

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR ANDRÉ GARCIA CHIARELLO
E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 09/06/1998.

ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Detecção e Localização de Falhas em Sistemas Mecânicos Estacionários Através de Funções de Correlação

Autor : **André Garcia Chiarello**
Orientador : **Robson Pederiva**

96/98

C43d
35126/BC

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Detecção e Localização de Falhas em Sistemas Mecânicos Estacionários Através de Funções de Correlação

Autor : **André Garcia Chiarello**
Orientador : **Robson Pederiva**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Projeto Mecânico

Tese de Doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1998
S.P. - Brasil



UNIDADE	8C
N.º CHAMADA:	Unicamp
	C43d
V.	Ex.
TIPO DE BC	35.126
PROC.	39.5/98
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	17/09/98
N.º CPD	

CM-00116228-2

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C43d Chiarello, André Garcia
 Detecção e localização de falhas em sistemas mecânicos estacionários através de funções de correlação. / André Garcia Chiarello.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Robson Pederiva.
 Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Localização de falhas (Engenharia). 2. Máquinas - Monitoração. 3. Estimativa de parâmetro. 4. Modelos mecânicos. 5. Sistemas dinâmicos diferenciais. I. Pederiva, Robson. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

TESE DE DOUTORADO

Deteção e Localização de Falhas em Sistemas Mecânicos Estacionários Através de Funções de Correlação

Autor : **André Garcia Chiarello**
Orientador : **Robson Pederiva**



Prof. Dr. Robson Pederiva, Presidente
Instituição: **Universidade Estadual de Campinas**



Prof. Dr. Fernando Iguti
Instituição: **Universidade Estadual de Campinas**



Prof. Dr. Milton Dias Júnior
Instituição: **Universidade Estadual de Campinas**



Prof. Dr. Mário Francisco Mucheroni
Instituição : **Escola de Engenharia de São Carlos - USP**



Prof. Dr. Domingos Alves Rade
Instituição: **Universidade Federal de Uberlândia**

Campinas, 09 de Junho de 1998

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, que em momento algum me deixaram só.

Agradecimentos

Este trabalho contou com a preciosa ajuda de muitos amigos. Quero agradecer a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que ele chegasse ao fim. Em particular quero agradecer:

Ao professor Robson, pela orientação, confiança e incentivo depositados.

Aos professores Gilberto e Belisário pelas valiosas discussões sobre temas diversos da tese.

Ao professor Kurka, pelo esclarecimento de dúvidas na análise de sinais.

Ao professor Iguti, pelas importantes dicas na análise numérica.

À Sandra, pela revisão do texto.

Aos amigos Wagner, Marcos e Rivaldo, na ajuda com o editor de texto.

Aos meus irmãos Maurício, Adriano, Paula e Flávia, pelo apoio e carinho.

Aos amigos do G.E.E.U. que literalmente me levaram para cima.

À minha bicicleta, fonte de inspiração e prazer.

"I thought of that while riding my bike"

Albert Einstein on Theory of Relativity

Índice

Pré Texto	i, ... , xv
Capítulo 1	
1.1	Introdução 16
1.2	Objetivos 21
1.3	Divisão do Trabalho 21
Capítulo 2	
2.1	Equação básica de correlação 23
2.2	Matriz de medidas na forma especial 25
2.2.1	Localização de falhas através da estimação de parâmetros-Caso 1 27
2.2.2	Localização de falhas através das funções de resíduo-Caso 2 31
2.3	Matriz de medidas na forma genérica 35
2.3.1	Localização de falhas através das funções de resíduo 38
2.3.2	Localização de falhas através da estimação de parâmetros 42
2.4	Influência do ruído nos sinais medidos 45
Capítulo 3	
3.1	Funções de correlação utilizando sistema filtro 50
3.2	Localização de falhas através da estimação de parâmetros 54
3.2.1	Caso 1 54
3.2.2	Caso 2 60
3.2.3	Caso 3 61
3.3	Localização de falhas através das funções de resíduo 66

3.4	Influência do ruído nos sinais medidos	71
Capítulo 4		
4.1	Funções de correlação utilizando sistema filtro e matriz de medidas na forma genérica	76
4.2	Localização de falhas através da estimação de parâmetros	79
4.3	Localização de falhas através das funções de resíduo	84
4.3.1	Método 1	84
4.3.2	Método 2	86
4.4	Influência do ruído nos sinais medidos	93
Capítulo 5		
5.1	Exemplos de aplicação	96
5.2	Exemplo 1	96
5.3	Exemplo 2	102
5.4	Exemplo 3	110
5.5	Exemplo 4	116
5.6	Exemplo 5	124
5.7	Exemplo 6	131
Capítulo 6		
	Conclusões	138
	Bibliografia	142
	Apêndices	152

Resumo

Chiarello, André Garcia, *Detecção e Localização de Falhas em Sistemas Mecânicos Estacionários Através de Funções de Correlação*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 158 p. Tese de Doutorado.

Este trabalho aborda o problema de detecção e localização de falhas em sistemas mecânicos através de modelos matemáticos. Considera-se que o sistema mecânico seja representado por um modelo dinâmico na forma de variáveis de estado, com parâmetros constantes e entradas estacionárias. Definindo-se, apropriadamente, funções de correlação e explorando as propriedades inerentes aos sistemas estacionários, consegue-se obter funções analíticas envolvendo parâmetros físicos do sistema. Posteriormente, demonstra-se que estas funções analíticas podem ser utilizadas para monitorar parâmetros físicos do modelo, ou ainda, identificar parâmetros físicos relacionados a uma falha no sistema. Duas abordagens diferentes para o problema de localização de falhas são desenvolvidas: uma utiliza a estimação de parâmetros e outra utiliza funções de resíduo. Visando uma aplicação em sistemas reais, foram simulados sistemas mecânicos em diversas condições de operação. Os resultados numéricos comprovaram que a metodologia proposta pode ser utilizada no monitoramento de sistemas mecânicos.

Palavras Chave

Detecção de falhas, diagnose de defeitos, sistemas dinâmicos, redundância analítica.

Abstract

Chiarello, André Garcia, *Fault Detection and Location in Stationary Mechanical Systems Through Correlation Functions*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 158 p. Tese de Doutorado.

This work deals with the problem of fault detection and location in mechanical systems through mathematical models. It is considered that the mechanical system is represented in a state space form, with constant parameters and stationary inputs. Some correlation functions are appropriately defined involving physical parameters of the stationary system. It is demonstrated that these correlation functions can be transformed to appropriate analytical form (redundancy equations) for fault detection and isolation purposes. Two different approaches are considered: one based on physical parameters estimation and the other based on residuals generation. Three different mechanical systems were numerically simulated with conditions (or restrictions) usually found in practical situations. The results showed that the proposed approach is a promising methodology for monitoring stationary mechanical systems.

Key Words

Fault detection, diagnosis, model based, parity space, residual generation.

Lista de Figuras

2.1	Fluxograma geral do método com ruído aditivo nas medições	48
3.1	Fluxograma geral do método com ruído nas medições	73
5.1	Erro de estimação do parâmetro k na condição 1	100
5.2	Erro de estimação do parâmetro c na condição 1	100
5.3	Estimação do parâmetro k na condição 2	100
5.4	Estimação do parâmetro c na condição 2	100
5.5	Erro de estimação do parâmetro k na condição 2	100
5.6	Erro de estimação do parâmetro c na condição 2	100
5.7	Erro de estimação do parâmetro k na condição 3	101
5.8	Erro de estimação do parâmetro c na condição 3	101
5.9	Erro de estimação do parâmetro k na condição 4	101
5.10	Erro de estimação do parâmetro c na condição 4	101
5.11	Modelo do rotor do Exemplo 2	103
5.12	Resíduos estimados na condição 1	108
5.13	Resíduos estimados na condição 2	108
5.14	Resíduos estimados na condição 3	108
5.15	Resíduos estimados na condição 4	108
5.16	Resíduos estimados na condição 5	108
5.17	Resíduos estimados na condição 6	108
5.18	Resíduos estimados na condição 7	109
5.19	Resíduos estimados na condição 8	109
5.20	Modelo do rotor do Exemplo 3	110
5.21	Diagrama de Bode do sistema	113
5.22	Diagrama de Bode do filtro	113

5.23	$\mu_{\Delta}(\tau_i)$ e $\sigma_{\Delta}(\tau_i)$ para condição 1	115
5.24	$\mu_{\Delta}(\tau_i)$ e $\sigma_{\Delta}(\tau_i)$ para condição 2	115
5.25	$\mu_{\Delta}(\tau_i)$ e $\sigma_{\Delta}(\tau_i)$ para condição 3	115
5.26	$\mu_{\Delta}(\tau_i)$ e $\sigma_{\Delta}(\tau_i)$ para condição 4	115
5.27	Variação dos resíduos na condição 1	120
5.28	Variação dos resíduos na condição 2	120
5.29	Variação dos resíduos na condição 3	120
5.30	Variação dos resíduos na condição 4	120
5.31	Variação dos resíduos na condição 5	121
5.32	Variação dos resíduos na condição 6	121
5.33	Variação dos resíduos na condição 7	121
5.34	Variação dos resíduos na condição 8	121
5.35	Variação dos resíduos na condição 9	123
5.36	Variação dos resíduos na condição 10	123
5.37	Variação dos resíduos na condição 11	123
5.38	Variação dos resíduos na condição 12	123
5.39	Variação dos resíduos para falha na entrada com ruído	123
5.40	Variação dos resíduos para falha na entrada sem ruído	123
5.41	Diagrama de Bode do sistema filtro	127
5.42	Variação dos resíduos na condição 1	127
5.43	Variação dos resíduos na condição 2	128
5.44	Variação dos resíduos na condição 3	128
5.45	Variação dos resíduos na condição 4	129
5.46	Variação dos resíduos na condição 5	129
5.47	Variação dos resíduos na condição 6	129
5.48	Variação dos resíduos na condição 7	129
5.49	Variação dos resíduos na condição 8	129
5.50	Variação dos resíduos na condição 9	129
5.51	Variação dos resíduos na condição 10	130

5.52	Variação dos resíduos na condição 11	130
5.53	Variação dos resíduos na condição 12	130
5.54	Variação dos resíduos na condição 13	130
5.55	Variação dos resíduos na condição 1	135
5.56	Variação dos resíduos na condição 2	135
5.57	Variação dos resíduos na condição 3	135
5.58	Variação dos resíduos na condição 4	135
5.59	Variação dos resíduos na condição 5	136
5.60	Variação dos resíduos na condição 6	136
5.61	Variação dos resíduos na condição 7	136
5.62	Variação dos resíduos na condição 8	136

Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros físicos do modelo 1	98
5.2	Condições de simulação do exemplo 1	98
5.3	Parâmetros físicos do modelo 2	104
5.4	Condições de simulação do exemplo 2	107
5.5	Parâmetros físicos do modelo 3	112
5.6	Condições de simulação do exemplo 3	114
5.7	Condições de simulação do exemplo 4	119
5.8	Condições de simulação do exemplo 4 com ruído	122
5.9	Condições de simulação do exemplo 5	128
5.10	Condições de simulação do exemplo 6	134

Nomenclatura

$[\dots]$	Matrizes, letras maiúsculas em negrito, ex.: M , C , U .
$\{\dots\}$	Vetores, letras minúsculas em negrito, ex.: r , s , v .
Parâmetros do Sistema	Letras minúsculas, ex.: m, c, k.
$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$	Partição matricial, partição vetorial.
$./$	Divisão matricial elemento a elemento.
I	Matriz identidade.
O	Matriz nula.
$\text{diag}[\dots]$	Matriz diagonal.
$\mathbf{R}_{xx}(\tau)$	Matriz de correlação para a defasagem de tempo τ .
$\mathbf{r}_{yw}(\tau)$	Vetor de correlação para a defasagem de tempo τ .
Sobrescrito $[\dots]^T, \{\dots\}^T$	Matriz transposta, vetor transposto.
Sobrescritos $[\dots]^{-1}, [\dots]^+$	Inversa da matriz, inversa generalizada da matriz.
Subscrito $[\dots]_{(n,p)}$	Dimensão da matriz (ou vetor).
$\ \dots\ $	Norma euclidiana da matriz ou vetor.
$ \dots $	Valor absoluto.
$\mathfrak{F}(x), \mathfrak{F}^{-1}(x)$	Transformada de Fourier, Transformada Inversa.
\gg	Indicação de comando <i>Matlab</i> .
$\text{Real}(\dots)$	Parte real do número complexo.

Capítulo 1

1.1 - Introdução

A necessidade de se obter sistemas automáticos mais seguros e confiáveis exige métodos de detecção de falhas cada vez mais eficientes. Entende-se por falha (ou defeito) no sistema qualquer alteração nas características do mesmo que produza diminuição de sua eficiência. Quando se detecta uma falha no sistema, normalmente um sinal de alarme é acionado automaticamente, indicando que a partir daquele instante, o sistema apresenta falha. A partir desta indicação, busca-se diagnosticar o problema, ou seja, localizar o componente do sistema que apresenta falha. A eficiência dos métodos de detecção de falhas é, em geral, tanto melhor quanto maior é o conhecimento sobre a dinâmica do sistema em estudo. Os modelos matemáticos que descrevem o comportamento dos sistemas mecânicos têm sido aperfeiçoados constantemente e constituem, por si só, uma grande linha de pesquisa. À medida que os modelos se ajustam cada vez mais aos sistemas reais, melhor é a segurança do projeto e a confiabilidade da operação.

Convencionalmente, as técnicas de monitoramento de sistemas fazem uso de um arranjo redundante de sensores. Para cada variável que pode ser medida, utilizam-se dois ou mais sensores que fornecerão informação redundante sobre o estado do sistema. Através da leitura dos sensores e utilizando-se uma lógica de decisão simples, pode-se concluir se existe uma falha no sistema (quando todos os sensores se modificam) ou uma falha na instrumentação (quando apenas um sensor se modifica).

O uso redundante de sensores (redundância de hardware), apesar de muito empregado em sistemas de alto risco (usinas atômicas, sistemas aeronáuticos, geradores hidroelétricos),

carrega ainda algumas desvantagens. A instrumentação adicional encarece sobremaneira o sistema e nem sempre se consegue confiabilidade suficiente.

Uma maneira alternativa para se diminuir o custo da instrumentação é fazer uso do modelo matemático do sistema em operação. A partir do modelo do sistema e das variáveis medidas pode-se construir relações matemáticas redundantes (redundância analítica) e, a partir destas relações, montar-se uma lógica de decisão que será utilizada para detectar e localizar uma possível falha no sistema. A utilização do modelo matemático representativo do sistema contribui ainda para um diagnóstico mais preciso do defeito, uma vez que, além da detecção do instante de ocorrência da falha, pode-se localizar fisicamente o local provável da falha no sistema.

A detecção e localização de falhas em sistemas dinâmicos através de modelos matemáticos tem recebido considerável atenção nas últimas duas décadas. Na literatura internacional esta linha de pesquisa é conhecida pela nomenclatura MBFD (*model based fault detection*) ou detecção de falhas baseada em modelos. Para uma introdução ao estado da arte indicam-se os trabalhos (*surveys*) de Willsky(1976), Basseville(1988), Patton(1991, 1996), Isermann(1984, 1993), Gertler(1991), Frank(1990, 1991, 1992), e o livro de Patton et al(1989). Existe na literatura uma grande variedade de métodos de MBFD. Os trabalhos citados anteriormente procuram classificar em grupos as diversas linhas de pesquisa que foram e ainda estão sendo estudadas. Algumas das linhas de pesquisa mais importante em MBFD são:

- MBFD através de observadores de estado (*state observers*)
- MBFD através de geradores de resíduo (*residual generation*)
- MBFD através de filtros (*Kalman filters*)
- MBFD através de equações de paridade (*parity space*)
- MBFD através de estimação de parâmetros (*parameter estimation*)

A metodologia desenvolvida neste trabalho para detecção e localização de falhas em sistemas dinâmicos se enquadra dentro das linhas de pesquisa conhecidas como *residual generation* e *parameter estimation*.

A teoria de observadores de estado introduzida inicialmente por Luemberger(1966), (1971) e, posteriormente, desenvolvida por vários pesquisadores, tais como, Hostetter(1973), Meditch(1974), Wang(1975), Johnson(1975), Bhattacharyya(1978) e Kudva(1980), foi amplamente utilizada como ferramenta para detecção de falhas em sistemas dinâmicos. A idéia principal nesta abordagem é utilizar um modelo dinâmico (dito observador) do sistema real que gere sinais que possam ser comparados com os sinais medidos no sistema real. Desta comparação resulta um sinal de diferença, ou resíduo, que deve ser idealmente zero, caso não haja falha no sistema. Quando o sinal do resíduo difere de zero, existe a princípio, alguma alteração não prevista no sistema real. Esta alteração pode significar uma falha no próprio sistema ou na instrumentação do mesmo. Diferentes considerações sobre o modelo do observador e a forma de gerar os sinais de resíduo podem ser encontradas em Frank(1980), Phatak(1988), Park(1988), Tsui(1989), Massoumnia(1989), Guan(1991), Sofker(1991), Hou(1992), (1994), Huh(1994) e Park(1994a).

A aplicação de observadores de estado como técnica de MBFD encontra algumas limitações nos casos reais. Sabe-se que os modelos matemáticos não são exatamente perfeitos, uma vez que contêm hipóteses simplificadoras. Isto leva a diferenças de comportamento dinâmico entre o modelo e o sistema real e, desta forma, um sinal de resíduo não nulo deve existir mesmo na ausência de falha. Além disso, nas medições reais existe a presença indesejável de ruído nos sinais fornecidos pelos sensores como, por exemplo, a medição de vibração em um rotor através de um acelerômetro.

Estas considerações de aspecto prático, levaram à necessidade de se construir geradores de resíduo através de observadores de estado que fossem menos sensíveis a ruídos de sinal e incertezas de modelagem ou, em outras palavras, geradores de resíduo robustos (*robust residual generation*). Este tema despertou e ainda desperta grande interesse dos pesquisadores, tais como Watanabe(1982), Chen(1991), Marques(1992), Magni(1992), Saif(1993), Ge(1988, 1989), Patton(1992, 1993), Tsui(1994), Frank(1994) e Kinnaert(1995).

A detecção de falhas em sistemas dinâmicos através de geradores de resíduo pode também ser feita através de relações analíticas envolvendo sinais de entrada e saída do sistema (funções de transferência). Gertler(1990, 1995a) e Ragot(1994) utilizaram um operador

diferencial para construir polinômios matriciais envolvendo parâmetros do sistema. Estes polinômios são então transformados em funções de resíduo que estão relacionadas a determinado tipo de falha. Numa abordagem semelhante a esta, mas trabalhando com o modelo de estado do sistema, Pattipati(1983), Chow(1984), Lou(1986), Park(1994b), Magni(1994) e Medvedev(1995), (1996), usaram um conjunto de equações redundantes, ou equações de paridade, para construir um gerador de resíduos independente das variáveis de estado não acessíveis a medição. Esta característica do gerador de resíduos é particularmente interessante em sistemas mecânicos de grande porte, com grande número de graus de liberdade, onde sempre existem locais inacessíveis à medição.

A abordagem proposta neste trabalho utiliza também funções de resíduo para o propósito de detecção e localização de falhas no sistema mecânico. Entretanto, aqui, estas funções são construídas a partir da estimação de funções de correlação apropriadamente definidas. Até o momento desta pesquisa bibliográfica, a utilização de funções de correlação na obtenção de resíduos para monitoramento do sistema é uma abordagem original.

Se o sistema em estudo não pode ser apropriadamente modelado na forma determinística, ou seja, se o modelo for estocástico, MBFD pode ser feito através de filtros Kalmann. Neste caso, o sinal de resíduo para o sistema sem falha deve ser idealmente um processo do tipo ruído branco, com média zero, como mostra Naeini(1988), Tanaka(1990), (1993), Wagner(1992), Korbicz(1993) e Nikoukhah(1994).

As rotinas computacionais usadas para monitoramento de sistemas em situações mais realistas utilizam, via de regra, grande volume de dados. Os sinais de vibração de uma máquina rotativa se obtidos, por exemplo, a partir de um acelerômetro com tempo de amostragem de 0,01 segundos, resulta após 10 minutos de medição, num total de 60000 valores medidos. Este conjunto de dados deverá então ser processado de acordo com alguma metodologia com o objetivo de diagnosticar a falha do sistema. Desta forma, quanto mais rápido for o diagnóstico da falha, mais eficiente é o monitoramento do sistema. Além desta característica desejável, os métodos de MBFD baseados na geração de resíduos devem não só identificar rapidamente o instante de ocorrência da falha, como também indicar a localização da falha no sistema. Os métodos de MBFD através de observadores, filtros e equações de paridade, na grande maioria das vezes se limitam a indicar se a falha é no sistema ou se a falha é da instrumentação.

Neste sentido, houve interesse em desenvolver métodos de MBFD que fornecessem um diagnóstico mais preciso sobre a causa do problema no sistema. Uma consequência direta desta busca foi utilizar algoritmos de estimação de parâmetros em tempo real, para monitorar o sistema de uma forma mais completa. Os parâmetros estimados podem estar diretamente relacionados aos parâmetros físicos do sistema (parâmetros construtivos), como por exemplo, rigidez, amortecimento e massa, ou indiretamente relacionados (parâmetros característicos), como por exemplo, frequências naturais e modos de vibrar. É bastante ampla a literatura destinada especificamente à estimação de parâmetros em sistema dinâmicos, como mostram Isermann(1974) e Yong(1981), porém a utilização destas técnicas em MBFD é relativamente recente.

O modelo auto-regressivo de médias móveis (ARMA) foi utilizado por Basseville(1987, 1993), Chen(1992) e Merrington(1994) no monitoramento de sistemas. Neste caso, o modelo ARMA é ajustado ao sistema sem falha e seus parâmetros (parâmetros característicos) são continuamente estimados. Através da estrutura do modelo matemático tenta-se correlacionar as variações dos parâmetros estimados com diferentes tipos de falhas. Como esta relação nem sempre é direta, é necessário construir um relação heurística (causa e efeito) para diversos tipos de falha. Com este conjunto de relações é possível identificar qual ou quais parâmetros do modelo ARMA são mais sensíveis a variações de determinados parâmetros físicos.

À medida que o conhecimento sobre o sistema em estudo aumenta, aumenta também a capacidade de detectar e localizar precisamente um problema qualquer. Se o modelo matemático estiver bem ajustado ao sistema real, pode-se fazer a estimação de parâmetros característicos que estão diretamente relacionados aos parâmetros físicos do sistema, ou mesmo estimar diretamente os parâmetros físicos, como feito por Isermann(1991, 1992, 1994), Wang(1993), Deibert(1992) e Li(1993). A estimação direta dos parâmetros físicos fornece, sem dúvida, um diagnóstico preciso sobre qualquer alteração que possa ocorrer no sistema, porém, é necessário amplo conhecimento do processo e das variáveis medidas, o que não acontece na grande maioria das aplicações práticas.

A estimação de parâmetros como técnica de MBFD permite, de modo geral, um nível de análise bastante profundo sobre a falha no sistema. Entretanto, quando se considera a presença

de ruído no sinal medido, ocorre grande variação nos parâmetros estimados, o que dificulta o diagnóstico do problema. Uma forma alternativa de MBFD para sistemas que contém ruídos aleatórios na forma estacionária é utilizar as funções de correlação de sinal. Sabe-se que, para sistemas estacionários, as funções de correlação tendem para valores estáveis e constantes. Esta propriedade pode ser utilizada para estimação de parâmetros e conseqüente diagnóstico de falhas. A estimação de parâmetros em sistemas dinâmicos estacionários utilizando funções de correlação, foi estudada por vários pesquisadores tais como, Tse(1975), El-Sherief(1980), Kubruslky(1983), Pederiva(1993) e Cooper(1994). Porém, estes autores não abordaram o problema de detecção e localização de falhas no sistema a partir da estimação dos parâmetros.

Apesar da grande variedade de métodos em MBFD, verificou-se pela pesquisa bibliográfica que muito ainda precisa ser feito no sentido de aproximar os métodos teóricos (testados em simulações numéricas) dos métodos mais práticos (usados em equipamentos reais). Esta verificação trouxe incentivo para desenvolver um metodologia em MBFD que pudesse ser aplicada no monitoramento de sistemas mecânicos reais. Antes de qualquer aplicação experimental é necessário, ou ao menos aconselhável, uma simulação numérica para validar a metodologia proposta. As simulações numéricas devem ser feitas observando-se as condições encontradas na prática. A simulação de um sistema mecânico real, por sua vez, deve incluir restrições quanto ao número de medidas que podem ser feitas e ruídos de medição. É dentro deste contexto que este trabalho foi desenvolvido.

1.2 - Objetivos

Deseja-se investigar o problema de detecção e localização de falhas em sistemas mecânicos estacionários. A partir do modelo matemático do sistema mecânico, pretende-se construir relações analíticas que possam ser utilizadas para monitoramento do sistema. Mais especificamente serão desenvolvidas duas metodologias para detecção e localização de falhas: uma baseada na geração de resíduos e outra baseada na estimação de parâmetros físicos. Pretende-se investigar as características, vantagens e desvantagens destas metodologias para diferentes condições de simulação, visando uma aplicação real. O resultado destas simulações trarão informações importantes para uma posterior aplicação experimental.

1.3 - Divisão do Trabalho

Este trabalho está assim dividido: No capítulo 1 descreve-se o atual estado da arte, a localização do trabalho dentro deste contexto e os objetivos principais. No Capítulo 2 descreve-se a metodologia de MBFD para sistema mecânicos estacionários utilizando a equação básica de correlação. No Capítulo 3 será introduzido um sistema auxiliar (sistema filtro) com o objetivo de melhorar o monitoramento do sistema. No Capítulo 4 o sistema filtro é utilizado em condições mais restritivas de medição visando uma condição prática. No Capítulo 5 são apresentados exemplos numéricos das metodologias desenvolvidas nos capítulos anteriores. No Capítulo 6 foram colocadas as conclusões e algumas sugestões para futuros trabalhos.

Capítulo 2

2.1 - Equação básica de correlação

Considera-se um sistema mecânico com n graus de liberdade que possa ser representado pela seguinte equação diferencial matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{S}\mathbf{d}(t) = \mathbf{U}\mathbf{u}(t), \quad (2.1)$$

onde o vetor $\mathbf{d}_{(n,1)}(t)$ representa os deslocamentos do sistema, sendo suas derivadas em relação ao tempo, $\dot{\mathbf{d}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{d}}(t)$, contínuas. A matriz $\mathbf{M}_{(n,n)}$ será chamada de matriz de massa do sistema e está relacionada com as forças proporcionais à aceleração. A matriz $\mathbf{D}_{(n,n)}$ será chamada de matriz de amortecimento do sistema e está relacionada as forças proporcionais a velocidade. A matriz $\mathbf{S}_{(n,n)}$ será chamada de matriz de rigidez do sistema e está relacionada as forças proporcionais ao deslocamento. A matriz $\mathbf{U}_{(n,p)}$ representa uma matriz de entradas. Esta mesma equação pode ser representada pelo modelo na forma de variáveis de estado,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned}, \quad (2.2)$$

onde as matrizes e os vetores tem as seguintes definições:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}(t) \\ \dot{\mathbf{d}}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{U} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

O vetor $\mathbf{x}_{(2n,1)}(t)$ é dito vetor de estados e contém os deslocamentos e velocidades do sistema. O vetor $\mathbf{u}_{(p,1)}(t)$ é o vetor de entradas, que para sistemas mecânicos na forma (2.1) representa as forças de excitação. A matriz $\mathbf{A}_{(2n,2n)}$ é denominada matriz de estado do sistema e deve ser dinamicamente estável, ou seja, contém somente autovalores com parte real negativa. A matriz $\mathbf{B}_{(2n,p)}$ é a matriz de entradas e faz a distribuição das forças de excitação do sistema. As matrizes \mathbf{I} e \mathbf{O} representam respectivamente a matriz identidade e a matriz nula com dimensões apropriadas. A matriz $\mathbf{C}_{(m,2n)}$ é a matriz de medidas do sistema ou seja, através dela monta-se o vetor de medidas $\mathbf{y}_{(m,1)}(t)$ que representa as variáveis de estado que podem ser diretamente medidas. Assume-se, neste trabalho, que a matriz de medidas não contenha parâmetros físicos do modelo matemático, ou seja, \mathbf{C} é uma matriz com parâmetros adimensionais. A partir da equação de estado do sistema, definem-se as funções de correlação,

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^T(t + \tau) dt, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{R}_{xu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} \mathbf{x}(t) \mathbf{u}^T(t + \tau) dt, \quad \mathbf{R}_{ux}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} \mathbf{u}(t) \mathbf{x}^T(t + \tau) dt$$

onde τ é um intervalo fixo de tempo. Considera-se que o sistema na forma (2.2) seja invariante com entradas estacionárias. Nesta condição as funções de correlação assumem valores constantes no tempo e dependem somente da defasagem temporal τ (Yaglom, 1987, 1962). Aplicando-se as regras de derivação em $\mathbf{R}_{xx}(\tau)$, obtém-se,

$$\dot{\mathbf{R}}_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} \dot{\mathbf{x}}(t) \mathbf{x}^T(t + \tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} \mathbf{x}(t) \dot{\mathbf{x}}^T(t + \tau) dt = \mathbf{O} \quad (2.5)$$

e substituindo (2.2) em (2.5) segue,

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_{xx}(\tau) + \mathbf{R}_{xx}(\tau) \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{R}_{ux}(\tau) + \mathbf{R}_{xu}(\tau) \mathbf{B}^T = \mathbf{O}. \quad (2.6)$$

Esta equação matricial é básica para o desenvolvimento dos métodos de localização de falhas descritos neste trabalho. A expressão (2.6) foi apresentada de acordo com a formulação desenvolvida em Melsa (1973), Sage(1971) e Meditch(1969), porém esta igualdade matricial também pode ser obtida a partir da condição de estabilidade do sistema utilizando-se a definição de estabilidade de Ljapunov, como mostra Dias Jr.(1987). Sendo o sistema estável com matrizes de correlação constantes no tempo, a igualdade matricial (2.6) vale para qualquer valor de defasagem temporal. Nesta equação as matrizes de correlação não podem ser estimadas diretamente, uma vez que $\mathbf{x}(t)$ não é totalmente medido. A partir da equação básica, busca-se uma formulação onde as matrizes de correlação possam ser estimadas a partir dos vetores $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$, os quais podem ser medidos diretamente pela instrumentação. Esta análise será feita a seguir.

2.2 - Matriz de medidas na forma especial

Considera-se agora que a matriz de medidas tenha a seguinte forma especial,

$$\mathbf{C}_{(m, 2n)} = \left[\mathbf{I}_{(m, m)} \quad \vdots \quad \mathbf{O}_{(m, 2n-m)} \right], \quad (2.7)$$

onde, $m = n$. Nesta condição, o vetor de medidas fica na forma,

$$\mathbf{y}(t) = \left[\mathbf{I} \quad \vdots \quad \mathbf{O} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}(t) \\ \dot{\mathbf{d}}(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{d}(t), \quad (2.8)$$

ou seja, o vetor de medidas corresponde aos deslocamentos do sistema. Nestas condições, as matrizes de correlação tem a seguinte estrutura interna,

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) & \mathbf{R}_{yd}(\tau) \\ \mathbf{R}_{dy}(\tau) & \mathbf{R}_{dd}(\tau) \end{bmatrix}_{(2n, 2n)}, \quad \mathbf{R}_{xu}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yu}(\tau) \\ \mathbf{R}_{du}(\tau) \end{bmatrix}_{(2n, p)}, \quad \mathbf{R}_{ux}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uy}(\tau) & \mathbf{R}_{ud}(\tau) \end{bmatrix}_{(p, 2n)} \quad (2.9)$$

e a equação (2.6) pode ser rescrita na forma,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) & \mathbf{R}_{yd}(\tau) \\ \mathbf{R}_{dy}(\tau) & \mathbf{R}_{dd}(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) & \mathbf{R}_{yd}(\tau) \\ \mathbf{R}_{dy}(\tau) & \mathbf{R}_{dd}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}^T + \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uy}(\tau) & \mathbf{R}_{ud}(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yu}(\tau) \\ \mathbf{R}_{du}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{U} \end{bmatrix}^T = \dot{\mathbf{R}}_{xx}(\tau) = \mathbf{O} \quad .$$

Efetuando-se as multiplicações das submatrizes, obtém-se 4 equações matriciais:

$$\mathbf{R}_{dy}(\tau) + \mathbf{R}_{yd}(\tau) = \mathbf{O}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{R}_{dd}(\tau) + \mathbf{R}_{yy}(\tau)[-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}]^T + \mathbf{R}_{yd}(\tau)[-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]^T + \mathbf{R}_{yu}(\tau)[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}]^T = \mathbf{O}, \quad (2.12)$$

$$[-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}]\mathbf{R}_{yy}(\tau) + [-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]\mathbf{R}_{dy}(\tau) + \mathbf{R}_{dd}(\tau) + [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}]\mathbf{R}_{uy}(\tau) = \mathbf{O}, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} [-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}]\mathbf{R}_{yd}(\tau) + [-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]\mathbf{R}_{dd}(\tau) + \mathbf{R}_{dy}(\tau)[-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}]^T + \mathbf{R}_{dd}(\tau)[-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]^T + \\ [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}]\mathbf{R}_{ud}(\tau) + \mathbf{R}_{du}(\tau)[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}]^T = \mathbf{O} \quad . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Analisando-se estas equações, verifica-se que as três primeiras apresentam, no total, 3 matrizes de correlação desconhecidas, a saber, $\mathbf{R}_{dy}(\tau)$, $\mathbf{R}_{yd}(\tau)$, $\mathbf{R}_{dd}(\tau)$. Manipulando estas equações, obtém-se a seguinte igualdade matricial,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yu}(\tau)[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}]^T - \mathbf{R}_{yy}(\tau)[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}]^T + [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}]\mathbf{R}_{yy}(\tau) - [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}]\mathbf{R}_{uy}(\tau) = \\ \mathbf{R}_{yd}(\tau)[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]^T - [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]\mathbf{R}_{yd}(\tau) \quad . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Esta expressão apresenta ainda a matriz de correlação não conhecida, $\mathbf{R}_{yd}(\tau)$. No entanto, pode-se trabalhar esta expressão para se obter uma formulação adequada para o propósito de monitoramento de parâmetros do sistema, ou melhor, para localização de falhas

no sistema. Sendo \mathbf{M} e \mathbf{D} matrizes conhecidas do sistema, calcula-se o valor da variável η assim definida:

$$\eta = \text{Posto}[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]. \quad (2.16)$$

Sabendo-se que $\eta \leq n$, dois casos podem ocorrer:

Caso 1: $\eta < n$

Caso 2: $\eta = n$

Estes casos serão analisados separadamente a seguir.

2.2.1 - Localização de falhas através da estimação de parâmetros

Caso 1: $\eta < n$

Um procedimento bastante usual nos métodos de detecção de falhas baseados em observadores de estado é a utilização do conceito de ortogonalidade usado em álgebra linear. A condição de ortogonalidade imposta sobre algumas matrizes do sistema e do observador, permite que as funções de erro (ou resíduos) gerados tenham propriedades adequadas para o monitoramento de falhas (Frank, 1994, Hou, 1994, Ge, 1989). Esta mesma idéia será utilizada aqui, porém com objetivo diferente. Pretende-se retirar da equação (2.15) as funções de correlação que não podem ser diretamente estimadas através das medições.

Considerando-se que $\eta < n$, pode-se determinar um conjunto de vetores linha \mathbf{s}_i^T , $i = 1, \dots, j$, com dimensão $(1, n)$, linearmente independentes, numericamente constantes e não nulos, que satisfazem a condição,

$$\mathbf{s}_i^T[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}] = \mathbf{o} \quad (2.17)$$

O número j de vetores \mathbf{s}_i^T , $i = 1, \dots, j$, é dado por,

$$j = n - \eta \quad (2.18)$$

Prova: Ver Apêndice A

Aplicando-se os vetores \mathbf{s}_i^T à esquerda e \mathbf{s}_i à direita da equação (2.15), obtém-se um sistema de (j) equações escalares, na forma,

$$\mathbf{s}_i^T \left[\mathbf{R}_{yu}(\tau) [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{U}]^T - \mathbf{R}_{yy}(\tau) [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}]^T + [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}] \mathbf{R}_{yy}(\tau) - [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{U}] \mathbf{R}_{uy}(\tau) \right] \mathbf{s}_i = 0 \quad (2.19)$$

ou,

$$\mathbf{s}_i^T \left[\mathbf{R}_{yy}(\tau) \quad ; \quad -\mathbf{R}_{yu}(\tau) \right] \begin{bmatrix} [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}]^T \\ [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{U}]^T \end{bmatrix} \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i^T \left[\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \quad ; \quad \mathbf{M}^{-1} \mathbf{U} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) \\ -\mathbf{R}_{uy}(\tau) \end{bmatrix} \mathbf{s}_i = 0 \quad (2.20)$$

Nesta expressão, todas as matrizes de correlação podem ser estimadas. Definem-se agora, os vetores,

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{p}_{1i}^T \quad ; \quad \mathbf{p}_{2i}^T \right] &= \mathbf{s}_i^T \left[\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \quad ; \quad \mathbf{M}^{-1} \mathbf{U} \right], \\ \left[\mathbf{r}_{e1i}^T(\tau) \quad ; \quad \mathbf{r}_{e2i}^T(\tau) \right] &= \mathbf{s}_i^T \left[\mathbf{R}_{yy}(\tau) \quad ; \quad -\mathbf{R}_{yu}(\tau) \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{d1i}(\tau) \\ \mathbf{r}_{d2i}(\tau) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) \\ -\mathbf{R}_{uy}(\tau) \end{bmatrix} \mathbf{s}_i, \quad i = 1, \dots, j$$

e substituindo-se (2.21) em (2.20), pode-se escrever,

$$\mathbf{p}_{1i}^T \mathbf{r}_{d1i}(\tau) - \mathbf{r}_{e1i}^T(\tau) \mathbf{p}_{1i} = \mathbf{r}_{e2i}^T(\tau) \mathbf{p}_{2i} - \mathbf{p}_{2i}^T \mathbf{r}_{d2i}(\tau). \quad (2.22)$$

Os vetores \mathbf{p}_{1i} e \mathbf{p}_{1i}^T contêm os parâmetros físicos relacionados à matriz de rigidez e os vetores \mathbf{p}_{2i} e \mathbf{p}_{2i}^T contêm os parâmetros físicos relacionados à matriz de entradas. Os termos em (2.22) podem ser reagrupados na forma,

$$\mathbf{p}_{1i}^T \{ \mathbf{r}_{d1i}(\tau) - \mathbf{r}_{e1i}(\tau) \} = \mathbf{p}_{2i}^T \{ \mathbf{r}_{e2i}(\tau) - \mathbf{r}_{d2i}(\tau) \}. \quad (2.23)$$

Uma vez que as matrizes de correlação do sistema são funções apenas da defasagem temporal τ (Bendat, 1980), pode-se expandir a expressão (2.23) para diferentes defasagens de tempo, $\tau_i, i = 1, \dots, k$. Desta forma, pode-se montar um sistema com k equações, linearmente independentes, na forma (2.23). Este sistema de equações pode ser representado pela seguinte expressão matricial,

$$\mathbf{p}_{1i}^T \mathbf{R}_{1i}(\tau) = \mathbf{p}_{2i}^T \mathbf{R}_{2i}(\tau) \quad , \quad i = 1, \dots, j \quad , \quad (2.24)$$

onde as matrizes ,

$$\mathbf{R}_{1i}(\tau) = \left[\mathbf{r}_{d1i}(\tau_1) - \mathbf{r}_{e1i}(\tau_1), \dots, \mathbf{r}_{d1i}(\tau_k) - \mathbf{r}_{e1i}(\tau_k) \right]_{(n, k)} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{R}_{2i}(\tau) = \left[\mathbf{r}_{e2i}(\tau_1) - \mathbf{r}_{d2i}(\tau_1), \dots, \mathbf{r}_{e2i}(\tau_k) - \mathbf{r}_{d2i}(\tau_k) \right]_{(n, k)}$$

podem ser estimadas diretamente a partir de $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$. A expressão (2.24) pode ser usada para estimar parâmetros do sistema. O vetor de parâmetros \mathbf{p}_{1i} , que contém uma combinação de parâmetros físicos relacionados à matriz de rigidez do modelo, pode ser estimado utilizando a inversa da matriz de correlação $\mathbf{R}_{1i}(\tau)$,

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{11}^T = \mathbf{p}_{21}^T \mathbf{R}_{21}(\tau) [\mathbf{R}_{11}(\tau)]^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{1j}^T = \mathbf{p}_{2j}^T \mathbf{R}_{2j}(\tau) [\mathbf{R}_{1j}(\tau)]^{-1} \end{cases} \quad , \quad (2.26)$$

desde que,

$$\text{Posto}[\mathbf{R}_{1i}(\tau)] = n, i = 1, \dots, j. \quad (2.27)$$

Para que a condição (2.27) seja observada é necessário escolher defasagens de tempo, $\tau_i, i = 1, \dots, k$ adequadas (Cooper, 1994 b). Para se obter uma melhor estimativa dos parâmetros, pode-se montar um sistema sobre determinado de equações, fazendo-se,

$$k > n \quad (2.28)$$

e calculando-se a inversa generalizada $[\mathbf{R}_{1i}(\tau)]^+, i = 1, \dots, j$. Por hipótese inicial, assumiu-se que o modelo matemático do sistema mecânico é totalmente conhecido. Portanto, os valores numéricos de todos os parâmetros físicos do modelo são também conhecidos, ou seja, \mathbf{p}_{1i} e \mathbf{p}_{2i} são vetores numericamente conhecidos. A estimativa do vetor \mathbf{p}_{1i} a partir da expressão (2.26) é, portanto, uma maneira de verificar se o parâmetros do modelo estão bem ajustados ao sistema real. Quanto mais ajustado estiver o modelo, mais próximo está do valor real o vetor estimado \mathbf{p}_{1i} . Estas estimativas serão também tanto melhores, quanto melhor for a estimativa das matrizes de correlação do sistema. Existem várias metodologias para estimação das matrizes de correlação (Box, 1970; Jenkins, 1968; Bendat, 1980). A descrição das metodologias utilizadas neste trabalho para estimação numérica das matrizes de correlação estão descritas no Apêndice C.

Assume-se agora que a falha do sistema possa ser representada por uma alteração brusca no valor de algum parâmetro físico relacionado apenas à matriz de rigidez do sistema, \mathbf{S} . Sob esta condição, o vetor \mathbf{p}_{1i} pode ser estimado através da expressão (2.26) para o sistema com falha em regime estacionário. Deve-se notar que, por hipótese, o vetor de parâmetros \mathbf{p}_{2i} não é modificado pela ação da falha no sistema. Através da estimativa dos vetores \mathbf{p}_{1i} , nesta condição de falha, pode-se localizar qual parâmetro ou qual o conjunto de parâmetros que sofreu variação e portanto, localizar fisicamente a falha.

