

ESTE EXEMPLAR É DEVIDO À REDECAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Vicente Luiz Scalon
APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 17/07/98
Kamal A. R. Ismail
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Estudo de Mudança de Fase em Geometria Plana Aletada Incluindo os Efeitos Convectivos

Autor: **Vicente Luiz Scalon**

Orientador: **Kamal A. R. Ismail**

21/98

Sca47e

35490/BC

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E DE FLUIDOS

Estudo de Mudança de Fase em Geometria Plana Aletada Incluindo os Efeitos Convectivos

Autor: **Vicente Luiz Scalon**

Orientador: **Kamal A. R. Ismail**

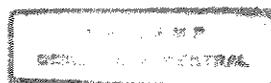
Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Térmica e Fluidos

Tese de Doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1998

S.P. - Brasil



98225117

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	Sc47e
V.	Es.
TOMBO BC/	35490
PROC.	395/98
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	28,11,00
DATA	32/10/98
N.º CPD	

CM-00117531-7

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Sc47e Scalon, Vicente Luiz
Estudo de mudança de fase em geometria plana aletada incluindo os efeitos convectivos. / Vicente Luiz Scalon.-- Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Kamal A. R. Ismail.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

I. Calor - Armazenamento. 2. Calor - Convecção natural. I. Ismail, Kamal A.R. II Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

TESE DE DOUTORADO

**ESTUDO DE MUDANÇA DE FASE EM
GEOMETRIA PLANA ALETADA INCLUINDO
OS EFEITOS CONVECTIVOS**

Autor : Vicente Luiz Scalon

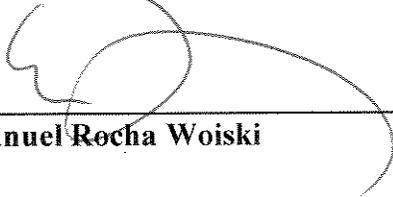
Orientador: Kamal A. R. Ismail



**Prof. Dr. Kamal A. R. Ismail, Presidente
UNICAMP**



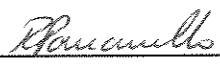
**Prof. Dr. Celso Luiz da Silva
UNESP**



**Prof. Dr. Emanuel Rocha Woiski
UNESP**



**Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura
UNICAMP**



**Prof. Dr. Renato Pavanello
UNICAMP**

Campinas, 17 de julho de 1998.

*À minha Mulher, meus Filhos e meus Pais
pela paciência e apoio durante todo este tempo*

Agradecimentos

Uma infinidade de agradecimentos são necessários quando se termina um trabalho extenso como este. Entretanto como seriam necessárias também uma infinidade de páginas e mesmo assim, alguém ainda poderia ser esquecido, gostaria de agradecer de maneira geral a todos que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento e término deste trabalho. No entanto, algumas pessoas e instituições contribuíram de forma mais efetiva e constante no desenvolvimento deste trabalho e aos quais farei um agradecimento especial:

A meu orientador, Prof. Dr. Kamal A. R. Ismail, pela paciência e compreensão com um orientado que, pela própria situação de emprego, não podia estar constantemente presente e dependia sempre de um empenho diferenciado em determinados dias.

Ao Prof. Dr. Alcides Padilha, meu colega de Universidade, também pelo seu empenho em me ajudar na finalização deste trabalho e sem o qual a tarefa seria, sem dúvida, mais árdua.

Às instituições CDTN-CNEN de Belo Horizonte e FE-Bauru-UNESP, pelo empenho e tempo de serviço dado para a finalização da tese. Também um agradecimento especial à CAPES e CNPq pelas bolsas de estudo fornecidas para o desenvolvimento do trabalho.

E o agradecimento indireto a todos que, muitas vezes, me ofereceram uma parte do seu tempo discutindo aspectos, referências, desenvolvimento e implementação do método e que muito contribuíram para a finalização do trabalho.

Resumo

SCALON, Vicente Luiz, *Estudo de Mudança de Fase em Geometria Plana Aletada Incluindo os Efeitos Convectivos*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 128 p. (Tese de Doutorado).

Este trabalho apresenta uma metodologia que foi elaborada para a solução de problemas de mudança de fase, através do método de elementos finitos, na qual se considera a convecção natural no meio fluido. Diversos métodos de solução tanto para o problema de mudança de fase como de convecção natural foram avaliados, procurando identificar os mais adequados. Os métodos apresentados foram validados separadamente permitindo, desta forma, a avaliação detalhada do seu comportamento sob os mais diferentes aspectos e, principalmente, a sua eficiência na solução do problema considerado. Depois disto, é resolvido um problema genérico que envolve tanto os fenômenos de mudança de fase como convecção natural. Os resultados assim obtidos permitiram a validação do modelo genérico através da sua comparação com resultados previamente publicados na literatura. Após a etapa de validação, o modelo completo, que engloba mudança de fase e convecção natural, é aplicado a uma geometria aletada típica de armazenadores térmicos. Alguns resultados que permitem a avaliação de diversos parâmetros de influência em projetos deste tipo são apresentados e analisados.

Palavras Chave: Mudança de Fase, Convecção Natural, Armazenamento Térmico, Elementos Finitos

Abstract

SCALON, Vicente Luiz, *Study of Phase Change in a Plan Finned Geometry Including Convective Effects*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 128 p. (Tese de Doutorado).

This work presents a new formulation, based on the finite elements method approach, for the solution of phase change problems with natural convection in the fluid phase. Several methods of solution for the problems of phase change and natural convection are evaluated. These methods were validated and a detailed evaluation of its behavior under different aspects and, mainly, its efficiency in the solution of the proposed problem were equally evaluated. A generic problem which involves the phase change and natural convection phenomenon is solved. The obtained results allowed the validation of the generic model through comparison with results previously published. Consequently, the phase change problem with natural convection is applied to a typical finned geometry used in thermal control and storage units. Additional results that evaluate the influence of some parameters in this kind of equipment are presented and analyzed.

Key Words: Phase Change, Natural Convection, Thermal Storage, Finite Elements
Applied to

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	Armazenadores Térmicos	2
1.2	Objetivos	3
1.3	Análise das alternativas para a formulação	4
1.4	Equações básicas para a solução do problema e sua adimensionalização	10
2	Revisão Bibliográfica	13
2.1	Mudança de fase	14
2.2	Escoamento de fluidos newtonianos	22
3	Aplicação da Técnica de Elementos Finitos	28
3.1	Método de Elementos Finitos (FEM)	28
3.2	Princípios Básicos	29
3.3	Discretização da equação de transporte usando o método de Galerkin para geometrias bidimensionais	32
3.4	Geração automática de malha	37
4	Formulação do problema	41
4.1	Formulações para o problema com mudança de fase utilizando-se o método de elementos finitos	41

4.1.1	Método Entálpico	42
4.1.2	Funções para o cálculo da entalpia	46
4.2	Solução para o problema do escoamento	50
4.2.1	Modelagem do campo de velocidades e pressão com interpolação de mesma ordem	50
4.2.2	Inclusão dos efeitos de convecção natural	55
4.3	Formulação adotada na solução do problema proposto	56
4.3.1	Procedimento de solução	58
5	Validação do Modelo Proposto	60
5.1	Resultados comparativos para o caso de convecção natural em cavidade fechada	61
5.2	Resultados para diversos tratamentos de condições de simetria na fronteira	67
5.3	Comparação dos modelos unidimensionais para mudança fase	72
5.4	Solução de um problema unidimensional com condição de contorno de fluxo de calor	78
5.5	Avaliação do esquema para um problema de mudança de fase com convecção	81
5.6	Considerações finais	90
6	Resultados e Discussões	92
6.1	Determinação do refinamento da malha	94
6.2	Influência dos parâmetros de projeto	96
6.2.1	Influência do perfil inicial de temperaturas	96
6.2.2	Influência dos parâmetros adimensionais	98
6.2.3	Influência dos parâmetros geométricos	103
6.3	Comparação entre o processo de fusão e solidificação	107

6.4	Parâmetros adicionais para geometrias não aletadas	109
6.4.1	Fluxo de calor constante na parede	110
6.4.2	Alteração da relação geométrica de uma cavidade com material de mudança de fase	114
7	Conclusões e Sugestões	117
A	Aspectos da solução numérica	127

LISTA DE FIGURAS

1.1	Esquema da geometria a ser utilizada.	4
1.2	Oscilação do campo de pressões.	8
1.3	Esquema comparativo das diversas grades.	9
3.1	Esquema de armazenamento de matriz de banda.	31
3.2	Normais que se auto-anulam de dois elementos de fronteira comum.	34
3.3	Esquema de uma geometria arbitrária com representação das fronteiras.	38
3.4	Geração de malhas para geometrias complexas.	39
3.5	Geometrias complexas que apresentaram problemas utilizando-se de mapeamento transfinito.	40
4.1	Diagrama representativo do volume elementar de um ponto.	46
4.2	Comportamento diferenciado da entalpia	47
5.1	Cavidade fechada com circulação provocada por convecção natural.	61
5.2	Resultados comparativos para $Ra = 1 \times 10^3$	63
5.3	Resultados comparativos para $Ra = 1 \times 10^4$	64
5.4	Resultados comparativos para $Ra = 1 \times 10^5$	65
5.5	Resultados comparativos para $Ra = 1 \times 10^6$	66
5.6	Esquema do problema teste para a condição de simetria.	68

5.7	Perfil de velocidades tangenciais na fronteira de simetria.	69
5.8	Perfil de velocidades normais no ponto anterior à fronteira de simetria. . .	69
5.9	Perfil de temperaturas sobre a fronteira de simetria.	70
5.10	Correntes convectivas para comparação das condições utilizadas.	71
5.11	Esquema do problema de solidificação unidimensional.	72
5.12	Evolução da frente de solidificação com o tempo para as diversas formulações.	74
5.13	Evolução da temperatura do ponto na posição $x = 0.1$ com o tempo para as diversas formulações.	75
5.14	Evolução da temperatura do ponto na posição $x = 0.1$ com o tempo para diversos $\Delta\theta$	76
5.15	Evolução da frente de solidificação com o tempo para as diversas discretizações no tempo.	76
5.16	Evolução da temperatura do ponto na posição $x = 0.1$ com o tempo para as diversas discretizações no tempo.	77
5.17	Esquema do problema de solidificação unidimensional.	79
5.18	Evolução da frente de solidificação com o tempo.	79
5.19	Evolução da temperatura na parede na face sujeita ao fluxo de calor. . . .	80
5.20	Esquema do problema proposto.	82
5.21	Comparação do campo de velocidades na fusão ($\tau = 0,01955, t = 6,40$ s). .	83
5.22	Comparação do campo de temperaturas na fusão ($\tau = 0,01955, t = 6,40$ s).	84
5.23	Comparação do campo de velocidades na fusão ($\tau = 0,12, t = 39,27$ s). . .	85
5.24	Comparação do campo de temperaturas na fusão ($\tau = 0,12, t = 39,27$ s). .	86
5.25	Comparação do campo de velocidades na fusão ($\tau = 0,547, t = 178,99$ s). .	87
5.26	Comparação do campo de temperaturas na fusão ($\tau = 0,547, t = 178,99$ s).	88
5.27	Comparação do campo de velocidades na de fusão ($\tau = 1,455, t = 476,11$ s).	89
5.28	Comparação do campo de temperaturas na fusão ($\tau = 1,455, t = 476,11$ s).	90

6.1	Comparação das isotermas para diferentes condições de temperatura na aleta.	94
6.2	Comparação das isocurvas de função corrente para diferentes condições de temperatura na aleta.	95
6.3	Massa fundida em função do tempo para diversos tamanhos de malhas. . .	96
6.4	Perfis de velocidade para as diversas malha no instante $\tau = 0,1$	97
6.5	Massa fundida em função do tempo para valores diferentes da temperatura inicial do sólido.	98
6.6	Massa fundida em função do tempo para diferentes valores de Ste.	99
6.7	Comportamento da função corrente em função da variação do Ste para $\tau = 0,1$	100
6.8	Comportamento do campo de temperaturas em função da variação do Ste para $\tau = 0,1$	100
6.9	Massa fundida em função do tempo para valores diferentes de Ra.	101
6.10	Comportamento da posição média da frente de fusão com a variação do Ra.	102
6.11	Desenvolvimento do perfil de velocidades para $Ra = 1,42 \times 10^5$	102
6.12	Comportamento da função corrente com a variação do Ra para $\tau = 0,05$. .	103
6.13	Massa fundida em função do tempo para diferentes valores de razão de compacticidade.	104
6.14	Comportamento da frente de fusão com a variação da razão de compacticidade.	105
6.15	Comportamento do perfil de velocidades com a variação da razão de compacticidade para $\tau = 0,05$	106
6.16	Massa que mudou de fase em função do tempo para os casos de fusão e solidificação.	107
6.17	Comportamento da função corrente nos casos de fusão e solidificação em instantes que a convecção tem maior influência.	108

6.18	Comportamento dos perfis de temperatura para os casos de fusão e solidificação em $\tau = 0,15$	109
6.19	Gráfico comparativo da massa fundida em função do tempo para injeção de calor lateral e inferior.	110
6.20	Gráfico comparativo da temperatura de parede em função do tempo para injeção de calor lateral e inferior na superfície não adiabática.	111
6.21	Evolução da frente de solidificação com a variação para as duas condições de fluxo de calor imposto.	112
6.22	Evolução do perfil de velocidades para o caso de fluxo de calor lateral. . . .	113
6.23	Evolução do perfil de velocidades para o caso de fluxo de calor pela face inferior.	113
6.24	Influência da mudança da relação geométrica nas isothermas.	115
6.25	Influência da mudança da relação geométrica nas isocurvas de função corrente.	116

LISTA DE TABELAS

5.1	Resultados Comparativos para $Ra = 1 \times 10^3$	63
5.2	Resultados Comparativos para $Ra = 1 \times 10^4$	64
5.3	Resultados Comparativos para $Ra = 1 \times 10^5$	65
5.4	Resultados comparativos para $Ra = 1 \times 10^6$	66
5.5	Tempo total requerido para a solidificação total do domínio e tempo de CPU ($\Delta\tau = 5.48 \times 10^{-4}$).	74
6.1	Condições físicas e geométricas do problema padrão utilizado.	92
A.1	Parâmetros utilizados para a obtenção da solução numérica.	128

Nomenclatura

Letras Latinas

- a termos de uma matriz genérica A ;
- b termos de um vetor B ;
- c_p calor específico [J/kg °C];
- \bar{c}_p razão entre a capacidade térmica e o valor de referência utilizado;
- C_p capacidade térmica do material [J/m³°C];
- C termo de capacitância genérico;
- $[C]$ matriz dos termos convectivos;
- $[D_C]$ matriz diagonal de capacidade térmica;
- e espessura adimensional da aleta;
- Fo número de Fourier;
- g aceleração da gravidade [m/s²];
- h entalpia [J/kg];
- H entalpia adimensional;
- \hat{h} altura adimensional da geometria considerada;
- $[J]$ Jacobiano da transformação de coordenadas;
- k condutividade térmica [W/m °C];
- \mathcal{K} termo difusivo genérico;
- K_p termo associado à pressão na equação da quantidade de movimento;
- $[K]$ matriz de difusividade;

- L dimensão característica do problema [m];
- $[m]$ matriz massa elementar;
- $[M]$ matriz massa global;
- $[m_c]$ matriz elementar que embute os efeitos da capacidade térmica;
- $[M_c]$ matriz global que embute os efeitos da capacidade térmica;
- N função de interpolação;
- p pressão [Pa]
- P pressão adimensional;
- \mathcal{P}_z matriz dos termos de pressão para uma direção z ;
- Pr número de Prandtl;
- Ra número de Rayleigh;
- $s^{p,z}$ termo fonte associado à equação da pressão na direção z ;
- S termo fonte;
- Ste número de Stefan;
- t tempo [s];
- T temperatura [°C];
- u velocidade na direção x [m/s];
- u_i coordenada utilizada para geração de malha em um domínio;
- U velocidade adimensional na direção x ;
- v velocidade na direção y [m/s];
- v_e domínio elementar adimensional;
- v_j coordenada utilizada para geração de malha em um domínio;
- V velocidade adimensional na direção y ;
- W função peso genérica;
- x coordenada x [m];
- X coordenada adimensional de x ;
- y coordenada y [m];
- Y coordenada adimensional de y ;

Letras Gregas

- α difusividade térmica ($k/\rho c_p$) [m^2/s];
 β coeficiente de expansão térmica [$1/\text{K}$];
 γ valor que determina o esquema de discretização no tempo;
 Γ superfície do problema;
 ΔT faixa de temperatura de mudança de fase [K];
 $\Delta \theta$ faixa de temperatura de mudança de fase adimensional;
 ε valor do resíduo;
 λ calor latente de mudança de fase [J/kg];
 η coordenada local;
 ρ densidade [kg/m^3];
 ϕ propriedade genérica para discretização das equações;
 τ tempo adimensional;
 θ temperatura adimensional;
 Ω domínio do problema;
 Ω^e domínio elementar;
 μ viscosidade dinâmica [$\text{kg}/\text{m s}$];
 ν viscosidade cinemática [m^2/s];
 ξ coordenada local;
 ξ_n fronteira para geração de malha, $n = 1, 2$;
 ψ_n fronteira para geração de malha, $n = 1, 2$;

Sobrescritos

- limite inferior da faixa de mudança de fase;
- + limite superior da faixa de mudança de fase;
- ★ valor estimado;
- 1 matriz inversa;

- 0 valores conhecidos;
- i associada ao nó i ;
- r valor de referência;
- m tempo atual;
- $m + 1$ tempo posterior;
- γ tempo de avaliação das propriedades;

Subscritos

- ∞ relativo ao ambiente;
- f relativo à mudança de fase;
- l relativo à fase líquida;
- s relativo à fase sólida;
- n relativo à direção normal;

Capítulo 1

Introdução

Um grande número de estudos de problemas envolvendo mudança de fase têm surgido graças, principalmente, à grande quantidade de situações em que este processo tem importância vital. Um exemplo disto são os processos de solidificação de aços, onde é preciso conhecer o tempo exato de solidificação e o perfil de temperaturas para controlar o tipo de estrutura formada. Os processos de mudança de fase são utilizados também em sistemas de armazenamento térmico, onde o material ao mudar de fase pode absorver ou liberar calor a um sistema de acordo com a sua demanda de energia. Como um exemplo mais recente tem-se o processo de sublimação de cera, utilizado como princípio básico de impressoras térmicas coloridas. Neste processo o comportamento do campo de temperaturas é de fundamental importância. Além destes, são exemplos de problemas que envolvem mudança de fase: a exploração de petróleo em geleiras, o congelamento de alimentos e muitos outros.

Além disto, os problemas de mudança de fase são muitas vezes utilizados por interesse meramente científico, mostrando a generalidade de métodos de solução de problemas. Este fato se deve à extrema complexidade do problema de mudança de fase pois envolve condução de calor em dois meios, convecção térmica em um e, além disto, uma fronteira móvel. Com todos estes complicadores, um método que se aplique bem a problemas deste tipo tende a ser também eficiente na solução de outros que englobem apenas um, ou mesmo mais, destes fenômenos.

1.1 Armazenadores Térmicos

De forma genérica pode-se dizer que os armazenadores térmicos são dispositivos que se utilizam de energia, residual ou em períodos onde ela não é aproveitada, para aumentar o nível de energia térmica do seu principal componente. Esta quantia armazenada fica, a partir de então, disponível para que possa ser utilizada no momento em que haja um aumento de demanda ou mesmo falta de energia para o processo.

A forma como a energia é estocada pode variar de um armazenador para outro. Um dos processos clássicos de armazenamento de energia sob a forma de energia interna é o de manter, durante certo tempo num tanque isolado, uma determinada massa de líquido a um nível de temperatura elevado. Esta forma de armazenagem é conhecida como armazenamento térmico por calor sensível. Outro processo, também muito utilizado, é o do armazenamento térmico por calor latente, onde um material que muda de fase mantém-se a uma temperatura constante enquanto cede ou absorve energia. Com base nestas afirmações é possível notar que os armazenadores de calor latente são normalmente mais compactos e trabalham numa faixa bem definida de temperaturas.

Desta forma, para os armazenadores de calor latente a etapa da escolha do material de mudança de fase (PCM) é de fundamental importância pois ela irá ditar não só a capacidade de armazenamento como também a sua faixa de temperatura de trabalho. São utilizados materiais com as mais diversas temperaturas de mudança de fase, e que permitem a utilização de armazenadores deste tipo numa ampla gama de situações. Um detalhamento sobre os materiais mais utilizados e suas respectivas propriedades pode ser encontrado em ISMAIL (1998).

No que se refere à sua utilização, os sistemas de armazenamento térmico vem sendo objeto de um grande número de estudos, principalmente a partir da década de 70 quando começou a preocupação com as políticas de conservação da energia. Com este tipo de análise verificou-se que grande parcela da energia é perdida pelo simples fato de sua disponibilidade ocorrer num momento inadequado. É neste aspecto que os sistemas com armazenamento térmico oferecem uma maior flexibilidade que muito poderia contribuir na minimização das perdas.

Em sistemas não convencionais de aproveitamento de energia, como aqueles que utilizam energia solar por exemplo, o armazenamento é de fundamental importância pois há, normalmente uma defasagem entre a utilização do sistema e os períodos de dispo-

nibilidade. Em sistemas deste tipo as características da radiação solar e as condições climáticas da região associadas ao tipo de emprego previsto para o sistema é que ditarão as características e dimensões da unidade de armazenamento adequada.

Atualmente a maior utilização de armazenadores se dá em sistemas de banco de gelo para condicionamento de ar, que aproveitam a disponibilidade de energia elétrica em períodos deslocados do pico de consumo. Embora a efetivação de programas deste tipo dependa da implementação de políticas de estímulo como, por exemplo, tarifas de energia elétricas diferenciadas de acordo com o seu horário de utilização, muito tem se caminhado a este respeito e o uso destes dispositivos tende a se tornar cada vez mais comum.

Enfim o armazenamento de energia é cada vez mais comum na nossa vida e constitui-se num importante tópico de pesquisa e desenvolvimento, já que não existe uma metodologia bem definida para projetos de sistemas deste tipo. De maneira geral tanto o projeto de sistemas de armazenamento por calor sensível como latente envolvem um grande esforço e desenvolvimento teórico e/ou experimental, com o qual este trabalho pretende contribuir.

1.2 Objetivos

Este trabalho busca a obtenção de resultados numéricos para uma geometria bidimensional aletada envolta por material que, durante o processo, muda de estado físico. A figura (1.1) apresenta os detalhes da geometria do problema e facilita a compreensão de como o processo ocorre. Esta geometria é muito comum em armazenadores de calor e o desenvolvimento deste trabalho visa o fornecimento de subsídios para a otimização de projetos deste tipo de sistema.

Buscando resultados mais completos, não só o problema de condução de calor, mas também o transporte de energia através do processo de convecção será analisado. Isto amplia a faixa de confiabilidade dos resultados uma vez que, segundo experiências anteriores destacadas no corpo do texto, sobre determinadas condições de geometria e faixa de temperaturas o processo de convecção se torna predominante e não pode deixar de ser considerado.

Assim sendo, neste trabalho serão obtidas soluções para o problema de fusão em uma geometria plana aletada. Estes resultados serão analisados, tendo sempre em vista as alterações ocorridas quando algum dos parâmetros de projeto é alterado. Isto permitirá

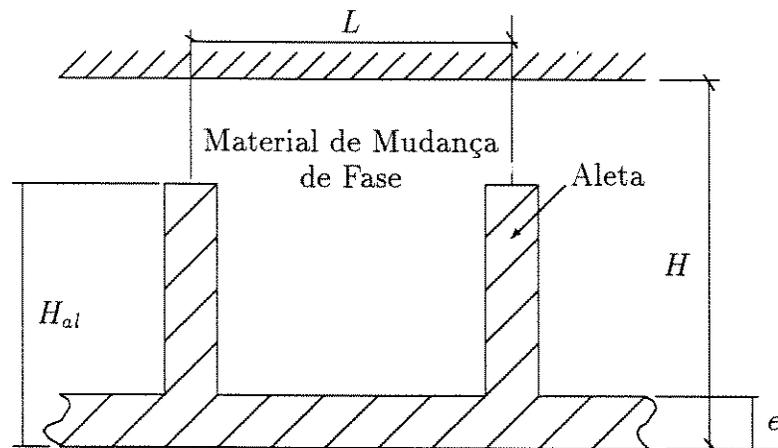


Figura 1.1: Esquema da geometria a ser utilizada.

avaliar o grau de influência de cada um destes parâmetros e, desta forma, procurar auxiliar na execução do projeto.

1.3 Análise das alternativas para a formulação

Esta análise é apenas introdutória e consta de uma apresentação dos termos usuais e esquemas mais utilizados na área, sem se preocupar com citações de referências, que serão destacadas a partir do capítulo seguinte.

De antemão foi feita uma análise quanto a metodologia de formulação e, neste trabalho, optou-se pela utilização de elementos finitos. Este método, tradicional na área de mecânica dos sólidos, tem sido utilizado com sucesso, já há algum tempo, em problemas de condução de calor. No entanto, embora a sua atuação tenha sido estendida à solução de problemas que envolvem escoamento de fluidos há bastante tempo, apenas no final da década de 80, e começo dos anos 90 que esta metodologia foi alavancada. A grande vantagem do método de elementos finitos é a sua grande capacidade de tratar problemas complexos sem a necessidade da utilização de malhas ortogonais. Embora tenham sido utilizadas técnicas para implementação de malhas não ortogonais em diferenças finitas, este fato envolve alterações significativas em sua formulação usual aumentando a complexidade do método. Assim sendo, como o método de elementos finitos já trata malhas não ortogonais, sem a necessidade de nenhuma alteração na metodologia, ele foi o escolhido para o desenvolvimento deste trabalho.

No tocante à malha optou-se por um esquema de geração automática por mapeamento transfinito, que permite a geração da malha interna a partir dos pontos do contorno. Este esquema é extremamente simples e permite geração de malhas relativamente complexas. No entanto ele não é absolutamente confiável devendo-se sempre tomar o cuidado de verificar a malha gerada, como foi feito neste trabalho.

Da mesma forma, outro ponto tratado foi a utilização de armazenamento em banda da matriz, comum a grande parte dos problemas em elementos finitos. A utilização da propriedade da banda restrita reduz, de forma significativa, o consumo de memória para o armazenamento da matriz global. Isto acontece porque não são armazenados os valores nulos que se encontram fora da banda. Existem técnicas também que, através da numeração dos nós, reduzem a banda da matriz. Neste caso, como a geometria do problema é relativamente simples, isto não se fez necessário e nem chegou a ser considerado. Entretanto a própria utilização de armazenamento vetorial por banda obriga a utilização do método frontal para a solução de matriz global, que nada mais é que uma solução por eliminação de Gauss que não altera a parcela fora da banda da matriz. Todos estes procedimentos de construção da malha e solução de matrizes serão discutidos com maiores detalhes no corpo deste trabalho.

Os problemas de mudança de fase são relativamente complexos para serem solucionados (mesmo numericamente) e uma grande diversidade de métodos de solução podem ser encontrados na literatura. Apesar disto dois grandes grupos podem ser formados, separando-os segundo a natureza da solução:

Métodos de Acompanhamento de Fronteira: geram constantemente a malha de forma que sempre existam pontos sobre a fronteira de mudança de fase. A solução do problema se baseia no equacionamento de Stefan, ou seja, na solução da equação de transporte nas fases sólida e líquida e o balanço energético na interface. Existem controvérsias sobre a classificação da solução de problemas de mudança de fase através de transformação de domínio, como transformadas de Landau. Neste trabalho considera-se que estes estão inseridos dentro dos métodos de acompanhamento de fronteira. Na realidade estes métodos não diferem em sua natureza de solução e o seu princípio básico é o mesmo do acompanhamento de fronteira, apenas utilizam uma técnica diferente.

Métodos Entálpicos: baseiam-se na solução da equação da energia e utilizam o mesmo equacionamento em todo o domínio. Estes métodos são de aplicação mais ime-

diata, uma vez que só dependem da solução da equação da energia e envolvem, normalmente, um tempo computacional menor, já que não dependem de constantes gerações de malha ou transformações de domínio a cada passo de tempo. Este grupo de métodos de solução também apresenta grande diversidade: alguns utilizam correção da capacidade térmica para representar o efeito de mudança de fase, outros se utilizam do cálculo da entalpia enquanto outros ainda procuram tratar o calor latente como sendo um termo fonte da equação. Independente da formulação utilizada, estes métodos têm representado grande parte dos trabalhos realizados nesta área.

Devido à relativa complexidade dos métodos de acompanhamento de fronteira, seu possível aumento do tempo computacional acrescidos ainda de uma certa dificuldade em tratar com misturas (tipo parafinas), que apresentam faixa de temperaturas para mudança de fase e são largamente utilizadas em armazenadores térmicos, neste trabalho deu-se preferência pela utilização de um método do tipo entálpico.

No decorrer do trabalho serão feitos testes com algumas técnicas usuais que se utilizam do método entálpico, para verificar a aplicabilidade dos métodos a um dado problema. Desta forma, poderão ser verificados a precisão de cada uma das formas e, assim como, alguns parâmetros que influem na solução final.

No entanto o processo de mudança de fase é apenas uma das etapas a ser cumprida na solução do problema proposto, ainda há a necessidade da solução da parcela convectiva. Este tema também tem sido motivo de um grande número de pesquisas recentes.

Neste trabalho, por questões de simplificação da formulação, utilizou-se a aproximação de Boussinesq para problemas de convecção natural. Nesta aproximação considera-se a variação da densidade apenas na parcela devida à força motriz do escoamento, desconsiderando os seus efeitos sobre as demais parcelas. Esta aproximação é utilizada na maioria dos trabalhos consultados que envolviam convecção natural.

A solução do problema de convecção natural nada mais é que a solução das equações de Navier-Stokes, onde as forças de campo associadas à variação da densidade do fluido são responsáveis pela sua movimentação. Assim sendo qualquer técnica que permita a solução do problema de Navier-Stokes pode ser utilizada. Na literatura são encontradas diversos grupos utilizados na solução de problemas de escoamento de fluido e com uma série de subdivisões. Uma primeira subdivisão se preocupa com a forma com que o sistema

de equações é resolvido, neste caso dois subgrupos se apresentam:

Método de Solução Direta é, dentre todos, a forma mais intuitiva de solução, e consiste em resolver o problema como um todo. Se os campos de temperaturas, pressões e velocidades estão interrelacionados pode-se resolver a todos simultaneamente. É conveniente ressaltar que, mesmo assim, devido às suas não linearidades, a solução de problemas envolvendo as equações de Navier-Stokes têm que ser obtidas através de um método para sistemas não lineares ou de um procedimento iterativo.

A grande desvantagem deste método é a enorme capacidade de armazenamento necessária para se conseguir montar uma única matriz onde estejam as equações para todos os graus de liberdade de cada ponto. Caso o desenvolvimento dos computadores continue da forma apresentada até os dias de hoje, este método de solução tem grande chance de se tornar mais popular num futuro próximo.

Método de Solução das Equações Acopladas: é o método no qual cada uma das equações que compõe o sistema é resolvida separadamente e seus resultados acoplados através de um procedimento iterativo. Para o início deste tipo de solução se admite um perfil inicial para cada uma das variáveis e, a partir dele, se soluciona uma das equações. Com este resultado obtido se resolve a próxima equação e assim sucessivamente (retornando à primeira após se resolver a última e reiniciando o processo), até que a variação em cada um dos parâmetros considerados se encontre dentro de uma faixa de tolerância.

Uma outra subdivisão que é bastante utilizada refere-se à natureza das variáveis utilizadas, neste caso os mais difundidos são dois:

Método de Solução em Variáveis Primitivas: é aquele que não faz nenhum tipo de transformação de variáveis, trabalhando-se com as velocidades e pressões. Neste caso a solução de problemas bidimensionais depende de, pelo menos, três equações: uma para cada uma das direções da equação da quantidade de movimento e a equação da continuidade.

Método de Vorticidade e Função Corrente: utilizado principalmente pela simplificação que acarreta no sistema de equações de problemas bidimensionais. Esta formulação transforma o sistema composto por três equações, descrito anteriormente,

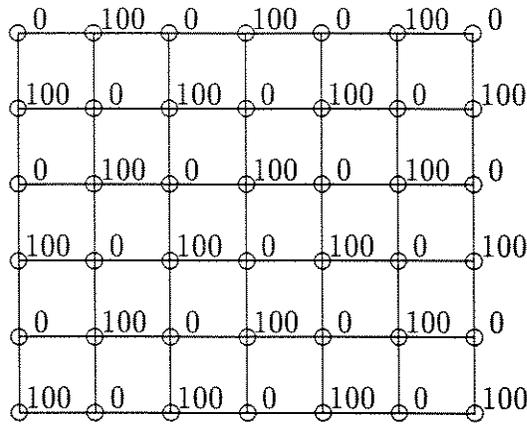


Figura 1.2: Oscilação do campo de pressões.

em um sistema de duas equações (vorticidade e função corrente). Esta é, na realidade, a sua grande vantagem em relação aos demais métodos: sua simplicidade de solução. No entanto este método tem alguns inconvenientes pois, em primeiro lugar, não trabalha com os valores das variáveis primitivas diretamente, o que dificulta o estabelecimento de condições de contorno e, principalmente, não mantém as simplificações para geometrias tridimensionais.

Os métodos que se utilizam de variáveis primitivas têm ainda formulações alternativas, dependendo da posição escolhida para se considerar o campo de velocidades e pressão. Neste caso, os grupos que se apresentam são:

Métodos de Grade Deslocada: largamente utilizados até hoje na solução de problemas de escoamentos, são uma forma eficiente de prevenir o aparecimento de uma solução oscilatória do campo de pressões, como a ilustrada na figura (1.2). Extremamente utilizada em diferenças finitas esta formulação não é diretamente extensível a elementos finitos. Neste caso utiliza-se, como uma formulação equivalente, uma aproximação em que a ordem de interpolação para o campo de pressões é menor que para o campo de velocidades. Por exemplo, utiliza-se uma aproximação quadrática para a velocidade enquanto para o campo de pressões utiliza-se uma aproximação linear. Apesar deste tipo de formulação não apresentar grandes problemas em sua forma aplicável a diferenças finitas, o mesmo não se pode afirmar a respeito da aproximação de ordem diferente. Neste tipo de formulação há um número muito maior de pontos para a velocidade do que para a pressão o que, se-

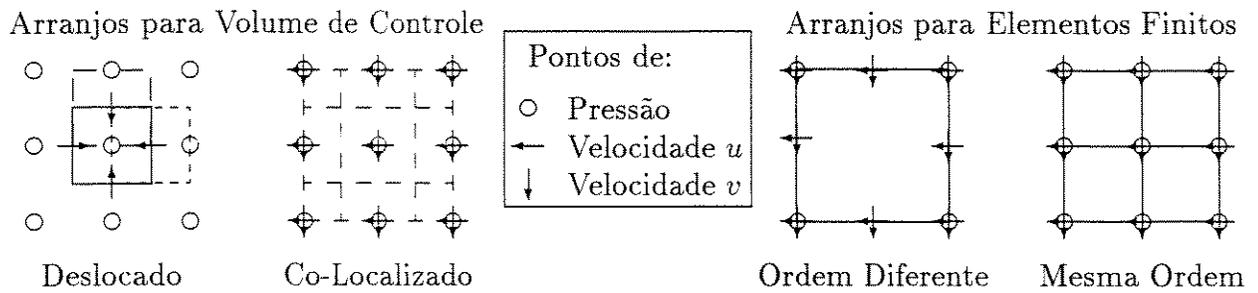


Figura 1.3: Esquema comparativo das diversas grades.

gundo alguns autores, reduz a precisão do método. Mesmo assim durante muito tempo este tipo de aproximação foi utilizado com sucesso.

Métodos de Grade Co-Localizada: é uma alternativa aos métodos de grade deslocada na qual pressões e velocidades ocupam a mesma posição na malha. Apesar de ainda não ser muito utilizado por adeptos do método de diferenças finitas, é o método mais utilizado em elementos finitos. Embora esta técnica já seja conhecida há muito tempo, o seu desenvolvimento é bastante recente. Existem diversas formas alternativas de soluções para este tipo de tratamento, dentre as quais destacam-se a formulação com penalidade (*penalty formulation*), pseudo-compressibilidade e os métodos de correção da velocidade. A figura (1.3) apresenta um esquema onde podem ser vistas as formas de discretização.

Devido às suas facilidades, neste trabalho optou-se pela solução da parcela do problema que envolve o escoamento através de um método baseado em variáveis primitivas, com solução acoplada e com a utilização de uma grade co-localizada(ou de igual ordem, como é conhecida em elementos finitos).

Este trabalho, como trata de problemas de mudança de fase, além da solução usual para o escoamento, precisa ainda de uma técnica que permita anular as velocidades dentro da parcela sólida do problema. Na literatura são encontradas várias técnicas para solucionar este problema como: a que eleva a viscosidade da parcela sólida a níveis extremamente elevados, a que anula a velocidade através da imposição, alterando a respectiva linha na matriz global e outras menos utilizadas. Um estudo destas técnicas e sua implementação também foi feito e poderá ser encontrado neste trabalho.

Considerando a geometria utilizada um outro problema se apresenta: a utilização de condições de simetria para o campo de velocidades. Em termos do campo de temperaturas

este tipo de condição de contorno não apresenta maiores problemas. Para o campo de velocidades, no entanto, existem algumas hipóteses adicionais que devem ser consideradas sendo a principal o fato de anular-se a velocidade normal à fronteira de simetria. Foram feitas análises a este respeito e alguns resultados de testes feitos com este tipo de problema também são apresentados.

Analisado todo o comportamento da solução numérica para as diversas etapas do problema estabeleceu-se, um procedimento geral para a solução da geometria aletada conforme proposto originalmente. O problema foi resolvido, para certas condições, de forma a permitir uma análise de parâmetros importantes no projeto de sistemas que envolvam a geometria estudada. Os resultados obtidos são analisados e conclusões apresentadas, assim como algumas sugestões que permitem a continuidade deste trabalho.

1.4 Equações básicas para a solução do problema e sua adimensionalização

A solução de problemas através de variáveis adimensionais é de grande utilidade, uma vez que permite uma extensão de sua solução a problemas similares com relativa facilidade. A primeira etapa neste processo consiste em identificar as equações básicas que regem o problema que, neste caso, é de mudança de fase com convecção natural. Assim:

- Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

- Quantidade de movimento em x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \beta (T - T^r) \vec{g} \cdot \vec{i} \quad (1.2)$$

- Quantidade de movimento em y:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \beta (T - T^r) \vec{g} \cdot \vec{j} \quad (1.3)$$

- Equação da energia:

$$\bar{c}_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1.4)$$

embora a presença do \bar{c}_p possa ser inusitada, esta se faz necessário pela formulação utilizada, que considera variação do c_p com a temperatura. O valor de \bar{c}_p , nada mais

é, do que uma razão entre o valor estimado e um valor adotado como referência e usado na estimativa da difusividade térmica: $\bar{c}_p = c_p/c_p^r$.

Deve-se lembrar que o valor de c_p é corrigido com base no campo de entalpias e temperaturas. Desta forma se utilizada uma aproximação em dois instantes diferentes, tem-se que:

$$c_p = \frac{\partial h}{\partial T} \approx \frac{h_i^n - h_i^{n-1}}{T_i^n - T_i^{n-1}} \quad (1.5)$$

A próxima etapa consiste em estabelecer as variáveis adimensionais que serão utilizadas:

$$\begin{aligned} X = \frac{x}{L}; \quad Y = \frac{y}{L}; \quad U = \frac{uL}{\alpha}; \quad V = \frac{vL}{\alpha}; \quad P = \frac{p}{\rho} \left(\frac{L}{\alpha}\right)^2; \quad h = \frac{H}{c_p \bar{\delta T}}; \\ \theta = \frac{T - T_f}{\bar{\delta T}}; \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}; \quad \text{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2}; \quad \text{Ste} = \frac{c_p \bar{\delta T}}{\lambda}; \\ \text{Ra} = \frac{g \beta \bar{\delta T} L^3}{\nu^2} \text{Pr}; \quad \tau = \frac{k \bar{\delta T} t}{\rho \lambda L^2} = \text{Fo Ste} \end{aligned}$$

Neste caso foi necessário a definição de uma diferença de temperaturas de referência $\bar{\delta T}$, pois de acordo com a natureza da condição de contorno do problema a ser resolvido a adimensionalização varia. O primeiro caso, e mais comum, é aquele em que a temperatura da parede é conhecida (T_∞), ou ainda, aquele em que há uma troca de calor por convecção e a temperatura do meio é conhecida (T_∞). Neste caso, o valor para a diferença de temperaturas é dada por:

$$\bar{\delta T} = T_\infty - T_f$$

O outro caso que, embora não tenha ainda grande projeção, vem cada vez mais ganhando importância nos projetos de dissipação de calor de componentes eletrônicos é o de fluxo de calor conhecido na fronteira q_c . Neste caso o valor adotado para a referência é:

$$\bar{\delta T} = \frac{q_c L}{k}$$

Desta forma, para qualquer dos casos, as equações adimensionais para o problema são idênticas e podem ser expressas por:

– Continuidade:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1.6)$$

– Quantidade de movimento em x:

$$\text{Ste} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \text{Ra Pr} \theta \frac{\vec{g} \cdot \vec{i}}{\|g\|} \quad (1.7)$$

– Quantidade de movimento em y:

$$\text{Ste} \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \text{Ra Pr} \theta \frac{\vec{g} \cdot \vec{j}}{\|g\|} \quad (1.8)$$

– Equação da energia:

$$\bar{c}_p \left(\text{Ste} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (1.9)$$

Rearranjando a equação (1.5) o valor de \bar{c}_p pode ser calculado na forma:

$$\bar{c}_p = \frac{1}{c_p^*} \frac{\partial h}{\partial T} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \approx \frac{H_i^n - H_i^{n-1}}{\theta_i^n - \theta_i^{n-1}} \quad (1.10)$$

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Os problemas que envolvem convecção natural na fase líquida de um material de mudança de fase, face a todas as considerações já feitas no capítulo anterior, estão relacionados a fenômenos extremamente importantes. Esta importância relativa tem ocasionado uma grande demanda por soluções cada vez mais complexas que, conseqüentemente, tem gerado grandes avanços na área. Isto se mostra pela variedade de modelos que surgiram, desde os primeiros trabalhos publicados, utilizando as mais diversas técnicas de formulação. Apesar de tudo isto, nos trabalhos mais recentes nota-se uma mudança de enfoque: deixaram de aparecer as novas alternativas de formulação, sendo que, o objetivo maior dos trabalhos tem sido a ênfase na aplicação dos modelos já concebidos. Esta afirmação mostra, ao que tudo indica, um esgotamento das alternativas de formulação e pode ser confirmada pela análise dos trabalhos mais recentes e que constam desta revisão bibliográfica.

Este trabalho, como não poderia deixar de ser, está embutido neste contexto geral e vem contribuir, principalmente, com o desenvolvimento dos modelos de solução através da sua aplicação em problemas da prática em engenharia. Embora o modelo acabe normalmente enriquecido, já que o desenvolvimento do trabalho faz surgir uma série de propostas de adaptação do esquema de solução, este não é o objetivo principal deste estudo. Além disto este trabalho se preocupou também com a validação destes modelos, a partir de soluções previamente conhecidas. Este é outro aspecto importante que permite-nos uma avaliação mais precisa da faixa de validade do modelo e de como as considerações feitas afetam a solução.

