

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR CRISTINA MINIOLI
SARACHO E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 02/03/1998

Ilmar Ferreira Santos
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Análise Numérica e Experimental do
Comportamento Dinâmico de Palhetas Flexíveis**

Autora: **Cristina Minioli Saracho**
Orientador: **Prof Dr. Ilmar Ferreira Santos**

09/98

Sa71a

34785/BC

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Análise Numérica e Experimental do Comportamento Dinâmico de Palhetas Flexíveis

Autora: **Cristina Minioli Saracho**
Orientador: **Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1998
S.P. - Brasil



38/16466

| | |
|----------|-------------------------------------|
| DATA: | 8C |
| CHAMADA: | Unicamp |
| CLASS. | Sa71a |
| EX. | |
| NUM. BC/ | 34785 |
| CO. | 395/98 |
| C | <input type="checkbox"/> |
| D | <input checked="" type="checkbox"/> |
| CO. | R\$ 11,00 |
| TA. | 12/08/98 |
| CPD | |

CM-00114960-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Sa71a Saracho, Cristina Minioli
Análise numérica e experimental do comportamento
dinâmico de palhetas flexíveis. / Cristina Minioli
Saracho.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Ilmar Ferreira Santos
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Turbinas a gás. 2. Rotores – Dinâmica. 3. Método
dos elementos finitos. I. Santos, Ilmar Ferreira. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Análise Numérica e Experimental do
Comportamento Dinâmico de Palhetas Flexíveis

Autora: Cristina Minioli Saracho

Orientador: Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos



Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos, Presidente
DPM/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Armando Miguel Awruch
CPGEC/EE/UFRGS



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
DMC/FEM/UNICAMP

Campinas, 02 de março de 1998.

Dedicatória

Este trabalho é dedicado aos meus pais, pelo seu constante incentivo e apoio.

Agradecimentos

Em primeiro agradeço ao **Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos** pela orientação deste trabalho e pela amizade e apoio durante este período de muito trabalho (embora às vezes muito divertido).

Ao **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**, que me incentivou e inspirou meu início na carreira acadêmica, pelo constante exemplo profissional e humano.

Aos Profs. **Dr. Marco Lúcio Bittencourt** e **Dr. Mauro Jorge Atalla** pela ajuda e dicas sempre necessárias e bem-vindas.

Ao colega e grande amigo **Cláudio Alessandro de Carvalho Silva** por todos estes anos de muito estudo e amizade.

Aos amigos **Maurício Borges**, **Marcelo Becker**, **Alexandre Scalabrin**, **Rodrigo Nicoletti**, **Fábio Hildebrand Russo**, **Sabine Sirimarcos Gomes**, e todos os colegas do Departamento de Projeto Mecânico pelo apoio no trabalho, pela grande amizade, pelo carinho recebido e, porque não, pelas festas, brincadeiras e piadas.

A todos os colegas, professores e funcionários do Departamento de Projeto Mecânico por estes dois anos em que estive trabalhando junto a este departamento.

A todos os colegas e amigos da pós-graduação.

À **PETROBRAS** e ao **Eng. Antonio Carlos Severino Duarte** pelo financiamento parcial desta pesquisa e pelas informações técnicas recebidas.

Ao **CNPQ** (e o contribuinte brasileiro) pela bolsa de estudos concedida.

Em especial, ao **Paulo** pelo apoio e compreensão, quando escrever este trabalho tornou-se muito "estressante".

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Revisão Bibliográfica | 4 |
| 2.1 | Caracterização do Problema | 4 |
| 2.2 | Modelos Unidimensionais | 6 |
| 2.3 | Modelos Bidimensionais | 11 |
| 2.4 | Modelos Tridimensionais | 18 |
| 2.5 | Comportamento Dinâmico do Conjunto Rotor-Palhetas | 21 |
| 3 | Formulação das equações de movimento | 25 |
| 3.1 | Introdução | 25 |
| 3.2 | Sistemas de Referência | 27 |
| 3.3 | Energia cinética da palheta | 31 |
| 3.3.1 | Velocidade absoluta de um ponto da palheta | 31 |
| 3.3.2 | Energia cinética da palheta discretizada | 32 |
| 3.4 | Energia potencial da palheta | 36 |
| 3.4.1 | Relações de deslocamento e deformação | 36 |
| 3.4.2 | Relações entre componentes deformação e tensão. Relações constitutivas | 38 |
| 3.4.3 | Energia potencial da palheta discretizada | 39 |
| 3.5 | Equações de Movimento | 41 |
| 3.6 | Análise do problema de autovalores | 47 |
| 3.6.1 | Solução do problema de tensão inicial | 48 |
| 3.6.2 | Determinação das Freqüências Naturais | 51 |
| 4 | Implementação do Método dos Elementos Finitos | 53 |
| 4.1 | Introdução | 53 |
| 4.2 | Formulação isoparamétrica | 54 |
| 4.2.1 | Sistemas de referência local e global | 54 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.2.2 | Matriz jacobiana | 56 |
| 4.3 | Integração numérica | 58 |
| 4.4 | Expressão geral para as matrizes do elemento sólido | 59 |
| 4.4.1 | Funções de forma para o elemento sólido | 59 |
| 4.4.2 | Matriz de massa | 61 |
| 4.4.3 | Matriz de rigidez | 64 |
| 4.4.4 | Matriz de rigidez rotacional | 66 |
| 4.4.5 | Matriz de rigidez geométrica | 67 |
| 4.4.6 | Vetores de força centrífuga | 68 |
| 4.4.7 | Acoplamento entre as diversas matrizes | 69 |
| 4.5 | Método de iteração por subespaço | 69 |
| 5 | Investigações teóricas | 72 |
| 5.1 | Palheta modelada como viga delgada | 72 |
| 5.2 | Palheta modelada como placa plana | 86 |
| 5.3 | Palhetas modeladas como placas torcidas | 92 |
| 5.3.1 | Placa quadrada | 93 |
| 5.3.2 | Placa retangular | 95 |
| 5.4 | Modelo de uma palheta de forma genérica | 96 |
| 6 | Aplicações Industriais | 104 |
| 6.1 | Introdução | 104 |
| 6.2 | Modelo discretizado pelo método dos elementos finitos | 105 |
| 6.3 | Validação do modelo teórico | 107 |
| 6.4 | Frequências naturais dos 12 estágios do soprador | 111 |
| 6.4.1 | Palhetas montadas no soprador | 112 |
| 6.4.2 | Palhetas na configuração livre-livre | 115 |
| 6.5 | Análise modal numérica | 116 |
| 6.6 | Influência da rigidez do engaste sobre as frequências naturais da palheta | 120 |
| 6.7 | Diagramas de Campbell para os 12 estágios do soprador | 121 |
| 7 | Conclusões e Perspectivas Futuras | 142 |
| | Referências Bibliográficas | 145 |

Resumo

SARACHO, Cristina Minioli, *Análise Numérica e Experimental do Comportamento Dinâmico de Palhetas Flexíveis*, Campinas : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 148p. Dissertação (Mestrado)

Este trabalho apresenta a formulação das equações de movimento de palhetas flexíveis, acopladas a máquinas rotativas. Estas equações são discretizadas de acordo com o Método dos Elementos Finitos, utilizando uma abordagem tridimensional. Inicialmente, o programa, desenvolvido em linguagem MATLAB, foi utilizado para estudar a variação das frequências naturais de palhetas de formas geométricas simples em função da velocidade de rotação da máquina. Em uma segunda etapa, este programa foi aplicado na análise dinâmica das palhetas de um compressor industrial. O modelo numérico desenvolvido para a palheta foi ajustado, posteriormente, a partir de medidas experimentais das frequências da palheta, realizadas em três condições diferentes : livre-livre, montada no compressor e engastada em uma estrutura montada no laboratório. A partir das simulações numéricas e dos diagramas de Campbell das diversas palhetas, as velocidades críticas do compressor são estimadas. Estas velocidades críticas são avaliadas em duas condições distintas: nas condições normais de operação da máquina e durante sua curva de velocidade de partida.

Palavras Chave

Palhetas Flexíveis, Dinâmica de Rotores

Abstract

SARACHO, Cristina Minioli, *Numerical and Experimental Analysis of Flexible Blades Dynamic Behavior*, Campinas : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 148p. Dissertação (Mestrado)

The development of the equations of motion for flexible blades coupled to rotating machines is presented in this work. These equations are discretized using the Finite Element Method, with a three-dimensional approach. It was firstly developed a computer program using the MATLAB language in order to study the natural frequencies variation in blades with simple geometric shapes, as a function of the angular velocity. Afterwards, this computer program was employed to perform the dynamic analysis of blades of a industrial compressor. The blade numerical model was updated with experimental measurements of its natural frequencies for three different conditions : free-free, mounted on the compressor and clamped in a structure. From numerical simulations and Campbell diagrams of the blades, the critical speeds of the compressor are estimated in two different conditions : normal operation and during its start-up velocity curve.

Keywords

Flexible Blades, Rotor Dynamics

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Forma genérica de uma palheta pertencente a um compressor | 4 |
| 2.2 | Compressor montado com diversos estágios de palhetas | 5 |
| 2.3 | Protótipo construído para o conjunto rotor-palhetas (Santos e Colla, 1997) | 23 |
| 3.1 | Sistemas de referência para descrever o movimento do rotor (Santos e Colla, 1997) | 28 |
| 3.2 | Vetor de posição de um ponto qualquer da palheta | 31 |
| 4.1 | Transformação de coordenadas local e global | 55 |
| 4.2 | Elemento distorcido - ângulo interno maior que 180° | 58 |
| 4.3 | Elemento sólido - localização dos vinte nós que formam elemento | 60 |
| 5.1 | Principais dimensões palheta modelada como uma viga delgada | 73 |
| 5.2 | Variação das seis primeiras freqüências naturais da palheta (viga delgada) com o número de elementos na direção x | 75 |
| 5.3 | Malha utilizada para discretizar a palheta como uma viga unidimensional . | 77 |
| 5.4 | Forma dos seis primeiros modos de vibração da viga engastada. | 78 |
| 5.5 | Variação das freqüências naturais da viga com o rotação Ω | 82 |
| 5.6 | Influência do ângulo de fixação na primeira freqüência natural da viga. . . | 87 |
| 5.7 | Principais dimensões da palheta modelada como uma placa retangular . . . | 87 |
| 5.8 | Malha utilizada para discretizar uma placa retangular de relação $l/w = 2$. | 89 |
| 5.9 | Forma dos oito primeiros modos de vibração de uma placa retangular engastada. | 90 |
| 5.10 | Variação das freqüências naturais da placa com o rotação Ω | 92 |
| 5.11 | Ângulo de pré-torção da palheta | 92 |
| 5.12 | Forma dos oito primeiros modos de vibração de uma placa quadrada engastada. | 94 |
| 5.13 | Variação das freqüências naturais da placa quadrada com o ângulo de torção. | 95 |
| 5.14 | Influência do ângulo de pré-torção nas freqüências de uma placa retangular | 96 |
| 5.15 | Forma dos seis primeiros modos de vibração de uma placa retangular engastada, com um ângulo de pré-torção de 30° | 97 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.16 | Diagrama de Campbell para uma placa torcida com ângulo de 30 | 98 |
| 5.17 | Diferentes malhas utilizadas para discretizar a palheta | 99 |
| 5.18 | Forma dos seis primeiros modos de vibração - palheta retangular | 100 |
| 5.19 | Forma dos seis primeiros modos de vibração palheta em forma de aerofólio | 101 |
| 5.20 | Forma dos seis primeiros modos de vibração - palheta torcida em forma de aerofólio | 102 |
| 5.21 | Diagramas de Campbell para as diferentes palhetas | 103 |
| 6.1 | Malha discretizada da palheta utilizando 108 elementos e 2322 graus de liberdade | 105 |
| 6.2 | Palhetas em diferentes condições de montagem - testes experimentais | 108 |
| 6.3 | Malha discretizada da palheta utilizando 108 elementos e 2322 graus de liberdade | 117 |
| 6.4 | Primeiro modo de vibração da palheta - primeiro modo de viga | 117 |
| 6.5 | Segundo modo de vibração da palheta - primeiro modo de torção | 118 |
| 6.6 | Terceiro modo de vibração da palheta - primeiro modo de placa | 118 |
| 6.7 | Quarto modo de vibração da palheta - segundo modo de viga | 119 |
| 6.8 | Quinto modo de vibração da palheta - segundo modo de torção | 119 |
| 6.9 | Variação das frequências em função da rigidez do engaste | 120 |
| 6.10 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao primeiro estágio do soprador | 122 |
| 6.11 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao segundo estágio do soprador | 123 |
| 6.12 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao terceiro estágio do soprador | 124 |
| 6.13 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao quarto estágio do soprador | 125 |
| 6.14 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao quinto estágio do soprador | 126 |
| 6.15 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao sexto estágio do soprador | 127 |
| 6.16 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao sétimo estágio do soprador | 128 |
| 6.17 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao oitavo estágio do soprador | 129 |
| 6.18 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao nono estágio do soprador | 130 |
| 6.19 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao décimo estágio do soprador | 131 |

| | | |
|------|---|-----|
| 6.20 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao décimo primeiro estágio do soprador | 132 |
| 6.21 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao décimo segundo estágio do soprador | 133 |
| 6.22 | Diagrama de partida do compressor | 134 |
| 6.23 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao primeiro estágio do soprador durante a partida da máquina | 135 |
| 6.24 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao segundo estágio do soprador durante a partida da máquina | 135 |
| 6.25 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao terceiro estágio do soprador durante a partida da máquina | 136 |
| 6.26 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao quarto estágio do soprador durante a partida da máquina | 136 |
| 6.27 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao quinto estágio do soprador durante a partida da máquina | 137 |
| 6.28 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao sexto estágio do soprador durante a partida da máquina | 137 |
| 6.29 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao sétimo estágio do soprador durante a partida da máquina | 138 |
| 6.30 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao oitavo estágio do soprador durante a partida da máquina | 138 |
| 6.31 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao nono estágio do soprador durante a partida da máquina | 139 |
| 6.32 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao décimo estágio do soprador durante a partida da máquina | 139 |
| 6.33 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao décimo primeiro estágio do soprador durante a partida da máquina | 140 |
| 6.34 | Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao décimo segundo estágio do soprador durante a partida da máquina | 140 |

Lista de Tabelas

| | | |
|------|---|----|
| 4.1 | Localização dos Pontos de Integração | 59 |
| 4.2 | Coordenadas do Nós de um Elemento Sólido | 60 |
| 4.3 | Funções de Forma para um Elemento Sólido | 61 |
| 4.4 | Derivadas das Funções de Forma em relação a variável s : $\frac{\partial N_i}{\partial s}$ | 62 |
| 4.5 | Derivadas das Funções de Forma em relação a variável t : $\frac{\partial N_i}{\partial t}$ | 62 |
| 4.6 | Derivadas das Funções de Forma em relação a variável r : $\frac{\partial N_i}{\partial r}$ | 63 |
| 5.1 | Propriedades geométricas e do material da palheta | 73 |
| 5.2 | Frequências naturais da viga livre-livre - Comparação com a solução analítica e aproximada (n_x : número de elementos utilizados na direção x). | 75 |
| 5.3 | Frequências naturais da viga engastada - Comparação com a solução analítica e aproximada (n_x : número de elementos utilizados na direção x). | 76 |
| 5.4 | Comparação entre as frequências naturais da viga com 16 e 32 elementos na direção x . As frequências são dadas em rad/s | 76 |
| 5.5 | Comparação entre diferentes abordagens para análise das frequências de uma viga - vibrações no plano de rotação. | 81 |
| 5.6 | Comparação entre diferentes abordagens para análise das frequências de uma viga - vibrações para fora do plano de rotação. | 81 |
| 5.7 | Comparação entre a primeira frequência natural de flexão normalizada de flexão calculada numericamente e pela equação (5.12) | 84 |
| 5.8 | Comparação entre a primeira frequência natural de flexão normalizada calculada numericamente e pelo coeficiente de Southwell ($R/L = 0$) | 85 |
| 5.9 | Comparação entre a primeira frequência natural de flexão normalizada calculada numericamente e pelo coeficiente de Southwell ($R/L = 1$) | 85 |
| 5.10 | Comparação entre a segunda frequência natural de flexão normalizadas calculadas numericamente e pelo coeficiente de Southwell | 86 |
| 5.11 | Variação das frequências naturais da palheta com o refinamento da malha na direção x . As frequências são dadas em rad/s | 88 |
| 5.12 | Variação das frequências naturais da palheta com o refinamento da malha na direção y . As frequências são dadas em rad/s | 88 |
| 5.13 | Comparação entre a solução analítica e numérica para uma placa retangular | 91 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.14 | Comparação das frequências naturais da palheta quadrada com a solução analítica | 93 |
| 5.15 | Variação das frequências naturais da palheta com o a forma. As frequências são dadas em <i>rad/s</i> | 99 |
| 6.1 | Quatro primeiras frequências da palheta livre-livre do estágio 1 | 109 |
| 6.2 | Frequências da palheta engastada - estágio 1 | 109 |
| 6.3 | Frequências da palheta livre-livre do estágio 4 | 110 |
| 6.4 | Frequências da palheta engasta - estágio 4 | 110 |
| 6.5 | Comprimento das palhetas dos diversos estágios do soprador | 111 |
| 6.6 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 1 | 112 |
| 6.7 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 2 | 112 |
| 6.8 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 3 | 113 |
| 6.9 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 4 | 113 |
| 6.10 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 5 | 113 |
| 6.11 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 6 | 113 |
| 6.12 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 7 | 113 |
| 6.13 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 8 | 114 |
| 6.14 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 9 | 114 |
| 6.15 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 10 | 114 |
| 6.16 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 11 | 114 |
| 6.17 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 12 | 114 |
| 6.18 | Frequências da palheta livre-livre - estágio 1 | 115 |
| 6.19 | Frequências da palheta livre-livre - estágio 2 | 115 |
| 6.20 | Frequências da palheta livre-livre - estágio 4 | 115 |
| 6.21 | Frequências da palheta livre-livre - estágio 6 | 115 |
| 6.22 | Frequências da palheta livre-livre - estágio 10 | 115 |
| 6.23 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 1 | 122 |
| 6.24 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 2 | 123 |
| 6.25 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 3 | 124 |
| 6.26 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 4 | 125 |
| 6.27 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 5 | 126 |
| 6.28 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 6 | 127 |
| 6.29 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 7 | 128 |
| 6.30 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 8 | 129 |
| 6.31 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 9 | 130 |

| | | |
|------|---|-----|
| 6.32 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 10 | 131 |
| 6.33 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 11 | 132 |
| 6.34 | Frequências da palheta montada no soprador - estágio 12 | 133 |

Nomenclatura

Letras latinas

| | |
|---------------------|--|
| B_I | sistema de referência inercial (definido pelos vetores unitários $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$) |
| B_1 | sistema de referência móvel (definido pelos vetores unitários $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$) |
| B_2 | sistema de referência móvel (definido pelos vetores unitários $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$) |
| B_3 | sistema de referência móvel (definido pelos vetores unitários $\vec{i}_3, \vec{j}_3, \vec{k}_3$) |
| x_0, y_0, z_0 | coordenadas cartesianas da base B_I |
| x_1, y_1, z_1 | coordenadas cartesianas da base B_1 |
| x_2, y_2, z_2 | coordenadas cartesianas da base B_2 |
| x, y, z | coordenadas cartesianas da base B_3 |
| \mathbf{T}_I | matriz de transformação da base B_I para a base B_1 |
| \mathbf{T}_β | matriz de transformação da base B_1 para a base B_2 |
| \mathbf{T}_ϕ | matriz de transformação da base B_2 para a base B_3 |
| \mathbf{u} | vetor de deformação elástica da palheta |
| $\dot{\mathbf{u}}$ | vetor de velocidade relativa de um ponto da palheta |
| \mathbf{p} | vetor de posição de um ponto qualquer da palheta |
| \mathbf{v} | vetor de velocidade absoluta de um ponto qualquer da palheta |
| T | energia cinética |
| U | energia potencial |
| E | módulo de elasticidade |
| \mathbf{q} | vetor com os deslocamentos nodais de cada elemento |
| $\dot{\mathbf{q}}$ | vetor com as velocidades nodais de cada elemento |
| \mathbf{c} | vetor das coordenadas nodais de um elemento |
| \mathbf{N} | matriz das funções de forma |
| \mathbf{B} | matriz com as derivadas das funções de forma |
| \mathbf{H} | matriz com as derivadas das funções de forma |
| \mathbf{D} | matriz das propriedades do material |
| \mathbf{M} | matriz de massa |
| \mathbf{G} | matriz giroscópica |
| \mathbf{K}_e | matriz de rigidez estrutural |
| \mathbf{K}_g | matriz de rigidez geométrica |
| \mathbf{K}_Ω | matriz de rigidez rotacional |
| \mathbf{K}_Ψ | matriz de rigidez centrípeta |
| \mathbf{f}_{ext} | vetor de forças externas |
| \mathbf{f}_Ω | vetor de força centrífuga |
| \mathbf{f}_Ψ | vetor de força centrípeta |

| | |
|-----------------------------|--|
| $\mathbf{f}_{\mathbf{r}_0}$ | vetor de força de desbalanço |
| $\mathbf{f}_{\mathbf{r}_0}$ | vetor de força de desbalanço |
| \mathbf{q}_0 | vetor de posição de equilíbrio |
| u | deslocamento na direção x |
| v | deslocamento na direção y |
| w | deslocamento na direção z |
| s, t, r | coordenadas do sistema local de referência |
| N_i^e | i -ésima função de forma do elemento e |
| x_i^e | coordenada x do i -ésimo nó do elemento e |
| y_i^e | coordenada y do i -ésimo nó do elemento e |
| z_i^e | coordenada z do i -ésimo nó do elemento e |
| u_i^e | deslocamento na direção x do i -ésimo nó do elemento e |
| v_i^e | deslocamento na direção y do i -ésimo nó do elemento e |
| w_i^e | deslocamento na direção z do i -ésimo nó do elemento e |
| \mathbf{J} | matriz jacobiana da transformação entre os sistemas local e global |
| H_i | fatores de ponderação para integração numérica |
| l | comprimento da palheta |
| w | largura da palheta |
| h | espessura da palheta |
| I | momento de inércia de área |
| A | área da seção transversal |

Letras gregas

| | |
|---------------------------------|---|
| Γ | rotação em torno do eixo z_0 |
| β | rotação em torno do eixo y_1 |
| ϕ | rotação em torno do eixo x_2 |
| $\dot{\Gamma}$ | velocidade angular relativa entre os sistemas de referência B_I e B_1 |
| $\dot{\beta}$ | velocidade angular relativa entre os sistemas de referência B_1 e B_2 |
| $\boldsymbol{\omega}$ | vetor de velocidade angular |
| $\boldsymbol{\Omega}$ | matriz anti-simétrica com as componentes do vetor $\boldsymbol{\omega}$ |
| $\boldsymbol{\alpha}$ | vetor de aceleração angular |
| $\boldsymbol{\Psi}$ | matriz anti-simétrica com as componentes do vetor $\boldsymbol{\alpha}$ |
| $\dot{\phi}$ | velocidade angular relativa entre os sistemas de referência B_2 e B_3 |
| ρ | densidade do material |
| ν | coeficiente de Poisson |
| $\boldsymbol{\varepsilon}$ | vetor de deformação |
| $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ | parte linear do vetor de deformação |
| $\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}$ | parte não-linear do vetor de deformação |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | vetor de tensões |
| $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ | vetor de deformação inicial |
| $\boldsymbol{\sigma}_0$ | vetor de tensão inicial |
| $\boldsymbol{\delta}$ | vetor com as derivadas do vetor de deformação |
| $\boldsymbol{\varepsilon}$ | vetor de deformação |
| ξ | pontos de integração |
| ∂ | matriz de operadores diferenciais |
| $\boldsymbol{\Omega}$ | velocidade angular do rotor |

| | |
|--------------|---|
| Ω_N | velocidade angular normalizada do rotor |
| ω | freqüências naturais |
| ω_N | freqüências naturais normalizadas |
| ψ | ângulo de fixação da palheta ao rotor |
| γ | ângulo de pré-torção da palheta |
| $\bar{\phi}$ | coeficiente de Southwell |
| ϕ_1 | coeficiente de Southwell |
| ϕ_2 | coeficiente de Southwell |

Subscritos

$_{B_1}\mathbf{s}$ vetor genérico, o subscrito anterior indica que o vetor está representado na base B_1

Vetores e matrizes

negrito minúsculo vetor
negrito maiúsculo matriz

Capítulo 1

Introdução

As palhetas flexíveis acopladas a máquinas rotativas são parte de um equipamento elaborado com grandes exigências de confiabilidade e eficiência, e que operam em condições severas de temperatura e rotação.

O projeto de máquinas rotativas, como turbinas e compressores de turbinas a gás, por exemplo, tem como requisitos: alta eficiência, baixo consumo de combustível, baixo peso (no caso da indústria aeronáutica) e, por outro lado, grandes exigências quanto a confiabilidade dos componentes e uma longa vida da máquina. Para turbinas aeronáuticas, a quebra de um dos componentes pode ter conseqüências catastróficas. Em estações de geração de energia, a quebra de um componente pode implicar na suspensão da operação e em grandes prejuízos, ou mesmo comprometer o funcionamento futuro da máquina.

Em particular, as palhetas representam o componente mais crítico do projeto de turbinas e compressores, pois estão sujeitas a falhas por fadiga causadas por vibrações excessivas e a um comportamento dinâmico instável. Portanto, a análise das características dinâmicas das palhetas, com o estudo das frequências naturais e modos de vibração, é essencial para assegurar que, nas condições de operação da máquina, os níveis de tensão e deformação para as palhetas se mantenham dentro de limites seguros.

De acordo com os critérios de projeto de turbinas e compressores as palhetas devem ter formas geométricas complexas, semelhantes a placas curvilíneas e torcidas, sujeitas a grandes velocidades de rotação e, conseqüentemente, grandes forças de corpo distribuídas resultantes da aceleração centrífuga. Estas características geométricas e operacionais tornam o estudo do comportamento dinâmico das palhetas um dos problemas mais sérios e complexos da Engenharia de Máquinas, pois envolve diversas áreas dentro da Mecânica dos Sólidos. Entre estas podem ser citadas a modelagem matemática das deformações das palhetas, dinâmica da rotação, acoplamento de efeitos rotacionais em um sistema elástico, métodos numéricos de discretização de sistemas contínuos e métodos de solução de problemas de autovalores.

Inicialmente é apresentada uma revisão bibliográfica, em que os diversos modelos empregados para a análise dinâmica de palhetas são discutidos. Os primeiros modelos desenvolvidos para descrever o comportamento da palheta foram modelos unidimensionais, baseados nos padrões de deslocamento de vigas. Sucessivamente, os efeitos geométricos e dinâmicos foram sendo incorporados ao modelo para melhor aproximar as palhetas reais. Embora os modelos unidimensionais disponíveis atualmente incorporem muitos efeitos geométricos das palhetas, estes modelos mostram-se pouco adequados para prever o comportamento de palhetas muito curtas ou que apresentam formas da seção transversal muito curvadas. Para tratar este tipo de problema foram desenvolvidos modelos bidimensionais, baseados nos padrões de deslocamento de placas e cascas, que permitem acomodar melhor as características citadas anteriormente. Por outro lado, para palhetas muito espessas, os modelos bidimensionais também mostram-se limitados, sendo que neste caso uma formulação tridimensional pode mostrar-se mais adequada. Portanto, a escolha do modelo que represente melhor cada tipo de palheta depende das características geométricas da mesma e das faixas de operação da máquina.

O modelo matemático tridimensional é o mais genérico, pois permite a inclusão dos mais diversos efeitos geométricos na sua formulação. A grande vantagem da formulação tridimensional é permitir a análise dinâmica de uma palheta de qualquer formato e geometria. Entretanto, devido à maior dimensão do modelo é necessário um maior cuidado no armazenamento das matrizes do sistema discretizado.

Neste trabalho, as equações de movimento da palheta são desenvolvidas utilizando um modelo tridimensional e o Método dos Elementos Finitos. A metodologia empregada no desenvolvimento destas equações de movimento é a Dinâmica Lagrangeana. Primeiramente, as equações são obtidas para o caso mais genérico do movimento do rotor, sendo que este pode estar acelerando ou estar desbalanceado. Este tipo de movimento genérico do rotor leva a equações não-lineares para a palheta. Estas equações podem ser linearizadas assumindo que o rotor opera com velocidade constante. O movimento da palheta, para este caso, é linear, sendo que a mesma vibra em torno de uma posição de equilíbrio. Dessa forma é possível obter uma linearização do problema e, conseqüentemente, a análise dos autovalores e autovetores, em função da velocidade de rotação do rotor.

Estas equações linearizadas são implementadas utilizando elementos sólidos de vinte nós (conhecidos como *brick elements*). As matrizes de massa e rigidez (estrutural, rotacional e geométrica) podem ser avaliadas apenas numericamente. Devido ao modelo tridimensional empregado, a dimensão destas matrizes é considerável, embora estas sejam esparsas. Para os casos analisados neste trabalho, apenas as primeiras freqüências estão dentro da faixa de interesse. Assim, o método de iteração por subespaço é empregado no cálculo dos primeiros autovalores e autovetores da palheta. O programa desenvolvido foi implementado em linguagem MATLAB.

O programa implementado foi empregado, inicialmente, para estudar o comportamento dinâmico de palhetas de geometrias simples, retangulares e quadradas. O objetivo destas primeiras análises é verificar como as frequências da palheta são influenciadas pela velocidade de rotação do rotor. É observado como as características geométricas da palheta, tais como comprimento, espessura e ângulo de pré-torção, alteram as frequências da palheta. Posteriormente, é analisado, também, como a interação entre estas características geométricas e a velocidade de rotação influenciam a dinâmica da palheta.

O mesmo programa é utilizado para a análise dinâmica das palhetas de um compressor da Refinaria do Vale do Paraíba (Petrobrás). Este compressor axial é formado por doze estágios de quarenta e três palhetas cada. A principal característica das palhetas de um compressor é uma baixa relação entre altura e espessura, além de serem relativamente espessas. Dessa forma, o modelo tridimensional é o tipo de modelo mais indicado para análise das palhetas de um compressor. O modelo teórico construído para discretizar a palheta, pelo Método dos Elementos Finitos, é validado experimentalmente, com as medidas das frequências naturais da palheta em três condições diferentes : palheta livre-livre, montada no compressor e engastada em uma estrutura no laboratório. As velocidades críticas do sistema são estimadas construindo os diagramas de Campbell para cada uma das palhetas dos doze estágios do compressor. Estes diagramas são apresentados para duas condições distintas : operação normal do compressor e durante curva de partida da máquina.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Caracterização do Problema

A forma de uma palheta genérica de uma turbina ou compressor apresenta vários parâmetros que caracterizam sua geometria. A palheta é torcida ao longo de seu comprimento. O nível de torção da palheta é medido através da variação do ângulo da seção transversal ao longo do seu comprimento tendo como origem a seção transversal da região onde a palheta está fixada. As seções transversais típicas tem a forma de aerofólios e variam de espessura ao longo do comprimento (direção longitudinal). A palheta apresenta, assim, uma curvatura na direção transversal ao seu comprimento, ou seja, na direção de sua largura ou corda. Tanto a curvatura quanto a espessura diminuem ao longo da direção longitudinal. A largura da palheta também pode variar ao longo do comprimento. Outro parâmetro importante que caracteriza a palheta é a relação entre seu comprimento e largura. Se esta relação é alta a palheta é considerada longa, caso contrário a palheta é chamada de curta. A figura (2.1) apresenta uma palheta pertencente a um compressor. Nesta figura podem ser observadas as características geométricas da palheta.

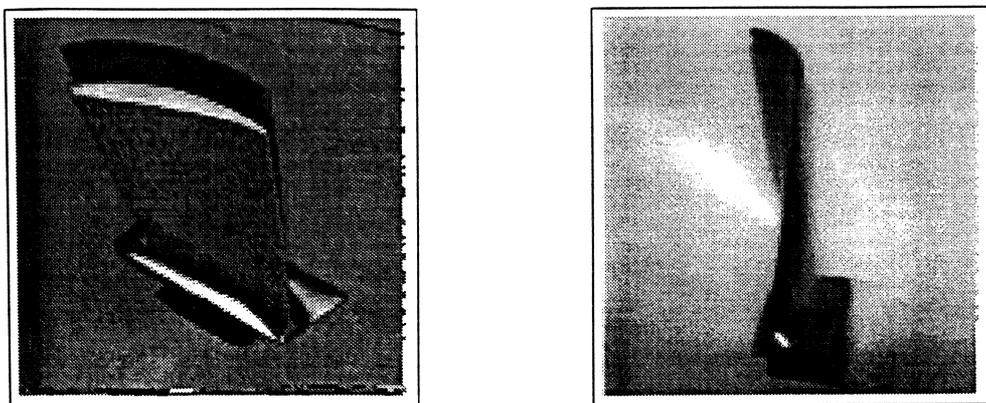


Figura 2.1: Forma genérica de uma palheta pertencente a um compressor

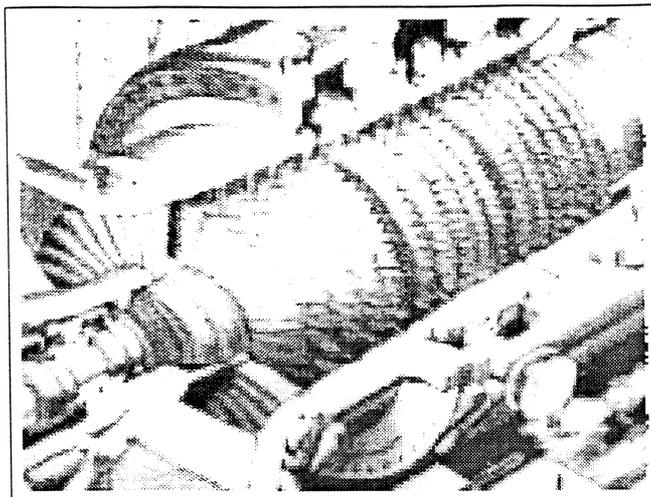


Figura 2.2: Compressor montado com diversos estágios de palhetas

Palhetas com mesma geometria são montadas na periferia de um disco circular com auxílio de juntas, formando um estágio do compressor ou turbina, de acordo com a figura (2.2). O conjunto do disco e das palhetas apresentam uma velocidade angular elevada em relação ao plano perpendicular do disco. Como resultado, as forças centrífugas são muito elevadas e contribuem para aumentar a rigidez da palheta (Leissa, 1981). Em geral, as palhetas são montadas com um ângulo em relação ao plano de rotação. Este ângulo é chamado de ângulo de fixação.

Um modelo analítico que descreva adequadamente a deformação das palhetas deve considerar a influência dos diversos parâmetros geométricos envolvidos e também os efeitos de inércia de rotação, aceleração centrífuga e outros efeitos dinâmicos.

O modelo mais simples para descrever o padrão de deformação das palhetas é o de uma viga unidimensional. Ainda que este modelo permita incorporar os efeitos de pré-torção, ângulo de fixação da palheta, variação da seção transversal, espessura e curvatura, a teoria unidimensional é limitada a palhetas relativamente longas e não muito finas. Para palhetas com relação entre o comprimento e a largura baixa, o modelo de viga é insuficiente para descrever os modos de vibração e as frequências associadas. Neste caso a utilização de cascas ou placas bidimensionais mostra-se mais adequada e conduz a resultados mais realísticos. Entretanto, esse tipo de modelo também mostra-se insatisfatório para palhetas que não são muito finas. Uma formulação tridimensional, neste caso, pode fornecer uma análise mais apropriada.

A escolha do modelo que melhor representa o comportamento da palheta depende, portanto, das características particulares de cada caso. Os parâmetros que devem sempre ser considerados para a escolha do tipo de modelo (uni, bi ou tridimensional) que deve ser empregado são as características geométricas da palheta e a qualidade esperada dos resultados. Embora um modelo de maior dimensão possa parecer mais completo e geral

para todos os casos, a formulação decorrente é mais complexa e cara computacionalmente.

Historicamente, os primeiros modelos formulados foram os unidimensionais a partir da década de 60. Sucessivamente, os efeitos geométricos e dinâmicos foram sendo incorporados. Atualmente, existe uma grande quantidade de trabalhos publicados que tratam da modelagem de palhetas como vigas unidimensionais. O trabalho de revisão elaborado por Rao (1987) relaciona mais de cem referências que tratam do modelo unidimensional de palhetas rotativas ou não. O trabalho de Rao também relaciona modelos bi e tridimensionais. O autor procura apenas listar diversos trabalhos que se referem ao problema de vibrações de palhetas em turbinas e compressores, incluindo também a discussão de vibrações induzidas pelo acoplamento aerodinâmico e outros tipos de força de excitação, mecanismos de amortecimento da vibração das palhetas e fatores que influenciam a resistência à fadiga da palheta. Porém, no presente trabalho o objeto de interesse é o estudo de vibrações livres de palhetas rotativas.

Os primeiros modelos bidimensionais aplicados na análise de vibrações de palhetas foram desenvolvidos durante a década de 70 e 80. Estas formulações são baseadas no padrão de deslocamento de placas e cascas. Ainda nesta época surgiram as primeiras formulações tridimensionais. Leissa (1981), em um amplo trabalho de revisão, procura apresentar e discutir as características, vantagens e limitações das três formulações citadas anteriormente para os trabalhos publicados nas décadas de 60 e 70, além de caracterizar a importância do estudo da vibração das palhetas para assegurar o funcionamento de turbomáquinas.

2.2 Modelos Unidimensionais

A formulação unidimensional, baseada no padrão de deformação de vigas, é mais adequada para estudar os fenômenos de vibração presentes em palhetas relativamente longas. Devido às características geométricas e operacionais a que está submetida, o modelo deve considerar em sua formulação a influência de parâmetros, tais como: ângulo de pré-torção, ângulo de fixação da palheta, seção transversal não uniforme e variável na direção longitudinal. Para palhetas não muito finas outros efeitos como inércia de rotação e tensão de cisalhamento devem ser considerados. Se a fixação da palheta ao disco não for rígida, aquela pode ser aproximada por molas de translação e rotação. A escolha da melhor representação unidimensional da palheta depende, conforme discutido anteriormente, dos parâmetros geométricos e condições de operação da máquina (Leissa, 1981).

A metodologia de formulação das equações de movimento consiste, primeiramente, em definir sistemas de referência auxiliares que representam as rotações de corpo rígido da máquina (rotor). Para cada corpo, rígido ou flexível, de um sistema é definido um

sistema de referência próprio solidário ao corpo (Santos, 1997). Em geral, as equações são formuladas para apenas uma das palhetas do conjunto, pois para um compressor ou turbina é desejado que todas as palhetas apresentem as mesmas características, embora isto não seja sempre verificado. Os deslocamentos e deformações da viga são então definidas em relação ao sistema de referência que é solidário a cada uma das palhetas (Santos e Colla, 1997). Neste sistema de referência devem ser determinadas também as expressões para as velocidades e acelerações absolutas de uma partícula qualquer pertencente à viga, bem como as expressões para a energia cinética e potencial associadas ao movimento. A partir da avaliação das acelerações e energia do sistema e com auxílio da teoria da Mecânica Analítica, como o Princípio de Hamilton e as Equações de Lagrange, podem ser obtidas as equações de movimento que caracterizam o comportamento da palheta (Canergie, 1967).

Os primeiros trabalhos desenvolvidos com o objetivo de formular equações de movimento de uma palheta rotativa, considerando todos os efeitos geométricos e inerciais citados anteriormente, foram propostos por Carnegie durante a década de 60. Nestes trabalhos iniciais, o objetivo é apenas a determinação das equações de movimento, sendo que métodos numéricos para a resolução das mesmas foram desenvolvidos posteriormente. Os vários trabalhos do autor publicados neste período estão discutidos de forma comparativa por Leissa e Ewing (1983). Com a análise destas equações de movimento algumas conclusões a respeito do comportamento das palhetas podem ser destacadas :

- os deslocamentos u e v , nas direções perpendiculares à longitudinal, e a deformação torsional na direção à linha longitudinal são acopladas, ou seja, os modos de vibração de flexão e torção são acoplados. Isto ocorre porque as seções transversais (supostas em forma de aerofólios) não são simétricas e o centro de flexão da seção transversal não coincide com o centróide da área;
- a rigidez torsional da palheta deve ser corrigida, pois os valores obtidos pela teoria clássica, resolvendo o problema de torção de St. Venant (Timoshenko e Goodier, 1970), resulta em valores subestimados. Isto ocorre porque a palheta está engastada em um dos lados e o problema de St. Venant é resolvido para vigas que estão livres em ambas as extremidades. Conseqüentemente a teoria clássica resulta em um modelo menos rígido que o real. Nos trabalhos desenvolvidos por Carnegie (1967), o autor desenvolve expressões para corrigir a rigidez torsional, denominando-os os fatores de correção torsional;
- os efeitos devido às forças de cisalhamento implicam em uma deformação resultante que é proporcional à diferença entre derivada dos deslocamentos totais u e v nas direções perpendiculares à longitudinal e o ângulo devido à deformação por flexão pura apenas. Com isto duas novas quantidades devem ser avaliadas. A rigidez associada ao cisalhamento é dependente da área e do fator de distribuição de tensão ao longo da seção transversal (Timoshenko e Goodier, 1970);

- a inércia de rotação é levada em consideração no desenvolvimento das equações de movimento quando se adicionam novos termos à expressão da energia cinética, obtida apenas com os termos de velocidade de uma partícula da viga. Estes termos são significativos apenas quando as velocidades de rotação são muito elevadas;
- a influência da velocidade de rotação do rotor sobre as frequências naturais da palheta é incluída posteriormente na expressão da energia cinética da palheta, incluindo tanto os efeitos de estabilização (aumento da rigidez) e desestabilização (diminuição da rigidez) das forças centrífugas. Ressalta-se, no entanto, que nestes trabalhos não fica muito claro como estes termos influenciam as frequências naturais das palhetas. Posteriormente, Simo e Vu-Quoc (1987), Simo e Vu-Quoc (1986a) e Simo e Vu-Quoc (1986b) apresentam formulações que procuram discutir o papel da velocidade de rotação e força centrífuga, no comportamento geral do sistema;
- a velocidade angular do rotor é suposta constante, mas os efeitos dinâmicos devido às forças de Coriolis são considerados nestas formulações;
- as equações de movimento são obtidas a partir da determinação dos funcionais de energia potencial e cinética para a viga. Com a utilização do método variacional e do princípio de Hamilton, um sistema de equações integrais-diferenciais são determinadas para representar o comportamento dinâmico da pá (Carnegie, 1967; Leissa e Ewing, 1983).

Embora muitos autores tenham desenvolvido formulações para determinar equações de movimento que descrevam o comportamento de uma palheta a partir de uma viga unidimensional (Leissa, 1981; Rao, 1987), os trabalhos propostos por Carnegie ainda permanecem o mais claros e rigorosos na consideração dos diversos efeitos envolvidos na dinâmica da palheta.

Os efeitos dinâmicos devido à aceleração do rotor (velocidade angular variável) foram incorporados a estas equações de movimento posteriormente por Vyas e Rao (1992). Neste trabalho as equações são obtidas seguindo a mesma metodologia proposta por Carnegie (1967), através do método variacional e do princípio de Hamilton. A influência da aceleração de Coriolis sobre o comportamento das palhetas ainda é discutida (Leissa, 1981; Leissa e Ewing, 1983), pois este efeito está associado a termos não-lineares (de ordem mais elevada), mas segundo Vyas e Rao (1992), para palhetas mais longas e delgadas submetidas a elevadas velocidades de rotação, os seus efeitos não são mais desprezíveis, pois nestas condições os termos não-lineares que foram desprezados em uma primeira aproximação devem ser considerados. A variação da velocidade angular do rotor é considerada apenas para análise de resposta do sistema quando submetido a perturbações em sua velocidade de rotação ou para análise transiente do comportamento dinâmico do sistema.

Na análise dinâmica transiente da palheta as aproximações introduzidas para determinar as equações diferenciais lineares de movimento não são suficientes para descrever todos os efeitos dinâmicos presentes. Para o cálculo das frequências naturais, o sistema é suposto em equilíbrio, ou seja, oscila com pequenas amplitudes (linearmente) em torno de uma posição de equilíbrio, o que não acontece quando o rotor está acelerando. As forças envolvidas neste último caso, por exemplo forças centrífugas, resultam em grandes deformações longitudinais e, portanto, inviabilizando a linearização do tensor de deformações. A utilização de uma teoria linear de viga resulta em uma diminuição (aparente) da rigidez de flexão da palheta. Simo e Vu-Quoc (1987) demonstraram que esta diminuição da rigidez ocorre devido a transferência parcial da ação da força centrífuga para a equação de flexão. O termo transferido é negativo, chamado também de termo "desestabilizador" pelo autor, e é responsável pela diminuição aparente da rigidez estrutural da palheta. Os autores também demonstraram que, se os termos não-lineares de segunda ordem são considerados, outras parcelas relacionadas com a ação da força centrífuga também são transferidas para a equação de flexão. Estas novas parcelas se sobrepõem ao termo "desestabilizador" de maneira que a rigidez da palheta é aumentada devido à ação da força centrífuga, conforme esperado. Estes termos de "estabilização" e "desestabilização", ou em outras palavras, de aumento e redução da rigidez estrutural da palheta, foram incluídos na formulação de Canergie (1967), mas sua influência não estava elucidada. Os efeitos dinâmicos de estruturas flexíveis sujeitas a grandes deformações que realizam movimentos tanto de rotação, como no caso das palhetas, como translação são discutidos por Simo e Vu-Quoc (1986a) e Simo e Vu-Quoc (1986b), mas estes trabalhos, embora mais genéricos, estão fora do escopo deste texto, pois abordam o desenvolvimento de equações da mecânica do contínuo para estudar o caso geral de uma barra tridimensional, girante, com grandes deformações

A solução para os sistemas de equações de movimento pode ser obtida apenas com auxílio de métodos de aproximação e métodos numéricos. Os métodos mais empregados na análise deste tipo de problemas são o método de Rayleigh, o método de Ritz e o método de Galerkin, que são baseados na minimização dos funcionais de energia supondo que os deslocamentos e rotações são funções polinomiais, cujos coeficientes devem ser calculados (Leissa, 1981). Estas funções são apenas dependentes das coordenadas espaciais. Recentemente, outras técnicas como o Método dos Elementos Finitos, baseado nos métodos anteriores, tem se tornado mais difundidas para análise do comportamento dinâmico da palheta (Leissa, MacBain e Kielb, 1984). A avaliação das frequências naturais do sistema é obtida através da solução do problema de autovalor formulado a partir da discretização espacial obtida anteriormente.

A influência dos diversos fatores geométricos e efeitos inerciais da palheta podem ser testados e comparados através da solução de diversos problemas. A velocidade angular de rotação, que é geralmente o primeiro fator testado em uma formulação, atua de maneira a aumentar a rigidez da estrutura e conseqüentemente aumentar as frequências naturais da palheta. Putter e Manor (1978) desenvolveram uma formulação empírica para relacionar

as frequências naturais de uma viga não-rotativa às frequências da palheta rotativa. Os autores estabeleceram uma relação segundo a qual a frequência natural da palheta varia proporcionalmente com o quadrado da velocidade angular. A relação de proporção é dependente da relação entre o raio do disco e o comprimento total da palheta e do ângulo de fixação da palheta. Esta relação é conhecida também como fator de Southwell. A utilização deste tipo de aproximação, entretanto, é restrita para problemas, onde conhecidas as frequências naturais da palheta não-girante, procura-se uma aproximação inicial para as frequências naturais em condições de velocidade de rotação não-nula.

A palheta pode ser fixa ao disco ou rotor com uma certa inclinação. O ângulo desta inclinação é chamado de ângulo de fixação. Quando a palheta está girando o ângulo de fixação é o ângulo entre o vetor de velocidade angular e o plano principal de flexão. O ângulo de fixação da palheta tem pequena influência nas frequências da palheta, sendo que esta é mais notável apenas para a primeira frequência. Se este ângulo for nulo, ou seja, as vibrações pertencem ao plano de rotação, as frequências são mínimas mantendo todos os outros parâmetros, inclusive a rotação, constantes. Por outro lado, se este ângulo é de 90 graus as vibrações ocorrem no plano de rotação e as frequências naturais são máximas, desde que se mantenham os outros parâmetros fixos (Yokoyama, 1988). Este comportamento é observado porque no primeiro caso a influência da aceleração centrífuga, nos modos de flexão, é máxima.

Os diversos modos serão acoplados dependendo da simetria da seção transversal da palheta. Para uma seção transversal simétrica (dois eixos de simetria) os modos transversais de flexão e torção não são acoplados. Mas, se existir apenas um eixo de simetria, então o modo de flexão em relação a este eixo é desacoplado, mas o outro modo de flexão e o modo de torção são acoplados. Se não existir nenhum eixo de simetria todos os modos de flexão e torção são acoplados (Leissa e Ewing, 1983).

A introdução de um ângulo de pré-torção, entretanto, altera esta relação entre os diferentes modos, pois introduz modos assimétricos. Mesmo que exista um eixo de simetria na seção transversal para um ângulo de pré-torção diferente de zero, os três modos são acoplados. Se existirem dois eixos de simetria, mas ocorrer uma pré-torção da seção transversal, então, os dois modos de flexão são acoplados apesar do modo de torção ser independente. Outro efeito deste ângulo de pré-torção é aumentar as frequências naturais de torção da palheta, pois este parâmetro aumenta a rigidez torsional da mesma (Leissa e Ewing, 1983), embora os efeitos para as frequências de flexão sejam pouco acentuados. Estes resultados também foram encontrados e discutidos por Subrahmanyam e Kaza (1986). Neste trabalho os autores procuram também elucidar o efeito das forças de Coriolis, pois conforme mencionado anteriormente, a influência deste parâmetro dinâmico não era bem conhecida. Os resultados deste trabalho indicaram que a força de Coriolis tem papel relevante para palhetas sujeitas a elevadas velocidades de rotação onde a relação entre a largura e a espessura é maior, atuando no sentido de diminuir as frequências

naturais das palhetas.

A forma da seção transversal também exerce influência nas frequências e modos, pois se a mesma apresentar uma grande curvatura, então uma grande distorção é introduzida e a hipótese inicial de que as seções planas permanecem planas após a deformação da viga é violada. Neste caso, portanto a teoria unidimensional mostra-se inadequada para prever o comportamento dinâmico da palheta. Da mesma maneira, se a relação entre o comprimento e largura for muito baixa (palheta curta), então outros modos de flexão, não previstos pela teoria da viga, também influenciam o comportamento da palheta. Estes modos, caracterizados por uma deformação de flexão cuja curvatura está na direção da corda, perpendicular à linha longitudinal e são modos típicos de placas e cascas, não podem ser previstos pela teoria da viga (Leissa e Ewing, 1983).

Os modelos unidimensionais propostos para análise dinâmica das palhetas apresentam portanto limitações, pois em geral as palhetas consideradas devem ser longas, não apresentar grande curvatura da seção transversal e ângulos de torção devem ser baixos. A vantagem destes modelos entretanto é que a ordem do mesmo, unidimensional, resulta em uma formulação matemática mais simplificada e, conseqüentemente, em uma análise numérica mais fácil de se programar e menor custo computacional. Além de palhetas de turbinas que apresentem as características citadas anteriormente este tipo de modelo também é empregado para analisar pás de hélices de helicópteros, que se encontram mais próximos das características exigidas para este modelo (Vyas e Rao, 1992; Kosmatka e Friedmann, 1989).

2.3 Modelos Bidimensionais

Os modelos unidimensionais de viga utilizados para representar o comportamento dinâmico de pás rotativas, embora mais simples são limitados. Embora os modelos para viga tenham incorporado diversos efeitos não lineares, como geometria complexa, efeitos de tensão de cisalhamento e forças de Coriolis, em alguns casos este tipo de aproximação unidimensional não fornece resultados satisfatórios. De uma maneira geral, é possível afirmar que apenas nos seguintes casos os modelos unidimensionais mostram-se adequados:

- a palheta apresenta grande relação entre seu comprimento e sua largura, ou seja, é uma pá relativamente longa;
- a palheta não é muito fina, sendo que sua espessura é considerável;
- apenas as primeiras frequências e modos da palheta serão calculadas.

Para a maioria dos problemas, entretanto, as palhetas consideradas são curtas (possuem baixa relação entre seu comprimento e largura), são muito finas e a análise de seu comportamento exige o cálculo de várias frequências naturais e seus respectivos modos.

O modelo mais simples utilizado para representar uma palheta, considerando que a ordem do modelo é bidimensional, é o de uma placa retangular girante. Embora neste caso mais simplificado de uma placa retangular não estejam considerados os efeitos de pré-torção, curvatura e variação da seção transversal, os principais fenômenos dinâmicos, os modos de flexão e torção e outros modos assimétricos (que acoplam flexão e torção), típicos de placas e cascas, que não são previstos pela teoria unidimensional de viga, podem ser observados. Por exemplo, o modo de flexão na direção da corda (transversal à longitudinal) não é previsto na teoria unidimensional (Leissa, 1981). Esse tipo de análise assume que cada segmento na direção da corda da palheta se movimenta como um corpo rígido, com movimentos de translação ou rotação, ou seja, não há deformação na direção perpendicular à linha longitudinal da viga. Esta simplificação é válida apenas quando as palhetas são relativamente longas, pois para uma relação comprimento/largura baixa esta hipótese não é mais válida. Os modos de torção e outros modos assimétricos (que acoplam torção e flexão em diversas direções) também são estimados com mais precisão pela teoria bidimensional (Leissa e Ewing, 1983).

A introdução dos efeitos decorrentes da geometria da palheta no modelo bidimensional também leva a resultados mais satisfatórios. Os efeitos de distorção da seção transversal, devido à curvatura, ângulo de pré-torção e seção transversal assimétrica, são incorporados naturalmente neste tipo de formulação (Leissa et al., 1984). Para a teoria da viga unidimensional estes eram casos limites do modelo, visto que os efeitos de distorção violavam a hipótese de que as seções planas permanecem planas após a deformação. Por outro lado, para considerar a influência do ângulo de pré-torção na rigidez torsional e no acoplamento entre os modos de flexão da viga mostra-se bastante limitada. Da mesma forma, os efeitos de cisalhamento são acrescentados diretamente nos modelos bidimensionais, não sendo necessário utilizar aproximações para avaliar fatores de correção para a distribuição de tensão de cisalhamento (Leissa e Ewing, 1983). Desta maneira, os modos de flexão, torção e outros modos assimétricos são avaliados com melhor precisão pela teoria bidimensional quando um grande número de parâmetros geométricos estão envolvidos e a palheta é relativamente curta.

