

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR RAFAEL GIOVANE  
MORINI ..... E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 31 / 07 / 2009

R. Pavanello  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Método dos Elementos Finitos  
Posicional Aplicado à  
Análise Estática de *Risers*

Autor: Rafael Giovane Morini

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

77/2009

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Método dos Elementos Finitos  
Posicional Aplicado à  
Análise Estática de *Risers*

Autor: **Rafael Giovane Morini**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2009

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M825m Morini, Rafael Giovane  
Método dos elementos finitos posicional aplicado à análise  
estática de risers / Rafael Giovane Morini. –Campinas, SP: [s.n.],  
2009.

Orientador: Renato Pavanello.  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Metodo dos elementos finitos. 2. Estruturas maritimas.  
3. Interação solo-estrutura. 4. Engenharia de petroleo. I. Pavanello,  
Renato. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Positional finite element method applied to the analysis of risers  
behaviour

Palavras-chave em Inglês: Finite element analysis, Marine structures, Structure-soil  
interaction, Petroleum engineering

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Celso Kazuyuki Morooka, Humberto Breves Coda

Data da defesa: 31/07/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Método dos Elementos Finitos  
Posicional Aplicado à  
Análise Estática de *Risers*

Autor: Rafael Giovane Morini

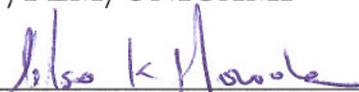
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



---

Prof. Dr. Renato Pavanello  
DMC/FEM/UNICAMP



---

Prof. Dr. Celso Kazuyuki Morooka  
DEP/FEM/UNICAMP



---

Prof. Dr. Humberto Breves Coda  
DEE/EESC/USP

Campinas, 31 de Julho de 2009.

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho aos meus queridos pais, Adão e Helena.

## Agradecimentos

Àquele que de certa forma criou as leis que deram início e regem esse Universo maravilhoso.

Aos meus pais e irmãs pelo apoio e incentivo nos momentos difíceis.

À minha namorada e amiga Grasiella pelo carinho, apoio e paciência nessa fase tão importante da minha vida.

Ao amigo e cunhado Matheus Albrecht pelas discussões, na maioria econômicas, e amizade.

Ao meu orientador e amigo, Prof. Dr. Renato Pavanello pela troca de experiências, por sanar minhas dúvidas e pelo tempo e confiança creditados a mim.

Ao Prof. Dr. Humberto Breves Coda por sua colaboração sempre prestativa nas discussões e esclarecimentos a respeito da Formulação Posicional.

Ao amigo Dênis Shiguemoto pela colaboração e dedicação na obtenção de resultados com o programa Anflex.

Aos meus *brothers* Marcel Sato e Rafael Bittencourt pelo companheirismo, discussões e paciência.

Aos irmãos de Laboratório: Ricardo Passalacqua, Leonardo Antonio, Carlos Souza, Martin Mauler, Renan Ozelo, Anderson Cravo, William Martins, Rafael Bispo e demais amigos do laboratório.

Aos dedicados funcionários do Departamento de Mecânica Computacional Marcos e Elisabeth Viana.

Aos professores do Departamento de Mecânica Computacional pela conhecimento transmitido.

Aos amigos do Departamento.

À todos os amigos da Faculdade de Engenharia Mecânica de Ilha Solteira, de onde sou

fruto.

Ao Governo do Brasil através da CNPq, pelo auxílio financeiro para a realização deste trabalho.

E finalmente, aos prezados professores participantes da banca deste trabalho, pela paciência e disponibilidade para leitura desta dissertação, bem como pelas valiosas sugestões e críticas construtivas dadas ao autor.

*“A ciência se compõe de erros que, por sua vez,  
são os passos até a verdade.”*

Julio Verne

*“O descontentamento é a causa de todo progresso.”*

Max Nordau

*“Onde é necessária a astúcia, não há lugar para a força.”*

Heródoto

## Resumo

MORINI, Rafael Giovane, *Método dos elementos finitos posicional aplicado à análise estática de risers*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009. 125 p. Dissertação (Mestrado)

A dissertação é dedicada ao estudo do comportamento estrutural estático de *risers* rígidos montados em catenária para aplicações na exploração de petróleo em águas profundas. Estuda-se o problema de equilíbrio estático de *risers*, no qual é considerado o efeito do peso próprio, do empuxo, e a interação com o solo. Para tanto, utiliza-se do Método de Elementos Finitos Posicional, que é baseado em posições dos nós ao invés de deslocamento nodal, sendo que o referencial utilizado é o Lagrangiano Total. Adota-se a cinemática de Reissner para descrever o comportamento do pórtico plano, na qual são consideradas as deformações oriundas das tensões de cisalhamento. Utiliza-se o algoritmo de Newton-Raphson para a solução iterativa do problema não linear e o método de penalidades para a solução do problema de contato com o solo. São desenvolvidos estudos comparativos e de sensibilidade de alguns parâmetros envolvidos no problema de *risers* com o objetivo de avaliar a influência do modelo do solo, das condições do contato solo-*riser* na região de toque sobre o comportamento estático do sistema acoplado. Os resultados são validados com resultados da literatura e por comparação de resultados obtidos com o programa Anflex, atualmente utilizado pela Petrobras.

*Palavras chaves:*

Método dos elementos finitos, Estruturas marítimas, Interação solo-estrutura, Engenharia de petróleo.

## Abstract

MORINI, Rafael Giovane, *Positional finite element method applied to the analysis of risers static behaviour*, Campinas,,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009. 125 p. Dissertação (Mestrado)

This dissertation is dedicated to the study of static structural behavior of Steel Catenary Riser for applications in oil exploitation in deep waters, considering soil-riser interaction. In this way, the problem of equilibrium static of risers, which is related to the self weight effect, thrust effect and the interaction with the soil is studied. For this purpose, the Positional Finite Element Method was used, which is based on positions of nodes instead of nodal displacements. The Total Lagrangian description was used. The beam's behavior was described with the Reissner kinematics. Newton-Raphson algorithm for iterative solution of nonlinear problem and the method of penalties for the solution to the problem of contact with the ground were used. The influence of soil model and soil-riser interaction conditions on the touch down point are evaluated by comparative studies of sensitivity of some parameters involved in the riser's problem. The results are validated with those from literature as well as they were compared with those provided by the software Anflex, which is currently used by Petrobras company.

*Key words:*

Finite element analysis, Marine structures, Structure-soil interaction, Petroleum engineering.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação e Contexto . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	3
1.3	Contribuições . . . . .	4
1.4	Estrutura do Trabalho . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>6</b>
2.1	Métodos Numéricos de Aproximação do Espaço e do Tempo comumente utilizados na Análise Estática-Dinâmica de <i>Risers</i> . . . . .	6
2.2	Não-linearidade Geométrica de Corpos Esbeltos . . . . .	9
2.3	Interação Solo-Estrutura . . . . .	11
2.4	Comentários sobre a Revisão . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Modelagem Mecânica Não Linear de Corpos Esbeltos</b>	<b>14</b>
3.1	Formulação Posicional . . . . .	14
3.2	Pórticos Planos . . . . .	17
3.2.1	Mapeamento do Elemento de Pórtico . . . . .	17
3.2.2	Funções de Forma . . . . .	20
3.3	Mudança de Configuração . . . . .	22
3.4	Medida de Deformação . . . . .	25
3.5	Equilíbrio Estático - Modelo Numérico . . . . .	27
3.6	Técnicas de Solução - Newton-Raphson e Penalidades . . . . .	30
3.6.1	Método de Newton Raphson . . . . .	30
3.6.2	Método de Penalidades . . . . .	33

<b>4</b>	<b>Desenvolvimento Computacional</b>	<b>35</b>
4.1	Infra-estrutura Computacional . . . . .	35
4.2	Estrutura Geral da Implementação . . . . .	36
4.3	Base do Algoritmo . . . . .	37
4.3.1	Elemento de Pórtico Plano utilizando Formulação Posicional . . . . .	37
4.3.2	Exemplo de Viga Engastada . . . . .	43
4.3.3	Implementação do Peso Próprio . . . . .	49
4.3.4	Implementação do Empuxo . . . . .	50
4.3.5	Implementação do Contato com o Solo . . . . .	51
4.3.6	Implementação de uma Aproximação para a Curva <i>Backbone</i> . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>56</b>
5.1	Validações e Teste de Convergência . . . . .	56
5.2	Validação . . . . .	57
5.2.1	Estudo das Funções de Forma de Alta Ordem - Funções de Forma Cúbicas	57
5.2.2	Estudo da Cinemática de Reissner . . . . .	59
5.2.3	Estudo da Deformação de Green . . . . .	61
5.2.4	Estudo dos Limites de Distorção do Elemento . . . . .	63
5.2.5	Validação da Formulação Posicional . . . . .	64
5.2.6	Exemplo de Flexão Pura considerando Grandes Rotações . . . . .	68
5.2.7	Teste de Convergência . . . . .	71
5.3	Estudo da Metodologia de Aplicação . . . . .	78
5.3.1	Metodologia de Aplicação para um <i>Riser</i> Bi-apoiado . . . . .	78
5.3.2	Metodologia de Aplicação do Contato . . . . .	80
5.4	Exemplos de Contato <i>Riser</i> -Solo . . . . .	82
5.4.1	Exemplo de Duto em Contato com o Solo . . . . .	82
5.4.2	Aplicação . . . . .	89
5.4.3	Estudo Paramétrico . . . . .	97
5.4.4	Estudo do Empuxo . . . . .	113

<b>6 Disposições Finais</b>	<b>117</b>
6.1 Conclusões . . . . .	117
6.2 Trabalhos futuros . . . . .	120
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>121</b>

# Lista de Figuras

3.1	Descrição geométrica de um corpo. . . . .	18
3.2	Mapeamento de posições. . . . .	21
3.3	Configuração inicial e final do corpo relacionado pela função bijetora $f(x)$ . . .	22
3.4	Mudança de configuração. . . . .	23
3.5	Posição inicial e final de um corpo sob efeito de deformação. . . . .	23
3.6	Algoritmo padrão dos métodos descentes com base no gradiente. . . . .	31
4.1	Fluxograma do código implementado. . . . .	36
4.2	Fluxograma do cálculo dos Tensores Gradientes Mudança de Configuração. .	38
4.3	Vetor normal e vetor tangente nodal. . . . .	39
4.4	Fluxograma do cálculo da Deformação de Green. . . . .	40
4.5	Fluxograma do cálculo do vetor residual. . . . .	41
4.6	Fluxograma do cálculo da matriz Hessiana. . . . .	42
4.7	Esquema de viga engastada. . . . .	43
4.8	Carga nodal equivalente. . . . .	50
4.9	Modelo de empuxo para um corpo submerso em meio fluido. . . . .	50
4.10	Esquema do solo linear . . . . .	51
4.11	Esquema do solo bilinear. . . . .	52
4.12	Modelo esquemático de um duto penetrando o solo (Aubeny <i>et al.</i> 2006). . .	53
4.13	Aproximação para a Curva <i>Backbone</i> . . . . .	54
4.14	Modelo de contato com o solo com aproximação da Curva <i>Backbone</i> . . . . .	54
5.1	Funções de forma de alta ordem. . . . .	58
5.2	Derivadas das funções de forma. . . . .	59
5.3	Análise da cinemática de Reissner no espaço euclidiano. . . . .	60

5.4	Análise da cinemática de Reissner: grandes deslocamentos e grandes rotações.	61
5.5	Esquema de barra engastada-livre.	62
5.6	Comparação entre deformações de Engenharia e de Green	63
5.7	Esquema do elemento de alta ordem analisado.	64
5.8	Limites de distorção.	64
5.9	Esquema de viga bi-apoiada utilizado para a validação.	65
5.10	Validação do deslocamento transversal.	65
5.11	Validação do momento.	66
5.12	Esquema de viga-livre utilizada para a validação.	67
5.13	Validação do elemento de pórtico.	67
5.14	Momento - validação do momento.	68
5.15	Esquema do exemplo de flexão pura.	69
5.16	Deslocamento da viga submetida a momento concentrado.	69
5.17	Momento ao longo da viga.	70
5.18	Viga engastada-livre submetido a momento concentrado.	71
5.19	Análise da convergência com o refinamento da malha.	72
5.20	Análise da convergência.	73
5.21	Análise da convergência com variação da tolerância, $tol = 1x10^{-5}$ .	74
5.22	Início da Flexão, $tol = 1x10^{-5}$ .	75
5.23	Flexão Rigorosa, $tol = 1x10^{-5}$ .	75
5.24	Análise da convergência com variação da tolerância, $tol = 1x10^{-4}$ .	76
5.25	Análise da convergência com variação da tolerância, $tol = 2,5x10^{-4}$ .	77
5.26	Análise da convergência com variação da tolerância, $tol = 5x10^{-4}$ .	78
5.27	Esquema de catenária bi-apoiada.	79
5.28	Resultado do exemplo de <i>riser</i> bi-apoiado.	80
5.29	Esquema de viga sob influência de contato.	81
5.30	Resultado da viga submetida a um contato restritivo.	81
5.31	Esquema do duto em contato com o solo.	83

5.32	Validação do contato com o solo linear. Deslocamentos obtidos por: Formulação Posicional (FP), Método dos Elementos Finitos (FEM) e Modelo Analítico de Winkler(Winkler).	84
5.33	Análise do momento para o solo validado. Momentos obtidos por: Formulação Posicional (FP), Método dos Elementos Finitos (FEM) e Modelo Analítico de Winkler(Winkler).	85
5.34	Resultado do deslocamento do duto - grandes deslocamentos.	86
5.35	Distribuição de momento - grandes deslocamentos.	87
5.36	Resultado do deslocamento do duto - solo bilinear.	88
5.37	Distribuição de momento - solo bilinear.	89
5.38	Esquema do exemplo de aplicação <i>riser</i> -solo.	90
5.39	Deslocamento horizontal - comparação com Anflex.	91
5.40	Deslocamento vertical - comparação com Anflex.	92
5.41	Deslocamento vertical - comparação com Anflex.	93
5.42	Região de toque - escala de deslocamento 1:1	93
5.43	Força axial - comparação com Anflex.	94
5.44	Momento - comparação com Anflex.	95
5.45	Momento - gráficos sobrepostos - comparação com Anflex.	96
5.46	Momento - comparação com Anflex.	97
5.47	Deslocamento horizontal - estudo paramétrico - $K_{solo}$ .	98
5.48	Deslocamento vertical - estudo paramétrico - $K_{solo}$ .	99
5.49	Força axial - estudo paramétrico - $K_{solo}$ .	100
5.50	Momento - estudo paramétrico - $K_{solo}$ .	100
5.51	Momento - estudo paramétrico - $K_{solo}$ .	101
5.52	Momento máximo na região de toque - estudo paramétrico - $K_{solo}$ .	101
5.53	Deslocamento horizontal - estudo paramétrico - ângulo de topo.	102
5.54	Deslocamento vertical - estudo paramétrico - ângulo de topo.	103
5.55	Força axial - estudo paramétrico - ângulo de topo.	104
5.56	Momento - estudo paramétrico - ângulo de topo.	104
5.57	Momento - estudo paramétrico - ângulo de topo.	105

5.58	Momento máximo na região de toque - estudo paramétrico - ângulo de topo.	105
5.59	Deslocamento vertical - estudo paramétrico - Solo 2K.	106
5.60	Força axial - estudo paramétrico - Solo 2K.	107
5.61	Momento - estudo paramétrico - Solo 2K.	108
5.62	Deslocamento vertical - estudo paramétrico - Solo 2K: variando $K_1$ .	109
5.63	Momento - estudo paramétrico - Solo 2K: variando $K_1$ .	110
5.64	Momento máximo na região de toque - estudo paramétrico - Solo 2K: variando $K_1$ .	110
5.65	Deslocamento vertical - estudo paramétrico - Solo 2K: variando $K_2$ .	111
5.66	Momento - estudo paramétrico - Solo 2K: variando $K_2$ .	112
5.67	Momento máximo na região de toque - estudo paramétrico - Solo 2K: variando $K_2$ .	112
5.68	Deslocamento horizontal - estudo do empuxo.	113
5.69	Deslocamento vertical - estudo do empuxo.	114
5.70	Deslocamento vertical - estudo do empuxo.	114
5.71	Força axial - estudo do empuxo.	115
5.72	Momento - estudo do empuxo.	115

# Lista de Tabelas

- 4.1 Infra-estrutura computacional utilizada. . . . . 35
- 4.2 Pontos de Gauss. . . . . 42
  
- 5.1 Propriedades do duto e do solo. . . . . 83
- 5.2 Propriedades do *riser* e do solo. . . . . 90

# Nomenclatura

## *Letras Latinas*

$A$  - Área da seção transversal

${}^1B$  - Posição final do corpo

${}^0B$  - Posição inicial do corpo

$c_m$  - Constante de amortecimento

$d$  - Distância entre o ponto sobre a linha média e um ponto qualquer na seção transversal

$E$  - Módulo de elasticidade

$f, y$  - Função mudança de configuração

$h_0$  - Altura do elemento de pórtico

$I$  - Momento de inércia

$K$  - Rigidez

$K_a$  - Potencial de energia de amortecimento

$k_a$  - Potencial de energia de amortecimento específico

$K_c$  - Potencial de energia cinética

$L$  - Comprimento do pórtico

$M$  - Momento concentrado

$P$  - Carga externa

$R^n$  - Espaço euclidiano

$U_e$  - Potencial de energia de deformação elástica

$u_e$  - Potencial de energia de deformação elástica específica

### *Letras Gregas*

$\nu$  - Coeficiente de Poisson

$\Pi$  - Energia potencial total do sistema

$\rho_0, \rho$  - Densidade volumétrica

$\xi, \eta$  - Referência local

$\theta_0, \theta$  - Ângulo de inclinação nodal inicial e final

$\Phi$  - Funções de forma

### *Matrizes e vetores*

$\Delta \mathbf{X}$  - Matriz variação de posição

$\mathbf{A}$  - Tensor gradiente da função mudança de configuração

${}^0\mathbf{A}$  - Tensor gradiente da função mudança de configuração na posição inicial

${}^1\mathbf{A}$  - Tensor gradiente da função mudança de configuração na posição final

$\mathbf{F}$  - Vetor de forças externas

$\mathbf{F}_{eq}$  - Vetor de forças equivalentes

$\mathbf{u}, \mathbf{v}$  - Vetores de posição

$\mathbf{X}$  - Vetor posição

### *Notação indicial*

$A_{ij}$  - Matriz

$A_i$  - Vetor

$A_{,i}$  - Divergente de um vetor

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação e Contexto

A exploração de petróleo em bacias sedimentares marítimas já tem completado mais de cem anos e desde as primeiras perfurações realizadas em Summerland, no estado da Califórnia - USA, nos anos de 1890, a indústria petrolífera tem buscado por novas reservas, o que é sempre um grande desafio. Porém, ainda mais desafiador tem sido a extração desse bem energético de modo seguro, de forma que os riscos ecológicos sejam reduzidos a níveis considerados adequados, pois, dessa maneira, além de se assegurar o crescimento sustentável será possível também maximizar os lucros no processo extrativo.

A indústria brasileira de petróleo tem se destacado no cenário mundial por sua capacidade de exploração e produção de petróleo em campos marítimos. Incluindo a isso as últimas descobertas realizadas pela Petrobras, no litoral da região sudeste do Brasil, as quais mostraram tendência de novos reservatórios se encontrarem cada vez mais em águas profundas, ultrapassando a barreira dos 3000 m. Nesse sentido, os estudos para a extração de petróleo em reservas *offshore* têm se atentado cada vez mais na busca por ferramentas que descrevam o comportamento desses sistemas a fim de tornar essas estruturas mais seguras. Contudo, quando se trata de produção de petróleo, um dos principais elementos estruturais a se estudar são os *risers*, que podem ser concebidos como elementos estruturais tubulares cilíndricos, esbeltos, que são responsáveis, na maioria das vezes, pela perfuração ou produção de petróleo. Desse modo, é relevante o estudo de uma ferramenta que seja eficiente para prever as condições que estarão submetidos os *risers* e, assim, tornar o projeto de *risers* algo viável e atraente do ponto de vista econômico.

Esse trabalho é dedicado ao estudo de uma nova formulação, denominada de Método dos Elementos Finitos Posicional ou, simplesmente, Formulação Posicional e em sua aplicação em estruturas *offshore*, mais especificamente na análise estática de *risers*. Essa formulação, segundo Coda (2003), atende as exigências de grandes deslocamentos e grandes rotações, assim, a Formulação Posicional foi avaliada no que diz respeito às não linearidades geométricas e sua aplicabilidade para o problema de *risers* para o caso estático.

O método dos elementos finitos foi escolhido com base nos diversos trabalhos já publicados na área, isto é, trabalhos desenvolvidos que utilizaram deste mesmo método e que apresentaram bons resultados para descrever não linearidade geométrica de corpos esbeltos, e pela experiência adquirida ao longo dos anos pelo Grupo de Métodos Computacionais em Mecânica do Contínuo - DMC/UNICAMP na aplicação deste método.

Os *risers*, geralmente, são classificados em rígidos e flexíveis. Os *risers* rígidos são fabricados em aço enquanto os *risers* flexíveis são produzidos com camadas distintas de malhas estruturais de aço e fibras poliméricas revestidos com capas de polímero de alta densidade. Uma outra classificação comumente empregada é referente a montagem do *riser* rígido, que pode ser: catenária livre, vertical, híbrido, *Top Tensioned Riser* (TTR), *Single Line Offset Riser* (SLOR), entre outras. Neste trabalho, será analisado o comportamento estático de *risers* rígidos em catenária livre.

Essas estruturas estão sujeitas a diversos tipos de carregamentos, dentre eles destacam-se os esforços estáticos, como por exemplo, peso próprio e empuxo, e os esforços dinâmicos como as correntezas, o movimento das ondas e ventos, e as vibrações induzidas por vórtices. De certa forma, todos eles interferem diretamente nas condições de operação dos *risers* e devem ser considerados durante o projeto.

Outro fator importante no projeto de *risers* é a interação solo-estrutura, uma vez que na região do toque entre o *riser* e solo ocorrem variações acentuadas de momento, que por sua vez podem induzir uma falha por fadiga na região.

Atualmente, existem algumas ferramentas para o projeto de *risers*, dentre elas existem os programas comerciais, porém esses nem sempre são dedicados ao problema. Por isso, há um grupo crescente de ferramentas exclusivas para este tipo de projeto, algumas são privadas como é o caso do Anflex, outras comerciais. No entanto, ainda há um grande esforço no

desenvolvimento de códigos que sejam robustos e confiáveis, uma vez que o custo dos *risers* é extremamente elevado.

Deve-se ressaltar que é conhecida a complexidade dos problemas que envolvem estruturas *offshore*, principalmente o projeto de *risers*. Seja o problema da interação fluido-estrutura, vibrações induzidas por vórtices, não linearidades geométricas, interação solo estrutura, entre outros. Inicialmente, foram escolhidos os temas da análise estática de *risers* e a interação solo-estrutura, pois o primeiro é um passo obrigatório nesse tipo de análise, já o segundo tem sido tema de grande discussão na área em virtude dos problemas de fadiga e concentração de tensão no encontro da estrutura com o solo.

## 1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é estudar o Método dos Elementos Finitos Posicional no sentido de verificar sua aplicabilidade para problemas não lineares geométricos com grandes deslocamentos e grandes rotações, bem como aplicar o método para a análise estática de *risers* e interação solo-estrutura.

Dentre os objetivos secundários destacam-se os seguintes:

- Estudar e implementar o algoritmo de Newton-Raphson com múltiplos passos de carga para solução de problemas não lineares de difícil convergência.
- Estudar e implementar um modelo de fundação de Winkler no contexto de um algoritmo de penalidade.
- Efetuar uma análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo de interação solo-estrutura.
- Estudar o problema de equilíbrio estático de um *riser* rígido em catenária (SCR - *Steel Catenary Riser*) em contato com o solo marinho.
- Criar uma base de programas e algoritmos para compor um simulador dinâmico de *risers* para aplicações acadêmicas.

## 1.3 Contribuições

A principal contribuição refere-se à aplicação da Formulação Posicional para o Método dos Elementos Finitos no contexto da Análise Estática de *Risers*. A Formulação Posicional, como já mencionado, é uma nova proposta de formulação capaz de descrever o comportamento não linear geométrico dos corpos. Trata-se de uma formulação baseada em posições ao invés de deslocamentos, que utiliza o referencial Lagrangiano Total. Esta formulação é didática e relativamente simples se comparada com formulações clássicas (Bathe 1982) e não foi anteriormente aplicada na área de modelagem de *risers*.

## 1.4 Estrutura do Trabalho

Este texto é composto de seis capítulos que foram estruturados da seguinte maneira:

**Capítulo 1:** Introdução. Neste capítulo o autor apresenta uma breve explanação sobre o tema, bem como justifica o método escolhido, além de deixar claro os motivos que tornam relevante o presente trabalho.

**Capítulo 2:** Revisão Bibliográfica. Além de destacar os métodos numéricos aplicados aos problemas com não linearidade geométrica, à modelagem dos efeitos da não linearidade geométrica e o problema da interação solo-estrutura, nesse capítulo o autor buscou criar uma base sólida relacionada à análise de estruturas *offshore* a fim de que o Grupo de Métodos Computacionais em Mecânica do Contínuo (GMCMC) do Departamento de Mecânica Computacional da Unicamp, possa utilizá-lo como referência.

**Capítulo 3:** Modelagem Mecânica Não Linear de Corpos Esbeltos. Neste capítulo o Método dos Elementos Finitos descrito utilizando a Formulação Posicional para pórticos planos com aproximação de Reissner é detalhado, bem como uma breve descrição dos métodos de Newton-Rhapson e Penalidades é desenvolvida, uma vez que o autor utiliza desses métodos para o desenvolvimento do código computacional, que é descrito no capítulo 4, para processo iterativo e o contato com o solo, respectivamente.

**Capítulo 4:** Desenvolvimento Computacional. O propósito deste capítulo é descrever o código computacional desenvolvido. Dessa forma, apresentar e discutir as dificuldades encontradas durante a implementação. Assim, tentar apresentar a Formulação Posicional de

maneira didática ao leitor.

**Capítulo 5:** Resultados. Neste capítulo são apresentados as validações, visando a consolidação de alguns conceitos e a garantia da validade do modelo, e dos resultados obtidos. São apresentados alguns estudos paramétricos e aplicações em *risers* típicos para águas profundas.

**Capítulo 6:** Disposições Finais. São apresentadas as conclusões do trabalho e os horizontes que o autor vislumbra para dar seqüência nesse trabalho.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

Neste capítulo é apresentado uma revisão bibliográfica sobre a análise computacional de estruturas *offshore* em particular para problemas de análise estática e dinâmica de *risers*. Mais especificamente, são abordados os seguintes tópicos: modelagem estrutural de *risers*, métodos numéricos de solução, não linearidade geométrica e interação solo-estrutura.

A título de organização separa-se aqui a revisão bibliográfica por itens da seguinte maneira: métodos numéricos de aproximação no espaço e do tempo, não linearidade geométrica de corpos esbeltos e interação solo-estrutura.

### 2.1 Métodos Numéricos de Aproximação do Espaço e do Tempo comumente utilizados na Análise Estática-Dinâmica de *Risers*

Quando se trata do estudo de estruturas *offshore* uma das principais referências encontradas na área de análise do comportamento de *risers* é a publicação de Patel e Witz (1991), na qual os autores propuseram a resolução da dinâmica de *risers* através da formulação típica do Método dos Elementos Finitos. Uma das simplificações adotadas foi considerar o problema de estruturas esbeltas do tipo viga, para o caso bidimensional, onde considerou-se seis graus de liberdade para cada elemento, dois de translação e um de rotação em cada extremidade de cada elemento.

Outro trabalho de grande impacto na área é intitulado “*Review of flexible riser modelling and analysis techniques*”, publicado por Patel e Seyed (1995), que tem sido bastante citado por diversos autores como uma referência no que diz respeito a solução do problema de

*risers* incluindo a não linearidade geométrica. Esse trabalho descreve dentre outras coisas o procedimento de solução do problema, discute diversas ferramentas de solução numérica, além de comparar a resposta no domínio do tempo com o domínio da frequência. Através desse trabalho, verifica-se que o método dos elementos finitos, utilizado para a caracterização estrutural do *riser*, a solução no domínio do tempo e o integrador de Newmark- $\alpha$  são três tópicos consolidados na solução do problema de *risers*, que têm sido adotados por grande parte dos pesquisadores da área.

Outro trabalho interessante foi realizado por Moe *et al.* (2000), no qual o autor utilizou o método dos elementos finitos e comparou quatro tipos de elementos para análises de vibração em *riser* sob efeito de pequenos deslocamentos. Três elementos foram considerados sem rigidez de flexão e com dois, três e quatro deslocamentos, bem como um modificado de dois nós por elemento contendo rotação e deslocamentos em cada nó. Nesse estudo, o autor concluiu que o elemento com dois nós e três graus de liberdade por nó foi o que apresentou resultado mais positivo, e que utilizando funções de forma de alta ordem os valores para tensão axial variavam significativamente, sendo que os melhores resultados foram obtidos com funções cúbicas.

Kubota (2003), também comparou alguns dos métodos numéricos mais utilizados atualmente, como Diferenças Finitas, Volumes Finitos, e concluiu que o Método dos Elementos Finitos tem sua aplicação, na maioria das vezes, voltada para problemas estruturais e propõe que o Método de Galerkin seja utilizado.

Nesse sentido, Ferrari (1998), Kubota (2003) e Farfán (2005), utilizam o modelo de viga para a modelagem, mais especificamente, adotam o modelo de viga de Euler-Bernoulli, tração para representar a estrutura de um *riser*. Dessa forma, o *riser* estará sujeito a deslocamentos e rotações devido a carregamentos axiais e laterais. Ferrari (1998), ainda afirma que o problema dinâmico de *risers* pode ser resolvido basicamente com três considerações principais: 1) Aproximação estática; 2) Linearização do termo referente ao arrasto proveniente da Equação de Morinson, de maneira a reduzi-la a uma equação diferencial ordinária para uma possível solução quase estática; 3) Integração numérica no domínio do tempo.

Seguindo o último conceito, de acordo com Ferrari (1998), o primeiro passo na análise de *risers* consiste na determinação de sua posição de equilíbrio devido às forças de natureza

estática, leia-se, por exemplo, forças de correnteza, peso próprio, entre outras que se considerem importantes. Isso pode ser feito através da resolução da equação estática formulada usando-se o Método de Galerkin na sua forma fraca.

Das diversas formas de solução existentes para o problema do *riser*, percebe-se que, costumeiramente, os autores têm adotado o Método dos Elementos Finitos (MEF) como o método de tratamento numérico. No entanto, há autores que adotam outros métodos, como Chatjigeroriou (2008), que desenvolveu seu trabalho fazendo uso do método de Diferenças Finitas (MDF) para solucionar o equilíbrio dinâmico. Esse método transforma o sistema de equações originais em um conjunto de equações algébricas podendo ser resolvidas de maneira eficiente pelo método de relaxação.

Pollio *et al.* (2006), descreveram o comportamento não linear de *risers*, através de aproximação por molas e amortecedores, comparando os resultados no domínio da frequência com o domínio do tempo. Nesse trabalho, os autores consideraram uma técnica simplificada baseada também na aproximação de massa concentrada já utilizada por diversos autores anteriormente. Segundo Pollio *et al.* (2006), a técnica mencionada proporciona uma formulação mais simplificada e uma aplicabilidade geral para uma grande faixa de estruturas *offshore*.

Em seu trabalho, Silveira *et al.* (2000), discutem a utilização do Método dos Elementos Finitos e, principalmente os possíveis integradores numéricos para o caso. De acordo com os autores, tradicionalmente, adota-se integradores explícitos para os problemas inerciais onde ocorrem casos de modos de baixas frequências. No entanto, quando o problema envolvido é de altas frequências, ou problemas de propagação de onda, como foi seu caso, utilizam-se, preferencialmente, integradores implícitos. Para tanto, foram realizadas diversas comparações, e segundo o autor, o Método Explícito Generalizado Alfa foi o que se adaptou melhor as suas exigências, apresentando melhor convergência. Outro detalhe interessante é que Silveira *et al.* (2000) compararam seus resultados com as ferramentas computacionais mais conhecidas na literatura técnica e utilizadas com frequência pelas empresas exploradoras de petróleo, destacando-se os programas ANFLEX (Mourelle *et al.* 2001), ORCAFLEX (Orcina 2009), entre outros.

Segundo Chatjigeroriou (2008), o método de Diferenças Finitas tem sido utilizado, principalmente, para resolver o equilíbrio estático ou como integrador numérico no tempo, alterna-

tivo aos métodos de Houbolt, Wilson- $\theta$  e Newmark- $\beta$  (Patel e Seyed 1995). Em seu trabalho, Chatjigeroriou (2008), não utilizou nenhum tratamento adicional para resolver o sistema de equações existentes, fazendo, então, uso de um método implícito de segunda ordem com passo único, que é incondicionalmente estável. Assim, uma vez o *riser* discretizado em  $n$  segmentos, o sistema de equações iniciais é suplementado por seis condições de contorno, por elemento, que necessitam serem forçadas nas extremidades do *riser*. Devido a natureza implícita das equações de diferenças finitas, o sistema final  $6n$  deve ser resolvido simultaneamente, o que é realizado pelo método de relaxação. Ainda segundo o autor, o método converge rapidamente e adicionalmente não apresenta a necessidade da aplicação de um método integrador numérico especial no tempo.

Uma outra análise dos métodos mais utilizados atualmente, na solução do problema de dinâmica de *risers*, é descrito no trabalho apresentado por Yazdchi e Crisfield (2005), onde o autor confirma a constatação de uma maior incidência de trabalhos que utilizam o método dos elementos finitos para descrever o domínio do problema, bem como a utilização do integrador de Newmark.

Um modelo também interessante foi empregado por Raman-Nair e Baddour (2003), estes autores modelaram o *riser* através do uso de massa concentrada conectada por molas rotacionais e extensionais incluindo amortecimento estrutural, mostrando a viabilidade de mais um tipo de aproximação através de massa-mola. Descreveram as ondas através da Teoria de Stokes de segunda ordem, utilizando as equações de Morinson para a questão hidrodinâmica, incluindo ainda os efeitos do vórtice induzido por vibração e do escoamento interno, demonstrando o caráter multidisciplinar e multifísico do problema.

## 2.2 Não-linearidade Geométrica de Corpos Esbeltos

O estudo de *risers* envolve, sobretudo, grandes deslocamentos e grandes rotações, o que torna indispensável que o efeito de não-linearidade geométrica seja considerado no modelo. Dessa forma, uma revisão bibliográfica foi realizada e, então, são apresentados alguns trabalhos relevantes publicados nos últimos dez anos.

Em um trabalho muito bem visto pela comunidade, Yazdchi e Crisfield (2005) fizeram uso de elementos de baixa ordem com dois nós, sendo três translações e três rotações por

nó. Neste trabalho, os autores optaram por usar a formulação co-rotacional para as não linearidades. Os autores ainda destacam que muitos trabalhos têm sido desenvolvidos com o uso do Método dos Elementos Finitos utilizando a técnica de atualização lagrangiana e não tem sido diretamente relacionados com formulações para análise não linear de vigas curvas. Em relação a isto, alguns autores relatam o uso da Formulação de Reissner-Simo, que inclui deformação cisalhante e usa técnicas co-rotacionais, (Simo e Vu-Quoc 1986).

Em contrapartida, Pellegrino e Ong (2003) desenvolveram uma aproximação baseada em funções lineares tanto para a não linearidade geométrica, quanto para a Equação de Morinson e para a interação com o solo. Assumindo que o *riser* se encontra sob movimento harmônico simples referente à posição de equilíbrio estático.

Outra aproximação possível foi desenvolvida por Silveira e Martins (2004), os autores modelaram o problema de equilíbrio estático de *risers* através da aproximação de rigidez axial infinita e rigidez flexural nula ( $EI = 0$ ), ou seja, um cabo ideal, devido a tensão axial ser grande quando comparada com a rigidez de flexão. Eles ainda explicam o fenômeno, destacando que a rigidez axial é devido ao fato do *riser* sempre trabalhar em regime elástico (pequenas deformações) e que os efeitos da tensão de flexão são importantes para os casos em que se estudam os pontos de contato no fundo e no topo do oceano.

De acordo com Couliard e Langley (2001), o efeito da rigidez flexural, sob o carregamento normal, é muito pequeno se comparado com o efeito de rigidez geométrica devido a tensão normal, porém ela foi considerada no trabalho para avaliar as tensões negativas de baixo valor que podem ocorrer. Os autores formularam a não linearidade através da formulação de Deformação de Green.

Uma questão importante quando se trata de métodos numéricos é relativa ao custo computacional. Nesse sentido, Low e Langley (2006) afirmam que Garrett (1982) desenvolveu uma rigorosa e acurada descrição de flexão e torção. No entanto, o autor destaca que acurácia não pode ser um critério isolado, e que a solução deve convergir com um baixo custo computacional. Assim, o Low e Langley (2006) modelaram o problema dinâmico de *risers* através de molas rotacionais e extencionais para os casos de flexão e tração.

Mais recentemente, Kordkheili e Bahai (2007) desenvolveram um trabalho baseado na aproximação não linear através de elementos de duto com quatro nós e vinte e quatro graus de

liberdade, com a atualização lagrangiana. Nesse trabalho, a não linearidade é revisada com referências à Bathe (1982) e Yazdchi e Crisfield (2005), sendo que o último fez considerações mais específicas como as forças de empuxo, mas sem considerar os efeitos da interação com o solo.

Em outro trabalho recente, Chatjigeroriou (2008) ressalta que o problema dinâmico de catenárias necessita de uma profunda e compreensiva investigação do sistema associado, propõe uma formulação do modelo teórico e finalmente, o uso de um método de solução eficiente. No entanto, o autor cita o trabalho de Patel e Seyed (1995) como referência e adota o Método de Diferenças Finitas Centrais dividindo a catenária em  $n$  elementos iguais, isso faz acreditar que embora muitas técnicas novas tenham sido usadas na solução do problema dinâmico, a pesquisa nessa área se encontra em aberto, no sentido, de que não existe um consenso de qual seja a melhor técnica a ser aplicada na solução do problema não-linear geométrico para *risers* submersos.

Alguns outros tópicos também são discutidos como a atualização da não linearidade que é realizada na maioria das vezes através de uma atualização do sistema de coordenadas geralmente baseado no procedimento de atualização Lagrangiano. Yazdchi (2005) discutiu o problema da não linearidade novamente, porém, dessa vez o autor destacou a importância da matriz de rigidez tangente na formulação de elementos finitos não linear.

