

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Estimador de Erro para a Formulação p
do Método dos Elementos Finitos
Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura**

Autor: **Horacio Valadares Duarte**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

13/2003

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

**Estimador de Erro para a Formulação p
do Método dos Elementos Finitos
Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura**

Autor: **Horacio Valadares Duarte**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2003

S.P. - Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

**Estimador de Erro para a Formulação p
do Método dos Elementos Finitos
Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura**

Autor: Horacio Valadares Duarte

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Paulo Sollero
FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Eduardo Bauzer Medeiros
DEMEC/UFMG

Prof. Dr. Lineu José Pedroso
FT/DEC/UNB

Campinas, 7 de Fevereiro de 2003.

Dedicatória

Dedico este trabalho a Andréa e Marina.

*A verdade emana mais rapidamente do erro
que da confusão*

F. Bacon

O erro reenvia dialeticamente à verdade

Abraham Moles

Agradecimentos

Gostaria de agradecer às pessoas e instituições que colaboraram para a conclusão deste trabalho:

- Ao meu orientador, Professor Renato Pavanello, pelo apoio, pelas discussões, pelas sugestões e pela paciência durante esta longa jornada em que trabalhamos juntos.
- À minha família pela paciência e compreensão pelas longas ausências.
- Aos professores da Faculdade de Engenharia Mecânica que colaboraram dando sugestões durante a realização deste trabalho. Pelo companheirismo e pela participação especial que tiveram neste período agradeço ao professor Iguti e à professora Silvia.
- Aos colegas que trabalharam comigo, aos que participaram apoiando de alguma forma, por tudo isto ou apenas pela convivência e amizade.
- Ao Sergio, Allan, Juan, Daniel e ao Ivan.
- Aos colegas de departamento da UFMG que, de forma solidária, assumiram meus encargos tornando possível meu afastamento.
- Ao Departamento de Mecânica Computacional pela infra-estrutura fornecida durante a realização deste trabalho.
- À CAPES por intermédio do programa PICD da UFMG pelo apoio financeiro.

Resumo

Duarte, Horacio V., *Estimador de Erro para a Formulação p do Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura*. Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003, 153 p. Tese (Doutorado).

Neste trabalho efetua-se uma revisão das funções hierárquicas de alta ordem e das diferentes formulações para o problema fluido-estrutura usadas com a técnica dos elementos finitos. Desenvolve-se um estimador de erro a partir do método proposto por Friberg para problemas de autovalor-autovetor, empregando funções de forma hierárquicas. A simetrização do problema fluido-estrutura acoplado foi feita usando-se a variável Potencial de Velocidades para o fluido e deslocamento para o meio sólido. Mostra-se que o estimador desenvolvido para formulação em Potencial de Velocidades é aplicável à formulação em pressão ou não simétrica. Através de exemplos simples, todavia representativos, são mostradas as potencialidades do estimador e de sua aplicação em uma versão p-adaptativa do método dos elementos finitos.

Alguns parâmetros de implementação numérica como, grau de distorção, e comprimento característico dos elementos da malha, tiveram sua influência analisada sobre a confiabilidade dos resultados e sobre a eficiência e desempenho do estimador. Características do problema fluido-estrutura bem como das funções hierárquicas empregadas também foram avaliadas a partir do resultados obtidos.

Palavras chaves: Método dos elementos de finitos, Interação fluido-estrutura, Funções hierárquicas, Estimadores de erro, Problemas de autovalores.

Abstract

Duarte, Horacio V. *Error estimator in hierarquical finite element method applied to fluid-structure problems*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003, 153 p. Tese (Doutorado).

This work presents a review on the hierarchical shape functions and linear dynamic fluid-structure interaction formulations applied to the finite element method. An error estimator in the hierarquical finite element formulation is obtained using the symmetry of velocity potential approach for the fluid and displacement field approach for the solid medium. This error estimator is based on Friberg's formulation. This p-version error indicator developed from symmetrical velocity potencial is demonstrated to be applicable to unsymmetrical pressure formulation.

Moreover, numerical results also show the influence of element parameters such as distortions and element characteristic dimension, on error the estimator efficiency and reliability. The fluid-structure characteristics and the employed hierarquical functions behavior are discussed from the numerical results.

Key words:

Finite element method, Fluid-structure Interation, Eigenvalues problems, Error estimator, p-version of Finite element method.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Formulações do Problema Acoplado para Acústica Interna	2
1.2	Estimadores de Erro para Problemas de Acústica Interna	5
1.3	Escopo e Comentários sobre a Implementação Computacional	8
1.4	Objetivos e Contribuições do Trabalho	10
2	Elementos Estruturais Unidimensionais na Formulação Hierárquica	12
2.1	Formulação de Elementos de Barra	12
2.1.1	Requisitos das Funções de Forma para Barras	13
2.1.2	Matriz de Rigidez	16
2.1.3	Matriz de Massa	20
2.2	Formulação de Elementos de Viga	22
2.2.1	Requisitos das Funções de Forma para Vigas	22
2.2.2	Funções de Forma Físicas Definidas pelos Polinômios de Hermite	23
2.2.3	Funções de Forma Internas Definidas a Partir de Legendre	25
2.2.4	Matriz de Rigidez	26
2.2.5	Matriz de Massa	29
3	Formulação de Elementos Finitos para o Problema da Acústica	31
3.1	Acústica Linear Plana	31
3.2	Condições de Contorno para o Problema Acústico Bidimensional	33

3.3	Aproximação do Problema Acústico Bidimensional pelo Método dos Elementos Finitos	35
3.4	Funções de Forma	37
3.4.1	Funções de Forma para Elementos Triangulares	40
4	Formulações do Problema Fluido-Estrutura Empregando a Técnica dos Elementos Finitos	49
4.1	Formulações em Deslocamento para o Problema Fluido-Estrutura	50
4.2	Formulação em Pressão do Problema Acoplado Fluido-Estrutura	58
4.3	Formulação do Problema Acoplado em Potencial de Velocidades	65
5	Estimador de Erro para Problemas de Vibrações Livres	68
5.1	Implementação do Estimador de Erro	70
5.1.1	Estimador de Erro de Friberg	71
5.2	Estimador de Friberg Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura na formulação em Potencial de Velocidades	76
5.2.1	Estimador de Erro para Elemento Estrutural	78
5.2.2	Estimador de Erro para Elemento Fluido	80
5.3	Estimador de Erro de Friberg Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura em formulação de Pressão ou Não Simétrica	83
5.4	Algoritmo do Processo p -Adaptativo	84
6	Resultados Numéricos e Validação	87
6.1	Resultados Obtidos para Elementos de Barra em tração e compressão	87
6.2	Resultados Obtidos para Elementos de Viga em flexão	91
6.3	Resultados Obtidos para Elementos Fluidos em Cavidade Acústica Fechada	96
6.3.1	Resultados do Problema Acústico Interno para Malhas com Diferentes Graus de Distorção.	102
6.4	Resultados Obtidos para o Problema Fluido-Estrutura Acoplado	111

7	Conclusões e Sugestões para Continuidade do Trabalho	129
7.1	Sugestões para Continuidade do Trabalho	131
A	Propriedades dos Polinômios de Legendre	142
B	Propriedades dos Polinômios de Hermite	144
C	Integração da Matriz Volumétrica e de Compressibilidade	145
C.1	Integração da Matriz Volumétrica H_f	145
C.2	Integração da Matriz de Compressibilidade E_f	148
D	Eliminação do Termo de Velocidade das Matrizes Simétricas	149
E	Normas	152

Lista de Figuras

6.1	CONVERGÊNCIA DO 5 ^o MODO DO PROBLEMA DE VIBRAÇÕES LIVRES PARA BARRA.	90
6.2	CONVERGÊNCIA DAS FREQUÊNCIAS PARA OS 6 PRIMEIROS MODOS DA VIGA. PROCESSO p -ADAPTATIVO.	93
6.3	ERROS PARA OS MODOS 1 A 4 PARA A VIGA. PROCESSO p -ADAPTATIVO.	94
6.4	ERROS DOS MODOS 5 E 6 DA VIGA. PROCESSO p -ADAPTATIVO.	94
6.5	MODOS DA VIGA AO FINAL DO PROCESSO p -ADAPTATIVO.	95
6.6	MALHA $F110$	96
6.7	MALHA $F104d$	97
6.8	MALHA $F105d$	98
6.9	FREQUÊNCIAS, PROCESSO ITERATIVO PARA MALHA $F110$	99
6.10	ERROS PROCESSO ITERATIVO MALHA $F110$	100
6.11	FREQUÊNCIAS MODOS 2, 7 E 14 MALHA $F110$	101
6.12	FREQUÊNCIAS MODOS 2, 7 E 14 MALHA $F104d$	102
6.13	FREQUÊNCIAS MODOS 2, 7 E 14 MALHA $F105d$	103
6.14	ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM FUNÇÃO DA ORDEM DO SISTEMA. MALHA $F110$. MODOS 2, 7, 14.	104
6.15	ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM FUNÇÃO DA ORDEM DO SISTEMA. MALHA $F104d$. MODOS 2, 7, 14.	105
6.16	ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM FUNÇÃO DA ORDEM DO SISTEMA. MALHA $F105d$. MODOS 2, 7, 14.	106
6.17	ERROS ITERAÇÃO 4 MALHA $F105d$	107
6.18	MODOS 2, 7 E 14 MALHA $F110$	109

6.19	MODOS 2, 7 E 14 MALHA <i>F105d</i>	110
6.20	CONFIGURAÇÃO DO PROBLEMA FLUIDO-ESTRUTURA.	111
6.21	MALHA <i>F108</i> EMPREGADA NA DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO ANALISADO.	112
6.22	MALHA <i>F272</i> EMPREGADA NA DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO ANALISADO.	113
6.23	MALHA <i>F261</i> EMPREGADA NA DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO ANALISADO.	113
6.24	EVOLUÇÃO DAS FREQUÊNCIAS MALHA <i>F108</i> , 4 PRIMEIRAS ITERAÇÕES. FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA.	115
6.25	EVOLUÇÃO DOS ERROS DAS FREQUÊNCIAS CALCULADAS PARA MALHA <i>F108</i> , 4 PRIMEIRAS ITERAÇÕES. FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA.	116
6.26	ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM FUNÇÃO DA ORDEM DO SISTEMA PARA OS MODOS 3 E 5 MALHA <i>F108</i>	117
6.27	ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM FUNÇÃO DA ORDEM DO SISTEMA PARA OS MODOS 8 E 15 MALHA <i>F108</i>	117
6.28	EVOLUÇÃO DAS FREQUÊNCIAS MALHA <i>F272</i> , 4 PRIMEIRAS ITERAÇÕES. FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA.	118
6.29	EVOLUÇÃO DOS ERROS DAS FREQUÊNCIAS CALCULADAS PARA MALHA <i>F272</i> , 4 PRIMEIRAS ITERAÇÕES. FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA.	119
6.30	ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM FUNÇÃO DA ORDEM DO SISTEMA PARA OS MODOS 3 E 5 MALHA <i>F272</i>	120
6.31	ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM FUNÇÃO DA ORDEM DO SISTEMA PARA O OITAVO MODO MALHA <i>F272</i>	121
6.32	EVOLUÇÃO DOS ERROS DAS FREQUÊNCIAS CALCULADAS PARA MALHA <i>F261</i> , 4 PRIMEIRAS ITERAÇÕES. FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA.	122
6.33	MODOS DOMÍNIO FLUIDO E ESTRUTURAL. MALHA <i>F272</i> , FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA. MODOS 2 E 3.	124
6.34	MODOS DOMÍNIO FLUIDO E ESTRUTURAL. MALHA <i>F272</i> , FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA. MODOS 4 E 5.	125
6.35	MODOS DOMÍNIO FLUIDO E ESTRUTURAL. MALHA <i>F272</i> , FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA. MODOS 6 E 7.	126

6.36 MODOS DOMÍNIO FLUIDO E ESTRUTURAL. MALHA *F272*, FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA. MODOS 8 E 9. 127

6.37 MODOS DOMÍNIO FLUIDO E ESTRUTURAL. MALHA *F108*, FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA. MODOS 8 E 15. 128

Lista de Tabelas

3.1	BASES POLINOMIAIS EM COORDENADAS TRIANGULARES	43
3.2	FUNÇÕES DE FORMA EM COORDENADAS TRIANGULARES PROPOSTAS POR PEANO	45
6.1	FREQUÊNCIAS NATURAIS DA BARRA USANDO 5 ELEMENTOS NÃO UNIFORMES. FREQUÊNCIAS EM <i>rad/s</i>	88
6.2	FREQUÊNCIAS NATURAIS DA BARRA EM PROCESSO <i>p</i> -ADAPTATIVO USANDO 5 ELEMENTOS NÃO UNIFORMES. FREQUÊNCIAS EM <i>rad/s</i>	88
6.3	FREQUÊNCIAS NATURAIS DA VIGA USANDO 3 ELEMENTOS NÃO UNIFORMES. FREQUÊNCIAS EM HERTZ.	91
6.4	FREQUÊNCIAS NATURAIS DA VIGA EM PROCESSO <i>p</i> -ADAPTATIVO USANDO 3 ELEMENTOS NÃO UNIFORMES. FREQUÊNCIAS EM HERTZ.	92
6.5	CARACTERÍSTICAS DAS MALHAS PROBLEMA ACÚSTICO INTERNO	98
6.6	CARACTERÍSTICAS DAS MALHAS DO PROBLEMA FLUIDO-ESTRUTURA. . .	112

Lista de Símbolos

A área da seção transversal.

A área do elemento triangular.

A_1, A_2, A_3 áreas formadas por ponto interno com os lados do triângulo.

A_i área do i -ésimo elemento triangular.

C^0 continuidade do valor da função entre elementos.

C^1 continuidade do valor da derivada da função entre elementos.

D_e^f matriz de amortecimento para o fluido.

E a matriz de elasticidade do material.

E módulo de elasticidade do material.

E_f matriz de compressibilidade.

F^e força de corpo.

F_Γ^e força aplicada a fronteira do sistema.

F_Γ^f força aplicada a fronteira do domínio fluido.

F_Ω^f força de corpo atuando no domínio fluido.

H^n espaço de Hilbert.

H_f matriz volumétrica.

H_i polinômios de Hermite de ordem i .

I momento de inércia.

J matriz de transformação inversa.

K_e matriz de rigidez.

K_e^f matriz de rigidez para fluido formulação em deslocamentos.

L comprimento ao longo da aresta de contato.

L comprimento do elemento linear.

L matriz de acoplamento.

L_1, L_2, L_3 coordenadas de área ou triangulares.

L_T comprimento total.

M_e matriz de massa.

M_e^f matriz de massa para fluido formulação em deslocamentos.

N_i funções de forma ou de interpolação.

$N_i^{\Gamma e}$ função de forma da estrutura no contorno em contato com o fluido.

$N_i^{\Gamma f}$ função de forma de fluido no contorno em contato com a estrutura.

P campo de pressão.

P pressão instantânea.

P_0 pressão não perturbada.

P_i valor nodal da pressão instantânea.

$P_i(\xi)$ polinômios de Legendre de ordem i .

R constante do gás.

V_n componente da velocidade normal a superfície.

V_x, V_y, V_z componentes da velocidade em coordenadas cartesianas.

Γ fronteira do domínio de integração.

Γ_∞ fronteira onde aplica-se a condição de domínio infinito.

Λ quantidade de movimento devido à vorticidade.

Ω domínio de integração.

Ψ função potencial de velocidades.

Ψ matriz de autovetores.

α fator de penalidades.

α_i coeficiente de distorção do i -ésimo elemento triangular.

α_{med} coeficiente de distorção médio da malha.

\bar{L} comprimento do elemento linear.

$$\dot{\theta} = -\rho_0 \dot{\Psi}.$$

ϵ vetor de deformações.

$\eta_{i,j}$ erro estimado do i -ésimo autovalor associado ao j -ésimo elemento.

$\eta_{i,j}^e$ estimador de erro para elementos estruturais no sistema acoplado.

$\eta_{i,j}^f$ estimador de erro para elementos fluidos no sistema acoplado.

λ_i^n i -ésimo autovalor do sistema de ordem n .

\mathcal{B} módulo de compressibilidade.

$|J|$ jacobiano da transformação.

μ_0 viscosidade absoluta.

∇^2 operador Laplaciano.

ω rotação do fluido.

ω velocidade angular.

ω_{ex} velocidade angular exata.

ω_p velocidade angular do sistema de ordem n gerado por polinômios de ordem p .

$\| \cdot \|_E$ norma da energia.

$\| \cdot \|_X$ norma definida no espaço X .

ϕ_i^{n+m} i-ésimo autovetor do sistema de ordem $n + m$.

ψ_θ autovetor relativo ao campo de pressões.

ψ_i^n i-ésimo autovetor do sistema de ordem n .

ψ_i^n i-ésimo autovetor do sistema de ordem n .

ψ_w autovetor relativo ao campo deslocamentos relativos da estrutura.

ρ massa específica.

ρ_0 densidade do fluido não perturbado.

σ vetor de tensões.

σ_C componente volumétrico do vetor tensão para o fluido.

σ_V componente viscoso do vetor tensão para o fluido.

σ_{ij} tensor de tensões.

θ_i^n modo associado ao i-ésimo autovalor do sistema de ordem n .

$\varepsilon_{i,j}$ erro do i-ésimo autovalor associado ao j-ésimo elemento.

ε_i erro associado ao i-ésimo autovalor.

ε_p erro associado a autovalor do sistema de ordem n gerado por polinômios de ordem p .

φ linha de deslocamento.

\vec{V} campo de velocidades.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vetores unitários em coordenadas cartesianas.

$\vec{\nabla}$ operador diferencial.

\vec{n} vetor normal à superfície.

\vec{r} vetor posição no sistema de coordenadas ortogonais (L_1, L_2, L_3) .

ξ variável posição definida no espaço de referência $(-1 \leq \xi \leq 1)$.

ζ vorticidade do fluido.

g aceleração da gravidade.

g_x componente da aceleração da gravidade na direção x .

h dimensão característica do elemento.

h_{med} dimensão característica da malha.

k número de onda.

k razão dos calores específicos c_p/c_v para o gás ideal.

k_i matriz de rigidez modal.

l_i i -ésimo lado do elemento triangular.

m_i matriz de massa modal.

n número de equações ou de graus de liberdade do sistema.

p ordem do polinômio hierárquico.

q carregamento transversal da viga.

r função teste.

s deslocamento da partícula fluida.

t variável tempo.

u deslocamento da estrutura.

longitudinal da barra.

u_i valor nodal do deslocamento.

v função teste.

w deslocamento transversal da viga.

w_i valor nodal deslocamento transversal.

x, y, z coordenadas de posição.

Capítulo 1

Introdução

Na natureza, muitos fenômenos são fortemente influenciados pelo comportamento físico de meios vizinhos, de tal forma que não podem ser tratados de maneira isolada. Este tipo de sistema, se enquadra no que se consagrou denominar sistema acoplado. Na prática, inúmeros sistemas possuem comportamento acoplado, e portanto devem ser analisados usando-se técnicas que levem em conta o comportamento de cada meio através de sua representação matemática local, bem como as condições de acoplamento na interface.

Dentre outros sistemas acoplados, o projeto de sistemas do tipo fluido-estrutura destaca-se como sendo um dos mais usuais para aplicações em engenharia. Pode-se citar aplicações no projeto de estruturas submersas (embarcações, plataformas de petróleo, pás de bombas e turbinas, barragens, etc), cavidades acústicas fechadas por paredes flexíveis (vibroacústica de automóveis e aeronaves, sensores, sistemas biomecânicos, etc), radiação sonora gerada pela vibração de máquinas e estruturas (acústica externa, acústica submarina), etc.

A representação matemática do problema da interação fluido-estrutura apresenta uma série de peculiaridades, como por exemplo a dificuldade em acoplar problemas distintos envolvendo diferentes variáveis. Na maioria das vezes as grandezas envolvidas apresentam várias ordens de grandeza de diferença entre si. Dependendo do problema, também pode ser necessário usar-se simultaneamente diferentes técnicas de descrição das variáveis no espaço (Lagrangiana para estrutura e Euleriana para fluido).

Com o crescente uso de técnicas numéricas, necessárias para a solução de problemas com geometrias arbitrárias, cresceu-se o problema da escolha do método a ser empregado. O

método de elementos finitos mostrou-se superior devido a simplicidade em impor as condições de contorno em relação às técnicas de diferenças finitas e volume de controle, muito empregadas em problemas de mecânica dos fluidos. No entanto, problemas com domínio infinito [1], como no caso da acústica linear externa os métodos de elementos de contorno mostram-se mais práticos e baratos devido a simplicidade de se impor a condição Somerfeld ou de meio infinito. A aplicação deste método consorciado com a técnica de elementos finitos em problemas de domínio infinito [2, 3, 4] constitui uma elegante solução numérica. Mackerle [5] apresenta uma extensa revisão bibliográfica onde podem ser encontradas mais referências sobre este tópico. Mais recentemente estão se popularizando pesquisas com as técnicas numéricas que não empregam uma malha como suporte geométrico para discretizar o domínio físico do problema ou o seu contorno [6, 7].

A classe dos problemas de interação fluido-estrutura é bem ampla, abrangendo desde a acústica linear interna a problemas de vibrações induzidas pelo escoamento passando pela acústica externa, acústica não linear e lubrificação. Cada campo destes com dezenas de aplicações práticas distintas e diferentes formulações conforme mencionado anteriormente. Em Mackerle J. [5], pode-se encontrar uma extensa lista de trabalhos sobre o problema da interação fluido-estrutura, 206 títulos publicados entre 1995 e 1998, sendo 157 deles empregando a técnica de Elementos Finitos. Este número de publicações sugere a importância e relevância do tema.

1.1 Formulações do Problema Acoplado para Acústica Interna

A maioria dos métodos de Elementos Finitos aplicados ao problema fluido-estrutura pode ser encontrada no trabalho publicado por Ohayon [8]. As técnicas tradicionais empregadas para o problema acústico interno são a formulação em deslocamentos (u, s) (u deslocamento da estrutura e s deslocamento da partícula fluida) [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16], formulação em pressão (u, P) (deslocamento u no domínio sólido e P pressão instantânea) [8, 10, 11, 17], formulação em potencial de velocidades (u, Ψ) [18, 10], e formulação em potencial de velocidades e pressão hidrostática (u, Ψ, P) [19, 10]. Cada uma destas técnicas apresenta

vantagens e desvantagens. Uma comparação entre elas pode ser encontrada no trabalho de Galli [10].

Mais recentemente surgiram outras formulações. Dentre estas, a proposta de Sandberg [20, 21] é bastante inovadora por não usar uma formulação específica para o acoplamento. Os domínios fluido e estrutural são discretizados separadamente, os autovalores e autovetores são obtidos a partir de matrizes simétricas tanto para o fluido quanto para a estrutura. Os autovalores do sistema acoplado são obtidos por manipulação matricial a partir dos subsistemas do fluido e da estrutura. O problema analisado na referência [20] apresenta bons resultados sem que tenha sido relatado dificuldades numéricas com modos espúrios. Mas não foram encontradas outras referências empregando esta técnica que é de aplicação restrita a problemas internos.

A técnica conhecida como método dos deslocamentos gera matrizes simétricas, e este é um dos seus aspectos mais atraentes. Nesta técnica usa-se a formulação Lagrangeana para a variável deslocamento no meio fluido. Para pequenos deslocamentos em relação ao equilíbrio (não há escoamento) este procedimento é válido, como é o caso da acústica linear. Na expressão do problema dinâmico a tensão será expressa por um componente volumétrico e outro viscoso [14].

A utilização da formulação em deslocamento resulta em modos espúrios ou modos de energia zero. Este fenômeno é associado à circulação [10, 14, 22] que aparece por não existir qualquer restrição a deformação do fluido associada ao módulo transversal de cisalhamento [23]. Para superar este problema é empregada a condição de fluido não viscoso ou com rotação ou deformação nula [23]. Esta é uma condição difícil de ser imposta uma vez que tem de ser aplicada a todo o domínio fluido. Um dos procedimentos para a aplicação da condição de rotação nula é o método das penalidades. Por esta técnica define-se uma matriz de rotações multiplicada por um fator ou coeficiente de penalidades [14]. O método das penalidades apresenta o inconveniente do valor ótimo do fator de penalidades ser encontrado por tentativas [14]. Por outro lado Bathe [13, 22] afirma que este tipo de procedimento em conjunto com técnicas de integração reduzida ou de ordem reduzida [14] não elimina os modos de energia nula para todos os tipos de problema.

Outras formulações foram propostas por Bathe [22] (u, P, Λ) e por Bermúdez [24]. Embora diferentes, têm em comum o uso do método dos deslocamentos formulados a partir da imposição da condição de irrotacionalidade. Em Bermúdez [24] o deslocamento no meio fluido é expresso em função do rotacional da função corrente. Como as funções corrente são definidas apenas para escoamento bidimensional [23] a aplicação da formulação fica restrita ao problema bidimensional. Bathe usa a formulação em deslocamento/pressão e introduz a variável "quantidade de movimento devido à vorticidade" Λ (vorticity momentum) [22] definida a partir do rotacional do deslocamento (nulo no domínio fluido) sem eliminar a variável pressão como é o procedimento padrão na formulação em deslocamentos.

Como é característica da formulação em deslocamentos, não é necessário qualquer consideração adicional em relação à interface e as matrizes são simétricas. Em outras palavras não há matriz de interface uma vez que a variável nos dois domínios é o deslocamento. Por outro lado, para evitar modos espúrios são introduzidas novas variáveis ao grande número necessário para descrever o deslocamento no fluido (três graus de liberdade por nó no problema tridimensional).

A formulação em pressão (u, P) normalmente leva a matrizes não simétricas [8, 10, 17, 11]. Esta assimetria deve-se à matriz de acoplamento entre duas variáveis distintas: deslocamento e pressão. A não simetria das matrizes resulta em uma série de inconvenientes, seja na impossibilidade de emprego de técnicas mais rápidas e tradicionais em Elementos Finitos para resolução do sistema [18], seja nas dificuldades teóricas devido aos autovetores não serem necessariamente ortogonais, ou autovalores para matrizes reais não serem necessariamente reais, como ocorre para matrizes simétricas [25]. Makridakis [26] emprega a formulação (u, P) em um problema fluido-estrutura unidimensional. Neste artigo é feito o estudo da convergência e estabilidade da solução do problema de acústica externa, e é relatado o problema de poluição numérica. Os autores atribuem a causa do fenômeno à diferença de propriedades (densidade) entre os meios em contato [26]. A formulação é a mais simples e direta, e é a que apresenta o menor número de variáveis compensando até certo ponto o emprego de técnicas de solução mais complexas e demoradas [10, 18]. Devido a isto será uma das técnicas selecionadas para formular o problema fluido estrutura neste trabalho.

Há uma grande variedade de publicações abordando diferentes procedimentos para gerar matrizes simétricas a partir de matrizes assimétricas. Há as técnicas que por manipulação algébrica chegam a matrizes simétricas [17]. Em geral estes processos não dão bons resultados, uma vez que estes necessitam de inversão de matrizes, e em muitos casos, estas matrizes não são inversíveis. Além do procedimento ser muito dispendioso para matrizes maiores, com frequência levam a matrizes mal condicionadas. Estas técnicas não serão consideradas aqui.

Outro procedimento de simetrização usa a mudança de variáveis e ou introdução de novas variáveis. Os métodos (u, Ψ) e (u, Ψ, P) usam estas técnicas mas o sistema original no mínimo duplica de tamanho. Muitas vezes há o problema do mal condicionamento o que acarreta o surgimento de dificuldades numéricas para solução. Neste trabalho será usado a formulação em Potencial de Velocidades para o fluido e em deslocamentos para a estrutura como procedimento de simetrizar as matrizes do problema acoplado. Como será visto, este método que se origina de uma simples mudança de variáveis do problema (u, P) irá permitir obter-se uma expressão para o estimador de erro do problema de autovalor não simétrico empregando o estimador de Friberg [27].

1.2 Estimadores de Erro para Problemas de Acústica Interna

Análise de erro aplicada ao método de elementos finitos desenvolveu-se acentuadamente a partir da década de 80 do século passado. Uma discussão bem didática sobre o assunto pode ser encontrada em Noor [28]. Existem duas técnicas básicas a partir das quais uma série de procedimentos foram desenvolvidos. O método da recuperação de tensão ou simplesmente da recuperação algumas vezes chamado de ZZ ou Z^2 , e o método do residual [29]. O princípio básico do método da recuperação pode ser encontrada em detalhes em Zienkiewicz [30, 31, 32, 33, 34, 35], e é ainda muito usado em diferentes versões e aplicações [29, 36]. As idéias básicas do método do residual podem ser encontrados, por exemplo, em Babuška [37, 38]. Ambos os métodos são considerados *a-posteriori* ou aplicáveis após o sistema ter uma solução, e locais ou avaliados no elemento individualmente. Estes métodos foram aplicados para problemas elípticos na *formulação h* ou versão de Elementos Finitos com funções de forma

lineares tendo como parâmetro de avaliação do erro a dimensão característica h do elemento. Posteriormente foram estendidas a problemas na *formulação p*, ou versão com polinômios hierárquicos de ordem p . Outra técnica, resultou da composição dos métodos anteriores [38, 39] a *formulação hp*. A teoria de erro e a experiência acumulada no desenvolvimento destes procedimentos foram estendidas a outras técnicas como a de elementos de contorno, ver por exemplo Pessolani [40].

A análise de erro do método dos Elementos Finitos aplicado ao problema acústico externo foi objeto de intensa pesquisa na última década do século passado. Um dos principais autores foi Babuška [41, 42, 43, 26, 44, 45]. Grande parte deste trabalho foi publicado de forma mais completa e sistemática por Frank Ihlenburg [46] onde pode-se encontrar também uma bibliografia mais completa. Dentro desta mesma linha destaca-se também a contribuição apresentada por Sterwart J. R. e Hughes J. R. [29]. Um dos mais importantes resultados destes trabalhos foi a descoberta do fenômeno da poluição numérica em problemas acústicos externos ou de domínio infinito, ver F. Ihlenburg [41]. Este fenômeno é consequência do surgimento de autovalores complexos da matriz volumétrica (matriz de "rigidez" do fluido) gerada pela técnica dos Elementos Finitos. O sistema homogêneo associado resultante da discretização da Eq. (3.12) gera "ondas numéricas" que são propagantes. Ondas propagantes são fenômenos associados a autovalores complexos e se superpõe a solução do problema físico quando $kh \leq \sqrt{12}$, como mostrado na referência [46]. Sendo k o número de onda, $k = \omega/c$, ω a velocidade angular, c a velocidade de propagação da perturbação ou do som no meio, e h a dimensão característica do elemento. Percebe-se facilmente que para números de onda muito grandes a discretização do domínio fica proibitiva. Além disso as técnicas de estimadores de erro por serem locais, não conseguem captar o erro devido a poluição numérica que não é um fenômeno local. Nas referências [45, 46] é demonstrado que o aumento da ordem p dos polinômios de interpolação reduz muito o número de graus de liberdade necessários para manter o erro da solução abaixo de um valor de erro prescrito.

Um outro resultado importante dos trabalhos citados acima, é que o erro *a-priori* no problema acústico externo é muito bem caracterizado em faixas de convergência em função do número de onda k . Este fato compensa em parte a incapacidade do estimador *a-posteriori*

em captar corretamente o erro [46].

Apesar da maior simplicidade, há poucos trabalhos publicados sobre análise de erro do método de elementos finitos aplicado ao problema acústico interno. O trabalho de Alonso [47] é um dos poucos. É baseado no método do residual com indicador de erro local para a rotina de refinamento da malha e usa a formulação de Bermúdez [24] para iteração fluido-estrutura. No entanto, o estimador foi aplicado apenas ao domínio sólido. O autor argumentou que o erro foi mais expressivo na estrutura. Parte deste fato pode ser atribuído à escolha do problema para teste. Escolheu-se uma estrutura muito rígida com pontos de concentração de tensão, o que levou a erros locais elevados e onde se concentrou refinamento da malha.

No processo de refinamento, o que se pretende é distribuir o erro da maneira mais uniforme possível [28]. Em geral é necessário computar algum tipo de constante de escala global para permitir esta comparação uma vez que o erro é computado localmente no elemento. São poucos processos de refinamento [29] que não usam este procedimento.

Neste trabalho, optou-se por aplicar ao problema de interação fluido-estrutura um estimador desenvolvido para a formulação p . Este foi escolhido por ser mais simples de implementar, por apresentar bons resultados em malhas menos refinadas [46] mesmo em malhas apresentando singularidades [48]. O estimador escolhido foi o estimador apresentado por Friberg na referência [27] e o processo de adaptatividade delineado em [49]. O estimador baseia-se nas propriedades das matrizes geradas a partir das funções de forma definidas por polinômios hierárquicos. Por polinômios hierárquicos ou funções de forma hierárquicas entenda-se que o aumento da ordem do polinômio gera uma matriz em que a matriz anterior é uma submatriz, Peano [50, 51]. Esta propriedade matricial permite estimar os autovetores resultantes do aumento da ordem hierárquica do elemento sem que haja a necessidade de recalcular-se todos os autovetores do sistema matricial. Isto permite a viabilização do estimador. Outro aspecto que deve ser mencionado é que este estimador é um estimador global. Neste caso, a informação do sistema como um todo é usada na estimativa do autovalor e do erro.

1.3 Escopo e Comentários sobre a Implementação Computacional

Como já visto, a formulação em pressão apresenta o menor número de variáveis entre as diferentes formulações fluido-estrutura usualmente empregadas, por ser a pressão uma grandeza escalar. Este é um aspecto importante sob o ponto de vista de tempo de processamento do problema e no tempo gasto pelo estimador. Torna-se mais importante porque o programa foi implementado no ambiente MATLAB, portanto, usando uma linguagem interpretada. Na realidade o programa desenvolvido objetiva ser usado como uma subrotina do programa MEFLAB, um programa em Elementos Finitos escrito para o MATLAB. Esta versão do MEFLAB foi desenvolvida no Departamento de Mecânica Computacional (DMC) da UNICAMP como uma ferramenta didática e de pesquisa, que usa entre outros, recursos gráficos para pre-processar os dados e pós-processar os resultados do problema. Além disso, o grande número de funções internas implementadas simplificam a rotina do programa. O MATLAB também permite o uso de técnicas sofisticadas de programação com consequente aumento dos recursos de programação e na variedade de problemas abordados.

A linguagem interpretada acelera o processo mais demorado no uso das técnicas numéricas que é o de implementação e teste da rotina. Por outro lado torna o programa mais lento com pouca memória disponível. Normalmente os programas de elementos finitos trabalham com integração numérica, pois uma única rotina de integração desenvolvida para elemento quadrilateral ou triangular pode ser usada em qualquer problema cuja discretização empregue estes elementos. Na integração numérica o número de pontos de integração é pequeno para funções de forma lineares, mas o número de pontos e o número de operações aumenta muito se forem empregadas funções de forma com polinômios de ordem mais elevada e ou hierárquicos. Devido a todos estes fatores decidiu-se por trabalhar com matrizes fechadas.

As matrizes fechadas são matrizes elementares com termos previamente integrados por programas de manipulação simbólica. Normalmente são armazenadas como rotinas que são acessadas para o cálculo da matriz. Ou seja, as matrizes de massa de rigidez, compressibilidade, volumétrica e de acoplamento não são mais integradas numericamente para cada elemento. Não é um procedimento novo, as referências [52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61]

apresentam técnicas de integração, de redução no armazenamento dos termos das matrizes, as expressões destas matrizes para elementos triangulares e tetraédricos [53, 58, 61, 59, 60, 54], termos para elementos quadrilaterais [55, 56, 57] e procedimentos empregados para resolver indeterminações que surgem nestes processos de integração [56, 54, 57]. Em sua grande maioria estes trabalhos são voltados para determinação da matriz de rigidez em problemas de elasticidade, alguns abordam também expressões para os estimadores de erro na forma fechada [53, 60]. Em praticamente todas as referências é citado como motivação principal a expressiva redução no tempo de integração.

O inconveniente do uso de matrizes integradas analiticamente é que praticamente para cada tipo de problema há a necessidade de se determinar e armazenar esta matriz. Este fato não chega a ser propriamente um problema, programas que lidam com matemática simbólica são bem conhecidos e geram arquivos em C e em Fortran e podem ser chamados como sub-rotinas dos mesmos sem que haja a obrigatoriedade de armazená-los. O programa de matemática simbólica empregado foi o Mathematica, mas optou-se por gerar um arquivo com termos integrados usados no programa como subrotina.

O emprego de elementos triangulares neste trabalho, em parte deve-se a decisão de usar matrizes fechadas. A simplicidade das expressões para integrais de área e de linha quando expressas em coordenadas de área ou naturais recomendavam este elemento [53, 58, 61, 59, 60, 54]. Expressões mais simples também facilitam a elaboração de programas em linguagem de matemática simbólica.

Elementos triangulares apresentam vantagens e desvantagens em relação aos elementos quadrilaterais. A versatilidade do elemento permite discretizar qualquer tipo de geometria. Por outro lado, se o problema necessitar de uma discretização mais refinada em uma região, a transição entre regiões de malha mais grossa para a mais fina quase sempre implica em uma maior distorção do elemento triangular ou um número muito maior de elementos em relação ao elemento quadrilateral [38]. Isto por que o elemento quadrilateral pode ter comprimento e largura diferentes mantendo os ângulos retos, isto não pode ocorrer com o triângulo onde lados diferentes distorcem os ângulos do elemento. A deformação do elemento significa um maior erro no procedimento de mudança de coordenadas entre o espaço real e o espaço de

referência, onde os cálculos são normalmente processados. Quanto mais rápida a transição entre regiões maior a distorção e maior o erro. Mas, a maior dificuldade é a de integrar analiticamente as expressões para o quadrilátero devido as singularidades que surgem no domínio de integração. Este problema já tem tratamento satisfatório para integração analítica do elemento quadrilateral [56, 57], mas não é um problema em elementos triangulares a não ser em situações particulares como problemas axi-simétricos [54].

1.4 Objetivos e Contribuições do Trabalho

Este trabalho visou desenvolver um estimador de erro para ser aplicado ao problema de vibrações livres de sistemas acoplados fluido-estrutura na formulação não simétrica (u, P) e na formulação simétrica (u, Ψ) . O programa foi desenvolvido na linguagem MATLAB e usou matrizes fechadas ou pré-integradas.

A escolha da formulação se prende a maior simplicidade de implementação pelo menor número de variáveis. Este menor número de variáveis reduz tanto o tempo de processamento das raízes do problema quanto o tempo gasto pelo estimador principalmente na formulação (u, P) . O problema de modos espúrios não é eliminado com estas formulações, sendo maior na formulação (u, Ψ) pelas características das matrizes geradas [18]. Nessas formulações os modos espúrios resultam dos problemas de condicionamento numérico dos sistemas matriciais gerados. No entanto, esta formulação teve importante papel na obtenção de um estimador para o problema (u, P) .

O desafio numérico enfrentado neste trabalho, foi desenvolver um estimador de erro apropriado ao problema fluido-estrutura com diferentes variáveis descrevendo a física do problema e para o caso do problema (u, P) , não simétrico. O estimador desenvolvido por Friberg [27] usa propriedades das matrizes simétricas para estimar os autovalores gerados pelo aumento do termo hierárquico em um dos elementos. Como as matrizes do problema na formulação em pressão não são simétricas este aspecto gerou problemas na implementação do estimador. O estimador foi desenvolvido para o problema (u, Ψ) , testado, e posteriormente demonstrou-se que este estimador poderia ser aplicado a formulação (u, P) de onde a formulação em potencial de velocidades se origina por mudança de variáveis.

A implementação hierárquica ou p -adaptativa foi adotada por conferir maior estabilidade ao problema acústico externo [46], que será tratado em trabalhos futuros, permitir malhas menores e maior simplicidade de implementação.

Os objetivos do trabalho podem ser resumidos como: implementar as formulações (u, P) e (u, Ψ) do problema fluido-estrutura usando funções de forma hierárquicas para a técnica dos Elementos Finitos, desenvolver estimador para a formulação p e rotina adaptativa, testar programas e comparar com resultados da literatura.

Capítulo 2

Elementos Estruturais Unidimensionais na Formulação Hierárquica

Em boa parte dos textos introdutórios a técnica de Elementos Finitos é abordada com o emprego de elementos estruturais unidimensionais simples [38, 62, 63, 13, 30, 64]. Neste capítulo será dada ênfase à aplicação do conceito e à formulação hierárquica destes elementos estruturais. A aplicação é detalhada tendo em vista sua aplicação ao caso acoplado da interação fluido-estrutura.

2.1 Formulação de Elementos de Barra

O elemento estrutural que suporta apenas esforços longitudinais será denominado barra. A equação geral de uma barra de seção constante e material linear elástico na forma fraca [38] é escrita como:

$$\int_0^{L_T} \left(AE \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + Cuv \right) dx = \int_0^{L_T} Tvdx + (Fv)_{x=L_T} - (Fv)_{x=0-} \\ \dots \int_0^{L_T} \left(c_d \frac{\partial u}{\partial t} v + A\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v \right) dx. \quad (2.1)$$

Onde u é o deslocamento ou função solução, v é o deslocamento virtual ou função teste, C é a constante elástica, T é a função que descreve força distribuída na barra, F é a força aplicada na(s) fronteira(s) $x = 0$ e $x = L_T$. O termo $c_d \partial u / \partial t$ descreve o atrito e c_d é o coeficiente de atrito. $A\rho \partial^2 u / \partial t^2$ é o termo inercial, A é a área da seção transversal da barra

e ρ a densidade. O termo de rigidez é dado por $AE (\partial u/\partial x \partial v/\partial x)$ sendo E o módulo de elasticidade do material. L_T é o comprimento total da barra.

Como o foco de interesse neste trabalho é o problema de vibrações livres não amortecidas, serão impostas as seguintes condições: $C = 0$, $c_d = 0$, $(Fv)_{x=L_T} = (Fv)_{x=0} = 0$ e $T = 0$. Em função destas simplificações a Equação (2.1) será reescrita como sendo

$$\int_0^{L_T} \left(AE \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx = - \int_0^{L_T} \left(A\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v \right) dx. \quad (2.2)$$

O procedimento de separação de variáveis define o deslocamento como produto de funções independentes de espaço e tempo $u = f(x)h(t)$, sendo $h(t) = \exp(i\omega t)$ uma função admissível, onde ω representa a velocidade angular. Aplicando-se a separação de variáveis na Expressão (2.2) chega-se a

$$\int_0^{L_T} \left(AE \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx = \omega^2 \int_0^{L_T} (A\rho uv) dx. \quad (2.3)$$

O termo do lado direito, depois de discretizado e desenvolvido conduz a matriz de massa, o do lado esquerdo resulta na matriz de rigidez.

2.1.1 Requisitos das Funções de Forma para Barras

No método dos Elementos Finitos as funções de forma para interpolação linear são dadas pela expressão

$$u = u_1 N_1 + u_2 N_2 \quad (2.4)$$

sendo funções de forma N_1 e N_2 definidas no intervalo $-1 \leq \xi \leq 1$ para variável ξ como:

$$N_1 = \frac{1 - \xi}{2} \quad (2.5)$$

e

$$N_2 = \frac{1 + \xi}{2} \quad (2.6)$$

Na Equação (2.4) u_1 e u_2 são considerados valores conhecidos da função u nos nós 1 e 2 respectivamente. A precisão da função de interpolação u nos pontos internos pode ser aumentada com o aumento do número e da ordem das funções de forma ou de interpolação, isto é:

$$u = u_1 N_1 + u_2 N_2 + a_1 N_3. \quad (2.7)$$

Neste caso, exige-se que a nova função de interpolação N_3 anule-se nos pontos 1 e 2 onde o valor da função u , u_1 e u_2 , são conhecidos.

Fazendo-se $N_3 = -(\xi - 1)(\xi + 1)$, as condições necessárias estarão satisfeitas, já que a função N_3 se anula em $\xi = -1$ e em $\xi = 1$. Em $\xi = 0$, a função $N_1 = 1/2$, $N_2 = 1/2$ e $N_3 = 1$. O valor de u no ponto intermediário será dado por $u(\xi = 0) = u_1/2 + u_2/2 + a_1$. Neste exemplo em particular [65] a_1 é o valor da correção na função de interpolação u no ponto intermediário ($\xi = 0$) em relação a aproximação linear com as funções N_1 e N_2 .

Acrescentando mais um polinômio, neste caso um polinômio cúbico, também será necessário que este polinômio seja nulo nos pontos extremos ($\xi = -1$ e $\xi = 1$). Satisfeita esta condição pode-se arbitrariamente prescrever que esta nova função deve ser nula em $\xi = 0$. Uma função possível seria $N_4 = \xi(1 - \xi^2)$. Portanto, $N_4 = 0$ em $\xi = -1, 1$ e 0 . Como:

$$u = u_1N_1 + u_2N_2 + a_1N_3 + a_2N_4 \quad (2.8)$$

sua derivada é:

$$\frac{du}{d\xi} = -\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2} + a_12\xi + a_2(1 - 3\xi^2). \quad (2.9)$$

Para $\xi = 0$

$$\frac{du}{d\xi} = -\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2} + a_2. \quad (2.10)$$

A expressão acima dá o significado de a_2 que é a correção da inclinação da função de aproximação u no ponto $\xi = 0$. Como a escolha das funções foi arbitrária, o significado de cada termo pode variar com o polinômio escolhido. A partir das observações anteriores, pode-se enunciar a seguinte regra:

Na formulação de elementos de ordem mais elevada, o importante é assegurar que as funções de forma N_p ($p > 1$) sejam nulas nos nós do elemento ($\xi = \pm 1$) para assegurar a continuidade C^0 .

A continuidade C^0 implica em que o valor nodal da função u_i não pode ser modificado pelas funções definidas internamente ao elemento, uma vez que este valor é compartilhado com elementos vizinhos e a função em um ponto tem valor único. As duas primeiras funções N_1 e N_2 chamadas de funções de forma físicas, relacionam o valor prescrito nos nós a aproximação

de u . Estas funções são linearmente independentes entre si e entre as funções subsequentes de ordem mais elevada. As funções de ordem mais elevada são conhecidas como funções internas ou modos internos.

Há uma série de famílias de funções de ordem elevada que podem ser empregadas como funções de forma [62, 63, 30] dentre elas as que exibem propriedades hierárquicas [50, 51, 28, 38, 46, 39]. O conceito se deve a Peano A. [50], e implica que o acréscimo de um termo ou polinômio de ordem $(p + 1)$ às funções de interpolação do elemento resulta em um sistema de equações com o novo termo que terá como submatriz a matriz do sistema anterior de ordem p . Em outras palavras, as funções de interpolação obtidas de polinômios de ordem p são sub-conjuntos do conjunto de funções de aproximação de ordem $(p + 1)$. A característica básica destas famílias de funções de forma hierárquicas é a de não definir pontos internos como as funções convencionais.

As funções hierárquicas podem ser geradas de diferentes maneiras [50], os polinômios ortogonais mais usados são os polinômios de Hermite, Legendre e Chebyshev [25, 66, 67, 68]. Os polinômios de Hermite e suas propriedades serão discutidos quando forem abordadas as funções de forma para vigas. Os polinômios de Chebyshev apresentam uma série de propriedades que os tornam bastante atraentes em relação a integração numérica [25] e convergência [66]. Mas em geral, não são empregados na forma que permita que seja explorada a sua propriedade de ortogonalidade, as funções de forma são definidas pelo produto dos polinômios de Chebyshev pelas funções de forma lineares Eq. (2.5) e (2.6) [39].

A ortogonalidade reduz o número de termos não nulos nas matrizes elementares como será visto, principalmente da matriz de rigidez de elementos unidimensionais. Tal fato tem reflexo imediato na esparsidade da matriz global e por conseguinte no custo computacional para a solução dos sistemas. Os polinômios de Legendre permitem que seja explorada esta propriedade. Em parte, deve-se a esta característica sua maior difusão como polinômios usados para definir as funções de forma nas formulações p [28, 38, 46, 40].

2.1.2 Matriz de Rigidez

O procedimento padrão de Elementos Finitos consiste em dividir o domínio em elementos e aproximar a solução sobre o domínio por um conjunto de funções definidas em cada elemento

$$u = \sum_{i=1}^n u_i N_i(x) \quad (2.11)$$

No caso de uma aproximação empregando funções hierárquicas, a expressão acima é na realidade

$$u = u_1 N_1 + u_2 N_2 + a_1 N_3 + a_2 N_4 + \dots + a_n N_n \quad (2.12)$$

sendo u a aproximação da solução no elemento, os coeficientes das funções de forma físicas são representados por u_i e a_j simboliza os coeficientes das funções de forma internas. A distinção é importante uma vez que u_i representa uma grandeza física, deslocamento longitudinal para o caso da barra, mas a_j é apenas o coeficiente de uma função de forma interna para o caso de funções de forma hierárquicas. No entanto, para maior simplicidade na notação será grafado sem distinção $u = \sum_{i=1}^n u_i N_i(x)$.

