

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Paula Frassinetti
Cavalcante E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 13/03/97.

Katia Lucchesi Cavalcante
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Método para o estudo do comportamento
dinâmico da fundação de máquinas rotativas
horizontais**

Autora: **Paula Frassinetti Cavalcante**
Orientadora: **Katia Lucchesi Cavalcante Dedini**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Método para o estudo do comportamento dinâmico da fundação de máquinas rotativas horizontais

Autora: **Paula Frassinetti Cavalcante**

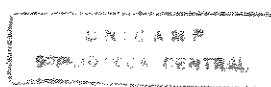
Orientadora: **Katia Lucchesi Cavalca Dedini** 

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1997
S.P. - Brasil

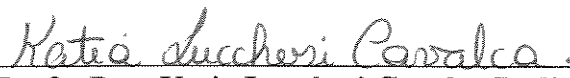


**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Método para o estudo do comportamento
dinâmico da fundação de máquinas rotativas
horizontais**

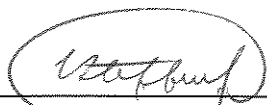
Autora: **Paula Frassinetti Cavalcante**
Orientadora: **Katia Lucchesi Cavalca Dedini**



Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini
Unicamp



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
Unicamp



Prof. Dr. Valder Steffen Júnior
Universidade Federal de Uberlândia

Campinas, 1 de fevereiro de 1997

Dedicatória:

Dedico este trabalho à minha mãe com reconhecimento pela educação recebida e aos meus irmãos que sempre me incentivaram.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser concluído sem a ajuda de diversas pessoas, que de uma forma direta ou indireta me incentivaram. Ficam aqui todos os meus agradecimentos:

A Profa. Dra. Katia Lucchesi, pela amizade, dedicação e indispensável orientação na realização deste trabalho.

Aos Professores Franco Dedini, Milton D. Júnior e Robson Pederiva pela ajuda e paciência.

Aos meus amigos Melquisedec e Paulo, os quais me acompanharam durante toda esta caminhada, e aos alunos José Ricardo, José Geraldo e Roger Uemura, cujo apoio e suporte foram indispensáveis para a conclusão deste trabalho.

A todos os colegas da pós-graduação do DPM e DMC, Faculdade de Engenharia Mecânica, pela amizade e convivência .

A todos os professores do DPM e DMC, pelo conhecimento recebido.

Aos funcionários do DPM e SIFEM pela disposição e ajuda.

*Gênios tem 2% de inteligência e 98%
de trabalho.*

Ludwig Van Bethoven

Sumário

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Breve histórico	1
1.2 Casos históricos	2
1.3 Descrição do trabalho	3
2. REVISÃO DA LITERATURA	5
2.1 Introdução.....	5
2.2 Desenvolvimento.....	6
3. MÉTODOS DAS IMPEDÂNCIAS MECÂNICAS E COORDENADAS MISTAS.	10
3.1 Introdução.....	10
3.2 Equação de movimento para o sistema rotor-suportes-fundação	11
3.2.1 Equação de movimento para o sistema rotor-suportes em coordenadas físicas.	11
3.2.2 Equação de movimento da fundação em coordenadas físicas.....	12
3.2.3 Equação de movimento da fundação em coordenadas principais.	13
3.3 Método das impedâncias mecânicas da fundação.....	15
3.3.1 Introdução.....	15
3.3.2 Determinação da matriz de flexibilidade	16
3.3.3 Determinação da matriz de impedâncias mecânicas da fundação.....	18
3.4 Método das coordenadas mistas.....	21
3.4.1 Introdução.....	21
3.4.2 Determinação da matriz elastodinâmica do sistema	21

4. MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS	26
4.1 Introdução.....	26
4.2 Conceitos Básicos do Método dos Elementos Finitos (MEF)	26
4.3 Elemento de Viga Espacial	27
4.3.1 Funções de Forma do Elemento.	27
4.3.2 Matriz de Rigidez do Elemento no Sistema de Referência Local	29
4.3.3 Matriz de Massa do Elemento no Sistema de Referência Local	34
4.4 Matriz de Transformação de Coordenadas	36
4.5 Matrizes de Massa e Rigidez no Sistema de Coordenadas Global.	38
4.6 Matriz de Massa Equivalente	39
4.7 Matriz de Amortecimento.....	40
4.7.1 Determinação dos Coeficientes α e β	43
4.8 Discretização do modelo por elementos finitos	46
4.8.1 Discretização da Fundação	46
4.8.2 Hipóteses e/ou simplificações do Modelo	47
4.8.3 Valores para os Parâmetros do Modelo	48
5. DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS DA FUNDAÇÃO	49
5.1 Introdução.....	49
5.2 Determinação das frequências naturais	49
5.2.1 Função de resposta em frequência	49
5.2.2 Cálculos das frequências naturais	51
5.3 Determinação dos fatores de amortecimento da fundação	52
5.4 Determinação das massas generalizadas	54
5.4.1 Determinação dos modos de vibrar	54
5.4.2 Determinação das massas generalizadas.....	56
6. RESULTADOS E DISCUSSÕES	59
6.1 Introdução.....	59

6.2 Análise da função de resposta em frequência	59
7. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS.	71
7.1 Conclusões.....	71
7.2 Perspectivas Futuras	72
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73
APÊNDICE A.....	78
Estrutura e Configuração do Pacote Rotortest	78
Estrutura do Programa	78
Fluxograma do Programa	79
Configuração do Bloco 4 (Fundação)	80
Fluxograma do Bloco 4	81
APÊNDICE B.....	82

Resumo

CAVALCANTE, Paula Frassinetti, *Método para o estudo do comportamento dinâmico da fundação de máquinas rotativas horizontais*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. 110 p. Dissertação de Mestrado

A análise do comportamento da fundação e sua influência na resposta do sistema completo rotor-suportes-fundação é fundamental para análise dinâmica deste sistema. Dessa forma, este trabalho apresenta uma metodologia para a análise do comportamento da fundação, usando técnicas de análise modal para determinar os parâmetros modais da fundação (massa, fator de amortecimento e frequência natural). Para a identificação desses parâmetros, foi feita a análise das funções de transferências do modelo numérico da estrutura, onde a técnica utilizada foi a discretização da fundação pelo método dos elementos finitos. O cálculo das funções de transferência do modelo é feito para uma força de excitação harmônica unitária, atuando em um determinado nó do modelo discretizado. Em seguida, foram definidos alguns nós de interesse no modelo discretizado e aplicadas técnicas de análise modal para calcular as frequências naturais da estrutura. A transformada de Fourier da resposta em frequência do sistema é calculada e através do espectro de frequências do sistema, é feita a escolha dos modos de vibrar mais significativos, associados às frequências naturais que significativamente participam da resposta do sistema. Em seguida, é feito o cálculo dos parâmetros de massa, fator de amortecimento e rigidez dos modos considerados. A matriz de impedâncias mecânicas é obtida para estes modos. Os resultados obtidos foram plotados e analisados. Resultados adicionais mostrando todo comportamento da estrutura, cujos parâmetros foram identificados a partir de uma função de transferência analítica, são apresentados, cuja importância é relevante na implementação e comparação com o modelo físico.

Palavras Chave

- Fundações, Métodos dos Elementos Finitos, Análise Modal, Estimativa de parâmetros, Rotores.

Abstract

CAVALCANTE, Paula Frassinetti, *Método para o estudo do comportamento dinâmico da fundação de máquinas rotativas horizontais*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. 110 p. Dissertação de Mestrado

The behavior analysis of foundation and its influence on the complete system response, rotor-bearings-foundation, is of great importance in its dynamic analysis. In this way, this work presents a methodology for behavior analysis of the foundation using modal analysis technique to determine the modal parameters of the foundation (damping factor, natural frequency and generalized mass). The analysis of the numeric model transfer functions of the structure was done in order to identify these parameters, where it was the discretization technique of the foundation using the finite element method. The functions of the model was obtained for a unit harmonic force exciting one node. Afterwards, some nodes of interest in the discretized modal was defined and modal analysis techniques used calculate the natural frequencies of the structural the Fourier Transform of the frequency response of the system is calculated. The shapes modes associated to the natural frequencies which participate of the system response significantly are chosen using the frequency spectrum. The mass, damping factor and stiffness of the considered modes are obtained afterwards. The mechanical impedance matrix is obtained for these modes . The results was plotted and analyzed. Further results showing the behaviour of the structure are presented whose parameter were identified by the analytical transfer functions its importance is relevant to implement and compare to the model physical.

Key Words

- Foundation, Finite Element Method, Modal Analysis, Parameters Estimation, Rotor.

Lista de Figuras

Figura 1-1 Representação do sistema rotor-suportes-fundação	4
Figura 4-1 Elemento de viga espacial	27
Figura 4-2 Elemento para a transformação de coordenadas	36
Figura 4-3 Modelo da Fundação	46
Figura 4-4 Modelo por elementos finitos da Fundação	47
Figura 6-1 Diagrama dos espectros de frequências - Direção Vertical	60
Figura 6-2 Diagrama dos espectros de frequências - Direção Horizontal	60
Figura 6-3 Resposta em frequência para o nó 17 - Direção Horizontal	64
Figura 6-4 Resposta em frequência para o nó 17 - Direção Vertical	65
Figura 6-5 Resposta em frequência para o nó 3 - Direção Horizontal	66
Figura 6-6 Resposta em frequência para o nó 3 - Direção Vertical	67
Figura 6-7 Resposta em frequência para o nó 8 - Direção Horizontal	68
Figura 6-8 Resposta em frequência para o nó 8 - Direção Vertical	69
Figura 9-1 Fluxograma de configuração do ROTORTEST	79
Figura 9-2 Fluxograma de Configuração do Bloco 4 (Fundação)	81
Figura 10-1 Resposta em Frequência para o nó 2 - Direção Horizontal	83
Figura 10-2 Resposta em Frequência para o nó 2 - Direção Vertical	84
Figura 10-3 Resposta em Frequência para o nó 4 - Direção Horizontal	85
Figura 10-4 Resposta em Frequência para o nó 4 - Direção Vertical	86
Figura 10-5 Resposta em Frequência para o nó 7 - Direção Horizontal	87
Figura 10-6 Resposta em Frequência para o nó 7 - Direção Vertical	88
Figura 10-7 Resposta em Frequência para o nó 9 - Direção Horizontal	89
Figura 10-8 Resposta em Frequência para o nó 9 - Direção Vertical	90
Figura 10-9 Resposta em Frequência para o nó 2 - Direção Horizontal	91
Figura 10-10 Resposta em Frequência para o nó 2 - Direção Vertical	92

Lista de Tabelas

Tabela 4-1 Valores dos Parâmetros do modelo	48
Tabela 4-2 Valores das Massas Concentradas	48
Tabela 6-1 Freqüências próprias da fundação - Modo Vertical	61
Tabela 6-2 Freqüências próprias da fundação - Modo Horizontal	61
Tabela 6-3 Modos próprios de vibrar - Direção Vertical	62
Tabela 6-4 Fatores de amortecimento e massas generalizadas	70

Nomenclatura

Letras Latinas

$M_{ij} \rightarrow$ Matriz de massa do rotor e dos suportes.

$R_{ij} \rightarrow$ Matriz de amortecimento do rotor e dos suportes.

$K_{ij} \rightarrow$ Matriz de rigidez do rotor e dos suportes.

$x_r \rightarrow$ Coordenadas do rotor.

$x_f \rightarrow$ Coordenadas dos nós de conexão entre rotor e fundação.

$F_o \rightarrow$ Força externa devido ao desbalanço.

$F_f \rightarrow$ Força transmitida pela fundação ao rotor através dos nós de conexão.

$q \rightarrow$ Vetor das coordenadas principais.

$[\Phi] \rightarrow$ Matriz modal ou matriz dos modos próprios da fundação.

$[M_s] \rightarrow$ Matriz de Massa da fundação.

$[K_s] \rightarrow$ Matriz de Rigidez da fundação.

$[R_s] \rightarrow$ Matriz de Amortecimento da fundação.

$F_{fo} \rightarrow$ Amplitude do vetor das forças da fundação de valor unitário.

$x_{fo} \rightarrow$ Amplitude do vetor dos deslocamentos dos nós de conexão da fundação.

$[m_f] \rightarrow$ Matriz diagonal de massa da fundação.

$[k_f] \rightarrow$ Matriz diagonal de rigidez da fundação.

$[r_f] \rightarrow$ Matriz diagonal de amortecimento da fundação.

$[M^*] \rightarrow$ Matriz de massa do sistema completo.

$[R^*] \rightarrow$ Matriz de Amortecimento do sistema completo.

$[K^*] \rightarrow$ Matriz de Rigidez do sistema completo.

$F^* \rightarrow$ Vetor das forças externas.

$X \rightarrow$ Vetor das coordenadas do rotor e fundação.

$[H(\Omega_e, p)] \rightarrow$ Matriz de flexibilidade.

$h_{kj} \rightarrow$ Elemento da matriz de flexibilidade.

$p \rightarrow$ Parâmetros modais.

$N \rightarrow$ Número de modos de vibrar.

$[I(\Omega_e, p)] \rightarrow$ Matriz das impedâncias mecânicas da fundação.

$[E(\Omega_e, p)] \rightarrow$ Matriz elastodinâmica do sistema completo.

$Z \rightarrow$ Vetor das coordenadas mistas.

$Z_o \rightarrow$ Amplitude do vetor das coordenadas mistas.

$[\bar{M}_T] \rightarrow$ Matriz de Massa do sistema completo no método das coordenadas mistas.

$[\bar{K}_T] \rightarrow$ Matriz de Rigidez do sistema completo no método das coordenadas mistas.

$[\bar{R}_T] \rightarrow$ Matriz de Amortecimento do sistema completo no método das coordenadas mistas.

$\bar{F} \rightarrow$ Vetor das forças externas no método das coordenadas mistas.

$[\bar{E}(\Omega_e, p)] \rightarrow$ Matriz elastodinâmica modificada do sistema completo, no método das coordenadas mistas.

$[\bar{I}(\Omega_e, p)] \rightarrow$ Matriz de impedâncias mecânicas generalizadas

$q_i \rightarrow$ Deslocamentos nodais.

$l \rightarrow$ Comprimento do elemento de viga.

$\overset{r}{q}_{xy} \rightarrow$ Vetor dos deslocamentos nodais no plano xy.

$[N] \rightarrow$ Matriz das funções de forma do elemento.

$N_i \rightarrow$ Elemento da matriz das funções de forma.

$[B] \rightarrow$ Matriz de deformação.

$E \rightarrow$ Módulo de Elasticidade do material.

$A \rightarrow$ Área da seção transversal da viga.

$V \rightarrow$ Volume da viga.

$[K_{xz}^{(e)}] \rightarrow$ Matriz de rigidez do elemento no plano xz.

$[M^{(e)}] \rightarrow$ Matriz de massa da viga.

$I_{yy} \rightarrow$ Momento de inércia da seção transversal do elemento sobre o eixo y.

$I_{zz} \rightarrow$ Momento de inércia da seção transversal do elemento sobre o eixo z.

$u(x) \rightarrow$ Deslocamento axial.

$w(x) \rightarrow$ Deslocamento torcional.

$G \rightarrow$ Módulo de cisalhamento do material.

$J \rightarrow$ Momento polar de inércia.

$[K^{(e)}] \rightarrow$ Matriz de rigidez da viga.

$x'_1, x'_2 \text{ e } x'_3 \rightarrow$ Componentes de um vetor no sistema de coordenadas $x'y'z'$.

$T_{TOTAL} \rightarrow$ Matriz de transformação de coordenadas do sistema local para global, para a viga.

$f \rightarrow$ Vetor das forças no sistema de referência local.

$f' \rightarrow$ Vetor das forças no sistema de referência global.

$T_{TOTAL}^T \rightarrow$ Transposta da matriz de transformação de coordenadas.

$[M_E] \rightarrow$ Matriz de Massa Equivalente do corpo rígido no sistema de referência global.

$[M] \rightarrow$ Matriz de Massa Equivalente do corpo rígido no sistema de referência local.

$m \rightarrow$ Massa total do corpo rígido.

$[I] \rightarrow$ Matriz identidade.

$r_{eq_k} \rightarrow$ Coeficiente de amortecimento para o k-ésimo modo.

$f^*(\omega_k) \rightarrow$ Função de interpolação em relação ao valor de h_{real} .

$f(\omega_k) \rightarrow$ Função de interpolação aproximada.

$E(\alpha, \beta) \rightarrow$ Função Erro quadrático.

$\bar{h} \rightarrow$ Vetor amplitude complexa.

$h_R \rightarrow$ Parte real do vetor amplitude complexa.

$h_I \rightarrow$ Parte imaginária do vetor complexa.

$\bar{A}_{\Omega_{e_n}} \rightarrow$ Média quadrática das componentes imaginária das funções de transferência.

$r_j' \rightarrow$ Razão de proporcionalidade entre as frequências de excitação e natural.

$X_k^{(j)} \rightarrow$ Resíduo do j-ésimo modo.
 $U_j \rightarrow$ Parte Real do j-ésimo modo.
 $V_j \rightarrow$ Parte Imaginária do j-ésimo modo.
 $A_{kl_j} \rightarrow$ Módulo do Resíduo.
 $E \rightarrow$ Função erro.
 $h^* \rightarrow$ Função de transferência analítica.
 $h \rightarrow$ Função de transferência aproximada.

Letras Gregas

$[\Phi] \rightarrow$ Matriz modal ou matriz dos modos próprios da fundação.
 $\alpha \rightarrow$ Coeficiente de proporcionalidade da matriz de massa da fundação.
 $\beta \rightarrow$ Coeficiente de proporcionalidade da matriz de rigidez da fundação.
 $\Omega_e \rightarrow$ Frequência de excitação externa.
 $\omega_l \rightarrow$ Frequência natural do sistema.
 $\xi \rightarrow$ Decremento logarítmico.
 $\zeta_i \rightarrow$ Fator de amortecimento estrutural.
 $\alpha_i \rightarrow$ Coeficiente de interpolação.
 $v(x)$ e $\theta(x) \rightarrow$ Aproximações adotadas no plano xy.
 $\epsilon_{xx} \rightarrow$ Deformação axial.
 $\sigma_{xx} \rightarrow$ Tensão axial do elemento.
 $\bar{v} \rightarrow$ Deslocamento transversal.
 $\rho \rightarrow$ Densidade do material.
 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \rightarrow$ Ângulos que um vetor forma com os eixos $x'y'z'$, respectivamente.
 ζ', η' e $\xi' \rightarrow$ Coordenadas do centro de gravidade do corpo no sistema de referência local.
 $\delta(\omega_k) \rightarrow$ Função erro.
 $\psi \rightarrow$ Fase da função de transferência.

Superescritos

$t \rightarrow$ Transposto

Abreviações

MEF $\rightarrow$ Método dos elementos finitos.

Capítulo 1

1. Introdução.

Neste capítulo, apresenta-se um breve histórico sobre o comportamento dinâmico dos sistemas mecânicos e a interação desses sistemas com sua estrutura de suporte ou fundação. Algumas metodologias utilizadas para descrever o comportamento da fundação são discutidas, com suas formulações e hipóteses. Apresenta-se, também, alguns casos históricos que justificam a importância do estudo do comportamento destas estruturas e a sua interação com o sistema completo. Finalmente, apresenta-se uma descrição do presente trabalho.

1.1 Breve histórico.

A análise do comportamento das máquinas rotativas é bastante complexa(CURAMI,A. et al [17]), já que estas máquinas são constituídas, geralmente, por um sistema complexo de equipamentos que envolvem, além do rotor, eixos e mancais, carcaça do rotor, fundação e outros equipamentos auxiliares. Portanto, para se estudar o comportamento dinâmico desses sistemas, é necessário determinar a interação de todos os componentes. No entanto, o comportamento destas máquinas são significativamente influenciado pelo comportamento da fundação(DEDINI, F.G., CAVALCA, K.L.[18]). Assim, as primeiras pesquisas para estudar o comportamento de tais sistemas, eram baseadas em modelos simples que variavam entre um, dois ou três sistemas de massas, onde não era considerada a rigidez flexional da fundação. Assim sendo, em 1968 POULOS,H.G.[30] propôs um modelo para estudar o comportamento da fundação, esta constituída de pilares, que foi tratada como um corpo rígido. No entanto,

este modelo era limitado, já que a rigidez do material que constituía a fundação influenciava bastante no acoplamento do sistema(BACHSCHMID, N. et al [3]).

Somente com o desenvolvimento da técnica de elementos finitos, foram utilizados elementos tridimensionais para estudar o comportamento dos elementos da fundação. Isto foi proposto por ABOUL-ELLA, F. e NOVAK, M.[1], em seu trabalho para estudar o comportamento de uma fundação flexível. Com o desenvolvimento computacional, programas para cálculos mais refinados do modelo foram desenvolvidos. Assim, em 1988, DIANA, G. e CHELI, F. [20] apresentaram um método híbrido para estudar o comportamento da fundação, onde esta era representada no modelo através de seus parâmetros modais, calculados a partir das funções de transferências analíticas ou experimentais.

1.2 Casos históricos.

Como a influência do comportamento da fundação era evidente, o estudo de sua interação com a máquina era muito importante, de modo que fosse projetada para um limite de amplitudes de vibrações aceitáveis. Outro aspecto fundamental, quando do projeto da fundação, era a importância de se reduzir a energia vibracional, transmitida ao solo(MAKRIS, N. et al [27]). Dessa forma, o perigo do afundamento do solo e o impacto de operação da máquina, nas construções adjacentes, poderiam ser reduzidos. Casos históricos mostravam que os excessos de vibrações e deformações da fundação, ocasionavam sérias falhas nessas máquinas(BEOLCHINI, G. C. [5]). Assim, alguns casos históricos, ocasionados por excesso de vibração nessas estruturas, foram observados:

1- Altas vibrações de eixos, com elevados diâmetros, excitados em determinadas faixas de velocidades, resultavam em fissuras na fundação(CHEN, H. MING et al [12]).

2- Excessos de amplitudes e deformações da fundação ocasionavam sérias falhas, quando as pás do rotor se chocavam com a carcaça do mesmo(WEIMING, LIU e NOVAK, M. [35])

3- Vibrações de uma fundação em uma refinaria de petróleo foram analisadas, onde problemas de operação próxima à ressonância agravava o desbalanço, além de uma flexibilidade anormal, ser identificada(CHEN, H. MING et al [12]).



4- Inspeção no sistema rotor excitado-fundação, revelou um modo de fundação na faixa de operação da máquina. Para solucionar o problema, medidas de reforços foram adotadas, como aumentar a base da fundação e número de pilares(CHEN, H. MING et al [12]).

1.3 Descrição do trabalho.

Nos tempos recentes, metodologias analíticas usadas para estudar o comportamento de estruturas ou sistemas mecânicos, tem sido largamente desenvolvidas(JAINSKI, T. [24]). Modelos matemáticos computadorizados tem sido largamente desenvolvidos, com objetivos de solucionar problemas de vibrações em máquinas e sua estrutura de suporte(fundação). Tais metodologias, utilizam agora modelos mais refinados (SMEJKAL, J.[33]). No entanto, estas metodologias nem sempre apresentam uma resposta rápida, devido ao elevado tempo computacional envolvido no processo, para obtenção das respostas dinâmicas.

Neste trabalho, é apresentada uma metodologia para análise do comportamento desses sistemas, rotor-suportes-fundação(ver figura 1), e a interação entre seus componentes, que envolve um tempo operacional de resposta rápido, sem no entanto ocasionar grandes perdas de informações na formulação do modelo proposto. Um modelo refinado(MEF) da fundação é descrito, onde este não considera a interação entre solo e fundação, o qual viabiliza a identificação dos parâmetros modais da fundação e, dessa forma, prevê o seu comportamento.

No capítulo 2 será descrito o estado da arte dos trabalhos publicados nesta área, onde uma revisão bibliográfica da evolução do tema foi feita, bem como considerações feitas, nestes trabalhos, pelos autores.

No capítulo 3 será descrita toda a formulação matemática, utilizada para analisar o comportamento do sistema completo, rotor-suportes-fundação, através dos métodos das impedâncias mecânicas e das coordenadas mistas, além do cálculo das funções de transferência analíticas da fundação.

No capítulo seguinte, capítulo 4, será descrita a metodologia do método dos elementos finitos(MEF), usada para obtenção das funções de transferência analíticas da fundação, com suas formulações e hipóteses para o modelo. Neste capítulo, apresenta-se ainda a formulação matemática utilizada, para a determinação dos coeficientes de proporcionalidade utilizados na obtenção da matriz de amortecimento.

No capítulo 5, as funções de transferência, determinadas no capítulo 3, serão analisadas através de técnicas de análise modal, para obtenção dos parâmetros modais da fundação.

No capítulo 6, serão apresentados os resultados numéricos, curvas de respostas em frequências e valores dos parâmetros modais, bem como a análise destes resultados, na faixa de frequência de 50 a 750 rad/s.

Finalmente, no último capítulo(capítulo 7), serão apresentadas as conclusões obtidas do presente trabalho, assim como sugestões para o desenvolvimento de futuros trabalhos nesta área.

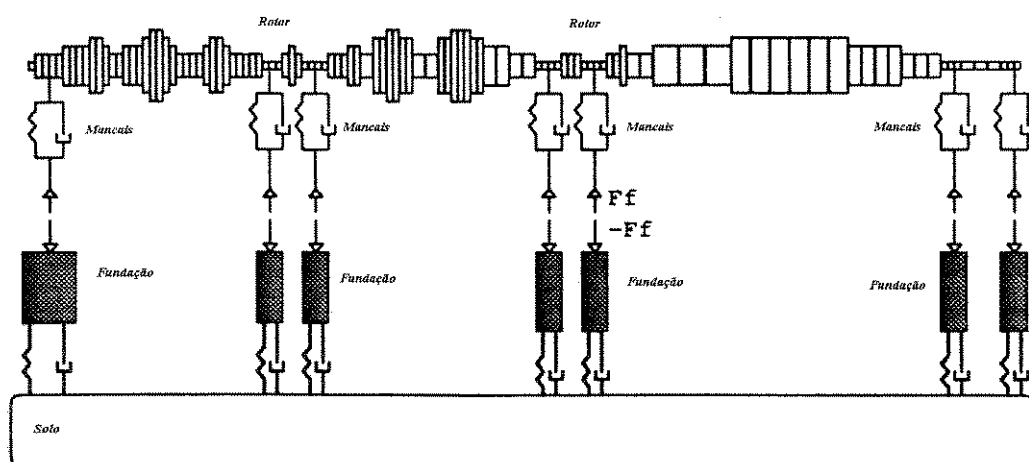


Figura 1 - Representação do sistema rotor-suportes-fundação

Capítulo 2

2. Revisão da Literatura

2.1 Introdução

Este capítulo descreve o estado da arte dos trabalhos na área de dinâmica de rotores e fundações, onde o estudo da influência da estrutura de concreto(fundação) no comportamento do sistema completo rotor-suportes-fundação é analisado. Para análise da evolução dos trabalhos publicados nessa área, foi feita uma pesquisa bibliográfica abrangendo o período de 1968 a 1996, onde o tema da pesquisa foi abordado.

Na década de sessenta, apesar da maior parte das fundações serem constituídas de um grande número de pilares encravados no solo, métodos de solução consideravam, para efeito de cálculo, um único pilar(rígido ou flexível) com carregamento igual ao do grupo. Assim a interação entre os pilares do grupo não eram analisadas. No entanto, os primeiros conceitos da teoria da elasticidade já eram utilizados e mais tarde, estendidos para analisar o comportamento do grupo de pilares(O'NEILL, M.W., DOBRAY, R. [29]) levando-se em consideração, agora, a interação entre os mesmos.

Na década seguinte, com o uso da teoria da elasticidade como ferramenta para analisar o comportamento de estruturas flexíveis, as soluções obtidas eram muito complexas e, devido as limitações técnicas, a influência do comportamento da estrutura era irrelevante, de forma que a maior parte dos modelos propostos considerava a fundação como uma estrutura rígida, onde as propriedades modais da estrutura não eram analisadas. A partir de 1980 até 1990,

grande parte dos modelos propostos já incorporava os parâmetros modais da fundação e alguns métodos de solução para o estudo do comportamento da estrutura e sua influência na velocidade crítica (CAPPELI, M. et al [7]) flexional do eixo foram propostos. Além de um melhor refinamento dos modelos, nesses trabalhos ainda eram propostos vários métodos de identificação que eram acompanhados do desenvolvimento de softwares (CURAMI, A., PIZZIGONI, B. [14]) oferecendo uma análise mais apurada do comportamento do sistema e melhor suporte para o refinamento dos modelos.

Nos anos 90 os modelos agora propostos, ainda mais refinados, consideram não só o efeito da influência da fundação (rígida ou flexível) mas também propõe um estudo do comportamento entre fundação e solo. Métodos de cálculos analíticos para identificação dos parâmetros modais são desenvolvidos onde a covalidação experimental é feita.

