ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA POR CLEUDMAR AMARAL DE ARAÚJO E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA EM 20/03/1998.

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Modelagem de Sistemas Dinâmicos Através da Síntese Modal de Componentes

Autor: **Cleudmar Amaral de Araújo**

Orientador: **Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka**

Ar15m
34724/BC

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Modelagem de Sistemas Dinâmicos Através da Síntese Modal de Componentes

Autor: **Cleudmar Amaral de Araújo**

Orientador: **Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka**

Curso: **Engenharia Mecânica**

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1998

S.P. - Brasil

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIDADE BC
N.º CHAMADA:
T/Unicamp
Ar15m
V. Ex.
TOMBO BC/ 34724
PROC. 395/98
C [ ] D [X]
PREÇO R$ 11,00
DATA 11/08/98
N.º CPD

CM-00114959-6

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Araújo, Cleudmar Amaral de

Ar15m Modelagem de sistemas dinâmicos através da síntese modal de componentes. / Cleudmar Amaral de Araújo.-- Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Paulo Roberto Gardel Kurka.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Análise modal. 2. Vibração. 3. Dinâmica. 4. Identificação. 5. Testes de vibração. I. Kurka, Paulo Roberto Gardel. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

TESE DE DOUTORADO

Modelagem de Sistemas Dinâmicos Através da Síntese Modal de Componentes

Autor: **Cleudmar Amaral de Araújo**

Orientador: **Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka**

Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka, Presidente
DPM/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Francisco Paulo Lépore Neto
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Marcus Antônio Viana Duarte
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Fernando Iguti
DMC/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Milton Dias Júnior
DPM/FEM/UNICAMP

Campinas, 20 de Março de 1998

Dedicatória:

Dedico este trabalho à minha querida esposa e ao meu saudoso pai.

Agradecimentos

À minha esposa, à minha mãe e demais familiares pela compreensão e carinho.

Ao professor Paulo R. G. Kurka, pelo apoio e atenção dispensados.

A todos os amigos e professores do DPM e DMC que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização do trabalho.

MODELAGEM DINÂMICA DE SISTEMAS CONSERVATIVOS E NÃO CONSERVATIVOS ATRAVÉS DA SÍNTESE MODAL, UTILIZANDO UM SUPERCONJUNTO DE FLEXIBILIDADE RESIDUAL

ÍNDICE

PÁG.

RESUMO viii

ABSTRACT ix

LISTA DE FIGURAS x

LISTA DE TABELAS xii

NOMENCLATURA xv

1 - Introdução

1.1 - Comentários Iniciais 1

1.2 - Generalidades 1

1.3 - Identificação de sistemas 2

1.4 - Ajuste de parâmetros de sistemas não lineares 3

1.5 - Modificação estrutural 3

1.6 - Detecção de falhas estruturais 4

1.7 - Ajuste de modelos estruturais 5

1.8 - O método de subestruturação 6

1.9 - Avaliação da técnica de síntese modal 10

1.10 - Objetivos do trabalho 11

1.11 - Estrutura dos capítulos 13

2 - Síntese Modal de Estruturas

2.1 - Comentários gerais 15

2.2 - Métodos de síntese modal 16

2.2.1 - Introdução 16

2.2.2 - Caso não amortecido 17

2.2.2.1 - Revisão bibliográfica 17

2.2.2.2 - Modelo dinâmico das subestruturas 18

2.2.2.3 - Modos utilizados no método de síntese.....20
2.2.2.4 - Método de síntese modal proposto.....30
2.2.3 - Caso amortecido.....38
2.2.3.1 - Revisão bibliográfica.....39
2.2.3.2 - Método de síntese modal amortecido proposto.....40
2.2.4 - Expectativas futuras do método.....46

3 - Critério de Eliminação Automática de Modos

3.1 - Comentários gerais.....48
3.2 - Formulação do critério.....49
3.2.1 - Caso Unidirecional.....51
3.2.1.1 - Peso relativo dos modos.....51
3.2.1.2 - Critério de eliminação automática de modos (CEA).....53
3.2.2 - Caso Geral - Tridimensional.....55
3.2.2.1 - Peso relativo dos modos.....55
3.2.2.2 - Critério de eliminação automática de modos (CEA).....56
3.3 - Exemplos de simulação.....58
a) - Caso não amortecido.....58
b) - Caso amortecido.....60

4 - Software Desenvolvido (Programa Struct)

4.1 - Comentários gerais.....63
4.2 - Software desenvolvido - Programa Struct.....64
4.2.1 - Critério de montagem das matrizes globais sintetizadas.....64
4.2.2 - Programa principal.....65
4.2.3 - Programa Sinte.....66
4.2.4 - Programa Csinte.....69

5 - Formulação em Modos Complexos

5.1 - Comentários Gerais.....71
5.2 - Conversão de Modos Reais em Modos Complexos.....71
a) Caso Não Amortecido.....74

b) Caso com Amortecimento Proporcional....76

6 - Simulação Numérica

6.1 - Comentários gerais....78

6.2 - Caso não amortecido....79

6.2.1 - Exemplo 1 - Sistema massa-mola....79

6.2.2 - Exemplo 2 - Placa modelada por elementos finitos....88

6.3 - Caso com amortecimento geral....92

6.3.1 - Exemplo 1 - Sistema massa-mola-amortecedor....92

6.3.2 - Exemplo 2 - Sistema discreto com 15 gdl....100

6.4 - Discussão dos resultados....104

7 - Ensaio Experimental

7.1 - Comentários gerais....106

7.2 - Modelo experimental....107

7.3 - Modelo de elementos finitos da estrutura....118

7.3.1 - Resultados analíticos versus resultados experimentais....123

7.3.2 - Modos complexos equivalentes....124

7.4 - Síntese modal da estrutura completa....125

7.4.1 - Síntese do modelo de elementos finitos....125

7.4.2 - Síntese do modelo experimental....129

7.4.3 - Discussão dos resultados....131

8 - Conclusões....134

9 - Referências Bibliográficas....139

Anexo I : Modal Assurance Criterion (MAC)....147

Anexo II : Arquivo de saída - Programa Struct (Caso não amortecido)....148

Anexo III : Arquivo de saída - Programa Struct (Caso com amortecimento geral)....150

Anexo IV : Desenhos esquemáticos da estrutura experimental - Programa Star....153

Apêndice A : Normalização de modos experimentais pela matriz de massa unitaria....156

Resumo

ARAÚJO, Cleudmar Amaral, "Modelagem de Sistemas Dinâmicos Através da Síntese Modal de Componentes", Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 156 p. Tese (Doutorado).

Uma das principais técnicas de modelagem mixta de sistemas complexos ou de grande porte é a técnica de síntese modal. Os vários métodos de síntese modal propostos são formulados sob dois pontos de vista distintos, ou seja, considerando-se o sistema sem amortecimento ou com amortecimento geral. Além disso, surgem inerentes dificuldades na aplicação da metodologia de síntese modal na análise experimental. Neste trabalho é proposto uma técnica de síntese modal generalizada aplicada em sistemas sem amortecimento ou com amortecimento geral. O método utiliza um superconjunto modal de flexibilidade residual, cuja principal aplicação é na síntese modal experimental. O método utiliza um processo de remontagem das subestruturas que otimiza as equações finais da síntese. Propõe-se, também, um novo procedimento, definido como critério de eliminação automática de modos (CEA), que define um índice de qualidade para os modos das subestruturas, indicando quais serão aqueles mais apropriados para serem mantidos nas bases modais. Todas as metodologias propostas no trabalho foram implementadas em um software denominado Programa STRUCT. O método foi testado através de quatro exemplos de simulação. Foi feita uma validação experimental através de uma estrutura construída em escala reduzida, que visa representar um modelo esquemático e simplificado de uma asa de avião com um tanque de combustível fixado em sua extremidade. Além disso, foi também construído o modelo de elementos finitos da estrutura, com a finalidade de ajustar os modelos analítico e experimental.

Palavras Chave

Análise modal, Dinâmica, Identificação, Síntese modal, Flexibilidade Residual, Modelagem dinâmica, Análise experimental.

Abstract

ARAÚJO, Cleudmar Amaral, "System's Dynamic Modelling Through of Component Modal Synthesis", Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 157 p. Thesis (Doctoral).

Modal Synthesis is one of the main techniques for the modelling of complex or large sized system's. Two approaches for modal synthesis might be formulated those which considers the behaviour of undamped system's and those where the effects of generalized damping is apprised. Further to those consideration comes the application of the modal synthesis techniques in experimental modal analysis. The present work proposes a generalized modal synthesis procedure for damped and undamped system's. The method uses a residual flexibility superset which is applied to the experimental modal analysis. A methodology for assembling adjacent substructures is also proposed which represents an important step towards the obtention of more accurate final results. Another important procedure introduced is that of automatic selection of modes to be kept in the modal base of the residual flexibility superset, defining a quality index for the modes of each substructure. All methodologies have been implemented in the form of the STRUCT software. Results of four numerical simulation and a practical application have been included to illustrate the performance of the methodologies. Finite element models have also been developed for the practical application (Combination of aircraft wing and fuel tank models) for performance comparison purposes.

Key words

Modal Analysis, Dynamic, Identification, Modal synthesis, Residual Flexibilitie, Dynamic Modelling, Experimental Analysis.

Lista de Figuras

2.1 Subestruturas (a) e (b) discretizadas e interligadas por uma interface comum. 19

3.1 Forma de vibrar hipotética de três modos de duas subestruturas conectadas, indicando a variação de energia do contorno em relação as coordenadas internas. 50

3.2 Sistema discreto massa-mola - Caso não amortecido 59

4.1 Esquema de síntese de subestruturas proposto. 65

4.2 Fluxograma esquemático do programa principal. 66

4.3 Fluxograma esquemático do programa SINTE. 68

6.1 Sistema discreto massa-mola. 79

6.2 MAC médio dos autovetores sintetizados e Erro relativo médio dos autovalores sintetizados em função da configuração (1) de modos selecionados/não selecionados - Exemplo 6.2.1. 87

6.3 MAC médio dos autovetores sintetizados e Erro relativo médio dos autovalores sintetizados em função da configuração (2) de modos selecionados/não selecionados - Exemplo 6.2.1. 87

6.4 MAC médio dos autovetores sintetizados e Erro relativo médio dos autovalores sintetizados em função da configuração (3) de modos selecionados/não selecionados - Exemplo 6.2.1. 88

6.5 Chapa modelada por elementos finitos. 89

6.6 Sistema massa-mola-amortecedor analisado. 93

6.7 Índices de MAC médio e erros relativos médios para as configurações (1), (2) - Exemplo 6.3.1. 98

6.8 Índices de MAC médio e erros relativos médios para as configurações (3), (4) - Exemplo 6.3.1. 98

6.9 Índices de MAC médio e erros relativos médios para as configurações (5), (6) - Exemplo 6.3.1. 99

6.10 Índices de MAC médio e erros relativos médios para as configurações (7), (8) - Exemplo 6.3.1. 99

6.11 Sistema massa mola amortecedor analisado - Exemplo 6.3.2. 100

7.1 Desenho da estrutura analisada. 108

7.2 Estrutura completa real analisada experimentalmente. 108

7.3 Configuração dos pontos analisados na subestrutura (2). 109

7.4 Configuração dos pontos analisados na subestrutura (1). 110

7.5 Esquema da montagem experimental. 111

7.6 Aparelhagem utilizada na análise experimental. 113

7.7 Detalhe do posicionamento do excitador eletromagnético e da célula de carga conectada na estrutura. 113

7.8 Detalhe da fixação do acelerômetro na estrutura. 114

7.9 Função de coerência e FRF da estrutura completa obtidos dos dados experimentais para o ponto 1Z. 115

7.10 a Ajuste de curva obtida no ponto 1, direção y, para a subestrutura (1). 116

7.10 b Ajuste de curva obtida no ponto 1, direção z, para a subestrutura (2). 117

7.10 c Ajuste de curva obtida no ponto 1, direção z, para a estrutura completa. 117

7.11 Modelo matemático computacional da estrutura completa representado pelas áreas dos elementos de casca. 119

7.12 Modelo matemático computacional da subestrutura (1) representado pelas áreas dos elementos de casca. 120

7.13 Modelo matemático computacional da subestrutura (2) representado pelas áreas dos elementos de casca. 121

Lista de Tabelas

3.1 Autovetores das subestruturas (1) e (2). A última linha de cada modo representa a parcela relativa ao contorno. 59

3.2 Inversa da matriz dos autovetores das subestruturas (1) e (2). 59

3.3 Pesos relativos dos modos das subestruturas (1) e (2). 60

3.4 Pesos relativos associados aos modos das subestruturas (1) e (2). 60

3.5 Autovetores das subestruturas (1) e (2). A última linha de cada modo representa a parcela relativa ao contorno. 61

3.6 Inversa dos autovetores das subestruturas (1) e (2). A última coluna de cada subestrutura representa a parcela relativa ao contorno. 62

3.7 Pesos relativos dos modos das subestruturas (1) e (2). 62

3.8 Pesos relativos associados aos modos das subestruturas (1) e (2). 62

6.1 Parâmetros físicos das subestruturas - Exemplo 6.2.1. 80

6.2 Autovalores e autovetores das subestruturas - Exemplo 6.2.1. 80

6.3 Pesos relativos dos modos das subestruturas - Exemplo 6.2.1 80

6.4 Propriedades dinâmicas do sistema global - Exemplo 6.2.1. 81

6.5 Propriedades dinâmicas do sistema global sintetizado - Exemplo 6.2.1. 81

6.6 Propriedades dinâmicas do sistema global sintetizado para uma condição aleatória - Exemplo 6.2.1. 82

6.7 Quantidade de modos selecionados e não selecionados para o exemplo 6.2.1. 83

6.8 Configuração (1) de modos selecionados - Exemplo 6.2.1 84

6.9 Configuração (2) de modos selecionados - Exemplo 6.2.1. 85

6.10 Configuração (3) de modos selecionados - Exemplo 6.2,1. 86

6.11 Autovalores das subestruturas - Exemplo 6.2.2. 90

6.12 Pesos relativos dos modos das subestruturas - Exemplo 6.2.2. 90

6.13 Resultados da síntese usando o C E A - Exemplo 6.2.2. 91

6.14 Resultados da síntese usando outra combinação de modos selecionados/não selecionados - Exemplo 6.2.2. 91

6.15 Parâmetros físicos das subestruturas - Exemplo 6.3.1. 93

6.16 Autovalores das subestruturas e do sistema completo - Exemplo 6.3.1. 94

6.17 Pesos relativos associados dos modos das subestruturas Exemplo 6.3.1. 94

6.18 Resultados da síntese usando o C E A - Exemplo 6.3.1. 95

6.19 Resultados da síntese para outra condição de eliminação Exemplo 6.3.1. 95

6.20 Quantidade de modos selecionados/não selecionados das subestruturas Exemplo 6.3.1. 96

6.21 Configurações de modos selecionados - Exemplo 6.3.1. 97

6.22 Parâmetros físicos das subestruturas - Exemplo 6.3.2. 101

6.23 Autovalores das subestruturas e seus respectivos pesos modais Exemplo 6.3.2. 101

6.24 Resultados da síntese modal usando o CEA - Exemplo 6.3.2. 102

6.25 Condição de eliminação de modos - Exemplo 6.3.2. 102

6.26 Resultados da síntese para outra condição de eliminação de modos Exemplo 6.3.2. 103

7.1 Autovalores identificados das subestruturas e da estrutura completa via análise experimental. 118

7.2 Autovalores identificados das subestruturas e da estrutura completa via MEF. 122

7.3 Comparação modal entre os modelos analítico e experimental. 123

7.4 Autovalores identificados das subestruturas e da estrutura completa via modelos de elementos finitos com valores complexos equivalentes. 125

7.5 Pesos relativos dos modos reais das subestruturas para o MEF. 126

7.6 Resultados da síntese para os modos reais do modelo de elementos finitos da estrutura real, utilizando o CEA. 126

7.7 Pesos relativos dos modos complexos equivalentes das subestruturas para o MEF. 128

7.8 Resultados da síntese modal usando o CEA para os modos complexos equivalentes das subestruturas. 128

7.9 Pesos relativos dos modos das subestruturas obtidos da análise experimental. 130

7.10 Resultados da síntese modal usando o CEA para os modos obtidos da análise experimental. 130

Nomenclatura

Letras Latinas:

u	Coordenadas físicas
y	Coordenadas físicas de ordem dobrada
k	Termos de rigidez
m	Termos de massa
c	Termos de amortecimento
g	Termos de flexibilidade
M	Matriz de massa do sistema
K	Matriz de Rigidez do sistema
C	Matriz de Amortecimento do sistema
f	Vetor de Forças externas do sistema
f'	Vetor de Forças externas de ordem dobrada do sistema
q	Coordenadas generalizadas
M_q	Matriz de massa generalizada
K_q	Matriz de rigidez generalizada
u_r	Deslocamentos de corpo rígido
u_e	Deslocamentos elásticos
q_r	Coordenadas generalizadas relativas ao movimento de corpo rígido
I	Matriz de identidade
R_r	Matriz de restrições
f_e	Forças internas elásticas
G	Matriz de flexibilidade
G_e	Matriz de flexibilidade elástica
G_k	Matriz de flexibilidade elástica dos modos mantidos
G_d	Matriz de flexibilidade elástica dos modos deletados

$\bar{f}$ Matriz de restrições relativas ao contorno

R Matriz de restrições gerais

p, $\hat{q}$ Coordenadas generalizadas reduzidas

S Matriz de compatibilidades

$\overline{M}$ Massa modal sintetizada

$\overline{K}$ Rigidez modal sintetizada

A, B Matrizes dinâmicas de estado

$\bar{f}$ Vetor de forças externas do sistema amortecido

$\overline{R}$ Matriz de restrições do sistema amortecido

$\bar{S}$ Matriz de compatibilidades do sistema amortecido

$\hat{M}$ Massa modal sintetizada do sistema amortecido

$\hat{K}$ Rigidez modal sintetizada do sistema amortecido

$\hat{p}$ Coordenadas generalizadas do sistema amortecido

E_i Energia relativa das coordenadas internas

E_c Energia relativa das coordenadas do contorno

Z Matriz de pesos modais relativos

${}_aN^i$ Índice de qualidade de um modo (i) da subestrutura (a)

C_{dd} Matriz de restrições linearmente dependente

C_{dk} Matriz de restrições linearmente independente

E_R Erro relativo

Letras Gregas:

Ψ Superconjunto modal do sistema não amortecido

θ_f Modos normais de interface fixa

Λ_f Autovalores relativos à interface fixa

θ_l Modos normais de interface livre

Λ_l Autovalores relativos à interface livre

ϕ_m Modos normais de interface carregada

Λ_m Autovalores relativos à interface carregada

θ_r Modos de corpo rígido

δ_r Modos estáticos de restrição

δ_s Modos estáticos de junção fixa

δ_l Modos estáticos de junção livre

μ_{rr} Matriz de massa generalizada relativa aos modos de corpo rígido

χ Base modal de alívio de inércia

δ_a Modos de junção de alívio de inércia

δ_f Modos de flexibilidade residual

Λ_{kk} Autovalores mantidos

θ_k Modos normais de interface livre mantidos

θ_d Modos normais de interface livre deletados

α_{ff} Rigidez modal relativa os modos de flexibilidade residual

β_{ff} Massa modal relativa os modos de flexibilidade residual

ϕ_k Matriz de modos normais mantidos

α Rigidez modal relativa ao superconjunto modal

β Massa modal relativa ao superconjunto modal

Δ Massa modal das subestruturas conectadas

Γ Rigidez modal das subestruturas conectadas

Σ Autovetores sintetizados das subestruturas

η Coordenadas generalizadas do sistema amortecido

$\hat{\psi}$ Superconjunto modal do sistema amortecido

$\hat{\delta}_f$ Modos de flexibilidade residual do sistema amortecido

$\hat{\theta}_r$ Modos de corpo rígido do sistema amortecido

$\hat{\theta}_k$ Modos normais de interface livre mantidos do sistema amortecido

$\hat{\phi}_k$ Matriz de modos normais mantidos do sistema amortecido

$\hat{\Lambda}_{kk}$ Autovalores mantidos do sistema amortecido

$\hat{\Sigma}$ Autovetores sintetizados das subestruturas do sistema amortecido

$\hat{\alpha}_{ff}$ Rigidez modal relativa os modos de flexibilidade residual do sistema amortecido

$\hat{\beta}_{ff}$ Massa modal relativa os modos de flexibilidade residual do sistema amortecido

$\hat{\alpha}$ Rigidez modal relativa ao superconjunto modal do sistema amortecido

$\hat{\beta}$ Massa modal relativa ao superconjunto modal do sistema amortecido

$\hat{\Delta}$ Massa modal das subestruturas conectadas do sistema amortecido

$\hat{\Gamma}$ Rigidez modal das subestruturas conectadas do sistema amortecido

λ Autovalores do sistema amortecido original

ζ Autovetores sintetizados do sistema original

$\hat{\zeta}$ Autovetores sintetizados do sistema original para o caso amortecido

ε^m Peso modal

$\bar{\varepsilon}$ Peso modal - Caso tridimensional

ω Frequência natural

ξ Fator de amortecimento

Superescritos:

. Derivada de primeira ordem

.. Derivada de segunda ordem

t Matriz transposta

* Conjugado de um número ou matriz complexa

h Conjugado transposto de um número ou matriz complexa

-1 Inversa de uma matriz

a Relativo à subestrutura (a)

b Relativo à subestrutura (b)

Subscritos:

i Termos relativos ás coordenadas internas

c	Termos relativos ás coordenadas do contorno
k	Parcela de modos mantidos
d	Parcela de modos deletados
f	Parcela de modos de flexibilidade residual
x	Relativo à direção (x)
y	Relativo à direção (y)
z	Relativo à direção (z)

Abreviações:

CEA	Critério de eliminação automática de modos
FRF	Função de resposta em frequência
MAC	Critério de confiança modal
MEF	Método dos elementos finitos
SUB1	Subestrutura (1)
S1	Subestrutura (1)
SMC	Síntese modal dos componentes

Capítulo 1

Introdução

1.1 - Comentários Iniciais

O grupo de processamento de sinais e análise de sistemas dinâmicos (GPSASD) foi criado com a finalidade de desenvolver pesquisas na área de processamento de sinais e análise de sistemas dinâmicos, voltados essencialmente ao problema de vibrações em máquinas e sistemas mecânicos. Os trabalhos na área de processamento de sinais incluem o desenvolvimento de sistemas de aquisição de sinais baseados em micro-computadores portáteis. São também realizados procedimentos numéricos de análise como o desenvolvimento e aperfeiçoamento de algoritmos de identificação de sinais nos domínios da frequência e sobretudo no domínio do tempo.

O presente trabalho, é mais uma contribuição para o GPSASD e também abrange os campos do comportamento dinâmico de máquinas e sistemas mecânicos através do desenvolvimento de procedimentos numéricos de modelagem estrutural e análise modal.

As técnicas de análise modal associadas aos algoritmos de identificação de sinais no domínio do tempo constituem uma importante e inovadora ferramenta de estudo prático da vibração de sistemas. Tais técnicas são complementares aos procedimentos clássicos de modelagem por elementos finitos e também em estudos mais recentes, como o apresentado aqui, de síntese modal através da subestruturação.

1.2 - Generalidades

A análise de estruturas de engenharia depende essencialmente do tipo de modelo matemático que é utilizado para descrever o comportamento físico do sistema. Com o desenvolvimento de computadores digitais de alta velocidade e alta capacidade de memória,

aliados a métodos numéricos mais eficientes, os projetistas tem conseguido solucionar problemas estruturais complexos ou de grande porte [1]. Dentre os modelos numéricos comumente utilizados na análise de sistemas destaca-se o método dos elementos finitos. Porém, tais métodos quase sempre contém imprecisões quanto a exata descrição dos fenômenos físicos envolvidos. Tais imprecisões quando acumuladas de forma sequencial, como no caso da análise de grandes estruturas, podem influenciar de forma significativa nos resultados finais.

Uma outra forma de análise de sistemas é através da modelagem experimental. Nesta metodologia, dados de excitação e resposta do sistema são combinados convenientemente de acordo com o tipo de solução pesquisada para o problema. Uma das grandes vantagens do método é a possibilidade da verificação do modelo real da estrutura que na maioria dos casos conduzirá a melhores modelos numéricos. Uma análise experimental criteriosa porém, visando minimizar as fontes de erros, é uma tarefa de difícil execução. Além disso, a condensação das matrizes do modelo analítico aos graus de liberdade experimentais para efeito de comparação, ou mesmo, o problema inverso, são operações que podem apresentar problemas numéricos de condicionamento, exigindo por isso soluções de alta sensibilidade ao problema [2].

Entretanto, são enormes as possibilidades de análise de um sistema estrutural complexo ou de grande porte, utilizando-se o método dos elementos finitos e/ou uma base de dados experimentais. Atualmente, grande parte dos pesquisadores da área de projetos têm fundamentado o seu campo de atuação, principalmente, nos seguintes tipos de análise:

- Identificação de sistemas
- Ajuste não lineares de parâmetros de sistemas
- Modificações estruturais
- Detecção de falhas estruturais
- Validação de modelos estruturais.

1.3 - Identificação de sistemas

Pode-se diferenciar este tipo de análise sob duas maneiras básicas:

- Identificação de sistemas : Neste caso o modelo do sistema não é conhecido, ou seja, não se conhecem seus parâmetros físicos.

- Estimação de parâmetros : Neste caso o modelo do sistema é conhecido ou é assumido.

Em ambos os tipos de análises, a solução é feita a partir de dados de entrada e saída medidos [3]. Esta análise pode ser feita tanto no domínio da frequência como no domínio do tempo. No caso de identificação utilizando dados no domínio da frequência existem um grande número de citações na literatura [4-7]. Atualmente, as técnicas no domínio do tempo [8-10], que utilizam registros temporais de excitação e resposta, para cálculo dos parâmetros modais, vêm tendo uma atenção especial dos analistas.

1.4 - Ajuste não lineares de parâmetros de sistemas

No caso de sistemas não lineares complexos, uma rotina de ajuste procura obter o conjunto de parâmetros do modelo matemático que minimiza as diferenças existentes entre os dados medidos e os dados simulados. As principais diferenças observadas nos procedimentos de ajuste não linear, além da possibilidade de análise no domínio da frequência ou no domínio do tempo, podem ser enumerados como:

- Ajustes paramétricos
- Ajustes não-paramétricos
- Ajustes sequenciais ou diretos
- Modelos de erro na entrada
- Modelos de erro na saída

Porém, em qualquer ajuste não lineares de parâmetros existe um fator complicativo, que é a dificuldade encontrada na atribuição de valores corretos aos parâmetros dos modelos físicos [11]. Com isso, desvios consideráveis podem ser obtidos na comparação das respostas simuladas com aquelas medidas no sistema real. Na linha de pesquisa enumerada anteriormente destacam-se vários trabalhos publicados [12-19].

1.5 - Modificação estrutural

A técnica de modificação dinâmica estrutural é baseada na análise modal experimental e no modelo analítico das matrizes de massa e de rigidez incrementais, que simulam as modificações. Através desta modificação, o comportamento dinâmico da estrutura pode ser

previsto. Como o número de modos identificados, limitado pela faixa de frequência analisada, geralmente, é inferior ao número de graus de liberdade do sistema, as previsões feitas à partir das modificações estruturais possuirão uma certa imprecisão nos resultados, conhecida como erro de truncamento [20]. Por isso, é necessário minimizar todos os erros associados com a aquisição e processamento dos dados.

A modificação dinâmica estrutural, geralmente, é uma ferramenta utilizada em possíveis modificações de projeto de uma certa estrutura. Além disso, em uma determinada etapa do projeto, existem possíveis interações de sistemas que tornam necessário a utilização de técnicas que demandam um menor tempo de análise, aliados a uma precisão mínima requerida. Devido ao tempo envolvido no desenvolvimento de muitos modelos de elementos finitos, bem como o possível tempo envolvido na realização de muitos testes experimentais, para diferentes configurações de projetos, existe a necessidade de métodos mais eficientes, com o intuito de aumentar a velocidade do ciclo de projeto.

O método de modificação estrutural, inicialmente publicado como uma técnica de modelagem modal, basicamente, tem suas pesquisas fundamentadas em uma autosolução de modificações estruturais localizadas [21]. Neste procedimento, as modificações localizadas são feitas através de mudanças simples em elementos de massa, rigidez ou amortecimento entre dois pontos do sistema. Métodos de modificação estrutural baseados em uma variedade de formulações tem sido comumente desenvolvidos, sendo documentados em uma série de trabalhos [22-24]. Muitos programas computacionais [25-29] foram desenvolvidos os quais de uma forma ou de outra utilizam os princípios básicos da técnica de modificação dinâmica estrutural.

1.6 - Detecção de falhas estruturais

Atualmente, uma das modalidades de análise de grandes estruturas que vem sendo bastante pesquisada é a detecção de falhas utilizando-se a análise modal [2,30,31]. Sistemas estruturais complexos como aviões, satélites, dentre outros, estão sujeitos a falhas inerentes de sua estrutura, que fatalmente comprometerão o seu bom funcionamento e em casos mais drásticos podem até mesmo levar ao seu colapso. Tais falhas podem ser ocasionadas por vários fatores, tais como fadiga, corrosão, altas cargas e enfraquecimento de uniões, dentre outras.

Com isso, as consequências econômicas e o comprometimento com a segurança são fatores decorrentes deste processo de falha estrutural.

Portanto, o monitoramento destas falhas, detectando sua localização e sua intensidade torna-se um aspecto importante para a solução de problemas estruturais. Os métodos de monitoramento são baseados, principalmente, em técnicas de identificação paramétrica. Tais métodos estão, evidentemente, limitados ao sucesso da análise modal experimental. A fase de monitoração das falhas pode ser descrita basicamente em três etapas [32]:

- detecção da falha
- localização espacial da falha
- quantificação da intensidade da falha.

1.7 - Ajuste de modelos estruturais

No projeto de uma estrutura mecânica, geralmente, um modelo de elementos finitos é construído com a finalidade de analisar o comportamento estático e dinâmico do sistema. Devido a natureza das estruturas em engenharia, é desejável que o modelo de elementos finitos seja ajustado usando dados medidos em testes experimentais do sistema. Esta validação do modelo é particularmente importante em situações onde a estrutura opere sob severas condições de carregamento, podendo ser efetuada, basicamente, em três níveis [33]:

- Curvas de resposta em frequência
- Parâmetros modais
- Parâmetros do modelo estrutural expressos em termos de coeficientes de massa, rigidez e amortecimento.

Comparações diretas são possíveis através das curvas de resposta em frequência, frequências naturais e formas dos modos. Entretanto, existe um pequeno número de problemas asssociados com a comparação de parâmetros espaciais. O fator mais importante desta limitação é que não é, geralmente, possível conduzir uma análise modal experimental completa que inclua todas as coordenadas físicas e frequências naturais correspondentes ao modelo de elementos finitos. Principalmente, onde graus de liberdade rotacionais estão envolvidos. Além disso, os dados experimentais usualmente incluem números diferentes de frequências naturais e coordenadas físicas, com isso uma formulação com matrizes não quadradas é obtida, não sendo possível sua inversão direta. Portanto, se em uma análise de elementos finitos as curvas

de resposta em frequência ou os níveis dos parâmetros modais não combinarem com os resultados experimentais, não é possível relatar as diferenças diretamente aos parâmetros estruturais. Entretanto, se os dados experimentais são seguros torna-se necessário modificar alguns termos dentro do modelo espacial de elementos finitos. O número de pontos instrumentados frequentemente é baseado no julgamento do projetista, sendo utilizados aqueles pontos em número suficiente para descrever uma representação discreta razoável da estrutura. Neste contexto, o número de modos identificados é usualmente menor, sendo limitado pela faixa de frequência analisada. Logo, a fase de identificação modal resultará em uma informação incompleta, causando uma imprecisão nas previsões de modificação estrutural, denominada erro de truncamento.

Os procedimentos básicos para o ajuste do modelo, baseando-se em uma condição de análise dos parâmetros físicos, podem ser descritos através dos seguintes passos [34]:

- Construção de um modelo de elementos finitos que contém todos os parâmetros físicos de massa e rigidez necessários para descrever o comportamento da estrutura em uma certa faixa de frequência. A escolha dos parâmetros e a estrutura matemática do modelo, ou seja, a malha , o tipo do elemento, etc, são de vital importância para a obtenção dos resultados desejados.
- Análise modal experimental da estrutura
- Ajuste dos parâmetros físicos do modelo de elementos finitos inicial através da minimização de uma função objetivo, que contém as diferenças entre as previsões analíticas e os resultados experimentais.

1.8 - O método de subestruturação

Em todos os tipos de análise descritos anteriormente, principalmente, quando se tratar de estruturas grandes ou complexas, a solução do sistema completo geralmente torna-se inviável do ponto de vista de tempo de modelagem e esforço computacional. Além disso, as possibilidades de problemas de convergência numérica e erros cumulativos fatalmente poderão incorrer em resultados imprecisos, com graves consequências econômicas de projeto.

A solução para este tipo de problema é trabalhar com um tamanho reduzido das equações matriciais que serão utilizadas para o cálculo do autoproblema [35]. Dentre as

opções, duas alternativas têm sido utilizadas pelos projetistas; técnicas de subestruturação e o procedimento de redução de coordenadas como, por exemplo, a redução de Guyan [36] . Na primeira obtém-se a diminuição do problema matricial, pois a estrutura é dividida em partes que são analisadas separadamente e os resultados dos componentes são utilizados para obtenção de uma equação matricial global que fornece as frequências naturais e os modos de vibrar da estrutura. Na segunda, a estrutura é modelada como um todo e, sobre a equação matricial resultante é feita uma redução de coordenadas.

Dentro das técnicas de subestruturação, o método mais utilizado e o que possui uma perspectiva grande de desenvolvimento é o da síntese dos modos do componente (SMC), ou também denominada de síntese modal.

O termo SMC é empregado genericamente referindo-se a algum processo analítico onde os modos normais da estrutura completa são sintetizados utilizando-se os modos de seus componentes individuais. Este procedimento foi introduzido por Hurty [37] e representa basicamente um procedimento de Rayleigh-Ritz [38]. A principal vantagem do procedimento de síntese é fornecer um problema computacional de tamanho reduzido dentro de uma certa faixa de precisão. Neste aspecto, o uso de coordenadas normais para os graus de liberdade do componente é vantajoso pois estas fornecem uma excelente base para a redução via discriminação em frequência. Isto é muito melhor, por exemplo, do que o uso de coordenadas físicas. Um segundo aspecto da síntese é a possibilidade de que os componentes podem ser parte da estrutura global, montados por diferentes organizações. Além disso, quando algum componente desta estrutura deve ser substituído por um componente novo ou apenas modificado, torna-se conveniente e eficiente testar somente este componente novo ou modificado e combinar seus dados a fim de se obter as propriedades dinâmicas da nova estrutura global. Idealmente, a síntese modal possui as seguintes vantagens:

- A precisão requerida da dinâmica do sistema pode ser obtida com um número reduzido de graus de liberdade, tornando a metodologia eficiente.
- Independência total dos componentes na análise, no qual nenhum conhecimento do sistema é necessário para a representação de um componente individual. As subestruturas, sendo estudadas separadamente, podem ser localizadas em diferentes lugares ou até mesmo em diferentes estágios do projeto(plano, modelo, protótipo).
- Compatibilidade com dados modais experimentais.

- O procedimento de síntese permite uma variedade quanto a especificação de algum tipo de modo do componente incluido na análise, além de permitir uma designação arbitrária de graus de liberdade de interface e internas do componente.
- Compatibilidade aos testes modais, onde dados acoplados e do componente poderão ser analisados diretamente por testes modais experimentais ou testes analíticos.