Aplicando este procedimento sobre o termo do lado esquerdo da Equação (2.3) e lembrando que u_i e a_j são constantes que serão obtidas na solução final do sistema, obtém-se:

$$AE \int_0^{L_T} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = AE \int_0^{L_T} \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial N_j(x)}{\partial x} dx. \quad (2.13)$$

Que levará a um sistema matricial, e a correspondente Matriz de Rigidez. As funções mais simples são as funções lineares, Equações (2.5) e (2.6), que asseguram a continuidade C^0 nos nós:

$$N_1 = \frac{(1 - \xi)}{2}$$
$$N_2 = \frac{(1 + \xi)}{2}$$

logo $u = N_1 u_1 + N_2 u_2$ sendo u_1 e u_2 os valores do deslocamento u nos respectivos nós. As Equações (2.5) e (2.6) estão definidas em $-1 \leq \xi \leq 1$ o que torna a expressão mais genérica. A transformação para o espaço físico é dada por:

$$x = \frac{(1 - \xi)}{2} x_i + \frac{(1 + \xi)}{2} x_{i+1} \quad (2.14)$$

Conforme já definido, funções de forma de ordem mais elevada podem ser empregadas, desde que sejam satisfeitas as condições de continuidade C^0 entre os elementos. Empregando os polinômios de Legendre $P_i(\xi)$ pode-se definir uma família de funções de forma $N_k(\xi)$ de diferentes ordens j a partir da seguinte expressão

$$N_k(\xi) = \sqrt{\frac{(2j-1)}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt \quad (2.15)$$

Usando a propriedade de integração dos polinômios de Legendre como definida no Apêndice A chega-se a:

$$N_k(\xi) = \sqrt{\frac{(2j-1)}{2}} \left(\frac{P_j(t) - P_{j-2}(t)}{(2j-1)} \right) \Big|_{t=-1}^{t=\xi} \quad (2.16)$$

Empregando-se as propriedades dos polinômios de Legendre e simplificando a Expressão (2.16) chega-se a forma final para a família de funções de forma definidas no espaço isoparamétrico, $-1 < \xi < 1$, como as definidas na referência [38]:

$$N_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}} (P_j(\xi) - P_{j-2}(\xi)) \quad (2.17)$$

Pode-se verificar que a Equação (2.17) anula-se nos extremos do intervalo. Observa-se que o índice da função de forma não é o mesmo da ordem dos polinômios de Legendre. Pode-se arbitrariamente estipular que a função de forma N_3 tenha polinômios de ordem 10 por exemplo, neste caso será composta pela combinação de um polinômio de Legendre de ordem 10 com outro de ordem 8 como indica a Fórmula (2.17).

A fim de se calcular a Matriz de Rigidez de um elemento, será considerada uma aproximação da seguinte forma

$$u = u_1 N_1 + u_2 N_2 + a_1 N_3 + a_2 N_4 \quad (2.18)$$

As funções de forma físicas N_1 e N_2 já foram definidas pelas Equações (2.5) e (2.6),

$$N_1 = \frac{(1-\xi)}{2}$$

$$N_2 = \frac{(1+\xi)}{2}$$

As duas funções hierárquicas N_3 e N_4 de ordem 2 e 3, $j = 2$ e $j = 3$, são obtidas a partir da aplicação da Equação (2.17) resultando nas expressões:

$$N_3 = \frac{3}{2\sqrt{6}}(\xi^2 - 1) \quad (2.19)$$

$$N_4 = \frac{5}{2\sqrt{10}}(\xi^3 - \xi) \quad (2.20)$$

As derivadas das funções definidas acima são respectivamente:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{3}{\sqrt{6}}\xi \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = \frac{5}{2\sqrt{10}}(3\xi^2 - 1) \quad (2.24)$$

Considerando que

$$dx = \frac{L}{2}d\xi \quad (2.25)$$

então

$$\frac{\partial N_i(x)}{\partial x} = \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{dx}{d\xi} = \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{L}{2} \quad (2.26)$$

onde L é o comprimento do elemento. Está sendo considerado também que E , o módulo de elasticidade do material, e A , a área da seção transversal da barra, são constantes ao longo da mesma. Logo a expressão que gera a matriz de rigidez do sistema pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} AE \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial N_j(x)}{\partial x} dx = \\ = \frac{2AE}{L} \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial N_j(\xi)}{\partial \xi} d\xi \end{aligned} \quad (2.27)$$

Empregando Galerkin $u = v$ (espaço solução igual ao espaço teste), e desenvolvendo a expressão acima, tem-se:

$$\frac{2AE}{L} \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial N_j(\xi)}{\partial \xi} d\xi = \dots$$

$$\begin{aligned}
& \dots = \frac{2AE}{L} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}^T \times \dots \\
& \dots \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_4(\xi)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_4(\xi)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_4(\xi)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_4(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_4(\xi)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} d\xi = \\
& \dots = \frac{2AE}{L} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}^T \times \dots \\
& \dots \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2\sqrt{6}}\xi & -\frac{5}{4\sqrt{10}}(3\xi^2 - 1) \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2\sqrt{6}}\xi & \frac{5}{4\sqrt{10}}(3\xi^2 - 1) \\ -\frac{3}{2\sqrt{6}}\xi & \frac{3}{2\sqrt{6}}\xi & \frac{9}{6}\xi^2 & \frac{15}{2\sqrt{60}}(3\xi^3 - \xi) \\ -\frac{5}{4\sqrt{10}}(3\xi^2 - 1) & \frac{5}{4\sqrt{10}}(3\xi^2 - 1) & \frac{15}{2\sqrt{60}}(3\xi^3 - \xi) & \frac{25}{40}(3\xi^2 - 1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} d\xi = \\
& \dots = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Na matriz de rigidez, Equação (2.29), extraída da Equação matricial (2.28), pode-se observar algumas das vantagens do emprego dos polinômios de Legendre na definição das funções de forma internas.

$$[K_e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

As funções de forma foram definidas a partir da integral de um polinômio de Legendre, Equação (2.15), e portanto, terão como derivada um polinômio de Legendre. Assim, os termos da matriz de rigidez serão resultado da integral do produto de dois polinômios de Legendre. Devido a propriedade da ortogonalidade, se a ordem ou o grau dos polinômios não forem os mesmos a integral deste produto será nula, isto significa que os termos fora da

diagonal, para colunas e linhas de ordem superior a 2, serão nulos. Neste caso, como em todos os casos práticos, o grau da derivada da função de forma física será menor do que o do polinômio de Legendre. Isto implica que, exceto os termos da diagonal da matriz de rigidez e dos termos resultantes do produto das derivadas das funções de forma físicas, os demais serão nulos.

2.1.3 Matriz de Massa

Novamente, considera-se um único elemento, cuja solução é da seguinte forma:

$$u = u_1 N_1 + u_2 N_2 + a_1 N_3 + a_2 N_4 \quad (2.30)$$

o que permite que a Equação (2.3) seja reescrita como

$$\begin{aligned} AE \int_0^{L_T} \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial N_j(x)}{\partial x} dx = \\ \dots A\rho\omega^2 \int_0^{L_T} \sum_{i=1}^n u_i N_i(x) \sum_{j=1}^n v_j N_j(x) dx. \end{aligned} \quad (2.31)$$

A e ρ são constantes ao longo da barra. As funções de forma são as mesmas já definidas para a matriz de rigidez. O desenvolvimento do termo da direita da Equação (2.31) irá originar a matriz de massa, e é feito usando-se o mesmo procedimento empregado na obtenção da matriz de rigidez. Considerando-se a transformação isoparamétrica e desenvolvendo apenas o termo inercial:

$$A\rho\omega^2 \int_0^{L_T} \sum_{i=1}^n u_i N_i(x) \sum_{j=1}^n v_j N_j(x) dx = \frac{AL\rho\omega^2}{2} \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n u_i N_i(\xi) \sum_{j=1}^n v_j N_j(\xi) d\xi \quad (2.32)$$

que resulta no sistema matricial

$$\begin{aligned} A\rho\omega^2 \int_0^l \sum_{i=1}^n u_i N_i(x) \sum_{j=1}^n v_j N_j(x) dx = \dots \\ \dots = AL\rho\omega^2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{6\sqrt{10}} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{2\sqrt{6}} & \frac{-1}{6\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6\sqrt{10}} & \frac{-1}{6\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

O sistema completo resultante da discretização da Equação (2.3) para um único elemento será então escrito como

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = AL\rho\omega^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{6\sqrt{10}} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{2\sqrt{6}} & \frac{-1}{6\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6\sqrt{10}} & \frac{-1}{6\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

A matriz abaixo (2.35) é a matriz de massa elementar

$$[M_e] = AL\rho \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{6\sqrt{10}} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{2\sqrt{6}} & \frac{-1}{6\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6\sqrt{10}} & \frac{-1}{6\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{21} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Ao contrário da matriz de rigidez, na matriz de massa os termos resultantes do produto das funções de forma físicas pelas funções de forma hierárquicas não são nulos. Também não são identicamente nulos os termos resultantes da integração do produto entre as funções hierárquicas de diferentes ordens (fora da diagonal). Como as funções hierárquicas são resultante da uma subtração entre polinômios com dois graus de diferença, ver Equação (2.17), a integral do produto entre dois termos hierárquicos só será nula se nenhum dos 4 polinômios que compuserem estes dois termos tiver mesma ordem. A integral do produto das funções de forma físicas por uma função hierárquica só será nula se o polinômio de Legendre de menor ordem da função hierárquica tiver ordem superior às funções de forma físicas, ver Apêndice A.

2.2 Formulação de Elementos de Viga

O elemento estrutural que suporta esforços de flexão será denominado viga. A expressão geral da equação da viga, na forma fraca [64], é dada por:

$$EI \int_0^{L_T} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx - \int_0^{L_T} q v dx = - \int_0^{L_T} \left(c_d \frac{\partial w}{\partial t} v + A \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v \right) dx \quad (2.36)$$

Sendo que E representa o módulo de elasticidade e I o momento de inércia em relação à linha neutra da viga. Os termos E e I são considerados constantes ao longo do comprimento L_T . A viga está alinhada com o eixo na direção x . O termo w representa o deslocamento transversal ao eixo x , q a expressão que descreve o carregamento e v a função teste.

O atrito é dado por $c_d \partial w / \partial t$, sendo c_d o coeficiente de atrito. O termo inercial é $A \rho \partial^2 w / \partial t^2$ onde A é a área da seção da viga e ρ sua massa específica. Impondo as condições $q = 0$ e $c_d = 0$, a Equação (2.36) passa a descrever o problema de vibrações livres não amortecidas.

Usando-se o procedimento habitual na solução de equações deste tipo, considerando $w = f(x)h(t)$ e fazendo $h(t) = \exp(i\omega t)$ chega-se a:

$$EI \int_0^{L_T} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \omega^2 \int_0^{L_T} (A \rho w v) dx \quad (2.37)$$

onde termo do lado direito da Equação (2.37) dá origem a matriz de massa, após a discretização e aproximação por Elementos Finitos, analogamente o termo da esquerda vai levar a matriz de rigidez.

2.2.1 Requisitos das Funções de Forma para Vigas

Como já observado para barra, na função de aproximação $w = w_i N_1 + w_{i+1} N_2$ as funções de forma N_1 e N_2 tem por objetivo impor o valor nodal w_i a aproximação quando $x = x_i$ e w_{i+1} quando $x = x_{i+1}$. Portanto, N_1 tem que ser 1 quando $x = x_i$ e 0 quando $x = x_{i+1}$. Existem infinitas funções que satisfazem estes requisitos. Na seção anterior usou-se $N_1 = (1 - \xi)/2$ e $N_2 = (1 + \xi)/2$.

No caso de vigas, além da exigência de continuidade C^0 há também a exigência da continuidade da rotação entre os elementos, para que a solução seja factível. Considerando pequenas deformações, neste caso, a rotação é a derivada do deslocamento ($\theta = dw/dx$), isto vai

significar que as funções de aproximação devem também satisfazer a continuidade de derivadas nos nós, continuidade C^1 . Para satisfazer as restrições adicionais impostas pelo problema, as funções de forma física passam a ser definidas como: $w = w_1^i N_1 + w_2^i N_2 + w_3^{i+1} N_3 + w_4^{i+1} N_4$. O termo w_1^i é o valor do deslocamento normal ao eixo x no ponto x_i , w_2^i passa a ser definido como a rotação prescrita em x_i , w_3^{i+1} o deslocamento suposto conhecido em x_{i+1} e w_4^{i+1} a rotação no nó x_{i+1} .

Como w_1^i é o valor do deslocamento no nó x_i , neste ponto N_1 deve ter valor 1 e deve se anular em x_{i+1} . O mesmo pode ser dito para a função N_3 anulando em x_i e tendo valor 1 em x_{i+1} . A exigência adicional a N_1 e a N_3 é que as suas derivadas sejam nulas em ambos pontos x_i e x_{i+1} já que nestes pontos estão atribuídos valores para rotação w_2^i e w_4^{i+1} respectivamente. De maneira análoga, o que se exige de N_2 e de N_4 é que estas funções se anulem nos pontos x_i e x_{i+1} onde o valor do deslocamento já foi atribuído por N_1 e N_3 . Além disso, exige-se que as derivadas de dN_2/dx sejam 1 e 0 respectivamente para x_i e x_{i+1} , e que dN_4/dx seja igual a 0 e 1 para estes mesmos pontos. Isto vai permitir atribuir os valores de rotação w_2 e w_4 aos respectivos nós de forma inequívoca.

Existem diferentes procedimentos que permitem chegar a funções que satisfaçam as exigências acima. Neste trabalho usou-se os polinômios de Hermite.

2.2.2 Funções de Forma Físicas Definidas pelos Polinômios de Hermite

O primeiro problema a ser resolvido é o de determinar a ordem dos polinômios da aproximação. Na modelagem de vigas são usados polinômios de ordem 3, por serem os de menor grau que atendem as características de derivabilidade exigidas das funções de forma [69]. Além disso a solução exata do problema da viga, com carga concentrada, é um polinômio de ordem 3 [69]. Definindo:

$$N_1 = a_0 H_0 + a_1 H_1 + a_2 H_2 + a_3 H_3 \quad (2.38)$$

Onde N_1 é a função de forma, H_i são funções de Hermite de ordem $i = 0, 1, 2, \dots$ cujas propriedades estão apresentadas no Apêndice (B), e a_i os coeficientes a serem determinados. Conforme discussão apresentada na Seção (2.2.1), a função de forma N_1 deve satisfazer a

$N_1(\xi = -1) = 1$, $N_1(\xi = 1) = 0$, $\partial N_1/\partial \xi(\xi = -1) = 0$, $\partial N_1/\partial \xi(\xi = 1) = 0$. Derivando N_1

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = a_0 H'_0 + a_1 H'_1 + a_2 H'_2 + a_3 H'_3 \quad (2.39)$$

Da propriedade 2 Apêndice (B) $H'_n(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi)$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = 2a_1 H_0 + 4a_2 H_1 + 6a_3 H_2 \quad (2.40)$$

As condições $N_1(\xi = -1) = 1$, e $N_1(\xi = 1) = 0$, são aplicadas à Expressão (2.38), as condições $\partial N_1/\partial \xi(\xi = -1) = 0$, e $\partial N_1/\partial \xi(\xi = 1) = 0$, são impostas à expressão da derivada da função de forma N_1 , Equação (2.39). Usando $H_n(-\xi) = (-1)^n H_n(\xi)$ para simplificar as expressões, e apresentando o sistema resultante na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} H_0(1) & -H_1(1) & H_2(1) & -H_3(1) \\ H_0(1) & H_1(1) & H_2(1) & H_3(1) \\ 0 & 2H_0(1) & -4H_1(1) & 6H_2(1) \\ 0 & 2H_0(1) & 4H_1(1) & 6H_2(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Substituindo pelos valores das funções $H_n(\xi)$ no ponto 1

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -8 & 12 \\ 0 & 2 & 8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

A solução do sistema acima é $a_0 = 1/2$, $a_1 = -3/16$, $a_2 = 0$, e $a_3 = 1/32$. Substituindo os coeficientes na Equação (2.38) e simplificando, resulta na primeira função de forma

$$N_1 = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3).$$

Usando o mesmo procedimento para N_2 , N_3 e N_4 chega-se ao seguinte conjunto de funções de forma físicas [69]:

$$N_1 = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \quad (2.43)$$

$$N_2 = \frac{L}{8}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \quad (2.44)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \quad (2.45)$$

$$N_4 = \frac{L}{8}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \quad (2.46)$$

As funções de Hermite são ortogonais, entretanto, exigem a multiplicação por uma função pêso, o que impossibilita o aproveitamento desta propriedade nas matrizes geradas pela técnica dos Elementos Finitos. Para permitir uma simplificação maior nas matrizes geradas, as funções de forma de ordem mais elevada usadas para viga são definidas a partir dos polinômios de Legendre que usa a função pêso unitária. Este procedimento foi publicado inicialmente na referência [70] e aplicado posteriormente nas referências [71, 72].

2.2.3 Funções de Forma Internas Definidas a Partir de Legendre

Como o valor de deslocamento e rotação são considerados conhecidos nos nós, as funções de forma internas devem ser nulas em $N_n = 0$ e $\partial N_n / \partial \xi = 0$ para $(\xi = \pm 1)$, respectivamente condição de continuidade C^0 e C^1 . O índice n refere-se a enésima função de forma. O grau do polinômio pode ser qualquer, desde que satisfaça às condições de continuidade. Usualmente o grau do polinômio da função de forma interna é a ordem da função de forma física de grau mais elevado acrescido de 1.

Os termos da matriz de rigidez são o resultado da integração do produto das derivadas segunda das funções de forma, Equação (2.37). Diante deste fato, e para que a ortogonalidade dos polinômios de Legendre possa ser usada, a derivada segunda da função de forma interna será definida como um polinômio de Legendre.

$$\frac{\partial^2 N_n}{\partial t^2} = D P_{j-2} \quad (2.47)$$

Na Equação (2.47) n é o número da função de forma, j a ordem do polinômio definidor da função de forma N_n , e D um parâmetro definido para que a diagonal da matriz de rigidez seja uma constante. Ter termos diagonais iguais a uma única constante permite um diagnóstico rápido de erro na integração ou na montagem do sistema. Como

$$\int_{-1}^1 P_n P_n dx = \frac{2}{2n+1} \quad (2.48)$$

então

$$\int_{-1}^1 D P_{j-2} D P_{j-2} dx = D^2 \frac{2}{2j-3} \quad (2.49)$$

Para decorar a diagonal da matriz de rigidez com o número 2 e sabendo que a matriz será

multiplicada por 8,

$$8D^2 \frac{2}{2j-3} = 2 \quad (2.50)$$

o que resulta em

$$D = \sqrt{\frac{(2j-3)}{8}} \quad (2.51)$$

Esta expressão permitirá que os termos diagonais resultantes da integral do produto dos termos hierárquicos na matriz de rigidez sejam constantes e iguais a 2. Usando a propriedade de integração Apêndice (A), e integrando a Expressão (2.47) de -1 a ψ , tem-se

$$\frac{\partial N_n}{\partial \psi} = \frac{1}{\sqrt{8(2j-3)}} [P_{j-1} - P_{j-3}] \quad (2.52)$$

Integrando-se novamente a Expressão (2.52) de -1 a ξ , obtem-se a expressão final para a família de funções de forma internas para a viga

$$N_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{8(2j-3)}} \left[\frac{P_j - P_{j-2}}{(2j-1)} - \frac{P_{j-2} - P_{j-4}}{(2j-5)} \right] \quad (2.53)$$

Desta maneira a ordem j do polinômio deve ser $j \geq 4$. Para $j = 4$ e $j = 5$ as funções de forma seriam respectivamente

$$N_5 = \frac{-1 - 30\xi^2 + 15\xi^4}{48\sqrt{10}} \quad (2.54)$$

$$N_6 = \frac{\xi(19 - 70\xi^2 + 35\xi^4)}{80\sqrt{14}} \quad (2.55)$$

2.2.4 Matriz de Rigidez

Considerando-se inicialmente apenas o termo de rigidez, o primeiro termo da equação da viga Equação (2.37), discretizando em elementos, e empregando-se o procedimento de Galerkin,

$$EI \int_0^{L_T} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx = EI \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx \quad (2.56)$$

A título de exemplo, considerando-se a função de aproximação com 6 termos, as quatro funções de forma físicas, Equação (2.43) a (2.46), e as duas funções hierárquicas definidas nas Equações (2.54) e (2.55), tem-se

$$w = w_1 N_1 + w_2 N_2 + w_3 N_3 + w_4 N_4 + a_1 N_5 + a_2 N_6 \quad (2.57)$$

$$w = \{N_i\}^T \{w_i\} \quad (2.58)$$

$$w = \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) & \frac{L}{8}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) & \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) & \dots \\ \dots & \frac{L}{8}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) & \frac{-1-30\xi^2+15\xi^4}{48\sqrt{10}} & \frac{\xi(19-70\xi^2+35\xi^4)}{80\sqrt{14}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Fazendo-se uma mudança de base do espaço físico onde x é definido para o espaço isoparamétrico ξ , sendo $L = x_{i+1} - x_i$ o comprimento do elemento, a partir da Equação (2.14) chega-se a

$$dx = \frac{L}{2} d\xi \quad (2.60)$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \quad (2.61)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \frac{dw}{d\xi} \quad (2.62)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} \right) = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \left(\frac{2}{L} \frac{dw}{d\xi} \right) = \frac{4}{L^2} \frac{d^2w}{d\xi^2} \quad (2.63)$$

Aplicando-se a derivada segunda à função de aproximação dada pela Expressão (2.59),

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{4}{L^2} \left[\frac{d^2N_1}{d\xi^2} w_1 + \frac{d^2N_2}{d\xi^2} w_2 + \frac{d^2N_3}{d\xi^2} w_3 + \frac{d^2N_4}{d\xi^2} w_4 + \frac{d^2N_5}{d\xi^2} a_1 + \frac{d^2N_6}{d\xi^2} a_2 \right] \quad (2.64)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{4}{L^2} \left[\begin{array}{cccccc} \frac{3\xi}{2} & \frac{L(-1+3\xi)}{4} & \frac{-3\xi}{2} & \frac{L+3L\xi}{4} & \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}(-1+3\xi^2)}{4} & \frac{\sqrt{\frac{7}{2}}\xi(-3+5\xi^2)}{4} \end{array} \right] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

de uma forma mais compacta:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{4}{L^2} \{B\}^T \{w\} \quad (2.66)$$

e

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{4}{L^2} \{B\}^T \{v\} \quad (2.67)$$

2.2.5 Matriz de Massa

Para a construção da matriz de massa, usa-se um modelo consistente, onde a solução é aproximada por $w = \sum_{i=1}^m N_i w_i$. Desenvolvendo termo de inércia da Equação (2.37) para um único elemento, considerando A e ρ constantes e sendo L o comprimento do elemento, tem-se:

$$\omega^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (A\rho w) dx = A\rho\omega^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{i=1}^n N_i(x) w_i \sum_{j=1}^n N_j(x) v_j dx \quad (2.71)$$

$$A\rho\omega^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{i=1}^n N_i(x) w_i \sum_{j=1}^n N_j(x) v_j dx = \frac{A\rho L}{2} \omega^2 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n N_i(\xi) w_i \sum_{j=1}^n N_j(\xi) v_j d\xi \quad (2.72)$$

que resulta na forma matricial

$$\frac{A\rho L}{2} \omega^2 \int_{-1}^1 \{N_j\}^T \{v_j\} \{N_i\}^T \{w_i\} d\xi = \frac{A\rho L}{2} \omega^2 \int_{-1}^1 \{v_j\}^T \{N_j\} \{N_i\}^T \{w_i\} d\xi \quad (2.73)$$

Utilizando os mesmos seis termos empregados para construir a matriz de rigidez

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{N_j\} \{N_i\}^T d\xi = \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11L}{210} & \frac{9}{70} & \frac{-13L}{420} & \frac{-1}{12\sqrt{10}} & \frac{2\sqrt{\frac{2}{7}}}{225} \\ \frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} & \frac{13L}{420} & \frac{-L^2}{140} & \frac{-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}L\right)}{504} & \frac{L}{1800\sqrt{14}} \\ \frac{9}{70} & \frac{13L}{420} & \frac{13}{35} & \frac{-11L}{210} & \frac{-1}{12\sqrt{10}} & \frac{-2\sqrt{\frac{2}{7}}}{225} \\ \frac{-13L}{420} & \frac{-L^2}{140} & \frac{-11L}{210} & \frac{L^2}{105} & \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}L}{504} & \frac{L}{1800\sqrt{14}} \\ \frac{-1}{12\sqrt{10}} & \frac{-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}L\right)}{504} & \frac{-1}{12\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}L}{504} & \frac{1}{252} & 0 \\ \frac{2\sqrt{\frac{2}{7}}}{225} & \frac{L}{1800\sqrt{14}} & \frac{-2\sqrt{\frac{2}{7}}}{225} & \frac{L}{1800\sqrt{14}} & 0 & \frac{1}{1980} \end{bmatrix}$$

então

$$\frac{A\rho L}{2} \omega^2 \int_{-1}^1 \{v_j\}^T \{N_j\} \{N_i\}^T \{w_i\} d\xi = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11L}{210} & \frac{9}{70} & \frac{-13L}{420} & \frac{-1}{12\sqrt{10}} & \frac{2\sqrt{\frac{2}{7}}}{225} \\ \frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} & \frac{13L}{420} & \frac{-L^2}{140} & \frac{-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}L\right)}{504} & \frac{L}{1800\sqrt{14}} \\ \frac{9}{70} & \frac{13L}{420} & \frac{13}{35} & \frac{-11L}{210} & \frac{-1}{12\sqrt{10}} & \frac{-2\sqrt{\frac{2}{7}}}{225} \\ \frac{-13L}{420} & \frac{-L^2}{140} & \frac{-11L}{210} & \frac{L^2}{105} & \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}L}{504} & \frac{L}{1800\sqrt{14}} \\ \frac{-1}{12\sqrt{10}} & \frac{-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}L\right)}{504} & \frac{-1}{12\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}L}{504} & \frac{1}{252} & 0 \\ \frac{2\sqrt{\frac{2}{7}}}{225} & \frac{L}{1800\sqrt{14}} & \frac{-2\sqrt{\frac{2}{7}}}{225} & \frac{L}{1800\sqrt{14}} & 0 & \frac{1}{1980} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

A matriz de massa $[M_e]$ é dada por:

$$[M_e] = A\rho\omega^2 \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11L}{210} & \frac{9}{70} & \frac{-13L}{420} & \frac{-1}{12\sqrt{10}} & \frac{2\sqrt{\frac{2}{7}}}{225} \\ \frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} & \frac{13L}{420} & \frac{-L^2}{140} & -\left(\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}L}{504}\right) & \frac{L}{1800\sqrt{14}} \\ \frac{9}{70} & \frac{13L}{420} & \frac{13}{35} & \frac{-11L}{210} & \frac{-1}{12\sqrt{10}} & \frac{-2\sqrt{\frac{2}{7}}}{225} \\ \frac{-13L}{420} & \frac{-L^2}{140} & \frac{-11L}{210} & \frac{L^2}{105} & \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}L}{504} & \frac{L}{1800\sqrt{14}} \\ \frac{-1}{12\sqrt{10}} & -\left(\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}L}{504}\right) & \frac{-1}{12\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}L}{504} & \frac{1}{252} & 0 \\ \frac{2\sqrt{\frac{2}{7}}}{225} & \frac{L}{1800\sqrt{14}} & \frac{-2\sqrt{\frac{2}{7}}}{225} & \frac{L}{1800\sqrt{14}} & 0 & \frac{1}{1980} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Uma inspeção na matriz de massa mostra que esta matriz não exhibe a mesma disposição de termos como a matriz de rigidez. Este fato ocorre tanto para o elemento de viga quanto para o elemento de barra. Isto deve-se à forma escolhida para gerar as funções de forma, que parte da simplificação desejada na matriz de rigidez. Como normalmente a matriz de rigidez é mais usada opta-se por simplifica-la.

Capítulo 3

Formulação de Elementos Finitos para o Problema da Acústica

A conceituação e a obtenção das expressões que descrevem problemas da acústica linear podem ser encontrados em uma vasta bibliografia, cita-se os trabalhos de Kinsler [73] que é um texto mais introdutório e Morse [74] que tem uma abordagem mais completa e avançada. A formulação em Elementos Finitos das equações da acústica linear plana pode ser encontrada em um amplo conjunto de obras, ver por exemplo [17, 8, 46, 10, 75, 63, 13] sem pretender citar a todos.

Neste capítulo será dada uma breve introdução sobre os conceitos básicos que são empregados na formulação do elemento triangular. Maior ênfase será dada aos aspectos associados a formulação hierárquica.

3.1 Acústica Linear Plana

A equação que descreve o problema acústico bidimensional ou acústica plana é:

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

sendo P a pressão instantânea, c a velocidade de propagação da perturbação no meio ou velocidade do som:

$$c = \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{\rho_0}}$$

onde ρ_0 é a densidade do fluido, o índice '0' simboliza condições não perturbadas, e \mathcal{B} é o módulo de compressibilidade determinado pela relação:

$$\mathcal{B} = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{P_0} \quad (3.2)$$

P_0 é a pressão não perturbada. Se o fluido for um gás ideal

$$c = \sqrt{k \left(\frac{P}{\rho} \right)} = \sqrt{kRT} \quad (3.3)$$

onde k é a razão dos calores específicos $k = c_p/c_v$, e R a constante do gás em questão.

Integrando-se a Expressão (3.1) sobre o domínio Ω no plano xy , tem-se:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 P d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Omega \quad (3.4)$$

Multiplicando-se a equação acima por uma função de ponderação r

$$\int_{\Omega} r \nabla^2 P d\Omega = \int_{\Omega} r \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Omega \quad (3.5)$$

e aplicando-se o postulado de Green ao lado esquerdo da Equação (3.5), obtém-se:

$$\int_{\Omega} r \nabla^2 P d\Omega = \oint_{\Gamma} r \vec{\nabla} P \cdot \vec{n} ds - \int_{\Omega} \vec{\nabla} r \cdot \vec{\nabla} P d\Omega \quad (3.6)$$

Na Equação (3.6), Γ representa a fronteira do domínio de integração Ω , e \vec{n} é o vetor normal à fronteira Γ . Portanto, o lado esquerdo da Equação (3.5) ou a Equação (3.6) pode ser escrita em função de suas componentes cartesianas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} r \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} d\Omega &= \oint_{\Gamma} r \left(\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial s} \vec{i} - \frac{\partial x}{\partial s} \vec{j} \right) d\Gamma \dots \\ &\dots - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

lembrando que

$$\vec{\nabla} P \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial s} \vec{i} - \frac{\partial x}{\partial s} \vec{j} \right) = \frac{\partial P}{\partial n} \quad (3.8)$$

Substituindo-se a expressão acima na Equação (3.7) e esta no lado esquerdo da Equação (3.5), chega-se a forma fraca da Expressão (3.5), que é dada por:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} r \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Omega = \oint_{\Gamma} r \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma \quad (3.9)$$

Propondo uma solução do tipo $P(x, y, t) = f(x)g(y)h(t)$, de forma mais precisa

$$P(x, y, t) = fg e^{i\omega t} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\omega^2 fg e^{i\omega t} = -\omega^2 P(x, y, t) \quad (3.11)$$

sendo ω a velocidade angular. Substituindo a Expressão (3.11) acima na Equação (3.9) resulta em:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} \right) d\Omega - \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega} r P d\Omega = \oint_{\Gamma} r \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma \quad (3.12)$$

A Expressão (3.12) está na forma conveniente para aproximar a solução do problema original pela técnica dos Elementos Finitos.

3.2 Condições de Contorno para o Problema Acústico Bidimensional

A equação de Navier-Stokes [23] descreve o comportamento de fluidos viscosos em escoamento não turbulento. Considerando-se apenas os termos na direção x , a equação de Navier-Stokes é dada por:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = g_x - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} - \left[V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right] + \frac{\mu_0}{\rho_0} \nabla^2 V_x \quad (3.13)$$

sendo μ_0 a viscosidade absoluta, ρ_0 a densidade e V_x a velocidade na direção x , e g_x a componente da gravidade no eixo x .

Para o problema acústico supõe-se pequenos deslocamentos das partículas fluidas em torno de um ponto no espaço. Os termos de transporte convectivo na direção x ($V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}$) podem ser considerados nulos, já que não há escoamento. A hipótese dos pequenos movimentos também leva a eliminação dos termos de difusão viscosa ($(\mu_0/\rho_0) \nabla^2 V_x$), as velocidades sendo muito pequenas levam a uma taxa de cisalhamento entre fluido e parede pouco expressiva. Além disso, quando há movimento do fluido ele segue o movimento da parede, que é em geral normal ao plano da mesma no problema acústico. Eliminando-se os termos de difusão e convecção da Equação (3.13), na ausência de gravidade, chega-se a expressão da conservação de momento linear ou momentum para o fluido, que é dado por:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.14)$$

Na interface fluido-estrutura, o efeito da pressão do fluido é normal a superfície da parede e pode ser expressa como

$$\vec{\nabla}P \cdot \vec{n} = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} \cdot \vec{n} = -\rho_0 \frac{\partial V_x}{\partial t} \vec{i} \cdot \vec{n} \quad (3.15)$$

Considerando V_n a componente do campo de velocidades \vec{V} normal a superfície, tem-se:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho_0 \frac{\partial V_n}{\partial t} \quad (3.16)$$

A expressão acima relaciona a derivada direcional da pressão normal à superfície com a velocidade normal a esta mesma superfície. Como na interface a velocidade do fluido é igual à velocidade da parede, esta expressão é responsável pelo acoplamento entre as equações que descrevem o comportamento dinâmico do fluido e da estrutura. O termo de derivada direcional na Expressão (3.16) pode então ser aplicada ao lado direito de (3.12) que discretizada irá originar a matriz de interface.

A Expressão (3.16) permite impor outras condições de contorno. A situação de parede rígida implica em velocidade nula na parede (condição natural)

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad (3.17)$$

Sem ondas de superfície ou gravitacionais, a condição de superfície livre é dada por $P = 0$. Para o caso de superfície livre sujeita a ondas gravitacionais, em pontos da linha média da superfície a pressão instantânea local será a pressão estática no fluido dada por $P = \rho_0 g z$. Nesta expressão ρ_0 é a densidade do fluido, z deslocamento no mesmo sentido da aceleração da gravidade g . A aceleração das partículas fluidas na superfície (considerando o movimento normal a superfície) será então,

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = \rho_0 g \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (3.18)$$

substituindo a Equação (3.18) na Equação (3.16) tem-se:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \vec{\nabla}P \cdot \vec{n} = -\rho_0 \frac{\partial V_z}{\partial t} \vec{k} \cdot \vec{n} = -\rho_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (3.19)$$

como \vec{n} é normal a superfície do líquido, igualando as expressões (3.18) e (3.16) obtém-se:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{1}{g} \frac{d^2 P}{dt^2} \quad (3.20)$$

que é conhecida como condição linearizada de ondas de superfície.

Outra condição de contorno importante surge quando deseja-se representar o meio infinito ou condição de fronteira não reflexiva. Esta condição é chamada de Sommerfeld e é obtida a partir da solução geral da Equação da onda (3.1) [73, 17], que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$P(x, t) = F_1(ct - x) + F_2(ct + x) \quad (3.21)$$

onde F_1 e F_2 são funções arbitrárias que satisfaçam à Equação (3.1), c velocidade da onda no meio e t o tempo. A função F_1 descreve as ondas deslocando-se em direção a fronteira com velocidade c , F_2 representa o retorno das ondas em direção a fonte, a condição não reflexiva exige $F_2 = 0$, logo:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial n} = -F_1' \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = cF_1' \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (3.24)$$

3.3 Aproximação do Problema Acústico Bidimensional pelo Método dos Elementos Finitos

Uma vez obtida a forma fraca do problema da acústica plana dado pela Equação (3.12), a solução será aproximada pelo método dos Elementos Finitos. Usa-se o método de Galerkin em que a função teste e de ponderação são iguais. A solução aproximada é dada pela série finita:

$$P(x, y, t) = N_1P_1 + N_2P_2 + \dots + N_nP_n = \sum_{i=1}^n N_iP_i \quad (3.25)$$

Os termos P_i são valores nodais da pressão. A derivada em relação a uma das coordenadas:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} P_i \quad (3.26)$$

Nas expressões acima, N_i representa as funções de interpolação que usualmente são as mesmas funções de forma que descrevem o elemento físico no domínio de interesse. Neste contexto, a

aproximação geométrica é definida por:

$$\begin{aligned} x &= N_1x_1 + N_2x_2 + \dots + N_nx_n = \sum_{i=1}^n N_i x_i \\ y &= N_1y_1 + N_2y_2 + \dots + N_ny_n = \sum_{i=1}^n N_i y_i \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sendo x_i e y_i as coordenadas dos nós em que o domínio Ω foi discretizado. Existem diversas expressões para N_i , e elas normalmente dependem tanto da discretização (em elementos triangulares $n = 3$ ou quadrangulares $n = 4$) quanto do problema físico. As funções de forma, tanto para elementos quadrangulares quanto triangulares podem ter também termos hierárquicos na concepção apresentada no Capítulo 2.

Seguindo o procedimento padrão, discretiza-se o domínio em elementos e aproxima-se a solução por uma série finita como indicada pela Equação (3.25). A forma fraca do problema acústico, dado pela Equação (3.12), poderá então ter a solução aproximada dada pela expressão:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} P_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial x} r_j dx dy + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} P_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial y} r_j dx dy + \dots \\ &\dots - \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n N_i P_i \sum_{j=1}^n N_j r_j dx dy = -\rho_0 \oint_{\Gamma} \sum_{i=1}^n N_i^{\Gamma f} r_i \sum_{j=1}^k N_j^{\Gamma e} \ddot{w}_k dS \end{aligned} \quad (3.28)$$

Na expressão acima, as funções de forma no interior da integral de linha são representadas pelo produto entre $N_i^{\Gamma e}$ e $N_i^{\Gamma f}$ que são respectivamente as funções de forma da estrutura na fronteira em contato com o fluido, e as funções de forma do fluido que também pertencem ao contorno. Neste caso $\partial P/\partial n$ foi substituída por $\rho_0 \partial \dot{w}/\partial t$ (w deslocamento transversal da viga) de acordo com a condição de contorno dada pela Equação (3.16).

Na forma matricial, escreve-se a equação para cada elemento da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\{r_i\}^T \int_{elem.} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix} dx dy \{P_i\} \dots \\ &\dots - \frac{\omega^2}{c^2} \{r_i\}^T \int_{elem.} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & \dots & N_1 N_n \\ \vdots & & \vdots \\ N_n N_1 & \dots & N_n N_n \end{bmatrix} dx dy \{P_i\} = \dots \\ &= -\rho_0 \{r_i\}^T \int_{elem.} \begin{bmatrix} N_1^{\Gamma f} N_1^{\Gamma e} & \dots & N_1^{\Gamma f} N_k^{\Gamma e} \\ \vdots & & \vdots \\ N_n^{\Gamma f} N_1^{\Gamma e} & \dots & N_n^{\Gamma f} N_k^{\Gamma e} \end{bmatrix} dS \{\ddot{w}_k\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Na Expressão (3.29) a primeira matriz é chamada de volumétrica $[H_f]$, a segunda matriz do lado esquerdo da Equação (3.29) é chamada matriz compressibilidade $[E_f]$ e a matriz do lado direito é a transposta da matriz de acoplamento $[L]$.

3.4 Funções de Forma

Existe uma grande variedade de funções de forma ou de interpolação empregadas na técnica de Elementos Finitos. Estas funções tem que atender a algumas restrições, como por exemplo a continuidade do valor da variável nos nós comuns de elementos vizinhos, a continuidade da função de interpolação ao longo da aresta entre elementos adjacentes. Estes são os requisitos mínimos de continuidade C^0 , outras restrições podem ser exigidas pelo problema a ser discretizado como a continuidade da derivada da variável nos nós (que é uma condição bem restritiva) entre outras. As funções de forma também dependem do tipo de discretização. Para o caso bi-dimensional as funções para elementos triangulares e quadrangulares normalmente são diferentes. No espaço as opções são maiores pela maior diversidade de elementos: cúbicos, tetraédricos e prismáticos.

As funções de forma devem ser escolhidas de maneira a satisfazer ao maior número dos seguintes requisitos [38]:

1. Devem promover a mínima acumulação de erro de arredondamento, para tanto, as matrizes deveriam ser diagonais ou o mais próximo possível da matriz diagonal.
2. Devem permitir o cálculo das matrizes de forma eficiente (polinômios de ordem mais baixa possível) devendo-se evitar expressões difíceis de serem manipuladas.
3. Devem permitir que as condições impostas pelo problema sejam implementadas de forma simples e sem implicar em restrições maiores do que as necessárias.
4. A escolha das funções de forma alteram o processo iterativo de solução e isto é importante em problemas grandes.

Os três primeiros tópicos sugerem funções de forma polinomiais com propriedades ortogonais, escolhidas e organizadas de forma a apresentar características hierárquicas. Neste

contexto, as características hierárquicas implicam que o acréscimo de mais uma função de forma não altere as matrizes de compressibilidade ou volumétrica (massa ou rigidez) já calculadas e armazenadas.

A formulação- p permite que o aumento de um grau de liberdade no sistema original, signifique mais algumas linhas e colunas às matrizes já computadas. Este tópico é especialmente importante em estimadores de erro que operam de forma iterativa. Além disso as taxas de convergência para formulação- p são superiores a formulação- h [46, 38, 48]. Por outro lado, a integração numérica de funções de ordem elevada consome muito tempo de processamento [52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61]. Portanto, é mais adequado o uso de matrizes fechadas, com integração analítica neste tipo de problemas.

Observa-se também que a taxa de convergência da solução depende do grau p do polinômio completo de maior ordem [63]. No caso de problemas bi-dimensionais, as funções de interpolação genéricas podem ser consideradas como resultantes do produto de polinômios $p(\xi)$ e $q(\eta)$. Neste caso, a taxa de convergência será dada pelo polinômio de maior expoente, p ou q . Supondo que seja p , existirão termos de alta ordem $\xi^m \eta^l$ com expoentes $m < p$ e $l < p$ com ordem maior do que a de p , $m + l > p$. Estes termos não contribuem para acelerar a taxa de convergência ou diminuir o erro na solução, penalizando a eficiência computacional.

Se $u(x)$ é a solução exata para um problema unidimensional, usando-se Taylor, tem-se:

$$u(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots \quad (3.30)$$

onde

$$c_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n u(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} \quad (3.31)$$

A solução aproximada $\bar{u}(x)$ é expressa como:

$$\bar{u}(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_p(x - x_0)^p \quad (3.32)$$

O erro de truncamento será dado por

$$u(x) - \bar{u}(x) = c_{p+1}(x - x_0)^{p+1} + c_{p+2}(x - x_0)^{p+2} + \dots \quad (3.33)$$

e o erro de truncamento R_{p+1} na forma de Lagrange é

$$R_{p+1} = \frac{1}{(p+1)!} \left[\frac{d^{(p+1)} u(x)}{dx^{(p+1)}} \right]_{(x=\theta)} (x - x_0)^{(p+1)} \quad (3.34)$$

em que $x \leq \theta \leq x_0$.

Definindo o comprimento da malha unidimensional $h = |x - x_0|$, ou de forma mais genérica h como sendo o maior comprimento da malha $h = h_{max}$. Para qualquer malha de elementos finitos é possível fazer com que $h_{max} \rightarrow 0$. O erro para uma malha de elementos finitos usando a fórmula de Lagrange é expresso como:

$$\left| \frac{u(x) - \bar{u}(x)}{\bar{u}(x)} \right| = Ch^{p+1} = O(h^{p+1}) \quad (3.35)$$

O termo C depende da derivada $(p + 1)$ de $u(x)$ em $x = \theta$, e foi normalizado pela série aproximada $\bar{u}(x)$ que tem valor conhecido e finito. Mas para valores muito pequenos de h_{max} o termo dominante no erro é h^{p+1} . A série de Taylor para duas variáveis tem o mesmo desenvolvimento, e o erro dominante é dado pelo termo de maior ordem p . Os termos cruzados $m + l > p$ pouco contribuem para a taxa de convergência. Por terem ordem maior, o erro introduzido é menor que o erro dominante dado por R_{p+1} . Estes termos requerem processamento adicional nos procedimentos usuais de mudança de coordenadas e de integração além de ocupar espaço no armazenamento dos dados. Devem ser evitados se possível.

A família "Serendipity" [30] desenvolvida de forma intuitiva corrige em parte o problema. Os polinômios desta família são completos até a ordem p acrescidos de termos cruzados $p + 1$ ($\xi^p \eta$ e $\xi \eta^p$). Burnett [63] argumenta que os termos cruzados adicionais são para garantir a 'isotropia' geométrica. Por 'isotropia' geométrica deve-se entender que uma variável não esta sub ou sobre representada em relação às coordenadas do ponto. Uma rotação no eixo de coordenadas não deve mudar a solução em um ponto por exemplo. Esta família elimina $p(p + 1)/2$ termos dos $(p + 1)^2$ resultantes do produto de polinômios de mesma ordem p . Portanto, existem $(p + 1)(p + 2)/2$ termos necessários para que o polinômio seja completo.

A implementação desta família no espaço é representada por $S^p(\Omega^Q)$ e $S^p(\Omega^T)$. Onde Ω^Q representa a discretização do domínio em elementos quadrilaterais, enquanto Ω^T representa a discretização do domínio em elementos triangulares. O termo S^p simboliza o espaço definido pelos monômios, que se caracterizam pelas seguintes regras para sua formação:

1. $\xi^i \eta^j$ onde $i, j = 0, 1, 2, \dots, p$ e $i + j = 0, 1, 2, \dots, p$

2. suplementado por termo $\xi\eta$ se $p = 1$ ou por
3. $\xi^p\eta, \xi\eta^p$ para $p \geq 2$

Uma outra vantagem da família "Serendipity" é a possibilidade de trabalhar com polinômios de diferentes ordens para diferentes faces do elemento. Esta possibilidade permite a transição de elementos que necessitam de polinômios com ordens elevadas para elementos que descrevem bem o fenômeno com graus hierárquicos p mais baixos.

$S^{p,q}(\Omega^Q)$ simboliza o conjunto de termos definidos por $\xi^i\eta^j$ sendo que $i = 0, 1, 2, \dots, p$ e $j = 0, 1, 2, \dots, q$ em que $p \neq q$

As funções usadas neste trabalho pertencem a $S^p(\Omega^Q)$ seguem as principais linhas que norteiam as funções do tipo "Serendipity", mas não são definidas da mesma maneira. A principal diferença é que não há nós além dos nós definidores do elemento. Isto é, não são introduzidos nós adicionais nas arestas ou no interior do elemento. Se o aumento do grau do polinômio exigir a definição de mais nós no elemento, isto implica na necessidade de se recalcular pelo menos parte da matriz, o que contraria o conceito de elemento hierárquico. As funções definidas a seguir são hierárquicas.

3.4.1 Funções de Forma para Elementos Triangulares

As Coordenadas Triangulares ou Coordenadas Naturais, também chamadas de Coordenadas de Área são intensivamente empregadas para descrever as funções de forma dos elementos triangulares. Em coordenadas de área as funções são definidas da seguinte forma:

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \quad , \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad , \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (3.36)$$

onde, A é a área do triângulo de coordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. A área A em relação às coordenadas é dada por

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \quad (3.37)$$

A_1 é a área do triângulo formado pelo ponto (x, y) contido ou interno ao triângulo de área A e o lado formado pelos pontos $((x_2, y_2), (x_3, y_3))$. Desta forma quando (x, y) coincidir com

(x_1, y_1) a razão de áreas será 1 ou $L_1 = 1$. A_2 representa a área do triângulo formado pelo ponto interno (x, y) e o lado limitado pelos pontos $((x_3, y_3), (x_1, y_1))$. As funções L_1 , L_2 e L_3 descrevem triângulos com valor unitário respectivamente nos nós 1, 2 e 3. Quando o ponto interno estiver situado sobre o lado oposto ao nó i , então $L_i = 0$, o que pode ser facilmente verificado nas expressões abaixo. As expressões para A_i foram obtidas a partir da fórmula da área total substituindo as coordenadas do nó por (x, y) , resultando em:

$$L_1 = \frac{1}{2A}[(x_2 - x)(y_3 - y) - (x_3 - x)(y_2 - y)] \quad (3.38)$$

$$L_2 = \frac{1}{2A}[(x - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)] \quad (3.39)$$

$$L_3 = \frac{1}{2A}[(x_2 - x_1)(y - y_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)] \quad (3.40)$$

Da definição de coordenadas de área:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (3.41)$$

As coordenadas de Área constituem-se em uma "variedade" de uma entidade matemática chamada *Simplex*, Cook [62]. O *Simplex* é uma figura n -dimensional que tem $n + 1$ vértices e é limitado por $n + 1$ superfícies de dimensão $n - 1$. Define-se coordenadas de volume como razão de volumes, à semelhança das coordenadas de área. O tetraedro é uma variedade de dimensão 3 que contém 4 vértices e quatro superfícies triangulares bidimensionais. O triângulo por seu lado, possui $n + 1 = 3$ vértices, e $n + 1 = 3$ faces unidimensionais ou arestas ($n - 1 = 1$).