2.2 Desenvolvimento

Os turbo-geradores e todas as máquinas em geral, sujeitas a trabalhos contínuos, devem assegurar uma alta confiabilidade (CURAMI, A. et al [15]). Logo, a importância de conhecer o comportamento dinâmico de seus componentes, bem como a interação entre eles, é extremamente relevante. Assim sendo, os primeiros trabalhos propostos em 1975 para o estudo da interação entre estrutura e rotor esbarravam em grandes dificuldades operacionais.

Com o desenvolvimento computacional, métodos mais refinados de cálculos, para o estudo do comportamento dinâmico da fundação, foram propostos (COSSALTER, V., DALIO, M. [13]), entre eles o método das impedâncias mecânicas da fundação. Os primeiros trabalhos com a aplicação do método surgiram na década de 80 e, na década seguinte, um maior número de trabalhos consagra definitivamente o método. Uma abordagem cronológica dos trabalhos é descrita a seguir.

Em 1968, POULOS, H.G. [30], utilizando a teoria da elasticidade, analisa o comportamento de um pilar simples e, em seguida, estende esta teoria para estudar o

comportamento dinâmico de um grupo de pilares considerando ainda a interação entre os mesmos.

Para superar as limitações das técnicas empregadas em análise modal, que envolviam alto custo operacional quando se tratava de fundações para máquinas de grande porte, SLONE, E. e McKEEVER, B.[34]propuseram uma solução analítica geral para eliminar essas limitações, que consistia na análise da transformada de Laplace, capaz de analisar as funções de transferência medidas da estrutura no plano de Laplace. Tal solução computacional não necessitava, a priori,, do conhecimento das propriedades modais da estrutura analisada.

Em 1978, DIANA, G. e BACHSCHMID, N.[21] propuseram um método de cálculo para o estudo da interação entre o eixo de uma bomba centrífuga e sua fundação em concreto. A influência da fundação na determinação da velocidade crítica do eixo é determinante para se prever o comportamento do rotor, assim sendo, as forças exercidas pela fundação sobre o rotor, foram descritas em função da velocidade de rotação do eixo e das impedâncias mecânicas da fundação em relação aos mancais. Dessa forma, quando não se dispõe de um modelo numérico adequado para a representação da estrutura, é possível encontrar a impedância mecânica experimental, excitando a estrutura nos pontos de conexão com o rotor(mancais).

Em 1980, ABOUL-ELLA, F. e NOVAK, M.[1] propuseram um modelo simples para descrever o comportamento de fundações compostas de um grande número de elementos. Estas fundações eram suportadas por um grande número de pilares encravados no solo, cujos efeitos influenciavam na resposta dinâmica da fundação e dos rotores. O sistema completo era dividido em subsistemas analisados individualmente, onde a matriz de rigidez da fundação era obtida através da técnica de elementos finitos. As funções de impedância representavam a fundação completa, incluindo o efeito da interação solo-pilar-fundação.

Em 1982, CHEN, H.MING et al.[12] utilizam-se de ferramentas computacionais para calcular as frequências naturais do sistema amortecido, bem como as frequências naturais da fundação, analisando o sistema completo ou separadamente. A fundação consistia de um bloco de concreto assentado sobre o solo ou sobre pilares. Simples formulação era usada para estimar os valores de rigidez e amortecimento do solo e dos pilares. Em seguida, foram

utilizados dois critérios (critérios da frequência e das amplitudes) para localizar as maiores frequências naturais do sistema, na faixa de velocidade de operação da máquina. Ainda neste ano ANEJA, I.A.[2] estuda o efeito de fundações flexíveis para sistemas com grandes unidades de turbogeradores. Para a análise dos componentes da fundação por elementos finitos foi utilizado o programa NASTRAN(Nasa STRuctural ANalysis). Os dados de entrada para o programa, assim como o amortecimento, foram obtidos do modelo físico.

Em 1985, CURAMI, A. e VANIA, A.[16] utilizam técnicas de análise modal para determinar os parâmetros modais da fundação, analisando as funções de transferência da estrutura, obtida do modelo por elementos finitos. O amortecimento da fundação é considerado do tipo proporcional.

Em 1987, CHELI, F. et al.[10] apresenta uma metodologia para o cálculo dos parâmetros modais da fundação, onde os deslocamentos da fundação são descritos em coordenadas principais, representando a fundação através de sua matriz de impedâncias mecânicas, a qual relaciona os deslocamentos dos nós de conexão (mancais) e a força transmitida pela fundação a estes nós. Dessa foram identificados os parâmetros modais da fundação(massa, rigidez e amortecimento), permitindo a simulação do comportamento do sistema completo rotor-suportes-fundação.

Em 1988, DIANA, G. et al.[20] calcula os parâmetros modais da fundação através de medições das vibrações nos mancais (estrutura de suporte) na faixa de operação da máquina. Os parâmetros modais foram calculados minimizando as funções derivadas da resposta experimental e analítica do sistema completo. A fundação também é representada através da matriz de impedâncias mecânicas.

Em 1990, ZHENG, ZHAO-CHANG e WU, NAN-PING[36], utilizando técnicas modais, estudaram o comportamento dinâmico do sistema rotor-fundação-solo. Utilizando-se da teoria elástica para determinar os parâmetros do solo e considerando ainda a fundação flexível, assumiram um amortecimento proporcional, onde os parâmetros de rigidez e amortecimento para a fundação também abrangiam os parâmetros de rigidez e amortecimento do solo e pilares de sustentação da fundação.

Em 1992, CHELI, F. et al.[11] enfatiza o cálculo dos parâmetros modais da fundação (Fator de amortecimento, frequências naturais e massas generalizadas), utilizando dados do rotor e dos suportes. A matriz de impedâncias mecânicas da fundação era calculada em função dos seus parâmetros modais, os quais eram determinados através de técnicas de identificação. E por fim, a matriz de impedâncias mecânicas era utilizada no cálculo da resposta em frequência do rotor. As respostas, analítica e experimental do rotor, eram comparadas.

Em 1995, FENG, N.S. e HAHN, E.J.[22] apresentam um método numérico para cálculo dos parâmetros da fundação utilizando, além das características dos mancais, as medidas dos deslocamentos entre rotor e fundação nos pontos selecionados. Não necessitando, portanto, de um modelo refinado para o rotor além do conhecimento da distribuição do desbalanceamento.

Em 1995, WEIMING, L. e NOVAK, M.[35] propõem um modelo matemático mais completo através de um método híbrido. Além dos componentes do sistema (carcaça da turbina e pilares de sustentação) são incorporados ao modelo os parâmetros do solo.

Capítulo 3

3. Métodos das Impedâncias Mecânicas e Coordenadas mistas.

3.1 Introdução.

Neste capítulo será descrito toda a metodologia que envolve o método das impedâncias mecânicas da fundação e coordenadas mistas. A modelagem matemática consiste em analisar o sistema completo rotor-suportes-fundação como dois subsistemas separadamente (WEIMING, LIU, NOVAK, M.[35]), subsistema rotor-suportes e fundação. Dessa forma, cada subsistema é analisado separadamente e a resposta do sistema completo é obtida unindo-se as respostas dinâmicas dos subsistemas. O efeito da fundação sobre o rotor pode modificar consideravelmente o comportamento dinâmico do sistema. Assim sendo, o efeito da fundação sobre o rotor é estudado descrevendo-se a fundação em função de sua impedância mecânica ou de seus modos próprios mais significativos. Para esta análise, a função de transferência do modelo numérico é determinada, e em seguida, aplicando-se técnicas de análise modal (BROWN,D.L.[2]) os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento são determinados.

3.2 Equação de movimento para o sistema rotor-suportes-fundação .

3.2.1 Equação de movimento para o sistema rotor-suportes em coordenadas físicas.

Considerando a subestrutura rotor-suportes, composta de eixo e mancais, a equação de movimento para esse subsistema, na forma matricial, é descrita como:

$$\begin{bmatrix} M_{rr} & M_{rf} \\ M_{fr} & M_{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_r \\ \ddot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{rr} & R_{rf} \\ R_{fr} & R_{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rf} \\ K_{fr} & K_{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_r \\ x_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_o \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_f \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Sendo :

$M_{ij} \rightarrow$ Matriz de massa do rotor e dos suportes.

$R_{ij} \rightarrow$ Matriz de amortecimento do rotor e dos suportes.

$K_{ij} \rightarrow$ Matriz de rigidez do rotor e dos suportes.

$x_r \rightarrow$ Coordenadas do rotor.

$x_f \rightarrow$ Coordenadas dos nós de conexão entre rotor e fundação.

$F_o \rightarrow$ Força externa devido ao desbalanceço.

$F_f \rightarrow$ Força transmitida pela fundação ao rotor através dos nós de conexão.

Na equação (3.1), as forças transmitidas entre rotor e suportes (F_f) são incógnitas e podem ser expressa em termos dos deslocamentos relativos entre rotor e fundação, utilizando a seguinte aproximação modal:

$$X_f = [\Phi] \cdot q \quad (3.2)$$

Sendo:

$q \rightarrow$ Vetor das coordenadas principais.

$[\Phi] \rightarrow$ Matriz modal ou matriz dos modos próprios da fundação.

A matriz modal $([\Phi])$, é determinada da equação de movimento da fundação, descrita em coordenadas físicas, através de técnicas clássicas de análise modal, descritas no capítulo 5.

3.2.2 Equação de movimento da fundação em coordenadas físicas.

Descrevendo a equação de movimento, somente para a fundação, temos:

$$[M_s] \cdot \ddot{X}_f + [R_s] \cdot \dot{X}_f + [K_s] \cdot X_f = F_f(t) \quad (3.3)$$

Sendo:

$[M_s]$ e $[K_s] \rightarrow$ As matrizes de massa e rigidez da fundação, obtidas através da discretização do modelo pela técnica de elementos finitos.

$X_f \rightarrow$ Vetor dos deslocamentos dos nós da fundação.

$[R_s] \rightarrow$ É a matriz de amortecimento, obtida a partir da matriz de massa e rigidez.

A determinação das matrizes de massa e rigidez, será demonstrada no capítulo subsequente (capítulo 4). A matriz de amortecimento $([R_s])$ da estrutura, é descrita em função das matrizes de massa e rigidez (CURAMI, A., VANIA, A. [16]) e também será descrita no capítulo 4.

Considerando um amortecimento viscoso proporcional $([R_s])$, o amortecimento da estrutura pode ser descrito em função das matrizes de massa e rigidez.

$$[R_s] = \alpha[M_s] + \beta[K_s] \quad (3.4)$$

Sendo os coeficientes α e β , calculados através de uma função de minimização (CAVALCA, K. L. [8]) descrita no capítulo 4.

A equação (3.3) é resolvida no domínio da frequência, assumindo uma força de excitação harmônica,

$$F_f = \{F_{f0}\} \cdot e^{i\Omega_e t} \quad (3.5)$$

sendo $\{F_{fo}\}$ um vetor unitário, cujas componentes são nulas, exceto aquela de valor unitário, correspondente a um genérico grau de liberdade e Ω_e é a frequência de excitação.

Sendo a resposta da estrutura proporcional a excitação, então os deslocamentos dos nós de conexão da fundação são descritos como:

$$X_f = \{x_{fo}\} \cdot e^{i\Omega_e t} \quad (3.6)$$

Calculando-se as derivadas dessa última equação, e substituindo estas derivadas juntamente com a equação (3.5), na equação de movimento da fundação, equação (3.4), temos:

$$[M_s] \cdot \{x_{fo}\} \cdot (\Omega_e)^2 + [R_s] \cdot \{x_{fo}\} \cdot (i\Omega_e) + [K_s] \cdot \{x_{fo}\} = \{F_{fo}\} \quad (3.7a)$$

$$(-\Omega_e^2 [M_s] + i\Omega_e [R_s] + [K_s]) \cdot \{x_{fo}\} = \{F_{fo}\} \quad (3.7b)$$

Esta última equação é a função de resposta em frequência da fundação. Da função de resposta em frequência, são determinados os parâmetros modais da estrutura (frequências naturais, fatores de amortecimento e massas generalizadas). Esses parâmetros são determinados utilizando técnicas modais, que serão descritas no capítulo 5.

3.2.3 Equação de movimento da fundação em coordenadas principais.

Determinada a matriz modal, as forças da fundação (F_f) serão obtidas utilizando Lagrange e, quando substituídas na equação (3.1), determinarão a equação de movimento para o sistema completo.

Partindo-se da equação de Lagrange (DIANA, G. et al [20]) para sistemas dissipativos, a equação de movimento para a fundação em coordenadas principais é descrita como:

$$\begin{bmatrix} m_f \end{bmatrix} \cdot \ddot{q} + \begin{bmatrix} r_f \end{bmatrix} \cdot \dot{q} + \begin{bmatrix} k_f \end{bmatrix} \cdot q = -[\Phi]^t F_f \quad (3.8)$$

Sendo:

$\begin{bmatrix} m_f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r_f \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} k_f \end{bmatrix} \rightarrow$ São matrizes diagonais (Jr., ROY R. CRAIG[25]) de massa, amortecimento e rigidez da fundação respectivamente.

$[\Phi]^t \rightarrow$ Transposta da matriz modal

Considerando que, o número de modos da estrutura é igual ao número de graus de liberdade associados aos suportes, então a matriz modal é quadrada (CAVALCA, K.L [8]), logo é possível sua inversão.

Da equação (3.2),

$$q = [\Phi]^{-1} X_f \quad (3.9)$$

Substituindo esta última equação, na equação (3.8), é possível descrever o vetor das forças de conexão, em função das coordenadas físicas.

$$[\Phi']^{-1} \begin{bmatrix} m_f \end{bmatrix} [\Phi]^{-1} \ddot{X}_f + [\Phi']^{-1} \begin{bmatrix} r_f \end{bmatrix} [\Phi]^{-1} \dot{X}_f + [\Phi']^{-1} \begin{bmatrix} k_f \end{bmatrix} [\Phi]^{-1} X_f = -F_f \quad (3.10)$$

Esta última equação estabelece a relação entre, os deslocamentos dos nós de conexão (X_f) da fundação e a força transmitida ao rotor (F_f) através desses nós. A equação (3.10), pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} M_f \end{bmatrix} \cdot \ddot{X}_f + \begin{bmatrix} R_f \end{bmatrix} \cdot \dot{X}_f + \begin{bmatrix} K_f \end{bmatrix} X_f = -F_f \quad (3.11)$$

Sendo:

$$\begin{bmatrix} M_f \end{bmatrix} = [\Phi']^{-1} \cdot \begin{bmatrix} m_f \end{bmatrix} \cdot [\Phi]^{-1} \quad (3.12a)$$

$$\begin{bmatrix} R_f \end{bmatrix} = [\Phi']^{-1} \cdot \begin{bmatrix} r_f \end{bmatrix} \cdot [\Phi]^{-1} \quad (3.12b)$$

$$\begin{bmatrix} K_f \end{bmatrix} = [\Phi']^{-1} \begin{bmatrix} k_f \end{bmatrix} \cdot [\Phi]^{-1} \quad (3.12c)$$

A equação para o sistema completo, rotor-suportes-fundação, na forma matricial, é obtida substituindo a equação (3.11) na equação (3.1).

$$\begin{bmatrix} M_{rr} & M_{rf} \\ M_{fr} & M_{ff} + M_f \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_r \\ \ddot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{rr} & R_{rf} \\ R_{fr} & R_{ff} + R_f \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rf} \\ K_{fr} & K_{ff} + K_f \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_r \\ x_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.13a)$$

A equação de movimento para o sistema completo pode ser escrita como:

$$[M^*]\ddot{X} + [R^*]\dot{X} + [K^*]X = F^* \quad (3.13b)$$

Sendo:

$$[M^*] = \begin{bmatrix} M_{rr} & M_{rf} \\ M_{fr} & M_{ff} + M_f \end{bmatrix}, [R^*] = \begin{bmatrix} R_{rr} & R_{rf} \\ R_{fr} & R_{ff} + R_f \end{bmatrix} \text{ e } [K^*] = \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rf} \\ K_{fr} & K_{ff} + K_f \end{bmatrix}$$

$$F^* = \begin{Bmatrix} F_r \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ e } X = \begin{Bmatrix} x_r \\ x_f \end{Bmatrix}$$

3.3 Método das impedâncias mecânicas da fundação.

3.3.1 Introdução.

O efeito da fundação sobre o rotor, pode modificar consideravelmente o comportamento dinâmico do sistema, assim sendo, a fundação pode ser representada, no sistema completo, em função de suas impedâncias mecânicas (CHELI, F. et al[10]). Assim, determinados todos os parâmetros da fundação, obtidos da resposta em frequência (equação (3.7)), a matriz de flexibilidade é obtida e, invertendo-se esta matriz, obtêm-se a matriz das impedâncias mecânicas da fundação.

3.3.2 Determinação da matriz de flexibilidade.

Para determinar a solução da equação (3.13), é necessário representar a fundação em função de sua impedância mecânica, considerando ainda, uma força de excitação harmônica aplicada a um determinado nó. Então, a equação (3.13), será resolvida através da análise da resposta em frequência.

Considerando uma força de excitação harmônica do tipo:

$$F_r = \begin{Bmatrix} F_{ro} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot e^{i\Omega_e t} \quad (3.14)$$

Sendo:

$\Omega_e \rightarrow$ Frequência de excitação.

Como a resposta da estrutura é proporcional a excitação, então os deslocamentos dos nós de conexão da fundação são descritos como,

$$X_f = \{x_{fo}\} \cdot e^{i\Omega_e t} \quad (3.15)$$

e as forças transmitidas pelos suportes, nos pontos de conexão com a estrutura.

$$F_f = \{f_{fo}\} \cdot e^{i\Omega_e t} \quad (3.16)$$

Para uma estrutura elástica, a matriz de flexibilidade pode ser representada como a razão de proporcionalidade entre, os elementos do vetor dos deslocamentos (x_{fo}) e os elementos do vetor das forças (F_{fo}) (Jr.,ROY R. CRAIG[25]).

$$[H(\Omega_e, p)] = -\{x_{fo}\} \cdot \{F_{fo}\}^{-1} \quad (3.17)$$

Sendo, $[H(\Omega_e, p)]$ a matriz de flexibilidade da fundação e p são os parâmetros modais da fundação.

Substituindo as equações (3.15) e (3.16), na equação (3.11) para a fundação:

$$-\Omega_e [M_f] \cdot \{x_{fo}\} + i\Omega_e [R_f] \cdot \{x_{fo}\} + [K_f] \cdot \{x_{fo}\} = -\{F_{fo}\} \quad (3.18)$$

A matriz de flexibilidade é obtida substituindo esta última equação na equação (3.17).

$$[H(\Omega_e, p)] = -\{x_{fo}\} \cdot \left([\Phi^t]^{-1} (-\Omega_e^2 \cdot [m_f] + i\Omega_e [r_f] + [k_f]) \cdot [\Phi]^{-1} \{x_{fo}\} \right)^{-1} \quad (3.19a)$$

$$[H(\Omega_e, p)] = -[\Phi^t] \cdot [\Phi] \cdot \left(-\Omega_e^2 \cdot [m_f] + i\Omega_e [r_f] + [k_f] \right)^{-1} \quad (3.19b)$$

Cada termo, desta última equação, é chamado de função de transferência ou função de resposta em frequência e pode ser escrito como (DIANA, G. et al [19]):

$$h_{kj} = \sum_{i=1}^N \frac{X_k^i X_j^i}{-\Omega_e^2 \cdot m_i + i\Omega_e r_i + k_i} \quad (3.20)$$

Sendo :

$h_{kj} \rightarrow$ Elementos da matriz de flexibilidade

$X_k^i, X_j^i \rightarrow$ Componentes dos nós k e j relativas ao i -ésimo modo de vibrar da estrutura.

m_i, r_i e $k_i \rightarrow$ Parâmetros modais de massa, amortecimento e rigidez do i -ésimo modo.

$\Omega_e \rightarrow$ Frequência de excitação.

$N \rightarrow$ Número de modos de vibrar.

A matriz de flexibilidade também pode ser expressada em função dos parâmetros modais.

$$h_{kj} = \sum_{i=1}^N \frac{X_k^i X_j^i}{m_i (\omega_i^2 - \Omega_e^2 + 2i\zeta_i \omega_i \Omega_e)} \quad (3.21a)$$

$$h_{kj} = \sum_{i=1}^N \frac{X_k^i X_j^i}{m_i (\omega_i^2 - \Omega_e^2 + 2i\zeta_i \Omega_e)} \quad (3.21b)$$

Sendo:

$\omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i} \rightarrow$ Representa a i-ésima frequência natural do sistema

$\xi_i \rightarrow$ Decremento logarítmico, dado por:

$$\xi_i = \omega_i \cdot \zeta_i = \omega_i \frac{r_i}{r_{c_i}} = \omega_i \frac{r_i}{2m_i \omega_i} = \frac{r_i}{2m_i} \quad (3.22)$$

$\zeta_i \rightarrow$ Fator de amortecimento estrutural.

3.3.3 Determinação da matriz de impedâncias mecânicas da fundação.

A matriz das impedâncias da fundação é obtida invertendo-se a matriz de flexibilidade. Da equação(3.17),

$$x_{fo} = -[H(\Omega_e, p)] \cdot F_{fo} \Rightarrow F_{fo} = -[H(\Omega_e, p)]^{-1} \cdot x_{fo} = -[I(\Omega_e, p)] \cdot x_{fo} \quad (3.23)$$

sendo, $[I(\Omega_e, p)]$ a matriz das impedâncias mecânicas da fundação.

Uma vez representada a fundação, como função de sua impedância mecânica, a equação(3.23) é inserida na equação de movimento do sistema completo(equação 3.1). Dessa forma é definida a matriz elastodinâmica do sistema completo. Então, da equação (3.13b) para o sistema, temos:

$$[M^*] \ddot{X} + [R^*] \dot{X} + [K^*] X = F^* \quad (3.24)$$

Assumindo uma força de excitação harmônica do tipo :

$$F^* = \{F_o^*\} \cdot e^{i\Omega_e t} \quad (3.25)$$

Sendo,

$$F_o^* = \begin{Bmatrix} F_{ro} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{fo} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

e ainda, assumindo um deslocamento proporcional a excitação, temos:

$$X = \{x_o\} \cdot e^{i\Omega_e t} \quad (3.27)$$

Sendo:

$$\{x_o\} = \begin{Bmatrix} x_r \\ x_f \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Substituindo as derivadas, primeira e segunda, da equação (3.27) e ainda a equação (3.26), na equação para o sistema completo (equação(3.1)), a equação de movimento do sistema pode ser escrita da seguinte forma:

$$[M^*] \cdot \{x_o\} \cdot (i\Omega_e)^2 + [R^*] \cdot \{x_o\} \cdot (i\Omega_e) + [K^*] \cdot \{x_o\} = \{F_o^*\} \quad (3.29)$$

Como $\{F_o^*\}$ é descrito em função das forças, nos nós de conexão da estrutura, então, substituindo a equação (3.23) na equação(3.29), temos :

$$\{F_o^*\} = \begin{Bmatrix} F_{ro} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{fo} \end{Bmatrix} = \{F_{ro}\} - ([I(\Omega_e, p)]) \cdot \{x_{fo}\} \quad (3.30)$$

Substituindo esta última equação (3.30) na equação (3.29),

$$[M^*] \cdot \{x_o\} \cdot (i\Omega_e)^2 + [R^*] \cdot \{x_o\} \cdot (i\Omega_e) + [K^*] \cdot \{x_o\} = \{F_{ro}\} - ([I(\Omega_e, p)]) \cdot \{x_{fo}\} \quad (3.31)$$

Para $x_o = \begin{Bmatrix} x_{ro} \\ x_{fo} \end{Bmatrix}$:

$$(-\Omega_e^2 [M^*] + i\Omega_e \cdot [R^*] + [K^*] - [\bar{I}(\Omega_e, p)]) \cdot x_o = F_o \quad (3.32)$$

Sendo:

$$\left[\bar{I}(\Omega_e, p) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I(\Omega_e, p) \end{bmatrix}$$

A última equação pode ser escrita como:

$$\left[E(\Omega_e, p) \right] \cdot x_o = F_o \quad (3.33)$$

Sendo :

$\left[E(\Omega_e, p) \right] \rightarrow$ Matriz elastodinâmica do sistema completo rotor-suportes-fundação.

$F_o \rightarrow$ Vetor das forças externas aplicada ao rotor.

$x_o \rightarrow$ Vetor dos deslocamentos dos nós do rotor e da estrutura.

A equação (3.33) representa a resposta em frequência do sistema a uma força de excitação externa F_o . Esta equação pode ser escrita na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} A & B \\ \hline C & D \end{matrix} & \begin{matrix} \text{Rotor} & \\ \hline & \text{Fundação} \end{matrix} \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} X_{ro} \\ X_{fo} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} F_o \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (3.34)$$

Sendo:

$$A = -\Omega_e^2 [M_{rr}] + i\Omega_e [R_{rr}] + [K_{rr}]$$

$$B = -\Omega_e^2 [M_{rf}] + i\Omega_e [R_{rf}] + [K_{rf}]$$

$$C = -\Omega_e^2 [M_{fr}] + i\Omega_e [R_{fr}] + [K_{fr}]$$

$$D = \left(-\Omega_e^2 [M_{ff}] + i\Omega_e [R_{ff}] + [K_{ff}] \right) + \left([I(\Omega_e, p)] \right)$$

$$[I(\Omega_e, p)] = -\Omega_e^2 [M_f] + i\Omega_e [R_f] + [K_f]$$

3.4 Método das coordenadas mistas.

3.4.1 Introdução.

Devido as limitações que envolvem o método das impedâncias mecânicas(CAVALCA, K. L. [8]), entre as quais, problemas de ordem numérica quando da inversão da matriz de flexibilidade, neste item será descrito um segundo método matemático, que consiste na modificação do primeiro método com relação a matriz das impedâncias mecânicas. O método das coordenadas mistas consiste em descrever, o vetor dos deslocamentos dos nós de conexão da estrutura, como variáveis independentes a partir de uma aproximação modal(DIANA,G. et al[20]). Nessa transformação é utilizado um vetor de coordenadas mistas, físicas para o rotor e principais para a fundação, que descreve o comportamento do sistema completo. Dessa forma, somente os modos que contribuem efetivamente na resposta do sistema são considerados.

3.4.2 Determinação da matriz elastodinâmica do sistema.

Para resolver a equação de movimento do sistema completo(equação 3.13b), é definido um vetor de coordenadas mistas, utilizando a aproximação modal definida na equação(3.9).Em seguida, obtêm-se a matriz de impedâncias mecânicas da fundação em coordenadas principais, não necessitando, assim, da inversão da matriz de flexibilidade.

Então, da equação(3.1) para o sistema rotor-suportes, temos:

$$\begin{bmatrix} M_{rr} & M_{rf} \\ M_{fr} & M_{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_r \\ \ddot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{rr} & R_{rf} \\ R_{fr} & R_{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rf} \\ K_{fr} & K_{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_r \\ x_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_o \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_f \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

No entanto para resolver esta equação, é necessário uma terceira equação, pois o número de incógnitas(x_r, x_f e F_f) é maior que o número de equações. Assim sendo, as forças da fundação(F_f) serão determinadas a partir da aproximação modal descrita pela equação (3.2).

Então da equação(3.2),

$$X_f = [\Phi] \cdot q \quad (3.36)$$

e utilizando ainda, a equação de movimento da fundação descrita em coordenadas principais, equação (3.8), temos:

$$[m_f] \cdot \ddot{q} + [r_f] \cdot \dot{q} + [k_f] \cdot q = -[\Phi]^T F_f \quad (3.37)$$

Analisando a equação(3.35), as forças da fundação podem ser escritas como:

$$M_{fr} \ddot{x}_r + M_{ff} \ddot{x}_f + R_{fr} \dot{x}_r + R_{ff} \dot{x}_f + K_{fr} x_r + K_{ff} x_f = F_f \quad (3.38)$$

Substituindo esta última equação na equação (3.37),

$$[m_f] \cdot \ddot{q} + [r_f] \cdot \dot{q} + [k_f] \cdot q = -[\Phi]^T (M_{fr} \ddot{x}_r + M_{ff} \ddot{x}_f + R_{fr} \dot{x}_r + R_{ff} \dot{x}_f + K_{fr} x_r + K_{ff} x_f) \quad (3.39)$$

Como os modos de vibrar são desacoplados, então as matrizes $[m_f]$, $[r_f]$ e $[k_f]$ são matrizes diagonais(ver item 3.2.3), que contém os parâmetros modais que serão determinados no capítulo 5.

Determinadas as forças da fundação, a equação matricial para o sistema completo é obtida, substituindo-se estas forças na equação para o sistema rotor-suportes, equação (3.35).