O caminho de busca da otimização das soluções numéricas do problema aliado ao signi-

ficativo desenvolvimento dos computadores faz com que esta seja considerada a trilha mais promissora de desenvolvimento. Isto se equivale a dizer que as novas pesquisas buscarão mais e mais a otimização da solução através da implementação de novas ferramentas, tais como a computação paralela.

Neste capítulo serão apresentados os trabalhos mais significativos publicados e envolvendo o assunto nos últimos anos. Para uma melhor apresentação a revisão bibliográfica foi dividida em duas seções sendo que a primeira se refere às publicações que envolvem o processo de mudança de fase, enquanto a segunda tem como tema principal a solução das equações de Navier-Stokes, diretamente envolvida com os problemas de convecção.

2.1 Mudança de fase

Devido à sua importância, já discutida anteriormente, o fenômeno de mudança de fase vem sendo estudado desde o início do século passado sendo Lamé e Clapeyron, em 1831, os responsáveis pelos primeiros estudos. No entanto soluções de problemas de transferência de calor com mudança de fase resolvidos de forma analítica, só vieram a ser publicados por Stefan numa seqüência de trabalhos em 1889 e 1891. Estes trabalhos representam o marco inicial deste grupo de problemas que, além da solução analítica dos casos simples, forneceram também o embasamento para o desenvolvimento de um grupo de modelos numéricos.

A solução analítica dos problemas de mudança de fase se limita a um grupo muito restrito de problemas, basicamente problemas unidimensionais e em meios semi-infinitos. Assim sendo, os problemas que não podem ser tratados desta forma têm uma única alternativa viável: a utilização de métodos numéricos. Graças a este fato, os métodos numéricos tem sido cada vez mais utilizados em problemas desta natureza e suas técnicas tem sido mais desenvolvidas a cada dia.

Diversos grupos de estudo sobre este assunto surgiram em momentos diferentes mas coexistem até hoje, sendo possível encontrar publicações referentes a cada um dos métodos em estudos recentes. A utilização inicial destes modelos, como a maior parte dos assuntos envolvendo a área térmica e fluidodinâmica, se baseava em formulações por diferenças finitas. Este fato começou a mudar com as publicações de alguns modelos que procuraram estender os conceitos, até então usados em diferenças finitas, para elementos finitos.

Um dos primeiros trabalhos a trilhar este caminho foi o estudo de COMINI *et al.* (1974). Neste trabalho os autores procuram adaptar o modelo entálpico da falsa capacidade térmica da formulação em diferenças finitas. Para a aproximação da capacidade térmica aparente foi utilizada a média das derivadas nas diversas direções. A aproximação das matrizes de difusividade e massa era feita utilizando-se da forma fraca da equação e da formulação de Galerkin. Com esta formulação foram resolvidos uma série de problemas e desta forma foi confirmada a possibilidade da utilização do método de elementos finitos em problemas desta natureza.

Posteriormente, MORGAN *et al.* (1978) publicaram um trabalho apresentando formas alternativas para a avaliação da capacidade térmica. Este trabalho sugeriu que a avaliação da capacidade térmica deveria ser feita em função da variação da entalpia e temperatura com o tempo e não mais com o espaço, como feito até então. Neste caso os autores também resolveram alguns exemplos para demonstrar a eficiência do procedimento.

Paralelamente começam a surgir alguns trabalhos que procuram resolver o problema através de domínios diferenciados para sólidos e líquidos: o método de acompanhamento da fronteira. BONNEROT & JAMET (1977) apresentam um trabalho onde é mostrado o procedimento para a solução do problema de mudança de fase com o cálculo transiente da posição da fronteira de forma explícita.

Nesta época também aparecem os primeiros trabalhos, ainda em diferenças finitas, que se preocupam com o processo de convecção natural que ocorre dentro do fluido, resultante do gradiente térmico no processo de mudança de fase. SPARROW *et al.* (1977) apresentam resultados para o problema de fusão de um material de mudança em torno de um cilindro, com o material sólido na temperatura de mudança de fase. São apresentados resultados e feitas algumas considerações a respeito da influência de alguns adimensionais neste processo.

MORGAN (1981), nesta mesma linha, apresenta um trabalho que considera a convecção natural na fase líquida em elementos finitos, mas usando de procedimento diferente do anterior e bem mais próximo dos utilizados atualmente. A solução do processo de mudança de fase é baseada no método entálpico enquanto a do problema de convecção natural é baseado no método *fractional step* (solução desagrupada, onde a solução das equações da quantidade de movimento e conservação da massa são solucionadas em separado). São apresentados ao final alguns resultados para a solidificação do material de mudança de fase em uma cavidade.

Enquanto isto, LYNCH & O'NEIL (1981) apresentam uma solução para alguns problemas, com ou sem mudança de fase, com tratamento explícito da fronteira e se utilizando da técnica de elementos finitos deformáveis. São apresentados ao final uma série de resultados para problemas unidimensionais para demonstrar a precisão do método. LYNCH (1982) apresenta em outro trabalho uma avaliação dos métodos que se utilizavam de elementos finitos deformáveis até então, mostrando que, todos tinham formulação equivalente. Foi desenvolvido também uma metodologia para o problema de geração de malha neste tipo de problema. Ao final são apresentados resultados para o problema de mudança de fase bidimensional que apresentam boa coincidência com valores obtidos analiticamente.

ROLPH III & BATHE (1982), trabalhando com malhas fixas, desenvolvem uma metodologia que se utiliza não mais somente do campo de temperaturas para calcular a capacidade térmica, mas também os fluxos de calor entre os nós. Desta forma, segundo os autores, este fator poderia ser facilmente embutido num termo fonte, facilitando a resolução do problema de mudança de fase utilizando-se de pacotes prontos para elementos finitos. São apresentados ao final do trabalho resultados para problemas uni e bidimensionais que mostram boa concordância com soluções analíticas ou resultados de outros métodos.

A grande restrição feita às soluções de problemas de mudança de fase com malhas fixas sempre foi o aparecimento de uma oscilação na história da temperatura ao longo do tempo. BELL (1982) fez um estudo deste assunto e justificou esta oscilação oferecendo inclusive uma alternativa para evitá-la. A fórmula para isto: a utilização de uma faixa de mudança de fase que implique, em cada instante, que pelo menos dois pontos estejam dentro da faixa de mudança de fase. Com isto a oscilação histórica deixa de acontecer e o perfil de temperaturas passa a ser similar ao esperado.

RAMACHANDRAN *et al.* (1982) se utilizam de um procedimento de transformação de coordenadas, similar ao descrito por SPARROW *et al.* (1977), para resolver um problema de solidificação nas proximidades de uma parede plana considerando o efeito de convecção natural. A solução da parcela de convecção natural foi obtida através de uma formulação por vorticidade e função corrente e os resultados apresentados para diversas condições.

ETTOUNEY & BROWN (1983) propõem uma série de formulações para a solução de um problema de solidificação em regime permanente. Neste tipo de problema a fronteira ocupa uma posição determinada num dado instante de tempo. Foram utilizadas quatro formulações por Galerkin para resolver o problema e os resultados obtidos para cada uma

foram mostrados individualmente e comparados entre si.

YOO & RUBINSKY (1983) propõem um método de tratamento explícito da fronteira em que a sua posição é calculada a cada iteração, através da formulação por elementos finitos, pela equação de balanço energético na interface. Exemplos para alguns casos bidimensionais são resolvidos mostrando a evolução da fronteira nos diversos casos.

LEWIS *et al.* (1984), por sua vez, sugerem um método no qual é utilizada a técnica ADI, tradicionalmente utilizada em diferenças finitas, para a solução de matrizes dos problemas de mudança de fase formulados por elementos finitos e pelo método da correção da capacidade térmica. Com este procedimento é possível otimizar tanto o armazenamento da matriz como também a sua solução. O procedimento é testado em um problema bidimensional para verificar a sua eficiência.

GADGIL & GOBIN (1984) também obtiveram solução para um problema de mudança de fase em uma cavidade, de forma similar a RAMACHANDRAN *et al.* (1982). No entanto seus resultados são mais abrangentes, trabalhando com um maior número de adimensionais e com valores mais elevados para Ra .

Em um problema similar, HO & VISKANTA (1984) mostram uma série de medidas experimentais que fornecem, com boa aproximação, o comportamento de uma parafina fundindo em temperatura próxima à ambiente. O fato da temperatura de mudança de fase estar próxima à temperatura ambiente permite que o valor inicial para a temperatura do sólido esteja próximo da temperatura de fusão e, conseqüentemente, inexistente a taxa de subresfriamento. Neste trabalho foi montado também um procedimento numérico que é muito similar aos descritos anteriormente, dentre os quais o de GADGIL & GOBIN (1984). Os resultados numéricos, para a fase inicial do processo de mudança de fase, foram comparados aos valores experimentais obtidos pelos autores.

HSIAO & CHUNG (1986) propõem uma nova forma para o cálculo dos valores corrigidos para a capacidade térmica, que são calculados em função de uma fração mássica de cada fase dentro do elemento. Esta metodologia foi implementada em alguns casos uni e bidimensionais e os resultados foram apresentados no trabalho.

YOO & RUBINSKY (1986), dando continuidade ao trabalho desenvolvido por ambos anteriormente [YOO & RUBINSKY (1983)], estendem o procedimento de acompanhamento de fronteira para o problema de mudança de fase com convecção natural no meio fluido. Um problema de solidificação de alumínio com condição de contorno de convecção

é resolvido e os seus resultados para diferentes valores de Ra apresentados.

PHAM (1986) apresenta um trabalho no qual adapta para elementos finitos um método desenvolvido originalmente para diferenças finitas e que se utiliza do balanço energético entre os nós para a correção da entalpia. Neste caso a diferença entre o fluxo de calor entrando e saindo de cada volume de controle em torno do nó é responsável por um aumento na sua entalpia. Esta variação da entalpia por sua vez é utilizada para o cálculo da capacidade térmica corrigida, o que permite a solução da equação da energia. No final de cada tempo a entalpia é corrigida em função do valor da capacidade térmica calculada. São resolvidos problemas uni e bidimensionais e os resultados do primeiro grupo são comparados com uma série de outros tradicionais de malha fixa e a solução analítica para mostrar a eficiência do método.

DALHUIJSEN & SEGAL (1986) mostram, nesta mesma época, uma comparação entre diversos métodos levantados na literatura para malhas fixas e discutem esquemas de discretização no tempo, o uso de matriz de massa concentrada nos nós, os métodos de aproximação da capacidade térmica, etc. Feito isto os autores resolvem um exemplo através dos diversos casos e fazem a comparação dos respectivos desvios.

ALBERT & O'NEIL (1986) desenvolvem um estudo para um problema bidimensional de mudança de fase utilizando-se de elementos finitos deformáveis. É utilizado um esquema de geração automática de malha, através da técnica denominada por mapeamento transfinito ("transfinite mappings"). Neste trabalho os autores afirmam também que a técnica que considera variações quase-estáticas da fronteira, como a utilizada por YOO & RUBINSKY (1983), apresenta alguns problemas de conservação de energia.

Buscando alternativas para o tratamento de problemas de mudança de fase, VOLLER *et al.* (1987) desenvolvem uma nova metodologia que inclui os efeitos do calor latente no termo fonte. Este método é apresentado como uma forma eficiente de tratamento de problemas desta natureza, mesmo quando se considera o processo de convecção. Resultados para um caso de solidificação numa cavidade são obtidos para exemplificar a aplicação da metodologia.

É encontrado também um grande número de trabalhos para a solução do denominado problema de Stefan inverso, que se preocupa em buscar, a partir de medidas experimentais de temperatura, a posição exata da frente de mudança de fase. ZABARAS & RUAN (1989), utilizando de elementos finitos deformáveis (DFEM), montam um proce-

dimento para a solução de problemas deste tipo. Utilizando-se de resultados analíticos, com simulação de erros nas medidas, identificou-se a posição da frente de fusão em um problema unidimensional.

COMINI & SARO (1990) desenvolveram um algoritmo de malha fixa aplicável em sistemas multidimensionais. Esta formulação se baseia no uso de uma discretização em três níveis de tempo e na utilização de um esquema corretor para entalpia. Este esquema é um dos poucos que é formulado a partir de uma matriz massa consistente. São apresentados resultados para a solução de problemas de uma e duas dimensões. O trabalho mostra também uma tabela comparativa entre alguns métodos de solução e nela é possível distinguir que, pelo menos no exemplo mostrado, a formulação proposta por PHAM (1986) apresenta melhores resultados.

VOLLER *et al.* (1989) mostram um modelo de solução para o problema de mudança de fase baseada na fração de volume ocupada por cada uma das fases. De posse do equacionamento uma série de formulações são obtidas, dentre as quais a correção da capacidade térmica e inclusão do calor latente no termo fonte. As discretizações e implementação destes modelos são mostradas para quando se utilizam os métodos de volumes finitos e elementos finitos.

Uma grande controvérsia sempre existe a respeito de qual metodologia é a mais eficiente: transformação de domínio ou utilização de malhas fixas. Para tentar ajudar na solução deste dilema LACROIX & VOLLER (1990) elegeram um problema de mudança de fase com convecção natural na fase líquida e o resolveram utilizando ambas as técnicas. Segundo os autores não houve, pelo menos no problema testado, aumento significativo de tempo CPU pela constante geração de malha no caso de domínio transformado, desde que utilizado uma metodologia eficiente de geração de malha. Por outro lado também não houveram diferenças significativas na acuracidade dos resultados entre os dois esquemas para o mesmo espaçamento de malhas. Com esta análise é possível afirmar que somente o desenvolvimento de cada esquema é que pode vir a gerar diferenças futuras e nos dias de hoje há um relativo equilíbrio entre ambas as metodologias.

USMANI *et al.* (1992) utilizam uma formulação baseada na aproximação de ordem diferente para campos de velocidade e pressão e que inclui o efeito do calor latente de mudança de fase no termo fonte e resolvem uma série de problemas de mudança de fase. A maioria destes problemas considera a fusão e solidificação de uma liga de alumínio numa cavidade fechada. Alguns resultados para a solidificação da água também são obtidos e

os resultados comparados com resultados obtidos previamente.

Considerando-se a solidificação de ligas metálicas, RUAN *et al.* (1993) desenvolveram um método para prever o perfil de temperaturas e fração de solidificação, baseado em elementos finitos deformáveis. Resultados para casos unidimensionais são obtidos para dois tipos de ligas Al-Cu.

A formulação de problemas convectivos difusivos em processos envolvendo mudança de fase e uma revisão dos modelos utilizados é apresentado por SAMARSKII *et al.* (1993). Neste trabalho a formulação do problema é baseada na aproximação de Boussinesq, para os termos de convecção natural, e sugerida uma aproximação de Darcy-Boussinesq, para a região fundente de materiais que possuem faixa de mudança de fase. São apresentadas também, de forma comentada, as formulações para o problema tanto em malhas fixas como com acompanhamento da fronteira.

Uma coletânea de soluções analíticas, aproximadas e formulações numéricas utilizadas na solução de problemas de fase pode ser encontrada em ALEXIADES & SOLOMON (1993). As soluções são agrupadas de acordo com a sua natureza deixando a consulta ao livro bem facilitada. Esta estrutura do livro aliado aos assuntos nele abordados faz com este se constitua numa importante fonte de referência, dentre as escritas recentemente, para estudos dos conceitos básicos envolvidos nos problemas de mudança de fase

MCDANIEL & ZABARAS (1994) apresentam um trabalho em que o grande diferencial é o fato de utilizarem os princípios variacionais: o método dos mínimos quadrados. Este tipo de solução é utilizada tanto para a aproximação da equação da energia, como das equações de movimento. O problema de mudança de fase, por sua vez, é formulado pelo método de acompanhamento da fronteira, num procedimento muito similar ao descrito por ALBERT & O'NEIL (1986). Uma série de resultados numéricos são apresentados para validar o modelo.

Um novo método é desenvolvido por CELENTANO *et al.* (1994) que, baseando-se em estudos anteriores, formula os problemas de mudança de fase utilizando como variável única, o campo de temperaturas. Neste procedimento um sistema iterativo incremental é obtido e resolvido, sendo sua solução conservativa do ponto de vista da formulação fraca. O método é aplicado a diversos problemas e resultados fechados com valores analíticos e experimentais foram encontrados.

Como em qualquer assunto, a cada momento novas aplicações que se utilizam de tal fenômeno são descobertas. Com o fenômeno de mudança de fase isto não é diferente. O trabalho de WESTERBERG *et al.* (1994) apresenta uma destas novas aplicações: a utilização do fenômeno em impressoras térmicas e sua simulação numérica. O problema é calculado a partir de uma fonte de calor móvel, que representa a cabeça de impressão, sobre um papel que possui camadas que mudam de fase de acordo com a temperatura resultando assim em diferentes cores de acordo com a temperatura atingida. Para verificar o modelo, problemas de mudança de fase com fonte móvel de energia são resolvidos.

RADY & MOHANTY (1996) se utilizam de uma formulação denominada de porosidade-entalpia, que também é baseada em malhas fixas, na solução de problemas envolvendo solidificação de metais. Outro resultado interessante é a solução do problema de convecção natural sem incluir os termos de difusão viscosa. Sabe-se que para o caso de metais, onde se tem baixos números de Prandtl, seu efeito é pequeno. Os autores quantificaram estes efeitos e concluíram que, se comparada à solução completa (com todos os termos), são encontradas variações inferiores a 10%. Os resultados deste trabalho são comparados com soluções previamente obtidas envolvendo multidomínio.

OUYANG & TAMMA (1996), utilizando-se também de uma formulação de malha fixa, simulam problemas com múltiplas interfaces, ou seja com a coexistência simultânea de, pelo menos, duas fronteiras. Resultados para alguns casos unidimensionais são mostrados.

Para simular o processo de carga e descarga de calor em armazenadores térmicos compostos por mais de um tipo de PCM (*Phase Change Material*), GONG & MUJUMDAR (1996) propõem um novo modelo em elementos finitos. O modelo se utiliza de conceitos similares aos descritos por PHAM (1986) e com uma aproximação em três níveis de tempo. São mostrados resultados, que se utilizam deste modelo, para um ciclo completo em armazenadores compostos por 1, 2 e 3 tipos de PCM.

HO & CHU (1996) mostram uma investigação numérica num dispositivo de proteção térmica, composto por PCM/Ar, submetido a uma condição de fluxo de calor imposto na parede. A solução do problema de convecção natural tanto para o ar como para a fase líquida do PCM foi obtida utilizando-se de uma formulação por vorticidade e função corrente. Diversos resultados para a geometria proposta são mostrados e, juntamente com eles, é avaliada a influência de alguns grupos adimensionais.

2.2 Escoamento de fluidos newtonianos

Embora, recentemente o número de publicações envolvendo a solução de escoamentos através do método de elementos finitos tenha aumentado, as bases para isto já são conhecidas há algum tempo, principalmente as que se utilizam de diferentes ordens de interpolação para velocidade e pressão. O grande aumento na sua utilização, no entanto, ocorreu com o desenvolvimento da formulação que utiliza interpolação de mesma ordem para o campo de velocidades e de pressões.

Utilizando-se destes princípios, MARSHALL *et al.* (1978) desenvolveram uma formulação baseada na "penalty function" e obtiveram a solução para um problema de convecção natural numa cavidade. Nesta solução foi utilizada uma malha de 64 elementos de 9 nós e obtidos resultados para vários números de Rayleigh (10^4 , 10^5 , 10^6 e 10^7). Os resultados mostraram boa concordância com valores numéricos anteriormente obtidos para o mesmo tipo de problema.

SCHNEIDER *et al.* (1978) fazem uma análise dos métodos até então conhecidos na solução de escoamentos utilizando-se interpolação de mesma ordem. São avaliados o método da "penalty function", o da falsa compressibilidade e os métodos de correção do campo de velocidades. Os testes realizados para alguns problemas indicaram que os melhores resultados se deram para a formulação por correção da velocidade.

Como uma alternativa para solução deste tipo de problemas, BALIGA & PATANKAR (1980) propõem uma metodologia que faz uma mescla entre os métodos de volumes finitos e elementos finitos. Esta nova técnica é denominada por elementos finitos aplicados a volumes de controle (CVFEM). Neste trabalho é utilizada uma função de interpolação exponencial na direção da velocidade que é utilizada em problemas de convecção-difusão. Esta formulação teve relativo sucesso na redução dos problemas de falsa difusão, comum nas soluções de até então.

Uma outra alternativa para os problemas desta natureza foi proposta por BROOKS & HUGHES (1982). Este método, denominado de método Petrov-Galerkin upwind sobre a linha de corrente (SUPG), é baseado num coeficiente de difusividade artificial que pode ser introduzido tanto nos termos difusivos como na própria função peso, que corrige as funções de interpolação. O valor da correção está atrelado ao número de Peclet elementar. Problemas com alta tendência à apresentação de falsa difusão e oscilação são apresentados no trabalho e bons resultados são obtidos em todos os casos.

Devido ao grande número de métodos utilizados na solução de problemas convectivo-difusivos, VAHL DAVIS & JONES (1983) elaboraram um trabalho que permitisse avaliar o comportamento de cada método perante um problema de convecção natural em uma cavidade com diversos números de Ra . Este trabalho foi proposto à comunidade científica internacional e uma série de autores, com seus respectivos métodos e resultados, se apresentaram. Com estes resultados, depois de compilados e agrupados, foi possível conhecer o comportamento de cada um dos métodos. Em outro trabalho, VAHL DAVIS (1983) apresenta uma solução para este problema proposto de convecção natural. Os resultados foram obtidos para diversas malhas e extrapolados de forma a obter uma solução com o mínimo erro possível. Com isto, esta solução passou a ser utilizada como um padrão para aferição de outros métodos e pode ser aceita, praticamente, como uma solução exata para o problema.

SMITH & HUTTON (1982), nesta mesma linha, compilaram resultados de um problema, que apresenta uma forte tendência para falsa difusão. Este trabalho foi originalmente proposto à comunidade de pesquisa com o intuito de efetuar testes com diversos métodos. Os resultados para cada caso são mostrados no trabalho publicado. Além disto, este problema também se tornou uma importante fonte de referência na avaliação da precisão de novas metodologias, inclusive, aparecendo em uma série de trabalhos posteriores.

BALIGA & PATANKAR (1983) utilizam-se dos conceitos aplicados em BALIGA & PATANKAR (1980) para problemas que envolvem a resolução de campo de velocidades bidimensionais. Este procedimento de solução é baseado ainda em uma metodologia que se utiliza de diferentes ordens de interpolação para a pressão e velocidade (aproximação linear para o campo de pressões e quadrática para o campo de velocidades). A solução do sistema de equações acoplados é feita através de um procedimento bastante similar ao SIMPLER. Em um trabalho complementar são apresentados uma série de problemas resolvidos, nos quais foram aplicados esta técnica de solução com sucesso.

Outra metodologia para utilizar a aproximação "upwind" em problemas de convecção-difusão e elementos finitos foi apresentada por RICE & SCHNIPKE (1985). Esta metodologia propõe uma aproximação de fácil implementação sobre a linha de corrente. O método foi aplicado numa série de problemas e bons resultados foram obtidos, tanto no que se refere a acuracidade como a estabilidade.

Seguindo a linha predominante na formulação por elementos finitos convencional, PRAKASH & PATANKAR (1985) apresentam um método de utilização de malhas de

mesma ordem na formulação CVFEM. Este método, que utiliza o mesmo número de pontos de velocidades e pressão em todo o domínio, apresenta melhores resultados que o sugerido por BALIGA & PATANKAR (1983). A técnica de solução do acoplamento de equações não se altera muito, sendo também, bastante similar ao SIMPLER. Complementando o trabalho, uma série de problemas são analisados e resolvidos de forma a mostrar a potencialidade do método.

RICE & SCHNIPKE (1986), baseados em trabalhos anteriores feitos em diferenças finitas, propõem um esquema de solução bastante similar ao proposto por PRAKASH & PATANKAR (1985), que se utiliza do método de elementos finitos com aproximação de mesma ordem para campo de velocidades e pressões. Neste trabalho também são mostradas uma série de implementações que obtiveram sucesso em problemas de escoamento forçado.

Trabalhando com o método de volumes de controle aplicado a elementos finitos, SCHNEIDER & RAW (1986) sugerem alternativas para a utilização de uma formulação "upwind" com correção dos valores nos nós de acordo com o sentido da velocidade. Este procedimento que, inicialmente, poderia conduzir a uma instabilidade nas soluções através da obtenção de coeficientes negativos, foi readaptado de forma a limitar a sua influência e impedindo que tal fato ocorra. É mostrado neste trabalho a aplicação desta metodologia para alguns problemas típicos.

Nesta mesma linha de trabalho, LEDAIN-MUIR & BALIGA (1986) propõem um método de solução "upwind", orientado pelo fluxo, para problemas tridimensionais utilizando elementos tetraédricos quadráticos. A metodologia foi aplicada com sucesso em um problema, no entanto, o trabalho ressalta que este tipo de formulação adotada não é adequada quando se trabalha com termos fonte.

PRAKASH (1986), em estudos feitos posteriormente, aperfeiçoou a função de interpolação utilizada, até então, pelo método de volume de controle aplicado a elementos finitos, incluindo nela um termo fonte. Testes feitos em alguns problemas mostraram um significativo aumento na precisão com esta alteração.

SCHNEIDER & RAW (1987a) apresentam um novo modelo de formulação para o método de volumes de controle aplicado a elementos finitos trabalhando com elementos quadráticos. Novas expressões são definidas para a obtenção do sistema discreto, utilizando-se de uma metodologia que considera aproximação de mesma ordem para ve-

locidade e pressão e correção devido à orientação do fluxo. Em trabalho complementar, SCHNEIDER & RAW (1987b) apresentam soluções para uma série de problemas de convecção-difusão utilizando-se desta formulação.

PRAKASH (1987) realiza uma série de testes utilizando volumes de controle aplicados a elementos finitos comparando o esquema tradicional, proposto por BALIGA & PATANKAR (1980), e um esquema "upwind" puro. Foram resolvidos uma série de problemas e os melhores resultados ficaram com o método tradicional. No entanto, o próprio autor enfatiza que resultados diferentes podem ser obtidos com métodos mais apurados, como o de SCHNEIDER *et al.* (1978).

PERIĆ *et al.* (1988) compararam as duas possíveis soluções para problemas envolvendo escoamento de fluidos: com grade deslocada e com grade co-localizada. Utilizando-se da formulação em volumes de controle, aplicados a diferenças finitas, três problemas foram solucionados pelos dois métodos e suas soluções comparadas. Com base nestas soluções os autores afirmam que os métodos são similares em termos de dependência de sub-relaxação, desempenho computacional e acuracidade. Consideram apenas que o método co-localizado leva vantagens quando são utilizadas técnicas multi-grid e malhas não ortogonais.

HOOKEY *et al.* (1988), também na linha de volumes de controle aplicados a elementos finitos, procuram estabelecer a comparação entre as formulações tradicional, proposta por BALIGA & PATANKAR (1980), e a que inclui o termo fonte, proposta por PRAKASH (1986), e ainda uma terceira elaborada pelos autores que também considera o termo fonte na equação de interpolação. Os resultados mostram significativas melhoras de acuracidade quando as formulações incluem o termo fonte na equação de interpolação.

HOOKEY & BALIGA (1988), num segundo trabalho de análise e comparação das metodologias, verificam a sua influência na solução do campo de escoamentos. São utilizados esquemas de ordens diferentes e iguais de interpolação para campos de velocidade e pressão para os mesmos problemas. A interpretação dos resultados mostrou uma melhora significativa na precisão quando da utilização do método de mesma ordem, no entanto houve também um significativo aumento no tempo de processamento.

Em uma seqüência de trabalhos, GRESHO (1990) e GRESHO & CHAN (1990), foram discutidos uma série de aspectos sobre a teoria dos métodos de solução de projeção para a equação de Navier-Stokes, que englobam os métodos "fractional step", "splitting" e de correção da pressão. Estes métodos foram agrupados de acordo com suas características

e uma série de aplicações foram resolvidas permitindo, assim, uma comparação e uma análise do comportamento de cada um.

Também trabalhando na formulação tradicional de elementos finitos e um esquema de correção de velocidades, KOVACS & KAWAHARA (1991) propõem uma formulação baseada no método de resíduos ponderados e Galerkin, utilizando integração explícita no tempo. A condição de Newman é utilizada como condição de contorno para a equação de Poisson da pressão. As soluções de alguns exemplos foram obtidas, utilizando-se de elementos quadrados de segunda ordem e da matriz massa concentrada. Nestas soluções foram observadas boas condições de estabilidade para o método.

Na mesma linha há o trabalho de NATARAJAN (1992), que também se utiliza do método de acoplamento pressão-velocidade. Neste trabalho são apresentadas técnicas de solução que se utilizam de um Runge-Kutta de 2^a ordem para a integração no tempo e métodos alternativos para uso de processamento vetorial ou paralelo, para agilizar a solução.

SWAMINATHAN & VOLLER (1992a), por sua vez, propõem uma metodologia que permite a extensão dos conceitos apresentados por BROOKS & HUGHES (1982), que deram origem ao SUPG, para que possam ser utilizados com a formulação de elementos finitos baseada em volume de controle. Em trabalho posterior SWAMINATHAN & VOLLER (1992b) aplicam o método a uma série de exemplos com sucesso.

REN & UTNES (1993) adaptam em seu trabalho a formulação de correção de velocidades, proposta originalmente por KOVACS & KAWAHARA (1991), introduzindo a aproximação por Runge-Kutta de 2^a ordem na discretização do tempo. Os resultados obtidos foram comparados com resultados previamente obtidos, tanto de forma numérica como experimental, mostrando boa concordância.

Uma das grandes vantagens de elementos finitos é a possibilidade de utilização de malhas adaptativas. A forma tradicional para aplicação destes conceitos depende de uma estimativa de erro local. Para a equação de Navier-Stokes, as soluções usualmente utilizadas não são adequadas, sendo necessária uma nova formulação. Um trabalho neste sentido é feito por ODEN *et al.* (1994), que se utilizam de um esquema adaptativo para a solução do escoamento em uma expansão abrupta e conseguem bons resultados.

Independente da formulação a ser adotada a conservação é um aspecto importante quando fluxos devem ser determinados num problema. Sob este aspecto, HANSBO (1994)

analisou as diversas metodologias de formulação e uma série de aspectos a que estão correlacionados, analisando quais são os parâmetros de influência na determinação se um sistema é, ou não, conservativo. Para ajudar nesta análise são apresentados alguns resultados numéricos e algoritmos.

Outro aspecto que se encontra sempre em discussão é sobre qual é o melhor método de formulação: elementos finitos ou volumes de controle? Procurando responder esta questão IDELSOHN & OÑATE (1994) analisaram os problemas mais usuais sob os diversos aspectos concluindo que não existe uma resposta clara, que dependendo da situação cada um se sobressai. No entanto o que acontece na maioria das vezes é que os dois fornecem resultados equivalentes.

Outro problema, comum em elementos finitos, é o trabalho em domínios axissimétricos, nos quais as equações que regem o problema são relativamente diferentes das tradicionais. Esta nova forma de discretização foi elaborada e aplicada a diversos problemas axisimétricos por MASSON *et al.* (1994). Os resultados obtidos com esta formulação na solução de exemplos para teste apresentaram boa concordância com resultados numéricos e experimentais anteriormente obtidos.

Um novo passo na solução de problemas utilizando o método de volumes de controle aplicados a elementos finitos foi dado por SAABAS & BALIGA (1994), onde são testados dois novos esquemas "upwind" existentes (esquema "upwind" orientado pelo escoamento-*FLO* e *FLOS*) e um novo método (esquema "upwind" ponderado pelo fluxo mássico-*MAW*). Resultados comparativos para uma série de problemas são apresentados, mostrando a boa desenvoltura do método.

DESPOTIS & TSANGARIS (1995) utilizaram-se do método tipo "fractional step" para a solução das equações de Navier-Stokes na sua forma transiente. Foi utilizada na discretização técnicas de volumes finitos para elementos triangulares e resolvidos alguns exemplos típicos, sendo que, a solução foi obtida de forma bem mais rápida através do novo esquema proposto.

MCHUGH & RAMSHAW (1995) apresentam um trabalho onde são discutidos os parâmetros da compressibilidade artificial com a determinação de valores ótimos. É ressaltado ainda o fato dos valores dos parâmetros do esquema diferirem para soluções em regime permanente e soluções transientes. Este esquema, bastante simples, fornece bons resultados mas, em contrapartida, tem um elevado custo computacional.

Capítulo 3

Aplicação da Técnica de Elementos Finitos

Muitos trabalhos que têm sido publicados recentemente, se dedicam à adequação do método dos elementos finitos (*FEM - Finite Elements Method*) à solução da equação de transporte, uma vez que, estes já estão largamente difundidos quando não estão envolvidos termos convectivos. Estes estudos têm fornecido bons resultados e diversos métodos de *upwind* têm surgido.

Este estudo não entrará no mérito destes métodos tipo a montante (*upwind*), uma vez que o problema de convecção natural de fluido será estudado em regime laminar. Este fato implica no trabalho com valores de velocidades relativamente baixas, onde a discretização por Galerkin fornece melhores resultados.

Como a utilização de elementos finitos na área de térmica e fluidos vem sendo intensificada ultimamente, será feita uma breve apresentação da técnica de elementos finitos e seus conceitos.

3.1 Método de Elementos Finitos (FEM)

O método de elementos finitos é uma ramificação dos métodos integrais que são utilizados para obter soluções aproximadas de um grande número de problemas. Estes métodos integrais baseiam sua solução na aproximação por funções da variável no domínio determinado e devem, ainda, respeitar as condições de contorno do problema.

Apesar deste tipo de procedimento fornecer boas aproximações para a solução de diversos problemas, nem sempre estas são facilmente encontradas. Baseando-se no mesmos

princípios dos métodos integrais apresenta-se o *FEM*, diferenciando-se apenas pela subdivisão do domínio em pequenos subdomínios (elementos) nos quais são válidas as equações de aproximação.

Para facilitar ainda mais, são utilizadas em elementos finitos expressões que, ao invés de usar variáveis de espaço nas funções de interpolação, utilizam o valor da propriedade nos nós como parâmetro básico. Ou seja, conhecido o valor de uma dada propriedade em todos os nós, é possível calculá-la em qualquer ponto do domínio usando as funções de interpolação. Esta forma de montagem das funções de interpolação é conhecida como aproximação nodal.

Nesta seção é feita uma síntese das bases do *FEM* procurando descrever, sem grande detalhamento, os passos envolvidos na resolução de um problema por elementos finitos.

3.2 Princípios Básicos

A formulação em elementos finitos é baseada nos mesmos princípios da resolução por resíduos ponderados, ou seja, a busca de uma solução segundo a qual o desvio obtido pela integral desta solução ao longo do domínio, utilizando uma função peso definida, seja mínimo. Assim, admitindo que a equação que rege um determinado problema seja $\mathcal{L}(u) - f = 0$, sua formulação em resíduos ponderados é dada por:

$$\int_{\Omega} W (\mathcal{L}(u) - f) d\Omega = \varepsilon \quad (3.1)$$

Deve ser feita também a divisão do problema em diversos elementos que, quando agrupados, devem representar todo o domínio. Para tanto devem ser respeitadas as regras básicas da discretização:

- Não deve existir nenhuma área dentro do domínio que não pertença a nenhum elemento;
- Não deve existir nenhuma área dentro do domínio que pertença a mais de um elemento;
- Não deve existir nenhuma área fora do domínio que pertença a algum elemento;

Repetidas estas regras básicas, pode se discretizar o domínio da forma que se considerar a mais adequada. Existem técnicas para a discretização do domínio de forma automática como é o caso do mapeamento transfinito (*transfinite mappings*), no entanto caso estes não estejam disponíveis pode-se fazer esta divisão manualmente.

Deve ser feita também uma numeração dos nós, necessária para a montagem das tabelas que indicam como foi feita a subdivisão do domínio e qual a inter-relação entre os nós. Enfim, para cada um dos elementos deve ser conhecida: a posição ocupada por cada um dos nós dentro do domínio e a conectividade, ou seja, como os nós estão interligados de forma a gerar o elemento.

Estes princípios descrevem, de maneira geral, os princípios básicos de uma discretização se utilizando-se das técnicas de elementos finitos. No entanto uma descrição detalhada do método de elementos finitos propriamente dito não será feita neste texto, uma vez que existem uma série de bons livros a respeito do assunto e que podem tratá-lo com um maior nível de detalhamento. Na elaboração deste texto, especificamente, a referência básica utilizada foi DHAT & TOUZOT (1984). Isto faz com que, possivelmente, haja uma maior concordância da nomenclatura utilizada com esta referência sem, entretanto, impedir a sua compreensão utilizando-se de outros livros como referência básica.

O resultado de uma discretização utilizando-se de elementos finitos é um sistema de equações, onde a matriz a ser solucionada é denominada por matriz global. Como nem todos os pontos estão interligados, a matriz global resultante será uma matriz de banda. Devido a esta característica especial, formas alternativas de armazenamento são buscadas para minimizar o consumo de memória, principalmente em problemas de malha refinada. A figura (3.1) mostra um esquema típico de armazenamento de matriz de banda não simétrica. No entanto, este esquema pode ser otimizado ainda mais se ao invés de um armazenamento matricial se utilizar um armazenamento vetorial.

Foi montado um procedimento em que a idéia básica é eliminar os componentes nulos que ainda subsistem no caso de armazenamento matricial. Utilizando expressões de soma para progressão aritmética de razão unitária é fácil provar que a posição ocupada por cada elemento da matriz de dimensão n e de banda b ($a_{i,j}$) ocupará uma posição (c_k)¹ no vetor se considerarmos:

$$\bullet \quad i < b : k = (2b + i + 1)/(2i + j)$$

¹Como o programa foi feito em Linguagem C, o primeiro endereço em cada vetor é o 0.

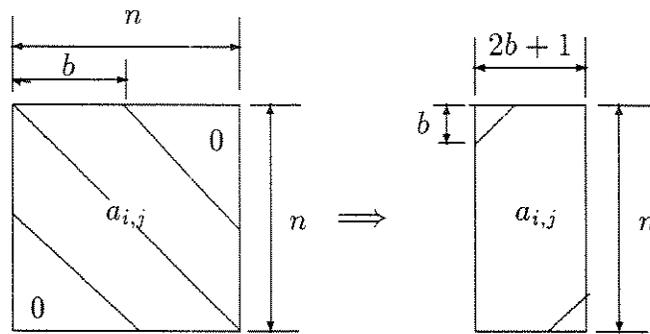


Figura 3.1: Esquema de armazenamento de matriz de banda.

- $i > n$: $k = i(2b + 1) - b(b + 1)/2 + j - i + b$
- $i > n - b$: $k = k_{i>n} - (i + b - n)(i + b + 1 - n)/2$

que desta forma permitem identificar a posição k correspondente a cada ponto (i, j) dentro da banda da matriz e tornando possível o seu armazenamento vetorial.

Com a matriz global montada, a próxima etapa é incluir nela as condições de contorno. Neste caso, quando se trata de alguma condição de influxo pela superfície se utiliza o termo de integral da superfície do problema, um procedimento que será detalhado posteriormente. Quando se tratar de uma condição de valor imposto alguns procedimentos básicos podem ser adotados. O primeiro consiste simplesmente em manter a linha e adicionar ao termo da diagonal principal um valor bastante elevado e na matriz carga adicionar o valor especificado para o termo da fronteira multiplicado por este mesmo valor já utilizado. Outra alternativa é substituir todos os elementos da linha por zero, exceto o termo da diagonal principal que é substituído por 1, e substituir o valor da matriz de carga pelo valor a ser especificado. Existem outras alternativas, mas de aplicação um pouco mais complexa e que serão deixadas de lado. Embora não exista grande diferença entre os dois procedimentos descritos, neste trabalho, por uma questão de preferência pessoal do autor, é utilizado o procedimento da substituição da linha e da carga.

O sistema de equações resultante pode ser resolvido por qualquer método desejado. Entretanto, é conveniente ressaltar que o mais utilizado com armazenamento de banda é o método frontal. Este método, nada mais é do que a eliminação de Gauss tirando proveito desta característica especial da matriz. Embora a utilização de métodos de solução tipo ADI tenha sido reportada por LEWIS *et al.* (1984) eles não representam ainda parcela significativa no total dos trabalhos.

Obtida a solução passa-se a conhecer os valores da variável para todos os nós do domínio, graças à aproximação nodal. A partir deste resultado, pode-se utilizar as próprias funções de interpolação para obter valores da solução em pontos não nodais e localizados dentro do domínio. Esta solução genérica, abrangendo a todo o domínio, é o objetivo básico deste trabalho.

3.3 Discretização da equação de transporte usando o método de Galerkin para geometrias bidimensionais

O procedimento a ser descrito permite que, a partir da equação de transporte em coordenadas cartesianas, obtenha-se as equações equivalentes discretizadas em elementos finitos. Esta equação é a base para a solução da maior parte dos problemas a serem formulados e fundamental para a compreensão de como foi desenvolvido este trabalho. Considerando-se a equação básica:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \frac{S}{\mathcal{C}} \quad (3.2)$$

onde \mathcal{K} e \mathcal{C} indicam as propriedades necessárias para o cálculo e dependem da natureza do problema.

Utilizando a formulação por resíduos ponderados, dada pela equação (3.1), para a equação de transporte obtém-se:

$$\int_{\Omega} W \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \frac{S}{\mathcal{C}} \right] d\Omega = 0$$

que pode ser subdividida em diversas integrais:

$$\int_{\Omega} W \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left(W u \frac{\partial \phi}{\partial x} + W v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{C}} \left(W \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + W \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) d\Omega - \int_{\Omega} W \frac{S}{\mathcal{C}} d\Omega$$

Para detalhar o tratamento dado a cada uma das integrais, a expressão anterior foi subdividida em diversos termos, sendo que cada um deles receberá um tratamento independente. A subdivisão é feita, a partir do primeiro termo da equação, passando cada um a ser denominado, por: termo transiente, termos convectivos, termos difusivos (relacionados à viscosidade e à condução) e o termo fonte, respectivamente.

Tratamento do termo convectivo : considerando-se a aproximação nodal para o campo de velocidades: $u = N_k u_k$, o termo convectivo pode ser expresso na forma:

$$\int_{\Omega} W u \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} W N_k u_k \frac{\partial N_j \phi_j}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} W N_k u_k \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \phi_j$$

Inserindo agora a formulação por Galerkin, onde o valor da função peso é igual à equação de interpolação, a expressão torna-se:

$$\int_{\Omega} W u \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} N_i N_k u_k \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \phi_j = \int_{\Omega} N_k u_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \phi_j$$

Estendendo esta expressão para o outro componente de velocidade num problema bidimensional, obtém-se:

$$\int_{\Omega} W v \frac{\partial \phi}{\partial y} d\Omega = \int_{\Omega} N_k v_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \phi_j$$

A solução desta integral resultará uma matriz quadrada de dimensão igual ao número de nós do elemento discretizado, à qual convencionou-se chamar de $[C]$, assim:

$$[C] = \int_{\Omega} \left(N_k u_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_k v_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.3)$$

Deve-se ressaltar aqui que a matriz $[C]$ é função do perfil de velocidades e que, quando se busca a solução do próprio campo de velocidades, como no caso da equação do movimento, o processo torna-se iterativo (ou então implica em métodos de solução específicos para sistemas não lineares como gradientes conjugados, etc.).