O conjunto de equações obtidas na condição do sistema com falha em regime estacionário, fica na forma

$$\begin{cases} \{\mathbf{p}_{1i}^f\}^T = \mathbf{p}_{2i}^T \mathbf{R}_{2i}^f(\tau) [\mathbf{R}_{1i}^f(\tau)]^{-1}, \\ \vdots \\ \{\mathbf{p}_{1j}^f\}^T = \mathbf{p}_{2j}^T \mathbf{R}_{2j}^f(\tau) [\mathbf{R}_{1j}^f(\tau)]^{-1}. \end{cases} \quad (2.29)$$

onde \mathbf{p}_{1i}^f é o vetor de parâmetros com falha relacionados à matriz de rigidez. As matrizes $\mathbf{R}_{1i}^f(\tau)$ e $\mathbf{R}_{2i}^f(\tau)$ são matrizes de correlação estimadas para o sistema com falha em regime estacionário. As equações de estimação (2.26) e (2.29) não permitem identificar precisamente o parâmetro relacionado a falha dentro da matriz de rigidez do sistema, mas pode-se identificar um conjunto de parâmetros físicos ao qual pertence o parâmetro que sofreu variação em função da falha. Resume-se, a seguir, o conjunto de condições que necessitam ser satisfeitas para aplicação do método descrito:

$$\begin{cases} \mathbf{C} = [\mathbf{I}_{(n,n)} \vdots \mathbf{O}_{(n,n)}] \\ \text{Posto}[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}] < n \\ \text{Falha relacionada à matriz } \mathbf{S} \end{cases} \quad (2.30)$$

Esta abordagem para localização de parâmetros relacionados à falha ainda tem restrições muito severas quando se objetiva uma aplicação em sistemas reais. O número (j) de expressões linearmente independentes na forma (2.26) e (2.29) pode ser muito pequeno se a matriz $[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]$ tiver posto próximo de (n), ou mesmo nulo, caso a matriz $[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]$ tenha posto cheio ($\eta = n$). Isto limita bastante o número de parâmetros que podem ser estimados e, conseqüentemente, o monitoramento do sistema fica restrita a um pequeno número de parâmetros. Esta restrição pode ser modificada analisando-se a Condição 2.

2.2.2 - Localização de falhas através das funções de resíduo

Caso 2 : $\eta = n$

As matrizes globais de massa, rigidez e amortecimento dos modelos de sistemas mecânicos são, em geral, matrizes regulares com elementos concentrados na diagonal. Neste sentido, é de se esperar que o Caso 2 seja mais realista que o Caso 1. Nesta condição, não existe um vetor \mathbf{s} , não nulo, que satisfaça exatamente a condição dada em (2.17). No entanto, sempre é possível encontrar um conjunto de vetores $\mathbf{s}_i^T, i = 1, \dots, j$, que satisfaçam aproximadamente a condição (2.17) a partir de algum critério de minimização. Pode-se utilizar, por exemplo, o seguinte critério:

$$\delta = \text{Mínimo}_{\mathbf{s}_i^T} \sum_{i=1}^j \|\mathbf{s}_i^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}\| \quad (2.31)$$

Lou et al(1986), Patton(1991) e Gertler(1995b) analisaram um problema de minimização semelhante a este e sugerem que uma maneira adequada de resolvê-lo é através da decomposição em valores singulares (*svd*). A utilização do algoritmo *svd* para escolha dos vetores \mathbf{s}_i^T está mostrada resumidamente no Apêndice B. Os vetores $\mathbf{s}_i^T, i = 1, \dots, j$, determinados em (2.31), se aplicados à igualdade (2.15), levam a

$$\mathbf{s}_i^T \left[\mathbf{R}_{yu}(\tau) [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{U}]^T - \mathbf{R}_{yy}(\tau) [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}]^T + [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}] \mathbf{R}_{yy}(\tau) - [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{U}] \mathbf{R}_{uy}(\tau) \right] \mathbf{s}_i = \varepsilon_i(\tau) \quad (2.32)$$

onde $\varepsilon_i(\tau)$ é um resíduo não nulo. Quanto melhor a solução do problema de minimização em (2.31) mais próximo de zero está o resíduo. Com as mesmas definições dadas em (2.21) pode-se escrever,

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_i(\tau) = \varepsilon_i(\tau) \quad , \quad i = 1, \dots, j \quad (2.33)$$

onde,

$$\mathbf{p}_i^T = \left[\mathbf{p}_{1i}^T \quad \vdots \quad -\mathbf{p}_{2i}^T \right], \quad \mathbf{r}_i(\tau) = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{d1i}(\tau) - \mathbf{r}_{e1i}(\tau) \\ \mathbf{r}_{d2i}(\tau) - \mathbf{r}_{e2i}(\tau) \end{Bmatrix}. \quad (2.34)$$

Nota-se que o lado esquerdo da igualdade (2.33) pode ser estimado para o sistema operando sem falhas em regime estacionário. Porém, o lado direito não é conhecido, porque $\varepsilon_i(\tau)$ é obtido a partir de matrizes de correlação que não podem ser estimadas diretamente. Mesmo assim, as funções de resíduo definidas em (2.33) podem ser utilizadas para o monitoramento de alguns parâmetros do sistema, como será mostrado a seguir.

Analisa-se agora o problema de uma falha no sistema, caracterizada da mesma forma já definida anteriormente. Pode-se também aplicar a expressão (2.33) para o sistema operando na condição de falha em regime estacionário. Com isto, pode-se montar uma igualdade vetorial na seguinte forma,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1^T \mathbf{r}_1(\tau) - \{\mathbf{p}_1^f\}^T \mathbf{r}_1^f(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_s^T \mathbf{r}_s(\tau) - \{\mathbf{p}_s^f\}^T \mathbf{r}_s^f(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_j^T \mathbf{r}_j(\tau) - \{\mathbf{p}_j^f\}^T \mathbf{r}_j^f(\tau) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1(\tau) - \varepsilon_1^f(\tau) \\ \vdots \\ \varepsilon_s(\tau) - \varepsilon_s^f(\tau) \\ \vdots \\ \varepsilon_j(\tau) - \varepsilon_j^f(\tau) \end{Bmatrix}, \quad (2.35)$$

onde o sobrescrito (f) é relativo à condição do sistema operando com falha em regime estacionário. Considera-se agora, que a falha no sistema está relacionada a um ou mais parâmetros não pertencentes ao vetor de parâmetros \mathbf{p}_s , $1 \leq s \leq j$, onde s é desconhecido a priori. Nesta condição pode-se escrever,

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{p}_s^f, \quad \mathbf{p}_i \neq \mathbf{p}_i^f, \quad i \neq s \quad (2.36)$$

ou seja, o vetor \mathbf{p}_s contém uma combinação de parâmetros que permanecem inalterados após a falha, e os vetores \mathbf{p}_i , $i \neq s$, são modificados uma vez que contêm uma combinação de parâmetros diretamente relacionados a falha no sistema. Definindo-se as variações,

$$\Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i^f - \mathbf{p}_i \quad , \quad \Delta \varepsilon_i(\tau) = \varepsilon_i(\tau) - \varepsilon_i^f(\tau) \quad (2.37)$$

e substituindo-se em (2.35), obtém-se a seguinte igualdade vetorial,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_i^T [\mathbf{r}_i(\tau) - \mathbf{r}_i^f(\tau)] \\ \vdots \\ \mathbf{p}_s^T [\mathbf{r}_s(\tau) - \mathbf{r}_s^f(\tau)] \\ \vdots \\ \mathbf{p}_j^T [\mathbf{r}_j(\tau) - \mathbf{r}_j^f(\tau)] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_i(\tau) + \Delta \mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_i^f(\tau) \\ \vdots \\ \Delta \varepsilon_s(\tau) \\ \vdots \\ \Delta \varepsilon_j(\tau) + \Delta \mathbf{p}_j^T \mathbf{r}_j^f(\tau) \end{Bmatrix} \quad , \quad (2.38)$$

onde o vetor no lado esquerdo da igualdade pode ser totalmente estimado a partir dos parâmetros conhecidos e dos sinais medidos antes e depois da falha na condição estacionária. O lado direito da igualdade vetorial não pode ser diretamente estimado porque, por hipótese, não se conhece qual ou quais parâmetros estão relacionados à falha, ou seja, $\Delta \mathbf{p}_i$ é desconhecido.

Quanto mais próximo de zero estiver o valor de δ em (2.31), menor o valor de $\varepsilon_i(\tau)$.

Supondo-se que as condições

$$|\Delta \varepsilon_i(\tau)| \ll |\Delta \mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_i^f(\tau)| \quad , \quad i = 1, \dots, j \quad (2.39)$$

ou

$$|\Delta \varepsilon_i(\tau)| \cong 0 \quad , \quad |\Delta \mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_i^f(\tau)| \neq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, j \quad (2.40)$$

sejam verdadeiras e aplicando-se (2.39) ou (2.40) em (2.38), pode-se escrever

$$\Delta \mathbf{e}(\tau) = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1^T \{ \mathbf{r}_1(\tau) - \mathbf{r}_1^f(\tau) \} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_s^T \{ \mathbf{r}_s(\tau) - \mathbf{r}_s^f(\tau) \} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_j^T \{ \mathbf{r}_j(\tau) - \mathbf{r}_j^f(\tau) \} \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_1^T \mathbf{r}_1^f(\tau) \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{p}_j^T \mathbf{r}_j^f(\tau) \end{Bmatrix}, \quad (2.41)$$

O vetor $\Delta \mathbf{e}(\tau)$ será chamado vetor de variação dos resíduos e contém j coordenadas, onde apenas a coordenada $i = s$ é aproximadamente nula. Esta coordenada contém os parâmetros físicos do modelo que não estão relacionados à falha no sistema. Desta forma consegue-se identificar qual o parâmetro ou qual o conjunto de parâmetros que está relacionado a falha (ou quais parâmetros que não estão relacionados a falha). O número (j) de funções de resíduo que podem ser obtidas depende do valor limite δ em (2.31), estabelecido a priori. A identificação da coordenada (s) será tanto mais fácil quanto menor for o valor limite δ . Para δ grande, as condições (2.39) e (2.40) não valem e o vetor de variação de resíduos $\Delta \mathbf{e}(\tau)$ não terá a estrutura dada em (2.41), o que torna impossível a localização dos parâmetros físicos do modelo que estão relacionados à falha no sistema. Resume-se, a seguir, as condições necessárias para aplicação deste método de localização de falhas:

$$\begin{cases} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(n,n)} \\ \vdots \\ \mathbf{O}_{(n,n)} \end{bmatrix} \\ \left| \Delta \varepsilon_i(\tau) \right| \ll \left| \Delta \mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_i^f(\tau) \right|, \quad i = 1, \dots, j. \end{cases} \quad (2.42)$$

Até aqui, foi assumido que a matriz de medidas do sistema tenha a forma especial. A seguir, o problema de localização de falhas será tratado para uma condição de medidas genérica.

2.3 - Matriz de medidas na forma genérica

A condição imposta sobre a matriz de medidas será agora modificada. Considerou-se inicialmente, que todos os deslocamentos são acessíveis à medição. Para sistemas mecânicos reais com grande número de graus de liberdade, sabe-se que normalmente alguns pontos de medição não podem ser medidos devido, principalmente, às restrições físicas. Portanto, é

interessante considerar que a matriz de medidas represente apenas os pontos acessíveis à medição. Para (m) pontos de medida e $m < 2n$, a matriz C assume a forma genérica,

$$\mathbf{y}_{(m,1)}(\mathbf{t}) = \begin{Bmatrix} y_1(\mathbf{t}) \\ \vdots \\ y_m(\mathbf{t}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,2n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & \cdots & c_{m,2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(\mathbf{t}) \\ \vdots \\ x_{2n}(\mathbf{t}) \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

onde c_{ij} pode ser qualquer valor numérico adimensional. Define-se agora uma matriz de transformação $\mathbf{T}_{(2n, 2n)}$, regular, constante e adimensional, tal que,

$$\mathbf{CT} = \overline{\mathbf{C}} = \left[\mathbf{I}_{(m, m)} \ ; \ \mathbf{O}_{(m, 2n-m)} \right]. \quad (2.44)$$

Esta transformação numérica existe se a matriz de medidas tiver (m) linhas linearmente independentes (Finkbeiner, 1970; Gantmacher, 1959), ou seja,

$$\text{Posto}[\mathbf{C}] = m. \quad (2.45)$$

A escolha apropriada desta matriz de transformação pode levar o sistema para uma forma canônica (Luenberger, 1967, Wolters, 1982). Entretanto, não é este o objetivo desta transformação. Pretende-se definir uma transformação numérica que faça a divisão do vetor de estados em duas partes, onde, a primeira parte contém apenas as variáveis de estado medidas. Aplicando-se esta matriz de transformação ao vetor de estados original, obtém-se uma nova variável de estado,

$$\overline{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{v}(\mathbf{t}) \end{Bmatrix}, \quad (2.46)$$

onde $\mathbf{v}_{(2n-m,1)}(\mathbf{t})$ corresponde a parte não conhecida do vetor de estado. O modelo de estado assume então a forma

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}\quad (2.47)$$

onde,

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \quad \bar{\mathbf{C}} = [\mathbf{I} : \mathbf{O}]. \quad (2.48)$$

O novo modelo de estado possui matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ com estrutura interna genérica e matriz de medidas $\bar{\mathbf{C}}$, na forma especial (2.44). Aplicando-se a expressão (2.6) para o sistema na forma (2.47), obtém-se,

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}}(\tau) + \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}}(\tau)\bar{\mathbf{A}}^T + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{R}_{\mathbf{u}\bar{\mathbf{x}}}(\tau) + \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}\mathbf{u}}(\tau)\bar{\mathbf{B}}^T = \mathbf{O}. \quad (2.49)$$

Esta equação pode ser melhor analisada, definindo-se as matrizes,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1(m,m)} & \mathbf{A}_{2(m,2n-m)} \\ \mathbf{A}_{3(2n-m,m)} & \mathbf{A}_{4(2n-m,2n-m)} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1(m,p)} \\ \mathbf{B}_{2(2n-m,p)} \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}\mathbf{u}}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y\mathbf{u}}(\tau) \\ \mathbf{R}_{v\mathbf{u}}(\tau) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) & \mathbf{R}_{yv}(\tau) \\ \mathbf{R}_{vy}(\tau) & \mathbf{R}_{vv}(\tau) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\mathbf{u}\bar{\mathbf{x}}}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y\mathbf{u}}(\tau) & \mathbf{R}_{v\mathbf{u}}(\tau) \end{bmatrix}.$$

e substituindo-se (2.50) em (2.49), vem,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) & \mathbf{R}_{yv}(\tau) \\ \mathbf{R}_{vy}(\tau) & \mathbf{R}_{vv}(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y\mathbf{u}}(\tau) & \mathbf{R}_{v\mathbf{u}}(\tau) \end{bmatrix} + \quad (2.51)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) & \mathbf{R}_{yv}(\tau) \\ \mathbf{R}_{vy}(\tau) & \mathbf{R}_{vv}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{A}_3^T \\ \mathbf{A}_2^T & \mathbf{A}_4^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y\mathbf{u}}(\tau) \\ \mathbf{R}_{v\mathbf{u}}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

Fazendo-se a multiplicação das submatrizes, obtém-se 4 expressões matriciais, a saber:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{R}_{yy}(\tau) + \mathbf{A}_2 \mathbf{R}_{vy}(\tau) + \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{uy}(\tau) + \mathbf{R}_{yy}(\tau) \mathbf{A}_1^T + \mathbf{R}_{yv}(\tau) \mathbf{A}_2^T + \mathbf{R}_{yu}(\tau) \mathbf{B}_1^T = \mathbf{O}_{(m, m)}, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{R}_{yv}(\tau) + \mathbf{A}_2 \mathbf{R}_{vv}(\tau) + \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{uv}(\tau) + \mathbf{R}_{yy}(\tau) \mathbf{A}_3^T + \mathbf{R}_{yv}(\tau) \mathbf{A}_4^T + \mathbf{R}_{yu}(\tau) \mathbf{B}_2^T = \mathbf{O}_{(m, 2n-m)}, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{A}_3 \mathbf{R}_{yy}(\tau) + \mathbf{A}_4 \mathbf{R}_{vy}(\tau) + \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{uy}(\tau) + \mathbf{R}_{vy}(\tau) \mathbf{A}_1^T + \mathbf{R}_{vv}(\tau) \mathbf{A}_2^T + \mathbf{R}_{vu}(\tau) \mathbf{B}_1^T = \mathbf{O}_{(2n-m, m)}, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{A}_3 \mathbf{R}_{yv}(\tau) + \mathbf{A}_4 \mathbf{R}_{vv}(\tau) + \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{uv}(\tau) + \mathbf{R}_{vy}(\tau) \mathbf{A}_3^T + \mathbf{R}_{vv}(\tau) \mathbf{A}_4^T + \mathbf{R}_{vu}(\tau) \mathbf{B}_2^T = \mathbf{O}_{(2n-m, 2n-m)} \quad (2.55)$$

A expressão (2.52) apresenta apenas duas matrizes de correlação desconhecidas, $\mathbf{R}_{vy}(\tau)$ e $\mathbf{R}_{yv}(\tau)$. As expressões (2.53) e (2.54) contém 4 matrizes de correlação que envolvem o vetor $\mathbf{v}(t)$ não medido e portanto, são matrizes desconhecidas. A expressão (2.53) não apresenta nenhuma matriz de correlação conhecida. Pode-se trabalhar sobre a equação (2.50) para se obter uma expressão apropriada para o propósito de detecção e localização de falhas no modelo. Pretende-se obter uma expressão que contenha somente matrizes de correlação que podem ser estimadas, relacionando parâmetros do sistema mecânico. Isto será feito a seguir.

2.3.1 - Localização de falhas através das funções de resíduo

A matriz de transformação \mathbf{T} , pode ser particionada em submatrizes assim definidas,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1(n, m)} & \mathbf{T}_{2(n, 2n-m)} \\ \mathbf{T}_{3(n, m)} & \mathbf{T}_{4(n, 2n-m)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{5(m, n)} & \mathbf{T}_{6(m, n)} \\ \mathbf{T}_{7(2n-m, n)} & \mathbf{T}_{8(2n-m, n)} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

e com estas definições pode-se escrever,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_5\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}_3 & -\mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_5\mathbf{T}_4 - \mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}_4 \\ -\mathbf{T}_8\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_7\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_8\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}_3 & -\mathbf{T}_8\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_7\mathbf{T}_4 - \mathbf{T}_8\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U} \\ \mathbf{T}_8\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U} \end{bmatrix}$$

(2.57)

Substituindo-se \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 e \mathbf{B}_1 em (2.52), obtém-se:

$$\begin{aligned} & [-\mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_5\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}_3]\mathbf{R}_{yy}(\tau) + [-\mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_5\mathbf{T}_4 - \mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}_4]\mathbf{R}_{vy}(\tau) + \\ & \quad [\mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}]\mathbf{R}_{vy}(\tau) + \mathbf{R}_{yy}(\tau)[- \mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_5\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}_3]^T + \\ & \quad \mathbf{R}_{yv}(\tau)[- \mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_5\mathbf{T}_4 - \mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}_4]^T + \mathbf{R}_{yu}(\tau)[\mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}]^T = \mathbf{O}_{(m,m)} \end{aligned} \quad (2.58)$$

As matrizes \mathbf{T}_4 e \mathbf{T}_2 podem ser montadas de forma que o produto matricial $[\mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}]\mathbf{T}_2$ e $[\mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]\mathbf{T}_4$ contenha o menor número possível de parâmetros físicos. Isto é feito observando-se o posicionamento dos parâmetros físicos dentro das matrizes de massa, rigidez e amortecimento. Por outro lado, monta-se \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_3 para que o produto matricial $[\mathbf{T}_8\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}]\mathbf{T}_1$ e $[\mathbf{T}_8\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]\mathbf{T}_3$ contenha o maior número possível de parâmetros físicos relacionados as matrizes de massa, rigidez e amortecimento. A escolha de \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 , \mathbf{T}_3 e \mathbf{T}_4 desta forma deve ainda estar condicionada ao fato de que a matriz \mathbf{T} deva ser regular.

A matriz \mathbf{A}_2 assim obtida contém poucos parâmetros físicos do modelo e pode ainda ser anulada na equação (2.52), utilizando-se um conjunto de vetores linha \mathbf{s}_i^T , $i = 1, \dots, j$, de dimensão $(1, m)$ numéricos, constantes e não nulos, tais que,

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{A}_2 = \mathbf{O}_{(1, 2n-m)} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A}_2^T \mathbf{s}_i = \mathbf{O}_{(2n-m, 1)} \quad (2.59)$$

A utilização de vetores ortogonais para o desacoplamento de variáveis de estado não medidas é uma técnica usual nas metodologias de detecção de falhas baseadas em equações de

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_i(\tau) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, j \quad (2.64)$$

onde,

$$\mathbf{r}_i(\tau) = \{ \mathbf{r}_{ei}(\tau) + \mathbf{r}_{di}(\tau) \} \quad , \quad i = 1, \dots, j \quad (2.65)$$

Obtém-se, desta forma, um sistema com j funções de resíduo. Estas expressões são igualdades escalares, contendo parâmetros físicos que aparecem combinados nos vetores \mathbf{p}_i . Os vetores $\mathbf{r}_{ei}(\tau)$ e $\mathbf{r}_{di}(\tau)$ são definidos a partir das matrizes de correlação conhecidas ou estimadas. As funções de resíduo na forma (2.64) podem ser utilizadas para monitorar os parâmetros do sistema através da análise que se fará a seguir.

Considera-se que a falha no sistema mecânico possa ser representada por uma alteração brusca em algum parâmetro físico não pertencente à matriz \mathbf{A}_2 . Esta condição pode ser observada, uma vez que, a matriz de transformação \mathbf{T} foi montada de forma a se obter \mathbf{A}_2 com o menor número de parâmetros possível. Sob esta condição pode-se afirmar que, uma falha no sistema não altera a estrutura desta matriz e as equações (2.59) podem ser utilizadas também na condição do sistema com falhas em regime estacionário. Neste caso, as funções de resíduo ficam na forma,

$$\{ \mathbf{p}_i^f \}^T \mathbf{r}_i^f(\tau) = 0 \quad (2.66)$$

onde

$$\mathbf{r}_i^f(\tau) = \{ \mathbf{r}_{ei}^f(\tau) + \mathbf{r}_{di}^f(\tau) \} \quad , \quad i = 1, \dots, j \quad (2.67)$$

onde, novamente, o sobrescrito (f) se refere ao sistema alterado pela ação de uma falha. Porém, os vetores \mathbf{p}_i^f não são conhecidos a priori, uma vez que a falha no sistema altera o valor de um ou mais parâmetros físicos contidos em \mathbf{p}_i . Então, na condição de falha, as funções de resíduo não são nulas e vale a relação,

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_i^f(\tau) \neq 0, \quad i = 1, \dots, j. \quad (2.68)$$

Supõe-se agora que a falha no sistema não esteja relacionada aos parâmetros físicos pertencentes ao vetor \mathbf{p}_s , $1 \leq s \leq j$, onde s não é conhecido a priori (uma vez que não se pode prever qual ou quais parâmetros estão relacionados a falha). Pode-se afirmar que este vetor continua, teoricamente, inalterado, na condição de falha. Os demais vetores, \mathbf{p}_i , $i = 1, \dots, j$, $i \neq s$, sofrem modificação. Então, calculando-se a diferença,

$$\mathbf{p}_i^T \{ \mathbf{r}_i(\tau) - \mathbf{r}_i^f(\tau) \}, \quad i = 1, \dots, j \quad (2.69)$$

deve ocorrer,

$$\begin{cases} \mathbf{p}_i^T \{ \mathbf{r}_i(\tau) - \mathbf{r}_i^f(\tau) \} \neq 0, & i \neq s \\ \mathbf{p}_i^T \{ \mathbf{r}_i(\tau) - \mathbf{r}_i^f(\tau) \} = 0, & i = s \end{cases} \quad (2.70)$$

A condição (2.70) indica que a falha do sistema não está relacionada a nenhum parâmetro físico presente em \mathbf{p}_s . Generalizando-se esta condição pode-se afirmar que a função de resíduo que não apresentar variação devido a falha no sistema, é a função que contém apenas parâmetros físicos não relacionados à falha e ao mesmo tempo, as funções de resíduo que apresentarem variação diferente de zero, contém os parâmetros físicos relacionados à falha. Desta forma, quanto maior o número de funções de resíduo na forma (2.64), mais fácil ou mais precisa é a identificação do parâmetro físico que sofreu variação. As expressões de monitoramento de parâmetros obtidas neste caso são mais genéricas que as obtidas no Capítulo 2.2, porque, agora as restrições de aplicação são menores. Resume-se a seguir, o conjunto de restrições necessárias para a aplicação das expressões obtidas nesta abordagem:

$$\begin{cases} \text{Parâmetro com falha não pertence a matriz } \mathbf{A}_2 \\ \text{Posto}[\mathbf{A}_2] < m \\ \text{Posto}[\mathbf{C}] = m \end{cases} \quad (2.71)$$

As funções de resíduo podem ser ligeiramente modificadas no sentido de se obter uma expressão de estimação de parâmetros. Esta modificação será tratada a seguir.

2.3.2 - Localização de falhas através da estimação de parâmetros.

Utilizando-se a condição inicialmente imposta de que o parâmetro com falha não está presente na matriz \mathbf{A}_2 , pode-se supor também que alguns parâmetros do sistema não estão sujeitos a falha. Neste caso pode-se separar o vetor \mathbf{p}_i^T em duas partes,

$$\mathbf{p}_i^T = [\mathbf{p}_{ci}^T \quad \vdots \quad \mathbf{p}_{di}^T] \quad (2.72)$$

onde \mathbf{p}_{ci}^T é o vetor de parâmetros conhecidos, com dimensão $(1, p_c)$ não suscetíveis a falha e \mathbf{p}_{di}^T é o vetor de parâmetros desconhecidos suscetíveis a falha, com dimensão $(1, p_d)$. O vetor de correlações pode ser dividido na mesma proporção,

$$\mathbf{r}_i(\tau) = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{1i}(\tau) \\ \mathbf{r}_{2i}(\tau) \end{Bmatrix} \quad (2.73)$$

e a expressão (2.64) pode ser reescrita na forma,

$$\mathbf{p}_{di}^T \mathbf{r}_{2i}(\tau) = -\mathbf{p}_{ci}^T \mathbf{r}_{1i}(\tau) \quad (2.74)$$

Esta expressão pode ser expandida para diferentes valores de $\tau_i, i = 1, \dots, k$, o que permite estimar o vetor de parâmetros suscetíveis a falha,

$$\mathbf{p}_{di}^T = -\mathbf{p}_{ci}^T \mathbf{R}_{1i}(\tau) [\mathbf{R}_{2i}(\tau)]^{-1}, \quad i = 1, \dots, j \quad (2.75)$$

com,

$$\mathbf{R}_{1i}(\tau) = \left[\mathbf{r}_{1i}(\tau_1), \dots, \mathbf{r}_{1i}(\tau_k) \right]_{(p_c, k)} \quad (2.76)$$

$$\mathbf{R}_{2i}(\tau) = \left[\mathbf{r}_{2i}(\tau_1), \dots, \mathbf{r}_{2i}(\tau_k) \right]_{(p_d, k)}$$

Novamente, a estimativa do vetor de parâmetros envolve o cálculo da inversa da matriz de correlação $\mathbf{R}_{2i}(\tau)$. Analogamente ao caso anterior, para que se tenha boa estimativa desta inversa, é necessário que

$$\text{Posto}[\mathbf{R}_{2i}(\tau)] = p_d. \quad (2.77)$$

Esta condição pode ser observada montando-se um sistema sobre determinado, fazendo-se $k > p_d$ e escolhendo-se adequadamente as defasagens de tempo $\tau_i, i = 1, \dots, k$. Neste caso utiliza-se a inversa generalizada, $[\mathbf{R}_{2i}(\tau)]^+$. A expressão de estimação (2.75) pode ser aplicada para o sistema com falhas funcionando em estado estacionário. Isto permite localizar o grupo de parâmetros, ao qual pertence o parâmetro físico que está diretamente relacionado a falha do sistema. A estimativa dos vetores de parâmetros na condição de falha fica na forma,

$$\{\mathbf{p}_{di}^f\}^T = -\mathbf{p}_{ci}^T \mathbf{R}_{1i}^f(\tau) [\mathbf{R}_{2i}^f(\tau)]^{-1} \quad (2.78)$$

onde as matrizes de correlação $\mathbf{R}_{1i}^f(\tau)$ e $\mathbf{R}_{2i}^f(\tau)$ são estimadas para o sistema estacionário com falha. O vetor de parâmetros \mathbf{p}_{ci} permanece inalterado uma vez que, por hipótese inicial, a falha não está relacionada aos parâmetros físicos presentes neste vetor.

Comparando-se os vetores estimados, antes e depois da falha, consegue-se verificar a coordenada vetorial que sofreu modificação. Calculando-se a diferença numérica,

$$\mathbf{p}_{di}^T - \{\mathbf{p}_{di}^f\}^T = [\delta_1, \dots, \delta_{p_d}] \quad (2.79)$$

pode-se montar a seguinte lógica de decisão:

$$\begin{cases} \text{Se } \delta_i = 0, \text{ parâmetro com falha não pertence à coordenada } i \text{ de } \mathbf{p}_{di} \\ \text{Se } \delta_i \neq 0, \text{ parâmetro com falha pertence à coordenada } i \text{ de } \mathbf{p}_{di} \end{cases} \quad (2.80)$$

onde $1 \leq i \leq p_d$. A condição (2.80) permite identificar o conjunto de parâmetros que está relacionado a falha no modelo. Neste caso, a falha está relacionada ao conjunto de parâmetros presentes na coordenada i do vetor de parâmetros \mathbf{p}_{di} . Os parâmetros do modelo contidos nas demais coordenadas não estão relacionados à falha. Nota-se que as expressões obtidas não permitem ainda identificar separadamente o parâmetro físico que variou após a falha, mas é possível localizar qual o grupo de parâmetros físicos ao qual pertence o parâmetro com falha. Novamente, a localização exata da falha será tanto melhor, ou mais precisa, quanto maior for o número (j) de equações linearmente independentes que podem ser obtidas observando-se a condição (2.60).

As expressões de estimação de parâmetros obtidas neste caso são mais genéricas que as obtidas anteriormente, pois agora as restrições de aplicação são menores. Coloca-se a seguir o conjunto de restrições necessárias para a aplicação das expressões de estimação obtidas:

$$\begin{cases} \text{Parâmetro com falha não pertence ao vetor } \mathbf{p}_{ci} \\ \text{Posto}[\mathbf{A}_2] < m \\ \text{Posto}[\mathbf{C}] = m \end{cases} \quad (2.81)$$

2.4 - Influência do ruído nos sinais medidos

Até aqui considerou-se que os sinais medidos na saída do sistema, $\mathbf{y}(t)$, e os sinais medidos na entrada do sistema, $\mathbf{u}(t)$, são ideais, ou seja, não contém ruído. Por outro lado, sabe-se que em condições reais de medição os sinais provenientes de sensores acoplados à máquina contêm outros tipos de sinais, devido a uma série de fatores. As fontes de ruído têm natureza diversa e variam intensamente em função da aplicação em questão. Não faz parte dos objetivos deste trabalho analisar a natureza das fontes de ruído, mas sim considerar o efeito deste no problema de detecção de falhas. Considera-se aqui que o sinal de ruído seja um

processo aleatório e estacionário do tipo aditivo ao sinal limpo que pode ser representado na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_r(t) &= \mathbf{y}(t) + \mathbf{e}_y(t) \\ \mathbf{u}_r(t) &= \mathbf{u}(t) + \mathbf{e}_u(t) \end{aligned} \tag{2.82}$$

onde $\mathbf{e}_y(t)$ e $\mathbf{e}_u(t)$ são os sinais de ruído, $\mathbf{y}_r(t)$ é o vetor de medidas com ruído e $\mathbf{u}_r(t)$ é o sinal de excitação com ruído. A figura 2.1 ilustra o fluxograma geral da metodologia proposta com a influência de ruídos nas medições.

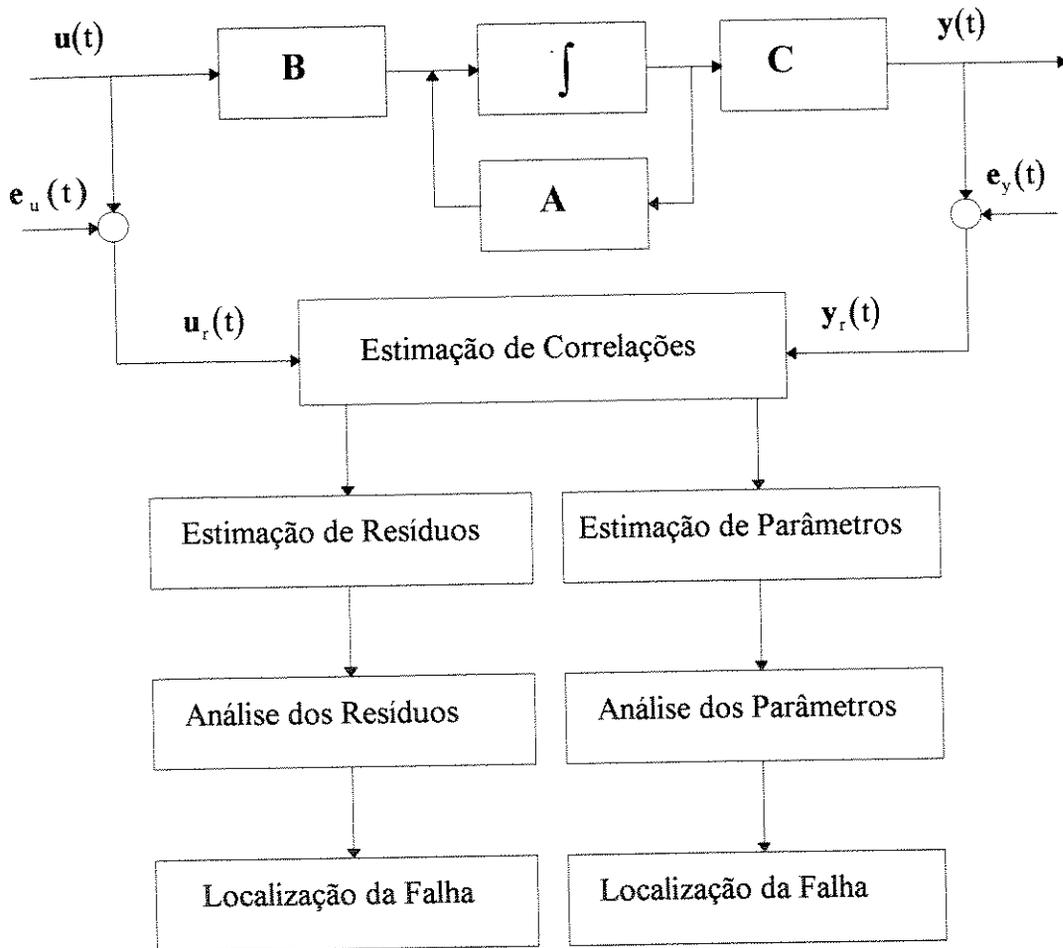


Figura 2.1 - Fluxograma geral do método com ruído aditivo nas medições

As matrizes de correlação calculadas com ruído aditivo nos sinais medidos podem ser representadas na seguinte forma,

$$\mathbf{R}_{yy}(\tau) = \mathbf{R}_{y_r y_r}(\tau) - \mathbf{R}_{y_r e_y}(\tau) - \mathbf{R}_{e_y y_r}(\tau) + \mathbf{R}_{e_y e_y}(\tau), \quad (2.83)$$

$$\mathbf{R}_{yu}(\tau) = \mathbf{R}_{y_r u_r}(\tau) - \mathbf{R}_{y_r e_u}(\tau) - \mathbf{R}_{e_y u_r}(\tau) + \mathbf{R}_{e_y e_u}(\tau), \quad (2.84)$$

$$\mathbf{R}_{uy}(\tau) = \mathbf{R}_{u_r y_r}(\tau) - \mathbf{R}_{e_u y_r}(\tau) - \mathbf{R}_{u_r e_y}(\tau) + \mathbf{R}_{e_u e_y}(\tau). \quad (2.85)$$

Nota-se que, se $\mathbf{e}_y(t)$ e $\mathbf{e}_u(t)$ forem seqüências do tipo ruído branco, com média zero, não correlacionados com os sinais $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ para $\tau \neq 0$, pode-se escrever que (Melsa, 1973, Cooper, 1994a)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{y_r e_y}(\tau) = \mathbf{R}_{e_y y_r}(\tau) = \mathbf{R}_{e_y e_y}(\tau) = \mathbf{R}_{y_r e_u}(\tau) = \mathbf{R}_{e_y u_r}(\tau) = \\ \mathbf{R}_{e_y e_u}(\tau) = \mathbf{R}_{e_u y_r}(\tau) = \mathbf{R}_{u_r e_y}(\tau) = \mathbf{R}_{e_u e_y}(\tau) = \mathbf{O} \end{aligned} \quad (2.86)$$

e neste caso ideal, as matrizes de correlação podem ser estimadas diretamente com os sinais com ruído aditivo. A formulação desenvolvida para a detecção de falhas no sistema na forma de estimação de parâmetros, ou na forma de funções de resíduo, permanecem inalteradas pela adição de ruído branco às medidas. Entretanto este caso ideal de ruído é na prática inexistente, uma vez que sempre existe correlação entre os sinais do sistema e os sinais de ruído. Porém, é evidente que, quanto mais próximo das características do ruído branco estiver o ruído nas medidas, menor o efeito deste na estimação dos resíduos e dos parâmetros.

Considerando-se que o ruído nas medidas é um sinal aleatório, estacionário, não branco, a estimativa dos resíduos em (2.61) assume agora a seguinte forma

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_{ri}(\tau) = \mathbf{p}_i^T \mathbf{e}_{ri}(\tau) \neq 0, \quad i = 1, \dots, j \quad (2.87)$$

onde,

$$\mathbf{r}_{ri}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y_r y_r}(\tau) + \mathbf{R}_{y_r y_r}^T(\tau) \\ \mathbf{R}_{u_r y_r}(\tau) + \mathbf{R}_{y_r u_r}^T(\tau) \end{bmatrix} \mathbf{s}_i, \quad (2.88)$$

$$\mathbf{e}_{ri}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y_r e_y}(\tau) + \mathbf{R}_{e_y y_r}(\tau) - \mathbf{R}_{e_y e_y}(\tau) + \mathbf{R}_{y_r e_y}^T(\tau) + \mathbf{R}_{e_y y_r}^T(\tau) - \mathbf{R}_{e_y e_y}^T(\tau) \\ \mathbf{R}_{u_r e_y}(\tau) + \mathbf{R}_{e_y u_r}(\tau) - \mathbf{R}_{e_y e_y}(\tau) + \mathbf{R}_{e_y u_r}^T(\tau) + \mathbf{R}_{y_r e_u}^T(\tau) - \mathbf{R}_{e_y e_u}^T(\tau) \end{bmatrix} \mathbf{s}_i.$$

Em (2.87) observa-se que o lado esquerdo da igualdade pode ser estimado diretamente utilizando os sinais medidos com ruído. O lado direito contém a contribuição do ruído na forma do vetor $\mathbf{e}_{ri}(\tau)$. Portanto, pode-se dizer que na presença de ruídos os resíduos estimados não são nulos, ou seja, assumem um valor numericamente igual a $\mathbf{p}_i^T \mathbf{e}_{ri}(\tau)$. A estimativa dos parâmetros de acordo com (2.75) com adição de ruído não branco, fica na seguinte forma,

$$\mathbf{p}_{di}^T = \mathbf{p}_i^T \mathbf{E}_{ri}(\tau) \mathbf{R}_{r2i}^{-1}(\tau) - \mathbf{p}_{ci}^T \mathbf{R}_{r1i}(\tau) \mathbf{R}_{r2i}^{-1}(\tau) \quad (2.89)$$

onde o vetor de correlação $\mathbf{r}_{ri}(\tau)$ foi particionado proporcionalmente a \mathbf{p}_{ci} e \mathbf{p}_{di} na forma,

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_{ri}(\tau) = \left[\mathbf{p}_{ci}^T \quad \vdots \quad \mathbf{p}_{di}^T \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{r1i}(\tau) \\ \dots \\ \mathbf{r}_{r2i}(\tau) \end{Bmatrix} \quad (2.90)$$

e ainda foram utilizadas as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{r1i}(\tau) &= \left[\mathbf{r}_{r1i}(\tau_1), \dots, \mathbf{r}_{r1i}(\tau_k) \right]_{(p_c, k)}, \\ \mathbf{R}_{r2i}(\tau) &= \left[\mathbf{r}_{r2i}(\tau_1), \dots, \mathbf{r}_{r2i}(\tau_k) \right]_{(p_d, k)}, \\ \mathbf{E}_{ri}(\tau) &= \left[\mathbf{e}_{ri}(\tau_1), \dots, \mathbf{e}_{ri}(\tau_k) \right]_{(p_c + p_d, k)}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Novamente, se o ruído for do tipo branco, a estimação dos parâmetros utilizando diretamente os sinais $\mathbf{u}_r(t)$ e $\mathbf{y}_r(t)$ não sofre alteração, uma vez que,

$$\mathbf{e}_{ri}(\tau) = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{E}_{ri}(\tau) = \mathbf{O} \quad , \quad i = 1, \dots, j \quad (2.92)$$

e conseqüentemente

$$\mathbf{p}_{di}^T = -\mathbf{p}_{ci}^T \mathbf{R}_{ri}(\tau) \mathbf{R}_{zi}^{-1}(\tau) . \quad (2.93)$$

Apesar de mais genéricas, as condições impostas em (2.81) podem ser modificadas. A condição imposta sobre o Posto da matriz \mathbf{A}_2 pode ser difícil de ser obtida em alguns casos. Para sistemas de grande porte, por exemplo, onde existem muitos parâmetros físicos, ocorrerá intensa combinação de parâmetros em \mathbf{A}_2 , tornando difícil a escolha da matriz de transformação \mathbf{T} mais apropriada.