Como as coordenadas do *Simplex* descrevem todos os seus pontos, isto significa que as coordenadas de área descrevem todos os seus pontos internos e de fronteira. Isto permite usar o mesmo sistema de coordenadas para definir as funções de forma na fronteira sem a necessidade de definir funções adicionais. Este aspecto é bastante importante, principalmente em problemas fluido-estrutura.

As coordenadas de área não são linearmente independentes, podem ser consideradas como um sistema de vetores unitários L_1 , L_2 e L_3 mutuamente ortogonais no espaço e que descrevem o plano $L_1 + L_2 + L_3 = 1$, ver Peano [50]. A aresta ou lado 1 será representado por $L_1 + L_2 = 1$

que está no plano $L_1 \times L_2$, a equação para o lado 2 no plano $L_2 \times L_3$ é $L_2 + L_3 = 1$, e $L_3 + L_1 = 1$ é a equação para o lado 3 que está no plano $L_3 \times L_1$.

As integrais de linha, de área e de volume são dadas respectivamente por:

$$\int_L L_1^n L_2^k ds = \bar{L} \frac{n!k!}{(1+n+k)!} \quad (3.42)$$

$$\int_A L_1^n L_2^k L_3^l dA = 2A \frac{n!k!l!}{(2+n+k+l)!} \quad (3.43)$$

$$\int_V L_1^n L_2^k L_3^l L_4^m dv = 6V \frac{n!k!l!m!}{(3+n+k+l+m)!} \quad (3.44)$$

sendo \bar{L} o comprimento do elemento linear, A a área do elemento triangular e V o volume do elemento tetraédrico. A simplicidade das expressões de (3.42) a (3.44) é um dos fatores que torna a manipulação e posterior integração das funções em coordenadas naturais extremamente simples, mesmo sem o emprego de programas que trabalham com matemática simbólica.

Bases Polinomiais em Coordenadas Triangulares

Como já definido L_i são as funções de forma para os nós $i = 1, 2, 3$, e $L_1 + L_2 + L_3 = 1$, ou seja L_1, L_2, L_3 não são linearmente independentes.

Para monômios formados pelo produto de variáveis independentes x e y já foi visto que existem $(p+1)(p+2)/2$ termos para formar um polinômio completo de ordem p . Para definir funções de forma empregando coordenadas de área, necessita-se de uma relação entre coordenadas triangulares e os polinômios completos de grau p . No entanto, observa-se que $L_1^2 + L_1L_2 + L_1L_3$ não é um polinômio de ordem 2, como $L_1 + L_2 + L_3 = 1$, $L_1^2 + L_1L_2 + L_1L_3 = L_1(L_1 + L_2 + L_3) = L_1$.

Peano [50] propõe uma base formada com os seguintes termos 1, L_1 e L_2 que são linearmente independentes, com ordem 0 o primeiro e ordem 1 os dois últimos. Os monômios L_1L_2 , L_2L_3 e L_3L_1 têm ordem 2 e também são linearmente independentes entre si e com os termos definidos anteriormente de ordem mais baixa. O mesmo ocorre com os monômios de ordem n ($n > 1$), $L_1^{n-1}L_2$, $L_2^{n-1}L_3$ e $L_3^{n-1}L_1$. Estes monômios assim definidos, formam uma base infinita e são a base de um espaço infinito, o espaço H^0 . O produto da base de H^0 por $L_1L_2L_3$ define as bases independentes de outro espaço infinito H^1 , Peano A. [50]. Pode-se notar que estes

p	H^0			H^1			H^2		
0	1								
1	L_1	L_2							
2	L_1L_2	L_2L_3	L_3L_1						
3	$L_1^2L_2$	$L_2^2L_3$	$L_3^2L_1$	$L_1L_2L_3$					
4	$L_1^3L_2$	$L_2^3L_3$	$L_3^3L_1$	$L_1^2L_2L_3$	$L_1L_2^2L_3$				
5	$L_1^4L_2$	$L_2^4L_3$	$L_3^4L_1$	$L_1^3L_2^2L_3$	$L_1L_2^3L_3$	$L_1^2L_2L_3^2$			
6	$L_1^5L_2$	$L_2^5L_3$	$L_3^5L_1$	$L_1^4L_2^3L_3$	$L_1L_2^4L_3$	$L_1^3L_2L_3^2$	$L_1^2L_2^2L_3^2$		
7	$L_1^6L_2$	$L_2^6L_3$	$L_3^6L_1$	$L_1^5L_2^4L_3$	$L_1L_2^5L_3$	$L_1^4L_2L_3^2$	$L_1^3L_2^2L_3^2$	$L_1^2L_2^3L_3^2$	
\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
n	$L_1^nL_2$	$L_2^nL_3$	$L_3^nL_1$	$L_1^{n-1}L_2L_3$	$L_1L_2^{n-1}L_3$	$L_1^{n-2}L_2L_3^2$	$L_1^{n-3}L_2^2L_3^2$	$L_1^{n-4}L_2^3L_3^2$	$L_1^{n-5}L_2^4L_3^2$

Tabela 3.1: BASES POLINOMIAIS EM COORDENADAS TRIANGULARES

espaços são disjuntos ou que não têm termos em comum. A base para o espaço H^2 é definida multiplicando a base de H^0 por $L_1^2L_2^2L_3^2$ e novamente formam um outro espaço disjunto com o primeiro H^0 e com o segundo H^1 . Define-se desta maneira um número infinito de espaços a partir do produto da base de H^0 por $L_1^nL_2^nL_3^n$ definindo H^n .

O somatório das bases dos espaços H^n definem uma nova base U que é uma base para o espaço de Hilbert [50]. Este fato tem consequências sobre o comportamento das matrizes dos elementos cujas funções de forma são definidas a partir destas bases. Todos os termos linearmente independentes de ordem p definidos pela base triangular estão contidos em U . Na Tabela (3.1) mostra-se alguns termos da base U . Todos os termos até ordem p retirados desta tabela, definem um polinômio completo em coordenadas triangulares ou de área, Peano [50].

Funções de Forma em Coordenadas Triangulares

As funções de forma em coordenadas triangulares são dadas por L_1, L_2, L_3 de forma que

$$x = x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3 \quad (3.45)$$

e

$$y = y_1L_1 + y_2L_2 + y_3L_3 \quad (3.46)$$

As expressões acima podem ser verificadas usando a definição de coordenadas de área ou naturais definidas pelas Equações (3.38), (3.39) e (3.40). As funções de forma hierárquicas

originalmente sugeridas por Peano [50] são as funções do espaço U de ordem $p \geq 2$, ou uma composição linear entre elas. Pelas características que exibem são classificadas em funções de forma laterais e funções de forma internas. As funções de forma laterais $L_i^p L_j^q \in H^0$ anulam-se em todos os nós x_1, x_2 e x_3 uma vez que os valores nodais já foram atribuídos pelas funções de forma físicas. Além disto estas funções são nulas também ao longo dos lados ou arestas do triângulo exceto no lado definido pelos pontos $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$. No interior do triângulo estas funções não se anulam necessariamente. Permite-se desta forma funções de interpolação de ordem elevada ($p + q \geq 2$) entre os nós definidores do lado, além das funções nodais que definem uma interpolação linear ao longo da aresta. Portanto, para elementos vizinhos as funções laterais devem assegurar a continuidade da função ao longo da aresta em comum.

Os modos internos, são dados pelas funções $L_i^p L_j^q L_k^l \in H^m$ sendo $(p + q + l \geq 3)$ e $m \geq 1$, e anulam-se não apenas nos nós, mas também ao longo de todas as arestas. Desta forma, não modifica os valores nodais compartilhados por outros elementos, nem o valor da função nas arestas em comum compartilhadas por elementos vizinhos. Atendidas estas condições estará assegurada a continuidade C^0 . Além disto as matrizes geradas no método dos Elementos Finitos a partir destas funções serão hierárquicas.

A implementação sugerida por Peano [50, 51] aplica-se a elementos de placa, mas na discussão propõe-se funções para elementos hierárquicos com continuidade C^0 . Uma das famílias de funções propostas e usadas neste trabalho está na Tabela (3.2).

Babuška [38] parte das bases em coordenadas triangulares completas Tab. (3.1) mas propõe funções de forma um pouco diferentes. Estas funções foram desenvolvidas para compatibilizar as funções laterais dos quadriláteros com as funções laterais dos elementos triangulares, assegurando assim a continuidade ao longo da aresta de contato. Embora dando pouca ênfase ao aspecto da escolha das funções de forma e de suas características, Bravo [39] apresenta funções formuladas a partir de polinômios de Chebyshev para elementos não conformes.

p		Funções de Forma		
1	físicas ou nodais	L_1	L_2	L_3
2	hierárquicas laterais	$2L_1L_2$	$2L_2L_3$	$2L_3L_1$
3	hierárquicas laterais	$L_1L_2(L_1 - L_2)$	$L_2L_3(L_2 - L_3)$	$L_3L_1(L_3 - L_1)$
	hierárquicas internas		$L_1L_2L_3$	
4	hierárquicas laterais	$L_1L_2(L_1^2 + L_2^2)$	$L_2L_3(L_2^2 + L_3^2)$	$L_3L_1(L_3^2 + L_1^2)$
	hierárquicas internas	$L_1^2L_2L_3$		$L_1L_2^2L_3$
5	hierárquicas laterais	$L_1L_2(L_1^3 - L_2^3)$	$L_2L_3(L_2^3 - L_3^3)$	$L_3L_1(L_3^3 - L_1^3)$
	hierárquicas internas	$L_1^2L_2^2L_3$	$L_1L_2^2L_3^2$	$L_1^2L_2L_3^2$
6	hierárquicas laterais	$L_1L_2(L_1^4 + L_2^4)$	$L_2L_3(L_2^4 + L_3^4)$	$L_3L_1(L_3^4 + L_1^4)$
	hierárquicas internas	$L_1^3L_2^2L_3$	$L_1^2L_2^2L_3^2$ $L_1L_2^3L_3^2$	$L_1^2L_2L_3^3$
7	hierárquicas laterais	$L_1L_2(L_1^5 - L_2^5)$	$L_2L_3(L_2^5 - L_3^5)$	$L_3L_1(L_3^5 - L_1^5)$
	hierárquicas internas	$L_1^3L_2^2L_3^2$ $L_1^4L_2^2L_3$	$L_1L_2^4L_3^2$	$L_1^2L_2^3L_3^2$ $L_1^2L_2L_3^4$
8	hierárquicas laterais	$L_1L_2(L_1^6 + L_2^6)$	$L_2L_3(L_2^6 + L_3^6)$	$L_3L_1(L_3^6 + L_1^6)$
	hierárquicas internas	$L_1^4L_2^2L_3^2$ $L_1^5L_2^2L_3$	$L_1^2L_2^4L_3^2$ $L_1L_2^5L_3^2$	$L_1^2L_2^2L_3^4$ $L_1^2L_2L_3^5$

Tabela 3.2: FUNÇÕES DE FORMA PROPOSTAS POR PEANO [50] EM COORDENADAS TRIANGULARES COM CONTINUIDADE C^0 COMPLETAS ATÉ ORDEM 8

Mudança de Coordenadas

Partindo-se da aproximação geométrica de um elemento triangular:

$$x = x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3 \Rightarrow x = \sum_i^3 x_iL_i \quad (3.47)$$

$$y = y_1L_1 + y_2L_2 + y_3L_3 \Rightarrow y = \sum_i^3 y_iL_i \quad (3.48)$$

$$z = z_1L_1 + z_2L_2 + z_3L_3 \quad (3.49)$$

no plano $z = 1$ a Equação (3.49) torna-se $1 = L_1 + L_2 + L_3$.

As matrizes para aproximação das variáveis de interesse na Equação (3.29) têm que ser expressas em coordenadas triangulares nas quais as funções de forma estão definidas. Deve-se obter uma expressão para mudança de sistema de coordenadas. Para isto, necessita-se de uma relação funcional entre as coordenadas triangulares e cartesianas. Esta relação é obtida da diferencial parcial das funções que descrevem cada uma das coordenadas triangulares expressas em coordenadas cartesianas:

$$\partial L_1 = \frac{\partial L_1}{\partial x} dx + \frac{\partial L_1}{\partial y} dy + \frac{\partial L_1}{\partial z} dz \quad (3.50)$$

$$\partial L_2 = \frac{\partial L_2}{\partial x} dx + \frac{\partial L_2}{\partial y} dy + \frac{\partial L_2}{\partial z} dz \quad (3.51)$$

$$\partial L_3 = \frac{\partial L_3}{\partial x} dx + \frac{\partial L_3}{\partial y} dy + \frac{\partial L_3}{\partial z} dz \quad (3.52)$$

o sistema pode ser expresso matricialmente como,

$$\begin{Bmatrix} \partial L_1 \\ \partial L_2 \\ \partial L_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} & \frac{\partial L_1}{\partial z} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} & \frac{\partial L_2}{\partial z} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} & \frac{\partial L_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

em uma forma mais compacta $\{d\}^T = [T] \{d\}^c$. Procendendo-se da mesma forma a expressão de variáveis em coordenadas cartesianas a partir de coordenadas naturais é representada matricialmente como:

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial x}{\partial L_3} \\ \frac{\partial y}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_3} \\ \frac{\partial z}{\partial L_1} & \frac{\partial z}{\partial L_2} & \frac{\partial z}{\partial L_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial L_1 \\ \partial L_2 \\ \partial L_3 \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

isto é $\{d\}^c = [J] \{d\}^T$. A matriz $[J]$ é a matriz de transformação inversa. Das relações acima, Equações (3.53) e (3.54), pode-se escrever que $[J] = [T]^{-1}$. Aplicando as relações dadas pelas Equações (3.47), (3.48) e (3.49) a relação matricial (3.54), tem-se:

$$J = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

O determinante $|J|$ é o jacobiano da transformação e para o caso do elemento triangular $|J| = 2A$, onde A é a área do elemento, como pode ser observado pela simples inspeção da matriz $[J]$. A matriz $[T]$ pode ser obtida da relação $[T] = [J]^{-1}$,

$$[J]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 & x_2y_3 - x_3y_2 \\ y_3 - y_1 & x_1 - x_3 & x_3y_1 - x_1y_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

igualando os termos do sistema dado em (3.53) com a expressão (3.56), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial x} &= \frac{1}{2A}(y_2 - y_3); & \frac{\partial L_1}{\partial y} &= \frac{1}{2A}(x_3 - x_2); & \frac{\partial L_1}{\partial z} &= \frac{1}{2A}(x_2y_3 - x_3y_2); \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} &= \frac{1}{2A}(y_3 - y_1); & \frac{\partial L_2}{\partial y} &= \frac{1}{2A}(x_1 - x_3); & \frac{\partial L_2}{\partial z} &= \frac{1}{2A}(x_3y_1 - x_1y_3); \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} &= \frac{1}{2A}(y_1 - y_2); & \frac{\partial L_3}{\partial y} &= \frac{1}{2A}(x_2 - x_1); & \frac{\partial L_3}{\partial z} &= \frac{1}{2A}(x_1y_2 - x_2y_1); \end{aligned}$$

Para obter-se as mesmas expressões da definição de coordenadas de área:

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

o que conduz a

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2A}[(y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + (x_2y_3 - x_3y_2)] \\ L_2 &= \frac{1}{2A}[(y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y + (x_3y_1 - x_1y_3)] \\ L_3 &= \frac{1}{2A}[(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1)] \end{aligned}$$

Como $N_1 = L_1$, $N_2 = L_2$ e $N_3 = L_3$, logo $\partial N_1/\partial x = \partial L_1/\partial x$, $\partial N_1/\partial y = \partial L_1/\partial y$, etc. Todos os termos da expressão (3.29) estão definidos em coordenadas de área.

O elemento diferencial de área será dado por [76]

$$dA = \frac{\partial \vec{r}}{\partial L_1} \partial L_1 \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial L_2} \partial L_2 \quad (3.57)$$

sendo \vec{r} o vetor posição no sistema de coordenadas ortogonais (L_1, L_2, L_3) , que é definido como

$$\vec{r} = L_1 \vec{i} + L_2 \vec{j} + L_3 \vec{k} \quad (3.58)$$

Como \vec{r} define um ponto no plano $L_1 + L_2 + L_3 = 1$

$$\vec{r} = L_1 \vec{i} + L_2 \vec{j} + (1 - L_1 - L_2) \vec{k} \quad (3.59)$$

então

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial L_1} = \vec{i} - \vec{k} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial L_2} = \vec{j} - \vec{k} \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial L_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial L_2} = (\vec{i} - \vec{k}) \times (\vec{j} - \vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \quad (3.61)$$

portanto,

$$dA = \frac{\partial \vec{r}}{\partial L_1} \partial L_1 \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial L_2} \partial L_2 = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) dL_1 dL_2 \quad (3.62)$$

em valor absoluto,

$$dA = \sqrt{1 + 1 + 1} dL_1 dL_2 = \sqrt{3} dL_1 dL_2 \quad (3.63)$$

Na equação acima $\sqrt{3}$ representa o dobro da área do elemento de referência determinado pela interseção do plano $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ com o diedro formado pelos eixos positivos do sistema de coordenadas triangulares. O elemento diferencial de área será expresso como $dA = |J| dL_1 dL_2$.

Como neste trabalho emprega-se matrizes fechadas ou integradas analiticamente, no Apêndice C encontra-se delineado o procedimento de integração das matrizes volumétrica $[H_f]$ e de compressibilidade $[E_f]$. Na Seção C.1 são integrados alguns termos da matriz volumétrica $[H_f]$. O procedimento de integração de termos da matriz elementar de compressibilidade $[E_f]$ está na Seção C.2.

Capítulo 4

Formulações do Problema Fluido-Estrutura Empregando a Técnica dos Elementos Finitos

Como já foi citado na Introdução, a maioria das abordagens que usam o métodos dos Elementos Finitos aplicados ao problema fluido-estrutura podem ser encontradas na referência Ohayon [8]. Dentre as técnicas tradicionais empregadas para o problema acústico interno, está a formulação em deslocamentos (u, s) [8, 10, 11, 9, 12, 13, 14, 15]. Para pequenos deslocamentos da partícula fluida em relação ao equilíbrio (não há escoamento) este procedimento é válido. Embora não seja empregada neste trabalho, para permitir uma comparação com a formulação em pressão, a formulação (u, s) será brevemente revista e discutida. Será apresentada a formulação clássica (u, P) em pressões que é adotada neste trabalho.

Outras formulações, tais como, Potencial de Velocidades e Pressão Hidrostática podem ser encontradas no trabalho de Galli L. A. F. [10], Potencial de Deslocamentos no trabalho de Martini J. N. [77], Potencial de Velocidades em Casas W. J. P. [78] e Zavala P. A. G. [75]. Estas referências também trazem uma bibliografia mais completa referente a estas formulações.

4.1 Formulações em Deslocamento para o Problema Fluido-Estrutura

Problemas de mecânica estrutural na formulação dinâmica após a aproximação por elementos finitos gera expressões matriciais do tipo [62]:

$$[M_e]\{\ddot{u}\} + [K_e]\{u\} = \{F^e\} + \{F_T^e\} \quad (4.1)$$

A matrizes $[M_e]$ e $[K_e]$ são as matrizes de massa e rigidez como já definidas para barra e para viga, u é o vetor de deslocamento no sólido é definido de forma tradicional em função dos deslocamentos nodais $\{u\} = [N]\{u_i\}$. O ponto sobre as variáveis simboliza derivada em relação ao tempo, duplo ponto derivada segunda. Os vetores F^e e F_T^e representam respectivamente as forças de corpo e as forças aplicadas na fronteira do sistema.

Como já foi mencionado, o método conhecido como método dos deslocamentos gera matrizes simétricas para o problema acoplado, e este é um dos seus aspectos mais atraentes. Usa-se a formulação Lagrangiana para a variável deslocamento no meio fluido, considerado como um corpo sólido. Supõe-se que as equações da mecânica sejam satisfeitas pelo elemento fluido para pequenos deslocamentos se não houver escoamento, como é o caso de problemas de acústica. Se o fluido for analisado usando a variável deslocamento, simbolizada por s , por analogia com os problemas de mecânica estrutural [14] tem-se:

$$[M_e^f]\{\ddot{s}\} + [K_e^f]\{s\} = \{F^f\} + \{F_T^f\} \quad (4.2)$$

Neste contexto as matrizes típicas da equação do problema dinâmico para o sólido são redefinidas para o fluido como segue

$$[M_e^f] = \rho_0 \int_{\Omega_f} [N^T][N]d\Omega \quad (4.3)$$

O termo ρ_0 é a densidade do fluido.

$$[K_e^f] = \int_{\Omega_f} [B^T][E][B]d\Omega \quad (4.4)$$

$$\{F^f\} = \int_{\Omega_f} [N^T]\{f_\Omega\}d\Omega \quad (4.5)$$

onde $\{F_\Omega^f\}$ representa o vetor que contém as forças de corpo atuando no domínio. Analogamente,

$$\{F_\Gamma^f\} = \int_{\Omega_f} [N^T] \{f_\Gamma\} d\Gamma \quad (4.6)$$

onde $\{F_\Gamma^f\}$ são as forças de superfície atuando na fronteira Γ .

O vetor de deformações ϵ é obtido aplicando um operador diferencial (matriz \mathcal{D}) sobre a matriz de funções de forma [62, 13, 10, 14]

$$[B] = [\mathcal{D}] \{N\} \quad (4.7)$$

o que permite escrever a deformação da seguinte maneira:

$$\{\epsilon\} = [B] \{s_i\} \quad (4.8)$$

Sendo a matriz $[E]$ a matriz de elasticidade do material, a lei de Hooke generalizada pode ser expressa como:

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} \quad (4.9)$$

A tensão $\{\sigma\}$ atuando no fluido é dada pela expressão [23]:

$$\sigma_{ii} = -P - \frac{2}{3}\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + 2\mu_0 \frac{\partial \dot{s}_i}{\partial x_i} \quad (4.10)$$

$$\sigma_{ij} = \mu_0 \left(\frac{\partial \dot{s}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{s}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.11)$$

o termo μ_0 é a viscosidade absoluta. Portanto, a tensão será expressa por um componente volumétrico e outro viscoso [14]

$$\{\sigma\} = [C_C] \{\epsilon\} + [C_V] \{\dot{\epsilon}\} \quad (4.12)$$

ou considerando $\{\sigma_C\} = [C_C] \{\epsilon\}$ e $\{\sigma_V\} = [C_V] \{\dot{\epsilon}\}$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_C\} + \{\sigma_V\} \quad (4.13)$$

Conforme Kinsler [73],

$$P = -\mathcal{B} \vec{\nabla} \cdot \vec{s} \quad (4.14)$$

sendo \mathcal{B} o módulo de compressibilidade do fluido, definido pela Expressão (3.2). Usando a Relação (4.14) na Expressão (4.10), os tensores são redefinidos como a seguir [14]

$$\{\sigma_C\} = \begin{Bmatrix} -P \\ -P \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{B} & & & \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{B} & & 0 & \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{B} & & 0 & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

e para termos viscosos [23, 14]

$$\{\sigma_V\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\mu_0 & -\frac{2}{3}\mu_0 & -\frac{2}{3}\mu_0 & & & \\ -\frac{2}{3}\mu_0 & \frac{4}{3}\mu_0 & -\frac{2}{3}\mu_0 & & & \\ -\frac{2}{3}\mu_0 & -\frac{2}{3}\mu_0 & \frac{4}{3}\mu_0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \mu_0 & \\ & & & & & \mu_0 \\ & & & & & & \mu_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} \\ \dot{\epsilon}_{yy} \\ \dot{\epsilon}_{zz} \\ \dot{\epsilon}_{xy} \\ \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Considerando pequenos deslocamentos em relação ao equilíbrio, as relações (4.8) e (4.7), são válidas para o fluido. Aplicando os tensores como definidos acima na expressão da matriz de rigidez obtém-se

$$[K_e^f] = \int_{\Omega_f} [B^T][C_C][B]d\Omega \quad (4.17)$$

e definindo a matriz de amortecimento para o fluido D_e^f

$$[D_e^f] = \int_{\Omega_f} [B^T][C_V][B]d\Omega \quad (4.18)$$

O problema pode ser reescrito como

$$[M_e^f]\{\ddot{s}\} + [D_e^f]\{\dot{s}\} + [K_e^f]\{s\} = \{F^f\} + \{F_\Gamma^f\} \quad (4.19)$$

Inicialmente o procedimento mais efetivo para resolver o problema foi o proposto por Handi et al. [9]. A vorticidade $\vec{\zeta}$, cujo módulo é o dobro da rotação do fluido $\vec{\omega}$ ($\vec{\zeta} = 2\vec{\omega}$)

$$2\vec{\omega} = \vec{\zeta} = \frac{d}{dt}(\vec{\nabla} \times \vec{s}) = \vec{\nabla} \times \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (4.20)$$

o que leva à definição de $\vec{\zeta}$ em função do deslocamento s como:

$$\zeta_k = (\dot{s}_{i,j} - \dot{s}_{j,i}) \quad (4.21)$$

e a condição de irrotacionalidade será dada por

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{s} = 0 \quad (4.22)$$

o que acarreta em

$$\vec{\zeta} = \frac{d}{dt}(\vec{\nabla} \times \vec{s}) = \vec{\nabla} \times \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \quad (4.23)$$

A condição de irrotacionalidade definida a partir do deslocamento é válida para pequenos movimentos da partícula, supondo o campo de deslocamentos proporcional ao campo de velocidades. Com estas condições satisfeitas, substituindo a equação constitutiva para o fluido, Equação (4.14)

$$P + \mathcal{B}\vec{\nabla} \cdot \vec{s} = 0 \quad (4.24)$$

na equação de momentum

$$\rho_0\vec{s} + \vec{\nabla}P - \vec{F}_\Omega^f = 0 \quad (4.25)$$

e considerando $\vec{F}_\Omega^f = 0$, resulta em

$$\mathcal{B}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{s}) - \rho_0\vec{s} = 0 \quad (4.26)$$

com acoplamento na interface dado por

$$(\vec{u} - \vec{s}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (4.27)$$

O \vec{u} é deslocamento na estrutura, \vec{s} o deslocamento no fluido, e \vec{n} é o vetor normal à superfície. A Expressão (4.26) permite eliminar o termo de tensão viscosa da Equação (4.19), o que simplifica a montagem e solução do problema. No entanto, este procedimento resulta em modos espúrios ou modos de energia zero. Este fenômeno foi associado à circulação devido a não existência do módulo transversal de cisalhamento [14, 9]. Ousset [9] alega que a forma discretizada do problema, dificilmente consegue satisfazer a condição de irrotacionalidade dada pela Equação (4.22) sobre todo o domínio. Para contornar esta dificuldade Ousset propõe o emprego da técnica conhecida como método das penalidades. Define-se então uma matriz $[B_\zeta]$ a partir das Equações (4.22) e (4.21) tal que:

$$\{\zeta\} = [B_\zeta]\{s\} \quad (4.28)$$

define-se também o fator de penalidade α e a matriz

$$[K_\zeta] = \alpha \int_{\Omega} [B_\zeta^T][B_\zeta] d\Omega \quad (4.29)$$

de forma que adicionada a expressão original elimine os modos espúrios. O problema discretizado é então expresso por,

$$[M_e^f]\{\tilde{s}\} + (\alpha[K_\zeta] + [K_e^f])\{s\} = \{F^f\} + \{F_\Gamma^f\} \quad (4.30)$$

O fator de penalidade α é proporcional ao módulo de compressibilidade \mathcal{B} , e apresenta o inconveniente do valor ótimo ser encontrado por tentativas [9, 14, 16]. Por outro lado algumas referências [22, 16, 24, 47] afirmam que este tipo de procedimento em conjunto com técnicas de integração reduzida ou de ordem reduzida não eliminam os modos espúrios em todos os tipos de problema. Destacam em especial problemas externos envolvendo fluidos incompressíveis.

Outras formulações em deslocamento foram propostas por Wang e Bathe [22] (u, p, Λ) e por Bermúdez [24]. Wang [22] afirma que a correta imposição da direção normal nos nós dos elementos é fundamental para solução e eliminação de raízes espúrias. Mas baseados no trabalho conduzido por Bathe e Olson [16] concluem que as Equações (4.24), (4.25) e (4.26), não descrevem corretamente o problema. Segundo estes autores as equações que descrevem corretamente o comportamento do fluido são

$$\vec{\nabla}P + \vec{\nabla} \times \vec{\Lambda} = \vec{f}_\Omega \quad (4.31)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{s} + \frac{P}{\mathcal{B}} = 0 \quad (4.32)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{s} - \frac{\vec{\Lambda}}{\alpha} = 0 \quad (4.33)$$

Nas expressões acima α é uma constante arbitrária, um múltiplo do módulo de compressibilidade do fluido como no método das penalidades, e $\vec{\Lambda}/\alpha$ a quantidade de movimento devido à vorticidade. As condições de contorno sendo $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$ para parede rígida, $P = F_\Gamma^f$ na superfície de contato fluido-estrutura. Com esta formulação os proponentes alegam que os modos espúrios são eliminados [22]. Os modos de corpo rígido só são eliminados impondo-se a condição de irrotacionalidade. Neste caso, a condição de irrotacionalidade deve ser aplicada a todo o domínio fluido, o que implica em uma dificuldade adicional. Para contornar este

problema [22] definiu-se uma nova variável $\vec{\Lambda}/\alpha$ representando a quantidade de movimento devido à vorticidade. A irrotacionalidade do fluido seria garantida pela Equação (4.33).

A diferença básica entre os métodos é a introdução da variável Λ/α , sem que a variável pressão seja eliminada da expressão final como era o procedimento usual na formulação em deslocamentos. Na formulação (u, p, Λ) o deslocamento é retirado da equação da conservação de momento. A quantidade de movimento devido à vorticidade e a pressão acoplam as equações do sistema. A pressão passa a ser a responsável pela equilíbrio de forças com a estrutura. Como os deslocamentos continuam sendo calculados nos elementos fluidos e estruturais o número de variáveis aumenta consideravelmente, e este parece ser um dos problemas da formulação além da determinação do termo arbitrário α . O sucesso da discretização do problema assim formulado está associado a correta escolha de elementos e funções de interpolação, que devem atender a condições bastante restritivas [13, 22].

Em Bermúdez A., Durán R. e Rodríguez R. [24] o procedimento empregado é um pouco diferente. A equação para conservação de momento para o fluido é dada por,

$$\vec{\nabla}P - \rho_0\omega^2\vec{s} = 0 \quad (4.34)$$

sendo ω a velocidade angular, ρ_0 a densidade do fluido no domínio Ω_f , e s o deslocamento do fluido. Nesta formulação não é usada a equação constitutiva Equação (4.32), mas sim a de conservação de massa que em problemas incompressíveis é expressa por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{s} = 0 \quad (4.35)$$

Para o domínio sólido elástico

$$-(\sigma_{ij}(u))_{,j} - \rho_e\omega^2u_i = 0 \quad (4.36)$$

onde ρ_e é a massa específica do sólido e u o vetor deslocamento neste domínio (Ω_e). Neste caso, a condição de contorno na interface fluido estrutura, condição cinemática, é dada por:

$$(\vec{u} - \vec{s}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (4.37)$$

sendo s e u os vetores deslocamento do fluido e da estrutura na interface, n a normal a esta face de contato. A condição de equilíbrio dinâmico pode ser escrita como segue,

$$P n_i - \sigma_{ij} n_j = 0 \quad (4.38)$$

A forma fraca do problema delineado pelas Equações (4.34) a (4.36) é alcançada considerando uma função teste para o fluido tal que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{y} = 0 \quad (4.39)$$

e a função teste z para a estrutura que satisfaça à condição cinemática na interface, Equação (4.37)

$$(\vec{y} - \vec{z}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (4.40)$$

Multiplicando a Equação (4.34) por y e a Equação (4.36) por z , aplicando Green, as condições de contorno, de interface e eliminando a pressão, chega-se a forma fraca do problema acoplado dada por [24, 47]

$$\int_{\Omega_e} \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(z) d\Omega = \omega^2 \left(\int_{\Omega_f} \rho_0 s_i \cdot y_i d\Omega + \int_{\Omega_e} \rho_e u_i \cdot z_i d\Omega \right) \quad (4.41)$$

atendendo a conservação de massa Equação (4.35) e (4.39) ou de divergente nulo, e cinemáticas (4.40). A condição de divergente nulo ao longo do domínio é uma condição difícil de ser implementada. Para contornar este problema Bermúdez *et al.* [24] definem o campo de deslocamento admissível do fluido y (que deve ter divergente nulo) em termos do rotacional das linhas de deslocamento φ :

$$\vec{y} = \vec{\nabla} \times \vec{\varphi} \quad (4.42)$$

sendo φ a linha de deslocamento, definida de forma semelhante à função de corrente [24]. Da identidade vetorial [76]

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\varphi}) = 0 \quad (4.43)$$

a condição de continuidade, Eq. (4.39), estará satisfeita. O inconveniente desta formulação é a dificuldade das equações em descrever corretamente as condições cinemáticas na interface. Com a discretização do domínio a condição de conservação de massa Eq. (4.35) implica em que $\vec{s} \cdot \vec{n} = \vec{\nabla} \times \vec{\varphi} \cdot \vec{n}$ é uma constante ao longo da aresta do elemento de interface, Bermúdez [24]. Mas o termo $\vec{u} \cdot \vec{n}$ que representa o deslocamento normal na estrutura não é constante ao longo da face de contato. Esta incompatibilidade foi corrigida considerando que os termos $\vec{s} \cdot \vec{n}$ e $\vec{u} \cdot \vec{n}$ são iguais no ponto médio da aresta do elemento de contato. Este artifício leva a alguns problemas na implementação. Para resolver esta dificuldade

Bermúdez [24] define novas variáveis na interface para impor esta condição. Por outro lado, as linhas de deslocamento, a semelhança das linhas de corrente são grandezas escalares, e que implicam em um número de variáveis reduzido. Este procedimento também foi estendido ao caso compressível, mas neste caso a Equação da conservação de massa (4.35) tem que ser substituída pela Equação (4.24). Desta forma já não é mais possível trabalhar com as funções de deslocamento e o número de variáveis passa a ser considerável novamente, ver Bermúdez [24]. Na referência [24] a formulação é testada para alguns problemas bidimensionais. Fica a dúvida se esta formulação pode ser estendida a problemas tridimensionais, pelo menos neste espaço a função de corrente não é definida [23].

Os métodos conhecidos como método dos deslocamentos partem de aproximações das equações constitutivas dos fluidos uma vez que deslocamento não é a variável primitiva a partir da qual estas expressões foram deduzidas. Normalmente é difícil de impor em todo domínio fluido a condição de irrotacionalidade. A ausência desta condição leva pelo menos a um excessivo número de modos de corpo rígido. Outra condição que também é de difícil implementação, também por abranger todo o domínio, é a conservação da massa no caso de escoamentos incompressíveis. Para vencer estas dificuldades em todos as publicações são encontradas uma série de artifícios como mudança de variáveis, e ou a introdução de outras que auxiliem na solução correta. Quase sempre estes procedimentos acarretam dificuldades para aplicar as condições de contorno e ou de continuidade. Dos métodos citados, o procedimento proposto por Bermúdez *et al.* [24] parece ser o mais consistente, pelo menos não emprega constantes arbitrárias e ou restrições excessivas aos elementos. Os elementos propostos por Bathe e Wang [22, 13] impossibilitam o emprego de elementos hierárquicos. Como no método das penalidades este método usa constantes arbitrárias que dependem do problema em particular, este aspecto e o tipo de elemento eliminam a possibilidade do uso de um estimador de erro usando técnicas tradicionais já desenvolvidas. O método proposto por Bermúdez [24] foi usado por Alonso A., Russo D. e Vampa V. [47] em uma rotina adaptativa, no entanto, o estimador usado aparentemente apresentou dificuldades em captar corretamente o erro na interface. Este aspecto será comentado mais a frente.

A formulação em pressão (u, P) [8, 10, 17, 11] apresenta como maior inconveniente a

geração de matrizes não simétricas como já foi comentado. Esta assimetria deve-se a matriz de acoplamento entre duas variáveis primitivas distintas: deslocamento e pressão. No entanto, esta técnica é mais robusta por não necessitar de coeficientes arbitrários. A Equação (3.1) usada para modelar o fluido foi linearizada considerando a conservação de momento e massa [73, 74] e não necessita de qualquer restrição ou cuidado adicional. Como o problema de interesse aqui é analisar o problema acústico interno optou-se por usar a formulação em pressão.

4.2 Formulação em Pressão do Problema Acoplado Fluido-Estrutura

O problema considerado aqui é o problema acústico interno. Por problema acústico interno entende-se o problema onde a condição de Sommerfeld ou de domínio infinito não se aplica. O problema acústico interno representa a situação onde a perturbação do meio acústico está confinado a um domínio fluido e estrutural limitado. Para simplificar será usado o termo cavidade acústica com o mesmo significado dado ao problema acústico interno. Portanto, as condições de contorno de uma cavidade acústica podem ser a condição de parede rígida Equação (3.17) ou (4.47), condição de acoplamento com elemento estrutural elástico Equação (3.16), e mesmo a condição de pressão prescrita na fronteira $P = 0$. A condição de ondas superficiais ou gravitacionais também preenchem a condição de contorno de cavidade acústica, mas não serão consideradas neste trabalho.

O caso que será estudado é dado por uma cavidade acústica com pressão nula em todas as faces, com exceção de uma que será modelada por uma viga. O fluido preenche o interior da cavidade. A Figura (6.20) mostra a disposição física do problema.

Na Seção (3.2) foram desenvolvidas todas as condições de contorno aplicáveis ao problema acústico. O termo de acoplamento está no lado direito da Equação (3.9). Este termo de interface é escrito como:

$$\oint_{\Gamma} r \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma = \oint_{\Gamma} r \vec{\nabla} P \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (4.44)$$

r é a função teste, P a pressão instantânea, e \vec{n} o vetor normal à fronteira. A derivada

direcional da pressão na direção normal é:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \vec{\nabla} P \cdot \vec{n} \quad (4.45)$$

Considerando V_n a componente da velocidade \vec{V} normal a superfície, da Equação (3.16):

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho_0 \frac{\partial V_n}{\partial t} \quad (4.46)$$

A expressão acima relaciona a derivada direcional da pressão normal à superfície com a velocidade normal a esta mesma superfície. Como na interface a velocidade do fluido é igual à velocidade da parede esta expressão é a responsável pelo acoplamento entre as equações que descrevem o comportamento dinâmico do fluido e da estrutura. A condição de contorno para parede rígida implica em velocidade nula na parede, condição natural, que é dada por:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad (4.47)$$

Para o caso da velocidade da parede não ser nula

$$\oint_{\Gamma} r \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma = -\rho_0 \oint_{\Gamma} r \frac{\partial V_n}{\partial t} d\Gamma \quad (4.48)$$

o termo

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} = \ddot{w}_n$$

indica a aceleração da parede, sendo w_n o deslocamento na direção normal a mesma, portanto,

$$\oint_{\Gamma} r \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma = -\rho_0 \oint_{\Gamma} r \ddot{w}_n d\Gamma \quad (4.49)$$

Discretizando-se em elementos e fazendo-se a aproximação, tem-se:

$$\oint_{\Gamma} r \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma = -\rho_0 \oint_{\Gamma} r \ddot{w} d\Gamma = -\rho_0 \sum_{m=1}^{N_{fs}} \oint_{\Gamma} \sum_{i=1}^n N_i^f r_i \sum_{j=1}^k N_j^e \ddot{w}_j d\Gamma \quad (4.50)$$

sendo n o grau de liberdade ou número de funções de forma empregadas na discretização do elemento fluido, funções estas simbolizadas por $[N_i^f]$. O índice k é o grau de liberdade do elemento estrutural empregado ou o número de funções de forma físicas e hierárquicas empregadas para descreve-lo, representadas genericamente por $[N_j^e]$. O número N_{fs} representa o total de elementos com arestas no contorno que satisfazem a condição de continuidade

de velocidade normal a parede. A matriz gerada é chamada de matriz de acoplamento $[L]$, conforme [10, 75, 17], e pode ser definida por:

$$\oint_{\Gamma} r \ddot{w} d\Gamma = \sum_{m=1}^{N_{fs}} \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^n N_i^f r_i \sum_{j=1}^k N_j^e \ddot{w}_j d\Gamma = \{r_i\}^T [L]^T \{\ddot{w}_j\} \quad (4.51)$$

A matriz $[L]^T$ é composta apenas por termos resultantes do produto de funções de forma nodais e de termos hierárquicos pertencentes à aresta dos elementos de fluido e estruturais em contato. Os elementos internos, e arestas internas não têm termos nesta matriz. Assim, pode-se representar a continuidade de velocidade normal no contorno da seguinte forma:

$$\oint_{\Gamma} r \ddot{w} d\Gamma = \sum_{m=1}^{N_{fs}} r_i \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^n N_i^{\Gamma f} \sum_{j=1}^k N_j^{\Gamma e} d\Gamma \ddot{w}_j = \{r_i\}^T [L]^T \{\ddot{w}_j\} \quad (4.52)$$

onde $N_i^{\Gamma f}$ representa as funções de forma nodais e laterais do lado do elemento fluido que faz contato com o elemento estrutural e $N_j^{\Gamma e}$ representa as funções de forma do elemento estrutural em contato com o elemento fluido.

Matriz de Interface para Acoplamento entre Elemento fluido e Elemento de Viga

A forma matricial da Expressão (4.52) é dada por

$$[L]^T = \oint_{\Gamma} \sum_{i=1}^n N_i^{\Gamma f} \sum_{j=1}^k N_j^{\Gamma e} d\Gamma \quad (4.53)$$

$$[L]^T = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_1^{\Gamma f} N_1^{\Gamma e} & \dots & N_1^{\Gamma f} N_k^{\Gamma e} \\ \vdots & & \vdots \\ N_n^{\Gamma f} N_1^{\Gamma e} & \dots & N_n^{\Gamma f} N_k^{\Gamma e} \end{bmatrix} d\Gamma \quad (4.54)$$

Para obter os termos da matriz de acoplamento é necessário que se tenha formulado tanto o elemento fluido quanto o elemento estrutural. A formulação para o elemento fluido foi desenvolvida no capítulo anterior e as funções de forma serão as mesmas apresentadas na Tabela (3.1). As funções de forma para o elemento estrutural, no caso a viga, também já foram desenvolvidas. As funções de forma nodais para a viga, dadas da Equação (2.43) a Equação (2.46), e escritas como se segue:

$$N_1^e = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \quad (4.55)$$

$$N_2^e = \frac{\bar{L}}{8}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \quad (4.56)$$

$$N_3^e = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \quad (4.57)$$

$$N_4^e = \frac{\bar{L}}{8}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \quad (4.58)$$

o termo \bar{L} representa o comprimento da aresta de contato. Para evitar confusão entre as coordenadas triangulares e comprimento da aresta \bar{L} , usa-se a barra como forma de facilitar a distinção. As funções de forma hierárquicas da viga são geradas pela Equação (2.53):

$$N_n^e(\xi) = \frac{1}{\sqrt{8(2j-3)}} \left[\frac{P_j - P_{j-2}}{(2j-1)} - \frac{P_{j-2} - P_{j-4}}{(2j-5)} \right] \quad (4.59)$$

definida para $j \geq 4$. Para $j = 4$ e $j = 5$ as funções de forma seriam respectivamente:

$$N_5^e = \frac{-1 - 30\xi^2 + 15\xi^4}{48\sqrt{10}} \quad (4.60)$$

$$N_6^e = \frac{\xi(19 - 70\xi^2 + 35\xi^4)}{80\sqrt{14}} \quad (4.61)$$

A primeira constatação é que as variáveis que descrevem as funções de forma não são as mesmas para o fluido e para estrutura. No elemento triangular as variáveis são L_1 , L_2 e L_3 , no elemento de viga ξ . Como já visto na Seção 3.4.1 é possível a descrição dos elementos lineares com emprego de coordenadas triangulares. O domínio de definição das diferentes variáveis também já foi abordado, L_1 e L_2 são definidos em $[0, 1]$ e ξ no intervalo $[-1, 1]$. Definindo-se $\xi = L_2 - L_1$ é possível usar somente as coordenadas triangulares, e $N_i^{\Gamma e}$ estará definido no intervalo $[-1, 1]$. Fazendo a mudança de variáveis tem-se

$$N_1^{\Gamma e} = \frac{1}{4} \left(2 + 3L_1 - L_1^3 - 3L_2 + 3L_1^2 L_2 - 3L_1 L_2^2 + L_2^3 \right) \quad (4.62)$$

$$N_2^{\Gamma e} = \frac{\bar{L}}{8} \left(1 + L_1 - L_1^2 - L_1^3 - L_2 + 2L_1 L_2 + 3L_1^2 L_2 \dots \right. \\ \left. - L_2^2 - 3L_1 L_2^2 + L_2^3 \right) \quad (4.63)$$

$$N_3^{\Gamma e} = \frac{1}{4} \left(2 - 3L_1 + L_1^3 + 3L_2 - 3L_1^2 L_2 + 3L_1 L_2^2 - L_2^3 \right) \quad (4.64)$$

$$N_4^{\Gamma e} = \frac{\bar{L}}{8} \left(-1 + L_1 + L_1^2 - L_1^3 - L_2 - 2L_1 L_2 + 3L_1^2 L_2 \dots \right. \\ \left. + L_2^2 - 3L_1 L_2^2 + L_2^3 \right) \quad (4.65)$$

Usando funções de forma definidas com as mesmas variáveis e no mesmo intervalo, o processo de integração dos termos da matriz de interface pode ser realizado. Para tanto será usada a Expressão (3.42)

$$\int_{\bar{L}} L_1^n L_2^k dL = \bar{L} \frac{n!k!}{(1+n+k)!} \quad (4.66)$$

dL é o comprimento elementar ao longo da aresta de contato. O primeiro termo da matriz de interface será dado por:

$$L_{1,1}^{(fs)} = \int_{\bar{L}} N_1^{\Gamma e} N_1^{\Gamma f} dL \quad (4.67)$$

$$L_{1,1}^{(fs)} = \int_{\bar{L}} \frac{1}{4} (2 + 3L_1 - L_1^3 - 3L_2 + 3L_1^2 L_2 - 3L_1 L_2^2 + L_2^3) L_1 dL \quad (4.68)$$

$$L_{1,1}^{(fs)} = \int_{\bar{L}} \frac{1}{4} (2L_1 + 3L_1^2 - L_1^4 - 3L_1 L_2 + 3L_1^3 L_2 - 3L_1^2 L_2^2 + L_1 L_2^3) dL \quad (4.69)$$

$$L_{1,1}^{(fs)} = \frac{\bar{L}}{4} \left(2 \frac{1}{2} + 3 \frac{2}{6} - \frac{24}{120} - 3 \frac{1}{6} + 3 \frac{6}{120} - 3 \frac{4}{120} + \frac{6}{120} \right) \quad (4.70)$$

e resulta em:

$$L_{1,1}^{(fs)} = \frac{7}{20} \bar{L} \quad (4.71)$$

O segundo termo é definido por:

$$L_{1,2}^{(fs)} = \int_{\bar{L}} N_1^{\Gamma e} N_2^{\Gamma f} dL \quad (4.72)$$

$$L_{1,2}^{(fs)} = \int_{\bar{L}} \frac{1}{4} (2 + 3L_1 - L_1^3 - 3L_2 + 3L_1^2 L_2 - 3L_1 L_2^2 + L_2^3) L_2 dL \quad (4.73)$$

$$L_{1,2}^{(fs)} = \int_{\bar{L}} \frac{1}{4} (2L_2 + 3L_1 L_2 - L_1^3 L_2 - 3L_2^2 + 3L_1^2 L_2^2 - 3L_1 L_2^3 + L_2^4) dL \quad (4.74)$$

logo:

$$L_{1,2}^{(fs)} = \frac{3}{20} \bar{L} \quad (4.75)$$

A integração analítica dos demais termos da matriz de interface do elemento envolvendo apenas funções de forma nodais ou físicas resulta em:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{7}{20} \bar{L} & \frac{3}{20} \bar{L} \\ \frac{1}{20} \bar{L}^2 & \frac{1}{30} \bar{L}^2 \\ \frac{3}{20} \bar{L} & \frac{7}{30} \bar{L} \\ \frac{20}{30} \bar{L}^2 & \frac{20}{20} \bar{L}^2 \\ \frac{-1}{30} \bar{L}^2 & \frac{-1}{20} \bar{L}^2 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

se forem incluídos a título de exemplo 5 termos hierárquicos para a modelagem da viga e 7 para a discretização da aresta de contato do elemento triangular do fluido, a matriz de interface elementar torna-se:

$$[L] = \bar{L} \begin{bmatrix} \frac{7}{20} & \frac{3}{20} & \frac{1}{6} & \frac{-3}{140} & \frac{1}{20} & \frac{-23}{1260} & \frac{1}{42} & \frac{-23}{1848} & \frac{1}{72} \\ \frac{\bar{L}}{20} & \frac{\bar{L}}{30} & \frac{\bar{L}}{30} & \frac{-\bar{L}}{420} & \frac{\bar{L}}{105} & \frac{-\bar{L}}{504} & \frac{\bar{L}}{252} & \frac{-\bar{L}}{792} & \frac{\bar{L}}{495} \\ \frac{3}{20} & \frac{7}{20} & \frac{1}{6} & \frac{3}{140} & \frac{1}{20} & \frac{23}{1260} & \frac{1}{42} & \frac{23}{1848} & \frac{1}{72} \\ \frac{-\bar{L}}{30} & \frac{-\bar{L}}{20} & \frac{-\bar{L}}{30} & \frac{-\bar{L}}{420} & \frac{-\bar{L}}{105} & \frac{-\bar{L}}{504} & \frac{-\bar{L}}{252} & \frac{-\bar{L}}{792} & \frac{-\bar{L}}{495} \\ \frac{\sqrt{10}}{120} & \frac{\sqrt{10}}{120} & \frac{\sqrt{10}}{140} & 0 & \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{252} & 0 & \frac{\sqrt{10}}{1320} & 0 & \frac{\sqrt{10}}{2860} \\ \frac{-\sqrt{14}}{840} & \frac{\sqrt{14}}{840} & 0 & \frac{\sqrt{14}}{2520} & 0 & \frac{\sqrt{14}}{3080} & 0 & \frac{\sqrt{\frac{7}{2}}}{2574} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{1260} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{9240} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{10296} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{8580} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{22}}{27720} & 0 & \frac{-\sqrt{22}}{40040} & 0 & \frac{-\sqrt{22}}{180180} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{26}}{180180} & 0 & \frac{-\sqrt{26}}{120120} & 0 & \frac{-\sqrt{26}}{194480} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Matriz de Interface para Acoplamento entre Elemento de Viga e Elemento fluido

A Equação (2.36) que descreve o comportamento dinâmico da viga sem os termos de amortecimento e de carregamento devido ao momento é escrita como,

$$EI \int_0^{L_T} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \int_0^{L_T} \left(A\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v \right) dx = \int_0^{L_T} q v dx \quad (4.78)$$

onde w é o deslocamento normal ao eixo x da viga, q uma função de carregamento arbitrária, e v uma função de ponderação também arbitrária, e o comprimento total da viga simbolizado por L_T para evitar confusão com os símbolos da matriz de acoplamento e das funções de forma em coordenadas triangulares. Todos os termos da expressão (4.78) já foram analisados e discretizados. A pressão P do fluido é um carregamento distribuído ao longo da viga. Considerando apenas o termo em pressão:

$$\int_0^{L_T} v q dx = \int_0^{L_T} v P dx = \sum_{m=1}^{N_{fs}} \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^k N_j^e v_j \sum_{i=1}^n N_i^f P_i \frac{\bar{L}}{2} d\xi \quad (4.79)$$

A expressão é uma operação sobre as funções de forma das arestas comuns dos elementos em contato. O comprimento L ao longo do elemento de viga de dimensão \bar{L} pode ser expresso como:

$$L = \frac{1 + \xi}{2} \bar{L} \quad (4.80)$$

$$dL = \frac{\bar{L}}{2} d\xi \quad (4.81)$$

se $\xi = -1$, $L = 0$ e se $\xi = 1$ então $L = \bar{L}$. Da Equação (4.79) e (4.81) pode-se escrever,

$$\int_0^{L_T} v P dx = \sum_{m=1}^{N_{fs}} \int_0^{\bar{L}} \sum_{j=1}^k N_j^{\Gamma^e} v_j \sum_{i=1}^n N_i^{\Gamma^f} P_i dL \quad (4.82)$$

O termo \bar{L} representa o comprimento da aresta dos elementos em contato. A Expressão (4.82) envolve os mesmos termos da Equação (4.52), diferenciando-se apenas pela ordem no somatório das variáveis envolvidas, isto é:

$$\int_0^{L_T} v P dx = \sum_{m=1}^{N_{fs}} \int_{\bar{L}} \sum_{j=1}^k N_j^{\Gamma^e} v_j \sum_{i=1}^n N_i^{\Gamma^f} P_i dL = \{v_j\}^T [L] \{P_i\} \quad (4.83)$$

Portanto, a matriz de acoplamento $[L]$ é a transposta da matriz de acoplamento do fluido Equação (4.52) após a mudança de coordenadas e integração.