As várias publicações tradicionais do método podem ser classificadas em quatro grupos, de acordo com as condições de contorno empregadas:

1 - Modos normais de interface livre; neste caso existe a possibilidade de utilizar efeitos residuais através de modos não selecionados na base[39,40].
2 - Modos normais de interface fixa mais modos de restrição[41,42];
3 - Mistura de modos normais fixos com modos normais livres, juntamente com outros modos estáticos (modos de restrição ou modos de junção) ou com modos residuais [43,44].

O Método de síntese modal apresenta-se como uma forma conveniente de modelagem dinâmica de grandes estruturas, devido ao seu princípio de modulação do sistema estudado. Desde o trabalho pioneiro sobre síntese modal de Hurty [37] em 1965, vários métodos de síntese modal foram desenvolvidos, sendo que alguns destes métodos foram revisados [41,45]. O trabalho de Craig [46] apresenta uma revisão destes principais métodos, mostrando que os métodos de síntese modal diferenciam-se, basicamente, na forma de forçar as compatibilidades para a montagem das equações de equilíbrio e na montagem dos superconjuntos modais, que podem incluir modos estáticos e/ou modos normais.

Dos métodos citados aquele que possui um maior potencial é o método de modos normais livres alimentado com os efeitos residuais, introduzido inicialmente por Macneal [39,43,47], que utiliza uma terminologia de impedância/admitância. O trabalho de Rubin [48,49] utiliza basicamente a formulação de Macneal aplicando uma parcela de inércia para simular o efeito residual.

A maioria dos trabalhos que utiliza o método de síntese dos modos do componente para a solução de problemas dinâmicos de grandes estruturas, desprezam o amortecimento ou no caso mais geral consideram amortecimento proporcional. Entretanto, a suposição de leve amortecimento não é válida para algumas estruturas em engenharia, como por exemplo,

estruturas com controle ativo, com amortecedores concentrados, ou com partes girantes. Além disso, geralmente os modos medidos experimentalmente são complexos, ou seja, não satisfazem a condição de proporcionalidade no amortecimento. O primeiro trabalho neste campo foi o de Hasselman e Kaplan [50] que extenderam o método de Craig-Bampton [51] para sistemas com amortecimento não proporcional, usando modos complexos de interface fixa. Um procedimento de acoplamento de subestruturas generalizado utilizando modos complexos de interface livre através de uma formulação de estado foi proposta por Craig-Chung [52]. Os poucos trabalhos que surgiram neste contexto utilizavam, basicamente, uma formulação de estado juntamente com duas transformações sucessivas nas coordenadas físicas, utilizando, basicamente, formulações com modos de interface livre. Craig-Chang [52] utilizou uma formulação com modos de ligação indicando que a precisão final dos resultados poderia ser melhorada se fosse utilizado um complemento residual aos modos de ligação. Portanto, com a utilização isolada de modos de interface livre, verifica-se que a convergência dos métodos de SMC com amortecimento geral é baixa [51]. Através da utilização de flexibilidades residuais pode-se melhorar a precisão final dos resultados. Duarte [11] utilizou o método de Martim-Glaim [54] juntamente com uma base modal acrescentada por modos de flexibilidade residual para o ajuste de parâmetros em modelos não lineares.

Em casos recentes de análise experimental, Craig[45] e Duarte[11] observaram que o melhor superconjunto modal é o de flexibilidade residual, que é composto pelos modos normais selecionados e por modos normais de flexibilidade residual calculados a partir dos modos não selecionados da base modal. Estes autores verificaram que a inclusão dos modos de flexibilidade residual na base modal resulta em um aumento da precisão dos resultados finais. Entretanto, um dos principais problemas está na escolha correta dos modos a serem não selecionados da base modal de cada subestrutura. Se esta escolha não for coerente, pode-se obter uma identificação imprecisa da base modal do sistema original. Este fato ocorre, quando um determinado modo de uma subestrutura que é deletado, possui um nível maior de energia nas coordenadas do contorno com relação às coordenadas modais internas. Com isso, pode-se gerar uma síntese final com uma sensibilidade reduzida, o que provocará uma diminuição na precisão dos resultados identificados. Esta observação é descrita com maiores detalhes no capítulo 3.

1.9 - Avaliação da Técnica de Síntese Modal

De acordo com o que foi exposto anteriormente, verifica-se que a técnica de síntese modal pode ser utilizada em todas as possibilidades de análise de sistemas. Neste contexto, esta formulação possui grandes vantagens, principalmente, na análise de grandes estruturas ou estruturas complexas. Entretanto, o método de síntese modal ainda possui algumas limitações em alguns aspectos, que podem ser destacadas como:

- Quando testes experimentais são requeridos verifica-se que o método que fornece os melhores resultados é o método de interface livre com efeitos residuais. Porém, a maioria destes métodos considera o sistema não amortecido ou apenas com amortecimento proporcional, o que simplifica o procedimento de síntese das subestruturas. Quando a suposição de fraco amortecimento não pode ser feita, a análise do sistema deve ser feita sob a condição de amortecimento geral. Neste contexto, não existem muitos métodos publicados na literatura que utilizam dados experimentais aliados a efeitos residuais. A maioria dos métodos publicados situa-se dentro de uma classificação específica, ou seja, não amortecido ou com amortecimento proporcional. Com isso, existe uma clara distinção destes procedimentos, quando incluem-se efeitos residuais na base modal.

- Os poucos métodos que utilizam a inclusão dos efeitos residuais no modelo, não descrevem de forma clara e objetiva este procedimento, além de não pesquisarem incisivamente estes efeitos, principalmente, quando se trata de um sistema com amortecimento geral.

- Um dos grandes inconvenientes de quase todos os métodos de SMC é a possibilidade da não convergência dos resultados da síntese ou uma obtenção de resultados finais de baixa precisão, devido a uma má escolha do conjunto modal da subestrutura(quantitativo/qualitativo) para a realizaçao da síntese da estrutura global.

- Além disso, a equação dinâmica global sintetizada utilizando-se as subestruturas, geralmente, é montada em sequência de acordo com a conectividade das subestruturas interligadas. Esta equação reduzida será utilizada para a autosolução do modelo completo. Porém, mesmo de tamanho reduzido, quando a análise é feita em uma estrutura de grande porte, onde se pode inclusive utilizar modos complexos, obtém-se uma equação matricial de

tamanho considerável, que eventualmente, pode gerar problemas de estabilidade do sistema, com o aumento dos erros de truncamento computacionais que podem inviabilizar a execução da síntese final ou promover a obtenção de resultados insatisfatórios.

- A análise modal experimental de estruturas através da SMC é, de certa forma, limitada a poucos métodos. Portanto, neste contexto torna-se necessário a implementação de novas técnicas ou até mesmo a reformulação de técnicas já existentes, a fim de validar completamente a metodologia para análise experimental.

1.10- Objetivos do trabalho

Neste trabalho propõe-se um método de síntese modal que pode ser classificado como um método generalizado de síntese, uma vez que, utiliza procedimentos similares de síntese modal para os casos de sistemas sem amortecimento ou com amortecimento geral. No método as subestruturas foram modeladas através do método de interface livre utilizando um superconjunto modal de flexibilidade residual. Neste contexto, a flexibilidade residual foi calculada a partir dos modos normais que são descartados da base, seja no caso não amortecido, como no caso com amortecimento geral.

A formulação de síntese para o caso não amortecido é similar ao método de Craig-Chang [53], porém a obtenção dos modos de flexibilidade residual, que simula os efeitos residuais, são obtidos de uma forma clara e concisa, considerando que os modos de corpo rígido ficarão incluídos nas bases modais das subestruturas .

Um procedimento similar foi aqui desenvolvido para o caso com amortecimento geral, utilizando equações de estado, juntamente com uma penalização de compatibilidade das subestruturas através de pseudo-forças [53]. Neste contexto, a formulação é generalizada tornando o presente trabalho único, com uma contribuição principal no campo da síntese modal dos componentes.

Devido a formulação utilizada que emprega modos normais juntamente com modos de flexibilidade residual, a metodologia é principalmente aplicada na análise modal experimental. Porém, também é possível a utilização de modelos analíticos apenas ou uma mesclagem destes com modelos experimentais, o que traz grandes vantagens ao procedimento de síntese proposto.

No método proposto as subestruturas são discretizadas através de parâmetros de massa, rigidez e amortecimento, sendo separadas umas das outras através de pontos discretos de inércia. Os modos de flexibilidade residual são estimados à partir dos modos não selecionados da base modal. Aqui, nenhuma restrição é feita quanto a quantidade de modos que devem ser selecionados e não selecionados da base, sendo que é possível obter-se resultados satisfatórios na faixa de 65 a 80% de modos identificados, dentro da faixa de frequência analisada. Esta faixa de análise também foi observada por outros autores [11,41].

A qualidade dos modos selecionados e não selecionados da base modal também possui um papel fundamental para o sucesso da síntese. Até então, a eliminação dos modos da base era feita por tentativa pelo analista. Com isso, quanto maior o conhecimento prévio da estrutura pelo analista, maiores as chances de um procedimento de síntese rápido e eficiente. Portanto, o método de síntese com flexibilidade residual possui uma sensível limitação, já que muitas vezes não se dispõe de um conhecimento prévio da estrutura ou mesmo quando a análise é feita por um analista com pouca experiência. Para contornar este problema é proposto uma formulação inédita que utiliza um processo de eliminação automática dos modos da base modal. Este processo foi proposto, depois de se observar que as parcelas modais relativas ao contorno das subestruturas possuíam uma alta sensibilidade no processo de síntese final da estrutura global. Ou seja, um alto nível de energia das parcelas modais do contorno das subestruturas interligadas, influenciava significativamente na precisão do método. Com isso, com a eliminação destes modos da base modal, resultados satisfatórios podem ser obtidos, com a vantagem de tornar o procedimento de síntese automático, sem a possível interferência do usuário.

Uma detalhada revisão bibliográfica foi feita para se verificar o estado da arte dentro dos métodos de síntese modal sem amortecimento ou com amortecimento geral, tornando o trabalho uma importante fonte de consulta nesta área.

Utilizando a formulação proposta foi desenvolvido um novo software (Programa Struct) para a análise de estruturas utilizando o procedimento de síntese dos modos do componente, não amortecido ou com amortecimento geral. Uma contribuição importante é feita através da simplificação do procedimento de síntese. Esta simplificação é obtida, por exemplo, quando um sistema global é composto por mais de duas subestruturas. Nos métodos de síntese atuais, as matrizes finais do sistema são compostas por blocos de elementos, cujo tamanho depende dos graus de liberdade internos e do contorno de cada subestrutura

interligada, e que dependendo do caso, podem ser de alta ordem. Na formulação proposta, as matrizes finais de autosolução são sempre montadas com duas subestruturas interligadas, independente do número de subestruturas que compõem a estrutura global. Ou seja, em cada ciclo da análise, as duas subestruturas antigas que foram analisadas são consideradas como uma nova subestrutura, que estará interligada á uma outra, e assim, o procedimento de síntese vai sendo gerado sempre com estas duas subestruturas atuais interligadas. Este processo de remontagem é satisfatório devido ao processo com que foram obtidas as equações matriciais de síntese das subestruturas. Com isso, este procedimento reduz o tamanho do problema analisado, com vantagens na precisão final dos resultados, aliado a um menor esforço computacional. Através deste novo critério de montagem observou-se que até mesmo uma quantidade mínima de modos selecionados, pode levar a resultados satisfatórios na síntese final da estrutura.

A metodologia proposta é verificada através de quatro exemplos de simulação numérica, sendo que dois destes são aplicados para o caso não amortecido e dois para o caso com amortecimento geral.

A verificação é também feita em um modelo experimental simplificado de tamanho reduzido que simula uma asa de um avião acoplada a um tanque de combustível. As estruturas são modeladas através do método dos elementos finitos e os dados de cada subestrutura são sintetizados pelo programa Struct. Ao mesmo tempo, é feita uma análise experimental de cada subestrutura e também da estrutura global com a finalidade de gerar um procedimento de síntese experimental e comparar os resultados com o modelo analítico desenvolvido.

1.11 - Estrutura dos Capítulos

Este trabalho é organizado em sete capítulos e um apêndice. No capítulo 2 é apresentado a técnica de síntese dos modos do componente. É feita uma descrição dos vários métodos de síntese modal, através de uma minuciosa investigação bibliográfica. É mostrada a formulação do método de síntese modal proposto, onde as equações matriciais finais são obtidas para ambos os casos, não amortecido e com amortecimento geral.

No capítulo 3 é definido o critério de eliminação automática dos modos, apresentando a formulação proposta que sugere quais os modos mais indicados a permanecerem na base modal e aqueles que devem ser não selecionados, com a finalidade de se obter bons resultados

através do procedimento de síntese. Apresenta-se também o novo critério de montagem das subestruturas proposto no trabalho.

No capítulo 4 é apresentado o programa computacional desenvolvido (Programa Struct), gerado em linguagem Fortran. São descritas as operações básicas dos algoritmos principais e a estrutura geral dos arquivos de dados e de saída do programa desenvolvido.

No capítulo 5 é apresentada a formulação utilizada para obter modos complexos à partir de uma base de modos reais de uma subestrutura. Esta análise é feita com a intenção de comparar os resultados experimentais com os resultados analíticos.

No capítulo 6 apresentam-se os resultados dos quatro exemplos de simulação numérica propostos.

No capítulo 7 apresenta-se a avaliação experimental de uma estrutura simplificada de um modelo de uma asa de avião.

No capítulo 8 apresentam-se as conclusões do trabalho e expõe-se algumas sugestões para trabalhos futuros.

Os anexos do trabalho contém os seguintes ítens:

- Índice MAC
- Arquivo de saída do Programa Struct (Caso não amortecido)
- Arquivo de saída do Programa Struct (Caso com amortecimento geral)
- Representação esquemática da estrutura experimental - Programa Star.

No apêndice A é apresentado o esquema de normalização dos modos experimentais utilizados nos modos obtidos via Programa Star.

Capítulo 2

Síntese Modal de Estruturas

2.1 - Comentários Gerais

A modelagem de sistemas é uma técnica utilizada para representar as características dinâmicas de uma certa estrutura. Geralmente, estas características dinâmicas são obtidas através de dados experimentais, dados modais ou dados analíticos. Uma vez que o modelo foi obtido, diferentes aplicações podem ser estudadas, como por exemplo, mudanças no projeto, acoplamento de uma estrutura em outra para determinar o comportamento dinâmico global e também a análise da resposta do sistema a uma excitação externa.

Os modelos de um sistema podem ser classificados como :

- modelos experimentais
- modelos analíticos
- modelos mistos

O método dos elementos finitos é um dos modelos matemáticos mais utilizados dentro da mecânica estrutural. Desde que o método dos elementos finitos é considerado como uma técnica analítica aproximada, geralmente, a análise experimental é feita para validar o modelo analítico [11].

Dentro das técnicas de modelagem experimental destaca-se a análise modal experimental que estima os parâmetros do sistema que definem a sua dinâmica. A vantagem de uma análise

experimental criteriosa é a possibilidade de minimizar as fontes de erro, porém, sabe-se que sua execução é uma tarefa difícil. Os modelos do sistema podem também serem classificados através de métodos mistos (experimental/analítico). Um destes métodos é a análise de sensibilidade que usa um ou os dois primeiros termos de uma expansão em série de potências, para determinar a taxa de variação dos autovalores e autovetores com relação a mudanças físicas na massa, rigidez ou amortecimento do sistema. Outro método misto que se destaca é a síntese modal. Nesta técnica utilizam-se informações modais analíticas ou experimentais dos componentes que fazem parte de uma estrutura grande ou complexa, que se combinam para fornecer as características dinâmicas da estrutura completa. O método de síntese modal apresenta-se como uma forma conveniente de modelagem dinâmica de grandes estruturas, devido ao seu princípio de modulação, que permite uma independência das subestruturas com relação ao projeto, possibilitando análises individuais destas subestruturas para posterior remontagem da estrutura completa. Além disso, o método permite operações com um número reduzido de graus de liberdade, tornando-o uma importante ferramenta na análise de sistemas.

Neste capítulo será mostrada a formulação básica do método de síntese modal proposto, aplicado a sistemas lineares não-amortecidos e também em sistemas lineares com amortecimento geral.

2.2-Métodos De Síntese Modal

2.2.1-Introdução

Uma das primeiras técnicas de síntese dinâmica desenvolvida foi a condensação estática ou redução de Guyan [36]. Nesta metodologia, os modos estáticos são utilizados para reduzir a ordem da matriz de rigidez ou de massa da subestrutura. Os métodos de síntese modal são baseados no método dos modos assumidos [38], nos quais escolhem-se como base de vetores para cada subestrutura os modos normais e/ou os modos de deformação estática com diferentes condições de contorno. O método apresenta como característica principal a divisão de uma estrutura complexa em várias subestruturas cujas bases modais reduzidas serão agrupadas e sintetizadas para fornecer os autovalores e autovetores do sistema original. A metodologia possui flexibilidade quanto a utilização das condições de contorno; livre, engastada ou híbrida. A grande vantagem do método é a possibilidade de análise de cada

componente separadamente ocasionando uma maior facilidade nos testes e ajuste de modelos, bem como uma redução do custo computacional.

2.2.2 - Caso Não-Amortecido

Os métodos de síntese modal são classificados de acordo com o superconjunto modal escolhido, bem como, através dos diversos procedimentos de acoplamento das subestruturas.

O conceito de síntese modal foi proposto em 1965 por Hurty [37,55]. Em seu trabalho foram utilizados modos de corpo rígido, modos de restrição e modos normais para montar o modelo dinâmico das subestruturas. O procedimento era similar ao método de Rayleigh-Ritz com a inclusão de modelos discretos de elementos finitos. Os modos de corpo rígido e os modos de restrição são obtidos através da aplicação individual de deslocamentos unitários nas coordenadas de interface das subestruturas.

2.2.2.1 - Revisão Bibliográfica

Craig e Bampton [51] introduziram um método similar ao de Hurty utilizando modos de restrição e modos normais. Bamford [44] melhorou a precisão do método utilizando modos de junção. Os modos de junção são obtidos pelos deslocamentos do componente quando uma força unitária é aplicada a um grau de liberdade do contorno enquanto todos os outros graus de liberdade remanescentes permanecem livres de força. Goldman [40] introduziu o método de interface livre, empregando somente modos de corpo rígido e modos normais livre-livre. Hou [56] apresentou um método similar ao de Goldman utilizando apenas modos normais livres. Gladwell [57] desenvolveu uma "análise modal ramificada" combinando análise de interface fixa com interface livre, com a finalidade de reduzir a ordem das matrizes de massa e rigidez das subestruturas. Bajan, et. al. [58] desenvolveu uma forma iterativa para o método de interface fixa. Ele mostrou que pode-se obter melhor precisão na síntese através da repetição da redução, baseando-se em estimativas atualizadas das frequências e modos do sistema. Benfield e Hruda [59] implementaram um método introduzindo rigidez e inércia nas interfaces das subestruturas. Macneal [43] utilizou modos híbridos que são modos normais extraídos de combinações de contorno livre e contorno fixo, juntamente com modos sem a presença de movimento de corpo rígido, que são denominados de modos com alívio de inércia. Macneal

também utilizou flexibilidade e inercia residual para aproximar a contribuição estática de modos truncados de alta ordem de um componente. Rubin [49] implementou o método de interface livre com a flexibilidade residual introduzindo correções na base modal para modos de alta ordem truncados. Klosterman [60] aprimorou o método analítico/experimental desenvolvido por Macneal. Hintz [61] discutiu as implicações dos vários conjuntos de modos truncados e forneceu as linhas gerais para a obtenção de precisão em um modelo de tamanho reduzido. Baker [62] comparou os métodos livre-livre e interface fixa usando técnicas experimentais e também usando técnicas de adição de massa e graus de liberdade rotacionais. Meirovitch e Hale [63] desenvolveram um procedimento de síntese generalizado, tanto para modelos contínuos, quanto para modelos discretos, aplicando o conceito de funções admissíveis proposta por Hurty. Kubomura [64] apresenta um método que utiliza aproximações para as coordenadas generalizadas das subestruturas utilizando faixas de frequência diferentes da frequência de interesse. Greif [65] desenvolveu um método genérico de síntese modal para análise de sistemas mecânicos. Kuang e Tsuei [66] utilizaram três conjuntos de modos (modos de alívio de inércia, modos normais e modos de flexibilidade residual), verificando suas influências na subestrutura. Curnier [67] também fez uma comparação do método utilizando modos de interface fixa, interface livre e interface carregada. Sokimoto [68] utilizou o método de síntese modal para a análise de vigas quando possuíam interfaces carregadas com inércia rotacional e de translação. Shabama [69] analisou sistemas não-lineares descrevendo a deformação dos elementos em termos de função de forma das subestruturas. Craig [45] fez uma análise das subestruturas utilizando vários tipos de modos. Também em seu trabalho, Craig comentou a questão de se utilizar modos complexos em um processo de síntese com amortecimento. Engels [70] utilizou duas subestruturas e fez uma comparação dos métodos de Hurty e Craig-Bampton utilizando iteração de subespaço para a solução do problema de autovalores. Pinotti [35] desenvolveu um procedimento computacional utilizando o método de Hurty, para análise de problemas estruturais modelados por elementos finitos. Craig [45] apresenta uma revisão dos métodos de síntese modal.

2.2.2.2 - Modelo Dinâmico Das Subestruturas

Para que o conjunto de autovetores das subestruturas possam representar adequadamente o movimento do sistema sintetizado, não importando quais sejam as suas

condições de contorno, os modos normais precisam ser enriquecidos com modos estáticos, que preveêm os movimentos devido a vinculação dos contornos das subestruturas. A combinação destes modos definem os superconjuntos modais [46].

A forma do acoplamento das subestruturas e a base modal utilizada são os parâmetros mais importantes na metodologia. Baseado nisto, os métodos de síntese modal podem ser classificados como:

- métodos de interface fixa
- métodos de interface livre
- métodos híbridos.

A formulação do método está baseada em três pontos básicos:

- Divisão da estrutura global em uma série de subestruturas
- Obtenção do superconjunto modal (modos flexíveis mais modos estáticos) através de uma formulação analítica ou experimental.
- Montagem e solução das equações globais de movimento segundo a conectividade imposta.

Para melhor se compreender a metodologia de síntese modal, suponha que dois componentes (a) e (b) sejam ligados por uma interface comum, para formarem uma estrutura global, como mostrado na figura 2.1. Estas subestruturas são discretizadas utilizando coordenadas físicas internas e de contorno.

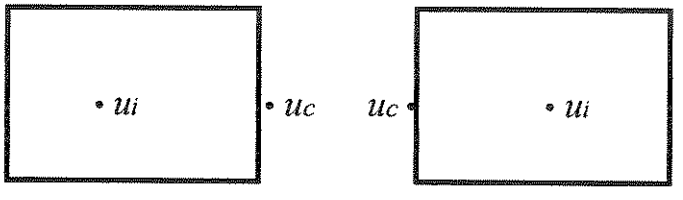


Figura 2.1 - Subestruturas (a) e (b) discretizadas e interligadas por uma interface comum.

A equação de movimento para um componente genérico pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ic} \\ m_{ci} & m_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ic} \\ k_{ci} & k_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_c \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

Ou de forma compacta;

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}} + \mathbf{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{2.2}$$

Onde $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{K}$ são respectivamente as matrizes de massa e rigidez do componente e $\boldsymbol{u}$ é o vetor de deslocamentos devido às forças atuantes $\boldsymbol{f}$. Para que se possa desacoplar as equações de movimento e também obter o modelo via ensaio experimental, as coordenadas físicas $\boldsymbol{u}$ são transformadas em coordenadas modais $\boldsymbol{q}$, através da seguinte transformação linear:

$$\boldsymbol{u} = \Psi\ \boldsymbol{q} \tag{2.3}$$

Aplicando a transformação linear de 2.3 na equação 2.2, e premultiplicando ambos os membros da equação pela base modal transposta tem-se:

$$\boldsymbol{M}_q\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \mathrm{K}_q\,\boldsymbol{q} = \Psi^{\,t}\boldsymbol{f} \tag{2.4}$$

Onde;

$$\boldsymbol{M}_q = \Psi^{\,t}\,\mathrm{M}\,\Psi$$

$$\boldsymbol{K}_q = \Psi^{\,t}\,\mathrm{K}\,\Psi$$

A equação 2.4 define o modelo dinâmico de um componente em coordenadas modais. Supõe-se que as colunas da matriz modal sejam funções de forma linearmente independentes [71], cuja combinação linear serve para representar adequadamente a configuração deformada da subestrutura. A metodologia de síntese proposta baseia-se na utilização de diferentes combinações lineares dos modos das subestruturas para descrever uma configuração de deformação.

2.2.2.3 - Modos Utilizados No Método De Síntese

Na síntese modal para uma estrutura não-amortecida, todos os modos dos componentes são reais e podem ser classificados das seguintes formas:

- Modos Normais
  - . interface fixa
  - . interface livre
  - . híbridos
  - . interface carregada
- Modos de Corpo Rígido
- Modos de Flexibilidade Residual
- Modos Estáticos
  - . restrição
  - . junção com interface fixa
  - . junção com interface livre
  - . junção com alívio de inércia

Vários pesquisadores [72] observaram que o método de síntese modal obtém precisão nos resultados finais somente quando são utilizados superconjuntos modais. Estes superconjuntos, normalmente, utilizam algum tipo de modo normal juntamente com uma combinação de algum ou alguns outros tipos de modos, como definido anteriormente. A seguir, é descrito a forma de obtenção dos principais modos utilizados nos vários métodos de síntese modal.

a) Modos Normais Com Interface Fixa

Os modos normais com interface fixa são obtidos do autoproblema definido pela equação 2.1, utilizando apenas coordenadas físicas internas. Neste caso, as parcelas das coordenadas físicas de contorno são consideradas nulas. Com isso, obtém-se uma formulação do tipo:

$$\mathbf{m}_{ii}\,\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{k}_{ii}\,\mathbf{u}_i = \mathbf{0} \tag{2.5}$$

A solução da equação diferencial (2.5) será da forma:

$$\left(\mathbf{k}_{ii} - \Lambda_{fi}^2\,\mathbf{m}_{ii}\right)\theta_{fi} = 0 \tag{2.6}$$

Com isso, os modos normais de interface fixa, normalizados pela matriz de massa, são dados por:

$$\theta_f = \begin{bmatrix} \theta_{fi} \\ \mathbf{0}_{fc} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

b) Modos Normais Com Interface Livre

Os modos normais com interface livre são obtidos considerando as forças nulas na equação 2.1. Com isso, são utilizados todos os termos das matrizes de massa e rigidez, ou seja;

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{2.8}$$

A solução da equação diferencial (2.8) será da forma:

$$\left(\mathbf{K} - \Lambda_l^2\,\mathbf{M}\right)\theta_l = \mathbf{0} \tag{2.9}$$

Com isso, os modos normais de interface livre, normalizados pela matriz de massa, são dados por:

$$\theta_l = \begin{bmatrix} \theta_{li} \\ \theta_{lc} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Na prática, somente é disponível um conjunto parcial de modos normais representativos do comportamento dinâmico do componente. Os modos normais híbridos, de aplicação mais rara, são combinações das duas possibilidades mostradas anteriormente.

c) Modos Normais Com Interface Carregada

Estes modos são obtidos de um autoproblema modificado para o componente, onde são introduzidas variações na matriz de massa nas coordenadas do contorno [59]. Este

procedimento foi empregado por Jezequel [73] na determinação experimental de modos normais. Analíticamente a solução desta equação é determinada por:

$$\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ic}\\ \mathbf{k}_{ci} & \mathbf{k}_{cc}\end{bmatrix} + \Lambda_m^2\begin{bmatrix}\mathbf{m}_{ii} & \mathbf{m}_{ic}\\ \mathbf{m}_{ci} & \mathbf{m}_{cc}+\Delta\mathbf{m}_{cc}\end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix}\phi_{mi}\\ \phi_{mc}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix} \qquad (2.11)$$

Com isso, os modos normais de interface carregada normalizados são dados por:

$$\phi_m = \begin{bmatrix}\phi_{mi}\\ \phi_{mc}\end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

d) Modos de Corpo Rígido

Supondo que as coordenadas do contorno sejam subdivididas em um conjunto de (r) coordenadas, suficientes para considerar o movimento de corpo rígido do componente e um conjunto de (p) coordenadas em excesso, pode-se representar os modos de corpo rígido através da solução do problema:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ip} & \mathbf{k}_{ir}\\ \mathbf{k}_{pi} & \mathbf{k}_{pp} & \mathbf{k}_{pr}\\ \mathbf{k}_{ri} & \mathbf{k}_{rp} & \mathbf{k}_{rr}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_{ri}\\ \theta_{rp}\\ \mathbf{I}_{rr}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix} \qquad (2.13)$$

Da equação anterior, tem-se que:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ip}\\ \mathbf{k}_{pi} & \mathbf{k}_{pp}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_{ri}\\ \theta_{rp}\end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{ir}\\ \mathbf{k}_{pr}\end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

Da equação 2.13 e 2.14 pode-se obter os modos de corpo rígido como:

$$\theta_r = \begin{Bmatrix}\theta_{ri}\\ \theta_{rp}\\ \mathbf{I}_{rr}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ip}\\ \mathbf{k}_{pi} & \mathbf{k}_{pp}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{ir}\\ \mathbf{k}_{pr}\end{bmatrix}\\ \mathbf{I}_{rr}\end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

e) **Modos Estáticos de Restrição**

Os modos estáticos de restrição são obtidos através das deformações resultantes de um deslocamento estático unitário imposto em uma das coordenadas do contorno, considerando deslocamentos nulos para as demais coordenadas. Com isso, a matriz dos modos estáticos será:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ic} \\ \mathbf{k}_{ci} & \mathbf{k}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{ri} \\ \delta_{rc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{cc} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Com isso, a base modal estática com (c) modos em excesso será:

$$\delta_r = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_{ii}^{-1}\,\mathbf{k}_{ic} \\ \mathbf{I}_{cc} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Se a subestrutura for livre-livre, a base modal estática conterá um número de modos de corpo rígido igual ao número de graus de liberdade.

f) Modos Estáticos de Junção - Subestruturas fixas

Os modos de junção podem ser obtidos através das deflexões estáticas produzidas na estrutura, decorrentes da aplicação de uma força unitária em uma das coordenadas do contorno, ao mesmo tempo em que as outras coordenadas estão isentas de carregamento. Vários pesquisadores [44,49,53,61] têm utilizado modos de junção com a finalidade de complementar a base modal dos componentes. Para o caso de junção fixa, as forças unitárias são aplicadas no conjunto das coordenadas do contorno da subestrutura, definida por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ic} \\ \mathbf{k}_{ci} & \mathbf{k}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{si} \\ \delta_{sc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{cc} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Com isso, a base modal estática de junção fixa com (c) modos em excesso será:

$$\delta_s = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ic}^{-1} \\ \mathbf{k}_{cc}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{ic} \\ \mathbf{g}_{cc} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

g) Modos Estáticos de Junção - Subestruturas Livres

Neste caso, deve-se eliminar os movimentos de corpo rígido através de um conjunto de (r) restrições determinadas estaticamente, definidas através da relação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ic} & \mathbf{k}_{ir} \\ \mathbf{k}_{ci} & \mathbf{k}_{cc} & \mathbf{k}_{cr} \\ \mathbf{k}_{ri} & \mathbf{k}_{rc} & \mathbf{k}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{ii} \\ \delta_{ii} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{cc} \\ \mathbf{R}_{rc} \end{Bmatrix} \tag{2.20}$$

Com isso, a base modal estática de junção livre com (c) modos em excesso será:

$$\delta_l = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{ic} \\ \mathbf{g}_{cc} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Portanto, os modos de junção livres são colunas da matriz de flexibilidade do componente nas (r) coordenadas definidas, que podem ser quaisquer, desde que restrinjam o movimento de corpo rígido da subestrutura.

h) Modos de Junção Com Alívio de Inércia

Quando um componente possui movimento de corpo rígido, os modos de alívio de inércia podem ser utilizados para representar a resposta estática completa [61]. Estes modos podem ser definidos como sendo a deflexão estática do componente mediante a aplicação de forças unitárias em todas as coordenadas do contorno. Ou seja,

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{cc} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Estas forças são aplicadas para uma certa subestrutura cuja equação de movimento é definida por:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \bar{\mathbf{f}} \tag{2.23}$$

O vetor de deslocamentos é composto pelos deslocamentos de corpo rígido e pelos deslocamentos elásticos, ou seja,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_e \tag{2.24}$$

Considerando a transformação linear,

$$\mathbf{u}_r = \theta_r\ \mathbf{q}_r \tag{2.25}$$

Uma vez que para o movimento de corpo rígido não existem forças elásticas internas, tem-se:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}_r = \mathbf{0} \tag{2.26}$$

Portanto, das equações 2.23,2.24,2.25 e 2.26 pode-se obter um equilíbrio de forças do sistema aplicados aos modos elásticos, ou seja,

$$\mathbf{f}_e \equiv \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}\,\mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{f}} - \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}_r \tag{2.27}$$

Aplicando a transformação linear definida na equação 2.25 e premultiplicando a equação 2.27 pela transposta da base modal de corpo rígido, tem-se:

$$\theta_r^t\,\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}_e + \theta_r^t\,\mathbf{K}\,\mathbf{u}_e = \theta_r^t\,\bar{\mathbf{f}} - \mu_{rr}\,\ddot{\mathbf{q}}_r \tag{2.28}$$

Onde,

$$\mu_{rr} = \theta_r^t\,\mathbf{M}\,\theta_r$$

Uma vez que a base modal de corpo rígido é ortogonal a todos os modos elásticos, a equação 2.28 transforma-se em:

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \mu_{rr}^{-1} \theta_r^t \bar{\mathbf{f}} \tag{2.29}$$

Portanto, das equações 2.25,2.27,2.29 as forças elásticas são dadas por:

$$\mathbf{f}_e = \left(\mathbf{I} - \mathbf{M}\theta_r \mu_{rr}^{-1} \theta_r^t\right)\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{P}}\ \bar{\mathbf{f}} \tag{2.30}$$

Deve-se restringir as forças elásticas com as forças atuantes no contorno, de acordo com os graus de liberdade de corpo rígido. Com isso, pode-se obter uma matriz cujas colunas sejam os deslocamentos do componente sob a ação de forças aplicadas no contorno da forma,

$$\chi = \mathbf{G}\ \mathbf{f}_e = \mathbf{G}\bar{\mathbf{P}}\ \bar{\mathbf{f}} \tag{2.31}$$

Onde G é uma matriz de flexibilidade definida por:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{ii} & \mathbf{g}_{ie} & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_{ei} & \mathbf{g}_{ee} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Na equação 2.32, (e) representa o número total de modos elásticos. A matriz de deslocamentos modais é uma combinação dos modos elásticos (alívio de inércia) mais os deslocamentos de corpo rígido, ou seja:

$$\chi = \delta_a + \mathbf{u}_r \tag{2.33}$$

Aplicando a transformação de 2.25 na equação 2.33, tem-se:

$$\chi = \delta_a + \theta_r\, \mathbf{q}_r \tag{2.34}$$

Premultiplicando a equação 2.34 pela matriz de massa e pela transposta da matriz modal de corpo rígido, tem-se:

$$\theta_r^t \mathbf{M} \chi = \theta_r^t \mathbf{M} \delta_a + \theta_r^t \mathbf{M} \theta_r \mathbf{q}_r \tag{2.35}$$

A primeira parcela da equação 2.35 é nula, pela propriedade de ortogonalidade dos modos e ainda, aplicando-se a condição de 2.28, encontra-se:

$$\mathbf{q}_r = \mu_{rr}^{-1} \theta_r^t \mathbf{M} \chi \tag{2.36}$$

Obtém-se das equações 2.36 e 2.34 que os modos de junção com alívio de inércia são:

$$\delta_a = \left(\mathbf{I} - \theta_r \mu_{rr}^{-1} \theta_r^t \mathbf{M}\right) \chi \tag{2.37}$$

Finalmente, das equações 2.31, 2.32 e 2.37 obtém-se que:

$$\delta_a = \left(\bar{\mathbf{P}}^t \mathbf{G} \bar{\mathbf{P}}\right) \bar{\mathbf{f}} \tag{2.38}$$

i) Modos de Flexibilidade Residual

Os modos de flexibilidade residual têm sido aplicados, principalmente, na análise modal experimental [74-76]. A sua definição é obtida através dos modos flexíveis que são eliminados da base modal. Considere um componente composto por (r) modos de corpo rígido e por modos normais de interface livre, a matriz de rigidez pode ser escrita como:

$$\mathbf{K u} = \mathbf{f} \tag{2.39}$$

Os deslocamentos físicos são combinações das deformações elásticas e movimentos de corpo rígido. Estes deslocamentos podem ser escritos em termos de coordenadas modais pela seguinte transformação linear:

$$\mathbf{u} = \theta_l \mathbf{q}_e + \theta_r \mathbf{q}_r \tag{2.40}$$

Sabendo-se que:

$$\mathbf{K}\,\theta_r = \mathbf{0} \tag{2.41}$$

Utilizando a equação 2.39, 2.40 e 2.41 e premultiplicando a equação resultante pela matriz transposta dos modos elásticos, obtém-se:

$$\theta_l^t\,\mathbf{K}\,\theta_l\;\mathbf{q}_e = \theta_l^t\,\mathbf{f} \tag{2.42}$$

A equação 2.42 pode ser escrita em função dos autovalores elásticos, como:

$$\mathbf{q}_e = \Lambda_l^{-1}\,\theta_l^t\,\mathbf{f} \tag{2.43}$$

Da equação 2.42 e 2.43 pode-se escrever que:

$$\mathbf{K}\;\theta_l\,\Lambda_l^{-1}\,\theta_l^t\;\mathbf{f} = \mathbf{f} \tag{2.44}$$

Ou de uma forma mais compacta, tem-se:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{G}_e\,\mathbf{f} = \mathbf{f} \tag{2.45}$$

Onde;

$$\mathbf{G}_e = \theta_l\,\Lambda_l^{-1}\,\theta_l^t \tag{2.46}$$

A equação 2.46 define a matriz de flexibilidade elástica, que também pode ser determinada pela inversa da matriz de rigidez. Mantendo-se (k) modos na base modal e descartando-se (d) modos, a matriz de flexibilidade elástica pode ser escrita como:

$$\mathbf{G}_e = \theta_k\,\Lambda_{kk}^{-1}\,\theta_k^t + \theta_d\,\Lambda_{dd}^{-1}\,\theta_d^t = \mathbf{G}_k + \mathbf{G}_d \tag{2.47}$$

O segundo termo desta equação é denominado de matriz de flexibilidade residual, que representa a flexibilidade da estrutura relativa aos modos não selecionados ou fora da faixa de análise. Portanto, os modos de junção de flexibilidade residual podem ser definidos como:

$$\delta_f = \mathbf{G}_d \, \bar{\mathbf{f}} \tag{2.48}$$

Utilizando-se a equação 2.22, 2.47 e 2.48 tem-se, finalmente, que:

$$\delta_f = \theta_d \, \Lambda_{dd}^{-1} \, \theta_d^t \, \mathbf{f}_c = \theta_d \, \Lambda_{dd}^{-1} \, \theta_{dc}^t \tag{2.49}$$

A matriz de rigidez e a matriz de massa das subestruturas quando estão associadas aos modos de flexibilidade residual, podem ser escritas como:

$$\delta_f^t \, \mathbf{K} \, \delta_f = \theta_{dc} \, \Lambda_{dd}^{-1} \left(\theta_d^t \, \mathbf{K} \, \theta_d \right) \Lambda_{dd}^{-1} \, \theta_{dc}^t \tag{2.50}$$

$$\delta_f^t \, \mathbf{M} \, \delta_f = \theta_{dc} \, \Lambda_{dd}^{-1} \left(\theta_d^t \, \mathbf{M} \, \theta_d \right) \Lambda_{dd}^{-1} \, \theta_{dc}^t \tag{2.51}$$

Pode-se escrever de uma forma mais conveniente que:

$$\alpha_{ff} = \delta_f^t \, \mathbf{K} \, \delta_f = \theta_{dc} \, \Lambda_{dd}^{-1} \, \theta_{dc}^t \tag{2.52}$$

$$\beta_{ff} = \delta_f^t \, \mathbf{M} \, \delta_f = \theta_{dc} \left(\Lambda_{dd}^{-1} \right)^2 \theta_{dc}^t \tag{2.53}$$

As equações 2.52 e 2.53 mostram que as matrizes de rigidez e de massa podem ser simuladas através da parcela modal deletada ou descartada quando são associadas aos modos de flexibilidade residual. Esta particularidade torna esta base modal indicada para a análise experimental, já que não há a necessidade de conhecimento dos parâmetros físicos do sistema.