Além deste aspecto, pode ocorrer que, um ou mais parâmetros importantes para o monitoramento do sistema não possam ser anulados através das matrizes \mathbf{T}_2 e \mathbf{T}_4 . Neste caso, estes parâmetros não poderão ser monitorados uma vez que, por hipótese, os parâmetros físicos pertencentes a matriz \mathbf{A}_2 não estão relacionados a falha. Busca-se então uma expressão mais genérica onde seja possível monitorar qualquer parâmetro do sistema uma vez que, em casos reais, não se conhece a priori qual ou quais parâmetros do sistema não estão suscetíveis a falha. Esta condição será abordada no próximo capítulo.

Capítulo 3

3.1 - Funções de correlação utilizando o sistema filtro

No capítulo anterior foram obtidas expressões para o monitoramento de parâmetros físicos do sistema mecânico a partir da equação de correlação aplicada ao modelo de estado do sistema. Observou-se que o número de parâmetros físicos que podem ser monitorados estão limitados pelas restrições impostas em (2.30), (2.42), (2.71) e (2.81). Neste capítulo é mostrado como as restrições impostas anteriormente podem ser modificadas no sentido de permitir o monitoramento de todos os parâmetros físicos do sistema. Serão obtidas expressões de monitoramento com as seguintes características:

- Sem restrições em relação aos parâmetros a serem monitorados.
- Matrizes de correlação estimadas diretamente a partir das medições.

Para se obter estas características, propõe-se a utilização de um sistema dinâmico auxiliar que será denominado sistema filtro. A utilização de um sistema dinâmico auxiliar foi explorada por Pederiva(1992) e Weber(1982) na identificação de parâmetros em sistemas mecânicos com excitação não medida. Nesta trabalho, o sistema filtro será acoplado na saída do sistema original de modo que os sinais de resposta do sistema original sejam exatamente os sinais de entrada do filtro. Pretende-se obter com a utilização de um sistema auxiliar, uma maior combinação de parâmetros do sistema e com isso obter funções de estimação ou de resíduos, mais adequadas para o propósito de detecção de falhas. A dinâmica do sistema filtro será governada pela equação,

$$\dot{w}(t) = Nw(t) + Py(t) . \quad (3.1)$$



O vetor $\mathbf{w}_{(f,1)}(t)$ é o vetor de estados do sistema filtro e pode ser totalmente estimado, uma vez que as matrizes $\mathbf{N}_{(f,f)}$ e $\mathbf{P}_{(f,m)}$ são definidas apropriadamente. A matriz $\mathbf{N}_{(f,f)}$ é a matriz dinâmica do filtro e deve ser uma matriz regular e estável assintoticamente. A matriz $\mathbf{P}_{(f,m)}$ é a matriz de entradas do filtro, definida apropriadamente. Algumas propriedades do sistema filtro importantes nesta aplicação são discutidas no Capítulo 5.

Considerando-se que o modelo de estado do sistema mecânico é dado pela equação (2.2), pode-se montar o modelo de estado expandido aumentando-se o vetor de estado original, $\mathbf{x}(t)$, com o vetor de estados do sistema filtro, $\mathbf{w}(t)$. O modelo de estado expandido assume a seguinte forma,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{Fz}(t) + \mathbf{Eu}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{Cx}(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

com as seguintes definições:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{PC} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

O novo vetor de estado $\mathbf{z}(t)$ tem dimensão $(f+2n, 1)$, as matrizes \mathbf{F} e \mathbf{E} tem dimensões $(f+2n, f+2n)$ e $(f+2n, m)$, respectivamente, e contêm agora parâmetros do sistema original e do sistema filtro. Analogamente ao capítulo anterior, serão desenvolvidas expressões para localização de falhas em sistemas mecânicos, observando-se duas condições diferentes impostas sobre a matriz de medidas. Neste capítulo será tratado o caso para a matriz de medidas na forma especial. No capítulo 4, esta condição será modificada para uma forma genérica. Considera-se então que a matriz de medidas tenha a seguinte forma especial,

$$\mathbf{C} = \left[\mathbf{I}_{(n,n)} \ ; \ \mathbf{O}_{(n,n)} \right], \quad (3.4)$$

ou seja, o vetor de medidas $\mathbf{y}_{(m,1)}(t)$ tem dimensão $m = n$ e corresponde aos deslocamentos do sistema. Nesta condição, o novo vetor de estados, $\mathbf{z}(t)$, assume a forma,

$$\mathbf{z}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}(t) \\ \dot{\mathbf{d}}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{Bmatrix}, \quad (3.5)$$

onde o vetor de velocidades, $\dot{\mathbf{d}}(t)$, não é medido diretamente no sistema original. Nota-se que o sistema expandido contém parâmetros do sistema filtro (conhecidos) e esta característica permite obter um número maior de combinações de parâmetros. As matrizes de correlação para o sistema expandido assumem a seguinte estrutura interna:

$$\mathbf{R}_{zz}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{dd}(\tau) & \mathbf{R}_{d\dot{d}}(\tau) & \mathbf{R}_{d\mathbf{w}}(\tau) \\ \mathbf{R}_{\dot{d}d}(\tau) & \mathbf{R}_{\dot{d}\dot{d}}(\tau) & \mathbf{R}_{\dot{d}\mathbf{w}}(\tau) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{w}d}(\tau) & \mathbf{R}_{\mathbf{w}\dot{d}}(\tau) & \mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}(\tau) \end{bmatrix}_{(2n+f, 2n+f)}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{R}_{uz}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ud}(\tau) & \mathbf{R}_{u\dot{d}}(\tau) & \mathbf{R}_{u\mathbf{w}}(\tau) \end{bmatrix}_{(p, 2n+f)}, \quad \mathbf{R}_{zu}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{du}(\tau) \\ \mathbf{R}_{\dot{d}u}(\tau) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{w}u}(\tau) \end{bmatrix}_{(2n+f, p)} \quad (3.7)$$

A equação de correlações, para o sistema expandido (3.4), fica na forma

$$\mathbf{F}\mathbf{R}_{zz}(t) + \mathbf{R}_{zz}(t)\mathbf{F}^T + \mathbf{E}\mathbf{R}_{uz}(t) + \mathbf{R}_{zu}(t)\mathbf{E}^T = \mathbf{O} \quad (3.8)$$

e, substituindo (3.6) e (3.7) em (3.8), e realizando-se as operações matriciais, obtém-se um sistema com 9 equações matriciais,

$$\mathbf{R}_{\dot{d}y}(\tau) + \mathbf{R}_{y\dot{d}}(\tau) = \mathbf{O}_{(n, n)}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{R}_{\dot{d}\dot{d}}(\tau) + \mathbf{R}_{yy}(\tau)[-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}]^T + \mathbf{R}_{y\dot{d}}(\tau)[-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]^T + \mathbf{R}_{y\mathbf{w}}(\tau)[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}]^T = \mathbf{O}_{(n, n)}, \quad (3.10)$$

$$[-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}]\mathbf{R}_{yy}(\tau) + [-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]\mathbf{R}_{dy}(\tau) + \mathbf{R}_{dd}(\tau) + [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}]\mathbf{R}_{uy}(\tau) = \mathbf{O}_{(n,n)}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} [-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}]\mathbf{R}_{yd}(\tau) + [-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]\mathbf{R}_{dd}(\tau) + \mathbf{R}_{dy}(\tau)[-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}]^T + \mathbf{R}_{dd}(\tau)[-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]^T + \\ [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}]\mathbf{R}_{ud}(\tau) + \mathbf{R}_{du}(\tau)[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}]^T = \mathbf{O}_{(n,n)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{R}_{dw}(\tau) + \mathbf{R}_{yy}(\tau)\mathbf{P}^T + \mathbf{R}_{yw}(\tau)\mathbf{N}^T = \mathbf{O}_{(n,f)}, \quad (3.13)$$

$$[-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}]\mathbf{R}_{yw}(\tau) + [-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]\mathbf{R}_{dw}(\tau) + [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}]\mathbf{R}_{uw}(\tau) + \mathbf{R}_{dy}(\tau)\mathbf{P}^T + \mathbf{R}_{dw}(\tau)\mathbf{N}^T = \mathbf{O}_{(n,f)} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{P}\mathbf{R}_{yy}(\tau) + \mathbf{N}\mathbf{R}_{wy}(\tau) + \mathbf{R}_{wd}(\tau) = \mathbf{O}_{(f,n)}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{R}_{wy}(\tau)[-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}]^T + \mathbf{R}_{wd}(\tau)[-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]^T + \mathbf{R}_{wu}(\tau)[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}]^T + \mathbf{P}\mathbf{R}_{yd}(\tau) + \mathbf{N}\mathbf{R}_{wd}(\tau) = \mathbf{O}_{(n,f)} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{P}\mathbf{R}_{yd}(\tau) + \mathbf{N}\mathbf{R}_{wd}(\tau) + \mathbf{R}_{wy}(\tau)\mathbf{P}^T + \mathbf{R}_{wu}(\tau)\mathbf{N}^T = \mathbf{O}_{(f,f)}. \quad (3.17)$$

As expressões (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) relacionam apenas matrizes do sistema original com matrizes de correlação envolvendo o vetor de estados e o vetor de entradas do sistema original. As expressões (3.13), (3.14), (3.15) e (3.16) relacionam parâmetros do sistema original e parâmetros do sistema filtro com matrizes de correlação envolvendo o vetor de estados expandido e o vetor de entradas. A expressão (3.17) relaciona apenas parâmetros do sistema filtro. Substituindo-se (3.13) em (3.14) e operando as multiplicações matriciais, chega-se na expressão,

$$[U : S : D : M] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uw}(\tau) \\ -\mathbf{R}_{yw}(\tau) \\ \mathbf{R}_{yy}(\tau)\mathbf{P}^T + \mathbf{R}_{yw}(\tau)\mathbf{N}^T \\ -\mathbf{R}_{yy}(\tau)\mathbf{P}^T\mathbf{N}^T - \mathbf{R}_{yw}(\tau)\mathbf{N}^T\mathbf{N}^T \end{bmatrix} = -\mathbf{M}\mathbf{R}_{dy}(\tau)\mathbf{P}^T. \quad (3.18)$$

Uma expressão análoga a esta pode ser obtida substituindo-se (3.15) em (3.16),

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{wu}(\tau) : -\mathbf{R}_{wy}(\tau) : \mathbf{P}\mathbf{R}_{yy}(\tau) + \mathbf{N}\mathbf{R}_{wy}(\tau) : -\mathbf{N}\mathbf{P}\mathbf{R}_{yy}(\tau) - \mathbf{N}\mathbf{N}\mathbf{R}_{wy}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^T \\ \mathbf{S}^T \\ \mathbf{D}^T \\ \mathbf{M}^T \end{bmatrix} = -\mathbf{P}\mathbf{R}_{yd}(\tau)\mathbf{M}^T. \quad (3.19)$$

As expressões (3.18) e (3.19) relacionam os mesmos parâmetros do sistema, mas, ainda apresentam as matrizes de correlação $\mathbf{R}_{yd}(\tau)$ e $\mathbf{R}_{dy}(\tau)$ que não podem ser estimadas diretamente. No entanto, a matriz de entradas do sistema filtro pode ser definida apropriadamente no sentido de se obter uma expressão mais adequada ao monitoramento de parâmetros. Neste sentido, três casos diferentes serão analisados:

- Caso 1 : Matriz $\mathbf{P}^T = \mathbf{I}_{(n,n)}$, $f = n$
- Caso 2 : Matriz $\mathbf{P}_{(n,f)}^T$, $f > n$.
- Caso 3 : Matriz $\mathbf{P}_{(n,f)}^T$, $f < n$.

3.2 - Localização de falhas através da estimação de parâmetros

3.2.1 - Caso 1 : $\mathbf{P}^T = \mathbf{I}_{(n,n)}$

A matriz de entradas do sistema filtro pode ser definida na forma de uma matriz identidade. Neste caso, o sistema filtro tem dimensão igual ao número de graus de liberdade do

sistema ($f = n$), sendo que todas as medidas são utilizadas como sinais de entrada do filtro. Somando-se (3.18) com (3.19) usando (3.9), vale escrever a igualdade:

$$\Theta \mathbf{R}_e(\tau) + \mathbf{R}_d(\tau)\Theta^T = \Psi(\tau), \quad (3.20)$$

com as seguintes definições:

$$\Theta = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{U} : \mathbf{S} : \mathbf{D}], \quad (3.21a)$$

$$\mathbf{R}_e(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uw}(\tau) \\ -\mathbf{R}_{yw}(\tau) \\ \mathbf{R}_{yy}(\tau) + \mathbf{R}_{yw}(\tau)\mathbf{N}^T \end{bmatrix}, \quad (3.21b)$$

$$\mathbf{R}_d(\tau) = [\mathbf{R}_{wu}(\tau) : -\mathbf{R}_{wy}(\tau) : \mathbf{R}_{yy}(\tau) + \mathbf{NR}_{wy}(\tau)], \quad (3.21c)$$

$$\Psi(\tau) = \mathbf{R}_{yy}(\tau)\mathbf{N}^T + \mathbf{R}_{yw}(\tau)\mathbf{N}^T\mathbf{N}^T + \mathbf{NR}_{yy}(\tau) + \mathbf{NNR}_{wy}(\tau). \quad (3.21d)$$

A expressão (3.20) relaciona parâmetros do sistema combinados na matriz Θ com as matrizes de correlação, $\mathbf{R}_e(\tau)$, $\mathbf{R}_d(\tau)$ e $\Psi(\tau)$, que podem ser estimadas diretamente a partir das medições. Esta expressão pode, agora, ser trabalhada para se obter um estimador da matriz Θ . Com este objetivo, a expressão (3.20) precisa ser aberta observando-se o produto matricial linha por linha. Abrindo-se o produto matricial em (3.20) vem,

$$\begin{bmatrix} \theta_{1,1} & \cdots & \theta_{1,2n+p} \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_{n,1} & \cdots & \theta_{n,2n+p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{e1,1}(\tau) & \cdots & r_{e1,n}(\tau) \\ \vdots & & \vdots \\ r_{e2n+p,1}(\tau) & \cdots & r_{e2n+p,n}(\tau) \end{bmatrix} + \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} r_{d1,1}(\tau) & \cdots & r_{d1,2n+p}(\tau) \\ \vdots & & \vdots \\ r_{dn,1}(\tau) & \cdots & r_{dn,2n+p}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1,1} & \cdots & \theta_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_{2n+p,1} & \cdots & \theta_{2n+p,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{1,1}(\tau) & \cdots & \psi_{1,n}(\tau) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{n,1}(\tau) & \cdots & \psi_{n,n}(\tau) \end{bmatrix}$$

onde a primeira linha da multiplicação matricial tem a forma,

$$\left[\theta_{1,1} \quad \dots \quad \theta_{1,2n+p} \right] \begin{Bmatrix} r_{e1,1}(\tau) \\ \vdots \\ r_{e2n+p,1}(\tau) \end{Bmatrix} + \left[r_{d1,1}(\tau) \quad \dots \quad r_{d1,2n+p}(\tau) \right] \begin{Bmatrix} \theta_{1,1} \\ \vdots \\ \theta_{2n+p,1} \end{Bmatrix} = \psi_{1,1}(\tau), \quad (3.23)$$

que pode ser rescrita na forma mais simplificada,

$$\left[\theta_{1,1} \quad \dots \quad \theta_{1,2n+p} \right] \begin{Bmatrix} r_{e1,1}(\tau) + r_{d1,1}(\tau) \\ \vdots \\ r_{e2n+p,1}(\tau) + r_{d1,2n+p}(\tau) \end{Bmatrix} = \psi_{1,1}(\tau). \quad (3.24)$$

A primeira linha da matriz Θ pode ser estimada, fazendo-se a expansão da expressão (3.24) para diferentes valores de τ_i , $i = 1, \dots, k$ apropriadamente escolhidos. Obtém-se um conjunto de k equações linearmente independentes que, na forma matricial é dada por,

$$\left[\theta_{1,1} \quad \dots \quad \theta_{1,2n+p} \right] = \Psi_{1,1}(\tau) \left[\mathbf{R}_{1,1}(\tau) \right]^{-1}, \quad (3.25)$$

com as seguintes definições,

$$\mathbf{R}_{1,1}(\tau) = \begin{bmatrix} r_{e1,1}(\tau_1) + r_{d1,1}(\tau_1), & \dots, & r_{e1,1}(\tau_k) + r_{d1,1}(\tau_k) \\ \vdots & & \\ r_{e2n+p,1}(\tau_1) + r_{d1,2n+p}(\tau_1), & \dots, & r_{e2n+p,1}(\tau_k) + r_{d1,2n+p}(\tau_k) \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

$$\Psi_{1,1}(\tau) = \left[\psi_{1,1}(\tau_1), \dots, \psi_{1,1}(\tau_k) \right]$$

Seguindo-se este mesmo procedimento, pode-se obter a estimação das demais linhas da matriz de parâmetros. O segundo elemento da diagonal da matriz $\Psi(\tau)$ é dado por,

$$\left[\theta_{2,1} \quad \dots \quad \theta_{2,2n+p} \right] \begin{Bmatrix} r_{e1,2}(\tau) \\ \vdots \\ r_{e2n+p,2}(\tau) \end{Bmatrix} + \left[r_{d2,1}(\tau) \quad \dots \quad r_{d2,2n+p}(\tau) \right] \begin{Bmatrix} \theta_{2,1} \\ \vdots \\ \theta_{2,2n+p} \end{Bmatrix} = \psi_{2,2}(\tau), \quad (3.27)$$

que fica melhor arranjada na forma,

$$\left[\theta_{2,1} \quad \dots \quad \theta_{2,2n+p} \right] \begin{Bmatrix} r_{e1,2}(\tau) + r_{d2,1}(\tau) \\ \vdots \\ r_{e2n+p,2}(\tau) + r_{d2,2n+p}(\tau) \end{Bmatrix} = \psi_{2,2}(\tau), \quad (3.28)$$

de onde sai a expressão de estimação para a segunda linha da matriz Θ ,

$$\left[\theta_{2,1}, \dots, \theta_{2,2n+p} \right] = \Psi_{2,2}(\tau) \left[\mathbf{R}_{2,2}(\tau) \right]^{-1}, \quad (3.29)$$

com as seguintes definições,

$$\Psi_{2,2}(\tau) = \left[\psi_{2,2}(\tau_1), \dots, \psi_{2,2}(\tau_k) \right], \quad (3.30)$$

$$\mathbf{R}_{2,2}(\tau) = \begin{bmatrix} r_{e1,2}(\tau_1) + r_{d2,1}(\tau_1), & \dots, & r_{e1,2}(\tau_k) + r_{d2,1}(\tau_k) \\ \vdots & & \vdots \\ r_{e2n+p,2}(\tau_1) + r_{d2,2n+p}(\tau_1), & \dots, & r_{e2n+p,2}(\tau_k) + r_{d2,2n+p}(\tau_k) \end{bmatrix}.$$

Seguindo-se este procedimento, pode-se estimar as demais linhas da matriz de parâmetros. A última linha da matriz Θ será estimada de acordo com a expressão,

$$\left[\theta_{n,1}, \dots, \theta_{n,2n+p} \right] = \Psi_{n,n}(\tau) \left[\mathbf{R}_{n,n}(\tau) \right]^{-1} \quad (3.31)$$

com as seguintes definições,

$$\Psi_{n,n}(\tau) = [\psi_{n,n}(\tau_1), \dots, \psi_{n,n}(\tau_k)] \quad , \quad (3.32)$$

$$\mathbf{R}_{n,n}(\tau) = \begin{bmatrix} r_{e1,n}(\tau_1) + r_{dn,1}(\tau_1), & \dots & , r_{e1,n}(\tau_k) + r_{dn,1}(\tau_k) \\ \vdots & & \vdots \\ r_{e2n+p,n}(\tau_1) + r_{dn,2n+p}(\tau_1), & \dots & , r_{e2n+p,n}(\tau_k) + r_{dn,2n+p}(\tau_k) \end{bmatrix} .$$

A estimativa da matriz de parâmetros envolve o cálculo da inversa das matrizes de correlação na forma,

$$[\mathbf{R}_{i,i}(\tau)]^{-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.33)$$

Para que a inversa exista, deve-se garantir que estas matrizes de correlação tenham posto suficiente. Para que isto aconteça deve-se escolher apropriadamente as defasagens de tempo $\tau_i, i = 1, \dots, k$ e fazer,

$$k = 2n + p \quad (3.34)$$

uma vez que $\mathbf{R}_{i,i}(\tau)$ tem dimensão $(2n + p, k)$. A escolha apropriada das defasagens de tempo será analisada nos exemplos numéricos do Capítulo 5. Para uma melhor estimação numérica da matriz Θ pode-se montar um sistema sobre determinado de equações fazendo-se $k > 2n + p$ e utilizar o cálculo da inversa generalizada $[\mathbf{R}_{i,i}(\tau)]^+$, $i = 1, \dots, n$. A estimação da matriz de parâmetros pode não ser consistente quando não se consegue um número suficiente de equações linearmente independentes (Cooper 1994a, 1994b). Os problemas numéricos envolvidos na expressão de estimação serão analisados no Capítulo 5.

Considera-se agora, que o sistema mecânico sofre um falha, caracterizada pela variação numérica de algum parâmetro físico. A estimativa da matriz de parâmetros na condição estacionária com falha, segue as mesmas expressões já deduzidas, 3.25, ..., 3.32. Deve-se observar que uma falha abrupta no sistema sempre produz transientes de resposta (perturbações) e, as matrizes de correlação, nesta condição, devem ser estimadas após a resposta transiente.

Uma vez que o modelo do sistema é conhecido, sabe-se qual a distribuição de parâmetros dentro da matriz Θ . Supõe-se, agora, que a falha no sistema esteja relacionada ao parâmetro físico p_i , não conhecido. Denominando-se por $\theta_{i,j}$ a estimativa numérica do elemento (i, j) da matriz de parâmetros antes da falha e por $\theta_{i,j}^f$, a estimativa numérica do elemento (i, j) da matriz de parâmetros para o sistema com falha, em regime estacionário, pode-se escrever,

$$\begin{cases} \theta_{i,j} = \theta_{i,j}^f & \text{se } p_i \text{ não pertence a } (i, j) \\ \theta_{i,j} \neq \theta_{i,j}^f & \text{se } p_i \text{ pertence a } (i, j) \end{cases} \quad (3.35)$$

ou seja, espera-se que as posições ocupadas pelo parâmetro, p_i na matriz Θ sofram alteração numérica quando comparadas antes e depois da falha. Por outro lado, a estimativa das demais coordenadas $\theta_{i,j}$, que não estão relacionadas ao parâmetro com falha, devem permanecer idealmente constantes. A partir desta análise, pode-se localizar as coordenadas alteradas e assim identificar os parâmetros relacionados a falha.

A dificuldade desta verificação está no fato de que os parâmetros físicos do modelo estão combinados nas coordenadas (i, j) da matriz Θ conforme (3.20). e, quanto maior a combinação de parâmetros, mais difícil a identificação exata do parâmetro com falha. Se a matriz de massa global do sistema não estiver na forma diagonal, por exemplo, a multiplicação de sua inversa pelas demais matrizes do sistema faz com que os parâmetros físicos relacionados a matriz de massa sejam distribuídos por toda a matriz Θ . Caso a falha do sistema esteja relacionada aos parâmetros de massa, será difícil localizar o parâmetro que sofreu alteração. No entanto, pode-se modificar a expressão de estimação para uma forma onde a matriz de parâmetros está numa forma mais simplificada, ou seja, com menor combinação de parâmetros em cada coordenada. Esta idéia será explorada nos casos 2 e 3 a seguir.

3.2.2 - Caso 2 : $\mathbf{P}_{(n,f)}^T$, $f > n$

Considera-se agora que a dimensão do sistema filtro seja maior que o número de graus de liberdade do sistema original, ($f > n$). A matriz de correlação não conhecida na expressão (3.18), $\mathbf{R}_{\dot{y}}(\tau)$, pode ser retirada da equação, fazendo-se novamente uso de um vetor de desacoplamento $\mathbf{s}_{(f,1)}$, não nulo, tal que

$$\mathbf{P}^T \mathbf{s} = \mathbf{0}. \quad (3.36)$$

A condição (3.36) pode facilmente ser obtida, uma vez que a matriz $\mathbf{P}_{(n,f)}^T$ é uma matriz de distribuição de entradas, numérica, constante e escolhida apropriadamente. A dinâmica do sistema filtro depende do número de entradas definidas pela matriz \mathbf{P} . É de se esperar que uma possível falha altere a resposta do sistema, $\mathbf{y}(t)$, de forma diferenciada e desconhecida. A princípio, não se conhece qual coordenada do vetor de medidas será mais ou menos influenciada pela ação de uma falha. Neste sentido é interessante montar a matriz de entradas do sistema filtro de modo que todas as coordenadas de resposta medidas sejam utilizadas como entradas do sistema filtro.

Considera-se então que a matriz $\mathbf{P}_{(n,f)}^T$, seja montada observando-se a orientação anterior. Neste caso em análise, a dimensão do filtro é maior ou no mínimo igual a dimensão das matrizes do sistema. (\mathbf{M} , \mathbf{S} , \mathbf{D} e \mathbf{U}). O número de vetores \mathbf{s}_i , $i = 1, \dots, j$, linearmente independentes e não nulos, que satisfazem a condição (3.36), é dado por (ver Apêndice A):

$$j = f - \text{Posto}[\mathbf{P}^T] \quad (3.37)$$

Para que exista ao menos um vetor \mathbf{s}_i , deve ocorrer,

$$\text{Posto}[\mathbf{P}^T] < f, \quad (3.38)$$

o que sempre se verifica uma vez que, neste caso, a matriz \mathbf{P}^T tem no máximo (n) linhas linearmente independentes, ou seja,

$$\text{Posto}[\mathbf{P}^T] \leq n. \quad (3.39)$$

Para sistemas com grande número de graus de liberdade, o sistema filtro a ser montado, fica com dimensão muito grande, o que torna a tarefa de escolher \mathbf{P} e \mathbf{N} mais trabalhosa. Isto pode no entanto ser modificado, como mostra o Caso 3.

3.2.3 - Caso 3 : $\mathbf{P}_{(n,f)}^T$, $f < n$.

Considera-se agora a matriz $\mathbf{P}_{(n,f)}^T$ com $f < n$. Neste caso, a dimensão do filtro é menor que a dimensão das matrizes do sistema. O número de vetores \mathbf{s}_i , $i = 1, \dots, j$, linearmente independentes, não nulos, que satisfazem a condição (3.36) é novamente dado por,

$$j = f - \text{Posto}[\mathbf{P}^T]. \quad (3.40)$$

e para que exista ao menos um vetor \mathbf{s}_i , deve ocorrer,

$$\text{Posto}[\mathbf{P}^T] < f. \quad (3.41)$$

Para que a condição (3.41) seja obtida é necessário definir a matriz \mathbf{P}^T com, no máximo, $(f-1)$ linhas linearmente independentes (ver Apêndice A). A equação (3.18) multiplicada a direita pelo vetor \mathbf{s}_i , $i = 1, \dots, j$, tratado no Caso 2 ou no Caso 3, resulta em

$$[\mathbf{U} : \mathbf{S} : \mathbf{D} : \mathbf{M}] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uw}(\tau) \\ -\mathbf{R}_{yw}(\tau) \\ \mathbf{R}_{yw}(\tau)\mathbf{N}^T \\ -\mathbf{R}_{yy}(\tau)\mathbf{P}^T\mathbf{N}^T - \mathbf{R}_{yw}(\tau)\mathbf{N}^T\mathbf{N}^T \end{bmatrix} \mathbf{s}_i = \mathbf{0}. \quad (3.42)$$

Esta expressão está numa forma mais adequada para o monitoramento de parâmetros porque relaciona todas as matrizes do sistema, na sua forma original, com matrizes de correlação que podem ser estimadas diretamente a partir das medições. A expressão (3.42) é válida para qualquer defasagem temporal, τ , bem como para qualquer vetor $\mathbf{s}_i, i = 1, \dots, j$ que satisfaça a condição (3.36). Para um determinado vetor \mathbf{s} , obtido a partir do conjunto de soluções $\mathbf{s}_i, i = 1, \dots, j$, definem-se os vetores $\mathbf{r}_U(\tau_i), \mathbf{r}_S(\tau_i), \mathbf{r}_D(\tau_i)$ e $\mathbf{r}_M(\tau_i)$ na forma abaixo:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r}_U(\tau_i) \\ \dots \\ \mathbf{r}_S(\tau_i) \\ \dots \\ \mathbf{r}_D(\tau_i) \\ \dots \\ \mathbf{r}_M(\tau_i) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_{uw}(\tau_i)\mathbf{s} \\ \dots \\ -\mathbf{R}_{yw}(\tau_i)\mathbf{s} \\ \dots \\ [\mathbf{R}_{yw}(\tau_i)\mathbf{N}^T]\mathbf{s} \\ \dots \\ [-\mathbf{R}_{yy}(\tau_i)\mathbf{P}^T\mathbf{N}^T - \mathbf{R}_{yw}(\tau_i)\mathbf{N}^T\mathbf{N}^T]\mathbf{s} \end{Bmatrix}. \tag{3.43}$$

Com estas definições, a expressão (3.42) assume a forma,

$$\mathbf{U}\mathbf{r}_U(\tau_i) + \mathbf{S}\mathbf{r}_S(\tau_i) + \mathbf{D}\mathbf{r}_D(\tau_i) + \mathbf{M}\mathbf{r}_M(\tau_i) = \mathbf{0}. \tag{3.44}$$

Escrevendo-se a expressão (3.44) para diferentes defasagens temporais $\tau_i, i = 1, \dots, k$, da mesma forma já descrita anteriormente, obtém-se um sistema com k equações vetoriais, linearmente independentes. Este conjunto de equações pode ser representado em uma única expressão matricial na seguinte forma,

$$\mathbf{U}\mathbf{R}_U(\tau) + \mathbf{S}\mathbf{R}_S(\tau) + \mathbf{D}\mathbf{R}_D(\tau) + \mathbf{M}\mathbf{R}_M(\tau) = \mathbf{O}_{(n,k)}, \tag{3.45}$$

com as seguintes definições,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_U(\tau) &= [\mathbf{r}_U(\tau_1), \dots, \mathbf{r}_U(\tau_k)] \quad , \quad \mathbf{R}_S(\tau) = [\mathbf{r}_S(\tau_1), \dots, \mathbf{r}_S(\tau_k)], \\ \mathbf{R}_D(\tau) &= [\mathbf{r}_D(\tau_1), \dots, \mathbf{r}_D(\tau_k)] \quad , \quad \mathbf{R}_M(\tau) = [\mathbf{r}_M(\tau_1), \dots, \mathbf{r}_M(\tau_k)]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

O resultado obtido em (3.45) pode ser utilizado para o monitoramento de parâmetros do sistema, ou para a localização do parâmetro físico diretamente relacionado a falha no sistema. A estimativa das matrizes do sistema para o sistema funcionando na condição estacionária sem falhas e na condição estacionária com falhas, leva à localização do parâmetro (ou do conjunto de parâmetros) que esta relacionado à falha. Esta análise pode ser feita separadamente para cada matriz do sistema, desde que a possível falha esteja restrita aos parâmetros contidos em apenas uma das matrizes do modelo. Supondo-se que a falha do sistema em estudo está restrita aos parâmetros ligados a matriz de entradas, \mathbf{U} , pode-se estimar esta matriz na condição normal, fazendo-se,

$$\mathbf{U} = -[\mathbf{S} \quad \mathbf{D} \quad \mathbf{M}] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_S(\tau) \\ \mathbf{R}_D(\tau) \\ \mathbf{R}_M(\tau) \end{bmatrix} [\mathbf{R}_U(\tau)]^+ \quad (3.47)$$

Para que a estimativa da matriz \mathbf{U} seja correta, deve-se garantir que a matriz de correlação $\mathbf{R}_U(\tau)$ tenha posto cheio. Isto pode ser obtido escolhendo-se apropriadamente os valores de $\tau_i, i = 1, \dots, k$. A matriz $\mathbf{R}_U(\tau)$ tem dimensão (p, k) , então, deve-se fazer $k \geq p$. Por hipótese, as matrizes \mathbf{S} , \mathbf{D} , e \mathbf{M} , não se modificam devido a falha no sistema. Sendo assim, a estimativa da matriz \mathbf{U} na forma (3.47) pode ser aplicada também para a condição do sistema estacionário com falha em algum parâmetro da matriz \mathbf{U} . Denominado-se \mathbf{U}^f a estimativa da matriz \mathbf{U} , na condição de falha do sistema, pode-se escrever,

$$\mathbf{U}^f = -[\mathbf{S} \quad \mathbf{D} \quad \mathbf{M}] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_S^f(\tau) \\ \mathbf{R}_D^f(\tau) \\ \mathbf{R}_M^f(\tau) \end{bmatrix} [\mathbf{R}_U^f(\tau)]^+ \quad (3.48)$$

onde as matrizes de correlação são estimadas na condição do sistema estacionário com falha. Conhecendo-se a localização dos parâmetros físicos pertencentes a matriz de entradas, e seus valores numéricos, pode-se verificar qual coordenada apresenta modificação de valor comparando-se a matriz \mathbf{U} com a matriz estimada \mathbf{U}^f . A localização exata do parâmetro, ou dos parâmetros, que sofreram modificação será mais fácil se o parâmetro com falha estiver isolado em alguma coordenada da matriz de entradas. A metodologia aplicada na estimativa da matriz de entradas se aplica também na estimativa das demais matrizes do sistema. A estimativa da matriz de rigidez, na condição normal e na condição de falha, será dada por,

$$\mathbf{S} = [\mathbf{U} \quad : \quad -\mathbf{D} \quad : \quad -\mathbf{M}] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_U(\tau) \\ \mathbf{R}_D(\tau) \\ \mathbf{R}_M(\tau) \end{bmatrix} [\mathbf{R}_S(\tau)]^+, \quad (3.49)$$

$$\mathbf{S}^f = [\mathbf{U} \quad : \quad -\mathbf{D} \quad : \quad -\mathbf{M}] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_U^f(\tau) \\ \mathbf{R}_D^f(\tau) \\ \mathbf{R}_M^f(\tau) \end{bmatrix} [\mathbf{R}_S^f(\tau)]^+, \quad (3.50)$$

onde deve ocorrer,

$$\text{Posto}[\mathbf{R}_S(\tau)] = n, \quad k \geq n. \quad (3.51)$$

Esta expressão é válida somente se a falha do sistema está relacionada aos parâmetros físicos restritos a matriz de rigidez. Analogamente, a matriz de amortecimento e a matriz de massa são estimadas na condição normal e na condição com falha, na forma como segue:

$$\mathbf{D} = [\mathbf{U} \quad : \quad -\mathbf{S} \quad : \quad -\mathbf{M}] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_U(\tau) \\ \mathbf{R}_S(\tau) \\ \mathbf{R}_M(\tau) \end{bmatrix} [\mathbf{R}_D(\tau)]^+, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{D}^f = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & : & -\mathbf{S} & : & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_U^f(\tau) \\ \mathbf{R}_S^f(\tau) \\ \mathbf{R}_M^f(\tau) \end{bmatrix} \left[\mathbf{R}_D^f(\tau) \right]^+, \quad (3.53)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & : & -\mathbf{S} & : & -\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_U(\tau) \\ \mathbf{R}_S(\tau) \\ \mathbf{R}_D(\tau) \end{bmatrix} \left[\mathbf{R}_M(\tau) \right]^+, \quad (3.54)$$

$$\mathbf{M}^f = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & : & -\mathbf{S} & : & -\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_U^f(\tau) \\ \mathbf{R}_S^f(\tau) \\ \mathbf{R}_D^f(\tau) \end{bmatrix} \left[\mathbf{R}_M^f(\tau) \right]^+, \quad (3.55)$$

onde,

$$\text{Posto}[\mathbf{R}_D(\tau)] = \text{Posto}[\mathbf{R}_M(\tau)] = n, \quad k \geq n. \quad (3.56)$$

A identificação precisa do parâmetro, ou dos parâmetros, que sofreram modificação depende da forma como estes aparecem combinados nas matrizes do modelo. Para modelos matemáticos de sistemas mecânicos rotativos, definidos a partir da equação de movimento global, (2.1), as matrizes não apresentam intensa combinação de parâmetros, mesmo para sistemas de grande porte. Isto acontece porque os sistemas rotativos apresentam em geral as mesmas características em relação aos planos perpendiculares de modelagem. Desta forma as matrizes do sistema tendem a ser simétricas, com concentração de parâmetros na diagonal e estas características facilitam a localização do parâmetro relacionado a falha.

Uma outra abordagem pode ser conduzida, no sentido de evitar o cálculo da inversa das matrizes de correlação utilizadas na estimativa das matrizes do sistema. Apesar de se conseguir que estas matrizes tenham posto suficiente, ainda surge o problema numérico neste cálculo, uma vez que as matrizes de correlação não podem ser estimadas com precisão absoluta. Busca-se então uma metodologia para localização de falhas, que seja menos sensível aos erros introduzidos nos cálculos das inversas das matrizes de correlação. Seguindo-se a mesma idéia

explorada no capítulo anterior, serão utilizadas funções de resíduo. Esta abordagem será detalhada a seguir.

3.3 - Localização de falhas através das funções de resíduo

As funções de resíduo utilizadas no monitoramento de sistemas dinâmicos podem ser construídas de diversas formas (Patton, 1991, Gertler, 1995a, Frank, 1994). Nesta abordagem, as funções de resíduo, $\mathbf{e}(\tau)$, serão montadas a partir da expressão (3.42), na seguinte forma vetorial,

$$\mathbf{e}(\tau) = \begin{Bmatrix} e_1(\tau) \\ \vdots \\ e_j(\tau) \end{Bmatrix}, \quad i = 1, \dots, j \quad (3.57)$$

onde,

$$\mathbf{e}_i(\tau) = \mathbf{z}_i^T [\mathbf{U} : \mathbf{S} : \mathbf{D} : \mathbf{M}] \mathbf{r}(\tau), \quad \mathbf{r}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uw}(\tau) \\ -\mathbf{R}_{yw}(\tau) \\ \mathbf{R}_{yw}(\tau)\mathbf{N}^T \\ -\mathbf{R}_{yy}(\tau)\mathbf{P}^T\mathbf{N}^T - \mathbf{R}_{yw}(\tau)\mathbf{N}^T\mathbf{N}^T \end{bmatrix} \mathbf{s} \quad (3.58)$$

Os vetores \mathbf{z}_i^T , $i = 1, \dots, j$, linearmente independentes, são adimensionais com dimensão $(1, n)$ e são definidos apropriadamente para selecionar parâmetros de interesse ao monitoramento. A aplicação dos vetores \mathbf{z}_i diretamente sobre as matrizes do sistema, conduz a um conjunto de (j) funções de resíduos, $e_i(\tau)$, onde cada resíduo contém um conjunto apropriado de parâmetros físicos do sistema. Em condições normais de operação, todos os resíduos devem ser idealmente nulos, ou seja,

$$\mathbf{e}(\tau) = \begin{Bmatrix} e_1(\tau) \\ \vdots \\ e_j(\tau) \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, j \quad (3.59)$$

Examina-se, agora, a situação para o sistema funcionando com falha em regime estacionário. Supõe-se que a falha esteja relacionada a um parâmetro físico qualquer, não conhecido a priori, denominado por p_i . As matrizes do sistema ficam modificadas pela alteração no valor de p_i , no entanto, esta alteração também não é conhecida a priori. Indicando-se com o sobrescrito (f) as matrizes do sistema na condição de falha, as funções de resíduo nesta condição são dadas por,

$$\mathbf{e}^f(\tau) = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_i^f(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_j^f(\tau) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad , \quad i = 1, \dots, j \quad , \quad (3.60)$$

com as seguintes definições,

$$\mathbf{e}_i^f(\tau) = \mathbf{z}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{U}^f & \mathbf{S}^f & \mathbf{D}^f & \mathbf{M}^f \end{bmatrix} \mathbf{r}^f(\tau) \quad , \quad \mathbf{r}^f(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uw}^f(\tau) \\ -\mathbf{R}_{yw}^f(\tau) \\ \mathbf{R}_{yw}^f(\tau) \mathbf{N}^T \\ -\mathbf{R}_{yy}^f(\tau) \mathbf{P}^T \mathbf{N}^T - \mathbf{R}_{yw}^f(\tau) \mathbf{N}^T \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \mathbf{s} \quad . \quad (3.61)$$

As funções de resíduo definidas desta forma, não podem ser na verdade estimadas, uma vez que não se conhece o efeito da falha sobre as matrizes do sistema. Portanto é necessário redefinir os resíduos na condição de falha na seguinte forma,

$$\mathbf{e}_i^f(\tau) = \mathbf{z}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{S} & \mathbf{D} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{r}^f(\tau) \quad (3.62)$$

onde,

$$\mathbf{e}_i^f(\tau) = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_i^f(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_j^f(\tau) \end{Bmatrix} \neq \mathbf{0} \quad , \quad i = 1, \dots, j \quad (3.63)$$

A estimativa dos resíduos não nulos de acordo com (3.62) indica que o sistema tem uma falha. A alteração no valor dos resíduos depende da intensidade da falha e também da sensibilidade do sistema em relação aos parâmetros com falha. A alteração numérica dos resíduos para valores diferentes de zero será tanto maior, quanto maior for a sensibilidade do sistema ao parâmetro com falha (Chiarello, 1997).

Por hipótese inicial, as matrizes do modelo são conhecidas, bem como a localização dos parâmetros nas matrizes. Idealmente, os vetores z_i devem ser definidos de modo que, ao menos, uma função de resíduo seja independente do parâmetro p_i e que, as demais funções de resíduo contenham este parâmetro. Se as funções de resíduo forem montadas desta forma, pode-se dizer que, ao menos, uma função de resíduo não sofrerá variação numérica por efeito da falha e as demais funções terão variação não nula. Neste caso vale então a seguinte lógica de decisão,

$$\begin{cases} e_i^f(\tau) = 0 & \text{se } p_i \text{ não pertence a } e_i(\tau) \\ e_i^f(\tau) \neq 0 & \text{se } p_i \text{ pertence a } e_i(\tau), \quad i = 1, \dots, j. \end{cases} \quad (3.64)$$

A condição (3.64) indica que a falha no sistema está relacionada, ou pertence, ao conjunto de parâmetros físicos definidos nas funções de resíduo não nulas, ou, em outras palavras, a falha está relacionada ao parâmetro que não aparece nas funções de resíduo nulas. Idealmente, objetiva-se montar os vetores z_i de forma que cada parâmetro importante no monitoramento do sistema, de modo que a condição (3.64) possa ser aplicada para cada parâmetro. O produto vetorial,

$$z_i^T [U : S : D : M], \quad (3.65)$$

fornece um conjunto de funções onde, cada conjunto é montado para monitorar um determinado parâmetro do modelo. Para exemplificar, seja o vetor z_i definido na forma,

$$\mathbf{z}_1^T = \left\{ 1 \quad \vdots \quad \mathbf{0}_{(1, n-1)} \right\}. \quad (3.66)$$

A aplicação deste vetor sobre as matrizes do modelo produz uma função de resíduo $e_1(\tau)$, que contém apenas os parâmetros físicos pertencentes a primeira linha das matrizes do modelo. O vetor \mathbf{z}_1 define, portanto, qual o conjunto de parâmetros que está presente na função de resíduo. A identificação precisa do parâmetro com falha só será obtida, no entanto, se for possível montar ao menos uma função de resíduo independente de cada parâmetro do sistema. Porém, dependendo da estrutura interna das matrizes, isto pode não ser possível, porque parâmetros diferentes podem ocupar a mesma posição nas matrizes do sistema. Ainda assim, é possível localizar o grupo de parâmetros ao qual pertence o parâmetro que sofreu variação. Neste caso, a localização física da falha não é ideal, mas consegue-se precisar, ao menos, quais parâmetros não estão relacionados a falha. Os parâmetros que não são responsáveis pela falha, aparecem nas funções de resíduo que permanecem inalteradas (resíduo nulo) após a falha.