Matrizes Globais para Problema Fluido-Estrutura em Formulação de Pressão

O sistema fluido-estrutura é formado pelas equações

$$\begin{cases} EI \int_0^{L_T} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \int_0^{L_T} \left(A \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v \right) dx = \int_0^{L_T} q v dx \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} r \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Omega = \oint_{\Gamma} r \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma \end{cases} \quad (4.84)$$

Na Expressão (4.84) a função de ponderação na equação de Helmholtz foi representada por r . Após a discretização em elementos finitos, e feita a aproximação pelas funções de interpolação, o sistema pode ser escrito na forma matricial como,

$$\begin{cases} [K_e] \{w\} - \omega^2 [M_e] \{w\} = [L] \{P\} \\ [H_f] \{P\} - \frac{\omega^2}{c^2} [E_f] \{P\} = -\rho_0 \omega^2 [L]^T \{w\} \end{cases} \quad (4.85)$$

Reorganizando o sistema matricial (4.85) chega-se a matrizes não simétricas, porém, na configuração típica do problema de autovalor autovetor, que é dado por:

$$\begin{bmatrix} [K_e] & -[L] \\ 0 & [H_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ P \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M_e] & 0 \\ \rho_0 [L]^T & \frac{1}{c^2} [E_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.86)$$

Esta é a forma final do problema fluido-estrutura na formulação (u, P) ou em pressão.

4.3 Formulação do Problema Acoplado em Potencial de Velocidades

O problema da acústica linearizada bidimensional pode ser formulado em outras variáveis. Qualquer outra variável que mantenha algum tipo de relação linear com a variável pressão irá satisfazer a Equação de onda (3.9). A escolha deve recair em uma variável que permita simetrizar ou facilitar a simetriação das matrizes do sistema acoplado. Alguns referências clássicas em acústica teórica Morse P. M. e Ingard K. U. [74], usam a formulação do problema acústico em potencial de velocidades. O uso desta formulação em elementos finitos foi introduzida por Everstine G. C. [18], para ajudar na simetriação das matrizes do problema, sem contudo acarretar dificuldades no acoplamento [10]. A variável potencial de velocidades pode ser expressa da seguinte forma:

$$-\rho_0 \frac{d\Psi}{dt} = P \quad (4.87)$$

que satisfaz a Equação (3.9), como segue:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Psi} = 0 \quad (4.88)$$

A grande vantagem de potencial de velocidades está na formulação da interface fluido estrutura uma vez que o campo de velocidades instantâneas é por definição [23, 74, 73, 10]

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \Psi \quad (4.89)$$

portanto, se \vec{n} representa a normal na face de contato fluido-estrutura, pode-se escrever:

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{n} = \dot{w} \cdot \vec{n} = \dot{w}_n \quad (4.90)$$

onde \dot{w}_n representa a velocidade normal à parede. Desenvolvendo o lado direito da Equação (3.9) usando a variável Ψ , o termo de contorno é dado por:

$$\oint_{\Gamma} r \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\Gamma = \oint_{\Gamma} r \vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{n} d\Gamma = \oint_{\Gamma} r \dot{w} d\Gamma \quad (4.91)$$

$$\oint_{\Gamma} r \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\Gamma = \sum_{m=1}^{N_{fs}} \int_{\bar{L}} \sum_{i=1}^n N_i^{\Gamma f} r_i \sum_{j=1}^k N_j^{\Gamma e} \dot{w}_j dL \quad (4.92)$$

$$\oint_{\Gamma} r \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\Gamma = \{r_i\}^T [L]^T \{\dot{w}_j\} \quad (4.93)$$

O carregamento devido à pressão na estrutura será:

$$\int_0^{L_T} v P dx = \sum_{m=1}^{N_{fs}} \int_0^{\bar{L}} N_i^{\Gamma e} v_i N_j^{\Gamma f} P_j dL = -\rho_0 \sum_{m=1}^{N_{fs}} \int_{\bar{L}} N_i^{\Gamma e} v_i N_j^{\Gamma f} \dot{\Psi}_j dx \quad (4.94)$$

$$\int_0^{L_T} v P dx = -\rho_0 \{v_i\}^T [L] \{\dot{\Psi}_j\} \quad (4.95)$$

As matrizes finais do problema, representadas por submatrizes geradas por cada um dos termos do sistema de equações são escritas da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} K_e & 0 \\ 0 & H_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \Psi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_0 L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\Psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_e & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2} E_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\Psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.96)$$

O sistema não é simétrico. Definindo a variável θ :

$$\dot{\Psi} = -\frac{\dot{\theta}}{\rho_0} \quad (4.97)$$

que substituída no Sistema (4.96), leva ao seguinte sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} K_e & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0} H_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \dots \\ \dots + \begin{bmatrix} M_e & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2} E_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.98)$$

que é um sistema matricial simétrico. Existem métodos de solução para formulação com o termo de velocidade dado na Equação (4.98). Mesmo que as soluções sejam reais, a solução deste tipo de problema exige algoritmo de extração de autovalores complexos, ver Everstine G. C. [18]. Este tipo de rotina consome 4 vezes mais tempo que um algoritmo de solução real,

enquanto o problema não simétrico consumiria 2 vezes mais tempo em relação ao problema simétrico [18]. O problema simétrico sem termo de velocidade apresenta vantagens, e é possível de ser obtido. A partir de manipulações matriciais (ver Apêndice D) chega-se a seguinte expressão:

$$\left[\left[\begin{array}{cccc} K_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0} H_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2} E_f \end{array} \right] \dots \right. \\ \left. \dots -\omega \left[\begin{array}{cccc} 0 & L & M_e & 0 \\ L^T & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2} E_f \\ M_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2} E_f & 0 & 0 \end{array} \right] \right] \left\{ \begin{array}{c} w \\ \theta \\ \omega w \\ \omega \theta \end{array} \right\} = \{0\} \quad (4.99)$$

A Equação (4.99) é uma expressão do tipo $[A]\{x\} - \omega[B]\{x\} = 0$ que é o formato padrão empregado pelos programas de resolução dos problemas de autovalores no Matlab. Como este trabalho foi implementado no Meflab que usa o ambiente Matlab, esta foi a forma em que o sistema gerado pela formulação em potencial de velocidades foi empregado. Além disto, esta forma vai permitir a adaptação de uma rotina p -adaptativa ao problema fluido-estrutura.

No entanto, a forma da Equação (4.99) conduz a uma série de dificuldades. O primeiro aspecto é a duplicidade de autovalores e autovetores, isto significa que o sistema tem o dobro de variáveis. Portanto, o ganho no tempo de processamento é compensado pelo maior número de variáveis. Como o processo de solução é iterativo, e muitas vezes depende do condicionamento da matriz, o maior número de variáveis conduz a tempo de processamento muito maiores que o problema não simétrico se a matriz for mal condicionada.

Outro aspecto que merece ser mencionado, é que a matriz $[B]$ é singular. Esta característica restringe o número de métodos possíveis e disponíveis para solução de problemas de autovalor simétricos.

Capítulo 5

Estimador de Erro para Problemas de Vibrações Livres

Os problemas de autopares formulados nos capítulos anteriores foram colocados em sua forma matricial genérica não amortecida como:

$$([K] - \omega^2[M]) \{u\} = 0 \quad (5.1)$$

A solução não trivial do problema (5.1) implica em:

$$\det([K][M]^{-1} - \omega^2[I]) = 0 \quad (5.2)$$

A solução do problema é dada em pares, definidos pelos autovalores:

$$\{\omega^2\} = \{\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_n^2\}^T \quad (5.3)$$

e pelos autovetores ψ_i ou vetores de deslocamento relativo do sistema:

$$[\Psi] = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n] \quad (5.4)$$

onde n é o número de equações ou de graus de liberdade do sistema ou do modelo.

O maior problema nos métodos que empregam técnicas numéricas é o de conseguir determinar o quão próximo a solução obtida está da solução exata. Para os métodos de domínio, é possível avaliar a convergência variando-se o tamanho do elemento. Este é o procedimento mais simples e ainda habitual, mas garante apenas que a aproximação numérica para o problema tem solução única que converge para um valor, e não que a solução numérica converge

para a solução exata do problema. As questões de estabilidade, unicidade e convergência estão inter-relacionadas [46, 79, 38, 13, 64]. O tratamento teórico destas questões permite um melhor entendimento do fenômeno e permite o desenvolvimento de estimadores de erro e procedimentos adaptativos [37, 31, 80, 81, 28, 29, 27, 49]. Os avanços nesta área também abriram espaço para desenvolvimento de rotinas de otimização de projeto que empregam métodos numéricos. Inúmeras referências que tratam da análise numérica aplicada aos problemas de Elementos Finitos podem ser citadas sem a pretensão de referenciar todas ou as mais importantes [48, 46, 47, 79, 38, 13, 30, 64, 70, 31, 32, 33, 34, 35, 80, 81, 28, 29, 27, 49, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 82, 53, 40].

O problema básico é estabelecer uma medida do erro entre a solução exata e a solução aproximada pelo método numérico. A álgebra linear [25, 83, 79], e de uma forma mais ampla a topologia [84], fornecem as ferramentas necessárias para esta tarefa. O passo básico é definir uma norma. No Apêndice E estão dadas as relações que os componentes de um conjunto devem satisfazer para que haja uma norma neste conjunto. Define-se também as normas mais usadas. De forma geral, entende-se como norma uma função que associa um objeto de um conjunto matemático a um único número real. Esta associação possibilita uma forma de comparação entre elementos do conjunto. Se os elementos de um conjunto podem ser comparados, passa a ser possível estabelecer o conceito de proximidade ou de métrica. A métrica $d(u, v) = \|u - v\|_X = \|v - u\|_X$ é induzida pela norma $\|\cdot\|_X$ para $u, v \in X$. Independentemente de como é definida a norma no conjunto X , será simbolizada por $\|\cdot\|_X$ e X será um espaço normado. Portanto, uma sequência definida em um espaço $u_n \in X$ equipado com a norma $\|\cdot\|_X$ converge para $u \in X$ se e somente se $\|u - u_i\|_X \leq \varepsilon$ sendo ε número arbitrariamente pequeno. Características do tipo de problema e o efeito destas sobre a convergência determinam o tipo de norma mais adequado, há inúmeras referências que tratam do assunto, algumas de forma mais didática [46, 64, 79, 28, 25].

Em diferentes publicações Ivo Babuška [37, 48, 85] estuda a convergência e o erro associado ao problema de autovalor. Nestes trabalhos, mostra-se que para o problema definido na Equação (5.1) o erro associado à i -ésima frequência pode ser estimado por:

$$\frac{|\omega_p^2 - \omega_{ex}^2|}{\omega_{ex}^2} \leq \|\varepsilon_p\|_E^2 \quad (5.5)$$

onde ω_{ex} é a velocidade angular exata, ou o i -ésimo autovalor exato para do problema, e ω_p é a i -ésima velocidade angular calculada. A velocidade angular ω_p é solução de um sistema gerado a partir da discretização do problema com elementos hierárquico de ordem p . A Equação (5.5) estabelece um valor superior para o erro relativo da solução numérica, e o valor superior é dado pelo erro na norma da energia, expresso por $\| \varepsilon_p \|_E^2$. Na referência [48] é delineada a forma de estimar o erro nesta norma:

$$\varepsilon_i(p, q) = (\| \psi_i(q, p) \|_E - \| \psi_i(p) \|_E)^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

A variável ψ_i é o autovetor associado à i -ésima frequência, $\psi_i(p, q)$ é o autovetor solução do problema para uma discretização usando elementos com polinômios de ordem p aos quais se acrescentou q graus de liberdade hierárquicos. Se ψ_i^{ex} é o autovetor exato para a i -ésima frequência, após alguma manipulação:

$$\varepsilon_i^2(p, q) = \| \psi_i^{ex} - \psi_i(p) \|_E^2 - \| \psi_i^{ex} - \psi_i(p, q) \|_E^2 \quad (5.7)$$

fazendo $q \rightarrow \infty$,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} (\varepsilon_{p,q})^2 = \| \psi_{ex} - \psi_i(p) \|_E^2 = \| \varepsilon_p \|_E^2 \quad (5.8)$$

uma vez que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \| \psi_i^{ex} - \psi_i(p, q) \|_E^2 = 0 \quad (5.9)$$

Fazer $\lim_{q \rightarrow \infty}$ seria o equivalente a aumentar a discretização do domínio até que a solução numérica aproxime-se da solução exata. Portanto, o procedimento é o de elevar o grau hierárquico de p para q para um grupo de elementos ou para todos eles e comparar a solução obtida com a solução anterior representada por $\psi(p)$, para $q \rightarrow \infty$ a solução tende a exata.

Caso a solução esteja muito distante da exata, uma pequena alteração no grau hierárquico implica em um drástica mudança nas soluções do problema $\psi(p, q)$ e $\psi(q)$. É nesta constatação que se baseia o método.

5.1 Implementação do Estimador de Erro

A implementação de um estimador, como o delineado anteriormente apresenta algumas dificuldades. Em primeiro lugar é necessário saber em qual elemento e em qual função de

forma (lateral ou interna) do elemento é necessário aumentar o grau hierárquico e de quanto será este aumento. Em geral o procedimento é o de alterar um por vez todos os graus hierárquicos possíveis para um elemento de k para $k + q$, para cada elemento sobre o domínio, para todas as frequências ou autovalores de interesse.

Resolvida a forma de implementar o estimador surge o problema do cálculo dos autovetores. Para cada grau de liberdade acrescido ao elemento, os autovalores de todo o sistema teriam que ser recalculados. Como a determinação dos autovalores e autovetores é uma operação com alto custo computacional o estimador se tornaria inviável, mesmo para uma malha pequena. Portanto, o processo de estimar o erro só é factível se for possível estimar os autopares do sistema.

A implementação do algoritmo implica em restrições ou exige algum grau de simplificação em relação a aproximação numérica. Em alguns casos, deve-se demonstrar que o algoritmo converge para a solução do problema numérico que aproxima a solução exata desejada [80, 81]. Na Seção 5.1.1 é exposta a técnica desenvolvida por Friberg [27] para estimar os autovalores e os autovetores.

5.1.1 Estimador de Erro de Friberg

De forma genérica, pode-se descrever o modo para ao i -ésimo autovalor pela expressão:

$$\theta_i^n = \sum_{j=1}^n N_j a_j; \quad (5.10)$$

nesta expressão N_j representa as funções de forma, e a_j as variáveis nodais obtidas do i -ésimo autovetor ψ_i^n solução da Equação (5.1). Está sendo considerado que o sistema de equações que descreve o problema tem ordem n . Quando refina-se a aproximação, tem-se:

$$\theta_i^{n+m} = \sum_{j=1}^n N_j a_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} N_j a_j . \quad (5.11)$$

A expressão acima descreve o i -ésimo modo para o sistema dado pela Equação (5.1), em que um dos elementos teve seu termo hierárquico elevado de m graus de liberdade. As variáveis nodais a_j são extraídas do i -ésimo autovetor ϕ_i^{n+m} solução do sistema com $n + m$ termos.

Em um sistema genérico $n \times n$, pode-se usar a ortogonalidade dos autovetores para expressar o i -ésimo autovalor λ_i :

$$\lambda_i^n = \frac{k_i}{m_i} = \frac{\{\psi_i\}^T [K]_{n,n} \{\psi_i\}}{\{\psi_i\}^T [M]_{n,n} \{\psi_i\}} \quad (5.12)$$

sendo $\lambda_i = \omega_i^2$, e ω_i é a i -ésima frequência natural do problema, k_i é a matriz de rigidez modal e m_i matriz de massa modal. Para refinamento hierárquico de ordem $(n + m)$, tem-se:

$$\lambda_i^{(n+m)} = \frac{k_i}{m_i} = \frac{\{\phi_i\}^T [K]_{n+m,n+m} \{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^T [M]_{n+m,n+m} \{\phi_i\}} \quad (5.13)$$

onde ϕ_i são os autovetores do sistema refinado $((n + m) \times (n + m))$. Definindo $n + m = k$, pode-se escrever:

$$[K]_{k,k} = [K]_{n+m,n+m} = \begin{bmatrix} [K]_{n,n} & [K]_{n,m} \\ [K]_{m,n} & [K]_{m,m} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$[M]_{k,k} = [M]_{n+m,n+m} = \begin{bmatrix} [M]_{n,n} & [M]_{n,m} \\ [M]_{m,n} & [M]_{m,m} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

e

$$\{\phi\}_k = \{\phi\}_{n+m} = \begin{Bmatrix} \{\phi\}_n \\ \{\phi\}_m \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Para o i -ésimo autovalor ou i -ésima frequência o erro relativo para o j -ésimo elemento será dado por¹:

$$\varepsilon_{i,j} \approx \eta_{i,j} = \frac{\lambda_i^n - \lambda_i^{(n+m)_j}}{\lambda_i^n} \quad (5.17)$$

Na expressão acima $\lambda^{(n+m)_j}$ representa o autovalor resultante do acréscimo no grau hierárquico de n para $n + m$ no polinômio do elemento j . Expandindo a variável λ_i em uma série de Taylor,

$$\begin{aligned} & \lambda_i(k_i + \Delta k_i, m_i + \Delta m_i) = \\ & \lambda_i(k_i, m_i) + \Delta k_i \frac{\partial}{\partial k_i} \lambda_i(k_i, m_i) + \Delta m_i \frac{\partial}{\partial m_i} \lambda_i(k_i, m_i) + \dots \end{aligned} \quad (5.18)$$

considerando,

$$\Delta \lambda_i = \lambda_i(k_i + \Delta k_i, m_i + \Delta m_i) - \lambda_i(k_i, m_i) \quad (5.19)$$

¹observar que a expressão é diferente da definição dada na Equação (5.5) para erro relativo, todavia estes valores convergem se o erro é pequeno.

da definição de k_i dada na Equação (5.12),

$$\lambda_i(k_i, m_i) = \frac{k_i}{m_i} \quad (5.20)$$

e da ortogonalidade dos autovetores, pode-se avaliar as derivadas parciais:

$$\frac{\partial}{\partial k_i} \lambda_i = \frac{1}{m_i} \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial m_i} \lambda_i = -\frac{k_i}{m_i^2} \quad (5.22)$$

Substituindo as Equações (5.21), (5.22) na serie de Taylor (5.18) truncada nos termos diferenciais de primeira ordem, aplicando o resultado a Eq. (5.19) chega-se a

$$\Delta \lambda_i \approx \frac{\Delta k_i}{m_i} - \frac{k_i \Delta m_i}{m_i^2} \quad (5.23)$$

dividindo a expressão acima por λ_i , usando a definição de λ_i na Equação (5.20) chega-se a expressão para o erro definido na Eq. (5.17)

$$\eta_{i,j} = \frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} \approx \frac{\Delta k_i}{k_i} - \frac{\lambda_i \Delta m_i}{k_i}. \quad (5.24)$$

O termo Δk_i pode ser expresso como

$$\Delta k_i = \{\psi_i\}^T [K]_{n,n} \{\psi_i\} - \{\phi_i\}^T [K]_{n+m,n+m} \{\phi_i\} \quad (5.25)$$

ou

$$\Delta k_i = \{\psi_i\}^T [K]_{n,n} \{\psi_i\} - \{\phi_i\}^T [K]_{k,k} \{\phi_i\} \quad (5.26)$$

usando as Equações (5.14), (5.15), e (5.16) é possível expandir a expressão acima em submatrizes. Como $[K]_{n,n}$ e $[M]_{n,n}$ são matrizes simétricas, $[K]_{n,m} = [K]_{m,n}^T$, $[M]_{m,n} = [M]_{n,m}^T$, e $\{\phi_i\}_m^T [K]_{m,n} \{\phi_i\}_n = [\{\phi_i\}_n^T [K]_{n,m} \{\phi_i\}_m]^T$. Destas considerações chega-se então a:

$$\begin{aligned} \Delta k_i = \{\psi_i\}^T [K]_{n,n} \{\psi_i\} - & \left[\{\phi_i\}_n^T [K]_{n,n} \{\phi_i\}_n \dots \right. \\ & \left. + 2\{\phi_i\}_m^T [K]_{m,n} \{\phi_i\}_n + \{\phi_i\}_m^T [K]_{m,m} \{\phi_i\}_m \right] \end{aligned} \quad (5.27)$$

Próximo a convergência os erros são pequenos, e é bastante razoável considerar $\{\psi\}_n \approx \{\phi\}_n$.

Logo:

$$\Delta k_i = -2\{\phi_i\}_m^T [K]_{m,n} \{\psi_i\}_n - \{\phi_i\}_m^T [K]_{m,m} \{\phi_i\}_m \quad (5.28)$$

Fazendo as mesmas considerações para matriz de massa chega-se a

$$\Delta m_i = -2\{\phi_i\}_m^T [M]_{m,n} \{\psi_i\}_n - \{\phi_i\}_m^T [M]_{m,m} \{\phi_i\}_m \quad (5.29)$$

Com as expressões para Δk_i e para Δm_i será possível então estimar o erro dado pela Equação (5.24) sem a necessidade de recalculer todos os autopares. A única varável desconhecida é $\{\phi\}_m$ que pode ser estimada pela técnica descrita a seguir.

Considerando que próximo a convergência $\{\psi\}_n \approx \{\phi\}_n$, e que $\lambda_i^n \approx \lambda_i^{(n+m)}$, o problema de autovalor ampliado por termos hierárquicos pode ser expresso como:

$$\left[\begin{array}{cc} [K]_{n,n} & [K]_{n,m} \\ [K]_{m,n} & [K]_{m,m} \end{array} \right] - \lambda_i^{(n)} \left[\begin{array}{cc} [M]_{n,n} & [M]_{n,m} \\ [M]_{m,n} & [M]_{m,m} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\psi\}_n \\ \{\phi\}_m \end{array} \right\} = \{0\} \quad (5.30)$$

A segunda linha do sistema dado pela Equação (5.30) vai resultar na seguinte equação matricial,

$$[[K]_{m,n} \{\psi\}_n + [K]_{m,m} \{\phi\}_m - \lambda_i^n ([M]_{m,n} \{\psi\}_n + [M]_{m,m} \{\phi\}_m)] = 0 \quad (5.31)$$

$$[[K]_{m,n} - \lambda_i^n [M]_{m,n}] \{\psi\}_n = - [[K]_{m,m} - \lambda_i^n [M]_{m,m}] \{\phi\}_m \quad (5.32)$$

o que estabelece uma equação para que ϕ_m possa ser estimado:

$$\phi_m = - [[K]_{m,m} - \lambda_i^n [M]_{m,m}]^{-1} [[K]_{m,n} - \lambda_i^n [M]_{m,n}] \{\psi\}_n \quad (5.33)$$

valida para $[K_{m,m} - \lambda_i^n M_{m,m}]$ não singular.

Substituindo as Equações (5.28) e (5.29) na Expressão (5.24), $\eta_{i,j}$ passa a ser determinado pela expressão:

$$\eta_{i,j} = \frac{-2\phi_m^T K_{m,n} \psi_n - \phi_m^T K_{m,m} \phi_m}{k_i} + \lambda_i \frac{2\phi_m^T M_{m,n} \psi_n + \phi_m^T M_{m,m} \phi_m}{k_i} \quad (5.34)$$

reagrupando os termos,

$$\eta_{i,j} = - \frac{2\phi_m^T [K_{m,n} - \lambda_i^n M_{m,n}] \psi_n}{k_i} - \frac{\phi_m^T [K_{m,m} - \lambda_i^n M_{m,m}] \phi_m}{k_i} \quad (5.35)$$

substituindo ϕ_m pela Expressão (5.33) no lado direito do segundo termo, tem-se:

$$\begin{aligned} \eta_{i,j} &= \frac{-2\phi_m^T [K_{m,n} - \lambda_i^n M_{m,n}] \psi_n}{k_i} \dots \\ &\dots + \frac{\phi_m^T [K_{m,m} - \lambda_i^n M_{m,m}] [K_{m,m} - \lambda_i^n M_{m,m}]^{-1} [K_{m,n} - \lambda_i^n M_{m,n}] \psi_n}{k_i} \end{aligned} \quad (5.36)$$

simplificando

$$\eta_{i,j} = -\frac{\phi_m^T [K_{m,n} - \lambda_i^n M_{m,n}] \psi_n}{k_i} \quad (5.37)$$

Substituindo novamente a Expressão (5.33) na Equação (5.37):

$$\eta_{i,j} = \frac{[\psi_n^T [K_{m,n} - \lambda_i^n M_{m,n}]]^T [[K_{m,m} - \lambda_i^n M_{m,m}]^{-1}]^T [K_{m,n} - \lambda_i^n M_{m,n}] \psi_n}{k_i} \quad (5.38)$$

na Expressão (5.38), $\eta_{i,j}$ é o erro aproximado para a i -ésima frequência devido ao aumento no grau hierárquico de ordem n para $n + m$ ocorrida em um dos graus de liberdade no j -ésimo elemento. Portanto, se a malha tem q elementos o erro estimado para i -ésima frequência será a soma do erro de cada um dos q elementos da malha: $\eta_i = \sum_{j=1}^q \eta_{i,j}$. Na prática, o acréscimo do grau hierárquico por cada grau de liberdade do elemento é $m = 1$, o que torna a expressão do estimador de erro bastante simples

$$\eta_{i,j} = \frac{\{[K_{n+1,n} - \lambda_i^n M_{n+1,n}] \{\psi_n\}\}^2}{k_i [K_{n+1,n+1} - \lambda_i^n M_{n+1,n+1}]} \quad (5.39)$$

Desta forma, é possível identificar qual grau de liberdade influencia de maneira mais significativa o erro. Além disso, resulta em redução significativa no trabalho de inversão da matriz de termos diagonais $[K_{m,m} - \lambda_i^{(n)} M_{m,m}]^{-1}$ que passa a ter um único termo.

5.2 Estimador de Friberg Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura na formulação em Potencial de Velocidades

Inicialmente aplica-se o estimador de Friberg ao problema acoplado fluido-estrutura em sua formulação simétrica. A Equação (4.98) representa o problema de vibrações acopladas de um sistema fluido-estrutura genérico em potencial de velocidades:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_e & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0}H_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \cdots \\ + \begin{bmatrix} M_e & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2}E_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.40)$$

E_f é a matriz de compressibilidade H_f a matriz volumétrica para o fluido, K_e e M_e são respectivamente as matrizes de rigidez e de massa, L representando a matriz de acoplamento. O termo w é a variável deslocamento, Ψ é o potencial de velocidades, ρ_0 a densidade do fluido, e c velocidade do som no meio fluido. A variável θ é definida como $\dot{\theta} = -\rho_0 \dot{\Psi}$ e $-\rho_0 \ddot{\Psi} = P$. Em uma representação mais compacta, tem-se:

$$[[A] - \omega[B]] \{x\} = 0 \quad (5.41)$$

As matrizes $[A]$, $[B]$ e o vetor $\{x\}$ são definidas com as mesmas submatrizes empregadas na Equação matricial (4.99):

$$[A] = \begin{bmatrix} K_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0}H_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2}E_f \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & L & M_e & 0 \\ L^T & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2}E_f \\ M_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2}E_f & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

e

$$x = \begin{pmatrix} \{\psi_w\} \\ \{\psi_\theta\} \\ \omega\{\psi_w\} \\ \omega\{\psi_\theta\} \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

Na Equação (5.44), ψ_w é o autovetor de deslocamentos w da estrutura e ψ_θ o autovetor relativo ao campo de pressões, componentes do vetor solução genérico $\{x\}$. A variável ω representa a velocidade angular ou autovalor genérico do problema de autopar, Equação (5.40).

O aumento do grau hierárquico de um elemento estrutural implica no aparecimento de uma linha e uma coluna tanto na matriz $[M]_e$ quanto na matriz $[K]_e$. Mas significará no mínimo duas linhas nas matrizes $[A]$ e $[B]$ como definidas acima. O mesmo ocorre com o elemento fluido onde a elevação de um grau no polinômio hierárquico implica no acréscimo de uma linha e uma coluna em $[H]_f$ e na matriz de compressibilidade $[E]_f$. Deve-se acrescentar porém, que o sistema resultante ainda é um sistema hierárquico uma vez que a matriz original ainda é submatriz da matriz com termo hierárquico adicional. Propõe-se manter o mesmo procedimento acrescentando-se um único grau hierárquico aos graus de liberdade do elemento. A vantagem principal desta técnica reside em operações matriciais mais simples e na possibilidade de localizar o erro com maior precisão.

A técnica proposta por Friberg [27] pode ser empregada para estimar o erro. No entanto, a Equação (5.39) não é aplicável ao problema, pois esta exige o acréscimo de apenas uma linha e coluna às matrizes do sistema. O problema consistirá em desenvolver a Equação (5.38) de forma que seja possível aplica-la ao problema fluido-estrutura formulado em potencial de velocidades. Como a elevação da ordem hierárquica se dará em cada elemento, o estimador pode ser separado em estimador para elementos fluidos e para elementos estruturais, se for desenvolvido a partir das submatrizes. A questão passa a ser então a de determinar uma expressão simples que exija um mínimo de operações de forma a viabilizar o estimador.

5.2.1 Estimador de Erro para Elemento Estrutural

Partindo-se da Equação (5.42), o aumento no termo hierárquico de um dos graus de liberdade do elemento estrutural genérico na matriz $[A]$ resultará em:

$$[A]_{k+m,k+m} = \dots \begin{bmatrix} [K]_{e(n,n)} & [K]_{e(n,n+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [K]_{e(n+1,n)} & [K]_{e(n+1,n+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0}[H]_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [M]_{e(n,n)} & [M]_{e(n,n+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [M]_{e(n+1,n)} & [M]_{e(n+1,n+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2}[E]_f \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Na equação (5.45), m é o número de graus hierárquicos acrescidos ao sistema acoplado, $m = 2$ para esta formulação. O número de graus de liberdade do sistema acoplado original é representado por k . Os índices n e q são respectivamente os graus de liberdade das matrizes que discretizam originalmente o domínio estrutural e o domínio fluido.

Para a matriz $[B]$, os termos acrescidos serão:

$$[B]_{k+m,k+m} = \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & [L]_{(n,q)} & [M]_{e(n,n)} & [M]_{e(n,n+1)} & 0 \\ 0 & 0 & [L]_{(n+1,q)} & [M]_{e(n+1,n)} & [M]_{e(n+1,n+1)} & 0 \\ [L]_{(q,n)}^T & [L]_{(q,n+1)}^T & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2}[E]_f \\ [M]_{e(n,n)} & [M]_{e(n,n+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [M]_{e(n+1,n)} & [M]_{e(n+1,n+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2}[E]_f & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Se $[F]$ for definido como:

$$[F] = [[A]_{m,m} - \lambda_i^{(k)}[B]_{m,m}] \quad (5.47)$$

Para elemento estrutural, $[A]_{m,m}$ e $[B]_{m,m}$ são as matrizes com os termos hierárquicos puros que foram acrescentados ao sistema:

$$F = \left[\left[\begin{array}{cc} [K]_{e(n+1,n+1)} & 0 \\ 0 & [M]_{e(n+1,n+1)} \end{array} \right] - \lambda_i^{(k)} \left[\begin{array}{cc} 0 & [M]_{e(n+1,n+1)} \\ [M]_{e(n+1,n+1)} & 0 \end{array} \right] \right] \quad (5.48)$$

Neste caso, a inversa de $[F]$ será:

$$[F]^{-1} = \frac{1}{\det[F]} \begin{bmatrix} [M]_{e(n+1,n+1)} & \lambda_i^{(k)} [M]_{e(n+1,n+1)} \\ \lambda_i^{(k)} [M]_{e(n+1,n+1)} & [K]_{e(n+1,n+1)} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

onde $\lambda_i^{(k)}$ é o i -ésimo autovalor do sistema de ordem k , e $\det[F]$ é o determinante de $[F]$ dado por:

$$\det[F] = [K]_{e(n+1,n+1)} [M]_{e(n+1,n+1)} - \left(\lambda_i^{(k)} [M]_{e(n+1,n+1)} \right)^2 \quad (5.50)$$

Para a expressão $[[A] - \omega[B]] \{x\} = 0$, o estimador da Equação (5.38) será escrito como:

$$\eta_{i,j} = \left[\{\psi\}_k^T \left[[A]_{m,n} - \lambda_i^{(k)} [B]_{m,n} \right]^T \right] \frac{\left[\left[[A]_{m,m} - \lambda_i^{(k)} [B]_{m,m} \right]^{-1} \right]^T}{k_i} \dots \dots \times \left[[A]_{m,n} - \lambda_i^{(k)} [B]_{m,n} \right] \{\psi\}_k \quad (5.51)$$

As matrizes $[A]_{m,n}$ e $[B]_{m,n}$ representam as linhas resultantes do produto da função hierárquica introduzida com as funções de forma presentes na matriz não modificada:

$$[A]_{m,n} = \begin{bmatrix} [K]_{e(n+1,n)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [M]_{e(n+1,n)} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$[B]_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & L_{(n+1,q)} & M_{e(n+1,n)} & 0 \\ M_{e(n+1,n)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Desenvolvendo o último termo da Equação (5.51), representado pela Expressão (5.54)

$$\begin{aligned} & [A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}] \psi_k = \dots \\ & = \begin{bmatrix} K_{e(n+1,n)} & -\lambda_i^{(k)} L_{(n+1,q)} & -\lambda_i^{(k)} M_{e(n+1,n)} & 0 \\ -\lambda_i^{(k)} M_{e(n+1,n)} & 0 & M_{e(n+1,n)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\psi_w\} \\ \{\psi_\theta\} \\ \omega \{\psi_w\} \\ \omega \{\psi_\theta\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} & [A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}] \psi_k = \dots \\ & = \left\{ \begin{array}{l} K_{e(n+1,n)} \psi_w - \lambda_i^{(k)} L_{(n+1,q)} \psi_\theta - \lambda_i^{(k)} M_{e(n+1,n)} (\omega \{\psi_w\}) \\ -\lambda_i^{(k)} M_{e(n+1,n)} \psi_w + M_{e(n+1,n)} (\omega \{\psi_w\}) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (5.55)$$

como os autovalores simbolizados por λ_i são iguais às frequências ω_i na formulação em potencial de velocidades, então:

$$\begin{aligned}
[A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}] \psi_k &= \dots \\
&= \left\{ \begin{array}{c} K_{e(n+1,n)} \psi_w - \lambda_i^{(k)} L_{(n+1,q)} \psi_\theta - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e(n+1,n)} \psi_w \\ 0 \end{array} \right\} \quad (5.56)
\end{aligned}$$

Como a equação do estimador é dada por:

$$\eta_{i,j} = \frac{[\psi_k^T [A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}]]^T [[F]^{-1}]^T [A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}] \psi_k}{k_i} \quad (5.57)$$

substituindo valores obtidos nas Expressões (5.56) e (5.49) na Equação (5.57) acima:

$$\begin{aligned}
\eta_{i,j} &= \frac{1}{k_i} \left\{ \begin{array}{c} K_{e(n+1,n)} \psi_w - \lambda_i^{(k)} L_{(n+1,q)} \psi_\theta - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e(n+1,n)} \psi_w \\ 0 \end{array} \right\}^T \times \\
&\quad \times \left(\frac{1}{K_{e(n+1,n+1)} M_{e(n+1,n+1)} - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e(n+1,n+1)}^2} \times \right. \\
&\quad \times \left. \begin{bmatrix} M_{e(n+1,n+1)} & \lambda_i^{(k)} M_{e(n+1,n+1)} \\ \lambda_i^{(k)} M_{e(n+1,n+1)} & K_{e(n+1,n+1)} \end{bmatrix}^T \right) \times \\
&\quad \times \left\{ \begin{array}{c} K_{e(n+1,n)} \psi_w - \lambda_i^{(k)} L_{(n+1,q)} \psi_\theta - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e(n+1,n)} \psi_w \\ 0 \end{array} \right\} \quad (5.58)
\end{aligned}$$

que resultará em

$$\eta_{i,j}^e = \frac{\left(K_{e(n+1,n)} \psi_w - \lambda_i^{(k)} L_{(n+1,q)} \psi_\theta - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e(n+1,n)} \psi_w \right)^2}{k_i \left(K_{e(n+1,n+1)} - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e(n+1,n+1)} \right)} \quad (5.59)$$

que é o estimador de erro dos autovalores dos elementos estruturais do sistema acoplado.

5.2.2 Estimador de Erro para Elemento Fluido

O aumento do grau hierárquico de um elemento fluido implica no aparecimento de uma linha e uma coluna tanto na matriz volumétrica $[H]_f$ quanto na matriz de compressibilidade $[E]_f$. Nas Expressões matriciais abaixo (5.60) e (5.61), m indica o número de graus hierárquicos acrescentados ao sistema, k é o número de graus de liberdade do sistema acoplado original e q o número de graus de liberdade iniciais do modelo discreto do fluido. Para as matriz $[A]$ e para a matriz $[B]$, os termos acrescentados serão:

$$[A]_{k+m,k+m} = \dots$$

$$\begin{bmatrix} K_{e(n,n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{H_f(q,q)}{\rho_0} & -\frac{H_f(q,q+1)}{\rho_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{H_f(q+1,q)}{\rho_0} & -\frac{H_f(q+1,q+1)}{\rho_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{e(n,n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_f(q,q)}{\rho_0 c^2} & -\frac{E_f(q,q+1)}{\rho_0 c^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_f(q+1,q)}{\rho_0 c^2} & -\frac{E_f(q+1,q+1)}{\rho_0 c^2} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

$$[B]_{k+m,k+m} = \dots$$

$$\begin{bmatrix} 0 & L_{(n,q)} & L_{(n,q+1)} & M_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [L_{(n,q)}]^T & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_f(q,q)}{\rho_0 c^2} & -\frac{E_f(q,q+1)}{\rho_0 c^2} \\ [L_{(n,q+1)}]^T & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_f(q+1,q)}{\rho_0 c^2} & -\frac{E_f(q+1,q+1)}{\rho_0 c^2} \\ M_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E_f(q,q)}{\rho_0 c^2} & -\frac{E_f(q,q+1)}{\rho_0 c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E_f(q+1,q)}{\rho_0 c^2} & -\frac{E_f(q+1,q+1)}{\rho_0 c^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

De forma análoga ao procedimento seguido para a estrutura, a matriz F dos termos resultantes da integração do produto dos termos hierárquicos acrescidos ao sistema será:

$$F = \frac{1}{\rho_0} \left[\begin{bmatrix} -H_{f(q+1,q+1)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c^2} E_{f(q+1,q+1)} \end{bmatrix} \dots \right. \\ \left. + \frac{\lambda_i^{(k)}}{c^2} \begin{bmatrix} 0 & E_{f(q+1,q+1)} \\ E_{f(q+1,q+1)} & 0 \end{bmatrix} \right] \quad (5.62)$$

e a inversa de $[F]$,

$$F^{-1} = \frac{1}{\det[F]} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho_0 c^2} E_{f(q+1,q+1)} & -\frac{\lambda_i^{(k)}}{\rho_0 c^2} E_{f(q+1,q+1)} \\ -\frac{\lambda_i^{(k)}}{\rho_0 c^2} E_{f(q+1,q+1)} & -\frac{1}{\rho_0} H_{f(q+1,q+1)} \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

sendo $\det[F]$ dado por:

$$\det[F] = \frac{E_{f(q+1,q+1)}}{\rho_0^2 c^2} \left[H_{f(q+1,q+1)} - \left(\frac{\lambda_i^{(k)}}{c} \right)^2 E_{f(q+1,q+1)} \right] \quad (5.64)$$

logo

$$[F]^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{\rho_0} \left[H_{f(q+1,q+1)} - \left(\frac{\lambda_i^{(k)}}{c} \right)^2 E_{f(q+1,q+1)} \right]} \begin{bmatrix} -1 & -\lambda_i^{(k)} \\ -\lambda_i^{(k)} & -\frac{\frac{1}{\rho_0} H_{f(q+1,q+1)}}{\frac{1}{\rho_0 c^2} E_{f(q+1,q+1)}} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Para o problema de autovalor $[[A] - \omega[B]] \{x\} = 0$ o estimador dado pela Equação (5.38) foi escrito como:

$$\eta_{i,j} = [\psi_k^T [A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}]^T] \times \frac{[[A_{m,m} - \lambda_i^{(k)} B_{m,m}]^{-1}]^T}{k_i} \times [A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}] \psi_k \quad (5.66)$$

As matrizes $[A]_{m,n}$ e $[B]_{m,n}$,

$$[A]_{m,n} = -\frac{1}{\rho_0} \begin{bmatrix} 0 & H_{f(q+1,q)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c^2} E_{f(q+1,q)} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

$$[B]_{m,n} = \begin{bmatrix} [L_{(n,q+1)}]^T & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2} E_{f(q+1,q)} \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2} E_{f(q+1,q)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

representam as linhas acrescidas às matrizes $[A]$ e $[B]$ resultantes do produto das funções de forma do sistema original pela função hierárquica acrescida. Substituindo-se as Equações (5.67) e (5.68), no último termo da Expressão (5.66), tem-se:

$$[A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}] \psi_k = \dots \begin{bmatrix} -\lambda_i^{(k)} [L_{(n,q+1)}]^T & -\frac{H_{f(q+1,q)}}{\rho_0} & 0 & \lambda_i^{(k)} \frac{E_{f(q+1,q)}}{\rho_0 c^2} \\ 0 & \lambda_i^{(k)} \frac{E_{f(q+1,q)}}{\rho_0 c^2} & 0 & -\frac{E_{f(q+1,q+1)}}{\rho_0 c^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\psi_w\} \\ \{\psi_\theta\} \\ \omega \{\psi_w\} \\ \omega \{\psi_\theta\} \end{Bmatrix} \quad (5.69)$$

$$[A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}] \psi_k = \dots \left\{ \begin{array}{l} -\lambda_i^{(k)} [L_{(n,q+1)}]^T \{\psi_w\} - \frac{H_{f(q+1,q)}}{\rho_0} \{\psi_\theta\} + \lambda_i^{(k)} \frac{E_{f(q+1,q)}}{\rho_0 c^2} \omega \{\psi_\theta\} \\ \lambda_i^{(k)} \frac{E_{f(q+1,q)}}{\rho_0 c^2} \{\psi_\theta\} - \frac{E_{f(q+1,q+1)}}{\rho_0 c^2} \omega \{\psi_\theta\} \end{array} \right\} \quad (5.70)$$

Os autovalores simbolizados por λ são iguais à frequência ω na formulação em potencial de velocidades, o que permite escrever:

$$[A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}] \psi_k = \dots = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{H_{f(q+1,q)}}{\rho_0} \{\psi_\theta\} - \lambda_i^{(k)} [L_{(n,q+1)}]^T \{\psi_w\} + (\lambda_i^{(k)})^2 \frac{E_{f(q+1,q)}}{\rho_0 c^2} \{\psi_\theta\} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (5.71)$$

substituindo valores obtidos nas Expressões (5.71) e (5.63) acima na Equação (5.66), resultará em

$$\eta_{i,j}^f = \frac{\left(-\frac{1}{\rho_0} H_{f(q+1,q)} \psi_\theta - \lambda_i^{(k)} [L_{(n,q+1)}]^T \psi_w + \frac{(\lambda_i^{(k)})^2}{\rho_0 c^2} E_{f(q+1,q)} \psi_\theta \right)^2}{k_i \left(\frac{1}{\rho_0} \left[H_{f(q+1,q+1)} - \left(\frac{\lambda_i^{(k)}}{c} \right)^2 E_{f(q+1,q+1)} \right] \right)} \quad (5.72)$$

que é o estimador de erro dos elementos fluidos em problemas de vibrações livres com acoplamento fluido-estrutura, em que foi considerando o valor positivo do numerador da expressão.

5.3 Estimador de Erro de Friberg Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura em formulação de Pressão ou Não Simétrica

Como mencionado anteriormente, qualquer variável que mantenha algum tipo de relação linear com a variável pressão ou com a variável potencial de velocidade irá satisfazer a equação da onda, Equação (3.9). Isto significa que a discretização do domínio não mudará com a mudança de variáveis, as matrizes geradas são essencialmente as mesmas, exceto pelas constantes envolvidadas na relação linear. As Equações (5.59) e (5.72)

$$\eta_{i,j}^e = \frac{\left(K_{e(n+1,n)}\psi_w - \lambda_i^{(k)} L_{(n+1,q)}\psi_\theta - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e(n+1,n)}\psi_w \right)^2}{k_i \left(K_{e(n+1,n+1)} - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e(n+1,n+1)} \right)} \quad (5.73)$$

$$\eta_{i,j}^f = \frac{\left(-\frac{1}{\rho_0} H_{f(q+1,q)}\psi_\theta - \lambda_i^{(k)} \left[L_{(n,q+1)} \right]^T \psi_w + \frac{(\lambda_i^{(k)})^2}{\rho_0 c^2} E_{f(q+1,q)}\psi_\theta \right)^2}{k_i \left(\frac{1}{\rho_0} \left[H_{f(q+1,q+1)} - \left(\frac{\lambda_i^{(k)}}{c} \right)^2 E_{f(q+1,q+1)} \right] \right)} \quad (5.74)$$

deduzidas nas Seções 5.2.1 e 5.2.2 o foram a partir do problema fluido-estrutura na formulação em Potencial de Velocidades que levava ao problema simétrico. No entanto, estas equações são expressas em função das submatrizes resultantes da discretização do domínio que não é alterado com a mudança de variáveis. Isto significa que o estimador para o problema simétrico pode ser empregado para o problema não simétrico uma vez que o problema é equivalente e as submatrizes empregadas no estimador são as mesmas geradas pelo problema não simétrico.

