

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA PORFABIANO...BIANCHINI.....
BATISTA..... E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 07 / 07 / 2009.

.....
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA

Identificação das matrizes de rigidez elástica elástica em placas finas de materiais compósitos

Autor: Fabiano Bianchini Batista
Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque
Co-orientador: Prof. Dr. Milton Dias Jr.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Identificação das matrizes de rigidez elástica em placas finas de materiais compósitos

Autor: Fabiano Bianchini Batista
Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque
Co-Orientador: Prof. Dr. Milton Dias Jr.

Curso: Doutorado em Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2009
S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE -
UNICAMP

B32i Batista, Fabiano Bianchini
Identificação das matrizes de rigidez elástica em
placas finas de materiais compósitos / Fabiano
Bianchini Batista. --Campinas, SP: [s.n.], 2009.

Orientadores: Éder Lima de Albuquerque, Milton
Dias Junior.

Tese de Doutorado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Materiais compósitos. 2. Fourier, séries de. I.
Albuquerque, Éder Lima de. II. Dias Junior, Milton. III.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. IV. Título.

Título em Inglês: Identification of the elastic stiffness matrixes on thin
plates of composite materials

Palavras-chave em Inglês: Composite materials, Fourier series

Área de concentração: Mecânica dos sólidos e projeto mecânico

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: José Roberto de França Arruda, Marco Lúcio
Bittencourt, Lavinia Maria Sanabio Alves Borges,
Volnei Tita

Data da defesa: 07/07/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

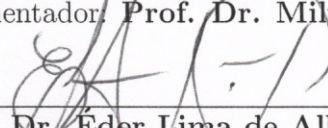
Tese de Doutorado

Identificação das matrizes de rigidez elástica
em placas finas de materiais compósitos

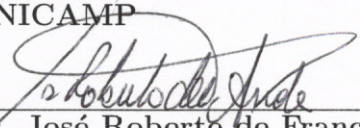
Autor: Fabiano Bianchini Batista

Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque

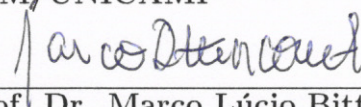
Co-orientador: Prof. Dr. Milton Dias Jr.



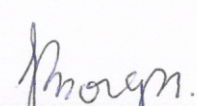
Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque, Presidente
FEM/UNICAMP



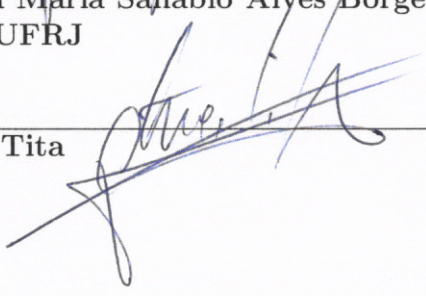
Prof. Dr. José Roberto de França Arruda
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Lavinia Maria Sanabio Alyes Borges
POLLI-COPPE/UFRJ



Prof. Dr. Volnei Tita
EESC/USP

Campinas, 07 de Julho de 2009.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, aos meus irmãos e à minha esposa.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à todos que, diretamente ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho:

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Ao professor Milton Dias Jr. pela orientação.

Ao meu orientador, professor Éder Lima de Albuquerque, por toda ajuda, orientação e amizade.

Ao professor José Roberto de França Arruda pela grande colaboração.

Ao Departamento de Projeto Mecânico pela infra-estrutura.

Aos amigos e familiares pelo apoio e paciência.

“Que um homem pode mudar a si mesmo (...) e comandar seu próprio destino é a conclusão de toda mente que está desperta para o poder do pensamento certo.”

Christian D. Jarson (1866-1954)

Resumo

BATISTA, Fabiano Bianchini, *Identificação das matrizes de rigidez elástica em placas finas de materiais compósitos*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2009. XXXp. Tese de doutorado.

Neste trabalho é apresentado um estudo direcionado à caracterização elástica de materiais compósitos e se encontra dividido em duas partes. Na primeira é proposto o uso da série de Fourier discreta regressiva (RDFS) para a suavização dos modos próprios utilizados como dados de entrada para um método direto e não iterativo de identificação das constantes de rigidez elástica à flexão já existente na literatura e cuja solução se dá pelo *método dos campos virtuais*. Por envolver o cálculo de derivadas de segunda ordem, é um método muito sensível à presença de ruído. A verificação foi realizada numericamente adicionando-se níveis de ruído à uma placa anisotrópica e, experimentalmente, utilizando-se uma placa de aço isotrópica e uma de carbono/epóxi ortotrópica. Na segunda parte do trabalho é proposto um método, também baseado no método dos campos virtuais, para a identificação das constantes de rigidez elástica à extensão. A solução é obtida a partir das equações diferenciais que governam a vibração livre no plano de placas finas anisotrópicas e simétricas. São propostos dois grupos de campos virtuais, um de primeira e um de segunda ordem, para serem utilizados juntamente com várias combinações entre modos próprios específicos e suas respectivas frequências naturais. A verificação do método foi realizada somente numericamente em laminados de diferentes níveis de anisotropia. De uma maneira geral, os resultados obtidos nas duas partes do trabalho foram muito satisfatórios.

Palavras Chave

Materiais compósitos, rigidez elástica, série de Fourier discreta regressiva, campos virtuais.

Abstract

BATISTA, Fabiano Bianchini, *Identification of the elastic stiffness matrixes on thin plates of composite materials*, Campinas : Faculty of Mechanical Engineering, University of Campinas (UNICAMP), Universidade Estadual de Campinas, 2009. XXXp. (PhD Thesis).

In this work is presented a study on the elastic characterization of composite materials, and it is divided in two parts. In the first part is proposed the application of regressive discrete Fourier series (RDFS) to smooth mode shapes used as input data in a direct and no-interactive identification method of the bending elastic stiffness constants already available in the literature, and whose solution is obtained by *virtual fields method*. It is a very noise sensitive method because it requires the computation of second-order derivatives. To assess the accuracy of the method, noise levels were numerically created to an anisotropic plate, and experimentally, were used an isotropic steel plate and an orthotropic carbon/epoxy plate. In the second part of the work, a method also based in the virtual fields method to identify the extensional elastic stiffness constants is proposed. The solution is obtained from the differential equations that govern the free-free in-plane vibration of thin symmetric anisotropic plates. Two groups of virtual fields are proposed, one with first order and another with second order functions, to be used together with many in-plane mode shape combinations and their respective natural frequencies. The accuracy of this proposed identification method was carried out only numerically by using laminates having different anisotropy levels. In general, the obtained results from the two parts of this work were very satisfactory.

Keywords

Composite materials, elastic stiffness, regressive discrete Fourier series, virtual fields.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Revisão Bibliográfica	1
1.2	Objetivos	12
1.3	Organização do presente trabalho	12
2	Identificação da matriz de rigidez elástica à flexão	15
2.1	Método de identificação adotado	16
2.2	Presença de ruído e processo de suavização	22
2.2.1	Série de Fourier discreta regressiva (RDFS)	23
2.2.2	Série de Fourier discreta regressiva otimizada (ORDFS)	26
2.3	Resultados e discussão	27
2.3.1	Análise Numérica	27
2.3.2	Análise Experimental	32
2.4	Conclusões	39
3	Identificação da matriz de rigidez elástica à extensão	41
3.1	Manipulações matemáticas	41
3.1.1	Escolha das funções ponderadoras	50
3.1.2	Estudo de sensibilidades e verificação do método	59
3.1.3	Sensibilidade dos modos e frequências naturais à variação das constantes de rigidez à extensão	61
3.1.4	Sensibilidade do método quanto ao tipo e número de modos utilizados	65
3.1.5	Sensibilidade do método quanto à geometria quadrada	84
3.1.6	Sensibilidade do método quanto ao número de nós da malha	88
3.1.7	Sensibilidade do método quanto à presença de ruído nas frequências naturais	90

3.1.8	Sensibilidade do método quanto à presença de ruído nos modos e suavização por RDFS	95
3.1.9	Estudo de casos - Sensibilidade à sequência de empilhamento	99
3.2	Conclusões	156
4	Considerações finais	158
4.1	Conclusões	158
4.2	Propostas para trabalhos futuros	159
4.2.1	Para o método de identificação das constantes de rigidez elástica à flexão:	159
4.2.2	Para o método de identificação das constantes de rigidez elástica à extensão:	160
A	Revisão Teórica	167
A.1	Elasticidade	167
A.1.1	Lei de Hooke generalizada	167
A.1.2	Deformações e deslocamentos	171
A.1.3	Lei de Hooke em termos de constantes de engenharia	175
A.1.4	Simetrias inerentes do próprio material	178
A.1.5	Estado plano de tensão	180
A.2	Teoria Clássica de Placas Laminadas	188
A.3	Equações de equilíbrio de placas laminadas	198
A.3.1	Equações diferenciais de equilíbrio estático	198
A.3.2	Equações diferenciais de equilíbrio dinâmico	202
B	Comparação numérica das formas modais	205

Lista de Figuras

1.1	Metodologias utilizadas na identificação das propriedades elásticas.	3
2.1	Metodologia para a identificação das constantes elásticas utilizando informações numéricas.	28
2.2	Metodologia para a identificação das constantes elásticas utilizando informações experimentais.	28
2.3	Modos numéricos obtidos pelo ANSYS para a placa anisotrópica: (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3.	30
2.4	Modos numéricos com ruído $\leq 15\%$ gerado numericamente: (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3.	31
2.5	Modos numéricos suavizados por RDFS: (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3.	32
2.6	Análise modal experimental para a obtenção dos modos transversais e suas respectivas frequências naturais.	34
2.7	Montagem do experimento para a realização da análise modal.	35
2.8	Modos próprios experimentais da placa de aço: (a) Modo de torção, (b) Modo de flexão em x , (c) Modo de flexão em y	36
2.9	Modos experimentais da placa de aço suavizados por RDFS: (a) Modo de torção, (b) Modo de flexão em x , (c) Modo de flexão em y	37
2.10	Modos experimentais da placa de carbono/epóxi: (a) Modo de torção, (b) Modo de flexão em y , (c) Modo de flexão em x	37
2.11	Modos experimentais da placa de carbono/epóxi suavizados por RDFS: (a) Modo de torção, (b) Modo de flexão em y , (c) Modo de flexão em x	38
2.12	Derivada segunda ao longo da direção y do modo de torção da placa de aço: (a) antes da suavização, (b) após a suavização por RDFS.	39
3.1	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa anisotrópica retangular.	60
3.2	Correlação modal entre os modos da placa anisotrópica retangular para variações dos valores das constantes elásticas.	62

3.3	Valores das frequências naturais de modos equivalentes da placa anisotrópica retangular para variações nos valores das constantes elásticas.	64
3.4	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa anisotrópica quadrada.	87
3.5	Modos 8 e 9 da placa anisotrópica quadrada para malhas com diferentes número de nós.	89
3.6	Sensibilidade do método à variação das frequências naturais dos modos 1, 4 e 6 da placa anisotrópica retangular e grupo I de funções ponderadoras. . . .	93
3.7	Sensibilidade do método à variação das frequências naturais dos modos 2, 3 e 7 da placa anisotrópica retangular e grupo II de funções ponderadoras. . . .	94
3.8	Deslocamentos U do primeiro modo na direção x da placa anisotrópica retangular em vista 3D: (a) sem ruído, (B) com ruído e, (c) após a suavização por RDFS.	98
3.9	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa anisotrópica retangular de grafite/polímero.	100
3.10	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa anisotrópica quadrada de grafite/polímero.	101
3.11	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica I retangular de grafite/polímero.	102
3.12	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica I quadrada de grafite/polímero.	103
3.13	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica II retangular de grafite/polímero.	104
3.14	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica II quadrada de grafite/polímero.	105
3.15	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica III retangular de grafite/polímero.	106
3.16	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica III quadrada de grafite/polímero.	107
3.17	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica VI retangular de grafite/polímero.	108
3.18	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica VI quadrada de grafite/polímero.	109
3.19	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa quase-isotrópica retangular de grafite/polímero.	110

3.20	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa quase-isotrópica quadrada de grafite/polímero.	111
3.21	15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica II retangular 2 de grafite/polímero.	139
A.1	Estado triplo de tensão em um ponto material.	168
A.2	Considerações sobre o deslocamento de um ponto qualquer de um corpo material.	172
A.3	Deformações bidimensionais longitudinais e de cisalhamento.	173
A.4	Lâmina de material compósito com fibras contínuas unidirecionais.	180
A.5	Forças e momentos atuantes em um laminado.	189
A.6	Considerações de Kirchhoff.	190
A.7	Forças e momentos resultantes atuantes em uma placa.	199

Lista de Tabelas

2.1	Constantes de rigidez elástica à flexão da placa anisotrópica.	29
2.2	Erros obtidos para a placa anisotrópica sem e com alguns níveis de ruído, sem suavização.	29
2.3	Erros obtidos para a placa anisotrópica sem ruído após o processo de suavização.	31
2.4	Erros obtidos para a placa anisotrópica após a suavização de alguns níveis de ruído.	33
2.5	Constantes de engenharia para o aço.	33
2.6	Comparação entre frequências experimentais e numéricas da placa isotrópica de aço.	35
2.7	Comparação entre frequências experimentais e numéricas da placa ortotrópica de carbono/epóxi.	36
3.1	Constantes de rigidez elástica à extensão da placa anisotrópica.	59
3.2	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa retangular anisotrópica utilizando o grupo I de funções ponderadoras. . . .	81
3.3	Erros obtidos para algumas combinações entre modos aleatórios para a placa retangular anisotrópica utilizando o grupo I de funções ponderadoras. . . .	82
3.4	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa retangular anisotrópica utilizando o grupo II de funções ponderadoras. . . .	83
3.5	Erros obtidos para algumas combinações entre modos aleatórios para a placa retangular anisotrópica utilizando o grupo II de funções ponderadoras. . . .	83
3.6	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa quadrada anisotrópica utilizando o grupo I de funções ponderadoras.	85
3.7	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa quadrada anisotrópica utilizando o grupo II de funções ponderadoras.	86
3.8	Erros obtidos para a placa anisotrópica retangular e grupo I de funções ponderadoras com a malha contendo diferentes números de nós.	90
3.9	Erros obtidos para a placa anisotrópica quadrada e grupo I de funções ponderadoras com a malha contendo diferentes números de nós.	91

3.10	Erros obtidos para a placa anisotrópica retangular e grupo II de funções ponderadoras com a malha contendo diferentes números de nós.	91
3.11	Erros obtidos para a placa anisotrópica quadrada e grupo II de funções ponderadoras com a malha contendo diferentes números de nós.	92
3.12	Erros obtidos para a placa anisotrópica retangular e grupo I de funções ponderadoras com ruído e após o processo de suavização por RDFS.	96
3.13	Erros obtidos para a placa anisotrópica retangular e grupo II de funções ponderadoras com ruído e após o processo de suavização por RDFS.	97
3.14	Matrizes de rigidez elástica de extensão e orientação das fibras dos laminados de grafite/polímero.	112
3.15	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa anisotrópica de grafite/polímero.	113
3.16	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica I de grafite/polímero grupo I.	114
3.17	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica I retangular de grafite/polímero para o grupo II.	127
3.18	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica I quadrada de grafite/polímero para o grupo II.	128
3.19	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica II retangular (0,450 x 0,350 x 0,003 <i>m</i>) de grafite/polímero para o grupo I.	135
3.20	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica II retangular 2 (0,350 x 0,450 x 0,003 <i>m</i>) de grafite/polímero para o grupo I.	137
3.21	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para as placas ortotrópicas II de grafite/polímero para o grupo II.	140
3.22	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa retangular ortotrópica III de grafite/polímero para o grupo I.	141
3.23	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa retangular ortotrópica III de grafite/polímero para o grupo II.	145
3.24	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica de grafite/polímero IV para o grupo I.	151
3.25	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica IV de grafite/polímero grupo II.	152
3.26	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa quase-isotrópica de grafite/polímero grupo I.	154

3.27	Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa quase-isotrópica de grafite/polímero e grupo II.	155
A.1	Número de constantes elásticas nas relações tensão/deformação para diferentes materiais e sistemas de coordenadas.	181

Símbolos

$\mathbf{A}$	- Matriz de rigidez elástica à extensão
$\mathbf{C}$	- Matriz de constantes de rigidez elástica
$\mathbf{D}$	- Matriz de rigidez elástica à flexão
E	- Módulo de elasticidade longitudinal
$\mathbf{f}$	- Vetor de forças de volume que atuam no volume do sólido
g	- Função que relaciona as componentes de deformações real
G	- Módulo de elasticidade transversal
h	- Espessura da placa
K_ξ e K_η	- Parâmetro da RDFS que relaciona o tamanho período do sinal real com o tamanho do período da RDFS nas direções ξ e η , respectivamente
K_x e K_y	- Parâmetro da RDFS que relaciona o tamanho período do sinal real com o tamanho do período da RDFS nas direções x e y da placa, respectivamente
M e N	- Período do sinal real nas direções ξ e η , respectivamente
p e q	- Número de linhas de frequência da RDFS nas direções ξ e η , respectivamente
P	- Função ponderadora ou campos virtuais
$\mathbf{Q}$	- Matriz de rigidez elástica reduzida
R e C	- Período da RDFS nas direções ξ e η , respectivamente
$\mathbf{S}$	- Matriz de flexibilidade
S_f	- Parte do contorno do sólido onde atuam as cargas externas
t	- Tempo
$\bar{\mathbf{T}}$	- Vetor de forças externas distribuídas que atuam no contorno S_f

u	-	Deslocamentos na direção x do plano da placa
$\mathbf{u}^*$	-	Vetor de deslocamento virtual
U	-	Amplitude do deslocamento na direção x do plano da placa
v	-	Deslocamentos na direção y do plano da placa
V	-	Amplitude do deslocamento na direção y do plano da placa
x, y e z	-	Coordenadas da placa
$x(\xi, \eta)$	-	Funções bidimensionais discretizadas a passos igualmente espaçados
X_{kl}	-	Coefficientes de Fourier Euler bidimensionais
w	-	Deslocamentos transversais da placa
W	-	Amplitudes dos deslocamentos transversais da placa
ϵ_{ij}	-	Deformações
ϵ^*	-	Tensor de deformação virtual
γ	-	Aceleração
γ_{ij}	-	Deformação de cisalhamento de engenharia
Γ	-	Domínio do contorno da placa
ν	-	Coefficiente de Poisson
ξ e η	-	Eixos coordenados
ρ	-	Densidade do material do sólido
σ	-	Tensor de tensão real
σ_{ij}	-	Tensões
ω	-	Frequência natural
Ω	-	Domínio da placa

Capítulo 1

Introdução

1.1 Revisão Bibliográfica

Atualmente a demanda pelo uso de materiais com características específicas tem aumentado e se tornado muito frequente em diversas áreas da engenharia. Muitas propriedades requeridas para atender a necessidades particulares de certos projetos, como: alta rigidez, alta dureza, alta ductilidade, resistência à choques mecânicos, resistência estática e à fadiga, resistência ao ataque químico, resistência à corrosão, à abrasão, à altas e baixas temperaturas, capacidade de isolamento ou condutividade térmica e elétrica, e, capacidade acústica, não são possíveis de serem obtidas, na maioria dos casos, unicamente através dos materiais estruturais comumente utilizados, como metais, cerâmicos e polímeros, principalmente quando devem estar associadas à uma baixa densidade. Dentro deste contexto, graças à grande flexibilidade em se fazer combinações e arranjos, os materiais compósitos têm sido materiais alternativos e, em muitos casos, as únicas opções capazes de atender à essas necessidades.

A característica elástica dos compósitos está diretamente relacionada com estes tipos de arranjos e combinações. Ou, em outras palavras, suas propriedades são muito dependentes do tipo de seus constituintes, matriz e reforço, e da forma com que os mesmos são combinados na formação do compósito. Em uma grande maioria, os reforços são fibras, e se encontram imersos em uma matriz que, por sua vez, geralmente é uma resina. As fibras mais utilizadas são as fibras de vidro, as de carbono e grafite, as de kevlar, as de monocristais

(wiskers), as asbestos e as de cerâmicas. As resinas mais utilizadas são as de polímeros, de poliéster e epóxi, de plásticos fenólicos e as de aditivos. A geometria dos reforços, a densidade e a organização dos mesmos na matriz são, por exemplo, alguns dos principais fatores que exercem grande influência no comportamento elástico em tais materiais. Quando as fibras são contínuas e estão dispostas de forma organizada paralelamente, unidirecionalmente ou multidirecionalmente, entrelaçadas ou não, e sobrepostas em forma de lâminas ou camadas, têm-se o que se conhece por *laminados compósitos*. A quantidade de lâminas e a orientação das fibras nas mesmas caracteriza o nível de anisotropia do laminado. Esta anisotropia tem a desvantagem de aumentar o número de variáveis independentes e de, conseqüentemente, tornar a análise estrutural mais complexa.

A maioria dos trabalhos apresentados pela literatura científica com o propósito de identificação de parâmetros constitutivos de materiais como um todo, compósitos ou não, é baseado nos chamados *problemas inversos*. Nestes, informações obtidas experimentalmente como geometria, forças resultantes e campos de deformações (ou deslocamentos, ou tensões) são utilizadas como dados de entrada e são, juntamente com as equações constitutivas, os parâmetros conhecidos do problema. Já as incógnitas representam os parâmetros constitutivos, ou seja, as propriedades requeridas. A solução destes problemas se dá, basicamente, por meio de dois métodos: *métodos iterativos* ou *indiretos* e *métodos não-iterativos* ou *diretos*. No primeiro, formula-se um problema de otimização onde as variáveis de projeto são os parâmetros constitutivos, e, a função objetivo representa um resíduo entre dados medidos experimentalmente e seus respectivos obtidos por simulações numéricas executadas por meio de algum software, como, por exemplo, os baseados em elementos finitos. Nestas simulações numéricas, é considerado uma estrutura com as mesmas características físicas e condições de contorno e de carregamento. Na busca por um mínimo, um grupo de parâmetros constitutivos é testado a cada iteração. O valor ótimo representa o passo em que se tem o menor resíduo. Já no segundo método, a solução se dá por meio das equações constitutivas que associam diretamente os dados medidos experimentalmente com os parâmetros constitutivos. Um obstáculo para este método é a falta de soluções analíticas, existentes somente para alguns casos específicos.

De uma maneira geral, de acordo com o tipo de ensaio experimental, pode-se dividir os métodos de identificação de propriedades elásticas em dois grupos: *métodos estáticos* (destrutivos e não destrutivos) e *métodos dinâmicos* (sempre não destrutivos). Em compósitos, especificamente, estes métodos tem sido alvo de muitos estudos nos últimos anos. O objetivo principal tem sido a apresentação de técnicas cada vez mais eficientes e generalizadas, úteis no estudo dos novos, diferentes e complexos materiais. A forma com que cada problema é formulado juntamente com os procedimentos e aparelhos adotados são os principais diferenciais entre as várias metodologias propostas. A figura 1.1 mostra um esquema destas metodologias mais utilizadas na identificação das propriedades elásticas e que são encontradas na maioria dos trabalhos apresentados na literatura científica.

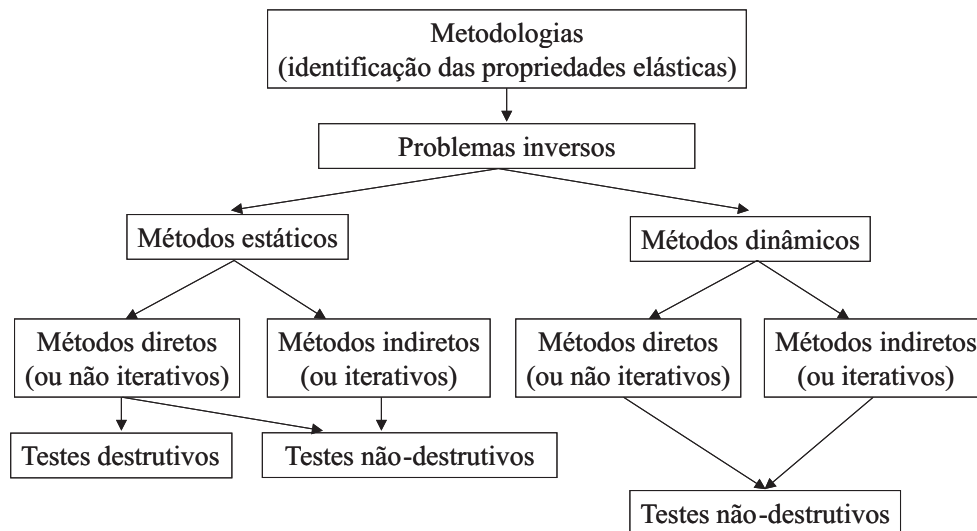


Figura 1.1: Metodologias utilizadas na identificação das propriedades elásticas.

Os métodos experimentais mais comuns e, talvez os mais simples, utilizados há muitos anos para fornecer informações experimentais para a identificação das constantes elásticas de materiais, são os testes *destrutivos* quase-estáticos (ou estáticos) com carregamentos monotônicos. Estes são testes não iterativos que não requerem o uso de métodos numéricos e nem o uso de muitos equipamentos. Fatores estes que os tornam menos propícios a erros experimentais humanos, como erros de calibragem e de medições, e, a erros inerentes aos próprios equipamentos. Geralmente, são baseados em medidas diretas de componentes de deformação e no cálculo das componentes de tensão em ensaios mecânicos. Como e-

xemplos têm-se os ensaios de tração, de compressão, de flexão, torção, etc. Em materiais isotrópicos, por exemplo, os módulos de Young e de cisalhamento são determinados por meio da região elástica das curvas de tensão/deformação, e o coeficiente de Poisson por meio da razão entre as deformações transversal e longitudinal. Tais testes seguem normas específicas, como por exemplo, as normas da ASTM (American Society for Testing and Materials), que em compósitos laminados, particularmente, determinam o número de corpos de provas com suas respectivas geometrias, número de camadas, orientações das fibras e o tipo de ensaio mecânico. Em geral, são necessários três tipos de corpos de prova com sequências de camadas $[0]_8$, $[90]_{16}$ e $[\pm 45]_{2S}$ (Carlsson e Pipes, 1997). Dos resultados obtidos para as amostras à 0° e 90° identificam-se os módulos de Young e o coeficiente de Poisson, enquanto que com os resultados com as amostras à 45° identifica-se o módulo de cisalhamento.

Atualmente o interesse pelo uso destes testes estáticos destrutivos para a caracterização elástica de materiais tem diminuído. Esse fato pode ser explicado em razão de vários fatores. Como exemplo, o fato das propriedades identificadas representarem valores médios e aproximados do material real. Isso porque algumas especificações das normas, como as sequências de camadas com as suas respectivas orientações das fibras, raramente coincidem com as do laminado real. A qualidade destes métodos está diretamente relacionada com a qualidade dos corpos de prova e na capacidade de se obter os chamados estados puros de tensão/deformação. Isso porque são métodos que se mostram sensíveis à presença de campos de tensões ou deformações não uniformes e à presença de alguns fatores difíceis de serem controlados, como os efeitos de borda e as respostas referentes a regiões localizadas em corpos de prova. Este último, causado muitas vezes por defeitos ou trincas dentro do material que surgem, em muitos casos, durante a confecção dos mesmos. Além disso, a heterogeneidade que pode estar presente em diferentes escalas, quando associadas à anisotropia, faz com que os estados puros de tensão/deformação sejam muito difíceis de serem obtidos. Infelizmente, a heterogeneidade, que causa os chamados *campos de tensão/deformação heterogêneos*, é uma característica muito comum nos materiais compósitos (Grédiac, 2004).

Uma grande parte dos métodos estáticos para a identificação das constantes elásticas

são baseados em ensaios não destrutivos. Estas metodologias tratam-se, na maioria dos casos, de procedimentos iterativos, baseados em problemas de otimização. Como por exemplo, Kam et al. (2009) propuseram um método estático não destrutivo chamado de *ensaio de três pontos conhecidos* para a identificação das constantes elásticas de engenharia (módulos de Young, módulo de cisalhamento no plano e coeficiente de Poisson no plano) utilizando vigas de laminados compósitos simétricos. As deformações nas direções axial, lateral e à 45°, medidas por strain gages em um ponto localizado no centro e na superfície externa das vigas, e, sujeitas a 3 pontos de flexão, são utilizadas como dados de entrada para a solução de um problema de otimização formulado no Ansys (ANSYS, 2003). Foram utilizadas vigas de laminados “angle-ply” de grafite/epóxi e as verificações do método foram realizadas com várias razões entre comprimento e espessura das vigas.

Embora nestes tipos de métodos de identificação utilizando ensaios estáticos não destrutivos seja possível utilizar um material com as mesmas orientações das fibras e com o mesmo número de camadas do laminado real, alguns fatores como presença de defeitos e trincas dentro do material, e carregamento e medições de deformações com contato, ainda podem interferir na qualidade dos resultados. Graças aos recentes avanços tecnológicos, como por exemplo, o melhoramento no processamento de imagens, e às técnicas de medições sem contato, com o uso de aparelhos ópticos e câmeras digitais, tem sido possível desenvolver metodologias de identificação de propriedades elásticas mais precisas. Os princípios ópticos são usados há algum tempo em vários sensores destinados a medições em várias escalas de grandezas químicas e físicas, sendo utilizados, principalmente, em processos de fabricação, inspeção e controle de qualidade. A total ausência de contato as caracterizam como técnicas de medições não invasivas onde não ocorrem perturbações na estrutura originárias da presença dos aparelhos de medição. A velocidade de medição é extremamente elevada (ocorre na velocidade da luz), o que, conseqüentemente, viabiliza a aquisição de um grande volume de dados em intervalos de tempo muito curtos, inclusive de corpos em movimento. Os níveis de incertezas presentes produzem resultados excepcionais sob um ponto de vista metrológico. São sistemas de medição flexíveis que permitem efetuar uma grande variedade de medições com o mesmo aparato físico. A instalação de algoritmos de tratamento de dados 2D e 3D

permite programar os aparelhos por coordenadas e estabelecer relações entre geometrias, possibilitando o cálculo de distâncias, ângulos, posições de centros, erros de forma, campos de deslocamentos e deformações, etc.

A inserção do processamento digital de imagens nas técnicas de medições ópticas provocou uma revolução na metrologia óptica. As técnicas de medições pontuais com laser, com varredura automática, ou as técnicas de medições de milhares de pontos (nuvem de pontos) em intervalos muito curtos de tempo permitem obter os campos de deslocamentos ou deformações, requeridos por vários métodos de identificação de propriedades constitutivas, com mais riqueza de detalhes e com mais precisão e velocidade. As técnicas de medições sem contato conhecidas na literatura internacional como “*full-field*”, ou *campos inteiros* (ou *campos completos*) são umas das mais utilizadas. Estas são mais comumente classificadas, de acordo com os fenômenos físicos envolvidos, em *técnicas não-interferométricas* (speckle, método rede, correlação de imagem, fotografia speckle, geométrico moire) e *técnicas interferométricas* (interferometria speckle, interferometria moire) (Grédiac, 2004).

Recentemente, Bruno e Poggialini (2005) apresentaram um método estático não destrutivo para a caracterização elástica de placas finas, válido para materiais isotrópicos, ortotrópicos e anisotrópicos. Os testes consistem em aplicar uma força concentrada em uma amostra apoiada por três esferas desalinhadas. As componentes de tensão são avaliadas simplesmente medindo-se a carga aplicada, e, as respostas em campos de deformações são medidas baseado na interferometria speckle. Após o cálculo das tensões e deformações médias, é possível determinar os valores das constantes elásticas através da solução de equações obtidas por uma série de manipulações matemáticas sobre a relação linear tensão/deformação no equilíbrio estático de laminados compósitos. O objetivo dos autores foi estabelecer um procedimento confiável e robusto, suficientemente preciso para competir com métodos aceitos pela ASTM. Mais tarde um pouco, Bruno et al. (2008) apresentaram um método inverso para identificar as propriedades elásticas de materiais isotrópicos e ortotrópicos a partir de campos de deformações (deslocamentos de superfícies) sob carregamento de flexão medidos também por interferometria speckle. Porém, ao contrário do método anterior, ele é iterativo

e baseado em um processo de otimização cuja função objetivo, a ser minimizada, trata-se de uma função resíduo entre os campos de deformação medidos experimentalmente com os obtidos numericamente por elementos finitos para uma estrutura com as mesmas características da estrutura real. As variáveis de projeto são as constantes elásticas requeridas, atualizadas a cada iteração. A iteração na qual se obtêm os valores ótimos equivale a iteração cujas constantes elásticas são os valores requeridos.

Uma outra linha de pesquisa que vem mostrando ser muito eficiente na caracterização elástica de materiais é a baseada nos métodos dinâmicos. Estes são métodos alternativos que podem utilizar informações de ensaios de vibração ou de ensaios de propagação de ondas, como, por exemplo, no trabalho de Reverdy e Audoin (2001). Dos que utilizam as informações de ensaios de vibração, na grande maioria estas informações são os modos próprios e as frequências naturais, sônicos ou ultrasônicos. Dentre estes métodos, nos iterativos, com problema de minimização, a função objetivo representa um resíduo entre as frequências naturais medidas experimentalmente com as suas respectivas obtidas numericamente. E, em alguns casos, também entre os modos próprios experimentais e os numéricos, comparados por meio do valor do MAC (apêndice B). As diferenças entre eles estão, basicamente, na formulação do problema. Ou, em outras palavras, estão na equação da função objetivo, no método de busca do valor ótimo adotado, nas condições de contornos, no tipo de estrutura (geometria e nível de anisotropia), no número de incógnitas (constantes elásticas requeridas), nos tipos de aparelhos, e no método numérico utilizado para a realização da análise modal. Este, por sua vez, pode ser, por exemplo, elementos finitos (utilizando ou não um software comercial), como nos trabalhos de: Sol (1986), Rikards e Chate (1998), Rikards et al. (1999), Bledzki et al. (1999), Hwang e Chang (2000), Araujo et al. (2000), Rikards et al. (2001), Lauwagie et al. (2003), Lauwagie et al. (2004), Chakraborty e Mukhopadhyay (2000), Cugnoni et al. (2007), Pagnotta e Stigliano (2008)). Pode ser também baseado em “Rayleigh” ou “Rayleigh-Ritz” (também considerado em alguns trabalhos como sendo uma abordagem analítica e não numérica), como por exemplo, nos trabalhos de Deobald e Gibson (1988), Pedersen e Frederiksen (1992), Lai e Lau (1993), Fällström et al. (1995), Chien-Ching e Chan-Chiao (1999), Lee e Kam (2006), Ayorinde e Gibson (1992) e (1993), Ayorinde

(1993), Ayorinde et al. (1993), Ayorinde e Gibson (1995), Ayorinde e Yu (1999).

Metodologias similares também têm sido propostas para amostras pequenas, cúbicas, esféricas ou cilíndricas, cujas constantes são identificadas utilizando-se um elevado número de frequências ultra-sônicas por meio de espectroscopia ultra-sônica de ressonância (RUS-Resonant Ultrasonic Spectroscopy), como no trabalho de Ogi et al. (2002). Liu et al. (2002) propuseram uma função objetivo que representa as diferenças entre as respostas dinâmicas em deslocamentos medidos experimentalmente pela análise modal, e as calculadas numericamente, por meio da solução da equação diferencial de equilíbrio dinâmico de placas utilizando um método numérico híbrido (HNM). O algoritmo genético e o método dos mínimos quadrados são utilizados como operadores inversos para determinar as propriedades do material. Emmanuel e Yu (2005) propuseram uma função objetivo que representa as diferenças entre as frequências naturais experimentais e as calculadas através de soluções analíticas da equação diferencial que representa a vibração transversal de placas finas e simétricas sob a condição de bordas livres. Diveyev e Butiter (2008) propuseram um método de identificação das propriedades elásticas utilizando placas de laminados compósitos. Os módulos elásticos são determinados utilizando um modelo multi-nível e o processo de identificação é dividido em dois passos: o primeiro é baseado em um algoritmo genético e são identificados os módulos de Young e de cisalhamento; o segundo trata-se de um problema de minimização de uma função erro onde os valores do módulo transversal são refinados.

Em geral, os métodos de identificação iterativos podem não ser muito precisos na identificação correta de todas as constantes elásticas, principalmente em materiais com níveis de anisotropia maiores. Isso se deve ao fato da baixa sensibilidade dos modos e das frequências obtidos numericamente à variação do valor de algumas constantes elásticas. De maneira geral, são métodos muito dependentes dos tipos de modos, da geometria das amostras, do número de frequências e/ou modos utilizados e, dos valores adotados para as tolerâncias e para o chute inicial no processo de busca. A principal vantagem talvez possa estar no fato de serem métodos rápidos e flexíveis, que não se prendem a geometrias específicas das estruturas a serem analisadas. Sol (1986) mostrou em seu trabalho que com apenas as cinco

primeiras frequências naturais de placas finas sob vibração livre é possível identificar com relativa precisão as propriedades elásticas de um material. Este método ficou conhecido por *resonalyser method*.

Nos *métodos dinâmicos não iterativos*, as propriedades elásticas são, geralmente, obtidas por meio da solução de equações diferenciais que regem o comportamento vibracional de estruturas cujas geometrias são mais simples, como vigas, placas ou cilindros. McIntyre e Woodhouse (1987) propuseram um método para a identificação das quatro constantes elásticas (módulo de elasticidade longitudinal e transversal, módulo de cisalhamento e coeficiente de Poisson) utilizando frequências naturais de modos de baixa frequência de placas finas ortotrópicas sob vibração com as bordas livres. A solução parte da teoria de flexão de placas finas e do princípio de Rayleigh. Gibson (2000) utiliza modos e frequências de vibração para caracterizar materiais compósitos reforçados por fibras e mostra que com apenas um ou mais modos é possível determinar o módulo elástico e fatores de amortecimento de compósitos e seus constituintes. As quatro constantes de rigidez elástica de placas ortotrópicas são obtidas por meio de um sistema contendo quatro equações que representam a frequência de uma placa ortotrópica com as bordas apoiadas. Alfano e Pagnotta (2007) propuseram uma técnica para determinar as propriedades elásticas de placas quadradas isotrópicas baseada nas medidas das duas últimas das quatro primeiras frequências de ressonância. Esta técnica permite determinar as constantes elásticas diretamente utilizando funções interpoladoras polinomiais derivadas de informações obtidas por elementos finitos.

Uma outra forma encontrada e muito utilizada para resolver problemas inversos, e, conseqüentemente, extrair os parâmetros que governam as equações constitutivas de materiais estruturais é por meio do *método dos campos virtuais* (Virtual Fields Method) (Grédiac et al., 2006). Este método se baseia no princípio dos trabalhos virtuais representado matematicamente pela expressão:

$$-\int_V \sigma : \epsilon^* dV + \int_{S_f} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u}^* dS + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* dV = \int_V \rho \cdot \gamma \cdot \mathbf{u}^* dV, \quad (1.1)$$

que relaciona tensor de tensão real σ , tensor de deformação virtual ϵ^* , vetor de forças externas distribuídas $\bar{\mathbf{T}}$ que atuam no contorno S_f , vetor de forças de volume distribuídas $\mathbf{f}$ que atuam no volume V , densidade do material ρ , aceleração γ e, finalmente, vetor de deslocamento virtual $\mathbf{u}^*$ cinematicamente admissível. Resumidamente, o VFM consiste em escrever as equações de equilíbrio global, como por exemplo as equações diferenciais que governam a vibração transversal ou as vibrações no-plano, com alguns campos virtuais particulares. Um campo de deslocamento virtual é, na verdade, uma função teste na qual a expressão mencionada acima é verificada para qualquer campo virtual cinematicamente admissível (Grédiac et al., 2006). Quando se introduz as equações constitutivas e desconsidera as forças de volume, a equação (1.1) pode ser reescrita como:

$$-\int_V g(\epsilon) : \epsilon^* dV + \int_{S_f} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u}^* dS = \int_V \rho \cdot \gamma \cdot \mathbf{u}^* dV, \quad (1.2)$$

onde $g(\epsilon) = \sigma$ define uma função das componentes de deformação real. Os parâmetros constitutivos, como as propriedades elásticas, também estão envolvidos em g . Assim, qualquer campo virtual na equação (1.2) gera uma nova equação. A escolha dos campos virtuais é a característica chave do método VFM e depende da natureza de g juntamente com as condições de contorno. Dois casos podem ser distinguidos: um onde as equações constitutivas dependem linearmente dos parâmetros constitutivos, como ocorre por exemplo com a elasticidade linear, e, um outro onde as equações constitutivas não são funções lineares dos parâmetros constitutivos. No primeiro caso, quando se consideram muitos campos virtuais, encontra-se um sistema de equações onde os parâmetros podem ser determinados diretamente. Neste caso, algumas regras são consideradas para uma escolha adequada do tipo e do número de campos virtuais. Por exemplo, a escolha de campos virtuais que sejam menos sensíveis à presença de ruído e que possam também simplificar o sistema de equações. Grédiac et al. (2002) e (2003) propuseram os chamados *campos virtuais especiais* como uma forma automática de encontrar, entre infinitas possibilidades, os campos virtuais adequados na identificação de cada parâmetro constitutivo desejado, melhorando assim, significativamente, o VFM. Já no

segundo caso, onde as equações constitutivas não são funções lineares dos parâmetros constitutivos, a solução adotada, geralmente, parte-se de um problema de minimização cuja função objetivo a ser minimizada representa um resíduo construído a partir da equação (1.2). O VFM é também muito utilizado na extração dos parâmetros elásticos por meio de técnicas de medições de campo inteiro (Pannier et al., 2006).

São vários trabalhos que adotam o VFM, como Grédiac e Vautrin (1990) e (1993), Grédiac et al. (1994), Grédiac (1996), Grédiac e Paris (1996), Grédiac et al. (1998), Grédiac et al. (1998), Grédiac et al. (1999), Grédiac et al. (1999), Pierron et al. (2000), Pierron e Grédiac (2000), Grédiac et al. (2001), Grédiac et al. (2002) e (2003), Giraudeau e Pierron (2003) e (2005), Grédiac e Pierron (2006), Moulart et al. (2006), Pannier et al. (2006), Giraudeau et al. (2006), Chalal et al. (2006), Toussaint et al. (2006), Avril e Pierron (2007), Pierron et al. (2007), Avril et al. (2008) e Batista et al. (2009).

Atualmente, a maioria dos trabalhos identificam somente as constantes elásticas de rigidez à flexão ou as constantes elásticas de engenharia devido, em grande parte, às dificuldades associadas à análise modal experimental no plano. Por ser a rigidez no plano muito superior à rigidez fora do plano, as frequências no plano têm valores muito maiores que as frequências fora do plano. A excitação no plano requer amplitudes de forças muito superiores que às necessárias para a excitação fora do plano. Portanto, além do uso de equipamentos específicos para fazer medição e excitação no plano, uma série de cuidados deve ser considerada durante a montagem do experimento, como o correto posicionamento da placa e do ponto de excitação.

No entanto, as constantes elásticas de rigidez à extensão também são necessárias para modelar materiais sujeitos a carregamentos multi-axiais. Estas matrizes são independentes, ou seja, não é possível obter a matriz de rigidez à extensão a partir da matriz de rigidez à flexão, e vice-versa. A rigidez elástica à extensão relaciona as forças resultantes às deformações do plano médio e a rigidez elástica à flexão relaciona os momentos resultantes às deformações de curvaturas da placa (apêndice A). Em laminados compósitos, se somente

a ordem das camadas for alterada, a matriz de rigidez de flexão será diferente, mas a de extensão será a mesma. Percebe-se que por meio da matriz de rigidez à extensão é possível determinar facilmente as constantes elásticas efetivas de engenharia do laminado.

1.2 Objetivos

Neste trabalho são utilizados dois métodos específicos, inversos e não-iterativos, na identificação de parâmetros elásticos em placas finas e simétricas de materiais compósitos. E tem por objetivos principais:

- Melhorar um método já existente baseado no VFM para a identificação das constantes de rigidez elástica à flexão, D_{ij} 's, propondo um processo de suavização dos modos na presença de ruído;
- Propor um método para a identificação das constantes de rigidez elástica à extensão, A_{ij} 's, também baseado no VFM, para ser utilizado com informações da análise modal.

1.3 Organização do presente trabalho

Os próximos capítulos deste trabalho vão abordar os seguintes assuntos:

- No capítulo 2 é apresentado o método de identificação das constantes de rigidez elástica à flexão proposto por Grédiac e Paris (1996). A solução é feita utilizando o método dos campos virtuais. Como dados de entrada, são utilizados modos próprios específicos com as suas respectivas frequências naturais obtidos por análise modal. O objetivo neste capítulo é verificar a sensibilidade do método na presença de ruído nos modos próprios que são utilizados no processo de identificação e propor uma suavização dos mesmos por meio da série de Fourier discreta regressiva (RDFS), desenvolvida por Arruda (1992). É apresentado também o método conhecido como série de Fourier discreta regressiva otimizada (ORDFS), proposto por Vanherzeele (2007), e utilizado neste trabalho na

identificação do período ótimo da RDFS. Este processo de suavização dos modos é uma das contribuições desse trabalho. O método foi verificado experimentalmente e numericamente. Os resultados, discussões e conclusões são também apresentados neste capítulo.

- No capítulo 3 é apresentado o método proposto para a identificação das constantes de rigidez elástica à extensão. É demonstrado todos os passos das manipulações matemáticas e considerações realizadas. A solução parte das equações que representam o movimento de vibração livre no plano de placas finas anisotrópicas e simétricas e, também, é baseada no método dos campos virtuais. Esta formulação para identificação das constantes de rigidez elástica à extensão é mais uma das contribuições deste presente trabalho. São considerados somente os 15 primeiros modos de vibração no plano com as suas respectivas frequências naturais e 2 grupos de campos virtuais, um com funções de primeiro grau e outro com funções de segundo grau. Esta etapa de escolha dos modos próprios adequados juntamente com as funções ponderadoras representa mais uma contribuição deste trabalho. Assim como foi feito no capítulo 2, um certo nível de ruído foi adicionado numericamente nos modos de um laminado anisotrópico e a suavização com RDFS e ORDFS foi realizada. Os resultados, discussões e conclusões são apresentados neste capítulo.
- No capítulo 4 são feitas as considerações gerais contendo as conclusões sobre o trabalho, destacando as principais observações sobre os métodos de identificação das constantes elásticos e, também, algumas sugestões para trabalhos futuros.
- No apêndice A é feita uma revisão teórica da elasticidade, mostrando as considerações e as passagens matemáticas necessárias para a obtenção das equações diferenciais de equilíbrio dinâmico que governam as vibrações no plano e transversal de placas finas anisotrópicas.

- E por último, no apêndice B é feito uma revisão do critério conhecido na literatura como “modal assurance criterion”(MAC) utilizado para correlacionar formas modais.

Capítulo 2

Identificação da matriz de rigidez elástica à flexão

O método de identificação da matriz de rigidez elástica à flexão utilizado neste trabalho foi o método proposto por Grédiac e Paris (1996). Este método parte da equação diferencial que governa a vibração livre transversal de placas finas, anisotrópicas e não amortecidas. A solução é feita utilizando o Método dos Campos Virtuais, conhecido na literatura internacional por “Virtual Fields Methods” (VFM). Porém, as manipulações matemáticas realizadas para encontrar a expressão de equilíbrio dinâmico que representa os trabalhos virtuais não iniciam diretamente pela equação 1.1, mostrada no capítulo 1. Primeiro encontra-se a forma fraca da equação diferencial por meio do método dos resíduos ponderados e Galerkin. Embora sejam procedimentos matemáticos diferentes eles chegam a um mesmo resultado, ou seja, a uma mesma expressão. Como dados de entrada para a solução do problema, são utilizados três modos próprios específicos com as suas respectivas frequências naturais oriundos da análise modal de placas sob vibração transversal. Neste capítulo será exposto este método de identificação e a solução numérica proposta para o sistema utilizando a série de Fourier discreta regressiva aplicada na suavização dos modos com ruído antes do processo de identificação.

2.1 Método de identificação adotado

A equação diferencial que governa a vibração transversal de placas finas, simétricas, anisotrópicas e não amortecidas é dada, conforme demonstrado no apêndice A, pela seguinte expressão:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.1)$$

Multiplicando a equação (2.1) por uma função peso (ou ponderadora) arbitrária $P(x, y)$ e integrando ao longo do domínio Ω da placa, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] P d\Omega = \\ = -\rho h \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) P d\Omega. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Integrando a equação (2.2) duas vezes por partes (ou aplicando o Teorema de Green), obtém-se:

$$\begin{aligned} - \oint_{\Gamma} M_n \frac{\partial P}{\partial n} ds + \oint_{\Gamma} \left[Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right] P ds + \int_{\Omega} \left[D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) + 2D_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\ \left. + 2D_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) \right] d\Omega = -\rho h \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) P d\Omega. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Aplicando as condições de contorno para a placa sobre vibração com as bordas livres, têm-se:

$$M_n = 0 \quad \text{e} \quad Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0, \quad (2.4)$$

onde M_s é o momento fletor em torno da direção tangente do contorno, Q_n é a força cortante na direção transversal da normal $\mathbf{n}$, e M_{ns} é o momento torsor em torno da direção da normal $\mathbf{n}$. Considerando as rigidez como sendo constantes, pode-se reescrever a equação (2.3) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & D_{11} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) d\Omega + D_{22} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) d\Omega + D_{12} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) d\Omega + \\ & + 4D_{66} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) d\Omega + 2D_{16} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) d\Omega + \\ & + 2D_{26} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) d\Omega = -\rho h \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) P d\Omega. \end{aligned} \quad (2.5)$$

A equação (2.5) é interpretada em termos de *trabalho virtual* quando associa-se P com a deflexão virtual. O lado esquerdo dessa equação representa o trabalho virtual interno e o lado direito representa o trabalho virtual das forças inerciais. Fazendo uma separação de variáveis para a função w , tem-se:

$$w^{(l)}(x, y, t) = W^{(l)}(x, y) \text{sen}(\omega_l t), \quad (2.6)$$

onde ω_l representa a frequência natural do modo l e $W^{(l)}(x, y)$ é a amplitude de deslocamento de um ponto qualquer (x, y) na direção transversal da placa na frequência ω_l , ou seja, representa o modo próprio desta frequência. A derivada de w no tempo será:

$$\frac{\partial^2 w^{(l)}}{\partial t^2} = -\omega_l^2 w^{(l)}. \quad (2.7)$$

Substituindo a equação (2.6) e sua derivada segunda no tempo, equação (2.7), na equação (2.5), encontra-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& D_{11} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) d\Omega + D_{22} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) d\Omega + D_{12} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) d\Omega + 4D_{66} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) d\Omega + 2D_{16} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) d\Omega + 2D_{26} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) d\Omega = \\
& = -\rho h w_l^2 \int_{\Omega} W^{(l)} P d\Omega.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

A equação (2.8) é válida para qualquer frequência natural e qualquer função ponderadora, desde que esta última seja contínua até a derivada de segunda ordem. Devido a existência de 6 constantes desconhecidas são necessárias no mínimo 6 equações independentes. Teoricamente, a escolha dos modos, com suas respectivas frequências naturais, e a escolha das funções ponderadoras poderiam ser arbitrárias. Porém, existem algumas regras óbvias que podem ser aplicadas. Por exemplo, por motivos de simetrias, algumas funções ponderadoras associadas a modos específicos podem anular as constantes D_{ij} 's e, portanto, tais funções devem ser evitadas. Por razões numéricas, modos com muitas mudanças de sinais (geralmente modos de frequências mais altas) associados a funções ponderadoras também com muitas mudanças de sinais são mais propícios a erros quando se calcula derivadas e, portanto, devem ser também evitados. Modos de frequências mais baixas são mais fáceis de serem obtidos experimentalmente. O grupo de modos a ser utilizado deve ser fortemente dependente das constantes procuradas. Por exemplo, o modo de torção é fortemente dependente das constantes D_{66} , D_{16} e D_{26} . O modo de flexão em x é fortemente dependente de D_{11} , D_{16} e D_{12} e o modo de flexão em y é fortemente dependente de D_{22} , D_{26} e D_{12} . Estes modos estão, na grande maioria dos casos, entre os primeiros modos de vibrar, apresentam campos de curvaturas mais suaves e estão, em conjunto, associados à todas as constantes D_{ij} 's requeridas. São

estes os modos propostos por Grédiac e Paris (1996) neste método. Com relação às funções ponderadoras, eles propuseram o uso de 3 em especial, por enfatizarem a contribuição das tensões internas de cisalhamento no plano e as tensões normais ao longo das direções x e y do plano da placa. Estas funções são interpretadas como deslocamentos virtuais com campos de curvaturas constantes que se assemelham aos modos escolhidos. Além disso, tais funções simplificam as equações por anularem algumas constantes em cada expressão. São essas as seguintes funções quadráticas:

- $P_1(x, y) = x^2$

Para esta função têm-se as seguintes derivadas de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = 2, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.10)$$

Substituindo estas expressões (2.9) e (2.10) na equação (2.8), obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} D_{11} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial x^2} \right) d\Omega + D_{12} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial y^2} \right) d\Omega + 2D_{16} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial x \partial y} \right) d\Omega = \\ = -\frac{\rho h}{2} \omega_l^2 \int_{\Omega} W^{(l)} x^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (2.11)$$

- $P_2(x, y) = y^2$

Para esta função têm-se as seguintes derivadas de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} = 2, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.13)$$

Substituindo estas expressões (2.12) e (2.13) na equação (2.8), obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} D_{22} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial y^2} \right) d\Omega + D_{12} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial x^2} \right) d\Omega + 2D_{26} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial x \partial y} \right) d\Omega = \\ = -\frac{\rho h}{2} \omega_l^2 \int_{\Omega} W^{(l)} y^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (2.14)$$

- $P_3(x, y) = xy$

Para esta função têm-se as seguintes derivadas de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial x \partial y} = 1, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} = 0. \quad (2.16)$$

Substituindo estas expressões (2.15) e (2.16) na equação (2.8), obtém-se a seguinte equação:

$$2D_{66} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial x \partial y} \right) d\Omega + D_{16} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial x^2} \right) d\Omega + D_{26} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial y^2} \right) d\Omega =$$

$$= -\frac{\rho h}{2} \omega_l^2 \int_{\Omega} W^{(l)}(xy) d\Omega. \quad (2.17)$$

Considerando as integrais:

$$K_{xx}^l = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial x^2} \right) d\Omega, \quad K_{yy}^l = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial y^2} \right) d\Omega, \quad K_{xy}^l = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 W^{(l)}}{\partial x \partial y} \right) d\Omega, \quad (2.18)$$

e substituindo essas expressões (2.18) nas equações (2.11), (2.14) e (2.17), para L modos de vibrar, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{xx}^c & 0 & K_{yy}^c & 2K_{xy}^c & 0 & \\ 0 & K_{yy}^c & K_{xx}^c & 0 & 0 & 2K_{xy}^c \\ 0 & 0 & 0 & 2K_{xy}^c & K_{xx}^c & K_{yy}^c \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{xx}^d & 0 & K_{yy}^d & 2K_{xy}^d & 0 & \\ 0 & K_{yy}^d & K_{xx}^d & 0 & 0 & 2K_{xy}^d \\ 0 & 0 & 0 & 2K_{xy}^d & K_{xx}^d & K_{yy}^d \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{12} \\ D_{66} \\ D_{16} \\ D_{26} \end{Bmatrix} = -\frac{\rho h}{2} \begin{Bmatrix} \dots \\ \omega_c^2 \int_{\Omega} W^{(c)} x^2 d\Omega \\ \omega_c^2 \int_{\Omega} W^{(c)} y^2 d\Omega \\ \omega_c^2 \int_{\Omega} W^{(c)} (xy) d\Omega \\ \dots \\ \omega_d^2 \int_{\Omega} W^{(d)} x^2 d\Omega \\ \omega_d^2 \int_{\Omega} W^{(d)} y^2 d\Omega \\ \omega_d^2 \int_{\Omega} W^{(d)} (xy) d\Omega \\ \dots \end{Bmatrix}, \quad (2.19)$$

onde c e d são os c -ésimo e o d -ésimo modos de vibrar. O sistema (2.19) também pode ser escrito em forma compacta como:

$$\mathbf{K}\mathbf{D}=\mathbf{J}, \quad (2.20)$$

onde $\mathbf{K}$ é uma matriz $3L \times 6$, $\mathbf{D}$ é uma matriz 6×1 e $\mathbf{J}$ é uma matriz $3L \times 1$. Como este sistema tem mais equações do que incógnitas, a solução pode ser encontrada por mínimos quadrados, de forma que:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} (\mathbf{K}^T \mathbf{J}), \quad (2.21)$$

onde T se refere à transposta da matriz.