Tratamento do termo difusivo: o estudo deste termo se não é o mais simples é pelo menos o mais difundido de todos, devido a sua semelhança com os termos da equação de Poisson. Esta similaridade existe desde que possa se estabelecer a hipótese de que o coeficiente de difusão seja constante e que, portanto, pode ser retirado da integral. Como os termos resultantes envolvem derivadas de segunda ordem, trabalha-se com o que se convencionou chamar em elementos finitos de "forma fraca" (*weak form*). Esta formulação tem a vantagem de poder utilizar funções de interpolação de ordem mais baixa, neste caso especificamente as que possuam apenas a primeira derivada, aumentando assim

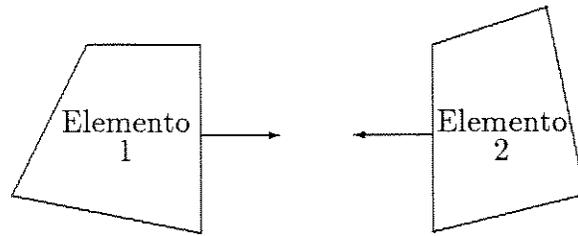


Figura 3.2: Normais que se auto-anulam de dois elementos de fronteira comum.

as possibilidades de sua implementação. Esta redução da ordem da equação diferencial pode ser feita através de uma integração por partes:

$$\int_{\Omega} \left(W \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + W \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} W \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} d\Gamma$$

sendo \vec{n} o vetor normal à superfície do elemento. Esta formulação tem como complicador um termo de integral sobre uma superfície (Γ). Este termo, no entanto, só precisa ser considerado nas fronteiras do domínio uma vez que nos elementos internos sempre existe uma \vec{n} de mesma direção e sentido contrário a de um elemento vizinho, como mostra a figura (3.2).

Na superfície estes valores de derivada normal são as condições de contorno naturais necessárias para a solução do problema. Quando os valores são especificados no contorno basta desconsiderar toda a discretização e impor o valor de ϕ para aquele ponto na matriz global. Desta forma cobre-se a maior parte das condições de contorno usuais e fica resolvido o problema da integral de superfície.

A integral sobre o domínio a ser resolvida, depois de utilizada a aproximação nodal, torna-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \phi_j$$

e utilizando Galerkin:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \phi_j$$

Assim o termo difusivo pode ser agrupado numa matriz $[K]$ onde:

$$[K] = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.4)$$

e os termos de superfície devem ser considerados separadamente quando necessários.

Tratamento do termo transiente: é um termo que sofre um tratamento diferenciado e diversas hipóteses podem ser adotadas. Para o caso do método entálpico em problemas de mudança de fase é amplamente reportado na literatura as vantagens da utilização da matriz massa (ou matriz capacidade térmica) concentrada nos nós. Detalhes a respeito destas considerações podem ser vistos em PHAM (1986) e DALHUIJSEN & SEGAL (1986).

Devido à melhor adequação deste tipo de matriz a uma parte do problema, optou-se por estende-la também para a solução da parcela de convecção natural. Desta forma existe apenas um tipo de matriz massa em todo o problema.

Considerar a formulação matriz massa concentrada é equivalente a adotar o seguinte procedimento:

$$\int_{\Omega} W \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} W d\Omega \frac{\phi_j^{m+1} - \phi_j^m}{\Delta t},$$

utilizando a aproximação sem considerar a variação da temperatura entre os nós pela função de interpolação. Este tipo de aproximação é comumente utilizada em diferenças finitas e o valor m indica avaliação em um tempo t e $m + 1$ em um tempo $t + \Delta t$.

Considerando a função peso de acordo com Galerkin:

$$\int_{\Omega} W \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} N_i d\Omega \frac{\phi_j^{m+1} - \phi_j^m}{\Delta t}$$

e deste modo a matriz massa, que é uma matriz diagonal, passa a ser expressa por:

$$M_{i,i} = \int_{\Omega} N_i d\Omega \quad (3.5)$$

sendo que $M_{i,i}$ representam os termos diagonais de $[M]$.

Tratamento do termo fonte: o termo fonte pode variar ao longo do domínio, portanto admitiremos aqui o caso onde o termo fonte é diferente de acordo com a posição $S(x, y)$. Neste caso, a forma mais adequada é admitir uma variação de S de acordo com as equações de interpolação e usar a aproximação nodal para o mesmo:

$$\int_{\Omega} W S d\Omega = \int_{\Omega} W N_j S_j d\Omega = \int_{\Omega} W N_j d\Omega S_j$$

Considerando a aproximação por Galerkin, tem-se que:

$$\int_{\Omega} W S d\Omega = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega S_j$$

Neste caso, o termo fonte é independente de ϕ e pode ser incluído diretamente no segundo termo do sistema de equações. Para tanto define-se um vetor $\{S\}$ por:

$$\{S\} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega S_j \quad (3.6)$$

Um tratamento alternativo em que não se considera a variação do termo fonte dada pelas próprias funções de interpolação também é largamente utilizado, e neste caso, a expressão seria:

$$\int_{\Omega} W S d\Omega = \int_{\Omega} N_i d\Omega S_i$$

Neste caso obtém-se uma matriz diagonal similar à matriz massa, sendo o termo fonte dado por:

$$\{S\} = [M] \{S_p\} \quad (3.7)$$

sendo o valor de $[M]$ dado pela expressão (3.5) e o $\{S_p\}$ é o valor do termo fonte, avaliado em cada ponto.

De posse de todas estas matrizes é possível construir o sistema base para a solução do problema, ou seja, a matriz global, usando os critérios estabelecidos pela técnica de elementos finitos.



Equação geral do problema: pelo que foi visto até agora a equação de transporte pode ser montada na forma:

$$\frac{1}{\Delta t} [M] \frac{\phi_j^{m+1} - \phi_j^m}{\Delta t} + [C] \phi_j^{m+\gamma} + \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{C}} [K] \phi_j^{m+\gamma} + \frac{1}{\mathcal{C}} \{S\} = \{\Gamma\} \quad (3.8)$$

onde os valores das matrizes são obtidos das integrações descritas anteriormente exceto o valor Γ , que representa as condições de contorno. O valor de γ é deixado para permitir uma discretização genérica de forma que:

$$\phi_j^\gamma = \gamma \phi_j^{m+1} + (1 - \gamma) \phi_j^m \quad (3.9)$$

e a partir do momento em que as matrizes globais são obtidas e o esquema de discretização no tempo é determinado o problema está pronto para ser solucionado.

3.4 Geração automática de malha

Uma das formas mais simples para geração de malha é chamada de mapeamento transfinito e utilizada neste trabalho da forma proposta por ALBERT & O'NEIL (1986). Estes esquemas geram malhas genéricas e que, portanto, não podem ser utilizados quando se deseja trabalhar com malhas ortogonais, caso mais comum de diferenças finitas. O esquema de geração baseia-se em funções de transformação de domínio e, no caso específico para a geração de malhas quadradas, utiliza-se projetores bilineares na forma:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= (1 - v_j) \psi_1^{x,i} + v_j \psi_2^{x,i} + (1 - u_i) \xi_1^{x,j} + u_i \xi_2^{x,j} - (1 - v_j) (1 - u_i) \psi_1^{x,0} - \\ &\quad (1 - u_i) v_j \psi_2^{x,0} - u_i v_j \psi_2^{x,n} - (1 - v_j) u_i \psi_1^{x,n} \\ y_{i,j} &= (1 - v_j) \psi_1^{y,i} + v_j \psi_2^{y,i} + (1 - u_i) \xi_1^{y,j} + u_i \xi_2^{y,j} - (1 - v_j) (1 - u_i) \psi_1^{y,0} - \\ &\quad (1 - u_i) v_j \psi_2^{y,0} - u_i v_j \psi_2^{y,n} - (1 - v_j) u_i \psi_1^{y,n} \end{aligned}$$

sendo que u_i e v_j representam posições em relação a cada uma das fronteiras e variam entre 0 e 1. A figura (3.3) mostra a representação de um domínio e de suas respectivas fronteiras.

É importante ainda ressaltar que, embora as expressões mostradas para geração de malha utilizem os valores extremos representados através dos valores de ψ , um procedimento similar pode ser feito utilizando estes mesmos valores representados através de ξ ,

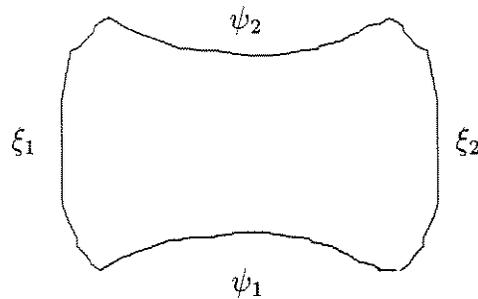


Figura 3.3: Esquema de uma geometria arbitrária com representação das fronteiras.

desde que se observe a sua correspondência. Imagine um caso com n subdivisões em ψ e m subdivisões em ξ , esta correspondência é dada por: $\psi_1^{z,0} = \xi_1^{z,0}$, $\psi_1^{z,n} = \xi_2^{z,0}$, $\psi_2^{z,0} = \xi_1^{z,m}$ e $\psi_2^{z,n} = \xi_2^{z,m}$, onde z representa direção genérica, uma vez que todas as coordenadas do ponto são coincidentes. Existe ainda um procedimento, similar a este, para a utilização de elementos triangulares. Detalhes desta função, chamada de projetor trilinear, podem ser encontrados em ALBERT & O'NEIL (1986).

Este procedimento foi testado em algumas geometrias, como mostrado na figura (3.4), onde são montadas malhas para alguns casos bidimensionais relativamente complexos. Nos casos mostrados, não foram encontrados problemas de geração e as malhas puderam ser montadas com sucesso.

Entretanto, é conveniente lembrar que a utilização deste tipo de procedimento para formulação de problemas de mudança de fase através de elementos finitos deformáveis é um procedimento, na melhor das hipóteses, perigoso. Isto porque, conforme foi inclusive citado por ALBERT & O'NEIL (1986), pode ocorrer uma extrapolação da malha para fora do domínio ("overspill"). Caso a malha gerada não seja constantemente analisada, o que inviabiliza o procedimento, coisas deste tipo podem ocorrer, principalmente quando as geometrias envolvidas são relativamente complexas. A figura (3.5a) mostra um contorno onde ocorre este fenômeno.

No entanto, este não é o único problema que pode vir a ocorrer. Existe ainda a possibilidade da geração de elementos de área muito menor que os demais, o que implica em uma perda da precisão na solução do problema. Estes elementos de área discrepante em relação aos demais podem, não só diminuir a precisão na solução do problema, como também inviabilizar a solução numérica da matriz global, devido a um mal con-

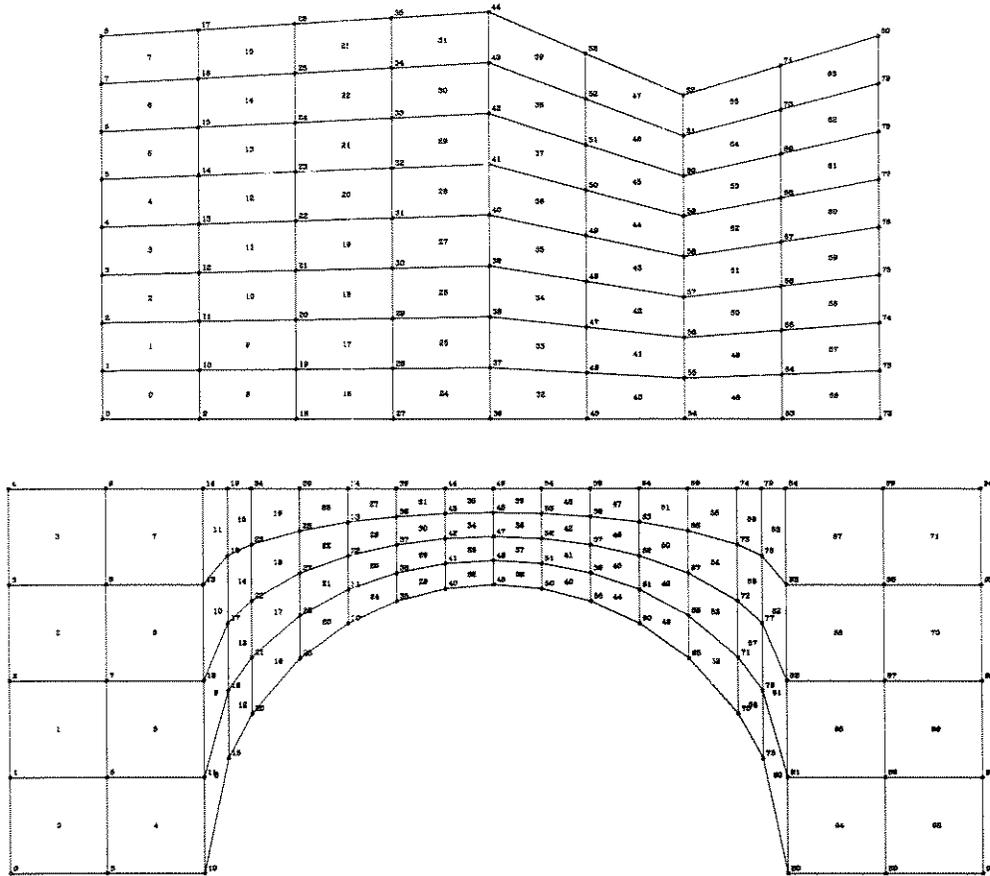
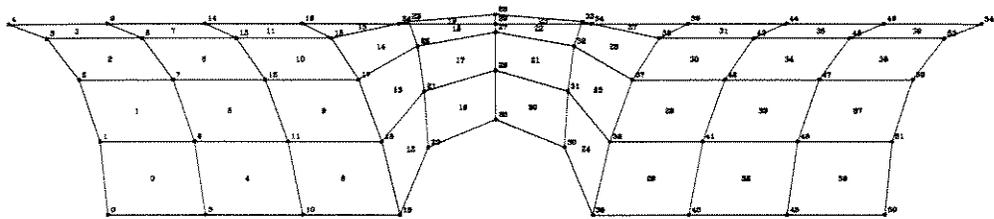


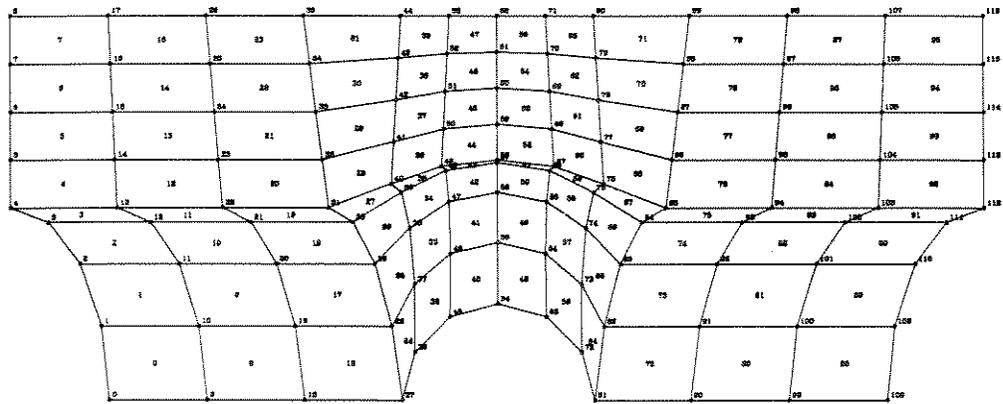
Figura 3.4: Geração de malhas para geometrias complexas.

dicionamento resultante. A figura (3.5b) mostra um caso onde pode se notar este mal condicionamento na região central do problema, com elementos de área discrepante do restante do domínio. Desta forma, estes problemas não devem ser esquecidos quando se trabalha com constantes geração de malha, ou mesmo, a geração de uma única malha para geometrias complexas.

Neste trabalho a geometria proposta é relativamente simples e a malha deve ser capaz apenas de descrever a posição desejada para a aleta. Além disto a malha, após ser gerada, é verificada para que inconsistências deste tipo não ocorram. Tudo isto garante o funcionamento deste esquema para o problema proposto.



a) Malha que apresenta "overspill".



b) Malha que apresenta elementos com área muito pequena.

Figura 3.5: Geometrias complexas que apresentaram problemas utilizando-se de mapeamento transfinito.

Capítulo 4

Formulação do problema

Como já foi discutido, existe um grande número de métodos de solução tanto de problemas de mudança de fase como de problemas envolvendo escoamentos. Neste capítulo será feita uma avaliação destas metodologias, principalmente no que se refere ao processo de mudança de fase. Para o caso de problemas de movimentação de fluidos será apresentada somente a solução através de métodos de correção da velocidade, que é a mais utilizada atualmente. Depois de conhecida a formulação será apresentada uma descrição da metodologia adotada na solução do problema.

4.1 Formulações para o problema com mudança de fase utilizando-se o método de elementos finitos

O método entálpico, conhecido por sua forma eficiente de solucionar problemas de mudança de fase com malhas fixas, é utilizado também quando a formulação é feita através da técnica de elementos finitos. Neste caso, convém ressaltar, se trata praticamente de uma transposição da metodologia convencionalmente utilizada em diferenças finitas para a técnica de elementos finitos. Os primeiros artigos datam do início dos anos 70, sendo que, a metodologia foi praticamente estabelecida por COMINI *et al.* (1974), baseando-se nos diversos artigos que já haviam sido publicados sobre o assunto em diferenças finitas. Critérios de estabilidade do método também foram estudados e dentre os quais destaca-se o trabalho de BELL (1982), que impunha a existência de uma faixa de temperatura de mudança de fase compatível com a malha adotada como condição necessária para que não houvesse oscilações transientes da temperatura de um ponto. Estas mesmas condições

continuam válidas quando se deseja trabalhar com elementos finitos.

São muito utilizadas técnicas de acompanhamento de fronteira em elementos finitos como metodologia alternativa ao método entálpico. No entanto este procedimento envolve constante geração de malhas com as quais se deve ter um cuidado redobrado, utilizando técnicas confiáveis. Neste ponto reside a vantagem do método entálpico, que mantém a adaptação a qualquer tipo de domínio que é a característica básica da técnica de elementos finitos, mas utiliza-se de uma única geração de malha que pode ser verificada separadamente e desta forma efetuar a correção de possíveis problemas.

4.1.1 Método Entálpico

Este método é bastante simples e baseia-se na inclusão do calor latente de mudança de fase como uma correção da capacidade térmica ou da entalpia do material na região onde o fenômeno está ocorrendo. Assim sendo, a partir do momento em que se conhece o campo de temperaturas é possível estimar a entalpia de cada ponto ou a sua capacidade térmica aparente.

Método de correção da capacidade térmica com a variação da entalpia ao longo do espaço

COMINI *et al.* (1974) propuseram este que foi o primeiro método utilizado para estimar o capacidade térmica aparente do material, baseando-se na variação da entalpia entre os nós circunvizinhos. Neste trabalho os autores se baseiam na definição termodinâmica da calor específico para estimar o seu valor aparente:

$$c = \frac{dh}{dT}$$

Desta forma os autores propuseram que o valor do c fosse calculado como:

$$c \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h / \partial x}{\partial T / \partial x} + \frac{\partial h / \partial y}{\partial T / \partial y} \right)$$

Depois de diversos estudos sobre qual a melhor forma de avaliar o c , COMINI & SARO (1990) propuseram a forma que é a mais utilizada atualmente:

$$c = \frac{\vec{\nabla} h \cdot \vec{\nabla} T}{\vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} T} \quad (4.1)$$

onde $\vec{\nabla}$ representa o vetor gradiente. Note que, neste caso, pode-se utilizar a integração desta expressão dentro de um elemento para a avaliação da propriedade e portanto o valor de c será constante dentro de um mesmo elemento.

O fato do valor de c ser constante para cada elemento fará com que definamos uma matriz massa modificada para cada elemento, na forma

$$[m_c] = c[m]$$

onde $[m]$ é a matriz elementar de $[M]$ e é dada pela expressão análoga à (3.5), só que integrada apenas sobre o domínio do elemento. Chamaremos de $[M_c]$ a matriz global resultante da montagem a partir das matrizes elementares $[m_c]$.

Esta metodologia foi ainda melhorada por COMINI & SARO (1990) que propuseram um método onde a expressão acima é utilizada para avaliar o c . Com este é possível resolver a equação da energia e assim obter um campo de temperaturas predito T^* . Normalmente a equação da energia discretizada é aproximada numa forma matricial como sendo:

$$[M_c] \frac{1}{\Delta t} (\{T^{m+1}\} - \{T^m\}) + k[K]\{T^\gamma\} = \{\Gamma\}$$

onde o valor da matriz $[K]$ é obtido a partir da expressão (3.4).

Este campo de temperaturas aproximado é utilizado para calcular as entalpias corretas de cada um dos pontos, como:

$$\{h^{m+1}\} = \{h^m\} + [M_c]^{-1} (\{T^*\} - \{T^m\}) \quad (4.2)$$

É conhecido que a inversão de matriz não é um processo simples, no entanto neste caso este procedimento só precisa ser feito uma única vez, já que a malha é fixa e a matriz $[M_c]$ não muda. Os autores utilizam originalmente a matriz massa consistente, mas este procedimento é mais simples ainda quando utilizada a matriz massa concentrada, como neste trabalho. Neste caso a matriz $[M_c]$ é uma matriz diagonal e facilmente inversível:

$$mc_{i,j}^{-1} = \begin{cases} 1/mc_{i,j} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

De posse do valor de $\{H^{m+1}\}$ é possível calcular o valor da temperatura para cada ponto, que passa desta forma a ser o valor corrigido para a temperatura.

Método de correção da capacidade térmica com a variação da entalpia ao longo do tempo

MORGAN *et al.* (1978), baseando-se nos métodos já existentes de correção da capacidade térmica, propuseram uma formulação alternativa: que considera a variação da entalpia ao longo do tempo:

$$c = \frac{\partial h}{\partial T} = \frac{\partial h / \partial t}{\partial T / \partial t} \implies C_i^{m+1} = \rho \frac{h_i^{m+1} - h_i^m}{T_i^{m+1} - T_i^m}, \quad (4.3)$$

utilizando-se de uma aproximação de primeira ordem da derivada. O valor da capacidade térmica do elemento pode ser calculado como uma média das respectivas capacidades térmicas que o compõe ou ainda, utilizando uma formulação mais adequada, utilizar o valor de cada capacidade térmica corrigida no seu próprio nó. Para tanto utiliza-se uma ferramenta comum em elementos finitos que é a inclusão dos valores da capacidade térmica em uma matriz diagonal. Assim, a matriz resultante seria similar a:

$$[D_C] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_n \end{bmatrix}$$

Este procedimento é análogo ao utilizado quando se trabalha com materiais em que a condutibilidade varia de forma acentuada dentro do domínio.

De posse da matriz $[D_C]$, o problema se resume à solução da equação da energia:

$$[M][D_C] \frac{1}{\Delta t} (\{T^{m+1}\} - \{T^m\}) + k[K]\{T^\gamma\} = \{\Gamma\} \quad (4.4)$$

onde $\{\Gamma\}$ representa os termos de superfície.

No entanto é conveniente ressaltar que nem sempre a aplicação simples desta expressão fornece resultados satisfatórios. Testes feitos mostram que se deve optar por um procedimento iterativo que busque a convergência do campo de temperaturas e capacidades térmicas para cada tempo. Quando isto não é possível e ainda, a faixa de mudança de

fase é muito pequena deve se optar, pelo menos, por um número finito de correções, três ou quatro por exemplo.

Método de correção da entalpia pelo balanço térmico

Um método que tem sido utilizado com maior frequência ultimamente é o que realiza um balanço energético em torno do elemento. Este método foi utilizado por PHAM (1986) com sucesso na solução de problemas de mudança de fase, e seu princípio é simples. Baseando-se na equação da condução tem-se que o balanço energético para um dado elemento pode ser expresso como:

$$\int_{\Omega} \psi \frac{\partial h}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \psi k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) d\Omega,$$

que na forma fraca, torna-se:

$$\int_{\Omega} \psi \frac{\partial h}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} k \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \psi k \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma \quad (4.5)$$

Após a montagem da matriz o termo do lado direito representa os fluxos de calor em cada um dos nós integrados ao longo do volume que, na forma matricial, pode ser expresso por:

$$\{q\} = k [K] \{T\} - \{\Gamma\} \quad (4.6)$$

Conhecido o calor trocado entre os nós, torna-se fácil calcular o fluxo de calor por unidade de volume e, conseqüentemente, a variação da entalpia para cada um dos pontos, ou seja:

$$\Delta h_i = - \frac{\Delta t q_i}{\rho \Omega_i^e} \quad (4.7)$$

É conveniente ressaltar que o valor do domínio em torno do nó central é idêntico ao volume de controle considerado, quando se trabalha com a formulação em volumes de controle como mostra a figura (4.1). No entanto a aplicação da equação (4.7) não está relacionada a nenhum dos conceitos de volume de controle e sim à formulação massa concentrada, que resulta numa matriz massa diagonal. Esta matriz possui, na sua diagonal principal, um valor equivalente ao dos volumes considerados e, quando invertida, também resulta na equação (4.7).

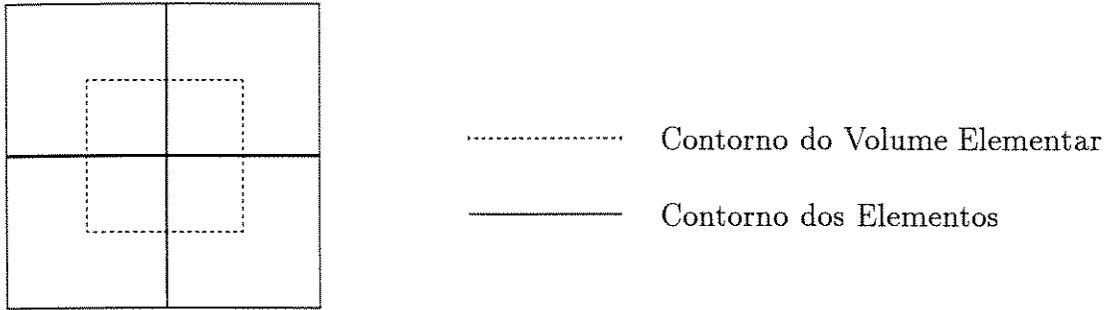


Figura 4.1: Diagrama representativo do volume elementar de um ponto.

Conhecida a variação da entalpia de cada nó é possível estimar a nova entalpia do ponto como:

$$h_i^* = h_i^m + \Delta h_i \quad (4.8)$$

Assim, pode-se adotar o procedimento explícito admitindo que o novo perfil de temperaturas possa ser calculado através deste campo de entalpias, ou então, que este novo campo de entalpias possa ser utilizado no cálculo do C na forma:

$$C_i = \rho \frac{h_i^* - h_i^m}{T_i^* - T_i^m}, \quad (4.9)$$

sendo que o valor de T_i^* é calculado através da função inversa da entalpia $T_i^* = F^{-1}(h_i^*)$. Pode-se, então, utilizar esta expressão na equação da energia para se calcular as novas temperaturas, ou seja:

$$[M] C_i \frac{1}{\Delta t} (\{T^{m+1}\} - \{T^m\}) + [K] \frac{1}{2} (\{T^{m+1}\} + \{T^m\}) = \{\Gamma\} \quad (4.10)$$

Resolvido este sistema de equações obtém-se um campo de temperaturas (T_i^*), que é corrigido novamente pelo balanço térmico utilizando-se as expressões:

$$h_i^{m+1} = h_i^m + \frac{C_i}{\rho} (T_i^* - T_i^m) \quad \text{e} \quad (4.11)$$

$$T_i^{m+1} = F^{-1}(h_i^{m+1}) \quad (4.12)$$

4.1.2 Funções para o cálculo da entalpia

Dependendo da formulação a ser adotada pode-se escolher uma dentre as duas formas básicas para o cálculo da entalpia. A primeira é a que considera o ponto por si só e,

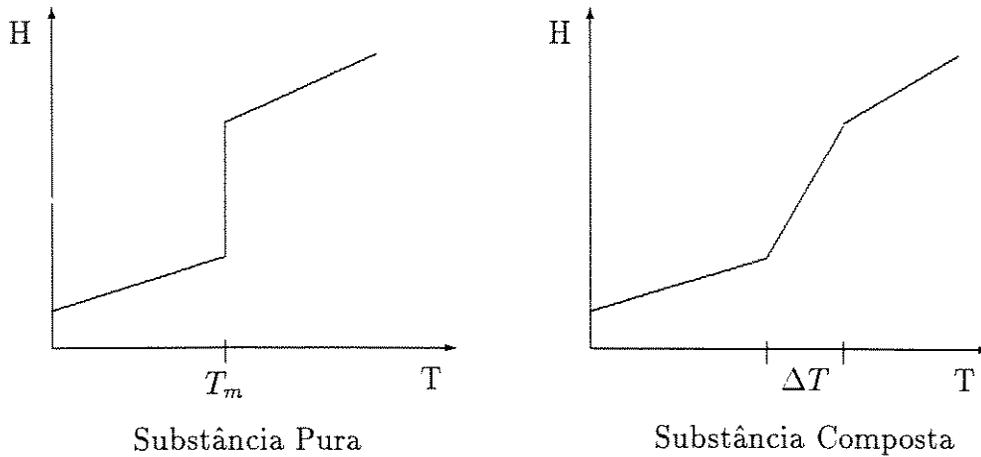


Figura 4.2: Comportamento diferenciado da entalpia

dependendo do material considerado, calcula a entalpia como uma função da temperatura. A outra forma envolve não só o ponto, mas também todo um volume nodal que o envolve e a sua entalpia é representada como um valor médio para esta região. Assim se a região é composta por mais de um material a entalpia média terá uma expressão tal, que leve em conta esta composição.

Outra consideração importante a respeito da entalpia é a existência da faixa de mudança de fase, comum em materiais compostos. A figura (4.2) mostra o comportamento da entalpia em função do campo de temperaturas para os casos de substância pura e mistura. Entretanto, muitas vezes, a inclusão desta faixa de mudança de fase é utilizada nos métodos de malha fixa, onde a fronteira não é tratada explicitamente, como um artifício para permitir a localização da fronteira de fusão ou solidificação e evitar uma oscilação da temperatura durante o seu transiente.

BELL (1982) mostrou que a presença deste ΔT é fundamental para que não ocorra uma oscilação irreal dos valores da temperatura ao longo do tempo. Este problema, comum nesta formulação é totalmente eliminado quando se consegue, pelo menos, dois pontos da malha dentro da região de mudança de fase. Isto implica que quanto menor o valor de ΔT mais refinada deve ser a malha.

Uma consideração adicional utilizada nas próximas seções: todas as expressões obtidas para o campo de entalpias se baseiam no fato que foi tomada como temperatura de referência uma temperatura para o material no seu estado sólido. Nada impede que seja tomada uma temperatura de referência em outro estado mas, caso isto seja feito, devem ser obtidas novas funções para a entalpia.

Entalpia do ponto

É a forma utilizada quando não se necessita da função inversa da entalpia, sendo dada por:

$$h = \begin{cases} c_{p,s}(T - T_r) & \text{(fase sólida)} \\ c_{p,s}(T_f - T_r) + \frac{\lambda}{\Delta T} \left[T - \left(T_f - \frac{\Delta T}{2} \right) \right] & \text{(faixa de mudança de fase)} \\ c_{p,s}(T_f - T_r) + \lambda + c_{p,l}(T - T_f) & \text{(fase líquida)} \end{cases}$$

Note que se o valor de ΔT for nulo isto invalida a expressão proposta. No entanto, este problema poderia ser facilmente contornado com a substituição da expressão descrita por uma expressão até mais simples. Isto, entretanto, deve ser evitado pelas considerações feitas anteriormente a respeito do transiente das temperaturas nodais.

De acordo com as definições dos adimensionais pode-se estender a expressão obtida acima para a forma adimensional, ficando assim:

$$H = \begin{cases} \bar{c}_s(\theta - \theta_r) & \text{(fase sólida)} \\ \bar{c}_s(\theta_f - \theta_r) + \frac{1}{\text{Ste} \Delta\theta} \left[\theta - \left(\theta_f - \frac{\Delta\theta}{2} \right) \right] & \text{(faixa de mudança de fase)} \\ \bar{c}_s(\theta_f - \theta_r) + \frac{1}{\text{Ste}} + \bar{c}_l(\theta - \theta_f) & \text{(fase líquida)} \end{cases}$$

Entalpia de uma região nodal

Embora a entalpia do ponto seja amplamente utilizada e forneça bons resultados, ela não é aconselhável quando se trabalha com dois materiais diferentes, principalmente se a formulação exigir a função inversa, ou seja, o cálculo da temperatura em função da entalpia. Neste caso é conveniente trabalhar com um valor médio de entalpia representativo para a região nodal, como mostrado na figura (4.1). Este procedimento nada mais é que o cálculo de uma capacidade térmica equivalente para a região, e depende obviamente da quantidade de materiais abrangidos pela mesma. Quando se trata de um único material o valor da entalpia calculada pela região nodal é igual ao valor calculado pelo ponto.

Aplicando estes conceitos temos que a entalpia de um dado ponto, que está numa

interface composta por n materiais pode ser dada por:

$$h = \frac{1}{\Omega^\varepsilon} \sum_{i=1}^n \begin{cases} c_{p,s,i} \Omega_i^\varepsilon (T - T_r) & T < T_{f,i}^- \\ \Omega_i^\varepsilon \left\{ c_{p,s,i} (T_f - T_r) + \frac{\lambda_i}{\Delta T_i} \left[T - \left(T_{f,i} - \frac{\Delta T_i}{2} \right) \right] \right\} & T_{f,i}^- < T < T_{f,i}^+ \\ \Omega_i^\varepsilon [c_{p,s,i} (T_f - T_r) + c_{p,l,i} (T - T_f) + \lambda_i] & T > T_{f,i}^+ \end{cases}$$

Esta expressão na forma adimensional, é dada por:

$$H = \frac{1}{v_\varepsilon} \sum_{i=1}^n \begin{cases} \bar{c}_{s,i} v_{e,i} (\theta - \theta_r) & \theta < \theta_{f,i}^- \\ v_{e,i} \left\{ \bar{c}_{s,i} (\theta_f - \theta_r) + \frac{1}{\text{Ste} \Delta \theta_i} \left[\theta - \left(\theta_{f,i} - \frac{\Delta \theta_i}{2} \right) \right] \right\} & \theta_{f,i}^- < \theta < \theta_{f,i}^+ \\ v_{e,i} \left[\bar{c}_{s,i} (\theta_f - \theta_r) + \bar{c}_{l,i} (\theta - \theta_f) + \frac{1}{\text{Ste}} \right] & \theta > \theta_{f,i}^+ \end{cases}$$

Como foi comentado desde o início esta formulação tem a grande vantagem de possuir função inversa, desta forma a temperatura pode ser calculada em função da entalpia através da expressão:

$$\theta = \frac{H v_i - \delta H}{\delta \bar{c}}$$

sendo que:

$$\delta H = \sum_{i=1}^n \begin{cases} \bar{c}_{s,i} v_{e,i} \theta_r & H < H_i^- \\ \frac{v_{e,i}}{\text{Ste} \Delta \theta_i} \left(\theta_{f,i} - \frac{\Delta \theta_i}{2} \right) - \bar{c}_{s,i} v_{e,i} (\theta_f - \theta_r) & H_i^- < H < H_i^+ \\ \bar{c}_{l,i} v_{e,i} \left(\theta_{f,i} + \frac{\Delta \theta_i}{2} \right) - \bar{c}_{s,i} v_{e,i} (\theta_f - \theta_r) - \frac{v_{e,i}}{\text{Ste}} & H > H_i^+ \end{cases}$$

e ainda

$$\delta \bar{c} = \sum_{i=1}^n \begin{cases} \bar{c}_{s,i} v_{e,i} & H < H_i^- \\ \frac{v_{e,i}}{\text{Ste} \Delta \theta_i} & H_i^- < H < H_i^+ \\ \bar{c}_{l,i} v_{e,i} & H > H_i^+ \end{cases}$$

Esta metodologia é, por tudo que já foi discutido, mais genérica e justifica a preferência dada para este tipo de formulação na elaboração do programa. Estes são os procedimentos completos utilizados na solução, por elementos finitos, do processo de transferência de calor com mudança de fase pelo método entálpico.

4.2 Solução para o problema do escoamento

Diversos modelos são propostos para se obter a solução de escoamentos em elementos finitos, no entanto são mais comuns os de ordem mista, que é equivalente à malha deslocada proposta por PATANKAR (1980), e de igual ordem, modelo que apesar de usar malhas coincidentes para pressão e velocidade não exhibe o comportamento oscilatório descrito por diversos autores.

Alguns estudos, como os feitos por PRAKASH (1986) e PERIĆ *et al.* (1988), mostram que o modelo de igual ordem apresenta uma melhor precisão e, devido a este fato, será dada preferência a este modelo na formulação do problema proposto.

Este tipo de abordagem é conhecida há algum tempo como mostrado por SCHNEIDER *et al.* (1978), no entanto ela foi redescoberta há pouco, e vem sendo muito utilizada nos trabalhos mais recentes. Apesar desta metodologia poder ser utilizada indistintamente tanto em diferenças finitas como em elementos finitos, sua maior utilização tem se dado neste último.

4.2.1 Modelagem do campo de velocidades e pressão com interpolação de mesma ordem

A discretização do campo de velocidades é baseada nas considerações feitas para convecção e com a inclusão do termo de pressão. Assim a equação de Navier-Stokes, bidimensional para um fluido incompressível é dada por:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + S_x \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + S_y \end{aligned}$$

e a equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Observe que a equação da quantidade de movimento tanto em x como em y são semelhantes à equação de transporte discutida anteriormente, exceto pela presença do termo de pressão que, no entanto, pode ser tratada como um termo fonte. Desta forma, o tratamento dado será idêntico ao da equação (3.2), sendo que $C = \rho$, $K = \mu$ e ainda $S = S_x - \partial p / \partial x$ ou $S = S_y - \partial p / \partial y$, de acordo com a direção considerada.

Considerando a solução do problema em sua forma implícita, tem-se que o sistema de equações resultante é dado por:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t} [M] + [C] + \nu [K] \right) \{u\} &= \frac{1}{\Delta t} [M] \{u^0\} + \frac{1}{\rho} \{S_x\} - \frac{1}{\rho} [M] \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \\ \left(\frac{1}{\Delta t} [M] + [C] + \nu [K] \right) \{v\} &= \frac{1}{\Delta t} [M] \{v^0\} + \frac{1}{\rho} \{S_y\} - \frac{1}{\rho} [M] \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma \end{aligned}$$

onde os valores das matrizes $[M]$, $[C]$, $[K]$ e $\{S\}$ são dados, respectivamente, pelas expressões (3.5), (3.3), (3.4) e (3.7).

Após efetuadas as operações com as matrizes obtém-se um sistema de equações na forma:

$$[\bar{A}_x] \cdot \{u\} = \{\bar{B}_x\} \quad \text{e} \quad [\bar{A}_y] \cdot \{v\} = \{\bar{B}_y\} \quad (4.13)$$

sendo que as matrizes $[\bar{A}_x]$ e $[\bar{A}_y]$ são idênticas quando se tem os mesmos tipos de condição de contorno para as velocidades u e v .

Este procedimento deve ser observado para a discretização futura da equação da continuidade, no entanto, neste trabalho optou-se por utilizar uma melhor aproximação do campo de pressões, quando da solução da equação da quantidade de movimento. A expressão que aparece na equação geral pode ser aproximada na forma:

$$\int_{\Omega} W \frac{\partial p}{\partial z} d\Omega = \int_{\Omega} W \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega \cdot p_j = \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega \cdot p_j$$

utilizada a aproximação de Galerkin e sendo z uma direção genérica. Desta forma, uma nova matriz pode ser definida como:

$$[\mathcal{P}_z] = \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega \quad (4.14)$$

Desta forma a expressão geral para a equação da quantidade de movimento nas duas direções passa a ser expressa em sua forma matricial por:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [M] + [C] + \nu [K] \right) \{u\} = \frac{1}{\Delta t} [M] \{u^0\} + \frac{1}{\rho} \{S_x\} - \frac{1}{\rho} [\mathcal{P}_x] \{p\} + \nu \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [M] + [C] + \nu [K] \right) \{v\} = \frac{1}{\Delta t} [M] \{v^0\} + \frac{1}{\rho} \{S_y\} - \frac{1}{\rho} [\mathcal{P}_y] \{p\} + \nu \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma \quad (4.16)$$

Assim, para a discretização das equações da quantidade de movimento é necessário considerar uma outra equação a ser resolvida: a equação da continuidade. Utilizando o método de resíduos ponderados esta equação fica:

$$\varepsilon = \int_{\Omega} W \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega$$

que na forma fraca e desprezando o resíduo é:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial x} u + \frac{\partial W}{\partial y} v \right) d\Omega = \int_{\Gamma} W u_n d\Gamma \quad (4.17)$$

Lembre-se que o termo de superfície só é considerado nas fronteiras do domínio.

Relação entre velocidade e pressão

Como foi visto, as equações discretizadas estabelecem uma relação entre o campo de velocidades e o gradiente de pressões. Tomando-se a expressão (4.13) e dividindo as matrizes de carga $\{B_x\}$ e $\{B_y\}$, obtém-se:

$$\{B_z\} = -\frac{1}{\rho} [M] \frac{\partial \vec{p}}{\partial z} + \{S\} = -b_i \frac{\partial \vec{p}}{\partial z} + s_i^{p,z}$$

onde o primeiro termo representa a parte da carga indicada pela pressão e o segundo a contribuição de parcela do termo transiente, termos de superfície e ainda o termo fonte.

Na forma matricial pode se escrever as equações da quantidade de movimento da seguinte forma:

$$a_{i,i} u_i = - \sum_{j \neq i} a_{i,j} u_j - b_i \frac{\partial p}{\partial x} + s_i^{p,x}$$

$$a_{i,i} v_i = - \sum_{j \neq i} a_{i,j} v_j - b_i \frac{\partial p}{\partial y} + s_i^{p,y}$$

Definindo as novas variáveis:

$$\hat{u}_i = -\frac{\sum_{j \neq i} a_{i,j} u_j}{a_{i,i}}; \quad \hat{v}_i = -\frac{\sum_{j \neq i} a_{i,j} v_j}{a_{i,i}}; \quad K_{p,i} = \frac{b_i}{a_{i,i}}; \quad \mathcal{S}_i^{p,z} = \frac{s_i^{p,z}}{a_{i,i}} \quad (4.18)$$

Estas expressões podem ser reescritas na forma:

$$u_i = \hat{u}_i + \mathcal{S}_i^{p,x} - K_{p,i} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.19)$$

$$v_i = \hat{v}_i + \mathcal{S}_i^{p,y} - K_{p,i} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.20)$$

Os valores de u e v podem ser expressos através das funções de interpolação:

$$u = N_j u_j = N_j \left(\hat{u}_j + \mathcal{S}_j^{p,x} - K_{p,j} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad v = N_j v_j = N_j \left(\hat{v}_j + \mathcal{S}_j^{p,y} - K_{p,j} \frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

Substituindo estas expressões na forma fraca da equação da continuidade, equação (4.17) e considerando a formulação de Galerkin, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \left(\hat{u}_j + \mathcal{S}_j^{p,x} - K_{p,j} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j \left(\hat{v}_j + \mathcal{S}_j^{p,y} - K_{p,j} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \int_{\Gamma} N_i u_n d\Gamma$$

Lembrando ainda que a pressão dentro do elemento pode ser expressa através das funções de interpolação:

$$p = N_i(x, y) p_i \implies \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} p_i \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} p_i \end{cases}$$

Substituindo estes resultados, desprezando o resíduo e rearranjando a expressão para a continuidade obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} N_j K_{p,j} \frac{\partial N_k}{\partial x} p_k + \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j K_{p,j} \frac{\partial N_k}{\partial y} p_k \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} N_j (\hat{u}_j + \mathcal{S}_j^{p,x}) - \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j (\hat{v}_j + \mathcal{S}_j^{p,y}) \right) d\Omega - \int_{\Gamma} N_i u_n d\Gamma \quad (4.21)$$

que é a expressão genérica a ser resolvida.