2.2.2.4 - Método de Síntese Modal Proposto

A montagem dos modelos dinâmicos dos componentes e o estabelecimento das compatibilidades das interfaces com a finalidade de formar as equações do sistema acoplado são os principais passos para o procedimento da síntese. Portanto, a precisão e eficiência da

síntese dependem da maneira que estas restrições da interface são definidas. Outra influência significativa são os tipos de coordenadas utilizadas na representação dinâmica do componente. A maioria dos métodos de síntese modal possuem uma formulação clara, que resultam em diferenças apenas na forma de forçar a compatibilidade do contorno das subestruturas e nos tipos de modos utilizados para formar o superconjunto modal.

Para que o conjunto de autovetores possa representar adequadamente os movimentos do sistema sintetizado, não importando quais sejam as suas condições de contorno, os autovetores das subestruturas precisam ser enriquecidos com os autovetores estáticos, que preveêm os movimentos devido a vinculação dos contornos das subestruturas. A combinação destes modos definem os superconjuntos modais. Alguns autores [74-76] têm observado que o superconjunto modal de flexibilidade residual é o mais indicado para análise experimental.

O método proposto assemelha-se ao método de Craig-Chang [77]. No entanto, o método de Craig-Chang é utilizado, principalmente, em uma abordagem analítica onde torna-se necessário o conhecimento dos parâmetros físicos do sistema. O método desenvolvido pode ser classificado como sendo um método de interface livre, sendo aplicado, principalmente, na análise experimental, devido a implementação dos modos de flexibilidade residual. Uma extensão similar desta metodologia também é feita para o caso de sistemas com amortecimento geral que será apresentada na seção 2.2.3.

Para a formulação do método considere duas subestruturas conectadas por uma interface comum e discretizadas pelas coordenadas físicas, como mostrado na figura 2.1. A equação do movimento para cada subestrutura, utilizando as coordenadas físicas como coordenadas internas e coordenadas de contorno é mostrada na equação 2.1. A base modal utilizada para transformar as coordenadas físicas em coordenadas modais é formada pelos modos normais de interface livre selecionados, modos de corpo rígido e pelos modos de flexibilidade residual, ou seja,

$$\Psi = \left[\delta_r \middle| \theta_r \middle| \theta_k\right] = \left[\delta_r \quad \phi_k\right] \tag{2.54}$$

No método considera-se que os modos de corpo rígido serão incorporados aos modos normais selecionados definidos por (ϕ_k). Com isso, a transformação linear que relaciona os deslocamentos físicos com as coordenadas generalizadas é definida por:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{fi} & \phi_{ki} \\ \delta_{fc} & \phi_{kc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_f \\ \mathbf{q}_k \end{Bmatrix} = \Psi \ \mathbf{q} \tag{2.55}$$

Na equação 2.55 os índices (i) e (c) representam as coordenadas físicas das subestruturas internas e do contorno, respectivamente. Nesta formulação admite-se que os modos de corpo rígido fazem parte da base modal de interface livre que são efetivamente selecionados no superconjunto modal. Aplicando-se a transformação linear de 2.55 na equação 2.1 e premultiplicando a equação resultante pela transposta do superconjunto modal, obtém-se uma equação de movimento para cada componente em termos das coordenadas modais, definida por:

$$\beta \ \ddot{\mathbf{q}} + \alpha \ \mathbf{q} = \Psi^{\,t} \mathbf{f} \tag{2.56}$$

Onde;

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_c \end{Bmatrix}$$

$$\beta = \Psi^{\,t} \mathbf{M} \ \Psi = \begin{bmatrix} \delta_f{}^{t} \mathbf{M} \delta_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \Psi^{\,t} \mathbf{K} \Psi = \begin{bmatrix} \delta_f{}^{t} \mathbf{K} \delta_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{kk} \end{bmatrix}$$

Os termos de massa e rigidez associados com os modos de flexibilidade residual mostrados na equação anterior foram definidos na equação 2.52 e 2.53. Com isso, pode-se escrever que:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{kk} \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{kk} \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

A equação 2.56 define o modelo dinâmico em coordenadas modais de cada subestrutura. A ordem desta equação é reduzida em função de (k) modos que serão selecionados na base modal mais a parcela dos modos de flexibilidade residual, que substituirão a influência dos (d) modos não selecionados. A próxima etapa no método é o procedimento de síntese das subestruturas. Para isso, considera-se a compatibilidade das coordenadas da interface comum entre as subestruturas. Na formulação proposta, a equação do movimento para duas subestruturas conectadas é uma extensão natural da equação 2.56, ou seja,

$$\Delta\,\ddot{\hat{\mathbf{q}}} + \Gamma\;\hat{\mathbf{q}} = \mathrm{E}^{\,t}\,\hat{\mathbf{f}} \tag{2.59}$$

Onde;

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} \delta^{a}_{fi} & 0 & \phi^{a}_{kli} & 0 \\ \delta^{a}_{fc} & 0 & \phi^{a}_{kc} & 0 \\ 0 & \delta^{b}_{fi} & 0 & \phi^{b}_{ki} \\ 0 & \delta^{b}_{fc} & 0 & \phi^{b}_{kc} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{a}_{i} \\ \mathbf{f}^{a}_{c} \\ \mathbf{f}^{b}_{i} \\ \mathbf{f}^{b}_{c} \end{Bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^{a}_{f} \\ \mathbf{q}^{b}_{f} \\ \mathbf{q}^{a}_{k} \\ \mathbf{q}^{b}_{k} \end{Bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \beta^{a}_{ff} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{b}_{ff} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}^{a}_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I}^{b}_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \alpha_{rr}^{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{rr}^{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{kk}^{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{kk}^{b} \end{bmatrix}$$

Para o procedimento de síntese considere as subestruturas conectadas como na figura 2.1. As equações de compatibilidade entre as subestruturas (a) e (b) podem ser definidas como:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_c^a - \mathbf{u}_c^b = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_c^a - \mathbf{f}_c^b = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.60}$$

A equação 2.60 considera um sistema em vibração livre com forças atuantes somente na interface comum. As equações do movimento em coordenadas modais são similares à equação 2.56 e podem ser escritas, de uma forma compacta, como:

$$\begin{cases} \beta_{rr}\, \ddot{\mathbf{q}}_r + \alpha_{rr}\, \mathbf{q}_r = \delta_r^t\, \mathbf{f} \\ \mathbf{I}_{kk}\, \ddot{\mathbf{q}}_k + \Lambda_{kk}\, \mathbf{q}_k = \phi_k^t\, \mathbf{f} \end{cases} \tag{2.61}$$

Como geralmente a faixa de frequência analisada é bem inferior à máxima frequência do sistema, pode-se aproximar a resposta das coordenadas modais, relativas aos modos de flexibilidade residual, através de respostas pseudo-estáticas [46], ou seja, despreza-se os termos relativos a aceleração. Com isso, através da primeira equação do sistema anterior tem-se que:

$$\alpha_{rr}\, \mathbf{q}_r = \delta_r^t\, \mathbf{f} \tag{2.62}$$

Na equação 2.62 a parcela da base de flexibilidade residual associada com a matriz de rigidez é definida pela equação 2.52. Considera-se que o vetor de forças possui excitação apenas nas coordenadas do contorno, ou seja,

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_c \end{Bmatrix} \tag{2.63}$$

Das equações 2.52, 2.62 e 2.63, tem-se que:

$$\left(\theta_{dc}\,\Lambda_{dd}^{-1}\,\theta_{dc}^{t}\right)\left(\mathbf{q}_f - \mathbf{f}_c\right) = 0 \tag{2.64}$$

Como o primeiro fator da equação 2.64 é não singular, conclui-se que:

$$\mathbf{q}_f = \mathbf{f}_c \tag{2.65}$$

Portanto, segundo as equações 2.65 e 2.60 as condições de compatibilidade podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_c^a - \mathbf{u}_c^b = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_f^a - \mathbf{q}_f^b = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.66}$$

De acordo com as equações 2.60 e 2.66 obtém-se:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_c^a - \mathbf{u}_c^b = \left[\delta_{fc}^a \quad -\delta_{fc}^b \quad \phi_{kc}^a \quad \phi_{kc}^b\right]\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_f^a - \mathbf{q}_f^b = \left[\mathbf{I} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}\right]\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.67}$$

A equação de restrição 2.67 será utilizada para reduzir a ordem do sistema, utilizando apenas as parcelas das coordenadas modais livres ($\hat{\mathbf{q}}$), ou seja, aquelas que serão mantidas na base. A matriz de restrição definida na equação 2.67 pode ser dividida em uma parcela de coordenadas dependentes e uma parcela de coordenadas independentes. Tem-se portanto que:

$$\mathbf{R} = \left[\mathbf{C}_{dd} \;\vdots\; \mathbf{C}_{dk}\right] = \begin{bmatrix} \delta_{fc}^a & -\delta_{fc}^b & \phi_{kc}^a & -\phi_{kc}^b \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{2.68}$$

As coordenadas modais podem ser escritas em função das coordenadas modais mantidas, levando-se em conta as compatibilidades do sistema, ou seja,

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{S}\,\mathbf{p} \tag{2.69}$$

Onde;

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_k^a \\ \mathbf{q}_k^b \end{Bmatrix}$$

A matriz de conectividade geral pode portanto ser obtida das equações 2.67, 2.68 e 2.69, ou seja,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{dd}^{-1}\,\mathbf{C}_{dk} \\ \mathbf{I}_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{A}}\,\phi_{kc}^{a} & \hat{\mathbf{A}}\,\phi_{kc}^{b} \\ \hat{\mathbf{A}}\,\phi_{klc}^{a} & -\hat{\mathbf{A}}\,\phi_{kc}^{b} \\ \mathbf{I}_{kk}^{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{kk}^{b} \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

Onde;

$$\mathbf{C}_{dd}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{A}}\,\delta_{fc}^{b} \\ -\hat{\mathbf{A}} & \mathbf{I}_{cc} - \hat{\mathbf{A}}\,\delta_{fc}^{b} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \left(\delta_{fc}^{a} + \delta_{fc}^{b}\right)^{-1}$$

Aplicando-se a transformação linear definida na equação 2.69 na equação de movimento do sistema, definida por 2.59, juntamente com as equações previamente definidas e premultiplicando a equação resultante pela matriz transposta da conectividade, obtém-se uma equação homogênea da forma:

$$\overline{\mathbf{M}}\,\ddot{\mathbf{p}} + \overline{\mathbf{K}}\,\mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{2.71}$$

Onde;

$$\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{S}^t\,\Delta\,\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{kk}^{a} + \phi_{kc}^{a^t}\,\mathbf{V}\,\phi_{kc}^{a} & -\phi_{kc}^{a^t}\,\mathbf{V}\,\phi_{kc}^{b} \\ -\phi_{kc}^{b^t}\,\mathbf{V}\phi_{kc}^{a} & \mathbf{I}_{kk}^{b} + \phi_{kc}^{b^t}\,\mathbf{V}\,\phi_{kc}^{b} \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{S}^t\,\Gamma\,\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \Lambda_{kk}^{a} + \phi_{kc}^{a^t}\,\hat{\mathbf{A}}\,\phi_{kc}^{a} & -\phi_{kc}^{a^t}\,\hat{\mathbf{A}}\,\phi_{kc}^{b} \\ -\phi_{kc}^{b^t}\,\hat{\mathbf{A}}\,\phi_{kc}^{a} & \Lambda_{kk}^{b} + \phi_{kc}^{b^t}\,\hat{\mathbf{A}}\,\phi_{kc}^{b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \hat{\mathbf{A}}^t\left(\beta_{ff}^{a} + \beta_{ff}^{b}\right)\hat{\mathbf{A}}$$

Resolvendo-se portanto o autoproblema reduzido definido pela equação 2.71, obtém-se os autovalores e autovetores(Σ) representativos do sistema, conectado pelas subestruturas (a) e (b) nas coordenadas modais (p). Para retornar à base modal original do sistema utiliza-se uma transformação linear inversa projetada pelas equações 2.55 e 2.69. Ou seja,

$$\zeta = \Psi \quad S \quad \Sigma \tag{2.72}$$

O procedimento de síntese utilizando dois componentes interconectados geram equações finais de fácil computação. No trabalho proposto, um procedimento iterativo é descrito quando mais de uma subestrutura estão conectadas, ou seja, as equações finais da conecção de duas subestruturas serão sempre mantidas. Para isso, as duas primeiras subestruturas conectadas, após o procedimento de síntese e cálculo do autoproblema reduzido, serão consideradas, numa próxima etapa, como uma nova e única subestrutura que estará conectada à uma terceira subestrutura. Desta forma, o processo continua através das várias subestruturas conectadas, até a montagem da estrutura global. Este procedimento tem a vantagem de um baixo custo computacional, uma vez que os tamanhos das matrizes finais dependem apenas do número de graus de liberdade das duas subestruturas, que estão conectadas a cada passo. Além disso, a precisão final dos resultados aumenta, uma vez que, o procedimento de síntese vai sendo continuamente refinado.

A obtenção de resultados satisfatórios utilizando a metodologia proposta está condicionada a alguns procedimentos básicos como:

- O número de modos selecionados de cada subestrutura deve ser no mínimo de 70% da base modal para a obtenção de precisão satisfatória. Esta faixa foi também observada nos trabalhos de Hurty [37,55] e Duarte [11].

- Atualmente, não existe um critério consistente para a indicação quantitativa de quais modos deveriam ser selecionados na base modal. Esta operação, geralmente, é definida pelo usuário, que faz esta indicação através do conhecimento da estrutura analisada. Alguns autores [11,49] utilizam uma faixa de frequência de interêsse para fornecer este índice qualitativo. Neste trabalho é proposto um novo procedimento de indicação qualitativa dos modos que fornecem critérios, que apontam quais modos são os mais aptos a permanecerem na base

modal, a fim de se obter uma precisão maior nos resultados. Esta metodologia é apresentada no capítulo 3.

- A condição necessária para que o método possa ser aplicado é que o número de coordenadas do contorno das subestruturas conectadas sejam idênticos.

- Independente do número de modos não selecionados, os modos de flexibilidade residual que simulam os modos não selecionados serão iguais aos números de coordenadas do contorno das subestruturas conectadas.

2.2.3 - Caso Amortecido

O método de síntese modal têm sido bastante utilizado para análises dinâmicas de estruturas grandes e/ou complexas. Na aplicação desta técnica, geralmente, assume-se que os sistemas não são amortecidos ou possuem amortecimento proporcional. Esta suposição define equações de movimento desacopladas com autovalores e autovetores reais. No entanto, na maioria das vezes, em uma estrutura real, o amortecimento não é proporcional, principalmente para subestruturas acopladas através de molas e/ou amortecedores lineares, interação solo/estrutura de edifícios, etc. Embora erros de modelagem ocorram quando aproxima-se uma estrutura com amortecimento geral, por estruturas amortecidas proporcionalmente, resultados satisfatórios são obtidos para muitas aplicações de engenharia [78]. Nesta classe de problemas, a solução das equações são obtidas utilizando álgebra complexa, onde geralmente, o sistema é descrito em forma de equações de estado de primeira ordem.

Nesta seção é proposto um método para aplicar a técnica de síntese modal a sistemas que possuem amortecimento geral. O método pode ser classificado como um método de interface livre, que utiliza o superconjunto modal de flexibilidade residual, como proposto no caso não-amortecido. Porém, este superconjunto é formado por autovetores complexos, devido ao amortecimento não-proporcional. A formulação dos modos de flexibilidade residual é adaptada para o caso de amortecimento geral, utilizando-se as equações de movimento das subestruturas. Estas equações são, convenientemente, transformadas em equações de estado de primeira ordem. O superconjunto modal é então utilizado para transformar as coordenadas físicas em coordenadas modais. O método propõe uma forma de forçar a compatibilidade das subestruturas, bastante similar ao caso sem amortecimento, onde é considerada a conectividade através dos deslocamentos e coordenadas generalizadas relativas às coordenadas físicas do

contorno. Evidentemente, estas equações são adaptadas ao problema de estado, que definirá equações de autosolução resultantes de ordem 2n. A similaridade da formulação com o caso não amortecido torna a metodologia generalizada, facilitando o procedimento de síntese final para qualquer tipo de sistema analisado.

2.2.3.1 - Revisão Bibliográfica

Likins [79] usou modos complexos para representar o movimento de hastes flexíveis de satélites. Hasselman e Kaplan [50] desenvolveram o método de Craig-Bampton [51] usando modos complexos de subestruturas, aplicando duas transformações sucessivas nas equações de movimento. Kana et. alli [80] sintetizou o amortecimento de um sistema baseando-se em métodos de energia utilizando subestruturas visando a obtenção dos autovalores do sistema. Craig e Chang [53] desenvolveram uma metodologia de síntese com amortecimento geral utilizando modos de interface fixa juntamente com modos de flexibilidade residual, voltados a uma abordagem analítica do sistema. Jezequel [73] empregou modos de interface fixa juntamente com modos de interface carregada, em uma análise de síntese com amortecimento não-proporcional. Craig e Chung [52] desenvolveram um procedimento generalizado de acoplamento de subestruturas na presença de amortecimento geral baseando-se no método de Goldman [40]. Os modos de interface fixa e de flexibilidade residual foram implementados e tratados de uma forma conveniente no trabalho de Glasgow e Nelson [81]. Greif e Wu [82] desenvolveram uma metodologia aplicando uma transformação sucessiva nas equações livres de amortecimento e uma outra transformação sucessiva nas equações de estado. Soni [83] desenvolveu um método de síntese com amortecimento geral, analisando casos onde havia uma variação significativa da intensidade do amortecimento, sendo que este procedimento foi validado experimentalmente [84]. Tongue e Dowell [85] analisaram uma estrutura linear ligada por subestruturas não lineares, compostas por molas e amortecedores. Hale [86] desenvolveu um método de síntese incluindo sistemas não conservativos compostos por subestruturas. Greif [82] investigou um sistema amortecido através de um método de transformações sucessivas baseando-se em modos de interface livre e modos de interface fixa. Martin e Ghlaim [54] desenvolveram um método de síntese modal utilizando molas e amortecedores para conectarem as subestruturas. Gaul [87] estudou a resposta de sistemas acoplados compostos de uma estrutura principal conectada a subestruturas leves com poucos graus de liberdade.

Lips e Vigneron [88] desenvolveram um método para sintetizar os fatores de amortecimento e outros dados modais de um satélite, baseando-se nas influências das subestruturas. Li e Stühler [89] propuseram um método acoplando as subestruturas através de molas e amortecedores, juntamente com um procedimento para correção modal de sistemas com amortecimento não proporcional. Santos [3] e Duarte [11] utilizaram o método de Martim e Ghlaim [54] para estudar estruturas acopladas por juntas mecânicas em sistemas não lineares.

Em nenhum desses trabalhos, entretanto, utilizou-se uma metodologia generalizada de síntese modal que aborda simultaneamente os casos com amortecimento geral e sem amortecimento, através de um superconjunto modal de flexibilidade residual. Além disso, a técnica de síntese proposta neste trabalho é adaptada a um novo procedimento de remontagem das subestruturas e também condicionada a um critério de eliminação automática de modos. Esta metodologia pode facilitar significativamente a análise modal experimental.

2.2.3.2 - Método de Síntese Modal Amortecido Proposto

Para a formulação do método proposto, considere duas subestruturas distintas (a) e (b) conectadas através de uma interface comum, como mostrado na figura 2.1. Neste caso, porém, uma parcela de amortecimento geral acompanha o movimento da estrutura. As equações de movimento para uma certa subestrutura com amortecimento geral pode ser definida por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{ii} & \mathbf{m}_{ic} \\ \mathbf{m}_{ci} & \mathbf{m}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{ii} & \mathbf{c}_{ic} \\ \mathbf{c}_{ci} & \mathbf{c}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i \\ \dot{\mathbf{u}}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ic} \\ \mathbf{k}_{ci} & \mathbf{k}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_i \\ \mathbf{f}_c \end{Bmatrix} \tag{2.73}$$

A equação 2.73 pode ser representada genericamente por:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{2.74}$$

Na equação 2.74 a matriz de amortecimento é não proporcional à matriz de massa e/ou não proporcional à matriz de rigidez. Com isso, a solução da equação diferencial nesta forma é complicada, uma vez que os termos da parcela de amortecimento não são desacoplados pela transformação linear que utiliza a base modal do sistema não amortecido. A forma mais

conveniente de solução da equação 2.74 é transformá-la em uma equação diferencial de primeira ordem de tamanho 2n [3]. Ou seja,

$$\mathbf{A}\,\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\,\mathbf{y} = \mathbf{f}' \tag{2.75}$$

Onde;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{f}' = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

A solução homogênea da equação diferencial 2.75 fornece os autovalores e autovetores complexos do sistema fisico com 2n graus de liberdade. A vantagem da utilização da equação de estado é a possibilidade de desacoplar a equação do movimento. Além disso, a base modal determinada está relacionada com os autovalores e autovetores do sistema original com (n) graus de liberdade [71]. As coordenadas fisicas são substituídas pelas coordenadas modais através da seguinte transformação linear:

$$\mathbf{y} = \hat{\Psi}\,\eta \tag{2.76}$$

Utilizando-se a transformação de 2.75 em 2.76 e premulticando o resultado pela transposta da matriz modal, obtém-se um conjunto de equações diferenciais desacopladas da forma:

$$\dot{\eta} + \Omega \eta = \hat{\Psi}^t f^t \tag{2.77}$$

Onde tem-se as propriedades de normalização da matriz de autovetores de estado:

$$\hat{\Psi}^t \mathbf{A} \hat{\Psi} = \mathbf{I}$$
$$\hat{\Psi}^t \mathbf{B} \hat{\Psi} = \Omega \tag{2.78}$$

Para o caso não-amortecido os modos de flexibilidade residual foram definidos na equação 2.49. Para o caso amortecido os modos de flexibilidade residual são obtidos da mesma forma, exceto que a base modal será complexa. Ou seja,

$$\hat{\delta}_f = \hat{\theta}_d \hat{\Lambda}_{dd}^{-1} \hat{\theta}_{dc}^t \tag{2.79}$$

Em um procedimento similar ao definido pelas equações 2.50 e 2.51 pode-se mostrar que as parcelas de inércia e rigidez da matriz dinâmica podem ser definidas por:

$$\hat{\alpha}_{ff} = \hat{\delta}_f^t \mathbf{B} \hat{\delta}_f = \hat{\theta}_{dc} \hat{\Lambda}_{dd}^{-1} \hat{\theta}_{dc}^t \tag{2.80}$$

$$\hat{\beta}_{ff} = \hat{\delta}_f^t \mathbf{A} \hat{\delta}_f = \hat{\theta}_{dc} \left(\hat{\Lambda}_{dd}^{-1}\right)^2 \hat{\theta}_{dc}^t \tag{2.81}$$

Da mesma forma, utiliza-se o superconjunto modal de flexibilidade residual que é composto pelos modos normais de interface livre selecionados, obtidos da solução homogênea da equação 2.74, modos de corpo rígido e modos de flexibilidade residual, que são obtidos pelos modos que são não selecionados ou não considerados na base modal, ou seja,

$$\hat{\Psi} = \left[\hat{\delta}_f \middle| \hat{\theta}_r \middle| \hat{\theta}_k\right] = \left[\hat{\delta}_f \quad \hat{\phi}_k\right] \tag{2.82}$$

No método considera-se que os modos de corpo rígido serão incorporados aos modos normais selecionados definidos por $(\hat{\phi}_k)$. Com isso, a transformação linear que relaciona os deslocamentos físicos com as coordenadas generalizadas é definida por:

$$y = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{fi} & \hat{\phi}_{ki} \\ \hat{\delta}_{fc} & \hat{\phi}_{kc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_f \\ \eta_k \end{Bmatrix} = \hat{\Psi} \eta \tag{2.83}$$

Aplicando-se a transformação linear de 2.83 na equação 2.75 e premultiplicando a equação resultante pela transposta do superconjunto modal, obtém-se uma equação do movimento de cada componente em termos das coordenadas modais, definida por:

$$\hat{\beta}\,\ddot{\eta} + \hat{\alpha}\,\eta = \hat{\Psi}^t\,\mathbf{f}^t \tag{2.84}$$

Onde;

$$\hat{\beta} = \hat{\Psi}^t\,\mathbf{A}\,\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\Psi}^t\,\mathbf{B}\,\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\Lambda}_{kk} \end{bmatrix}$$

A equação do movimento para duas subestruturas conectadas é dada por:

$$\hat{\Delta}\,\ddot{\eta} + \hat{\Gamma}\,\eta = \overline{\mathbf{E}}^t\,\bar{\mathbf{f}} \tag{2.85}$$

Onde;

$$\overline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix}
\hat{\delta}^{a}_{fi} & 0 & 0 & 0 & \hat{\phi}^{a}_{ki} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda\hat{\delta}^{a}_{fi} & 0 & 0 & 0 & \lambda\hat{\phi}^{a}_{ki} & 0 & 0 \\
\hat{\delta}^{a}_{fc} & 0 & 0 & 0 & \hat{\phi}^{a}_{kc} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda\hat{\delta}^{a}_{fc} & 0 & 0 & 0 & \lambda\hat{\phi}^{a}_{kc} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \hat{\delta}^{b}_{fi} & 0 & 0 & 0 & \hat{\phi}^{b}_{ki} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda\hat{\delta}^{b}_{fi} & 0 & 0 & 0 & \lambda\hat{\phi}^{b}_{ki} \\
0 & 0 & \hat{\delta}^{b}_{fc} & 0 & 0 & 0 & \hat{\phi}^{b}_{kc} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda\hat{\delta}^{b}_{fc} & 0 & 0 & 0 & \lambda\hat{\phi}^{b}_{kc}
\end{bmatrix}$$

$$\bar{f} = \begin{Bmatrix} 0^a \\ f_c^a \\ 0^b \\ f_c^b \end{Bmatrix} \qquad \eta = \begin{Bmatrix} \eta_f^a \\ \dot{\eta}_f^a \\ \eta_f^b \\ \dot{\eta}_f^b \\ \eta_k^a \\ \dot{\eta}_k^a \\ \eta_k^b \\ \dot{\eta}_k^b \end{Bmatrix}$$

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{ff}^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\beta}_{ff}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk}^a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{kk}^b \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{ff}^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\alpha}_{ff}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\Lambda}_{kk}^a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\Lambda}_{kk}^b \end{bmatrix}$$

O procedimento de síntese de dois componentes amortecidos conectados é feito de uma maneira similar ao caso não-amortecido, utilizando uma formulação com álgebra complexa. A diferença de análise entre os dois casos está na autosolução do sistema, que para o caso amortecido fornece 2n equações de movimento, através da formulação de estado. Com isso, é feita uma adaptação das equações de compatibilidade utilizando-se apenas as coordenadas do contorno e as pseudo-forças, juntamente com 2n modos selecionados das subestruturas. Esta suposição não compromete o sistema fisico, uma vez que, o sistema real possui apenas n graus de liberdade com possíveis n autovalores e autovetores. A forma de obtenção da compatibilidade das parcelas relativas às coordenadas modais é mostrada nas equações 2.60 à 2.66. Portanto, através do procedimento de síntese das duas subestruturas conectadas, obtém-se as equações de compatibilidade da forma:

$$\begin{cases} u_c^a - u_c^b = 0 \\ \eta_f^a - \eta_f^b = 0 \end{cases} \tag{2.86}$$

De acordo com as equações 2.85 e 2.86 obtém-se a seguinte matriz de restrição:

$$\overline{\mathbf{R}} = \left[\mathbf{C}_{dd} \vdots \mathbf{C}_{dk}\right] = \begin{bmatrix} \hat{\delta}^{a}_{fc} & -\hat{\delta}^{b}_{fc} & \hat{\phi}^{a}_{kc} & -\hat{\phi}^{b}_{kc} \\ \mathbf{I}^{a} & \mathbf{I}^{b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad (2.87)$$

As coordenadas modais podem ser escritas em função das coordenadas modais mantidas, levando-se em conta as compatibilidades do sistema, ou seja,

$$\eta = \overline{\mathbf{S}}\ \hat{\mathbf{p}} \qquad (2.88)$$

Onde;

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{Bmatrix} \eta^{a}_{k} \\ \eta^{b}_{k} \end{Bmatrix}$$

Portanto, a matriz de conectividade geral pode ser obtida das equações 2.86, 2.87 e 2.88, ou seja,

$$\overline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}^{-1}_{dd}\ \mathbf{C}_{dk} \\ \mathbf{I}_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}\ \hat{\phi}^{a}_{kc} & \mathbf{D}\ \hat{\phi}^{b}_{kc} \\ \mathbf{D}\ \hat{\phi}^{a}_{kc} & -\mathbf{D}\ \hat{\phi}^{b}_{kc} \\ \mathbf{I}^{a}_{kk} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}^{b}_{kk} \end{bmatrix} \qquad (2.89)$$

Onde;

$$\mathbf{C}^{-1}_{dd} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{D}\ \hat{\delta}^{b}_{fc} \\ -\mathbf{D} & \left(\mathbf{I}_{cc} - \mathbf{D}\ \hat{\delta}^{b}_{fc}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \left(\hat{\delta}^{a}_{fc} + \hat{\delta}^{b}_{fc}\right)^{-1}$$

Aplicando-se a transformação linear definida na equação 2.88 na equação do movimento do sistema definida em 2.85, juntamente com as relações previamente definidas, e premultiplicando esta equação pela matriz transposta de conectividade, obtém-se uma equação homogênea da forma:

$$\hat{\mathbf{M}}\,\ddot{\hat{\mathbf{p}}} + \hat{\mathbf{K}}\,\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \tag{2.90}$$

Onde;

$$\hat{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{S}}^{t}\hat{\Delta}\ \overline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{a}_{kk} + \hat{\phi}^{a^{t}}_{kc}\,\hat{\mathbf{V}}\,\hat{\phi}^{a}_{kc} & -\hat{\phi}^{a^{t}}_{kc}\,\hat{\mathbf{V}}\,\hat{\phi}^{b}_{kc} \\ -\hat{\phi}^{b^{t}}_{kc}\,\hat{\mathbf{V}}\,\hat{\phi}^{a}_{kc} & \mathbf{I}^{b}_{kk} + \hat{\phi}^{b^{t}}_{kc}\,\hat{\mathbf{V}}\,\hat{\phi}^{b}_{kc} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \overline{\mathbf{S}}^{t}\hat{\Gamma}\ \overline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}^{a}_{kk} + \hat{\phi}^{a^{t}}_{kc}\,\mathbf{D}\hat{\phi}^{a}_{kc} & -\hat{\phi}^{a^{t}}_{kc}\mathbf{D}\,\hat{\phi}^{b}_{kc} \\ -\hat{\phi}^{b^{t}}_{kc}\mathbf{D}\,\hat{\phi}^{a}_{kc} & \hat{\Lambda}^{b}_{kk} + \hat{\phi}^{b^{t}}_{kc}\mathbf{D}\,\hat{\phi}^{b}_{kc} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{D}^{t}\left(\overline{\beta}^{a}_{rr} + \overline{\beta}^{b}_{rr}\right)\mathbf{D}$$

A equação 2.90 representa a equação de movimento sintetizada do sistema completo. Esta equação é similar àquela do sistema global não-amortecido, equação 2.71. A análise do autoproblema de 2.90 fornece os autovalores e autovetores complexos $(\hat{\Sigma})$, que são utilizados para retornar à base modal original do sistema. Esse retorno é feito utilizando uma substituição inversa nas equações de transformação linear que modificam a base de coordenadas. Esta operação fornece uma base modal reduzida da forma:

$$\hat{\zeta} = \hat{\Psi}\ \ \overline{\mathbf{S}}\ \ \hat{\Sigma} \tag{2.91}$$

2.2.4 - Expectativas Futuras do Método

Desde o trabalho pioneiro de Hurty em 1965 o método de síntese modal têm sofrido crescentes aperfeiçoamentos. A sua aplicação têm sido feita em diferentes tipos de estruturas, com a obtenção de resultados cada vez mais precisos, a um custo computacional reduzido. Este aperfeiçoamento, porém, foi observado até a década de 90. Atualmente, as pesquisas têm avançado no sentido da aplicação da técnica de síntese modal, como uma ferramenta para a análise de problemas estruturais complexos, no qual a subdivisão da estrutura em componentes, simplifica a solução do problema [90-93].