A metodologia de obtenção das equações de movimento para este modelo, entretanto, é semelhante à desenvolvida para a viga. Da mesma forma, os padrões de deslocamento e deformação devem ser definidos em relação ao sistema de referência móvel que está solidário à palheta (Santos e Colla, 1997). O desenvolvimento das equações de movimento também é baseada em métodos de energia, especialmente no formalismo de Lagrange. Para caracterizar o movimento da palheta devem ser avaliadas as expressões para energia cinética e potencial para um ponto genérico pertencente à palheta. A energia cinética é

calculada de maneira semelhante à da viga unidimensional a partir do cálculo da velocidade absoluta da partícula. Porém, a energia potencial é avaliada baseando-se nos padrões de deformação de placas e cascas (Timoshenko e Goodier, 1970). O sistema de equações de movimento para toda a palheta é obtido a partir das equações de Lagrange.

As primeiras formulações bidimensionais foram desenvolvidas durante a década de 70. Petricone e Sisto (1971) desenvolveram as equações de movimento para palhetas de baixa relação comprimento/largura, baseando-se na teoria de cascas, com objetivo de avaliar as frequências naturais e modos de vibração que não podiam ser calculados pela teoria da viga. A formulação, embora baseada na metodologia descrita anteriormente, não considera os efeitos de rotação e, portanto, é restrita para palhetas não-girantes. Os autores procuraram estabelecer relações entre os parâmetros geométricos e as frequências naturais da palheta. Os resultados destes autores mostraram o acoplamento entre os diversos modos de vibração, de tal maneira que a forma de vibração da palheta é difícil de ser descrita apenas como flexão ou torção. Entretanto, estas análises são restritas, pois os efeitos da velocidade de rotação e aceleração centrífuga não estão considerados. A utilização de coordenadas helicoidais, definidas neste trabalho, para representar os deslocamentos e deformações acabam introduzindo dificuldades posteriores para o tratamento numérico das equações de movimento (Leissa et al., 1984).

Os efeitos da dinâmica de rotação foram incorporados posteriormente por Henry e Lalanne (1974). Os deslocamentos e deformações da palheta foram definidos utilizando-se coordenadas retangulares, o que implica em simplificações numéricas. As equações de movimento desenvolvidas no trabalho destes autores foram empregadas posteriormente em outras análises e permitem introduzir todos os efeitos dinâmicos dos modelos bidimensionais e outros parâmetros geométricos da palheta. Algumas observações a respeito destas equações permitem observar algumas características dinâmicas das palhetas, modeladas como placa bidimensionais :

- As deformações associadas às palhetas representam três características diferentes, sendo que o vetor de deformações pode ser subdividido em três outros vetores: o primeiro se refere apenas às deformações que ocorrem no plano da palheta, o segundo vetor está relacionado com as deformações de flexão (deslocamento perpendicular ao plano da palheta) e o terceiro vetor está relacionado com termos não-lineares do tensor de deformações. Estes termos de deformação dão origem a três termos distintos na expressão de energia potencial;
- Os vetores de tensões resultantes também são divididas em duas partes, as tensões de flexão, resultantes dos momentos de flexão e torção no plano perpendicular ao plano da palheta, e as tensões que resultam da deformação no plano da palheta, também chamada de tensão de membrana;

- Os termos não-lineares do tensor de deformações devem ser considerados, pois, devido às grandes rotações e acelerações envolvidas, a aproximação linear mostra-se insuficiente para descrever completamente o comportamento da palheta. De acordo com o trabalho de Simo e Vu-Quoc (1987) a introdução destes termos é necessária para avaliar corretamente a rigidez da estrutura, pois se estes termos forem desconsiderados a rigidez aparente da estrutura é diminuída com o aumento da rotação;
- A inclusão de termos não-lineares resulta em uma expressão da rigidez que é dependente do deslocamento. Mas neste caso é possível obter uma simplificação para avaliar a rigidez total da estrutura, pois para calcular as frequências naturais e os modos o comportamento do sistema é suposto linear, ou seja, ele oscila em torno de uma posição de equilíbrio. Assim, as oscilações em torno deste ponto são lineares, apesar da deformação total da estrutura não ser linear. A rigidez da estrutura é acrescida de um novo termo, conhecido como rigidez geométrica. Este termo é calculado a partir das tensões iniciais relativas às deformações que ocorrem no plano da palheta e é constante, pois foi assumido um comportamento de deformação linear em torno de uma posição de equilíbrio. A rigidez geométrica contribui para aumentar a rigidez da estrutura conforme previsto por Simo e Vu-Quoc (1987);
- Efeitos de torção e acoplamento entre os modos de flexão não precisam ser considerados separadamente, pois são incluídos naturalmente neste tipo de formulação;
- A energia cinética é calculada para um ponto genérico da placa, considerando os efeitos de rotação e velocidade de translação deste ponto. A expressão para a energia cinética deve considerar a velocidade absoluta da partícula pertencente à palheta;
- A aceleração centrífuga, devido à velocidade angular, influencia a rigidez da estrutura. Esta influência é definida por dois termos: um que contribui para aumentar a rigidez da palheta (termo "estabilizador") e outro que contribui para diminuir a rigidez da palheta. Desde que o sistema seja estável, o termo "estabilizador" se sobrepõe ao termo "desestabilizador" e o efeito da aceleração centrífuga é aumentar a rigidez da palheta;
- A força de Coriolis contribui com um termo que é proporcional à velocidade de rotação do rotor e à velocidade de vibração da palheta, atuando como um fator que contribui para acoplar os modos.

As equações de movimento, obtidas através do formalismo de Lagrange podem ser resolvidas por um método numérico adequado. Os métodos mais utilizados são o Método dos Elementos Finitos, o Método de Ritz e o Método de Galerkin (Leissa et al., 1984). No trabalho proposto por Henry e Lalanne (1974) o Método dos Elementos Finitos foi utilizado para implementar e testar a formulação apresentada. Os resultados encontrados foram comparados com medições experimentais e mostraram-se em concordância. Wang,

Shaw e Mahernholtz (1987) resolveram o mesmo sistema de equações, mas utilizando o método de solução numérica de Ritz, ao contrário do primeiro que havia empregado o Método dos Elementos Finitos, que também forneceram resultados satisfatórios para avaliar as frequências do sistema. Em geral, as análises bidimensionais de palhetas utilizam o método dos Elementos Finitos para discretização das equações de movimento, pois permite incorporar as diversas configurações das palhetas, como ângulo de pré-torção, área da seção transversal variável, espessura variável e curvatura (Leissa, 1981).

Da mesma forma que no modelo de viga, os efeitos da rotação contribuem para aumentar a rigidez da estrutura e, portanto, contribuem para aumentar as frequências naturais. Esta influência é mais acentuada para os modos de flexão do que para os modos de torção (Henry e Lalanne, 1974), embora para palhetas de geometria mais complexa, os modos são acoplados e não é possível classificá-los apenas como de flexão ou torção. De qualquer forma, o efeito da rotação é sempre aumentar as frequências do sistema quando comparado com uma palheta não-girante. Para os modos associados às frequências mais baixas, a velocidade de rotação é um fator de maior influência em comparação aos modos associados às frequências mais elevadas (Wang et al., 1987).

Para um ângulo de fixação, considerado-se o caso de uma palheta não girante, diferente de zero, mesmo que a seção transversal seja simétrica, ocorre um acoplamento entre as modos de flexão em duas direções perpendiculares. Assim, os modos não representam mais flexão pura ou torção, mas um padrão de deformação mais geral (Petricone e Sisto, 1971). Para rotações e ângulos de pré-torção constante, ao se aumentar o ângulo de fixação, as linhas nodais são distorcidas de tal forma que os modos mais altos assumem formas complexas, perdendo a simetria. Para palhetas rotativas, a influência do ângulo de fixação também está relacionada com as forças centrífugas, pois se este ângulo for nulo a influência da aceleração centrífuga é máxima. Neste trabalho, os autores concluíram que, para os primeiros modos, o efeito do ângulo de fixação é aumentar as frequências naturais, mas para os modos mais altos este parâmetro, entretanto, não exerce tanta influência (Sreenivasamurthy e Ramamurti, 1981). Estes resultados também foram reforçados por Wang et al. (1987).

O papel do ângulo de pré-torção no comportamento dinâmico da palheta ainda é muito discutido (Leissa et al., 1984). Este ângulo contribui para acoplar as flexões nas duas direções perpendiculares ao plano da palheta, mas sua influência nas frequências de flexão ainda não está elucidada e é dependente de outros parâmetros da geometria da palheta, tais como o ângulo de fixação da palheta e a relação entre a largura e espessura da área da seção transversal. Para os modos torsionais, a influência do ângulo de pré-torção é aumentar a rigidez e aumentar as frequências naturais. Petricone e Sisto (1971), considerando cascas helicoidais para modelar palhetas não-rotativas, apresentaram resultados que mostram que, para o primeiro modo de flexão, a influência do ângulo de pré-torção é aumentar levemente as frequências. Entretanto, Sreenivasamurthy e Ramamurti (1981)

encontraram resultados que se opõem a esta afirmativa, embora o decréscimo da primeira frequência de flexão em função ângulo de pré-torção seja pequeno. Para o primeiro modo de torção, o efeito do ângulo de pré-torção é aumentar a rigidez e as frequências associadas, sendo que este comportamento é observado nos modos de torção e nos outros modos assimétricos em que a deformação de torção seja predominante. Para outros modos que acoplam torção e flexão, este comportamento em função do ângulo de torção é indeterminado, mas sua influência tende a diminuir para os modos associados a frequências mais elevadas, pois os efeitos da rotação tornam-se predominantes (Ramamurti e Kielb, 1984). Devido à complexidade do modelo e dos fatores dinâmicos que podem influenciar as frequências e os modos da palheta, muitos parâmetros podem contribuir para alterar a tendência do comportamento da palheta. Nota-se que as variações da frequência em função do ângulo de pré-torção são menores para relações largura e espessura mais altas, ou seja, palhetas menos delgadas (Leissa et al., 1984). Neste caso outros efeitos relacionados com tensões de cisalhamento perpendiculares à seção transversal passam a exercer influência maior sobre o comportamento da palheta.

A avaliação da rigidez geométrica depende do cálculo da posição de equilíbrio da palheta. Este cálculo é realizado em um primeira etapa com a avaliação da distribuição de tensões devido à aceleração centrífuga em função da rigidez linear da estrutura e desconsiderando os efeitos de inércia. Este é um processo iterativo que fornece aproximações para a posição de equilíbrio e a distribuição de tensões ao longo do plano da palheta (Cook, Malkus e Plesha, 1989). Com esta aproximação inicial é possível avaliar a expressão para a rigidez geométrica e, em seguida, repetir o processo para determinar uma nova posição de equilíbrio e uma nova distribuição de tensões. O processo pode ser interrompido após uma ou duas iterações, fornecendo resultados satisfatórios para a rigidez geométrica (Henry e Lalanne, 1974). Esta rigidez é suposta constante, pois as oscilações em torno da posição de equilíbrio são supostas lineares. Ramamurti e Kielb (1984) demonstraram que a influência da rigidez geométrica, contribuindo para aumentar as frequências da palheta, é mais acentuada para os modos mais elevados e para velocidades de rotação mais elevadas.

A inclusão dos efeitos de Coriolis nas frequências naturais do sistema tem consequências muito pouco notáveis (Ramamurti e Kielb, 1984). Embora a força de Coriolis contribuam para diminuir as frequências do sistema, sua inclusão introduz complicações numéricas, aumentam o tempo de processamento, e como seus efeitos são muito pequenos podem, em geral, ser desprezados para a análise do comportamento de oscilação em torno de uma posição de equilíbrio.

Se a seção transversal da palheta não for constante, uma dificuldade extra é acrescentada para a discretização da palheta. Neste caso o Métodos dos Elementos Finitos mostra-se mais adequado para tratar o problema, pois permite que cada elemento seja definido com um área diferente (Sreenivasamurthy e Ramamurti, 1981). O efeito da variação da área da seção transversal, diminuindo ao longo da direção longitudinal, é

aumentar as frequências naturais associadas ao primeiro modo de flexão, mas diminuir as outras frequências de outros modos mais altos (Shaw, Shen e Wang, 1988). Esta influência, entretanto, tende a diminuir ou mesmo reverter para palhetas que apresentam grande ângulo de pré-torção (Sreenivasamurthy e Ramamurti, 1981).

A influência da curvatura da seção transversal não foi discutida nos trabalhos citados anteriormente. Leissa e Ewing (1983) apresentam resultados em que a tendência do comportamento da palheta é aumentar as frequências naturais com o aumento da curvatura da seção transversal. Este resultado está relacionado com um aumento da rigidez da estrutura introduzida pela curvatura da seção transversal.

A avaliação dos níveis de tensão no ponto em que a palheta está fixa é fundamental para garantir, com uma certa margem de segurança, que não ocorrerá falha do componente em funcionamento. Omprakash e Ramamurti (1989) testaram os resultados obtidos com diferentes aproximações do modelo de uma palheta torcida e da fixação da mesma ao disco. Para um modelo de viga unidimensional, a tensão radial calculada na raiz da palheta é sub-estimada e os níveis de deslocamento da extremidade livre também são baixos. Considerando o modelo bidimensional, formulado de acordo com as equações discutidas anteriormente e discretizadas pelo Método dos Elementos Finitos, duas situações foram consideradas. No primeiro caso, a palheta foi considerada engastada no disco e as tensões radiais avaliadas na raiz da palheta foram máximas. Porém, considerando que a fixação da palheta seja substituída por molas torsionais e de deslocamento, as tensões calculadas são menores e o deslocamento da extremidade livre é maior. Os resultados obtidos com a palheta engastada são conservativos e podem ser utilizados para o dimensionamento da palheta com segurança maior.

A análise das propriedades dinâmicas das palhetas utilizando um modelo bidimensional permite aumentar a faixa de estudo, pois palhetas de características mais genéricas podem ser incluídas nesta análise. Este tipo de formulação permite também incorporar a influência e características e propriedades do material no comportamento da estrutura. Bhumbra, Kosmatka e Reddy (1990), utilizando uma formulação semelhante à apresentada anteriormente, estudaram o efeito da constituição do material nas frequências naturais da estrutura, considerando que a palheta seja constituída de materiais compósitos. Outra variável que pode influenciar as propriedades do material é o processo de fabricação. As palhetas podem ser fabricadas a partir de placas laminadas e este processo de fabricação implica em propriedades do material distintas em diferentes direções (comportamento anisotrópico), o que influencia o comportamento da estrutura e suas frequências naturais (Baharlou e Leissa, 1987).

Embora mais genéricos, os modelos bidimensionais apresentam matrizes de maior ordem e resultam, portanto, em análise numérica mais cara quando comparada à análise unidimensional. Assim, mesmo que o modelo bidimensional possa parecer mais completo,

é preciso verificar se ele é realmente necessário, ou seja, se um modelo unidimensional não poderia representar adequadamente a estrutura. Em um outro caso, entretanto, o modelo bidimensional pode não constituir uma boa aproximação para as características das palhetas, sendo necessário utilizar um modelo tridimensional para representar corretamente a palheta. Portanto, a escolha do modelo depende sempre das características geométricas e de operação da palheta.

2.4 Modelos Tridimensionais

As formulações apresentadas anteriormente possuem faixas de validade que, embora não rigidamente delimitadas, levam a resultados pouco confiáveis quando nos limites do modelo. Assim, palhetas de relação comprimento/largura alta podem ser modeladas como vigas unidimensionais acrescidas de parâmetros geométricos não-lineares. Porém se esta palheta for curta, outros modos de vibração típicos de placas passam a exercer uma influência maior no comportamento dinâmico do sistema. Indo mais além se a palheta é espessa, ou seja, possui uma relação largura/espessura baixa, fenômenos relacionados às forças de cisalhamento perpendiculares a seção transversal, não previstos pela teoria bidimensional, não são mais desprezíveis, sendo que a teoria de placas e cascas mostra-se limitada. Nestes casos, uma abordagem tridimensional mostra-se mais adequada para descrever a dinâmica da palheta (Leissa et al., 1984). A vantagem desta formulação é que os diversos efeitos geométricos da palheta podem ser incorporados naturalmente, tornando a formulação tridimensional a mais genérica possível. Entretanto, devido à maior dimensão do modelo resultante é necessário um maior cuidado no armazenamento das matrizes do sistema discretizado para a solução do problema de autovalores associado.

A metodologia de formulação das equações de movimento é semelhante às apresentadas anteriormente para os modelos uni e bidimensionais. Os deslocamentos e as deformações são definidos em relação ao sistema de referência que está solidário à palheta. A obtenção das equações de movimento baseia-se em métodos de energia, com o emprego das equações de Lagrange. A definição da energia cinética de uma partícula é obtida com a avaliação da expressão para a velocidade absoluta de um ponto na palheta. Por outro lado, é necessário avaliar a energia potencial em função do estado de tensão e deformação em um ponto qualquer da palheta. A aplicação das Equações de Lagrange fornece um sistema de equações de movimento que caracteriza o comportamento dinâmico da palheta.

A utilização do Método dos Elementos Finitos permite determinar matrizes de massa e rigidez que representam a palheta de forma discretizada (Leissa, 1981). Outro método numérico que também é empregado para a discretização das equações de movimento é o Método de Ritz. Neste caso, os deslocamentos são supostos funções polinomiais cujos

coeficientes devem ser determinados pelo método de minimização dos funcionais de energia (McGee e Chu, 1994).

Métodos de análise de vibração e determinação de freqüências naturais utilizando o Método dos Elementos Finitos para discretizar modelos tridimensionais foram desenvolvidos primeiramente para o estudo de problemas estacionários de palhetas não-rotativas (Vorob'ev e Sapelkina, 1989). Na avaliação das matrizes de massa e rigidez são utilizados elementos finitos isoparamétricos de 20 nós, que é conhecido também como elemento sólido. O processo de integração empregado no cálculo das matrizes é o de Gauss-Legendre. As matrizes resultantes possuem grande dimensão e conseqüentemente a solução do problema de autovalores é mais cara computacionalmente. Entretanto para este tipo de problema, apenas as primeiras freqüências estão dentro da faixa de interesse. Para calcular, então, apenas os primeiros autovalores e autovetores da palheta é empregado o Método de iterações por subespaço. O método de iterações por subespaço parece ser um dos métodos mais eficientes para a avaliação das freqüências naturais do sistema. Os resultados encontrados por Vorob'ev e Sapelkina (1989) para as primeiras freqüências das palhetas não rotativas indicam que os modos de vibração apresentam formas complexas e acoplam torção e flexão.

Posteriormente, com a implementação do Método dos Elementos Finitos para palhetas não rotativas, Vorob'ev (1991) introduziram os efeitos dinâmicos de rotação nas equações discretizadas de movimento. Neste tipo de formulação é necessário considerar os efeitos relacionados aos termos não lineares do tensor de deformações. Estes termos dão origem a uma matriz de rigidez que é função do deslocamento e tensão. Entretanto, o problema pode ser simplificado considerando que o sistema, pré-tensionado pelas forças centrífugas, oscila em torno de uma posição de equilíbrio. Assim, é necessário calcular apenas uma matriz de rigidez, chamada de rigidez geométrica, que, embora constante, contribui para aumentar a rigidez total da estrutura. Esta matriz deve ser incluída na formulação desde que as palhetas sejam muito flexíveis e sujeitas a elevadas velocidades de rotação.

A avaliação da matriz de rigidez geométrica deve ser realizada em duas etapas. Primeiramente é considerado o efeito das forças centrífugas que atuam na palheta e que dão origem a um estado inicial de tensão. A partir do cálculo deste estado inicial de deformação e tensão, a matriz de rigidez geométrica pode ser calculada. Com a inclusão desta matriz nas equações de movimento discretizadas, um novo campo de deslocamento e as tensões resultantes são avaliados. Nos exemplos discutidos pelo autor, Vorob'ev (1991), este cálculo iterativo converge em uma ou duas iterações, e assim, determina-se a forma da matriz de rigidez geométrica, que então é suposta constante, e a posição de equilíbrio em torno da qual o sistema oscila.

Os efeitos de rotação são incorporados ao modelo considerando uma nova matriz de

rigidez, proporcional ao deslocamento, que é função da rotação do rotor (Vorob'ev, 1991). Os efeitos da aceleração de Coriolis não são considerados nas formulações discutidas. O sistema de equações de movimento resultante, discretizado pelo Método dos Elementos Finitos, descreve o comportamento dinâmico da palheta para pequenas oscilações em torno de uma posição de equilíbrio. A solução do problema de autovalor associado, considerando os efeitos da dinâmica de rotação da palheta é obtida com a utilização do método de iterações por subespaço.

A grande dificuldade na implementação numérica da análise dinâmica de palhetas por modelos tridimensionais é a ordem das matrizes e as técnicas de integração numérica das equações de movimento. Hsieh e Abel (1995) utilizaram uma formulação para a discretização da distribuição de massa ao longo da palheta considerando que a massa de cada elemento está concentrada nos nós do elemento. A formulação é semelhante à apresentada anteriormente e os mesmos elementos sólidos isoparamétricos são empregados, mas não é considerada uma distribuição de massa ao longo do elemento. Os resultados obtidos por este método de massas concentradas mostraram-se em concordância com o outro método de distribuição de massa, embora as frequências sejam um pouco maiores no método de massas concentradas. A vantagem desta aproximação é a eliminação da integração numérica para calcular a matriz de massa, que se torna diagonal, e a diminuição, embora pequena, no tempo de processamento e cálculo dos autovalores.

O Método dos Elementos Finitos não é o único método de aproximação que pode ser empregado para a solução das equações de movimento e a determinação das frequências e modos de vibração da palheta. McGee e Chu (1994) desenvolveram uma implementação baseada no método de Ritz. Nesta formulação, os autores consideraram os efeitos rotacionais e outros efeitos não-lineares da deformação da mesma maneira discutida anteriormente. A vantagem deste método é que as funções do deslocamento, supostas polinomiais, satisfazem naturalmente as condições de contorno do problema. Entretanto, a utilização do Método dos Elementos Finitos mostra-se mais flexível para incorporar os diversos efeitos geométricos da palheta.

A hipótese de que o sistema se comporta oscilando em torno de uma posição de equilíbrio é válida apenas para análise dinâmica estacionária, ou seja, para determinar as frequências naturais do sistema. Entretanto, se for necessário uma análise da resposta do sistema a variações de velocidade angular do rotor ou sujeito a condições iniciais de velocidade (choque) esta simplificação não é mais válida, sendo necessário a realização de uma análise dinâmica transiente do sistema. Hsieh e Abel (1995) implementaram o Método dos Elementos Finitos para resolver este tipo de problema. Neste caso, entretanto, a matriz de rigidez geométrica não pode ser considerada constante e deve ser avaliada em cada passo de integração no tempo. Os efeitos da aceleração de Coriolis também não podem ser desprezados e devem ser incorporados às equações de movimento. Neste trabalho, os autores também testaram as duas aproximações para o cálculo da matriz de massa,

distribuída ou concentrada. Na análise dinâmica transiente, utilizando a formulação de massa concentrada, os autores mostraram que a solução é obtida mais rapidamente que a formulação de massa distribuída. No trabalho atual será considerada apenas a formulação de massa distribuída.

2.5 Comportamento Dinâmico do Conjunto Rotor-Palhetas

Em geral, a análise do comportamento dinâmico da palheta é considerada isoladamente. O objetivo neste tipo de análise é determinar as frequências naturais, os modos de vibração das palhetas, o nível de tensão no ponto de fixação e o deslocamento máximo na extremidade livre. Estas informações são fundamentais para o projeto e dimensionamento da palheta. Entretanto, para obter informações a respeito do comportamento geral da estrutura é necessário analisar a resposta do sistema acoplado eixo-disco-palheta. As vibrações do conjunto devem garantir o funcionamento e a integridade do sistema durante sua vida (Chapman e Turnbull, 1989). O estudo do comportamento dinâmico transiente do conjunto também é importante para verificar possíveis condições de instabilidade, que devem ser evitadas.

Uma análise mais simplificada pode ser obtida considerando que o rotor (eixo e disco) é rígido. Esta hipótese, que introduz uma grande diminuição da ordem das equações envolvidas, é válida para faixas de operação nas quais as frequências próprias de flexão do eixo ou disco não exerce influência na resposta do sistema (Sisto, Chang e Sutcu, 1983). Se o centro do rotor for considerado sem velocidade ou aceleração, uma simplificação maior é introduzida, pois apenas três graus de liberdade são associados ao rotor. Por outro lado, se o centro do rotor for considerado livre para se movimentar, o rotor possui seis graus de liberdade (Santos e Colla, 1997).

A partir da utilização do modelo de rotor rígido e considerando as palhetas como vigas unidimensionais, sem ângulo de pré-torção, Sisto et al. (1983) estudaram a influência das forças de Coriolis na estabilidade dinâmica do conjunto e em especial no movimento da palheta. Nesta análise os autores consideraram, além da velocidade angular do rotor, uma velocidade de precessão constante de ordem de magnitude muito menor que a velocidade de rotação da máquina. Nesta condição de operação as forças de Coriolis contribuem para criar novas regiões de instabilidade e, em particular, para a primeira frequência de flexão da palheta; o efeito consiste em instabilizar o movimento, sendo que as faixas de frequências na região da instabilidade não são ampliadas.

A flexibilidade do eixo e do disco podem ser consideradas, em geral, com a utilização do Método dos Elementos Finitos para discretizar o sistema. As palhetas, neste caso, são

consideradas como vigas unidimensionais discretizadas pelo Método dos Elementos Finitos pela maioria dos autores. Sakata, Kimura, Park e Ohnabe (1989) desenvolveram uma implementação do Método dos Elementos Finitos para o conjunto eixo-disco-palhetas considerando que o sistema possa estar sujeito a um momento giroscópico devido a velocidade angular do rotor. Neste caso, a flexibilidade do sistema torna-se importante para avaliar a resposta do conjunto.

Uma situação mais geral do sistema rotor-palhetas é considerar também a flexibilidade dos mancais. O movimento do conjunto torna-se o mais geral possível, ainda quando o centro geométrico e do rotor e o centro de massa do conjunto não são coincidentes. Para as faixas de rotação da máquina em que as frequências do rotor não influenciam o comportamento da estrutura o rotor pode ser considerado rígido. Sakata, Kimura, Okamoto e Oikawa (1995) apresentam um trabalho para modelar o conjunto rotor-disco, ambos rígidos, sendo este trabalho complementado por Okamoto, Sakata, Kimura e Ohnabe (1995), onde a dinâmica da palheta é modelada por vigas unidimensionais. Entretanto, as equações de movimento desenvolvidas neste trabalho são lineares. Santos e Colla (1997) acoplaram a dinâmica de palhetas flexíveis, modeladas por vigas unidimensionais, ao comportamento geral da estrutura, obtendo equações de movimento não-lineares para representar o conjunto. Nesta formulação além das massas e inércia do rotor é necessário considerar também a massa, inércia e rigidez dos mancais. Os movimentos do rotor, modelados pelo Método de Newton-Euler, são descritos por seis graus de liberdade, referentes a movimentos de corpo rígido, sendo três de rotação e três de deslocamento (translação). Resultados teórico-experimentais mostraram a boa qualidade do modelo matemático desenvolvido utilizando um formalismo não Lagrangiano. A bancada de testes construída neste trabalho é apresentada na figura (2.3).

Os efeitos de flexibilidade do eixo e do disco podem ser incluídos no modelo do conjunto apoiado em mancais elásticos, com auxílio do Método dos Elementos Finitos. As rotações do disco, neste caso, são calculadas através do deslocamento e rotações do eixo no ponto em que o disco está montado. Okamoto et al. (1995) desenvolveram uma formulação utilizando o Método dos Elementos Finitos para a análise dinâmica de um sistema considerando a flexibilidade do eixo, disco, palhetas e mancais. Neste caso as palhetas também foram modeladas como vigas unidimensionais.

Em geral, quando se considera a análise dinâmica do conjunto, as palhetas são modeladas como vigas unidimensionais. Entretanto, conforme discutido anteriormente, o emprego de um modelo unidimensional pode mostrar-se pouco representativo para palheta de formas muito complexas ou muito curtas. Por outro lado, a utilização de um modelo tridimensional discretizado acoplado com o modelo discreto do eixo e do disco implica em matrizes resultantes do conjunto muito grandes, de tal forma que o armazenamento das mesmas é muito complicado e o tempo de solução das equações de movimento é proibitivo. Através da utilização de modelos reduzidos é possível representar, através

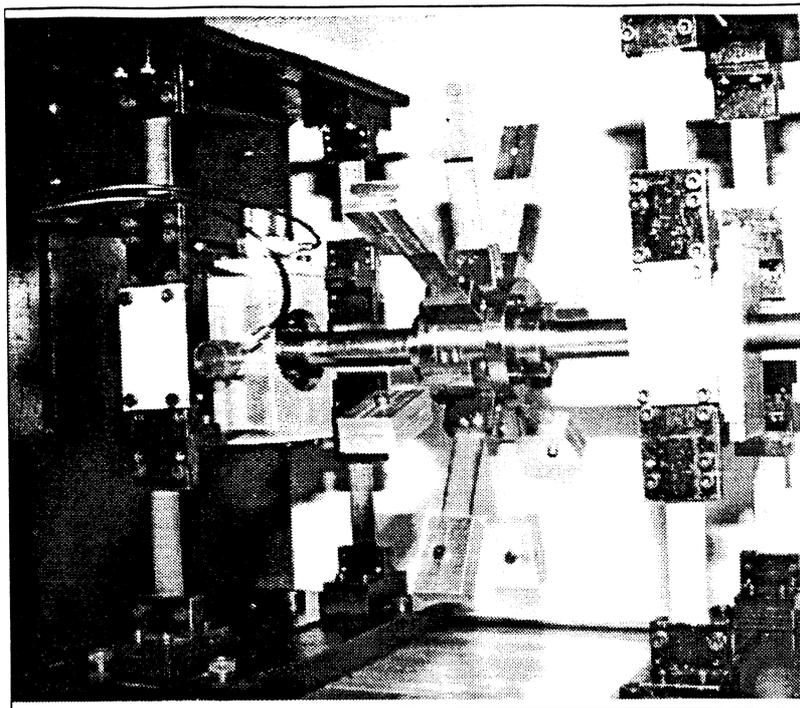


Figura 2.3: Protótipo construído para o conjunto rotor-palhetas (Santos e Colla, 1997)

de um modelo unidimensional, o comportamento das palhetas a partir das informações obtidas com a análise de um modelo tridimensional, por exemplo. Assim as características dinâmicas determinadas de uma análise de vibração de um modelo tridimensional através de medições experimentais podem ser utilizadas para determinar modelos reduzidos que reproduzam de maneira satisfatória o comportamento da palheta (Imregun e Visser, 1991). O emprego deste tipo de aproximação por modelos reduzidos permite acoplar os efeitos da dinâmica da palheta com o conjunto do rotor, fornecendo equações discretizadas para o conjunto que podem ser resolvidas pelos métodos numéricos hoje disponíveis.

Além da análise dinâmica de palhetas de turbomáquinas existem muitos outros campos relacionados, que envolvem o estudo de vibrações de corpos elásticos, como vigas, placas e cascas, sujeitos a velocidades elevadas de rotação ou a movimentos mais genéricos, assim, as formulações apresentadas anteriormente podem ser aplicadas em estudo de outros componentes mecânicos.

A determinação das frequências naturais e dos modos de vibração da palheta, que são dependentes da velocidade de rotação da máquina, oferecem informações fundamentais para o projeto e dimensionamento das palhetas. Portanto, a escolha dos modelos que representam adequadamente as palhetas é essencial para garantir que a análise numérica fornecerá resultados que realmente descrevem o comportamento dinâmico da mesma.

Além do estudo do comportamento individual da palheta, é de grande interesse também a análise do conjunto rotor-palhetas. Muitas vezes fenômenos não previstos para

cada componente podem se tornar importantes e podem comprometer os níveis de vibração e mesmo o funcionamento da máquina. Entretanto, este tipo de análise é mais difícil, pois é necessário modelar também as condições de acoplamento entre os diversos corpos. As equações de movimento resultantes desse tipo de análise também são de difícil solução. Os trabalhos desenvolvidos neste campo de análise são mais recentes e apontam para uma tendência de crescimento; assim, futuramente novas técnicas de análise, com a utilização de modelos reduzidos para representar as palhetas, e com a otimização das soluções do Método dos Elementos Finitos devem permitir o desenvolvimento de metodologias para a análise dinâmica do sistema rotor-palhetas de uma maneira mais eficiente.

Capítulo 3

Formulação das equações de movimento

3.1 Introdução

A análise dinâmica de palhetas flexíveis acopladas a um rotor, turbina ou compressor, sejam estes rígidos ou flexíveis, pode ser compreendida como um caso mais específico do estudo de sistemas de múltiplos corpos, compostos de corpos rígidos e flexíveis. O estudo do comportamento dinâmico de corpos flexíveis acoplados a estruturas que realizam movimentos complexos tem aplicações em áreas distintas, tais como projeto de máquinas, robótica, dinâmica de aeronaves e espaçonaves.

Na área de projeto de máquinas, por exemplo, o principal objetivo da análise está no estudo da flexão plana de vigas rotativas ou torção de eixos e na determinação das tensões a que estes sistemas estão submetidos, para fins de dimensionamento. Em robótica, muitas vezes a hipótese de corpo rígido para modelar os braços de um manipulador, quando estes são muito flexíveis, não é razoável, sendo necessário considerar os deslocamentos e deformações elásticas dos mesmos. Da mesma forma, no estudo de dinâmica de espaçonaves o efeito da elasticidade dos painéis solares na atitude de satélites é fundamental.

A grande dificuldade encontrada para modelar corpos flexíveis acoplados a corpos rígidos que realizam um movimento qualquer são as equações de movimento resultantes, que apresentam termos não-lineares, acoplados por diferentes efeitos tais como a força de Coriolis e aceleração centrífuga. Para descrever os deslocamentos e a deformação devido a flexibilidade dos corpos são empregados Métodos aproximados tais como o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Modos Assumidos ou Método de Ritz. Como consequência, a dimensão das equações de movimento não-lineares é grande, dificultando a solução do problema. Uma formulação para a dinâmica de corpos flexíveis interligados é apresentada por Shabana (1990). A obtenção das equações de movimento utilizan-

do o método de Newton-Euler é discutida, considerando que cada um dos corpos pode ter grandes deslocamentos de translação e rotação relativos entre cada um deles, embora as deformações elásticas sejam assumidas pequenas. Contudo, o desenvolvimento de equações apresentado neste trabalho, demonstra a complexidade e dificuldades encontradas na obtenção e solução destas equações.

Algumas soluções, entretanto, foram propostas considerando o caso mais simples de uma viga que está acoplada a um corpo rígido ou um suporte que realiza um movimento genérico, porém conhecido previamente. O movimento do suporte, portanto, não é influenciado pela dinâmica do corpo flexível. Neste tipo de análise, o estudo da estrutura flexível é simplificado, permitindo uma redução na dimensão das equações de movimento. Kane, Ryan e Banerjee (1997) apresentam o estudo dinâmico de uma viga genérica acoplada a uma estrutura que se move com uma trajetória pré-estabelecida. Embora o modelo da viga possa acomodar diferentes efeitos tais como extensão longitudinal, flexão em dois planos, torção, efeitos de cisalhamento, a deformação flexível da viga é suposta pequena durante o movimento. De forma semelhante, Liu (1995) apresenta o modelo dinâmico de uma viga de Timoshenko com não-linearidade geométrica e, portanto, sujeita a grandes deslocamentos, e que pode realizar, também, grandes movimentos de corpo rígido. A flexibilidade da viga neste trabalho é descrita com auxílio do Método dos Elementos Finitos. Um trabalho semelhante, apresentado por Du e Ling (1995), utiliza a mesma metodologia, porém aplicada a mecanismos de vigas tridimensionais. A principal aplicação destes trabalhos, entretanto, está na análise dinâmica de manipuladores e braços de robôs flexíveis.

As palhetas flexíveis de máquinas rotativas podem ser modeladas a partir de uma metodologia semelhante à discutida anteriormente. No caso de palhetas rotativas o movimento do rotor é suposto conhecido e, em geral, é suposto que a dinâmica do rotor não está acoplada à dinâmica das palhetas. Assim, a formulação é semelhante a de um corpo flexível que está acoplado a uma base que realiza movimento conhecido. Estas hipóteses são adequadas desde que o rotor apresente velocidade constante, ou em regime, oscilando em torno de uma posição de equilíbrio, e que as frequências do rotor e palhetas não estejam próximas e não influenciem uma a outra (Wiedemann e Gash, 1993).

Para descrever os deslocamentos e deformações da palheta devido à sua flexibilidade, o modelo mais simples que pode ser empregado é o de uma viga, da mesma forma que nos trabalhos discutidos anteriormente. Entretanto, para modelar adequadamente as diversas características geométricas do projeto de palhetas, o modelo de viga além de considerar os efeitos elásticos e dinâmicos, tais como flexão em dois planos, extensão longitudinal, torção, cisalhamento e inércia de rotação, deve incorporar a influência de parâmetros tais como ângulo de pré-torção, ângulo de fixação da palheta, seção transversal assimétrica que varia ao longo do comprimento, entre outros. Outros modelos, entretanto, baseado no padrão de deslocamento de placas e também de paralelepípedos sólidos podem ainda

ser empregados. As vantagens de cada um destes modelos foi discutida anteriormente. Dependendo do tipo de palheta, cada um destes modelos pode aproximar melhor o modelo real, com o menor custo computacional relativo.

Atualmente, qualquer que seja o modelo empregado, em geral, o campo de deslocamentos elásticos é descrito pelo Método dos Elementos Finitos. Os efeitos dinâmicos devido ao movimento do rotor devem ser considerados, pois influenciam o comportamento dinâmico da palheta e as frequências naturais da mesma. No caso do movimento do rotor, embora este seja caracterizado por uma alta velocidade angular na direção de seu eixo principal, a análise cinemática e dinâmica é a de um corpo flexível acoplado a uma base que se move, sendo que o corpo flexível é discretizado pelo método dos elementos finitos, sendo que é necessário também considerar que a palheta flexível está sujeita a grandes deformações devido à magnitude da aceleração centrífuga envolvida, o que leva a um problema não-linear.

A metodologia de formulação das equações de movimento consiste, primeiramente, em definir sistemas de referência auxiliares que descrevam os movimentos de rotação e translação de corpo rígido do rotor. Assim, é definido um sistema de coordenadas que é solidário à palheta. Posteriormente, as relações cinemáticas, tais como vetores de posição, velocidade e aceleração absoluta de um ponto pertencente à palheta são avaliadas com auxílio deste sistema de coordenadas auxiliares. Como o corpo é flexível, as derivadas dos vetores de posição de um ponto não são nulas e, portanto, existe uma velocidade relativa entre os pontos do corpo, devido à deformação elástica do mesmo.

As deformações da palheta são definidas em relação a este sistema de referência que está solidário a palheta, fixo no ponto de fixação da palheta na periferia do rotor. Portanto, a malha de elementos finitos que será posteriormente definida é escrita em termos deste referencial móvel que está fixo à palheta não-deformada. A expressão para a energia cinética da palheta é calculada a partir da expressão para a velocidade absoluta dos pontos da palheta. Por outro lado, a energia potencial da palheta é avaliada em função dos deslocamentos e deformação elásticas da palheta. A definição destas expressões para o cálculo da energia cinética e potencial do sistema, bem como da definição das coordenadas generalizadas, são fundamentais para obtenção das equações de movimento empregando o formalismo Lagrangiano.

3.2 Sistemas de Referência

O movimento de um ponto qualquer pertencente à palheta pode ser caracterizado de maneira mais adequada se forem utilizados sistemas de referência auxiliares. O primeiro sistema de coordenadas definido é o referencial inercial, chamado $B_I(x_0, y_0, z_0)$. A origem

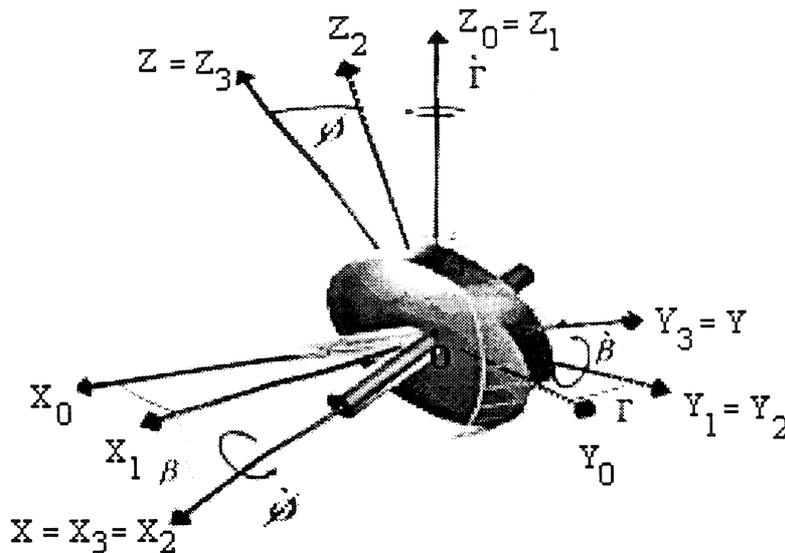


Figura 3.1: Sistemas de referência para descrever o movimento do rotor (Santos e Colla, 1997)

deste sistema inercial é escolhida no centro do rotor. Os novos sistemas de referência são definidos como três rotações consecutivas em relação a este referencial. Os ângulos que definem estas rotações são chamados de ângulos de Cardan e representam as rotações de corpo rígido que o rotor, e conseqüentemente a que a palheta pode realizar, conforme apresentado na figura (3.1) Estes sistemas de referência são definidos como

- $B_I(x_0, y_0, z_0)$: referencial inercial
- $B_1(x_1, y_1, z_1)$: rotação de Γ em torno de z_0
- $B_2(x_2, y_2, z_2)$: rotação de β em torno de y_1
- $B_3(x_3, y_3, z_3) \equiv B_3(x, y, z)$: rotação de ϕ em torno de x_2

A rotação de ϕ em torno do eixo x_2 representa o spin do rotor ou da máquina.

O sistema de referência $B_3(x, y, z)$ é, portanto, o referencial móvel que está fixo ou solidário à palheta não-deformável. É em relação a este referencial móvel que são definidos as deformações elásticas da palheta. Este sistema de referência não é deformável e permanece fixo após a deformação da palheta. Pode-se dizer também, que o referencial $B_3(x, y, z)$ representa os movimentos de corpo rígido da palheta.

A partir das definições das rotações sucessivas e dos ângulos entre os sistemas de referência, é possível escrever as matrizes de transformação que relacionam os diversos sistemas de referência. A matriz de transformação entre o sistema inercial $B_I(x_0, y_0, z_0)$

e o sistema móvel $B_1(x_1, y_1, z_1)$ é definida por \mathbf{T}_Γ , que é dada por

$$\mathbf{T}_\Gamma = \begin{bmatrix} \cos \Gamma & \sin \Gamma & 0 \\ -\sin \Gamma & \cos \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Um vetor qualquer \mathbf{s} , escrito na base inercial $B_I(x_0, y_0, z_0)$ pode ser representado na base $B_1(x_1, y_1, z_1)$ como

$${}_{B_1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\Gamma {}_{B_I}\mathbf{s} \quad (3.2)$$

Da mesma forma, a relação entre os sistema de referência $B_1(x_1, y_1, z_1)$ e $B_2(x_2, y_2, z_2)$ é representada por meio da matriz de transformação \mathbf{T}_β , escrita como

$$\mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Um vetor \mathbf{s} , escrito na base $B_1(x_1, y_1, z_1)$ pode ser expresso na base $B_2(x_2, y_2, z_2)$ com auxílio da matriz de transformação \mathbf{T}_β como

$${}_{B_2}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\beta {}_{B_1}\mathbf{s} \quad (3.4)$$

Finalmente, a matriz de transformação entre os sistemas $B_2(x_2, y_2, z_2)$ e $B_3(x, y, z)$ é escrita como \mathbf{T}_ϕ ,

$$\mathbf{T}_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Conseqüentemente, um vetor \mathbf{s} representado na base $B_2(x_2, y_2, z_2)$ pode ser escrito na base $B_3(x, y, z)$ de acordo com

$${}_{B_3}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\phi {}_{B_2}\mathbf{s} \quad (3.6)$$

A relação de transformação entre o sistema de referência inercial $B_I(x_0, y_0, z_0)$ e o sistema de referência $B_3(x, y, z)$, que está solidário à palheta é, então, definida pelo produto das três matrizes que representam as rotações sucessivas. Assim, um vetor escrito na base inercial pode ser escrito na base $B_3(x, y, z)$, de acordo com

$${}_{B_3}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\phi \mathbf{T}_\beta \mathbf{T}_\Gamma {}_{B_I}\mathbf{s} \quad (3.7)$$

Da mesma forma, é necessário avaliar o vetor de velocidade angular absoluta da base móvel $B_3(x, y, z)$, em relação ao referencial inercial. Este vetor é calculado pela soma dos três vetores de velocidade angular relativas entre os sistemas de referência. Assim, a velocidade angular relativa do referencial $B_1(x_1, y_1, z_1)$ é dada por

$${}_{B_I}\dot{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Gamma} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

A velocidade angular relativa do referencial $B_2(x_2, y_2, z_2)$ em relação ao referencial $B_1(x_1, y_1, z_1)$ é escrita como

$${}_{B_1}\dot{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Finalmente, a velocidade angular entre os sistemas $B_3(x, y, z)$ e $B_2(x_2, y_2, z_2)$ é dada por

$${}_{B_2}\dot{\phi} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Portanto, a velocidade angular absoluta da base $B_3(x, y, z)$ é dada pela soma dos três vetores de velocidade angular relativa

$${}_{B_3}\omega = \mathbf{T}_\phi \mathbf{T}_\beta \mathbf{T}_\Gamma {}_{B_I}\dot{\Gamma} + \mathbf{T}_\phi \mathbf{T}_\beta {}_{B_1}\dot{\beta} + \mathbf{T}_\phi {}_{B_2}\dot{\phi} \quad (3.11)$$

Este vetor pode ainda ser escrito como

$${}_{B_3}\omega = \begin{pmatrix} -\dot{\Gamma} \sin \beta + \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \cos \phi + \dot{\Gamma} \cos \beta \sin \phi \\ -\dot{\beta} \sin \phi + \dot{\Gamma} \cos \beta \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

A velocidade angular absoluta do sistema referencial $B_3(x, y, z)$, o vetor ${}_{B_3}\omega$, representa também a velocidade angular absoluta de um ponto qualquer da palheta, visto que este sistema está solidário à mesma. Com auxílio deste vetor de velocidade angular é possível escrever as expressões para a velocidade absoluta de um ponto qualquer da palheta.

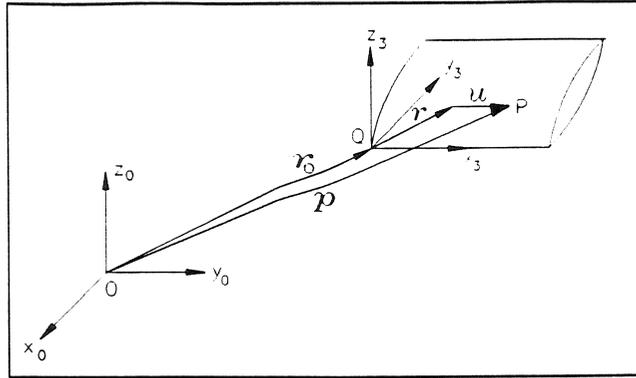


Figura 3.2: Vetor de posição de um ponto qualquer da palheta

3.3 Energia cinética da palheta

3.3.1 Velocidade absoluta de um ponto da palheta

Um ponto qualquer pertencente à palheta é descrito pelo vetor de posição $B_3\mathbf{p}$, com auxílio do referencial móvel $B_3(x, y, z)$, de acordo com a seguinte relação :

$$B_3\mathbf{p} = B_3\mathbf{r}_0 + B_3\mathbf{r} + B_3\mathbf{u} \quad (3.13)$$

sendo que estes vetores estão representados no referencial móvel B_3 .

Estes vetores, figura (3.2), são descritos como

$B_3\mathbf{r}_0$: vetor de posição da origem do sistema móvel, com origem no centro do rotor e término no ponto Q , onde a palheta está montada no rotor;

$B_3\mathbf{r}$: vetor de posição de um ponto qualquer na palheta não-deformada, com origem no ponto Q , onde a palheta está fixa ao rotor e término em um ponto qualquer pertencente à palheta. Este vetor é independente do tempo;

$B_3\mathbf{u}$: vetor de deslocamento devido à deformação elástica da palheta flexível, representado na base $B_3(x, y, z)$ e dependente do tempo.

A origem do sistema de coordenadas $B_3(x, y, z)$ é escolhido em um ponto pertencente à região em que a palheta está fixa ao rotor. De acordo com as condições de contorno, a deformação deste ponto é nula em todos os instantes.

A velocidade linear absoluta do ponto cuja posição é dada pelo vetor ${}_{B_3}\mathbf{p}$, representada no referencial móvel $B_3(x, y, z)$, é dada por :

$${}_{B_3}\mathbf{v} = {}_{B_3}\dot{\mathbf{r}}_0 + {}_{B_3}\boldsymbol{\omega} \times {}_{B_3}\mathbf{r}_0 + {}_{B_3}\boldsymbol{\omega} \times {}_{B_3}\mathbf{r} + {}_{B_3}\dot{\mathbf{u}} + {}_{B_3}\boldsymbol{\omega} \times {}_{B_3}\mathbf{u} \quad (3.14)$$

Ressalta-se aqui que ${}_{B_3}\dot{\mathbf{r}}_0$ não é a derivada absoluta do vetor ${}_{B_3}\mathbf{r}_0$, mas a derivada das componentes do vetor em relação ao tempo, ou seja, representa a variação do vetor em termos de amplitude.

O vetor ${}_{B_3}\boldsymbol{\omega}$ é o vetor de velocidade angular absoluta do sistema de referência móvel B_3 , representado no referencial móvel $B_3(x, y, z)$.

A mesma expressão pode ser escrita em forma matricial como

$${}_{B_3}\mathbf{v} = {}_{B_3}\dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\Omega} {}_{B_3}\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega} {}_{B_3}\mathbf{r} + {}_{B_3}\dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} {}_{B_3}\mathbf{u} \quad (3.15)$$

A matriz $\boldsymbol{\Omega}$ é a representação da velocidade angular ${}_{B_3}\boldsymbol{\omega}$ em forma matricial com o objetivo de simplificar a expressão do produto vetorial.

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\beta} \sin \phi - \dot{\Gamma} \cos \beta \cos \phi & \dot{\beta} \cos \phi + \dot{\Gamma} \cos \beta \sin \phi \\ -\dot{\beta} \sin \phi + \dot{\Gamma} \cos \beta \cos \phi & 0 & \dot{\Gamma} \sin \beta - \dot{\phi} \\ -\dot{\beta} \cos \phi - \dot{\Gamma} \cos \beta \sin \phi & -\dot{\Gamma} \sin \beta + \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

3.3.2 Energia cinética da palheta discretizada

A expressão da energia cinética para um elemento diferencial da palheta é representada por

$$\Delta T = \frac{1}{2} \rho {}_{B_3}\mathbf{v}^T \cdot {}_{B_3}\mathbf{v} dx dy dz \quad (3.18)$$

O vetor ${}_{B_3}\mathbf{v}$ representa a velocidade absoluta de um ponto qualquer pertencente à palheta. Este elemento diferencial está escrito em termos do referencial móvel que está solidário à palheta $B_3(x, y, z)$.

Para toda a extensão da palheta, a energia cinética é obtida com a integração da equação anterior por todo o volume da estrutura.

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho_{B_3} \mathbf{v}^T \cdot_{B_3} \mathbf{v} \, dx \, dy \, dz \quad (3.19)$$

Substituindo a expressão para a velocidade angular absoluta de um ponto da palheta, equação (3.15), a energia cinética ao longo da palheta pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left[\dot{\mathbf{r}}_0^T \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} + 2\dot{\mathbf{r}}_0^T \dot{\mathbf{u}} + 2\dot{\mathbf{r}}_0^T (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u}) \right. \\ \left. + 2\dot{\mathbf{u}}^T (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u}) + \mathbf{r}_0^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r} + \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{u} \right. \\ \left. + 2\mathbf{r}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}_0 + 2\mathbf{r}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{u} + 2\mathbf{r}_0^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{u} \right] dx \, dy \, dz \quad (3.20) \end{aligned}$$

onde a matriz $\boldsymbol{\Omega}^2$ representa o produto $\boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega}$. Na equação anterior os vetores estão todos escritos na base $B_3(x, y, z)$, e os sub-índices foram suprimidos para simplificar a nomenclatura.

A equação encontrada para a energia cinética da palheta, entretanto, não pode ser utilizada para encontrar as equações de movimento da palheta. A integral expressa na equação (3.20), não pode ser avaliada, pois o campo de deslocamento e velocidade da palheta devido à deformação elástica, vetores \mathbf{u} e $\dot{\mathbf{u}}$, não são conhecidos. Na verdade, o objetivo do equacionamento é obter expressões para o cálculo destas grandezas. A discretização pelo Método dos Elementos Finitos é, então, empregada para permitir que a integral em (3.20) possa ser avaliada.

O objetivo da discretização pelo Método dos Elementos Finitos é escrever os campos de deslocamento e velocidade, que são contínuos ao longo da palheta, como função de deslocamentos e velocidades que são calculados apenas em alguns pontos. As grandezas calculadas nestes pontos, chamados de nós da malha de elementos finitos, podem ser interpolados por funções de forma, que normalmente são escolhidos como polinômios, para avaliar os campos de deslocamento e velocidades distribuídos ao longo da palheta.

