UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Holografia Acústica Usando Modelo de Fontes Elementares

Autor:Marcos Eduardo Vieira PinhoOrientador:José Roberto de França Arruda

Curso: Engenharia Mecânica Área de Concentração: Mecânica Computacional

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2003 S.P. – Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Holografia Acústica Usando Modelo de Fontes Elementares

Autor:Marcos Eduardo Vieira PinhoOrientador:José Roberto de França Arruda

Prof. Dr. José Roberto de França Arruda , Presidente Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Prof. Dr. José Maria dos Santos Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Prof. Dr. Roberto Aizik Tenenbaum Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE / UFRJ

Campinas, 25 de fevereiro de 2003

Agradecimentos

Não teria sido possível realizar este trabalho sem o apoio e incentivo da minha família, em especial dos meus pais, Washington e Isaura, e dos meus irmãos, Juliana e Thiago.

Gostaria de agradecer aos meus amigos Sacani, Rui, Scooby, Hortência e Minhocão, com os quais tive a felicidade de morar durante o período de realização deste trabalho.

Agradeço ao professor Arruda por sua orientação neste trabalho, com sua visão ampla e abrangente sobre a área de vibroacústica, sem o qual não teria conseguido atingir os objetivos propostos, assim como ao professor Zé Maria por suas colocações oportunas e precisas que vieram somar valor no resultado deste trabalho.

Agradeço aos professores e funcionários do Departamento de Mecânica Computacional (DMC) e do Departamento de Projeto Mecânico (DPM), assim como aos demais amigos e colegas de ambos os departamentos que de forma direta ou indiretamente contribuíram na realização deste trabalho.

Agradeço à empresa DaimlerChrysler do Brasil por ter financiado este trabalho de pesquisa. Agradeço ao Sr. Marco Fogaça por ter idealizado e proposto este trabalho de pesquisa, ao Sr. Gaetano Miranda e ao Sr. Marcio Bernardinelli que sempre me incentivaram e me apoiaram no desenvolvimento deste trabalho, assim como os demais colegas do grupo de Vibração a Acústica da DaimlerChrysler do Brasil.

"A mais bela teoria só tem valor através das obras que realiza" Romain Rolland

Resumo

Pinho, Marcos Eduardo Vieira, *Holografia Acústica Usando Modelo de Fontes Elementares*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003.
87 p. Dissertação (Mestrado).

Neste trabalho apresenta-se o método das fontes elementares (ESM) como uma técnica de reconstrução do campo vibroacústico capaz de obter bons resultados de estimação por meio de uma formulação simples. Mostrou-se que por ESM é possível estimar o campo de pressão independentemente da geometria da fonte analisada, da grade de medição e do sistema de coordenadas utilizado. Um estudo de casos baseado em dados de simulação foi apresentado, no qual uma placa vibrante, simplesmente apoiada, montada em um anteparo (baffle) infinito, é utilizada como fonte de ruído. As principais características de ESM são analisadas e os resultados obtidos de reconstrução holográfica são comparados com os estimados pelo método de holografia acústica de campo próximo (NAH). Avaliou-se a robustez do ESM. Utilizou-se a ferramenta de regularização de Tikhonov a fim de melhorar a solução do problema inverso de ESM. A relação entre o condicionamento da matriz representativa do sistema e o resultado do campo estimado é discutida, assim como o problema de configuração ideal das fontes. Resultados de estimação sonora obtidos por ESM e NAH são apresentados para um caso experimental de radiação acústica de uma placa plana, montada em um anteparo, excitada por um excitador eletrodinâmico em campo livre. Por fim, apresentou-se um caso experimental de radiação sonora de um compressor, mostrando a possibilidade de aplicação do ESM a um caso de fonte vibroacústica 3D de formato arbitrário.

Palavras Chave

Vibroacústica, Holografia acústica, Problema inverso, Mapeamento de pressão.

Abstract

Pinho, Marcos Eduardo Vieira, Acoustic Holography Using The Elementary Source Method, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003.
87 p. Dissertação (Mestrado).

In this work, the Elementary Source Method (ESM) is presented as a technique of vibroacoustic field reconstruction that allows good estimated results using a simple formulation. By using the ESM it is possible to estimate the pressure field independently of the source geometry, the coordinate system and the measurement grid used. A case study based on simulated data is presented. In this simulation, a simply supported vibrating plate surrounded by an infinite rigid baffle is used as the noise source. The main characteristics of the ESM are analyzed and the results of the holographic reconstruction are compared with those estimated by the Nearfield Acoustical Holography (NAH) method. The ESM robustness is evaluated. The Tikhonov regularization tool is used in order to improve the inverse problem solution. The relationship between the conditioning of the system and the accuracy of the estimated by ESM and NAH are presented for an experimental case of acoustic radiation consisting of a plate surrounded by a rigid baffle excited by a shaker in free-field. Finally, an experimental case of acoustic radiation from a hermetic compressor is presented, showing the possibility of applying the ESM to a 3D vibroacoustic arbitrary source geometry.

Key Words

Vibroacoustics, Acoustic Holography, Inverse problem, Pressure mapping.

Índice

LISTA DE FIGURAS	III
LISTA DE TABELAS	VI
NOMENCLATURA	VII
INTRODUÇÃO	1
1.1 DISCUSSÃO INICIAL E ABORDAGEM DO TRABALHO	1
1.2 Organização da dissertação	4
REVISÃO DA LITERATURA	6
HOLOGRAFIA ACÚSTICA DE CAMPO PRÓXIMO (NAH)	15
3.1. Formulação Teórica	16
3.2 CARACTERÍSTICAS DE MEDIÇÃO	22
3.3 DETERMINAÇÃO DE OUTRAS GRANDEZAS ACÚSTICAS	24
HOLOGRAFIA ACÚSTICA POR FONTES ELEMENTARES (ESM)	25

4.1 Formulação Teórica	25
4.2 Solução do Problema Inverso	27
4.3 DETERMINAÇÃO DE GRANDEZAS ACÚSTICAS	31
ANÁLISE DE SIMULAÇÃO	34
5.1 Simulação de uma Placa Vibrante	34
5.2 RADIAÇÃO DO CAMPO DE PRESSÃO POR MODELO DE SIMULAÇÃO	40
5.3 HOLOGRAFIA ACÚSTICA DE CAMPO PRÓXIMO USANDO RDFS	41
5.4 HOLOGRAFIA ACÚSTICA POR FONTES ELEMENTARES	43
5.5 Análise Comparativa Entre ESM e NAH	59
5.6 CAMPO DE VIBRAÇÃO NA SUPERFÍCIE DA FONTE	62
ANÁLISE EXPERIMENTAL	65
ANÁLISE EXPERIMENTAL 6.1 Placa Vibrante - arranjo experimental	65
ANÁLISE EXPERIMENTAL 6.1 Placa Vibrante - arranjo experimental 6.2 Características de Medição	65 65 68
ANÁLISE EXPERIMENTAL 6.1 PLACA VIBRANTE - ARRANJO EXPERIMENTAL 6.2 CARACTERÍSTICAS DE MEDIÇÃO 6.3 ESM APLICADO A DADOS EXPERIMENTAIS	65 65 68 69
ANÁLISE EXPERIMENTAL 6.1 PLACA VIBRANTE - ARRANJO EXPERIMENTAL 6.2 CARACTERÍSTICAS DE MEDIÇÃO 6.3 ESM APLICADO A DADOS EXPERIMENTAIS 6.4 ESM COMPARADO A NAH	65 65 68 69 74
 ANÁLISE EXPERIMENTAL 6.1 PLACA VIBRANTE - ARRANJO EXPERIMENTAL 6.2 CARACTERÍSTICAS DE MEDIÇÃO 6.3 ESM APLICADO A DADOS EXPERIMENTAIS 6.4 ESM COMPARADO A NAH 6.5 ESM APLICADO A FONTES DE RUÍDO DE FORMATO ARBITRÁRIO 	65 65 68 69 74 75
 ANÁLISE EXPERIMENTAL 6.1 PLACA VIBRANTE - ARRANJO EXPERIMENTAL 6.2 CARACTERÍSTICAS DE MEDIÇÃO 6.3 ESM APLICADO A DADOS EXPERIMENTAIS 6.4 ESM COMPARADO A NAH 6.5 ESM APLICADO A FONTES DE RUÍDO DE FORMATO ARBITRÁRIO CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	65 68 69 74 75 79
ANÁLISE EXPERIMENTAL 6.1 PLACA VIBRANTE - ARRANJO EXPERIMENTAL 6.2 CARACTERÍSTICAS DE MEDIÇÃO 6.3 ESM APLICADO A DADOS EXPERIMENTAIS 6.4 ESM COMPARADO A NAH 6.5 ESM APLICADO A FONTES DE RUÍDO DE FORMATO ARBITRÁRIO CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	65 65 68 69 74 75 79 82

Lista de Figuras

1.1: VALORES DE RUÍDO EXTERNO MÁXIMO, EM DB(A), PERMITIDOS PARA VEÍCULOS COMERCIAIS NO BRASIL.	1
1.2: DISTRIBUIÇÃO MÉDIA DAS PRINCIPAIS FONTES DE RUÍDO DE UM VEÍCULO MÉDIO BRASILEIRO.	2
3.1: Representação esquemática das transformadas de Fourier, direta e inversa, em NAH.	16
3.2: REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO SISTEMA DE COORDENADAS.	17
3.3: Representação esquemática do círculo de radiação.	21
3.4: Representação esquemática da medição para aplicação da técnica de NAH.	22
4. 1: Representação gráfica da Curva-L.	30
4.2: HOLOGRAMAS DE VIBRAÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE VIBRANTE.	33
5.1: Representação esquemática de uma placa montada em um baffe, excitada por uma força F.	34
5.2: ALGUNS MODOS DE VIBRAÇÃO E SUAS RESPECTIVAS FREQÜÊNCIAS NATURAIS PARA O CASO DE UMA PLACA PL SIMPLESMENTE APOIADA.	ANA 37
5.3 : Curvas de FRFs de uma placa excitada por uma força F posicionada próxima da borda (em cima) próxima do centro (embaixo).) E 38
5.4: MODOS DE VIBRAR DE UMA PLACA PLANA SIMPLESMENTE APOIADA, AS RESPECTIVAS FREQÜÊNCIAS DE VIBRA E O LOCAL – PONTO (X ₀ ,Y ₀)- ONDE FOI APLICADA A FORÇA F.	ção 39
5.5: VALOR ABSOLUTO DO DESLOCAMENTO DA SUPERFÍCIE DA PLACA, EM M, PARA F = 200Hz, OBTIDO ANALITICAMENTE.	39
5.6: CAMPO DE PRESSÃO, EM DB, RADIADO POR UMA PLACA VIBRANTE, DETERMINADO ANALITICAMENTE PARA FREQÜÊNCIA IGUAL A 200 HZ.	40
5.7: Comparação de campos de pressão, em dB, estimados por NAH para f = 600 Hz e $zo = 4cm$.	41
5.8: Desvio relativo de NAH aplicada a dados de simulação para em propagação regressiva ($z = 1c$ e propagação progressiva ($z = 8cm$).	20 (m 22
5.9: Representação esquemática da discretização do campo de pressão e dos quatro conjuntos de fo modeladas.	ONTES 44
5.10: Condicionamento da matriz a ser invertida em função da freqüência, para quatro conjuntos e fontes modeladas e holograma de entrada em $zo = 4cm$.	DE 44
5.11:Campos de pressão estimados por ESM para quatro conjuntos de fontes elementares, em f = 400 e holograma de entrada em $zo = 4cm$.	0 Hz 45
5.12: Desvio relativo de ESM aplicado em propagação regressiva ($z = 1 cm$) e propagação progress ($z = 8 cm$), para quatro conjuntos de fontes elementares, $zo = 4 cm$.	siva 46

5. 13: Conjuntos de 100 fontes elementares de ESM.	47
5.14: CURVAS DE CONDICIONAMENTO DE DOIS CONJUNTOS DE 100 FONTES ELEMENTARES.	47
5.15: Desvio relativo de ESM aplicado em propagação regressiva ($z = 1cm$) e propagação progressiva ($z = 8cm$), para dois conjuntos de 100 fontes elementares, $zo = 4cm$.	VA 48
5.16:Campos de pressão estimados por ESM para conjuntos de 100 fontes elementares, em f = 400 Hz e	Ξ
holograma de entrada em $zo = 4cm$.	48
5.17: Conjuntos de 200 fontes elementares de ESM.	49
5.18: Curvas de condicionamento de dois conjuntos de 200 fontes elementares em função da freqüên estando o holograma de entrada em zo = 4cm.	CIA, 49
5.19: DESVIO RELATIVO DE ESM APLICADO A DADOS DE SIMULAÇÃO EM PROPAGAÇÃO REGRESSIVA ($z = 1 \text{ cm}$) e	50
5.20 C AMBOS DE DESSÃO ESTIMADOS DO ESM DADA CONHUNTOS DE 200 FONTES ELEMENTARES.	Б Б
HOLOGRAMA DE ENTRADA EM $z_0 = 4cm$.	51
5.21: Condicionamento da matriz do modelo em função da freqüência para diferentes posições do holograma de entrada, em um conjunto de 200 fontes modeladas de forma simétrica.	52
5.22: Desvio dos resultados estimados em função da freqüência para diferentes posições do hologra de entrada, em um conjunto de 200 fontes modeladas de forma simétrica.	MA 52
5.23: Representação esquemática de acréscimo de erro ao sistema.	54
5.24: Diferentes porcentagens de erro adicionados ao holograma de entrada , f = 400 Hz e $z = 2cm$. 55
5.25: RESULTADO EM ESCALA LOGARÍTMICA DE COMPARAÇÃO DE DESVIO PARA DIFERENTES PORCENTAGENS DE ACRÉSCIMO DE ERRO NO HOLOGRAMA DE ENTRADA, PARA A F = 400Hz.	55
5.26: Resultados em dB para três distâncias do campos de pressão estimado, e para três diferentes porcentagens de erro adicionado ao holograma de entrada, em zo = 4cm e f = 400 Hz.	56
5.27: RESULTADO EM ESCALA LOGARÍTMICA DE COMPARAÇÃO DE DESVIO PARA DIFERENTES PORCENTAGENS DE ACRÉSCIMO DE ERRO NO HOLOGRAMA DE ENTRADA, PARA A F = 800Hz.	57
5.28:Valores singulares (linha azul) e o valor do parâmetro β (linha vermelha tracejada) para um conjunto de 200 fontes colocalizadas, f= 900 Hz e $zo = 4cm$.	58
5.29: Hologramas de pressão, em dB, estimados por ESM com e sem regularização, em $z = 1cm$, para 900 Hz e $zo = 4cm$.	λF= 58
5.30: Ajuste de curvas da solução estimada por ESM com e sem regularização, em $z = 1cm$, para f = 900 Hz e $zo = 4cm$.	: 59
5.31: Resultado de comparação de desvio obtido por ESM e NAH em função da freqüência para os cas de o holograma de entrada em zo = 1cm e em zo = 4cm.	sos 60
5.32: Hologramas de pressão, em dB, estimados por ESM e NAH para $f = 400$ Hz e $zo = 1cm$.	61
5.33: Hologramas de pressão, em dB, estimados por ESM e NAH para f = 400 Hz e $zo = 4cm$.	61
5.34: Resultado comparativo do módulo de superfícies de vibração da placa, em m/s, para $zo = 4cm$.	. 62
5.35: Campo de pressão estimado por ESM em dimensões maiores que a da placa, indicada pelo um retângulo preto, em $z = 6cm$ e f = 400 Hz.	63
5. 36:Campo de pressão na superfície da placa, em $z=0$, e a distribuição da pressão em uma superfíci	Е

iv

ESFÉRICA, OBTIDOS POR ESM, PARA $F = 400$ Hz.	64
6.1: PLACA DE AÇO GALVANIZADO FIXA EM UMA BASE DE AÇO.	66
6.2: DETALHE DOS REBITES (POP) DE FIXAÇÃO DA PLACA.	66
6.3: ARRANJO EXPERIMENTAL DE UMA PLACA MONTADA EM UM ANTEPARO.	66
6.4: Representação esquemática do modo como foi implementado experimentalmente o ao poio simpli	es. 67
6.5 ARRANJO EXPERIMENTAL DA MEDIÇÃO DE FRFS EM CAMPO PRÓXIMO.	67
6.6: DETALHE DA MEDIÇÃO EXPERIMENTAL EM CAMPO PRÓXIMO.	67
6.7: ARRANJO EXPERIMENTAL DA MEDIÇÃO DE FRFS EM CAMPO DISTANTE.	68
6.8: DETALHE DA MEDIÇÃO EXPERIMENTAL EM CAMPO DISTANTE.	68
6.9: Representação esquemática dos hologramas de medição da uma placa vibrante.	69
6.10: Conjunto de 315 fontes elementares distribuídas de forma simétrica e colocalizadas.	70
6.11: Gráfico do parâmetro β obtido pela Curva-L em função da freqüência.	70
6.12: CURVAS DE CONDICIONAMENTO DO SISTEMA ORIGINAL E DO SISTEMA REGULARIZADO.	71
6.13: CURVAS DE DESVIO RELATIVO DO SISTEMA ORIGINAL E DO SISTEMA REGULARIZADO.	71
6.14: Hologramas de pressão, em dB, medidos e estimados no plano $z = 10cm$ por ESM para $zo = 4c$	em. 72
6.15: Campo de pressão estimado por ESM, em dB, em dimensões maiores que a da placa, indicada por retângulo preto, em $z = 10cm$ e f = 590 Hz.	им 73
6.16: VISÃO FRONTAL E TRASEIRA DO CAMPO DE PRESSÃO PARA F = 590 HZ, ESTIMADO POR ESM AO REDOR DA PLINDICADA EM AZUL, EM COORDENADAS ESFÉRICAS.	аса, 73
6.17: Curvas de desvio relativo de resultado do campo estimado por ESM e por NAH .	74
6.18: Hologramas de pressão, em dB, medidos e estimados no plano $z = 10cm$ por ESM e NAH para $zo = 4cm$.	75
6.19: Compressores marcados por pontos de discretização.	76
6.20: ARRANJO EXPERIMENTAL COMPOSTO POR 10 MICROFONES E UM ACELERÔMETRO.	76
6.21: Representação espacial do conjunto de fontes modeladas em ESM em visão 2D (a esquerda) e 3 direita).	D (A 76
6.22: RESULTADO COMPARATIVO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO DE ESM, PARA F = 160 Hz.	77
6.23: RESULTADO COMPARATIVO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO DE ESM, PARA F = 2500 Hz.	78

Lista de Tabelas

TABELA 5.1: CONSTANTES DA PLACA DO MODELO DE SIMULAÇÃO.