Deve-se ressaltar alguns pontos que permitem rearranjar a expressão (4.21), ou seja:

- a multiplicação de matrizes não é comutativa e regras devem ser estabelecidas para a mudança de termos;

- a multiplicação é no entanto associativa, o que, permite que seja efetuado este tipo de operação;
- note que o produto $N_j K_{p,j}$ resulta em um escalar. Isto permite a alteração da sua posição para uma outra mais conveniente, uma vez que a multiplicação de matriz por escalar é comutativa.

Considerando estas observações, associadas ao fato que os vetores p_i e $K_{p,j}$ são valores nodais e portanto constantes, eles podem ser retirados da integral.

Para reduzir o problema a um sistema de equações na forma:

$$[\overline{A}_p] \cdot \{p\} = \{B_p\} \quad (4.22)$$

temos que os termos seriam dados por:

$$\begin{aligned} [\overline{A}_p] &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) N_l \cdot K_{p,l} d\Omega \\ \{B_p\} &= \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \cdot (\hat{u}_j + \mathcal{S}_j^{p,x}) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j \cdot (\hat{v}_j + \mathcal{S}_j^{p,y}) d\Omega - \int_{\Gamma} N_i u_n d\Gamma \end{aligned}$$

Obtido o campo de pressões pode-se corrigir o valor das velocidades antes de se calcular os novos coeficientes, isto é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_i &= \hat{u}_i + \mathcal{S}_i^{p,x} - \frac{1}{\rho a_{i,i}} \int_{\Omega} W \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega \\ v_i &= \hat{v}_i + \mathcal{S}_i^{p,y} - \frac{1}{\rho a_{i,i}} \int_{\Omega} W \frac{\partial p}{\partial y} d\Omega \end{aligned}$$

ou utilizando a interpolação do campo de pressões e a aproximação de Galerkin, da mesma forma utilizada na equação da quantidade de movimento:

$$u_i = \hat{u}_i + \mathcal{S}_i^{p,x} - \frac{1}{\rho} [\mathcal{P}_x] \frac{p_{i,j}}{a_{i,i}} \quad (4.23)$$

$$v_i = \hat{v}_i + \mathcal{S}_i^{p,y} - \frac{1}{\rho} [\mathcal{P}_y] \frac{p_{i,j}}{a_{i,i}} \quad (4.24)$$

Condições de Contorno

As expressões a serem resolvidas já estão definidas, no entanto restam ainda o estabelecimento das condições de contorno. Para a equação da quantidade de movimento não existe a menor dúvida sobre a sua definição. Pode-se agrupá-las segundo os critérios:

Não deslizamento ou perfil imposto: nos quais a velocidade em cada nó é conhecida, sendo nula no caso de não deslizamento. Para impor esta condição basta alterar as linhas correspondentes na matriz para especificar o valor da velocidade.

Fronteira de saída: na qual o perfil de velocidades não é conhecido e uma condição precisa ser imposta. Condições que expressem com precisão este fenômeno estão em estudo, no entanto a mais usual é:

$$\frac{du_n}{d\vec{n}} = 0,$$

que é a condição natural em elementos finitos e não depende de nenhum tipo de correção do sistema de equações, já está automaticamente definida.

No caso da equação da pressão estas condições não são tão simples. Foi mostrado que ao obter a forma fraca aparece um termo de integral de superfície, $\int_S W u_n dS$, que precisa ser avaliado em função da distribuição de velocidades obtidas. No entanto, deve ser acentuado que este termo apresenta uma velocidade normal e, assim sendo, somente nos trechos da fronteira onde ocorrerem influxos ou efluxos é que ele deve ser considerado.

Além disto, é também preciso considerar a natureza relativa da pressão, ou seja, como somente se trabalha com diferenças de pressão, é preciso estabelecer o seu patamar. Para isto, basta que se escolha um nó (interno ou de fronteira) e estabelecer nele um valor de pressão.

Finalmente, e talvez o mais importante, é considerar que os pontos de fronteira não podem ser calculados da mesma forma que os internos, para tanto é preciso desligá-los, isto é feito de forma que todo o K_p de pontos de fronteira seja nulo. Esta consideração implica ainda que o valor para \hat{u} e \hat{v} de acordo com as equações (4.19) e (4.20) sejam iguais aos valores especificados para u e v nas fronteiras, respectivamente.

4.2.2 Inclusão dos efeitos de convecção natural

O efeito de convecção natural depende da solução da equação da energia uma vez que os efeitos da gravidade dependem da diferença de densidades que, por sua vez, são diretamente dependentes da temperatura. Assim, a primeira etapa consiste em solucionar a equação da energia. Resolvido o problema, obtém-se o campo de temperaturas que será usado para obter as forças de campo, as quais serão incluídas na equação do movimento.

A inclusão das forças de campo é feita na forma de um termo fonte, como já foi mostrado anteriormente. Estas forças são dependentes unicamente do campo de temperaturas e, assim sendo, elas implicarão numa alteração do valor da carga das equações de quantidade de movimento (b_i). Desta forma, o procedimento geral de solução do problema de movimento do fluido não sofre nenhuma alteração significativa com esta inclusão.

4.3 Formulação adotada na solução do problema proposto

Os procedimentos anteriores foram testados em diversos casos para comprovar a sua precisão, como será visto no capítulo 5. Foi montado também um procedimento geral para a solução de problemas de mudança de fase com o que foi visto até aqui e trabalhando-se com as equações adimensionais.

Partindo-se das equações adimensionais, demonstradas no capítulo 1, compostos pelas duas equações da quantidade de movimento [equações (1.7) e (1.8)], a equação da continuidade [equação (1.6)] e da energia [equação (1.9)] o problema pode ser resolvido.

Foram utilizados basicamente os métodos de solução propostos neste capítulo, sendo a formulação do problema de mudança de fase baseada no método do balanço energético e a solução do escoamento no método da correção das velocidades.

Como as equações foram adimensionalizadas, as expressões gerais se diferenciam um pouco das obtidas anteriormente e serão aqui apresentadas. É importante ressaltar que os valores das matrizes necessárias são calculados segundo sua definição, fornecida anteriormente. Deve-se lembrar ainda que, para esta situação, devem ser considerados tanto o domínio como as coordenadas dos nós na sua forma adimensional. Assim:

Equação da Energia: a aproximação foi utilizada adotando o valor de $\gamma = 1/2$. A partir disto estabelece-se a seqüência de equações na sua forma adimensional:

$$\begin{aligned} \{Q^*\} &= [K] \{\theta\} + \{\Gamma\} + [C] \{h\} \\ \Delta H_i^* &= \frac{\Delta \tau Q_i^*}{Ste \Omega_i^c} \end{aligned} \quad (4.25)$$

É importante ressaltar que foi necessária uma alteração do procedimento originalmente descrito por PHAM (1986) para adequar a nova formulação às novas condições que incluem os efeitos convectivos. Com os valores da entalpia, estimados desta

forma, obtém-se a capacidade térmica (considerando ρ constante):

$$\begin{aligned}\theta_i^* &= F^{-1}(H_i) \\ \overline{C}_i &= \frac{H_i^* - H_i^m}{\theta_i^* - \theta_i^m}\end{aligned}\quad (4.26)$$

e com os valores calculados para C_i monta-se a matriz de capacidade. A equação da energia pode ser então expressa através de:

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\text{Ste}}{\Delta\tau} [M] [D_C] + \frac{1}{2} [C] [D_C] + \frac{1}{2} [K] \right\} \{\theta^{m+1}\} = \\ \Gamma + \left\{ \frac{\text{Ste}}{\Delta\tau} [M] [D_C] - \frac{1}{2} [C] [D_C] - \frac{1}{2} [K] \right\} \{\theta^m\}\end{aligned}\quad (4.27)$$

que é similar à equação (4.4), diferindo apenas pela presença dos termos convectivos.

Equação da quantidade de movimento: é resolvida utilizando uma formulação totalmente implícita ($\gamma = 1$) e a aproximação de Bousinesq, incluída no termo fonte da direção y :

$$\left\{ \frac{\text{Ste}}{\Delta\tau} [M] + [C] + \text{Pr} [K] \right\} \{U^{m+1}\} = \Gamma_x + \frac{\text{Ste}}{\Delta\tau} [M] \{U^m\} + [\mathcal{P}_x] \{P^m\} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\text{Ste}}{\Delta\tau} [M] + [C] + \text{Pr} [K] \right\} \{V^{m+1}\} = \Gamma_y + \frac{\text{Ste}}{\Delta\tau} [M] \{V^m\} \\ + [\mathcal{P}_y] \{P^m\} + \text{Ra Pr} \{\theta\}\end{aligned}\quad (4.29)$$

que é equivalente às equações (4.15) e (4.16) obtidos a partir da expressão dimensional.

Equação da conservação da massa: que pode ser obtida seguindo o mesmo procedimento descrito anteriormente. O sistema de equações resultante será idêntico ao (4.22), mas com valores baseados na expressão da quantidade de movimento e do campo de pressões na sua forma adimensional. Desta forma, os valores para a matriz $\{B\}$ são:

$$\begin{aligned}\{B_x\} &= -[M] \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\text{Ste}}{\Delta\tau} [M] \{U^m\} = -b_i \frac{\partial P}{\partial x} + s_i^{p,x} \\ \{B_y\} &= -[M] \frac{\partial P}{\partial y} + \left(\frac{\text{Ste}}{\Delta\tau} [M] \{V^m\} + \text{Ra Pr} \theta \right) = -b_i \frac{\partial P}{\partial y} + s_i^{p,y}\end{aligned}$$

onde os valores de K_p , $\mathcal{S}^{p,x}$ e $\mathcal{S}^{p,y}$ podem ser obtidos através das expressões contidas na equação (4.18).

Equação da correção da velocidade: obtida a partir da equação da quantidade de movimento na sua forma adimensional, que resulta em:

$$u_i = \hat{u}_i + \mathcal{S}_i^{p,x} - [\mathcal{P}_x] \frac{1}{a_{i,i}} P_{i,j} \quad (4.30)$$

$$v_i = \hat{v}_i + \mathcal{S}_i^{p,y} - [\mathcal{P}_y] \frac{1}{a_{i,i}} P_{i,j} \quad (4.31)$$

Conhecidas as matrizes em cada um dos casos é montado o procedimento geral de solução. Neste procedimento, o sistema de equações é resolvido de forma encadeada, sendo que cada solução obtida é utilizada como uma correção para a seguinte.

Foi preciso adaptar alguns procedimentos, dentre os descritos anteriormente, para resolver o problema de mudança de fase com convecção natural no meio líquido. As mudanças mais significativas ocorreram na solução do problema de mudança de fase e são as seguintes:

- Não se conseguiu estabilidade do modelo com a utilização da equação de correção para a entalpia através do valor do C_i estimado. Desta forma substituiu-se a expressão (4.11) por $h = F(T)$ ou, na forma adimensional, $H = F(\theta)$ e deixa-se de efetuar a correção na temperatura, equação (4.12). Esta mudança reduz a velocidade de convergência do modelo, mas não foram encontradas alternativas.
- Foi necessário também uma alteração da sequência originalmente proposta no método de cálculo original. Como o perfil original de temperaturas somente é estabelecido quando o perfil de velocidades for determinado, o procedimento passou a ser iterativo. Verificou-se que a melhor convergência do modelo ocorre quando se trabalha com a entalpia como valor final. Desta forma, houve uma inversão de forma que a última equação a ser utilizada passou a ser a equação (4.8). Como para o primeiro cálculo de cada perfil de velocidades era necessário estimar um valor para C , na primeira iteração da cada tempo se utiliza o método em sua ordem original.

4.3.1 Procedimento de solução

O procedimento de solução deste problema é iterativo e resolve o sistema de equações através de um acoplamento. Este fato apresenta uma grande vantagem em relação ao método direto: a minimização do tamanho da matriz a ser armazenada. O procedimento de solução é baseado no SIMPLE, proposto por PATANKAR (1980), e é composto das seguintes etapas:

1. Considera-se um campo de pressões e velocidades para $\tau = 0$.

2. Incrementa-se o intervalo de tempo em $\Delta\tau$.
3. Com os valores de temperatura conhecidos, estima-se o fluxo de calor entre os nós e as consequentes variações da entalpia utilizando-se as expressões da equação (4.25).
4. Conhecidas as variações de entalpia, monta-se a matriz de capacidade térmica $[D_C]$ num procedimento expresso na equação (4.26).
5. Utiliza-se os valores da capacidade térmica calculados e com eles se recalcula os valores para a temperatura, da forma mostrada na equação (4.27).
6. Recalcula-se em seguida os valores de entalpia, utilizando-se novamente das expressões contidas na equação (4.26).
7. Se a variação do campo de entalpias for maior que uma tolerância estipulada¹, o procedimento reinicia-se a partir do passo 4.
8. Calculam-se os coeficientes, incluem-se as condições de contorno e resolvem-se as equações da quantidade de movimento em x e y utilizando as equações (4.28) e (4.29) com base num campo de pressões admitido igual ao do último passo.
9. Com os valores de velocidades calculados no passo anterior se calculam os coeficientes, aplicam-se as condições de contorno e resolve-se a equação da continuidade em termos da pressão, equação (4.21), na sua forma adimensional.
10. Com os novos valores das pressões corrige-se o campo de velocidades através das expressões (4.30) e (4.31), também utilizando a sua forma adimensional.
11. Verifica-se a convergência dos valores de velocidades¹ e, caso não tenha ocorrido, repete-se o procedimento a partir do passo 3.
12. Se o tempo é menor que um tempo limite estipulado ou o valor calculado para a massa fundida (ou solidificada, dependendo do caso) é menor que um valor preestabelecido, repete-se o procedimento a partir do passo 2.

¹Dados com as tolerâncias e número máximo de iterações podem ser encontrados no Apendice A

Capítulo 5

Validação do Modelo Proposto

Neste capítulo é feita uma convalidação do modelo proposto através da comparação com uma série de resultados disponíveis na literatura. Seguindo a mesma seqüência utilizada para a elaboração do programa foram convalidados, em primeiro lugar, o problema de convecção em uma cavidade fechada e por último um problema de mudança de fase com convecção no meio fluido. As seções que se seguem fazem uma melhor apresentação dos problemas propostos em cada trabalho assim como mostram a comparação entre os resultados.

A formulação proposta, embora seja relativamente abrangente, possui algumas limitações que devem ser consideradas. Estes limitantes são resultados de uma série de fatores sendo o principal a função peso utilizada (Galerkin, que é equivalente à diferenças centrais em diferenças finitas), que implica em um maior refinamento da malha a medida que aumentam os valores de velocidade, ou então, na implementação de uma formulação *upwind*. Uma maior discussão a respeito destas considerações pode ser encontrada em PATANKAR (1980).

No entanto, no caso de armazenadores térmicos de calor latente, a temperatura máxima de operação não tem grandes diferenças da temperatura de mudança de fase. Isto implica em que os valores de diferença de temperatura não são muito elevados e, conseqüentemente, o número de Ra também não é. Desta forma fica claro que para os problemas desta natureza não há uma necessidade premente de formulações do tipo *upwind*.

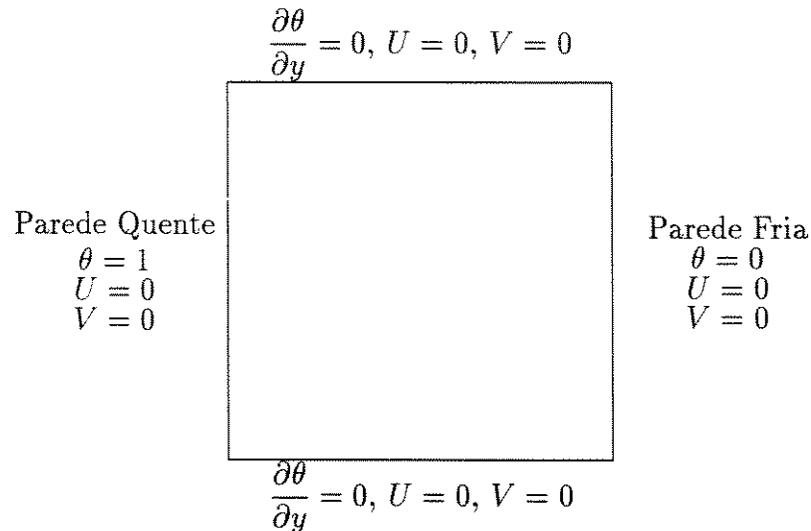


Figura 5.1: Cavidade fechada com circulação provocada por convecção natural.

5.1 Resultados comparativos para o caso de convecção natural em cavidade fechada

Como uma forma de verificar o procedimento de solução para a parcela de convecção natural, foi utilizado um problema descrito por VAHL DAVIS & JONES (1983) e a comparação foi feita utilizando-se de uma compilação de resultados de VAHL DAVIS (1983) para este problema. VAHL DAVIS & JONES (1983) resolveram este problema de convecção natural através de uma formulação por vorticidade e função corrente e obtiveram soluções para diversas malhas. A partir destas obtiveram a solução, considerada padrão, desenvolvendo uma extrapolação da malha de forma a obter resultados mais precisos.

O problema proposto é, na realidade, uma cavidade fechada onde a parede vertical esquerda é mantida a uma temperatura maior e a direita a uma temperatura menor, como mostrado na figura (5.1). Tanto a superfície inferior como a superior estão isoladas. A equação para a quantidade de movimento e campo de temperaturas são resolvidas na forma adimensional de forma semelhante à considerada no processo de mudança de fase e adotando o número de $Ste = 1$.

O procedimento de solução adotado foi o mesmo dos testes de mudança de fase, tomando alguns cuidados especiais dentre os quais destacam-se:

- A temperatura de mudança de fase foi reduzida para valores negativos, pois, neste caso, o processo está fora da faixa de mudança de fase.

- A solução que interessava era, na realidade, a solução para regime permanente. Como forma de acelerar o processo de convergência, necessário neste tipo de problema, utilizou-se incrementos de tempo elevados para a solução do campo de temperaturas (da ordem de $d\tau = 1000$) e o incremento de tempo máximo que permitia a convergência da solução do escoamento (da ordem de $d\tau = 1 \times 10^{-4}$).

A solução foi obtida segundo a formulação já discutida para uma malha de 21×21 pontos. Os resultados sofreram ainda um tratamento posterior, sendo interpolados por funções *spline* cúbica de forma a permitir uma melhor avaliação dos valores obtidos.

As tabelas (5.1) a (5.4) mostram resultados para o número de Rayleigh entre 10^3 e 10^6 obtidos por Vahl Davis e por este trabalho. Estas tabelas estão estruturadas de forma que a primeira faixa de cada tabela contém os valores da solução padrão (*benchmark*), considerada praticamente como sendo um resultado analítico. A segunda faixa apresenta os resultados obtidos por Vahl Davis para a malha discutida enquanto a terceira apresenta os resultados obtidos através da formulação utilizada neste trabalho. São apresentados também nas tabelas os desvios de cada solução em relação à padrão e, quando se trata de valores médios ou máximos, o ponto onde ocorre o respectivo valor.

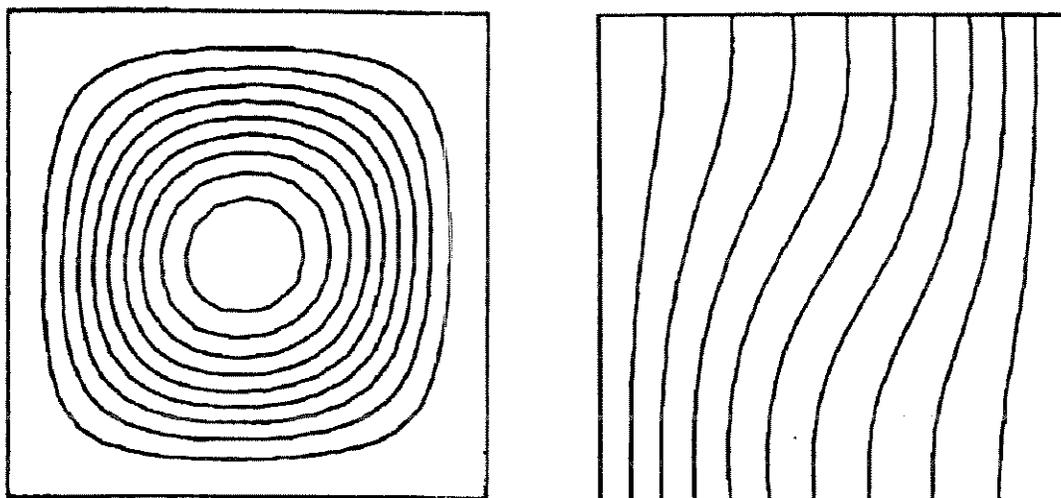
É conveniente ressaltar ainda que os valores de ψ foram obtidos através de integração numérica das velocidades utilizando-se o método dos trapézios. Cada ψ é obtido da média dos valores para o ponto através da integração de u ao longo de y e de v ao longo de x . Para o valor no ponto médio da cavidade também foi possível obter valores através da integrações das funções *spline* das velocidades. Estes valores normalmente diferem dos anteriores, mas como este procedimento de interpolação é complexo para ser estendido a todos os pontos, seus valores são mostradas na parte inferior da tabela apenas com caráter ilustrativo e não serão utilizados nos gráficos posteriores.

Para melhor ilustrar a solução são mostradas nas figuras (5.2) a (5.5) os gráficos para o campo de temperaturas e valores da função corrente. É importante ressaltar que os valores de função corrente apresentados diferem dos utilizados na solução padrão, uma vez que, neste caso o que interessa é visualizar como se comporta o escoamento e não se os seus valores estão ou não corretos, fato que pode ser analisado através das tabelas.

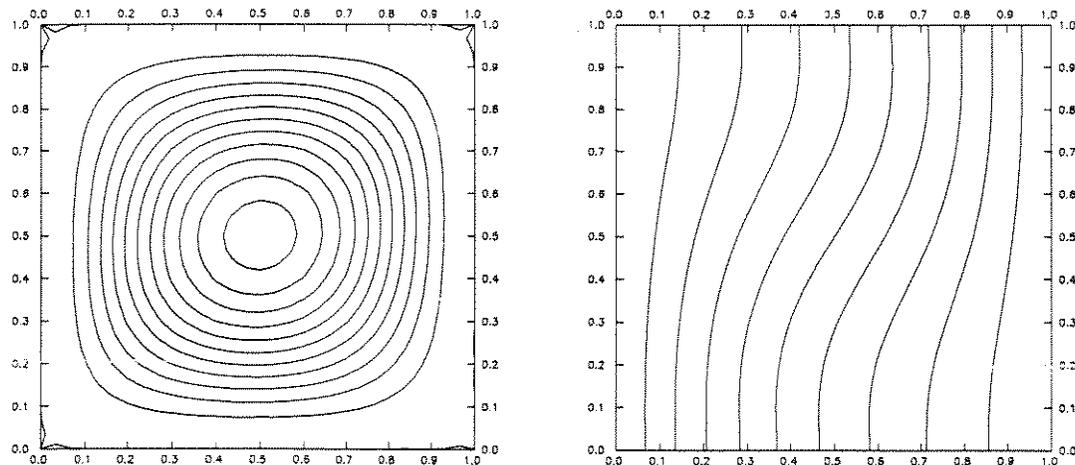
Tabela 5.1: Resultados Comparativos para $Ra = 1 \times 10^3$.

	ψ_{med}	ψ_{max}	u_{max}	v_{max}	Nu_{max}	Nu_{min}	\bar{Nu}
Solução Padrão	1,174	...	3,649	3,697	1,505	0,692	1,118
(Posição)		(...)	$y = 0,813$	$x = 0,178$	$y = 0,092$	$y = 1$	
Solução Vahl Davis	1,174	...	3,589	3,629	1,491	0,702	1,111
Desvio	0,00%	...	1,64%	1,84%	0,93%	1,45%	0,63%
(Posição)		(...)	$y = 0,811$	$x = 0,181$	$y = 0,112$	$y = 1$	
Solução Obtida	1,159*	...	3,645	3,695	1,496	0,696	1,115
Desvio	1,28%	...	0,11%	0,05%	0,60%	0,58%	0,27%
(Posição)		(...)	$y = 0,814$	$x = 0,178$	$y = 0,0841$	$y = 1$	

* Calculado pela integral da função velocidade este valor é 1,173.



a) Resultados de Vahl Davis.



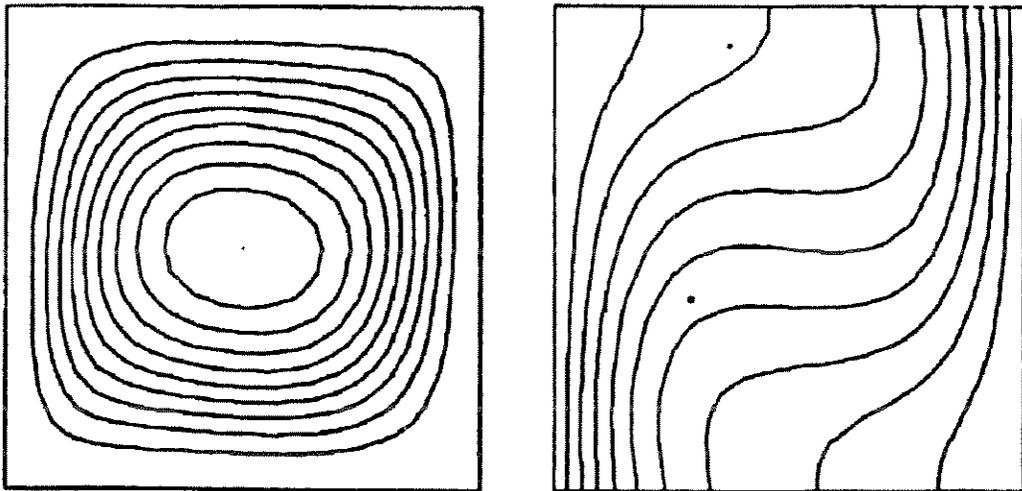
b) Resultados deste trabalho.

Figura 5.2: Resultados comparativos para $Ra = 1 \times 10^3$.

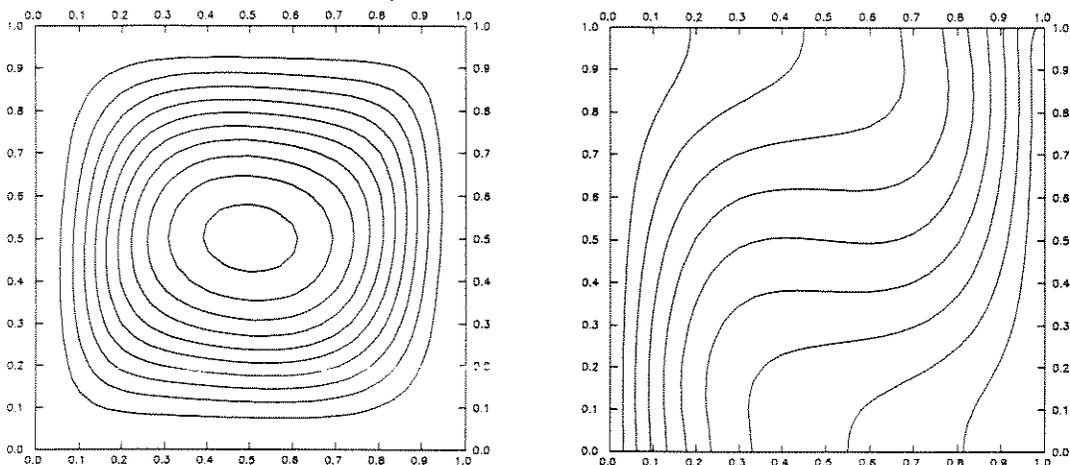
Tabela 5.2: Resultados Comparativos para $Ra = 1 \times 10^4$.

	ψ_{med}	ψ_{max}	u_{max}	v_{max}	Nu_{max}	Nu_{min}	\bar{Nu}
Solução Padrão (Posição)	5,071	...	16,178	19,617	3,528	0,586	2,243
		(...)	$y = 0,823$	$x = 0,119$	$y = 0,143$	$y = 1$	
Solução Vahl Davis	5,176	...	16,189	19,197	3,603	0,61	2,212
Desvio	2,07%	...	0,07%	2,14%	2,13%	4,10%	1,38%
(Posição)		(...)	$y = 0,82$	$x = 0,125$	$y = 0,165$	$y = 1$	
Solução Obtida	5,01*	...	16,158	19,827	3,529	0,592	2,256
Desvio	1,20%	...	0,12%	1,07%	0,03%	1,02%	0,58%
(Posição)		(...)	$y = 0,823$	$x = 0,119$	$y = 0,15$	$y = 1$	

* Calculado pela integral da função velocidade este valor é 5,084.



a) Resultados de Vahl Davis.



b) Resultados deste trabalho.

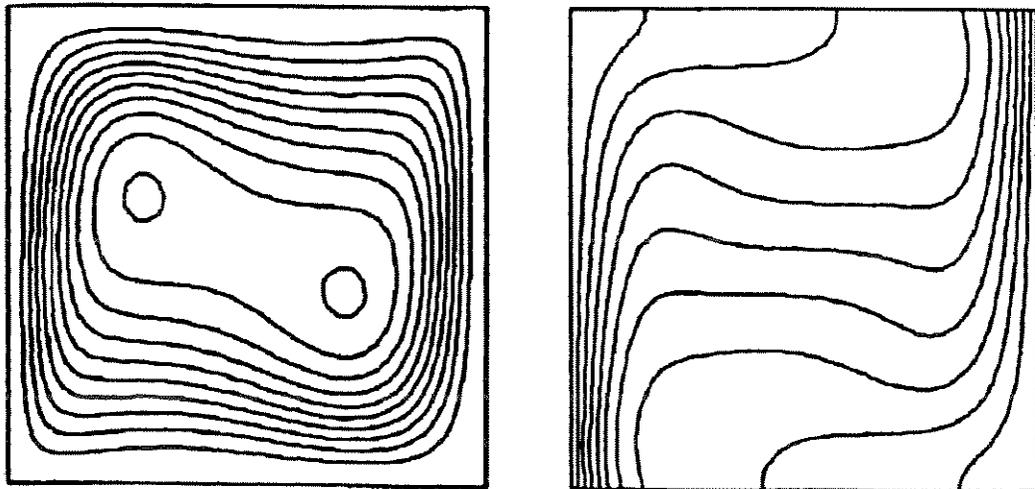
Figura 5.3: Resultados comparativos para $Ra = 1 \times 10^4$.

Tabela 5.3: Resultados Comparativos para $Ra = 1 \times 10^5$.

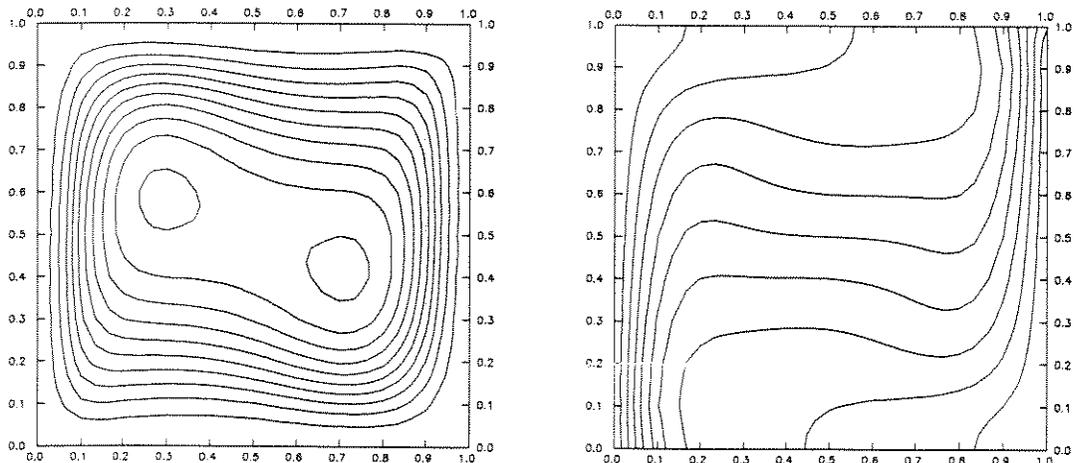
	ψ_{med}	ψ_{max}	u_{max}	v_{max}	Nu_{max}	Nu_{min}	\bar{Nu}
Solução Padrão (Posição)	9,111	9,612 (0,285,0,601)	34,73 $y = 0,855$	68,59 $x = 0,066$	7,717 $y = 0,081$	0,729 $y = 1$	4,519
Solução Vahl Davis Desvio (Posição)	9,702 6,49%	10,236 6,49% (0,291, 0,601)	36,46 4,98% $y = 0,854$	62,79 8,46% $x = 0,075$	7,901 $y = 0,0238$ 0,133	0,797 9,33% $y = 1$	4,454 1,44%
Solução Obtida Desvio (Posição)	8,786* 3,57%	9,241 3,86% (0,70,0,40*)	33,421 3,77% $y = 0,853$	70,44 2,70% $x = 0,0672$	7,812 1,23% $y = 0,103$	0,744 2,06% $y = 1$	4,651 2,92%

* Calculado pela integral da função velocidade este valor é 9,107.

* Este máximo tem um correspondente numa posição simétrica 0,30, 0,60 cujo valor é $\psi = 9,225$



a) Resultados de Vahl Davis.



b) Resultados deste trabalho.

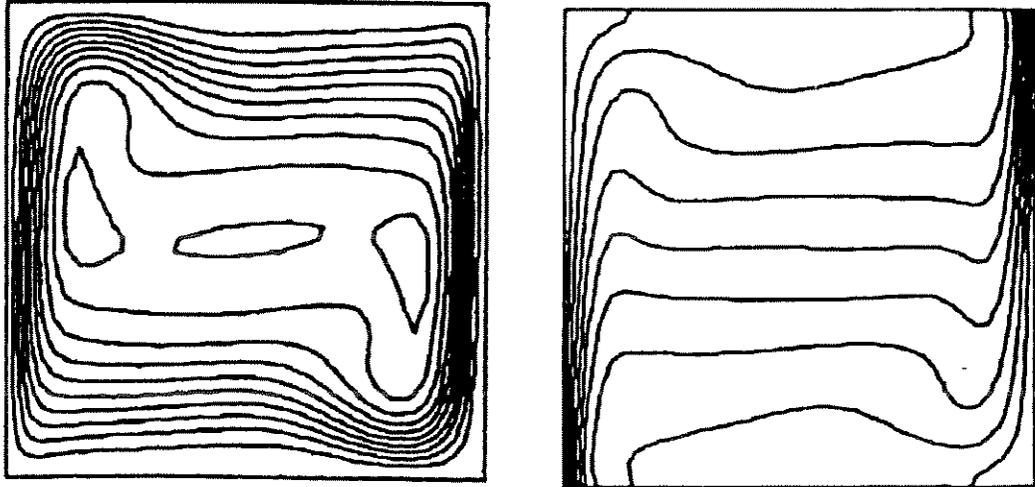
Figura 5.4: Resultados comparativos para $Ra = 1 \times 10^5$.

Tabela 5.4: Resultados comparativos para $Ra = 1 \times 10^6$.

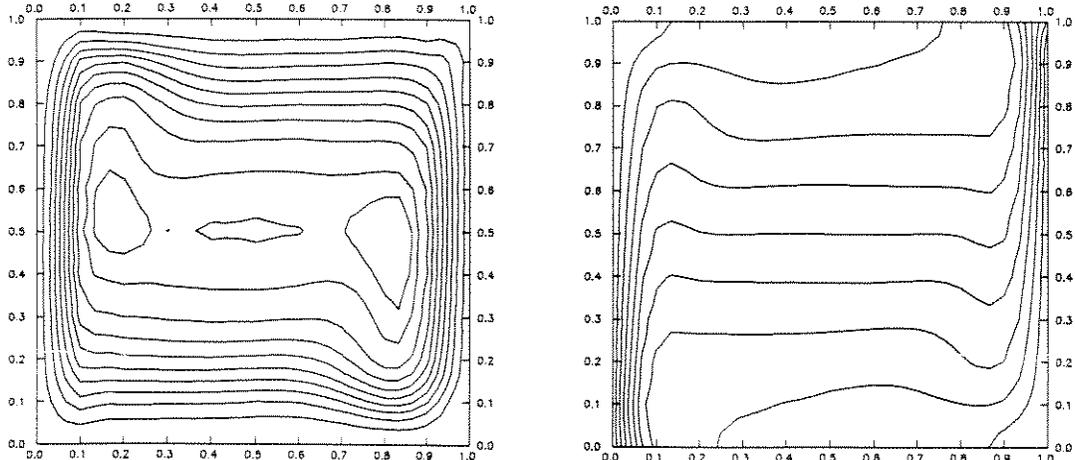
	ψ_{med}	ψ_{max}	u_{max}	v_{max}	Nu_{max}	Nu_{min}	\bar{Nu}
Solução Padrão (Posição)	16,32	16,75 (0,151,0,547)	64,63 $y = 0,85$	219,36 $x = 0,0379$	17,925 $y = 0,0378$	0,989 $y = 1$	8,8
Solução Vahl Davis Desvio (Posição)	20,16 23,53%	20,914 24,86% (0,149, 0,554)	79,27 22,65% $y = 0,862$	195,44 10,90% $x = 0,0447$	14,215 20,70% $y = 0,124$	1,749 76,85% $y = 1$	9,027 2,58%
Solução Obtida Desvio (Posição)	14,29* 12,42%	14,967 10,64% (0,83,0,45*)	57,22 11,47% $y = 0,872$	220,48 0,51% $x = 0,0454$	15,601 12,97% $y = 0,09$	0,971 1,82% $y = 1$	8,934 1,52%

* Calculado pela integral da função velocidade este valor é 15,700.

* Este máximo tem um correspondente em uma posição simétrica 0,17, 0,55 cujo valor é $\psi = 14,656$



a) Resultados de Vahl Davis.



b) Resultados deste trabalho.

Figura 5.5: Resultados comparativos para $Ra = 1 \times 10^6$.

5.2 Resultados para diversos tratamentos de condições de simetria na fronteira

Como já foi comentado anteriormente, o tratamento de fronteira para escoamentos é crítico, principalmente em se tratando de fronteiras onde a velocidade não é conhecida (fronteiras de efluxo, fronteiras com simetria, etc). No caso do problema proposto tem-se uma fronteira com simetria e, para verificar como as diversas hipóteses se comportam perante esta condição, imaginou-se outro problema similar com simetria e convecção natural.

O problema imaginado, mostrado na figura (5.6), consiste de uma cavidade onde as faces esquerda e direita estão à uma temperatura elevada ($\theta = 1$), a face inferior está à uma temperatura mais baixa ($\theta = 0$) e a face superior isolada. Este problema foi resolvido para $Pr = 0.71$ e $Ra = 10^6$.

Para verificar como se comportaram as formas alternativas de tratamento na fronteira, primeiro obteve-se a solução para o problema completo, considerando as duas faces quentes e sem se preocupar em usar a condição de simetria, sabidamente existente. Esta solução é denominada por solução completa. Obtido este resultado buscou-se então a solução para diversas condições imaginadas, que a partir de agora serão tratadas por números. A descrição de cada uma destas condições, buscando principalmente a sua diferenciação, é detalhada a seguir:

Condição 1: Resolve o problema utilizando-se da condição de simetria mas "desligando" este ponto na equação da pressão ($k_p = 0$).

Condição 2: Resolve o problema utilizando-se da condição de simetria em v sem "desligá-lo" na equação da pressão, mas mantendo o valor de u nulo e "desligado" na equação da pressão.

Condição 3: Resolve o problema utilizando-se da condição de simetria em v e anulando a velocidade u , sem "desligá-las" na equação de pressão.

Condição 4: Resolve o problema utilizando-se da condição de simetria tanto para u como para v , sem "desligá-las" na equação de pressão.

Condição 5: Análoga à condição 4, mas anulando automaticamente o valor de u ao final de cada iteração.

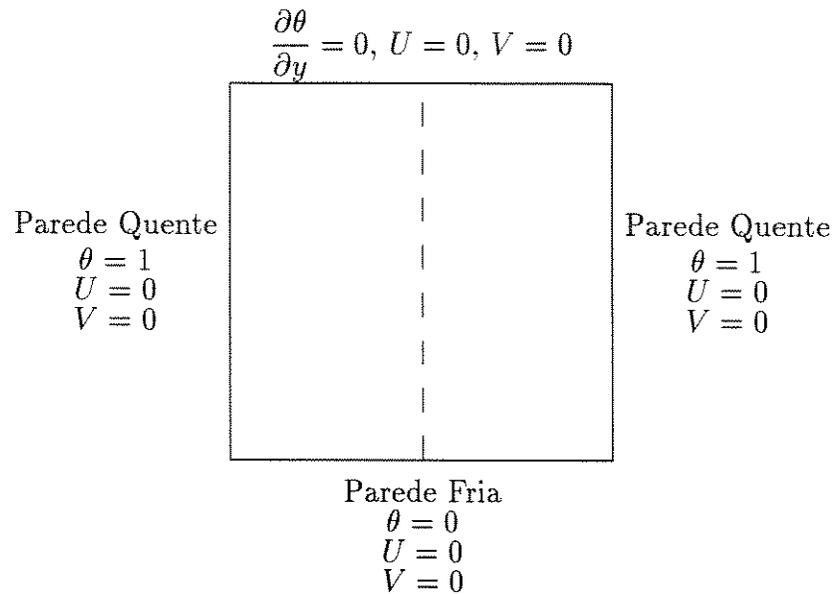


Figura 5.6: Esquema do problema teste para a condição de simetria.

Utilizando estas cinco condições, além da solução completa do problema, que será tratada como uma solução padrão, é possível estabelecer alguns parâmetros que permitam a avaliação do funcionamento de cada uma destas condições de contorno e como elas afetam a solução do problema.

Como parâmetro de comparação estabeleceu-se o comportamento de diversas variáveis na fronteira onde existe a simetria, ou nas suas proximidades. Desta forma como o primeiro valor avaliado foi o perfil de velocidades v sobre a fronteira de simetria. A figura (5.7) mostra como este perfil se comporta para as diversas condições de contorno.

Da mesma forma procurou-se estabelecer uma alternativa que permitisse a comparação das velocidades normais. No entanto, sobre a linha de simetria o perfil de velocidades normais deveria ser nulo e, em determinados esquemas, isto era uma condição imposta. Para não favorecer a avaliação destes métodos, em detrimento dos demais, adotou-se como parâmetro de comparação o perfil de velocidades na linha da malha imediatamente anterior à da fronteira (no caso malha de vinte e um pontos $x = 0.475$). Este perfil é mostrado na figura (5.8).

Outro parâmetro de vital importância nestes casos que envolvem convecção natural é o campo de temperaturas. Adotou-se, para efeito de comparação, os valores de temperatura na linha de simetria uma vez que os valores não são conhecidos de antemão nesta região. A figura (5.9) mostra este comportamento para as diversas condições discutidas.