As funções de forma são escolhidas de tal maneira que estas sejam definidas por partes, ou seja, estas funções estão definidas apenas para um dos elementos que constitui a malha completa da estrutura. A interpolação empregada permite que os deslocamentos e velocidades dentro de um elemento sejam calculados como função dos deslocamentos e velocidades dos nós que formam este elemento. Este tipo de metodologia permite obter as matrizes de massa, giroscópica e rigidez discretas que representam o comportamento dinâmico de um elemento da palheta. As matrizes que representam globalmente a estru-

tura são obtidas acoplando as diversas matrizes de acordo com as equações de compatibilidade cinemática e dinâmica, pois deslocamentos e velocidades de nós compartilhados por dois elementos são iguais.

A discretização é obtida em relação ao sistema móvel $B_3(x, y, z)$. Assim, tanto a malha geométrica quanto os deslocamentos e velocidades nodais são obtidos em relação ao referencial móvel.

As funções de forma e quantidade de nós por elemento dependem de cada tipo de discretização empregada. As funções de forma podem ser polinômios lineares, quadráticos ou cúbicos, dependendo da ordem desejada para a interpolação. O número de nós por elemento também depende da função de forma e da dimensão do problema, ou seja, se este é uni, bi ou tridimensional. A discussão a respeito das funções de forma e do tipo de elemento empregados para discretizar a palheta serão apresentados no Capítulo 4. Inicialmente será suposto que as funções de forma empregadas estão representadas por uma matriz \mathbf{N} , e que os deslocamentos nodais em um elemento são representados pelo vetor \mathbf{q} . A dimensão da matriz \mathbf{N} e do vetor \mathbf{q} é dependente do número de nós que define o elemento empregado na discretização.

Assim, em cada elemento, o deslocamento é avaliado apenas nos nós e é suposto variar ao longo do elemento de acordo com a equação :

$${}_{B_3}\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot {}_{B_3}\mathbf{q} \quad (3.21)$$

ou simplesmente,

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q} \quad (3.22)$$

O vetor de velocidade relativa da palheta pode ser escrito como a derivada da equação anterior:

$${}_{B_3}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \cdot {}_{B_3}\dot{\mathbf{q}} \quad (3.23)$$

ou simplesmente,

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}} \quad (3.24)$$

Na formulação empregada, os elementos considerados são chamados de isoparamétricos, pois as funções empregadas para interpolar os campos de deslocamento e velocidade são as mesmas utilizadas para interpolar a geometria da estrutura. Dessa maneira, a geometria da palheta também é dividida em nós e elementos correspondendo às coordenadas

cartesianas dos pontos (nós) onde a velocidade e o deslocamento estão sendo avaliados.

Assim, o vetor ${}_{B_3}\mathbf{r}$, que descreve um ponto qualquer da palheta em relação à origem do sistema $B_3(x, y, z)$, pode ser discretizado como

$${}_{B_3}\mathbf{r} = \mathbf{N} \cdot {}_{B_3}\mathbf{c} \quad (3.25)$$

ou simplesmente,

$$\mathbf{r} = \mathbf{N}\mathbf{c} \quad (3.26)$$

O vetor ${}_{B_3}\mathbf{r}_0$, que descreve a origem do sistema $B_3(x, y, z)$, é caracterizado por

$${}_{B_3}\mathbf{r}_0 = \begin{Bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \\ r_{0z} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

A partir da discretização dos campos de deslocamento, velocidade e da geometria da palheta é possível reescrever a expressão para a energia cinética de um elemento da palheta. A integral obtida é função então das grandezas nodais e das funções de forma definidas em \mathbf{N} .

A velocidade absoluta de um ponto da palheta pertencente a um elemento pode, então, ser reescrita a partir da equação (3.15) em função das grandezas nodais:

$${}_{B_3}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{N}\mathbf{c} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{N}\mathbf{q} \quad (3.28)$$

A expressão para a energia cinética discretizada de um elemento, substituindo a expressão para a velocidade absoluta discretizada na equação (3.20), é dada por

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho & \left[\dot{\mathbf{r}}_0^T \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} + 2 \dot{\mathbf{r}}_0^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} + 2 \dot{\mathbf{r}}_0^T (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{N}\mathbf{c} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{N}\mathbf{q}) \right. \\ & + 2 \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}^T (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{N}\mathbf{c} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{N}\mathbf{q}) + \mathbf{r}_0^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}_0 + \mathbf{c}^T \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{N}\mathbf{c} + \mathbf{q}^T \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{N}\mathbf{q} \\ & \left. + 2 \mathbf{c}^T \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}_0 + 2 \mathbf{c}^T \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{N}\mathbf{q} + 2 \mathbf{r}_0^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{N}\mathbf{q} \right] dx dy dz \quad (3.29) \end{aligned}$$

Na equação (3.29), a integração é realizada ao longo do volume V_e de um único elemento da palheta.

3.4 Energia potencial da palheta

3.4.1 Relações de deslocamento e deformação

O deslocamento da palheta devido à sua flexibilidade, representado pelo vetor ${}_{B_3}\mathbf{u}$, é responsável pelo campo de deformação da palheta. O vetor ${}_{B_3}\mathbf{u}$ pode ser escrito como uma função das variáveis x, y, z :

$${}_{B_3}\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

O vetor de deformação associado a este campo de deslocamento, formado pelas componentes de deformação linear e angular, também representado no sistema de referência B_3 , pode ser escrito como (Timoshenko e Goodier, 1970)

$${}_{B_3}\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \right\}^T \quad (3.31)$$

onde as componentes deste vetor são dadas por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.32)$$

O vetor de deformações apresentado anteriormente supõe uma relação linear entre deslocamento e deformação. Assim, na equação (3.32) está suposta a hipótese de pequenos deslocamentos. Entretanto, considerando as altas velocidades de rotação da máquina e elevada aceleração centrífuga resultante, as deformações elásticas resultantes não podem ser consideradas pequenas e, portanto, a hipótese de relação linear entre deslocamento e deformação mostra-se limitada, levando inclusive a resultados contraditórios (Simo e Vu-Quoc, 1987). Ao considerar a palheta sujeita a uma elevada velocidade de rotação da

máquina espera-se fisicamente que, com o aumento da velocidade angular, as freqüências naturais da palheta aumentem. Entretanto, se as componentes não-lineares de deformação forem desprezados, o comportamento oposto é observado, ou seja, as freqüências naturais da palheta diminuem com a velocidade angular, sendo possível esperar que exista uma velocidade angular do rotor para a qual as freqüências naturais da palheta são nulas (Anderson, 1975). Assim, utilizando-se uma aproximação linear para as relações deslocamento e deformação conclui-se, de forma equivocada, que um aumento da velocidade de rotação leva a uma diminuição da rigidez da palheta.

A utilização dos termos de ordem mais elevada implica em acoplar os termos de deformação longitudinal (na direção longitudinal da palheta) e flexional (na direção perpendicular ao eixo principal da palheta). Isto implica dizer que a rigidez da estrutura está mudando de acordo com as cargas axiais, devido à aceleração centrífuga. Este efeito de acoplamento entre os dois movimento pela aceleração centrífuga, é desprezado se os termos de ordem mais elevada do vetor de deformação forem desprezados (Simo e Vu-Quoc, 1987).

Considerando estes termos não lineares de deformação, as componentes do vetor de deformação são dadas por (Timoshenko e Goodier, 1970):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

O vetor de deformação $B_3 \boldsymbol{\varepsilon}$ pode ser dividido em duas parcelas: uma relativa às deformações lineares, e outra relativa às deformações não-lineares de segunda ordem, ou seja,

$$B_3 \boldsymbol{\varepsilon} = B_3 \boldsymbol{\varepsilon}_L + B_3 \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} \tag{3.34}$$

ou simplesmente,

$$\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL} \quad (3.35)$$

Neste tipo de abordagem, é suposto que o corpo pode realizar grandes deslocamentos. A relação entre deslocamento e deformação, neste tipo de movimento, não é linear. Por outro lado, as deformações resultantes são pequenas, de tal forma que as tensões resultantes atuantes no corpo estejam dentro da faixa elástica, ou seja, dentro de uma faixa em que vale a lei de Hooke.

3.4.2 Relações entre componentes deformação e tensão. Relações constitutivas

O estado geral de deformação de um corpo elástico define, por outro lado, um estado geral de tensão que equilibra as forças externas aplicadas ao corpo. Os dois estados são relacionados por equações constitutivas (Timoshenko e Goodier, 1970). Para os corpos elásticos e isotrópicos, as relações constitutivas podem ser representadas pela lei de Hooke, que é dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\mu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\mu}{E}\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{yy} &= -\frac{\mu}{E}\sigma_{xx} + \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\mu}{E}\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\mu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\mu}{E}\sigma_{yy} + \frac{1}{E}\sigma_{zz} \\ \gamma_{xy} &= 2\frac{(1+\mu)}{E}\sigma_{xy} \\ \gamma_{xz} &= 2\frac{(1+\mu)}{E}\sigma_{xz} \\ \gamma_{yz} &= 2\frac{(1+\mu)}{E}\sigma_{yz} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Em alguns casos, torna-se interessante expressar as componentes de tensão em função da deformação. Neste caso obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_{xx} - \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_{yy} - \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yy} &= -\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_{xx} + \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_{yy} - \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_{zz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= -\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_{xx} - \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_{yy} + \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_{zz} \\
\sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \\
\sigma_{xz} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xz} \\
\sigma_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{yz}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

ou ainda, em forma matricial

$${}_{B_3}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot {}_{B_3}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.38}$$

ou simplesmente,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.39}$$

A matriz \mathbf{D} é dada por

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1-\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

sendo que E é o módulo de Young e μ é o módulo de Poisson do material.

3.4.3 Energia potencial da palheta discretizada

Um corpo flexível que se deforma elasticamente tem associado a esta deformação uma energia potencial elástica, também chamada de energia interna de deformação. Um elemento diferencial da palheta tem associada a energia interna que é dada por:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dx \, dy \, dz \tag{3.41}$$

A energia potencial total ao longo da palheta é então dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dx \, dy \, dz \tag{3.42}$$

Os vetores σ e ϵ são os vetores de tensão e deformação correspondentes ao elemento diferencial considerado. Esta expressão da energia potencial é válida tanto para deformações lineares quanto não-lineares.

Substituindo a lei de Hooke na equação anterior, obtém-se uma expressão para a energia interna da estrutura em função do vetor de deformação

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_e} \epsilon^T \mathbf{D} \epsilon \, dx \, dy \, dz \quad (3.43)$$

Considerando que o vetor de deformação possa ser descomposto em duas parcelas lineares e não-lineares, equação (3.35), a energia de deformação pode ser escrita como:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_e} \epsilon_L^T \mathbf{D} \epsilon_L \, dx \, dy \, dz + \int_{V_e} \epsilon_L^T \mathbf{D} \epsilon_{NL} \, dx \, dy \, dz + \frac{1}{2} \int_{V_e} \epsilon_{NL}^T \mathbf{D} \epsilon_{NL} \, dx \, dy \, dz \quad (3.44)$$

O terceiro termo na equação anterior pode ser desprezado, pois envolve termos de ordem mais alta que não precisam ser considerados nesta análise (Simo e Vu-Quoc, 1987). A energia de deformação pode, então, ser dividida em duas partes:

$$U = U_L + U_{NL} \quad (3.45)$$

Ressalta-se que U_L e U_{NL} são

$$U_L = \frac{1}{2} \int_{V_e} \epsilon_L^T \mathbf{D} \epsilon_L \, dx \, dy \, dz \quad (3.46)$$

e

$$U_{NL} = \frac{1}{2} \int_{V_e} \epsilon_{NL}^T \mathbf{D} \epsilon_{NL} \, dx \, dy \, dz \quad (3.47)$$

A partir da definição de um operador diferencial ∂ é possível reescrever uma expressão para o vetor de deformação linear em função dos deslocamentos $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$.

$$\epsilon_L = \partial \left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{array} \right\} \quad (3.48)$$

O operador diferencial ∂ é uma matriz que é dada por

$$\partial = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

O campo de deslocamento $\mathbf{u} = \{ u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z) \}^T$ foi discretizado pelo método dos elementos finitos e é escrito em função dos deslocamentos nodais \mathbf{q} e em função das funções de forma, representadas na matriz \mathbf{N} . Assim, substituindo (3.22) na equação (3.48), obtém-se uma aproximação para o vetor de deformação em um ponto em função dos deslocamentos nodais

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \partial \mathbf{N} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (3.50)$$

A matriz \mathbf{B} é definida pelas derivadas das funções de forma, ou ainda, pelo produto do operador ∂ com a matriz das funções de forma expressas em \mathbf{N} .

Assim, a energia potencial elástica de deformação de um elemento da palheta pode ser escrita em função dos deslocamentos nodais \mathbf{q} :

$$U = U_L + U_{NL} = \frac{1}{2} \int_{V_e} \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} \, dx \, dy \, dz + \int_{V_e} \boldsymbol{\varepsilon}_{NL}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} \, dx \, dy \, dz \quad (3.51)$$

3.5 Equações de Movimento

A formulação empregada para obter a forma final das equações de movimento para um elemento da palheta é a Lagrangiana, baseada no princípio dos trabalhos virtuais. As grandezas escalares como energia cinética, energia potencial e trabalho realizado pelas forças externas atuantes sobre o corpo, devem ser avaliadas em função das coordenadas generalizadas do sistema. As coordenadas generalizadas representam o conjunto de coordenadas mínimas para descrever a configuração do sistema em qualquer instante de tempo. Uma grande vantagem do formalismo de Lagrange é que as forças internas, que não realizam trabalho, não precisam ser incluídas na formulação e, portanto, apenas as equações de movimento do sistema são obtidas (Shabana, 1990). Em especial, para obtenção das equações de movimento de um sistema discretizado pelo Método dos Elementos Finitos, as Equações de Lagrange são muito empregadas, pois as forças internas (forças de reação) entre os diversos elementos não precisam ser consideradas.

O conjunto de coordenadas generalizadas, escolhido para a obtenção das equações de movimento da palheta discretizada, é formado pelos próprios deslocamentos em cada um dos nós, ou seja, o vetor \mathbf{q} . As expressões para a energia cinética e potencial da palheta foram avaliadas anteriormente e estão representadas nas equações (3.29) e (3.51). A Equação de Lagrange é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}^{ext} \quad (3.52)$$

que é a equação que surge da condição estacionária do funcional de energia.

O vetor \mathbf{f}^{ext} representa as forças externas. Este vetor também é chamado de força generalizada.

Substituindo as equações (3.29) e (3.51) em (3.52), as expressões para as derivadas são escritas como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = & \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}} \, dx \, dy \, dz + \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \ddot{\mathbf{r}}_0 \, dx \, dy \, dz + \\ & 2 \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \Omega \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} \, dx \, dy \, dz + 2 \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \Omega \mathbf{N} \dot{\mathbf{r}}_0 \, dx \, dy \, dz + \\ & \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \Psi \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} \, dx \, dy \, dz - \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \Omega^2 \mathbf{N} \mathbf{q} \, dx \, dy \, dz + \\ & \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \Psi \mathbf{N} \dot{\mathbf{r}}_0 \, dx \, dy \, dz - \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \Omega^2 \mathbf{N} \mathbf{r}_0 \, dx \, dy \, dz + \\ & \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \Psi \mathbf{N} \dot{\mathbf{r}} \, dx \, dy \, dz - \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \Omega^2 \mathbf{N} \mathbf{r} \, dx \, dy \, dz \end{aligned} \quad (3.53)$$

A derivada da energia potencial elástica é dividida em duas parcelas, devido às componentes lineares e não-lineares, ou seja,

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial U_L}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial U_{NL}}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.54)$$

onde

$$\frac{\partial U_L}{\partial \mathbf{q}} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} \, dx \, dy \, dz \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial U_{NL}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}_g(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{q} \quad (3.56)$$

A matriz $\mathbf{K}_g(\mathbf{q})$ é a matriz de rigidez geométrica, resultante da inclusão dos termos

não-lineares de deformação. Esta matriz não é constante no tempo e depende do vetor \mathbf{q} . As aproximações que podem ser empregadas para avaliar esta matriz serão apresentadas posteriormente.

Com a substituição das expressões para as derivadas das energias cinéticas e potencial, equações (3.53), (3.55) e (3.56), nas Equação de Lagrange, obtém-se a forma final da equações de movimento para um elemento da palheta. Esta equação pode ser reorganizada de forma matricial, de acordo com:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{r}}_0 + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_\Psi - \mathbf{K}_\Omega) \mathbf{q} + (\mathbf{K}_\Psi - \mathbf{K}_\Omega) (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) = \mathbf{f}_{ext} \quad (3.57)$$

Esta equação pode, ainda, ser rearranjada de tal forma que os termos relacionados aos deslocamentos, velocidades e aceleração nodais permaneçam do lado esquerdo da equação.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_\Psi - \mathbf{K}_\Omega) \mathbf{q} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{G}\dot{\mathbf{r}}_0 - (\mathbf{K}_\Psi - \mathbf{K}_\Omega) (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \quad (3.58)$$

As matrizes apresentadas nas equações anteriores são representações discretas das propriedades de inércia e rigidez da estrutura. As matrizes representam também outros efeitos dinâmicos tais como: o efeito giroscópico, a influência da aceleração centrífuga e da aceleração centrípeta.

A matriz de massa \mathbf{M} representa a distribuição de massa da palheta, ou seja, de sua inércia. Na formulação apresentada, a massa está distribuída ao longo do elemento e é escrita como:

$$\mathbf{M} = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, dx \, dy \, dz \quad (3.59)$$

A matriz de massa definida desta forma é chamada de consistente. A matriz de massa é simétrica e positivo-definida, ou seja, todos seus autovalores devem ser maiores que zero. Outra formulação que também pode ser empregada para obter a matriz de massa da palheta é considerar que a massa está concentrada apenas nos nós do elemento e, portanto, a matriz resultante é diagonal (Hsieh e Abel, 1995). Entretanto, neste tipo de aproximação é desprezado qualquer acoplamento dinâmico entre as diversas coordenadas generalizadas.

A matriz \mathbf{G} é a matriz giroscópica, dada por

$$\mathbf{G} = 2 \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{N} \, dx \, dy \, dz \quad (3.60)$$

Esta matriz, que não está associada a um efeito de amortecimento, representa o

acoplamento do movimento entre as direções perpendiculares ao eixo principal do rotor, devido à velocidade angular do mesmo, nesta direção. Este efeito também é chamado de efeito giroscópico. A principal característica desta matriz é que ela é antissimétrica.

A matriz de rigidez \mathbf{K}_e representa a rigidez estrutural da palheta. A matriz de rigidez é uma matriz simétrica e semi positivo-definida, ou seja, apresenta autovalores maiores ou iguais a zero. Esta matriz de rigidez, que é obtida a partir dos termos lineares de deformação, é dada por

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx \, dy \, dz \quad (3.61)$$

As equações de movimento da palheta, entretanto, apresentam outras matrizes de rigidez. A primeira é a matriz de rigidez geométrica, $\mathbf{K}_g(\mathbf{q})$, resultante da inclusão dos termos não-lineares de deformação, que também é um tipo de rigidez estrutural. Outros dois tipos de rigidez, por outro lado, dependem dos vetores de aceleração e velocidade angular absoluta do sistema de coordenadas que está solidário à palheta não-deformada. Estas matrizes de rigidez, na verdade, representam a influência do movimento de corpo rígido da palheta em seus deslocamentos elásticos. A primeira, chamada de matriz de rigidez centrípeta, é escrita como

$$\mathbf{K}_\Psi = \int_V \rho \mathbf{N}^T \Psi \mathbf{N} \, dx \, dy \, dz \quad (3.62)$$

A matriz Ψ representa a derivada, em relação ao tempo da matriz Ω .

$$\Psi = \dot{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}_z(t) & \dot{\omega}_y(t) \\ \dot{\omega}_z(t) & 0 & -\dot{\omega}_x(t) \\ -\dot{\omega}_y(t) & \dot{\omega}_x(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Esta derivada, na verdade, representa a aceleração angular absoluta do sistema de referência que é solidário à palheta. Este vetor de aceleração é a derivada do vetor ${}_{B_3}\boldsymbol{\omega}$.

$${}_{B_3}\boldsymbol{\alpha} = {}_{B_3}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d({}_{B_3}\boldsymbol{\omega})}{dt} + {}_{B_3}\boldsymbol{\omega} \times {}_{B_3}\boldsymbol{\omega} \quad (3.64)$$

O último termo da equação anterior é nulo e, portanto, a aceleração angular absoluta é a própria derivada no tempo dos termos do vetores ${}_{B_3}\boldsymbol{\omega}$, representados no sistema móvel B_3 . O vetor aceleração angular é, então, representado pela matriz Ψ . Sendo Ψ uma matriz antissimétrica, a matriz de rigidez centrípeta \mathbf{K}_Ψ também é antissimétrica.

A matriz de rigidez centrífuga, também chamada de matriz de rigidez rotacional, é

dada por

$$\mathbf{K}_\Omega = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{N} \, dx \, dy \, dz \quad (3.65)$$

A matriz $\boldsymbol{\Omega}^2$ está associado à aceleração centrífuga de um ponto da palheta. Esta matriz é escrita também como

$$\boldsymbol{\Omega}^2 = \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_y^2(t) + \omega_z^2(t) & -\omega_x(t) \cdot \omega_y(t) & -\omega_x(t) \cdot \omega_z(t) \\ -\omega_x(t) \cdot \omega_y(t) & \omega_x^2(t) + \omega_z^2(t) & -\omega_y(t) \cdot \omega_z(t) \\ -\omega_x(t) \cdot \omega_z(t) & -\omega_y(t) \cdot \omega_z(t) & \omega_x^2(t) + \omega_y^2(t) \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Sendo a matriz $\boldsymbol{\Omega}^2$ uma matriz simétrica, a matriz de rigidez centrífuga, ou matriz de rigidez rotacional, \mathbf{K}_Ω também é simétrica.

As matrizes descritas anteriormente representam os efeitos que influenciam diretamente os deslocamentos, velocidades e acelerações nodais da palheta. Outros efeitos, devido ao movimento do rotor também contribuem nas equações de movimento da palheta. A equação (3.58), pode ser reescrita, com os termos do lado direito da equação tratado como vetores.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_\Psi - \mathbf{K}_\Omega) \mathbf{q} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{\dot{\mathbf{r}}_0} - \mathbf{f}_{\mathbf{r}_0} - \mathbf{f}_\Psi + \mathbf{f}_\Omega \quad (3.67)$$

O vetor \mathbf{f}_Ω , que pode ser chamado também de vetor de força centrífuga, é dado por:

$$\mathbf{f}_\Omega = \mathbf{K}_\Omega (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \quad (3.68)$$

Este vetor representa, portanto, a força centrífuga que atua em um ponto qualquer da palheta, devido a velocidade angular do sistema de coordenadas que está solidário à palheta não-deformada. O vetor de posição deste ponto é representado pela soma dos vetores \mathbf{r}_0 e \mathbf{r} , que estão representados nesse sistema de coordenada B_3 .

Da mesma forma, o vetor \mathbf{f}_Ψ está associado à força centrípeta que atua em um ponto qualquer da palheta. Este vetor é função do vetor de aceleração angular e é representado por

$$\mathbf{f}_\Psi = \mathbf{K}_\Psi (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \quad (3.69)$$

Outros dois vetores, $\mathbf{f}_{\dot{\mathbf{r}}_0}$ e $\mathbf{f}_{\mathbf{r}_0}$ estão associados à velocidade e aceleração relativas do ponto onde a palheta está fixa, ou seja, do ponto que é origem do sistema de coordenadas solidário à palheta. Estes dois vetores são não-nulos se existir um desbalanceamento do sistema rotor-mancal flexível e, portanto, o centro geométrico do mesmo não for constante

com o tempo. Se o desbalanceamento for pequeno e os mancais relativamente rígidos então estes dois efeitos podem ser desprezados. Os vetores são escritos respectivamente por:

$$\mathbf{f}_{\dot{\mathbf{r}}_0} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_0 \quad (3.70)$$

e

$$\mathbf{f}_{\dot{\mathbf{r}}_0} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{r}}_0 \quad (3.71)$$

Finalmente, o vetor \mathbf{f}_{ext} representa algum tipo de carregamento externo a que a palheta está submetida. No caso de uma turbina ou compressor a gás este vetor representa a força distribuída que é exercida sobre a palheta pelo gás que a movimenta.

As equações de movimento representadas em (3.67) incluem todos os efeitos dinâmicos e elásticos que influenciam o comportamento dinâmico da palheta, considerando que o movimento do rotor é conhecido. Na solução destas equações entretanto, dependendo do tipo de problema que está sendo resolvido, algumas destas matrizes podem ou não ser desprezadas. Na solução do problema de dinâmica transiente, por exemplo, quando o rotor acelera com aceleração constante, nenhuma das matrizes de rigidez pode ser desprezada, da mesma forma que a matriz giroscópica não pode ser desprezada. Neste tipo de análise, apenas os vetores que dependem da velocidade e aceleração do ponto em que a palheta está fixa ao rotor, $\mathbf{f}_{\dot{\mathbf{r}}_0}$ e $\mathbf{f}_{\ddot{\mathbf{r}}_0}$, podem ser desprezados, desde que o desbalanceamento do rotor seja muito pequeno ou desprezível. Da mesma forma, a matriz de rigidez geométrica deve ser avaliada em cada instante de tempo. Por outro lado, na solução do problema de autovalores, muitas hipóteses simplificadoras podem, e devem, ser introduzidas. Nesta análise, a matriz de rigidez geométrica é suposta constante durante todo o movimento, e a matriz giroscópica pode ser desprezada pois influencia pouco os autovalores do sistema (McGee e Chu, 1994), e aumenta o custo computacional da análise. A matriz de rigidez centrípeta e o vetor da força centrípeta, que são dependentes da aceleração angular do sistema de cordenas fixo à palheta, também podem ser desprezados, pois a velocidade de rotação do rotor é assumida constante na análise de autovalores.

As matrizes e vetores calculados para um único elemento da palheta podem ser acoplados, de acordo com as equações de compatibilidade cinemática e equilíbrio dinâmico, para determinar as matrizes e vetores globais que representam o modelo completo da palheta. A equação de movimento, obtida para toda a palheta, tem forma semelhante à obtida em (3.67), porém, neste caso, as matrizes e vetores apresentados são resultantes do acoplamento entre os diversos elementos, podendo ser escritas como

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{G}}\dot{\bar{\mathbf{q}}} + (\bar{\mathbf{K}}_e + \bar{\mathbf{K}}_g(\bar{\mathbf{q}}) + \bar{\mathbf{K}}_\psi - \bar{\mathbf{K}}_\Omega)\bar{\mathbf{q}} \\ = & \bar{\mathbf{f}}_{ext} - \bar{\mathbf{f}}_{r_0} - \bar{\mathbf{f}}_{r_0} - \bar{\mathbf{f}}_\psi + \bar{\mathbf{f}}_\Omega \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.6 Análise do problema de autovalores

Na análise do problema de autovalores e autovetores associado às equações de movimento dadas pela equação (3.72), algumas hipóteses simplificadoras devem ser assumidas, pois neste tipo de análise é suposto que o sistema apresenta um comportamento linear e, portanto, o mesmo está oscilando linearmente em torno de uma posição de equilíbrio. O objetivo da análise é, então, determinar as frequências naturais de oscilação do sistema, os modos de vibração associados e como a velocidade de rotação do rotor influencia estas frequências.

Primeiramente, é suposto que o rotor está operando com velocidade constante, em regime permanente. Assim, também é razoável assumir que os deslocamentos do centro do rotor são muito pequenos e praticamente desprezíveis. Os vetores $\bar{\mathbf{f}}_{r_0}$ e $\bar{\mathbf{f}}_{r_0}$, que representam a influência do movimento do centro do rotor na dinâmica da palheta, podem ser desprezados.

Os termos relacionados com a aceleração do rotor, a matriz de rigidez centrípeta $\bar{\mathbf{K}}_\psi$ e o vetor de força centrípeta $\bar{\mathbf{f}}_\psi$ também podem ser desprezados, já que a velocidade angular do rotor é suposta constante.

A matriz de rigidez geométrica, neste tipo de análise, é suposta constante. Embora esta matriz esteja relacionada aos termos não-lineares de deformação e, por isso seja uma matriz que depende do deslocamento em cada instante de tempo, na análise de frequências do sistema é realizada uma linearização do deslocamento da palheta. O deslocamento total da palheta é dividido em duas parcelas : o deslocamento devido às forças centrífugas, que definem a posição de equilíbrio, e o deslocamento devido à vibração linear em torno desta posição de equilíbrio. Desde que a velocidade de rotação seja constante, o vetor de aceleração centrífuga, também permanece constante e, conseqüentemente, a posição de equilíbrio da palheta. Portanto, a matriz de rigidez geométrica é suposta constante enquanto a palheta oscila em torno desta posição de equilíbrio.

A deformação da palheta devido à força centrífuga origina uma distribuição de tensões ao longo da mesma que tem como conseqüência o aumento da sua rigidez. A análise de autovalores e autovetores é, portanto, realizada em uma estrutura pré-tensionada. A partir desta distribuição inicial de tensões, expressa pelo vetor σ_0 , e dos termos não-

lineares de deformação, a matriz de rigidez geométrica é avaliada.

O efeito da matriz de rigidez geométrica, e dos termos de deformação não-linear que estão associados a esta matriz, é acoplar as deformações na direção longitudinal da palheta – que são mais influenciadas pelo vetor de aceleração centrífuga – às deformações na direção perpendicular ao eixo principal da palheta, que correspondem à flexão e torção da mesma, contribuindo para aumentar a rigidez total da estrutura (Simo e Vu-Quoc, 1987).

3.6.1 Solução do problema de tensão inicial

A avaliação da matriz de rigidez geométrica é, então, realizada em duas etapas. Primeiramente, é considerado o efeito das forças centrífugas que atuam na palheta, que definem a posição de equilíbrio e que dão origem a um estado inicial de tensão. A partir do cálculo deste estado inicial de deformação e tensão, a matriz de rigidez geométrica pode ser calculada. Com a inclusão desta matriz nas equações de movimento discretizadas, um novo campo de deslocamento e as tensões resultantes são avaliados. Para os casos estudados, este cálculo iterativo converge em uma ou duas iterações e, assim, determina-se a forma da matriz de rigidez geométrica, que então é suposta constante, e a posição de equilíbrio em torno da qual a palheta oscila.

A determinação da posição de equilíbrio do sistema, é na verdade, uma análise estática de tensões. O objetivo, então, além de determinar a posição de equilíbrio do sistema, é calcular a distribuição de tensões resultante e a matriz de rigidez geométrica. A equação que deve ser resolvida é

$$(\bar{\mathbf{K}}_e + \bar{\mathbf{K}}_g - \bar{\mathbf{K}}_\Omega) \bar{\mathbf{q}}_0 = \bar{\mathbf{f}}_\Omega \quad (3.73)$$

Esta equação deve ser resolvida através de um procedimento iterativo. Primeiramente é suposto que a distribuição de tensões é nula e, portanto, a matriz de rigidez geométrica é nula:

$$(\bar{\mathbf{K}}_e - \bar{\mathbf{K}}_\Omega) \bar{\mathbf{q}}_0 = \bar{\mathbf{f}}_\Omega \quad (3.74)$$

A solução desta equação fornece uma distribuição de tensões inicial σ_0 . A partir desta distribuição de tensões é calculada a matriz de rigidez geométrica e, com a solução da equação (3.73), uma nova posição de equilíbrio é definida pela solução da equação de equilíbrio. O processo iterativo converge rapidamente; normalmente apenas uma iteração é suficiente para definir a posição de equilíbrio e a forma final da matriz de rigidez geométrica (Vorob'ev, 1991).

O vetor da posição de equilíbrio inicial $\bar{\mathbf{q}}_0$ define um vetor de deformação inicial, que é calculado a partir das relações entre deslocamentos e deformações nodais,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{B}\mathbf{q}_0 \quad (3.75)$$

O vetor de distribuição de tensões inicial $\boldsymbol{\sigma}_0$ é calculado, então, a partir deste vetor de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ e da matriz de propriedades do material \mathbf{D} ,

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (3.76)$$

A forma da matriz de rigidez geométrica é obtida a partir da expressão para a energia potencial não-linear, U_{NL} , que é dada pela equação (3.56). Substituindo a expressão para o vetor de tensões iniciais $\boldsymbol{\sigma}_0$ nesta equação, obtém-se uma nova expressão para a parcela da energia potencial elástica que envolve os termos não-lineares de deformação

$$U_{NL} = \int_{V_e} \boldsymbol{\varepsilon}_{NL}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \, dx \, dy \, dz \quad (3.77)$$

Esta expressão pode ser expandida substituindo os termos dos vetores de deformação linear $\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}^T$ e do vetor de tensão inicial $\boldsymbol{\sigma}_0$.

$$\begin{aligned} U_{NL} = & \frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma_{0xx} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \, dy \, dz + \\ & \frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma_{0yy} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx \, dy \, dz + \\ & \frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma_{0zz} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \, dy \, dz + \\ & \frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma_{0xy} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} dx \, dy \, dz + \\ & \frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma_{0xz} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} dx \, dy \, dz + \\ & \frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma_{0yz} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} dx \, dy \, dz \end{aligned} \quad (3.78)$$

Em forma matricial, esta equação pode ser rearranjada e escrita como

$$U_{NL} = \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\delta}^T \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \, dx \, dy \, dz \quad (3.79)$$

com

$$U_{NL} = \int_{V_e} \mathbf{q}^T \mathbf{H}^T \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_0 \end{bmatrix} \mathbf{H} \mathbf{q} \, dx \, dy \, dz \quad (3.84)$$

A matriz de rigidez geométrica é calculada pela derivada da energia potencial, conforme proposto na Equação de Lagrange, equação (3.52). Esta derivada é calculada a seguir

$$\frac{\partial U_{NL}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}_g \mathbf{q} = \int_{V_e} \mathbf{H}^T \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_0 \end{bmatrix} \mathbf{H} \mathbf{q} \, dx \, dy \, dz \quad (3.85)$$

A forma final da matriz de rigidez geométrica para uma estrutura pré-tensionada, como no caso da palheta, é então dada por:

$$\mathbf{K}_g = \int_{V_e} \mathbf{H}^T \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_0 \end{bmatrix} \mathbf{H} \, dx \, dy \, dz \quad (3.86)$$

3.6.2 Determinação das Freqüências Naturais

As equações de movimento para análise de vibrações em palhetas que estão acopladas a rotores que operam com velocidade de rotação constante, resultantes das simplificações discutidas, é dada por

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{G}}\dot{\bar{\mathbf{q}}} + (\bar{\mathbf{K}}_e + \bar{\mathbf{K}}_g - \bar{\mathbf{K}}_\Omega) \bar{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.87)$$

As freqüências naturais da palheta são obtidas com a solução deste problema de autovalor e autovetor. O deslocamento é considerado como sendo harmônico, ou seja:

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t} \quad (3.88)$$

A equação (3.87) deve ser rearranjada para obter uma forma simplificada. É definido um novo vetor $\mathbf{x} = \{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\}^T$, e a equação diferencial (3.87) assume a forma:

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (3.89)$$

As matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}} \\ -(\bar{\mathbf{K}}_e + \bar{\mathbf{K}}_g - \bar{\mathbf{K}}_\Omega) & -\bar{\mathbf{G}} \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

O problema autovalor associado a esta equação é então representada por

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})\xi = 0 \quad (3.92)$$

Na determinação das freqüências naturais, a matriz giroscópica \mathbf{G} é, em geral, desprezada, pois tem pouco efeito nas freqüências do sistema, especialmente para velocidades de rotação não muito elevadas e para palhetas que são curtas (McGee e Chu, 1994).

A hipótese de que o sistema se comporta oscilando em torno de uma posição de equilíbrio é válida apenas para análise dinâmica estacionária, ou seja, para determinar as freqüências naturais do sistema. Entretanto, se for necessário uma análise da resposta do sistema a variações na velocidade angular do rotor ou sujeito a condições iniciais de velocidade (choque) esta simplificação não é mais válida, sendo necessário a realização de uma análise dinâmica transiente do sistema. Hsieh e Abel (1995) implementaram o Método dos Elementos Finitos para resolver este tipo de problema. Neste caso, entretanto, a matriz de rigidez geométrica não pode ser considerada constante e deve ser avaliada em cada passo de integração no tempo. Os efeitos da aceleração de Coriolis também não podem ser desprezados e devem ser incorporados às equações de movimento. Neste trabalho, os autores também testaram as duas aproximações para o cálculo da matriz de massa, distribuída e concentrada. Na análise dinâmica transiente a solução da formulação de massa concentrada encontrada por esses autores, mostrou-se muito mais rápida que a aproximação de massa distribuída.

O Método dos Elementos Finitos não é o único método de aproximação que pode ser empregado para a solução das equações de movimento e a determinação das freqüências e modos de vibração da palheta. McGee e Chu (1994) desenvolveram uma implementação baseada no método de Ritz. Nesta formulação os autores consideraram os efeitos rotacionais e outros efeitos não-lineares da deformação da mesma maneira discutida anteriormente. A vantagem deste método é que as funções do deslocamento, supostas polinomiais, satisfazem naturalmente as condições de contorno do problema. Entretanto, a utilização do Método dos Elementos Finitos mostra-se mais flexível para incorporar os diversos efeitos geométricos da palheta.

Capítulo 4

Implementação do Método dos Elementos Finitos

4.1 Introdução

No capítulo anterior, a formulação das equações de movimento de uma palheta, acoplada a máquinas rotativas, foi apresentada e discutida. O Método dos Elementos Finitos foi escolhido para obter as matrizes de massa, rigidez e giroscópica para representar, de uma maneira discretizada, as características da palheta. Neste capítulo, serão discutidas a implementação e metodologia para a avaliação numérica destas matrizes.

A palheta é modelada como uma estrutura tridimensional e o elemento que será utilizado para discretizar a palheta é o elemento sólido de vinte nós, também conhecido como *brick element*. As funções de interpolação empregadas para estimar os deslocamentos dentro do elemento são polinômios do segundo grau, neste caso. A partir da definição do tipo de elemento e das funções de forma associadas a este, as expressões gerais para as matrizes de massa, rigidez e giroscópica são determinadas. Embora não seja possível obter uma expressão fechada para estas matrizes, o método numérico de integração da Quadratura de Gauss-Legendre (Cook et al., 1989) é utilizado para obter a expressão final destas matrizes.

Finalmente, são discutidos também os métodos numéricos para o cálculo de autovalores e autovetores. Para problemas que envolvem matrizes de grandes dimensões, como as resultantes da discretização de uma estrutura tridimensional, é apresentado o método de iteração por subespaço para calcular apenas as primeiras frequências da palheta.

4.2 Formulação isoparamétrica

No desenvolvimento das equações de movimento, Capítulo 3, os campos de deslocamento e velocidade são avaliados a partir dos deslocamentos e velocidades nodais de um elemento. Para aproximar a variação destas grandezas ao longo do elemento são utilizadas funções de interpolação também conhecidas como funções de forma. Neste tipo de formulação os deslocamentos em qualquer ponto interno do elemento estão relacionados diretamente aos deslocamentos nodais através de funções de interpolação. Se estas mesmas funções de interpolação forem utilizadas para discretizar a geometria da estrutura, esta formulação é chamada de isoparamétrica. Outra importante característica deste tipo de formulação é que as funções de interpolação utilizadas para aproximar as coordenadas dos elementos e os deslocamentos nodais são as mesmas.

A importância da formulação isoparamétrica é que esta respeita automaticamente as condições de convergência do Método dos Elementos Finitos, pois as funções de forma são suaves no interior do elemento, contínuas ao longo do elemento e formam um conjunto completo. Estas exigências são facilmente atendidas pelas funções de forma, pois estas são polinômios, cuja ordem depende do número total de nós em cada elemento. Ressalta-se que elementos finitos isoparamétricos são muito eficientes para aproximar geometrias genéricas, contornos irregulares, além de apresentar uma formulação e implementação computacional simples e bastante concisas (Hughes, 1987).

4.2.1 Sistemas de referência local e global

As funções de forma são definidas em um sistema de coordenadas, chamado de sistema de coordenadas local. Este sistema é limitado entre -1 e 1 . Estes limites correspondem, no sistema de coordenadas global ou cartesiano original da estrutura, aos extremos do elemento. Assim, para um elemento unidimensional, as coordenadas globais estão limitadas entre $x_1 \leq x \leq x_2$, sendo x_1 e x_2 as coordenadas globais dos nós que definem este elemento. Para um elemento bidimensional, os limites do sistema de coordenadas local são dados por $-1 \leq s \leq 1$ e $-1 \leq t \leq 1$, que correspondem as quatro coordenadas (x, y) limites do elemento, conforme apresentado na figura (4.1). Nesta figura também é possível observar como ocorre a variação das coordenadas s e t ao longo do elemento no plano físico, nas coordenadas globais, e ao longo do elemento em coordenadas locais (plano computacional). É possível relacionar os dois sistemas de coordenadas (s, t) e (x, y) por uma transformação T . Geometricamente, isto corresponde a transformar um quadrilátero de forma geral para um quadrado de lados iguais. Para elementos espaciais, o sistema de coordenadas locais é definido por (s, t, r) , sendo que estas variáveis estão contidas no domínio $-1 \leq s \leq 1$, $-1 \leq t \leq 1$ e $-1 \leq r \leq 1$. Estes limites correspondem aos extremos (x, y, z) de um elemento sólido. A interpretação geométrica desta transformação é análoga

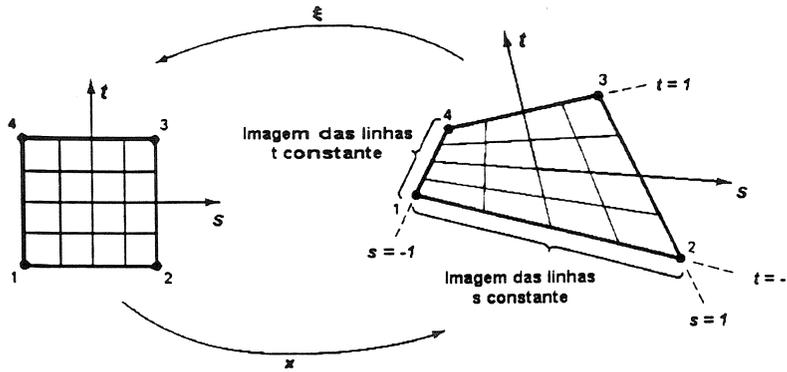


Figura 4.1: Transformação de coordenadas local e global

à transformação bidimensional, sendo que no caso espacial, uma estrutura sólida genérica é transformada em um cubo de lados regulares e iguais.

O número e a ordem das funções de forma dependem do tipo de elemento utilizado, unidimensional, plano ou espacial, e do número de nós que são definidos no elemento. Por exemplo, para um elemento unidimensional, as funções de forma são funções de uma variável apenas. O número de funções de forma é dado pelo total de nós internos e extremos que formam o elemento. Novamente, para um elemento unidimensional linear apenas duas funções de forma estão definidas, e para um elemento unidimensional quadrático três funções de forma estão associadas. Portanto, deve-se associar uma função de forma para cada um dos nós do elemento. Estas funções, que são escolhidos como polinômios de Serendipity, apresentam a propriedade de assumir o valor 1, nas coordenadas locais correspondentes ao nó ao qual está associada, e zero nas coordenadas correspondentes aos outros nós.

Denotando-se por x , y e z as coordenadas da estrutura em relação a um sistema de coordenadas global ou cartesiano, as seguintes expressões podem ser obtidas para relacionar os dois sistemas de referência.

$$\begin{aligned}
 x(s, t, r) &= \sum_{i=1}^{N_p} N_i^e(s, t, r) x_i^e \\
 y(s, t, r) &= \sum_{i=1}^{N_p} N_i^e(s, t, r) y_i^e \\
 z(s, t, r) &= \sum_{i=1}^{N_p} N_i^e(s, t, r) z_i^e
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

sendo que, \mathbf{x}^e , \mathbf{y}^e e \mathbf{z}^e são os vetores que contém as coordenadas globais dos nós do

elemento e , que é formado por N_p nós. Estas coordenadas globais cartesianas representam também o sistema referencial móvel $B_3(x, y, z)$, ao qual a palheta está rigidamente fixa.

Os elementos finitos considerados nesta formulação são elementos finitos isoparamétricos, pois as funções de forma utilizadas para discretizar a geometria da estrutura são as mesmas que são empregadas para discretizar o campo de deslocamento e deformação. Assim, os deslocamentos u , v e w do elemento podem ser escritos em função dos vetores de deslocamentos nodais \mathbf{u}^e , \mathbf{v}^e e \mathbf{w}^e nas direções x , y e z , respectivamente, em relação ao sistema global de referência de cada um dos elementos e :

$$\begin{aligned} u(s, t, r) &= \sum_{i=1}^{N_p} N_i^e(s, t, r) u_i^e \\ v(s, t, r) &= \sum_{i=1}^{N_p} N_i^e(s, t, r) v_i^e \\ w(s, t, r) &= \sum_{i=1}^{N_p} N_i^e(s, t, r) w_i^e \end{aligned} \quad (4.2)$$

As funções de forma utilizadas permitem, então, mapear um elemento distorcido num sistema global, para uma forma regular no sistema local, que é limitado dentro do domínio $s = \pm 1$, $t = \pm 1$ e $r = \pm 1$. A figura (4.1) ilustra a transformação entre os sistemas global e local e o mapeamento das linhas de s e t constantes para um exemplo plano (bidimensional). A utilização deste sistema local permite também mudar os limites de integração nas expressões para o cálculo das matrizes de massa e rigidez.

4.2.2 Matriz jacobiana

A transformação T de coordenadas entre os sistemas global e local está associada à matriz jacobiana. A matriz jacobiana \mathbf{J} de transformação entre os sistemas de referência (x, y, z) e (s, t, r) é definida por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

O determinante desta matriz, também conhecido como jacobiano, é um fator escalar que permite relacionar o volume nestes dois sistemas de coordenadas.

$$dV = dx \, dy \, dz = \det \mathbf{J} \, ds \, dt \, dr \quad (4.4)$$

As expressões para as coordenadas $(x(s, t, r), y(s, t, r), z(s, t, r))$ são dadas pela equação (4.1) em função das coordenadas nodais \mathbf{x}^e , \mathbf{y}^e e \mathbf{z}^e e das funções de forma N_i^e . Assim, a matriz jacobiana \mathbf{J} pode ser escrita em função das coordenadas nodais de acordo com

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial s} x_i^e & \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial s} y_i^e & \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial s} z_i^e \\ \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial t} x_i^e & \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial t} y_i^e & \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial t} z_i^e \\ \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial r} x_i^e & \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial r} y_i^e & \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial r} z_i^e \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Através da matriz jacobiana \mathbf{J} é possível, também, obter as derivadas das funções de forma em relação ao sistema global (x, y, z) , a partir das derivadas destas funções em relação ao sistema local (s, t, r) . Para avaliar a matriz de rigidez e para calcular os vetores de deformação, por exemplo, é necessário calcular as derivadas globais das funções de forma. Entretanto, estão apenas disponíveis as derivadas em relação ao sistema local, pois as funções de forma estão escritas neste referencial. A relação entre estas duas derivadas é dada por

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial t} \\ \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Portanto,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial t} \\ \frac{\partial N_i^e(s, t, r)}{\partial r} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

A matriz jacobiana permite, portanto, obter relações entre os sistemas de coordenadas globais e locais, fornecendo relações equivalentes entre as derivadas e integrais calculadas nos dois referenciais. Entretanto, deve-se observar que o mapeamento entre as coordenadas locais e globais pode não ser único para as regiões onde o elemento mostra-se muito distorcido. A inversa da matriz jacobiana deve existir em todos os pontos do domínio para garantir que exista uma correspondência única entre o sistema de coordenadas cartesianas globais e locais do elemento. Em regiões em que o elemento é muito distorcido, figura (4.2), ou apresenta ângulos internos maiores que 180° , o determinante da matriz \mathbf{J} pode assumir valores nulos. Ainda próximo a estas regiões o jacobiano pode assumir valores negativos. Assim, o sinal do determinante deve ser observado durante o cálculo das matrizes de massa, rigidez e giroscópica.

A existência da inversa da matriz \mathbf{J} e a verificação de que todos os valores de $\det \mathbf{J}$ são maiores que zero, garante que o mapeamento entre os sistemas de coordenadas globais

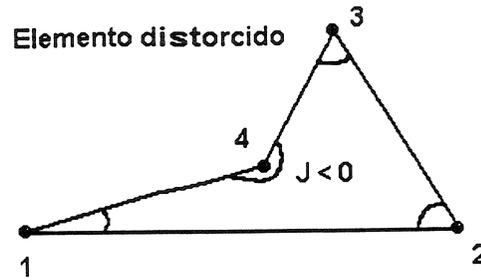


Figura 4.2: Elemento distorcido - ângulo interno maior que 180°

e local é único, e que as funções e suas derivadas são suaves ao longo de todo o elemento e, conseqüentemente, a convergência da solução está assegurada (Hughes, 1987).

4.3 Integração numérica

As expressões para as matrizes de massa e rigidez do elemento necessitam do cálculo de integrais de volume. Entretanto, como não é possível obter expressões analíticas para as expressões, utilizam-se técnicas numéricas para aproximar estas integrais. Um procedimento muito eficiente para aproximar esta integração numérica é a Quadratura de Gauss-Legendre. De acordo com esta técnica, a função é avaliada apenas em alguns pontos, denominados pontos de integração, cuja posição é otimizada.

A Quadratura de Gauss-Legendre permite escolher um número de pontos de integração n , de tal maneira que seja possível ajustar um polinômio de grau $2n - 1$ para que a função seja integrada exatamente. Se a função não é polinomial, a integração de Gauss não é exata, mas torna-se mais precisa conforme é aumentado o número de pontos de integração.

A expressão mais simples para a integração numérica de uma função de uma variável, utilizando a técnica da Quadratura de Gauss-Legendre é dada por

$$\int_{-1}^1 f(s) ds = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i) \quad (4.8)$$

sendo que ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) representam as coordenadas dos pontos de integração e H_i os fatores de ponderação associados a estes pontos. A tabela (4.1) apresenta conjuntos de pontos de integração e seus respectivos fatores de integração para diversos valores de n .

A fórmula de integração assume que a função está definida no intervalo -1 a 1 . No caso das integrais para obter os elementos das matrizes de massa e rigidez, o domínio das funções de forma corresponde a este intervalo. A utilização das funções de forma, que são

Tabela 4.1: Localização dos Pontos de Integração

| Pontos de integração | Localização dos pontos | Fatores de ponderação |
|----------------------|--|-----------------------|
| 2 | $+0.5773502691 \left(1/\sqrt{3}\right)$ | 1.0 |
| | $-0.5773502691 \left(-1/\sqrt{3}\right)$ | 1.0 |
| 3 | $+0.7745966692 \left(\sqrt{0.6}\right)$ | 5/9 |
| | 0.0 | 8/9 |
| | $-0.7745966692 \left(-\sqrt{0.6}\right)$ | 5/9 |
| 4 | +0.8611363115 | 0.3478548451 |
| | +0.3399810435 | 0.6521451548 |
| | -0.3399810435 | 0.6521451548 |
| | -0.8611363115 | 0.3478548451 |

polinômios de Serendipity, também garante que, para o grau especificado da função de forma, a integral numérica obtida é exata.

Para integrar numericamente funções de duas ou três variáveis, para elementos retangulares é necessário aplicar a fórmula de integração unidimensional em cada uma das direções. Portanto, a integral de uma função tridimensional é dada por

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(s, t, r) ds dt dr = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_i H_j H_k f(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \quad (4.9)$$

O número de pontos de integração em cada direção não precisa ser o mesmo, embora este seja o procedimento mais comum (Bathe, 1982).

4.4 Expressão geral para as matrizes do elemento sólido

4.4.1 Funções de forma para o elemento sólido

Para modelar a palheta serão empregados elementos sólidos. O elemento sólido é representado no plano computacional por um cubo de lados iguais e é formado por vinte nós, sendo que oito destes nós correspondem aos vértices do cubo. Outros doze nós são definidos no ponto médio das arestas deste cubo. A representação geométrica dos nós deste elemento está na figura 4.3. A tabela (4.2) apresenta as coordenadas dos nós que formam o elemento, representadas no referencial local.

Este tipo de elemento, segundo Bathe (1982), é mais eficiente para análise de estruturas tridimensionais, especialmente as de forma geométrica irregular. A variação do

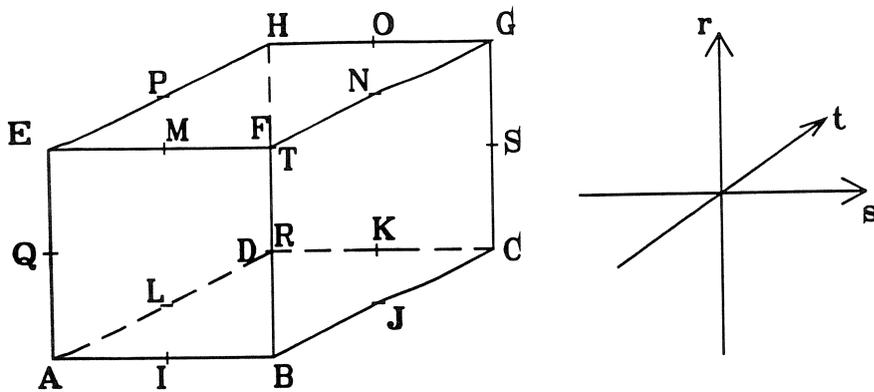


Figura 4.3: Elemento sólido - localização dos vinte nós que formam elemento

Tabela 4.2: Coordenadas do Nós de um Elemento Sólido

| |
|-------------------------|
| $A \equiv (-1, -1, -1)$ |
| $B \equiv (1, -1, -1)$ |
| $C \equiv (1, 1, -1)$ |
| $D \equiv (-1, 1, -1)$ |
| $E \equiv (-1, -1, 1)$ |
| $F \equiv (1, -1, 1)$ |
| $G \equiv (1, 1, 1)$ |
| $H \equiv (-1, 1, 1)$ |
| $I \equiv (0, -1, -1)$ |
| $J \equiv (1, 0, -1)$ |
| $K \equiv (0, 1, -1)$ |
| $L \equiv (-1, 0, -1)$ |
| $M \equiv (0, -1, 1)$ |
| $N \equiv (1, 0, 1)$ |
| $O \equiv (0, 1, 1)$ |
| $P \equiv (-1, 0, 1)$ |
| $Q \equiv (-1, -1, 0)$ |
| $R \equiv (1, -1, 0)$ |
| $S \equiv (1, 1, 0)$ |
| $T \equiv (-1, 1, 0)$ |

deslocamento é parabólica ao longo de cada aresta do cubo. Embora este tipo de elemento possibilite modelar estruturas de geometrias complexas e contornos curvados, é necessário assegurar que os ângulos internos devem ser menores que 180° . ou seja, que a malha não é distorcida. Outro cuidado que deve ser tomado para este tipo de elemento é que os pontos médios das arestas devem corresponder aos pontos médios do elemento.