Dentre os trabalhos mais recentes sobre inovações na metodologia de síntese, destacam-se o trabalho de Chiao [94], que utiliza uma técnica de mínimos quadrados para redução de coordenadas físicas de cada subestrutura e o trabalho de Duarte e Ewins [95] que apresentam

uma contribuição ao método, através de uma formulação simplificada, na qual é possivel utilizar dados experimentais aos métodos de Macneal, Hintz e Craig-Bampton. Balmés [96] introduziu um procedimento de acoplamento de estruturas com computação eficiente e robusta. Shu e Chu [97] simplificaram a metodologia de síntese através da utilização de um superelemento contendo um número indefinido de pontos nodais.

Um dos inconvenientes do método de síntese, que têm sido observado por pesquisadores [3,11,53] é a importância de se escolher adequadamente os modos que serão selecionados ou não selecionados da base modal. Observa-se que a escolha inadequada dos modos a serem não selecionados da base modal pode provocar imprecisões no resultado final da síntese, principalmente, em casos onde busca-se melhores resultados da síntese utilizando as bases modais das subestruturas.

Baseado neste problema, o método proposto neste trabalho traz uma contribuição, estabelecendo um critério, que fornece uma indicação qualitativa de quais modos seriam os mais indicados a serem não selecionados. Com isso, o usuário não necessita do prévio conhecimento da estrutura analisada e a metodologia de síntese pode ser automatizada, tornando-a mais rápida, prática e precisa. Além disso, quando se utilizam técnicas experimentais, a formulação proposta, através do superconjunto modal de flexibilidade residual, torna-se extremamente conveniente e prática. Esta metodologia é apresentada no capítulo 3.

Capítulo 3

Critério de Eliminação Automática de Modos

3.1 - Comentários Gerais

Os processos de síntese modal de sistemas conservativos ou não conservativos possuem um princípio comum, que é a análise de um problema de tamanho reduzido obtido, basicamente, através de duas operações lineares:

1 - Uma transformação linear nas coordenadas físicas das subestruturas utilizando uma base modal truncada.

2 - Uma transformação linear nas coordenadas generalizadas utilizando uma matriz de compatibilidades definida pelas coordenadas físicas do contorno das subestruturas.

Na primeira redução é utilizado uma certa quantidade de modos de vibrar, sendo descartados a outra parte desses modos. Alguns autores [11,41] observaram que para uma certa quantidade de modos selecionados, podem ser identificados com precisão satisfatória cerca de 65 a 80% de modos do sistema. Neste contexto, verifica-se que a utilização de conjuntos de modos diferentes influenciam significadamente o processo de síntese.

Os pesquisadores têm feito a escolha dos modos selecionados/não selecionados utilizando, simplesmente, uma seleção aleatória de conjuntos de modos ou uma tentativa baseada em um conhecimento prévio da estrutura analisada. Este processo além de oneroso, pode levar a obtenção de resultados insatisfatórios, limitando o procedimento de síntese modal.

O trabalho de Rubin [49] sugere uma forma quantitativa e qualitativa, extremamente conservativa, de se manter determinados modos na base modal das subestruturas. Ele sugere que os modos das subestruturas a serem retidos sejam todos aqueles modos cujas frequências

naturais sejam maiores do que 40% da menor frequência natural de interêsse e menores do que 2.25 vezes a maior frequência natural de interêsse.

Portanto, ainda não foi criteriosamente investigado um procedimento que forneça um aspecto qualitativo dos modos que serão selecionados e/ou não selecionados de cada subestrutura.

Nos processos de síntese modal que utilizam o superconjunto modal de flexibilidade residual, o usuário também define quais modos deseja retirar da base modal. Estes modos não selecionados vão ser utilizados para definir os modos de flexibilidade residual que serão utilizados para enriquecer a base modal de cada subestrutura. Neste caso, mesmo mantendo-se um número suficiente de modos na base, corre-se o risco de deletar modos que seriam significativos na identificação do sistema original. Este fato também é observado na maioria dos métodos de síntese modal.

O trabalho proposto propõe uma maneira de se obter este índice qualitativo, com a finalidade de tornar o método de síntese modal, principalmente o método com flexibilidade residual, mais prático e preciso, aumentando ainda mais a sua potencialidade e aplicabilidade.

3.2 - Formulação do Critério

Após diversas simulações com exemplos numéricos, observou-se que quando o nível de energia do contorno das subestruturas era pequeno, obtinham-se resultados mais precisos para os autovalores e autovetores sintetizados. Este fato pode ser observado através da figura 3.1, que apresenta uma combinação hipotética de modos de duas subestruturas conectadas, que formam a estrutura completa. Neste sistema são mostrados os vetores E_i e E_c que representam os deslocamentos relativos dos nós internos e do contorno de cada subestrutura, respectivamente. Estes deslocamentos podem ser entendidos como sendo níveis de energia de cada nó, e através destes pode-se obter uma comparação relativa entre os níveis de energia do contorno e dos nós internos.

Analisando-se este exemplo ilustrativo observa-se que para cada subestrutura isolada quanto menor a energia das coordenadas do contorno relativamente à energia das coordenadas internas para um determinado modo, menor será a influência deste modo na síntese do sistema completo. Esta suposição é fundamentada no fato de que as parcelas internas de energia dos modos selecionados são as principais responsáveis pelo movimento de vibração do sistema

completo, já que as parcelas relativas ao contorno das subestruturas ficarão naturalmente sujeitas às condicões impostas pelo acoplamento. Com isso, a comparação entre o contorno e as parcelas internas das subestruturas fornece um índice de qualidade entre os modos de uma dada subestrutura. Esta suposição é a base do critério de eliminação automática de modos proposta neste trabalho, ou seja, se para um determinado modo o acoplamento é muito significativo em relação aos nós internos, existe uma grande probabilidade de se obter uma baixa convergência nos resultados finais da síntese.

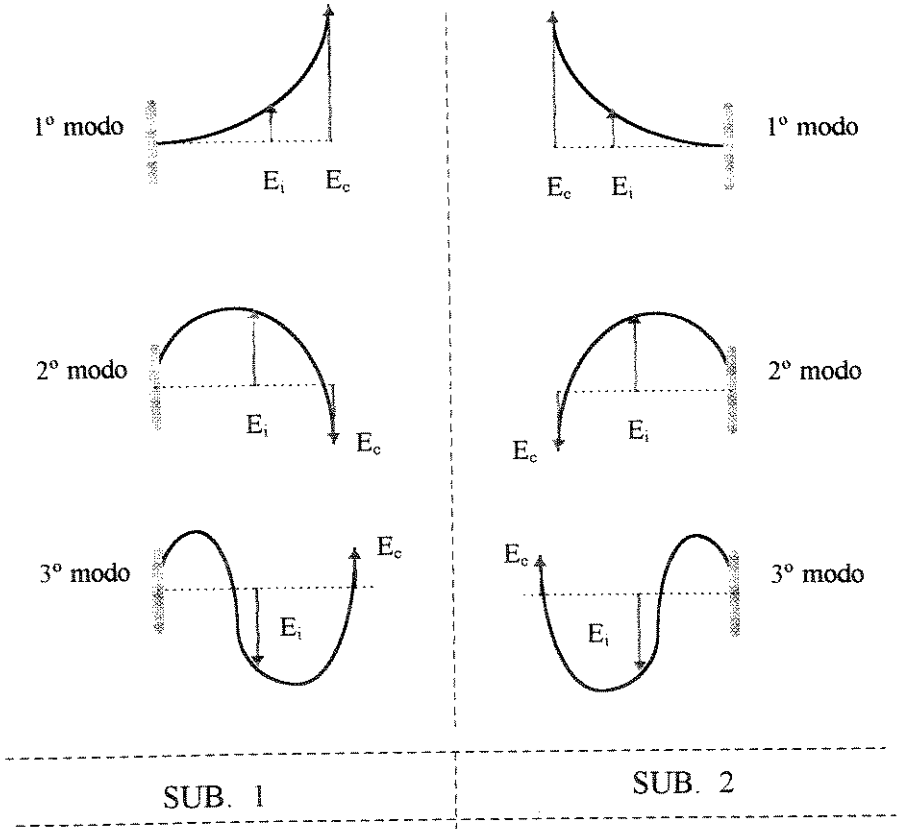


Figura 3.1 - Forma de vibrar hipotética de três modos de duas subestruturas conectadas, indicando a variação de energia do contorno em relação as coordenadas internas.

Analiticamente, a medida desta energia relativa pode ser explicada através da equação 2.3, onde as coordenadas modais relacionam-se com o vetor de coordenadas fisicas de cada subestrutura através da inversa da matriz modal. Assim sendo, é possível observar que a inversa da matriz modal proporciona uma ponderação dos elementos internos e do contorno das coordenadas fisicas, na formação dos graus de liberdade das coordenadas modais. Com isso, na montagem da estrutura completa, os graus de liberdade do contorno de cada subestrutura ficarão, necessária e diretamente, sujeitos a novas condições impostas pelo

acoplamento. Os graus de liberdade do interior de cada subestrutura, por sua vez, tendem a sofrer apenas de forma indireta os efeitos impostos pelas novas condições de acoplamento. Portanto, a manutenção dos modos que possuem menor influência nos graus de liberdade físicos do contorno representam uma conservação da informação de menor incerteza das bases modais que irão compor a superestrutura.

3.2.1 - Caso Unidirecional

3.2.1.1 - Peso Relativo Dos Modos

Segundo o que foi exposto anteriormente, foi definido um peso relativo de cada modo, com a finalidade de se avaliar o nível de energia das parcelas do contorno com relação às parcelas internas das subestruturas.

Para definir este peso relativo, a equação 2.3 é escrita novamente utilizando um novo formato. Esta equação indica a transformação linear aplicada às coordenadas físicas de uma subestrutura, utilizando a sua base modal, normalizada pela massa, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_i \\ \boldsymbol{\phi}_c \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad = \boldsymbol{\phi}_i \ \mathbf{q} \tag{3.1}$$

Pré-multiplicando a equação 3.1 pela inversa da matriz modal pode-se escrever as coordenadas modais como:

$$\mathbf{q} = \left[\left(\boldsymbol{\phi}_i^{-1}\right)^t \quad \left(\boldsymbol{\phi}_c^{-1}\right)^t \right] \mathbf{M} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_c \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

Ou seja;

$$\mathbf{q} = \left(\boldsymbol{\phi}_i^{-1}\right)^t \mathbf{M}\ \mathbf{u}_i \ + \ \left(\boldsymbol{\phi}_c^{-1}\right)^t \mathbf{M}\ \mathbf{u}_c$$

Para modos reais, a base modal inversa pode ser obtida por:

$$\boldsymbol{\phi}^{-1} = \boldsymbol{\phi}^t \mathbf{M} \tag{3.3}$$

Para sistemas não conservativos, que forneceram modos complexos, a base modal inversa pode ser obtida por:

$$\bar{\phi}^{-1} = \bar{\phi}^{t} \mathbf{A} \tag{3.4}$$

Na equação 3.2, as partições da matriz inversa da base modal referem-se às parcelas das coordenadas físicas internas e do contorno de uma subestrutura. A segunda parcela da equação 3.2 pondera os valores das coordenadas do contorno na formação das coordenadas modais.

Portanto, um determinado modo de uma subestrutura possui uma maior influência nos deslocamentos modais da estrutura global, se maior for a parcela modal referente ao contorno desta subestrutura. Para medir esta influência, definiu-se um peso entre estas parcelas utilizando-se a norma Euclidiana de um vetor ou norma L2 [98]. Este peso, para um modo específico, é dado por:

$$\varepsilon^{m} = \frac{\left\| \left(\phi_{cj}^{-1} \right)^{t} \right\|_2}{\left\| \left(\phi_{ik}^{-1} \right)^{t} \right\|_2} = \frac{\sqrt{\left| \phi_{1j}^{-1} \right|^2 + \left| \phi_{2j}^{-1} \right|^2 + \ldots\ldots\ldots + \left| \phi_{cj}^{-1} \right|^2}}{\sqrt{\left| \phi_{1k}^{-1} \right|^2 + \left| \phi_{2k}^{-1} \right|^2 + \ldots\ldots\ldots + \left| \phi_{ik}^{-1} \right|^2}} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{j = 1, \ldots\ldots, nc} \qquad \mathbf{e} \qquad \mathbf{k = 1, \ldots\ldots\ldots, ni}$$

Os pesos modais definidos pela equação anterior dependem de (nc) parcelas relativas ao contorno e (ni) parcelas relativas aos nós internos de uma subestrutura, para cada modo ponderado. Desta forma, a equação anterior é geral, sendo válida para sistemas não amortecido ou com amortecimento geral, sendo que, neste caso, as parcelas modais são computadas como sendo o módulo de um número complexo. Na equação 3.5 serão computados (m) pesos, relativos às bases modais que influenciam o movimento dos graus de liberdade internos e dos graus de liberdade do contorno, segundo a norma do vetor modal (j), sendo que (ϕ_{ij}, ϕ_{cj}) representam os termos relativos às coordenadas internas e do contorno das subestruturas, respectivamente.

Como foi visto, o número de modos a serem selecionados de cada subestrutura é definido pelo usuário. Em função desta definição, a sequência de pesos relativos, definidos pela equação 3.5, mostra uma primeira classificação destes modos para cada subestrutura, ou seja, uma varredura dos (m) modos fornecerá o nível de energia, relativo ao contorno, das

subestruturas conectadas. Porém, o índice de qualidade final deve ser obtido através da avaliação dos modos mutuamente conectados.

3.2.1.2 - Critério de Eliminação Automática (CEA)

O peso relativo de cada modo das subestruturas, definido anteriormente, pode servir como um indicativo da energia local de cada modo, porém existe o acoplamento mútuo entre os vários modos das subestruturas conectadas que podem modificar os níveis de energia do contorno. Com isso, os parâmetros modais do contorno e interior de uma subestrutura, ponderada de uma forma desacoplada, ou seja, considerando apenas a energia isolada de cada modo não seria uma medida suficientemente sensível para promover uma convergência eficiente da síntese. Isto ocorre, provavelmente, por causa da modificação da energia do contorno devido a associação de modos das subestruturas conectadas. Com isso, mesmo que um certo modo de uma subestrutura possua uma influência pequena no contorno, quando este modo for, naturalmente, associado com os outros modos da outra subestrutura conectada, esta vinculação pode acarretar um aumento do nível de energia no contorno, influenciando o processo final da síntese. Portanto, torna-se necessário uma avaliação não só dos modos isolados de cada subestrutura, mas também uma avaliação destes modos associados com os modos da subestrutura atualmente conectada.

Portanto, o critério de seleção de modos é definido a partir da influência das coordenadas modais do contorno juntamente com a influência relativa entre os modos das respectivas subestruturas conectadas. Esta influência é medida através de um peso relativo que fornecerá um índice de qualidade de um modo específico para cada subestrutura. Serão considerados candidatos à eliminação, aqueles modos com maior influência nas coordenadas físicas do contorno.

Esta ponderação feita através da medida da energia relativa do contorno utiliza os pesos dos modos individuais das subestruturas, definido pela equação 3.5. Considerando duas subestruturas (a e b) conectadas, as influências dos modos da subestrutura (b) sobre um jésimo modo da subestrutura (a) ou vice-versa é avaliada através do módulo dos pesos relativos, ou seja;

$$\mathbf{Z}_{(n\,x\,m)} = \begin{bmatrix} \left|{}_a\varepsilon^1 - {}_b\varepsilon^1\right| & \left|{}_a\varepsilon^2 - {}_b\varepsilon^1\right| & \cdots & \left|{}_a\varepsilon^m - {}_b\varepsilon^1\right| \\ \left|{}_a\varepsilon^1 - {}_b\varepsilon^2\right| & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \left|{}_a\varepsilon^1 - {}_b\varepsilon^n\right| & \cdots & \cdots & \left|{}_a\varepsilon^m - {}_b\varepsilon^n\right| \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

A matriz [Z] definida pela equação 3.6 possui (n) linhas representando os (n) possíveis pesos modais relativos da subestrutura (b) e (m) colunas representando os (m) possíveis pesos modais relativos da subestrutura (a). O critério de eliminação automática (CEA) é definido através da soma algébrica das parcelas de cada linha, fornecendo um índice qualitativo para os modos da subestrutura (a) e também pela soma algébrica das parcelas de cada coluna, fornecendo um índice qualitativo para os modos da subestrutura (b). Este procedimento acopla os vários pesos individuais dos modos das subestruturas com os possíveis pesos dos modos individuais da outra subestrutura conectada, fornecendo uma nova quantificação da energia do contorno relativo à energia dos nós internos. Com isso, este índice é dado por:

$${}_b\mathbf{N}^j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}_{ij} \;\; ; \;\; j = 1,\ldots,m \qquad (3.7)$$

$${}_a\mathbf{N}^i = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{Z}_{ij} \;\; ; \;\; i = 1,\ldots,n \qquad (3.8)$$

Portanto, o maior valor do peso relativo associado definido pela equação 3.7 para um modo (j) da subestrutura (a) tende a representar uma maior influência na região do contorno entre as subestruturas conectadas. Se na região de conecção entre as subestruturas esta influência for menor, a tendência é que a energia dos nós internos das subestruturas preservaram o movimento da estrutura global. Portanto, um critério consistente é a eliminação dos valores de maior influência no contorno, que é medida através do maior peso relativo associado, definido pelas equações 3.7 e 3.8.

3.2.2 - Caso Geral - Tridimensional

A análise generalizada de uma estrutura real através do método dos elementos finitos ou através do método experimental utiliza, geralmente, coordenadas com um número maior de direções medidas. Na técnica experimental, por exemplo, a necessidade de análise de algum ponto específico ou as próprias restrições da estrutura fazem com que diferentes pontos de medida em diferentes direções sejam utilizados. Com isso, a forma de vibrar da estrutura definida através dos pontos analisados também ocorrerá em mais de uma direção. Nestes casos, para as subestruturas conectadas a influência do contorno com relação as coordenadas internas tem que ser avaliada nas direções de análise.

Deve-se ressaltar que o procedimento de determinação do índice qualitativo dos modos para o caso unidirecional, descrito na seção anterior, é aplicado também ao caso geral tridimensional, uma vez que, a suposição de influência do contorno para a determinação dos pesos modais possui uma formulação equivalente. A principal diferença é que um modo específico de uma subestrutura possui um índice qualitativo para cada direção analisada.

Portanto, também para o caso tridimensional considera-se válida a suposição de que quanto maior a influência (energia) do contorno com relação às coordenadas internas, maior a incerteza deste modo quanto a convergência da síntese modal. Com isso, este modo seria um candidato natural a ser eliminado da base modal.

O trabalho apresenta o critério de eliminação automática de modos considerando-se três direções possíveis (x,y,z) para cada coordenada das subestruturas.

3.2.2.1 - Peso Relativo Dos Modos

No caso tridimensional adota-se, novamente, a norma Euclidiana para a definição dos pesos relativos de cada modo das subestruturas. A diferença é que para cada modo obtém-se um vetor de pesos modais relativos à cada direção de análise (x,y,z). Assim, como definido pela equação 3.5, tem-se que:

$$\varepsilon_x^{\,m} = \frac{\left\| \left(\phi_{cj}^{-1} \right)^t \right\|_2}{\left\| \left(\phi_{ik}^{-1} \right)^t \right\|_2} = \frac{\sqrt{\left| \phi_{1j}^{-1} \right|_x^2 + \left| \phi_{2j}^{-1} \right|_x^2 + \ldots\ldots\ldots + \left| \phi_{cj}^{-1} \right|_x^2}}{\sqrt{\left| \phi_{1k}^{-1} \right|_x^2 + \left| \phi_{2k}^{-1} \right|_x^2 + \ldots\ldots\ldots + \left| \phi_{ik}^{-1} \right|_x^2}} \qquad (3.9)$$

$$\varepsilon_y^{\,m} = \frac{\left\| \left(\phi_{cj}^{-1} \right)^t \right\|_2}{\left\| \left(\phi_{ij}^{-1} \right)^t \right\|_2} = \frac{\sqrt{\left| \phi_{1j}^{-1} \right|_y^2 + \left| \phi_{2j}^{-1} \right|_y^2 + \ldots\ldots\ldots + \left| \phi_{cj}^{-1} \right|_y^2}}{\sqrt{\left| \phi_{1k}^{-1} \right|_y^2 + \left| \phi_{2k}^{-1} \right|_y^2 + \ldots\ldots\ldots + \left| \phi_{ik}^{-1} \right|_y^2}} \qquad (3.10)$$

$$\varepsilon_z^{\,m} = \frac{\left\| \left(\phi_{cj}^{-1} \right)^t \right\|_2}{\left\| \left(\phi_{ij}^{-1} \right)^t \right\|_2} = \frac{\sqrt{\left| \phi_{1j}^{-1} \right|_z^2 + \left| \phi_{2j}^{-1} \right|_z^2 + \ldots\ldots\ldots + \left| \phi_{cj}^{-1} \right|_z^2}}{\sqrt{\left| \phi_{1k}^{-1} \right|_z^2 + \left| \phi_{2k}^{-1} \right|_z^2 + \ldots\ldots\ldots + \left| \phi_{ik}^{-1} \right|_z^2}} \qquad (3.11)$$

j = 1, ..., nc e k= 1,....., ni

Com isso, o peso modal relativo é dado por: $\bar{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_x^{\,m}, \varepsilon_y^{\,m}, \varepsilon_z^{\,m} \right\}$

3.2.2.2 - Critério De Eliminação Automática (CEA)

Neste caso, o índice qualitativo final de cada modo será obtido utilizando-se os pesos modais relativos definidos pela equação 3.12, combinando-se um modo específico de uma subestrutura com os outros modos da outra subestrutura conectada. Assim como no caso unidirecional, é feito um procedimento similar para a obtenção do CEA para o caso tridimensional, exceto que o valor deste índice deve ser obtido através da soma relativa ponderada na três direções. A norma desta soma fornece o valor final para o índice, que será utilizado como um indicativo daqueles modos mais adequados a serem selecionados ou não selecionados da base modal de cada subestrutura. Portanto, inicialmente uma ponderação similar à equação 3.6 é obtida para cada direção de análise, ou seja;

$$\mathbf{Z}^{x}_{(n \times m)} = \begin{bmatrix} \left| {}_a\varepsilon_x^{\,1} - {}_b\varepsilon_x^{\,1} \right| & \left| {}_a\varepsilon_x^{\,2} - {}_b\varepsilon_x^{\,1} \right| & \cdots & \left| {}_a\varepsilon_x^{\,m} - {}_b\varepsilon_x^{\,1} \right| \\ \left| {}_a\varepsilon_x^{\,1} - {}_b\varepsilon_x^{\,2} \right| & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \left| {}_a\varepsilon_x^{\,1} - {}_b\varepsilon_x^{\,n} \right| & \cdots & \cdots & \left| {}_a\varepsilon_x^{\,m} - {}_b\varepsilon_x^{\,n} \right| \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

$$\mathbf{Z}^{y}{}_{(n\,x\,m)} = \begin{bmatrix} \left|{}_{a}\varepsilon_{y}{}^{1} - {}_{b}\varepsilon_{y}{}^{1}\right| & \left|{}_{a}\varepsilon_{y}{}^{2} - {}_{b}\varepsilon_{y}{}^{1}\right| & \cdots & \left|{}_{a}\varepsilon_{y}{}^{m} - {}_{b}\varepsilon_{y}{}^{1}\right| \\ \left|{}_{a}\varepsilon_{y}{}^{1} - {}_{b}\varepsilon_{y}{}^{2}\right| & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \left|{}_{a}\varepsilon_{y}{}^{1} - {}_{b}\varepsilon_{y}{}^{n}\right| & \cdots & \cdots & \left|{}_{a}\varepsilon_{y}{}^{m} - {}_{b}\varepsilon_{y}{}^{n}\right| \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{Z}^{z}{}_{(n\,x\,m)} = \begin{bmatrix} \left|{}_{a}\varepsilon_{z}{}^{1} - {}_{b}\varepsilon_{z}{}^{1}\right| & \left|{}_{a}\varepsilon_{z}{}^{2} - {}_{b}\varepsilon_{z}{}^{1}\right| & \cdots & \left|{}_{a}\varepsilon_{z}{}^{m} - {}_{b}\varepsilon_{z}{}^{1}\right| \\ \left|{}_{a}\varepsilon_{z}{}^{1} - {}_{b}\varepsilon_{z}{}^{2}\right| & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \left|{}_{a}\varepsilon_{z}{}^{1} - {}_{b}\varepsilon_{z}{}^{n}\right| & \cdots & \cdots & \left|{}_{a}\varepsilon_{z}{}^{m} - {}_{b}\varepsilon_{z}{}^{n}\right| \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

O procedimento de acoplamento dos vários modos das subestruturas pode agora ser determinado de maneira equivalente ao definido pelas equações 3.7 e 3.8, exceto que os pesos finais de cada modo serão determinados para cada direção individual. Com isso, tem-se que:

$$\begin{aligned} {}_{b}\mathbf{N}_{x}{}^{j} &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}^{x}{}_{ij} \;;\; \mathbf{j = 1,\ldots,m} \\ {}_{b}\mathbf{N}_{y}{}^{j} &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}^{y}{}_{ij} \;;\; \mathbf{j = 1,\ldots,m} \\ {}_{b}\mathbf{N}_{z}{}^{j} &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}^{z}{}_{ij} \;;\; \mathbf{j = 1,\ldots,m} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} {}_{a}\mathbf{N}_{x}{}^{i} &= \sum_{j=1}^{m} \mathbf{Z}^{x}{}_{ij} \;;\; \mathbf{i = 1,\ldots,n} \\ {}_{a}\mathbf{N}_{y}{}^{i} &= \sum_{j=1}^{m} \mathbf{Z}^{y}{}_{ij} \;;\; \mathbf{i = 1,\ldots,n} \\ {}_{a}\mathbf{N}_{z}{}^{i} &= \sum_{j=1}^{m} \mathbf{Z}^{z}{}_{ij} \;;\; \mathbf{i = 1,\ldots,n} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Finalmente, um peso final dos modos das subestruturas pode ser obtido à partir dos pesos modais de cada direção analisada, definidos pelas equações 3.16 e 3.17. Este índice final é obtido pela norma Euclidiana dos pesos associados, ou seja;

$$ {}_{b}N^{j} = \sqrt{\left|{}_{a}N_{x}^{j}\right|^{2} + \left|{}_{a}N_{y}^{j}\right|^{2} + \left|{}_{a}N_{z}^{j}\right|^{2}} \; ; \; j = 1 \ldots m \qquad (3.18) $$

$$ {}_{a}N^{i} = \sqrt{\left|{}_{b}N_{x}^{i}\right|^{2} + \left|{}_{b}N_{y}^{i}\right|^{2} + \left|{}_{b}N_{z}^{i}\right|^{2}} \; ; \; i = 1 \ldots n \qquad (3.19) $$

Os índices definidos pelas equações 3.18 e 3.19 são analisados e utilizados da mesma maneira que no caso unidirecional.

3.3 - Exemplos de Simulação

Dois exemplos numéricos são analisados com a finalidade de ilustrar a formulação do critério de eliminação automática de modos proposta. No primeiro exemplo é analisado um caso não amortecido composto por modos reais. No segundo exemplo analisa-se modos complexos oriundo de um problema com amortecimento geral.

a) Caso Não Amortecido

Neste caso, utiliza-se a base modal de duas subestruturas conectadas, conforme mostrado na figura 3.1. A subestrutura (1) possui um grau de liberdade interno e um grau de liberdade no contorno, contendo dois modos de vibrar. A subestrutura (2) possui três graus de liberdade internos e um grau de liberdade no contorno, contendo quatro modos de vibrar. Estes modos são mostrados na tabela 3.1. As parcelas modais inversas relativas às duas subestruturas são mostradas na tabelas 3.2.

Aplicando-se a equação 3.3 às parcelas modais inversas das subestruturas, obtém-se os pesos relativos dos modos individuais de cada subestrutura, mostrados na tabela 3.3. Aplicando-se estes pesos nas equações 3.4 e 3.5 obtém-se, finalmente, os pesos relativos associados para ambas as subestruturas, mostrados na tabela 3.4.

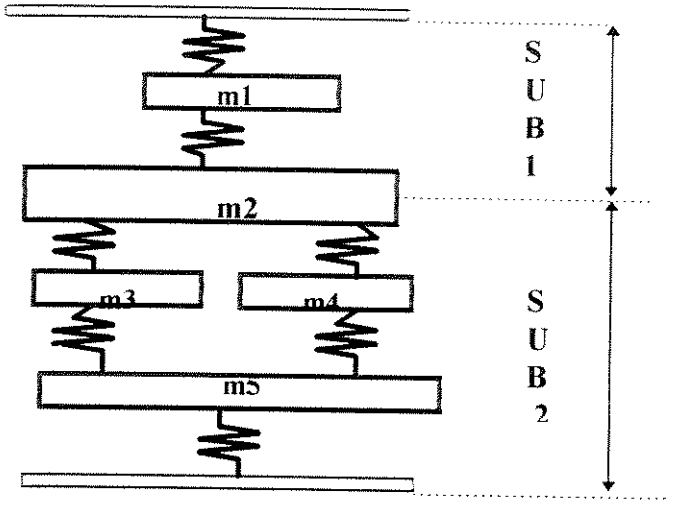


Figura 3.2 - Sistema discreto massa-mola - Caso não amortecido.

Tabela 3.1 - Autovetores das subestruturas (1) e (2). A última linha de cada modo representa a parcela relativa ao contorno.

Subestrutura (1)		Subestrutura (2)			
1	2	1	2	3	4
0.1663	0.2690	0.1581	-0.0367	-.10e-7	0.2714
0.2690	-0.1663	0.1581	0.2681	-.68e-8	-0.0558
--------	--------	0.1581	-0.1157	-0.2236	-0.1078
--------	--------	0.1581	-0.1157	0.2236	-0.1078

Tabela 3.2 - Inversa dos autovetores das subestruturas (1) e (2). A última coluna de cada subestrutura representa a parcela relativa ao contorno.

Subestrutura (1)		Subestrutura (2)			
1	2	1	2	3	4
1.6627	2.6896	1.5813	1.5815	1.5812	1.5812
2.6896	-1.6627	-0.3676	2.6811	-1.1568	-1.1568
--------	--------	0.000	0.0000	-2.2361	2.2361
--------	--------	2.7137	-0.5581	-1.0778	-1.0778

Tabela 3.3 - Pesos relativos dos modos das subestruturas (1) e (2).

Subestrutura (1)		Subestrutura (2)			
1	2	1	2	3	4
1.618	0.618	0.577	0.393	1.00	0.363

Tabela 3.4 - Pesos relativos associados aos modos das subestruturas (1) e (2).

SUB. 1 / SUB. 2	1	2	SOMA
1	1.041	0.041	1.082
2	1.225	0.225	1.45
3	0.618	0.382	1.00
4	1.255	0.255	1.51
SOMA	4.139	0.903	PESO RELATIVO

Observa-se nesta tabela uma sequência de energias modais relativas ao contorno e associada aos vários modos das subestruturas. Se apenas um modo for não selecionado em ambas as subestruturas, os mais indicados, segundo o critério proposto, serão:

Sub. (1) : modo 1

Sub. (2) : modo 4

b) Caso Amortecido

Para a análise do caso amortecido, considera-se novamente a base modal de duas subestruturas conectadas, conforme mostrado na figura 3.2. A subestrutura (1) possui dois graus de liberdade internos e um grau de liberdade no contorno, contendo três modos de vibrar. A subestrutura (2) possui dois graus de liberdade internos e um grau de liberdade no contorno, contendo três modos de vibrar. Estes modos são mostrados na tabela 3.5. As parcelas modais inversas relativas às duas subestruturas são mostradas na tabelas 3.6.

Aplicando-se a equação 3.3 às parcelas modais inversas das subestruturas, obtém-se os pesos relativos dos modos individuais de cada subestrutura, mostrados na tabela 3.7. Aplicando-se estes pesos nas equações 3.4 e 3.5 obtém-se, finalmente, os pesos relativos associados para ambas as subestruturas, mostrados na tabela 3.8.

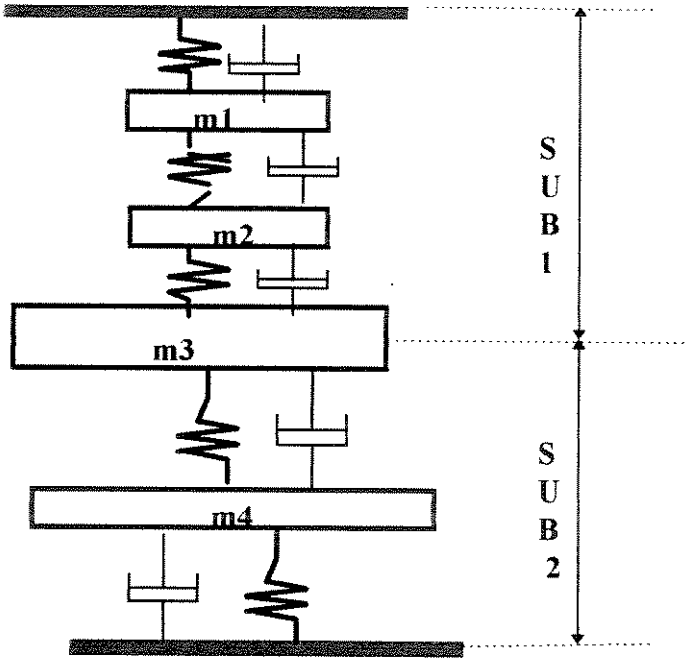


Figura 3.3 - Sistema massa-mola-amortecedor - Caso amortecido.

Tabela 3.5 - Autovetores das subestruturas (1) e (2). A última linha de cada modo representa a parcela relativa ao contorno.

Subestrutura (1)						**Subestrutura (2)**			
1		**2**		**3**		**1**		**2**	
Real	Imag	Real	Imag	Real	Imag	Real	Imag	Real	Imag
-.1441	-.1438	.1843	.1816	-.0271	-.0428	.2784	.2787	.148	-.142
-.2491	-.2486	-.0418	-.0308	.1122	.1168	.2655	.2660	-.836	-.817
-.2729	-.2742	-.1195	-.1342	-.1786	-.1657	-------	-------	-------	-------
									-

Tabela 3.6 - Inversa da matriz dos autovetores das subestruturas (1) e (2). A última coluna de cada subestrutura representa a parcela relativa ao contorno.

Subestrutura (1)						Subestrutura (2)			
1		2		3		1		2	
Real	Imag	Real	Imag	Real	Imag	Real	Imag	Real	Imag
-.5984	.6012	-1.033	1.042	-.5733	.5634	2.026	-1.449	-.2427	-.3634
2.119	-2.173	-.3507	.5317	-.7938	.6631	.6569	-.4578	-.6884	.4801
-.7207	.5307	1.999	-1.954	-1.435	1.503	-------	-------	-------	-------

Tabela 3.7 - Pesos relativos dos modos das subestruturas (1) e (2).