Por fim, uma formulação relativamente nova que pode ser usada neste tipo de aplicação pode ser avaliada em (Coda e Greco 2004). Trata-se do Método dos Elementos Finitos Posicional, que é uma formulação que se baseia na descrição Lagrangiana, é escrita em função da posição e usa a condição de estacionariedade para a solução da equação da energia potencial total. Além disso, apresenta bons resultados que já foram validados pelo autor e publicados em revistas e congressos bem considerados no meio. Essa formulação será discutida no capítulo Modelagem Mecânica Não Linear de Corpos Esbeltos.

## 2.3 Interação Solo-Estrutura

Outra questão discutida atualmente pelos pesquisadores da área, quando se trata de estruturas *offshore*, está relacionada à interação solo-estrutura, pois a resistência causada pelo solo sobre o *riser*, antes desprezada, tem importante influência na prática, visto que a re-

sistência é suficientemente elevada a ponto de evitar o deslocamento do *riser* no fundo do mar, criando vínculos adicionais e aumentando assim os riscos da falha por fadiga.

Silveira e Martins (2004) implementaram uma formulação capaz de levar em consideração os coeficientes de rigidez e de amortecimento do solo, e com isso reproduziram de uma maneira satisfatória a interação solo-estrutura. O modelo para a representação do solo utilizado trata o fundo do mar como um sistema dinâmico simplificado, considerando-se o solo como um conjunto de molas e amortecedores associados, onde as molas têm rigidez  $K$  e os amortecedores um coeficiente de amortecimento  $C$ .

Outro trabalho em que se aplicou um método semelhante de modelagem foi desenvolvido por Pellegrino e Ong (2003). Foi considerado a interação solo-estrutura no domínio da frequência, porém sem considerar os efeitos de atrito e impacto. A seção do cabo que interage com o leito do mar é truncada e substituída pelo sistema de molas lineares acopladas, com rigidez linearizada através das equações para catenária estática. Estas molas modelariam o comportamento do cabo truncado e consideraria a variação no tempo da condição de toque. Assim, o sistema inteiro solo-estrutura é analisado no domínio da frequência com o Método de Diferenças Finitas Central. Esse método mostrou exatidão em determinados casos com custo computacional moderado.

Uma outra tentativa de se avaliar a interação solo-estrutura é descrita por Leira *et al.* (2004). Nesse método é utilizado o então chamado modelo CARISIMA para interação solo-estrutura em relação aos movimentos horizontais e verticais. Segundo Leira *et al.* (2004), o modelo desenvolvido é capaz de prever tanto a resistência do solo quanto a penetração do *riser* no solo. Nesse mesmo trabalho, o autor ainda reafirma a complexidade em se trabalhar com a não linearidade do sistema.

Pesce e Martins (2004) sugeriram abordar o problema da interação dinâmica *risers*-solo resolvendo-se um problema de autovalor. Neste caso, os autovalores são utilizados para verificar a influência da área de toque (TDA, *touch down area*) e da localização do ponto de contato (TDP, *touch down point*) sobre o comportamento do *riser*.

Mais recentemente, Pereira *et al.* (2007), estudando o problema do SCR (*Steel Catenary Riser*), apresentou resultados de uma análise paramétrica, deflexões estáticas e dinâmicas e esforços agentes ao longo do comprimento da SCR. Nesse estudo, foi considerado dentre os

parâmetros do *riser* modificados para análise, a geometria da junta flexível, inclinação de topo e espessura do *riser*, na tentativa de encontrar soluções viáveis para águas de até 3000 metros de profundidade. O autor constatou que as regiões de topo e de contato são regiões que merecem grande atenção, destacando também que a utilização de metais ou ligas mais resistentes poderão oferecer maior vida útil ao SCR.

## 2.4 Comentários sobre a Revisão

Através dessas referências é possível, então, traçar uma linha razoavelmente segura para dar início a uma série de estudos relativos a análise de *risers*, incorporando fatores atualmente relevantes como a não linearidade geométrica e a interação solo estrutura, bem como é possível imaginar um horizonte no que se refere aos métodos de solução à se utilizar nessa problemática. Para a análise estática de *risers*, como propõe o presente trabalho, pode-se destacar a importância do Método dos Elementos Finitos para o estudo, haja visto que grande parte dos pesquisadores seguem essa linha. Outra questão fundamental é a posição inicial do *riser* levando em consideração a posição inicial de uma catenária analítica, seguido do carregamento de peso próprio e demais esforços estáticos. Dessa forma, foi levantado referências que forneçam uma idéia inicial para o estudo que é de longo prazo, e deverá se desdobrar em outros trabalhos no contexto do GMCMC do Departamento de Mecânica Computacional da FEM-UNICAMP.

## Capítulo 3

# Modelagem Mecânica Não Linear de Corpos Esbeltos

Nesse capítulo é apresentada uma modelagem mecânica para o *riser* e para o solo. A modelagem do *riser* é feita através da Formulação Posicional (FP) que atende as necessidades do problema não linear geométrico da catenária. A modelagem do solo é desenvolvida utilizando molas do tipo Winkler que visa atender tanto as características lineares do solo quanto a não linearidade do contato, sendo que ambas modelagens são trabalhadas através do Método dos Elemento Finitos. É discutido, também, a questão dos métodos numéricos empregados na solução dos problemas, isto é, Newton-Raphson para a Formulação Posicional e Penalidades para a suposição das condições de contato com o solo. O problema de equilíbrio estático é formulado, sendo definidas as bases para a implementação computacional do método.

### 3.1 Formulação Posicional

A Formulação Posicional é revista de modo genérico a fim de mostrar as idéias fundamentais do método. Esta formulação baseia-se na posição ao invés do deslocamento como é de costume nas formulações convencionais para o Método dos Elementos Finitos. Além disso, a Formulação Posicional pode ser dita Lagrangiana, uma vez que toda ela é descrita utilizando a posição inicial do corpo analisado.

A Formulação Posicional foi proposta em (Coda e Greco 2003; Coda e Greco 2004) e já foi aplicada com sucesso para vários problemas estáticos e dinâmicos (Greco 2004; Coda e Paccola 2007; Maciel 2008). Neste trabalho, a sua aplicação ao caso de estruturas com alto

grau de esbeltez associado ao contato com barreiras elástica será testada.

A idéia básica de solução dessa formulação é escrever o Funcional de Energia Potencial Total em função da posição, aplicar o Princípio da Estacionariedade e, por fim, através de um método iterativo, nesse caso Newton-Raphson, encontrar a solução do sistema não linear de equações.

A primeira providência para a descrição de um problema utilizando a Formulação Posicional é escrever uma equação que represente o Funcional de Energia Potencial Total do sistema em estudo.

De maneira genérica, o Funcional de Energia Potencial Total é dado por:

$$\Pi = U_e + K_c + K_a - P \quad (3.1)$$

em que  $U_e$  representa o potencial de energia de deformação elástica,  $K_c$  é o potencial de energia cinética do corpo,  $K_a$  é a perda de energia devido ao amortecimento e  $P$  representa o potencial de energia das forças externas aplicadas.

O termo  $U_e$  é calculado através da integral da energia específica de deformação elástica,  $u_e$ , no domínio do volume inicial  $V_0$ , como mostra a equação (3.2).

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (3.2)$$

O potencial de energia cinética pode ser calculado como mostra a equação (3.3).

$$K_c = \int_{V_0} \rho_0 \frac{\dot{X}_i \dot{X}_i}{2} dV_0 \quad (3.3)$$

em que a velocidade vetorial  $\dot{X}_i$  é dada pela derivada da posição em relação ao tempo e  $\rho_0$  é a densidade do corpo no referencial Lagrangiano.

A taxa de variação da energia relativa ao amortecimento, por sua vez, é calculada da seguinte maneira:

$$\frac{\partial K_a}{\partial X_i} = \int_{V_0} \frac{\partial k_a}{\partial X_i} dV_0 = \int_{V_0} c_m \rho_a \dot{X}_i dV_0 \quad (3.4)$$

em que o  $c_m$  é a constante de amortecimento e  $k_a$  é o funcional de energia específica dissipada.

Finalmente, pode-se completar o funcional com o potencial de energia devido as forças externas aplicadas:

$$P_i = F_i^T X_i \quad (3.5)$$

onde o vetor  $\mathbf{F}$  é o vetor das forças aplicadas e  $\mathbf{X}$  é o vetor das posições.

Uma vez descrito cada termo do funcional, pode-se reescrevê-lo da seguinte maneira (Maciel 2008):

$$\Pi = \int_{V_0} u_e dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \frac{\dot{X}_k \dot{X}_k}{2} dV_0 + K_a - F_i^T X_i \quad (3.6)$$

O próximo passo é aplicar o Princípio de Estacionariedade, ou seja, aplicar as condições de mínimo para o funcional. De acordo com Assan (2003), isso é feito igualando a primeira variação do funcional a zero. Quando isso ocorre, diz-se que o funcional tornou-se estacionário para certas condições de contorno. Portanto, aplicando o Princípio de Estacionariedade, nesse caso o conhecido Princípio da Mínima Energia Potencial Total, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_j} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial X_j} dV_0 + \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \rho_0 \frac{\dot{X}_k \dot{X}_k}{2} \right) dV_0 + \frac{\partial K_a}{\partial X_j} - F_j = 0 \quad (3.7)$$

Para o caso estático, que é o principal foco deste trabalho, o funcional é escrito como:

$$\Pi = \int_{V_0} u_e dV_0 - F_i^T X_i \quad (3.8)$$

e sua primeira variação a ser igualada a zero é dada por:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_j} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial X_j} dV_0 - F_j = 0 \quad (3.9)$$

Uma vez definido o funcional a ser minimizado, isto é, que representa a condição de equilíbrio, trabalhar-se-á a equação (3.9) com o intuito de facilitar a aplicação de um método iterativo para a solução do sistema de equações. Para tanto, escreve-se a equação (3.9) como:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_j} = g_j(X_j) = f_j(X_j) - F_j \quad (3.10)$$

A equação (3.10), por sua vez, pode ser aproximada através de uma expansão em Série de Taylor truncada em seu termo linear como:

$$g_i(X_i) = 0 \cong g_i(^0 X_i) + \nabla g_i(^0 X_i) \Delta X_i \quad (3.11)$$

sendo que o subscrito 0 de  ${}^0X_i$  indica o ponto inicial do processo iterativo.

De posse da expressão dada pela equação (3.11) é possível trabalhá-la e então deixar  $\Delta X_i$  explícito:

$$\Delta X_i = -[\nabla g_i({}^0X_i)]^{-1} g_i({}^0X_i) \quad (3.12)$$

Assim, resta aplicar o método iterativo de Newton-Raphson. Para isso, utiliza-se, por exemplo, uma aproximação inicial,  $X_i = {}^0X_i$ . Uma vez feito isso, pode-se calcular a Hessiana,  $\nabla g_i({}^0X_i)$ , e o vetor residual ou de desbalanceamento,  $g_i({}^0X_i)$ . Por fim, obtém-se  $\Delta X_i$ .

Para a questão de convergência, utiliza-se um critério de parada que compare as normas da posição inicial com a variação de posição:

$$norma = \frac{|\Delta X_i|}{|{}^0X_i|} \quad (3.13)$$

Caso a norma seja menor que um valor pré-estabelecido, uma tolerância, diz-se que convergiu e interrompe-se o procedimento iterativo e tem-se a solução  $X = {}^0X_i + \Delta X_i$ . Caso contrário, inicia-se novamente o processo até que a norma se torne menor que a tolerância.

## 3.2 Pórticos Planos

Nessa seção são apresentados a formulação para pórticos planos utilizando a cinemática de Reissner e alguns conceitos básicos que servem de apoio para o desenvolvimento da Formulação Posicional aplicada a pórticos. Esse texto é baseado nos trabalhos publicados por Coda e Greco (2004), Maciel (2008) e Pascon (2008).

### 3.2.1 Mapeamento do Elemento de Pórtico

A cinemática de Reissner, adotada neste trabalho, é equivalente a cinemática de Timoshenko, ou seja, leva em consideração a deformação provocada pelas tensões de cisalhamento, ou ainda, a seção permanece plana após a deformação, porém não necessariamente perpendicular à linha média do corpo (Maciel 2008). No entanto, elas se diferem no que diz respeito a forma de se parametrizar a seção transversal. Assim, nessa primeira parte, será dada atenção

especial ao mapeamento do elemento, bem como às funções de forma utilizadas. Posteriormente, será dedicado um esforço para a descrição da deformação aplicada na formulação e suas implicações.

Inicialmente, tem-se um corpo no plano que se deseja mapear, isto é, descrever o seu comportamento sem influências quaisquer externas. A figura (3.1) mostra em detalhes o corpo mencionado.

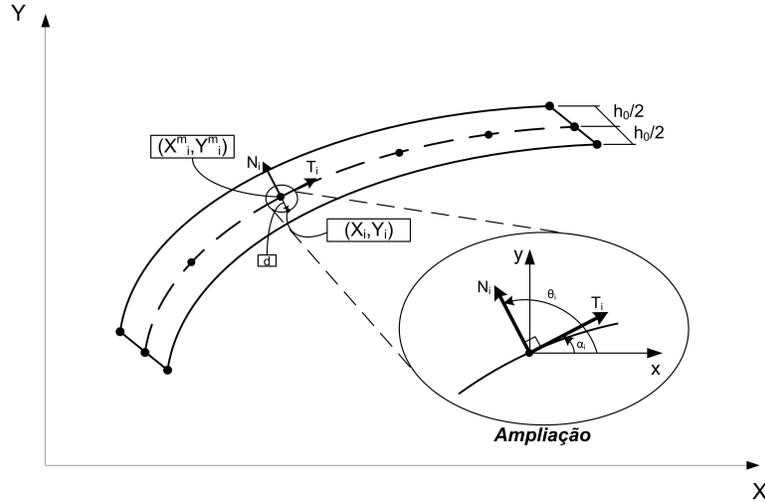


Figura 3.1: Descrição geométrica de um corpo.

Com base na linha média desse elemento, são escritas equações que sejam capazes de representar a seção transversal do elemento e seu comprimento, de modo que atendam os grandes deslocamentos que se deseja impor. Como é possível verificar na figura (3.1), seja um ponto qualquer na seção  $(X_i, Y_i)$ , a diferença entre esse ponto e a linha central  $(X_i^m, Y_i^m)$ , considerando que os dois estejam na mesma seção transversal, pode ser escrito como:

$$X_i - X_i^m = u_i \quad (3.14)$$

$$Y_i - Y_i^m = v_i \quad (3.15)$$

em que  $i$  representa a posição do ponto sobre o elemento e  $m$  que o ponto se encontra sobre a linha média do corpo.

Então,  $u$  e  $v$  podem ser escritos como:

$$u_i = -d \operatorname{sen}(\alpha_i) \quad (3.16)$$

$$v_i = d \operatorname{cos}(\alpha_i) \quad (3.17)$$

sendo  $d$  o módulo do vetor  $\mathbf{u}$  e  $\alpha_i$  o ângulo da tangente à linha média com o eixo  $X$ .

As equações (3.14) e (3.15) podem ser rearranjadas:

$$X_i = X_i^m + d \operatorname{cos}(\theta_i) \quad (3.18)$$

$$Y_i = Y_i^m + d \operatorname{sen}(\theta_i) \quad (3.19)$$

em que  $\theta_i$  é o ângulo, para a configuração inicial, entre a normal à linha média do corpo com o eixo  $X$ .

Nesse momento é necessário aproximar  $X_i^m$ ,  $Y_i^m$  e  $\theta_i$ . Para isso, vale lembrar a intenção de escrevê-los em função de uma variável adimensional que estará representado a partir das funções de forma. Assim,  $X_i^m$ ,  $Y_i^m$  e  $\theta_i$  podem ser aproximados por:

$$X_i^m = \Phi_l(\xi) X_l \quad (3.20)$$

$$Y_i^m = \Phi_l(\xi) Y_l \quad (3.21)$$

$$\theta_i = \Phi_l(\xi) \theta_l \quad (3.22)$$

em que  $X_l$  é a abscissa do nó  $l$ ,  $Y_l$  é a ordenada do nó  $l$  e  $\theta_l$  é a inclinação para cada nó. Sendo que  $l = 1, 4$  e  $-1 \leq \xi \leq 1$ .

Nota-se que  $\theta$  é independente de  $X$  e  $Y$  e todos são dependentes de funções de forma escritas no espaço de referência  $\xi$ .

Desse modo, é possível escrever as equações (3.18) e (3.19), para a posição inicial do corpo, como:

$${}^0X_i = \Phi_l(\xi)^0 X_l + d \operatorname{cos}(\Phi_l(\xi)^0 \theta_l) \quad (3.23)$$

$${}^0Y_i = \Phi_l(\xi)^0 Y_l + d \operatorname{sen}(\Phi_l(\xi)^0 \theta_l) \quad (3.24)$$

De acordo com Coda (2004), a seção transversal apresenta uma altura  $h_0(\xi)$  e  $d$  é a distância entre a linha média e o ponto genérico  $X_i, Y_i$  escolhido. Entre essas duas variáveis existe uma relação que pode ser escrita como:

$$d(\xi, \eta) = h_0(\xi) \frac{\eta}{2} \quad (3.25)$$

onde o  $\eta$  descreve a porção superior da seção transversal quando é positivo e a porção inferior quando é negativo,  $-1 \leq \eta \leq 1$ .

Considera-se neste trabalho que  $h_0(\xi)$  seja constante. Assume-se também Lei Constitutiva simplificada para evitar travamento (Coda 2004), portanto, o material é homogêneo ao longo da espessura, isto é, não serão estudados os casos com material laminado composto. Desta forma, tem-se:

$$d = h_0 \frac{\eta}{2} \quad (3.26)$$

Assim, pode-se reescrever as equações (3.23) e (3.24), que descrevem um ponto qualquer do elemento de pórtico, para posição inicial, como:

$${}^0X_i = \Phi_l(\xi) {}^0X_l + h_0 \frac{\eta}{2} \cos(\Phi_l(\xi) {}^0\theta_l) \quad (3.27)$$

$${}^0Y_i = \Phi_l(\xi) {}^0Y_l + h_0 \frac{\eta}{2} \sin(\Phi_l(\xi) {}^0\theta_l) \quad (3.28)$$

A Formulação Posicional é uma formulação Lagrangiana Total, isto é, utiliza como referência a posição inicial do corpo analisado. Neste contexto, é necessário que se consiga descrever o corpo na posição inicial e na posição final. Para tanto, as equações (3.27) e (3.28) podem ser escritas como:

$${}^kX_i = \Phi_l(\xi) {}^kX_l + h_0 \frac{\eta}{2} \cos(\Phi_l(\xi) {}^k\theta_l) \quad (3.29)$$

$${}^kY_i = \Phi_l(\xi) {}^kY_l + h_0 \frac{\eta}{2} \sin(\Phi_l(\xi) {}^k\theta_l) \quad (3.30)$$

em que  $k = 0$  para a posição inicial e  $k = 1$  para posição final. Deve-se ressaltar que para a posição atual/final  $\theta$  não está mais associado a normal, mas sim ao plano da seção transversal.

### 3.2.2 Funções de Forma

As funções de forma, anteriormente comentadas, serão apresentadas nesse tópico explicitando a aproximação utilizada no modelo adotado no presente trabalho.

Foram utilizadas funções de forma cúbicas, isto é, funções de forma de alta ordem. Isso teve por objetivo melhorar a aproximação interna do elemento, uma vez que o elemento seria aplicado a grandes deslocamento e grandes rotações. A figura (3.2) exemplifica o modelo utilizado para o mapeamento das posições.

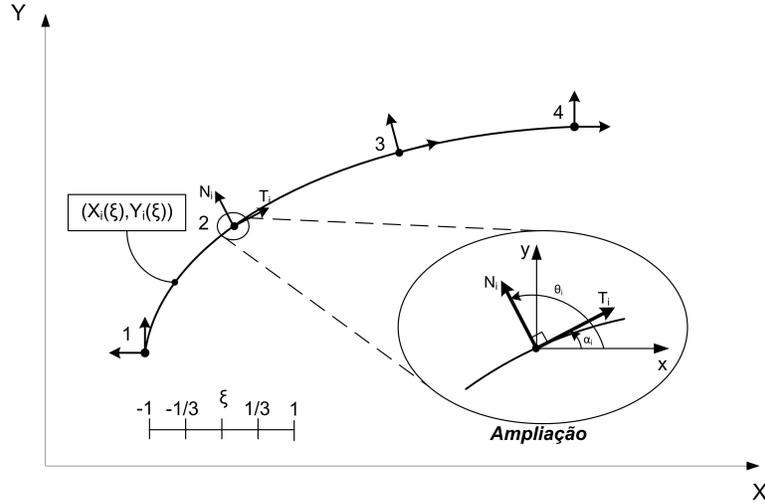


Figura 3.2: Mapeamento de posições.

A base geométrica escolhida é composta por quatro nós por elemento, e, conseqüentemente, quatro funções de forma. O espaço adimensional varia entre  $-1$  e  $1$  sendo que os pontos intermediários utilizados foram  $-1/3$  e  $1/3$ . Neste caso, as posições podem ser escritas como foram apresentadas nas equações (3.20) e (3.21) e as funções de forma utilizadas foram obtidas através da conhecida Fórmula de Lagrange, e podem ser escritas como:

$$\Phi_1 = \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_1} \frac{\xi_3 - \xi}{\xi_3 - \xi_1} \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_1} \quad (3.31)$$

$$\Phi_2 = \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_2} \frac{\xi_3 - \xi}{\xi_3 - \xi_2} \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1 - \xi_2} \quad (3.32)$$

$$\Phi_3 = \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_3} \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_3} \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1 - \xi_3} \quad (3.33)$$

$$\Phi_4 = \frac{\xi_3 - \xi}{\xi_3 - \xi_4} \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_4} \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1 - \xi_4} \quad (3.34)$$

Uma vez esclarecido quais e como foram obtidas as funções de forma para essa formulação, é possível dar continuidade na descrição de uma medida de deformação.

### 3.3 Mudança de Configuração

A mudança de configuração é descrita pela *Função Mudança de Configuração* (Coda 2003). Inicialmente, imagina-se um conjunto de partículas chamado de  ${}^0B$ . Esse por sua vez está relacionado a uma região  ${}^1B$ , formado pelas mesmas partículas, no espaço euclidiano, através de uma função bijetora  $f(x)$ . Conforme pode-se verificar na figura (3.3).

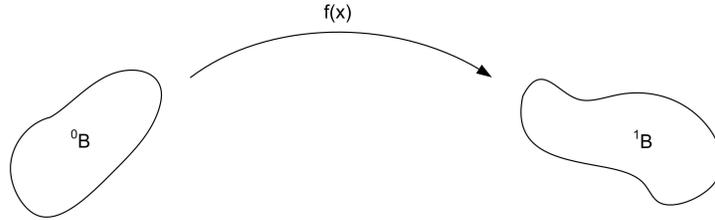


Figura 3.3: Configuração inicial e final do corpo relacionado pela função bijetora  $f(x)$ .

Sendo uma função bijetora, por definição, ela permite o sentido inverso da relação descrita anteriormente, assim pode-se escrever:

$$f : {}^0B \rightarrow {}^1B \quad (3.35)$$

e

$$f^{-1} : {}^1B \rightarrow {}^0B \quad (3.36)$$

Ainda, pode-se escrever essa relação da seguinte maneira:

$$Y = f(X) \quad (3.37)$$

A equação (3.37) é também chamada na literatura clássica como deformação do corpo  $B$  do estado inicial ao final. No entanto, a mudança de configuração representada por  $f$  pode conter apenas translações e rotações sem apresentar deformações (Coda 2003). Por isso, nesse texto, opta-se, assim como em Coda (2003), por chamar essa função de *função mudança de configuração*.

O movimento do corpo, está associado com o tempo de tal forma que, para uma dada seqüência de instantes cria-se uma família de posições ou configurações de  $B$ . De posse da idéia da função mudança de configuração, é possível descrever os movimentos do corpo. Para tanto, a figura (3.4) ilustra como ocorre essa mudança passando pelo espaço adimensional.

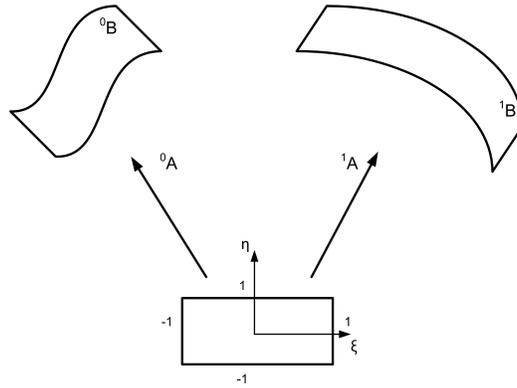


Figura 3.4: Mudança de configuração.

Observa-se na figura (3.4) que existem dois tensores gradientes de mudança de configuração que auxiliam nesse processo, são eles  ${}^0\mathbf{A}$  e  ${}^1\mathbf{A}$ . Deseja-se que a inversa de  ${}^0\mathbf{A}$  leve o corpo da posição inicial  ${}^0B$  para o espaço adimensional  $(\xi, \eta)$  e que  ${}^1\mathbf{A}$  transporte-o do espaço adimensional  $(\xi, \eta)$  para a posição final  ${}^1B$ . No entanto, é necessário desenvolver a equação (3.37) para que seja viável o cálculo dos tensores gradientes de mudança de configuração.

Através de conceitos do cálculo diferencial de uma função no  $R^n$ , é possível trabalhar a função mudança de configuração  $Y = f(X)$  apresentada no tópico anterior. A figura (3.5) mostra em detalhes um esquema representativo do campo de deformação dos corpos.

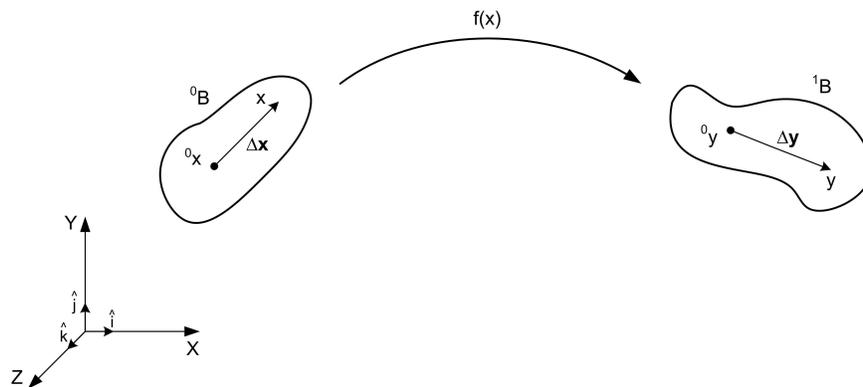


Figura 3.5: Posição inicial e final de um corpo sob efeito de deformação.

Na figura (3.5),  ${}^0B$  representa a posição inicial de referência. Assim, escreve-se a expansão

em série de Taylor para a função mudança de configuração em torno do ponto  ${}^0X$ :

$$Y = f(X) = f({}^0X + \Delta X) = f({}^0X) + \text{Grad } f(X)|_{{}^0X} \Delta X + O^2 \quad (3.38)$$

ou

$$Y = {}^0Y + \text{Grad } f(X)|_{{}^0X} \Delta X + O^2 \quad (3.39)$$

No limite ( $\Delta X \rightarrow 0$ ) escreve-se:

$$dY = \text{Grad } f(X)|_{{}^0X} dX \quad (3.40)$$

Pode-se escrever a equação (3.40) em função dos componentes:

$$dY_i = \frac{\partial f_i}{\partial X_j} |_{{}^0X} dX_j \quad (3.41)$$

ou colectivamente:

$$d\mathbf{Y} = \mathbf{A} d\mathbf{X} \quad (3.42)$$

em que  $\mathbf{A}$  é o tensor gradiente da função mudança de configuração que descreve o modo com que  $\Delta X$  se transforma em  $\Delta Y$ , dada a alteração de forma do corpo, Pascon (2008).

Essa representação é baseada na posição de referência, por isso é dita Lagrangiana. Deve-se salientar que existem outras possibilidades que são escritas em relação a posição atual/final que são chamadas de Eulerianas, porém não é o foco do presente trabalho. Uma vez descrito a medida de deformação baseado na referência Lagrangiana é importante ressaltar que os cálculos posteriores devem ser realizados baseados no volume inicial do corpo. Também já é possível concluir que o determinante de  $\mathbf{A}$  não pode ser nulo, pois  $dY$  representa o comprimento da fibra após a deformação e não pode ser nula senão a fibra teria sido aniquilada. Portanto,  $\mathbf{A}$  admite a relação inversa  $\mathbf{B}^T = \mathbf{A}^{-1}$ .

Os tensores gradiente da função de mudança de configuração para o caso plano em questão podem ser calculados como:

$${}^0\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial^0 X / \partial \xi & \partial^0 X / \partial \eta \\ \partial^0 Y / \partial \xi & \partial^0 Y / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

e

$${}^1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial^1 X / \partial \xi & \partial^1 X / \partial \eta \\ \partial^1 Y / \partial \xi & \partial^1 Y / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

sendo  $({}^0X, {}^0Y)$  as posições iniciais e  $({}^1X, {}^1Y)$  as posições finais no referencial  ${}^1B$  sujeito a deformações.

Se cada termo dos tensores apresentados pelas equações (3.43) e (3.44) forem aproximados conforme as funções de forma adotadas, então serão encontradas as seguintes equações:

$$\partial^0 X / \partial \xi = {}^0X_{,\xi} = \Phi_{l,\xi} {}^0X^l - \frac{h_0}{2} \eta \operatorname{sen}(\Phi_l(\xi) {}^0\theta^l) (\Phi_{l,\xi} {}^0\theta^l) \quad (3.45)$$

$$\partial^0 Y / \partial \xi = {}^0Y_{,\xi} = \Phi_{l,\xi} {}^0Y^l + \frac{h_0}{2} \eta \operatorname{cos}(\Phi_l(\xi) {}^0\theta^l) (\Phi_{l,\xi} {}^0\theta^l) \quad (3.46)$$

$$\partial^0 X / \partial \eta = {}^0X_{,\eta} = \frac{h_0}{2} \operatorname{cos}(\Phi_l(\xi) {}^0\theta^l) \quad (3.47)$$

$$\partial^0 Y / \partial \eta = {}^0Y_{,\eta} = \frac{h_0}{2} \operatorname{sen}(\Phi_l(\xi) {}^0\theta^l) \quad (3.48)$$

onde a vírgula de  ${}^0X_{,\xi}$  indica derivação da função  ${}^0X$  em relação a  $\xi$ . Expressões análogas podem ser encontradas para o tensor  ${}^1A$ .

### 3.4 Medida de Deformação

Nessa seção, de posse dos conceitos observados anteriormente, são apresentados o Alongamento de Cauchy-Green, a Deformação de Green e algumas observações à respeito da Lei Constitutiva e Energia de Deformação Específica Total.

A mudança de configuração representada por  $\mathbf{A} = {}^1\mathbf{A} \cdot {}^0\mathbf{A}^{-1}$  está ligada com o Alongamento de Cauchy-Green. Com alguma algebra é possível mostrar que a partir da equação (3.42) pode-se chegar no Alongamento de Cauchy-Green. Reescrevendo a equação (3.42) como:

$$dY_i = A_{ij} dX_j \quad (3.49)$$

e multiplicando-a por  $d\mathbf{Y}$  tem-se:

$$d\mathbf{Y}d\mathbf{Y} = |d\mathbf{Y}|^2 = \mathbf{A}d\mathbf{X}\mathbf{A}d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} d\mathbf{X} \quad (3.50)$$

Agora, subtraindo de (3.50)  $|d\mathbf{X}|^2$ , tem-se:

$$|d\mathbf{Y}|^2 - |d\mathbf{X}|^2 = d\mathbf{X}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} \quad (3.51)$$

em que  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  é o Alongamento de Cauchy-Green, bastante importante nas deduções da análise não linear geométrica de meios contínuos.

Quando  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I})$  diz-se que não ocorreu deformação, ou seja, o comprimento da fibra contínua sendo o mesmo, porém isso não exclui a possibilidade de rotação e/ou translação. Assim, pode-se definir um tensor de deformações e, nesse caso, define-se o Tensor de Deformações de Green:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^t \mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad (3.52)$$

ou, se  $\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \mathbf{A}$ , tem-se:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (3.53)$$

Definida a Deformação de Green como a medida de deformação que será utilizada neste trabalho, é importante destacar que para pequenas deformações, tanto as Lei Constitutivas Elástica Linear utilizada para Deformação de Engenharia quanto a Lei Constitutiva Não Linear utilizada para Deformação de Green se equivalem e que, a Tensão Nominal de Engenharia e o Tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff de Segunda Espécie também se confundem. Portanto, faz-se saber que o par conjugado da Deformação de Green é a Tensão de Piola-Kirchhoff de Segunda Espécie, porém não é o objetivo do trabalho desenvolver essa temática, bem porque na implementação o autor fará valer da condição mencionada de equivalência.

Nesse trabalho considera-se que  $\nu = 0$  e define-se a energia de deformação específica total como:

$$u_e = \frac{E}{2}(E_{11}^2 + E_{22}^2) + GE_{12}^2 + GE_{21}^2 \quad (3.54)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade ou de Young e  $G$  é o módulo de cisalhamento, e  $E_{ij}$  são os termos do tensor de Deformação de Green. Assim, assume-se como hipótese o campo de pequenas deformações e grandes deslocamentos e rotações. O material segue, portanto, a Lei de Hooke linear elástica, mesmo sabendo que a Deformação de Green definida pode ser empregada para o caso de grandes deformações.

### 3.5 Equilíbrio Estático - Modelo Numérico

Com esses conceitos em mente resta solucionar o Funcional de Energia Potencial Total que rege o problema estático escrito como:

$$\Pi = \int_{V_0} u_e dV_0 - F_i X_i \quad (3.55)$$

que pode ser ainda representada, no contexto de um elemento unidimensional plano de  $n$  nós, por:

$$\Pi = \int_{V_0} u_e dV_0 - F_{x1} X_1 - F_{y1} Y_1 - M_1 \theta_1 - F_{x2} X_2 - F_{y2} Y_2 - M_2 \theta_2 - \dots \quad (3.56)$$

sendo que cada nó possui 3 parâmetros geométricos ( $X_i, Y_i$  e  $\theta_i$ ).

Depois de aplicada a condição de estacionariedade na equação (3.9) chega-se na equação (3.12), e como já foi detalhado, deseja-se calcular a Hessiana  $\nabla g_i(^0X)$  e o vetor desbalanceamento  $g_i(^0X)$ .

O vetor desbalanceamento ou residual é a diferença entre o vetor de forças internas e o vetor de forças externas descrito por:

$$g_i(^0X) = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial X_i} dV_0 - F_i \quad (3.57)$$

O vetor de forças externas é conhecido, portanto, é necessário calcular o vetor de forças internas que pode ser escrito como:

$$F_i^{int}(^0X) = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial X_i} dV_0 \quad (3.58)$$

Deve-se lembrar que o Alongamento de Cauchy-Green dado por  $A^T A$  também pode ser escrito como:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = ({}^1\mathbf{A} \cdot {}^0\mathbf{A}^{-1})^T \cdot ({}^1\mathbf{A} \cdot {}^0\mathbf{A}^{-1}) \quad (3.59)$$

ou ainda,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = ({}^0\mathbf{A}^{-1})^T \cdot {}^1\mathbf{A}^T \cdot {}^1\mathbf{A} \cdot {}^0\mathbf{A}^{-1} = {}^0\mathbf{B} \cdot {}^1\mathbf{A}^T \cdot {}^1\mathbf{A} \cdot {}^0\mathbf{B}^T \quad (3.60)$$

e que para o cálculo das forças internas faz-se necessário determinar  $\frac{\partial u_e}{\partial X_l^k}$ , em que  $X_l^k$  representa o parâmetro nodal, graus de liberdade, na posição atual/final, ou seja:

$$\frac{\partial u_e}{\partial X_l^k} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{11}} \frac{\partial E_{11}}{\partial X_l^k} + \frac{\partial u_e}{\partial E_{22}} \frac{\partial E_{22}}{\partial X_l^k} + \frac{\partial u_e}{\partial E_{12}} \frac{\partial E_{12}}{\partial X_l^k} + \frac{\partial u_e}{\partial E_{21}} \frac{\partial E_{21}}{\partial X_l^k} \quad (3.61)$$

em que  $l = 1, 12$  e  $k = 1, 4$ .

Os termos  $\partial u_e / \partial E_{ij}$ , com  $i, j = 1, 2$  são diretos:

$$\frac{\partial u_e}{\partial E_{11}} = EE_{11} \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial E_{22}} = EE_{22} \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial E_{12}} = 2GE_{12} \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial E_{21}} = 2GE_{21} \quad (3.65)$$

Os termos  $\partial E_{ij} / \partial X_l^k$  se estendem pela regra da cadeia e se tornam:

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial X_l^k} = \frac{\partial E_{ij}}{\partial C_{ij}} \frac{\partial C_{ij}}{\partial X_l^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_{ij}}{\partial X_l^k} \quad (3.66)$$

Assim, desenvolvendo a equação (3.66) tem-se:

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial X_l^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_{ij}}{\partial X_l^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_l^k} (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \frac{1}{2} ({}^0\mathbf{B} \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{A}^T}{\partial X_l^k} \cdot {}^1\mathbf{A} \cdot {}^0\mathbf{B}^T + {}^0\mathbf{B} \cdot {}^1\mathbf{A}^T \cdot \frac{\partial {}^1\mathbf{A}}{\partial X_l^k} \cdot {}^0\mathbf{B}^T) \quad (3.67)$$

Seguindo esse raciocínio, para o cálculo das forças internas, resta calcular as derivadas de  ${}^1\mathbf{A}$ . Acontece que a maioria dessas derivadas são nulas e escreve-se aqui somente as não nulas:

$$\frac{\partial}{\partial X_1^k} \frac{\partial {}^1X}{\partial \xi} = \Phi_{k,\xi} = \frac{\partial A_{11}}{\partial {}^1X^k} \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y_1^k} \frac{\partial {}^1Y}{\partial \xi} = \Phi_{k,\xi} = \frac{\partial A_{21}}{\partial {}^1Y^k} \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta^k} \frac{\partial {}^1X}{\partial \xi} = -\frac{h_0}{2} \eta \cos(\Phi_k \theta^k) \Phi_k(\Phi_{k,\xi} \theta^k) - \frac{h_0}{2} \eta \operatorname{sen}(\Phi_k \theta^k) \Phi_{k,\xi} = \frac{\partial A_{11}}{\partial \theta^k} \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta^k} \frac{\partial {}^1Y}{\partial \xi} = -\frac{h_0}{2} \eta \sin(\Phi_k \theta^k) \Phi_k(\Phi_{k,\xi} \theta^k) + \frac{h_0}{2} \eta \cos(\Phi_k \theta^k) \Phi_{k,\xi} = \frac{\partial A_{21}}{\partial \theta^k} \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta^k} \frac{\partial {}^1X}{\partial \eta} = -\frac{h_0}{2} \operatorname{sen}(\Phi_k \theta^k) \Phi_k = \frac{\partial A_{12}}{\partial \theta^k} \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta^k} \frac{\partial^1 Y}{\partial \eta} = + \frac{h_0}{2} \cos(\Phi_k \theta^k) \Phi_k = \frac{\partial A_{22}}{\partial \theta^k} \quad (3.73)$$

em que os termos  $A_{ij}$  representam os termos do tensor gradiente da função mudança de configuração.

