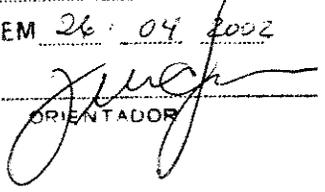


ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
TESE DEFENDIDA POR NIVALDO BENEDITO
FERREIRA CAMPOS E APROVADA P
COMISSÃO JULGADORA EM 26.04.2002


ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Ajuste de Modelos Numéricos usando Funções de
Resposta em Frequência

Autor : **Nivaldo Benedito Ferreira Campos**
Orientador: **José Maria Campos dos Santos**

04/02

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEP. DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Ajuste de Modelos Numéricos usando Funções de Resposta em Frequência

**Autor : Nivaldo Benedito Ferreira Campos
Orientador: José Maria Campos dos Santos**

Curso: Engenharia Mecânica.
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2002
SP - Brasil

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	I/Unicamp C 157a
V	EX
TOMBO BC/	55940
PROC.	16/24103
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	08/10/03
Nº CPD	

CM00189226-4

Bib. Id. 302000

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C157a

Campos, Nivaldo Benedito Ferreira

Ajuste de modelos numéricos usando funções de resposta em frequência / Nivaldo Benedito Ferreira Campos. --Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: José Maria Campos dos Santos.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Método dos elementos finitos. 3. Estimativa de parâmetro. I. Santos, José Maria Campos dos. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

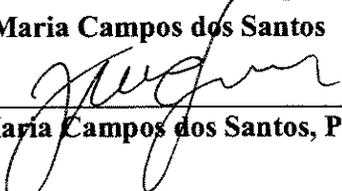
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEP. DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

**Ajuste de Modelos Numéricos usando Funções de
Resposta em Frequência**

Autor : Nivaldo Benedito Ferreira Campos

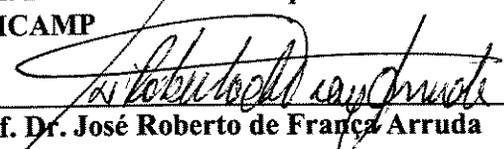
Orientador: José Maria Campos dos Santos



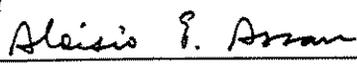
Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos, Presidente
UNICAMP



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
UNICAMP



Prof. Dr. José Roberto de Franca Arruda
UNICAMP



Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan
UNICAMP



Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini
USP

Campinas, 26 de abril de 2002.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa Bernadete e aos meus filhos Natália e Francisco.

Também o dedico aos meus pais, Alberto e Amélia, cujo esforço e dedicação permitiram que eu pudesse chegar até aqui.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ter sido realizado sem a colaboração de inúmeras pessoas, às quais gostaria de deixar meu agradecimento:

- ao professor José Maria Campos dos Santos, pela sua orientação segura e pela sua disponibilidade e dedicação,
- aos professores Euclides de Mesquita Neto, José Roberto de França Arruda e Renato Pavanello, pelas sugestões e colaborações dadas ao longo do desenvolvimento deste trabalho.
- a todos os professores e aos colegas pós-graduandos do Departamento de Mecânica Computacional com os quais tive o privilégio de conviver e trabalhar e que direta ou indiretamente também deram sua contribuição para este trabalho.
- ao CNPq, à Capes e à Fapesp pelo apoio financeiro.

*“Imagination is more important than knowledge.
Knowledge is limited. Imagination encircles the world.”*

Albert Einstein

Resumo

Campos, Nivaldo Benedito Ferreira, *Ajuste de Modelos Numéricos Usando Funções de Resposta em Frequência*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002, 98 p. Tese (Doutorado)

Este trabalho investiga o ajuste de modelos numéricos utilizando como dados experimentais simulados as funções de resposta em frequência (FRFs) da estrutura em estudo. Inicialmente são apresentadas as técnicas usuais de ajuste de modelos de elementos finitos (MEF), tanto aquelas baseadas em métodos de ajuste direto das matrizes do modelo, como métodos iterativos. O uso dos métodos iterativos de ajuste de modelos foi investigado inicialmente para o MEF, empregando-se para isso tanto dados modais como FRFs. O uso de FRFs mostrou-se particularmente interessante devido à grande quantidade de informação que contém e por permitir que os dados experimentais simulados sejam utilizados sem a necessidade da extração de dados modais com a conseqüente introdução de erros. O mesmo procedimento foi utilizado no ajuste de modelos numéricos que discretizam apenas o contorno do problema em estudo. Foi investigado o ajuste de modelos de elementos de contorno, apresentando-se o procedimento para obtenção de FRFs a partir deste método. Um elemento estrutural tipo viga foi ajustado e os resultados obtidos comparados com os do MEF. Finalmente, investigou-se o uso do método dos elementos finitos escalonado no contorno. Sua formulação para a elastodinâmica bi e tridimensional é apresentada e uma técnica de obtenção de FRFs é proposta e verificada. Uma proposta de formulação de um elemento de placa plana fina para o método de elementos finitos escalonado no contorno é apresentada e algumas considerações sobre a obtenção da matriz de rigidez dinâmica correspondente são discutidas.

Palavras Chave

Ajuste de Modelos, Método dos Elementos de Contorno, Método dos Elementos Finitos, Método dos Elementos Finitos Escalonado no Contorno

Abstract

Campos, Nivaldo Benedito Ferreira, *Numerical Models Updating Using Frequency Response Functions*, Campinas: Mechanical Engineering Department, State University of Campinas, 2002. 98 p. Thesis (Doctoral)

This work analyses numerical models updating techniques using simulated frequency response functions (FRFs) as experimental data. The usual techniques of finite element models (FEM) updating, those based on direct updating of model matrices, and those based on iterative methods are presented. The use of the iterative methods was investigated initially for FEM, using modal data as well as FRFs. The use of FRFs have been proved particularly interesting due to the amount of information about the structure's dynamic behavior that it provides and because it allows the use of experimental data without the need of modal data extraction and the consequent error introduction. The same procedure was used to update numerical models that need discretization only over the boundary of the problem under study. The boundary element model updating was investigated, and the procedures to obtain the FRFs by this method. A beam like structural element was updated and the results obtained were compared to that from FEM. Finally, it was investigated the use of the scaled boundary finite element method. Its formulation for elastodynamics in the two- and three-dimensional cases is presented, and a technique to obtain the FRFs is proposed and verified. A plane thin plate formulation to scaled boundary finite element method is proposed and some considerations about obtaining the corresponding dynamic stiffness matrix are discussed.

Keywords

Model updating, boundary element method, finite element method, scaled boundary finite element method

Índice

Índice	i
Lista de figuras	iii
Lista de tabelas	v
Nomenclatura	v
<i>Letras Latinas</i>	<i>vi</i>
<i>Letras Gregas.....</i>	<i>vi</i>
<i>Abreviações.....</i>	<i>vii</i>
Introdução.....	1
1.1. <i>Generalidades.....</i>	<i>1</i>
1.2. <i>Revisão Bibliográfica</i>	<i>2</i>
1.3. <i>Apresentação do Trabalho.....</i>	<i>4</i>
Técnicas de ajuste de modelos.....	6
2.1. <i>Introdução</i>	<i>6</i>
2.2. <i>Ajuste de modelos através de métodos diretos.....</i>	<i>7</i>
2.3. <i>Ajuste de modelos através de métodos iterativos.....</i>	<i>10</i>
2.3.1. <i>Métodos iterativos usando dados modais medidos.....</i>	<i>11</i>
2.3.2. <i>Métodos iterativos usando funções de resposta em frequência medidas.....</i>	<i>14</i>
Ajuste de modelos de elementos finitos utilizando parâmetros modais	17
3.1. <i>Introdução</i>	<i>17</i>
3.2. <i>Ajuste com dados simulados</i>	<i>17</i>
3.3. <i>Ajuste com dados experimentais.....</i>	<i>21</i>

Ajuste de modelos de elementos de contorno.....	26
4.1. <i>Introdução</i>	26
4.2. <i>Formulação Dinâmica de Elementos de Contorno para Vigas</i>	27
4.3. <i>Exemplo Simulado</i>	32
Método dos Elementos Finitos Escalonado no Contorno	41
5.1. <i>Introdução</i>	41
5.2. <i>Transformação de escalonamento no contorno</i>	42
5.3. <i>Equações da elastodinâmica para o MEF escalonado no contono</i>	53
5.4. <i>Matriz de rigidez dinâmica no contorno</i>	57
5.5. <i>Matrizes de rigidez estática e de massa no contorno</i>	60
5.6. <i>Obtenção de FRFs e dados modais no MEFEC</i>	62
5.7. <i>Exemplo numérico</i>	63
Proposta de um elemento de placa plana fina para o método dos elementos finitos escalonado no contorno.....	67
6.1. <i>Introdução</i>	67
6.2. <i>Formulação de placas</i>	67
6.3. <i>Transformação de escalonamento no contorno para o caso bidimensional</i>	73
6.4. <i>Formulação das equações da elastodinâmica para placas</i>	81
Conclusão e Trabalhos Futuros	91
Referências Bibliográficas	94

Lista de figuras

Figura 3-1. Modelo de elementos finitos para a viga simulada	18
Figura 3-2. FRFs dos dados medidos simulados e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados para os casos: (a) sem ponderação; (b) com ponderação nas medidas; (c) com ponderação nas medidas e nos parâmetros; (d) com ponderação nas medidas e valores iniciais dos parâmetros.....	21
Figura 3-3. Vista geral da montagem do teste experimental da viga	22
Figura 3-4. Modelo do MEF da viga do teste experimental.	23
Tabela 3-4. Comparação entre os valores experimentais e valores ajustados para os casos ponderando medições e parâmetros, e ponderando medições e valores iniciais dos parâmetros.....	24
Figura 3-5. FRFs medidas e calculadas a partir dos parâmetros estimados para os casos: (a) sem ponderação; (b) com ponderação nas medidas; (c) com ponderação nas medidas e nos parâmetros; (d) com ponderação nas medidas e valores iniciais dos parâmetros.....	25
Figura 4-1. Modelo de viga para o MEC	31
Figura 4-2. Modelo de viga com 14 e 56 elementos para o MEF.....	33
Figura 4-3. FRFs $H_{105,105}$, obtidas através do MEF com 14 e 56 elementos e do MEC com um único elemento. O índice 105 refere-se ao grau de liberdade relativo ao modelo de MEF com 56 elementos.....	34
Figura 4-4. Detalhe das FRFs $H_{105,105}$	34
Figura 4-5. FRFs $H_{105,105}$: experimental simulada sem ruído (Experimental Simulada), calculada com os parâmetros iniciais (Inicial) e ajustada (Ajustada) utilizando-se o MEC.....	36
Figura 4-6. FRFs $H_{105,105}$ Inicial calculada com erro de 25 % nos coeficientes de mola, experimental simulada sem ruído e ajustada: (a) MEC, (b) MEF 56 elementos, (c) MEF 14 elementos.....	39

Figura 4-7. FRFs $H_{105,105}$ Inicial calculada com erro de 20 % nos coeficientes de mola, experimental simulada com nível de ruído de 20 % e ajustada: (a) MEC, (b) MEF 56 elementos, (c) MEF 14 elementos.....	40
Figura 5-1. Transformação geométrica de escalonamento do contorno, formando uma pirâmide com volume V^e (Song & Wolf, 1997).....	43
Figura 5-2. Centro de escalonamento fora do contorno. (a) Domínio finito (b) Domínio infinito (Song & Wolf, 1997).....	44
Figura 5-3. Centro de escalonamento no contorno. (a) Domínio finito (b) Domínio infinito (Song & Wolf, 1997).....	45
Figura 5-4. Vetores unitários normais às faces de um elemento (Song & Wolf, 1997).	48
Figura 5-5. Estrutura sujeita a tensão plana	64
Figura 5-6. FRFs obtidas através do MEF e do MEFEC para o ponto P, força de excitação e deslocamento de resposta na direção y.....	66
Figura 5-7. FRFs obtidas através do MEF e do MEFEC para o ponto P, força de excitação e deslocamento de resposta na direção x.....	66
Figura 6-1. Deslocamentos e tensões resultantes para uma viga.	68
Figura 6-2. Definições das variáveis para a formulação de placas	70
Figura 6-3. (a) Elemento bidimensional e vetores normais a ξ e η (b) Elemento de referência.....	78

Lista de tabelas

Tabela 3-1. Comparação entre resultados obtidos neste trabalho com os de Friswell & Mottershead, 1995, para os casos sem ponderação e ponderando as medições. ¹ Resultados deste trabalho; ² Resultados do trabalho de Friswell & Mottershead, 1995.....	19
Tabela 3-2. Comparação dos valores simulados com os valores ajustados para os casos de ponderação: nas medições e parâmetros; e nas medições e estimativa inicial dos parâmetros.....	20
Tabela 3-3. Comparação entre os valores experimentais e valores ajustados para os casos sem ponderação e ponderando as medições.....	24
Tabela 3-4. Comparação entre os valores experimentais e valores ajustados para os casos ponderando.....	24
Tabela 4-1. Valores exatos, iniciais e estimados dos parâmetros através do MEC, FEM com 14 elementos e MEF com 56 elementos. Os modelos foram ajustados adotando-se $c = 100 \text{ N.s/m}$ ($\alpha = 29.851$, $\beta = 1.5113\text{E-}12$), ruído na FRF = 0,1, 5, 10 e 20 %.....	35
Tabela 4-2. Resultados para a estimação de parâmetros através do algoritmo de ajuste de modelos do MEC e do MEF com 56 e 14 elementos para os Casos 1, 2 e 3 com respectivamente 15, 20 e 25 % de erro nos coeficientes de mola k_t e k_r , sem a introdução de ruído na FRF e para o Caso 4 com 20 % de erro em k_t e k_r e com 20 % de ruído introduzido na FRF.....	37
Tabela 5-1. Frequências naturais (Hz) de uma estrutura sujeita a tensões planas obtidas através do MEF e do MEFEC.....	64
Tabela 5-2. Frequências naturais (Hz) de uma estrutura sujeita a tensões planas obtidas através do MEF e do MEFEC.....	65

Nomenclatura

A, B, ... Letras maiúsculas em negrito representam grandezas matriciais

a, b, ... Letras minúsculas em negrito representam grandezas vetoriais

A, a, ... Letras maiúsculas ou minúsculas em itálico representam grandezas escalares

Letras Latinas

\mathbf{H}_m	Vetor de FRFs ou dados modais medidos
\mathbf{H}_n	Vetor de FRFs ou dados modais numéricos
\mathbf{J}	Matriz jacobiana
$ \mathbf{J} $	Jacobiano
\mathbf{K}	Matriz de rigidez ajustada
\mathbf{K}_a	Matriz de rigidez analítica inicial.
\mathbf{M}_a	Matriz de massa analítica
$\mathbf{N}(\eta, \zeta)$	Funções de mapeamento
\mathbf{S}	Matriz de sensibilidade
\mathbf{W}_ε	Matriz de ponderação dos dados medidos
\mathbf{W}_θ	Matriz de ponderação dos parâmetros
\mathbf{z}	Dados medidos
E	Módulo de elasticidade longitudinal
G	Módulo de elasticidade transversal
J	Função objetivo
k_t e k_r	Coefficientes de rigidez de mola translacional e rotacional

Letras Gregas

Λ	Matriz de autovalore
Φ_m	Modos medidos ortonormalizados
Γ	Matriz dos multiplicadores de Lagrange
θ	Parâmetros do modelo numérico

ε	Erro residual
λ_{mi}	i -ésimo autovalor medido
ϕ_{mi}	i -ésimo autovetor medido
ω	Frequências naturais
ρ	Densidade do material
ξ	Coordeanda radial
η, ζ	Coordenadas circunferenciais
δ	Varição de determinada grandeza

Abreviações

MEF – Método de Elementos Finitos

MEC – Método de Elementos de Contorno

MEFEC. – Método dos Elementos Finitos Escalonado no Contorno

FRF – Função de Resposta em Frequência

Capítulo 1

Introdução

1.1. Generalidades

O advento dos computadores modernos, com alta capacidade de processamento de dados, permitiu na análise estrutural a utilização de modelos numéricos altamente sofisticados que requerem a manipulação de grandes matrizes e com alta velocidade. Obtidos os resultados através destes métodos numéricos, é necessária a sua comparação com aqueles oriundos de testes experimentais para que seja assegurado que a simulação numérica do sistema físico reproduza o comportamento real da estrutura em estudo. Apesar dos métodos de análise estrutural em uso serem altamente refinados, seus resultados são extremamente dependentes do conhecimento preciso dos parâmetros físicos a serem utilizados na modelagem, sendo a escolha destes parâmetros crucial para que haja concordância entre os dados experimentais e os resultados analíticos. Infelizmente, muitas vezes o conhecimento preciso de tais parâmetros não está disponível, como por exemplo, no caso da modelagem de juntas, de chapas com variações em sua espessura ou estruturas que apresentem alguma falha. Se as diferenças encontradas forem significativas e assumindo-se que os dados experimentais são precisos, deve-se proceder ao ajuste do modelo numérico.

As técnicas de ajuste de modelo consistem basicamente na solução de um problema inverso, ou seja, conhecido o comportamento de um sistema físico, deseja-se determinar um modelo analítico que reproduza exatamente o seu comportamento. Atualmente, o método dos elementos finitos (MEF) tem sido largamente utilizado para este fim, empregando-se tanto técnicas diretas de ajuste das matrizes de rigidez, amortecimento e massa do modelo numérico, como através de métodos iterativos que ajustam os parâmetros utilizados na modelagem. O ajuste

de parâmetros físicos é largamente utilizado na modelagem por elementos finitos, pois o significado físico das matrizes do modelo é preservado, contrariamente ao que ocorre quando se ajustam diretamente (globalmente) as matrizes de rigidez, amortecimento e massa. Dessa forma, pode-se verificar a validade do ajuste realizado monitorando-se as variações dos parâmetros a serem ajustados. Caso sejam obtidos parâmetros sem significado físico, como por exemplo, módulo de elasticidade ou densidade com valores negativos ou ainda com grandes variações em relação aos valores iniciais, pode-se reavaliar a estrutura em busca de explicações para estas ocorrências. Se não for encontrada nenhuma justificativa para estes valores inesperados, um novo grupo de parâmetros deve ser escolhido para serem ajustados.

1.2. Revisão Bibliográfica

Os primeiros trabalhos em mecânica estrutural, relacionados à modelagem a partir de dados modais medidos, surgiram na década de 60, sendo o primeiro levantamento dos trabalhos feitos nesta área realizado por Young & On (1969) conforme citação de Lin & Ewins (1990). Berman & Flannelly (1971) foram pioneiros no uso de técnicas diretas de ajuste de modelos, assumindo uma matriz de massa inicial e a seguir ajustando-a com o auxílio dos modos medidos e das equações de ortogonalidade. Baruch (1978) prosseguiu nesta mesma linha, porém assumindo que a matriz de massa está correta enquanto que a matriz de rigidez deveria ser ajustada, tendo empregado multiplicadores de Lagrange para minimizar a diferença entre a matriz ajustada e a analítica. Técnicas semelhantes foram empregadas por Berman (1983) e por diversos outros autores, dentre os quais pode-se Chen, Kuo, Garba, Sidhu e Ewins.

O uso de técnicas iterativas para o ajuste de modelos foi inaugurado com o trabalho de Collins et al. (1974), no qual se utiliza uma técnica iterativa baseada na análise de sensibilidade inversa de primeira ordem e na minimização, em termos da norma euclidiana, da diferença entre os dados modais analíticos e medidos, procedendo-se assim ao ajuste dos parâmetros da estrutura. Outros trabalhos baseados em técnicas similares foram apresentados por Chen & Wada, Lallemant & Piranda e diversos outros autores.

A partir de 1981, surgiram trabalhos nos quais se utilizavam FRFs em lugar de dados modais para ajustar os parâmetros. Dentre estes trabalhos destaca-se os de Martinez (1981), que

deu início ao uso de FRFs como dados medidos na estimação de parâmetros, e foi seguido por Arruda (1985), Lin & Ewins (1991) e outros citados por Imregun & Visser (1991).

Na área de métodos numéricos tem ampla divulgação o método dos elementos finitos (MEF), cujas primeiras publicações deveram-se a Turner *et al.* (1956) e Argyris (1960). A estas se seguiram um grande número de outras publicações que consolidaram este método.

Também bastante explorado ultimamente, existe o método dos elementos de contorno (MEC), que se tornou conhecido a partir da publicação do livro “The Boundary Element Method for Engineers”, Brebbia (1978), após o que ele desenvolveu-se rapidamente. Dentre as muitas publicações a respeito do MEC pode-se destacar Banerjee & Butterfield (1981), Brebbia & Telles (1984), Brebbia e Dominguez (1989), Dominguez (1993).

Já o método dos elementos finitos escalonado no contorno surgiu recentemente, inicialmente para tratar de problemas com domínio infinito, com a publicação do livro “Finite Element Modeling of Unbounded Media” de Wolf & Song (1996). Outros trabalhos foram publicados a seguir em revistas de diferentes áreas, Song & Wolf (1997,1999) e Wolf & Song (1998). Soluções analíticas para equações da elastodinâmica e a inclusão de forças de volume foram apresentadas por Song & Wolf (1998,1999) e a utilização do método na modelagem de problemas relacionados à iteração solo-estrutura foi abordada por Wolf & Song (1998, 2000a), tendo sido também publicados dois primers sobre o método (Wolf & Song, 2000b, 2000c). Por ser bastante recente, além dos pesquisadores citados anteriormente, investigaram este método apenas Campos & Dos Santos (2001) que o utilizaram na obtenção de FRFs e Wegner & Zhang (2001), na análise da vibração livre de um sistema solo-estrutura tridimensional.

Em relação ao uso destes métodos numéricos no ajuste de modelos, há vasta bibliografia relativa ao uso do MEF. Uma revisão dos artigos publicados, fornecendo uma visão geral das técnicas de ajuste, pode ser encontrado no trabalho de Mottershead & Friswell (1993). Em relação ao MEC, apenas o trabalho de Campos & Dos Santos (1999), que usaram este método no ajuste de uma estrutura tipo viga, pode ser localizado. Já o método dos elementos finitos escalonado no contorno não possui publicações relativas ao seu uso no ajuste de modelos.

1.3. Apresentação do Trabalho

O presente trabalho investiga o ajuste de modelos numéricos, tanto para métodos de domínio como para métodos de contorno. Embora os métodos diretos de ajuste sejam apresentados para se ter uma visão abrangente, o foco principal é a utilização dos métodos iterativos de ajuste. A formulação dos métodos numéricos é revista, tanto para os métodos já consagrados como o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno, como para o método dos elementos finitos escalonado no contorno, comprovando-se que as técnicas de ajuste existentes podem ser aplicadas aos diversos métodos numéricos desde que estes sejam formulados de modo a permitirem a obtenção dos dados relativos ao comportamento dinâmico do problema em estudo.

Embora o objetivo inicial deste trabalho fosse a investigação dos métodos de ajuste iterativos, ao longo de seu desenvolvimento ganhou importância a formulação e a implementação dos métodos numéricos de contorno. Deve-se destacar a formulação do método dos elementos finitos escalonado no contorno, ao qual são dedicados dois capítulos deste trabalho. Apesar de não se ter chegado à realização do ajuste destes modelos, a sua implementação de forma a possibilitar a obtenção de FRFs garante a possibilidade de realização do ajuste de forma análoga à utilizada com os outros métodos numéricos.

No capítulo 2 são revistas as técnicas correntes de ajuste de modelos numéricos, apresentando-se tanto os métodos diretos de ajuste, capazes de reproduzir com exatidão os dados modais, mas que produzem matrizes de massa e rigidez sem significado físico, como os métodos iterativos, baseados em técnicas de otimização de sistemas com o uso da matriz de sensibilidade e que ajustam o modelo numérico mantendo o seu significado físico. Ênfase é dada ao uso das FRFs como dados experimentais no ajuste iterativo, devido à possibilidade de se usá-las diretamente, sem a introdução de erros gerados pela análise modal experimental e também devido à grande quantidade de informação relativa ao problema em estudo contida em cada uma das FRFs obtidas.

No capítulo 3 é revisto o ajuste de modelos de elementos finitos. São apresentadas as técnicas de obtenção de FRFs e de dados modais através deste método e seu uso no ajuste pelo método iterativo de uma estrutura tipo viga para um caso simulado e também para um caso

experimental.

No capítulo 4 utiliza-se o método dos elementos de contorno no ajuste de modelos. É revisto o uso do MEC em estruturas tipo viga e a obtenção de FRFs através deste método. O ajuste do modelo de MEC utilizando-se o método iterativo é aplicado a um caso simulado e o resultado obtido é comparado com aquele obtido através do MEF.

No capítulo 5 apresenta-se o método dos elementos finitos escalonado no contorno, aplicado à elasticidade plana. São desenvolvidas as formulações da equação diferencial dos deslocamentos e da matriz de rigidez dinâmica no novo sistema de coordenadas escalonadas. Um exemplo simulado de tensão plana é estudado, onde uma nova forma de obtenção das FRFs é apresentada e verificada. A fim de comparar os resultados obtidos com aqueles do autoproblema do MEF, os dados modais são extraídos das FRFs através do esquema de análise modal numérica apresentado por Arruda *et al.* (1996).

No capítulo 6 uma formulação de um elemento de placa plana fina, para o método dos elementos finitos escalonado no contorno é proposta, sendo obtidas as expressões para a equação diferencial dos deslocamentos e discutidas algumas considerações para a obtenção da matriz de rigidez dinâmica, ambas no domínio da frequência, para o sistema de coordenadas escalonadas.

No capítulo 7 as conclusões relativas aos assuntos abordados neste trabalho são apresentadas, bem como sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Técnicas de ajuste de modelos

2.1. Introdução

Denomina-se ajuste de modelos aos procedimentos sistemáticos para adequar os modelos numéricos ao comportamento físico real da estrutura modelada, baseando-se em dados experimentais. Estes dados medidos são comparados com os determinados numericamente para estabelecer-se uma correlação entre estes modelos, localizar as diferenças entre eles e, finalmente, corrigir o modelo numérico de acordo com os dados experimentais. Embora os dados experimentais contenham erros inerentes aos métodos utilizados para obtê-los, é prática corrente na engenharia tomar-se esses valores como sendo corretos ou então utilizar-se de fatores que quantifiquem e que introduzam na formulação teórica a incerteza em relação ao comportamento dinâmico da estrutura em estudo determinado experimentalmente.

Muitos autores, já citados no Capítulo 1, propuseram métodos para investigar o ajuste de modelos, os quais, de acordo com sua formulação matemática, podem ser agrupados em diferentes categorias. Heylen (1987) propôs que a separação fosse feita entre métodos diretos e indiretos, de acordo com o processo de resolução do sistema de equações. Outros autores, como Janter (1989) preferem enfatizar a importância da escolha dos parâmetros a serem ajustados e separam os métodos de acordo com a escolha dos parâmetros a ajustar. Imregun & Visser (1991) separaram os procedimentos de ajuste em métodos de localização de erros e correção de fases do modelo. Friswell & Mottershead (1995) apresentaram uma revisão dos diversos tipos de ajuste de modelos.

Alguns autores, como Avitabile & Li (1993), Imregun *et al.* (1994) chamaram a atenção

para as principais dificuldades e limitações dos procedimentos de ajuste de modelos quando aplicados a casos reais. Baseado em muitos casos reportados formou-se o consenso de que o sucesso na utilização de um determinado método de ajuste é dependente do caso que se está analisando e da experiência e bom senso do analista, ao qual cabe avaliar a discrepância que pode existir entre os modelos. Sendo assim, os resultados obtidos devem ser usados com cautela e não serem tomados como indicadores absolutos.

Um passo crucial no ajuste de modelos é a escolha dos parâmetros a ajustar. Os dados medidos contêm uma quantidade limitada de informações, logo para evitar mal condicionamento do problema de ajuste o número de parâmetros a ser ajustado deve ser pequeno. Tais parâmetros deverão ser escolhidos com o objetivo de corrigir as reconhecidas incertezas do modelo e os dados medidos deverão ser sensíveis a estes parâmetros.

O requisito básico para qualquer técnica de ajuste é que ela seja capaz de comparar resultados experimentais de protótipos de estruturas com resultados calculados através de um modelo numérico. Nesta comparação, os principais problemas que surgem devem-se principalmente ao grande número de graus de liberdade do modelo analítico, ao número limitado de transdutores usados para medir a resposta da estrutura e às inexatidões de modelagens, em particular à omissão de amortecimento no modelo numérico.

Os métodos diretos que utilizam dados modais possuem a vantagem de não requererem um processo iterativo e assim o risco de não convergência ou de computação excessiva é eliminado. Um aspecto importante destes métodos é que eles reproduzem exatamente os dados medidos.

Os métodos iterativos permitem uma larga escolha dos parâmetros a serem ajustados, bem como a ponderação dos dados medidos e das estimativas iniciais dos parâmetros.

Nas seções seguintes, são revistos alguns destes métodos de ajuste e é apresentada a formulação teórica necessária para sua implementação.

2.2. Ajuste de modelos através de métodos diretos

Esta categoria de métodos consiste basicamente no cálculo de correções para as matrizes de

rigidez \mathbf{K} , amortecimento \mathbf{C} e massa \mathbf{M} do modelo numérico, as quais minimizam a norma de uma dada função de erro. O trabalho de Berman & Flannelly (1971), o qual ajusta as matrizes de massa e de rigidez de um modelo analítico, usando modos medidos incompletos, é uma das primeiras publicações relacionadas ao ajuste de modelos usando um método direto. O autor formula um conjunto de equações lineares nas componentes de massa e rigidez desconhecidas baseado nas condições de ortogonalidade da massa combinada com a equação da massa total. Outros métodos que se seguiram a este fizeram uso dos multiplicadores de Lagrange para estimar matrizes de correção das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} . Baruch (1978) propôs uma formulação baseada também nos multiplicadores de Lagrange, mas para calcular apenas a matriz de correção da matriz de rigidez, enquanto que a matriz de massa é assumida como sendo correta.