2.2 Presença de ruído e processo de suavização

A solução do sistema de equações (2.19) requer a utilização de métodos numéricos para o cálculo das derivadas e integrais. As derivadas de segunda ordem são calculadas por diferenças finitas e as integrais por integração numérica. Porém, as derivadas são extremamente sensíveis à presença de ruído. Isto pode ser explicado pelo fato da amplitude da derivada de uma onda senoidal ser proporcional à sua frequência. Assim, a derivada do ruído torna predominante para sinais de baixa frequência, até mesmo quando o nível ruído é baixo. Se houver presença de ruído, métodos como diferenças finitas não são adequados. A obtenção de modos com pouco ruído requer a utilização de aparelhos específicos e depende de uma série de outros fatores, tais como técnicas de medição das respostas, calibração dos aparelhos, ambiente de ensaio, dentre outros. O controle desses fatores e a obtenção desses aparelhos nem sempre são fáceis de serem adquiridos na prática. Uma solução para esse problema é a aplicação de métodos de suavização dos sinais antes de serem utilizados. Neste trabalho será utilizado a série de Fourier discreta regressiva (RDFS), proposto por Arruda (1992), para suavizar os modos antes de serem utilizados no processo de identificação. Os parâmetros da RDFS serão obtidos por otimização usando um método proposto por Vanherzeele (2007) e conhecido como série de Fourier discreta regressiva otimizada (ORDFS).

2.2.1 Série de Fourier discreta regressiva (RDFS)

A forma mais usual de se modelar sinais bidimensionais usando séries exponenciais complexas é através da Transformada de Fourier Discreta (TFD). A TFD calcula os coeficientes de uma Série de Fourier Discreta (SFD) que interpola o sinal e tem o período fundamental igual ao comprimento do sinal em cada variável que define o domínio. O efeito da periodização pode causar o fenômeno conhecido como *Leakage*, que é prejudicial na suavização pois causa distorção no sinal filtrado de passa-baixa sendo, portanto, crítico nas diferenciações subsequentes. Existem muitas técnicas para diminuir o “Leakage”. A RDFS consiste em estimar por mínimos quadrados os coeficientes de uma SFD com período e resolução em frequência arbitrários.

Para um sinal bidimensional e discreto $x(\xi, \eta)$ com pontos igualmente espaçados com resolução constante $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$, a TFD pode ser definida como:

$$X_{kl} = \frac{1}{M} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{mn} W_M^{-km} W_N^{-nl}, \quad (2.22)$$

onde $k = 0, \dots, M-1$, $l = 0, \dots, N-1$, x_{mn} é o sinal discretizado com resolução constante, $W_M = \exp(i2\pi/M)$ e $W_N = \exp(i2\pi/N)$ são as M -ésima e N -ésima raízes da unidade, respectivamente, e X_{kl} são os coeficientes bidimensionais de Euler-Fourier. Assim, o sinal pode ser expresso como:

$$x_{mn} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_{kl} W_M^{mk} W_N^{ln}, \quad (2.23)$$

onde $m = 0, \dots, M-1$, $n = 0, \dots, N-1$. A equação (2.23) mostra que o caso particular de SFD bidimensional com período M em ξ e período N em η é o modelo matemático usado para interpolar x_{mn} . A TFD é, geralmente, calculada por dois passos. Em cada passo, são obtidas as transformadas de Fourier discretas unidimensionais. A equação (2.22) pode ser calculada partindo-se primeiramente das transformadas das colunas da matriz x_{mn} :

$$Y_{kn} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x_{mn} W_M^{-km}, \quad (2.24)$$

sendo $k = 0, \dots, M-1$, $n = 0, \dots, N-1$. As transformadas de Fourier discretas unidimensionais são as linhas da matrix do sinal intermediário Y_{kn} :

$$X_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Y_{kn} W_N^{-ln}, \quad (2.25)$$

$k = 0, \dots, M-1$, $l = 0, \dots, N-1$. A suavização é concluída pela filtragem de passa-baixa antes de realizar as transformadas inversas, que são também realizadas em dois passos. Primeiro, é feito uma filtragem na direção η , e as linhas de frequências q são mantidas:

$$X_{kl} = 0, \quad (2.26)$$

com $l = q+2, q+3, \dots, N-q$. Assim, as transformadas inversas das linhas de X_{kl} são feitas:

$$Y_{kn} = \sum_{l=0}^{N-1} X_{kl} W_M^{ln}, \quad (2.27)$$

onde $k = 0, \dots, M-1$, $n = 0, \dots, N-1$. Os valores intermediários de Y_{nk} são filtrados, permanecendo as primeiras linhas de frequências p :

$$Y_{kn} = 0, \quad (2.28)$$

com $k = p+2, p+3, \dots, M-p$. Pode-se observar que as linhas $M-p+1, \dots, M$ e $N-q+1, \dots, N$ correspondem às primeiras p e q frequências negativas em ξ e η , respectivamente, e não podem ser descartadas. Deste modo, finalmente, o sinal bidimensional suavizado é obtido com o segundo passo da inversa das transformadas de Fourier discretas das colunas de Y_{kn} :

$$x_{mn}^{(s)} = \sum_{k=0}^{M-1} Y_{kn} W_N^{km}, \quad (2.29)$$

onde $m = 0, \dots, M-1$, $n = 0, \dots, N-1$. As derivadas parciais são obtidas derivando a equação (2.23) em relação a $\xi = m\Delta\xi$ e $\eta = n\Delta\eta$, o que significa multiplicar Y_{kn} por $i2\pi k/M\Delta\xi$ e $i2\pi l/N\Delta\eta$, respectivamente, antes de calcular as inversas das transformadas de Fourier discretas.

A RDFS também consiste em representar o sinal por uma SFD. Ao contrário da TFD, o comprimento original do sinal não é igual ao período e o número de linhas de frequências não é igual ao tamanho do sinal. Assim, a expressão para o sinal é:

$$x_{mn} = \sum_{k=-p}^p \sum_{l=-q}^q X_{kl} W_R^{mk} W_C^{ln} + \epsilon_{mn}, \quad (2.30)$$

onde: $m = 0, \dots, M-1$, $n = 0, \dots, N-1$, R e C é o número de linhas e colunas, respectivamente, da SFD, ϵ_{mn} é o elemento da matrix erro ϵ . O comprimento do sinal na direção ξ é $M\Delta\xi$, mas o período da SFD é $R > M$. O número de linhas de frequências é $p \ll M$. Da mesma forma, na direção η , o comprimento do sinal é $N\Delta\eta$, o período da SFD é $C > N$ e, $q \ll N$. A RDFS é uma *aproximação* ao invés de uma interpolação de x_{mn} e os coeficientes de Euler-Fourier não podem ser calculados pela TFD. Reescrevendo a equação (2.30) na forma de matriz, tem-se:

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_R \mathbf{X} \mathbf{W}_C + \epsilon, \quad (2.31)$$

e através do método dos mínimos quadrados, a solução da equação (2.31) é dada por:

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{W}_R^H \mathbf{W}_R \right)^{-1} \mathbf{W}_R^H \mathbf{x} \mathbf{W}_C^H \left(\mathbf{W}_C \mathbf{W}_C^H \right)^{-1}, \quad (2.32)$$

onde H refere-se a transposta do conjugado complexo de uma matriz. As matrizes a serem invertidas são muito pequenas, de ordem $(2p+1) \times (2p+1)$ e $(2q+1) \times (2q+1)$, respectivamente. O sinal suavizado é obtido à partir da seguinte expressão:

$$\mathbf{x}^{(s)} = \mathbf{W}_R \mathbf{X} \mathbf{W}_C. \quad (2.33)$$

As derivadas espaciais parciais nas direções ξ e η podem ser facilmente obtidas multiplicando X_{kl} pelos termos $i2\pi k/R\Delta\xi$ e $i2\pi l/C\Delta\eta$, respectivamente, antes de usar a equação (2.33).

2.2.2 Série de Fourier discreta regressiva otimizada (ORDFS)

Considerando o período da SFD como sendo $R = K_\xi M$ ao longo da direção ξ e $C = K_\eta N$ ao longo da direção η , na prática, as razões K_ξ e K_η são, geralmente, termos desconhecidos e podem ser estimados juntamente com os resíduos, levando-se a um problema não-linear de mínimos quadrados. Uma abordagem baseada na RDFS e conhecida como série de Fourier discreta regressiva otimizada (ORDFS) foi introduzida por Vanherzeele (2007) e (2008), na qual permite estimar as razões K_ξ e K_η usando um método de busca mais robusto e computacionalmente rápido. Usando a função *lsqnonlin* do *Signal Processing Toolbox* do software Matlab^R, é possível estimar estas razões desconhecidas juntamente com os coeficientes desconhecidos X da equação (2.31) usando um processo iterativo clássico de Gauss-Newton. Para este problema de otimização, a função objetivo representa o resíduo entre a diferença nodal do sinal original (que neste trabalho representa os modos próprios em uma frequência específica), com ruído, e os seus respectivos sinais filtrados (ou suavizados). As razões K_ξ e K_η são mudadas à cada iteração no processo de otimização e representarão os parâmetros globais para este passo iterativo. Após testados vários grupos de valores, o valor ótimo de cada variável, K_ξ e K_η , que refere ao menor resíduo obtido, são utilizados na RDFS para encontrar o sinal suavizado $x^{(s)}$, ou mais especificamente, o modo próprio suavizado.

2.3 Resultados e discussão

Para verificar a precisão do método de suavização por RDFS foram feitas análises numérica e experimental. Modos próprios e suas respectivas frequências naturais numéricas foram obtidos por um software comercial de Elementos Finitos, ANSYS^R 11.0 (ANSYS, 2007) e o ruído foi gerado numericamente e aleatoriamente para estes modos. Na análise modal experimental foi utilizado um shaker eletromecânico para excitar a estrutura (placa) e as medições foram feitas por um vibrômetro laser Doppler. Duas placas foram testadas: uma isotrópica de aço e uma ortotrópica de carbono/epóxi. As figuras 2.1 e 2.2 mostram as metodologias para a identificação das propriedades elásticas quando utiliza-se informações numéricas e experimentais, respectivamente. No processo numérico, as características geométricas e elásticas da placa, e, sua densidade são inicialmente conhecidas e utilizadas como dados de entrada no ANSYS. Da análise modal numérica obtém-se os modos próprios requeridos com as suas respectivas frequências naturais. O ruído é então gerado numericamente para estes modos e por meio da RDFS e ORDFS realiza-se o processo de suavização. Os modos suavizados juntamente com as suas respectivas frequências naturais são agora dados de entrada para o método de identificação das constantes elásticas. Estas constantes são então comparadas com as utilizadas inicialmente como dados de entrada no ANSYS. Todos os cálculos foram realizados no software comercial Matlab^R. No processo experimental, os modos próprios requeridos com as suas respectivas frequências naturais experimentais são obtidos por meio da análise modal experimental, realizada na placa de teste. Realiza-se então o processo de suavização por RDSF e ORDFS e obtém-se os modos suavizados. Estes, com as suas respectivas frequências naturais, são então utilizados no método de identificação das constantes elásticas. Estas constantes juntamente com as características geométricas e a densidade são dados de entrada no ANSYS. Obtém-se assim as frequências naturais numéricas. Por fim, estas são então comparadas com as obtidas por meio da análise modal experimental.

2.3.1 Análise Numérica

Inicialmente, uma placa anisotrópica hipotética de dimensões 0,450 x 0,350 x 0,0021 m e densidade 1510 kg/m³ foi utilizada para a análise modal numérica. Suas constantes de

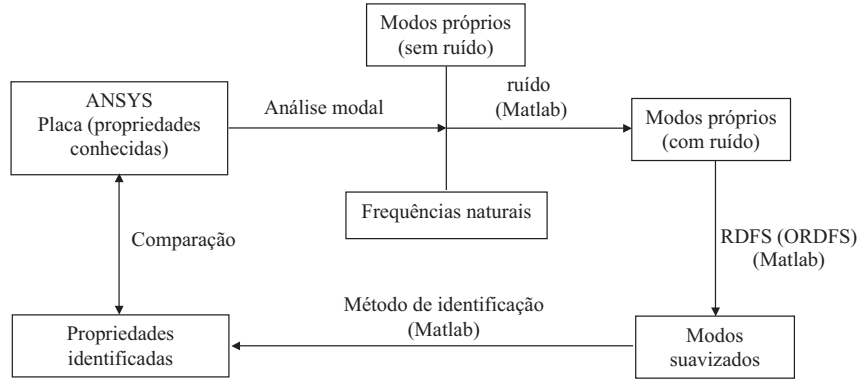


Figura 2.1: Metodologia para a identificação das constantes elásticas utilizando informações numéricas.

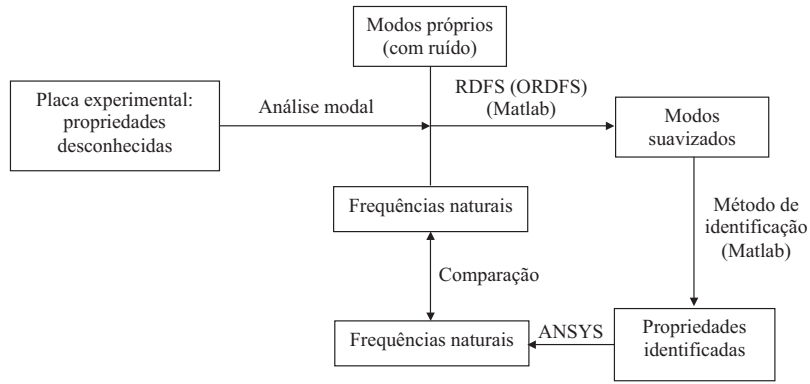


Figura 2.2: Metodologia para a identificação das constantes elásticas utilizando informações experimentais.

rigidez elástica à flexão são mostradas na tabela 2.1. Estas constantes foram calculadas utilizando a teoria clássica de laminados para um laminado $[0 \ 45 \ 90 \ 135]_{2S}$ e com as seguintes constantes elásticas de engenharia por lâmina: módulo de elasticidade na direção das fibras $E_1=120000 \text{ MPa}$, módulo de elasticidade na direção transversal das fibras $E_2=10000 \text{ MPa}$, módulo de cisalhamento $G_{12}=4900 \text{ MPa}$, e coeficiente de Poisson $\nu_{12}=0,3$. As frequência naturais e os modos próprios foram calculados utilizando-se uma malha com 150 elementos de 8 nós (elemento SHELL99 do ANSYS), e a placa foi considerada com as bordas livres. Com objetivo de simular a presença de ruído, números aleatórios que têm 5, 10 ou 15% da amplitude da deflexão máxima, foram adicionados às amplitudes de cada deflexão. As derivadas de primeira e segunda ordem foram calculadas por diferenças finitas com e sem a presença de ruído, antes e depois do processo de suavização.

Tabela 2.1: Constantes de rigidez elástica à flexão da placa anisotrópica.

Constantes (D_{ij})	($N \times mm$)
D_{11}	64363, 9
D_{22}	24155, 8
D_{12}	8875, 1
D_{66}	10032, 7
D_{16}	6019, 6
D_{26}	6019, 6

A figura 2.3 mostra os três modos numéricos da placa anisotrópica obtidos pelo método dos elementos finitos e que foram utilizados na verificação inicial do método. A figura 2.4 mostra estes mesmos modos com a adição de ruído com amplitude máxima de 15% da máxima amplitude de deflexão de seu respectivo modo. A figura 2.5 mostra estes mesmos modos após o processo de suavização por RDFS. A tabela 2.2 mostra os valores dos erros obtidos para esta placa na ausência e na presença de diferentes níveis de ruído. As derivadas foram calculadas diretamente. Como pode ser visto, na presença de ruído, os erros encontrados são muito altos, o que demonstra que o método das diferenças finitas não é um método adequado para ser utilizado no cálculo de derivadas de sinais contaminados, principalmente quando estas são de segunda ordem. Porém, na ausência de ruído, os resultados são muito satisfatórios. O uso da RDFS pode ser então uma alternativa para filtrar sinais e diminuir os efeitos da presença de ruído antes de serem utilizados no processo de identificação.

Tabela 2.2: Erros obtidos para a placa anisotrópica sem e com alguns níveis de ruído, sem suavização.

Constantes	Erros(%)			
	Sem ruído	Com ruído $\leq 5\%$	Com ruído $\leq 10\%$	Com ruído $\leq 15\%$
D_{11}	0,02	1,61	2,44	2,78
D_{22}	0,04	5,77	13,274	21,46
D_{12}	0,02	16,84	29,48	38,34
D_{66}	1,22	4,55	11,05	17,59
D_{16}	0,63	3,42	9,13	16,04
D_{26}	0,64	11,72	19,59	23,31

A tabela 2.3 mostra os valores dos erros obtidos para a placa anisotrópica na ausência de ruído após o processo de suavização. Por analogia à K_η e K_ξ , as variáveis K_x e K_y

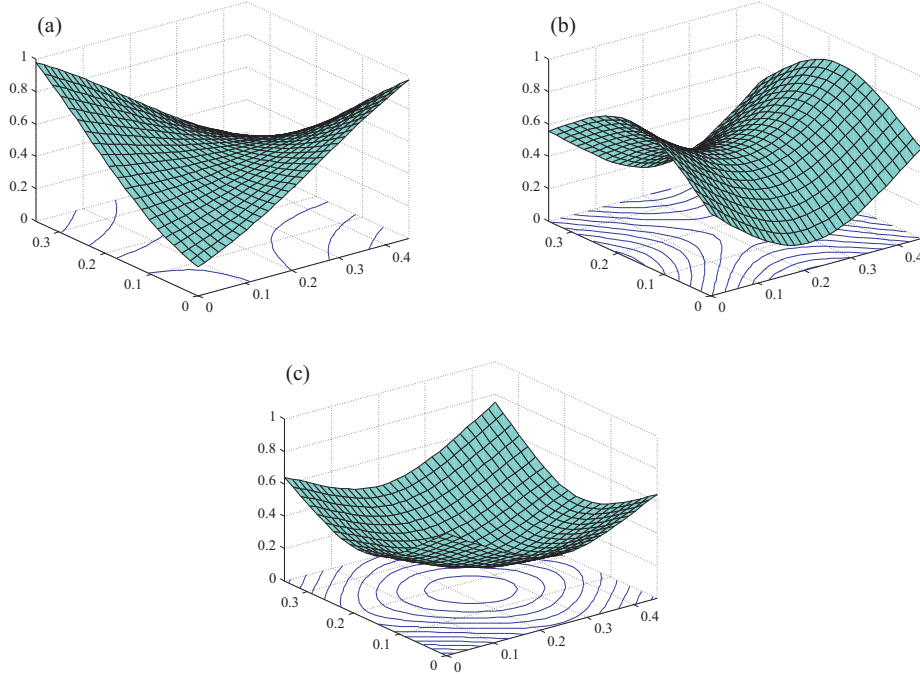


Figura 2.3: Modos numéricos obtidos pelo ANSYS para a placa anisotrópica: (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3.

representam as razões R/M e C/N (seção 2.2.2) ao longo das direções x e y , respectivamente. Os subscritos 1, 2 e 3 nas variáveis p , q , K_x e K_y referem-se aos três modos próprios utilizados. Para este caso, como valores de entrada utilizados para iniciar o processo de suavização foram: $K_{x1} = K_{x2} = K_{x3} = K_{y1} = K_{y2} = K_{y3} = K_{y4} = 2$, e, para p e q : $p_1 = 8$, $p_2 = 8$, $p_3 = 8$, $q_1 = 8$, $q_2 = 8$ e $q_3 = 8$. Foram encontrados os valores ótimos: $K_{x1} = K_{x2} = K_{x3} = K_{y1} = K_{y2} = K_{y3} = K_{y4} = 2$, que são os mesmos utilizados como dados de entrada. Como pode ser visto, na ausência de ruído, os resultados utilizando valores altos para as variáveis p e q foram tão satisfatórios quanto os obtidos sem a aplicação do método de suavização.

A tabela 2.4 mostra os resultados obtidos quando o ruído é introduzido. Foram utilizados como parâmetros de entrada: $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 3$ e $q_3 = 4$, e, $K_{x1} = K_{x2} = K_{x3} = K_{y1} = K_{y2} = K_{y3} = K_{y4} = 2$. Foram encontrados os seguintes valores ótimos: para a placa com nível de ruído $\leq 5\%$, $K_{x1} = 10,38$, $K_{x2} = 1,85$, $K_{x3} = 1,62$, $K_{y1} = 3,85$, $K_{y2} = 3,14$ e $K_{y3} = 1,53$; para a placa com nível de ruído $\leq 10\%$, $K_{x1} = 15,37$,

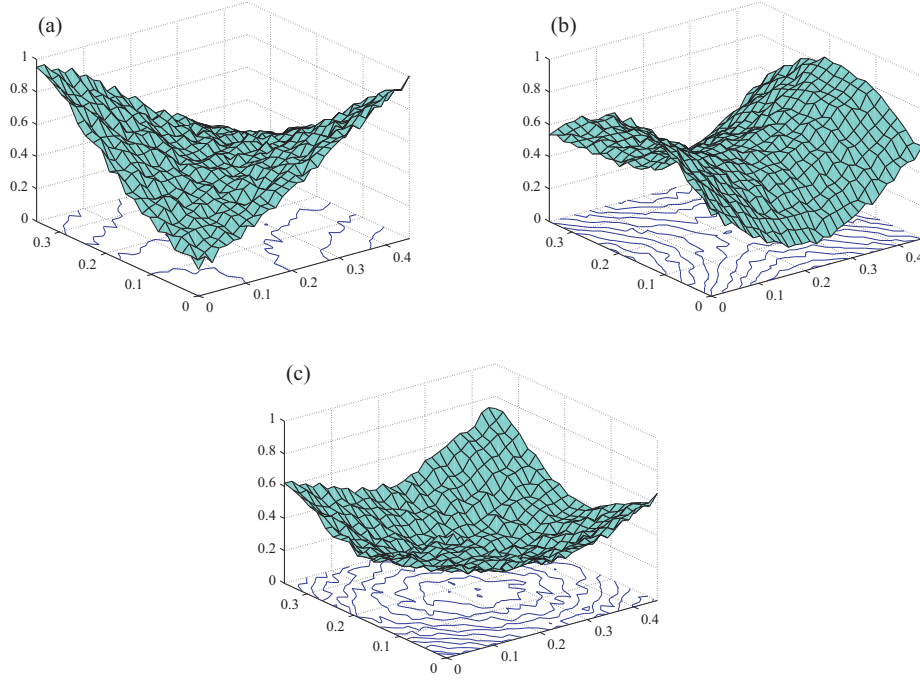


Figura 2.4: Modos numéricos com ruído $\leq 15\%$ gerado numericamente: (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3.

Tabela 2.3: Erros obtidos para a placa anisotrópica sem ruído após o processo de suavização.

Constantes	Erros(%)
D_{11}	0,25
D_{22}	0,19
D_{12}	0,83
D_{66}	1,25
D_{16}	0,31
D_{26}	0,54

$K_{x2} = 1,89$, $K_{x3} = 1,60$, $K_{y1} = 3,67$, $K_{y2} = 3,16$ e $K_{y3} = 1,38$; e para a placa com nível de ruído $\leq 15\%$, $K_{x1} = 15,36$, $K_{x2} = 1,94$, $K_{x3} = 1,57$, $K_{y1} = 3,51$, $K_{y2} = 3,10$ e $K_{y3} = 1,31$. Nota-se que, para o mesmo nível de ruído, os erros obtidos a partir da aplicação direta de diferenças finitas são muito mais altos do que os erros obtidos após a suavização.

As razões K_x e K_y da RDFS, que representam as variáveis de projeto do problema de minimização, são altamente dependentes das variáveis p e q . Quando p e q aumentam, o resíduo geralmente diminui. Porém, se o sinal contém ruído, é possível que o mesmo não seja filtrado e seja, portanto, considerado como sendo parte do sinal sem ruído. Por outro lado,

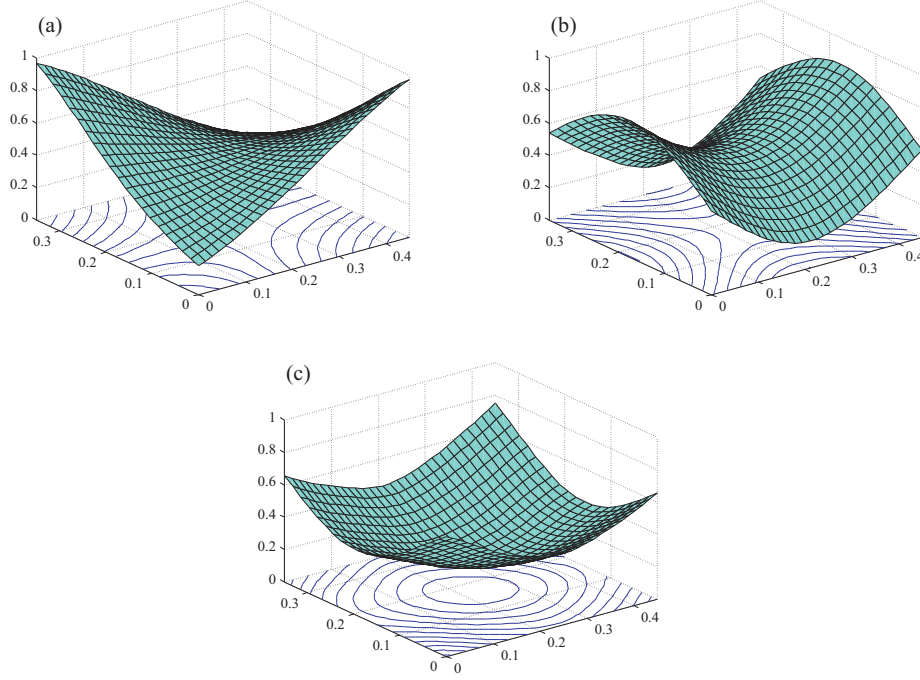


Figura 2.5: Modos numéricos suavizados por RDFS: (a) Mode 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3.

se p e q diminuem, o valor residual aumenta. Dependendo da curvatura do modo (sinal) original, parte da informação do sinal real (ou curvatura real do modo) é filtrada. Em geral, p e q dependem da curvatura do modo. Se o sinal é suave e tem poucos picos de ondas, p e q são valores pequenos, e, se o sinal possui muitos picos de ondas, p e q são valores mais altos. Neste trabalho, o método dos elementos finitos foi utilizado para averiguar a coerência dos valores das propriedades elásticas calculadas. Os parâmetros p e q foram mudados até que a diferença entre as frequências naturais numéricas e experimentais fossem mínimas para os mesmos modos.

2.3.2 Análise Experimental

Experimentalmente, para a verificação do método, duas placas foram utilizadas: uma isotrópica de aço com $0,450 \times 0,350 \times 0,0021 \text{ m}$ e massa de $2,603 \text{ kg}$, e uma ortotrópica de carbono/epóxi com fibras entrelaçadas $0/90^\circ$, com dimensões $0,440 \times 0,346 \times 0,0032 \text{ m}$, massa de $0,7594 \text{ kg}$ e 8 camadas. Seu processo de fabricação foi pré-peg com alta pressão e cura em autoclave. A densidade das placas foram calculadas dividindo a massa medida pelo volume.

Tabela 2.4: Erros obtidos para a placa anisotrópica após a suavização de alguns níveis de ruído.

Constantes	Erros(%)		
	Com ruído $\leq 5\%$	Com ruído $\leq 10\%$	Com ruído $\leq 15\%$
D_{11}	0,43	0,31	1,28
D_{22}	1,26	0,47	0,38
D_{12}	1,53	4,36	11,04
D_{66}	1,37	1,51	1,61
D_{16}	1,12	3,10	5,29
D_{26}	0,89	1,40	1,79

Para a placa de aço, o valor encontrado é um pouco mais alto do que o valor médio encontrado na literatura, como pode ser visto na tabela 2.5. Isso ocorre, possivelmente, devido às variações da espessura ao longo do domínio da placa. Como o método proposto é sensível à variação da espessura, calcular a densidade a partir do valor da massa medida ao invés de usar valores da literatura pode ser um maneira de compensar erros devido à essas variações de espessura.

Tabela 2.5: Constantes de engenharia para o aço.

Constantes de engenharia	E_x (GPa)	E_y (GPa)	G_{xy} (GPa)	ν_{xy} (GPa)
Literatura ($\rho = 7800kg/m^3$)	210	210	80,8	0,3
Calculados ($\rho = 7870kg/m^3$)	215,67	209,08	83,08	0,3

As placas foram suspensas por fios de nylon para simular as condições de bordas livres, como é ilustrado nas figuras 2.7 e 2.6. As placas foram excitadas em um único ponto por um stinger acoplado à um transdutor de força e à um shaker eletromecânico alimentado por sinais de ruído branco. O intervalo de frequências do sinal de entrada foi escolhido de tal forma a ser suficiente para excitar os três modos requeridos pelo método. As respostas dinâmicas em forma de velocidades transversais à superfície da placa foram medidas para uma malha contendo 176 nós igualmente espaçados e utilizando um vibrômetro laser Doppler. As funções respostas em frequência (FRFs) foram obtidas utilizando-se o software comercial LMS/CADA- X^R . Os modos próprios foram identificados pelo algoritmo ERA (Eigen System Realization Algorithm) (Juang, 1993) usando funções respostas em impulso, no domínio do

tempo, obtidos através da transformada de Fourier inversa das FRFs.

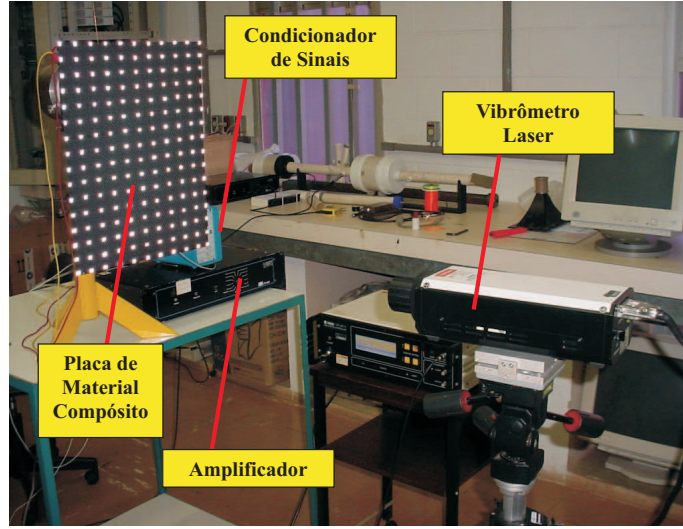


Figura 2.6: Análise modal experimental para a obtenção dos modos transversais e suas respectivas frequências naturais.

A tabela 2.5 mostra os valores das constantes de engenharia do aço calculadas a partir dos valores das constantes de rigidez elásticas D_{ij} 's obtidos e os valores fornecidos pela literatura. As constantes E_x e E_y são os módulos de elasticidade longitudinal associados às direções x e y da placa, G_{xy} é o módulo de cisalhamento associado ao plano xy , ν_{xy} é o coeficiente de Poisson. As Tabelas 2.6 e 2.7 contém as diferenças (em %) entre as frequências naturais experimentais medidas e as numéricas calculadas após o processo de suavização pela RDFS, para a placa isotrópica e ortotrópica, respectivamente. Essas diferenças foram calculadas considerando as frequências de modos experimentais e numéricos equivalentes. Como pode ser visto, os resultados são satisfatórios. Para a placa isotrópica foram utilizados como parâmetros de entrada: $p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $p_3 = 5$, $q_1 = 1$, $q_2 = 4$ e $q_3 = 4$, e foram encontrados os seguintes valores ótimos: $K_{x1} = 3,74$, $K_{x2} = 1,91$, $K_{x3} = 2$, $K_{y1} = 2,89$, $K_{y2} = 2,38$ e $K_{y3} = 2$. E para a placa ortotrópica foram utilizados como parâmetros de entrada: $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = 2$, $q_1 = 2$, $q_2 = 4$ e $q_3 = 1$, e foram encontrados os seguintes valores ótimos: $K_{x1} = 3,90$, $K_{x2} = 1,88$, $K_{x3} = 1,91$, $K_{y1} = 2,56$, $K_{y2} = 2,08$ e $K_{y3} = 1,43$.

As figuras 2.8 e 2.10 mostram os três modos obtidos pela análise modal experimental

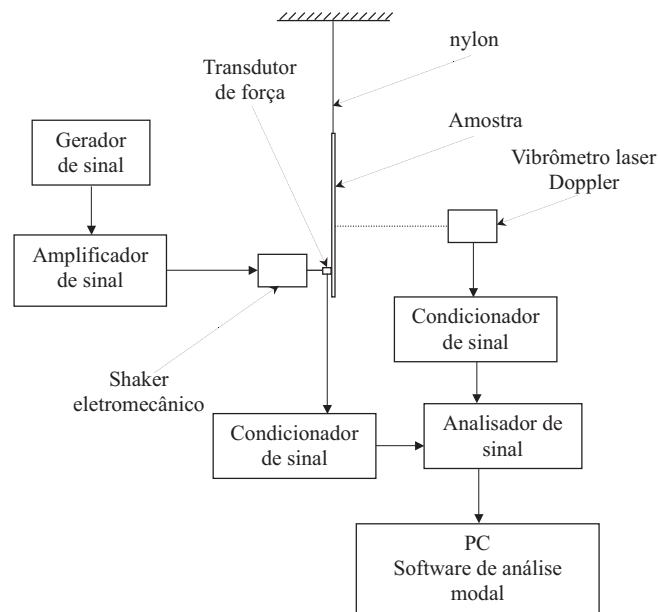


Figura 2.7: Montagem do experimento para a realização da análise modal.

Tabela 2.6: Comparação entre frequências experimentais e numéricas da placa isotrópica de aço.

Frequências Experimentais	Frequências Numéricas (ANSYS)	Diferenças(%)
43,09	45,27	5,07
55,95	55,07	1,58
96,61	96,72	0,11
103,97	107,67	3,56
124,61	129,18	3,67
160,37	159,79	0,36

para a placa isotrópica de aço e para a placa ortotrópica de carbono/epóxi, respectivamente. As figuras 2.9 e 2.11 mostram os mesmos modos após a suavização.

Tabela 2.7: Comparação entre frequências experimentais e numéricas da placa ortotrópica de carbono/epóxi.

Frequências Experimentais	Frequências Numéricas (ANSYS)	Diferenças(%)
41,32	40,26	2,57
99,59	95,47	4,13
126,53	125,70	0,65
166,76	170,88	2,47
183,97	188,56	2,49
256,21	257,00	0,30

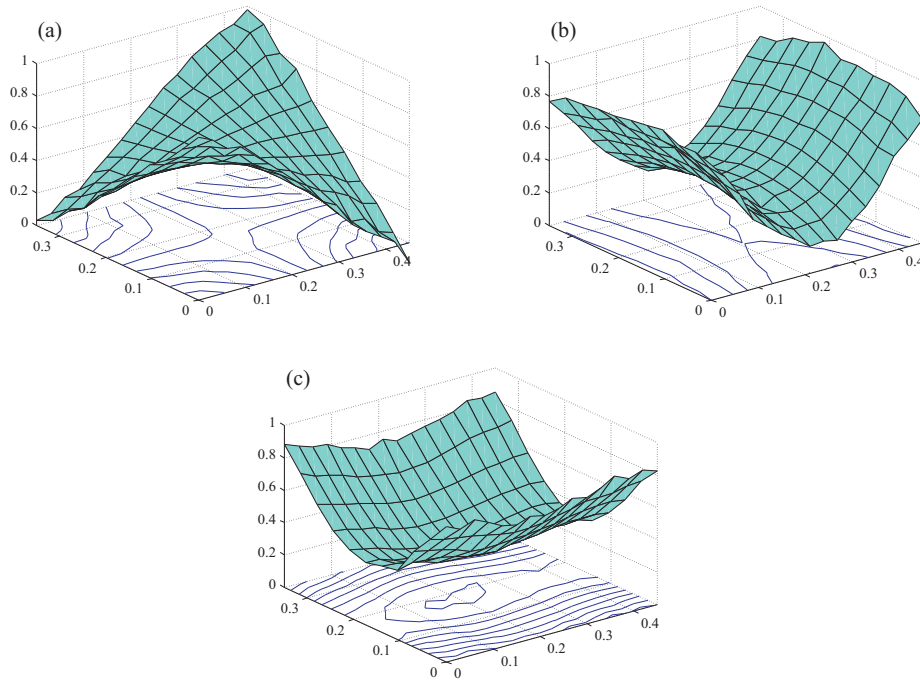


Figura 2.8: Modos próprios experimentais da placa de aço: (a) Modo de torção, (b) Modo de flexão em x , (c) Modo de flexão em y .

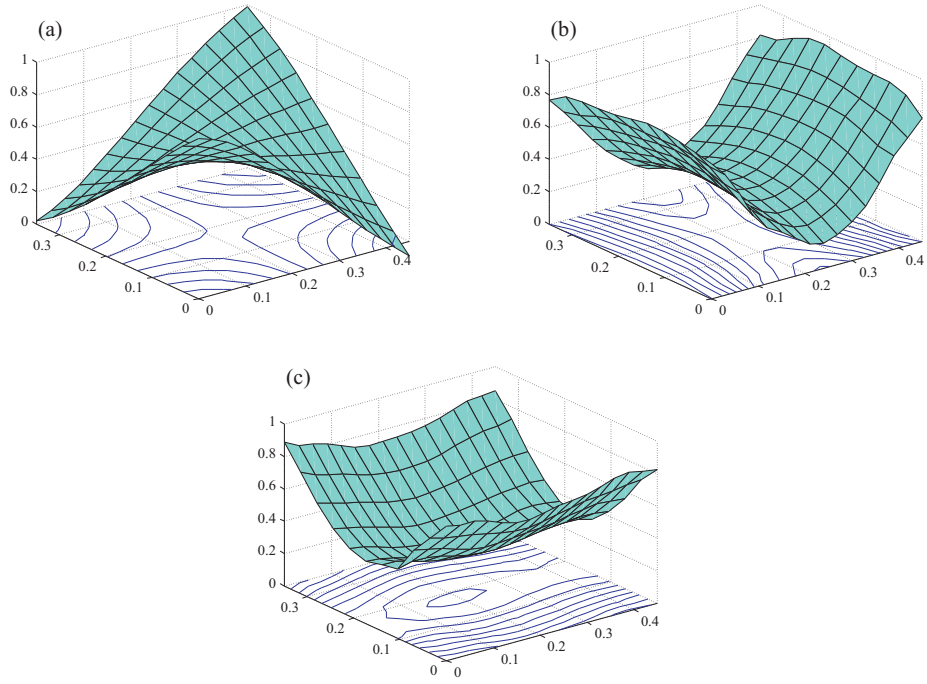


Figura 2.9: Modos experimentais da placa de aço suavizados por RDFS: (a) Modo de torção, (b) Modo de flexão em x , (c) Modo de flexão em y .

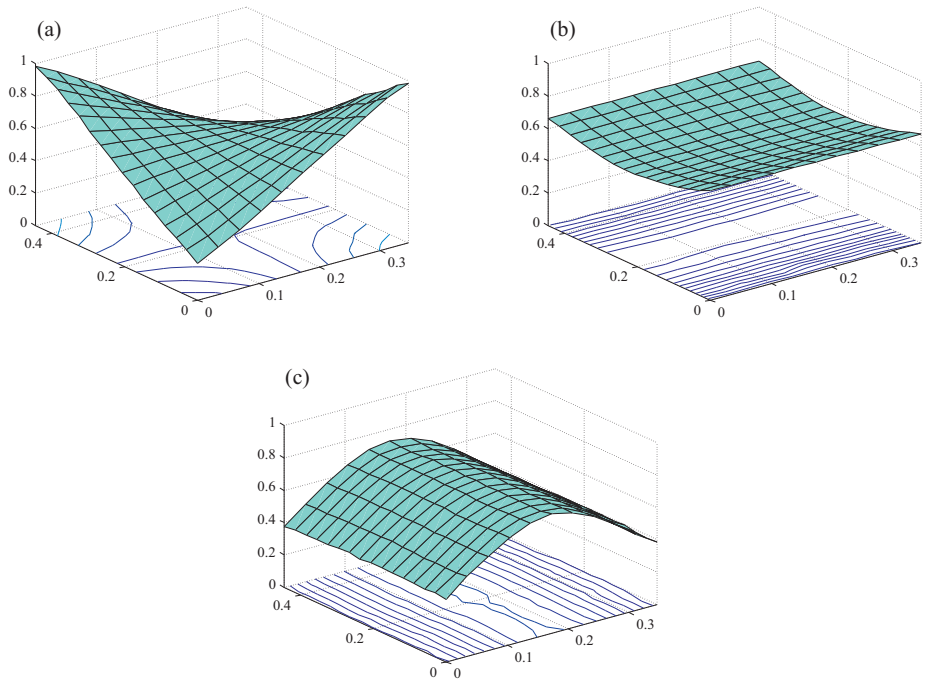


Figura 2.10: Modos experimentais da placa de carbono/epóxi: (a) Modo de torção, (b) Modo de flexão em y , (c) Modo de flexão em x .

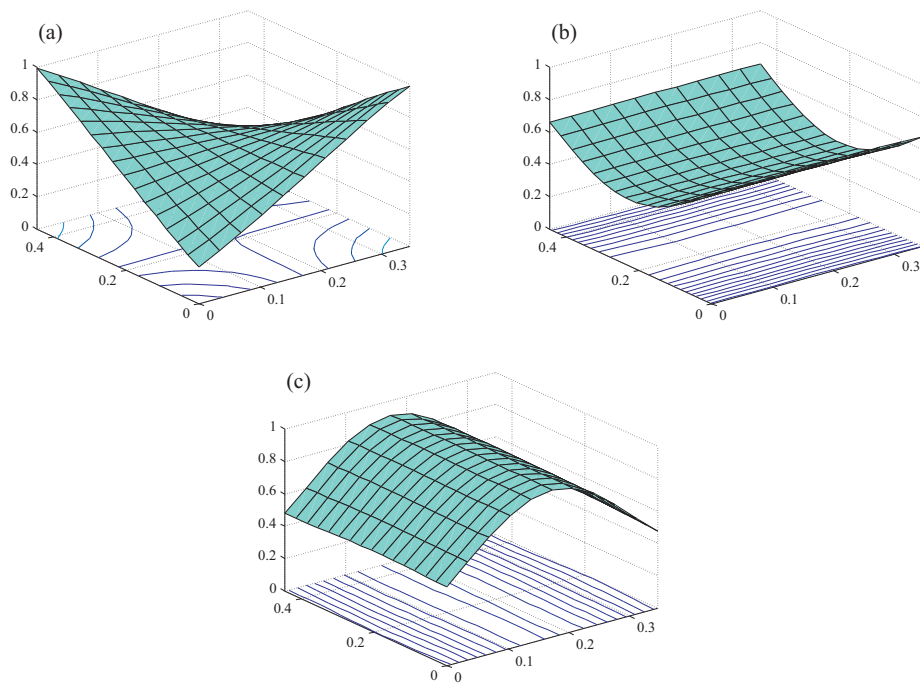


Figura 2.11: Modos experimentais da placa de carbono/epóxi suavizados por RDFS: (a) Modo de torção, (b) Modo de flexão em y , (c) Modo de flexão em x .

A figura 2.12(a) mostra a derivada espacial de segunda-ordem com relação à y do modo de torção da placa de aço, calculado diretamente (com ruído) por diferenças finitas, e a figura 2.12(b) mostra a mesma derivada para o mesmo modo calculada por diferenças finitas após a suavização. Nota-se que a derivada calculada diretamente sem suavização é completamente sem forma. Isso porque a derivada do ruído é predominante sobre a derivada do sinal. A suavização permitiu a redução deste ruído e, conseqüentemente, o cálculo da derivada segunda tornou-se possível.

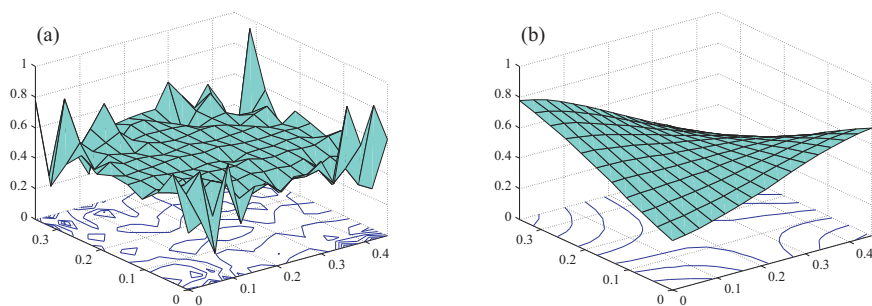


Figura 2.12: Derivada segunda ao longo da direção y do modo de torção da placa de aço: (a) antes da suavização, (b) após a suavização por RDFS.

2.4 Conclusões

O método de identificação proposto por Grédiac e Paris (1996) mostra ser um método eficiente desde que seja utilizado com modos corretos e sem a presença de ruído. Isso porque neste método utiliza-se derivadas de segunda ordem destes modos que são, por sua vez, extremamente sensíveis a presença de ruído, mesmo em baixos níveis. Dentro deste contexto, o uso da RDFS como método de suavização mostrou ser um procedimento eficiente e alternativo na diminuição de ruído em sinais contaminados. Porém, a precisão do mesmo está grandemente relacionada com os seus parâmetros definidos como dados de entrada no processo de suavização. De uma maneira geral, pode-se dizer que destes parâmetros, p e q são responsáveis pelo ajuste grosso do sinal e, portanto, valores errôneos adotados para eles conduzem a altos erros, podendo descaracterizar as curvaturas do sinal original desprezando ou adicionando partes em regiões dos mesmos que não condizem com o real. E, os parâmetros K_x e K_y , encontrados após o processo de otimização, podem ser considerados

como os responsáveis por um ajuste fino do sinal. Seus valores estão grandemente vinculados aos parâmetros de entrada p e q . O uso da ORDFS mostrou ser uma boa forma de ajustar p e q .

Para a RDFS, por aproximar um sinal por um somatório de exponenciais, é de se esperar que sinais mais suaves, com poucas variações de sinais, sejam menos problemáticos e capazes, portanto, de apresentar melhores resultados. Em geral, as extremidades dos sinais a serem suavizados são regiões mais críticas. Isso porque a série de Fourier discreta regressiva apresenta um período que se estende além do sinal real e o início desta região extrapolada, ou seja, a extremidade do sinal real, e o início do sinal real, são regiões de difícil ajuste dependendo do sinal.

Capítulo 3

Identificação da matriz de rigidez elástica à extensão

Neste capítulo é apresentado a formulação matemática do método de identificação da matriz de rigidez elástica à extensão proposto neste trabalho. Trata-se de um método direto e não iterativo onde modos próprios no plano específicos de placas juntamente com as suas respectivas frequências naturais são utilizados na solução de um sistema linear de equações oriundo das equações diferenciais que governam a vibração no plano de placas finas, anisotrópicas, simétricas e não amortecidas. Assim como no método proposto por Grédiac e Paris (1996), utilizado neste trabalho para a obtenção da matriz de rigidez elástica à flexão, a solução aqui também é baseada no método dos campos virtuais (VFM). E também, o método dos resíduos ponderados com Galerkin é utilizado na obtenção das equações que representam o equilíbrio dinâmico no plano em termos de trabalhos virtuais.

3.1 Manipulações matemáticas

Como pode ser visto no apêndice A, as equações (3.1) e (3.2) são as equações diferenciais que regem o movimento vibratório no plano de placas finas, anisotrópicas, simétricas e não-amortecidas. Estas equações serão utilizadas aqui para a obtenção das constantes elásticas procuradas. A ideia do método se resume em resolver estas equações associando informações

obtidas da análise modal, modos e frequências naturais, e métodos numéricos.

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (3.2)$$

Multiplicando a equação (3.1) por uma função peso (ou ponderadora) $P(x, y)$ e integrando no domínio Ω da placa, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} P d\Omega = \int_{\Omega} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} P d\Omega. \end{aligned} \quad (3.3)$$

A derivada de um produto de funções é dado por:

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx}, \quad (3.4)$$

onde f e g são funções contínuas quaisquer.