Então, substituindo a equação(3.39) na equação (3.35):

$$\begin{bmatrix} M_r & M_r[\Phi] \\ [\Phi]^T M_r & [m_f] + [\Phi]^T M_{ff}[\Phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_r \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_r & R_r[\Phi] \\ [\Phi]^T R_r & [r_f] + [\Phi]^T R_{ff}[\Phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_r & K_r[\Phi] \\ [\Phi]^T K_r & [k_f] + [\Phi]^T K_{ff}[\Phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_r \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_o \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

Esta última equação pode ser escrita como:

$$[\overline{M}_T]\ddot{Z} + [\overline{R}_T]\dot{Z} + [\overline{K}_T]Z = \overline{F} \quad (3.41)$$

Sendo:

$$Z = \begin{Bmatrix} x_r \\ q \end{Bmatrix} \rightarrow \text{O vetor das coordenadas mistas.}$$

$$[\overline{M}_T], [\overline{R}_T] \text{ e } [\overline{K}_T] \rightarrow \text{São as matrizes de massa, amortecimento e rigidez respectivamente.}$$

$$\overline{F} = \begin{Bmatrix} F_r \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Vetor das forças externas aplicadas ao rotor.}$$

A equação(3.41) é resolvida no domínio da frequência, considerando uma força de excitação harmônica do tipo:

$$\overline{F} = F_o e^{i\Omega_e t} \quad (3.42)$$

Sendo:

$$F_o = \begin{Bmatrix} F_{ro} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Considerando ainda os deslocamentos,

$$Z = Z_o e^{i\Omega_e t} \quad (3.43)$$

Sendo:

$$Z_o = \begin{Bmatrix} x_{ro} \\ q_o \end{Bmatrix}$$

Substituindo as duas últimas equações na equação(3.41) e reorganizando os termos:

$$[\overline{M}_T] \cdot (-Z_o \Omega_e^2) + [\overline{R}_T] \cdot (Z_o i\Omega_e) + [\overline{K}_T] \cdot Z_o = F_o \quad (3.44)$$

$$(-\Omega_e^2 \cdot [\overline{M}_T] + i\Omega_e [\overline{R}_T] + [\overline{K}_T]) \cdot Z_o = F_o \quad (3.45)$$

A última equação pode ser escrita como:

$$\left[\bar{E}(\Omega_e, p) \right] Z_o = F_o \quad (3.46)$$

Sendo:

$\left[\bar{E}(\Omega_e, p) \right] \rightarrow$ Matriz elastodinâmica do sistema completo modificada.

$Z = \begin{Bmatrix} x \\ q \end{Bmatrix} \rightarrow$ Vetor amplitude vetor das coordenadas mistas.

$x_{ro} \rightarrow$ Coordenadas físicas dos deslocamentos dos nós do rotor.

$q_o \rightarrow$ Coordenadas modais associadas aos deslocamentos dos nós da estrutura.

A equação(3.46), representa a resposta em frequência do sistema a uma força de excitação F_o . Esta equação pode ser escrita na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} E \\ \text{Rotor} \end{matrix} & F \\ \hline G & \begin{matrix} H \\ \text{Fundação} \end{matrix} \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} X_o \\ q_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_o \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

Sendo:

$$E = -\Omega_e^2 [M_{rr}] + i\Omega_e [R_{rr}] + [K_{rr}]$$

$$F = \left(-\Omega_e^2 [M_{rf}] + i\Omega_e [R_{rf}] + [K_{rf}] \right) \cdot [\Phi]$$

$$G = [\Phi]^T \cdot \left(-\Omega_e^2 [M_{fr}] + i\Omega_e [R_{fr}] + [K_{fr}] \right)$$

$$H = [\Phi]^T \cdot \left(-\Omega_e^2 [M_{ff}] + i\Omega_e [R_{ff}] + [K_{ff}] \right) \cdot [\Phi] + \left([\bar{I}(\Omega_e, p)] \right)$$

Sendo $\left[\bar{I}(\Omega_e, p)\right]$ a matriz de impedâncias generalizadas,

$$\left[\bar{I}(\Omega_e, p)\right] = -\Omega_e^2 \left[m_f\right] + i\Omega_e \left[r_f\right] + \left[k_f\right] \quad (3.48)$$

Uma vez obtidos os parâmetros modais da fundação(ver capítulo 5), a fundação poderá ser representada apenas pelos modos mais significativos, presentes na faixa de frequências analisadas, independentemente do número de graus de liberdade associados aos pontos de conexão(mancais).

Capítulo 4

4. Modelagem por Elementos Finitos.

4.1 Introdução.

Neste capítulo será abordada inicialmente uma descrição do método dos elementos finitos, seus conceitos básicos, bem como sua formulação matemática. Em seguida, através deste método de análise, é feita a discretização do modelo, onde um elemento genérico é escolhido e as matrizes de massa e rigidez são determinadas para o modelo proposto. O pacote de programas ROTORTTEST é utilizado como ferramenta para esta análise.

Finalmente, a matriz de amortecimento do sistema é descrita como uma função de proporcionalidade entre as matrizes de massa e rigidez, cujos coeficientes de proporcionalidade são determinados através de uma função de minimização proposta por DIANA, G. et al [19].

4.2 Conceitos Básicos do Método dos Elementos Finitos (MEF).

O método dos elementos finitos tem sido muito utilizado no campo de estruturas mecânicas, para prever o comportamento dessas estruturas, encontrando uma solução mais simples de tal forma que esta solução se aproxime da solução exata. Esse método consiste em discretizar o sistema a partir de um elemento de geometria escolhida previamente, de acordo

com o modelo proposto. As funções de forma para o elemento são calculadas e, em seguida, é encontrada uma solução aproximada para o modelo (RAO, S.S.[32]).

4.3 Elemento de Viga Espacial.

O elemento escolhido para a discretização do modelo da estrutura de fundação em concreto, elemento de viga espacial, admite movimento de translação e rotação ao longo dos três eixos ortogonais, estando portanto sujeito à torção e à flexão. Estes elementos, homogêneos possuem 6 graus de liberdade por nó e dois nós por elemento, conforme figura 4.1. São capazes de resistir a forças axiais, momentos de flexão em relação aos 2 eixos principais da seção transversal e momentos de torção sobre seus eixos centroidais.

Para determinação das matrizes de massa e rigidez, foi assumido que o sistema de coordenadas locais (xyz) coincide com os eixos principais da seção transversal do elemento de viga espacial.

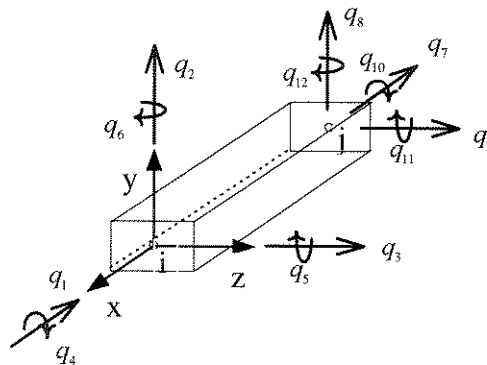


Figura 4-1 Elemento de viga espacial

4.3.1 Funções de Forma do Elemento.

Para determinar as funções de forma do elemento são admitidas aproximações para os deslocamentos, sendo estes distribuídos em quatro grupos independentes, e em seguida determinadas as funções de forma para cada grupo. A função de forma do elemento é obtida da superposição das funções de forma para cada grupo. Neste item serão determinadas as

funções de forma para o primeiro grupo. As funções de forma dos outros grupos serão determinadas no item subsequente de forma similar.

$\Rightarrow$ *Deslocamento de flexão no plano xy*

Para determinar as funções de forma do elemento no plano xy é admitida, inicialmente, uma aproximação cúbica para os deslocamentos nesse plano. Logo, sabe-se da teoria da elasticidade (GOODIER, T.[23]) que as aproximações das rotações são as derivadas primeiras dos deslocamentos. Portanto, como existem 4 deslocamentos nodais neste plano xy, a seguinte aproximação foi adotada:

$$\bar{v}_{EX}(\bar{x}) = v(x) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 x^2 + \alpha_8 x^3 \quad (4.1)$$

$$\bar{\theta}_{EX}(\bar{x}) = \theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \alpha_6 + 2\alpha_7 x + 3\alpha_8 x^2 \quad (4.2)$$

Sendo $\bar{v}_{EX}(\bar{x})$ e $\bar{\theta}_{EX}$ os valores exatos das funções, e $v(x)$ e $\theta(x)$ são as aproximações adotadas.

Para determinar os coeficientes de interpolação α_5 , α_6 , α_7 e α_8 são utilizadas as condições de contorno, definindo dessa forma a aproximação do tipo nodal.

$$\text{Para } x=0, (\text{nó } i): \quad \rightarrow \quad v(x) = q_2 \quad \theta(x) = q_6$$

$$v_i(0) = \alpha_5 + \alpha_6 0 + \alpha_7 0^2 + \alpha_8 0^3 \Rightarrow \alpha_5 = q_2 \quad (4.3)$$

$$\theta_i(0) = \alpha_6 + 2\alpha_7 0 + 3\alpha_8 0^2 \Rightarrow \alpha_6 = q_6 \quad (4.4)$$

$$\text{Para } x=l, (\text{nó } j): \quad \rightarrow \quad v(x) = q_8 \quad \theta(x) = q_{12}$$

$$v_j(l) = \alpha_5 + \alpha_6 l + \alpha_7 l^2 + \alpha_8 l^3 = q_8 \quad (4.5)$$

$$\theta_j(l) = \alpha_6 + 2\alpha_7 l + 3\alpha_8 l^2 = q_{12} \quad (4.6)$$

Sendo q_2 , q_6 , q_8 e q_{12} os deslocamentos nodais no plano xy e l é o comprimento do elemento de viga.

Resolvendo simultaneamente as equações (4.3) a (4.6), são determinados os valores dos coeficientes de interpolação α_5 , α_6 , α_7 e α_8 .

As equações (4.1) e (4.2) podem ser escritas na forma matricial,

$$\bar{v}(x)_{(1 \times 1)} = [N]_{(1 \times 4)} \bar{q}_{xy(4 \times 1)} \quad (4.7)$$

que é a forma padrão de uma aproximação por elementos finitos, sendo:

$\bar{v}(x) \rightarrow$ Vetor das funções aproximadas no plano xy.

$[N]_{(1 \times 4)} \rightarrow$ Matriz das funções de forma do elemento.

$$\bar{q}_{xy} = \begin{Bmatrix} v_i(x) \\ \theta_i(x) \\ v_j(x) \\ \theta_j(x) \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Vetor dos deslocamentos nodais de flexão no plano xy}$$

$$\text{Com } \bar{q}_{xy} = \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_6 \\ q_8 \\ q_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad [N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$$

Sendo:

$$N_1 = (2x^3 - 3lx^2 + l^3) / l^3$$

$$N_2 = (x^3 - 2lx^2 + l^2x) / l^2$$

$$N_3 = (2x^3 - 3lx^2) / l^3$$

$$N_4 = (x^3 - lx^2) / l^2$$

4.3.2 Matriz de Rigidez do Elemento no Sistema de Referência Local.

Para determinação da matriz de rigidez do elemento, é necessário obter os deslocamentos nos três grupos restantes, determinando para cada grupo a matriz de rigidez e

obtendo em seguida a matriz completa para o elemento através da superposição dessas matrizes.

Da teoria da elasticidade, sabe-se que a deformação axial é dada por:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} = [B] \bar{q}_{xy} \quad (4.8)$$

Sendo:

- $\epsilon_{xx} \text{ (1x1)}$ → Deformação axial
- u → Deslocamento axial
- $\bar{v}$ → Deslocamento transversal
- $[B]_{(1 \times 4)}$ → Matriz de deformação
- y → Distância da fibra até os eixos neutros.

Da lei de Hooke, que relaciona a tensão e a deformação, temos:

$$\bar{\sigma}_{xx} = [D]_{(2 \times 1)} \bar{\epsilon}_{xx} = [E]_{(1 \times 1)} \bar{\epsilon}_{xx} \quad (4.9)$$

Sendo:

- σ_{xx} → Tensão axial do elemento
- $[D]=[E]$ → Módulo de elasticidade do material
- $\bar{\epsilon}_{xx}$ → Deformação axial do elemento

Substituindo a equação (4.8) na equação (4.9), teremos:

$$\sigma_{xx} = [E][B] \bar{q}_{xy} \quad (4.10)$$

$$[B]_{(1 \times 4)} = -\frac{y}{l^3} \{(12x - 6l) \quad l(6x - 4l) \quad -(12x - 6l) \quad l(6x - 2l)\}$$

Através do princípio da minimização da energia potencial (PRZEMIENIECKI, J.S.[31]), a matriz de rigidez é obtida através da seguinte relação:

$$[K_{xy}^{(e)}] \tilde{q}_{xy} = \left(\int_{V^{(e)}} [B]^T [D] [B] dV \right) \tilde{q}_{xy} = E \int_0^l dx \int_A [B]^T [B] dA \quad (4.11)$$

Sendo:

$[K_{xy}^{(e)}]_{(4 \times 4)}$ → Matriz de rigidez no plano xy.

$[D] = E$ → Módulo de Elasticidade.

A → Área da seção transversal da viga.

V → Volume da viga.

Resolvendo a equação (4.11), a matriz de rigidez no plano xy é obtida:

$$[K_{xy}^{(e)}]_{(4 \times 4)} = \frac{EI_{zz}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Sendo $I_{zz} = \int_A y^2 dA$ o momento de inércia da área da seção transversal sobre o eixo z.

Repetindo o procedimento para o deslocamento de flexão no plano xz, cujos deslocamentos nodais são q_3, q_5, q_9 e q_{11} (figura 4.1), a matriz de rigidez é dada por:

$$[K_{xz}^{(e)}]_{(4 \times 4)} = \frac{EI_{yy}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Sendo:

$[K_{xz}^{(e)}]_{(4 \times 4)}$ → Matriz de rigidez no plano xz.

I_{yy} → Momento de inércia da seção transversal do elemento sobre o eixo y.

Para o deslocamento nos planos axial e torcional, é assumida uma aproximação linear e o mesmo procedimento descrito no item 4.3.1 é adotado.

$\Rightarrow$ *Deslocamento axial*

$$u(x)_{(1 \times 1)} = [N]_{(1 \times 2)} \vec{q}_x_{(2 \times 1)} \quad (4.14)$$

Sendo:

$$\vec{q}_x = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Vetor dos deslocamentos nodais}$$

Da teoria da elasticidade,

$$\vec{\sigma} = [D]_{(2 \times 1)} \vec{\epsilon} = [E]_{(1 \times 1)} \vec{\epsilon}_{xx} \quad (4.15)$$

$$\vec{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \vec{\epsilon}_{(1 \times 1)} = [B]_{(1 \times 2)} \vec{q}_x_{(2 \times 1)} \quad (4.16)$$

Através do princípio da minimização da energia potencial, a matriz de rigidez é obtida:

$$[K_{xx}^{(e)}] \vec{q}_{xx} = \left(\int_{V^{(e)}} [B]^T [D] [B] dV \right) \vec{q}_{xx} = E \int_0^l dx \int_A [B]^T [B] dA \quad (4.17)$$

Sendo:

$[K_{xx}^{(e)}]_{(2 \times 2)}$ a matriz de rigidez correspondente ao deslocamento axial

Então, a matriz de rigidez axial é escrita como:

$$[K_{xx}^{(e)}]_{(2 \times 2)} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$\Rightarrow$ *Deslocamento torcional*

$$w(x) = [N] \vec{q}_t \quad (4.19)$$

Sendo:

$$\vec{q}_t = \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_{10} \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Vetor dos deslocamentos nodais}$$

Da teoria de torção em elementos circulares e da lei de Hooke podemos descrever a torção em que o elemento está submetido e a tensão de estresse.

$$\vec{\sigma}_{\theta x} = [D]\vec{\epsilon}_{\theta x} = [G]\vec{\epsilon}_{\theta x} \quad (4.20)$$

$$\vec{\epsilon}_{\theta x} = r \frac{\partial w}{\partial x} \Rightarrow \vec{\epsilon}_{\theta x} = [B] \vec{q}_t \quad (4.21)$$

Sendo:

- $\vec{\sigma}_{\theta x}$ → Tensão axial
- $[D]=[G]$ → Matriz de cisalhamento
- $\vec{\epsilon}_{\theta x}$ → Deformação torcional
- r → Distância da fibra até o eixo centroidal do elemento
- w → Deslocamento torcional

Através do princípio da minimização da energia potencial a matriz de rigidez é obtida:

$$[K_t^{(e)}]\vec{q}_t = \left(\int_{V^{(e)}} [B]^T [D] [B] dV \right) \vec{q}_t = G \int_0^l dx \int_A r^2 [B]^T [B] dA \quad (4.22)$$

Sendo:

- G → Módulo de cisalhamento do material.
- $\int_A r^2 dA = J$ → Momento polar de inércia.
- $[K_t^{(e)}]_{(2 \times 2)}$ → Matriz de Rigidez no plano torcional.

Então, a matriz de rigidez é escrita como:

$$[K_t^{(e)}]_{(2 \times 2)} = \frac{GJ}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Finalmente, obtidas as matrizes para os diferentes conjuntos independentes dos deslocamentos, a matriz de rigidez para a viga será obtida da superposição dessas matrizes (PRZEMIENIECKI, J.S.[31]).

$$[K^{(e)}]_{(12 \times 12)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{yy}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{yy}}{l^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & \frac{4EI_{yy}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{yy}}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{zz}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{zz}}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_{yy}}{l^3} & 0 & \frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{yy}}{l^3} & 0 & \frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & \frac{2EI_{yy}}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{yy}}{l^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_{yy}}{l} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{zz}}{l} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{zz}}{l} \end{bmatrix} \quad \text{SIMÉTRICA}$$

(4.24)

4.3.3 Matriz de Massa do Elemento no Sistema de Referência Local.

A matriz de massa em coordenadas locais xyz para o elemento é obtida de forma similar a obtenção da matriz de rigidez. Logo, as mesmas funções de deslocamentos, utilizadas para formular a matriz de rigidez, são usadas para formular a matriz de massa. Portanto, do princípio do trabalho virtual (NELSON, H.D.[28]) a matriz de massa é dada por:

$$[M^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} \rho [N]^T [N] dV \quad (4.25)$$

Sendo:

$[M^{(e)}]_{(12 \times 12)} \rightarrow$ Matriz de massa da viga.

$\rho \rightarrow$ Densidade do material.

$[N]_{(12 \times 12)} \rightarrow$ Matriz das funções de forma do elemento.

$V \rightarrow$ Volume do material.

Considerando uma inércia rotatória, a matriz das funções de forma para esse elemento é dada por:

$$[N]_{(3 \times 12)} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 & 0 & N_9 & N_{10} \\ 0 & N_{11} & 0 & N_{12} & 0 & N_{13} & 0 & N_{14} & 0 & N_{15} & 0 & N_{16} \\ 0 & 0 & N_{17} & N_{18} & N_{19} & 0 & 0 & 0 & N_{20} & N_{21} & N_{22} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi & N_8 &= -N_3 & N_{15} &= -l\xi\zeta \\ N_2 &= 6(\xi - \xi^2)\eta & N_9 &= (-2\xi + 3\xi^2)l\zeta & N_{16} &= -N_{22} = (-\xi^2 + \xi^3)l \\ N_3 &= 6(\xi - \xi^2)\zeta & N_{10} &= (2\xi - 3\xi^2)l\eta & N_{18} &= -(1 - \xi)l\eta \\ N_4 &= (1 - 4\xi + 3\xi^2)l\zeta & N_{11} &= N_{17} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & N_{19} &= -N_{13} \\ N_5 &= (-1 + 4\xi + 3\xi^2)l\eta & N_{12} &= -(1 - \xi)l\zeta & N_{21} &= l\eta\xi \\ N_6 &= \xi & N_{13} &= (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l \\ N_7 &= -N_2 & N_{14} &= N_{20} = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ \xi &= \frac{x}{l} & \eta &= \frac{y}{l} & \zeta &= \frac{z}{l} \end{aligned}$$

Substituindo a equação (4.26) na equação (4.25) e integrando para todo o volume do elemento, a matriz de massa é obtida.

$$[M^{(e)}]_{(12 \times 12)} = \rho A L \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{13}{35} + \frac{6I_z}{5Al^2} & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{13}{35} + \frac{6I_y}{5Al^2} & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_x}{3A} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{11l}{210} - \frac{I_y}{10Al} & 0 & \frac{l^2}{105} + \frac{2I_y}{15A} & & & & & & & \\ 0 & \frac{11l}{210} + \frac{I_z}{10Al} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{105} + \frac{2I_z}{15A} & & & & & & \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & & & & & \\ 0 & \frac{9}{70} + \frac{6I_z}{5Al^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{13l}{420} - \frac{I_z}{10Al} & 0 & \frac{13}{35} + \frac{6I_z}{5Al^2} & & & & \\ 0 & 0 & \frac{9}{70} - \frac{6I_y}{5Al^2} & 0 & \frac{13l}{420} - \frac{I_y}{10Al} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35} + \frac{6I_y}{5Al^2} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_x}{6A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_x}{3A} & & \\ 0 & 0 & \frac{13l}{420} - \frac{I_y}{10Al} & 0 & -\frac{l^2}{140} - \frac{I_y}{30A} & 0 & 0 & 0 & \frac{11l}{210} + \frac{I_z}{10Al} & 0 & \frac{l^2}{105} + \frac{2I_y}{15A} & \\ 0 & -\frac{13l}{420} + \frac{I_z}{10Al} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{140} - \frac{I_z}{30A} & 0 & -\frac{11l}{210} - \frac{I_z}{10Al} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{105} + \frac{2I_z}{15A} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Sendo os termos I_{yy} e I_{zz} a inércia rotatória e os termos com J_x representam a inércia torcional do elemento.

4.4 Matriz de Transformação de Coordenadas.

As matrizes encontradas no item anterior dizem respeito ao sistema de coordenadas locais. No entanto, nem sempre tais coordenadas do elemento coincidem com as coordenadas globais do sistema XYZ (coordenadas dos deslocamentos dos nós)(KRÄMER, E.[26]). Logo estas matrizes devem ser transformadas para o sistema de coordenadas globais. Esta transformação é feita definindo as coordenadas locais de cada nó da viga (figura 4.2) no sistema de coordenadas globais.

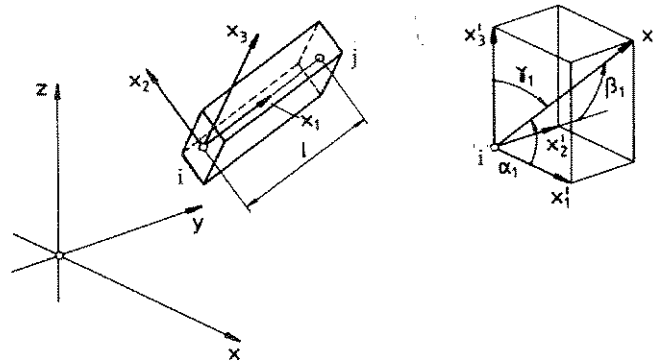


Figura 4.2: Elemento para a transformação de coordenadas

Considerando que as coordenadas locais dos deslocamentos x_1 , x_2 e x_3 do nó i , no sistema de coordenadas global, é descrito por:

$$x_1 = x'_1 \cos \alpha_1 + x'_2 \cos \beta_1 + x'_3 \cos \gamma_1 \quad (4.28)$$

Sendo:

x'_1, x'_2 e $x'_3 \rightarrow$ São as componentes do vetor x_1 em um sistema de coordenadas paralelo ($x'y'z'$) ao sistema de coordenadas global XYZ.

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \rightarrow$ São os ângulos que o vetor x_1 forma com os eixos $x'y'z'$ respectivamente.

E ainda utilizando os ângulos α_2 , β_2 , e γ_2 para as coordenadas dos deslocamentos locais x_2 e α_3 , β_3 , e γ_3 para x_3 , o vetor x é descrito no sistema de coordenadas global.

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Bmatrix} = T_0 x' \quad (4.29)$$

Sendo:

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Vetor deslocamento no sistema de referência local.}$$

$$x' = \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Vetor deslocamento no sistema de referência global.}$$

$$T_0 \rightarrow \text{Matriz de transformação de coordenadas.}$$

Os elementos da matriz T_0 são as direções dos cossenos das coordenadas x_1 , x_2 e x_3 .

Considerando a viga reta, então as coordenadas do nó j são paralelas a i e, ainda, assumindo as rotações muito pequenas, a matriz T_0 pode ser expandida para a viga completa.

$$T_{TOTAL} = \begin{bmatrix} T_0 & & & \\ & T_0 & & \\ & & T_0 & \\ & & & T_0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Sendo:

$$T_{TOTAL} \rightarrow \text{Matriz de transformação de coordenadas do sistema local para global, para a viga.}$$

4.5 Matrizes de Massa e Rigidez no Sistema de Coordenadas Global.

Finalmente, determinada a matriz de transformação de coordenadas, as matrizes estruturais do sistema completo são redefinidas, utilizando a mesma transformação, para determinar as forças no sistema de coordenadas globais.

Aplicando, desta forma, a mesma transformação para as forças, temos:

$$f = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = [T_0] \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \end{Bmatrix} = T_0 f' \quad (4.31)$$

Sendo:

$$f = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Vetor das forças no sistema de referência local.}$$

$$f' = \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Vetor das forças no sistema de referência global.}$$

Substituindo as equações (4.29) e (4.31) na equação que define a força elástica, e pré multiplicando T_0^T ,

$$f = Kx \Rightarrow T_0^T T_0 f' = T_0^T K T_0 x' \Rightarrow f' = k' x' \quad (4.32)$$

Sendo :

$K \rightarrow$ Matriz de rigidez no sistema de referência local.

$T_0^T \rightarrow$ Transposta da matriz de transformação.

$k' = T_0^T K T_0 \rightarrow$ Matriz de rigidez no sistema de referência global.

Então, expandindo a matriz de rigidez para a viga completa:

$$K'_{TOTAL} = T_{TOTAL}^T K_{TOTAL} T_{TOTAL} \quad (4.33)$$

Sendo :

K'_{TOTAL} → Matriz de rigidez para a viga completa com relação ao sistema de referência global.

K_{TOTAL} → Matriz de rigidez para a viga completa com relação ao sistema de referência local.

T_{TOTAL}^T → Transposta da matriz de transformação de coordenadas da viga.

4.6 Matriz de Massa Equivalente.

Em alguns casos de estrutura de suporte, a presença de um corpo rígido conectado à fundação influencia bastante na resposta do sistema(DIANA, G. et al [19]). Assim sendo, elementos como a carcaça da turbina e equipamentos auxiliares são anexados as vigas da fundação e são considerados como corpos rígidos. Dessa forma, os seus deslocamentos são expressos em termos dos deslocamentos da viga. Assim, a contribuição de inércia não é negligenciada e é descrita no sistema de coordenadas global, através da relação:

$$[M_E] = [T_E]^T [M] [T_E] \quad (4.34)$$

Sendo :

$$[T_E]_{(6 \times 6)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \zeta' & -\eta' \\ 0 & 1 & 0 & \zeta' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \eta' & -\xi' & \xi' \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad [M_E]_{(6 \times 6)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{array} \right]$$

$[M_E]$ → Matriz de Massa Equivalente no sistema de referência global.

$[T_E]^T$ → Transposta da matriz de transformação de coordenadas.

$[M]$ → Matriz de Massa relativa ao centro de gravidade do corpo no sistema de referência local.

ζ', η' e $\xi' \rightarrow$ São as coordenadas do centro de gravidade do corpo no sistema de referência local.

$m \rightarrow$ Massa total do corpo rígido.

I_{xx}, I_{yy} e $I_{zz} \rightarrow$ Momento polar de inércia do corpo rígido com relação aos três eixos principais.

$I_{xy} = I_{yx}, I_{yz} = I_{zy}$ e $I_{zx} = I_{xz} \rightarrow$ São os produtos de inércia do corpo rígido.

Da equação (4.34) a matriz de massa equivalente pode ser escrita como:

$$[M_E]_{(6 \times 6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & m\zeta' & -m\eta' \\ 0 & 1 & 0 & -m\zeta' & 0 & m\xi' \\ 0 & 0 & 1 & m\eta' & -m\xi' & 0 \\ 0 & -m\zeta' & m\eta' & I_{xx} + m(\eta'^2 + \zeta'^2) & -I_{xy} - m\xi'\eta' & -I_{xz} - m\xi'\zeta' \\ m\zeta' & 0 & -m\xi' & -I_{yx} - m\eta'\xi' & I_{yy} + m(\zeta'^2 + \xi'^2) & -I_{yz} - m\eta'\zeta' \\ -m\eta' & m\xi' & 0 & -I_{zx} - m\zeta'\xi' & -I_{zy} - m\zeta'\eta' & I_{zz} + m(\xi'^2 + \eta'^2) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Esta matriz deve ser somada, termo a termo, à matriz de massa da estrutura, nos nós onde se encontram as massas concentradas.