As Expressões (5.73) e (5.74) são as principais contribuições teóricas deste trabalho. Por usar a formulação p diferencia-se do método na formulação h proposto por Alonso A. *et al* [47]. Alonso A. formula o problema fluido-estrutura usando o método deslocamentos baseado na técnica desenvolvida por Bermúdez [24], técnica apresentada na Seção 4.1. Este era até então o único trabalho publicado sobre estimadores de erro aplicados ao problema fluido-estrutura. No Capítulo 6 encontram-se alguns comentários sobre a implementação deste estimador.

5.4 Algoritmo do Processo p -Adaptativo

No método dos Elementos Finitos, o objetivo do estimador é o de diagnosticar onde ocorre e a ordem do erro da aproximação numérica. Estes procedimentos são *a posteriori*, ou avaliam o erro a partir de resultados do problema discretizado. O processo adaptativo parte do erro estimado para alterar o número de graus de liberdade da discretização do problema, de forma a distribuí-lo e minimizá-lo. Os procedimentos que alteram discretização do domínio em função do erro são chamados processos h -adaptativos. Os procedimentos que a partir do erro alteram a ordem hierárquica das funções de forma usadas para aproximar o problema são chamados p -adaptativos. Existem também os métodos mistos ou h - p [38, 28] que usam ambos procedimentos. No trabalho publicado por Noor A. K. [28] encontra-se uma discussão bastante objetiva e fontes bibliográficas sobre qualidade e controle da solução no método dos Elementos Finitos.

A rotina p -adaptativa implementada baseia-se no trabalho de Friberg O. *et al.* [27, 49]. A apresentação dos programas de implementação numérica não é muito usual, em geral pelo grande espaço ocupado. Detalhes da implementação também variam com a linguagem computacional empregada. Como esta é uma informação importante, apresenta-se as linhas gerais do algoritmo desenvolvido neste trabalho empregando a rotina p -adaptativa:

- 1- determinação das matrizes de conectividade entre elementos estruturais (InciE), de coordenadas (cordeE), identificadoras do número das equações (IdE), e do grau de liberdade do elemento (GdleE);
- 2- determinação das matrizes de conectividade entre elementos fluidos (InciF), de coordenadas (cordeF), identificadoras do número das equações (IdF) e do grau de liberdade do elemento (GdleF);
- 3- identificação dos nós e elementos do fluido e da estrutura em contato, criação da matriz de conectividade (InciFS);
- 4- início do processo iterativo
 - a- cálculo e montagem dos termos das matrizes globais de massa (M_g) e de rigidez

- da estrutura (K_g) usando informações das matrizes identificadoras do número da equação (IdE) e a de graus de liberdade por elemento (GdleE). Todos elementos das matrizes são calculados com um termo hierárquico adicional por grau de liberdade do elemento. Estes termos adicionais serão usados durante o processo de estimativa de erro;
- b- determinação de matrizes de compressibilidade E_g e volumétrica H_g do fluido. Como no processamento da matriz da estrutura, as matrizes que definem a discretização do fluido também são geradas com termos hierárquicos adicionais;
 - c- determinação da matriz de interação fluido-estrutura ou de acoplamento L_g , usando termos hierárquicos adicionais;
 - d- montagem das matrizes do problema fluido-estrutura na formulação em pressão Equação (4.86), ou em potencial de velocidades Equação (4.99), usando as matrizes efetivas M_{ef} , K_{ef} , H_{ef} , E_{ef} , e L_{ef} extraídas das matrizes globais sem os termos hierárquicos adicionais;
 - e- determinação dos autovalores e autovetores do problema acoplado, ordenamento dos autovalores e autovetores;
 - f- início do procedimento de estimativa de erro;
 - i- fazer a frequência i variar do menor valor calculado à frequência de interesse;
 - percorrer todos os elementos do domínio estrutural;
 - percorrer todos os graus de liberdade k do elemento j , calcular o erro usando a Expressão (5.59);
 - armazenar erro calculado para o grau de liberdade do elemento na matriz de erros da estrutura $erroE(i, j, k)$;
 - ii- fazer a frequência i variar do menor valor calculado à frequência de interesse;
 - percorrer todos os elementos do domínio fluido;
 - percorrer todos os graus de liberdade k do elemento j , calcular o erro usando a Expressão (5.72);

- armazenar erro calculado para o grau de liberdade do elemento na matriz de erros do fluido $\text{erroF}(i, j, k)$;
- g- determinar erro para cada uma das frequências da faixa de frequências de interesse;
- i - se alguma frequência na faixa de interesse apresentar erro maior que o erro prescrito, então:
 - determinar para elementos fluidos e estruturais os graus de liberdade que apresentem erros maiores que o erro aceitável. O erro máximo aceitável por grau de liberdade será dado pela razão entre o erro prescrito para a frequência pelo número de graus de liberdade do sistema;
 - aumentar o grau de liberdade hierárquico do elemento que apresentar erro superior ao valor de erro prescrito, atualizar as matrizes (GdleE) e (GdleF);
 - retornar ao item 4 para atualizar as matrizes globais e reiniciar o processo iterativo;
- ii - finalizar processo iterativo se todas as frequência na faixa de interesse apresentarem erro menor que o erro prescrito;

5- fim da rotina

Capítulo 6

Resultados Numéricos e Validação

Neste capítulo serão apresentados os resultados da implementação numérica para a formulação desenvolvida nos capítulos anteriores. Em seções específicas, estão os resultados para elementos hierárquicos estruturais e fluidos. Os casos apresentados têm como objetivo testar a implementação das funções de forma, o comportamento do estimador de erros e do procedimento adaptativo.

O problema acoplado é implementado na formulação não simétrica, é usado, como problema teste, a configuração publicada no trabalho de Y. S. Shin e M. K. Chargin [12]. Nesse trabalho, são apresentadas soluções teóricas para as frequências associadas aos modos estruturais dominantes, o que permitiu avaliar, de forma mais segura, o comportamento do estimador e do procedimento adaptativo para o problema fluido-estrutura.

6.1 Resultados Obtidos para Elementos de Barra em tração e compressão

A equação da barra, Equação (2.3), foi discretizada seguindo a formulação de Elementos Finitos desenvolvida no Capítulo 2, Seção 2.1. O problema de vibrações para uma barra engastada livre será o único considerado. Empregou-se módulo de elasticidade $E = 1,0N/m^2$, densidade $\rho_e = 1,0Kg/m^3$, área $A = 1m^2$, e comprimento $L_T = 1m$. Os elementos unidimensionais não apresentam os problemas de distorção ao contrário do que ocorre com os elementos bi e tridimensionais. Portanto, para testar o comportamento do estimador e da

p	Nº equações	$\omega_1^{(E.F.)}$	$\omega_2^{(E.F.)}$	$\omega_3^{(E.F.)}$	$\omega_4^{(E.F.)}$	$\omega_5^{(E.F.)}$
1	5	1.5933	5.1117	8.6829	14.6411	43.5443
2	10	1.5708	4.7325	8.1805	11.9693	16.2706
3	15	1.5708	4.7127	7.8556	11.0801	14.6036
4	20	1.5708	4.7124	7.8549	11.0047	14.1635
5	25	1.5708	4.7124	7.8540	10.9959	14.1449
6	30	1.5708	4.7124	7.8540	10.9956	14.1373
7	35	1.5708	4.7124	7.8540	10.9956	14.1372
<i>Solução Exata</i>		1.5708	4.7124	7.8540	10.9956	14.1372

Tabela 6.1: FREQUÊNCIAS NATURAIS DA BARRA USANDO 5 ELEMENTOS NÃO UNIFORMES. FREQUÊNCIAS EM rad/s .

rotina adaptativa serão empregados elementos com comprimento não uniforme. O domínio foi discretizado com 5 elementos com dimensões dadas respectivamente por: $L_1^e = 0,025m$, $L_2^e = 0,075m$, $L_3^e = 0,2m$, $L_4^e = 0,3m$, e $L_5^e = 0,4m$.

O problema, como formulado acima, tem como resultado as frequências (rad/s) mostradas na Tabela (6.1). Nesta tabela é mostrada a evolução do número de equações do sistema e das frequências, em função da ordem p dos polinômios hierárquicos, neste caso considerada

Nº iterações	Nº equações	$\omega_1^{(E.F.)}$	$\omega_2^{(E.F.)}$	$\omega_3^{(E.F.)}$	$\omega_4^{(E.F.)}$	$\omega_5^{(E.F.)}$
1	5	1.5933	5.1117	8.6829	14.6411	43.5443
2	10	1.5708	4.7325	8.1805	11.9693	16.2706
3	15	1.5708	4.7127	7.8556	11.0801	14.6036
4	18	1.5708	4.7124	7.8549	11.0047	14.1635
5	21	1.5708	4.7124	7.8540	10.9959	14.1449
6	23	1.5708	4.7124	7.8540	10.9956	14.1373
7	25	1.5708	4.7124	7.8540	10.9956	14.1372
<i>Solução Exata</i>		1.5708	4.7124	7.8540	10.9956	14.1372

Tabela 6.2: FREQUÊNCIAS NATURAIS DA BARRA EM PROCESSO p -ADAPTATIVO USANDO 5 ELEMENTOS NÃO UNIFORMES. FREQUÊNCIAS EM rad/s .

a mesma para todos elementos. As soluções exatas do problema podem ser obtidas das referências [73, 38] e foram incluídas na última linha desta tabela para facilitar a avaliação do processo de convergência.

Na Tabela (6.2), mostra-se o resultado das iterações do processo adaptativo do problema de autovalor da barra engastada livre. O processo adaptativo foi implementado usando o procedimento publicado por Friberg *et. al.* [49] e o estimador dado pela Equação (5.39). O comportamento do processo p -adaptativo é observado pelo número total de equações do sistema e pelas frequências. A última iteração ocorria quando o erro era inferior a um valor prescrito para toda a faixa de frequências de interesse. Nesse exemplo, o erro prescrito foi de 0.001% e o limite superior de frequências 17 *rad/s*.

A Tabela 6.1 reproduz o processo iterativo em que todos os elementos têm a mesma ordem hierárquica p . A Tabela 6.2 apresenta os resultados da implementação da rotina p -adaptativa, em que a ordem hierárquica só é acrescida se o erro associado a este grau de liberdade estiver acima do valor de erro prescrito. As Tabelas 6.1 e 6.2 apresentam resultados ao final do processo iterativo idênticos no número de iterações, na ordem máxima dos polinômios e nos valores finais para a faixa de frequências. A única diferença é no número total de equações do sistema, ao final do processo iterativo. Esta diferença é expressiva, o sistema de equações gerado pela rotina com distribuição uniforme da ordem p dos polinômios é 40% maior que o sistema resultante do processo p -adaptativo, tendo este como base.

Para ilustrar o comportamento da forma dos modos foi incluída a Figura (6.1) que mostra a evolução do 5º modo para as iterações 2, 3, 4, 5, 6, 7 do processo adaptativo, mostrado na Tabela (6.2). Nessa figura, o 5º modo foi pós processado, e o deslocamento longitudinal relativo foi desenhado, para maior clareza, como sendo transversal.

O procedimento de pós-processamento dos resultados parte da equação:

$$u = u_1 N_1 + u_2 N_2 + a_1 N_3 + a_2 N_4 + \dots + a_n N_n \quad (6.1)$$

sendo u o deslocamento longitudinal e N_i as funções de interpolação definidas pelas equações, Equação (2.5), $N_1 = (1 - \xi)/2$, Equação (2.6), $N_2 = (1 + \xi)/2$ e Equação (2.15) para variável ξ no intervalo $-1 \leq \xi \leq 1$. Conhecidos os deslocamentos nodais relativos u_1 , u_2 , e os coeficientes dos termos hierárquicos a_i obtidos dos autovetores, os valores intermediários

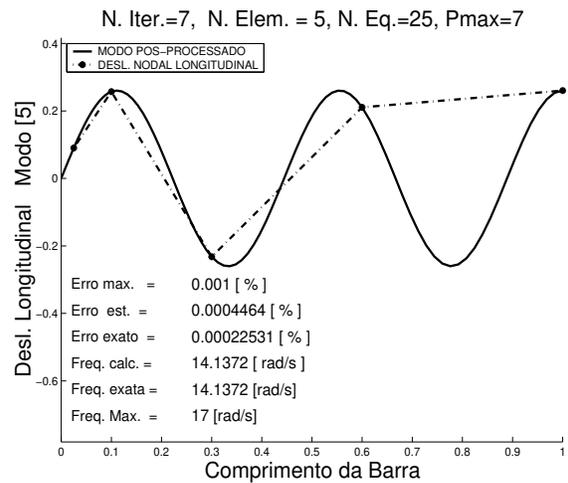
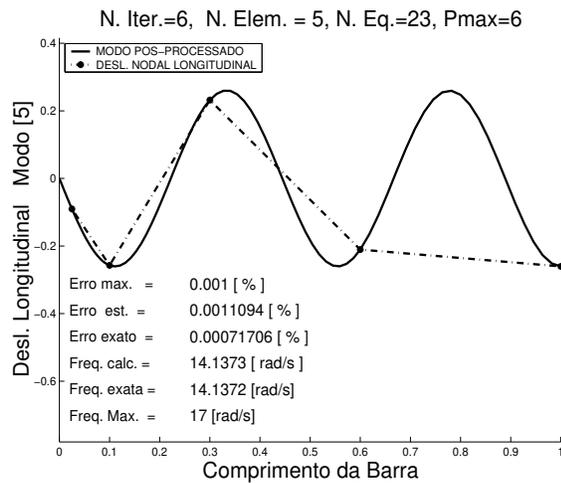
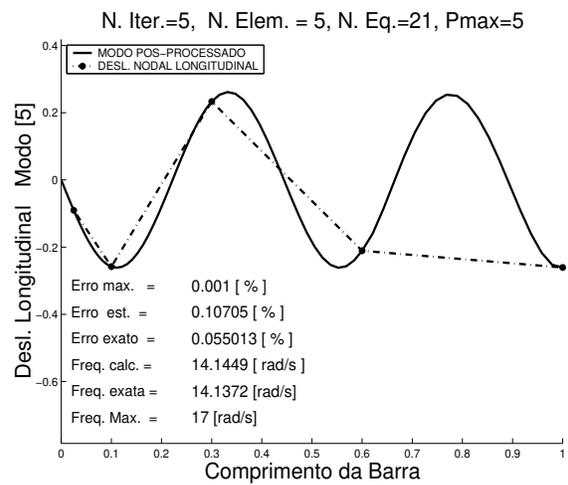
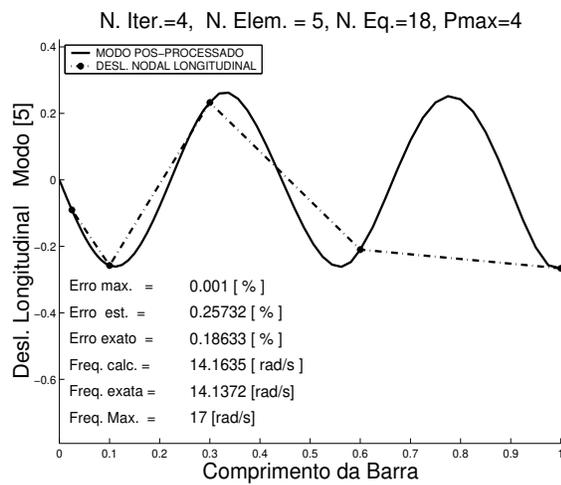
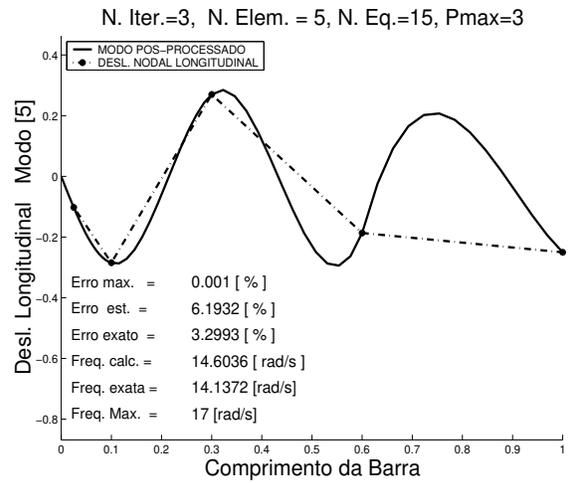
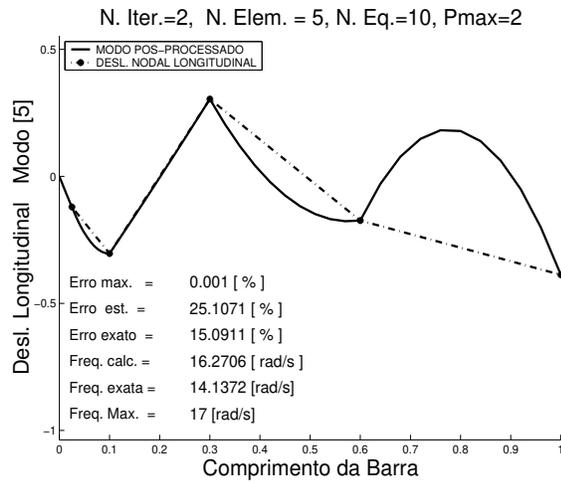


Figura 6.1: CONVERGÊNCIA DO 5^o MODO DO PROBLEMA DE VIBRAÇÕES LIVRES PARA BARRA.

Nº eq.	p	$\omega_1^{(E.F.)}$	$\omega_2^{(E.F.)}$	$\omega_3^{(E.F.)}$	$\omega_4^{(E.F.)}$	$\omega_5^{(E.F.)}$	$\omega_6^{(E.F.)}$
6	1	51	232	538	1501	4458	15835
9	2	50	202	535	1000	1885	4006
12	3	50	200	452	910	1751	2510
15	4	50	200	452	807	1349	2460
18	5	50	200	450	805	1280	1884
21	6	50	200	450	800	1256	1871
24	7	50	200	450	800	1251	1805
27	8	50	200	450	800	1250	1803
30	9	50	200	450	800	1250	1800
<i>Solução Exata</i>		50	200	450	800	1250	1800

Tabela 6.3: FREQUÊNCIAS NATURAIS DA VIGA USANDO 3 ELEMENTOS NÃO UNIFORMES. FREQUÊNCIAS EM HERTZ.

podem ser obtidos variando ξ entre -1 a 1 , na Equação (6.1). Este procedimento será aplicado ao problema de vibrações livres da viga, ao problema acústico interno e também ao problema fluido-estrutura.

6.2 Resultados Obtidos para Elementos de Viga em flexão

A forma fraca da equação de vibrações livres para viga, Equação (2.37), foi discretizada seguindo a formulação de Elementos Finitos desenvolvida no Capítulo 2, Seção 2.2. As propriedades do material, dimensões e características da estrutura, empregadas no problema teste, são: módulo de elasticidade $E = 2,068 \times 10^{11} N/m^2$, massa específica $\rho_e = 7830,8 Kg/m^3$, área $A = 0,005058 m^2$, momento de inércia em relação à linha neutra $I = 0,1675 \times 10^{-4} m^4$, e comprimento total $L_T = 3.048 m$. Para testar o comportamento do estimador e da rotina adaptativa foram empregados elementos não uniformes. O domínio foi discretizado com 3 elementos aos quais atribuíram-se os seguintes valores de $L_1^e = 0,3048 m$, $L_2^e = 0,6096 m$, $L_3^e = 2,1336 m$. Todos os resultados apresentados são para viga simplesmente suportada nas duas extremidades. Exceto pela discretização, esta viga será o elemento elástico que fecha a cavidade acústica descrita e analisada na Seção 6.4.

$N^\circ \text{ eq.}$	p	$\omega_1^{(E.F.)}$	$\omega_2^{(E.F.)}$	$\omega_3^{(E.F.)}$	$\omega_4^{(E.F.)}$	$\omega_5^{(E.F.)}$	$\omega_6^{(E.F.)}$
6	1	51	232	538	1501	–	–
9	2	50	202	535	1000	1885	–
11	3	50	200	452	910	1751	–
12	4	50	200	452	807	1349	–
13	5	50	200	450	805	1280	1884
14	6	50	200	450	800	1256	1871
15	7	50	200	450	800	1251	1805
16	8	50	200	450	800	1250	1803
17	9	50	200	450	800	1250	1800
<i>Solução Exata</i>		50	200	450	800	1250	1800

Tabela 6.4: FREQUÊNCIAS NATURAIS DA VIGA EM PROCESSO p -ADAPTATIVO USANDO 3 ELEMENTOS NÃO UNIFORMES. FREQUÊNCIAS EM HERTZ.

A evolução das frequências naturais em função do refinamento da malha é apresentado nas Tabelas (6.3) e (6.4). A Tabela (6.3) mostra a evolução do número de equações do sistema e das frequências correspondentes aos 6 primeiros modos com a ordem p dos polinômios hierárquicos. Neste caso, o grau hierárquico foi o mesmo para todos os elementos. A solução exata do problema [73] está na última linha, tanto na Tabela (6.3), quanto na Tabela (6.4).

A Tabela (6.4) mostra o resultado das iterações do processo p -adaptativo. Implementou-se o procedimento publicado por Friberg *et al.* [49] e foi usado o estimador dado pela Equação (5.39). O comportamento do processo adaptativo é dado pelo número total de equações do sistema e pelas frequências correspondentes aos 6 primeiros modos. Neste caso, a ordem dos polinômios não era necessariamente a mesma para todos os elementos e dependia do erro estimado e da forma de implementação do algoritmo. O algoritmo interrompe o processo quando o erro cai abaixo de um valor prescrito para toda a faixa de frequências de interesse. Neste exemplo, todas as frequências até o limite superior de 2005 Hz apresentavam um erro de no máximo 0.1%.

O comportamento observado nas Tabelas (6.3) e (6.4), é semelhante ao observado para a barra. Novamente, o número total de iterações e a ordem hierárquica máxima ao final do processo iterativo são os mesmos para os dois casos. Neste exemplo, o número total de

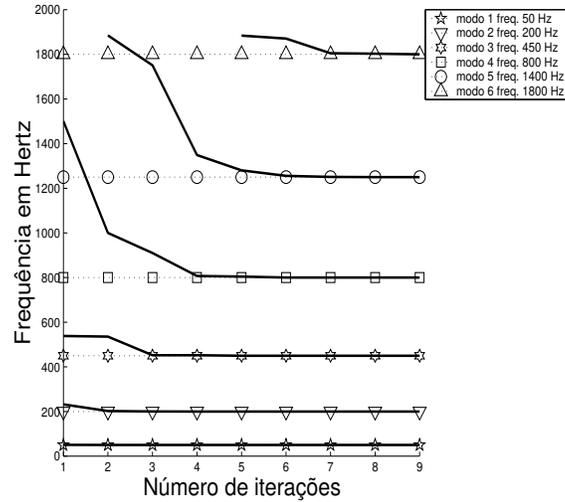


Figura 6.2: CONVERGÊNCIA DAS FREQUÊNCIAS ASSOCIADAS AOS 6 PRIMEIROS MODOS DO PROBLEMA DE VIBRAÇÕES LIVRES PARA VIGA. PROCESSO p -ADAPTATIVO.

equações do sistema gerado por elementos com ordem hierárquica uniforme é 76% maior em relação ao sistema gerado pelo processo p -adaptativo, tendo este como base. Esta redução é bastante expressiva e a economia no tempo de processamento muito significativo.

A Figura (6.2) mostra a evolução das frequências calculadas ao longo das sucessivas iterações. As Figuras (6.3) e (6.5) descrevem a evolução dos erros associados às frequências. Esses erros são apresentados em função do número de equações ou de graus de liberdade do problema. Os erros estimados e calculados muito elevados foram eliminados dos gráficos de forma a permitir uma melhor definição ao processo de convergência. As aproximações feitas na dedução da expressão do estimador permitem concluir que o estimador é mais preciso para pequenos erros ou para o processo mais próximo a convergência, seção 5.1.1. Esta faixa de erro, onde o estimador é mais confiável, foi a que se procurou apresentar nestas figuras.

Os modos apresentados na Figura (6.5) são os modos pós-processados obtidos ao final do processo adaptativo. O estimador é um estimador para autovalores, no entanto, a Figura (6.5) mostra que os modos (autovetores pós-processados) ficam muito bem definidos mesmo com uma malha muito grosseira, como a empregada.

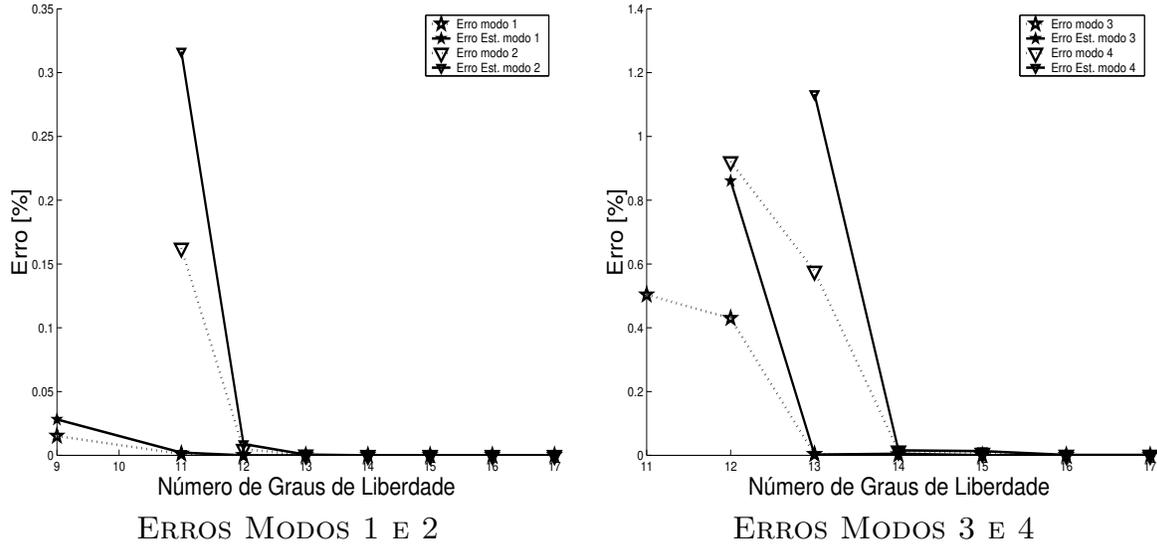


Figura 6.3: ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS PARA OS MODOS 1, 2, 3 E 4 DA VIGA. PROCESSO p -ADAPTATIVO.

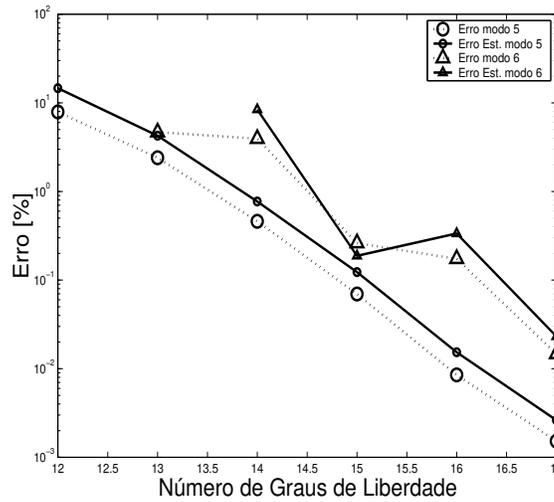


Figura 6.4: ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS PARA OS MODOS 5 E 6 DA VIGA. PROCESSO p -ADAPTATIVO.

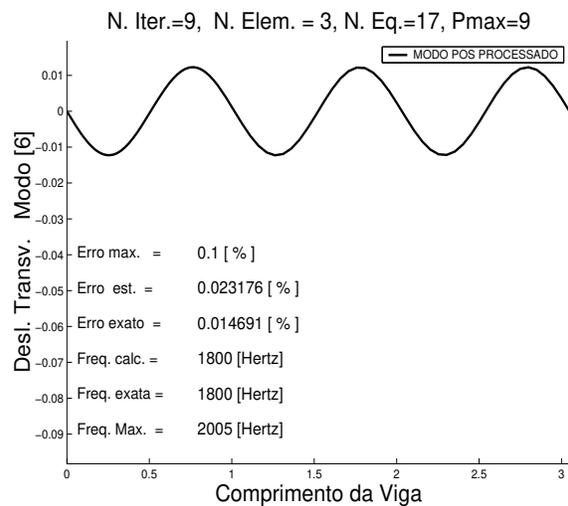
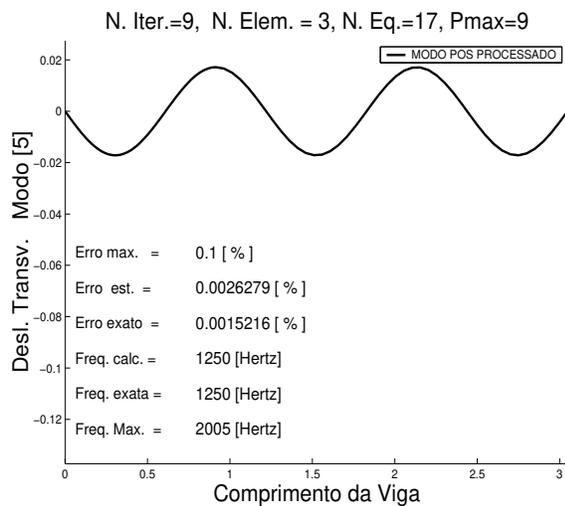
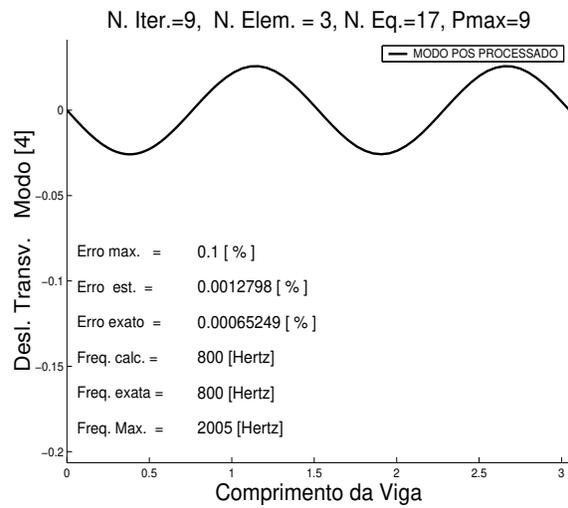
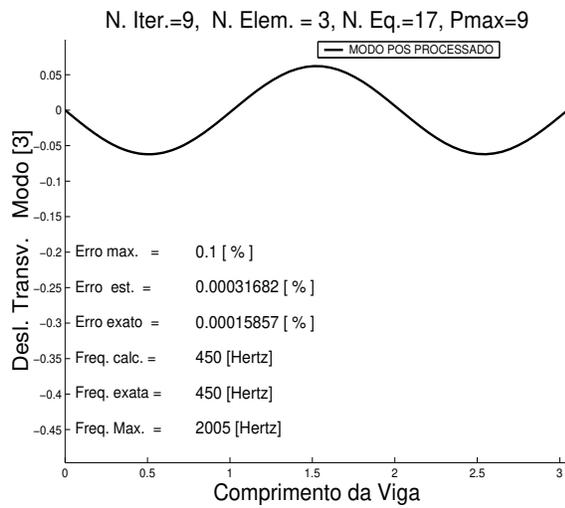
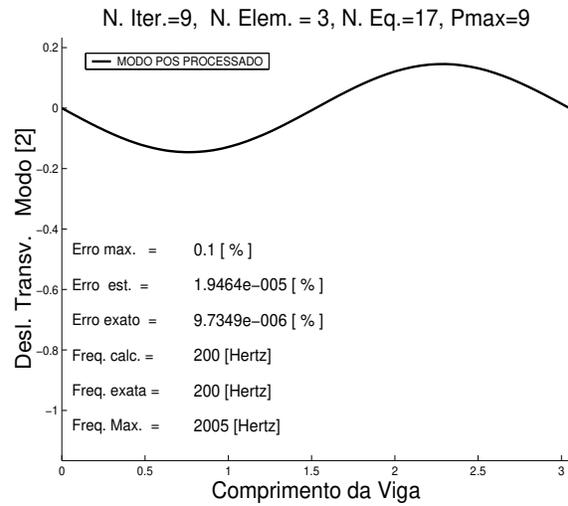
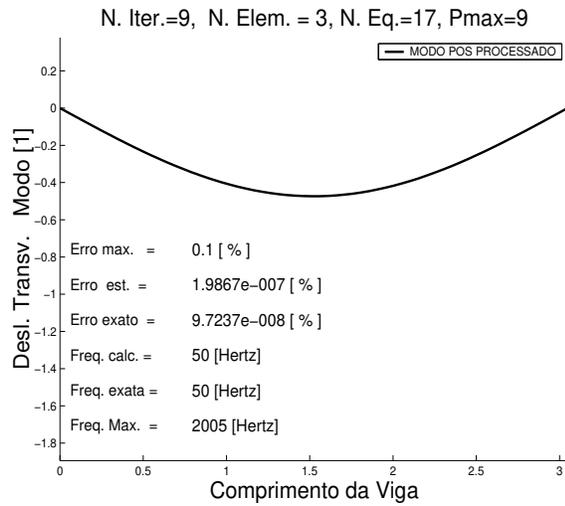


Figura 6.5: MODOS DA VIGA AO FINAL DO PROCESSO *p*-ADAPTATIVO.

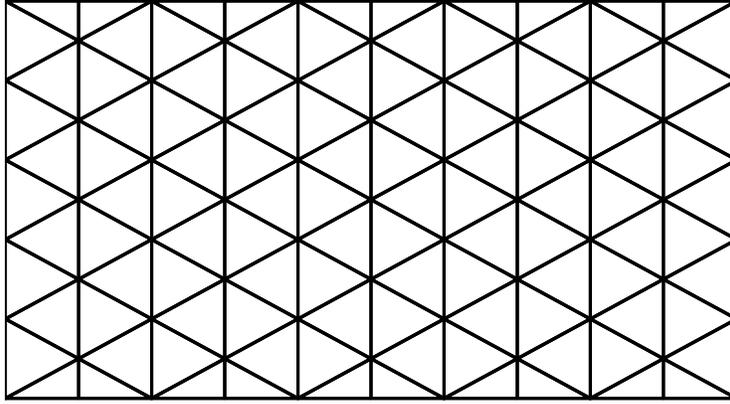


Figura 6.6: MALHA $F110$, 110 ELEMENTOS, 71 NÓS, GRAU DE DISTORÇÃO MEDIO $\alpha_{med} = 0,9276$, $h_{med} = 0.63474$, 90 ELEMENTOS COM $\alpha = 0.99$, 20 ELEMENTOS COM $\alpha = 0.693$.

6.3 Resultados Obtidos para Elementos Fluidos em Cavidade Acústica Fechada

Nesta seção, mostram-se os resultados da aplicação do estimador de erro como apresentado na seção 5.1.1, do Capítulo 5, ao problema acústico interno desacoplado bidimensional. Com o objetivo de validar o procedimento adaptativo, analisam-se os modos acústicos naturais em uma cavidade retangular de comprimento $L=3,048m$ com altura $H=6,096m$. As propriedades empregadas para caracterizar o meio acústico foram $c=1524m/s$ e densidade $\rho_0=999,21Kg/m^3$. Esses dados aplicam-se a todos os casos estudados nesta seção. A condição de contorno é a de pressão nula ao longo da fronteira do sistema (ver seção 3.2). Embora não seja uma condição de contorno aplicável à grande maioria dos problemas físicos encontrados, é a condição usada na referência Y. S. Shin e M. K. Chargin [12] e permitirá comparações com o problema fluido-estrutura que apresenta soluções analíticas para esta condição de contorno. Os dados físicos e dimensões também foram retirados dessa referência para compatibilizar os resultados.

Com o intuito de verificar a influência da distorção dos elementos, foram usadas diferentes discretizações mantendo aproximadamente o mesmo número de elementos e de nós, mas com diferentes graus de distorção. Para facilitar a comparação, na Tabela (6.5) estão as principais

características das malhas usadas nesta seção.

O coeficiente de distorção é definido como [86]:

$$\alpha_i = \frac{4\sqrt{3}A_i}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \quad (6.2)$$

sendo l_1 , l_2 e l_3 os lados do elemento triangular dados por $l_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, $l_2^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$, e $l_3^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2$. A variável A_i simboliza a área do elemento triangular dada pela Expressão (3.37):

$$A_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \quad (6.3)$$

para o número total de elementos n , então a distorção média da malha é:

$$\alpha_{med} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{n} \quad (6.4)$$

Para caracterizar o grau de refinamento da malha usa-se a dimensão característica h_{med} , definida como:

$$h_{med} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 l_j \right)}{n} \quad (6.5)$$

As malhas *F104d*, *F105d*, *F110*, apresentam diferentes graus de distorção e de distribuição destes elementos deformados pelo domínio, mantendo-se o número de equações iniciais dentro

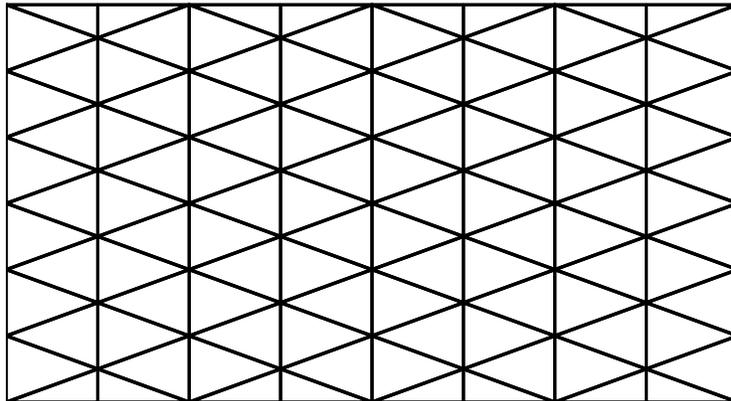


Figura 6.7: MALHA *F104d*, 104 ELEMENTOS, 67 NÓS, DISTORÇÃO MÉDIA $\alpha_{med} = 0,80057$, $h_{med} = 0,68967 m$, 88 ELEMENTOS COM $\alpha = 0,866$, 16 ELEMENTOS COM $\alpha = 0,52$.

malha	Nº nós	Nº elementos	α_{med}	h_{med}	Nº Eq. do sistema
<i>F110</i>	71	110	0,928	0,635	41
<i>F104d</i>	67	104	0,801	0,690	39
<i>F105d</i>	68	105	0,675	0,733	39

Tabela 6.5: CARACTERÍSTICAS DAS MALHAS EMPREGADAS NO PROBLEMA ACÚSTICO INTERNO.

de uma mesma faixa. Estas malhas estão representadas nas Figuras (6.7), (6.8), e (6.6), onde também estão algumas de suas características. A distorção pode parecer pequena nestas figuras, mas a variação no coeficiente de distorção é expressiva.

A solução exata para as frequências naturais do problema acústico interno como formulado, pode ser obtida a partir da expressão [73]:

$$\omega_{(m,n)} = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2} \quad (6.6)$$

Na Expressão (6.6), c é a velocidade de propagação do som no meio, L o comprimento da cavidade retangular e H sua altura, $m = 1, 2, 3 \dots \infty$ e $n = 1, 2, 3 \dots \infty$. Conhecendo-se o

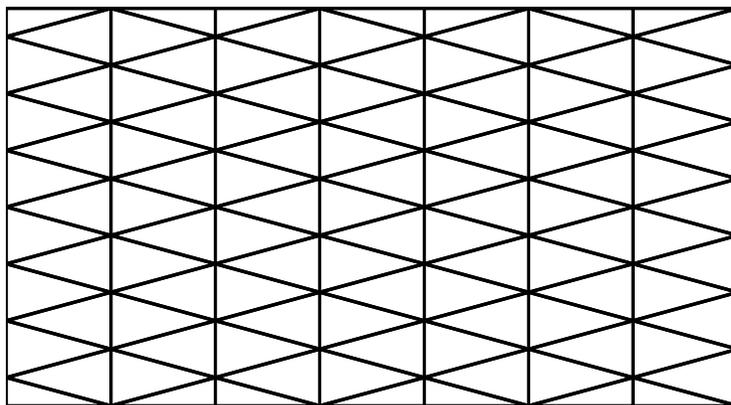


Figura 6.8: MALHA *F105d*, 105 ELEMENTOS, 68 NÓS, GRAU DE DISTORÇÃO MÉDIO $\alpha_{med} = 0,67484$, $h_{med} = 0,73271$ m, 91 ELEMENTOS COM DISTORÇÃO $\alpha = 0,729$, O RESTANTE COM $\alpha = 0,408$.

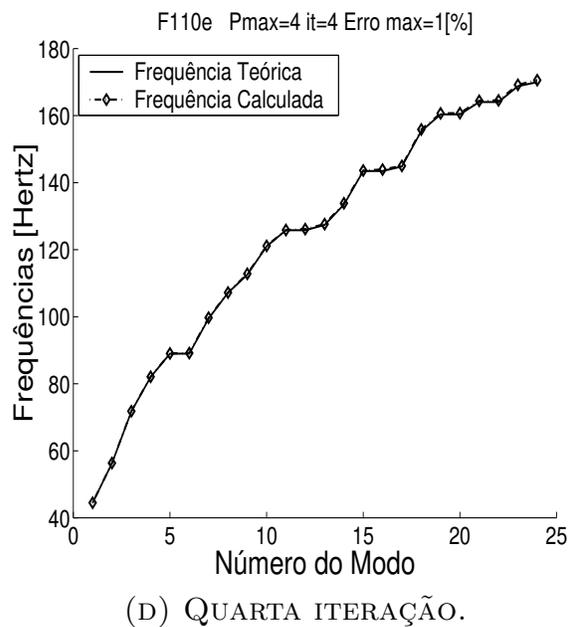
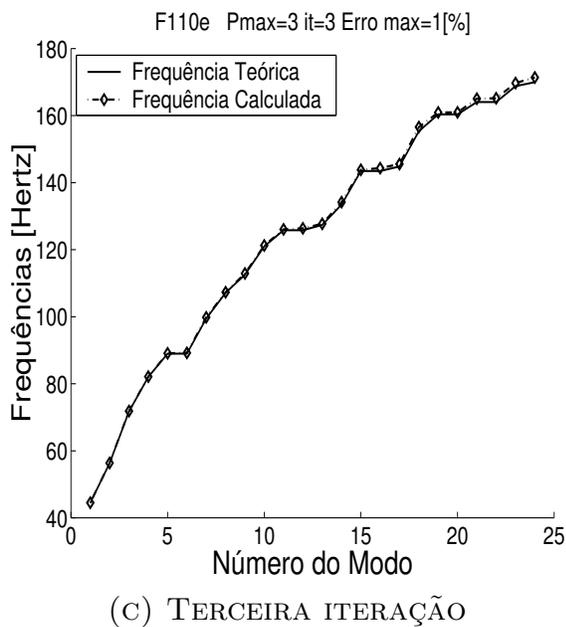
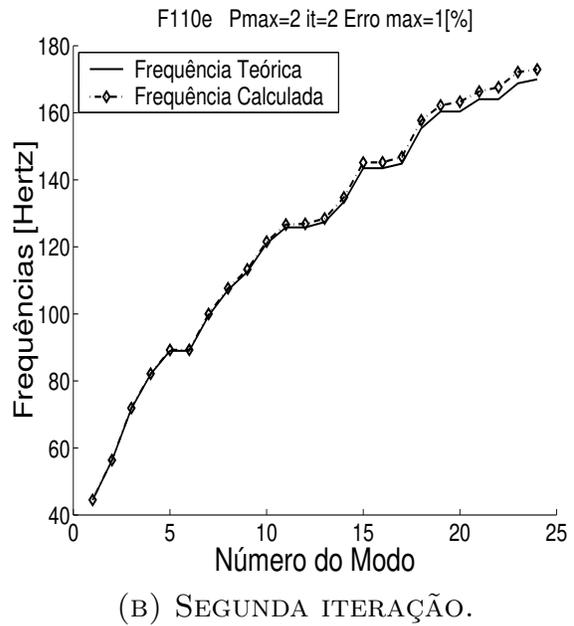
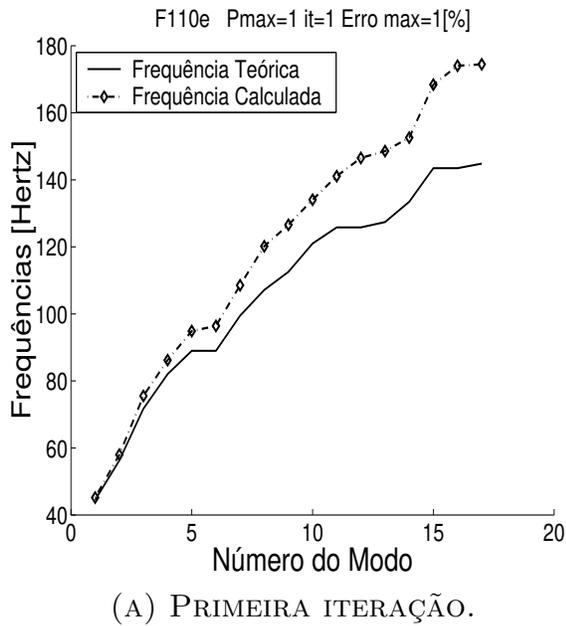
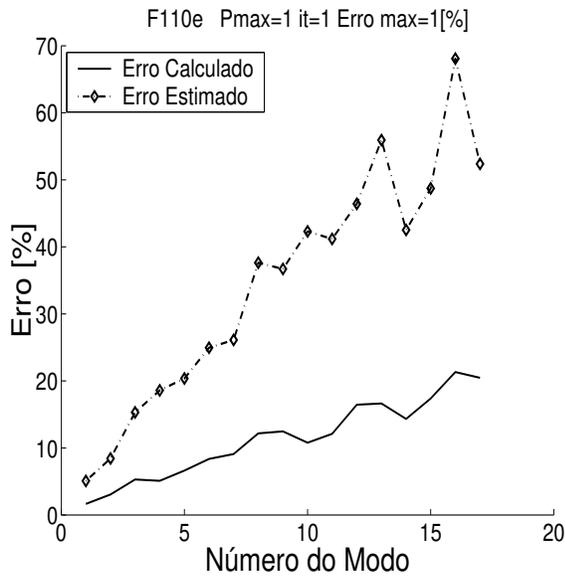
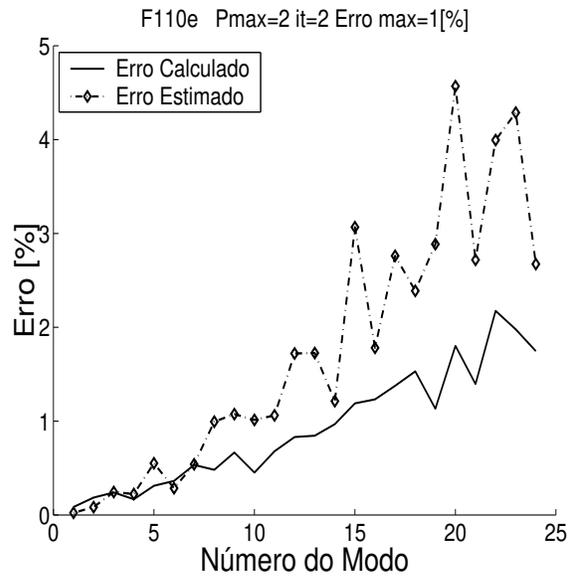


Figura 6.9: EVOLUÇÃO DAS FREQUÊNCIAS CALCULADAS E TEÓRICAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DO MODO PARA MALHA $F110$.

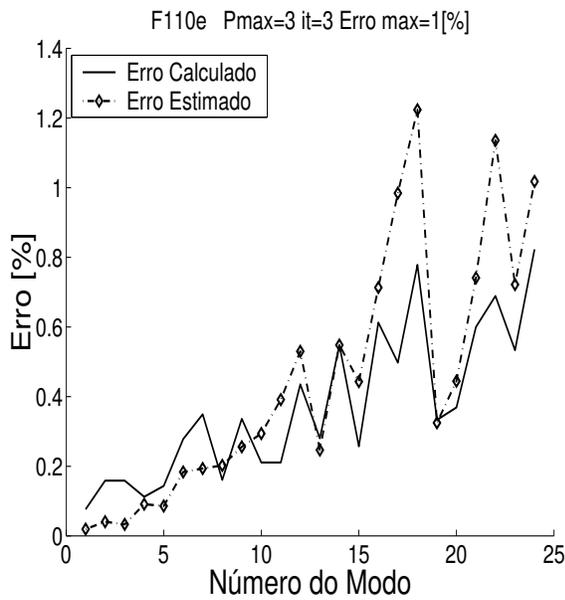
valor exato de $\omega_{(m,n)}$ é possível determinar o erro da solução por elementos finitos e avaliar o comportamento do estimador e a eficiência do processo adaptativo. O erro determinado a partir da solução exata será chamado de erro calculado para diferenciá-lo do erro estimado obtido do estimador.