36

Nomenclatura

Letras Latinas

- A Matriz de FRF
- C Velocidade de propagação da onda no meio
- D Distância entre a região da fonte e a grade de medição
- D Rigidez de deflexão
- *F* Força de excitação
- G Função de Green
- ∂G
- $\frac{\partial O}{\partial n}$ Derivada direcional da Função de Green
- H Superfície do holograma de medição
- I Intensidade sonora
- *I* Matriz identidade
- *L* Dimensão da placa
- *M* Movimento de rotação
- M Quantidade de pontos de medição
- N Quantidade de fontes elementares no modelo
- P Vetor de pressão
- *P* Período de relaxação da técnica de RDFS
- Q Vetor de velocidade de volume
- Re Componente real de um número complexo
- S Superfície da fonte
- T Período
- *Z* Número complexo
- a Raio de uma esfera
- c Velocidade de propagação da onda
- d Distância entre os microfones
- f Freqüência, em Hz
- h Espessura
- j Indicador da componente imaginária
- k Número de onda

- p Pressão
- q Velocidade de volume
- r Distância euclidiana
- t Tempo
- *v* Velocidade de vibração na superfície
- ω Freqüência angular, em rad/s
- x,y,z Coordenadas do sistema cartesiano
- zo Posição no eixo z do plano de medidas

Letras Gregas

- λ Comprimento de onda
- ∇ Gradiente
- ∇^2 Laplaciano
- ρ_o Densidade
- Σ Matriz de valores singulares
- σ Valores singulares
- κ Condicionamento
- β Parâmetro de regularização
- ξ Diferença entre o valor medido e o estimado
- θ Desvio relativo
- w Deslocamento na superfície
- υ Coeficiente de Poisson
- Φ Modos de vibração

Abreviações

- BEM Método dos elementos de contorno inverso
- DFT Transformada de Fourier discreta
- ESM Holografia acústica por fontes elementares
- FEM Método dos elementos finitos
- FFT Transformada de Fourier rápida
- FRF Função de resposta em freqüência
- GCV Validação cruzada generalizada
- NAH Holografia acústica de campo próximo
- RDFS Série de Fourier regressiva discreta
- RMS Raiz média quadrática
- SVD Decomposição por valores singulares

TSVD Decomposição por valores singulares truncada

- cc Condição de contorno
- dB(A) Decibéis ponderado pela curva A

Superescritos

- H Referente ao plano de medição
- S Referente à região da fonte
- Variável no domínio da freqüência
- Variável no domínio do número de onda
- * Complexo conjugado
- + Inversa generalizada de uma matriz
- -1 Inversa de uma matriz
- ~ Valor estimado

Subscritos

- m Índice dos pontos de medição
- n Índice das fontes modeladas

Capítulo 1

Introdução

1.1 Discussão inicial e abordagem do trabalho

A legislação nos países em geral tem sido cada vez mais severa com relação a índices de ruído emitido por produtos, a fim de propiciar um maior nível de conforto e de qualidade de vida ao ser humano no meio em que vive. Como exemplo, pode ser observado o caso da indústria automobilística brasileira, para a qual a evolução da redução de ruído externo para veículos comerciais exigida pela legislação é, segundo o Conselho Nacional do Meio Ambiente (CONAMA) 272, apresentada na figura abaixo:



Figura 1.1: Valores de ruído externo máximo, em dB(A), permitidos para veículos comerciais no Brasil.

Estando o eixo da Figura 1.1 em dB(A) e lembrando que um decréscimo de 3 dB implica em uma redução do nível pressão sonora à metade, pode-se perceber o desafiante processo de redução de ruído que a indústria automotiva brasileira está passando. Essa redução resulta em uma redistribuição da participação de cada fonte no ruído total resultante emitido pelo veículo, na qual componentes do veículo antes desprezadas como fonte de ruído viessem a se tornar fontes em potencial. A Figura 1.2 mostra uma análise comparativa da distribuição das principais fontes de ruído emitido por um veículo comercial médio, segundo a SAE (*Society of Automotive Engineers*), resultado da redução do nível de 83 dB(A) no ano de 2000 para o valor de 78 dB(A), em 2005.



Figura 1.2: Distribuição média das principais fontes de ruído de um veículo comercial médio brasileiro.

Pode-se observar que, enquanto no ano 2000 o foco do problema de radiação sonora de veículos comerciais médios era basicamente o ruído do motor, em 2005, é estimado que a participação de outras fontes de ruído passará a ser mais significativa no resultado final, tornando a identificação das principais fontes de ruído uma necessidade. A caracterização dessas fontes é muitas vezes difícil de se obter por métodos tradicionais de medição.

Assim como no caso de veículos, em aeronaves e eletrodomésticos em geral o nível de conforto é um dos itens que vem merecendo destaque determinante na escolha de um produto ou serviço pelo consumidor, o qual por vezes sobrepõe-se às características de funcionalidade do produto. Dentre os fatores que determinam o nível de conforto, vibração mecânica e qualidade sonora são dois dos principais aspectos que afetam a percepção humana (Ewins (1984) e Zwicker (1990)).

A técnica de holografia acústica pode ser utilizada a fim de reconstruir a fonte sonora com o objetivo de mapear o campo de pressão radiado, obter uma caracterização vibroacústica completa e detalhada da fonte vibrante e identificar as principais fontes de ruído existentes. Desta forma, tanto uma intervenção na fonte como uma aplicação de controle ativo ou passivo no campo sonoro radiado podem ser realizadas de forma mais precisa e eficaz.

A reconstrução de fonte sonora em acústica é geralmente realizada por meio da técnica da Holografia Acústica de Campo Próximo (*NAH – Nearfield Acoustical Holography*), a qual consiste na obtenção do campo sonoro tridimensional a partir de medidas de pressão em uma superfície situada próxima à superfície que irradia o som. A técnica de NAH apresenta bons resultados para fontes de geometria simples, tais como superfícies planas, cilíndricas, esférica ou mistas - ditas separáveis. Porém, a técnica de NAH tem suas limitações com relação a fontes de ruído que possuam formato não regular, as quais correspondem ao tipo de fonte geralmente encontrada em aplicações industriais envolvendo fontes vibroacústicas.

O Método dos Elementos de Contorno (BEM) é uma técnica numérica bastante empregada para solução de problemas de radiação. Associado o modelo estrutural baseado no Método dos Elementos Finitos (FEM) com o BEM, consegue-se obter a solução para problemas vibroacústicos complexos. Embora esses dois métodos numéricos sejam bem aceitos, o tempo computacional ainda é muito alto. Portanto, o desenvolvimento de métodos alternativos para caracterização de um campo sonoro é um assunto bastante atrativo. O método de Holografia Acústica por Fontes Elementares (*ESM – Elementary Sources Method*) pode ser situado neste contexto.

O ESM consiste em substituir a estrutura vibrante por um conjunto de fontes elementares posicionadas no interior da região da fonte, o qual têm a capacidade de produzir o mesmo campo sonoro gerado pela fonte de ruído original. Diferentemente da NAH, a técnica de holografia acústica por ESM é capaz de estimar o campo de pressão sonora em qualquer ponto do espaço independentemente da geometria da fonte de ruído analisada, da grade de medição e do sistema de coordenadas utilizado.

A principal motivação para o trabalho apresentado é analisar as características do método das fontes elementares na estimativa do campo vibroacústico, o qual apresenta simplicidade na formulação matemática, o que torna fácil a implementação computacional, e comprovada eficiência, capaz de ser aplicada a fontes de ruído que possuam geometria arbitrária, podendo ser visto como uma extensão aos métodos de holografia acústica tradicionais.

1.2 Organização da dissertação

Neste Capítulo 1 é apresentada uma introdução sobre o tema holografia acústica, uma breve discussão sobre a aplicação da técnica na solução de problemas de vibroacústica nas áreas acadêmica e industrial e a motivação em estudar o método de reconstrução holográfica baseado no modelo de fontes elementares.

No Capítulo 2 é mostrado um levantamento bibliográfico dos principais trabalhos relacionados ao assunto, destacando os resultados mais importantes obtidos por cada um. Por fim, é apresentada a linha de estudo seguida neste trabalho a fim de contextualizar este com os demais trabalhos apresentados sobre o assunto.

No Capítulo 3 é mostrada a teoria da NAH com a formulação planar básica do modelo e as condições necessárias do arranjo experimental.

No Capitulo 4 é introduzido o conceito de holografia acústica por fontes elementares e a técnica de solução do problema inverso. A formulação completa do problema proposto como tema central deste trabalho é apresentada. Por, geralmente, tratar-se de um problema mal condicionado, a ferramenta de regularização de Tikhonov é apresentada. Essa técnica é proposta a fim de melhorar a solução estimada, filtrando possíveis perturbações indesejadas

O Capitulo 5 apresenta os métodos discutidos nos capítulos anteriores aplicados em um caso simulado de radiação sonora, no qual se deseja estudar o campo de pressão radiado por uma placa vibrante. O comportamento do método das fontes elementares é analisado com relação a diferentes distâncias entre o plano de medição e a região da fonte e entre esta e o plano reconstruído. A quantidade de fontes a ser empregada no modelo, assim como a sua distribuição espacial são tratadas. Além disso, no sentido de analisar a robustez do método com relação a ruídos presentes em processos de medição, perturbações são adicionadas aos dados de entrada do problema inverso, a fim de tornar o modelo de simulação mais representativo. O estudo apresentado neste capítulo é de grande interesse para o entendimento das principais características da ESM e da análise funcional de ferramenta de regularização. Por fim, é apresentada uma comparação entre os resultados de campo de pressão estimados por ESM e NAH.

No Capítulo 6, os métodos de reconstrução holográfica apresentados são aplicados a um caso experimental de radiação acústica de uma placa plana excitada por um excitador eletrodinâmico (*shaker*) em campo livre. Por se tratar de uma fonte sonora de geometria simples, a técnica de NAH pode ser facilmente aplicada. Esse experimento é proposto a fim de obter uma análise comparativa entre os resultados obtidos por ESM e NAH. O comportamento da técnica de regularização de Tikhonov é aplicado ao caso experimental. Por fim, é apresentada a solução do problema inverso acústico a um caso de radiação de pressão de um compressor de refrigerador, na qual é mostrada a possibilidade de aplicação da ESM a um caso de fonte vibroacústica 3D de formato arbitrário.

No Capítulo 7, é apresentada uma discussão geral dos resultados estimados destacando as conclusões obtidas neste trabalho, assim como sugestões para trabalhos futuros.

Um apêndice é apresentado, no qual é mostrada, por meio de formulação matemática, a obtenção da solução geral da equação de Helmholtz.

Para a obtenção da reconstrução holográfica via NAH, foi utilizado um programa computacional desenvolvido por D.L. Hallman, da Purdue University/Herrick Labs, o qual foi posteriormente modificado para o acréscimo da técnica de RDFS por Arruda, da Unicamp. No caso de ESM, foi realizada uma implementação computacional da formulação apresentada no Capítulo 4. Ambos os programas foram executados em ambiente MATLAB.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

Este capítulo tem como objetivo apresentar os principais trabalhos publicados relacionados ao tema de holografia acústica, discutindo as contribuições mais importantes produzidas por cada um, no sentido de contextualizar este trabalho de pesquisa. A evolução do desenvolvimento da técnica de reconstrução holográfica é apresentada, na qual as aplicações de NAH e posteriormente de ESM são analisadas, assim como alguns métodos que são utilizados pelos modelos de estimação, tais como ferramentas de regularização e a série de Fourier discreta e regressiva.

O processo no qual está baseada a técnica de reconstrução holográfica foi introduzida por Graham em 1969, porém recebeu pouca atenção na época, segundo o trabalho apresentado Williams, Maynard e Skudrzyk em 1980, pois a técnica era considerada limitada pelo comprimento de onda. Segundo os autores, só quando foi comprovada a não existência desse tipo de limitação, quase dez anos depois, a técnica holografía acústica passou a ser utilizada de forma mais ampla em estudos de radiação sonora. Os autores discutem a presença do erro de vazamento (*leakage*) na obtenção do campo estimado - já que no processo de medição o campo de pressão é discretizado em uma grade finita de pontos -, o qual pode ser reduzido por meio de acréscimo de zeros na fase de pós-processamento. Destacam a relação do espaçamento entre os microfones (*aperture*) com a presença de ondas evanescentes na medição, as quais são originadas quando o comprimento de onda da vibração da superfície da fonte é menor que o comprimento de onda acústica radiada. A análise experimental é apresentada a um caso de radiação planar com bons resultados de estimação.

Stepanishen e Benjamin em 1982 apresentam a projeção do campo vibroacústico via transformada de Fourier. Mostram a reconstrução do campo de pressão a partir da velocidade da vibração na superfície de uma estrutura vibrante e, no sentido contrário, a estimação da vibração de uma estrutura uma vez conhecido o campo de pressão radiado por essa fonte. Resultados numéricos de uma superfície quadrada vibrante são apresentados validando o processo de estimação. O trabalho mostra também a importância da pré-filtragen dos dados de medição, principalmente em estimação do campo sonoro na direção à fonte de ruído (propagação regressiva).

A teoria completa da técnica de NAH e toda a formulação utilizada é introduzida por Maynard, Williams e Lee em 1985 de forma detalhada. O método é aplicado a um caso de pressão radiado por uma placa vibrante. Técnicas de processamento de sinais são apresentadas a fim de minimizar certos tipos de erro de medição. NAH é apresentada na obtenção de outras características vibroacústicas, tais como velocidade de partícula, diretividade de campo radiado, intensidade sonora e potência total radiada pela fonte. É mostrado que o método pode ser aplicado a casos de radiação acústica de fontes planas, cilíndricas e esféricas, e a possibilidade da reconstrução do campo para fontes de baixa simetria, por meio de um processo híbrido envolvendo holografia acústica e a técnica de elementos finitos. Em 1987, Veronesi e Maynard apresentam uma extensão desse trabalho na qual a formulação de NAH, apresentada para domínios contínuos e infinitos, é detalhada na forma finita e discreta, permitindo a implementação computacional do método.

O primeiro trabalho a tratar a holografia acústica aplicada a fontes de formato arbitrário é apresentado por Veronesi e Maynard em 1989, no qual um novo método, como extensão da técnica de holografia generalizada, é apresentado. Um estudo de caso é mostrado, no qual foi obtida a componente normal de velocidade na superfície de uma esfera a partir de dados numéricos do campo de pressão, obtendo bons resultados de estimação. A técnica de reconstrução é baseada na decomposição em valores singulares da matriz representativa do sistema, a qual os autores afirmam atuar como peça central no processo de reconstrução desse novo método, assim como a transformada de Fourier rápida (FFT) é utilizada no caso da holografia planar.

Ainda em 1989, Williams, Houston e Bucaro apresentam uma extensão da holografia acústica generalizada de tom puro para banda larga, no qual um cilindro submerso em água é analisado.

Borgiotti, Sarkissian, Williams e Schuetz em 1990, por meio de uma formulação para estruturas axissimétricas, similar à apresentada no ano anterior por Veronesi e Maynard, mostram um exemplo numérico no qual o método é aplicado na reconstrução da velocidade de uma superfície com geometria semelhante a um cilindro, a partir de dados de pressão em superfície próxima à estrutura. Obtiveram bons resultados de estimação.

Os métodos tradicionais de holografia acústica são utilizados para aplicações em que o campo radiado está em campo livre. Em 1991, Villot, Chaveriat e Roland descrevem uma modificação na técnica de NAH, chamada de *Phonoscopia*, a qual permite a reconstrução do campo sonoro em cavidades, a fim de estudar radiação de estruturas planas em ambientes fechados.

O uso do métodos dos elementos de contorno (BEM) é sugerido por Bai em 1992, para estimar o campo de pressão radiado por fontes com geometria arbitrária. Resultados numéricos são obtidos para um caso de esfera pulsante, cilindro e pistão vibrante, com bons resultados de estimação.

Uma análise numérica da precisão de NAH cilíndrica com relação ao posicionamento dos microfones é apresentada por Carrol em 1999. O efeito de erro aleatório é discutido, assim como a importância de um filtro passa-baixa adequado na estimação do campo sonoro em dados de medição contaminado por ruído de fundo. Trabalho semelhante de análise de dados de medição contaminado por perturbações indesejadas é apresentado por Nam e Kim em 1999, para holografia acústica planar.

O livro apresentado por Wiiliams em 1999 é o primeiro trabalho a abranger a teoria da abordagem de Fourier para a holografia acústica de campo próximo de forma completa.

Williams, Houston, Herdic, Raveendra e Gardner em 2000 apresentam a técnica de NAH, em conjunto com BEM, aplicada na estimação do campo vibroacústico no interior de cavidades de formato irregular. A aplicação experimental foi realizada no interior da fuselagem de um avião em vôo com excelentes resultados de estimação.

Dois métodos de escolha do parâmetro de regularização, validação cruzada generalizada (GCV) e Curva-L, são analisados por Schuhmacher e Hansen em 2001. A aplicação experimental é apresentada a um caso de radiação sonora de pneus. A análise comparativa dos resultados é realizada para estimativa do campo de pressão e velocidade. Resultados obtidos por NAH foram semelhantes aos estimados pelo método de elementos de contorno inverso (IBEM) utilizando parâmetro obtido pela Curva-L. Na análise dos resultados, os autores concluíram que o método da Curva-L é mais robusto que o método GCV.