Pode-se escrever o teorema de Green da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} d\Omega = \int_{\Gamma} f n_x d\Gamma, \quad (3.5)$$

onde Ω é o domínio, n_x é um vetor unitário perpendicular em qualquer ponto arbitrário do contorno Γ . Aplicando a propriedade (3.4) no primeiro termo do lado esquerdo da equação (3.3), tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} P \right) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega. \quad (3.6)$$

Aplicando o teorema de Green na equação (3.6), tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega. \quad (3.7)$$

Aplicando-se a propriedade (3.4) no segundo termo do lado esquerdo da equação (3.3), tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} P d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} P \right) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega. \quad (3.8)$$

Aplicando o teorema de Green na equação (3.8), tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} P d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega. \quad (3.9)$$

Aplicando-se a propriedade (3.4) no terceiro termo do lado esquerdo da equação (3.3), tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} P d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} P \right) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega. \quad (3.10)$$

Aplicando o teorema de Green na equação (3.10), tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} P d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} P n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega. \quad (3.11)$$

E, da mesma forma, por analogia à u , têm-se para v :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} P d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega, \quad (3.12)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} P d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega, \quad (3.13)$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} P d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} P n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega. \quad (3.14)$$

Substituindo as equações (3.7), (3.9), (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) na equação (3.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} & A_{11} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega \right) + 2A_{16} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & + A_{66} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} P n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega \right) + A_{16} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & + A_{12} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega \right) + A_{66} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} P n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega \right) + \end{aligned}$$

$$+A_{26} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} P n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega \right) = \rho h \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} P d\Omega. \quad (3.15)$$

Das equações constitutivas (ver apêndice A), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix}, \quad (3.16)$$

onde N_x , N_y e N_{xy} são forças por unidade de comprimento aplicadas nas direções x e y e no plano xy , respectivamente, ε_x^o , ε_y^o e γ_{xy}^o são as deformações da superfície média nas direções x e y e no plano xy , respectivamente. Desta forma, a partir da equação (3.16), têm-se os termos:

$$N_x = A_{11}\varepsilon_x^o + A_{12}\varepsilon_y^o + A_{16}\gamma_{xy}^o = A_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial v}{\partial y} + A_{16}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad (3.17)$$

$$N_y = A_{12}\varepsilon_x^o + A_{22}\varepsilon_y^o + A_{26}\gamma_{xy}^o = A_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial v}{\partial y} + A_{26}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad (3.18)$$

$$N_{xy} = A_{16}\varepsilon_x^o + A_{26}\varepsilon_y^o + A_{66}\gamma_{xy}^o = A_{16}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{26}\frac{\partial v}{\partial y} + A_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \quad (3.19)$$

Multiplicando a equação (3.17) pela função ponderadora P e pelo vetor unitário n_x e, integrando no contorno Γ , obtém-se:

$$A_{11} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} P n_x d\Gamma + A_{12} \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} P n_x d\Gamma + A_{16} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} P n_x d\Gamma + \frac{\partial v}{\partial x} P n_x d\Gamma \right) = \int_{\Gamma} N_x P n_x d\Gamma. \quad (3.20)$$

Multiplicando a equação (3.19) pela função ponderadora P e pelo vetor unitário n_y e, integrando no contorno Γ , obtém-se:

$$A_{16} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} P n_y d\Gamma + A_{26} \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} P n_y d\Gamma + A_{66} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} P n_y d\Gamma + \frac{\partial v}{\partial x} P n_y d\Gamma \right) = \int_{\Gamma} N_{xy} P n_y d\Gamma. \quad (3.21)$$

Sabendo-se que:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} P \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} P + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} P = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} P \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (3.22)$$

e integrando ao longo do domínio Ω , obtém-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} P d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} P \right) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega. \quad (3.23)$$

Aplicando o teorema de Green (3.5) na equação (3.23), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} P d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} P n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega. \quad (3.24)$$

Da mesma forma, para $v(x, y, t)$, tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} P d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} P n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega. \quad (3.25)$$

Sabendo que se uma função f e suas derivadas são contínuas, tem-se que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \quad (3.26)$$

Portanto, se:

$$2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} P d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} P d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} P d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} P d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} P d\Omega, \quad (3.27)$$

tem-se que:

$$2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} P d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} P n_y d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega. \quad (3.28)$$

Substituindo a equação (3.28) na equação (3.15), obtém-se:

$$\begin{aligned} & A_{11} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega \right) + A_{16} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} P n_y d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} P n_x d\Gamma - \right. \\ & \left. - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega \right) + A_{66} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} P n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & + A_{16} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega \right) + A_{12} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & + A_{66} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} P n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega \right) + A_{26} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} P n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega \right) = \\ & = \int_{\Omega} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} P d\Omega. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Substituindo as equações (3.20) e (3.21) na equação (3.29), e reorganizando os termos, encontra-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} N_x P n_x d\Gamma + \int_{\Gamma} N_{xy} P n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \left[A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + A_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \\
& = \rho h \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} P d\Omega.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Considerando as funções u e v como funções harmônicas dadas por:

$$u(x, y, t) = U(x, y) \text{sen}(\omega t), \tag{3.31}$$

$$v(x, y, t) = V(x, y) \text{sen}(\omega t), \tag{3.32}$$

torna-se possível fazer a separação das variáveis (x, y, t) em (x, y) e t . Os termos $U(x, y)$ e $V(x, y)$ são as amplitudes das funções u e v , respectivamente. Elas representam os deslocamentos nas direções x e y , respectivamente, dos pontos da placa na frequência ω .

Substituindo as equações (3.31) e (3.32) na equação (3.30) e considerando a placa na condição de bordas livres, para um modo específico j de frequência ω_j , encontra-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[A_{11} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + A_{16} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \right. \\
& \left. + A_{12} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \right. \\
& \left. + A_{26} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} U^{(j)} P d\Omega.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Seguindo o mesmo procedimento realizado anteriormente para se chegar à equação (3.33) a partir da equação (3.1) será feito agora para a equação (3.2). Multiplicando a equação (3.2) pela função peso $P(x, y)$, integrando em um domínio Ω , e substituindo as equações (3.7), (3.9), (3.10), (3.12), (3.13), (3.14), (3.24), (3.25) e (3.28), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& A_{16} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega \right) + A_{12} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} P n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega \right) + \\
& + A_{66} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega \right) + A_{26} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} P n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega \right) + \\
& + A_{66} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} P n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega \right) + A_{26} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} P n_x d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} P n_y d\Gamma \right. \\
& \left. - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega \right) + A_{22} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} P n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega \right) = \\
& = \int_{\Omega} \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} P d\Omega. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (3.18) pela função P e pelo vetor unitário n_y e, integrando no contorno Γ , obtém-se:

$$A_{12} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} P n_y d\Gamma + A_{22} \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} P n_y d\Gamma + A_{26} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} P n_y d\Gamma + \frac{\partial v}{\partial x} P n_y d\Gamma \right) = \int_{\Gamma} N_y P n_y d\Gamma. \tag{3.35}$$

Multiplicando a equação (3.19) pela função ponderadora P e pelo vetor unitário n_x e, integrando no contorno Γ , obtém-se:

$$A_{16} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} P n_x d\Gamma + A_{26} \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} P n_x d\Gamma + A_{66} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} P n_x d\Gamma + \frac{\partial v}{\partial x} P n_x d\Gamma \right) = \int_{\Gamma} N_{xy} P n_x d\Gamma. \tag{3.36}$$

Utilizando as equações constitutivas (3.35) e (3.36), aplicando as condições de contorno de bordas livres, reorganizando os termos e substituindo as equações (3.31) e (3.32) para um modo j de vibrar pode-se escrever a equação (3.33) como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[A_{16} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} \right) \frac{\partial P}{\partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + A_{26} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + A_{22} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} V^{(j)} P d\Omega. \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.1.1 Escolha das funções ponderadoras

Teoricamente, as equações (3.33) e (3.37) são válidas para quaisquer funções ponderadoras, desde que estas e suas respectivas derivadas de primeira ordem sejam contínuas. E também, são válidas para quaisquer modos próprios no plano. Porém, algumas regras podem ser utilizadas na escolha correta dos modos e funções ponderadoras e suas combinações. Conhecendo-se os deslocamentos obtidos da análise modal no plano, torna-se possível construir um sistema linear de equações cujas incógnitas sejam somente as 6 constantes de rigidez elásticas requeridas. A precisão dos resultados é extremamente sensível e dependente da escolha apropriada do tipo e do número de modos e funções ponderadoras a serem utilizados. Como já foi dito anteriormente no capítulo 2, por razões numéricas, modos próprios de vibrar com várias mudanças de sinais das derivadas quando associados as funções ponderadoras com campos de curvaturas constantes, ou modos mais suaves com funções ponderadoras com campos de curvaturas com várias mudanças de inclinação no domínio de integração são mais sensíveis a erros experimentais. Por se tratar de vibração no plano, cujas frequências são muito mais altas quando comparadas às frequências de vibração fora do plano, modos envolvendo frequências mais baixas podem, experimentalmente, ser mais fáceis de serem obtidos. E, modos mais suaves, geralmente, não exigem o uso de malhas muito densas.

Assim, com o objetivo de utilizar modos mais suaves associados a funções ponderadoras também suaves, dois grupos de funções ponderadoras foram estudados. Além de atender ao item anterior, também simplificam o sistema de equações. Estes grupos são:

Grupo I: funções ponderadoras de primeira ordem.

- $P(x, y) = x$

Substituindo esta função e suas respectivas derivadas de primeira ordem nas equações (3.33) e (3.37), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[A_{11} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} \right) + A_{16} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \\ = \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} U^{(j)} x d\Omega. \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[A_{16} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \\ = \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} V^{(j)} x d\Omega. \end{aligned} \quad (3.39)$$

- $P(x, y) = y$

E, da mesma forma, substituindo esta função e suas respectivas derivadas de primeira ordem nas equações (3.33) e (3.37), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[A_{16} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \\ = \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} U^{(j)} y d\Omega, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left[A_{12} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \\
= \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} V^{(j)} y d\Omega.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Considerando as seguintes integrais como sendo:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} d\Omega = K_{ux}^{(j)}, \tag{3.42}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} d\Omega = K_{uy}^{(j)}, \tag{3.43}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} d\Omega = K_{vx}^{(j)}, \tag{3.44}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} d\Omega = K_{vy}^{(j)}, \tag{3.45}$$

e substituindo os termos (3.42)-(3.45) nas equações (3.38) e (3.41), têm-se:

$$A_{11} K_{ux}^{(j)} + A_{16} \left(K_{uy}^{(j)} + K_{vx}^{(j)} \right) + A_{12} K_{vy}^{(j)} = \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} U^{(j)} x d\Omega, \tag{3.46}$$

$$A_{16} K_{ux}^{(j)} + A_{66} \left(K_{uy}^{(j)} + K_v^{(j)} \right) + A_{26} K_{vy}^{(j)} = \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} U^{(j)} y d\Omega, \tag{3.47}$$

$$A_{16} K_{ux}^{(j)} + A_{66} \left(K_{uy}^{(j)} + K_{vx}^{(j)} \right) + A_{26} K_{vy}^{(j)} = \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} V^{(j)} x d\Omega, \tag{3.48}$$

$$A_{12}K_{ux}^{(j)} + A_{26} \left(K_{uy}^{(j)} + K_{vx}^{(j)} \right) + A_{22}K_{vy}^{(j)} = \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} V^{(j)} y d\Omega. \quad (3.49)$$

Reescrevendo as equações (3.46)-(3.49) em forma matricial, para L modos tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{ux}^{(j)} & (K_{uy}^{(j)} + K_{vx}^{(j)}) & 0 & K_{vy}^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{ux}^{(j)} & (K_{uy}^{(j)} + K_{vx}^{(j)}) & 0 & K_{vy}^{(j)} & 0 \\ 0 & K_{ux}^{(j)} & (K_{uy}^{(j)} + K_{vx}^{(j)}) & 0 & K_{vy}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{ux}^{(j)} & (K_{uy}^{(j)} + K_{vx}^{(j)}) & K_{vy}^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \rho h \omega_j^2 \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} U^{(j)} x d\Omega \\ \int_{\Omega} U^{(j)} y d\Omega \\ \int_{\Omega} V^{(j)} x d\Omega \\ \int_{\Omega} V^{(j)} y d\Omega \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

Grupo II: funções ponderadoras de segunda ordem.

- $P(x, y) = x^2$

Substituindo esta função e suas respectivas derivadas de primeira ordem nas equações (3.33) e (3.37), obtém-se:

$$\begin{aligned}
2 \int_{\Omega} \left[A_{11} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} x \right) + A_{16} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} x + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} x \right) + A_{12} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} x \right) \right] d\Omega = \\
= \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} U^{(j)} x^2 d\Omega,
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
2 \int_{\Omega} \left[A_{16} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} x \right) + A_{66} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} x + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} x \right) + A_{26} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} x \right) \right] d\Omega = \\
= \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} V^{(j)} x^2 d\Omega.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

- $P(x, y) = y^2$

Substituindo esta função e suas respectivas derivadas de primeira ordem nas equações (3.33) e (3.37), obtém-se:

$$\begin{aligned}
2 \int_{\Omega} \left[A_{16} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} y \right) + A_{66} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} y + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} y \right) + A_{26} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} y \right) \right] d\Omega = \\
= \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} U^{(j)} y^2 d\Omega,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
2 \int_{\Omega} \left[A_{12} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} y \right) + A_{26} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} y + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} y \right) + A_{22} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} y \right) \right] d\Omega = \\
= \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} V^{(j)} y^2 d\Omega.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

- $P(x, y) = 2xy$

E, da mesma forma, substituindo esta função e suas respectivas derivadas de primeira ordem nas equações (3.33) e (3.37), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{\Omega} \left[A_{11} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} y \right) + A_{16} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} y + \frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} x + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} y \right) + A_{16} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} y \right) + \right. \\
& \quad \left. + A_{66} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} x + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} x \right) + A_{26} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} x \right) \right] d\Omega = \\
& \quad = \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} U^{(j)}(2xy) d\Omega,
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{\Omega} \left[A_{16} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} y \right) + A_{66} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} y + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} y \right) + A_{12} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} \right) + \right. \\
& \quad \left. + A_{26} \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} x + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} y + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} x \right) + A_{22} \left(\frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} x \right) \right] d\Omega = \\
& \quad = \rho h \omega_j^2 \int_{\Omega} V^{(j)}(2xy) d\Omega.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Considerando as seguintes integrais como sendo:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial x} x \right) d\Omega = K_{uxx}, \tag{3.57}$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial y} x \right) d\Omega = K_{uyx}, \tag{3.58}$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial x} y \right) d\Omega = K_{uxy}, \tag{3.59}$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial y} y \right) d\Omega = K_{uyy}, \tag{3.60}$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial V}{\partial x} x \right) d\Omega = K_{vxx}, \quad (3.61)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial V}{\partial y} x \right) d\Omega = K_{vyx}, \quad (3.62)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial V}{\partial x} y \right) d\Omega = K_{vxy}, \quad (3.63)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial V}{\partial y} y \right) d\Omega = K_{vyy}, \quad (3.64)$$

e substituindo nas equações (3.51)-(3.56), obtém-se:

$$A_{11}K_{uux}^{(j)} + A_{16} \left(K_{uyx}^{(j)} + K_{vxx}^{(j)} \right) + A_{12}K_{vyy}^{(j)} = 1/2\rho h\omega_j^2 \int_{\Omega} U^{(j)} x^2 d\Omega, \quad (3.65)$$

$$A_{16}K_{uux}^{(j)} + A_{66} \left(K_{uyx}^{(j)} + K_{vxx}^{(j)} \right) + A_{26}K_{vyy}^{(j)} = 1/2\rho h\omega_j^2 \int_{\Omega} V^{(j)} x^2 d\Omega, \quad (3.66)$$

$$A_{16}K_{uxy}^{(j)} + A_{66} \left(K_{uyy}^{(j)} + K_{vxy}^{(j)} \right) + A_{26}K_{vyy}^{(j)} = 1/2\rho h\omega_j^2 \int_{\Omega} U^{(j)} y^2 d\Omega, \quad (3.67)$$

$$A_{12}K_{uxy}^{(j)} + A_{26} \left(K_{uyy}^{(j)} + K_{vxy}^{(j)} \right) + A_{22}K_{vyy}^{(j)} = 1/2\rho h\omega_j^2 \int_{\Omega} V^{(j)} y^2 d\Omega, \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} A_{11}K_{uxy}^{(j)} + A_{16} \left(K_{uyy}^{(j)} + K_{uux}^{(j)} + K_{vxy}^{(j)} \right) + A_{12}K_{vyy}^{(j)} + A_{66} \left(K_{uyx}^{(j)} + K_{vxx}^{(j)} \right) + \\ + A_{26}K_{vyy}^{(j)} = 1/2\rho h\omega_j^2 \int_{\Omega} U^{(j)} (2xy) d\Omega; \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned}
& A_{16}K_{uxy}^{(j)} + A_{66} \left(K_{uyy}^{(j)} + K_{vxy}^{(j)} \right) + A_{12}K_{uxx}^{(j)} + A_{26} \left(K_{uyx}^{(j)} + K_{vyy}^{(j)} + K_{vxx}^{(j)} \right) + \\
& + A_{22}K_{vyx}^{(j)} = 1/2\rho h\omega_j^2 \int_{\Omega} V^{(j)}(2xy)d\Omega.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Reescrevendo as equações (3.65)-(3.70) em forma matricial, para L modos têm-se:

$$\begin{bmatrix}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
K_{uxx}^{(j)} & (K_{uyx}^{(j)} + K_{vxx}^{(j)}) & 0 & K_{vyx}^{(j)} & 0 & 0 \\
0 & K_{uxy}^{(j)} & (K_{uyy}^{(j)} + K_{vxy}^{(j)}) & 0 & K_{vyy}^{(j)} & 0 \\
K_{uxy}^{(j)} & (K_{uyy}^{(j)} + K_{uxx}^{(j)} + K_{vxy}^{(j)}) & (K_{uyx}^{(j)} + K_{vxx}^{(j)}) & K_{vyy}^{(j)} & K_{vyx}^{(j)} & 0 \\
0 & K_{uxx}^{(j)} & (K_{uyx}^{(j)} + K_{vxx}^{(j)}) & 0 & K_{vyy}^{(j)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & K_{uxy}^{(j)} & (K_{uyy}^{(j)} + K_{vxy}^{(j)}) & K_{vyy}^{(j)} \\
0 & K_{uxy}^{(j)} & (K_{uyy}^{(j)} + K_{vxy}^{(j)}) & K_{uxx}^{(j)} & (K_{uyx}^{(j)} + K_{vyy}^{(j)} + K_{vxx}^{(j)}) & K_{vyx}^{(j)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
A_{11} \\
A_{16} \\
A_{66} \\
A_{12} \\
A_{26} \\
A_{22}
\end{Bmatrix} =$$

$$= 1/2\rho h\omega_j^2 \left\{ \begin{array}{c} \int_{\Omega} U^{(j)} x^2 d\Omega \\ \int_{\Omega} U^{(j)} y^2 d\Omega \\ \int_{\Omega} U^{(j)} (2xy) d\Omega \\ \int_{\Omega} V^{(j)} x^2 d\Omega \\ \int_{\Omega} V^{(j)} y^2 d\Omega \\ \int_{\Omega} V^{(j)} (2xy) d\Omega \end{array} \right\}. \quad (3.71)$$

Os sistemas de equações (3.50) e (3.71) podem também ser reescritos de forma compacta como:

$$\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (3.72)$$

onde para L modos, $\mathbf{K}$ é uma matriz $4L \times 6$, $\mathbf{A}$ é uma matriz 6×1 , e $\mathbf{B}$ é uma matriz $4L \times 1$ na equação (3.50), e $\mathbf{K}$ é uma matriz $6L \times 6$, $\mathbf{A}$ é uma matriz 6×1 , e $\mathbf{B}$ é uma matriz $6L \times 1$ na equação (3.71). Como o sistema possui 6 incógnitas, são necessários no mínimo 6 equações e, portanto, no mínimo 2 modos para o sistema (3.50) e no mínimo 1 modo para o sistema (3.71). Portanto, para $L > 1$ modos o sistema será superdeterminado e sua solução pode ser encontrada por meio de mínimos quadrados de forma que:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} (\mathbf{K}^T \mathbf{B}), \quad (3.73)$$

sendo $\mathbf{A}$ a matriz de rigidez elástica à extensão requerida.

Desde que consideram-se as funções ponderadoras como sendo os campos virtuais, têm-se as equações (3.50) e (3.71) como sendo as equações de equilíbrio global baseada nos princípios dos trabalhos virtuais.

3.1.2 Estudo de sensibilidades e verificação do método

Neste trabalho foi realizado somente a verificação numérica do método proposto para a formulação apresentada neste capítulo. Foi utilizado o software comercial baseado em elementos finitos ANSYS 11.0 (ANSYS, 2007) para fornecer os modos próprios no plano com as suas respectivas frequências naturais a partir da análise modal numérica no plano. As constantes de rigidez elástica à extensão foram dados de entrada para o software, juntamente com densidade e as características geométricas das placas analisadas.

Tabela 3.1: Constantes de rigidez elástica à extensão da placa anisotrópica.

Constantes (A_{ij})	(N/m)
A_{11}	$2,7 \times 10^8$
A_{22}	$1,7 \times 10^8$
A_{12}	$0,3 \times 10^8$
A_{66}	$0,5 \times 10^8$
A_{16}	$0,2 \times 10^8$
A_{26}	$0,1 \times 10^8$

Foi utilizado o elemento SHELL99 do ANSYS, que possui 8 nós, e inicialmente foi feito um estudo de sensibilidades considerando um caso genérico de anisotropia em um laminado com dimensões $0,450 \times 0,350 \times 0,003 \text{ m}$, densidade 1500 kg/m^3 e cujas propriedades elásticas são mostradas na tabela 3.1. Somente os 15 primeiros modos foram analisados, como podem ser vistos na figura 3.1. Um nó central com os seus respectivos deslocamentos foi adicionado por interpolação para cada elemento para que fosse possível aplicar o método das diferenças finitas e integração numérica.

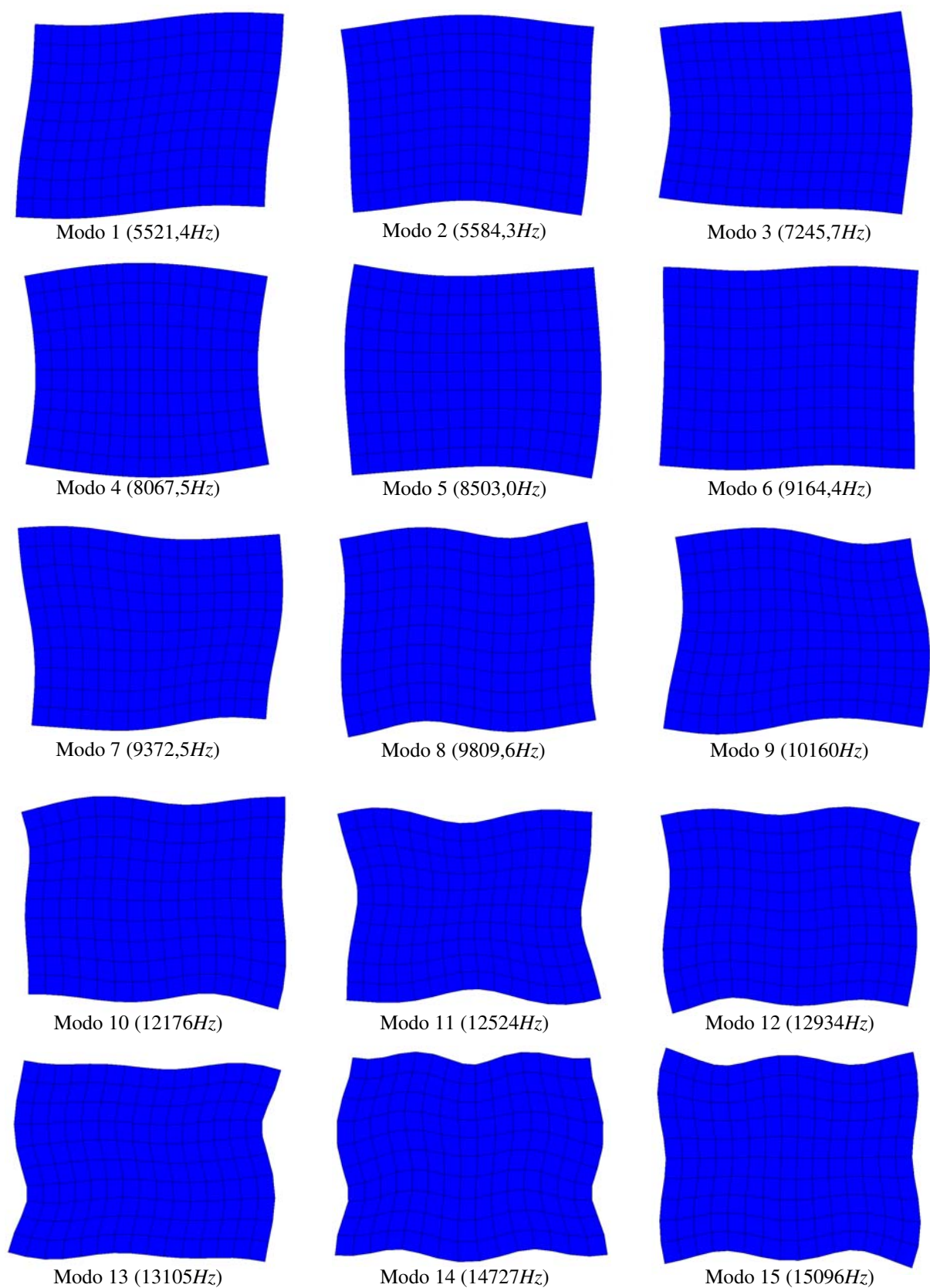


Figura 3.1: 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa anisotrópica retangular.

3.1.3 Sensibilidade dos modos e frequências naturais à variação das constantes de rigidez à extensão

Para verificar a influência de cada constante elástica A_{ij} nos modos, foi feito um estudo da sensibilidade dos 15 primeiros modos com relação à variação de cada uma destas constantes separadamente. Para cada valor diferente do valor inicial (ou valor de referência) destas constantes elásticas obtém-se um novo laminado (laminado corrente) que, dependendo deste valor, pode ter os modos, e/ou a sequência de modos, e/ou as frequências, diferentes do laminado de referência. Neste trabalho, cada constante assumiu os valores 10%, 20%, 30% e 40% acima e abaixo do seu valor de referência. Assim, oito combinações foram obtidas para a variação de cada constante. O critério MAC (Modal Assurance Criterion) (apêndice B) foi utilizado para procurar entre os 20 primeiros modos de cada laminado corrente os modos correspondentes aos 15 primeiros do laminado de referência. Foram considerados modos equivalentes (ou similares) àqueles cujo o valor de MAC é maior ou igual à 95%. Se um determinado modo de referência não se encontra entre os 20 primeiros modos do laminado corrente, então significa que ou este modo está em uma ordem superior à vigésima ou que não existe mais neste intervalo de análise. Este fato pode ser observado na figura 3.2, onde os valores iguais a 0 significa que o modo corrente não tem um modo correspondente entre os modos de referência. Como pode ser visto na figura 3.2, os modos se mostram muito pouco sensíveis à variação das constantes A_{12} , A_{16} e A_{26} .

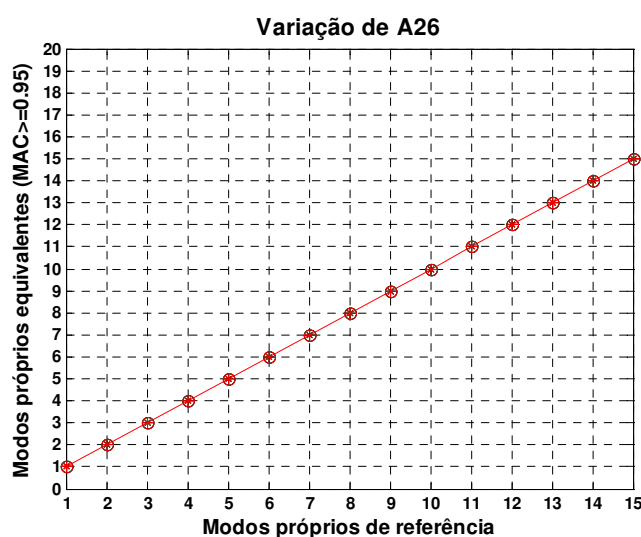
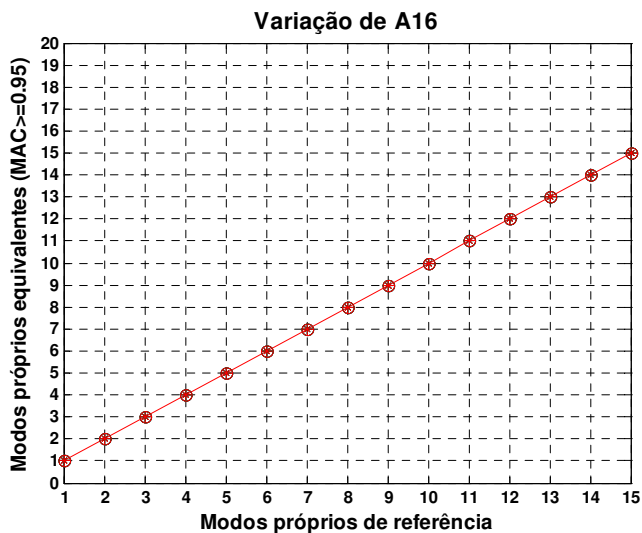
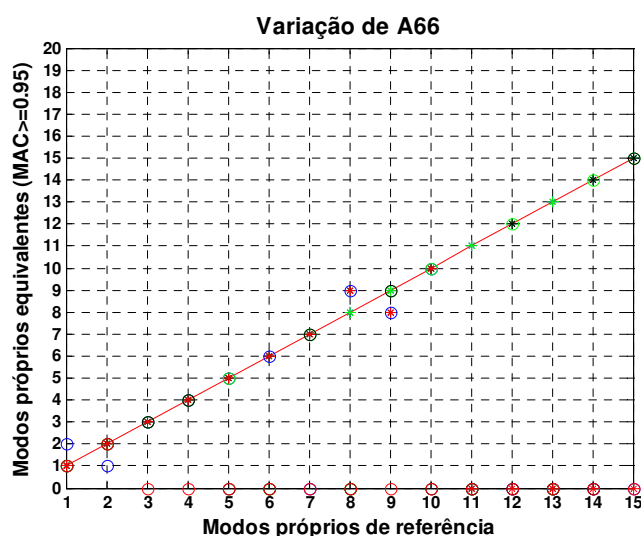
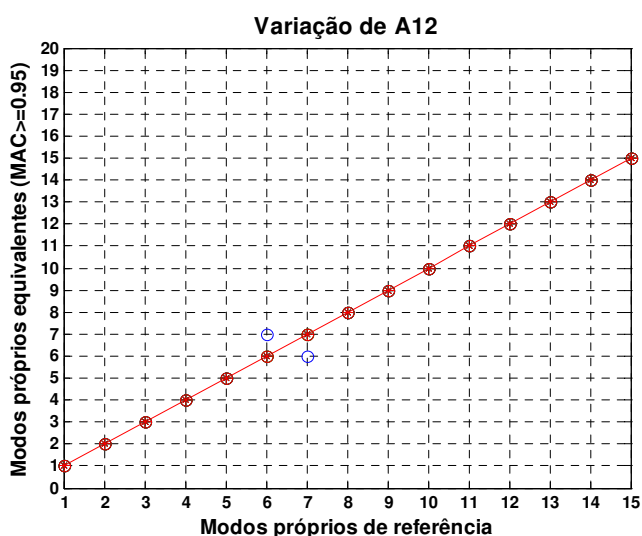
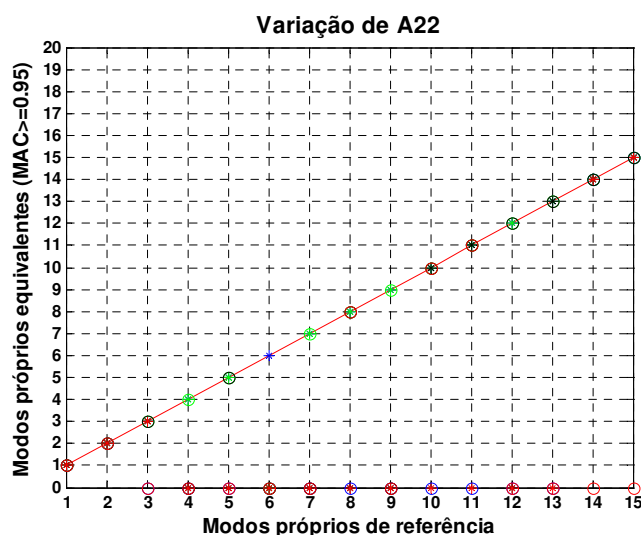
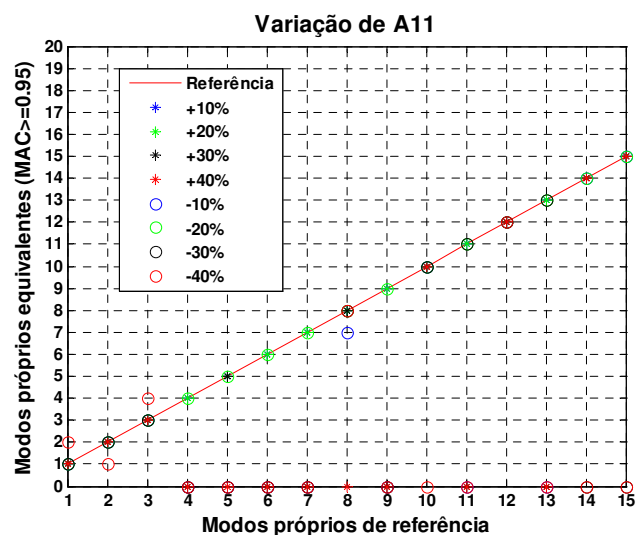


Figura 3.2: Correlação modal entre os modos da placa anisotrópica retangular para variações nos valores das constantes elásticas.

De uma outra forma, para verificar a sensibilidade das frequências naturais à variação das constantes de rigidez elásticas, foram comparadas as frequências dos modos equivalentes entre os laminados correntes e o laminado de referência através do MAC calculado anteriormente, como pode ser visto na figura 3.3. É possível verificar também a pouca sensibilidade das mesmas à variação das constantes A_{12} , A_{16} e A_{26} . Este fato pode ser importante para mostrar que a verificação dos valores das constantes de rigidez elástica, identificadas pelo método, quando é feita comparando-se as frequências naturais e os modos próprios experimentais com os numéricos não garante a veracidade para todas as constantes encontradas. Principalmente para as constantes A_{12} , A_{16} e A_{26} . Além disso, um método de identificação iterativo, que se utiliza do processo de otimização para obter os valores das constantes elásticas, também por meio dos valores das frequências naturais, e/ou modos próprios, experimentais e numéricos, podem não ser confiáveis na identificação de todas as constantes. Essas poderiam representar um material que possui frequências e modos dentro da faixa de análise (que atendem as restrições do problema de otimização), similares ao da estrutura real, e que, porém, não condizem com os verdadeiros valores.

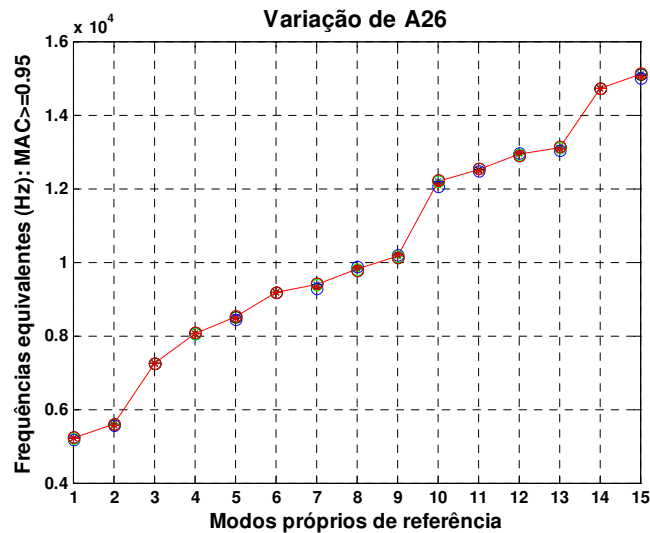
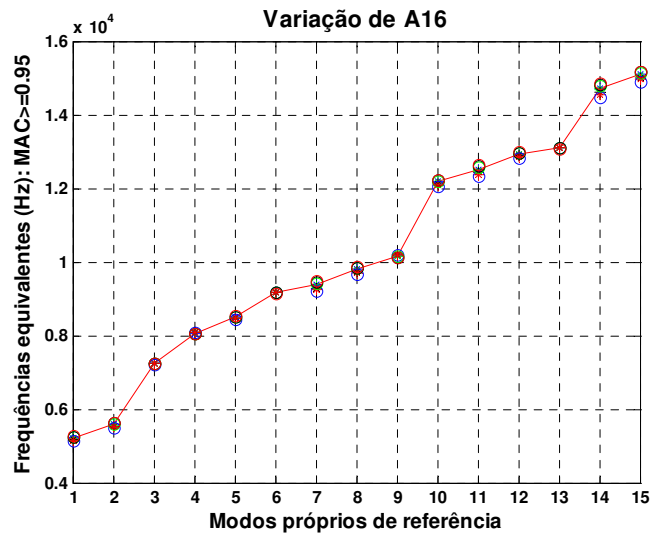
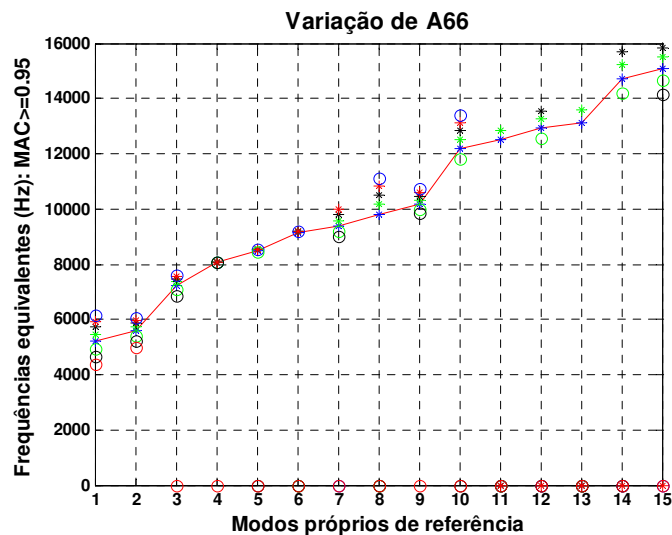
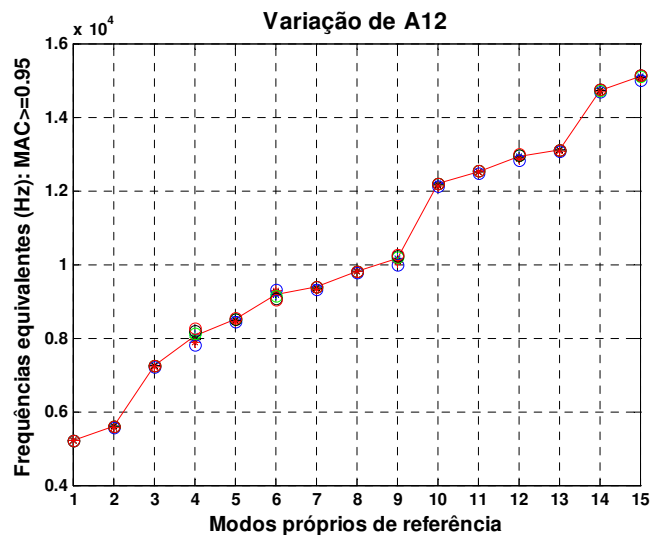
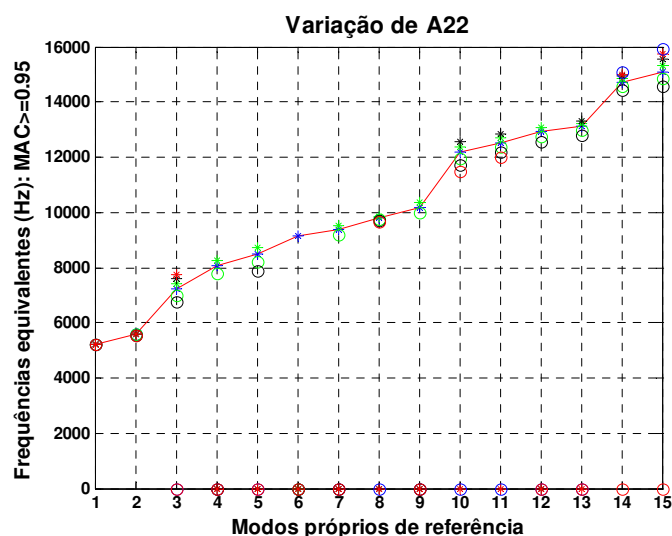
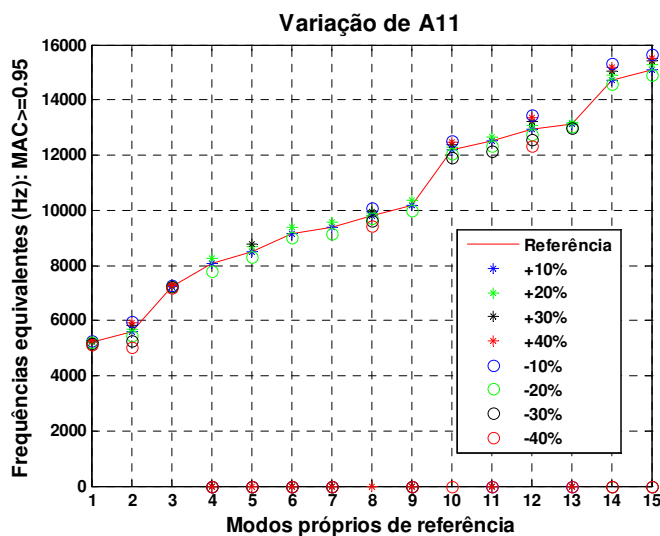


Figura 3.3: Valores das frequências naturais de modos equivalentes da placa anisotrópica retangular para variações nos valores das constantes elásticas.

3.1.4 Sensibilidade do método quanto ao tipo e número de modos utilizados

A escolha do tipo e do número correto de modos a serem utilizados juntamente com as funções ponderadoras é extremamente importante neste método de identificação. É importante usar combinações de modos que sejam fortemente dependentes de todas as constantes A_{ij} 's e, de preferência, modos que possuam poucas mudanças de sinais, ou seja, que sejam mais suaves. A contribuição numérica de cada modo no cálculo de uma constante elástica específica não pode ser prejudicada pela contribuição numérica de um outro modo durante a solução do sistema de equações. Observa-se de uma maneira geral que a suavidade dos modos no plano não está muito relacionada com as frequências, ou em outras palavras, os modos com mais variações de sinais não significam modos com frequências mais altas. A ordem com que os modos aparecem está mais relacionada com o tipo de anisotropia e geometria dos laminados. Os modos que associados às funções ponderadoras não anularem ou resultarem em valores muito baixos (próximos de zero ou desprezíveis) para as integrais do lado direito e/ou esquerdo nos sistemas de equações (3.50) e (3.71) são os modos adequados para este método de identificação, e por isso são chamados aqui de *modos adequados*. A precisão dos resultados dependerá da correta combinação entre estes modos. As combinações entre modos adequados que fornecem resultados precisos são chamadas aqui de *combinações adequadas*. Em muitos casos, as combinações usando um número maior de modos adequados são combinações adequadas.

As equações (3.74 - 3.88) mostram os valores das integrais dos sistemas de equações (3.50) e (3.71) calculados para os 15 primeiros modos de vibrar associados ao grupo I de funções ponderadoras e para uma malha contendo 651 nós. Para este caso, é possível identificar os modos 1, 4, 5, 6, 8, 11 e 13 como sendo os modos adequados. A tabela 3.2 mostra os erros (%) calculados para algumas combinações adequadas entre estes modos. Como pode ser visto, os resultados foram muito satisfatórios para todas as constantes elásticas requeridas quando no mínimo 3 modos adequados foram utilizados. A tabela 3.3 mostra os resultados obtidos utilizando-se número e tipos de modos aleatórios. Como pode ser visto, bons re-

sultados podem ser obtidos somente quando um número maior de modos adequados estão presentes em combinações com um número maior de modos, geralmente maior que 3. O uso de outros modos que não sejam os modos adequados não garante a precisão dos resultados.

Modo 1

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,1574 & 1,4579 & 0 & -0,0917 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1574 & 1,4579 & 0 & -0,0917 & 0 \\ 0 & -0,1574 & 1,4579 & 0 & -0,0917 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1574 & 1,4579 & -0,0917 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} -1,6124 \\ 6,8899 \\ 6,8749 \\ -0,5743 \end{Bmatrix} \tag{3.74}
 \end{aligned}$$

Modo 2

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0000 & -0,0001 & 0 & -0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0000 & -0,0001 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & -0,0000 & -0,0001 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0000 & -0,0001 & -0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0002 \\ -0,0008 \\ -0,0001 \\ -0,0003 \end{Bmatrix} \tag{3.75}
 \end{aligned}$$

Modo 3

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0 & -0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0000 & 0,0000 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & 0,0000 & 0,0000 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
& = 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0007 \\ 0,0002 \\ 0,0009 \\ 0,0000 \end{Bmatrix} \tag{3.76}
\end{aligned}$$

Modo 4

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0,8028 & 0,0498 & 0 & -0,9027 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8028 & 0,0498 & 0 & -0,9027 & 0 \\ 0 & 0,8028 & 0,0498 & 0 & -0,9027 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8028 & 0,0498 & -0,9027 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
& = 10^8 \begin{Bmatrix} 1,9085 \\ 0,0952 \\ 0,0951 \\ -1,2914 \end{Bmatrix} \tag{3.77}
\end{aligned}$$

Modo 5

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -0,3887 & -0,0891 & 0 & 0,4836 & 0 & 0 \\ 0 & -0,3887 & -0,0891 & 0 & 0,4836 & 0 \\ 0 & -0,3887 & -0,0891 & 0 & 0,4836 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,3887 & -0,0891 & 0,4836 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= 10^8 \begin{Bmatrix} -0,9243 \\ -0,0694 \\ -0,0762 \\ 0,6997 \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

Modo 6

$$\begin{bmatrix} 0,7501 & -0,1153 & 0 & 1,0678 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7501 & -0,1153 & 0 & 1,0678 & 0 \\ 0 & 0,7501 & -0,1153 & 0 & 1,0678 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7501 & -0,1153 & 1,0678 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^8 \begin{Bmatrix} 2,3238 \\ 0,1987 \\ 0,1972 \\ 2,0320 \end{Bmatrix} \quad (3.79)$$

Modo 7

$$\begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0001 & 0 & -0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0000 & 0,0001 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & 0,0000 & 0,0001 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0000 & 0,0001 & -0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0011 \\ -0,0004 \\ 0,0007 \\ 0,0016 \end{Bmatrix} \quad (3.80)$$

Modo 8

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0198 & 0,9072 & 0 & 0,2835 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0198 & 0,9072 & 0 & 0,2835 & 0 \\ 0 & -0,0198 & 0,9072 & 0 & 0,2835 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0198 & 0,9072 & 0,2835 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} 2,1275 \\ 4,6962 \\ 4,8536 \\ 5,6844 \end{Bmatrix} \quad (3.81)
 \end{aligned}$$

Modo 9

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0000 & -0,0000 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0000 & -0,0000 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & -0,0000 & -0,0000 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0000 & -0,0000 & -0,0001 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0002 \\ 0,0005 \\ -0,0011 \\ 0,0016 \end{Bmatrix} \quad (3.82)
 \end{aligned}$$

Modo 10

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0002 & 0,0001 & 0 & 0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0002 & 0,0001 & 0 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0,0002 & 0,0001 & 0 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0002 & 0,0001 & 0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0045 \\ -0,0030 \\ -0,0016 \\ 0,0015 \end{Bmatrix} \quad (3.83)$$

Modo 11

$$\begin{bmatrix} -0,0916 & -0,6815 & 0 & -0,1033 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0916 & -0,6815 & 0 & -0,1033 & 0 \\ 0 & -0,0916 & -0,6815 & 0 & -0,1033 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0916 & -0,6815 & -0,1033 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} -4,005 \\ -3,7927 \\ -3,6428 \\ -2,7756 \end{Bmatrix} \quad (3.84)$$

Modo 12

$$\begin{bmatrix} 0,0001 & -0,0002 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 & -0,0002 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 0,0001 & -0,0002 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0001 & -0,0002 & -0,0001 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0048 \\ -0,0062 \\ -0,0087 \\ 0,0010 \end{Bmatrix} \quad (3.85)$$

Modo 13

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0029 & 1,4379 & 0 & -0,1080 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0029 & 1,4379 & 0 & -0,1080 & 0 \\ 0 & 0,0029 & 1,4379 & 0 & -0,1080 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0029 & 1,4379 & -0,1080 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} 2,6030 \\ 7,2539 \\ 6,9815 \\ -0,4226 \end{Bmatrix} \quad (3.86)
 \end{aligned}$$

Modo 14

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0002 & -0,0002 & 0 & 0,0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0002 & -0,0002 & 0 & 0,0002 & 0 \\ 0 & 0,0002 & -0,0002 & 0 & 0,0002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0002 & -0,0002 & 0,0002 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0033 \\ 0,0114 \\ 0,0018 \\ -0,0013 \end{Bmatrix} \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

Modo 15

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0322 & -0,1359 & 0 & -0,0186 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0322 & -0,1359 & 0 & -0,0186 & 0 \\ 0 & -0,0322 & -0,1359 & 0 & -0,0186 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0322 & -0,1359 & -0,0186 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} -1,4031 \\ -0,6509 \\ -0,8145 \\ -0,5569 \end{Bmatrix} \quad (3.88)$$

As equações (3.89 - 3.103) mostram os valores das integrais dos sistemas de equações (3.50) e (3.71) calculados para os 15 primeiros modos de vibrar associados ao grupo II de funções ponderadoras. De acordo com essas equações é possível identificar os modos 2, 3, 7, 9, 10, 12 e 14 como sendo os modos adequados para este grupo de funções ponderadoras e de anisotropia.