Subestrutura (1)			Subestrutura (2)	
1	2	3	1	2
0.4741	0.3335	0.7078	0.5207	3.1103

Tabela 3.8 - Pesos relativos associados aos modos das subestruturas (1) e (2).

SUB. 2 / SUB. 1	1	2	SOMA
1	0.0466	2.6362	2.6828
2	0.1872	2.7768	2.964
3	0.1871	2.4025	2.5896
SOMA	0.4209	7.8155	PESO RELATIVO

Observa-se na tabela 3.8 a sequência de energias definidas de acordo com as equações 3.7 e 3.8 que definem um índice de qualidade para os três modos da subestrutura 1 e também para os dois modos da subestrutura 2. Se apenas um modo for não selecionado em ambas as subestruturas, os mais indicados, segundo o critério proposto, será o modo 2 da subestrutura 1 e o modo 2 da subestrutura 2, pois apresentam os maiores pesos modais e consequentemente uma maior influência do contorno com relação às parcelas internas, o que, provavelmente, provocará uma baixa convergência da síntese final.

Capítulo 4

Software Desenvolvido (Programa Struct)

4.1 - Comentários Gerais

O método de síntese modal generalizado proposto neste trabalho e o critério de eliminação automática (CEA) de modos foram implementados em um software denominado Programa Struct. O programa foi desenvolvido em Linguagem Fortran, rodando em plataforma PC. Os dados de entrada são alimentados interativamente com o usuário e também através de arquivos externos.

A saída dos resultados é listada em forma de tabelas em um arquivo externo, definido pelo usuário, contendo os seguintes dados:

- Autovalores das subestruturas
- Pesos modais definidos pelo CEA
- Modos selecionados e modos não selecionados
- Autovalores e Autovetores sintetizados
- Frequências naturais e Fatores de amortecimento
- Índice MAC[1] dos autovalores sintetizados, caso conheça-se os autovalores do sistema completo.

(1) - O índice MAC verifica o grau de convergência dos autovetores sintetizados com relação aos autovetores reais do sistema. Um valor de MAC igual a unidade significa uma boa correlação. Para o cálculo do MAC é necessário alimentar um arquivo externo com os autovetores reais do sistema. O anexo I apresenta a definição do valor de MAC.

Deve-se ressaltar que todos os programas desenvolvidos utilizam o recurso de alocação dinâmica de memória através de ponteiros variáveis. Este recurso torna os programas robustos, com a possibilidade de se analisar estruturas grandes e/ou complexas com eficiência e tempo computacional reduzido.

4.2 - Software Desenvolvido - Programa Struct

O programa divide-se em dois módulos básicos; o primeiro módulo é aplicado a sistemas conservativos (não amortecidos) e utiliza álgebra real na análise do problema. O segundo módulo é aplicado a sistemas não conservativos (com amortecimento geral) e utiliza álgebra complexa para a solução do autoproblema, à partir das informações dinâmicas das subestruturas.

4.2.1 - Critério De Montagem Das Matrizes Globais Sintetizadas

Na maioria dos métodos de síntese modal avaliados, as transformações lineares utilizando as bases modais das subestruturas e a montagem das equações de movimento globais são geralmente feitas considerando inicialmente duas subestruturas conectadas. Se a estrutura sob análise possuir mais de duas subestruturas, as matrizes finais que serão utilizadas para a solução do autoproblema, naturalmente, ficarão sujeitas a um aumento de sua ordem em função do número de subestruturas e do número de coordenadas físicas de cada subestrutura. De certa forma, este procedimento influência a eficiência quando se tratar de estruturas grandes ou complexas, onde matrizes de elevada ordem implicariam em um aumento do tempo computacional e em alguns casos podendo, até mesmo, ocorrer uma diminuição da precisão dos resultados ou, inclusive, a não convergência da síntese final.

No trabalho desenvolvido, apresenta-se uma nova metodologia de montagem das matrizes globais das subestruturas. Nesta técnica, as matrizes do sistema sintetizado são obtidas inicialmente para duas subestruturas conectadas, de acordo com as equações 2.71 e 2.90. Se a estrutura real que está sendo analisada for composta de três ou mais subestruturas, as duas subestruturas inicialmente analisadas são remontadas como uma nova subestrutura hipotética, onde as coordenadas são rearranjadas de forma a separar as coordenadas internas e as novas coordenadas do contorno. Esta subestrutura hipotética estará, naturalmente,

conectada a uma terceira subestrutura, cujas coordenadas do contorno são idênticas às da nova subestrutura formada. Este processo acumulativo de remontagem de subestruturas segue, até que, todas as subestruturas sejam conectadas de maneira a formar a estrutura completa. Este procedimento é apresentado de forma esquemática na figura 4.1. Neste exemplo hipotético, a estrutura é composta por três subestruturas (a, b e c) cujas coordenadas internas são 1, 2 , 5 e as coordenadas do contorno são 3,4. Na primeira etapa de síntese a subestrutura (a) é conectada à subestrutura (b). Na segunda etapa de síntese a nova subestrutura (d) formada à partir do processo de síntese de (a) e (b) é conectada à subestrutura (c), cuja coordenada do contorno será a mesma da subestrutura (d), ou seja, coordenada 4, cujas coordenadas internas serão agora 1, 3 e 5.

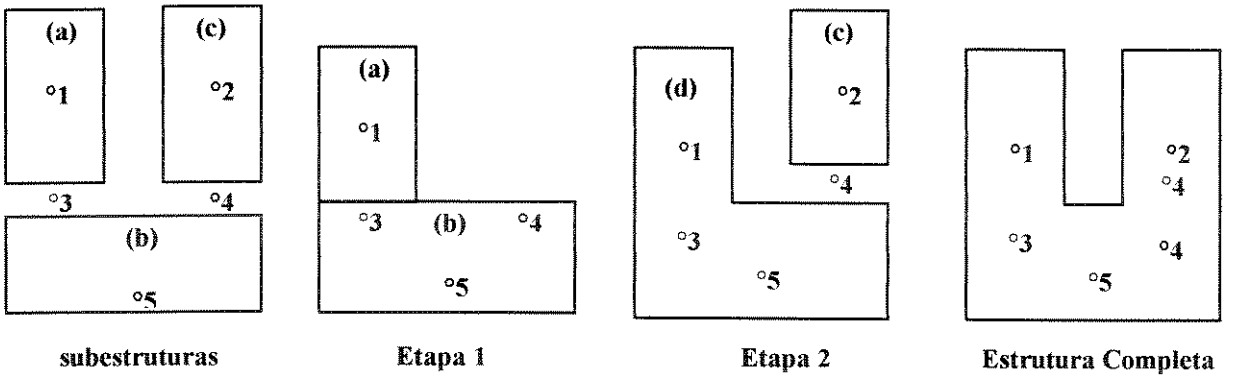


Figura 4.1 - Esquema de síntese de subestruturas proposto.

A vantagem deste procedimento é que as matrizes globais finais que são utilizadas na solução do autoproblema, são sempre calculadas para duas subestruturas atualmente conectadas, independente do número de subestruturas que compõe a estrutura completa. Este procedimento além de facilitar o procedimento de síntese, reduz consideravelmente a ordem final destas matrizes, o que, naturalmente, pode levar a um aumento da precisão final dos resultados, com um consequente aumento da aplicabilidade da técnica de síntese modal.

4.2.2 - Programa Principal

O programa principal é utilizado para gerenciar a decisão do usuário de analisar um problema com amortecimento geral ou um problema sem amortecimento. Esta decisão depende, obviamente, do tipo de estrutura que está sendo estudada e das considerações de

projeto. Por exemplo, em análises experimentais, geralmente, utiliza-se a hipótese de amortecimento geral. Através desta decisão o programa utiliza um recurso de operação de programas externos (rotina system). Esta rotina permite invocar um programa fora do ambiente Fortran, retornando ao final da execução do programa, para dentro do ambiente Fortran e continuando a execução do programa atual. A vantagem deste procedimento é uma completa modularização e independência dos programas executáveis, tornando-os compactos e flexíveis. A figura 4.2 apresenta um fluxograma esquemático do programa principal.

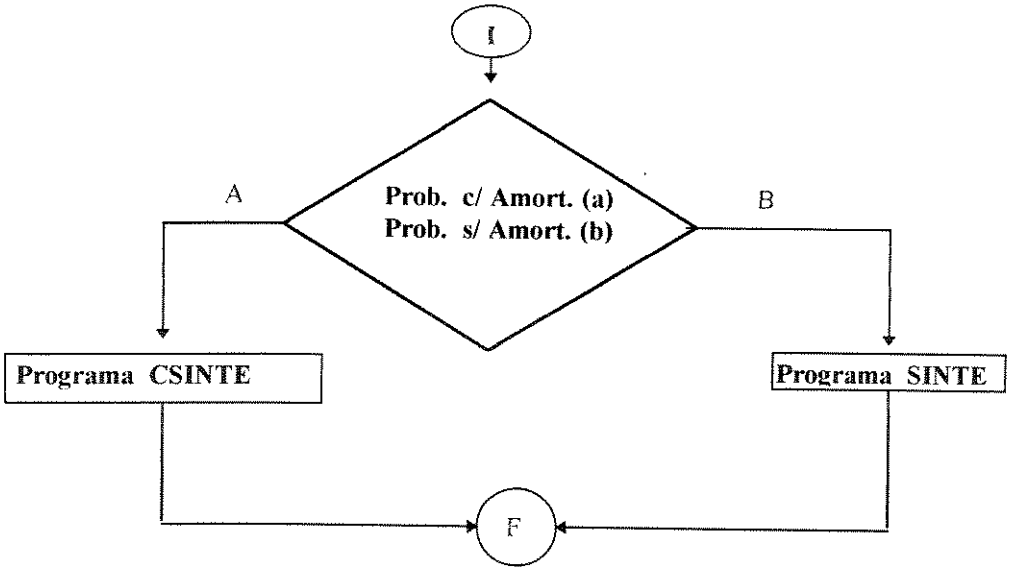


Figura 4.2 - Fluxograma esquemático do programa principal.

4.2.3 - Programa Sinte

Este programa é utilizado na análise de sistemas conservativos onde é aplicada a técnica de síntese modal, definida na seção 2.2.2.4. Existe a possibilidade de análise de dois problemas distintos:

- Problema analítico: Neste caso, as matrizes de massa e rigidez das subestruturas são montadas em um arquivo externo, definido pelo usuário. Estas matrizes são utilizadas pelas rotinas de cálculo de autovalores e autovetores [99] das subestruturas.

- Problemas experimentais ou de elementos finitos: Neste tipo de análise os autovalores e autovetores das subestruturas são alimentados através de um arquivo externo, definido pelo usuário. Esta informação dinâmica, naturalmente, deverá ter sido previamente calculada de acordo com o tipo de análise utilizada.

A entrada dos dados principais pode ser feita através de dois arquivos externos distintos, definidos pelo usuário. A escolha do tipo de arquivo a ser utilizado depende da decisão do usuário em utilizar o critério de eliminação automática (CEA) de modos proposta ou montar o seu próprio superconjunto modal de flexibilidade residual das subestruturas.

De uma maneira geral estes arquivos contém as seguintes informações:

- Número de subestruturas
- Número de coordenadas internas das subestruturas
- Número de coordenadas do contorno entre as subestruturas
- Número de modos das subestruturas
- Conectividade das subestruturas
- A malha de coordenadas do sistema
- Alternativamente, os modos selecionados e não selecionados das subestruturas

Os anexos II e III apresentam o formato dos arquivos de saída para dois exemplos de simulação distintos, definidos no capítulo 6. O anexo II mostra os resultados da síntese para um caso sem amortecimento e o anexo III mostra os resultados da síntese para um caso com amortecimento geral. O programa SINTE é representado através do fluxograma esquemático da figura 4.3, sendo que as principais rotinas utilizadas são descritas como:

- **DADOS**: leitura dos dados de entrada
- **MATFIS**: monta as matrizes físicas
- **MODNL (EIGEN)**: obtenção dos autovalores e autovetores das subestruturas (Rotinas Eispack)
- **LEITVAL**: leitura dos autovalores e autovetores das subestruturas
- **NORM (NORMT)** : normalização pela massa dos modos normais das subestruturas.
- **PESOMO**: cálculo dos pesos modais das subestruturas
- **DELMODO (DELMO)** : obtenção do CEA definindo os modos selecionados/não selecionados.
- **MODFRE**: cálculo dos modos de flexibilidade residual
- **GLOBAL**: montagem das matrizes globais sintetizadas
- **REOR**: reordenação dos autovalores/autovetores em ordem crescente
- **COMPAT**: monta a matriz de compatibilidades
- **BASEMO**: monta o superconjunto de flexibilidade residual original
- **NEWVET**: remonta as subestruturas redefinindo a malha
- **REDUC**: reduz a base modal às coordenadas originais

- **MACRE**: calcula o MAC dos autovetores sintetizados
- **MINV**: calcula a inversa de uma matriz
- **SVD**: decomposição em valores singulares
- **PINV**: calcula a pseudo-inversa
- **NCOND**: calcula o número de condição de uma matriz
- **SAÍDA**: saída dos resultados da síntese.

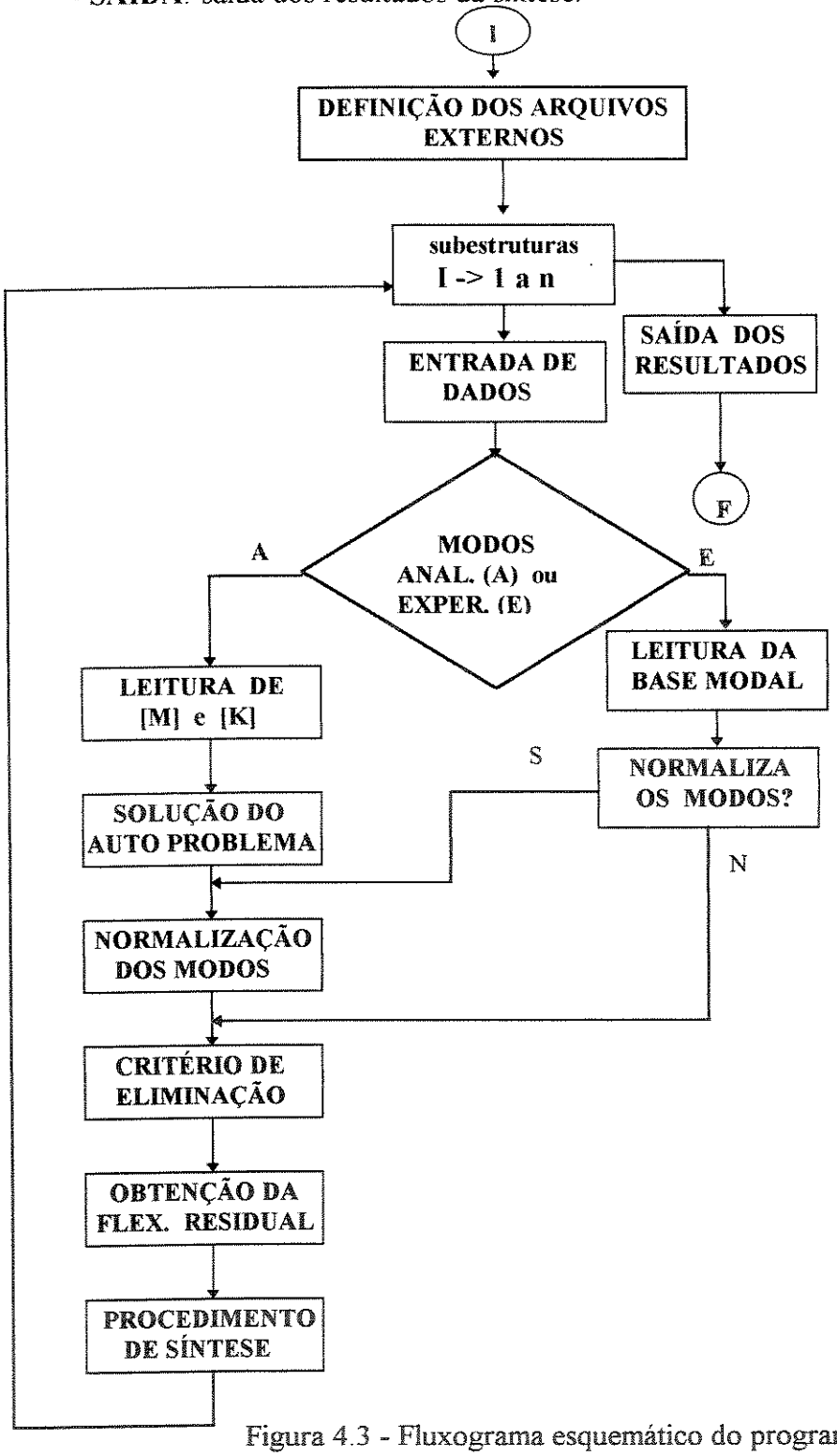


Figura 4.3 - Fluxograma esquemático do programa SINTE.

4.2.4 - Programa Csinte

Este programa utiliza a técnica de sintese modal proposta neste trabalho (seção 2.2.3.2) para sistemas não conservativos (amortecimento geral). A formulação proposta é bastante similar ao caso anterior, de sistemas sem amortecimento. A morfologia deste programa é praticamente idêntica ao programa SINTE, exceto que a sua formulação utiliza álgebra complexa. Todas as considerações e comentários feitos na seçao 4.2.3 para o programa SINTE, portanto são também válidas para o programa CSINTE. Com isso, o fluxograma esquemático definido na figura 4.3 serve também para ilustrar o programa CSINTE.

Deve-se ressaltar que, como no caso complexo, utiliza-se uma formulação de estado para a solução do autoproblema, obtém-se sempre uma base de autovalores e autovetores de ordem dobrada definida através de seus complexos conjugados. A principal implicação deste fato é que os modos que serão selecionados ou não selecionados das bases modais das subestruturas devem sempre ser definidos com ordem dobrada. Ou seja, sempre que se remover ou manter um determinado modo de uma subestrutura, deve-se, também, remover ou manter o seu respectivo complexo conjugado. Verificou-se que este procedimento implica em um aumento da precisão dos resultados da síntese.

O programa CSINTE utiliza rotinas bastante similares ao programa SINTE, sendo que as principais rotinas utilizadas são descritas como:

- **CDADOS**: leitura dos dados de entrada
- **MATFIS**: monta as matrizes fisicas
- **ESTADO**: monta as matrizes de estado
- **CMODNL (CEIGEN)**: obtenção dos autovalores e autovetores das subestruturas (Rotinas Eispack)
- **LEITVAL**: leitura dos autovalores e autovetores das subestruturas
- **CNORM (CNORMT)** : normalização pela massa dos modos normais das subestruturas.
- **CPESOMO**: cálculo dos pesos modais das subestruturas
- **CDELMODO (CDEL)** : obtenção do CEA definindo os modos selecionados/não selecionados.
- **CMODFRE**: cálculo dos modos de flexibilidade residual

- **CGLOBAL**: montagem das matrizes globais sintetizadas
- **CREOR**: reordenação dos autovalores/autovetores em ordem crescente
- **CCOMPAT**: monta a matriz de compatibilidades
- **CBASM**: monta o superconjunto de flexibilidade residual original
- **CNEWVE**: remonta as subestruturas redefinindo a malha
- **CREDUC**: reduz a base modal às coordenadas originais
- **CMACRE**: calcula o MAC dos autovetores sintetizados
- **CINV**: calcula a inversa de uma matriz
- **CSVD**: decomposição em valores singulares
- **CPINV**: calcula a pseudo-inversa
- **CNCOND**: calcula o número de condição de uma matriz
- **SAÍDA**: saída dos resultados da síntese.

Capítulo 5

Formulação em Modos Complexos

5.1 - Comentários Gerais

Na análise do autoproblema de um sistema sem amortecimento, os modos de vibrar considerados são todos reais. Na prática, sabe-se que as estruturas possuem um certo nível de amortecimento levando a um modelo cujo autoproblema fornecerá, necessariamente, modos complexos. Este fato sempre ocorre na análise experimental, onde autovalores e autovetores complexos extraídos da informação de dados oriundos do domínio da frequência ou do domínio do tempo.

As ferramentas de análise por elementos finitos entretanto geralmente fornecem apenas modelos de modos reais. Com isso, a transformação destes modos reais em modos complexos similares será de grande importância para a validação de testes experimentais, bem como, para a utilização em métodos de síntese modal que exijam modos complexos.

Este capítulo, apresenta uma formulação, baseada em trabalhos de outros autores [3,100,101,102], que faz a transformação de modos reais em modos complexos similares.

5.2 - Conversão de Modos Reais em Modos Complexos

Para um sistema não amortecido, ou modelado através do método de elementos finitos, a análise do autoproblema associado fornece autovalores e autovetores reais. Uma base de

autovetores complexos pode ser extraída à partir dos modos reais calculados [3], sendo definidos da seguinte forma:

$$\psi = \phi \quad + \mathbf{i}\,\phi \tag{5.1}$$

Para que os modos complexos definidos pela equação 5.1 possam descrever adequadamente o comportamento do sistema físico descrito através dos modos reais, deve-se proceder uma normalização conveniente nestes modos, determinada à partir da informação do autoproblema original. A fim de se obter estes parâmetros de normalização, considere inicialmente um sistema com amortecimento geral descrito pela equação de movimento abaixo:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{5.2}$$

A forma mais conveniente para a solução da equação 5.2 é transformá-la em uma equação diferencial de primeira ordem, de tamanho 2n conforme descrito anteriormente na equação 2.75 [59]. Ou seja,

$$\mathbf{A}\,\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\,\mathbf{y} = \mathbf{f}' \tag{5.3}$$

Onde;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{f}' = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

A solução homogênea da equação diferencial 5.3 fornece os autovalores e autovetores complexos do sistema fisico com 2n graus de liberdade. As coordenadas fisicas são substituídas pelas coordenadas modais através da seguinte transformação linear:

$$\mathbf{y} = \sigma \ \eta \tag{5.4}$$

Onde;

$$\sigma = \begin{bmatrix} \psi & \psi^* \\ \lambda\psi & \lambda^*\psi^* \end{bmatrix}$$

Utilizando-se a transformação de 5.4 em 5.3 e premulticando o resultado pela transposta da matriz modal, obtém-se um conjunto de equações diferenciais da forma:

$$\mathbf{a}\,\dot{\eta} + \mathbf{b}\,\eta = \sigma^t\,\mathbf{f}' \tag{5.5}$$

Onde tem-se que:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2\lambda^*\psi^h\mathbf{M}\psi^* + \psi^h\mathbf{C}\psi^* & (\lambda+\lambda^*)\psi^h\mathbf{M}\psi + \psi^h\mathbf{C}\psi \\ (\lambda+\lambda^*)\psi^t\mathbf{M}\psi^* + \psi^t\mathbf{C}\psi^* & 2\lambda\psi^t\mathbf{M}\psi + \psi^t\mathbf{C}\psi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\lambda^{*2}\psi^h\mathbf{M}\psi^* + \psi^h\mathbf{K}\psi^* & -\lambda\lambda^*\psi^h\mathbf{M}\psi + \psi^h\mathbf{K}\psi \\ -\lambda\lambda^*\psi^t\mathbf{M}\psi^* + \psi^t\mathbf{K}\psi^* & -\lambda^2\psi^t\mathbf{M}\psi + \psi^t\mathbf{K}\psi \end{bmatrix}$$

Os autovalores do sistema são descritos por:

$$\lambda = -\omega\ \xi - i\,\omega\sqrt{1-\xi^2} \tag{5.6}$$

A equação 5.5 é diagonal, ou seja;

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2\lambda^*\psi^h\mathbf{M}\psi^* + \psi^h\mathbf{C}\psi^* & 0 \\ 0 & 2\lambda\psi^t\mathbf{M}\psi + \psi^t\mathbf{C}\psi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\lambda^{*2}\psi^h\mathbf{M}\psi^* + \psi^h\mathbf{K}\psi^* & 0 \\ 0 & -\lambda^2\psi^t\mathbf{M}\psi + \psi^t\mathbf{K}\psi \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Para isso, as equações de ortogonalidade, definidas à partir das equações 5.5 e 5.6, podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} -2\omega\ \xi\ \psi^{h}\mathbf{M}\psi + \psi^{h}\mathbf{C}\psi &= 0 \\ -2\omega\ \xi\ \psi^{t}\mathbf{M}\psi^{*} + \psi^{t}\mathbf{C}\psi^{*} &= 0 \\ -\omega^{2}\psi^{t}\mathbf{M}\psi^{*} + \psi^{t}\mathbf{K}\psi^{*} &= 0 \\ -\omega^{2}\psi^{h}\mathbf{M}\psi + \psi^{h}\mathbf{K}\psi &= 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Os parâmetros de normalização dos modos reais podem ser obtidos para dois casos distintos, ou seja, para o caso não amortecido ou para o caso com amortecimento proporcional.

a) Caso Não Amortecido

Neste caso, o sistema é modelado sem amortecimento, ou seja, a matriz **C** de amortecimentos é nula. O parâmetro de normalização dos modos reais é obtido considerando que o sistema atual possa ser simulado pelo sistema com amortecimento geral de ordem dobrada, definido pela equação 5.7. Esta simulação é feita considerando $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, ou seja;

$$\mathbf{a}\,\dot{\eta} + \mathbf{b}\,\eta = 0 \tag{5.9}$$

Onde tem-se que:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2\lambda^{*}\mathbf{m}^{*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\lambda\,\mathbf{m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{*} - \lambda^{*2}\mathbf{m}^{*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k} - \lambda^{2}\mathbf{m} \end{bmatrix}$$

As equações de compatibilidade de um sistema amortecida são definidas como:

$$\begin{aligned} \psi^{t}\mathbf{M}\psi &= \mathbf{m} \\ \psi^{h}\mathbf{M}\psi^{*} &= \mathbf{m}^{*} \\ \psi^{t}\mathbf{K}\psi &= \mathbf{k} \\ \psi^{h}\mathbf{K}\psi^{*} &= \mathbf{k}^{*} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Aplicando-se a equação 5.1 na equação 5.10, obtém-se para a parcela relativa à matriz de massa, a seguinte relação:

$$\mathbf{m} = \mathbf{i}\, 2\psi^{t}\mathbf{M}\psi \tag{5.11}$$

Para uma normalização pela massa na equação 5.9, a parcela relativa à massa será:

$$2\lambda\, \mathbf{m} = \mathbf{I} \tag{5.12}$$

Aplicando-se a equação 5.6 na equação 5.12 e utilizando-se a equação 5.11, obtém-se , finalmente, que:

$$\psi^{t}\mathbf{M}\psi = \frac{\mathbf{I}}{4\omega} \tag{5.13}$$

Utilizando o parâmetro de normalização definido pela equação 5.13, é possível a obtenção de modos complexos simulados através dos modos reais. Se os modos reais obtidos pelo método de elementos finitos forem normalizados pela massa, os modos complexos simulados de cada subestrutura, serão definidos por:

$$\psi = \phi + \mathbf{i}\,\phi \tag{5.14}$$

Onde:

$$\phi = \frac{\bar{\phi}}{2\sqrt{\omega}}$$

$$\bar{\phi}^{t}\,\mathbf{M}\,\bar{\phi} = \mathbf{I}$$

b) Caso com Amortecimento Proporcional

Neste caso, o sistema é composto por um amortecimento proporcional em relação aos parâmetros de massa e/ou rigidez. Para obtenção do parâmetro de normalização dos modos, uma simulação idêntica ao caso anterior é feita, onde uma equação de ortogonalidade adicional do sistema é considerada e definida como:

$$\begin{aligned} \psi^{t}\mathbf{C}\psi &= \mathbf{c} \\ \psi^{h}\mathbf{C}\psi^{*} &= \mathbf{c}^{*} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Com isso, o sistema com amortecimento proporcional pode ser simulado pela equação 5.7, com os parâmetros convenientemente ajustados e definidos a partir da equação 5.9. Ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} 2\lambda^{*}\mathbf{m}^{*} + \mathbf{c}^{*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\lambda\,\mathbf{m} + \mathbf{c} \end{bmatrix} \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{*} - \lambda^{*2}\mathbf{m}^{*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k} - \lambda^{2}\mathbf{m} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.16}$$

Utilizando uma normalização pela massa na equação 5.16, os parâmetros relativos à massa, serão:

$$2\lambda\,\mathbf{m} + \mathbf{c} = \mathbf{1} \tag{5.17}$$

Aplicando-se a equação 5.6 na equação 5.17 e utilizando-se a equação 5.11, obtém-se , finalmente, que:

$$\psi^{t}\mathbf{M}\psi = \frac{1}{4\omega\sqrt{1-\xi^{2}}} \tag{5.18}$$

Observa-se na equação 5.18 que no parâmetro de normalização existe a necessidade de introduzir uma certa porcentagem de amortecimento, definido através do fator de amortecimento.

Portanto, para um sistema com amortecimento proporcional, pode-se utilizar os modos normalizados pela massa em uma formulação de modos complexos, desde que se obedeça ao critério de normalização definido pela equação 5.18. A normalização final é dada por:

$$\psi = \phi + i\,\phi \tag{5.19}$$

Onde;

$$\phi = \frac{\bar{\phi}}{2\sqrt{\omega}\,\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\bar{\phi}^t\,\mathbf{M}\,\bar{\phi} = \mathbf{I}$$

A aplicação das equações 5.17 ou 5.18 pode ser feita para a obtenção de uma matriz modal complexa de ordem dobrada para cada subestrutura, da seguinte forma:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \psi & \psi^* \\ \lambda\psi & \lambda^*\psi^* \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

No caso mais geral, os autovalores são definidos pela equação 5.6.

Capítulo 6

Simulação Numérica

6.1 - Comentários Gerais

O método de síntese modal generalizado, proposto no trabalho, é avaliado através de quatro exemplos numéricos. Os dois primeiros são aplicados ao caso sem amortecimento e os dois últimos são aplicados ao caso com amortecimento geral.

Em todos os casos analisados é utilizado o software desenvolvido (Programa Struct) a fim de se obter os parâmetros dinâmicos dos sistemas, através da técnica de síntese modal generalizada, proposta no trabalho. Uma investigação criteriosa é feita em cima das várias possibilidades de montagem dos modos de flexibilidade residual, visando investigar a precisão dos autovalores e autovetores sintetizados, mediante a aplicação do critério de eliminação automática de modos (CEA). Nos primeiros exemplos de cada caso, amortecido geral e sem amortecimento, são testadas todas as configurações possíveis de modos selecionados/não selecionados das subestruturas, sendo que os resultados são apresentados em forma de gráficos de barras. O intuito desta investigação, nestes exemplos de simulação, é validar com a maior segurança possível as metodologias propostas no trabalho, ou seja, a técnica de síntese modal generalizada, o critério de remontagem das subestruturas e o critério de eliminação automática de modos (CEA).

6.2 - Caso Não Amortecido

6.2.1 - Exemplo 1 - Sistema Massa-Mola

O sistema discreto analisado consiste de massas concentradas conectadas através de molas com parâmetros de rigidez específicos, como mostrado na figura 6.1. Este exemplo de simulação é similar aos exemplos utilizados por Martin & Glaim [54] e Santos [3] .

O sistema é dividido em três subestruturas cujos parâmetros físicos e coordenadas físicas são mostradas na tabela 6.1. A tabela 6.2 apresenta os autovalores e autovetores de cada subestrutura, obtidos pelo Programa Struct. Deve-se observar que os parâmetros para a subestrutura 4 não são indicados, já que a remontagem desta subestrutura é feita a partir do procedimento de acoplamento de subestruturas proposto, ou seja, os parâmetros desta subestrutura hipotética dependeram das bases modais que serão eliminadas das subestruturas 1 e 2.

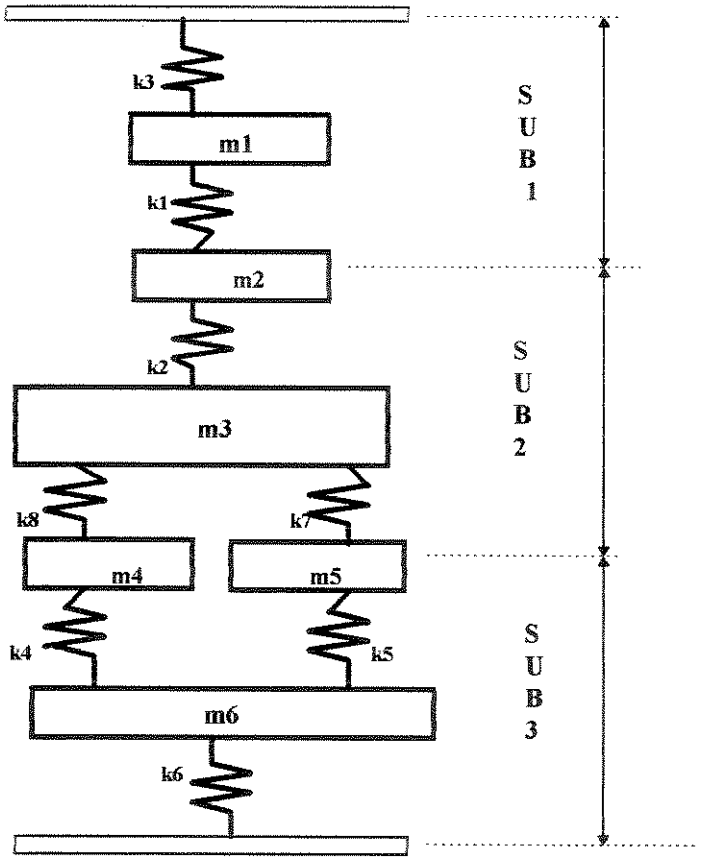


Figura 6.1 - Sistema discreto massa-mola.

Tabela 6.1 - Parâmetros físicos das subestruturas - Exemplo 6.2.1.

ELEMENTO	MASSA [Kg]	RIGIDEZ [N/m]	COORD. INTERNAS	COORD. CONTORNO
Sub. 1	m1 = 10 m2 =10	k1 = 10000 k3 = 10000	1	2
Sub. 2	m2 = 10 m3 = 10 m4 = 10 m5 = 10	k2 = 20000 k7 = 20000 k8 = 12000	3, 4, 5	2
Sub. 3	m4 = 10 m5 = 10 m6 = 10	k4 = 15000 k5 = 10000 k6 = 20000	6	4, 5
Sub. 4	Remontagem das sub. 1 e 2	Remontagem das sub. 1 e 2	1, 2, 3	4, 5

Tabela 6.2 - Autovalores e autovetores das subestruturas - Exemplo 6.2.1.

	SUB 1		SUB 2				SUB 3		
MODOS	**1**	**2**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**
1	.166	.269	.158	-.037	-.11e-7	.271	-.123	.045	.288
2	.269	-.166	.158	.268	-.68e-8	-.056	-.179	.235	-.113
3	-----	-----	.158	-.116	-.224	-.108	-.230	-.207	-.067
4	-----	-----	.158	-.116	.224	-.108	-----	-----	-----
AUTOV. (Hz)	60.8	416.7	5e-15	217.2	318.3	1119.7	73.8	193.5	846.7

A tabela 6.3 apresenta os pesos relativos dos modos das subestruturas, determinados através das equações 3.7 e 3.8. Neste caso, a matriz de flexibilidade residual foi obtida deletando-se apenas um modo de cada subestrutura. Os valores da tabela 6.3 são devidos ao CEA proposto no trabalho.

Tabela 6.3 - Pesos relativos dos modos das subestruturas - Exemplo 6.2.1

MODOS	SUB1	SUB2	SUB3	SUB4[2]
1	4.139	1.082	5.4150	8.265
2	0.903	1.450	24.055	8.092
3	———	1.000	2.5650	6.660
4	———	1.510	———	9.010
C E A	1	4	2	4

A tabela 6.4 apresenta os autovalores e autovetores do sistema global (caso real), determinado através do Programa Matlab [103].