Em 2001, Hald apresenta a NAH aplicada na estimação do campo sonoro transiente, em que é analisado o ruído não estacionário radiado por um motor. Foram obtidos bons resultados de estimação

O método de série de Fourier discreta e regressiva (RDFS) é introduzido por Arruda em 1992 para minimizar o problema de vazamento (*leakage*). Resultados numéricos obtidos pelo método são comparados com os estimados pela transformada de Fourier discreta (DFT), mostrando a eficiência e as vantagens do método. Colinas em 2001 apresenta uma análise comparativa dos resultados de NAH via RDFS e NAH por meio de DFT, obtidos para um caso experimental de radiação acústica. O campo sonoro gerado por um alto-falante montado em um anteparo é analisado, no qual bons resultados de estimação para ambos os casos são obtidos. É mostrado que o método de NAH por RDFS é mais preciso no processo de identificação de fontes, uma vez que minimiza o problema de vazamento, gerado no processo de periodização da DFT.

A técnica de holografia acústica por fontes elementares (ESM) pode ser encontrada na literatura por nomes diferentes: Koopman, Song & Fahnline (1989) chamam por "método da superposição", Bobrovnitskii e outros (1980) por "método de fonte auxiliar", Tomilina (1993) se refere ao modelo como "método das fontes equivalentes", ou mais recentemente Ochmann (1995) trata por "método da simulação de fontes".

O ESM é apresentado por Koopmann, Song e Fahnline em 1989 como um método confiável,

de formulação simples, capaz de estudar radiação acústica de fontes com formato arbitrário. Nesse trabalho, a teoria de ESM é mostrada ser equivalente à integral de Helmholtz, validando a formulação apresentada. Os autores destacam que, assim com NAH, dois tipos de aproximação são usados no ESM: a integral contínua é substituída por uma somatória finita e um número finito de velocidades normais à superfície da fonte é utilizado para calcular a vazão da fonte. Portanto, o aumento do número de fontes reduz erros causados por aproximações. É comentado que a configuração das fontes no modelo pode melhorar a precisão do método. Como extensão a esse trabalho, em 1991 os autores apresentam um estudo com os principais tipos de erros presentes na técnica das fontes equivalentes. A fim de evitar o efeito de superposição (*aliasing*), afirmam que um mínimo de três pontos de discretização do campo medido por comprimento de onda é necessário. Ainda em 1991, Fahnline e Koopmann apresentam o ESM por meio da decomposição por valores singulares, com aplicação a um caso de radiação de um cilindro infinito, obtendo boa concordância entre os resultados numéricos e os estimados.

O problema de condicionamento do sistema é discutido por Jeans e Mathews em 1992, que afirmam ser este dependente da posição das fontes no modelo. Por meio de radiação de uma esfera vibrante, demonstram que um sistema linear de equações a ser resolvido torna-se malcondicionado quando as fontes estão distantes da superfície de vibração, ao passo que o condicionamento das matrizes vai melhorando à medida que as fontes se aproximam da superfície vibrante. É comentado que técnicas para otimizar a posição de cada fonte, a fim de melhorar as soluções, ainda não haviam obtido resultados satisfatórios, despendendo muito tempo e obtendo como resultado geralmente um número de fontes muito elevado para o sistema. Em 1993,Wilton, Mathews e Jeans também comentaram sobre o problema de determinar a configuração ótima do modelo.

Uma extensa análise sobre problema discreto mal-condicionado é apresentada por Hansen em 1992, na qual métodos numéricos de regularização são discutidos. As principais dificuldades associadas a solução desse tipo de problema são ilustradas em exemplos numéricos. O autor discute a funcionalidade das ferramentas de regularização, as quais visam conduzir o sistema analisado a resultados eficientes e numericamente estáveis. Diversas ferramentas de regularização são introduzidas, tais como os métodos derivados da técnica de decomposição por valores singulares, a condição de Picard e a representação gráfica da Curva-L. O ESM é apresentado com um tipo diferente de fonte elementar, em forma de anel, por Holste em 1996 A aplicação experimental é realizada para reconstruir o campo de pressão radiado por um avião, na qual são obtidos bons resultados de estimação.

Em 2000, Nelson e Yoon tratam do problema inverso em acústica, na determinação do vetor de vazão das fontes. Apresentam a comparação dos resultados obtidos para o cálculo do problema inverso para duas técnicas de regularização: Tikhonov e decomposição por valores singulares truncada (TSVD). Demostram a influência do arranjo geométrico das fontes e sensores no problema de condicionamento e, em particular, a redução desse valor pela aproximação da grade de medidas da região da fonte. A relação dos resultados com o valor de condicionamento é apresentada. É mostrada graficamente em detalhe a relação em que baixa freqüência espacial está associada a grandes valores singulares, enquanto que alta freqüência espacial está associada a pequenos valores singulares. É analisado também o efeito resultante de descartar os pequenos valores singulares no processo de solução do problema inverso. Em um segundo artigo, apresentado também em 2000, os autores propõem o uso da técnica conhecida por validação cruzada generalizada (GCV) para a obtenção de um parâmetro ótimo de regularização. Obtêm bons resultados de estimação para o campo de pressão, porém resultado ruim na reconstrução da superfície de vibração. Os autores destacam que o sucesso dos métodos de regularização está na escolha certa do parâmetro de regularização. Por meio de resultados experimentais e usando vários conjuntos de fontes, concluem que o método de mínimos quadrados é bem aplicado na reconstrução do vetor de vazão para uma placa simplesmente apoiada em vibração randômica, quando o condicionamento da matriz a ser invertida é considerado pequeno, ou seja, inferior a 1000.

Uma análise comparativa entre ESM e o método de elementos de contorno inverso (IBEM) é apresentada por Bouchet, Loyal, Hamzaoui e Boisson em 2000. Ao contrário do IBEM, em que a quantidade de variáveis desconhecidas no problema é proporcional ao número de pontos da malha, no método das fontes elementares essa quantidade é proporcional ao número de fontes empregadas no modelo. Os autores apresentaram uma aplicação numérica do método em que uma esfera é utilizada para modelar a fonte sonora, na qual o número de variáveis desconhecidas do problema seja igual ao número de modos acústicos da fonte. Ao autores comentam que a precisão

dos resultados está relacionada com o condicionamento da matriz a ser invertida, a qual varia em função da proximidade entre a superfície da estrutura e da fonte modelada.

Uma outra análise comparativa entre ESM e IBEM é apresentada por Schuhmacher em 2000 com relação ao posicionamento das fontes no modelo. É discutido que, enquanto no IBEM as fontes são colocadas na região de contorno correspondente à superfície de vibração da estrutura, em ESM a estrutura vibrante é substituída por um conjunto de fontes equivalentes geralmente posicionadas no interior da superfície de contorno. É mostrado que o valor elevado de condicionamento do sistema implica em maior sensibilidade do vetor de vazão das fontes modeladas a perturbações nos dados de medição. Assim como Nelson e Yoon em 2000, o autor discute a relação entre os valores singulares da matriz representativa do sistema e a freqüência espacial e comenta sobre a associação de ondas evanescentes a valores singulares pequenos da matriz de transferência. É mostrado que o condicionamento do sistema piora com o acréscimo de fontes modeladas e com o distanciamento da grade de medição da região da fonte. A solução do problema inverso mal-condicionado é estudada, sendo discutidas as técnicas de solução baseadas em decomposição por valores singulares da matriz de transferência e a regularização de Tikhonov, além dos métodos (GCV e Curva-L) de estimação do parâmetro ótimo de regularização. Uma aplicação experimental é realizada em um caso de reconstrução holográfica do campo vibroacústico de pneus, obtendo-se bons resultados de estimação.

O problema inverso em acústica é tratado por Magalhães, Tenenbaum e Zindeluk em 2000 aplicado na obtenção do campo de vibração de uma superfície por meio de medidas do campo sonoro. Ferramentas de regularização de Tikhonov e decomposição por valores singulares são utilizadas. Análise numérica de velocidade de vibração de cilindros é realizada, com bons resultados de estimação. Em 2001, os autores apresentam o modelo de ESM aplicado na reconstrução do campo vibroacústico no interior de cavidades, mostrando as principais difículdades relacionadas. O problema da configuração ótima das fontes é discutido.

Barbosa, em 2001, apresenta o método aplicado à simulação analítica de radiação sonora para três casos: pistão circular, placa retangular e membrana circular. O modelo também foi aplicado a um caso real de estimação do campo acústico gerado por dois alto-falantes, obtendo bons resultados em todos os experimentos.

Magalhães, em 2002, apresenta o ESM aplicado a resultados de simulação em que comenta sobre a configuração ótima das fontes modeladas ainda ser um problema em aberto. Análises de comparação numérica entre as técnicas de decomposição por valores singulares truncada (TSVD) e de Tikhonov, assim como entre os métodos de determinação do parâmetro de regularização, Curva-L e GCV, são apresentadas. A combinação GCV com TSVD é sugerida pelo autor como a ferramenta de regularização mais robusta para a solução do problema inverso em acústica quando é analisada a radiação sonora por fontes com geometria arbitrária. Assim como Veronesi e Maynard em 1989 e Nelson e Yoon em 2000, o autor discute a relação entre as operações de transformação por meio das matrizes unitárias, [U] e [V], obtidas por decomposição em valores singulares da matriz característica do sistema, com a transformada de número de onda de Fourier, utilizada em NAH.

A funcionalidade dos filtros (Tikhonov, Veronesi e Wiener) aplicados em técnicas de holografía acústica é comparada por Rochefoucald, Melon e Garcia em 2001. Mostram a necessidade do filtro espacial-k para o caso de estimação de pressão em campo próximo, devido à presença das ondas evanescentes.

Em 2002, Pavic apresenta uma expansão da técnica de ESM, chamada de método das fontes auxiliares, na qual consiste em introduzir fontes adicionais na região externa à superfície vibrante da fonte, em posições "espelhos", de forma que as condições de contorno sejam satisfeitas. O método é aplicado a casos numéricos de análise estrutural e vibração na superfície. O autor destaca que a eficiência do modelo depende do número de fontes modeladas e que, assim como o modelo tradicional de ESM, a escolha da posição das fontes influencia a estabilidade do problema.

É possível que o método das fontes elementares possa ter a sua aplicação ampliada para além da obtenção da vazão em holografia acústica. Estudos têm sido feitos por Cheng, Golberg, Kansa, e Zammito na expansão da aplicação do método de fontes elementares para a solução numérica de um sistema de equações diferenciais parciais. Existe uma família de métodos baseados na utilização de fontes arbitrárias que visam impor condições de contorno em soluções fundamentais simples, para a solução de problemas de contorno. Esta família de métodos numéricos tem sido denominada de "sem malha", ou "*meshless*", e seu estudo pode vir a fortalecer

o conceito que está por trás da teoria do método das fontes elementares.

Este trabalho utiliza o método das fontes elementares introduzido por Koopmman, Song e Fahnline em 1989, o qual foi apresentado na forma discreta por Barbosa em 2000, na implementação computacional de um modelo de reconstrução holográfica para reproduzir o processo de radiação acústica de uma estrutura vibrante. Os resultados de estimação por ESM são comparados com os obtidos por NAH, apresentada por Williams, Maynard e Skudrzyk em 1980, por meio da técnica de RDFS, introduzida por Arruda em 1992.

Capítulo 3

Holografia Acústica de Campo Próximo (NAH)

A Holografia Acústica de Campo Próximo (NAH) é uma técnica que consiste em, conhecida a pressão sonora complexa em um conjunto discretizado de pontos situados em uma superfície (geralmente plana) no campo próximo de uma determinada fonte, reconstruir o campo de pressão acústica em qualquer outra superfície paralela à de medição. Através da convolução da transformada de Fourier espacial com a função de Green adequada, é possível mapear a pressão em campo próximo ou distante.

Desta forma, as medidas de pressão sonora feitas em uma superfície (2 dimensões) são usadas para calcular o campo de pressão completo em 3 dimensões do espaço. O que torna essa expansão de informações possível é o fato de a função de Green conhecida poder ser usada para estimar o campo de pressão sonora em qualquer outro ponto do espaço tridimensional.

Em um problema de acústica linear, conhecendo-se as condições de contorno (do tipo Dirichlet ou Neuman), pode-se determinar uma função de Green para o problema. No processo de obtenção do holograma de pressão estimado, é feita a convolução das medidas de valores do campo de pressão medido com a função de Green encontrada. Rochefoucald, Melon e Garcia apresentaram de forma sucinta o esquema ilustrado na Figura 3.1, na qual as transformadas de Fourier, direta e inversa, são usadas na reconstrução do holograma acústico.



Figura 3.1: Representação esquemática das transformadas de Fourier, direta e inversa, em NAH.

O processo de reconstrução holográfica pode ser realizado de duas formas: propagação regressiva (*backward propagation*) e propagação progressiva (*forward propagation*). No caso de propagação regressiva, a reconstrução do campo radiado é obtido em um ponto de interesse situado entre a superfície medida e a superfície da fonte, ou na própria superfície da fonte. No caso de propagação progressiva, os dados medidos são projetados em direção do campo distante, contrária à direção onde está posicionada a fonte, como mostra a Figura 3.2.

3.1. Formulação Teórica

Segundo Williams (1999), define-se como *S* a superfície de interesse, fechada e de dimensão 2, na qual a função de Green $G(r | r_s)$ satisfaz a equação homogênea de Helmholtz. E como superfície H o plano do holograma paralelo à superfície *S*, localizado dentro do campo próximo acústico, sobre o qual o campo de pressão sonora discreto $\overline{p}(r_H)$ é conhecido. Sabendo-se que o comportamento do campo acústico gerado por uma fonte sonora é dado pela equação de Helmholtz (vide apêndice), os cálculos da Holografía Acústica são feitos a partir da condição de contorno do tipo Dirichlet, dada pela Equação 3.1. O campo acústico medido na superfície H é utilizado como condição de contorno na formulação da técnica de NAH para uma superfície genérica.

$$\overline{p}(\mathbf{r},\omega) = -\frac{1}{4\pi} \iint \overline{p}(\mathbf{r}_{s}) \nabla G(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_{s}) d\mathbf{A}_{o} , \qquad (3.1)$$

onde \overline{p} indica o valor da pressão complexa no domínio da freqüência e $\frac{\partial G}{\partial n}$ representa a derivada normal de G.



O sistema de coordenadas no espaço, citado anteriormente, é mostrado na Figura 3.2.

OFigura 3.2: Representação esquemática do sistema de coordenadas.

Segundo a holografia generalizada apresentada por Williams (1985), a posição do holograma medido é dada por $z = z^H$, onde $z^H > z^S \ge 0$. Desta forma, a pressão acústica em um ponto qualquer (x,y,z) pode ser calculada da seguinte forma:

$$\overline{p}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint \overline{p}(x^{\prime}, y^{\prime}, z^{S}) \frac{\partial G}{\partial n}(x - x^{\prime}, y - y^{\prime}, z - z^{S}) dx^{\prime} dy^{\prime}.$$
(3.2)

Uma vez conhecida a pressão $\overline{p}(x^{,}, y^{,}, z^{S})$, a pressão acústica em qualquer ponto do espaço pode ser determinada. Porém, os valores de pressão no plano z^{S} ainda não são conhecidos. Até então, somente a pressão acústica nos pontos medidos experimentalmente, no plano z^{H} , dados por $\overline{p}(x, y, z^{H})$ são conhecidos.

No entanto, fazendo $z = z^{H}$, na Equação 3.2, obtém-se:

$$\overline{p}(x, y, z^{\mathrm{H}}) = -\frac{1}{4\pi} \iint \overline{p}(x^{\prime}, y^{\prime}, z^{\mathrm{S}}) \frac{\partial G}{\partial n}(x - x^{\prime}, y - y^{\prime}, z^{\mathrm{H}} - z^{\mathrm{S}}) dx^{\prime} dy^{\prime}.$$
(3.3)

Portanto, analisando a Equação 3.3 tem-se um termo conhecido, a pressão acústica no plano H, e dois termos ainda desconhecidos. Desta forma, por se tratar de um sistema linear, identificando-se mais um dos termos, a solução procurada é determinada. Como o objetivo é determinar a pressão $\overline{p}(x, y, z^S)$, a derivada da função de Green $\frac{\partial G}{\partial n}$ deve ser encontrada.

Neste trabalho, será empregada a NAH em superfície plana. Desta forma, a superfície S será considerada como sendo um plano infinito, definido por $z = z^S$. Assume-se que as fontes de ruído do problema estão localizadas em uma região finita do plano z^S , que irradia energia acústica.

Assim, a função de Green procurada, requerida pela Equação 3.3, que satisfaz a condição de contorno homogênea de Dirichlet em z^{S} , pode ser:

$$G(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_{s}) = \frac{e^{j\mathbf{k}A}}{A} - \frac{e^{j\mathbf{k}B}}{B}, \qquad (3.4)$$

onde o número de onda é igual a $k = \omega/c$ e A e B valem:

A =
$$\sqrt{(x - x^{,})^{2} + (y - y^{,})^{2} + (z - z^{,})^{2}}$$

B = $\sqrt{(x - x^{,})^{2} + (y - y^{,})^{2} + (z + z^{,} - 2z^{S})^{2}}$.

Pode-se notar que no plano onde estão posicionadas as fontes, em $z' = z^S$, as componentes A e B são iguais; portanto o termo de volume da solução geral da equação de Helmholtz é realmente nulo.

De forma geral, a derivada da função de Green em qualquer ponto pode ser obtida pela equação a seguir:

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x - x^{,}, y - y^{,}, z - z^{S}) = 2\frac{\partial}{\partial \alpha}(\frac{e^{jkC}}{C}), \qquad (3.5)$$

onde: $\alpha = z - z_S$ e $C = \sqrt{(x - x^2)^2 + (y - y^2)^2 + \alpha^2}$.

A fim de simplificar a parte matemática, é feita uma mudança de variável, definindo G' como apresentado na equação abaixo.

$$4\pi G' = -\frac{\partial G}{\partial n} \tag{3.6}$$

Assim, a Equação 3.2 e Equação 3.3 podem ser reescritas em função de G'.

$$\overline{p}(x, y, z) = \iint \overline{p}(x^{,}, y^{,}, z^{S})G'(x - x^{,}, y - y^{,}, z - z^{S})dx^{,}dy^{,}$$
(3.7)

$$\overline{p}(x, y, z^{H}) = \iint \overline{p}(x^{\prime}, y^{\prime}, z^{S}) G'(x - x^{\prime}, y - y^{\prime}, z^{H} - z^{S}) dx^{\prime} dy^{\prime}$$
(3.8)

A diferença $(z^{H}-z^{S})$ é uma constante, e portanto a Equação 3.8 trata-se de uma convolução bidimensional. Pela teoria, aplicando-se a transformada espacial de Fourier, a convolução de funções no domínio (x', y') torna-se um produto simples de funções no domínio $(k_{x,s}k_{y})$. Portanto, o holograma procurado $\overline{p}(x', y', z^{S})$ pode ser determinado a partir do holograma medido $\overline{p}(x, y, z^{H})$.

