6-9, 1987, London, England. V. 1, pp. 133-139.
- Krämer, E. *Dynamics of Rotors and Foundations*. New York, Springer-Verlag. 381 p., 1993.
- Lalanne, M., Ferraris, G. Rotordynamics Prediction in Engineering. John Wiley & Sons, England, 1998, 266 p.
- Lee, C. W. A Complex Modal Testing Theory for Rotating Machinery. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 5, 1991, p. 119-137.
- Lee, C. W. *Vibration Analysis of Rotors*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1993, 312 p.

- Lee, C. W., Jei, Y. G. Modal Analysis of Continuous Rotor-bearing Systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 126, pp. 345-361, 1988.
- Lee, C. W., Jei, Y. G. Modal Analysis of a Continuous Asymmetrical Rotor-bearing Systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 152, 1992, pp. 245-262.
- Lee, C. W., Katz, R., Ulsoy, A. G., Scott, R. A. Modal Analysis of a Distributed Parameter Rotating Shaft. *Journal of Sound and Vibration*, v. 122, pp. 119-130, 1987.
- Lee, C. W., Lee, S. K. An efficient complex modal testing theory for asymmetric rotor systems: use of unidirectional excitation method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 206, 1997, pp. 327-338.
- Nordmann, R. Modal Parameter identification and sensitivity analysis in rotating machinery. University of Kaiserslautern, Department of Mechanical Engineering, German Federal Republic, 1982.
- Okabe, E. P. *Interação rotor-estrutura: modelo teórico-experimental*. Campinas: Departamento de Projeto Mecânico, Universidade Estadual de Campinas, 2007, 154 p. Tese (Doutorado).
- Okabe, E. P. Relatório de Atividades de Bolsa de Pós Doutorado Júnior - CNPQ. Processo 161258/2006-9.
- Peeters, F., Pintelon, R., Schoukens, J., Rolain, Y., Gutierrez, E. S., Guillaume, P. Identification of Rotor-bearing Systems in the Frequency Domain Part I: Estimation of Frequency Response Functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, (2.2001) v. 15(2.4), pp. 759-773.

Peeters, F., Pintelon, R., Schoukens, J., Rolain, Y., Gutierrez, E. S., Guillaume, P. Identification of Rotor-bearing Systems in the Frequency Domain Part II: Estimation of Modal Parameters. *Mechanical Systems and Signal Processing*, (2.2001) v. 15(2.4), pp. 775-788.

Apêndice

A) Matrizes do elemento cônico de viga (Genta, 1988)

Será apresentado a seguir as matrizes do element cônico de viga, Segundo Genta (1988), representado na figura a seguir.

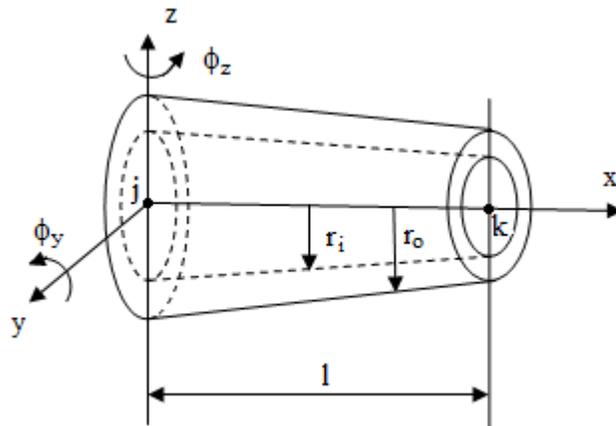


Figura A.1: Elemento cônico de viga (Genta, 1988).

- Coeficientes geométricos:

$$\alpha_1 = \frac{2\pi(r_{oj}\Delta r_o - r_{ij}\Delta r_i)}{A_j} \quad (A.1)$$

$$\beta_1 = \frac{\pi(\Delta r_o^2 - \Delta r_{ij}^2)}{A_j} \quad (\text{A.2})$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi(r_{oj}^3 \Delta r_o - r_{ij}^3 \Delta r_i)}{I_{ij}} \quad (\text{A.3})$$

$$\beta_2 = \frac{3\pi(r_{oj}^2 \Delta r_o^2 - r_{ij}^2 \Delta r_i^2)}{2I_{ij}} \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma_2 = \frac{\pi(r_{oj} \Delta r_o^3 - r_{ij} \Delta r_i^3)}{I_{ij}} \quad (\text{A.5})$$

$$\delta_2 = \frac{\pi(\Delta r_o^4 - \Delta r_i^4)}{4I_{ij}} \quad (\text{A.6})$$

Onde

$$\begin{aligned} \Delta r_i &= |r_{ij} - r_{ik}| \\ \Delta r_o &= |r_{oj} - r_{ok}| \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad (\text{A.8})$$