Analisa-se, agora, o problema da estimativa das matrizes de correlação. A localização do grupo de parâmetros que contém o parâmetro com falha não mais necessita do cálculo da inversa da matriz de correlação, na forma (3.47), ... , (3.54). No entanto, como já foi salientado anteriormente, as matrizes de correlação não podem ser estimadas com precisão absoluta. Além do problema numérico na estimação destas matrizes de correlação, na prática, sempre ocorrem erros de modelagem do sistema, ou seja, diferenças entre o modelo teórico e o sistema real. Nestes casos, é de se esperar que os resíduos não sejam exatamente nulos, como idealmente colocado em (3.58), mas sim próximos de zero, mesmo na condição normal do sistema. Levando-se em conta estas considerações, os resíduos calculados com matrizes de correlação aproximadas serão dados por,

$$\mathbf{e}(\tau) = \begin{Bmatrix} e_1(\tau) \\ \vdots \\ e_j(\tau) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_j \end{Bmatrix} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{e}^f(\tau) = \begin{Bmatrix} e_1^f(\tau) \\ \vdots \\ e_j^f(\tau) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_j \end{Bmatrix} \neq \mathbf{0}, \quad (3.67)$$

onde, δ_i e φ_i , $i = 1, \dots, j$, são os resíduos não nulos estimados respectivamente antes e depois da falha na presença de erros numéricos de estimação e erros de modelagem. A diferença numérica dos resíduos estimados na condição normal e na condição com falha pode ser escrita na seguinte forma,

$$\Delta \mathbf{e}(\tau) = \mathbf{e}_i(\tau) - \mathbf{e}_i^f(\tau) = \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_i^T [\mathbf{U} : \mathbf{S} : \mathbf{D} : \mathbf{M}] \{ \mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}^f(\tau) \} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_j^T [\mathbf{U} : \mathbf{S} : \mathbf{D} : \mathbf{M}] \{ \mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}^f(\tau) \} \end{Bmatrix} \quad (3.68)$$

O vetor $\Delta \mathbf{e}(\tau)$ tem dimensão $(j, 1)$, onde cada elemento é estimado com um conjunto de parâmetros físicos definidos pela aplicação do vetor \mathbf{z}_i sobre as matrizes do sistema. Nestas condições, praticamente todos os resíduos sofrerão algum tipo de variação. Então, como identificar a função de resíduo relacionada à falha? A resposta a esta pergunta segue a mesma lógica aplicada ao caso ideal (matrizes de correlação exatas). O erro de estimativa nas correlações leva à necessidade de se adotar uma tolerância no monitoramento dos resíduos. Admite-se que as variações δ_i sejam toleradas quando o sistema opera sem falhas. Por outro lado, as variações φ_i não serão toleradas e indicarão que o sistema contém alguma falha. A definição destas tolerâncias dependerá da precisão numérica nas estimativas das correlações, bem como, do ajuste do modelo ao sistema real. A função de resíduo relacionada a falha pode então ser identificada encontrando-se a coordenada s dada por,

$$\begin{aligned} |\delta_i - \varphi_i| &= \mathfrak{G}_i, i = 1, \dots, j \\ \text{Máximo}(\mathfrak{G}_i) &= \mathfrak{G}_s, 1 \leq s \leq j. \end{aligned} \quad (3.69)$$

e a seguinte lógica de decisão pode agora ser aplicada:

$$\begin{cases} p_i \text{ pertence a } e_i(\tau) & \text{se } i = s \\ p_i \text{ não pertence a } e_i(\tau) & \text{se } i \neq s \end{cases} \quad (3.70)$$

A condição (3.70) indica que o parâmetro com falha pertence ao conjunto de parâmetros relacionados à função de resíduo com maior variação numérica após a falha. Novamente, a localização precisa do parâmetro com falha só é possível se existir uma função de resíduo independente para cada parâmetro do sistema. Se isto não puder ser obtido, consegue-se, ao menos, localizar o conjunto de parâmetros ao qual pertence o parâmetro com falha. A identificação das funções de resíduo que são mais sensíveis a falha no parâmetro é tanto mais exata, quanto melhor a estimativa das matrizes de correlação. Se o vetor de correlações,

$$\{\mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}^f(\tau)\} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uw}(\tau) - \mathbf{R}_{uw}^f(\tau) \\ -\mathbf{R}_{yw}(\tau) + \mathbf{R}_{yw}^f(\tau) \\ \mathbf{R}_{yw}(\tau)\mathbf{N}^T - \mathbf{R}_{yw}^f(\tau)\mathbf{N}^T \\ \left[\mathbf{R}_{yy}^f(\tau) - \mathbf{R}_{yy}(\tau) \right] \mathbf{P}^T \mathbf{N}^T - \left[\mathbf{R}_{yw}(\tau) - \mathbf{R}_{yw}^f(\tau) \right] \mathbf{N}^T \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \mathbf{s}, \quad (3.71)$$

não for bem estimado, não será possível identificar os resíduos corretamente. Em resumo, a metodologia proposta para localização de falhas baseada na estimação de resíduos, utiliza as seguintes condições de aplicação:

$$\begin{cases} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(n,n)} & \vdots & \mathbf{O}_{(n,n)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}^T = \mathbf{I}_{(n,n)}, \text{ Caso 1} \\ \text{Posto}[\mathbf{P}^T] < f, \text{ Caso 2, Caso 3} \end{cases} \quad (3.72)$$

3.4 - Influência do ruído nos sinais medidos

No capítulo 2 foi analisada a influência do ruído no problema de detecção de falhas no sistema e agora, esta análise será novamente abordada. A figura 3.1 mostra o fluxograma geral do método proposto com a introdução de ruído nas medições. Considera-se, então, que os sinais medidos na saída do sistema estejam na forma dada em (2.82), com matrizes de correlação (2.83), (2.84) e (2.85). As matrizes de correlação envolvendo o sistema filtro, podem ser escritas na seguinte forma,

$$\mathbf{R}_{yw}(\tau) = \mathbf{R}_{y_r,w}(\tau) - \mathbf{R}_{e_y,w}(\tau) \quad , \quad \mathbf{R}_{wy}(\tau) = \mathbf{R}_{w,y_r}(\tau) - \mathbf{R}_{w,e_y}(\tau) \quad , \quad (3.73)$$

$$\mathbf{R}_{uw}(\tau) = \mathbf{R}_{u,w}(\tau) - \mathbf{R}_{e_u,w}(\tau) \quad , \quad \mathbf{R}_{wu}(\tau) = \mathbf{R}_{w,u_r}(\tau) - \mathbf{R}_{w,e_u}(\tau) \quad .$$

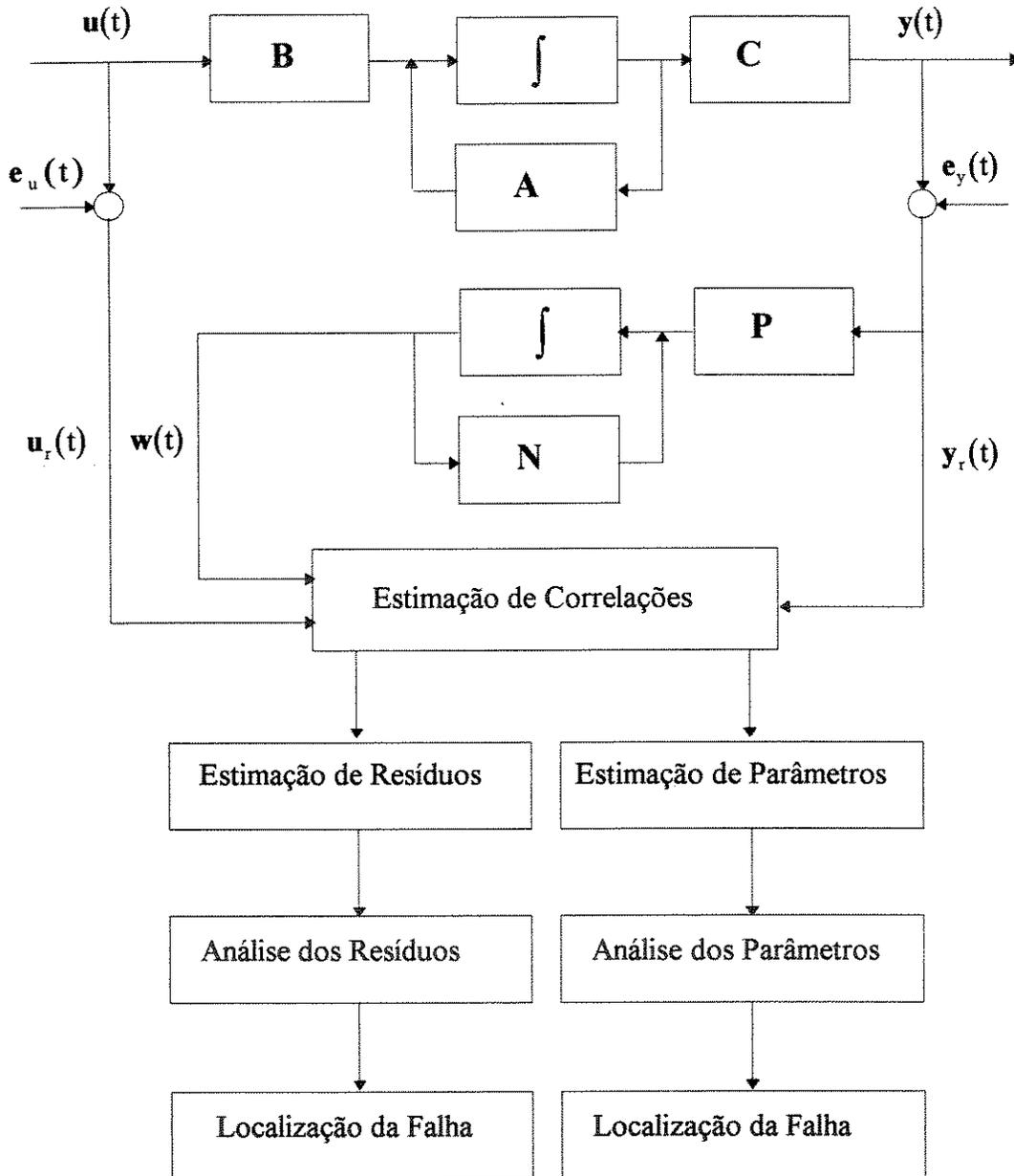


Figura 3.1 - Fluxograma geral do método proposto com ruído nas medições

A localização de falhas através da estimativa dos parâmetros abordado no Caso 1 precisa ser reformulada, devido a presença de ruído nas medidas. A igualdade matricial (3.20) ainda é verdadeira na presença de ruídos nas medidas, quando se redefine as matrizes na forma,

$$\mathbf{R}_c(\tau) = \mathbf{R}_{e_c}(\tau) + \mathbf{R}_{e_r}(\tau)$$

$$\mathbf{R}_{e_c}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{u_r w}(\tau) \\ -\mathbf{R}_{y_r w}(\tau) \\ \mathbf{R}_{y_r y_r}(\tau) + \mathbf{R}_{y_r w}(\tau)\mathbf{N}^T \end{bmatrix}, \mathbf{R}_{e_r}(\tau) = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{e_u w}(\tau) \\ \mathbf{R}_{e_y w}(\tau) \\ -\mathbf{R}_{y_r e_y}(\tau) - \mathbf{R}_{e_y y_r}(\tau) + \mathbf{R}_{e_y e_y}(\tau) - \mathbf{R}_{e_y w}(\tau)\mathbf{N}^T \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

$$\mathbf{R}_d(\tau) = \mathbf{R}_{d_c}(\tau) + \mathbf{R}_{d_r}(\tau),$$

$$\mathbf{R}_{d_c}(\tau) = \left[\mathbf{R}_{w u_r}(\tau) \vdots -\mathbf{R}_{w y_r}(\tau) \vdots \mathbf{R}_{y_r y_r}(\tau) + \mathbf{N} \mathbf{R}_{w y_r}(\tau) \right], \quad (3.75)$$

$$\mathbf{R}_{d_r}(\tau) = \left[-\mathbf{R}_{w e_u}(\tau) \vdots \mathbf{R}_{w e_y}(\tau) \vdots -\mathbf{R}_{y_r e_y}(\tau) - \mathbf{R}_{e_y y_r}(\tau) + \mathbf{R}_{e_y e_y}(\tau) - \mathbf{N} \mathbf{R}_{w e_y}(\tau) \right]$$

$$\Psi(\tau) = \Psi_d(\tau) + \Psi_r(\tau),$$

$$\Psi_d(\tau) = \mathbf{R}_{y_r y_r}(\tau) \mathbf{N}^T + \mathbf{R}_{y_r w}(\tau) \mathbf{N}^T \mathbf{N}^T + \mathbf{N} \mathbf{R}_{y_r y_r}(\tau) + \mathbf{N} \mathbf{N} \mathbf{R}_{w y_r}(\tau), \quad (3.76)$$

$$\Psi_r(\tau) = -\mathbf{R}_{y_r e_y}(\tau) \mathbf{N}^T - \mathbf{R}_{e_y y_r}(\tau) \mathbf{N}^T + \mathbf{R}_{e_y e_y}(\tau) \mathbf{N}^T - \mathbf{R}_{e_y w}(\tau) \mathbf{N}^T \mathbf{N}^T -$$

$$\mathbf{N} \mathbf{R}_{e_y y_r}(\tau) - \mathbf{N} \mathbf{R}_{y_r e_y}(\tau) + \mathbf{N} \mathbf{R}_{e_y e_y}(\tau) - \mathbf{N} \mathbf{N} \mathbf{R}_{w e_y}(\tau).$$

e a expressão básica para estimação de parâmetros, (3.20), fica então na seguinte forma:

$$\Theta \left[\mathbf{R}_{e_c}(\tau) + \mathbf{R}_{e_r}(\tau) \right] + \left[\mathbf{R}_{d_c}(\tau) + \mathbf{R}_{d_r}(\tau) \right] \Theta^T = \left[\Psi_d(\tau) + \Psi_r(\tau) \right]. \quad (3.77)$$

As matrizes de correlação $\mathbf{R}_{e_c}(\tau)$, $\mathbf{R}_{d_c}(\tau)$ e $\Psi_r(\tau)$ dependem do sinal de ruído aditivo e por isso, não podem ser estimadas isoladamente. A estimativa dos parâmetros utilizando os sinais $y_r(t)$, $u_r(t)$ e $w(t)$ diretamente a partir da expressão,

$$\Theta \mathbf{R}_{e_c}(\tau) + \mathbf{R}_{d_c}(\tau) \Theta^T = \Psi_d(\tau) \quad (3.78)$$

leva a valores incorretos. Por outro lado, da mesma forma já analisada no Capítulo 2, se o ruído aditivo for um processo do tipo ruído branco, a estimação dos parâmetros usando (3.78) conduzirá a valores corretos uma vez que neste caso ideal vale escrever,

$$\mathbf{R}_{e_r}(\tau) = \mathbf{R}_{d_r}(\tau) = \Psi_r(\tau) = \mathbf{O}. \quad (3.79)$$

Para o Caso 2 e o Caso 3, o cálculo dos resíduos na presença de ruídos fica na seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} : \mathbf{S} : \mathbf{D} : \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{u,w}(\tau) \\ -\mathbf{R}_{y_r,w}(\tau) \\ \mathbf{R}_{y_r,w}(\tau) \mathbf{N}^T \\ -\mathbf{R}_{y_r,y_r}(\tau) \mathbf{P}^T \mathbf{N}^T - \mathbf{R}_{y_r,w}(\tau) \mathbf{N}^T \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \mathbf{s} = \quad (3.80)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{e_u,w}(\tau) \\ -\mathbf{R}_{e_y,w}(\tau) \\ \mathbf{R}_{e_y,w}(\tau) \mathbf{N}^T \\ \left[-\mathbf{R}_{y_r,e_y}(\tau) - \mathbf{R}_{e_y,y_r}(\tau) + \mathbf{R}_{e_y,e_y}(\tau) \right] \mathbf{P}^T \mathbf{N}^T - \mathbf{R}_{e_y,w}(\tau) \mathbf{N}^T \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \mathbf{s}.$$

Portanto, as funções de resíduo calculadas diretamente com o vetor de medidas com ruído (correspondente ao lado esquerdo da igualdade (3.80), não serão nulas mesmo quando não há falha no sistema. Nesta condição, o valor dos resíduos para o sistema sem falha é numericamente igual ao lado direito da igualdade (3.80), ou seja,

$$\mathbf{z}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{e_u,w}(\tau) \\ -\mathbf{R}_{e_y,w}(\tau) \\ \mathbf{R}_{e_y,w}(\tau) \mathbf{N}^T \\ \left[-\mathbf{R}_{y_r,e_y}(\tau) - \mathbf{R}_{e_y,y_r}(\tau) + \mathbf{R}_{e_y,e_y}(\tau) \right] \mathbf{P}^T \mathbf{N}^T - \mathbf{R}_{e_y,w}(\tau) \mathbf{N}^T \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \mathbf{s} \neq 0 \quad (3.81)$$

O resultado (3.81) mostra que, se $e_y(t)$ e $e_u(t)$ forem processos do tipo não branco, a identificação das funções de resíduo relacionadas a uma determinada falha no sistema será mais difícil quando comparadas com o caso ideal (sem ruído). Esta dificuldade será tanto maior,

quanto maior a contribuição da parcela dada pela expressão (3.81). Analogamente ao caso estudado anteriormente, quando foi tratado o problema de erros de modelagem e erros numéricos na estimativa das correlações, deve-se definir uma tolerância para o monitoramento dos resíduos. Esta tolerância deve ser idealmente igual ao valor dado em (3.81). Neste caso, a identificação das funções de resíduo relacionadas a falha somente será possível se a variação dos resíduos estimados na forma

$$e_i(\tau) = \mathbf{z}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} : \mathbf{S} : \mathbf{D} : \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{u,w}(\tau) \\ -\mathbf{R}_{y,w}(\tau) \\ \mathbf{R}_{y,w}(\tau)\mathbf{N}^T \\ -\mathbf{R}_{y,y_r}(\tau)\mathbf{P}^T\mathbf{N}^T - \mathbf{R}_{y,w}(\tau)\mathbf{N}^T\mathbf{N}^T \end{bmatrix} \mathbf{s}, \quad i = 1, \dots, j. \quad (3.82)$$

for maior que a contribuição da parcela dada em (3.81). Por outro lado, no caso ideal de ruído branco, pode-se estimar os resíduos corretamente a partir de (3.82) uma vez que a contribuição da parcela (3.81) será nula.

Em relação a metodologia desenvolvida no capítulo anterior, pode-se dizer que, com a utilização do sistema filtro, consegue-se maior redundância analítica, ou seja, um número maior de funções de resíduo para uma dada configuração de medidas. Com isto, consegue-se isolar um número maior de parâmetros para o monitoramento, o que contribui para uma localização mais fácil do parâmetro relacionado a falha. Ainda assim, a condição imposta sobre a matriz de medidas é um tanto restritiva quando se objetiva aplicações mais realistas. No próximo capítulo, será estudado o problema de detecção de falhas para um sistema mecânico estacionário no qual, não se tem acesso a todos os deslocamentos do vetor de estado.

Capítulo 4

4.1 - Funções de correlação utilizando o sistema filtro e matriz de medidas na forma genérica

No capítulo 3 deste trabalho analisou-se o problema de detecção de falhas em sistemas mecânicos onde se tem acesso às medidas de todos os deslocamentos do modelo de estado. Neste capítulo, serão desenvolvidas expressões para localização de falhas em sistemas mecânicos considerando-se que a matriz de medidas $C_{(m, 2n)}$ do modelo de estado seja uma matriz adimensional, com estrutura interna qualquer. Já foi ressaltado, anteriormente, a importância desta nova condição quando se objetiva uma aplicação da metodologia de detecção de falhas em sistemas reais. No capítulo 2, esta análise foi feita utilizando-se o sistema dinâmico na sua forma original e, agora, deseja-se melhorar as condições de diagnose de falhas utilizando-se um sistema dinâmico auxiliar acoplado à saída do sistema original. Analogamente ao Capítulo 2, este sistema auxiliar será denominado sistema filtro.

Considera-se que o modelo do sistema esteja na forma (2.47). Neste modelo as matrizes \bar{A} e \bar{B} têm estrutura interna genérica e matriz de medidas, \bar{C} , na forma especial. Os parâmetros físicos do modelo encontram-se combinados em cada coordenada das matrizes \bar{A} e \bar{B} . Analogamente ao desenvolvimento feito no capítulo 3, pode-se montar um modelo de estado expandido, aumentando-se o vetor de estado original, $\bar{x}(t)$, com o vetor de estados do sistema filtro, $w(t)$. O modelo de estado expandido, assume agora a seguinte forma,

$$\dot{z}(t) = Dz(t) + Eu(t), \quad (4.1)$$

com as seguintes definições:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{P}\bar{\mathbf{C}} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

A partir da condição de estacionaridade do sistema, pode-se escrever da mesma forma já mostrada no capítulo 2, que a seguinte igualdade matricial é verdadeira:

$$\dot{\mathbf{R}}_{zz}(t) = \mathbf{D}\mathbf{R}_{zz}(t) + \mathbf{R}_{zz}(t)\mathbf{D}^T + \mathbf{E}\mathbf{R}_{uz}(t) + \mathbf{R}_{zu}(t)\mathbf{E}^T = \mathbf{O}. \quad (4.3)$$

Esta expressão pode ser desenvolvida observando-se as estruturas internas das matrizes. Realizando-se as multiplicações das submatrizes com ajuda de (4.2), obtém-se 4 igualdades matriciais:

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{xx}(\tau) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{R}_{ux}(\tau) + \mathbf{R}_{xx}\bar{\mathbf{A}}^T + \mathbf{R}_{xu}(\tau)\bar{\mathbf{B}}^T = \mathbf{O}_{(2n, 2n)}, \quad (4.4)$$

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{xw}(\tau) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{R}_{uw}(\tau) + \mathbf{R}_{xx}\bar{\mathbf{C}}^T\mathbf{P}^T + \mathbf{R}_{xw}(\tau)\mathbf{N}^T = \mathbf{O}_{(2n, f)}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{P}\bar{\mathbf{C}}\mathbf{R}_{xx}(\tau) + \mathbf{N}\mathbf{R}_{wx}(\tau) + \mathbf{R}_{wx}\bar{\mathbf{A}}^T + \mathbf{R}_{wu}(\tau)\bar{\mathbf{B}}^T = \mathbf{O}_{(f, 2n)}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{P}\bar{\mathbf{C}}\mathbf{R}_{xw}(\tau) + \mathbf{N}\mathbf{R}_{ww}(\tau) + \mathbf{R}_{wx}\bar{\mathbf{C}}^T\mathbf{P}^T + \mathbf{R}_{ww}(\tau)\mathbf{N}^T = \mathbf{O}_{(f, f)}. \quad (4.7)$$

A equação (4.4) relaciona apenas matrizes do sistema e já foi analisada no capítulo 2. A equação (4.5) relaciona apenas matrizes do filtro, portanto, não é interessante para a questão de falhas no sistema, uma vez que, não contém parâmetros do modelo. As igualdades (4.5) e (4.6) relacionam parâmetros do sistema com parâmetros do sistema filtro e estão em uma forma que pode ser trabalhada para detecção de falhas. Para analisar as igualdades (4.5) e (4.6), define-se:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1(m,m)} & \mathbf{A}_{2(m,2n-m)} \\ \mathbf{A}_{3(2n-m,m)} & \mathbf{A}_{4(2n-m,2n-m)} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1(m,p)} \\ \mathbf{B}_{2(2n-m,p)} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{R}_{\bar{x}\bar{x}}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) & \mathbf{R}_{yv}(\tau) \\ \mathbf{R}_{vy}(\tau) & \mathbf{R}_{vv}(\tau) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\bar{x}u}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yu}(\tau) \\ \mathbf{R}_{vu}(\tau) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\bar{x}w}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yw}(\tau) \\ \mathbf{R}_{vw}(\tau) \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{R}_{u\bar{x}}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uy}(\tau) & \mathbf{R}_{uv}(\tau) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{w\bar{x}}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{wy}(\tau) & \mathbf{R}_{wv}(\tau) \end{bmatrix}$$

e substituindo-se estas definições na expressão (4.5), obtém-se,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yw}(\tau) \\ \mathbf{R}_{vw}(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{uw}(\tau) + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) & \mathbf{R}_{yv}(\tau) \\ \mathbf{R}_{vy}(\tau) & \mathbf{R}_{vv}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{P}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yw}(\tau) \\ \mathbf{R}_{vw}(\tau) \end{bmatrix} \mathbf{N}^T = \mathbf{O} \quad (4.10)$$

que, pode ser reescrita na forma de duas igualdades matriciais,

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{R}_{yw}(\tau) + \mathbf{A}_2 \mathbf{R}_{vw}(\tau) + \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{uw}(\tau) + \mathbf{R}_{yy}(\tau) \mathbf{P}^T + \mathbf{R}_{yw}(\tau) \mathbf{N}^T = \mathbf{O}_{(m,f)}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{A}_3 \mathbf{R}_{yw}(\tau) + \mathbf{A}_4 \mathbf{R}_{vw}(\tau) + \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{uw}(\tau) + \mathbf{R}_{vy}(\tau) \mathbf{P}^T + \mathbf{R}_{vw}(\tau) \mathbf{N}^T = \mathbf{O}_{(2n-m,f)}. \quad (4.12)$$

Analogamente, abrindo-se a expressão (4.6), obtém-se,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) & \mathbf{R}_{yv}(\tau) \\ \mathbf{R}_{vy}(\tau) & \mathbf{R}_{vv}(\tau) \end{bmatrix} + \mathbf{N} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{wy}(\tau) & \mathbf{R}_{wv}(\tau) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{wy}(\tau) & \mathbf{R}_{wv}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{A}_3^T \\ \mathbf{A}_2^T & \mathbf{A}_4^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{wu}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{O} \end{aligned} \quad (4.13)$$

que pode ser reescrita também na forma de duas igualdades matriciais,

$$\mathbf{P} \mathbf{R}_{yy}(\tau) + \mathbf{N} \mathbf{R}_{wy}(\tau) + \mathbf{R}_{wy} \bar{\mathbf{A}}_1^T + \mathbf{R}_{wv}(\tau) \mathbf{A}_2^T + \mathbf{R}_{wu}(\tau) \mathbf{B}_1^T = \mathbf{O}_{(f,m)}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{P}\mathbf{R}_{yw}(\tau) + \mathbf{N}\mathbf{R}_{vw}(\tau) + \mathbf{R}_{wy}\overline{\mathbf{A}}_3^T + \mathbf{R}_{wv}(\tau)\mathbf{A}_4^T + \mathbf{R}_{wu}(\tau)\mathbf{B}_2^T = \mathbf{O}_{(f, 2n-m)}. \quad (4.15)$$

Para a equação (4.7), obtém-se a seguinte igualdade,

$$\mathbf{P}\mathbf{R}_{yw}(\tau) + \mathbf{N}\mathbf{R}_{vw}(\tau) + \mathbf{R}_{wy}\mathbf{P}^T + \mathbf{R}_{wv}(\tau)\mathbf{N}^T = \mathbf{O}_{(f, f)}. \quad (4.16)$$

Como o vetor $\mathbf{v}(t)$ não é medido, todas as matrizes de correlação envolvendo este vetor não podem ser estimadas diretamente. Da mesma forma feita no capítulo 2, a matriz de transformação \mathbf{T} será particionada de acordo com (2.56), usando-se as mesmas definições de (2.57). Com estas definições as expressões (4.11) e (4.12) ficam na seguinte forma,

$$\begin{aligned} & [\mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_5\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}_3] \mathbf{R}_{yw}(\tau) + [\mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_5\mathbf{T}_4 - \mathbf{T}_6\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}_4] \mathbf{R}_{vw}(\tau) + \\ & \mathbf{B}_1\mathbf{R}_{uw}(\tau) + \mathbf{R}_{yy}(\tau)\mathbf{P}^T + \mathbf{R}_{yw}(\tau)\mathbf{N}^T = \mathbf{O}_{(m, f)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} & [\mathbf{T}_8\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_7\mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_8\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}_3] \mathbf{R}_{yw}(\tau) + [\mathbf{T}_8\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_7\mathbf{T}_4 - \mathbf{T}_8\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}_4] \mathbf{R}_{vw}(\tau) + \\ & \mathbf{B}_2\mathbf{R}_{uw}(\tau) + \mathbf{R}_{vy}(\tau)\mathbf{P}^T + \mathbf{R}_{vw}(\tau)\mathbf{N}^T = \mathbf{O}_{(2n-m, f)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

A expressão (4.17) contém apenas uma matriz de correlação que não pode ser estimada diretamente, porém, impondo-se algumas condições sobre as matrizes envolvidas nesta expressão, obtém-se relações convenientes para o monitoramento dos parâmetros físicos do modelo. Esta análise será feita a seguir.

4.2 - Localização de falhas através da estimação de parâmetros

Na equação (4.17) pode-se montar as matrizes \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 , \mathbf{T}_3 e \mathbf{T}_4 da mesma forma feita no Capítulo 2. Deve-se lembrar, entretanto, que a construção das matrizes \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 , \mathbf{T}_3 e \mathbf{T}_4 está limitada a condição de que a matriz \mathbf{T} seja regular. Reescrevendo a equação (4.17) segue,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yw}(\tau) \\ \mathbf{R}_{uw}(\tau) \end{bmatrix} = -\mathbf{A}_2 \mathbf{R}_{vw}(\tau) - \mathbf{R}_{yy}(\tau) \mathbf{P}^T - \mathbf{R}_{yw}(\tau) \mathbf{N}^T. \quad (4.19)$$

Analogamente a metodologia descrita no capítulo 2, definem-se os vetores linha \mathbf{s}_i^T , $i = 1, \dots, j$, com dimensão $(1, m)$ numéricos e linearmente independentes, não nulos, tais que:

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{A}_2 = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{s}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}. \quad (4.20)$$

Deve-se analisar agora as condições de existência dos vetores \mathbf{s}_i^T , $i = 1, \dots, j$. Considerando-se o número de medidas em relação a ordem do modelo, dois casos podem existir:

- Caso 1 : $m \leq n$
- Caso 2 : $m > n$

No Caso 1, para que exista ao menos 1 vetor \mathbf{s}^T deve-se ter,

$$\text{Posto}[\mathbf{A}_2] < m \quad (4.21)$$

O número j de vetores \mathbf{s}_i^T , $i = 1, \dots, j$, linearmente independentes, que satisfazem a condição (4.20) é,

$$j = m - \text{Posto}[\mathbf{A}_2]. \quad (4.22)$$

No Caso 2, sempre existirá ao menos um vetor \mathbf{s}^T , uma vez que, sempre vale a relação:

$$\text{Posto}[\mathbf{A}_2] \leq 2n - m. \quad (4.23)$$

O número j de vetores \mathbf{s}_i^T , $i = 1, \dots, j$, linearmente independentes, que satisfazem a condição (4.20) é,

$$j = m - \text{Posto}[\mathbf{A}_2]. \quad (4.24)$$

Os resultados (4.22) e (4.24) estão demonstrados no Apêndice A. Multiplicando-se a esquerda a expressão (4.20) pelos vetores \mathbf{s}_i^T , $i = 1, \dots, j$, obtém-se:

$$\mathbf{s}_i^T [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yw}(\tau) \\ \mathbf{R}_{uw}(\tau) \end{bmatrix} = -\mathbf{s}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) & \mathbf{R}_{yw}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T \\ \mathbf{N}^T \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Esta equação pode, agora, ser usada para monitorar o sistema, uma vez que relaciona matrizes do modelo com matrizes de correlação que podem ser estimadas diretamente. A igualdade vetorial (4.25) se aplica para o sistema sem falha, funcionando em regime estacionário, para diferentes defasagens de tempo. Esta mesma expressão vale também para o sistema com falha em regime estacionário, desde que a falha no sistema não esteja relacionada a parâmetros do modelo presentes na matriz \mathbf{A}_2 . Se esta condição for observada pode-se escrever,

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2^f \text{ e } \mathbf{s}_i^T \mathbf{A}_2^f = \mathbf{0} \quad (4.26)$$

onde \mathbf{A}_2^f representa a matriz \mathbf{A}_2 do sistema com falha. A expressão (4.25) aplicada ao sistema com falha, em regime estacionário, fica na forma,

$$\mathbf{s}_i^T [\mathbf{A}_1^f \quad \mathbf{B}_1^f] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yw}^f(\tau) \\ \mathbf{R}_{uw}^f(\tau) \end{bmatrix} = -\mathbf{s}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}^f(\tau) & \mathbf{R}_{yw}^f(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T \\ \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

onde, as matrizes \mathbf{A}_1^f e \mathbf{B}_1^f são matrizes do modelo alteradas devido a presença dos parâmetros com falha. As matrizes de correlação $\mathbf{R}_{yw}^f(\tau)$, $\mathbf{R}_{uw}^f(\tau)$ e $\mathbf{R}_{yy}^f(\tau)$ são estimadas na condição de regime estacionário para o sistema com falha. Os vetores de parâmetros,

$s_i^T[A_i \ B_i]$ e $s_i^T[A_i^f \ B_i^f]$, $i = 1, \dots, j$, podem ser estimados numericamente a partir da equação (4.25) e (4.27) utilizando-se a inversa generalizada, ou seja,

$$s_i^T[A_i \ B_i] = -s_i^T \begin{bmatrix} R_{yy}(\tau) & R_{yw}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^T \\ N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{yw}(\tau) \\ R_{uw}(\tau) \end{bmatrix}^+ \quad (4.28)$$

$$s_i^T[A_i^f \ B_i^f] = -s_i^T \begin{bmatrix} R_{yy}^f(\tau) & R_{yw}^f(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^T \\ N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{yw}^f(\tau) \\ R_{uw}^f(\tau) \end{bmatrix}^+ \quad (4.29)$$

onde a dimensão dimensão (f) do sistema filtro deve ser,

$$f \geq m + p. \quad (4.30)$$

As expressões (4.28) e (4.29) permitem estimar os parâmetros físicos que aparecem combinados em $s_i^T[A_i \ B_i]$, $i = 1, \dots, j$, para o sistema funcionando na condição sem falhas e para a condição de falha. O número de parâmetros físicos que se consegue monitorar no sistema será tanto maior quanto maior for o número de vetores s_i^T , $i = 1, \dots, j$, que satisfazem a condição (4.20). Nota-se que, a estimativa numérica dos vetores $s_i^T[A_i \ B_i]$, $i = 1, \dots, j$, de acordo com as expressões (4.28) e (4.29) representa o valor numérico de cada coordenada j , $j = 1, \dots, m + p$, daquele vetor onde os parâmetros físicos do modelo aparecem combinados. Desta forma, não se consegue estimar ou monitorar individualmente cada parâmetro, mas obtém-se a estimativa de um conjunto de parâmetros combinados algebricamente.

Analogamente aos casos anteriores, supõe-se que a falha no sistema seja representada por uma variação abrupta no valor numérico de um ou mais parâmetros do modelo. Pode-se montar uma lógica de decisão para localizar dos parâmetros físicos relacionados à falha, baseada na variação numérica de cada coordenada dos vetores de parâmetros estimados. Definindo-se estas variações por δ_{ij} , $j = 1, \dots, m + p$, na forma,

$$\begin{aligned}
 [\delta_{i1}, \dots, \delta_{im+p}] &= \mathbf{s}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}^f(\tau) & \mathbf{R}_{yw}^f(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T \\ \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yw}^f(\tau) \\ \mathbf{R}_{uw}^f(\tau) \end{bmatrix}^+ - \\
 &\mathbf{s}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) & \mathbf{R}_{yw}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T \\ \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yw}(\tau) \\ \mathbf{R}_{uw}(\tau) \end{bmatrix}^+, \quad i = 1, \dots, j.
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

pode-se escrever,

$$\begin{cases}
 \delta_{ij} = 0, & \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Parâmetro com falha não pertence à coordenada } j \\ \text{do vetor de parâmetros } \mathbf{s}_i^T [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_1] \end{array} \right] \\
 \delta_{ij} \neq 0, & \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Parâmetro com falha pertence à coordenada } j \\ \text{do vetor de parâmetros } \mathbf{s}_i^T [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_1] \end{array} \right]
 \end{cases}
 \tag{4.32}$$

A identificação dos parâmetros relacionados à falha dependerá, portanto, da forma como os parâmetros do modelo aparecem combinados algebricamente nos vetores $\mathbf{s}_i^T [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_1]$, $i = 1, \dots, j$. É evidente que, quanto maior a combinação algébrica dos parâmetros em cada coordenada, mais difícil é a localização dos parâmetros relacionados a falha. Entretanto, é possível ao menos identificar o grupo de parâmetros do modelo ao qual pertencem os parâmetros relacionados a falha do sistema. Resume-se, a seguir, o conjunto de condições que esta metodologia de detecção de falhas exige para ser utilizada:

$$\begin{cases}
 \text{Posto}[\mathbf{T}] = 2n \\
 \text{Posto}[\mathbf{A}_2] < m \quad , \quad \text{Caso 1} \\
 \text{Parâmetro com falha não pertence à matriz } \mathbf{A}_2 \\
 \text{Dimensão do filtro } f \geq m + p \quad .
 \end{cases}
 \tag{4.33}$$

A localização dos parâmetros relacionados a falha por meio de (4.31) e (4.32) necessita do cálculo da inversa das matrizes de correlação. Para sistemas com grande número de graus de liberdade, a estimativa destas matrizes podem ser difíceis de serem obtidas exatamente, uma vez que é necessário utilizar um sistema filtro de ordem maior que o número de medidas do sistema. Analogamente aos capítulos 2 e 3 para evitar estes problemas numéricos, propõe-se a

utilização de funções de resíduo para o monitoramento de parâmetros do sistema. Esta abordagem será descrita a seguir.

4.3 - Localização de falhas através das funções de resíduo

4.3.1 - Método 1

As equações de estimação (4.28) e (4.29) exigem que a dimensão do filtro satisfaça a condição (4.30). As matrizes de correlação em (4.25) não podem ser invertidas diretamente caso esta condição não seja observada. Para tornar o projeto do sistema filtro mais simples, pode-se utilizar o caso limite onde o sistema filtro tem dimensão unitária ($f = 1$). Neste caso o sistema filtro assume a seguinte forma,

$$\dot{w}(t) = Nw(t) + p^T y(t) \quad (4.34)$$

onde N é um valor numérico escolhido apropriadamente em função da frequência de atenuação do filtro. O vetor p^T tem dimensão $(1, m)$ e é definido apropriadamente. Algumas observações sobre a escolha ideal dos parâmetros do sistema filtro são colocadas no Capítulo 5. A expressão (4.25) pode então ser transformada em uma expressão de resíduo na forma,

$$e_i(\tau) = s_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{yw}(\tau) \\ r_{uw}(\tau) \end{Bmatrix} + s_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) & r_{yw}(\tau) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ N \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

e para condições normais de operação vale escrever:

$$e_i(\tau) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, j. \quad (4.36)$$

Analisa-se, agora, a aplicação desta função de resíduo após a ocorrência de uma falha no sistema. Da mesma forma anteriormente analisada, considera-se que, os parâmetros relacionados a falha no sistema não pertençam a matriz \mathbf{A}_2 . Nesta condição as funções de resíduo assumem a seguinte forma,

$$\mathbf{e}_i^f(\tau) = \mathbf{s}_i^T [\mathbf{A}_1^f \quad \mathbf{B}_1^f] \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{yw}^f(\tau) \\ \mathbf{r}_{uw}^f(\tau) \end{Bmatrix} + \mathbf{s}_i^T [\mathbf{R}_{yy}^f(\tau) \quad \mathbf{r}_{yw}^f(\tau)] \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{N} \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

e na condição estacionária com falha, vale escrever:

$$\mathbf{e}_i^f(\tau) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, j. \quad (4.38)$$

As funções de resíduo na forma (4.37) não podem ser estimadas uma vez que não se conhece, a priori, o efeito da falha no sistema, ou, em outras palavras, as matrizes \mathbf{A}_1^f e \mathbf{B}_1^f são desconhecidas. Portanto, é necessário redefinir as funções de resíduo na condição de falha na seguinte forma:

$$\mathbf{e}_i^f(\tau) = \mathbf{s}_i^T [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_1] \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{yw}^f(\tau) \\ \mathbf{r}_{uw}^f(\tau) \end{Bmatrix} + \mathbf{s}_i^T [\mathbf{R}_{yy}^f(\tau) \quad \mathbf{r}_{yw}^f(\tau)] \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{N} \end{Bmatrix} \neq 0. \quad (4.39)$$

Desta forma, uma falha qualquer no sistema implica em resíduos não nulos quando estimados na forma (4.39). Supõe-se, agora, que exista ao menos um vetor de parâmetros qualquer, denominado \mathbf{p}_k , onde,

$$\mathbf{p}_k^T = \mathbf{s}_k^T [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_1] \quad (4.40)$$

que não contém parâmetros relacionados a falha. Neste caso, pode-se escrever que,

$$\mathbf{s}_k^T [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_1] = \mathbf{s}_k^T [\mathbf{A}_1^f \quad \mathbf{B}_1^f] \quad (4.41)$$

e nesta condição os resíduos estimados por (4.39) satisfazem a seguinte relação:

$$\bullet \begin{cases} \mathbf{e}_i^f(\tau) \neq 0 & , \quad i \neq k \\ \mathbf{e}_i^f(\tau) = 0 & , \quad i = k \end{cases} \quad (4.42)$$

A condição (4.42) indica que os resíduos que apresentam variação após a falha contêm os parâmetros físicos relacionados à falha. Os parâmetros físicos do modelo que estão diretamente relacionados à falha não pertencem ao vetor de parâmetros \mathbf{p}_k . Uma vez que, por hipótese inicial, as matrizes do modelo original são conhecidas, pode-se localizar o conjunto de parâmetros do sistema que estão relacionados à falha. Esta análise será tanto mais precisa, quanto maior o número de vetores \mathbf{s}_i^T , $i = 1, \dots, j$. Resume-se, a seguir, as condições necessárias para aplicação desta metodologia de localização de falhas no sistema:

$$\begin{cases} \text{Posto}[\mathbf{T}] = 2n \\ \text{Posto}[\mathbf{A}_2] < m, \text{ Caso 1} \\ \text{Parâmetro com falha não pertence a matriz } \mathbf{A}_2 \end{cases} \quad (4.43)$$

4.3.2 - Método 2

A montagem da matriz de transformação \mathbf{T} , a partir das submatrizes \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 , \mathbf{T}_3 e \mathbf{T}_4 pode ser difícil de ser obtida para modelos complexos, com grande número de parâmetros. Além disso, a condição (4.21) pode conduzir a um número muito pequeno de funções de resíduo, quando o número de medidas do sistema é pequeno. Isto limitaria sobremaneira a capacidade de monitoramento de parâmetros do sistema.