Representando a Transformada de Fourier (\Im) espacial bidimensional por $^{\wedge}$, tem-se a variável transformada dada por:

$$\hat{\overline{p}}(k_x, k_y, z^H) = \Im[\overline{p}(x, y, z^H)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{p}(x, y, z^H) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy.$$
(3.9)

Sendo a transformada inversa de Fourier dada por \mathfrak{T}^{-1} , através do teorema da convolução, pode-se reescrever a Equação 3.7 da seguinte forma:

$$\overline{p}(x, y, z) = \Im^{-1}[\hat{\overline{p}}(k_x, k_y, z^S)\hat{G}'(k_x, k_y, z - z^S)].$$
(3.10)

Desta forma, obtém-se a Equação 3.8 no domínio de número de onda, em que o campo de pressão é o resultado de uma multiplicação simples:

$$\hat{\overline{p}}(k_x, k_y, z^H) = \hat{\overline{p}}(k_x, k_y, z^S)G'(k_x, k_y, z^H - z^S).$$
(3.11)

Portanto, a pressão acústica complexa em qualquer ponto pode ser obtida a partir dos valores conhecidos:

$$\overline{p}(x, y, z) = \Im^{-1}[\hat{\overline{p}}(k_x, k_y, z^H) \frac{\hat{G}'(k_x, k_y, z - z^S)}{\hat{G}'(k_x, k_y, z^H - z^S)}].$$
(3.12)

Essa equação corresponde à expressão que permite a reconstrução do campo acústico tridimensional a partir do holograma medido.

A partir da Equação 3.6, a transformada de Fourier espacial bidimensional \hat{G}' pode ser encontrada:

$$\hat{G}'(k_x, k_y, z) = \exp(jz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2})$$
, se $k_x^2 + k_y^2 \le k^2$ (3.13.a)

$$\hat{G}'(k_x, k_y, z) = \exp(-z\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2})$$
, se $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ (3.13.b)

Então, a Equação 3.12 pode ser reescrita como:

$$\overline{p}(x, y, z) = \Im^{-1}[\hat{p}(k_x, k_y, z^H) \exp(jz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2})], \text{ se } k_x^2 + k_y^2 \le k^2, \quad (3.14.a)$$

$$\overline{p}(x, y, z) = \Im^{-1}[\hat{p}(k_x, k_y, z^H) \exp(-z\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}), \text{ se } k_x^2 + k_y^2 > k^2. \quad (3.14.b)$$

Lembrando que o número de onda k é diretamente proporcional à freqüência ω , fisicamente a Equação 3.14.a mostra que para $k_x^2 + k_y^2 \le k^2$, as ondas de superfície provenientes da fonte de radiação se propagam do campo próximo ao campo distante, não alterando a amplitude da onda, provocando apenas mudança de fase. Este tipo de onda pode ser representado na Figura 3.3 pela região contida no interior do círculo de radiação.

Já quando $k_x^2 + k_y^2 > k^2$, o comprimento das ondas de superfície é inferior a $\frac{2\pi}{\lambda}$. Neste caso, a fonte de ruído gera apenas ondas de superfície na região próxima à fonte. Pela Equação

3.14.b pode-se notar um forte decaimento da amplitude na direção *z*, causado pela exponencial negativa. Essas ondas são chamadas *ondas evanescentes* e correspondem à região da Figura 3.3 situada na parte externa do círculo de radiação. Devido a elas, há a necessidade de obter as medidas de pressão sonora próximas à fonte, dentro do campo próximo, a fim de assegurar o efeito deste tipo de onda nas medidas.



Figura 3.3: Representação esquemática do círculo de radiação.

Redefinindo k, a fim de simplificar as Equações 3.14, tem-se:

$$k_Z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$$
, se : $k_x^2 + k_y^2 \le k^2$ (3.15.a)

(3.15.b)

$$k_Z = j\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$$
, se : $k_x^2 + k_y^2 > k^2$.

Desta forma, a equação obtida pode ser reescrita da seguinte forma:
$$\overline{p}(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\overline{p}}(k_x, k_y, z^H) e^{-jk_z z^H} e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y$$
(3.16)

A Equação 3.16 corresponde à solução geral da equação de Helmholtz, a qual será utilizada em NAH na reconstrução dos hologramas.

3.2 Características de medição

Segundo a teoria da Holografia Acústica de Campo Próximo apresentada na nota de leitura sobre *STSF* da empresa Brüel&Kjaer e por Deblawue, existe a necessidade de que algumas condições sejam respeitadas na montagem experimental, a fim de minimizar certos erros provenientes do processamento de sinais, obtendo assim boa qualidade na estimação de campos de pressão. Dentre essas condições, está a distância máxima entre o holograma de medição e o holograma da fonte, o espaçamento entre os sensores de medidas e a dimensão mínima do holograma de medição. A Figura 3.4 mostra a representação esquemática do arranjo experimental utilizado em NAH.



Figura 3.4: Representação esquemática da medição para aplicação da técnica de NAH.

No arranjo experimental, a distância entre os sensores adjacentes deve assegurar um mínimo de 2 pontos de medição por comprimento de onda, λ , da maior freqüência de interesse (*condição I*), a fim de evitar erros de superposição.

$$d \le \frac{\lambda_{\min}}{2} = \frac{c}{2f_{\max}}$$
(3.17)

A área de medida correspondente ao holograma de medição deve ser determinada a partir de dois fatores: o tamanho da fonte de ruído e a menor freqüência de interesse. Assim, primeiramente o holograma de medidas deve cobrir um plano além das dimensões da fonte geradora de ruído, mais precisamente, deve-se assegurar que o plano de medição vai cobrir a projeção da superfície fonte em no mínimo 45° (*condição 2*). Além disso, as dimensões do plano de medição devem ser maiores ou iguais a um comprimento de onda da menor freqüência de interesse (*condição 3*).

Ambas as condições 2 e 3 visam minimizar erros de vazamento. Caso não seja possível cumprir essas condições, pode-se utilizar a técnica de acréscimo de zeros na fase de pósprocessamento ou, ainda, fazer uso da técnica da Série de Fourier Discreta Regressiva, RDFS, nos cálculos de NAH – ambas as técnicas atuam na redução do efeito de vazamento (*leakage*). Os princípios fundamentais da técnica de RDFS são apresentados por Arruda (1992).

A grade de discretização do campo de pressão medido deve estar posicionada a uma distância zo maior ou igual à distância d entre os microfones (*condição 4*), visando reduzir o efeito de superposição oriundo de ondas evanescentes de alta freqüência; e ainda, a distância zo deve ser menor ou igual à distancia de 2d (*condição 5*) visando evitar que o nível das ondas evanescentes fique abaixo do nível de ruído de fundo.

$$d \le zo \le 2d \tag{3.18}$$

Portanto, a distância zo à qual devem ser tomadas as medidas é calculada a partir do espaçamento d entre os sensores adjacentes da grade de medição, o qual é determinado pela freqüência máxima de interesse. A dimensão mínima da área de medição é escolhida em função do tamanho da fonte geradora de ruído e da mínima freqüência de interesse.

3.3 Determinação de outras grandezas acústicas

Uma vez obtido o campo de pressão sonora $\overline{p}(x, y, z)$, outras grandezas acústicas tais como velocidade de vibração e intensidade sonora podem ser determinadas.

3.3.1 Campo de velocidade das partículas

A velocidade das partículas, $\overline{V}(x, y, z)$, é dada pelo produto de uma constante pelo gradiente da pressão complexa:

$$\overline{V}(x, y, z) = \frac{\nabla \overline{p}(x, y, z)}{j\rho_0 ck},$$
(3.19)

onde ρ_o é a densidade do fluido.

3.3.2 Intensidade Sonora

A intensidade sonora, I(x, y, z), é dada pela média temporal do produto da pressão pela velocidade das partículas, como mostra a equação seguinte:

$$I(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} p(x, y, z, t) V(x, y, z, t) dt, \qquad (3.20)$$

onde T corresponde a um período, para fontes harmônicas, ou uma escala de tempo apropriada para fontes de ruído aleatório.

A intensidade sonora ativa pode ser obtida pela Equação 3.21.

$$I(x, y, z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\overline{p}(x, y, z)\overline{V}^{*}(x, y, z)], \qquad (3.21)$$

onde \overline{V}^* é o complexo conjugado de \overline{V} .

Capítulo 4

Holografia Acústica por Fontes Elementares (ESM)

O método de holografia acústica por fontes elementares consiste em substituir uma fonte de ruído sonoro complexa por um conjunto finito de fontes elementares, usualmente do tipo monopolo, espacialmente posicionadas no interior de um volume que contém a superfície vibrante da fonte real. A contribuição de cada fonte elementar é determinada de forma que o campo acústico resultante pela radiação dessas fontes seja semelhante ao produzido no contorno da estrutura vibrante.

A formulação resultante é apresentada em um sistema de equações algébricas. Por ser um sistema super determinado, é utilizada a solução por mínimos quadrados, a qual é obtida com o uso da inversa generalizada da matriz representativa do problema. A ferramenta de regularização de Tikhonov é apresentada a fim de refinar a solução estimada.

4.1 Formulação Teórica

O método das fontes equivalentes é baseado no princípio de que o campo acústico gerado por uma estrutura vibrante pode ser reconstruído a partir da superposição de campos gerados por um conjunto de fontes simples, ditas pontuais, posicionadas no interior de um volume V, conforme apresentado por Koopmman em 1989. A pressão em uma posição $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$ devido a uma fonte posicionada em um ponto $r_2 = (x_2, y_2, z_2)$ pode ser expressa como:

$$P(r_1, r_2) = j\rho_0 \omega \int_{V} q(r_2)g(r_1, r_2)dV(r_2)$$
(4.1)

onde ρ_0 é a densidade do meio de propagação, V é o volume limitado pela superfície S, a qual possui freqüência angular de vibração harmônica ω . Sendo d(r_1, r_2) a distância euclidiana entre r_1 e r_2 , a função de Green em campo livre pode ser expressa como:

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{e^{-jkd(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}}{4\pi d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}.$$
(4.2)

A vazão de uma fonte, também chamada de velocidade de volume, integrada para todo um volume V, é igual ao produto da área S pela velocidade de vibração da superfície da fonte v_a :

$$\hat{q}(r_2) = \int q(r_2) dV = v_a S.$$
 (4.3)

A Equação 4.1 para uma fonte elementar em campo livre resulta em:

$$P(r_1, r_2) = \frac{j\omega\rho_0}{4\pi} \frac{\hat{q}(r_2)}{d(r_1, r_2)} e^{-jkd(r_1, r_2)}.$$
(4.4)

Se, ao invés de uma fonte existirem N fontes pontuais, a pressão em um ponto qualquer, considerando que o comportamento é linear, é dada pela soma das contribuições individuais de cada fonte, resultando em:

$$P(r_1) = \sum_{n=1}^{N} \frac{j\omega\rho_o}{4\pi} \frac{q(r_{2_n})}{d(r_1, r_{2_n})} e^{-jkd(r_1, r_{2_n})}.$$
(4.5)

Supondo que, para a reconstrução do campo de pressão sonora sejam necessárias M medições, onde $M \ge N$, obtém-se a solução simplificada:

$$\{P\} = \sum_{n=1}^{N} [A_{in}] . \{Q_n\}, \qquad (4.6)$$

onde n corresponde às fontes elementares (n = 1,..., N) e i aos pontos de medição do sistema (i = 1,..., M). A matriz [A] corresponde às FRFs do sistema e {Q} ao vetor de vazão, de modo que:

$$[A_{in}] = \frac{e^{-jkd(r_{1i}, r_{2n})}}{d(r_{1i}, r_{2n})} \qquad e \qquad \{Q_n\} = \frac{j\omega\rho_0 \hat{q}(r_{2n})}{4\pi}.$$

Mantendo-se fixa a freqüência (portanto k constante), a matriz $[A_{in}]$ torna-se função apenas das distâncias $d(r_{1i}, r_{2n})$. Matematicamente, o problema passa a ser resolver o sistema linear de equações dado por :

$$[A]_{(MxN)} \{Q\}_{(Nx1)} = \{P\}_{(Mx1)}$$
(4.7)

Koopmann *et al* (1989) mostram a equivalência da Equação 4.1, sobre a qual é baseado o método das fontes elementares, com a equação geralmente utilizada em problemas de radiação acústica, a equação integral de Helmholtz. Barbosa (2001) apresenta a obtenção da Equação 4.1 por outro caminho, a partir da radiação de uma esfera pulsante, cujo raio oscila harmonicamente com o tempo, em que o diâmetro da fonte é considerado muito pequeno se comparado ao comprimento de onda ($ka \ll 1 -$ onde a é o raio da esfera).

4.2 Solução do Problema Inverso

Deseja-se obter a solução do problema inverso representado pela Equação 4.7, onde {P} é um vetor complexo da transformada de Fourier da saída do microfone e [A] é a matriz complexa das Funções de Resposta de Freqüência que relaciona a vazão das fontes do modelo com os sinais de saída dos microfones. O problema acústico discreto inverso consiste em determinar o vetor complexo {Q} que reproduza a medida {P}. É importante destacar que todas as características do modelo de radiação estão definidas na matriz [A]. O sistema linear pode ser apresentado de forma completa de acordo com a equação:

$$\begin{cases} P_{1}(\omega) \\ P_{2}(\omega) \\ \vdots \\ P_{M}(\omega) \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11}(\omega) & A_{12}(\omega) & \cdot & \cdot & A_{1N}(\omega) \\ A_{21}(\omega) & A_{22}(\omega) & \cdot & \cdot & A_{2N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{M1}(\omega) & A_{M2}(\omega) & \cdot & \cdot & A_{MN}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1}(\omega) \\ Q_{2}(\omega) \\ \vdots \\ Q_{N}(\omega) \end{bmatrix}$$
(4.8)

A estimativa do vetor de vazão das fontes que minimiza a diferença quadrática entre os valores medidos e os estimados pode ser obtida por solução de mínimos quadrados, dada pela equação a seguir, assim como feito por Nelson e Yoon (2000, a).

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = [\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, \qquad (4.9)$$

onde ~ indica o valor estimado e o H indica a transposta conjugada da matriz. Se o número de microfones M for igual ao número N de fontes do modelo, a matriz [A] torna-se quadrada e $[A]^+$ é a própria matriz inversa $[A]^{-1}$, ou seja, $\tilde{Q} = [A]^{-1}P$. Quando M é menor que N, tem-se um sistema subdeterminado, que pode ser resolvido por solução de norma mínima utilizando a decomposição em valores singulares que será mostrado a seguir.

Quando M é maior que N, a matriz [A] pode ser decomposta em valores singulares na forma $A = U\Sigma V^{H}$, onde a matriz Σ , de dimensão M x N é composta pelos N valores singulares de [A], representados pela variável σ :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \sigma_n \\ 0 & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$
(4.10)

Desta forma, a solução procurada do problema inverso pode ser obtida através da pseudoinversa (Golub,1996).

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma}^+ \mathbf{U}^{\mathbf{H}} \mathbf{P}, \qquad (4.11)$$

onde Σ^+ é a pseudo-inversa de Σ e pode ser escrita como:

Entretanto, nota-se que valores singulares muito pequenos resultam em grandes componentes da matriz Σ^+ , os quais podem prejudicar a solução do problema inverso. Condicionamento κ é um parâmetro obtido pela razão entre o maior e o menor valor singular da matriz a ser invertida, $\kappa = \sigma_{max}/\sigma_{min}$, e pode ser usado para indicar essa variação entre os elementos de Σ^+ . Um alto valor de condicionamento pode indicar grande sensibilidade de um sistema linear a erros nos dados utilizados, ruídos de medição e truncamento numérico.

Ferramentas de regularização são métodos numéricos que visam melhorar o condicionamento de uma matriz, na tentativa de melhorar a solução do problema inverso. Nesse trabalho, foi utilizada a ferramenta de regularização de Tikhonov, que consiste em acrescentar um parâmetro de regularização β em todos os elementos da matriz Σ^+ , como mostrado a seguir:

Desta forma, aplicando a regularização de Tikhonov à solução do problema inverso apresentado na Equação 4.9, obtém-se:

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}} = \left[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} + \beta\mathbf{I}\right]^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{P}.$$
(4.14)

A principal dificuldade de métodos de regularização está em determinar o valor adequado do parâmetro de regularização, pois uma escolha equivocada de β pode comprometer o resultado de estimação. O emprego de um parâmetro de regularização muito alto pode resultar em uma solução super-regularizada, na qual informações importantes obtidas no processo de medição não seriam consideradas. Por outro lado, para β muito pequeno, a solução pode tornar-se sub-regularizada, e talvez sensível à contaminação de ruídos indesejados.

Dentre os métodos numéricos existentes para obtenção do parâmetro β de regularização, optou-se por usar o método da Curva-L apresentado por Hansen (1998) devido a sua simplicidade. A idéia do método consiste em um gráfico log-log da norma $\|Iq\|_2$ versus a norma residual $\|Aq - p\|_2$, como mostra a Figura 4.1. Segundo Hansen, o objetivo do método é identificar um valor que minimize ambas as normas.



Figura 4. 1: Representação gráfica da Curva-L.

É importante analisar que o acréscimo de um valor β não nulo na matriz Σ^+ vai originar novos valores singulares, maiores que os anteriores, alterando principalmente os de menor valor singular. Portanto, o condicionamento da matriz certamente será melhorado. Porém, é preciso avaliar se o resultado obtido com regularização realmente aproxima o campo pressão estimado do holograma desejado.

4.3 Determinação de Grandezas Acústicas

Determinado o vetor $\{\widetilde{Q}\}\$ de velocidade de volume, obtém–se um novo modelo de radiação, similar ao modelo original analisado, o qual é totalmente conhecido. Desta forma, pelo modelo direto, pode-se agora determinar as grandezas acústicas de interesse em um ponto (x,y,z) qualquer.