4.7 Matriz de Amortecimento.

Após determinar todas as matrizes estruturais para o elemento de viga, as matrizes de massa $[M_s]$ e rigidez $[K_s]$ da fundação são montadas, segundo as técnicas usuais (BATHE, KLAUS-JÜRGEN [4]), obedecendo as condições de restrições da estrutura. Logo, a equação de movimento para a estrutura é escrita como:

$$[M_s]\ddot{x}_f + [R_s]\dot{x}_f + [K_s]x_f = F_f(t) \quad (4.36)$$

Sendo :

$[M_s] \rightarrow$ Matriz de massa da fundação.

$[R_s] \rightarrow$ Matriz de amortecimento da fundação.

$[K_s] \rightarrow$ Matriz de rigidez da fundação.

$x_f \rightarrow$ Vetor dos deslocamentos dos nós da fundação.

$F_f(t) \rightarrow$ Vetor das forças de excitação aplicadas ou transmitidas à fundação.

Para determinar a matriz de amortecimento, foi assumido um amortecimento proporcional, sendo a matriz de amortecimento descrita em função das matrizes de massa e rigidez (BROWN, D.L.[6]). Logo, a matriz de amortecimento é descrita da seguinte forma:

$$[R_s] = \alpha[M_s] + \beta[K_s] \quad (4.37)$$

Sendo α e β constantes.

Usando a transformação linear :

$$x_f = [\phi]q \quad (4.38)$$

Sendo :

$[\phi] = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$ a matriz dos autovetores do sistema ou matriz modal.

$q = \{ q_1, \dots, q_n \}$ é o vetor das coordenadas principais.

Substituindo esta última equação na equação (4.36) e multiplicando por $[\phi]^T$ temos :

$$[\phi]^T [M_s][\phi]\ddot{q} + [\phi]^T [R_s][\phi]\dot{q} + [\phi]^T [K_s][\phi]q = [\phi]^T F_f(t) \quad (4.39)$$

e chamando,

$$M^* = [\phi]^T [M_s][\phi], R^* = [\phi]^T [R_s][\phi], K^* = [\phi]^T [K_s][\phi] \text{ e } f^* = [\phi]^T F_f(t) ,$$

a equação (4.39) pode ser escrita da seguinte forma:

$$M^*\ddot{q} + R^*\dot{q} + K^*q = f^*(t) \quad (4.40)$$

Sendo M^*, R^* e K^* respectivamente, as matrizes de massa, rigidez e amortecimento diagonalizadas por $[\phi]$.

Se $[\phi]$ diagonaliza as matrizes (CURAMI, A., VANIA, A. [16]), então das propriedades dos autovetores ortogonais a normalização em relação à matriz de massa:

$$M^* = [\phi]^T [M_s] [\phi] = [I] \quad \text{e} \quad (4.41a)$$

$$K^* = [\phi]^T [K_s] [\phi] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \omega_i^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (4.41b)$$

Então, a equação (4.37) pode ser escrita como:

$$[\phi]^T [R_s] [\phi] = \alpha [\phi]^T [M_s] [\phi] + \beta [\phi]^T [K_s] [\phi] \quad (4.42)$$

$$r_{eq} = \alpha [I] + \beta [\omega_i^2] \quad (4.43)$$

Sendo :

r_{eq_i} → Coeficiente de amortecimento equivalente do i-ésimo modo.

$[I]$ → Matriz identidade.

$[\omega_i^2]$ → Matriz diagonal, cujos elementos são as frequências próprias do sistema não amortecido.

A equação (4.40) representa um sistema de equações desacopladas, então:

$$m_K^* \ddot{q} + r_K^* \dot{q} + k_K^* q = f_K^*(t) \quad \text{Sendo } K = 1, 2, \dots, n \quad (4.44)$$

representa a equação de movimento de um oscilador simples e os termos m_K^*, r_K^* e k_K^* representam a massa, amortecimento e rigidez generalizados para o k-ésimo modo.

Dividindo a equação (4.44) por m_K^* e por analogia da equação (4.43),

$$\ddot{q}_K + r_{eq_K} \dot{q}_K + \omega_K^2 q_K = g_K(t) \quad (4.45)$$

com,

$$r_{eq_K} = \frac{r_K^*}{m_K^*} = \alpha + \beta \omega_K^2, \quad \omega_K = \sqrt{\frac{k_K^*}{m_K^*}} \quad e \quad g_K(t) = \frac{1}{m_K^*} f_K^*(t) \quad (4.46)$$

Sendo :

r_{eq_K} → Coeficiente de amortecimento para o k-ésimo modo.

ω_K → Frequências naturais.

Dessa forma, o sistema de n-graus de liberdade pode ser analisado como n sistemas de 1 grau de liberdade.

4.7.1 Determinação dos Coeficientes α e β .

Para determinar os coeficientes, a equação (4.45) que representa um sistema com um grau de liberdade em coordenadas principais é analisada, onde não existe diferença do ponto de vista analítico entre r_{eq_K} e r para o sistema de um grau de liberdade. Dessa forma, analisando o sistema de um grau de liberdade e aplicando um método de minimização (cálculo das derivadas parciais da função erro quadrático), os coeficientes α e β são determinados e, conseqüentemente, o coeficiente de amortecimento (r_{eq_K}) para o modo considerado.

Assumindo uma relação de amortecimento do tipo $h_{real} = \frac{r_{eq_K}}{r_{eq_Kc}} = 2\%$ como fator de amortecimento estrutural (CHELI, F. et al[10]), cujos valores podem ser obtidos experimentalmente através do balanço energético, ou ainda aproximado pela energia dissipada por ciclo, ou decremento logarítmico.

$$\zeta = h_{real} = \frac{r_{eq_K}}{r_{eq_Kc}} \quad (4.47)$$

Sendo :

$h_{real} \rightarrow$ Fator de amortecimento (adimensional)

$r_{eq\ k} \rightarrow$ Amortecimento do sistema de 1 grau de liberdade

$r_{eq\ kc} \rightarrow$ Amortecimento crítico do sistema de 1 grau de liberdade

Para um sistema de 1 grau de liberdade amortecido forçado, o amortecimento crítico é descrito como:

$$r_{eq\ kc} = 2m_K\omega_K \quad (4.48)$$

E ainda da equação (4.41a)

$$M^* = [\phi]^T [M_s] [\phi] = [I] \quad \rightarrow \quad m_K = 1$$

A equação (4.48) pode ser escrita como:

$$r_{eq\ kc} = 2\omega_K \quad (4.49)$$

Sendo :

$m_K \rightarrow$ Massa do k-ésimo modo

$\omega_K \rightarrow$ Frequência do k-ésimo modo

Utilizando a primeira equação (4.46), a equação (4.47) pode ser escrita como:

$$h_{real} = \frac{r_{eq\ k}}{r_{eq\ kc}} = \frac{\alpha}{2\omega_K} + \frac{\beta\omega_K}{2} = f(\omega_K) \quad (4.50)$$

Sendo $f(\omega_K)$ uma função de interpolação (DIANA, G. et al [19]) que pode ser escrita da seguinte forma :

$$f(\omega_K) = \frac{r_{eq\ k}}{r_{eq\ kc}} = \frac{\alpha}{2\omega_K} + \frac{\beta\omega_K}{2} = f^*(\omega_K) = h_{real} \quad (4.51)$$

Sendo :

$f^*(\omega_k) \rightarrow$ Representa uma função de interpolação em relação ao valor de h_{real}

$f(\omega_k) \rightarrow$ Função de interpolação aproximada

Para o cálculo dos coeficientes α e β defini-se uma função erro de modo que a função aproximada $f(\omega_k)$ determine um erro mínimo para todas as n aproximações.

A função é definida como:

$$\delta(\omega_k) = f^*(\omega_k) - f(\omega_k) = f^*(\omega_k) - \left(\frac{\alpha}{2\omega_k} + \frac{\beta\omega_k}{2} \right) = \delta(\omega_k, \alpha, \beta) \quad (4.52)$$

Sendo :

$\delta(\omega_k) \rightarrow$ Função erro

Se para uma determinada aproximação ou modos próprio, $f^*(\omega_k)$ e ω_k são conhecidos, então as n aproximações são obtidas nas incógnitas α e β :

$$\delta(\omega_k) = \delta(\omega_k, \alpha, \beta) = \delta(\alpha, \beta) \quad (4.53)$$

Considerando a soma de todos os n modos ao quadrado, obtém-se uma função do Erro Quadrático (E),

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n [\delta_i(\alpha, \beta)]^2 \quad (4.54)$$

Sendo :

$E(\alpha, \beta) \rightarrow$ Função do erro quadrático.

Para determinar os coeficientes α e β , calcula-se as derivadas parciais da função erro quadrático, com relação a α e β , de forma que o erro seja mínimo.

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0 \quad e \quad \frac{\partial E}{\partial \beta} = 0 \quad (4.55)$$

Assim, obtém-se um sistema com duas equações nas incógnitas α e β , que resolvido determina os valores dos coeficientes.

Calculados os valores de α e β , finalmente a matriz de amortecimento $[R_s]$ do sistema é obtida em coordenadas físicas, a partir da relação:

$$[R_s] = \alpha[M_s] + \beta[K_s] \quad (4.56)$$

Sendo :

$[R_s] \rightarrow$ Matriz de amortecimento em coordenadas físicas.

4.8 Discretização do modelo por elementos finitos.

4.8.1 Discretização da Fundação.

A discretização da fundação foi feita levando-se em consideração alguns nós de interesse, como os de posicionamento dos mancais. O modelo consiste de 23 nós com 24 elementos, o elemento de viga espacial mostrado na figura 4.1 é utilizado para discretizar a fundação.

Para este modelo considera-se que a fundação esteja sentada diretamente sobre o solo e, para análise do modelo, não considera-se a rigidez do solo (figura 4.3).

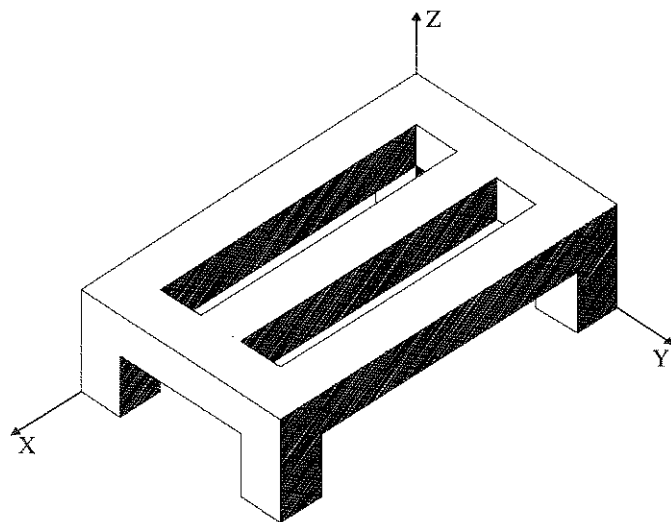


Figura 4-2 Modelo da Fundação

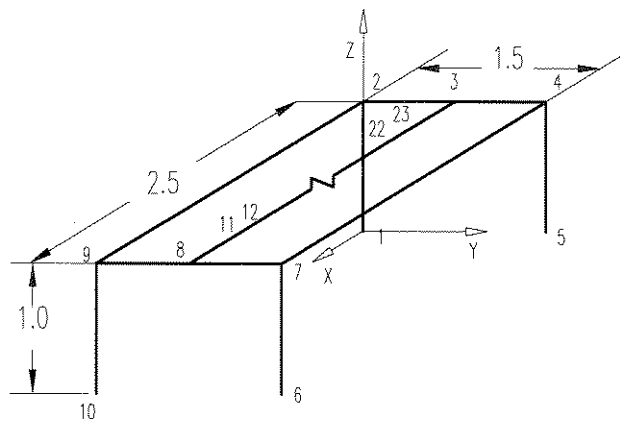


Figura 4-3 Modelo por elementos finitos da Fundação

4.8.2 Hipóteses e/ou simplificações do Modelo.

Para a análise do modelo, algumas hipóteses foram consideradas como:

- Os nós 1,5,6, e 10 referem-se aos nós de vínculos, onde os deslocamentos e as rotações são nulas.
- Para o modelo proposto não considera-se a rigidez do solo, dessa forma as forças e momentos atuantes nos pontos de conexão entre estrutura e solo são nulos.
- Os nós 3 e 8 são nós de mancais.
- No nó 17 atua uma força de excitação harmônica de amplitude unitária nas direções vertical e horizontal.
- Nos nós 11 a 23 e nos nós de mancais considera-se valores de massas concentradas (ver tabela 4.1).
- A resposta em frequência do sistema é analisada na faixa de frequência de 50 a 750 rad/s.

4.8.3 Valores para os Parâmetros do Modelo.

Considera-se o material das vigas concreto, cujos parâmetros, módulo de elasticidade (longitudinal e transversal) (MAKRIS, N. et al[27] e CAVALCA, K. L.[8])e massa específica são:

- $E = 25 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
- $G = 10 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
- $\bar{\rho} = 2600 \text{ Kg/m}$

Tabela 4-1 Valores dos Parâmetros do modelo

Elemento	Seção [m ²]	l [m]	J _x [m ⁴]	I _{xx} [m ⁴]	I _{zz} [m ⁴]	$\bar{\rho}_i \times A_i$ [Kg/m]
1,4,6 e 9	A ₁	1,00	1,35x10 ⁻³	6,75x10 ⁻⁴	6,75x10 ⁻⁴	234,00
2,3,7 e 8	A ₂	0,75	2,00x10 ⁻³	1,10x10 ⁻³	9,00x10 ⁻³	312,00
5 e 10	A ₂	2,50	2,00x10 ⁻³	1,10x10 ⁻³	9,00x10 ⁻³	312,00
11	A ₂	0,52	2,00x10 ⁻³	1,10x10 ⁻³	9,00x10 ⁻³	312,00
12,13,14,15, 16,19,20,21, 22 e 23	A ₂	0,11	2,00x10 ⁻³	1,10x10 ⁻³	9,00x10 ⁻³	312,00
17 e 18	A ₂	0,28	2,00x10 ⁻³	1,10x10 ⁻³	9,00x10 ⁻³	312,00
24	A ₂	0,30	2,00x10 ⁻³	1,10x10 ⁻³	9,00x10 ⁻³	312,00

$A_1 = (b \times h) = (0,3 \times 0,3) = 0,09 \text{ m}^2$

$A_2 = (b \times h) = (0,4 \times 0,3) = 0,12 \text{ m}^2$

Tabela 4-2 Valores das Massas Concentradas

Massa	Nó	Valor da massa [kg]
1	3	5,00
2	8	10,00
3	11 a 23	45,00

Capítulo 5

5. Determinação dos parâmetros modais da fundação.

5.1 Introdução.

O comportamento dinâmico dos sistemas mecânicos pode ser analisados através do significado dos parâmetros modais. Estes parâmetros são utilizados para descrever o comportamento da estrutura(fundação) e podem ser determinados analisando funções matemáticas(funções de transferência), que utilizam esses parâmetros, através de técnicas modais. Neste capítulo, os parâmetros modais(fator de amortecimento, frequências naturais e massas generalizadas) serão determinados utilizando técnicas modais. Para o cálculo desses parâmetros é utilizado um pacote de programas, ROTORTTEST, descrito no apêndice A.

5.2 Determinação das frequências naturais.

5.2.1 Função de resposta em frequência.

Para determinar as frequências naturais, foi obtida, inicialmente, a resposta em frequência da fundação, analisada para uma força de excitação harmônica aplicada no nó 17 e atuando nas direções, vertical e horizontal, na faixa de frequência de 50 a 750 rad/s.

Para resolver a equação de movimento da fundação, equação (3.3), faz-se necessário encontrar a resposta para o sistema amortecido, sujeito a uma força de excitação harmônica de amplitude unitária. Como a resposta a um impulso unitário é a transformada de Fourier da resposta em frequência(Jr, ROY R. CRAIG[25]), então da equação (3.7b):

$$[M_s] \cdot \ddot{X}_f + [R_s] \cdot \dot{X}_f + [K_s] \cdot X_f = F_f(t) \quad (5.1)$$

Onde, para uma força harmônica do tipo,

$$F_f = \{F_{fo}\} \cdot e^{i\Omega_e t} \quad (5.2)$$

com resposta também do tipo:

$$X_f = \{x_{fo}\} \cdot e^{i\Omega_e t} \quad (5.3)$$

Então, a equação (5.1) pode ser escrita como :

$$(-\Omega_e^2 [M] + i\Omega_e [R] + [K]) \cdot \{x_{fo}\} = \{F_{fo}\} \quad (5.4)$$

A solução é do tipo complexa e determinada através da transformada de Fourier, utilizando o algoritmo de Gauss. A solução dessa equação foi determinada no item 3.3.2 do capítulo 3. Então a resposta em frequência complexa é dada por:

$$h_{ij}(\Omega_e, p) = \sum_{i=1}^N \frac{X_k^i X_j^i}{m_i (\omega_i^2 - \Omega_e^2 + 2i\zeta_i \omega_i \Omega_e)} \quad (5.5)$$

Calculada a resposta em frequência complexa, as frequências naturais da estrutura podem ser encontradas analisando esta resposta.

5.2.2 Cálculos das freqüências naturais.

Para determinar as freqüências naturais da estrutura(ω_i), foi feito o espectro de freqüências para as forças nas duas direções e, em seguida, selecionadas as freqüências, cujos picos de amplitude são os mais significativos(BROW, D.L. et al[6]).

Para obter o espectro de freqüências, a parte imaginária da função de transferência foi analisada, obtendo para cada freqüência, dentro da faixa de freqüências analisada, a soma das componentes imaginárias quadráticas de cada função. Em seguida, é feita a soma desses valores e obtida a média quadrática dos mesmos.

Os espectros de freqüências obtidos, mostram os picos de freqüências mais acentuados, correspondentes às freqüências naturais da estrutura mais significativa dentro da faixa em questão.

Então se a resposta em freqüência é da forma complexa:

$$h_{kj}(\Omega_e, p) = \bar{h} \cdot e^{i\Omega_e t} \quad (5.6)$$

Sendo :

$h_{kj} \rightarrow$ Resposta em freqüência complexa no nó k, com força de excitação aplicada no ponto j.

$\bar{h} = h_R + ih_I \rightarrow$ Vetor amplitude complexa.

$h_R \rightarrow$ Parte real do vetor amplitude.

$h_I \rightarrow$ Parte imaginária do vetor.

$\Omega_e \rightarrow$ Freqüência de excitação.

$p \rightarrow$ Parâmetros da fundação.

Então, para uma determinada freqüência:

$$\bar{A}_{\Omega_{e_n}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left(h_{I_j} \right)^2 \quad (5.7)$$

Sendo :

$\overline{A}_{\Omega_{e_n}}$ → Média quadrática das componentes imaginárias das funções de transferência, na n-ésima frequência (Ω_e).

Ω_{e_n} → n-ésima frequência de excitação

h_{i_j} → componente imaginária da j-ésima função de transferência na frequência (ω_i).

m → Número de funções de transferência.

n → Número de frequências no intervalo de 50 a 750 rad/s.

Determinada a média quadrática de todos as componentes harmônicas, na faixa analisada (50 a 750 rad/s), o espectro de frequência é determinado $\left(\overline{A}_{\Omega_{e_n}} \times \Omega_{e_n}\right)$, e em seguida, foram selecionadas as frequências cujas amplitudes do espectro são mais significativas (ω_i).

5.3 Determinação dos fatores de amortecimento da fundação.

Determinadas as frequências naturais da estrutura, estas frequências são utilizadas para calcular os fatores de amortecimento da estrutura. Esses fatores são calculados através da derivada do diagrama de fase, sendo esta derivada calculada próxima as frequências naturais da estrutura. Então, se o acoplamento entre os modos é negligenciado, a fase da função de transferência apresenta uma variação linear de 180°, na faixa de frequência próxima a cada ressonância (CURAMI, A., VANIA, A.[16]). Então, o fator de amortecimento para o j-ésimo modo é definido:

$$\xi_j = \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial \psi} \right)_{\Omega_e = \omega_{n_j}} \quad (5.7)$$

Sendo :

ξ_j → Decremento logarítmico ou razão de amortecimento.

ω_{n_j} → Frequência natural do j-ésimo modo.

Ω_e → Frequência de excitação.

ψ → Fase da função de transferência.

Porém, para modos desacoplados, a variação da fase (BROWL, D.L. et al[6]) pode ser considerada linear, então a equação(5.7) pode ser escrita como:

$$\xi_j = \frac{\delta\omega_n}{\delta\psi} \quad (5.8)$$

No entanto, para resolver esta última equação, é necessário determinar a derivada da fase da função de transferência. Então, a fase (ψ) da função de transferência, para uma sistema de um grau de liberdade, é expressa por:

$$\tan \psi = \frac{2\zeta_j \left(\frac{\Omega_e}{\omega_n} \right)}{1 - \left(\frac{\Omega_e}{\omega_n} \right)^2} \quad (5.9)$$

$$\psi = \arctan \left[\frac{2\zeta_j \left(\frac{\Omega_e}{\omega_n} \right)}{1 - \left(\frac{\Omega_e}{\omega_n} \right)^2} \right] \quad (5.10)$$

Derivando a equação(5.10) com relação a ω_n e linearizando, temos:

$$\frac{\delta\psi}{\delta\omega_n} = \frac{2\zeta_j}{\omega_n} \left(\frac{1 + \left(\frac{\Omega_e}{\omega_n} \right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\Omega_e}{\omega_n} \right)^2 + \left(\frac{2\zeta_j \Omega_e}{\omega_n} \right)^2 \right]} \right) \quad (5.11)$$

Mas, na ressonância, $\Omega_e = \omega_n$, então a última equação é escrita como:

$$\left(\frac{\delta\psi}{\delta\omega_n} \right) \Big|_{\omega_n=\Omega_e} = \frac{2\zeta_j}{\omega_n} \left(\frac{2}{4\zeta_j^2} \right) = \frac{1}{\omega_n \zeta_j} \quad (5.12)$$

Então, desta última equação:

$$\frac{\delta\omega_n}{\delta\psi} = \omega_n \zeta_j \quad (5.13)$$

Substituindo esta última equação, na equação(5.7), o fator de amortecimento para o j-ésimo modo é determinado.

$$\zeta_j = \left(\frac{\delta\omega_n}{\delta\psi} \right)_{\Omega_s=\omega_{n_j}} = \omega_{n_j} \cdot \zeta_j \quad (5.14)$$

5.4 Determinação das massas generalizadas.

As massas generalizadas são calculadas resolvendo a equação(3.21), no entanto é necessário primeiro que se determine os modos de vibrar da estrutura. Esses parâmetros, além dos fatores de amortecimento e frequências naturais, serão utilizados para formar um sistema de equações matricial, que resolvido simultaneamente para os n-modos de vibrar da estrutura, determina as massas para esses modos.

5.4.1 Determinação dos modos de vibrar.

Na determinação dos modos de vibrar, foi utilizado o diagrama de NYQUIST, onde a amplitude e a fase da função de transferência são plotados. Então, o método utilizando o diagrama de NYQUIST, consiste em determinar o arco de circunferência que aproxima a função de transferência na vizinhança de cada modo, considerado o fato que, o vetor de resposta complexo representa a equação de uma circunferência(DIANA, G. et al.[19]). Plotada a circunferência, os modos de vibrar da estrutura são determinados analisando as coordenadas do centro da circunferência. Se o acoplamento entre os modos é negligenciado, então, próximo de cada ressonância, a estrutura se comporta como um sistema de 1 grau de liberdade(CHELI, F.et al.[10]).

Então da equação (5.6), a amplitude do vetor de resposta em frequência complexa é dada por:

$$\bar{h}_{kl}(\omega_e, p) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{X_k^j X_l^j}{k_j \left[(1 - r_j'^2) + i(2\zeta_j r_j'^2) \right]} \right) \cdot e^{i\Omega_e t} \quad (5.15)$$

Sendo a parte real e a imaginária dada por:

$$h_R = \sum_{j=1}^N \frac{X_k^j X_l^j}{k_j} \left(\frac{(1 - r_j'^2)}{\left[(1 - r_j'^2)^2 + i(2\zeta_j r_j')^2 \right]} \right) \quad (5.16)$$

$$h_I = \sum_{j=1}^N \frac{X_k^j X_l^j}{k_j} \cdot \left(\frac{-2\zeta_j r_j'}{\left[(1 - r_j'^2)^2 + (2\zeta_j r_j')^2 \right]} \right) \quad (5.17)$$

Sendo :

$$r_j' = \left(\frac{\Omega_e}{\omega_j} \right)$$

Mas, da teoria dos números complexos , a amplitude de um vetor é escrita como:

$$\bar{h} = \sqrt{(h_R)^2 + (h_I)^2} \quad (5.18)$$

Então, utilizando as equações (5.16) e (5.17) e, assumindo que $U_j + iV_j$ são os resíduos ou autovetores, associados ao j-ésimo modo de vibrar, a amplitude do vetor da resposta em frequência complexa é dado por:

$$\left(\text{Re}(\Omega_e) + \frac{U_j}{2\zeta_j} \right)^2 + \left(\text{Im}(\Omega_e) + \frac{V_j}{2\zeta_j} \right)^2 = \frac{U_j^2 + V_j^2}{2\zeta_j^2} \quad (5.19)$$

Sendo :

$$X_k^{(j)} = U_j + iV_j \rightarrow \text{Resíduo do j-ésimo modo.}$$

U_j e $V_j \rightarrow$ Parte real e imaginária do j-ésimo modo, respectivamente.

$\zeta_j \rightarrow$ Fator de amortecimento.

$\text{Re}(\Omega_e) \rightarrow$ Parte real da função de transferência.

$\text{Im}(\Omega_e) \rightarrow$ Parte imaginária da função de transferência.

A equação (5.19) é a equação de uma circunferência.

Então, a contribuição de um modo na resposta geral, pode ser representada no diagrama de NYQUIST. A equação da circunferência, equação(5.19), possui coordenadas do centro e diâmetro,

$$C(x, y) = \left(\frac{-U_j}{2\zeta_j}, \frac{-V_j}{2\zeta_j} \right) \quad \text{e} \quad (5.20)$$

$$D = \frac{(U_j^2 + V_j^2)^{1/2}}{\zeta_j} \quad (5.21)$$

Sendo :

$C(x, y) \rightarrow$ Centro da circunferência.

x e $y \rightarrow$ Coordenadas do centro da circunferência.

$D \rightarrow$ Diâmetro da circunferência.

A equação(5.21), pode ser escrita da seguinte forma:

$$D = \frac{1}{\zeta_j} \|A_{kl_j}\|^2 \quad (5.22)$$

Sendo A_{kl_j} o módulo do resíduo.

Utilizando as equações(5.20) e (5.21) os modos de vibrar são determinados.

5.4.2 Determinação das massas generalizadas.

Determinados os modos de vibrar, as massas modais são determinadas minimizando o erro entre as duas funções de transferência, a função de transferência analítica, definida pela equação(3.21) e a função de transferência aproximada. A função de transferência analítica(h^*) é calculada, determinando as massas para todos os modos de vibrar, através da

equação(3.21). Em seguida, essas massas são utilizadas para determinar a nova função de transferência (Função aproximada (h))(CURAMI, A., VANIA, A.[16]).

Então, determinadas as massas da equação(3.21), a função de transferência aproximada(calculada nas vizinhanças do modo) é definida, escrevendo a função de transferência aproximada, para uma determinada frequência natural, considerando os n modos de vibrar(ver item 5.4.1).

$$h_{kl}(\omega_1) = \frac{1}{m_1} \left(\frac{X_k^{(1)} X_l^{(1)}}{2i\zeta_1 \omega_1} \right) + \dots + \frac{1}{m_i} \left(\frac{X_k^{(i)} X_l^{(i)}}{\omega_i^2 - \omega_1^2 + 2i\zeta_i \omega_1} \right) + \dots + \frac{1}{m_n} \left(\frac{X_k^{(n)} X_l^{(n)}}{\omega_n^2 - \omega_1^2 + 2i\zeta_n \omega_1} \right) \quad (5.23)$$

Estendendo esta última equação para todos as n frequências naturais, temos:

$$\begin{Bmatrix} h_{kl}(\omega_1) \\ \vdots \\ h_{kl}(\omega_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_k^{(1)} X_l^{(1)}}{2i\zeta_1 \omega_1} & \dots & \frac{X_k^{(i)} X_l^{(i)}}{\omega_i^2 - \omega_1^2 + 2i\zeta_i \omega_1} & \dots & \frac{X_k^{(n)} X_l^{(n)}}{\omega_n^2 - \omega_1^2 + 2i\zeta_n \omega_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{X_k^{(1)} X_l^{(1)}}{\omega_1^2 - \omega_n^2 + 2i\zeta_1 \omega_n} & \dots & \frac{X_k^{(i)} X_l^{(i)}}{\omega_i^2 - \omega_n^2 + 2i\zeta_i \omega_n} & \dots & \frac{X_k^{(n)} X_l^{(n)}}{2i\zeta_n \omega_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{m_n} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

Sendo m_n a massa modal generalizada associada ao n -ésimo modo próprio.