Calculado o vetor desbalanceamento, resta calcular a matriz Hessiana. A equação da matriz Hessiana é dada por:

$$\nabla g_i({}^0 X) = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial X_k \partial X_j} dV_0 - \frac{\partial F_i}{\partial X_k} \quad (3.74)$$

no entanto, o vetor de forças externas  $\mathbf{F}$  é considerado conservativo nesse trabalho, por isso, a equação (3.74) pode ser reescrita como:

$$\nabla g_i({}^0 X) = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial X_k \partial X_j} dV_0 \quad (3.75)$$

Para calcular a matriz Hessiana é necessário desenvolver a equação (3.61), isto é, o termo  $\partial^2 u_e / \partial X_k \partial X_j$ . Partindo da equação (3.61) e aplicando mais uma derivada parcial, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial X_m^k} \frac{\partial u_e}{\partial X_l^k} = \frac{\partial}{\partial X_m^k} \left( \frac{\partial u_e}{\partial E_{11}} \frac{\partial E_{11}}{\partial X_l^k} + \frac{\partial u_e}{\partial E_{22}} \frac{\partial E_{22}}{\partial X_l^k} + \frac{\partial u_e}{\partial E_{12}} \frac{\partial E_{12}}{\partial X_l^k} + \frac{\partial u_e}{\partial E_{21}} \frac{\partial E_{21}}{\partial X_l^k} \right) \quad (3.76)$$

O desenvolvimento da equação (3.76) pode ser escrito como:

$$\frac{\partial}{\partial X_m^k} \frac{\partial u_e}{\partial X_l^k} = \frac{\partial}{\partial X_m^k} \left( E E_{11} \frac{\partial E_{11}}{\partial X_l^k} + E E_{22} \frac{\partial E_{22}}{\partial X_l^k} + 2G E_{12} \frac{\partial E_{12}}{\partial X_l^k} + 2G E_{21} \frac{\partial E_{21}}{\partial X_l^k} \right) \quad (3.77)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_m^k} \frac{\partial u_e}{\partial X_l^k} &= E \frac{\partial E_{11}}{\partial X_m^k} \frac{\partial E_{11}}{\partial X_l^k} + E \frac{\partial E_{22}}{\partial X_m^k} \frac{\partial E_{22}}{\partial X_l^k} + 2G \frac{\partial E_{12}}{\partial X_m^k} \frac{\partial E_{12}}{\partial X_l^k} + 2G \frac{\partial E_{21}}{\partial X_m^k} \frac{\partial E_{21}}{\partial X_l^k} + \\ &+ E E_{11} \frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_m^k \partial X_l^k} + E E_{22} \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_m^k \partial X_l^k} + 2G E_{12} \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial X_m^k \partial X_l^k} + 2G E_{21} \frac{\partial^2 E_{21}}{\partial X_m^k \partial X_l^k} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Assim como foi visto na dedução para o cálculo do vetor residual, para o cálculo da matriz Hessiana a maioria dos termos da equação (3.78) são nulos e, portanto, não convém

escrevê-los todos aqui. Outro detalhe importante, de acordo com Coda (2004), é que os quatro últimos termos da equação (3.78) representam valores quase nulos que deixam a matriz quase completa prejudicando a convergência, portanto, podem ser desprezados. Assim, os outros termos já são conhecidos do cálculo do vetor residual e tem-se por completa a formulação a ser implementada.

## 3.6 Técnicas de Solução - Newton-Raphson e Penalidades

Nesta seção são descritos de maneira breve os métodos numéricos de Newton-Raphson, utilizado para a solução do sistema desenvolvido através da Formulação Posicional, e Penalidades, implementado para a solução do contato com o solo.

### 3.6.1 Método de Newton Raphson

O método de Newton-Raphson faz parte de um conjunto de métodos iterativos chamados de métodos descentes com base no gradiente. Esses métodos podem ser utilizados para resolver problemas de minimização que aceitam a seguinte forma, (Bazarra e Shetty 1979):

$$(P) \begin{cases} \min f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f: R^n \rightarrow R^1 \text{ e } f \in C^2 \end{cases} \quad (3.79)$$

sendo  $f$  a função objetivo do problema e  $C^2$  a classe de funções de quadrado integráveis.

Percebe-se, no entanto, tratar-se de um problema multivariável, no qual a função objetivo apresenta sua segunda derivada contínua. Isto é, para que seja viável a utilização do método de Newton-Raphson é necessário que a função objetivo apresente a matriz Hessiana inversível, (Serpa 1996; Serpa 2007).

Os métodos descentes com base no gradiente seguem, de uma forma geral, um algoritmo padrão como pode ser observado na figura (3.6).

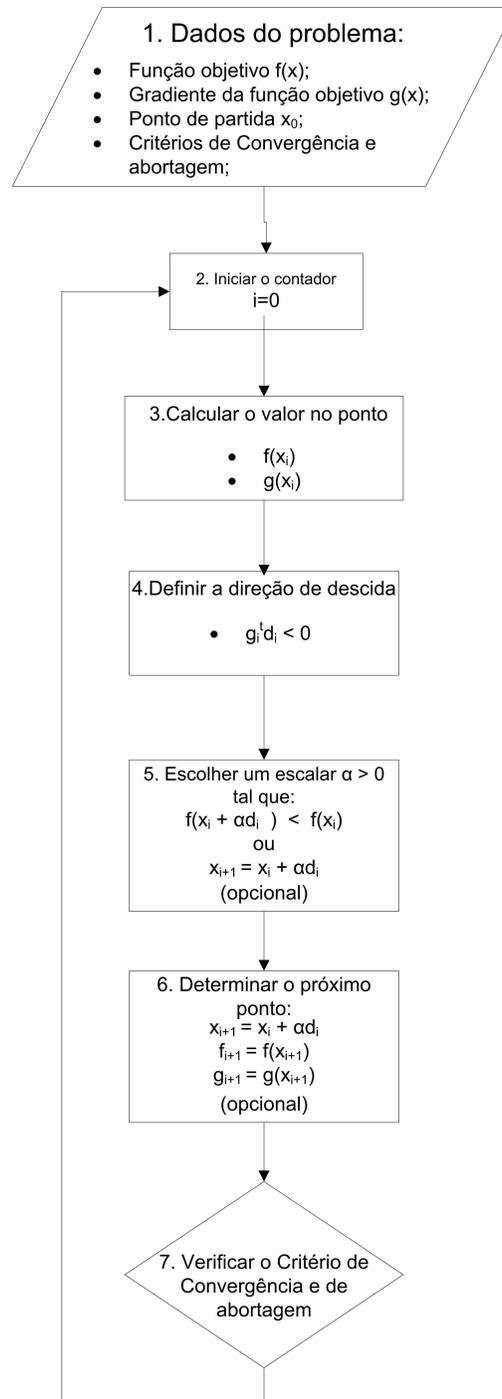


Figura 3.6: Algoritmo padrão dos métodos descendentes com base no gradiente.

Porém, em relação ao algoritmo apresentado na figura (3.6), o que diferencia os métodos é a maneira como se calcula a direção de descida  $d_i$ . No caso do método de Newton-Raphson, a direção de descida é dada pela inversa da matriz Hessiana multiplicada pelo gradiente da função objetivo. Na formulação clássica de Newton-Raphson, a função objetivo, dada pela

equação (3.79), pode ser aproximada através de uma expansão em série em torno de  $x_i$ , truncada no termo quadrático, como:

$$f(x) \approx q(x) = f(x_i) + \nabla f(x_i)\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x H(x_i)\Delta x \quad (3.80)$$

Dessa forma, para que seja determinado o mínimo da função  $f$  é necessário obter o mínimo da aproximação  $q$ , isto é, deve-se fazer:

$$\nabla q(x) = 0 \quad (3.81)$$

que pode ser escrito como:

$$\nabla f(x_i) + \nabla^2 f(x_i)\Delta x = 0 \quad (3.82)$$

ou simplesmente, como deseja-se:

$$x = x_i - (\nabla^2 f(x_i))^{-1}\nabla f(x_i) \quad (3.83)$$

assim sua direção de descida é dada por  $d_i = -(\nabla^2 f(x_i))^{-1}\nabla f(x_i)$ , sendo que a mesma pode ser mais robusta adicionando um termo de busca unidimensional  $\alpha$ , isto é:

$$d_i = -\alpha(\nabla^2 f(x_i))^{-1}\nabla f(x_i) \quad (3.84)$$

Assim, definido a direção de descida, o algoritmo padrão apresentado na figura (3.6) pode ser implementado. Nota-se neste caso, que os termos a partir da segunda ordem são desprezados, o que obriga a solução ser realizada de forma iterativa.

### 3.6.2 Método de Penalidades

O método de penalidades caracteriza-se pela adição de um termo penalizador na função objetivo, que deseja-se minimizar, quando alguma restrição for violada (Bazaraa e Shetty 1979). Além disso, o método gera uma seqüência factível de pontos, bem como transforma um problema de minimização com restrições em um problema de minimização irrestrito.

Para ilustrar essa idéia, seja o problema genérico  $P_1$  de minimização com restrições:

$$(P_1) \begin{cases} \text{minimizar} & \Pi(x) \\ \text{sujeito a} & h_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (3.85)$$

quando  $P_1$  passa a ser tratado como um problema penalizado (PP), isto é, quando a função objetivo é acrescida do termo penalizador, tem-se:

$$(PP) \begin{cases} \text{minimizar} & \Phi(x, c) = \Pi(x) + cP(x) \end{cases} \quad (3.86)$$

em que  $P(x)$  é a função de penalidade e  $c$  é o parâmetro de penalidade.

Ainda de acordo com Serpa (2007), deve-se ressaltar que a função  $P(x)$  é uma função positiva, contínua em  $C^2$  e igual a zero quando as restrições não forem violadas. Já o parâmetro de penalidade  $c$  deve ser crescente de tal forma que as restrições se tornem factíveis.

Para o problema de contato com o solo, o problema apresentado pela equação (3.85) pode ser escrito como:

$$(P_{\text{contato}}) \begin{cases} \text{minimizar} & \Pi(x) \\ \text{sujeito a} & h_j(x) < 0 \quad j = 1, \dots, m \\ & t_i(x) \leq -\epsilon \quad i = j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (3.87)$$

em que  $h_j(x)$  e  $t_i(x)$  representam as restrições do problema, isto é, a condição de não interpenetração dos corpos (Serpa 1996) e a condição de profundidade de penetração, respectivamente. Isto é, quando a restrição é violada significa que o *riser* penetrou o solo e, portanto, sofrerá influências da resistência do solo.

Nesse caso, o problema penalizado para o contato pode ser escrito como:

$$(PP) \begin{cases} \text{minimizar} & \Phi(x, c) = \Pi(x) + \frac{1}{2}r_i[h_i(x)]_+^2 + \frac{1}{2}r_j[t_j(x)]_+^2 \end{cases} \quad (3.88)$$

em que  $[a]_+ = \text{máximo}[0, a]$

Observa-se que a descrição clássica do método de penalidades sugere que a rigidez do meio elástico que sofre a penetração, nesse caso o solo, seja determinada pela distância em função

da penetração no mesmo. Porém, nos estudos de interação *solo-riser* costuma-se fazer uso de valores para rigidez determinados experimentalmente. O problema resolvido no presente trabalho, é um problema de penalidades que faz uso direto da constante de penalidade conhecida, a rigidez adicional do solo  $K_{solo}$ . Assim, utilizou-se das mesmas restrições sugeridas na equação (3.87) e penalizou-se diretamente a função objetivo, com a rigidez conhecida, quando as restrições foram violadas.

# Capítulo 4

## Desenvolvimento Computacional

Além da infra-estrutura computacional utilizada, neste capítulo descreve-se a estrutura principal do programa implementado. Isso implica em uma descrição de tópicos como por exemplo: a Formulação Posicional aplicada a pórticos planos, a implementação do peso próprio e empuxo, e a implementação do contato com o solo.

### 4.1 Infra-estrutura Computacional

Para o desenvolvimento deste trabalho foram utilizados diversos programas comerciais, para comparações ou simulações de programas de terceiros, que a universidade disponibilizou para o aprendizado do acadêmico. No entanto, o código desenvolvido esteve o tempo todo apoiado na estrutura descrita na Tabela (4.1).

Tabela 4.1: Infra-estrutura computacional utilizada.

<b>Item</b>	<b>Nome</b>	<b>Informação</b>
<b>Sistema Operacional</b>	Microsoft Windows XP Professional	Service Pack 3
<b>Compilador Matlab®</b>	Matlab® 2007	7.4.0
<b>Biblioteca</b>	Própria do Matlab®	
<b>Processador</b>	AMD Athlon 64X2 Dual	2.61 GHz 4.0 GB RAM

Optou-se pelo uso do software comercial Matlab® por se tratar de um programa interativo e, dessa forma, tornar um pouco mais rápido o processo de implementação da formulação adotada.

## 4.2 Estrutura Geral da Implementação

O programa desenvolvido no decorrer do trabalho conta com alguns módulos importantes, sendo que as principais etapas do mesmo podem ser avaliadas com o auxílio da figura (4.1).

Fluxograma Completo

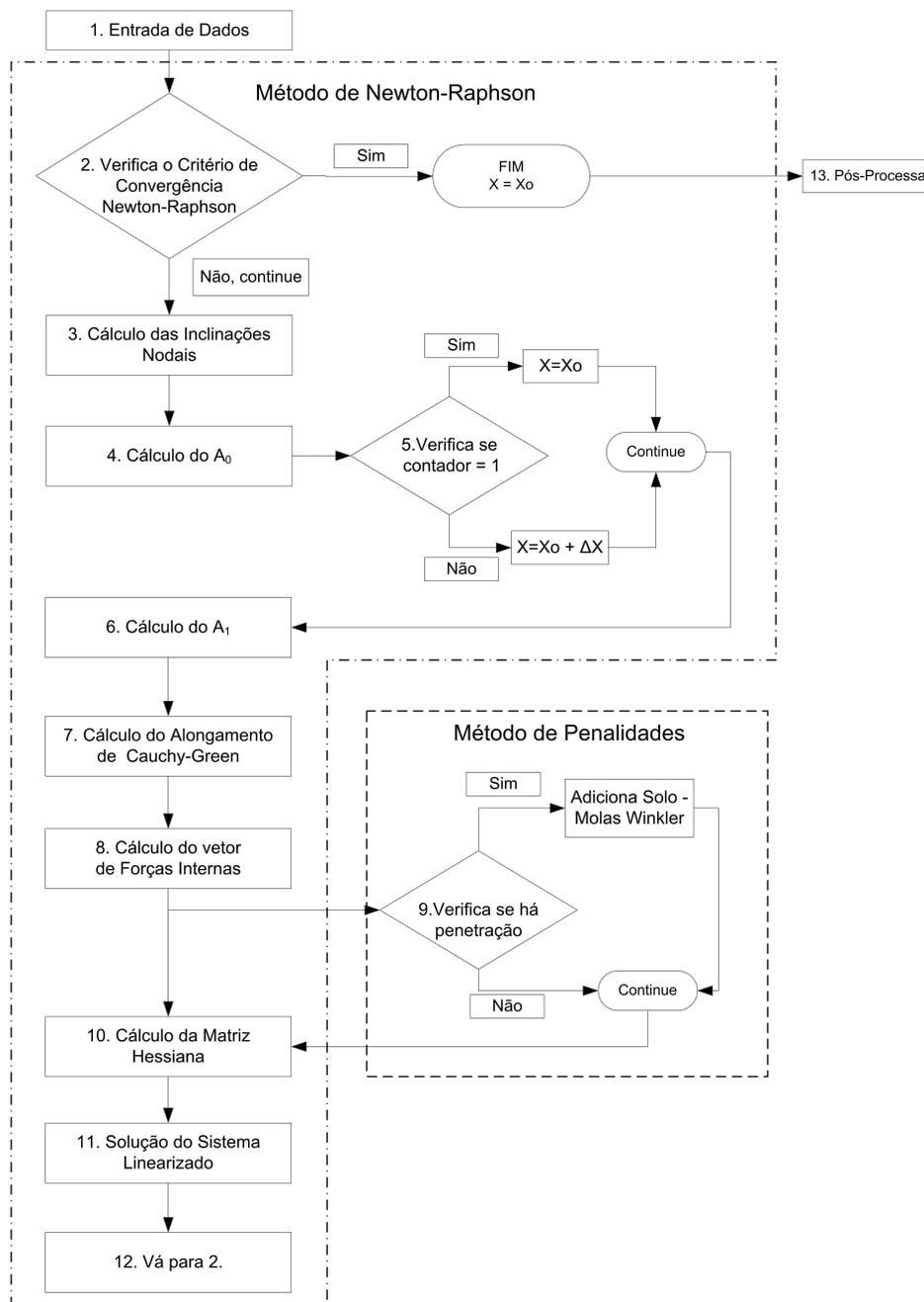


Figura 4.1: Fluxograma do código implementado.

em que  $X_0$  representa a posição inicial,  $X$  é a posição atual ou final, e  $\Delta X$  é a variação de posição.

Na figura (4.1) é possível observar dois módulos fora das linhas tracejadas. Isso simboliza que o programa pode ser dividido em três frentes distintas:

- Pré-processamento: Entrada de Dados
- Processamento: Base do Algoritmo
- Pós-processamento: Resultados e Gráficos

O pré-processamento é a parte do programa que processa os dados de entrada. Basicamente, nesse módulo, são dadas as informações geométricas do problema e as propriedades do material, também, são impostas ou criadas as malhas que descrevem o domínio do problema, bem como são impostas as condições de contorno e as forças externas aplicadas.

O processamento é a etapa principal do programa implementado. Nessa parte encontra-se o Método dos Elementos Finitos Posicional em si, ou seja, através da figura (4.1) é possível verificar que toda a parte inclusa dentro da linha tracejada está relacionada com a etapa de processamento. Portanto, neste capítulo, é feito um esforço para descrever as principais etapas do processamento.

O pós-processamento trata-se do tratamento dos resultados. Isso foi feito através do programa Matlab®<sup>®</sup>, tanto para os cálculos dos resultados quanto para a elaboração de gráficos.

## 4.3 Base do Algoritmo

Neste item são apresentados as principais etapas do processamento do programa implementado. Isso é feito através de descrições auxiliadas por fluxogramas associados às formulações apresentadas no capítulo Modelagem Mecânica Não Linear de Corpos Esbeltos.

### 4.3.1 Elemento de Pórtico Plano utilizando Formulação Posicional

Inicialmente, foi implementado o elemento de pórtico plano capaz de atender as não linearidades geométricas que fazem parte do problema de *risers*, isto é, grandes deslocamentos e grandes rotações. Para tanto, algumas dificuldades foram encontradas e são discutidas.

## Gradientes de Transformação ${}^0\mathbf{A}$ e ${}^1\mathbf{A}$

O cálculo dos tensores gradientes mudança de configuração é uma etapa fundamental, descrito no capítulo Modelagem Mecânica Não Linear de Corpos Esbeltos, para essa formulação, pois é a partir desses tensores que se torna possível o cálculo do Alongamento de Cauchy-Green, que por sua vez está intimamente relacionado à Deformação de Green. A figura (4.2) mostra as passagens para o cálculo desses tensores.

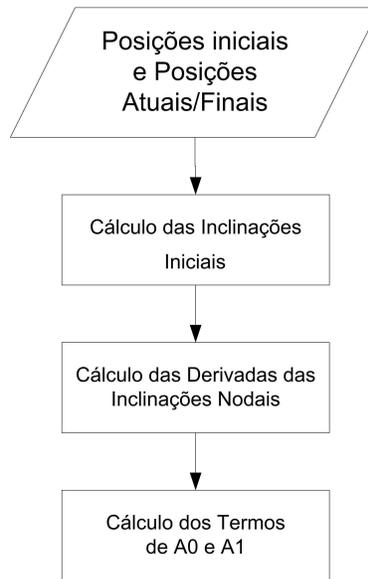


Figura 4.2: Fluxograma do cálculo dos Tensores Gradientes Mudança de Configuração.

Antes do cálculo de  $\mathbf{A}_0$  e  $\mathbf{A}_1$  propriamente dito, é necessário calcular as inclinações nodais iniciais  $\theta_0$ . Assim, para calcular  $\theta_0$ , tem-se apenas as coordenadas dos nós que constituem a posição inicial. Então, calcula-se a tangente e a normal no respectivo nó do elemento, e através do arco-tangente encontra-se a respectiva inclinação nodal. A figura (4.3) mostra de maneira esquemática os vetores citados.

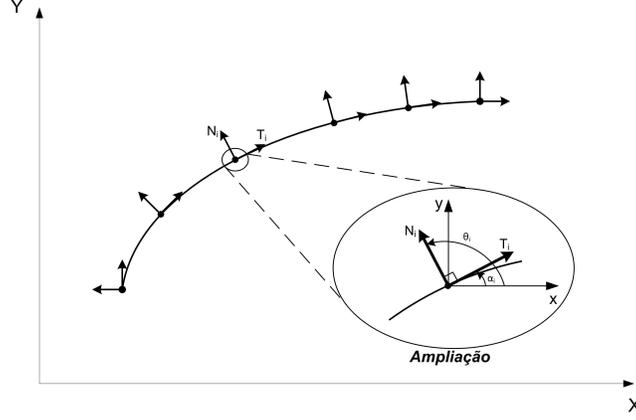


Figura 4.3: Vetor normal e vetor tangente nodal.

Uma vez calculados as inclinações nodais, calcula-se as derivadas das inclinações nodais e, por fim, pode-se calcular os termos que compõe os tensores gradiente mudança de configuração através das equações (4.1) a (4.4).

$$\partial^0 X / \partial \xi = {}^0 X_{,\xi} = \Phi_{l,\xi} {}^0 X^l - \frac{h_0}{2} \eta \text{sen}(\Phi_l(\xi) {}^0 \theta^l) (\Phi_{l,\xi} {}^0 \theta^l) \quad (4.1)$$

$$\partial^0 Y / \partial \xi = {}^0 Y_{,\xi} = \Phi_{l,\xi} {}^0 Y^l + \frac{h_0}{2} \eta \text{cos}(\Phi_l(\xi) {}^0 \theta^l) (\Phi_{l,\xi} {}^0 \theta^l) \quad (4.2)$$

$$\partial^0 X / \partial \eta = {}^0 X_{,\eta} = \frac{h_0}{2} \text{cos}(\Phi_l(\xi) {}^0 \theta^l) \quad (4.3)$$

$$\partial^0 Y / \partial \eta = {}^0 Y_{,\eta} = \frac{h_0}{2} \text{sen}(\Phi_l(\xi) {}^0 \theta^l) \quad (4.4)$$

O gradiente  ${}^0 \mathbf{A}$  é calculado uma única vez, haja vista que se trata de uma formulação baseada no referencial Lagrangiano Total, que por sua vez, se baseia na posição de inicial como referência, isto é, nunca muda. Já o gradiente  ${}^1 \mathbf{A}$  precisa ser calculado cada iteração.

Um detalhe precisa ficar claro à respeito da Formulação Posicional utilizada nesse trabalho, essa formulação trabalha em termos de posições globais, ou seja, a entrada de dados é realizada em valores globais e as saídas ocorrem da mesma forma. O que se refere a referências locais são tratados tudo internamente na formulação, isso facilita o trabalho com os dados de entrada, pois deve-se pensar somente em valores globais.

## Deformação de Green

Uma vez calculados os tensores  ${}^0\mathbf{A}$  e  ${}^1\mathbf{A}$  parte-se para o cálculo do Alongamento de Cauchy-Green (CG), como mostra a figura (4.4).

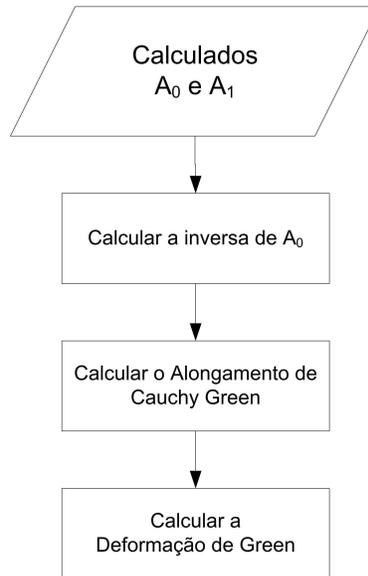


Figura 4.4: Fluxograma do cálculo da Deformação de Green.

Porém, antes de calcular o alongamento, calcula-se a inversa do tensor  ${}^0\mathbf{B} = {}^0\mathbf{A}^{-1}$ . No caso, utilizando o Matlab<sup>®</sup>, isso é simples, pois existem funções prontas para a inversão.

O passo seguinte é o cálculo do Alongamento de Cauchy  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ . Para tanto, basta calcular as derivadas de  ${}^1\mathbf{A}$  através das equações (4.1) a (4.4).

Por fim, calcula-se a Deformação de Green utilizando a equação (4.5). Assim, restam calcular o vetor residual e a matriz hessiana.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^t\mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad (4.5)$$

## Vetor Residual

O cálculo do Vetor Residual se dá após calculados a deformação e suas derivadas como mostra a seqüência da figura(4.5).

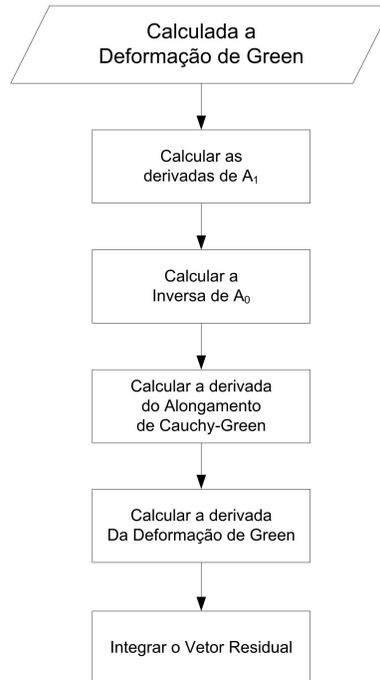


Figura 4.5: Fluxograma do cálculo do vetor residual.

Observa-se que após as etapas descritas anteriormente em outros itens, isto é, após o cálculo das derivadas do alongamento e da deformação, resta fazer a integração da derivada da energia específica total em relação aos parâmetros nodais.

Para a integração, nesse trabalho, utilizou-se quatro Pontos de Gauss no comprimento e dois Pontos de Gauss na altura do elemento. Os pontos selecionados podem ser encontrados em (Touzot e Dhatt 1984), como mostra a tabela (4.2).

Tabela 4.2: Pontos de Gauss.

$r$	$\xi_i$	$w_i$	Máxima ordem polinomial para resultado exato.
1	0	2	1
2	$\pm 0.577350269189626$	1	3
3	0 $\pm 0.774596669241438$	0.888888888888889 0.555555555555556	5
4	$\pm 0.339981043584856$ $\pm 0.861136311594053$	0.652145154862546 0.347854845137454	7

em que  $r$  representa o número de pontos de integração,  $\xi_i$  representa os pontos de integração e  $w_i$  os coeficientes de peso correspondentes a cada ponto de integração.

### Matriz Hessiana

Por fim, o cálculo da Matriz Hessiana pode ser entendido como mostra a figura (4.6). Percebe-se que é dado uma seqüência nos cálculos realizados anteriormente, porém, é preciso calcular as segundas derivadas do alongamento e da deformação.

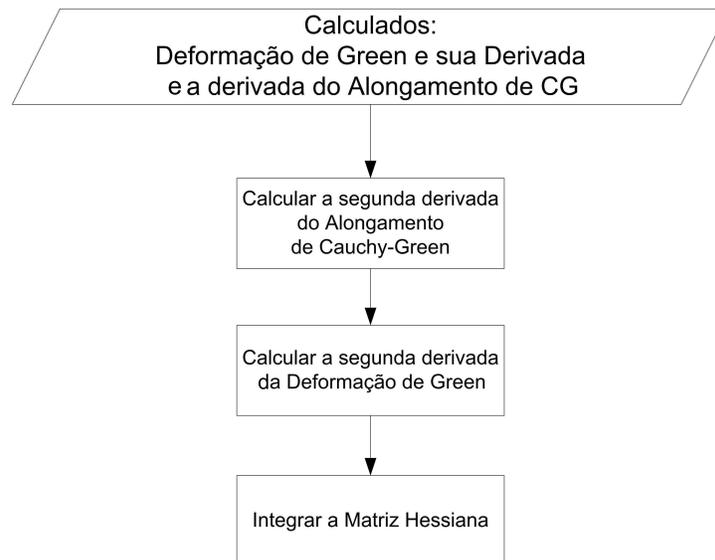


Figura 4.6: Fluxograma do cálculo da matriz Hessiana.

Calculam-se as segundas derivadas do alongamento e da deformação através das equações (3.45) a (3.45) e (3.78). Feito isso, monta-se a equação da segunda derivada da energia

específica armazenada total em relação aos parâmetros nodais e integra-se a mesma.

De posse da Matriz Hessiana e do Vetor Residual, utilizou-se o *solver* do Matlab® para resolver o sistema de equações. Obtidas as variações de posições  $\Delta X_i$ , as posições são, então, atualizadas. Vale a pena destacar que não é calculado uma nova inclinação, mas sim a variação da inclinação, do mesmo modo que ocorrem com as coordenadas.

### 4.3.2 Exemplo de Viga Engastada

A maioria das formulações de não linearidade geométricas são relativamente fechadas e por isso de difícil assimilação. O exemplo descrito nessa subseção tem por objetivo mostrar algumas das principais etapas da Formulação Posicional permitindo, assim, a sua validação em futuras implementações. Para tanto, optou-se por um exemplo de uma viga engastada-livre sujeita a ação de uma força concentrada aplicada transversalmente na extremidade livre. Adotou-se uma tolerância  $tol = 1 \times 10^{-4}$  e condições específicas de modo a obter apenas duas iterações e viabilizar a publicação dos resultados. A figura (4.7) mostra em detalhes o esquema do exemplo proposto.

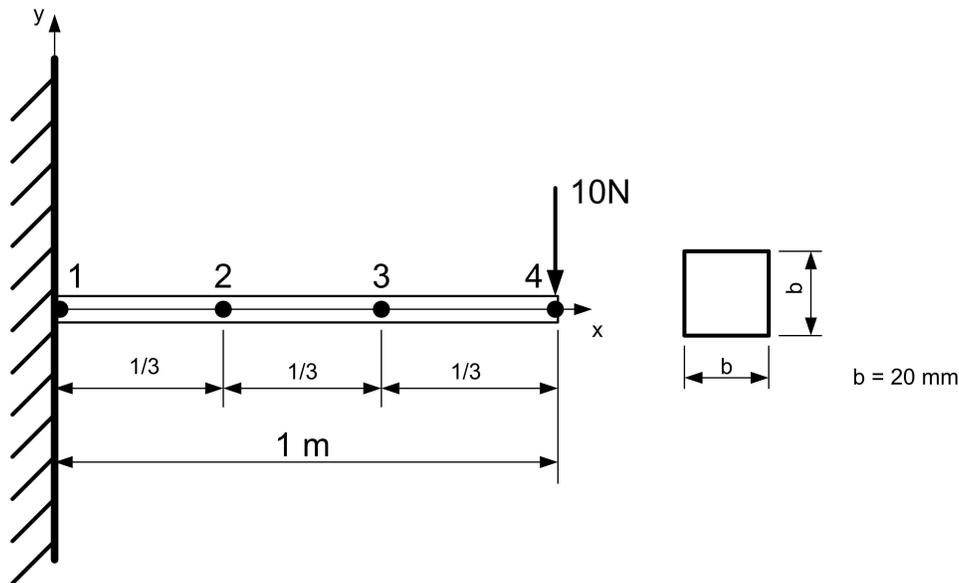


Figura 4.7: Esquema de viga engastada.

Considerou-se uma viga de aço com módulo de elasticidade  $E = 210 \text{ GPa}$  e módulo de cisalhamento  $G = 105 \text{ GPa}$ .

## Entrada de Dados

Primeiramente, deve-se descrever a geometria do problema em questão. Nesse exemplo a posição inicial considerada é dada por:

$$\textit{coordenadas} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 2 & 1/3 & 0.0 & 0.0 \\ 3 & 2/3 & 0.0 & 0.0 \\ 4 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

em que a primeira coluna representa os nós do elemento, a segunda e a terceira colunas são as abscissas e ordenadas nodais, respectivamente, e a quarta coluna as inclinações nodais. Nota-se que nesse caso foi introduzida inclinação igual a zero, no entanto, a inclinação inicial será calculada pelo programa e será dada em radianos.

A conectividade entre os nós pode ser escrita como:

$$\textit{conectividade} = [ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 ]$$

o que significa que será utilizado apenas um elemento que possui quatro nós, isto é, a primeira coluna representa o número que identifica o elemento em si e as outras colunas representam os nós do elemento.

Ainda nessa etapa, deve-se declarar as condições de contorno e as forças externas aplicadas. Para esse estudo foi considerado uma extremidade engastada que pode ser descrita como:

$$\textit{condcontorno} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.0 \\ 1 & 2 & 0.0 \\ 1 & 6 & 0.0 \end{bmatrix}$$

essa descrição restringe o movimento axial (movimento na direção x - código 1), o movimento transversal (movimento na direção y - código 2) e a rotação relativa ao eixo z (movimento de rotação em torno de z - código 6) do nó 1.

A força externa, por sua vez, pode ser introduzida como:

$$\textit{forca} = [ 4 \quad 2 \quad -10 ]$$

em que está sendo aplicada uma força pontual no quarto nó, na direção do eixo y e de magnitude  $-10N$ .

Vale lembrar que devem ser introduzidos os Pontos de Gauss para a integração numérica e os respectivos pesos. Para esse trabalho, foram utilizados quatro Pontos de Gauss na direção axial e dois na direção transversal que podem ser avaliados em Touzot e Dhatt (1984).

### Cálculo das Inclinações Nodais Iniciais

Para calcular as inclinações nodais iniciais é necessário que se calcule antes as funções de forma e suas respectivas derivadas. As funções de forma, por sua vez, foram deduzidas através da Fórmula de Lagrange, são cúbicas e unidimensionais, isto é, são dadas em função de  $\xi$ . Conseqüentemente, suas derivadas são quadráticas e unidimensionais. Para tanto, sugere-se que se crie uma função específica para o cálculo das funções de forma e suas derivadas.

Para calcular as inclinações nodais iniciais utiliza-se o arco-tangente, como mostra a equação (4.6).

$$\theta_l = \arctan\left(\frac{vn2}{vn1}\right) \quad (4.6)$$

em que  $vn1$  representa a tangente,  $vn2$  representa a normal e  $l$  os nós do elemento.

Os termos  $vn1$  e  $vn2$  são calculados através da equação (4.8).

$$vn1 = -\frac{\Phi_i(\xi)^i}{d\xi} Y_i \quad (4.7)$$

e

$$vn2 = \frac{\Phi_i(\xi)^i}{d\xi} X_i \quad (4.8)$$

Para esse exemplo, as inclinações nodais podem então ser calculadas e avaliadas:

$$coordenadas = \begin{bmatrix} 1 & 0.0 & 0.0 & 1.570796326794897 \\ 2 & 1/3 & 0.0 & 1.570796326794897 \\ 3 & 2/3 & 0.0 & 1.570796326794897 \\ 4 & 1.0 & 0.0 & 1.570796326794897 \end{bmatrix}$$

Vale lembrar que a inclinação inicial é calculada uma única vez.

### Cálculo do Gradiente do Tensor Mudança de Configuração

Como foi visto os gradientes dos tensores mudança de configuração são calculados através da equação (4.9).

$${}^i \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial^i X / \partial \xi & \partial^i X / \partial \eta \\ \partial^i Y / \partial \xi & \partial^i Y / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Na equação (4.9) cada termo significa a derivada das equações que descrevem a posição do elemento em relação a uma variável do espaço adimensional. No caso do exemplo estudado, para os primeiros ponto de Gauss, tanto axial  $\xi = -0.861136311594053$  quanto transversal  $\eta = -0.577350269189626$  que são os pontos avaliados nesse exemplo,  ${}^0\mathbf{A}$  e  ${}^1\mathbf{A}$  podem ser calculados para a primeira iteração:

$${}^i\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

em que  $i = 0, 1$ .

Nota-se que na primeira iteração  ${}^0\mathbf{A}$  e  ${}^1\mathbf{A}$  são idênticos, isso é coerente uma vez que a primeira estimativa para a posição final é igual a posição inicial. Isso pode ser verificado quando se calcula  $\mathbf{A} = {}^1\mathbf{A} \cdot {}^0\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

o que implica dizer que não houve alteração, como era esperado, pois não houve qualquer mudança de configuração do corpo até esse momento.

Na segunda iteração a igualdade dos gradientes não ocorre mais, como pode ser avaliado no gradiente da posição atual:

$${}^1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.49999040600429 & 0.00000239362332 \\ -0.00011979791851 & 0.00999999971353 \end{bmatrix}$$

O gradiente mudança de configuração  $\mathbf{A}$  para a segunda iteração também é modificado:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.99996168179150 & -0.00000023809066 \\ -0.00000023809066 & 1.00000000000000 \end{bmatrix}$$

### Alongamento de Cauchy-Green e Deformação de Green

Em virtude do cálculo de  $\mathbf{A}$ , para a primeira iteração, o Alongamento de Cauchy ( $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ) não apresenta estiramento:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

e a Deformação de Green que é definida pela equação (4.10) é igual a *zero*.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^t \mathbf{A} - \mathbf{I}) \tag{4.10}$$

A deformação nula é devido as considerações iniciais.

Já para a segunda iteração a Deformação de Green não é mais nula:

$$\mathbf{E} = (1.0e - 4) \begin{bmatrix} -0.191591042514316 & -0.001190453300683 \\ -0.001190453300683 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Calculada a Deformação de Green pode-se calcular o Vetor de Esforços Internos.

### Vetor de Forças Internas e Vetor Residual

A fim de calcular o vetor residual, é necessário calcular o vetor de esforços internos e então subtraí-lo pelo vetor de esforços externos que é um dado de entrada.