Modo 1

$$\begin{bmatrix} -0,0354 & 0,3280 & 0 & -0,0206 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0275 & 0,2551 & 0 & -0,0160 & 0 \\ -0,0275 & 0,2197 & 0,3280 & -0,0160 & -0,0206 & 0 \\ 0 & -0,0354 & 0,3280 & 0 & -0,0206 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0275 & 0,2551 & -0,0160 \\ 0 & -0,0275 & 0,2551 & -0,0354 & 0,3120 & -0,0206 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ -0,0000 \\ 0,0000 \\ -0,0000 \\ 0,0000 \end{Bmatrix} \quad (3.89)$$

Modo 2

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0,0097 & -0,1427 & 0 & 0,0175 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0501 & -0,0307 & 0 & -0,0074 & 0 \\ 0,0501 & -0,0210 & -0,1427 & -0,0074 & 0,0175 & 0 \\ 0 & 0,0097 & -0,1427 & 0 & 0,0175 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0501 & -0,0307 & -0,0074 \\ 0 & 0,0501 & -0,0307 & 0,0097 & -0,1502 & 0,0175 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
& = 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0289 \\ -0,0637 \\ 0,5855 \\ -0,6826 \\ -0,0079 \\ 0,1209 \end{Bmatrix} \quad (3.90)
\end{aligned}$$

Modo 3

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -0,0171 & 0,0246 & 0 & 0,1179 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0007 & -0,1198 & 0 & 0,0086 & 0 \\ -0,0007 & -0,1370 & 0,0246 & 0,0086 & 0,1179 & 0 \\ 0 & -0,0171 & 0,0246 & 0 & 0,1179 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0007 & -0,1198 & 0,0086 \\ 0 & -0,0007 & -0,1198 & -0,0171 & 0,0332 & 0,1179 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
& = 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0597 \\ -0,6035 \\ -0,0277 \\ 0,2066 \\ 0,0238 \\ 1,3844 \end{Bmatrix} \quad (3.91)
\end{aligned}$$

Modo 4

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0,1806 & 0,0112 & 0 & -0,2031 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1405 & 0,0087 & 0 & -0,1580 & 0 \\ 0,1405 & 0,1893 & 0,0112 & -0,1580 & -0,2031 & 0 \\ 0 & 0,1806 & 0,0112 & 0 & -0,2031 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1405 & 0,0087 & -0,1580 \\ 0 & 0,1405 & 0,0087 & 0,1806 & -0,1468 & -0,2031 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
& = 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0001 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0002 \end{Bmatrix} \quad (3.92)
\end{aligned}$$

Modo 5

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -0,0874 & -0,0201 & 0 & 0,1088 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0680 & -0,0156 & 0 & 0,0846 & 0 \\ -0,0680 & -0,1030 & -0,0201 & 0,0846 & 0,1088 & 0 \\ 0 & -0,0874 & -0,0201 & 0 & 0,1088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0680 & -0,0156 & 0,0846 \\ 0 & -0,0680 & -0,0156 & -0,0874 & 0,0646 & 0,1088 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
& = 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0000 \\ 0,0003 \\ -0,0001 \\ 0,0001 \\ 0,0000 \\ 0,0001 \end{Bmatrix} \quad (3.93)
\end{aligned}$$

Modo 6

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,1688 & -0,0259 & 0 & 0,2403 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1313 & -0,0202 & 0 & 0,1869 & 0 \\ 0,1313 & 0,1486 & -0,0259 & 0,1869 & 0,2403 & 0 \\ 0 & 0,1688 & -0,0259 & 0 & 0,2403 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1313 & -0,0202 & 0,1869 \\ 0 & 0,1313 & -0,0202 & 0,1688 & 0,1609 & 0,2403 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0000 \\ -0,0001 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ -0,0000 \\ -0,0001 \end{Bmatrix} \quad (3.94)
 \end{aligned}$$

Modo 7

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0001 & 0,1399 & 0 & -0,1015 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0809 & -0,1053 & 0 & -0,0099 & 0 \\ 0,0809 & -0,1052 & 0,1399 & -0,0099 & -0,1015 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0,1399 & 0 & -0,1015 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0809 & -0,1053 & -0,0099 \\ 0 & 0,0809 & -0,1053 & 0,0001 & 0,1300 & -0,1015 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0193 \\ -0,3772 \\ 2,5426 \\ 0,5936 \\ -0,0335 \\ -1,9623 \end{Bmatrix} \quad (3.95)
 \end{aligned}$$

Modo 8

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0045 & 0,2042 & 0 & 0,0638 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0035 & 0,1588 & 0 & 0,0496 & 0 \\ -0,0035 & 0,1543 & 0,2042 & 0,0496 & 0,0638 & 0 \\ 0 & -0,0045 & 0,2042 & 0 & 0,0638 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0035 & 0,1588 & 0,0496 \\ 0 & -0,0035 & 0,1588 & -0,0045 & 0,2538 & 0,0638 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0001 \\ 0,0000 \\ 0,0004 \\ 0,0003 \\ 0,0000 \\ 0,0001 \end{Bmatrix} \quad (3.96)
 \end{aligned}$$

Modo 9

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0276 & -0,0930 & 0 & -0,0995 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0668 & -0,0884 & 0 & 0,0241 & 0 \\ -0,0668 & -0,0608 & -0,0930 & 0,0241 & -0,0995 & 0 \\ 0 & 0,0276 & -0,0930 & 0 & -0,0995 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0668 & -0,0884 & 0,0241 \\ 0 & -0,0668 & -0,0884 & 0,0276 & -0,0689 & -0,0995 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} 0,2706 \\ -0,5534 \\ -2,4149 \\ -0,5035 \\ 0,1250 \\ -2,2534 \end{Bmatrix} \quad (3.97)
 \end{aligned}$$

Modo 10

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -0,0070 & -0,0118 & 0 & 0,0582 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0083 & 0,1393 & 0 & -0,0167 & 0 \\ 0,0083 & 0,1322 & -0,0118 & -0,0167 & 0,0582 & 0 \\ 0 & -0,0070 & -0,0118 & 0 & 0,0582 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0083 & 0,1393 & -0,0167 \\ 0 & 0,0083 & 0,1393 & -0,0070 & -0,0285 & 0,0582 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
& = 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0516 \\ 0,6789 \\ 0,4423 \\ -0,0303 \\ -0,1236 \\ 1,6518 \end{Bmatrix} \quad (3.98)
\end{aligned}$$

Modo 11

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -0,0206 & -0,1533 & 0 & -0,0232 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0160 & -0,1193 & 0 & -0,0181 & 0 \\ -0,0160 & -0,1399 & -0,1533 & -0,0181 & -0,0232 & 0 \\ 0 & -0,0206 & -0,1533 & 0 & -0,0232 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0160 & -0,1193 & -0,0181 \\ 0 & -0,0160 & -0,1193 & -0,0206 & -0,1714 & -0,0232 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
& = 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0004 \\ -0,0002 \\ 0,0004 \\ -0,0000 \\ 0,0002 \\ -0,0007 \end{Bmatrix} \quad (3.99)
\end{aligned}$$

Modo 12

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0017 & -0,0606 & 0 & -0,0341 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0065 & -0,0829 & 0 & 0,0145 & 0 \\ 0,0065 & -0,0812 & -0,0606 & 0,0145 & -0,0341 & 0 \\ 0 & 0,0017 & -0,0606 & 0 & -0,0341 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0065 & -0,0829 & 0,0145 \\ 0 & 0,0065 & -0,0829 & 0,0017 & -0,0460 & -0,0341 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} -0,1753 \\ -0,3880 \\ -0,2676 \\ -0,3574 \\ 0,1829 \\ -1,0237 \end{Bmatrix} \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

Modo 13

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0007 & 0,3236 & 0 & -0,0243 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0005 & 0,2517 & 0 & -0,0189 & 0 \\ 0,0005 & 0,2523 & 0,3236 & -0,0189 & -0,0243 & 0 \\ 0 & 0,0007 & 0,3236 & 0 & -0,0243 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0005 & 0,2517 & -0,0189 \\ 0 & 0,0005 & 0,2517 & 0,0007 & 0,3047 & -0,0243 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0000 \\ -0,0002 \\ -0,0014 \\ -0,0006 \\ -0,0001 \\ -0,0001 \end{Bmatrix} \quad (3.101)
 \end{aligned}$$

Modo 14

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0552 & -0,3080 & 0 & 0,0022 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0278 & 0,0222 & 0 & -0,0014 & 0 \\ -0,0278 & 0,0775 & -0,3080 & -0,0014 & 0,0022 & 0 \\ 0 & 0,0552 & -0,3080 & 0 & 0,0022 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0278 & 0,0222 & -0,0014 \\ 0 & -0,0278 & 0,0222 & 0,0552 & -0,3094 & 0,0022 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} 0,8857 \\ 0,0631 \\ -2,1418 \\ -1,4228 \\ -0,0748 \\ -0,0524 \end{Bmatrix} \quad (3.102)
 \end{aligned}$$

Modo 15

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0072 & -0,0306 & 0 & -0,0042 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0057 & -0,0238 & 0 & -0,0033 & 0 \\ -0,0057 & -0,0311 & -0,0306 & -0,0033 & -0,0042 & 0 \\ 0 & -0,0072 & -0,0306 & 0 & -0,0042 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0057 & -0,0238 & -0,0033 \\ 0 & -0,0057 & -0,0238 & -0,0072 & -0,0338 & -0,0042 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0018 \\ 0,0001 \\ 0,0002 \\ 0,0000 \\ -0,0001 \\ 0,0026 \end{Bmatrix} \quad (3.103)
 \end{aligned}$$

A tabela 3.4 mostra os erros obtidos para algumas combinações adequadas utilizando funções ponderadas do grupo II. Como pode ser visto, resultados muito satisfatórios podem

ser obtidos quando um número mínimo de 2 modos adequados são usados. A tabela 3.5 mostra os erros obtidos utilizando-se modos aleatórios. Como antes, o uso de outros modos que não sejam os modos adequados não garante a precisão dos resultados.

Para esta placa anisotrópica retangular, todas as combinações entre os modos adequados são combinações adequadas. Porém, algumas combinações fornecem resultados mais precisos do que outras para alguma(s) constante(s) elástica(s). Assim, o uso de um número de modos em uma combinação maior do que o mínimo necessário para cada grupo, ou o uso de um número maior de combinações com o número mínimo de modos necessários em cada grupo pode ser uma opção para garantir confiabilidade dos resultados a serem obtidos.

Tabela 3.2: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa retangular anisotrópica utilizando o grupo I de funções ponderadoras.

Combinações	Erros (%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
1-4-5-6-8	0,08	0,17	0,20	0,24	0,15	0,04
1-5-6-8-11	0,12	0,12	0,23	0,28	0,51	0,08
4-5-6-8-11	0,10	0,02	0,21	0,36	0,64	0,18
1-4-5-6	0,08	0,19	0,19	0,28	0,25	0,02
1-4-5-8	0,07	0,24	0,18	0,10	0,08	0,05
1-4-5-11	1,06	7,62	1,41	2,15	4,20	0,21
1-5-6-8	0,08	0,23	0,21	0,28	0,15	0,05
1-5-6-11	0,12	0,09	0,24	0,33	0,76	0,16
1-6-8-11	0,37	1,64	0,41	0,74	0,17	0,10
4-5-6-8	0,08	0,15	0,20	0,37	0,32	0,14
4-6-8-11	0,10	0,01	0,21	0,49	0,43	0,20
5-6-8-11	0,12	0,14	0,23	0,41	0,57	0,18
1-5-8-11	0,57	2,73	0,58	0,78	1,72	0,06
1-4-8-11	0,47	2,75	0,61	0,82	1,47	0,07
1-5-8-11	0,57	2,73	0,57	0,78	1,72	0,06
1-4-6-8	0,08	0,14	0,19	0,16	0,35	0,04
1-4-5	0,48	2,96	0,68	0,81	1,75	0,04
1-4-6	0,07	0,07	0,17	0,18	0,40	0,02
1-4-8	0,07	0,23	0,17	0,03	0,06	0,04
1-4-11	1,05	7,71	1,42	2,20	4,07	0,21
1-4-13	0,60	5,51	0,70	1,49	2,84	0,13
1-5-6	0,08	0,26	0,22	0,34	0,06	0,02
1-5-8	0,05	0,37	0,21	0,17	0,15	0,05
1-5-11	1,10	7,52	1,40	2,10	4,34	0,21
1-5-13	0,56	5,68	0,43	1,55	2,38	0,13
1-6-8	0,10	0,33	0,22	0,11	0,43	0,04
1-6-11	1,09	6,19	0,99	1,13	0,43	0,18
1-6-13	0,01	0,23	0,15	0,37	0,82	0,18
4-5-6	0,08	0,18	0,18	0,62	2,14	3,72
4-6-8	0,08	0,13	0,19	0,26	0,50	0,11
4-6-11	0,10	0,03	0,21	0,62	0,87	0,84
6-8-11	0,54	2,77	0,55	1,63	1,21	0,27
1-4	64,99	526,34	83,25	144,47	259,58	9,51
1-5	69,86	524,67	76,86	151,56	251,85	9,72
1-6	71,42	447,44	54,74	62,16	85,88	1,60
1-8	95,39	196,58	7,76	120,59	55,17	4,55

Tabela 3.3: Erros obtidos para algumas combinações entre modos aleatórios para a placa retangular anisotrópica utilizando o grupo I de funções ponderadoras.

Combinações	Erros (%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
2-3-7-9-10	126,40	297,30	6,50	76,80	1141,20	266,80
1-2-3-4-5	0,59	3,89	0,82	1,07	2,22	0,06
1-2-3-5-6	0,08	0,26	0,22	0,34	0,06	0,02
6-7-8-9-10	107,40	654,98	78,09	339,22	458,62	31,78
11-12-13-14-15	40,22	187,57	23,28	23,82	28,72	0,98
1-2-3-4	21,66	175,99	27,70	48,27	86,72	3,18
1-3-4-5	0,59	3,89	0,82	1.0691	2.22	0,06
1-3-6-7	113,15	708,69	86,81	98,35	136,22	2,53
1-2-3-7	188,99	209,47	120,65	255,83	61,21	11,82
1-7-8-9	101,56	209,32	8,28	128,39	58,74	4,84
2-9-7-10	128,00	47,80	272,70	235,00	3257,40	183,10
5-6-7	0,015	1,66	0,76	19.5771	116.81	163.44
2-10-12-14	59,70	2723,60	1451,10	775,20	6545,30	176,60
10-11-12-13	162,22	870,47	85,98	101,85	118,11	1,31
2-3-13-15	37,17	611,00	116,32	68,73	155,35	1,93
1-2-4	52,63	424,73	67,54	116,67	209,66	7,67
1-2-3	1071,60	1129,30	118,50	1455,40	492,50	56,70
4-5-7	428,80	3574,50	583,90	3846,00	7123,70	1025,00
5-6-7	0,07	3,96	1,92	43,62	253,36	353,64
9-11-13	48,20	272,65	24,522	30,94	35,48	0,00
7-9-10	128,10	44,00	290,4	241,40	3456,80	159,10
2-3-4	20,64	169,30	26,83	89,57	141,11	66,09
1-2	47,50	2892,80	548,00	342,10	351,30	19,20
2-3	101,90	53,87	108,16	794,05	917,25	201,47
3-5	59,44	390,71	50,36	325,94	441,38	92,03
6-7	90,05	590,02	76,05	282,24	485,61	162,98
9-10	172,70	346,90	235,30	881,10	4139,50	447,70

Tabela 3.4: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa retangular anisotrópica utilizando o grupo II de funções ponderadoras.

Combinações	Erros (%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
2-3-7-9	0,26	1,65	0,03	0,58	0,75	0,32
2-7-9-10	0,19	2,87	0,02	0,57	1,85	0,23
2-3-9-14	0,233	1,87	0,04	0,81	0,86	0,23
2-3-7	0,09	0,26	0,16	0,83	1,86	0,72
2-3-9	0,19	1,32	0,04	1,03	2,25	0,61
2-3-10	0,43	1,91	0,09	0,22	0,90	0,00
2-3-12	0,14	0,30	0,24	0,99	0,40	1,07
2-3-14	0,20	0,82	0,02	0,59	0,08	0,29
2-7-9	0,26	2,37	0,08	0,96	0,98	0,16
2-7-10	0,28	3,21	0,07	1,03	2,19	0,28
2-7-12	0,21	1,10	0,06	1,19	2,05	0,43
2-7-14	0,26	2,19	0,04	1,17	0,17	0,12
3-7-9	0,18	1,59	0,02	0,55	0,98	0,14
10-12-14	0,48	5,37	0,02	0,06	2,04	0,17
2-3	0,23	0,21	0,35	0,73	0,45	1,30
2-7	0,08	0,36	0,25	0,39	2,92	0,56
2-9	0,23	2,74	0,18	0,81	2,45	0,48
3-7	0,03	0,10	0,19	1,34	2,14	0,73
3-9	0,00	0,56	0,16	1,90	3,98	0,68
7-9	0,06	2,20	0,09	0,94	1,32	0,40

Tabela 3.5: Erros obtidos para algumas combinações entre modos aleatórios para a placa retangular anisotrópica utilizando o grupo II de funções ponderadoras.

Combinações	Erros (%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
1-2-4-5	69,27	138,05	62,74	41,30	7,51	91,68
2-3-4-5	70,47	120,72	59,14	56,17	19,23	81,09
4-5-6-8	99,99	99,99	99,99	99,99	100,01	99,98
2-3-4-7	59,32	156,59	45,05	136,45	166,64	20,49
2-3-5	65,62	91,61	48,82	60,92	13,04	70,69
2-3-6	73,22	264,76	72,55	114,15	94,47	83,84
1-4-5	99,96	99,66	99,95	99,90	99,84	99,99
6-10-11	46,77	434,20	54,59	111,94	107,06	56,45
1-2	50,23	112,18	99,15	40,83	127,00	90,26
1-3	45,81	50,99	27,74	23,18	9,13	90,60
4-5	82,20	1418,00	148,00	1528,20	2914,80	331,10
11-7	18,21	193,71	23,98	235,11	346,88	73,55
3-6	79,50	236,27	77,19	133,86	63,93	116,20
5-9	18,43	597,85	15,13	619,53	685,72	222,73

3.1.5 Sensibilidade do método quanto à geometria quadrada

As tabelas 3.6 e 3.7 mostram alguns erros obtidos para a mesma placa porém considerando agora somente uma pequena diferença nas dimensões, de forma que a placa será quadrada e não mais retangular, tendo as dimensões $0.450 \times 0.450 \times 0.003 \text{ m}$. Foi utilizado uma malha com 961 nós e analisados também somente os 15 primeiros modos para os dois grupos de funções ponderadoras. A figura 3.4 mostra estes modos juntamente com as suas respectivas frequências naturais. Para esta placa, os modos adequados para o grupo I de funções ponderadoras são os modos 1, 4, 5, 7, 8 e 12, e para o grupo II são os modos 2, 3, 6, 9, 11, 13 e 15. Como pode ser visto, para o caso de anisotropia total, é também possível se obter excelentes resultados com placas quadradas quando no mínimo 3 modos adequados são utilizados no grupo I e 2 no grupo II de funções ponderadoras, como ocorreu na placa retangular.

Tabela 3.6: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa quadrada anisotrópica utilizando o grupo I de funções ponderadoras.

Combinações	Erros (%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
1-4-5-7-8	0,08	0,12	0,09	0,18	0,12	0,01
1-5-7-8-12	0,10	0,53	0,57	0,33	0,07	0,01
4-5-7-8-12	0,09	0,01	0,12	0,48	0,72	0,09
1-4-5-7	0,08	0,10	0,09	0,22	0,10	0,01
1-4-5-8	0,12	0,01	0,09	0,11	0,04	0,00
1-4-5-12	1,88	4,15	0,30	2,64	1,10	0,12
1-5-7-8	0,09	0,45	0,34	0,22	0,23	0,00
1-5-7-12	0,09	0,54	0,58	0,37	0,05	0,02
1-7-8-12	0,12	1,54	1,50	0,45	1,15	0,00
4-5-7-8	0,08	0,11	0,09	0,19	0,30	0,66
4-7-8-12	0,09	0,01	0,10	0,50	0,86	0,02
1-4-5	0,28	0,39	0,11	0,33	0,17	0,00
1-4-7	0,08	0,09	0,08	0,22	0,18	0,02
1-4-8	0,12	0,02	0,08	0,11	0,04	0,01
1-4-12	2,27	5,17	0,34	3,37	1,43	0,15
1-5-7	0,08	0,41	0,33	0,26	0,27	0,01
1-5-8	0,14	0,40	0,34	0,07	0,38	0,00
1-5-12	2,32	2,92	0,70	3,13	1,07	0,14
1-7-8	0,09	0,55	0,42	0,23	0,24	0,01
1-7-12	0,16	3,34	2,82	0,67	2,62	0,01
4-5-7	0,08	0,09	0,09	0,18	0,28	0,71
4-7-8	0,08	0,11	0,08	0,20	0,35	0,60
1-4	124,85	211,85	11,18	225,83	79,03	5,63
1-5	162,14	117,48	4,39	165,54	69,20	11,26
1-7	0,97	44,08	21,05	16,11	16,11	1,71
1-8	0,04	23,10	60,52	1,70	141,94	1,43
1-12	249,13	100,00	109,87	267,77	172,63	9,82
4-5	100,00	1442,20	40,80	100,00	100,00	10,00
4-7	0,04	0,18	0,08	111,71	3,65	268,56
4-8	24,30	44,10	16,10	1242,20	2584,40	4395,00

Tabela 3.7: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa quadrada anisotrópica utilizando o grupo II de funções ponderadoras.

Combinações	Erros (%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
2-3-6-9	0,0991	1,1686	0,1267	0,3041	0,4458	0,2130
2-3-6-11	0,1167	1,1956	0,0628	0,3357	0,3821	0,0723
2-3-6-13	0,0093	0,7577	0,0904	0,1169	0,0750	0,2240
3-6-9-11	0,0602	1,3300	0,0254	0,4686	0,2242	0,1292
6-11-13-15	0,3510	1,2064	0,3383	0,2851	1,4660	0,7723
9-11-13-15	0,1973	1,0655	0,3383	0,6240	2,1403	0,9610
2-3-6	0,0075	0,6853	0,1148	0,2694	0,1503	0,3707
2-3-9	0,0975	0,8292	0,0182	0,4928	0,7682	0,3821
2-3-11	0,1107	0,8507	0,0429	0,3377	0,2740	0,1736
3-6-9	0,0918	1,3180	0,1327	0,3434	0,2269	0,1407
2-3-15	0,2051	0,5461	0,3789	0,7613	1,0649	0,8989
6-11-13	0,3598	1,7555	0,4089	0,5815	0,5311	0,8799
9-11-13	0,2444	0,2622	0,8716	1,0025	0,0671	1,1877
2-3	0,1881	0,0566	0,1894	0,4559	0,4544	0,8241
2-6	1,9888	2,9598	0,0444	6,7403	2,5614	0,8493
2-9	0,0929	1,0934	0,0473	0,7443	1,7348	0,2992
3-6	0,0210	0,9027	0,1669	0,2059	0,4170	0,3507
3-9	0,1192	1,6351	0,3014	0,2306	0,6268	0,1993
6-9	0,0241	1,4091	0,0272	0,5001	0,8350	0,1979
9-11	0,2994	0,3657	1,0621	0,7552	0,5984	1,5187
11-13	0,9315	4,0256	1,9403	1,1865	0,3109	1,9014
11-15	1,1632	0,8688	0,3077	0,3976	3,8650	1,7605
13-15	0,5012	1,3040	0,3041	0,8548	2,8692	1,1097
6-15	0,6167	0,3293	0,3124	1,9896	0,6828	0,1764

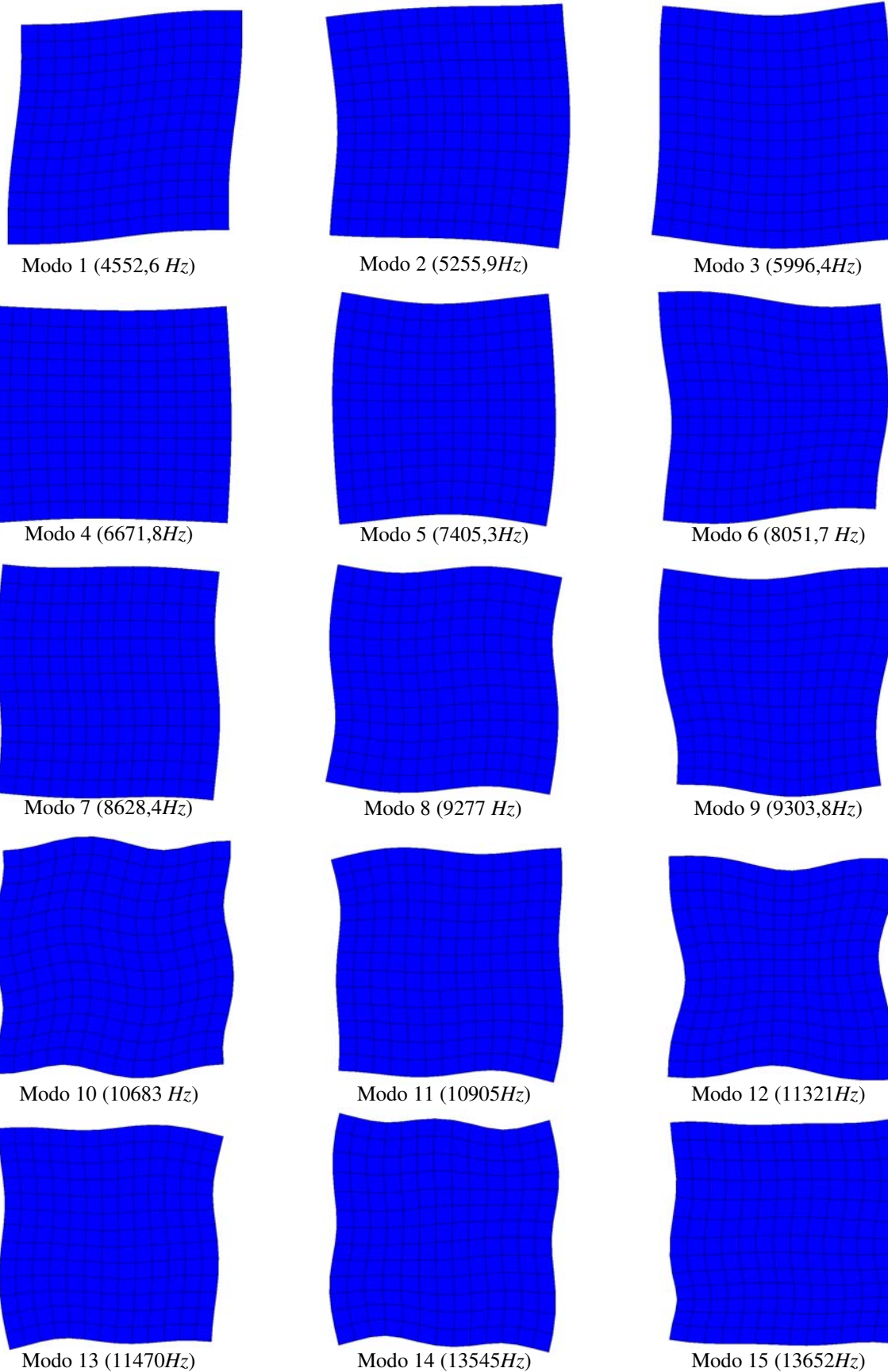


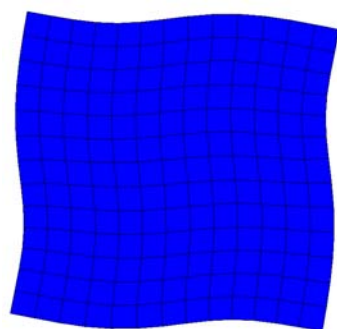
Figura 3.4. 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa anisotrópica quadrada.

3.1.6 Sensibilidade do método quanto ao número de nós da malha

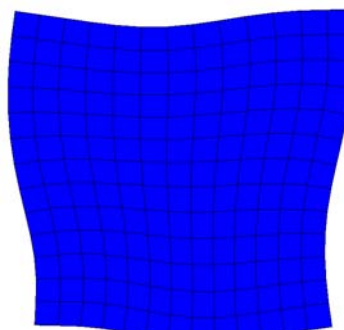
As tabelas 3.8 - 3.11 mostram os erros obtidos para algumas combinações adequadas entre os primeiros modos adequados das placas anisotrópicas considerando malhas com menos nós (menos refinadas). Foram analisadas as duas geometrias, retangular e quadrada, e os 2 grupos de funções ponderadoras, I e II. Foi observado que, dependendo do número de nós utilizados para a análise modal numérica (baseada em elementos finitos), a ordem de algum(s) modo(s) pode ser alterada. No caso da placa quadrada, para as malhas com 121, 81 e 25 nós, este fato foi verificado para os modos 8 e 9, como mostra a figura 3.5. De acordo com os resultados para o primeiro caso, envolvendo o grupo I de funções ponderadoras, nota-se que é possível obter bons resultados mesmo em malhas pouco refinadas, o que mostra ser o método de identificação pouco sensível ao número de nós considerados, embora no mesmo utiliza-se métodos numéricos dependentes deste número, como diferenças finitas (utilizado no cálculo das derivadas) e integração numérica (utilizado no cálculo das integrais).

Para o segundo caso, envolvendo as funções ponderadoras do grupo II, pode-se notar uma maior sensibilidade à variação de pontos na malha quando comparado com o primeiro caso. Mas mesmo assim, é possível, dependendo da combinação, obter resultados satisfatórios para os casos onde a malha não é muito pobre tal qual a de 35 nós, para a placa retangular, e 25 nós, para a placa quadrada.

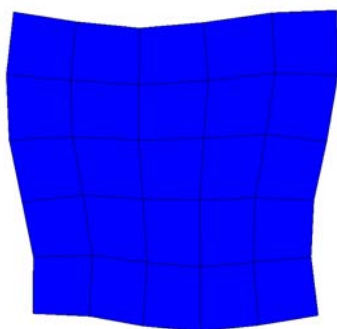
Devido a análise modal ter sido realizada numericamente, além de poder alterar a ordem de algum(s) modo(s), a quantidade de nós interfere também nos valores das frequências naturais. Na prática, em uma análise modal, com poucos pontos medidos é possível obter valores com razoável precisão para as frequências naturais. A quantidade de pontos não altera a ordem dos modos, apenas facilita ou prejudica a visualização do comportamento vibracional da estrutura.



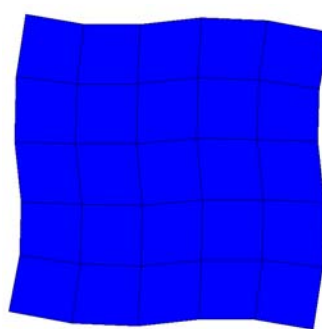
(a) Modo 8 (9277 Hz)



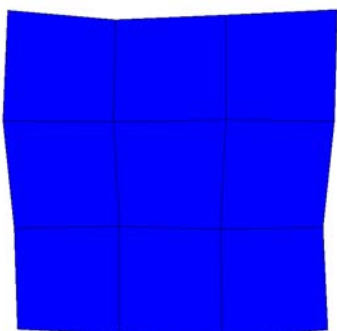
(b) Modo 9 (9303,8Hz)



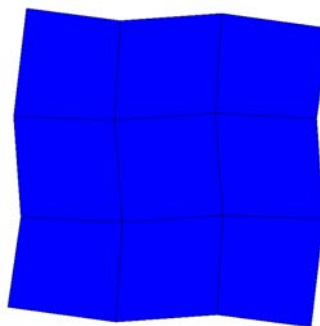
(c) Modo 8 (9320,1Hz)



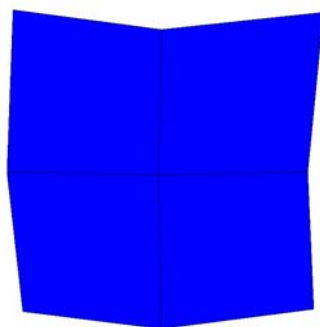
(d) Modo 9 (9373,4Hz)



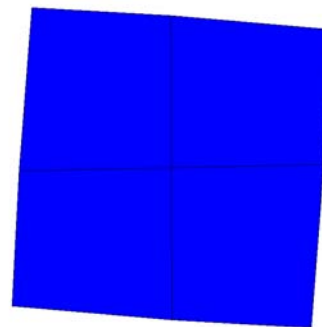
(e) Modo 8 (9342,3Hz)



(f) Modo 9 (9504,7 Hz)



(g) Modo 8 (9787,7 Hz)



(h) Modo 9 (12769Hz)

Figura 3.5. Modos 8 e 9 da placa anisotrópica quadrada para malhas com diferentes número de nós.

Tabela 3.8: Erros obtidos para a placa anisotrópica retangular e grupo I de funções ponderadoras com a malha contendo diferentes números de nós.

Placa anisotrópica retangular - grupo I							
Número de nós	Combinações	Erros(%)					
		A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
459	1-4-5-6-8	0,11	0,27	0,31	0,37	0,27	0,11
	1-4-5-6	0,11	0,29	0,30	0,42	0,31	0,03
	1-4-6	0,09	0,07	0,26	0,28	0,56	0,01
135	1-4-5-6-8	0,35	1,10	1,28	0,79	1,08	0,42
	1-4-5-6	0,34	1,46	1,25	1,88	1,21	0,08
	1-4-6	0,25	0,46	1,04	1,29	2,19	0,02
99	1-4-5-6-8	0,77	1,09	1,30	0,48	3,28	0,40
	1-4-5-6	0,76	1,56	1,36	2,09	3,05	0,31
	1-4-6	0,56	0,32	1,22	1,88	3,57	0,28
35	1-4-5-6-8	2,23	3,01	6,23	5,07	4,11	0,31
	1-4-5-6	2,25	3,07	6,23	5,15	4,08	0,32
	1-4-6	1,81	1,23	6,19	6,56	2,05	0,25

3.1.7 Sensibilidade do método quanto à presença de ruído nas frequências naturais

As figuras 3.6 e 3.7 mostram a sensibilidade do método à variação nos valores das frequências naturais. Foi considerado a placa retangular, os 2 grupos de funções ponderadoras, I e II, e as frequências de somente uma combinação adequada específica, 1-4-6 para o grupo I e 2-3-7 para o grupo II. As frequências naturais tiveram os seus valores alterados para -1%, -5%, -10%, +1%, +5%, +10% com relação aos seus respectivos valores iniciais de referência. Como estas frequências são muito altas quando comparadas com as frequências em vibração fora do plano (transversal), em geral pequenas porcentagens dão grandes variações em seus valores, principalmente quando se usa modos de frequências mais elevadas. O método se mostrou sensível a esta variação. Porém, experimentalmente, em uma análise modal, os valores das frequências são, geralmente, mais fáceis de serem obtidos precisamente do que os modos próprios, principalmente quando são considerados vários pontos de medição.

Tabela 3.9: Erros obtidos para a placa anisotrópica quadrada e grupo I de funções ponderadoras com a malha contendo diferentes números de nós.

Placa anisotrópica quadrada - grupo I							
Número de nós	Combinações	Erros(%)					
		A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
441	1-4-5-7-8	0,19	0,30	0,20	0,45	0,32	0,01
	1-4-5-7	0,17	0,22	0,20	0,51	0,27	0,02
	1-4-7	0,17	0,23	0,17	0,51	0,48	0,04
121	1-4-5-7-9	0,76	1,28	0,75	2,25	1,47	0,11
	1-4-5-7	0,74	1,97	0,77	2,45	1,95	0,14
	1-4-7	0,74	1,79	0,59	2,39	2,68	0,18
81	1-4-5-7-9	1,21	1,61	1,29	2,85	1,65	0,06
	1-4-5-7	1,17	1,74	1,29	3,30	1,72	0,15
	1-4-7	1,18	1,88	1,15	3,32	2,85	0,24
25	1-4-5-7-9	6,10	3,45	6,59	0,39	4,78	7,67
	1-4-5-7	5,77	2,33	6,52	9,46	1,46	0,61
	1-4-7	6,37	4,19	6,38	10,28	6,86	0,21

Tabela 3.10: Erros obtidos para a placa anisotrópica retangular e grupo II de funções ponderadoras com a malha contendo diferentes números de nós.

Placa anisotrópica retangular - grupo II							
Número de nós	Combinações	Erros(%)					
		A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
459	2-3-7-9	0,41	2,46	0,03	0,97	1,05	0,50
	2-3-7	0,11	0,31	0,29	1,39	3,10	1,14
	2-3	0,32	0,30	0,59	1,23	1,04	1,96
135	2-3-7-9	1,98	9,78	0,13	4,83	4,61	1,52
	2-3-7	0,58	0,37	1,53	6,20	14,05	4,33
	2-3	1,53	2,77	3,05	5,45	4,75	7,99
99	2-3-7-9	2,00	12,20	0,61	5,53	7,86	2,37
	2-3-7	0,20	2,88	0,99	6,74	14,41	5,97
	2-3	2,81	2,33	1,71	7,93	6,37	10,43
35	2-3-7-8	7,11	41,20	0,92	5,55	2,44	21,54
	2-3-7	5,59	10,70	1,29	21,07	25,51	21,27
	2-3	10,00	13,47	7,25	37,56	1,80	49,53

Tabela 3.11: Erros obtidos para a placa anisotrópica quadrada e grupo II de funções ponderadoras com a malha contendo diferentes números de nós.

Placa anisotrópica quadrada - grupo II							
Número de nós	Combinações	Erros(%)					
		A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
441	2-3-6-9	0,24	2,63	0,33	0,69	0,75	0,45
	2-3-6	0,04	1,48	0,32	0,47	0,48	0,78
	2-3	0,39	0,06	0,43	1,01	1,51	1,87
121	2-3-6-8	0,78	10,48	1,18	3,74	3,02	1,99
	2-3-6	0,85	5,93	0,87	3,39	4,81	3,80
	2-3	2,56	2,33	2,04	4,77	6,07	8,11
81	2-3-6-8	1,47	18,84	2,02	4,55	6,20	3,72
	2-3-6	0,01	10,39	1,78	4,59	4,07	6,09
	2-3	2,64	3,04	2,68	7,80	9,27	13,06
25	2-3-6-8	4,57	82,99	7,98	10,03	14,43	45,40
	2-3-6	2,71	35,56	6,30	22,99	34,75	49,30
	2-3	9,82	19,03	9,30	22,40	23,70	86,66

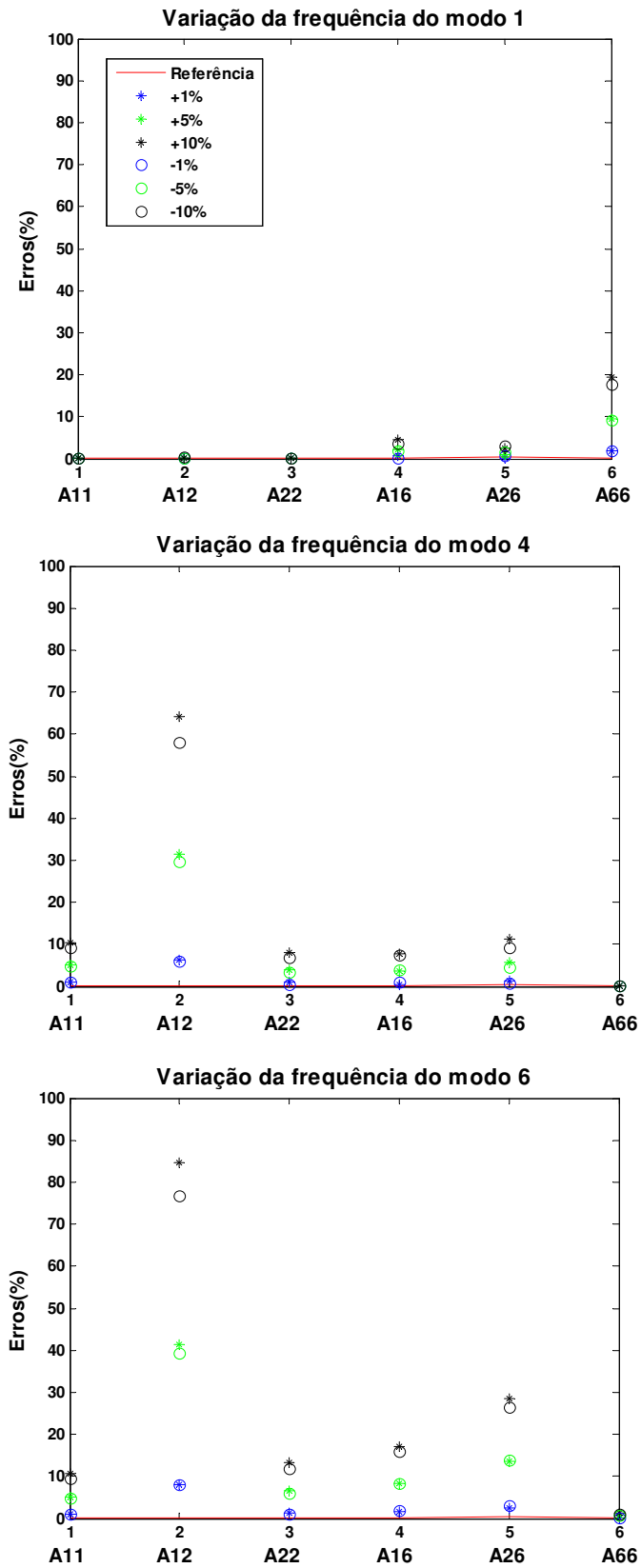


Figura 3.6. Sensibilidade do método à variação das frequências naturais dos modos 1, 4 e 6 da placa anisotrópica retangular e grupo I de funções ponderadoras.

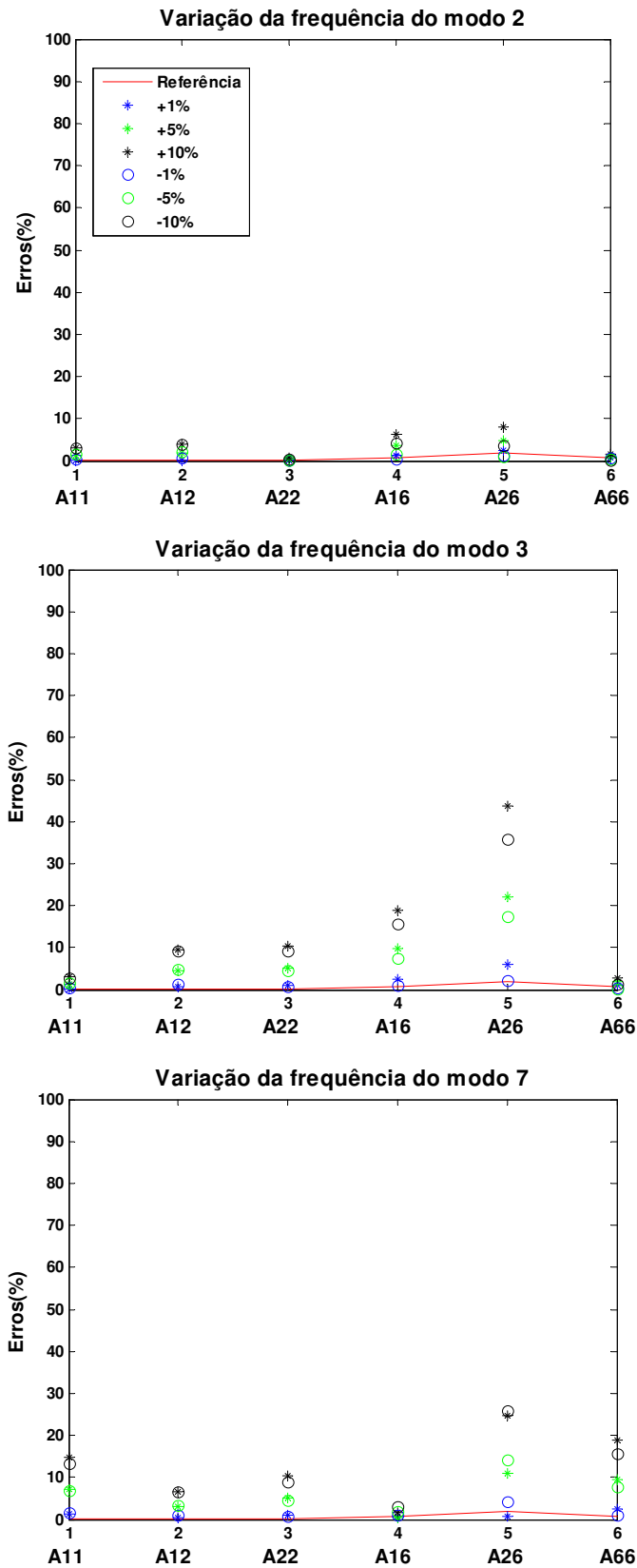


Figura 3.7. Sensibilidade do método à variação das frequências naturais dos modos 2, 3 e 7 da placa anisotrópica retangular e grupo II de funções ponderadoras.

3.1.8 Sensibilidade do método quanto à presença de ruído nos modos e suavização por RDFS

Sabe-se que o método das diferenças finitas não é recomendado para cálculo de derivadas de sinais com presença de ruído. Assim, técnicas de suavização são necessárias para filtrar sinais contaminados com ruídos antes de sua utilização. Visando simular situações que possam ocorrer durante os ensaios experimentais, foi realizado um estudo quanto à precisão do método na presença de certa quantidade de ruído. Este ruído foi gerado numericamente e aleatoriamente em cada direção, x e y , obtendo-se valores máximos em cada nó menores ou iguais à 15% da maior amplitude de deformação no plano para esta direção e em cada modo. Como o método envolve somente derivadas de primeira ordem, ao contrário de alguns métodos que envolvem derivadas de segunda ordem, dependendo da combinação, é possível obter bons resultados mesmo na presença de altos níveis de ruído. Foi utilizado a série de Fourier discreta regressiva (RDFS) proposta por Arruda (1992) e os ajustes dos parâmetros da RDFS foram feitos por meio da ORDFS (conforme foi mostrada no capítulo 2). A suavização foi realizada em cada direção independentemente.

A figura 3.8 mostra um exemplo em vista 3D da aplicação da RDFS aos deslocamentos U do primeiro modo na direção x da placa retangular. As tabelas 3.12 e 3.13 mostram os resultados de algumas combinações obtidos para os grupos I e II quando o método de identificação é aplicado diretamente utilizando-se modos com ruído e após a suavização por RDFS. Foi considerada a placa retangular com 459 nós. Os parâmetros da RDFS adotados e calculados por ORDFS são mostrados abaixo, onde Kxu , Kyu , Kxv , Kyv são equivalentes às razões K_ξ e K_η da RDFS e Pu , Pv , Qu e Qv são equivalentes aos termos p e q da RDFS, todos demonstrados no capítulo 2. As letras x e y indicam a direção, u e v indicam os deslocamentos e os subíndices 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 9 referem-se aos modos. Os termos Pu , Pv , Qu e Qv são valores de entrada do programa de otimização e são escolhidos para cada modo separadamente. Estes termos são utilizados para obter os ajustes de períodos representados pelas razões Kxu , Kyu , Kxv , Kyv . Existem várias combinações entre estes termos Pu , Pv , Qu e Qv que fornecem resultados satisfatórios. Nas tabelas 3.12 - 3.13 é mostrada apenas

uma combinação para cada caso. Como pode ser visto o método de identificação para o grupo I não é muito sensível à presença de ruído e, portanto, a suavização por RDFS, neste caso, melhora os valores para algumas constantes elástica e piora os de outras. Porém, estes resultados continuam sendo satisfatórios, tanto antes como depois da suavização. Já no grupo II percebe-se uma maior sensibilidade à presença de ruído. Isso devido às funções ponderadoras de segunda ordem. Os resultados para algumas constantes não tiveram melhoras expressivas, principalmente quando apenas 2 modos são utilizados. Tanto para o grupo I como para o grupo II, os valores de entrada adotados para os termos Pu , Pv , Qu e Qv utilizados no cálculo das razões Kxu , Kyu , Kxv , Kyv interferem diretamente e expressivamente na qualidade dos resultados, principalmente, nas constantes que estão relacionadas ao cisalhamento como A_{16} , A_{26} e A_{12} . Os modos com pouca variação de sinais são mais fáceis de serem suavizados na presença de ruído.

Tabela 3.12: Erros obtidos para a placa anisotrópica retangular e grupo I de funções ponderadoras com ruído e após o processo de suavização por RDFS.

Placa anisotrópica retangular - grupo I, com ruído $\leq 15\%$						
Combinações	Erros(%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
1-4-5-6	0,26	5,35	0,47	4,42	6,21	0,71
1-4-6	0,04	4,03	0,35	5,52	4,08	0,83
Placa anisotrópica retangular - grupo I, suavizado com ORDFS						
Combinações	Erros(%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
1-4-5-6	0,30	1,45	0,33	4,27	7,81	1,06
1-4-6	0,02	2,72	0,28	5,87	5,38	1,20

Neste tipo de identificação que depende de uma combinação de modos e não de um único modo individualmente, e onde cada direção é suavizada independentemente para cada um desses modos, a eliminação correta de ruídos em cada direção torna-se mais complexa. Quanto mais modos são utilizados significa mais direções de ajustes, mais incógnitas e, portanto, o método fica mais suscetível a erros. A suavização inadequada em uma única direção para um único deslocamento, u ou v , pode comprometer de forma considerável os resultados. Esse fato torna mais sensível no caso de funções de segunda ordem. Portanto, de uma maneira geral, para os dois grupos, este método de identificação é um método menos sensível

Tabela 3.13: Erros obtidos para a placa anisotrópica retangular e grupo II de funções ponderadoras com ruído e após o processo de suavização por RDFS.

Placa anisotrópica retangular - grupo II, com ruído $\leq 15\%$						
Combinações	Erros(%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
2-3-9	0,41	38,16	1,37	19,98	26,40	1,48
2-3	3,99	36,15	2,07	15,45	27,34	0,06
Placa anisotrópica retangular - grupo II, suavizado com ORDFS						
Combinações	Erros(%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
2-3-9	1,48	8,36	0,34	9,77	0,15	0,51
2-3	4,40	17,13	0,91	9,04	20,51	1,31

à presença de ruído quando comparado ao método de identificação de constantes elásticas de rigidez à flexão utilizado neste trabalho (capítulo 2). Isso porque neste último faz-se o uso de derivadas de segunda ordem, que são extremamente sensíveis à pequenas quantidades de ruído.

Os valores utilizados como entrada, Pu_1 , Qu_1 , Pv_1 , Qv_1 , e os valores encontrados por meio da ORDFS para as suavizações foram:

Placa retangular, grupo I, ORDFS: $Pu_1 = 1$, $Qu_1 = 1$, $Pv_1 = 2$, $Qv_1 = 1$, $Kxu_1 = 1,6262$, $Kyu_1 = 1,6432$, $Kxv_1 = 1,7738$, $Kyv_1 = 1,2207$, $Pu_4 = 2$, $Qu_4 = 1$, $Pv_4 = 2$, $Qv_4 = 2$, $Kxu_4 = 1,9446$, $Kyu_4 = 1,9455$, $Kxv_4 = 1,9538$, $Kyv_4 = 2,0047$, $Pu_5 = 2$, $Qu_5 = 2$, $Pv_5 = 2$, $Qv_5 = 2$, $Kxu_5 = 1,8104$, $Kyu_5 = 1,7185$, $Kxv_5 = 2,6673$, $Kyv_5 = 1,4862$, $Pu_6 = 2$, $Qu_6 = 2$, $Pv_6 = 1$, $Qv_6 = 2$, $Kxu_6 = 7,5660$, $Kyu_6 = 1,7247$, $Kxv_6 = 1,7963$, $Kyv_6 = 1,3681$.

Placa retangular, grupo II, ORDFS: $Pu_2 = 2$, $Qu_2 = 3$, $Pv_2 = 1$, $Qv_2 = 2$, $Kxu_2 = 10,4871$, $Kyu_2 = 2,1841$, $Kxv_2 = 1,7248$, $Kyv_2 = 3,2331$, $Pu_3 = 3$, $Qu_3 = 1$, $Pv_3 = 1$, $Qv_3 = 2$, $Kxu_3 = 3,4625$, $Kyu_3 = 1,3107$, $Kxv_3 = 1,7710$, $Kyv_3 = 9,0967$, $Pu_9 = 3$, $Qu_9 = 1$, $Pv_9 = 2$, $Qv_9 = 2$, $Kxu_9 = 3,2799$, $Kyu_9 = 2,1059$, $Kxv_9 = 1,6362$, $Kyv_9 = 1,7592$.

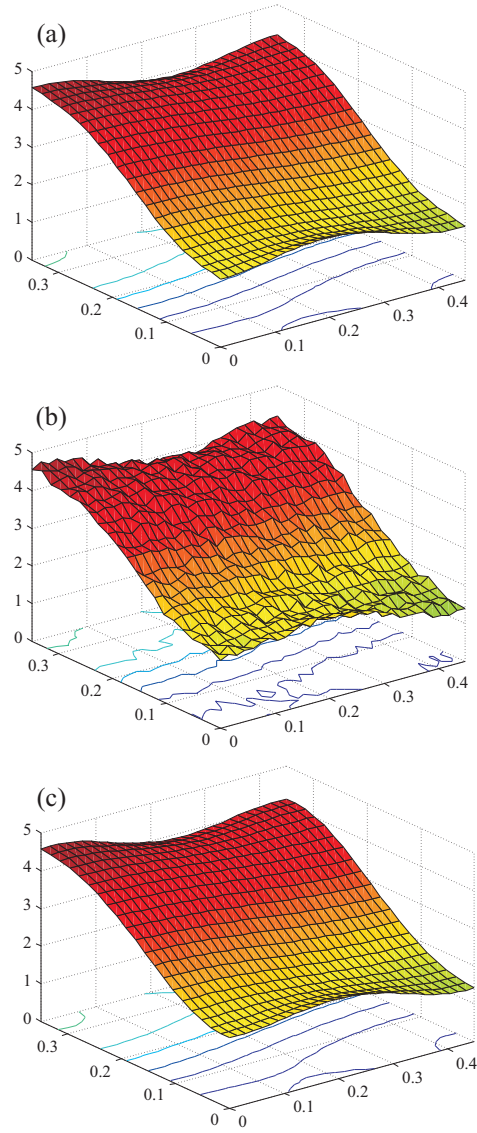


Figura 3.8: Deslocamentos U do primeiro modo na direção x da placa anisotrópica retangular em vista 3D: (a) sem ruído, (B) com ruído e, (c) após a suavização por RDFS.

3.1.9 Estudo de casos - Sensibilidade à sequência de empilhamento

Outras 6 placas (laminados) de grafite/polímero foram também analisadas para verificar a precisão do método proposto, sendo: uma *anisotrópica* com todas as constantes A_{ij} 's ($i, j = 1, 2, 6$) não nulas; uma *ortotrópica* com as fibras $0/90^\circ$ ("cross-ply") onde $A_{11} = A_{22}$, $A_{16} = A_{26} = 0$, e $A_{11} - A_{12} \neq 2A_{66}$; duas *ortotrópicas* com as fibras unidirecionais a 0° e a 30° ; uma *ortotrópica* com relação às forças e deformações no plano (D_{16} e D_{26} não nulos) e fibras $-\theta/+\theta$ ("angle-ply"), e por último, uma *quase-isotrópica* com $A_{11} = A_{22}$, $A_{16} = A_{26} = 0$, e $A_{11} - A_{12} = 2A_{66}$. Estes laminados possuem 8 camadas e dimensões $0,450 \times 0,350 \times 0,003 \text{ m}$ (placa retangular) e $0,350 \times 0,350 \times 0,003 \text{ m}$ (placa quadrada), densidade 1500 kg/m^3 , e as seguintes constantes de engenharia por camada: $E_1 = 155 \text{ GPa}$, módulo de Young ao longo da direção principal (direção das fibras); $E_2 = 12,10 \text{ GPa}$, módulo de Young ao longo da direção transversal às fibras; $G_{12} = 4,4 \text{ GPa}$, módulo cisalhamento no plano 1-2 e $\nu_{12} = 0,248$, coeficiente de Poisson no plano 1-2. Foi considerado uma malha contendo 651 nós para as placas retangulares e uma de 441 nós para as placas quadradas. A tabela 3.14 mostra os valores das constantes elásticas A_{ij} 's desses laminados juntamente com as orientações de suas fibras. Os termos "aniso", "orto" e "quase-iso" são simplificações de "Anisotrópica", "Ortotrópica" e "Quase-isotrópica", respectivamente. As figuras 3.9 - 3.20 mostram os 15 primeiros modos próprios e suas respectivas frequências naturais. Pode-se notar que em placas quadradas ortotrópicas simétricas com ângulos $0/90^\circ$ e quase-isotrópicas, existem frequências que se repetem para alguns modos. Neste caso os modos são os mesmos, porém rotacionados de 90° .