4.3.1 Em qualquer lugar do espaço

A partir do vetor $\{\widetilde{Q}\}$, a pressão sonora $\{\widetilde{P}\}$ em qualquer lugar do espaço pode ser estimada usando a solução direta do problema:

$$\widetilde{P} = \sum_{n=1}^{N} A_n \widetilde{Q}_n , \qquad (4.15)$$

onde $A_n = \frac{e^{-jkd(r_1, r_{2n})}}{d(r_1, r_{2n})}$. O desvio do campo projetado pode ser visualizado pela diferença entre

 $P \ e \ \widetilde{P}$:

$$\xi = \log_{10}(\frac{\widetilde{P}}{P}). \tag{4.16}$$

Sendo o valor RMS de uma matriz qualquer Z_{MxN} dado por:

$$RMS(Z_{MxN}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} (Z_{ij} Z_{ij}^{*})}{M.N}}, \qquad (4.17)$$

e Z^* o complexo conjugado de Z, a diferença entre os hologramas originais (medidos/simulados) e os estimados pode ser quantificada pelo desvio relativo, dado em porcentagem:

$$\vartheta(\omega) = 100 * \left| \frac{\text{RMS}(P(x, y, z, \omega) - \widetilde{P}(x, y, z, \omega))}{\text{RMS}(P(x, y, z, \omega))} \right|.$$
(4.18)

Assim como o campo de pressão, os campos de velocidade das partículas e de intensidade sonora podem ser obtidos utilizando a Equação 3.19 e a Equação 3.21, respectivamente.

Entretanto, o modelo direto de estimativa de grandezas acústicas, dado pela Equação 4.15 é válido para todo o espaço, com exceção da região localizada sobre a superfície da estrutura vibrante. Nessa região, pode ocorrer um problema de singularidade, em que os componentes da matriz de distância [d] e consequentemente os da matriz de função de transferência [A] tendem a valores muito baixos, em alguns casos iguais a zero – quando a posição de uma fonte elementar do modelo coincide com a de um ponto de discretização do holograma estimado. Neste caso, o modelo direto não é capaz de estimar o campo de pressão.

4.3.2 Na superfície

Com o objetivo de estimar o comportamento vibroacústico na superfície de uma fonte acústica pelo método das fontes elementares, pode-se considerar uma superfície vibrante qualquer como sendo representada por um conjunto de pequenos segmentos vibrando que, juntos, resultam em um campo de vibração igual ao produzido pela superfície original. Diferentemente do caso geral, descrito no item 4.3.1, no qual a pressão estimada é composta pela contribuição de todas as fontes do modelo, na estimativa do campo vibroacústico na superfície da estrutura, em cada ponto discretizado existe apenas uma fonte elementar relacionada, como mostra a Figura 4.2.



Figura 4.2: Hologramas de vibração de uma superfície vibrante.

Assim, uma vez discretizada a superfície vibrante e calculadas as velocidades de volume do modelo, segundo Nelson e Yoon (2000, a), cada segmento pode ser considerado como um pistão rígido movendo-se. Dessa forma, como apresentado na Equação 4.3, a velocidade de vibração da superfície v(x, y) pode ser obtida através do vetor $\{\widetilde{Q}\}$ de velocidade de volume dividido pela área S correspondente. Portanto, a vibração na região desejada pode ser determinada pelo conjunto de vibrações dos segmentos.

Desta forma, assim como no item anterior, o campo de pressão e o de intensidade sonora podem ser obtidos agora na superfície da estrutura, através da Equação 3.19 e Equação 3.21, respectivamente.

Capítulo 5

Análise de Simulação

A fim de permitir analisar de forma mais detalhada as características do método por fontes elementares e comparar os resultados obtidos com os estimados por NAH, a teoria apresentada nos capítulos anteriores é aplicada a um caso de radiação sonora simples. Com tal objetivo, utilizou-se o modelo analítico de vibração de uma placa finita e plana, simplesmente apoiada em todo o contorno (Williams,1999). Com o objetivo de posteriormente determinar a radiação sonora, a placa é considerada estando montada em um anteparo (*baffle*) plano, rígido e infinito e excitada por uma força F, como mostra a representação esquemática da Figura 5.1.



Figura 5.1: Representação esquemática de uma placa montada em um anteparo, excitada por uma força F.

5.1 Simulação de uma Placa Vibrante

A equação da onda homogênea no domínio da freqüência de uma placa plana, posicionada no plano xy é dada por:

$$\nabla^4 \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) - \mathbf{k}_f^4 \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = 0, \qquad (5.1)$$

onde w é o deslocamento transversal da superfície e $\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2$. Sendo *E* o módulo de *Young*, *h* e ρ_p a espessura e a densidade da placa, respectivamente, e υ o coeficiente de Poisson,

o número de onda k_f é definido como $k_f = \left(\frac{\rho_p h \omega^2}{D}\right)^{\frac{1}{4}}$, onde $D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$ é a rigidez de flexão

da placa.

Sendo L_x e L_y as dimensões da placa, a condição de contorno simplesmente apoiada empregada no modelo implica em deslocamento nulo no eixo z (cc₁) e condição livre de movimento de rotação (cc₂) para toda a borda, como mostram as equações a seguir:

cc₁:
$$w(0, y) = w(L_x, y) = w(x, 0) = w(x, L_y) = 0$$
, (5.2)

cc₂:
$$M_x(0, y) = M_x(L_x, y) = M_y(x, 0) = M_y(x, L_y) = 0$$
, (5.3)

onde os momentos de flexão da placa são dados por:

$$M_{x} = -D\left(\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + \upsilon \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}}\right), \qquad (5.4)$$

$$M_{y} = -D\left(\frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}} + \upsilon \frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}\right).$$
(5.5)

Aplicando as condições de contorno à Equação 5.1, o conjunto infinito de modos ortogonais de uma placa pode ser obtido:

$$\Phi_{\rm mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L_x}) \operatorname{sen}(\frac{n\pi y}{L_y}), \ n = 1, 2, 3..., \ m = 1, 2, 3..., \ (5.6)$$

onde as equações de ortogonalidade são dadas por :

$$\int_{0}^{L} \int_{0}^{y} \int_{0}^{L_{x}} \Phi_{mn}(x, y) \Phi_{pq}(x, y) dx dy \begin{cases} = 0 & \text{se } m \neq p & \text{ou } n \neq q \\ = 1 & \text{se } m = p & \text{ou } n = q, \end{cases}$$
(5.7)

sendo m e n valores inteiros não negativos. A freqüência natural (angular) de cada modo pode ser obtida da relação:

$$\left(\frac{m\pi}{L_{x}}\right)^{2} + \left(\frac{n\pi}{L_{y}}\right)^{2} = k_{f}^{2}.$$
(5.8)

Sendo $k_f = \sqrt{\omega} / \alpha$, para cada modo (m,n) existe uma freqüência natural correspondente, dada a seguir:

$$\omega_{\rm mn} = \alpha^2 k_{\rm f}^2 = \alpha^2 [(\frac{m\pi}{L_{\rm x}})^2 + (\frac{n\pi}{L_{\rm y}})^2], \qquad (5.9)$$

onde α é uma constante que varia com as características da placa:

$$\alpha = \left(\frac{Eh^2}{12\rho_p(1-\upsilon^2)}\right)^{\frac{1}{4}}.$$
 (5.10)

A Figura 5.2 ilustra 16 modos de vibração Φ_{mn} para uma placa plana de constantes iguais aos valores da Tabela 5.1, cuja freqüência natural correspondente está indicada acima de cada modo.

Constantes	E	h	$ ho_p$	V	Lx	Ly
Unidades	207 Gpa	1,4153 mm	$7,8 \text{ kg/m}^3$	0,3	0,4m	0,5m

Tabela 5.1: Constantes da placa do modelo de simulação.



Figura 5.2: Alguns modos de vibração e suas respectivas freqüências naturais para o caso de uma placa plana simplesmente apoiada.

Entretanto, como se deseja obter a resposta do modelo para o caso de uma excitação pontual, a solução da Equação 5.1 não é mais homogênea. No caso de uma força de excitação F seja colocada em um ponto (x_0, y_0) da placa, a equação de movimento passa a ter a forma de:

$$\nabla^{4} w(x, y, \omega) - k_{f}^{4} w(x, y, \omega) = \frac{1}{D} [F(\omega)\delta(x - x_{o})\delta(y - y_{o})].$$
(5.11)

A solução da Equação 5.11, obtida por técnica de superposição de modos, é dada pela Equação 5.12, a qual fornece o campo de deslocamento w da placa para toda a freqüência ω .

$$w(x, y, \omega) = -\frac{F}{\rho_{p}h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{mn}(x_{o}, y_{o})\Phi_{mn}(x, y)}{\omega^{2} - \omega_{mn}^{2}}$$
(5.12)

Desta forma, a fim de obter o campo de vibração analítico na superfície da placa, foi aplicada ao modelo uma força pontual de amplitude unitária para toda a faixa de freqüência de interesse. A Figura 5.3 mostra os gráficos de FRF obtidos através da Equação 5.12 em função de ω , onde a curva superior mostra a resposta para uma excitação F aplicada próxima à borda e a curva de baixo, a resposta da placa à força F aplicada em um ponto (x₀,y₀) localizado na região central da placa.



Figura 5.3 : Curvas de FRFs de uma placa excitada por uma força F posicionada próxima da borda (em cima) e próxima do centro (embaixo).

Analisando os gráficos de FRFs da Figura 5.3 percebe-se que, ao contrário do primeiro, no segundo caso nem todos os modos da placa estão sendo excitados pela força F de entrada. A Figura 5.4 mostra alguns dos primeiros modos da placa e o local indicado por um círculo preto está a posição na placa onde foi aplicada a força no segundo caso. Pode-se notar que nenhum dos modos mostrados na segunda e na quarta colunas da Figura 5.4 foi excitado, uma vez que a excitação ocorreu exatamente em um nó modal. Como o objetivo aqui é tratar a radiação acústica de uma fonte de ruído, não há a preocupação de que todos os modos sejam excitados. Em todos os casos de simulação analítica apresentados, serão utilizados os campos vibroacústicos referentes à excitação posicionada na região central da placa – ponto (x_0, y_0) .



Figura 5.4: Modos de vibrar de uma placa plana simplesmente apoiada, as respectivas freqüências de vibração e o local – ponto (x_0, y_0) - onde foi aplicada a força F.

A Figura 5.5 ilustra o deslocamento w em valor absoluto obtido pela Equação 5.12, para $\omega = 2\pi (200 \text{ Hz}).$



Figura 5.5: Valor absoluto do deslocamento da superfície da placa, em m, para f = 200Hz, obtido analiticamente.

5.2 Radiação do campo de pressão por modelo de simulação

De posse do deslocamento na superfície da estrutura é possível determinar o campo de pressão em qualquer lugar do espaço utilizando a primeira integral de Rayleigh, a qual relaciona o deslocamento estrutural w com a pressão sonora radiada em campo livre, sem reflexão:

$$\overline{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \omega) = \frac{-\omega^2 \rho_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \omega) \frac{e^{-j\mathbf{k}\left|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\right|}}{\left|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}\right|} d\mathbf{x}' d\mathbf{y}'.$$
(5.13)

Desta forma, é possível gerar analiticamente o campo de pressão radiado por uma placa vibrante em campo livre. Os hologramas gerados, além de servir como dados de entrada na estimação dos campos de pressão sonora através dos métodos de holografia acústica, serão utilizados também como parâmetro para calcular o desvio obtido para os hologramas estimados.

A Figura 5.6 mostra o campo de pressão, em dB com referência de 20 μ Pa, obtido através da Equação 5.13, para planos paralelos e de mesma dimensão da placa vibrante, no caso para freqüência f = 200 Hz.



Figura 5.6: Campo de pressão, em dB, radiado por uma placa vibrante, determinado analiticamente para freqüência igual a 200 Hz.

Assim com os hologramas da Figura 5.6, todos os demais campos de pressão determinados analiticamente e que são utilizados neste trabalho são compostos por 21 linhas e 15 colunas, resultando em 315 pontos de discretização.

5.3 Holografia Acústica de Campo Próximo Usando RDFS

Como apresentado no Capítulo 3, para utilizar a técnica de NAH via DFT faz-se necessário respeitar 5 condições do arranjo experimental, a fim de reduzir erros de processamento de sinais e obter bons resultados de estimação. Entretanto, tais critérios podem muitas vezes sobrecarregar o arranjo experimental com um número grande de sensores e despender grande espaço de memória e tempo computacional, uma vez que a matriz dos dados de medição torna-se, geralmente, muito grande.

Com o objetivo de facilitar o arranjo experimental e simplificar o modelo de dados de entrada, pode-se utilizar o método de NAH via RDFS. A Figura 5.7 mostra o resultado comparativo do campo de pressão estimado por NAH, para a freqüência de 600 Hz, no qual o holograma da fonte está em z = 0, o holograma de entrada em zo = 4cm, e os campos de pressão estimados em z = 1cm (propagação regressiva) e z = 8cm (propagação progressiva).



Figura 5.7: Comparação de campos de pressão, em dB, estimados por NAH para f = 600 Hz e zo = 4cm.

Analisando a Figura 5.7, nota-se a equivalência da técnica de NAH através da RDFS com o resultado estimado de NAH via DFT para os dois planos estimados. De forma análoga, a Figura 5.8 apresenta o resultado comparativo da porcentagem de desvio relativo dos campos estimados por NAH expandido para uma faixa de freqüência variando de 1 a 1023 Hz.



Figura 5.8: Desvio relativo de NAH aplicada a dados de simulação para em propagação regressiva (z = 1 cm) e propagação progressiva (z = 8 cm).

Primeiramente, pode-se notar no gráfico de resultados de propagação regressiva a equivalência entre o método por RDFS com o modelo por DFT. Um pico na curva por RDFS aparece em torno da freqüência de 900 Hz, o qual pode ser reduzido variando os períodos de relaxação de RDFS, que nesta análise foram mantidos constantes e iguais a Px = 1.1 e Py = 1.2. Já as curvas de propagação progressiva apresentam resultados muito próximos para freqüência até 250 Hz. No caso de freqüências superiores, embora o desvio apresentado por RDFS tenha se mantido constante em torno de 10%, o desvio para NAH via DFT mostrou-se bastante elevado. Entretanto, essa alta diferença também pode ser reduzida modificando a freqüência de corte dos filtros de ondas evanescentes presentes no modelo, a qual neste caso permaneceu fixa e igual a 0,60.

De modo geral portanto, pode-se verificar que a técnica de NAH utilizando RDFS é equivalente ao caso de NAH por DFT, assim como apresentado por Arruda e Mas (1997). Desta forma, devido às vantagens já citadas anteriormente, em todos os casos neste trabalho em que se estiver utilizando NAH estará sendo feito o uso da técnica através do cálculo de RDFS.

5.4 Holografia Acústica por Fontes Elementares

Com o objetivo de entender melhor as características da técnica de ESM, foram realizadas análises do método em função da configuração das fontes modeladas, da distância entre a grade de medição e a região da fonte e, por fim, em relação a ruídos geralmente presentes em dados de medição.

5.4.1 ESM em Relação à Configuração das Fontes

Um dos principais desafios do método de holografia acústica por fontes elementares está em determinar uma configuração ótima das fontes modeladas Esse problema é discutido também por Jeans *et al*, (1992), Barbosa (2001) e Magalhães (2002). Com o objetivo de entender melhor esse problema, diferentes configurações de fontes foram analisadas, na qual foram variadas a quantidade e a distribuição espacial das fontes.

Inicialmente, um plano de pressão foi obtido de forma analítica através da Equação 5.13, na posição z = 4cm, o qual vai servir como holograma de entrada do problema inverso. Analogamente, dois outro planos, em z = 1cm e z = 8cm foram determinados a fim de poder avaliar os campos de pressão estimados por ESM. A análise do comportamento do método com relação à quantidade de fontes modeladas foi realizada utilizando quatro conjuntos de fontes elementares formados por 24, 100, 200 e 315 fontes simetricamente espaçadas. A Figura 5.9 mostra a posição das fontes utilizadas em cada modelo, indicada por um círculo vermelho, na posição z = 0, comparada com a dos pontos de discretização do campo de pressão, zo = 4cm, indicada por um "x " preto.



Figura 5.9: Representação esquemática da discretização do campo de pressão e dos quatro conjuntos de fontes modeladas.

Para cada conjunto foi obtido o gráfico de condicionamento da matriz a ser invertida, os quais são apresentados na Figura 5.10 em função da freqüência, em Hz.



Figura 5.10: Condicionamento da matriz a ser invertida em função da freqüência, para quatro conjuntos de fontes modeladas e holograma de entrada em zo = 4cm.

Pode-se notar que o condicionamento da matriz do sistema é inversamente proporcional à quantidade de fontes do modelo, ou seja, quanto maior o número de fontes, pior o condicionamento. Esse resultado já era esperado uma vez que conforme se aumenta o número de fontes, cresce a dimensão da matriz [*A*] a ser invertida. A Figura 5.11 mostra o resultado comparativo, em dB, entre os hologramas estimados por ESM para os conjunto de fontes da Figura 5.9, para um caso de propagação regressiva (z = 1cm) e um de propagação progressiva (z = 8cm), e as respectivas diferenças.



Figura 5.11:Campos de pressão estimados por ESM para quatro conjuntos de fontes elementares, em f = 400 Hz e holograma de entrada em zo = 4cm.

Analisando os resultados de campos de pressão mostrados na Figura 5.11, pode-se perceber que em ambos os casos o aumento do número de fontes melhora os resultados de estimação, embora o condicionamento da matriz [*A*] torne-se maior. No caso de propagação regressiva, o conjunto de 24 fontes não é capaz de obter bom resultado de estimação, o qual vai se aproximando do holograma original à medida que se aumenta o número de fontes. Resultados semelhantes são obtidos para o caso de propagação progressiva, onde mesmo o conjunto de 24 fontes já consegue projetar um campo de pressão relativamente próximo ao holograma original. Além disso, merece destaque os resultados obtidos pelos demais conjuntos de fontes no caso de z = 8cm, os quais apresentaram desvio máximo inferior a 0,5 dB.