As forças internas são calculados através da equação (4.11)

$$F_i^{int}(^0X) = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial X_i} dV_0 \quad (4.11)$$

e o vetor residual através da equação (4.12).

$$g_i(^0X) = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial X_i} dV_0 - F_i \quad (4.12)$$

Para a primeira iteração o vetor de esforços internos obtido para os nós livres é:

$$\mathbf{F}_{int} \cong 0$$

e o vetor residual:

$$\mathbf{F}_{residuo} = \begin{bmatrix} 0.0000000000000000 \\ 0.0000000000000000 \\ 0.0000000000000000 \\ 0.0000000000000000 \\ 0.0000000000000000 \\ 0.0000000000000000 \\ 0.0000000000000000 \\ 0.0000000000000000 \\ -10.0000000000000000 \\ 0.0000000000000000 \end{bmatrix}$$

Na segunda iteração ocorre um rearranjo dessas forças devido a consideração de uma nova

tentativa para a posição final. O vetor de esforços internos obtido é dado por:

$$\mathbf{F}_{int} = 1.0e + 002 \begin{bmatrix} -0.688561621725666 \\ 0.000613924089837 \\ -0.000010469620041 \\ -0.516528987401108 \\ 0.000872704970631 \\ -0.000255624397946 \\ 1.288457134634440 \\ -0.101515775983395 \\ -0.000090956163977 \end{bmatrix}$$

e o vetor residual é dado por:

$$\mathbf{F}_{residuo} = 1.0e + 002 \begin{bmatrix} 0.688561621725666 \\ -0.000613924089837 \\ 0.000010469620041 \\ 0.516528987401108 \\ -0.000872704970631 \\ 0.000255624397946 \\ -1.288457134634440 \\ 0.001515775983395 \\ 0.000090956163977 \end{bmatrix}$$

## Matriz Rigidez

Para a matriz de rigidez não é diferente, na primeira iteração tem-se a rigidez do corpo indeformado e na segunda iteração ocorrem reajustes devido a nova tentativa para a posição final.

O cálculo da matriz de rigidez é dado pela equação (4.13).

$$\nabla g_i({}^0X) = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial X_k \partial X_j} dV_0 \quad (4.13)$$

Para a primeira iteração, desconsiderando os graus de liberdade restritos, tem-se:

$$\mathbf{K} = 1.0e + 08 \begin{bmatrix} 9.0720 & -0.0000 & 0.0000 & -6.2370 & 0.0000 & 0.0000 & 1.1340 & -0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 4.5360 & 0.0000 & 0.0000 & -3.1185 & 0.4252 & -0.0000 & 0.5670 & -0.1260 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1623 & -0.0000 & -0.4252 & -0.0204 & 0.0000 & 0.1260 & -0.0089 \\ -6.2370 & 0.0000 & -0.0000 & 9.0720 & -0.0000 & -0.0000 & -3.9690 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -3.1185 & -0.4252 & -0.0000 & 4.5360 & -0.0000 & 0.0000 & -1.9845 & 0.2992 \\ 0.0000 & 0.4252 & -0.0204 & -0.0000 & -0.0000 & 0.1623 & -0.0000 & -0.2992 & 0.0246 \\ 1.1340 & -0.0000 & 0.0000 & -3.9690 & 0.0000 & -0.0000 & 3.1080 & -0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.5670 & 0.1260 & 0.0000 & -1.9845 & -0.2992 & -0.0000 & 1.5540 & -0.2100 \\ 0.0000 & -0.1260 & -0.0089 & -0.0000 & 0.2992 & 0.0246 & 0.0000 & -0.2100 & 0.0321 \end{bmatrix}$$

Para a segunda iteração obtém-se:

$$\mathbf{K} = 1.0e + 08 \begin{bmatrix} 9.0720 & -0.0034 & 0.0001 & -6.2370 & 0.0034 & 0.0005 & 1.1340 & -0.0007 & -0.0001 \\ -0.0034 & 4.5360 & 0.0000 & 0.0034 & -3.1185 & 0.4252 & -0.0007 & 0.5670 & -0.1260 \\ 0.0001 & 0.0000 & 0.1623 & -0.0005 & -0.4252 & -0.0204 & 0.0001 & 0.1259 & -0.0089 \\ -6.2370 & 0.0034 & -0.0005 & 9.0720 & -0.0065 & 0.0000 & -3.9690 & 0.0032 & 0.0005 \\ 0.0034 & -3.1185 & -0.4252 & -0.0065 & 4.5360 & 0.0000 & 0.0032 & -1.9845 & 0.2992 \\ 0.0005 & 0.4252 & -0.0204 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1623 & -0.0005 & -0.2992 & 0.0246 \\ 1.1340 & -0.0007 & 0.0001 & -3.9690 & 0.0032 & -0.0005 & 3.1080 & -0.0026 & -0.0003 \\ -0.0007 & 0.5670 & 0.1259 & 0.0032 & -1.9845 & -0.2992 & -0.0026 & 1.5540 & -0.2099 \\ -0.0001 & -0.1260 & -0.0089 & 0.0005 & 0.2992 & 0.0246 & -0.0003 & -0.2099 & 0.0321 \end{bmatrix}$$

## Solução do Sistema de Equações

Calculados o vetor residual e a matriz de rigidez o último passo da Formulação Posicional é resolver o sistema de equações, isto é, tem-se a equação (4.14) em que deseja-se encontrar o vetor solução  $\mathbf{X}$ .

$$\mathbf{KX} = \mathbf{F}_{residuo} \quad (4.14)$$

Resolvido esse sistema ao final de duas iterações encontrar-se-á a posição final dada por:

$$coordenadas\ finais = \begin{bmatrix} 1 & 0.0000000000000000 & 0.0000000000000000 & 1.570796326794897 \\ 2 & 0.333333267933350 & -0.000176435051300 & 1.569804323561731 \\ 3 & 0.666666306497457 & -0.000617406778494 & 1.569209105863859 \\ 4 & 0.999999149390076 & -0.001190653422980 & 1.569010673192946 \end{bmatrix}$$

Como mencionado no enunciado do exemplo, optou-se por um caso que tivesse duas iterações com as condições impostas. Nesse caso, utilizando a norma descrita pela equação (3.13) ao final da segunda iteração a norma obtida é igual a  $7.506310504499208e - 007$ .

### 4.3.3 Implementação do Peso Próprio

O módulo para o cálculo do peso próprio foi implementado baseado na formulação aproximada proposta por Cook *et al.* (2002). Essa aproximação leva em consideração a existência de forças cortantes nodais equivalentes e exclui os momentos nodais equivalentes. Acreditou-se que seria uma boa aproximação haja vista que o problema alvo desta dissertação, envolve estruturas delgadas e de grandes proporções, envolvendo geralmente malhas refinadas, e portanto, a aproximação adotada é aceitável.

$$\mathbf{F}_{eq} = \int_{-a}^a \Phi^T \Phi dx \cdot \mathbf{q} \quad (4.15)$$

em que  $\Phi$  são as funções de forma e  $\mathbf{q}$  o vetor de carregamento. Nesse caso, o vetor de carregamento é uniforme.

A figura (4.8) ilustra a transformação da carga distribuída  $\mathbf{q}$  em carga nodal equivalente sugerida segundo Cook *et al.* (2002).

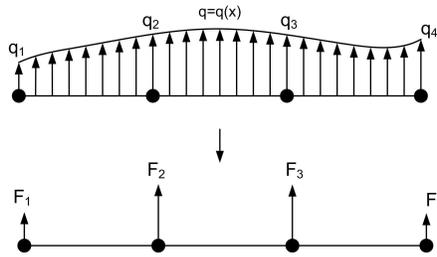


Figura 4.8: Carga nodal equivalente.

Uma vez calculado o vetor força nodal equivalente, adicionou-se o mesmo com o vetor de forças externas. Esse último por sua vez, de acordo com a equação (3.57), é utilizado para calcular o desbalanceamento ou vetor residual.

#### 4.3.4 Implementação do Empuxo

O empuxo é um fenômeno físico que se traduz em esforços contrários ao peso próprio de um corpo submerso, assim, é um fenômeno típico do problema estático de *risers*. Nesta seção é apresentado um modelo para o efeito de empuxo atuante ao longo do *riser* submerso em meio fluido, o modelo proposto é apresentado na figura (4.9).

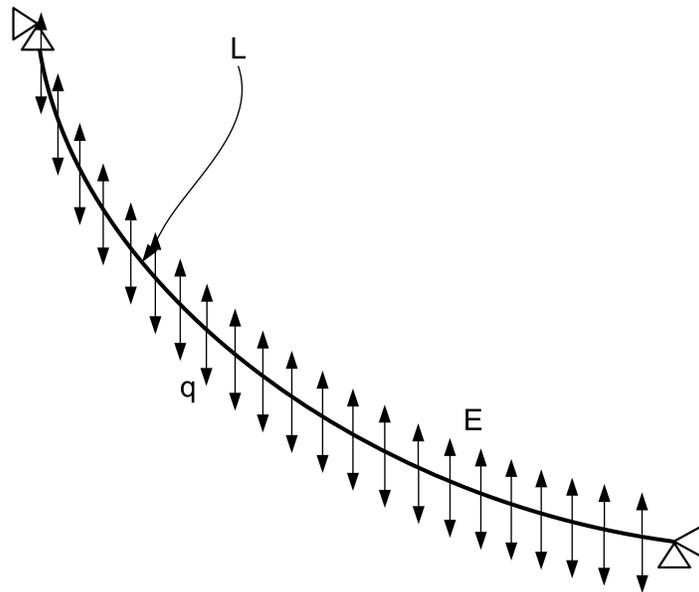


Figura 4.9: Modelo de empuxo para um corpo submerso em meio fluido.

Percebe-se que o empuxo, neste trabalho, é considerado como uma força de menor magnitude que se contrapõe aos esforços devido o peso próprio do *riser*. Também foi considerado

que o efeito de empuxo só atuante quando o corpo não está em contato com o solo, isto é, quando o corpo está suspenso em meio fluido.

A força proveniente do empuxo a que o corpo está submetido é dado pela equação (4.16).

$$q_E = \rho_{liq} A_d g \quad (4.16)$$

em que  $\rho_{liq}$  é a densidade do líquido,  $A_d$  é o área de líquido deslocado e  $g$  é a aceleração da gravidade.

### 4.3.5 Implementação do Contato com o Solo

O contato com o solo foi implementado considerando duas situações. A primeira trata de um solo linear em que os nós em contato com o solo estão compartilhados com o mesmo e fazem parte dessa malha. Assim, o *riser* está submetido ao efeito de molas do tipo Winkler a todo instante. A segunda proposta é considerar um solo que depende da posição dos nós, isto é, um solo bi-linear que estaria presente somente quando o *riser* o tocasse.

A figura (4.10a) e (4.10b) representam a idéia do solo linear adotado. Como uma primeira aproximação, esse modelo foi implementado a fim de validar a metodologia a partir de exemplos relativamente comuns existentes na literatura que apresentam solução analítica.

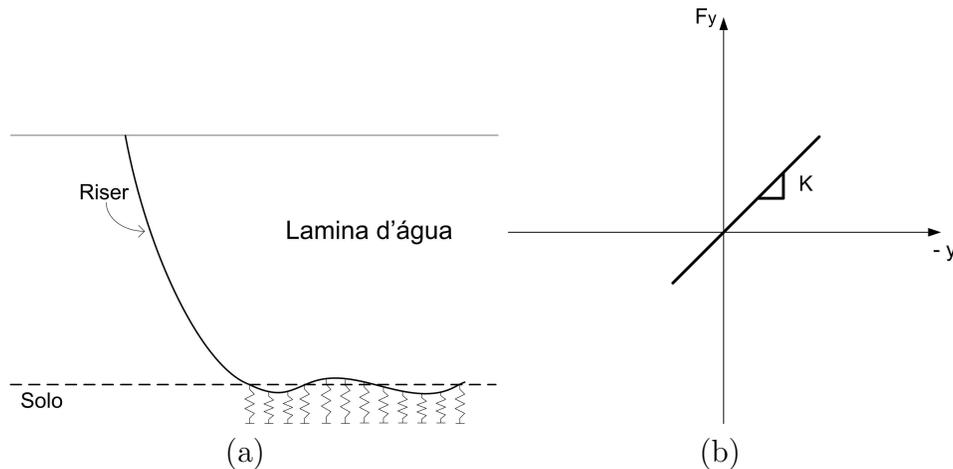


Figura 4.10: Esquema do solo linear

Na figura (4.10a) observa-se que independentemente da posição do *riser* as molas continuam acionadas. A rigidez imposta simulou o efeito de molas e foram introduzidas sem qualquer condição prévia.

O segundo modelo objetivou descrever o solo somente quando o *riser* o tocasse. Para tanto, foi mantido o tipo de mola, porém, foi implementado um módulo capaz de verificar a posição do *riser* e, então, somente quando a fronteira da superfície do solo é ultrapassada as molas são acionadas. A figura (4.11a) mostra em detalhes como foi modelado esse solo. Na figura (4.11b), observa-se o comportamento bilinear da rigidez do modelo adotado.

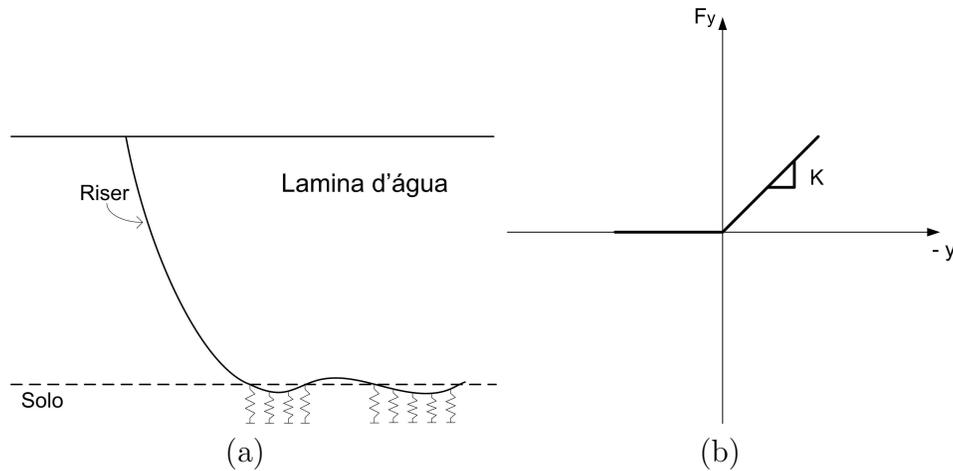


Figura 4.11: Esquema do solo bilinear.

Nesse caso, as molas foram adicionadas somente nos nós que ultrapassaram a fronteira limite do solo, para tanto, após a primeira iteração verificou-se se os nós estavam fora do limite estabelecido e então foram adicionadas as molas. As molas permanecem acionadas somente se os nós continuam na região de penetração do solo, caso contrário são desligadas.

O solo bilinear garante condições mais realistas ao problema, e nesse caso, mais extremas uma vez que a rigidez do solo não segura o *riser* caso este descole e deixe de estar em contato com o solo.

#### 4.3.6 Implementação de uma Aproximação para a Curva *Backbone*

Denomina-se Curva *Backbone*, como é chamada neste trabalho, a curva oriunda da resistência do solo à penetração do *riser*. Isto é, a medida em que o *riser* penetra o solo ele sofre uma certa resistência, essa resistência é comumente expressa em termos de curvas de carga, cuja região limite é denominada a Curva *Backbone*, (Laver *et al.* 2004; Aubeny *et al.* 2006).

A figura (4.12) mostra como se dá a obtenção da Curva *Backbone* a medida que o *riser* penetra o solo.

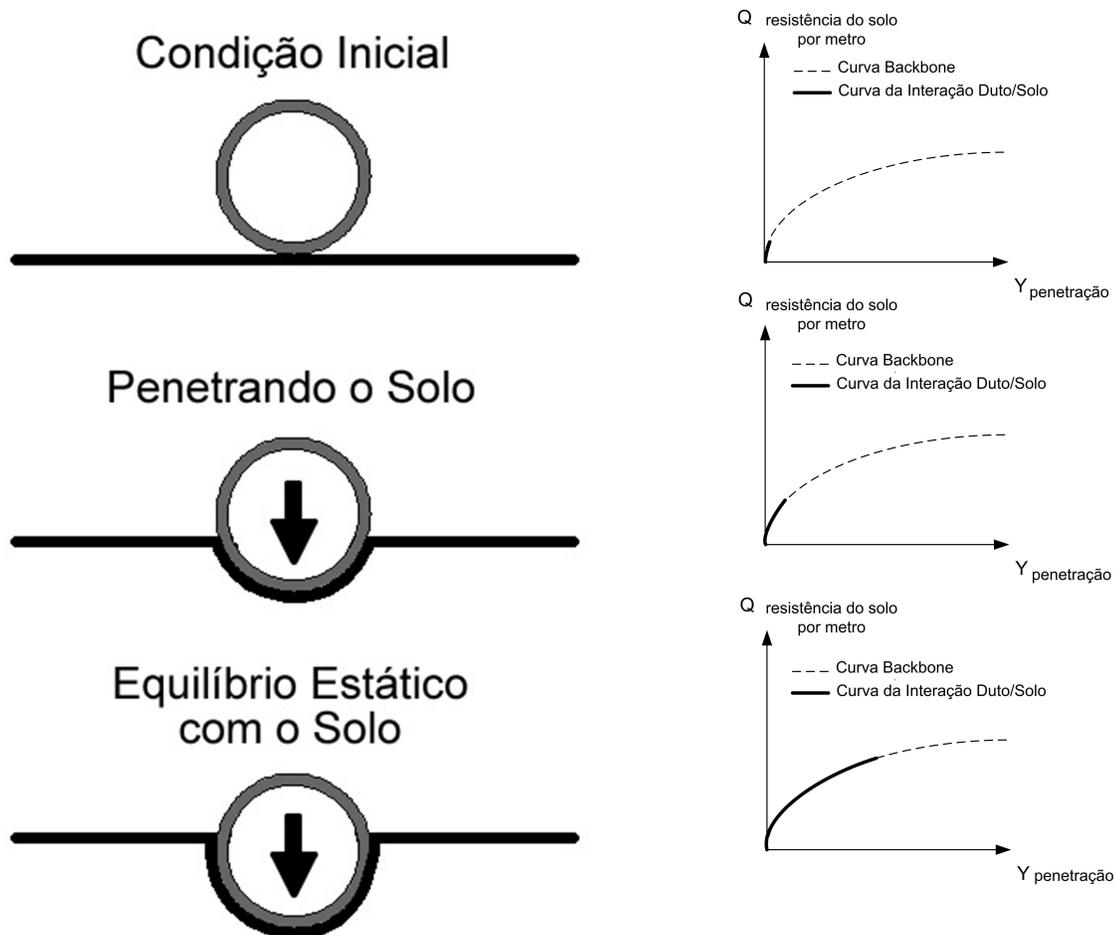


Figura 4.12: Modelo esquemático de um duto penetrando o solo (Aubeny *et al.* 2006).

Observa-se que o *riser* encontra uma rigidez maior quando toca o solo e a medida em que vai aprofundando a rigidez tende a diminuir. Esse contexto, de um modo geral, vale para diferentes solos desde que se compreenda que a rigidez inicial pode ser menor ou maior e que a medida em que ocorre a penetração ela irá decrescer.

Assim, deseja-se fazer uma aproximação da Curva *Backbone* para o solo adotado neste trabalho. A idéia é utilizar duas rigidezes diferentes que se aproximem da curva. A figura (4.13) mostra a aproximação utilizada.

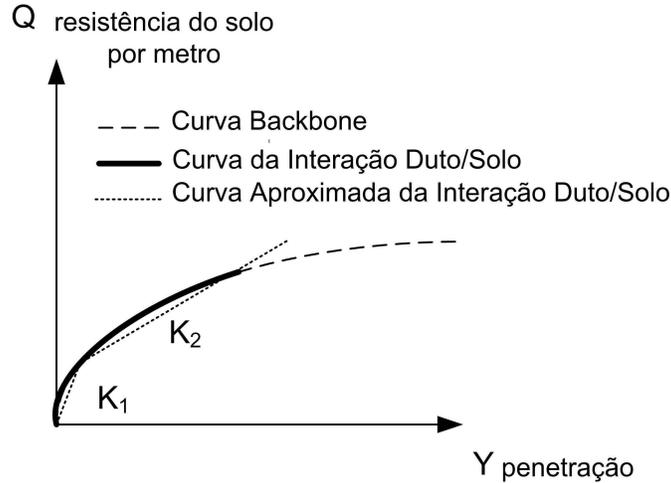


Figura 4.13: Aproximação para a Curva *Backbone*.

Para a aproximação proposta na figura (4.13) utilizou-se de duas rigidezes  $K_1$  e  $K_2$ . A rigidez  $K_1$  descreve o comportamento inicial da Curva *Backbone* e  $K_2$  representa a parte final. Em outras palavras, o *riser* ao tocar o solo interage com o solo de rigidez  $K_1$  e ao penetrá-lo, de uma certa profundidade previamente definida, o *riser* passará a interagir com o solo representado por  $K_2$ .

Em termos físicos, o que se pretende é adotar duas camadas de solos diferentes cada um com sua rigidez própria. A figura (4.14) mostra o esquema do solo proposto.

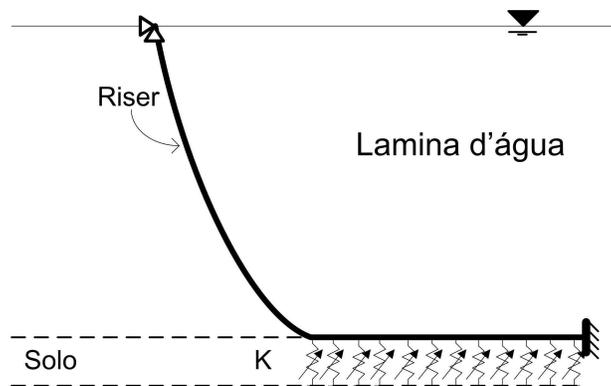


Figura 4.14: Modelo de contato com o solo com aproximação da Curva *Backbone*.

Verifica-se que a rigidez é variável, nesse caso, são duas rigidezes possíveis e dependentes da profundidade.

Em considerações futuras, o comportamento do solo pode ser considerado conforme leis

constitutivas mais criteriosas, incluindo efeitos de plasticidade, histerese, sucção e outros.

# Capítulo 5

## Resultados

Neste item apresenta-se os resultados dos estudos realizados no decorrer do trabalho. Foram simulados exemplos tanto para consolidar conceitos empregados na Formulação Posicional quanto para a validação do código implementado. Também foram simulados exemplos de aplicação de contato e para o problema estático de interação solo-*riser*.

Assim, com os exemplos apresentados neste capítulo é possível avaliar a capacidade da formulação empregada em casos extremos de não linearidade geométrica e em exemplos de grandes dimensões estruturais. Desse modo, verifica-se a viabilidade da aplicação dessa formulação para problemas de *risers*.

São também realizados estudos paramétricos com o objetivo de avaliar a sensibilidade do modelo em relação a alguns parâmetros.

A título de simplificação, divide-se o capítulo de resultados em três seções: validações e teste de convergência, estudos da metodologia de aplicação e exemplos de contato com o solo. Dessa maneira, deseja-se criar uma seqüência lógica a fim de evidenciar as potencialidades da modelagem realizada.

### 5.1 Validações e Teste de Convergência

Nesta seção são apresentados os exemplos referentes as validações de conceitos e do elemento implementado, bem como um exemplo de teste de convergência.

## 5.2 Validação

### 5.2.1 Estudo das Funções de Forma de Alta Ordem - Funções de Forma Cúbicas

Com o objetivo de estudar as funções de forma utilizadas no elemento posicional, buscou-se verificar seu comportamento a partir da análise e compreensão do seu funcionamento.

As funções de forma utilizadas nesse trabalho são funções cúbicas obtidas através da Fórmula de Lagrange. Sabe-se que as funções de forma devem satisfazer a condição de ser unitária no nó arbitrário  $i$  e ser nula nos demais. As funções de forma permitem que se possa calcular a resposta em qualquer ponto entre os nós. As funções cúbicas podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\Phi_1 = \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_1} \frac{\xi_3 - \xi}{\xi_3 - \xi_1} \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_1} \quad (5.1)$$

$$\Phi_2 = \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_2} \frac{\xi_3 - \xi}{\xi_3 - \xi_2} \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1 - \xi_2} \quad (5.2)$$

$$\Phi_3 = \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_3} \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_3} \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1 - \xi_3} \quad (5.3)$$

$$\Phi_4 = \frac{\xi_3 - \xi}{\xi_3 - \xi_4} \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_4} \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1 - \xi_4} \quad (5.4)$$

A figura (5.1) mostra detalhes gráficos das funções de forma utilizadas nesse trabalho, e permite verificar que as condições necessárias são obedecidas. Deve-se recordar que as coordenadas dos nós utilizados foram  $(-1, -1/3, 1/3, 1)$ .

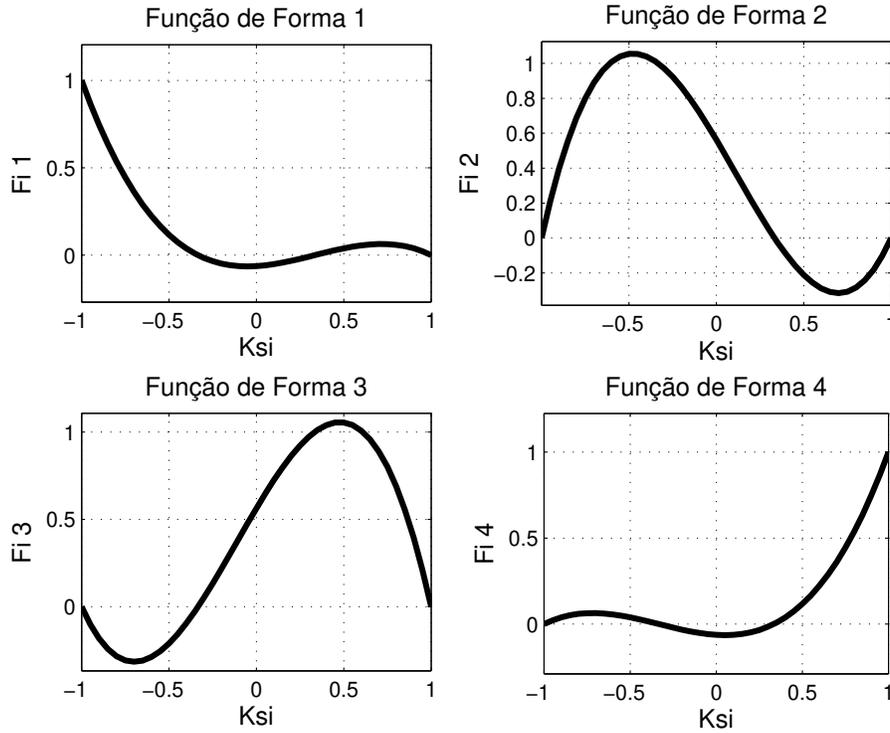


Figura 5.1: Funções de forma de alta ordem.

Um detalhe interessante quando se observa as funções de forma cúbicas é que as funções ultrapassam os valores unitários em alguns pontos internos, o que não ocorre com funções lineares e quadráticas comumente utilizadas no Método dos Elementos Finitos.

A necessidade de utilizar essas funções de forma vem da opção por elementos de alta ordem a fim de melhorar a aproximação interna do elemento, e evitar travamentos devido a sobre avaliação dos efeitos de cisalhamento (Coda 2004).

Ainda nesse sentido, com o desenvolvimento da Formulação Posicional, mostrada no capítulo Modelagem Mecânica Não Linear de Corpos Esbeltos, é necessário o uso das derivadas das funções de forma em relação a variável adimensional  $\xi$ . As derivadas das funções de forma do elemento são dadas por:

$$\Phi_{1,\xi} = \frac{-1}{\xi_4 - \xi_1} \cdot \frac{\xi_3 - \xi}{\xi_3 - \xi_1} \cdot \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_1} \cdot \frac{-1}{\xi_3 - \xi_1} \cdot \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_1} \cdot \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_1} \cdot \frac{-1}{\xi_2 - \xi_1} \cdot \frac{\xi_3 - \xi}{\xi_3 - \xi_1} \cdot \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_1} \quad (5.5)$$

$$\Phi_{2,\xi} = \frac{-1}{\xi_4 - \xi_2} \cdot \frac{\xi_3 - \xi}{\xi_3 - \xi_2} \cdot \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1 - \xi_2} \cdot \frac{-1}{\xi_3 - \xi_2} \cdot \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_2} \cdot \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1 - \xi_2} \cdot \frac{-1}{\xi_1 - \xi_2} \cdot \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_2} \cdot \frac{\xi_3 - \xi}{\xi_3 - \xi_2} \quad (5.6)$$

$$\Phi_{3,\xi} = \frac{-1}{\xi_4 - \xi_3} \cdot \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_3} \cdot \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1 - \xi_3} \cdot \frac{-1}{\xi_2 - \xi_3} \cdot \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_3} \cdot \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1 - \xi_3} \cdot \frac{-1}{\xi_1 - \xi_3} \cdot \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_3} \cdot \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_3} \quad (5.7)$$

$$\Phi_{4,\xi} = \frac{-1}{\xi_3 - \xi_4} \cdot \frac{\xi_3 - \xi}{\xi_3 - \xi_4} \cdot \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_4} \cdot \frac{-1}{\xi_3 - \xi_4} \cdot \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_4} \cdot \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_4} \cdot \frac{-1}{\xi_2 - \xi_4} \cdot \frac{\xi_3 - \xi}{\xi_3 - \xi_4} \cdot \frac{\xi_4 - \xi}{\xi_4 - \xi_4} \quad (5.8)$$

A figura (5.2) mostra um gráfico das derivadas das funções de forma utilizadas.

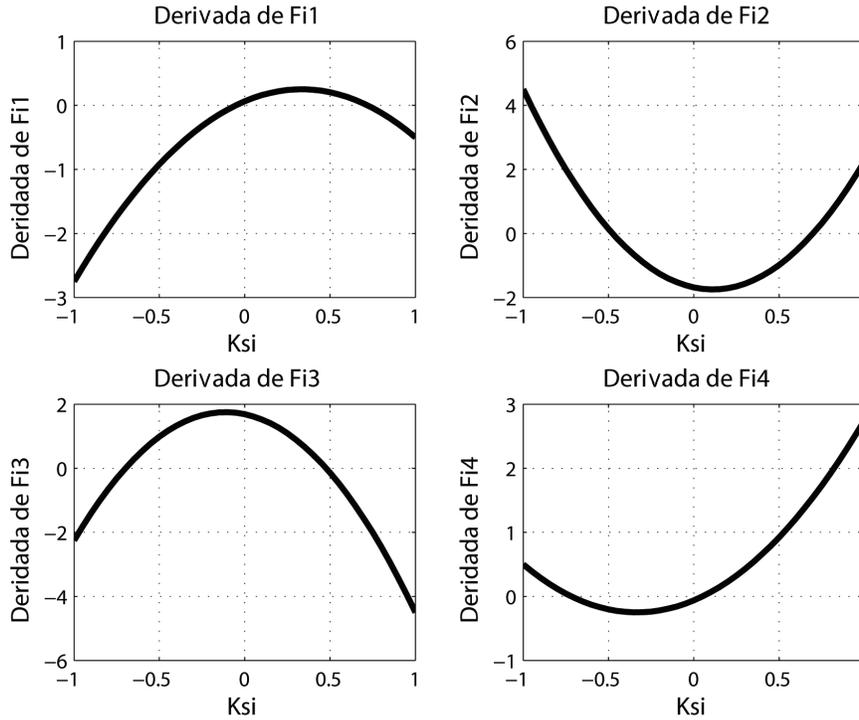


Figura 5.2: Derivadas das funções de forma.

Através da figura (5.2) pode-se observar que as derivadas são consistentes com as funções mostradas na figura (5.1). Percebe-se que são funções quadráticas, como esperado, pois foi reduzido um grau na ordem das funções de forma através da derivada.

Do estudo das funções de forma apresentado, verifica-se a continuidade das funções e suas derivadas, bem como a consistência em relação as condições necessárias à tais funções.

### 5.2.2 Estudo da Cinemática de Reissner

Uma vez estudado as funções de forma e suas derivadas, aplica-se a Cinemática de Reissner adotada na formulação a fim de verificar se a mesma satisfaria as necessidades por grandes deslocamentos e grandes rotações.

Inicialmente, procurou-se verificar o comportamento da formulação em relação a mudança de quadrantes no espaço euclidiano. Isso foi estudado, pois a Formulação Posicional utiliza-se de senos e cossenos, podendo, assim, apresentar problemas de posicionamento no espaço. Porém, com o uso do programa comercial Matlab® e funções trigonométricas apropriadas, isso não se tornou um problema. A figura (5.3) ilustra o estudo realizado, onde procurou-se impor um giro completo no sentido anti-horário com um elemento.

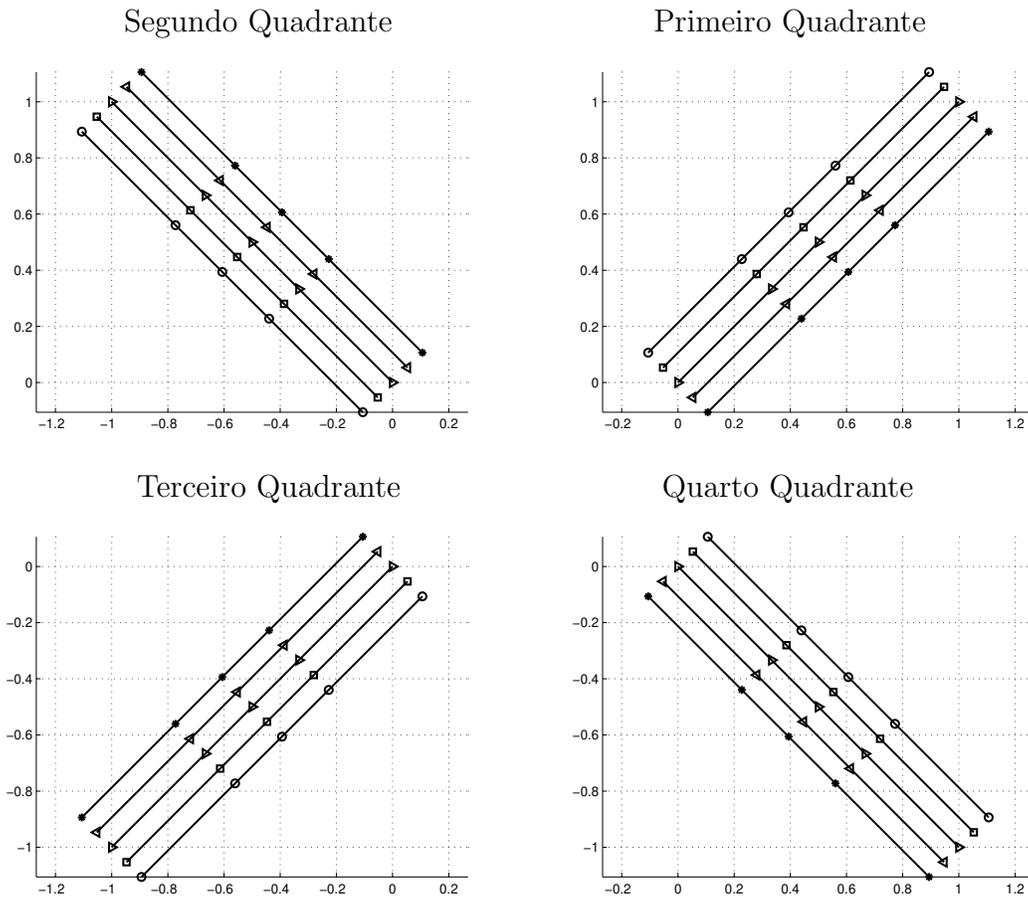


Figura 5.3: Análise da cinemática de Reissner no espaço euclidiano.

Observa-se através da figura (5.3) que o elemento impresso nos quatro quadrantes manteve-se consistente, isto é, o elemento completou uma volta sem apresentar problemas de inversão de faces ou localização no espaço, que são referenciadas pelas marcas das linhas longitudinais. Este comportamento demonstra a capacidade do elemento em interpolar problemas com grandes rotações de corpo rígido.

Um outro estudo desenvolvido foi relativo a capacidade do elemento desenvolver grandes deslocamentos e grandes rotações de maneira irregular. A figura (5.4) mostra um exemplo simulado para demonstrar a cinemática adotada. Neste caso, adotou-se uma posição com grande deformação, e usou-se a cinemática do elemento na interpolação. Observa-se que a forma obtida é compatível e suave no interior do elemento.

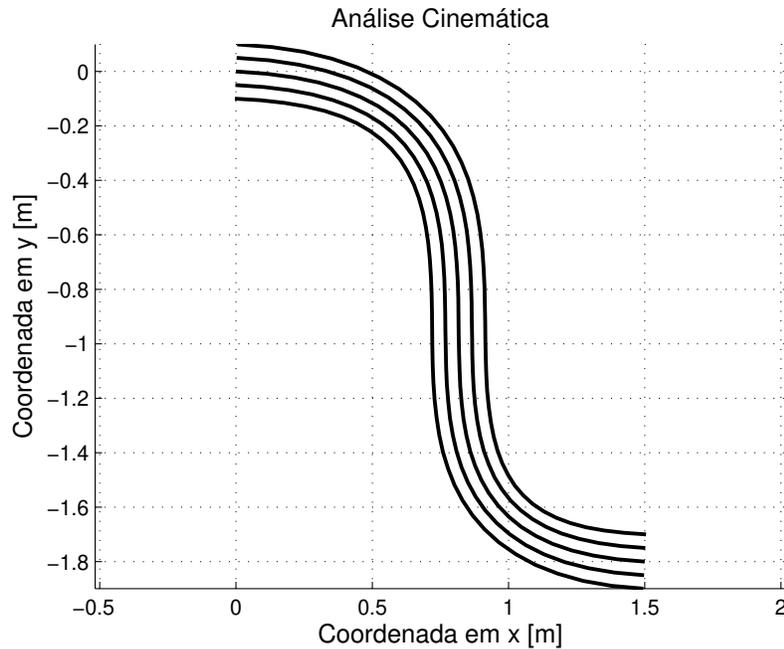


Figura 5.4: Análise da cinemática de Reissner: grandes deslocamentos e grandes rotações.

Pode-se observar que a cinemática utilizada supri as necessidades de não linearidade geométrica, sem perder uma das principais características da cinemática de Reissner, isto é, as seções transversais se mantêm planas, isso pode ser visto principalmente nas extremidades do elemento.