Considera-se que os parâmetros mais importantes do sistema sejam aqueles relacionados aos tipos de falhas que se pretende detectar. É interessante, portanto, uma abordagem deste problema no sentido de garantir que se possa obter um número mínimo de funções de resíduo suficientes para monitorar ao menos os parâmetros mais importantes do sistema. Esta abordagem será desenvolvida agora. Considerando-se a matriz de transformação \mathbf{T} e reagrupando as matrizes da expressão (4.5) de uma outra maneira, consegue-se escrever a seguinte igualdade matricial:

$$[\mathbf{AT} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\bar{x}w}(\tau) \\ \mathbf{R}_{uw}(\tau) \end{bmatrix} = -\mathbf{TR}_{\bar{x}\bar{x}}\bar{\mathbf{C}}^T\mathbf{P}^T - \mathbf{TR}_{\bar{x}w}(\tau)\mathbf{N}^T. \quad (4.44)$$

Definindo-se as matrizes,

$$\left[\mathbf{A}_{(2n,m)}^1 \quad \vdots \quad \mathbf{A}_{(2n,2n-m)}^2 \right] = \mathbf{A}\mathbf{T} \quad , \quad \mathbf{R}_d(\tau) = -\mathbf{TR}_{\bar{x}\bar{x}}\bar{\mathbf{C}}^T\mathbf{P}^T - \mathbf{TR}_{\bar{x}w}(\tau)\mathbf{N}^T, \quad (4.45)$$

e substituindo-se (4.45) em (4.44), chega-se a seguinte relação:

$$\mathbf{A}^1\mathbf{R}_{yw}(\tau) + \mathbf{A}^2\mathbf{R}_{vw}(\tau) + \mathbf{B}\mathbf{R}_{uw}(\tau) = \mathbf{R}_d(\tau) \quad (4.46)$$

A matriz de entradas do filtro, $\mathbf{P}_{(f,m)}$, pode ser escolhida apropriadamente, de forma a existir ao menos um vetor $\mathbf{q}_{(f,1)}$, não nulo, tal que,

$$\mathbf{P}^T\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.47)$$

e isto é possível desde que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Posto}[\mathbf{P}] < f, \text{ se } f \leq m \\ \text{ou} \\ \text{Posto}[\mathbf{P}] < m, \text{ se } m < f \end{array} \right. \quad (4.48)$$

A demonstração a afirmação (4.48) está no Apêndice A. Multiplicando-se a expressão (4.49) a direita pelo vetor \mathbf{q} , vale escrever,

$$\left[\mathbf{A}^1 \quad \mathbf{B} \right] \mathbf{r}_c(\tau) + \mathbf{A}^2\mathbf{R}_{vw}(\tau)\mathbf{q} = \mathbf{r}_d(\tau) \quad (4.49)$$

onde foram utilizadas as seguintes definições:

$$\mathbf{r}_c(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yw}(\tau) \\ \mathbf{R}_{uw}(\tau) \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad , \quad \mathbf{r}_d(\tau) = -\mathbf{TR}_{\bar{x}w}(\tau)\mathbf{N}^T\mathbf{q}. \quad (4.50)$$

A Matriz \mathbf{A}^2 , que contém parâmetros do sistema mecânico, aparece multiplicando a matriz de correlação $\mathbf{R}_{vw}(\tau)$ a esquerda na expressão (4.49). Como esta matriz de correlação não pode ser estimada diretamente, pode-se utilizar novamente os vetores \mathbf{s}_i^T , $i = 1, \dots, j$, com dimensão $(1, 2n)$ tais que,

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{A}^2 = \mathbf{o}_{(1,m)} \quad (4.51)$$

para se obter a expressão de monitoramento na forma desejada,

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_c(\tau) = \varepsilon_i(\tau) \quad , \quad i = 1, \dots, j \quad (4.52)$$

com as seguintes definições:

$$\mathbf{p}_i^T = \mathbf{s}_i^T [\mathbf{A}^1 \quad \mathbf{B}] \quad , \quad \varepsilon_i(\tau) = \mathbf{s}_i^T \mathbf{r}_d(\tau). \quad (4.53)$$

O número (j) de expressões algébricas, linearmente independentes, na forma (4.52), será determinado por (ver Apêndice A):

$$j = 2n - \text{posto}[\mathbf{A}^2]. \quad (4.54)$$

A expressão (4.52) ainda contém o vetor de correlação $\mathbf{r}_d(\tau)$ que não pode ser estimado diretamente. Mesmo assim, esta expressão pode ser utilizada para o monitoramento de parâmetros do sistema desde que algumas condições sejam observadas. Nota-se que, neste caso, o número mínimo de expressões na forma (4.52) que se consegue obter é,

$$j_{\min} = m, \quad (4.55)$$

uma vez que a matriz \mathbf{A}^2 tem posto máximo igual a $(2n - m)$. O resultado (4.55) é interessante para o monitoramento de parâmetros do sistema porque, agora, consegue-se um número mínimo de m funções de resíduo linearmente independentes. Os vetores \mathbf{p}_i^T tem

dimensão $(1, m + p)$ e contêm, em cada coordenada i , $i = 1, \dots, m + p$, uma combinação algébrica de parâmetros físicos do modelo. Esta combinação de parâmetros é conhecida, uma vez que, o modelo do sistema é conhecido, bem como a matriz de transformação T .

A forma como estes parâmetros aparecem combinados depende das características do sistema em estudo, bem como, do vetor de desacoplamento s_i^T . O vetor de correlações $r_c(\tau)$ pode ser calculado facilmente, uma vez que as matrizes de correlação $R_{yw}(\tau)$ e $R_{uw}(\tau)$, podem ser estimadas diretamente. Entretanto, o valor numérico de $\varepsilon_i(\tau)$ é desconhecido porque, $R_{\bar{x}w}(\tau)$ é uma matriz de correlação que não pode ser estimada diretamente através das medições.

Novamente, pode-se dizer que a expressão (4.52) vale para a condição do sistema operando com falha em regime estacionário, desde que, os parâmetros relacionados com a falha do sistema não estejam presentes na matriz A^2 . Aplicando-se (4.52) para o sistema em regime estacionário com falha, obtém-se:

$$\{p_i^f\}^T r_c^f(\tau) = \varepsilon_i^f(\tau), \quad (4.56)$$

onde o índice (f) se refere ao sistema com falha. Supondo-se que exista ao menos um vetor p_k , $1 \leq k \leq j$, não conhecido e que não contém parâmetros relacionados a falha, pode-se escrever que,

$$p_k = p_k^f, \quad (4.57)$$

uma vez que este vetor contém apenas uma combinação algébrica de parâmetros físicos que permanecem inalterados após a falha. Para os demais vetores, p_i , $i = 1, \dots, j$, $i \neq k$, vale escrever,

$$p_i \neq p_i^f \quad (4.58)$$

porque $\mathbf{p}_i, i = 1, \dots, j, i \neq k$ contém uma combinação algébrica dos parâmetros relacionados a falha. Nesta condição, pode-se montar a seguinte igualdade vetorial:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1^T \mathbf{r}_c(\tau) - \{\mathbf{p}_1^f\}^T \mathbf{r}_c^f(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_k^T \mathbf{r}_c(\tau) - \{\mathbf{p}_k^f\}^T \mathbf{r}_c^f(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_j^T \mathbf{r}_c(\tau) - \{\mathbf{p}_j^f\}^T \mathbf{r}_c^f(\tau) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1(\tau) - \varepsilon_1^f(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_k^T [\mathbf{r}_c(\tau) - \mathbf{r}_c^f(\tau)] \\ \vdots \\ \varepsilon_j(\tau) - \varepsilon_j^f(\tau) \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

e reagrupando os termos segue,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1^T [\mathbf{r}_c(\tau) - \mathbf{r}_c^f(\tau)] \\ \vdots \\ \mathbf{p}_k^T [\mathbf{r}_c(\tau) - \mathbf{r}_c^f(\tau)] \\ \vdots \\ \mathbf{p}_j^T [\mathbf{r}_c(\tau) - \mathbf{r}_c^f(\tau)] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_1(\tau) + \Delta \mathbf{p}_1^T \mathbf{r}_c^f(\tau) \\ \vdots \\ \Delta \varepsilon_k(\tau) \\ \vdots \\ \Delta \varepsilon_j(\tau) + \Delta \mathbf{p}_j^T \mathbf{r}_c^f(\tau) \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

onde foram usadas as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_i &= \mathbf{p}_i^f - \mathbf{p}_i \\ \Delta \varepsilon_i(\tau) &= \varepsilon_i(\tau) - \varepsilon_i^f(\tau) \end{aligned} \quad (4.61)$$

O vetores $\Delta \mathbf{p}_i$ contém uma combinação algébrica dos parâmetros relacionados a falha no sistema e são, a priori, desconhecidos. Define-se agora o vetor de variação dos resíduos $\mathbf{e}_{(j,i)}(\tau)$,

$$\mathbf{e}_{(j,i)}(\tau) = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_k(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_j(\tau) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1^T [\mathbf{r}_c(\tau) - \mathbf{r}_c^f(\tau)] \\ \vdots \\ \mathbf{p}_k^T [\mathbf{r}_c(\tau) - \mathbf{r}_c^f(\tau)] \\ \vdots \\ \mathbf{p}_j^T [\mathbf{r}_c(\tau) - \mathbf{r}_c^f(\tau)] \end{Bmatrix}. \quad (4.62)$$

O vetor de variação dos resíduos, assim definido, pode ser estimado diretamente, uma vez que os valores numéricos dos parâmetros físicos são, a priori, conhecidos e os vetores de correlação $\mathbf{r}_c(\tau)$ e $\mathbf{r}_c^f(\tau)$ podem ser estimados diretamente. Então, vale a igualdade vetorial,

$$\mathbf{e}_{(j,i)}(\tau) = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_k(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_j(\tau) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_1(\tau) \\ \vdots \\ \Delta \varepsilon_k(\tau) \\ \vdots \\ \Delta \varepsilon_j(\tau) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_1^T \mathbf{r}_c^f(\tau) \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{p}_j^T \mathbf{r}_c^f(\tau) \end{Bmatrix}. \quad (4.63)$$

Deve-se lembrar que a função de resíduo $\mathbf{e}_k(\tau)$ está relacionada ao vetor de parâmetros \mathbf{p}_k que contém uma combinação algébrica conhecida de parâmetros não relacionados a falha. A identificação do conjunto de parâmetros não relacionados a falha, \mathbf{p}_k , é possível se as seguintes condições forem observadas:

$$|\Delta \varepsilon_i(\tau)| \ll |\Delta \mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_c^f(\tau)|, \quad i = 1, \dots, j. \quad (4.64)$$

Se as condições acima forem respeitadas, pode-se afirmar que as variações dos resíduos serão dadas por,

$$\mathbf{e}_{(j,i)}(\tau) = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_k(\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_j(\tau) \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_1^T \mathbf{r}_c^f(\tau) \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{p}_j^T \mathbf{r}_c^f(\tau) \end{Bmatrix}, \quad (4.65)$$

ou seja, a variação do resíduo relacionado à falha será diferente em intensidade em relação as variações dos demais resíduos. Isto permite identificar qual o parâmetro ou o conjunto de parâmetros que estão relacionados diretamente à falha no sistema. Nota-se que, se as condições (4.64) não forem observadas, não se pode garantir que a variação do resíduo relacionado à falha será menor que as demais mas, mesmo assim, espera-se que esta variação seja diferenciada da variação dos demais resíduos.

A análise dos resíduos na forma (4.65) indica que, os parâmetros relacionados à falha pertencem ao conjunto de parâmetros físicos que aparecem combinados nos vetores

$$\mathbf{s}_i^T [\mathbf{A}^1 \quad \mathbf{B}] \quad , \quad i = 1, \dots, j \quad , \quad i \neq k \quad (4.66)$$

Apesar da localização do parâmetro ou dos parâmetros relacionados a falha não ser precisa nesta metodologia, consegue-se ao menos excluir a possibilidade de alguns parâmetros estarem relacionados a falha no sistema. Resume-se a seguir as condições que este método de localização de falhas exige para ser aplicado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Posto}[\mathbf{T}] = 2n \\ \text{Posto}[\mathbf{P}] < f \quad , \quad \text{se } f \leq m \\ \text{Posto}[\mathbf{P}] < m \quad , \quad \text{se } m < f \\ \text{Parâmetros com falha não pertencem a matriz } \mathbf{A}^2 \\ |\Delta \epsilon_i(\tau)| \ll |\Delta \mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_c^f(\tau)| \quad , \quad i = 1, \dots, j. \end{array} \right. \quad (4.67)$$

As condições impostas sobre o Posto das matrizes, apesar de restritivas, não são difíceis de serem obtidas para modelos pequenos, uma vez que as matrizes \mathbf{T} e \mathbf{P} podem ser obtidas facilmente. A matriz \mathbf{A}^2 limita o número de parâmetros que podem ser monitorados no sistema, uma vez que, por hipótese, os parâmetros do modelo que aparecem combinados na matriz \mathbf{A}^2 não estão relacionados a qualquer falha que possa ocorrer no sistema. Daí a importância de se escolher a matriz de transformação adequada em relação aos parâmetros do sistema que se deseja monitorar.

4.4 - Influência do ruído nos sinais medidos

Da mesma forma tratada nos Capítulos 2 e 3, deseja-se avaliar a influência do ruído aditivo às medições no problema de localização de falha desenvolvido neste capítulo. A estimação de parâmetros do sistema de acordo com (4.32), na presença de ruído aditivo, assume a seguinte forma,

$$\mathbf{s}_i^T [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_1] = -\mathbf{s}_i^T \left[\mathbf{R}_{y_r y_r}(\tau) \quad \mathbf{R}_{y_r w}(\tau) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T \\ \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y_r w}(\tau) \\ \mathbf{R}_{u_r w}(\tau) \end{bmatrix}^+ + \mathbf{e}_{ri}(\tau) \quad (4.68)$$

$$\mathbf{e}_{ri}(\tau) = \mathbf{s}_i^T \left[\mathbf{R}_{y_r y_r}(\tau) \quad \mathbf{R}_{y_r w}(\tau) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T \\ \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{e_y w}(\tau) \\ \mathbf{R}_{e_u w}(\tau) \end{bmatrix}^+ + \quad (4.69)$$

$$\mathbf{s}_i^T \left[\mathbf{R}_{y_r e_y}(\tau) + \mathbf{R}_{e_y y_r}(\tau) - \mathbf{R}_{e_y e_y}(\tau) \quad \mathbf{R}_{e_y w}(\tau) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T \\ \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{y_r w}(\tau) + \mathbf{R}_{e_y w}(\tau) \\ -\mathbf{R}_{u_r w}(\tau) + \mathbf{R}_{e_u w}(\tau) \end{bmatrix}^+$$

A expressão (4.69) mostra que, se o ruído aditivo nas medições for uma seqüência idealmente não correlata para $\tau \neq 0$, (ruído branco), pode-se estimar os parâmetros corretamente utilizando-se diretamente as medições, $\mathbf{y}_r(t)$, e $\mathbf{u}_r(t)$ na forma,

$$\mathbf{s}_i^T [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_1] = -\mathbf{s}_i^T \left[\mathbf{R}_{y_r y_r}(\tau) \quad \mathbf{R}_{y_r w}(\tau) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T \\ \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y_r w}(\tau) \\ \mathbf{R}_{u_r w}(\tau) \end{bmatrix}^+ \quad (4.70)$$

uma vez que, neste caso ideal vale escrever,

$$\mathbf{e}_{ri}(\tau) = \mathbf{0} \quad , \quad i = 1, \dots, j. \quad (4.71)$$

Entretanto, deve-se notar que o sinal de entrada do sistema filtro corresponde ao vetor de medidas com ruído aditivo. Se o sinal de ruído for uma seqüência correlata no tempo (ruído colorido), as matrizes de correlação envolvendo o sinal de ruído não serão nulas. Além disso, sabe-se que o filtro atua como sistema dinâmico estável e neste caso sempre existirá correlação

entre os sinais de entrada do filtro, $y_r(t)$ e a resposta do mesmo, $w(t)$. Neste caso, a estimativa dos parâmetros do sistema através de (4.70) leva a valores não corretos.

Analisa-se agora a influência do ruído para as funções de resíduo definidas no Método 1 deste capítulo. A presença de ruído produz resíduos não nulos, mesmo na ausência de falha no sistema de acordo com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \mathbf{s}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{y,w}(\tau) \\ \mathbf{r}_{u,w}(\tau) \end{Bmatrix} + \mathbf{s}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y,y_r}(\tau) & \mathbf{r}_{y_r,w}(\tau) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{N} \end{Bmatrix} = \\ & \mathbf{s}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{e_y,w}(\tau) \\ \mathbf{r}_{e_u,w}(\tau) \end{Bmatrix} + \mathbf{s}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y,e_y}(\tau) + \mathbf{R}_{e_y,y_r}(\tau) - \mathbf{R}_{e_y,e_y}(\tau) & \mathbf{r}_{e_y,w}(\tau) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{N} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.72)$$

e da mesma forma já tratada nos casos anteriores, observa-se que a influência do ruído na estimação dos resíduos é nula, caso o ruído seja um processo do tipo ruído branco. Neste caso, o lado direito da igualdade (4.72) será nulo e a estimativa dos resíduos pode ser feita diretamente com os valores medidos. Por outro lado, se o sinal de ruído for não branco a estimação dos resíduos utilizando diretamente os sinais $y_i(t)$ e $u_r(t)$ na forma

$$e_i(\tau) = \mathbf{s}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{y,w}(\tau) \\ \mathbf{r}_{u,w}(\tau) \end{Bmatrix} + \mathbf{s}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y,y_r}(\tau) & \mathbf{r}_{y_r,w}(\tau) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{N} \end{Bmatrix}, i = 1, \dots, j. \quad (4.73)$$

leva a valores diferentes de zero e numericamente iguais ao lado direito da igualdade (4.72). Analogamente ao caso já discutido no Capítulo 3, parágrafo 3.4, deve-se definir uma tolerância no monitoramento dos resíduos. Esta tolerância deve ser numericamente igual a

$$\mathbf{s}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{e_y,w}(\tau) \\ \mathbf{r}_{e_u,w}(\tau) \end{Bmatrix} + \mathbf{s}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y,e_y}(\tau) + \mathbf{R}_{e_y,y_r}(\tau) - \mathbf{R}_{e_y,e_y}(\tau) & \mathbf{r}_{e_y,w}(\tau) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{N} \end{Bmatrix} \neq 0. \quad (4.74)$$

Em outras palavras, admite-se que os resíduos apresentem as variações numericamente iguais a (4.74) quando não existe falha no sistema. A análise da influência do ruído para o Método 2 é análoga a análise feita para o Método 1 e portanto não precisa ser desenvolvida.

Até este ponto, foram desenvolvidas as formulações analíticas para tratar o problema de detecção e localização de falhas em sistemas mecânicos com entradas estacionárias. Para melhor avaliar e comparar as diversas metodologias propostas, serão feitas, no próximo capítulo, simulações numéricas em computador utilizando-se modelos de sistemas mecânicos.

Capítulo 5

5.1 - Exemplos de aplicação

Neste capítulo serão analisados alguns exemplos numéricos, com o objetivo de demonstrar a aplicação dos métodos de localização de falhas desenvolvidos nos capítulos anteriores. Os exemplos serão apresentados na mesma seqüência em que os métodos foram desenvolvidos anteriormente e, em todos os exemplos numéricos serão utilizados modelos de sistemas mecânicos conhecidos. A metodologia utilizada na elaboração dos modelos matemáticos não será discutida aqui, uma vez que esta análise não faz parte dos objetivos deste trabalho.

Considera-se que o modelo do sistema seja bem conhecido, bem como o valor numérico dos parâmetros físicos e esteja representado na forma global (2.1). Em qualquer exemplo estudado, considera-se que os parâmetros sejam constantes e qualquer alteração no valor numérico de um parâmetro físico represente um falha no sistema. Todas as simulações numéricas foram feitas em micro computador utilizando o software *Matlab*, bem como rotinas do *Toolbox Control Systems* (Ogata, 1994).

5.2 - Exemplo 1

A equação de correlação (2.6) é básica para a formulação matemática dos métodos de localização de falhas desenvolvidos neste trabalho. Esta equação será analisada numericamente neste exemplo utilizando-se um modelo de sistema mecânico simples. A estimação correta das funções de correlação é um passo importante nesta análise. Neste sentido, dois métodos

diferentes para estimar funções de correlação serão utilizados. Estes métodos foram denominados Método 1 e Método 2.

O Método 1 faz a estimação das correlações utilizando o cálculo por somatório. Este cálculo deve ser aplicado para cada defasagem de tempo, τ_i , definida previamente. Desta forma, os valores da função de correlação são obtidos separadamente, ou seja, para cada defasagem de tempo calcula-se o correspondente valor da função de correlação.

O Método 2 utiliza o cálculo da densidade espectral de potência. Os dados no domínio do tempo são transferidos para o domínio da frequência através da transformada de Fourier. A partir daí, calcula-se a densidade espectral de potência média. A função de correlação é então obtida a partir da transformada inversa de Fourier aplicada à densidade espectral média. Neste método, diferentemente do Método 1, a função de correlação é obtida completamente para todos os valores de τ_i , definidos previamente. As formulações matemáticas do Método 1 e do Método 2 estão colocadas no Apêndice C.

As funções de correlação estimadas por estes dois métodos serão aplicadas na equação (2.6) e a partir daí, serão estimados parâmetros do modelo. Será utilizado um modelo de sistema mecânico simples, do tipo massa-mola-amortecedor, com 1 grau de liberdade, na forma de variáveis de estado,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

com as seguintes definições:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

$$\mathbf{u}(t) = F\text{sen}(\omega t + \phi).\tag{5.3}$$

A definição dos parâmetros do sistema, bem como, seus valores numéricos, estão colocados na Tabela 5.1. O vetor $\mathbf{x}(t)$ é formado pelo vetor de deslocamentos e velocidades do sistema. Os parâmetros k e c serão estimados a partir da equação (2.6) utilizando a metodologia de estimação desenvolvida no Capítulo 2. As condições utilizadas na simulação estão colocadas Tabela 5.2.

$m = 1 \text{ kg}$	massa
$c = 10000 \text{ kg/seg.}$	coeficiente de amortecimento
$k = 100000 \text{ N/m}$	coeficiente de rigidez
$F = 100 \text{ N}$	amplitude da força de excitação
$\phi = \pi / 2 \text{ rad.}$	defasagem angular
$\omega = 10 \text{ rad/seg.}$	freqüência de excitação

Tabela 5.1 - Parâmetros físicos do modelo 1

A variável (N) representa o número total de valores discretos de resposta do sistema utilizados no cálculos das matrizes de correlação. O ruído adicionado aos sinais $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ é um sinal aleatório, com média zero, obtido a partir da função (`>>rand`) do *Matlab*. A intensidade do ruído é calculada em porcentagem do valor *rms* do sinal original, por exemplo, o ruído adicional de 10 % significa que, aos sinais $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ está adicionado um sinal aleatório com intensidade de 10% do valor *rms* do sinal original. A discretização do sistema foi feita utilizando-se a rotina (`>>c2d`) do *Matlab* com tempo de discretização $\Delta t = 0,002$ segundos.

Condição	N	Ruído (% rms)
1	1024	sem ruído
2	1024	10
3	5120	10
4	5120	20

Tabela 5.2 - Condições de estimação do exemplo 1

Objetiva-se determinar qual método de estimação (Método 1 ou Método 2) apresenta melhor desempenho em função das condições de simulação. Para se obter uma melhor estimação dos parâmetros, foram montados sistemas sobredeterminados para diferentes defasagens de tempo, τ_i . Denominando-se a variável $[n]$ com sendo o número de equações utilizadas na estimação de cada parâmetro, pode-se plotar os parâmetros estimados em função desta variável. Esta análise permite identificar o número ótimo de equações a ser utilizado em cada condição.

Os valores estimados dos parâmetros k e c bem como o erro de estimação em relação ao valor exato, estão colocados nas figuras 5.1 a 5.10 em função da variável $[n]$. Neste exemplo, a matriz A do sistema tem dimensão $(2, 2)$, então, deve-se utilizar no mínimo duas equações linearmente independentes, ou seja, $n = 2$, para que se tenha boa estimativa de valores. Utilizou-se o algoritmo da pseudoinversa do *Matlab* ($\gg \text{pinv}$) para estimar as inversas das matrizes de correlação.

O número máximo de equações utilizadas em todas as condições da tabela (5.2) é $n = 50$. Em todas as figuras, o Método 1 está identificado com a cor azul e o Método 2 está identificado com a cor vermelha. Para facilitar a comparação dos resultados, utilizou-se uma escala vertical padrão (de -50% a +50%) para representar o erro percentual das estimativas dos parâmetros.

As figuras 5.1 e 5.2 mostram o erro de estimação nos parâmetros na condição ideal (sem ruído). Nesta condição, o erro percentual em relação aos valores teóricos está próximo a 2 % tanto para o Método 1, como para o Método 2. Ambos os métodos apresentam a mesma precisão na estimação dos parâmetros para qualquer $n > 3$. Neste caso ideal, a estimação dos parâmetros pode ser feita utilizando-se apenas 3 equações. Observa-se que, mesmo para um número maior de equações, o erro de estimação é praticamente constante. Observou-se na simulação que este erro está associado a utilização da rotina ($\ll c2d$) na transformação do sistema em tempo contínuo para tempo discreto.

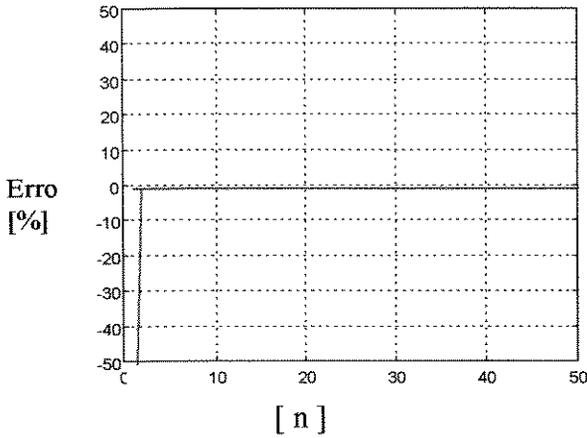


Figura 5.1 - Erro de estimação do parâmetro k utilizando o Método 1 (em azul) e o Método 2 (em vermelho) na condição 1.

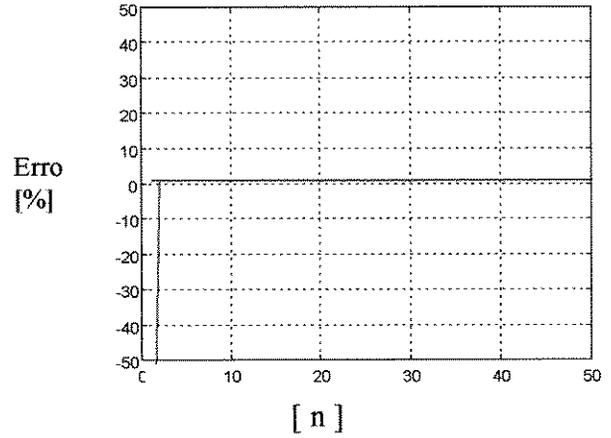


Figura 5.2 - Erro de estimação do parâmetro c utilizando o Método 1 (em azul) e o Método 2 (em vermelho) na condição 1.

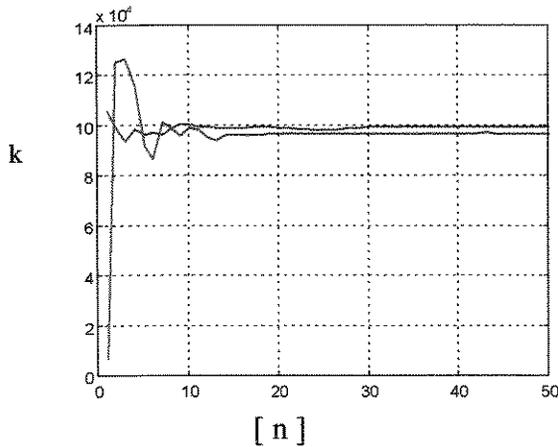


Figura 5.3 - Estimação do parâmetro k utilizando o Método 1(em azul) e o Método 2 (em vermelho) na condição 2.

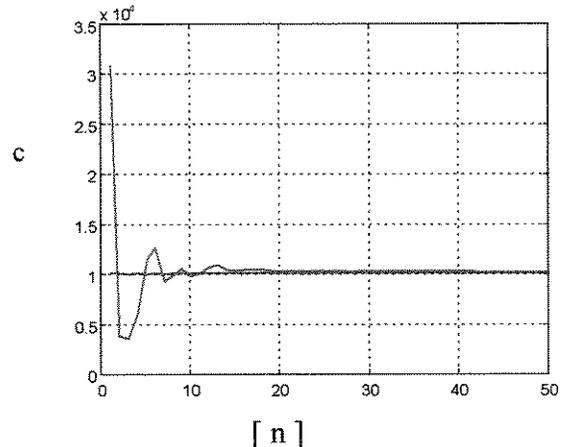


Figura 5.4 - Estimação do parâmetro c utilizando o Método 1(em azul) e o Método 2 (em vermelho) na condição 2.

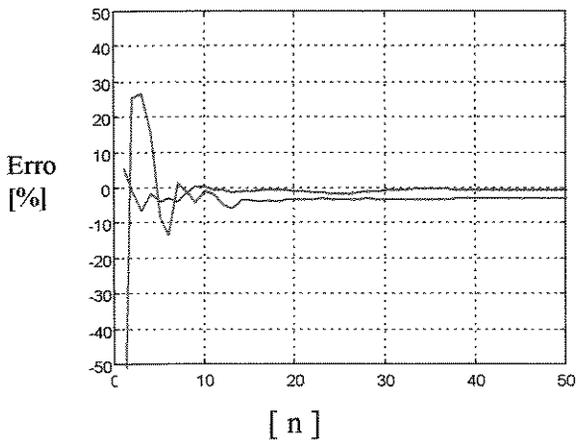


Figura 5.5 - Erro de estimação do parâmetro k utilizando o Método 1(em azul) e o Método 2 (em vermelho) na condição 2.

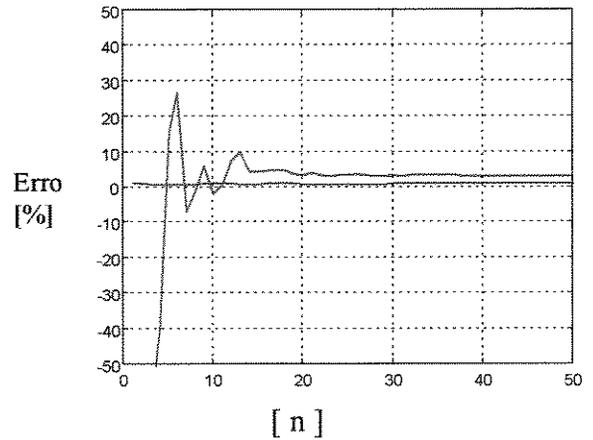


Figura 5.6 - Erro de estimação do parâmetro c utilizando o Método 1(em azul) e o Método 2 (em vermelho) na condição 2.

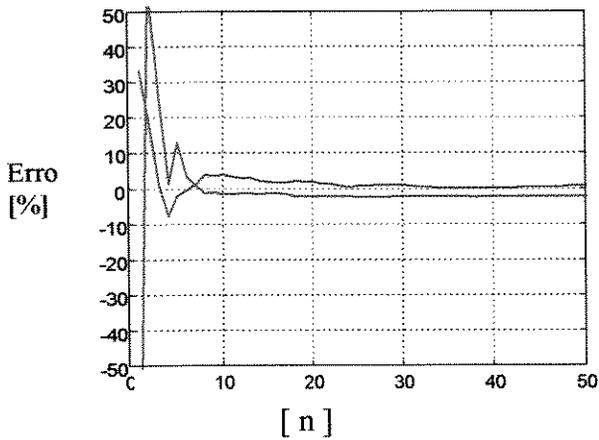


Figura 5.7 - Erro de estimação do parâmetro k utilizando o Método 1(em azul) e o Método 2 (em vermelho) na condição 3.

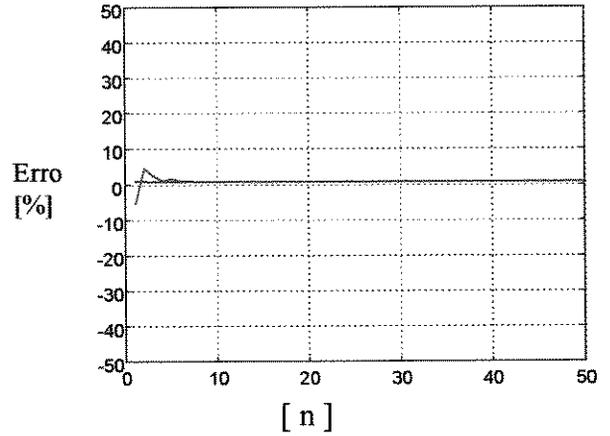


Figura 5.8 - Erro de estimação do parâmetro c utilizando o Método 1(em azul) e o Método 2 (em vermelho) na condição 3.

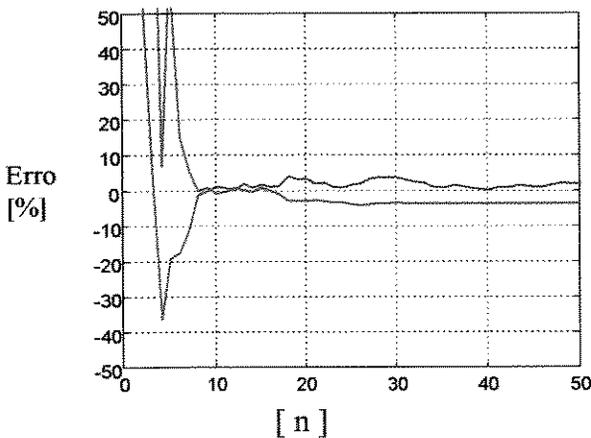


Figura 5.9 - Erro de estimação do parâmetro k utilizando o Método 1(em azul) e o Método 2 (em vermelho) na condição 4.

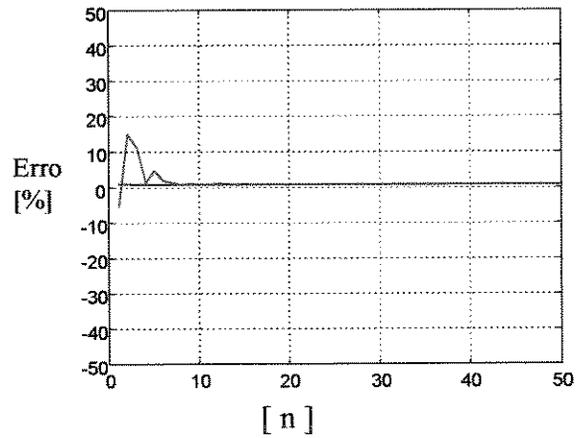


Figura 5.10 - Erro de estimação do parâmetro c utilizando o Método 1(em azul) e o Método 2 (em vermelho) na condição 4.

Comparando-se a Condição 2 com a Condição 3, observa-se que, as estimativas em geral melhoram quando mais dados são utilizados no cálculo, porém, o tempo de processamento computacional torna-se muito alto. Este tempo de processamento deve ser idealmente pequeno, para que seja possível detectar rapidamente qualquer falha no sistema. A estimação de parâmetros utilizando-se 1024 dados, exige um tempo de processamento em micro computador da ordem de 15 minutos, para ambos os métodos. Para 5120 dados, este tempo de processamento sobe para aproximadamente 1 hora.

As figuras 5.5 a 5.8 mostram o desempenho dos métodos na presença de ruído para diferentes quantidades de dados (N). Quando se introduz ruído nos sinais, observa-se que as estimativas apresentam certa variação em função do número (n) de equações. Nota-se que, o

Método 1 apresenta, na média, menor erro de estimação e também, apresenta menor variação no valor do parâmetro estimado em função do número de equações (melhor convergência para o valor exato). Esta variação na estimativa dos parâmetros pode ser melhorada no Método 2, melhorando-se o cálculo da densidade espectral média. Nesta simulação, o conjunto de dados (N) foi dividido em 8 partes iguais e para cada parte foi calculada a densidade espectral. A partir daí calculou-se o valor médio da densidade espectral. Utilizando-se um número maior de médias, os valores estimados pelo Método 2 apresentam uma menor variação e melhor convergência, (semelhante ao Método 1) porém, o tempo de processamento fica muito maior que o Método 1.

A análise dos gráficos permite dizer que o número mínimo de equações utilizando-se 1024 dados com ruído, deve ser próximo a 20 (figuras 5.5, 5.6). Utilizando-se mais dados no cálculo, $n=5120$, o número mínimo de equações cai para 10 (figuras 5.7, 5.8). Para a condição de ruído ainda maior (20%) observa-se que, o método por somatório (Método 1) também apresenta melhor desempenho (figuras 5.9, 5.10).

Pode-se dizer, portanto, que o Método 1 é mais robusto à presença de ruído e por isso, será utilizado como padrão para estimação das matrizes de correlação dos métodos de detecção de falhas simulados nos próximos exemplos deste trabalho.

5.3 - Exemplo 2

Neste exemplo será simulado o método de detecção de falhas descrito no Capítulo 2.3.1 (funções de resíduo para sistemas com matriz de medidas na forma genérica). Define-se, agora, um sistema mecânico rotativo composto por um rotor rígido apoiado, nas extremidades, por dois mancais de deslizamento de acordo com Santos(1989). O modelo matemático deste sistema mecânico possui 4 graus de liberdade representados pelos deslocamentos no plano vertical (z) e horizontal (y) do mancal 1 e do mancal 2, conforme mostra a figura 5.11. A equação geral de movimento para este sistema é dada por,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{S}\mathbf{d}(t) = \mathbf{U}\mathbf{f}(t) \quad , \quad (5.4)$$

onde as matrizes tem as seguintes estruturas:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{mL_2^2 + J}{L^2} & \frac{mL_1L_2 - J}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{mL_1L_2 - J}{L^2} & \frac{mL_1^2 + J}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL_2^2 + J}{L^2} & \frac{mL_1L_2 - J}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{mL_1L_2 - J}{L^2} & \frac{mL_1^2 + J}{L^2} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{I_p \omega}{L^2} & -\frac{I_p \omega}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{I_p \omega}{L^2} & \frac{I_p \omega}{L^2} \\ -\frac{I_p \omega}{L^2} & \frac{I_p \omega}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{I_p \omega}{L^2} & -\frac{I_p \omega}{L^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}[c_{1y}, c_{2y}, c_{1z}, c_{2z}] \quad , \quad \mathbf{S} = \text{diag}[k_{1y}, k_{2y}, k_{1z}, k_{2z}]. \quad (5.7)$$

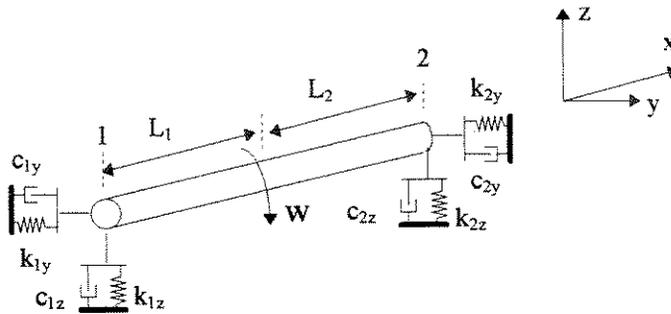


Figura 5.11 - Modelo do rotor do Exemplo 2.