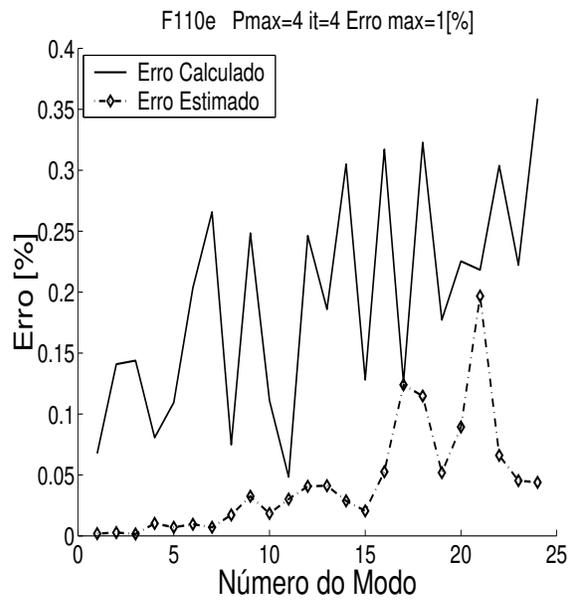
(A) PRIMEIRA ITERAÇÃO.



(B) SEGUNDA ITERAÇÃO.



(C) TERCEIRA ITERAÇÃO.



(D) QUARTA ITERAÇÃO.

Figura 6.10: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS PARA AS FREQUÊNCIAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DO MODO. MALHA *F110*.

A solução do problema acústico interno, empregando a técnica dos Elementos Finitos foi feita iterativamente até o erro estimado ficar abaixo de um determinado valor prescrito, conforme o algoritmo definido na Seção 5.4. Em todos os problemas, o limite superior de

frequência foi igual a 175 Hz e o erro máximo $1,0\%$. Portanto, ao final do processo iterativo o erro para todas as frequências até 175 Hz devem ser inferiores a $1,0\%$.

O processo iterativo para a malha $F110$ está documentado pelas Figuras (6.9) e (6.10). A Figura (6.9) refere-se à evolução das frequências teóricas e calculadas pelo método dos elementos finitos em relação aos modos. A Figura (6.10) mostra o comportamento do erro estimado pela rotina p -adaptativa e os erros calculados entre as frequências teóricas e aquelas obtidas pelo método dos elementos finitos em função dos modos.

Novamente, deve-se ressaltar que o estimador empregado é um estimador de autovalores, ou seja, garante apenas que o erro da frequência ou de um autovalor está dentro de uma faixa aceitável especificada, mas não assegura o ordenamento correto dos autopares. Por exemplo, na Figura (6.9) os modos 15, 16 e 17 têm autovalores ou frequências muito próximos, se a diferença entre o valor das frequências for inferior ao erro que o estimador opera, podem ocorrer trocas na ordem dos autopares, mas independente da ordem os erros nas frequências estes estarão abaixo de um limite prescrito. Essas trocas na ordem dos autopares devido ao erro do procedimento numérico é às vezes chamado de cruzamento de modos e esta terminologia será usada ao longo do texto.

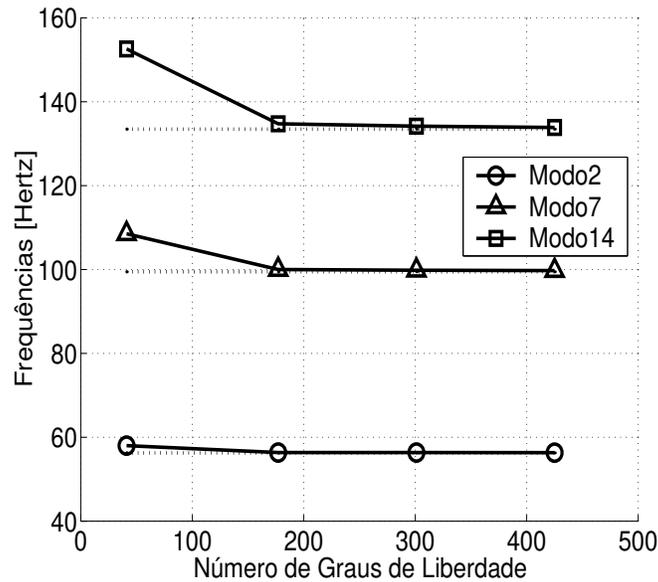


Figura 6.11: EVOLUÇÃO DAS FREQUÊNCIAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO TOTAL DE EQUAÇÕES. MODOS 2, 7 E 14 MALHA $F110$.

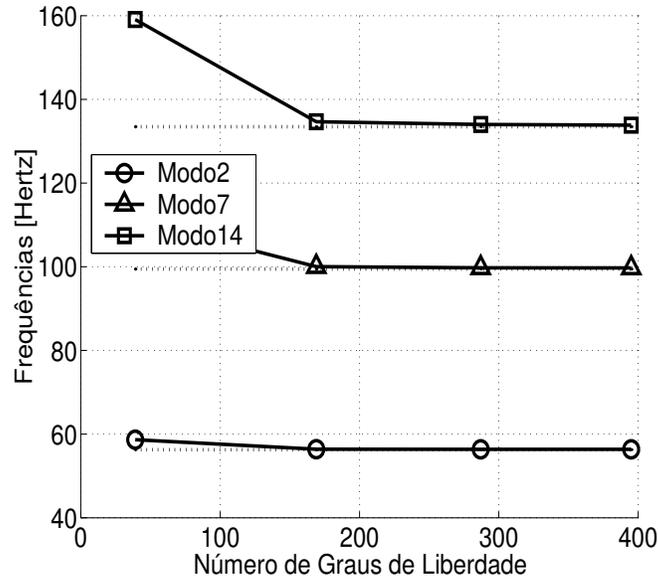


Figura 6.12: EVOLUÇÃO DAS FREQUÊNCIAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO TOTAL DE EQUAÇÕES. MODOS 2, 7 E 14 MALHA $F104d$.

6.3.1 Resultados do Problema Acústico Interno para Malhas com Diferentes Graus de Distorção.

O problema de acústica bidimensional analisado apresenta algumas diferenças importantes em relação ao problema unidimensional. O primeiro problema é a distorção dos elementos. Os elementos unidimensionais são diferentes entre si apenas por um fator de escala, ou seja, podem ser tratados como entidades geométricas idênticas ou um homeomorfismo. Os elementos triangulares são processados em coordenadas triangulares como se fossem triângulos equiláteros. Os resultados desse processamento são então expressos no sistema de coordenadas que descreve o domínio físico por meio de uma transformação de coordenadas. Esse procedimento foi descrito no Capítulo 3, na Seção 3.4.1 que trata da formulação do elemento para a Acústica Plana Linearizada. Esta relação entre os sistemas de coordenadas é suposta linear (Jacobiano da transformação é uma constante). No entanto, essa transformação só é linear se os elementos não apresentarem distorções, ou se os ângulos permanecerem constantes [38]. Portanto, os elementos triangulares sempre vão apresentar algum nível de distorção com conseqüente erro, exceto para elementos perfeitamente equiláteros. Os elementos quadrilat-

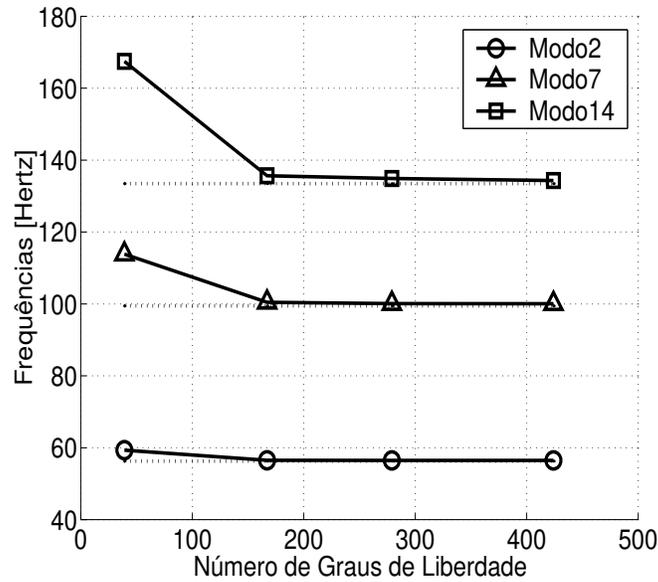


Figura 6.13: EVOLUÇÃO DAS FREQUÊNCIAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO TOTAL DE EQUAÇÕES. MODOS 2, 7 E 14 MALHA *F105d*.

erais padecem do mesmo tipo de problema, mas permitem distorções do elemento sem que haja qualquer deformação angular [38].

Para avaliar o efeito da distorção do elemento sobre a eficiência do estimador, foram incluídas as Figuras (6.11), (6.12), (6.13) e (6.17). As Figuras (6.11), (6.12), (6.13) mostram a evolução da frequência em função do número de equações do sistema para as malhas *F110*, *F104d* e *F105d*, respectivamente. Estas figuras foram traçadas para três modos, o modo 2, modo 7 e o modo 14. Esses modos estão mostrados nas Figuras (6.18) e (6.19) para as malhas *F110* e *F105d*. Os modos foram processados e comparados em iterações sucessivas, embora a identificação de alguns modos na primeira iteração possa ser bastante subjetiva devido à falta de definição dos mesmos.

As figuras, Figura (6.11), Figura (6.12) e a Figura (6.13), não apresentam resultados muito diferentes, embora o coeficiente de distorção α_{med} tenha variado entre 0,928 e 0,675. Indicam, também, um comportamento semelhante entre os modos.

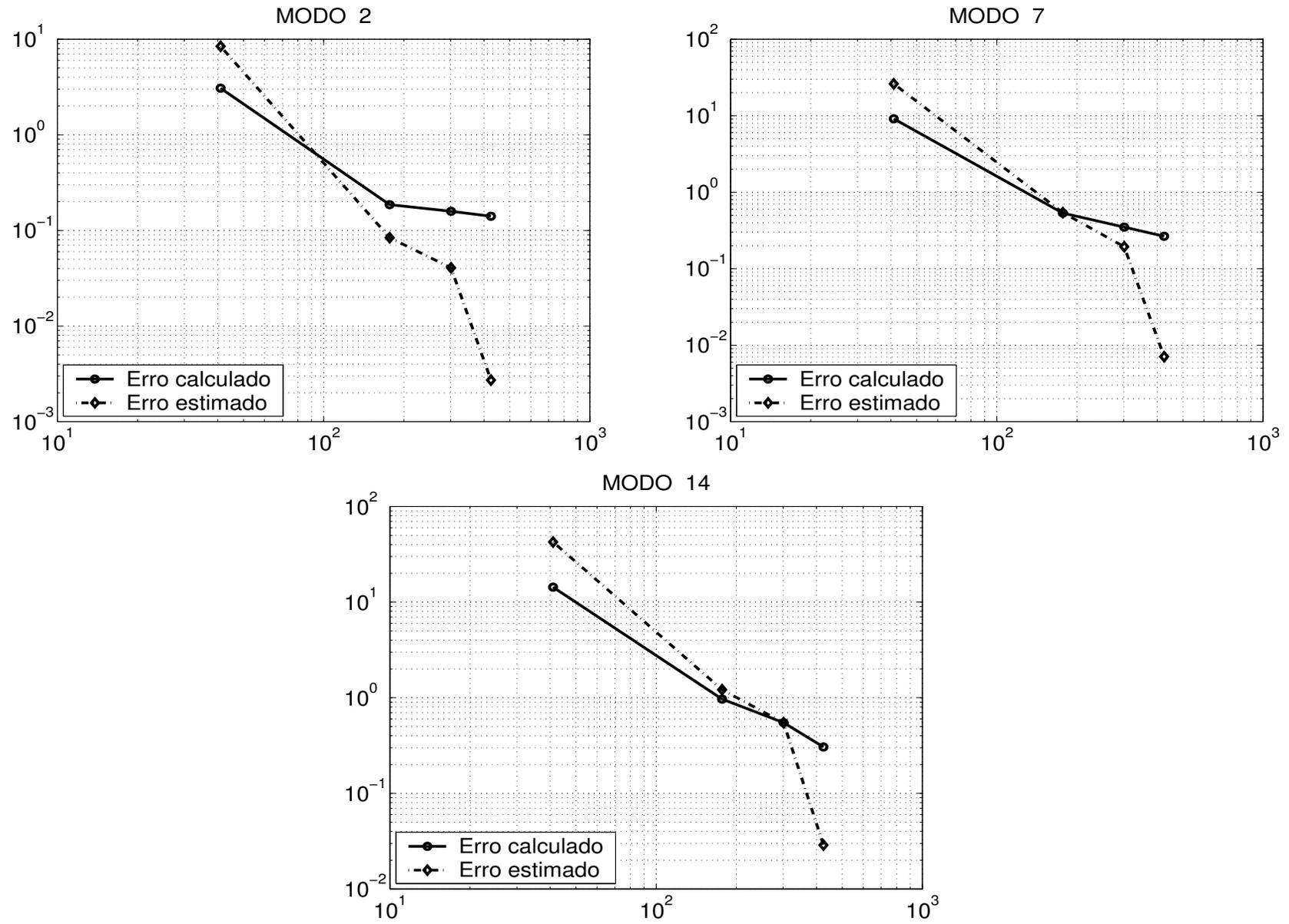


Figura 6.14: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM RELAÇÃO AO NUMERO DE EQUAÇÕES DO SISTEMA. MALHA $F110$. MODOS 2, 7, 14.

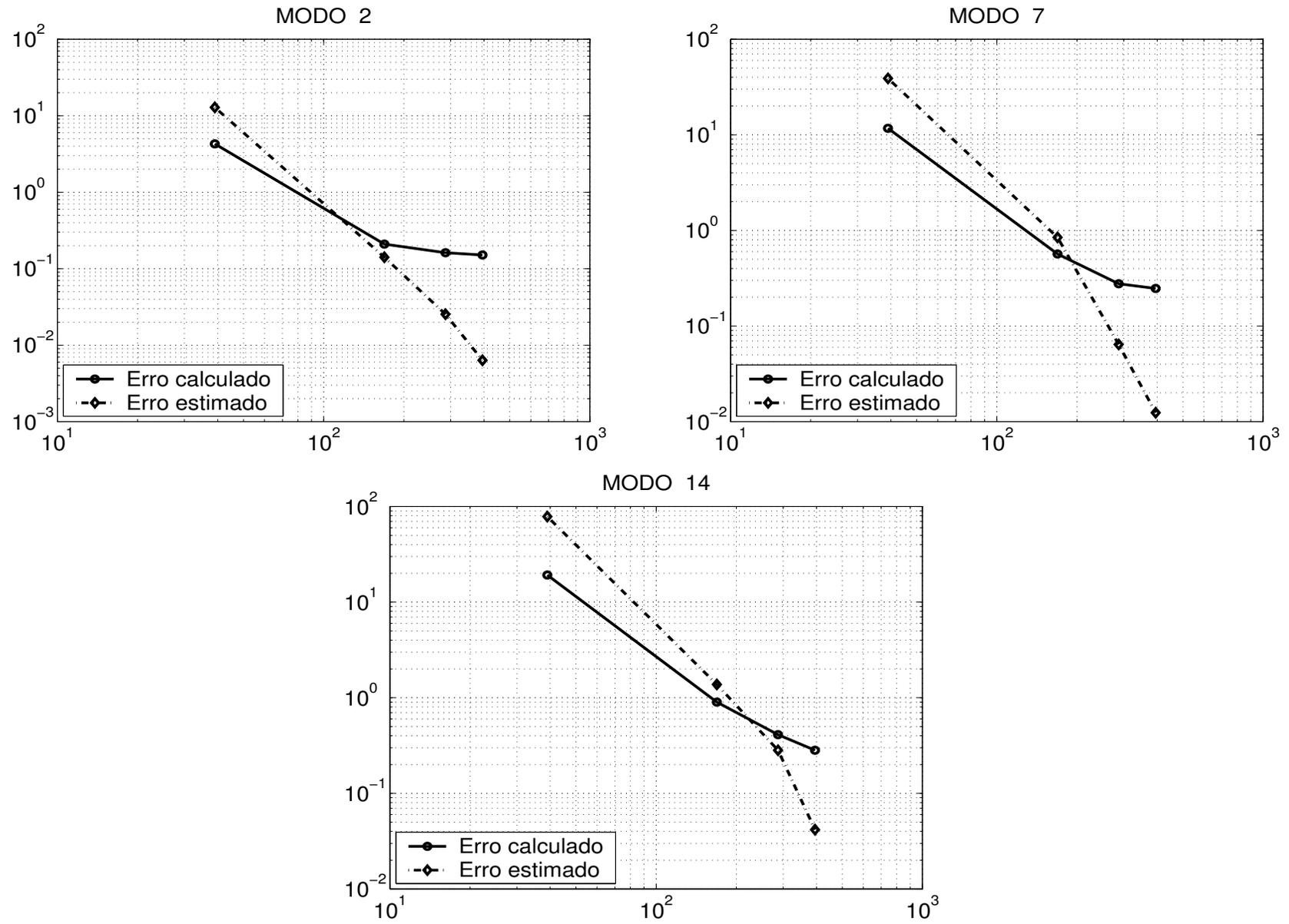


Figura 6.15: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM RELAÇÃO AO NUMERO DE EQUAÇÕES DO SISTEMA. MALHA $F104d$. MODOS 2, 7, 14.

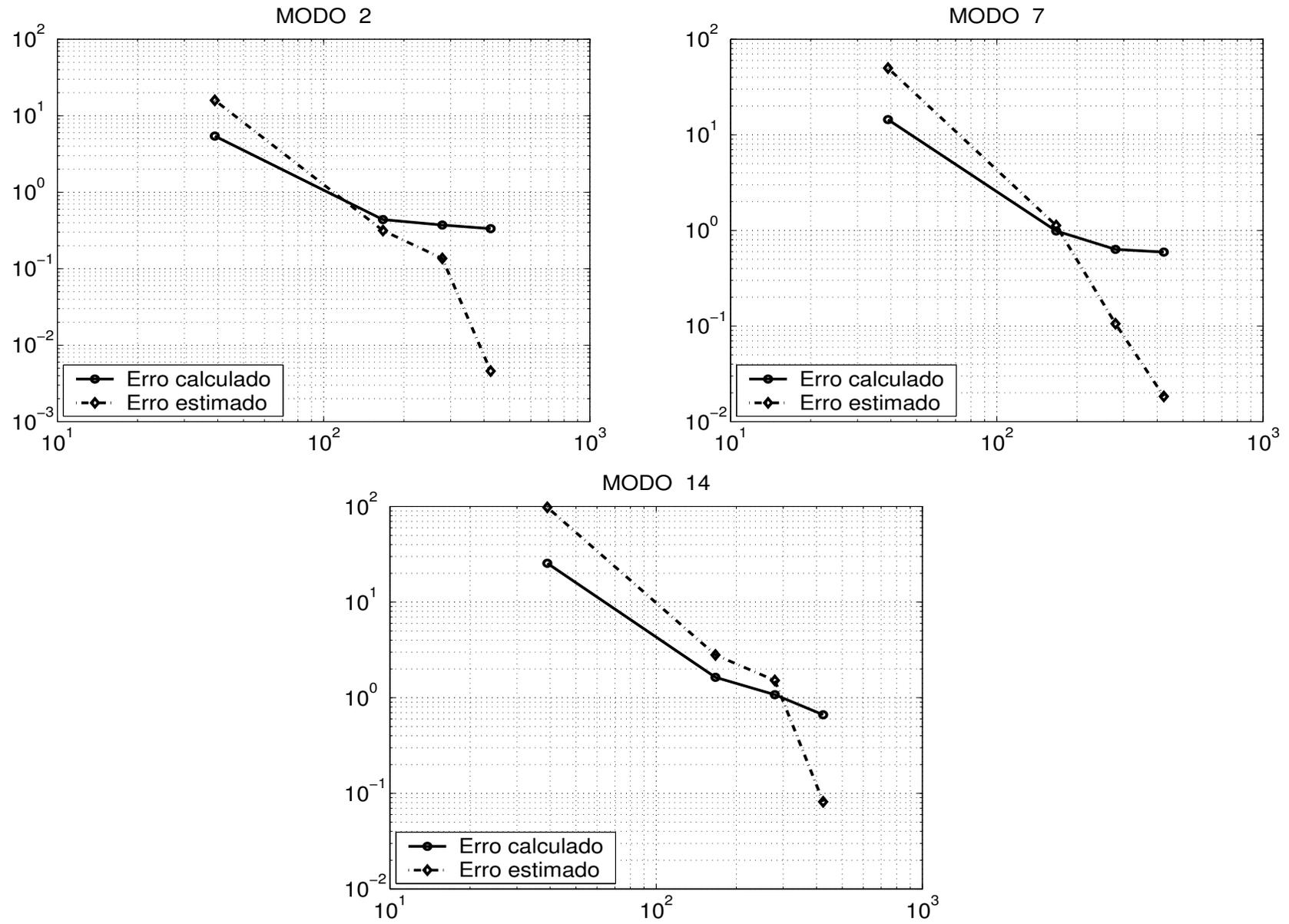


Figura 6.16: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM RELAÇÃO AO NUMERO DE EQUAÇÕES DO SISTEMA. MALHA $F105d$. MODOS 2, 7, 14.

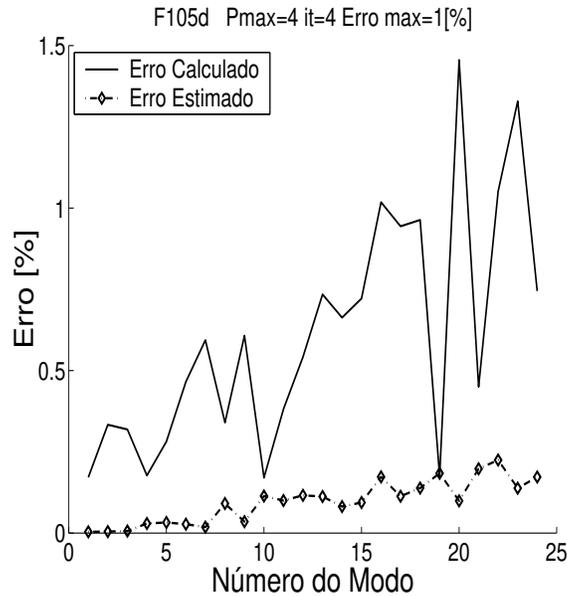


Figura 6.17: ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS RELATIVO ÀS FREQUÊNCIAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DO MODO. QUARTA ITERAÇÃO MALHA *F105d*.

Na realidade, as figuras não apresentam definição suficiente para comparar o comportamento do estimador, uma vez que o erro máximo é de 1,0%. Para contornar este problema, escolheu-se o erro calculado e estimado para efetuar a comparação uma vez que o erro estimado é a variável de trabalho do processo p -adaptativo.

Gráficos com o erro estimado confrontado com o erro calculado a partir das frequências teóricas são apresentados em função do numero de equações do sistema. Os gráficos para os modos 2, 7 e 14 estão na Figura (6.14) e são referentes ao processo adaptativo da malha *F110*. Na Figura (6.15) está a evolução dos erros usando a discretização dada pela malha *F104d*, e na Figura (6.16) estão os resultados para malha *F105d*.

Nesses gráficos, o ponto de cruzamento entre a curva de erro estimado e a curva de erro calculado indica o ponto de confiabilidade do estimador e, por conseguinte, do processo adaptativo. Para erros estimados abaixo do ponto de cruzamento ou do erro limite (abaixo do valor de erro real), não há confiabilidade nos resultados uma vez que o estimador não consegue identificar corretamente o erro e onde ele se encontra.

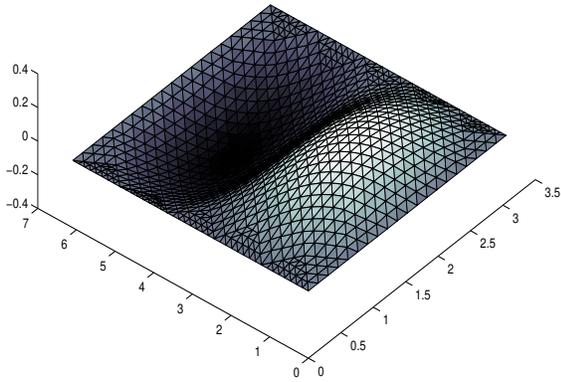
Comparando os gráficos dos modos na Figura (6.14), referentes à malha *F110* e os gráficos

equivalentes para a malha mais distorcida *F105d*, Figura (6.16), observa-se que a malha mais distorcida mostra erros limites mais elevados. Isto significa que as malhas distorcidas levam a uma menor precisão. Neste aspecto, a última curva de erro do processo adaptativo para a malha *F105d*, Figura (6.17), é mais esclarecedora. Como o estimador trabalha buscando manter o erro abaixo de um determinado valor para uma faixa de frequências (autovalores), o correto seria afirmar que para esta malha o estimador não consegue manter o erro abaixo de 1,0% para frequências até 175 Hz, que é o limite superior para a faixa de frequências em que o estimador foi aplicado para os casos estudados. Esta forma de análise é mais consistente com a implementação do estimador.

A rotina adaptativa usa os autovetores para estimar o erro dos autovalores correspondentes, mas a associação dos autovalores aos modos só é possível quando é feita uma interpretação física do resultado matemático tendo em vista o fenômeno real. Portanto, a identificação dos autovalores aos modos em iterações sucessivas como foi feito da Figura (6.11) à Figura (6.13), e da Figura (6.14) à Figura (6.16), é fruto de uma interpretação dos resultados numéricos e permitem avaliar e validar a precisão dos resultados e sua utilidade. Mas durante o processo iterativo puramente matemático não há como a rotina interpretar os resultados e classifica-los da forma que foi feita.

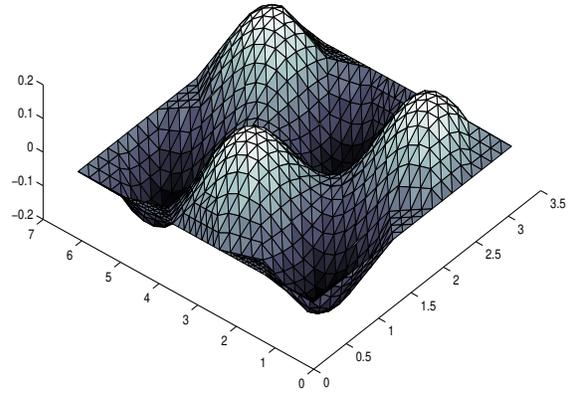
Nas Figuras (6.18) e (6.19) estão os modos 2, 7 e 14 obtidos ao final do processo iterativo para as malhas *F110* e *F105d*. O modo 14 é desenhado com e sem pós-processamento, os outros dois modos, 2 e 7, foram incluídos já pós-processados. Estas figuras foram incluídas para mostrar a capacidade das funções hierárquicas em detalhar os modos. O estimador dado pela Equação (5.39) estima o erro dos *autovalores* usando os autovetores e o resultado é o aumento da precisão dos autopares, embora o estimador tenha sido desenvolvido para corrigir o erro associado ao autovalor. Isto possibilita a descrição mais precisa dos modos a partir do pós-processamento dos *autovetores*. Nos problemas práticos, os modos de interesse são normalmente os modos de ordem mais baixa e o pós-processamento é suficiente para detalhar e possibilitar a identificação destes modos. Como base para a rotina do pós-processamento dos modos usou-se uma expressão do tipo dado pela Equação (6.1).

it=4 Modo=2 Pos-Processado Pmax=4 freq=56



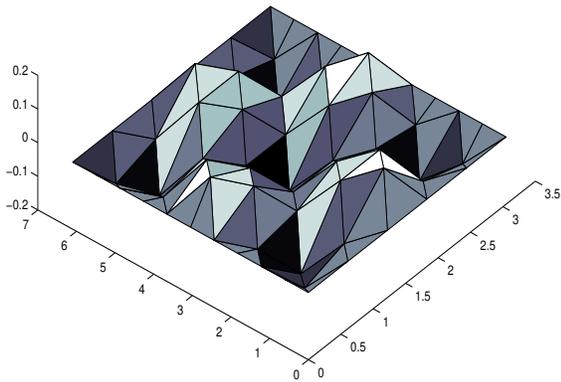
(A) MODO 2 PÓS-PROCESSADO.

it=4 Modo=7 Pos-Processado Pmax=4 freq=100



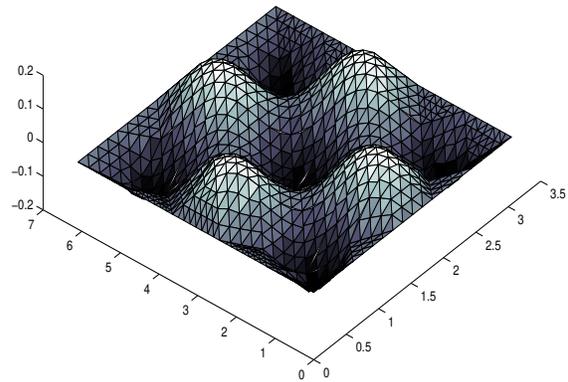
(B) MODO 7 PÓS-PROCESSADO.

N. Elem. = 110 it=4 Modo=14 Pmax=4 freq=134



(C) MODO 14.

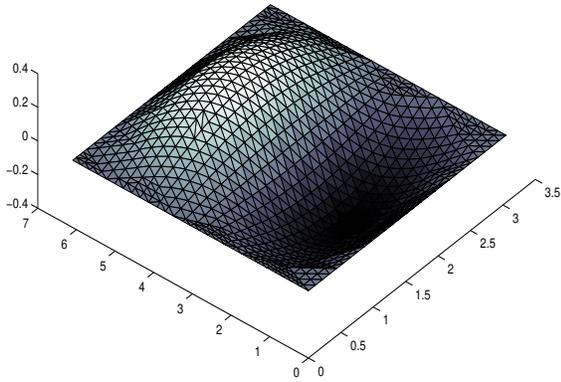
it=4 Modo=14 Pos-Processado Pmax=4 freq=134



(D) MODO 14 PÓS-PROCESSADO.

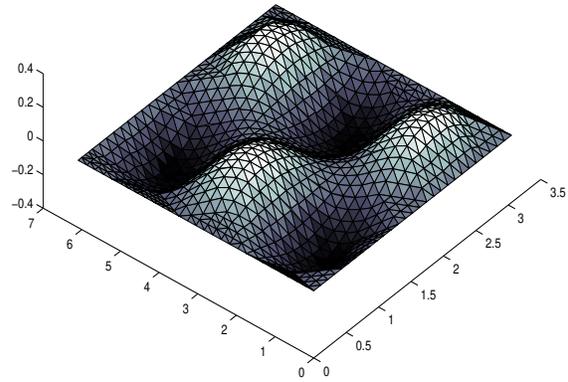
Figura 6.18: MODOS 2, 7 E 14 MALHA $F110$.

it=4 Modo=2 Pos-Processado Pmax=4 freq=56



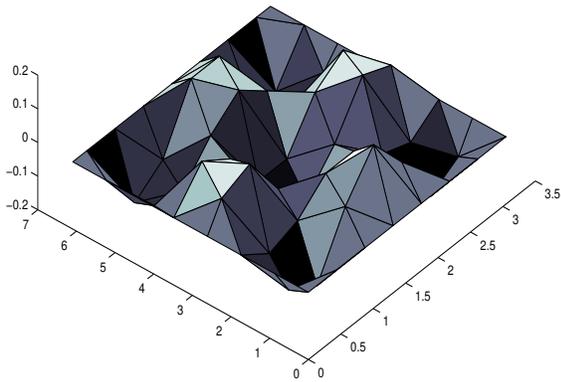
(A) MODO 2 PÓS-PROCESSADO.

it=4 Modo=7 Pos-Processado Pmax=4 freq=100



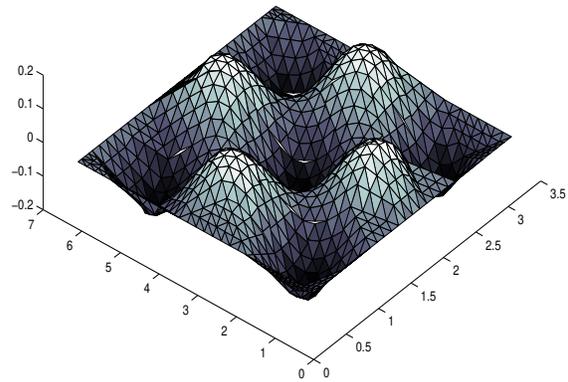
(B) MODO 7 PÓS-PROCESSADO.

N. Elem. = 105 it=4 Modo=14 Pmax=4 freq=134



(C) MODO 14.

it=4 Modo=14 Pos-Processado Pmax=4 freq=134



(D) MODO 14 PÓS-PROCESSADO.

Figura 6.19: MODOS 2, 7 E 14 MALHA *F105d*.

6.4 Resultados Obtidos para o Problema Fluido-Estrutura Acoplado

Nesta seção, são apresentados e comentados os resultados obtidos da aplicação do estimador de erro desenvolvido para o problema fluido-estrutura. Como observado em seções anteriores, o problema teste foi publicado por Y. S. Shin e M. K. Chargin [12] e foi escolhido por apresentar resultados analíticos para as frequências associadas aos modos estruturais.

Os resultados numéricos referem-se à configuração apresentada na Figura (6.20). O arranjo é basicamente uma placa fechando a cavidade. O fluido está confinado no interior da cavidade, a interface do fluido se dá exclusivamente com a placa e a condição de contorno nas outras três paredes é de pressão nula. Para o problema bidimensional que será analisado, a placa é modelada como uma viga e neste problema a viga é bi-apoiada com rotação livre nos apoios.

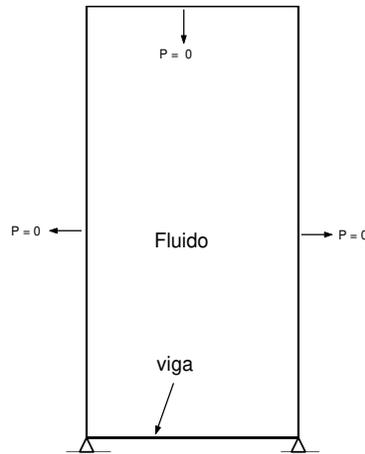


Figura 6.20: ARRANJO DO PROBLEMA FLUIDO-ESTRUTURA.

Neste problema, empregaram-se os seguintes valores: comprimento da cavidade $L_T = 3,048 m$, altura $H=6,096m$. Para a viga foi usado módulo de elasticidade $E = 2,068 \times 10^{11} N/m^2$, momento de inércia em relação a linha neutra $I = 0,1675 \times 10^{-4} m^4$, área da seção transversal $A = 0,005058 m^2$, massa específica $\rho_e = 7830,8 Kg/m^3$. O fluido ocupando o espaço interno foi caracterizado pela densidade $\rho_0=999,21Kg/m^3$ e pela velocidade do som ou da perturbação no meio $c=1524m/s$.

malha	Nº nós <i>fluido</i>	Nº elementos <i>fluido</i>	α_{med} <i>fluido</i>	h_{med} <i>fluido</i>	Nº elementos <i>estrutura</i>
<i>F108</i>	75	108	0,910	0,606	16
<i>F272</i>	161	272	0,949	0,402	8
<i>F261</i>	159	261	0,955	0,407	14

Tabela 6.6: CARACTERÍSTICAS DAS MALHAS EMPREGADAS NO PROBLEMA FLUIDO-ESTRUTURA.

Foram empregadas para discretizar o domínio fluido as malhas mostradas nas Figuras (6.21), (6.22) e (6.23). A Figura (6.21) refere-se à malha *F108*; na interface com a viga, esta malha é discretizada com 16 elementos. A malha *F272* vista na Figura (6.22) acopla com a viga discretizada por 8 elementos. A malha *F261*, com 261 elementos fluidos, acoplada com 14 elementos estruturais também foi empregada no problema e é apresentada na Figura (6.23). Na Tabela (6.6) estão resumidas as principais características destas malhas.

As frequências analíticas usadas como referência são dadas pela expressão [12]:

$$\omega_{n_e}^2 \left(\rho_e A + e_e \frac{\rho_0 \tanh(H\beta_n)}{\beta_n} \right) = EI \left(\frac{n_e \pi}{L} \right)^4 \quad (6.7)$$

MALHA *F108* , 108 ELEMENTOS, 75 NÓS, GRAU DE DISTORÇÃO MÉDIO $\alpha_{med} = 0,910$, $h_{med} = 0,606$ m, 36 ELEMENTOS COM $\alpha = 0,866$, 56 ELEMENTOS COM $\alpha = 0,999$, 16 ELEMENTOS COM $\alpha = 0,733$.

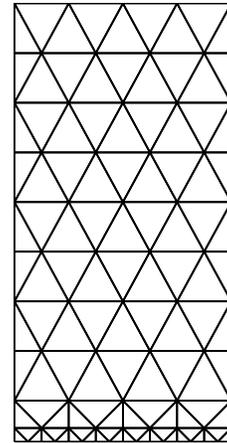


Figura 6.21: MALHA *F108* EMPREGADA NA DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO ANALISADO.

MALHA *F272* , 272 ELEMENTOS, 161 NÓS, GRAU DE DISTORÇÃO MÉDIO $\alpha_{med}=0,949$, $h_{med}=0,402$ m, 240 ELEMENTOS COM $\alpha =0,990$, 32 ELEMENTOS COM $\alpha =0,693$.

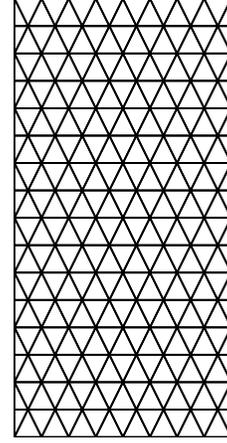


Figura 6.22: MALHA *F272* EMPREGADA NA DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO ANALISADO.

sendo:

$$\beta^2 = \left| \frac{\omega_{n_e}^2}{c^2} - \left(\frac{n_e \pi}{L} \right)^2 \right| \quad (6.8)$$

nestas expressões L é o comprimento da interface fluido-estrutura, H a altura do domínio fluido, c a velocidade do som no fluido, ρ_e e ρ_0 as densidades do material da estrutura e do fluido, respectivamente. A é a área da seção transversal, E o módulo de elasticidade e I o momento de inércia, todos referentes à viga, e e_e é largura da viga em contato com o fluido ou a profundidade da cavidade. A frequência ω_{n_e} é associada aos modos estruturais dominantes do problema acoplado, e o termo $n_e = 1, 2, 3, 4, \dots \infty$. Na realidade, ocorrerão

MALHA *F261* , 261 ELEMENTOS, 159 NÓS, GRAU DE DISTORÇÃO MÉDIO $\alpha_{med} =0,955$, $h_{med}=0,407$ m, 21 ELEMENTOS COM $\alpha =0,866$, 208 ELEMENTOS COM $\alpha =1,0$, 32 ELEMENTOS COM $\alpha =0,76$.

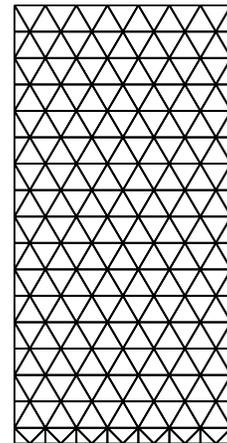


Figura 6.23: MALHA *F261* EMPREGADA NA DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO ANALISADO.

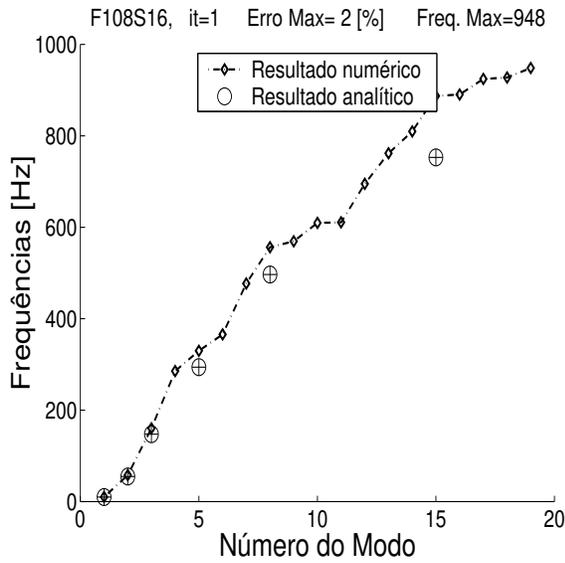
os modos fluido predominantes, mas para eles não há uma expressão analítica.

Das Equações (6.7) e (6.8) e para os dados do problema, as seis primeiras frequências associadas aos modos predominantemente estruturais são: $\omega_1 = 9,9 \text{ Hz}$, $\omega_2 = 54,8 \text{ Hz}$, $\omega_3 = 147,4 \text{ Hz}$, $\omega_4 = 294,1 \text{ Hz}$, $\omega_5 = 496,7 \text{ Hz}$ e $\omega_6 = 752,9 \text{ Hz}$. Neste problema foi usada a profundidade $e_e = 1,0 \text{ m}$, diferenciando-se do caso publicado de Shin Y. S. e Chargin M. K. [12] que usou a espessura da viga de 1,0 polegada. Portanto, no restante do texto, a menção aos resultados de Shin e Chargin referem-se apenas aos valores analíticos para os modos estruturais dominantes obtidos acima a partir das expressões retirados dessa referência. Não foi feita uma comparação direta com os resultados numéricos publicados por aqueles autores.

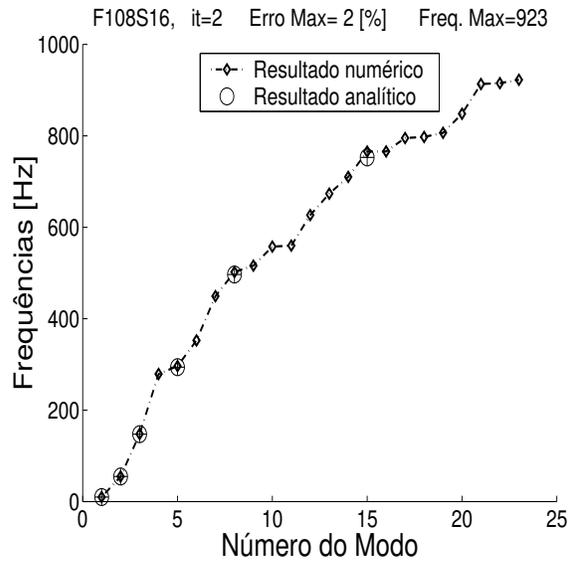
Os gráficos apresentados entre a Figura (6.24) e a Figura (6.27) mostram a evolução das frequências e do erro a elas associado no processo iterativo para as malhas *F108*. Os gráficos apresentados entre a Figura (6.28) e a Figura (6.31) referem-se à malha *F272*. O processo iterativo é o resultado do algoritmo apresentado na Seção (5.4) usando o estimador proposto nas Equações (5.59) e (5.72). O estimador proposto foi aplicado ao problema não simétrico. Nos casos analisados, o limite superior de frequência foi de 955 Hz e o erro máximo prescrito de 2,0%.

Nas Figuras (6.26) e (6.27) é mostrada a evolução dos erros estimados e calculados em relação à solução analítica para os modos 3, 5, 8 e 15 que são os modos predominantemente estruturais. Estes gráficos foram traçados após o pós-processamento, identificação e ordenamento correto dos modos. Para este conjunto de modos e para a malha *F108* não foi observada a ocorrência de modos cruzados no processo de convergência. Para a malha *F272* foi observado o cruzamento de modos para a oitava e a décima quinta frequências. Foram plotados apenas os erros calculados em relação ao modo identificado com o oitavo modo ao final do processo adaptativo, o erro estimado foi omitido.

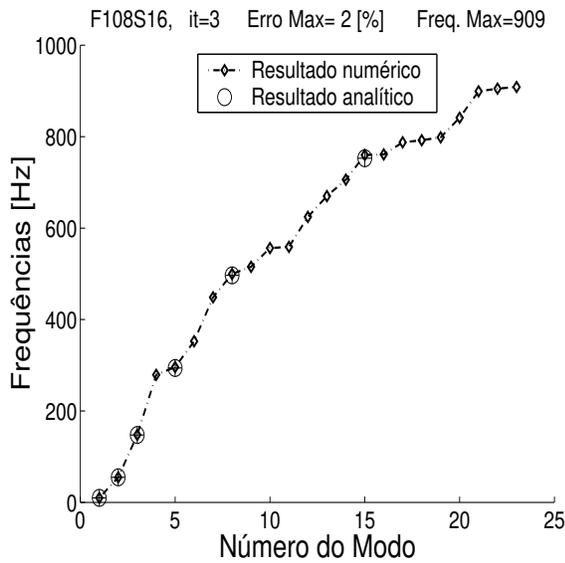
O processo adaptativo para malha *F108*, apresentado nas Figuras (6.24) e (6.25), foi interrompido antes de alcançar o erro prescrito. A Figura (6.25) mostra que os erros calculados em relação aos modos estruturais, ou predominantemente estruturais, são muito inferiores aos estimados, mas aparentemente o erro associado aos modos fluidos não permitiu a convergência para o valor de erro prescrito. Possivelmente, este comportamento deve-se à pouca



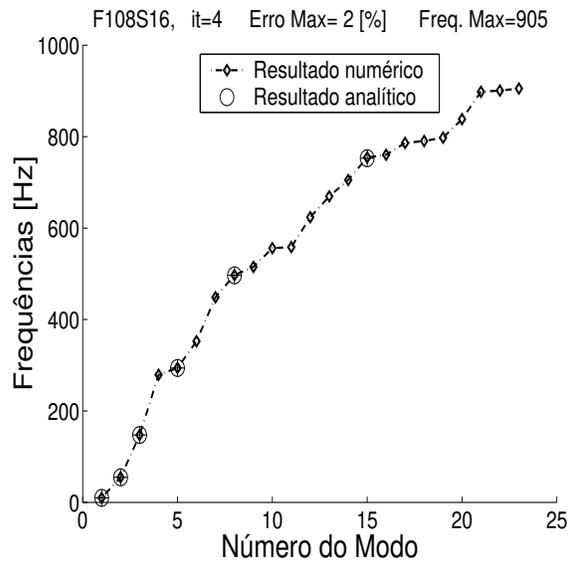
(A) PRIMEIRA ITERAÇÃO.



(B) SEGUNDA ITERAÇÃO.



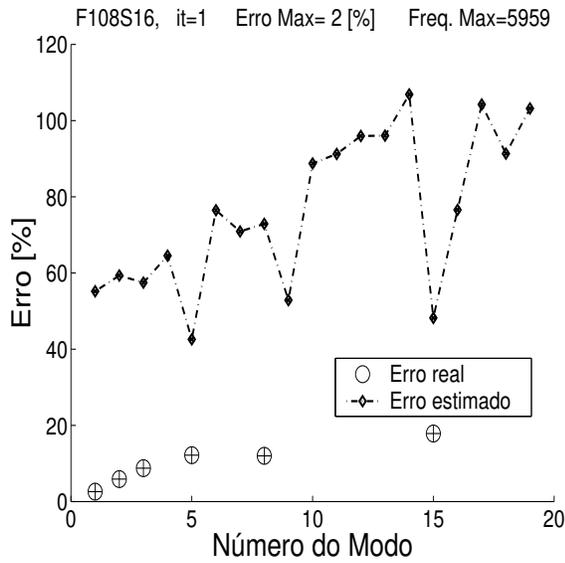
(C) TERCEIRA ITERAÇÃO



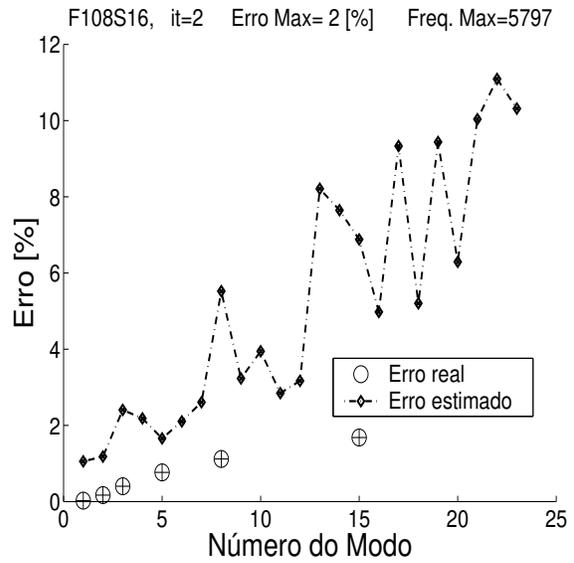
(D) QUARTA ITERAÇÃO.