A última equação resolvida, determina as funções de transferência aproximadas nas vizinhanças de cada modo, e pode ser escrita como:

$$h = [T] \cdot \frac{1}{m} \quad (5.25)$$

Mas, nem sempre o número de frequências, na faixa de frequência escolhida, é igual ao número de massas generalizadas. Assim, para determinar as massas generalizadas é definida uma função erro, relacionando as duas funções de transferência (analítica(h^*) e aproximada(h)) que, minimizada para as frequências naturais(ω_j), determinará as massas generalizadas.

Então, chamando a função de transferência definida pela equação (3.21) de $h_{kl}^*(\omega_j)$, com j variando de 1 ao número de frequências naturais, e a função de transferência aproximada de $h_{kl}(\omega_j)$, a função erro é definida:

$$E = h^* - h = h^* - [T] \cdot \frac{1}{m} \quad (5.26)$$

Sendo :

$E \rightarrow$ Função erro

$h^* \rightarrow$ Função de transferência analítica.

$h \rightarrow$ Função de transferência aproximada.

Para minimizar o erro quadrático,

$$\frac{\partial(E'E)}{\partial\left(\frac{1}{m}\right)} = 0 \quad (5.27)$$

Então da equação(5.26), temos

$$E'E = E'h^* - E'h \quad (5.28)$$

mas $E = h^* - h$, então:

$$E'E = (h^* - h)' \cdot (h^* - h) \quad (5.29)$$

Utilizando a equação(5.27), a massa pode ser determinada.

$$\frac{1}{m} = ([T]'[T])^{-1} \cdot ([T]'[h^*]) \quad (5.30)$$

Capítulo 6

6. Resultados e Discussões.

6.1 Introdução.

Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos obtidos para o modelo proposto. As curvas de respostas em frequências para alguns pontos da fundação, pontos de interesse, serão plotadas, bem como a determinação dos parâmetros modais da fundação(frequências naturais, fator de amortecimento e massas generalizadas). Finalmente, é feita a análise dos resultados.

6.2 Análise da função de resposta em frequência.

A função de resposta em frequência da fundação(equação (3.7a))para o modelo proposto (ver figura 4.3),foi obtida utilizando os métodos propostos no capítulo 3, onde a equação foi resolvida considerando uma força de excitação harmônica unitária aplicada ao nó 17, atuando nas duas direções, vertical e horizontal, da estrutura de suporte, em seguida foram obtidas as respostas para os nós de interesse, estimando assim, a resposta em frequência do sistema com excitação nas duas direções. Para esta análise foram escolhidos alguns nós de interesse, como os nós de mancais 3 e 8, assim como o nó 17, entre outros. As curvas de respostas em frequências para esses nós foram obtidas. Da análise dessas funções, foram determinados os parâmetros modais da fundação, segundo técnicas modais descritas no capítulo 5. A análise destas funções foi feita na faixa de frequência de 50 a 750 rad/s, com um passo de 10 rad/s(ver figuras 6.1 a 6.8).

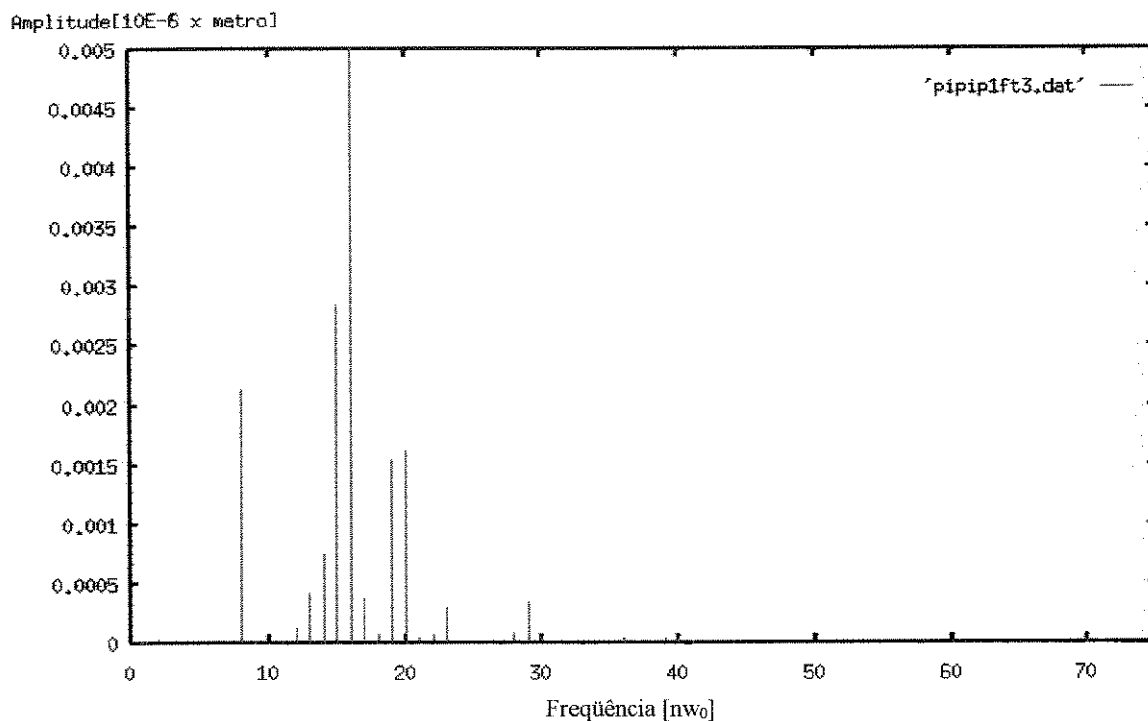


Figura 6-1 Diagrama dos espectros de frequências

Direção vertical

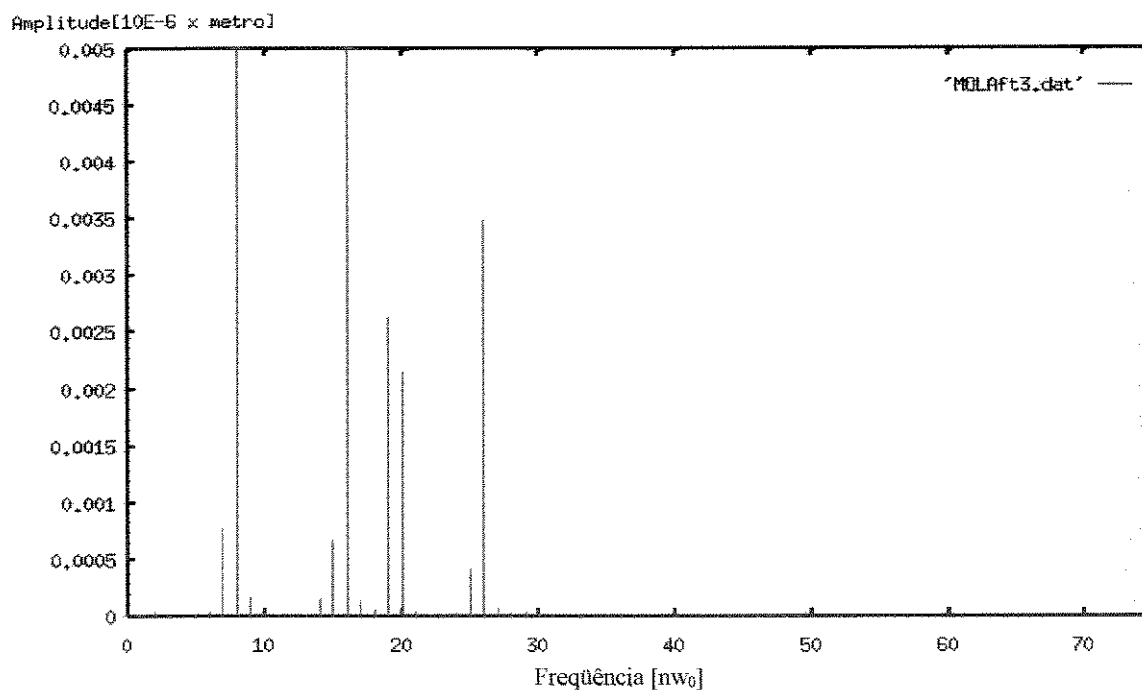


Figura 6-2 Diagrama dos espectros de frequências

Direção horizontal

Então, a determinação das frequências naturais é feita, através das técnicas descritas no item 5.2.2, do capítulo 5, onde através da análise do espectro de frequências(JR.,ROY R. CRAIG[25]), são identificadas aquelas mais significativas na faixa analisada.

Analisando esses espectros de frequências, representados nas figuras 6.1 e 6.2, observa-se, após uma redução modal, que existem 4 modos próprios verticais mais significativos, enquanto que, por outro lado, identifica-se 5 modos próprios horizontais(ver tabela 6.1 e 6.2) para excitação vertical.

Tabela 6-1 Frequências próprias da fundação
calculadas com força aplicada no nó 17.

Modo vertical

Modo vertical		
Número de frequências	Frequências	Valor da frequência [Rad / s]
1	16	200
2	15	190
3	8	120
4	20	240

Tabela 6-2 Frequências próprias da fundação
calculadas com força aplicada no nó 17.

Modo horizontal

Modo horizontal		
Número de frequências	Frequências [$n\omega_o$]	Valor da frequência [Rad / s]
1	8	120
2	16	200
3	26	300
4	19	230
5	20	240

Os resultados referentes à excitação horizontal encontram-se no apêndice b (espectros de frequências, respostas em frequências e diagramas de fase).

Analisando as curvas de respostas em frequências, observa-se que, para o nó 17, na direção horizontal (figura 6.3), evidenciam-se picos a 120, 200, 230 e 300 rad/s, enquanto que na direção vertical (figura 6.4) destacam-se as frequências de 190 e 200 rad/s.

As figuras 6.5 e 6.6 ilustram as respostas em frequências para o nó 3 (localização do primeiro mancal), onde encontram-se os picos mais evidentes a 120 e 230 rad/s na horizontal e a 200, 240, 260 e 340 rad/s na direção vertical.

Para o nó 8 (localização do segundo mancal), representado nas figuras 6.7 e 6.8, localizamos picos de amplitudes significativos a 120, 200 e 230 rad/s na horizontal, bem como a 190 e 200 rad/s na direção vertical.

E assim sucessivamente, para todos os nós selecionados para análise modal. Desta forma, nota-se claramente que alguns modos são mais evidentes em determinados nós. Para uma correta seleção dos modos mais significativos, dentro da faixa de frequências analisada, procede-se com a média estatística em todos os nós selecionados, para determinação dos diagramas de espectro de frequência(ver capítulo 5).

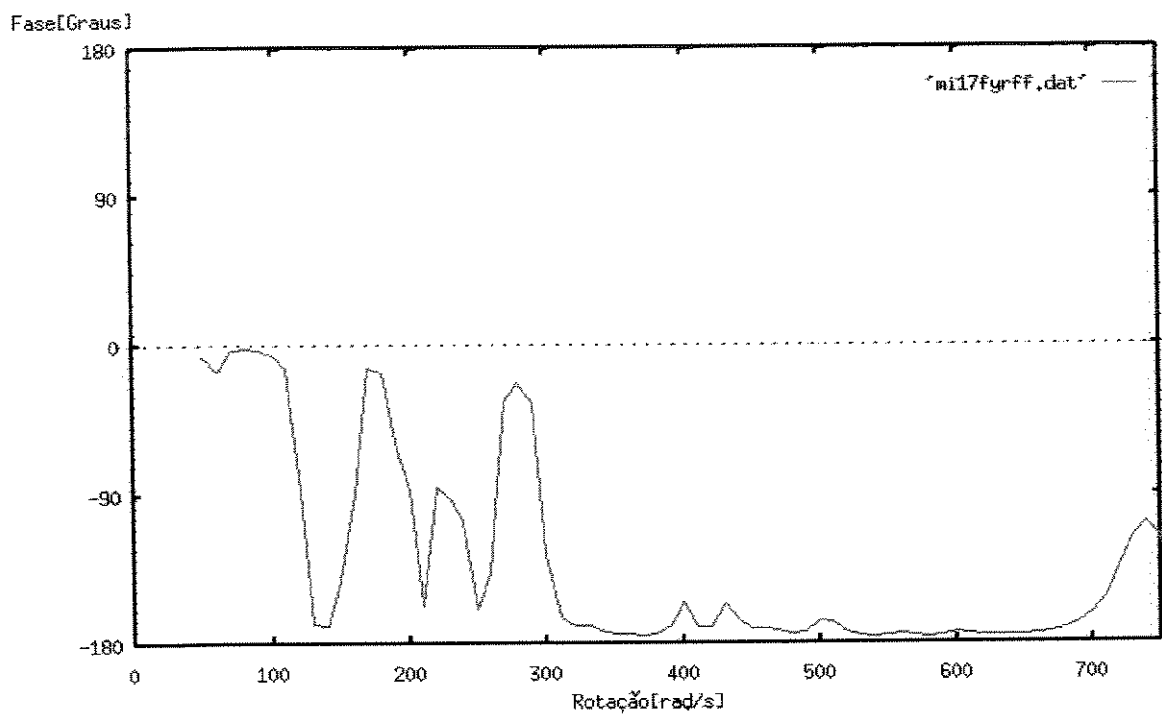
Da mesma forma, aplica-se a média estatística padrão para o cálculo do fator de amortecimento associado a cada modo de vibrar da estrutura. Os quatro modos próprios, na direção vertical, mais significativos, são listados a seguir, na tabela 6.3.

Tabela 6-3 Modos próprios de vibrar

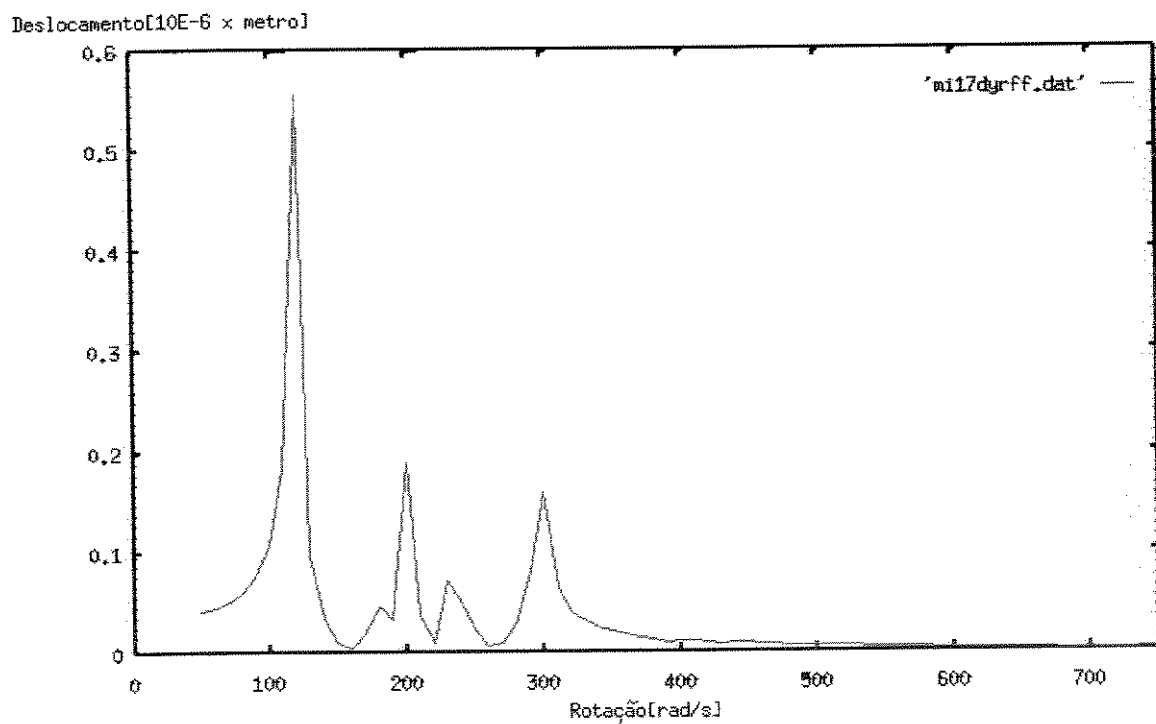
Direção vertical					
Valores dos Modos					
Número do Modo	Valor da frequência	Nó 2	Nó 4	Nó 7	Nó 9
1	200	0.0	-0.473	0.030	-0.477
2	190	0.0	0.583	0.133	-0.525
3	120	0.0	-0.512	0.100	-0.483
4	240	0.0	-0.532	0.098	-0.567

De acordo com os resíduos, os nós 2, 4, 7 e 9 participam dos modos de vibrar, em ambas as direções, vertical e horizontal. Tais nós representam as extremidades de estrutura de suporte (ver figura 4.4). O quarto modo implica em rotações opostas das vigas 2-4 e 7-9.

Os modos 2 e 3 (190 e 120 rad/s) são inversos, enquanto que o primeiro modo é a rotação da parte superior da estrutura em torno da viga que une os nós 3 e 8.