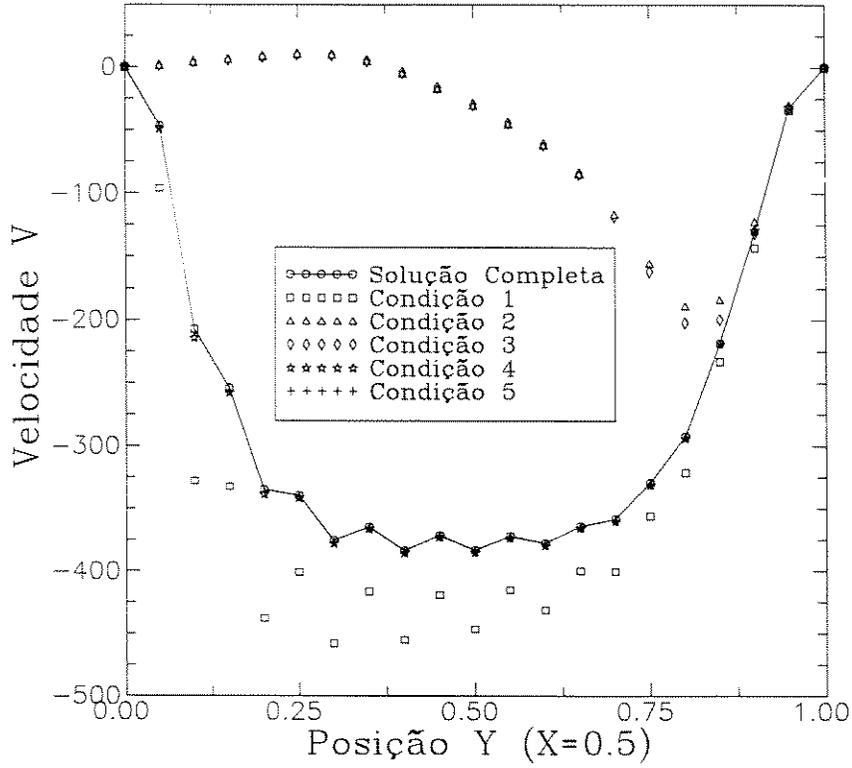


Figura 5.7: Perfil de velocidades tangenciais na fronteira de simetria.

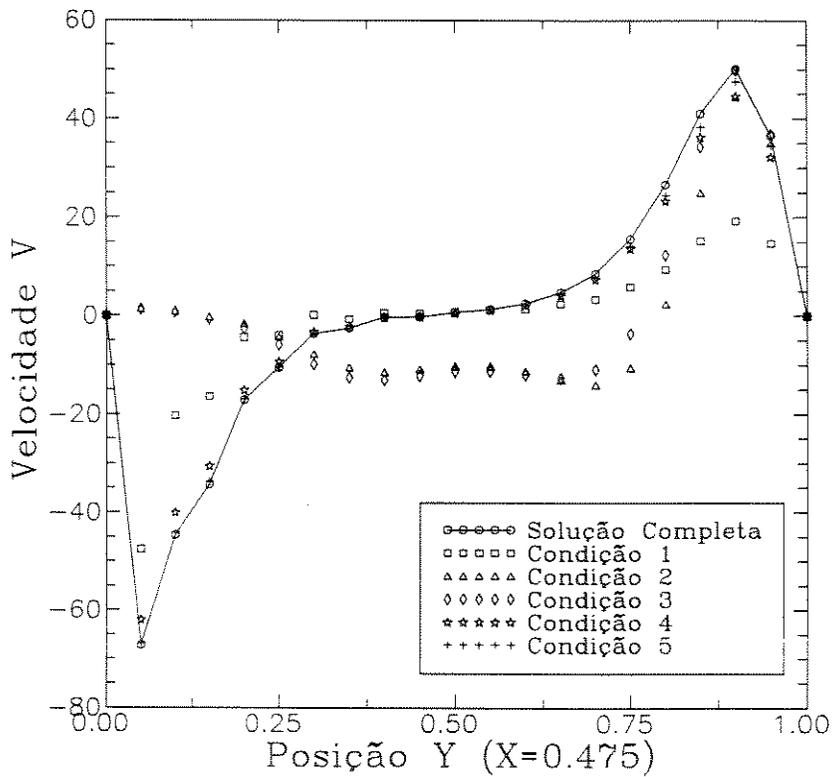


Figura 5.8: Perfil de velocidades normais no ponto anterior à fronteira de simetria.

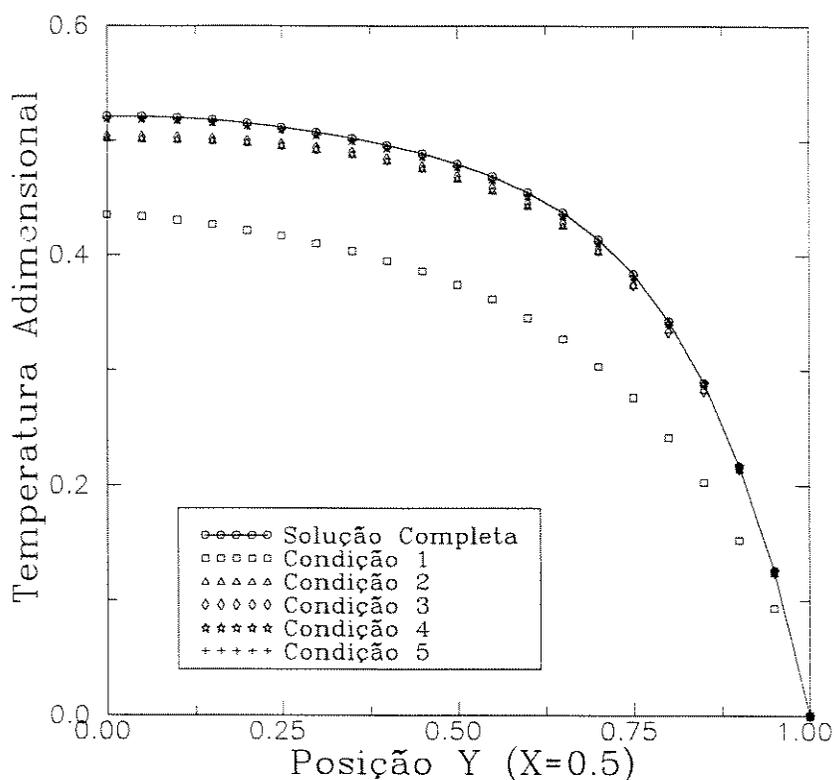


Figura 5.9: Perfil de temperaturas sobre a fronteira de simetria.

Finalmente, utilizou-se para a comparação isocurvas de função corrente para todas as condições, da forma mostrada na figura (5.10). Estes gráficos são bastante ilustrativos pois permitem, não só a avaliação dos parâmetros na região de simetria, mas uma visualização global de como o escoamento está ocorrendo e quais são as regiões mais afetadas pela mudança da condição de contorno. Embora seja óbvio que a parcela que sofre uma maior influência da condição de contorno de simetria seja justamente a mais próxima da fronteira é importante ressaltar, e estes gráficos procuram mostrar, até onde o efeito de uma condição mal descrita se propaga.

A análise destas figuras deixa claro que a condição de contorno, em problemas deste tipo deve ser expressa com cuidado, pois pode alterar de forma significativa os resultados finais. Embora nenhuma das alternativas seja totalmente inconsistente, a Condição 5 foi a que forneceu os melhores resultados. Fazendo uma análise mais detalhada dos resultados pode-se identificar algumas características da implementação deste tipo de condição de contorno, são elas:

- não se deve "desligar" na equação da pressão pontos de fronteira que não têm velocidade especificada.

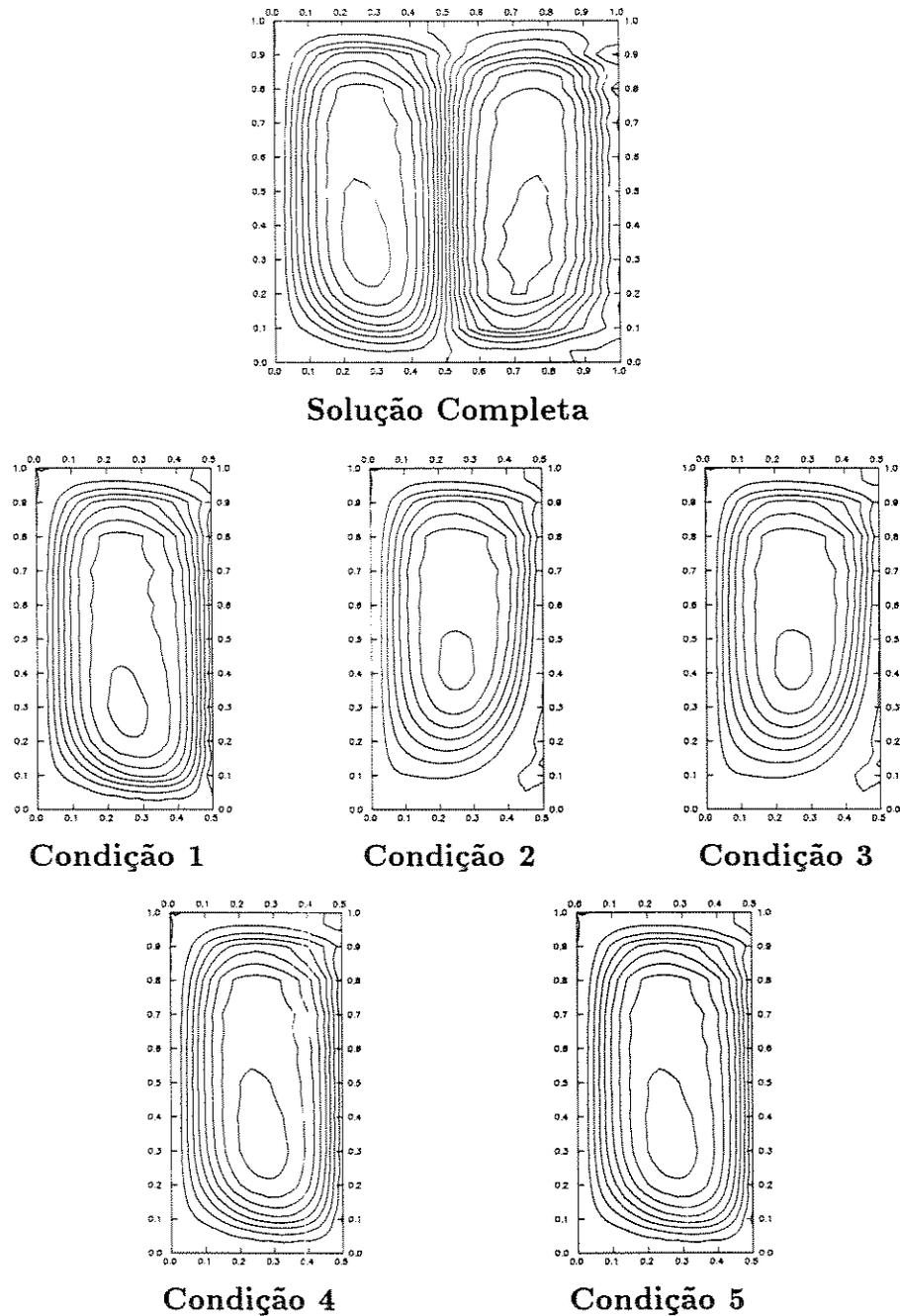


Figura 5.10: Correntes convectivas para comparação das condições utilizadas.

- não é aconselhável anular o perfil de velocidades normais à fronteira diretamente na equação do momento, pois isto afeta, por conseguinte, a equação da pressão que é derivada da mesma, prejudicando os resultados.
- embora a implementação da condição de contorno de simetria, por si só, já forneça bons resultados o fato de corrigir o perfil de velocidades normais para valores nulos, melhora a solução.

5.3 Comparação dos modelos unidimensionais para mudança fase

Como foi apresentado anteriormente, existem uma série de formulações alternativas para métodos de malha fixa em problemas de mudança de fase. Estes métodos foram descritos nas seções anteriores e serão usados em uma série de testes para verificar a precisão de cada um na solução de um problema unidimensional.

Para esta verificação foi escolhido o mesmo problema utilizado como referência nos trabalhos de PHAM (1986) e COMINI *et al.* (1974). Este problema consiste num processo de solidificação unidimensional onde a temperatura dos dois lados de uma placa de 148 mm de espessura são subitamente reduzidos a -30°C ($\theta = -1$). Admitindo-se que o material estava inicialmente à temperatura de mudança de fase e que as suas propriedades são: $T_f = 0^{\circ}\text{C}$, $C = 2 \times 10^6 \text{ J/m}^3\text{C}$, $\lambda = 2 \times 10^8 \text{ J/m}^3$ e $k = 1 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$ ($\alpha = 5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$). Com estes valores calculou-se os parâmetros necessários para a solução do problema na sua forma adimensionalizada.

Elementos bidimensionais são utilizados na solução do problema, sendo considerada uma placa de 74 mm de largura e 7,4 mm de altura. A figura (5.11) mostra o esquema do problema com os valores adotados para as condições de contorno e a malha utilizada. Neste problema é também utilizada uma faixa de mudança de fase de $0,01^{\circ}\text{C}$ ($\Delta\theta = 3,3 \times 10^{-4}$) para seguir o mesmo padrão da proposta original do trabalho. Esta faixa de mudança de fase, embora desnecessária em alguns casos, torna-se útil pois permite que a mesma formulação seja estendida a todos os esquemas.

Este problema pode ter a sua solução aproximada por um processo de mudança de fase em um meio semi-infinito, inicialmente à temperatura de fusão, até que a fronteira de solidificação atinja o final do domínio do problema real. Desta forma, considerando-se as propriedades do material, a posição adimensional da frente de solidificação e a temperatura

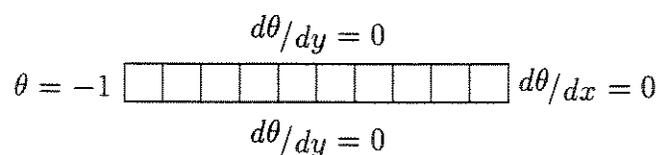


Figura 5.11: Esquema do problema de solidificação unidimensional.

são dados respectivamente por:

$$x_{\text{front}} = 1.35061 \sqrt{\tau} \quad (5.1)$$

$$T_{\text{sol}} = \min \left[0, -1 + 2.50497 \operatorname{Erf} \left(\frac{0.136931 x}{\sqrt{\tau}} \right) \right] \quad (5.2)$$

São analisados três esquemas básicos de malhas fixas para a solução de problemas de mudança de fase, os esquemas propostos por PHAM (1986), MORGAN *et al.* (1978) e COMINI & SARO (1990). Além destes é analisado um outro esquema, similar ao PHAM (1986), que não efetua a correção da temperatura após a solução do sistema linear.

Por questão de facilidade é adotada uma nomenclatura simplificada em função do tipo de formulação:

Formulação 1: é a formulação proposta por MORGAN *et al.* (1978) com uma pequena alteração: o valor da capacidade é calculado em função do tempo e corrigido por três vezes, o que não foi feito no trabalho original.

Formulação 2: bastante similar à proposta por COMINI & SARO (1990), mas se utilizando da matriz massa concentrada que é um padrão neste trabalho.

Formulação 3: método proposto por PHAM (1986), que se utiliza do fluxo de calor trocado entre os nós para uma pré avaliação da capacidade térmica.

Formulação 4: similar à anterior mas não utiliza a correção para a entalpia ao final de cada iteração.

Os resultados para a fronteira de solidificação são apresentados apenas para os intervalos de tempo em que a fronteira passa por um ponto da malha. Estes resultados para a posição da fronteira de solidificação são apresentados na figura (5.12). Ao considerar valores diferentes destes, a posição da fronteira passa a depender de uma interpolação, o que, com certeza, afetaria a precisão dos resultados. A figura (5.13) apresenta os resultados para as mesmas formulações mas apresenta o perfil de temperaturas no ponto $x = 0.1$ em função do tempo.

É possível notar através dos dados tanto da figura (5.12) como (5.13) que não existem grandes diferenças de acuracidade entre os métodos. No entanto, o método proposto na

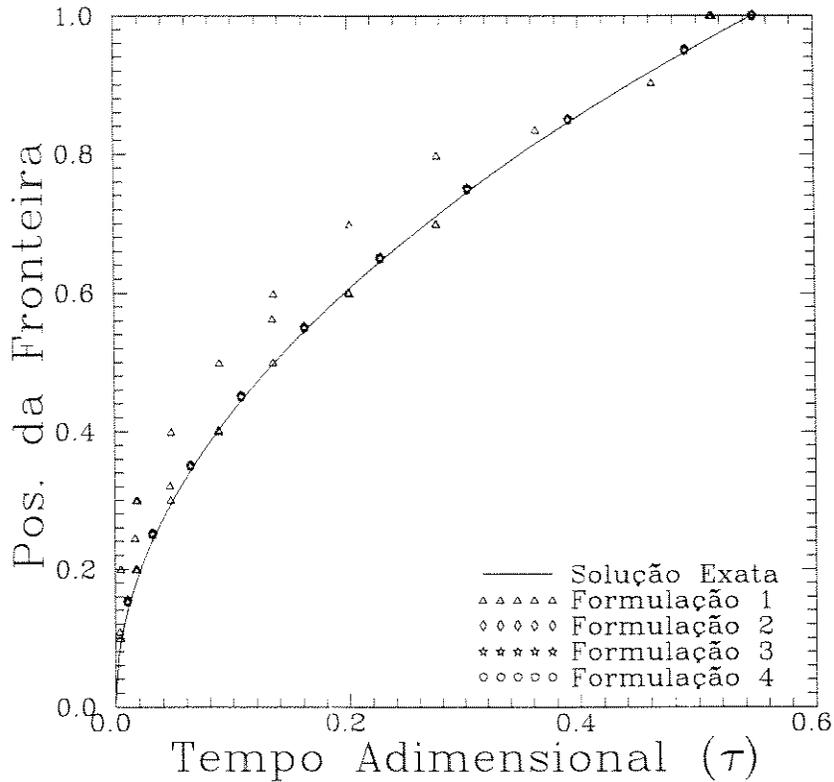


Figura 5.12: Evolução da frente de solidificação com o tempo para as diversas formulações.

formulação 1 é o que mais se afasta da solução analítica e foi, portanto, preterido em relação aos demais. Todos os outros métodos apresentam resultados similares.

Utilizando-se estes mesmos resultados é montada a tabela (5.5), que apresenta o tempo total necessário para a solidificação, calculado por cada um dos esquemas e o tempo de CPU necessário para rodar o programa numa estação de trabalho IBM Risc 6000.

Deve-se ressaltar entretanto, que os métodos apresentados fornecem bons resultados

Tabela 5.5: Tempo total requerido para a solidificação total do domínio e tempo de CPU ($\Delta\tau = 5.48 \times 10^{-4}$).

Esquema	Tempo adimensional	Tempo de CPU
Formulação 1	0.5118	39s16"
Formulação 2	0.5491	17s98"
Formulação 3	0.5485	24s66"
Formulação 4	0.5485	24s22"
Solução Analítica	0.5484	—

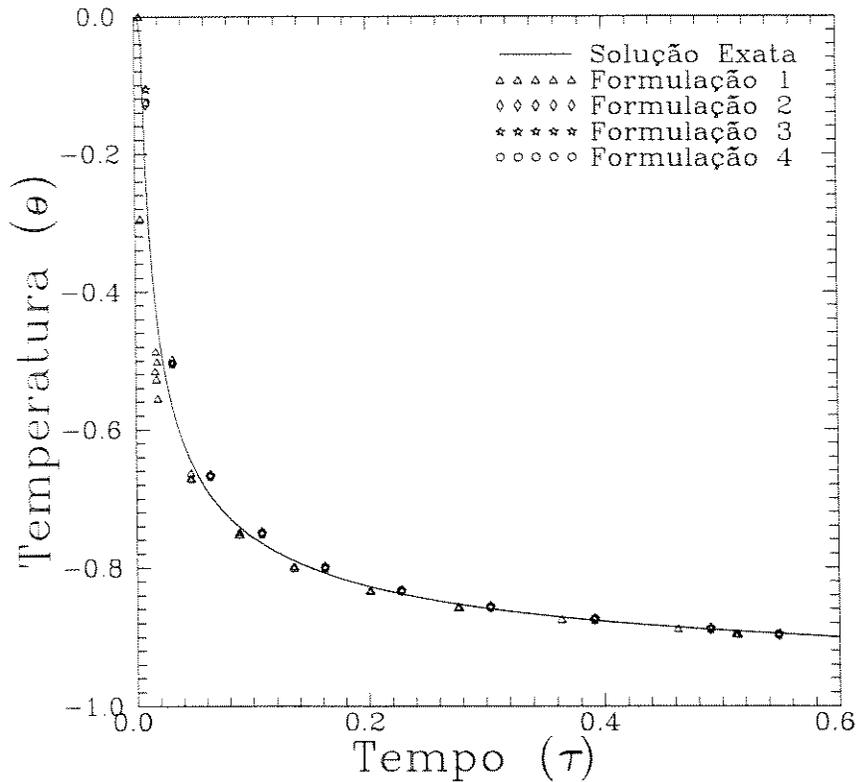


Figura 5.13: Evolução da temperatura do ponto na posição $x = 0.1$ com o tempo para as diversas formulações.

para o campo de temperaturas mas sofrem também do efeito de oscilação histórica, descrito por BELL (1982). Este efeito só pode ser minimizado com a ampliação da faixa de mudança de fase ou com o refinamento da malha. Este fenômeno é ilustrado através da figura (5.14), na qual são mostradas curvas de temperatura para todos os instantes de tempo, utilizando-se da formulação 3, variando apenas a faixa de mudança de fase. Observando o gráfico é possível perceber uma sensível minimização da oscilação do campo de temperaturas quando da utilização de um valor de $\Delta\theta = 0,1$. A explicação dada por BELL (1982) para o fenômeno é que, a partir do momento onde se encontram pelo menos dois pontos da malha dentro da faixa de mudança de fase, a oscilação deixa de existir.

Em todos os casos foram utilizadas uma aproximação de três níveis de tempo ("dumping") que, apesar de criticada em alguns trabalhos como de DALHUIJSEN & SEGAL (1986), é ainda muito utilizada em pesquisas desta área. Para verificar a influência deste fato foram construídos gráficos para a formulação proposta por PHAM (1986) (Formulação 3) considerando três discretizações no tempo: o esquema explícito, os esquemas de dois e três níveis de tempo. A figura (5.15) mostra a evolução da fronteira e a figura (5.16) a evolução da temperatura no ponto $x = 0.1$ para as três formas de discretização

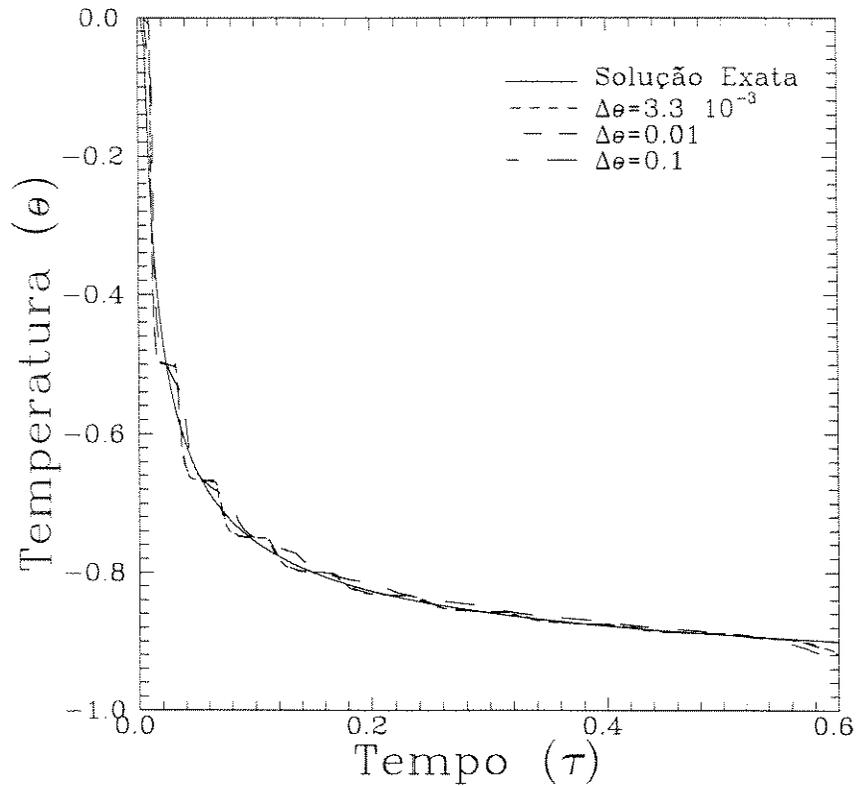


Figura 5.14: Evolução da temperatura do ponto na posição $x = 0.1$ com o tempo para diversos $\Delta\theta$.

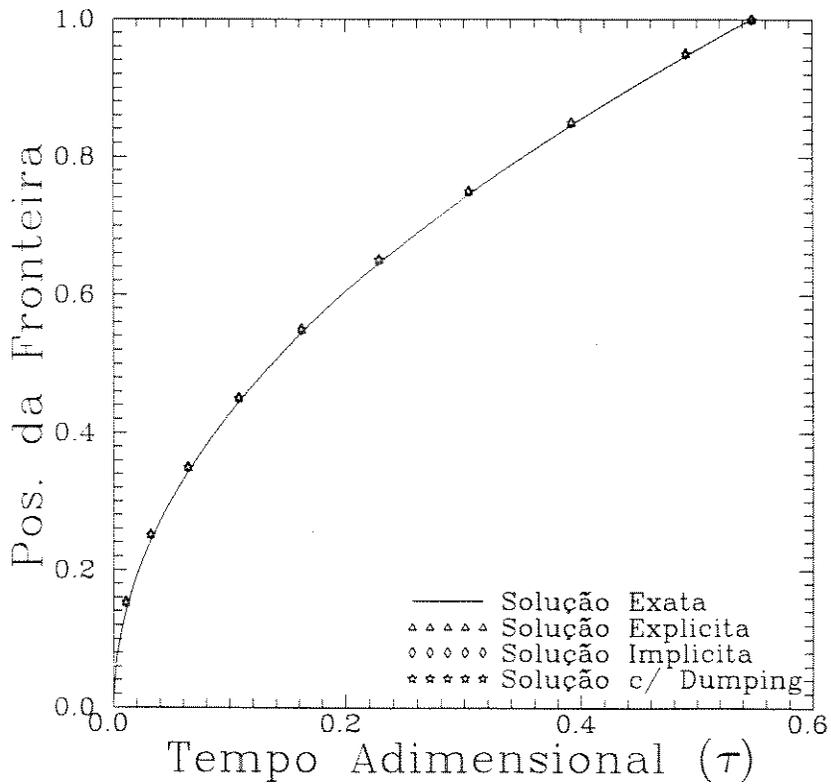


Figura 5.15: Evolução da frente de solidificação com o tempo para as diversas discretizações no tempo.

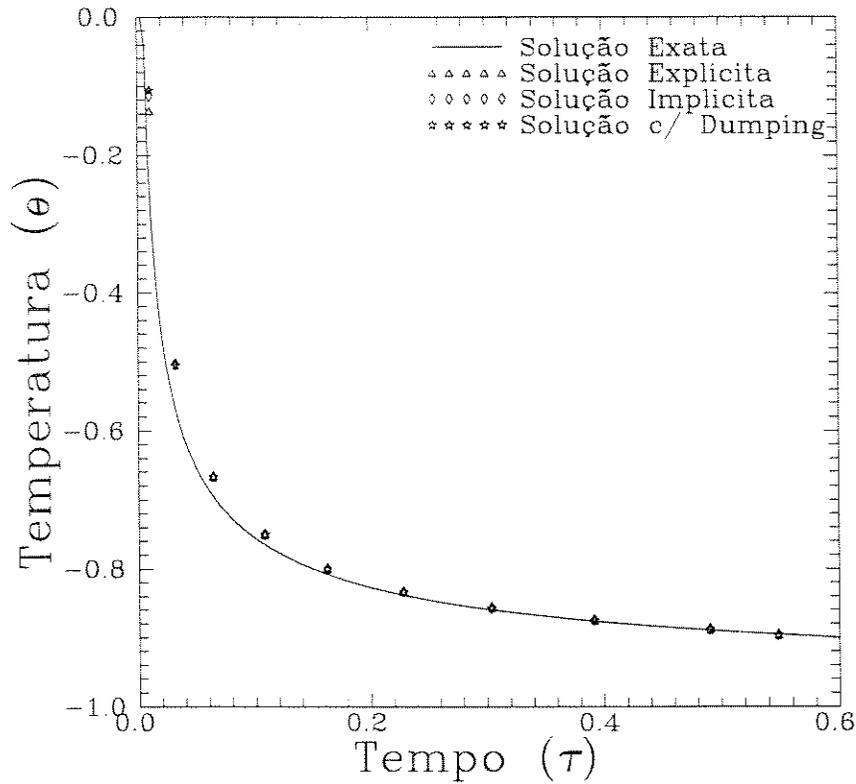


Figura 5.16: Evolução da temperatura do ponto na posição $x = 0.1$ com o tempo para as diversas discretizações no tempo.

no tempo.

Nestas figuras verifica-se que, pelo menos no caso do problema considerado, a utilização de diferentes esquemas de tempo não afeta a precisão do método de forma perceptível. Os pontos calculados por cada um dos esquemas são praticamente coincidentes, tanto no que se refere a posição da frente de solidificação como no transiente de temperaturas. Embora este fenômeno seja uma realidade neste tipo de formulação, as afirmações feitas por alguns pesquisadores, como DALHUIJSEN & SEGAL (1986), de que os esquemas de três níveis de tempo reduzem a precisão, não são infundadas e devem ser levadas em consideração de acordo com o esquema adotado.

5.4 Solução de um problema unidimensional com condição de contorno de fluxo de calor

Até agora foi visto a solução para problemas onde a temperatura de parede é conhecida. No entanto, como já foi discutido, o caso onde existe uma condição de contorno de fluxo de calor determinado vem ganhando importância, principalmente pelo seu uso em dispositivos eletrônicos. A formulação deste tipo de problema é similar, devendo apenas ser alterada no que tange ao cálculo dos adimensionais e na implementação da condição de contorno. Considerando os resultados para o caso de temperatura determinada, adotou-se diretamente a Formulação 4 do item anterior.

Neste caso, a nova condição de contorno vai ser implementada através da integral de superfície na região que ela atua. A integral de superfície da equação (4.5) e o termo de superfície da equação (4.6) são exemplos de locais onde o valor do fluxo de calor deve ser implementado.

Considerando as alterações necessárias na formulação, foi feita uma verificação da metodologia de solução através de algum modelo analítico. No entanto, não foi encontrado nenhum tipo de solução analítica exata para este tipo de problema junto à bibliografia consultada. ALEXIADES & SOLOMON (1993), por sua vez, apresentam uma solução aproximada utilizando-se de um procedimento quase-estático que serve para os nossos objetivos. É importante ressaltar que esta solução é válida para o caso unidimensional em que o meio se encontra à temperatura de mudança de fase. Esta solução para fluxo de calor constante q_c na parede, na sua forma dimensional, é dada por:

$$x_{\text{fron}} = \frac{q_c t}{\rho \lambda}$$

$$T(x) = T_f \pm \frac{q_c}{k}(x_{\text{fron}} - x)$$

Quando adimensionalizada a equação fica:

$$X_{\text{fron}} = \tau$$

$$\theta(X) = \pm (X_{\text{fron}} - X)$$

o sinal \pm depende da natureza do processo: se de solidificação ou fusão.

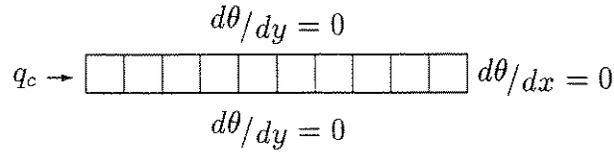


Figura 5.17: Esquema do problema de solidificação unidimensional.

Para este exemplo é admitido um caso de solidificação onde todo o meio se encontra, necessariamente, à temperatura de mudança de fase e as expressões desejadas para temperatura de parede e posição da fronteira serão dados por $X_{\text{front}} = \tau$ e $\theta_0 = -\tau$, respectivamente. o problema unidimensional escolhido é similar ao anterior, da forma mostrada pela figura (5.17), mas com a condição de fluxo de calor conhecido em uma das faces.

A figura (5.18) mostra a evolução da fronteira de solidificação com o tempo. É possível notar uma boa concordância entre os valores obtidos, principalmente no início do processo evolutivo. A tendência de afastamento apresentada no final do processo deve-se, não necessariamente a um maior erro do modelo numérico, mas sim a um possível erro das aproximações feitas quando para a obtenção da solução quase-estática, que não considera

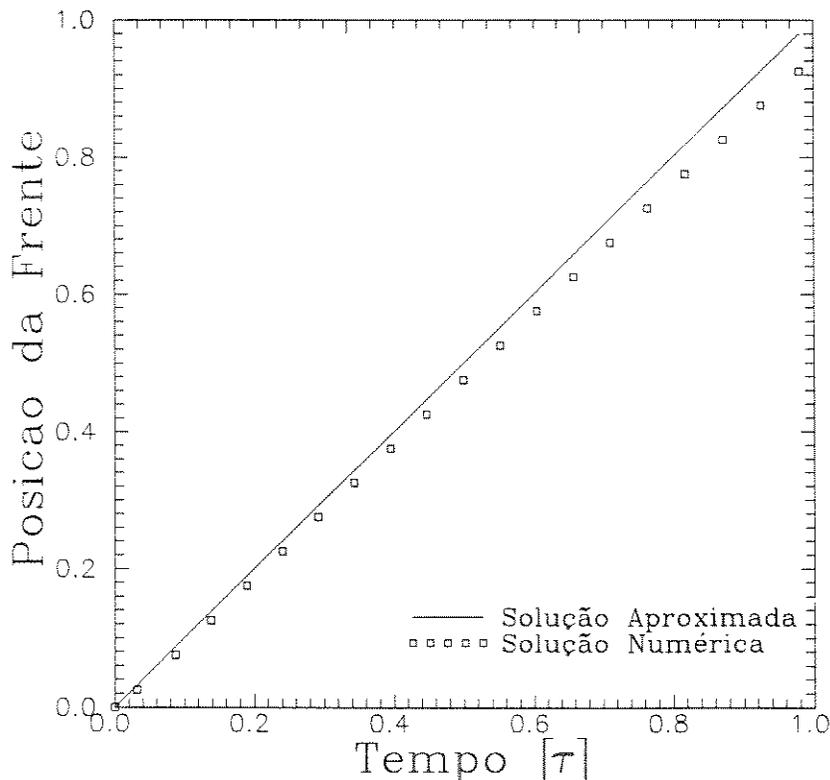


Figura 5.18: Evolução da frente de solidificação com o tempo.

a capacidade térmica do meio que mudou de fase.

A figura (5.19) mostra outro item importante na avaliação de problemas desta natureza, a temperatura na parede onde está sendo injetado o fluxo de calor. Os resultados, apresentam um comportamento praticamente similar ao obtido na figura (5.18), confirmando as expectativas.

É necessário ressaltar que a solução de referência mostrada nos gráficos das figuras (5.18) e (5.19) são apenas indicativos da solução e não seus valores exatos. Apesar disto, estas figuras permitem a conclusão de que o modelo proposto para a solução do problema de mudança de fase é também adequado para o caso onde existe fluxo de calor na parede. Este fato permitirá a solução de problemas mais complexos onde o fenômeno de condução, considerado até então, poderá ser aliado à solução de um campo de velocidades decorrente do fenômeno de convecção natural, como será visto posteriormente.

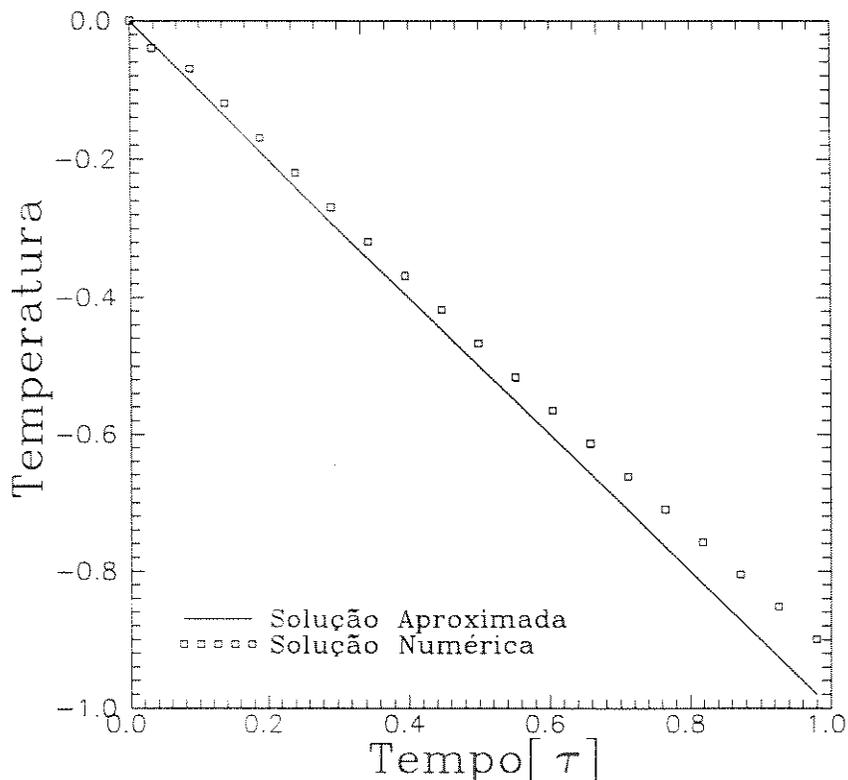


Figura 5.19: Evolução da temperatura na parede na face sujeita ao fluxo de calor.

5.5 Avaliação do esquema para um problema de mudança de fase com convecção

Nesta seção, utiliza-se o trabalho de USMANI *et al.* (1992) para validação dos resultados obtidos. Este trabalho é basicamente numérico e apresenta os resultados de forma bastante detalhada, permitindo um grande número de comparações com os resultados obtidos neste estudo. O inconveniente para a validação dos resultados é que se trata de uma aproximação numérica, não de resultados experimentais que são melhor aceitos por se tratarem de observações diretas. No entanto quando se trabalha com problemas desta natureza as medidas experimentais, principalmente as que envolvem perfis de velocidade, são muito difíceis de ser obtidas. Alguns estudos experimentais foram feitos como o de HO & VISKANTA (1984), no entanto não há dados que permitem a comprovação dos valores para o perfil de velocidades no meio fluido. Neste caso a posição da fronteira pode ser um indicador mas não um fator que confirme o nível de acuracidade do método.

USMANI *et al.* (1992) apresentam soluções para diversos casos tanto de solidificação como de fusão para as substâncias alumínio e água. Embora este estudo vise a repetição dos valores obtidos é conveniente ressaltar que, apesar de também se utilizar de método da malha fixa, o procedimento geral de solução é muito diferente, principalmente no que diz respeito ao campo de velocidades.

Dentre todas as soluções apresentadas pelos autores, escolheu-se o problema de fusão do alumínio em uma cavidade para validação do modelo proposto. Neste problema foram utilizadas as seguintes propriedades para o alumínio:

$$\begin{array}{lll} \beta = 4.0 \times 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C} & \mu_l = 0.025 \text{ g/cm.s} & \rho = 2.5 \text{ g/cm}^3 \\ g = 981.0 \text{ cm/s}^2 & c = 0.25 \text{ cal/g}^\circ\text{C} & k = 0.25 \text{ cal/g.}^\circ\text{C} \\ \lambda = 95 \text{ cal/g} & T_s = 625^\circ\text{C} & T_l = 650^\circ\text{C} \end{array}$$

A cavidade é da forma mostrada na figura (5.20), com dimensões de 5 cm x 5 cm. Embora a solução original apresente resultados em sua forma dimensional, este estudo tem se dedicado à solução das equações na sua forma adimensional. Desta forma será necessária uma conversão entre os valores adimensionais e dimensionais para a comparação de resultados. Para o cálculo dos adimensionais adota-se a temperatura de mudança de fase como a média da faixa anteriormente mostrada $T_f = (T_l + T_s)/2 = 637.5 \text{ }^\circ\text{C}$. Com isto os valores dos adimensionais tornam-se $Ra = 8,889 \times 10^4$, $Pr = 0.025$ e $Ste = 0.191$.

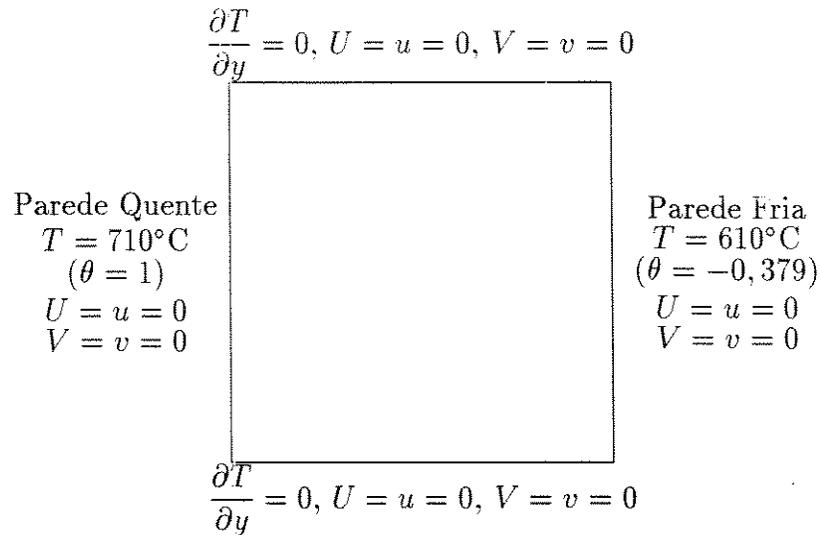


Figura 5.20: Esquema do problema proposto.

A relação entre tempo e as velocidades dimensionais e adimensionais pode ser dada por:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = 0.4$$

$$v = \frac{\alpha}{L} V = 0.08 V$$

$$t = \frac{L^2}{\text{Ste} \alpha} t = 327,23 t$$

É ainda necessário calcular a faixa de mudança de fase na forma adimensional:

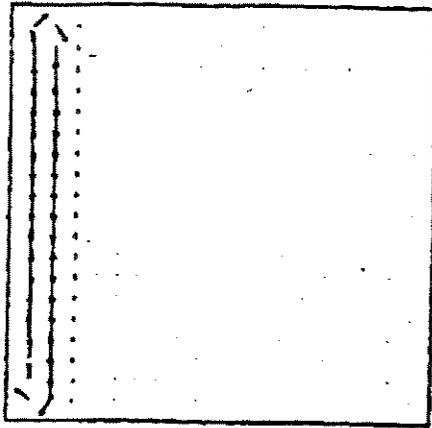
$$\Delta\theta = \frac{\Delta T}{T_h - T_f} = \frac{25}{710 - 637.5} = 0.345$$

Além disto, como a faixa de temperaturas é definida entre o ponto de fusão e a "temperatura quente", é necessário ainda calcular a temperatura de parede fria:

$$\theta_c = \frac{T_c - T_f}{T_h - T_f} = \frac{610 - 637.5}{710 - 637.5} = -0.379$$

Feito isto, a formulação está completa e pronta para ser usada na solução do problema. Note que a formulação obtida pode ser utilizada na solução tanto de problemas de fusão como de solidificação, dependendo apenas da adequação das condições iniciais.