Nesta formulação são assumidas duas restrições sobre a matriz de rigidez \mathbf{K} ajustada: ela deve reproduzir os dados modais medidos e ser simétrica. Dessa forma a equação de movimento do modelo da estrutura implica em:

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}_a\Phi\Lambda \quad (2-1)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez ajustada, \mathbf{M}_a a matriz de massa analítica, Λ é uma matriz diagonal cujos termos são o quadrado das frequências naturais medidas e Φ são os modos medidos ortonormalizados em relação a \mathbf{M}_a .

A simetria de \mathbf{K} impõe que

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{K} \quad (2-2)$$

A função a ser minimizada deve relacionar de alguma forma a diferença entre as matrizes de rigidez ajustada e analítica. Baruck (1978) minimizou a norma:

$$J = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{K} - \mathbf{K}_a) \mathbf{N}^{-1} \right\| = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{h,k=1}^n n_{ij}^{-1} (k_{hk} - [k_a]_{hk}) n_{ij}^{-1} \right)^2 \quad (2-3)$$

onde \mathbf{K}_a é a matriz de rigidez analítica inicial.

A ponderação pela inversa da matriz $\mathbf{N} = \mathbf{M}_a^{1/2}$, compensa até certo ponto as diferenças da

ordem de grandeza dos elementos das matrizes de massa e rigidez. A função a ser minimizada é adaptada como requerido pela técnica de multiplicadores de Lagrange, sendo então dada por:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{K} - \mathbf{K}_a) \mathbf{N}^{-1} \right\| + 2 \left\| \Gamma_\Lambda (\mathbf{K} \Phi - \mathbf{M}_a \Phi \Lambda) \right\| + \left\| \Gamma_K (\mathbf{K} - \mathbf{K}^T) \right\| \quad (2-4)$$

onde

$$2 \left\| \Gamma_\Lambda (\mathbf{K} \Phi - \mathbf{M}_a \Phi \Lambda) \right\| = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\gamma_\Lambda]_{ij} \sum_{h=1}^n (k_{ih} \phi_{kj} - m_{ih} \phi_{hj} [\omega_m^2]_j) \quad (2-5)$$

$$\left\| \Gamma_K (\mathbf{K} - \mathbf{K}^T) \right\| = \sum_{i,j=1}^n [\gamma_K]_{ij} (k_{ij} - k_{ji}). \quad (2-6)$$

$[\omega_m^2]_j \rightarrow j$ -ésima frequência natural medida ao quadrado;

$\Gamma_\Lambda \rightarrow$ matriz dos multiplicadores de Lagrange $n \times m$;

$\Gamma_K \rightarrow$ matriz dos multiplicadores de Lagrange $n \times m$ assimétrica, logo:

$$\Gamma_K^T = -\Gamma_K. \quad (2-7)$$

A minimização de \mathbf{J} na equação (2-4) e após certa manipulação algébrica, conduz à seguinte expressão para a matriz de rigidez ajustada

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_a - \mathbf{K}_a \Phi \Phi^T \mathbf{M}_a - \mathbf{M}_a \Phi \Phi^T \mathbf{K}_a + \mathbf{M}_a \Phi \Phi^T \mathbf{K}_a \Phi \Phi^T \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_a \Phi \Lambda \Phi^T \mathbf{M}_a. \quad (2-8)$$

Esta solução é única, ou seja, não existe outra expressão para \mathbf{K} que minimize a expressão dada pela equação (2-3).

Berman e Nagy (1983) usaram um método similar ao de Baruch. Neste caso, usaram os dados medidos como referência e tanto a matriz de massa como a de rigidez foram ajustadas. A matriz de massa é ajustada para garantir a ortogonalidade dos modos medidos e a matriz de rigidez é calculada usando a mesma equação de Baruch, mas com a matriz de massa ajustada.

Dessa forma, dada a matriz dos modos medidos, Φ_m , e uma matriz de massa analítica, \mathbf{M}_a ,

determina-se a matriz de massa ajustada, \mathbf{M} , que minimiza a função:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{M}_a^{-1/2} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_a) \mathbf{M}_a^{-1/2} \right\| \quad (2-9)$$

sujeita à restrição de ortogonalidade

$$\Phi_m^T \mathbf{M} \Phi_m = \mathbf{I} \quad (2-10)$$

Procedendo-se à minimização da equação (2-9) de forma semelhante a utilizada na obtenção da matriz de rigidez, tem-se

$$\mathbf{M}_a^{-1} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_a) \mathbf{M}_a^{-1} + \Phi_m \Gamma \Phi_m^T = \mathbf{0}. \quad (2-11)$$

onde Γ é a matriz dos multiplicadores de Lagrange.

Combinando-se a equação (2-11) e a equação (2-10), obtém-se a matriz de massa ajustada

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_a \Phi_m \bar{\mathbf{M}}_a^{-1} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{M}}_a) \bar{\mathbf{M}}_a^{-1} \Phi_m^T \mathbf{M}_a \quad (2-12)$$

onde

$$\bar{\mathbf{M}}_a = \Phi_m^T \mathbf{M}_a \Phi_m \quad (2-13)$$

Nos procedimentos apresentados as matrizes ajustadas são determinadas sem a necessidade de nenhuma iteração. No entanto, as matrizes ajustadas obtidas tanto podem perder a esparsidade como perder a simetria, ou deixarem de ser positiva definida ou semipositiva definida, levando a um modelo ajustado sem significado físico. Muito embora existam métodos recentes que tentam preservar tais características das matrizes, os resultados obtidos são dependentes do problema e com custos computacionais discutíveis.

2.3. Ajuste de modelos através de métodos iterativos

Os métodos iterativos, assim como as outras técnicas de ajuste de modelos, têm por objetivo fundamental melhorar a correlação entre os dados medidos e os dados previstos no

modelo analítico. A correlação é determinada por uma função objetivo a qual envolve dados modais (frequências e modos) ou FRFs. Estas funções objetivo são geralmente funções não lineares dos parâmetros, de modo que um processo iterativo é requerido, trazendo consigo possíveis problemas de convergência inerentes ao método. No entanto, estes métodos têm a vantagem de manterem o significado físico das matrizes, uma vez que ajustam diretamente os parâmetros das matrizes.

2.3.1. Métodos iterativos usando dados modais medidos

Nos métodos iterativos que utilizam apenas os dados modais medidos, os autovalores e autovetores da estrutura medida são obtidos através da análise modal experimental da estrutura. Assumindo-se que não exista amortecimento no sistema, o vetor dos dados modais medidos pode ser definido como:

$$\mathbf{z}_m^T = \{\lambda_{m1}, \phi_{m1}^T, \lambda_{m2}, \phi_{m2}^T \dots \lambda_{mr}, \phi_{mr}^T\}^T \quad (2-14)$$

onde λ_{mi} é o i -ésimo autovalor medido e ϕ_{mi} é o autovetor correspondente. No modelo numérico, os autovalores e autovetores equivalentes aos medidos podem ser montados da mesma forma como: casarao

$$\mathbf{z}^T = \{\lambda_1, \phi_1^T, \lambda_2, \phi_2^T \dots \lambda_r, \phi_r^T\}^T \quad (2-15)$$

As mais diferentes combinações dos autovalores e autovetores podem ser incluídas nos vetores \mathbf{z}_m e \mathbf{z} desde que a informação contida em um corresponda a aquela contida no outro.

Os métodos de função objetivo ou custo usam, em geral, uma expansão em séries de Taylor truncada após o termo de primeira ordem, para expressar os dados modais em função dos parâmetros estruturais, ou seja,

$$\delta \mathbf{z} = \mathbf{S}_j \delta \boldsymbol{\theta} \quad (2-16)$$

onde $\delta \mathbf{z} = \mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j$ é a variação das medidas, $\delta \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_j$ é a variação dos parâmetros e \mathbf{S}_j é a matriz de sensibilidade na j -ésima iteração, a qual contém as derivadas dos autovalores e

autovetores em relação aos parâmetros calculados em θ_j . Diferentes enfoques do cálculo da sensibilidade têm sido publicados por Fox & Kappor (1968), Collins & Thomsom (1969), Nelson (1976), entre outros.

O método de mínimos quadrados pode ser considerado como uma solução geral da equação (2-16) com várias matrizes de ponderação. Particularmente neste trabalho será investigado apenas o caso onde o número de medidas é maior que o número de parâmetros. Este caracteriza o caso sobredeterminado, onde não existe solução exata para a equação (2-16). Assim, uma solução por mínimos quadrados deverá ser empregada para minimizar a função objetivo:

$$J(\delta\theta) = \varepsilon^T \varepsilon \quad (2-17)$$

onde

$$\varepsilon = \delta z - S_j \delta\theta \quad (2-18)$$

é o erro residual após proceder-se ao ajuste dos parâmetros numa dada iteração j . Substituindo-se a expressão (2-18) na equação (2-17), tem-se:

$$J(\delta\theta) = \delta z^T \delta z - 2\delta\theta^T S_j^T \delta z + \delta\theta^T S_j^T S_j \delta\theta \quad (2-19)$$

Minimizar J em relação a $\delta\theta$ implica que

$$\nabla J(\delta\theta) = 0 = -S_j^T \delta z + S_j^T S_j \delta\theta \quad (2-20)$$

Resolvendo-se a equação (2-20) para $\delta\theta$ obtém-se

$$\delta\theta = (S_j^T S_j)^{-1} S_j^T \delta z \quad (2-21)$$

Assim, os parâmetros ajustados na j -ésima iteração podem ser expressos como

$$\theta_{j+1} = \theta_j + (S_j^T S_j)^{-1} S_j^T (z_m - z_j) \quad (2-22)$$

Neste caso, todas as medidas estarão sendo igualmente ponderadas. Em testes de vibrações

típicos, as frequências naturais e os modos são obtidos dentro de uma variação de 1% e 10%, respectivamente. Esta relativa imprecisão pode ser incorporada no algoritmo, minimizando-se a função objetivo ponderada:

$$J(\delta\theta) = \varepsilon^T \mathbf{W}_\varepsilon \varepsilon \quad (2-23)$$

onde \mathbf{W}_ε é uma matriz de ponderação positiva definida, a qual é usualmente diagonal e cujos elementos são dados pela recíproca da variância das correspondentes medições (Blakely & Walton, 1984). Minimizando-se a equação (2-23), obtém-se a variação dos parâmetros

$$\delta\theta = (\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j)^{-1} \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \delta\mathbf{z} \quad (2-24)$$

ou para o parâmetro ajustado

$$\theta_{j+1} = \theta_j + (\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j)^{-1} \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) \quad (2-25)$$

A fim de melhorar o condicionamento das equações (2- 22) e (2- 25) adiciona-se um termo à função objetivo, o qual irá ponderar as variações dos parâmetros. Neste caso a variação no parâmetro em cada iteração será limitada pela inclusão deste termo na função objetivo, logo:

$$J(\delta\theta) = \varepsilon^T \mathbf{W}_\varepsilon \varepsilon + \delta\theta^T \mathbf{W}_\theta \delta\theta \quad (2-26)$$

Substituindo-se $\varepsilon = \delta\mathbf{z} - \mathbf{S}_j \delta\theta$ na equação (2-26) e rearranjando-se os termos, obtém-se

$$J(\delta\theta) = \delta\mathbf{z}^T \mathbf{W}_\varepsilon \delta\mathbf{z} - 2\delta\theta^T \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \delta\mathbf{z} + \delta\theta^T (\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_\theta) \delta\theta \quad (2-27)$$

Minimizando-se esta função objetivo em relação a $\delta\theta$, obtém-se a variação nos parâmetros como:

$$\delta\theta = (\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_\theta)^{-1} \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \delta\mathbf{z} \quad (2-28)$$

ou para o parâmetro ajustado

$$\boldsymbol{\theta}_{j+1} = \boldsymbol{\theta}_j + (\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_\theta)^{-1} \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) \quad (2-29)$$

Um enfoque similar, mas melhor condicionado, é ponderar as estimativas iniciais dos parâmetros. Assim, a nova função objetivo é dada por:

$$J(\delta\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{W}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} + (\delta\boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_o))^T \mathbf{W}_\theta (\delta\boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_o)) \quad (2-30)$$

onde $\boldsymbol{\theta}_o$ é o vetor das estimativas iniciais dos parâmetros. Expandindo-se o segundo termo e substituindo-se o valor de $\boldsymbol{\varepsilon}$ obtém-se a função objetivo:

$$\begin{aligned} J(\delta\boldsymbol{\theta}) &= \delta\mathbf{z}^T \mathbf{W}_\varepsilon \delta\mathbf{z} + (\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_o)^T \mathbf{W}_\theta (\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_o) \\ &\quad - 2\delta\boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \delta\mathbf{z} - \mathbf{W}_\theta (\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_o)) + \delta\boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_\theta) \delta\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (2-31)$$

Minimizando-se esta função com relação aos parâmetros obtém-se a variação destes como

$$\delta\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_\theta)^{-1} (\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \delta\mathbf{z} - \mathbf{W}_\theta (\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_o)) \quad (2-32)$$

ou para o parâmetro ajustado

$$\boldsymbol{\theta}_{j+1} = \boldsymbol{\theta}_j + (\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_\theta)^{-1} (\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) - \mathbf{W}_\theta (\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_o)) \quad (2-33)$$

2.3.2. Métodos iterativos usando funções de resposta em frequência medidas

Os métodos iterativos que usam como dados as FRFs medidas são interessantes pois evitam que erros inerentes aos processos de análise modal experimental, usados para extrair as frequências naturais, amortecimentos modais e os modos, sejam introduzidos no ajuste do modelo numérico. Também existem situações, onde a estrutura em estudo possui frequências naturais muito próximas ou alta densidade modal, o que dificulta a análise modal experimental. A inclusão do amortecimento é vital quando os dados utilizados no ajuste são FRFs, pois isto é indispensável para se obter uma boa correspondência entre as FRFs medidas e calculadas. Sendo que o amortecimento é difícil de modelar precisamente, pode-se utilizar o coeficiente de

amortecimento obtido na análise modal experimental, e aplicá-lo no cálculo das FRFs numéricas, ou, o que é mais comum, pode-se adotar o amortecimento proporcional dado por

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (2-34)$$

De acordo com Natke (1984 e 1986), os métodos iterativos de ajuste de modelos utilizando FRFs consistem em minimizar a função objetivo

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) + \gamma(\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_o)^T \mathbf{W}_\theta (\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_o) \quad (2-35)$$

onde

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{H}_m - \mathbf{H}_a)^T \mathbf{W}_\varepsilon (\mathbf{H}_m - \mathbf{H}_a) \quad (2-36)$$

e \mathbf{H}_m são as FRFs medidas, \mathbf{H}_a as FRFs numéricas e γ é um escalar que expressa a confiança global no modelo numérico relativamente aos dados experimentais.

Quando $\gamma = 1$, a minimização de $J(\boldsymbol{\theta})$ é conhecida como estimação bayesiana. Se $\gamma = 0$, a diferença entre o parâmetro ajustado e o inicial é arbitrária e a minimização de $J(\boldsymbol{\theta})$ leva à solução de mínimos quadrados generalizada. Esta segunda opção foi a adotada na resolução dos exemplos deste trabalho. Quando $\gamma \neq 0$, a função objetivo é penalizada na medida em que a distância do modelo original aumenta. No limite, quando $\gamma \rightarrow \infty$, a minimização leva à solução trivial, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_o$.

A minimização de $J(\boldsymbol{\theta})$ é um processo iterativo onde os valores em uma iteração $j+1$ são dados por:

$$\boldsymbol{\theta}^{(j+1)} = \boldsymbol{\theta}^j + \tau^j \delta \boldsymbol{\theta} \quad (2-37)$$

onde τ^j é o passo na direção de busca, determinado em um processo de busca linear usado para melhorar o processo de convergência e

$$\delta \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_\theta)^{-1} (\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon (\mathbf{H}_m - \mathbf{H}_a(\boldsymbol{\theta}_j)) - \mathbf{W}_\theta (\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_o)) \quad (2-38)$$

Para iniciar o processo iterativo, os valores analíticos iniciais dos parâmetros são arbitrados.

A matriz de sensibilidade \mathbf{S} é dada pelo jacobiano de $\mathbf{H}_a(\boldsymbol{\theta})$ em relação aos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$:

$$\mathbf{S}_j = \left. \frac{\partial \mathbf{H}_a}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_j} \quad (2-39)$$

Muitos trabalhos tratam do problema de calcular \mathbf{S} , tais como os de Vanhonacker (1989), Sutter *et al.* (1988), Sharp & Brooks (1988), Adelman & Haftka (1986) e Wolfe (1978). Neste trabalho é utilizada uma abordagem que consiste no cálculo das sensibilidade através de diferenças finitas. Para evitar-se o alto custo computacional de uma busca não linear, somente a primeira diferença é utilizada, o que produz uma estimativa com suficiente precisão para este caso. Desta forma a matriz de sensibilidade pode ser expressa como

$$S_{ij} = \frac{\partial H_{a_i}}{\partial \theta_j} \cong \frac{H_{a_i}(\theta_j - \delta\theta_j) - H_{a_i}(\theta_j)}{\delta\theta_j} \quad (2-40)$$

A escolha de $\delta\boldsymbol{\theta}$ é de fundamental importância para a precisão do cálculo das sensibilidade. Ele deve ser tão pequeno quanto possível, mas há limitações devido ao truncamento numérico. Neste trabalho adotou-se a regra de Brown e Dennis em Arruda & Dos Santos (1992), e $\delta\boldsymbol{\theta}$ foi escolhido como sendo:

$$\delta\theta_j = \min\{\|\mathbf{H}_a(\boldsymbol{\theta}_j)\|, \delta_j\} \quad (2-41)$$

onde

$$\delta_j = \begin{cases} 10^{-9} & \text{se } |\theta_j| < 10^{-6}, \\ 10^{-3}|\theta_j| & \text{se } |\theta_j| \geq 10^{-6} \end{cases} \quad (2-42)$$

As técnicas apresentadas neste capítulo formam a base teórica mínima necessária ao desenvolvimento do estudo do ajuste de modelos. Embora o ajuste de modelos utilizando-se dados modais não se constitua no interesse principal deste trabalho, a revisão de sua formulação e sua posterior implementação facilitou o desenvolvimento dos códigos computacionais para a realização do ajuste utilizando-se FRFs.

Capítulo 3

Ajuste de modelos de elementos finitos utilizando parâmetros modais

3.1. Introdução

O desenvolvimento da modelagem por elementos finitos, aliado à flexibilidade dos modelos analíticos, sugere o crescente interesse em relação à aquisição e uso de dados experimentais com o propósito de validação e ajuste de modelos, buscando-se determinar o real comportamento da estrutura. O resultado é um modelo calibrado que pode ser usado para o estudo do comportamento dinâmico real do sistema sob diferentes condições de operação e carregamento.

No capítulo 2 apresentou-se uma visão geral das técnicas de ajuste por métodos iterativos, as quais serão empregadas aqui no ajuste de modelos do MEF. Neste capítulo são avaliadas as potencialidades dos métodos de função objetivo sob diferentes considerações de ponderação dos dados medidos e dos parâmetros a ajustar, aplicados a modelos estruturais de elementos finitos do tipo viga. As análises são feitas utilizando-se dados medidos simulados e experimentais, cujos resultados são comparados com os existentes na literatura. Nos exemplos apresentados aqui, os ajustes de modelos são realizados empregando-se apenas os dados modais. Exemplos de ajuste de modelos de elementos finitos com o emprego das FRFs são apresentados no capítulo 4, onde os resultados obtidos com o MEF são comparados com aqueles provenientes do MEC.

3.2. Ajuste com dados simulados

Os algoritmos para ajuste de modelos usando-se dados modais foram implementados em um código computacional em ambiente MATLAB, sendo os resultados obtidos apresentados por

Infantes *et al.* (1999). O cálculo da sensibilidade foi implementado com o algoritmo do método de Fox & Kappor (1968). Com a finalidade de verificar o procedimento e mostrar a capacidade das técnicas de ajuste apresentadas, estas serão aplicadas a um problema simulado de uma estrutura do tipo viga. A fim de permitir a comparação dos resultados obtidos utilizou-se o mesmo modelo simulado por Friswell & Mottershead (1995). O modelo encontra-se mostrado na Figura 3-1, o qual consiste de uma viga de alumínio com uma extremidade engastada.

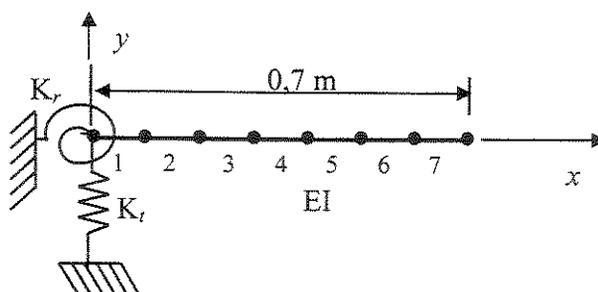


Figura 3-1. Modelo de elementos finitos para a viga simulada

A viga tem 0,7m de comprimento com seção transversal retangular de 0,050×0,025m. O modelo do MEF consiste de sete elementos de viga Euler-Bernoulli de igual comprimento, com dois graus de liberdade por nó. Os dados medidos simulados são gerados a partir de um modelo do MEF semelhante ao anterior, mas com o dobro de elementos. Os parâmetros a serem ajustados são: a rigidez à flexão da viga (EI) e as rigidezes translacional (K_{ty}) e rotacional (K_{rz}) no engaste.

A Tabela 3-1 compara os resultados obtidos neste trabalho com aqueles obtidos por Friswell & Mottershead, 1995, apresentando os valores simulados das medições, os valores iniciais arbitrados e os valores ajustados. Para os valores ajustados são apresentados os resultados dos casos sem ponderação, (Equação 2-22), e ponderando as medições (Equação 2-25). Neste último, duas avaliações são feitas; uma só com os autovalores e outra incluindo-se os autovetores no vetor de medição. Para o caso ponderado adotou-se um desvio padrão de 0.5% e 10% nos autovalores e autovetores “medidos”, respectivamente. Deve ser observado que os valores ajustados foram obtidos usando-se apenas as quatro primeiras frequências ($f1$ a $f4$), as outras frequências ($f5$ e $f6$) são usadas para quantificar a qualidade do modelo. Os resultados apresentados mostram uma boa concordância com os resultados da medição simulada, bem como com aqueles encontrados no trabalho de Friswell & Mottershead (1995).

Valor Inicial		Valor Ajustado									Valor Simulado da Medição	
		Não Ponderado (Equação 2-22)			Ponderando Medições (Equação 2-25)							
					Sem Autovetores			Com Autovetores				
f_i [Hz]	EI [N.m ²]	K_{iy} [N/m]	K_{rz} [N.m/rad]	Infantes <i>et al.</i> ₁	Friswell ₂	Erro %	Infantes <i>et al.</i> ₁	Friswell ₂	Erro %	Infantes <i>et al.</i> ₁		Friswell ₂
f_1	33,89	37,44	37,44	0	37,46	37,46	0	37,47	37,47	0	37,46	
f_2	220,60	236,7	236,8	0,02	236,8	236,8	0	236,8	236,80	0	236,75	
f_3	614,11	657,3	657,3	0	657,3	657,3	0	657,2	657,20	0	657,33	
f_4	1156,88	1255	1255	0	1255	1255	0	1255	1255,00	0	1255,30	
f_5	1827,20	1997	1997	0	1998	1998	0	1998	1998,00	0	1993,50	
f_6	2708,29	2907	2907	0	2907	2907	0	2907	2907,00	0	2881,40	
EI	4500	4593	4592	0,02	4578	4578	0	4574	4573	0,02	4560	
K_{iy}	2,00e7	3,76e7	3,77e7	0,26	3,81e7	3,81e7	0	3,82e7	3,83e7	0,26	4,00e7	
K_{rz}	5,00e4	9,68e4	9,69e4	0,10	9,86e4	9,86e4	0	9,89e4	9,90e4	0,10	10,00e4	

Tabela 3-1. Comparação entre resultados obtidos neste trabalho com os de Friswell & Mottershead, 1995, para os casos sem ponderação e ponderando as medições. ¹Resultados deste trabalho; ²Resultados do trabalho de Friswell & Mottershead, 1995.

Na Tabela 3-2 apresenta-se uma comparação dos valores simulados com os valores ajustados para o caso com ponderação nas medições e nos parâmetros (Equação 2-29); e para o caso com ponderação nas medições e na estimativa inicial dos parâmetros (Equação 2-33).

Valor Inicial f_i [Hz] EI [N.m ²] K_y [N/m] K_{rz} [N.m/rad]		Valor Ajustado								Valor Simulado da Medição
		Ponderando Medições e Parâmetros (Equação 2-29)				Ponderando Medições e Estimativa Inicial dos Parâmetros (Equação 2-33)				
		Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	
f_1	33,89	37,47	0,02	37,47	0,02	37,44	0,05	37,44	0,05	37,46
f_2	220,60	236,71	0,01	236,71	0,01	236,54	0,09	236,54	0,09	236,75
f_3	614,11	657,14	0,03	657,13	0,03	656,49	0,13	656,49	0,13	657,33
f_4	1156,88	1255,53	0,02	1255,56	0,02	1253,62	0,14	1253,63	0,14	1255,30
f_5	1827,20	1998,70	0,26	1998,83	0,26	1994,68	0,06	1994,71	0,06	1993,50
f_6	2708,29	2907,36	0,90	2907,46	0,90	2902,11	0,71	2902,13	0,72	2881,40
EI	4500	4562,80	0,06	4560,8	0,02	4560,2	0,004	4559,90	0,002	4560
K_y	2e7	3,86e7	3,50	3,87e7	3,25	3,81e7	4,75	3,81e7	4,75	4e7
K_{rz}	5e4	10,00e4	0,02	10,02e4	0,20	9,95e4	0,50	9,96e4	0,4	10e4

Tabela 3-2. Comparação dos valores simulados com os valores ajustados para os casos de ponderação: nas medições e parâmetros; e nas medições e estimativa inicial dos parâmetros.

Em ambos os casos, apresentam-se os resultados com e sem a inclusão dos autovetores no vetor de dados medidos. Tal como nos casos anteriores, adotou-se um desvio padrão de 0,5% e 10 % nos autovalores e autovetores medidos, respectivamente. Para o caso com ponderação nas medições e nos parâmetros (Equação 2-29), adotou-se um desvio padrão de 0,6 % para EI e 20 % para K_y e K_{rz} , o desvio padrão para o caso com ponderação nas estimativas iniciais (Equação 2-33), foi de 0,72% para EI e 25 % para K_y e K_{rz} . Também neste caso os valores ajustados foram obtidos usando-se apenas as quatro primeiras frequências deixando-se as duas últimas para serem usadas na quantificação da qualidade do modelo. Pode-se observar que, para todos os casos, as frequências convergem para erros percentuais inferiores a 1 %; assim como, em ambas tabelas, que os erros percentuais nas frequências f_5 e f_6 , as quais não foram incluídas no procedimento de ajuste, apresentam valores inferiores a 1 % indicando uma boa qualidade do modelo em reproduzir os dados medidos. Observa-se também que a inclusão dos autovetores em todos os casos melhora a correlação dos parâmetros do modelo “medido” simulado e o modelo ajustado. Na prática, os autovetores são menos confiáveis que os autovalores, portanto a influência deles no processo de ajuste depende do engenheiro ao dar as corretas ponderações.

A Figura 3-2 mostra a comparação entre as FRFs dos dados medidos simulados e do modelo ajustado, obtidas por superposição modal do modelo de MEF na faixa de frequências de

DC-1500Hz. Os resultados mostram uma boa concordância entre as FRFs das medidas simuladas e do modelo ajustado.

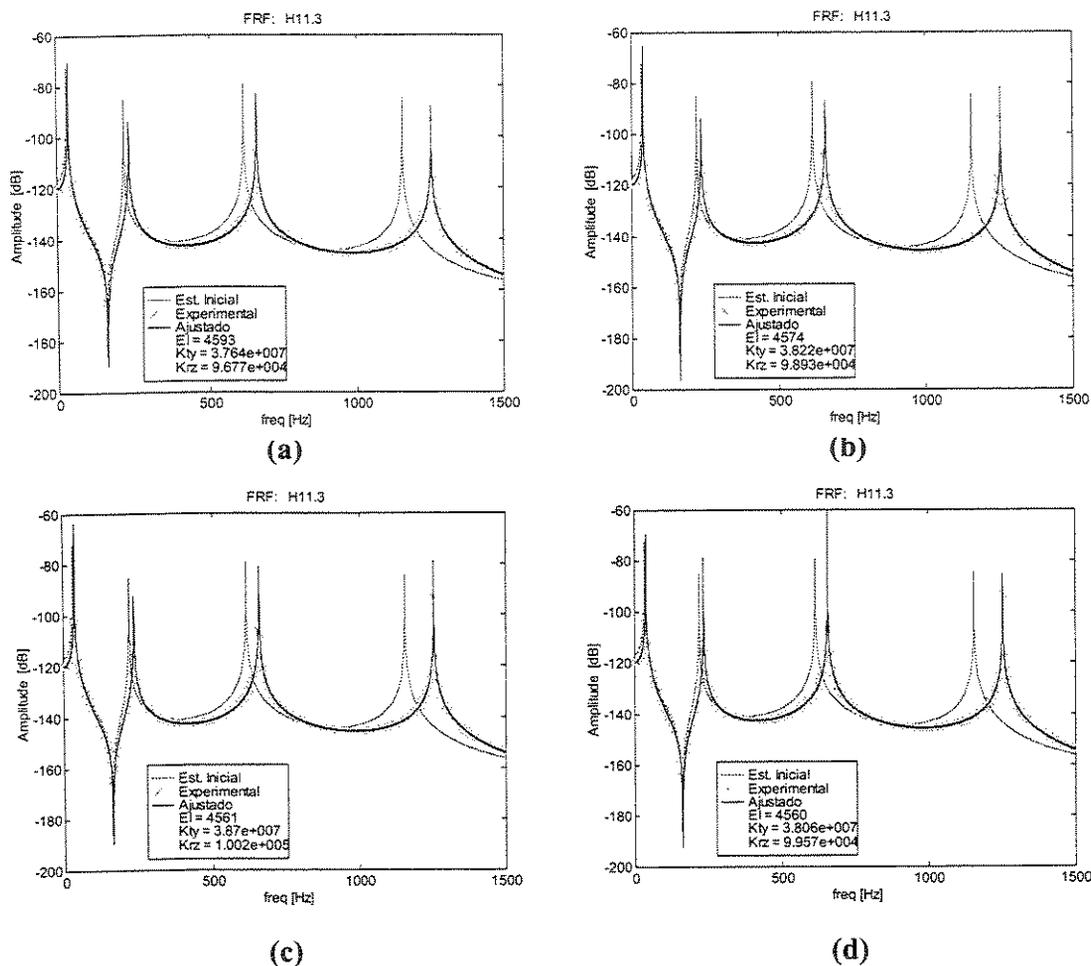


Figura 3-2. FRFs dos dados medidos simulados e do modelo ajustado a partir dos parâmetros estimados para os casos: (a) sem ponderação; (b) com ponderação nas medidas; (c) com ponderação nas medidas e nos parâmetros; (d) com ponderação nas medidas e valores iniciais dos parâmetros.