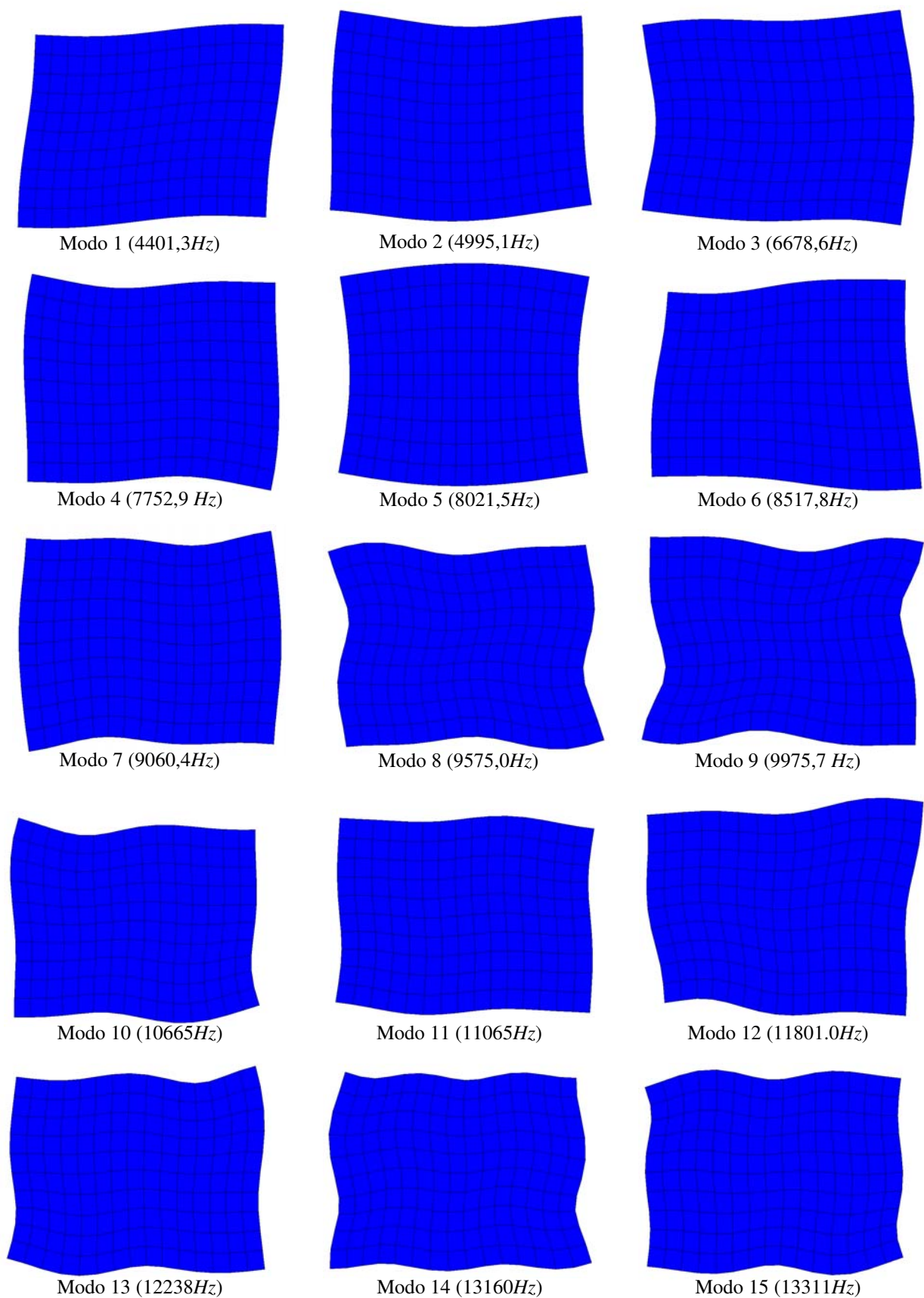


Figura 3.9. 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa anisotrópica retangular de grafite/polímero.

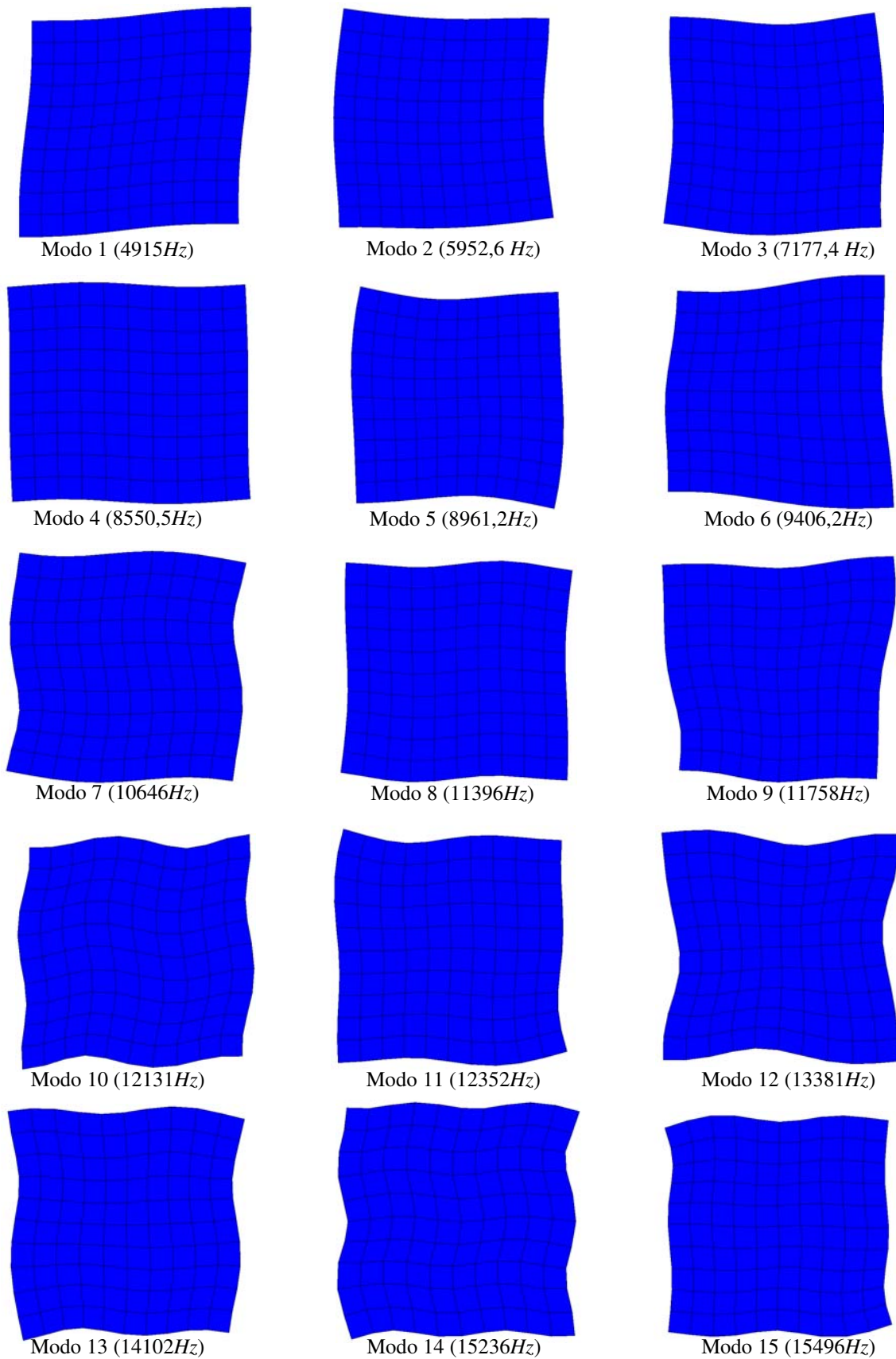


Figura 3.10. 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa anisotrópica quadrada de grafite/polímero.

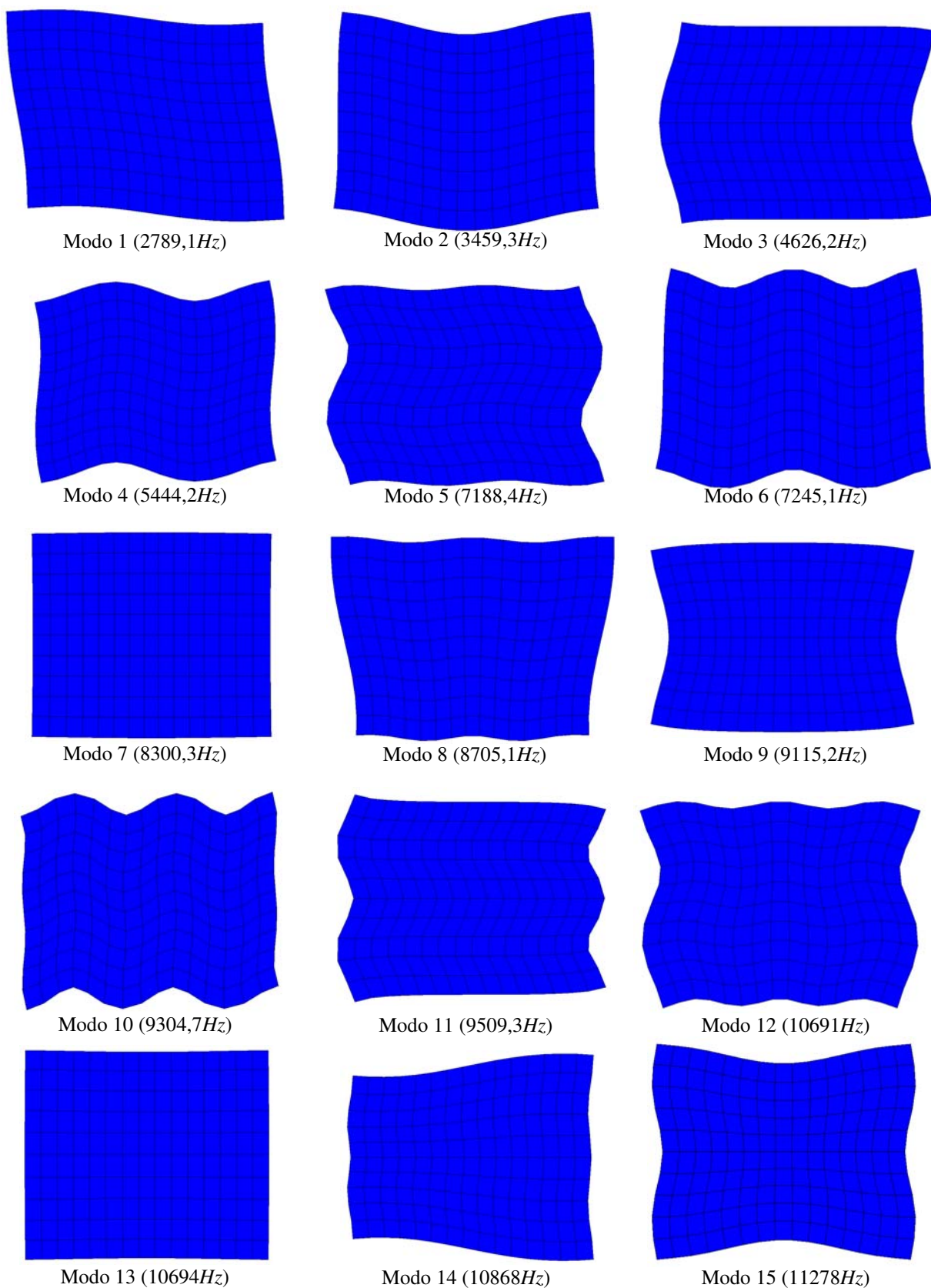


Figura 3.11. 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica I retangular de grafite/polímero.

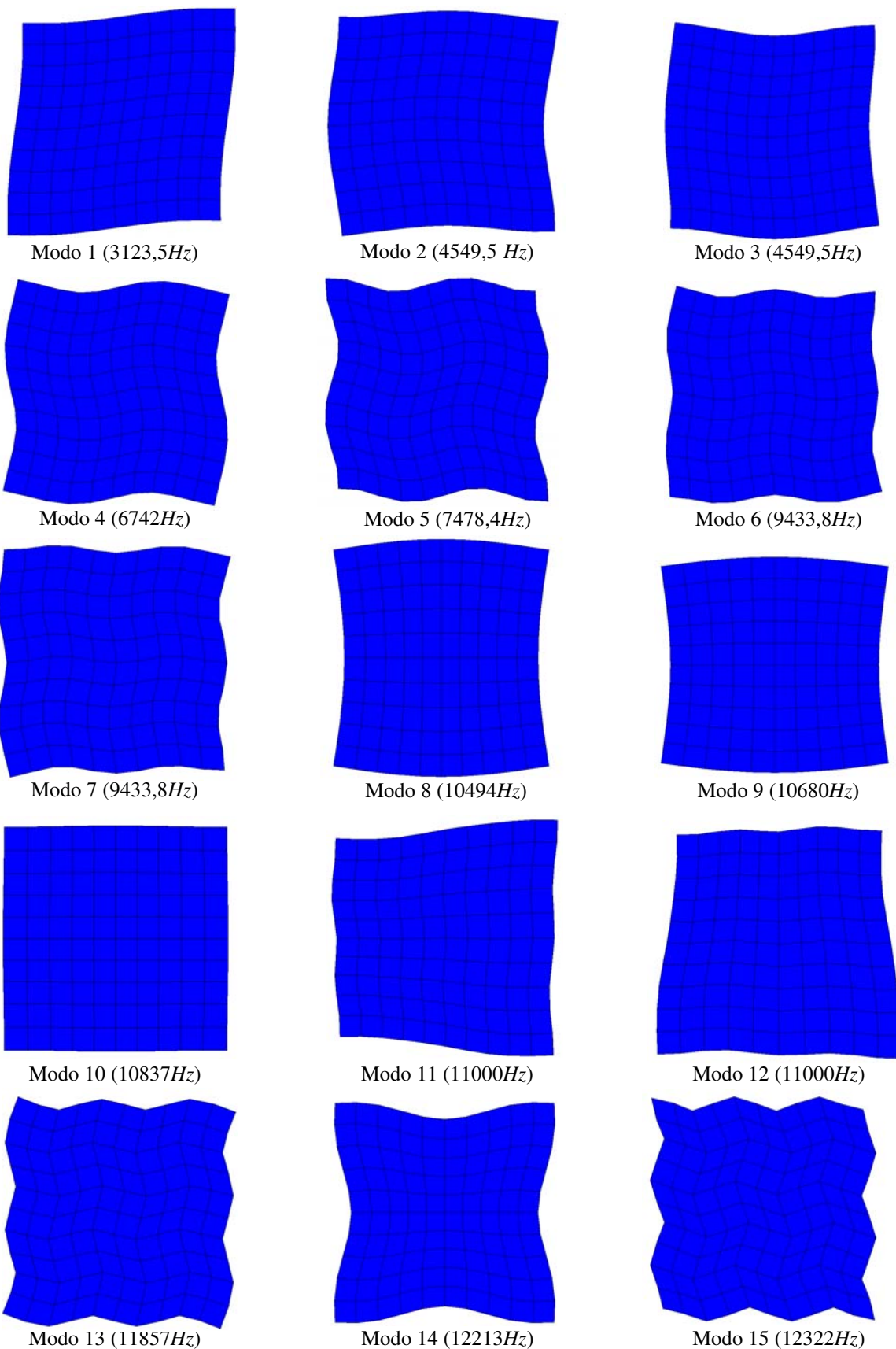


Figura 3.12. 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica I quadrada de grafite/polímero.

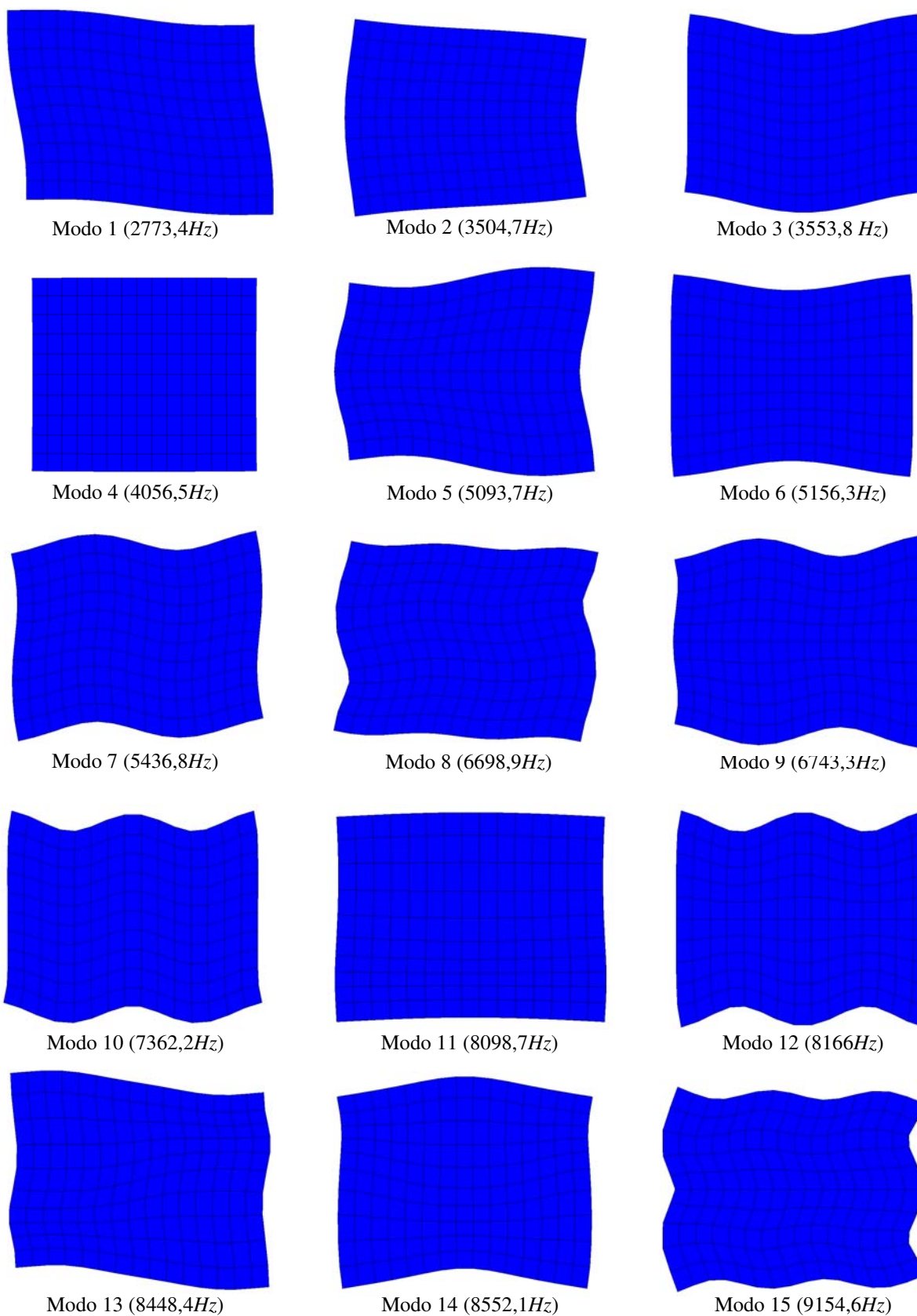


Figura 3.13. 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica II retangular de grafite/polímero.

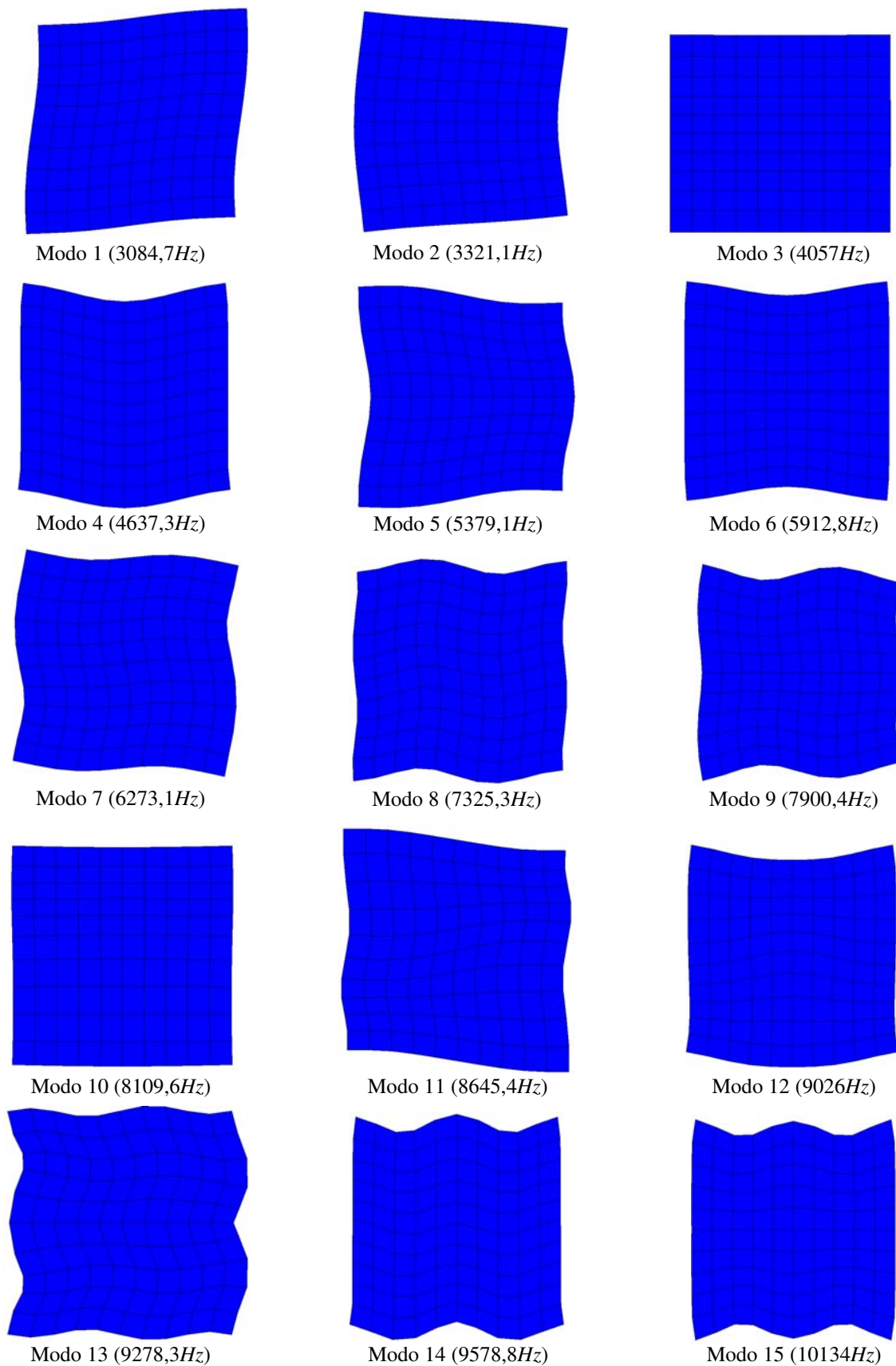


Figura 3.14. 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica II quadrada de grafite/polímero.

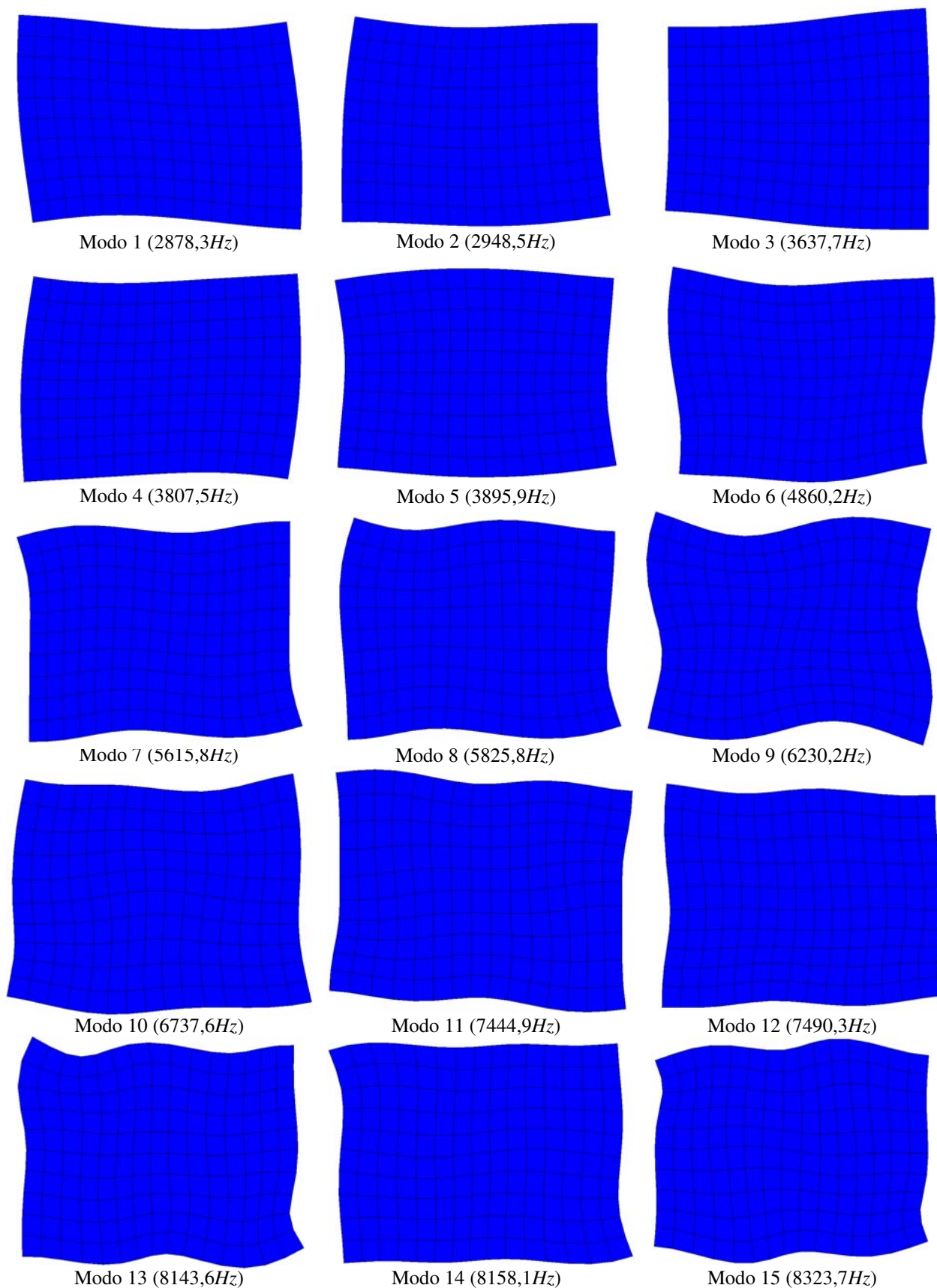


Figura 3.15. 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica III retangular de grafite/polímero.

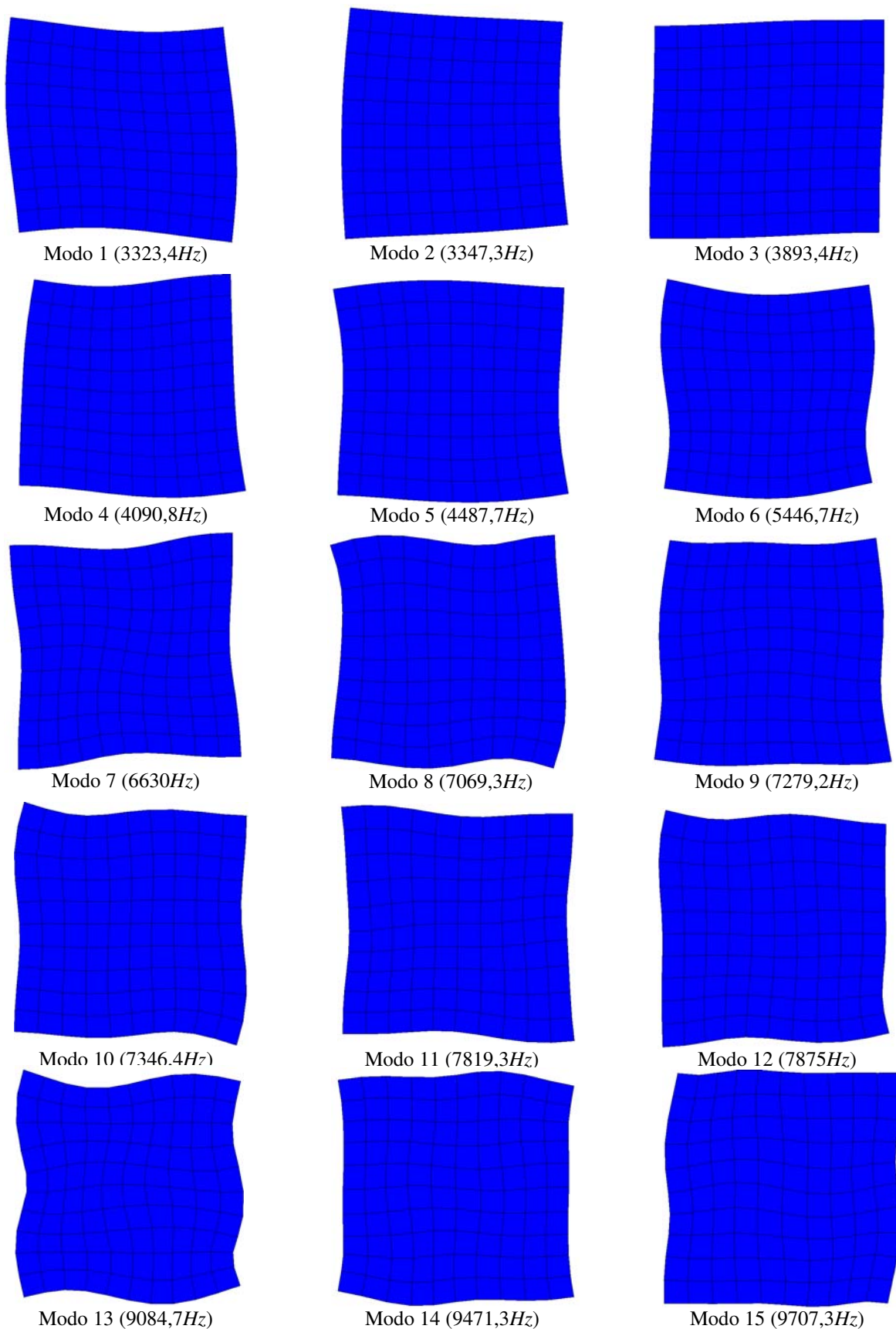


Figura 3.16. 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica III quadrada de grafite/polímero.

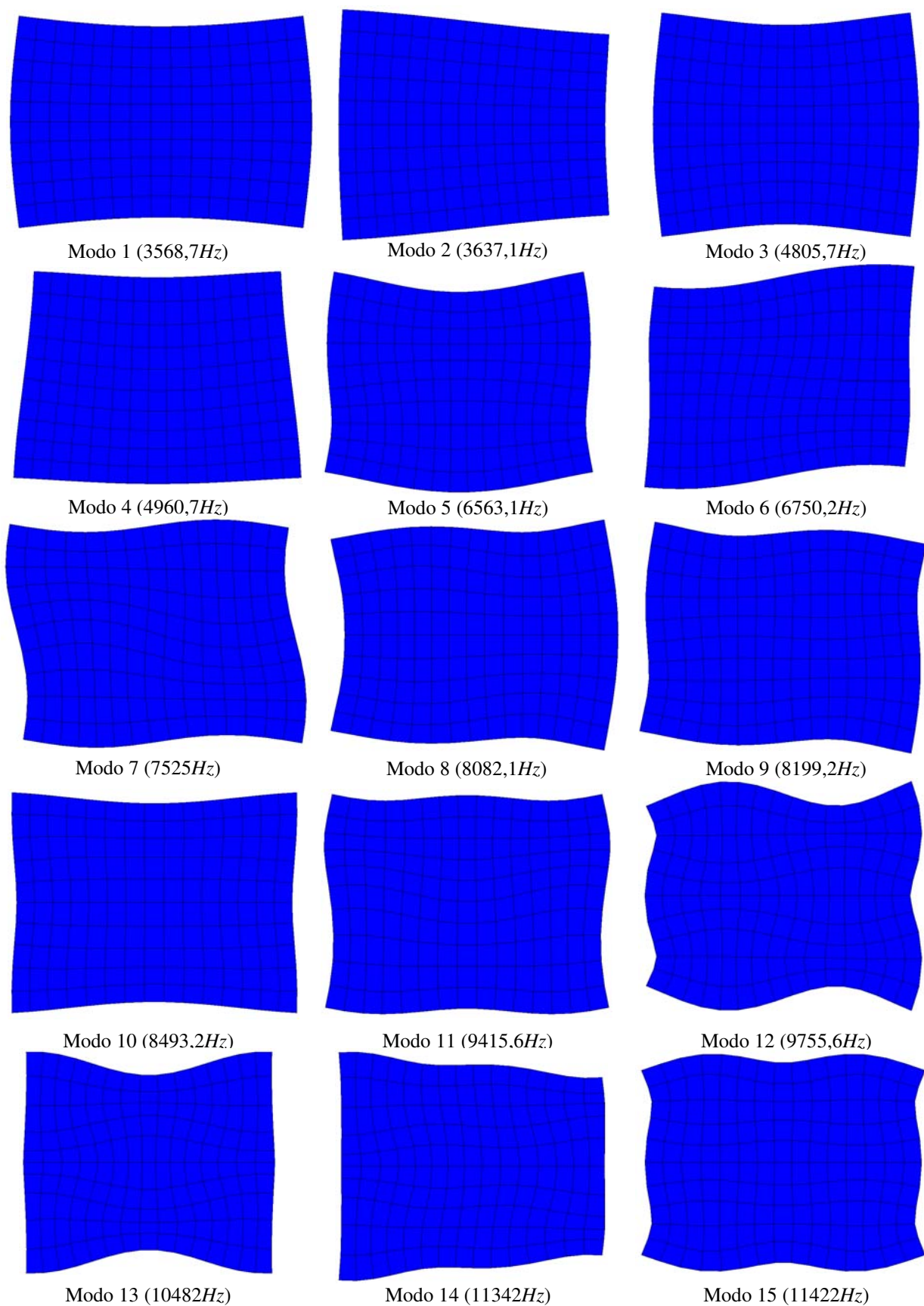


Figura 3.17. 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica VI retangular de grafite/polímero.

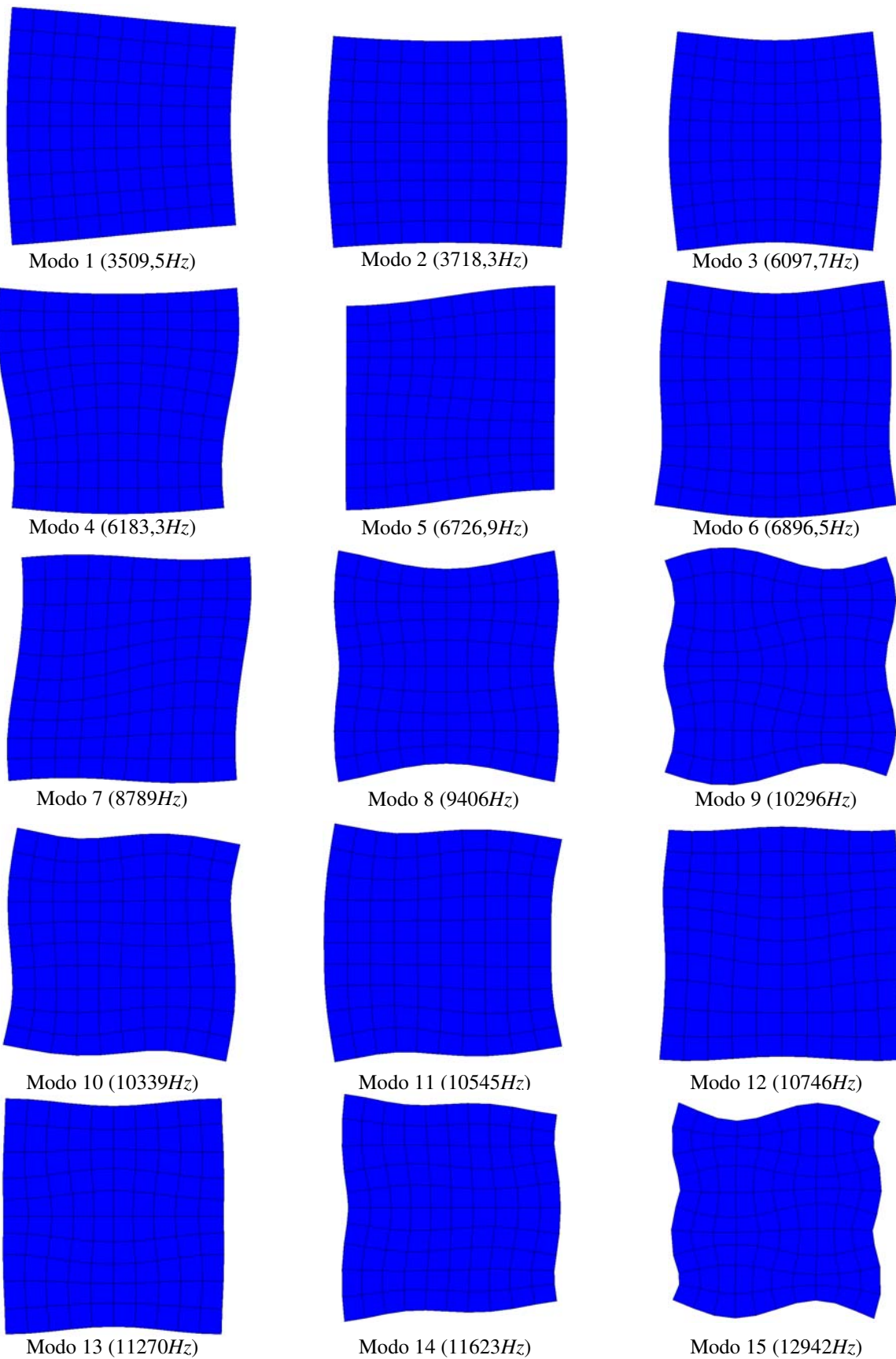


Figura 3.18. 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica VI quadrada de grafite/polímero.

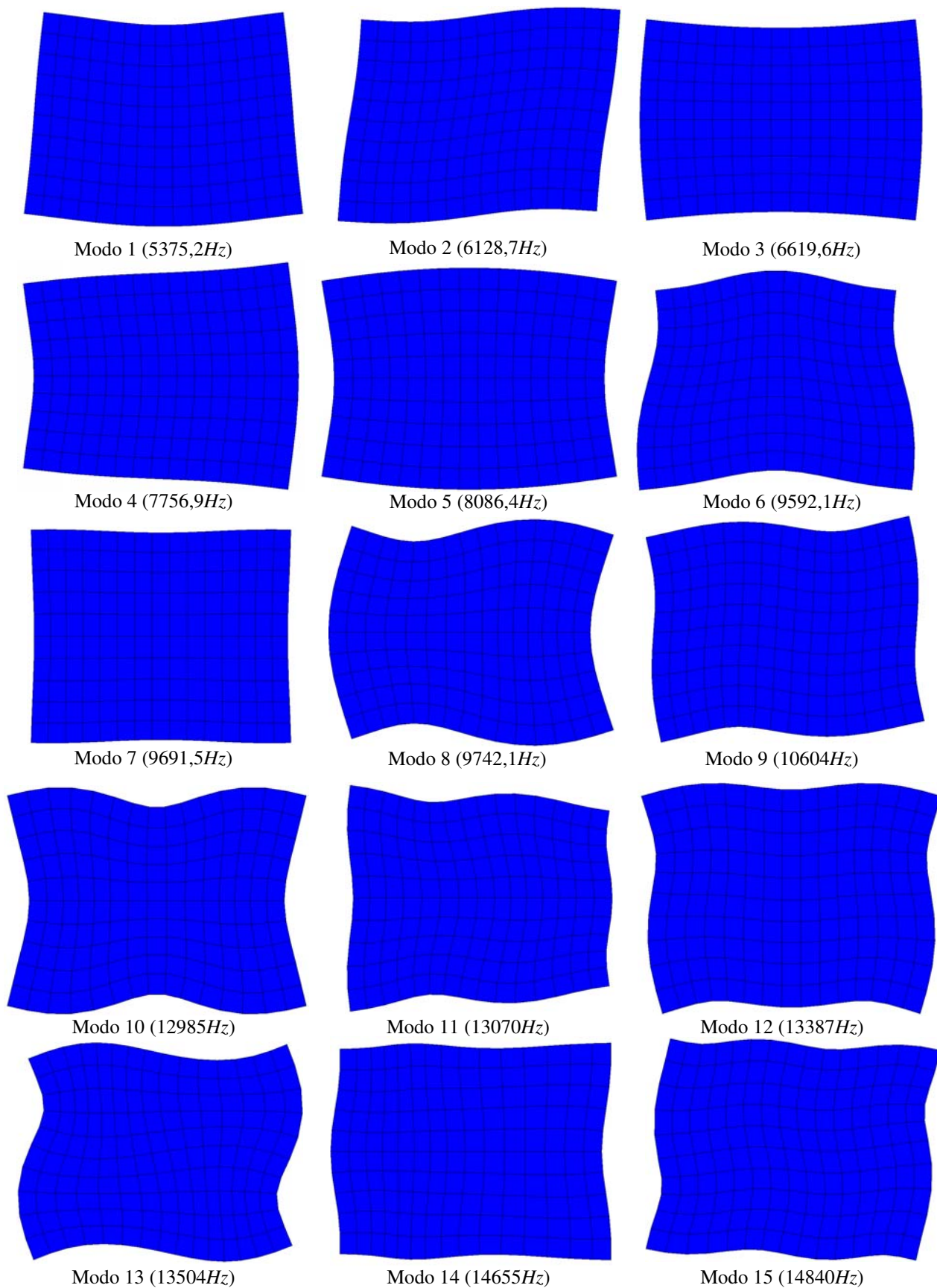


Figura 3.19. 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa quase-isotrópica retangular de grafite/polímero.

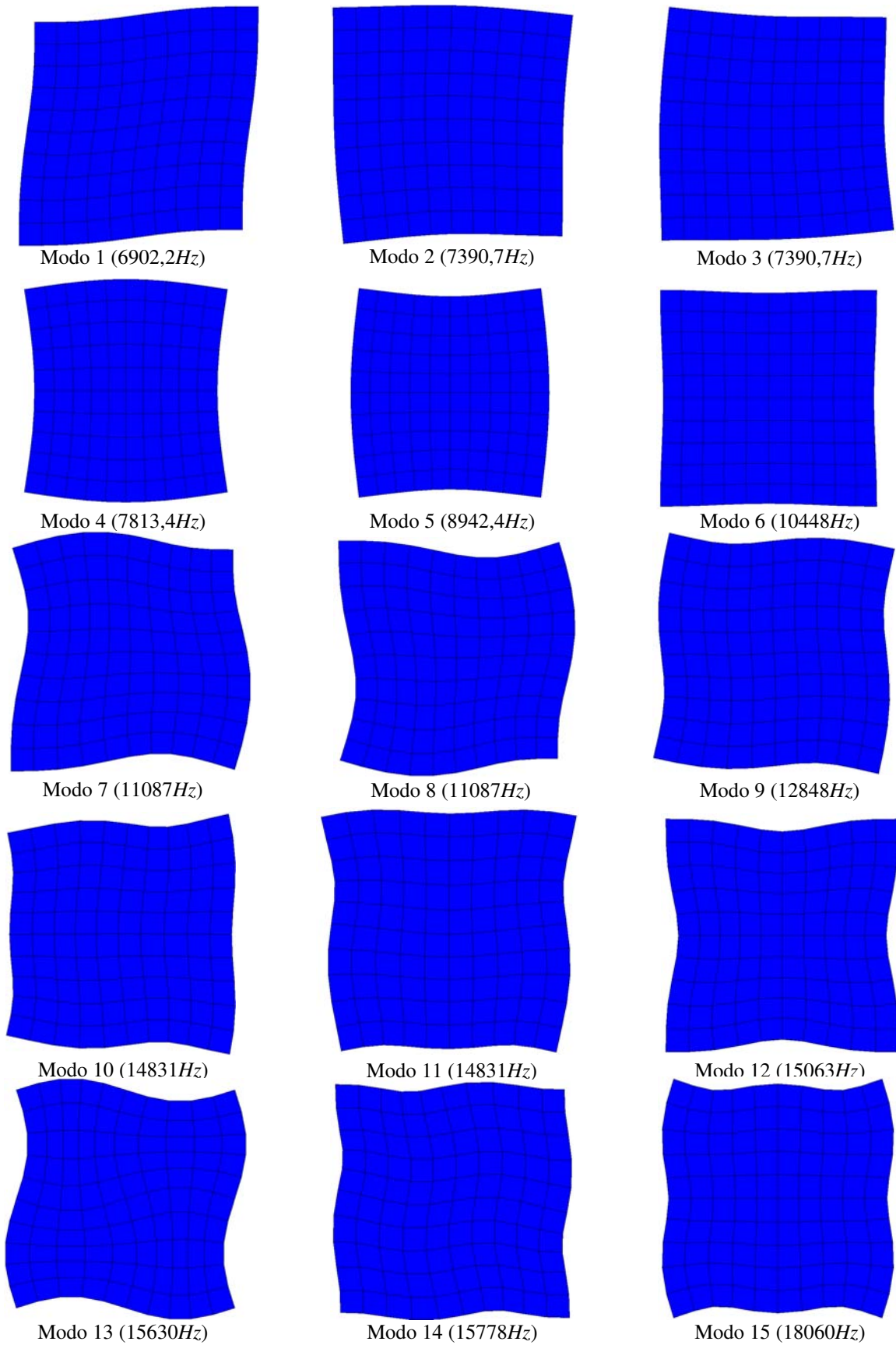


Figura 3.20. 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa quase-isotrópica quadrada de grafite/polímero.

Tabela 3.14: Matrizes de rigidez elástica de extensão e orientação das fibras dos laminados de grafite/polímero.

A_{ij} $10^8[N/m]$	Aniso $[90\ 0\ 0\ 45]_s$	Orto I $[90\ 0\ 90\ 0]_s$	Orto II $[0]_{4s}$	Orto III $[30]_{4s}$	Orto IV $[30\ -\ 30]_{2s}$	Quase-iso $[90\ 45\ 0\ -\ 45]_s$
A_{11}	2,7865	2,5186	4,6724	2,7840	2,7840	1,9776
A_{12}	0,3610	0,0905	0,0905	0,9020	0,9020	0,6315
A_{16}	0,2692	0	0	1,4012	0	0
A_{22}	1,7096	2,5186	0,3648	0,6301	0,6301	1,9776
A_{26}	0,2692	0	0	0,4641	0	0
A_{66}	0,4025	0,1320	0,1320	0,9436	0,9436	0,6730

Conforme pode ser visto na tabela 3.14, as constantes A_{12} e A_{66} são iguais nos dois laminados ortotrópicos I e II. Por sua vez, são iguais também à de um laminado com as mesmas características porém com as fibras orientadas unidirecionalmente à 90° . Laminados unidirecionais com as fibras à 0° e laminados com as fibras à 90° só diferem com relação ao valor de A_{11} e de A_{22} , que são invertidos, ou seja, A_{11} do laminado com as fibras à 0° é igual ao A_{22} do laminado com as fibras à 90° , e vice-versa. Para o laminado geralmente ortotrópico III e o laminado ortotrópico IV percebe-se que a única diferença são nos valores das constantes A_{16} e A_{26} , que são nulos no laminado IV e não nulos no III.

Placa Anisotrópica de carbono/polímero: $[90\ 0\ 0\ 45]_s$

A tabela 3.15 mostram os erros obtidos para algumas combinações entre alguns modos adequados das placas retangular e quadrada, e para os grupos I e II de funções ponderadoras, respectivamente. Assim como no primeiro caso de anisotropia analisado, as combinações entre os modos adequados foram todas combinações adequadas para ambos os grupos de funções ponderadoras e, portanto, excelentes resultados foram também obtidos.

Tabela 3.15: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa anisotrópica de grafite/polímero.

Placa retangular - grupo I, modos adequados: 1,4,5,7,8,11,12 e 15						
Combinações	Erros(%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
1-4-5-7	0,06	0,33	0,11	0,25	0,11	0,02
1-4-5	0,11	0,14	0,20	0,11	0,13	0,04
1-4-7	0,09	0,59	0,18	0,31	0,03	0,03
1-5-7	0,06	0,32	0,10	0,25	0,10	0,03
4-5-7	0,04	0,44	0,09	0,60	0,42	0,09
Placa quadrada - grupo I, modos adequados:1,4,5,7,8,12 e 15						
Combinações	Erros(%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
1-4-5-7	0,04	0,60	0,11	0,55	0,38	0,07
1-4-5	1,38	2,73	0,35	1,98	0,37	0,16
1-4-7	0,03	0,59	0,11	0,54	0,38	0,07
1-5-7	0,14	1,28	0,07	0,61	0,64	0,02
4-5-7	0,23	1,11	0,09	3,15	1,17	0,78
Placa retangular - grupo II, modos adequados: 2,3,6,9,10,13 e 14						
Combinações	Erros(%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
2-3-6-9	2,20	1,95	1,56	1,89	1,46	0,78
2-3-6	0,04	0,20	0,21	0,93	0,79	0,97
2-3-9	0,37	2,63	0,27	0,78	0,93	0,28
2-6-9	0,30	2,46	0,17	1,45	1,03	0,02
3-6-9	0,17	1,77	0,11	0,97	1,09	0,21
2-3	0,00	0,32	0,24	0,78	0,53	1,08
6-9	0,01	2,06	0,11	1,62	1,50	1,51
Placa quadrada - grupo II, modos adequados:2,3,6,9,10,13 e 14						
Combinações	Erros(%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
2-3-6-9	3,73	3,41	2,23	3,21	1,88	1,06
2-3-6	0,20	0,62	0,23	0,86	0,09	1,08
2-3-9	0,41	3,86	0,54	1,36	0,77	0,50
2-6-9	0,35	3,43	0,44	2,00	1,61	0,13
3-6-9	0,24	2,59	0,14	1,66	0,84	0,30
2-3	0,04	0,06	0,17	1,02	0,97	1,49
6-9	0,08	2,66	0,25	2,70	1,08	1,93

Placa Ortotrópica I de carbono/polímero: $[0 \ 90 \ 0 \ 90]_s$

Ao contrário das placas anisotrópicas, para este caso ortotrópico analisado, nem todas as combinações de modos adequados são combinações adequadas e capazes, portanto, de fornecerem bons resultados, como mostra a tabela 3.16. Deve-se ter cautela na correta escolha dos modos para que as combinações sejam adequadas e forneçam resultados satisfatórios.

Tabela 3.16: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica I de grafite/polímero grupo I.