O vetor de entradas é formado por duas componentes de forças harmônicas na seguinte forma,

$$\mathbf{f}(t) = \begin{Bmatrix} \text{sen}(\omega t + \beta) \\ \text{cos}(2\omega t + \beta) \end{Bmatrix}, \quad (5.8)$$

ou seja, $f(t)$ é um sinal estacionário com média zero. Os valores numéricos dos parâmetros do modelo estão definidos na tabela 5.3. As principais frequências naturais deste sistema estão próximas a 50 rad/seg. (abaixo das frequências de excitação). Neste exemplo, as funções de resíduo serão geradas com o objetivo de monitorar parâmetros relacionados aos mancais do sistema. O modelo de estado deste sistema tem dimensão $2n = 8$, com o vetor de estado composto por deslocamentos e velocidades nos planos y e z em relação aos mancais 1 e 2, na seguinte forma:

$$\mathbf{x}^T(t) = \{d_{1y}(t) \ d_{2y}(t) \ d_{1z}(t) \ d_{2z}(t) \ \dot{d}_{1y}(t) \ \dot{d}_{2y}(t) \ \dot{d}_{1z}(t) \ \dot{d}_{2z}(t)\}. \quad (5.9)$$

$m = 50 \text{ kg}$	massa total do rotor
$L_1 = L_2 = (L / 2) = 0,5 \text{ m}$	comprimento do rotor
$J = 4,29 \text{ kgm}^2$	momento de inércia do rotor em relação a Y e Z
$I_p = 0,5 \text{ kgm}^2$	momento de inércia do rotor em relação a Z
$\omega(t) = 200 \text{ rd / seg}$	rotação do rotor
$k_{1y} = k_{1z} = 80000 \text{ N / m}$	rigidez do mancal 1 na direção Y e Z
$k_{2y} = k_{2z} = 60000 \text{ N / m}$	rigidez do mancal 2 na direção Y e Z
$c_{1y} = c_{1z} = 100 \text{ kg / seg}$ $c_{2y} = c_{2z} = 100 \text{ kg / seg}$	amortecimento do mancal 1 e 2 na direção Y e Z, respectivamente
$\beta = \pi / 4 \text{ rd}$	defasagem angular

Tabela 5.3 - Parâmetros físicos do modelo 2

Para simular uma condição mais próxima da realidade prática, supõe-se que não é possível fazer medições no plano y , ou seja, será efetuada medição no plano z referentes aos mancais 1 e 2. Neste caso, a matriz de medidas assume a forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Seguindo-se o procedimento descrito no parágrafo 2.3.1, para o caso da matriz de medidas na forma genérica, monta-se a matriz de transformação \mathbf{T} que leva a matriz \mathbf{C} para a forma especial. A montagem da matriz \mathbf{T} é feita resolvendo-se o sistema linear de equações dado em (2.44). Este sistema de equações não apresenta solução única (sistema indeterminado com 64 incógnitas em \mathbf{T} para um total de 32 equações). Dentre as soluções possíveis, escolhe-se aquela que satisfaça também a condição de que \mathbf{A}_2 deve ser independente dos parâmetros de interesse. Uma matriz \mathbf{T} que satisfaz estas condições tem a seguinte forma,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Aplicando-se esta matriz de transformação em (2.56) e (2.57), obtém-se as matrizes \mathbf{A}_1 e \mathbf{B}_1 na forma desejada para monitoramento do sistema, ou seja, estas matrizes contém os parâmetros de rigidez e amortecimento dos mancais. Ao mesmo tempo, a matriz \mathbf{A}_2 é independente destes parâmetros. O valor numérico desta matriz é

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,9127 & -2,9127 & 0 & 0 \\ -2,9127 & 2,9127 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

e portanto ,

$$\text{Posto}[\mathbf{A}_2] = 1. \quad (5.13)$$

Sabendo-se que $m = 4$, calcula-se o número (k) de vetores \mathbf{s}_i^T , linearmente independentes, que satisfazem (2.59),

$$k = m - \text{Posto}[\mathbf{A}_2] = 4 - 1 = 3. \quad (5.14)$$

Os vetores $\mathbf{s}_i^T, i = 1, \dots, 3$ devem ser escolhidos observando-se o posicionamento dos parâmetros de interesse nas matrizes \mathbf{A}_1 e \mathbf{B}_1 . Esta análise pode ser feita numericamente, ou seja, faz-se variar o valor de um parâmetro de interesse e verifica-se quais coordenadas das matrizes \mathbf{A}_1 e \mathbf{B}_1 são alteradas. Com esta análise feita, monta-se os seguintes vetores,

$$\mathbf{s}_1^T = \{0 \ 0 \ 1 \ 1\}, \mathbf{s}_2^T = \{1 \ 1 \ 0 \ 0\} \quad (5.15)$$

e fica fácil verificar que estes vetores satisfazem:

$$\mathbf{s}_1^T \mathbf{A}_2 = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{s}_2^T \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}. \quad (5.16)$$

As funções de resíduo $e_i(\tau)$ de acordo com (2.64) obtidas com os vetores \mathbf{s}_i definidos anteriormente têm a seguinte forma,

$$\mathbf{e}_i(\tau) = \mathbf{s}_i^T [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_1] \mathbf{r}_i(\tau) = 0 \quad , \quad i = 1, 2. \quad (5.17)$$

Estas funções de resíduo tem as seguintes propriedades em relação aos parâmetros de interesse: $e_1(\tau)$ - depende dos parâmetros $k_{1z}, k_{2z}, c_{1z}, c_{2z}$ e não depende dos parâmetros $k_{1y}, k_{2y}, c_{1y}, c_{2y}$, resíduo $e_2(\tau)$ - independe dos parâmetros $k_{1z}, k_{2z}, c_{1z}, c_{2z}$, $k_{1y}, k_{2y}, c_{1y}, c_{2y}$. A confirmação desta característica pode ser feita através de uma análise numérica, ou seja, faz-se variar numericamente um parâmetro de interesse e verifica-se a

variação numérica no vetor $s_i^T [A_i \quad B_i]$, $i = 1, 2$. Isto evita a necessidade de se escrever literalmente cada função de resíduo para se verificar a dependência dos parâmetros.

Em todas as simulações foi utilizado um total de 6000 valores discretos de resposta com tempo de discretização $\Delta t = 0,001$ segundos. Para se verificar o tempo de convergência dos valores estimados, os resíduos foram calculados recursivamente, ou seja, na primeira estimativa (ou primeira iteração) foram usados 20 valores discretos de resposta do sistema, na segunda estimativa foram usados 40 valores de resposta e assim sucessivamente, até a última estimativa usando 6000 valores de resposta. As condições simuladas estão mostradas na Tabela 5.4.

Condição	Tipo de falha	Ruído (% rms)
1	Diminuição de k_{1z} e c_{1z} em 50%	0
2	Diminuição de k_{2z} e c_{2z} em 50%	0
3	Diminuição de k_{1z} , c_{1z} , k_{2z} e c_{2z} em 50%	0
4	Diminuição de k_{1y} , c_{1y} , k_{2y} , e c_{2y} em 50%	0
5	Diminuição de k_{1z} e c_{1z} em 50%	10
6	Diminuição de k_{2z} e c_{2z} em 50%	10
7	Diminuição de k_{1z} , c_{1z} , k_{2z} e c_{2z} em 50%	10
8	Diminuição de k_{1y} , c_{1y} , k_{2y} , e c_{2y} em 50%	10

Tabela 5.4 - Condições de simulação do exemplo 2

Os gráficos 5.12 a 5.19 mostram os resíduos estimados nas condições da Tabela 5.4. Em cada figura o resíduo $e_1(\tau)$ está representado na parte superior e o resíduo $e_2(\tau)$ está representado na parte inferior. A cor azul indica que a função de resíduo não está relacionada aos parâmetros com falha e a cor vermelha indica que o resíduo está relacionado aos parâmetros com falha. A escala vertical representa o valor numérico do resíduo estimado e a escala horizontal representa o número (N) de iterações.

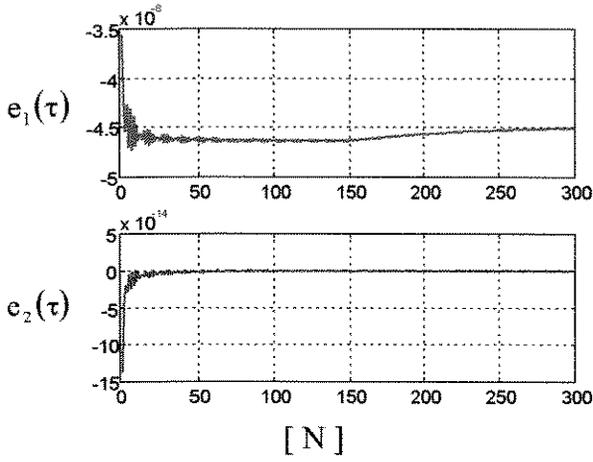


Figura 5.12 - Resíduos estimados na condição 1

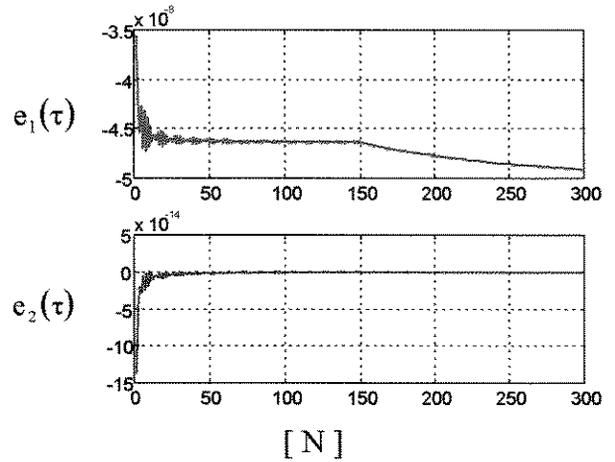


Figura 5.13 - Resíduos estimados na condição 2

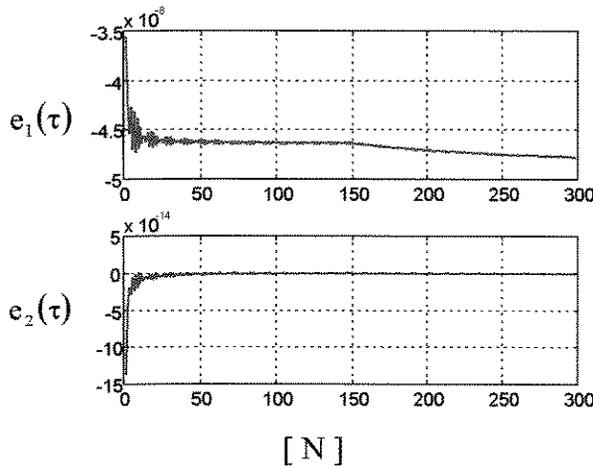


Figura 5.14 - Resíduos estimados na condição 3

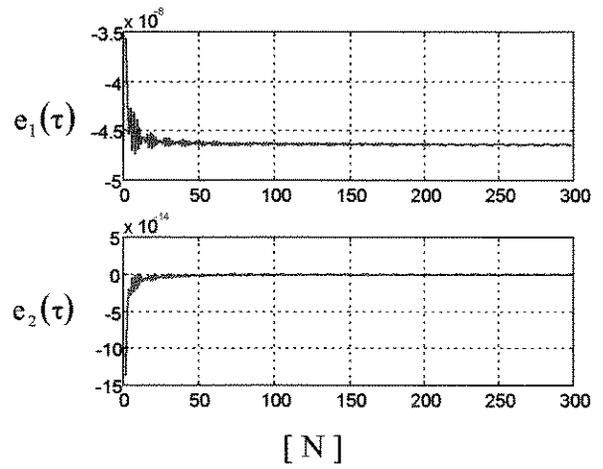


Figura 5.15 - Resíduos estimados na condição 4

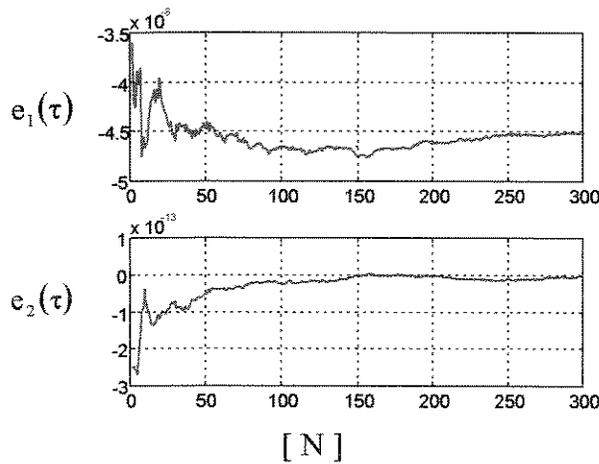


Figura 5.16 - Resíduos estimados na condição 5

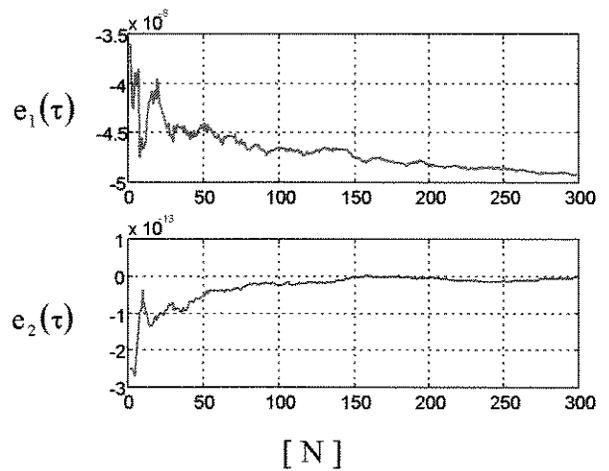


Figura 5.17 - Resíduos estimados na condição 6

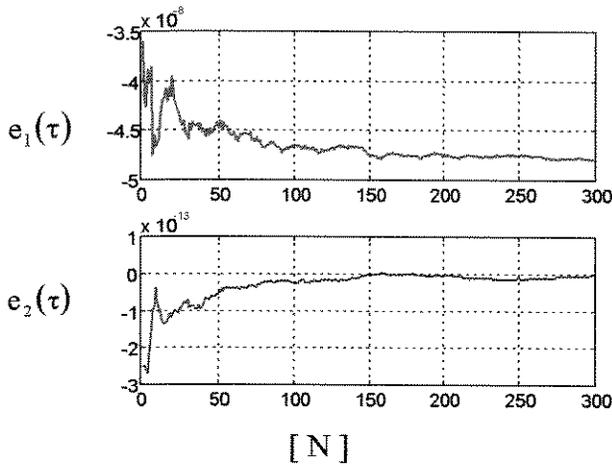


Figura 5.18 - Resíduos estimados na condição 7

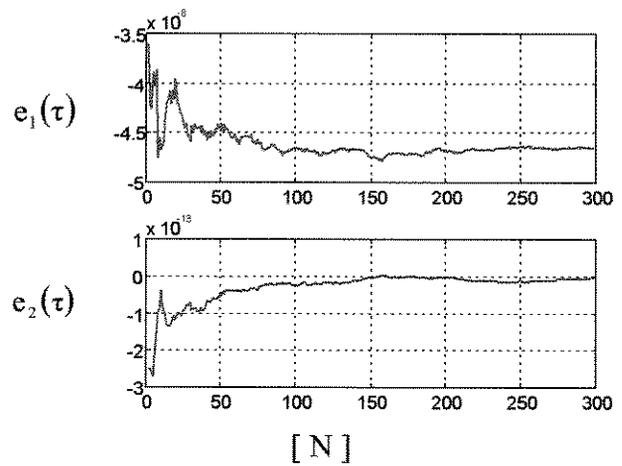


Figura 5.19 - Resíduos estimados na condição 8

Em todas as condições de simulação, introduziu-se uma falha no sistema a partir de $N = 150$. Observa-se que, em qualquer caso, as estimativas dos resíduos apresentam uma variação decrescente à medida que mais dados são utilizados no cálculo. Isto ocorre porque o valor médio das matrizes de correlação, estimadas pelo Método 1, se aproximam dos valores corretos, a medida que mais dados de resposta do sistema são utilizados no cálculo do somatório (ver descrição do Método 1 no Apêndice C).

Nas figuras 5.12 a 5.14 verifica-se que a variação do resíduo $e_1(\tau)$ após a falha é maior que a variação do resíduo $e_2(\tau)$. Isto se justifica uma vez que, nestes casos, o resíduo $e_1(\tau)$ é sensível aos parâmetros relacionados a falha e o resíduo $e_2(\tau)$ não é sensível à variação nestes parâmetros. A figura 5.15 mostra o comportamento dos resíduos para uma falha simultânea nos parâmetros k_{1y} e k_{2y} e nos parâmetros c_{1y} e c_{2y} , respectivamente. Verifica-se que, neste caso, ambos os resíduos não apresentam variação após a falha. Este comportamento é esperado já que os resíduos $e_1(\tau)$ e $e_2(\tau)$ não são sensíveis a falha nestes parâmetros.

As figuras 5.16, 5.17, 5.18 e 5.19 ilustram os mesmos tipos de falhas das condições 1, 2, 3 e 4, respectivamente, porém, foi introduzido um ruído aditivo nos sinais medidos $f(t)$ e $y(t)$ com intensidade de 10%. Nestes casos, verifica-se que a convergência das estimativas é mais demorada, ou seja, os resíduos apresentam maior variação numérica antes da falha quando comparados com o caso ideal (sem ruído). Mesmo assim, após a falha, é possível verificar a mesma tendência no comportamento dos resíduos obtida no caso ideal.

As funções de resíduo podem ser modificadas definindo-se uma outra matriz de transformação T e também outros vetores s_i^T . Isto modificaria não só a estrutura interna das matrizes A_1 e A_2 , bem como os parâmetros do sistema que podem ser monitorados através das funções de resíduo. Isto não será feito neste exemplo uma vez que, pretende-se apenas demonstrar a metodologia desenvolvida no Capítulo 2.

5.4 - Exemplo 3

Neste exemplo será avaliado o método de detecção de falhas definido no parágrafo 3.2.1 (estimação de parâmetros - Caso 1). Será utilizado o modelo matemático de um sistema mecânico com 6 graus de liberdade de acordo com Pederiva(1992). O modelo é formado por um rotor flexível vertical acionado por um motor elétrico e apoiado em um mancal de escorregamento, conforme figura 5.20.

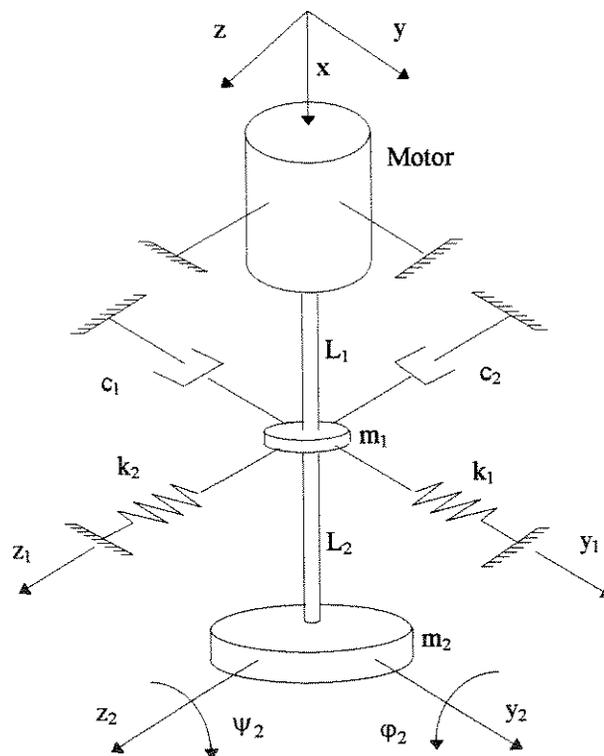


Figura 5.20 - Modelo do rotor do Exemplo 3

A equação geral de movimento deste sistema na forma geral (2.1) tem o seguinte vetor de deslocamentos:

$$\mathbf{d}^T(t) = \{y_1(t) \quad y_2(t) \quad \psi_2(t) \quad z_1(t) \quad z_2(t) \quad \varphi_2(t)\}, \quad (5.18)$$

onde as variáveis $y_1(t)$ e $z_1(t)$ representam os deslocamentos no mancal nas direções Y e Z, respectivamente; as variáveis $y_2(t)$ e $z_2(t)$ representam os deslocamentos do rotor nas direções Y e Z, respectivamente. As variáveis $\psi_2(t)$ e $\varphi_2(t)$ representam rotações do rotor em torno dos eixos Y e Z, respectivamente. As matrizes deste sistema têm a seguinte estrutura interna:

$$\mathbf{M} = \text{diag}[m_1, m_2, I_2, m_1, m_2, I_2], \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ m_2 e\Omega^2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & m_2 e\Omega^2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \vdots & & & \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & \vdots & & & \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & \vdots & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ & & & \vdots & s_{45} & s_{55} & s_{56} \\ & & & \vdots & s_{46} & s_{56} & s_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & d_{36} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{63} & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com as seguintes definições,

$$\begin{aligned} d_{11} &= c_1, & s_{11} &= k_1 + 6(a+b), & s_{23} &= -3aL_2, & s_{46} &= -3aL_2, \\ d_{36} &= \Omega I_{2p}, & s_{12} &= -6a, & s_{33} &= 4aL_2^2, & s_{55} &= 6a, \\ d_{44} &= c_2, & s_{13} &= 3aL_2, & s_{44} &= k_2 + 6(a+b), & s_{56} &= 3aL_2, \\ d_{63} &= -\Omega I_{2p}, & s_{22} &= 6a, & s_{45} &= -6a, & s_{66} &= 4aL_2^2, \end{aligned}$$

$$a = \frac{2EI}{L_1^3}, \quad b = \frac{2EI}{L_2^3}. \quad (5.20)$$

e o valor numérico dos parâmetros estão definidos na Tabela 5.5. O parâmetros E e I representam o módulo de elasticidade do material do eixo e o momento de inércia da seção transversal do eixo, respectivamente. O vetor de excitação do sistema é formado por três entradas harmônicas na seguinte forma:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 100\text{sen}\left(\Omega t + \frac{\pi}{4}\right) \\ 50\text{cos}\left(2\Omega t + \frac{\pi}{4}\right) \\ 20\text{sen}\left(5\Omega t + \frac{\pi}{4}\right) \end{Bmatrix}. \quad (5.21)$$

$m_1 = 15 \text{ kg}, m_2 = 10 \text{ kg}$	massa do mancal e do rotor, respectivamente
$I_2 = 0,25 \text{ kg m}^2$	momento de inércia transversal do rotor
$I_{2p} = 0,50 \text{ kg m}^2$	momento de inércia polar do rotor
$c_1 = 30000 \text{ kg/s}$	amortecimento do mancal na direção Y
$c_2 = 37500 \text{ kg/s}$	amortecimento do mancal na direção Z
$k_1 = 90000 \text{ N/m}$	rigidez do mancal na direção Y
$k_2 = 120000 \text{ N/m}$	rigidez do mancal na direção Z
$L_1 = L_2 = 0,4 \text{ m}$	distancias motor - mancal e mancal - rotor
$a = b = 50000 \text{ N/m}$	constante
$\Omega = 60 \text{ rd/s}$	rotação do rotor
$e = 0,00001 \text{ m}$	excentricidade do centro de massa do rotor

Tabela 5.5 - Parâmetros físicos do modelo 3

Define-se agora as matrizes do sistema filtro conforme (3.1), na seguinte forma:

$$\mathbf{N} = -10^3 \text{diag}[1, 1, 1, 1, 1, 1] \quad , \quad \mathbf{P} = \mathbf{I}_{(6,6)} \quad . \quad (5.22)$$

Deve-se projetar a matriz dinâmica do sistema filtro com frequências de corte suficientemente altas para não atenuar frequências de excitação do sistema. Neste exemplo, as frequências de excitação do modelo são 60, 120 e 300 rad/seg., portanto a frequência de atenuação do sistema filtro (f_c) não deve ser menor que 300 rad/seg. A figura 5.21 mostra o Diagrama de Bode para o sistema simulado (apenas algumas curvas de resposta) e a figura 5.22 mostra o diagrama de Bode do sistema filtro com $f_c = 1000$ rad/seg.

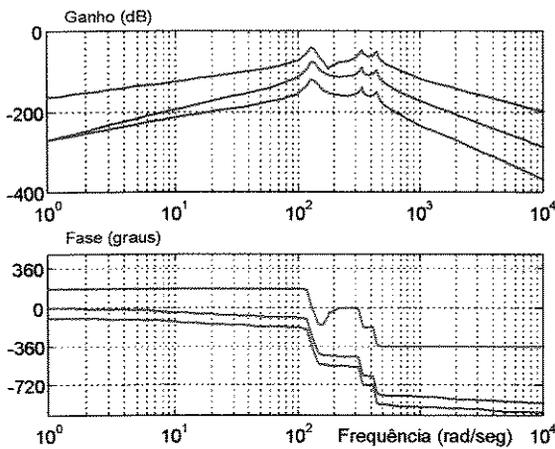


Figura 5.21 Diagrama de Bode do sistema

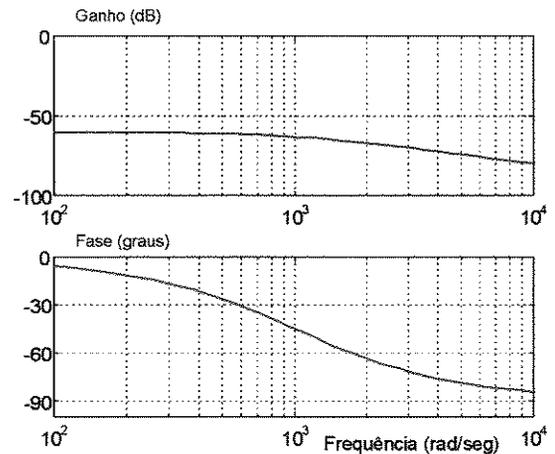


Figura 5.22. Diagrama de Bode do filtro

A expressão (3.20) é a equação básica para estimação dos parâmetros do sistema conforme descrito no parágrafo 3.2.1. Analogamente ao Exemplo 1, deseja-se analisar os problemas numéricos envolvidos nesta equação. Para facilitar esta análise define-se a seguinte matriz de erro percentual:

$$\Delta(\tau_i) = 10^2 \left(\Psi(\tau_i) - \Theta \mathbf{R}_e(\tau_i) - \mathbf{R}_d(\tau_i) \Theta^T \right) / \left(\left| \Theta \mathbf{R}_e(\tau_i) + \mathbf{R}_d(\tau_i) \Theta^T \right| \right) \quad (5.23)$$

A matriz $\Delta(\tau_i)$ tem dimensão (6, 15) e contém, portanto, 90 coordenadas que devem ser idealmente iguais a zero, caso a estimação das matrizes $\mathbf{R}_e(\tau_i)$, $\mathbf{R}_d(\tau_i)$ e $\Psi(\tau_i)$ seja exata. Para simplificar a verificação, pode-se calcular o valor médio dos elementos da matriz

$\Delta(\tau_i)$, bem como o desvio padrão destes elementos para diferentes defasagens de tempo. Estas variáveis serão definidas por $\mu_{\Delta}(\tau_i)$ e $\sigma_{\Delta}(\tau_i)$, respectivamente.

A expressão básica de estimação (3.20) vale para qualquer defasagem de tempo τ_i . No entanto, a estimação da matriz Θ a partir desta expressão básica deve ser feita de modo que se obtenha um número suficiente de equações linearmente independentes. É importante portanto avaliar qual a influência das defasagens de tempo na estimação dos parâmetros, uma vez que, não se conhece, a priori, qual a escolha ideal de τ_i .

A Tabela 5.6 resume as condições de simulação utilizadas na estimação de $\mu_{\Delta}(\tau_i)$ e $\sigma_{\Delta}(\tau_i)$. As figuras 5.23 - 5.26 mostram os valores estimados para diferentes defasagens de tempo τ_i , $i = 1, \dots, 25$, de acordo com as condições definidas na Tabela 5.6. Em cada figura, o gráfico superior representa a variável $\mu_{\Delta}(\tau_i)$ e o gráfico inferior representa a variável $\sigma_{\Delta}(\tau_i)$. As matrizes de correlação $\mathbf{R}_e(\tau_i)$, $\mathbf{R}_d(\tau_i)$ e $\Psi(\tau_i)$ foram estimadas utilizando-se o Método 1 (ver descrição do Método 1 no Apêndice C) com 2000 valores discretos de resposta do sistema em regime estacionário.

Condição n°.	f_c (rad/seg.)	Ruído (% rms)
1	1000	0
2	500	0
3	1000	10
4	1000	20

Tabela 5.6 - Condições de simulação do exemplo 3

Comparando-se os resultados obtidos nas condições 1 e 2, nota-se a importância da escolha adequada da frequência f_c na estimação dos parâmetros. O melhor resultado foi obtido com $f_c = 1000$ rad/seg. Frequências de atenuação abaixo deste valor produzem um erro médio de estimação maior. A influência de ruído nos sinais na estimação dos parâmetros é mostrada nas figuras 25 e 26 (condições 3 e 4). Comparando-se as condições 3 e 4 nota-se que, a adição

de ruído produz um sensível aumento na a variação no erro médio, $\mu_{\Delta}(\tau_i)$, em função de τ_i .

De modo geral, pode-se dizer que o erro médio estimado apresenta grande variação em função das diferentes defasagens de tempo e para alguns valores de τ_i o erro médio é muito grande. Isto ocorre porque as funções de correlação podem ser nulas ou muito próximas de zero, para determinados valores de τ_i , o que leva a erros numéricos de ordem elevada na equação básica de estimação, (3.20). Mesmo que se escolha os valores das defasagens de tempo para os quais se obteve menor erro médio, a estimação da matriz Θ utilizando-se estas defasagens de tempo leva a valores não corretos. O erro na estimativa da matriz de parâmetros será, neste caso, bem maior que a encontrada no exemplo 1, onde, nas mesmas condições de simulação, obteve-se erro percentual próximo a 2% na estimativa dos parâmetros.

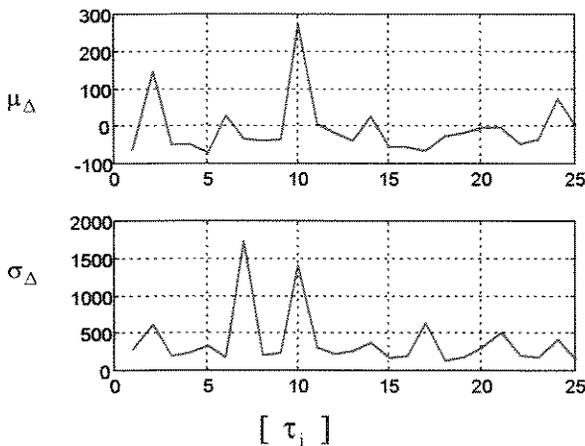


Figura 5.23 - $\mu_{\Delta}(\tau_i)$ e $\sigma_{\Delta}(\tau_i)$ para condição 1

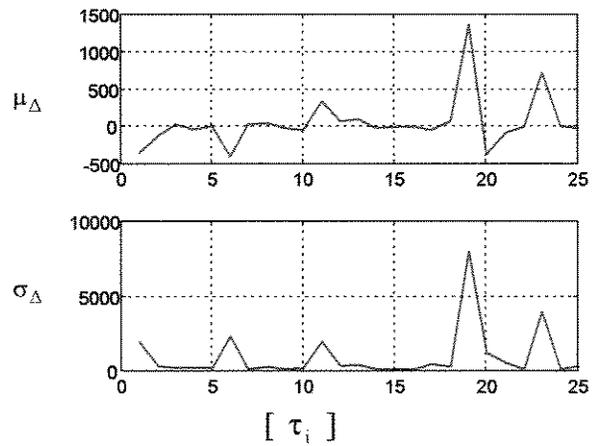


Figura 5.24 - $\mu_{\Delta}(\tau_i)$ e $\sigma_{\Delta}(\tau_i)$ para condição 2

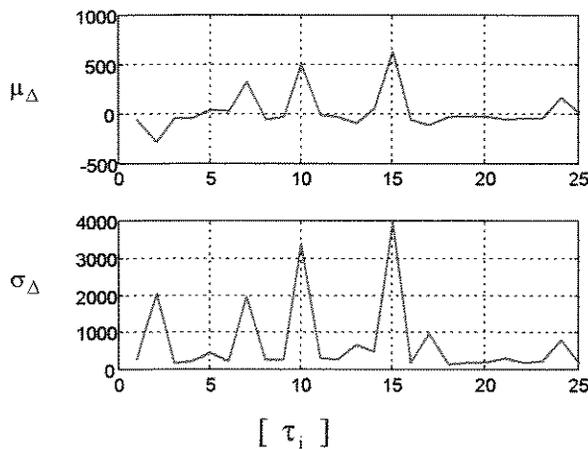


Figura 5.25 - $\mu_{\Delta}(\tau_i)$ e $\sigma_{\Delta}(\tau_i)$ para condição 3

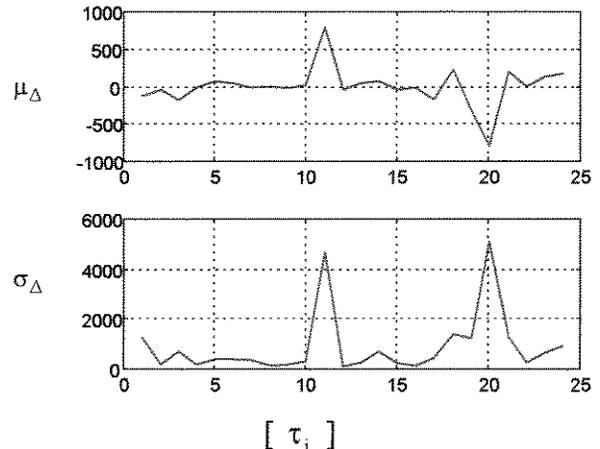


Figura 5.26 - $\mu_{\Delta}(\tau_i)$ e $\sigma_{\Delta}(\tau_i)$ para condição 4

Outro aspecto a ser analisado neste exemplo numérico diz respeito às características da matriz Θ . No Exemplo 1 foi montada uma equação de estimação contendo somente 2 parâmetros a serem estimados (k e c), com ordens de grandeza 10^4 e 10^5 . Neste exemplo a matriz Θ contém 14 parâmetros (conforme tabela 5.5) combinados em 90 coordenadas desta matriz, com ordens de grandeza variando entre 0 e 10^5 . Portanto, esta matriz de parâmetros é numericamente mal balanceada ou seja, apresenta elementos nulos próximos a elementos com ordem de grandeza elevada.

O procedimento de estimação de parâmetros envolve o cálculo da inversa de matrizes de correlação. A inversão das matrizes para solução do sistema de equações foi feito usando o algoritmo da inversa generalizada (`>>pinv` no software *Matlab*). Esta rotina fornece resultados melhores do que a inversa direta (`>>inv` no software *Matlab*), quando a matriz é mal condicionada (Jenkins, 1993). Entretanto, as matrizes $\Psi(\tau_i)$, $\mathbf{R}_e(\tau_i)$ e $\mathbf{R}_d(\tau_i)$ não podem ser estimadas, na prática, com precisão absoluta e desta forma, pequenas variações numéricas na estimação destas matrizes produzem grandes erros no cálculo dos parâmetros estimados. Por outro lado, para sistemas de pequena ordem, como no Exemplo 1, não existe o problema numérico de estimação das matrizes de correlação e os parâmetros do sistema podem ser perfeitamente monitorados.

5.5 - Exemplo 4

Neste exemplo será simulado o método de detecção de falhas descrito no parágrafo 3.3 (detecção de falhas através das funções de resíduo utilizando sistema filtro) com matriz de medidas na forma especial,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(6,6)} & \vdots & \mathbf{O}_{(6,6)} \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Será utilizado o mesmo modelo matemático definido no Exemplo 3, porém o sistema filtro será modificado. As matrizes do sistema filtro serão definidas na seguinte forma:

$$\mathbf{N} = -10^3 \text{diag}[1, 2, 3, 4, 5, 6] \quad , \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

A diferença deste sistema filtro para o sistema anterior (Exemplo 3) é que agora, o filtro tem frequências de atenuação diferentes para cada coordenada. A menor frequência de atenuação é 1000 rad/seg. e a maior é 6000 rad/seg. A matriz de entradas do sistema filtro foi montada de forma que o vetor \mathbf{s} unitário,

$$\mathbf{s} = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}^T \quad (5.26)$$

satisfaça a condição (3.36). Seguindo a metodologia proposta no parágrafo 3.3, define-se agora os vetores \mathbf{z}_i de acordo com (3.58) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1^T &= \{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \quad , \quad \mathbf{z}_2^T = \{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}, \\ \mathbf{z}_3^T &= \{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \quad , \quad \mathbf{z}_4^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\}, \\ \mathbf{z}_5^T &= \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\} \quad , \quad \mathbf{z}_6^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

ou seja, cada vetor \mathbf{z}_i^T seleciona a respectiva linha nas matrizes do sistema (\mathbf{U} , \mathbf{S} , \mathbf{D} e \mathbf{M}). Com estas definições, monta-se as funções de resíduo $e_i(\tau)$, $i = 1, \dots, 6$, de acordo com (3.58), na forma abaixo:

$$\begin{aligned} e_1(\tau) &= r_3(\tau) + (k_1 + 6(a + b))r_4(\tau) - 6ar_5(\tau) + 3aL_2r_6(\tau) + c_1r_{10}(\tau) + m_1r_{16}(\tau) \\ e_2(\tau) &= m_2e\Omega^2r_1(\tau) + 2r_3(\tau) - 6ar_4(\tau) + 6ar_5(\tau) - 3aL_2r_6(\tau) + m_2r_{17}(\tau) \\ e_3(\tau) &= r_3(\tau) + 3aL_2r_4(\tau) - 3aL_2r_5(\tau) + 4aL_2^2r_6(\tau) + \Omega I_{2p}r_{15}(\tau) + I_2r_{18}(\tau) \\ e_4(\tau) &= r_3(\tau) + (k_2 + 6(a + b))r_7(\tau) - 6ar_8(\tau) - 3aL_2r_9(\tau) + c_2r_{13}(\tau) + m_1r_{19}(\tau) \\ e_5(\tau) &= m_2e\Omega^2r_2(\tau) + 2r_3(\tau) - 6ar_7(\tau) + 6ar_8(\tau) + 3aL_2r_9(\tau) + m_2r_{20}(\tau) \end{aligned}$$

$$e_6(\tau) = r_3(\tau) - 3aL_2r_7(\tau) + 3aL_2r_8(\tau) + 4aL_2^2r_9(\tau) - \Omega I_{2p}r_{12}(\tau) + I_2r_{21}(\tau) \quad (5.28)$$

onde as correlações $r_i(\tau)$, $i = 1, \dots, 21$, são estimadas de acordo com:

$$\begin{Bmatrix} r_1(\tau) \\ \vdots \\ r_{21}(\tau) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uw}(\tau) \\ -\mathbf{R}_{yw}(\tau) \\ \mathbf{R}_{yw}(\tau)\mathbf{N}^T \\ -\mathbf{R}_{yy}(\tau)\mathbf{P}^T\mathbf{N}^T - \mathbf{R}_{yw}(\tau)\mathbf{N}^T\mathbf{N}^T \end{bmatrix} \mathbf{s} \quad (5.29)$$

As funções de resíduo definidas desta forma serão utilizadas para monitorar os parâmetros do mancal do sistema. O mancal do sistema em estudo, está caracterizado no modelo por meio dos parâmetros de rigidez k_1 , k_2 e pelos parâmetros de amortecimento c_1 , c_2 . Uma falha no mancal será caracterizada por meio de uma variação abrupta e permanente no valor numérico destes parâmetros. Na simulação do sistema, a estimativa dos resíduos é feita recursivamente da mesma forma descrita no Exemplo 2.

A estimação recursiva dos resíduos permite observar o comportamento assintótico dos valores estimados, à medida que, mais dados são utilizados no cálculo. Para este sistema, obteve-se uma estabilização numérica aceitável (convergência) dos valores estimados a partir de 5000 valores discretos de resposta em regime estacionário. Considera-se, então, que as variações nos resíduos estimados para 5000 dados estejam dentro de uma tolerância aceitável para o monitoramento do sistema. A resposta dos sistema em tempo discreto foi obtida através da rotina (>>c2d) do software Matlab com tempo de discretização $\Delta t = 0,005$ segundos.

Para identificar graficamente melhor os resíduos estimados nas figuras 5.27 - 5.34, adotou-se o mesmo critério utilizado no Exemplo 2, ou seja: as curvas na cor vermelha indicam os resíduos relacionados a falha e as curvas na cor azul indicam os resíduos não relacionados a falha. A escala vertical representa a variação percentual acumulada dos resíduos. Este valor é obtido calculando-se o erro (ou variação) entre os valores estimados em duas iterações sucessivas e plotando-se o valor acumulado no gráfico. Desta forma, se os valores estimados dos resíduos permanecerem constantes a partir de uma determinada iteração,

a variação acumulada também fica constante a partir daquele ponto. A escala horizontal representa o número de iterações (N).

Os resíduos foram estimados recursivamente até um total de 100 iterações e as falhas introduzidas no sistema na iteração de número $N = 40$. Este procedimento simula uma condição de falha real, onde pode ocorrer, por exemplo, que um conjunto de valores medidos (5000 valores) represente em uma primeira parte o sistema sem falha e em uma segunda parte o sistema com falha. O instante em que ocorreu esta falha é, a priori, desconhecido. Este instante será identificado quando os resíduos relacionados à falha apresentarem uma variação acumulada acima da tolerância admitida. As falhas simuladas estão descritas na Tabela 5.7.

Condição.	Descrição da Falha
1	Diminuição do parâmetro k_1 em 1%.
2	Diminuição do parâmetro k_1 em 5%.
3	Diminuição do parâmetro k_1 em 20%.
4	Diminuição do parâmetro k_1 em 100%.
5	Diminuição do parâmetro c_1 em 1%.
6	Diminuição dos parâmetros k_1, k_2 em 10% , simultaneamente.
7	Diminuição dos parâmetros k_1, k_2, c_1 e c_2 em 1% , simultaneamente.
8	Diminuição dos parâmetros k_1, k_2, c_1 e c_2 em 5% , simultaneamente.

Tabela 5.7 - Condições de simulação do exemplo 4

Para o tipo de falha simulado nas condições 1, 2, 3 e 4, a função de resíduo sensível ao parâmetro com falha é $e_1(\tau)$, sendo as demais funções independentes deste parâmetro. As figuras 5.27 a 5.30 , mostram as variações dos resíduos estimados para esta falha. Nota-se que, a partir de $N = 40$, a variação do resíduo relacionado à falha é maior que a variação dos demais resíduos e que esta variação é tanto maior, quanto maior a variação numérica no parâmetro k_1 . Neste caso, é necessária uma variação mínima em torno de 5% em k_1 para produzir uma variação acumulada graficamente observável no resíduo $e_1(\tau)$.

A função de resíduo relacionada a falha 5 também é $e_1(\tau)$. As demais funções de resíduo são independentes deste parâmetro. Observa-se na figura 5.31 que o sistema mecânico tem maior sensibilidade ao parâmetro de amortecimento c_1 , uma vez que, com apenas 1% de variação neste parâmetro, é possível identificar uma alteração maior no resíduo $e_1(\tau)$. Esta característica torna a detecção de falha mais fácil para este parâmetro. Porém não é possível identificar se a falha corresponde ao parâmetro k_1 ou c_1 , uma vez que, ambos os parâmetros estão relacionados às mesmas funções de resíduo.