3.3. Ajuste com dados experimentais

Com o objetivo de verificar o desempenho do algoritmo de ajuste em um caso real, realizou-se um experimento similar ao simulado. Consiste de uma viga de alumínio engastada em uma extremidade, com 402 mm de comprimento e seção transversal retangular de 25,6×3,3 mm. As medidas do modelo experimental foram realizadas com as FRFs de 10 pontos de medidas de

aceleração e uma referência da medida da força de excitação na faixa de frequências de DC-800 Hz. Os acelerômetros (PCB – Structel Accelerometer Modelo nº. 330A) foram posicionados uniformemente a cada 40,2 mm ao longo do comprimento da viga, enquanto o conjunto transdutor de força (PCB – Force Transducer Modelo nº. 208A02), *stinger* e excitador eletrodinâmico (LDS Modelo nº V201) foi aplicado em um ponto a 40,2 mm do engaste. O sistema foi excitado com um sinal de força aleatório. A Figura 3-3 mostra uma vista geral da montagem experimental da viga.

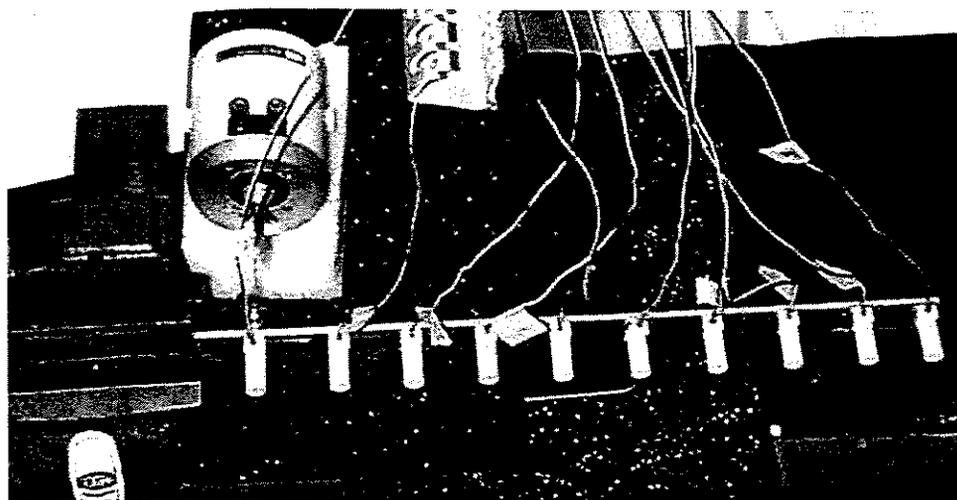


Figura 3-3. Vista geral da montagem do teste experimental da viga.

A extração dos dados modais (frequências, amortecimentos e modos) foi realizada através do código computacional LMS/CADA-PC versão 1.3, o qual usa um algoritmo de identificação de mínimos quadrados com exponencial complexa. O modelo da viga no MEF foi calculado no código computacional MEFLAB (Pavanello, 1996), onde se realizou uma discretização com 11 nós e 10 elementos de viga, de forma a obter os nós do modelo coincidentes com os pontos de medição. A fim de levar em consideração a massa de cada um dos 10 acelerômetros (3g cada) e do transdutor de força (30g) foram adicionados 11 elementos de massa concentrada nos nós correspondentes. A Figura 3-4 mostra um esboço do modelo do MEF.

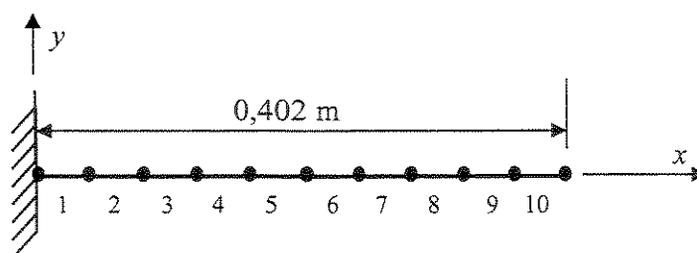


Figura 3-4. Modelo do MEF da viga do teste experimental.

Utilizando as cinco frequências identificadas e, nos casos mencionados, os modos correspondentes, o modelo do MEF foi ajustado para dois parâmetros: o módulo de elasticidade (E) e a densidade (ρ). As Tabela 3-3 e Tabela 3-4 mostram uma comparação entre os resultados das frequências e parâmetros medidos (valor medido), calculados com os valores iniciais (valor inicial) e com os valores de convergência do algoritmo de ajuste (valor ajustado). Tais resultados foram obtidos para os quatro casos dos métodos das funções objetivo anteriormente apresentados. Nos métodos com ponderação foram considerados desvios padrões de 0,5% nos autovalores medidos, 10% nos autovetores medidos, 10% no parâmetro E e 10% no parâmetro ρ . À exceção da densidade, que apresenta erros percentuais em torno de 23% (caso não ponderado), os resultados mostram uma boa convergência em termos das frequências (erro max. 1,34%) e do módulo de elasticidade (erro max. 7,8%). Contudo, deve ser observado que o valor medido do módulo de elasticidade foi estimado através de ensaios de tração com corpos de prova padronizados, enquanto a densidade foi estimada através do volume da viga calculado a partir de medições das dimensões com paquímetro e a massa do material medida em balança. Portanto, é possível que o valor estimado para a densidade seja pouco preciso para ser usado como referência.

Valor Inicial		Valor Ajustado						Valor Medido
		Sem Ponderar (Equação 2-22)		Ponderando Medições (Equação 2-25)				
		Sem Autovetor	Erro %	Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	
f_1 [Hz]	14,32	11,76	1,34	11,86	0,50	11,86	0,51	11,92
f_2 [Hz]	89,26	73,43	0,93	73,97	0,20	73,97	0,20	74,12
f_3 [Hz]	244,12	201,94	0,31	203,05	0,86	203,05	0,86	201,32
f_4 [Hz]	452,89	379,73	0,05	380,06	0,03	380,07	0,04	379,93
f_5 [Hz]	707,98	598,27	0,05	596,91	0,22	596,95	0,22	598,24
E [Pa]	71e9	6,22e10	1,47	5,73e10	6,53	5,74e10	6,36	6,13e10
ρ [kg/m ³]	2680	3792,1	23,12	3342	8,51	3346,70	8,64	3080

Tabela 3-3. Comparação entre os valores experimentais e valores ajustados para os casos sem ponderação e ponderando as medições.

Valor Inicial		Valor Ajustado								Valor Medido
		Ponderando Medições e Parâmetros (Equação 2-29)				Ponderando Medições e Estimativas Iniciais dos Parâmetros (Equação 2-33)				
		Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	Sem Autovetor	Erro %	Com Autovetor	Erro %	
f_1 [Hz]	14,32	11,86	0,50	11,86	0,51	11,87	0,43	11,87	0,44	11,92
f_2 [Hz]	89,26	73,97	0,20	73,97	0,20	74,02	0,14	74,02	0,14	74,12
f_3 [Hz]	244,12	203,06	0,86	203,05	0,86	203,11	0,90	203,11	0,89	201,32
f_4 [Hz]	452,89	380,06	0,03	380,07	0,04	379,88	0,01	379,89	0,01	379,93
f_5 [Hz]	707,98	596,91	0,22	596,95	0,22	596,34	0,32	596,38	0,31	598,24
E [Pa]	71e9	5,73e10	6,53	5,74e10	6,36	5,65e10	7,83	5,65e10	7,83	6,13e10
ρ [kg/m ³]	2680	3341,9	8,47	3346,6	8,66	3274,8	6,32	3278,5	6,44	3080

Tabela 3-4. Comparação entre os valores experimentais e valores ajustados para os casos ponderando medições e parâmetros, e ponderando medições e valores iniciais dos parâmetros.

A Figura 3-5 mostra a comparação entre a FRF H6.1 medida e a FRF H6.1 ajustada, a qual foi obtida por superposição modal do modelo de MEF com os parâmetros ajustados. As diferenças nas Figura 3-5a–d correspondem aos resultados obtidos para os casos sem ponderação, ponderando medidas, ponderando medidas e parâmetros e ponderando medidas e valor inicial do parâmetro, respectivamente. Como era esperado, os resultados mostram uma aproximação razoável das FRFs apenas nas proximidades das frequências de ressonância. Esta discordância é gerada pela ausência de amortecimento no modelo do MEF e ao efeito do truncamento modal na superposição.

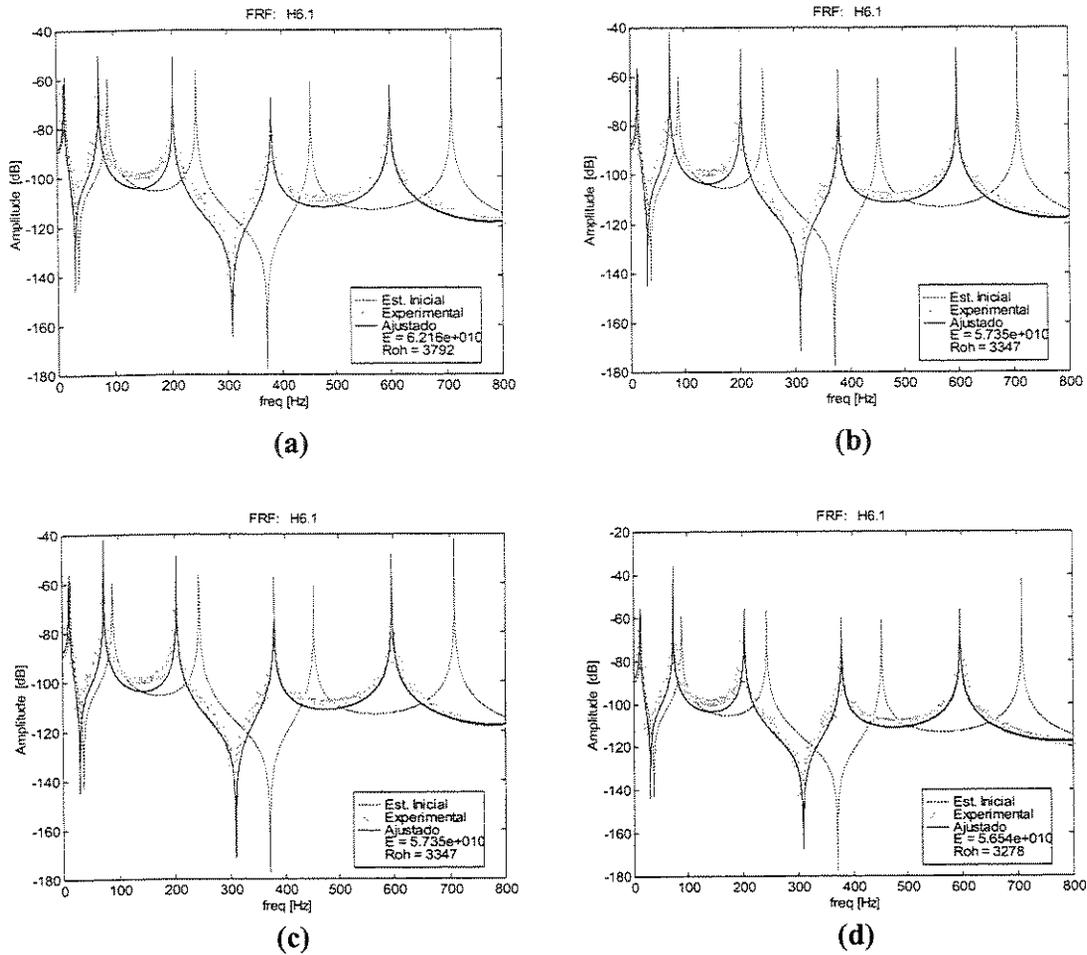


Figura 3-5. FRFs medidas e calculadas a partir dos parâmetros estimados para os casos: (a) sem ponderação; (b) com ponderação nas medidas; (c) com ponderação nas medidas e nos parâmetros; (d) com ponderação nas medidas e valores iniciais dos parâmetros.

O algoritmo da sensibilidade dos parâmetros modais em relação aos parâmetros de ajuste (Fox & Kappor, 1968) foi implementado e mostrou-se eficiente e rápido para os exemplos avaliados. Os resultados obtidos demonstram que para o caso experimental simulado o algoritmo apresenta resultados com erros inferiores a 5% em termos da convergência dos parâmetros e das frequências ajustada, para todas as variações da formulação original. O mesmo se aplica para o caso experimental real sendo que aqui os níveis de erro foram um pouco mais altos (inferiores a 8% para os casos com ponderação).

Capítulo 4

Ajuste de modelos de elementos de contorno

4.1. Introdução

Embora o MEF tenha se consolidado como uma importante ferramenta na análise numérica, o MEC também ocupa lugar de destaque na solução de uma variedade de problemas e tem, em muitos casos, se mostrado superior ao MEF (Banerjee & Butterfield, 1981). Isto se deve à ineficiência do MEF em tratar certos problemas, como quando há a necessidade de serem redefinidas as malhas em domínios complexos ou quando é necessária maior precisão, como em problemas que envolvem concentração de tensões ou que têm domínios infinitos.

Há algumas características do MEC que claramente são vantajosas na análise de problemas de mecânica do contínuo. A mais importante destas características é a possibilidade de formular o problema apenas no contorno e assim apenas este necessita ser discretizado, ao contrário do que ocorre nos métodos de domínio, como o MEF. Assim, o sistema de equações resultante é menor no MEC e a sua aplicação à área de projetos cujo processo envolve uma série de modificações na geometria, é extremamente interessante. Quando o problema tratado envolve domínios infinitos ou semi-infinitos, o MEC se apresenta como a alternativa ideal, graças à sua capacidade de representar tais domínios sem que estes sejam truncados. Nestes casos, as equações integrais do MEC se estendem apenas sobre o contorno interno, e neste caso apenas este precisa ser discretizado.

No tratamento de problemas unidimensionais, o MEC perde muitas de suas vantagens em relação aos métodos de domínio, como demonstrado por Banerjee & Butterfield (1981) e Manolis *et al.* (1986). No entanto, a análise de tais problemas ainda apresenta interesse, não só na

elastodinâmica, onde muitas estruturas são constituídas por barras e/ou vigas, mas também de uma maneira geral, por possibilitar a validação do uso do MEC através da formulação de problemas mais simples.

Dentro desta perspectiva, neste capítulo é desenvolvido um algoritmo para resolver o problema de ajuste de modelos de viga baseado no MEC direto, Providakis & Beskos (1986) e Mesquita Neto *et al.* (2000). O algoritmo para estimação de parâmetros é baseado no ajuste das FRFs utilizando-se para isso o método de mínimos quadrados, de forma semelhante ao empregado no capítulo anterior para o MEF.

Apesar do problema não apresentar grande dificuldade, ele não foi tratado anteriormente sob o ponto de vista do ajuste de modelos. O método é aplicado a um exemplo simulado de ajuste dos parâmetros de uma viga, o mesmo já apresentado no Capítulo 3, porém tendo como dados experimentais FRFs ao invés de parâmetros modais. Os resultados numéricos obtidos são apresentados e comparados com os obtidos através da técnica similar de ajuste de modelos de elementos finitos, apresentada no Capítulo 3.

4.2. Formulação Dinâmica de Elementos de Contorno para Vigas

Esta seção apresenta uma breve revisão teórica da formulação do MEC para vibração axial e transversal de vigas, como desenvolvido por Providakis & Beskos (1986) e Mesquita Neto *et al.* (2000). As equações diferenciais governantes da vibração axial e transversal de uma viga retilínea, com propriedades físicas e geométricas constantes ao longo do eixo x , são dadas respectivamente por:

$$AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + p(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4-1)$$

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c \frac{\partial v}{\partial t} = q(x,t) \quad (4-2)$$

onde u e v representam os deslocamentos axiais e transversais, A é a área da seção transversal, EI é a rigidez à flexão, p e q são os carregamentos axial e transversal respectivamente, c é o

coeficiente de amortecimento viscoso e ρ é a densidade do material. Assumindo-se um comportamento dinâmico estacionário, os deslocamentos e excitações nas equações (4-1) e (4-2) podem ser genericamente definidos, com o emprego da técnica de separação de variáveis, como:

$$a(x,t) = a(x)\exp(i\omega t) \quad (4-3)$$

onde ω , sendo as frequências genéricas, representa os valores das frequências naturais da estrutura quando $a(x,t)$ refere-se aos deslocamentos e representa a frequência de excitação no caso em que $a(x,t)$ refere-se a carregamentos. A partir de (4-3) pode-se escrever (4-1) e (4-2) respectivamente como:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda_u^2 u = -\frac{p(x)}{AE}, \text{ onde } \lambda_u^2 = \frac{\rho\omega^2 - i\omega c}{E} \quad (4-4)$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} - \lambda_v^4 v = \frac{q(x)}{EI}, \text{ onde } \lambda_v^4 = \frac{\rho A \omega^2 - i\omega c}{EI} \quad (4-5)$$

A formulação do MEC pode ser interpretada como uma combinação de resíduos ponderados com um processo de integração por partes, no qual o operador é multiplicado por uma função especial, chamada de solução fundamental. Para a equação (4-1) a solução fundamental é dada por

$$\bar{u}(x,y) = \frac{1}{2\lambda_u AE} \sin(\lambda_u r) \quad (4-6)$$

onde x é o ponto de observação, y é o ponto de excitação e $r = |x - y|$. Para a equação (4-2) a solução fundamental é:

$$\bar{v}(x,y) = \frac{1}{4\lambda_v^3 EI} \left[\sec(\lambda_v L) \sin(\lambda_v(L - \xi)) - \operatorname{sech}(\lambda_v L) \sinh(\lambda_v(L - \xi)) \right] \quad (4-7)$$

onde $\xi = |x - y|$.

As equações diferenciais e as soluções fundamentais dadas acima podem ser aplicadas à formulação padrão do MEC para se obter as equações integrais no contorno desacopladas

governantes dos deslocamentos axial (u) e transversal (v) e da rotação (θ) de uma viga retilínea de comprimento L , resultando em

$$u(y) = -u(x) \bar{N}(x, y) \Big|_0^L + N(x, y) \bar{u}(x) \Big|_0^L + \int_0^L p(x) \bar{u}(x, y) dx \quad (4-8)$$

$$v(y) = V(x) \bar{v}(x, y) \Big|_0^L - M(x) \bar{\theta}(x, y) \Big|_0^L + \theta(x) \bar{M}(x, y) \Big|_0^L - v(x) \bar{V}(x, y) \Big|_0^L + \int_0^L q(x) \bar{v}(x, y) dx \quad (4-9)$$

$$\theta(y) = V(x) \frac{d\bar{v}(x, y)}{dy} \Big|_0^L - M(x) \frac{d\bar{\theta}(x, y)}{dy} \Big|_0^L + \theta(x) \frac{d\bar{M}(x, y)}{dy} \Big|_0^L - v(x) \frac{d\bar{V}(x, y)}{dy} \Big|_0^L + \int_0^L q(x) \frac{d\bar{v}(x, y)}{dy} dx \quad (4-10)$$

onde as funções \bar{N} , $\bar{\theta}$, \bar{M} e \bar{V} são dadas por:

$$\bar{N} = AE \frac{d\bar{u}}{dx}; \quad \bar{\theta} = \frac{d\bar{v}}{dx}; \quad \bar{M} = -EI \frac{d^2\bar{v}}{dx^2}; \quad \bar{V} = -EI \frac{d^3\bar{v}}{dx^3} \quad (4-11)$$

Escolhendo-se o ponto de excitação y no contorno do elemento ($y=0$ e $y=L$) e realizando as integrais de domínio das cargas distribuídas, dois sistemas de equações podem ser escritos descrevendo o comportamento axial e à flexão do elemento respectivamente. As equações (4-12) e (4-13) apresentam o sistema de equações resultantes, para o caso de um ponto interno situado em y_1 :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -\bar{N}(0,0)+1 & \bar{N}(L,0) & 0 \\ -\bar{N}(0,L) & \bar{N}(L,L)+1 & 0 \\ -\bar{N}(0,y_1) & \bar{N}(L,y_1) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(L) \\ u(y_1) \end{Bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} -\bar{u}(0,0) & \bar{u}(L,0) \\ -\bar{u}(0,L) & \bar{u}(L,L) \\ -\bar{u}(0,y_1) & \bar{u}(L,y_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(0) \\ N(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F(0) \\ F(L) \\ F(y_1) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4-12}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -\bar{V}(0,0)+1 & \bar{M}(0,0) & \bar{V}(L,0) & -\bar{M}(L,0) & 0 \\ -\bar{V}'(0,0) & \bar{M}'(0,0)+1 & \bar{V}'(L,0) & -\bar{M}'(L,0) & 0 \\ -\bar{V}(0,L) & \bar{M}(0,L) & \bar{V}(L,L)+1 & -\bar{M}(L,L) & 0 \\ -\bar{V}'(0,L) & \bar{M}'(0,L) & \bar{V}'(L,L) & -\bar{M}'(L,L)+1 & 0 \\ -\bar{V}(0,y_1) & \bar{M}(0,y_1) & \bar{V}(L,y_1) & -\bar{M}(L,y_1) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(0) \\ \theta(0) \\ v(L) \\ \theta(L) \\ v(y_1) \end{Bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} -\bar{v}(0,0) & \bar{\theta}(0,0) & \bar{v}(L,0) & -\bar{\theta}(L,0) \\ -\bar{v}'(0,0) & \bar{\theta}'(0,0) & \bar{v}'(L,0) & -\bar{\theta}'(L,0) \\ -\bar{v}(0,L) & \bar{\theta}(0,L) & \bar{v}(L,L) & -\bar{\theta}(L,L) \\ -\bar{v}'(0,L) & \bar{\theta}'(0,L) & \bar{v}'(L,L) & -\bar{\theta}'(L,L) \\ -\bar{v}(0,y_1) & \bar{\theta}(0,y_1) & \bar{v}(L,y_1) & -\bar{\theta}(L,y_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V(0) \\ M(0) \\ V(L) \\ M(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q(0) \\ Q'(0) \\ Q(L) \\ Q'(L) \\ Q(y_1) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4-13}$$

onde os apóstrofes na equação (4-13) indicam diferenciação em relação a y e

$$F(y) = \int_0^L p(x) \bar{u}(x,y) dx \tag{4-14}$$

$$Q(y) = \int_0^L q(x) \bar{v}(x,y) dx \tag{4-15}$$

Adotando-se as condições de contorno apropriadas, as equações (4-12) e (4-13) descrevem completamente a resposta dinâmica desacoplada axial e à flexão de um elemento estrutural retilíneo no domínio da frequência. As equações (4-12) e (4-13) podem ser escritas em uma forma mais compacta como

$$A_a u_a = B_a n_a + f_a \tag{4-16}$$

$$A_f u_f = B_f n_f + f_f \tag{4-17}$$

Pode-se agora aplicar a esta formulação as condições de contorno de uma estrutura específica. A viga exemplo de Friswell & Mottershead (1995) consiste de uma viga de alumínio presa por uma única extremidade, onde somente a flexão no plano vertical é considerada. A extremidade engastada é substituída por uma junta flexível com rigidez translacional e rotacional, Figura 4-1.

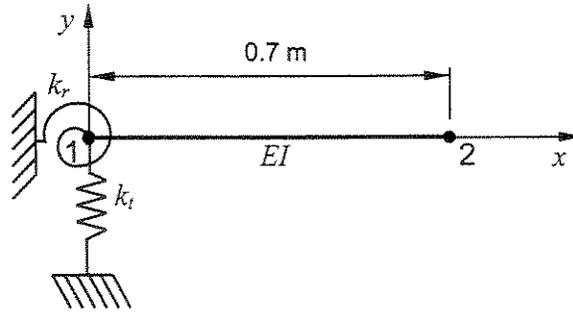


Figura 4-1. Modelo de viga para o MEC

Para esta situação as condições de contorno são:

$$V(0) = k_t v(0), \quad M(0) = -k_r \theta(0), \quad V(L) = 0, \quad M(L) = 0 \quad (4-18)$$

onde k_t e k_r são os coeficientes de rigidez de mola translacional e rotacional respectivamente.

Aplicando-se a equação (4-18) em (4-13) e rearranjando-se, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -\bar{V}(0,0) + 1 + k_t \bar{v}(0,0) & \bar{M}(0,0) + k_r \bar{\theta}(0,0) & \bar{V}(L,0) & -M(L,0) & 0 \\ -\bar{V}'(0,0) + k_t \bar{v}'(0,0) & \bar{M}'(0,0) + 1 + k_r \bar{\theta}'(0,0) & \bar{V}'(L,0) & -\bar{M}'(L,0) & 0 \\ -\bar{V}(0,L) + k_t \bar{v}(0,L) & \bar{M}(0,L) + k_r \bar{\theta}(0,L) & \bar{V}(L,L) + 1 & -\bar{M}(L,L) & 0 \\ -\bar{V}'(0,L) + k_t \bar{v}'(0,L) & \bar{M}'(0,L) + k_r \bar{\theta}'(0,L) & \bar{V}'(L,L) & -\bar{M}'(L,L) + 1 & 0 \\ -\bar{V}(0,y_1) + k_t \bar{v}(0,y_1) & \bar{M}(0,y_1) + k_r \bar{\theta}(0,y_1) & \bar{V}(L,y_1) & -\bar{M}(L,y_1) & 1 \end{bmatrix} \times \quad (4-19)$$

$$\begin{Bmatrix} v(0) \\ \theta(0) \\ v(L) \\ \theta(L) \\ v(y_1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q(0) \\ Q'(0) \\ Q(L) \\ Q'(L) \\ Q(y_1) \end{Bmatrix}$$

A equação (4-19) pode ser reescrita em uma forma mais compacta como:

$$\mathbf{G}_f \mathbf{w}_f = \mathbf{q}_f \quad (4-20)$$

Aplicando-se uma força unitária no ponto x_l e resolvendo-se a equação (4-20) para w_f , obtém-se as FRFs para a resposta dinâmica à flexão $v(y_l)$.

4.3. Exemplo Simulado

O algoritmo de ajuste do modelo de elementos de contorno será essencialmente o mesmo do utilizado para o ajuste de modelos de elementos finitos, diferindo apenas na maneira como as FRFs utilizadas para o ajuste são obtidas. Todas as considerações feitas no capítulo anterior relativas ao ajuste de modelos de elementos finitos também foram adotadas aqui.

A performance do algoritmo de ajuste de modelos de elementos de contorno foi verificada pela análise da viga exemplo de Friswell & Mottershead (1995) e os parâmetros estimados são os mesmos, a rigidez à flexão da viga (EI) e as rigidezes de mola translacional (k_t) e rotacional (k_r) da junta flexível. Para facilitar a comparação dos resultados obtidos, algumas modificações foram feitas no exemplo original. Os dados experimentais simulados são FRFs ao invés de parâmetros modais. Amortecimento viscoso foi introduzido nos modelos de MEC (coeficiente de amortecimento) e MEF (amortecimento proporcional às matrizes de massa e rigidez) para a obtenção de uma boa correspondência entre o modelo numérico e o experimental. Adotou-se para o coeficiente de amortecimento da formulação do MEC o valor $c = 100 \text{ N.s/m}$, enquanto que para os coeficientes utilizados no cálculo do amortecimento proporcional a ser utilizado na formulação do MEF foram adotados os valores $\alpha = 29,851$ e $\beta = 1,5113 \times 10^{-12}$, os quais introduzem um amortecimento equivalente ao adotado para o modelo do MEC. Sendo que o modelo do MEC contém um único elemento e sua formulação é analiticamente exata, as FRF experimentais simuladas foram obtidas a partir deste modelo, com 6000 linhas na faixa de frequência de 0,5 a 3000 Hz.

Para simular um caso real de dados experimentais com ruído, as FRFs experimentais simuladas foram corrompidas com um ruído aleatório da forma

$$\hat{H}_{ij} = H_{ij} + H_{ij} \frac{f}{100} \text{rand}[-1,1] \quad (4-21)$$

onde H_{ij} é a FRF medida em um ponto i para uma força de excitação aplicada em um ponto j , f é o fator de escala do ruído, $\text{rand}[-1,1]$ é um número aleatório com ocorrência uniformemente distribuída entre -1 e 1 , \hat{H}_{ij} é a FRF corrompida pelo ruído.