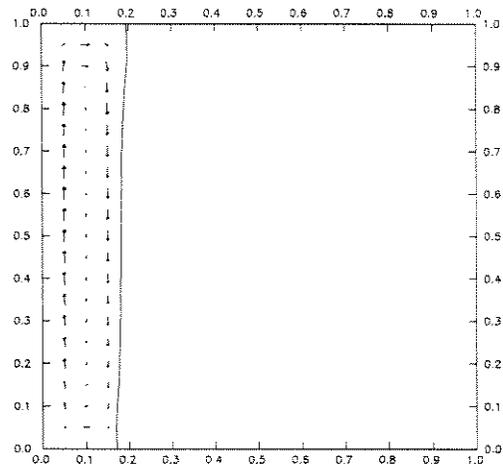
Nas figuras (5.21) a (5.28) nota-se uma alusão a três diferentes esquemas. Esta forma foi utilizada para analisar como o problema se comportaria perante pequenas alterações na formulação. Estes esquemas diferem, na realidade, quanto à forma de se anular os



Max. Velocity = 0.2090

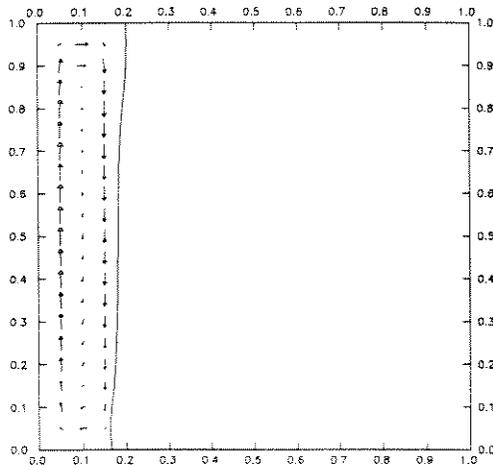
Time = 6.39

Resultados obtidos por Usmani et. al.



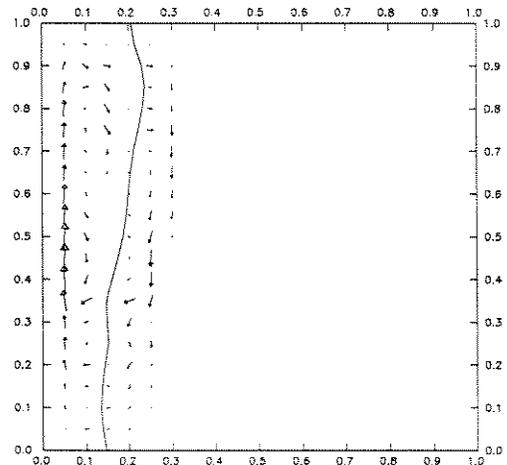
Velocidade Máxima = 9,13 (0,73 cm/s)

Esquema 1



Velocidade Máxima = 12.85 (1.08 cm/s)

Esquema 2



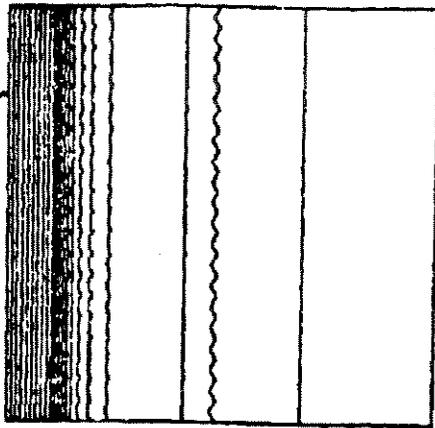
Velocidade Máxima = 19.04 (1,52 cm/s)

Esquema 3

Figura 5.21: Comparação do campo de velocidades na fusão ($\tau = 0,01955$, $t = 6,40$ s).

valores de velocidade dentro da faixa de mudança de fase e na forma do tratamento dado aos termos transientes da equação da energia e do movimento.

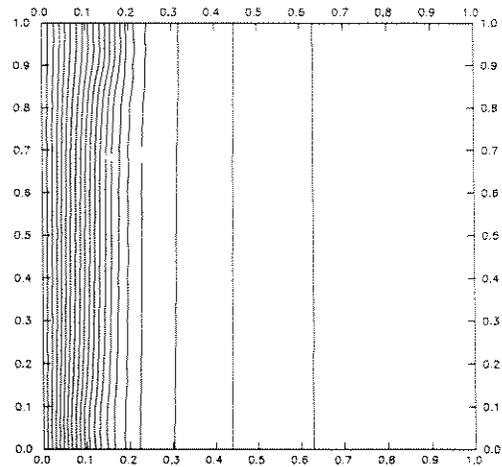
No que se refere ao tratamento dado ao perfil de velocidades tanto o *Esquema 1* como o *Esquema 2* utilizam-se de uma formulação simples, que anula as velocidades nos pontos cuja a temperatura está abaixo da temperatura média de mudança de fase ($\theta = 0$). Este tratamento primeiro identifica os pontos onde as temperaturas são inferiores à de fusão. Isto altera as linhas da matriz global das equações do movimento, que representam tais



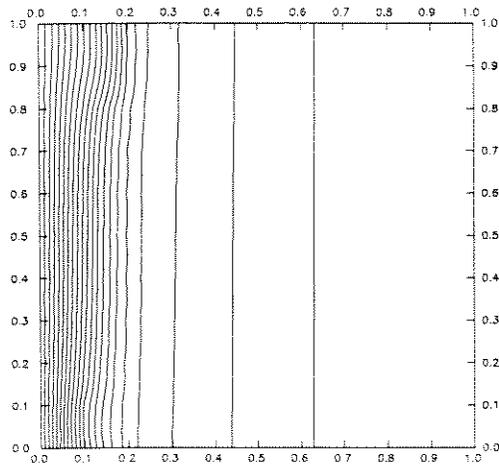
Min. value = 610.0000 Interval = 4.7619

Max. value = 710.0000 Time = 6.39

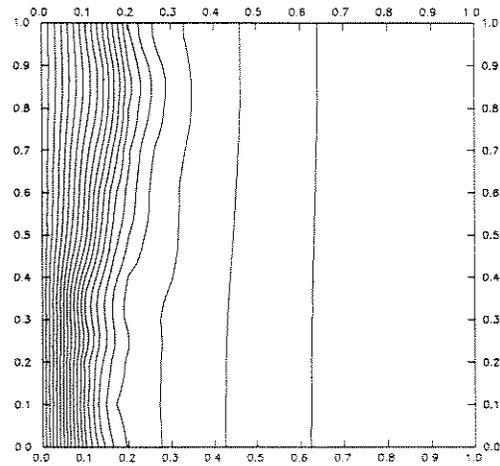
Resultados obtidos por Usmani et. al.



Esquema 1



Esquema 2



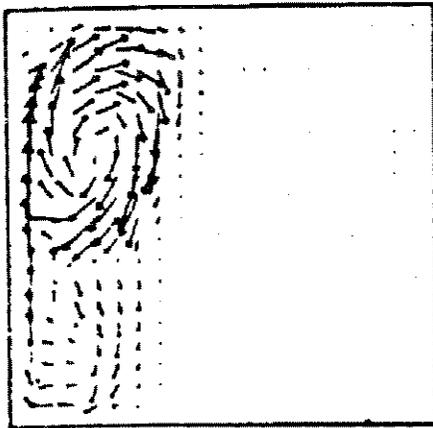
Esquema 3

Figura 5.22: Comparação do campo de temperaturas na fusão ($\tau = 0,01955$, $t = 6,40$ s).

pontos, de forma a anular a sua velocidade.

Neste aspecto o *Esquema 3* se difere, pois trabalha com viscosidade variando exponencialmente na faixa de mudança de fase, e estipulando um valor elevado para a "viscosidade do sólido". Neste esquema foi adotado um tratamento similar ao dado por USMANI *et al.* (1992), que corresponde a uma variação da viscosidade com a temperatura, na faixa de mudança de fase, dada na forma:

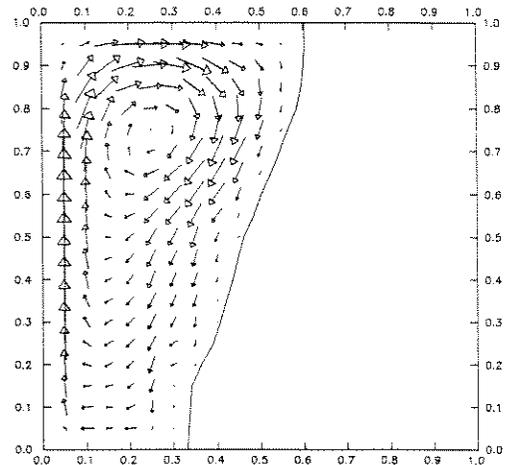
$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_S \frac{\theta - (\Delta\theta/2)}{-\Delta\theta}$$



Max. Velocity = 2.7120

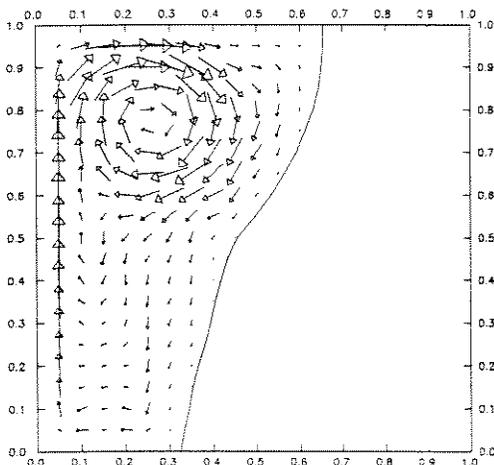
Time = 39.23

Resultados obtidos por Usmani et. al.



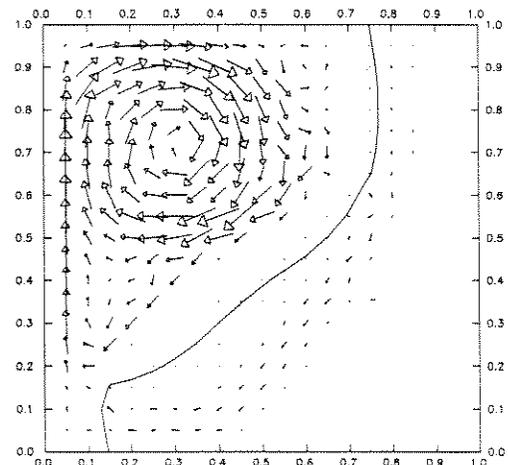
Velocidade Máxima = 35.55 (2.84 cm/s)

Esquema 1



Velocidade Máxima = 36,34 (2,91 cm/s)

Esquema 2



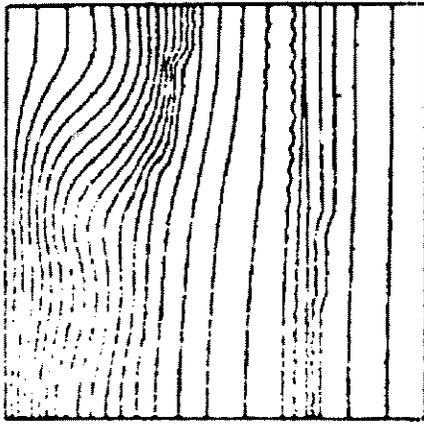
Velocidade Máxima = 34,07 (2,73 cm/s)

Esquema 3

Figura 5.23: Comparação do campo de velocidades na fusão ($\tau = 0,12$, $t = 39,27$ s).

Fora desta faixa a viscosidade adotada é igual à do fluido, se a temperatura é maior que a de mudança de fase e, a velocidade é anulada, da forma descrita anteriormente, caso a temperatura seja menor que a de mudança de fase.

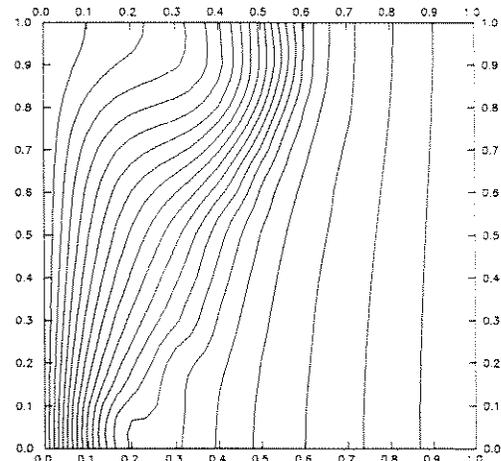
A utilização deste esquema pode ser analisada através dos dados das figuras (5.21) a (5.28) e nota-se que, neste caso a utilização dos esquemas 1 e 2 fornecem resultados bem mais próximos do obtido por USMANI *et al.* (1992). Além disto, o tempo computacional gasto por cada um dos esquemas, é significativamente menor. Enquanto o *Esquema 2* para



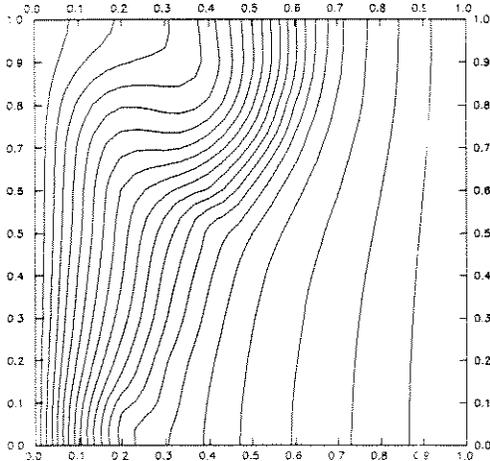
Min. value = 610.0000 Interval = 4.7619

Max. value = 710.0000 Time = 39.23

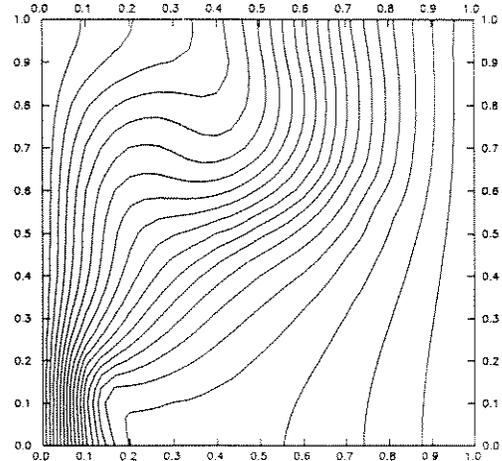
Resultados obtidos por Usmani et. al.



Esquema 1



Esquema 2



Esquema 3

Figura 5.24: Comparação do campo de temperaturas na fusão ($\tau = 0,12$, $t = 39,27$ s).

a solução deste caso requereu aproximadamente 17 dias para rodar em uma Sparc 5+, os outros esquemas requereram em torno de 1 dia para rodar em uma estação IBM Risc 6000-Power Pc. Obviamente a comparação dos resultados expressa de forma é complicada para se concluir a eficiência de cada formulação, mas, é conveniente, ressaltar que a Sparc 5+ tem velocidade de processamento similar à da PowerPc e os tempos de CPU tem a mesma ordem de grandeza para rodar problemas idênticos.

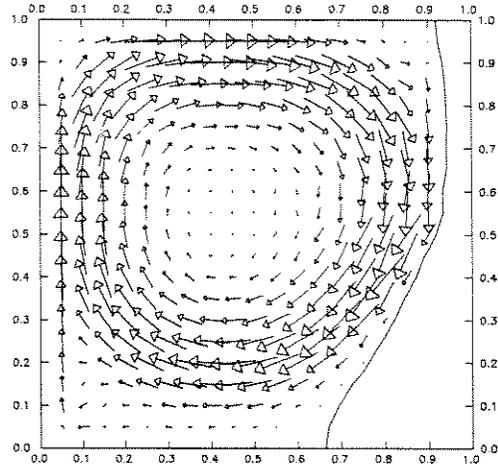
Quanto à forma de considerar a evolução no tempo apenas o *Esquema 2* se diferencia, pois adota uma solução em que o incremento de tempo é o mesmo tanto para a solução



Max. Velocity = 3.0430

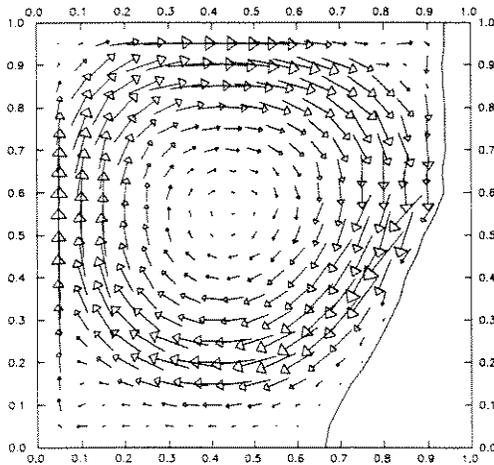
Time = 179.08

Resultados obtidos por Usmani et. al.



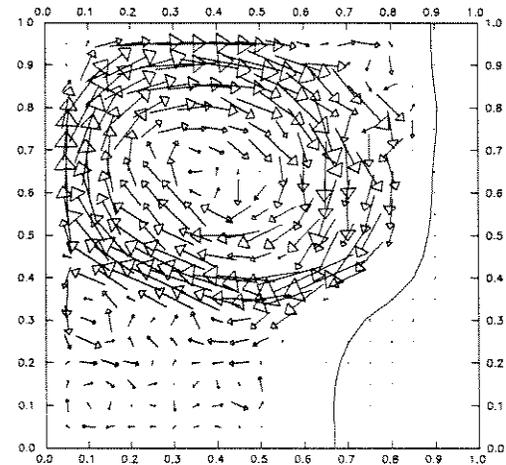
Velocidade Máxima = 40.99 (3.28 cm/s)

Esquema 1



Velocidade Máxima = 43.39 (3.47 cm/s)

Esquema 2



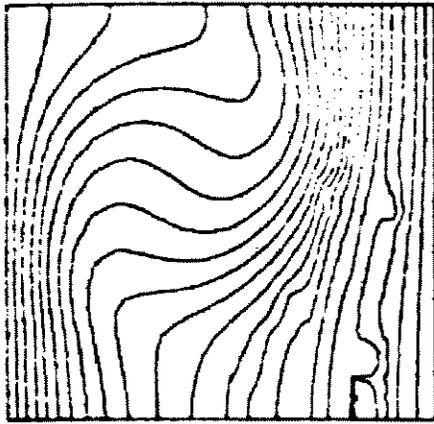
Velocidade Máxima = 75.39 (6.03 cm/s)

Esquema 3

Figura 5.25: Comparação do campo de velocidades na fusão ($\tau = 0,547$, $t = 178,99$ s).

da equação da energia como para a equação de movimento. Neste caso o procedimento de solução é feito de forma iterativa e os campos de velocidade e temperatura se desenvolvem simultaneamente. O próximo passo de tempo só é fornecido quando os perfis de velocidade e temperatura estão variando dentro de uma determinada tolerância.

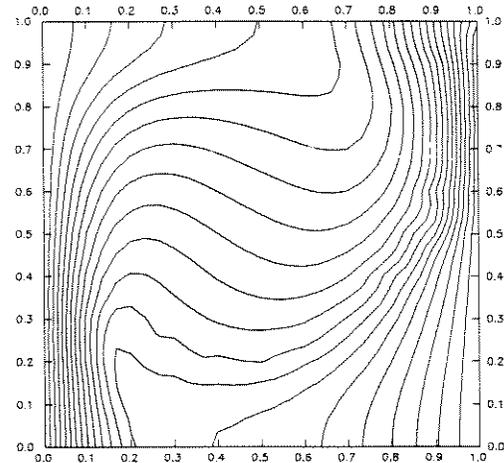
Nos outros esquemas (1 e 3) o incremento de tempo para a equação da energia é maior que o da quantidade de movimento. Desta forma, o procedimento é iterativo apenas para o campo de temperaturas, já que o campo de velocidades para um tempo intermediário é



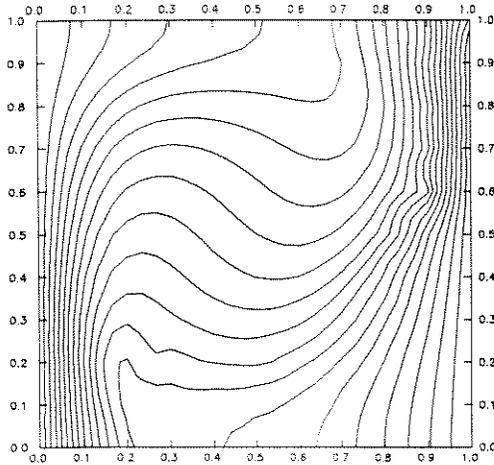
Min. value = 610.0000 Interval = 4.7619

Max. value = 710.0000 Time = 179.08

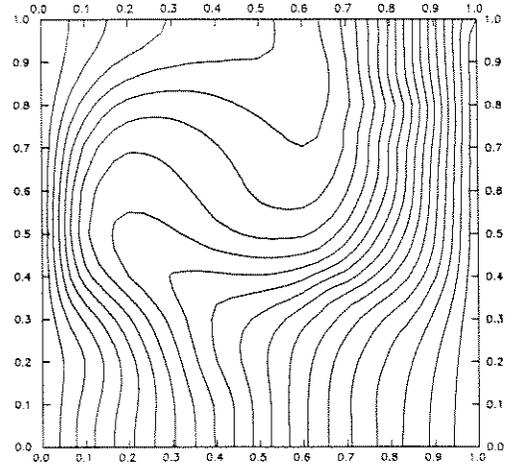
Resultados obtidos por Usmani et. al.



Esquema 1



Esquema 2



Esquema 3

Figura 5.26: Comparação do campo de temperaturas na fusão ($\tau = 0,547$, $t = 178,99$ s).

sempre calculado de forma explícita a partir do campo de temperaturas atual.

Analisando-se os resultados obtidos é possível perceber que não há diferenças significativas entre os dois esquemas e que, ambos apresentam boa concordância com os resultados obtidos por USMANI *et al.* (1992).

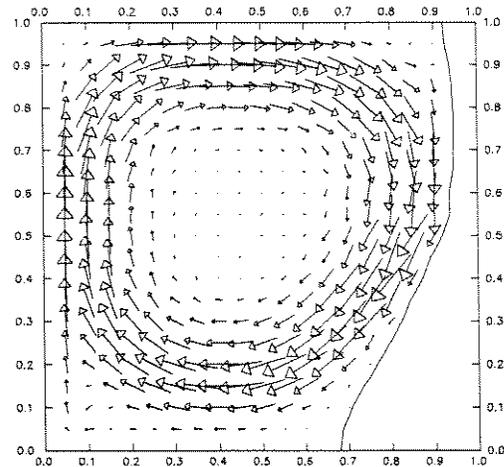
As diferenças apresentadas entre os campos de velocidades e temperaturas obtidos neste trabalho e por USMANI *et al.* (1992), como já foi dito, não são significativas e podem ter sido fruto de uma série de diferenças de formulação. No trabalho original são utilizados: viscosidade variando com a temperatura na faixa de mudança de fase (que não



Max. Velocity = 3.1474

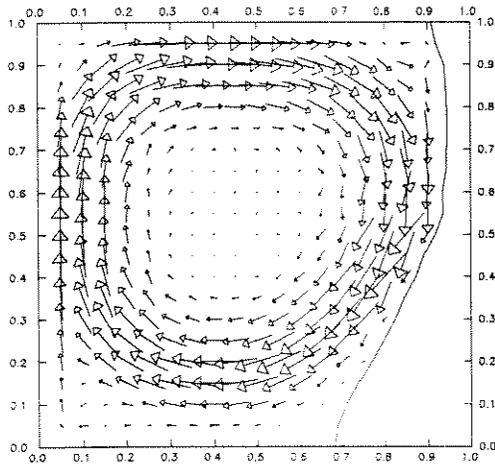
Time = 476.38

Resultados obtidos por Usmani et. al.



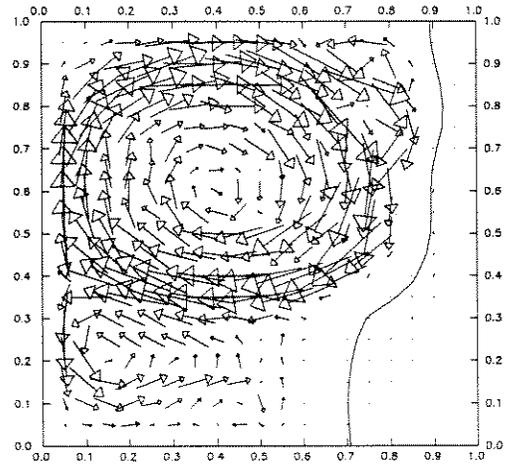
Velocidade Máxima = 42.32 (3,39 cm/s)

Esquema 1



Velocidade Máxima = 42,76 (3,42 cm/s)

Esquema 2



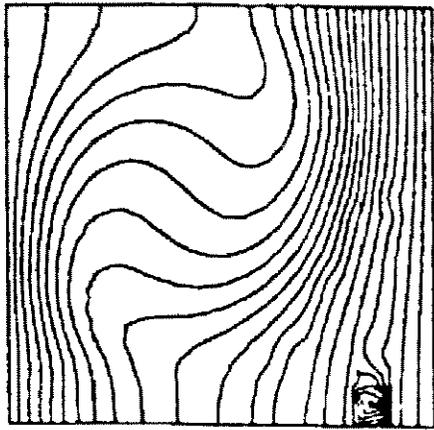
Velocidade Máxima = 71,24 (5,70 cm/s)

Esquema 3

Figura 5.27: Comparação do campo de velocidades na de fusão ($\tau = 1,455$, $t = 476,11$ s).

deu bons resultados nesta formulação), um esquema de ordem diferente para a pressão e a solução simultânea dos campos de pressão, temperatura e velocidades. Além disto, os autores se utilizaram de um procedimento que considera um regime permanente para o campo de velocidades a cada instante.

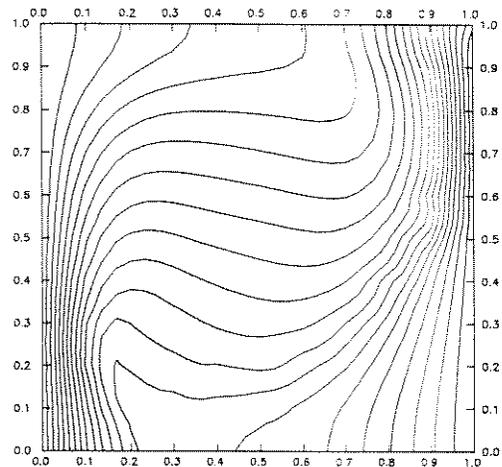
Desta forma, com este grande número de diferenças de formulação, de antemão já não se esperava resultados absolutamente coincidentes. No entanto, os resultados obtidos pelos esquemas 1 e 3 permitem confirmar a possibilidade de uso deste tipo de formulação



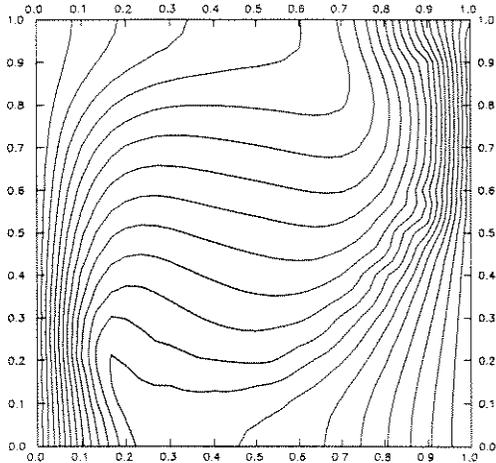
Min value = 610.0000 Interval = 4.7619

Max value = 710.0000 Time = 476.38

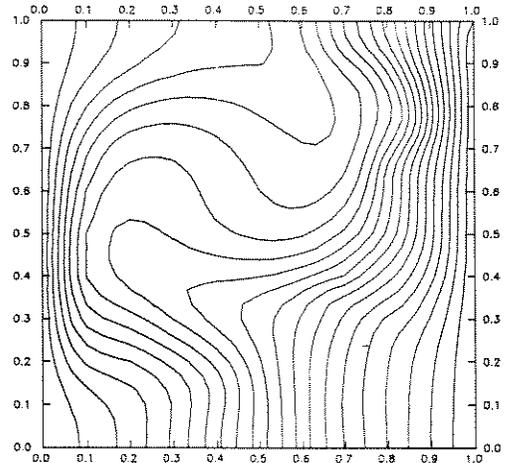
Resultados obtidos por Usmani et. al.



Esquema 1



Esquema 2



Esquema 3

Figura 5.28: Comparação do campo de temperaturas na fusão ($\tau = 1,455$, $t = 476,11$ s).

para problemas de mudança de fase com convecção natural, o que é o objetivo básico desta comparação.

5.6 Considerações finais

Como foi possível notar os resultados estão muito próximos, fato que permite afirmar que a formulação proposta é adequada para a solução de problemas de mudança de fase com convecção. O único porém neste fato é a formulação que eleva a viscosidade do sólido

para um número extremamente elevado e que, por sua vez, não apresentou resultados satisfatórios, como mostrado nas figuras anteriores. Este fato leva a crer que esquemas desta natureza funcionam apenas com métodos de solução diretos, e não são adequados para os esquemas de solução acoplados. Embora tenha se tratado de um único problema testado, este não é um efeito sem causa: a elevação excessiva da viscosidade tende a diminuir a influência do campo de pressões na equação da quantidade de movimento. Isto complica, de forma significativa, a solução da equação do campo de pressões (equação da continuidade) e, provavelmente, provoca o resultado insatisfatório observado. No entanto, isto não desqualifica as demais formulações que, ao que tudo indica, podem ser utilizadas em quaisquer tipo de problemas.

Capítulo 6

Resultados e Discussões

A metodologia de solução adotada já foi amplamente discutida, resta agora aplicá-la ao problema proposto de mudança de fase. Este capítulo é dedicado a isto, sendo que, nele, serão discutidos os resultados obtidos e o comportamento da solução. Foram definidas algumas condições básicas do problema que serão denominadas por condições padrão, que estabelecem tanto as características geométricas como as condições iniciais. Estes valores são adotados como condições de partida pela proximidade dos mesmos com as condições médias de trabalho de armazenadores térmicos que se utilizam deste tipo de geometria. As variações feitas sempre partirão deste problema com as condições padrão, para facilitar a comparação dos resultados obtidos. As condições gerais e os valores das propriedades adotadas neste problema podem ser identificadas através da tabela (6.1) e a definição de cada termo da geometria do problema pode ser obtida da figura (1.1).

Na solução dos problemas foi aplicada a metodologia definida como a mais adequada na discussão realizada anteriormente. No entanto, nem todos os problemas foram sanados e no tratamento da geometria aletada mais um problema se apresentou: existem duas superfícies em contato (alumínio e PCM) com condutibilidades muito diferentes. Numa solução tradicional do problema é normal que, a medida que a solução se desenvolve,

Tabela 6.1: Condições físicas e geométricas do problema padrão utilizado.

Dados geométricos	$L = 1,0$	$h = 1,0$	$e = 0,1$	$h_{al} = 0,35$
Adimensionais	$Ra = 10^4$	$Pr = 7$	$Ste = 0,15$	
Material da Aleta	$k/k_{PCM} = 1000$	$C_p/C_{p,PCM} = 0,01$		
Temperaturas	$\theta_s = -0,15$	$\Delta\theta = 0,01$		

haja necessidade de um aumento do incremento de tempo pela diminuição da velocidade de avanço da fronteira de solidificação ou fusão. No entanto, esta coexistência dos dois materiais impede o aumento significativo do incremento de tempo, devido ao aparecimento de oscilações de temperatura, de caráter numérico, na região do alumínio e quanto maior o incremento de tempo, maior a amplitude destas oscilações.

Assim, o aumento no passo de tempo torna-se função de um limite imposto pela aleta. Para contornar este fenômeno considerou-se a seguinte hipótese: no início do processo o passo de tempo deve realmente ser pequeno pois a velocidade da frente de solidificação (ou fusão) é alta e/ou o campo de temperaturas dentro do alumínio está em desenvolvimento. Desta forma, resolve-se o problema da forma considerada inicialmente. A partir do momento em que o campo de temperaturas da aleta entra em regime (a temperatura da extremidade difere da base em apenas 1%) adota-se uma outra hipótese: que toda a aleta encontra-se numa temperatura uniforme e igual à da base. A partir desta condição não se resolve mais a equação da condução de calor na aleta e o problema fica restrito somente à solução da região do PCM. Desta forma consegue-se contornar tal instabilidade, podendo utilizar incrementos de tempo maiores e obtendo-se resultados com tempos computacionais menores.

Como se trata de uma hipótese, da qual não foram encontradas referências, a sua implementação foi verificada. Para isto foi obtida a solução completa do problema padrão até um tempo $\tau = 0.05$ e a partir daí foram impostas três diferentes condições:

- (a) a temperatura da aleta varia de acordo com a solução da equação da condução de calor.
- (b) a temperatura adimensional da aleta é mantida constante igual a 1, mas o incremento de tempo não é alterado pelo fato.
- (c) a temperatura da aleta é mantida constante e o incremento de tempo é aumentado.

Na figura (6.1) são mostradas as isotermas para o problema proposto nas três condições e, pode-se notar que, em nenhuma situação houve alteração significativa do campo de temperaturas.

Na figura (6.2), por sua vez, mostra-se os efeitos destas alterações sobre o campo de escoamentos através das isocurvas de função corrente. Da mesma forma que na figura anterior pode-se afirmar que a utilização da temperatura de aleta constante não afeta

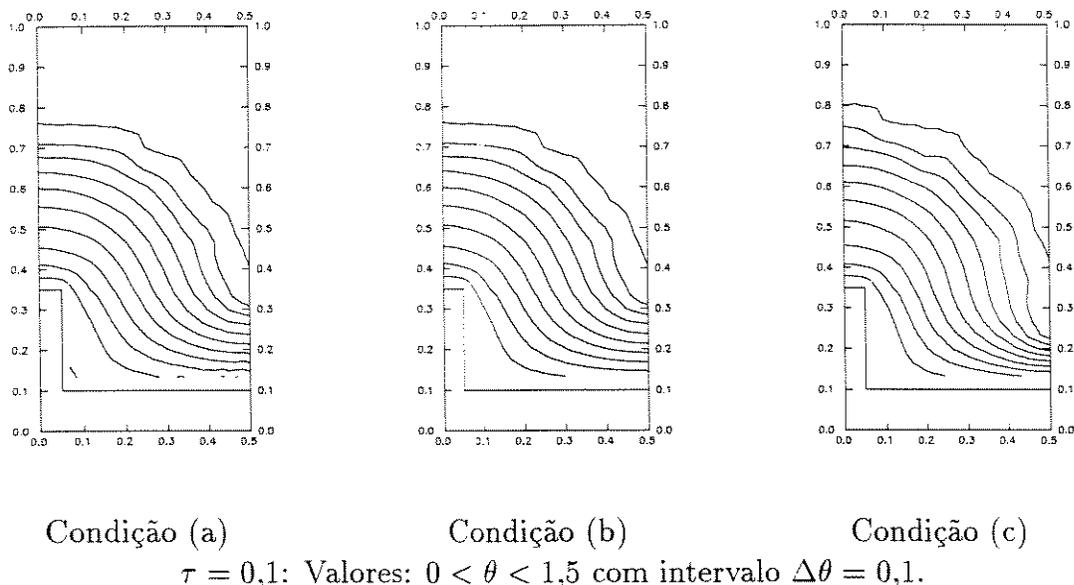


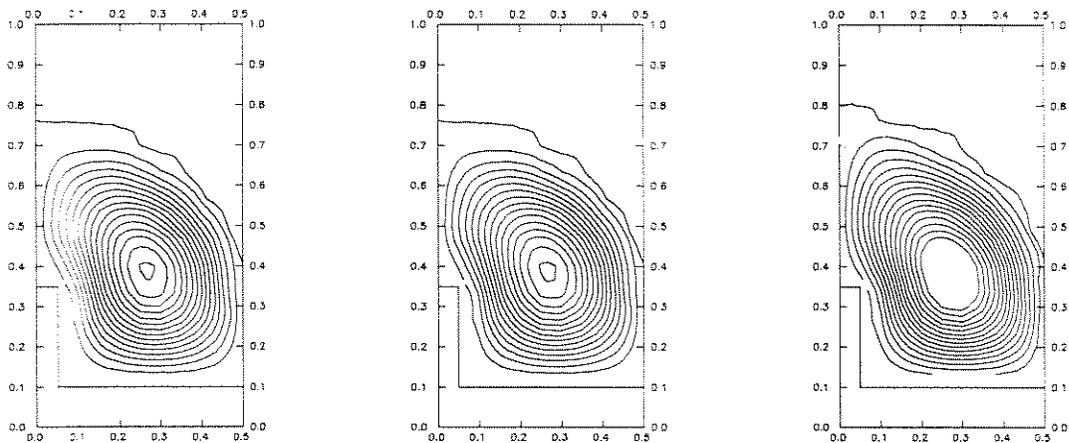
Figura 6.1: Comparação das isotermas para diferentes condições de temperatura na aleta.

os resultados, o que é comprovado pelos gráficos (a) e (b) da figura (6.2). Inclusive avaliando-se estes resultados numéricos percebe-se alguma diminuição de oscilação no campo de velocidades para o caso onde a temperatura da aleta é constante. Percebe-se, entretanto, um pequeno desvio para o caso (c) em relação aos demais, indicando que a mudança do incremento de tempo afeta os valores de função corrente. Este desvio é pouco significativo para este caso não sendo suficiente, sequer, para modificar os valores do campo de temperaturas mostrados anteriormente. Embora pouco significativo, em termos de resultados, esta alteração permite a utilização de valores de incremento de tempo maiores.

6.1 Determinação do refinamento da malha

Buscando a otimização do tempo de processamento, sem distorcer a solução do problema, foram feitos alguns testes para determinar o tamanho ideal da malha. Não foi objetivo deste estudo a otimização da malha dentro da aleta sendo, apenas, analisado o comportamento do problema para um refinamento dentro do material de mudança de fase. Esta consideração é desnecessária devido à alta condutibilidade térmica do material da aleta, o que resulta numa rápida entrada em regime permanente.

Devido a complexidade geométrica do problema, que depende da possibilidade de expressar a aleta com suas respectivas dimensões, foi adotado um procedimento básico:



Condição (a)

Condição (b)

Condição (c)

 $\tau = 0,1$: Valores: $0 < \psi < 1,5$ com intervalo $\Delta\psi = 0,1$.

Figura 6.2: Comparação das isocurvas de função corrente para diferentes condições de temperatura na aleta.

procurar trabalhar sempre com malhas quadradas. Neste caso foram adotadas malhas que subdividiram o h (altura) do problema padrão em 11, 17, 21 e 25 pontos.

A figura (6.3) mostra a evolução do percentual de massa fundida em função do tempo. Assim, é possível verificar que todos os casos apresentam um comportamento parecido sendo que, para as malhas com 11 e 17 pontos, notam-se pequenas oscilações no comportamento da massa fundida. Para os casos de 21 e 25 pontos este efeito praticamente inexistente. Em termos de diferenças, em valores absolutos, as malhas com maior número de pontos apresentam resultados muito próximos e não existe justificativa para a necessidade de utilização de maior refinamento.

Neste caso, como se trata de um problema com convecção natural, decidiu-se avaliar como se comportam os perfis de velocidade durante o processo. Tomando o perfil de velocidade para o instante $\tau = 0,1$ como referência nota-se um comportamento dos vetores de velocidade similar para todas as malhas sendo, no entanto, melhor representados nas malhas mais refinadas. A figura (6.4) mostra estes perfis, assim como o valor da velocidade máxima nos pontos considerados e a sua respectiva posição. Da mesma forma que na figura (6.3) os resultados para as duas malhas mais refinadas estão bastante próximos com desvio em torno de 2%.

Após esta análise pode-se afirmar que a melhor malha para a solução do problema é

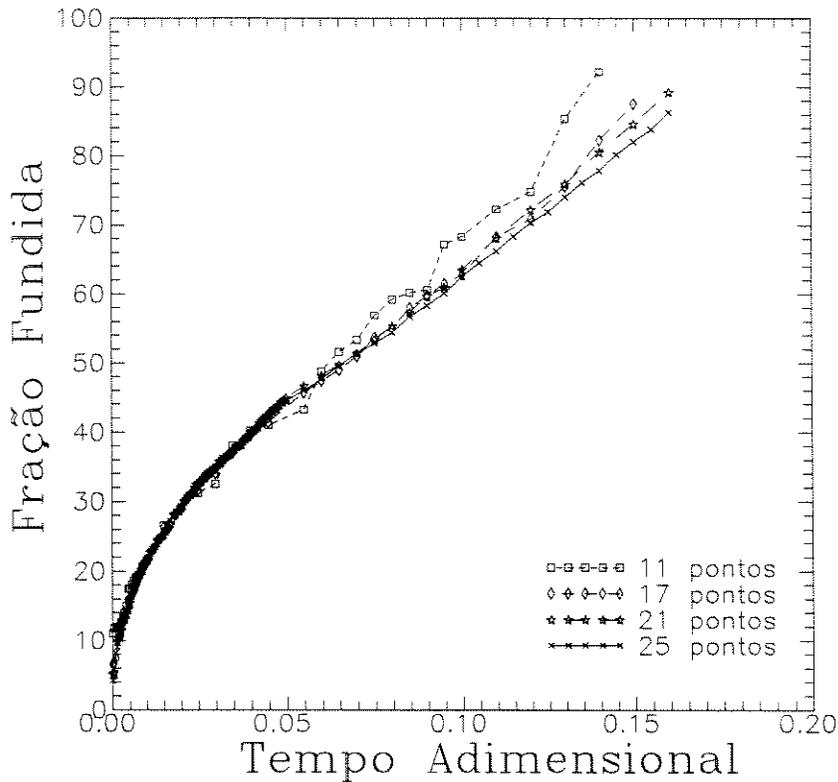


Figura 6.3: Massa fundida em função do tempo para diversos tamanhos de malhas.

de 21 pontos, o que equivale ao uso de um espaçamento entre os pontos de 0,05. Malhas mais refinadas são evitadas para economizar tempo computacional enquanto as malhas mais grosseiras não são utilizadas pelo comprometimento da precisão dos resultados.

6.2 Influência dos parâmetros de projeto

Nesta seção são avaliados todos os itens considerados fundamentais no projeto de armazenadores térmicos com a geometria aletada. Foram investigados uma série de itens, tais como influência do campo inicial de temperaturas, dos valores dos adimensionais Ra e Ste e a influência da geometria. Esta análise permite tanto uma qualificação como uma quantificação da influência de cada item sobre o funcionamento do armazenador aletado.