Assim como os campos de pressão mostrados na Figura 5.11, em que foram apresentados resultados para freqüência igual a 400 Hz, foram estimados hologramas para uma faixa de 1 a 1023 Hz para os 4 conjuntos de fontes mostrados na Figura 5.10. Os respectivos desvios relativos são mostrados na figura a seguir:



Figura 5.12: Desvio relativo de ESM aplicado em propagação regressiva (z = 1cm) e propagação progressiva (z = 8cm), para quatro conjuntos de fontes elementares, zo = 4cm.

Os gráficos da Figura 5.12 mostram uma boa eficiência do método das fontes elementares na estimativa de campos de pressão, principalmente em propagação progressiva. As curvas de desvio no caso do campo estimado em z = 1cm ratificam os resultados apresentados na Figura 5.11, nos quais o aumento do número de fontes melhora a estimação dos resultados, reduzindo o desvio relativo.

Um outro tipo de análise do ESM foi realizado com relação a sensibilidade do método à configuração das fontes, na qual conjuntos de mesmo número de fontes mas de distribuição espacial diferente foram analisados. Dois conjuntos compostos por 100 fontes foram analisados: um com as fontes distribuídas de forma simétrica e equidistantes entre si (conjunto idêntico ao apresentado na Figura 5.9) e outro com um tipo de arranjo espacial, dito *colocalizado*, no qual foram utilizadas as posições de alguns pontos de discretização do holograma original (pontos de

pressão), porém posicionadas na região das fontes, em z = 0. Os conjuntos de fontes descritos são apresentado na Figura 5.13.



Figura 5. 13: Conjuntos de 100 fontes elementares de ESM.

Como no caso anterior, foram gerados analiticamente o holograma de entrada, em zo = 4cm, e dois hologramas que serão utilizados para avaliar o resultado de estimação, em z = 1cm e em z = 8cm. O condicionamento da matriz a ser invertida para cada conjunto de fontes é mostrado em função da freqüência na Figura 5.14, na qual pode-se notar que as curvas são muito semelhantes, sendo o conjunto de distribuição simétrica, o qual apresenta valores de condicionamento um pouco melhores.



Figura 5.14: Curvas de condicionamento de dois conjuntos de 100 fontes elementares.

O resultado comparativo do desvio do campo de pressão estimado por cada conjunto é apresentado na Figura 5.15 para um caso de propagação regressiva (z = 1cm) e um de propagação progressiva (z = 8cm).



Figura 5.15: Desvio relativo de ESM aplicado em propagação regressiva (z = 1cm) e propagação progressiva (z = 8cm), para dois conjuntos de 100 fontes elementares, zo = 4cm.

Analisando o as curvas para o caso do campo estimado em z = 1 cm, destaca-se a diferença obtida de desvio entre os dois conjuntos de fontes analisados devido a apenas uma pequena variação na distribuição espacial das fontes. Resultado semelhante não acontece no caso de propagação progressiva, onde as curvas mostram comportamento semelhante para ambos os conjuntos de fontes. Na Figura 5.16 são apresentados os resultados de estimação obtidos para a freqüência igual a 400 Hz.



Figura 5.16:Campos de pressão estimados por ESM para conjuntos de 100 fontes elementares, em f = 400 Hz e holograma de entrada em zo = 4cm.

Os hologramas da Figura 5.16 permitem analisar qualitativamente a diferença obtida entre os conjuntos de 100 fontes elementares. No plano z = 1cm, observa-se que a grande diferença entre os resultados ocorreu devido a uma certa concentração de pressão em regiões próximas às das fontes modeladas para o caso de distribuição *colocalizada* das fontes, a que não se verificou para o plano z = 8cm.

Por fim, são apresentados dois conjuntos de 200 fontes elementares, um com distribuição simétrica e outro em pontos ditos *colocalizados*, mostrados na Figura 5.17. Analogamente, foi utilizado como entrada do problema inverso um holograma em zo = 4cm, estimaram-se planos em z = 1cm e z = 8cm. A Figura 5.18 apresenta a comparação entre o condicionamento da matriz de cada um dos conjuntos de fontes analisado em função da freqüência.



Figura 5.17: Conjuntos de 200 fontes elementares de ESM.



Figura 5.18: Curvas de condicionamento de dois conjuntos de 200 fontes elementares em função da freqüência, estando o holograma de entrada em zo = 4cm.

Analisando as curvas da Figura 5.18 percebe-se uma grande diferença entre o condicionamento de cada modelo, a qual ocorreu devido exclusivamente ao arranjo espacial adotado das fontes. A Figura 5.19 mostra o resultado de comparação do desvio relativo para os caso de estimação analisados.



Figura 5.19: Desvio relativo de ESM aplicado a dados de simulação em propagação regressiva (z = 1 cm) e propagação progressiva (z = 8 cm), para dois conjuntos de 200 fontes elementares.

O gráfico de propagação progressiva da Figura 5.19 apresenta um resultado de estimação do campo de pressão praticamente exato obtido por ESM. Já as curvas do campo projetado em z = 1cm apresentam resultados opostos ao caso anterior de 100 fontes, uma vez que o modelo de 200 fontes que apresenta pior condicionamento consegue obter resultados de estimação mais próximos dos hologramas originais. Essa avaliação pode também ser percebida nos hologramas da Figura 5.20, os quais mostram os campos de pressão estimados para a freqüência de 400 Hz. Pode-se perceber, novamente, a ocorrência de uma maior concentração de pressão em regiões próximas das fontes do modelo, no caso de propagação regressiva de fontes colocalizadas.



Figura 5.20:Campos de pressão estimados por ESM para conjuntos de 200 fontes elementares, em f = 400 Hz, e holograma de entrada em zo = 4cm.

De modo geral, pode-se notar a grande sensibilidade do método de holografia acústica por fontes elementares com relação à configuração das fontes empregadas no modelo. Mostrou-se que o aumento de número de fontes modeladas piora o condicionamento da matriz do sistema, porém resulta em uma solução estimada mais próxima da original. Foi mostrado também que nem sempre o modelo com melhor condicionamento apresenta melhor resultado de estimação. A distribuição simétrica e equidistante das fontes do modelo mostrou ser mais eficiente na estimativa de campos de pressão, principalmente em casos de propagação regressiva.

5.4.2 ESM em Relação à Distância do Holograma de Entrada

Com o objetivo de estudar a influência da distância do plano de entrada na solução do problema inverso de ESM, analisou-se o comportamento do método com relação a quatro diferentes distâncias zo do holograma de entrada. O estudo foi realizado utilizando o modelo de radiação composto por 200 fontes de distribuição simétrica apresentado na Figura 5.17, para uma faixa de freqüência de 10 a 1023 Hz. A Figura 5.21 mostra o condicionamento da matriz a ser invertida de cada sistema.



Figura 5.21: Condicionamento da matriz do modelo em função da freqüência para diferentes posições do holograma de entrada, em um conjunto de 200 fontes modeladas de forma simétrica.

Pode-se perceber na Figura 5.21 que, quanto maior a distância zo do holograma de entrada em relação à região fonte, pior é o condicionamento da matriz, assim como apresentado por Nelson e Yoon (2000, a). Em todos os casos, foram estimados campos de pressão de mesma dimensão do holograma da fonte para três diferentes distâncias z. A Figura 5.22 mostra o desvio relativo em porcentagem dos resultados estimados em cada sistema analisado em gráficos de escala logarítmica no eixo y.



Figura 5.22: Desvio dos resultados estimados em função da freqüência para diferentes posições do holograma de entrada, em um conjunto de 200 fontes modeladas de forma simétrica.

A análise dos gráficos da Figura 5.22 mostra uma característica de ESM diferente de NAH, onde quanto mais próximo estiver a grade de medidas da região da fonte, melhor o resultado de estimação. Com exceção da curva de z = 2cm no último gráfico, os resultados de estimação obtidos por ESM mantiveram-se inalterados ou até melhoraram conforme se distanciou o holograma de entrada da região da fonte.

Exceto no gráfico zo = 12cm, os resultados estimados na posição z = 2cm mantiveram-se praticamente constantes, lembrando que, para os hologramas de entrada em zo = 4cm e em

zo = 8cm, as soluções tratam-se de casos de propagação regressiva.

Em relação à distância z do holograma de estimação, percebe-se que quanto mais afastado estiver o campo de projeção da região da fonte, melhor é o resultado do campo de pressão estimado. Além disso, a técnica de ESM mostrou ser capaz de estimar campos de pressão (em z = 6cm e z = 10cm) praticamente exatos, com desvio relativo máximo inferior a 1% (sendo indiferente ser um caso de propagação regressiva ou progressiva).

Outra característica importante apresentada está na indiferença dos resultados estimados com relação ao alto valor de condicionamento de matriz. Exceto em zo = 1cm, todos os demais sistemas apresentam curvas de condicionamento bastante elevadas, o que entretanto não impediu a obtenção no geral de bons resultados de estimação pelos modelos de radiação. A princípio pode-se parecer uma contradição em relação aos resultados apresentados por Nelson e Yoon (2000, b), que verificaram que um alto condicionamento da matriz afeta de forma negativa a solução do problema inverso. Será mostrado de forma mais detalhada no próximo item que problemas de mal-condicionamento estão relacionados à instabilidade do sistema com relação a perturbações presentes no campo de pressão de entrada.

Portanto, pode-se concluir que em um sistema de medição experimental em que foi realizada um boa aquisição do dados de pressão, com presença de ruído praticamente nula, o método das fontes elementares mostrou ser eficiente na estimação do campo sonoro, com pouca dependência em relação à distância do holograma de entrada e à distância do holograma projetado.

5.4.3 ESM em Relação ao Acréscimo de Erros

Com a finalidade de analisar a robustez do método por fontes elementares com relação a ruídos geralmente presentes em processos de medição, foram adicionadas diferentes porcentagens de perturbação ao holograma de entrada antes de resolver o problema inverso.

Para cada freqüência, foi gerada uma matriz $[P_R]$ composta por números complexos aleatórios, de mesma dimensão do holograma de pressão [P]. Dada pela Equação 5.14, a razão entre o valor RMS da matriz [P] pelo valor RMS da matriz $[P_R]$ (aproximadamente igual a 1),

multiplicada por um valor de porcentagem Po escolhido, resulta na quantidade de perturbação PT:

$$P_{\rm T} = P_0 \frac{\rm RMS([P])}{\rm RMS([P_R])}.$$
(5.14)

Desta forma, a matriz $[P_{ruido}]$ desejada é obtida multiplicando-se o coeficiente encontrado P_T pela matriz $[P_R]$:

$$[P_{ruido}] = P_T . [P_R].$$
(5.15)

A matriz $[P_{ruido}]$ encontrada é somada à matriz [P] determinada analiticamente, resultando no holograma de pressão final $[P_E]$, o qual será usado como entrada na solução do problema inverso, como mostra a Figura 5.23.



Figura 5.23: Representação esquemática de acréscimo de erro ao sistema.

Desta forma, é possível analisar o comportamento do método por fontes elementares com relação a diferentes porcentagens de perturbação. A Figura 5.24 mostra os hologramas de entrada $[P_E]$ do problema inverso após o acréscimo de diferentes porcentagens de erro ao campo de pressão original [P]. Nesse caso, a freqüência é igual 400 Hz e o plano está posicionado em z = 2cm.



Figura 5.24: Diferentes porcentagens de erro adicionados ao holograma de entrada , f = 400 Hz e z = 2cm.

A análise do método das fontes elementares em relação ao acréscimo de erros foi realizada através dos quatro sistemas utilizados no item 5.4.2. Soluções estimadas de campo pressão foram obtidas para porcentagens de erro iguais a 10, 30, 50, 70 e 100, adicionadas ao holograma de entrada. A Figura 5.25 apresenta os resultados de desvio relativo em função da porcentagem de erro acrescentado ao holograma de entrada para a freqüência igual a 400 Hz em gráficos de escala logarítmica no eixo y.



Figura 5.25: Resultado em escala logarítmica de comparação de desvio para diferentes porcentagens de acréscimo de erro no holograma de entrada, para a f = 400Hz.

Pode-se notar que quanto mais próximo estiver o holograma de entrada, menos interferência de ruídos de medição a solução estimada vai sofrer. No caso de o holograma estar bem próximo à região da fonte, zo = 1 cm, percebe-se um certo cancelamento da perturbação de entrada no campo projetado em todos os casos. Por exemplo, quando os dados de medição são obtidos com uma taxa

50% de ruído, o desvio relativo resultante no pior caso, z = 2cm, está em torno de 30%. Percebese, ainda, de forma semelhante ao resultado mostrado no item anterior, que conforme se aumenta a distância z do holograma de projeção, melhora o resultado de estimação.

A Figura 5.26 mostra o resultado comparativo de dois casos do gráfico de zo = 4cm da Figura 5.25, para taxas de perturbação iguais a 30% e 70% no dados de medição.



Figura 5.26: Resultados em dB para três distâncias do campos de pressão estimado, e para três diferentes porcentagens de erro adicionado ao holograma de entrada, em zo = 4cm e f = 400 Hz.

Os hologramas da Figura 5.26 permitem fazer uma análise qualitativa dos resultados discutidos anteriormente. Pode-se notar que os campos estimados em z = 2cm estão bem distantes do original, e que os hologramas projetados em z = 6cm e z = 10cm, mesmo com 70% de erro acrescentado ao plano de entrada, conseguem obter, para este caso de análise, bons resultados de estimação, com desvio aproximado de 30% para ambos os casos, de acordo com a Figura 5.25.

De forma análoga ao caso anterior, são apresentados resultados de comparação do desvio da

solução estimada em função da porcentagem de erro adicionado ao holograma de entrada para a freqüência igual a 800 Hz:



Figura 5.27: Resultado em escala logarítmica de comparação de desvio para diferentes porcentagens de acréscimo de erro no holograma de entrada, para a f = 800Hz.

Pode-se perceber que o comportamento do sistema na freqüência igual a 800 Hz, apresentado nos gráficos da Figura 5.27, é semelhante ao obtido em 400 Hz, mostrado na Figura 5.25, verificando pouca variação no comportamento do modelo em função da freqüência.

Portanto, pode-se concluir que o aumento da distância da grade de medição em relação à fonte gera um crescimento no valor de condicionamento da matriz do sistema, como apresentado na Figura 5.21, o que resulta em maior instabilidade do modelo de radiação a perturbações no campo de pressão medido, de acordo com os gráficos da Figura 5.25 e Figura 5.27. Schuhmacher (2000) apresentou resultado semelhante.

5.4.4 Regularização Aplicada a ESM

Com o objetivo de analisar a ferramenta de regularização de Tikhonov aplicada ao ESM na tentativa de melhorar a solução estimada, utilizou-se o sistema composto por um conjunto de 200 fontes elementares de distribuição *colocalizadas*, apresentado na Figura 5.17, e um holograma de medição posicionado em zo = 4cm.

Através da representação gráfica da Curva-L, determinou-se o parâmetro de regularização β. A Figura 5.28 mostra em escala logarítmica os valores singulares da matriz [A] do sistema para a
freqüência de 900 Hz em azul e o parâmetro β determinado, igual a 2.6406, em vermelho.



Figura 5.28:Valores singulares (linha azul) e o valor do parâmetro β (linha vermelha tracejada) para um conjunto de 200 fontes colocalizadas, f= 900 Hz e zo = 4cm.

Pode-se notar pela Figura 5.28 que, segundo a Curva-L, uma grande quantidade de valores singulares do modelo original não será utilizada na estimação do campo de pressão nesta freqüência de análise. O condicionamento da matriz do sistema foi reduzido de 1279 (modelo original) para 161 (modelo regularizado). O campo de pressão reconstruído em z = 1cm é mostrado na Figura 5.29, o qual é comparado com o original, obtido analiticamente, e com o holograma estimado sem regularização.



Figura 5.29: Hologramas de pressão, em dB, estimados por ESM com e sem regularização, em z = 1cm , para f = 900 Hz e zo = 4cm.

A análise comparativa dos resultados mostra que enquanto a solução não regularizada apresentou faixa de desvio superior a 30 dB, a regularizada por Tikhonov apresentou faixa inferior a 10 dB. Além disso, a porcentagem de desvio relativo baixou de 42% (modelo original) para 8% (modelo regularizado). A Figura 5.30 mostra o resultado anterior em curvas contínuas, na qual os



315 pontos de discretização dos hologramas de pressão (original e estimados) mostrados na Figura5.29 são apresentados de forma linear.

Figura 5.30: Ajuste de curvas da solução estimada por ESM com e sem regularização, em z = 1cm , para f = 900 Hz e zo = 4cm.

Os gráficos da Figura 5.30 permitem analisar a ferramenta de Tikhonov com relação ao ajuste de curvas. Pode-se notar a diferença das soluções estimadas com o resultado analítico, na qual a curva obtida por Tikhonov possui um ajuste mais preciso que o obtido sem regularização pelo método.

5.5 Análise Comparativa Entre ESM e NAH

Com o objetivo de avaliar resultados de estimação obtidos pelo método das fontes elementares em comparação com uma técnica tradicional de holografia acústica, foi realizada um análise comparativa de resultados estimados por ESM com os obtidos por NAH. Foi utilizado o método de holografia acústica de campo próximo planar usando RDFS. No método das fontes elementares foi utilizado o conjunto de 200 fontes de distribuição simétrica, apresentado na Figura 5.15.

Dois sistemas de análise foram montados a fim de comparar os resultados dos método com relação a casos de propagação regressiva e propagação progressiva, estando a fonte posicionada na região z = 0. No primeiro caso a grade de medição foi posicionada em zo = 1cm e no segundo, o holograma de entrada foi colocado em zo = 4cm. Em ambos os casos, foram estimados campos de pressão em z = 2cm, z = 6cm e z = 10cm. A Figura 5.31 apresenta o desvio dos resultados estimados por ambos os métodos para os dois casos analisados.



Figura 5.31: Resultado de comparação de desvio obtido por ESM e NAH em função da freqüência para os casos de o holograma de entrada em zo = 1cm e em zo = 4cm.

Analisando os resultados do primeiro caso da Figura 5.31, zo = 1cm, percebe-se uma característica oposta entre os métodos de holografía acústica analisados. O ESM obtém melhor resultado para campos pressão estimados mais distantes da região da fonte enquanto que os resultados obtidos por NAH melhoram conforme o campo estimado se aproxima da fonte de ruído. No segundo caso analisado, zo = 4cm, destaca-se a excelente capacidade de estimação de resultados por ESM, principalmente para os casos de propagação progressiva.