Para se obter uma boa concordância entre os modelos de MEC e de MEF, este último precisou ser modelado com 56 elementos. Para avaliar-se a influência da variação da discretização do problema, modelos de MEF com 14 elementos também foram utilizados (Figura 4-2).

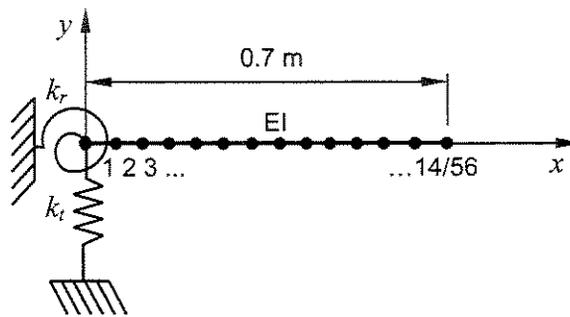


Figura 4-2. Modelo de viga com 14 e 56 elementos para o MEF

A Figura 4-3 apresenta a comparação entre as FRFs $H_{105,105}$, obtidas com os modelos de MEF de 14 e 56 elementos e pelo modelo de MEC com um elemento. Aparentemente as três curvas concordam, entretanto, se for feita uma ampliação da região do gráfico que contém os últimos picos destas FRFs (Figura 4-4), pode-se ver que somente aquelas geradas pelo MEC e pelo MEF com 56 elementos estão em concordância. A diferença apresentada pela FRF gerada pelo MEF com 14 elementos deve-se a aproximações da formulação do MEF.

Uma primeira avaliação da precisão e convergência do ajuste do modelo de MEC foi feita em uma faixa de frequência de 0.5-1000 Hz. Como Friswell & Mottershead (1995), adotou-se um erro inicial de 1,3 % para EI e de 50 % para k_t e k_r . A Tabela 4-1 apresenta os valores exatos, iniciais e estimados dos parâmetros obtidos através do ajuste com MEC e FEM com 14/56 elementos. Adotou-se um coeficiente de amortecimento $c=100$ N.s/m e utilizou-se FRFs simuladas com níveis de ruído de 1%, 5%, 10% e 20%.

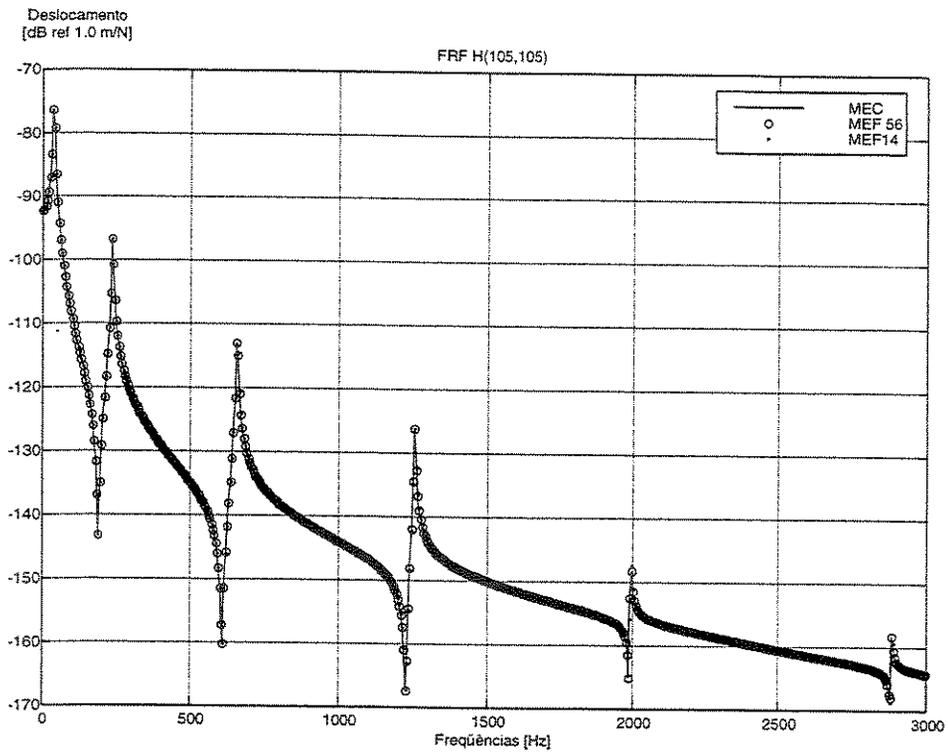


Figura 4-3. FRFs $H_{105,105}$, obtidas através do MEF com 14 e 56 elementos e do MEC com um único elemento. O índice 105 refere-se ao grau de liberdade relativo ao modelo de MEF com 56 elementos

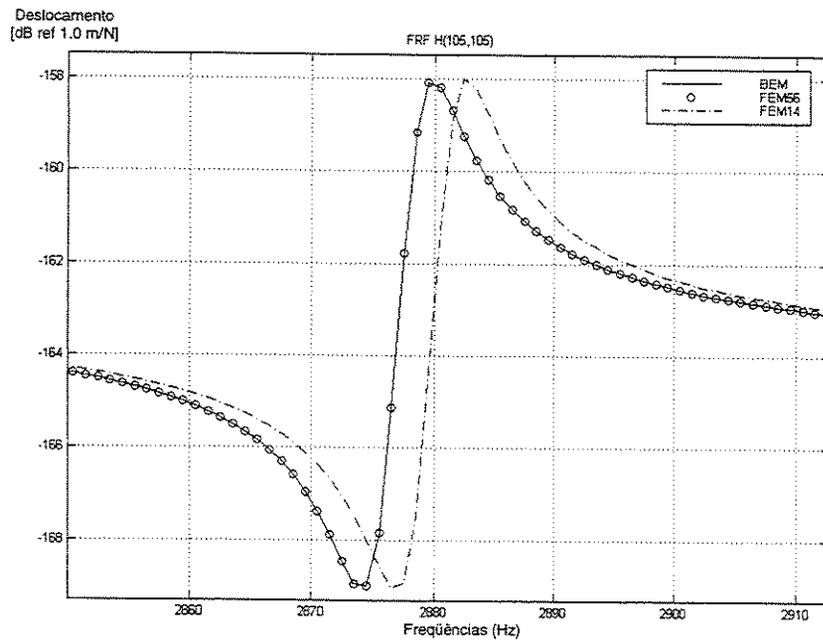


Figura 4-4. Detalhe das FRFs $H_{105,105}$

Valores	Número de iterações	Ruído (%)	Parâmetros						Erro entre as Normas das FRFs (%)	
			EI	Erro	$k_r \times 10^7$	Erro	$k_r \times 10^4$	Erro	Inicial	Estimado
			N.m ²	%	N/m	%	N.m/rad	%		
Exato	-	-	4560.00	-	4.0000	-	10.0000	-	-	-
Inicial	-	-	4500.00	1.300	2.0000	50.000	5.0000	50.000	-	-
MEC Estimado	37	0	4559.99	0.000	4.0000	0.000	10.0000	0.000	46.646	0.000
	35	1	4559.13	0.019	4.0073	0.182	10.0032	0.032	46.685	0.331
	36	5	4562.81	0.062	3.9808	0.480	9.9799	0.201	46.399	1.739
	34	10	4573.62	0.299	3.9388	1.530	9.8568	1.432	47.651	4.193
	36	20	4618.87	1.291	3.6785	8.038	9.5165	4.835	48.806	7.135
MEF 14 Estimado	70	0	4559.86	0.003	3.9941	0.148	10.0035	0.035	46.646	0.013
	55	1	4558.86	0.025	4.0015	0.038	10.0070	0.070	46.685	0.332
	51	5	4562.67	0.059	3.9750	0.625	9.9834	0.166	46.398	1.742
	50	10	4573.50	0.296	3.9330	1.675	9.8599	1.401	47.651	4.187
	59	20	4617.99	1.272	3.6779	8.052	9.5239	4.761	48.806	7.134
MEF 56 Estimado	70	0	4560.00	0.000	4.0000	0.000	10.0000	0.000	46.646	0.000
	54	1	4559.13	0.019	4.0073	0.182	10.0032	0.032	46.685	0.331
	51	5	4562.81	0.062	3.9808	0.480	9.9800	0.200	46.398	1.739
	50	10	4573.62	0.299	3.9388	1.530	9.8568	1.432	47.651	4.193
	61	20	4617.89	1.270	3.6823	7.943	9.5266	4.734	48.806	7.133

Tabela 4-1. Valores exatos, iniciais e estimados dos parâmetros através do MEC, FEM com 14 elementos e MEF com 56 elementos. Os modelos foram ajustados adotando-se $c = 100$ N.s/m ($\alpha = 29.851$, $\beta = 1.5113E-12$), ruído na FRF = 0,1, 5, 10 e 20 %.

Pode-se ver que na maioria dos casos os parâmetros estimados convergem para valores muito próximos da solução exata, com um erro menor que 5 %. Os erros na estimação tornam-se maiores à medida que o nível de ruído aumenta. Comportamento similar pode ser observado com o erro das normas das FRFs. Somente o número de iterações apresenta uma diferença significativa, com os modelos do MEC necessitando de menos iterações que os modelos de MEF para alcançar a convergência. Isto não significa necessariamente uma vantagem em termos de tempo de processamento, já que os modelos do MEF com 14 elementos necessitam menos tempo computacional que os outros para um mesmo número de iterações. Apesar de não apresentados aqui, os resultados do ajuste para modelos de MEC com $c = 50$ N.s/m apresentam um comportamento similar ao caso com $c = 100$ N.s/m.

A Figura 4-5 mostra a comparação entre as FRFs obtidas para os modelos do MEC, sem a

introdução de ruído, obtidas por três procedimentos distintos: a experimental simulada (Exp. Simulada) , a calculada para os valores iniciais dos parâmetros (Inicial) e a obtida através do ajuste de modelos (Ajustada). O mesmo comportamento foi apresentado pelos modelos do MEF.

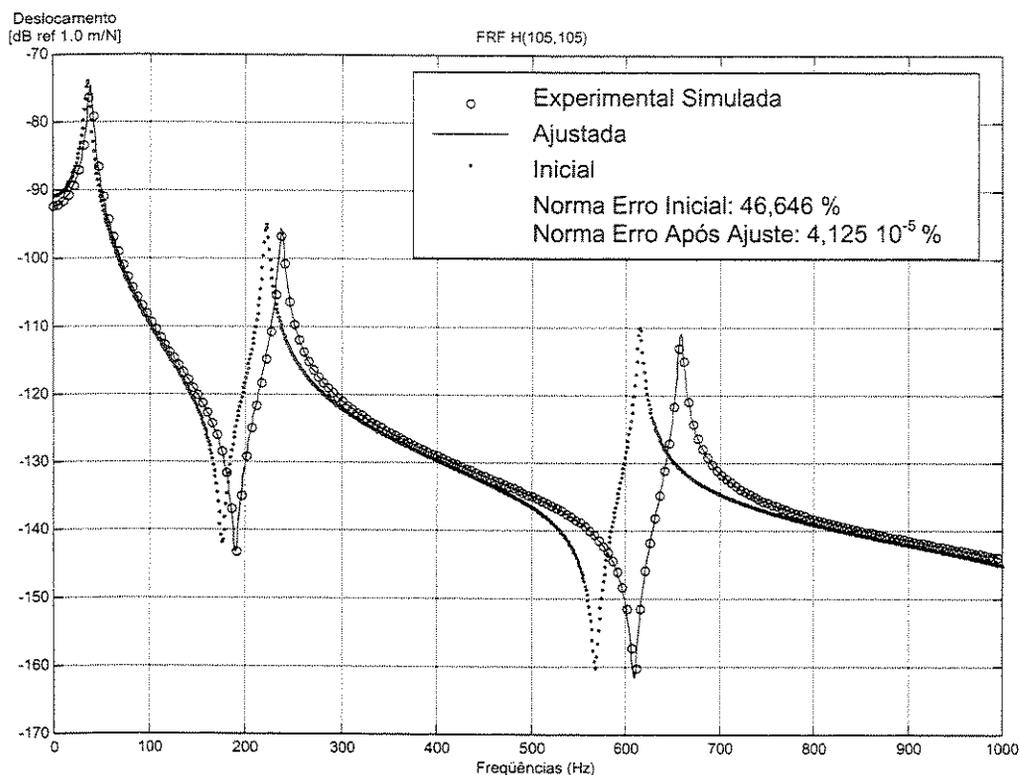


Figura 4-5. FRFs $H_{105,105}$: experimental simulada sem ruído (Experimental Simulada), calculada com os parâmetros iniciais (Inicial) e ajustada (Ajustada) utilizando-se o MEC.

Outra avaliação foi feita considerando-se uma faixa de frequências maior, entre 0.5 Hz e 3000 Hz. A porcentagem do erro inicial dos parâmetros foi mantida a mesma da avaliação anterior, 1.3% para EI e 50% para os coeficientes de mola (k_t , k_r). Observou-se que este percentual de erro nos coeficientes iniciais das molas aumenta as diferenças entre os picos das frequências mais altas. Neste caso, o processo de ajuste converge para valores incorretos dos parâmetros. Este comportamento é comum para procedimentos de ajuste de modelos baseados em FRFs e deve-se à existência de mínimos locais. Para poder avaliar este efeito, três casos com o erro inicial dos coeficientes de mola respectivamente iguais a 15, 20 e 25 %, sem a introdução de ruído nas FRFs, foram analisados. Um quarto caso foi verificado utilizando-se 20 % de erro nos coeficientes de mola e 20 % para o nível de ruído introduzido na FRF. A Tabela 4-2 apresenta os

valores dos parâmetros estimados pelo ajuste dos modelos do MEC e do MEF com 14 e 56 elementos.

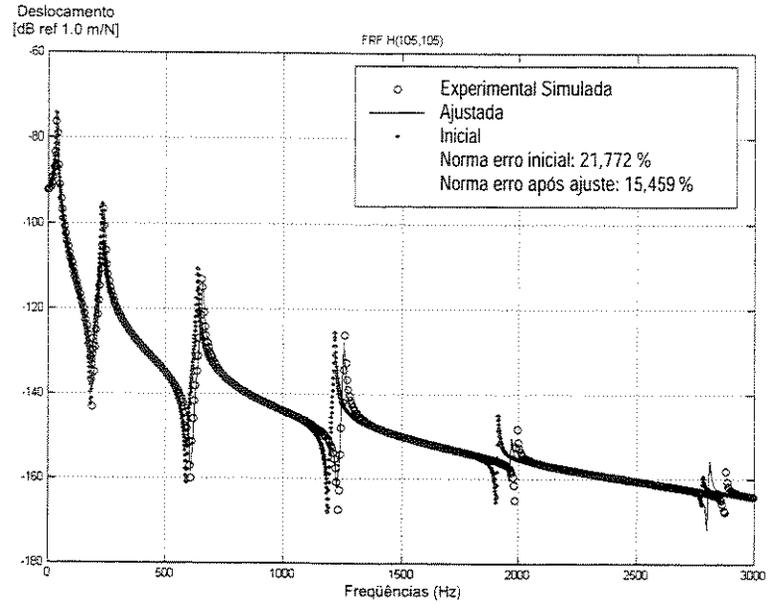
Caso	Valores	Número de iterações	Modelo	Parâmetros						
				EI N.m ²	Erro EI %	$k_t \times 10^7$ N/m	Erro k_t %	$k_r \times 10^4$ N.m/rad	Erro k_r %	Norma do erro entre as FRFs (%)
	Exato	-	-	4560,00	-	4,0000	-	10,0000	-	-
1 Sem Ruído	Inicial	-	-	4500,00	1,30	3,4000	15,00	8,5000	15,00	13,770
	Estimado	33	MEC	4560,15	0,00	3,9996	0,01	9,9976	0,02	0,007
		32	MEF56	4560,03	0,00	3,9999	0,00	9,9999	0,00	0,002
		38	MEF14	4560,03	0,00	3,9999	0,00	9,9999	0,00	1,244
2 Sem Ruído	Inicial	-	-	4500,00	1,30	3,2000	20,00	8,0000	20,00	17,641
	Estimado	66	MEC	4560,18	0,00	3,9996	0,01	9,9975	0,02	0,006
		72	MEF56	4560,05	0,00	3,9999	0,00	9,9998	0,00	0,006
		75	MEF14	4560,05	0,00	3,9999	0,00	9,9985	0,02	1,227
3 Sem Ruído	Inicial	-	-	4500,00	1,30	3,0000	25,00	7,5000	25,00	21,772
	Estimado	34	MEC	3984,05	12,63	5,1960	29,90	50,5415	405,42	15,459
		34	MEF56	3983,77	12,64	5,1976	29,94	50,5768	405,77	15,448
		37	MEF14	3990,44	12,49	5,1276	28,19	50,5885	405,86	15,913
4 20% Ruído	Inicial	-	-	4500,00	1,30	3,2000	20,00	8,0000	20,00	20,160
	Estimado	44	MEC	4558,54	0,03	4,0035	0,09	10,0166	0,17	7,057
		42	MEF56	4559,06	0,02	4,0016	0,04	10,0185	0,19	7,056
		67	MEF14	4528,45	0,69	4,0700	1,75	10,5100	5,10	7,131

Tabela 4-2. Resultados para a estimação de parâmetros através do algoritmo de ajuste de modelos do MEC e do MEF com 56 e 14 elementos para os Casos 1, 2 e 3 com respectivamente 15, 20 e 25 % de erro nos coeficientes de mola k_t e k_r , sem a introdução de ruído na FRF e para o Caso 4 com 20 % de erro em k_t e k_r e com 20 % de ruído introduzido na FRF.

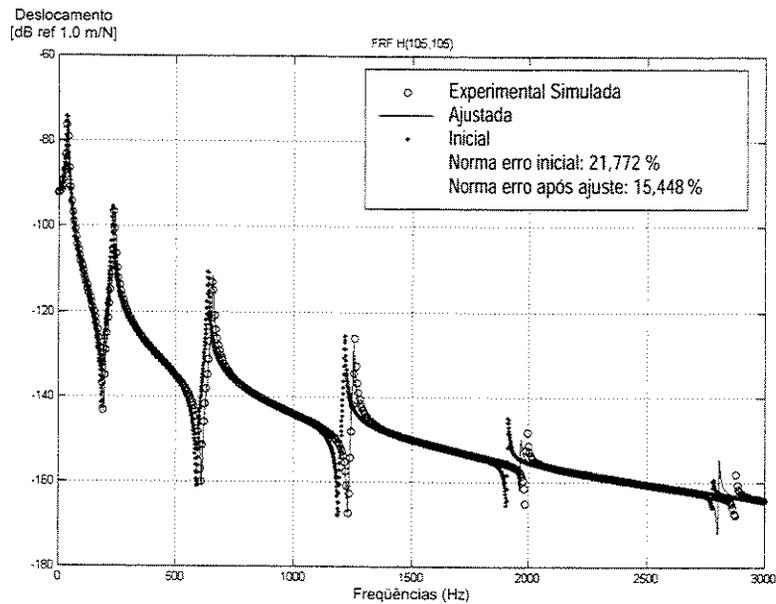
Pelos resultados obtidos para os Casos 1, 2 e 3 é possível ver que há um ponto limite entre 20 e 25 % de erro nos coeficientes de mola acima do qual o algoritmo de estimação de parâmetros converge para a solução errada. O Caso 4 pode ser visto como um indicador de que se a FRF inicial está no espaço solução do mínimo global, um ruído da ordem de 20 % presente na FRF experimental, o qual pode ser considerado um nível de ruído bastante elevado, não impedirá o método de convergir para os valores corretos.

As figuras mostram as FRFs para o MEC e MEF calculadas com os valores iniciais dos parâmetros, com os valores ajustados dos parâmetros e a experimental simulada na faixa de

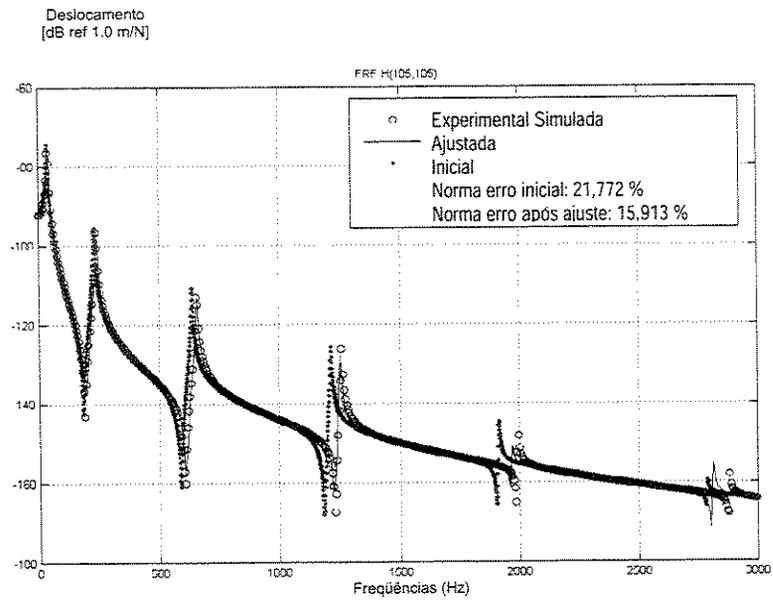
freqüência entre 0,5 e 3000 Hz para o Caso 3 e para o Caso 4. Exceto para o Caso 3, o modelo ajustado reproduziu a FRF experimental em toda a faixa de freqüência com um erro muito pequeno em relação às normas das FRF.



(a)

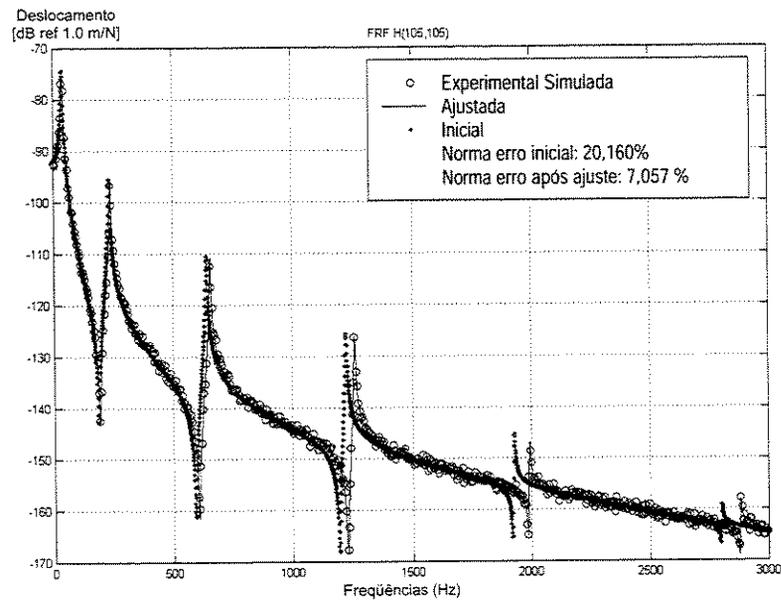


(b)

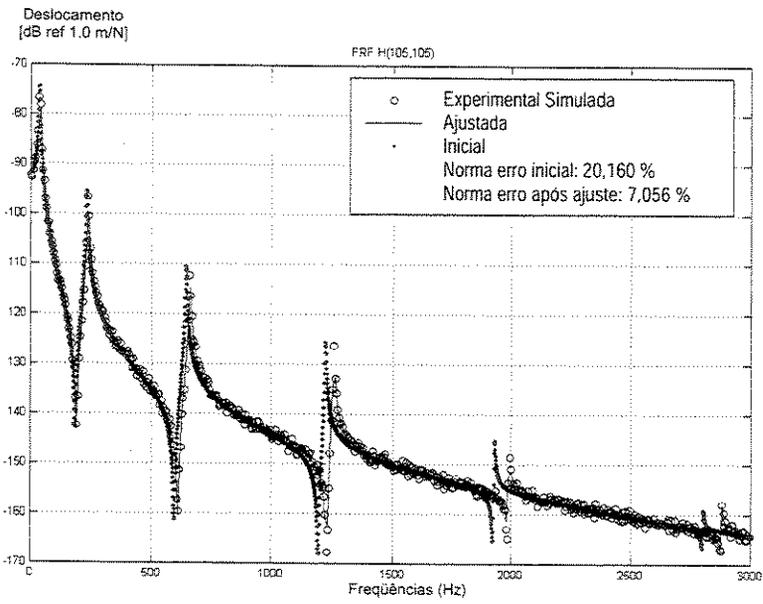


(c)

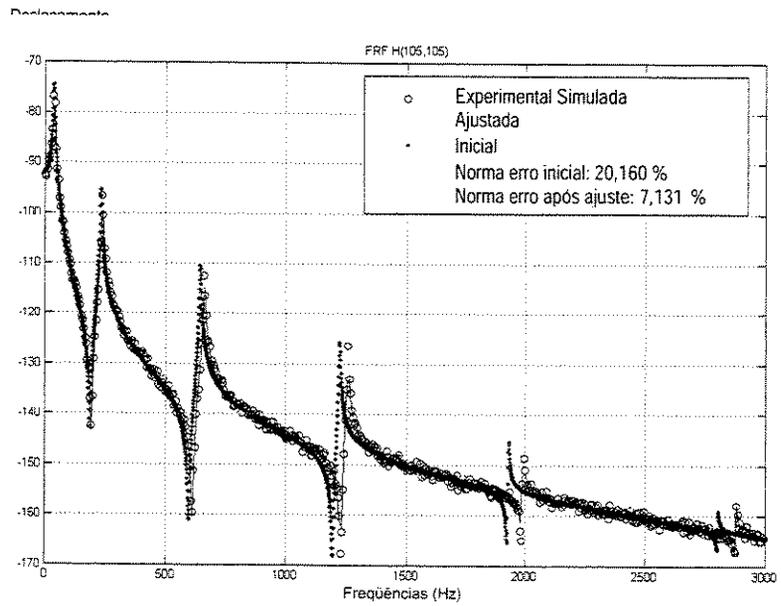
Figura 4-6. FRFs $H_{105,105}$ Inicial calculada com erro de 25 % nos coeficientes de mola, experimental simulada sem ruído e ajustada: (a) MEC, (b) MEF 56 elementos, (c) MEF 14 elementos.



(a)



(b)



(c)

Figura 4-7. FRFs $H_{105,105}$ Inicial calculada com erro de 20 % nos coeficientes de mola, experimental simulada com nível de ruído de 20 % e ajustada: (a) MEC, (b) MEF 56 elementos, (c) MEF 14 elementos.

Capítulo 5

Método dos Elementos Finitos Escalonado no Contorno

5.1. Introdução

Na elastodinâmica linear, o método dos elementos finitos é rotineiramente utilizado, sendo que o domínio todo é discretizado por elementos finitos. Em cada elemento finito, funções de forma polinomiais interpolam os deslocamentos. Processos usuais de integração levam à obtenção das matrizes de cada elemento, as quais montadas dão origem às matrizes globais do problema em estudo. Há uma grande flexibilidade na representação da geometria e das propriedades dos materiais. Para meios infinitos a condição de radiação no infinito não é representada exatamente e a discretização só é possível com a adoção de um contorno artificial, onde o comportamento dinâmico do domínio externo ao contorno é modelado aproximadamente, Wolf & Song (1996b).

No MEC, somente o contorno é discretizado, levando a redução da dimensão do problema por um. Isto facilita a preparação dos dados e dá origem a menos incógnitas que o MEF. No entanto, é necessário que exista uma solução fundamental que satisfaça a equação governante do problema. Esta solução analítica é muitas vezes complicada, podendo também apresentar singularidades. Em cada elemento de contorno, funções polinomiais interpolam os deslocamentos e as forças de superfície. Domínios infinitos são modelados adequadamente, já que a discretização se dá apenas no contorno e a solução fundamental representa exatamente a condição de radiação no infinito. No domínio da frequência, autovalores computacionais também são obtidos, o que requer um tratamento especial, Wolf & Song (1996b).

Ambos os métodos convergem para a solução exata com a diminuição do tamanho do

elemento. A convergência é lenta próxima de pontos onde ocorrem singularidades nas tensões, tal como na ponta de trincas, porque ambos usam polinomiais para interpolar os deslocamentos. Técnicas especiais e um grande número de elementos são necessários para se conseguir precisão suficiente.

O Método dos Elementos Finitos Escalonado no Contorno (MEFEC) é um método semi-analítico baseado somente em elementos finitos, os quais são escalonados convenientemente no contorno do domínio. Neste método, a dimensão espacial é reduzida por um e somente o contorno necessita ser discretizado, o que é feito através de elementos finitos usuais. Após a discretização do contorno e a mudança do sistema cartesiano para um sistema de coordenadas radial e circunferencial, as equações diferenciais parciais governantes do problema são convertidas em equações diferenciais ordinárias, com a coordenada radial como variável independente, as quais podem ser resolvidas analiticamente.

Por não fazer uso de solução fundamental, não há necessidade de se resolver integrais singulares e materiais anisotrópicos podem ser tratados sem aumento do esforço computacional. Não há o aparecimento de autovalores computacionais quando se modela meios infinitos, além da condição de radiação ser satisfeita exatamente no infinito (Wolf & Song, 1996a).

Este método combina as vantagens do MEF e do MEC, além de apresentar outras características interessantes que são próprias de sua formulação, tais como não necessitar discretizar interfaces de diferentes materiais ou trechos do contorno cujas extensões passam pelo centro de escalonamento e estejam na direção radial cuja solução é a analítica exata. Outra característica única é sua capacidade de representar automaticamente singularidades de tensões, como as que ocorrem nas pontas de trincas (Wolf & Song, 1996b).