### 5.2.3 Estudo da Deformação de Green

A medida de deformação adotada no presente trabalho é a Deformação de Green. Nesta seção apresenta-se um breve estudo que comprova o que já foi mencionado no capítulo Modelagem Mecânica Não Linear de Corpos Esbeltos, e em Coda (2004) à respeito da equivalência entre as Deformações de Green e de Engenharia quando se trata de pequenas deformações.

Desse modo, foi desenvolvido um estudo em que uma barra engastada é submetida a

esforços longitudinais em sua extremidade livre. Os esforços aplicados foram suficientes para que os deslocamentos finais, da extremidade livre, ocasionassem deformações significativas. Para tanto, aplicou-se  $5000N$  a cada um dos 800 passos de carga utilizados. A figura (5.5) mostra o esquema do exemplo proposto. Utilizou-se uma barra de comprimento  $L = 1m$ , área igual  $A = 6,4 \times 10^{-5} m^2$ , momento de inércia  $I = 3,413 \times 10^{-10} m^4$ . Foram avaliadas as deformações nos pontos  $\xi = -1/3$  e  $\eta = 1$ . O ponto  $\eta = 1$  foi utilizado na análise para se obter a deformação na face superior da barra.

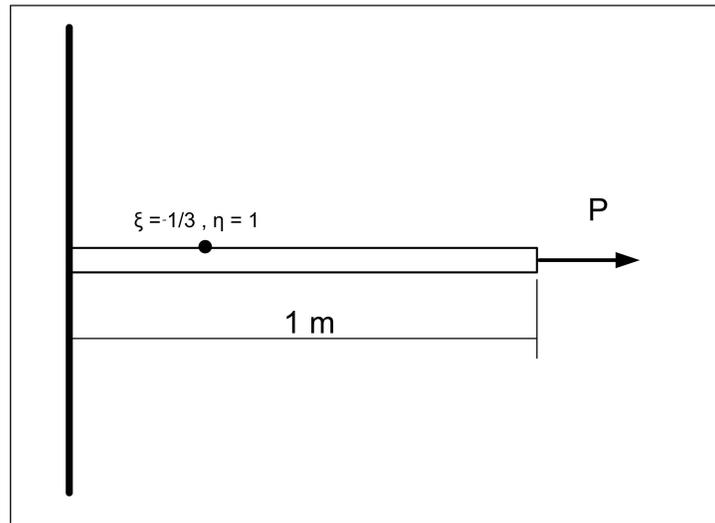


Figura 5.5: Esquema de barra engastada-livre.

As deformações obtidas no ponto de análise podem ser observadas na figura (5.6), que mostra as deformações em função da carga aplicada.

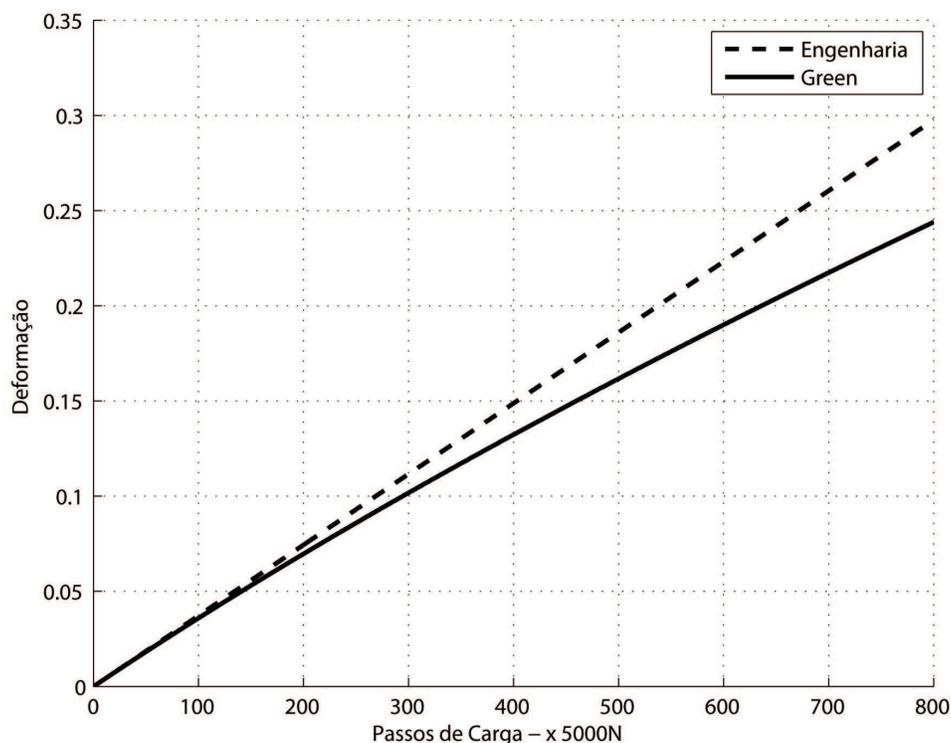


Figura 5.6: Comparação entre deformações de Engenharia e de Green

Nota-se que as deformações se equivalem quando se trata de pequenas deformações. Isso possibilita aplicar os conceitos descritos previamente na Formulação Posicional. Observa-se também um comportamento não linear na curva de Deformação de Green, para passos de carga acima de 100. Assim, mostra-se que mesmo para os casos de grandes deslocamentos e grandes deformações é possível usar esta formulação. Neste trabalho, a principal aplicação refere-se ao *riser* rígido fabricado em aço, e inicialmente será considerado o regime de pequenas deformações.

## 5.2.4 Estudo dos Limites de Distorção do Elemento

Um último estudo para consolidação de conceitos da formulação foi a respeito dos limites de distorção do elemento de alta ordem utilizado. O objetivo deste estudo é a verificação da distância relativa máxima entre os nós externos e internos. Para isso, desenvolveu-se uma varredura através de tentativas, assumindo valores distintos de posições para os nós internos em relação aos externos que sempre estavam nos extremos do elemento. A figura (5.7) permite uma melhor visualização do elemento descrito.

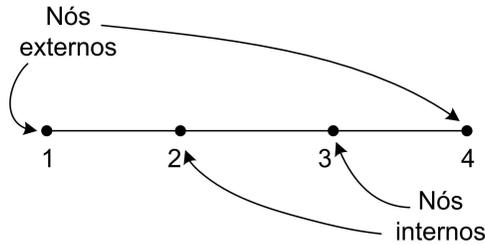


Figura 5.7: Esquema do elemento de alta ordem analisado.

Após a análise do limite em que os nós internos podem se deslocar, verificou-se que dentro de uma faixa de  $0,3L$  a  $0,7L$ , onde  $L$  é o comprimento do pórtico ou elemento, é possível que os nós internos, leiam-se 2 e 3, variem sem que ocorram desvios na determinação dos ângulos e, principalmente, que não haja a ocorrência de determinantes do jacobiano nulos ou negativos. A figura (5.8) possibilita verificar esses limites.



Figura 5.8: Limites de distorção.

A existência do determinante nulo ou negativo é inadmissível para o cálculo do jacobiano correto, sua ocorrência indica a existência de singularidades, e devem ser evitadas, (Touzot e Dhatt 1984). Como regra geral, buscou-se manter os nós internos equidistantes em todas as análises realizadas, evitando-se assim problemas de singularidade. Para o caso de malhas unidimensionais respeitar estes limites é uma tarefa trivial. Para problemas com malhas bi e tridimensionais o problema da distorção é bem mais complexo, e técnicas de remalhagem ou realocação de nós precisam ser usadas.

### 5.2.5 Validação da Formulação Posicional

Depois de ter consolidado alguns conceitos fundamentais do elemento utilizado, o código implementado foi validado comparando com resultados analíticos e resultados publicados em Greco (2004).

Para validar o código com resultados analíticos optou-se por um exemplo de viga bi-apoiada como mostra a figura (5.9). É uma viga de aço com módulo de elasticidade  $E = 210 \times 10^9 Pa$ , área  $A = 2,4 \times 10^{-3} m^2$ , momento de inércia  $I = 4,762 \times 10^{-7} m^4$ . A viga foi discretizada em 10 elementos e foram considerados 5 carregamentos diferentes:  $1KN/m$ ,  $2KN/m$ ,  $3KN/m$ ,  $5KN/m$  e  $10KN/m$ .

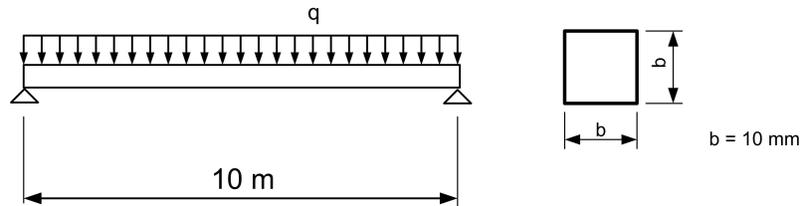


Figura 5.9: Esquema de viga bi-apoiada utilizado para a validação.

Foram comparados o deslocamento transversal da viga e o momento ao longo da mesma. As figuras (5.10) e (5.11) mostram os resultados para o deslocamento e o momento, respectivamente.

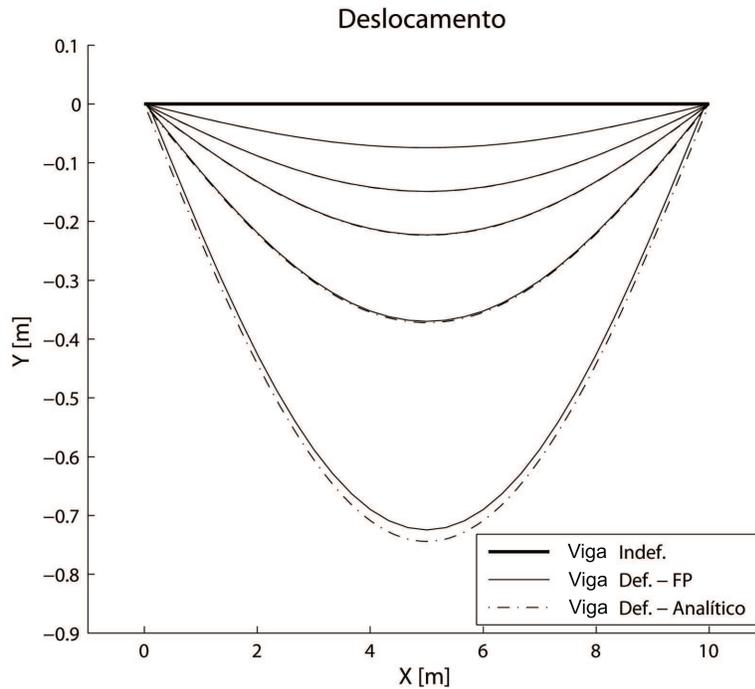


Figura 5.10: Validação do deslocamento transversal.

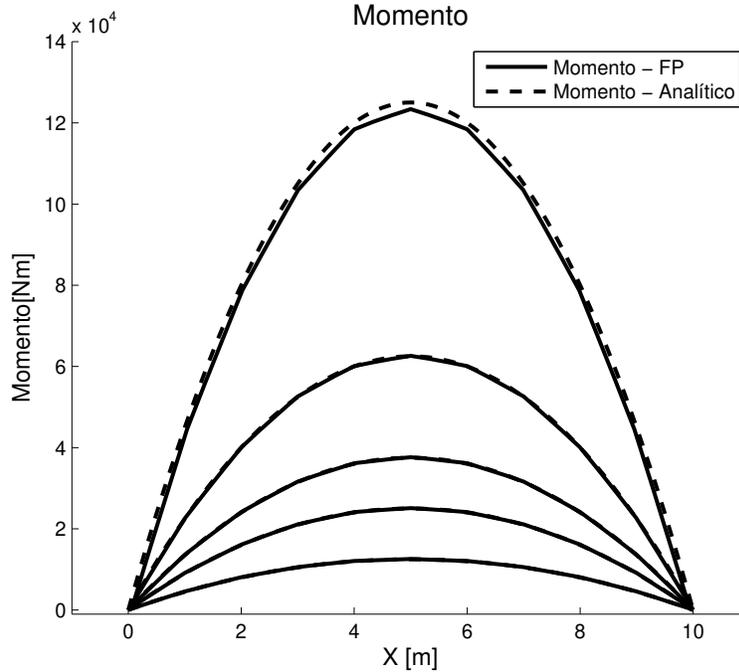


Figura 5.11: Validação do momento.

Verifica-se boa convergência entre os resultados analíticos e numéricos. Nota-se também que a medida que o deslocamento aumenta começa aparecer uma pequena diferença entre analítico, formulação linear, e o numérico cuja formulação é não linear. Nesse ponto, pode-se dizer que já está ocorrendo um grande deslocamento e grande rotação.

Para validar a não linearidade geométrica, a partir de uma solução não linear de referência, o exemplo escolhido é de uma viga engastada-livre de comprimento  $L = 10m$ , área  $A = 2,4 \times 10^{-3} m^2$ , momento de inércia  $I = 4,762 \times 10^{-7} m^4$  e módulo de elasticidade  $E = 210 \times 10^9 Pa$ . Foram utilizados 10 elementos e carga  $P = 10KN$ , com 100 passos de carga. A figura (5.12) mostra o esquema do exemplo simulado para validação do código implementado.

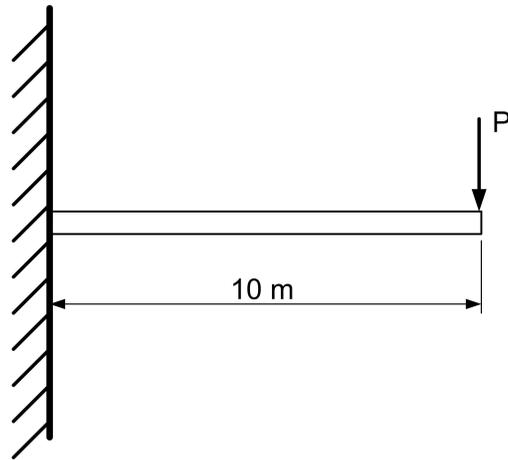


Figura 5.12: Esquema de viga-livre utilizada para a validação.

Os deslocamentos obtidos na viga podem ser visualizados na figura (5.13). Foram impressos os resultados para esforços iguais a  $0, 5\text{KN}$ ,  $1\text{KN}$ ,  $2\text{KN}$ ,  $3\text{KN}$ ,  $5\text{KN}$ ,  $7\text{KN}$ ,  $10\text{KN}$ . Os resultados obtidos são comparados com aqueles obtidos por (Greco 2004), verificando-se uma boa aproximação.

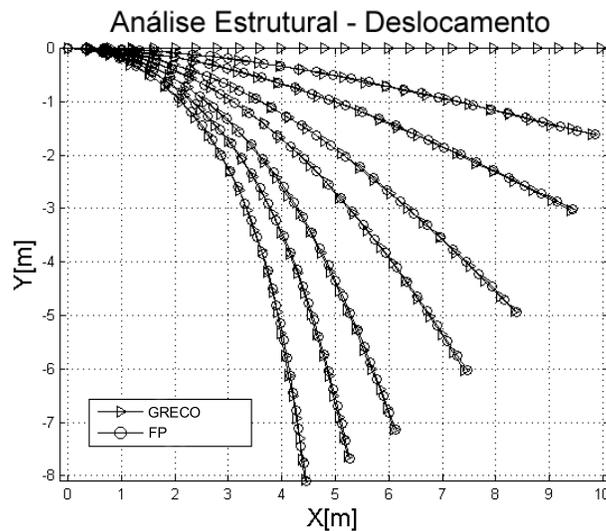


Figura 5.13: Validação do elemento de pórtico.

Adicionalmente, o momento para os 20 primeiros passos de carga desse exemplo foi avaliado, como mostra a figura (5.14). Nesse caso, a cada passo de carga acrescenta-se  $100\text{N}$  na extremidade da viga, o que corresponde a um acréscimo de  $1000\text{KNm}$  no valor do momento no engaste.

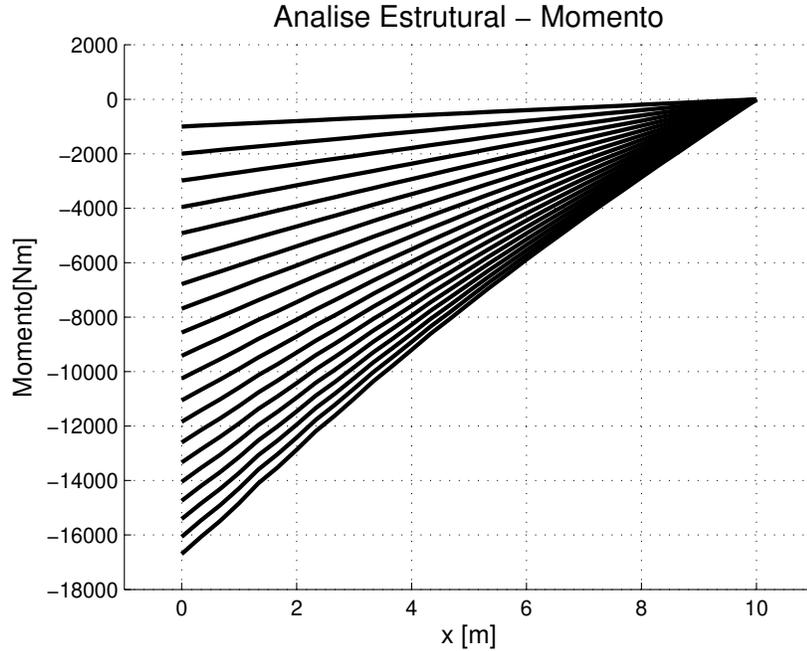


Figura 5.14: Momento - validação do momento.

Percebe-se consistência dos resultados e a medida que o deslocamento se torna grande pode-se notar que a curva do momento apresenta uma tendência não linear.

A Formulação Posicional já foi publicada algumas outras vezes, nas quais a mesma foi comparada com resultados clássicos. Assim, nesse trabalho preocupou-se em validar os resultados comparando-os com valores obtidos por Greco (2004).

### 5.2.6 Exemplo de Flexão Pura considerando Grandes Rotações

Após ter sido validado o código implementado, para avaliar a Formulação Posicional com grandes deslocamentos e grandes rotações em uma situação rigorosa, simulou-se um novo exemplo de flexão. Foi simulado uma viga engastada-livre submetido a um momento concentrado na extremidade livre. A viga utilizada apresentava comprimento  $L = 10m$ , área  $A = 2,5 \times 10^{-3} m^2$ , momento de inércia  $I = 5,208 \times 10^{-7} m^4$  e módulo de elasticidade  $E = 210 \times 10^9 Pa$ . O momento aplicado foi de  $M = -1 \times 10^3 Nm$ . Foram utilizados 70 passos de carga e 10 elementos. A figura (5.15) mostra o esquema do exemplo simulado.

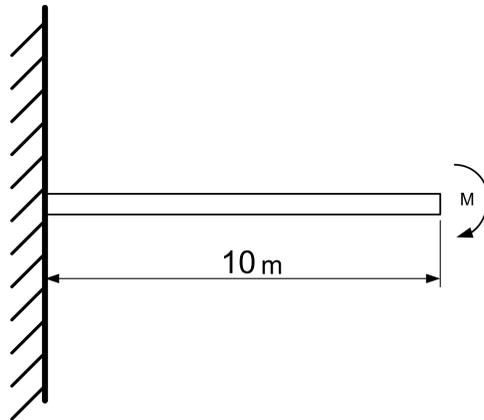


Figura 5.15: Esquema do exemplo de flexão pura.

O campo de deslocamento obtido desse exemplo pode ser visualizado através da figura (5.16).

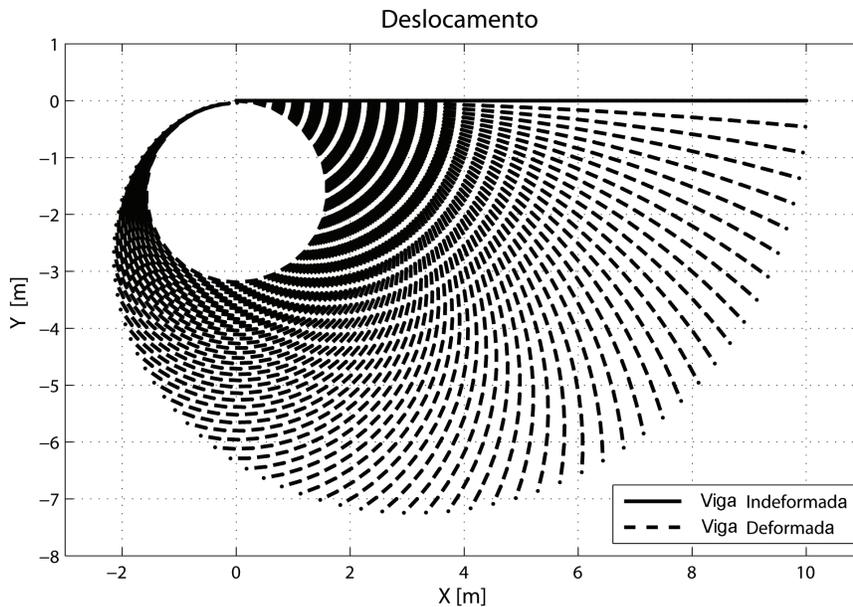


Figura 5.16: Deslocamento da viga submetida a momento concentrado.

Verifica-se a boa performance do elemento em atender grandes deslocamentos e grandes rotações mesmo sendo utilizados poucos passos de carga e malha pouco refinada, haja vista que o desvio entre o diâmetro analítico e o diâmetro numérico foi de 3,7%.

Foi avaliado o momento ao longo da viga para o exemplo proposto, sendo impressos os resultados a cada dez passos de carga. Os resultados podem ser vistos na figura (5.17).

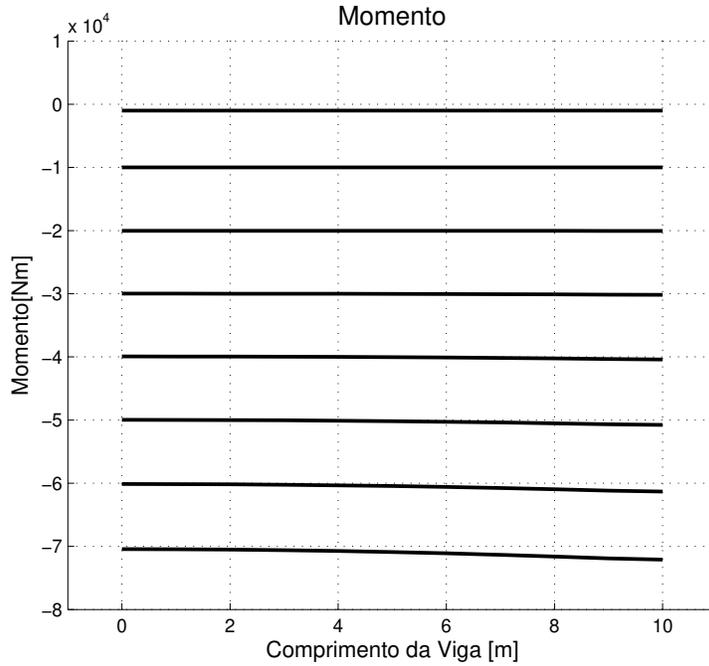


Figura 5.17: Momento ao longo da viga.

Observa-se que o momento é constante ao longo da viga e a medida que o deslocamento se torna mais rigoroso aparece uma pequena inflexão da curva de momento. Esse pequeno desvio do momento ocorreu devido a malha relativamente grosseira e a tolerância,  $tol = 1 \times 10^{-4}$ , não ser restritiva o suficiente para o controle da convergência.

A fim de verificar se os fatores citados realmente interferiram nos resultados, o mesmo exemplo foi simulado com uma malha mais refinada, foram utilizados 24 elementos, e uma tolerância mais restritiva,  $tol = 1 \times 10^{-5}$ . O resultado pode ser visto na figura (5.18).

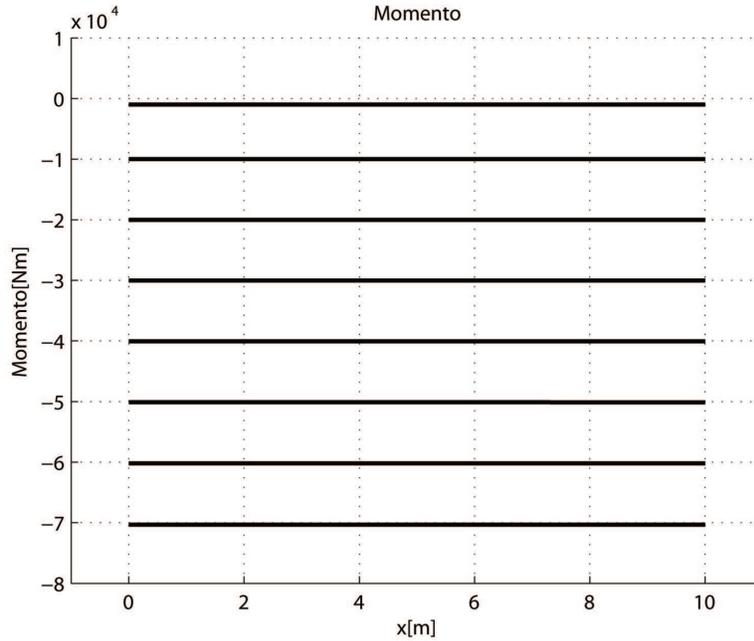


Figura 5.18: Viga engastada-livre submetido a momento concentrado.

Percebe-se que o resultado não apresenta mais as distorções anteriores e se mostram coerentes ao estudo proposto. Assim, pode-se afirmar que a Formulação Posicional atende a situações extremas de não linearidade geométrica mesmo para rotações próximas de  $360^\circ$ . Outros exemplos podem ser vistos em Greco (2004).

### 5.2.7 Teste de Convergência

Verificou-se a convergência do Método de Newton-Raphson, para Formulação Posicional, de maneira simples e objetiva a fim de avaliar a necessidade de refinamento da malha e a ordem de grandeza da tolerância utilizada. Para tanto, utilizou-se o exemplo mostrado na seção anterior, figura (5.15), com alguns ajustes geométricos e de carregamentos.

Nesse exemplo, utilizou-se a viga que apresenta comprimento  $L = 10m$ , área  $A = 3,0 \times 10^{-3} m^2$ , momento de inércia  $I = 5,0 \times 10^{-7} m^4$  e módulo de elasticidade  $E = 210 \times 10^9 Pa$ . O momento total aplicado foi de  $M = \frac{2\pi EI}{L}$ . Foram utilizados 100 passos de carga para se completar a circunferência e 3, 6, 12, 18, 24 e 30 elementos. A tolerância adotada foi  $1 \times 10^{-4}$ .

A figura (5.19) mostra o progresso da convergência do método utilizando malhas cada vez mais refinadas.

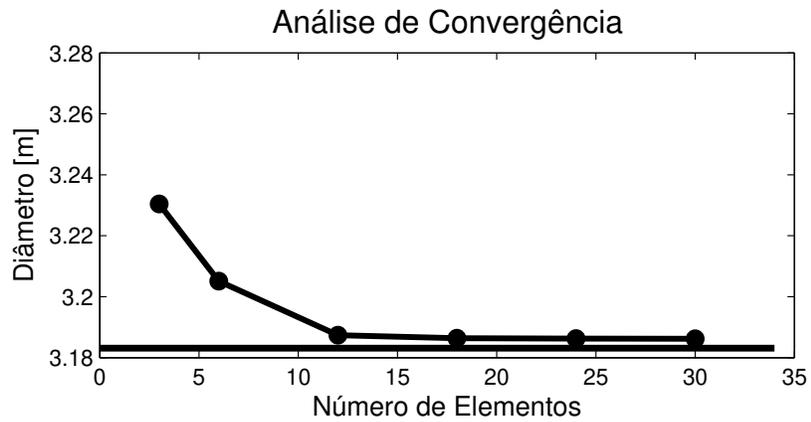


Figura 5.19: Análise da convergência com o refinamento da malha.

Nota-se na figura (5.19) uma melhora significativa ao utilizar 6 e depois 12 elementos, porém que a melhora não é muito representativa quando refina-se a malha de 12 elementos em diante, uma vez que as variações são mínimas. Deve-se levar em consideração que esse é um exemplo que exige boa flexibilidade do elemento e de extrema condição de não linearidade geométrica.

Outro detalhe está relacionado ao número de iterações necessárias para se conseguir a volta completa do pórtico. A figura (5.20) ilustra a variação do número de iterações em função da malha adotada.

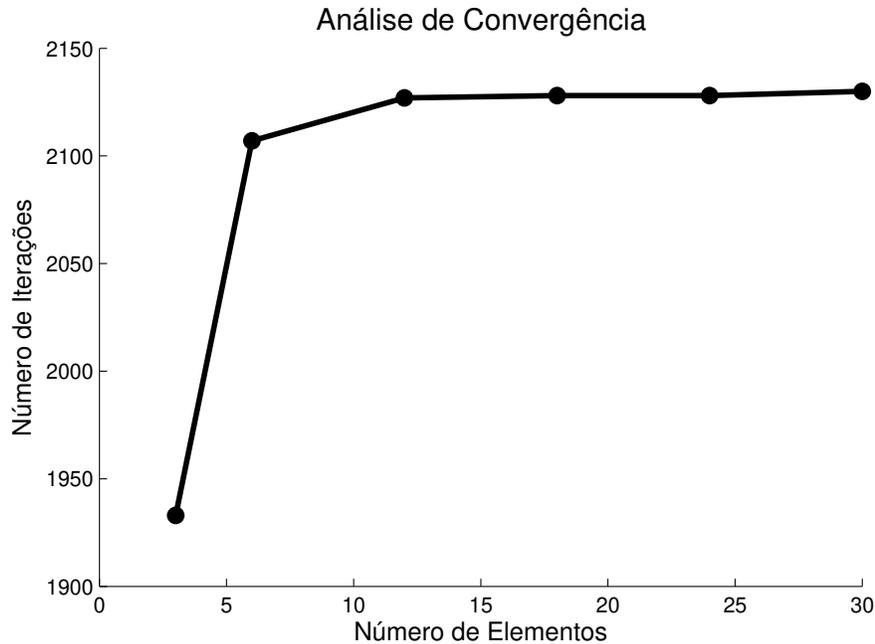


Figura 5.20: Análise da convergência.

Verifica-se que são necessárias várias iterações para se atingir a posição final. No entanto, a diferença do número de iterações entre 6 e 12 elementos não ultrapassa 1%. Relativamente ao tempo de processamento, para a convergência do exemplo com 30 elementos, utilizando o código implementado em Matlab<sup>®</sup>, são necessários aproximadamente 25 minutos. Pode-se concluir que refinando-se um pouco mais a malha, obter-se-á um resultado ainda melhor que não necessariamente estará sujeito a um elevado aumento do número de iterações. Contudo, vale lembrar que o interesse do presente trabalho é em estruturas de dimensões quilométricas e que a pequena diferença apresentada entre as malhas de 6 e 12 elementos não são significativas nesse caso.

Outra análise realizada diz respeito ao comportamento da norma utilizada no método iterativo de Newton-Raphson. Utilizou-se o mesmo exemplo anterior, no entanto, variou-se a tolerância para verificar quão complacente esta poderia ser, a fim de manter a convergência para o resultado adequado.

No primeiro exemplo foi considerado uma tolerância de  $tol = 1 \times 10^{-5}$ . Assim, a curva de convergência dada pela norma utilizada em relação ao número de iterações pode ser vista na figura (5.21).

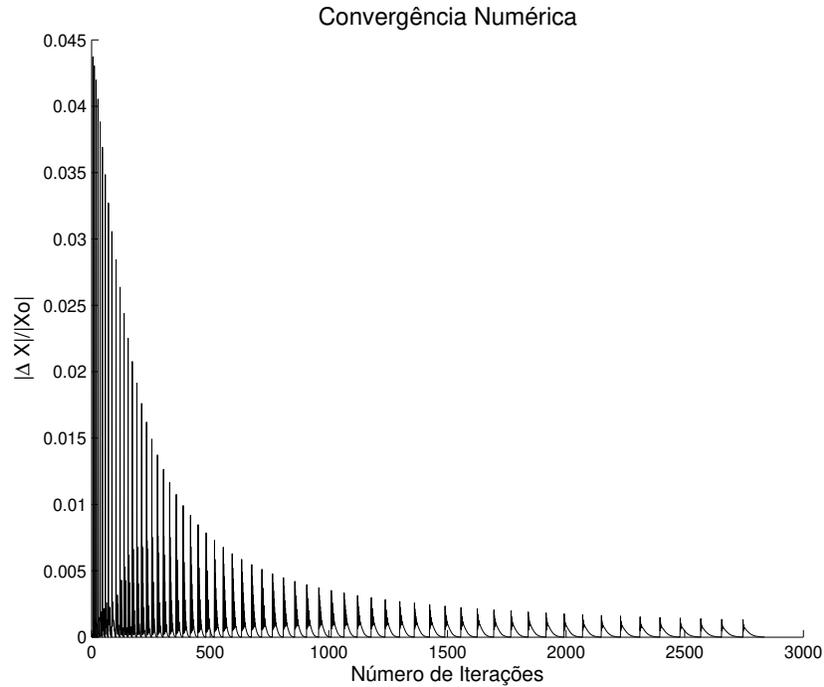


Figura 5.21: Análise da convergência com variação da tolerância,  $tol = 1x10^{-5}$ .

Sendo a tolerância pequena percebe-se um número considerável de iterações até atingir o resultado esperado. Analisando-se o problema em duas situações diferentes, isto é, o início da flexão e um momento um pouco mais a frente quando a flexão pode ser dita mais rigorosa, nota-se que a convergência da norma utilizada apresenta comportamentos diferentes. Verifica-se que no início da flexão a convergência é direta, sem oscilações. Isso pode ser visto na figura (5.22).

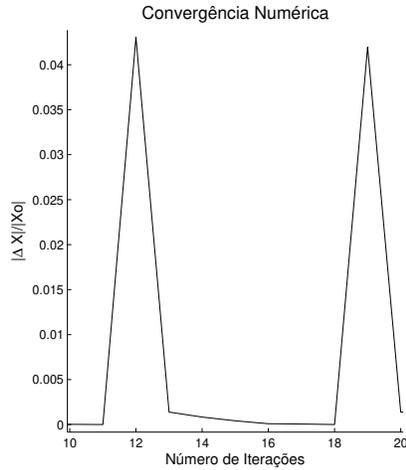


Figura 5.22: Início da Flexão,  $tol = 1x10^{-5}$ .

No entanto, quando a flexão se torna mais rigorosa a convergência se torna mais difícil, apresentando certa oscilação da norma utilizada, como mostra a figura (5.23).

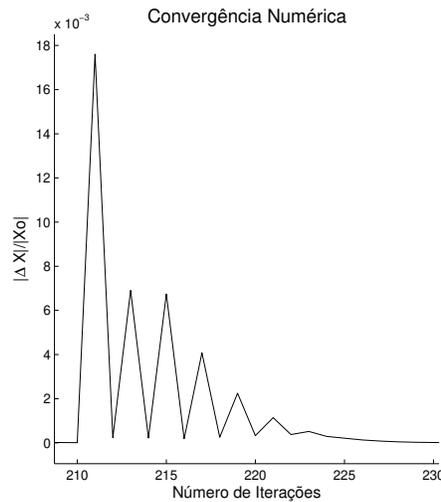


Figura 5.23: Flexão Rigorosa,  $tol = 1x10^{-5}$ .

Adotou-se ainda  $tol = 1x10^{-4}$ ,  $tol = 2,5x10^{-4}$  e  $tol = 5x10^{-4}$ . Os resultados podem ser visualizados através das figuras (5.24), (5.25) e (5.26).

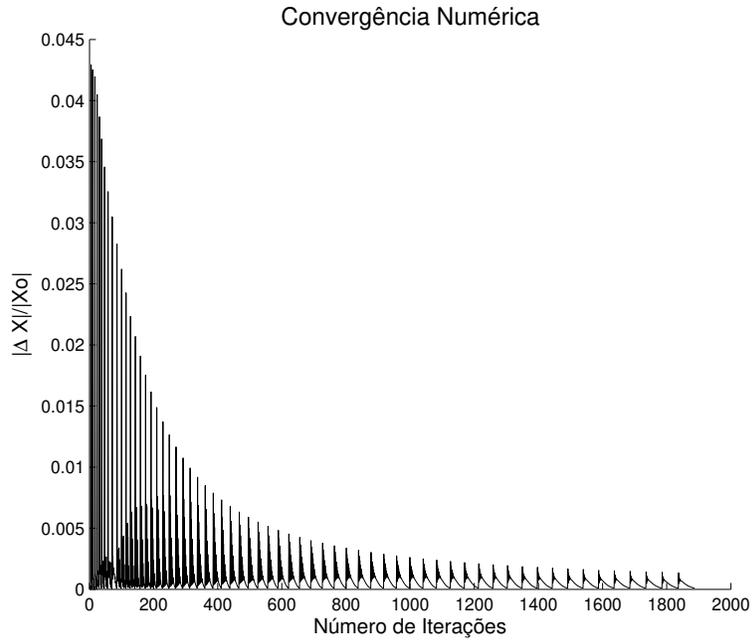


Figura 5.24: Análise da convergência com variação da tolerância,  $tol = 1x10^{-4}$ .

Fica claro que até a tolerância de  $1x10^{-4}$  é possível obter convergência monotônica ao longo dos passos de carga. No entanto, a partir desse valor observa-se que a convergência ao longo dos passos de carga não é mais monotônica. Isso pode ser notado nas figuras (5.25) e (5.26).

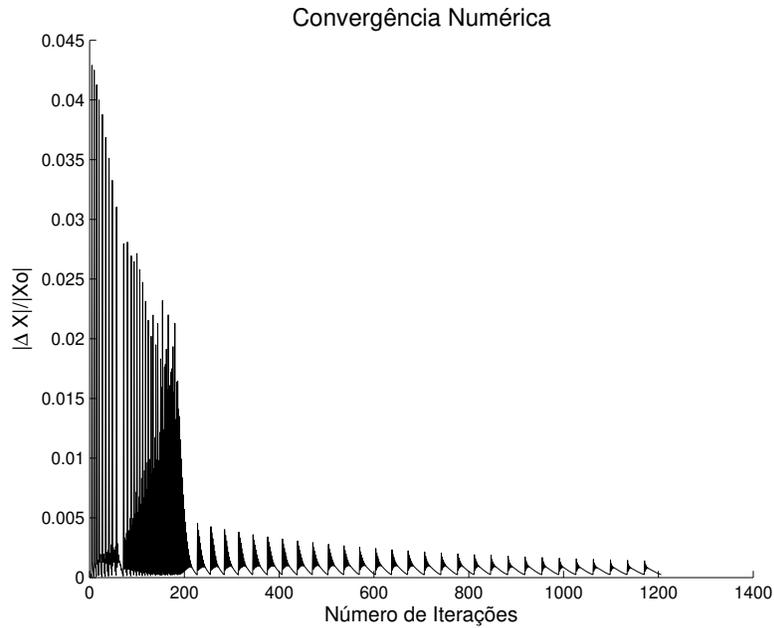


Figura 5.25: Análise da convergência com variação da tolerância,  $tol = 2,5 \times 10^{-4}$ .