Figura 6.24: EVOLUÇÃO DAS FREQUÊNCIAS CALCULADAS E TEÓRICAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DO MODO PARA MALHA *F108*. FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA.

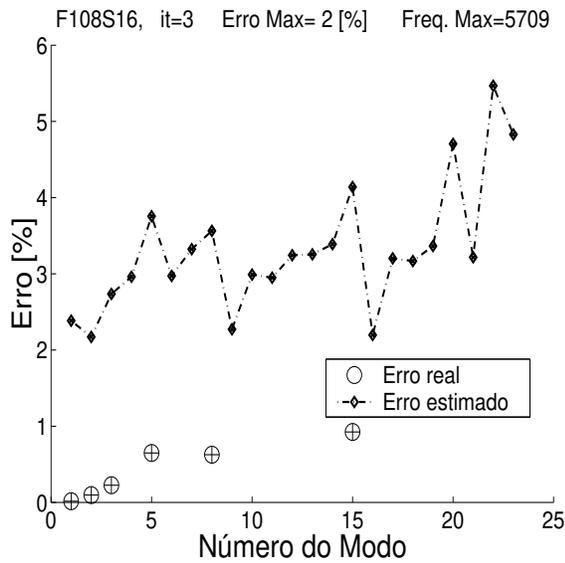
resolução da malha no domínio fluido. As Figuras (6.26) e (6.27) mostram a evolução do erro em função do número de equações para os modos predominantemente estruturais 3, 5, 8 e 15. O ponto ressaltado pelos símbolos representa os erros calculados e estimados em cada iteração para as frequências associadas aos modos. Estas figuras foram geradas para 5 it-



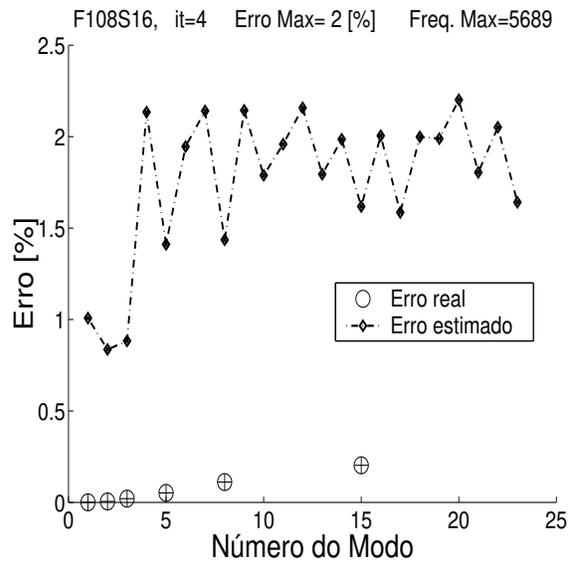
(A) PRIMEIRA ITERAÇÃO.



(B) SEGUNDA ITERAÇÃO.



(C) TERCEIRA ITERAÇÃO



(D) QUARTA ITERAÇÃO.

Figura 6.25: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS ASSOCIADOS ÀS FREQUÊNCIAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DO MODO. MALHA *F108*. FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA.

erações, as quatro primeiras iterações estão nas Figuras (6.24) e (6.25). Para esta malha entre as iterações 4 e 5, o erro estimado aumenta para todos os modos apresentados e o número de equações permanece praticamente constante. Como o erro calculado diminui pode-se afirmar

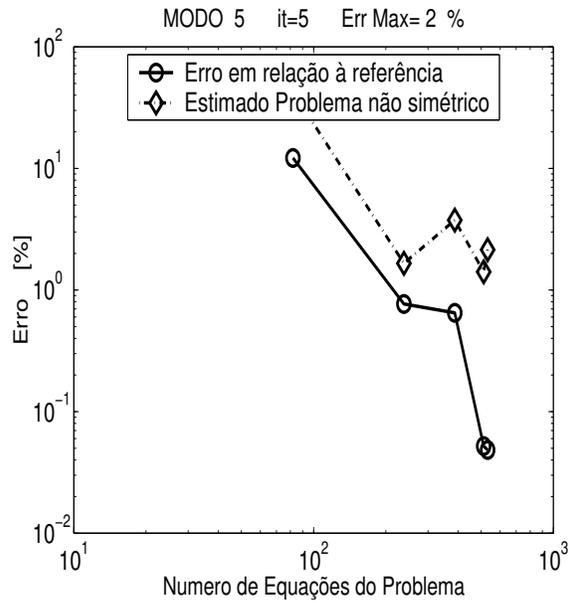
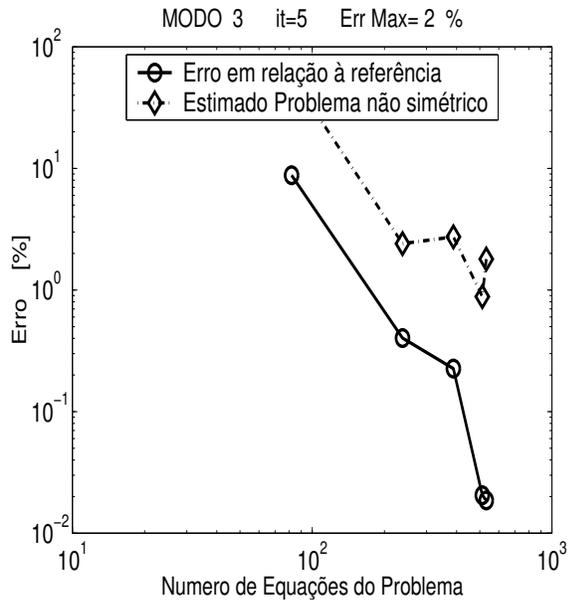


Figura 6.26: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM RELAÇÃO AO NUMERO DE EQUAÇÕES DO SISTEMA. MALHA *F108* FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA. MODOS 3 E 5 PREDOMINANTEMENTE ESTRUTURAIS.

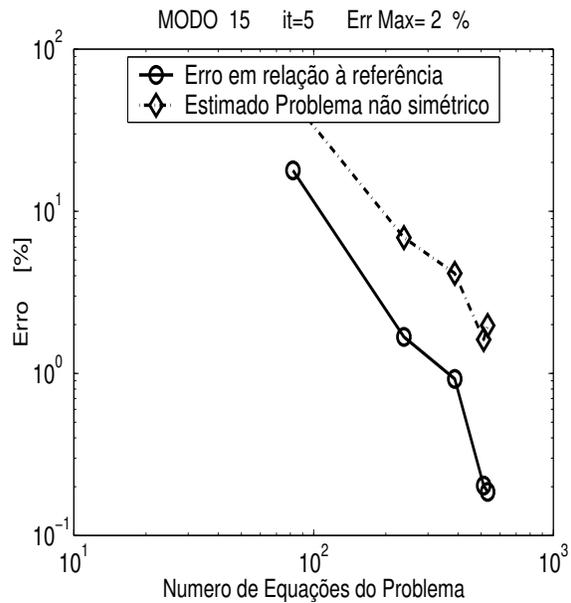
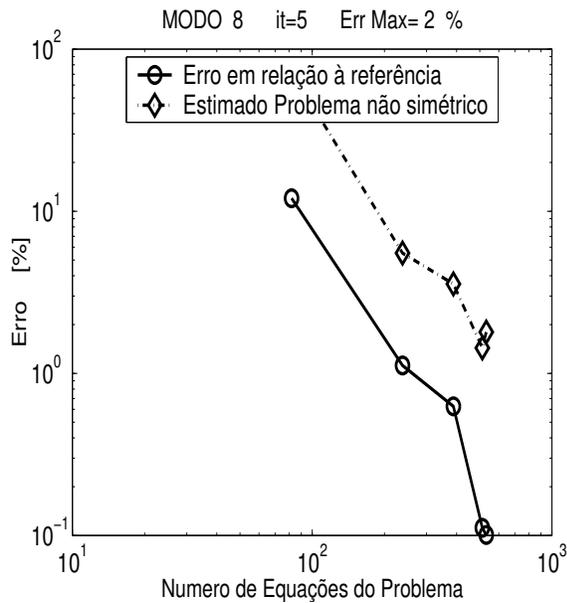
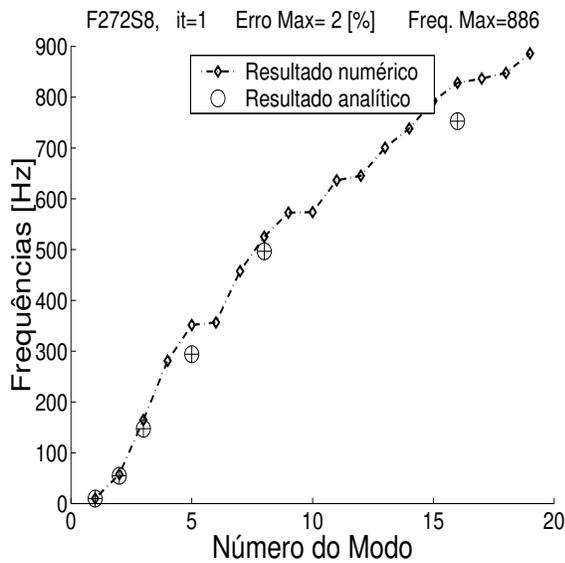
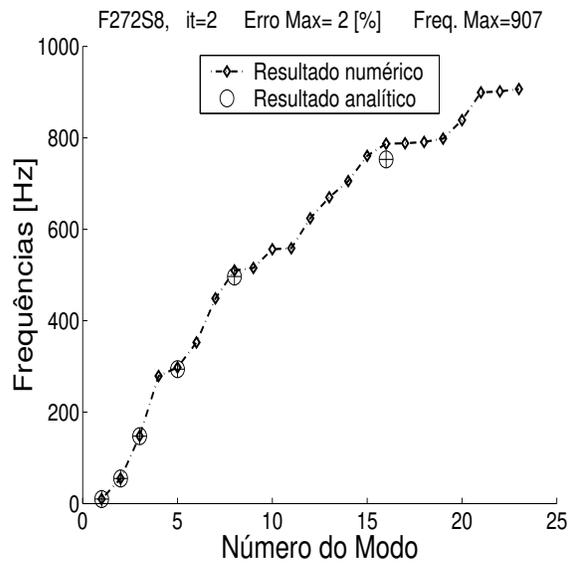


Figura 6.27: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM RELAÇÃO AO NUMERO DE EQUAÇÕES DO SISTEMA. MALHA *F108* FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA. MODOS 8 E 15 PREDOMINANTEMENTE ESTRUTURAL.

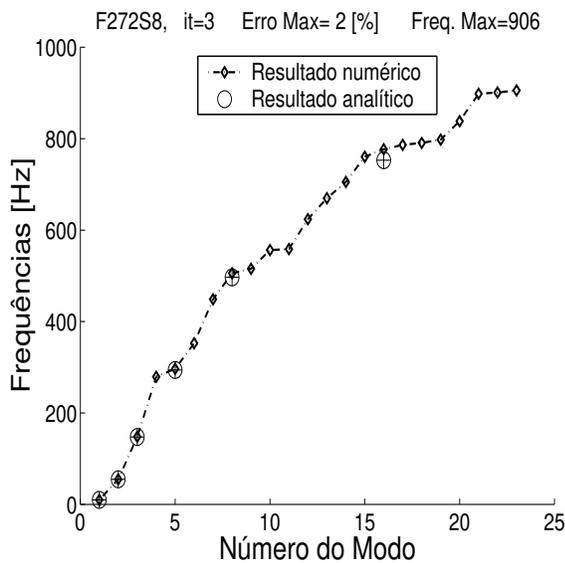
que o estimador perdeu resolução para a discretização em análise.



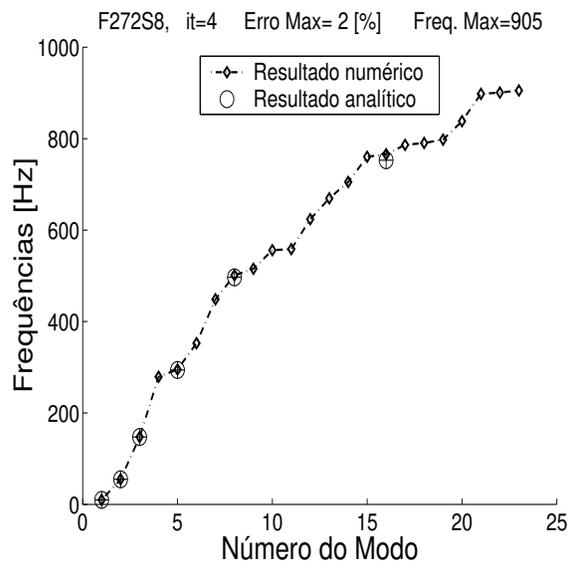
(A) PRIMEIRA ITERAÇÃO.



(B) SEGUNDA ITERAÇÃO.



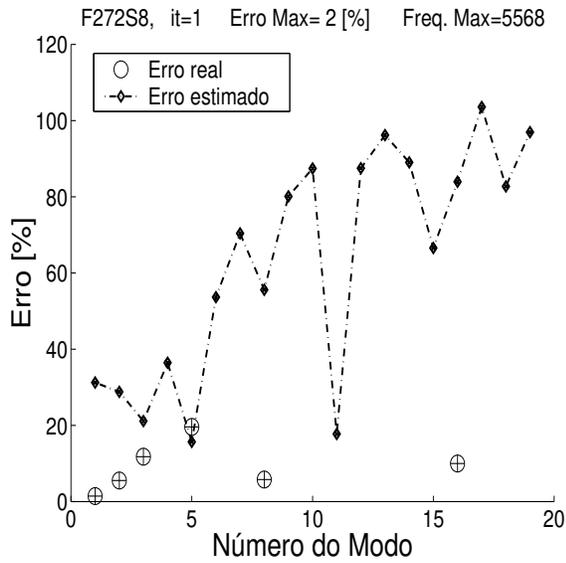
(C) TERCEIRA ITERAÇÃO



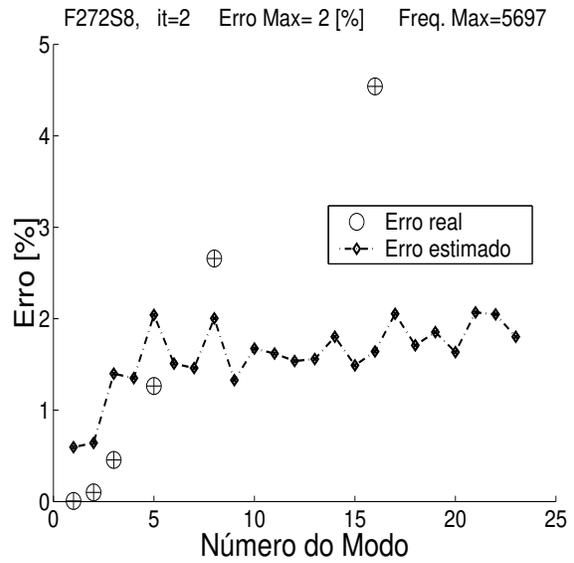
(D) QUARTA ITERAÇÃO.

Figura 6.28: EVOLUÇÃO DAS FREQUÊNCIAS CALCULADAS E TEÓRICAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DO MODO PARA MALHA $F272$. FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA.

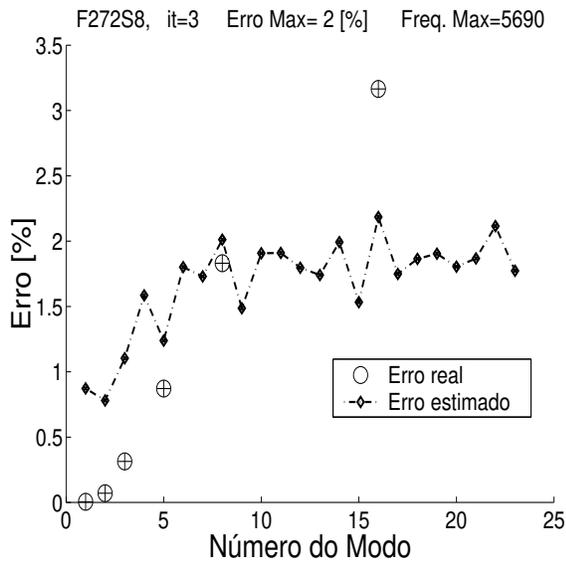
O processo adaptativo para malha $F272$ é apresentado nas Figuras (6.28) e (6.29) e mostra um comportamento semelhante, mas com algumas diferenças marcantes. A malha $F272$ é uma malha muito mais refinada e menos distorcida do que a malha $F108$, ver Tabela (6.6). O processo iterativo mostra que essa discretização possibilitou que o erro fosse mantido abaixo



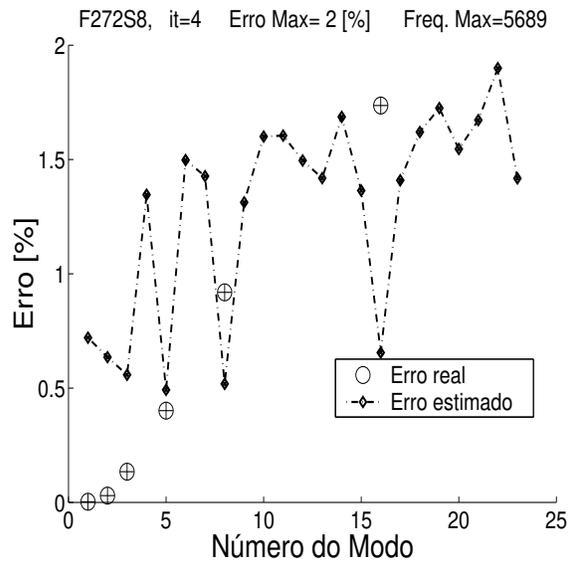
(A) PRIMEIRA ITERAÇÃO.



(B) SEGUNDA ITERAÇÃO.



(C) TERCEIRA ITERAÇÃO



(D) QUARTA ITERAÇÃO.

Figura 6.29: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS ASSOCIADOS ÀS FREQUÊNCIAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DO MODO. MALHA *F272*. FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA.

do erro prescrito em toda a faixa de frequências de interesse. Ao final do processo, o erro estimado apresentou valores bem próximos ao erro real ou calculado. O erro estimado deve ser sempre superior ao real para garantir que este seja inferior ao valor prescrito, este é um

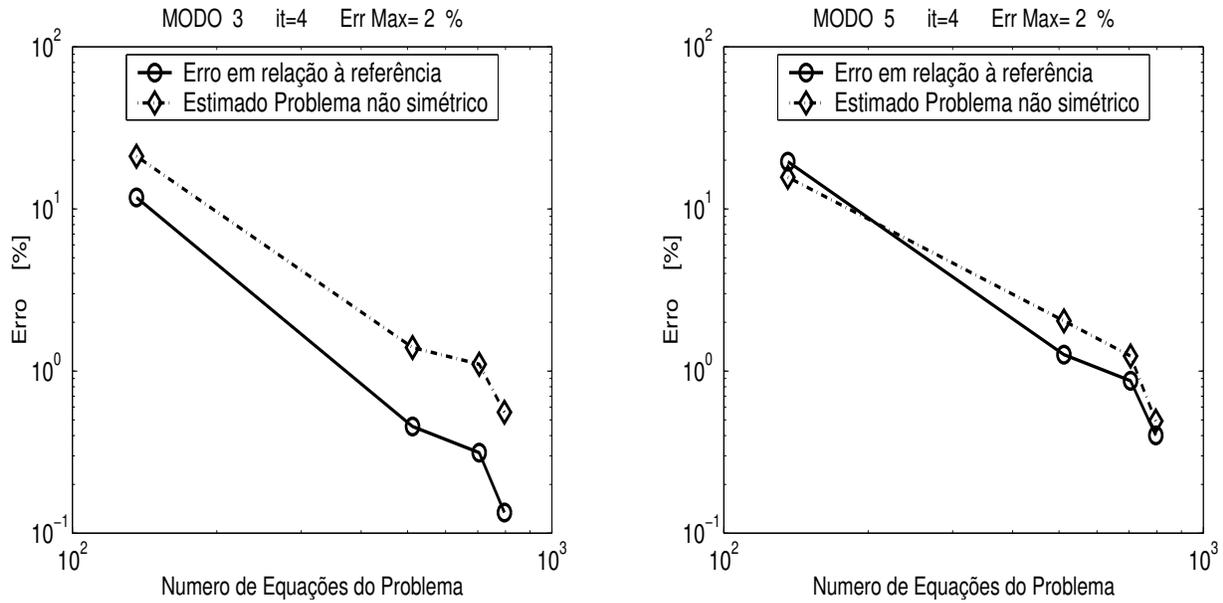


Figura 6.30: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM RELAÇÃO AO NUMERO DE EQUAÇÕES DO SISTEMA, MODOS 3 E 5. MALHA *F272* FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA.

fator determinante na confiabilidade do procedimento adaptativo. Mas para que o estimador não aumente muito a ordem das funções de interpolação durante o processo adaptativo é desejável que os erros estimados tenham valores próximos aos erros reais.

A Figura (6.29) revela que durante o processo p -adaptativo para malha *F272* o erro estimado ficou abaixo do erro real em algumas iterações. Este fato aponta para uma perda de confiabilidade dos resultados já na segunda iteração, quando o modo 8, ou o quinto modo estrutural dominante, e o modo 15, ou sexto modo estrutural dominante, apresentavam erros reais bem superiores ao estimado. A continuidade do processo adaptativo levou esses modos predominantemente estruturais a ter seu erro corretamente indicado. Entretanto, se o valor do erro prescrito fosse pouco maior, o processo teria sido interrompido sem que os erros reais estivessem abaixo do valor de erro pré-estabelecido. Este comportamento é bem diferente do comportamento da malha *F108*, onde o erro estimado é sempre maior que o erro real.

Nas Figuras (6.30) e (6.31) a evolução do erro em função do numero de equações para os modos 3, 5 e 8, não mostra um comportamento marcadamente superior da malha *F272* em relação à malha *F108*, Figuras (6.26) e (6.27). Na realidade, os erros têm a mesma ordem de

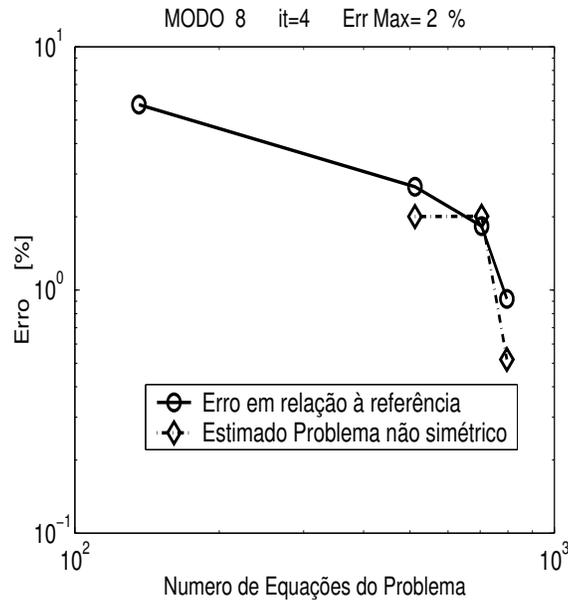
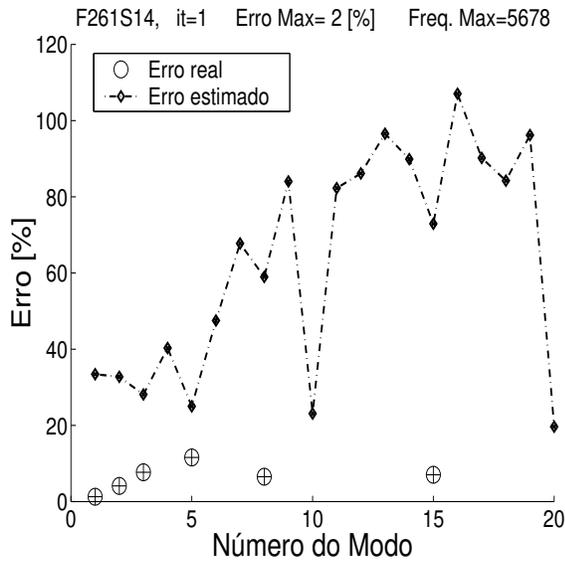


Figura 6.31: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS EM RELAÇÃO AO NUMERO DE EQUAÇÕES DO SISTEMA. MALHA *F272* FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA. OITAVO MODO.

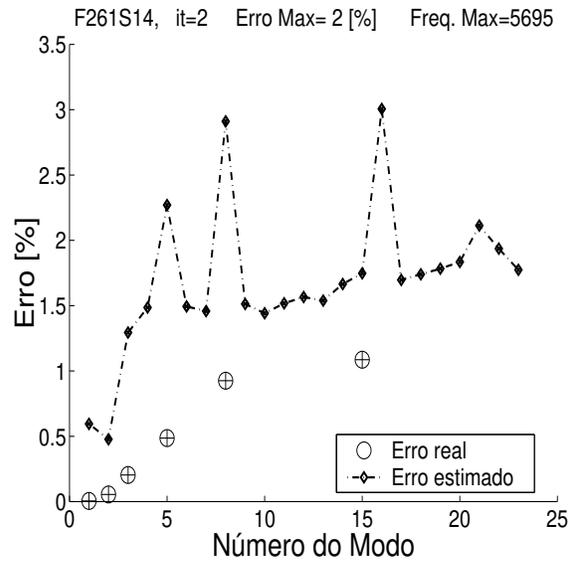
grandeza para os modos 3, 5 e 8, e o ao final do processo iterativo foi observado cruzamento de modos envolvendo o 15º modo.

A malha *F108* apresenta refinamento maior na interface com a viga, e os modos de referência também são modos estruturais predominantes. Como os elementos da viga para os dois casos não tiveram graus hierárquicos atribuídos pelo estimador, é de se supor que a maior confiabilidade do estimador usando a malha *F108* deve-se à maior definição do domínio fluido próximo da interface com o elemento estrutural. O maior número de cruzamento de modos estruturais que ocorreu durante o processo iterativo da malha *F272* reforça a hipótese.

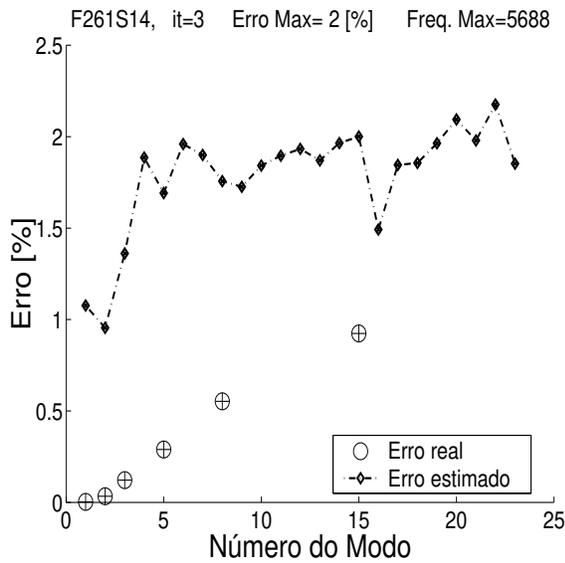
Estes resultados apontam para a possibilidade de discretizações intermediárias com desempenho superior às malhas empregadas. A malha *F261* foi incluída como um exemplo desta possibilidade, é mais refinada no domínio fluido em relação à malha *F108* e mais refinada na interface em relação à malha *F272*. Para esta malha só foi incluída a Figura (6.32) com a evolução do erro das frequências durante o processo iterativo. Como esperado, os erros estimados mantiveram-se acima dos erros reais ou calculados durante o processo adaptativo e o erro real ficou abaixo do valor do erro prescrito ao final do processo. No entanto,



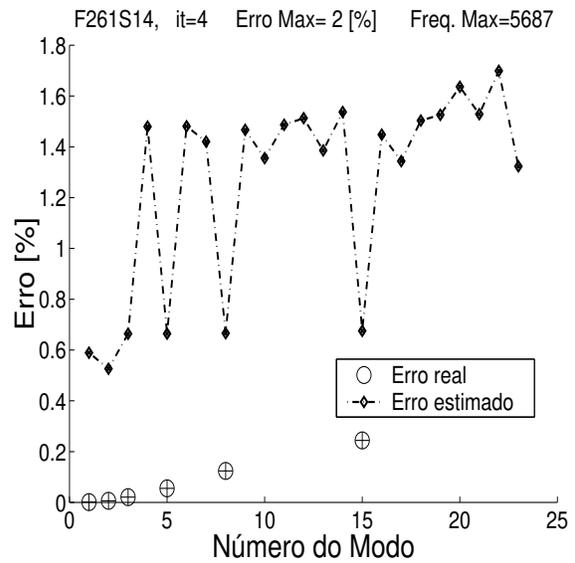
(A) PRIMEIRA ITERAÇÃO.



(B) SEGUNDA ITERAÇÃO.



(C) TERCEIRA ITERAÇÃO



(D) QUARTA ITERAÇÃO.

Figura 6.32: EVOLUÇÃO DOS ERROS CALCULADOS E ESTIMADOS ASSOCIADOS ÀS FREQUÊNCIAS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DO MODO. MALHA *F261*. FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA.

o erro calculado ficou bem abaixo do erro estimado pelo menos para os modos estruturais predominantes.

Nas Figuras (6.33), (6.34), (6.35) e (6.36) estão todos os modos de 2 a 9 para o domínio

fluido e estrutural da malha $F272$. Os modos são idênticos aos obtidos para as malhas $F261$ e $F108$, para essa última foram incluídos na Figura (6.37) os modos 8 e 15 que são modos predominantemente estruturais. Este conjunto de modos mostra a capacidade da formulação p em detalha-los sem uma discretização muito refinada do domínio. Também permite uma comparação dos modos do problema acoplado com os modos do problema estrutural e fluido, obtidos anteriormente, já que foram empregadas as mesmas propriedades.

Pelas figuras pode-se observar que a ordem dos modos estruturais predominantes não são alterados pela presença do fluido, pelo menos para os seis primeiros modos quando comparados aos modos obtidos para viga, Figura (6.5). As frequências são reduzidas devido ao acoplamento, mas esta é a única mudança marcante para o problema em questão e está de acordo com os trabalhos publicados sobre o tema [12, 46, 21, 24, 26].

Os modos fluido predominantes também podem ser identificados por sua semelhança com os modos obtidos para o problema acústico. Para o problema em análise a presença da estrutura mudou não apenas o valor das frequências mas também a ordem. A tendência parece ser o agrupamento dos modos fluidos para uma dada forma de vibrar da viga. As diferentes formas de "vibrar" do fluido que são consistentes com o primeiro modo tendem a se agrupar, as formas que são compatíveis com o segundo modo também. Mas isto não impede que grupos de modos compatíveis com o primeiro modo estrutural, por exemplo, reapareçam em frequências mais elevadas.

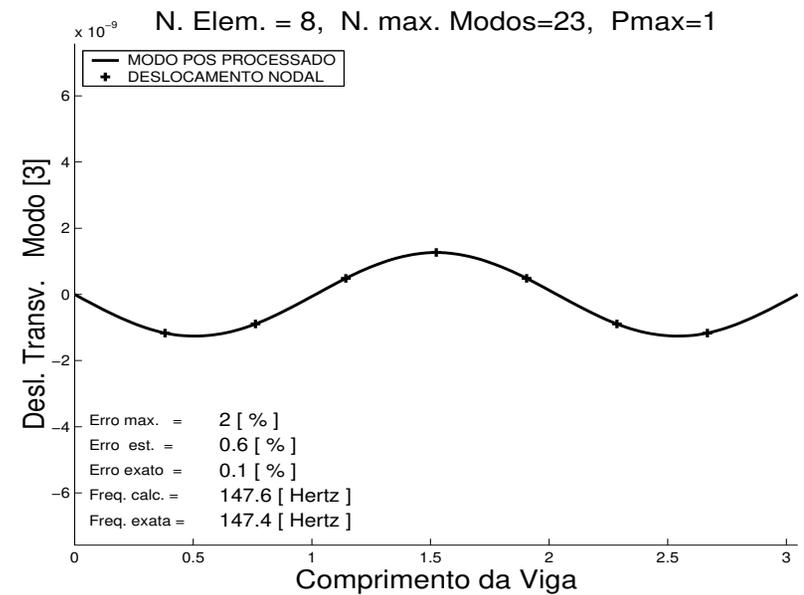
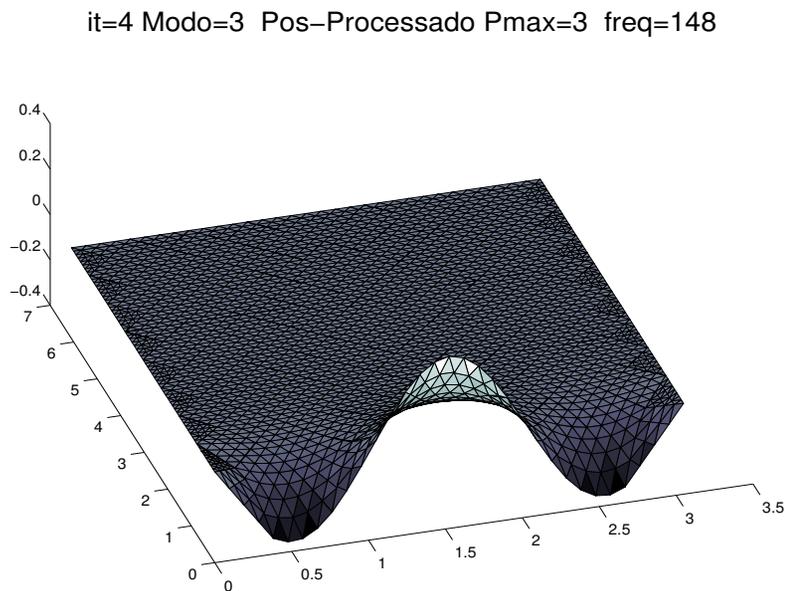
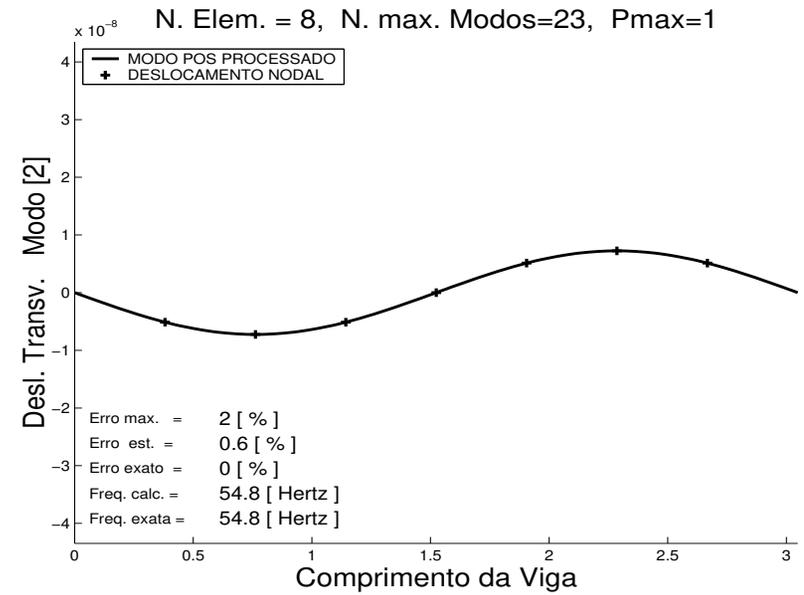
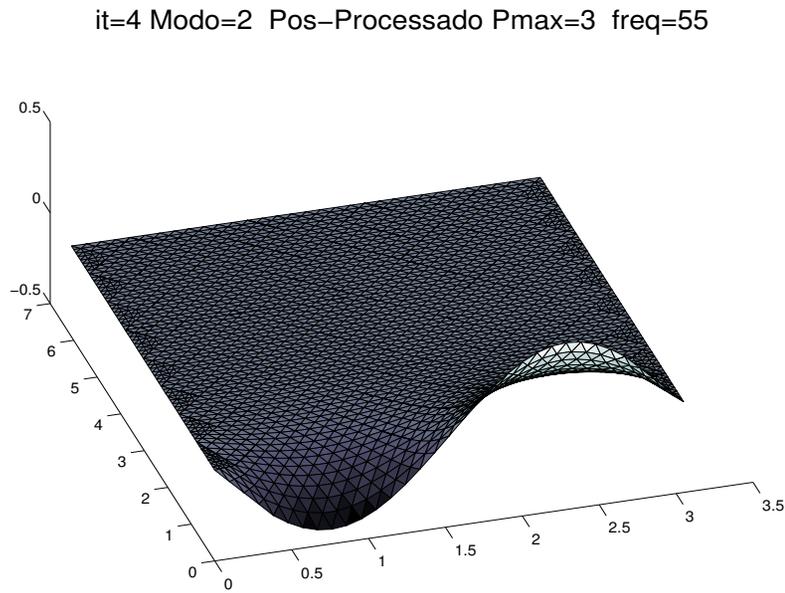
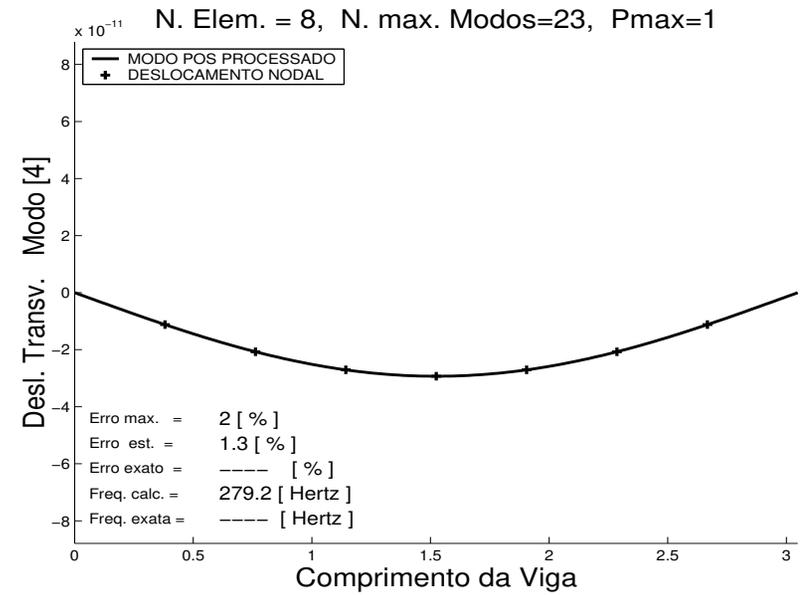
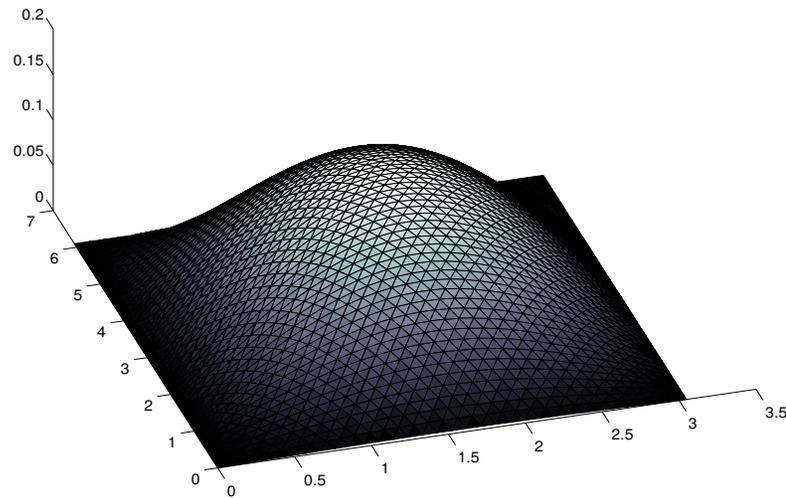


Figura 6.33: MODOS DOMÍNIO FLUIDO E ESTRUTURAL. MALHA $F272$, FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA. MODOS 2 E 3 PREDOMINANTEMENTE ESTRUTURAIS, PÓS-PROCESSADOS NO DOMÍNIO FLUIDO.

it=4 Modo=4 Pos-Processado Pmax=3 freq=279



it=4 Modo=5 Pos-Processado Pmax=3 freq=295

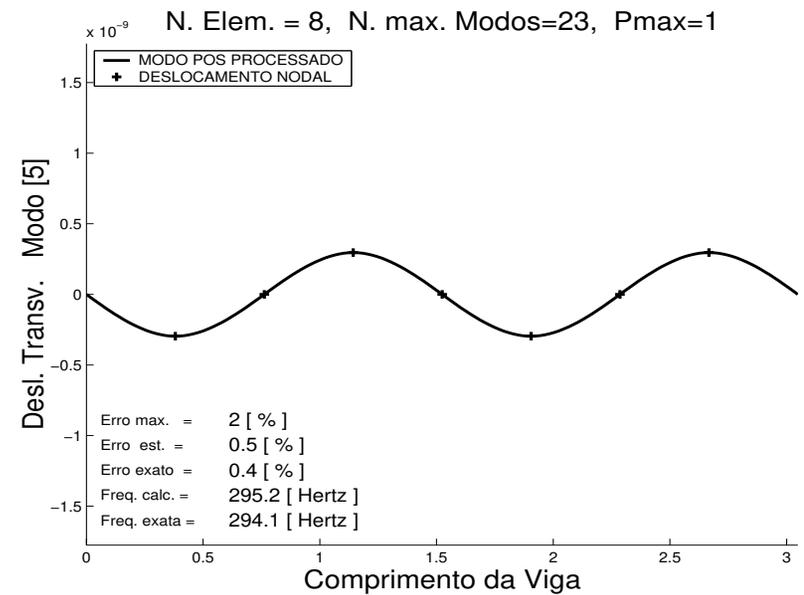
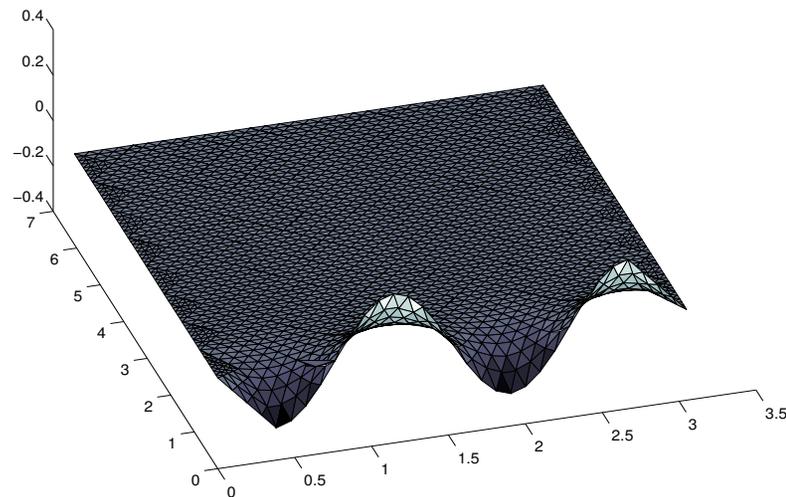
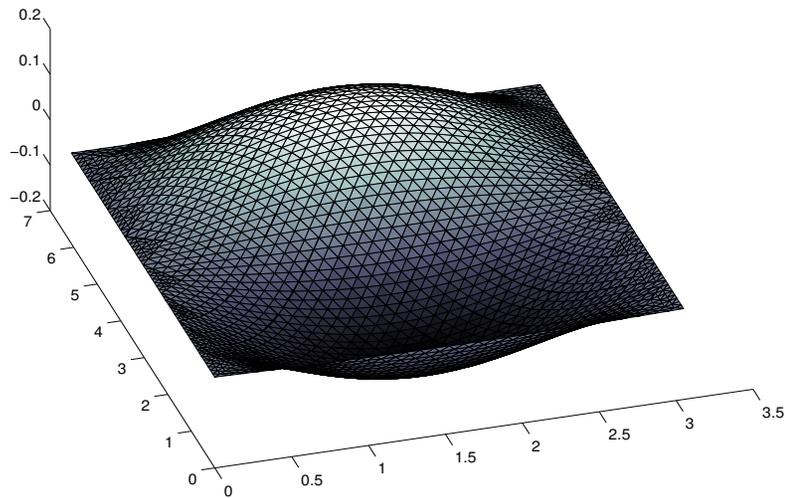


Figura 6.34: MODOS DOMÍNIO FLUIDO E ESTRUTURAL. MALHA $F272$, FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA. MODOS 4 E 5, FLUIDO E ESTRUTURAL DOMINANTES RESPECTIVAMENTE, PÓS-PROCESSADOS NO DOMÍNIO FLUIDO.

it=4 Modo=6 Pos-Processado Pmax=3 freq=352



it=4 Modo=7 Pos-Processado Pmax=3 freq=449

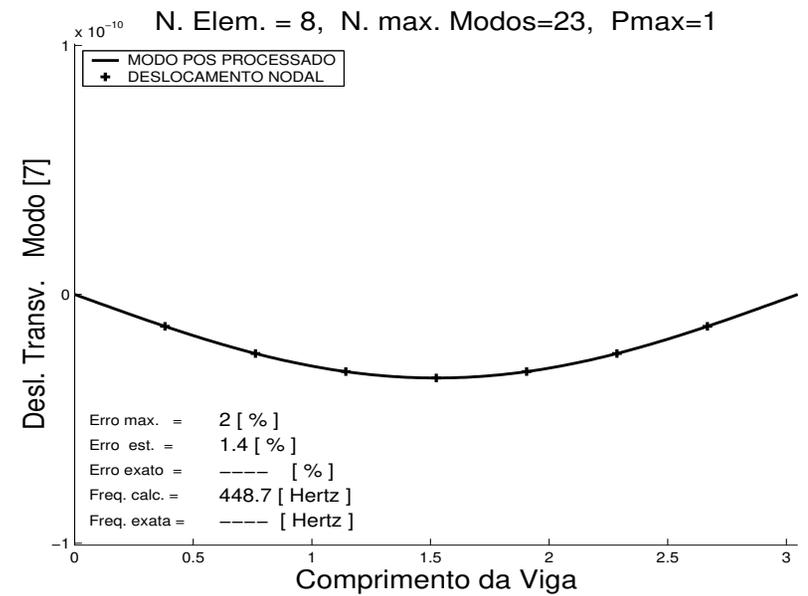
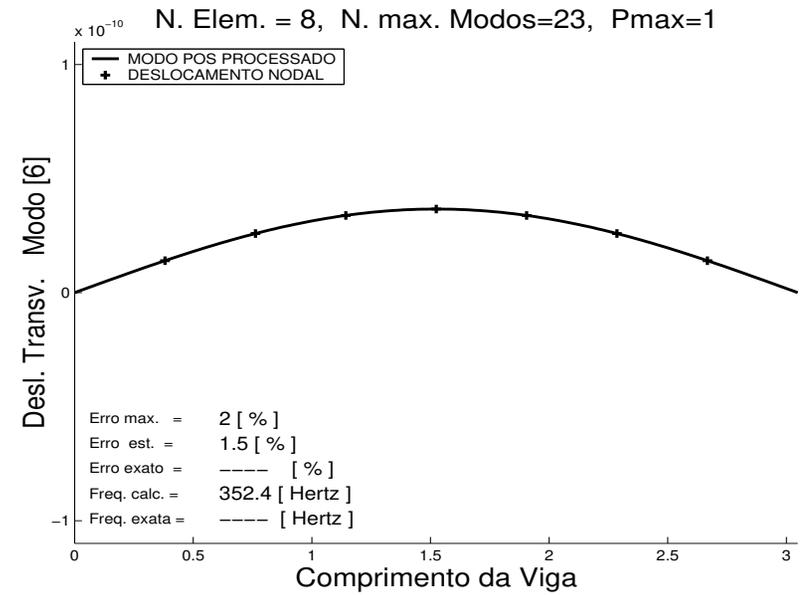
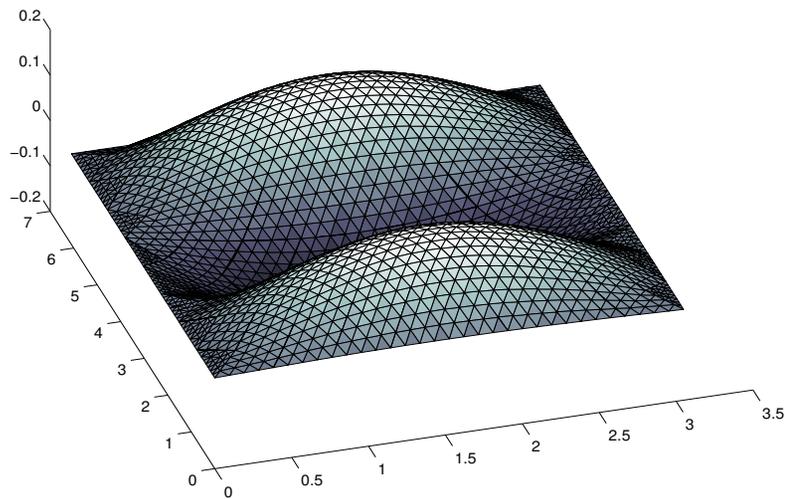
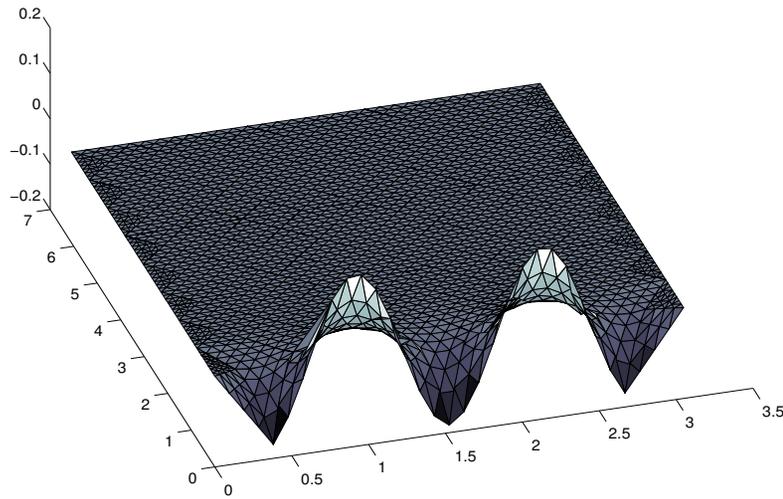