A formulação de elementos finitos escalonado no contorno para a elastodinâmica foi apresentada por Wolf e Song (1997) e o mesmo desenvolvimento utilizado por eles será adotado neste trabalho.

5.2. Transformação de escalonamento no contorno

Em muitas situações práticas, a forma do contorno, as variações das propriedades dos

materiais e as condições de contorno impedem a obtenção de uma solução analítica para as equações diferenciais parciais da elastodinâmica. No entanto, se o problema físico é governado por equações diferenciais ordinárias, técnicas matemáticas clássicas podem muitas vezes levar a uma solução analítica exata. Em certos casos existe simetria esférica, permitindo que o problema seja tratado como unidimensional. As equações diferenciais ordinárias, na coordenada radial, podem então ser resolvidas analiticamente, enquanto que tridimensionalmente isto não seria possível.

Para fazer uso dessas vantagens mesmo nos casos gerais, onde não existe simetria, uma transformação de coordenadas denominada de transformação de escalonamento no contorno é aplicada, levando o problema definido em um domínio, inicialmente no sistema de coordenadas cartesianas, para um novo sistema definido pela coordenada radial adimensional ξ e por duas coordenadas locais circunferenciais η e ζ localizadas no contorno.

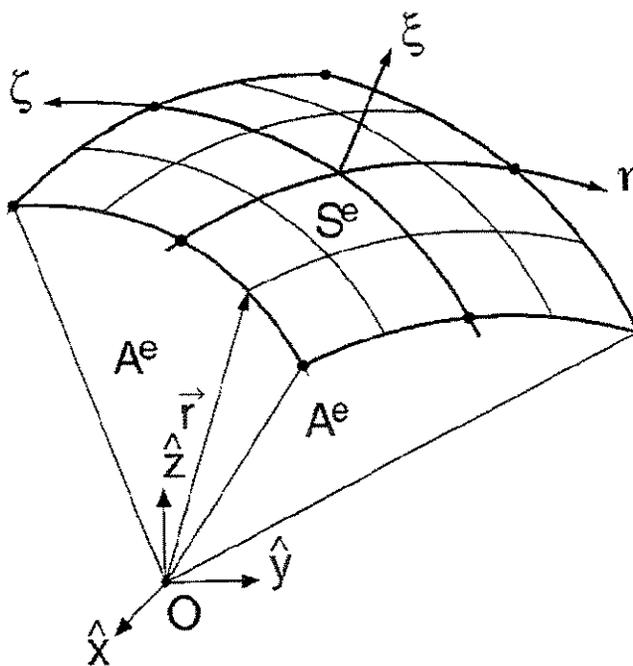


Figura 5-1. Transformação geométrica de escalonamento do contorno, formando uma pirâmide com volume V^e (Song & Wolf, 1997)

Um elemento finito no contorno, com área S^e e coordenadas η e ζ assumindo valores entre -1 e 1 , é apresentado na Figura 5-1. Conectando-se as faces deste elemento ao centro de escalonamento fica definida a pirâmide com vértice em O e base coincidente com a superfície do

elemento finito, a qual tem volume V^e e faces laterais A^e . Acoplando-se as pirâmides correspondentes a cada elemento finito que discretiza o contorno, o volume total V do domínio, bem como seu contorno total S , ficam definidos. Note que as faces laterais não necessitam ser discretizadas, pois estão dispostas radialmente em relação ao centro de escalonamento.

A transformação de escalonamento no contorno é única devido à escolha do centro de escalonamento O , que deve estar localizado em um ponto a partir do qual todo o contorno seja visível, o que sempre pode ser conseguido pela subdivisão do domínio. Para domínios finitos, o centro de escalonamento é localizado dentro do domínio com um fator de escalonamento entre 0 e 1 e, para domínios infinitos, este é localizado fora do domínio, com um fator de escalonamento entre 1 e ∞ . Este escalonamento radial é aplicado a cada elemento finito usado para discretizar o contorno, Figura 5-2, tendo a coordenada radial o sentido de O para um ponto qualquer no contorno.

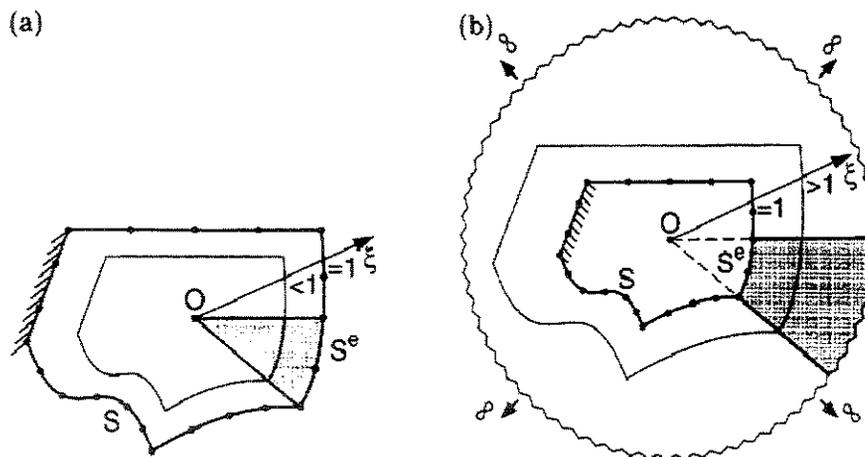


Figura 5-2. Centro de escalonamento fora do contorno. (a) Domínio finito (b) Domínio infinito (Song & Wolf, 1997)

Existe ainda a possibilidade do centro de escalonamento se localizar sobre o contorno. Neste caso, os trechos do contorno ou suas extensões dispostas radialmente em relação a este centro não precisam ser discretizadas e as condições de contorno nestes trechos serão definidas automaticamente. O contorno total fica assim dividido em duas partes: aquela do contorno ou de suas extensões passando pelo centro de escalonamento, denominado de face lateral A e a parte restante denominada de interface S , Figura 5-3.

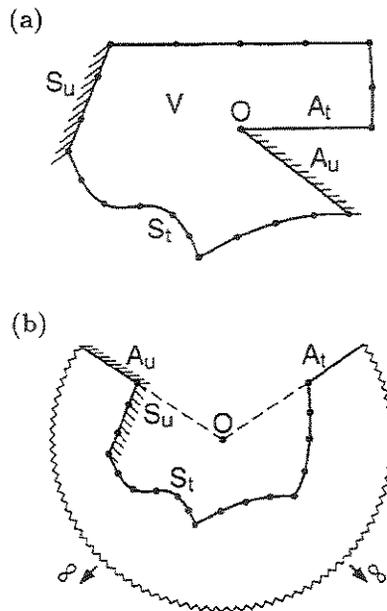


Figura 5-3. Centro de escalonamento no contorno. (a) Domínio finito (b) Domínio infinito (Song & Wolf, 1997)

Esta característica é importante, pois uma escolha adequada do centro de escalonamento sobre determinada região do contorno formada por faces planas pode reduzir significativamente a dimensão das matrizes resultantes da modelagem do problema. Além disso, em aplicações da mecânica da fratura, é possível colocar-se o centro de escalonamento na ponta da trinca. Como as faces da trinca estarão na direção radial em relação ao centro de escalonamento, estas não precisarão ser discretizadas, contrariamente ao que acontece em relação ao MEF e MEC, que requerem condições especiais de discretização na região da trinca para que as tensões sejam determinadas com precisão.

Definindo-se os pontos no contorno por suas coordenadas x, y, z , a geometria do problema é descrita nas coordenadas locais η e ζ pelas expressões

$$\begin{aligned} x(\eta, \zeta) &= \mathbf{N}(\eta, \zeta) \mathbf{x} \\ y(\eta, \zeta) &= \mathbf{N}(\eta, \zeta) \mathbf{y} \\ z(\eta, \zeta) &= \mathbf{N}(\eta, \zeta) \mathbf{z} \end{aligned} \quad (5-1)$$

onde $\mathbf{N}(\eta, \zeta)$ são as funções de mapeamento

$$\mathbf{N}(\eta, \zeta) = [N_1(\eta, \zeta) \quad N_2(\eta, \zeta) \quad \dots] \quad (5-2)$$

e $x(\eta, \zeta)$, $y(\eta, \zeta)$, $z(\eta, \zeta)$ são as coordenadas de um ponto no contorno expressas em função de η e ζ .

O domínio tridimensional é completamente definido escalonando-se o contorno com a coordenada adimensional ξ medida a partir do centro de escalonamento. Assim um ponto no domínio é obtido escalonando-se os pontos do contorno, tal que:

$$\hat{\mathbf{r}} = \xi \mathbf{r} \quad (5-3)$$

Expressando-se (5-3) em coordenadas, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}(\xi, \eta, \zeta) &= \xi x(\eta, \zeta) \\ \hat{y}(\xi, \eta, \zeta) &= \xi y(\eta, \zeta) \\ \hat{z}(\xi, \eta, \zeta) &= \xi z(\eta, \zeta) \end{aligned} \quad (5-4)$$

onde $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ corresponde a um ponto no domínio.

O jacobiano da transformação de $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ para (x, y, z) é dado por

$$\hat{\mathbf{J}}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{,\xi} & \hat{y}_{,\xi} & \hat{z}_{,\xi} \\ \hat{x}_{,\eta} & \hat{y}_{,\eta} & \hat{z}_{,\eta} \\ \hat{x}_{,\zeta} & \hat{y}_{,\zeta} & \hat{z}_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

De (5-4) em (5-5) obtém-se

$$\hat{\mathbf{J}}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \mathbf{J}(\eta, \zeta) \quad (5-6)$$

onde

$$\mathbf{J}(\eta, \zeta) = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

O operador diferencial no sistema cartesiano pode então ser escrito em função do operador diferencial no novo sistema de coordenadas como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{J}}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (5-8)$$

onde

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta} & z y_{,\zeta} - y z_{,\zeta} & y z_{,\eta} - z y_{,\eta} \\ z_{,\eta} x_{,\zeta} - x_{,\eta} z_{,\zeta} & x z_{,\zeta} - z x_{,\zeta} & z x_{,\eta} - x z_{,\eta} \\ x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta} & y x_{,\zeta} - x y_{,\zeta} & x y_{,\eta} - y x_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

e

$$\mathbf{J} = x(y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta}) + y(z_{,\eta} x_{,\zeta} - x_{,\eta} z_{,\zeta}) + y(x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta}) \quad (5-10)$$

Os coeficientes em (5-9) satisfazem as identidades

$$\begin{aligned} (z y_{,\zeta} - y z_{,\zeta})_{,\eta} + (y z_{,\eta} - z y_{,\eta})_{,\zeta} &= -2(y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta}) \\ (x z_{,\zeta} - z x_{,\zeta})_{,\eta} + (z x_{,\eta} - x z_{,\eta})_{,\zeta} &= -2(z_{,\eta} x_{,\zeta} - x_{,\eta} z_{,\zeta}) \\ (y x_{,\zeta} - x y_{,\zeta})_{,\eta} + (x y_{,\eta} - y x_{,\eta})_{,\zeta} &= -2(x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta}) \end{aligned} \quad (5-11)$$

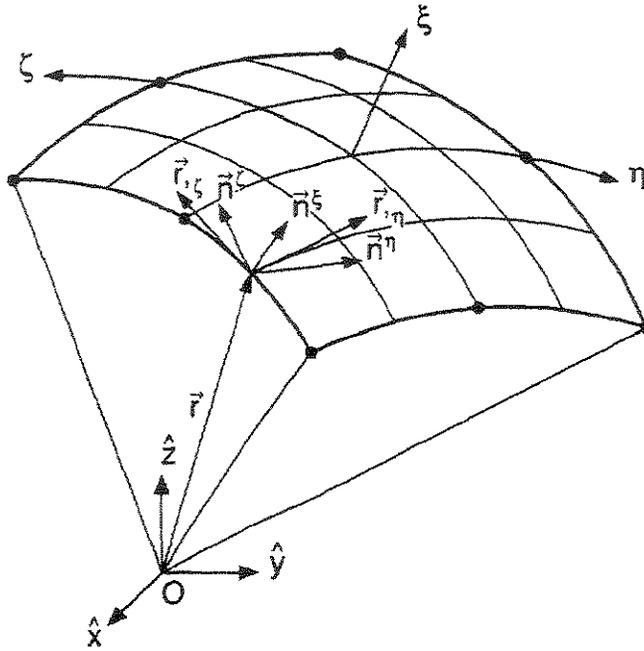


Figura 5-4. Vetores unitários normais às faces de um elemento (Song & Wolf, 1997).

Também é de interesse obter-se as expressões anteriores através de uma formulação geométrica, onde serão utilizados os vetores normais às superfícies do elemento, os quais são apresentados na Figura 5-4 para um elemento finito tridimensional.

As derivadas do vetor posição \mathbf{r} de um ponto no contorno em relação a η e ζ constituem dois vetores tangenciais a estas direções

$$\mathbf{r}_{,\eta} = x_{,\eta} \mathbf{i} + y_{,\eta} \mathbf{j} + z_{,\eta} \mathbf{k} \quad (5-12)$$

$$\mathbf{r}_{,\zeta} = x_{,\zeta} \mathbf{i} + y_{,\zeta} \mathbf{j} + z_{,\zeta} \mathbf{k}$$

onde η e ζ são tomados constantes. Os vetores \mathbf{r} , $\mathbf{r}_{,\eta}$ e $\mathbf{r}_{,\zeta}$ formam uma base para o novo sistema de coordenadas do elemento finito, no qual pode-se definir

$$|\mathbf{J}| = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}_{,\eta} \times \mathbf{r}_{,\zeta}) \quad (5-13)$$

$$dV = \hat{\mathbf{r}}_{,\xi} \cdot (\hat{\mathbf{r}}_{,\eta} \times \hat{\mathbf{r}}_{,\zeta}) d\xi d\eta d\zeta \quad (5-14)$$

Aplicando-se (5-3) e (5-13) em (5-14) obtém-se uma expressão alternativa para dV como

$$dV = \xi^2 \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (5-15)$$

De forma semelhante pode-se definir os vetores normais as faces do elemento e no contorno ($\xi=1$), eles são expressos como

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^\xi &= \mathbf{r}_{,\eta} \times \mathbf{r}_{,\zeta} = (y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta}) \mathbf{i} + (z_{,\eta} x_{,\zeta} - x_{,\eta} z_{,\zeta}) \mathbf{j} + (x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta}) \mathbf{k} \\ \mathbf{g}^\eta &= \mathbf{r}_{,\zeta} \times \mathbf{r} = (z y_{,\zeta} - y z_{,\zeta}) \mathbf{i} + (x z_{,\zeta} - z x_{,\zeta}) \mathbf{j} + (y x_{,\zeta} - x y_{,\zeta}) \mathbf{k} \\ \mathbf{g}^\zeta &= \mathbf{r} \times \mathbf{r}_{,\eta} = (y z_{,\eta} - z y_{,\eta}) \mathbf{i} + (z x_{,\eta} - x z_{,\eta}) \mathbf{j} + (x y_{,\eta} - y x_{,\eta}) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5-16)$$

A partir (5-16) definem-se os vetores unitários normais às três superfícies como

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^\xi &= n_x^\xi \mathbf{i} + n_y^\xi \mathbf{j} + n_z^\xi \mathbf{k} = \frac{\mathbf{g}^\xi}{g^\xi} \\ \mathbf{n}^\eta &= n_x^\eta \mathbf{i} + n_y^\eta \mathbf{j} + n_z^\eta \mathbf{k} = \frac{\mathbf{g}^\eta}{g^\eta} \\ \mathbf{n}^\zeta &= n_x^\zeta \mathbf{i} + n_y^\zeta \mathbf{j} + n_z^\zeta \mathbf{k} = \frac{\mathbf{g}^\zeta}{g^\zeta} \end{aligned} \quad (5-17)$$

A transformação de superfícies infinitesimais do sistema cartesiano para o sistema escalonado e para qualquer ξ é definido, usando-se (5-3) e (5-16), como

$$\begin{aligned} dS^\xi &= \hat{\mathbf{r}}_{,\eta} \times \hat{\mathbf{r}}_{,\zeta} d\eta d\zeta = \xi \mathbf{r}_{,\eta} \times \xi \mathbf{r}_{,\zeta} d\eta d\zeta = \xi^2 \mathbf{g}^\xi d\eta d\zeta \\ dS^\eta &= \hat{\mathbf{r}}_{,\zeta} \times \hat{\mathbf{r}}_{,\xi} d\zeta d\xi = \xi \mathbf{r}_{,\zeta} \times \mathbf{r} d\zeta d\xi = \xi \mathbf{g}^\eta d\zeta d\xi \\ dS^\zeta &= \hat{\mathbf{r}}_{,\xi} \times \hat{\mathbf{r}}_{,\eta} d\xi d\eta = \mathbf{r} \times \xi \mathbf{r}_{,\eta} d\xi d\eta = \xi \mathbf{g}^\zeta d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5-18)$$

A matriz jacobiana \mathbf{J} é formulada em função dos vetores normais às superfícies do elemento finito como

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^\xi n_x^\xi & \mathbf{g}^\eta n_x^\eta & \mathbf{g}^\zeta n_x^\zeta \\ \mathbf{g}^\xi n_y^\xi & \mathbf{g}^\eta n_y^\eta & \mathbf{g}^\zeta n_y^\zeta \\ \mathbf{g}^\xi n_z^\xi & \mathbf{g}^\eta n_z^\eta & \mathbf{g}^\zeta n_z^\zeta \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

Aplicando-se (5-19) em (5-8) obtém-se o operador diferencial em relação a $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ expresso em função de (ξ, η, ζ)

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \end{Bmatrix} = \frac{|\mathbf{g}^\xi|}{|\mathbf{J}|} \mathbf{n}^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \left(\frac{|\mathbf{g}^\eta|}{|\mathbf{J}|} \mathbf{n}^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{|\mathbf{g}^\zeta|}{|\mathbf{J}|} \mathbf{n}^\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \quad (5-20)$$

É conveniente definir-se as matrizes \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 e \mathbf{b}_3 (que embora sendo matrizes serão aqui denotadas com letras minúsculas em negrito para não diferir da literatura já existente, contrariando neste caso a nomenclatura estabelecida neste trabalho) como:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{g}^\xi}{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} n_x^\xi & 0 & 0 \\ 0 & n_y^\xi & 0 \\ 0 & 0 & n_z^\xi \\ 0 & n_z^\xi & n_y^\xi \\ n_x^\xi & 0 & n_x^\xi \\ n_y^\xi & n_x^\xi & 0 \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{g}^\eta}{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} n_x^\eta & 0 & 0 \\ 0 & n_y^\eta & 0 \\ 0 & 0 & n_z^\eta \\ 0 & n_z^\eta & n_y^\eta \\ n_x^\eta & 0 & n_x^\eta \\ n_y^\eta & n_x^\eta & 0 \end{bmatrix} \quad (5-22)$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} n_x^\zeta & 0 & 0 \\ 0 & n_y^\zeta & 0 \\ 0 & 0 & n_z^\zeta \\ 0 & n_z^\zeta & n_y^\zeta \\ n_x^\zeta & 0 & n_x^\zeta \\ n_y^\zeta & n_x^\zeta & 0 \end{bmatrix} \quad (5-23)$$

onde

$$\mathbf{n}^\xi = \begin{Bmatrix} n_x^\xi \\ n_y^\xi \\ n_z^\xi \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{n}^\eta = \begin{Bmatrix} n_x^\eta \\ n_y^\eta \\ n_z^\eta \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{n}^\zeta = \begin{Bmatrix} n_x^\zeta \\ n_y^\zeta \\ n_z^\zeta \end{Bmatrix} \quad (5-24)$$

Utilizando-se (5-23), (5-22), (5-21), (5-17), (5-16) e (5-11) conclui-se que

$$\left(|\mathbf{J}| \mathbf{b}_2 \right)_{,\eta} + \left(|\mathbf{J}| \mathbf{b}_3 \right)_{,\zeta} = -2 |\mathbf{J}| \mathbf{b}_1 \quad (5-25)$$

Alternativamente \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 e \mathbf{b}_3 podem ser expressos em função de x , y , z e suas diferenciais, resultando em

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta} \\ 0 & x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta} & z_{,\eta} x_{,\zeta} - x_{,\eta} z_{,\zeta} \\ x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta} & 0 & y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta} \\ z_{,\eta} x_{,\zeta} - x_{,\eta} z_{,\zeta} & y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-26)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} zy_{,\zeta} - yz_{,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & xz_{,\zeta} - zx_{,\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & yx_{,\zeta} - xy_{,\zeta} \\ 0 & yx_{,\zeta} - xy_{,\zeta} & xz_{,\zeta} - zx_{,\zeta} \\ yx_{,\zeta} - xy_{,\zeta} & 0 & zy_{,\zeta} - yz_{,\zeta} \\ xz_{,\zeta} - zx_{,\zeta} & zy_{,\zeta} - yz_{,\zeta} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-27)$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} yz_{,n} - zy_{,n} & 0 & 0 \\ 0 & zx_{,n} - xz_{,n} & 0 \\ 0 & 0 & xy_{,n} - yx_{,n} \\ 0 & xy_{,n} - yx_{,n} & zx_{,n} - xz_{,n} \\ xy_{,n} - yx_{,n} & 0 & yz_{,n} - zy_{,n} \\ zx_{,n} - xz_{,n} & yz_{,n} - zy_{,n} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-28)$$

As amplitudes das forças de superfície \mathbf{t} em qualquer contorno com um vetor unitário normal \mathbf{n} são dadas por

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & 0 & n_z & n_y \\ 0 & n_y & 0 & n_z & 0 & n_x \\ 0 & 0 & n_z & n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \quad (5-29)$$

Comparando-se (5-29) com (5-21), (5-22) e (5-23), as amplitudes das forças de superfície sobre (η, ζ) , (ζ, ξ) e (ξ, η) , onde ξ , η e ζ são respectivamente constantes, podem ser escritas como

$$\mathbf{t}^\xi = \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{g}^\xi} \mathbf{b}_1^T \boldsymbol{\sigma} \quad (5-30)$$

$$\mathbf{t}^\eta = \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{g}^\eta} \mathbf{b}_2^T \boldsymbol{\sigma} \quad (5-31)$$

$$\mathbf{t}^{\xi} = \frac{\mathbf{J}}{g_{\xi\xi}} \mathbf{b}_3^T \boldsymbol{\sigma} \quad (5-32)$$

5.3. Equações da elastodinâmica para o MEF escalonado no contorno

A formulação de elementos finitos escalonado no contorno foi apresentada por Wolf e Song (1997) e o mesmo desenvolvimento utilizado por eles será adotado neste trabalho.

As equações diferenciais de movimento no domínio da frequência podem ser expressas por

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} + \omega^2 \rho \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (5-33)$$

onde

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \{u_x \ u_y \ u_z\}^T \quad (5-34)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{xz} \ \tau_{xy}\}^T \quad (5-35)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \hat{y}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \hat{z}} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \hat{z}} & 0 & \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial}{\partial \hat{x}} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-36)$$

\mathbf{p} são as forças atuantes na estrutura, ω as frequências e ρ a densidade do material.

O operador diferencial \mathbf{L} pode ser escrito no novo sistema de coordenadas substituindo-se a equação (5-9) em (5-8) e utilizando-se o resultado em (5-36), obtendo-se então

$$\mathbf{L} = \mathbf{b}_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \left(\mathbf{b}_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + \mathbf{b}_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \quad (5-37)$$

Reescrevendo-se (5-33) com o operador diferencial determinado em (5-37), multiplicando-se esta expressão pela transposta da função ponderadora $w(\xi, \eta, \zeta)$ e integrando-se sobre o volume de um elemento, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{w}^T \mathbf{b}_1^T \boldsymbol{\sigma}_{,\xi} dV + \int_V \mathbf{w}^T \frac{1}{\xi} \left(\mathbf{b}_2^T \boldsymbol{\sigma}_{,\eta} + \mathbf{b}_3^T \boldsymbol{\sigma}_{,\zeta} \right) dV + \int_V \mathbf{w}^T \mathbf{p} dV \\ + \omega^2 \int_V \mathbf{w}^T \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5-38)$$

O segundo termo de (5-38) denotado como \mathbf{I} é examinado. Substituindo-se (5-15) tem-se

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \xi \left(\int_{S^\xi} \mathbf{w}^T |\mathbf{J}| \left(\mathbf{b}_2^T \boldsymbol{\sigma}_{,\eta} + \mathbf{b}_3^T \boldsymbol{\sigma}_{,\zeta} \right) d\eta d\zeta \right) d\xi \quad (5-39)$$

onde S^ξ denota uma superfície com ξ constante. A aplicação do teorema de Green à esta integral de superfície, resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{I} = \int_0^1 \xi \left(\oint_{\Gamma^\xi} \left(\mathbf{w}^T \left(|\mathbf{J}| \mathbf{b}_3^T \boldsymbol{\sigma} d\eta + |\mathbf{J}| \mathbf{b}_2^T \boldsymbol{\sigma} d\zeta \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{S^\xi} \left(\left(-2\mathbf{w}^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_2^T \right)_{,\eta} + \left(\mathbf{w}^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_3^T \right)_{,\zeta} \right) \boldsymbol{\sigma} d\eta d\zeta \right) d\xi \end{aligned} \quad (5-40)$$

com o contorno Γ^ξ (resultante do escalonamento do contorno do elemento finito bidimensional) de S^ξ . Substituindo-se (5-31) e (5-32) em (5-40) e usando-se (5-25) obtém-se

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \xi \left(\oint_{\Gamma^\xi} \mathbf{w}^T \left(\mathbf{t}^\xi \mathbf{g}^\xi d\eta + \mathbf{t}^\eta \mathbf{g}^\eta d\zeta \right) - \int_{S^\xi} \left(-2\mathbf{w}^T \mathbf{b}_1^T + \mathbf{w}_\eta^T \mathbf{b}_2^T + \mathbf{w}_{,\xi}^T \mathbf{b}_3^T \right) \boldsymbol{\sigma} |\mathbf{J}| d\eta d\zeta \right) d\xi \quad (5-41)$$

Substituindo-se (5-15) no primeiro, terceiro e quarto termos de (5-38) e introduzindo-se (5-41), resulta em

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\xi^2 \int_{S^\xi} \mathbf{w}^T \mathbf{b}_1^T \boldsymbol{\sigma}_{,\xi} |\mathbf{J}| d\eta d\zeta + \xi \oint_{\Gamma^\xi} \mathbf{w}^T \left(\mathbf{t}^\xi \mathbf{g}^\xi d\eta + \mathbf{t}^\eta \mathbf{g}^\eta d\zeta \right) \right. \\ \left. - \xi \int_{S^\xi} \left(-2\mathbf{w}^T \mathbf{b}_1^T + \mathbf{w}_\eta^T \mathbf{b}_2^T + \mathbf{w}_{,\xi}^T \mathbf{b}_3^T \right) \boldsymbol{\sigma} |\mathbf{J}| d\eta d\zeta \right. \\ \left. + \xi^2 \int_{S^\xi} \mathbf{w}^T \mathbf{p} |\mathbf{J}| d\eta d\zeta + \omega^2 \xi^2 \int_{S^\xi} \mathbf{w}^T \rho \mathbf{u} |\mathbf{J}| d\eta d\zeta \right) d\xi = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5-42)$$

A equação (5-42) será satisfeita se adotar-se o integrando da integral em ξ igual a zero, resultando em

$$\begin{aligned} & \xi^2 \int_{S^\xi} \mathbf{w}^T \mathbf{b}_1^T \boldsymbol{\sigma}_{,\xi} |\mathbf{J}| d\eta d\zeta + \xi \oint_{\Gamma^\xi} \mathbf{w}^T (\mathbf{t}^\xi \mathbf{g}^\xi d\eta + \mathbf{t}^\eta \mathbf{g}^\eta d\zeta) \\ & - \xi \int_{S^\xi} (-2\mathbf{w}^T \mathbf{b}_1^T + \mathbf{w}_{,\eta}^T \mathbf{b}_2^T + \mathbf{w}_{,\xi}^T \mathbf{b}_3^T) \boldsymbol{\sigma} |\mathbf{J}| d\eta d\zeta \\ & + \xi^2 \int_{S^\xi} \mathbf{w}^T \mathbf{p} |\mathbf{J}| d\eta d\zeta + \omega^2 \xi^2 \int_{S^\xi} \mathbf{w}^T \rho \mathbf{u} |\mathbf{J}| d\eta d\zeta = 0 \end{aligned} \quad (5-43)$$

a qual não possui nenhuma integral de volume.