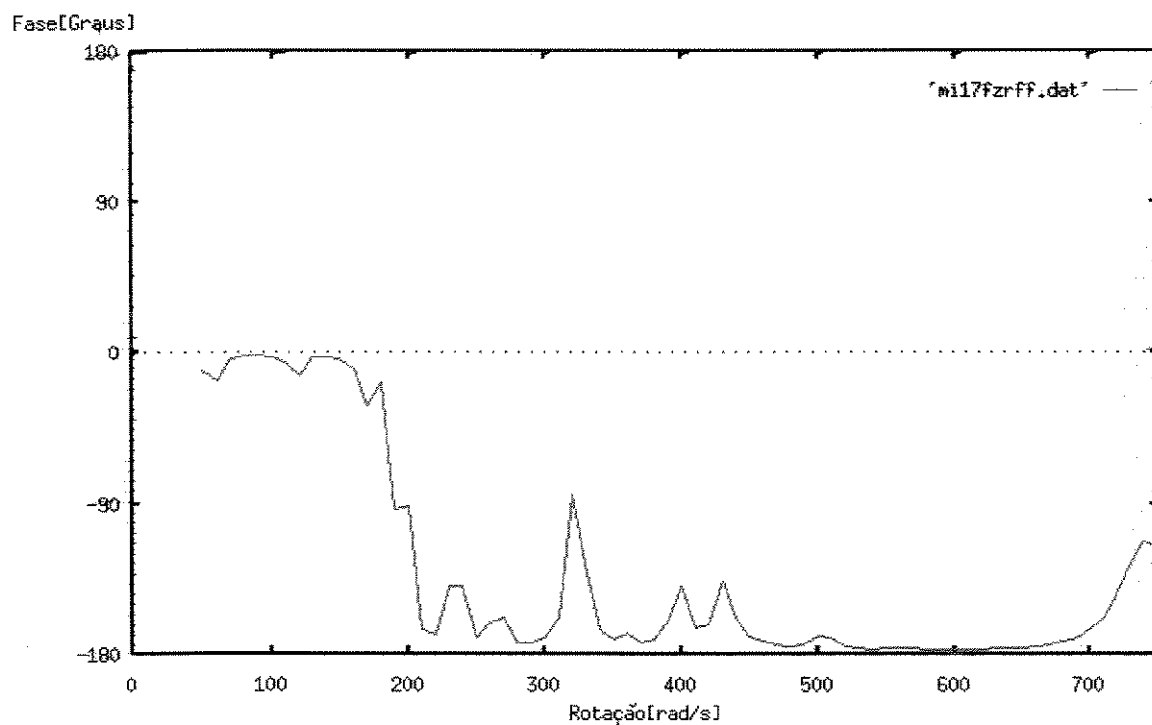
(a) Fase



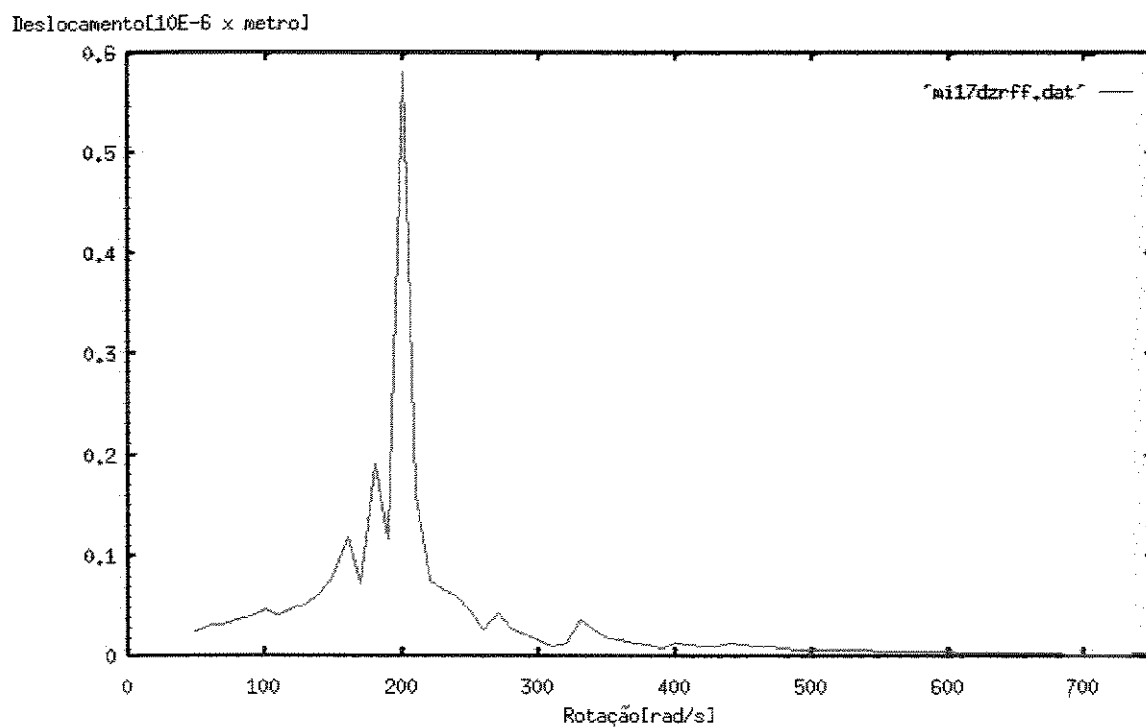
(b) Amplitude

Figura 6-3 Resposta em frequência para o nó 17

Direção horizontal



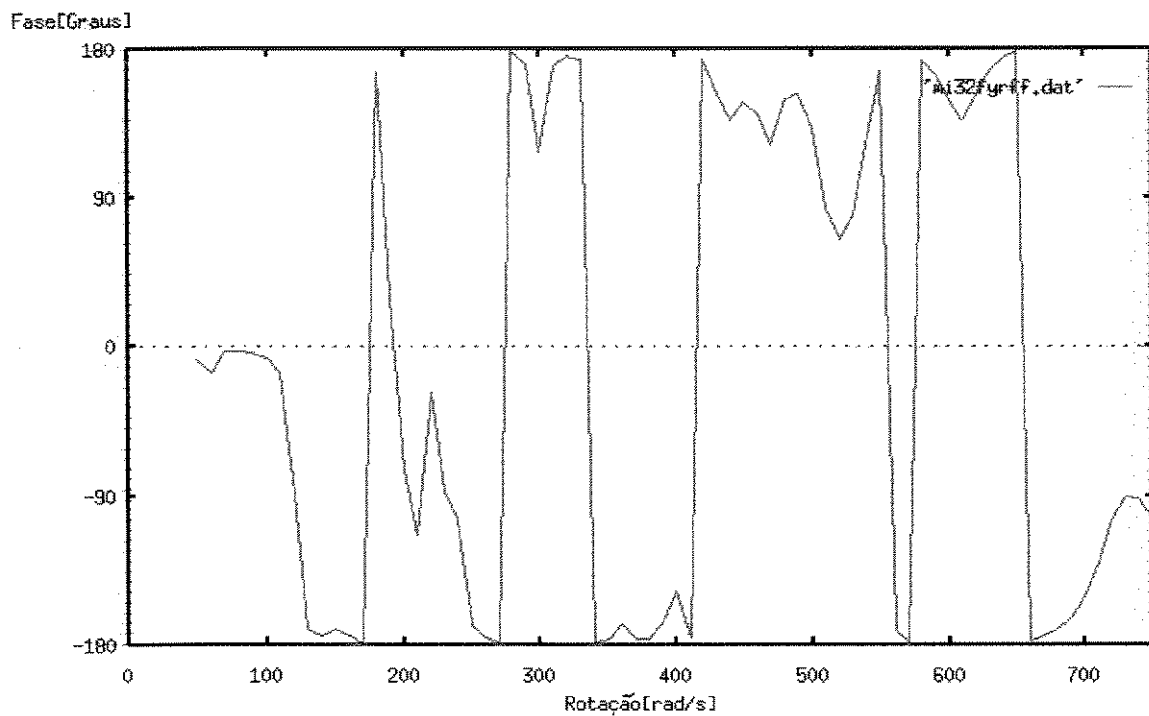
(a) Fase



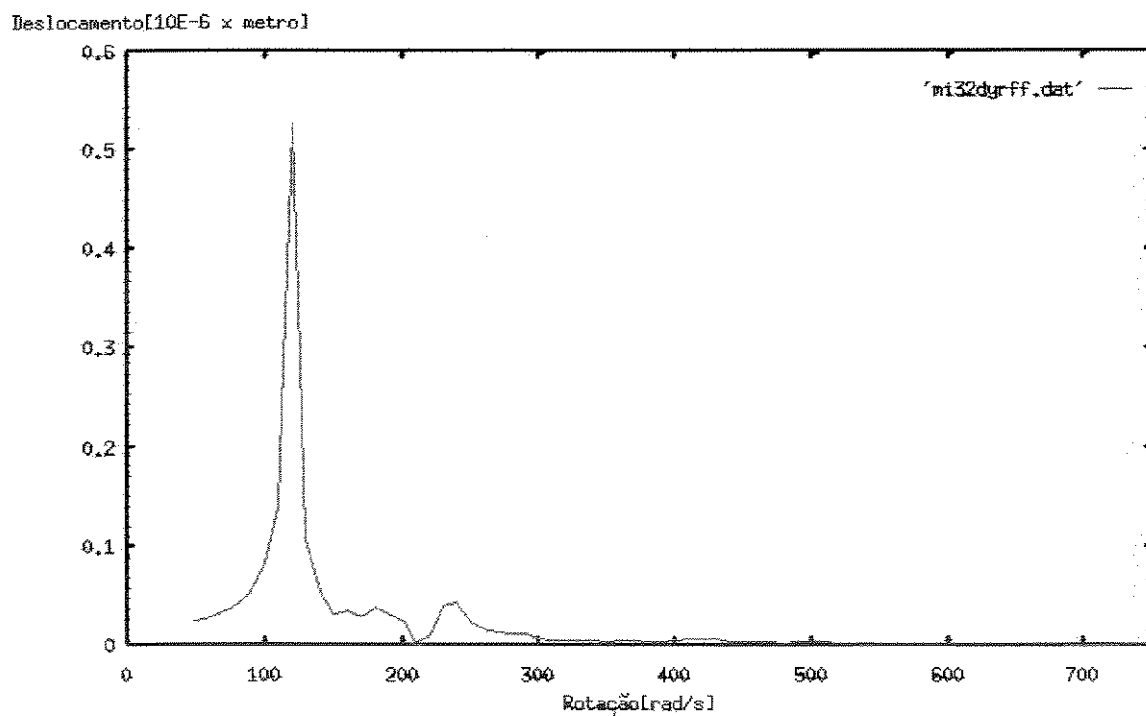
(b) Amplitude

Figura 6-4 Resposta em frequência para o nó 17

Direção vertical



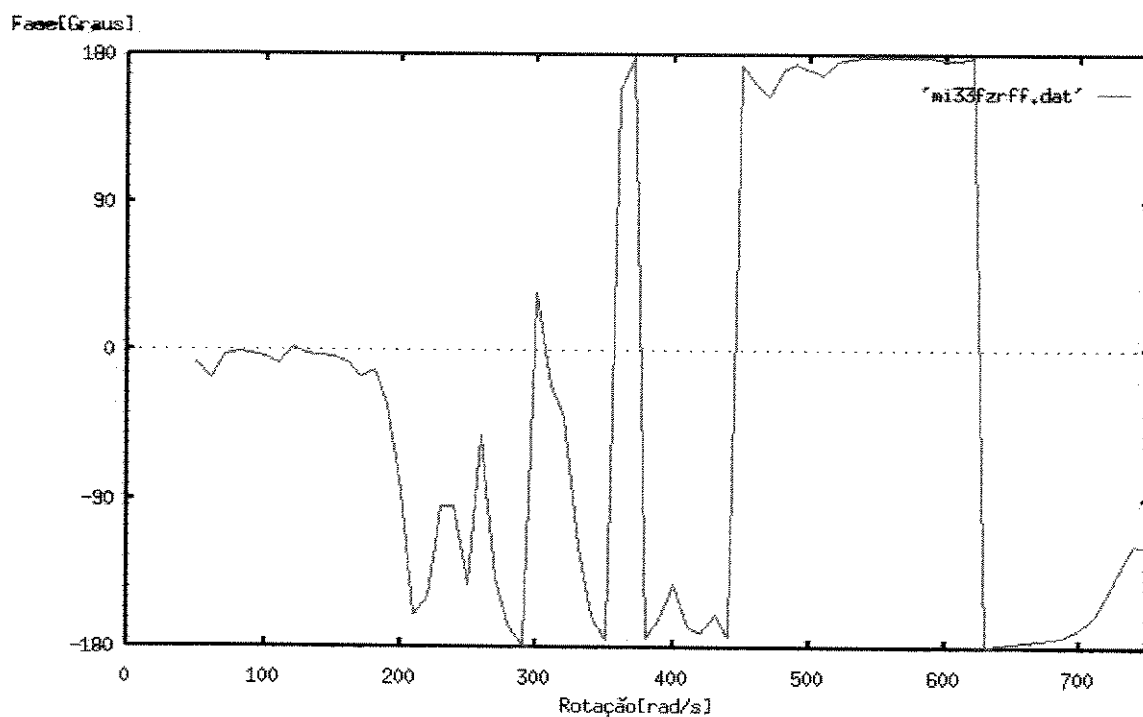
(a) Fase



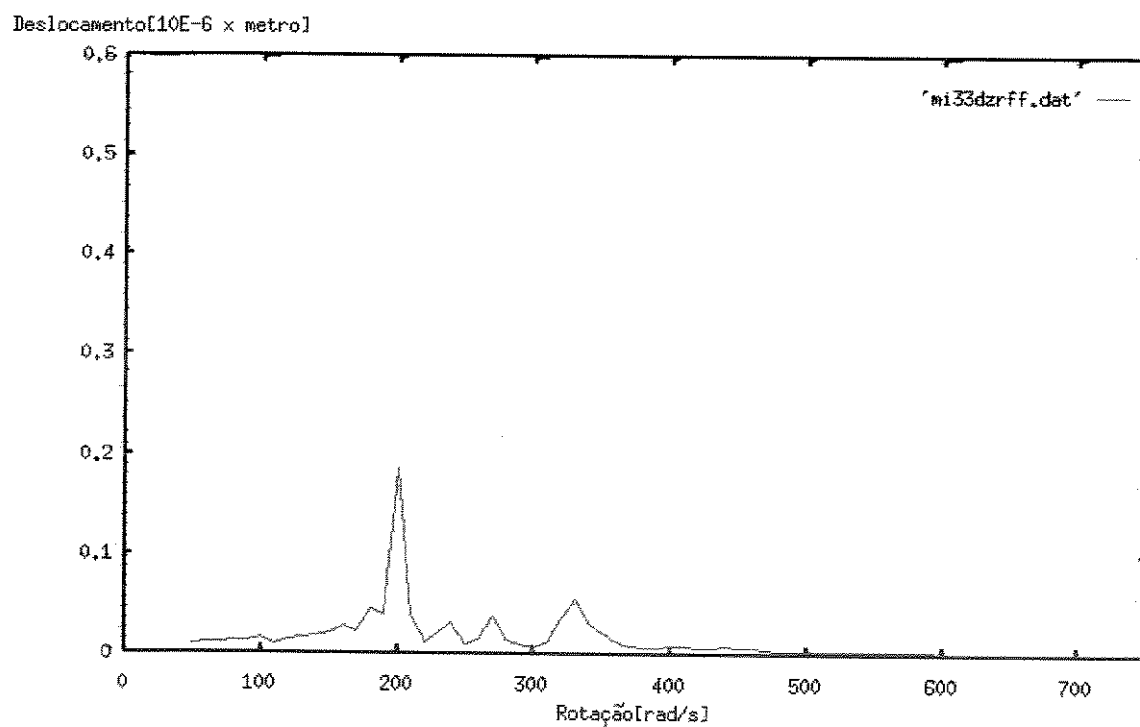
(b) Amplitude

Figura 6-5 Resposta em frequência para o nó 3

Direção horizontal



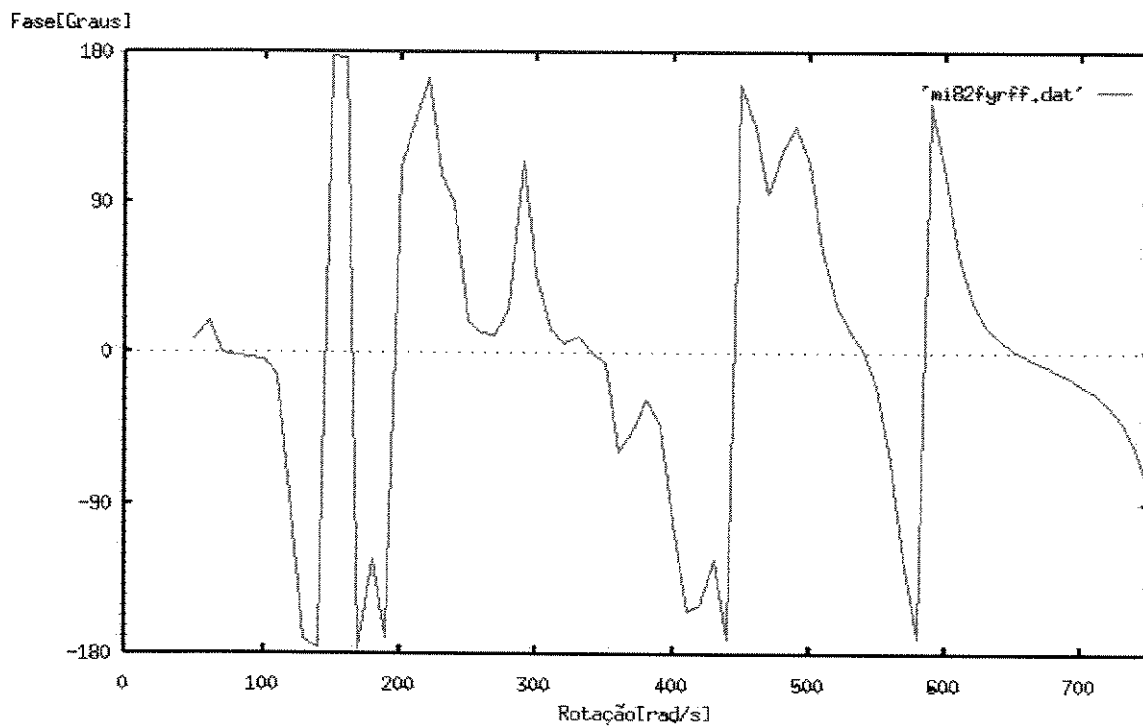
(a) Fase



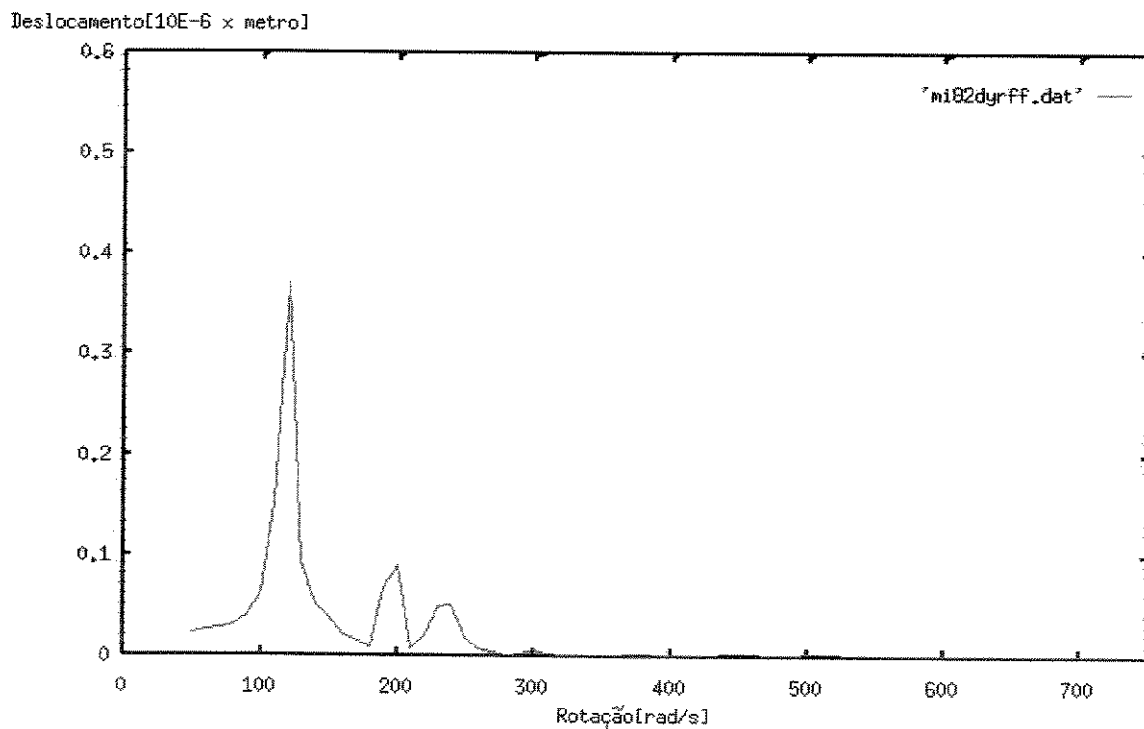
(b) Amplitude

Figura 6-6 Resposta em frequência para o nó 3

Direção vertical



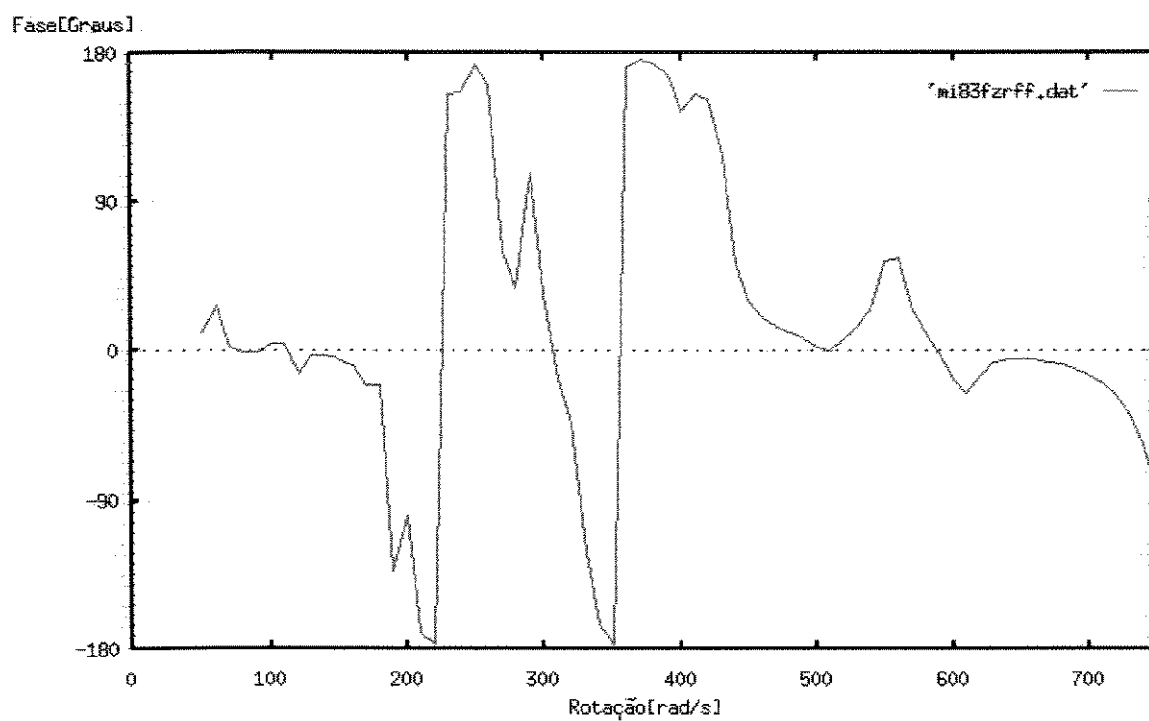
(a) Fase



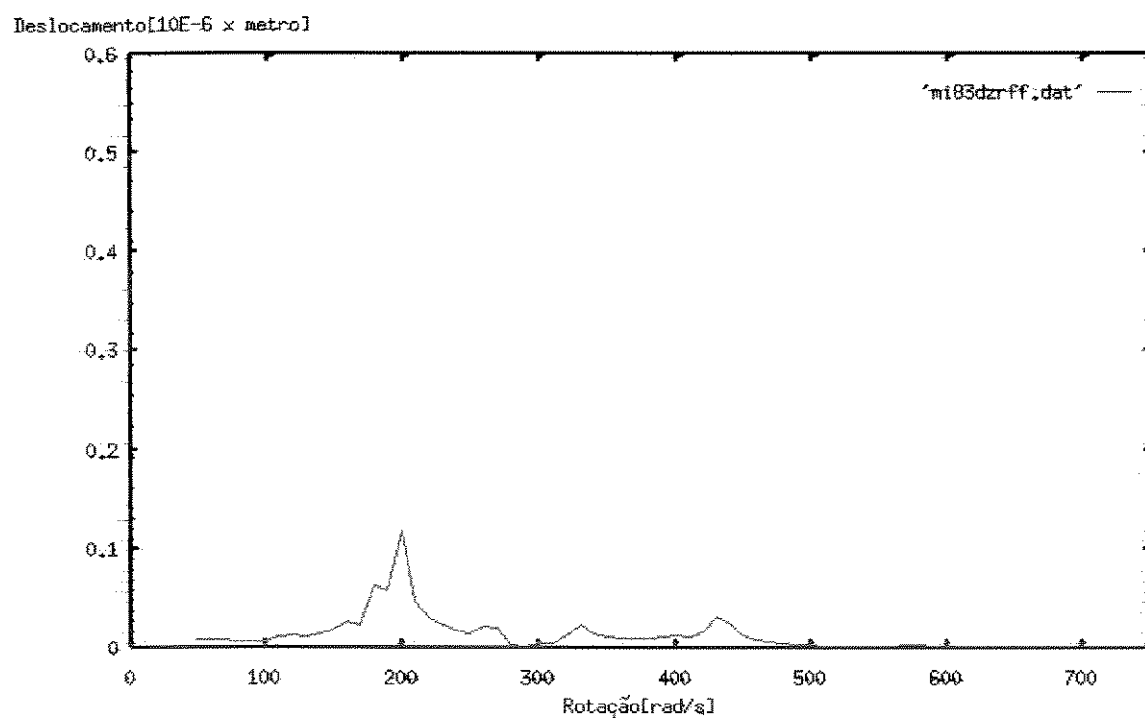
(b) Amplitude

Figura 6-7 Resposta em frequência para o nó 8

Direção horizontal



(a) Fase



(b) Amplitude

Figura 6-8 Resposta em frequência para o nó 8

Direção vertical

Portanto, da análise anterior das funções de transferência, podemos identificar os parâmetros de massa e amortecimento. Utilizando as equações 5.24 e 5.30, as massas generalizadas são obtidas através da ortogonalização dos autovetores, normalizados em relação a matriz de massa, associados aos modos de vibrar mostrados nas tabelas 6.1 e 6.2. Esses valores são mostrados na tabela 6.4.

Tabela 6-4 Fatores de amortecimento e massas generalizadas associadas aos principais modos próprios verticais.

Modo vertical		
Valor da frequência	Fator de amortecimento	Massa generalizada
200	0.04881	2.85877×10^{-6}
190	0.19211	1.15012×10^{-7}
120	1.10193	2.35554×10^{-6}
240	0.07271	9.39182×10^{-7}
Modo horizontal		
Valor da frequência	Fator de amortecimento	Massa generalizada
120	0.09612	3.94003×10^{-5}
200	0.05987	1.04190×10^{-5}
300	0.05667	1.23351×10^{-4}
230	0.26992	8.90442×10^{-6}
240	0.5088	1.56812×10^{-5}

Capítulo 7

7. Conclusões e Perspectivas futuras.

7.1 Conclusões.

Neste trabalho, apresentou-se uma metodologia simples para a análise do comportamento da fundação, utilizando um método de cálculo numérico, que permite calcular as funções de transferências do modelo(ver figura 4.3) num tempo de resposta rápido sem no entanto ocasionar perdas de informações na formulação do modelo.

O método de solução utilizado, propõe analisar o comportamento dinâmico da fundação de máquinas rotativas horizontais, determinando seus parâmetros modais, que serão utilizados para representar a fundação no sistema completo por duas vias distintas. Através da matriz de impedâncias mecânicas da fundação e utilizando um vetor de coordenadas mistas(método das coordenadas mistas).

Os resultados numéricos obtidos, utilizando o modelo por elementos finitos, mostram-se satisfatórios, já que obtém-se a resposta do comportamento do sistema, em um tempo relativamente rápido, com resultados relativamente bons quando comparados com os métodos clássicos, que consideravam a fundação rígida.

Dos métodos analíticos apresentados, o método das coordenadas mistas apresenta melhores resultados, pois não necessita da inversão da matriz de flexibilidade, evitando dessa forma os problemas de ordem numérica, quando da inversão da matriz de flexibilidade, que

poderão ocorrer na simulação para o modelo completo, limitação que se verifica no método das impedâncias mecânicas da fundação. Além da limitação citada anteriormente, o método das impedâncias mecânicas da fundação apresenta outra limitação, onde o número de modos próprios identificados para a fundação, não podem ser inferior ao número de graus de liberdade associados aos suportes, pois dessa forma a matriz modal não poderá ser invertida.

No entanto, o método das coordenadas mistas permite levar em consideração apenas os modos de vibrar que efetivamente contribuem na resposta do sistema, mesmo que em número, inferior ao número de graus de liberdades associados aos suportes. Ainda neste método, o sistema de equações obtido, que descreve o comportamento do sistema completo, pode ser resolvido para um número qualquer de frequências próprias.

7.2 Perspectivas Futuras.

O trabalho descrito, expõe uma metodologia simples para a análise do comportamento da fundação. No entanto a comparação desses resultados com aqueles obtidos do modelo experimental, é extremamente necessária. De forma que, as funções de transferências obtidas do modelo numérico possam ser comparadas com aquelas obtidas do modelo experimental, e assim, validar o modelo numérico proposto. Assim sendo, a reprodução do modelo (Bancada experimental) é bastante importante, onde os parâmetros da fundação serão determinados através de técnicas modais, teórico-experimentais, que utilizam funções de minimização, determinadas a partir das funções de transferência analítica e experimental.

Pesquisas futuras deverão ser desenvolvidas, de forma que, a partir da aquisição dos dados do modelo da bancada, essas aquisições sejam utilizadas para ajustar o modelo numérico e, conseqüentemente obter um melhor refinamento para este modelo proposto, otimizando assim o conjunto completo (rotor-suportes-fundação).

Referências Bibliográficas

8. Referências Bibliográficas

- [1] ABOUL-ELLA, F., NOVAK, M: **Dynamic Response of pile-supported frame foundation.** *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Proc. ASCE, v.106, n. EM6, p.1215-1232, December 1980.
- [2] ANEJA, I.A. **Dynamic interacting response of large turbine-generators supported on foundations of different flexibilities.** IFToMM - INTERNATIONAL CONFERENCE, 1982, Rome -Italy, September, 1982, p.129-138.
- [3] BACHSCHMID, N., BERNANTE, R., FRIGERI, C. - **Dynamics analysis of a 660 Mw turbogenerator foundation.** IFToMM - INTERNATIONAL CONFERENCE, 1982, Rome -Italy, September, 1982, p.151-161.
- [4] BATHE, KLAUS-JÜRGEN **Finite element procedures.** 1^a ed., PRENTICE HALL, INC., 1996. Cap. 2: Vectors, Matrices and Tensors, p. 17-76.
- [5] BEOLCHINI, G.C. **A Parametric analysis for vibrating machine foundations.** IFToMM - INTERNATIONAL CONFERENCE, 1982, Rome -Italy, September 1982, p. 191-201
- [6] BROWN, D. L., ALLEMANG, R. J., ZIMMERMAN, R., MERGEAY, M. **Parameter estimation techniques for modal analysis.** *S.A.E: Society of Automotive Engineers, Inc.*, 1979 - paper n.790221, v. 88, section 1, p. 828 - 846.

- [7] CAPPELLI, M., DIANA, G., LAPINI, G.L., VALLINI, A., **Diagnostics of malfunctions in large steam turbine-generators: Some case-histories.** IFToMM - INTERNATIONAL CONFERENCE, 1990, Lyon-France, September 1990, p. 455-460.
- [8] CAVALCA, K. L. **L'interazione tra rotori e struttura portante: Metodologia per la sua modellazione.** Italia: Dipartimento di meccanica, Politécnico de Milano, 1992, 143 p. Tese(Doutorado).
- [9] CEREDA, RONALDO L.D., MALDONADO, J.C. **Introdução ao FORTRAN 77 para microcomputadores.** São Paulo: McGraw-Hill, 1987, 211p.
- [10] CHELI, F., DIANA, G., VANIA, A. **Identificazione dei parametri modali delle fondazione di macchine rotanti.** *L'energia Elettrica*, n. 6, p. 229-236, 1987.
- [11] CHELI, F., CAVALCA, K. L., DEDINI, F. G., VANIA, A. **Supporting structure effects on rotating machinery vibrations.** INTERNATIONAL CONFERENCE - VIBRATIONS IN ROTATING MACHINERY, 1992. *Proceedings of the institute of mechanical engineers*, IMechE, 1992, p. 543 - 548.
- [12] CHEN, H.MING, SGROI, V., MALANOSKI, S.B. **Fan / Foundation interaction -A computerized solution.** IFToMM - INTERNATIONAL CONFERENCE, Rome-Italy, September 1982, p. 139-149.
- [13] COSSALTER, V., DA LIO, M. **Un codice per l'analisi dinamica di sistemi rotor-cuscinetti - struttura portante.** *II PROGETTISTA INDUSTRIALE*, v. 9, p. 80-90, 1986.
- [14] CURAMI, A., PIZZIGONI, B. **Un programma di calcolo automatico per l'analisi statica di una linea d'alberi.** *L'energia Elettrica*, v. LVII, n.12, p. 494-502, 1981.

- [15] CURAMI, A., GASPARETO, M., ROGONI, V., DI PASQUANTONIO, F. **An on-line computer system as an aid to solving rotor dynamics problems.** IFToMM - INTERNATIONAL CONFERENCE, 1982, Rome -Italy. September 1982, p. 337-345.
- [16] CURAMI, A., VANIA, A., - **An application of modal analysis techniques.** *L'energia Elettrica*, v. LXII, n. 7, p. 294-307, 1985.
- [17] CURAMI, A., GASPARETO, M., VANIA, A. **An on line application of a turbomachinery supervisory system.** IFToMM - INTERNATIONAL CONFERENCE, 1990, Lyon -France, September 1990, p. 597-601.
- [18] DEDINI, F. G., CAVALCA, K. L. **Aplicação de métodos de identificação teórico experimentais na análise de um turbogerador com sete mancais.** XII CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA. Brasília - Brasil, Dezembro, p.1241-1244, 1993.
- [19] DIANA, G., CURAMI, A., PIZZIGONI, B. **P.A.L.L.A. - A package to analyze the dynamic behavior of a rotor-supporting-structure system-Chapter 7,** Internal report del Dipartimento di meccanica, Sezione di meccanica dei sistemi, Politécnico di Milano - Italia, 1988.
- [20] DIANA, G., CHELI, F., VANIA, A. **A Method to identify the foundation modal parameters through measurements of the rotor vibrations.** INTERNATIONAL CONFERENCE - VIBRATIONS IN ROTATING MACHINERY, 1988, Cambridge, UK. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, IMechE, 1988-7, p. 217 - 222.
- [21] DIANA, G., BASCHSCHMID, N. **Influenza della struttura portante sulle velocità critiche flessionali di alberi rotanti** *L'energia Elettrica*, v. LV, n. 9, p. 411-418, 1978.

- [22] FENG, N. S., HAHN, E. J. **Including foundation effects on vibration behavior of rotating machinery.** *Mechanical Systems and Signal processing*, v.9, p.243 - 256, 1995.
- [23] GOODIER, T. **Teoria da elasticidade.** Rio de janeiro: Editora Guanabara Dois S.A.,1980, 545 p.
- [24] JAINSKI, T. **Modal resolution of transient vibrations in Rotor-Bearing-foundation systems caused by electrical system faults** IFToMM - INTERNATIONAL CONFERENCE , 1982, Rome -Italy, September 1982, p. 177 - 189.
- [25] Jr.,ROY R. CRAIG **Structural dynamics - An introduction to computer methods.** New York: John Wiley & Sons, 1981, 527p.
- [26] KRÄMER, ERWIN **Dynamics of rotors and foundations.** Berlin: SPRINGER-VERLAG, 1993, 382 p.
- [27] MAKRIS, N., BANDONI, D., DELIS, E., GAZETAS, G. **Prediction of observed bridge response with soil-pile-structure interaction.** *Journal of Structural Engineering*, v. 120, n. 10, p. 2992-3011, October 1994.
- [28] NELSON, H.D. **A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory.** *Journal of mechanical design*, v. 102, p. 793-803, October 1980.
- [29] O'NEILL, M.W., DOBRAY, R. **Dynamic response of pile foundations: Analytical aspects.** *Proceedings of a session sponsored by the geotechnical engineering division at the ASCE National convention*, 1980, p.1-30, October 1980.
- [30] POULOS, H.G. **Analysis of the settlement of pile groups.** *Géotechnique*, n. 18, p. 449-471, 1968.

- [31] PRZEMIENIECKI, J. S. **Theory of matrix structural analysis**. New York: McGraw-Hill, 1985, 468 p.
- [32] RAO, S.S. **The finite element method in engineering**. USA: Pergamon Press, 1989, 642 p.
- [33] SMEJKAL, J. **The Dynamic interaction of the turboset with the foundation**. IFToMM - INTERNATIONAL CONFERENCE, 1990, Lyon - France. September 1990, p. 361 - 366.
- [34] SLOANE, E., McKEEVER, B. **Modal survey techniques and theory**. *S.A. E: Society of Automotive Engineers, Inc.*, 1975, v. 84, Section 4, paper n. 751067, p. 2963 - 2988.
- [35] WEIMING, LIU, NOVAK, M. **Dynamic behavior of turbine-generator- foundation systems**. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 24, n. 3, p. 339-360, May 1995.
- [36] ZHENG, ZHAO-CHANG, WU, NAN-PING **Dynamics analysis of the large rotor-foundation-soil system**. IFToMM - INTERNATIONAL CONFERENCE, 1990, Lyon -France. September 1990, p. 347 - 352.

9. Apêndice A

9.1 Estrutura e Configuração do Pacote Rotortest.

9.2 Estrutura do Programa.

O pacote de programas foi elaborado com o objetivo de estudar o comportamento dinâmico de turbo-máquinas. A análise linear é feita através do cálculo da resposta em frequência do sistema completo rotor-suportes-fundação, permitindo, assim, que sejam estudados diferentes problemas da dinâmica de rotores. O pacote consiste em analisar, numa primeira fase, o rotor, aplicando-se o método dos elementos finitos(MEF) para elementos viga de seção circular, sendo feita em seguida a modelagem dos selos mecânicos de fluxo e mancais hidrodinâmicos. Na última fase, são determinados os parâmetros da fundação, esta também descrita através do MEF. Determinados todos os parâmetros do modelo, obtém-se a montagem da matriz elastodinâmica para o sistema completo e, conseqüentemente, sua resposta dinâmica no domínio da frequência. As três fases descritas anteriormente são formadas por etapas (blocos) cuja estrutura é descrita no parágrafo seguinte.