As duas últimas figuras demonstram a importância de tolerâncias relativamente pequenas para que se obtenham bons resultados. Observa-se, também, que o número de iterações neste caso é bem inferior, e que uma relação precisão x custo computacional deve ser considerada na escolha dos limites de convergência.

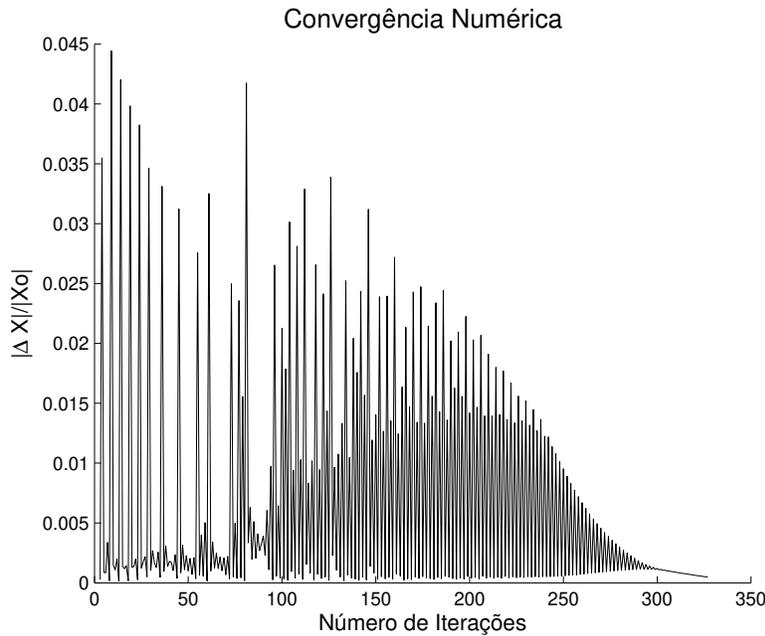


Figura 5.26: Análise da convergência com variação da tolerância,  $tol = 5 \times 10^{-4}$ .

Procurando-se trabalhar de forma conservativa, deve-se adequar uma tolerância relativamente pequena que garanta a convergência do método. No entanto, é interessante que essa tolerância não seja demasiadamente pequena a fim de evitar que isso possa aumentar significativamente o número de iterações.

## 5.3 Estudo da Metodologia de Aplicação

Nesta seção, destaca-se os exemplos desenvolvidos com o intuito de avaliar o comportamento do elemento de pórtico plano nas situações previstas nos objetivos deste trabalho. Isto é, estes exemplos servem para verificar a viabilidade da Formulação Posicional na aplicação para problemas de *risers* e de contato.

### 5.3.1 Metodologia de Aplicação para um *Riser* Bi-apoiado

Uma vez implementado e validado o elemento, idealizou-se a aplicação para o problema de *risers*. Nesse caso, a primeira dúvida foi a respeito de sua aplicação a problemas envolvendo grandes dimensões com razão de aspecto  $L/D$  muito elevada. Assim, estudou-se um

exemplo de *riser* bi-apoiado de comprimento  $L = 5000m$ , área  $A = 1,638 \times 10^{-2} m^2$ , momento de inércia  $I = 1,313 \times 10^{-4} m^4$ , módulo de elasticidade  $E = 210 \times 10^9 Pa$  e densidade  $\rho = 7800 kg/m^3$ . Foram adotados 167 elementos e 1 passo de carga. Foi considerado o peso próprio atuando sobre o *riser*. A figura (5.27) ilustra o esquema adotado.

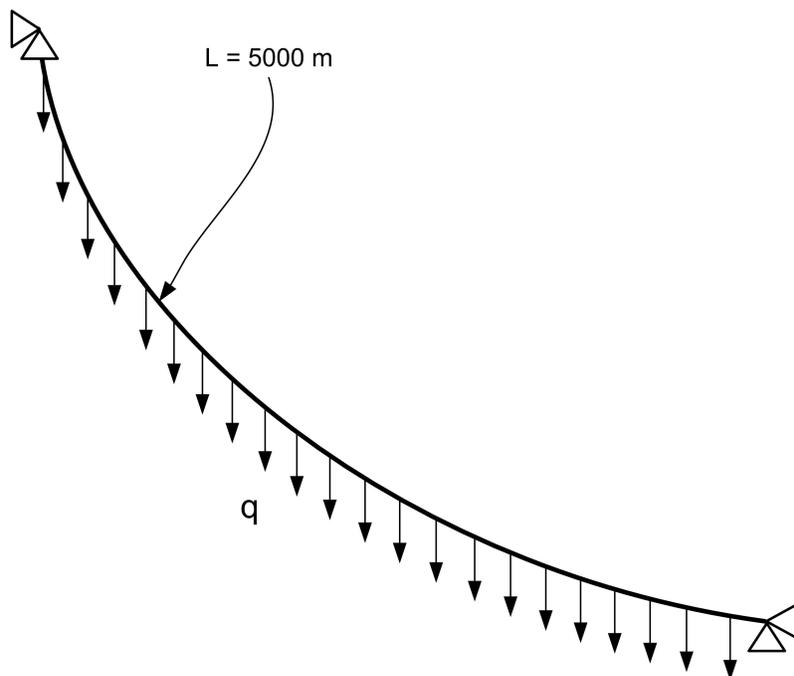


Figura 5.27: Esquema de catenária bi-apoiada.

A geração da malha, neste caso, foi feita resolvendo-se numericamente a equação de catenária conforme Grimberg (2008). A resposta para o exemplo simulado pode ser visto na figura (5.28).

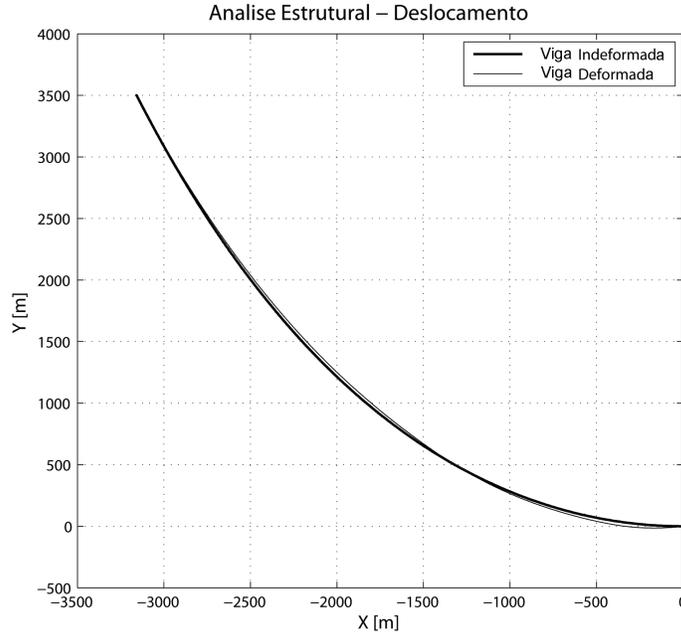


Figura 5.28: Resultado do exemplo de *riser* bi-apoiado.

Em virtude das grande dimensões, foi necessário utilizar um fator de ampliação para imagem igual a 100 vezes o deslocamento. Portanto, percebe-se que em uma primeira aproximação o deslocamento que o *riser* sofre, devido seu peso próprio é pequeno se comparado com sua dimensão. O máximo deslocamento encontrado, neste caso, é da ordem de aproximadamente 1,5 diâmetros.

### 5.3.2 Metodologia de Aplicação do Contato

O primeiro estudo de contato foi desenvolvido através de um exemplo simples em que uma viga engastada-livre, submetida a um carregamento uniformemente distribuído em seu comprimento, tem seu movimento restrito por uma barreira. O objetivo dessa simulação concentrou-se em avaliar a possibilidade de inserção de um contato simples utilizando a Formulação Posicional, em que a rigidez fosse conhecida como o caso do solo oceânico. A viga simulada apresenta comprimento  $L = 5m$ , área  $A = 1,0 \times 10^{-4} m^2$ , momento de inércia  $I = 8,333 \times 10^{-10} m^4$  e módulo de elasticidade  $E = 210 \times 10^9 Pa$ . A carga aplicada foi  $q = 1000 N/m$  e a rigidez das molas  $K = 1 \times 10^4 N/m$ . Foram utilizados 10 elementos e 10 passos de carga. O exemplo fica mais claro se observado através da figura (5.29).

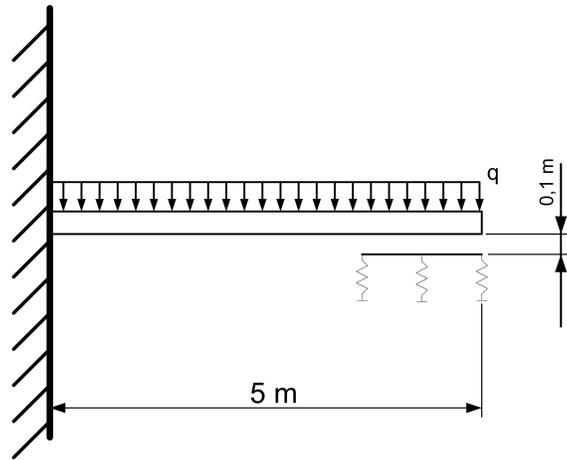


Figura 5.29: Esquema de viga sob influência de contato.

Nota-se na figura (5.29) que foram adicionadas molas apenas nos últimos três elementos, não sendo colocadas molas nos nós internos dos elementos por opção para evitar possível distorção interna do elemento, como já mencionado.

A figura (5.30) mostra o resultado desse exemplo. Para melhor visualização utilizou-se de um fator de ampliação de 3, 5.

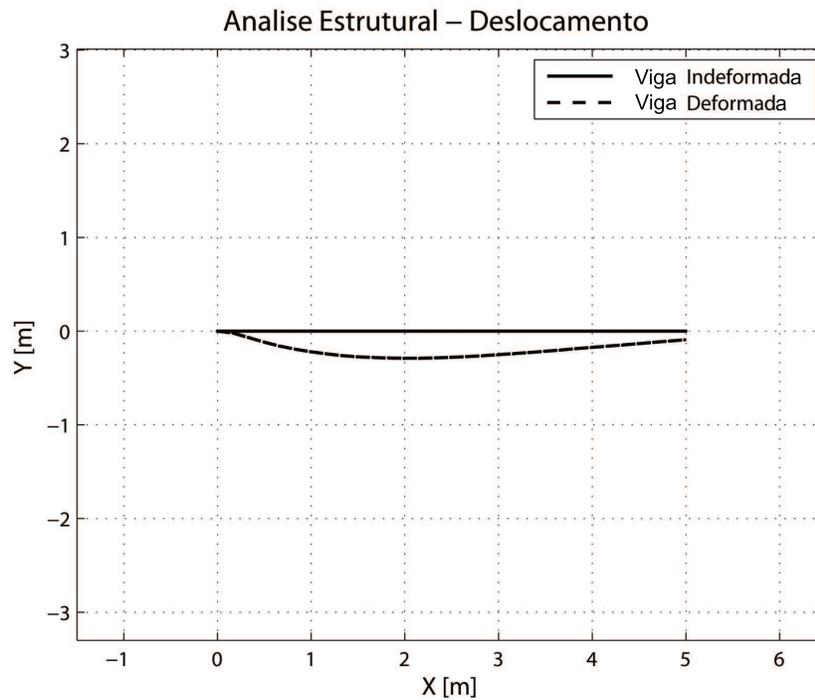


Figura 5.30: Resultado da viga submetida a um contato restritivo.

Observa-se que a região sob efeito do contato manteve-se quase plana enquanto a região sem as molas curvou-se. É possível notar também que nessa região quase plana ocorreu uma leve inclinação positiva. Isso é devido as constantes de rigidez terem sido consideradas iguais e o corpo está submetido a esforços uniformemente distribuídos, isto é, a curva produzida na região sem contato, gera esforços concentrados na mola mais interna que decresce até a mola mais externa.

O exemplo mostrou de forma qualitativa o funcionamento do modelo de solo com comportamento não linear, atuando em conjunto com a parte estrutural do *riser*. O exemplo ilustra, também, a possibilidade de se trabalhar com solos distantes das vigas, e a rotina de detecção de contato utilizada.

## 5.4 Exemplos de Contato *Riser-Solo*

Nessa seção são apresentados os exemplos simulados de interação solo-estrutura. O solo, utilizado nos exemplos, foi modelado com molas tipo Winkler para os casos: linear, bilinear e multilinear (Solo 2K).

### 5.4.1 Exemplo de Duto em Contato com o Solo

Neste estudo foram abordados três casos. O primeiro caso visou validar o contato com o solo, utilizando-se de pequenos deslocamentos a fim de se comparar com resultados lineares apresentados por Barros *et al.* (2009). O segundo caso é semelhante ao anterior mas considera-se grandes deslocamentos devido a grandes carregamentos no qual pode-se comparar os resultados do elemento não linear com a solução linear. Finalmente, o terceiro exemplo buscou verificar a resposta do duto quando submetido a um solo bilinear, isto é, um solo cuja sua atuação seria efetiva apenas com a penetração do duto no mesmo.

#### Validação do Contato com o Solo

Para validar a interação *riser*-solo foi considerado um exemplo proposto no trabalho de Barros *et al.* (2009), no qual são validados três modelos analíticos e um numérico para solo, entre eles o modelo de elementos finitos com formulação linear (numérico) e o modelo de solo tipo Winkler (analítico), sendo o último usado no presente trabalho. As propriedades

do duto utilizado e do solo são apresentados na tabela (5.1) e o problema esquematizado na figura (5.31).

Tabela 5.1: Propriedades do duto e do solo.

Propriedades	Valores
Comprimento do duto (L) [m]	200
Diâmetro Externo ( $\phi_e$ ) [m]	0,22860
Diâmetro Interno ( $\phi_i$ ) [m]	0,20325
Módulo de Elasticidade (E) [GPa]	208
Carregamento (q) [Nm/m]	13,245
Rigidez do Solo ( $K_{solo}$ ) [Nm/m/m]	$2,0 \times 10^7$

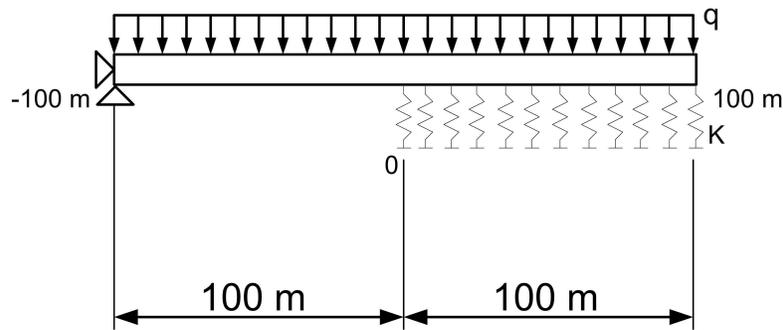


Figura 5.31: Esquema do duto em contato com o solo.

Foram utilizados 25 passos de carga e 56 elementos. O exemplo simulado considerou esforços que geram pequenos deslocamentos, e os resultados dessa validação podem ser vistos na figura (5.32), onde são comparadas as soluções em deslocamentos nas regiões onde há o início do contato duto-solo. São comparadas as soluções obtidas com o Método dos Elementos Finitos (FEM), analítica obtida com o modelo Winkler(Winkler) e a obtida neste trabalho com a Formulação Posicional (FP).

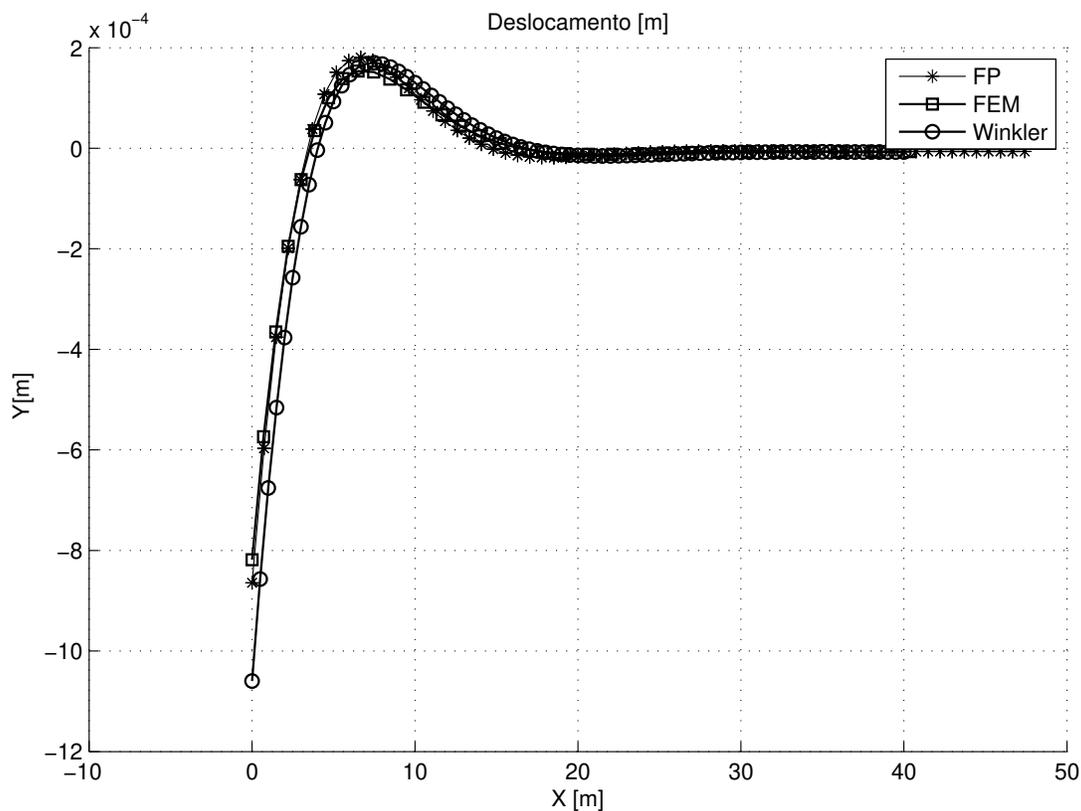


Figura 5.32: Validação do contato com o solo linear. Deslocamentos obtidos por: Formulação Posicional (FP), Método dos Elementos Finitos (FEM) e Modelo Analítico de Winkler(Winkler).

Verifica-se uma boa aproximação, haja vista que foram utilizados modelos diferentes de solo. Isto é, no trabalho proposto por Barros *et al.* (2009) foram utilizados elementos de 2 nós, solo tridimensional, formulação linear e cinemática de Euler-Bernoulli para o exemplo calculado usando o Método dos Elementos Finitos. Os resultados identificados como modelo Winkler são gerados com um modelo analítico exato do problema. O mesmo pode ser visto em relação ao momento através da figura (5.33).

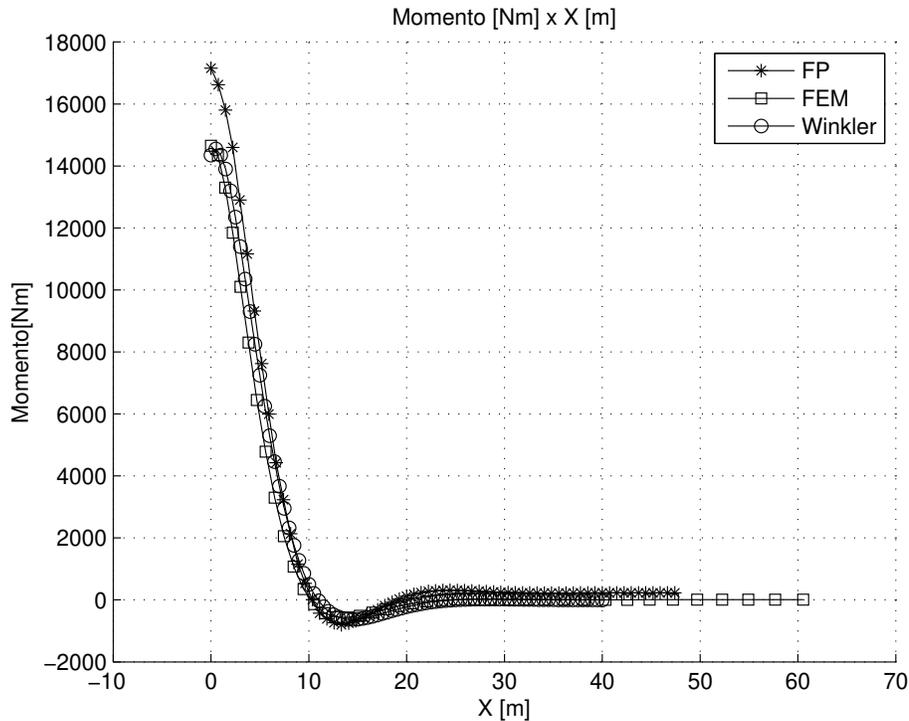


Figura 5.33: Análise do momento para o solo validado. Momentos obtidos por: Formulação Posicional (FP), Método dos Elementos Finitos (FEM) e Modelo Analítico de Winkler(Winkler).

Percebe-se na figura (5.32) que ocorre um descolamento do duto na região de toque com o solo. Esse deslocamento, dependendo da intensidade do carregamento a que o duto está submetido e da rigidez do solo, pode variar e em virtude dessa variação de comportamento do duto ocasionar um gradiente no momento bastante acentuado como pode ser visto na figura (5.33). Essa variação do momento é que pode trazer problemas de fadiga no caso de ocorrer compressão-tração na zona de contato ou problemas relativos ao acréscimo significativo da tensão local.

### Comparação entre as Formulações para o Caso de Grandes Deslocamentos

Nesse exemplo verifica-se o comportamento da Formulação Posicional, em relação às formulações lineares apresentadas no exemplo proposto de interação duto-solo, para um carregamento suficientemente grande a ponto de promover grandes deslocamento e grandes rotações. Para tanto, utilizou-se das mesmas configurações do exemplo anterior, exceto da

carga distribuída  $q = 2649N/m$  equivalente ao peso próprio do duto.

Os resultados desse problema, deslocamento e momento, respectivamente, podem ser vistos nas figuras (5.34) e (5.35).

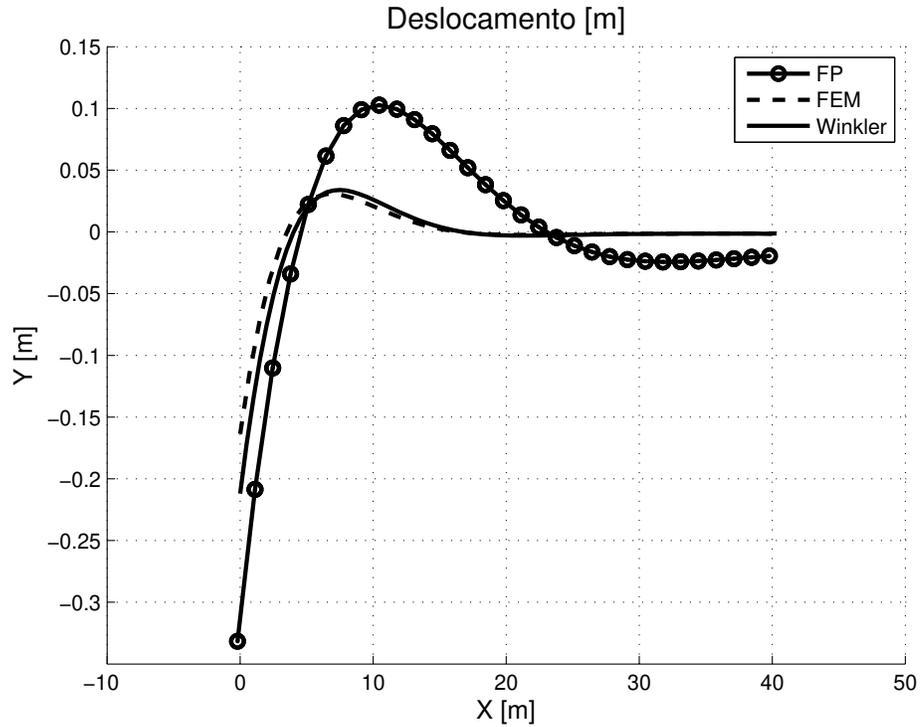


Figura 5.34: Resultado do deslocamento do duto - grandes deslocamentos.

Nota-se na figura (5.34) que os resultados divergem e a formulação adotada nesse trabalho, sendo não linear, apresenta uma curva com amplitude maior que as demais e deslocada para a direita. O deslocamento obtido é da ordem de grandeza do duto, aproximadamente metade do diâmetro do duto, e provoca um gradiente no momento da estrutura, figura (5.35).

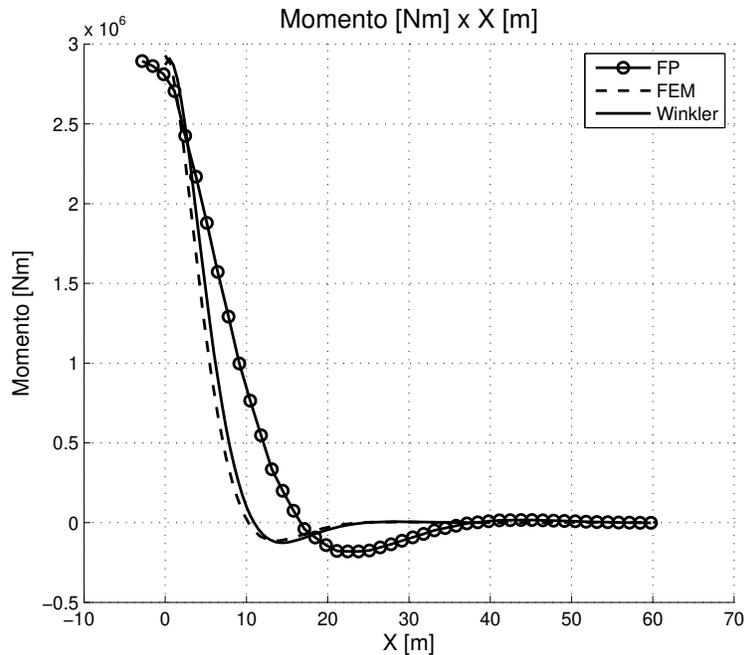


Figura 5.35: Distribuição de momento - grandes deslocamentos.

O gráfico do momento ao longo do duto, figura (5.35), mostra que as tensões apresentam a mesma escala e são bastante aproximadas. Porém o existe um deslocamento da distribuição de momento para a direita. Observa-se também que a função momento assume valores negativos, mostrando um ponto de inflexão exatamente na região de toque com o solo, o que poderia levar a fadiga.

### Comparação entre as Formulações para o Caso de Grandes Deslocamentos e Solo Bilinear

Por fim, nesse estudo, foi simulado o mesmo exemplo com o solo bilinear. As características geométricas foram conservadas e os resultados, de deslocamento e momento, podem ser vistos nas figuras (5.36) e (5.37), respectivamente.

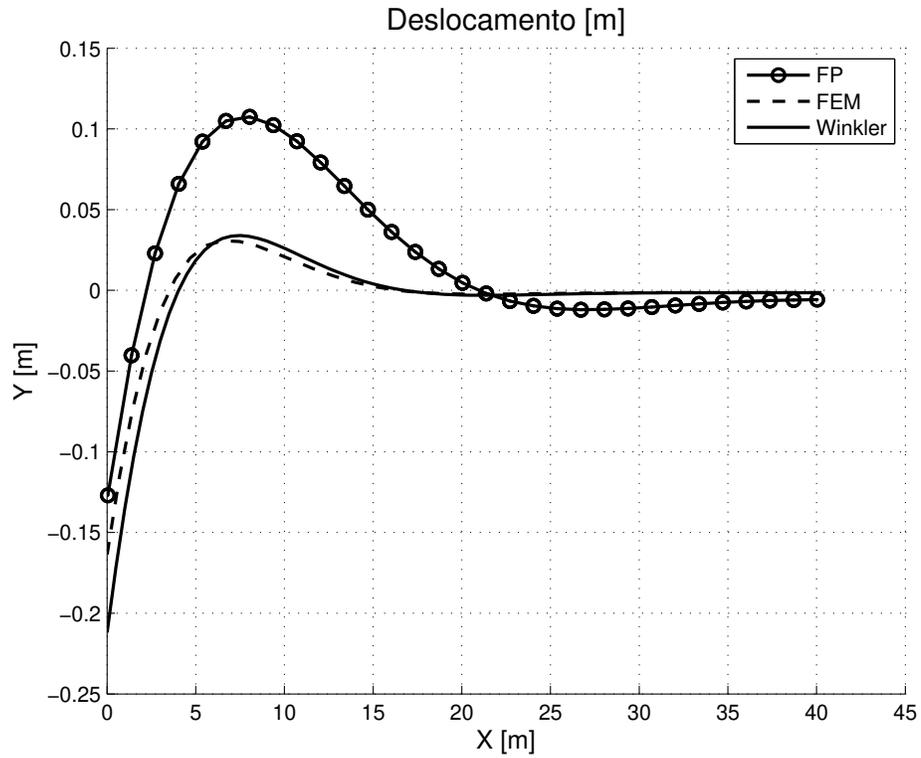


Figura 5.36: Resultado do deslocamento do duto - solo bilinear.

Verifica-se que o deslocamento na região de toque do duto ocorre de forma mais suave, de maneira mais alongada que no caso de solo linear. Percebe-se também que há um pequeno acréscimo na magnitude do deslocamento se comparado com o exemplo anterior. Isso ocorre pois não há mais o efeito do solo quando o duto se descola.

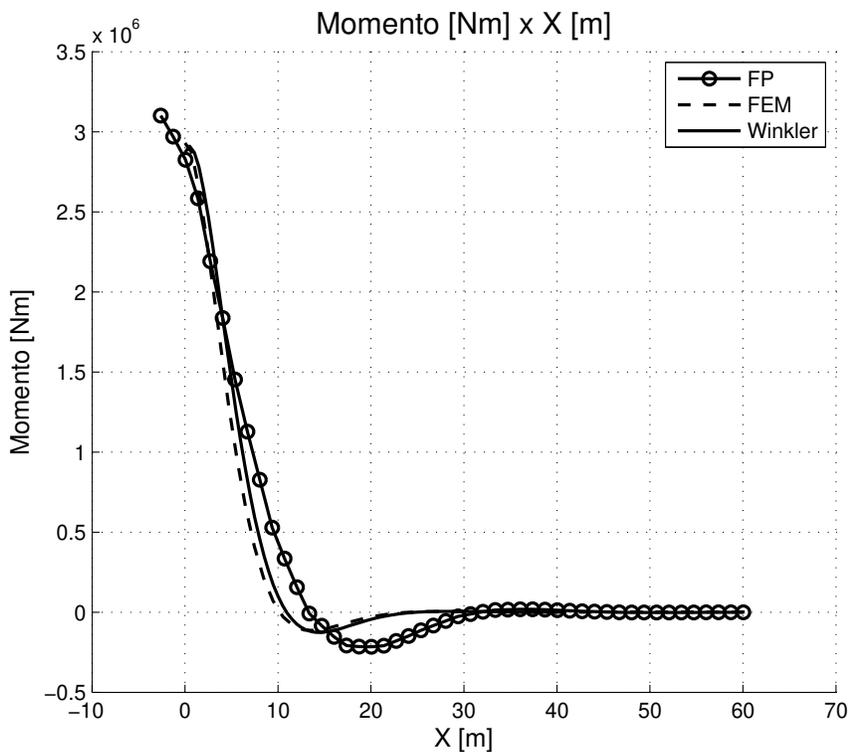


Figura 5.37: Distribuição de momento - solo bilinear.

A ordem de grandeza do momento se conserva, porém a distribuição se modifica ligeiramente. Verifica-se que o pico é maior e que o vale se desloca para direita. Também para o momento verifica-se uma distribuição relativamente suave se comparado com o solo linear.

### 5.4.2 Aplicação

Nesta subseção apresenta-se uma aplicação da Formulação Posicional para um modelo de interação *riser*-solo. Utilizou-se as dimensões reais de um *riser* em formato de catenária sob efeito, em um primeiro momento, apenas do peso próprio e em contato com o solo. Os resultados obtidos foram comparados com resultados do programa Anflex (Mourelle *et al.* 2001), que é atualmente utilizado pela Petrobras. O programa Anflex é empregado especificamente para aplicações que envolvem *risers* e, para tanto, utiliza a formulação não linear conhecida como co-rotacional. O esquema utilizado para simular essa aplicação pode ser visto na figura (5.38).

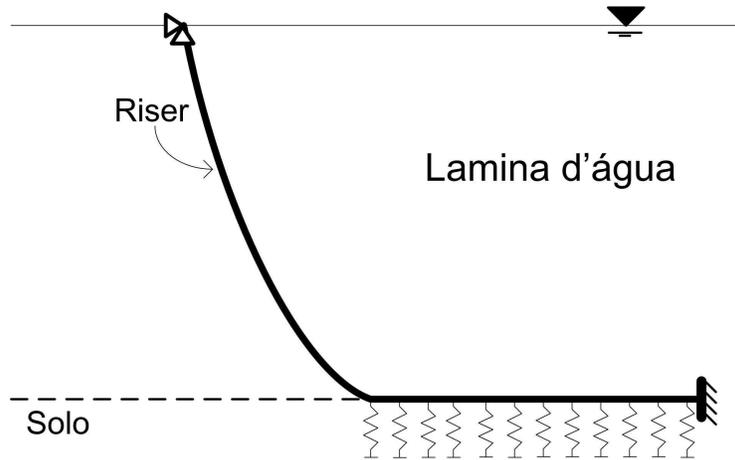


Figura 5.38: Esquema do exemplo de aplicação *riser*-solo.

Para descrever a posição inicial da catenária foram utilizadas as equações analíticas de catenárias ou cabos, conhecidas da estática, e para região do solo foi implementado uma extensão para a malha, sendo considerado um solo bilinear.

As propriedades geométricas do *riser* e dos materiais utilizados são mostradas na tabela (5.2).

Tabela 5.2: Propriedades do *riser* e do solo.

Propriedades	Valores
Comprimento total do duto [m]	2067
Comprimento da catenária [m]	1333
Comprimento do duto em contato com o solo [m]	734
Lamina d'água [m]	942
Diâmetro Externo ( $\phi_e$ ) [m]	0,2731
Diâmetro Interno ( $\phi_i$ ) [m]	0,2318
Ângulo de topo ( $^\circ$ ) [graus]	20
Módulo de Elasticidade (E) [GPa]	208
Carregamento (q) [N/m]	1261,2
Rigidez do Solo ( $K_{solo}$ ) [N/m/m]	$2,0 \times 10^7$

O carregamento adotado para o exemplo é relativo ao peso próprio do duto por metro e a rigidez do solo é um dado experimental. De acordo com Laver *et al.* (2004), a rigidez do solo pode variar de escala de  $1 \times 10^5$ , solo macio, a  $1 \times 10^7$ , solos rígidos.

Foram comparados resultados para deslocamento horizontal, deslocamento vertical, força axial e momento ao longo do *riser*. As figuras (5.39), (5.40), (5.43) e (5.44) mostram os

respectivos resultados.

Os resultados foram impressos seguindo o padrão de saída do programa Anflex. Esse padrão considera o *riser* em seu comprimento total estirado, em  $x = 0$ , e os respectivos resultados impressos contra o seu comprimento. Ainda nesse padrão, considera-se a extremidade engastada, mostrada na figura (5.38), ao fim da região em contato com o solo como a referência inicial do *riser*.

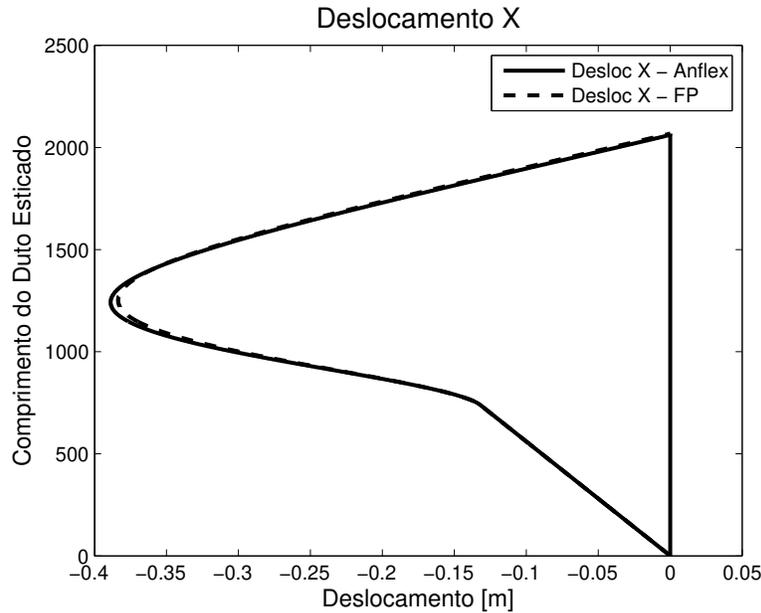


Figura 5.39: Deslocamento horizontal - comparação com Anflex.

Verifica-se, na figura (5.39), que ocorre um deslocamento do *riser* à esquerda, representado pelo deslocamento negativo. Isso representa uma acomodação do *riser* e, conseqüentemente, tem parte de seu comprimento arrastado à esquerda.

Na figura (5.40) percebe-se deslocamentos de aproximadamente duas vezes o diâmetro do duto.

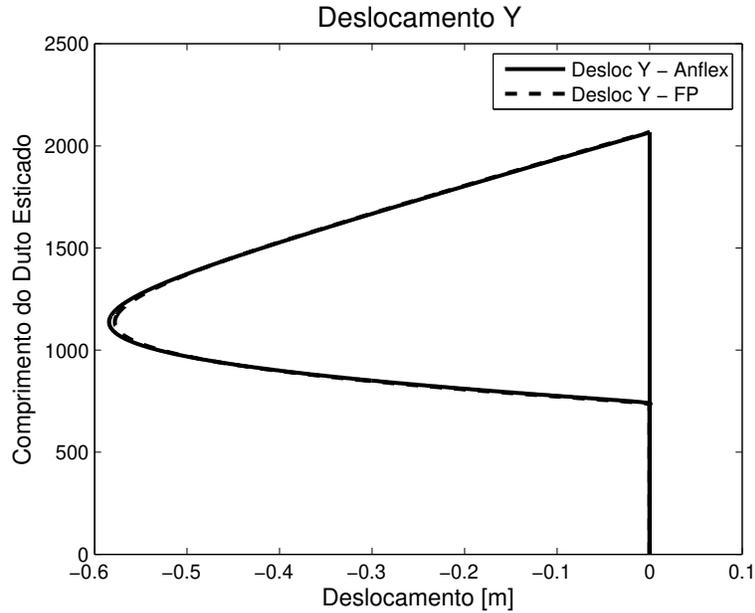


Figura 5.40: Deslocamento vertical - comparação com Anflex.