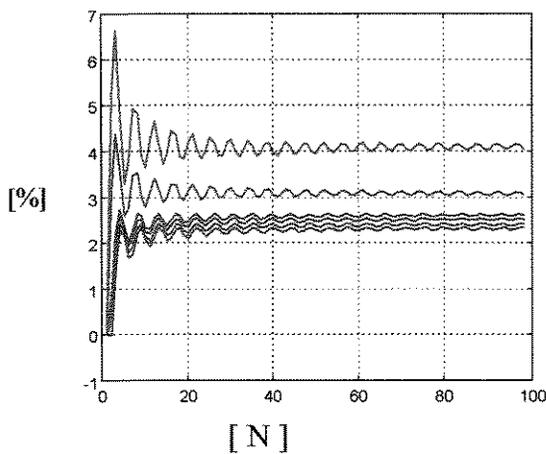


Figura 5.27 - Variação dos resíduos na condição 1

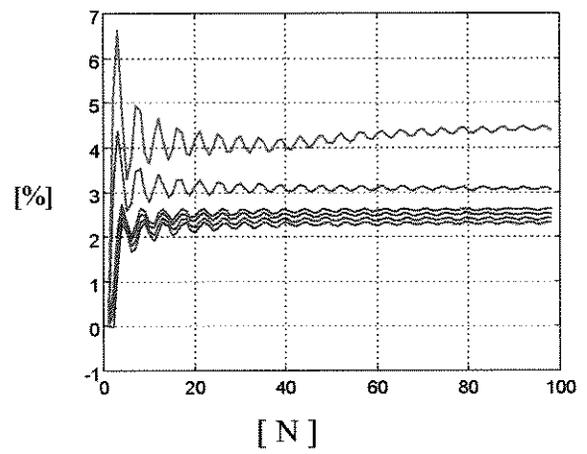


Figura 5.28 - Variação dos resíduos na condição 2

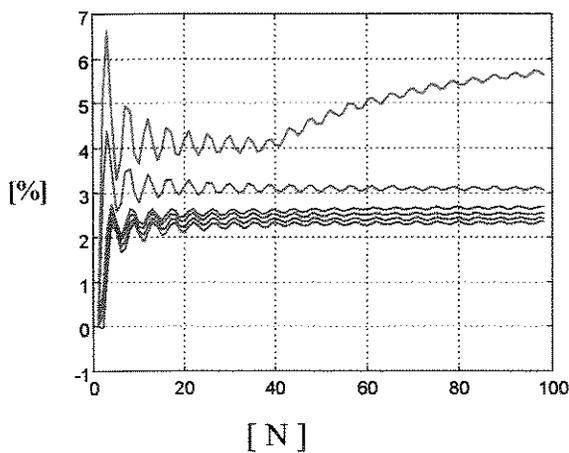


Figura 5.29 - Variação dos resíduos na condição 3

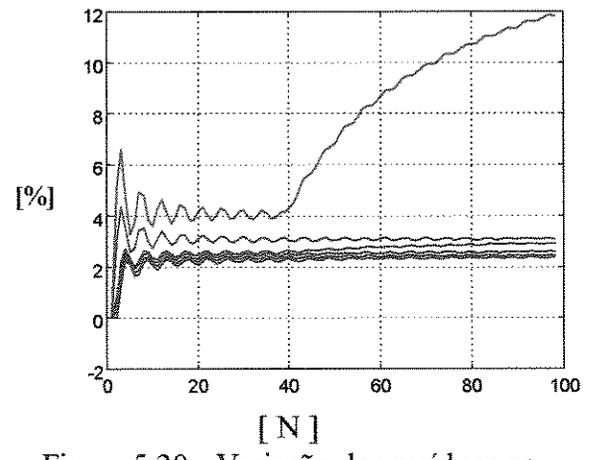


Figura 5.30 - Variação dos resíduos na condição 4

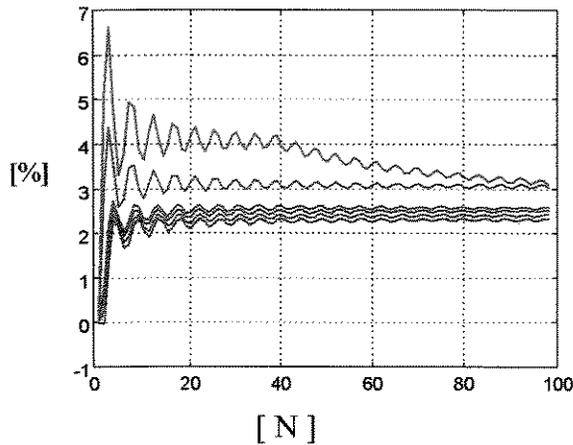


Figura 5.31 - Variação dos resíduos na condição 5

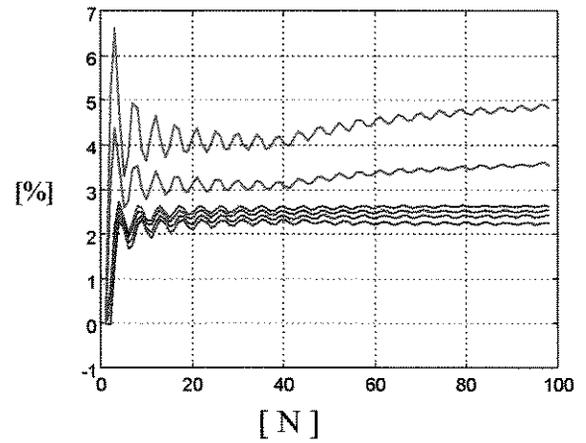


Figura 5.32 - Variação dos resíduos na condição 6

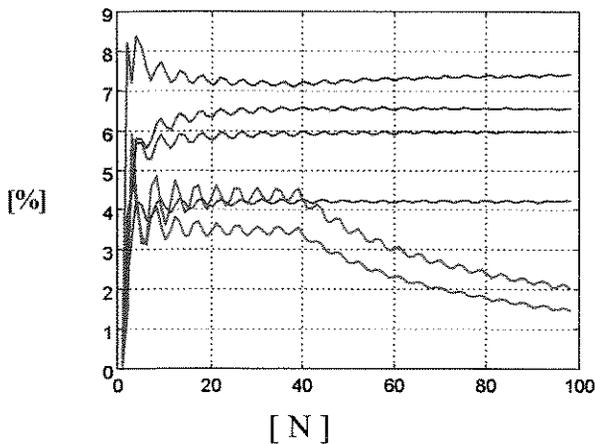


Figura 5.33 - Variação dos resíduos na condição 7

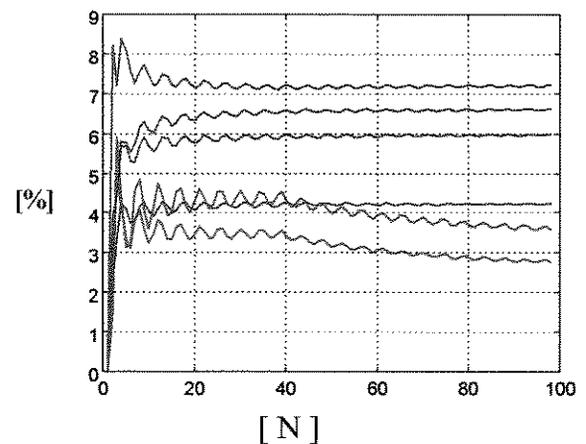


Figura 5.34 - Variação dos resíduos na condição 8

A condição 6 representa uma variação simultânea nos parâmetros k_1 e k_2 . Na prática, isto significa uma alteração nas características de rigidez do mancal nas duas direções de medição. As funções de resíduo relacionadas à estes parâmetros são $e_1(\tau)$ e $e_4(\tau)$ e as demais funções de resíduo são independentes deste parâmetro. A figura 5.32 mostra a variação dos resíduos estimados neste caso.

Provavelmente, em um caso real, uma falha qualquer em um mancal hidrodinâmico levaria a alterações nos coeficientes de amortecimento e rigidez do mesmo. Fazendo-se uma analogia a modelo estudado neste exemplo, uma falha no mancal deve ser melhor representada por uma variação simultânea nos parâmetros c_1 , c_2 , k_1 e k_2 . Esta condição está representada nas figuras 5.33 e 5.34. As funções de resíduo sensíveis a este tipo de falha são $e_1(\tau)$ e $e_4(\tau)$.

Como era esperado, os resíduos não relacionados às falhas ainda apresentam alguma variação numérica após $N = 40$, uma vez que, sempre existe um erro na estimativa das matrizes de correlação para um número limitado de dados. Esta variação tende diminuir a medida que as matrizes de correlação são estimadas com maior exatidão, entretanto, isto aumenta consideravelmente o tempo de processamento dos dados. Utilizando-se microcomputador, neste exemplo, o tempo de simulação para cada caso é de 20 minutos aproximadamente.

Da mesma forma feita no Exemplo 2, deseja-se avaliar a capacidade de detecção de falha, quando existe ruído aditivo aos sinais medidos. As falhas simuladas nesta condição estão colocadas na Tabela 5.8.

Condição	Descrição da Falha	Ruído (% rms)
9	Diminuição em k_1, k_2 em 10%	10
10	Diminuição em k_1, k_2 em 20%	10
11	Diminuição em c_1 e c_2 em 5%	10
12	Diminuição em c_1 e c_2 em 20%	10

Tabela 5.8 - Condições de simulação do exemplo 4 com ruído

As figuras 5.35 - 5.8 mostram as variações dos resíduos estimados para as Falhas 9, 10, 11 e 12. Nota-se que, na presença de ruído, os resíduos apresentam maior variação numérica e a convergência para valores estáveis é mais lenta. Mas, mesmo assim, nota-se que os resíduos relacionados às falhas apresentam ainda variações substancialmente maiores que os demais resíduos, o que permite identificar o resíduo relacionado aos parâmetros com falha. A condição limite neste caso está representada na figura 5.35. Com 10% de ruído, não é possível identificar graficamente os resíduos relacionados à falha.

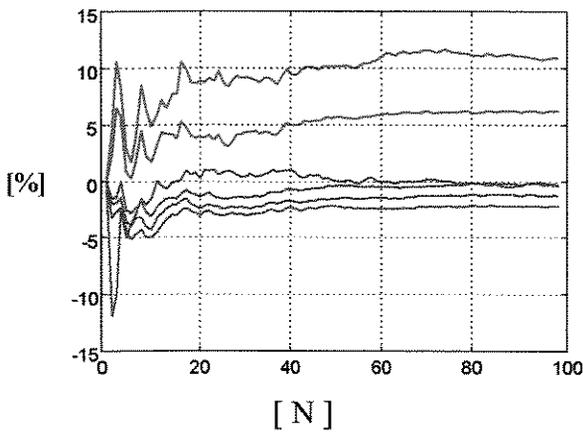


Figura 5.35 - Variação dos resíduos na condição 9

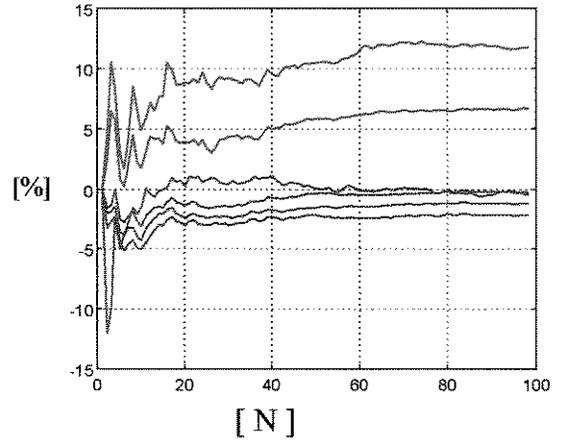


Figura 5.36 - Variação dos resíduos na condição 10

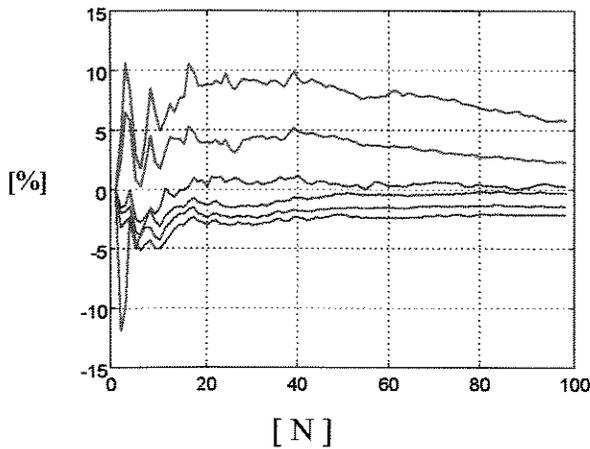


Figura 5.37 - Variação dos resíduos na condição 11

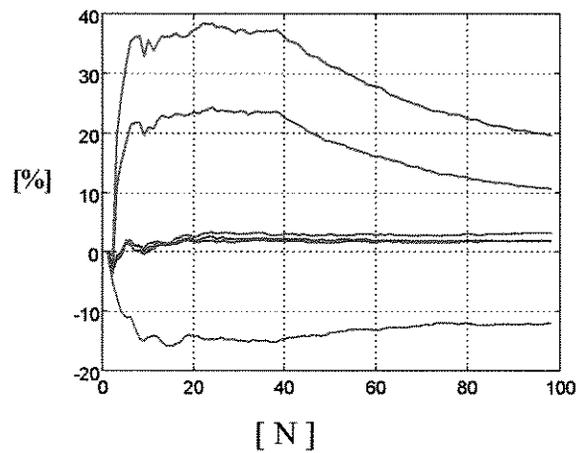


Figura 5.38 - Variação dos resíduos na condição 12

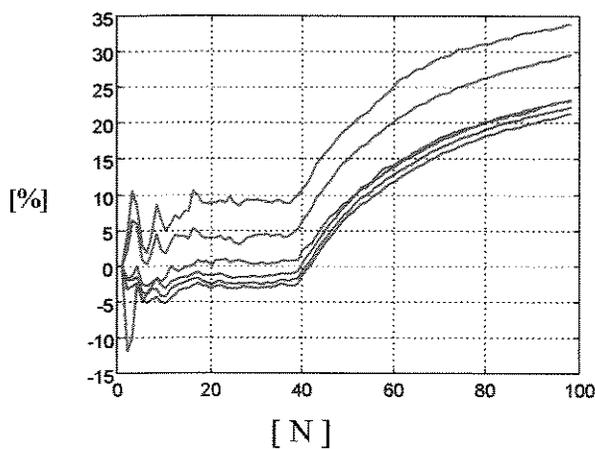


Figura 5.39 - Variação dos resíduos para falha na entrada do sistema - com ruído de 10%

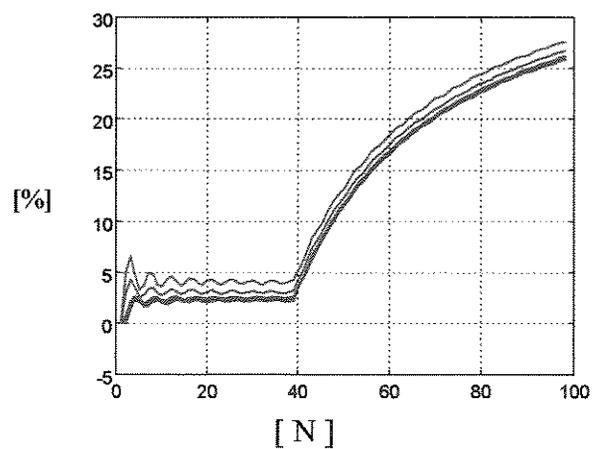


Figura 5.40 - Variação dos resíduos para falha na entrada do sistema - sem ruído

As funções de resíduo definidas anteriormente permitem identificar também se existe alguma alteração nas forças de excitação do sistema. Impondo-se uma alteração repentina nas

forças de entrada do sistema, em 20% , observa-se a alteração numérica de todos os resíduos indiferentemente, como mostram as figuras 5.39 e 5.40. A alteração das forças de excitação tira o sistema do regime estacionário e esta alteração é indicada por todos os resíduos, tanto na condição ideal (sem ruído), como na condição de ruído aditivo as medidas. Se as forças de excitação do sistema simulado estiverem relacionadas, por exemplo, a um desbalanceamento do rotor, e puderem ser medidas, o padrão de variação dos resíduos observado nas figuras 5.39 e 5.40 indicará um desbalanceamento no sistema.

5.6 - Exemplo 5

Neste exemplo será simulado o método de detecção de falhas proposto no parágrafo 4.3.1 (detecção de falhas através das funções de resíduo com matriz de medidas genérica) Considera-se o mesmo sistema dinâmico do exemplo anterior, porém assume-se que alguns pontos de medida do sistema não podem ser acessados, ou seja, em vez de serem medidos 6 coordenadas geométricas diferentes no sistema, serão medidas apenas 4 coordenadas geométricas, a saber: 2 deslocamentos do mancal e 2 deslocamentos do rotor (as correspondentes velocidades são obtidas no mesmo ponto de medição). Neste caso, a matriz de medidas e a matriz de transformação assumem a seguinte forma,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

de modo a obter a matriz de medidas na forma especial,

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CT} = \left[\mathbf{I}_{(8,8)} \ ; \ \mathbf{O}_{(8,4)} \right]. \tag{5.31}$$

Com isto, pode-se obter as matrizes \mathbf{A}_1 e \mathbf{B}_1 a partir de (4.8) que serão utilizadas nas funções de resíduo definidas de acordo com (4.35). Seguindo-se a orientação dada para escolha da matriz de transformação, obtém-se a matriz \mathbf{A}_2 com a seguinte forma numérica:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} & \mathbf{O}_{(4,4)} & & \\ -4000 & 0 & 0 & 0 \\ 6000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4000 & 0 & 0 \\ 0 & -6000 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

com,

$$\text{Posto}[\mathbf{A}_2] = 2. \quad (5.33)$$

Isto permite montar um conjunto de 6 vetores $\mathbf{s}_i, i = 1, \dots, 6$, linearmente independentes, que satisfazem a condição (4.20). Para este exemplo, serão montadas apenas 4 funções de resíduo, utilizando-se os seguintes vetores $\mathbf{s}_i, i = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1^T &= \{0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1,5 \ 1 \ 0 \ 0\}, \quad \mathbf{s}_2^T = \{1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1,5 \ 1\}, \\ \mathbf{s}_3^T &= \{1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1,5 \ 1 \ 1,5 \ 1\}, \quad \mathbf{s}_4^T = \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Estes vetores $\mathbf{s}_i^T, i = 1, \dots, 4$, fornecem funções de resíduo $e_i(\tau), i = 1, \dots, 4$, em uma forma adequada para o monitoramento dos parâmetros de rigidez e amortecimento do mancal. Estas funções contém uma combinação de parâmetros do modelo devido as transformações dadas pela matriz \mathbf{T} . O detalhamento analítico das funções de resíduo (obtido através do software *Matematica*) tem a seguinte forma vetorial:

$$\begin{aligned} e_1(\tau) &= \left\{ \frac{-1,5}{m_1} [k_1 + 6(a+b)] \quad \frac{-6a}{m_2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{-1,5c_1}{m_1} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \right. \\ &\quad \left. 0 \quad e\Omega^2 \quad 0 \quad \frac{1,5}{m_1} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{yw}(\tau) \\ \mathbf{r}_{uw}(\tau) \end{Bmatrix} + r_1(\tau), \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$e_2(\tau) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1,5}{m_1}[k_2 + 6(a+b)] & \frac{-6a}{m_2} & 1 & 0 & 1 - \frac{c_2}{m_1} & 1 \\ 0 & e\Omega^2 & \frac{1,5}{m_1} + \frac{2}{m_2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{yw}(\tau) \\ r_{uw}(\tau) \end{Bmatrix} + r_3(\tau), \quad (5.36)$$

$$e_3(\tau) = \begin{Bmatrix} \frac{-1,5}{m_1}[k_1 + 6(a+b)] & \frac{-6a}{m_2} & \frac{-1,5}{m_1}[k_2 + 6(a+b)] & \frac{-6a}{m_2} & 1 - \frac{1,5c_1}{m_1} \\ 1 & \frac{-1,5c_2}{m_1} & 1 & e\Omega^2 & e\Omega^2 & \frac{3}{m_1} + \frac{2}{m_2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{yw}(\tau) \\ r_{uw}(\tau) \end{Bmatrix} + r_3(\tau), \quad (5.37)$$

$$e_4(\tau) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{yw}(\tau) \\ r_{uw}(\tau) \end{Bmatrix} + r_4(\tau), \quad (5.38)$$

onde foi utilizada a seguinte definição:

$$r_i(\tau) = s_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(\tau) & r_{yw}(\tau) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{N} \end{Bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (5.39)$$

Os resíduos tem a seguinte relação de dependência em relação aos parâmetros de interesse: resíduo $e_1(\tau)$ é sensível a falha relacionada aos parâmetros k_1 e c_1 , o resíduo $e_2(\tau)$ é sensível aos parâmetros k_2 e c_2 , o resíduo $e_3(\tau)$ é sensível a todos os parâmetros de rigidez e amortecimento do mancal e o resíduo $e_4(\tau)$ não é sensível aos parâmetros do mancal. A matriz \mathbf{A}_2 não contém parâmetros relacionados ao mancal, o que satisfaz a condição imposta neste método. O sistema filtro de acordo com (4.34) tem dimensão unitária, na seguinte forma:

$$\mathbf{N} = -100, \quad \mathbf{p}^T = 10^3 \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\} \quad (5.40)$$

onde todas as medidas da resposta do sistema, $\mathbf{y}(t)$, são distribuídas na mesma proporção através do vetor de entradas do filtro (vetor de entradas \mathbf{p} unitário). A simulação da resposta

do sistema foi feita com tempo de discretização de 0,01 segundos e o seguinte vetor de excitação:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} \text{sen}(\omega t + \beta) \\ \text{cos}(\omega t + \beta) \\ \text{sen}(\omega t + 2\beta) \end{Bmatrix}. \quad (5.41)$$

Este sistema filtro tem frequência de atenuação mais próxima à frequência de excitação do sistema, como mostra o diagrama de Bode na figura 5.41. Os resíduos foram estimados da mesma forma já descrita no Exemplo 4, utilizando-se um total de 4000 valores discretos de resposta. A figura 5.42 mostra a variação acumulada dos resíduos estimados para o sistema funcionando sem falhas. As figuras 5.43 - 5.54. mostram a variação dos resíduos estimados em diversas condições de falha, que estão resumidas na Tabela 5.9.

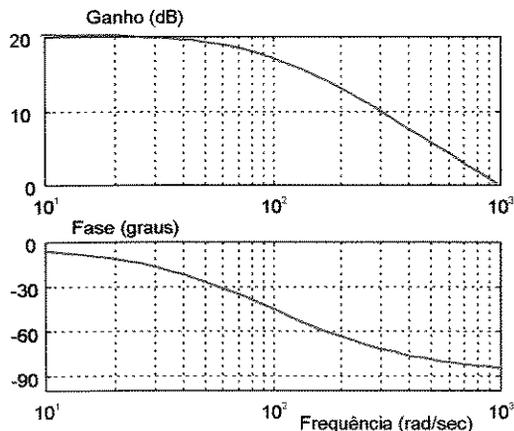


Figura 5.41 - Diagrama de Bode do Sistema Filtro

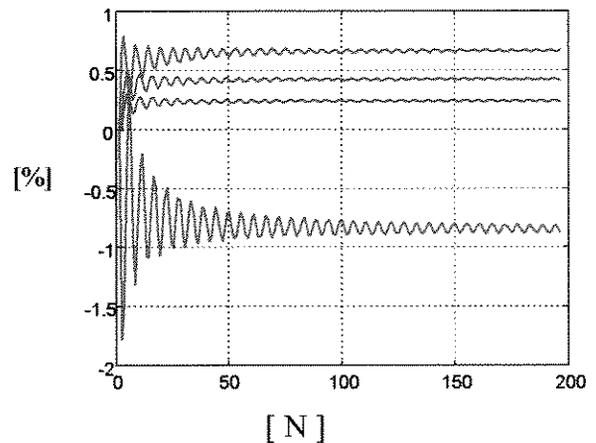


Figura 5.42 - Variação dos resíduos na Condição 1

Analogamente ao exemplo anterior, indica-se na cor vermelha os resíduos relacionados aos parâmetros com falha e na cor azul, os resíduos não relacionados aos parâmetros com falha. Idealmente, os resíduos vermelhos devem apresentar variação numérica após a falha e os resíduos na cor azul devem permanecer constantes. Todas as falhas foram introduzidas no sistema em $N = 100$.

Condição	Descrição da Falha	Ruído(% rms)
1	Sistema sem falha	0
2	Aumento de 20% em k_1	0
3	Aumento de 10% em k_1 e k_2	0
4	Aumento de 5% em c_1 e c_2	0
5	Aumento de 5% em c_2	0
6	Sistema sem falha	10
7	Aumento de 20% em k_1	10
8	Aumento de 50% em k_1	10
9	Aumento de 5% em c_2	10
10	Aumento de 30% em c_2	10
11	Aumento de 50% em k_1 e k_2	5
12	Falha na entrada do sistema 20%	0
13	Falha na entrada do sistema 20%	10

Tabela 5.9 - Condições de simulação do exemplo 5

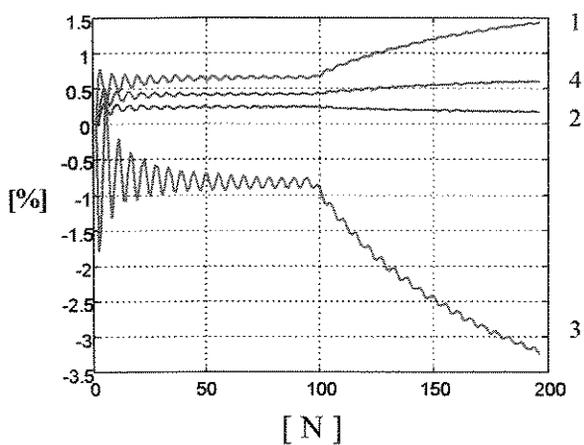


Figura 5.43 - Variação dos resíduos na Condição 2

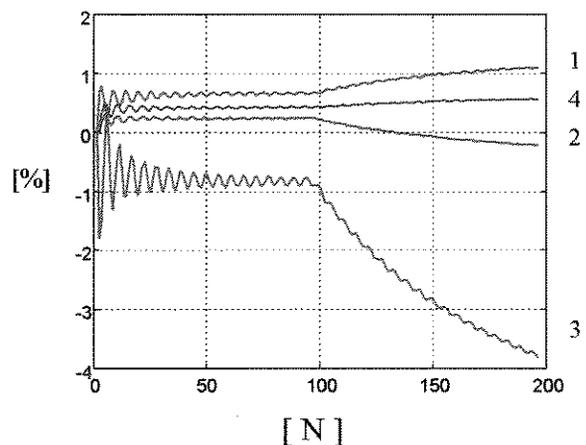


Figura 5.44 - Variação dos resíduos na Condição 3

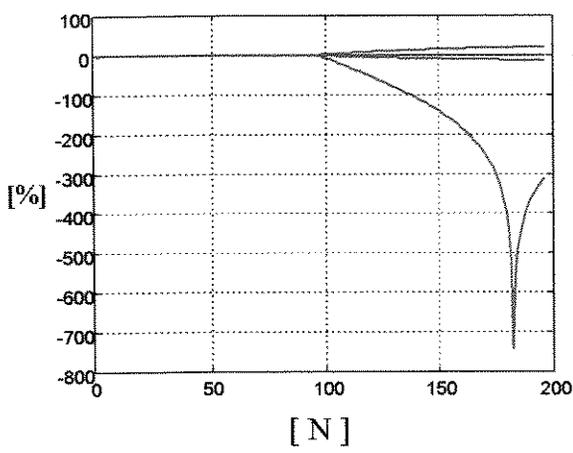


Figura 5.45 - Variação dos resíduos na Condição 4

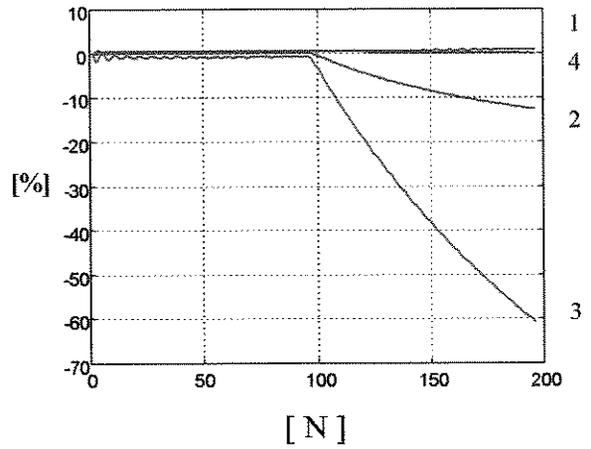


Figura 5.46 - Variação dos resíduos na Condição 5

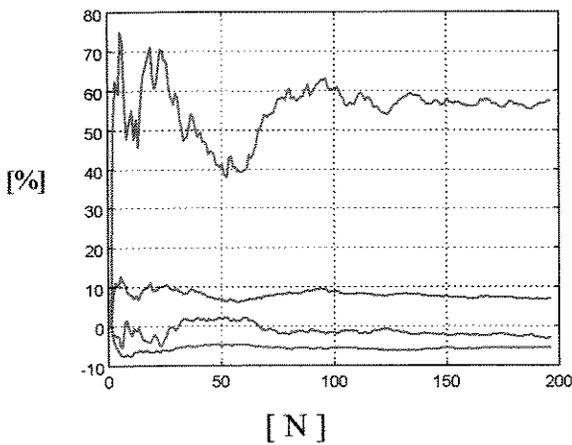


Figura 5.47 - Variação dos resíduos na Condição 6

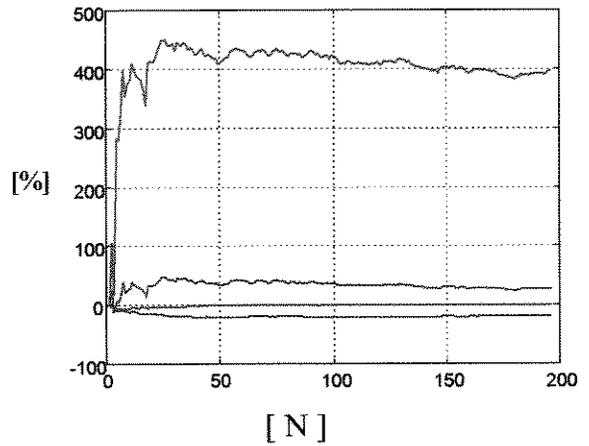


Figura 5.48 - Variação dos resíduos na Condição 7

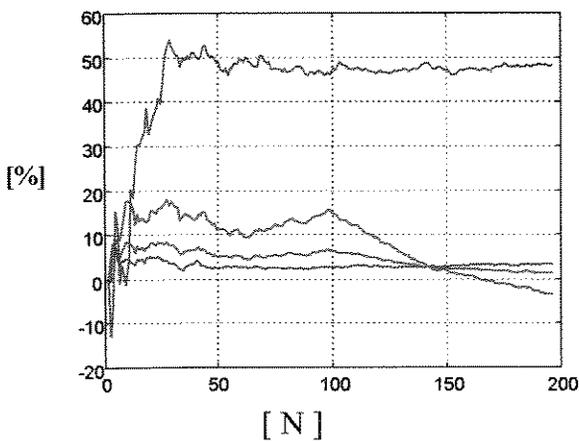


Figura 5.49 - Variação dos resíduos na Condição 8

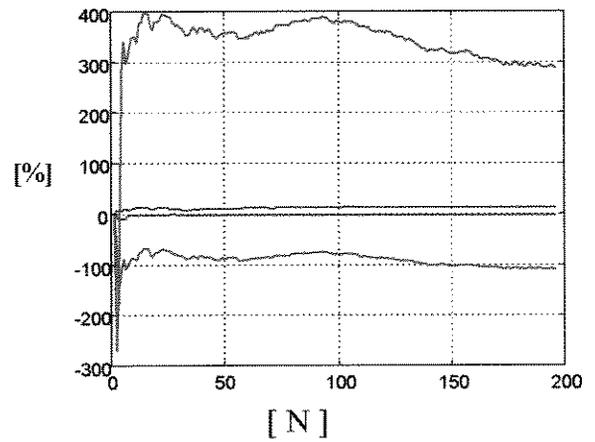


Figura 5.50 - Variação dos resíduos na Condição 9

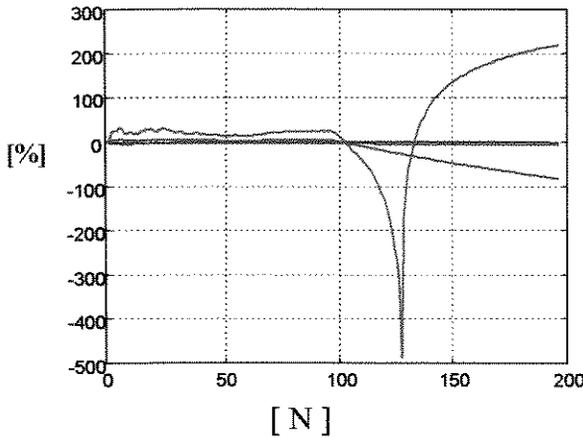


Figura 5.51 - Variação dos resíduos na Condição 10

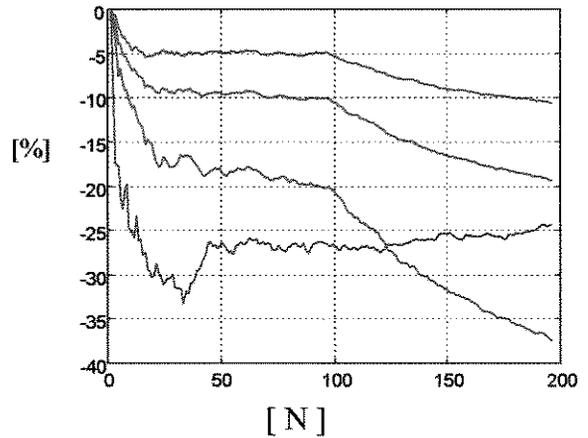


Figura 5.52 - Variação dos resíduos na Condição 11

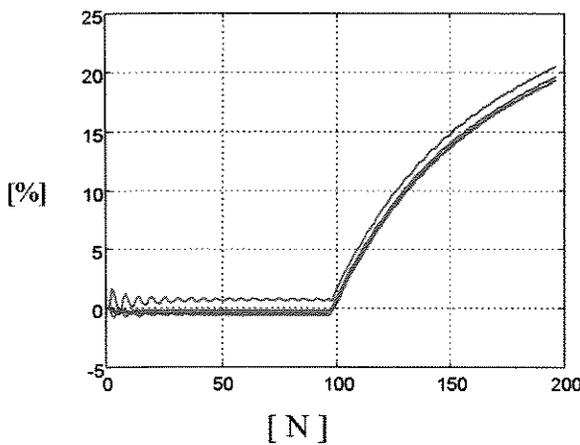


Figura 5.53 - Variação dos resíduos na Condição 12

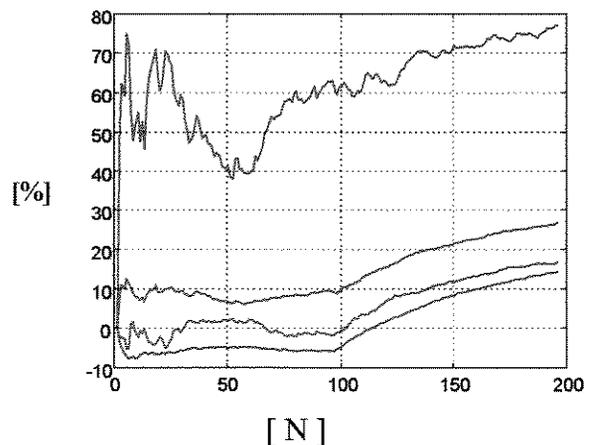


Figura 5.54 - Variação dos resíduos na Condição 13

As figuras 5.43 a 5.46 mostram as variações acumuladas dos resíduos estimados para diferentes intensidades de falhas nos parâmetros do mancal. No lado direito destes gráficos foi colocada uma numeração para cada resíduo. O número 1 indica o resíduo $e_1(\tau)$, o número 2 indica o resíduo $e_2(\tau)$ e assim por diante. De modo geral, observa-se que, para este modelo, os resíduos são mais sensíveis a falha no parâmetro de amortecimento que no parâmetro de rigidez. Uma variação de 5% no parâmetro de amortecimento já produz uma variação de resíduos facilmente identificável (figuras 4.45 e 4.46) ao passo que, para o parâmetro de rigidez é necessário uma variação maior (10% a 20%) para produzir um variação sensível nos resíduos (figuras 4.43 e 4.44).

No Exemplo 4 foram obtidas 6 funções de resíduo, sendo que, a função $e_1(\tau)$ era sensível aos parâmetros k_2 e c_2 do mancal e a função $e_4(\tau)$ era sensível aos parâmetros

k_2 e c_2 . Esta mesma característica foi obtida agora, com os resíduos $e_1(\tau)$ e $e_2(\tau)$ respectivamente, porém, neste exemplo utilizou-se um número menor de pontos de medição no sistema. Desta forma, uma falha em k_1 produz variação nos mesmos resíduos que uma falha em c_1 , o que impossibilitaria identificar se a falha é em c_1 ou em k_1 . Entretanto, a intensidade da variação dos resíduos será diferente, porque o sistema é mais sensível a variação no parâmetro de amortecimento.

Uma análise semelhante pode ser visualizada nas figuras 5.44 e 5.45 (condições 3 e 4). Uma falha simultânea de 10% em k_1 e k_2 produz o mesmo padrão de variação que uma falha simultânea em c_1 e c_2 , porque, em ambos os casos os resíduos $e_1(\tau)$, $e_2(\tau)$ e $e_3(\tau)$ apresentam variação após a falha e $e_4(\tau)$ permanece constante. Mas a intensidade desta variação é diferente: aproximadamente 3% (no máximo) na figura 5.44, contra mais de 700% na figura 5.45.

Esta análise de sensibilidade do resíduo à falha no parâmetro pode ser feita na presença de ruído nos sinais. A estimação dos resíduos para o sistema sem falhas e com ruído aditivo nos sinais $y(t)$ e $u(t)$, é mostrada na figura 5.47. Utilizando um ruído com intensidade de 10% observa-se que os valores estimados ainda apresentam certa variação até $N = 100$. Porém, considera-se que esta variação esteja dentro de uma tolerância adequada ao monitoramento. Nesta condição, uma falha de 20% na rigidez ainda não produz uma variação sensível nos resíduos, como pode ser verificado na figura 5.48. Para esta intensidade de ruído, é necessária uma alteração mínima de 50% na rigidez, como mostra a figura 5.49. Para o amortecimento, uma falha de 5% nestas condições já produz uma variação identificável (figura 5.50). Para falhas maiores, os resíduos são facilmente identificáveis, como mostram as figuras 5.51 e 5.52.

Se as condições de operação do sistema forem alteradas (aumento das forças de excitação do sistema, por exemplo), todos os resíduos apresentam proporcionalmente a mesma variação. Este comportamento é esperado uma vez que, a falha não está relacionada a qualquer parâmetro do sistema ou, em outras palavras, a falha não está associada a nenhuma função de resíduo específica. Durante o transiente após a falha, todas as funções de correlação variam proporcionalmente da mesma forma e isto se reflete também nos resíduos. Na situação ideal sem ruídos (figura 5.53), esta forma de variação é facilmente observada. Adicionando ruído

aos sinais, esta variação proporcional deixa de ser tão evidente mas, mesmo assim, observa-se a mesma tendência que a do caso ideal (figura 5.54).

5.7 - Exemplo 6

No exemplo 5 foi necessário fazer a medição em 4 coordenadas geométricas diferentes do sistema, medindo-se os deslocamentos e velocidades correspondentes. Neste exemplo será imposta uma restrição ainda maior com relação as medidas. Considera-se neste caso, que se tem acesso a apenas 3 coordenadas geométricas diferentes do sistema. Serão medidos os deslocamentos $y_1(t)$, $z_1(t)$, $z_2(t)$ e as respectivas velocidades. Neste caso, a matriz de medidas do sistema fica na forma,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

O método de detecção de falhas baseado na geração de resíduos descrito no parágrafo 4.3.2 será avaliado neste exemplo. A matriz de transformação assume agora a seguinte forma,

$$\mathbf{T}_{(12,12)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 & \mathbf{T}_4 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

onde,

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Com esta definição obtém-se as matrizes, $\mathbf{A}_{(12,6)}^1$, $\mathbf{A}_{(12,6)}^2$, na forma desejada para o monitoramento dos parâmetros de rigidez e amortecimento do mancal. A matriz \mathbf{A}^1 contém os parâmetros do mancal e a matriz \mathbf{A}^2 não contém estes parâmetros. Como,

$$\text{Posto}[\mathbf{A}^2] = 6 \quad (5.45)$$

é possível obter 6 vetores \mathbf{s}_i , $i = 1, \dots, 6$, com dimensão $(1, 12)$, linearmente independentes, que satisfazem a condição 4.51. Estes vetores podem ser obtidos utilizando-se o algoritmo *svd* (*singular value decomposition*) de forma semelhante ao feito por Patton(1993, 1994 b). Este algoritmo utiliza a decomposição da matriz em valores singulares e sua formulação matemática está colocada no Apêndice B. Utilizando-se este algoritmo obtém-se os seguintes vetores \mathbf{s}_i , $i = 1, \dots, 6$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T \\ \mathbf{s}_2^T \\ \mathbf{s}_3^T \\ \mathbf{s}_4^T \\ \mathbf{s}_5^T \\ \mathbf{s}_6^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0824 & 0 & 0 & +0.5485 & 0 & 0 & +0.6923 & +0.4615 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +0.1236 & 0 & 0 & -0.8228 & 0 & 0 & +0.4615 & +0.3077 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9889 & 0 & 0 & -0.1486 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5487 & 0 & -0.0040 & 0 & 0 & 0 & 0 & +0.7373 & +0.3940 & +0.0046 \\ 0 & 0 & +0.8230 & 0 & 0.0060 & 0 & 0 & 0 & 0 & +0.3940 & +0.4090 & -0.0069 \\ 0 & 0 & -0.0071 & 0 & +1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & +0.0006 & -0.0009 & +0.0001 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Com estas definições, pode-se montar agora as funções de resíduo, na forma

$$\mathbf{e}_i(\tau) = \mathbf{s}_i^T [\mathbf{A}^1 \quad \mathbf{B}] \mathbf{r}_c(\tau), \quad i = 1, \dots, 6, \quad (5.47)$$

com características adequadas para o monitoramento dos parâmetros do mancal. Devido à transformação \mathbf{T} as funções de resíduo são bastante extensas e o detalhamento analítico não será feito aqui. A relação de dependência dos resíduos obtidos em relação ao parâmetros do mancal é a seguinte: os resíduos $\mathbf{e}_1(\tau)$ e $\mathbf{e}_2(\tau)$ são sensíveis a falha nos parâmetros c_1 e k_1 , os resíduos $\mathbf{e}_4(\tau)$ e $\mathbf{e}_5(\tau)$ são sensíveis a falha em c_2 e k_2 e os resíduos $\mathbf{e}_3(\tau)$ e $\mathbf{e}_6(\tau)$ são insensíveis a falha em qualquer parâmetro do mancal. A estimação do vetor de correlações

$r_c(\tau)$ depende também da resposta do sistema filtro, $w(t)$ e nesta simulação as matrizes do sistema filtro serão definidas na seguinte forma:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -120 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -140 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -160 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -180 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -220 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Nestas condições, uma falha no mancal, caracterizada por uma alteração nos parâmetros de rigidez ou amortecimento, produz uma variação diferenciada nos resíduos, o que permite localizar o parâmetro com falha. Esta afirmação só é verdadeira se forem observadas as condições dadas em (4.64). A estimativa dos resíduos em (5.47) foi feita da mesma forma já descrita no Exemplo 4, utilizando-se um total de 3000 valores discretos de resposta do sistema. A discretização do sistema foi feita com $\Delta t = 0,006$ segundos. A tabela 5.10 mostra as condições simuladas.