6.2.1 Influência do perfil inicial de temperaturas

Um dos parâmetros avaliado é a influência do campo inicial de temperaturas no meio que vai mudar de fase, neste caso, o sólido. Foram investigados os casos em que a temperatura adimensional do sólido se encontra a $-0,15$, a $-0,01$ e a $-1,0$. A figura (6.5) apresenta os resultados obtidos. É possível notar que para os valores de temperatura

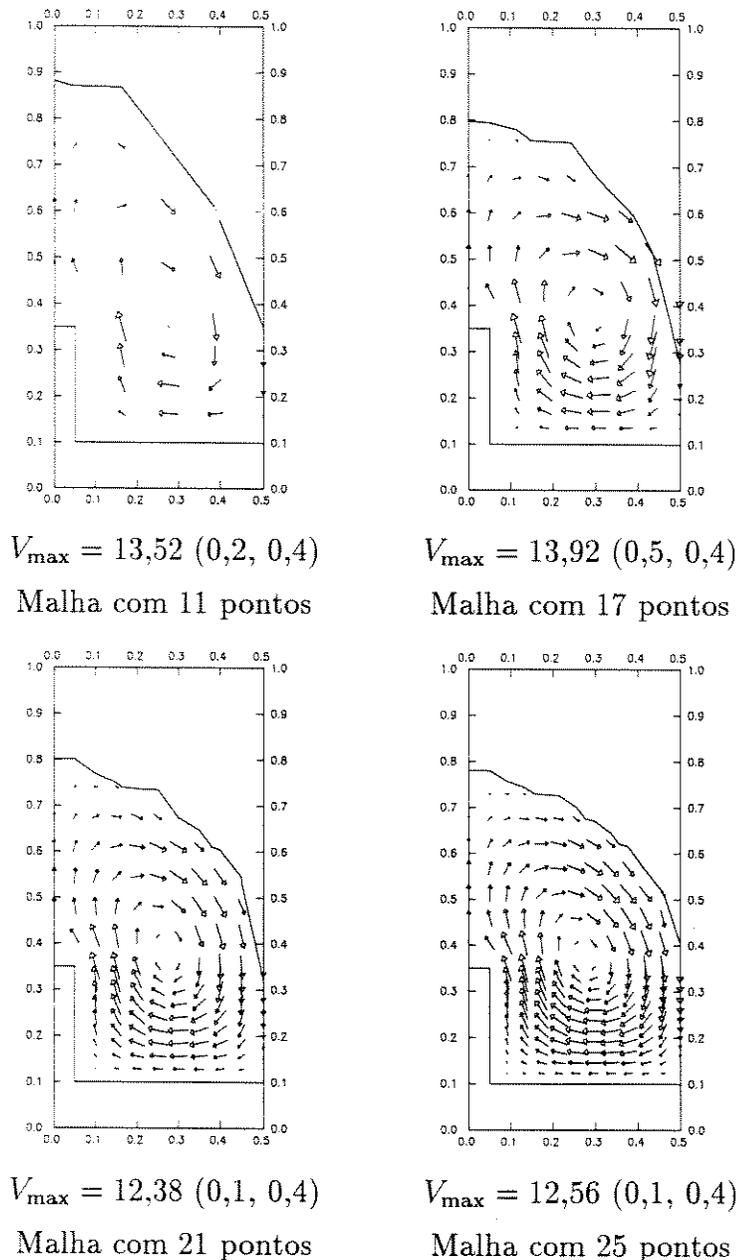


Figura 6.4: Perfis de velocidade para as diversas malha no instante $\tau = 0,1$.

próximos da faixa de mudança de fase do problema, o tempo de fusão do material praticamente não varia. No entanto esta mesma afirmação não pode ser feita quando a temperatura inicial do sólido é muito menor que temperatura de fusão. Esta situação de subresfriamento acentuado é inadequada para o projeto de armazenadores e deve ser evitada.

No caso estudado o perfil inicial de temperaturas no sólido não afeta, de forma significativa, nem o processo de convecção natural e nem o perfil da fronteira, atua apenas acelerando ou retardando o processo de mudança de fase.

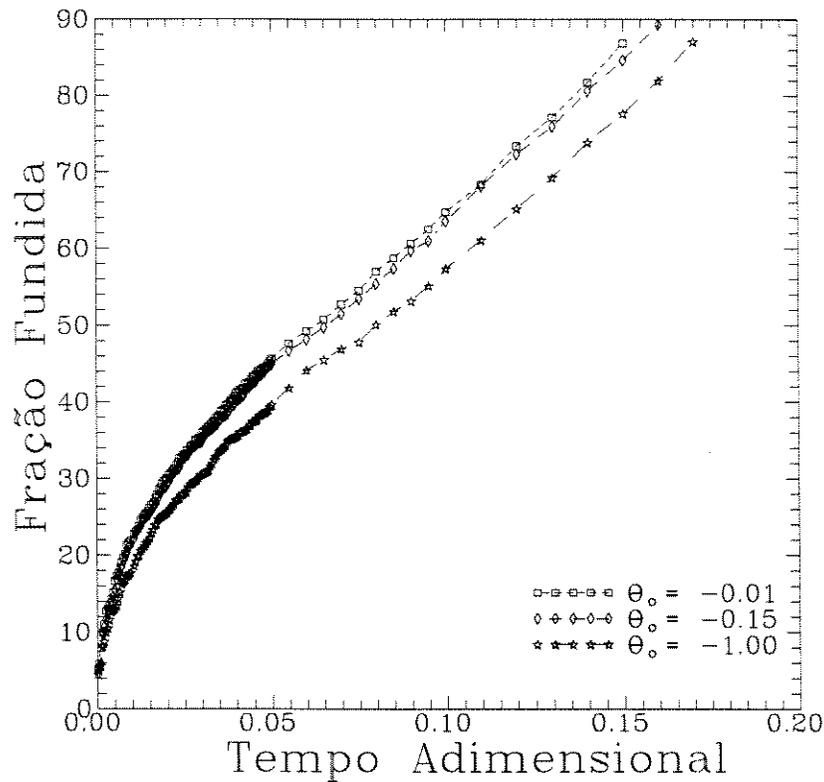


Figura 6.5: Massa fundida em função do tempo para valores diferentes da temperatura inicial do sólido.

6.2.2 Influência dos parâmetros adimensionais

Número de Stefan: o número de Stefan (Ste) é o primeiro parâmetro a ser analisado, permitindo identificar a sua influência na solução do problema. Procurou-se adotar dois valores limites para o Ste que englobam a maior parte dos materiais de mudança de fase: $Ste = 0,05$ e $Ste = 0,15$.

A figura (6.6) mostra uma comparação entre a massa fundida para os dois valores. Neste gráfico nota-se que a diminuição do valor de Ste provoca um aumento da massa fundida para o mesmo tempo adimensional. É importante notar também que no início do processo, onde a transmissão de energia ocorre principalmente por condução, o valor do Ste praticamente não interfere na solução obtida. Somente a partir do instante em que a convecção adquire importância é que as curvas dos dois casos se afastam.

Para a compreensão deste fenômeno é importante lembrar que o valor do Ste entra na adimensionalização do tempo. Assim sendo, o mesmo tempo visto na escala das abcissas do gráfico não representa o mesmo valor dimensional para os dois problemas, e sim um tempo proporcionalmente maior para o caso onde o Ste é menor. Esta escala no tempo

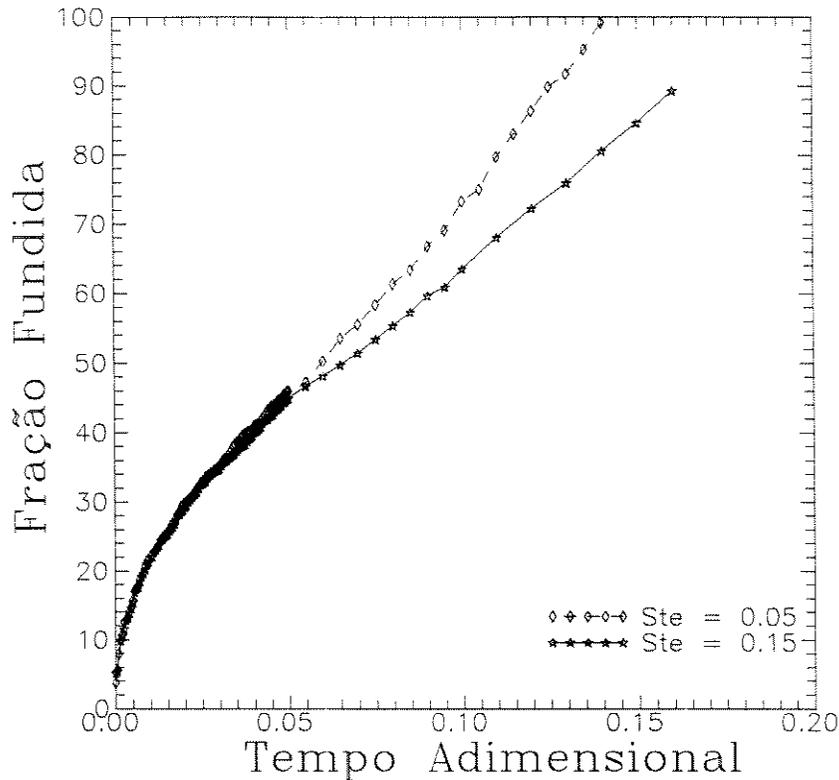


Figura 6.6: Massa fundida em função do tempo para diferentes valores de Ste .

faz com que, em problemas dominados por condução, a solução em função do tempo adimensional seja praticamente independente do valor do Ste . A medida que ocorre uma predominância do fenômeno convectivo, que é um processo não linear, há um aumento da intensidade da troca de calor. Este fenômeno é o maior responsável pelo afastamento entre as curvas na figura (6.6).

Este resultado difere um pouco das afirmações feitas por SPARROW *et al.* (1977) sobre a pequena influência do valor do Ste , dentro desta faixa, na solução final. Uma justificativa para esta diferença está no fato que, no referido trabalho, a geometria diferente minimiza os efeitos convectivos e, apesar de existir um processo de convecção natural, o problema continua sendo dominado pela transferência de calor por condução. Caso isto ocorra seria verificado o mesmo comportamento do estágio inicial deste problema, ou seja, uma coincidência entre as curvas.

Para ilustrar melhor o fato são mostrados também alguns gráficos que permitem a visualização do campo de funções corrente, figura (6.7), e o campo de temperaturas, figura (6.8).

Na figura (6.7) é possível perceber a intensificação do campo de velocidades através do aumento dos valores de função corrente em termos absolutos. No que se refere à forma

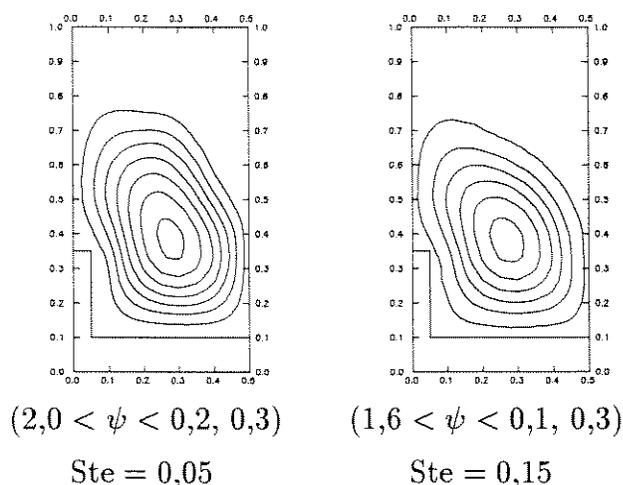


Figura 6.7: Comportamento da função corrente em função da variação do Ste para $\tau = 0,1$.

geral do escoamento percebe-se que não há diferença entre os casos. Esta intensificação do processo de convecção foi perceptível mesmo quando estava se obtendo resultados do programa, uma vez que, foi preciso reduzir o incremento de tempo quando se diminuiu o valor do Ste, para que se obtivesse a convergência dos resultados.

Da mesma forma, a figura (6.8) mostra a comparação entre os campos de temperatura. Em termos de posicionamento percebe-se que a temperatura próxima da de fusão se encontra mais afastada da aleta para o caso do número de Ste menor. Isto é fruto das discussões já feitas para o caso de massa fundida. Além disto, é possível perceber

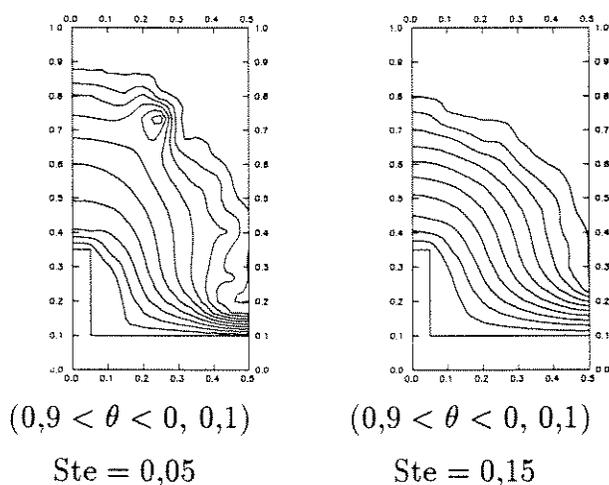


Figura 6.8: Comportamento do campo de temperaturas em função da variação do Ste para $\tau = 0,1$.

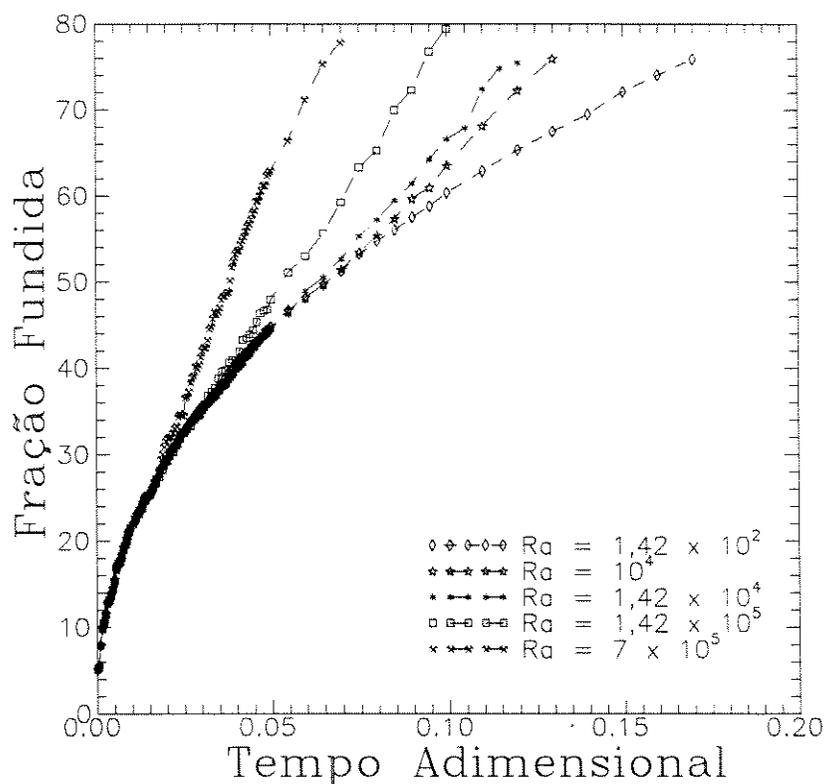


Figura 6.9: Massa fundida em função do tempo para valores diferentes de Ra .

instabilidades na solução decorrente da diminuição do número de Ste (equivalente a se trabalhar com um material de maior calor latente). Este fato faz com que existam maiores discrepâncias dos valores de c_p entre os pontos vizinhos e que, acredita-se, provoca esta instabilidade. Maiores testes podem ser feitos para tentar minimizar este fenômeno numérico em trabalhos futuros, dentre os quais sugere-se o aumento artificial da faixa de temperatura de mudança de fase.

Número de Rayleigh: parâmetro que indica a intensidade do processo de convecção natural. No caso deste trabalho foram realizadas simulações para diversos valores: $Ra = 1,42 \times 10^2$, 10^4 , $1,42 \times 10^4$, $1,42 \times 10^5$ e 7×10^5 . Os resultados são apresentados, para efeito de comparação, nas figuras (6.9) a (6.12).

A figura (6.9) mostra a evolução da fronteira de fusão com o tempo para alguns valores de Ra considerados. Nesta figura é possível analisar a influência da intensidade do processo de convecção natural sobre a velocidade da frente de fusão. Nota-se que em uma etapa inicial, onde o processo é dominado pelo fenômeno da condução, praticamente não há diferença entre as curvas. Isto deixa de ocorrer no momento em que o fenômeno convectivo passa a ser dominante e inicia-se um afastamento entre as curvas. A influência

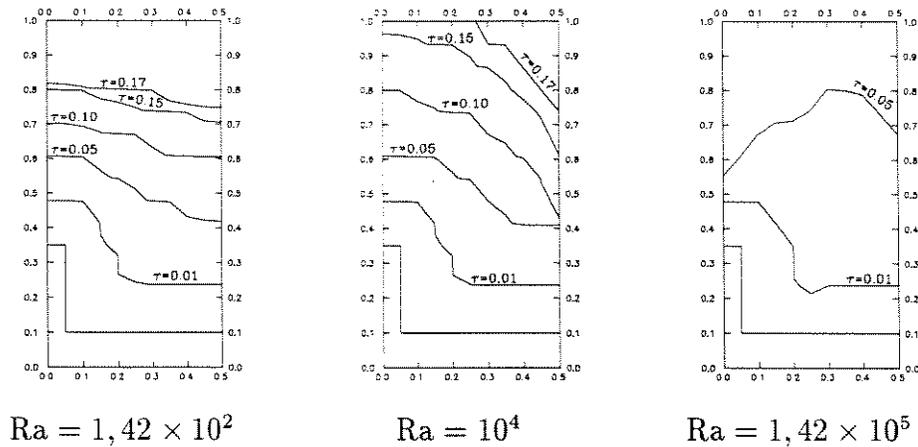


Figura 6.10: Comportamento da posição média da frente de fusão com a variação do Ra.

do Ra sobre a massa fundida não é linear, acentuando-se a partir de determinados valores. No caso de $Ra = 1,42 \times 10^5$ o comportamento da curva de massa fundida tem, inclusive, um perfil diferenciado.

A figura (6.10) mostra uma evolução do ponto médio da frente de fusão com o tempo para os mesmos casos. Esta evolução apresenta um comportamento similar para baixos valores de Ra, mas no caso do valor de $Ra = 1,42 \times 10^5$ o perfil da frente de mudança de fase é completamente diferente, sendo que a frente avança mais rápido em regiões afastadas das aletas.

Este comportamento que, a princípio, pode aparentar uma certa inconsistência, na realidade pode ser explicado pela visualização dos perfis de velocidade em tempos diferentes, como mostrado na figura (6.11). Utilizando um tempo em que o escoamento está

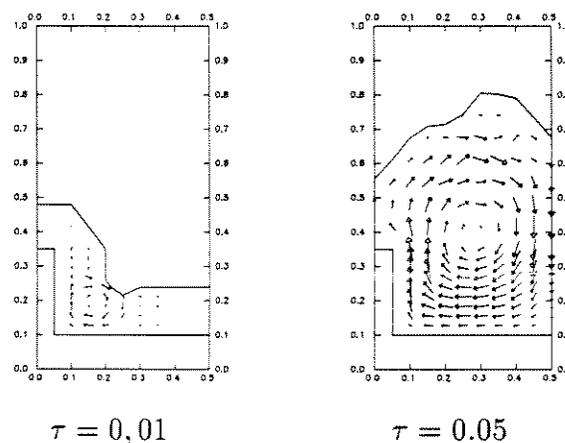


Figura 6.11: Desenvolvimento do perfil de velocidades para $Ra = 1,42 \times 10^5$.

desenvolvido pode-se perceber que há a formação de duas frentes de recirculação que irão se desenvolver com o tempo, principalmente para valores maiores de Ra . Neste caso, a recirculação próxima à fronteira de simetria se desenvolve mais rápido que a das proximidades da aleta. Isto ocorre pela presença da aleta que, por se tratar de uma parede sólida, dificulta a movimentação do fluido em suas proximidades.

É importante ressaltar que os resultados obtidos neste caso se baseiam na hipótese de que as condições de simetria continuam sendo válidas. Esta hipótese deve ser verificada em trabalhos futuros, uma vez que, a medida que a intensidade do processo convectivo aumenta, há uma tendência para que esta condição deixe de ser válida.

A figura (6.12) mostra uma comparação entre os perfis de função corrente para os casos destacados anteriormente. Em relação à intensidade do escoamento percebe-se alterações significativas pois o ψ_{\max} varia de $6,6 \times 10^{-3}$, no Ra mais baixo, para 21,9, no valor de Ra mais alto. Além disto é possível perceber as diferenças entre os próprios perfis num dado instante, e notando-se, inclusive, a recirculação já discutida quando se trata do valor de $Ra = 1,42 \times 10^5$.

6.2.3 Influência dos parâmetros geométricos

Trabalhando com geometria aletada não se poderia deixar de considerar a variação das suas dimensões. Para tanto foram feitos uma série de testes com diversas relações de

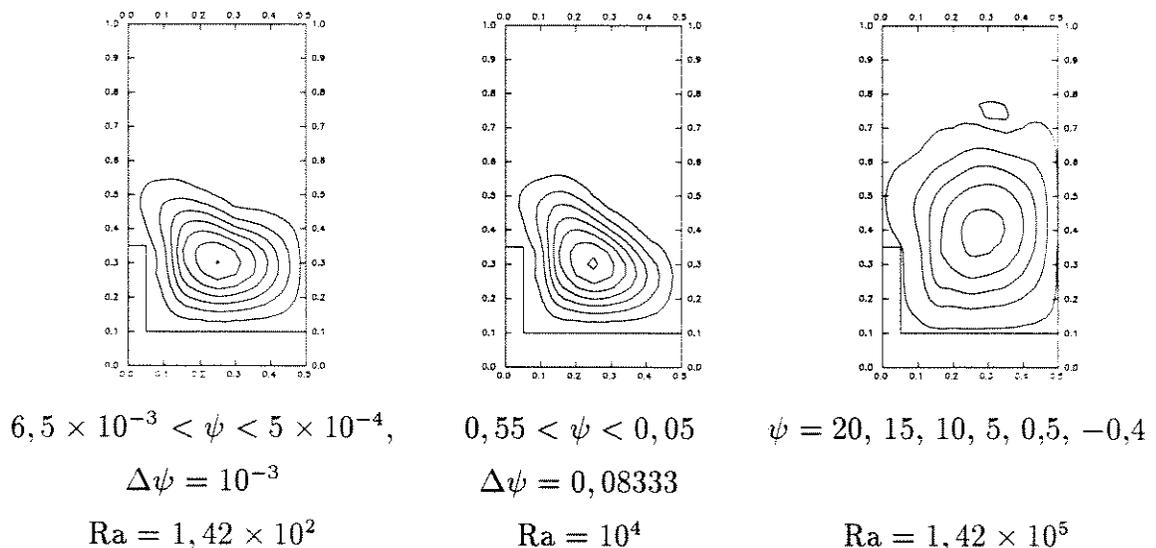


Figura 6.12: Comportamento da função corrente com a variação do Ra para $\tau = 0,05$.

dimensões de aletas. A figura (6.13) mostra a variação da massa fundida para as diversas condições e razão de compacticidade.

Nesta figura é possível notar que, a medida que aumenta-se o comprimento da aleta diminui o tempo de carga e descarga do sistema. Esta relação é um dos aspectos mais importantes no projeto de sistemas com geometria aletada pois, através dela, é possível um melhor dimensionamento do armazenador em função do tempo de resposta ótimo para o sistema. O comportamento da curva para $\tilde{h}_{al} = 1,0$, ou seja, para a aleta ocupando toda a dimensão da cavidade, observa-se um aumento na oscilação da solução. Este fato pode ser minimizado com uma diminuição no incremento de tempo, uma vez que os valores utilizados foram os mesmos para todos os problemas.

É necessário também ressaltar que o aumento nas dimensões da aleta implica na diminuição do volume de PCM, desde que o volume total seja mantido fixo. Embora na maior parte dos casos esta variação de massa seja desprezível, não se pode deixar de considerá-la em condições geométricas desfavoráveis, onde esta parcela seja significativa.

Também são mostrados na figura (6.14) a evolução para a posição média da fronteira

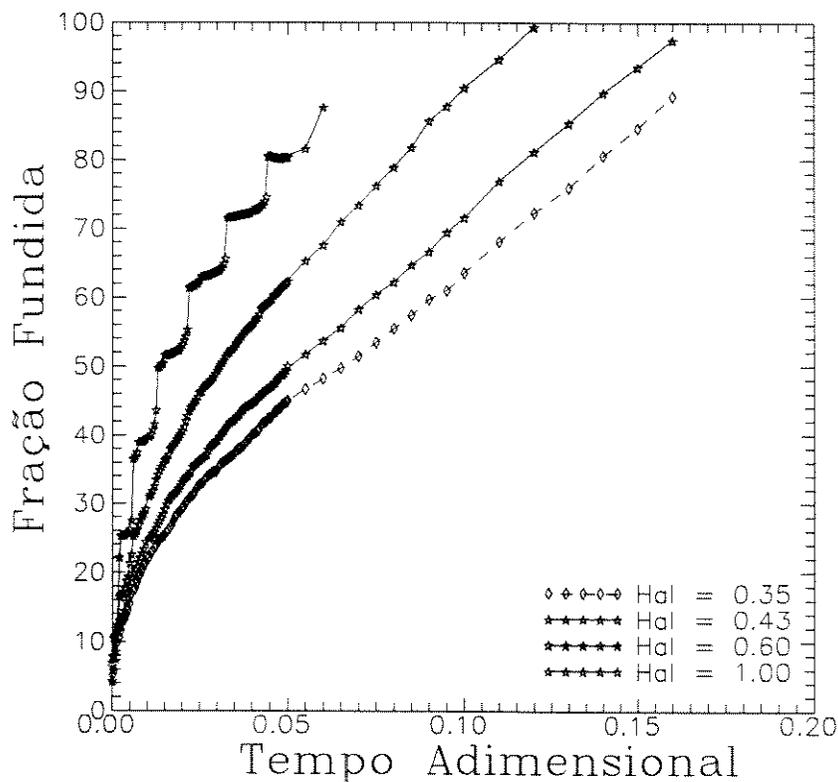


Figura 6.13: Massa fundida em função do tempo para diferentes valores de razão de compacticidade.

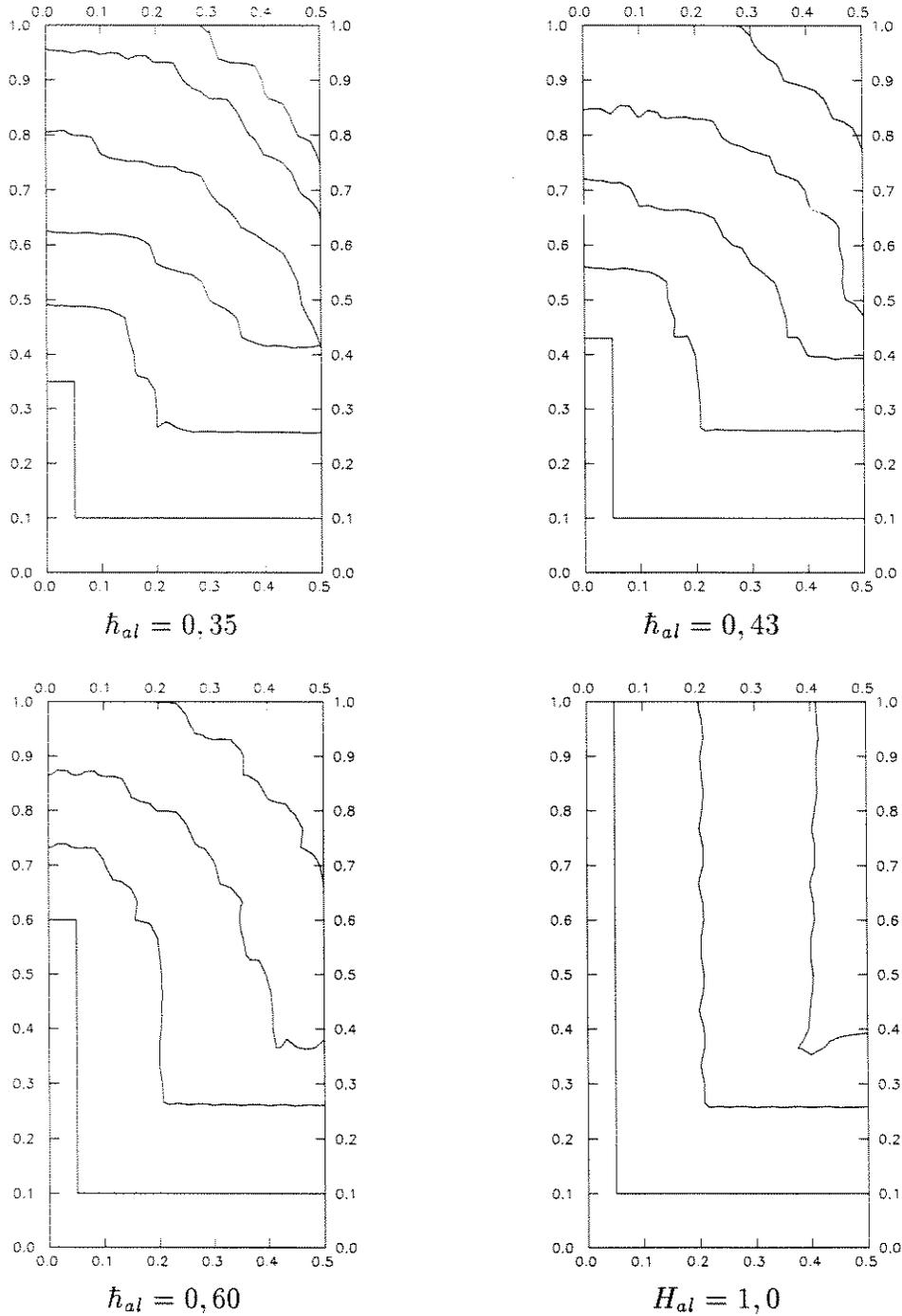


Figura 6.14: Comportamento da frente de fusão com a variação da razão de compactidade.

em determinados instantes de tempo. Fazendo-se isto é possível analisar a evolução da fronteira de fusão com o tempo e notar a diferença entre os perfis da frente de fusão quando ocorre um aumento nas dimensões da aleta, principalmente para o caso onde a aleta ocupa toda a altura considerada do problema.

A justificativa desta alteração dos perfis de fusão é a influência tanto do processo de condução como pelo processo de convecção. Desta forma a visualização do escoamento, mostrada na figura (6.15) para cada um dos casos, permite uma melhor análise do desenvolvimento dos perfis.

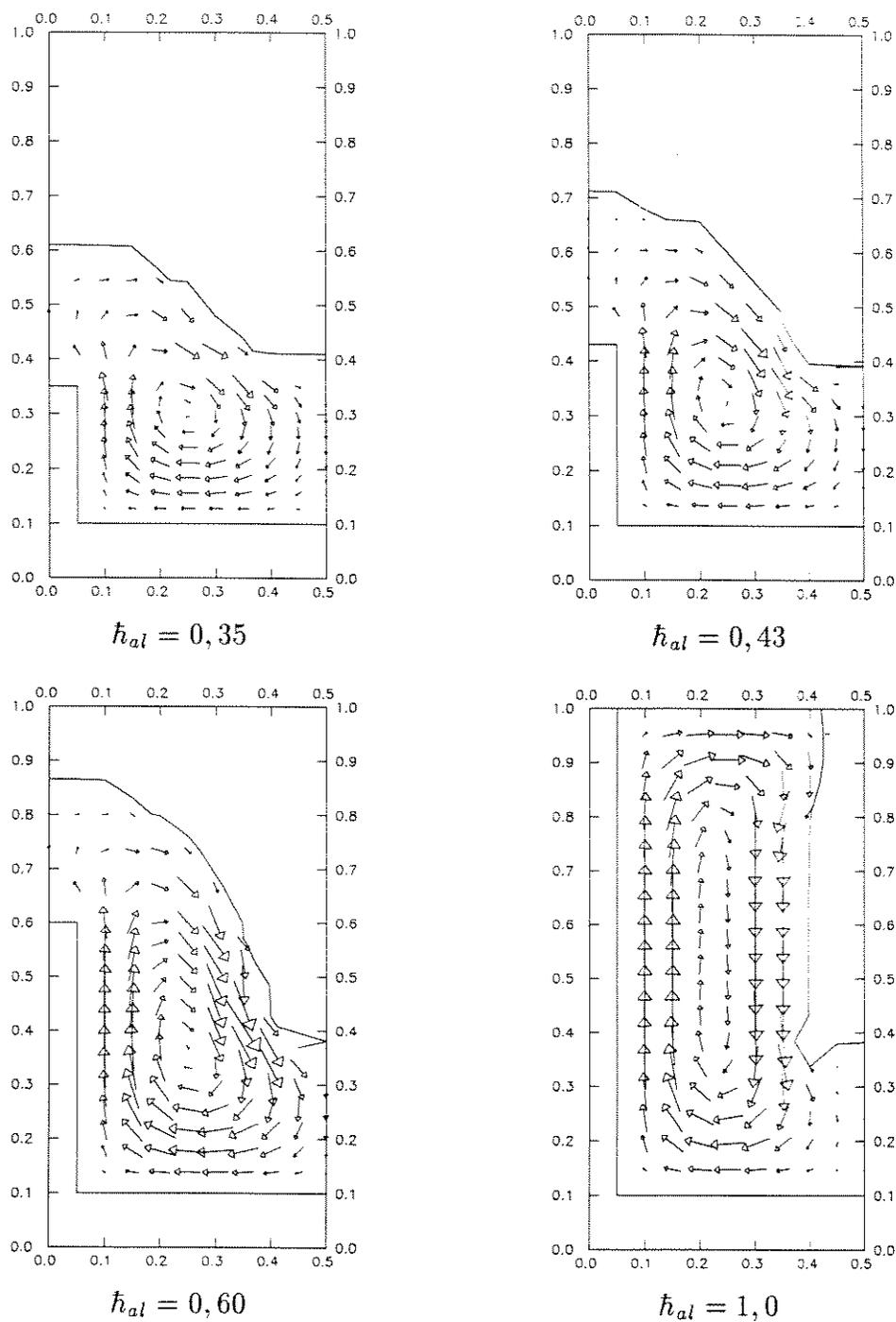


Figura 6.15: Comportamento do perfil de velocidades com a variação da razão de compacticidade para $\tau = 0,05$.

6.3 Comparação entre o processo de fusão e solidificação

É apresentado a seguir um caso onde é analisado um processo de solidificação. Para facilitar a comparação fez-se uma total inversão dos perfis de temperatura, o valor da temperatura na parede torna-se menor que a temperatura de fusão ($\theta = -1$), e a temperatura inicial do meio, por sua vez, é adotada superior à de mudança de fase ($\theta = 0,15$). As demais condições são admitidas idênticas às do problema padrão descrito anteriormente.

Assim é possível analisar, através da figura (6.16), o comportamento da massa fundida ou solidificada para os processos de fusão ou solidificação, respectivamente. Da análise física do problema percebe-se que o comportamento do transporte convectivo é completamente diferente. No caso da solidificação o fenômeno de convecção é predominante no início do processo, enquanto a fusão apresenta um comportamento totalmente oposto, ou seja, o processo convectivo dominante no final quando a quantidade de líquido é maior. Desta forma é possível justificar o comportamento diferenciado das curvas.

Neste caso, mais especificamente, existe uma concordância de curvas entre ambos

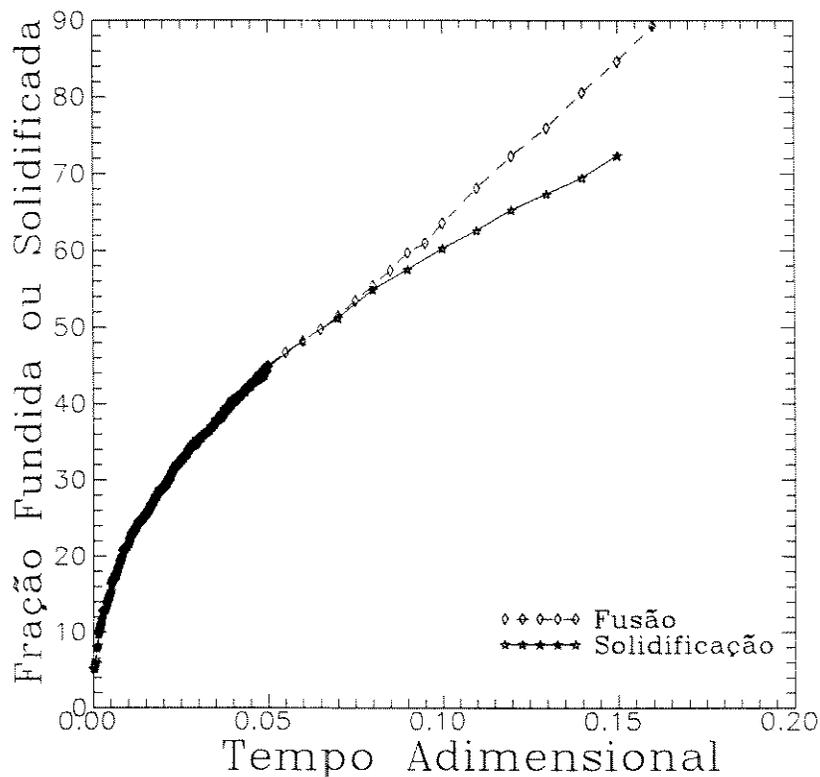


Figura 6.16: Massa que mudou de fase em função do tempo para os casos de fusão e solidificação.

no início do processo, indicando uma pequena influência do processo convectivo para a solidificação considerada. Isto ocorre pela diferença entre os patamares de temperatura considerados na fase líquida. Para a solidificação a diferença de temperatura adimensional entre o fluido mais quente e mais frio é da ordem de 0,15, enquanto para a fusão esta diferença é da ordem de 1.

No final do processo tem-se uma divergência entre as curvas, como pode ser observado na figura (6.16). Nota-se, claramente, uma evolução mais rápida da frente de fusão do que da de solidificação, fato que se deve à predominância do fenômeno convectivo no processo de transmissão de calor ocorrido no final da fusão.

Para permitir uma melhor visualização do fenômeno são mostrados na figura (6.17) a comparação entre os perfis da função corrente para a solidificação e fusão. Como discutido anteriormente, os fenômenos são dominantes em instantes diferentes e, para avaliá-los, os resultados devem ser apresentados da mesma forma.

Embora os efeitos possam ser vistos e analisados em ambos os casos, é importante ressaltar a grande diferença na intensidade da movimentação do fluido nos dois casos, enquanto para o caso da fusão $\psi_{\max} \approx 3,6$ no final do processo ($\tau = 0,15$), para o

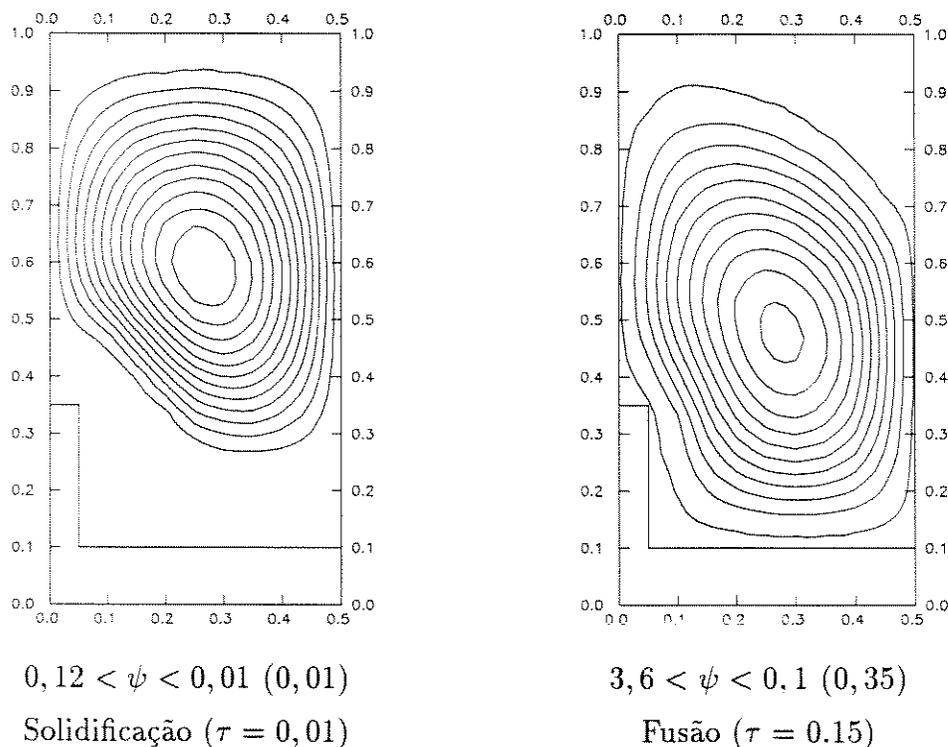


Figura 6.17: Comportamento da função corrente nos casos de fusão e solidificação em instantes que a convecção tem maior influência.

caso de solidificação este mesmo valor no início do processo ($\tau = 0,01$) está próximo de $\psi_{\max} \approx 0,12$. Este fato ajuda a comprovar a hipótese sobre a pequena influência do processo de convecção para as condições estabelecidas.

Para ilustrar o comportamento dos perfis de temperatura em cada um dos casos são mostrados gráficos para a temperatura no final de ambos os processos, figura (6.18). Nota-se, através destes gráficos, que no final do processo o gradiente térmico praticamente inexistente na fase líquida do PCM quando se estuda o caso de solidificação (nem sequer pode ser mostrado no gráfico) enquanto este mesmo valor está cada vez mais acentuado no caso da fusão. Da mesma forma, este comportamento aparentemente antagônico se repete para a fase sólida dos dois casos, embora esta situação seja de menor importância, pela inexistência da convecção.

6.4 Parâmetros adicionais para geometrias não aletadas

Até então, apresentou-se uma série de resultados para a geometria aletada originalmente proposta. A seguir são mostradas as soluções para cavidades simples com PCM,

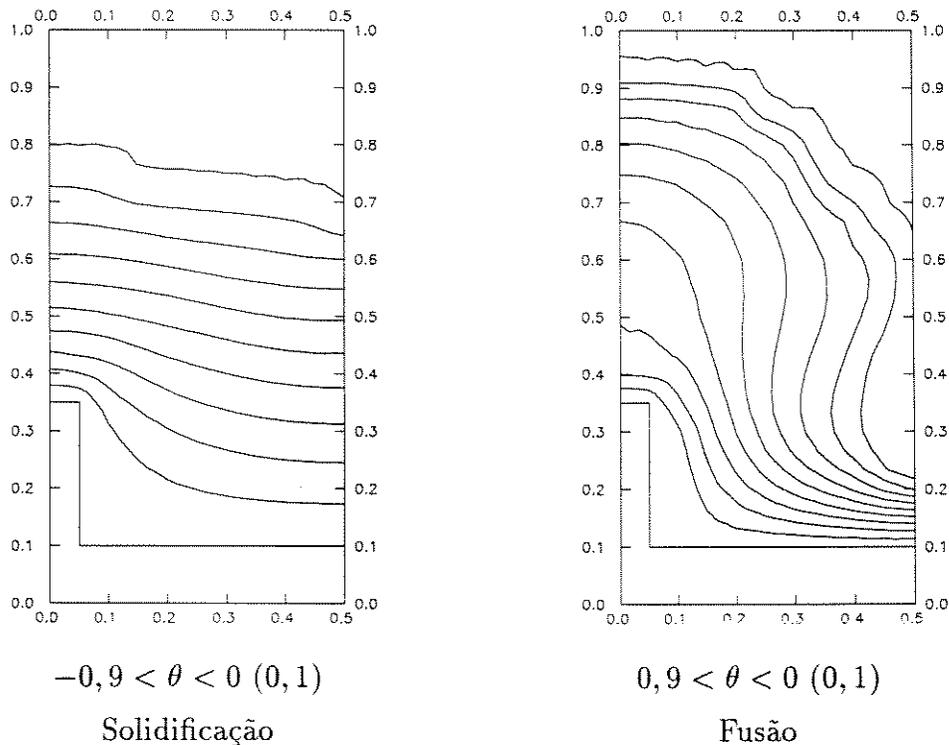


Figura 6.18: Comportamento dos perfis de temperatura para os casos de fusão e solidificação em $\tau = 0,15$.

que permitem avaliar como se comportam as variáveis de projeto nestas situações. São apresentados os resultados para condição de fluxo de calor determinado nas paredes lateral e inferior e, ainda, a solução para uma variação da relação geométrica da cavidade, no caso de temperatura de parede constante.