(2) : Subestrutura remontada através do critério de remontagem da matriz global proposto.

Tabela 6.4 - Propriedades dinâmicas do sistema global - Exemplo 6.2.1.

	SISTEMA GLOBAL					
MODOS	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	.066	-.137	-.058	.271	-.010	.014
2	.118	-.141	-.036	-.104	.028	-.059
3	.119	-.006	.025	-.044	-.089	.274
4	.105	.125	-.138	.009	-.048	-.044
5	.117	.053	.166	.037	-.017	-.065
6	.064	.068	-.013	.023	.292	.073
AUTOV. (Hz)	33.2	154.5	220.9	366.5	764.8	1001.8

As tabelas 6.5 e 6.6 apresentam os resultados da identificação dinâmica através do processo de síntese modal proposto, utilizando as condições impostas pelo CEA definidos na tabela 6.3, e uma outra condição, onde elimina-se o primeiro modo de cada subestrutura.

Tabela 6.5 - Propriedades dinâmicas do sistema global sintetizado - Exemplo 6.2.1.

NÚMERO DO MODO	**AUTOVALORES DO SISTEMA (Hz)**	**AUTOVALORES SINTETIZADOS (HZ)**	**ERRO RELATIVO[3] (%)**	**INDICE MAC**
1	**33.2**	**33.19**	**. 0249**	**1. 0000**
2	**154.5**	**154.9**	**. 2829**	**0. 9992**
3	**220.9**	**221.1**	**. 0289**	**0. 9998**
4	**366.5**	**381.3**	**. 5597**	**0. 9962**
5	**764.8**	**778.9**	**1. 853**	**0. 9434**
6	**1001.8**	--------	------	-------
VALORES MÉDIOS			**0. 5499**	**0. 9877**

Pode-se concluir, através dos resultados obtidos nas tabelas 6.5 e 6.6, que a aplicação do método de síntese modal generalizado, proposto no trabalho, gerou bons resultados para os autovalores e autovetores sintetizados para a estrutura completa, com índices MAC próximo da unidade para os autovetores e erros relativos baixos para os autovalores sintetizados. Utilizando o CEA, foram identificados 5 modos dos 6 modos possíveis da estrutura completa, ou seja, 83.3% e para o segundo caso de eliminação de modos foram identificados 4 modos, totalizando 66.7 % dos modos. A tabela 6.6 apresentam resultados com uma menor precisão com relação aos resultados obtidos utilizando-se o CEA de modos.

(3) : Erro relativo (Er) entre os autovalores reais do sistema e os autovalores sintetizados:

$$E_R = \frac{\left| \left|AV_{sint}\right| - \left|AV_{real}\right| \right|}{\left|AV_{real}\right|} \times 100\ (\%)$$

Tabela 6.6 - Propriedades dinâmicas do sistema global sintetizado para outra condição para o exemplo 6.2.1.

NÚMERO DO MODO	AUTOVALORES DO SISTEMA (Hz)	AUTOVALORES SINTETIZADOS (Hz)	ERRO RELATIVO (%)	INDICE MAC
1	33.2	71.3	114. 747	**0. 6678**
2	154.5	---------	---------	———
3	220.9	215.5	2. 4587	**0. 9100**
4	366.5	367.3	3. 1124	**0. 9591**
5	764.8	760.9	0. 5019	**0. 9927**
6	1001.8	977.7	2. 4122	**0. 9747**
VALORES MÉDIOS			**24. 646**	**0. 9009**

A linha tracejada nas tabelas 6.5 e 6.6 representam aqueles autovalores e autovetores que não foram identificados no processo de síntese modal. Pode-se concluir, através dos resultados obtidos nas tabelas 6.5 e 6.6, que a aplicação do método de síntese modal generalizado, proposto no trabalho, gerou bons resultados para os autovalores e autovetores sintetizados para a estrutura completa, com índices MAC próximo da unidade para os autovetores e erros relativos baixos para os autovalores sintetizados. Utilizando o CEA, foram identificados 5 modos dos 6 modos possíveis da estrutura completa, ou seja, 83.3% e para o segundo caso de eliminação de modos foram identificados 4 modos, totalizando 66.7 % dos modos. A tabela 6.6 apresentam resultados com uma menor precisão com relação aos resultados obtidos utilizando-se o CEA de modos.

Os gráficos das figuras 6.2 a 6.4 foram gerados com a finalidade de se observar o comportamento do método de síntese modal, através das variedades de combinações de modos eliminados de cada subestrutura. Estes gráficos representam o MAC médio dos modos identificados e os respectivos erros relativos médios dos autovalores, em função das várias configurações de modos eliminados das subestruturas.

Nesta etapa, consideram-se como modos identificados aqueles com um erro relativo para os autovalores inferior a 25% e com um índice MAC superior a 0.1. As configurações dos modos eliminados foram obtidos através de eliminações de modos qualitativas e quantitativas para cada subestrutura.

A tabela 6.7 apresenta as três configurações possíveis deste sistema, indicando a quantidade de modos que foram selecionados e eliminados de cada subestrutura.

Tabela 6.7 - Quantidade de modos selecionados e não selecionados para o exemplo 6.2.1.

Configurações	SELECIONADOS				NÃO SELECIONADOS			
	S1	S2	S3	S4	S1	S2	S3	S4
1	1	3	2	3	1	1	1	1
2	1	2	2	2	1	2	1	1
3	1	1	1	1	1	3	2	1

As tabelas 6.8 a 6.10 indicam as combinações de modos selecionados para cada subestrutura. Cada tabela depende das quantidades de modos selecionados e não selecionados de cada subestrutura, como mostrado na tabela 6.7. Deve-se ressaltar, que nas tabelas 6.8 a 6.10 os modos não selecionados das subestruturas não são motrados, uma vez que, para cada caso, os modos não selecionados serão aqueles modos remanescentes que não foram indicados nestas tabelas. As configurações dos casos (1), (2) e (3) correspondem a 96, 108 e 48 combinações diferentes de modos, respectivamente. Utilizando o CEA, os modos selecionados de cada subestrutura correspondem às configurações de número 53, 67 e 29 nas tabelas 6.8, 6.9 e 6.10, respectivamente.

Verifica-se através das figuras 6.2 a 6.4, que para a configuração (1) o CEA de modos foi um dos melhores conjuntos modais selecionados. Para as configurações (2) e (3), apesar de não ter sido o melhor conjunto modal mantido, o índice MAC médio situou-se na faixa de 0.85 com um erro relativo médio de 7% para os autovalores identificados. Observa-se na figura 6.3, que para as configurações 32,33,34 e 37, o índice MAC foi da ordem de 0.5 com erros relativos médios na ordem de 25%. Através destes resultados pode-se perceber, mesmo para sistemas bem comportados, a importância da escolha adequada de modos selecionados a fim de se obter sucesso na síntese, principalmente, para quantidades reduzidas de modos selecionados na base.

Pode-se afirmar portanto que o CEA proposto foi uma das configurações de modos selecionados/não selecionados das subestruturas que estiveram entre os melhores resultados. Tal fato mostra que a formulação proposta é consistente, servindo como uma referência para a determinação eficiente de um índice de qualidade dos modos das subestruturas, utilizados nas técnicas de síntese modal.

Tabela 6.8 - Configuração (1) de modos selecionados - Exemplo 6.2.1

CONFI. (1)	SUB. (1)	SUB. (2)	SUB. (3)	SUB. (4)
1	1	1 2 3	1 2	1 2 3
2	1	1 2 3	1 2	1 2 4
3	1	1 2 3	1 2	1 3 4
4	1	1 2 3	1 2	2 3 4
5	1	1 2 3	1 3	1 2 3
6	1	1 2 3	1 3	1 2 4
7	1	1 2 3	1 3	1 3 4
8	1	1 2 3	1 3	2 3 4
9	1	1 2 3	2 3	1 2 3
10	1	1 2 3	2 3	1 2 4
11	1	1 2 3	2 3	1 3 4
12	1	1 2 3	2 3	2 3 4
13	1	1 2 4	1 2	1 2 3
14	1	1 2 4	1 2	1 2 4
15	1	1 2 4	1 2	1 3 4
16	1	1 2 4	1 2	2 3 4
17	1	1 2 4	1 3	1 2 3
18	1	1 2 4	1 3	1 2 4
19	1	1 2 4	1 3	1 3 4
20	1	1 2 4	1 3	2 3 4
21	1	1 2 4	2 3	1 2 3
22	1	1 2 4	2 3	1 2 4
23	1	1 2 4	2 3	1 3 4
24	1	1 2 4	2 3	2 3 4
25	1	1 3 4	1 2	1 2 3
26	1	1 3 4	1 2	1 2 4
27	1	1 3 4	1 2	1 3 4
28	1	1 3 4	1 2	2 3 4
29	1	1 3 4	1 3	1 2 3
30	1	1 3 4	1 3	1 2 4
31	1	1 3 4	1 3	1 3 4
32	1	1 3 4	1 3	2 3 4
33	1	1 3 4	2 3	1 2 3
34	1	1 3 4	2 3	1 2 4
35	1	1 3 4	2 3	1 3 4
36	1	1 3 4	2 3	2 3 4
37	1	2 3 4	1 2	1 2 3
38	1	2 3 4	1 2	1 2 4
39	1	2 3 4	1 2	1 3 4
40	1	2 3 4	1 2	2 3 4
41	1	2 3 4	1 3	1 2 3
42	1	2 3 4	1 3	1 2 4
43	1	2 3 4	1 3	1 3 4
44	1	2 3 4	1 3	2 3 4
45	1	2 3 4	2 3	1 2 3
46	1	2 3 4	2 3	1 2 4
47	1	2 3 4	2 3	1 3 4
48	1	2 3 4	2 3	2 3 4

CONFI. (1)	SUB. (1)	SUB. (2)	SUB. (3)	SUB. (4)
49	2	1 2 3	1 2	1 2 3
50	2	1 2 3	1 2	1 2 4
51	2	1 2 3	1 2	1 3 4
52	2	1 2 3	1 2	2 3 4
53	2	1 2 3	1 3	1 2 3
54	2	1 2 3	1 3	1 2 4
55	2	1 2 3	1 3	1 3 4
56	2	1 2 3	1 3	2 3 4
57	2	1 2 3	2 3	1 2 3
58	2	1 2 3	2 3	1 2 4
59	2	1 2 3	2 3	1 3 4
60	2	1 2 3	2 3	2 3 4
61	2	1 2 4	1 2	1 2 3
62	2	1 2 4	1 2	1 2 4
63	2	1 2 4	1 2	1 3 4
64	2	1 2 4	1 2	2 3 4
65	2	1 2 4	1 3	1 2 3
66	2	1 2 4	1 3	1 2 4
67	2	1 2 4	1 3	1 3 4
68	2	1 2 4	1 3	2 3 4
69	2	1 2 4	2 3	1 2 3
70	2	1 2 4	2 3	1 2 4
71	2	1 2 4	2 3	1 3 4
72	2	1 2 4	2 3	2 3 4
73	2	1 3 4	1 2	1 2 3
74	2	1 3 4	1 2	1 2 4
75	2	1 3 4	1 2	1 3 4
76	2	1 3 4	1 2	2 3 4
77	2	1 3 4	1 3	1 2 3
78	2	1 3 4	1 3	1 2 4
79	2	1 3 4	1 3	1 3 4
80	2	1 3 4	1 3	2 3 4
81	2	1 3 4	2 3	1 2 3
82	2	1 3 4	2 3	1 2 4
83	2	1 3 4	2 3	1 3 4
84	2	1 3 4	2 3	2 3 4
85	2	2 3 4	1 2	1 2 3
86	2	2 3 4	1 2	1 2 4
87	2	2 3 4	1 2	1 3 4
88	2	2 3 4	1 2	2 3 4
89	2	2 3 4	1 3	1 2 3
90	2	2 3 4	1 3	1 2 4
91	2	2 3 4	1 3	1 3 4
92	2	2 3 4	1 3	2 3 4
93	2	2 3 4	2 3	1 2 3
94	2	2 3 4	2 3	1 2 4
95	2	2 3 4	2 3	1 3 4
96	2	2 3 4	2 3	2 3 4

Tabela 6.9 - Configuração (2) de modos selecionados - Exemplo6.2.1.

Conf (2)	SUB (1)	SUB (2)	SUB (3)	SUB (4)
1	1	1 2	1 2	1 2
2	1	1 2	1 2	1 3
3	1	1 2	1 2	2 3
4	1	1 2	1 3	1 2
5	1	1 2	1 3	1 3
6	1	1 2	1 3	2 3
7	1	1 2	2 3	1 2
8	1	1 2	2 3	1 3
9	1	1 2	2 3	2 3
10	1	1 3	1 2	1 2
11	1	1 3	1 2	1 3
12	1	1 3	1 2	2 3
13	1	1 3	1 3	1 2
14	1	1 3	1 3	1 3
15	1	1 3	1 3	2 3
16	1	1 3	2 3	1 2
17	1	1 3	2 3	1 3
18	1	1 3	2 3	2 3
19	1	1 4	1 2	1 2
20	1	1 4	1 2	1 3
21	1	1 4	1 2	2 3
22	1	1 4	1 3	1 2
23	1	1 4	1 3	1 3
24	1	1 4	1 3	2 3
25	1	1 4	2 3	1 2
26	1	1 4	2 3	1 3
27	1	1 4	2 3	2 3
28	1	2 3	1 2	1 2
29	1	2 3	1 2	1 3
30	1	2 3	1 2	2 3
31	1	2 3	1 3	1 2
32	1	2 3	1 3	1 3
33	1	2 3	1 3	2 3
34	1	2 3	2 3	1 2
35	1	2 3	2 3	1 3
36	1	2 3	2 3	2 3
37	1	2 4	1 2	1 2
38	1	2 4	1 2	1 3
39	1	2 4	1 2	2 3
40	1	2 4	1 3	1 2
41	1	2 4	1 3	1 3
42	1	2 4	1 3	2 3
43	1	2 4	2 3	1 2
44	1	2 4	2 3	1 3
45	1	2 4	2 3	2 3
46	1	3 4	1 2	1 2
47	1	3 4	1 2	1 3
48	1	3 4	1 2	2 3
49	1	3 4	1 3	1 2
50	1	3 4	1 3	1 3
51	1	3 4	1 3	2 3
52	1	3 4	2 3	1 2
53	1	3 4	2 3	1 3
54	1	3 4	2 3	2 3

Conf (2)	SUB (1)	SUB (2)	SUB (3)	SUB (4)
55	2	1 2	1 2	1 2
56	2	1 2	1 2	1 3
57	2	1 2	1 2	2 3
58	2	1 2	1 3	1 2
59	2	1 2	1 3	1 3
60	2	1 2	1 3	2 3
61	2	1 2	2 3	1 2
62	2	1 2	2 3	1 3
63	2	1 2	2 3	2 3
64	2	1 3	1 2	1 2
65	2	1 3	1 2	1 3
66	2	1 3	1 2	2 3
67	2	1 3	1 3	1 2
68	2	1 3	1 3	1 3
69	2	1 3	1 3	2 3
70	2	1 3	2 3	1 2
71	2	1 3	2 3	1 3
72	2	1 3	2 3	2 3
73	2	1 4	1 2	1 2
74	2	1 4	1 2	1 3
75	2	1 4	1 2	2 3
76	2	1 4	1 3	1 2
77	2	1 4	1 3	1 3
78	2	1 4	1 3	2 3
79	2	1 4	2 3	1 2
80	2	1 4	2 3	1 3
81	2	1 4	2 3	2 3
82	2	2 3	1 2	1 2
83	2	2 3	1 2	1 3
84	2	2 3	1 2	2 3
85	2	2 3	1 3	1 2
86	2	2 3	1 3	1 3
87	2	2 3	1 3	2 3
88	2	2 3	2 3	1 2
89	2	2 3	2 3	1 3
90	2	2 3	2 3	2 3
91	2	2 4	1 2	1 2
92	2	2 4	1 2	1 3
93	2	2 4	1 2	2 3
94	2	2 4	1 3	1 2
95	2	2 4	1 3	1 3
96	2	2 4	1 3	2 3
97	2	2 4	2 3	1 2
98	2	2 4	2 3	1 3
99	2	2 4	2 3	2 3
100	2	3 4	1 2	1 2
101	2	3 4	1 2	1 3
102	2	3 4	1 2	2 3
103	2	3 4	1 3	1 2
104	2	3 4	1 3	1 3
105	2	3 4	1 3	2 3
106	2	3 4	2 3	1 2
107	2	3 4	2 3	1 3
108	2	3 4	2 3	2 3

Tabela 6.10 - Configuração (3) de modos selecionados - Exemplo 6.2.1.

CONFI. (3)	SUB. (1)	SUB. (2)	SUB. (3)	SUB. (4)
1	1	1	1	1
2	1	1	1	2
3	1	1	2	1
4	1	1	2	2
5	1	1	3	1
6	1	1	3	2
7	1	2	1	1
8	1	2	1	2
9	1	2	2	1
10	1	2	2	2
11	1	2	3	1
12	1	2	3	2
13	1	3	1	1
14	1	3	1	2
15	1	3	2	1
16	1	3	2	2
17	1	3	3	1
18	1	3	3	2
19	1	4	1	1
20	1	4	1	2
21	1	4	2	1
22	1	4	2	2
23	1	4	3	1
24	2	4	3	2
25	2	1	1	1
26	2	1	1	2
27	2	1	2	1
28	2	1	2	2
29	2	1	3	1
30	2	1	3	2
31	2	2	1	1
32	2	2	1	2
33	2	2	2	1
34	2	2	2	2
35	2	2	3	1
36	2	2	3	2
37	2	3	1	1
38	2	3	1	2
39	2	3	2	1
40	2	3	2	2
41	2	3	3	1
42	2	3	3	2
43	2	4	1	1
44	2	4	1	2
45	2	4	2	1
46	2	4	2	2
47	2	4	3	1
48	2	4	3	2

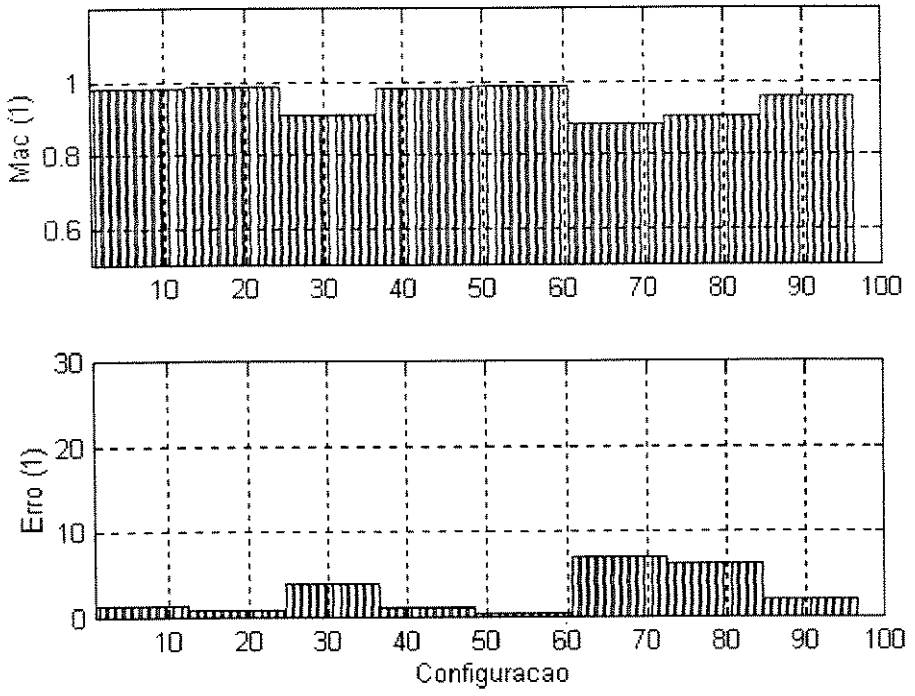


Figura 6.2 - MAC médio dos autovetores sintetizados e Erro relativo médio dos autovalores sintetizados em função da configuração (1) de modos selecionados/não selecionados relativos ao exemplo 6.2.1. CEA (53)

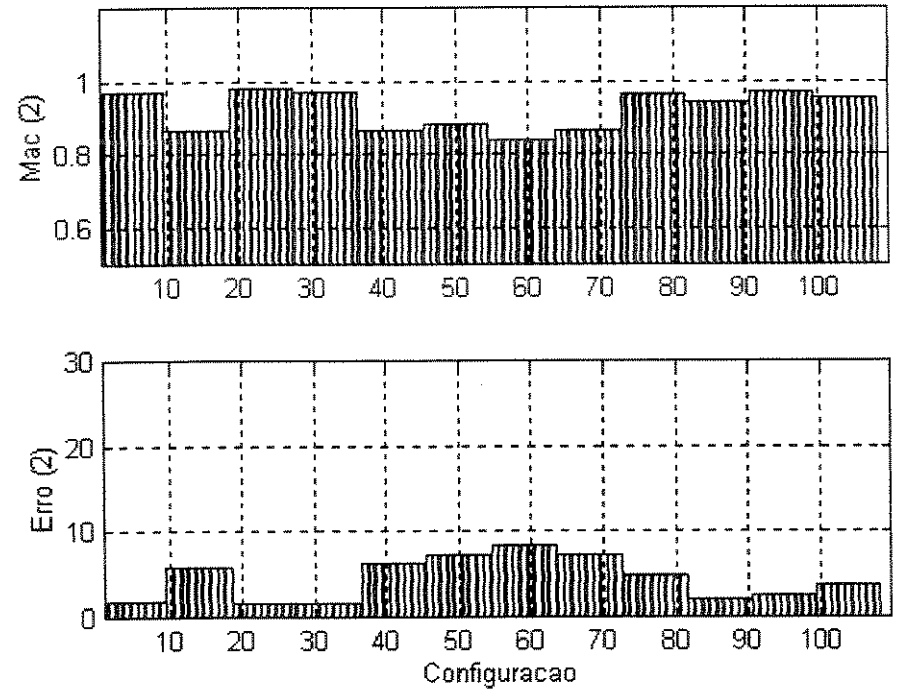


Figura 6.3 - MAC médio dos autovetores sintetizados e Erro relativo médio dos autovalores sintetizados em função da configuração (2) de modos selecionados/não selecionados relativos ao exemplo 6.2.1, CEA (67).

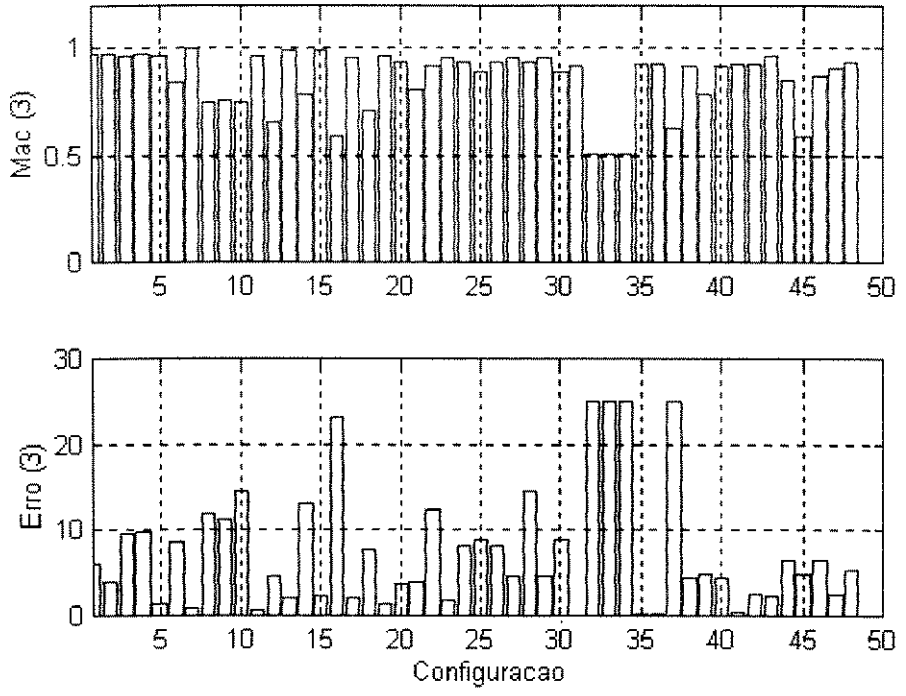


Figura 6.4 - MAC médio dos autovetores sintetizados e Erro relativo médio dos autovalores sintetizados em função da configuração (3) de modos selecionados/não selecionados relativos ao exemplo 6.2.1. CEA (29)

6.2.2 - Exemplo 2 - Placa Modelada por Elementos Finitos

O segundo exemplo simulado utiliza a técnica de síntese modal não amortecida e consiste de uma chapa de aço de 1000 x 200 x 8, modelada através do método de elementos finitos, como mostrado na figura 6.5.

O modelo completo consiste de 53 nós, sendo modelado por duas subestruturas com 18 e 38 nós, respectivamente. O sistema consiste de 15 coordenadas internas para a subestrutura (1) e 35 coordenadas internas para a subestrutura (2). Sendo assim, o sistema possuirá três coordenadas no contorno entre as subestruturas, que são definidas pelas coordenadas 2,8,9 para subestrutura (1) e 1,18,32 para a subestrutura (2).

O modelo de elementos finitos foi analisado através do Programa Ansys [104]. A malha foi gerada utilizando-se um elemento de casca (Shell93), com 3 graus de liberdade por nó. A identificação dos autovalores e autovetores foi feita considerando um total de (54) coordenadas para a subestrutura (1), (114) coordenadas para a subestrutura (2) e (159) coordenadas para o sistema completo. O sistema completo

também foi modelado por elementos finitos com a finalidade de comparar os resultados dinâmicos analíticos com os resultados dinâmicos sintetizados pelas subestruturas.

Para simplificar a análise do problema foram considerados os deslocamentos modais apenas na direção Z, conforme definido na figura 6.5.

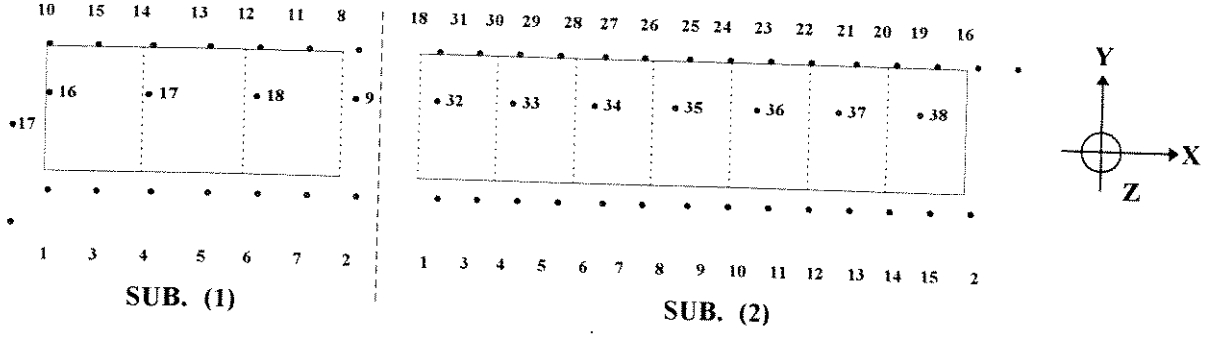


Figura 6.5 - Chapa modelada por elementos finitos.

As propriedades mecânicas da chapa de aço são:

Módulo de Young : 2.1e+11 N/m²
Densidade : 7850 kg/m³
Coeficiente de Poisson : 0.3

Foram identificados 6 autovalores e autovetores, normalizados pela matriz de massa, para cada subestrutura e 14 autovalores e autovetores para o sistema completo. A tabela 6.11 apresenta os autovalores, gerados pelo Programa Ansys, para as subestruturas e para o sistema completo.

A técnica de síntese modal generalizada, através do Programa Struct, foi aplicada ao sistema, utilizando as informações dinâmicas das subestruturas, definidas pelo Programa Ansys. Neste caso, é montado um arquivo externo contendo os autovalores e autovetores das subestruturas e o Programa Struct efetuará somente o procedimento de síntese modal, conforme definido no capítulo 2. A tabela 6.12 apresenta os pesos modais das subestruturas utilizando-se o critério de eliminação automática de modos (CEA).

Tabela 6.11 - Autovalores das subestruturas - Exemplo 6.2.2.

	AUTOVALORES (rd/s)		
	SUB 1	SUB 2	ESTRUTURA COMPLETA
1	349.54	84.237	41.910
2	406.23	143.84	99.958
3	648.10	223.08	113.27
4	665.00	300.97	204.94
5	820.35	412.20	216.00
6	829.23	484.31	319.69
7	-------	-------	343.81
8	-------	-------	448.57
9	-------	-------	487.23
10	-------	-------	595.75
11	-------	-------	614.93
12	-------	-------	657.83
13	-------	-------	700.07
14	-------	-------	764.96

Tabela 6.12 - Pesos relativos dos modos das subestruturas - Exemplo 6.2.2.

MODOS	SUB1	SUB2
1	1.30	1.58
2	2.52	2.21
3	1.52	1.38
4	2.65	1.79
5	1.19	2.02
6	1.75	1.94
C E A	4. 2	2. 5

A tabela 6.13 apresenta os resultados da síntese modal utilizando-se o critério de eliminação automática de modos, considerando que dois modos serão não selecionados de cada subestrutura. Nesta condição, observa-se na tabela 6.12 que serão não selecionados os modos 4 e 2 para a subestrutura (1) e os modos 2 e 5 para a subestrutura (2).

A tabela 6.14 apresenta os resultados da síntese modal utilizando-se uma outra combinação de modos selecionados/não selecionados, ou seja, considera-se a mesma quantidade de modos selecionados de cada subestrutura, porém deleta-se os modos 1,3 para a subestrutura (1) e os modos 1,3 para a subestrutura (2).

Tabela 6.13 - Resultados da síntese usando o C E A - Exemplo 6.2.2.

NÚMERO	AUTOVALORES DO SISTEMA (Hz)	AUTOVALORES SINTETIZADOS (Hz)	ERRO RELATIVO (%)	INDICE MAC
1	41.910	------	------	------
2	99.958	------	------	------
3	113.27	132.6	17.0	0.48
4	204.94	172.6	15.8	0.74
5	216.00	------	------	------
6	319.69	314.4	1.66	0.74
7	343.81	278.4	19.0	0.98
8	448.57	440.3	1.85	0.97
9	487.23	------	------	------
10	595.75	654.5	9.85	0.49
11	614.93	------	------	------
12	657.83	644.8	1.98	0.54
13	700.07	------	------	------
14	764.96	------	------	------
VALORES MÉDIOS			9. 59	0. 71

Tabela 6.14 - Resultados da síntese usando outra combinação de modos selecionados/não selecionados - Exemplo 6.2.2.

NÚMERO	AUTOVALORES DO SISTEMA (Hz)	AUTOVALORES SINTETIZADOS (Hz)	ERRO RELATIVO (%)	INDICE MAC
1	41.910	------	------	------
2	99.958	------	------	------
3	113.27	------	------	------
4	204.94	172.6	15.8	0.74
5	216.00	------	------	------
6	319.69	314.4	1.66	0.98
7	343.81	211.8	38.4	0.56
8	448.57	440.3	1.85	0.97
9	487.23	410.4	15.8	0.75
10	595.75	654.5	9.85	0.54
11	614.93	------	------	------
12	657.83	644.8	1.98	0.49
13	700.07	------	------	------
14	764.96	------	------	------
VALORES MÉDIOS			12. 19	0. 72

Analisando-se a tabela 6.13 observa-se que foram identificados, efetivamente, 4 modos com erro relativo inferior a 15%, mesmo com índices MAC acima de 0.5 para outros modos identificados. Os resultados mostrados na tabela 6.14, que utilizam uma combinação diferente de modos em relação ao CEA, foram bastante similares à

condição definida pela tabela 6.13. Nestes casos, a manutenção de cerca 67 % dos modos de cada subestrutura resultaram em uma identificação de cerca de 30 % dos modos da estrutura completa. Estes resultados podem ser explicados analisando-se a tabela 6.12 e verificando-se que não ocorre uma variação significativa na ordem dos pesos modais das subestruturas, o que explica a similaridade dos resultados. Além disso, uma base modal com uma ortogonalidade deficiente, provavelmente explique a porcentagem relativamente baixa de modos identificados.

No entanto, pode-se concluir que o método de síntese modal utilizado é consistente e que o CEA é uma das várias combinações de modos que se situam dentro das melhores faixas de precisão para os resultados da síntese. Portanto, o critério de eliminação automática de modos pode ser, efetivamente, utilizado como uma "ferramenta" para execução automática do processo de síntese modal, principalmente, quando não se conhece suficientemente a estrutura analisada.

6.3 - Caso com Amortecimento Geral

6.3.1 - Exemplo 1 : Sistema massa-mola-amortecedor

O primeiro exemplo com amortecimento geral é similar ao sistema utilizado no trabalho de Martim & Glaim [54] e Santos[3]. Consiste de massas concentradas conectadas por molas e por amortecedores, como mostrado na figura 6.6. O sistema completo é subdividido em duas subestruturas, com 5 e 3 graus de liberdade, respectivamente. Neste caso, existem três coordenadas internas para a subestrutura (1) e uma coordenada interna para a subestrutura (2), sendo que, existem duas coordenadas no contorno.

A tabela 6.15 apresenta os parâmetros físicos de massa, rigidez e amortecimentos discretos do sistema estudado. Os valores de amortecimento não são proporcionais aos parâmetros de massa ou de rigidez, e portanto o sistema é considerado com amortecimento geral, ou seja, as equações de movimento não são diretamente desacopladas pela transformação linear que utiliza a base modal do sistema não amortecido. Neste caso obtém-se, através do método de síntese modal generalizado proposto, uma base de autovalores e autovetores complexos.

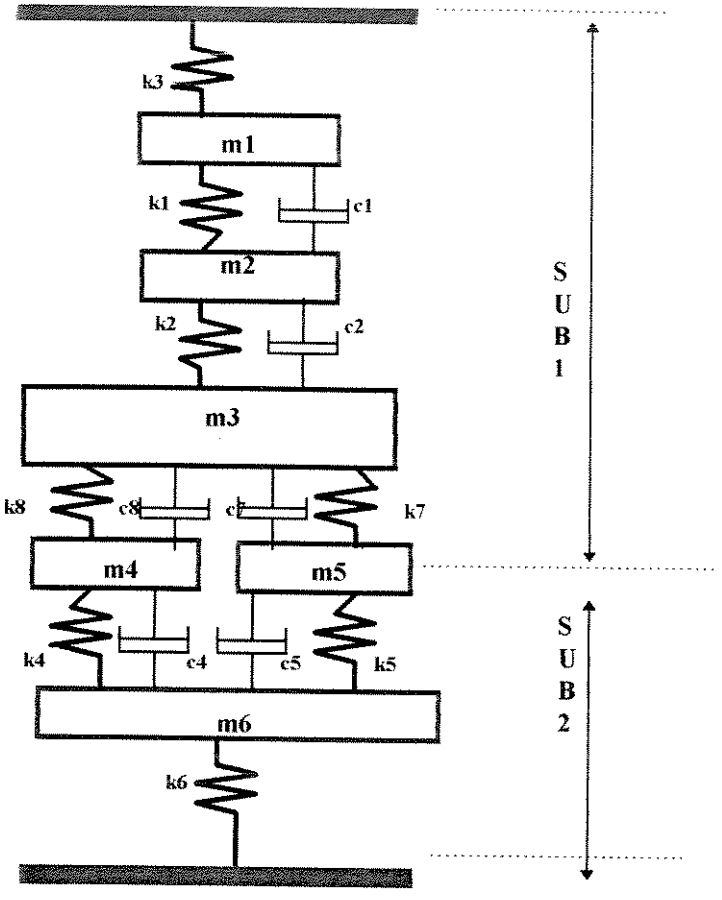


Figura 6.6 - Sistema massa-mola-amortecedor analisado.