Os deslocamentos do elemento finito no contorno ($\xi=1$) são interpolados usando-se funções de forma $\mathbf{N}^u(\eta, \zeta)$. Será assumido que a mesma função de forma é aplicada a todas as superfícies S^ξ definidas por um valor de ξ constante. Assim

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{N}^u(\eta, \zeta) \mathbf{u}(\xi) \quad (5-44)$$

Levando-se em conta, através da resistência dos materiais, que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5-45)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva do material e

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy} \right\} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (5-46)$$

Obtém-se, substituindo-se as equações (5-46), (5-44) e (5-37) em (5-45), a expressão para as tensões como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \left(\mathbf{B}_1 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(\xi) \right) \quad (5-47)$$

onde

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{b}_1 \mathbf{N}^u(\eta, \zeta) \quad (5-48)$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{b}_2 \mathbf{N}^u(\eta, \zeta)_{,\eta} + \mathbf{b}_3 \mathbf{N}^u(\eta, \zeta)_{,\zeta} \quad (5-49)$$

A mesma discretização do deslocamento também se aplica à função ponderadora $\mathbf{w}=\mathbf{w}(\xi, \eta, \zeta)$

$$\mathbf{w}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{N}^u(\eta, \zeta) \mathbf{w}(\xi) \quad (5-50)$$

Substituindo-se (5-50) em (5-43) obtém-se

$$\begin{aligned} \xi^2 \int_{S^\xi} \mathbf{B}_1^T \boldsymbol{\sigma}_{,\xi} |\mathbf{J}| d\eta d\zeta - \xi \int_{S^\xi} (-2\mathbf{B}_1^T + \mathbf{B}_2^T) \boldsymbol{\sigma} |\mathbf{J}| d\eta d\zeta \\ + \omega^2 \xi^2 \int_{S^\xi} \mathbf{N}^u(\eta, \zeta)^T \rho \mathbf{u} |\mathbf{J}| d\eta d\zeta + \xi \mathbf{t} + \xi^2 \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5-51)$$

com

$$\mathbf{t} = \oint_{\Gamma^\xi} \mathbf{N}^u(\eta, \zeta)^T (\mathbf{t}^\xi \mathbf{g}^\xi d\eta + \mathbf{t}^\eta \mathbf{g}^\eta d\zeta) \quad (5-52)$$

$$\bar{\mathbf{p}} = \int_{S^\xi} \mathbf{N}^u(\eta, \zeta)^T \mathbf{p} |\mathbf{J}| d\eta d\zeta \quad (5-53)$$

sendo que \mathbf{t} corresponde às amplitudes das forças normais resultantes das forças de superfície atuantes nas superfícies que passam através do centro de escalonamento e $\bar{\mathbf{p}}$ corresponde às forças de volume. Substituindo-se as tensões dadas pela equação (5-47) em (5-51), obtém-se a equação diferencial em termos do deslocamento \mathbf{u} expressa como

$$\begin{aligned} \xi^2 \int_{S^\xi} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \left(\mathbf{B}_1 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} - \frac{1}{\xi^2} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(\xi) \right) |\mathbf{J}| d\eta d\zeta \\ - \xi \int_{S^\xi} (-2\mathbf{B}_1^T + \mathbf{B}_2^T) \mathbf{D} \left(\mathbf{B}_1 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(\xi) \right) |\mathbf{J}| d\eta d\zeta \\ + \omega^2 \xi^2 \int_{S^\xi} \mathbf{N}(\eta, \zeta)^T \rho \mathbf{N}^u(\eta, \zeta) \mathbf{u} |\mathbf{J}| d\eta d\zeta + \xi \mathbf{t} + \xi^2 \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5-54)$$

Adotando-se os coeficientes

$$\mathbf{E}_0 = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 |\mathbf{J}| d\eta d\zeta \quad (5-55)$$

$$\mathbf{E}_1 = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 |\mathbf{J}| d\eta d\zeta \quad (5-56)$$

$$\mathbf{E}_2 = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 \mathbf{J} d\eta d\zeta \quad (5-57)$$

$$\mathbf{M}_0 = \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}(\eta, \zeta)^T \rho \mathbf{N}^u(\eta, \zeta) |\mathbf{J}| d\eta d\zeta \quad (5-58)$$

pode-se reescrever a equação (5-54) para todo o domínio, no caso de vibrações livres e ausência de forças de volume, como:

$$\mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi\xi} + (2\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^T) \xi \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + (\mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2) \mathbf{u}(\xi) + \omega^2 \mathbf{M}_0 \xi^2 \mathbf{u}(\xi) = \mathbf{0} \quad (5-59)$$

A equação (5-59) é a equação diferencial para o deslocamento do método dos elementos finitos escalonado no contorno, formulada no domínio da frequência. Ela é um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem para o deslocamento \mathbf{u} tendo a coordenada radial adimensional ξ como variável independente. Deve-se destacar que os coeficientes \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 e \mathbf{M}_0 são independentes de ξ .

5.4. Matriz de rigidez dinâmica no contorno

A matriz de rigidez dinâmica $\mathbf{S}(\omega)$ para um domínio finito, correspondente a todos os graus de liberdade no contorno, pode ser obtida a partir da formulação do trabalho virtual. Para qualquer superfície S^ξ o trabalho virtual é expresso como

$$\mathbf{w}(\xi)^T \mathbf{R}(\xi) = \int_{S^\xi} \mathbf{w}^T \mathbf{t}^\xi dS^\xi \quad (5-60)$$

onde $\mathbf{R}(\xi)$ representa as forças nodais e \mathbf{t}^ξ as forças de superfície na superfície S^ξ .

Substituindo-se a expressão de \mathbf{w} , equação (5-50), e da superfície infinitesimal dS^ξ , equação (5-18), na equação (5-60) e para um $\mathbf{w}(\xi)$ arbitrário, tem-se

$$\mathbf{R}(\xi) = \int_{S^\xi} \mathbf{N}^u(\eta, \zeta)^T \mathbf{t}^\xi \xi^2 g^\xi d\eta d\zeta \quad (5-61)$$

Introduzindo-se a expressão de \mathbf{t}^ξ , equação (5-30), tem-se

$$\mathbf{R}(\xi) = \int_{S^s} \mathbf{N}^u(\eta, \xi)^T \mathbf{b}_1^T \boldsymbol{\sigma} \xi^2 |\mathbf{J}| d\eta d\xi \quad (5-62)$$

Aplicando-se as equações (5-47) e (5-48) em (5-62) tem-se

$$\mathbf{R}(\xi) = \int_{S^s} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \left(\mathbf{B}_1 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(\xi) \right) \xi^2 |\mathbf{J}| d\eta d\xi \quad (5-63)$$

Introduzindo-se os coeficientes \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}_1 , equações (5-55) e (5-56), obtém-se

$$\mathbf{R}(\xi) = \mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_1^T \xi \mathbf{u}(\xi) \quad (5-64)$$

A matriz de rigidez dinâmica em uma superfície com ξ constante é dada por

$$\mathbf{R}(\xi) = \mathbf{S}(\omega, \xi) \mathbf{u}(\xi) \quad (5-65)$$

Igualando-se as equações (5-64) e (5-65), tem-se

$$\mathbf{S}(\omega, \xi) \mathbf{u}(\xi) = \mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_1^T \xi \mathbf{u}(\xi) \quad (5-66)$$

A diferenciação de (5-66) leva a

$$\mathbf{S}(\omega, \xi)_{,\xi} \mathbf{u}(\xi) + \mathbf{S}(\omega, \xi) \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} - \mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi\xi} - (2\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1)^T \xi \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} - \mathbf{E}_1^T \mathbf{u}(\xi) = 0 \quad (5-67)$$

Somando-se (5-67) e (5-59) obtém-se

$$\mathbf{S}(\omega, \xi)_{,\xi} \mathbf{u}(\xi) + (\mathbf{S}(\omega, \xi) - \xi \mathbf{E}_1) \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} - \mathbf{E}_2 \mathbf{u}(\xi) + \omega^2 \mathbf{M}_0 \xi^2 \mathbf{u}(\xi) = 0 \quad (5-68)$$

Determinando-se $\mathbf{u}(\xi)_{,\xi}$ a partir da equação (5-66) e introduzindo-se essa expressão em (5-68), tem-se, para um valor arbitrário de $\mathbf{u}(\xi)$

$$(\mathbf{S}(\omega, \xi) - \xi \mathbf{E}_1) (\xi \mathbf{E}_0)^{-1} (\mathbf{S}(\omega, \xi) - \xi \mathbf{E}_1^T) - \xi \mathbf{E}_2 + \xi \mathbf{S}(\omega, \xi)_{,\xi} + \omega^2 \xi^3 \mathbf{M}_0 = 0 \quad (5-69)$$

Empregando-se o módulo de elasticidade transversal G , a densidade ρ e r_0 , o comprimento característico em relação ao contorno, pode-se definir valores adimensionais para $\mathbf{S}(\omega, \xi)$, \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}_1 ,

\mathbf{E}_2 e \mathbf{M}_0 como

$$\mathbf{S}(\omega, \xi) = Gr_0 \xi \bar{\mathbf{S}}(\omega, \xi) \quad (5-70)$$

$$\mathbf{E}_0 = Gr_0 \mathbf{E}_0 \quad (5-71)$$

$$\mathbf{E}_1 = Gr_0 \mathbf{E}_1 \quad (5-72)$$

$$\mathbf{E}_2 = Gr_0 \mathbf{E}_2 \quad (5-73)$$

$$\mathbf{M}_0 = \rho r_0^3 \bar{\mathbf{M}}_0 \quad (5-74)$$

os quais introduzidos em (5-69) resultam em

$$\left(\bar{\mathbf{S}}(\omega, \xi) - \bar{\mathbf{E}}_1 \right) \left(\bar{\mathbf{E}}_0 \right)^{-1} \left(\bar{\mathbf{S}}(\omega, \xi) - \bar{\mathbf{E}}_1^T \right) - \bar{\mathbf{E}}_2 + \bar{\mathbf{S}}(\omega, \xi) + \xi \bar{\mathbf{S}}(\omega, \xi)_{,\xi} + \left(\frac{\omega r_0}{c_s} \xi \right)^2 \bar{\mathbf{M}}_0 = \mathbf{0} \quad (5-75)$$

onde $c_s = (G/\rho)^{1/2}$ é a velocidade de onda.

O coeficiente do último termo de (5-75) define a frequência adimensional a_0 para qualquer ξ como

$$a_0(\omega, \xi) = \frac{\omega r_0}{c_s} \xi \quad (5-76)$$

e o penúltimo termo da mesma expressão pode ser escrito como

$$\xi \bar{\mathbf{S}}(\omega, \xi)_{,\xi} = a_0 \bar{\mathbf{S}}(\omega, \xi)_{,a_0} \quad (5-77)$$

Substituindo-se as equações (5-76) e (5-77) em (5-75), obtém-se uma expressão cuja única variável independente é a_0 . Dessa forma a matriz de rigidez dinâmica adimensional é função somente de a_0 e portanto

$$\bar{\mathbf{S}}(\omega, \xi) = \bar{\mathbf{S}}(a_0) \quad (5-78)$$

O termo com as diferenciais em a_0 presente na equação (5-77) pode então ser interpretado tanto como variando-se ξ para um ω fixo, como variando-se ω para um ξ fixo.

$$a_0 \bar{\mathbf{S}}(a_0)_{,a_0} = \xi \bar{\mathbf{S}}(\omega, \xi)_{,\xi} = \omega \bar{\mathbf{S}}(\omega, \xi)_{,\omega} \quad (5-79)$$

Diferenciando-se (5-70) em relação a ξ e usando-se (5-78) e (5-79) resulta em

$$\xi \mathbf{S}(\omega, \xi)_{,\xi} = \mathbf{S}(\omega, \xi) + \omega \mathbf{S}(\omega, \xi)_{,\omega} \quad (5-80)$$

Introduzindo-se a expressão (5-80) em (5-69) obtém-se

$$(\mathbf{S}(\omega, \xi) - \xi \mathbf{E}_1) (\xi \mathbf{E}_0)^{-1} (\mathbf{S}(\omega, \xi) - \xi \mathbf{E}_1^T) - \xi \mathbf{E}_2 + \mathbf{S}(\omega, \xi) + \omega \mathbf{S}(\omega, \xi)_{,\omega} + \omega^2 \xi^3 \mathbf{M}_0 = \mathbf{0} \quad (5-81)$$

No contorno ($\xi=1$) de um domínio finito tridimensional, a matriz de rigidez dinâmica $\mathbf{S}(\omega)$ para o problema da elasticidade plana é então expressa como:

$$(\mathbf{S}(\omega) - \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_0^{-1} (\mathbf{S}(\omega) - \mathbf{E}_1^T) - \mathbf{E}_2 + \mathbf{S}(\omega) + \omega \mathbf{S}(\omega)_{,\omega} + \omega^2 \mathbf{M}_0 = \mathbf{0} \quad (5-82)$$

5.5. Matrizes de rigidez estática e de massa no contorno

A matriz de rigidez estática \mathbf{K} no contorno pode ser obtida diretamente da equação (5-82), adotando-se $\omega=0$, resultando na equação

$$\mathbf{K} \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{K} - \left(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} - \frac{\mathbf{I}}{2} \right) \mathbf{K} - \mathbf{K} \left(\mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T - \frac{\mathbf{I}}{2} \right) - \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T = \mathbf{0} \quad (5-83)$$

onde $\mathbf{K} = \mathbf{S}(0) =$ matriz de rigidez estática

A equação (5-83) é uma equação algébrica de Riccati, cuja solução pode ser obtida pela introdução da matriz hamiltoniana \mathbf{Z} definida como

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T & -\mathbf{E}_0^{-1} \\ -\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T & -\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (5-84)$$

Aplicando-se a transformação ortogonal real Φ em Z , obtém-se a forma real de Schur

$$Z \Phi = \Phi \Lambda = \Phi \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \quad (5-85)$$

Rearranjando-se Λ de tal modo que as partes reais dos autovalores de Λ_{11} sejam negativas e as de Λ_{22} sejam positivas e particionando-se Φ de acordo com Λ , tem-se

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \quad (5-86)$$

A matriz K no contorno, solução de (5-83), é dada por

$$K = \Phi_{21} \Phi_{11}^{-1} \quad (5-87)$$

Para se determinar a matriz de massa M no contorno, é conveniente assumir-se a matriz de rigidez dinâmica como

$$S(\omega) = K - \omega^2 M \quad (5-88)$$

Substituindo-se (5-88) em (5-82) e desprezando-se os termos com potências de ω de ordem superior a 2, obtém-se a expressão aproximada de M para baixas frequências como

$$\left((-K + E_1) E_0^{-1} - \frac{3}{2} I \right) M + M \left(E_0^{-1} (-K + E_1^T) - \frac{3}{2} I \right) + M_0 = 0 \quad (5-89)$$

A solução da equação (5-89) pode ser obtida através das técnicas usais de resolução de equações de Lyapunov. Alternativamente, pode-se obter a matriz M através dos resultados intermediários utilizados na obtenção da matriz K . Tomando-se a sub-matriz Λ_{11} da equação (5-85), utilizando-se as equações (5-84) e (5-86) e multiplicando-se à direita a expressão obtida por Φ_{11}^{-1} , tem-se

$$E_0^{-1} (-K + E_1^T) - \frac{3}{2} I = [\Phi_{11}] [\Lambda_{11}] [\Phi_{11}]^{-1} \quad (5-90)$$

Substituindo-se a equação (5-90) na equação (5-89) e multiplicando-se à esquerda por Φ_{11}^T e à direita por Φ_{11} resulta em

$$(\mathbf{I} + \Lambda_{11}^T) \mathbf{m} + \mathbf{m} (\mathbf{I} - \Lambda_{11}) = \Phi_{11}^T \mathbf{M}_0 \Phi_{11} \quad (5-91)$$

onde

$$\mathbf{m} = \Phi_{11}^T \mathbf{M} \Phi_{11} \quad (5-92)$$

Como Λ_{11} é triangular superior, a equação (5-91) pode ser facilmente resolvida para \mathbf{m} e a matriz de massa é obtida, após se re-arranjar a equação (5-92), como

$$\mathbf{M} = \Phi_{11}^{-T} \mathbf{m} \Phi_{11}^{-1} \quad (5-93)$$

Tanto para a matriz \mathbf{K} como para a matriz \mathbf{M} , a introdução das condições de contorno do problema é efetuada de forma idêntica à empregada no método dos elementos finitos usual, ou seja, retirando-se das matrizes as linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade bloqueados.

5.6. Obtenção de FRFs e dados modais no MEFEC

Utilizando-se as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} , as FRFs para uma excitação unitária podem ser obtidas através da expressão

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}} \quad (5-94)$$

As frequências naturais são determinadas, resolvendo-se para ω a expressão (5-95)

$$\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (5-95)$$

Substituindo-se os valores de ω em (5-96), obtêm-se os modos de vibração Φ

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi = \mathbf{0} \quad (5-96)$$

Como será demonstrado através da implementação numérica desenvolvida na próxima seção, a matriz de massa \mathbf{M} obtida através da equação (5-89) é válida somente para faixas de frequência extremamente baixas. Na medida em que a faixas de frequência aumentam, a precisão das frequências naturais decresce severamente, tornando esta solução inadequada para aplicações em análise estrutural. Esta perda de precisão ocorre porque nas aproximações feitas para se obter a matriz de massa do MEFEC não se levou em consideração que esta é na realidade dependente da frequência ω .

Para conseguir-se os parâmetros modais com maior precisão, sugere-se que estes sejam obtidos através das FRFs construídas a partir da matriz de rigidez dinâmica $\mathbf{S}(\omega)$, definida na equação (5-82). A solução da equação diferencial matricial em $\mathbf{S}(\omega)$ pode ser obtida por processos numéricos, tal como o método de Hunge-Kuta, e neste caso a equação mostrada a seguir deverá ser utilizada, ou através da solução analítica proposta por Song e Wolf, 1998. Neste trabalho usaremos a primeira proposição e assim, teremos

$$\frac{\partial \mathbf{S}(\omega)}{\partial \omega} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{E}_2 - (\mathbf{S}(\omega) - \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_0^{-1} (\mathbf{S}(\omega) - \mathbf{E}_1^T) - \omega^2 \mathbf{M}_0) \quad (5-97)$$

Determinada a matriz $\mathbf{S}(\omega)$, obtém-se as FRFs através da expressão

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{S}(\omega)^{-1} \quad (5-98)$$

e, a seguir, extraem-se destas os parâmetros modais empregando-se algum método de extração de parâmetros, tal como o apresentado por Mesquita Neto *et al.* (2000), o qual utiliza polinômios matriciais ortogonais para interpolar as FRFs.

5.7. Exemplo numérico

Para avaliar o desempenho do MEFEC e a possibilidade deste ser utilizado no ajuste de modelos, a formulação apresentada neste capítulo foi implementada em um código computacional para o ambiente MATLAB e utilizada na resolução de um problema de tensão plana.

Sendo assim, considere-se a vibração livre de uma placa engastada-livre sujeita a tensão

plana e deslocamentos somente em seu plano, Figura 5-5, como apresentado por Nardini e Brebbia (1983). Adotando-se $L/d=4$, $E/\rho = 10^4$ (módulo de Young E e densidade ρ) e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$, as freqüências naturais são determinadas através do MEFEC, utilizando-se inicialmente as equações (5-87), (5-89) e (5-95). Para diferentes discretizações do contorno, as freqüências naturais são obtidas e comparadas com as obtidas através do MEF usual, Tabela 5-1. Fica evidente que uma boa concordância entre os dois métodos é obtida somente para as primeiras freqüências.

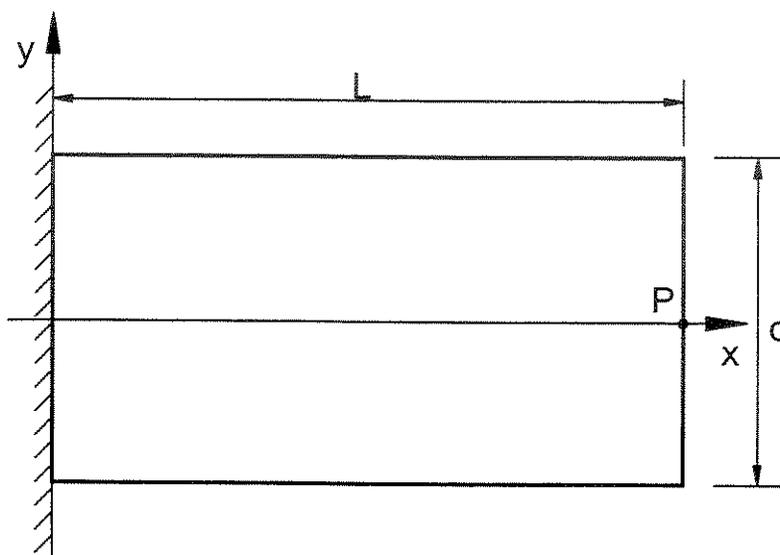


Figura 5-5. Estrutura sujeita a tensão plana

MEFEC				MEF	Erro (%) MEFEC 120 elem. e MEF
10 elem.	30 elem.	60 elem.	120 elem.	288 elem.	
0,1616	0,1614	0,1613	0,1613	0,1613	0,00
0,8421	0,8297	0,8293	0,8292	0,8268	0,29
1,0554	1,0550	1,0550	1,0549	1,0430	1,14
2,0079	1,9444	1,9424	1,9421	1,9100	1,68
3,4151	3,2374	3,2306	3,2298	3,0973	4,28
3,4542	3,4126	3,4123	3,4122	3,1222	9,29
5,2052	4,6829	4,6640	4,6621	4,3310	7,64
6,2916	5,9616	5,9351	5,9327	5,1685	14,79

Tabela 5-1. Freqüências naturais (Hz) de uma estrutura sujeita a tensões planas obtidas através do MEF e do MEFEC.

Melhores resultados são obtidos empregando-se as FRFs determinadas através da matriz de rigidez dinâmica e realizando-se a seguir uma análise modal teórica (Mesquita Neto *et al.*, 2000). As FRFs obtidas através do MEF e do MEFEC são apresentadas nas Figuras 5-6 e 5-7 e as frequências extraídas são comparadas na Tabela 5-2 com os valores do MEF apresentados na Tabela 5-1. Nesta caso, observa-se boa concordância entre os dois métodos. Deve-se salientar, no entanto, que a utilização de um método numérico para a obtenção da matriz de rigidez dinâmica é um processo muito demorado, tornando necessária a investigação do desempenho de métodos alternativos, tal como a solução analítica apresentada por Song e Wolf (1998).

MEFEC	Método dos Elementos Finitos			
	14 elem.(I)	36 elem. (II)	Dif. (I) - (II) (%)	288 elem. (III)
0.1615	0.1616	0.06	0.1613	0.12
0.8327	0.8322	-0.06	0.8268	0.71
1.0432	1.0433	0.01	1.0430	0.02
1.9355	1.9379	0.12	1.9100	1.34
3.1232	3.1251	0.06	3.0973	0.84
3.1627	3.1856	0.72	3.1222	1.30
4.4959	4.5454	1.09	4.3310	3.81
5.1741	5.1914	0.33	5.1685	0.11

Tabela 5-2. Frequências naturais (Hz) de uma estrutura sujeita a tensões planas obtidas através do MEF e do MEFEC.

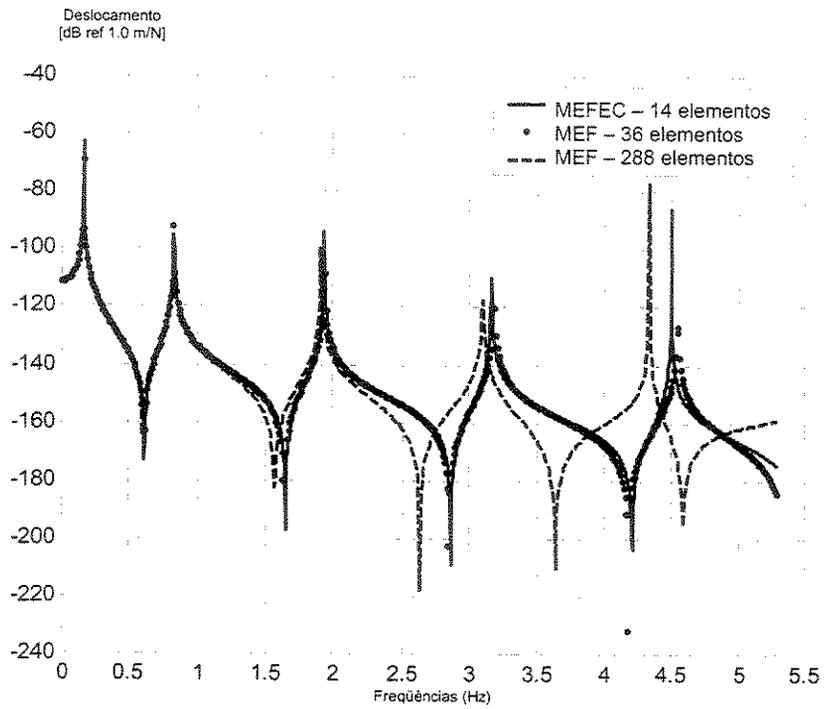


Figura 5-6. FRFs obtidas através do MEF e do ME FEC para o ponto P, força de excitação e deslocamento de resposta na direção y.

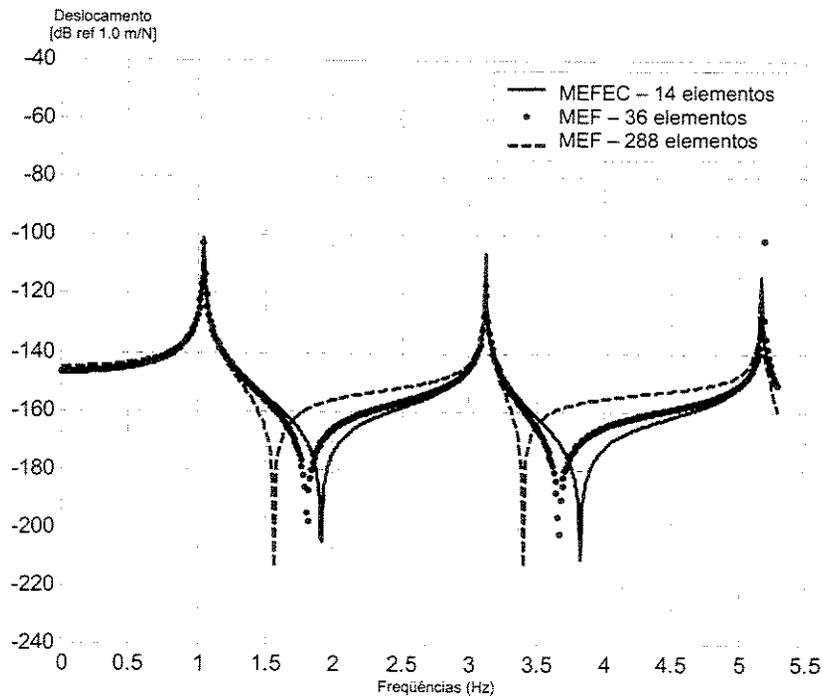


Figura 5-7. FRFs obtidas através do MEF e do ME FEC para o ponto P, força de excitação e deslocamento de resposta na direção x.

Capítulo 6

Proposta de um elemento de placa plana fina para o método dos elementos finitos escalonado no contorno

6.1. Introdução

No capítulo 5 desenvolveu-se o método dos elementos finitos escalonado no contorno para sua aplicação a problemas da elastodinâmica de tensão plana. Os bons resultados obtidos sugerem que seria interessante o desenvolvimento de sua formulação para casos em que suas características possam ser vantajosas em relação aos outros métodos. Particularmente importante é o estudo da aplicação deste método à análise de placas, a qual possui vasta literatura referente ao MEF e ao MEC, inclusive em relação à análise de estruturas reais. Desta forma poderá ser avaliada a performance do MEFEC em relação aos demais métodos de uso já consagrado, quando aplicado a situações reais de análise estrutural.

Dessa forma, neste capítulo é desenvolvida a formulação do método dos elementos finitos escalonado no contorno para a análise dinâmica de placas, tendo sido obtida a equação diferencial dos deslocamentos no domínio da frequência no sistema de coordenadas escalonadas.

6.2. Formulação de placas

O desenvolvimento da formulação de placas pode ser compreendido mais facilmente através de uma abordagem inicial em uma dimensão, estendida posteriormente para o caso bidimensional, como feito por Zienkiewicz & Taylor (1991). Seja então uma viga longa e de largura unitária, sujeita às resultantes de tensão M_x , P_x e S_x (Figura 6.1). Para esta viga serão adotadas as hipóteses:

- seções planas normais aos planos médios permanecem planas durante a deformação;
- tensões na direção z são pequenas, da mesma ordem de grandeza da carga transversal aplicada (q) e, portanto, as deformações nesta direção podem ser desprezadas.

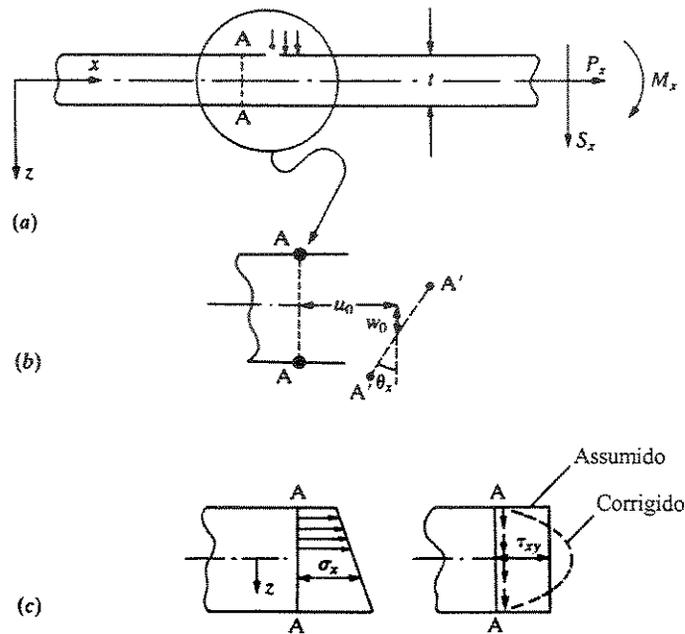


Figura 6-1. Deslocamentos e tensões resultantes para uma viga.

Desta forma, o estado de deformação total da viga pode ser descrito pelos deslocamentos u_0 e w_0 da superfície média ($z = 0$) e por uma rotação θ_x do plano normal a ela. Os deslocamentos locais nas direções x e z são então definidos como:

$$\begin{aligned} u &= -\theta_x z + u_0 \\ w &= w_0 \end{aligned} \tag{6-1}$$

com $u_0 = u_0(x)$, $w_0 = w_0(x)$ e $\theta_x = \theta_x(x)$.