As funções de forma para este elemento estão apresentados na tabela (4.3).

Tabela 4.3: Funções de Forma para um Elemento Sólido

$$\begin{aligned}
 N_A = N_1 &= ((1-r) * (1-s) * (1-t) * (-2-r-s-t))/8 \\
 N_B = N_2 &= ((1-r) * (1+s) * (1-t) * (-2-r+s-t))/8 \\
 N_C = N_3 &= ((1-r) * (1+s) * (1+t) * (-2-r+s+t))/8 \\
 N_D = N_4 &= ((1-r) * (1-s) * (1+t) * (-2-r-s+t))/8 \\
 N_E = N_5 &= ((1+r) * (1-s) * (1-t) * (-2+r-s-t))/8 \\
 N_F = N_6 &= ((1+r) * (1+s) * (1-t) * (-2+r+s-t))/8 \\
 N_G = N_7 &= ((1+r) * (1+s) * (1+t) * (-2+r+s+t))/8 \\
 N_H = N_8 &= ((1+r) * (1-s) * (1+t) * (-2+r-s+t))/8 \\
 N_I = N_9 &= ((1-r) * (1-s^2) * (1-t))/4 \\
 N_J = N_{10} &= ((1-r) * (1+s) * (1-t^2))/4 \\
 N_K = N_{11} &= ((1-r) * (1-s^2) * (1+t))/4 \\
 N_L = N_{12} &= ((1-r) * (1-s) * (1-t^2))/4 \\
 N_M = N_{13} &= ((1+r) * (1-s^2) * (1-t))/4 \\
 N_N = N_{14} &= ((1+r) * (1+s) * (1-t^2))/4 \\
 N_O = N_{15} &= ((1+r) * (1-s^2) * (1+t))/4 \\
 N_P = N_{16} &= ((1+r) * (1-s) * (1-t^2))/4 \\
 N_Q = N_{17} &= ((1-r^2) * (1-s) * (1-t))/4 \\
 N_R = N_{18} &= ((1-r^2) * (1+s) * (1-t))/4 \\
 N_S = N_{19} &= ((1-r^2) * (1+s) * (1+t))/4 \\
 N_T = N_{20} &= ((1-r^2) * (1-s) * (1+t))/4
 \end{aligned}$$

As derivadas das funções de forma em relação às coordenadas s , t e r estão apresentadas nas tabelas (4.4), (4.5) e (4.6).

4.4.2 Matriz de massa

A matriz de massa de um elemento finito é definida genericamente por

$$\mathbf{M} = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \rho \, dx \, dy \, dz \quad (4.10)$$

sendo que \mathbf{N} é a matriz das funções de forma e ρ , a massa específica do material.

As expressões para as funções de forma estão escritas no sistema de coordenadas local (s, t, r) , e é neste sistema que as integrais são avaliadas. Portanto, é necessário fazer

Tabela 4.4: Derivadas das Funções de Forma em relação a variável s : $\frac{\partial N_i}{\partial s}$

| |
|---|
| $\frac{\partial N_1}{\partial s} = -((1-r) * (1-s) * (1-t))/8 - ((1-r) * (1-t) * (-2-r-s-t))/8$ |
| $\frac{\partial N_2}{\partial s} = ((1-r) * (1+s) * (1-t))/8 + ((1-r) * (1-t) * (-2-r+s-t))/8$ |
| $\frac{\partial N_3}{\partial s} = ((1-r) * (1+s) * (1+t))/8 + ((1-r) * (1+t) * (-2-r+s+t))/8$ |
| $\frac{\partial N_4}{\partial s} = -((1-r) * (1-s) * (1+t))/8 - ((1-r) * (1+t) * (-2-r-s+t))/8$ |
| $\frac{\partial N_5}{\partial s} = -((1+r) * (1-s) * (1-t))/8 - ((1+r) * (1-t) * (-2+r-s-t))/8$ |
| $\frac{\partial N_6}{\partial s} = ((1+r) * (1+s) * (1-t))/8 + ((1+r) * (1-t) * (-2+r+s-t))/8$ |
| $\frac{\partial N_7}{\partial s} = ((1+r) * (1+s) * (1+t))/8 + ((1+r) * (1+t) * (-2+r+s+t))/8$ |
| $\frac{\partial N_8}{\partial s} = -((1+r) * (1-s) * (1+t))/8 - ((1+r) * (1+t) * (-2+r-s+t))/8$ |
| $\frac{\partial N_9}{\partial s} = -((1-r) * s * (1-t))/2$ |
| $\frac{\partial N_{10}}{\partial s} = ((1-r) * (1-t^2))/4$ |
| $\frac{\partial N_{11}}{\partial s} = -((1-r) * s * (1+t))/2$ |
| $\frac{\partial N_{12}}{\partial s} = -((1-r) * (1-t^2))/4$ |
| $\frac{\partial N_{13}}{\partial s} = -((1+r) * s * (1-t))/2$ |
| $\frac{\partial N_{14}}{\partial s} = ((1+r) * (1-t^2))/4$ |
| $\frac{\partial N_{15}}{\partial s} = -((1+r) * s * (1+t))/2$ |
| $\frac{\partial N_{16}}{\partial s} = -((1+r) * (1-t^2))/4$ |
| $\frac{\partial N_{17}}{\partial s} = -((1-r^2) * (1-t))/4$ |
| $\frac{\partial N_{18}}{\partial s} = ((1-r^2) * (1-t))/4$ |
| $\frac{\partial N_{19}}{\partial s} = ((1-r^2) * (1+t))/4$ |
| $\frac{\partial N_{20}}{\partial s} = -((1-r^2) * (1+t))/4$ |

Tabela 4.5: Derivadas das Funções de Forma em relação a variável t : $\frac{\partial N_i}{\partial t}$

| |
|---|
| $\frac{\partial N_1}{\partial t} = -((1-r) * (1-s) * (1-t))/8 - ((1-r) * (1-s) * (-2-r-s-t))/8$ |
| $\frac{\partial N_2}{\partial t} = -((1-r) * (1+s) * (1-t))/8 - ((1-r) * (1+s) * (-2-r+s-t))/8$ |
| $\frac{\partial N_3}{\partial t} = ((1-r) * (1+s) * (1+t))/8 + ((1-r) * (1+s) * (-2-r+s+t))/8$ |
| $\frac{\partial N_4}{\partial t} = ((1-r) * (1-s) * (1+t))/8 + ((1-r) * (1-s) * (-2-r-s+t))/8$ |
| $\frac{\partial N_5}{\partial t} = -((1+r) * (1-s) * (1-t))/8 - ((1+r) * (1-s) * (-2+r-s-t))/8$ |
| $\frac{\partial N_6}{\partial t} = -((1+r) * (1+s) * (1-t))/8 - ((1+r) * (1+s) * (-2+r+s-t))/8$ |
| $\frac{\partial N_7}{\partial t} = ((1+r) * (1+s) * (1+t))/8 + ((1+r) * (1+s) * (-2+r+s+t))/8$ |
| $\frac{\partial N_8}{\partial t} = ((1+r) * (1-s) * (1+t))/8 + ((1+r) * (1-s) * (-2+r-s+t))/8$ |
| $\frac{\partial N_9}{\partial t} = -((1-r) * (1-s^2))/4$ |
| $\frac{\partial N_{10}}{\partial t} = -((1-r) * (1+s) * t)/2$ |
| $\frac{\partial N_{11}}{\partial t} = ((1-r) * (1-s^2))/4$ |
| $\frac{\partial N_{12}}{\partial t} = -((1-r) * (1-s) * t)/2$ |
| $\frac{\partial N_{13}}{\partial t} = -((1+r) * (1-s^2))/4$ |
| $\frac{\partial N_{14}}{\partial t} = -((1+r) * (1+s) * t)/2$ |
| $\frac{\partial N_{15}}{\partial t} = ((1+r) * (1-s^2))/4$ |
| $\frac{\partial N_{16}}{\partial t} = -((1+r) * (1-s) * t)/2$ |
| $\frac{\partial N_{17}}{\partial t} = -((1-r^2) * (1-s))/4$ |
| $\frac{\partial N_{18}}{\partial t} = -((1-r^2) * (1+s))/4$ |
| $\frac{\partial N_{19}}{\partial t} = ((1-r^2) * (1+s))/4$ |
| $\frac{\partial N_{20}}{\partial t} = ((1-r^2) * (1-s))/4$ |

Tabela 4.6: Derivadas das Funções de Forma em relação a variável $r : \frac{\partial N_i}{\partial r}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial r} &= -((1-r) * (1-s) * (1-t))/8 - ((1-s) * (1-t) * (-2-r-s-t))/8 \\
\frac{\partial N_{2,r}}{\partial r} &= -((1-r) * (1+s) * (1-t))/8 - ((1+s) * (1-t) * (-2-r+s-t))/8 \\
\frac{\partial N_{3,r}}{\partial r} &= -((1-r) * (1+s) * (1+t))/8 - ((1+s) * (1+t) * (-2-r+s+t))/8 \\
\frac{\partial N_{4,r}}{\partial r} &= -((1-r) * (1-s) * (1+t))/8 - ((1-s) * (1+t) * (-2-r-s+t))/8 \\
\frac{\partial N_{5,r}}{\partial r} &= ((1+r) * (1-s) * (1-t))/8 + ((1-s) * (1-t) * (-2+r-s-t))/8 \\
\frac{\partial N_{6,r}}{\partial r} &= ((1+r) * (1+s) * (1-t))/8 + ((1+s) * (1-t) * (-2+r+s-t))/8 \\
\frac{\partial N_{7,r}}{\partial r} &= ((1+r) * (1+s) * (1+t))/8 + ((1+s) * (1+t) * (-2+r+s+t))/8 \\
\frac{\partial N_{8,r}}{\partial r} &= ((1+r) * (1-s) * (1+t))/8 + ((1-s) * (1+t) * (-2+r-s+t))/8 \\
\frac{\partial N_{9,r}}{\partial r} &= -((1-s^2) * (1-t))/4 \\
\frac{\partial N_{10,r}}{\partial r} &= -((1+s) * (1-t^2))/4 \\
\frac{\partial N_{11,r}}{\partial r} &= -((1-s^2) * (1+t))/4 \\
\frac{\partial N_{12,r}}{\partial r} &= -((1-s) * (1-t^2))/4 \\
\frac{\partial N_{13,r}}{\partial r} &= ((1-s^2) * (1-t))/4 \\
\frac{\partial N_{14,r}}{\partial r} &= ((1+s) * (1-t^2))/4 \\
\frac{\partial N_{15,r}}{\partial r} &= ((1-s^2) * (1+t))/4 \\
\frac{\partial N_{16,r}}{\partial r} &= ((1-s) * (1-t^2))/4 \\
\frac{\partial N_{17,r}}{\partial r} &= -(r * (1-s) * (1-t))/2 \\
\frac{\partial N_{18,r}}{\partial r} &= -(r * (1+s) * (1-t))/2 \\
\frac{\partial N_{19,r}}{\partial r} &= -(r * (1+s) * (1+t))/2 \\
\frac{\partial N_{20,r}}{\partial r} &= -(r * (1-s) * (1+t))/2
\end{aligned}$$

a transformação do diferencial de volume $dV = dx dy dz$ para o sistema de coordenadas locais. A expressão para a matriz de massa é escrita como

$$\mathbf{M} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \rho \det \mathbf{J} ds dt dr \quad (4.11)$$

A dimensão da matriz de massa para o elemento sólido é 60×60 , pois estão sendo considerados três graus de liberdade para cada um dos nós. A matriz de massa pode também ser escrita como

$$\mathbf{M} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 N_1 & 0 & \mathbf{0} & \cdots & N_1 N_{20} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 N_1 & \mathbf{0} & \cdots & 0 & N_1 N_{20} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_1 N_{20} \\ N_2 N_1 & 0 & \mathbf{0} & \cdots & N_2 N_{20} & 0 & 0 \\ 0 & N_2 N_1 & \mathbf{0} & \cdots & 0 & N_2 N_{20} & 0 \\ 0 & 0 & N_2 N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_2 N_{20} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{20} N_1 & 0 & \mathbf{0} & \cdots & N_{20} N_{20} & 0 & 0 \\ 0 & N_{20} N_1 & \mathbf{0} & \cdots & 0 & N_{20} N_{20} & 0 \\ 0 & 0 & N_{20} N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_{20} N_{20} \end{bmatrix} \rho \det \mathbf{J} ds dt dr \quad (4.12)$$

A integral envolvida no cálculo da matriz de massa é avaliada utilizando a técnica da Quadratura de Gauss-Legendre. A expressão para a matriz de massa é, então, escrita pelo seguinte somatório

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{p_m} \sum_{j=1}^{p_m} \sum_{k=1}^{p_m} H_i H_j H_k \mathbf{N}^T(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \mathbf{N}(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \rho \det \mathbf{J}(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \quad (4.13)$$

Na expressão anterior, o número total de pontos de integração é dado por p_m . A matriz das funções de forma \mathbf{N} e o determinante jacobiano devem ser avaliados nos diferentes conjuntos de pontos de integração (ξ_i, ξ_j, ξ_k) . As constantes H_i , H_j e H_k referem-se aos fatores de ponderação utilizados neste método de integração. O número de pontos de integração depende do grau do polinômio resultante da multiplicação das diversas funções de forma. Neste caso, o polinômio resultante tem grau 3 em cada uma das variáveis, sendo necessário respeitar a equação $2n - 1 = 4$, o que leva a um mínimo de 3 pontos de integração em cada uma das direções. Nesta análise é considerado que a malha é uniforme e, portanto, o jacobiano é constante. Entretanto, um número maior de pontos de integração pode ser necessário, no caso de malhas muito distorcidas, em que o jacobiano não é constante. Nesta situação será necessário testar também os resultados obtidos com 4 pontos de integração.

4.4.3 Matriz de rigidez

A matriz de rigidez de um elemento finito genérico é dada por

$$\mathbf{K} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx \, dy \, dz \quad (4.14)$$

A matriz \mathbf{D} representa as propriedades do material e é definida por

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \begin{bmatrix} 1 - \mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 - \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1 - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

sendo que E é o módulo de Young e μ é o módulo de Poisson do material.

A matriz \mathbf{B} representa as derivadas das funções de forma do elemento. Esta matriz, na verdade, é definida pelo produto da matriz dos operadores diferenciais ∂ , equação

(3.49), e da matriz das funções de forma N :

$$\mathbf{B} = \partial \cdot \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_{20} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_{20} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_{20} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

ou ainda,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_{20}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_{20}}{\partial z} & \frac{\partial N_{20}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Da mesma forma que no cálculo da matriz de massa, a integração é realizada no sistema de coordenadas local e deve-se transformar o diferencial de volume para o sistema local (s, t, r) . Assim,

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} \, ds \, dt \, dr \quad (4.18)$$

A matriz de rigidez de um único elemento tem dimensão 60×60 , pois a cada um dos nós estão associados três graus de liberdade. A forma geral desta matriz pode ser reescrita como

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{20} \\ \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{20} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{20}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_{20}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{B}_{20}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{20} \end{bmatrix} \det \mathbf{J} \, ds \, dt \, dr \quad (4.19)$$

Na equação anterior, cada uma das sub-matrizes \mathbf{B}_i é definida como

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, 20 \quad (4.20)$$

Para o cálculo da matriz \mathbf{B}_i , portanto, devem ser calculadas as derivadas globais das funções de forma, que estão escritas no sistema de referência local. Estas derivadas

podem ser calculadas por meio da matriz jacobiana da transformação entre os sistemas global e local, de acordo com a equação (4.7).

Finalmente, a integral envolvida no cálculo da matriz de rigidez é avaliada utilizando a técnica da Quadratura de Gauss-Legendre. A expressão para a matriz de rigidez é, então, escrita pelo seguinte somatório:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{p_k} \sum_{j=1}^{p_k} \sum_{k=1}^{p_k} H_i H_j H_k \mathbf{B}^T(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \det \mathbf{J}(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \quad (4.21)$$

Neste caso, o número total de pontos de integração é dado por p_k , sendo que (ξ_i, ξ_j, ξ_k) representam o conjunto de pontos de integração e H_i, H_j e H_k referem-se aos fatores de ponderação. O número de pontos de integração que será empregado para o cálculo da matriz de rigidez é 3 nas três direções, pois o grau dos polinômios resultantes da multiplicação das matrizes $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ é igual a 3.

4.4.4 Matriz de rigidez rotacional

A matriz de rigidez rotacional de um elemento finito genérico é dada por

$$\mathbf{K}_\Omega = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \Omega^2 \mathbf{N} \, dx \, dy \, dz \quad (4.22)$$

Em coordenadas locais a matriz de rigidez rotacional é dada por

$$\mathbf{K}_\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \mathbf{N}^T \Omega^2 \mathbf{N} \det \mathbf{J} \, ds \, dt \, dr \quad (4.23)$$

A matriz Ω^2 , que está associada à aceleração centrífuga da estrutura, é dada por

$$\Omega^2 = \Omega^T \Omega = \begin{bmatrix} \omega_y^2(t) + \omega_z^2(t) & -\omega_x(t) \cdot \omega_y(t) & -\omega_x(t) \cdot \omega_z(t) \\ -\omega_x(t) \cdot \omega_y(t) & \omega_x^2(t) + \omega_z^2(t) & -\omega_y(t) \cdot \omega_z(t) \\ -\omega_x(t) \cdot \omega_z(t) & -\omega_y(t) \cdot \omega_z(t) & \omega_x^2(t) + \omega_y^2(t) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

sendo que $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ e $\omega_z(t)$ representam as componentes do vetor de velocidade angular da estrutura. A integral na equação (4.24) é avaliada numericamente pela técnica de Gauss-Legendre, de acordo com a expressão

$$\mathbf{K}_\Omega = \sum_{i=1}^{p_r} \sum_{j=1}^{p_r} \sum_{k=1}^{p_r} H_i H_j H_k \mathbf{N}^T(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \Omega^2 \mathbf{N}(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \rho \det \mathbf{J}(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \quad (4.25)$$

O número de pontos de integração para calcular esta integral, p_r , é o mesmo utilizado para avaliar a matriz de massa, pois a ordem dos polinômios de forma é o mesmo para as

duas matrizes, ou seja, são utilizados 3 ou 4 pontos de integração em cada uma das três direções, dependendo da distorção da malha.

4.4.5 Matriz de rigidez geométrica

A matriz de rigidez geométrica para um elemento finito sólido genérico é dada por

$$\mathbf{K}_g = \int_{V_e} \mathbf{H}^T \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 \end{bmatrix} \mathbf{H} \, dx \, dy \, dz \quad (4.26)$$

Em coordenadas locais, a matriz de rigidez geométrica pode ser reescrita como

$$\mathbf{K}_g = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{H}^T \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 \end{bmatrix} \mathbf{H} \det \mathbf{J} \, ds \, dt \, dr \quad (4.27)$$

A matriz \mathbf{H} representa a derivada das funções de forma, e, embora tenha a mesma definição da matriz \mathbf{B} , esta matriz apresenta uma ordem diferente na aplicação do operador diferencial. Ao contrário da matriz \mathbf{B} , que é 6×60 , a matriz \mathbf{H} é 9×60 , sendo definida por

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \mathbf{N} \quad (4.28)$$

A matriz $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0$ representa o estado de tensão inicial, sendo definida pelas componentes do vetor inicial de tensões, $\boldsymbol{\sigma}_0$, de acordo com

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{0xx} & \sigma_{0xy} & \sigma_{0xz} \\ \sigma_{0xy} & \sigma_{0yy} & \sigma_{0yz} \\ \sigma_{0xz} & \sigma_{0yz} & \sigma_{0zz} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

O estado inicial de tensões é calculado a partir do vetor de deformações inicial $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ e do vetor de posição de equilíbrio \mathbf{q}_0 , de acordo com

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{B}\mathbf{q}_0 \quad (4.30)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (4.31)$$

As matrizes \mathbf{B} e \mathbf{D} são, respectivamente, as matrizes das derivadas das funções de forma e das propriedades do material. A avaliação numérica da integral para calcular a matriz de rigidez geométrica é dada por

$$\mathbf{K}_g = \sum_{i=1}^{p_g} \sum_{j=1}^{p_g} \sum_{k=1}^{p_g} H_i H_j H_k \mathbf{H}(\xi_i, \xi_j, \xi_k)^T \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 \end{bmatrix} \mathbf{H}(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \det \mathbf{J}(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \quad (4.32)$$

O número total de pontos de integração p_g é o mesmo empregado no cálculo da matriz de rigidez, ou seja, $3 \times 3 \times 3$, pois estão envolvidos no integrando termos relacionados às derivadas das funções de forma. Deve-se ressaltar que no cálculo desta matriz de rigidez geométrica o vetor de tensões é calculado nos pontos de integração ξ_i .

4.4.6 Vetores de força centrífuga

O vetor de força centrífuga é composto de duas componentes, relativas ao ponto de fixação da palheta ao rotor e distribuída ao longo da palheta, respectivamente, \mathbf{f}_Ω^1 e \mathbf{f}_Ω^2 . O primeiro vetor é dado por

$$\mathbf{f}_\Omega^1 = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \Omega^2 \mathbf{r}_0 \, dx \, dy \, dz \quad (4.33)$$

Em coordenadas locais, esta integral pode ser reescrita como

$$\mathbf{f}_\Omega^1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \mathbf{N}^T \Omega^2 \mathbf{r}_0 \det \mathbf{J} \, ds \, dt \, dr \quad (4.34)$$

O vetor \mathbf{r}_0 descreve as coordenadas cartesianas do ponto em que a palheta esta fixa ao rotor, sendo definido por

$$\mathbf{r}_0 = \begin{Bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \\ r_{0z} \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

Este vetor pode ser calculado numericamente pela equação

$$\mathbf{f}_\Omega^1 = \sum_{i=1}^{p_f} \sum_{j=1}^{p_f} \sum_{k=1}^{p_f} H_i H_j H_k \mathbf{N}^T(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \Omega^2 \mathbf{r}_0 \rho \det \mathbf{J}(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \quad (4.36)$$

O número total de pontos de integração, devido a menor ordem do polinômio neste caso pode ser reduzido para $2 \times 2 \times 2$, e portanto $p_f = 2$.

A segunda componente do vetor de força centrífuga é dada por

$$f_{\Omega}^2 = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \Omega^2 \mathbf{N} \mathbf{c} \, dx \, dy \, dz \tag{4.37}$$

Este vetor pode ser calculado diretamente, pela multiplicação da matriz de rigidez rotacional pelo vetor das coordenadas cartesianas dos 20 nós que formam o elemento sólido, \mathbf{c} , de acordo com

$$f_{\Omega}^2 = \mathbf{K}_{\Omega} \cdot \mathbf{c} \tag{4.38}$$

4.4.7 Acoplamento entre as diversas matrizes

As matrizes de massa e rigidez são avaliadas numericamente em função das coordenadas geométricas dos nós \mathbf{x}^e , \mathbf{y}^e e \mathbf{z}^e . Para determinar as matrizes globais da estrutura as matrizes de massa e rigidez de cada um dos elementos são sobrepostas de acordo com os graus de liberdade, ou incidências nodais, que estão associados cada um dos nós que constituem o elemento (Cook et al., 1989).

4.5 Método de iteração por subespaço

O método de iteração por subespaço foi desenvolvido por Bathe (1982), com o objetivo de fornecer um método numérico eficiente, com convergência assegurada, para calcular os primeiros autovalores, e os respectivos autovetores, de sistemas de muitos graus de liberdade. Assim, o objetivo do método de iteração por subespaço é calcular os primeiros p autovalores e autovetores que satisfaçam a equação

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Lambda \tag{4.39}$$

sendo que, Λ é a matriz diagonal com os primeiros p autovalores e Φ contém os autovetores correspondentes $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p]$. Os autovetores também devem satisfazer às seguintes condições de ortogonalidade

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda \tag{4.40}$$

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \tag{4.41}$$

O método está baseado na idéia de que os autovetores na equação (4.39) formam uma base, ortonormalizada pela matriz \mathbf{M} , do subespaço de dimensão p dos operadores \mathbf{M} e

K. Este subespaço é chamado de E_∞ . Os autovetores iniciais do processo iterativo geram um subespaço E_1 , sendo que o processo iterativo deve continuar até que o subespaço E_∞ seja gerado. O número total de iterações depende de quão próximo o subespaço E_1 está de E_∞ e não de quanto cada vetor, na iteração corrente, está próximo de um autovetor, pois o processo iterativo é realizado em cada subespaço. Dessa forma, a eficiência do método está na escolha de um subespaço inicial de dimensão p inicial, que está razoavelmente próximo de E_∞ , pois escolher p vetores que sejam próximos de determinados autovetores é mais difícil. Assim, um algoritmo para determinar os vetores iniciais do processo deve ser desenvolvido. Por outro lado, como o processo iterativo é realizado em cada subespaço, a convergência do subespaço é a única exigência para a convergência da solução e não há necessidade de assegurar a convergência de cada vetor para os autovetores do problema original.

As etapas do algoritmo de iteração por subespaço, apresentadas a seguir, permitem encontrar uma base ortogonal do vetor no subespaço E_{k+1} , preservando, portanto, a estabilidade numérica da iteração. Neste procedimento é suposto que a iteração corrente é, no mínimo, a segunda, e que os vetores da iteração k foram calculados anteriormente.

Primeiramente, é calculado um vetor de dimensão p , de acordo com,

$$\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{X}}_{k+1} = \mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{X}}_k \quad (4.42)$$

As projeções dos operadores \mathbf{M} e \mathbf{K} no espaço E_{k+1} são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{K}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{X}}_{k+1} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{M}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{X}}_{k+1} \quad (4.44)$$

Em seguida, com a determinação das projeções dos operadores, deve ser resolvido o problema de autovalor associado, que é definido por

$$\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} \Lambda_{k+1} \quad (4.45)$$

Finalmente, é possível encontrar uma melhor aproximação para os autovetores na iteração $k + 1$.

$$\mathbf{X}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} \quad (4.46)$$

Assim, desde que os vetores da iteração inicial \mathbf{X}_1 não sejam ortogonais a um dos autovetores do problema original, tem-se

$$\Lambda_{k+1} \rightarrow \Lambda \text{ e } \mathbf{X}_{k+1} \rightarrow \Phi, \text{ assim que } k \rightarrow \infty \quad (4.47)$$

Um importante aspecto é a convergência linear do método. Embora, a convergência seja assintótica, os autovalores mais baixos apresentam uma taxa de convergência mais alta. Por outro lado, uma alta taxa de convergência é obtida utilizando q vetores no processo iterativo, $q > p$. Contudo, ao utilizar um número maior de vetores, cada iteração torna-se mais lenta. Assim, é possível encontrar um número mínimo de vetores para garantir uma convergência otimizada. Este número é dado por $q = \min \{2p, p + 8\}$. Entretanto, esta convergência é observada apenas para os espaços E_k que estão suficientemente próximos de E_∞ , sendo que o método se apóia no fato de que as primeiras aproximações já fornecem um subespaço suficientemente próximo de E_∞ . Outra importante característica do método é a aproximação dos autovalores de forma semelhante ao método de Ritz, sendo que os autovalores calculados em cada subespaço são limites superiores para os autovalores do problema original. Assim, é possível entender o método de iteração por subespaço como uma aplicação sucessiva do método de Ritz.

A escolha dos q vetores da primeira iteração é obtida de tal forma que estejam associados aos graus de liberdade com grande massa e pouca rigidez. Dessa forma, o seguinte procedimento é empregado na escolha dos vetores iniciais: a primeira coluna no produto $\mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_1$ é escolhida simplesmente como a diagonal da matriz de massa. As outras colunas são escolhidas como vetores unitários, de tal forma que os valores +1 correspondem às coordenadas com menor razão k_{ii}/m_{ii} . Estes vetores sejam apenas uma aproximação para o subespaço inicial e dependendo da forma das matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} , mais próximas de matrizes diagonais, o número necessário de iterações para convergência pode diminuir. Embora esta aproximação inicial para os vetores iniciais forneça uma boa aproximação, outros resultados podem ser empregados, tais como a solução dos autovetores pelo método de Lanczos ou outro método de aproximação numérica para o problema de autovalores.

O método de iteração por subespaço fornece, portanto, um procedimento simples de ser implementado e com convergência garantida para calcular de maneira muito eficiente os primeiros autovalores e autovetores de problemas com muitos graus de liberdade, como os encontrados na solução dinâmica de problemas pelo Método dos Elementos Finitos.

Capítulo 5

Investigações teóricas

O objetivo deste capítulo é apresentar e discutir a solução para palhetas de formas geométricas simples, retangulares, e testar a influência dos diversos parâmetros que possam alterar a dinâmica da palheta, tais como velocidade de rotação, ângulo de pré-torção, ângulo de fixação, e forma da seção transversal. Os resultados obtidos nestas análises são comparados com trabalhos desenvolvidos por outros autores, com o objetivo de validar a metodologia implementada no presente trabalho.

5.1 Palheta modelada como viga delgada

Primeiramente, será estudado o comportamento dinâmico de uma palheta de forma retangular simples. Esta palheta é modelada como uma viga retangular, com seção transversal uniforme ao longo de seu comprimento. As dimensões desta viga estão representadas na figura (5.1), sendo que as propriedades do material empregado nesta análise estão sumarizados na tabela (5.1). Trata-se, portanto, de uma viga longa e delgada. Se esta mesma viga for modelada como uma viga unidimensional de Euler-Bernoulli, a solução analítica para as frequências naturais é conhecida e dada por (Rao, 1990)

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (5.1)$$

onde A é a área da seção transversal, I é o momento de inércia, l é o comprimento da viga e ρ é a densidade do material.

Os valores de $(\beta l)^2$ são valores normalizados (ou frequências normalizadas) para as frequências naturais da viga (Rao, 1990). Estes parâmetros são calculados a partir da solução da equação diferencial homogênea da viga, supondo uma solução harmônica no domínio do tempo. A solução final depende também do tipo de condição de contorno da

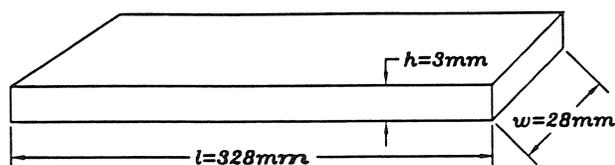


Figura 5.1: Principais dimensões palheta modelada como uma viga delgada

Tabela 5.1: Propriedades geométricas e do material da palheta

| Propriedades do material | Propriedades geométricas |
|---|--------------------------|
| $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ | $l = 328 \text{ mm}$ |
| $E = 2.17 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ | $w = 28 \text{ mm}$ |
| $\nu = 0.3$ | $h = 3 \text{ mm}$ |

viga. Para as quatro primeiras freqüências da viga livre-livre estes parâmetros normalizados são dados por

$$\begin{aligned}
 \beta_1 l &= 4.730041 \\
 \beta_2 l &= 7.853205 \\
 \beta_3 l &= 10.995608 \\
 \beta_4 l &= 14.137165
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Portanto, as quatro primeiras freqüências da viga, em rad/s são dadas por

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= 946.9 \text{ rad/s} \\
 \omega_2 &= 2610.2 \text{ rad/s} \\
 \omega_3 &= 5117.0 \text{ rad/s} \\
 \omega_4 &= 8458.7 \text{ rad/s}
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

As quatro primeiras freqüências da viga engastada em uma das extremidades e livre em outra podem ser determinadas também pela equação (5.1), porém neste caso, os parâmetros normalizados (βl) são dados por

$$\beta_1 l = 1.875104$$

$$\begin{aligned}\beta_2 l &= 4.694091 \\ \beta_3 l &= 7.854757 \\ \beta_4 l &= 10.995541\end{aligned}$$

Para uma viga engastada em uma das extremidades, as quatro primeiras frequências, em rad/s , são

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 148.8 \text{ rad/s} \\ \omega_2 &= 932.5 \text{ rad/s} \\ \omega_3 &= 2611.2 \text{ rad/s} \\ \omega_4 &= 5117.0 \text{ rad/s}\end{aligned}\tag{5.4}$$

As frequências naturais desta viga podem ser calculadas numericamente a partir de um modelo discretizado pelo método dos elementos finitos, utilizando elementos sólidos de 20 nós, seguindo a implementação discutida no capítulo 4. A partir da discretização da viga são obtidas as matrizes de massa e rigidez que representam a dinâmica da estrutura. A solução do problema de autovalor associado fornece as frequências naturais da viga.

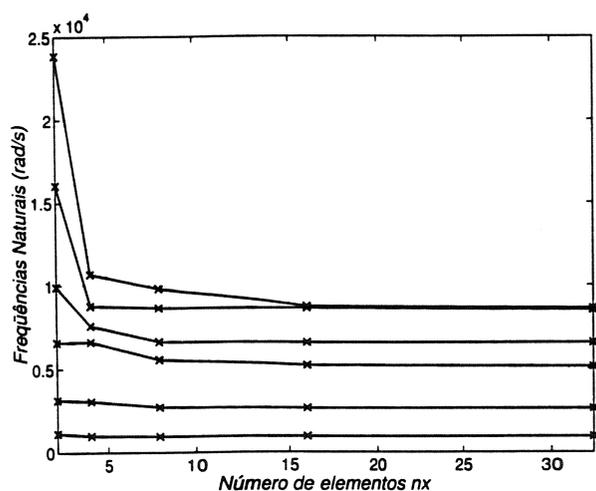
A variação do número de elementos empregados na discretização da viga influencia as frequências obtidas. Se a técnica de integração numérica empregada na obtenção das matrizes de massa e rigidez for a técnica da quadratura de Gauss-Legendre pode-se dizer que as frequências tendem monotonicamente para um limite inferior. Assim, é necessário verificar se o número de elementos escolhidos fornece um modelo suficientemente refinado, cujas frequências tenham convergido para este valor limite.

Considerando que a formulação do Método dos Elementos Finitos baseado no deslocamento é uma aplicação da técnica de Ritz, as propriedades de convergência associadas ao método de Ritz podem ser aplicadas também ao Método dos Elementos Finitos. Uma importante propriedade numérica do método de Ritz é que a discretização da matriz de rigidez \mathbf{K} implica em uma matriz semi-positiva definida, o que corresponde fisicamente a uma estrutura que não está sujeita a condições de restrição, ou seja, está livre no espaço. Outra importante propriedade do Método de Ritz é que a solução converge à medida que a dimensão do espaço é aumentada. Esta convergência também pode ser compreendida fisicamente, pois a estrutura discretizada, com o aumento da dimensão do espaço, tende para um estrutura com infinitos graus de liberdade, correspondendo, portanto, à estrutura real. Dessa semelhança da análise de erro e convergência entre os dois métodos, decorre que, na análise pelo Método dos Elementos Finitos, os deslocamentos calculados

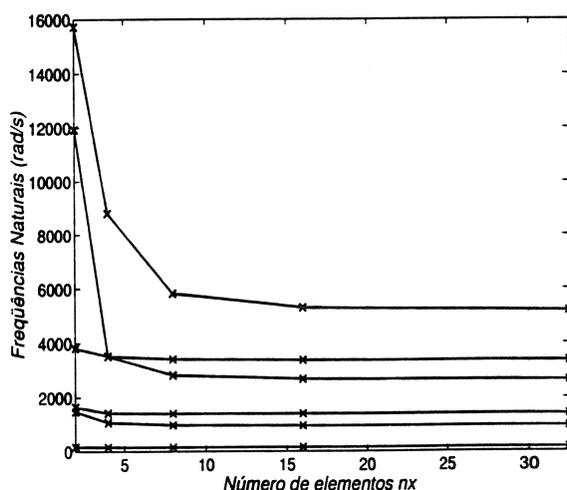
são subestimados, enquanto que a rigidez estrutural é superestimada (Bathe, 1982). Isto significa que na análise dinâmica, as frequências calculadas pelo Método dos Elementos Finitos são limites superiores para as frequências exatas da estrutura e que, à medida que a malha é refinada, as frequências convergem monotonicamente para um limite inferior.

Para a escolha final da malha para representar a palheta, diferentes níveis de discretização são testados. A malha é composta de n_x elementos na direção x (longitudinal da palheta), n_y elementos na direção y e n_z elementos na direção z . O número de elementos n_y e n_z é suposto constante e iguais a 2 e 1, respectivamente. Por outro lado, o número de elementos n_x varia entre 2 e 32.

A figura 5.2(a) apresenta o comportamento das primeiras frequências da viga na condição livre-livre em função do número de elementos na direção x . Neste gráfico é possível verificar o comportamento assintótico das frequências naturais. A tabela (5.2) apresenta os resultados obtidos para as frequências e a respectiva diferença entre a solução analítica e aproximada.



(a) Configuração livre-livre



(b) Configuração engastada

Figura 5.2: Variação das seis primeiras frequências naturais da palheta (viga delgada) com o número de elementos na direção x .

Tabela 5.2: Frequências naturais da viga livre-livre - Comparação com a solução analítica e aproximada (n_x : número de elementos utilizados na direção x).

| Solução Analítica | $n_x = 2$ | | $n_x = 4$ | | $n_x = 8$ | | $n_x = 16$ | | $n_x = 32$ | |
|-------------------|-----------|------|-----------|------|-----------|-----|------------|-----|------------|------|
| | rad/s | % | rad/s | % | rad/s | % | rad/s | % | rad/s | % |
| 946.9 | 1134.5 | 19.8 | 986.4 | 4.1 | 956.4 | 1.0 | 948.9 | 0.2 | 947.3 | 0.04 |
| 2610.2 | 3147.6 | 20.5 | 3064.2 | 17.3 | 2711.4 | 3.8 | 2631.5 | 0.8 | 2615.1 | 0.1 |
| 5117.0 | 6653.5 | 30.0 | 6631.4 | 29.5 | 5560.3 | 8.6 | 5207.2 | 1.7 | 5137.4 | 0.3 |
| 8458.7 | 16048.0 | 89.7 | 8765.7 | 3.6 | 8641.1 | 2.1 | 8618.9 | 1.8 | 8515.1 | 0.6 |

O mesmo comportamento é observado na figura 5.2(b), que representa os valores de frequências naturais da viga engastada em uma das extremidades. A tabela (5.3) apresenta os valores de frequências naturais e diferenças encontradas entre a solução analítica e aproximada.

Tabela 5.3: Frequências naturais da viga engastada - Comparação com a solução analítica e aproximada (n_x : número de elementos utilizados na direção x).

| Solução Analítica | $n_x = 2$ | | $n_x = 4$ | | $n_x = 8$ | | $n_x = 16$ | | $n_x = 32$ | |
|-------------------|-----------|-------|-----------|------|-----------|------|------------|-----|------------|-----|
| | rad/s | % | rad/s | % | rad/s | % | rad/s | % | rad/s | % |
| 148.8 | 167.4 | 12.5 | 156.4 | 5.1 | 152.5 | 2.4 | 150.9 | 1.4 | 150.2 | 0.9 |
| 932.6 | 1471.2 | 57.7 | 1065.3 | 14.2 | 972.6 | 4.2 | 948.4 | 1.7 | 941.3 | 0.9 |
| 2611.2 | 3809.1 | 45.8 | 3514.2 | 34.5 | 2816.3 | 7.8 | 2672.7 | 2.3 | 2638.0 | 1.0 |
| 51170 | 15837.0 | 207.3 | 8800.0 | 71.9 | 5817.9 | 13.6 | 5290.7 | 3.3 | 5178.0 | 1.1 |

A escolha final do modelo a ser utilizado na análise das frequências naturais da viga depende, portanto, da verificação da sensibilidade da malha empregada às variações do refinamento dentro da faixa de frequência da análise. Para esta viga, considerando uma faixa de frequências até $10000 rad/s$, um modelo composto de 16 elementos na direção x fornece valores para as seis primeiras frequências com uma boa convergência. Nota-se que a variação das frequências para as malhas com 16 ou 32 elementos na direção x é mínima. Para a viga na condição livre-livre, a diferença encontrada entre a solução analítica e numérica é menor que a encontrada para a viga engastada, sendo que para este último caso, o erro encontrado estabiliza-se em 1%. A tabela (5.4) mostra a variação percentual entre as frequências encontradas para as malhas com 16 e 32 elementos. Nota-se que a diferença encontrada para as duas malhas é da ordem de 1%, sendo inclusive menor que a diferença encontrada entre a solução analítica e numérica. Esta diferença encontrada entre a solução analítica e numérica pode ser explicada também pelas limitações do modelo analítico, que despreza os efeitos de Poisson e cisalhamento.

A figura (5.3) apresenta a malha final para a viga discretizada com 16 elementos na direção x , 2 elementos na direção y e 1 elemento na direção z .

Tabela 5.4: Comparação entre as frequências naturais da viga com 16 e 32 elementos na direção x . As frequências são dadas em rad/s .

| Configuração livre-livre | | | Viga engastada | | |
|--------------------------|------------|---------|----------------|------------|---------|
| $n_x = 16$ | $n_x = 32$ | dif (%) | $n_x = 16$ | $n_x = 32$ | dif (%) |
| 948.9 | 947.3 | 0.1 | 150.9 | 150.2 | 0.4 |
| 2631.5 | 2615.1 | 0.6 | 948.5 | 941.3 | 0.7 |
| 5207.2 | 5137.4 | 1.3 | 1388.3 | 1385.2 | 0.2 |
| 6572.5 | 6572.2 | 0.0 | 2672.7 | 2638.0 | 1.3 |
| 86189 | 8515.1 | 1.2 | 3367.8 | 3355.0 | 0.4 |
| 8717.3 | 8618.1 | 1.1 | 5290.7 | 5178.0 | 2.1 |

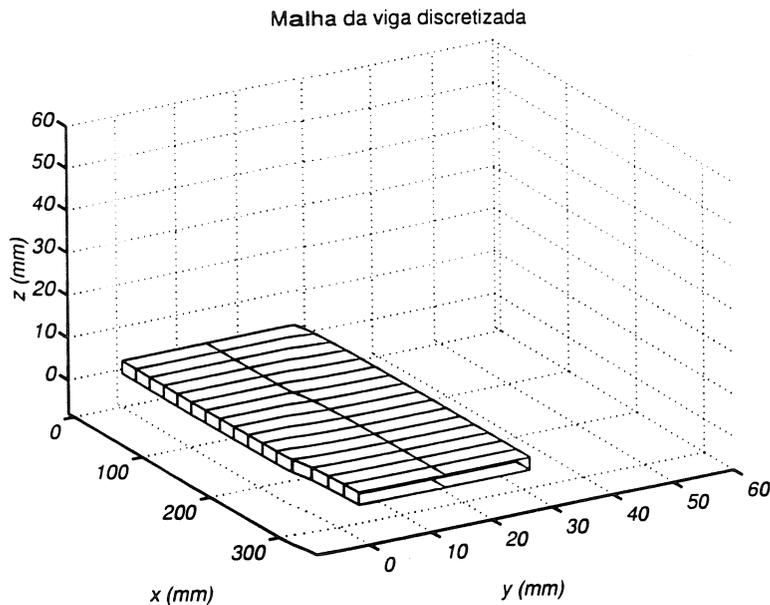
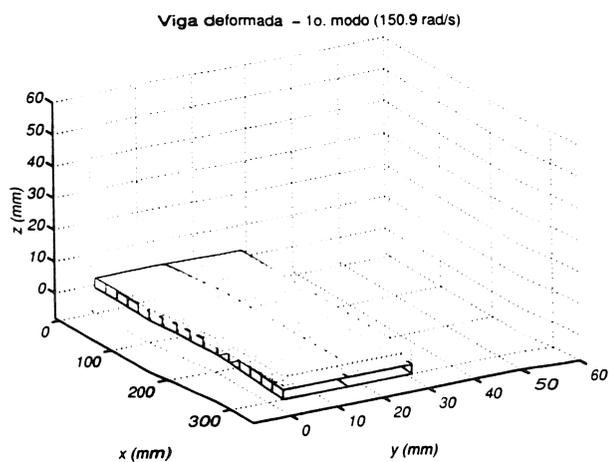
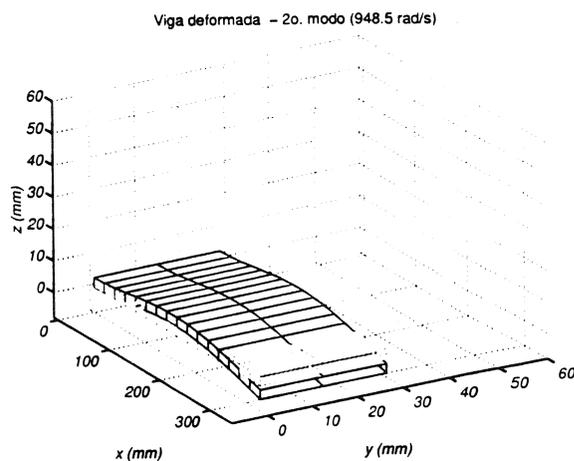
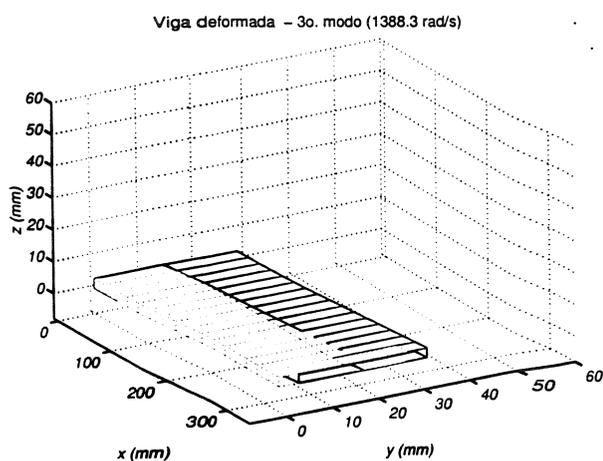
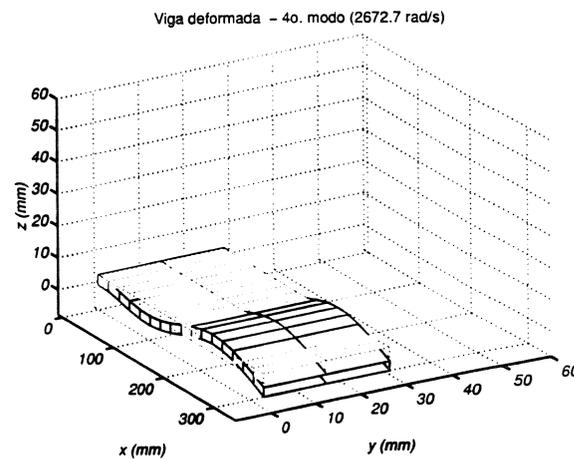
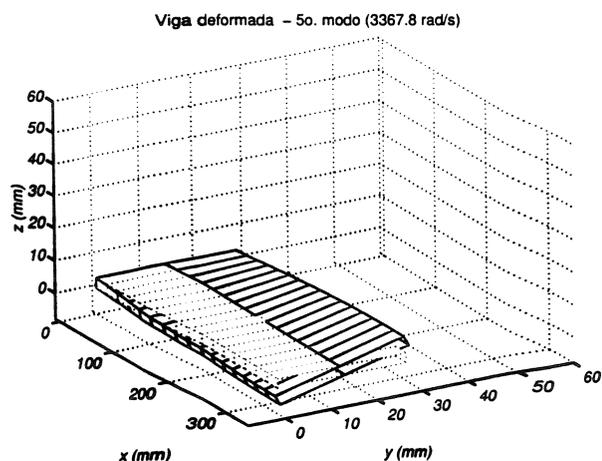


Figura 5.3: Malha utilizada para discretizar a palheta como uma viga unidimensional

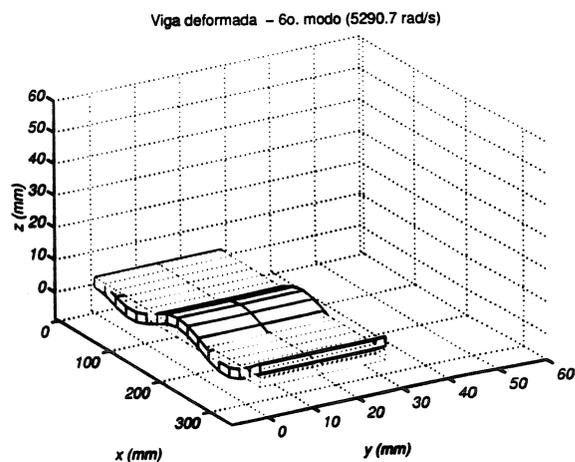
A forma dos seis primeiros modos de vibração da viga, na condição engastada, estão apresentados na figura (5.4). Ressalta-se que as seis primeiras freqüências obtidas numericamente não correspondem todas aos modos de vibrar definidos para a viga, de acordo com a equação (5.1). Para a palheta engastada, as duas primeiras freqüências, figuras 5.4(a) e 5.4(b), do modelo discretizado correspondem aos dois primeiros modos de viga. Porém, a terceira freqüência corresponde ao primeiro modo de flexão no plano perpendicular ao plano xz . Esta freqüência pode ser avaliada a partir da solução analítica, sendo que o momento de inércia I da viga deve ser calculado em relação ao eixo z . Utilizando, então a equação (5.1), obtém o valor de $\omega = 1388.9 \text{ rad/s}$ para esta freqüência. A figura 5.4(c) também mostra claramente o modo de flexão neste plano. A quarta e sexta freqüências, figuras 5.4(d) e 5.4(f) correspondem aos outros dois modos de viga, enquanto que a quinta freqüência, figura 5.4(e), está associada ao primeiro modo de torção.

Portanto, embora os resultados encontrados para a teoria unidimensional e solução numérica mostrem-se em boa concordância, a teoria unidimensional não é suficiente para identificar corretamente os primeiros modos da palheta. Neste caso, apenas os dois primeiros modos da palheta, que correspondem aos modos de viga, são identificados adequadamente pela teoria unidimensional.

De outra maneira, ainda é possível verificar a sensibilidade das freqüências naturais do modelo discretizado em função do número de elementos na direção y . Nota-se, neste caso, que as freqüências associadas aos modos de viga são pouco afetados pelo número de elementos nesta direção, sendo que apenas para o quinto modo, de torção, o refinamento implica em maior diferença para os valores de freqüência. Contudo, esta diferença para este modo ainda é menor que 1 % e a utilização de um modelo com 2 elementos na direção

(a) Primeiro modo de flexão de viga no plano xz (b) Segundo modo de flexão de viga no plano xz (c) Primeiro modo de flexão de viga no plano yz (d) Terceiro modo de flexão de viga no plano xz 

(e) Primeiro modo de torção

(f) Quarto modo de flexão de viga no plano xz **Figura 5.4:** Forma dos seis primeiros modos de vibração da viga engastada.

y é razoável.

Com a escolha da malha suficientemente refinada, é possível proceder a análise dinâmica de uma viga rotativa. Neste caso, a viga é suposta fixa a um rotor e as frequências da viga são calculadas de acordo com a equação :

$$\bar{M}\ddot{\bar{q}} + (\bar{K}_e + \bar{K}_g(\bar{q}) - \bar{K}_\Omega) \bar{q} = \bar{f}_\Omega \quad (5.5)$$

A matriz de rigidez geométrica é suposta constante durante o movimento, pois a velocidade de rotação do rotor é constante e, portanto, o movimento da palheta é assumido linear, oscilando linearmente em torno de uma posição de equilíbrio. O vetor \mathbf{q}_0 , que representa esta posição de equilíbrio, é obtido com a solução do problema de valor inicial, em função do vetor de forças centrífugas \mathbf{f}_Ω :

$$(\bar{K}_e + \bar{K}_g - \bar{K}_\Omega) \bar{q}_0 = \bar{f}_\Omega \quad (5.6)$$

O vetor \mathbf{q}_0 é, então, calculado por um processo iterativo, sendo que na primeira iteração a matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_g é suposta nula. O vetor posição de equilíbrio \mathbf{q}_0 está associado a uma distribuição inicial de tensões, que pode ser calculada diretamente pela equação

$$\sigma_0 = \mathbf{DBq}_0 \quad (5.7)$$

Assim, a matriz de rigidez geométrica é estimada a partir desta distribuição inicial de tensões e uma nova iteração pode ser empregada para reavaliar o vetor \mathbf{q}_0 , com a solução da equação (5.6). Nas simulações realizadas, este vetor foi calculado utilizando uma iteração apenas, pois o erro encontrado para os deslocamentos entre a primeira e segunda iterações é da ordem de 10^{-12} .

A equação de movimento da palheta, em sua forma linearizada, é então dada por

$$\bar{M}\ddot{\bar{q}} + (\bar{K}_e + \bar{K}_g - \bar{K}_\Omega) \bar{q} = 0 \quad (5.8)$$

Para a viga apresentada na figura (5.1), com a discretização, de 16 elementos na direção x , 2 elementos na direção y e 1 elemento na direção z (vide figura (5.3)), as frequências naturais da viga foram calculadas para diferentes velocidades de rotação do rotor. Nestas simulações, os valores de velocidade angular foram normalizados de acordo com a seguinte relação :

$$\Omega_N = \Omega \sqrt{\frac{\rho A l^4}{EI}} \quad (5.9)$$

Os valores escolhidos para a velocidade angular normalizada foram $\Omega_N = 2, 4, 5, 6, 8, 10, 20$, e 50 . Da mesma forma, as frequências naturais normalizadas são dadas pela seguinte relação :

$$\omega_N = \omega \sqrt{\frac{\rho A l^4}{EI}} \quad (5.10)$$

A tabela (5.5) apresenta os valores obtidos para as frequências naturais normalizadas da viga delgada, calculadas por diferentes abordagens. O ângulo de fixação da palheta neste exemplo é $\psi = 0^\circ$, assim as vibrações da palheta ocorrem no plano de rotação. A tabela (5.6) apresenta os resultados obtidos para as vibrações da palheta que ocorrem para fora do plano de rotação, ou seja, o ângulo de fixação é 90° .