- Matriz de rigidez:

$$[k] = \frac{EI_j}{105l^3(1+\phi)^2} \begin{bmatrix} k_1 & lk_2 & -k_1 & lk_3 \\ & l^2k_4 & -lk_2 & l^2k_5 \\ & & k_1 & -lk_3 \\ \text{sym.} & & & l^2k_6 \end{bmatrix} + \frac{GA_j\phi^2}{12\chi l(1+\phi)^2} \begin{bmatrix} k_7 & lk_8 & -k_7 & lk_8 \\ & l^2k_9 & -lk_8 & l^2k_9 \\ & & k_7 & -lk_8 \\ \text{sym.} & & & l^2k_9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

onde

$$k_1 = 630\alpha_2 + 504\beta_2 + 441\gamma_2 + 396\delta_2 + 1260 \quad (\text{A.10})$$

$$k_2 = 630 + 210\alpha_2 + 147\beta_2 + 126\gamma_2 + 114\delta_2 - \phi(105\alpha_2 + 105\beta_2 + 94.5\gamma_2 + 84\delta_2) \quad (\text{A.11})$$

$$k_3 = 630 + 420\alpha_2 + 357\beta_2 + 315\gamma_2 + 282\delta_2 + \phi(105\alpha_2 + 105\beta_2 + 94.5\gamma_2 + 84\delta_2) \quad (\text{A.12})$$

$$k_4 = 420 + 210\phi + 105\phi^2 + \alpha_2(105 + 52.5\phi^2) + \beta_2(56 - 35\phi + 35\phi^2) + \gamma_2(42 - 42\phi + 26.25\phi^2) + \delta_2(36 - 42\phi + 21\phi^2) \quad (\text{A.13})$$

$$k_5 = 210 - 210\phi - 105\phi^2 + \alpha_2(105 - 105\phi - 52.5\phi^2) + \beta_2(91 - 70\phi - 35\phi^2) + \gamma_2(84 - 52.5\phi - 26.25\phi^2) + \delta_2(78 - 42\phi - 21\phi^2) \quad (\text{A.14})$$

$$k_6 = 420 + 210\phi + 105\phi^2 + \alpha_2(315 + 210\phi + 52.5\phi^2) + \beta_2(266 + 175\phi + 35\phi^2) + \gamma_2(231 + 147\phi + 26.25\phi^2) + \delta_2(204 + 126\phi + 21\phi^2) \quad (\text{A.15})$$

$$k_7 = 12 + 6\alpha_1 + 4\beta_1 \quad (\text{A.16})$$

$$k_8 = 6 + 3\alpha_1 + 2\beta_1 \quad (\text{A.17})$$

$$k_9 = 3 + 1.5\alpha_1 + \beta_1 \quad (\text{A.18})$$

$$\phi = \frac{12EI_t(\xi=0.5)\chi}{GA(\xi=0.5)l} \quad (\text{A.19})$$

$$I_t(\xi) = I_{ij}(1 + \alpha_2\xi + \beta_2\xi^2 + \gamma_2\xi^3 + \delta_2\xi^4) \\ A(\xi) = (1 + \alpha_1\xi + \beta_1\xi^2) \quad (\text{A.20})$$

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (\text{A.21})$$

χ é o fator de cisalhamento, que pode ser calculado a partir do fator de poisson ν do material. Para uma seção circular com diâmetro interno (coroa circular), o fator de cisalhamento pode ser calculado da seguinte forma (Cowper, 1966):

$$\chi = \frac{6(1+\nu)(1+m^2)^2}{(7+6\nu)(1+m^2)^2 + (20+12\nu)m^2} \quad (\text{A.22})$$

onde m é a relação entre o raio interno e o raio externo:

$$m = \frac{r_i}{r_o} \quad (\text{A.23})$$

- Matriz de rigidez axial:

$$[k_g] = \frac{F_a}{30l(1+\phi)^2} \begin{bmatrix} k_{10} & lk_{11} & -k_{10} & lk_{11} \\ & l^2k_{12} & -lk_{11} & -l^2k_{13} \\ & & k_{10} & -lk_{11} \\ \text{sym.} & & & l^2k_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

onde

$$k_{10} = 36 + 60\phi + 3\phi^2 \quad (\text{A.25})$$

$$k_{11} = 3 \quad (\text{A.26})$$

$$k_{12} = 4 + 5\phi + 2.5\phi^2 \quad (\text{A.27})$$

$$k_{13} = 1 + 5\phi + 2.5\phi^2 \quad (\text{A.28})$$

- Matriz de massa:

$$[m_T] = \frac{\rho A_j l}{1260(1+\phi)^2} \begin{bmatrix} m_1 & lm_2 & m_3 & -lm_4 \\ & l^2 m_5 & lm_6 & -l^2 m_7 \\ & & m_8 & -lm_9 \\ \text{sym.} & & & l^2 m_{10} \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