Tabela 6.15 - Parâmetros físicos das subestruturas - Exemplo 6.3.1.

ELEMENTO	MASSA [Kg]	RIGIDEZ [N/m]	AMORTEC. [N.S/m]	COORD. INTERNAS	COORD. CONTORNO
Sub. 1	m1 = 10 m2 = 10 m3 = 10 m4 = 10 m5 = 10	k1 = 10000 k2 = 20000 k3 = 10000 k7 = 20000 k8 = 12000	c1 = 3 c2 = 5 c7 = 12.5 c8 = 10	1,2,3	4,5
Sub. 2	m4 = 10 m5 = 10 m6 = 10	k4 = 15000 k5 = 10000 k6 = 20000	c4 = 3 c5 = 7	6	4,5

A tabela 6.16 apresenta os autovalores das subestruturas, obtidos através do Programa Struct e os autovalores do sistema completo, obtidos através do Programa Matlab.

Tabela 6.16 - Autovalores das subestruturas e do sistema completo - Exemplo 6.3.1.

	AUTOVALORES (rd/s)		
	SUB 1	SUB 2	ESTRUTURA COMPLETA
1	.00855 ± 10.0 i	.0444 ± 21.5 i	.0194± 15.47 i
2	.343 ± 36.0 i	.275 ± 34.9 i	.2404 ± 34.67 i
3	.371 ± 40.2 i	.680 ± 72.9 I	.3281± 37.86 i
4	.576 ± 56.5 i	----------	.5046± 54.15 i
5	1.75± 84.9 I	----------	.5878± 69.89 i
6	----------	----------	1.557 ± 82.79 i

A tabela 6.17 apresenta os pesos relativos dos modos das subestruturas utilizando o critério de eliminação automática. No caso analisado, eliminou-se 4 modos da subestrutura (1) e 2 modos da subestrutura (2), correspondendo a 40 % e 33,3% do total dos respectivos modos. Observa-se nesta tabela, que os modos com maiores pesos são os modos 4 e 5 para a subestrutura (1) e 2 para a subestrutura (2). É importante salientar que a tabela 6.17 apresenta os valores dos pesos modais somente dos autovalores complexos, já que seus respectivos complexos conjugados possuirão os mesmos valores de pesos modais. No entanto, o processo utiliza os autovalores complexos conjugados como parte do conjunto de modos a ser selecionados de cada subestrutura. Portanto, este procedimento força que a quantidade de modos selecionados sejam sempre definidos em números pares.

Tabela 6.17 - Pesos relativos associados dos modos das subestruturas - Exemplo 6.3.1.

MODOS	SUB1	SUB2
1	.1564E+02	.1503E+02
2	.1562E+02	.6156E+02
3	.1532E+02	.4375E+01
4	.1705E+02	----------
5	.1734E+02	----------
C E A	4, 5	2

A tabela 6.18 apresenta uma comparação entre os resultados sintetizados pelo Programa Struct e os resultados reais do sistema completo. Observa-se nesta tabela, que foram identificados 8 modos com erro relativo baixo e 6 modos com MAC superior a 0.5, correspondendo a 66.7 % e 50 % do total de modos do sistema completo, respectivamente.

Tabela 6.18 - Resultados da síntese usando o C E A - Exemplo 6.3.1.

NÚMERO DO MODO	AUTOVALORES DO SISTEMA (rd/s)	AUTOVALORES SINTETIZADOS (rd/s)	ERRO RELATIVO (%)	INDICE MAC
1	. 0194 ± 15. 47 i	. 0188 ± 15. 48 i	. 09	. 999
2	. 2404 ± 34. 67 i	. 1507 ± 35. 70 i	2. 98	. 843
3	. 3281 ± 37. 86 i	----------	----------	----------
4	. 5046 ± 54. 15 i	. 7887 ± 51. 75 i	4. 43	. 023
5	. 5878 ± 69. 89 i	. 4709 ± 69. 49 i	. 56	. 867
6	1. 557 ± 82. 79 i	----------	----------	----------
VALORES MÉDIOS			2. 02	0. 683

Novamente, as linhas tracejadas da tabela representam aqueles autovalores e autovetores que não foram identificados pelo processo de síntese modal.

A tabela 6.19 apresenta os resultados da síntese das subestruturas usando uma outra condição de eliminação de modos. Neste caso, foram considerados a mesma quantidade de modos selecionados para cada subestrutura, porém eliminou-se os modos 2,3 da subestrutura (1) e o modo 3 da subestrutura (2). Observa-se nesta tabela, uma condição de identificação inferior em relação aos resultados obtidos utilizando-se o CEA, definidos na tabela 6.17. Ou seja, apenas seis modos foram identificados com baixos erros relativos nos autovalores e apenas 2 modos com índice MAC inferior a 0.5.

Tabela 6.19 - Resultados da síntese para outra condição de eliminação - Exemplo 6.3.1.

NÚMERO DO MODO	AUTOVALORES DO SISTEMA (rd/s)	AUTOVALORES SINTETIZADOS (rd/s)	ERRO RELATIVO (%)	INDICE MAC
1	. 0194 ± 15. 47 i	. 0187 ± 15. 51 i	. 25	. 999
2	. 2404 ± 34. 67 i	----------	----------	----------
3	. 3281 ± 37. 86 i	----------	----------	----------
4	. 5046 ± 54. 15 i	. 5760 ± 53. 47 i	1. 25	. 557
5	. 5878 ± 69. 89 i	----------	----------	----------
6	1. 557 ± 82. 79 i	1. 174 ± 78. 61 i	5. 06	. 403
VALORES MÉDIOS			2. 19	. 653

Assim como foi definido no primeiro exemplo não amortecido, foi feita uma averiguação mais criteriosa da metodologia de síntese modal generalizada, aplicada aos sistemas com amortecimento geral. Este procedimento foi feito através da avaliação de todas as configurações possíveis de eliminação de modos para as subestruturas.

A tabela 6.20 apresenta as quantidades de modos que foram eliminados e selecionados de cada subestrutura. Através destas combinações são obtidas as várias configurações de modos selecionados para as subestruturas.

Tabela 6.20 - Quantidade de modos selecionados/não selecionados das subestruturas - Exemplo 6.3.1.

Configurações	SELECIONADOS		NÃO SELECIONADOS	
	S1	S2	S1	S2
1	1	1	2	4
2	1	2	2	3
3	1	3	2	2
4	1	4	2	2
5	2	1	1	4
6	2	2	1	3
7	2	3	1	2
8	2	4	1	1

A tabela 6.21 apresenta as várias possibilidades de modos selecionados destas diferentes combinações, sendo que os modos não selecionados não são mostrados, já que são aqueles modos remanescentes diferentes dos modos atualmente selecionados. Em cada configuração, as combinações relativas ao CEA estão destacadas com uma cor diferente.

Deve-se ressaltar, que para a melhoria dos resultados da síntese, no caso complexo, sempre é necessário manter ou deletar modos com ordem dobrada, ou seja, no mínimo dois modos devem ser selecionados ou não selecionados para cada subestrutura, ou seja, elimina-se o valor complexo e também o seu respectivo conjugado. Esta restrição é função da modificação do sistema para uma ordem dobrada. Como foi visto, esta modificação visa promover o desacoplamento das equações dinâmicas. Este procedimento foi definido à partir de várias observações sobre o desempenho da técnica de síntese modal em função das bases modais mantidas das subestruturas.

Obteve-se os diagramas das figuras 6.7 a 6.10 através das combinações definidas na tabela 6.21, que representam os índices de MAC médio dos autovetores identificados e os respectivos erros relativos médios dos autovalores.

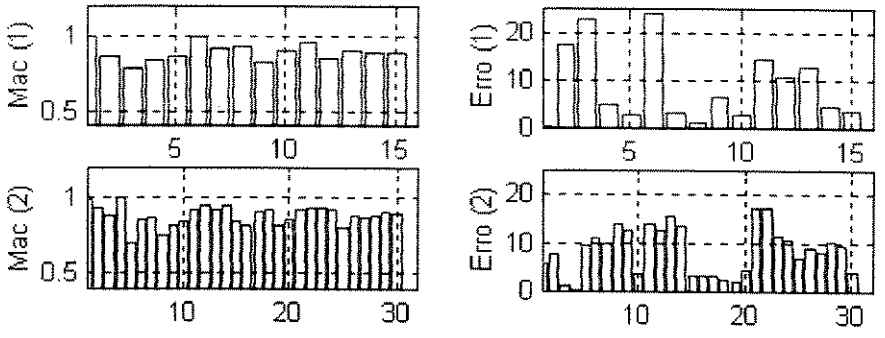


Figura 6.7 - Índices de MAC médio e erros relativos médios para as configurações (1), (2) do exemplo 6.3.1. CEA (13 e 25)

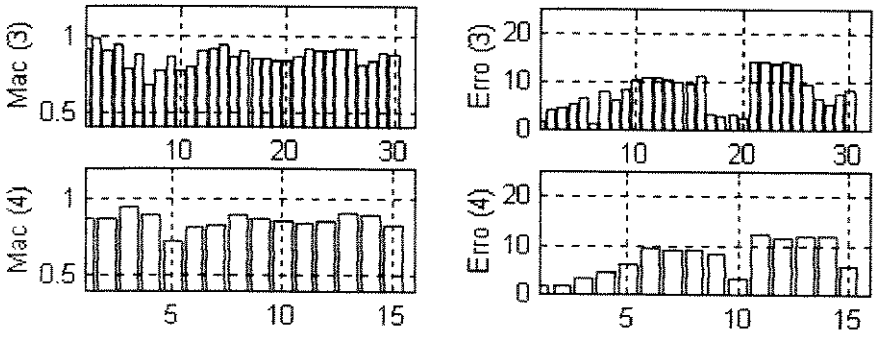


Figura 6.8 - Índices de MAC médio e erros relativos médios para as configurações (3), (4) do exemplo 6.3.1. CEA (21 e 11)

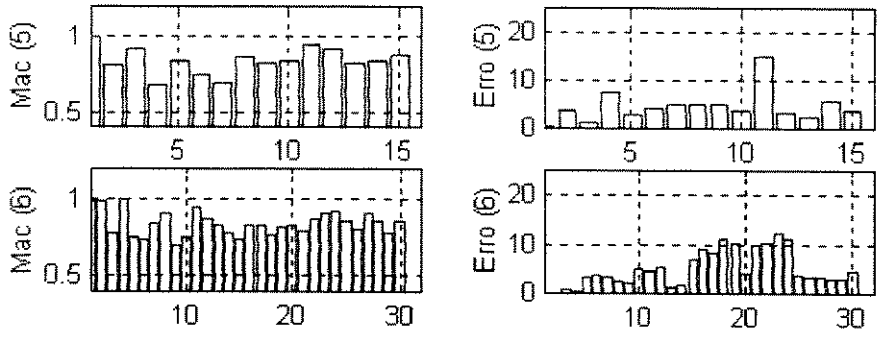


Figura 6.9 - Índices de MAC médio e erros relativos médios para as configurações (5), (6) do exemplo 6.3.1. CEA (8 e 15)

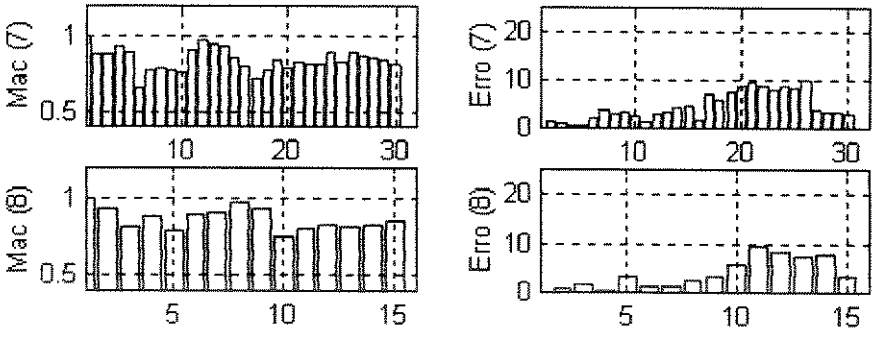


Figura 6.10 - Índices de MAC médio e erros relativos médios para as configurações (7), (8) do exemplo 6.3.1. CEA (11 e 6)

Os resultados mostrados nas figuras 6.7 a 6.10 foram obtidos considerando como um modo potencialmente identificado, aquele com índice MAC superior a 0.1 e erro relativo no respectivo autovalor inferior a 25%. Estes índices não servem, efetivamente, como padrões para identificação de um determinado modo e tem apenas o objetivo de introduzir a máxima quantidade de modos na análise, afim de poder avaliar a sensibilidade do método proposto.

Tabela 6.21 - Configurações de modos selecionados - Exemplo 6.3.1.

	Conf. 1		Conf. 2		Conf. 3		Conf. 4		Conf. 5		Conf. 6		Conf. 7		Conf. 8	
Nº	S 2	S 1	S 2	S 1	S 2	S 1	S 2	S 1	S 2	S 1	S 2	S 1	S 2	S 1	S 2	S 1
1	1	1	1	1,2	1	1,2,3	1	1,2,3,4	1,2	1	1,2	1,2	1,2	1,2,3	1,2	1,2,3
2	1	2	1	1,3	1	1,2,4	1	1,2,3,5	1,2	2	1,2	1,3	1,2	1,2,4	1,2	1,2,3
3	1	3	1	1,4	1	1,2,5	1	1,2,4,5	1,2	3	1,2	1,4	1,2	1,2,5	1,2	1,2,4
4	1	4	1	1,5	1	1,3,4	1	1,3,4,5	1,2	4	1,2	1,5	1,2	1,3,4	1,2	1,3,4
5	1	5	1	2,3	1	1,3,5	1	2,3,4,5	1,2	5	1,2	2,3	1,2	1,3,5	1,2	2,3,4
6	2	1	1	2,4	1	1,4,5	2	1,2,3,4	1,3	1	1,2	2,4	1,2	1,4,5	1,3	1,2,3
7	2	2	1	2,5	1	2,3,4	2	1,2,3,5	1,3	2	1,2	2,5	1,2	2,3,4	1,3	1,2,3
8	2	3	1	3,4	1	2,3,5	2	1,2,4,5	1,3	3	1,2	3,4	1,2	2,3,5	1,3	1,2,4
9	2	4	1	3,5	1	2,4,5	2	1,3,4,5	1,3	4	1,2	3,5	1,2	2,4,5	1,3	1,3,4
10	2	5	1	4,5	1	3,4,5	2	2,3,4,5	1,3	5	1,2	4,5	1,2	3,4,5	1,3	2,3,4
11	3	1	2	1,2	2	1,2,3	3	1,2,3,4	2,3	1	1,3	1,2	1,3	1,2,3	2,3	1,2,3
12	3	2	2	1,3	2	1,2,4	3	1,2,3,5	2,3	2	1,3	1,3	1,3	1,2,4	2,3	1,2,3
13	3	3	2	1,4	2	1,2,5	3	1,2,4,5	2,3	3	1,3	1,4	1,3	1,2,5	2,3	1,2,4
14	3	4	2	1,5	2	1,3,4	3	1,3,4,5	2,3	4	1,3	1,5	1,3	1,3,4	2,3	1,3,4
15	3	5	2	2,3	2	1,3,5	3	2,3,4,5	2,3	5	1,3	2,3	1,3	1,3,5	2,3	2,3,4
16	---	---	2	2,4	2	1,4,5	---	-----	-----	-	1,3	2,4	1,3	1,4,5	-----	-----
17	---	---	2	2,5	2	2,3,4	---	-----	-----	-	1,3	2,5	1,3	2,3,4	-----	-----
18	---	---	2	3,4	2	2,3,5	---	-----	-----	-	1,3	3,4	1,3	2,3,5	---	-----
19	---	---	2	3,5	2	2,4,5	---	-----	-----	-	1,3	3,5	1,3	2,4,5	-----	-----
20	---	---	2	4,5	2	3,4,5	---	-----	-----	-	1,3	4,5	1,3	3,4,5	-----	-----
21	---	---	3	1,2	3	1,2,3	---	-----	-----	-	2,3	1,2	2,3	1,2,3	-----	-----
22	---	---	3	1,3	3	1,2,4	---	-----	-----	-	2,3	1,3	2,3	1,2,4	-----	-----
23	---	---	3	1,4	3	1,2,5	---	-----	-----	-	2,3	1,4	2,3	1,2,5	-----	-----
24	---	---	3	1,5	3	1,3,4	---	-----	-----	-	2,3	1,5	2,3	1,3,4	-----	-----
25	---	---	3	2,3	3	1,3,5	---	-----	-----	-	2,3	2,3	2,3	1,3,5	-----	-----
26	---	---	3	2,4	3	1,4,5	---	-----	-----	-	2,3	2,4	2,3	1,4,5	-----	-----
27	---	---	3	2,5	3	2,3,4	---	-----	-----	-	2,3	2,5	2,3	2,3,4	-----	-----
28	---	---	3	3,4	3	2,3,5	---	-----	-----	-	2,3	3,4	2,3	2,3,5	-----	-----
29	---	---	3	3,5	3	2,4,5	---	-----	-----	-	2,3	3,5	2,3	2,4,5	-----	-----
30	---	---	3	4,5	3	3,4,5	---	-----	-----	-	2,3	4,5	2,3	3,4,5	-----	-----

Analisando os resultados anteriores, observa-se que o método de síntese modal generalizado proposto converge para resultados satisfatórios e que na maioria dos casos o CEA não foi, necessariamente, a melhor condição de combinação de modos.

O CEA porém, sempre situou-se próximo das melhores configurações de modos selecionados/eliminados. Observa-se que quanto maior a quantidade de modos selecionados na base, melhor o comportamento do CEA.

O fato do CEA ser um bom critério de pesagem dos modos, convergindo para resultados satisfatórios, pode ser explicado através da interação complexa entre os movimentos modais de cada subestrutura que formarão os movimentos modais da estrutura completa. Ou seja, a consideração de baixa energia nos contornos das subestruturas conectadas é preponderante para uma precisão final da síntese, porém, esta precisão final pode ser melhor ou pior em função da similaridade dos movimentos modais, relativos às coordenadas internas de cada subestrutura, com os movimentos modais da estrutura completa, relativos aos mesmos pontos das subestruturas.

6.3.2 - Exemplo 2 : Sistema discreto com 15 gdl

O sistema analisado consiste de massas concentradas conectadas através de molas e amortecedores, totalizando um sistema com quinze graus de liberdade. O sistema discreto, mostrado na figura 6. 11, é idêntico ao analisado no trabalho de Greif [82], sendo dividido em três subestruturas com 3, 9 e 5 graus de liberdade, respectivamente.

A tabela 6.22 apresenta os parâmetros físicos e as coordenadas internas e do contorno das subestruturas conectadas.

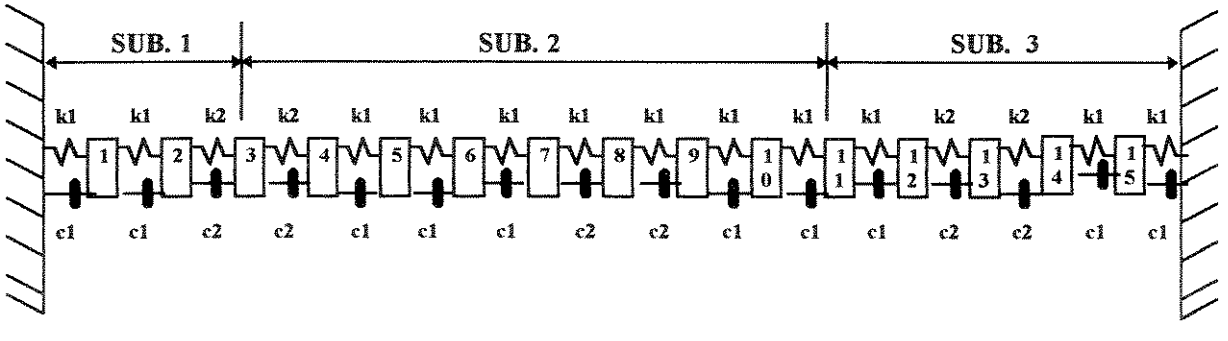


Figura 6.11 - Sistema massa-mola-amortecedor analisado - Exemplo 6.3.2.

Tabela 6.22 - Parâmetros físicos das subestruturas - Exemplo 6.3.2.

ELEMENTO	MASSA [Kg]	RIGIDEZ [N/m]	AMORTEC. [N.S/m]	COORD. INTERNAS	COORD. CONTORNO
Sub. 1	m1 = 2 m2 = 2 m3 = 2	k1 = 8 k2 = 12	c1 = 0.8 c2 = 1.6	1,2	3
Sub. 2	m3 a m11=2	k1 = 8 k2 = 12	c1 = 0.8 c2 = 1.6	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	3
Sub. 3	m11 a m15=2	k1 = 8 k2 = 12	c1 = 0.8 c2 = 1.6	12, 13, 14, 15	11
Sub. 4	Remontagem das sub. 1 e 2	Remontagem das sub. 1 e 2	Remontagem das sub. 1 e 2	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	11

A tabela 6.23 apresenta os autovalores e os pesos modais, calculdados através do método de síntese modal generalizado, utilizando o CEA dos modos. Os resultados da síntese são mostrados na tabela 6.24 utilizando-se a tabela 6.23 como referência. Estes resultados foram obtidos através da eliminação de dois modos para a subestrutura (1), seis modos para a subestrutura (2), dois modos para a subestrutura (3) e seis modos para a subestrutura(4). Estes valores correspondem a 33.3 %, 33.3%, 20% e 37.5 % do total de modos de cada subestrutura conectada. Segundo a condição definida pelo CEA, eliminou-se o modo 3 da subestrutura (1), os modos 6,7,8 da subestrutura (2), o modo 5 da subestrutura (3) e os modos 2,6,7 da subestrutura (4), como mostrado na tabela 6.23. Os autovalores do sistema completo, mostrados na tabela 6.25, foram obtidos através do Programa Matlab.

Tabela 6.23 - Autovalores das subestruturas e seus respectivos pesos modais - Exemplo 6.3.2.

MODOS	SUB1		SUB2		SUB3		SUB4	
INDICE	PESO	AUTV(rd/s)	PESO	AUTV(rd/s)	PESO	AUTV(rd/s)	PESO	AUTV(rd/s)
1	5. 35	.0549±1.04i	1. 53	.0077±.349i	13. 32	.023±.656i	8. 15	.0163±.539i
2	3. 38	.4580±2.93i	1. 56	.0621±1.05i	11. 97	.248±2.03i	9. 12	.0602±1.05i
3	8. 69	1.290±4.30i	1. 64	.212±1.74i	12. 11	.474±2.96i	8. 36	1.78±1.60i
4	-------	-------	1. 75	.346±2.41 i	12. 16	.762±3.66i	7. 05	.290±2.16i
5	-------	-------	1. 99	.571±2.97 i	16. 12	1.29±4.33i	6. 76	.403±2.60i
6	-------	-------	2. 03	.746±3.51 i	-------	-------	8. 96	.547±2.96i
7	-------	-------	2. 73	1.19±3.56 i	-------	-------	8. 65	.788±3.66i
8	-------	-------	3.00	.975±4.27 i	-------	-------	8. 64	3.86±6.68i
9	-------	-------	1. 18	1.28+4.30 i	-------	-------	------	--------
CEA	3		6, 7, 8		5		2, 6, 7	

Tabela 6.24 - Resultados da síntese[4] modal usando o CEA - Exemplo 6.3.2.

NÚMERO DO MODO	AUTOVALORES DO SISTEMA (rd/s)	AUTOVALORES SINTETIZADOS (rd/s)	ERRO RELATIVO (%)	INDICE MAC
1	. 0094 ± . 4163 i	. 0166 ± . 5426 i	30. 3	. 858
2	. 0392 ± . 7918 i	----------	---------	------
3	. 0711 ± 1. 170 i	. 0686 ± 1. 140 i	2. 6	. 207
4	. 1679 ± 1. 591 i	. 1855 ± 1. 650 i	3. 8	. 951
5	. 2410 ± 2. 014 i	. 2799 ± 2. 142 i	6. 5	. 862
6	. 3564 ± 2. 352 i	. 3725 ± 2. 454 i	4. 4	. 760
7	. 4027 ± 2. 630 i	. 4131 ± 2. 689 i	2. 3	. 928
8	. 4973 ± 2. 882 i	----------	---------	------
9	. 6250 ± 3. 204 i	----------	---------	------
10	. 6818 ± 3. 391 i	. 6723 ± 3. 394 i	. 06	. 236
11	. 7847 ± 3. 717 i	----------	---------	------
12	1. 180 ± 3. 639 i	----------	---------	------
13	. 7717 ± 3. 589 i	----------	---------	------
14	1. 286 ± 4. 2997 i	----------	---------	------
15	1. 286 ± 4. 2998 i	----------	--------	------
VALORES MÉDIOS			7. 14	0. 686

Tabela 6.25 - Condição de eliminação de modos - Exemplo 6.3.2.

MODOS	**SUB1**	**SUB2**	**SUB3**	**SUB4**
1	**5. 35**	**1. 53**	**4. 29**	**3. 45**
2	**3. 38**	**1. 56**	**5. 65**	**2. 78**
3	**8. 69**	**1. 64**	**5. 51**	**1. 83**
4	------	**1. 75**	**5. 46**	**2. 85**
5	------	**1. 99**	**1. 53**	**2. 73**
6	------	**2. 03**	------	**2. 47**
7	------	**2. 73**	------	**3. 19**
8	------	**3. 00**	------	**3. 14**
9	------	**1. 18**	------	------
Modos Eliminado	**2**	**1, 2, 3**	**2**	**2,3,7**

Analisando-se a tabela 6.24, observa-se que foram identificados 12 modos com baixo erro relativo nos autovalores, correspondendo a 40% do total dos modos do sistema completo. Considerando um índice de MAC superior a 0.5, foram efetivamente identificados 10 modos, que corresponde a 33.3% do total de modos do sistema completo.

A tabela 6.26 apresenta uma outra condição de eliminação de modos, considerando-se a mesma quantidade de modos selecionados para cada subestrutura, contendo a mesma sequência para os autovalores identificados.

(4) A quantidade de modos identificados é definida através da avaliação do referido valor complexo e também de seu complexo conjugado.

Nesta condição, foram eliminados o modo 2 da subestrutura (1), os modos 1,2,3 da subestrutura (2), o modo 2 da subestrutura (3) e os modos 2,3,7 da subestrutura (4).

A tabela 6.26 apresenta os resultados obtidos através do Programa Struct, considerando as combinações de modos selecionados definidos na tabela 6.25. Verifica-se, neste caso, que apesar da identificação de 14 modos (46.7%) com erros relativos pequenos, os valores de MAC da maioria destes modos foi inferior a 0.5, indicando uma pior condição de identificação do que a apresentada na tabela 6.24.

Tabela 6.26 - Resultados da síntese para outra condição de eliminação de modos - Exemplo 6.3.2.

NÚMERO DO MODO	AUTOVALORES DO SISTEMA (rd/s)	AUTOVALORES SINTETIZADOS (rd/s)	ERRO RELATIVO (%)	INDICE MAC
1	. 0094 ± . 4163 i	----------	---------	------
2	. 0392 ± . 7918 i	----------	---------	------
3	. 0711 ± 1. 170 i	. 0659 ± 1. 123 i	4. 0	. 194
4	. 1679 ± 1. 591 i	----------	---------	------
5	. 2410 ± 2. 014 i	----------	---------	------
6	. 3564 ± 2. 352 i	----------	---------	------
7	. 4027 ± 2. 630 i	----------	---------	------
8	. 4973 ± 2. 882 i	----------	---------	------
9	. 6250 ± 3. 204 i	. 5459 ± 3. 125 i	2. 8	. 283
10	. 6818 ± 3. 391 i	. 7424 ± 3. 529 i	4. 3	. 251
11	. 7847 ± 3. 717 i	. 8138 ± 3. 806 i	6. 0	. 459
12	1. 180 ± 3. 639 i	1. 199 ± 3. 579 i	1. 3	. 921
13	. 7717 ± 3. 589 i	----------	---------	------
14	1. 286 ± 4. 2997 i	1. 275 ± 4. 321 i	. 37	. 439
15	1. 286 ± 4. 2998 i	1. 348 ± 4. 389 i	2. 3	. 001
VALORES MÉDIOS			3. 01	0. 364

Estes resultados validam a metodologia de síntese modal generalizada aplicada a sistemas com amortecimento geral. Além disso, os resultados obtidos validam o critério de remontagem das subestruturas e o critério de eliminação automática de modos (CEA). Em todas as análises o CEA de modos sempre esteve na faixa das melhores condições de escolha de modos selecionados, quanto a precisão final dos resultados da síntese.

6.4 - Discussão dos Resultados

A metodologia de síntese modal de estruturas proposta neste trabalho e desenvolvida através do Programa Struct, foi analisada e várias conclusões subsequentes foram feitas à partir da simulação dos exemplos numéricos apresentados. Pode-se resumir estas conclusões como:

a) No método proposto, não existe, necessariamente, um número mínimo de modos não selecionados de cada subestrutura. Entretanto, na maioria dos casos, um valor coerente de modos que devem ser selecionados na base é da ordem de 70%. Este valor sendo mais conservativo pode ser tomado como referência. Porém, observou-se que para o método de síntese modal proposto, até mesmo um faixa de 40% de modos selecionados pode ser utilizada com resultados satisfatórios, se o sistema for simples e bem comportado.

b) No método proposto, o número de modos de flexibilidade residual é sempre igual ao número de coordenadas do contorno entre as subestruturas conectadas. Verificou-se, principalmente no caso com amortecimento geral, que a soma do número de modos não selecionados das subestruturas atualmente conectadas deve ser maior ou igual ao número de coordenadas do contorno destas subestruturas. Este procedimento, de certa forma, é um fator limitante ao critério definido no ítem (a), porém é de fundamental importância para a convergência final da síntese.

c) A faixa de autovalores identificados é um pouco superior em relação aos respectivos autovetores identificados. Esta avaliação foi feita com base nos valores de MAC dos modos e nos erros relativos dos respectivos autovalores. Uma faixa conservativa é da ordem de 75 % para os autovalores e 65 % para os correspondentes autovetores.

d) Em todos os casos, o processo de remontagem das subestruturas definidos no método proposto, mostrou-se eficiente e consistente, convergindo sempre para resultados satisfatórios.

e) Verificou-se que o CEA dos modos é um indicativo confiável para a formulação de um índice de qualidade dos modos que serão eliminados ou selecionados nas bases modais das

subestruturas. Observou-se que quanto maior o número de modos selecionados na base, mais adequadamente funcionará o CEA. Porém, quando a quantidade de modos selecionados é pequena, o critério nem sempre será a melhor condição de modos eliminados, porém com o CEA sempre ocorrerá a convergência da síntese com bons resultados finais.

f) Verificou-se que se o número de coordenadas do contorno for aproximadamente igual ao número de coordenadas internas da subestrutura, o fator de ponderação tende a possuir a mesma ordem de grandeza para a maioria dos modos da subestrutura. Com isso, observou-se que a utilização do CEA não necessariamente será o melhor conjunto de modos selecionados. O melhor conjunto de modos a ser eliminado, dependerá de uma combinação adequada destes modos com a dinâmica do sistema global. Sendo assim, a eliminação daqueles modos que possuem um peso ligeiramente superior, não necessariamente, serão os melhores conjuntos modais eliminados.

g) Os modos de frequência nula, ou seja, os modos de corpo rígido devem sempre ser selecionados no superconjunto modal de flexibilidade residual. A eliminação destes modos pode provocar uma convergência para resultados imprecisos.

h) Verificou-se que a escolha casual de modos, feita pelo usuário, pode não ser adequada e provocar a não convergência da síntese modal ou a obtenção de resultados imprecisos. Através da utilização do CEA proposto, este inconveniente pode ser eliminado, com a obtenção de resultados satisfatórios. Com isso, a técnica de síntese modal proposta pode ser automatizada, com a finalidade de aumentar, ainda mais, a potencialidade do método.

Capítulo 7

Ensaio Experimental

7.1 - Comentários Gerais

Uma das principais vantagens da técnica de síntese modal generalizada proposta no trabalho é a sua aplicação na análise modal experimental, como já foi comentado no capítulo 2. A avaliação desta técnica e dos critérios propostos foram feitos através da análise experimental de uma estrutura real.

A estrutura é composta de elementos estruturais do tipo perfil U, de modo a representar, em escala reduzida, um modelo esquemático de uma asa de avião com um tanque de combustível fixado em sua extremidade. Evidentemente, este é um modelo bastante simplificado, cuja finalidade principal é o emprego e validação da síntese modal de estruturas. Em uma próxima etapa, pretende-se avaliar uma estrutura de grande porte, como uma asa de avião em escala natural.

Juntamente com o protótipo experimental, foi construído o modelo de elementos finitos da estrutura com a finalidade de ajustar os modelos analítico e experimental, fornecendo todos os subsídios para validar a técnica de síntese modal proposta.

O tipo de modelagem de elementos finitos definida para as estruturas analisadas forneceu parâmetros modais com valores reais. Em uma das etapas de análise, estes parâmetros modais foram utilizados no processo de síntese modal da estrutura completa. Entretanto, sabe-se que da avaliação experimental serão identificados autovalores e autovetores avaliados como complexos. Portanto, outra análise foi feita utilizando-se os métodos definidos no capítulo 4, que transformam as bases modais reais em modos

complexos equivalentes. Com isso, pretende-se obter uma base modal analítica que aproxima-se com a base modal experimental. Da mesma forma, foram utilizados estes modos complexos no processo de síntese modal da estrutura completa.

Uma vez que os modelos analíticos e experimental foram ajustados, somente a análise por elementos finitos já poderia ser utilizada para validar a técnica de síntese modal generalizada. Entretanto, também é efetuado o processo de síntese modal para os dados modais experimentais, onde estarão presentes ruídos e outras imprecisões nos resultados identificados. Com isso, são feitas avaliações a respeito dos resultados obtidos utilizando-se a técnica síntese modal generalizada.

7.2 - Modelo Experimental

O modelo experimental consiste de uma estrutura de alumínio construída em perfil U, cujo formato específico visa representar, aproximadamente, em escala reduzida, uma asa de avião com um tanque de combustível na sua extremidade. A estrutura principal e o quadro são todos soldados, com exceção da união entre eles, que é efetuada por meio de dois parafusos allen do tipo M 4 x 1. A estrutura completa pesa cerca de 2 Kg e suas dimensões e formato estão representadas na figura 7.1. A figura 7.2 apresenta o sistema real completo que será analisado experimentalmente.

Para a aplicação do processo de síntese divide-se a estrutura completa em duas subestruturas. A subestrutura (1) é definida pela estrutura principal (asa) e pesa cerca de 1.3 kg e a subestrutura (2) é definida pelo quadro, pesando cerca de 0.7 Kg, como mostrado na figura 7.1.

Os parâmetros modais do sistema que foram utilizados no processo de síntese modal, foram obtidos à partir das funções de resposta em frequência (FRF) de pontos distribuídos nas subestruturas. A subestrutura (1) foi analisada através de 58 pontos discretos, sendo 12 na direção x, 16 na direção y e 22 na direção z. A subestrutura (2) foi analisada através de 56 pontos discretos, sendo 12 na direção x, 16 na direção y e 22 na direção z. A união das subestruturas foi modelada com 8 coordenadas de contorno, medidas na direção z.