O trabalho de Hsieh e Abel (1995) utiliza um modelo tridimensional para a palheta. O autor emprega o método dos elementos finitos, com elementos sólidos de 20 nós, para discretização da estrutura. O modelo empregado é bastante semelhante ao utilizado no presente trabalho, sendo que a malha utilizada pelos autores é de 8 nós na direção x e 2 elementos na direção y . O efeito da rotação do rotor é incluído através das matrizes de rigidez rotacional e rigidez geométrica. Por outro lado, o trabalho de Yokoyama (1988) utiliza uma formulação unidimensional para descrever o modelo da palheta. A equação da viga de Timoshenko é discretizada, também pelo método dos elementos finitos, sendo que o modelo permite incluir os efeitos do raio do rotor, ângulo de fixação da palheta, deformação por cisalhamento e inércia de rotação. Finalmente, o trabalho de Putter e Manor (1978) discute a modelagem de palhetas como vigas rotativas. As palhetas são modeladas como vigas de Timoshenko, discretizadas pelo método dos elementos finitos, e um elemento de quinta ordem. Os efeitos de inércia de rotação e força de cisalhamento são incluídos nesta formulação, embora esta análise esteja restrita a vibrações no plano da palheta. Nos três trabalhos discutidos a matriz de rigidez geométrica, também chamada de parcela estabilizadora da rigidez, é incluída na formulação.

Os resultados apresentados nas tabelas (5.5) e (5.6), mostram que as frequências calculadas nas quatro diferentes abordagens estão muito próximas, embora para $R/L = 0$ e para velocidades mais altas, algumas diferenças significativas possam ser encontradas. Esta diferença pode ser explicada porque no trabalho de Hsieh e Abel (1995), as forças centrífugas são calculadas na configuração deformada da viga, o que não ocorre nos outros dois trabalhos e no presente trabalho. As diferenças maiores são encontradas para velocidades de rotação muito elevadas, para o segundo modo de viga.

De acordo com a equação de movimento da palheta, equação (5.8), portanto, as frequências naturais da palheta são influenciadas pela velocidade angular do rotor de duas formas diferentes. A matriz de rigidez rotacional, que está diretamente relacionada à velocidade de rotação, influencia a rigidez da estrutura introduzindo um termo "deses-

Tabela 5.5: Comparação entre diferentes abordagens para análise das frequências de uma viga - vibrações no plano de rotação.

| Ω_N | Fonte | $\frac{R}{L} = 0$ | | $\frac{R}{L} = 1$ | |
|------------|-----------------------|-------------------|----------|-------------------|----------|
| | | 1o. modo | 2o. modo | 1o. modo | 2o. modo |
| 2 | Presente trabalho | 3.68 | 22.90 | 4.45 | 23.64 |
| | Hsieh e Abel (1995) | 3.68 | 22.59 | 4.45 | 23.31 |
| | Putter e Manor (1978) | 3.61 | 22.53 | 4.40 | 23.28 |
| | Yokoyama (1988) | 3.62 | 22.53 | 4.40 | 23.28 |
| 5 | Presente trabalho | 4.15 | 25.30 | 7.47 | 29.25 |
| | Hsieh e Abel (1995) | 4.16 | 24.94 | 7.46 | 28.78 |
| | Putter e Manor (1978) | 4.07 | 24.95 | 7.41 | 28.92 |
| | Yokoyama (1988) | 4.07 | 24.95 | 7.41 | 28.93 |
| 10 | Presente trabalho | 5.19 | 32.46 | 13.35 | 43.54 |
| | Hsieh e Abel (1995) | 5.22 | 31.92 | 13.32 | 42.67 |
| | Putter e Manor (1978) | 5.05 | 32.12 | 13.26 | 43.23 |
| | Yokoyama (1988) | 5.05 | 32.12 | 13.26 | 43.24 |
| 20 | Presente trabalho | 7.12 | 51.75 | 25.48 | 77.03 |
| | Hsieh e Abel (1995) | 7.17 | 50.66 | 25.39 | 72.68 |
| | Putter e Manor (1978) | 6.78 | 51.35 | 25.29 | 76.59 |
| | Yokoyama (1988) | 6.79 | 51.37 | 25.32 | 76.66 |
| 50 | Presente trabalho | 12.30 | 117.30 | 62.35 | 183.32 |
| | Hsieh e Abel (1995) | 12.44 | 113.83 | 62.50 | 176.39 |
| | Putter e Manor (1978) | 10.48 | 116.20 | 61.64 | 181.94 |
| | Yokoyama (1988) | 10.90 | 116.42 | 61.88 | 182.39 |

Tabela 5.6: Comparação entre diferentes abordagens para análise das frequências de uma viga - vibrações para fora do plano de rotação.

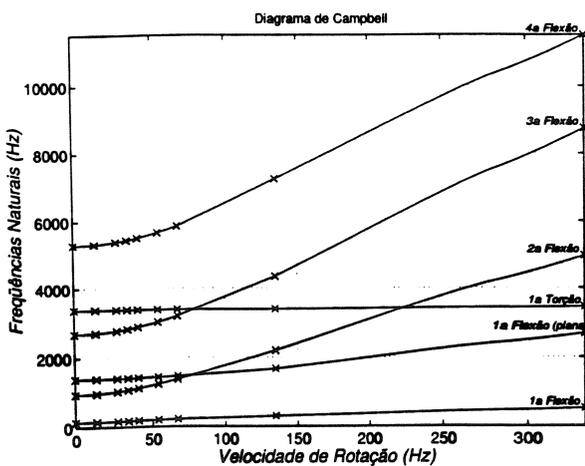
| Ω_N | Fonte | $\frac{R}{L} = 0$ | | $\frac{R}{L} = 1$ | |
|------------|---------------------|-------------------|----------|-------------------|----------|
| | | 1o. modo | 2o. modo | 1o. modo | 2o. modo |
| 2 | Presente trabalho | 4.18 | 22.98 | 4.88 | 23.72 |
| | Hsieh e Abel (1995) | 4.18 | 22.67 | 4.87 | 23.40 |
| | Yokoyama (1988) | 4.14 | 22.62 | 4.83 | 23.37 |
| 4 | Presente trabalho | 5.63 | 24.62 | 7.52 | 27.28 |
| | Hsieh e Abel (1995) | 5.63 | 24.28 | 7.51 | 26.87 |
| | Yokoyama (1988) | 5.59 | 24.28 | 7.48 | 26.96 |
| 6 | Presente trabalho | 7.40 | 27.12 | 10.49 | 32.32 |
| | Hsieh e Abel (1995) | 7.40 | 26.74 | 10.47 | 31.79 |
| | Yokoyama (1988) | 7.36 | 26.81 | 10.44 | 32.03 |
| 8 | Presente trabalho | 9.30 | 30.25 | 13.57 | 38.20 |
| | Hsieh e Abel (1995) | 9.30 | 29.84 | 13.54 | 37.55 |
| | Yokoyama (1988) | 9.26 | 30.00 | 13.51 | 37.96 |
| 10 | Presente trabalho | 11.25 | 33.78 | 16.67 | 44.52 |
| | Hsieh e Abel (1995) | 11.25 | 33.39 | 16.64 | 43.77 |
| | Yokoyama (1988) | 11.20 | 33.64 | 16.61 | 44.38 |

tabilizador” ao movimento. Seu efeito é diminuir as freqüências resultantes. Por outro lado, a matriz de rigidez geométrica está relacionada de maneira indireta à velocidade de rotação, pois é calculada a partir da solução do problema de tensão inicial. Esta matriz é resultante do aumento da rigidez da estrutura decorrente do acoplamento entre o movimento na direção longitudinal e de flexão da palheta (Simo e Vu-Quoc, 1987). Seu efeito é aumentar a rigidez total da estrutura. A combinação da influência da matriz de rigidez geométrica e rigidez rotacional, resulta, na verdade, num aumento das freqüências naturais da palheta, com o aumento da velocidade de rotação.

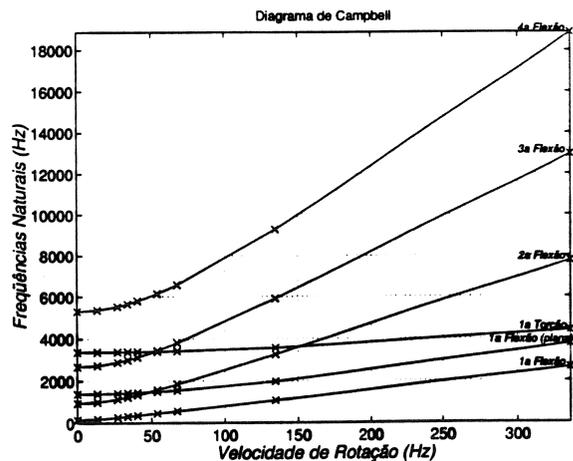
Este comportamento pode ser observado nas figuras 5.5(a) e 5.5(b), que apresentam o diagrama de Campbell para as freqüências naturais da palheta em função da velocidade do rotor. Nos dois diagramas, o ângulo de fixação da palheta é $\psi = 0^\circ$, e as vibrações da palheta ocorrem no plano de rotação. No primeiro diagrama, figura 5.5(a), o raio do rotor é escolhido como nulo, e a relação R/L é 0. Como o vetor de força centrífuga f_Ω é composto de duas parcelas, ou seja,

$$f_\Omega = K_\Omega r_0 + K_\Omega r \tag{5.11}$$

escolher o raio do rotor nulo é equivalente a considerar apenas a segunda parcela deste vetor e, conseqüentemente, apenas a influência do vetor de aceleração centrífuga distribuída ao longo do corpo é considerada. No segundo diagrama, figura 5.5(b), o raio do rotor é escolhido como $R = 328mm$, ou seja, a relação $R/L = 1$. Neste caso, portanto, as duas parcelas do vetor de força centrífuga estão sendo consideradas e a influência da aceleração centrífuga é maior, como pode ser acompanhado nos dois gráficos.



(a) $\frac{R}{L} = 0$



(b) $\frac{R}{L} = 1$

Figura 5.5: Variação das freqüências naturais da viga com o rotação Ω .

No diagrama de Campbell da figura 5.5(a) nota-se que as seis primeiras freqüências da palheta aumentam com o aumento da velocidade de rotação. Entretanto, esta influência é maior para os quatro modos de flexão de viga (perpendicular ao plano da viga), que correspondem ao primeiro, segundo, quarto e sextos modos da viga não-rotativa ($\Omega = 0$), respectivamente. O aumento da freqüência para o terceiro modo da viga (primeiro modo de flexão no plano da palheta) é maior apenas para velocidades de rotação maiores que $\Omega_N > 20$ ($\Omega > 130 \text{ Hz}$), sendo que para velocidades mais baixas esta freqüência é pouco alterada pela velocidade angular. Da mesma forma, a quinta freqüência da viga, que é a primeira freqüência de torção, praticamente não é alterada pela velocidade de rotação. Observa-se também neste diagrama, que a ordem em que ocorrem os modos de flexão e torção é alterada com o aumento da velocidade de rotação. O segundo modo de flexão de viga, que é o segundo modo da viga não rotativa, torna-se o quarto modo para velocidades maiores que $\Omega = 220 \text{ Hz}$. Esta alteração na ordem das freqüências é resultado da maior influência da velocidade de rotação sobre os modos de vibração que estão associados à flexão no plano perpendicular à palheta. Estes são os modos que se tornam mais rígidos pelo acoplamento entre o movimento da direção longitudinal da palheta e perpendicular à mesma, devido as grandes deformações que ocorrem devido à aceleração centrífuga.

Um comportamento semelhante é observado no diagrama de Campbell da figura 5.5(b). Neste caso, entretanto, como estão sendo consideradas as duas parcelas do vetor de força centrífuga, a influência da velocidade de rotação é maior. Nota-se, que a freqüência associada ao modo de flexão no plano da viga tem um aumento maior, neste caso. Da mesma forma, ocorre a troca na ordem dos modos em velocidades de rotação mais baixas.

Embora a ordem das freqüências associadas aos seis primeiros modos da viga sejam alterados pela velocidade de rotação, a forma destes modos praticamente não é alterada.

A variação das freqüências naturais da palheta em função da velocidade de rotação pode ser aproximada por equações que relacionam as freqüências naturais da viga não-rotativa com as freqüências da viga operando em uma determinada velocidade angular Ω . Nestas equações, em geral, as freqüências naturais variam com o quadrado da velocidade de rotação. No trabalho desenvolvido por Vorob'ev (1991), uma aproximação para a variação das freqüências com a velocidade angular é escolhida como

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\Omega^2 R \rho A L^3}{8EI}} \quad (5.12)$$

sendo que ω_0 é a freqüência da palheta não rotativa.

Esta aproximação é restrita para vibrações no plano de rotação ($\psi = 0^\circ$) e para valores não-nulos de R , pois neste caso a variação das freqüências em função da velocidade

angular é nula, o que não corresponde ao comportamento da viga, como pôde ser observado no gráfico da figura 5.5(a). A tabela (5.7) apresenta os resultados obtidos nesta abordagem para a primeira freqüência da viga, apresentada na figura (5.3), para uma relação $R/L = 1$. Nesta tabela, tanto as velocidades como as freqüências naturais estão normalizadas de acordo com as equações (5.9) e (5.10), respectivamente. A freqüência da palheta não rotativa, ou seja, $\omega_0 = 150,90 \text{ rad/s}$, corresponde à freqüência normalizada de $\omega_{0N} = 3.56$, calculada numericamente. A aproximação na equação (5.12) mostra-se razoável, sendo que o erro máximo encontrado é de cerca de 3% e esta aproximação mostra-se boa inclusive para as velocidades de rotação mais elevadas. Nota-se que, para velocidades $\Omega_N < 20$, a aproximação pela equação (5.12) subestima as freqüências do sistema, enquanto que para valores maiores de velocidade de rotação, as freqüências são superestimadas. Embora esta aproximação seja razoável para uma estimativa inicial da variação das freqüências naturais da palheta com a velocidade angular do rotor, esta relação é restrita à primeira freqüência de flexão da palheta.

Tabela 5.7: Comparação entre a primeira freqüência natural de flexão normalizada de flexão calculada numericamente e pela equação (5.12)

| Ω | ω_N | $\bar{\omega}_N$ | Erro(%) |
|----------|------------|------------------|---------|
| 2 | 4.45 | 4.37 | 1.84 |
| 4 | 6.37 | 6.18 | 2.99 |
| 5 | 7.47 | 7.24 | 3.02 |
| 6 | 8.61 | 8.38 | 2.87 |
| 8 | 10.96 | 10.70 | 2.36 |
| 10 | 13.35 | 13.11 | 1.81 |
| 20 | 25.47 | 25.48 | 0.05 |
| 50 | 62.31 | 63.17 | 1.38 |

Outra aproximação também desenvolvida para a variação das freqüências naturais da viga com a velocidade angular do rotor foi apresentada por Putter e Manor (1978). Neste trabalho, os autores propõem uma solução para vigas engastadas, cujas freqüências devem aumentar com o aumento da velocidade angular do rotor. A relação entre as freqüências da viga rotativa e não rotativa pode ser expressa para valores baixos de Ω como

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \phi \cdot \Omega^2 \quad (5.13)$$

O fator ϕ é chamado de fator de Southwell, e depende da relação entre o raio do rotor, o comprimento da viga (R/L) e do ângulo de fixação da palheta ψ . O fator é calculado a partir de uma aproximação para a solução analítica da equação diferencial da viga, onde são incluídos os efeitos da força centrífuga. Para o primeiro modo de flexão de

viga o coeficiente de Southwell é dado por

$$\phi_1 = 1.1173 + 1.558 \left(\frac{R}{L} \right) - \cos^2 \psi \quad (5.14)$$

O ângulo ψ , ou ângulo de fixação da palheta, é zero para vibrações no plano de rotação e 90° para vibrações para fora do plano de rotação. A tabela (5.8) apresenta resultados comparativos entre as frequências normalizadas calculadas numericamente e de acordo com a equação (5.13), para uma relação $R/L = 0$ para o primeiro modo de flexão de viga. Os resultados encontrados mostram que a aproximação é bastante satisfatória, embora estes resultados estejam restritos para velocidades de rotação baixa, aproximadamente $\Omega_N < 8$.

Tabela 5.8: Comparação entre a primeira frequência natural de flexão normalizada calculada numericamente e pelo coeficiente de Southwell ($R/L = 0$)

| Ω_N | $\psi = 0^\circ$ | | | $\psi = 90^\circ$ | | |
|------------|------------------|------------------|------|-------------------|------------------|------|
| | ω_N | $\bar{\omega}_N$ | Erro | ω_N | $\bar{\omega}_N$ | Erro |
| 2 | 3.67 | 3.66 | 0.38 | 4.18 | 4.17 | 0.29 |
| 4 | 3.96 | 3.94 | 0.71 | 5.63 | 5.61 | 0.32 |
| 5 | 4.15 | 4.13 | 0.46 | 6.49 | 6.49 | 0.15 |
| 6 | 4.35 | 4.35 | 0.15 | 7.41 | 7.42 | 0.11 |
| 8 | 4.76 | 4.88 | 2.40 | 9.31 | 9.38 | 0.74 |
| 10 | 5.18 | 5.48 | 5.71 | 11.25 | 11.41 | 1.40 |

A tabela (5.9) apresenta os resultados comparativos para uma relação $R/L = 1$. Neste caso, também observa-se uma boa aproximação para os valores calculados numericamente e pela equação (5.13), embora o erro nas velocidades angulares mais altas seja menor para as vibrações no plano de rotação ($\psi = 0$) que no caso anterior, onde $R/L = 0$.

Tabela 5.9: Comparação entre a primeira frequência natural de flexão normalizada calculada numericamente e pelo coeficiente de Southwell ($R/L = 1$)

| Ω_N | $\psi = 0^\circ$ | | | $\psi = 90^\circ$ | | |
|------------|------------------|------------------|------|-------------------|------------------|------|
| | ω_N | $\bar{\omega}_N$ | Erro | ω_N | $\bar{\omega}_N$ | Erro |
| 2 | 4.45 | 4.43 | 0.39 | 4.88 | 4.86 | 0.32 |
| 4 | 6.37 | 6.36 | 0.15 | 7.52 | 7.51 | 0.09 |
| 5 | 7.47 | 7.49 | 0.21 | 8.99 | 9.00 | 0.16 |
| 6 | 8.61 | 8.67 | 0.62 | 10.50 | 10.54 | 0.44 |
| 8 | 10.91 | 11.12 | 1.44 | 13.57 | 13.70 | 0.98 |
| 10 | 13.35 | 13.64 | 2.17 | 16.67 | 16.91 | 1.45 |

O coeficiente de Southwell para estimar a variação da segunda frequência de flexão com a velocidade angular do rotor é dado por

$$\phi_2 = 5.38 + 8.631 \left(\frac{R}{L} \right) \quad (5.15)$$

Na equação anterior, o ângulo de fixação é fixo e igual a 90° , portanto apenas as vibrações para fora do plano de rotação estão sendo consideradas. A tabela (5.10) apresenta os resultados para as freqüências normalizadas calculadas pela equação (5.13). Os valores estimados pela equação são menores do que os calculados numericamente, para os dois valores de relação R/L . Nota-se que a aproximação, embora permaneça satisfatória para baixos valores de velocidade angular, aumenta para velocidades maiores de rotação. Novamente, verifica-se que a aproximação é melhor para valores de $R/L = 1$.

Tabela 5.10: Comparação entre a segunda freqüência natural de flexão normalizadas calculadas numericamente e pelo coeficiente de Southwell

| Ω_N | $\frac{R}{L} = 0$ | | | $\frac{R}{L} = 1$ | | |
|------------|-------------------|------------------|------|-------------------|------------------|------|
| | ω_N | $\bar{\omega}_N$ | Erro | ω_N | $\bar{\omega}_N$ | Erro |
| 2 | 22.98 | 22.89 | 0.43 | 23.73 | 23.63 | 0.41 |
| 4 | 24.62 | 24.26 | 1.49 | 27.29 | 26.96 | 1.21 |
| 5 | 25.78 | 25.23 | 2.12 | 29.66 | 29.20 | 1.55 |
| 6 | 27.13 | 26.39 | 2.74 | 32.32 | 31.74 | 1.80 |
| 8 | 30.25 | 29.10 | 3.80 | 38.20 | 37.42 | 2.04 |
| 10 | 33.78 | 32.26 | 1.54 | 44.53 | 43.65 | 1.97 |

O ângulo de fixação da palheta ao rotor tem pequena influência nas freqüências naturais da palheta. Nos exemplos discutidos anteriormente, verifica-se que nos casos onde o ângulo de fixação ψ é igual a 90° , os valores para as freqüências naturais são sensivelmente maiores. As figuras 5.6(a) e 5.6(b) ilustram o efeito deste ângulo na primeira freqüências natural de flexão da palheta. Embora o ângulo de fixação atue de forma a aumentar as freqüências, esta influência é acentuada apenas para o primeiro modo de flexão de viga, sendo que para os modos associados a freqüências mais elevadas este efeito é muito pequeno.

5.2 Palheta modelada como placa plana

Outro modelo que pode ser desenvolvido para a palheta é de uma placa, ou seja, um modelo bidimensional. A placa considerada neste caso é retangular, sendo que as principais dimensões desta palheta estão representadas na figura (5.7). As propriedades do material da palheta são as mesmas adotadas para o primeiro caso, de acordo com a tabela (5.1).

A primeira etapa na análise dinâmica da palheta é estudar a sensibilidade das freqüências naturais da palheta às variações do refinamento da malha. No caso da palheta modelada como uma placa, além do refinamento da malha na direção x , deve-se analisar também o refinamento na direção y .

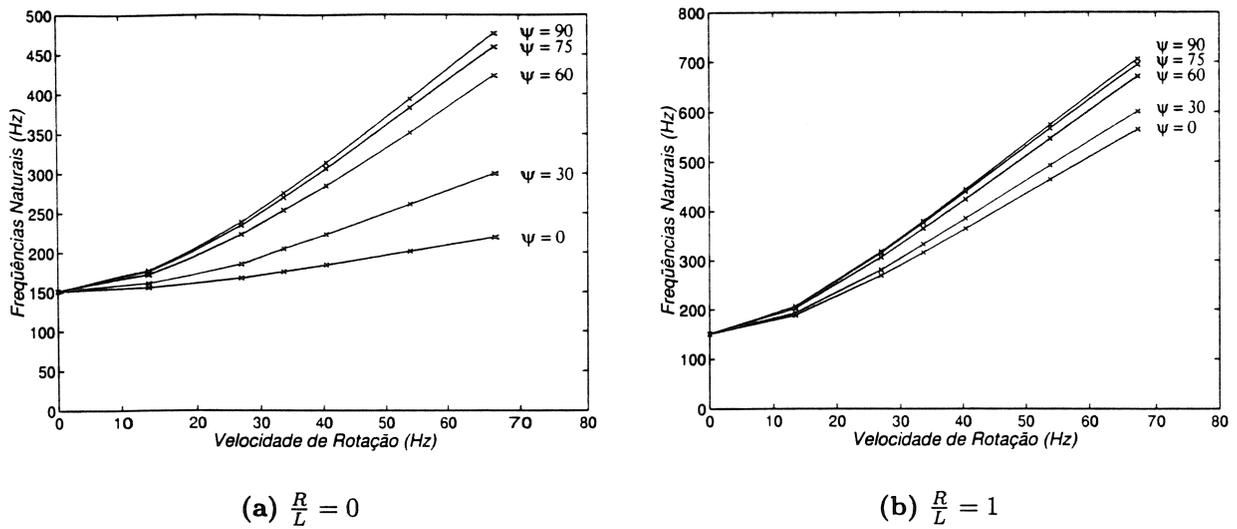


Figura 5.6: Influência do ângulo de fixação na primeira frequência natural da viga.

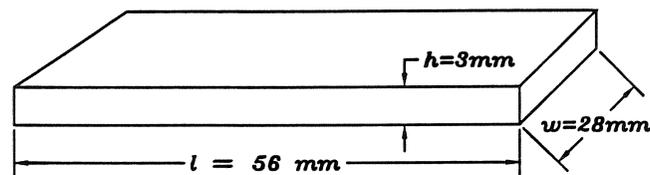


Figura 5.7: Principais dimensões da palheta modelada como uma placa retangular

A palheta está engastada em uma das extremidades ($x = 0$) e as frequências naturais estão sendo calculadas primeiramente para o caso não-rotativo. Inicialmente, o número de elementos na direção y é escolhido como $n_y = 4$, sendo que o número de elementos na direção z é constante e igual a $n_z = 1$. A tabela (5.11) apresenta os resultados obtidos para as frequências naturais da palheta, com diversas malhas e diferentes números de elementos na direção x . Nesta tabela também estão apresentados as diferenças relativas encontradas entre cada uma destas malhas. A diferença encontrada entre a malha de $n_x = 8$ e $n_x = 12$ é de, no máximo 1%. Por outro lado, a diferença encontrada entre as malhas de 12 e 16 elementos é de cerca de 0.5%, enquanto que se a malha for novamente refinada, será encontrada é menor que 0.2%. Para escolha final do número de elementos na direção x será adotado $n_x = 16$, pois a convergência obtida para a solução é razoável. Se o número de elementos na direção x for aumentado, diferenças muito pequenas são observadas nas frequências, embora o modelo resultante tenha cada vez mais uma dimensão maior e, portanto, mais caro computacionalmente. Novamente, durante o refinamento da malha, nota-se o comportamento assintótico das frequências da palheta.

Com a definição do número de elementos na direção x , a sensibilidade das frequências da palheta à variação do número de elementos na direção y . A tabela (5.12) apresenta os

Tabela 5.11: Variação das frequências naturais da palheta com o refinamento da malha na direção x . As frequências são dadas em rad/s .

| | $n_x = 8$ | dif. | $n_x = 12$ | dif. | $n_x = 16$ | dif. | $n_x = 20$ |
|---------------|-----------|------|------------|------|------------|------|------------|
| ω_1 | 5288 | 0.52 | 5260 | 0.23 | 5248 | 0.13 | 5241 |
| ω_2 | 21936 | 0.31 | 21867 | 0.14 | 21838 | 0.08 | 21820 |
| ω_3 | 32734 | 0.88 | 32449 | 0.30 | 32351 | 0.15 | 32301 |
| ω_4 | 41093 | 0.19 | 41014 | 0.09 | 40978 | 0.05 | 40958 |
| ω_5 | 70945 | 0.56 | 70552 | 0.21 | 70407 | 0.10 | 70332 |
| ω_6 | 90823 | 1.53 | 89453 | 0.43 | 89073 | 0.19 | 88907 |
| ω_7 | 134881 | 1.04 | 133487 | 0.32 | 133063 | 0.14 | 132870 |
| ω_8 | 137293 | 0.12 | 137133 | 0.04 | 137083 | 0.02 | 137060 |
| ω_9 | 148640 | 0.10 | 148498 | 0.04 | 148435 | 0.02 | 148401 |
| ω_{10} | 156235 | 0.11 | 156065 | 0.04 | 155996 | 0.02 | 155960 |

resultados obtidos para as frequências da palheta, com diferentes números de elementos na direção y . O número de elementos na direção z é igual a $n_z = 1$, enquanto que o número de elementos na direção x é igual a $n_x = 16$. Nota-se que as diferenças encontradas para uma malha de 4 e 8 elementos n_y é de, no máximo, 1.1%. As maiores diferenças ocorrem para os modos que estão associados à torção ou modos típicos de placas, sendo que para os modos associados à flexão esta diferença relativa entre as malhas é pequena. Considerando ainda que o número de elementos na direção y seja igual a 16, as diferenças encontradas entre as malhas é de cerca de 0.2%. Dessa forma, uma malha com $n_y = 8$ elementos é escolhida.

Tabela 5.12: Variação das frequências naturais da palheta com o refinamento da malha na direção y . As frequências são dadas em rad/s .

| | $n_y = 4$ | dif. | $n_y = 8$ | dif. | $n_y = 16$ |
|---------------|-----------|------|-----------|------|------------|
| ω_1 | 5248 | 0.05 | 5245 | 0.01 | 5244 |
| ω_2 | 21838 | 0.56 | 21714 | 0.17 | 21677 |
| ω_3 | 32301 | 0.06 | 32330 | 0.02 | 32324 |
| ω_4 | 40958 | 0.06 | 40953 | 0.03 | 40940 |
| ω_5 | 70332 | 0.50 | 70052 | 0.15 | 69948 |
| ω_6 | 88907 | 0.09 | 88963 | 0.03 | 88963 |
| ω_7 | 132870 | 0.43 | 132349 | 0.12 | 132330 |
| ω_8 | 137060 | 1.08 | 135561 | 0.09 | 135501 |
| ω_9 | 148401 | 0.01 | 148412 | 0.01 | 148400 |
| ω_{10} | 155960 | 0.09 | 155858 | 0.03 | 155812 |

A figura (5.8) apresenta a forma da malha final para analisar a palheta. A malha utilizada tem 16 elementos na direção x , 8 elementos na direção y e 1 elemento na direção z .

As frequências naturais da palheta calculadas numericamente utilizando o modelo

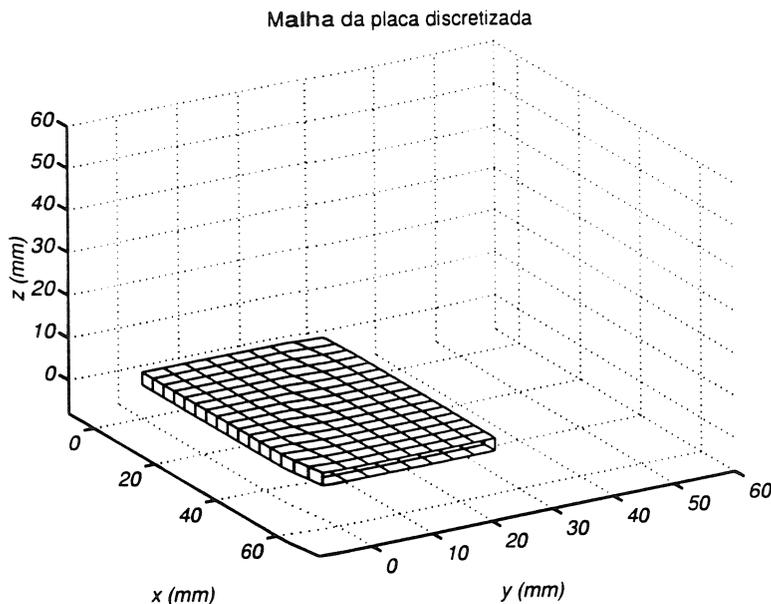


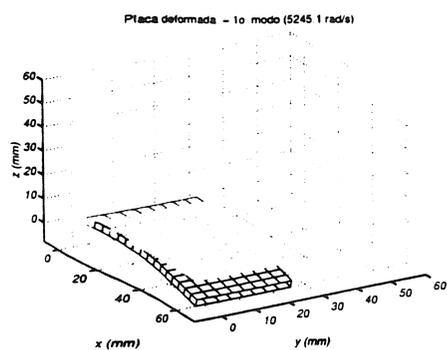
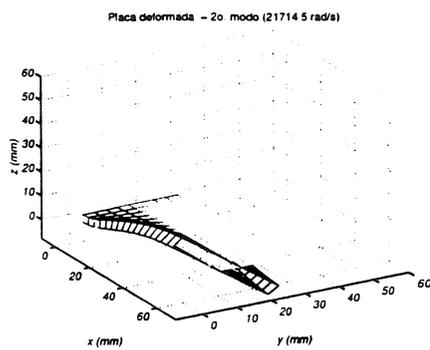
Figura 5.8: Malha utilizada para discretizar uma placa retangular de relação $l/w = 2$

tridimensional, podem ser comparadas com a solução analítica para placas planas. A solução analítica para uma placa plana e retangular, com relação $l/w = 2$, é dada pelas freqüências normalizadas :

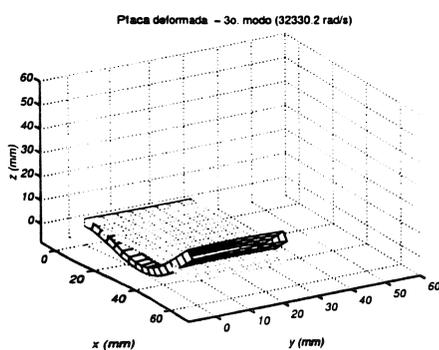
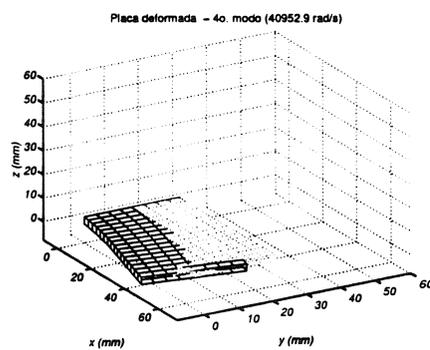
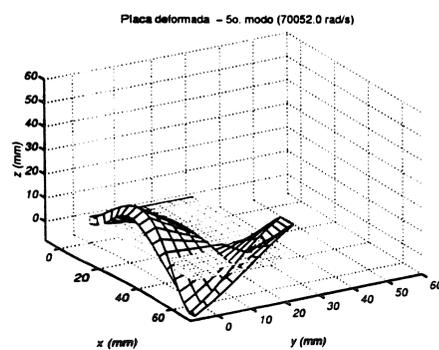
$$\omega_N = \omega l^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (5.16)$$

onde $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$. Na tabela (5.13) estão apresentados os valores obtidos para as freqüências calculadas numericamente e analiticamente para uma placa retangular, de acordo com (Harris, 1988). As freqüências calculadas numericamente não correspondem, exatamente, à ordem dos modos analíticos. Na solução analítica encontrada, os cinco primeiros modos correspondem, respectivamente, ao primeiro modo de flexão (1B), primeiro modo de torção (1T), segundo modo de flexão (2B), primeiro modo de placa (1C) e segundo modo de torção (2T), que não correspondem aos primeiros modos da placa retangular estudada neste exemplo, como pode ser acompanhado na figura (5.9). A ordem em que ocorrem os modos em uma placa dependem da relação entre seu comprimento e largura da placa (l/w) e também da relação entre sua largura e espessura (w/h). A ordem apresentada na solução analítica é a ordem dos primeiros modos de uma placa quadrada e relativamente fina. Da mesma forma que no caso do modelo unidimensional, o modelo bidimensional da palheta mostra-se limitado para prever adequadamente as primeiras freqüências da palheta.

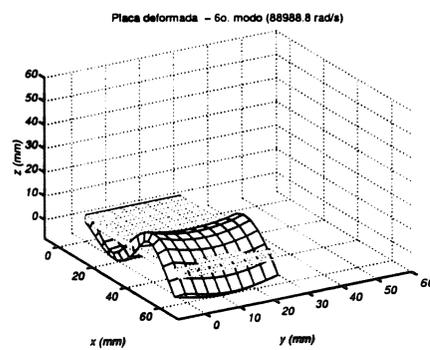
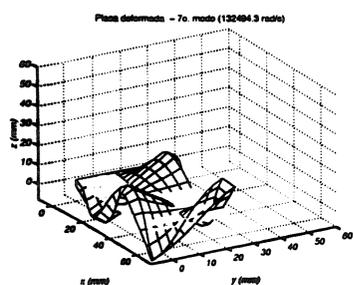
Com a definição da malha suficientemente refinada, as freqüências da palheta podem ser calculadas, em função da velocidade de rotação. A figura (5.10) apresenta os diagramas de Campbell para a palheta, considerando duas diferentes condições. No primeiro

(a) Primeiro modo de flexão no plano yz 

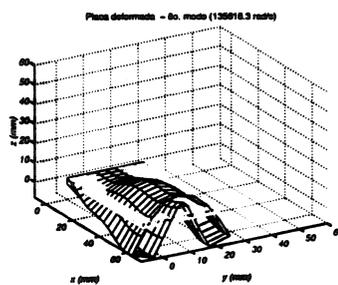
(b) Primeiro modo de torção

(c) Segundo modo de flexão no plano yz (d) Primeiro modo de flexão no plano xy 

(e) Segundo modo de torção

(f) Terceiro modo de flexão no plano yz 

(g) Sétimo modo - 2/1



(h) Primeiro modo de placa

Figura 5.9: Forma dos oito primeiros modos de vibração de uma placa retangular engastada.

Tabela 5.13: Comparação entre a solução analítica e numérica para uma placa retangular

| | ω_N | $\bar{\omega}_N$ | Erro (%) |
|---------------|------------|------------------|----------|
| ω_1 | 3.45 | 3.472 | 0.75 |
| ω_2 | 14.27 | 14.93 | 4.44 |
| ω_3 | 21.24 | 21.61 | 1.71 |
| ω_4 | 26.91 | - | - |
| ω_5 | 46.02 | 48.71 | 5.51 |
| ω_6 | 58.47 | - | - |
| ω_7 | 87.05 | - | - |
| ω_8 | 89.10 | 94.49 | 5.70 |
| ω_9 | 97.51 | - | - |
| ω_{10} | 102.40 | - | - |

diagrama, figura 5.10(a), o raio do rotor é nulo, sendo que $R/L = 0$, e, portanto, apenas a influência da força centrífuga distribuída está sendo considerada. No segundo diagrama, figura 5.10(b), o raio do rotor é escolhido como $R = 0.300\text{ m}$, sendo que a relação R/L vale 5.35. Nos diagramas apresentados, os símbolos $1B$, $2B$ correspondem ao primeiro e segundo modos de flexão (*bending modes*), figuras 5.9(a) e 5.9(c). Os símbolos $1T$ e $2T$ correspondem aos primeiros e segundos modos de torção, respectivamente (figuras 5.9(b) e 5.9(e)). Os símbolos $1E$ (figura 5.9(d)) e $2E$ correspondem ao modo de flexão no plano xy , ou ainda, *edgewise bending*. O modo radial, que é um modo axial, é representado por $1A$, enquanto que o primeiro modo de placa, conhecido como *chordwise bending*, é representado por $1C$ (figura 5.9(h)). O modo indicado por $2/1$, ilustrado na figura 5.9(g), apresenta duas linhas nodais no eixo y e uma linha nodal no eixo x .

A variação das frequências da palheta com a velocidade de rotação é muito semelhante à observada na viga unidimensional. Novamente, nota-se que para a maioria dos modos, a velocidade de rotação aumenta as frequências da palheta. Este comportamento não é observado apenas para o primeiro modo axial ($1A$), quando $R/L = 0$. Para $R/L = 0$, nota-se, também, que apenas o segundo e terceiro modos de flexão e o modo indicado por $2/1$ são muito influenciados pela velocidade de rotação. Por outro lado, para $R/L = 5.35$, todas as frequências sofrem um razoável aumento com a velocidade de rotação, sendo que apenas para o primeiro modo axial ($1A$) e primeiro modo de placa ($1C$) a influência da velocidade de rotação é muito pequena. Os modos mais influenciados pela velocidade de rotação são novamente o segundo modo de flexão, o terceiro modo de flexão e o modo $2/1$. A velocidade de rotação é responsável pela troca da ordem em que ocorrem os modos de vibração, embora pouco altere a forma dos modos.

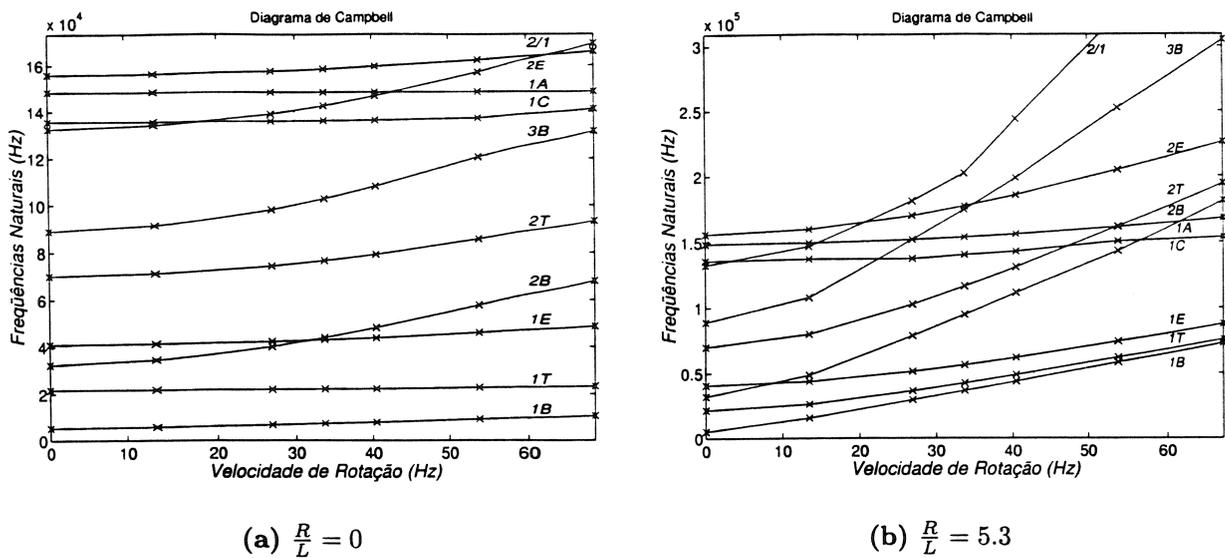


Figura 5.10: Variação das frequências naturais da placa com o rotação Ω .

5.3 Palhetas modeladas como placas torcidas

A forma de uma palheta com geometria retangular simples, entretanto, não corresponde às características de uma palheta real. Em geral, a palheta apresenta um ângulo de pré-torção ao longo de seu comprimento, conforme ilustrado na figura (5.11). O ângulo de pré-torção, definido como γ , corresponde ao ângulo da seção transversal na extremidade livre da palheta, em relação à seção transversal original.

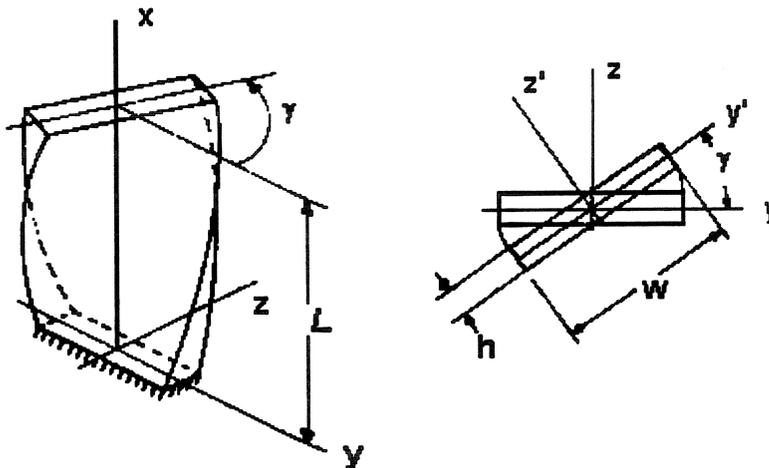


Figura 5.11: Ângulo de pré-torção da palheta

O estudo de palhetas torcidas foi discutida por muitos autores, com o objetivo de verificar a influência do ângulo de pré-torção sobre as características dinâmicas de palhetas rotativas (Ramamurti e Kielb, 1984; Sreenivasamurthy e Ramamurti, 1981) e não-rotativas (Leissa et al., 1984). Nos dois exemplos que se seguem, são apresentadas

as soluções encontradas para dois tipos de palheta, uma quadrada e outra retangular, semelhante à apresentada na seção 5.2.

5.3.1 Placa quadrada

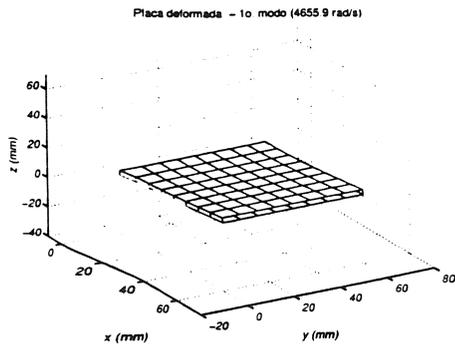
Primeiramente serão estudadas duas palhetas quadradas, ambas com comprimento $l = 60 \text{ mm}$. A primeira palheta apresenta relação entre a largura e a espessura (w/h) igual a 20, sendo, portanto uma palheta delgada. A malha obtida para estudar esta palheta é constituída de $8 \times 8 \times 1$ (8 elementos na direção x , 8 elementos na direção y e 1 elemento na direção z). A forma dos oito primeiros modos desta palheta estão apresentados na figura (5.12). A segunda palheta tem relação w/h igual a 5, sendo uma palheta mais espessa. A ordem das primeiras freqüências calculadas para os dois tipos de placas não é a mesma, indicando que a ordem das freqüências depende, portanto da relação entre a largura e espessura da palheta. A tabela (5.14) apresenta os resultados obtidos para as primeiras freqüências, normalizadas pela equação (5.16), das duas palhetas, e uma comparação entre a solução analítica (Harris, 1988) e aproximada. Na tabela (5.14) os símbolos utilizados para descrever os modos são os mesmos empregados na seção 5.2.

Tabela 5.14: Comparação das freqüências naturais da palheta quadrada com a solução analítica

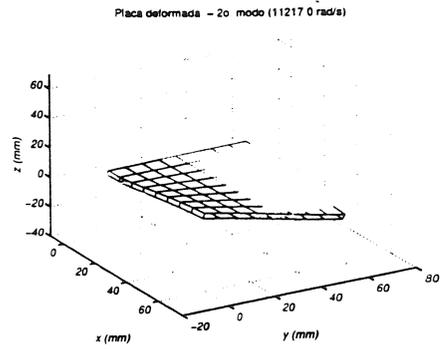
| $w/h = 20$ | | | | $w/h = 5$ | | | |
|------------|---------------|----------------|------|-----------|---------------|----------------|-------|
| Modo | Sol. numérica | Sol. analítica | Erro | Modo | Sol. numérica | Sol. analítica | Erro |
| 1B | 3.51 | 3.494 | 0.50 | 1B | 3.40 | 3.494 | 2.70 |
| 1T | 8.46 | 8.547 | 1.01 | 1T | 7.51 | 8.547 | 12.16 |
| 2B | 21.38 | 21.44 | 0.27 | 1E | 10.95 | - | - |
| 1C | 26.91 | 27.46 | 2.00 | 2B | 18.11 | 21.44 | 15.55 |
| 2T | 30.65 | 31.17 | 3.51 | 1C | 22.85 | 27.46 | 16.78 |
| 1E | 43.71 | - | - | 2T | 24.63 | 31.17 | 20.97 |
| 2/1 | 52.85 | - | - | 1A | 26.25 | - | - |
| 3B | 61.14 | - | - | 2E | 29.30 | - | - |

Os modos da placa quadrada com relação $w/h = 20$ estão apresentados na figura (5.12). Nota-se que a solução analítica proposta aproxima adequadamente as primeiras freqüências da placa quadrada delgada, enquanto que para a placa espessa ($w/h = 5$), a aproximação não é boa, indicando que para palhetas mais espessas o modelo utilizando placas bidimensionais não é adequado. A ordem em que ocorrem as freqüências também é dependente da relação w/h .

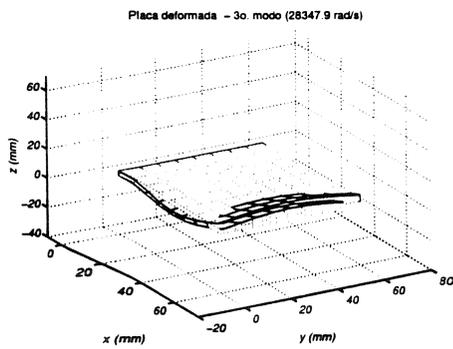
A influência do ângulo de pré-torção γ nas freqüências da palheta torcida podem ser observados na figura (5.13). As freqüências naturais da palheta foram calculadas para diferentes valores de γ . A figura 5.13(a) apresenta a variação das freqüências para a palheta quadrada delgada ($w/h = 20$). Esta palheta é mais flexível e conseqüentemente



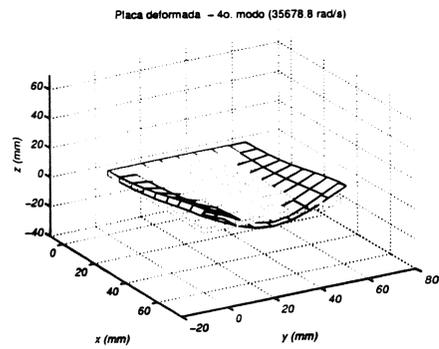
(a) Primeiro modo de flexão no plano yz



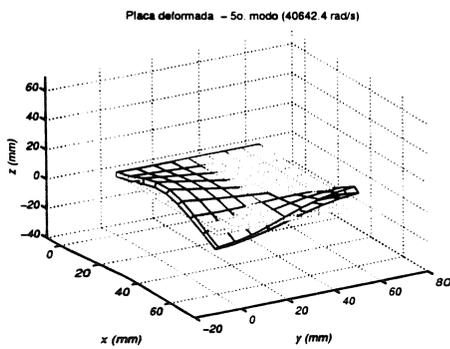
(b) Primeiro modo de torção



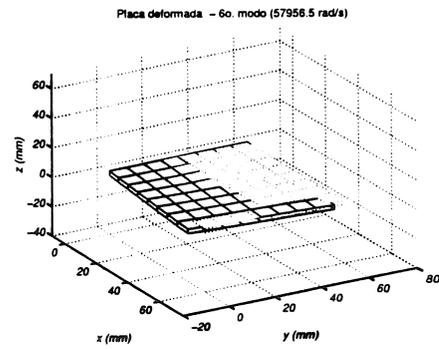
(c) Segundo modo de flexão no plano yz



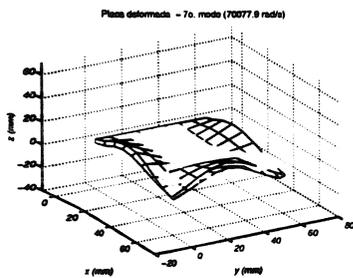
(d) Primeiro modo de placa



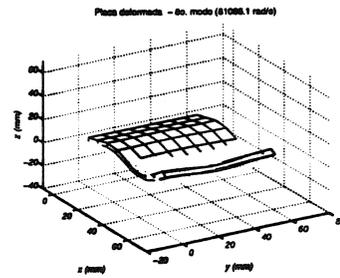
(e) Segundo modo de torção



(f) Primeiro modo de flexão no plano xy



(g) Sétimo modo - 2/1



(h) Terceiro modo de flexão no plano yz

Figura 5.12: Forma dos oito primeiros modos de vibração de uma placa quadrada engastada.

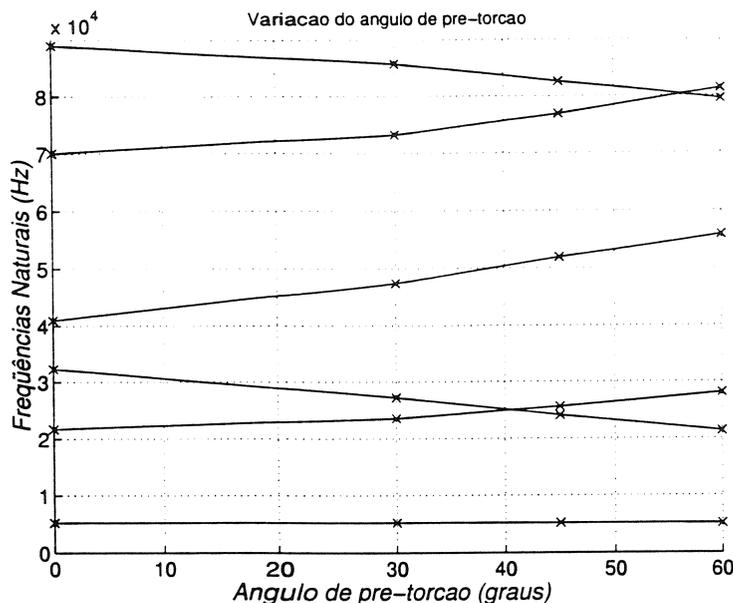


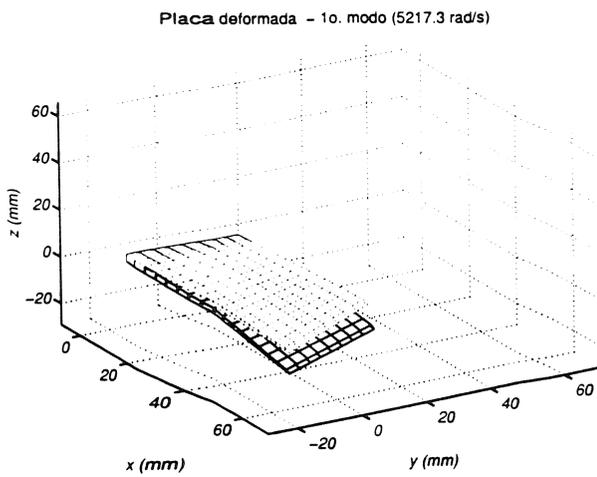
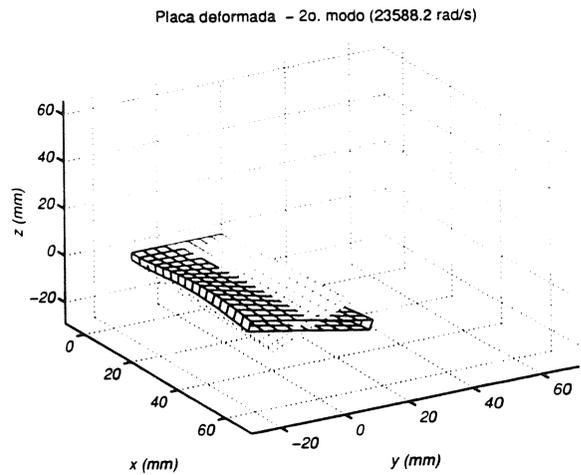
Figura 5.14: Influência do ângulo de pré-torção nas frequências de uma placa retangular

pré-torção, tornando-se mais rígido. A forma destes modos para um ângulo de pré-torção de 30° pode ser acompanhado na figura (5.15).