As deformações em x e z são

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} z + \frac{\partial u_0}{\partial x} \\
\varepsilon_z &= 0 \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = -\theta_x + \frac{\partial W_0}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{6-2}$$

Com as relações constitutivas adequadas, as tensões σ_x e τ_{xz} podem ser avaliadas e as resultantes da tensão são obtidas como:

$$\begin{aligned}
M_x &= - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = - \frac{Et^3}{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\
P_x &= Et \frac{\partial u_0}{\partial x} \\
S_x &= \beta G t \left(-\theta_x + \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)
\end{aligned}
\tag{6-3}$$

onde E e G são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal respectivamente. O coeficiente β foi inserido para compensar o fato de que a tensão de cisalhamento não é constante ao longo da seção.

Três equações de equilíbrio completam a formulação:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_x}{\partial x} + S_x &= 0 \\
\frac{\partial S_x}{\partial x} + q &= 0 \\
\frac{\partial P_x}{\partial x} &= 0
\end{aligned}
\tag{6-4}$$

Para o caso de uma viga reta elástica, é fácil ver que os deslocamentos e forças no plano, u_0 e P_x , desacoplam e o problema das deformações laterais pode ser tratado separadamente. Neste caso será considerado apenas a flexão.

A equações (6-1) a (6-4) são típicas para vigas grossas. Na teoria de vigas finas é necessário adicionar-se mais uma hipótese às duas anteriores:

- será desprezada a deformação de cisalhamento, ou seja, $\gamma_{xz} = 0$ e também adota-se $G = \infty$.

Aplicando-se esta hipótese em (6.2), obtém-se

$$-\theta_x + \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (6-5)$$

Esta hipótese de viga fina é equivalente a estabelecer-se que as normais ao plano médio permanecem normais a ele durante a deformação e é conhecida como hipótese de Benoulli-Euler.

O problema unidimensional da viga e a introdução das hipóteses para os casos de viga grossa ou fina podem ser diretamente aplicados à formulação de placas. Na Figura 6-2 é ilustrada a extensão do problema para sua aplicação a placas.

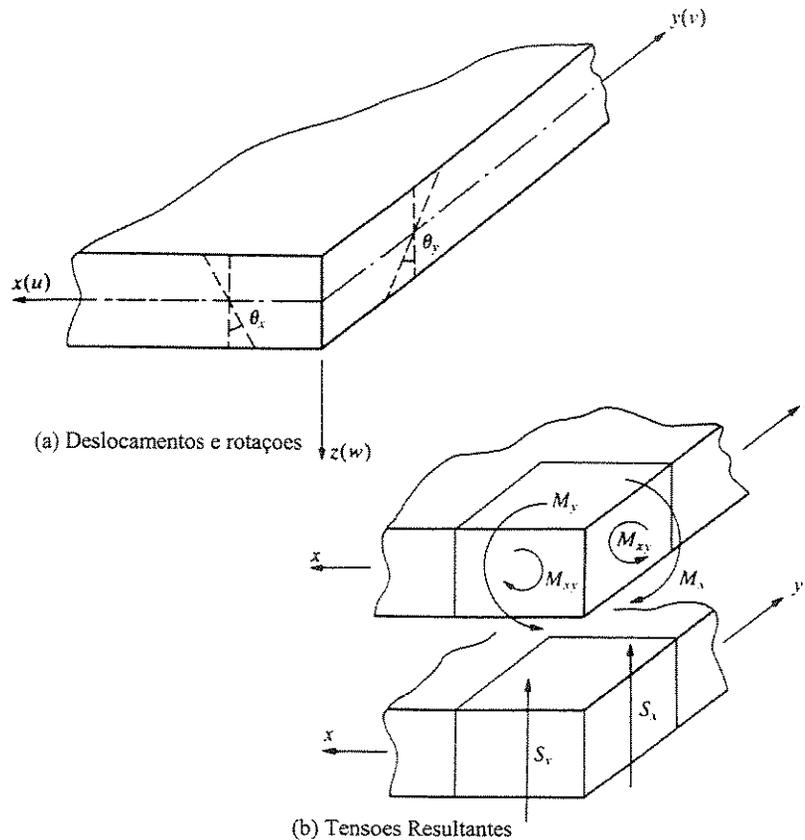


Figura 6-2. Definições das variáveis para a formulação de placas

Nesse caso a equação (6-1) deve ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
u &= -\theta_x z \\
v &= -\theta_y z \\
W &= W_0
\end{aligned}
\tag{6-6}$$

com θ_x , θ_y e W sendo funções de x e y apenas.

As deformações serão separadas em deformações no plano, devido à flexão e que atuam na direção do plano longitudinal, e deformações transversais de cisalhamento. Assim a equação (6-2) se torna

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = -z \mathbf{L} \boldsymbol{\theta}
\tag{6-7}$$

e

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \end{Bmatrix} = -\boldsymbol{\theta} + \nabla W
\tag{6-8}$$

Deve-se observar que além dos momentos de flexão em x e y , aparece também um momento de torção definido por

$$M_{xy} = - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz
\tag{6-9}$$

Introduzindo-se relações constitutivas apropriadas, todas as componentes do momento podem ser relacionadas com as derivadas do deslocamento. Para o caso de elasticidade isotrópica, a equação (6-3) será substituída por

$$\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{DL}\theta \quad (6-10)$$

onde , assumindo-se comportamento de tensão plana em cada camada, tem-se

$$\mathbf{D} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6-11)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

As forças de cisalhamento resultantes são

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} = \alpha(\theta + \nabla W) \quad (6-12)$$

onde para elasticidade isotrópica

$$\alpha = \alpha = \beta G t \quad (6-13)$$

Novamente, omitindo-se o comportamento “no plano” tem-se, em lugar da equação (6.4),

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} = \mathbf{L}^T \mathbf{m} + \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (6-14)$$

e

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} + q = \nabla^T \mathbf{s} + q = 0 \quad (6-15)$$

Para placas grossas, todas as variáveis independentes podem ser aproximadas

independentemente, levando a uma formulação mista. Para placas finas, onde as deformações de cisalhamento são suprimidas, a equação (6-12) é reescrita como

$$\theta + \nabla W = 0 \quad (6-16)$$

Pode-se agora eliminar \mathbf{m} , \mathbf{s} e θ e deixar apenas W como variável. Isto é feito aplicando-se o operador ∇^T à equação (6-14), inserindo-se (6-15) em (6-10) e finalmente substituindo-se θ , proveniente da equação (6-16), o que resulta em

$$(\mathbf{L}\nabla)^T \mathbf{D}\mathbf{L}\nabla W + q = 0 \quad (6-17)$$

onde

$$\mathbf{L}\nabla = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix} \quad (6-18)$$

Nos casos em que \mathbf{D} é constante, obtém-se a expressão bi-harmônica da placa à flexão como

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + q \frac{12(1-\nu)}{Et^3} = 0 \quad (6-19)$$

6.3. Transformação de escalonamento no contorno para o caso bidimensional

Definindo-se os pontos no contorno por suas coordenadas x, y , a geometria do problema bidimensional é descrita na coordenada local η pelas expressões

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\eta) &= \mathbf{N}(\eta) \mathbf{x} \\ \mathbf{y}(\eta) &= \mathbf{N}(\eta) \mathbf{y} \end{aligned} \quad (6-20)$$

onde $\mathbf{N}(\eta)$ são as funções de mapeamento

$$\mathbf{N}(\eta) = \{N_1(\eta) \quad N_2(\eta) \quad \dots\} \quad (6-21)$$

e $x(\eta)$, $y(\eta)$ são as coordenadas de um ponto no contorno expressas em função de η .

O domínio bidimensional é completamente definido escalonando-se o contorno com a coordenada adimensional ξ medida a partir do centro de escalonamento:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(\xi, \eta) &= \xi \mathbf{x}(\eta) \\ \hat{\mathbf{y}}(\xi, \eta) &= \xi \mathbf{y}(\eta) \end{aligned} \quad (6-22)$$

onde (\hat{x}, \hat{y}) corresponde a um ponto no domínio.

A matriz jacobiana da transformação de (\hat{x}, \hat{y}) para (ξ, η) é dado por

$$\hat{\mathbf{J}}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{,\xi} & \hat{y}_{,\xi} \\ \hat{x}_{,\eta} & \hat{y}_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (6-23)$$

De (6-22) em (6-23) obtém-se

$$\hat{\mathbf{J}}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \hat{J}_{11} & \hat{J}_{12} \\ \hat{J}_{21} & \hat{J}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ \xi x_{,\eta} & \xi y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{bmatrix} \mathbf{J}(\eta) \quad (6-24)$$

onde

$$\mathbf{J}(\eta) = \begin{bmatrix} x & y \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (6-25)$$

O operador diferencial no sistema cartesiano pode então ser escrito em função do operador diferencial no novo sistema de coordenadas, omitindo-se os índices para simplificar a notação, como

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{J}}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (6-26)$$

onde

$$\hat{\mathbf{J}}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -\frac{1}{\xi} y \\ -x_{,\eta} & \frac{1}{\xi} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \quad (6-27)$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y \\ -x_{,\eta} & x \end{bmatrix} \quad (6-28)$$

$$|\mathbf{J}| = x y_{,\eta} - y x_{,\eta} \quad (6-29)$$

Para aplicar o escalonamento do contorno ao problema de placas, é necessário determinar-se as expressões para o operador diferencial de segunda ordem em (x, y) em função do novo sistema de coordenadas. Este operador, construído a partir do apresentado por Dhatt *et al.* (1984), é:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} + \mathbf{T}_2 \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (6-30)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & j_{11} j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & j_{21} j_{22} \\ 2 j_{11} j_{21} & 2 j_{12} j_{22} & j_{11} j_{22} + j_{12} j_{21} \end{bmatrix} \quad (6-31)$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{J}_{11}}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{J}_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{J}_{21}}{\partial \eta} & \frac{\partial \hat{J}_{22}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{J}_{11}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{J}_{21}}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{J}_{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{J}_{22}}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (6-32)$$

$$\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_2 \mathbf{C}_1 \hat{\mathbf{J}}^{-1} \quad (6-33)$$

onde, para o caso do contorno escalonado, tem-se

$$\mathbf{T}_2 = \frac{1}{|\mathbf{J}|^2} \begin{bmatrix} y_{,\eta}^2 & \frac{1}{\xi^2} y^2 & -\frac{1}{\xi} y y_{,\eta} \\ x_{,\eta}^2 & \frac{1}{\xi^2} x^2 & -\frac{1}{\xi} x x_{,\eta} \xi \\ 2x_{,\eta} y_{,\eta} & \frac{2}{\xi^2} x y & \frac{1}{\xi} (x y_{,\eta} + x_{,\eta} y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_3 & \frac{1}{\xi^2} \mathbf{b}_4 & \frac{1}{\xi} \mathbf{b}_5 \end{bmatrix} \quad (6-34)$$

com

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \xi x_{,\eta\eta} & \xi y_{,\eta\eta} \\ 2x_{,\eta} & 2y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (6-35)$$

tem-se \mathbf{T}_1 dado por

$$\mathbf{T}_1 = \frac{1}{|\mathbf{J}|^3} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\xi} y^2 (x_{,\eta} y_{,\eta\eta} - y_{,\eta} x_{,\eta\eta}) & \frac{1}{\xi^2} (2y^2 x_{,\eta} y_{,\eta} - 2x y y_{,\eta}^2 - y^3 x_{,\eta\eta} + x y^2 y_{,\eta\eta}) \\ \frac{1}{\xi} x^2 (x_{,\eta} y_{,\eta\eta} - y_{,\eta} x_{,\eta\eta}) & \frac{1}{\xi^2} (2x y x_{,\eta}^2 - 2x^2 x_{,\eta} y_{,\eta} - x^3 y_{,\eta\eta} + x^2 y x_{,\eta\eta}) \\ \frac{2}{\xi} x y (x_{,\eta} y_{,\eta\eta} - y_{,\eta} x_{,\eta\eta}) & \frac{1}{\xi^2} (-2y^2 x_{,\eta}^2 + 2x^2 y_{,\eta}^2 + 2x y^2 x_{,\eta\eta} - 2x^2 y x_{,\eta\eta}) \end{bmatrix} \quad (6-36)$$

$$\mathbf{T}_1 = \left[\frac{1}{\xi} \mathbf{b}_1 \quad \frac{1}{\xi^2} \mathbf{b}_2 \right] \quad (6-37)$$

Aplicando-se (6-34) e (6-37) em (6-30), tem-se

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\xi} \mathbf{b}_1 & \frac{1}{\xi^2} \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_3 & \frac{1}{\xi^2} \mathbf{b}_4 & \frac{1}{\xi} \mathbf{b}_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (6-38)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{2}{\xi} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (6-39)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\xi} \mathbf{b}_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{b}_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + \mathbf{b}_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{b}_4 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\xi} \mathbf{b}_5 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \quad (6-40)$$

Também é de interesse obter-se as expressões anteriores através de uma formulação geométrica, onde serão utilizados os vetores normais às superfícies do elemento, os quais são apresentados na Figura 6-3 para um elemento finito bidimensional.

Um ponto no domínio pode ser definido pelo vetor

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{x} \mathbf{i} + \hat{y} \mathbf{j} = \xi \mathbf{r} \quad (6-41)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição de um ponto no contorno e é definido como

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} = \hat{\mathbf{r}}_{,\xi} \quad (6-42)$$

A derivada do vetor posição \mathbf{r} em relação a η constitui um vetor tangencial a esta direção, e é dado por

$$\mathbf{r}_{,\eta} = x_{,\eta} \mathbf{i} + y_{,\eta} \mathbf{j} \quad (6-43)$$

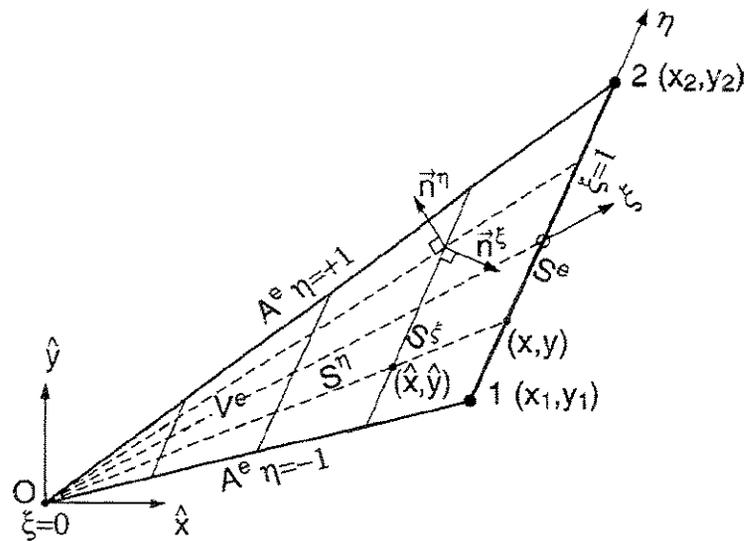
onde η é tomado constante. Os vetores \mathbf{r} , $\mathbf{r}_{,\eta}$ formam uma base para o novo sistema de coordenadas do elemento finito, no qual pode-se definir

$$|\mathbf{J}| = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}_{,\eta} \times \mathbf{k}) = x y_{,\eta} - x_{,\eta} y \quad (6-44)$$

O volume infinitesimal dV^e do domínio é calculado como

$$dV^e = \hat{\mathbf{r}}_{,\xi} \cdot (\hat{\mathbf{r}}_{,\eta} \times \mathbf{k}) d\xi d\eta = \xi |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (6-45)$$

(a)



(b)

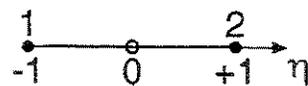


Figura 6-3. (a) Elemento bidimensional e vetores normais a ξ e η (b) Elemento de referência

De forma semelhante pode-se definir os vetores normais às faces do elemento, S^ξ e S^η , são expressos no contorno ($\xi=1$), como

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^\xi &= \mathbf{r}_{,\eta} \times \mathbf{k} = y_{,\eta} \mathbf{i} - x_{,\eta} \mathbf{j} \\ \mathbf{g}^\eta &= \mathbf{k} \times \mathbf{r} = y \mathbf{i} - x \mathbf{j}\end{aligned}\tag{6-46}$$

A transformação de superfícies infinitesimais do sistema cartesiano para o sistema escalonado e para qualquer ξ é definida, usando-se (6-42) e (6-43), como

$$\begin{aligned}dS^\xi &= |\hat{\mathbf{r}}_{,\eta} \times \mathbf{k}| d\eta = |\xi \mathbf{r}_{,\eta} \times \mathbf{k}| d\eta = \xi |\mathbf{g}^\xi| d\eta \\ dS^\eta &= |\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{r}}_{,\xi}| d\xi = |\mathbf{k} \times \mathbf{r}| d\xi = |\mathbf{g}^\eta| d\xi\end{aligned}\tag{6-47}$$

Para calcular os momentos de superfície definem-se, a partir de (6-46), os vetores unitários normais às faces S^ξ e S^η como

$$\begin{aligned}\mathbf{n}^\xi &= n_x^\xi \mathbf{i} + n_y^\xi \mathbf{j} = \frac{\mathbf{g}^\xi}{|\mathbf{g}^\xi|} \\ \mathbf{n}^\eta &= n_x^\eta \mathbf{i} + n_y^\eta \mathbf{j} = \frac{\mathbf{g}^\eta}{|\mathbf{g}^\eta|}\end{aligned}\tag{6-48}$$

A matriz jacobiana \mathbf{J} e sua inversa são formuladas como

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} |\mathbf{g}^\eta| n_y^\eta & -|\mathbf{g}^\eta| n_x^\eta \\ -|\mathbf{g}^\xi| n_x^\xi & |\mathbf{g}^\xi| n_y^\xi \end{bmatrix}\tag{6-49}$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} |\mathbf{g}^\xi| n_x^\xi & |\mathbf{g}^\eta| n_x^\eta \\ |\mathbf{g}^\xi| n_y^\xi & |\mathbf{g}^\eta| n_y^\eta \end{bmatrix}\tag{6-50}$$

Aplicando-se (6-49) e (6-50) em (6-31) obtém-se \mathbf{T}_2 como

$$\mathbf{T}_2 = \frac{1}{|\mathbf{J}|^2} \begin{bmatrix} (|\mathbf{g}^\xi| n_x^\xi)^2 & (|\mathbf{g}^\eta| n_x^\eta)^2 & |\mathbf{g}^\eta| |\mathbf{g}^\xi| n_x^\eta n_x^\xi \\ (|\mathbf{g}^\xi| n_y^\xi)^2 & (|\mathbf{g}^\eta| n_y^\eta)^2 & |\mathbf{g}^\eta| |\mathbf{g}^\xi| n_y^\eta n_y^\xi \\ 2(|\mathbf{g}^\xi|)^2 n_x^\xi n_y^\xi & 2(|\mathbf{g}^\eta|)^2 n_x^\eta n_y^\eta & |\mathbf{g}^\eta| |\mathbf{g}^\xi| (n_y^\eta n_x^\xi + n_x^\eta n_y^\xi) \end{bmatrix} \quad (6-51)$$

Comparando (6-51) com (6-34), conclui-se que

$$\mathbf{b}_3 = \frac{|\mathbf{g}^\xi|^2}{|\mathbf{J}|^2} \begin{Bmatrix} (n_x^\xi)^2 \\ (n_y^\xi)^2 \\ 2n_x^\xi n_y^\xi \end{Bmatrix} \quad (6-52)$$

$$\mathbf{b}_4 = \frac{|\mathbf{g}^\eta|^2}{|\mathbf{J}|^2} \begin{Bmatrix} (n_x^\eta)^2 \\ (n_y^\eta)^2 \\ 2n_x^\eta n_y^\eta \end{Bmatrix} \quad (6-53)$$

$$\mathbf{b}_5 = \frac{|\mathbf{g}^\xi| |\mathbf{g}^\eta|}{|\mathbf{J}|^2} \begin{Bmatrix} n_x^\xi n_x^\eta \\ n_y^\xi n_y^\eta \\ n_x^\xi n_y^\eta + n_x^\eta n_y^\xi \end{Bmatrix} \quad (6-54)$$

Os valores dos momentos em qualquer face S_ξ e S_η de um elemento podem ser obtidos a partir dos seus valores nas faces coincidentes com as direções x e y , através da aplicação da transformação linear

$$\mathbf{M}^{(\xi\eta)} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{M}^{(xy)} \boldsymbol{\beta} \quad (6-55)$$

onde $\boldsymbol{\beta}$ é a matriz mudança de base do sistema xy para o sistema $\xi\eta$, dada por

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} n_x^\xi & n_x^\eta \\ n_y^\xi & n_y^\eta \end{bmatrix} \quad (6-56)$$

Utilizando-se a expressão (6-55), obtém-se

$$\begin{bmatrix} M_{\xi} & M_{\xi\eta} \\ M_{\xi\eta} & M_{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^{\xi} & n_y^{\xi} \\ n_x^{\eta} & n_y^{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x^{\xi} & n_x^{\eta} \\ n_y^{\xi} & n_y^{\eta} \end{bmatrix} \quad (6-57)$$

A partir de (6-57) pode-se escrever

$$\begin{aligned} M_{\xi} &= (n_x^{\xi})^2 M_x + (n_y^{\xi})^2 M_y + 2n_x^{\xi}n_y^{\xi}M_{xy} \\ M_{\eta} &= (n_x^{\eta})^2 M_x + (n_y^{\eta})^2 M_y + 2n_x^{\eta}n_y^{\eta}M_{xy} \\ M_{\xi\eta} &= n_x^{\xi}n_x^{\eta}M_x + n_y^{\xi}n_y^{\eta}M_y + (n_y^{\xi}n_x^{\eta} + n_x^{\xi}n_y^{\eta})M_{xy} \end{aligned} \quad (6-58)$$

ou na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} M_{\xi} \\ M_{\eta} \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (n_x^{\xi})^2 & (n_y^{\xi})^2 & n_x^{\eta}n_x^{\xi} \\ (n_x^{\eta})^2 & (n_y^{\eta})^2 & n_y^{\eta}n_y^{\xi} \\ 2n_x^{\xi}n_x^{\eta} & 2n_y^{\xi}n_y^{\eta} & (n_y^{\eta}n_x^{\xi} + n_x^{\eta}n_y^{\xi}) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6-59)$$

Comparando (6-59) com (6-52), (6-53) e (6-54) obtém-se

$$\begin{Bmatrix} M_{\xi} \\ M_{\eta} \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{|\mathbf{J}|}{|\mathbf{g}^{\xi}|}\right)^2 \mathbf{b}_3 & \left(\frac{|\mathbf{J}|}{|\mathbf{g}^{\eta}|}\right)^2 \mathbf{b}_4 & \frac{(|\mathbf{J}|)^2}{|\mathbf{g}^{\xi}||\mathbf{g}^{\eta}|} \mathbf{b}_5 \end{bmatrix}^T \mathbf{m} \quad (6-60)$$

ou ainda

$$M_{\xi} = \left(\frac{|\mathbf{J}|}{|\mathbf{g}^{\xi}|}\right)^2 \mathbf{b}_3^T \mathbf{m}; \quad M_{\eta} = \left(\frac{|\mathbf{J}|}{|\mathbf{g}^{\eta}|}\right)^2 \mathbf{b}_4^T \mathbf{m}; \quad M_{\xi\eta} = \frac{(|\mathbf{J}|)^2}{|\mathbf{g}^{\xi}||\mathbf{g}^{\eta}|} \mathbf{b}_5^T \mathbf{m} \quad (6-61)$$

6.4. Formulação das equações da elastodinâmica para placas

Retomando a equação (6-17) e introduzindo a parcela referente a força de inércia, as equações diferenciais de movimento no domínio da frequência para uma placa podem ser expressas por

$$(\mathbf{L}\nabla)^T \mathbf{m} + q + \omega^2 \rho W = 0 \quad (6-62)$$

onde

$$W = W(\hat{x}, \hat{y}) \text{ é o deslocamento} \quad (6-63)$$

$$\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{L} \nabla W, \text{ são os momentos fletores por unidade de comprimento} \quad (6-64)$$

q é o carregamento, ω a frequência e ρ a densidade do material.

Aplicando-se (6-40) em (6-62), pré-multiplicando por uma função ponderadora

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\xi, \eta) = \mathbf{w}(\xi) \mathbf{N}(\eta) \quad (6-65)$$

e integrando sobre o domínio, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{V^e} \frac{1}{\xi} \mathbf{w}^T \mathbf{b}_1^T \mathbf{m}_{,\xi} dV^e + \int_{V^e} \frac{1}{\xi^2} \mathbf{w}^T \mathbf{b}_2 \mathbf{m}_{,\eta} dV^e + \int_{V^e} \mathbf{w}^T \mathbf{b}_3^T \mathbf{m}_{,\xi\xi} dV^e + \int_{V^e} \frac{1}{\xi^2} \mathbf{w}^T \mathbf{b}_4^T \mathbf{m}_{,\eta\eta} dV^e \\ + \int_{V^e} \frac{1}{\xi} \mathbf{w}^T \mathbf{b}_5 \mathbf{m}_{,\xi\eta} dV^e = 0 \end{aligned} \quad (6-66)$$

Utilizando-se (6-45) e integrando-se por partes os termos de (6-66) que contém diferenciais de \mathbf{m} em relação η , obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{V^e} \frac{1}{\xi^2} \mathbf{w}^T \mathbf{b}_2^T \mathbf{m}_{,\eta} dV^e &= \int_0^1 \frac{1}{\xi} \left(\int_{-1}^{+1} (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_2^T) \mathbf{m}_{,\eta} d\eta \right) d\xi = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\xi} \left((\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_2^T) \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_2^T)_{,\eta} \mathbf{m} d\eta \right) d\xi \end{aligned} \quad (6-67)$$

$$\begin{aligned}
\int_{V^e} \frac{1}{\xi^2} \mathbf{w}^T \mathbf{b}_4^T \mathbf{m}_{,\eta\eta} dV^e &= \int_0^1 \frac{1}{\xi} \left(\int_{-1}^{+1} (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_4^T) \mathbf{m}_{,\eta\eta} d\eta \right) d\xi = \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\xi} \left((\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_4^T) \mathbf{m}_{,\eta} \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_4^T)_{,\eta} \mathbf{m}_{,\eta} d\eta \right) d\xi = \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\xi} \left((\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_4^T) \mathbf{m}_{,\eta} \Big|_{-1}^{+1} - (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_4^T)_{,\eta} \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_4^T)_{,\eta\eta} \mathbf{m} d\eta \right) d\xi
\end{aligned} \tag{6-68}$$

$$\begin{aligned}
\int_{V^e} \frac{2}{\xi} \mathbf{w}^T \mathbf{b}_5^T \mathbf{m}_{,\xi\eta} dV^e &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^{+1} 2 (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_5^T) \mathbf{m}_{,\xi\eta} d\eta \right) d\xi = \\
&= \int_0^1 \left(2 (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_5^T) \mathbf{m}_{,\xi} \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} 2 (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_5^T)_{,\eta} \mathbf{m}_{,\xi} d\eta \right) d\xi
\end{aligned} \tag{6-69}$$

Introduzindo-se (6-67), (6-68) e (6-69) em (6-66) e agrupando-se os termos semelhantes

$$\int_0^1 \left(\begin{aligned} &\xi \int_{-1}^{+1} (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_3^T) \mathbf{m}_{,\xi\xi} d\eta \\ &+ \int_{-1}^{+1} \left[(\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_1^T) - 2 (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_5^T)_{,\eta} \right] \mathbf{m}_{,\xi} d\eta \\ &+ \frac{1}{\xi} \int_{-1}^{+1} \left[(\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_4^T)_{,\eta\eta} - (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_2^T)_{,\eta} \right] \mathbf{m} d\eta \\ &+ \frac{1}{\xi} \left[(\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_2^T) - (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_4^T)_{,\eta} \right] \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} \\ &+ \frac{1}{\xi} (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_4^T) \mathbf{m}_{,\eta} \Big|_{-1}^{+1} + 2 (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_5^T) \mathbf{m}_{,\xi} \Big|_{-1}^{+1} \\ &+ \xi \int_{-1}^{+1} \mathbf{w}^T q |\mathbf{J}| d\eta + \xi \int_{-1}^{+1} \mathbf{w}^T \omega^2 \rho W |\mathbf{J}| d\eta \end{aligned} \right) d\xi = 0 \tag{6-70}$$

Para verificar esta igualdade basta que o integrando seja nulo. Assim tem-se

$$\begin{aligned}
&\xi \int_{-1}^{+1} (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_3^T) \mathbf{m}_{,\xi\xi} d\eta + \int_{-1}^{+1} \left[(\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_1^T) - 2 (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_5^T)_{,\eta} \right] \mathbf{m}_{,\xi} d\eta \\
&+ \frac{1}{\xi} \int_{-1}^{+1} \left[(\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_4^T)_{,\eta\eta} - (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_2^T)_{,\eta} \right] \mathbf{m} d\eta \\
&+ \frac{1}{\xi} \left[(\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_2^T) - (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_4^T)_{,\eta} \right] \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} \\
&+ \frac{1}{\xi} (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_4^T) \mathbf{m}_{,\eta} \Big|_{-1}^{+1} + 2 (\mathbf{w}^T |\mathbf{J} \mathbf{b}_5^T) \mathbf{m}_{,\xi} \Big|_{-1}^{+1} \\
&+ \xi \int_{-1}^{+1} \mathbf{w}^T q |\mathbf{J}| d\eta + \xi \int_{-1}^{+1} \mathbf{w}^T \omega^2 \rho W |\mathbf{J}| d\eta = 0
\end{aligned} \tag{6-71}$$

Adotando-se

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_1 &= \mathbf{b}_3 \mathbf{N}(\eta) \\
 \mathbf{B}_2 &= \mathbf{b}_1 \mathbf{N}(\eta) + 2\mathbf{b}_5 \mathbf{N}(\eta)_{,\eta} \\
 \mathbf{B}_3 &= \mathbf{b}_2 \mathbf{N}(\eta)_{,\eta} + \mathbf{b}_4 \mathbf{N}(\eta)_{,\eta\eta}
 \end{aligned} \tag{6-72}$$

e levando-se em conta as relações seguintes, obtidas por inspeção direta.

$$|\mathbf{J}|\mathbf{b}_2 = (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_4)_{,\eta} \tag{6-73}$$

$$|\mathbf{J}|\mathbf{b}_3 = |\mathbf{J}|\mathbf{b}_1 - (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_5)_{,\eta} \tag{6-74}$$

$$(\mathbf{b}_4)_{,\eta} = -2 \left(\frac{|\mathbf{J}|_{,\eta}}{|\mathbf{J}|} \mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_5 \right) \tag{6-75}$$

pode-se, após alguma manipulação algébrica, escrever os termos das integrais da equação (6-71) sob uma forma mais adequada.