Tanto para o deslocamento horizontal quanto para o vertical percebe-se boa convergência dos resultados. Assim, pode-se dizer que a Formulação Posicional se mostra adequada para esse tipo de aplicação.

No entanto, observando-se com mais detalhes a região do toque com o solo, percebe-se alguns pontos discrepantes entre as duas formulações, Formulação Co-rotacional no caso do programa Anflex e Formulação Posicional para este trabalho. Conforme pode ser visto na figura (5.41) para o caso do deslocamento  $y$ . Nota-se que a FP apresenta um descolamento menor e deslocado para a direita. Percebe-se também que após o descolamento existe uma região de transição mais suave e a medida que se aproxima do final do *riser* o deslocamento se normaliza.

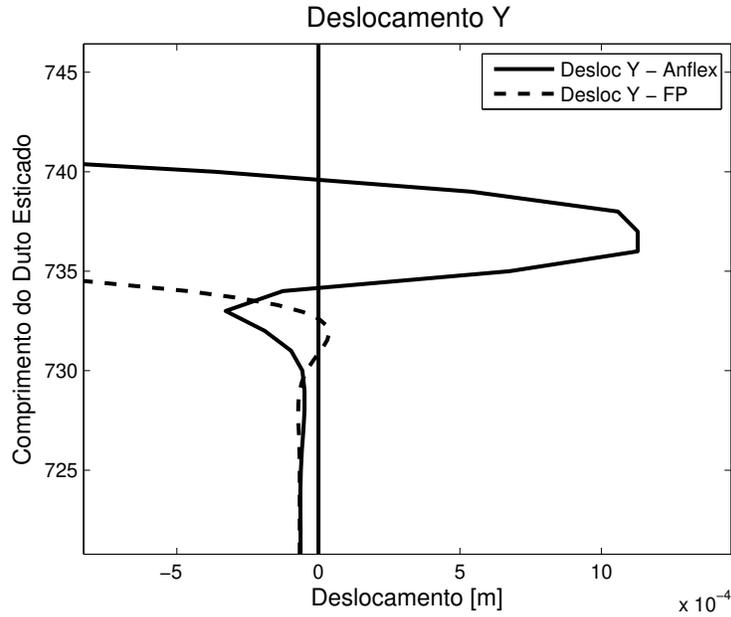


Figura 5.41: Deslocamento vertical - comparação com Anflex.

A figura (5.42) mostra a região de toque em escala real para um solo rígido, (Laver *et al.* 2004), em que são comparados os resultados obtidos através da Formulação Posicional e do Anflex.

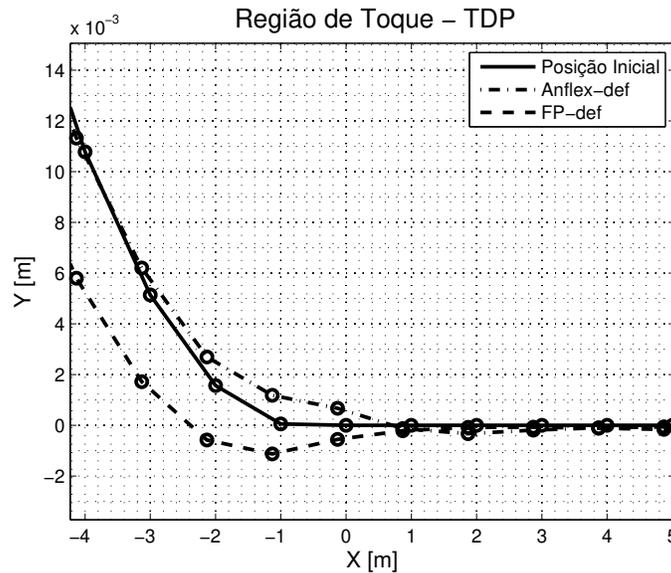


Figura 5.42: Região de toque - escala de deslocamento 1:1

Observa-se que o comportamento na região de toque é discrepante entre os dois modelos. No entanto, observando o comportamento do *riser* deformado descrito pelo Anflex, pode-se

imaginar que esse programa considera uma faixa mais abrangente na qual o solo deve ser atuante, isto é, dentro de uma faixa tanto positiva quanto negativa as molas podem estar sendo acionadas, diferentemente da Formulação Posicional utilizada neste trabalho que só passa a ter efeitos de solo quando o *riser* se encontra negativo.

Pode-se notar, nos dois resultados, que ocorre um deslocamento do *riser* para a esquerda, e que comparando as duas formulações a região de toque pode variar aproximadamente 3 metros.

A figura (5.43) mostra a distribuição da força axial ao longo do *riser*, percebe-se que os resultados coincidem e que o *riser* está sendo tracionado em todo seu comprimento.

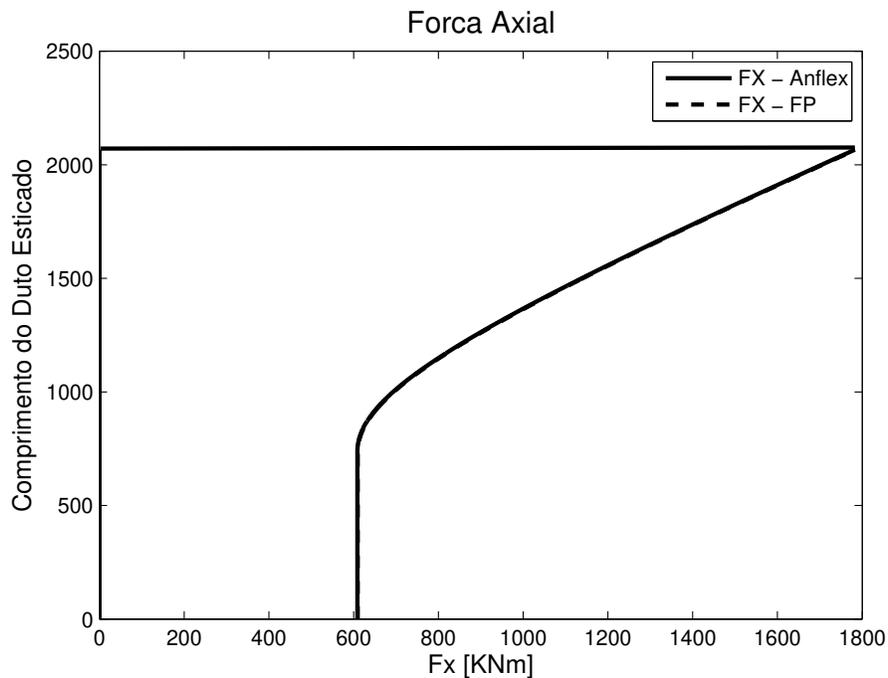


Figura 5.43: Força axial - comparação com Anflex.

Os resultados de momento podem ser vistos nas figuras (5.44), (5.45) e (5.46). Pode-se notar que houve boa aproximação dos resultados obtidos com o Anflex e com a Formulação Posicional.

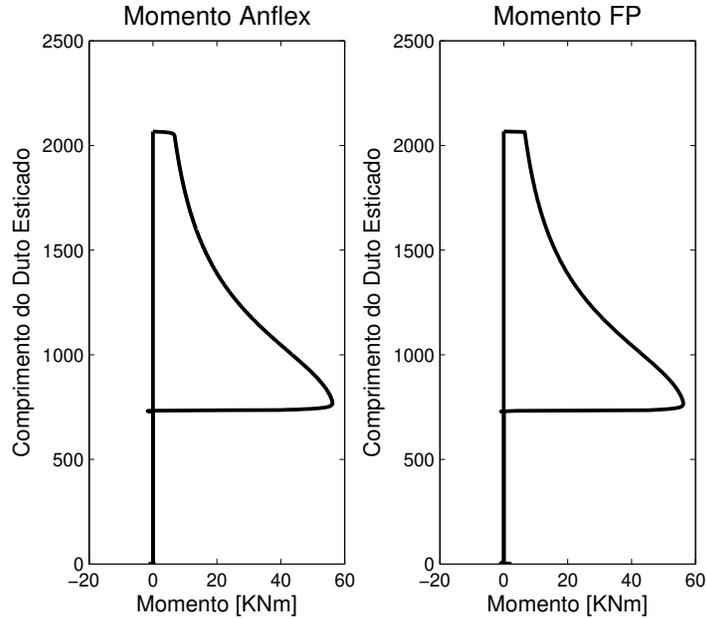


Figura 5.44: Momento - comparação com Anflex.

Destaca-se que para o cálculo dos esforços internos, leia-se força axial e momento, deve-se considerar os esforços provenientes da posição inicial do *riser*, isto é, o formato em catenária em si deixa o *riser* sujeito a esforços internos que devem ser considerados para a obtenção destes resultados. O momento inicial é calculado utilizando a equivalência entre o raio de curvatura e o momento, expressão comumente utilizada na resistência dos materiais, como mostra a equação (5.9).

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (5.9)$$

A equação para o raio de curvatura é dado por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (5.10)$$

Vale salientar que o termo  $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$  comumente desconsiderado na formulação linear, pois apresenta baixa magnitude, neste caso, deve ser considerado uma vez que se trata de grandes deslocamentos.

Na figura (5.45) os momentos obtidos com o programa Anflex e com a Formulação Posicional são sobrepostos a fim de comparar os resultados diretamente.

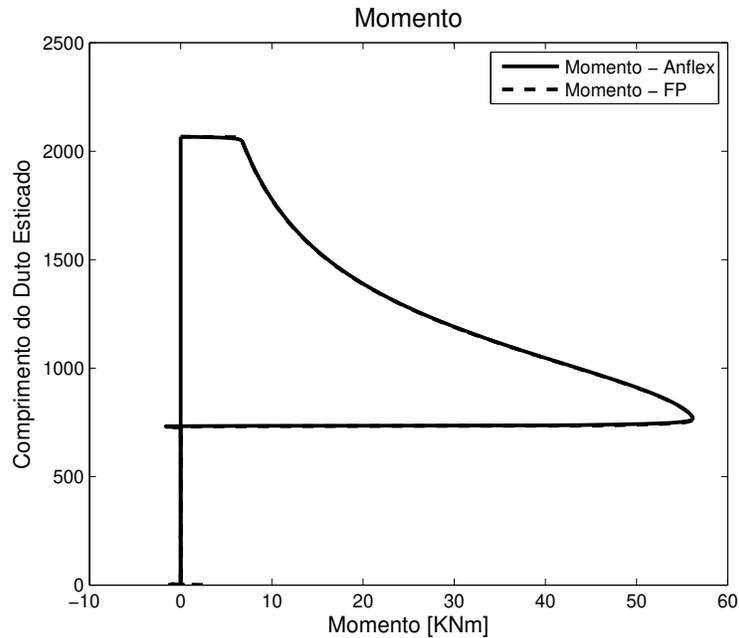


Figura 5.45: Momento - gráficos sobrepostos - comparação com Anflex.

O momento obtido está coerente com o problema proposto. Momento nulo na embarcação, isto é, no alto da catenária seguido por uma variação de tração até chegar na zona de toque onde ocorre uma variação negativa. Essa variação negativa pode vir a causar problemas de fadiga.

Uma análise mais detalhada permite observar que diferenças ocorrem na região de toque entre o *riser* e o solo. A figura (5.46) mostra o momento calculado para o exemplo em questão, entretanto, nesse caso, é dado um enfoque na região de toque do *riser* com o solo. Nota-se na figura (5.46) que o momento obtido através da FP é aproximadamente a metade do valor obtido com a formulação adotada pelo Anflex.

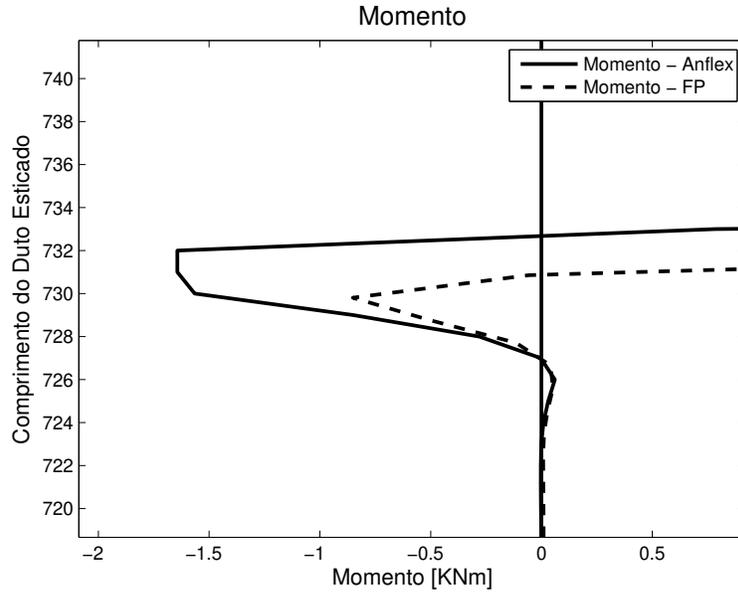


Figura 5.46: Momento - comparação com Anflex.

Na figura (5.46) é possível verificar a inversão do momento. Apesar da existência de um pico do momento, talvez mais relevante que isso seja uma pequena inversão que poderá levar a uma região de compressão. Essa região quando submetida à esforços dinâmicos poderá sofrer os efeitos da fadiga.

Contudo, vale salientar que em um primeiro momento, quando o *riser* está sendo analisado sob a óptica da estática a tensão axial atuante é muito superior que a tensão devido a flexão, essa diferença é de aproximadamente cem vezes. Portanto, a tensão axial ou o esforço axial é predominante se comparado ao esforço fletor. Assim, na análise estática todos os critérios de projeto deverão estar atendidos sem maiores problemas.

### 5.4.3 Estudo Paramétrico

Um estudo paramétrico foi desenvolvido com o intuito de explorar o problema de interação *riser*-solo e verificar a variabilidade e robustez do modelo em função da variação dos dados do solo e do *riser*. Assim, foram avaliadas algumas variáveis importantes na análise estática de *risers* incluindo a interação com o solo, como: a rigidez do solo, para tipos diferentes de solos, e o ângulo de lançamento da catenária ou ângulo de topo.

As propriedades utilizadas para o estudo paramétrico são as mesmas do exemplo de

aplicação exceto quando a rigidez do solo ou o ângulo de topo variavam para a análise de sensibilidade.

### Análise de Sensibilidade da Rigidez do Solo

O primeiro parâmetro estudado foi a rigidez do solo. Foi avaliada uma faixa de valores para rigidez de  $2 \times 10^5 N/m/m$  a  $2 \times 10^8 N/m/m$ , sendo obtidos resultados para deslocamento horizontal, deslocamento vertical, força axial e momento ao longo do *riser*. Essa faixa de valores, de acordo com Laver *et al.* (2004), abrange desde solos de baixa rigidez até solos considerados rígidos. Esse parâmetro foi considerado para estudo, pois é determinante na vida em fadiga de um SCR. Solos rígidos podem diminuir drasticamente a vida de um *riser*, do mesmo modo que um solo menos rígido pode aumentar em até 120% sua vida em fadiga (Laver *et al.* 2004; Pesce e Martins 2004).

As figuras (5.47) e (5.48) mostram os resultados obtidos para o deslocamento horizontal e deslocamento vertical do *riser*, respectivamente.

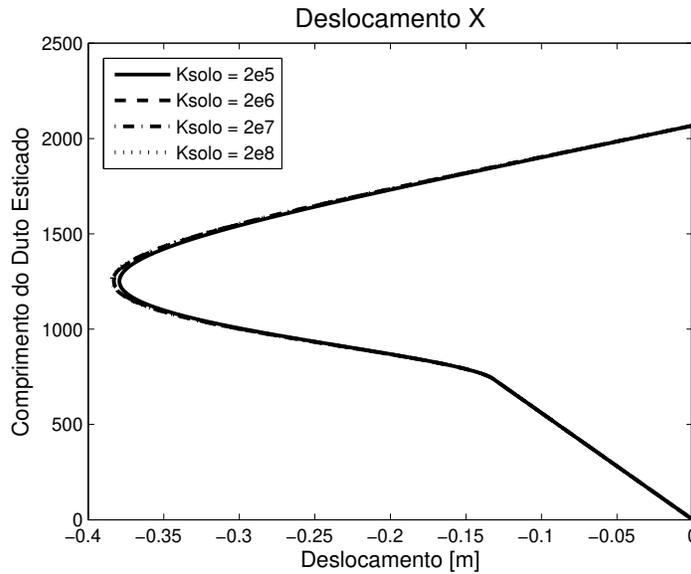


Figura 5.47: Deslocamento horizontal - estudo paramétrico -  $K_{solo}$ .

No caso do deslocamento horizontal percebe-se que não houve variação nos resultados obtidos.

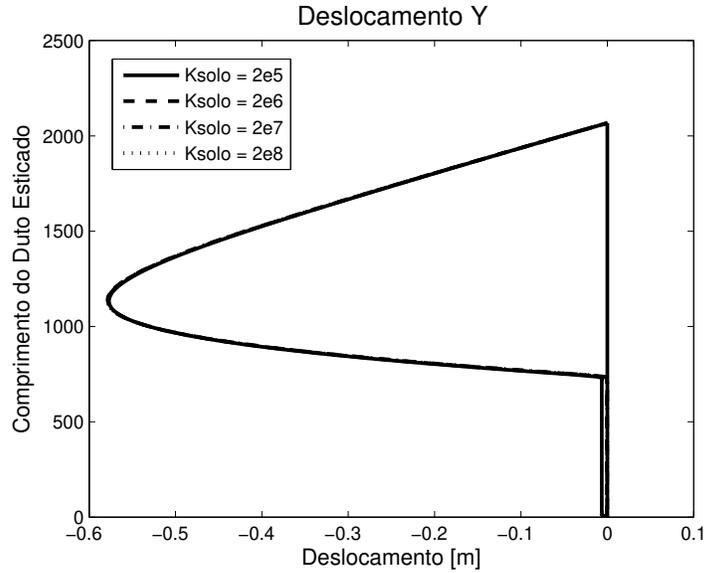


Figura 5.48: Deslocamento vertical - estudo paramétrico -  $K_{solo}$ .

Em relação ao deslocamento vertical percebe-se que houve uma variação mais significativa quando a rigidez do solo foi de  $2 \times 10^5 \text{ N/m/m}$ . Nesse caso, o duto penetrou o solo mais que para as outras rigidezes avaliadas. Essa penetração evitaria um descolamento acentuado do *riser* evitando assim uma compressão significativa nesse ponto e, então, poderia levar ao aumento da vida em fadiga do *riser*.

Para a força axial, figura (5.49), pode-se notar que não houve diferenças entre os casos estudados.

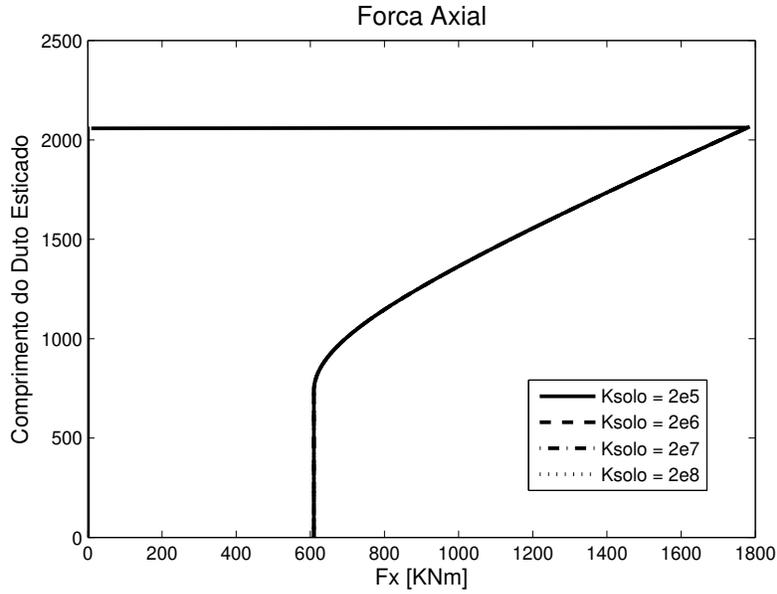


Figura 5.49: Força axial - estudo paramétrico -  $K_{solo}$ .

O momento ao longo do duto também foi avaliado, figura (5.50) e figura (5.51). Percebe-se na figura (5.51) que quanto maior a rigidez do solo maior a amplitude do gradiente do momento na região de toque.

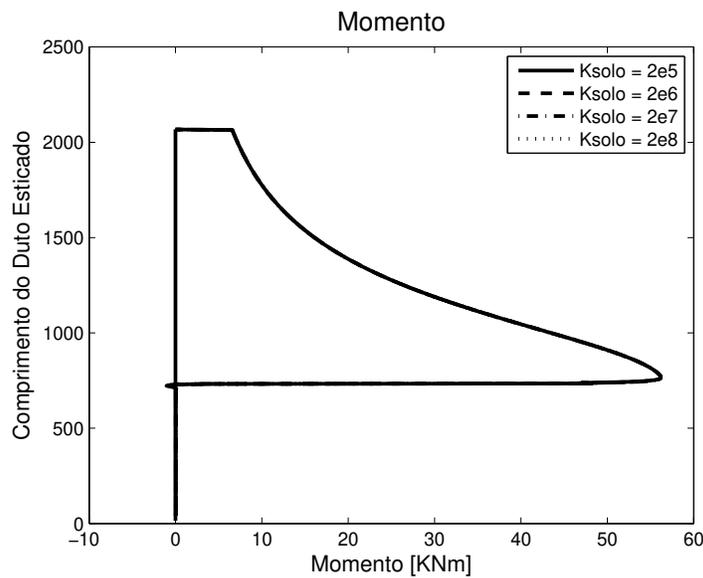


Figura 5.50: Momento - estudo paramétrico -  $K_{solo}$ .

De acordo com Laver *et al.* (2004), a medida que a rigidez aumenta a vida em fadiga diminui, portanto, o resultado obtido é consistente haja vista que maiores gradientes de

tensão poderão levar a diminuição da vida do SCR.

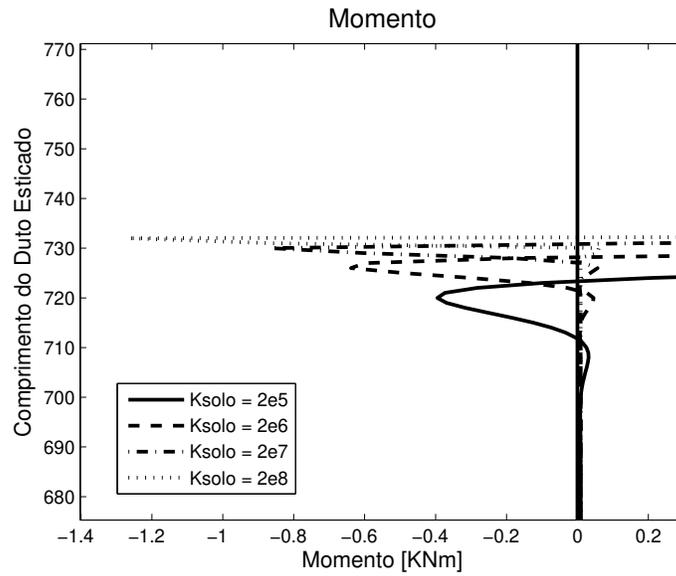


Figura 5.51: Momento - estudo paramétrico -  $K_{solo}$ .

De outra forma, a figura (5.52) mostra como se dá o aumento do gradiente de momento, na região de toque entre o *riser* e o solo, em função do aumento da rigidez do solo.

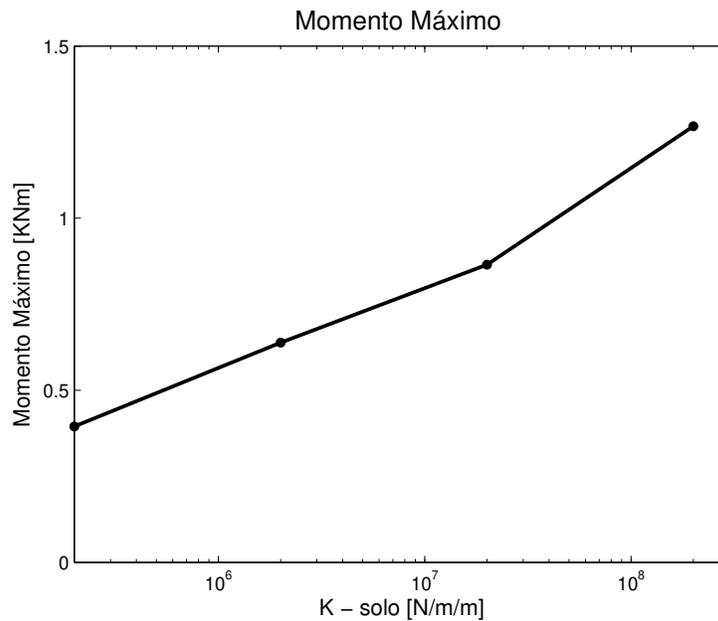


Figura 5.52: Momento máximo na região de toque - estudo paramétrico -  $K_{solo}$ .

Observa-se que essa medida pode triplicar a medida em que a rigidez do solo varia de um

solo considerado macio até um solo rígido. Portanto, ter conhecimento da rigidez do solo em que será instalado o *riser* é de extrema importância no projetos de SCR.

### Análise de Sensibilidade do Ângulo de Topo

A segunda análise de sensibilidade realizada levou em consideração a variação do ângulo de topo. O ângulo de topo é o nome dado para o ângulo de lançamento do *riser* junto a embarcação ao nível do mar. O ângulo de topo pode ser imposto ao *riser*, mas nada impede que o mesmo varie durante sua operação normal.

Nesse estudo, buscou-se variar o ângulo de topo de maneira a cobrir uma faixa entre  $10^\circ$  à  $40^\circ$ . Para isso, considerou-se o exemplo anterior com rigidez do solo de  $2 \times 10^7 N/m/m$ . Foram avaliados os resultados para deslocamento horizontal, deslocamento vertical, força axial e momento. Esses resultados, na respectiva ordem, são mostrados nas figuras (5.53), (5.54), (5.55) e (5.56).

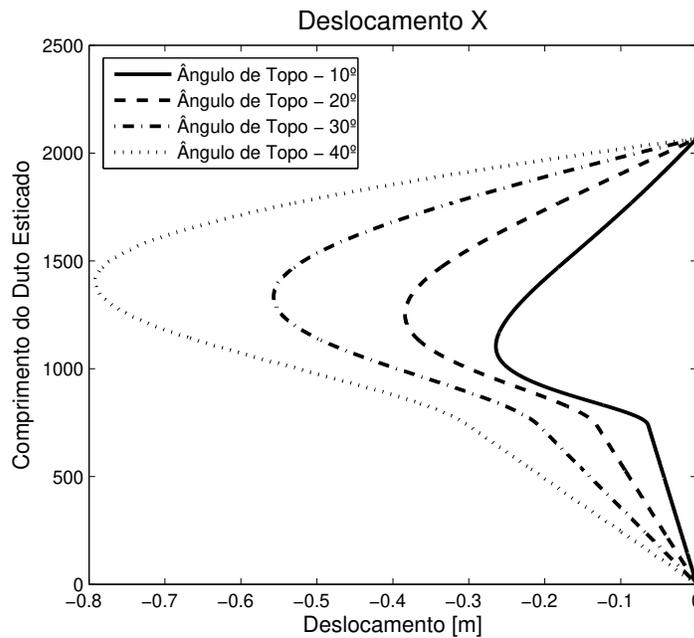


Figura 5.53: Deslocamento horizontal - estudo paramétrico - ângulo de topo.

Pode-se verificar através da figura (5.53) e da (5.54) que o ângulo de topo influencia sensivelmente no deslocamento do *riser*. Verifica-se que quanto maior o ângulo maior o deslocamento. Pode-se notar na figura (5.53) que o deslocamento horizontal pode atingir, em

uma primeira aproximação da posição inicial do *riser*, um deslocamento de aproximadamente quatro vezes o diâmetro do duto para um ângulo de  $40^\circ$ . Em relação ao deslocamento vertical, observa-se na figura (5.54) um deslocamento máximo de até sete vezes o diâmetro do *riser*.

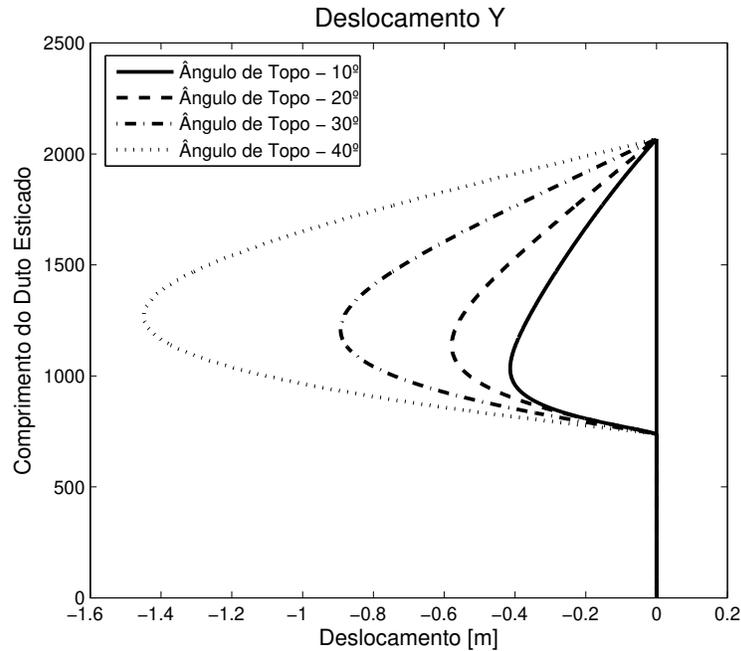


Figura 5.54: Deslocamento vertical - estudo paramétrico - ângulo de topo.

Ainda nas figuras (5.53) e (5.54), nota-se que diminuindo o ângulo de topo o *riser* desloca-se menos para a esquerda.

Em relação a força axial ao longo do duto, observa-se na figura (5.55) que a medida em que se aumenta o ângulo de topo a magnitude da força axial também aumenta, mantendo-se o perfil da curva observada anteriormente. Percebe-se que o ângulo de topo pode até triplicar a força axial atuante sobre o duto, dessa forma, deve ser estudado com atenção.

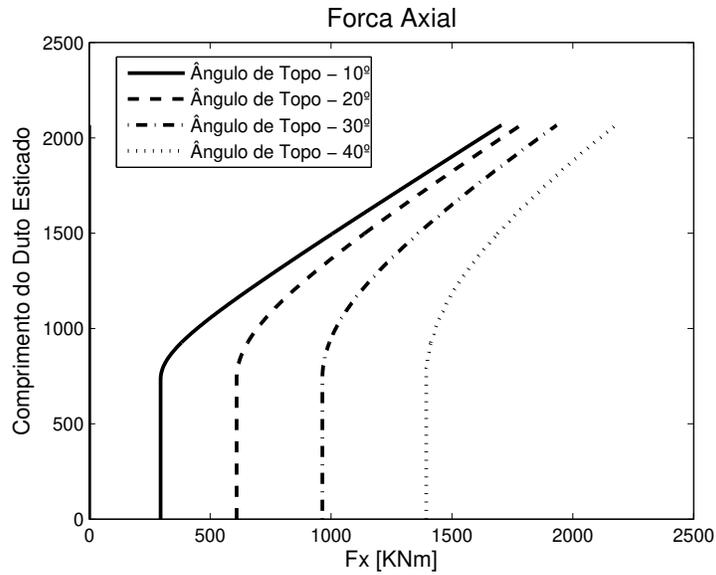


Figura 5.55: Força axial - estudo paramétrico - ângulo de topo.

O momento ao longo do duto, figura (5.56), no entanto, apresenta variações significativas apenas na região de toque.

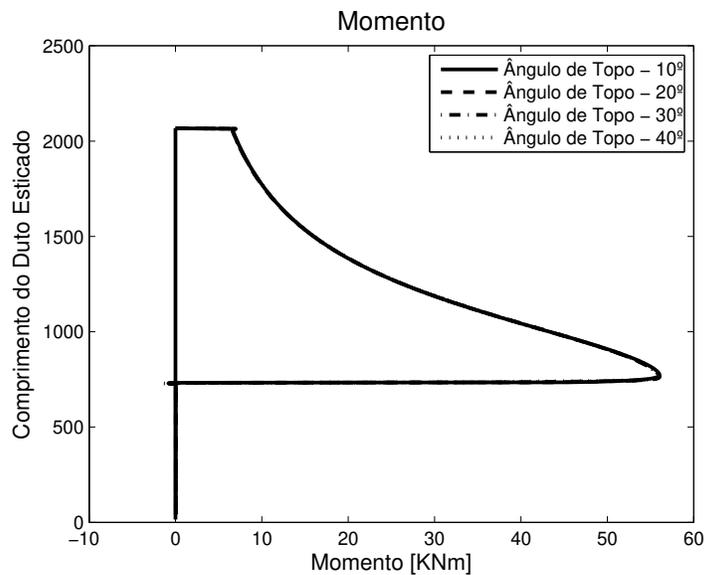


Figura 5.56: Momento - estudo paramétrico - ângulo de topo.

Percebe-se na figura (5.57) que a medida em que o ângulo de topo aumenta ocorre um acréscimo do momento na região de toque.

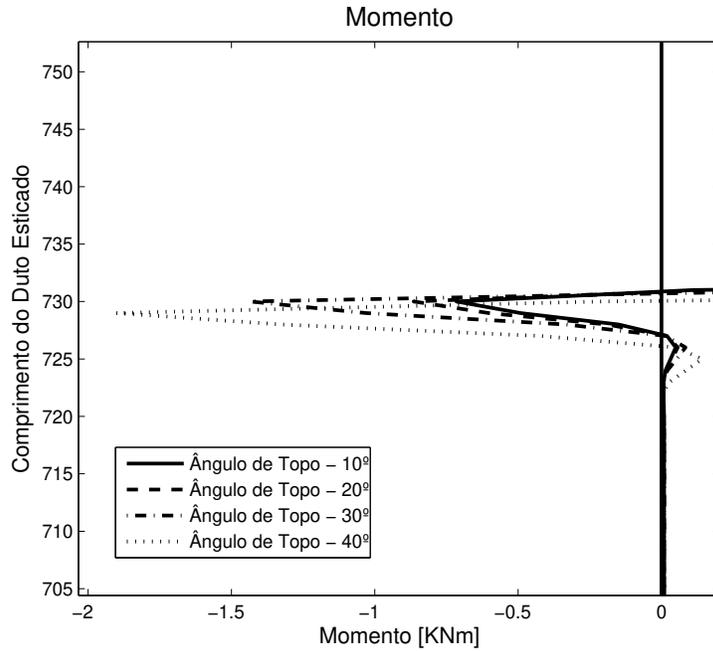


Figura 5.57: Momento - estudo paramétrico - ângulo de topo.

A figura (5.58) mostra como se comporta o momento máximo a medida em que se varia o ângulo de topo. Observa-se que o aumento do momento é sempre acentuado e que a partir de 30° essa variação é ainda mais rigorosa.

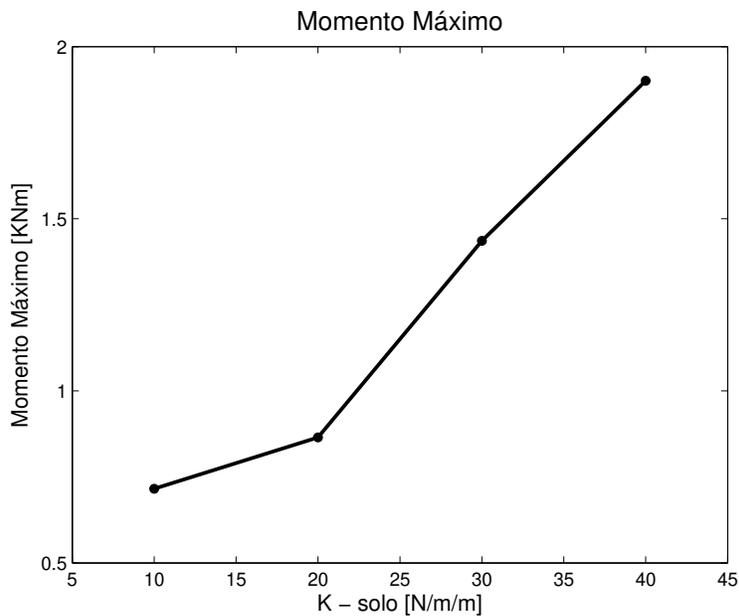


Figura 5.58: Momento máximo na região de toque - estudo paramétrico - ângulo de topo.

Portanto, a influência do ângulo de topo é significativa e deve ser estudada, quando viável em projeto, a fim de não propiciar um aumento ainda maior dessa inversão de momento.

### Análise de Sensibilidade do Solo com Rigidez Variável - Utilizando a aproximação para Curva *Backbone*

Em uma terceira análise, buscou-se avaliar a variação do deslocamento vertical e dos esforços internos comparando o “Solo 2K”, como será chamado neste trabalho, com o solo de rigidez única utilizado nos exemplos anteriores. Para tanto, utilizou-se de um solo considerado relativamente flexível,  $K = 1 \times 10^6 N/m/m$ , um outro rígido,  $K = 1 \times 10^7 N/m/m$ , e o Solo 2K como uma composição dos dois anteriores. O esquema e as demais propriedades tanto geométricas quanto de materiais foram mantidas dos exemplos anteriores.

As figuras (5.59), (5.60) e (5.61), mostram, respectivamente, o deslocamento vertical, a força axial e o momento ao longo do *riser* na região de toque.

A figura (5.59) mostra o deslocamento vertical obtido na região de toque. Observa-se que o Solo 2K apresenta um deslocamento intermediário e que uma composição de solos diferentes pode acarretar em diferenças significativas na região de contato com solo.