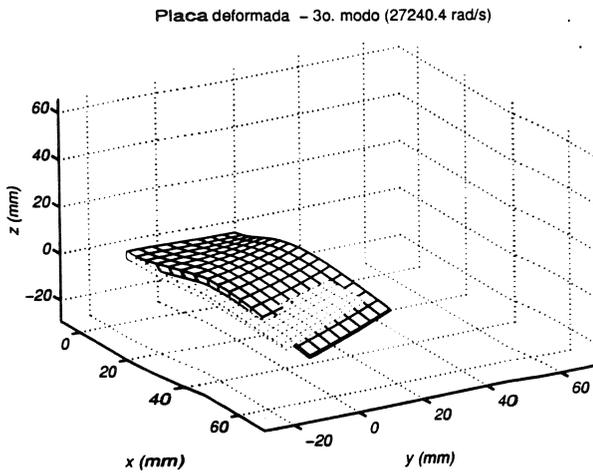
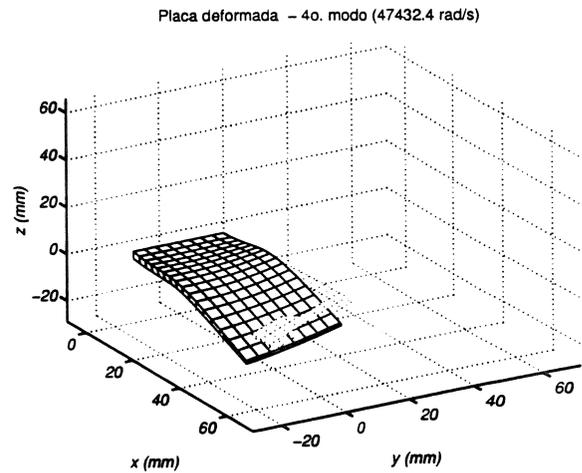
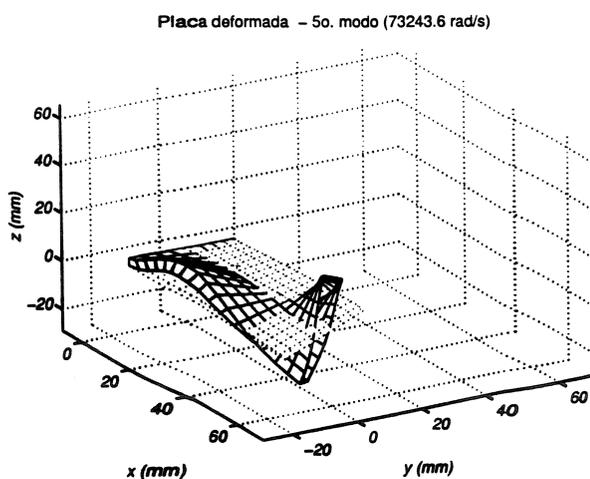
A figura (5.16) apresenta o diagrama com a variação das frequências naturais de uma palheta retangular, torcida com ângulo $\gamma = 30^\circ$, com a velocidade angular do rotor. O raio do rotor considerado é $R = 0$, sendo que estão sendo considerada apenas a influência da parte de força centrífuga distribuída ao longo do corpo. Este diagrama de Campbell pode ser comparado com o diagrama apresentado na figura (5.10(a)) de uma palheta retangular de mesmas dimensões. No diagrama de Campbell da palheta torcida verifica-se que, neste caso, a influência da velocidade de rotação é menor, sendo que para as seis primeiras frequências não ocorre troca na ordem dos modos de vibração. Nos exemplos apresentados, isto ocorre porque o efeito do ângulo de pré-torção é diminuir as frequências de flexão e aumentar as frequências de torção. Assim, para o segundo modo de flexão, que tem um considerável aumento com a velocidade de rotação para a palheta não-torcida, tem apenas uma pequena variação no caso da palheta torcida. Pode-se dizer que, para os exemplos estudados com geometrias simples, o efeito do ângulo de pré-torção em uma palheta rotativa leva a uma diminuição da influência da velocidade de rotação.

5.4 Modelo de uma palheta de forma genérica

Finalmente, é proposta a análise dinâmica de uma palheta que não é retangular ou quadrada, mas em forma de aerofólio. Esta forma de palheta se aproxima mais da forma real de uma palheta de compressor ou turbina. O objetivo destas análises é verificar como

(a) Primeiro modo de flexão no plano yz 

(b) Primeiro modo de torção

(c) Segundo modo de flexão no plano yz (d) Primeiro modo de flexão no plano xy 

(e) Segundo modo de torção

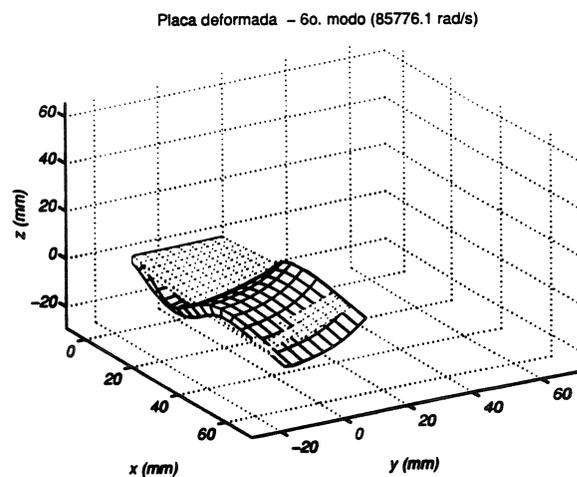
(f) Terceiro modo de flexão no plano yz

Figura 5.15: Forma dos seis primeiros modos de vibração de uma placa retangular engastada, com um ângulo de pré-torção de 30°

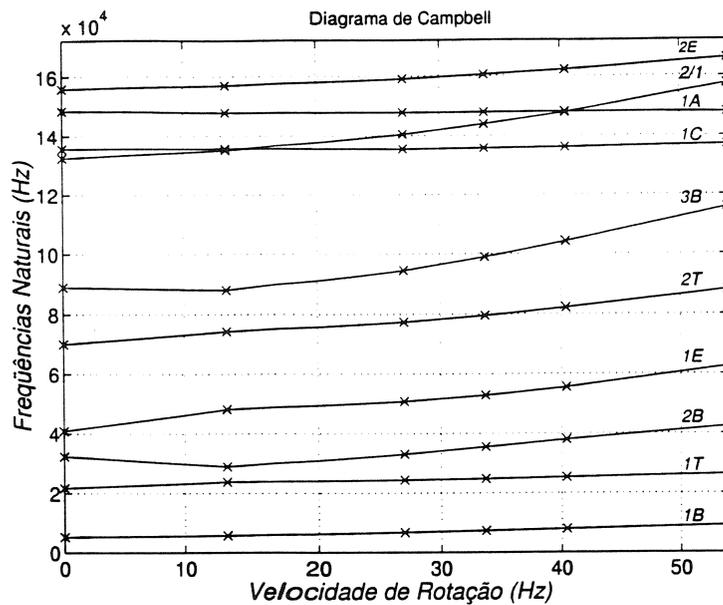


Figura 5.16: Diagrama de Campbell para uma placa torcida com ângulo de 30

as frequências da palheta são alteradas pela variação da forma. Assim, como primeiro passo, são calculadas as frequências de uma palheta retangular com as mesmas dimensões externas da palheta em forma de aerofólio. Estas dimensões são dadas por $l = 122.27 \text{ mm}$, $w = 58.04 \text{ mm}$ e $h = 6.89 \text{ mm}$. A malha utilizada para discretizar esta palheta é composta por $16 \times 4 \times 1$ elementos, conforme apresentado na figura 5.17(a). Posteriormente, é considerada a palheta em forma de aerofólio, com seção transversal uniforme ao longo de seu comprimento. Para este caso, o número de elementos da malha é o mesmo do caso anterior, $16 \times 4 \times 1$. A malha para analisar esta palheta está apresentada na figura 5.17(b). Entretanto este tipo de forma ainda não representa o caso mais genérico, pois a palheta não é torcida. Assim, como terceiro caso, é escolhida uma palheta em forma de aerofólio e com um ângulo de pré-torção $\gamma = 20^\circ$, distribuído ao longo de seu comprimento. O refinamento utilizado para esta palheta é o mesmo dos dois outros casos, sendo que a malha final para esta palheta torcida está apresentado na figura 5.17(c).

Os seis primeiros modos de vibração de cada uma destas palhetas estão apresentados nas figuras (5.18), (5.19) e (5.20), respectivamente. Nota-se, nestas figuras, que a forma dos modos de vibração e o ordem dos mesmos não é muito alterada pela forma da seção transversal da palheta. O mesmo comportamento é observado para a palheta torcida em forma de aerofólio.

A tabela (5.15) apresenta os resultados comparativos para as dez primeiras frequências dos três tipos de palheta. Comparando os resultados obtidos para as frequências da palheta retangular e com seção transversal em forma de aerofólio, nota-se que o efeito deste último caso é abaixar todas as frequências, com exceção do primeiro modo de flexão, que sofre um pequeno aumento, devido à diminuição da massa da palheta. Por outro lado,

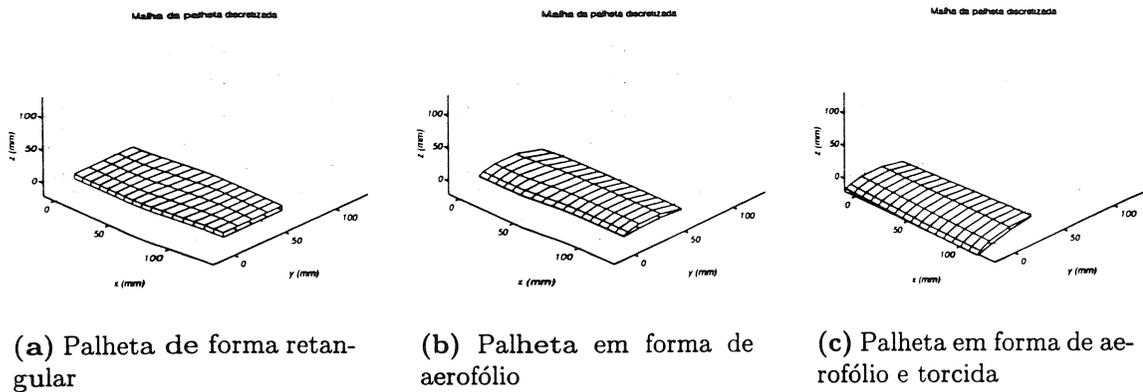


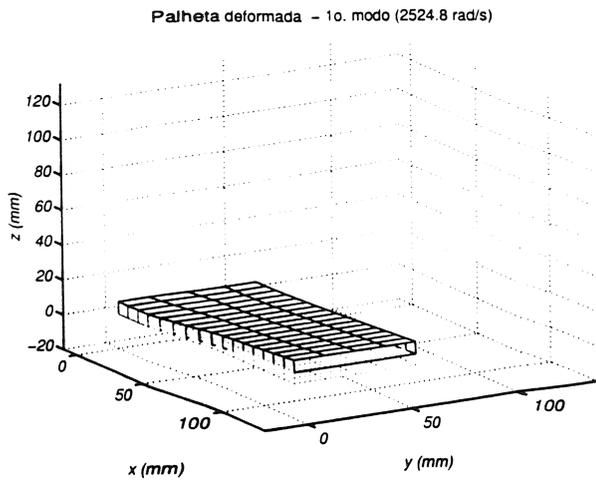
Figura 5.17: Diferentes malhas utilizadas para discretizar a palheta

Tabela 5.15: Variação das freqüências naturais da palheta com o a forma. As freqüências são dadas em rad/s .

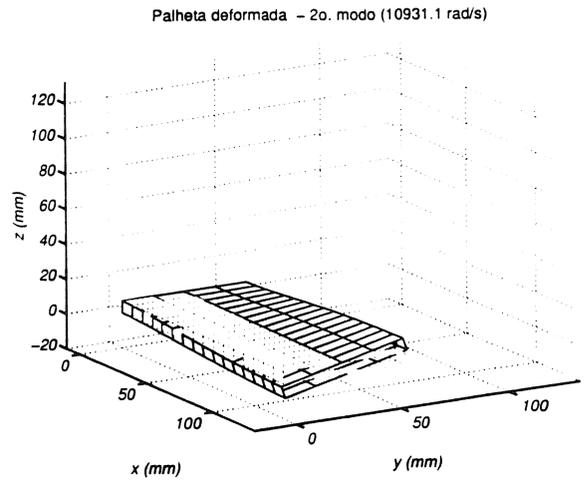
| | Retangular | Aerofólio | Aerofólio torcido |
|---------------|------------|-----------|-------------------|
| ω_1 | 2524 | 2595 | 2553 |
| ω_2 | 10931 | 10207 | 10266 |
| ω_3 | 15552 | 15306 | 13666 |
| ω_4 | 18053 | 16119 | 18370 |
| ω_5 | 35023 | 31521 | 31649 |
| ω_6 | 42761 | 39389 | 39640 |
| ω_7 | 65469 | 55183 | 55193 |
| ω_8 | 67976 | 67815 | 67487 |
| ω_9 | 70494 | 68265 | 68066 |
| ω_{10} | 71904 | 68793 | 71076 |

comparando as diferenças entre as freqüências da palheta em forma de aerofólio, uniforme e torcida, nota-se que o efeito é mais complexo. Para a primeira e terceira freqüências, que estão associadas ao primeiro e segundo modo de flexão, as freqüências naturais da palheta diminuem quando existe pré-torção, enquanto que para o segundo e quinto modos, que estão associados aos modos de torção, o efeito é de aumento das freqüências. Este comportamento corresponde ao observado para a palheta retangular submetida a um ângulo de pré-torção, discutido na seção anterior.

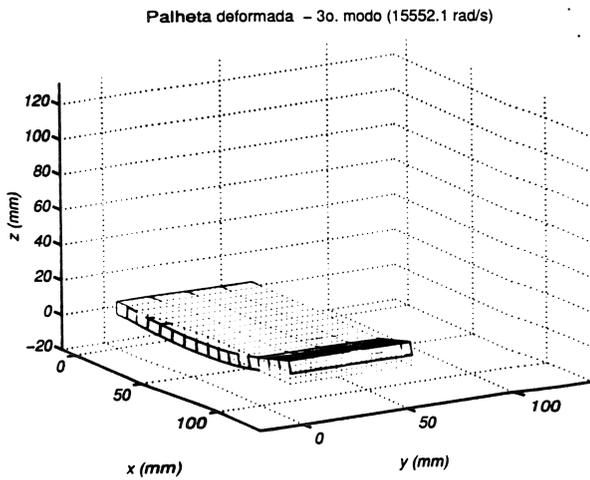
A influência da velocidade de rotação para cada uma das palhetas está apresentada na figura (5.21). Verifica-se, nestes diagramas, que a influência da velocidade de rotação é semelhante nos três casos, sendo pouco acentuada para as três palhetas. As variações mais acentuadas ocorrem para os modos mais altos, o segundo de torção ($2T$) e o terceiro de flexão ($3B$), para as três palhetas. No caso da palheta com seção em forma de aerofólio e uniforme nota-se também um grande aumento da segunda freqüência de flexão ($2B$), o que não ocorre para as outras palhetas.



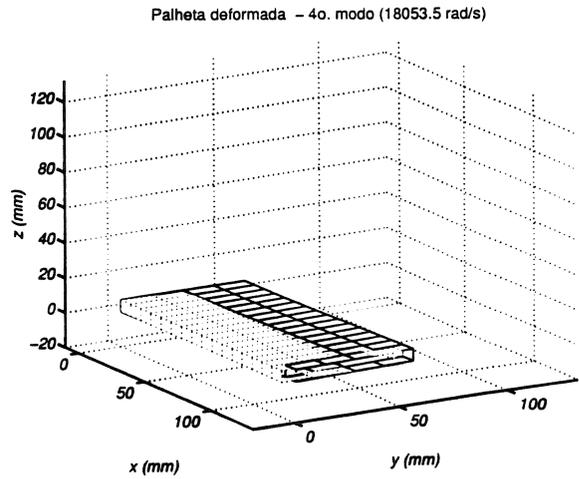
(a) Primeiro modo de flexão de viga no plano xz



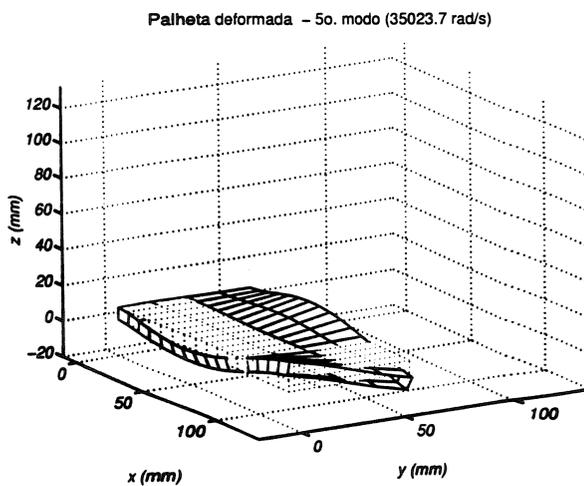
(b) Segundo modo de flexão de viga no plano xz



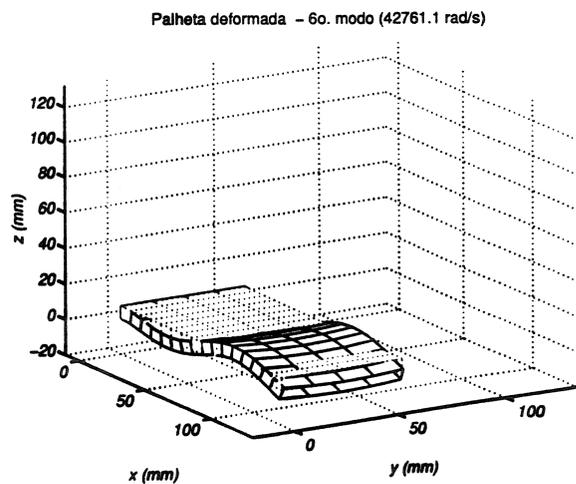
(c) Primeiro modo de flexão de viga no plano yz



(d) Terceiro modo de flexão de viga no plano xz

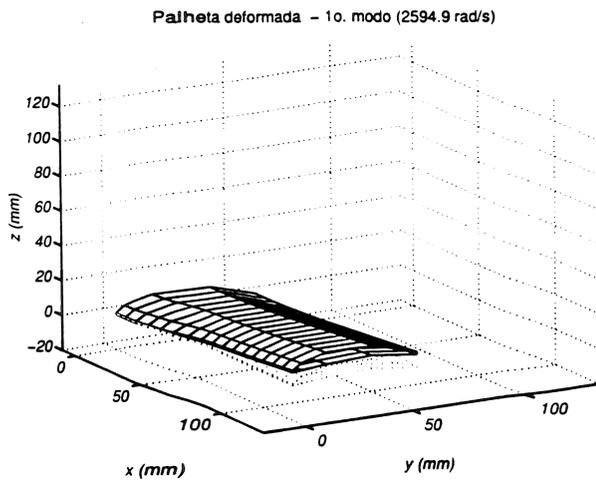
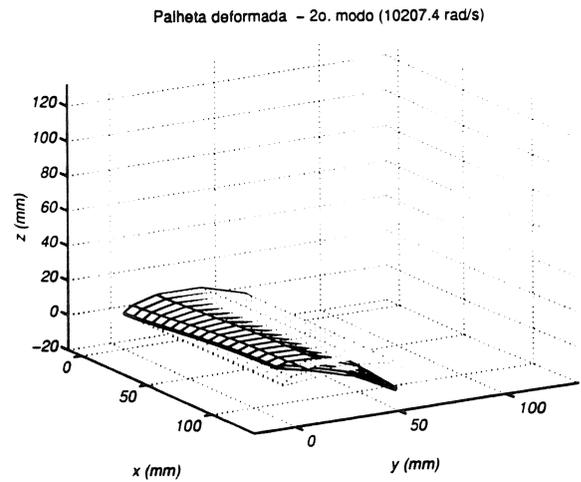
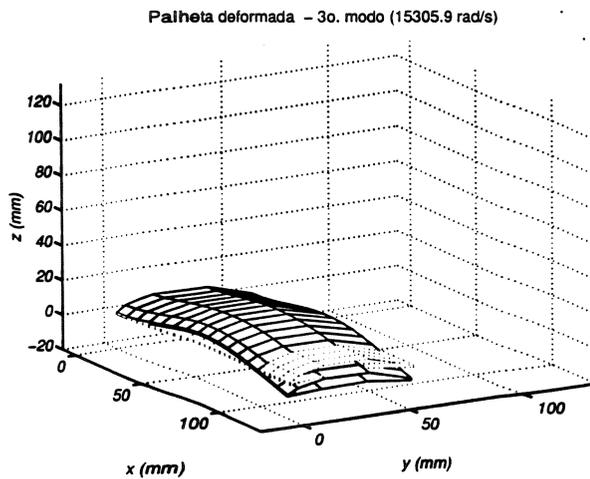
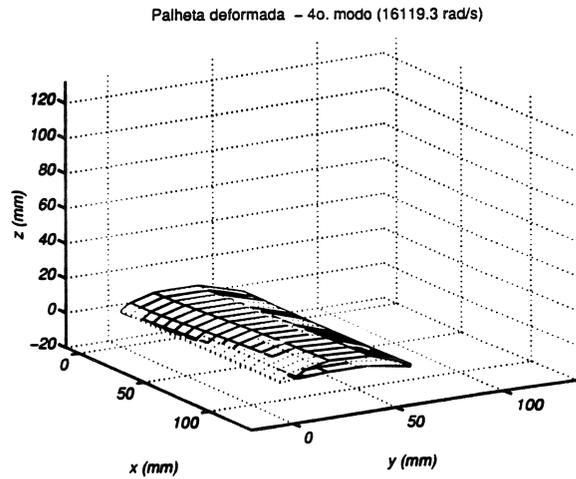
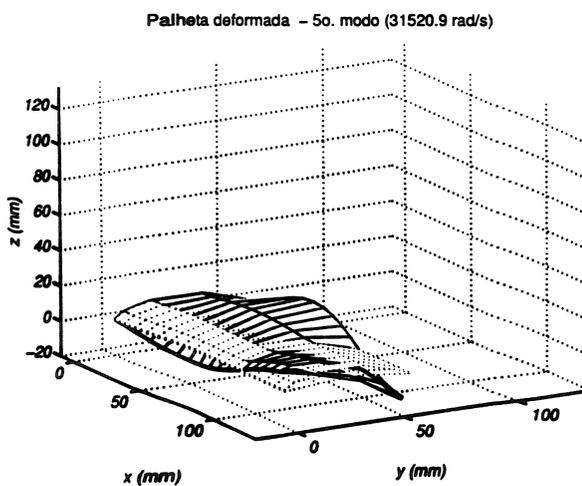


(e) Primeiro modo de torção



(f) Quarto modo de flexão de viga no plano xz

Figura 5.18: Forma dos seis primeiros modos de vibração - palheta retangular

(a) Primeiro modo de flexão de viga no plano xz (b) Segundo modo de flexão de viga no plano xz (c) Primeiro modo de flexão de viga no plano yz (d) Terceiro modo de flexão de viga no plano xz 

(e) Primeiro modo de torção

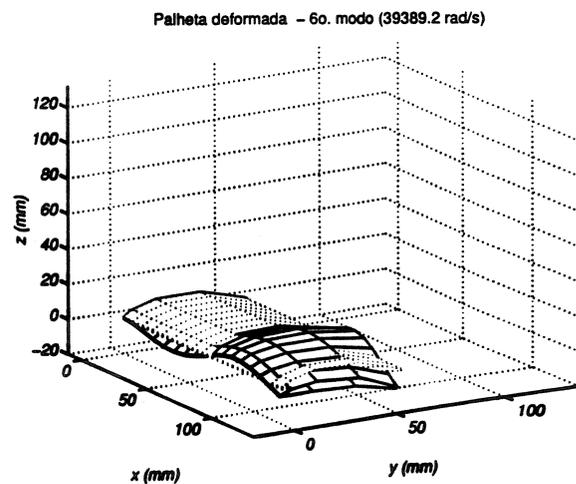
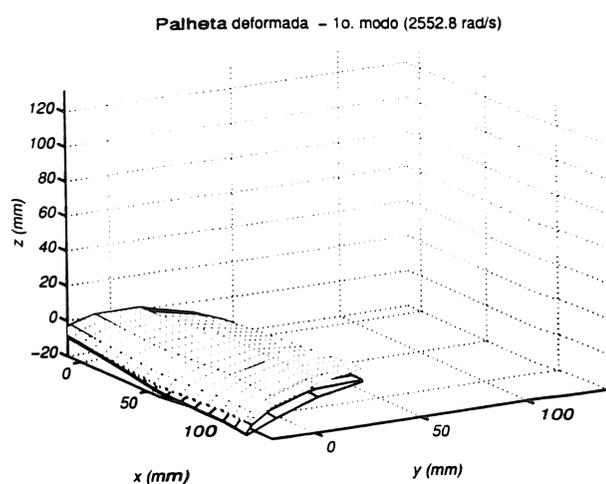
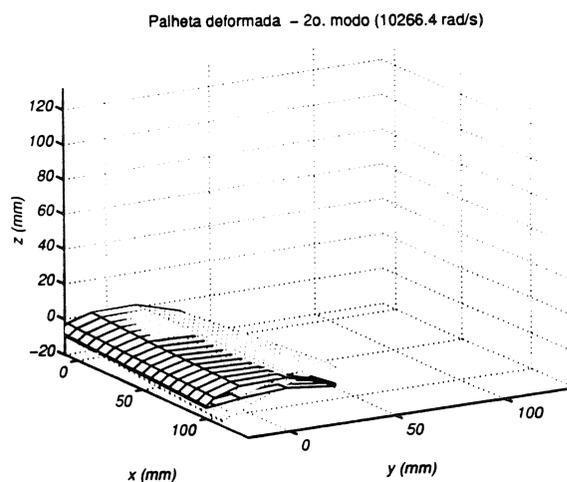
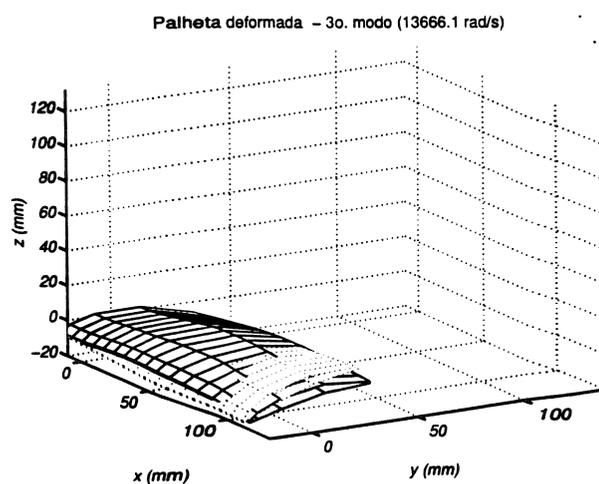
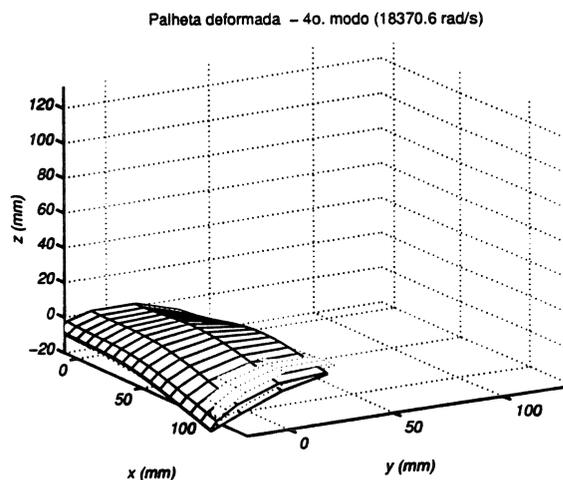
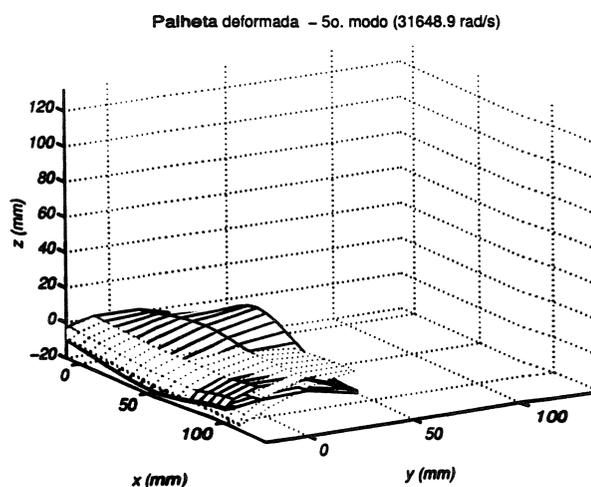
(f) Quarto modo de flexão de viga no plano xz

Figura 5.19: Forma dos seis primeiros modos de vibração palheta em forma de aerofólio

(a) Primeiro modo de flexão de viga no plano xz (b) Segundo modo de flexão de viga no plano xz (c) Primeiro modo de flexão de viga no plano yz (d) Terceiro modo de flexão de viga no plano xz 

(e) Primeiro modo de torção

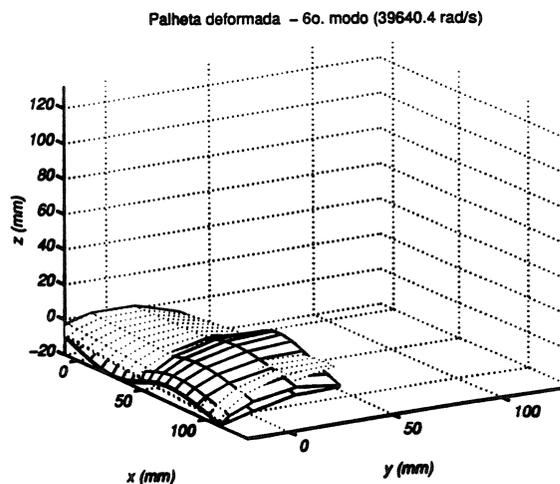
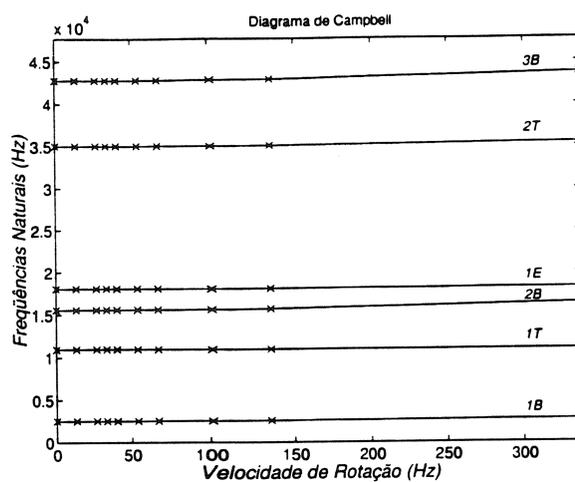
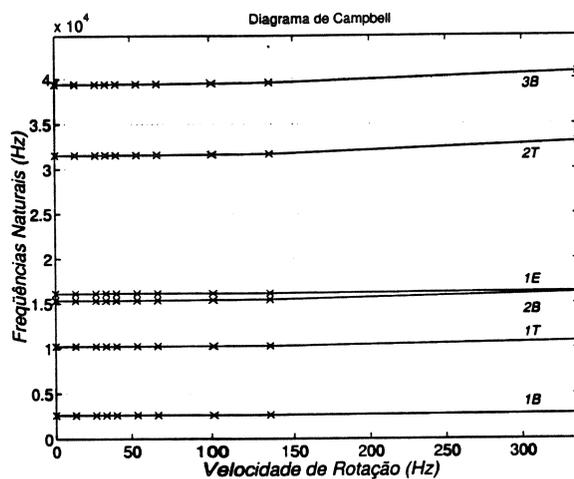
(f) Quarto modo de flexão de viga no plano xz

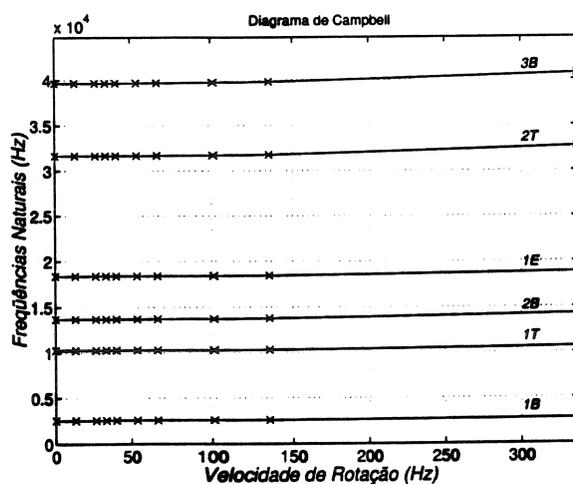
Figura 5.20: Forma dos seis primeiros modos de vibração - palheta torcida em forma de aerofólio



(a) Palheta de forma retangular



(b) Palheta em forma de aerofólio



(c) Palheta torcida em forma de aerofólio

Figura 5.21: Diagramas de Campbell para as diferentes palhetas

Capítulo 6

Aplicações Industriais

6.1 Introdução

Nos capítulos anteriores foram discutidas a formulação e implementação das equações de movimento de palhetas flexíveis acopladas a máquinas rotativas, para análise do seu comportamento dinâmico e da influência da velocidade de rotação e aceleração centrífuga nas frequências naturais e seus modos de vibração. Posteriormente, foram apresentados resultados teóricos para palhetas com formas geométricas simples. O objetivo destes estudos era verificar como as características dinâmicas das palhetas são influenciadas, tanto pela velocidade de rotação quanto pelas próprias características das palhetas e, como, a interação entre estes dois efeitos altera as frequências naturais das palhetas.

Neste capítulo, a metodologia desenvolvida e implementada anteriormente é utilizada para estudar o comportamento dinâmico de palhetas de um compressor (na verdade um soprador) axial da Refinaria de Petróleo do Vale do Paraíba, a REVAP. Este compressor é formado por doze estágios, sendo que cada estágio é constituído de 43 palhetas. As diferenças entre as palhetas dos diferentes estágios está no comprimento total das mesmas, sendo que a forma da seção transversal permanece a mesma para todos os estágios.

O objetivo deste estudo é verificar se, em alguns dos estágios do compressor, as frequências naturais da palheta são excitadas pela velocidade de rotação ou outra possível fonte. A máquina já apresentou ruptura das palhetas do primeiro e quinto estágios, e um dos objetivos destas análises é verificar se esta ruptura está relacionada com a operação da máquina em uma determinada velocidade, excitando algumas das frequências naturais das palhetas.

O procedimento de análise do comportamento dinâmico da palheta, nas condições de operação da máquina pode ser resumido nas seguintes etapas: obtenção do modelo geométrico da palheta, construção do modelo da mesma através do Método dos Elementos

Finitos, simulações numéricas da palheta nas condições livre-livre e engastada (considerando que a velocidade de rotação da máquina é nula), medição das frequências naturais da palheta, ajuste do modelo teórico obtido anteriormente a partir das informações recolhidas nas medições, novas simulações numéricas da palheta com o modelo ajustado para diferentes velocidades de rotação para a faixa de operação especificada para a máquina.

Posteriormente, ainda foram consideradas as seguintes análises : estudo da influência da variação da rigidez do engaste da palheta, simulando a variação da condição livre-livre para a engastada, e análise do comportamento dinâmico das palhetas em função da curva característica de partida da máquina.

6.2 Modelo discretizado pelo método dos elementos finitos

Primeiramente a geometria tridimensional da palheta foi medida com auxílio de uma fresadora CNC. As coordenadas x , y e z medidas desta maneira são utilizadas para definir a malha de elementos finitos para a palheta.

Um modelo tridimensional utilizando elementos finitos sólidos de 20 nós foi construído a partir dos pontos medidos do perfil da palheta. O modelo discretizado é constituído de 108 elementos finitos, num total de 774 nós e 2322 graus de liberdade, de acordo com a malha apresentada na figura 6.1.

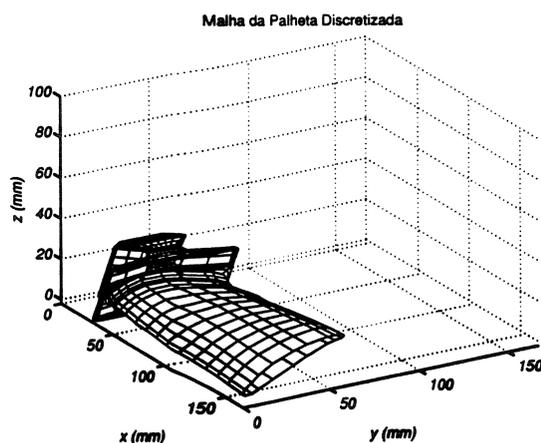


Figura 6.1: Malha discretizada da palheta utilizando 108 elementos e 2322 graus de liberdade

Nesta análise estão sendo considerados elementos sólidos. A utilização deste elemento tridimensional tem duas grandes vantagens : inclui naturalmente qualquer tipo de geometria em sua formulação e permite o tratamento de todos os tipos de modos de vibração, sejam estes de viga, placa, torção, ou outro tipo de modo assimétrico. A desvantagem do modelo tridimensional está relacionada com as matrizes resultantes da

discretização, pois estas são esparsas e de ordem elevada, necessitando de maior tempo computacional para a solução do problema. Quando a palheta está livre, o modelo tridimensional permite que a estrutura tenha seis movimentos de corpo rígido. Isto é verificado quando da análise do problema de autovalor do sistema, pois as seis primeiras frequências são nulas.

O elemento sólido empregado é quadrático, resultando em 20 nós por elemento, sendo que cada nó possui três graus de liberdade. A escolha de um elemento quadrático está relacionada com o tipo da malha gerada, que apresenta uma geometria complexa e portanto é melhor interpolada a partir de funções parabólicas e não a partir de funções lineares. Da mesma forma, os deslocamentos nodais são interpolados por funções quadráticas e a distribuição de tensões é linear ao longo do elemento. Este tipo de interpolação quadrática também é indicada para análise dinâmica de problemas pelo método dos elementos finitos.

A malha é gerada pelo programa de elementos finitos a partir dos pontos medidos anteriormente. Entretanto, é necessário verificar se não existe nem uma região de distorção da malha. Se esta distorção estiver presente qualquer tipo de análise, estática ou dinâmica, não tem a convergência garantida. A primeira verificação realizada é, então, quanto à qualidade da malha. O teste realizado é a verificação do sinal do determinante do jacobiano da transformação de coordenadas locais e globais. Durante o cálculo das matrizes de massa e rigidez, o determinante jacobiano é calculado nos pontos de integração de Gauss. O sinal deste determinante deve ser sempre positivo, pois caso contrário o mapeamento realizado entre os sistemas de coordenadas locais e globais não representa adequadamente a geometria inicial. Além do teste do sinal do jacobiano, também devem ser verificadas as propriedades das matrizes de massa e rigidez para a palheta na configuração livre-livre. A matriz de massa é sempre positiva definida e, portanto, todos os seus autovalores devem ser maiores do que zero. Por outro lado, a matriz de rigidez é semi-positiva definida e, portanto, os autovalores são maiores ou iguais a zero. Como a formulação empregada é tridimensional, a palheta pode ter os seis movimentos de corpo rígido, então para a palheta livre-livre é previsto que sua matriz de rigidez tenha os seis primeiros autovalores nulos.

Estes testes foram realizados na malha da palheta. Primeiramente, foram verificadas regiões de distorção da malha próximas ao bordo de ataque e fuga da palheta. Como estas são regiões limites, finas e muito curvadas, a malha apresentou-se distorcida. Em alguns dos pontos próximos a esta região foram encontrados valores negativos do determinante jacobiano. A análise de autovalores da matriz de massa desta malha também forneceu resultados inconsistentes, pois foram encontrados valores negativos. O procedimento de correção da malha foi alterar a posição de alguns pontos e recalculando as matrizes de massa e rigidez. Novos testes foram realizados e a análise de autovalores das matrizes de massa e rigidez mostrou-se coerente e todos os pontos apresentaram sinal do determinante jacobiano maior do zero. Assim, a malha é garantida contra problemas de distorção e a

convergência dos resultados é assegurada.

6.3 Validação do modelo teórico

Com o modelo numérico desenvolvido via Método dos Elementos Finitos, viabiliza-se a representação do comportamento dinâmico das palhetas do soprador em diferentes condições de operação do mesmo. No entanto, antes de se iniciar a análise dinâmica, é necessário a validação do modelo teórico desenvolvido. Para isto, diferentes testes experimentais foram realizados, tendo como base a determinação das frequências naturais das palhetas dos diferentes estágios do compressor, em diferentes condições de contorno (ou montagem).

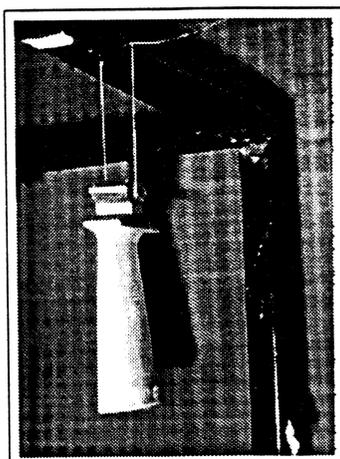
Primeiramente são discutidas a escolha dos parâmetros do modelo. As propriedades do material, densidade ρ (kg/m^3), coeficiente de Poisson ν e módulo de elasticidade E foram inicialmente escolhidos a partir de dados de tabela mais comuns para aços. Posteriormente, estes parâmetros devem ser ajustados de modo a representar adequadamente a palheta real. Neste análise o parâmetro ν (coeficiente de Poisson) é suposto conhecido e tem o valor de 0.27. Na verdade este é um parâmetro que é constante independentemente do tipo de aço e que tem uma influência menor na flexibilidade da palheta. Portanto, nesta análise apenas dois parâmetros influenciam significativamente as propriedades dinâmicas da palheta : a densidade e o módulo de elasticidade.

A densidade ρ pode ser ajustada diretamente a partir da comparação do peso medido da palheta com a massa total obtida pelo programa de elementos finitos, que é dada pela seguinte relação :

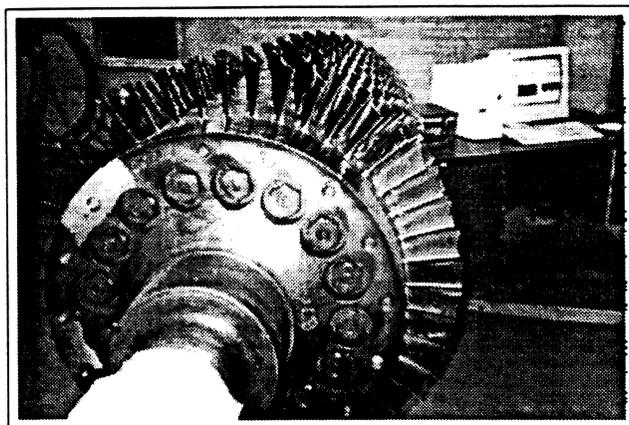
$$m = \int \int \int_V \rho \, dx \, dy \, dz \quad (6.1)$$

Considerando a densidade da palheta igual a 1, é possível estimar o volume total da estrutura. O volume total da palheta e da base de fixação, calculado numericamente, é dado por $V = 6.31 \cdot 10^{-5} \, \text{m}^3$. O peso da palheta que foi determinado experimentalmente é 475g. A densidade do material pode ser estimada como $\rho = 7520 \, \text{kg/m}^3$.

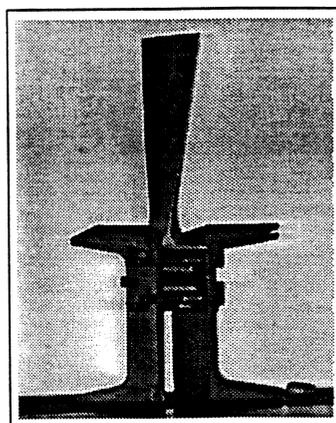
O outro parâmetro a ser ajustado é o módulo de elasticidade do material. Neste caso, o ajuste é obtido comparando as frequências naturais do modelo numérico com as frequências naturais medidas experimentalmente na configuração livre-livre. Também é possível ajustar o modelo comparando as frequências teóricas e experimentais da palheta engastada. Entretanto, neste tipo de análise, é necessário verificar se realmente as condições experimentais de fixação da palheta representam satisfatoriamente o engaste idealizado no modelo teórico.



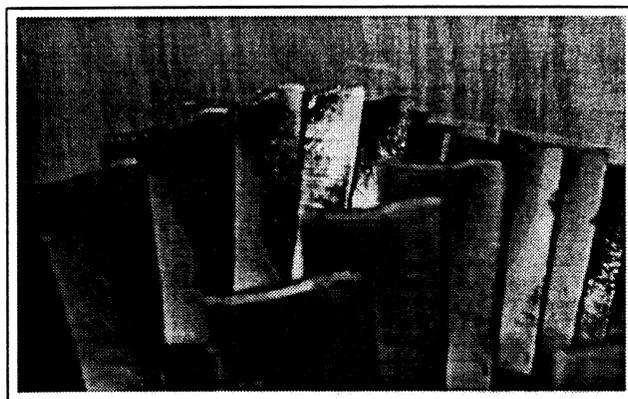
(a) Condição livre-livre



(b) Condições de contorno reais



(c) condições de contorno simuladas em laboratório



(d) palhetas desgastadas do primeiro estágio

Figura 6.2: Palhetas em diferentes condições de montagem - testes experimentais

Para validar o modelo teórico as frequências naturais da palheta foram medidas experimentalmente em três diferentes configurações :

- O primeiro teste realizado, refere-se às medições das frequências naturais das palhetas dos estágios 1, 2, 4, 6 e 10, nas condições livre-livre. Estes testes foram realizados na UNICAMP, e são ilustrados na figura 6.2(a). Os resultados obtidos nestes testes estão denotados nas tabelas deste trabalho por "Exp (a)"
- O segundo teste realizado, denotado nas tabelas deste trabalho por "Exp (b)" , refere-se às medições das frequências naturais das palhetas dos 12 estágios, montadas diretamente no soprador, ou seja, nas condições reais de engaste. Estes testes foram realizados na própria REVAP, e são ilustrados na figura 6.2(b).

- O terceiro teste realizado, denotado nas tabelas deste trabalho por "Exp (c)", refere-se às medições das frequências naturais das palhetas dos estágios 1, 2, 4, 6 e 10, montadas em uma estrutura, de forma a simular condições de engaste em laboratório. Estes testes também foram realizados na UNICAMP e estão ilustrados na figura 6.2(c).

Por outro lado, foram realizadas simulações numéricas para calcular as frequências da palheta nas condições livre-livre e engastada. O módulo de elasticidade adotado para o material é $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$. A tabela (6.1) mostra os resultados encontrados para as quatro primeiras frequências teórico e experimentais da palheta livre-livre. Da observação dos erros encontrados, pode-se dizer que o modelo teórico representa adequadamente a dinâmica da palheta. Portanto, os parâmetros ρ , E e ν adotados correspondem satisfatoriamente ao modelo real da palheta.

Estes resultados podem ainda ser comprovados pelas medidas das frequências da palheta engastada, que estão apresentadas na tabela (6.2). Nesta tabela estão apresentados os resultados para as duas condições de engastamento : real, montada no compressor, e de laboratório, medidas em uma estrutura que procura simular o engastamento real.

Tabela 6.1: Quatro primeiras frequências da palheta livre-livre do estágio 1

| Numérica | Exp (a) | Erro (a) |
|----------|---------|----------|
| 1373 Hz | 1336 Hz | 2.7 % |
| 2450 Hz | 2057 Hz | 19.5 % |
| 3730 Hz | 3644 Hz | 2.3% |
| 5712 Hz | 5021 Hz | 13.7% |

Tabela 6.2: Frequências da palheta engastada - estágio 1

| Numérica | Exp (b) ¹ | Erro (b) | Exp (c) | Erro (c) |
|----------|----------------------|----------|---------|----------|
| 408 Hz | 542 Hz | 24.7 % | 376 Hz | 8.5 % |
| 1699 Hz | 2040 Hz | 16.7 % | 1644 Hz | 3.3 % |
| 2278 Hz | 2890 Hz | 21.2 % | 2510 Hz | 9.2 % |
| 3116 Hz | 5219 Hz | - | 4727 Hz | - |
| 5452 Hz | - | - | - | - |

A palheta que está sendo ajustada pertence ao primeiro estágio do compressor. Entretanto, para as medidas das frequências das palhetas deste estágio, os resultados obtidos em campo não podem ser considerados, pois as palhetas montadas no compressor encontravam-se desgastadas. Se observarmos apenas o erro encontrado para as medidas teórica e experimentais em campo verifica-se que o erro encontrado é aceitável.

¹Estas medições foram realizadas com a palheta desgastada, devido à destruição de suas extremidades (fenômeno de raspagem contra a carcaça), conforme figura 6.2(d)

Para verificar se as condições de engastamento no laboratório reproduzem as condições de engaste real no compressor, o comportamento dinâmico de outra palheta, pertencente ao estágio 4, é discutido. As frequências livre-livre, teóricas e experimentais, desta palheta, estão apresentadas na tabela (6.3), mostrando que o modelo numérico representa adequadamente o modelo real, visto que os erros encontrados são pequenos. As frequências da palheta engastada nas condições de campo e laboratório estão apresentadas na tabela (6.4). A diferença encontrada entre as frequências medidas no campo e no laboratório é pequena, podendo-se considerar que o engastamento no laboratório reproduz adequadamente o engastamento real da palheta. Pode-se assim dizer que os resultados encontrados para a palheta do estágio 1, tabela (6.2), engastada no laboratório reproduz, também, o engastamento real, embora este tenha sido medido em diferentes condições (palheta desgastada).

Tabela 6.3: Frequências da palheta livre-livre do estágio 4

| Numérica | Exp (a) | Erro (a) |
|----------|---------|----------|
| 1904 Hz | 1866 Hz | 2.0 % |
| 2990 Hz | 3003 Hz | 0.4 % |
| 5462 Hz | 5594 Hz | 2.3 % |

Tabela 6.4: Frequências da palheta engasta - estágio 4

| Numérica | Exp (b) | Erro (b) | Exp (c) | Erro (c) |
|----------|---------|----------|---------|----------|
| 652 Hz | 767 Hz | 15.0 % | 780 Hz | 16.4 % |
| 2240 Hz | 2210 Hz | 1.4 % | 2246 Hz | 0.3 % |
| 3574 Hz | 4107 Hz | 12.9 % | 4093 Hz | 12.7 % |
| 4612 Hz | 5330 Hz | 13.5 % | - | - |
| 7389 Hz | - | - | - | - |

Na análise do comportamento dinâmico da palheta do estágio 1, o erro encontrado é considerado satisfatório e nenhum outro refinamento foi realizado. Considera-se esta hipótese razoável porque não se tem certeza a respeito dos erros implícitos nas medições. A margem de erro nas comparações numérico e experimentais pode ser menor ou de mesma ordem que os erros presentes nas medições. Além disto as palhetas medidas em campo e em laboratório são diferentes, o que também pode trazer diferenças entre as propriedades do material. Visto que os parâmetros adotados estão dentro de faixas aceitáveis, o modelo é considerado ajustado para representar tanto a palheta quanto o engastamento real.

Para calcular as frequências naturais das palhetas dos outros estágios, a malha construída foi obtida a partir da geometria medida para o modelo pertencente ao primeiro estágio. Portanto, é razoável prever que as diferenças encontradas entre as frequências teórico-experimentais para os outros estágios seja maior que para o primeiro estágio. Além disso, as propriedades do material para as palhetas podem sofrer variações, que embora pequenas podem alterar as frequências naturais da palheta. Da observação dos resultados

encontrados para as freqüências das palhetas engastadas nota-se que o erro encontra-se por volta de 10 a 15%, enquanto que para as palhetas livre-livre este erro é menor e da ordem de 10%. Resultados que apresentem erros maiores do que estes estão, muito provavelmente, ligados a erros de medição e não na falha do modelo numérico.

6.4 Freqüências naturais dos 12 estágios do soprador

As tabelas a seguir apresentam os resultados obtidos para as primeiras freqüências das palhetas pertencentes aos doze estágios do soprador. Os resultados apresentados mostram as freqüências calculadas numericamente e as medidas experimentalmente, nas duas condições de engaste, com as palhetas montadas no soprador, "Exp(b)", e montadas no laboratório, "Exp(c)", bem como os erros relativos encontrados entre os diferentes resultados. Também são apresentados os resultados obtidos para as freqüências da palheta livre-livre, entretanto estes resultados são apresentados apenas para as palhetas que foram disponibilizadas para testes em laboratório.

Embora as palhetas dos doze estágios apresentem a mesma seção transversal, o comprimento das palhetas são diferentes, sendo que ocorre uma diminuição do comprimento para os estágios maiores. Os comprimentos das palhetas estão apresentados na tabela (6.5).

Tabela 6.5: Comprimento das palhetas dos diversos estágios do soprador

| | Comprimento da palheta |
|------------|-------------------------|
| Estágio 1 | $l = 122.30 \text{ mm}$ |
| Estágio 2 | $l = 113.70 \text{ mm}$ |
| Estágio 3 | $l = 105.10 \text{ mm}$ |
| Estágio 4 | $l = 96.50 \text{ mm}$ |
| Estágio 5 | $l = 87.90 \text{ mm}$ |
| Estágio 6 | $l = 79.20 \text{ mm}$ |
| Estágio 7 | $l = 71.70 \text{ mm}$ |
| Estágio 8 | $l = 67.60 \text{ mm}$ |
| Estágio 9 | $l = 63.40 \text{ mm}$ |
| Estágio 10 | $l = 59.20 \text{ mm}$ |
| Estágio 11 | $l = 55.10 \text{ mm}$ |
| Estágio 12 | $l = 50.90 \text{ mm}$ |

6.4.1 Palhetas montadas no soprador

As freqüências naturais da palheta engastada são apresentadas a seguir. Os resultados apresentados referem-se aos cálculos numéricos, indicados como solução teórica, e aos testes experimentais realizados com as palhetas montadas no soprador, "Exp(b)", e montadas no laboratório, "Exp (c)". Para este último caso, as freqüências foram medidas apenas para os estágios 1, 2, 4, 6 e 10 que foram disponibilizadas para testes em laboratório.

Para os estágios 1 e 2 as medidas realizadas com as palhetas montadas foram comprometidas, pois as palhetas encontravam-se desgastadas, após raspagem com a carcaça da máquina. Assim, o comprimento total destas palhetas era menor, sendo que os resultados teóricos neste caso podem ser comparados apenas com as medidas das freqüências realizadas em laboratório.