9.2.1 Fluxograma do Programa.

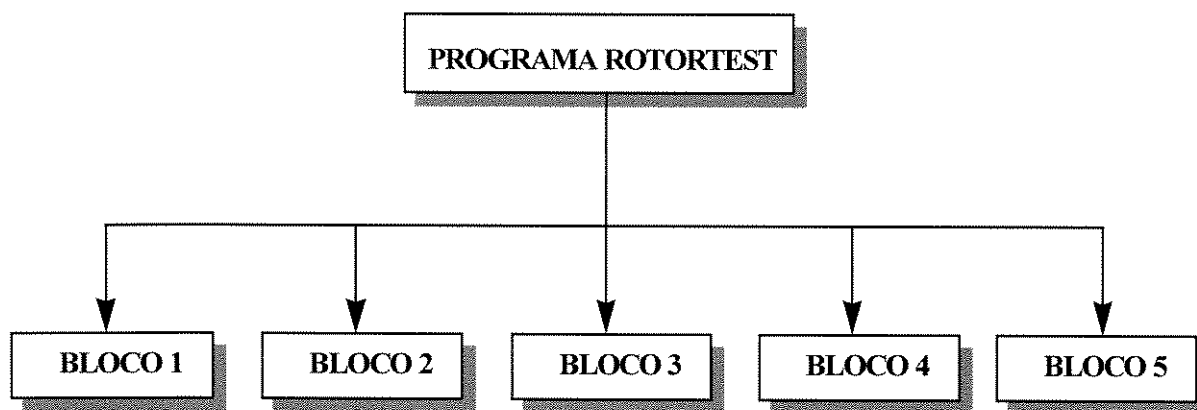


Figura 9-1 Fluxograma de configuração do ROTORTEST

Todos os programas foram elaborados na linguagem FORTRAN(CEREDA, RONALD L.D.,MALDONADO,J.C.[36]), executados em estações de trabalho com sistema operacional UNIX.

Os blocos que compõe o programa são descritos a seguir:

BLOCO 1 :*Entrada de dados do eixo e dos mancais.*

Nesta etapa o modelo do rotor(eixo + massas concentradas) é esquematizado procedendo-se com o cálculo das reações nos mancais, e definindo, assim, a geometria do mesmo(escolha do mancal).

BLOCO 2 :*Entrada dos dados geométricos dos selos mecânicos.*

- cálculo dos coeficientes equivalentes para os selos é feito a partir das equações de Bernoulli e da continuidade. As forças geradas pelos fluxos axial e circunferencial são linearizadas nas vizinhanças do equilíbrio estático, para obtenção dos coeficientes.

BLOCO 3 :Cálculo dos coeficientes de rigidez e amortecimento para o filme de óleo.

As forças do filme de óleo são linearizadas em torno da posição de equilíbrio, sendo obtidas a partir da equação de REYNOLDS. Desta forma, obtém-se os coeficientes de rigidez e de amortecimento equivalentes para os mancais.

BLOCO 4 :Determinação dos parâmetros modais da Fundação.

O modelo da fundação é discretizado, as funções de transferência, para o modelo, são obtidas para os pontos de interesse, e através de técnicas modais, determinam-se os parâmetros generalizados de massa, fator de amortecimento e frequências próprias.

BLOCO 5 :Cálculo das matrizes globais do sistema completo e da resposta em frequência.

Entrada dos dados da força de excitação externa, que gera o desbalanceo, além da interpolação dos coeficientes de rigidez e amortecimento de mancais e selos de fluxo, para obtenção de suas curvas características. A matriz elastodinâmica do sistema completo é obtida e, em seguida, é feita a análise da resposta em frequência.

9.3 Configuração do Bloco 4 (Fundação).

Nesta parte do programa principal é calculada as funções de transferência do modelo numérico da fundação e, utilizando técnicas modais, são determinados os parâmetros generalizados (massa, fator de amortecimento e frequências naturais). Nesta etapa foram criadas subrotinas para saídas gráficas das respostas em frequência do modelo da estrutura, além de outras subrotinas para otimização do pacote. O programa permitirá futuramente a entrada de dados referentes as funções de transferência experimentais, permitindo que os dois modelos(analítico e experimental) sejam comparados. Os arquivos de saída gerados nesse bloco serão utilizados como entrada de dados no bloco 5, para obtenção da matriz elastodinâmica do sistema completo.

9.3.1 Fluxograma do Bloco 4.

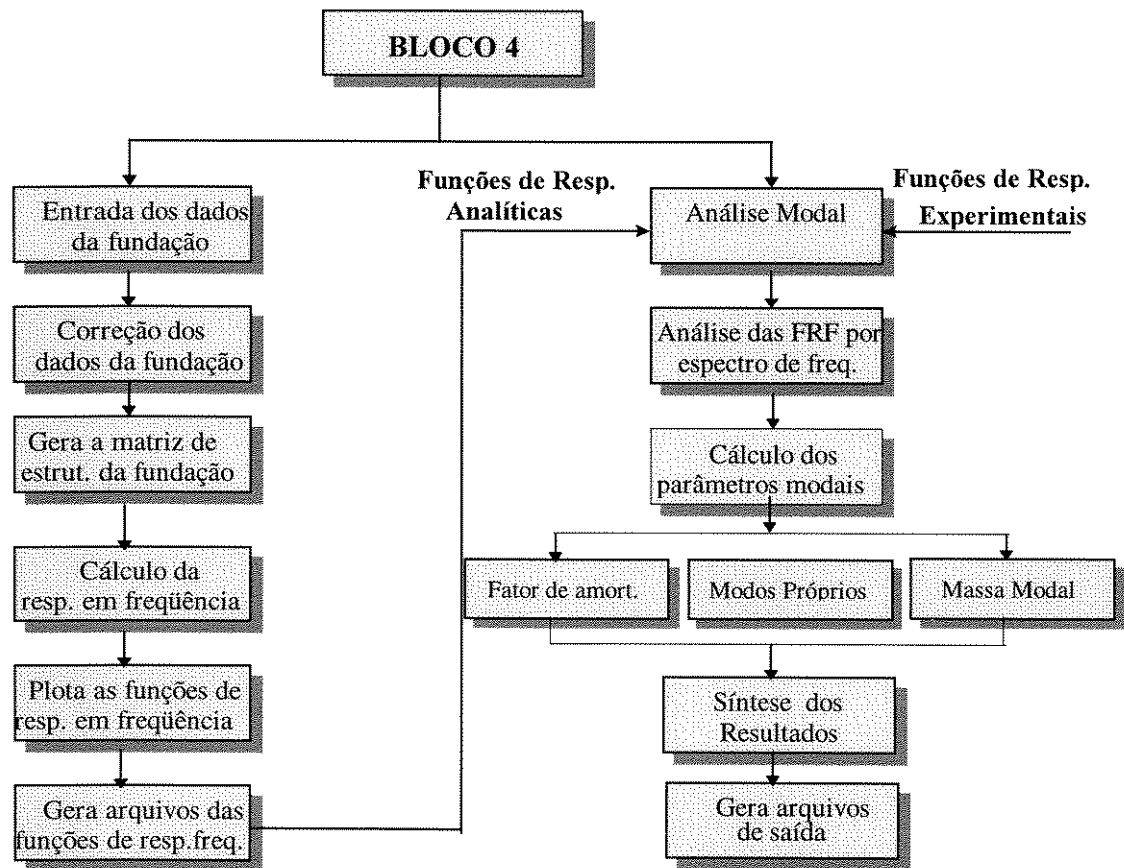
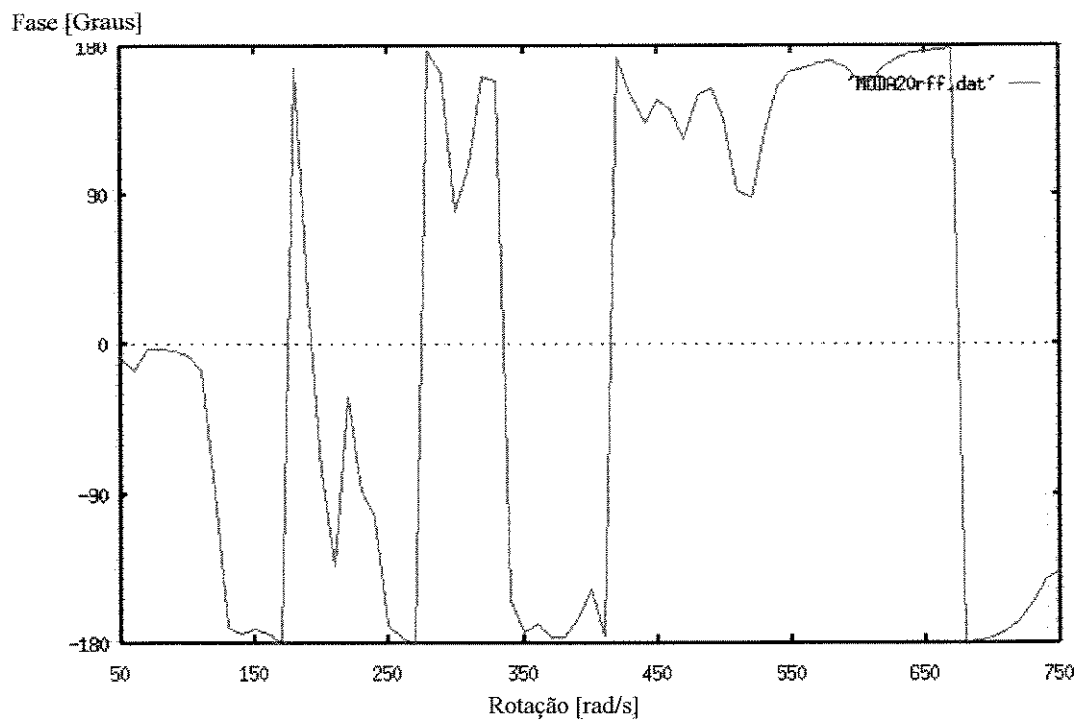
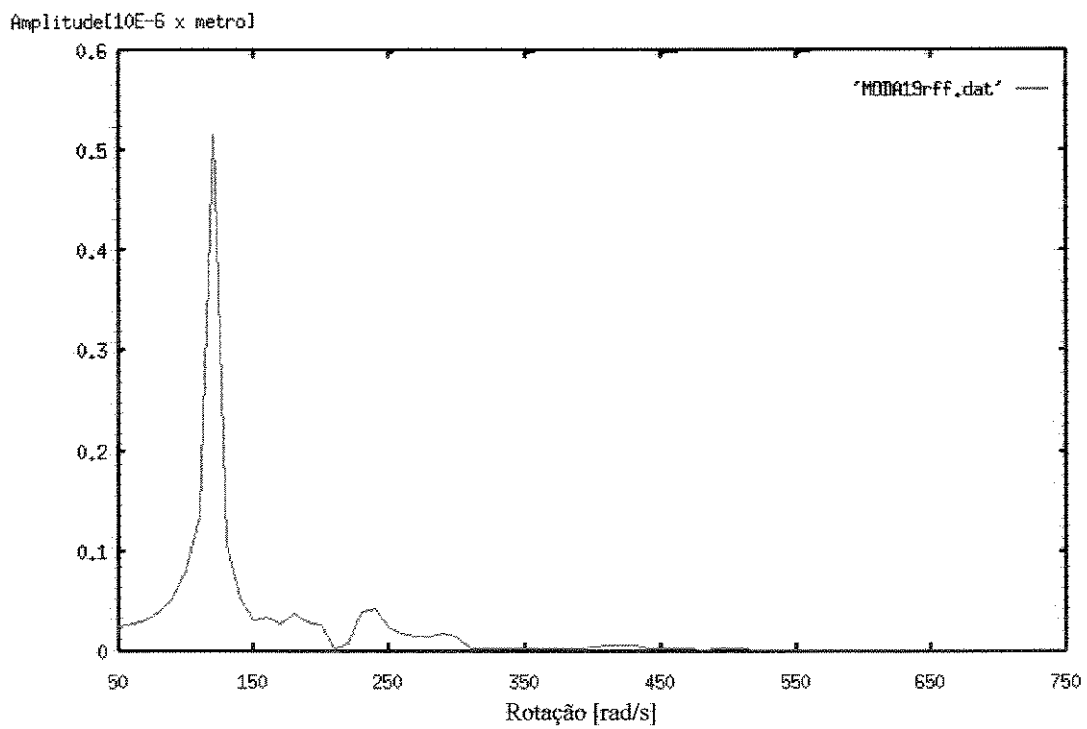


Figura 9-2 Fluxograma de Configuração do Bloco 4 (Fundação)