onde

$$m_1 = (468 + 882\phi + 420\phi^2) + \alpha_1(108 + 210\phi + 105\phi^2) + \beta_1(38 + 78\phi + 42\phi^2) \quad (\text{A.30})$$

$$m_2 = (66 + 115.5\phi + 52.5\phi^2) + \alpha_1(21 + 40.5\phi + 21\phi^2) + \beta_1(8.5 + 18\phi + 10.5\phi^2) \quad (\text{A.31})$$

$$m_3 = (162 + 378\phi + 210\phi^2) + \alpha_1(81 + 189\phi + 105\phi^2) + \beta_1(46 + 111\phi + 63\phi^2) \quad (\text{A.32})$$

$$m_4 = (39 + 94.5\phi + 52.5\phi^2) + \alpha_1(18 + 40.5\phi + 21\phi^2) + \beta_1(9.5 + 21\phi + 10.5\phi^2) \quad (\text{A.33})$$

$$m_5 = (12 + 21\phi + 10.5\phi^2) + \alpha_1(4.5 + 9\phi + 5.25\phi^2) + \beta_1(2 + 4.5\phi + 3\phi^2) \quad (\text{A.34})$$

$$m_6 = (39 + 94.5\phi + 52.5\phi^2) + \alpha_1(21 + 54\phi + 31.5\phi^2) + \beta_1(12.5 + 34.5\phi + 21\phi^2) \quad (\text{A.35})$$

$$m_7 = (9 + 21\phi + 10.5\phi^2) + \alpha_1(4.5 + 10.5\phi + 5.25\phi^2) + \beta_1(2.5 + 6\phi + 3\phi^2) \quad (\text{A.36})$$

$$m_8 = (468 + 882\phi + 420\phi^2) + \alpha_1(360 + 672\phi + 315\phi^2) + \beta_1(290 + 540\phi + 252\phi^2) \quad (\text{A.37})$$

$$m_9 = (66 + 115.5\phi + 52.5\phi^2) + \alpha_1(45 + 75\phi + 31.5\phi^2) + \beta_1(32.5 + 52.5\phi + 21\phi^2) \quad (\text{A.38})$$

$$m_{10} = (12 + 21\phi + 10.5\phi^2) + \alpha_1(7.5 + 12\phi + 5.25\phi^2) + \beta_1(5 + 7.5\phi + 3\phi^2) \quad (\text{A.39})$$

$$[m_R] = \frac{\rho I_j}{210(1+\phi)^2} \begin{bmatrix} m_{11} & lm_{12} & -m_{11} & lm_{13} \\ & l^2 m_{14} & -lm_{12} & -l^2 m_{15} \\ & & m_{11} & -lm_{13} \\ sym. & & & l^2 m_{16} \end{bmatrix} \quad (A.40)$$

onde

$$m_{11} = 252 + 126\alpha_2 + 72\beta_2 + 45\gamma_2 + 30\delta_2 \quad (A.41)$$

$$m_{12} = 21 - 105\phi + \alpha_2(21 - 42\phi) + \beta_2(15 - 21\phi) + \gamma_2(10.5 - 12\phi) + \delta_2(7.5 - 7.5\phi) \quad (A.42)$$

$$m_{13} = 21 - 105\phi - 63\alpha_2\phi - \beta_2(6 + 42\phi) - \gamma_2(7.5 + 30\phi) - \delta_2(7.5 + 22.5\phi) \quad (A.43)$$

$$m_{14} = 28 + 38\phi + 70\phi^2 + \alpha_2(7 - 7\phi + 17.5\phi^2) + \beta_2(4 - 7\phi + 7\phi^2) + \gamma_2(2.75 - 5\phi + 3.5\phi^2) + \delta_2(2 - 3.5\phi + 2\phi^2) \quad (A.44)$$

$$m_{15} = 7 + 35\phi - 35\phi^2 + \alpha_2(3.5 + 17.5\phi - 17.5\phi^2) + \beta_2(3 + 10.5\phi - 10.5\phi^2) + \gamma_2(2.75 + 7\phi - 7\phi^2) + \delta_2(2.5 + 5\phi - 5\phi^2) \quad (A.45)$$

$$m_{16} = 28 + 35\phi + 70\phi^2 + \alpha_2(21 + 42\phi + 52.5\phi^2) + \beta_2(18 + 42\phi + 42\phi^2) + \gamma_2(16.25 + 40\phi + 35\phi^2) + \delta_2(15 + 37.5\phi + 30\phi^2) \quad (A.46)$$

- Matriz giroscópica:

$$[g] = 2[m_R] \quad (A.47)$$

- Matriz de amortecimento:

$$[C] = \beta[k] \quad (A.48)$$