Condição	Descrição da Falha	Ruído (% rms)
1	Diminuição no parâmetro k_1 e c_1 em 50%	0
2	Diminuição no parâmetro k_1 e c_1 em 50%	20
3	Diminuição no parâmetro k_2 e c_2 em 50%	0
4	Diminuição no parâmetro k_2 e c_2 em 30%	30
5	Diminuição no parâmetro k_1, c_1, k_2 e c_2 em 30%	30
6	Diminuição no parâmetro k_1 e c_1 em 5%	0
7	Aumento no parâmetro k_1 em 20%	0
8	Aumento do parâmetro c_2 em 5%	0

Tabela 5.10 - Condições de simulação do exemplo 6

As figuras 5.55 a 5.62 mostram todas as condições simuladas. A padronização de cores é a mesma que o exemplo anterior, ou seja, os resíduos relacionados aos parâmetros com falha estão representados na cor vermelha e os resíduos na cor azul não estão relacionados aos parâmetros com falha. As figuras 5.55 e 5.56 mostram os valores estimados dos resíduos para falha simultânea nos parâmetros k_1 e c_1 sem ruído aditivo e com ruído aditivo, respectivamente. Nota-se claramente que a variação numérica dos resíduos $e_1(\tau)$ e $e_2(\tau)$ é bem diferenciada das demais, em ambos os casos. Análise semelhante se aplica as condições 3 e 4 (figuras 5.57 e 5.58). Neste caso, os resíduos $e_4(\tau)$ e $e_5(\tau)$ apresentam maior variação numérica após a falha.

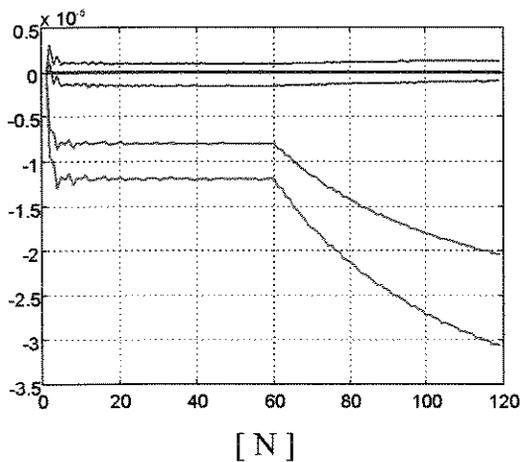


Figura 5.55 - Resíduos estimados na Condição 1

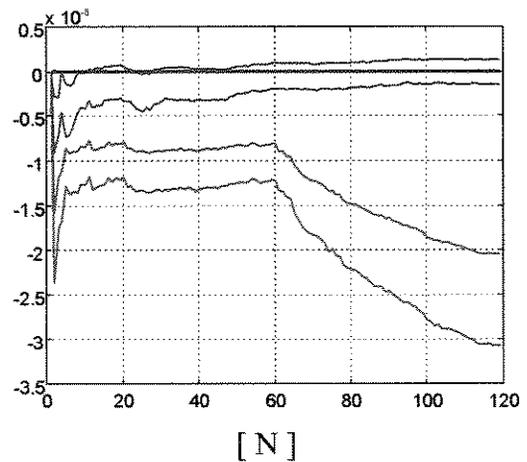


Figura 5.56 - Resíduos estimados na Condição 2

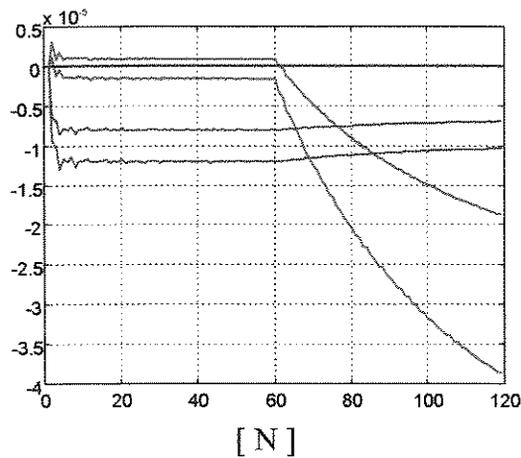


Figura 5.57 - Resíduos estimados na Condição 3

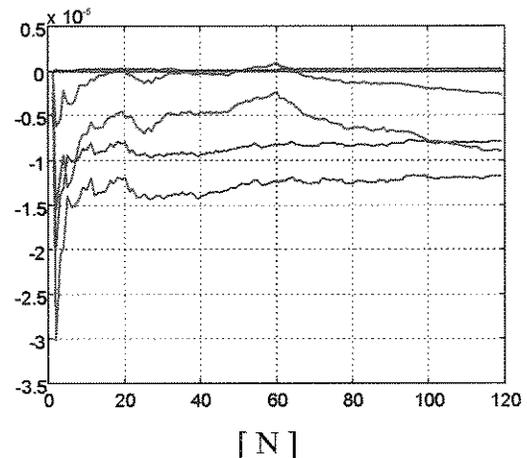


Figura 5.58 - Resíduos estimados na Condição 4

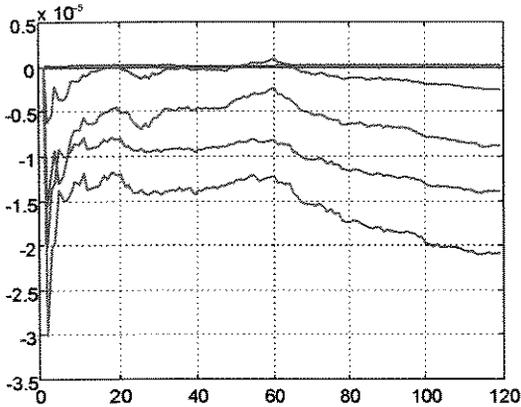


Figura 5.59 - Resíduos estimados na Condição 5

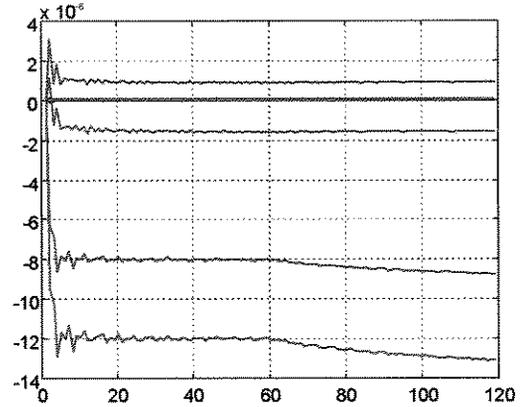


Figura 5.60 - Resíduos estimados na Condição 6

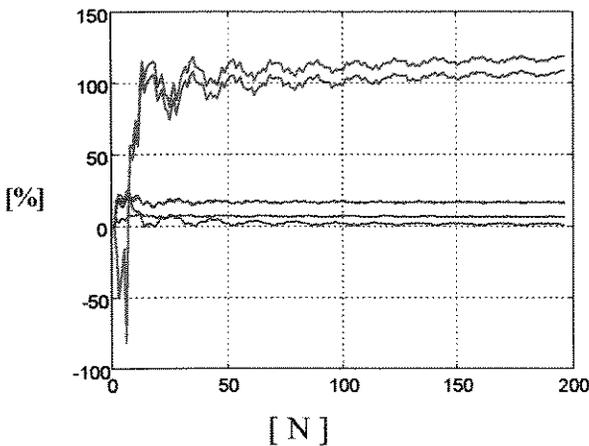


Figura 5.61 - Variação dos resíduos estimados na Condição 7

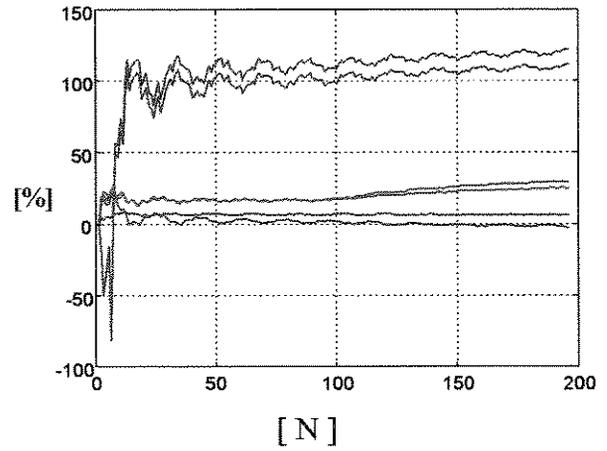


Figura 5.62 - Variação dos resíduos estimados na Condição 8

A figura 5.59 mostra o comportamento dos resíduos para uma falha em todos os parâmetros do mancal. Neste caso os resíduos $e_1(\tau)$, $e_2(\tau)$, $e_4(\tau)$ e $e_5(\tau)$ apresentam variação maior que os resíduos $e_3(\tau)$ e $e_6(\tau)$, mesmo com introdução de ruído de 30%. A figura 5.60 apresenta o caso limite para identificação de uma falha nos parâmetros k_1 e c_1 . A diferenciação dos resíduos para 5% de variação simultânea nestes parâmetros já é difícil de ser observada graficamente, mesmo sem ruído aditivo.

Comparando-se os resultados obtidos neste método com os obtidos no método anterior (Exemplo 5), verifica-se que neste último, a identificação do resíduo relacionado a falha é mais difícil de ser observada quando as mesmas condições de falha são analisadas. Deve-se notar que, para fazer esta comparação, é necessário utilizar em ambos os métodos as mesmas

condições de simulação do sistema, ou seja, mesma excitação, mesmo tempo de discretização, sistema filtro com a mesma frequência de atenuação e mesmo instante de ocorrência da falha.

As condições de falha 7 e 8 deste exemplo são iguais às condições de falha 2 e 5 no Exemplo 5, respectivamente. Como se observa, a variação diferenciada dos resíduos relacionados à falha não é facilmente notada nas figuras 5.61 e 5.62, porém, no Exemplo 5 esta variação diferenciada é facilmente notada (figuras 5.43 e 5.46). Isto se explica uma vez que, neste último método os resíduos estimados não são idealmente nulos, como no caso anterior. Portanto, neste caso, todos os resíduos apresentam certa variação em decorrência da falha.

Em uma situação real de monitoramento, em geral, não se pode prever antecipadamente qual a natureza da falha, nem sua intensidade, por isso, fica difícil saber a priori, se a condição (4.64) é válida. Nesta simulação, observou-se que a identificação dos resíduos através da metodologia descrita no parágrafo 4.3.2 é possível quando a intensidade da falha (variação dos parâmetros) é suficientemente grande. Isto parece garantir que a condição (4.64) seja satisfeita, entretanto, esta é uma constatação observada apenas nesta simulação e necessita uma comprovação analítica mais rigorosa para poder ser generalizada para outros casos.

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho apresentou uma abordagem para tratar o problema de detecção e localização de falhas em sistemas mecânicos. A principal diferença desta proposta em relação às demais metodologias em MBFD (*model based fault detection*) é a utilização de funções de correlação para gerar expressões analíticas redundantes. Esta redundância analítica foi posteriormente utilizada com o objetivo de monitorar parâmetros do sistema. Duas abordagens diferentes foram investigadas: uma baseou-se na estimação de parâmetros e a outra baseou-se nas funções de resíduo. Em ambas as abordagens, partiu-se do pressuposto que o modelo matemático do sistema mecânico é bem conhecido e está representado na forma de variáveis de estado com excitação estacionária. Uma falha (ou defeito) no sistema foi definida como sendo uma alteração numérica permanente em um ou mais parâmetros físicos do sistema. Foi mostrado que, se algumas condições forem observadas, é possível identificar o instante e a localização de uma falha no sistema, mesmo que não se tenha acesso à medição de todo o vetor de estados e mesmo que, os sinais medidos contenham ruído aleatório.

A equação básica de correlação foi avaliada no Exemplo 1 através da estimação dos parâmetros de rigidez e amortecimento de um sistema massa-mola simples. A estimação das funções de correlação pelo método do somatório (Método 1) conduziu a melhores resultados que o Método 2 (cálculo pela densidade espectral), quando os sinais medidos contém ruído aditivo. No Exemplo 1, obteve-se boa estimativa de parâmetros, porém, o mesmo não aconteceu para o sistema com maior número de graus de liberdade, simulado no Exemplo 3. As funções de correlação foram estimadas para diferentes defasagens de tempo, com o objetivo de montar um sistema sobredeterminado de equações. Em ambos os exemplos, o

procedimento de estimação de parâmetros utilizou o cálculo da inversa das matrizes de correlação através da rotina da pseudoinversa (`>>pinv`) do software *Matlab*. As matrizes de correlação do Exemplo 3 tem dimensões maiores que as matrizes do Exemplo 1, o que torna mais difícil a estimação exata de seus valores. O erro médio, μ_{Δ} , definido para cada valor de τ_i , pode orientar na escolha das defasagens de tempo mais apropriadas, porém, mesmo para estes valores, não se obteve uma estimação de parâmetros consistente.

O condicionamento numérico das matrizes do sistema é também um fator de influência na estimação dos parâmetros. As matrizes do sistema no Exemplo 3 apresentam desbalanceamento numérico, o que dificulta a estimação direta através da pseudoinversa. Pode-se conduzir uma transformação numérica sobre as matrizes do sistema para se obter formas mais adequadas à estimação, como por exemplo, a transformação para matrizes diagonais. Este procedimento pode melhorar a precisão numérica na estimação dos parâmetros, por outro lado, esta transformação numérica levaria a uma intensa combinação de parâmetros do sistema. Esta maior combinação não é desejável que ocorra, uma vez que, a localização exata do parâmetro diretamente relacionado a falha seria dificultada.

Os métodos de detecção de falhas baseados nas funções de resíduo apresentaram um melhor desempenho em relação aos métodos de estimação. Nos exemplos simulados, os métodos de detecção de falhas baseados nas funções de resíduo apresentaram resultados mais próximos dos resultados esperados. As funções de resíduo, de modo geral, se mostram mais robustas à presença de ruído nos sinais, bem como, ao erro introduzido no cálculo das funções de correlação. Observou-se que os resíduos estimados na presença de ruído apresentam uma maior variação numérica que no caso ideal (sem ruído). Isto leva à necessidade de se definir uma tolerância para o monitoramento do sistema. Esta tolerância deve definir qual deve ser a máxima variação de um resíduo para o sistema sem falhas. O sinal de ruído aditivo utilizado em todas as simulações foi um sinal estacionário, aleatório, com média zero. Outras formas de sinal estacionário podem ser utilizadas como ruído, mas, isto não foi feito neste trabalho, uma vez que, objetivou-se estudar apenas a influência do ruído aleatório.

No Exemplo 2, as funções de resíduo foram geradas sem a utilização de um sistema auxiliar. As funções de resíduo estimadas contém uma combinação de parâmetros de interesse

no monitoramento do sistema. Para localizar os parâmetros relacionados à falha, é necessário aplicar, em cada caso, uma lógica apropriada de decisão. Através das transformações numéricas, T , e dos vetores de desacoplamento, s , consegue-se uma certa combinação de parâmetros, porém, parâmetros diferentes que estão associados às mesmas coordenadas nas matrizes do sistema, não podem ser desacoplados. Desta forma, não se consegue funções de resíduo independentes para estes parâmetros associados.

Nos Exemplos 4, 5 e 6 as funções de resíduo foram geradas utilizando-se um sistema auxiliar (sistema filtro). A utilização de um sistema auxiliar aumenta o número de funções de resíduo que podem ser obtidas para uma dada condição de medidas. O número de parâmetros que se pode monitorar no sistema está diretamente relacionado à quantidade de funções de resíduo, linearmente independentes, que podem ser obtidas. Neste sentido, o sistema filtro é uma ferramenta interessante a ser utilizada no monitoramento do sistema. Por outro lado, a utilização do sistema filtro precisa ser feita com critério. A dinâmica do sistema auxiliar precisa ser ajustada de acordo com o sistema a ser monitorado. Para cada caso particular, a matriz dinâmica do sistema filtro teve que ser ajustada para se obter sensibilidade máxima dos resíduos à falha. Quanto maior a sensibilidade dos resíduos à variações nos parâmetros, maior será a variação diferenciada dos resíduos relacionados à falha.

Na simulação numérica observou-se que as frequências de atenuação ideais do sistema filtro devem estar próximas e acima das frequências de excitação do sistema. Para frequências de atenuação muito maiores que as frequências de excitação, a sensibilidade dos resíduos diminui. Esta constatação foi feita apenas nas simulações e necessita ainda de uma análise analítica mais rigorosa para comprovação deste resultado.

Foi mostrado que, para uma condição de medidas qualquer sobre o sistema, ainda é possível obter funções de resíduo relacionadas aos parâmetros de interesse ao monitoramento. No entanto, a sensibilidade da resposta do sistema às variações nos parâmetros varia diferentemente de parâmetro para parâmetro. Assim, uma variável de estado medida em algum ponto do sistema pode ser mais sensível às variações de determinados parâmetros e menos sensível a outros. Desta forma, é aconselhável escolher, sempre que possível, o ponto de medição com a mesma coordenada geométrica do parâmetro físico a ser monitorado. Na

simulação do Exemplo 5, utilizou-se uma condição de medidas qualquer, porém, dois pontos de medição foram colocados sobre o mancal uma vez que, o objetivo, neste caso, é o monitoramento de parâmetros relacionados ao mancal do sistema.

Neste trabalho, toda metodologia desenvolvida utilizou modelos matemáticos conhecidos, onde os sinais medidos foram simulados em computador. Os exemplos simulados foram apresentados em uma seqüência que se aproxima gradativamente das condições encontradas na prática. As diferentes condições impostas sobre a matriz de medidas do sistema, bem como a adição de ruído nos sinais, têm como objetivo uma aplicação prática da metodologia. Entretanto, não foi abordado o caso onde não se pode medir por completo todo o vetor de excitação do sistema. Esta hipótese é interessante de ser explorada analiticamente uma vez que, o não conhecimento da excitação representa também uma característica encontrada nos casos reais.

Desta forma, uma continuidade natural deste trabalho seria a implementação das metodologias aqui desenvolvidas, em um sistema mecânico real. Sistemas mecânicos rotativos, operando com rotações constantes, são o alvo potencial para uma aplicação prática. Como sugestão final coloca-se, a seguir, alguns temas de pesquisa que podem ser explorados em um próximo trabalho:

- Otimização das funções de resíduo no sentido de se obter a sensibilidade máxima à variação de parâmetros de interesse.
- Melhoramento numérico do método de estimação de parâmetros para sistemas com grande número de graus de liberdade.
- Sistematização da metodologia para escolha ótima do vetor de desacoplamento s_i e da matriz de transformação T .
- Análise das equações de correlação para o caso de medição parcial da excitação do sistema.

Bibliografia

- Basseville, M., et al. In situ damage monitoring in vibration mechanics: diagnostics and predictive maintenance. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol.7, n.5, p.401-423, 1993.
- Basseville, M., Benveniste, A., Moustakides, G., Rougee, A. Detection and diagnosis of changes in eigenstructure of nonstationary multivariable systems. *Automatica*, vol. 23, n.4, p.479-489, 1987.
- Basseville, M. Detecting changes in signals and systems - A survey. *Automatica*, vol. 24, n.3, p.309-326, 1988.
- Bendat, J. S., Pierson, A.G. *Engineering Applications of Correlations and Spectral Analysis*, John Willey & Sons, 1980.
- Bhattacharyya, S. P. Observer design for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. ac-23, n.3, p.483-484, 1978.
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M. *Time Series Analysis Forecasting and Control*, Holden Day, 1970.
- Chen, J., Zhang, H. Robust detection of fault actuators via unknown input observers. *International Journal of System Science*, vol.22, n.10, p.1829-1839, 1991.

Chen, Y. Machinery condition monitoring by inverse filtering and statistical analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol.6, n.2, p.177-189, 1992.

Chiarello, A. G., Pederiva, R. Detecção e localização de falhas em sistemas mecânicos através da análise de correlações. XIV COBEM - Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Bauru, SP, *Proceedings (CD ROM)*, 1997.

Chow, E., Y., Willsky, A. Analytical redundancy and design of robust failure detection systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.29, n.7, p.603-614, 1984.

Cooper, J.E., Desforges, M., Wright, J. R. Extraction of modal parameters from unknown coloured random input. In ISMA 19 - Tools for Noise and Vibration Analysis. *Proceedings*, p.1123-1128, 1994(a).

Cooper, J.E., Desforges, M. Physical parameter identification using an unknown random input. In: ISMA 19 - Tools for Noise and Vibration Analysis. *Proceedings*, p.1123-1128, 1994(b).

Dias Jr., M. Identificação de Parâmetros de Sistemas Mecânicos e das Características de Uma Perturbação Externa pelo Método das Covariâncias. *Tese de Mestrado*, Universidade Estadual de Campinas, SP, 1987.

Deibert, R., Isermann, R. Examples for fault detection in closed loops. In: IFAC Artificial Intelligence in Real Time Control, Deth, The Netherlands. *Proceedings*, p.235-240, 1992.

El-Sherief, H. Multivariable system structure and parameter identification using the correlation method. *International Federation of Automatic Control*, p.541-544, 1980.

Finkbeiner, D. T. *Introdução as Matrizes e Transformações Lineares*, EDUSP, 1970.

Frank, P. M. Principles of model based fault detection. In: IFAC Artificial Intelligence in Real-Time Control, Delft The Netherlands. *Proceedings*, p.213-220, 1992.

- Frank, P. M., Seliger, R. Fault detection and isolation in automatic process. *Control and Dynamic Systems*, vol. 49, p.241-287, 1991.
- Frank, P. M. Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy - A survey and some new results. *Automatica*, vol.26, n.3, p.459-474, 1990.
- Frank, P., M., Keller, L. Sensitivity discriminating observer design for instrument failure detection. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol aes-16, n.4, p.460-467, 1980.
- Frank, P., M., Ding, X. Frequency domain approach to optimally robust residual generation and evaluation for model based fault diagnosis: *Automatica*, vol.30, n.5, p.789-804, 1994.
- Frank, P., M. Enhancement of robustness in observer-based fault detection. *International Journal of Control*, vol.59, n.4, p.955-981, 1994.
- Gantmacher, F. G. *The Theory of Matrices*, Chelsea Pub. Comp., vol. 1, 1959.
- Ge, W., Fang, C.Z. Extended robust observation approach for failure isolation. *International Journal of Control*, vol.49, n.5, p.1537-1553, 1989.
- Ge, W., Fang, C.Z. Detection of fault components via robust observation. *International Journal of Control*, vol.47, n.2, p.581-599, 1988.
- Gertler, J. Analytical redundancy methods in fault detection and isolation - A survey and synthesis. In: *Plenary paper*, IFAC Safeprocess Symposium, Baden-Baden, Germany, sep. 10-13, 1991.
- Gertler, J., J., Monajemy, R. Generating directional residuals with dynamic parity relations. *Automatica*, vol.31, n.4, p.627-635, 1995(a).
- Gertler, J., Kunwer, M., M. Optimal residual decoupling for robust fault diagnosis. *International Journal of Control*, vol.61, n.2, p.395-421, 1995(b).

Gertler, J., Singer, D. A new structural framework for parity equation-based failure detection and isolation. *Automatica*, vol.26, n.2, p.381-388, 1990.

Guan, Y., Saif, M. A novel approach to the design of unknown input observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.36, n.5, p.632-635, 1991.

Hostetter, G., Meditch, J.,S. Observing systems with unmeasurable inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, jun., p.307-308, 1973.

Hou, H., Muller, P., C. Fault detection and isolation observers. *International Journal of Control*, vol.60, n.5, p.827-846, 1994.

Hou, M., Muller, P. C. Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on automatic control*, vol.37, n.6, p.871-875, 1992.

Huh, K., Stein, J. A quantitative performance index for observer-based monitoring systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol.116, p.487-497, 1994.

Isermann, R. *Überwachung und fehlerdiagnose*, VDI, Verlag, Germany, 1994.

Isermann, R. Estimation of physical parameters for dynamic processes with application to an industrial robot. *International Journal of Control*, vol.55, n.6, p.1287-1298, 1992.

Isermann, R., Freyermuth, B. Process fault diagnosis based on process model knowledge -Part 1: Principles for fault diagnosis with parameter estimation. *Transactions of the ASME*, vol.113, december, p.620-633, 1991.

Isermann, R. Fault diagnosis of machines via parameter estimation and knowledge processing - Tutorial paper. *Automatica*, vol.29, n.4, p.815-835, 1993.

Isermann, R. Process fault detection based on modeling and estimation methods - A survey.. *Automatica*, vol.20, n.4, p.387-404, 1984.

Isermann, R. et al. Comparison of six on-line identification and parameter estimation methods. *Automatica*, vol.10, p.81-103, 1974.

Jenkins, G. M.; Watts, D. G. *Spectral Analysis and its Applications*, Holden Day, 1968.

Johnson, C.D. On observers for systems with unknown and inaccessible inputs. *International Journal of Control*, vol.21, n.5, p.825-831, 1975.

Junkins, J. L., Kim, Y. *Introduction to Dynamic and Control of Flexible Structures*, p.9-39, AIAA Education Series, Washington, 1993

Kinnaert, M., Peng, Y. Residual generator for sensor and actuator fault detection and isolation: a frequency domain approach. *International Journal of Control*, vol.61, n.6, p.1423-1435, 1995.

Korbicz, J., Fathi, Z., Ramirez, W., F. State estimation schemes for fault detection and diagnosis in dynamic systems. *International Journal of System Science*, vol.24, n.5, p.985-1000, 1993.

Kubrusly, C., S., Lucena, A.,P. A comparison of three correlation techniques for system identification. *International Journal of Systems Science*, vol.14, n.1, p.31-57, 1983.

Kudva, P., Viswanadham, N., Ramakrishna, A. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.ac-25, n.1, p.113-115, 1980.

Li, J., C., Kin, T. Linear model-based fault detection and isolation for a screw compressor. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol.8, n.3, p.259-273, 1993.

Lou, X., Willsky, A., Verghese, G. Optimally robust redundancy relations for failure detection in uncertain systems. *Automatica*, vol.22, n.3, p.333-344, 1986.

- Luenberger, D., E. An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, vol.ac-16, n.6, p.596-602, 1971.
- Luenberger, D., E. Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on automatic control*, vol.ac-11, n.2, p.190-197, 1966.
- Luenberger, D., E. Canonical forms for multivariable systems. *IEEE Transactions on automatic control*, p.290-293, june, 1967.
- Magni, J., F., Mouyon, P., Arsan, M., J. Geometric tools for an observer-based approach to residual generation. In: IFAC Artificial Intelligence in Real Time Control, Delf, The Netherlands, *Proceedings*, p.229-233, 1992.
- Magni, J., F., Mouyon, P. On residual generation by observer and parity space approaches. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.39, n.2, p.441-447, 1994.
- Marquez, H., J., Diduch, C., P. Sensitivity of failure detection using generalized observers. *Automatica*, vol.28, n.4, p.837-840, 1992.
- Massoumnia, M., Verghese, G.,C., Willsky, A. Fault detection and identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.34, n.3, p.316-321, 1989.
- Meditch, J.S. *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control*, MacGraw Hill, 1969.
- Meditch, J.,S., Hostetter, G.,H. Observers for systems with unknown and inaccessible inputs. *International Journal of Control*, vol.19, n.3, p.473-480, 1974.
- Medvedev, A. State estimation and fault detection by a bank of continuous finite memory filters. In: 13th World Congress of IFAC, San Francisco, USA. *Proceedings*, p.223-338, 1996.
- Medvedev, A. Fault detection and isolation by a continuous parity space method. *Automatica*, vol.31, n.7, p.1039-1044, 1995.

- Melsa, J. L., Sage, A. P. *An Introduction to Probability and Stochastic Process*, Prentice Hall Inc., 1973.
- Merrington, G., L. Fault diagnosis in gas turbines using a model based technique. *Transactions of ASME*, vol.116, april, p.374-380, 1994
- Naeini, A., E., Akhter, M., Rock, S. Effect of model uncertainty on failure detection: The threshold selector. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.33, n.12, p.1106-1115, 1988.
- Nikoukhah, R. Innovations generation in the presence of unknown inputs: Application to robust failure detection. *Automatica*, vol.30, n.12, p.1851-1867, 1994.
- Ogata, K. *Solving Control Engineering Problems with MATLAB*. Prentice Hall Int., 357 p., 1994.
- Park, Y., Stein, J. Closed loop and input observer for systems with unknown inputs. *International Journal of Control*, vol.48, n.3, p.1121-1136, 1988.
- Park, J., Rizzoni, G. A new interpretation of the fault detection filter. Part 1. *International Journal of Control*, vol.60, n.5, p.767-787, 1994(a).
- Park, J., Rizzoni, G. An eigenstructure assignment algorithm for the design of fault detection filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.39, n.7, p.1521-1524, 1994(b).
- Pattipati, K., Willsky, A., Deckert, J., C., Eterno, J., S., Weiss, J., S. A design methodology for robust failure detection and isolation. *Nasa Report*, FP9 - 3:30, p.1755-1762, 1983.
- Patton, R. J. , Chen, J. Robust fault detection and isolation (FDI) systems. *Control and Dynamic Systems*, vol.74, p.171-224, 1996.

Patton, R. J. , Chen, J. A review of parity space approaches to fault diagnosis. In: IFAC/IMACS-Symposium, Baden-Baden, Germany. *Proceedings*, vol. 1, p.239-255, 1991.

Patton, R., J., Chen, J. Optimal unknown input distribution matrix selection in robust fault diagnosis. *Automatica*, vol 29, n.4, p.837-841, 1993.

Patton, R., J., Chen, J. On-line residual compensation in robust fault diagnosis of dynamic systems. In: IFAC Artificial Intelligence in Real Time Control, Delft, The Netherland. *Proceedings*, p.221-227, 1992(a).

Patton, R., J., Chen, J. Robustness in model based fault diagnosis. In: *Concise Encyclopedia of Modeling & Simulation*, Pergamon Press, UK,; p.379-392, 1992(b).

Patton, R., Frank, P., Clark, R. *Fault Diagnosis in Dynamic Systems*, Prentice Hall, UK, 1989.

Pederiva, R. Identificação Paramétrica de Sistemas Mecânicos Excitados Estocasticamente. *Tese de Doutorado*, Universidade Estadual de Campinas, SP, 1992.

Phatak, M., Viswanadhan, N. Actuator fault detection and isolation in linear systems. *International Journal of Systems Science*, vol. 19, n12, p.2593-2603, 1988.

Ragot, J., Maquin, D. An algorithm for obtaining the redundancy equations of LTI systems. *Automatica*, vol.30, n.3, p.537-542, 1994.

Sage, A. P., Melsa, J. L. *Estimation Theory with Applications to Communication and Control*, MacGraw Hill, 1971.

Saif, M., Guan, Y. A new approach to robust fault detection and identification. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol.29, n.3, p.685-695, 1993.

Santos, I. F., Weber, H. I. Reduced order rotor modeling combining theoretical and experimental data. *XII ASME Conference on Vibration and Noise*, Montreal, Canada, setembro, 1989.

Soffker, D., Bajkowski, J., Muller, P. C. Detection of cracks in turbo rotors - a new observer based method. Submitted for publishing in the *Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control*, 1991.

Tanaka, S., Muller, P., C. Fault detection in linear discrete dynamic systems by a reduced order generalized-likelihood-ratio method. *International Journal of System Science*, vol.24, n.4, p.721-732, 1993.

Tanaka, S., Muller, P., C. Fault detection in linear discrete dynamic systems by a pattern recognition of a generalized likelihood-ratio. *Transactions of ASME*, vol.112, june, p.276-282, 1990.

Tse, E., Weinert, H. L. Structure determination and parameter identification for multivariable stochastic linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.ac-20, n.5, p.603-613, 1975.

Tsui, C. On the solution to the state failure detection problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.34, n.9, p.1017-1018, 1989.

Tsui, C. A general failure detection, isolation and accommodation system with model uncertainty and measurement noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.39, n.11, p.2318-2321, 1994.

Wagner, J., Shoureshi, R. Failure detection diagnosis for thermofluid systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol.114, p.699-706, 1992.

Wang, H., Daley, S. A fault detection method for unknown systems with unknown input and its application to hydraulic turbine monitoring. *International Journal of Control*, vol.57,n.2, p.247-260, 1993.

Wang, S., Davison, E., J., Dorato, P. Observing the states of systems with unmeasurable disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.21, p.716-717, 1975.

Watanabe, K., Himmelblau, D. M. Instrument fault detection in systems with uncertainties. *International Journal of System Science*, vol.13, n.2, p.137-158, 1982.

Weber, H., I., Schiehlen, W., O. Parameter identifizierung mit quadratischer mittelwerten, *Institutsberich IB-5*, Inst. B für Mechanik, Universität Stuttgart, 1982.

Willsky, A. S. A survey of design methods for failure detection in dynamic systems. *Automatica*, vol.12, p.601-611, 1976.

Wolters, D., P. Canonical forms for linear systems, *Forschungsschwerpunkt Dynamische Systeme*, p.437-473, Universität Bremen, 1982.

Yaglom, A. M. *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions I*, Springer-Verlag, 1987.

Yaglom, A. M. *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*, Prentice Hall, 1962.

Young, P. Parameter estimation for continuous-time models- A survey. *Automatica*, vol.17, n.23, p.23-39, 1981.

Apêndices

Apêndice A

Neste trabalho foi utilizado com frequência conceitos básicos de álgebra vetorial e matricial que podem ser encontrados, por exemplo, em Finkbeiner(1970) e Gantmacher(1959). Neste Apêndice, pretende-se apresentar algumas definições e teoremas suficientes para demonstrar as afirmações encontradas nos Capítulos 2, 3 e 4, quando citado.

Definição: Dado o vetor coluna $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}^T$ e o vetor coluna $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}^T$, ambos com dimensão (n), define-se o produto interno entre os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} como:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad A1$$

Definição: Os vetores $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}^T$ e $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}^T$ são ortogonais se e somente se:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad A2$$

Definição: O conjunto de vetores $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, onde $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n$ é um vetor coluna (n) dimensional, é dito linearmente independente se,

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}, \quad A3$$

implicar em

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \quad \text{A4}$$

Teorema : Qualquer conjunto de vetores não nulos, ortogonais dois a dois, é linearmente independente.

Definição: Qualquer conjunto de vetores que não é linearmente independente é dito linearmente dependente.

Teorema: Em um espaço vetorial de dimensão n existem, no máximo, n vetores linearmente independentes.

Definição: Dado um vetor \mathbf{x} com dimensão (n) , define-se como complemento ortogonal de \mathbf{x} , o conjunto de $(n - 1)$ vetores, linearmente independentes, com dimensão (n) e ortogonais a \mathbf{x} .

Definição: Dado o conjunto de vetores $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$, linearmente independentes, onde $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, r$, tem dimensão $n > r$, define-se como complemento ortogonal de \mathbf{X} , o conjunto de $(n - r)$ vetores linearmente independentes e ortogonais a \mathbf{X} .

Definição: Posto de uma matriz é o número de linhas (ou colunas) linearmente independentes.

Define-se a matriz \mathbf{M} , com dimensão (m, m) e $\text{Posto}[\mathbf{M}] = k, k < m$. O conjunto de vetores $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$, com dimensão (m) , linearmente independentes, tal que,

$$\mathbf{MX} = \mathbf{O} \quad \text{A5}$$

é ortogonal às linhas de \mathbf{M} . O conjunto \mathbf{X} é dito complemento ortogonal à direita da matriz \mathbf{M} . Então, o número máximo de vetores em \mathbf{X} é dado por,

$$r = m - k. \quad \text{A6}$$

Define-se a matriz \mathbf{M} , com dimensão (n, n) e $\text{Posto}[\mathbf{M}] = k$, $k < n$. O conjunto de vetores $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\}$, com dimensão (n) , linearmente independentes, tal que,

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} = \mathbf{O} \quad \text{A7}$$

é ortogonal às colunas de \mathbf{M} . O conjunto \mathbf{Y} é dito complemento ortogonal à esquerda da matriz \mathbf{M} . Então, o número máximo de vetores em \mathbf{Y} é dado por,

$$p = n - k \quad \text{A8}$$

Apêndice B

Um procedimento interessante para se definir o conjunto de vetores $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$ que satisfazem (A5), é através da decomposição por valores singulares (*svd*) como mostram Lou et al(1986) e Patton(1996). Usando-se a rotina *svd* do software *Matlab* para a matriz \mathbf{M} , com dimensão (n, m) , $n < m$, na forma ,

$$\gg [\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{M}) \quad \text{B1}$$

com,

$$\text{Posto}[\mathbf{M}] = k, \quad k \leq n \quad \text{B2}$$

obtém-se as matrizes \mathbf{U} , \mathbf{S} e \mathbf{V} tais que:

$$\mathbf{M} = \mathbf{USV}^T \quad \text{B3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\mathbf{V}^T &= \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_{(m,m)} \\ \mathbf{U}\mathbf{U}^T &= \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}_{(n,n)} \end{aligned} \tag{B4}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \text{diag}(s_1, \dots, s_k) & \vdots & \mathbf{O}_{(k, m-k)} \\ & \mathbf{O}_{(m-k, m)} & \end{bmatrix}. \tag{B5}$$

Os valores $s_i, i = 1, \dots, k$ são chamados de valores singulares da matriz \mathbf{M} . Multiplicando-se (B3) à direita por \mathbf{V} , obtém-se,

$$\mathbf{M}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{11} & \dots & \mathbf{u}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}_{n1} & \dots & \mathbf{u}_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{diag}(s_1, \dots, s_k) & \vdots & \mathbf{O}_{(k, m-k)} \\ & \mathbf{O}_{(m-k, m)} & \end{bmatrix} = \tag{B6}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{11}s_1 & \mathbf{u}_{12}s_2 & \dots & \mathbf{u}_{1k}s_k & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{u}_{n1}s_1 & \mathbf{u}_{n2}s_2 & \dots & \mathbf{u}_{nk}s_k & \vdots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

então,

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1, k+1} & \dots & \mathbf{v}_{1, m} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_{m, k+1} & \dots & \mathbf{v}_{m, m} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{(n, m-k)} \tag{B7}$$

Ou seja, as últimas $(m - k)$ colunas da matriz \mathbf{V} são os vetores linearmente independentes que satisfazem (A5).

Apêndice C

Neste trabalho foram utilizados duas metodologias diferentes para estimar matrizes de correlação para processos estacionários. Estes dois métodos foram denominados Método 1 e Método 2 e são descritos resumidamente a seguir.

Método 1.

Seja $\mathbf{x}(k)$, $k = 1, \dots, N$ e $\mathbf{u}(k)$, $k = 1, \dots, N$, o vetor de estados com dimensão $(n, 1)$ e o vetor de entradas com dimensão $(p, 1)$, obtidos a partir da amostragem discretizada de $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$, $0 \leq t \leq T$, respectivamente, utilizando-se o intervalo de tempo de discretização Δt . Considerando-se $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ processos estacionários e ergóticos, estima-se a matriz de correlação $\mathbf{R}_{xx}(\tau)$, pela seguinte expressão ,

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\tau} \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k + \tau) =$$

C1

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\tau} x_1(k)x_1(k + \tau) & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\tau} x_1(k)x_n(k + \tau) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\tau} x_n(k)x_1(k + \tau) & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\tau} x_n(k)x_n(k + \tau) \end{bmatrix}$$

e a matriz de correlação $\mathbf{R}_{xu}(\tau)$ por,

$$\mathbf{R}_{xu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\tau} \mathbf{x}(k) \mathbf{u}^T(k + \tau) =$$

C2

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\tau} x_1(k)u_1(k + \tau) & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\tau} x_1(k)u_p(k + \tau) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\tau} x_n(k)u_1(k + \tau) & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\tau} x_n(k)u_p(k + \tau) \end{bmatrix}$$

onde τ é uma defasagem temporal e deve ser um número inteiro de intervalos de tempo de discretização (Yaglom, 1962, 1987, Bendat, 1980). As expressões C1 e C2 devem ser aplicadas para cada valor de τ e portanto, as matrizes de correlação são obtidas separadamente para cada valor de defasagem de tempo.

A estimativa da matriz de correlação por somatório será tanto mais próxima do valor exato, quanto maior o número de termos no somatório. Idealmente, o valor exato é dado por:

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^T(t + \tau) dt$$

C3

$$\mathbf{R}_{xu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} \mathbf{x}(t) \mathbf{u}^T(t + \tau) dt$$

Método 2

A matriz de correlação $\mathbf{R}_{xx}(\tau)$ pode também ser obtida a partir da densidade espectral de potência. O completo detalhamento matemático deste método encontra-se em Bendat(1980). De acordo com o procedimento proposto por este autor, faz-se inicialmente o janelamento dos valores discretos, $\mathbf{x}(k)$, $k = 1, \dots, N$, utilizando-se a janela Hanning. Aplica-se o algoritmo da transformada rápida de Fourier, $\mathcal{F}(\mathbf{x})$, (`>> fft` no software *Matlab*) utilizando ainda o fator de correção $(\sqrt{8/3})$ devido ao janelamento, obtendo-se $\mathbf{x}_F(k)$ na forma,

$$\mathbf{x}_F(k) = (\sqrt{8/3}) \mathcal{F}(\mathbf{x}(k)).$$

C4

Calcula-se agora a densidade espectral de potência, $\mathbf{G}_{xx}(k)$, na seguinte forma,

$$\mathbf{G}_{xx}(k) = \frac{2}{N} |\mathbf{x}_F(k)|^2.$$

C5

Aplicando-se o algoritmo da transformada inversa de Fourier, $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x})$, (`>> ifft` no software *Matlab*) em $\mathbf{G}_{xx}(k)$, obtém-se a matriz de correlação,

$$\mathbf{R}_{xx}(k) = \text{Real}(\mathfrak{J}^{-1}(\mathbf{G}_{xx}(k))) \quad \text{C6}$$

para todos os valores de $k = 1, \dots, N$. Analogamente, a matriz de correlação $\mathbf{R}_{xu}(\tau)$ é obtida por,

$$\mathbf{R}_{xu}(k) = \text{Real}(\mathfrak{J}^{-1}(\mathbf{G}_{xu}(k))) \quad \text{C7}$$

onde,

$$\mathbf{G}_{xu}(k) = \frac{2}{N} |\mathbf{x}_F(k) \mathbf{u}_F^T(k)|. \quad \text{C8}$$

Portanto, neste método, as matrizes de correlação são obtidas diretamente para todas as defasagens de tempo.