10. Apêndice B



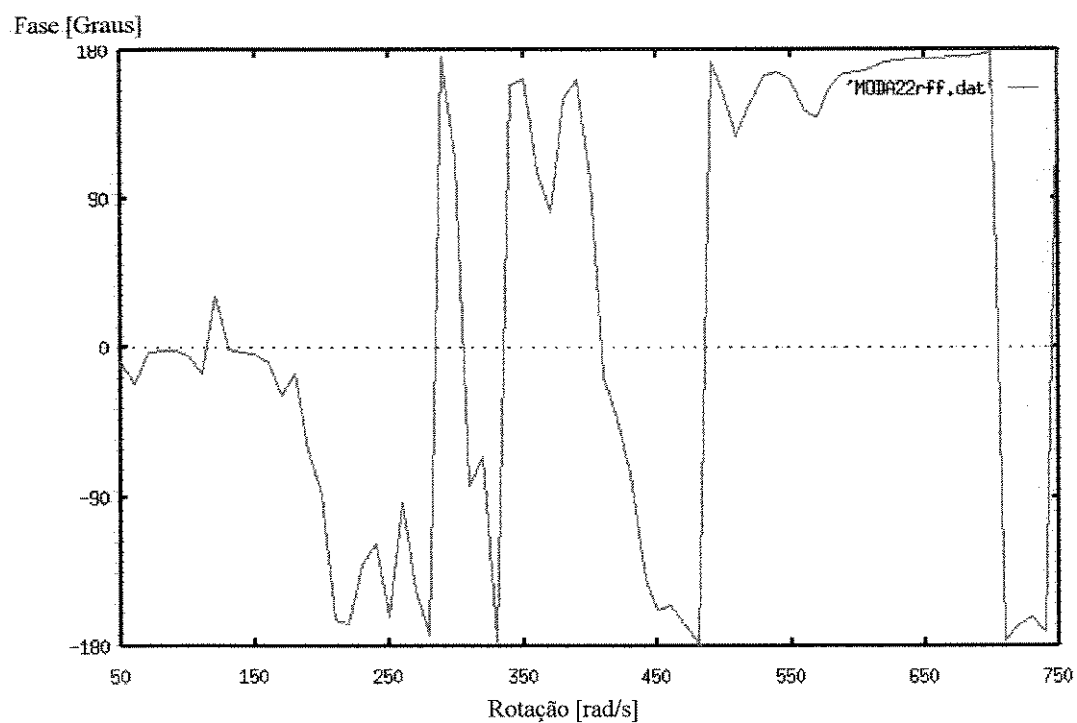
(a) Fase



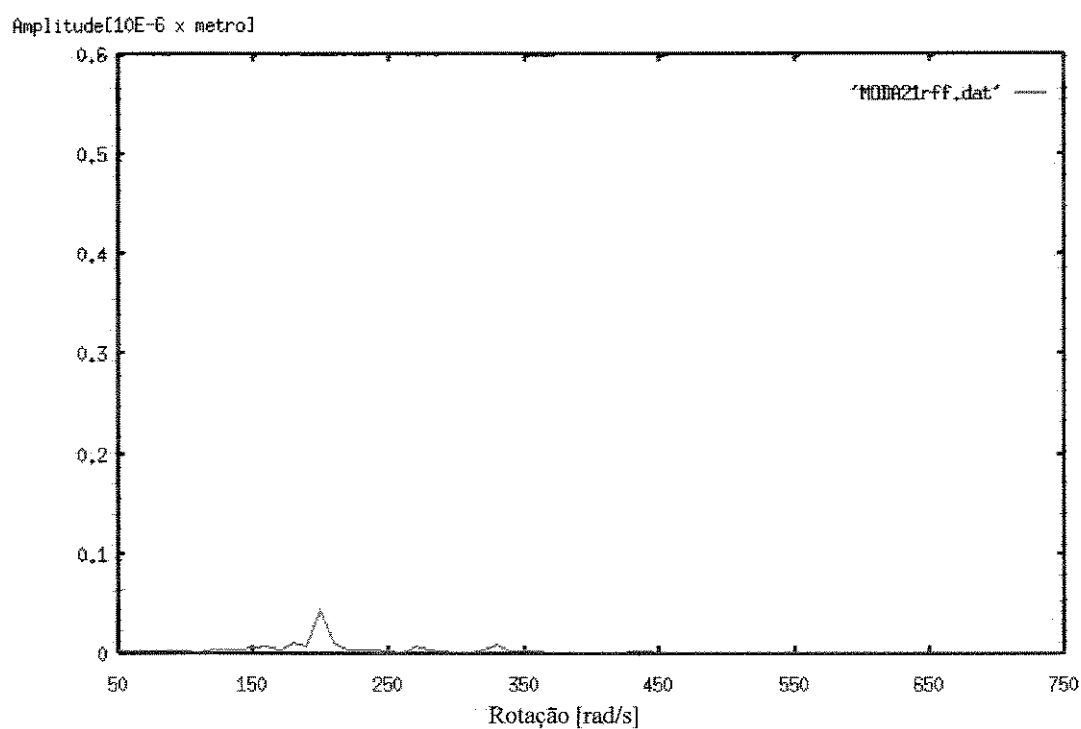
(b) Amplitude

Figura 10-1 Resposta em Frequência para o nó 2

Direção Horizontal



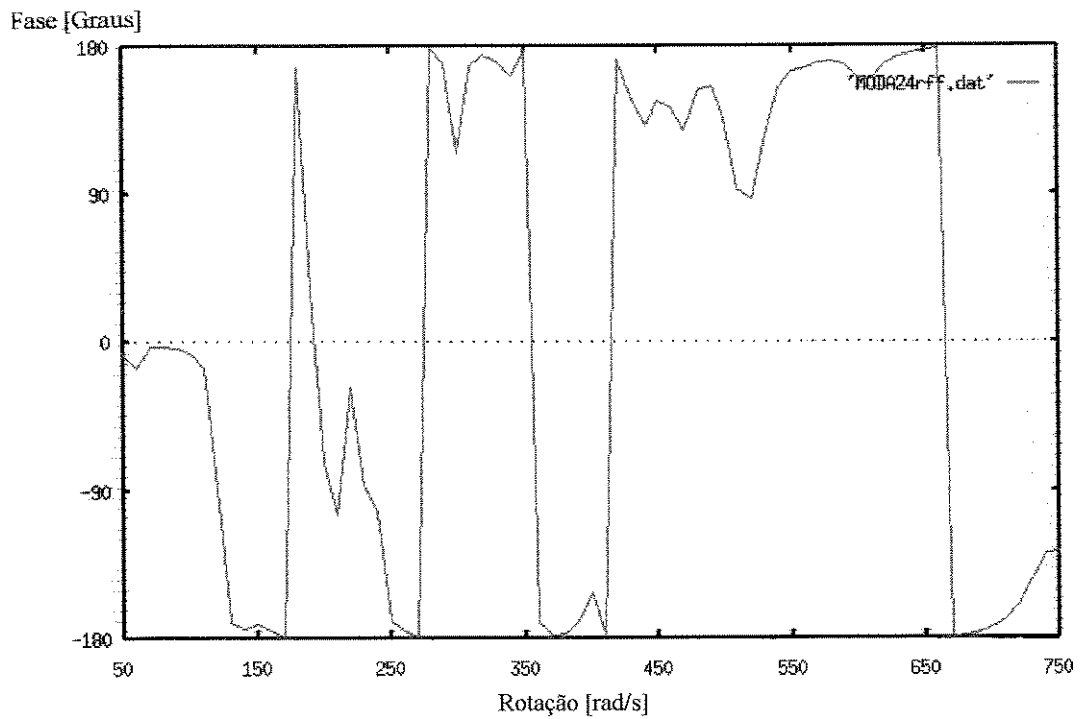
(a) Fase



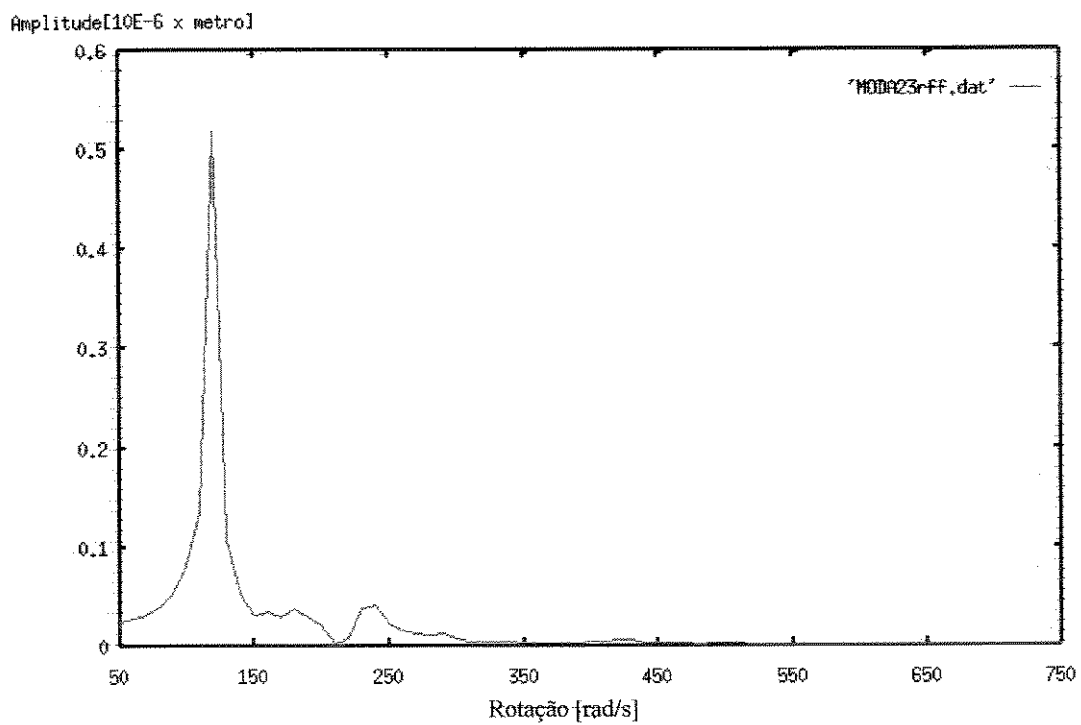
(b) Amplitude

Figura 10-2 Resposta em Frequência para o nó 2

Direção Vertical



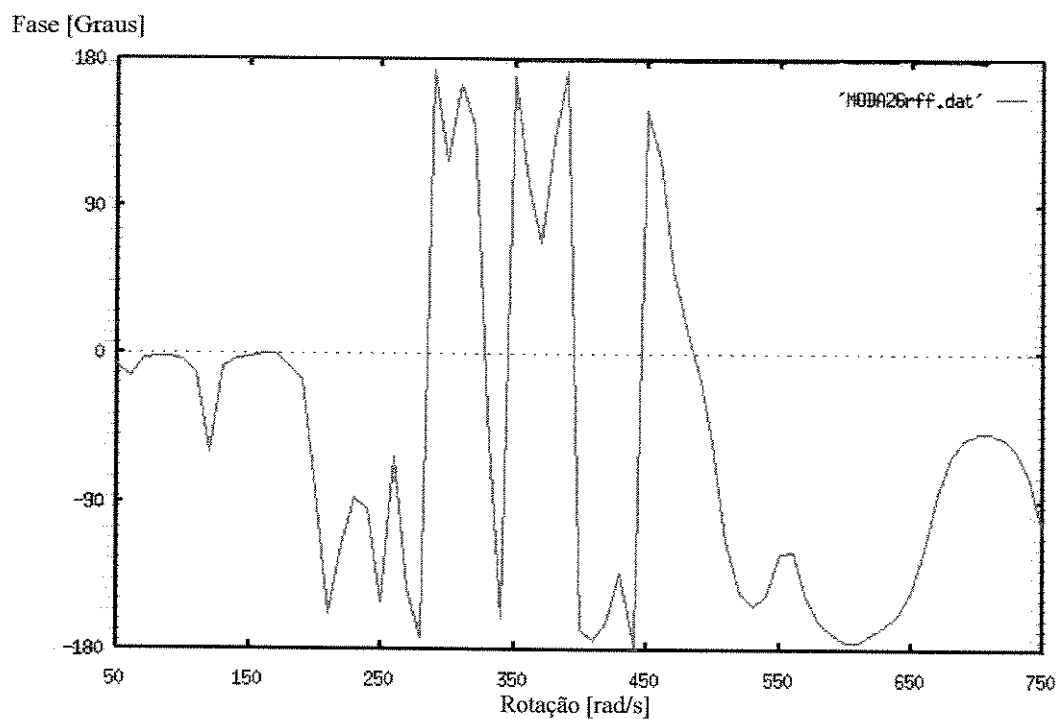
(b) Fase



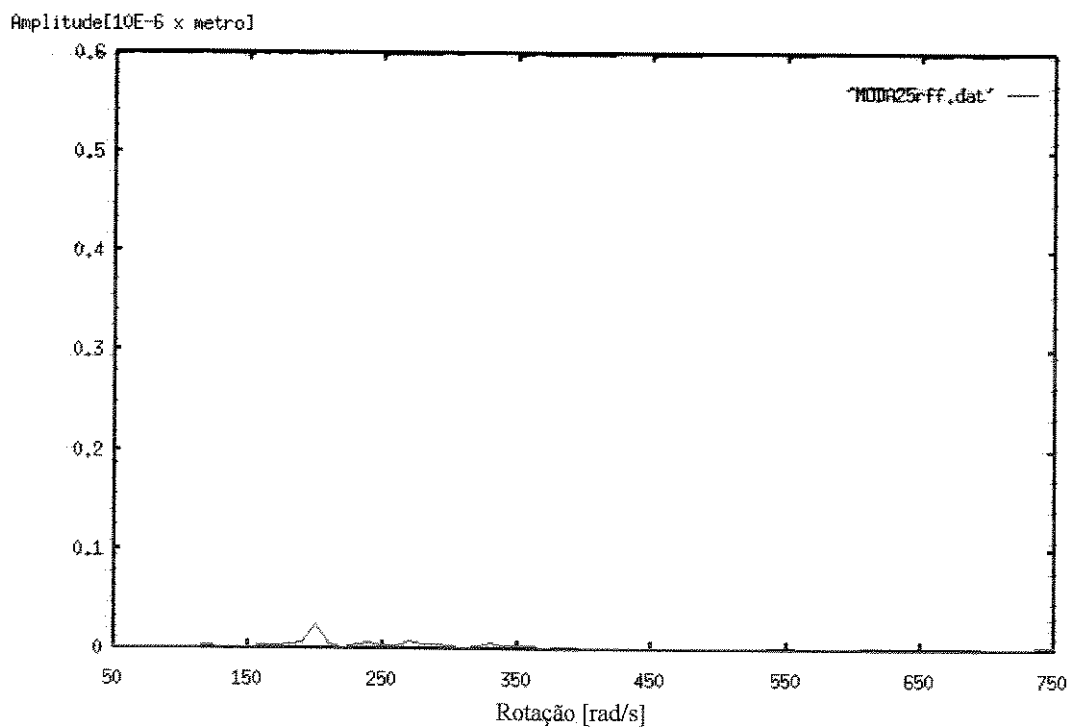
(b) Amplitude

Figura 10-3 Resposta em Frequência para o nó 4

Direção Horizontal



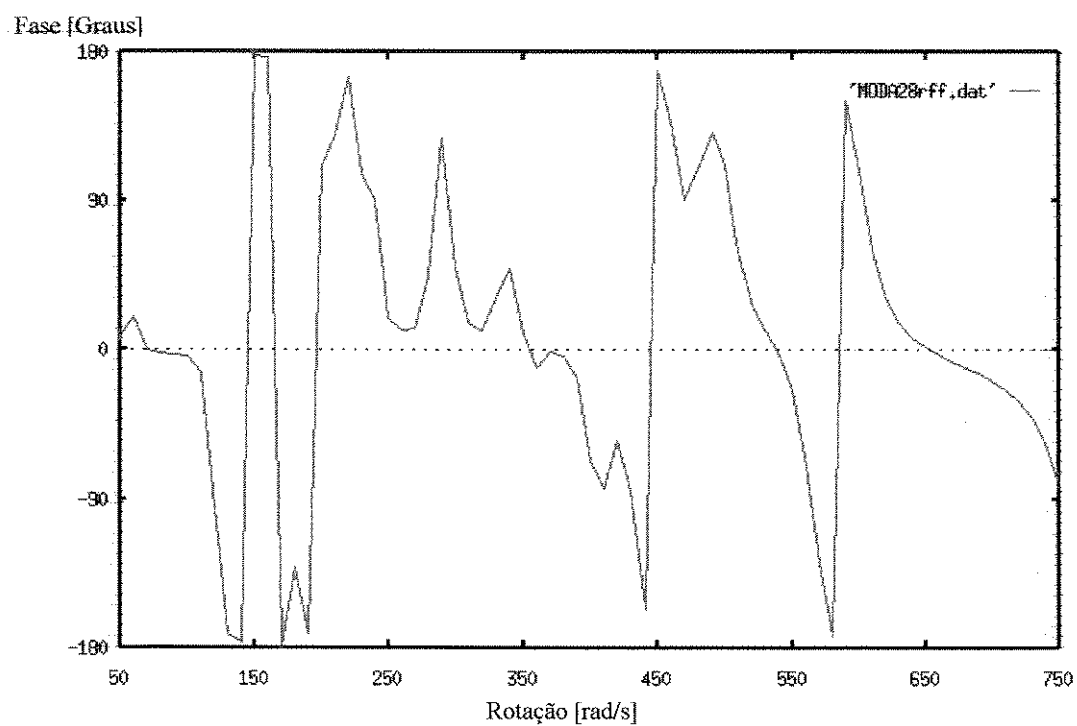
(a) Fase



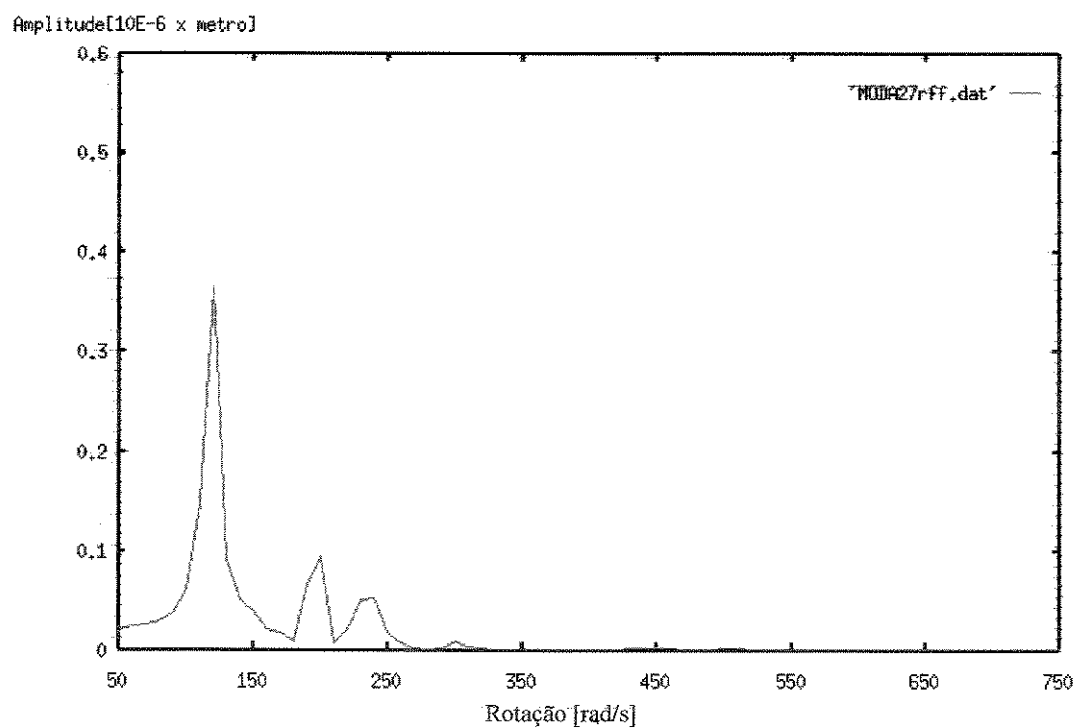
(b) Amplitude

Figura 10-4 Resposta em Frequência para o nó 4

Direção Vertical



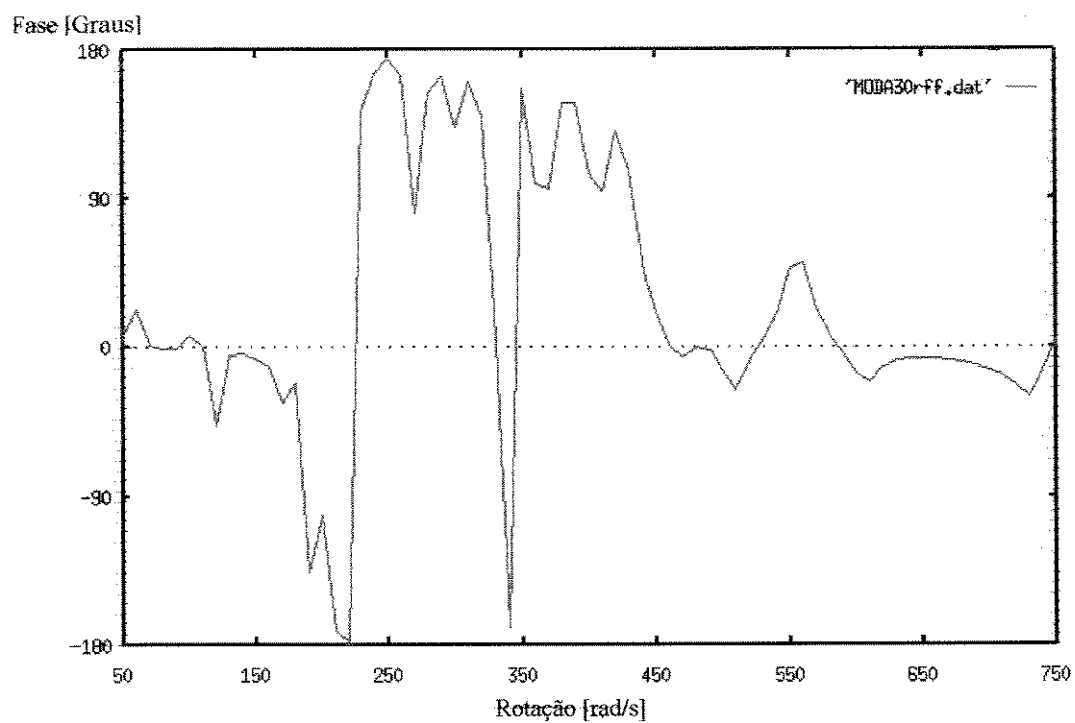
(a) Fase



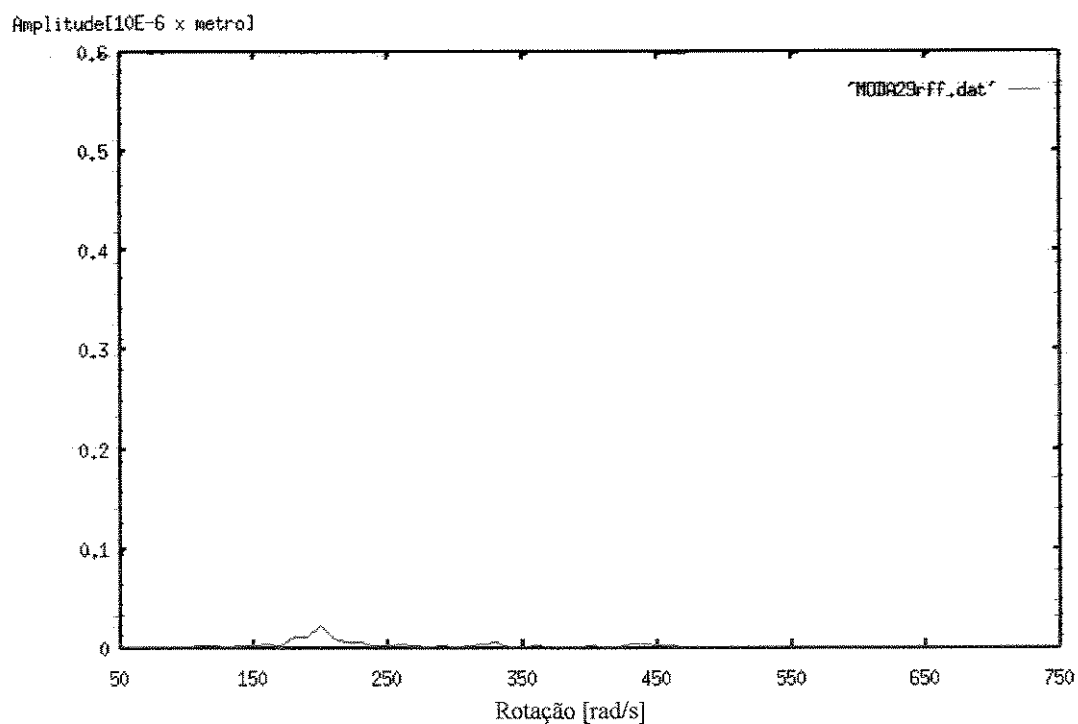
(b) Amplitude

Figura 10-5 Resposta em Frequência para o nó 7

Direção Horizontal



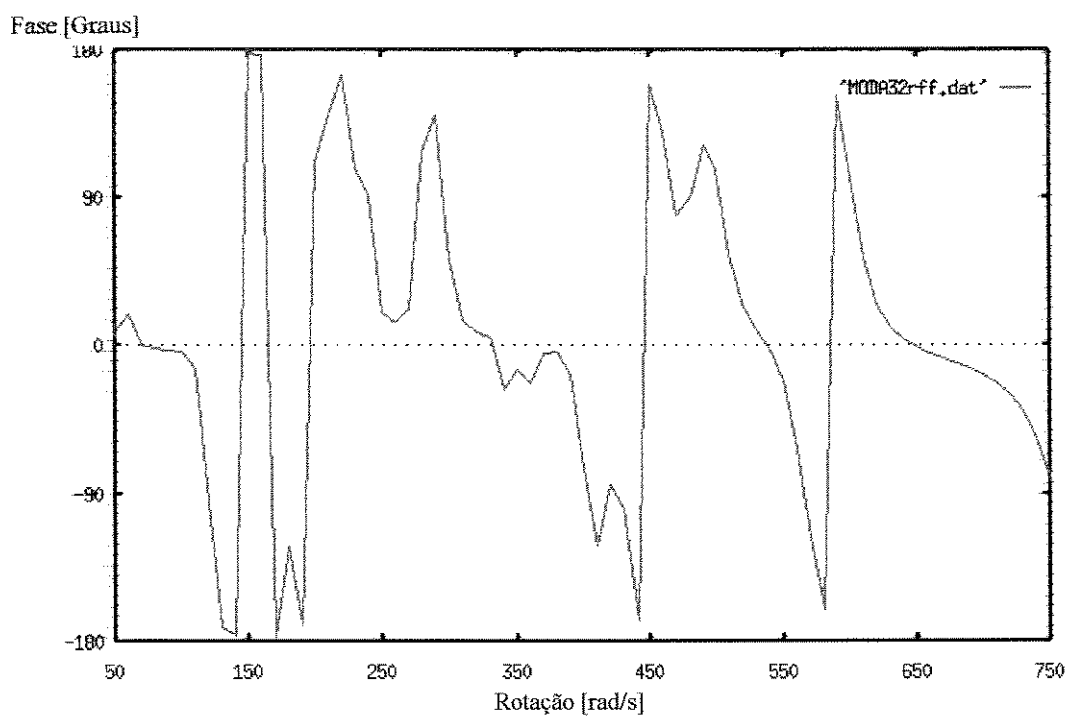
(a) Fase



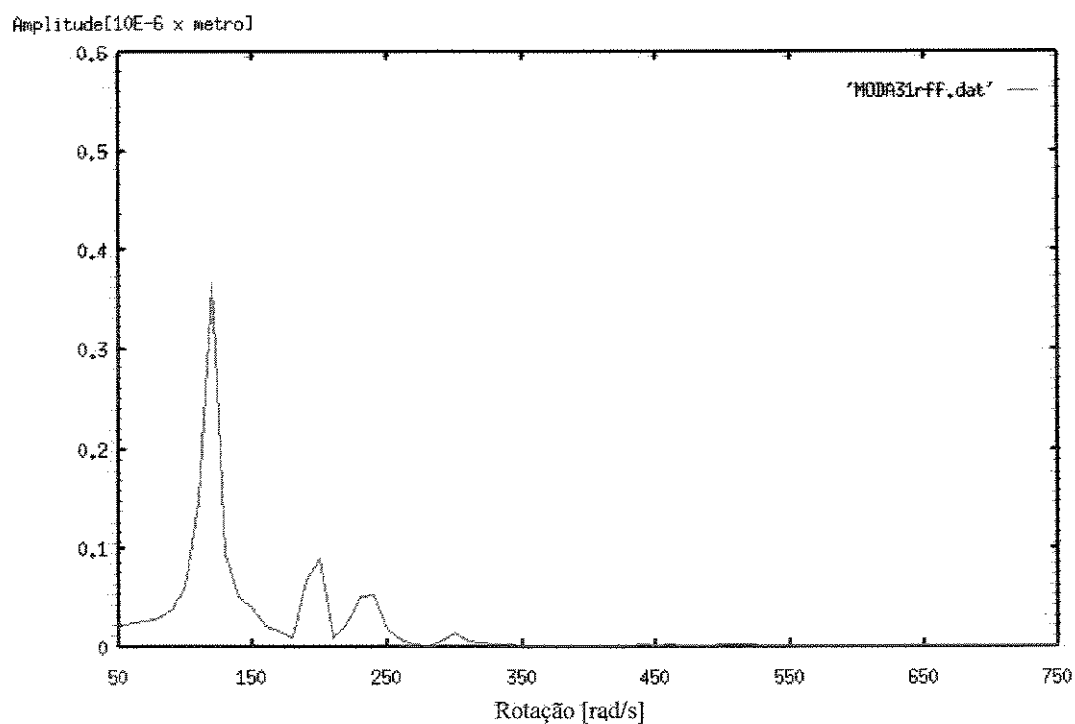
(b) Amplitude

Figura 10-6 Resposta em Frequência para o nó 7

Direção Vertical



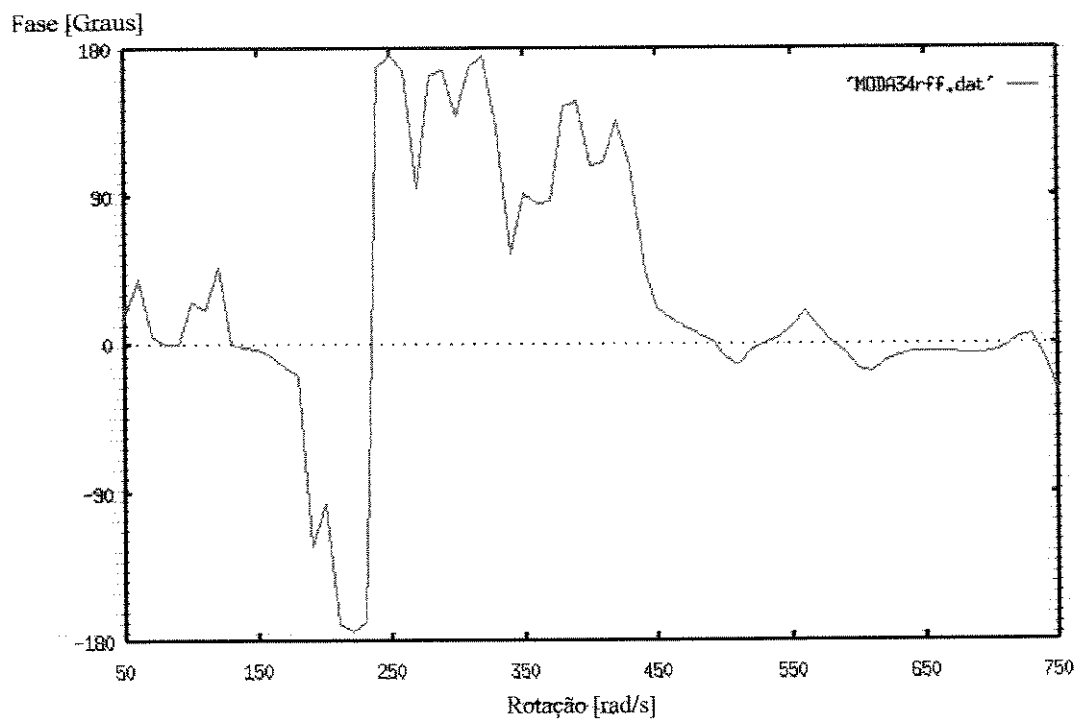
(a) Fase



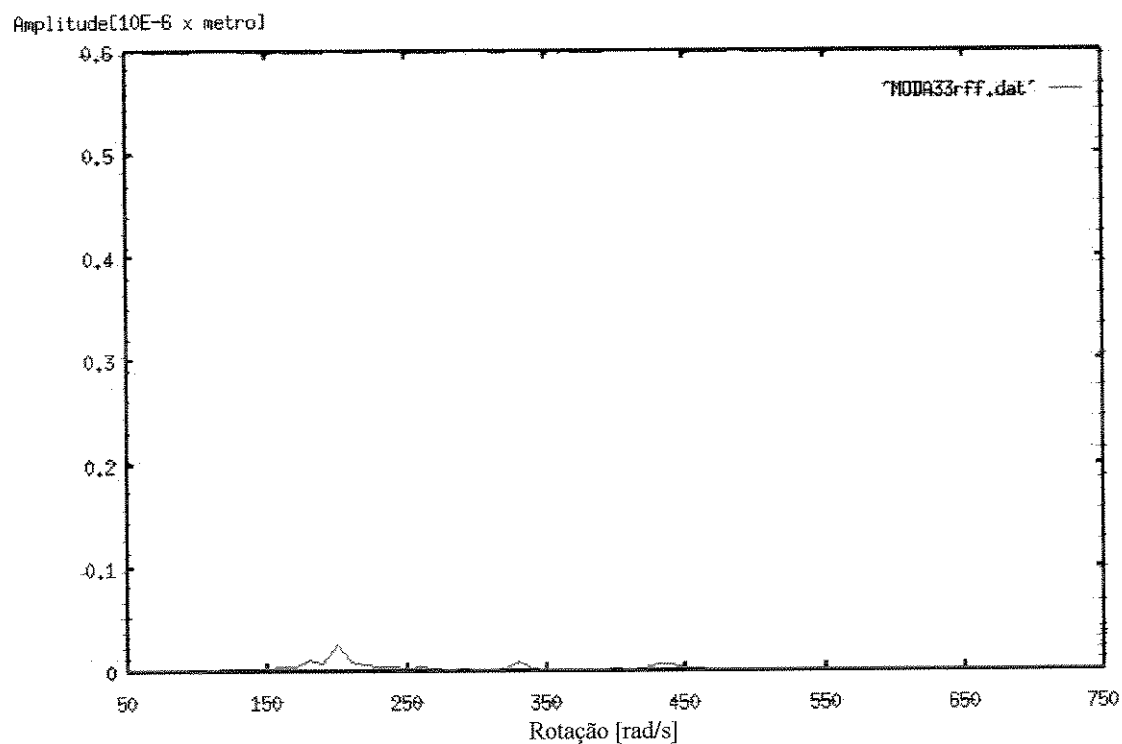
(b) Amplitude

Figura 10-7 Resposta em Frequência para o nó 9

Direção Horizontal



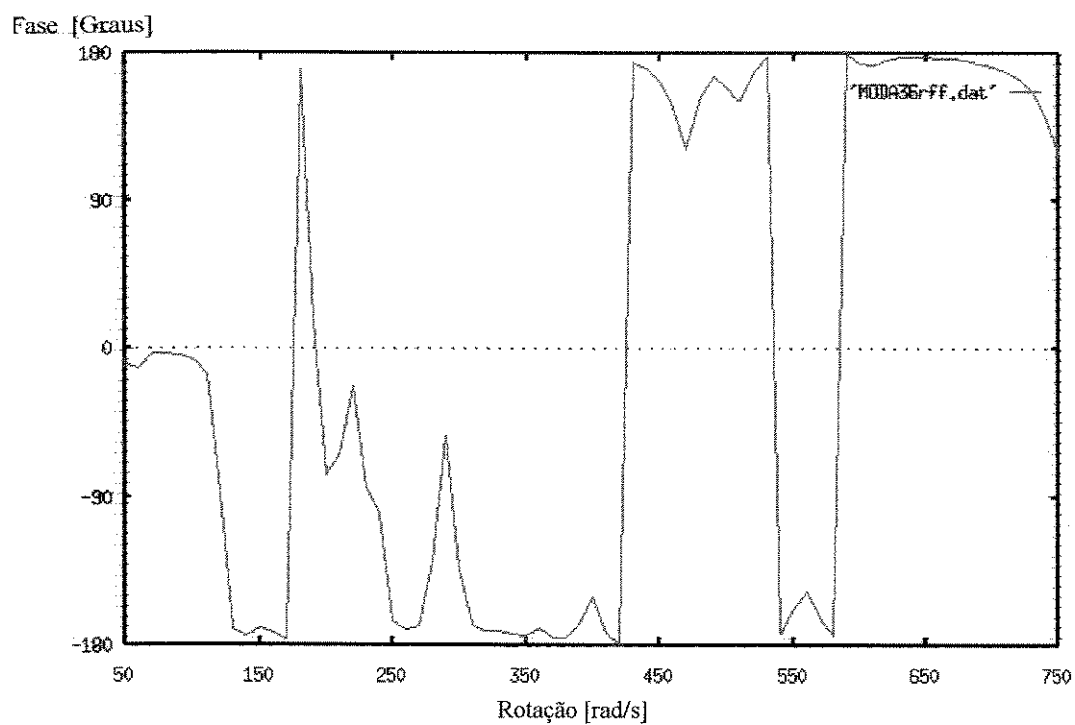
(a) Fase



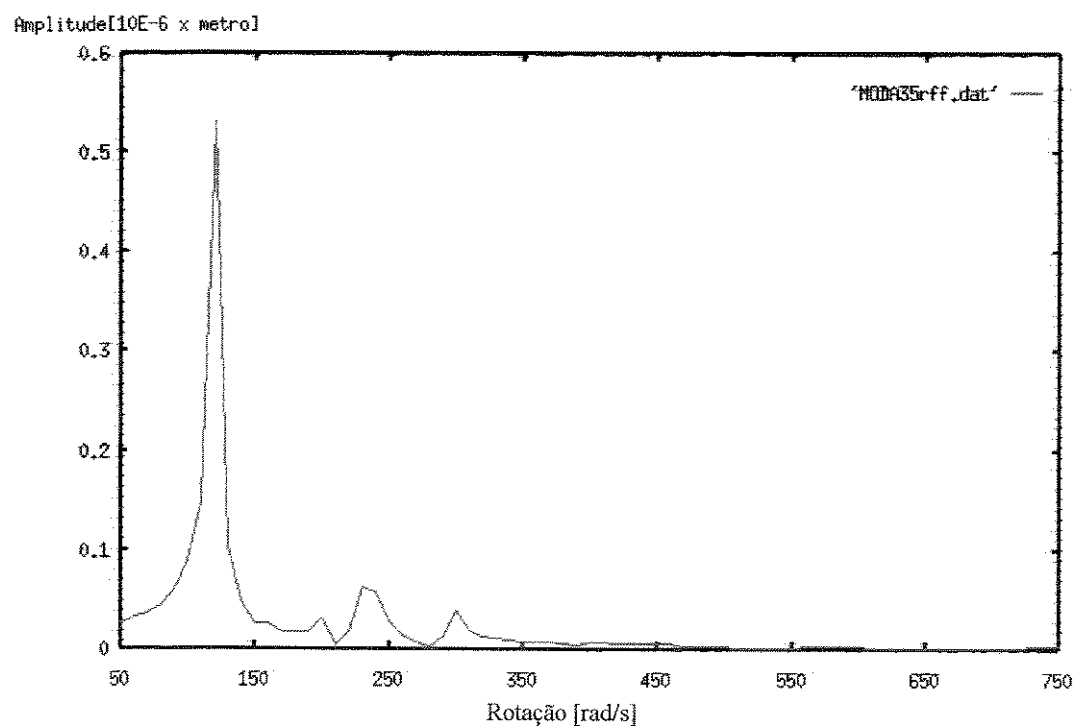
(b) Amplitude

Figura 10-8 Resposta em Frequência para o nó 9

Direção Vertical



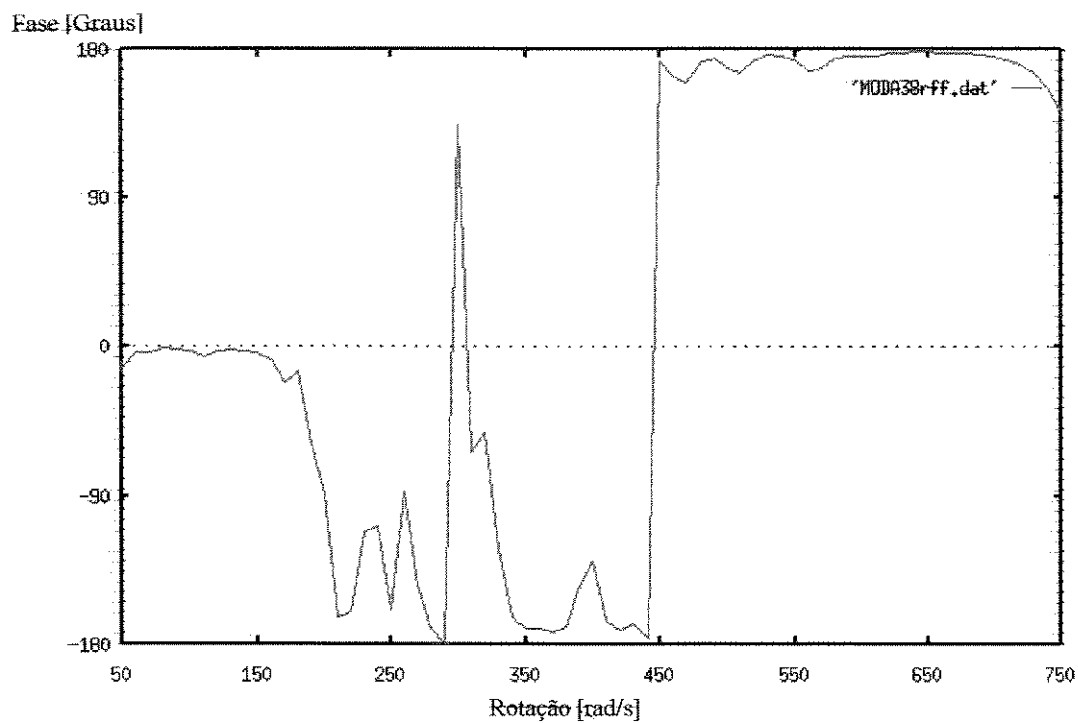
(a) Fase



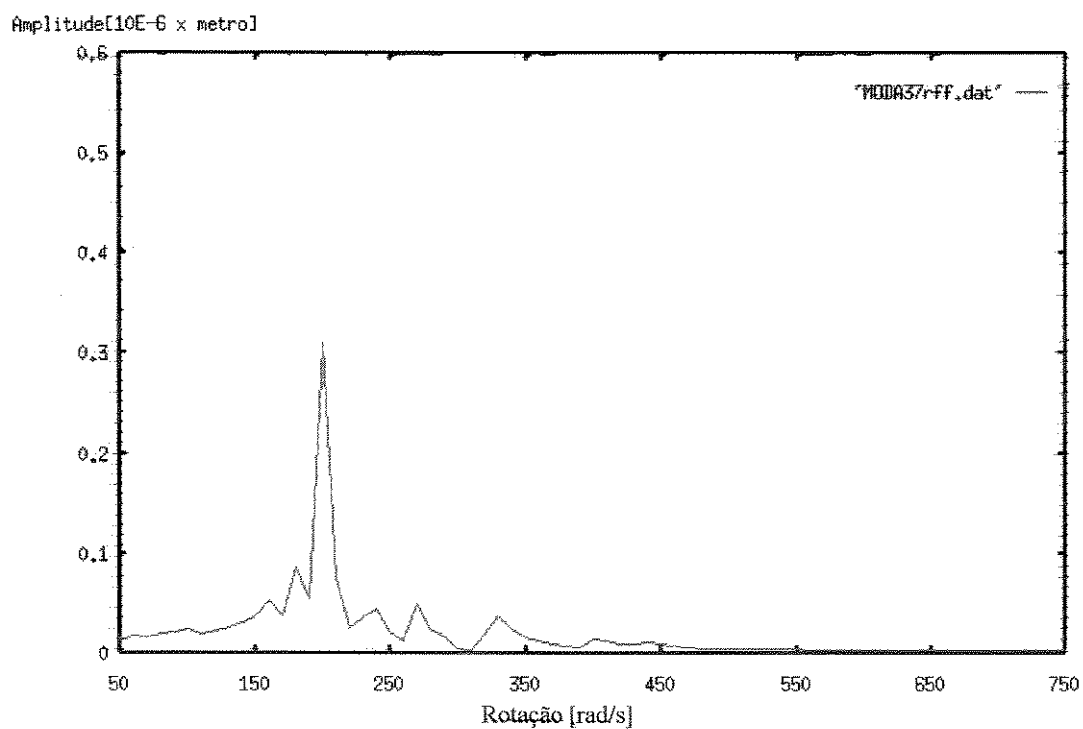
(b) Amplitude

Figura 10-9 Resposta em Frequência para o nó 2

Direção Horizontal



(a) Fase



(b) Amplitude

Figura 10-10 Resposta em Freqüência para o nó 2

Direção Vertical