Figura 6.35: MODOS DOMÍNIO FLUIDO E ESTRUTURAL. MALHA $F272$, FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA. MODOS 6 E 7, FLUIDO DOMINANTES, PÓS-PROCESSADOS NO DOMÍNIO FLUIDO.

it=4 Modo=8 Pos-Processado Pmax=3 freq=501



it=4 Modo=9 Pos-Processado Pmax=3 freq=515

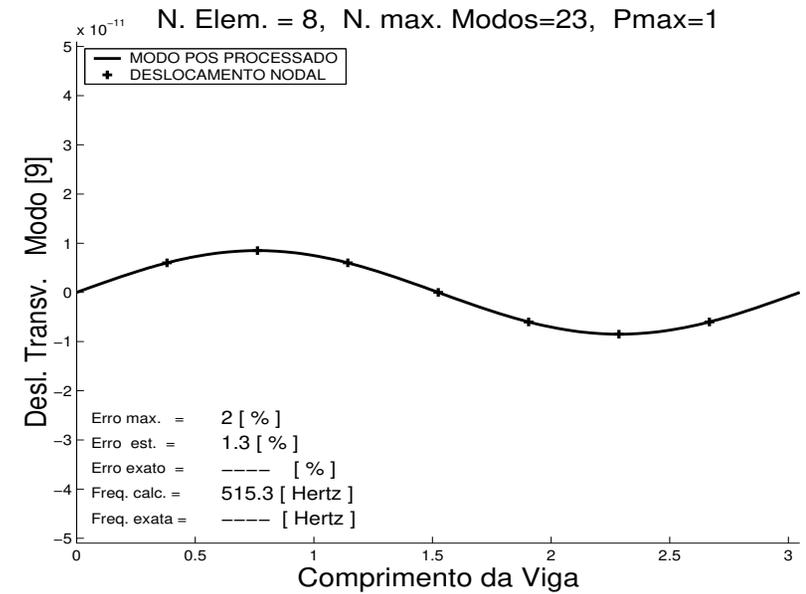
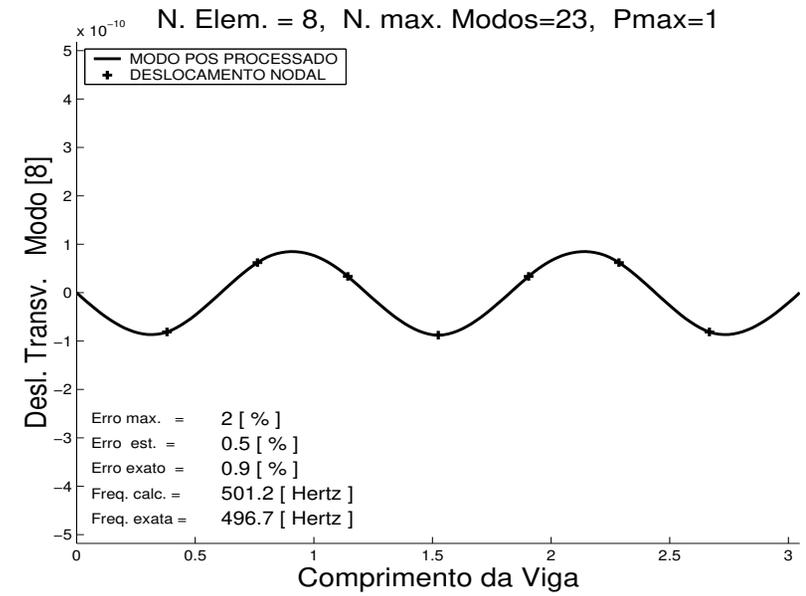
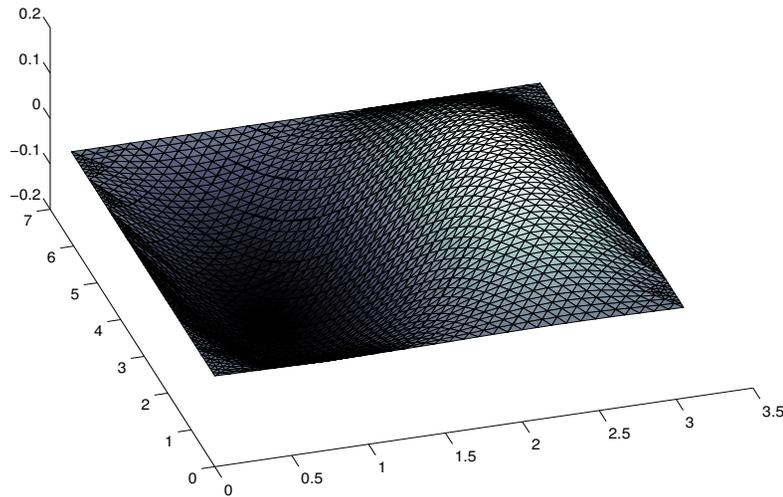
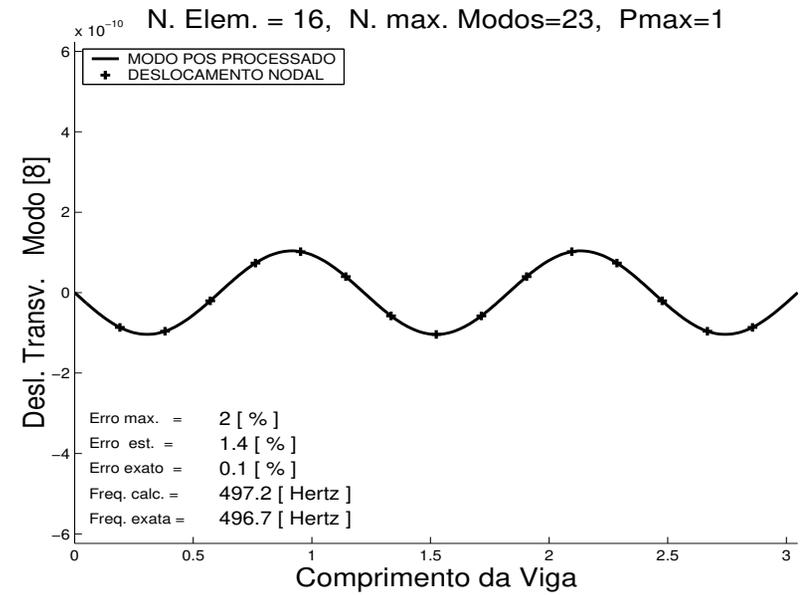
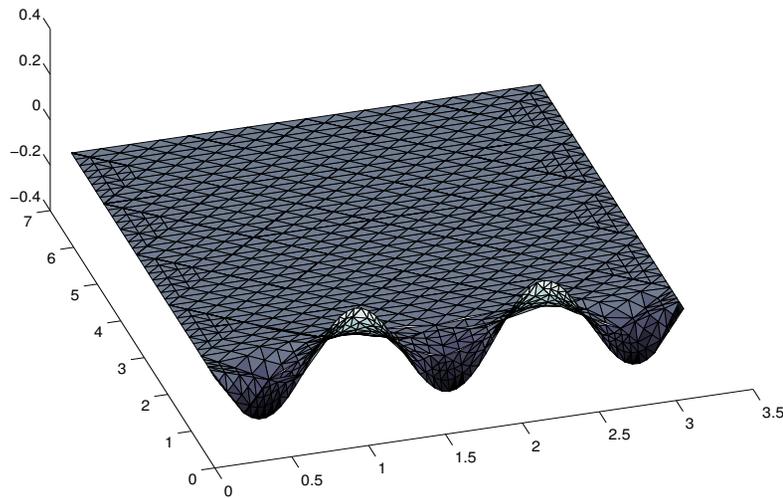


Figura 6.36: MODOS DOMÍNIO FLUIDO E ESTRUTURAL. MALHA $F272$, FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA. MODOS 8 E 9, ESTRUTURAL E FLUIDO DOMINANTES RESPECTIVAMENTE, PÓS-PROCESSADOS NO DOMÍNIO FLUIDO.

it=4 Modo=8 Pos-Processado Pmax=3 freq=497



it=4 Modo=15 Pos-Processado Pmax=3 freq=754

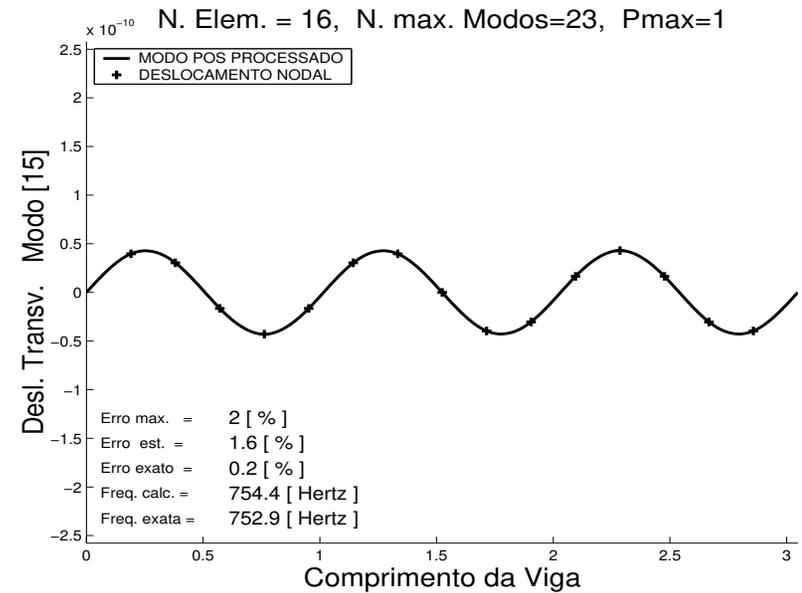
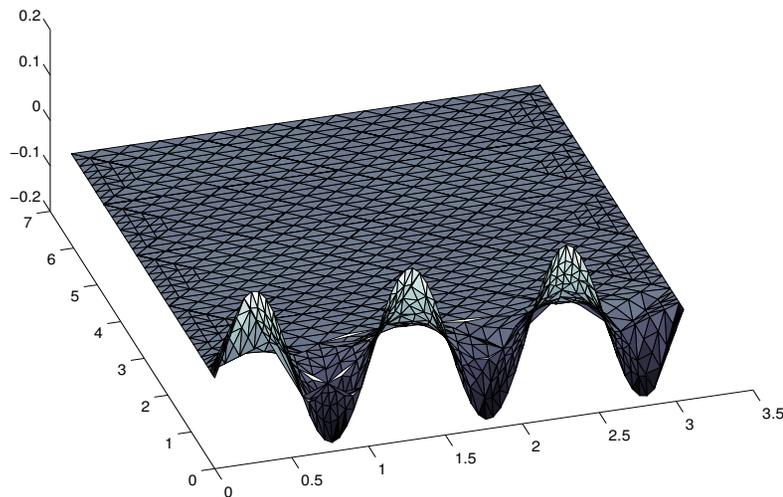


Figura 6.37: MODOS DOMÍNIO FLUIDO E ESTRUTURAL. MALHA *F108*, FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA. MODOS 8 E 15 PÓS-PROCESSADOS NO DOMÍNIO FLUIDO.

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para Continuidade do Trabalho

Neste trabalho, fez-se uma breve revisão das funções hierárquicas de alta ordem. Os conceitos foram aplicados às funções de forma para viga usando-se polinômios de Legendre. Estendeu-se a técnica ao problema acústico interno bidimensional usando-se as funções de forma sugeridas por Alberto Peano [50, 51].

Discutiu-se as diferentes formulações para o problema fluido-estrutura para definir a formulação em pressão como a mais adequada aos objetivos do trabalho. Incluiu-se a formulação em potencial de velocidades por esta permitir a simetrização da formulação em pressão. A escolha do processo de refinamento p -adaptativo foi justificada pelas características do problema fluido-estrutura.

Para viabilizar o processo p -adaptativo escolheu-se o estimador de erro proposto por Friberg [27]. A implementação da rotina adaptativa e do estimador foi feita inicialmente para o problema de vibrações livres para a barra e para a viga. Aplicou-se o procedimento ao problema acústico bidimensional, e em ambos os casos o desempenho do estimador e do processo adaptativo foram muito encorajadores. O estimador que é um estimador global mostrou-se confiável, muito preciso e de implementação bastante simples.

A aplicação do processo p -adaptativo, como proposto por Friberg, ao problema fluido-estrutura exigiu algumas modificações. Obteve-se uma expressão simples para o estimador aplicado à formulação em potencial de velocidades. Por serem baseados em submatrizes obtidas diretamente da formulação em pressão, os estimadores obtidos para o problema simétrico

foram aplicados à formulação não simétrica ou em pressão. E estas são as principais contribuições teóricas do trabalho.

Alguns parâmetros de implementação numérica foram abordados. Ficou claro que a distorção dos elementos da malha é um parâmetro relevante na confiabilidade dos resultados e na eficiência e desempenho do estimador. Essa é uma informação importante na implementação de outros procedimentos como h ou hp -adaptativo.

O problema fluido-estrutura em diferentes formulações apresenta problema de condicionamento numérico. O estimador proposto teve um desempenho bastante satisfatório e não foi prejudicado pelo mal condicionamento do sistema [72]. Desta forma, o estimador, que é de implementação muito simples, mostrou-se robusto do ponto de vista computacional, econômico e adequado às características dos problemas analisados. Parte deste comportamento pode ser atribuído ao emprego de matrizes elementares fechadas ou pré-integradas, ou seja, erro associado à integração numérica dos elementos da matriz elementar foi eliminado. Mas não foram empregadas técnicas numéricas para tentar precisar uma diferença entre os resultados.

Os erros são inexpressivos para as versões h do método dos elementos finitos, mas a integração numérica na formulação p acarreta aumento do erros com a ordem do polinômio. Além do aumento no erro, o número de pontos de integração aumenta muito o que torna o processo p -adaptativo muito lento.

Por fim, deve-se mencionar que o algoritmo foi implementado como sub-rotina do programa Meflab, que é um programa escrito com os recursos de programação do Matlab. Embora, apresentando limitações de memória além de ser mais lento, por ser uma linguagem interpretada, o Matlab permitiu rapidez na implementação e no teste das rotinas. O grande número de recursos de programação e a possibilidade de agregar rotinas escritas em outras linguagens também tornam esta linguagem atraente, principalmente no desenvolvimento do programa. Além destas características, o Matlab apresenta muitos recursos gráficos e pode ser usado como ferramenta para o pré e o pós-processamento de dados.

7.1 Sugestões para Continuidade do Trabalho

Existem lacunas teóricas e de implementação numérica que indicam a necessidade da continuidade do trabalho. Uma sugestão simples é a implementação de funções de forma com outras formulações. A família de funções usada induz ao mal condicionamento do sistema uma vez que geram termos da matriz de Hilbert [79], matriz de teste para rotinas que lidam com matrizes mal condicionadas [87]. O trabalho de Alberto C. Nogueira Jr. [88] propõe e avalia diferentes funções de forma hierárquicas pela variação do número de condicionamento com o grau do polinômio empregado. O desenvolvimento de funções de forma deveria, também, tentar contornar ou compensar o problema da grande disparidade entre propriedades do fluido e da estrutura, e este é um outro desafio no desenvolvimento destas funções.

O estimador proposto apresentou um bom desempenho, mas foi implementado com uma única estratégia de identificação de erro. Um estudo do comportamento do estimador, empregando diferentes estratégias, parece ser desejável, principalmente em problemas muito mais instáveis numericamente do que os casos aqui apresentados [72]. Pode-se citar, a alteração do valor do erro aceitável entre iterações consecutivas, ou estimar o erro para frequências fora da faixa de interesse com valor de erro aceitável diferenciado em função da ordem do modo, dentre outras possibilidades.

O caso analisado para o problema fluido-estrutura mostrou que para alcançar o erro prescrito o refinamento uniforme de toda a malha não era o procedimento mais eficiente. Ficou indicada a necessidade de um procedimento de refino localizado na interface, e que as necessidades de refinamento das malhas da viga e do fluido não são as mesmas. O processo p -adaptativo mostrou-se muito eficiente na identificação dos modos sem a discretização muito detalhada do domínio e o estimador é muito simples e eficiente. Este fato indica que talvez o processo de refinamento hp -adaptativo seja o mais adequado. Parece necessário, também, implementar malhas não conformes. Este procedimento permitiria que o refinamento de uma das malhas não implicasse no refinamento da outra. As funções de forma, neste caso, exigem características especiais para assegurar continuidade lateral e nodal, vide Bravo [39].

Referências Bibliográficas

- [1] Bettess P. More on infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:1613–1626, 1980.
- [2] Vallance C. Vlahopoulos N., Raveendra S. T. and Messer S. Numerical implementation and applications of a coupling algorithm for structural-acoustic models with unequal discretization and partially interfacing surfaces. *Finite Elements in Analysis and Design*, 32:257–277, 1999.
- [3] Allen M. J. and Vlahopoulos N. Integration of finite element and boundary element methods for calculating the radiated sound from a randomly excited structure. *Computers & Structures*, 77:155–169, 2000.
- [4] Jeans R. A. and Mathews I. C. Solution of fluid-structure interaction problems using a coupled finite element and variational boundary element technique. *J. Acoust. Soc. Am.*, 88(5):2459–2466, november 1990.
- [5] Mackerle J. Fluid-structure interaction problems, finite element and boundary element approaches, a bibliography (1995-1998). *Finite Elements in Analysis and Design*, 31:231–240, 1999.
- [6] Melenk J. M. and Babuška I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:289–314, 1996.
- [7] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., and Krysl P. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:3–47, 1996.

- [8] Ohayon R. and Morand H. J.-P. *Fluid Structure Interaction*. John Wiley & Sons - Masson, Chichester, England, first edition, 1995.
- [9] Handi M. A., Ousset I., and Verchery G. A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 13:139–150, 1978.
- [10] Galli Luiz A. F. *Estudo do comportamento dinâmico de sistemas acoplados fluido-estrutura utilizando-se uma formulação simétrica em potencial de velocidades*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional, Dissertação de Mestrado, março 1995.
- [11] Zienkiewicz O. C. and Bettles P. Fluid-structure dynamic interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 13:1–16, 1978.
- [12] Shin Y. S. and Chargin M. K. Acoustic responses of coupled fluid-structure system by acoustic-structural analogy. *Shock Vibration Bulletin*, proc. 53(part 2):11–21, 1983.
- [13] Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey, first edition, 1996.
- [14] Nackenhorst U. and Zastrau B. A contribution to dynamic fluid-structure-coupling using a displacement based finite element formulation. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, XIV(3):201–220, 1992.
- [15] Bathe K.J., Zang H., and Wang M. H. Finite element analysis of incompressible and compressible fluid flows with free surfaces and structural interactions. *Computers & Structures*, 56(2/3):193–213, 1995.
- [16] Olson L. G. and Bathe K.J. A study of displacement-based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid and fluid-structure systems. *Nuclear Engineering and Design*, 76:137–151, 1983.

- [17] Zienkiewicz O. C. and Newton R. E. Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid. In *Proceedings International Symposium on Finite Elements Techniques*, pages 360–379, Stuttgart, July 1969.
- [18] Everstine G. C. A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction. *Journal of Sound and Vibration*, 79(1):157–160, 1981.
- [19] Sandberg G. E. and Göransson P. A symmetric finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 123(3):507–515, 1988.
- [20] Sandberg G. E. A new strategy for solving fluid-structure problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:357–370, 1995.
- [21] Sandberg Göran E. Some aspects of fluid-structure interaction analysis. In Oñate S. I. E. and Dvorkin E., editors, *Computational Mechanics New Trends and Applications*, pages 1–9, Barcelona, Spain, 1998. CIMNE.
- [22] Wang X. and Bathe K.-J. Displacement/pressure based mixed finite element formulations for acoustic fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:2001–2017, 1997.
- [23] Fox R. W. and McDonald A. T. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Editora Guanabara, Rio de Janeiro, 1988. 3^a edição.
- [24] Bermúdez A., Durán R., and Rodríguez R. Finite element solution of hydroelastic vibration problems. Relatório técnico, Departamento de Matemática Aplicada da Universidade Santiago de Compostela, 1995.
- [25] Demidovich B. P. and Maron I. A. *Computational Mathematics*. MIR Publishers, Moscow, first edition, 1987.
- [26] Makridakis CH., Ihlenburg F., and Babuška I. Analysis and finite element methods for a fluid-solid interaction problem in one dimension. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 6(8):1119–1141, 1996.

- [27] Friberg O. An error indicator for the generalized eigenvalue problem using the hierarchical finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:91–98, 1986.
- [28] Noor A. K. and Babuška I. Quality assessment and control of finite element solutions. *Finite Elements in Analysis and Design*, 3:1–26, 1987.
- [29] Sterwart J. R. and Hughes J. R. An a-posteriori error estimator and hp-adaptive strategy for finite element discretizations of the Helmholtz equation in exterior domains. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25:1–26, 1997.
- [30] Zienkiewicz O. C. *The Finite Element Method*. McGraw Hill Book Company, New York, 1987.
- [31] Zienkiewicz O. C. and Zhu J. Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Interntional Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:337–357, 1987.
- [32] Zienkiewicz O. C. and Zhu J. Z. The superconvergent patch recovery (spr) and adaptive finite element refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101:207–224, 1992.
- [33] Zienkiewicz O. C. and Zhu J. Z. The superconvergent patch recovery and a-posteriori error estimates. part 1: The recovery technique. *Interntional Journal for Numerical Methods in Engeneering*, 33:1331–1364, 1992.
- [34] Zienkiewicz O. C. and Zhu J. Z. The superconvergent patch recovery and a-posteriori error estimates. part 2: Error estimates and adaptivity. *Interntional Journal for Numerical Methods in Engeneering*, 33:1365–1382, 1992.
- [35] Zienkiewicz O. C. Computational mechanics today. *Interntional Journal for Numerical Methods in Engeneering*, 34:9–33, 1992.
- [36] Wiberg N.-E. and Hager P. Error estimation and h-adaptivity for eigenfrequency analysis of plates in bending: Numerical results. *Computers & Structures*, 78:1–10, 2000.

- [37] Babuška I. and Rheinboldt W. C. A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12:1597–1615, 1978.
- [38] Szabo B. and Babuška I. *Finite Elements Analysis*. John Wiley & Sons, New York, first edition, 1991.
- [39] Bravo C. M. A. A. *Um sistema de refinamento h e p adaptativo utilizando elementos finitos hierárquicos multidimensionais*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional, Tese de Doutorado, 2000.
- [40] Pessolani R. B. V. An *hp*-adaptive hierarchical formulation for the boundary element method applied to elasticity in two dimensions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, 24(1):1–9, 2002.
- [41] Ihlenburg F. and Babuška I. Finite element solution to the Helmholtz equation with high wave number part i: the h version of the fem. *Comput. Math. Appl.*, 30(9):9–37, 1995.
- [42] Babuška I., Ihlenburg F., Paik E. T., and Sauter S. A. A generalized finite element method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution. *Computer Methods in Applied to Mechanical and Engineering*, 128:325–359, 1995.
- [43] Ihlenburg F. and Babuška I. Dispersion analysis and error estimation of galerkin finite element methods for the Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:3745–3774, 1995.
- [44] Ihlenburg F. and Babuška I. Reability of finite element methods for the numerical computation of waves. *Advances in Engineering Software*, 28:417–424, 1997.
- [45] Ihlenburg F. and Babuška I. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number part ii: the h-p version of the fem. *SIAM J. Numer. Analysis*, 34(1):315–358, february 1997.

- [46] Ihlenburg F. *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*, volume 132 of *Applied mathematical sciences*. Springer-Verlag New York Inc., New York, first edition, 1998.
- [47] Alonso A., Dello Russo A., and Vampa V. A posteriori error estimates in finite element solution of structure vibration problems with applications to acoustical fluid- structure analysis. *Computational Mechanics*, 23:231–239, 1999.
- [48] Babuška I., Guo B. Q., and Osborn J. E. Regularity and numerical solutions of eigenvalue problems with piecewise analytic data. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 26(6):1534–1560, December 1989.
- [49] Friberg O., Möller P., Makovička D., and Wiberg N.-E. An adaptive procedure for eigenvalue problems using the hierarchical finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:319–335, 1987.
- [50] Peano A. Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending. *Comp. & Maths with Appls.*, 2:211–224, 1976.
- [51] Peano A. Conforming approximations for kirchhoff plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14:1273–1291, 1979.
- [52] Rossow M. P. and Katz I. N. Hierarchical finite elements and precomputed arrays. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12:977–999, 1978.
- [53] Lawrence K. I., Nambiar R. V., and Bergmann B. Closed form stiffness matrices and error estimators for plane hierarchic triangular elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:879–894, 1991.
- [54] Rathod H. T. Explicit stiffness matrices for axisymmetric triangular elements. *Computers & Structures*, 30(5):1091–1100, 1988.
- [55] Griffiths D. V. Stiffness matrix of the four-node quadrilateral element in closed form. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:1027–1038, 1994.

- [56] Babu D. K. and Pinder G. F. Analytical integration formulae for linear isoparametric finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:1153–1166, 1984.
- [57] Rathod H. T. Some analytical integration formulae for a four node isoparametric element. *Computers & Structures*, 30(5):1101–1109, 1988.
- [58] Subramanian G. and C. J. Bose. Convenient generation of stiffness matrices for the family of plane triangular elements. *Computers & Structures*, 15(1):85–89, 1982.
- [59] Shiakolas P. S., Lawrence K. L., and Nambiar R. V. Close-form expressions for the linear and quadratic strain tetrahedral finite elements. *Computers & Structures*, 50(6):743–747, 1994.
- [60] Shiakolas P. S., Lawrence K. L., and Nambiar R. V. Close-form error estimators for the linear strain and quadratic strain tetrahedron finite elements. *Computers & Structures*, 47(6):907–915, 1993.
- [61] Shiakolas P. S., Nambiar R. V., Lawrence K. L., and Rogers W. A. Close-form stiffness matrices for the linear strain and quadratic strain tetrahedron finite elements. *Computers & Structures*, 45(2):237–242, 1992.
- [62] Cook R. D., Malkus D. S., and Plesha M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York, third edition, 1989.
- [63] Burnett D. S. *Finite Element Analysis, from Concepts to Applications*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, may 1988.
- [64] Feijóo R. Introduccion al metodo de los elementos finitos. Apostila, LNCC/CNPq, 1981.
- [65] Zienkiewicz O. C. and Morgan K. *Finite Elements And Approximation*. John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [66] Carnahan B., Luther H. A., and Wilkes J. O. *Applied Numerical Methods*. John Wiley & Sons, first edition, 1969.

- [67] Tijonov A. N. and Samarsky A. A. *Equaciones de la Fisica Matematica*. Editorial MIR, Moscow, second edition, 1980.
- [68] Spiegel M. R. *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*. McGraw-Hill, São Paulo, S.P., 1973.
- [69] Davies G. A. O. *Virtual Work in Structural Analysis*. John Wiley & Sons, 1982.
- [70] Duarte H. V. Pavanello R. Modelagem p-adaptativa da dinâmica de pórticos planos. In *Anais Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Natal RN Brasil*. Sociedade Brasileira de Ciências Mecânicas, 2000.
- [71] Duarte H. V. Pavanello R. Estimador de erro para método dos elementos finitos hierárquicos aplicado ao problema fluido-estrutura na formulação simétrica. In *Anais Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, João Pessoa PB Brasil*. Sociedade Brasileira de Ciências Mecânicas, 2002.
- [72] Duarte H. V. Pavanello R. Estimador de erro para método dos elementos finitos hierárquicos aplicado ao problema fluido-estrutura na formulação não simétrica. In *Anais Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, João Pessoa PB Brasil*. Sociedade Brasileira de Ciências Mecânicas, 2002.
- [73] Kinsler L. E., Frey A. R., Coppens A. B., and Sanders J. V. *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley & Sons, New York, 1982. 3^a edição.
- [74] Morse Philip M. and Ingard K. U. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey, first edition, 1986.
- [75] Zavala Paulo A. G. *Análise vibro-acústica em meio fluido infinito utilizando o método de elementos finitos e mapeamento Dirichlet-to-Neumann (DtN)*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional, Dissertação de Mestrado, maio 1999.
- [76] Hsu H. P. *Análise Vetorial*. Livros Técnicos e Científicos Editôra Ltda, Rio de Janeiro, 1972.

- [77] Martini José N. *Análise elasto-acústica de cascas axi-simétricas*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional, Dissertação de Mestrado, maio 1996.
- [78] Casas Walter. J. P. *Concepção ótima de sistemas mecânicos acoplados. Aplicações em problemas elasto-acústicos interiores*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional, Tese de Doutorado, março 1998.
- [79] Strang G. and G. J. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice Hall inc., Englewood Cliffs, N. J., 1973.
- [80] Johnson C. Adaptive finite element methods for diffusion and convection problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 82:301–322, 1990.
- [81] Johnson C. and Hansbo P. Adaptive finite element methods in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101:143–181, 1992.
- [82] Irimie S. and Boullard P. Efficacité de l'estimateur d'erreur de verfürth pour la solution de l'équation de Helmholtz. *C. R. Acad. Sci. Paris, Mécanique des fluides numérique / Computational fluid mechanics*, 328:67–71, 2000.
- [83] Boldrini J. L., Costa S. I. R., Figueiredo V. L., and Wetzler H. G. *Álgebra Linear*. Harper & Row do Brasil, São Paulo, S.P., third edition, 1980.
- [84] Lipschutz S. *Topologia Geral*. McGraw Hill do Brasil LTDA, 1973.
- [85] Babuška I. and Osborn J. Eigenvalue problems. In Ciarlet P. G. and Lions J. L., editors, *Handbook of Numerical Analysis*, volume II Part 1. Elsevier Science Publishers, 1991.
- [86] Lo S. H. Volume discretization into tetrahedra-i. verification and orientation of boundary surfaces. *Computers & Structures*, 39(5):493–500, 1991.
- [87] Miranda W. M. *Associação de Técnicas de Tratamento de Resíduos a Algoritmos da Classe ABS para Solução de Sistemas Lineares*. Universidade Federal de Minas Gerais,

Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica, Dissertação de Mestrado, abril 1997.

- [88] Nogueira Jr A. C. *Formulação \mathbf{p} do Método de Elementos Finitos em Problemas de Elasticidade Linear e Não-Linear com Malhas 3D não estruturadas em Métodos Multigrid Algébricos*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional, Tese de Doutorado, novembro 2002.

Apêndice A

Propriedades dos Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre são polinômios que satisfazem à seguinte expressão [67, 68]:

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A.1})$$

O índice n indica a ordem do polinômio. No intervalo $-1 < \xi < 1$ as seguintes propriedades são válidas [25, 66, 67, 68]:

1. $P_n(1) = 1$;
2. $P_n(-1) = (-1)^n$;
3. Ortogonalidade, $\int_{-1}^1 P_n P_m d\xi = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$
4. Se o grau m do polinômio Q for menor que o grau n do polinômio de Legendre então $\int_{-1}^1 P_n Q_m d\xi = 0$;

A fórmula de recursão:

$$nP_n(\xi) - (2n-1)\xi P_{n-1}(\xi) + (n-1)P_{n-2}(\xi) = 0 \quad (\text{A.2})$$

permite a determinação do polinômio de forma recursiva até o grau n , uma vez que $P_0 = 1$ e $P_1 = \xi$. Outra expressão

$$(2n+1)P_n(\xi) = P'_{n+1}(\xi) - P'_{n-1}(\xi) \quad (\text{A.3})$$

que pode ser expressa como

$$P_n(\xi) = \frac{d}{d\xi} \left[\frac{P_{n+1}(\xi) - P_{n-1}(\xi)}{(2n+1)} \right] \quad (\text{A.4})$$

e conduz a definição para integral de um polinômio de Legendre:

$$\int P_n(\xi) d\xi = \frac{[P_{n+1}(\xi) - P_{n-1}(\xi)]}{(2n+1)} \quad (\text{A.5})$$

Apêndice B

Propriedades dos Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite também são ortogonais, mas o seu emprego como função de forma se deve às seguintes propriedades [68]:

1. $H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - (2n-1)H_{n-2}(x)$;
2. $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$;
3. $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$;
4. Ortogonalidade $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m H_n dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{se } m = n \end{cases}$.

A segunda e a terceira propriedades permitem a construção de funções de forma com continuidade C^1 ou que assegurem a continuidade do valor da função e da derivada função no nó. $H_0 = 1$ e $H_1 = 2x$, usando a fórmula de recorrência dada pela propriedade 1, $H_2 = 4x^2 - 2$ e $H_3 = 8x^3 - 12x$.

Apêndice C

Integração da Matriz Volumétrica e de Compressibilidade

C.1 Integração da Matriz Volumétrica H_f

A determinação da matriz volumétrica do problema $[H_f]$, é dada a partir da Expressão (3.29):

$$H_f = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix} dx dy \quad (C.1)$$

Com as considerações feitas no Capítulo 3, tem-se:

$$H_f = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial L_1}{\partial y} \frac{\partial L_1}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial L_n}{\partial x} + \frac{\partial L_1}{\partial y} \frac{\partial L_n}{\partial y} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial L_n}{\partial x} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial L_n}{\partial y} \frac{\partial L_1}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial L_n}{\partial x} \frac{\partial L_n}{\partial x} + \frac{\partial L_n}{\partial y} \frac{\partial L_n}{\partial y} \end{bmatrix} |J| dL_1 dL_2 \quad (C.2)$$

Integrando inicialmente os termos resultantes do produto das derivadas das funções de forma nodais, obtém-se para o termo $H_{(1,1)}^e$ da matriz elementar de compressibilidade:

$$H_{(1,1)}^e = \int_A \left(\frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial L_1}{\partial y} \frac{\partial L_1}{\partial y} \right) |J| dL_1 dL_2 \quad (C.3)$$

Substituindo os valores de $\partial L_1/\partial x$ e $\partial L_1/\partial y$ obtidos da Expressão (3.56) na Seção (3.4), tem-se:

$$H_{(1,1)}^e = \int_A \frac{1}{4A^2} \left((y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2 \right) |J| dL_1 dL_2 \quad (C.4)$$

$$H_{(1,1)}^e = \frac{1}{4A^2} \left((y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2 \right) \int_A |J| dL_1 dL_2 \quad (C.5)$$

Empregando a fórmula de integração para coordenadas de área, que é dada por:

$$\int_A L_1^n L_2^k L_3^l dA = 2A \frac{n!k!l!}{(2+n+k+l)!} \quad (\text{C.6})$$

chega-se a:

$$\int_A dL_1 dL_2 = 1/2 \quad (\text{C.7})$$

lembrando que $|J| = 2A$, escreve-se $H_{(1,1)}^e$ como segue:

$$H_{(1,1)}^e = \frac{1}{4A} \left((y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2 \right) \quad (\text{C.8})$$

Usando o mesmo procedimento análogo para os outros termos da matriz $[H^e]$, e considerando a simetria da matriz, tem-se:

$$H_{(1,2)}^e = H_{(2,1)}^e = \int_A \left(\frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial L_1}{\partial y} \frac{\partial L_2}{\partial y} \right) dA \quad (\text{C.9})$$

$$H_{(1,2)}^e = H_{(2,1)}^e = \frac{1}{4A^2} \int_A ((y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)) dA \quad (\text{C.10})$$

$$H_{(1,2)}^e = H_{(2,1)}^e = \frac{1}{4A} ((y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)) \quad (\text{C.11})$$

$$H_{(1,3)}^e = H_{(3,1)}^e = \frac{1}{4A} ((y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)) \quad (\text{C.12})$$

$$H_{(2,2)}^e = \frac{1}{4A} \left((y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2 \right) \quad (\text{C.13})$$

$$H_{(2,3)}^e = H_{(3,2)}^e = \frac{1}{4A} ((y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)) \quad (\text{C.14})$$

$$H_{(3,3)}^e = \frac{1}{4A} \left((y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \right) \quad (\text{C.15})$$

Para os termos hierárquicos definidos na Tabela (3.2) há a necessidade de se determinar as derivadas das funções de forma para o cálculo da matriz volumétrica.

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} = \frac{\partial(2L_1L_2)}{\partial x} = \frac{\partial(2L_1L_2)}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial(2L_1L_2)}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x} \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} = \frac{1}{A} (L_2(y_2 - y_3) + L_1(y_3 - y_1)) \quad (\text{C.17})$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial y} = \frac{\partial(2L_1L_2)}{\partial y} = \frac{\partial(2L_1L_2)}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial y} + \frac{\partial(2L_1L_2)}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial y} \quad (\text{C.18})$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial y} = \frac{1}{A} (L_2(x_3 - x_2) + L_1(x_1 - x_3)) \quad (\text{C.19})$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial x} = \frac{1}{A} (L_3(y_3 - y_1) + L_2(y_1 - y_2)) \quad (\text{C.20})$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial y} = \frac{1}{A} (L_3(x_1 - x_3) + L_2(x_2 - x_1)) \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial x} = \frac{1}{A} (L_3(y_2 - y_3) + L_1(y_1 - y_2)) \quad (\text{C.22})$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial y} = \frac{1}{A} (L_3(x_3 - x_2) + L_1(x_2 - x_1)) \quad (\text{C.23})$$

Os termos da matriz volumétrica do elemento para termos hierárquicos de ordem 2 já podem ser determinados:

$$\begin{aligned} H_{(1,4)}^e &= H_{(4,1)}^e = \int_A \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_4}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_4}{\partial y} dA = \\ &= \frac{1}{2A^2} \int_A (y_2 - y_3) (L_2(y_2 - y_3) + L_1(y_3 - y_1)) dA + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2A^2} \int_A (x_3 - x_2) (L_2(x_3 - x_2) + L_1(x_1 - x_3)) dA \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

empregando a fórmula de integração para coordenadas de área

$$H_{(1,4)}^e = \frac{1}{6A} [(y_2 - y_3) (y_2 - y_1) + (x_3 - x_2) (-x_2 + x_1)] \quad (\text{C.25})$$

Para $H_{(2,4)}^e = H_{(4,2)}^e$ o procedimento é similar

$$\begin{aligned} H_{(2,4)}^e &= \int_A \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_4}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_4}{\partial y} dA = \\ &= \frac{1}{2A^2} \int_A (y_3 - y_1) (L_2(y_2 - y_3) + L_1(y_3 - y_1)) dA + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2A^2} \int_A (x_1 - x_3) (L_2(x_3 - x_2) + L_1(x_1 - x_3)) dA \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

$$H_{(2,4)}^e = \frac{1}{6A} [(y_3 - y_1) (y_2 - y_1) + (x_1 - x_3) (-x_2 + x_1)] \quad (\text{C.27})$$

Da mesma forma $H_{(3,4)} = H_{(4,3)}$

$$H_{(3,4)}^e = \frac{1}{6A} [(y_1 - y_2) (y_2 - y_1) + (x_2 - x_1) (-x_2 + x_1)] \quad (\text{C.28})$$

$$\begin{aligned} H_{(4,4)}^e &= \frac{1}{6A} (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 - x_2x_3 + x_3^2) + \dots \\ &\quad \frac{1}{6A} (y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2 - y_1y_3 - y_2y_3 + y_3^2) \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Como existem 45 funções de forma para polinômio hierárquico completo até ordem 8, conforme a Tabela (3.2), a matriz completa de um único elemento conterá 2025 termos.

C.2 Integração da Matriz de Compressibilidade E_f

Usando procedimento similar ao da seção anterior parte-se da Equação (3.29) para calcular os termos da matriz de compressibilidade $[E_f]$ do sistema:

$$E_f = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & \dots & N_1 N_n \\ \vdots & & \vdots \\ N_n N_1 & \dots & N_n N_n \end{bmatrix} dx dy \quad (\text{C.30})$$

usando a regra de integração definida em (C.6) e as relações dadas na Seção (3.4), calcula-se todos os termos da matriz elementar E^e :

$$E_{(1,1)}^e = \int_A N_1 N_1 dA = \int_A L_1 L_1 dA = 2A \frac{2!}{(2+2+0+0)!} = \frac{1}{6}A \quad (\text{C.31})$$

$$E_{(1,2)}^e = \int_A N_1 N_2 dA = \int_A L_1 L_2 dA = 2A \frac{1!1!}{(2+1+1+0)!} = \frac{1}{12}A \quad (\text{C.32})$$

$$E_{(1,3)}^e = \int_A N_1 N_3 dA = \int_A L_1 L_3 dA = 2A \frac{1!1!}{(2+1+0+1)!} = \frac{1}{12}A \quad (\text{C.33})$$

$$E_{(2,2)}^e = \int_A N_2 N_2 dA = \int_A L_2 L_2 dA = 2A \frac{2!}{(2+2+0+0)!} = \frac{1}{6}A \quad (\text{C.34})$$

$$E_{(2,3)}^e = \frac{1}{12}A \quad (\text{C.35})$$

$$E_{(3,3)}^e = \frac{1}{6}A \quad (\text{C.36})$$

Devido a simetria $E_{(3,1)}^e = E_{(1,3)}^e$, $E_{(2,3)}^e = E_{(3,2)}^e$, $E_{(2,1)}^e = E_{(1,2)}^e$. O que permite concluir o cálculo dos termos da matriz de compressibilidade empregando funções físicas ou nodais.

Para as funções hierárquicas subsequentes, tem-se:

$$E_{(1,4)}^e = \int_A N_1 N_4 dA = \int_A L_1 (2L_1 L_2) dA = 4A \frac{2!}{(2+2+1+0)!} = \frac{1}{15}A \quad (\text{C.37})$$

$$E_{(2,4)}^e = \int_A N_1 N_4 dA = \int_A L_2 (2L_1 L_2) dA = 4A \frac{2!}{(2+2+1+0)!} = \frac{1}{15}A \quad (\text{C.38})$$

$$E_{(3,4)}^e = \int_A N_1 N_4 dA = \int_A L_3 (2L_1 L_2) dA = 4A \frac{1!}{(2+1+1+1)!} = \frac{1}{30}A \quad (\text{C.39})$$

$$E_{(4,4)}^e = \int_A N_1 N_4 dA = \int_A (2L_1 L_2)^2 dA = 8A \frac{2!2!}{(2+2+2+0)!} = \frac{2}{45}A \quad (\text{C.40})$$

Este procedimento pode ser empregado para a determinação dos outros 2016 termos restantes da matriz elementar completa com polinômios até ordem 8.

Apêndice D

Eliminação do Termo de Velocidade das Matrizes Simétricas

O sistema matricial simétrico descrito pela Equação (4.98):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_e & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0}H_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \dots \\ \dots + \begin{bmatrix} M_e & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2}E_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.1}) \end{aligned}$$

pode ser expresso em uma forma que elimine o termo de velocidade. Sistemas matriciais com este termo são muitas vezes chamados de sistemas com termo tipo amortecimento. O termo de velocidade não está necessariamente associado ao amortecimento, como por exemplo as matrizes resultantes do efeito giroscópico.

Devido às características do problema muitas vezes o termo de velocidade do sistema descrito pela Equação (4.98) é confundido como o termo de amortecimento. O problema nesta formulação é um problema acoplado de vibrações livres uma vez que a equação da onda dado pela Equação (3.12) não apresenta amortecimento. A equação que descreve o comportamento da viga, Equação (2.37) não apresenta coeficiente de amortecimento interno ou no engastamento. As equações de acoplamento são obtidas a partir da expressão para o carregamento externo da viga, Equação (4.79), e da equação de conservação de momento, sem os termos viscosos e convectivos, Equação (3.16). Portanto, o sistema dado pela Equação (4.98) é conservativo.

Uma das possíveis soluções do Sistema (D.1) que permite a separação das variáveis de tempo e espaço é dada por [10]:

$$w = \bar{W} \sin(\omega t) \quad (\text{D.2})$$

$$\theta = \bar{\Theta} \sin(\omega t) \quad (\text{D.3})$$

Substituindo-se as Equações (D.2) e (D.3) no Sistema (D.1) chega-se a seguinte forma:

$$\left[\left[\begin{array}{cc} K_e & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0} H_f \end{array} \right] - \omega \left[\begin{array}{cc} 0 & L \\ L^T & 0 \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{cc} M_e & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2} E_f \end{array} \right] \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{W} \\ \bar{\Theta} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (\text{D.4})$$

ou

$$[N - \omega Q - \omega^2 R] \{z\} = 0 \quad (\text{D.5})$$

Por meio de manipulação das submatrizes pode ser colocado na forma clássica do problema de autovalores

$$[A] \{x\} = \omega [B] \{x\} \quad (\text{D.6})$$

sendo

$$x = \left\{ \begin{array}{c} z \\ \omega z \end{array} \right\} \quad (\text{D.7})$$

$$[A] = \left[\begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & R \end{array} \right] \quad (\text{D.8})$$

$$[B] = \left[\begin{array}{cc} Q & R \\ R & 0 \end{array} \right] \quad (\text{D.9})$$

o que leva a expressão matricial

$$[A] \{x\} - \omega [B] \{x\} = [N]z + \omega [R]z - \omega [Q]z - \omega^2 [R]z - \omega [R]z \quad (\text{D.10})$$

$$[A] \{x\} - \omega [B] \{x\} = [[N] - \omega [Q] - \omega^2 [R]] \{z\} = 0 \quad (\text{D.11})$$

O sistema simétrico (D.1) gerado a partir da formulação em potencial de velocidades, pode ser reescrito a partindo-se das seguintes matrizes:

$$[A] = \left[\begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & R \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} K_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0} H_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2} E_f \end{array} \right]$$

e

$$[B] = \begin{bmatrix} Q & R \\ R & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & L & M_e & 0 \\ L^T & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2} E_f \\ M_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2} E_f & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

finalmente

$$\left[\begin{bmatrix} K_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0} H_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2} E_f \end{bmatrix} - \dots \right] \dots - \omega \begin{bmatrix} 0 & L & M_e & 0 \\ L^T & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2} E_f \\ M_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_0 c^2} E_f & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \\ \omega w \\ \omega \theta \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (\text{D.12})$$

Apêndice E

Normas

Um problema que normalmente surge é estabelecer um critério para determinar a aproximação entre duas grandezas vetoriais. A álgebra linear [25, 83, 79] e de uma forma mais ampla a topologia [84], fornecem as ferramentas necessárias para esta tarefa. O passo básico é definir uma norma. As normas associam qualquer elemento $u, v, w, \dots \in X$ a um número real $\|u\|_X$ chamado *norma* do espaço X se satisfizer

$$\|u\|_X \geq 0 \quad (\text{E.1})$$

$$\|u\|_X \neq 0 \quad \text{se} \quad u \neq 0 \quad (\text{E.2})$$

$$\|\alpha u\|_X = |\alpha| \|u\|_X \quad (\text{E.3})$$

$$\|u + v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X \quad (\text{E.4})$$

A importância da norma é que ela permite definir uma escala ou uma forma de comparar os integrantes de um conjunto. Para um mesmo espaço vetorial há diferentes formas de definir a norma para um vetor

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i| \quad (\text{E.5})$$

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{norma Euclidiana}) \quad (\text{E.6})$$

$$\|u\|_\infty = \max_i |u_i| \quad (\text{E.7})$$

Para matrizes defini-se também diferentes normas

$$\|M\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |m_{ij}| \quad (\text{E.8})$$

$$\|M\|_2 = \max_n \sqrt{\lambda_n} \quad \lambda_n \text{ autovalor } M^T M \quad (\text{E.9})$$

$$\|M\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \quad (\text{E.10})$$

A norma $\|M\|_2$ é conhecida como norma espectral. Algumas relações matemáticas exigem compatibilidade entre normas definidas para diferentes espaços. Por exemplo a relação $\|Mx\| \leq \|M\|\|x\|$ exige que $\|Mx\|$ e $\|x\|$ sejam avaliados na norma do vetor e $\|M\|$ na norma da matriz. Para isto é necessário que a norma da matriz e do vetor sejam compatíveis, quando isto ocorre a norma da matriz se diz subordinada a norma do vetor. As três normas das matrizes definidas acima $\|\cdot\|_{1,2,\infty}$ são subordinadas às respectivas normas dos vetores $\|\cdot\|_{1,2,\infty}$ [13].