Placa retangular - grupo I, modos adequados: 1,4,5,7,9,10, 13 e 15						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{16}	A_{26}
1-5-7-9	0,08	3,00	1,10	0,18	$-0,3 \times 10^4$	$-2,4 \times 10^4$
1-4-5	120,95	643,44	106,23	0,12	$0,1 \times 10^3$	$1,2 \times 10^3$
1-4-7	0,01	2,12	0,94	0,00	$-0,1 \times 10^4$	$1,7 \times 10^4$
1-5-7	0,61	239,47	106,13	0,18	-735,43	548,33
1-5-9	26,50	1084,60	61,20	0,20	$-1,4 \times 10^4$	$-0,9 \times 10^4$
1-7-9	0,08	3,00	1,10	0,00	$2,5 \times 10^3$	$-1,7 \times 10^3$
1-7-13	0,09	0,24	0,21	0,00	$2,6 \times 10^3$	$1,8 \times 10^3$
1-9-13	1,26	0,90	0,20	0,00	$2,4 \times 10^3$	$1,8 \times 10^3$
7-9-13	0,09	0,28	0,20	207,97	$3,2 \times 10^3$	$3,5 \times 10^3$
9-13-15	2,29	2,43	0,21	119,88	$1,8 \times 10^5$	$-0,2 \times 10^4$
Placa quadrada - grupo I: 1,5,8,9,10,14 e 15						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{16}	A_{26}
1-5-8-9	56,20	1569,70	56,20	0,10	$2,3 \times 10^3$	$-0,4 \times 10^3$
1-5-8-10	0,20	0,62	0,21	0,08	$8,0 \times 10^3$	$8,1 \times 10^3$
1-5-8	56,80	1587,40	56,80	0,10	789,52	926,05
1-5-9	56,80	1586,60	56,80	0,10	$4,2 \times 10^3$	$-2,5 \times 10^3$
1-8-9	51,90	1449,60	51,90	0,00	$-1,2 \times 10^3$	$2,8 \times 10^3$
1-8-14	3,46	89,88	3,46	0,01	$-4,4 \times 10^3$	$5,6 \times 10^3$
1-9-14	3,43	90,78	3,42	0,01	$-0,5 \times 10^3$	$1,7 \times 10^3$
5-8-9	51,90	1450,00	51,90	0,10	$6,1 \times 10^3$	$-2,4 \times 10^3$
8-9-14	3,00	91,00	0,30	84847,00	$2,3 \times 10^4$	$2,3 \times 10^4$
1-8-10	0,20	0,62	0,21	0,01	$0,1 \times 10^4$	$1,1 \times 10^4$
1-9-10	0,17	0,29	0,17	0,01	$4,6 \times 10^3$	$6,9 \times 10^3$
9-10-14	0,19	0,65	0,19	188,99	$2,8 \times 10^4$	$-0,9 \times 10^4$

As equações (3.104) - (3.118) mostram os valores das integrais do sistema (3.50), referentes aos 15 primeiros modos, calculados para esta placa retangular e grupo I de funções ponderadoras. Através dessas equações pode-se identificar os modos 1, 4, 5, 7, 9, 10, 13 e 15 como sendo os modos adequados.

Modo 1: placa ortotrópica I, retangular, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0000 & 1,5136 & 0 & -0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0000 & 1,5136 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & 0,0000 & 1,5136 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0000 & 1,5136 & -0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0001 \\ 2,0000 \\ 1,9961 \\ -0,0000 \end{Bmatrix} \quad (3.104)
 \end{aligned}$$

Modo 2: placa ortotrópica I, retangular, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0000 & -0,0002 & 0 & -0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0000 & -0,0002 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & -0,0000 & -0,0002 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0000 & -0,0002 & -0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0000 \\ -0,0002 \\ -0,0001 \\ -0,0001 \end{Bmatrix} \quad (3.105)
 \end{aligned}$$

Modo 3: placa ortotrópica I, rectangular, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0000 & -0,0000 & 0 & -0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0000 & -0,0000 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & 0,0000 & -0,0000 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0001 \\ -0,0000 \\ 0,0001 \\ 0,0001 \end{Bmatrix} \quad (3.106)
 \end{aligned}$$

Modo 4: placa ortotrópica I, rectangular, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0001 & -0,9961 & 0 & 0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 & -0,9961 & 0 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0,0001 & -0,9961 & 0 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0001 & -0,9961 & 0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0004 \\ -1,2947 \\ -1,3315 \\ -0,0001 \end{Bmatrix} \quad (3.107)
 \end{aligned}$$

Modo 5: placa ortotrópica I, rectangular, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0000 & -1,5492 & 0 & 0,0003 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0000 & -1,5492 & 0 & 0,0003 & 0 \\ 0 & 0,0000 & -1,5492 & 0 & 0,0003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0000 & -1,5492 & 0,0003 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0014 \\ -2,0872 \\ -2,0168 \\ -0,0002 \end{Bmatrix} \quad (3.108)$$

Modo 6: placa ortotrópica I, rectangular, grupo I

$$\begin{bmatrix} 0,0002 & -0,0000 & 0 & -0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0002 & -0,0000 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & 0,0002 & -0,0000 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0002 & -0,0000 & -0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0005 \\ 0,0003 \\ -0,0003 \\ 0,0005 \end{Bmatrix} \quad (3.109)$$

Modo 7: placa ortotrópica I, rectangular, grupo I

$$\begin{bmatrix} -1,1730 & 0,0000 & 0 & 0,0949 & 0 & 0 \\ 0 & -1,1730 & 0,0000 & 0 & 0,0949 & 0 \\ 0 & -1,1730 & 0,0000 & 0 & 0,0949 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,1730 & 0,0000 & 0,0949 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^8 \begin{Bmatrix} -2,9483 \\ 0,0001 \\ -0,0000 \\ 0,1334 \end{Bmatrix} \quad (3.110)$$

Modo 8: placa ortotrópica I, rectangular, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0000 & 0,0000 & 0 & 0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0000 & 0,0000 & 0 & 0,0000 & 0 \\ 0 & -0,0000 & 0,0000 & 0 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^8 \begin{Bmatrix} 0,0001 \\ -0,0002 \\ 0,0001 \\ -0,0000 \end{Bmatrix} \quad (3.111)
 \end{aligned}$$

Modo 9: placa ortotrópica I, rectangular, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0508 & -0,0002 & 0 & -0,0329 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0508 & -0,0002 & 0 & -0,0329 & 0 \\ 0 & -0,0508 & -0,0002 & 0 & -0,0329 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0508 & -0,0002 & -0,0329 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^8 \begin{Bmatrix} -0,1294 \\ 0,0002 \\ -0,0001 \\ -0,0866 \end{Bmatrix} \quad (3.112)
 \end{aligned}$$

Modo 10: placa ortotrópica I, rectangular, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0008 & -1,2352 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0008 & -1,2352 & 0 & 0,0001 & 0 \\ 0 & 0,0008 & -1,2352 & 0 & 0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0008 & -1,2352 & 0,0001 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0001 \\ -0,0115 \\ -0,0002 \\ -0,0018 \end{Bmatrix} \quad (3.113)$$

Modo 11: placa ortotrópica I, rectangular, grupo I

$$\begin{bmatrix} -0,0002 & -0,0001 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0002 & -0,0001 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & -0,0002 & -0,0001 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0002 & -0,0001 & -0,0001 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0069 \\ -0,0005 \\ -0,0002 \\ -0,0017 \end{Bmatrix} \quad (3.114)$$

Modo 12: placa ortotrópica I, rectangular, grupo I

$$\begin{bmatrix} 0,0001 & 0,0003 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0,0003 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0,0003 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0001 & 0,0003 & -0,0001 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0001 \\ -0,0115 \\ -0,0002 \\ -0,0018 \end{Bmatrix} \quad (3.115)$$

Modo 13: placa ortotrópica I, retangular, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0528 & -0,0000 & 0 & -1,5075 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0528 & -0,0000 & 0 & -1,5075 & 0 \\ 0 & -0,0528 & -0,0000 & 0 & -1,5075 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0528 & -0,0000 & -1,5075 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^8 \begin{Bmatrix} -0,2689 \\ -0,0000 \\ 0,0001 \\ -3,8095 \end{Bmatrix} \quad (3.116)
 \end{aligned}$$

Modo 14: placa ortotrópica I, retangular, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0000 & -0,0000 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0000 & -0,0000 & 0 & 0,0001 & 0 \\ 0 & -0,0000 & -0,0000 & 0 & 0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0000 & -0,0000 & 0,0001 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^8 \begin{Bmatrix} -0,0001 \\ -0,0000 \\ 0,0002 \\ -0,0003 \end{Bmatrix} \quad (3.117)
 \end{aligned}$$

Modo 15: placa ortotrópica I, retangular, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0474 & 0,0002 & 0 & -0,0568 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0474 & 0,0002 & 0 & -0,0568 & 0 \\ 0 & -0,0474 & 0,0002 & 0 & -0,0568 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0474 & 0,0002 & -0,0568 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= 10^8 \begin{Bmatrix} -0,1321 \\ 0,0001 \\ 0,0002 \\ -0,1500 \end{Bmatrix} \quad (3.118)$$

Comparando estes sistemas (3.104) - (3.118) obtidos com os obtidos para as placas anisotrópicas, nota-se que as matrizes são mais vazias, apresentando mais termos nulos ou próximos de zero. De uma maneira geral, pode-se notar que estes modos dão origem a sistemas de equações (3.50) de 2 tipos:

tipo 1

$$\begin{aligned} I_1 A_{16} &= 0 \\ I_1 A_{66} &= I_2 \\ I_1 A_{66} &= I_3 \\ I_1 A_{26} &= 0 \end{aligned} \quad (3.119)$$

e

tipo 2

$$\begin{aligned} I_1 A_{11} + I_2 A_{12} &= I_3 \\ I_1 A_{16} + I_2 A_{26} &= 0 \\ I_1 A_{16} + I_2 A_{26} &= 0 \\ I_1 A_{12} + I_2 A_{22} &= I_4 \end{aligned} \quad (3.120)$$

onde I_1 , I_2 , I_3 e I_4 são os valores das integrais podendo ser positivos e negativos (dependendo da deformação com relação ao sentido do eixo de referência), de forma que, no tipo 1, as integrais I_1 , I_2 e I_3 possuem o mesmo sinal (negativo ou positivo) e no tipo 2, I_1 e I_2 possuem sinais contrários (se I_1 for positivo, I_2 será negativo e vice-versa) e, I_3 e I_4 também possuem sinais contrários sendo o da integral I_3 o mesmo da integral I_1 , e o da integral I_4 o mesmo da I_2 . De acordo com esta classificação, os modos adequados que resultam em

sistemas do tipo 1 para esta placa ortotrópica retangular são os modos 1, 4, 5 e 10. Nestes, somente duas linhas (ou duas equações) do sistema contribuem no cálculo de apenas uma constante, A_{66} . Portanto, são modos que quando combinados entre si não serão combinações adequadas. Por questões puramente matemáticas, estes modos devem então estar associados à modos adequados que resultam sistemas do tipo 2, que aqui são os modos 7, 9, 13 e 15, que, por sua vez, apresentam mais termos diferentes de zero e que contribuem no cálculo de todas as constantes, exceto para a constante A_{66} . As combinações entre sistemas de equações do tipo 1 e do tipo 2 em que este último esteja em maior número como, por exemplo, as combinações 1-5-7-9, 1-7-9 e 1-9-13 mostradas na tabela 3.16, são combinações adequadas. As combinações do tipo 1-4-5, 1-5-7, 7-9-13, 1-5-9 e assim por diante, devem ser, portanto, evitadas neste tipo de placa e grupo de funções ponderadoras. Os resultados obtidos para as combinações adequadas foram muito satisfatórios.

Modo 1: placa ortotrópica I, quadrada, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0000 & 1,5066 & 0 & 0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0000 & 1,5066 & 0 & 0,0000 & 0 \\ 0 & -0,0000 & 1,5066 & 0 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0000 & 1,5066 & 0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0000 \\ 1,9885 \\ 1,9884 \\ -0,0002 \end{Bmatrix} \tag{3.121}
 \end{aligned}$$

Modo 4: placa ortotrópica I, quadrada, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0000 & 1,5066 & 0 & 0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0000 & 1,5066 & 0 & 0,0000 & 0 \\ 0 & -0,0000 & 1,5066 & 0 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0000 & 1,5066 & 0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^8 \begin{Bmatrix} -0,0000 \\ 0,1988 \\ 0,1988 \\ -0,0000 \end{Bmatrix} \quad (3.122)
 \end{aligned}$$

Modo 5: placa ortotrópica I, quadrada, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0001 & -1,8472 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0001 & -1,8472 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & -0,0001 & -1,8472 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0001 & -1,8472 & -0,0001 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^8 \begin{Bmatrix} 0,0002 \\ -0,2442 \\ -0,2441 \\ -0,0001 \end{Bmatrix} \quad (3.123)
 \end{aligned}$$

Modo 8: placa ortotrópica I, quadrada, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,8470 & -0,0000 & 0 & 0,8470 & 0 & 0 \\ 0 & -0,8470 & -0,0000 & 0 & 0,8470 & 0 \\ 0 & -0,8470 & -0,0000 & 0 & 0,8470 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,8470 & -0,0000 & 0,8470 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= 10^8 \begin{Bmatrix} -2,0616 \\ 0,0000 \\ -0,0001 \\ 2,0616 \end{Bmatrix} \quad (3.124)$$

Modo 9: placa ortotrópica I, quadrada, grupo I

$$\begin{bmatrix} -0,4298 & 0,0000 & 0 & 0,4298 & 0 & 0 \\ 0 & -0,4298 & 0,0000 & 0 & 0,4298 & 0 \\ 0 & -0,4298 & 0,0000 & 0 & 0,4298 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,4298 & 0,0000 & 0,4298 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^8 \begin{Bmatrix} -1,0454 \\ 0,0004 \\ -0,0001 \\ 1,0454 \end{Bmatrix} \quad (3.125)$$

Modo 10: placa ortotrópica I, quadrada, grupo I

$$\begin{bmatrix} -0,9342 & 0,0000 & 0 & -0,9341 & 0 & 0 \\ 0 & -0,9342 & 0,0000 & 0 & -0,9341 & 0 \\ 0 & -0,9342 & 0,0000 & 0 & -0,9341 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,9342 & 0,0000 & -0,9341 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^8 \begin{Bmatrix} -2,4416 \\ 0,0002 \\ 0,0002 \\ -2,4416 \end{Bmatrix} \quad (3.126)$$

Modo 14: placa ortotrópica I, quadrada, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0589 & -0,0002 & 0 & -0,0591 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0589 & -0,0002 & 0 & -0,0591 & 0 \\ 0 & -0,0589 & -0,0002 & 0 & -0,0591 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0589 & -0,0002 & -0,0591 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^8 \begin{Bmatrix} -0,1636 \\ 0,0005 \\ -0,0004 \\ -0,1643 \end{Bmatrix} \quad (3.127)
 \end{aligned}$$

Modo 15: placa ortotrópica I, quadrada, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0000 & 1,9142 & 0 & -0,0006 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0000 & 1,9142 & 0 & -0,0006 & 0 \\ 0 & -0,0000 & 1,9142 & 0 & -0,0006 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0000 & 1,9142 & -0,0006 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^8 \begin{Bmatrix} -0,0025 \\ 0,2551 \\ 0,2579 \\ 0,0000 \end{Bmatrix} \quad (3.128)
 \end{aligned}$$

As equações (3.121) - (3.128) mostram os valores das integrais do sistema de equações (3.50) calculados para os 15 primeiros modos adequados (1, 5, 8, 9, 10, 14 e 15) da placa ortotrópica I quadrada do grupo I de funções ponderadoras. Nessas equações, percebe-se que os sistemas (equação (3.50)) estão divididos em 3 tipos, sendo os 2 tipos anteriores, equações (3.119) e (3.120), e mais um terceiro tipo semelhante ao tipo 2, porém com todas as integrais I_1 , I_2 , I_3 e I_4 apresentando o mesmo sinal (positivo ou negativo). Para esta placa, portanto,

têm-se os modos 1, 5 e 15 representando sistemas do tipo 1, os modos 8 e 9 do tipo 2, e os modos 10 e 14 do tipo 3. Por razões de simetrias devido à geometria e este tipo de ortotropia, percebe-se que, para os modos que geram sistemas do tipo 2 e 3, as integrais I_1 e I_2 , e I_3 e I_4 , são iguais ou apresentam valores muito próximos (pequenas diferenças que não interferem de forma expressiva nos resultados). A tabela 3.16 mostra os erros obtidos para algumas combinações entre estes modos adequados. As combinações com apenas modos do tipo 2 e/ou 3, ou que contenha somente as do tipo 2 ou 3 em maior número, não contribuem na identificação precisa da constante A_{66} . Por outro lado, as combinações que contêm apenas modos que dão origem a sistemas do tipo 1, ou àquelas em que este tipo de modo com este sistema esteja em maior número, só identificam, satisfatoriamente, a constante elástica A_{66} . Combinações adequadas são, portanto, obtidas somente quando no mínimo 3 modos que dão sistemas dos 3 tipos estão presentes, de forma que no mínimo um dos modos seja o que origina sistema do tipo 1, um do tipo 2 e um do tipo 3. Os resultados para esta placa quadrada, assim como para a placa retangular, foram muito precisos para as combinações adequadas.

As tabelas 3.17 e 3.18 mostram os resultados obtidos para várias combinações de modos adequados para a placa ortotrópica I, retangular e quadrada, respectivamente, para o grupo II de funções ponderadoras.

Tabela 3.17: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica I retangular de grafite/polímero para o grupo II.

Placa retangular - grupo II, modos adequados: 2,3,6,8,11 e 14						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{16}	A_{26}
2-3-6-8-11-14	0,14	3,80	0,12	1,22	$-2,7 \times 10^4$	$0,8 \times 10^4$
2-3-6-8	0,11	2,90	0,24	0,74	$-2,5 \times 10^4$	$0,6 \times 10^4$
2-3-6-11	0,42	29,16	0,51	2,26	$-3,4 \times 10^4$	$5,9 \times 10^2$
2-3-6-14	0,01	4,84	0,12	1,09	$-2,9 \times 10^4$	$0,6 \times 10^4$
3-6-8-11	0,17	1,58	0,31	1,67	$-1,4 \times 10^4$	$0,5 \times 10^4$
3-6-8-14	0,09	5,26	0,13	0,57	$-7,4 \times 10^3$	$6,1 \times 10^3$
6-8-11-14	0,15	4,15	0,11	1,38	$-3,0 \times 10^4$	$1,0 \times 10^4$
2-3-6	0,11	24,38	0,31	1,39	$-3,1 \times 10^4$	$6,1 \times 10^2$
2-3-8	0,09	4,93	0,49	0,40	$-7,1 \times 10^3$	$4,5 \times 10^3$
2-3-11	0,64	33,46	0,48	2,16	$-1,4 \times 10^3$	$0,3 \times 10^3$
2-3-14	0,55	6,40	0,13	0,66	$-2,7 \times 10^4$	$5,1 \times 10^4$
2-6-8	0,33	157,41	138,59	0,68	$-3,1 \times 10^4$	$6,1 \times 10^2$
2-6-11	0,67	28,00	0,61	2,93	$4,5 \times 10^4$	$0,2 \times 10^4$
2-6-14	0,02	5,24	0,12	1,01	$-3,9 \times 10^4$	$0,8 \times 10^4$
2-8-11	0,17	0,29	0,23	1,46	$-1,5 \times 10^4$	$0,6 \times 10^4$
2-8-14	0,04	5,90	0,16	0,16	$-6,0 \times 10^4$	$6,0 \times 10^4$
2-11-14	0,36	3,41	0,10	1,85	$-1,4 \times 10^4$	$0,6 \times 10^4$
3-6-8	0,10	3,29	0,31	0,66	$-3,6 \times 10^4$	$0,9 \times 10^4$
3-6-11	0,54	29,94	0,70	2,90	$-5,0 \times 10^4$	$-5,0 \times 10^2$
3-8-11	0,20	0,29	0,32	1,69	$-2,0 \times 10^4$	$0,8 \times 10^4$
3-8-14	0,04	5,75	0,15	0,08	$-1,4 \times 10^4$	$0,9 \times 10^4$
3-11-14	362,53	549,87	0,95	1,86	$7,7 \times 10^4$	$0,1 \times 10^4$
6-8-11	0,18	0,89	0,34	1,91	$-4,8 \times 10^4$	$1,0 \times 10^4$
6-8-14	0,06	5,48	0,15	0,08	$-4,9 \times 10^4$	$1,8 \times 10^4$
8-11-14	0,47	2,74	0,09	2,64	$-2,5 \times 10^4$	$1,2 \times 10^4$
2-3	0,44	34,33	0,14	0,81	$-2,0 \times 10^3$	$2,9 \times 10^3$
2-6	0,17	20,78	1,05	1,57	$4,6 \times 10^4$	$-0,3 \times 10^3$
2-8	0,37	223,44	198,89	0,13	$-5,1 \times 10^4$	$7,6 \times 10^4$
2-11	1,38	32,85	0,65	3,08	$-1,5 \times 10^4$	$0,2 \times 10^4$
3-6	0,25	25,49	0,67	1,84	$-5,3 \times 10^4$	$-7,6 \times 10$
3-8	0,02	5,75	0,91	0,13	$-1,4 \times 10^4$	$8,4 \times 10^3$
6-11	1,10	209,19	1,08	4,89	$-8,1 \times 10^4$	$-0,9 \times 10^4$
8-11	0,25	0,42	0,40	2,17	$-2,6 \times 10^4$	$1,1 \times 10^4$
3-11	142,63	261,82	1,15	2,83	$-6,7 \times 10^4$	$0,3 \times 10^4$

Tabela 3.18: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica I quadrada de grafite/polímero para o grupo II.

Placa quadrada - grupo II, modos adequados:2,3,6,7,11 e 12						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{16}	A_{26}
2-3-6-7-11-12	0,09	5,81	0,05	1,89	$2,7 \times 10^4$	$-1,6 \times 10^4$
2-3-6-7	0,54	39,47	0,29	3,15	$3,0 \times 10^4$	$-1,6 \times 10^4$
2-3-6-11	0,10	5,09	0,06	1,92	$-4,4 \times 10^4$	$-8,7 \times 10^4$
2-3-6-12	0,44	5,78	0,06	1,80	$-4,9 \times 10^4$	$-6,0 \times 10^4$
2-6-11-12	0,10	7,60	0,05	1,59	$-3,8 \times 10^4$	$-8,6 \times 10^4$
3-6-7-12	0,38	2,33	0,08	2,92	$6,4 \times 10^4$	$-1,7 \times 10^4$
2-3-6	0,13	41,58	0,01	2,38	$1,4 \times 10^4$	$-2,6 \times 10^4$
2-3-7	0,40	38,76	0,38	2,50	$1,5 \times 10^4$	$-0,1 \times 10^4$
2-3-11	0,05	8,49	0,18	0,95	$-3,6 \times 10^3$	$7,5 \times 10^3$
2-3-12	0,29	8,47	0,00	0,94	$-3,6 \times 10^3$	$-3,9 \times 10^3$
2-6-7	0,40	38,76	0,38	2,50	$2,0 \times 10^4$	$-5,3 \times 10^4$
2-6-11	0,13	5,47	0,11	2,51	$-1,0 \times 10^5$	$-1,8 \times 10^5$
2-6-12	1,99	9,49	0,10	2,18	$-3,4 \times 10^5$	$-1,7 \times 10^5$
2-7-11	0,08	6,34	0,19	1,65	$4,4 \times 10^4$	$3,4 \times 10^4$
2-7-12	0,22	5,37	0,04	1,95	$1,1 \times 10^5$	$0,5 \times 10^5$
2-11-12	0,01	9,08	0,05	0,02	$-0,1 \times 10^4$	$-1,0 \times 10^4$
3-6-7	0,82	38,80	0,44	4,12	$7,0 \times 10^4$	$0,9 \times 10^4$
3-6-11	0,11	5,57	0,03	2,05	$-2,7 \times 10^4$	$-8,9 \times 10^4$
3-6-12	0,27	5,94	0,06	1,97	$-0,2 \times 10^4$	$-4,6 \times 10^4$
3-7-11	0,11	9,14	1,48	1,78	$1,4 \times 10^5$	$3,0 \times 10^5$
3-7-12	0,33	5,40	0,06	2,38	$1,8 \times 10^5$	$1,2 \times 10^5$
3-11-12	0,00	9,08	0,07	0,04	$1,3 \times 10^4$	$0,5 \times 10^4$
6-7-11	0,14	3,23	0,19	3,26	$4,7 \times 10^2$	$-1,1 \times 10^5$
6-7-12	0,48	2,59	0,11	3,57	$1,8 \times 10^5$	$0,3 \times 10^5$
6-11-12	0,09	7,86	0,04	1,52	$-1,4 \times 10^4$	$-9,5 \times 10^4$
7-11-12	0,05	7,97	0,01	0,97	$9,4 \times 10^4$	$3,4 \times 10^4$
2-3	0,47	47,75	0,58	1,14	$-7,9 \times 10^3$	$2,8 \times 10^3$
6-7	1,40	39,32	1,13	6,91	$8,2 \times 10^4$	$-3,7 \times 10^4$
11-12	0,19	9,17	0,26	3,02	$1,8 \times 10^4$	$-1,0 \times 10^4$
2-6	1,17	34,40	0,21	3,16	$-1,5 \times 10^5$	$-0,9 \times 10^5$
2-7	0,60	38,66	0,89	3,35	$0,7 \times 10^4$	$-4,1 \times 10^4$
2-11	0,02	9,04	0,18	0,56	$-1,3 \times 10^4$	$-1,9 \times 10^4$
3-6	0,64	41,81	0,18	3,25	$6,4 \times 10^4$	$-1,3 \times 10^4$
3-7	0,60	33,03	0,30	3,24	$0,6 \times 10^5$	$1,1 \times 10^5$
3-11	0,04	9,08	0,06	0,57	$1,1 \times 10^4$	$3,6 \times 10^4$
3-12	0,33	9,08	0,04	0,44	$2,4 \times 10^4$	$-4,9 \times 10$
6-7	1,40	39,32	1,13	6,91	$8,2 \times 10^4$	$-3,7 \times 10^4$
6-11	0,18	5,63	0,30	3,46	$-1,1 \times 10^5$	$-2,7 \times 10^4$

As equações (3.129) - (3.134) mostram os valores das integrais da equação (3.71) para os modos adequados dentre os 15 primeiros modos, que são os modos 2, 3, 6, 8, 11 e 14.

Modo 2: placa ortotrópica I, retangular, grupo II

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0000 & -0,2181 & 0 & 0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0143 & -0,0000 & 0 & -0,0006 & 0 \\ 0,0143 & -0,0000 & -0,2181 & -0,0006 & 0,0000 & 0 \\ 0 & -0,0000 & -0,2181 & 0 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0143 & -0,0000 & -0,0006 \\ 0 & 0,0143 & -0,0000 & -0,0000 & -0,2188 & 0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^6 \begin{Bmatrix} -0,0001 \\ -0,0000 \\ 0,6657 \\ -2,8941 \\ -0,0027 \\ 0,0000 \end{Bmatrix} \quad (3.129)
 \end{aligned}$$

Modo 3: placa ortotrópica I, retangular, grupo II

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0009 & -0,0000 & 0 & 0,0157 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0000 & -0,2361 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0,0000 & -0,2369 & -0,0000 & -0,0000 & 0,0157 & 0 \\ 0 & -0,0009 & -0,0000 & 0 & 0,0157 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0000 & -0,2361 & -0,0000 \\ 0 & 0,0000 & -0,2361 & -0,0009 & -0,0000 & 0,0157 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^6 \begin{Bmatrix} -0,0086 \\ -3,1496 \\ 0,0000 \\ -0,0003 \\ 0,0001 \\ 0,7940 \end{Bmatrix} \quad (3.130)
 \end{aligned}$$

Modo 6: placa ortotrópica I, rectangular, grupo II

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0001 & -0,1732 & 0 & 0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0324 & -0,0001 & 0 & -0,0015 & 0 \\ 0,0324 & 0,0000 & -0,1732 & -0,0015 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0,0001 & -0,1732 & 0 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0324 & -0,0001 & -0,0015 \\ 0 & 0,0324 & -0,0001 & 0,0001 & -0,1747 & 0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^6 \begin{Bmatrix} -0,0015 \\ -0,0025 \\ 5,8476 \\ -2,3603 \\ -0,0260 \\ 0,0009 \end{Bmatrix} \quad (3.131)
 \end{aligned}$$

Modo 8: placa ortotrópica I, rectangular, grupo II

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0000 & 0,2082 & 0 & -0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1126 & 0,0001 & 0 & -0,0044 & 0 \\ 0,1126 & 0,0000 & 0,2082 & -0,0044 & -0,0000 & 0 \\ 0 & -0,0000 & 0,2082 & 0 & -0,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1126 & 0,0001 & -0,0044 \\ 0 & 0,1126 & 0,0001 & -0,0000 & 0,2038 & -0,0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0000 \\ -0,0000 \\ 3,1049 \\ 0,2699 \\ -0,0155 \\ -0,0001 \end{Bmatrix} \quad (3.132)
 \end{aligned}$$

Modo 11: placa ortotrópica I, retangular, grupo II

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,0026 & -0,0000 & 0 & -0,0442 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0000 & 0,2016 & 0 & -0,0000 & 0 \\ -0,0000 & 0,2041 & -0,0000 & -0,0000 & -0,0442 & 0 \\ 0 & 0,0026 & -0,0000 & 0 & -0,0442 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0000 & 0,2016 & -0,0000 \\ 0 & -0,0000 & 0,2016 & 0,0026 & -0,0000 & -0,0442 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0115 \\ 0,2824 \\ -0,0002 \\ -0,0000 \\ -0,0002 \\ -0,8430 \end{Bmatrix} \quad (3.133)
 \end{aligned}$$

Modo 14: placa ortotrópica I, retangular, grupo II

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0101 & 0,0000 & 0 & 0,1869 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0000 & 0,1316 & 0 & 0,0000 & 0 \\ -0,0000 & 0,1215 & 0,0000 & 0,0000 & 0,1869 & 0 \\ 0 & -0,0101 & 0,0000 & 0 & 0,1869 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0000 & 0,1316 & 0,0000 \\ 0 & -0,0000 & 0,1316 & -0,0101 & 0,0000 & 0,1869 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0950 \\ 0,1693 \\ -0,0001 \\ -0,0000 \\ -0,0002 \\ 4,8793 \end{Bmatrix} \quad (3.134)
 \end{aligned}$$

Para obter bons resultados, as combinações devem estar associadas à todas as constantes elásticas. De acordo com as equações (3.129) - (3.134), é possível perceber que os modos

para este grupo de funções ponderadoras, dão também origem ao sistema de equações (3.71) de 2 tipos:

tipo 1:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & I_4 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & I_1 & 0 & I_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_5 \\ I_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_7 \end{Bmatrix}, \quad (3.135)$$

e,

tipo 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_3 & 0 \\ I_1 & 0 & I_2 & I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_1 & 0 & I_3 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.136)$$

onde I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 , I_6 e I_7 são as integrais calculadas para cada modo podendo assumir valores negativos e positivos dependendo da direção de deformação de cada um. Como pode ser visto, nos sistemas dos dois tipos, todas as constantes elásticas estão envolvidas e, portanto, as combinações adequadas podem ser formadas por apenas um tipo desses sistemas ou por combinações entre eles.

Para a placa quadrada, os modos adequados identificados são os modos 2, 3, 6, 7, 11 e 12. Os sistemas de equações (3.71) para estes modos são completos, com as matrizes cheias, embora os valores dos termos adicionais, que são nulos na placa retangular, sejam muito

baixos nesta placa quadrada. Observa-se também que para cada modo adequado existe um idêntico rotacionado de 90° , que são os modos 2 e 3, 6 e 7, e 11 e 12, como pode ser visto pelas equações (3.137) e (3.138) que exemplificam os modos 2 e 3.

Modo 2: placa ortotrópica I, quadrada, grupo II

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0007 & 0,0581 & 0 & 0,0128 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0039 & -0,1927 & 0 & 0,0002 & 0 \\ -0,0039 & -0,1934 & 0,0581 & 0,0002 & 0,0128 & 0 \\ 0 & -0,0007 & 0,0581 & 0 & 0,0128 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0039 & -0,1927 & 0,0002 \\ 0 & -0,0039 & -0,1927 & -0,0007 & 0,0583 & 0,0128 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^6 \begin{Bmatrix} -0,0040 \\ -2,5725 \\ -0,1890 \\ 0,7751 \\ 0,0010 \\ 0,6309 \end{Bmatrix} \quad (3.137)
 \end{aligned}$$

Modo 3: placa ortotrópica I, quadrada, grupo II

$$\begin{bmatrix} 0,0002 & 0,1927 & 0 & -0,0039 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0128 & 0,0580 & 0 & 0,0007 & 0 \\ -0,0128 & 0,0582 & 0,1927 & 0,0007 & -0,0039 & 0 \\ 0 & 0,0002 & 0,1927 & 0 & -0,0039 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0128 & 0,0580 & 0,0007 \\ 0 & -0,0128 & 0,0580 & 0,0002 & 0,1934 & -0,0039 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^6 \left\{ \begin{array}{c} 0,0014 \\ 0,7753 \\ -0,6311 \\ 2,5724 \\ 0,0041 \\ -0,1905 \end{array} \right\} \quad (3.138)$$

A contribuição numérica de cada modo ponderado no cálculo de cada integral do lado esquerdo e direito destas equações dos sistemas é o que determina a precisão dos resultados. Esta contribuição depende do grau de deformação de cada modo em cada direção que, por sua vez, está relacionado com a geometria e com as características elásticas (anisotropia, ortotropia e isotropia) do material. Desde que escolhidos corretamente, dois modos são suficientes para identificar todas as constantes corretamente para este grupo II de funções ponderadoras, desde que existam dois modos que associados contribuam na identificação de todas as constantes.

A análise por meio dos valores destas integrais para uma correta escolha dos modos para as combinações não é tão nítida como ocorre para o caso das placas ortotrópicas no grupo I. De uma maneira geral, por se tratar de uma solução simultânea de equações onde há contribuições diferentes de cada modo na identificação de cada constante, é muito difícil, visualmente, identificar as melhores combinações para cada placa com suas características particulares.

De acordo com as tabelas 3.17 e 3.18 percebe-se que, de uma maneira geral, tanto para a placa retangular como para a placa quadrada, as constantes foram identificadas precisamente para a grande maioria das combinações, exceto somente para a constante elástica A_{12} . Em muitas combinações esta constante apresentou um erro menor que 10%. Mas quanto maior o número de modos utilizados, maior o número de contribuições, maior o número de equações e, conseqüentemente, mais condições as constantes elásticas devem atender para ser solução

de todas essas equações simultaneamente. A comparação de vários resultados com o uso de combinações com um número maior de modos pode, portanto, ser uma forma de aumentar a confiabilidade dos resultados nestes tipos de laminados.

Placa Ortotrópica II de grafite/polímero, fibras unidirecionais à 0° : $[0]_{4s}$

A tabela 3.19 mostra os resultados para algumas combinações de modos adequados da placa ortotrópica II de grafite/polímero, retangular e quadrada, respectivamente, para o grupo I de funções ponderadoras, cujas fibras estão orientadas unidirecionalmente com um ângulo de 0° com relação ao eixo x da placa.

Tabela 3.19: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica II retangular ($0,450 \times 0,350 \times 0,003 \text{ m}$) de grafite/polímero para o grupo I.

Placa retangular - grupo I, modos adequados:1,4,7,8 e 13						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{16}	A_{26}
1-4-7-8-13	103,11	115,65	0,42	0,20	$-2,7 \times 10^3$	$0,5 \times 10^3$
1-4-7	112,32	125,96	0,47	0,10	86,25	-145,20
1-4-12	102,02	114,43	0,41	0,01	481,18	151,58
1-7-8	113,27	179,99	166,91	0,25	$-1,7 \times 10^3$	$-0,4 \times 10^3$
1-7-12	112,43	148,38	4,17	0,10	$0,2 \times 10^3$	$-1,3 \times 10^3$
4-7-8	102,75	115,24	0,41	0,43	$-4,6 \times 10^3$	$0,8 \times 10^3$
4-8-13	84,28	94,57	0,30	0,51	$-5,5 \times 10^3$	$1,2 \times 10^3$
Placa quadrada - grupo I:1,3,7,8,11,15,16,17,18 e 20						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{16}	A_{26}
1-3-7-8-11	111,52	119,26	0,41	0,12	$4,4 \times 10^3$	$0,3 \times 10^3$
1-3-8-11-18	0,99	0,61	1,10	0,03	$-1,1 \times 10^4$	$-0,1 \times 10^4$
1-3-18	0,99	0,61	1,10	0,03	$-8,3 \times 10^3$	$-1,2 \times 10^3$
3-7-18	0,99	0,61	1,10	1,00	$-5,9 \times 10^4$	$-0,5 \times 10^4$
8-11-18	137,41	417,86	3,98	0,07	$8,0 \times 10^3$	$-3,1 \times 10^3$

Os modos adequados encontrados para a placa retangular foram os modos 1, 4, 7, 8, 12 e 13, onde os modos 1, 7, 8 e 13 geram sistemas do tipo 1, como mostrado anteriormente para a placa ortotrópica I retangular por meio da equação (3.119). E os modos 4 e 12 geram sistemas do tipo 2, equação (3.120), sendo que, a contribuição do modo 12 neste caso é muito baixa para todas as constantes, com exceção de A_{22} , como pode ser visto nas equações do sistema (3.139) e (3.140) para estes dois modos.

Modo 4: placa ortotrópica II, retangular, grupo I

$$\begin{bmatrix} -0,0328 & -0,0000 & 0 & 1,5112 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0328 & -0,0000 & 0 & 1,5112 & 0 \\ 0 & -0,0328 & -0,0000 & 0 & 1,5112 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0328 & -0,0000 & 1,5112 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} -0,1664 \\ 0,0000 \\ -0,0002 \\ 5,4944 \end{Bmatrix} \quad (3.139)$$

Modo 12: placa ortotrópica II, retangular, grupo I

$$\begin{bmatrix} -0,0019 & 0,0007 & 0 & 0,0313 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0019 & 0,0007 & 0 & 0,0313 & 0 \\ 0 & -0,0019 & 0,0007 & 0 & 0,0313 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0019 & 0,0007 & 0,0313 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} -0,0024 \\ 0,0046 \\ -0,0026 \\ 0,1196 \end{Bmatrix} \quad (3.140)$$

Assim, por razões matemáticas, nenhuma combinação foi capaz de fornecer resultados precisos para todas as constantes, principalmente para as constantes A_{11} e A_{12} . Neste caso, uma solução é considerar uma outra placa retangular, aqui chamada de “retangular 2”, com as dimensões contrárias, de forma que, o lado maior que antes era na direção x , ou direção principal (direção das fibras), passa a ser na direção y , e o lado menor que antes era em y passa a ser em x . Portanto, têm-se agora uma placa com as dimensões 0,350 x 0,450 x 0,003 m . Neste caso, os modos ainda são do tipo 1 e 2, sendo 2, 6, 10, 11 e 14 os modos do tipo 1, e 3, 7 e 15 do tipo 2. O modo 7 apresentou valores das integrais baixos comparados com os demais deste tipo e deve, portanto, ser evitado devido a sua baixa contribuição. A figura 3.21 mostra os 15 primeiros modos com as suas respectivas frequências naturais para esta placa retangular 2. E, seguindo o mesmo raciocínio anterior, as combinações do tipo 2-3-15, 3-6-15, 3-10-15, 3-11-15 e 3-14-15, onde os modos do tipo 2 estão em maior número, são combinações adequadas e capazes de fornecer bons resultados, como pode ser visto na tabela 3.20. De acordo com esta tabela é possível também notar a forte contribuição dos modos 3 e 15 no cálculo das constantes A_{11} , A_{22} e A_{12} . Estes modos quando estão presentes nas combinações ou quando a combinação contem somente os mesmos, os resultados se mostram precisos para essas três constantes. Já no caso de modos do tipo 2, de forte contribuição, não estarem presentes entre os 15 primeiros, é aconselhável uma busca dos mesmos em intervalos acima do 15°.

Tabela 3.20: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica II retangular 2 (0,350 x 0,450 x 0,003 m) de grafite/polímero para o grupo I.

Placa retangular 2 - grupo I, modos adequados: 2,3,6,7,10,11,14 e 15						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{16}	A_{26}
3-15	1,51	1,42	0,50	$3,8 \times 10^3$	$-7,8 \times 10^4$	$-2,2 \times 10^3$
2-3-15	1,51	1,42	0,47	0,01	303,31	356,26
3-7-15	1,46	1,39	0,47	24,39	$-9,7 \times 10^5$	$-0,2 \times 10^5$
3-6-15	1,51	1,42	0,47	0,15	-892,77	316,39
3-10-15	1,51	1,42	0,47	9,67	$-1,5 \times 10^4$	$-0,1 \times 10^4$
3-11-15	1,51	1,42	0,47	0,17	$-3,2 \times 10^4$	$-0,4 \times 10^4$
3-14-15	1,51	1,42	0,47	0,53	$3,0 \times 10^3$	$-0,7 \times 10^3$

Para a placa quadrada, os modos adequados identificados foram os modos 1, 3, 7, 8, 11 e 15, sendo os modos 1, 7, 8, 11 e 15, modos que geram sistemas do tipo 1 e apenas o modo 3

do tipo 2. Assim, foi feito uma busca nos próximos 5 modos e encontrou-se os modos 16, 17 e 20 que originam sistemas do tipo 1 e o modo 18 que gera sistema do tipo 2. Esta mesma busca também foi feita para a placa retangular de $0.450 \times 0.350 \times 0.003 \text{ m}$, porém não foi encontrado mais nenhum modo do tipo 2 neste intervalo. Portanto, as combinações onde os modos 3 e 18 estão presentes são combinações adequadas e fornecem resultados muito precisos, como pode ser visto na tabela 3.19 e como ocorreu para a placa ortotrópica I analisada anteriormente.

A tabela 3.21 mostra os resultados para algumas combinações de modos adequados da placa ortotrópica II, retangular e quadrada, respectivamente, de grafite/polímero, para o grupo II de funções ponderadoras. Os modos adequados identificados por meio dos valores das integrais que representa o sistema de equações (3.71) para a placa retangular são os modos 2, 3, 5, 9, 10, 11, 14 e 15. Assim como na placa ortotrópica I, os modos deram origem a sistemas do tipo 1 e 2, equações (3.135) e (3.136), onde os modos 3, 10, 11 e 14 geram os sistemas do tipo 1 e os modos 2, 5, 9 e 15 geram os sistemas do tipo 2. Para a placa quadrada, os modos adequados identificados foram os modos 2, 4, 5, 9, 10, 12, 13 e 14. E também, estes modos geram sistemas do tipo 1 e 2, onde os modos 4, 10, 12 e 14 do tipo 1 e 2, 5, 9 e 13 do tipo 2. Para este caso de ortotropia, percebe-se também que são poucas as combinações de modos adequados capazes de identificar com precisão a constante A_{12} . E também, a constante A_{11} é um termo problemático. Mas, os resultados encontrados para as combinações adequadas da 3.21 foram muito satisfatórios, tanto para a placa retangular como para a placa quadrada.

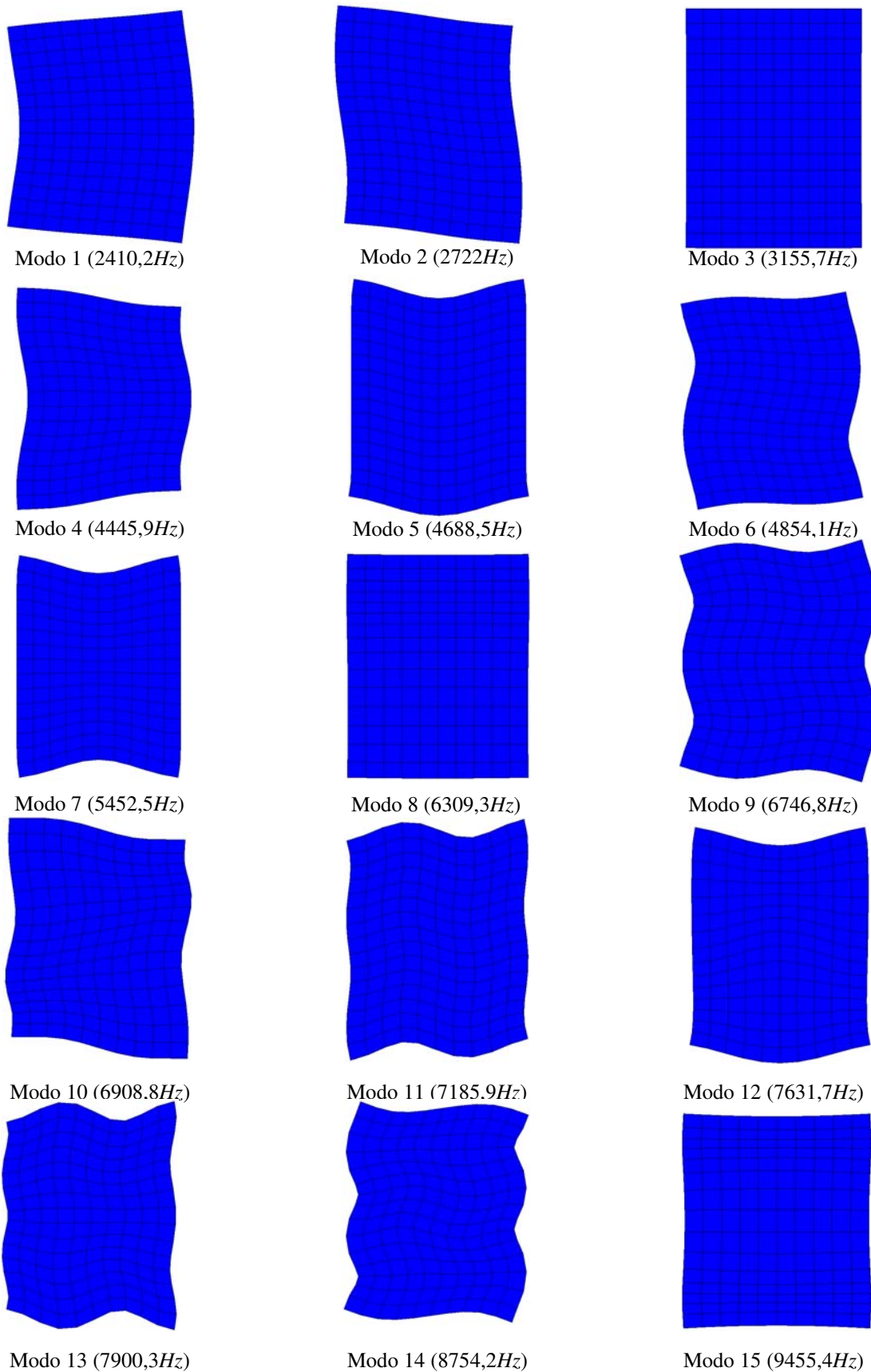


Figura 3.21. 15 primeiros modos de vibrar no plano e suas respectivas frequências naturais da placa ortotrópica II retangular 2 de grafite/polímero.

Tabela 3.21: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para as placas ortotrópicas II de grafite/polímero para o grupo II.

Placa retangular - grupo II, modos adequados:2,3,5,9,10,11,14 e 15						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{16}	A_{26}
2-3-5	2,77	6,06	0,08	0,38	$2,4 \times 10^4$	$0,5 \times 10^4$
3-5-10	2,71	12,73	0,62	1,05	$-6,7 \times 10^4$	$1,6 \times 10^4$
3-10-14	2,18	33,67	0,63	1,21	$-1,0 \times 10^5$	$-5,1 \times 10^2$
11-14-15	1,14	2,15	0,92	1,15	$2,3 \times 10^5$	$0,1 \times 10^5$
2-3	2,36	0,57	0,19	0,72	$1,7 \times 10^4$	$0,1 \times 10^4$
2-5	119,93	122,88	0,64	0,42	$-4,3 \times 10^3$	$0,9 \times 10^3$
3-5	2,65	12,74	0,31	0,46	$2,3 \times 10^4$	$0,6 \times 10^4$
2-10	2,10	0,82	0,60	2,42	$-2,0 \times 10^5$	$-0,4 \times 10^5$
3-10	2,15	44,01	28,55	1,29	$-1,0 \times 10^5$	$-0,2 \times 10^4$
2-14	2,04	5,22	0,37	1,12	$-3,9 \times 10^4$	$-1,2 \times 10^4$
11-14	1,64	2,14	0,87	0,98	$-1,8 \times 10^5$	$-0,1 \times 10^4$
Placa quadrada - grupo II, modos adequados:2,3,5,8,9,10,11,14 e 15						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
2-4-5	4,1294	8,6345	0,3979	0,4548	$-3,5 \times 10^4$	$-0,1 \times 10^4$
2-4-10	3,0386	4,4204	0,7449	1,5360	$-3,1 \times 10^4$	$0,2 \times 10^4$
2-4-14	2,4336	0,7871	0,7268	2,8974	$4,2 \times 10^4$	$1,1 \times 10^4$
4-10-14	2,4147	4,2794	0,8177	2,9380	$4,6 \times 10^4$	$0,7 \times 10^4$
2-4	3,3510	0,1083	0,2107	1,2493	$-3,2 \times 10^4$	$-0,1 \times 10^4$
2-10	13,4504	17,3764	0,9399	2,8686	$-3,1 \times 10^4$	$0,4 \times 10^4$
2-14	1,6376	1,5956	1,3004	4,7194	$1,1 \times 10^5$	$0,3 \times 10^5$
4-9	3,9021	67,4156	4,2330	0,1714	$-4,1 \times 10^4$	$-0,1 \times 10^3$
5-14	2,6795	13,5476	2,2142	2,8253	$5,6 \times 10^4$	$-1,0 \times 10^4$
9-14	2,1282	62,0527	0,8499	3,8929	$1,1 \times 10^5$	$0,2 \times 10^5$
2-13	97,2175	98,3120	0,4262	0,6035	$2,3 \times 10^4$	$-2,7 \times 10^4$

No caso de uma lâmina com as mesmas características, porém com as fibras orientadas unidirecionalmente com um ângulo de 90° , onde apenas as constantes A_{11} e A_{22} são diferentes porém invertidas, ou seja, A_{11} de uma é igual ao A_{22} de outra, e vice-versa; observa-se o contrário, de forma que as constantes A_{22} e A_{12} agora são as constantes mais difíceis de serem identificadas precisamente. Por isso que no caso ortotrópico onde as fibras estão dispostas com $0/90^\circ$, como no caso analisado anteriormente, os erros maiores surgem para a constante A_{12} .

Placa Ortotrópica III de grafite/polímero, fibras unidirecionais de 30°: $[30]_{4s}$
(placa geralmente ortotrópica)

A tabela 3.22 mostra os resultados obtidos para algumas combinações de modos adequados para a placa geralmente ortotrópica (ortotrópica III), retangular e quadrada, respectivamente, e para o grupo I de funções ponderadoras.

Tabela 3.22: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa retangular ortotrópica III de grafite/polímero para o grupo I.

Placa retangular - grupo I, modos adequados:1,4,5,7,9,11,14 e 15						
Combinações	Erros (%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
1-4-9	0,32	0,58	0,32	0,40	0,69	0,38
1-5-7	3,55	3,44	1,22	4,24	4,01	3,76
1-5-9	0,72	0,05	0,47	1,09	0,12	1,19
4-9-11	4,71	6,52	4,22	6,97	9,20	7,52
11-14-15	2,15	2,08	4,00	2,18	4,28	2,96
Placa quadrada - grupo I:1,3,5,7,10,11,14 e 15						
Combinações	Erros (%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
1-3-7	0,94	1,17	0,53	1,17	1,37	1,07
1-3-10	5,11	5,44	2,74	5,57	5,67	4,42
1-5-7	0,67	4,60	2,71	0,30	4,59	1,42
7-10-14	0,94	0,91	4,65	1,88	0,01	2,76
11-14-15	0,68	0,94	6,46	1,11	1,97	0,29

As equações (3.141)-(3.148) mostram os valores das integrais calculados para o sistema de equações (3.50) para os modos adequados da placa retangular.