Tomando-se o integrando do primeiro termo de (6-71), tem-se

$$\mathbf{w}^T |\mathbf{J}|\mathbf{b}_3^T = \mathbf{w}(\xi)^T \mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}|\mathbf{b}_3^T = \mathbf{w}(\xi)^T |\mathbf{J}|\mathbf{B}_1^T \tag{6-76}$$

Manipulando-se agora o integrando do segundo termo de (6-71), tem-se

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{w}^T |\mathbf{J}|\mathbf{b}_1^T) - 2(\mathbf{w}|\mathbf{J}|\mathbf{b}_5)_{,\eta} &= \mathbf{w}(\xi)^T \left((\mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}|\mathbf{b}_1^T) - 2(\mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}|\mathbf{b}_5^T)_{,\eta} \right) \\
 &= \mathbf{w}(\xi)^T \left(\mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_1^T) - 2\mathbf{N}(\eta)^T_{,\eta} (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_5^T) - 2\mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_5^T)_{,\eta} \right) \\
 &= \mathbf{w}(\xi)^T \left(\begin{array}{l} 2\mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_1^T) - 2\mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_5^T)_{,\eta} \\ -\mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_1^T) - 2\mathbf{N}(\eta)^T_{,\eta} (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_5^T) \end{array} \right) \\
 &= \mathbf{w}(\xi)^T \left(2\mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}|\mathbf{b}_3^T - \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_1^T) - 2\mathbf{N}(\eta)^T_{,\eta} (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_5^T) \right) \\
 &= \mathbf{w}(\xi)^T |\mathbf{J}|(2\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)
 \end{aligned} \tag{6-77}$$

E para o integrando do terceiro termo de (6-71), tem-se

$$\begin{aligned}
(\mathbf{w}|\mathbf{J}|\mathbf{b}_4)_{,\eta\eta}^T - (\mathbf{w}|\mathbf{J}|\mathbf{b}_2)_{,\eta}^T &= \mathbf{w}(\xi) \left(\begin{array}{c} \left(\mathbf{N}(\eta)_{,\eta}^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_4)^T + \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_4)_{,\eta}^T \right)_{,\eta} \\ - \mathbf{N}(\eta)_{,\eta}^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_2)^T - \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_2)_{,\eta}^T \end{array} \right) \\
&= \mathbf{w}(\xi) \left(\begin{array}{c} \mathbf{N}(\eta)_{,\eta\eta}^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_4)^T + 2\mathbf{N}(\eta)_{,\eta}^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_4)_{,\eta}^T + \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_4)_{,\eta\eta}^T \\ - \mathbf{N}(\eta)_{,\eta}^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_2)^T - \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_2)_{,\eta}^T \end{array} \right)
\end{aligned} \quad (6-78)$$

Aplicando-se (6-73) em (6-79), obtém-se

$$\begin{aligned}
(\mathbf{w}|\mathbf{J}|\mathbf{b}_4)_{,\eta\eta}^T - (\mathbf{w}|\mathbf{J}|\mathbf{b}_2)_{,\eta}^T &= \mathbf{w}(\xi) \left(\mathbf{N}(\eta)_{,\eta\eta}^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_4)^T + \mathbf{N}(\eta)_{,\eta}^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_4)_{,\eta}^T \right) \\
&= \mathbf{w}(\xi) \left(\mathbf{N}(\eta)_{,\eta\eta}^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_4)^T + \mathbf{N}(\eta)_{,\eta}^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_4)_{,\eta}^T \right) \\
&= \mathbf{w}(\xi) \left(\mathbf{N}(\eta)_{,\eta\eta}^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_4)^T + \mathbf{N}(\eta)_{,\eta}^T (|\mathbf{J}|\mathbf{b}_2)_{,\eta}^T \right) = \mathbf{w}(\xi) |\mathbf{J}|\mathbf{B}_3
\end{aligned} \quad (6-79)$$

Substituindo-se (6-77) e (6-79) em (6-71) e usando-se (6-65) e (6-72), tem-se para $\mathbf{w}(\xi)$ arbitrário

$$\begin{aligned}
&\xi \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{m}_{,\xi\xi} |\mathbf{J}| d\eta + \int_{-1}^{+1} (2\mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2^T) \mathbf{m}_{,\xi} |\mathbf{J}| d\eta \\
&+ \frac{1}{\xi} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_3^T \mathbf{m} |\mathbf{J}| d\eta + \omega^2 \xi \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}(\eta)^T \rho |\mathbf{J}| W d\eta \\
&+ \xi \mathbf{q} + \mathbf{t} = 0
\end{aligned} \quad (6-80)$$

onde

$$\mathbf{q} = \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{N}^u(\eta) q d\eta \quad (6-81)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_2^T \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} - \frac{1}{\xi} \left(\mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \right)_{,\eta} \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} + \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \mathbf{m}_{,\eta} \Big|_{-1}^{+1} \\
&+ 2\mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_5^T \mathbf{m}_{,\xi} \Big|_{-1}^{+1}
\end{aligned} \quad (6-82)$$

sendo imediato a identificação de \mathbf{q} com as forças atuantes no elemento. Para a identificação de \mathbf{t}

é necessário um tratamento algébrico da expressão (6-82) (levando-se em conta as relações seguintes, obtidas por inspeção direta).

Examinando-se o dois primeiros termos de (6-82), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_2^T \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} - \frac{1}{\xi} \left(\mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \right)_{,\eta} \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} = \\ = \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_2^T \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} - \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T)_{,\eta} \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} - \frac{1}{\xi} \left(\mathbf{N}(\eta)^T \right)_{,\eta} |\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} \end{aligned} \quad (6-83)$$

e usando-se (6-73)

$$\frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)_{,\eta}^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_2^T \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} - \frac{1}{\xi} \left(\mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \right)_{,\eta} \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} = -\frac{1}{\xi} \left(\mathbf{N}(\eta)^T \right)_{,\eta} |\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} \quad (6-84)$$

Examinando-se agora o terceiro termo de (6-82), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \mathbf{m}_{,\eta} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \mathbf{m}_{,\eta} \Big|_{-1}^{+1} + \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T)_{,\eta} \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} \\ - \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T)_{,\eta} \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \mathbf{m})_{,\eta} \Big|_{-1}^{+1} - \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T)_{,\eta} \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} \end{aligned} \quad (6-85)$$

Expandindo e aplicando (6-75) ao último termo de (6-85)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \mathbf{m}_{,\eta} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \mathbf{m})_{,\eta} \Big|_{-1}^{+1} - \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|)_{,\eta} \mathbf{b}_4^T \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} \\ - \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| (\mathbf{b}_4^T)_{,\eta} \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} = \\ = \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \mathbf{m})_{,\eta} \Big|_{-1}^{+1} + \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|)_{,\eta} \mathbf{b}_4^T \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} + \frac{2}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_5 \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} \end{aligned} \quad (6-86)$$

Examinando-se finalmente o último termo de (6-82)

$$\begin{aligned}
2\mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_5^T \mathbf{m}_{,\xi} \Big|_{-1}^{+1} &= 2\mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_5^T \mathbf{m}_{,\xi} \Big|_{-1}^{+1} + 2\mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_5^T)_{,\xi} \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} \\
&\quad - 2\mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_5^T)_{,\xi} \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} = \\
&= 2\mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_5^T \mathbf{m})_{,\xi} \Big|_{-1}^{+1} - 2\mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_5^T)_{,\xi} \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} = 2\mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_5^T \mathbf{m})_{,\xi} \Big|_{-1}^{+1}
\end{aligned} \tag{6-87}$$

uma vez que o termo $|\mathbf{J}| \mathbf{b}_5^T$ é independente de ξ .

Substituindo-se (6-84), (6-86) e (6-87) em (6-82) resulta em

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= -\frac{1}{\xi} \left(\mathbf{N}(\eta)^T \right)_{,\eta} |\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} + \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \mathbf{m})_{,\eta} \Big|_{-1}^{+1} \\
&\quad + \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|)_{,\eta} \mathbf{b}_4^T \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} + \frac{2}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_5 \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} + 2\mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_5^T \mathbf{m})_{,\xi} \Big|_{-1}^{+1}
\end{aligned} \tag{6-88}$$

Agrupando os termos semelhantes,

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \frac{1}{\xi} \left(\mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|)_{,\eta} - \left(\mathbf{N}(\eta)^T \right)_{,\eta} |\mathbf{J}| \right) \mathbf{b}_4^T \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} + \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_4^T \mathbf{m})_{,\eta} \Big|_{-1}^{+1} \\
&\quad + \frac{2}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T |\mathbf{J}| \mathbf{b}_5 \mathbf{m} \Big|_{-1}^{+1} + 2\mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}| \mathbf{b}_5^T \mathbf{m})_{,\xi} \Big|_{-1}^{+1}
\end{aligned} \tag{6-89}$$

A partir de (6-61) tem-se

$$\mathbf{b}_4^T \mathbf{m} = \left(\frac{|\mathbf{g}^\eta|}{|\mathbf{J}|} \right)^2 M_\eta; \quad \mathbf{b}_5^T \mathbf{m} = \frac{|\mathbf{g}^\xi| |\mathbf{g}^\eta|}{(|\mathbf{J}|)^2} M_{\xi\eta} \tag{6-90}$$

Substituindo (6-90) em (6-89) obtem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} = & \frac{1}{\xi} \left(\mathbf{N}(\eta)^T (|\mathbf{J}|)_{,\eta} - (\mathbf{N}(\eta)^T)_{,\eta} |\mathbf{J}| \right) \left(\frac{|\mathbf{g}^\eta|^2}{|\mathbf{J}|} M_\eta \right) \Bigg|_{-1}^{+1} + \frac{1}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T \left(\frac{|\mathbf{g}^\eta|^2}{|\mathbf{J}|} M_\eta \right) \Bigg|_{-1}^{+1} \\
& + \frac{2}{\xi} \mathbf{N}(\eta)^T \frac{|\mathbf{g}^\xi| |\mathbf{g}^\eta|}{|\mathbf{J}|} M_{\xi\eta} \Bigg|_{-1}^{+1} + 2 \mathbf{N}(\eta)^T \left(\frac{|\mathbf{g}^\xi| |\mathbf{g}^\eta|}{|\mathbf{J}|} M_{\xi\eta} \right) \Bigg|_{-1}^{+1}
\end{aligned} \quad (6-91)$$

Examinando-se a equação (6-91), percebe-se que o seu primeiro termo é um valor dependente da integração em η de M_η , o terceiro termo é um valor dependente da integração em η de $M_{\xi\eta}$ e o segundo e quarto termos são respectivamente valores dependentes da integração em η de $\partial M_\eta / \partial \eta$ e de $\partial M_{\xi\eta} / \partial \xi$, ou seja, são dependentes do esforço cortante, Q_η . Pode-se concluir então que \mathbf{t} representa as forças nodais provenientes das forças de superfície nas faces do elemento dispostas na direção radial ao centro de escalonamento.

Desenvolvendo-se o valor de \mathbf{m} em função de W a partir da aplicação de (6-40) em (6-64), tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} = \mathbf{DL} \nabla W = & \frac{1}{\xi} \mathbf{D}\mathbf{b}_1 \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{D}\mathbf{b}_2 \frac{\partial W}{\partial \eta} + \mathbf{D}\mathbf{b}_3 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{D}\mathbf{b}_4 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \\
& + \frac{1}{\xi} \mathbf{D}\mathbf{b}_5 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta}
\end{aligned} \quad (6-92)$$

Sendo que

$$W = W(\xi, \eta) = \mathbf{N}^u(\eta) W(\xi) \quad (6-93)$$

o qual aplicado em (6-92) resulta em

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} = & \frac{1}{\xi} \mathbf{D}\mathbf{b}_1 \mathbf{N}^u(\eta) W(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{D}\mathbf{b}_2 \mathbf{N}^u(\eta)_{,\eta} W(\xi) + \mathbf{D}\mathbf{b}_3 \mathbf{N}^u(\eta) W(\xi)_{,\xi\xi} \\
& + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{D}\mathbf{b}_4 \mathbf{N}^u(\eta)_{,\eta\eta} W(\xi) + \frac{1}{\xi} \mathbf{D}\mathbf{b}_5 \mathbf{N}^u(\eta)_{,\eta} W(\xi)_{,\xi}
\end{aligned} \quad (6-94)$$

e usando (6-72)

$$\mathbf{m} = \mathbf{DB}_1 W(\xi)_{,\xi\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{DB}_2 W(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{DB}_3 W(\xi) \quad (6-95)$$

Aplicando-se (6-95) em (6-80) e agrupando-se os termos semelhantes, obtém-se

$$\begin{aligned} & \xi \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{DB}_1 |\mathbf{J}| d\eta W^{(4)} + (2 \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{DB}_1 |\mathbf{J}| d\eta + \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{DB}_2 |\mathbf{J}| d\eta \\ & - \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{DB}_1 |\mathbf{J}| d\eta) W^{(3)} + \frac{1}{\xi} (\int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{DB}_3 |\mathbf{J}| d\eta + \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_3^T \mathbf{DB}_1 |\mathbf{J}| d\eta \\ & - \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{DB}_2 |\mathbf{J}| d\eta) W^{(2)} + \frac{1}{\xi^2} (\int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{DB}_2 |\mathbf{J}| d\eta \\ & - 2 \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{DB}_3 |\mathbf{J}| d\eta - \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{DB}_3 |\mathbf{J}| d\eta + \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_3^T \mathbf{DB}_2 |\mathbf{J}| d\eta) W^{(1)} \\ & + \frac{1}{\xi^3} (2 \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{DB}_3 |\mathbf{J}| d\eta + 2 \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{DB}_3 |\mathbf{J}| d\eta + \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_3^T \mathbf{DB}_3 |\mathbf{J}| d\eta) W \\ & + \omega^2 \xi \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}(\eta)^T \rho \mathbf{N}^u(\eta) |\mathbf{J}| d\eta W + \xi \mathbf{q} + \mathbf{t} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6-96)$$

Introduzindo-se os coeficientes

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{DB}_1 |\mathbf{J}| d\eta \\ \mathbf{E}_1 &= \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{DB}_2 |\mathbf{J}| d\eta \\ \mathbf{E}_2 &= \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{DB}_2 |\mathbf{J}| d\eta \\ \mathbf{E}_3 &= \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{DB}_3 |\mathbf{J}| d\eta \\ \mathbf{E}_4 &= \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{DB}_3 |\mathbf{J}| d\eta \\ \mathbf{E}_5 &= \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_3^T \mathbf{DB}_3 |\mathbf{J}| d\eta \\ \mathbf{M}_0 &= \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}(\eta)^T \rho \mathbf{N}^u(\eta) |\mathbf{J}| d\eta \end{aligned} \quad (6-97)$$

obtém-se as equações diferenciais para os deslocamentos W no contorno da parte do domínio correspondente a um elemento finito, como

$$\begin{aligned}
& \xi \mathbf{E}_0 W^{(4)} + (2\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1^T) W^{(3)} + \frac{1}{\xi} (\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_3^T - \mathbf{E}_2) W^{(2)} + \\
& + \frac{1}{\xi^2} (\mathbf{E}_2 - 2\mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_4^T) W^{(1)} + \frac{1}{\xi^3} (2\mathbf{E}_3 + 2\mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_5) W + \omega^2 \xi \mathbf{M}_0 W + \xi \mathbf{q} + \mathbf{t} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{6-98}$$

A montagem das equações diferenciais sobre todo o domínio conduz a $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ e na ausência de forças aplicadas à placa, tem-se também $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Neste caso a equação de elementos finitos escalonado no contorno para o deslocamento, no domínio da frequência é expressa como

$$\begin{aligned}
& \xi \mathbf{E}_0 W^{(4)} + (2\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1^T) W^{(3)} + \frac{1}{\xi} (\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_3^T - \mathbf{E}_2) W^{(2)} + \\
& + \frac{1}{\xi^2} (\mathbf{E}_2 - 2\mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_4^T) W^{(1)} + \frac{1}{\xi^3} (2\mathbf{E}_3 + 2\mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_5) W + \omega^2 \xi \mathbf{M}_0 W = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{6-99}$$

Deve-se observar que a equação (6-99) representa os deslocamentos obtidos a partir de uma proposta de um elemento de placa para o MEFEC, e como tal necessita ser implementada computacionalmente e ter sua validade verificada através de comparação com exemplos existentes na literatura.

Capítulo 7

Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi investigado o ajuste de modelos com a utilização de diferentes métodos numéricos. Códigos computacionais foram desenvolvidos para os métodos numéricos avaliados e os resultados obtidos foram comparados. Uma revisão das técnicas de ajuste de modelos, tanto das que ajustam diretamente as matrizes como das que utilizam processos iterativos, foi apresentada. Deu-se ênfase à utilização de FRFs como dados experimentais, embora também tenham sido apresentados ajustes utilizando-se dados modais.

Em relação ao MEF, um algoritmo de ajuste de modelos usando técnicas iterativas baseadas na sensibilidade, com uma função objetivo relacionando os parâmetros modais medidos e os estimados foi implementado e avaliado. FRFs também foram utilizadas para a realização do ajuste de modelos de MEF. As avaliações de desempenho do algoritmo foram realizadas usando-se uma estrutura do tipo viga com dados experimentais simulados e reais, os quais apresentaram uma boa concordância.

Já para o MEC, apresentou-se o ajuste de modelos utilizando exclusivamente FRFs como dados simulados. Os procedimentos propostos foram verificados com um exemplo simulado de modelo de MEC e comparado com os resultados obtidos através do modelo de MEF. A formulação de elementos de contorno para o comportamento dinâmico axial e à flexão de vigas foi revista. O método de ajuste proposto foi verificado para diferentes erros nos parâmetros desconhecidos e com a introdução de ruído nas FRFs simuladas. De um modo geral, os resultados mostraram que o comportamento do ajuste de modelos do MEC é similar ao ajuste de modelos de MEF, sendo que ambos apresentaram as mesmas dificuldades para a realização do ajuste. Este fato é uma indicação de que a escolha de um método ou outro para a realização do ajuste deve se basear na capacidade que o método numérico tem para tratar o problema em questão. No entanto,

deve-se admitir que este estudo representa apenas uma simulação para testar o procedimento. Para se avaliar melhor o desempenho do ajuste de modelos do MEC dois outros aspectos precisam ser considerados em um trabalho futuro. O primeiro é o uso de dados experimentais reais. O outro é a questão da dimensão do problema. Neste trabalho, um problema unidimensional foi tratado e é um fato reconhecido que modelos de MEC 2D e 3D tendem a ser mais eficientes que os seus correspondentes do MEF.

Uma revisão da formulação do MEFEC foi apresentada e aplicada na obtenção das FRFs e das freqüências naturais para o deslocamento no plano de uma placa sujeita a tensões planas. Apesar da solução usando as matrizes de rigidez estática e de massa não terem obtido resultados precisos, o uso da matriz de rigidez dinâmica provou ser capaz de determinar com precisão as FRFs, das quais as freqüências naturais puderam ser extraídas. A obtenção das FRFs através de métodos numéricos provou ser extremamente demorada devido às singularidades das derivadas da matriz de rigidez dinâmica. Assim, o uso alternativo da solução analítica para a equação diferencial da matriz de rigidez dinâmica pode apresentar uma melhor performance e conseqüentemente um menor custo computacional. Embora o ajuste de modelos do MEFEC não tenha sido realizado, a obtenção das FRFs do problema em estudo utilizando-se este método indicam que não há nenhum impedimento aparente para que isto seja possível de realizar.

Uma formulação do MEFEC para o tratamento de problemas de placas foi desenvolvida. A teoria de placas foi revista e em seguida procedeu-se ao desenvolvimento do equacionamento do MEFEC, resultando na equação diferencial para os deslocamentos de uma placa no domínio da freqüência. O desenvolvimento desta formulação é a etapa inicial para que em trabalhos futuros se determine a matriz de rigidez dinâmica de placas e conseqüentemente se possa obter suas FRFs através deste método.

Os resultados inéditos obtidos neste trabalho utilizando o MEFEC se revestem de importância devido às vantagens que este apresenta em relação aos demais métodos de modelagem numérica. Até este momento, as referências disponíveis na literatura eram de autoria quase que exclusivamente dos criadores deste método. Assim, a contribuição dada aqui ao desenvolvimento da formulação do MEFEC não só diversifica as referências existentes, como também abre um enorme campo para que mais pesquisas sejam feitas nesta área.

Dentro deste espírito, este trabalho terá continuidade através de pesquisa de pós-doutorado, onde se utilizará o MEFEC em aplicações da mecânica da fratura, desenvolvendo-se técnicas de obtenção dos fatores de intensidade de tensão dinâmicos e de análise da propagação estável de trincas. Serão determinadas e se procurará tirar proveito de suas características potencialmente vantajosas em relação ao MEF e ao MEC, especialmente de sua capacidade de discretizar apenas o contorno e de não necessitar discretizar as faces dispostas radialmente em relação ao centro de escalonamento, o que permitirá que a geração das malhas seja feita com menor custo computacional e com maior eficiência. Também a investigação de técnicas para a utilização do MEFEC com o domínio particionado em sub-regiões será necessária, pois este procedimento é imprescindível ao estudo da propagação de trincas através deste método. O emprego do MEFEC com o domínio particionado é sugerido pela literatura disponível, mas nada ainda foi publicado sobre o assunto.

Referências Bibliográficas

- Adelman, H. M., Haftka, R. T., 1986, "Sensitivity analysis of discrete structural systems", *AIAA Journal*, 24, p. 823-832.
- Arruda, J. R. F., 1985, "Frequency domain estimation of structural parameters", *VIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, ITA, S. José dos Campos, Brasil, p. 741-744.
- Arruda, J. R. F., Santos, J. M. C., 1992, "Mechanical Joint Parameter Estimation Using Frequency Response Functions and Component Mode Synthesis", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 6(7), p.493-508.
- Arruda, J. R. F., Rio, S. A. V., Santos, L. A. S. B., 1996, "A Space-Frequency Data Compression Method for Spatially Dense Laser Doppler Vibrometer Measurements", *Journal of Shock and Vibration*, (Wiley) 3(2), p.127-133.
- Avitabile, P., Li, P., 1993, "Some observations on the difficulties in model updating", *Proceedings of the XI IMAC*.
- Banerjee, P. K. and Butterfield, R., 1981, "Boundary element methods in engineering science", London, McGraw-Hill.
- Baruch, M., 1978, "Optimization procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration data", *AIAA Journal*, 16(11), p. 1208-1210.
- Berman, A., Flannelly, W., 1971, "Theory o incomplete models of dynamic structures", *AIAA*

Journal, v-9, p. 1482-1487.

Berman, A., Nagy, E. J., 1983, "Improvement of a large analytical model using test data", *AIAA Journal*, 21(8), p. 1168-1173.

Blakely, K. D. & Walton, W. B., 1984, "Selection of measurement and parameter uncertainties for finite element model revision", *2nd International Modal Analysis Conference*, Orlando, Florida, p. 82-88.

Campos, N. B. F., Dos Santos, J. M. C., 2000, "Boundary element model updating in structural dynamics", *XVIII IMAC*.

Collins, J. D., Thomson, J. D., 1969, "The eigenvalue problem for structural systems with statistical properties", *AIAA Journal*, vol. 7, n. 4, p. 642-647.

Collins, J. D. et al, 1974, "Statistical identification of structures", *AIAA Journal*, v. 12, p. 185-190.

Dhatt, G., Touzot, G., Cantin, Gilles, 1984, "The finite element method displayed", John Wiley & Sons, 509 p.

Fox, R. L. & Kappor, M. P., 1968, "Rates of change of eigenvalues and eigenvectors", *AIAA Journal*, vol. 6, n. 12, p. 2426-2429.

Friswell, M. I., 1989, "The Adjustment of structural parameter using a minimum variance estimator", *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 3, n. 2, p. 143-155.

Friswell, M. I., Mottershead, J. E., 1995, "Finite element model updating in structural dynamics", London, Kluwer, 286 p.

Heylen, W., 1987, "Optimization of model matrices of mechanical structures using experimental modal data", Ph.D. Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.

Imregun, M., Visser, W. J., 1991, "A review of model updating techniques", *The Shock and Vibration Digest*, 23 (1), p. 9-20.

- Imregun M., *et al.*, 1994, "A comparison of sensitivity and response function based updating techniques", *Proceedings of the XII IMAC*.
- Infantes, J. E. C., Campos, N. B. F., Dos Santos, J. M. C., 1999, "Ajuste de modelos de elementos finitos usando técnicas iterativas baseadas na sensibilidade", *COBEM*.
- Janter, T., 1987, "Construction oriented updating of dynamic finite elements models using experimental modal data", Ph.D. Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
- Lin, R. M., Ewins, D. J., 1990, "Model updating using FRF data", Proceedings of the 15th International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Belgium, 19-21 Sep, Conference Part I.
- Manolis, D. G., Beskos, D. E., Pineros, M. F., 1986, "Beam and plate stability by boundary elements", *Computers & Structures*, 22, p. 917-923.
- Martinez, D. R., 1981, "Parameter estimation in structural dynamics models", Sandia National Laboratories, Report SAND80-0135, 315 p., March.
- Mesquita Neto, E., Barreto, S. F. A., Pavanello, R., 2000, "Dynamic behavior of frame structures by boundary integral procedures", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24, pp. 399-406.
- Mesquita Neto, E. et al., 2000, "Acoustic eigenvalues analysis by boundary element methods" In: *Boundary Element Acoustics*, Edited by T. W. Wu, London, WIT press, 238 p.
- Mottershead, J. E. & Friswell, M. I., 1993, "Model updating in structural dynamics: a survey", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 2, n. 167, p. 347-373.
- Nardini, D., Brebbia, C. A., 1983, "A new approach to free vibration analysis using boundary elements", *Appl. Math. Modelling*, v. 7, p. 157-162.
- Natke, H. G., 1986, "Improvement of analytical models with input/output measurements contra experimental modal analysis", *Proceedings of the 4th IMAC*, Los Angeles, CA, p. 409-413.
- Natke, H. G., 1988, "Updating of computational models in the frequency domain based on measured data: a survey", *Probabilistic Engineers Mechanics*, 3, p. 38-35.

- Nelson, R. B., 1976, "Simplified calculation of eigenvector derivatives", *AIAA Journal*, vol. 14, n. 9, p. 1201-1205.
- Pavanello, R., 1996, Código computacional MEFLAB, Unicamp.
- Providakis, C. P., Beskos, D. E., 1986, "Dynamic analysis of beams by the boundary element method", *Computers & Structures*, n. 6, p. 957-974.
- Sharp, R. S., Brooks, P. C., 1988, "Sensitivities of frequency response functions of linear dynamic systems to variations in design parameter values", *Journal of Sound and Vibration*, 126, p. 167-172
- Song, C., Wolf, J. P., 1996, "Consistent infinitesimal finite-element cell method: three-dimensional vector wave equation", *International Journal of Numeric Methods in Engineering*, 39, p. 2189-2208.
- Song, C., Wolf, J. P., 1997, "The scaled boundary finite-element method - alias consistent infinitesimal finite-element cell method - for elastodynamics". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 147, p. 329-355.
- Song, C., Wolf, J. P., 1998, "The scaled boundary finite-element method: analytical solution in frequency domain", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 64, p. 164-249.
- Song, C., Wolf, J. P., 1999, "Body loads in scaled boundary finite-element method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 180, p. 117-135.
- Song, C., Wolf, J. P., 2000, "The scaled boundary finite-element method - a primer: solution procedures", *Computer and Structures*, 78, p. 211-225.
- Sutter, T. R. *et al.*, 1988, "Comparison of several methods for calculating vibration mode shape derivatives", *AIAA Journal*, 26, p. 1506-1511.
- Vanhonacker, P., 1989, "Sensitivity analysis of mechanical structures based on experimentally determined modal parameters", *Proceedings of the 7th IMAC*, Las Vegas, NV, p. 534-541.

- Wolf, J. P., Song, C., 1996a, "Consistent infinitesimal finite-element cell method in frequency domain", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 25, p. 1307-1327.
- Wolf, J. P., Song, C., 1996b, "Finite-Element Modeling of Unbounded Media", John Wiley & Sons, Chichester, 331p.
- Wolf, J. P., Song, C., 1998, "Unit-impulse response of unbounded medium by scaled boundary finite-element method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67, p. 159-355.
- Wolf, J. P., Song, C., 2000a, "The semi-analytical fundamental-solution-less scaled boundary finite-element method to model unbounded soil", EUROMECH Colloquium 414 Boundary Elements Methods for Soil / Structure Interaction, University of Catania, 21-23 June.
- Wolf, J. P., Song, C., 2000b, "The scaled boundary finite-element method - a primer: derivations", *Computers and Structures*, 78, p. 191-210.
- Wolf, J. P., Song, C., 2000c, "The scaled boundary finite-element method - a primer: solution procedures", *Computers and Structures*, 78, p. 211-225.
- Wolfe, M. A., 1978, "Numerical Methods for Unconstrained Optimization", Amsterdam: Van Nostrand Reinhold.