De modo geral, os resultados obtidos por NAH foram muito semelhantes nos dois casos analisados. Em altas freqüências, no primeiro caso, e próximo de 900 Hz, no segundo, obteve-se um grande aumento do desvio, o qual pode ser reduzido como explicado anteriormente modificando as constantes dos períodos de relaxação de RDFS.



As figuras a seguir mostram os hologramas obtidos no primeiro e no segundo caso analisado, respectivamente, pelos métodos de holografia acústica para a freqüência de 400 Hz.

Figura 5.32: Hologramas de pressão, em dB, estimados por ESM e NAH para f = 400 Hz e zo = 1cm.



Figura 5.33: Hologramas de pressão, em dB, estimados por ESM e NAH para f = 400 Hz e zo = 4cm.

Os hologramas mostrados na Figura 5.32 e Figura 5.33 permitem fazer uma análise qualitativa dos resultados discutidos. Pode-se notar que para zo = 1cm ambos os métodos estimaram resultados muito próximos entre si. Já no caso de o holograma de entrada estar em zo = 4cm, observa-se que NAH apresenta bons resultados de estimação e constata-se a capacidade de ESM em conseguir reproduzir o campo sonoro praticamente igual ao holograma original.

5.6 Campo de Vibração na Superfície da Fonte

O campo de vibração de uma superfície vibrante é outra característica importante em análise vibroacústica de uma fonte de ruído qualquer. Como apresentado no item 3.3.1, uma vez determinadas as velocidades de volume de um modelo de radiação, é possível identificar a velocidade de vibração desejada, através da Equação 4.3. Para a estimação do campo de vibração foi utilizado um conjunto de 200 (20 x 10) fontes elementares de distribuição simétrica, apresentada na Figura 5.17. Os campos de vibração originais (obtido analiticamente) e os estimados por ESM são mostrados, em valor absoluto, na Figura 5.34.



Figura 5.34: Resultado comparativo do módulo de superfícies de vibração da placa, em m/s, para zo = 4cm.

De modo geral, pode-se perceber que os campos de vibração estimados na superfície da placa por ESM foram bem próximos aos determinados analiticamente. Além disso, de posse dos valores de pressão e de vibração estimados por ESM, o vetor de intensidade sonora pode ser também determinado.

Como apresentado no capítulo 4, ESM permite estimar o campo vibroacústico desejado independente da dimensão da grade de medição e do sistema de coordenadas utilizado. A Figura 5.35 mostra o campo sonoro estimado no plano z = 6cm para a freqüência igual a 400 Hz, em dimensões maiores que a região da fonte, a qual está indicada por um retângulo preto no centro da figura.



Figura 5.35: Campo de pressão estimado por ESM em dimensões maiores que a da placa, indicada pelo um retângulo preto, em z = 6cm e f = 400 Hz.

A Figura 5.36 mostra o campo de pressão na superfície da placa determinado analiticamente na freqüência igual a 400 Hz e o respectivo campo reconstruído em uma superfície esférica ao redor da fonte por ESM.



Figura 5. 36:Campo de pressão na superfície da placa, em z = 0, e a distribuição da pressão em uma superfície esférica, obtidos por ESM, para f = 400 Hz.

Por meio das figuras anteriores verificam-se duas grandes vantagens da reconstrução holográfica por ESM em ralação à NAH: a possibilidade de estimar o campo sonoro em uma forma expandida, ou seja, para além das dimensões da grade de medição e a possibilidade de reconstruir o campo vibroacústico em uma distribuição esférica (ou qualquer outro tipo de distribuição), independente da superfície de medição utilizada.

Capítulo 6

Análise Experimental

A parte experimental deste trabalho é apresentada com o objetivo de validar a técnica de holografia acústica por ESM usando dados reais de medição do campo de pressão irradiado por uma fonte sonora. O arranjo experimental e os processos de medição são descritos.

Inicialmente é apresentado um modelo simples de radiação sonora composto por uma placa plana vibrante, montada em um anteparo, que pode ser considerado infinito, excitada pontualmente por um excitador eletrodinâmico. Resultados comparativos dos campos de pressão estimados com os obtidos experimentalmente são analisados. Por fim é apresentada a solução do problema inverso em acústica aplicado a um caso de fonte real de ruído de formato irregular, mostrando a possibilidade da aplicação de ESM a casos de fontes sonoras de geometria arbitrária. Todos os experimentos foram realizados em uma sala semi-anecóica, não isolada, do Laboratório de Vibração e Acústica do Departamento de Mecânica Computacional – FEM/UNICAMP, que reproduz ação de campo livre para freqüências superiores a 424Hz, como descrito por Colinas (1999).

6.1 Placa Vibrante - arranjo experimental

Uma placa plana de aço galvanizado, de formato retangular e de características iguais às apresentadas na Tabela 5.1 foi fixada sobre uma base de aço de modo a tentar reproduzir a condição de contorno simplesmente apoiada, utilizada no modelo de simulação do capítulo 5, como mostra a Figura 6.1. A região indicada por um círculo vermelho é mostrada de forma mais

detalhada na Figura 6.2, na qual pode-se notar alguns pontos de rebite (pop) utilizados para fixação da placa na base.





Figura 6.1: Placa de aço galvanizado fixa em uma base de aço.

Figura 6.2: Detalhe dos rebites (pop) de fixação da placa.

Um anteparo de dimensão 1,41m (no eixo x) por 1,60m (no eixo y) foi colocado ao redor da placa (sem haver contato), a fim de garantir que, durante as medições, a massa de ar originada na parte traseira da placa, z < 0, não exercesse influência sobre a região de interesse, $z \ge 0$, como mostra a figura abaixo:



Figura 6.3: Arranjo experimental de uma placa montada em um anteparo.

A placa foi excitada por um sinal de ruído branco (10 Hz a 1,5 kHz) através de um excitador eletrodinâmico na posição central da placa. Medidas de FRFs foram obtidas por meio de uma grade linear de 15 microfones a fim de se obter o mapeamento espacial do campo acústico radiado. A grade de microfones varreu a dimensão da placa no eixo y, num total de 21 linhas de medição, resultando em 315 pontos de medição.

Entretanto, o arranjo experimental montado resultou em deslocamento não nulo no eixo z para a borda da placa, contrariando a condição dada pela Equação 5.2, resultando, portanto, em uma condição de contorno diferente da empregada no modelo simulado. A Figura 6.4 mostra uma representação esquemática da condição idealizada, simplesmente apoiada, de suporte da placa.



Figura 6.4: Representação esquemática do modo como foi implementado experimentalmente o ao poio simples.

Desta forma, os campos de pressão medidos experimentalmente são utilizados para avaliar a eficiência dos métodos de holografia acústica na estimação do campo sonoro real, porém, não podem ser comparados com os resultados obtidos pelo modelo de simulação, apresentado no Capítulo 5, uma vez que foram utilizadas fontes de ruído diferentes no processo de geração do evento sonoro.

Com a finalidade de mapear o campo de pressão radiado pela fonte, foram obtidos experimentalmente dois hologramas de medição, paralelos ao plano da fonte. Inicialmente, foram realizadas medidas em campo próximo, a uma distância zo = 0,040m, como mostram as figuras abaixo:



Figura 6.5 Arranjo experimental da medição de FRFs em campo próximo.



Figura 6.6: Detalhe da medição experimental em campo próximo.

Posteriormente, medidas de FRFs foram obtidas à distância de z = 0,100m, com a finalidade de validar o resultado experimental. As figuras a seguir mostram o arranjo experimental utilizado para a medição do campo distante radiado.



Figura 6.7: Arranjo experimental da medição de FRFs em campo distante.



Figura 6.8: Detalhe da medição experimental em campo distante.

Além disso, medidas do auto-espectro, $S_{xx}(\omega)$, da célula de carga foram obtidas tornando possível, junto com as FRFs, calcular os valores de pressão em Pascal, e posteriormente transformá-los em dB por meio das equações a seguir:

$$P(\omega) = H(\omega) \sqrt{S_{xx}(\omega)}$$
(6.1)

$$P_{dB}(\omega) = 20 \log_{10}(\frac{P(\omega)}{P_{ref}}), \qquad (6.2)$$

onde P_{ref} é a pressão de referência igual a 20 µPa e H(ω) é a Função de Resposta em Freqüência medida entre a célula de carga e o microfone.

6.2 Características de Medição

Nas medições dos dois hologramas, foi utilizado um espaçamento entre os microfones no eixo x igual a $d_x = 0,029$ m, e no eixo y igual a $d_y = 0,025$ m. Desta forma, para cada holograma foram obtidas medidas de FRFs sobre toda a superfície da placa, resultando em 315 pontos de medição. A Figura 6.9 mostra a representação esquemática do arranjo espacial dos microfones

utilizado nas medidas experimentais do campo de pressão.



Figura 6.9: Representação esquemática dos hologramas de medição da uma placa vibrante.

A fim de poder utilizar os resultados obtidos por NAH para comparar com os campos estimados por ESM, o arranjo experimental deve considerar os critérios apresentados no item 3.2. Desta forma, utilizando um espaçamento $d = max(d_x, d_y) = 0,029m$ e respeitando a condição $d \le zo \le 2d$ tem-se que a freqüência máxima de estudo para o arranjo experimental utilizado é $f_{max} \cong 5,9kHz$. Como foi montada uma grade de medição de tamanho igual ao da fonte, (0,4m x 0,5m), a freqüência mínima de análise determinada seria igual a $f_{min} = 858Hz$. Porém, com a utilização da técnica recursiva de RDFS para o cálculos de NAH, é possível obter resultados para uma faixa de freqüência inferior à f_{min} determinada – a mínima freqüência de análise foi aquela na qual a sala semi-anecóica passa a ser considerada como em campo-livre.

6.3 ESM Aplicado a Dados Experimentais

Com o objetivo de analisar o método das fontes elementares na estimação do campo de pressão de uma fonte de ruído real, utilizou-se um modelo de 315 fontes elementares. Segundo a análise realizada em dados de simulação no item 5.4.1, o conjunto desse número de fontes foi o que obteve melhor resultado de estimação. Além disso, utilizou-se um arranjo espacial simétrico e *colocalizado* das fontes modeladas, como mostra a Figura 6.10, na qual as fontes foram distribuídas de forma idêntica aos pontos de medição, porém posicionadas no plano z = 0.



Figura 6.10: Conjunto de 315 fontes elementares distribuídas de forma simétrica e colocalizadas.

Inicialmente, a fim de avaliar o modelo de ESM utilizando a ferramenta de regularização de Tikhonov aplicado a um caso real de radiação sonora, determinou-se o parâmetro de regularização β para cada freqüência de análise através da representação gráfica da Curva-L:



Figura 6.11: Gráfico do parâmetro β obtido pela Curva-L em função da freqüência.

Desta forma, aplicando a ferramenta de Tikhonov ao modelo de fontes elementares obtido originalmente, obtém-se um novo sistema, dito regularizado. A Figura 6.12 mostra as curvas de condicionamento do sistema em função da freqüência.



Figura 6.12: Curvas de condicionamento do sistema original e do sistema regularizado.

Pode-se notar a grande redução do número de condicionamento devido à regularização do sistema. Assim, a partir das medidas de pressão obtidas em zo = 4cm foram reconstruídos os campos de pressão no plano z = 10cm. O desvio relativo entre o resultado de estimação dos modelos de ESM (com e sem regularização) e os dados medidos em campo distante são apresentados na figura abaixo:



Figura 6.13: Curvas de desvio relativo do sistema original e do sistema regularizado.

Analisando os resultados da Figura 6.13, percebe-se a pouca influência da ferramenta de regularização de Tikhonov na reconstrução desse campo sonoro analisado. A Figura 6.14 mostra o resultado comparativo dos hologramas de pressão estimados em algumas freqüências para ambos os sistemas, no qual é possível analisar de forma mais detalhada e precisa os resultados de estimação por ESM.



Figura 6.14: Hologramas de pressão, em dB, medidos e estimados no plano z = 10cm por ESM para zo = 4cm.

De modo geral, pode-se notar a eficiência do modelo de ESM na reconstrução do campo de pressão obtido experimentalmente, embora tenha apresentado valores relativamente elevados de desvio relativo, apresentados na Figura 6.13. Pode-se perceber, também, que de forma semelhante ao resultado obtido em análise de simulação, a regularização de Tikhonov atua em pontos localizados no processo de estimação, principalmente reduzindo picos de diferença do holograma projetado em relação ao original, resultando portanto na diminuição da faixa, em dB, dos hologramas de desvio obtidos.

Como apresentado anteriormente, uma vez determinada a vazão das fontes modeladas, o ESM permite estimar o campo vibroacústico desejado independentemente da dimensão da grade de medição e do sistema de coordenadas utilizado. A Figura 6.15 mostra o campo de pressão estimado na freqüência de 590 Hz para dimensões maiores que a região da fonte, a qual está indicada por um retângulo preto no centro da figura, no plano z = 10cm. A Figura 6.16 mostra a visão frontal e traseira do campo de pressão reconstruído ao redor da placa, indicada por um retângulo azul, em sistema de coordenadas esféricas para a freqüência igual a 590 Hz.



Figura 6.15: Campo de pressão estimado por ESM, em dB, em dimensões maiores que a da placa, indicada por um retângulo preto, em z = 10cm e f = 590 Hz.



Figura 6.16: Visão frontal e traseira do campo de pressão para f = 590 Hz, estimado por ESM ao redor da placa, indicada em azul, em coordenadas esféricas.

Analisando o campo de pressão mostrado na Figura 6.15 pode-se verificar que, nesse caso, muita informação sobre o campo de pressão não seria considerada se apenas o campo sonoro limitado pelas dimensões da placa fosse analisado. A Figura 6.16 mostra a capacidade do ESM em reconstruir o campo de pressão no sistema de coordenadas desejado, independente do sistema de coordenadas utilizado no processo de medição.

6.4 ESM Comparado a NAH

Com o objetivo de comparar o método das fontes elementares com relação a outra técnica de reconstrução do campo sonoro, resultados de estimação por ESM foram comparados com os obtidos por NAH. Foi utilizado o método de holografia acústica de campo próximo planar usando RDFS com valores constantes de período de relaxação iguais a Px = 1,1e Py = 1,1. No método das fontes elementares, utilizou-se o modelo de 315 fontes apresentado na Figura 6.10. O desvio relativo entre o resultado de estimação dos métodos e os dados medidos em campo distante são apresentados na Figura 6.17.





De modo geral, pode-se notar uma semelhança no comportamento das curvas de desvio mostradas na Figura 6.17, onde, em baixa freqüência (f < 650Hz), ambos os gráficos apresentaram-se bastante próximos. Nos demais pontos, pode-se perceber um desvio resultante

menor dos campos de pressão estimados por ESM em relação aos obtidos por NAH. A Figura 6.18 apresenta os hologramas de pressão reconstruídos pelos métodos para algumas freqüências.



Figura 6.18: Hologramas de pressão, em dB, medidos e estimados no plano z = 10cm por ESM e NAH para zo = 4cm.

De modo geral, pode-se perceber que ambos os métodos apresentaram resultados próximos aos medidos experimentalmente. Mais do que isso, nota-se o comportamento semelhante dos resultados de estimação obtidos pelos métodos quando verificados os hologramas de desvio. Desta maneira, pode-se verificar a equivalência entre ESM e NAH na obtenção do campo sonoro estimado e, devido à simplicidade da formulação, justifica-se a utilização do método de fontes elementares na reconstrução holográfica do campo acústico radiado.

6.5 ESM Aplicado a Fontes de Ruído de Formato Arbitrário

Com o objetivo de mostrar a capacidade do método das fontes elementares em estimar o campo sonoro de uma fonte de ruído de formato arbitrário, o ESM foi utilizado para reconstruir o campo de pressão de um compressor de refrigerador. Medidas de FRFs foram obtidas em 141 pontos (10 linhas, 14 colunas e 1 ponto superiorcentral) no contorno da estrutura, as quais foram utilizadas como entrada do problema inverso de ESM. A Figura 6.19 mostra o tipo de compressor utilizado e a correspondente discretização da fonte, indicada por pequenos adesivos redondos da cor branca, sobre os quais foram posicionados os microfones. Por ser o compressor uma fonte vibroacústica de alta complexidade e, como era desejado que o mesmo estivesse funcionando em seu modo operacional, foi utilizado como referência um acelerômetro posicionado próximo à entrada externa de descarga de fluido do compressor. A Figura 6.20 mostra a grade de microfone e o acelerômetro utilizados.



Figura 6.19: Compressores marcados por pontos de discretização.



Figura 6.20: Arranjo experimental composto por 10 microfones e um acelerômetro.

Foi utilizado um conjunto formado por 6 colunas, cada qual composta por 8 fontes, resultando em um total de 48 fontes elementares modeladas na aplicação de ESM. A representação esquemática da distribuição espacial das fontes modeladas e das catorze colunas de medidas de pressão é mostrada na Figura 6.21 em visão 2D (a esquerda) e em 3D (a direita).



Figura 6.21: Representação espacial do conjunto de fontes modeladas em ESM e das catorze colunas de medidas de pressão, em visão 2D (a esquerda) e 3D (a direita).

Através da solução do problema inverso, determinou-se o vetor $\{q\}_{48x1}$ de velocidade de volume das fontes elementares. Desta forma, uma vez conhecida a vazão das fontes modeladas é possível estimar o campo vibroacústico em qualquer lugar do espaço. O resultado comparativo do campo medido experimentalmente no contorno com o obtido pela solução do problema é apresentado na Figura 6.22 para a freqüência de 160 Hz e na Figura 6.23 para a freqüência de 2500 Hz. A posição visualizada na visão dianteira do compressor indicada por um ponto rosa e a letra *D*, e por um ponto preto e a letra *S*, correspondem respectivamente às posições de *descarga* (saída) e *sucção* (entrada) de fluido no compressor.



Figura 6.22: Resultado comparativo da solução do problema inverso de ESM, para f = 160 Hz.



Figura 6.23: Resultado comparativo da solução do problema inverso de ESM, para f = 2500 Hz.