Tabela 6.6: Freqüências da palheta montada no soprador - estágio 1

| Numérica | Exp (b) ² | Erro (b) ² | Exp (c) | Erro (c) |
|----------|----------------------|-----------------------|---------|----------|
| 408 Hz | 542 Hz | 24.7 % | 376 Hz | 8.5 % |
| 1699 Hz | 2040 Hz | 16.7 % | 1644 Hz | 3.3 % |
| 2278 Hz | 2890 Hz | 21.2 % | 2510 Hz | 9.2 % |
| 3116 Hz | 5219 Hz | - | 4727 Hz | - |
| 5452 Hz | - | - | - | - |

Tabela 6.7: Freqüências da palheta montada no soprador - estágio 2

| Numérica | Exp (b) ² | Erro (b) ² | Exp (c) | Erro (c) |
|----------|----------------------|-----------------------|---------|----------|
| 469 Hz | 581 Hz | 19.1 % | 635 Hz | 26.1 % |
| 1850 Hz | 1987 Hz | 6.9 % | 1870 Hz | 1.1 % |
| 2617 Hz | 3026 Hz | 13.5 % | 3061 Hz | 13.5 % |
| 3509 Hz | 5156 Hz | - | 3900 Hz | 10.0 % |
| 5991 Hz | - | - | - | - |

²Comprometimento das medições das palhetas do estágio 1 e 2, devido à destruição de suas extremidades (fenômeno de raspagem contra a carcaça). As extremidades destruídas das palhetas do estágio 1 e 2 podem ser observadas nas figuras abaixo.



Tabela 6.8: Freqüências da palheta montada no soprador - estágio 3

| Numérica | Exp (b) | Erro (b) | Exp (c) | Erro (c) |
|----------|---------|----------|---------|----------|
| 566 Hz | 640 Hz | 11.5 % | - | - |
| 2056 Hz | 2213 Hz | 7.1 % | - | - |
| 3143 Hz | 3385 Hz | 7.1 % | - | - |
| 4107 Hz | 5681 Hz | 27.7 % | - | - |
| 6731 Hz | - | - | - | - |

Tabela 6.9: Freqüências da palheta montada no soprador - estágio 4

| Numérica | Exp (b) | Erro (b) | Exp (c) | Erro (c) |
|----------|---------|----------|---------|----------|
| 652 Hz | 767 Hz | 15.0 % | 780 Hz | 16.4 % |
| 2240 Hz | 2210 Hz | 1.4 % | 2246 Hz | 0.3 % |
| 3574 Hz | 4107 Hz | 12.9 % | 4093 Hz | 12.7 % |
| 4612 Hz | 5330 Hz | 13.5 % | - | - |
| 7389 Hz | - | - | - | - |

Tabela 6.10: Freqüências da palheta montada no soprador - estágio 5

| Numérica | Exp (b) | Erro (b) | Exp (c) | Erro (c) |
|----------|---------|----------|---------|----------|
| 812 Hz | 940 Hz | 13.6 % | - | - |
| 2534 Hz | 2469 Hz | 2.6 % | - | - |
| 4436 Hz | 4945 Hz | 10.3 % | - | - |
| 5565 Hz | - | - | - | - |

Tabela 6.11: Freqüências da palheta montada no soprador - estágio 6

| Numérica | Exp (b) | Erro (b) | Exp (c) | Erro (c) |
|----------|---------|----------|---------|----------|
| 965 Hz | 1175 Hz | 17.9 % | 1092 Hz | 11.6 % |
| 2802 Hz | 2778 Hz | 0.9 % | 2825 Hz | 0.8 % |
| 5058 Hz | 5900 Hz | 14.3 % | 5470 Hz | 8.1 % |
| 6302 Hz | - | - | - | - |

Tabela 6.12: Freqüências da palheta montada no soprador - estágio 7

| Numérica | Exp (b) | Erro (b) | Exp (c) | Erro (c) |
|----------|---------|----------|---------|----------|
| 1238 Hz | 1476 Hz | 16.1 % | - | - |
| 3197 Hz | 3146 Hz | 1.6 % | - | - |
| 6436 Hz | - | - | - | - |

Tabela 6.13: Freqüências da palheta montada no soprador - estágio 8

| Numérica | Exp (b) | Erro (b) | Exp (c) | Erro (c) |
|----------|---------|----------|---------|----------|
| 1386 Hz | 1693 Hz | 18.3 % | - | - |
| 3436 Hz | 3327 Hz | 3.2 % | - | - |
| 7041 Hz | - | - | - | - |

Tabela 6.14: Freqüências da palheta montada no soprador - estágio 9

| Numérica | Exp (b) | Erro (b) | Exp (c) | Erro (c) |
|----------|---------|----------|---------|----------|
| 1588 Hz | 1902 Hz | 16.5 % | - | - |
| 3677 Hz | 3560 Hz | 3.3 % | - | - |
| 7845 Hz | - | - | - | - |

Tabela 6.15: Freqüências da palheta montada no soprador - estágio 10

| Numérica | Exp (b) | Erro (b) | Exp (c) | Erro (c) |
|----------|---------|----------|---------|----------|
| 1738 Hz | 2246 Hz | 22.6 % | 2334 Hz | 26.5 % |
| 3932 Hz | 3900 Hz | 0.8 % | 4113 Hz | 4.4 % |
| 8140 Hz | - | - | - | - |

Tabela 6.16: Freqüências da palheta montada no soprador - estágio 11

| Numérica | Exp (b) | Erro (b) | Exp (c) | Erro (c) |
|----------|---------|----------|---------|----------|
| 2156 Hz | 2649 Hz | 18.6 % | - | - |
| 4365 Hz | 4215 Hz | 3.5 % | - | - |
| 10008 Hz | - | - | - | - |

Tabela 6.17: Freqüências da palheta montada no soprador - estágio 12

| Numérica | Exp (b) | Erro (b) | Exp (c) | Erro (c) |
|----------|---------|----------|---------|----------|
| 2577 Hz | 3105 Hz | 17.7 % | - | - |
| 4840 Hz | 4622 Hz | 4.7% | - | - |
| 11467 Hz | - | - | - | - |

6.4.2 Palhetas na configuração livre-livre

As tabelas a seguir apresentam os resultados obtidos para as freqüências naturais das palhetas dos estágios 1, 2, 4, 6 e 10 nas configurações livre-livre, calculadas teoricamente, medidas experimentalmente e os erros relativos encontrados.

Tabela 6.18: Freqüências da palheta livre-livre - estágio 1

| Numérica | Exp(a) | Erro(a) |
|----------|---------|---------|
| 1373 Hz | 1336 Hz | 2.7 % |
| 2450 Hz | 2057 Hz | 19.5 % |
| 3730 Hz | 3644 Hz | 2.3% |
| 5712 Hz | 5021 Hz | 13.7% |

Tabela 6.19: Freqüências da palheta livre-livre - estágio 2

| Numérica | Exp (a) | Erro (a) |
|----------|---------|----------|
| 1519 Hz | 1397 Hz | 8.7 % |
| 2602 Hz | 2454 Hz | 6.0 % |
| 4197 Hz | 4052 Hz | 3.6 % |

Tabela 6.20: Freqüências da palheta livre-livre - estágio 4

| Numérica | Exp (a) | Erro (a) |
|----------|---------|----------|
| 1904 Hz | 1866 Hz | 2.0 % |
| 2990 Hz | 3003 Hz | 0.4 % |
| 5462 Hz | 5594 Hz | 2.3 % |

Tabela 6.21: Freqüências da palheta livre-livre - estágio 6

| Numérica | Exp (a) | Erro (a) |
|----------|---------|----------|
| 2458 Hz | 2581 Hz | 4.7 % |
| 3531 Hz | 3661 Hz | 3.5 % |

Tabela 6.22: Freqüências da palheta livre-livre - estágio 10

| Numérica | Exp (a) | Erro (a) |
|----------|---------|----------|
| 3539 Hz | 3253 Hz | 8.7 % |
| 4563 Hz | 5076 Hz | 10.1 % |

6.5 Análise modal numérica

A forma dos cinco primeiros modos de vibração da palheta foram avaliadas apenas numericamente utilizando o modelo tridimensional, construído com elementos finitos sólidos de 20 nós, a partir dos pontos medidos do perfil da palheta. O modelo discretizado é constituído de 108 elementos finitos, num total de 774 nós e 2322 graus de liberdade, de acordo com a malha apresentada na figura (6.3).

Os cinco primeiros modos de vibração da palheta, para a condição engastada que simula a palheta montada no soprador, estão representadas nas figuras a seguir. As figuras ilustram os modos de vibração de uma palheta pertencente ao primeiro estágio do soprador, porém para os demais estágios os modos de vibração são semelhantes. Para a faixa de frequências da máquina estas cinco primeiras frequências correspondem as frequências naturais da palheta que podem ser críticas.

A primeira e a quarta frequência estão associadas ao primeiro e segundo modos de viga, conforme representados nas figuras 6.4 e 6.7, respectivamente. O segundo e quinto modo relacionam-se com os movimentos de torção e estão apresentados nas figuras 6.5 e 6.8. O terceiro modo, chamado também de *edge bending mode* (modo típico de placas) está apresentado na figura 6.6.

Durante a realização das medidas experimentais a informação a respeito dos modos de vibração da palheta é essencial para a localização adequada dos sensores de aceleração e do ponto mais indicado para excitação. Por exemplo, para medição da segunda frequência, que está associada a um modo de torção, o acelerômetro deve estar preso próximo a um dos lados da extremidade livre, e nunca ao meio da palheta. Por outro lado, para medição da frequência associada ao terceiro modo de vibração, a localização do sensor no meio da palheta, mostrou-se mais adequada pela forma do modo associado. Outra importante informação, que pode ser extraída dos modos de vibração, são os pontos de maior solicitação de tensões, quando o soprador opera em uma velocidade de rotação que possa excitar alguma frequência natural das palhetas.

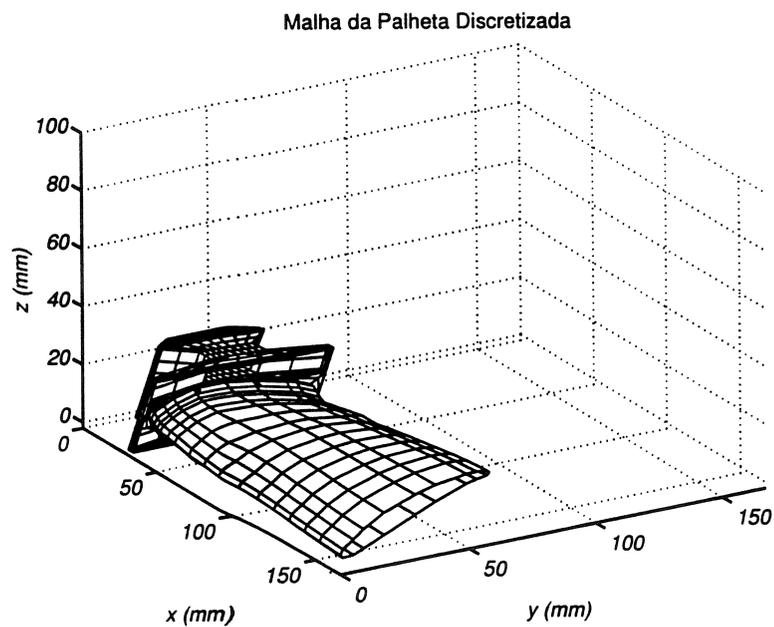


Figura 6.3: Malha discretizada da palheta utilizando 108 elementos e 2322 graus de liberdade

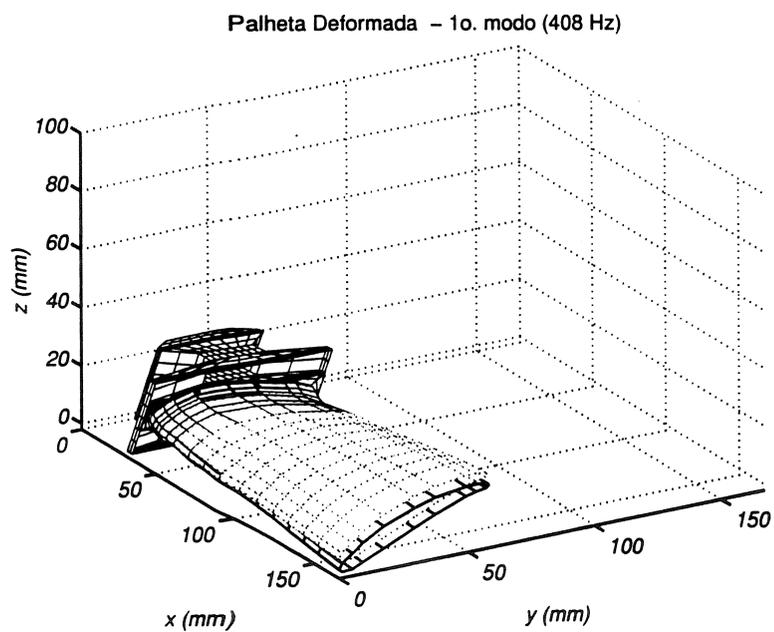


Figura 6.4: Primeiro modo de vibração da palheta - primeiro modo de viga

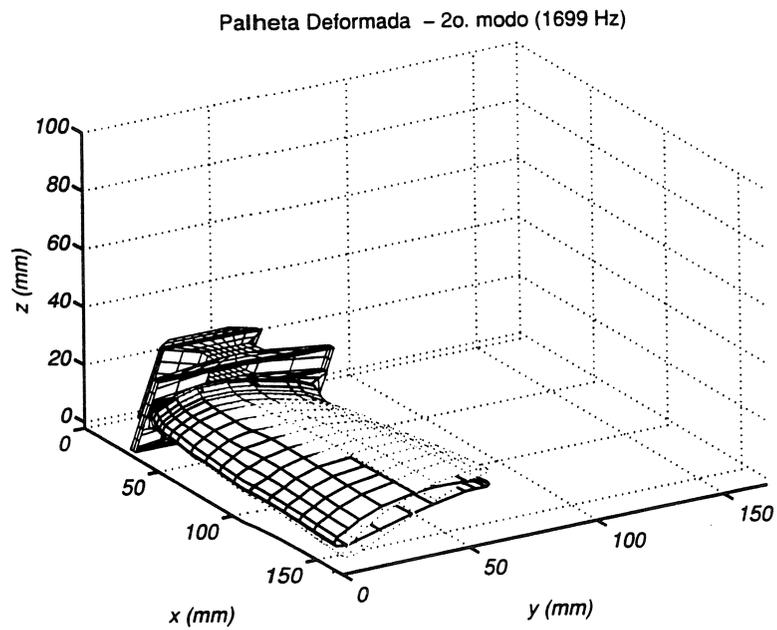


Figura 6.5: Segundo modo de vibração da palheta - primeiro modo de torção

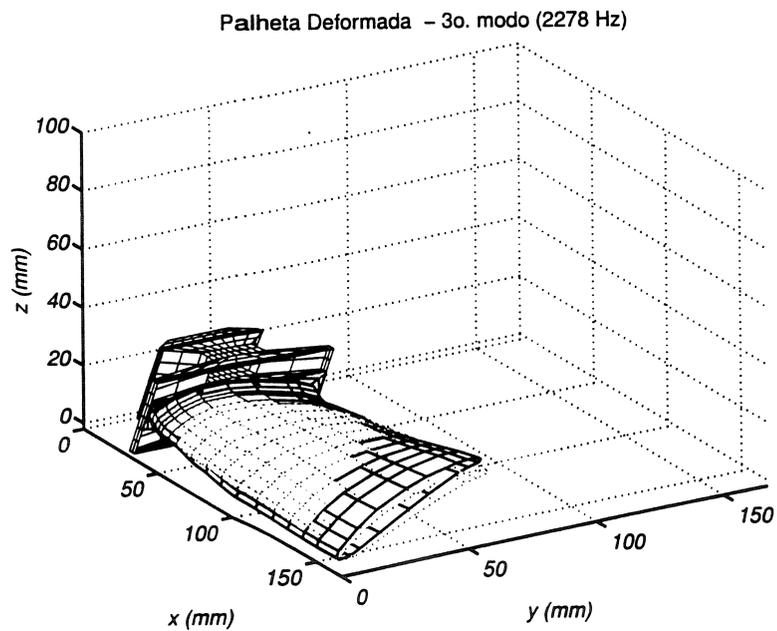


Figura 6.6: Terceiro modo de vibração da palheta - primeiro modo de placa

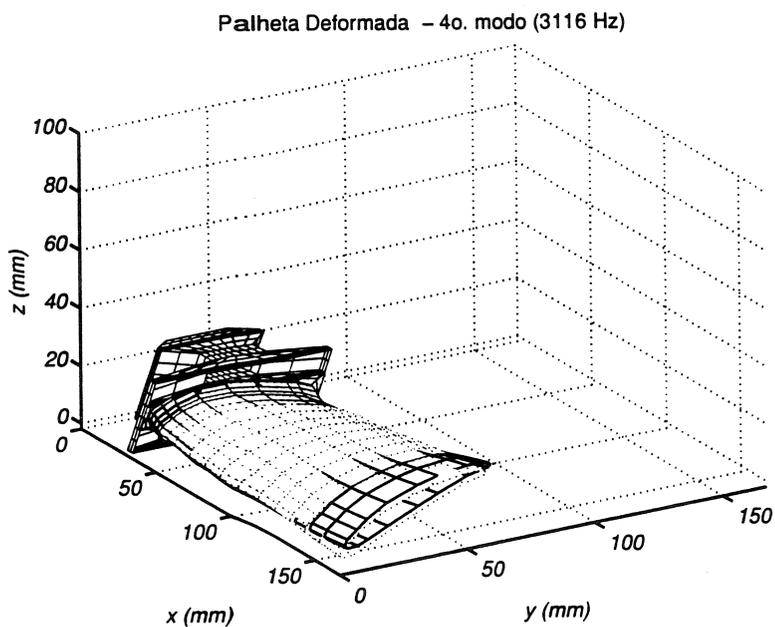


Figura 6.7: Quarto modo de vibração da palheta - segundo modo de viga

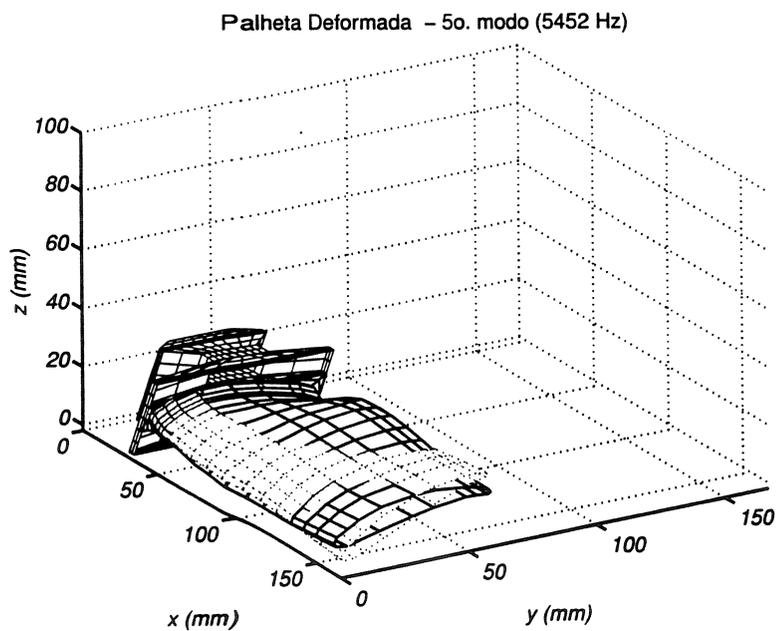


Figura 6.8: Quinto modo de vibração da palheta - segundo modo de torção

6.6 Influência da rigidez do engaste sobre as freqüências naturais da palheta

Tomando-se valores variando de zero a 10^{13} N/m para a rigidez do engaste da palheta obtém a curva representada a seguir. As seis primeiras freqüências que na configuração livre-livre são nulas convergem para as seis primeiras freqüências da palheta engastada.

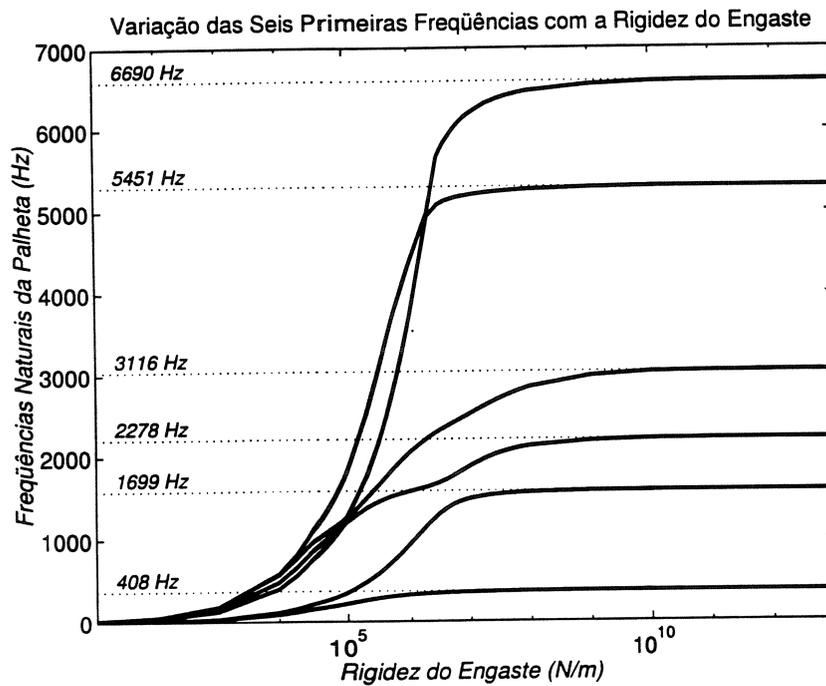


Figura 6.9: Variação das freqüências em função da rigidez do engaste

6.7 Diagramas de Campbell para os 12 estágios do soprador

Após o ajuste do modelo da palheta não rotativa, a influência da velocidade de rotação nas frequências naturais da palheta é estudada. Os resultados obtidos podem ser acompanhados nas próximas páginas, pelos diagramas de Campbell e tabelas de frequências naturais.

No cálculo das frequências da palheta foi empregado o método de iteração por subespaço, para o cálculo apenas das primeiras frequências da estrutura. Nesta análise foi desprezado o efeito da matriz giroscópica, pois esta não influencia sensivelmente as frequências da palheta. A influência maior da velocidade de rotação está nas matrizes de rigidez geométrica e rotacional, sendo que estas duas matrizes dependem, indireta e diretamente, da velocidade de rotação.

A velocidade de operação nominal da máquina é $\Omega = 5030 \text{ rpm}$, sendo que a faixa de operação está contida entre as velocidades de $\Omega = 3733$ a 5282 rpm . Nesta análise foram consideradas variações na velocidade de rotação da máquina de zero a 9000 rpm .

A velocidade de rotação da máquina pode ser representada vetorialmente por

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \psi \\ -\Omega \sin \psi \end{pmatrix}$$

O ângulo ψ é o ângulo de fixação das palhetas ao compressor, que para esta máquina é 23° . O raio de fixação das palhetas é dado por $R = 0.380 \text{ m}$.

Nos diagramas que se seguem são consideradas duas possíveis fontes de excitação das frequências naturais da palheta. A primeira é a própria velocidade de operação da máquina, que neste caso, é muito baixa em comparação com as frequências da palheta e portanto, não influencia as frequências críticas das palhetas. Como segunda fonte de excitação é escolhida a velocidade de rotação Ω , multiplicada por 42, que corresponde ao número de palhetas fixas pertencentes ao soprador. Se alguma das palhetas fixas (direcionadoras de fluxo) estiver mal posicionada, tem-se uma fonte de excitação que é proporcional à velocidade de rotação, multiplicada por 42. Esta fonte de excitação, por outro lado, é capaz de influenciar alguma frequência crítica das palhetas, como pode ser observado nos diagramas que se seguem.

A análise dos gráficos e tabelas permite concluir que, devido a pequena faixa de variação da velocidade de rotação, apenas as primeiras frequências naturais são mais afetadas pela variação da velocidade de rotação da máquina.

ESTÁGIO 1

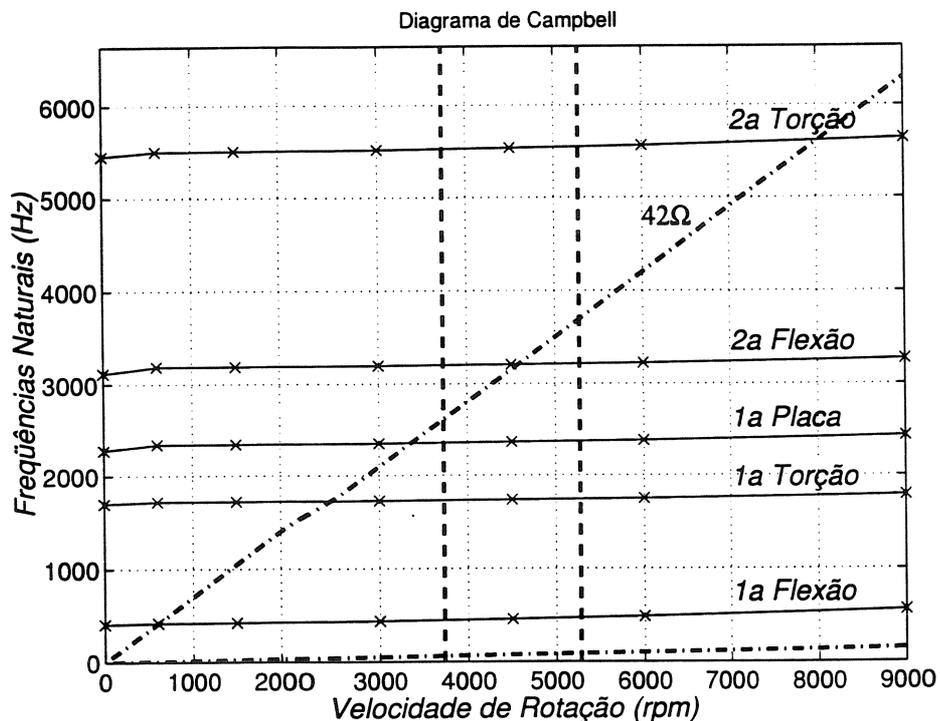


Figura 6.10: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao primeiro estágio do soprador

Tabela 6.23: Frequências da palheta montada no soprador - estágio 1

| $\Omega(rpm)$ | $\Omega = 0$ | $\Omega = 600$ | $\Omega = 1500$ | $\Omega = 3000$ | $\Omega = 4500$ | $\Omega = 6000$ | $\Omega = 9000$ |
|---------------|--------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ω_1 | 408 Hz | 421 Hz | 425 Hz | 438 Hz | 459 Hz | 486 Hz | 557 Hz |
| ω_2 | 1699 Hz | 1719 Hz | 1721 Hz | 1726 Hz | 1736 Hz | 1749 Hz | 1787 Hz |
| ω_3 | 2278 Hz | 2340 Hz | 2342 Hz | 2351 Hz | 2364 Hz | 2382 Hz | 2432 Hz |
| ω_4 | 3116 Hz | 3187 Hz | 3189 Hz | 3195 Hz | 3207 Hz | 3222 Hz | 3268 Hz |
| ω_5 | 5452 Hz | 5502 Hz | 5505 Hz | 5516 Hz | 5536 Hz | 5562 Hz | 5639 Hz |

No diagrama de Campbell da figura acima, verifica-se que, na faixa de operação prevista para a máquina ($\Omega = 3733$ a 5282 rpm), a velocidade de rotação aproximada de 4600 rpm é uma velocidade crítica do sistema. Esta velocidade de rotação, multiplicada por 42, encontra-se próxima da segunda frequência de flexão da palheta. Entretanto, as palhetas do mesmo estágio podem apresentar pequenas diferenças nas propriedades do material e, conseqüentemente, as frequências naturais da palheta do mesmo estágio encontram-se dentro de uma faixa de frequências. Considerando uma faixa de 10% de variação nas frequências das palhetas do mesmo estágio, a velocidade nominal de operação da máquina ($\Omega = 5030$ rpm), multiplicada por 42, está próxima, também, desta segunda frequência de flexão.

ESTÁGIO 2

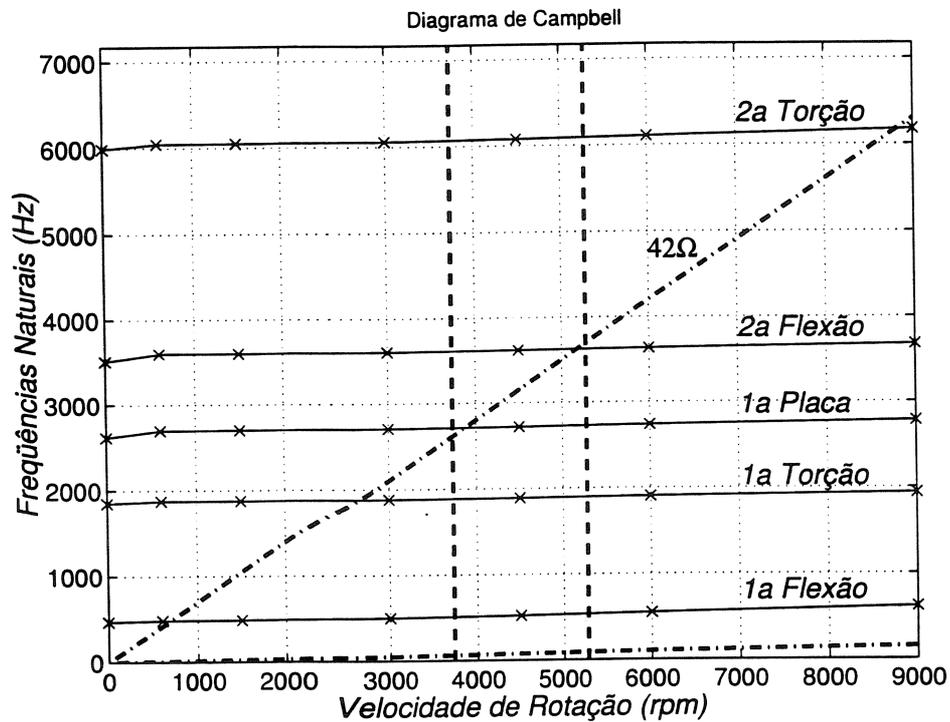


Figura 6.11: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao segundo estágio do soprador

Tabela 6.24: Frequências da palheta montada no soprador - estágio 2

| $\Omega(rpm)$ | $\Omega = 0$ | $\Omega = 600$ | $\Omega = 1500$ | $\Omega = 3000$ | $\Omega = 4500$ | $\Omega = 6000$ | $\Omega = 9000$ |
|---------------|--------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ω_1 | 469 Hz | 484 Hz | 488 Hz | 500 Hz | 520 Hz | 546 Hz | 615 Hz |
| ω_2 | 1850 Hz | 1873 Hz | 1874 Hz | 1880 Hz | 1889 Hz | 1901 Hz | 1937 Hz |
| ω_3 | 2617 Hz | 2695 Hz | 2697 Hz | 2705 Hz | 2717 Hz | 2733 Hz | 2778 Hz |
| ω_4 | 3509 Hz | 3597 Hz | 3599 Hz | 3605 Hz | 3616 Hz | 3631 Hz | 3676 Hz |
| ω_5 | 5991 Hz | 6046 Hz | 6049 Hz | 6059 Hz | 6077 Hz | 6102 Hz | 6174 Hz |

Para este estágio, verifica-se que existem duas velocidades críticas dentro da faixa de operação do compressor. A primeira velocidade crítica ocorre por volta de 3800 rpm, próxima ao limite inferior da velocidade de operação, coincidindo com a primeira frequência de placa (*edgewise bending*). A segunda velocidade crítica ocorre próxima ao limite superior de operação da máquina, a aproximadamente 5100 rpm, coincidindo com a segunda frequência de flexão. Ressalta-se que esta segunda velocidade crítica está muito próxima, também, da velocidade nominal do compressor ($\Omega = 5030 rpm$).

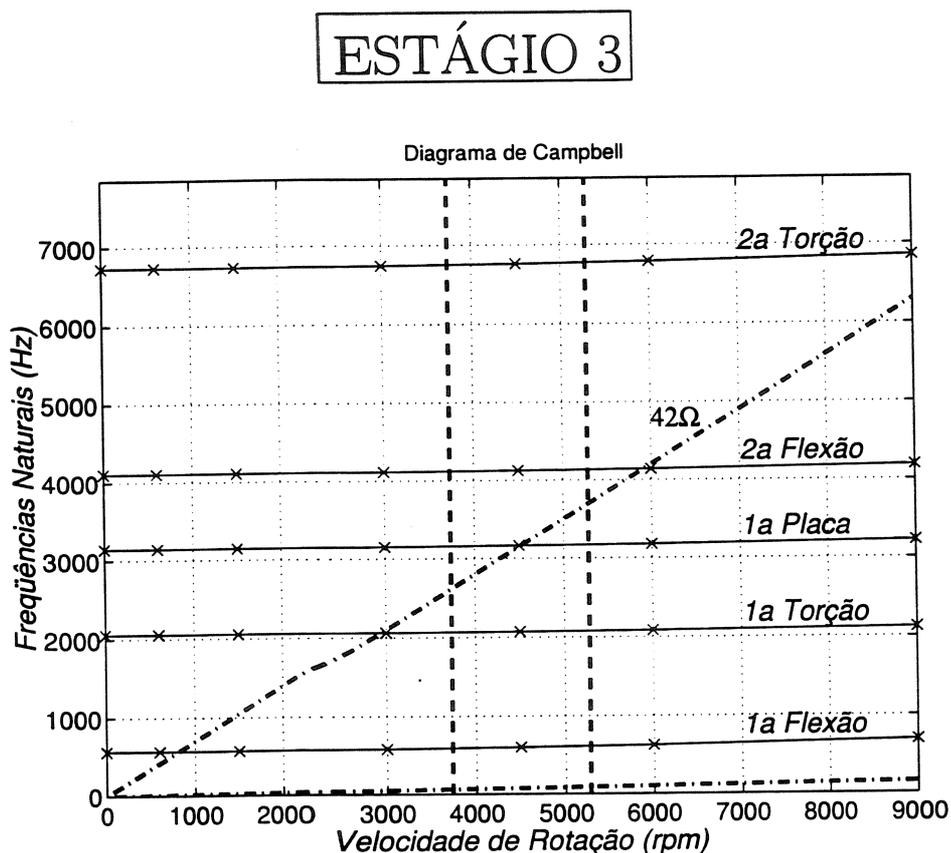


Figura 6.12: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao terceiro estágio do soprador

Tabela 6.25: Frequências da palheta montada no soprador - estágio 3

| Ω (rpm) | $\Omega = 0$ | $\Omega = 600$ | $\Omega = 1500$ | $\Omega = 3000$ | $\Omega = 4500$ | $\Omega = 6000$ | $\Omega = 9000$ |
|----------------|--------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ω_1 | 566 Hz | 567 Hz | 570 Hz | 581 Hz | 600 Hz | 625 Hz | 690 Hz |
| ω_2 | 2056 Hz | 2056 Hz | 2058 Hz | 2063 Hz | 2071 Hz | 2083 Hz | 2117 Hz |
| ω_3 | 3143 Hz | 3140 Hz | 3146 Hz | 3152 Hz | 3163 Hz | 3177 Hz | 3217 Hz |
| ω_4 | 4107 Hz | 4108 Hz | 4109 Hz | 4116 Hz | 4127 Hz | 4142 Hz | 4185 Hz |
| ω_5 | 6731 Hz | 6732 Hz | 6735 Hz | 6745 Hz | 6762 Hz | 6785 Hz | 6853 Hz |

Para a palheta pertencente ao terceiro estágio, verifica-se a existência de uma velocidade crítica, por volta de 4500 rpm, dentro da faixa de operação da máquina. Esta velocidade crítica é coincidente com a primeira frequência de placa (*edgewise bending*).

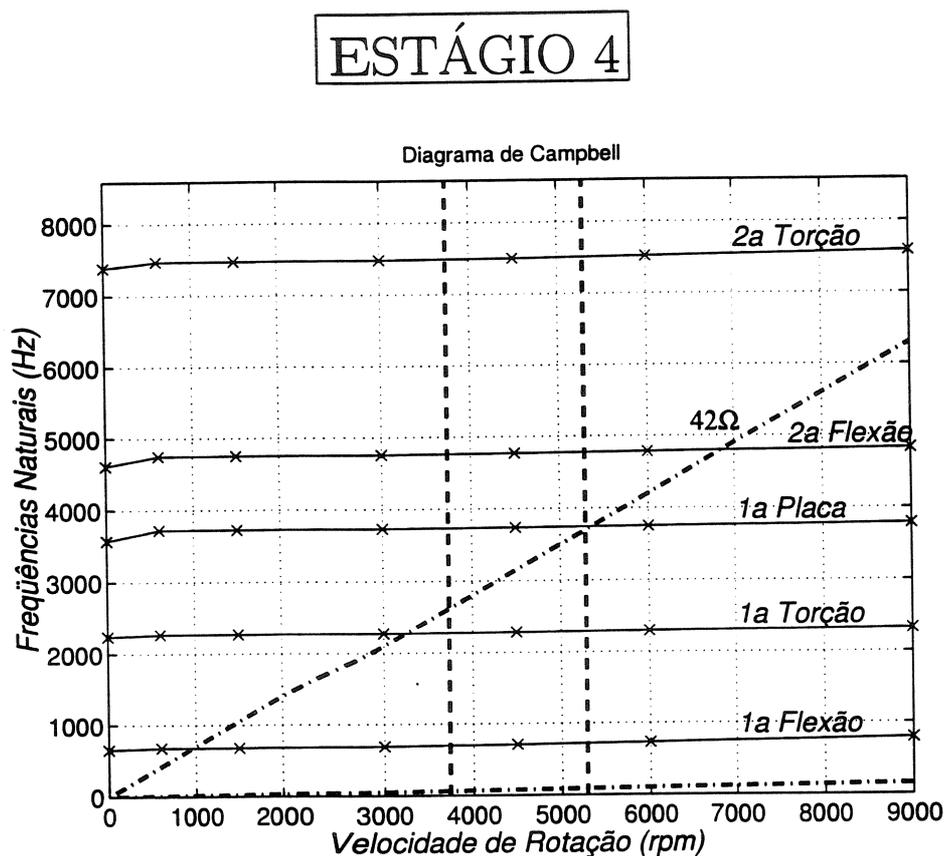


Figura 6.13: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao quarto estágio do soprador

Tabela 6.26: Frequências da palheta montada no soprador - estágio 4

| $\Omega(\text{rpm})$ | $\Omega = 0$ | $\Omega = 600$ | $\Omega = 1500$ | $\Omega = 3000$ | $\Omega = 4500$ | $\Omega = 6000$ | $\Omega = 9000$ |
|----------------------|--------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ω_1 | 652 Hz | 674 Hz | 677 Hz | 687 Hz | 704 Hz | 727 Hz | 789 Hz |
| ω_2 | 2240 Hz | 2267 Hz | 2269 Hz | 2274 Hz | 2282 Hz | 2293 Hz | 2325 Hz |
| ω_3 | 3574 Hz | 3722 Hz | 3724 Hz | 3730 Hz | 3738 Hz | 3751 Hz | 3786 Hz |
| ω_4 | 4612 Hz | 4749 Hz | 4751 Hz | 4757 Hz | 4767 Hz | 4782 Hz | 4825 Hz |
| ω_5 | 7389 Hz | 7472 Hz | 7474 Hz | 7484 Hz | 7499 Hz | 7521 Hz | 7584 Hz |

Para a palheta pertencente ao quarto estágio, verifica-se a existência de uma velocidade crítica próxima ao maior limite de operação da máquina, por volta de $\Omega = 5300 \text{ rpm}$. Esta velocidade crítica coincide com a primeira frequência de placa (*edgewise bending*). Considerando que as frequências naturais da palheta encontram-se dentro de uma faixa de 10%, a velocidade de operação nominal do compressor ($\Omega = 5030 \text{ rpm}$) também está próxima desta primeira frequência de placa.

ESTÁGIO 5

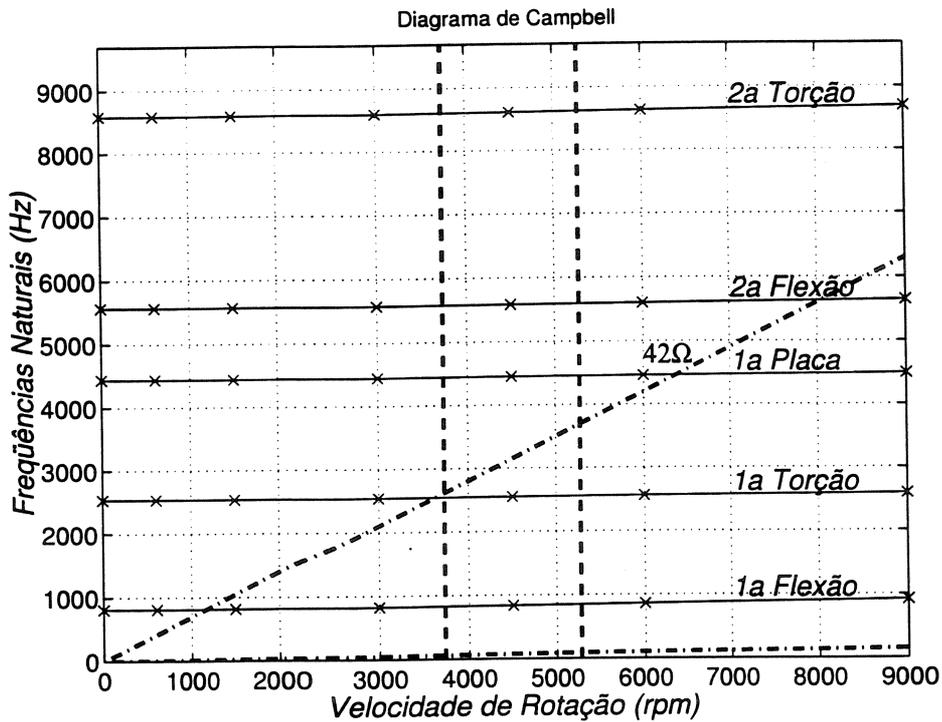


Figura 6.14: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao quinto estágio do soprador

Tabela 6.27: Frequências da palheta montada no soprador - estágio 5

| $\Omega(rpm)$ | $\Omega = 0$ | $\Omega = 600$ | $\Omega = 1500$ | $\Omega = 3000$ | $\Omega = 4500$ | $\Omega = 6000$ | $\Omega = 9000$ |
|---------------|--------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ω_1 | 812 Hz | 812 Hz | 815 Hz | 825 Hz | 840 Hz | 861 Hz | 919 Hz |
| ω_2 | 2534 Hz | 2534 Hz | 2535 Hz | 2540 Hz | 2547 Hz | 2558 Hz | 2589 Hz |
| ω_3 | 4436 Hz | 4437 Hz | 4438 Hz | 4443 Hz | 4450 Hz | 4461 Hz | 4490 Hz |
| ω_4 | 5565 Hz | 5565 Hz | 5567 Hz | 5574 Hz | 5585 Hz | 5600 Hz | 5644 Hz |
| ω_5 | 8584 Hz | 8585 Hz | 8587 Hz | 8596 Hz | 8611 Hz | 8631 Hz | 8689 Hz |

Para o quinto estágio do compressor, observa-se a existência de uma velocidade crítica próxima ao limite inferior da faixa de operação, aproximadamente 3700 rpm. Esta velocidade crítica coincide com a primeira frequência de torção.

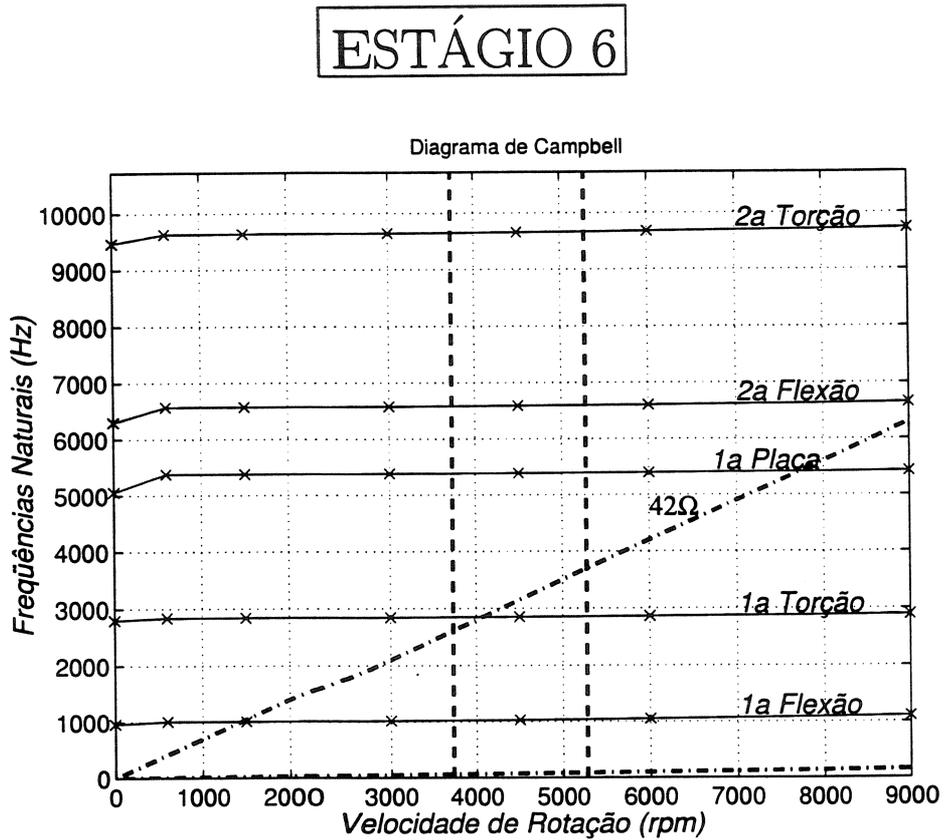


Figura 6.15: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao sexto estágio do soprador

Tabela 6.28: Frequências da palheta montada no soprador - estágio 6

| $\Omega(rpm)$ | $\Omega = 0$ | $\Omega = 600$ | $\Omega = 1500$ | $\Omega = 3000$ | $\Omega = 4500$ | $\Omega = 6000$ | $\Omega = 9000$ |
|---------------|--------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ω_1 | 965 Hz | 1007 Hz | 1009 Hz | 1018 Hz | 1032 Hz | 1051 Hz | 1103 Hz |
| ω_2 | 2802 Hz | 2842 Hz | 2843 Hz | 2847 Hz | 2854 Hz | 2864 Hz | 2893 Hz |
| ω_3 | 5058 Hz | 5378 Hz | 5379 Hz | 5382 Hz | 5389 Hz | 5398 Hz | 5422 Hz |
| ω_4 | 6302 Hz | 6572 Hz | 6573 Hz | 6578 Hz | 6590 Hz | 6605 Hz | 6648 Hz |
| ω_5 | 9468 Hz | 9633 Hz | 9635 Hz | 9643 Hz | 9656 Hz | 9675 Hz | 9728 Hz |

Para as palhetas do sexto estágio, observa-se a existência de uma velocidade crítica, dentro da faixa de operação do compressor, por volta de 4000 rpm. Esta velocidade crítica coincide com a primeira frequência de torção.

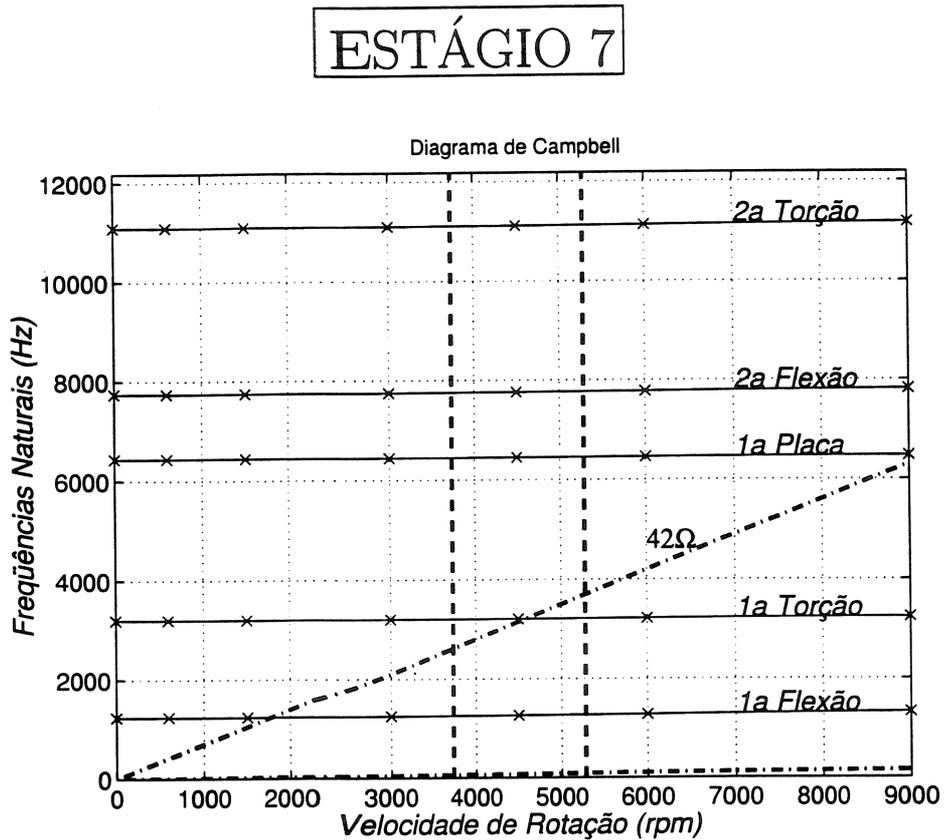


Figura 6.16: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao sétimo estágio do soprador

Tabela 6.29: Frequências da palheta montada no soprador - estágio 7

| $\Omega(rpm)$ | $\Omega = 0$ | $\Omega = 600$ | $\Omega = 1500$ | $\Omega = 3000$ | $\Omega = 4500$ | $\Omega = 6000$ | $\Omega = 9000$ |
|---------------|--------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ω_1 | 1238 Hz | 1238 Hz | 1240 Hz | 1248 Hz | 1260 Hz | 1278 Hz | 1326 Hz |
| ω_2 | 3197 Hz | 3197 Hz | 3198 Hz | 3202 Hz | 3209 Hz | 3218 Hz | 3245 Hz |
| ω_3 | 6436 Hz | 6436 Hz | 6437 Hz | 6440 Hz | 6446 Hz | 6453 Hz | 6473 Hz |
| ω_4 | 7739 Hz | 7739 Hz | 7741 Hz | 7747 Hz | 7758 Hz | 7773 Hz | 7816 Hz |
| ω_5 | 11090 Hz | 11091 Hz | 11093 Hz | 11100 Hz | 11112 Hz | 11129 Hz | 11176 Hz |

No sétimo estágio, observa-se a existência de uma velocidade crítica, por volta de 4500 rpm, dentro da faixa de operação da máquina. Esta velocidade crítica é coincidente com a primeira frequência de torção.

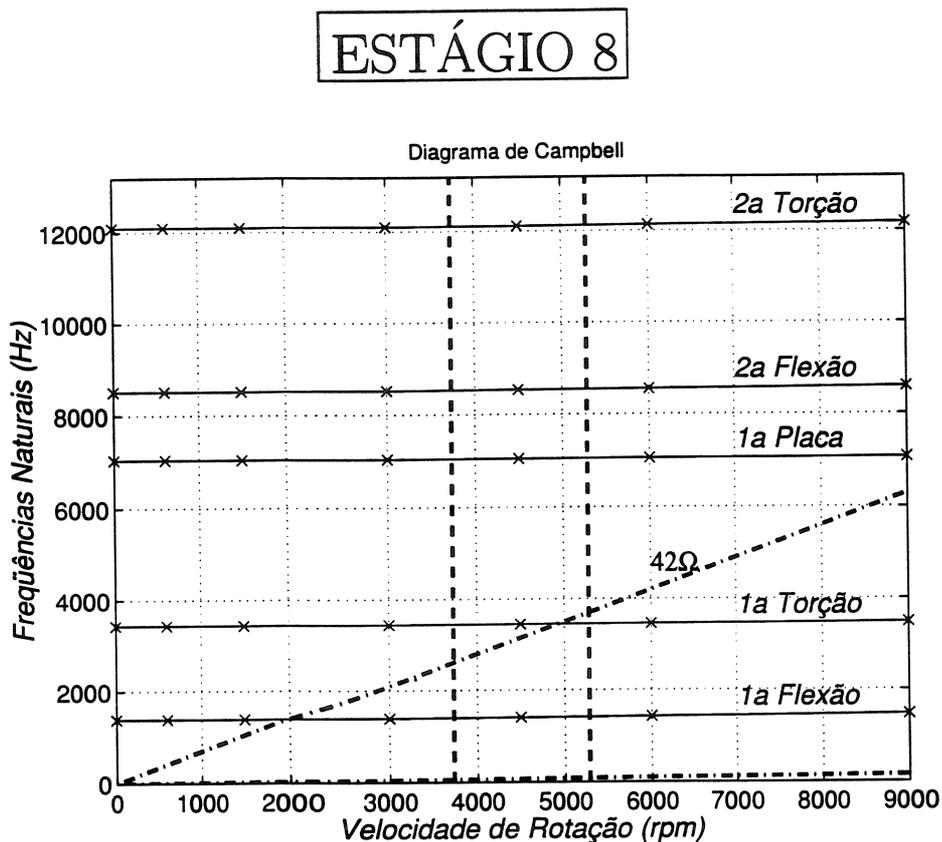


Figura 6.17: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao oitavo estágio do soprador

Tabela 6.30: Frequências da palheta montada no soprador - estágio 8

| $\Omega(rpm)$ | $\Omega = 0$ | $\Omega = 600$ | $\Omega = 1500$ | $\Omega = 3000$ | $\Omega = 4500$ | $\Omega = 6000$ | $\Omega = 9000$ |
|---------------|--------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ω_1 | 1386 Hz | 1386 Hz | 1388 Hz | 1395 Hz | 1407 Hz | 1423 Hz | 1469 Hz |
| ω_2 | 3436 Hz | 3436 Hz | 3437 Hz | 3441 Hz | 3448 Hz | 3457 Hz | 3483 Hz |
| ω_3 | 7041 Hz | 7041 Hz | 7042 Hz | 7045 Hz | 7049 Hz | 7055 Hz | 7073 Hz |
| ω_4 | 8511 Hz | 8512 Hz | 8513 Hz | 8520 Hz | 8531 Hz | 8547 Hz | 8592 Hz |
| ω_5 | 12092 Hz | 12092 Hz | 12094 Hz | 12101 Hz | 12112 Hz | 12128 Hz | 12174 Hz |

Para as palhetas pertencentes ao oitavo estágio do compressor, verifica-se a existência de uma velocidade crítica por volta de 5000 rpm. Esta velocidade crítica é coincidente com a primeira frequência de torção. Ressalta-se que esta velocidade crítica está próxima da velocidade de operação do compressor ($\Omega = 5030$ rpm).