6.4.1 Fluxo de calor constante na parede

Para estudar este caso considerou-se uma cavidade de geometria quadrada, onde todas as superfícies estão isoladas, exceto uma. Esta superfície não isolada foi considerada em duas posições diferentes, sendo uma na superfície lateral esquerda e a outra na face inferior da cavidade. Exceto pela temperatura inicial adimensional, adotada como sendo de $-0,5$, os demais parâmetros foram considerados idênticos ao da solução padrão descrita no início deste capítulo.

Nesta situação foi realizada uma comparação entre a evolução tanto da massa fundida como da temperatura da superfície não adiabática. Os resultados obtidos em cada um dos casos estão mostrados nas figuras (6.19) e (6.20), respectivamente.

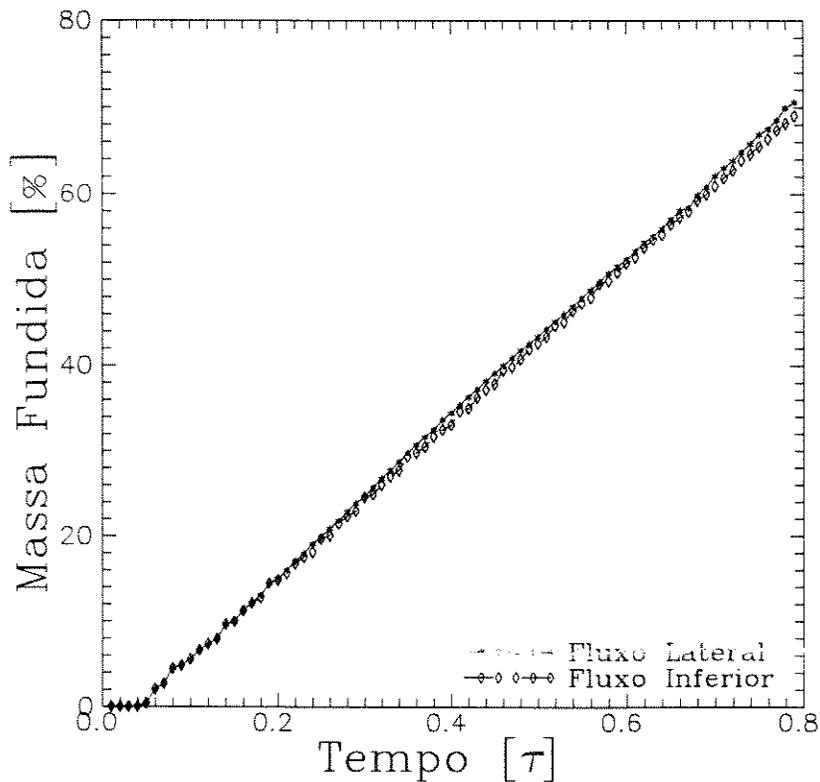


Figura 6.19: Gráfico comparativo da massa fundida em função do tempo para injeção de calor lateral e inferior.

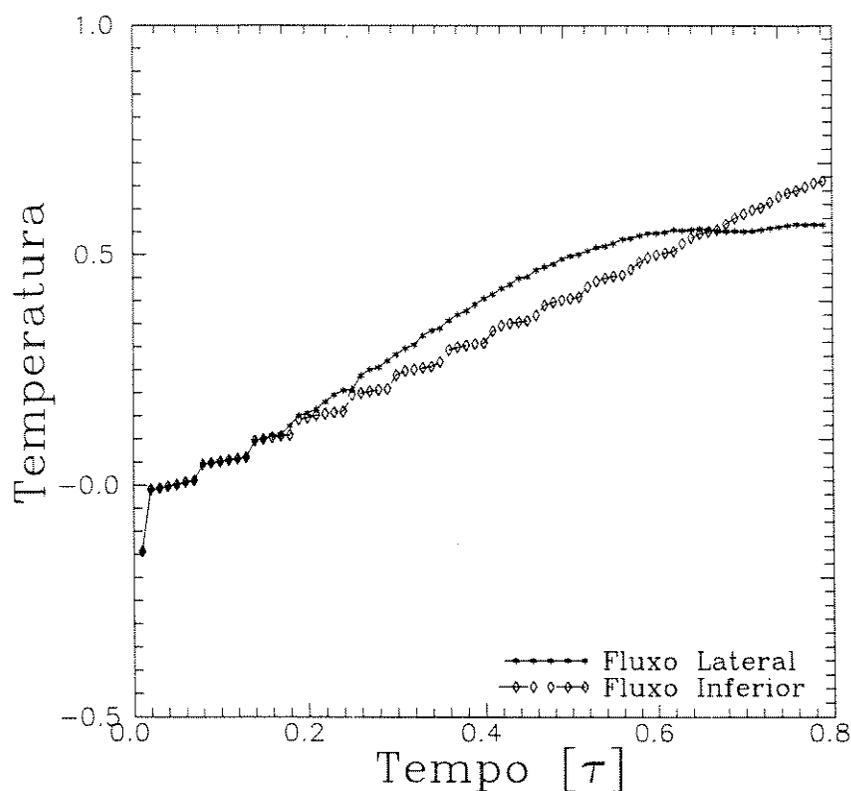


Figura 6.20: Gráfico comparativo da temperatura de parede em função do tempo para injeção de calor lateral e inferior na superfície não adiabática.

Numa breve análise da figura (6.19), observa-se um comportamento da massa fundida muito próximo nos dois casos. Isto já era esperado uma vez que o fluxo de calor total fornecido em ambos os casos é idêntico. Este parâmetro serve, inclusive, para uma verificação do comportamento da solução, pois a integral do fluxo de calor ao longo do tempo deve ser igual à variação total da entalpia no domínio. Nos cálculos deste tipo efetuados para ambos os casos foram obtidos desvios de 0,04%, no caso de fluxo de calor lateral, e de 4,13%, no caso do fluxo pela parede inferior.

A figura (6.20) mostra outro parâmetro importante em projetos deste tipo, a variação transiente da temperatura na superfície onde ocorre o fluxo de calor. Como, neste caso, o efeito convectivo faz com que haja uma distribuição de temperaturas de forma que os valores máximos ocorram próximos da face superior, a temperatura tomada para análise foi, no caso do fluxo de calor lateral, a de maior coordenada y . No caso do fluxo de calor pela face inferior o ponto tomado como crítico foi o ponto médio da face.

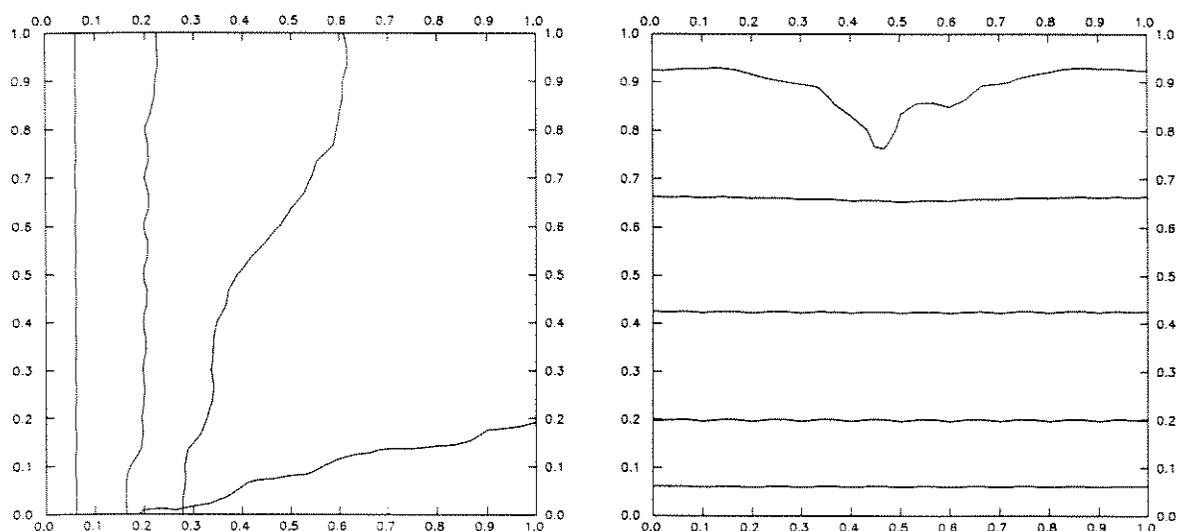
Este elemento é muito importante, já que este tipo de análise é normalmente utilizado na dissipação de calor de dispositivos eletrônicos, onde o objetivo principal é a determinação da temperatura máxima atingida. A análise das figuras permitem afirmar que,

inicialmente, o fluxo pela parede inferior tende a apresentar temperaturas mais baixas. No entanto, depois de decorrido um determinado tempo ocorre uma inversão desta tendência e a condição de fluxo de calor pela parede lateral torna-se a mais adequada pois apresenta menores valores para temperatura crítica. Segundo esta análise é, portanto, mais interessante utilizar o dispositivo de maneira que o calor seja dissipado lateralmente.

A figura (6.21) mostra a evolução do perfil da frente de fusão para os dois esquemas ao longo do tempo. Como dado complementar para análise são mostrados o campo de função corrente para dois intervalos de tempo diferentes tanto para o caso de fluxo de calor lateral, figura (6.22), como para o caso de fluxo de calor pela superfície inferior, figura (6.23).

Através destes resultados é possível perceber o quão maior é a influência do efeito convectivo para o caso do fluxo de calor lateral. Este fato pode ser percebido tanto pela alteração do perfil da frente de fusão como pela própria intensidade da função corrente.

A figura (6.23) mostra uma distorção inesperada do campo de velocidades. A quebra na simetria apresentada não têm sentido físico e deve ser interpretada simplesmente como um erro numérico. Este fato poderia ser evitado com a inclusão de uma condição de



$(\tau = 0, 1, 0, 25, 0, 5, 1, 0)$

Fluxo de calor pela lateral

$(\tau = 0, 1, 0, 25, 0, 5, 0, 75, 1, 0)$

Fluxo de calor pela face inferior

Figura 6.21: Evolução da frente de solidificação com a variação para as duas condições de fluxo de calor imposto.

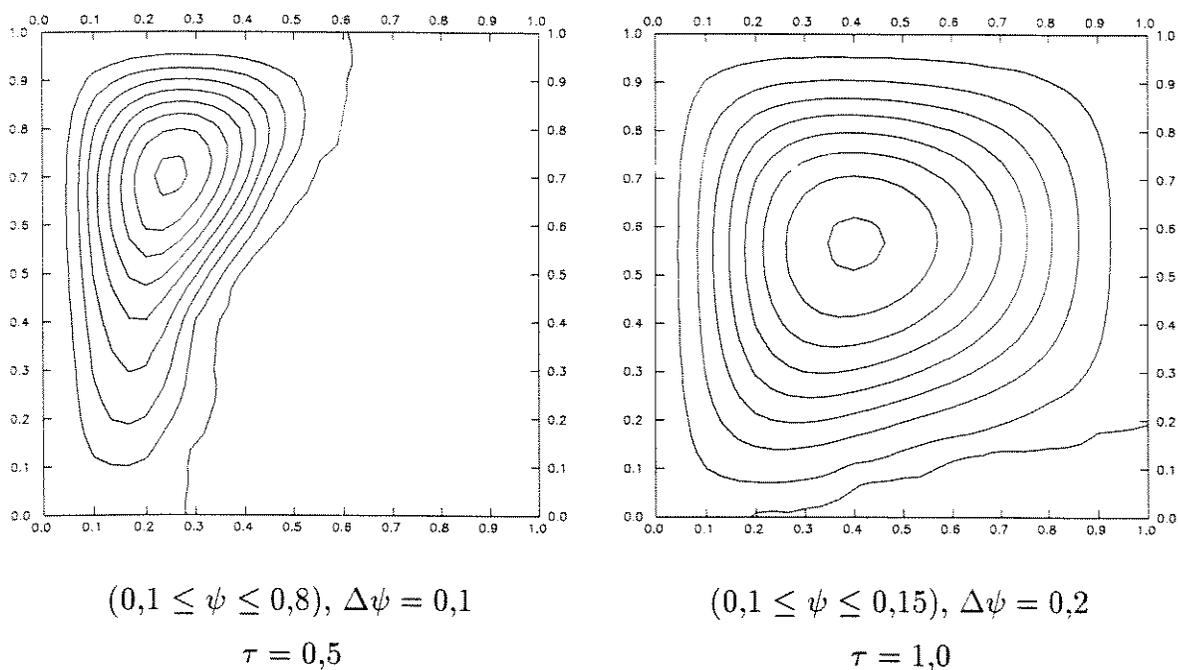


Figura 6.22: Evolução do perfil de velocidades para o caso de fluxo de calor lateral.

simetria na solução do problema. Isto só não foi feito neste trabalho porque o erro apresentado foi considerado tolerável (cerca de 5% no campo de entalpias).

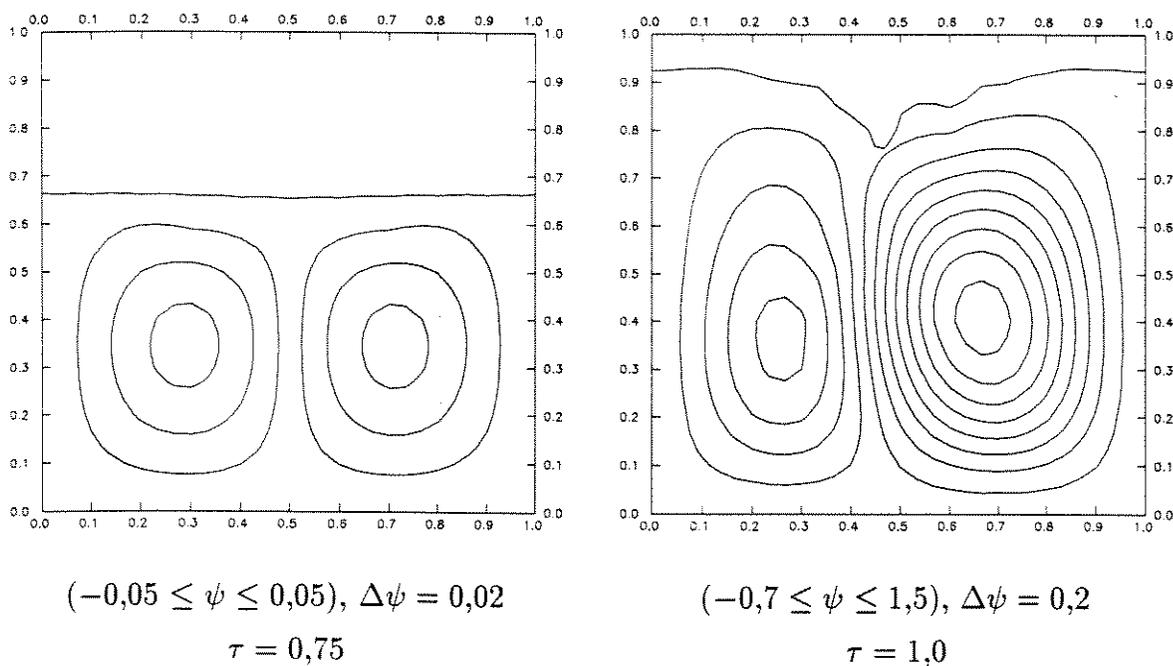


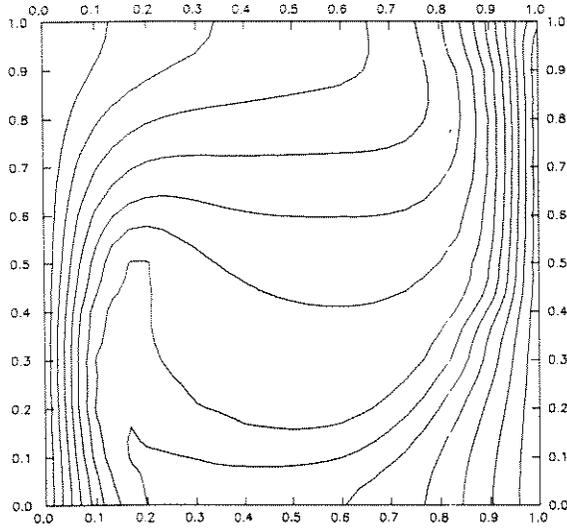
Figura 6.23: Evolução do perfil de velocidades para o caso de fluxo de calor pela face inferior.

6.4.2 Alteração da relação geométrica de uma cavidade com material de mudança de fase

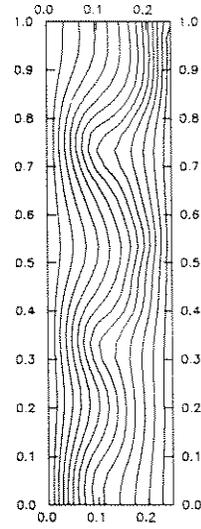
Nesta seção é analisada a influência da alteração do perfil de uma cavidade com material de mudança de fase sobre as suas condições de estabilização. Sob este aspecto foi adotado um problema similar ao proposto por USMANI *et al.* (1992), já detalhado anteriormente na seção (5.5), apenas utilizando-se as relações entre as propriedades do líquido e sólido adotadas na solução padrão deste capítulo, vide a tabela (6.1). Este problema foi então resolvido para as relações geométricas largura/altura da cavidade de 1, 0,5, 0,25 e 0,1.

Considerando as condições de equilíbrio para cada uma das condições geométricas foram feitos uma série de gráficos comparativos. A figura (6.24) mostra uma comparação para os valores dos campos de temperatura nas diversas situações. Através desta figura é possível notar uma acentuada tendência das isotermas se tornarem paralelas com a diminuição da relação largura/altura. Este resultado indica que esta diminuição faz com que o resultado tenda para uma solução do tipo puramente condutiva.

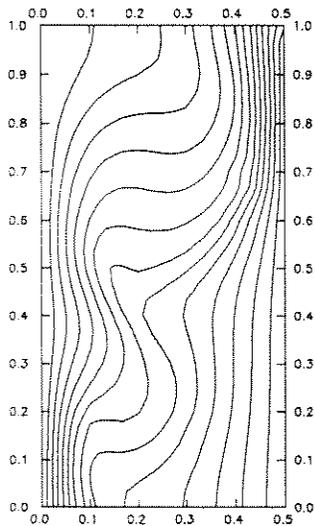
Esta consideração pode ser confirmada analisando-se o comportamento da função corrente nas diversas relações geométricas estudadas, como mostrado na figura (6.25). Estes gráficos, além de confirmar as expectativas de redução da intensidade do escoamento, através da diminuição dos valores absolutos da função corrente, dão uma idéia de como estas alterações ocorrem. Assim é possível notar que a diminuição na intensidade do escoamento se acentua para baixos valores da relação largura/altura. Outra fato que se apresenta é a formação de diversas recirculações de pequena intensidade quando a altura é muito maior que a largura. A partir destes resultados é possível afirmar que em cavidades com uma relação largura/altura menor que 0,25, modelos puramente condutivos tendem a fornecer bons resultados.



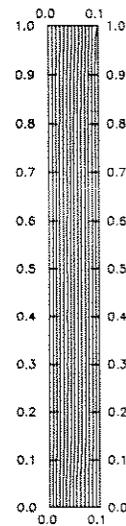
Largura/Altura = 1



Largura/Altura = 0,25

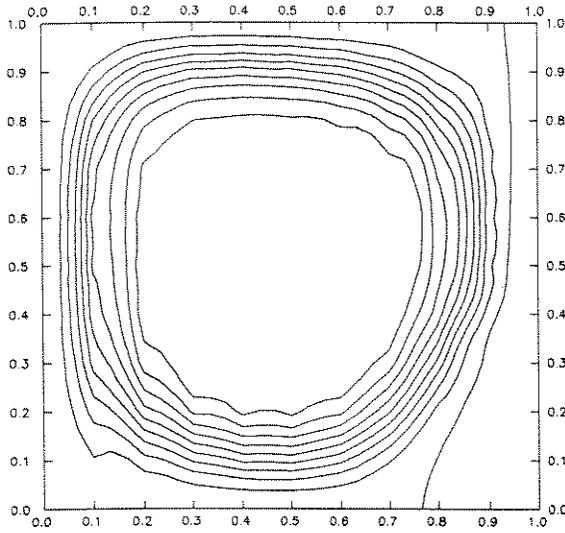


Largura/Altura = 0,5

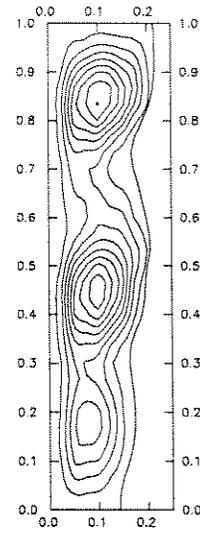


Largura/Altura = 0,1

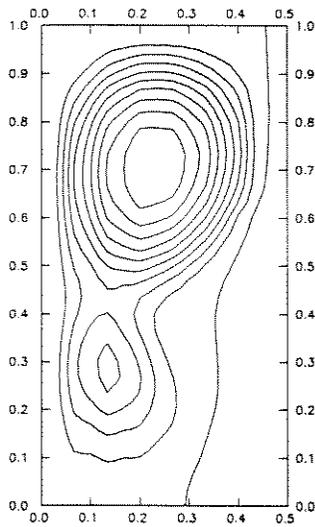
Figura 6.24: Influência da mudança da relação geométrica nas isotermas.



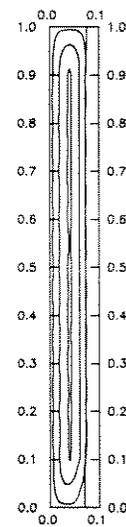
$(0,2 \leq \psi \leq 3,6), \Delta\psi = 0,4$
Largura/Altura = 1



$(0,1 \leq \psi \leq 1,5), \Delta\psi = 0,175$
Largura/Altura = 0,25



$(0,2 \leq \psi \leq 4,4), \Delta\psi = 0,4$
Largura/Altura = 0,5



$(0,01 \leq \psi \leq 0,12), \Delta\psi = 0,055$
Largura/Altura = 0,1

Figura 6.25: Influência da mudança da relação geométrica nas isocurvas de função corrente.

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões

Neste trabalho foi desenvolvida uma formulação aplicável a problemas de mudança de fase obtendo-se sucesso na solução de uma série de problemas. Além disto mostrou-se também, através das soluções apresentadas, o bom desempenho da técnica de elementos finitos e do método de malhas fixas.

Este trabalho se utiliza de uma das mais usuais formulações para o tratamento numérico dos processos que envolvem o fenômeno de mudança de fase, sendo que existem uma série de outros e, a cada instante, novas alternativas de formulação se apresentam. Dentre estas formulações merece destaque e também maiores estudos a técnica que se utiliza de acompanhamento de fronteira e elementos finitos deformáveis. Embora ainda existam algumas restrições quanto à geração de malha e problemas para o tratamento de materiais que possuem faixa de temperatura de mudança de fase, é uma técnica extremamente promissora devido, principalmente, à precisão na determinação da posição da fronteira de mudança de fase. Além disto não foi encontrado ainda nenhum trabalho que utilize tal técnica em problemas de mudança de fase com convecção.

A metodologia utilizada na solução do problema de convecção natural também produziu bons resultados. No entanto, existem ainda uma série de outras metodologias que também podem ser testadas, algumas utilizando-se de técnicas "upwind" ou difusividade artificial melhoram a precisão em escoamentos com Re ou Ra mais elevados. No que tange à técnica de solução há ainda a solução direta, que tende a se desenvolver com o aumento da capacidade de armazenamento e velocidade dos computadores.

Quanto à validação do modelo proposto pode-se afirmar que, além do seu intuito de

mostrar a eficiência da solução para cada uma das etapas do problema, mostrou-se também a grande flexibilidade da formulação, permitindo a sua adaptação a um grande número de novas situações e/ou geometrias. Além disto, o teste feito com as formulações de problemas de mudança de fase com malha fixa auxiliam na determinação do modelo a ser utilizado, de acordo com a situação. Como estes modelos são normalmente apresentados para problemas de mudança de fase puramente condutivos, o modelo adotado foi adaptado para incluir os efeitos convectivos com excelentes resultados. E finalmente, serviu também para mostrar que o modelo de variação da viscosidade com o campo de temperaturas não se adapta a contento na formulação adotada.

Uma validação experimental seria desejável neste caso, mas uma série de fatores devem ainda ser contornados. O principal deles seria a medição de velocidades e temperaturas sem sensores que prejudiquem o escoamento natural. Este fato só seria possível através de modernas (e caras) técnicas de medição que se utilizam de princípios laser ou magnéticos. Alguns trabalhos experimentais que consideram o movimento da fronteira de mudança de fase podem ser encontrados, mas este único dado tem eficiência muito discutível para validar as formulações que consideram os efeitos da convecção natural, principalmente em geometrias mais complexas.

Com tudo isto foram ainda avaliados diversos parâmetros de projeto na geometria proposta, sempre buscando fornecer os subsídios necessários para a determinação dos principais parâmetros de influência no projeto de sistemas com tal geometria. A série de resultados apresentados mostra isto, mas uma série de outros estudos ainda podem ser feitos analisando variações que não foram contempladas neste trabalho. Dentre estas cumpre destacar o estudo a ser feito quando o material de mudança de fase é a água pois, neste caso, o comportamento anômalo da densidade com a temperatura vai provocar grandes alterações dos perfis de velocidade e alterar, de forma significativa, a solução.

Além disto, como outra sugestão, pode-se tentar aplicar a mesma técnica de solução para o escoamento utilizada neste trabalho aliada às técnicas que acompanham o movimento da fronteira, descritas anteriormente. Novas técnicas de discretização no tempo também podem ser aplicadas para tentar otimizar a solução transiente, que se mostrou como um grande limitador na busca de soluções mais precisas. Enfim, este trabalho não tem a mínima pretensão de esgotar a discussão sobre os métodos numéricos aplicados a problemas de mudança de fase, ele apenas apresenta a sua contribuição para que um novo passo possa ser dado.

BIBLIOGRAFIA

- Albert, M. and O'Neil, K., "Moving Boundary-Moving Mesh Analysis of Phase Change Using Finite Elements with Transfinite Mappings", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol 23, 591-607, 1986.
- Alexiades, V. and Solomon, A., *Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes*, Hemisphere Pub., 323 pags., 1993.
- Baliga, B. and Patankar, S., "A New Finite Element Formulation for Convection-Diffusion Problems", *Numerical Heat Transfer*, vol 3, 393-409, 1980.
- Baliga, B. and Patankar, S., "A Control Volume Finite Element Method for Two Dimensional Fluid Flow and Heat Transfer", *Numerical Heat Transfer*, vol 6, 245-261, 1983.
- Bell, G., "On The Performance of The Enthalpy Method", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, vol 25, 587-589, 1982. (Short Comm.).
- Bonnerot, R. and Jamet, P., "Numerical Computation of the Free Boundary for the Two-Dimensional Stefan Problem by Space-time Finite Elements", *Journal of Computer Physics*, vol 25, 163-181, 1977.
- Brooks, A. and Hughes, T., "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations For Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations", *Comp. Meth. Applied Mechanical Eng.*, vol 32, 199-259, 1982.
- Celentano, D., Oñate, E., and Oller, S., "A Temperature Based Formulation For Finite Element Analysis of Generalized Phase-Change Problems", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol 37, 3441-3465, 1994.

- Comini, G. and Saro, O., "A Conservative Algorithm for Multidimensional Conduction Phase Change". *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol 30, 697-709, 1990.
- Comini, G., Del Giudice, S., Lewis, R., and Zienkiewicz, O., "Finite Element Solution of Non-Linear Heat Conduction Problems with Special Reference to Phase Change", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol 8, 611-624, 1974.
- Dalhuijsen, A. and Segal, A., "Comparison of Finite Element Techniques for Solidification Problems", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol 23, 1807-1829, 1986.
- Despotis, G. and Tsangaris, S., "Fractional Method for Solution of Incompressible Navier-Stokes Equations on Unstructured Triangular Meshes", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol 20, 1273-1288, 1995.
- Dhat, G. and Touzot, G., *The Finite Element Method Displayed*, John Wiley & Sons, 509 pags., 1984.
- Ettouney, H. and Brown, R., "Finite-Element Methods for Steady Solidification Problems", *Journal of Computer Physics*, vol 49, 118-150, 1983.
- Gadgil, A. and Gobin, D., "Analysis of Two Dimensional Melting in Rectangular Enclosures in Presence of Convection", *ASME Transactions*, vol 106, 20-26, 1984.
- Gong, Z.-X. and Mujumdar, A., "Enhancement of Energy Charge-Discharge Rates in Composite Slabs of Different Phase Change Materials", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, vol 39, 725-733, 1996.
- Gresho, P. and Chan, S. T., "On the Theory of Semi-Implicit Projection Methods for Viscous Incompressible Flow and its Implementation via Finite Element Method that also Introduces a nearly Consistent Mass Matrix", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol 11, 621-659, 1990.
- Gresho, P., "On the Theory of Semi-Implicit Projection Methods for Viscous Incompressible Flow and its Implementation via Finite Element Method that also Introduces a nearly Consistent Mass Matrix", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol 11, 587-620, 1990.

- Hansbo, P., "Aspects of Conservation in Finite Element Flow Computations", *Comp. Meth. Applied Mechanical Eng.*, vol 117, 423-437, 1994.
- Ho, C. and Chu, H., "Numerical Simulation of Heat Penetration through Vertical Rectangular Phase Change Material/Air Composite Cell", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, vol 39, 1785-1795, 1996.
- Ho, C. and Viskanta, R., "Heat Transfer During Melting From an Isothermal Vertical Wall", *ASME Transactions*, vol 106, 12-19, 1984.
- Hookey, N. and Baliga, B., "Evaluation and Enhancements of Some Control Volume Finite Element Methods: Part 2. Fluid Flow Problems", *Numerical Heat Transfer*, vol 14, 273-293, 1988.
- Hookey, N., Baliga, B., and Prakash, C., "Evaluation and Enhancements of Some Control Volume Finite Element Methods: Part I - Convection-Difusion Problems", *Numerical Heat Transfer*, vol 14, 255-272, 1988.
- Hsiao, J. and Chung, B., "An Efficient Algorithm for Finite Element Solution to Two Dimensional Heat Transfer with Melting and Freezing", *ASME Transactions*, vol 108, 462-464, 1986.
- Idelsohn, S. and Oñate, E., "Finite Volumes and Finite Elements: Two 'Good Friends'", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol 37, 3323-3341, 1994.
- Ismail, K., *Bancos de Gelo*, 377 pags., 1998.
- Kovacs, A. and Kawahara, M., "A Finite Element Scheme Based on the Velocity Correction Method for the Solution of the Time-Dependent Incompressible Navier Stokes Equations", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol 12, 403-423, 1991.
- Lacroix, M. and Voller, V., "Finite Difference Solutions of Solidification Phase Change Problems: Transformed versus Fixed Grids", *Numerical Heat Transfer*, vol 17, 25-41, 1990.
- LeDain-Muir, B. and Baliga, B., "Solution of Three Dimensional Convection-Diffusion Problem Using Tetrahedral Elements and Flow-Oriented Upwind Interpolation Functions", *Numerical Heat Transfer*, vol 9, 143-162, 1986.

- Lewis, R., Morgan, K., and Roberts, P., "Application of an Alternating-Direction Finite-Element Method for Heat Transfer Problems Involving a Change of Phase", *Numerical Heat Transfer*, vol 7, 471-482, 1984.
- Lynch, D. and O'Neil, K., "Continuously Deforming Finite Elements for the Solution of Parabolic Problems, With and Without Phase Change", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol 17, 81-96, 1981.
- Lynch, D., "Unified Approach to Simulation on Deforming Elements with Application to Phase Change Problems", *Journal of Computer Physics*, vol 47, 387-411, 1982.
- Marshall, R., Heinrich, J., and Zienkiewicz, O., "Natural Convection In a Square Enclosure by a Finite-Element, Penalty Function Method Using Primitive Fluid Variables", *Numerical Heat Transfer*, vol 1, 331-349, 1978.
- Masson, C., Saabas, H., and R., B., "Co-Located Equal Order Control-Volume Finite Element Method for Two-Dimensional Axisymmetric Incompressible Fluid Flow", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol 18, 1-26, 1994.
- McDaniel, D. and Zabaras, N., "A Least-Squares Front Tracking Finite Element Method Analysis of Phase Change with Natural Convection", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol 37, 2755-2777, 1994.
- McHugh, P. and Ramshaw, J., "Damped Artificial Compressibility Iteration Scheme for Implicit Calculations of Unsteady Incompressible Flow", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol 21, 141-153, 1995.
- Morgan, K., Lewis, R., and Zienkiewicz, O., "An Improved Algorithm for Heat Conduction Problems with Phase Change", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol 12, 1191-1195, 1978. (Short Comm.).
- Morgan, K., "A Numerical Analysis of Freezing and Melting with Convection", *Comp. Meth. Applied Mechanical Eng.*, vol 28, 275-284, 1981.
- Natarajan, R., "A Numerical Method for Incompressible Viscous Flow Simulation", *Journal of Computer Physics*, vol 100, 384-395, 1992.
- Oden, J., Wu, W., and Ainsworth, M., "An a Posteriori Error Estimate for Finite Element Approximations of the Navier-Stokes Equations", *Comp. Meth. Applied Mechanical Eng.*, vol 111, 185-202, 1994.

- Ouyang, T. and Tamma, K., "Finite Element Simulations Involving Simultaneous Multiple Interface Fronts in Phase Change Problems", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, vol 39, 1711-1718, 1996.
- Patankar, S., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Pub., 1980.
- Perić, M., Kessler, R., and Scheurer, "Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Co-Located Grid", *Computers & Fluids*, vol 16, 389-403, 1988.
- Pham, Q., "The Use of Lumped Capacitance in the Finite-Element Solution of Heat Conduction Problems with Phase Change", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, vol 29, 285-291, 1986.
- Prakash, C. and Patankar, S., "A Control Volume-Based Finite-Element Method for Solving the Navier Stokes Equations Using Equal-Order Velocity-Pressure Interpolation", *Numerical Heat Transfer*, vol 8, 259-280, 1985.
- Prakash, C., "An Improved Control Volume Finite-Element Method for Heat and Mass Transfer, and for Fluid Flow Using Equal-Order Velocity-Pressure Interpolation", *Numerical Heat Transfer*, vol 9, 253-276, 1986.
- Prakash, C., "Examination of the Upwind (Donnor-Cell) Formulation in Control Volume Finite-Element Methods for Fluid Flow and Heat Transfer", *Numerical Heat Transfer*, vol 11, 401-416, 1987.
- Rady, M. and Mohanty, K., "Natural Convection During Melting and Solidification of Pure Metals in a Cavity", *Numerical Heat Transfer*, vol 29, 49-63, 1996.
- Ramachandran, N., Gupta, J., and Jalunu, Y., "Thermal and Fluid Flow Effects during Solidification in a Rectangular Cavity", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, vol 25, 187-194, 1982.
- Ren, G. and Utnes, T., "A Finite Element Solution of the Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations Using a Modified Velocity Correction Method", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol 17, 349-364, 1993.
- Rice, J. and Schnipke, R., "A Monotone Streamline Upwind Finite Elements Method for Convection-Dominated Flows", *Comp. Meth. Applied Mechanical Eng.*, vol 48, 313-327, 1985.

- Rice, J. and Schnipke, R., "An Equal-Order Velocity Pressure Formulation that does not Exhibit Spurious Pressure Modes", *Comp. Meth. Applied Mechanical Eng.*, vol 58, 135-149, 1986.
- Rolph III, W. and Bathe, K., "An Efficient Algorithm for Analysis of Nonlinear Heat Transfer with Phase Change", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol 18, 119-134, 1982.
- Ruan, Y., Liu, J., and Richmond, O., "A Deforming Finite Element Method for Analysis of Alloy Solidification Problems", *Finite Elements in Analysis and Design*, vol 12, 49-63, 1993.
- Saabas, H. and Baliga, B., "Co-Located Equal Order Control-Volume Finite Element Method for Multidimensional Incompressible Flow - Part I: Formulation", *Numerical Heat Transfer*, vol 26, 381-407, 1994.
- Samarskii, A., Vabishchevich, P., Iliev, O., and Churbanov, A., "Numerical Simulation of Convection/Diffusion Phase Change Problems - A Review", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, vol 36, 4095-4106, 1993.
- Schneider, G. and Raw, M., "A Skewed Positive Influence Coefficient Upwinding Procedure for Control Volume Base Finite Element Convection Diffusion Computation", *Numerical Heat Transfer*, vol 9, 1-26, 1986.
- Schneider, G. and Raw, M., "Control-Volume Finite Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Colocated Variables-1. Computational Procedure", *Numerical Heat Transfer*, vol 11, 363-390, 1987a.
- Schneider, G. and Raw, M., "Control-Volume Finite Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Colocated Variables-2. Application and Validation", *Numerical Heat Transfer*, vol 11, 391-400, 1987b.
- Schneider, G., Raithby, G., and Yvanovich, M., "Finite-Element Solution Procedures for Solving The Incompressible, Navier-Stokes Equations Using Equal Order Interpolation", *Numerical Heat Transfer*, vol 1, 433-451, 1978.
- Smith, R. and Hutton, A., "The Numerical Treatment of Advection: A Performance Comparison of Current Methods", *Numerical Heat Transfer*, vol 5, 439-461, 1982.

- Sparrow, E., Patankar, S., and Ramadhiany, S., "Analysis of Melting in Presence of Natural Convection in the Melt Region", *ASME Transactions*, vol 99, 520-526, 1977.
- Swaminathan, C. and Voller, V., "Streamline Upwind Scheme for Control Volume Finite Elements, Part I. Formulations", *Numerical Heat Transfer*, vol 22, 95-107, 1992a.
- Swaminathan, C. and Voller, V., "Streamline Upwind Scheme for Control Volume Finite Elements, Part II. Implementations and Comparison with SUPG Finite Element Scheme", *Numerical Heat Transfer*, vol 22, 107-124, 1992b.
- Usmani, A., Lewis, R., and Seetharamu, K., "Finite Element Modelling of Natural Convection Controlled Change of Phase", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol 14, 1019-1036, 1992.
- Vahl Davis, G. and Jones, I., "Natural Convection in a Square Cavity: A Comparison Exercise", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol 3, 227-248, 1983.
- Vahl Davis, G., "Natural Convection of Air in a Square Cavity: a Bench Mark Numerical Solution", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol 3, 249-264, 1983.
- Voller, V., Cross, M., and Markatos, N., "An Enthalpy Method for Convection/Diffusion Phase Change", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol 24, 271-284, 1987.
- Voller, V., Brent, A., and Prakash, C., "The Modelling of Heat, Mass and Solute Transportation in Solidifications Systems", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, vol 32, 1719-1731, 1989.
- Westerberg, K., Wiklof, C., and Finlayson, B., "Time Dependent Finite Element Models of Phase Change with Moving Heat Sources", *Numerical Heat Transfer*, vol 25, 119-143, 1994.
- Yoo, J. and Rubinsky, B., "Numerical Computation Using a Finite Elements For the Moving Interface in Heat Transfer Problems with Phase Transformation", *Numerical Heat Transfer*, vol 6, 209-222, 1983.
- Yoo, J. and Rubinsky, B., "A Finite Element Method For the Study of the Solidification Processes in the Presence of Natural Convection", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol 23, 1785-1805, 1986.

Zabaras, N. and Ruan, Y., "A Deforming Finite Element Method Analysis of Inverse Stefan Problems", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol 28, 295-313, 1989.

Apêndice A

Aspectos da solução numérica

Muito embora diversos aspectos sobre a metodologia de solução do problema constem do texto, nem todos os detalhes estão presentes. Com o objetivo de complementar estas informações constam deste apêndice algumas características importantes sobre critérios de convergência adotados e sobre os valores de incremento de tempo utilizados. A tabela (A.1) apresenta estes valores para os diversos problemas resolvidos que envolvem mudança de fase e convecção. Os problemas com uma formulação puramente condutiva não constam da tabela (A.1) pois os seus valores de referência são encontrados no próprio corpo do texto.

É importante ressaltar ainda que, de acordo com o tipo de implementação utilizada, os valores limites aqui apresentados podem variar. Os dados tabelados fornecem, na realidade, apenas um parâmetro de referência para início dos trabalhos e servem para facilitar a repetibilidade dos resultados aqui obtidos.

Para a compreensão da tabela e, conseqüentemente, do que representa cada um dos valores relacionados é necessário o conhecimento da simbologia utilizada:

- Tol. _{θ} : tolerância de variação do campo de temperaturas,
- nitmax _{θ} : número máximo de iterações no campo de temperaturas,
- Tol. _{uv} : tolerância de variação do campo de velocidades,
- nitmax _{uv} : número máximo de iterações no campo de velocidades,
- dt _{t} : incremento de tempo para a solução do campo de temperaturas e
- dt _{u} : incremento de tempo para a solução do campo de velocidades.

Tabela A.1: Parâmetros utilizados para a obtenção da solução numérica.

Capítulo 5						
Problema	Tol. $_{\theta}$	nitmax $_{\theta}$	Tol. $_{uv}$	nitmax $_{uv}$	dt t	dt τ
Cavidade Quadrada	—	—	10%	10	100	1×10^{-5}
Simetria em Cavidade	—	—	10%	10	100	1×10^{-5}
Mudança de Fase em Cavidade	0.5%	10	1%	10	5×10^{-5} a 10^{-3}	$\frac{dtt}{nitmax_{uv}}$
Capítulo 6						
Problema	Tol. $_{\theta}$	nitmax $_{\theta}$	Tol. $_{uv}$	nitmax $_{uv}$	dt t	dt τ
Tempo de Solução com aleta						
Situação (a) e (b)	0.5%	10	1%	20	10^{-7} a 10^{-6}	dt t
Solução (c)	0.5%	10	1%	20	10^{-7} a 10^{-5}	dt t
Malha						
11, 17 e 21 pontos	0.5%	10	1%	20	10^{-7} a 10^{-6}	dt t
25 pontos	0.5%	10	1%	20	5×10^{-6} a 10^{-5}	dt t
Diferentes valores de θ_0	0.5%	10	1%	20	10^{-7} a 10^{-5}	dt t
Diferente valor de Ste	0.5%	10	1%	20	10^{-7} a 10^{-6}	dt t
Ra acima de 10^4	0.5%	10	1%	20	10^{-7} a 10^{-6}	dt t
Dif. parâmetros geométricos	0.5%	10	1%	20	10^{-7} a 10^{-5}	dt t
Solidificação	0.5%	10	1%	20	10^{-7}	dt t
<i>Geometrias não aletadas</i>						
Fluxo de calor constante	0.5%	10	1%	$\frac{dtt}{dt\tau}$	10^{-4} a 10^{-3}	10^{-7}
Dif. geometria de cavidades	0.5%	10	1%	$\frac{dtt}{dt\tau}$	5×10^{-5} a 10^{-4}	10^{-7}