Analisando os campos de pressão reconstruídos mostrados na Figura 6.22 e na Figura 6.23, pode-se notar o excelente comportamento da solução do problema inverso aplicado a um caso 3D. Entretanto, o modelo de radiação do compressor não pode ser validado por não terem sido feitas medidas de pressão em campo distante da fonte ou em qualquer outra posição^[1].

Contudo, através da aplicação de ESM ao caso de radiação acústica do compressor pôde ser verificado que o método das fontes elementares é capaz de reproduzir o campo de pressão independentemente do formato da fonte de ruído analisada.

^[1] Os dados de medição do campo de pressão radiado pelo compressor foram originalmente obtidos para um projeto de caracterização de vibroacústica de compressores, realizado pelo grupo do laboratório de vibração e acústica (LVA) da Unicamp. Na época, não se imaginava aplicar a técnica de holografia acústica e por isso, medidas em campo distante não foram obtidas.

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

A holografia acústica foi mostrada como uma técnica capaz de obter a reconstrução da fonte sonora, que pode ser aplicada para mapear o campo de pressão radiado, tornando possível a caracterização vibroacústica da fonte vibrante e a identificação das principais fontes de ruído existentes.

De modo geral, as principais características do método das fontes elementares na estimativa do campo vibroacústico foram analisadas. A formulação matemática do método foi apresentada, mostrando a sua simplicidade.

Pôde-se observar que o aumento da distância da grade de medição em relação à região da fonte resulta em um crescimento no valor de condicionamento da matriz representativa do sistema. Resultado semelhante é obtido com o aumento de número de fontes modeladas. Porém, no caso de simulação analisado de uma placa vibrante, quanto maior a quantidade de fontes, melhor o resultado de estimação obtido.

Portanto, concluiu-se que o condicionamento do sistema não está associado com a qualidade da solução estimada pelo modelo, mas sim com a estabilidade da solução do sistema de equações algébricas. Foi mostrado que nem sempre o modelo com melhor condicionamento apresenta melhor resultado de estimação. Um valor alto de condicionamento do sistema está associado a uma instabilidade da solução do modelo de radiação a perturbações no campo de pressão medido.

A técnica de ESM foi mostrada bastante sensível com relação à configuração (quantidade e posição) das fontes empregadas no modelo. Na busca da configuração ideal, a distribuição simétrica e equidistante das fontes do modelo mostrou ser mais eficiente na estimativa de campos de pressão, principalmente em casos de propagação regressiva.

Em um sistema de medição experimental com pouco ruído de medição, o método das fontes elementares mostrou ser eficiente na estimação do campo sonoro, com pouca dependência em relação à distância do holograma de entrada e à distância do holograma projetado. Foi mostrado também que em um conjunto de dados de medição contaminado por uma elevada taxa de ruído, a técnica de ESM é capaz de obter relativamente bons resultados de estimação se a grade de medidas estiver bem próxima à região da fonte.

Com relação à ferramenta de regularização de Tikhonov, pode-se notar que o resultado estimado pela técnica de ESM com regularização apresenta um ajuste do campo de pressão em relação ao medido mais preciso que o obtido sem regularização. Foi mostrada a melhora do condicionamento produzido pela aplicação desse tipo de ferramenta. Analisando os campos de pressão projetados, pôde-se perceber que, tanto no caso de simulação como no experimental, a ferramenta de regularização de Tikhonov atua em pontos localizados no processo de reconstrução holográfica, resultando em uma estimativa mais refinada da solução do problema inverso.

De modo geral, analisando os resultados obtidos de radiação sonora da placa vibrante experimental, pôde-se verificar a equivalência entre ESM e NAH, com resultados obtidos próximos aos medidos experimentalmente. Mais do que isso, pôde ser observado um comportamento semelhante dos resultados de estimação por ambos os métodos quando verificados os hologramas de desvio. Desta maneira, a utilização do método de fontes elementares na reconstrução holográfica do campo acústico radiado foi justificada devido à simplicidade da formulação.

Nos resultados de campos de pressão reconstruídos em análise experimental de radiação acústica do compressor de refrigerador, pôde-se notar o excelente comportamento da solução do problema inverso aplicado a um caso 3D. Embora esse modelo de radiação não tenha sido validado, por não terem sido feitas medidas de pressão em uma outra superfície, foi mostrado que

ESM é capaz de reproduzir o campo de pressão independentemente do formato da fonte de ruído analisada. Concluiu-se que ESM é capaz de ser aplicada a fontes de ruído que possuam geometria arbitrária, podendo ser vista, assim, como uma extensão aos métodos de holografia acústica tradicionais. Se comparado com métodos inversos onde é utilizado um modelo obtido pelo método dos elementos finitos ou pelo método dos elementos de contorno, o ESM apresenta a vantagem de simplicidade.

Com relação a trabalhos futuros, recomenda-se a aplicação de técnicas de otimização a fim de obter a configuração ótima das fontes a serem utilizadas no modelo de radiação por ESM. Um outro aspecto importante ainda pouco explorado consiste na aplicação do método na estimativa do campo acústico em cavidades, na presença do campo difuso, na qual ocorre o fenômeno de reverberação. Neste caso, as condições de contorno seriam impostas como pseudo- medições de pressão e/ou velocidade.

Referências Bibliográficas

- Arruda, J. R. F. A., Surface smoothing and partial spatial derivatives computation using a regressive discrete Fourier series, Mechanical Systems and Signal Processing, 1992, 6(1), pp 41-50.
- Arruda, J.R.F., Huallpa, B.N., Introdução à análise espectral, FEM-Unicamp, Campinas, 2001.
- Arruda, J.R.F., Mas, P., Sas, P., Minimization of statistical and deterministic errors in nearfield acoustic source identification, Proceedings of Inter-noise 1997 (3), pp1295-1300.
- Bai, M. R., Application of BEM (boundary element method) based acoustic holography to radiation analysis of sound sources with arbitrarily shaped geometries, JASA 92 (1), 1992, pp 533-549.
- Barbosa, W. A., Holografia Acústica utilizando modelos de fontes elementares, Tese Doutorado em Engenharia Mecânica, UFSC, Florianópolis, 2001.
- Bobrovnitskii, Y. I., e Tomilina, T. M., Calculation of radiation from finite elastic bodies by the method of auxiliary sources", Sov. Phys. Acoustic 36(4), 1980, 334-338.
- Borgiotti, G.V., Sarkissian, A., Williams, E. G., Schuetz, L., Conformal generalized bear-field acoustic holography for axisymmetric geometries, JASA 88(1), 1990, pp 199-209.

- Bouchet, L., Loyau, T., Hamzaoui, N., Boisson, C., Calculation of acoustic radiation using equivalent-sphere methods, JASA 107 (5), May 2000, pp 2387 –2397.
- Carrol, G. P., The effect of sensor placement errors on cylindrical near-field acoustic holography, JASA 105 (4), 1999, pp 2269-2276.
- Cheng, A. H. D., Golberg, M. A., Kansa, E. J., Zammito, G., Exponential convergence and *H*-c multiquadric collocation method for partial differential equations, manuscript submitted to Numerical Methods for Partial Differential Equations.
- Colinas, N. G., Caracterização vibroacústica usando holografia acústica de campo próximo, Tese Mestrado em Engenharia Mecânica, Unicamp, Campinas, 1999.
- Colison, N.E., Dosso, S.E., Regularized matched-mode processing for source localization, JASA 107 (6), June 2000, 3089-3100.
- Deblauwe, F., Localização de fontes de ruído pela técnica de holografia acústica Notas de leitura, Smarttech, 2002.
- Estorf, O,. Boundary elements in acoustics- advances & applications, ed. Wit press, 2000.
- Ewins, D. J., Modal Testing: Teory and practice, Jhon Wiley & Sons Inc., 1984.
- Golub, G. H., Van Loan, C. F., Matriz computations . Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1996.
- Hald, J.,Time domain acoustical holography and its applications, Bruel & Kjaer Sound & Vibration A/S, February 2001, pp 16-25.
- Hansen, P.C., Regularization tools a matlab package for analysis and solution of discrete illposed problems (version 3.0 for matlab 5.2), Technical University of Denmark, March 1998.

- Holste, F. An equivalent source method for calculation of the sound radiated from aircraft engines, Journal of Sound and Vibration, 1997, 203(4), pp 667-695.
- Jeans, R., Mathews, C., The wave superposition method as a robust technique for computing acoustic field, JASA 92 (2), August 1992, pp 1156-1166.
- Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., Sanders, J. V., Fundamentals of acoustics, Third edition, Califórnia.
- Koopmann, G.H, Song, L., Fahnline, J.B., A method for computing acoustic field based on the principle of wave superposition, JASA 86 (6), December 1989, pp 2433–2438.
- Koopmann, G.H, Song, L., Fahnline, J.B., Numerical errors associated with the method of superposition for computing acoustic fields, JASA 89(6), 1991, pp2625-2633.
- Koopmann, G.H., Fahnline, J.B., A numerical solution for the general radiation problem based on the combined methods of superposition and singular-value decomposition, JASA 90 (5), November 1991, pp 2808 –2819.
- Loyau, T., Pascal, J.C., Gaillard, P., Broadband acoustic holography reconstruction from acoustic intensity measurements .I: Principle of the method, JASA 84 (5), 1998, pp1744-1750.
- Magalhães, M. B. S., Intensidade supersônica e eficiência de radiação acústica em fontes de geometria arbitrária, Tese Doutorado em Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, outubro de 2002.
- Magalhães, M. B. S., Tenenbaum, R. A., Zindeluk, M., Interior acoustical holography using the equivalent sources method, Proceedings of COBEM 2001, Vibration and Acoustics, Vol. 10, pp 259-268.
- Magalhães, M. B. S., Tenenbaum, R. A., Zindeluk, M., Regularization strategies applied to

acoustical holography, Proceedings of 19° meeting of brazilian society of acoustics, SOBRAC 2000, pp 434-439.

- Maynard, J. D., Williams, E.G., Lee, Y., Nearfield acoustic holography: I. Theory of generalized holography and the development of NAH, JASA 78(4), 1985. pp 1395-1413.
- Morse, P.M., Ingard, K.U., Theoretical Acoustics, Princeton University Press, UAS, 1996.
- Nelson, P.A., Yoon, S.H., Estimation of acoustic source strength by inverse methods: part II, experimental investigation of methods for choosing regularization parameters, Journal of Sound and Vibration, 2000(a), 233(4), pp 669-705.
- Nelson, P.A., Yoon, S.H., Estimation of acoustic source strength by inverse methods: part I, conditioning of the inverse problem, Journal of Sound and Vibration, 2000(b), 233(4), pp 643-668.
- Ochmann, M., The source simulation technique for acoustic radiation problems, Acustica 81(6), , 1995, pp 512-527.
- Pavic, G., Hybrid vibration modelling of structures using analytical formulations.
- Photiadis, D.M., The relationship of singular decomposition to wave-vector filtering in sound radiation problems, JASA 88 (2), August 1990, pp 1152 –1159.
- Pierce, A. D., Acoustics an Introduction to its Physical Principles and Applications, McGraw-Hill, USA, 1981.
- Rochefoucald, O., Melon, M., Garcia, A., Time domain acoustic holography: influence of filtering on localization of non stationary source, International Congress of Acoustics Italy (2001).

Saijyou, K., Yoshikawa, S., Measurement of structural and acoustic intensities using near-field

acoustical holography, Jpn. J. Appl. Phys., Vol. 35, 1996, pp 3167-3174.

- Schuhmacher, A. P., Hansen, P. C., Sound source reconstruction using inverse BEM, Proceedings of international congress and exhibition on noise control engineering, 2001.
- Schuhmacher, A., Sound source reconstruction using inverse sound field calculations, Ph.D. dissertation, Department of Acoustic Technology, Technical University of Denmark, report no 77, 2000, ISSN 1397-0547.
- Stepanishen, P. R., Benjamin, K. C., Forward and backward projection of acoustic fields using FFT methods, JASA 71(4), 1982, pp 803-812.
- Stepanishen, P.R., The forward projection of harmonic pressure fields using the generalized internal source density method, JASA 102 (4), October 1997, pp 1955–1963.
- Tomilina, T., The equivalent sources approach to acoustic design of forced vibrating structures, Inter-Noise 93, Leuven (Belgium), 24-26, August 1993, pp. 1597-1600.
- Veronesi, W. A., Maynard, J. D., Digital holographic reconstruction of sources with arbitrarily shaped surfaces, JASA 85(2), 1989, pp 588-598.
- Veronesi, W. A., Maynard, J. D., Nearfield acoustic holography (NAH) II. Holographic reconstruction algorithms and computer implementation, JASA 81(5), 1987, pp1307-1322.
- Villot, M., Chaveriat, G., Roland, J., Phonoscopy: An acoustical holography technique for plane structures radiating in enclosed spaces, JASA 91(1), 1992, pp 187-195.
- Wang, Z., Wu, S. F., Helmholtz equation least squares method for reconstructing the acoustic pressure field, JASA 102 (4), 1997, pp 2020 –2032.

Williams, E.G., Inverse problems in sound radiation, International Congress of Acoustics - Italy,

2001.

- Williams, E. G. Maynard, J. D, and Skudrzyk, E., Sound source reconstruction using a microphone array, JASA 68, 1980, 340-344.
- Williams, E. G., Houston, B. H., Bucaro, A., Broadband nearfield acoustical holography for vibrating cylinders, JASA 86(2), pp 674-679.
- Williams, E. G., Houston, B.H., Herdic, P. C., Raveendra S.T. e Gardner B., Interior near-fiel acoustical hologhraphy in flight, 108(4), 2000, pp 1451-1463.
- Williams, E.G, Fourier acoustics: sound radiation and nearfield acoustical holography, Academic Press, London, UK, 1999.
- Williams, E.G, Methods to localize radiated noise sources on structures, JASA 2001.
- Wilton, D.T., Mathews, I.C., Jeans, R.A., A clarification of nonexistence problems with the superposition method, JASA 94(3), September 1993, pp 1676–1680.
- Zwicker, E., Fastl, H., Psychoacoustics facts and model, Springer-Verlag Berlim Heidelberg 1990.
- STSF Spatial Transformation of Sound Fields, Lecture Note Brüel&Kjaer, Localização de fontes de ruído pela técnica de holografia acústica, Notas de leitura SMARTtech.

Apêndice

Em um meio qualquer, o campo acústico tridimensional gerado por uma fonte vibrante segue a equação da onda, a qual é apresentada a seguir na forma homogênea (Williams, 1999):

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \qquad (A.1)$$

sendo a variação espacial da pressão dada pelo Laplaciano $\nabla^2 p$, a variação temporal da pressão pelo termo $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ e c a velocidade de propagação da onda no meio (c_{ar}=343 m/s @ 20° C).

A fim de se obter uma caracterização do campo acústico de forma mais completa, faz-se necessária a visualização do mesmo no domínio das freqüências. Assim, a transformada de Fourier direta e inversa do campo acústico são dadas respectivamente por:

$$\overline{p}(r,\omega) = \Im[p(r,t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(r,t)e^{j\omega t} dt , \qquad (A.2)$$

$$p(\mathbf{r},\mathbf{t}) = \mathfrak{I}^{-1}[\overline{p}(\mathbf{r},\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{p}(\mathbf{r},\omega) e^{-j\omega t} d\omega .$$
 (A.3)

Desta forma, obtém-se a equação de Helmholtz, a qual corresponde a equação da onda no domínio da freqüência:

$$\nabla^2 \overline{\mathbf{p}}(\omega, \mathbf{r}) + \mathbf{k}^2 \overline{\mathbf{p}}(\omega, \mathbf{r}) = 0, \qquad (A.4)$$

onde k é o número de onda: $k = \frac{\omega}{c}$.

Para uma análise no espaço, mantém-se a freqüência ω fixa, e portanto k torna-se constante, e o problema passa a ser encontrar a pressão complexa $\overline{p}(r)$ que satisfaça a equação:

$$\nabla^2 \overline{p}(\mathbf{r}) + \mathbf{k}^2 \overline{p}(\mathbf{r}) = 0. \tag{A.5}$$

Quando se deseja analisar uma região em há a presença de fontes(s) sonora(s), deve-se utilizar a equação de Helmholtz não homogênea, a qual é dada por:

$$\nabla^2 \overline{p}(\omega, \mathbf{r}) + k^2 \overline{p}(\omega, \mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}), \qquad (A.6)$$

onde $\rho(r)$ representa a distribuição da fonte geradora do campo acústico.

A função de Green é apresentada como solução da equação de Helmholtz não homogênea, para o caso de uma fonte pontual e unitária (delta de Dirac):

$$\nabla^2 G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) + \mathbf{k}^2 G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \tag{A.7}$$

A solução da Equação de Helmholtz não homogênea com condições de contorno homogênea do tipo Dirichlet ou tipo Neuman é dada por:

$$\overline{p}(\mathbf{r},\omega) = \iiint \rho(\mathbf{r}_0) \mathbf{G}(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0) d\mathbf{V}_0.$$
(A.8)

A solução da equação de Helmholtz homogênea, com condições de contorno não homogênea do tipo Dirichlet é dada pela primeira integral de Rayleigh:

$$\overline{p}(\mathbf{r},\omega) = -\frac{1}{4\pi} \iint \overline{p}(\mathbf{r}_{s}) \nabla G(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_{s}) d\mathbf{A}_{o}.$$
(A.9)

A solução da equação de Helmholtz homogênea, com condições de contorno não

homogênea do tipo Neuman é dada pela segunda integral de Rayleigh:

$$\overline{p}(\mathbf{r},\omega) = \frac{1}{4\pi} \iint G(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_{s}) \nabla \overline{p}(\mathbf{r}_{s}) d\mathbf{A}_{o}.$$
(A.10)

Portanto, obtém-se a solução geral da Equação de Helmholtz:

$$\overline{p}(\mathbf{r},\omega) = \iiint \rho(\mathbf{r}_{0})G(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_{0})d\mathbf{V}_{0} - \frac{1}{4\pi} \iint \overline{p}(\mathbf{r}_{s})\nabla G(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_{s})d\mathbf{A}_{0} + \frac{1}{4\pi} \iint G(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_{s})\nabla \overline{p}(\mathbf{r}_{s})d\mathbf{A}_{0}.$$
(A.11)