Modo 1: placa ortotrópica III, retangular, grupo I

$$\begin{bmatrix} 0,7412 & -1,0650 & 0 & -0,3773 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7412 & -1,0650 & 0 & -0,3773 & 0 \\ 0 & 0,7412 & -1,0650 & 0 & -0,3773 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7412 & -1,0650 & -0,3773 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} 2,3244 \\ -1,4101 \\ -1,4050 \\ -0,6322 \end{Bmatrix} \quad (3.141)$$

Modo 4: placa ortotrópica III, rectangular, grupo I

$$\begin{bmatrix} 0,0508 & 0,6990 & 0 & -1,2444 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0508 & 0,6990 & 0 & -1,2444 & 0 \\ 0 & 0,0508 & 0,6990 & 0 & -1,2444 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0508 & 0,6990 & -1,2444 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} 0,0041 \\ 1,5514 \\ 1,5417 \\ -4,1377 \end{Bmatrix} \quad (3.142)$$

Modo 5: placa ortotrópica III, rectangular, grupo I

$$\begin{bmatrix} 0,4689 & -0,3874 & 0 & -0,6418 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4689 & -0,3874 & 0 & -0,6418 & 0 \\ 0 & 0,4689 & -0,3874 & 0 & -0,6418 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4689 & -0,3874 & -0,6418 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} 1,8125 \\ -0,1044 \\ -0,0828 \\ -1,6374 \end{Bmatrix} \quad (3.143)$$

Modo 7: placa ortotrópica III, rectangular, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,3405 & -0,6897 & 0 & 0,0942 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3405 & -0,6897 & 0 & 0,0942 & 0 \\ 0 & 0,3405 & -0,6897 & 0 & 0,0942 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3405 & -0,6897 & 0,0942 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} 0,6968 \\ -1,2304 \\ -1,3095 \\ 0,4907 \end{Bmatrix} \quad (3.144)
 \end{aligned}$$

Modo 9: placa ortotrópica III, rectangular, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0,2770 & -0,3476 & 0 & -0,0513 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2770 & -0,3476 & 0 & -0,0513 & 0 \\ 0 & 0,2770 & -0,3476 & 0 & -0,0513 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2770 & -0,3476 & -0,0513 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^7 \begin{Bmatrix} 2,3688 \\ 0,3829 \\ 0,3540 \\ 0,5533 \end{Bmatrix} \quad (3.145)
 \end{aligned}$$

Modo 11: placa ortotrópica III, rectangular, grupo I

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0926 & 0,2563 & 0 & -0,2514 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0926 & 0,2563 & 0 & -0,2514 & 0 \\ 0 & -0,0926 & 0,2563 & 0 & -0,2514 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0926 & 0,2563 & -0,2514 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} -1,2786 \\ -0,0220 \\ -0,0788 \\ -1,2593 \end{Bmatrix} \quad (3.146)$$

Modo 14: placa ortotrópica III, retangular, grupo I

$$\begin{bmatrix} 0,4163 & -0,7131 & 0 & 0,0344 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4163 & -0,7131 & 0 & 0,0344 & 0 \\ 0 & 0,4163 & -0,7131 & 0 & 0,0344 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4163 & -0,7131 & 0,0344 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} 1,9342 \\ -0,8879 \\ -0,6876 \\ 0,6056 \end{Bmatrix} \quad (3.147)$$

Modo 15: placa ortotrópica III, retangular, grupo I

$$\begin{bmatrix} 0,1479 & -0,3238 & 0 & 0,0164 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1479 & -0,3238 & 0 & 0,0164 & 0 \\ 0 & 0,1479 & -0,3238 & 0 & 0,0164 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1479 & -0,3238 & 0,0164 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^7 \begin{Bmatrix} -0,2478 \\ -0,9957 \\ -0,9530 \\ -0,0934 \end{Bmatrix} \quad (3.148)$$

Como pode ser visto, as matrizes destes sistemas são matrizes cheias, semelhantes às matrizes dos materiais anisotrópicos. Da mesma forma, para a placa quadrada os modos

adequados também originam sistemas de equações com matrizes cheias. De maneira geral, é possível obter resultados muito bons para estas placas, retangular e quadrada, e grupo I de funções ponderadoras.

A tabela 3.23 mostra os resultados para algumas combinações de modos adequados destas placas retangular e quadrada, respectivamente, para o grupo II de funções ponderadoras.

Tabela 3.23: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa retangular ortotrópica III de grafite/polímero para o grupo II.

Placa retangular - grupo II, modos adequados:2,3,6,8,10,12 e 13						
Combinações	Erros (%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
2-3-6	3,85	4,53	2,86	3,94	4,63	2,85
2-3-12	7,57	8,32	4,23	7,96	8,80	6,46
3-6-12	0,25	0,51	0,10	0,69	0,99	1,05
8-10-12	4,26	5,42	3,67	4,60	5,62	3,43
2-3	0,85	1,72	1,22	0,10	0,96	1,39
2-8	14,17	22,68	16,65	15,48	24,37	12,51
3-6	0,63	0,32	0,04	0,53	0,14	0,22
3-13	7,10	7,93	4,49	7,82	8,57	6,24
6-12	0,71	1,06	0,05	1,19	1,30	1,39
10-13	4,42	2,05	0,71	5,21	0,63	4,07
Placa quadrada - grupo II, modos adequados:2,4,6,8,9,12 e 13						
Combinações	Erros (%)					
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
2-4-6	2,62	3,94	3,18	2,02	3,23	0,59
2-4-8	1,20	2,40	1,64	0,11	1,19	1,27
2-4-9	13,63	14,41	7,87	15,48	16,23	13,11
6-13-12	8,11	7,93	4,63	7,84	7,96	5,52
2-4	2,35	1,11	0,02	4,26	2,90	5,46
2-6	0,76	2,76	3,52	0,53	3,05	0,01
2-8	3,95	5,75	3,41	3,43	4,99	1,53
2-13	1,75	2,75	1,51	0,33	1,25	1,92
6-12	40,14	43,44	23,27	43,01	46,25	34,21
12-13	3,08	2,41	2,63	1,85	2,54	0,53

Os modos adequados identificados por meio dos valores das integrais das equações (3.149) - (3.155) que representam o sistema de equações (3.71) para a placa retangular são os modos 2, 3, 6, 8, 10, 12 e 13.

Modo 2: placa ortotrópica III, retangular, grupo II

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0230 & 0,0645 & 0 & -0,0328 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0744 & 0,0968 & 0 & 0,0359 & 0 \\ -0,0744 & 0,0738 & 0,0645 & 0,0359 & -0,0328 & 0 \\ 0 & -0,0230 & 0,0645 & 0 & -0,0328 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0744 & 0,0968 & 0,0359 \\ 0 & -0,0744 & 0,0968 & -0,0230 & 0,1004 & -0,0328 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \\
 & = 10^6 \begin{Bmatrix} -0,2232 \\ 0,4925 \\ -2,3447 \\ 1,4125 \\ 0,1100 \\ -0,6328 \end{Bmatrix} \quad (3.149)
 \end{aligned}$$

Modo 3: placa ortotrópica III, retangular, grupo II

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -0,0799 & 0,0425 & 0 & 0,1726 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0096 & 0,0010 & 0 & 0,0145 & 0 \\ -0,0096 & -0,0789 & 0,0425 & 0,0145 & 0,1726 & 0 \\ 0 & -0,0799 & 0,0425 & 0 & 0,1726 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0096 & 0,0010 & 0,0145 \\ 0 & -0,0096 & 0,0010 & -0,0799 & 0,0570 & 0,1726 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= 10^6 \begin{Bmatrix} -0,7818 \\ -0,6176 \\ -0,4629 \\ 0,8036 \\ 0,0866 \\ 5,0317 \end{Bmatrix} \quad (3.150)$$

Modo 6: placa ortotrópica III, rectangular, grupo II

$$\begin{bmatrix} -0,0637 & 0,1491 & 0 & -0,0527 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0712 & -0,0889 & 0 & -0,0445 & 0 \\ 0,0712 & -0,1527 & 0,1491 & -0,0445 & -0,0527 & 0 \\ 0 & -0,0637 & 0,1491 & 0 & -0,0527 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0712 & -0,0889 & -0,0445 \\ 0 & 0,0712 & -0,0889 & -0,0637 & 0,1046 & -0,0527 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^6 \begin{Bmatrix} -1,6199 \\ -0,4598 \\ 6,0413 \\ 2,6827 \\ -0,5141 \\ -2,6217 \end{Bmatrix} \quad (3.151)$$

Modo 8: placa ortotrópica III, rectangular, grupo II

$$\begin{bmatrix} 0,0783 & -0,1349 & 0 & -0,0105 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0102 & 0,0165 & 0 & -0,0420 & 0 \\ 0,0102 & 0,0948 & -0,1349 & -0,0420 & -0,0105 & 0 \\ 0 & 0,0783 & -0,1349 & 0 & -0,0105 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0102 & 0,0165 & -0,0420 \\ 0 & 0,0102 & 0,0165 & 0,0783 & -0,1769 & -0,0105 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^6 \begin{Bmatrix} 1,9905 \\ 1,2160 \\ -0,7266 \\ -2,2375 \\ -0,8907 \\ 1,2627 \end{Bmatrix} \quad (3.152)$$

Modo 10: placa ortotrópica III, rectangular, grupo II

$$\begin{bmatrix} 0,0434 & -0,0727 & 0 & 0,0095 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0570 & 0,0637 & 0 & 0,0429 & 0 \\ -0,0570 & 0,1071 & -0,0727 & 0,0429 & 0,0095 & 0 \\ 0 & 0,0434 & -0,0727 & 0 & 0,0095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0570 & 0,0637 & 0,0429 \\ 0 & -0,0570 & 0,0637 & 0,0434 & -0,0298 & 0,0095 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^6 \begin{Bmatrix} 2,8754 \\ 0,1796 \\ -3,2446 \\ -0,2107 \\ 0,6330 \\ 1,3047 \end{Bmatrix} \quad (3.153)$$

Modo 12: placa ortotrópica III, rectangular, grupo II

$$\begin{bmatrix} 0,0318 & -0,0214 & 0 & -0,0530 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0108 & -0,1266 & 0 & 0,2100 & 0 \\ -0,0108 & -0,0948 & -0,0214 & 0,2100 & -0,0530 & 0 \\ 0 & 0,0318 & -0,0214 & 0 & -0,0530 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0108 & -0,1266 & 0,2100 \\ 0 & -0,0108 & -0,1266 & 0,0318 & 0,1886 & -0,0530 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$= 10^6 \left\{ \begin{array}{c} 1,1729 \\ -3,6395 \\ -1,7442 \\ 0,0268 \\ 6,4801 \\ -5,0964 \end{array} \right\} \quad (3.154)$$

Modo 13: placa ortotrópica III, retangular, grupo II

$$\left[\begin{array}{cccccc} -0,1079 & 0,1856 & 0 & 0,0105 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0005 & 0,0065 & 0 & -0,0243 & 0 \\ 0,0005 & -0,1014 & 0,1856 & -0,0243 & 0,0105 & 0 \\ 0 & -0,1079 & 0,1856 & 0 & 0,0105 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0005 & 0,0065 & -0,0243 \\ 0 & 0,0005 & 0,0065 & -0,1079 & 0,1613 & 0,0105 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} A_{11} \\ A_{16} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{26} \\ A_{22} \end{array} \right\} =$$

$$= 10^6 \left\{ \begin{array}{c} -3,0858 \\ -0,2134 \\ 1,8723 \\ 2,9450 \\ -1,0819 \\ -0,7687 \end{array} \right\} \quad (3.155)$$

Conforme pode ser visto nestes sistemas, as matrizes também são cheias. O mesmo também acontece com a placa quadrada. Nesta, os modos adequados são os modos 2, 4, 6, 8, 9, 12 e 13 e as matrizes também são cheias. Para estas placas, retangular e quadrada, observa-se que o número de combinações adequadas é muito inferior ao número de combinações não adequadas, cujos erros têm valores consideráveis. Porém, comumente, estes erros são para todas as constantes ou para a maioria, e não para uma específica apenas, o que facilita a identificação das combinações adequadas. Os resultados obtidos para as combinações adequadas foram muito satisfatórios e em geral os erros maiores se encontram nas constantes A_{16} e A_{26} .

Placa Ortotrópica IV de grafite/polímero: $[30 \quad -30 \quad 30 \quad -30]_s$

A tabela 3.24 mostra os resultados obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica IV de grafite/polímero, retangular e quadrada, respectivamente, e para o grupo I de funções ponderadoras. Os modos 1, 3, 6, 7, 9, 10, 13 e 15 da placa retangular, e os modos 2, 3, 5, 7, 10, 13 e 15 da placa quadrada são os modos adequados. Semelhantemente à placa ortotrópica I, os modos adequados também dão origem à sistemas do tipo 1, 2 e 3, conforme mostram as equações (3.119) e (3.120). Sendo assim, a análise para esta placa segue as mesmas regras utilizadas para a placa ortotrópica I na identificação das combinações adequadas. Para a placa retangular, ao contrário da placa ortotrópica I, observa-se que os modos resultam em sistemas do tipo 1, 2 e 3 com os termos I_1 , I_2 , I_3 e I_4 , dos tipos 2 e 3, diferentes. Os modos 7, 9 e 10 dão origem aos sistemas do tipo 1, os modos 1, 3 e 13 do tipo 2 e, os modos 10 e 15 do tipo 3. Para a placa quadrada, também ao contrário da ortotrópica I, os modos adequados dão origem somente aos sistemas do tipo 1 e 2, com os termos I_1 , I_2 , I_3 e I_4 do tipo 2 diferentes. Os modos do sistema do tipo 1 são 5, 7, 10 e 15 e os do sistema do tipo 2 são os modos 2, 3, 8 e 13. Como pode ser visto, com as combinações adequadas, excelentes resultados foram obtidos.

A tabela 3.25 mostra os resultados obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica IV, retangular e quadrada, respectivamente, para o grupo II de funções ponderadoras. Os modos adequados são os modos 2, 4, 5, 8, 11, 12 e 14, para a placa retangular, e 1, 4, 6, 9, 11, 12 e 14, para a placa quadrada. Ao contrário da placa ortotrópica I, os resultados foram muito satisfatórios para todas as constantes elásticas, inclusive para A_{12} , em todas as combinações e em ambas as placas, retangular e quadrada.

Tabela 3.24: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica de grafite/polímero IV para o grupo I.

Placa retangular - grupo I, modos adequados:1,3,6,7,9,10,13 e 15						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{16}	A_{26}
3-6-10	0,08	0,35	0,57	0,16	$-7,8 \times 10^3$	$1,8 \times 10^3$
3-6-15	0,48	0,00	0,60	0,16	$5,1 \times 10^4$	$2,1 \times 10^4$
7-1-10	0,07	0,38	0,23	0,02	$-5,4 \times 10^5$	$-5,3 \times 10^5$
7-10-13	0,23	1,07	2,38	0,02	$0,4 \times 10^4$	$-2,3 \times 10^4$
9-3-15	0,48	0,00	0,60	0,33	$4,9 \times 10^5$	$1,9 \times 10^5$
7-9-6	390,17	362,11	284,69	0,09	$8,3 \times 10^5$	$-0,1 \times 10^3$
7-9-1	218,91	259,69	142,79	0,03	$6,9 \times 10^3$	$0,2 \times 10^3$
1-3-13	0,82	0,68	0,71	$21,33 \ 4,6 \times 10^4$	$1,8 \times 10^4$	
1-10-13	0,10	0,40	0,20	1781,10	$-3,2 \times 10^4$	$-1,2 \times 10^4$
Placa quadrada - grupo I, modos adequados:2,3,5,7,8,10,13 e 15						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{16}	A_{26}
2-5-8	0,31	0,45	0,22	0,39	$4,2 \times 10^3$	$1,6 \times 10^3$
2-8-7	0,31	0,45	0,22	0,07	$8,7 \times 10^4$	$8,3 \times 10^4$
2-7-13	0,28	0,55	0,04	0,07	$-4,6 \times 10^3$	$6,5 \times 10^3$
3-10-13	0,31	0,67	1,67	1,12	$-1,3 \times 10^4$	$-3,5 \times 10^4$
3-8-15	0,29	0,11	1,58	5,88	$-0,4 \times 10^4$	$-7,1 \times 10^4$
5-7-15	626,64	493,63	643,22	0,05	$2,2 \times 10^4$	$0,3 \times 10^4$
2-7-15	245,57	271,94	139,55	0,13	$7,4 \times 10^3$	$-3,6 \times 10^3$
2-3-8	0,32	0,41	0,27	152,68	$8,8 \times 10^4$	$3,2 \times 10^4$
3-8-13	0,20	0,60	1,70	1075,30	$-1,2 \times 10^5$	$-1,1 \times 10^5$

Tabela 3.25: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa ortotrópica IV de grafite/polímero grupo II.

Placa retangular - grupo II, modos adequados:2,4,5,8,11,12 e 14						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{16}	A_{26}
2-4-5	1,52	2,15	1,28	1,54	$-1,7 \times 10^4$	$-0,6 \times 10^4$
2-4-8	1,50	2,09	0,83	1,14	$1,4 \times 10^4$	$0,9 \times 10^4$
2-5-14	1,54	0,72	0,24	0,10	$-5,9 \times 10^4$	$-5,1 \times 10^4$
5-11-12	0,27	0,09	0,04	1,11	$-1,2 \times 10^4$	$1,9 \times 10^4$
2-4	1,18	1,83	1,02	2,87	$-1,2 \times 10^4$	$-0,4 \times 10^4$
2-5	0,49	1,018	1,01	1,41	$-1,8 \times 10^4$	$-0,7 \times 10^4$
2-11	0,86	0,35	0,13	1,13	$3,7 \times 10^4$	$1,0 \times 10^4$
4-5	1,09	1,45	0,33	1,57	$-1,9 \times 10^4$	$-0,9 \times 10^4$
4-8	0,08	0,46	2,07	1,85	$3,2 \times 10^4$	$2,2 \times 10^4$
5-11	0,90	0,37	0,04	1,05	$3,1 \times 10^4$	$0,2 \times 10^4$
8-11	0,38	0,24	0,55 0,67	$3,5 \times 10^4$	$1,2 \times 10^4$	
11-12	0,26	0,13	0,03	1,02	$-1,1 \times 10^4$	$2,2 \times 10^4$
Placa quadrada - grupo II, modos adequados:1,4,6,9,11,12 e 14						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{16}	A_{26}
1-6-9	2,21	3,44	1,72	5,06	$-1,9 \times 10^4$	$-1,1 \times 10^4$
1-6-12	0,16	0,30	0,13	3,07	$1,7 \times 10^4$	$2,5 \times 10^4$
6-9-12	0,18	0,35	0,30	2,68	$1,3 \times 10^4$	$4,8 \times 10^4$
9-12-14	0,18	1,87 0,40	0,68	$-6,2 \times 10^4$	$8,1 \times 10^4$	
1-6	2,33	3,58	1,68	4,91	$-4,3 \times 10^4$	$-1,4 \times 10^4$
1-9	3,76	2,96	0,13	1,84	$6,2 \times 10^4$	$2,3 \times 10^4$
1-12	0,59	0,26	0,74	2,79	$2,0 \times 10^4$	$2,9 \times 10^4$
4-11	0,94	1,55	2,77	0,23	$2,2 \times 10^4$	$0,8 \times 10^4$
6-12	0,75	0,16	0,45	2,58	$0,5 \times 10^4$	$3,8 \times 10^4$
9-12	0,85	0,44	1,07	2,46	$-1,9 \times 10^4$	$6,5 \times 10^4$
9-14	1,75	0,042	1,29	1,62	$-6,2 \times 10^4$	$8,5 \times 10^4$
12-14	0,26	2,17	0,19	0,90	$-9,7 \times 10^4$	$9,4 \times 10^4$

Placa quase-isotrópica de grafite/polímero: $[90 \ 45 \ 0 \ -45]_s$

A tabela 3.26 mostra os resultados para algumas combinações entre modos adequados para a placa quase-isotrópica, retangular e quadrada, respectivamente, do grupo I. Para estas placas foram identificados os modos 2, 3, 5, 7, 13 e 15 como sendo os modos adequados para a placa retangular, e os modos 1, 4, 5, 6, 12 e 14 como sendo os modos adequados para a placa quadrada. Semelhantemente à placa ortotrópica I retangular e à ortotrópica IV quadrada, os modos adequados também resultam em sistemas do tipo 1 e 2, conforme mostram as equações (3.119) e (3.120), e semelhantemente à placa ortotrópica I quadrada e ortotrópica IV retangular, os modos também resultaram em sistemas do tipo 1, 2 e 3. Os modos adequados 2, 9, 13 e 15 da placa retangular são os modos que apresentam os sistemas do tipo 1, e os modos 3, 5, 7 e 10 são os que apresentam os sistemas do tipo 2. Já para a placa quadrada, os modos 1 e 14 são os do tipo 1, os modos 4 e 5 são os do tipo 2, e os modos 6 e 12 os do tipo 3. A análise para identificar as combinações adequadas é, portanto, a mesma realizada para as placas ortotrópicas I e IV. Conforme mostra a tabela 3.26, assim como para as placas ortotrópicas I e IV analisadas com o grupo I de funções ponderadoras, os resultados obtidos pelas combinações adequadas foram muito satisfatórios para todas as constantes elásticas requeridas.

A tabela 3.27 mostra os resultados encontrados para algumas combinações entre modos adequados para a placa quase-isotrópica, retangular e quadrada, respectivamente, para o grupo II de funções ponderadoras. Os modos 1, 4, 6, 8, 11, 12 e 14 são os modos adequados para a placa retangular, e os modos 2, 3, 7, 8, 10 e 11 são os modos adequados da placa quadrada. Para este grupo de funções ponderadoras, os modos adequados exercem uma maior contribuição numérica na identificação de todas as constantes, inclusive no cálculo mais preciso da constante A_{12} , ao contrário das placas ortotrópicas I e II. Isso porque as equações, que representam o sistema (3.71), são mais cheias, contendo valores mais altos e não nulos, principalmente aos associados à constante A_{12} . Conforme mostra a tabela 3.27, os resultados são muito satisfatórios.

Tabela 3.26: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa quase-isotrópica de grafite/polímero grupo I.

Placa retangular - grupo I, modos adequados:2,3,5,7,9,10,13 e 15						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{16}	A_{26}
2-3-5	0,01	0,74	0,19	0,03	$2,8 \times 10^3$	$1,1 \times 10^3$
2-3-7	0,03	0,14	0,16	0,03	$2,7 \times 10^3$	$2,9 \times 10^3$
2-3-10	0,44	2,03	1,28	0,03	$0,5 \times 10^3$	$-1,0 \times 10^3$
3-5-7	0,10	0,20	0,17	248,90	$1,6 \times 10^3$	$1,6 \times 10^3$
3-7-9	0,03	0,14	0,16	0,12	$-3,2 \times 10^3$	$-4,6 \times 10^3$
3-5-9	0,01	0,74	0,19	0,12	$-1,9 \times 10^4$	$-4,0 \times 10^4$
3-9-10	0,44	2,03	1,28	0,12	$-1,8 \times 10^4$	$-3,5 \times 10^4$
5-7-9	0,46	0,59	0,22	0,12	$-0,4 \times 10^3$	$-5,3 \times 10^3$
5-10-13	0,66	1,06	1,59	1,69	$-2,4 \times 10^4$	$6,9 \times 10^4$
5-7-15	0,46	0,59	0,22	0,18	$-5,1 \times 10^4$	$1,2 \times 10^4$
2-9-15	241,20	448,08	235,57	0,08	$1,5 \times 10^3$	$3,3 \times 10^3$
5-9-15	18,34	121,38	78,84	0,16	$-4,3 \times 10^4$	$-0,8 \times 10^4$
9-10-13	96,37	203,69	41,58	0,46	$-2,5 \times 10^4$	$-0,1 \times 10^4$
Placa quadrada - grupo I, modos adequados:1,4,5,6,12 e 15						
Combinações +	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
1-4-5	64,78	203,66	64,78	0,06	$4,9 \times 10^3$	$5,7 \times 10^3$
1-4-6	0,12	0,11	0,12	0,06	$0,5 \times 10^4$	$1,1 \times 10^4$
1-4-12	1,98	5,73	2,00	0,06	$0,6 \times 10^4$	$1,1 \times 10^4$
4-5-6	0,20	0,30	0,20	2861,00	$3,6 \times 10^4$	$-3,5 \times 10^4$
4-5-12	0,00	0,00	0,00	2,88	$1,4 \times 10^6$	$1,4 \times 10^6$
4-12-14	1,98	5,73	2,00	0,62	$2,7 \times 10^4$	$4,1 \times 10^4$
1-6-14	92,88	291,14	92,88	0,37	$2,1 \times 10^4$	$1,6 \times 10^4$
1-5-14	88,35	278,22	88,35	0,37	$-0,1 \times 10^4$	$1,0 \times 10^4$
6-12-14	316,20	991,46	316,20	0,62	$6,0 \times 10^4$	$-1,3 \times 10^4$
4-6-14	0,12	0,11	0,12	0,62	$1,6 \times 10^4$	$3,0 \times 10^4$
4-6-12	0,27	0,37	0,28	35,13	$0,8 \times 10^4$	$1,2 \times 10^4$
5-6-12	0,44	0,15	0,45	35,12	$1,9 \times 10^4$	$0,1 \times 10^4$

Tabela 3.27: Erros obtidos para algumas combinações entre modos adequados para a placa quase-isotrópica de grafite/polímero e grupo II.

Placa retangular-grupo II, modos adequados:1,4,6,8,11,12 e 14						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	A_{16}	A_{26}
1-4-6	0,60	1,47	0,19	0,19	$9,1 \times 10^3$	$4,7 \times 10^3$
1-4-8	0,09	0,80	0,11	0,96	$7,4 \times 10^3$	$9,5 \times 10^3$
1-4-11	0,33	2,04	0,26	0,08	$1,4 \times 10^3$	$8,1 \times 10^3$
4-6-8	0,76	1,72	0,30	0,22	$1,1 \times 10^4$	$0,6 \times 10^3$
4-8-12	2,28	2,08	0,30	0,71	$5,2 \times 10^4$	$3,2 \times 10^4$
4-11-14	0,28	1,30	0,14	0,04	$-1,1 \times 10^4$	$0,7 \times 10^4$
6-11-12	3,21	2,01	0,33	0,11	$1,5 \times 10^4$	$1,3 \times 10^4$
6-12-14	0,32	1,34	0,36	0,74	$-0,3 \times 10^4$	$1,1 \times 10^4$
1-4	0,25	0,54	0,29	1,93	$5,7 \times 10^4$	$7,1 \times 10^4$
1-6	0,28	0,91	1,77	0,00	$1,0 \times 10^4$	$0,1 \times 10^4$
4-6	0,81	1,73	0,22	0,24	$1,1 \times 10^4$	$0,3 \times 10^4$
4-8	0,73	0,39	0,05	0,95	$1,2 \times 10^4$	$1,1 \times 10^4$
6-11	0,15	2,88	0,03	0,52	$6,5 \times 10^3$	$6,12 \times 10^3$
6-12	0,81	2,64	0,77	1,17	$2,7 \times 10^4$	$-0,1 \times 10^4$
12-14	0,40	2,47	8,53	3,41	$-0,4 \times 10^5$	$6,6 \times 10^5$
Placa quadrada-grupo II, modos adequados:2,3,7,8,10,11 e 14						
Combinações	Erros(%)				Diferenças(N/m)	
	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
2-3-7	0,3665	1,3279	0,3514	0,9101	$4,7 \times 10^5$	$4,7 \times 10^5$
2-3-8	0,3208	1,3614	0,3301	0,9675	$-4,4 \times 10^5$	$-4,4 \times 10^5$
2-3-10	0,4864	2,3908	0,1596	0,0131	$-1,1 \times 10^5$	$-0,2 \times 10^5$
2-7-11	0,3264	3,4770	0,9200	0,4130	$-0,7 \times 10^5$	$-3,2 \times 10^5$
2-10-11	0,0696	3,2953	0,4504	0,8118	$-2,3 \times 10^5$	$-1,1 \times 10^5$
3-7-8	0,8850	2,5504	0,7936	0,3446	$1,3 \times 10^5$	$1,1 \times 10^5$
3-10-11	0,3909	3,2599	0,1397	0,8049	$0,5 \times 10^5$	$1,4 \times 10^5$
7-10-11	1,3806	2,3167	1,4518	1,9236	$-1,6 \times 10^5$	$2,9 \times 10^5$
2-3	0,3317	0,7868	0,3397	2,6820	$2,2 \times 10^4$	$1,3 \times 10^4$
2-7	0,2901	0,5743	0,2698	0,9442	$5,6 \times 10^5$	$6,1 \times 10^5$
2-8	0,3980	1,7826	0,5243	0,8589	$-4,9 \times 10^5$	$-5,8 \times 10^5$
3-7	0,5594	1,7309	0,4282	0,8003	$6,1 \times 10^5$	$5,2 \times 10^5$
3-11	0,3179	3,1529	0,6891	0,6442	$0,8 \times 10^5$	$3,5 \times 10^5$
7-11	0,6940	3,3765	0,2073	1,3317	$-0,5 \times 10^5$	$-1,3 \times 10^5$
8-11	0,8948	3,0533	0,0581	1,3439	$1,1 \times 10^5$	$-1,2 \times 10^5$

3.2 Conclusões

- O método de identificação proposto mostrou ser um método muito preciso quando se usa combinações adequadas de modos adequados, tanto no grupo I como no grupo II de funções ponderadoras, e tanto em placas retangulares como em placas quadradas;
- É um método extremamente sensível ao número e tipo de modos utilizados, sendo mais difícil de se obter bons resultados em placas ortotrópicas simétricas com fibras $0/90^\circ$ e 0° ;
- Praticamente todos os 15 primeiros modos dos laminados podem ser utilizados quando considerado os dois grupos de funções ponderados;
- Como pôde ser visto, além das combinações conterem modos que contribuam na identificação de todas as constantes, outros fatores também devem ser considerados durante a escolha dos mesmos, tais como problemas de singularidade de matrizes e de simetrias. São estes fatores que fazem com que dependendo do tipo de função ponderadora associada à algum modo específico pode-se anular (ou aproximar a valores muito baixos, tendendo à zero) ou divergir os valores das constantes elásticas requeridas. A deformação modal depende do tipo de anisotropia e da geometria dos laminados. Assim, resultados obtidos para uma placa retangular e uma quadrada podem ser muito divergentes, mesmo quando se utiliza modos similares e em mesmo número nas combinações e, também, a mesma densidade, o mesmo número de camadas, a mesma orientação das fibras em cada camada, o mesmo material e a mesma espessura. Além disso, um modo adequado pode formar um combinação adequada em uma placa ortotrópica e não formar em uma placa anisotrópica, mesmo quando se mantêm as demais características das placas. Como por exemplo, os modos similares da combinação 2-3 da placa retangular anisotrópica de grafite/polímero e os da placa ortotrópica I retangular de grafite/polímero para o grupo II de funções ponderadoras;
- A escolha das combinações adequadas não é muito nítida, visualmente, para o grupo II de funções ponderadoras, pois ela envolve a solução simultânea de uma quantidade maior de equações lineares. As placas ortotrópicas se mostraram mais sensíveis à este grupo

de funções ponderadoras. Uma forma de se ter uma maior confiabilidade portanto é através do teste de várias combinações com um número maior de modos adequados e através da comparação dos resultados obtidos pelos 2 grupos de funções ponderadoras;

- A comparação entre os modos e as frequências obtidos numericamente através de um software para uma placa cujas as propriedades elásticas são as identificadas pelo método e os modos e as frequências obtidos experimentalmente, pode ser também mais uma forma de verificar a precisão dos resultados, principalmente para as constantes cujos os modos são mais sensíveis;
- O método se mostrou menos sensível à presença de ruído nos modos quando comparado com o método de identificação das matrizes de rigidez à flexão. Isso ocorre pois, ao contrário deste último, onde se tem derivadas de segunda ordem, o método proposto aqui envolve somente derivadas de primeira ordem, que é menos sensível à presença de ruído;
- O método utilizando funções ponderadoras do grupo I se mostrou menos sensível à presença de ruído nos modos quando comparado ao método utilizando funções ponderadoras do grupo II. Isso ocorre porque no primeiro utiliza-se funções ponderadoras de primeiro grau e no segundo, de segundo grau;
- O método de suavização por RDFS se mostrou eficaz, desde que os parâmetros de entrada para o processo de suavização sejam escolhidos corretamente, como p e q , e ajustados corretamente, como Kx e Ky . Estes últimos, por sua vez, dependem de p e q . O processo de suavização neste método de identificação é mais difícil que no caso da identificação das constantes de flexão pois envolve um número maior de variáveis a serem definidas. Para cada modo deve-se ajustar duas direções. Uma única direção de um único modo não ajustada corretamente pode divergir completamente os resultados. Para os casos onde os erros são baixos com a presença de ruído, a suavização pode melhorar os resultados para algumas constantes e piorar os de outras;
- O método se mostrou pouco sensível à variação do número nós nas malhas, e bons resultados são possíveis de serem obtidos mesmo para malhas não muito refinadas.

Capítulo 4

Considerações finais

4.1 Conclusões

A identificação de propriedades elásticas por meio de problemas inversos tem sido alvo de muitos estudos recentemente, principalmente na caracterização de materiais mais complexos, como os materiais ortotrópicos e anisotrópicos. Com o uso de informações experimentais por meio de ensaios não destrutivos, tanto dinâmicos como estáticos, é possível formular problemas cujas incógnitas sejam somente os parâmetros requeridos. De uma maneira geral, os trabalhos nesta área se dividem em duas grandes linhas de pesquisa: problemas cuja solução se dá por métodos iterativos (ou indiretos) e problemas cuja solução se dá por métodos não iterativos (ou diretos). A maneira com que cada um desses problemas é formulado representa o grande diferencial entre estas diversas metodologias apresentadas na literatura. Neste trabalho, os métodos dinâmicos e diretos utilizando campos virtuais mostraram ser métodos eficientes na caracterização das propriedades elásticas de materiais compósitos, tanto na identificação da matriz de rigidez elástica à extensão como da matriz rigidez elástica à flexão. Nestes, percebe-se que a precisão dos resultados é muito dependente da correta combinação entre campos reais x campos virtuais.

Percebe-se também que, por envolver o cálculo de derivadas de campos de deslocamentos, a presença de ruídos pode comprometer grandemente a qualidade dos resultados. Isso ocorre devido a sensibilidade destas à presença de ruídos. Quanto maior a ordem da derivada

e mais altos forem os níveis de ruído mais sensível será o método, como foi verificado neste trabalho. O método de indentificação das constantes de rigidez elástica à flexão, onde requer o cálculo de derivadas de segunda ordem, se mostrou mais sensível quando comparado com o método proposto para a identificação das constantes de rigidez à extensão, onde requer o cálculo de derivadas de primeira ordem. Infelizmente, a presença de ruído é muito comum em ensaios dinâmicos por estarem vinculados a diversos fatores que nem sempre são fáceis de serem controlados ou evitados, como por exemplo, a qualidade e a calibração dos aparelhos utilizados, a montagem do experimento e as condições do ambiente de ensaio. A qualidade dos dados experimentais é, portanto, essencial para a precisão dos resultados.

Na tentativa de diminuir os efeitos devido a presença de ruído foi proposto aqui a aplicação da RDFS. Quando os seus parâmetros são definidos corretamente, os resultados se mostram satisfatórios, como pôde ser observado para a maioria dos casos analisados. Quando os modos são no plano, ao contrário dos transversais, a suavização deverá ser realizada nas duas direções dos deslocamentos medidos no plano e para cada modo separadamente. Como consequência, há um aumento no número de parâmetros da RDFS a serem ajustados corretamente o que torna a suavização mais complexa e, ao mesmo tempo, mais suscetível à erros, principalmente quando são utilizadas combinações com um número maior de modos no método de indentificação.

4.2 Propostas para trabalhos futuros

4.2.1 Para o método de identificação das constantes de rigidez elástica à flexão:

- Encontrar outros modos que possam também ser utilizados neste método de identificação;
- Analisar outras funções ponderadoras, ou seja, outros campos virtuais que também possam ser associados a outros modos para a identificação das constantes elásticas;

- Encontrar métodos para determinar com precisão as variáveis da RDFS.

4.2.2 Para o método de identificação das constantes de rigidez elástica à extensão:

- Verificar o método com a utilização de modos e frequências no plano obtidos por análise modal experimental;
- Adicionar e identificar o amortecimento no plano;
- Verificar a viabilidade do método na detecção de danos em placas;
- Encontrar métodos para uma correta escolha dos parâmetros p e q da RDFS;
- Encontrar relações ótimas entre largura e comprimento de placas para serem utilizadas para os 2 grupos de funções ponderadoras.

Referências Bibliográficas

- Agarwal, B. D. e Broutman, L. J. (1990). *Analysis of performance of fiber composites*. John Wiley and Sons Inc., New York.
- Alfano, M. e Pagnotta, L. (2007). A non-destructive technique for the elastic characterization of thin isotropic plates. *NDT e International*, 40:112-120.
- ANSYS (2007), documentation, Release 11.0 Inc.
- Araújo, A. L., Mota Soares, C. M., Moreira Freitas, M. J., Pedersen, P. e Herskovits, J. (2000). Combined numerical-esperimental model for the identification of mechanical properties of laminated structures. *Composite Structures*, 50:363-372.
- Arruda, J.R.F. (1992). Surface smoothing and partial spatial derivatives computation using a regressive discrete Fourier series. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 6:41-50.
- Avril, S., Huntley, J. M., Pierron, F. e Steele, D. D. (2008). 3D heterogeneous stiffness identification using MRI and the virtual fields method. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 48(4):479-494.
- Avril, S. e Pierron, F. (2007). General framework for the identification of elastic constitutive parameters from full-field measurements. *International Journal of Solids and Structures*, 44:4978-5002.
- Ayorinde, E. O. e Gibson, R. F. (1995). Improved method for in-situ elastic constants of isotropic and orthotropic composite materials using plate modal data with trimodal and hexamodal Rayleigh formulations. *Journal of Vibration and Acoustics*, 117:180-186.
- Ayorinde, E. O. e Yu, L. (1999). On the use of diagonal modes in the elastic identification of thin plates. *Journal of Vibration and Acoustics*, 121:33-40.
- Ayorinde, E. O. e Yu, L. (2005). On the elastic characterization of composite plates with vibration data. *Journal of Sound and Vibration*, 283:243-262.
- Batista, F. B., Albuquerque, E. L., Arruda, J. R. F. e Dias Júnior, M. (2009). Identification of the bending stiffness matrix of symmetric laminates using regressive discrete Fourier series and finite differences. *Journal of Sound and Vibration*, 320:793-807.
- Bledzki, A. K., Kessler, A., Rikards, R. e Chate, A. (1999). Determination of elastic constants of glass/epoxy unidirectional laminates by the vibration testing of plates. *Composites Science and Technology*, 59:2015-2024.

- Bruno, L., Felice, G., Pagnotta, L., Poggialini, A. e Stigliano, G. (2008). Elastic characterization of orthotropic plates of any shape via static testing. *International Journal of Solids and Structures*, 45:908-920.
- Bruno, L. e Poggialini, A. (2005). Elastic characterization of anisotropic materials by speckle interferometry. *Society for Experimental Mechanics*, 45:205-212.
- Carlsson, L. A. e Pipes, B. R. (1997). *Experimental characterization of advanced composite materials*. Technomic Publishing Company Inc., Lancaster Basel.
- Chalal, H., Avril, S., Pierron, F. e Meraghni, F. (2006). Experimental identification of a nonlinear model for composites using the grid technique coupled to the virtual fields method. *Composite Part A: Applied Science and Manufacturing*, 37(2):315-325.
- Chakraborty, S. e Mukhopadhyay, M. (2000). Estimation of in-plane elastic parameters and stiffener geometry of stiffener plates. *Journal of Sound and Vibration*, 231(1):99-124.
- Cugnoni, J., Gmür, T. e Schorderet, A. (2007). Inverse method based on modal analysis for charactering the constitutive properties of thick composite plates. *Computers and Structures*, 85:1310-1320.
- Deobald, L. R. e Gibson, R. F. (1988). Determination of elastic constants of orthotropic plates by modal analysis/Rayleigh-Ritz technique. *Journal of Sound and Vibration*, 124(2):269-283.
- Diveyev, B. e Butiter., I. (2008). Identifying the elastic moduli of composite plates by using high-order theories. 1: theoretical approach. *Mechanics of Composite Materials*, 44(1):25-36.
- Diveyev, B., Butiter., I. e Shcherbina, N. (2008). Identifying the elastic moduli of composite plates by using high-order theories. 2: theoretical-experimental approach. *Mechanics of Composite Materials*, 44(2):139-144.
- Fällström, K., Olofsson, K., Saldner, H. O. e Schedin, S. (1995). Dynamic material parameters in an anisotropic plate estimated by phase-stepped holographic interferometry. *Optics and Lasers in Engineering*, 24:429-454.
- Gibson, R. F. (1994) *Principles of composite material mechanics*. McGraw-Hill, Inc., New York.
- Gibson, R. F. (2000). Modal vibration response measurements for characterization of composite materials and structures. *Composite Science and Technology*, 60:2769-2780.

- Giraudeau, A., Guo, B. e Pierron, F. (2006). Stiffness and damping identification from full-field measurements on vibration plates. *Experimental Mechanics*, 46(6):777-787.
- Giraudeau, A. e Pierron, F. (2003). Simultaneous identification of stiffness and damping properties of isotropic materials from forced vibration plates. *Comptes rendus Mécanique*, 331(4):259-264.
- Giraudeau, A. e Pierron, F. (2005). Identification of stiffness and damping properties of thin isotropic vibrating plates using the Virtual Fields Method. Theory and simulations. *Journal of Sound and Vibration*, 284(3-5):757-781.
- Grédiac, M. (1996). On the direct determination of invariant parameters governing the bending of anisotropic plates. *International Journal of Solids and Structures*, 33:3969-3982.
- Grédiac, M. (2004). The use of full-field measurement methods in composite material characterization: interest and limitations. *Composites: Part A*, 35:751-761.
- Grédiac, M., Auslender, F. e Pierron, F. (2001). Applying the virtual fields method to determine the through-thickness moduli of thick composites with a nonlinear shear response. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 32(12):1713-1725.
- Grédiac, M., Founier, N., Paris, P. A. e Surrel, Y. (1999). Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis: experiments and results. *Journal of Sound and Vibration*, 210:645-659.
- Grédiac, M., Founier, N., Surrel, Y. e Pierron, F. (1999). Direct measurement of invariant parameters of composite plates. *Journal of Composite Materials*, 33:1939-1965.
- Grédiac, M. e Paris, P. A. (1996). Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis: theoretical and numerical aspects. *Journal of Sound and Vibration*, 195:401-415.
- Grédiac, M., e Pierron, F. (1998). A T-shaped specimen for the direct characterization of orthotropic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41:293-309.
- Grédiac, M. e Pierron, F. (2006). Applying the Virtual Fields Method to the identification of elasto-plastic constitutive parameters. *International Journal of Plasticity*, 22:602-627.
- Grédiac, M., Pierron, F., Avril, S. e Toussaint, E. (2006). The virtual fields method for extracting constitutive parameters from full-field measurements: a review. *Strain: an International Journal for Experimental Mechanics*, 42:233-253.

- Grédiac, M., Pierron, F. e Vautrin, A. (1994). The Iosipescu in-plane shear test applied to composite: a new approach based on displacement field processing. *Composite Science and Technology*, 51(3):409-417.
- Grédiac, M., Toussaint, E. e Pierron, F. (2002). Special virtual fields for direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1-Principle and definition. *International Journal of Solides and Structures*, 39(10):2691-2705.
- Grédiac, M., Toussaint, E. e Pierron, F. (2002). Special virtual fields for direct determination of material parameters with the virtual fields method. 2-Application to in-plane properties. *International Journal of Solides and Structures*, 39(10):2707-2730.
- Grédiac, M., Toussaint, E. e Pierron, F. (2003). Special virtual fields for direct determination of material parameters with the virtual fields method. 2-Application to the bending rigidities of anisotropic plates. *International Journal of Solides and Structures*, 40(10):2401-2419.
- Grédiac, M. e Vautrin, A. (1990). A new method for determination of bending rigidities of thin anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 57:964-968.
- Grédiac, M. e Vautrin, A. (1993). Mechanical characterization of anisotropic plates: experiments and results. *European Journal of Mechanics: A Solids*, 12:819-838.
- Hwang, S. e Chang, C. (2000). Determination of elastic constants of materials by vibration testing. *Composite Structures*, 49:193-190.
- Hyer, M. W. (1998). *Stress Analysis of fiber-reinforced composite materials*. WCB McGraw-Hill, Inc.
- Juang, J. (1993). *Applied System Identification*. Facsimile ed., Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, NJ.
- Kam, T. Y., Chen, C. C. e Yang, S. H. (2009). Material characterization of laminated composite materials using a three-point-bending technique. *Composite Structures*, 88:624-628.
- Lai, T. C. e Lau, T. C. (1993). Determination of elastic constants of a generally orthotropic plate by modal analysis. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 8:15-33.
- Lauwagie, T., Sol, H., Heylen, W. e Roebben, G. (2004). Determination of in-plane elastic properties of different layers of laminated plates by means of vibration testing and model updating. *Journal of Sound and Vibration*, 274:529-546.

- Lauwagie, T., Sol, H., Roebben, G., Heylen, W., Shi, Y. e Van der Biest, O. (2003). Mixed numerical-experimental identification of elastic properties of orthotropic metal plates. *NDT e International*, 36:487-495.
- Lee, C. R. e Kam, T. Y. (2006). Identification of mechanical properties of elastically restrained laminated composite plates using vibration data. *Journal of Sound and Vibration*, 295:999-1016.
- Liu, G. R., Han, X. e Lam, K. Y. (2002). A combined genetic algorithm and nonlinear least squares method for material characterization using elastic waves. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:1909-1921.
- Ma, Chien-Ching e Lin, Chan-Chiao (1999). Inverse Evaluation of Material Constants for composite plates by Optical Interferometry Method. *AIAA Journal*, 37(8):947-953.
- McIntyre, M. E. e Woodhouse, J. (1988). On measuring the elastic and damping constants of orthotropic sheet materials. *Acta Metall*, 36(6):1397-1416.
- Moulart, R., Avril, S. e Pierron, F. (2006). Identification of the through-thickness rigidities of a thick laminated composite tubes. *Composite Part A: Applied Science and Manufacturing*, 37(2):326-336.
- Ogi, H., Sato, K., Asada, T. e Hirao, M. (2002). Complete mode identification for resonance ultrasound spectroscopy. *Journal of Acoustical Society of America*, 112(6):2553-2557.
- Pagnotta L. e Stigliano, G. (2008). Elastic characterization of isotropic plates of any shape via dynamic tests: theoretical aspects and numerical simulations. *Mechanics Research Communications*, 35:351-360.
- Pedersen, P. e Frederiksen, P. S. (1992). Identification of orthotropic material moduli by a combined experimental /numerical method. *Measurement*, 10:113-118.
- Pierron, F. e Grédiac, M. (2000). Identification of the through-thickness moduli of thick composite from whole-field measurements using the Iosipescu fixture. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 31(4):309-318.
- Pierron, F., Zhavoronok, S. e Grédiac, M. (2000). Identification of the through-thickness properties of thick laminated tubes using the virtual fields method. *International Journal of Solids and Structures*, 37(32):4437-4453.
- Pierron, F., Vert, G., Burguete, R., Avril, S., Rotinat, R. e Wisnom M. (2007). Identification of the orthotropic elastic stiffness of composites with the virtual fields method: sensitivity

- study and experimental validation. *Strain: an International Journal for Experimental Mechanics*, 43(3):250-259.
- Reverdy, F. e Audoin, B. (2001). Ultrasonic measurement of elastic constants of anisotropic materials with laser source and laser receiver focused on the same interface. *Journal of Applied Physics*, 90(9):4829-4835.
- Rikards, R. e Chate, A. (1998). Identification of elastic properties of composites by method of planning of experiments. *Composite Structures*, 42:257-263.
- Rikards, R., Chate, A. e Gailis, G. (2001). Identification of elastic properties of laminates based on experiment design. *International Journal of Solids and Structures*, 38:5097-5115.
- Rikards, R., Chate, A., Steinchen, W., Kessler, A. e Bledzki, A. K. (1999). Method for identification of elastic properties of laminates based on experiment design. *Composites: Part B*, 30:279-289.
- Sol, H. (1986). Identification of anisotropic plate rigidities using free vibration data. PhD thesis, Vrije Universiteit, Brussel, Belgium.
- Toussaint, E., Grédiac, M. e Pierron, F. (2006). The virtual fields method with piecewise virtual fields. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48:256-264.
- Vanherzeele, J. (2007). Design of regressive Fourier techniques for processing optical measurements. PhD thesis, Vrije Universiteit Brussel, 2007.
- Vanherzeele, J., Vanlanduit, S. e Guillaume, P. (2008). Reducting spatial data using an optimized regressive Fourier series. *Journal of Sound and Vibration*, 309:858-867.

Apêndice A

Revisão Teórica

Neste capítulo é feito uma revisão da teoria clássica de laminados, destacando as principais considerações, teoremas e procedimentos para a obtenção das três equações diferenciais parciais que governam as vibrações no-plano e transversal de placas anisotrópicas finas que são utilizadas neste trabalho nos métodos de identificação das propriedades elásticas dos materiais.

A.1 Elasticidade

A.1.1 Lei de Hooke generalizada

O estado triplo de tensão de um ponto material qualquer pode ser descrito por nove componentes (ou tensores) de tensão σ_{ij} (onde $i, j = 1, 2, 3$), como pode ser visto na figura A.1. De acordo com a notação convencional, quando $i = j$, σ_{ij} é chamado de *tensão normal*, e quando $i \neq j$, σ_{ij} é chamado de *tensão de cisalhamento*. Da mesma forma, para cada tensor de tensão existe uma componente de deformação ϵ_{ij} que descreve a deformação do ponto. Quando $i = j$, ϵ_{ij} é chamado de *deformação normal* e descreve o deslocamento de extensão ou de contração por unidade de comprimento ao longo de um eixo ou direção específica 1, 2 ou 3. E, quando $i \neq j$, ϵ_{ij} é chamado de *deformação de cisalhamento* e descreve a distorção de linhas originalmente paralelas à dois eixos perpendiculares entre si.

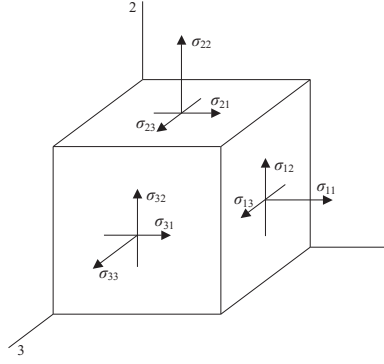


Figura A.1: Estado triplo de tensão em um ponto material.

Na relação mais geral entre tensão-deformação de um ponto material elástico, cada componente de tensão está relacionada com cada uma das nove componentes de deformação por meio da seguinte equação:

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{21}, \epsilon_{22}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{32}, \epsilon_{33}), \quad (\text{A.1})$$

onde a função f_{ij} pode ser uma função linear ou não-linear. Uma vez cessada a ação ou causa geradora de tensões e deformações, um sólido é dito *elástico* se ele retornar à sua situação inicial sem guardar deformações residuais. A esta propriedade dá-se o nome de *elasticidade*. Os materiais elásticos (ou sólidos elásticos) podem ter um comportamento linear ou não. Os que apresentarem uma relação essencialmente linear entre tensão e deformação são chamados de *materiais linearmente elásticos* e aqueles que apresentarem curvaturas em seus diagramas de tensão x deformação, o que caracteriza um comportamento não-linear, são chamados de *materiais não-linearmente elásticos*. Para materiais elásticos e lineares, desconsiderando os efeitos das condições ambientais, as relações tensão-deformação podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2321} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3121} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1221} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3213} & C_{3221} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1313} & C_{1321} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde $\mathbf{C}$ é uma matriz 9x9 contendo 81 termos conhecidos como *constantes de rigidez elástica*. Os dois primeiros subscritos ij dos termos matriz $\mathbf{C}$ se referem aos subscritos dos tensores de tensão e os dois últimos kl se referem aos subscritos dos tensores de deformação. A equação (A.2) representa a *lei de Hooke generalizada* para materiais anisotrópicos. Esta lei está baseada no princípio da superposição, em que a tensão e a deformação resultante em um sistema sujeito à ação de diversas forças é igual à soma algébrica de seus efeitos quando aplicados separadamente. Esse princípio será verdadeiro se cada deformação ϵ_{ij} está *diretamente e linearmente* relacionada com a tensão σ_{ij} , e se as deformações ϵ_{ij} decorrentes de uma componente de tensão σ_{ij} não causarem grandes efeitos anormais sobre outra tensão. Portanto, essas relações são válidas somente para materiais que sofrerem deformações elásticas. Devido à algumas condições de simetria é possível, na prática, simplificar esta equação de forma considerável. Por questões de equilíbrio do sistema, tanto as tensões como as deformações são simétricas, ou seja, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ e $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, e, portanto, existem seis componentes de tensão e deformação independentes. Isto significa que $C_{ijkl} = C_{jikl}$ e $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ (onde $i, j, k, l = 1, 2, 3$). Assim, a matrix $\mathbf{C}$ pode ser agora simplificada de forma que o número de termos independentes e diferentes de zero reduz de 81 para 36.