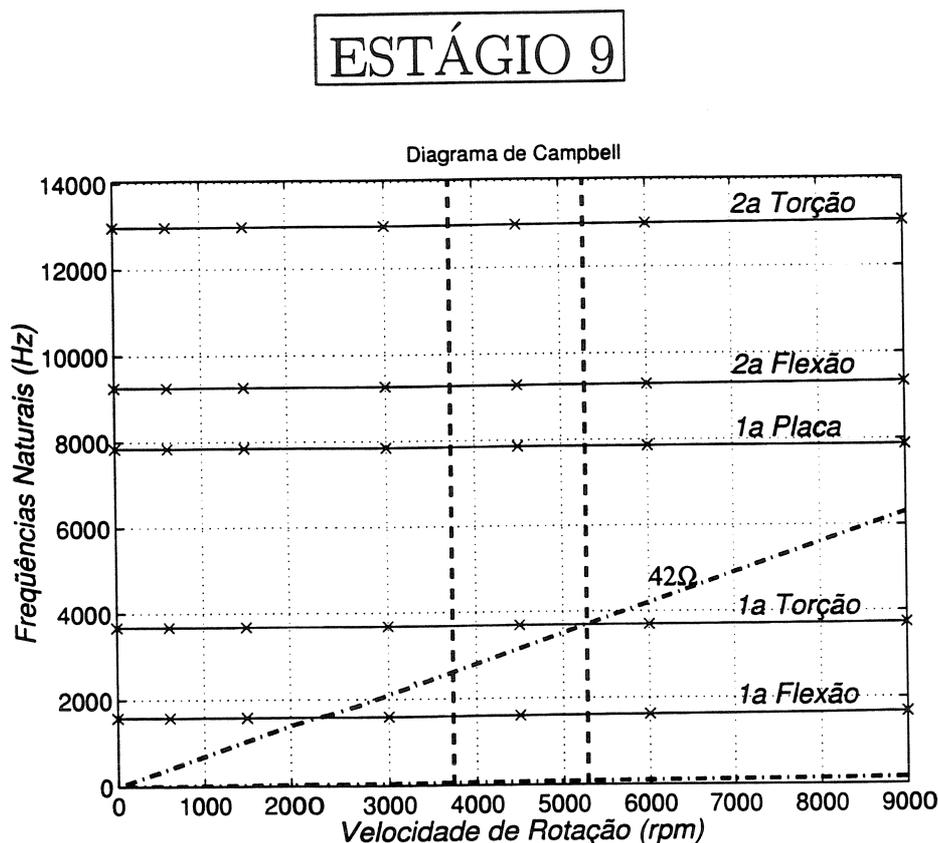


Figura 6.18: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao nono estgio do soprador

Tabela 6.31: Frequências da palheta montada no soprador - estgio 9

| $\Omega(rpm)$ | $\Omega = 0$ | $\Omega = 600$ | $\Omega = 1500$ | $\Omega = 3000$ | $\Omega = 4500$ | $\Omega = 6000$ | $\Omega = 9000$ |
|---------------|--------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ω_1 | 1588 Hz | 1588 Hz | 1590 Hz | 1597 Hz | 1607 Hz | 1623 Hz | 1665 Hz |
| ω_2 | 3677 Hz | 3677 Hz | 3678 Hz | 3682 Hz | 3688 Hz | 3697 Hz | 3722 Hz |
| ω_3 | 7845 Hz | 7845 Hz | 7845 Hz | 7848 Hz | 7852 Hz | 7858 Hz | 7875 Hz |
| ω_4 | 9254 Hz | 9254 Hz | 9256 Hz | 9262 Hz | 9273 Hz | 9287 Hz | 9329 Hz |
| ω_5 | 12977 Hz | 12978 Hz | 12980 Hz | 12986 Hz | 12997 Hz | 13011 Hz | 13054 Hz |

Para o nono estgio do compressor, verifica-se a existncia de uma velocidade crtica para a palheta, por volta de $\Omega = 5300 rpm$. Esta velocidade est prxima do limite superior da faixa de operao da mquina e coincide com a primeira freqncia de toro da palheta. Considerando que as freqncias naturais da palheta esto dentro de uma faixa de 10%, a velocidade nominal da mquina ($\Omega = 5030 rpm$) representa, tambm, uma velocidade crtica.

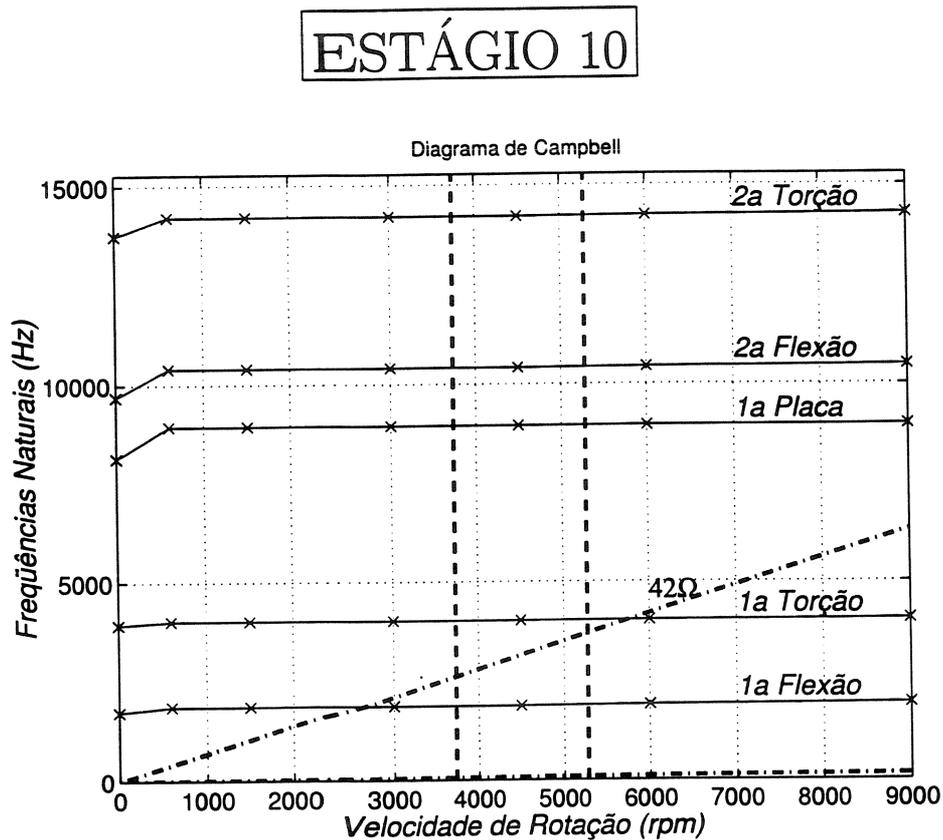


Figura 6.19: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao décimo estágio do soprador

Tabela 6.32: Frequências da palheta montada no soprador - estágio 10

| $\Omega(rpm)$ | $\Omega = 0$ | $\Omega = 600$ | $\Omega = 1500$ | $\Omega = 3000$ | $\Omega = 4500$ | $\Omega = 6000$ | $\Omega = 9000$ |
|---------------|--------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ω_1 | 1738 Hz | 1869 Hz | 1869 Hz | 1877 Hz | 1877 Hz | 1901 Hz | 1940 Hz |
| ω_2 | 3933 Hz | 4017 Hz | 4017 Hz | 4022 Hz | 4021 Hz | 4036 Hz | 4059 Hz |
| ω_3 | 8140 Hz | 8944 Hz | 8944 Hz | 8946 Hz | 8946 Hz | 8955 Hz | 8969 Hz |
| ω_4 | 9692 Hz | 10406 Hz | 10406 Hz | 10413 Hz | 10413 Hz | 10437 Hz | 10477 Hz |
| ω_5 | 13745 Hz | 14209 Hz | 14209 Hz | 14215 Hz | 14215 Hz | 14237 Hz | 14273 Hz |

Para as palhetas pertencentes ao décimo estágio do compressor, não existe, na faixa de operação da máquina, uma velocidade crítica. Entretanto, considerando uma faixa de 10% em que as frequências naturais da palheta do mesmo estágio podem estar contidas, a velocidade nominal de operação do compressor ($\Omega = 5030 rpm$) pode representar uma velocidade crítica.

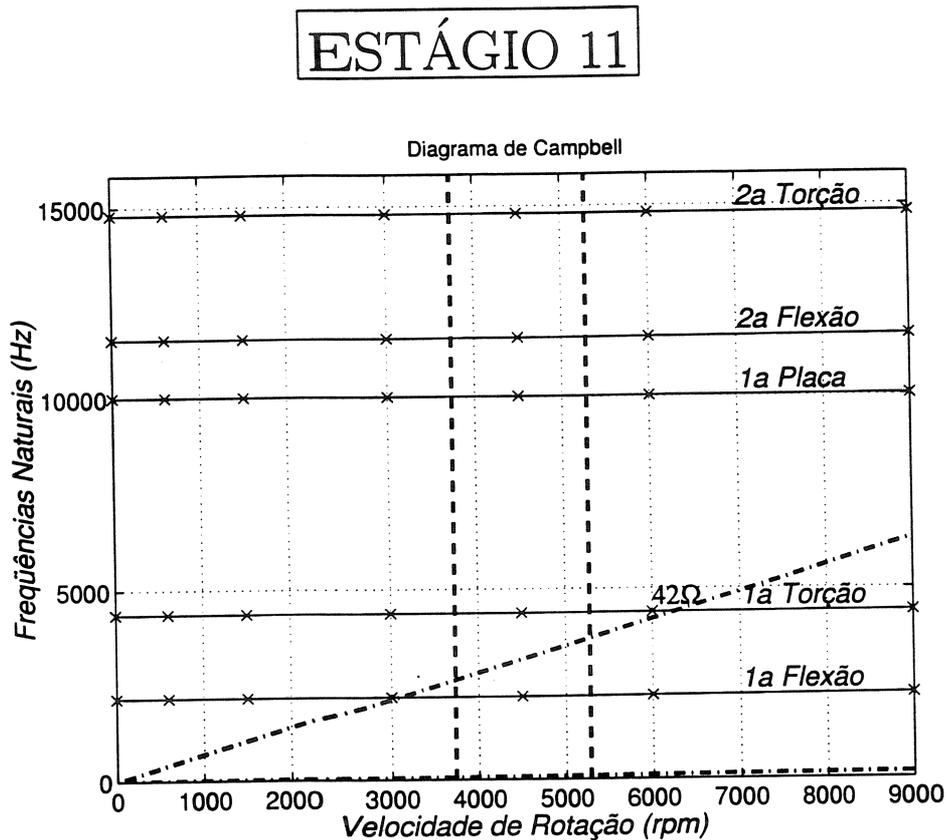


Figura 6.20: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao décimo primeiro estágio do soprador

Tabela 6.33: Frequências da palheta montada no soprador - estágio 11

| $\Omega(rpm)$ | $\Omega = 0$ | $\Omega = 600$ | $\Omega = 1500$ | $\Omega = 3000$ | $\Omega = 4500$ | $\Omega = 6000$ | $\Omega = 9000$ |
|---------------|--------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ω_1 | 2156 Hz | 2157 Hz | 2158 Hz | 2164 Hz | 2173 Hz | 2186 Hz | 2223 Hz |
| ω_2 | 4365 Hz | 4365 Hz | 4366 Hz | 4369 Hz | 4375 Hz | 4382 Hz | 4405 Hz |
| ω_3 | 10008 Hz | 10008 Hz | 10008 Hz | 10010 Hz | 10013 Hz | 10017 Hz | 10028 Hz |
| ω_4 | 11541 Hz | 11542 Hz | 11543 Hz | 11549 Hz | 11558 Hz | 11571 Hz | 11609 Hz |
| ω_5 | 14801 Hz | 14801 Hz | 14801 Hz | 14803 Hz | 14806 Hz | 14810 Hz | 14821 Hz |

Para as palhetas pertencentes ao décimo-primeiro estágio não é observada nenhuma velocidade crítica na faixa de velocidades de operação do compressor.

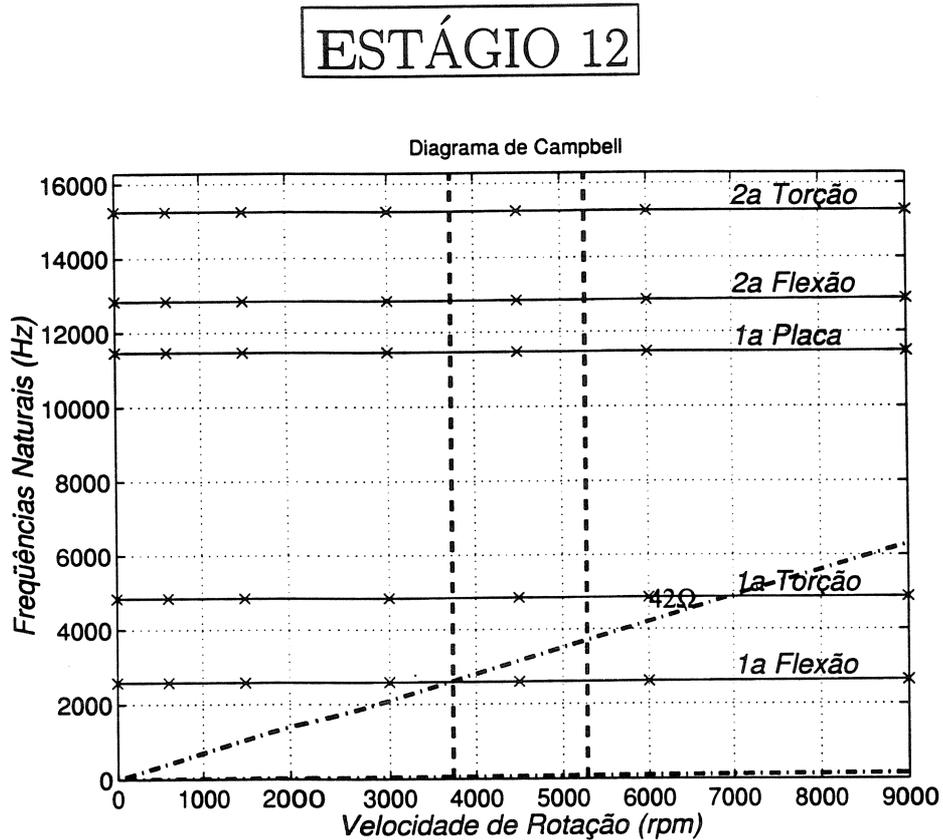


Figura 6.21: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao décimo segundo estágio do soprador

Tabela 6.34: Frequências da palheta montada no soprador - estágio 12

| $\Omega(rpm)$ | $\Omega = 0$ | $\Omega = 600$ | $\Omega = 1500$ | $\Omega = 3000$ | $\Omega = 4500$ | $\Omega = 6000$ | $\Omega = 9000$ |
|---------------|--------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ω_1 | 2577 Hz | 2578 Hz | 2579 Hz | 2584 Hz | 2593 Hz | 2604 Hz | 2638 Hz |
| ω_2 | 4840 Hz | 4840 Hz | 4841 Hz | 4844 Hz | 4850 Hz | 4857 Hz | 4878 Hz |
| ω_3 | 11467 Hz | 11467 Hz | 11468 Hz | 11469 Hz | 11472 Hz | 11475 Hz | 11485 Hz |
| ω_4 | 12837 Hz | 12838 Hz | 12839 Hz | 12843 Hz | 12851 Hz | 12861 Hz | 12891 Hz |
| ω_5 | 15249 Hz | 15249 Hz | 15249 Hz | 15252 Hz | 15256 Hz | 15261 Hz | 15276 Hz |

Para as palhetas pertencentes ao décimo-segundo estágio é observada uma velocidade crítica na faixa de velocidades de operação do compressor, por volta de $\Omega = 3700 rpm$. Esta velocidade é coincidente com a primeira frequência de flexão da palheta.

Os diagramas de Campbell apresentados anteriormente consideram apenas a condição de operação normal da máquina. Entretanto, esta análise pode ser estendida também para a curva de partida da máquina. Durante a partida, a máquina opera em diferentes velocidades de rotação conforme apresentado na figura (6.22). Assim, é possível construir um novo tipo de diagrama de Campbell, em função do tempo de partida da máquina. Neste diagrama, as frequências naturais da palheta são estimadas para cada patamar de velocidade de rotação em função do tempo e de acordo com os patamares de velocidade de rotação da máquina durante a partida. A fonte de excitação considerada neste caso é a velocidade de rotação Ω , em cada patamar, multiplicada por 42 (número de palhetas fixas do soprador).

As páginas a seguir apresentam os diagramas de Campbell na partida para os doze estágios do soprador, em função do tempo de partida e da variação da velocidade de rotação da máquina neste período.

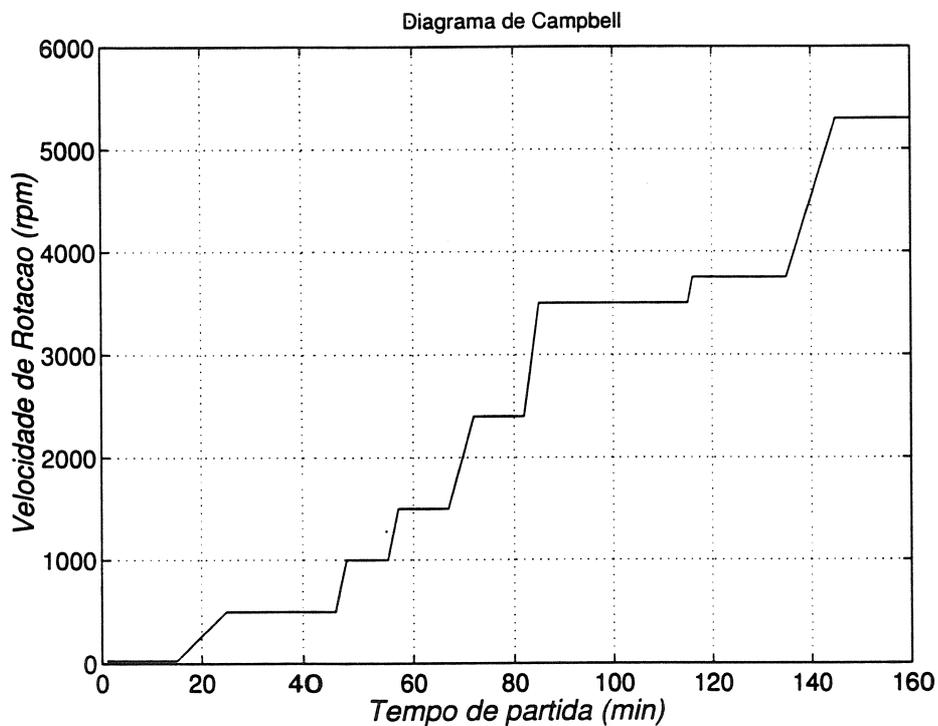


Figura 6.22: Diagrama de partida do compressor

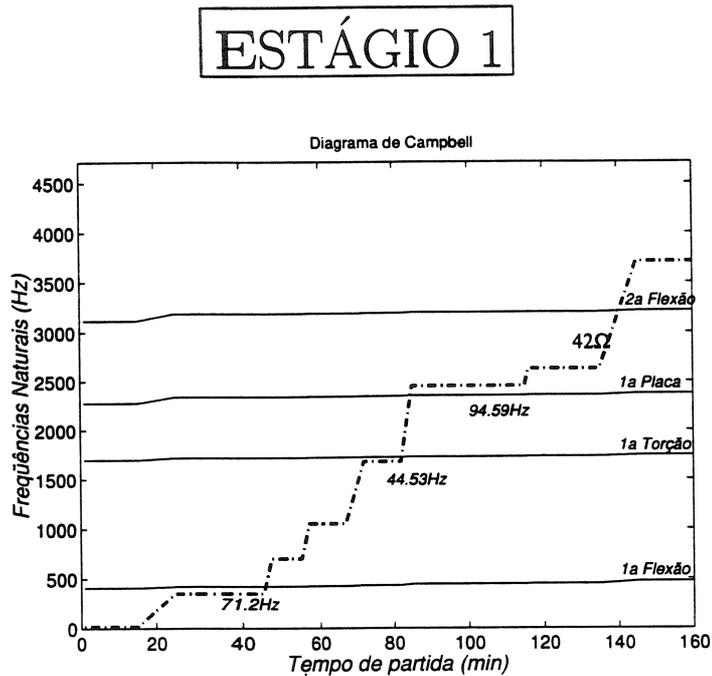


Figura 6.23: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao primeiro estágio do soprador durante a partida da máquina

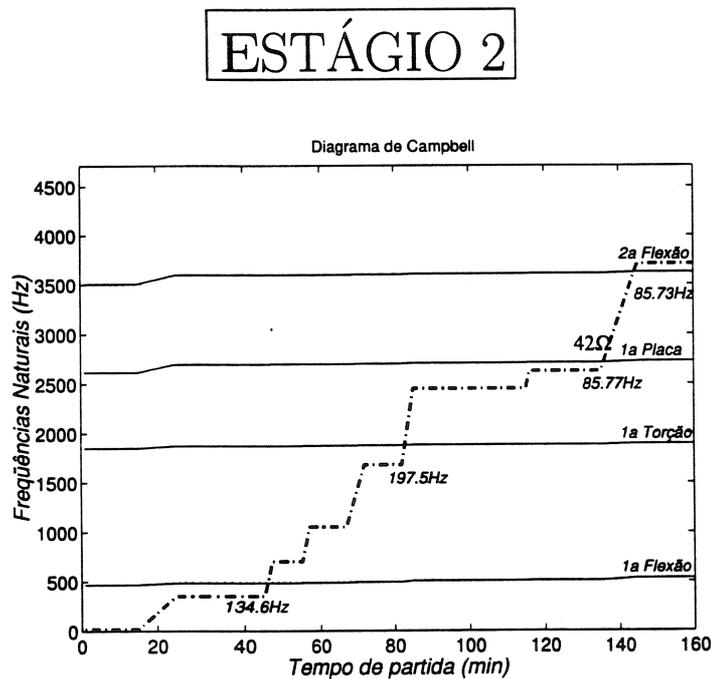


Figura 6.24: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao segundo estágio do soprador durante a partida da máquina

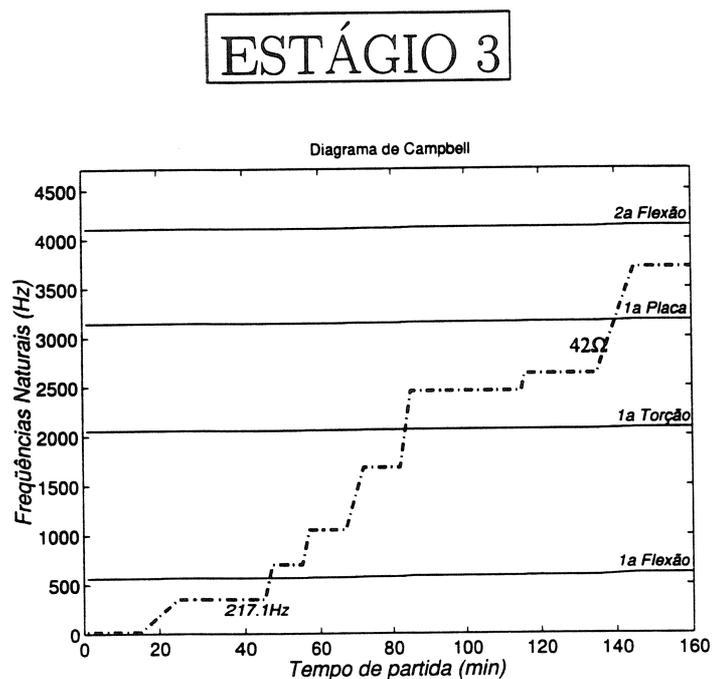


Figura 6.25: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao terceiro estágio do soprador durante a partida da máquina

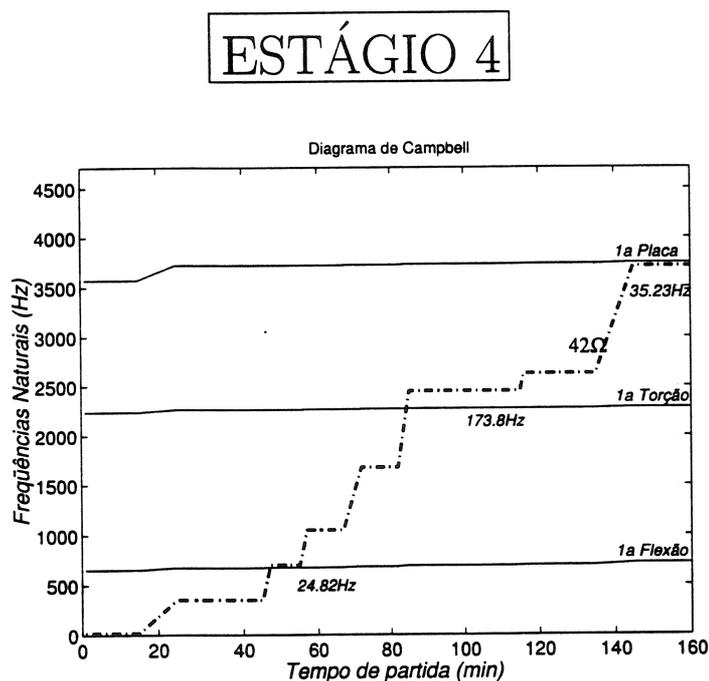


Figura 6.26: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao quarto estágio do soprador durante a partida da máquina

ESTÁGIO 5

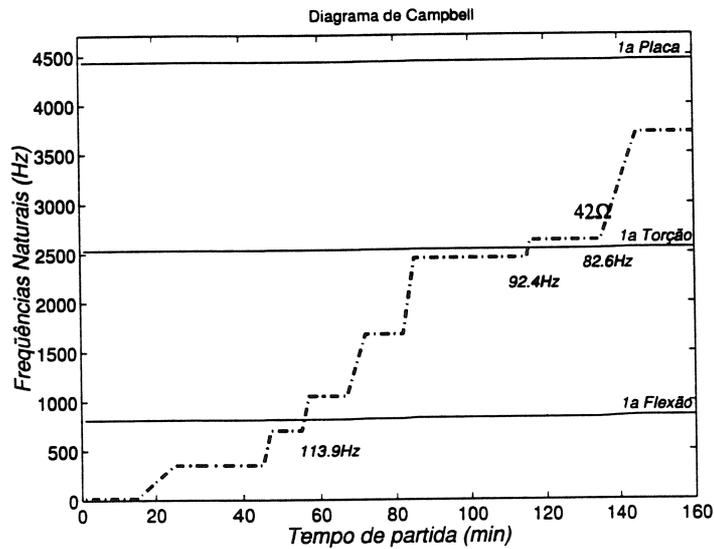


Figura 6.27: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao quinto estágio do soprador durante a partida da máquina

ESTÁGIO 6

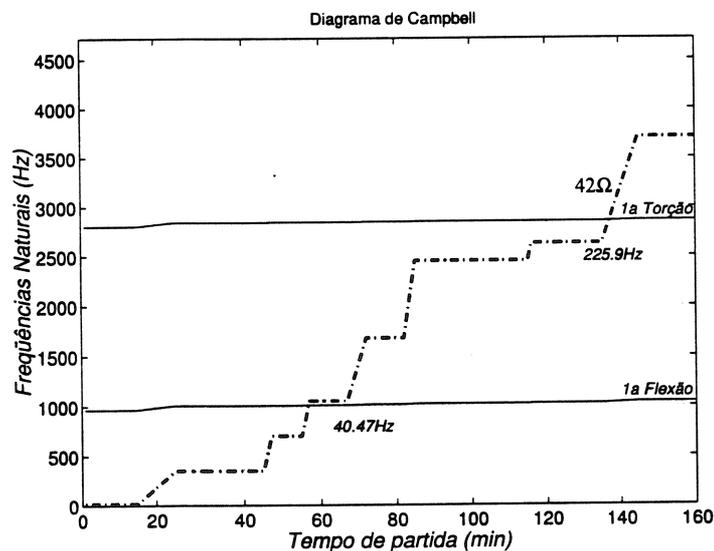


Figura 6.28: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao sexto estágio do soprador durante a partida da máquina

ESTÁGIO 7

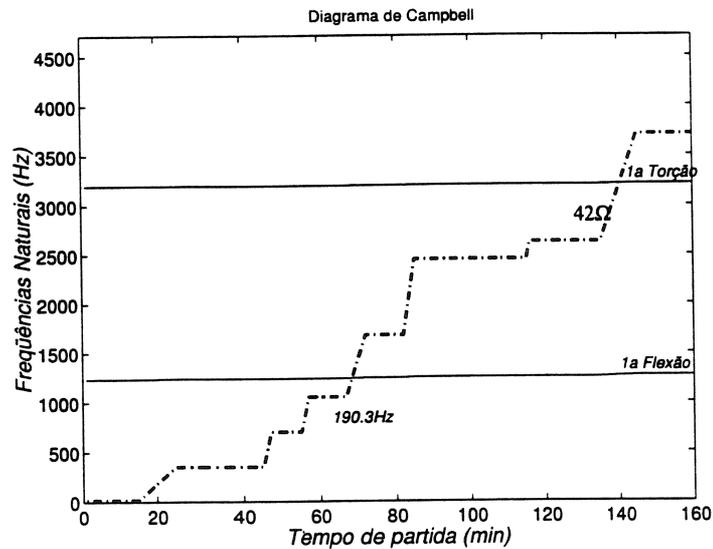


Figura 6.29: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao sétimo estágio do soprador durante a partida da máquina

ESTÁGIO 8

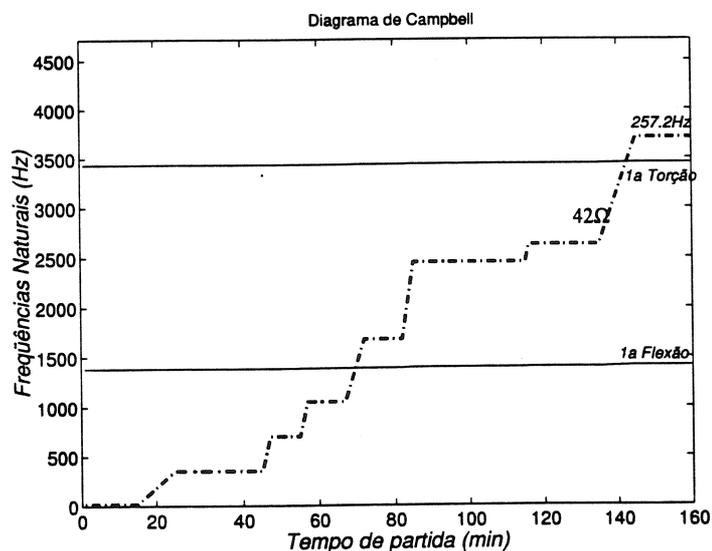


Figura 6.30: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao oitavo estágio do soprador durante a partida da máquina

ESTÁGIO 9

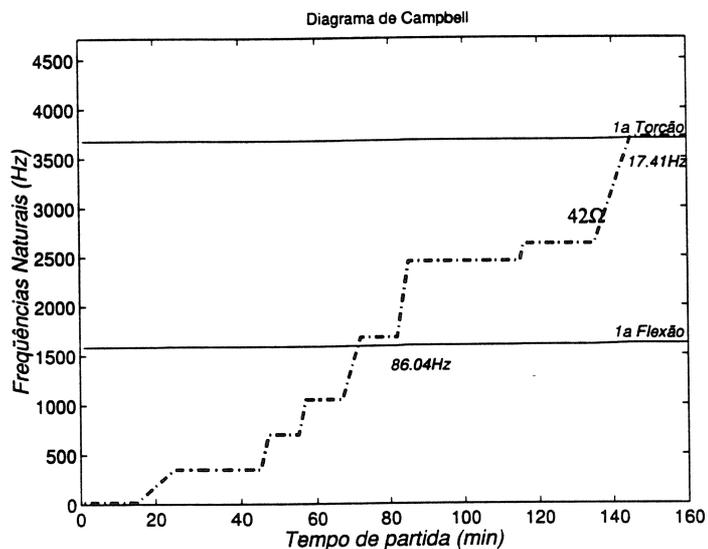


Figura 6.31: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao nono estágio do soprador durante a partida da máquina

ESTÁGIO 10

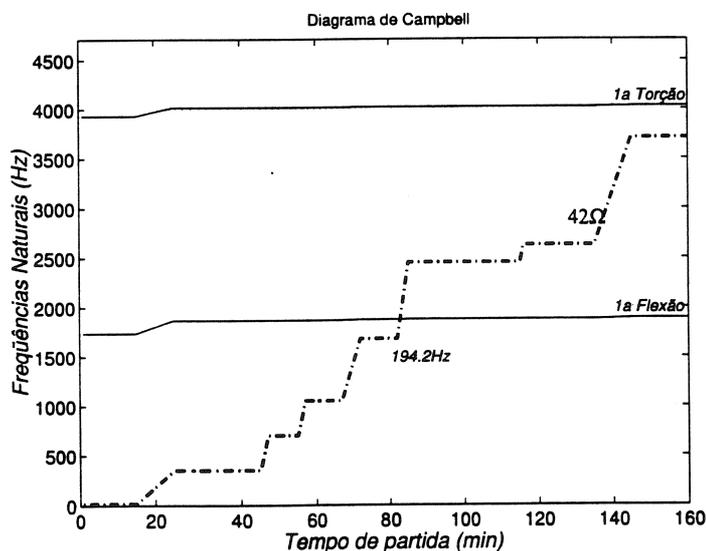


Figura 6.32: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao décimo estágio do soprador durante a partida da máquina

ESTÁGIO 11

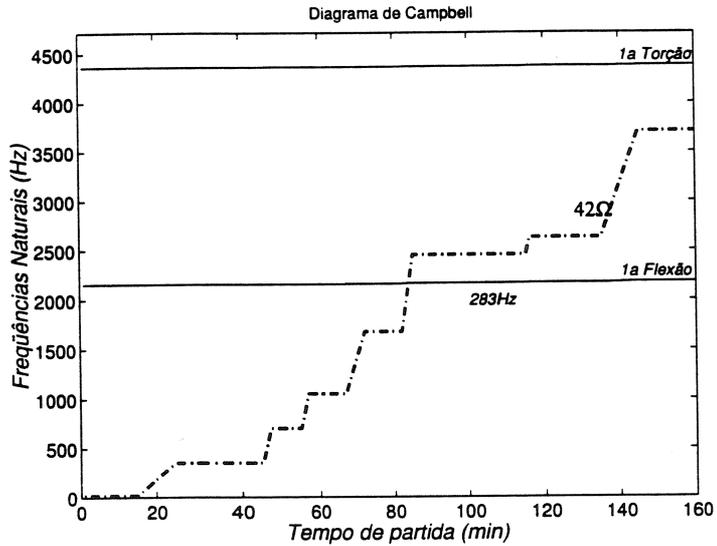


Figura 6.33: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao décimo primeiro estágio do soprador durante a partida da máquina

ESTÁGIO 12

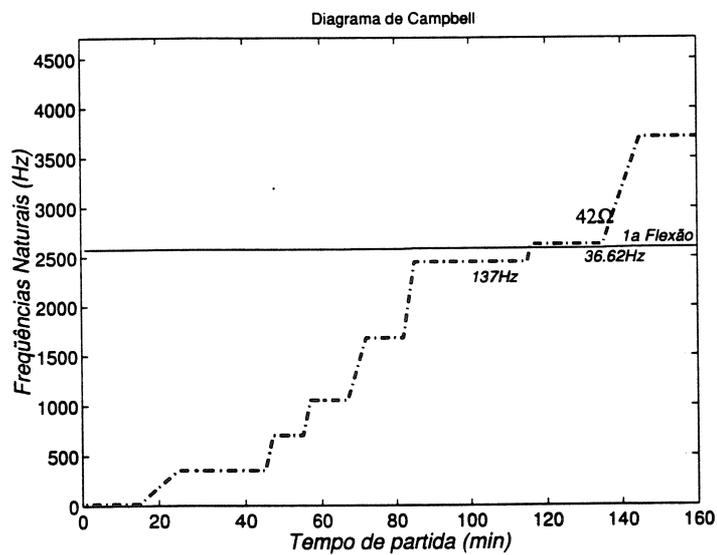


Figura 6.34: Diagrama de Campbell para uma palheta pertencente ao décimo segundo estágio do soprador durante a partida da máquina

Sobrepondo-se as curvas de partida do compressor em função do tempo ($42 \Omega(t)$) com as curvas ilustrando a variação das frequências naturais das palhetas, chega-se as seguintes conclusões :

- Baseado na figura (6.23), verifica-se que as palhetas do primeiro estágio operam durante vinte minutos próxima da primeira frequência natural de flexão, em seguida mais quinze minutos próximo da primeira frequência de torção e mais meia hora em torno da primeira frequência natural de placa.
- Baseado na figura (6.24), percebe-se que as palhetas do segundo estágio operam durante aproximadamente vinte minutos próximas do primeiro modo de placa, operando em seguida, sempre próximas da segunda frequência de flexão.
- Baseado na figura (6.25), percebe-se que as palhetas do terceiro estágio operam normalmente durante a partida da máquina.
- Baseado na figura (6.26), detecta-se que as palhetas do quarto estágio operam durante aproximadamente quinze minutos próximas da primeira frequência de flexão, atingindo o primeiro modo de placa, quando a rotação do compressor se estabiliza em torno da rotação nominal.
- Baseado na figura (6.27), observa-se que as palhetas do quinto estágio operam durante quase uma hora próximas do primeiro modo de torção.
- Baseado na figura (6.28), percebe-se que as palhetas do sexto estágio operam durante aproximadamente dez minutos próximas do primeiro modo de flexão.
- Baseado na figura (6.29) e (6.30), percebe-se que as palhetas do sétimo e oitavo estágios operam normalmente durante a partida da máquina.
- Baseado na figura (6.31), detecta-se que as palhetas do nono estágio operam durante aproximadamente quinze minutos próximas da primeira frequência de flexão, atingindo o primeiro modo de torção, quando a rotação do compressor se estabiliza em torno da rotação nominal.
- Baseado na figura (6.32) e (6.33), percebe-se que as palhetas do décimo e décimo-primeiro estágios operam normalmente durante a partida da máquina.
- Baseado na figura (6.34), verifica-se que as palhetas do décimo-segundo estágio operam durante aproximadamente vinte e cinco minutos próximas da primeira frequência de flexão.

De posse destes resultados, conclui-se que a curva de partida do compressor é crítica principalmente para as palhetas do primeiro e quinto estágios. Recomenda-se, então que a curva de partida seja alterada levando-se em consideração também as frequências naturais das palhetas destes estágios.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas Futuras

O comportamento dinâmico das palhetas é influenciado por diversos fatores, tais como a geometria da palheta e a velocidade de rotação da máquina na qual as palhetas estão montadas. Devido as grandes velocidades envolvidas, as acelerações centrífugas resultantes são elevadas e contribuem para aumentar a rigidez da estrutura e as solicitações da palheta, pois os níveis de tensão nestas condições operacionais são elevadas. Como o sistema opera em condições de grande solicitação todos os efeitos geométricos da palheta devem ser considerados pois contribuem para alterar as frequências naturais ou mesmo alterar os modos de vibração das palhetas.

O modelo escolhido para representar a palheta deve, portanto, considerar todos os efeitos que podem influenciar nas características dinâmicas da estrutura. Assim, a análise decorrente fornece resultados que reproduzem de maneira satisfatória uma palheta real. Se a escolha do modelo não for cuidadosa os resultados obtidos da solução das equações de movimento pode não corresponder a palheta, sendo a análise inválida.

Neste trabalho, um modelo tridimensional, baseado no Método dos Elementos Finitos, foi desenvolvido para discretizar as equações de movimento de uma palheta flexível. É assumido que o rotor opera com velocidade constante e, conseqüentemente, a palheta vibra em torno de uma posição de equilíbrio. A análise dinâmica da palheta requer o cálculo das suas frequências naturais, e modos de vibração associados, em função da velocidade de rotação da máquina. Estas equações de movimento discretizadas foram implementadas em um programa desenvolvido em linguagem MATLAB. No cálculo das primeiras frequências foi utilizado o Método de Iteração por Subespaço.

Algumas simulações numéricas foram apresentadas para palhetas de geometria simples. Nestas primeiras análises, o objetivo era verificar de que maneira a velocidade de rotação do rotor influencia as primeiras frequências naturais da palheta. Nota-se que, em geral, o efeito da velocidade de rotação é aumentar as frequências da palheta. Entretanto, a forma dos modos de vibração determina se esta alteração das frequências é maior para

certos modos de vibração. Nos casos estudados verificou-se que os modos associados à flexão são mais influenciados pela velocidade de rotação. Por outro lado, nota-se que para palhetas mais finas, e portanto menos rígidas, a variação das frequências naturais em função da velocidade de rotação é mais acentuada. Os resultados obtidos para as primeiras frequências das palhetas estacionárias (não girantes) foram comparados com as soluções analíticas disponíveis para vigas unidimensionais e placas. Esta comparação mostrou que as frequências estimadas pela solução analítica não representam adequadamente o conjunto das primeiras frequências da palheta. Muitas vezes, algumas frequências do modelo real não estão incluídas no modelo teórico, como no caso das primeiras frequências de torção, não previstas no modelo de viga unidimensional.

O programa desenvolvido neste trabalho foi também aplicado na análise das palhetas dos doze estágios de um compressor industrial. Procurou-se verificar a existência de velocidades críticas dentro da faixa de operação prevista para esta máquina. As frequências naturais da palheta, obtidas do modelo teórico desenvolvido pelo Método dos Elementos Finitos, foi, foram comparadas com as frequências naturais da palheta medidas experimentalmente. As frequências das palhetas foram medidas em três condições diferentes: livre-livre, engastada no compressor e montada em uma estrutura no laboratório. Os resultados medidos foram, então, utilizados para validar o modelo teórico.

A partir da estrutura do programa desenvolvida outros tipos de elementos, como por exemplo o elemento sólido de oito nós, poderia posteriormente ser implementado. Este tipo de elemento tridimensional é linear e conseqüentemente a dimensão da matriz resultante para cada elemento é menor. Com a análise deste tipo de elemento seria interessante comparar o número de elementos necessários para os dois tipos de elementos tridimensionais, linear (8 nós) e quadrático (20 nós), e a convergência dos resultados. Ainda do ponto de vista numérico, outra análise proposta para futuros trabalhos, é verificar os termos não-lineares de deformação e comparar a sua ordem de grandeza com os termos lineares de deformação, para efetivamente verificar quando estes termos podem ser desprezados. Quando estes termos não forem desprezáveis, pode-se verificar, também, qual a sua contribuição para a rigidez geométrica.

Para determinar as velocidades críticas do rotor, dentro da faixa de operação da máquina, foram construídos Diagramas de Campbell para as palhetas pertencentes aos doze estágios do compressor. Os resultados mostraram que, dentro da faixa de operação nominal do compressor, sempre é encontrada, ao menos uma, velocidade crítica (exceto para as palhetas do décimo e décimo-primeiro estágios). Entretanto, para a velocidade nominal de operação do rotor, em que ele opera na realidade, as palhetas pertencentes aos primeiro, segundo, quarto, oitavo e nono estágios operam em faixas muito próximas das frequências naturais das palhetas. Outra análise desenvolvida neste trabalho é a verificação da variação das frequências naturais das palhetas em função da curva de velocidades de partida da máquina. Os diagramas de Campbell, para este tipo de análise, foram cons-

truídos em função do tempo de partida da máquina. Nestas análises o objetivo é verificar se, durante a partida do compressor, existem velocidades críticas e por quanto tempo as palhetas trabalham nesta região. Os resultados encontrados mostram que as palhetas pertencentes ao primeiro, segundo, quarto, sexto, nono e décimo segundo estágios operam próximos de alguma das frequências naturais durante a partida por aproximadamente vinte minutos, em média. O estágio mais crítico, entretanto, é o quinto. As palhetas deste estágio operam cerca de um hora próximas a uma das suas frequências naturais.

Durante as etapas de obtenção experimental das frequências das palhetas dos doze estágios foram medidas apenas as frequências de uma palheta em cada estágio. Entretanto, devido à variabilidade do material e da geometria decorrente do processo de manufatura das mesmas, não é possível garantir que, mesmo dentro do mesmo estágio, todas as palhetas sejam idênticas. Assim, em uma nova etapa de medições, os resultados deste trabalho apontam que é necessário medir várias palhetas dentro do mesmo estágio e submeter os resultados encontrados a um adequado tratamento estatístico para determinar a distribuição, média e variabilidade das frequências das palhetas do mesmo estágio. Este tipo de levantamento também sugere uma análise estatística da falha.

Os resultados obtidos nas análises realizadas ao longo deste trabalho, estão restritas a uma máquina que opere em velocidade constante. Dessa forma, as equações de movimento desenvolvidas para este caso são lineares. Por outro lado, a dinâmica do rotor é considerada separadamente da dinâmica da palheta. Como continuidade a este trabalho é proposto o desenvolvimento das equações não-lineares do conjunto rotor-palhetas. Para este tipo de abordagem, a dinâmica da palheta é representada através de um modelo reduzido utilizando massas e molas discretas. A utilização deste modelo completo permite a análise da dinâmica transiente do conjunto, da análise da interação entre a dinâmica da palheta e do rotor. Posteriormente, serão incluídas condições iniciais de choque nas palhetas, para verificar como o conjunto responde numa condição de choque ou raspagem das palhetas contra sua carcaça.

Referências Bibliográficas

- Anderson, G. L. (1975), 'On the extensional and flexural vibrations of rotating bars', *International Journal of Non-Linear Mechanics* **10**.
- Baharlou, B. e Leissa, A. W. (1987), 'Vibration and buckling of generally laminated composite plates with arbitrary edge conditions', *International Journal of Mechanical Engineering Sciences* **29**(8), 545–555.
- Bathe, K. J. (1982), *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Bhumbla, R., Kosmatka, J. B. e Reddy, J. N. (1990), 'Free vibration behavior of spinning shear deformable plates composed of composite materials', *AIAA Journal* **28**(11), 1962–1970.
- Canergie, W. (1967), 'The application of variational methods to derive the equations of motion of a vibrating cantilever blading under rotation', *Bulletin of Mechanical Engineering Education* **6**, 29–38.
- Chapman, G. M. e Turnbull, J. B. (1989), Transient response of a large turbocharger rotor, in 'International Conference on Rotating Machines Dynamics', pp. 173–179.
- Cook, R. D., Malkus, D. S. e Plesha, M. E. (1989), *Concepts and Applications of Finite Element Method*, John Wiley and Sons, New York.
- Du, H. e Ling, F. (1995), 'A nonlinear dynamics model for three-dimensional flexible linkages', *Computers and Structures* **56**(1), 15–23.
- Harris, M. (1988), *The Shock and Vibration Handbook*, McGraw-Hill, New York.
- Henry, R. e Lalanne, M. (1974), 'Vibration analysis of rotating compressor blades', *Journal of Engineering for Industry - Transactions of American Society of Mechanical Engineering* **96**(3), 1028–1035.
- Hsieh, S. H. e Abel, J. F. (1995), 'Comparison of two finite element approaches for analysis of rotating bladed-disk assemblies', *Journal of Sound and Vibration* **182**(1), 91–107.
- Hughes, T. J. R. (1987), *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey.

- Imregun, M. e Visser, W. (1991), 'Multi-stage beam modelling of turbomachinery blades', *Finite Elements in Analysis and Design* **10**(1), 41-57.
- Kane, T. R., Ryan, R. R. e Banerjee, A. K. (1997), 'Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base', *Journal of Guidance and Control* **10**(2), 139-151.
- Kosmatka, J. B. e Friedmann, P. P. (1989), 'Vibration analysis of composite turbo-propellers using a nonlinear beam-type finite element approach', *AIAA Journal* **27**(11), 1606-1614.
- Leissa, A. W. (1981), 'Vibrational aspects of rotating turbomachinery blades', *Applied Mechanics Reviews* **34**(5), 629-635.
- Leissa, A. W. e Ewing, M. S. (1983), 'Comparison of beam and shell theories for the vibration of thin turbomachinery blades', *Journal of Engineering for Power - Transactions of the American Society of Mechanical Engineering* **105**, 383-392.
- Leissa, A. W., MacBain, J. C. e Kielb, R. E. (1984), 'Vibrations of twisted cantilevered plates - summary of previous and current studies', *Journal of Sound and Vibration* **96**, 159-173.
- Liu, J. L. M. A. H. (1995), 'Nonlinear dynamics analysis of flexible beams under large overall motions and the flexible manipulator simulation', *Computers and Structures* **56**(1), 1-14.
- McGee, O. G. e Chu, H. R. (1994), 'Three dimensional vibration analysis of rotating laminated composite blades', *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power - Transactions of the American Society of Mechanical Engineering* **116**, 663-671.
- Okamoto, S., Sakata, M., Kimura, K. e Ohnabe, H. (1995), 'Vibration analysis of a high speed and light weight rotor system subjected to a pitching or tuning motion, ii : a flexible rotor system on flexible suspensions', *Journal of Sound and Vibration* **184**(5), 887-906.
- Omprakash, V. e Ramamurti, V. (1989), 'Dynamic stress analysis of rotating turbomachinery bladed-disk systems', *Computers and Structures* **32**(2), 477-488.
- Petricone, R. e Sisto, F. (1971), 'Vibration characteristics of low aspect ratio compressor blades', *Journal of Engineering for Industry - Transactions of American Society of Mechanical Engineering* **93**, 103-112.
- Putter, S. e Manor, H. (1978), 'Natural frequencies of radial rotating beams', *Journal of Sound and Vibration* **56**(2), 175-185.
- Ramamurti, V. e Kielb, R. (1984), 'Natural frequencies of twisted rotating plates', *Journal of Sound and Vibration* **97**(3), 429-449.

- Rao, J. S. (1987), 'Turbomachine blade vibration', *The Shock and Vibration Digest* **19**(5), 3–10.
- Rao, S. S. (1990), *Mechanical vibrations*, Addison Wesley, New York.
- Sakata, M., Kimura, K., Okamoto, S. e Oikawa, K. (1995), 'Vibration analysis os a high speed and light weight rotor system subjected to a pitching or tuning motion, i : a rigid rotor system on flexible suspensions', *Journal of Sound and Vibration* **184**(5), 871–885.
- Sakata, M., Kimura, K., Park, S. K. e Ohnabe, H. (1989), 'Vibration of bladed flexible rotor due to gyroscopic moment', *Journal of Sound and Vibration* **131**(3), 417–430.
- Santos, I. F. (1997), *Cinemática e Dinâmica de Sistemas Mecânicos - modelagem, simulação, visualização e verificação*, DPM/FEM/UNICAMP, Campinas.
- Santos, I. F. e Colla, G. C. (1997), 'Influência de palhetas flexíveis na dinâmica de sistemas rotativos, in 'XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (Anais, CD-Rom)'.
- Shabana, A. A. (1990), 'Dynamics of flexible bodies using generalized Newton-Euler equations', *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control (Transactions of ASME)* **112**, 496–503.
- Shaw, D., Shen, K. Y. e Wang, J. T. S. (1988), 'Flexural vibration of rotating rectangular plates of variable thickness', *Journal of Sound and Vibration* **126**(3), 373–385.
- Simo, J. C. e Vu-Quoc, L. (1986a), 'On the dynamics of flexible beams under large overall motions - the plane case : part i', *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the American Society of Mechanical Engineering* **53**(4), 849–854.
- Simo, J. C. e Vu-quoc, L. (1986b), 'On the dynamics of flexible beams under large overall motions - the plane case : Part ii', *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the American Society of Mechanical Engineering* **53**(4), 855–863.
- Simo, J. C. e Vu-Quoc, L. (1987), 'The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures', *Journal of Sound and Vibration* **119**(3), 487–508.
- Sisto, F., Chang, A. e Sutcu, M. (1983), 'The influence of Coriolis forces on gyroscopic motion of spinning blades', *Journal of Engineering for Power - Transactions of the American Society of Mechanical Engineering* **105**, 342– 347.
- Sreenivasamurthy, S. e Ramamurti, V. (1981), 'A parametric study of vibration of rotating pre-twisted and tapered low aspect ratio cantilever plates', *Journal of Sound and Vibration* **76**(3), 311–328.

- Subrahmanyam, K. B. e Kaza, K. R. V. (1986), 'Vibration and bucking of rotating, pretwisted, preconed beams including Coriolis effects', *Journal of Vibration, Acoustic, Stress and Reliability in Design - Transactions of American Society of Mechanical Engineering* **108**, 140–152.
- Timoshensko, S. P. e Goodier, J. N. (1970), *Teoria da Elasticidade*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- Vorob'ev, Y. S. (1991), 'Finite element analysis of the natural vibrations of statically loaded turbomachine blading', *Strenght of Materials (English translation of Problemy Prochnosti)* **22**(7), 1049–1057.
- Vorob'ev, Y. S. e Sapelkina, Z. V. (1989), 'Method of analyzing vibrations of turbine blades on the basis of a three-dimensional model', *Strenght of Materials (English translation of Problemy Prochnosti)* **20**(6), 794–799.
- Vyas, N. S. e Rao, J. S. (1992), 'Equations of motion of a blade rotating with variable angular velocity', *Journal of Sound and Vibration* **156**(2), 327–336.
- Wang, J., Shaw, D. e Mahernholtz, O. (1987), 'Vibration of rotating rectangular plates', *Journal of Sound and Vibration* **112**(3), 455–468.
- Wiedemann, M. e Gash, R. (1993), 'Rotor-blatt-kopplung', *Archive of Applied Mechanics* **63**.
- Yokoyama, T. (1988), 'Free vibration characteristics of rotating Timonshenko beams', *International Journal of Mechanical Sciences* **30**(10), 743–755.