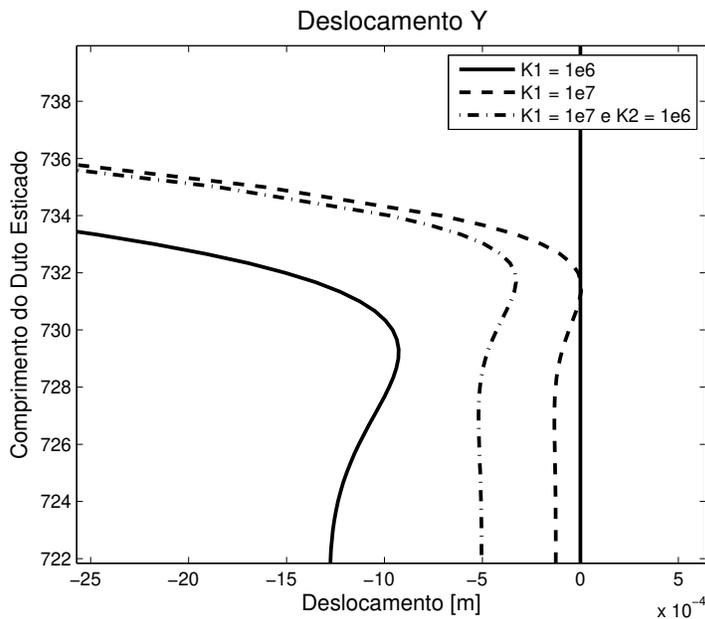


Figura 5.59: Deslocamento vertical - estudo paramétrico - Solo 2K.

A força axial não apresenta variações significativas em relação aos estudos anteriores sob

mesmas condições de ângulo de topo e rigidez do solo, ver figura (5.60), portanto, não será dado ênfase a esse tipo de esforço interno.

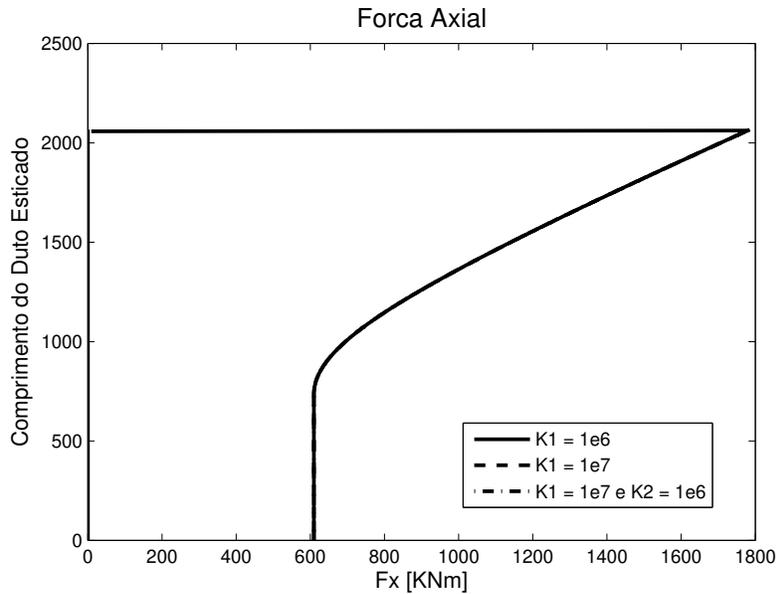


Figura 5.60: Força axial - estudo paramétrico - Solo 2K.

O momento ao longo do *riser* na região de toque é mostrado na figura (5.61). Pode-se notar que uma variação do tipo de solo e de sua rigidez modifica o comportamento do momento estudado até esse ponto. Assim, a composição de rigidez de um solo flexível com um rígido pode incidir no aumento do momento na região de contato. Portanto, um estudo desses parâmetros é feito na seqüência.

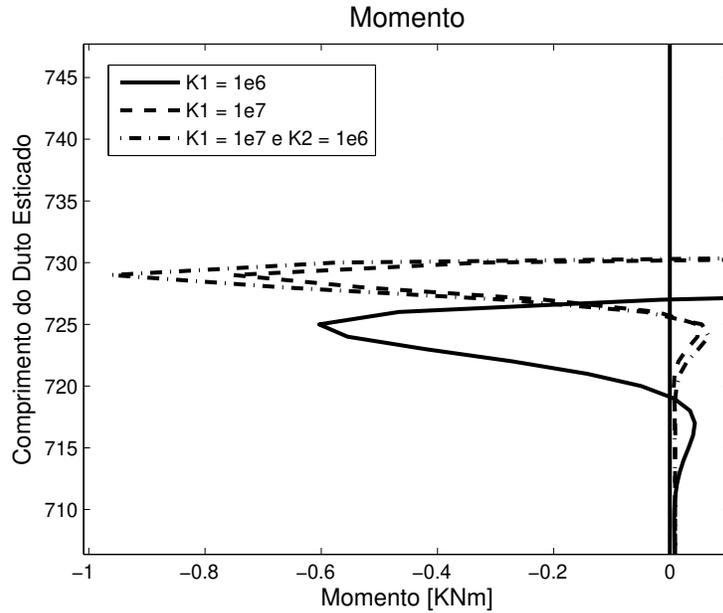


Figura 5.61: Momento - estudo paramétrico - Solo 2K.

### Análise de Sensibilidade de Solo - variando $K_1$

Para estudar a sensibilidade do solo fixou-se a rigidez do solo flexível em  $K = 1 \times 10^6 \text{ N/m/m}$  e variou-se a rigidez do solo considerado rígido,  $K_1$ , de  $1 \times 10^6 \text{ N/m/m}$ ,  $3 \times 10^6 \text{ N/m/m}$ ,  $7 \times 10^6 \text{ N/m/m}$  e  $1 \times 10^7 \text{ N/m/m}$ . As figuras (5.62), (5.63) e (5.64), mostram, respectivamente, o deslocamento vertical, o momento ao longo do *riser* na região de toque e o momento máximo na região de toque.

A figura (5.62) ilustra o deslocamento vertical para esse estudo.

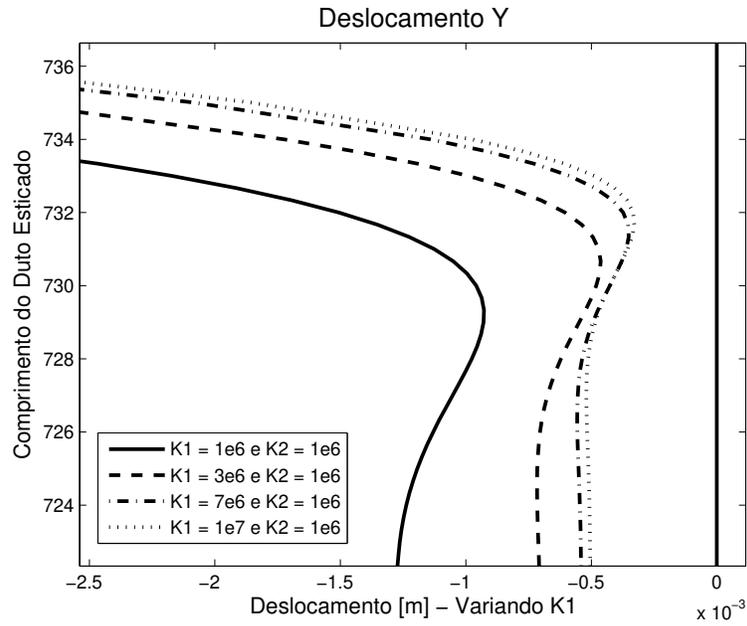


Figura 5.62: Deslocamento vertical - estudo paramétrico - Solo 2K: variando  $K_1$ .

Percebe-se que a medida em que a rigidez  $K_1$  aumenta, o deslocamento vertical diminui. Isto é, o solo mais rígido dificulta a penetração do *riser*.

A figura (5.63) mostra o momento na região de toque. Nota-se que a medida em que o solo se torna mais rígido maior é a amplitude do momento, ou seja, para uma composição mais flexível menores esforços fletores atuaram sobre o *riser* nessa região.

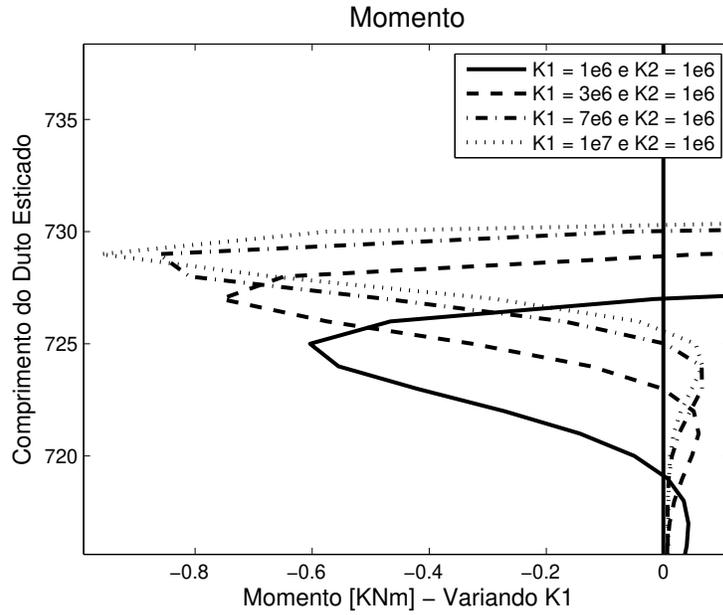


Figura 5.63: Momento - estudo paramétrico - Solo 2K: variando  $K_1$ .

Uma outra maneira de observar a questão do momento é avaliando o momento máximo em função da rigidez, como mostra a figura (5.64). Percebe-se que o momento triplica dependendo da composição do solo.

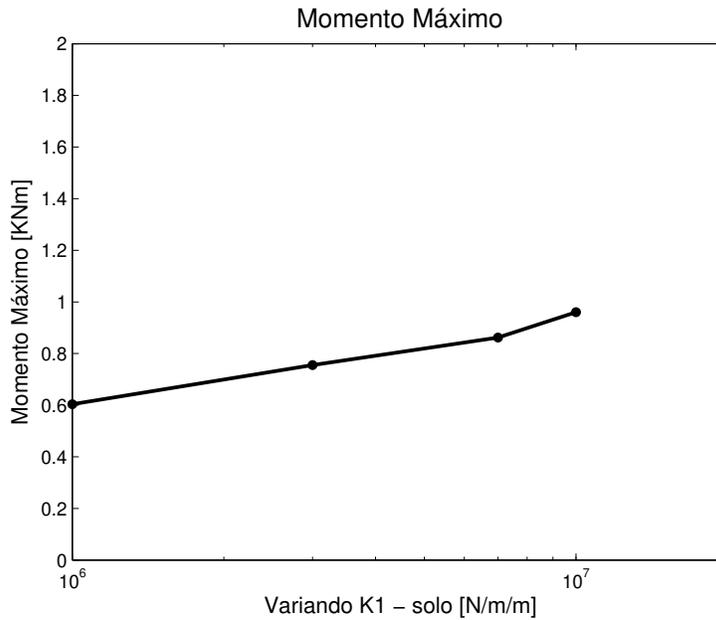


Figura 5.64: Momento máximo na região de toque - estudo paramétrico - Solo 2K: variando  $K_1$ .

## Análise de Sensibilidade de Solo - Variando $K_2$

Em seguida, fixou-se  $K_1$  em  $1 \times 10^7 N/m/m$  e variou-se  $K_2$  de  $1 \times 10^6 N/m/m$ ,  $3 \times 10^6 N/m/m$ ,  $7 \times 10^6 N/m/m$  e  $1 \times 10^7 N/m/m$ . As figuras (5.65), (5.66) e (5.67), mostram, respectivamente, o deslocamento vertical, o momento ao longo do *riser* na região de toque e o momento máximo na região de toque.

Percebe-se, na figura (5.65), que o deslocamento vertical é maior para a composição do Solo 2K na qual a rigidez é menor.

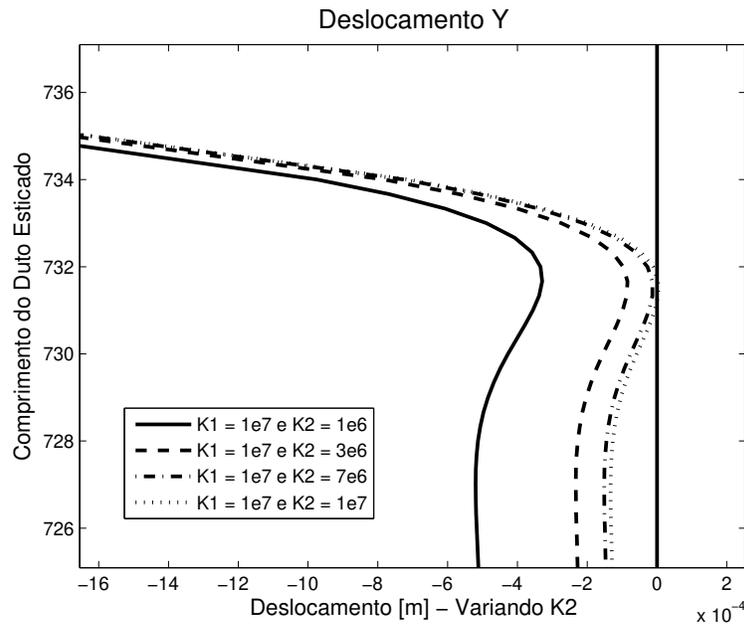


Figura 5.65: Deslocamento vertical - estudo paramétrico - Solo 2K: variando  $K_2$ .

Pode-se notar que o deslocamento pode ser até três vezes maior na região de toque e na região em contato com o solo.

Para o momento, figura (5.66), quando o solo mais profundo se torna mais rígido, a magnitude do momento na região de toque diminui. Isto é, o contrário do que ocorreu anteriormente.

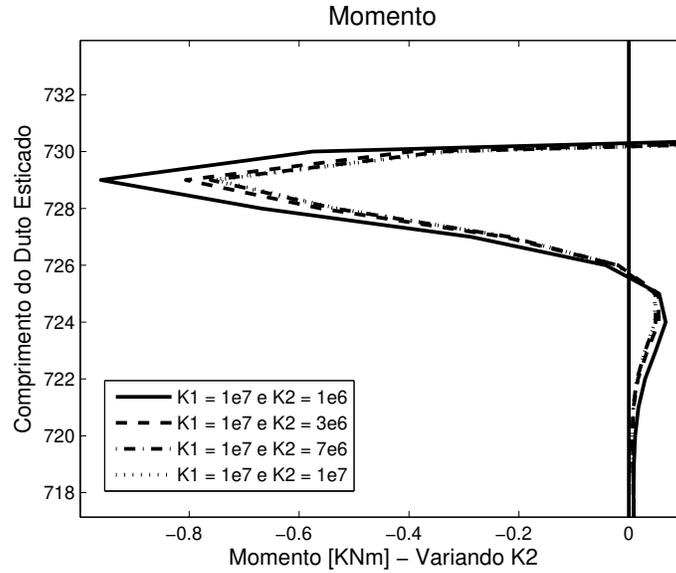


Figura 5.66: Momento - estudo paramétrico - Solo 2K: variando  $K_2$ .

Novamente, pode-se avaliar o momento máximo na região de toque através da figura (5.67).

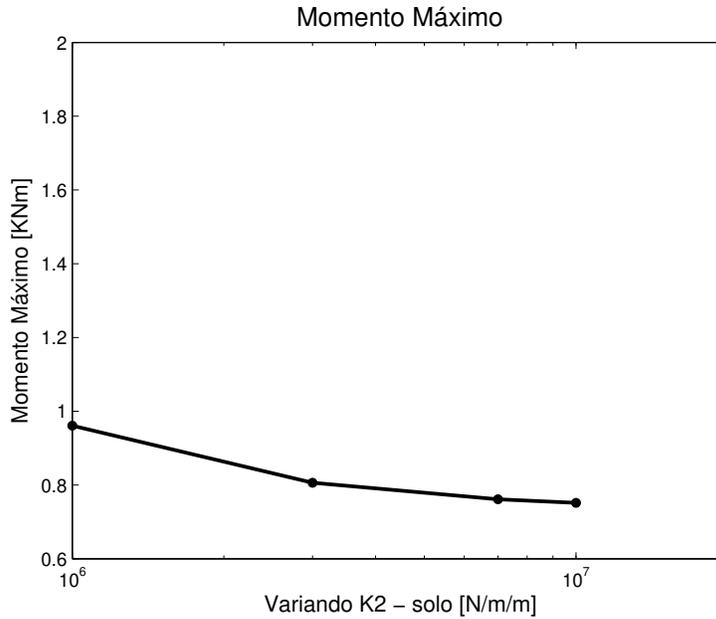


Figura 5.67: Momento máximo na região de toque - estudo paramétrico - Solo 2K: variando  $K_2$ .

Portanto, quando o solo apresenta rigidez entre média e elevada em sua superfície e rigidez baixa em seu interior, pode-se dizer que o momento máximo na região de toque tende a ser

menor quando a rigidez da superfície do solo diminui. Por outro lado, quando a superfície é rígida e o interior tende a ser mais rígido, o momento máximo aumenta. Assim, do ponto de vista do projeto é preferível que o solo apresente uma rigidez baixa, pois conseqüentemente terá um momento máximo menor. No entanto, sabe-se da dificuldade de se controlar essa variável e, portanto, um estudo da rigidez do solo nas diferentes camadas é de fundamental importância para o projeto de *risers*.

#### 5.4.4 Estudo do Empuxo

Nesta seção apresenta-se um breve estudo à respeito do empuxo discutido no capítulo Desenvolvimento Computacional na seção Implementação do Empuxo. Para isso, foi considerado o mesmo esquema adotado em exemplos anteriores, exceto pela rigidez do solo  $K = 1 \times 10^6 N/m/m$  e o empuxo devido ao corpo submerso, em que foram considerados  $\rho = 1000 Kg/m^3$ ,  $g = 9.81 m/s^2$  e o volume por metro de duto.

Os resultados obtidos podem ser observados através das figuras (5.68), (5.69), (5.71) e (5.72), que representam, respectivamente, o deslocamento horizontal, o deslocamento vertical, a força axial ao longo do *riser* e o momento ao longo do *riser* na região de contato.

Na figura (5.68) é mostrado o deslocamento horizontal ao longo do *riser*. Verifica-se um deslocamento menor quando existe a influência do empuxo.

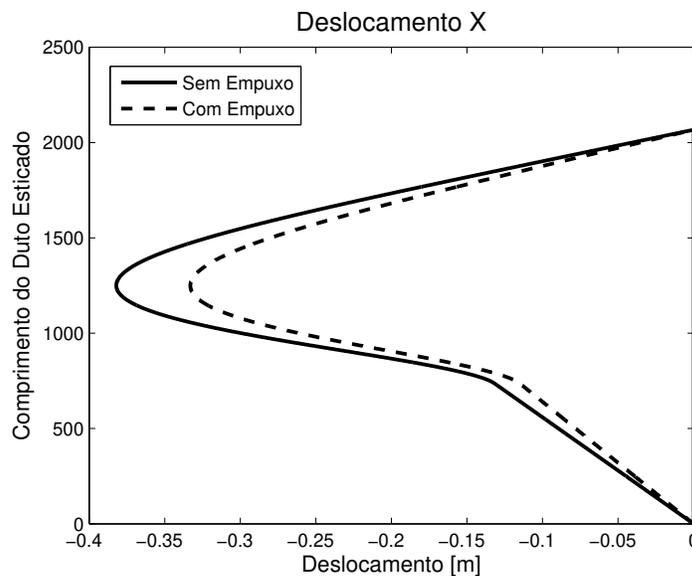


Figura 5.68: Deslocamento horizontal - estudo do empuxo.

A figura (5.69) mostra o deslocamento vertical ao longo do *riser* e a figura (5.70) dá um enfoque na região de toque.

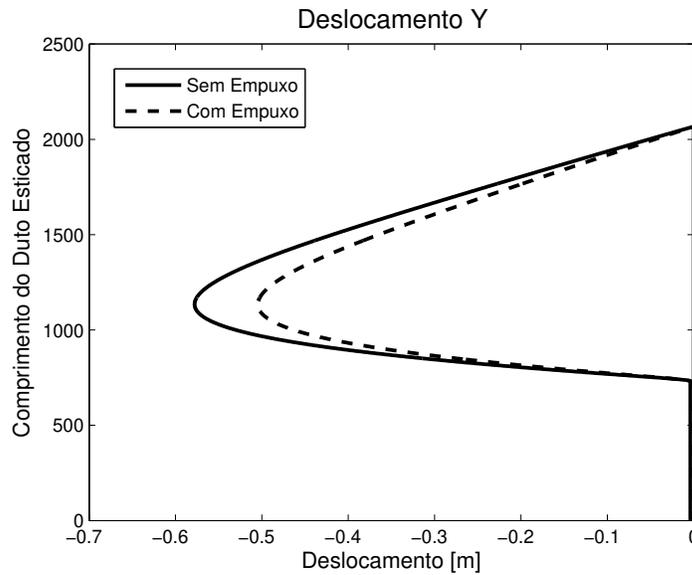


Figura 5.69: Deslocamento vertical - estudo do empuxo.

De um modo geral, percebe-se na figura (5.69), que a diferença máxima no deslocamento é de aproximadamente meio diâmetro.

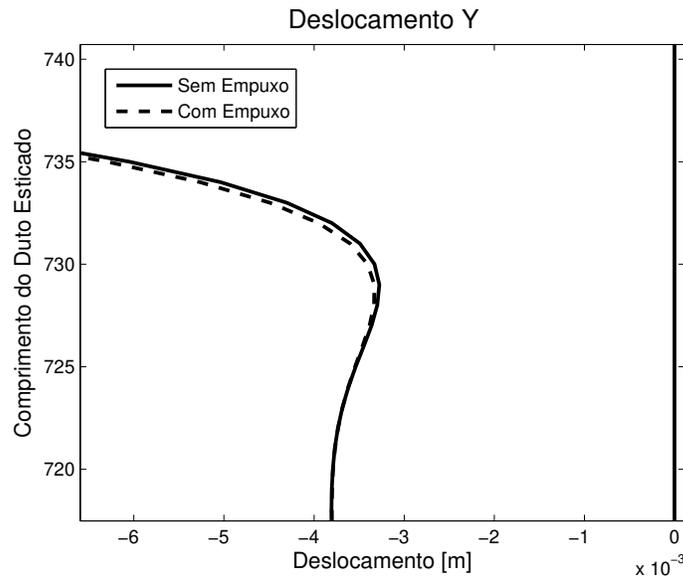


Figura 5.70: Deslocamento vertical - estudo do empuxo.

Na figura (5.70) pode-se notar que na região de contato a diferença é mínima.

Em relação a força axial, percebe-se que com o efeito do empuxo ela diminui cerca de 20%, figura (5.71).

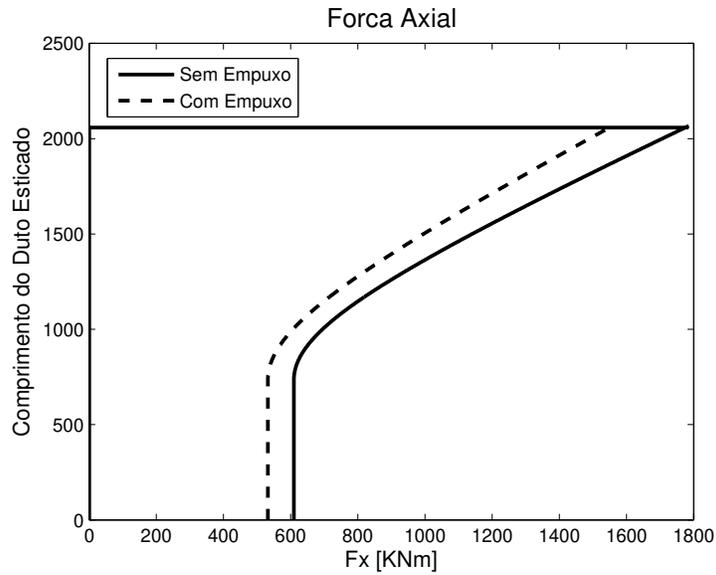


Figura 5.71: Força axial - estudo do empuxo.

O momento, avaliado na figura (5.72), mostra que a diferença na região de toque devido a influência do empuxo é mínima.

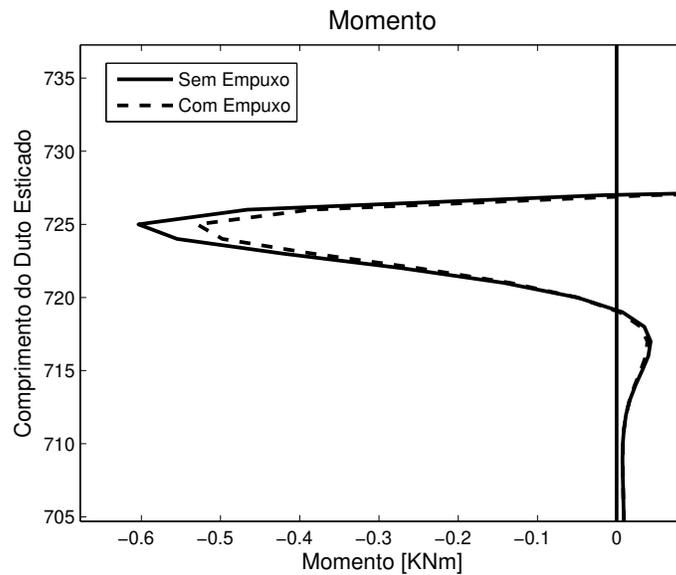


Figura 5.72: Momento - estudo do empuxo.

Portanto, para efeitos de projeto, no caso estático e com as dimensões estudadas, pode-se

verificar que o empuxo tem influência significativa na força axial e mínima no momento.

# Capítulo 6

## Disposições Finais

Neste capítulo são apresentadas as discussões e conclusões a respeito do trabalho desenvolvido e, por fim, os trabalhos futuros sugeridos para a continuidade desse estudo.

### 6.1 Conclusões

No âmbito da análise de *risers*, seja ela estática ou dinâmica, muitos estudos têm sido desenvolvidos a fim de tornar a exploração de petróleo algo mais seguro e rentável. Nesse sentido, diversos pesquisadores têm adotado diferentes modos e meios de avaliarem, sob a perspectiva técnica, a performance desses elementos estruturais. No entanto, sabe-se da dificuldade de se estudar o problema haja vista que o mesmo envolve inúmeras disciplinas como por exemplo: análise estática e dinâmica estrutural, hidrodinâmica, não linearidade geométrica, interação solo-estrutura, interação fluido-estrutura, interação solo-fluido-estrutura, efeitos de escoamento e vibração (vibrações induzidas por vórtices), entre outros.

Com esse cenário, o presente trabalho teve por objetivo principal estudar uma formulação não linear alternativa para ser aplicada ao problema de equilíbrio estático de *risers* considerando-se preliminarmente o efeito da interação solo-estrutura.

Revisou-se e implementou-se uma formulação, para o caso de pórticos planos, chamada de Método dos Elementos Finitos Posicional. Para tanto, uma breve revisão sobre alguns conceitos de mecânica do contínuo foi apresentada no capítulo Modelagem Mecânica Não Linear de Corpos Esbeltos. Citou-se a função mudança de configuração, bem como o seu gradiente. Foi discutido a medida de Deformação de Green e, finalmente, seu par conjugado, Piola Kirchhoff de Segunda Espécie. Explicou-se a equivalência desse par energético com o

de engenharia quando se trabalha com pequenas deformações.

Apresentou-se a cinemática de Reissner utilizando posições ao invés de deslocamento e verificou-se sua aplicabilidade para problemas geometricamente não lineares.

Foram desenvolvidos vários estudos paramétricos e de validação do código implementado. Os problemas de grandes deslocamentos e grandes rotações de estruturas esbeltas (vigas e pórticos) foram abordados.

Um estudo de convergência foi desenvolvido a fim de verificar a convergência do método iterativo de Newton-Raphson para essa aplicação. Observou-se a importância de se adotar uma tolerância adequada de modo a obter-se bons resultados e boa convergência. Verificou-se, também, que a medida em que o movimento imposto ao elemento se tornava mais crítico, com a curva de resposta fortemente não linear, o método apresentava relativa dificuldade de convergência.

O elemento de pórtico plano com cinemática de Reissner implementado apresentou-se capaz de atender as necessidades relativas a não linearidade geométrica para o conjunto de problemas estudados. Assim, a metodologia pode ser considerada apta à atender as condições impostas aos *risers*, principalmente quando, futuramente, for considerado o problema dinâmico.

Foram realizados estudos metodológicos objetivando separar o problema em partes e testar qualitativamente o elemento de pórtico em cada situação do problema estudado. O elemento foi testado tanto para um exemplo de grandes dimensões, leia-se problemas de *risers* em catenária, quanto para um problema de contato. Nesse estudo, o elemento de pórtico plano de alta ordem apresentou convergência direta e resultados consistentes.

No capítulo Resultados, seção Exemplos de Contato *Riser-Solo*, foi estudado um exemplo de contato com o solo, com o qual foi possível avaliar a Formulação Posicional tanto para problemas lineares quanto para não lineares. Verificou-se uma boa aproximação para o problema de contato com o solo e deslocamento linear quando comparado a soluções analíticas. Em relação a grandes deslocamentos observou-se que o descolamento é maior, sendo maior ainda para o solo bilinear. Porém, para o solo bilinear o descolamento obtido foi mais suave, com variações e descontinuidades menos severas.

Como um exemplo final, foi estudado o comportamento estático de um *riser* em catenária

interagindo com o solo. Para isso, utilizou-se de um exemplo de *riser* com dimensões reais, em que considerou-se o peso próprio e o solo tipo Winkler. Os resultados foram comparados e validados com o programa Anflex, que atualmente é utilizado pela Petrobras. Observou-se que houve boa convergência dos resultados, no entanto, as formulações apresentam resultados com relativa diferença na região de toque. Contudo, as duas formulações comparadas confirmam a idéia, sugerida diversas vezes na literatura, de que a região de toque é extremamente importante para o projeto de *risers* uma vez que apresenta gradientes de tensão e de momento fletor importantes, o que pode levar o material à fadiga.

Um estudo de sensibilidade foi realizado para verificar qual a influência de algumas variáveis do projeto e de alguns parâmetros do modelo sobre o comportamento do *riser*. Foram avaliados o modelo do solo, a rigidez do solo e o ângulo de topo do *riser*. Notou-se que a rigidez do solo influencia nos esforços internos e que a medida em que o solo se torna mais flexível o gradiente de momento diminui. Por outro lado, em relação ao ângulo de topo, a medida em que o ângulo aumenta os esforços também aumentam. Portanto, são dois fatores diretamente ligados aos esforços a que estão submetidos os *risers* e devem ser considerados durante o projeto. Contudo, o ângulo de topo é uma variável de projeto que depende de outras variáveis como por exemplo do movimento da embarcação causado pelas ondas superficiais e pelo deslocamento causado pelo movimento das marés, o que dificulta ainda mais no projeto. O modelo de solo foi aplicado para os casos bilineares e com a Curva *Backbone*(Modelo trilinear), mostrando-se a flexibilidade para aplicação do Modelo de Winkler para vários casos de rigidez de solo.

Dessa forma, a Formulação Posicional, apresenta-se como uma formulação alternativa para a solução do problema de *risers* e poderá ser utilizada no projeto dos mesmos.

## 6.2 Trabalhos futuros

O estudo desenvolvido ao longo do presente trabalho abre uma série de oportunidades e opções para a sua continuidade em trabalhos futuros. Sugere-se para a seqüência deste trabalho:

- Implementar a Formulação Posicional 3D para aplicação em *riser*.
- Estudar e implementar a Formulação Posicional para análise dinâmica.
- Estudar e Implementar carregamentos hidrodinâmicos adicionais comumente empregados na análise dinâmica de *risers*.
- Estudar novas possibilidades para o contato com o solo e otimizá-lo.
- Estudar e implementar o problema de vibração induzida por vórtices, bem como a interação fluido-estrutura.

Observando os item mencionados verifica-se que existem vários frutos de trabalho a serem desenvolvidos com o objetivo de desenvolver uma ferramenta confiável para análise de *risers*. Além de desafiador, exigirá grande esforço de pesquisa multidisciplinar, em área envolvendo fenômeno multifísico e escalas múltiplas.

# Referências

- Assan, A. E. (2003). *Método dos Elementos Finitos - primeiros passos*, Vol. 1. Ed. Unicamp, 2 edition.
- Aubeny, C., Biscontin, G., e Zhang, J. (2006). “Seafloor interaction with steel catenary risers.
- Barros, P. L. A., Morooka, C. K., Neto, E. M., e Pavanello, R. (2009). “Scr-seafloor interaction modeling with winkler, pasternak and kerr beam-on-elastic-foundation theories.” *28th - International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 1, OMAE 2009-79459.
- Bathe, K. J. (1982). *Finite Elements Procedures in Engineering Analys.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs - New Jersey.
- Bazaraa, M. S. e Shetty, C. M. (1979). *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms.* John Wile & Sons.
- Chatjigeroriou, I. K. (2008). “A finite differences formulation for the linear and nonlinear dynamics of 2d catenary risers.” *Ocean engineering ISSN 0029-8018 CODEN OCENBQ*, Vol. 35(7), 616-636.
- Coda, H. B. (2003). “Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no método dos elementos finitos.
- Coda, H. B. (2004). “Notas de aula - não linearidade geométrica.
- Coda, H. B. e Greco, M. (2003). “An exact fem geometric non-linear analysis of frames based on positional description.” *XVIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM 2003*, Vol. 1.

- Coda, H. B. e Greco, M. (2004). “A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, 3541–3557.
- Coda, H. B. e Paccola, R. R. (2007). “An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 40, 185–200.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., e Plesha, M. E. (2002). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York.
- Couliard, P. Y. e Langley, R. S. (2001). “Nonlinear dynamics of deep-water moorings.” *20th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 1, OMAE 2001/OFT–1020.
- Farfán, D. C. (2005). “Estudo do comportamento estático e dinâmico de um riser vertical com bóia de subsuperfície. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, Campinas - SP.
- Ferrari, J. A. (1998). “Hydrodynamic loading and response of offshore risers,” PhD thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London.
- Garrett, D. L. (1982). “Dynamic analysis of slender rods.” *Journal Energy Resources Technology*, Vol. 104(4), 302–306.
- Greco, M. (2004). “Análise de problemas contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos. Master’s thesis, Escola de Engenharia de São Carlos - USP - São Carlos.
- Grimberg, M. N. (2008). “Análise estática e dinâmica da interação solo-riser-fundação. Relatório de Iniciação Científica - PIBIC/CNPq.
- Kordkheili, S. A. H. e Bahai, H. (2007). “Non-linear finite element analysis of flexible risers in presence of buoyancy force and seabed interaction boundary condition.” *Journal Archive of Applied Mechanics*, Vol. 78, 765–774.

- Kubota, H. (2003). “Comportamento de riser rígido de produção. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, Campinas.
- Laver, K., Clukey, E., e Evans, T. (2004). “Steel catenary riser touchdown point vertical interaction models.” *Offshore Technology Conference*, Vol. 1, OTC 16628, Texas – USA.
- Leira, B., Passano, E., Karunakaran, D., e Farnes, K. (2004). “Analysis guidelines and application of a riser-soil interaction model including trench effects.” *23rd International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 1, OMAE 2004–51527, Vancouver–Canada.
- Low, Y. M. e Langley, R. S. (2006). “Dynamic analysis of a flexible hanging riser in the time and frequency domain.” *25th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 1, OMAE 2006–92171, Hamburg, GERMANY.
- Maciel, D. N. (2008). “Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando método dos elementos finitos posicional,” PhD thesis, Escola de Engenharia de São Carlos - USP.
- Moe, G., Cheg, Y., e Vandiver, J. K. (2000). “Riser analysis by means of some finite element approaches.” *19th - International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 1, OMAE 2000/OSU OFT–4060, New Orleans – USA.
- Mourelle, M. M., Gonzalez, E. C., Siqueira, M. Q., Sagrilo, L. V. S., e Dantas, C. M. S. (2001). “Manual teórico do programa anflex - versão 5.7.
- Orcina (2009). “Orcaflex manual - versão 9.2.
- Pascon, J. P. (2008). “Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: Estudo e implementação computacional. Master’s thesis, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos.
- Patel, M. H. e Seyed, F. B. (1995). “Review of flexible riser modelling and analysis techniques.” *Engineering Structures*, Vol. 17(4), 293–304.

- Patel, M. H. e Witz, J. A. (1991). *Compliant Offshore Structures*. Butterworth Heinemann, Oxford,UK.
- Pellegrino, S. e Ong, P. P. A. (2003). “Modelling of seabed interaction in frequency domain analysis of mooring cables.” *22nd International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, VOL. 1, OMAE 2003–37465, Cancun, MÉXICO.
- Pereira, P., Morooka, C. K., Valdivia, P., e Suzuki, M. (2007). “Design and analysis of steel catenary risers for ultra deep water application.” *Rio Pipeline Conference & Exposition 2007*, Vol. 1, Rio de Janeiro – BRASIL.
- Pesce, C. P. e Martins, C. A. (2004). “Riser-soil interaction: Local dynamics at tdp and a discussion on the eigenvalue and the viv problems.” *ASME 23rd International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, VOL. 1, OMAE 2004–51268, Vancouver, CANADA.
- Pollio, A., Langley, R. L., Low, Y. M., Marano, G. C., e Mossa, M. (2006). “A comparison of time domain and frequency domain analysis of a flexible marine riser undergoing large deformations by using a lumped mass approach.” *16th International Offshore and Polar Engineering Conference*, Vol. 1, ISBN 1–880653–66–4 (Set); ISSN 1098–6189 (Set), San Francisco, USA.
- Raman-Nair, W. e Baddour, R. E. (2003). “Three-dimensional dynamics of a flexible marine riser undergoing large elastic deformations.” *Multibody System Dynamics*, Vol. 10, 393–423.
- Serpa, A. L. (1996). “Problema de contato com atrito utilizando o método do lagrangiano aumentado. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, Campinas.
- Serpa, A. L. (2007). “Notas de aula - otimização de sistemas.
- Silveira, E. S., Martha, L. F., Menezes, I. F., e Masetti, I. Q. (2000). “Um sistema computacional integrado para análise dinâmica não-linear geométrica de linhas de ancoragem.” *XXI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia - CILAMCE*, Vol. 1, Rio de Janeiro, Brasil.

- Silveira, L. M. Y. e Martins, C. A. (2004). “A numerical method to solve the static problem of a catenary riser.” *23rd International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 1, OMAE 2004–51390, Vancouver, CANADA.
- Simo, J. C. e Vu-Quoc, L. (1986). “A three-dimensional finite strain rod model. part ii: Computational aspects.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 58, 79116.
- Touzot, G. e Dhatt, G. (1984). *The Finite Element Method Displayed*. John Wile & Sons, New York, USA.
- Yazdchi, M. (2005). “Buoyancy potential conserving technique for dynamic analysis of offshore pipes and risers.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 63, 2040–2067.
- Yazdchi, M. e Crisfield, M. A. (2005). “Non-linear dynamic behaviour of flexible marine pipes and risers.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, 1265–1308.