Também, pelas considerações da termodinâmica, de acordo com uma função densidade de energia, tem-se:

$$U_e = U_e(\epsilon_{ij}). \quad (\text{A.3})$$

Usando-se a propriedade:

$$\frac{\partial U_e}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij}, \quad (\text{A.4})$$

e substituindo-se a equação (A.2) na equação (A.4), tem-se:

$$\frac{\partial U_e}{\partial \epsilon_{ij}} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (\text{A.5})$$

A diferenciação parcial da equação (A.5) com relação à ϵ_{kl} produz:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_{kl}} \left(\frac{\partial U_e}{\partial \epsilon_{ij}} \right) = C_{ijkl}. \quad (\text{A.6})$$

Alterando internamente os índices na equação (A.6), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} \left(\frac{\partial U_e}{\partial \epsilon_{kl}} \right) = C_{klij}. \quad (\text{A.7})$$

Assim, como a ordem da diferenciação parcial não importa, pode-se escrever que:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_{kl}} \left(\frac{\partial U_e}{\partial \epsilon_{ij}} \right) = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} \left(\frac{\partial U_e}{\partial \epsilon_{kl}} \right). \quad (\text{A.8})$$

E, torna-se claro que $C_{ijkl} = C_{klij}$. Portanto, é possível reduzir mais uma vez o número de constantes de rigidez elástica independentes e diferentes de zero de 36 para 21. Considerando os subscritos: $11 \rightarrow 1$, $22 \rightarrow 2$, $33 \rightarrow 3$, $23 = 32 \rightarrow 4$, $13 = 31 \rightarrow 5$ e $12 = 21 \rightarrow 6$, dos termos da equação (A.2), tem-se:

$$\sigma_i = C_{ij}\epsilon_j, \quad (\text{A.9})$$

onde $i, j = 1, 2, 3, \dots, 6$, e:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & S & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

A.1.2 Deformações e deslocamentos

Tratando-se de pequenas deformações, como as que comumente ocorrem em estruturas de engenharia, um pequeno deslocamento de um ponto P de um corpo material pode ser resolvido de forma puramente geométrica. Considerando-se uma linha PA de comprimento Δx originalmente paralela ao eixo x , como mostrado na figura A.2, o deslocamento do ponto A ao longo de x pode ser representado como:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x, \quad (\text{A.11})$$

onde: $\partial u/\partial x$ é a deformação ϵ_x do ponto P na direção x e, $(\partial u/\partial x)\Delta x$ é o aumento no comprimento de PA devido à deformação. Da mesma forma, considerando-se v e w como componentes de deslocamentos ao longo das direções y e z , respectivamente, encontra-se as deformações $\epsilon_y = \partial v/\partial y$ e $\epsilon_z = \partial w/\partial z$ do ponto P nestas direções, respectivamente. Estas deformações ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z são chamadas de *deformações longitudinais*. Para obter a expressão para a *deformação de cisalhamento* considera-se a distorção do ângulo entre os segmentos PA e PB (figura A.2). Os deslocamentos dos pontos A na direção y e de B na direção x são representados, respectivamente, pelas expressões:

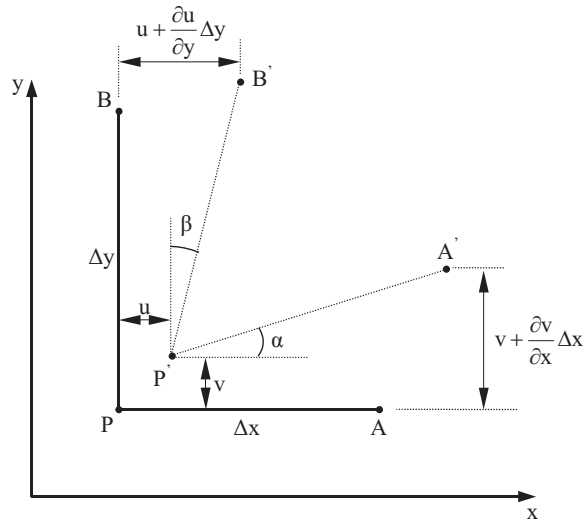


Figura A.2: Considerações sobre o deslocamento de um ponto qualquer de um corpo material.

$$v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x, \quad (\text{A.12})$$

e

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y. \quad (\text{A.13})$$

O segmento $P'A'$ está inclinado com relação à linha original PA com um pequeno ângulo $\alpha = \partial v / \partial x$ e, da mesma forma, o segmento $P'B'$ está inclinado com um ângulo $\beta = \partial u / \partial y$ com relação à linha original PB . Portanto, a deformação de cisalhamento (ou deformação angular) γ_{xy} no plano xy será a soma $\alpha + \beta$. Seguindo este mesmo raciocínio, para os planos yz e zx , tem-se as deformações angulares $\gamma_{yz} = (\partial v / \partial z) + (\partial w / \partial y)$ e $\gamma_{zx} = (\partial u / \partial z) + (\partial w / \partial x)$, respectivamente.

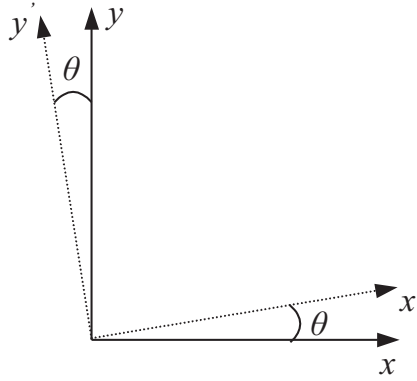


Figura A.3: Deformações bidimensionais longitudinais e de cisalhamento.

As deformações longitudinais e de cisalhamento podem ser também obtidas em direções arbitrárias. Em um caso *bidimensional*, as deformações ϵ'_x , ϵ'_y e γ'_{xy} ao longo dos eixos $x'y'$ (figura A.3) podem ser facilmente obtidas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \epsilon'_x &= \epsilon_x \cos^2(\theta) + \epsilon_y \sin^2(\theta) + \gamma_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta), \\ \epsilon'_y &= \epsilon_x \sin^2(\theta) + \epsilon_y \cos^2(\theta) - \gamma_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta), \\ \gamma'_{xy} &= 2(\epsilon_y - \epsilon_x) \sin(\theta) \cos(\theta) + \gamma_{xy} [\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)]. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Multiplicando-se a deformação γ_{xy} pelo termo $1/2$ no sistema (A.14), obtém-se:

$$\begin{aligned}\epsilon'_x &= \epsilon_x \cos^2(\theta) + \epsilon_y \sin^2(\theta) + (1/2\gamma_{xy})2\sin(\theta)\cos(\theta), \\ \epsilon'_y &= \epsilon_x \sin^2(\theta) + \epsilon_y \cos^2(\theta) - (1/2\gamma_{xy})2\sin(\theta)\cos(\theta), \\ (1/2\gamma'_{xy}) &= (\epsilon_y - \epsilon_x)\sin(\theta)\cos(\theta) + (1/2\gamma_{xy})[\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)].\end{aligned}\tag{A.15}$$

As equações de transformação (A.15) são agora idênticas às equações de um tensor bidimensional de segunda ordem. Pode ser também facilmente demonstrado que as componentes de deformação *tridimensional* também obedecem as equações de transformação para um tensor de segunda ordem quando se faz o mesmo processo de multiplicação do fator $1/2$ nos termos de deformação angular. Assim, um tensor simétrico de deformação de segunda ordem pode ser definido como sendo:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & (1/2)\gamma_{xy} & (1/2)\gamma_{xz} \\ (1/2)\gamma_{xy} & \epsilon_y & (1/2)\gamma_{yz} \\ (1/2)\gamma_{xz} & (1/2)\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix}, \tag{A.16}$$

onde $i, j = 1, 2, 3$ e as direções 1, 2 e 3 correspondem às direções x , y e z , respectivamente. Os termos de deformação ϵ_{ij} definidos na equação (A.16) são as *deformações tensoriais*, e as deformações ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} , γ_{xz} e γ_{yz} , definidas anteriormente, são conhecidos como *deformações de engenharia*. A diferença entre as deformações de engenharia e as tensoriais estão somente nas deformações de cisalhamento. A deformação de cisalhamento tensorial é a metade da deformação de cisalhamento de engenharia. Desse modo, pode-se dizer que a deformação de cisalhamento de engenharia γ_{ij} descreve a distorção total entre as linhas originalmente paralelas à dois eixos perpendiculares entre si e, a deformação de cisalhamento tensorial ϵ_{ij} descreve somente a distorção de cada uma dessas linhas.

A.1.3 Lei de Hooke em termos de constantes de engenharia

Utilizando as componentes de deformação de engenharia, pode-se reescrever a equação (A.10) como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & S & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

ou, de forma mais compacta:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j, \quad (\text{A.18})$$

sendo $i, j = 1, 2, \dots, 6$ e ε_i as componentes de deformação de engenharia de forma que: $\varepsilon_1 = \epsilon_1$, $\varepsilon_2 = \epsilon_2$, $\varepsilon_3 = \epsilon_3$, $\varepsilon_4 = 2\epsilon_4 = 2\epsilon_{23} = 2\epsilon_{32} = \gamma_{23} = \gamma_{32}$, $\varepsilon_5 = 2\epsilon_5 = 2\epsilon_{13} = 2\epsilon_{31} = \gamma_{13} = \gamma_{31}$, $\varepsilon_6 = 2\epsilon_6 = 2\epsilon_{12} = 2\epsilon_{21} = \gamma_{12} = \gamma_{21}$.

Ou, em uma outra forma alternativa, a Lei de Hooke também pode ser escrita relacionando deformação e tensão:

$$\epsilon_i = S_{ij}\sigma_j, \quad (\text{A.19})$$

sendo $i, j = 1, 2, 3, \dots, 6$ e S_{ij} os *coeficientes de deformabilidade*. São os coeficientes da matriz [S] conhecida por *matriz compliance* ou *matriz de flexibilidade* que é a matriz inversa da

matriz de rigidez elástica $\mathbf{C}$ ($\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$). Os termos S_{ij} podem ser relacionados com as constantes de engenharia por meio das seguintes relações:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= 1/E_1, & S_{12} &= \nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2, \\
S_{13} &= -\nu_{31}/E_1 = -\nu_{13}/E_3, & S_{14} &= \eta_{23,1}/E_1 = \eta_{1,23}/G_{23}, \\
S_{15} &= \eta_{32,1}/E_1 = \eta_{1,32}/G_{23}, & S_{16} &= \eta_{12,1}/E_1, \\
S_{22} &= 1/E_2, & S_{23} &= \nu_{32}/E_2 = -\nu_{23}/E_3, \\
S_{24} &= \eta_{23,1}/E_2 = \nu_{23,3}/G_{23}, & S_{25} &= \eta_{31,2}/E_2 = \eta_{2,31}/G_{13}, \\
S_{26} &= \eta_{12,2}/E_2 = \eta_{2,12}/G_{12}, & S_{33} &= 1/E_3, \\
S_{34} &= \eta_{23,3}/E_3 = \eta_{3,23}/G_{23}, & S_{35} &= \eta_{31,1}/E_3 = \eta_{3,31}/G_{13}, \\
S_{36} &= \eta_{12,3}/E_3 = \eta_{3,12}/G_{12}, & S_{44} &= 1/G_{23}, \\
S_{45} &= \zeta_{32,23}/G_{23} = \zeta_{23,31}/G_{13}, & S_{46} &= \zeta_{12,23}/G_{23} = \zeta_{23,12}/G_{12}, \\
S_{55} &= 1/G_{13}, & S_{56} &= \zeta_{12,31}/G_{13} = \zeta_{31,12}/G_{12}, \\
S_{66} &= 1/G_{12}.
\end{aligned} \tag{A.20}$$

onde E_k são os módulos de elasticidade longitudinais, ou módulos de Young, referindo-se aos eixos x_k , G_{ij} são os módulos de elasticidade transversal, ou de cisalhamento, ou de Coulomb, para os planos definidos pelos eixos $x_i x_j$. Os coeficientes ν_{ij} são chamados coeficientes de Poisson no plano $x_j x_i$. As constantes $\eta_{jk,l}$ são denominadas de coeficientes de influência mútua de primeira espécie que caracterizam extensões nas direções dos eixos principais produzidas por tensões tangenciais agindo nos planos principais. As constantes $\eta_{l,jk}$ são os coeficientes de influência mútua de segunda espécie, que expressam deformações tangenciais nos planos principais, causadas pelas tensões normais atuantes nos planos principais. Por fim, $\zeta_{ij,kl}$ são os coeficientes de Chentsov, que caracterizam as deformações tangenciais em planos paralelos aos planos principais de elasticidade, causadas por tensões tangenciais que atuam em outros planos paralelos aos planos principais de elasticidade. As constantes de engenharia são grandemente utilizadas em análises e projetos por serem facilmente definidas e interpretadas em termos de simples estado de tensão e deformação.

Um material compósito é, sob um ponto de vista *microscópico*, um material *heterogêneo* cujas propriedades são diferentes entre um ponto e outro, como por exemplo um ponto da fibra e um ponto da matriz. Porém, as relações tensão-deformação podem ser escritas sob um ponto de vista *macroscópico* em termos de tensões e deformações média e propriedades efetivas de um material *homogêneo* equivalente. Define-se assim como sendo *tensão média* e *deformação média* em um volume V as seguintes equações:

$$\bar{\sigma}_i = \int_V \sigma_i dv / V, \quad (\text{A.21})$$

e

$$\bar{\epsilon}_i = \int_V \epsilon_i dv / V, \quad (\text{A.22})$$

respectivamente, sendo $i = 1, 2, \dots, 6$, σ_i e ϵ_i tensões e deformações dependentes da posição no material. Neste caso, a Lei de Hooke generalizada torna-se:

$$\bar{\sigma}_i = C_{ij} \bar{\epsilon}_j, \quad (\text{A.23})$$

e

$$\bar{\epsilon}_i = S_{ij} \bar{\sigma}_j, \quad (\text{A.24})$$

onde C_{ij} é o *módulo efetivo* e S_{ij} é a *flexibilidade efetiva* do material homogêneo equivalente no volume V . Para efeito de simplificações, neste trabalho será considerado $\bar{\sigma}_i = \sigma_i$ e $\bar{\epsilon}_i = \epsilon_i$.

A.1.4 Simetrias inerentes do próprio material

Além das simplificações consideradas na matriz de rigidez elástica nas seções anteriores, outras serão possíveis somente se o material apresentar algum outro tipo de simetria. De maneira geral, os materiais podem ser classificados quanto à simetria das propriedades elásticas basicamente em três grupos: *anisotrópicos*, *ortotrópicos* e *isotrópicos*. As propriedades de um material associadas a um eixo específico passando através de um ponto dependem, geralmente, da orientação deste eixo. Materiais são ditos isotrópicos se suas propriedades independem da orientação, ou seja, são constantes em todas as direções. Quando um material apresentar planos mutuamente ortogonais de simetria entre as propriedades, ele é conhecido como ortotrópico. E, no caso mais complexo, quando as propriedades diferem com relação as direções, ele é conhecido como material anisotrópico. Ao contrário da matriz de rigidez anisotrópica, equação (A.10), onde se tem a mesma forma com diferentes termos para diferentes sistemas de coordenadas, a forma da matriz de rigidez para um material ortotrópico dependerá do sistema de coordenadas utilizado. O caso de anisotropia tridimensional, mostrado anteriormente, onde se tem 21 termos independentes é o caso mais complexo, e os materiais com este tipo de comportamento são conhecidos como *totalmente anisotrópicos*. Já, no caso mais complexo de ortotropia tridimensional, o número máximo de constantes de rigidez independentes e não nulas é 9, de tal forma que:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & S & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

No caso bidimensional, este número máximo de constantes de rigidez independentes e não nulas se reduz a 4. A forma mais simples de relacionar tensão e deformação ocorre quando o material é isotrópico. Neste caso, cada eixo do sistema de coordenadas é um eixo

de simetria e alguns termos da matriz $\mathbf{C}$ serão iguais: $C_{11} = C_{22} = C_{33}$, $C_{12} = C_{13} = C_{23}$ e $C_{44} = C_{55} = C_{66}$. E também, o termo C_{44} não é um termo independente. Assim, tem-se:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & S & & (C_{11} - C_{12}/2) & 0 & 0 \\ & & & & (C_{11} - C_{12}/2) & 0 \\ & & & & & (C_{11} - C_{12}/2) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

E, portanto, existem somente 2 termos independentes dentre os 12 termos diferentes de zero.

Para os propósitos das análises mecânicas, as lâminas unidirecionais com fibras contínuas dispostas de forma paralela são os mais convenientes pontos de partida, ou seja, é a base para o estudo de laminados em geral. Sendo assim, considerando-se uma lâmina de material compósito com fibras contínuas unidirecionais, como mostra a figura A.4, se o sistema de coordenadas 1-2-3 está associado à direção das fibras, ele é chamado de *sistema principal de coordenadas*. Neste caso, um material é dito ser *especialmente ortotrópico* quando seu sistema de coordenadas é o sistema de coordenadas principal e, neste caso, ele apresentará sua matriz de rigidez para o caso tridimensional como mostra a equação (A.25). Das 12 constantes diferentes de zero, somente 9 são independentes. Se para este mesmo material o sistema de coordenadas adotado for diferente do sistema principal, como por exemplo o sistema xyz (figura A.4), a matriz de rigidez apresentará a mesma forma de uma matriz de um material anisotrópico, como mostra a equação (A.25). Neste caso o material recebe o nome de *geralmente ortotrópico* e apresenta no caso tridimensional apenas 9 constantes de rigidez independentes das 36 diferentes de zero, diferenciando-os dos materiais totalmente anisotrópicos. Quando ocorre de materiais especialmente ortotrópicos apresentarem ainda as propriedades ao longo da direção 2 (figura A.4) iguais às da direção 3 são conhecidos como

transversalmente isotrópicos. E, neste caso, têm-se: $C_{22} = C_{33}$, $C_{12} = C_{13}$, $C_{55} = C_{66}$, e C_{44} não independentes, onde os planos 2-3 e todos os paralelos são planos de isotropia. Assim, 5 de 12 constantes diferentes de zero são independentes, tendo-se:

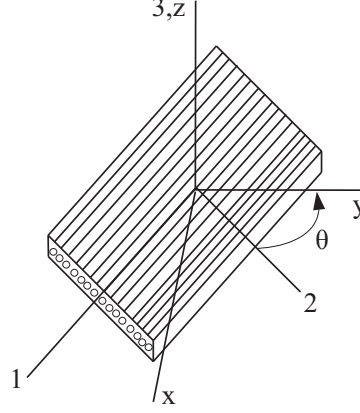


Figura A.4: Lâmina de material compósito com fibras contínuas unidirecionais.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & S & (C_{22} - C_{23}/2) & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{66} & 0 & 0 \\ & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

A Tabela A.1 mostra uma relação entre número de coeficientes elásticos independentes e diferentes de zero para os casos tri e bidimensionais, e ainda, a classificação dos materiais quanto ao número desses coeficientes.

A.1.5 Estado plano de tensão

Geralmente, em análise de laminados, a lâmina é assumida estar em um simples *estado plano de tensão*, ou também, em *estado bidimensional de tensão*. Neste caso, as relações tensão-deformação do caso especialmente ortotrópico podem ser simplificadas, e os termos

Tabela A.1: Número de constantes elásticas nas relações tensão/deformação para diferentes materiais e sistemas de coordenadas.

Material e sistema de coordenadas	Número de constantes não nulas	Número de constantes independentes
Caso 3D		
Anisotrópico	36	21
Geralmente ortotrópico (coordenadas aleatórias)	36	9
Especialmente ortotrópico (coordenadas principais)	12	9
Especialmente ortotrópico (transversalmente isotrópico)	12	5
Isotrópico	12	2
Caso 2D		
Anisotrópico	9	6
Geralmente ortotrópico (coordenadas aleatórias)	9	4
Especialmente ortotrópico (coordenadas principais)	5	4
Ortotrópico balanceado (coordenadas principais)	5	3
Isotrópico	5	2

σ_3 , τ_{23} e τ_{13} são nulos. A equação deformação-tensão para um material especialmente ortotrópico pode ser escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{12} \end{array} \right\}. \quad (\text{A.28})$$

E, portanto, desta relação torna-se óbvio que $\gamma_{23} = \gamma_{13} = 0$. Porém, a deformação na direção 3 não é nula e é escrita como:

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2, \quad (\text{A.29})$$

o que indica que para este estado plano de tensão existe uma deformação de extensão na direção 3. Este fato é um resultado direto das *razões* (ou *coeficientes*) *de Poisson* ν_{13} e ν_{23} que atuam em S_{13} e S_{23} , respectivamente, acoplados às componentes não nulas σ_1 e σ_2 . A equação de ε_3 forma a base para se determinar a mudança de espessura de laminados sujeitos a carregamentos no-plano, e para calcular os coeficientes de Poisson fora-do-plano em um laminado. Apesar do fato da deformação na direção 3 ser diferente de zero, a consideração de estado plano de tensão leva à uma relação envolvendo somente os termos ε_1 , ε_2 , γ_{12} e σ_1 , σ_2 e τ_{12} , assim como o fato de $\gamma_{23} = \gamma_{13} = 0$. A deformação da direção 3 é calculada como mostra a equação (A.29). Dessa forma, a equação para estado plano de tensão pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 = \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

onde a matriz de flexibilidade $\mathbf{S}$ é uma matrix reduzida 3x3, e os termos em relação às constantes de engenharia são:

$$S_{11} = 1/E_1, S_{12} = -\nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2, S_{22} = 1/E_2, S_{66} = 1/G_{12}. \quad (\text{A.31})$$

Considerando a relação inversa da matriz de flexibilidade, ou seja, partindo-se da matriz de rigidez e utilizando o estado plano de tensão, encontra-se a seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & S & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

E analogamente, $0 = C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3$, ou seja:

$$\varepsilon_3 = -\frac{C_{13}}{C_{33}}\varepsilon_1 - \frac{C_{23}}{C_{33}}\varepsilon_2. \quad (\text{A.33})$$

Agora, ao contrário do que foi feito anteriormente na equação (A.28) para obter a (A.30), a simplificação aqui não é direta eliminando simplesmente a deformação na direção 3. Como pode ser visto, à partir da equação (A.32) as tensões σ_1 e σ_2 podem ser escritas como:

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3, \quad (\text{A.34})$$

$$\sigma_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3. \quad (\text{A.35})$$

Substituindo a ε_3 nas equações (A.34) e (A.35), obtém-se:

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13} \left(-\frac{C_{13}}{C_{33}}\varepsilon_1 - \frac{C_{23}}{C_{33}}\varepsilon_2 \right), \quad (\text{A.36})$$

$$\sigma_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23} \left(-\frac{C_{13}}{C_{33}}\varepsilon_1 - \frac{C_{23}}{C_{33}}\varepsilon_2 \right). \quad (\text{A.37})$$

Incluindo o cisalhamento na relação tensão-deformação de cisalhamento, a relação entre tensões e deformações para o estado plano de tensão é escrito como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.38})$$

onde Q_{ij} são as componentes da *matriz de rigidez reduzida* da lâmina, de forma que as componentes do tensor de rigidez podem ser escritas a partir das equações (A.32) e (A.36) como:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, \\ Q_{12} &= C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}, \\ Q_{22} &= C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}, \\ Q_{66} &= C_{66}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

O termo reduzido é usado nas equações (A.30) e (A.38) pois ele é o resultado da redução de um caso tridimensional completo para um caso bidimensional de tensão. Os valores

numéricos das rigidez Q_{11} , Q_{12} e Q_{22} são na verdade menores do que os valores numéricos de seus respectivos C_{11} , C_{12} e C_{22} no problema tridimensional. É, portanto, importante observar que numericamente não existe realmente uma matriz de flexibilidade reduzida já que os valores numéricos de S_{ij} para o caso bidimensional são indênticos aos seus respectivos no caso tridimensional. Ou, em outras palavras, os elementos da matriz de rigidez reduzida da equação (A.39) envolvem a combinação de elementos da matriz de rigidez tridimensional. Portanto, é totalmente errôneo escrever a equação (A.38) da forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.40})$$

Invertendo a equação (A.33) e comparando-a com a equação (A.38), pode-se encontrar as seguintes equações:

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \quad Q_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \quad Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \quad Q_{66} = \frac{1}{S_{66}}. \quad (\text{A.41})$$

E, reescrevendo a equação (A.41) em termos de constantes de engenharia, têm-se:

$$Q_{11} = E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}),$$

$$Q_{22} = E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}),$$

$$Q_{16} = Q_{26} = 0, \quad (\text{A.42})$$

$$Q_{12} = \nu_{21}E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}),$$

$$Q_{66} = G_{12}.$$

Muitas vezes os eixos principais da lâmina (1-2-3) não são coincidentes com os eixos do laminado (x - y - z). Quando isto ocorre, a relação constitutiva para cada lâmina em particular dever ser transformada para o eixo de referência do laminado (figura A.4). Para que esta transformação seja feita, basta que os tensores de tensão e deformação sejam multiplicados pela matriz de transformação, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon'_{11} \\ \epsilon'_{22} \\ \epsilon'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.44})$$

onde: σ'_{ij} e ϵ'_{ij} são tensores de tensão e deformação, respectivamente, escritos no sistema de referência do laminado; σ_{ij} e ϵ_{ij} são os mesmos tensores escritos no sistema de referência da lâmina e; $\mathbf{T}$ a matriz de transformação dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.45})$$

sendo:

$$m = \cos\theta, \quad (\text{A.46})$$

$$n = \sin\theta. \quad (\text{A.47})$$

Convém observar que a matriz inversa $\mathbf{T}^{-1}$ pode ser obtida pela substituição do ângulo positivo θ , conforme figura A.4, pelo ângulo negativo $-\theta$. A equação constitutiva pode ser escrita da forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \epsilon'_{11} \\ \epsilon'_{22} \\ \epsilon'_{12} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.48})$$

onde:

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}(-\theta) = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.49})$$

Multiplicando-se as matrizes da equação (A.48), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon'_{11} \\ \epsilon'_{22} \\ \epsilon'_{12} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.50})$$

onde:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta,$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta,$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta), \quad (\text{A.51})$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta),$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})(\sin^3\theta\cos\theta),$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})(\sin\theta\cos^3\theta).$$

A matriz $\bar{Q}$ é completamente preenchida, sendo que das seis constantes elásticas que governam o comportamento da lâmina, duas, $\bar{Q}_{16}$ e $\bar{Q}_{26}$, são combinações lineares das outras quatro. No sistema de coordenadas transformado, a lâmina é dita geralmente ortotrópica, e a matriz $\bar{Q}$ é parecida com a matriz Q dos materiais totalmente anisotrópicos, ($\bar{Q}_{16} \neq 0$, $\bar{Q}_{26} \neq 0$). Quando se tem $Q_{16} = Q_{26} = 0$ diz-se que o material é *especialmente ortotrópico*.

A.2 Teoria Clássica de Placas Laminadas

Um laminado é constituído pela junção, empilhamento, de duas ou mais lâminas ou camadas de forma a atuar como uma única estrutura. A matriz de rigidez de laminados são obtidas em termos da matriz de rigidez de cada lâmina individualmente. Quando o laminado é construído por uma sequência de lâminas ortotrópicas com orientações arbitrárias, a matriz de rigidez será, geralmente, uma matriz cheia, com termos diferentes de zero. Em muitos casos, é possível e desejável montar uma sequência de lâminas de forma que um certo número de termos sejam nulos, o que, conseqüentemente, simplifica a análise. As direções principais de cada lâmina são dispostas de forma a se obter um elemento estrutural com as propriedades requeridas em todas as direções desejadas. A figura A.5 mostra o sistema de coordenadas global de referência (x - y - z) utilizado e as cargas resultantes atuantes na placa. A origem deste sistema de referência está posicionado na superfície média da placa. Os deslocamentos

de um ponto qualquer nas direções x , y e z são denominados por u , v e w , respectivamente. As considerações básica para uma análise estática inicial são:

- 1-A placa consiste de lâminas ortotrópicas com os eixos principais orientados ao longo de direções arbitrárias com relação ao eixo xy ;
- 2-A espessura da placa, h , é muito menor do que as dimensões do plano da placa;
- 3-Os deslocamentos u , v e w são muito pequenos comparados com a espessura da placa;
- 4-As deformações no-plano ε_x , ε_y e γ_{xy} são menores do que 1;
- 5-As deformações angulares γ_{xz} e γ_{yz} são desprezadas;
- 6-O deslocamento tangencial u e v são funções lineares da coordenada z ;
- 7-A deformação normal ε_z é desprezada;
- 8-Cada camada ou lâmina obedece a Lei de Hooke;
- 9-A espessura h da placa é constante;
- 10-As tensões de cisalhamento τ_{xz} e τ_{yz} se anulam ao longo das superfícies da placa definida por $z = \pm h/2$.

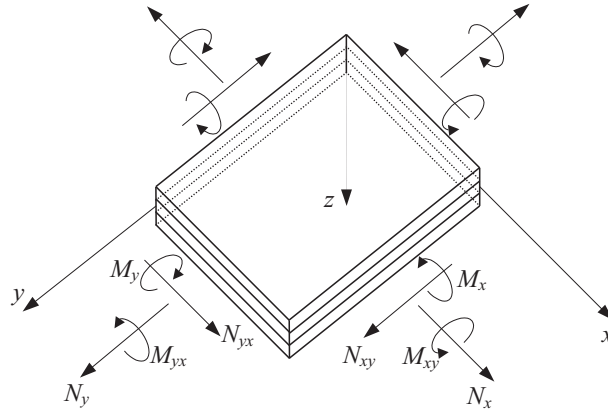


Figura A.5: Forças e momentos atuantes em um laminado.

A consideração 5 é uma consequência do estado plano de tensão e as considerações 5, 6 e 9 juntas definem resumidamente o que se conhece por *hipóteses de Kirchhoff* para deformações de placas, onde as linhas normais à superfície média permanecem retas e normais durante a deformação. De acordo com a hipótese 9, não existirá deformação ao longo da espessura em

todas as linhas normais à superfície da placa, ou seja, $\varepsilon_z = 0$. Esta hipótese de Kirchhoff é inconsistente com o fato das tensões σ_x e σ_y causarem deformações em z , como foi visto no item anterior. Felizmente, a consideração de que as linhas normais à superfície permanecem inalteradas em tamanho não entra diretamente no uso das hipóteses.

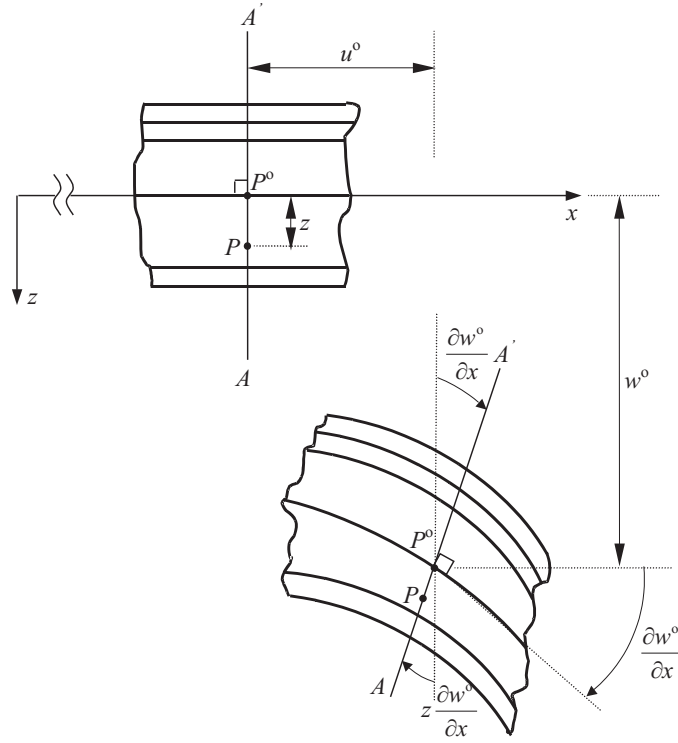


Figura A.6: Considerações de Kirchhoff.

De acordo com as considerações 6 e 7 pode-se escrever os deslocamentos nas direções x , y e z de um ponto P qualquer da placa (figura A.6) como sendo:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^o(x, y) - z \frac{\partial w^o(x, y)}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v^o(x, y) - z \frac{\partial w^o(x, y)}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w^o(x, y), \end{aligned} \tag{A.52}$$

onde u^o , v^o e w^o são os deslocamentos de translação de um ponto P^o da superfície média de referência da placa nas direções x , y e z , respectivamente, e $\partial w^o/\partial x$ e $\partial w^o/\partial y$ são as rotações do ponto P^o sobre os eixos y e x , respectivamente. De acordo com as hipótese de Kirchhoff, os deslocamento u e v variam linearmente ao longo de z , e o deslocamento fora do plano w independe de z . Tendo-se os deslocamentos (equação A.52) obtidos por meio das hipóteses de Kirchhoff, torna-se possível através das relações deformação-deslocamentos da teoria da elasticidade determinar as expressões para deformações da placa. Da teoria da elasticidade, têm-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y, z) &= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}, \\ \varepsilon_y(x, y, z) &= \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y}, \\ \varepsilon_z(x, y, z) &= \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z},\end{aligned}\tag{A.53}$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y},$$

$$\gamma_{yz}(x, y, z) = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z},$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z) = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z}.$$

Substituindo a equação (A.52) na equação (A.53), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x(x, y, z) &= \frac{\partial u^o(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w^o(x, y)}{\partial x^2} = \varepsilon_x^o(x, y) + z k_x^o(x, y), \\
\varepsilon_y(x, y, z) &= \frac{\partial v^o(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^o(x, y)}{\partial y^2} = \varepsilon_y^o(x, y) + z k_y^o(x, y), \\
\varepsilon_z(x, y, z) &= \frac{\partial w^o(x, y)}{\partial z} = 0,
\end{aligned}
\tag{A.54}$$

$$\gamma_{yz}(x, y, z) = \frac{\partial w^o(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial w^o(x, y, z)}{\partial y} = 0,$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z) = \frac{\partial w^o(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial w^o(x, y, z)}{\partial x} = 0,$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial v^o(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u^o(x, y)}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w^o(x, y)}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}^o + z k_{xy}^o,$$

onde as derivadas k_x^o e k_y^o são as curvaturas de flexão associadas à superfície média no-plano xz e yz , respectivamente, k_{xy}^o é a curvatura de torção fora-do-plano associada à superfície média e que está no plano xy antes da deformação, e γ_{xy}^o é a curvatura da superfície de referência na direção y . Uma vez que a equação (A.54) fornece as deformações para um ponto qualquer distante z da superfície média da placa, as tensões ao longo de eixos arbitrários x e y da k -ésima lâmina de um laminado pode ser encontrado substituindo estas expressões da equação (A.54) nas da equação (A.50), obtendo-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}_k = \left[\begin{array}{ccc} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{array} \right]_k = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x^o + z k_x^o \\ \varepsilon_y^o + z k_y^o \\ \gamma_{xy}^o + z k_{xy}^o \end{array} \right\},
\tag{A.55}$$

onde o subscrito k se refere à k -ésima lâmina. As tensões nas lâminas variam de uma para outra.

É conveniente lidar com um sistema mais simples de forças e momentos equivalente atuantes sobre o laminado. Deste modo, define-se *forças e momentos resultantes*. As forças resultantes são obtidas integrando a tensão correspondente através da espessura h do laminado, obtendo-se:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k dz, \quad (\text{A.56})$$

onde n é o número de camadas, N_x , N_y e N_{xy} tem unidades de força por unidade de comprimento. E os momentos resultantes são obtidos integrando-se através da espessura h as correspondentes tensões multiplicadas pelas distâncias em relação ao plano médio:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k z dz, \quad (\text{A.57})$$

onde M_x , M_y e M_{xy} tem unidades de momento por unidade de comprimento. As tensões nas equações (A.56) e (A.57) podem ser reescritas em termo das deformações e curvaturas a partir da equação (A.55) obtendo-se:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{pmatrix} dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{pmatrix} z dz \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} dz + \right. \\
&\quad \left. + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{Bmatrix} z^2 dz \right\} \quad (A.59)
\end{aligned}$$

Pelas considerações feitas, como as deformações e curvaturas do plano médio permanecem constantes não somente dentro de uma lâmina mas em todas as lâminas do laminado, e, a matriz $\bar{Q}$ permanece constante dentro de uma lâmina, então pode-se reescrever as equações (A.56) e (A.57) como:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \left(\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right) \begin{Bmatrix} k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{Bmatrix}, \quad (A.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \left(\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right) \begin{Bmatrix} k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{Bmatrix}. \quad (A.61)
\end{aligned}$$

Que também podem ser reescritas como:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.62})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.63})$$

onde:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3), \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

onde $i, j = 1, 2, 6$. Ou ainda, a equação constitutiva total da placa pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \dots & \dots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \dots \\ k^o \end{Bmatrix} \quad (\text{A.65})$$

onde A é a *matriz de rigidez à extensão*, B é a *matriz de rigidez de acoplamento*, que acopla as matrizes A e D , D é a *matriz de rigidez à flexão*. A matriz A descreve as forças resul-

tantes para as deformações do plano médio e a matriz D descreve os momentos resultantes para as curvaturas da placa. A matriz ABD define uma relação entre tensões resultantes aplicadas em um laminado e as curvaturas e deformações da superfície de referência. Ela é um resultado direto das hipóteses de Kirchhoff, das considerações tensão/deformação (Lei de Hooke) e da definição de tensões resultantes. Esta matriz de rigidez envolve tudo que define um laminado: propriedades dos materiais das lâminas, orientações das fibras, espessura e localização (sequência de empilhamento).

Uma boa simplificação com relação as propriedades elásticas em laminados pode ocorrer quando a matriz de acoplamento B é nula. A contribuição de uma lâmina específica para um termo em particular da matriz B é dado pelo produto de seu termo correspondente da matriz $\bar{Q}$ pela diferença dos quadrados das coordenadas z das extremidades superior e inferior da lâmina, como é mostrado na equação (A.64). Assim, a matriz B pode ser nula se para cada lâmina acima do plano médio do laminado existir uma lâmina de mesma orientação, espessura e distância situada abaixo deste mesmo plano. Estes laminados são chamados de *laminados simétricos*. Quando para cada lâmina em um laminado existir uma outra lâmina de mesma espessura, propriedades do material e orientação oposta das fibras, são chamados de *laminados balanceados*. Nestes, as lâminas iguais não precisam estar localizadas em distâncias iguais e opostas à superfície média, ou seja, não é necessário haver simetria. Na grande maioria dos casos, tal condição é sempre considerada em projetos por ser a simetria mais fácil de se trabalhar devido a simplificações e por não causar indesejáveis comportamentos nos laminados típicos da não-simetria, como distorções (empenamento) devido às cargas no-plano e condições térmicas de resfriamento e mudanças de temperatura.

Uma outra possibilidade é a fabricação de laminados que comportam-se como uma única lâmina ortotrópica com relação às tensões e deformações no-plano. Para tais laminados não existe acoplamento entre tensões normais (ou forças) e deformações angulares, o que é possível se $A_{16} = A_{26} = 0$. A contribuição de uma lâmina em um termo particular da matriz A é dado pelo produto de seu termo correspondente da matriz $\bar{Q}$ pela espessura da lâmina, como é mostrado na equação (A.64). Assim, a contribuição de uma lâmina para

um termo A_{ij} pode ser anulado se uma outra lâmina de mesma espessura mas cujo termo correspondente $\bar{Q}_{ij}$ possui sinal oposto ao termo $\bar{Q}_{ij}$ da primeira lâmina. Os termos A_{16} e A_{26} podem ser nulos se para cada lâmina orientada por um ângulo positivo θ no laminado existir uma outra lâmina de mesma espessura e orientada com um ângulo negativo θ . Assim, é possível projetar um laminado que será simétrico ($B = 0$) e ao mesmo tempo especialmente ortotrópico com relação às forças e deformações ($A_{16} = A_{26} = 0$).

Três tipos de laminados ortotrópicos podem ser construídos: laminados unidirecionais com todas as lâminas com mesma orientação; laminados com lâminas orientadas somente com ângulos de 0° ou 90° ; laminados com o mesmo número de lâminas orientadas com sequências $\pm\theta$, sendo $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Da mesma forma, a matriz D também pode ser simplificada. De acordo com a equação de D mostrado em (A.64), se a contribuição geométrica do termo $(h_k^3 - h_{k-1}^3)$ é sempre positiva, mostra que D_{11} , D_{22} , D_{12} e D_{16} serão sempre positivos. Por outro lado, se $\bar{Q}_{16}$ e $\bar{Q}_{26}$ são funções ímpares de θ , então os termos D_{16} e D_{26} são nulos se as lâminas são orientadas com 0° ou 90° ou se para cada lâmina com um ângulo positivo $+\theta$ acima do plano médio existir uma outra lâmina abaixo com mesma espessura e distância do plano médio e com um ângulo negativo $-\theta$. Porém, para esta última condição não serão laminados simétricos e $B_{ij} \neq 0$. Assim, os termos D_{16} e D_{26} não são nulos para nenhum laminado simétrico com relação ao plano médio exceto se possuir lâminas com fibras dispostas em 0° ou 90° . Se o laminado for montado de forma que as laminas fiquem em sequência, com ângulos iguais e opostos, D_{16} e D_{26} terão valores pequenos, principalmente quando o número de camadas for grande. Isto ocorre pois a contribuição da lâmina $+\theta$ é oposta em sinal à contribuição da lâmina $-\theta$, o que, conseqüentemente, faz com se cancelem parcialmente, mesmo tendo estas distâncias diferentes com relação ao plano médio.

Um laminado de considerável importância prática é chamado de *quase-isotrópico*. Nestes tipos de laminados a matriz de rigidez à extensão A é isotrópica, tendo, portanto, coeficientes elásticos independentes da orientação no plano. Assim como nos isotrópicos, somente duas constantes elásticas são independentes. Estes materiais podem ser construídos de tal forma que: o número total de lâminas deve ser maior ou igual a 3; as lâminas individuais devem ter

as matrizes de rigidez Q idênticas e mesmas espessuras e ; as lâminas devem ser orientadas com ângulos iguais, sendo que, se o número de camadas for n , o ângulo entre duas camadas adjacentes deve ser π/n . Se o laminado é construído por grupos de 3 ou mais lâminas, a condição com relação a orientação deve ser satisfeita pelas lâminas em cada grupo. De maneira geral, pode escrever as seguintes relações para estes materiais: $A_{11} = A_{22}$, $A_{11} - A_{12} = 2A_{66}$ e $A_{16} = A_{26} = 0$. O termo *quase* é usado pois o efeito do módulo de cisalhamento efetivo, $\bar{G}_{xy}$, não está relacionado com os módulos extensionais efetivos e com o coeficiente de Poisson pela relação:

$$\bar{G}_{xy} = \frac{\bar{E}_x}{2(1 + \bar{\nu}_{xy})}, \quad (\text{A.66})$$

como ocorre nos materiais isotrópicos. O valor de $\bar{G}_{xy}$ é numericamente próximo ao lado direito da equação, mas a igualdade simplesmente não é válida.

Há autores que consideram anisotropia completa somente quando existem as matrizes ABD cheias. Neste caso, materiais simétricos, onde a matriz B não é nula, não são considerados totalmente anisotrópicos. Neste trabalho, será considerado totalmente anisotrópicos os laminados simétricos onde as matrizes A e D são cheias não apresentando planos ortogonais de simetria, como ocorre nos materiais geralmente ortotrópicos.

A.3 Equações de equilíbrio de placas laminados

A.3.1 Equações diferenciais de equilíbrio estático

A análise de deflexões transversais em placas laminadas tem sua base na teoria clássica de laminados e em equações diferenciais de equilíbrio. Para um elemento infinitesimal, como mostrado na figura A.7, tem-se: as tensões resultantes no-plano, os momentos resultantes e, as tensões de cisalhamento transversal resultantes. Assumindo-se pequenas deflexões de maneira que as componentes fora do plano das resultantes N_x , N_y e N_{xy} possam ser desconsideradas,

pelo equilíbrio estático, têm-se:

$$\sum F_x = 0 \implies$$

$$N_x dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy + N_{xy} dx + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dx dy - N_x dy - N_{xy} dx = 0 \implies \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (\text{A.67})$$

onde F_x são as forças em x ,

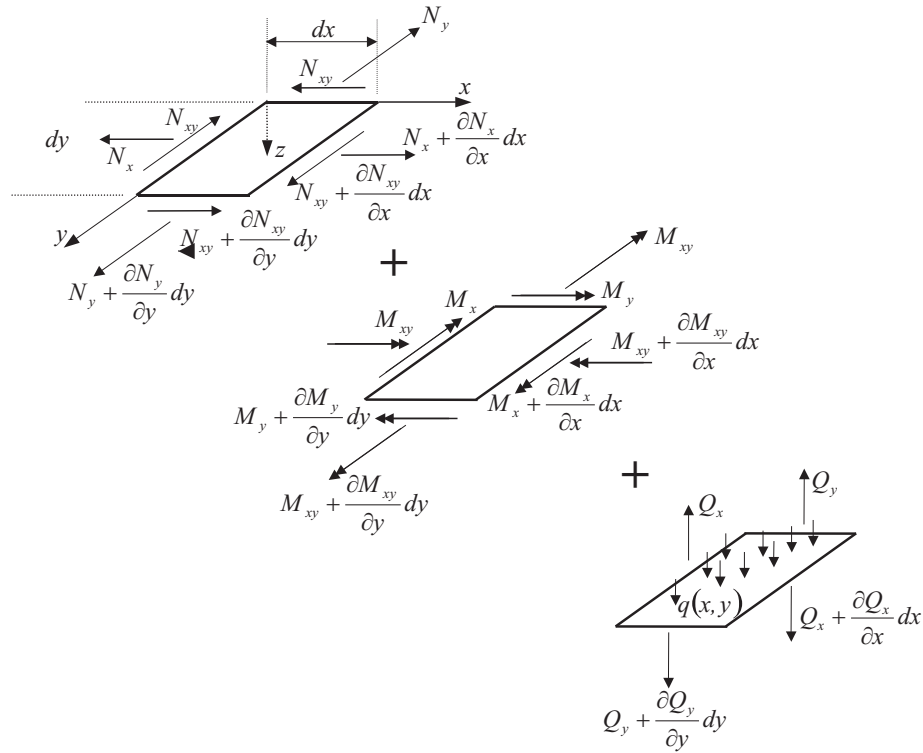


Figura A.7: Forças e momentos resultantes atuantes em uma placa.

$$\sum F_y = 0 \implies$$

$$N_y dx + \frac{\partial N_y}{\partial y} dx dy + N_{xy} dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx dy - N_y dx - N_{xy} dy = 0 \implies \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.68})$$

onde F_y são as forças em y ,

$$\sum F_z = 0 \implies$$

$$Q_x dy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + Q_y dx + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy - Q_x dy - Q_y dx + q(x, y) = 0 \implies$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x, y) = 0, \quad (\text{A.69})$$

onde F_z são as forças em z , e

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz, \quad (\text{A.70})$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz, \quad (\text{A.71})$$

$$\sum m_y = 0 \implies$$

$$\begin{aligned} & -M_y dx - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx - M_{xy} dy - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + Q_y dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + \\ & + q(x, y) dx dy \frac{dy}{2} + Q_x dy \frac{dy}{2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy \frac{dy}{2} - M_y dx + \end{aligned}$$

$$+M_{xy}dy - Q_x dy \frac{dy}{2} = 0 \implies \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y, \quad (\text{A.72})$$

onde m_y são os momentos resultantes em torno do eixo x . De maneira similar, tem-se:

$$\sum m_x = 0 \implies$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x, \quad (\text{A.73})$$

onde m_x são os momentos resultantes em torno do eixo y . Substituindo as equações (A.72) e (A.73) na equação (A.69), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y) = 0. \quad (\text{A.74})$$

Portanto, as equações de equilíbrio da placa em termos de deslocamentos podem ser obtidas substituindo-se as equações de força-deformação (A.62) e (A.63), as relações ε_x^o , ε_y^o e γ_{xy}^o de deslocamento-deformação da equação (A.54), e as relações k_x^o , k_y^o e k_{xy}^o de deslocamento-curvatura também da equação (A.54) nas equações (A.67), (A.68) e (A.74), obtendo-se:

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x^2} + \\ & + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v^o}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x^2} + \\
& + 2A_{26} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v^o}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \\
& - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0,
\end{aligned} \tag{A.76}$$

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \\
& + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u^o}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u^o}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u^o}{\partial x \partial y^2} - \\
& - B_{26} \frac{\partial^3 u^o}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v^o}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v^o}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v^o}{\partial x \partial y^2} - \\
& - B_{22} \frac{\partial^3 v^o}{\partial y^3} = q(x, y).
\end{aligned} \tag{A.77}$$

A.3.2 Equações diferenciais de equilíbrio dinâmico

As equações mais gerais de movimento para vibrações transversal e no-plano de um laminado podem ser obtidas modificando-se as equações de equilíbrio estático para equilíbrio dinâmico baseado na segunda Lei de Newton. Dessa forma, as funções u^o, v^o e w passam a ser funções da variável tempo t e as equações (A.75), (A.76) e (A.77) podem ser reescritas como:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x^2} +$$

$$\begin{aligned}
& +(A_{12} + A_{66})\frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} + A_{26}\frac{\partial^2 v^o}{\partial y^2} - B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \\
& -(B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \rho h \frac{\partial^2 u^o}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{A.78}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16}\frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66})\frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + A_{26}\frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + A_{66}\frac{\partial^2 v^o}{\partial x^2} + \\
& + 2A_{26}\frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} + A_{22}\frac{\partial^2 v^o}{\partial y^2} - B_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \\
& - 3B_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \rho h \frac{\partial^2 v^o}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{A.79}$$

$$\begin{aligned}
& D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \\
& + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{11}\frac{\partial^3 u^o}{\partial x^3} - 3B_{16}\frac{\partial^3 u^o}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3 u^o}{\partial x \partial y^2} - \\
& - B_{26}\frac{\partial^3 u^o}{\partial y^3} - B_{16}\frac{\partial^3 v^o}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3 v^o}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26}\frac{\partial^3 v^o}{\partial x \partial y^2} - \\
& - B_{22}\frac{\partial^3 v^o}{\partial y^3} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y),
\end{aligned} \tag{A.80}$$

onde ρ é a densidade do laminado (massa por unidade de volume), h é a espessura do laminado, t é o tempo, $u^o(x, y, t)$ são os deslocamentos da superfície média na direção x , $v^o(x, y, t)$ são os deslocamentos da superfície média na direção y , e $w(x, y, t)$ são os deslocamentos da superfície média na direção z ou seja, deslocamento transversal da superfície média. As

equações (A.78), (A.79) e (A.80) representam as equações diferenciais que governam a vibração no-plano e fora-do-plano (vibração transversal) de placas laminados anisotrópicos. Para laminados simétricos, como ocorre na maioria dos projetos de engenharia e que serão usados neste trabalho, a matriz B será nula ($B_{ij} = 0$) e, conseqüentemente, pode ser eliminada nas equações anteriores. Assim, têm-se:

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x^2} + \\ + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v^o}{\partial y^2} = \rho h \frac{\partial^2 u^o}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

$$\begin{aligned} A_{16} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x^2} + \\ + 2A_{26} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v^o}{\partial y^2} = \rho h \frac{\partial^2 v^o}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \\ + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

Por motivo de simplificação, neste trabalho u e v serão usados ao invés de u^o e v^o , respectivamente, para se referirem aos deslocamentos da superfície média. As equações (A.81) e (A.82) são as equações diferenciais que regem o movimento vibratório no-plano para placas finas anisotrópicas e simétricas, e (A.83) é a equação diferencial que rege o movimento transversal de placas finas anisotrópicas simétricas. Estas equações são as equações utilizadas neste trabalho para a identificação das propriedades elásticas A_{ij} 's e D_{ij} 's.

Apêndice B

Comparação numérica das formas modais

Existem várias técnicas para quantificar a correlação entre as formas modais simuladas e estimadas. De fato, estes métodos são utilizados para toda espécie de comparações, não apenas entre resultados estimados e teóricos. Um dos métodos mais tradicionais de verificar a correlação entre duas formas modais é por meio do critério conhecido pela literatura por “Modal Assurance Criterion” (MAC) ou Critério de Confiança Modal. Este parâmetro assume que a forma modal seja um número complexo e proporciona um índice de correlação entre os modos. Assim, considerando que Φ_X seja a forma modal complexa estimada (ou medida) e Φ_A a teórica (ou de referência), define-se o MAC pela seguinte expressão:

$$MAC(A, X) = \frac{\left| \sum_{j=1}^n (\Phi_X)_j (\Phi_A)_j^* \right|^2}{\left(\sum_{j=1}^n (\Phi_X)_j (\Phi_X)_j^* \right) \left(\sum_{j=1}^n (\Phi_A)_j (\Phi_A)_j^* \right)}$$

onde o símbolo “*” significa complexo conjugado e n é o número de formas modais utilizadas. O resultado obtido é um número real mesmo quando as formas modais são complexas. O valor do MAC esperado quando as formas modais experimentais e teóricas são iguais é 1,0 (ou 100%), e quando os modos comparados são totalmente diferentes, então o valor de MAC deverá ser 0.

Tendo-se um conjunto de m_X modos experimentais e m_A modos teóricos, pode-se então obter uma matriz de dimensão $m_X \times m_A$ com valores de MAC representando, claramente, quais modos experimentais se correlacionam com os modos teóricos.

Na prática, é difícil obter valores do MAC iguais a 1,0. Sendo assim, adota-se que, para valores superiores a 0,9 os modos podem ser considerados correlacionados e, para valores menores que 0,05 os modos não apresentam nenhuma correlação, ou seja, são totalmente diferentes. Deve-se ressaltar, no entanto, que estes valores apresentados são apenas uma referência e que o nível de correlação aceitável depende sobretudo do uso que será feito dos parâmetros estimados.