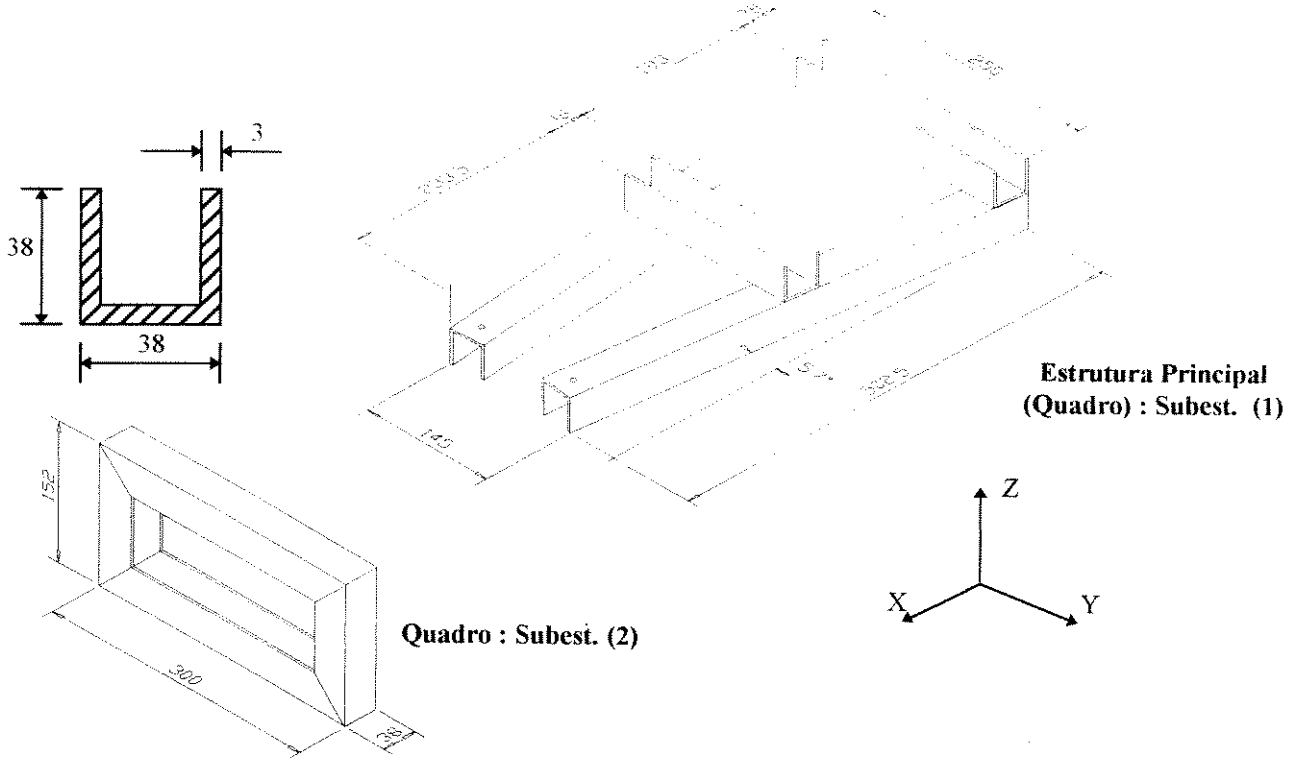


Figura 7.1 - Desenho da estrutura analisada.

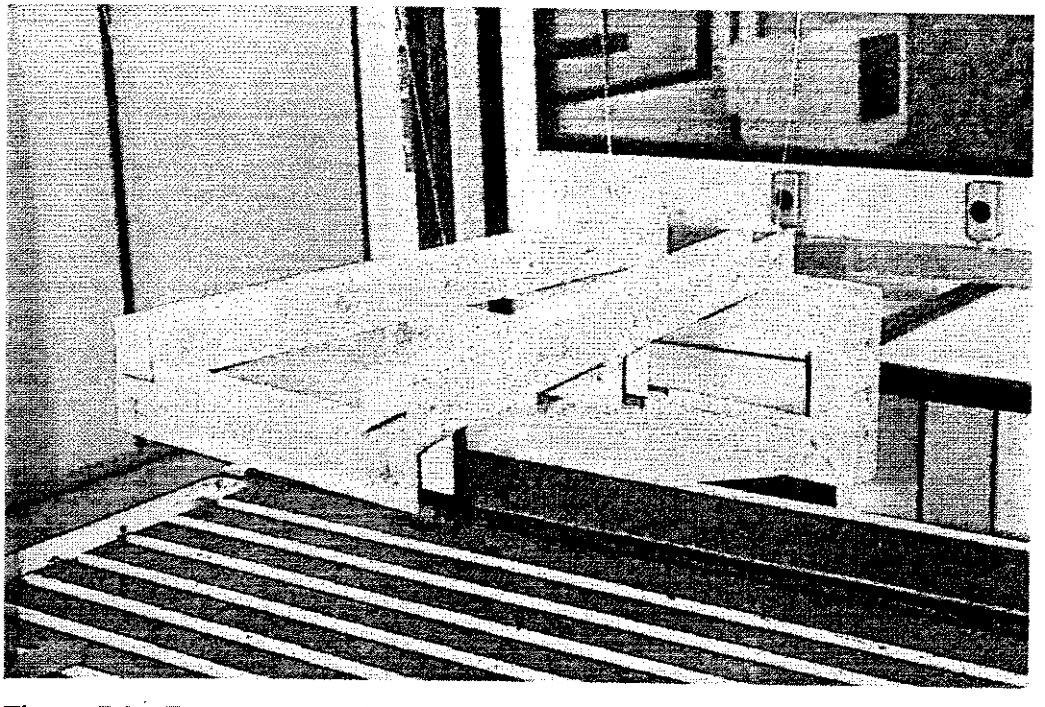
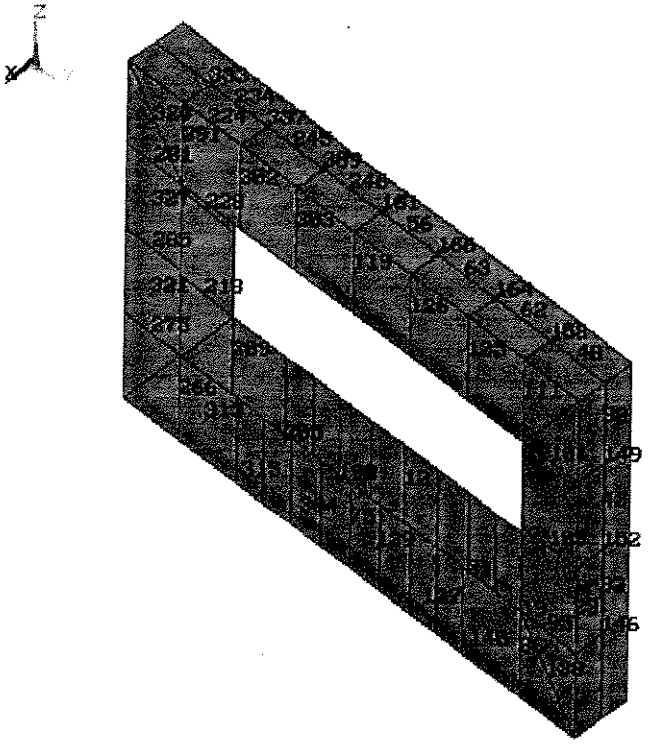


Figura 7.2 - Estrutura completa real analisada experimentalmente.

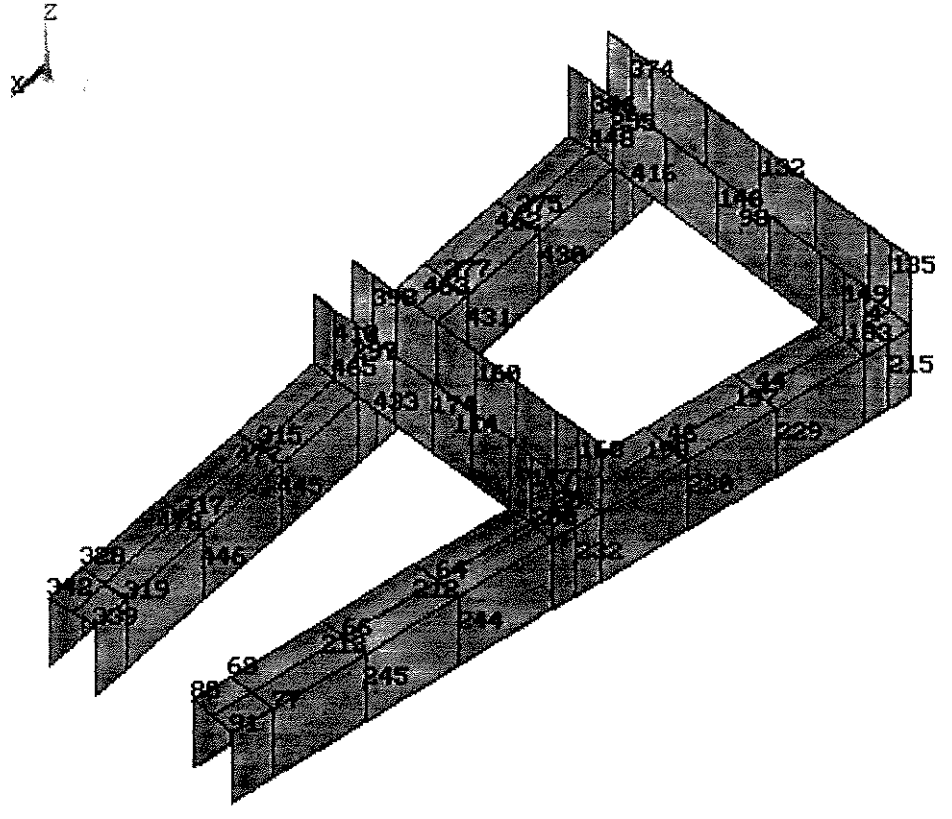
A estrutura completa foi analisada considerando-se os mesmos pontos de suas subestruturas, definindo, portanto, um total de 106 coordenadas, sendo 12 na direção x, 16 na direção y e 22 na direção z. As figuras 7.3 e 7.4 apresentam, esquematicamente, a configuração dos pontos analisados para as subestruturas (2) e (1), respectivamente.

Observa-se nas figuras 7.3 e 7.4, que os pontos definidos não seguem uma ordem numérica, uma vez que estes pontos foram tomados de pontos equivalentes do modelo de elementos finitos que será mostrado na seção 7.3. Portanto, estes pontos possuem a mesma numeração das subestruturas modeladas pelo MEF.



Coordenadas do Contorno: 2, 19, 127, 140, 190, 205, 304,315

Figura 7.3 - Configuração dos pontos analisados na subestrutura (2).



Coordenadas do Contorno: 68, 77, 88, 91, 319, 328, 339, 342

Figura 7.4 - Configuração dos pontos analisados na subestrutura (1).

Além disso, observa-se que para os pontos da subestrutura (1) medidos na direção y, desprezou-se as componentes na direção x, gerados pela inclinação das barras. Com isso, a base modal da subestrutura (1) foi montada considerando os graus de liberdade destes pontos somente a componente na direção y.

Uma vez definidos estes pontos para ambos os modelos, analítico e experimental, são possíveis comparações futuras com a finalidade de ajustar ou validar os modelos analisados.

As FRF foram obtidas através de uma análise SISO. Neste caso, a excitação da subestrutura (1) foi no ponto 317, na subestrutura (2) foi no ponto 23 e na estrutura completa foi no ponto 491.

As análises das subestruturas e da estrutura completa foram feitas independentemente, com a finalidade de se obter os parâmetros modais individuais. Para todos os sistemas utilizou-se uma condição de apoio livre-livre, feita através de fios de nylon, conforme pode ser visto na figura 7.2.

A figura 7.5 representa, esquemáticamente, as aparelhagens utilizadas na análise experimental das subestruturas e estrutura completa.

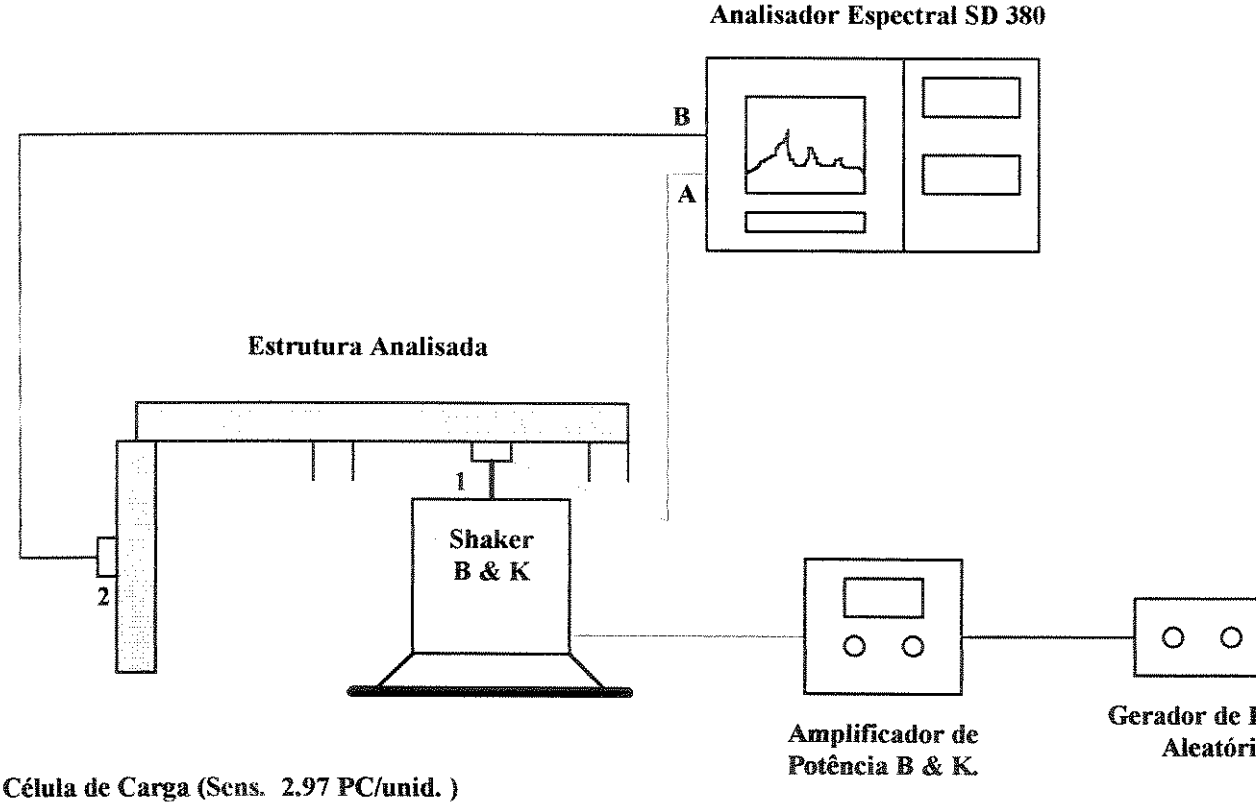


Figura 7.5 - Esquema da montagem experimental.

Os sinais da resposta dos sistemas à uma excitação externa era captada através de acelerômetros piezoelétricos conectados aos respectivos pontos discretizados. A excitação externa foi feita através de um excitador eletromagnético que fornecia um sinal de força aleatório, originada de um gerador de sinais e amplificador de potência. A razão da utilização de uma excitação aleatória era fornecer um sinal adequado ao sistema de modo a promover uma excitação significativa de tal forma a melhorar a sensibilidade dos sinais e tentar reduzir o nível de ruído nas curvas de FRF e também atenuar os efeitos das possíveis não-linearidades, decorrentes, principalmente, da união aparafusada das subestruturas.

Deve-se ressaltar, que a estrutura real, inicialmente construída, era constituída por outras uniões aparafusadas. Entretanto, devido ao nível das não linearidades presentes, tornou-se difícil o ajuste dos modelos analítico e experimental através dos parâmetros dinâmicos. Com isso, optou-se pela união soldada de quase toda a estrutura, com exceção da união entre o quadro e a estrutura principal que deverão ser desmontados para uma análise independente do sistema.

O sinal da excitação foi captado através de uma célula de carga da B & k posicionada entre o excitador e a estrutura analisada. Os sinais dos sensores piezoelétricos foram condicionados por amplificadores de carga B & K tipo 2635, resultando em entradas para o analisador de espectros SD 380 da Spectral Dynamics. A figura 7.6 apresenta o aparato experimental utilizado para análise dos sistemas. As figuras 7.7 e 7.8 apresentam detalhes específicos das aparelhagens utilizadas no ensaio experimental.

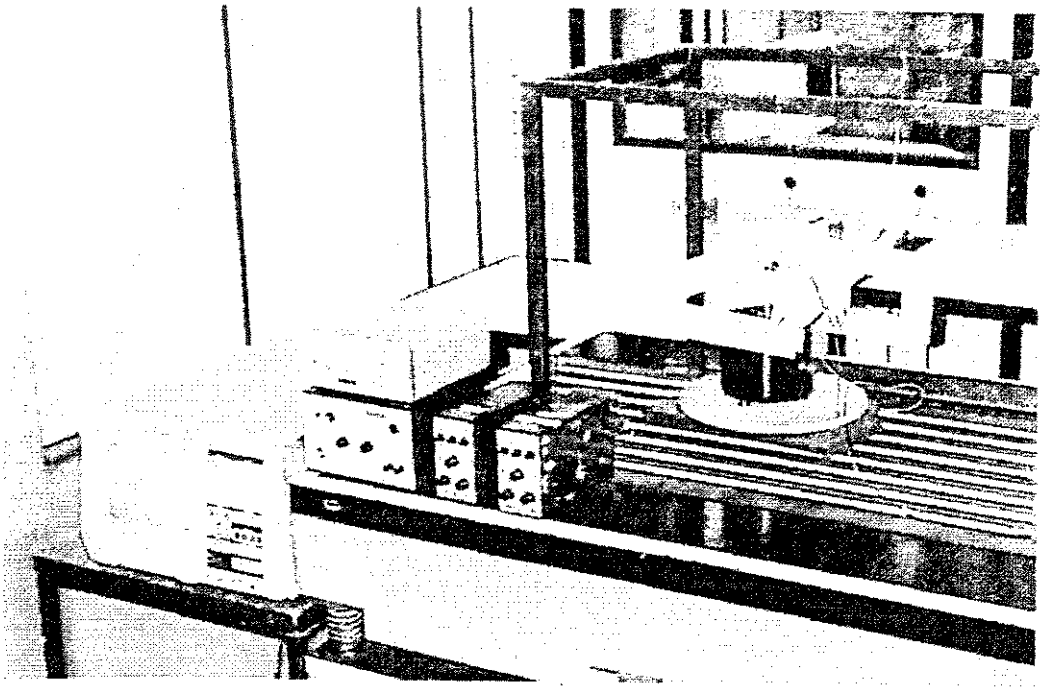


Figura 7.6 - Aparelhagem utilizada na análise experimental.

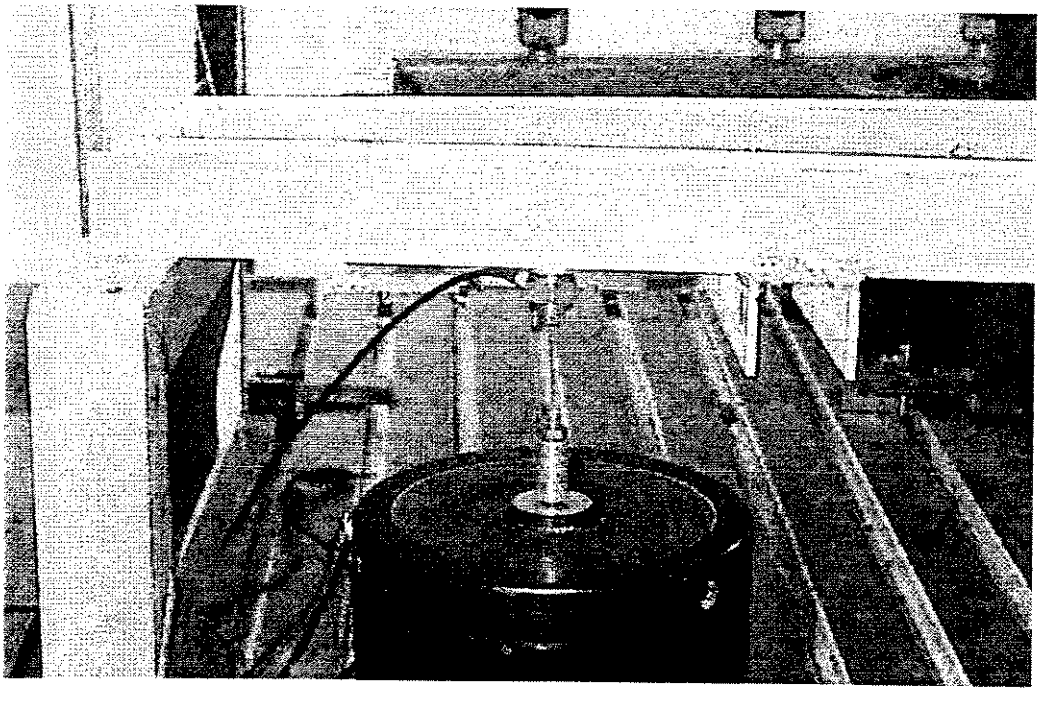


Figura 7.7 - Detalhe do posicionamento do excitador eletromagnético e da célula de carga conectada na estrutura.

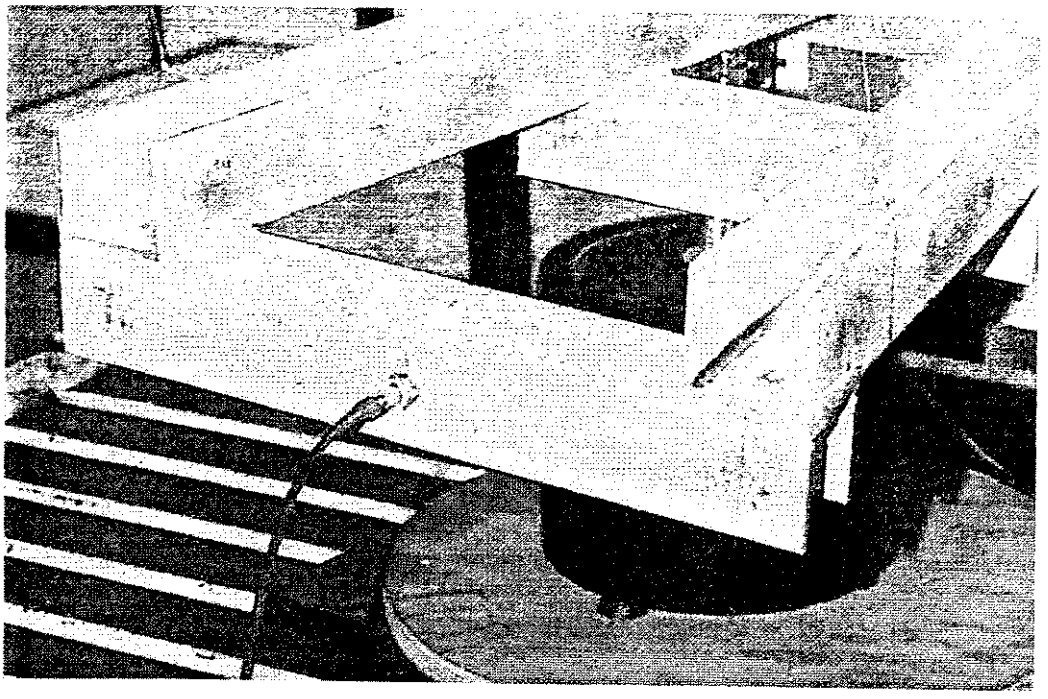


Figura 7.8 - Detalhe da fixação do acelerômetro na estrutura.

O sinal de disparo para a aquisição foi ajustado para um trigger interno do analisador, sendo que o sinal de excitação foi captado no canal A e o sinal da resposta no canal B. Ajustou-se o analisador espectral para fornecer as FRF dos modelos analisados, com médias no tempo, considerando um overlap de 50% nas amostras. Os fatores de calibração ajustados foram de 100 mV/N para o sistema de medição de força e 100 $mV/m/s^2$ para o sistema de medição de aceleração. O tempo de amostragem foi de 0.127 ms, com 800 linhas de resolução de análise utilizando-se bandas de 0 a 1000 Hz para a subestrutura (1) e para a estrutura completa e 0 a 2000 Hz para a subestrutura (2). Com isso, os sinais foram obtidos com 1.25 Hz e 2.5 Hz de resolução em frequência. Utilizou-se uma janela tipo Hanning nos sinais para minimizar o efeito de Leakage nos sinais processados, devido a utilização de uma excitacão aleatória.

A figura 7.9 apresenta uma FRF e a função de coerência para o ponto (1z) obtida da analise modal experimental da estrutura completa.

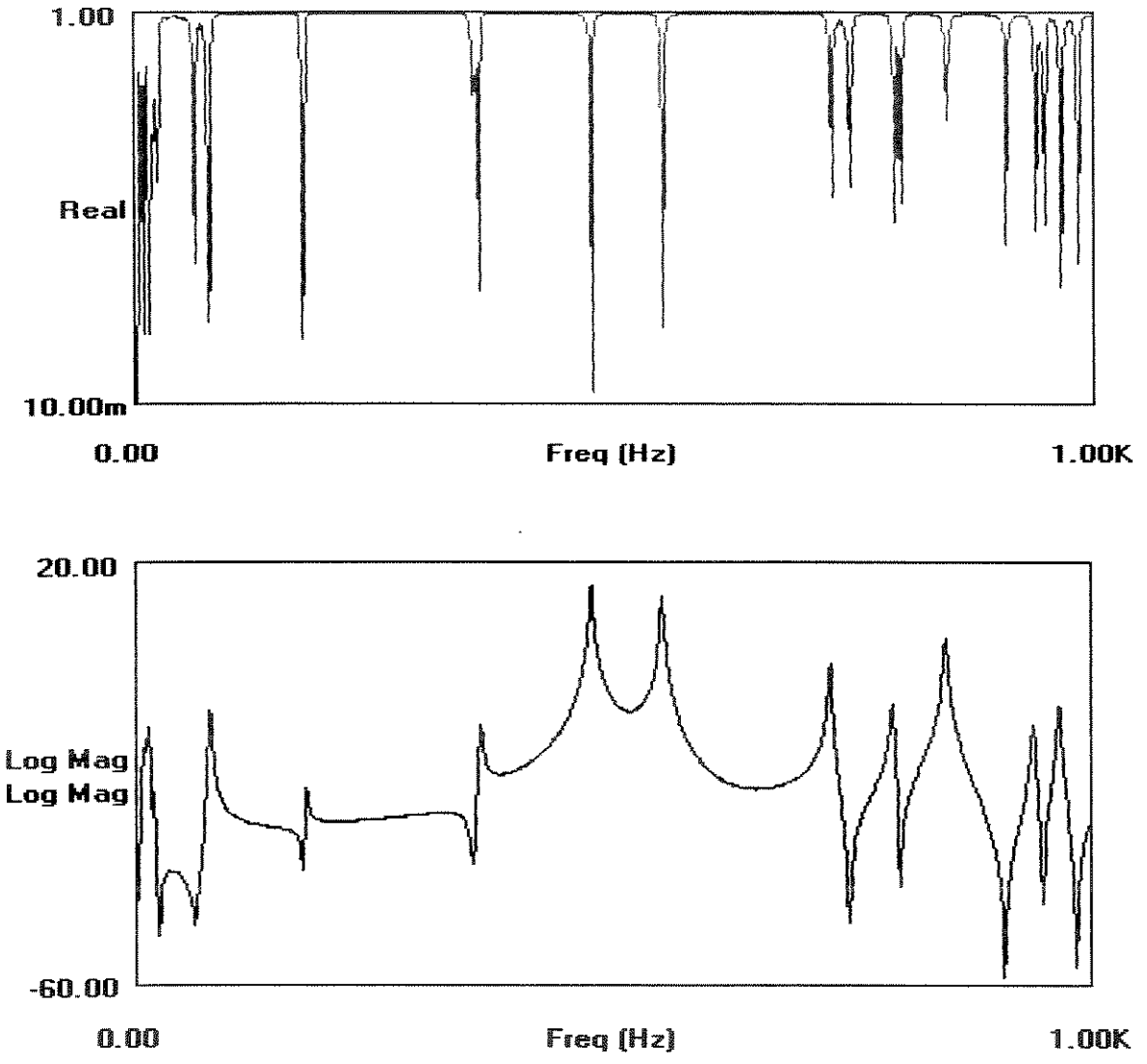


Figura 7.9 - Função de coerência e FRF da estrutura completa obtidos dos dados experimentais para o ponto 1Z.

Os autovalores e autovetores das estruturas analisadas foram obtidos através do Programa Star [105]. Este software utiliza uma interface GPIB para aquisição das FRF e realiza a identificação dinâmica através de um procedimento de ajuste de curvas. Configurou-se o Programa Star de modo que as bases modais das estruturas fossem identificadas através de um ajuste de curva de todas as FRF adquiridas, utilizando um

método polinomial em bandas de análise próximas às frequências naturais. A principal razão de utilização deste software é um de seus recursos de identificação, que pode proceder a uma normalização equivalente de massa unitária , na base modal identificada. Este tipo de normalização é fundamental para obtenção de resultados satisfatórios na síntese modal. Este procedimento de normalização é descrito no Apêndice (A). As figuras 7.10 a, b e c apresentam um ajuste de curva das FRF experimentais para cada estrutura analisada, utilizando o Programa Star. Os pontos de análise utilizados pelo Programa Star são os mesmos pontos definidos na estrutura experimental, porém estes pontos foram renumerados em função do processo de aquisição das FRF através do software. O anexo IV, apresenta os desenhos esquemáticos das estruturas analisadas pelo Programa Star com a numeração dos pontos analisados. Evidentemente, estes pontos são os mesmos pontos definidos nos modelos de elementos finitos das estruturas.

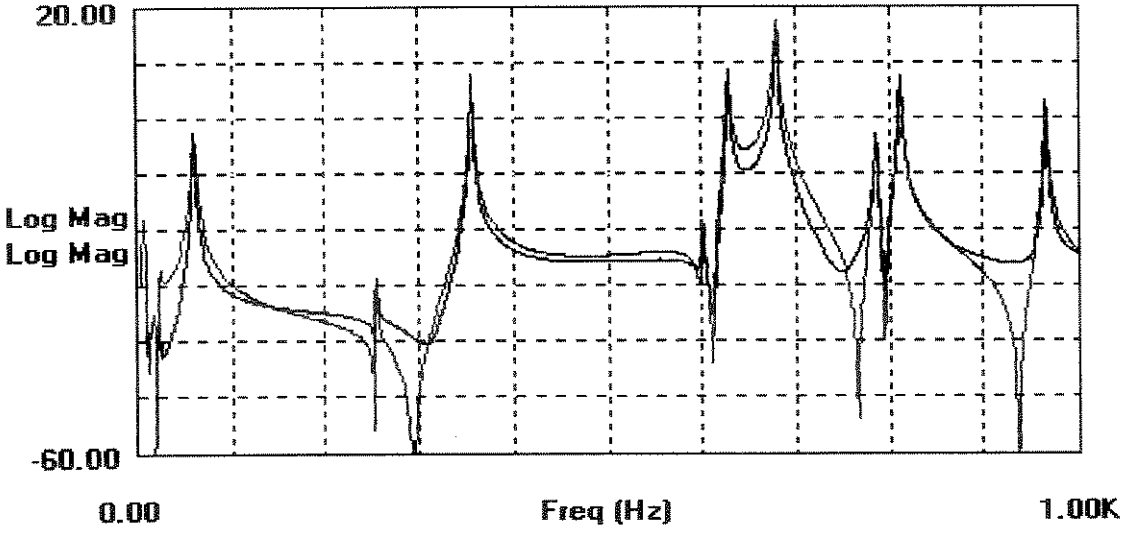


Figura 7.10 a - Ajuste de curva obtida no ponto 1, direção y, para a subestrutura (1). A curva azul é a ajustada e a curva vermelha é a original.

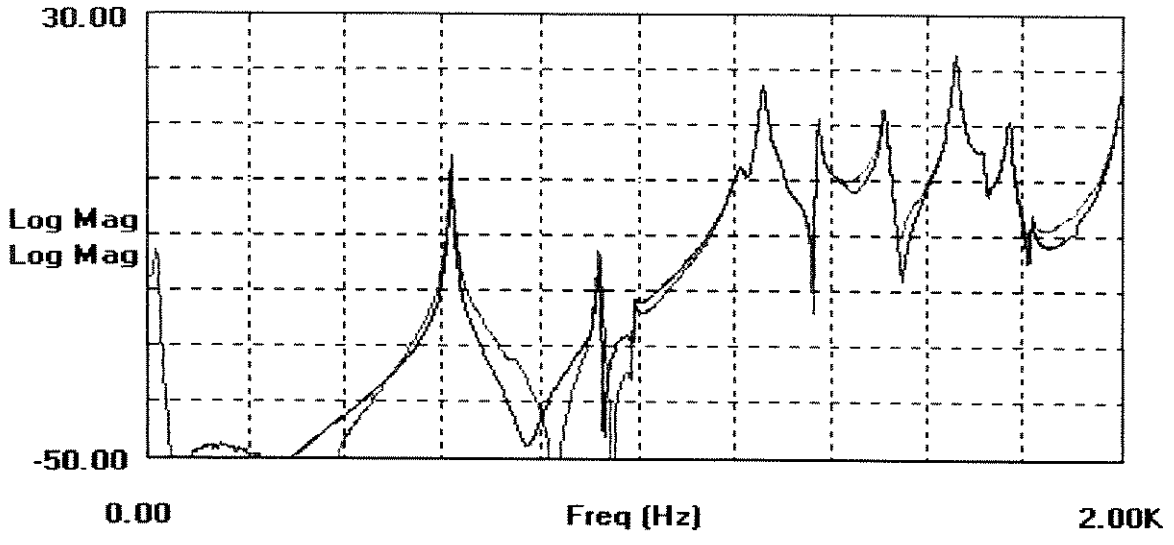


Figura 7.10 b - Ajuste de curva obtida no ponto 1, direção z, para a subestrutura (2). A curva azul é a ajustada e a curva vermelha é a original.

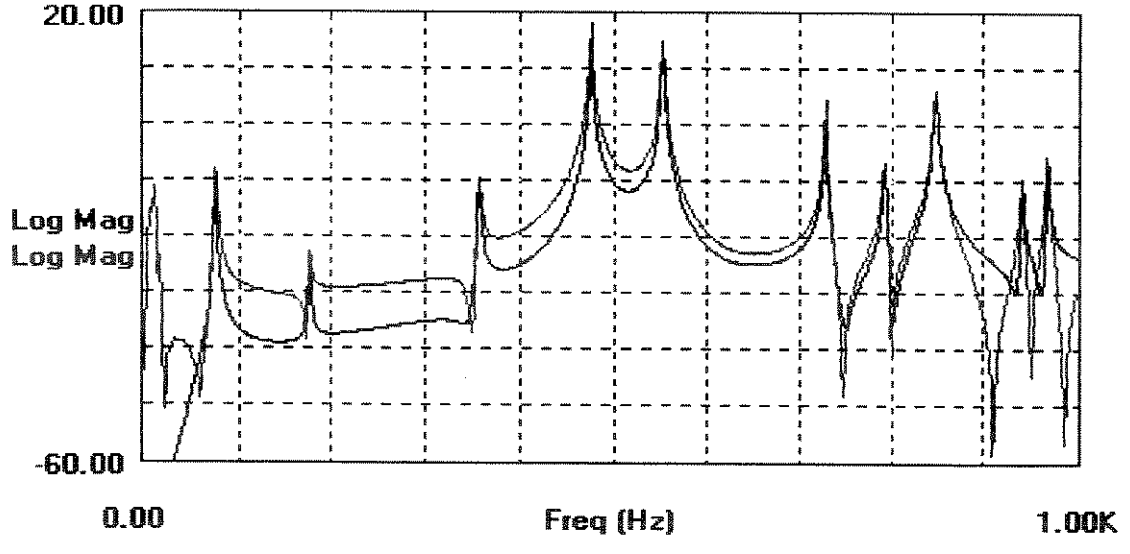


Figura 7.10 c - Ajuste de curva obtida no ponto 1, direção z, para a estrutura completa. A curva azul é a ajustada e a curva vermelha é a original.

A tabela 7.1 apresenta os autovalores identificados pelo Programa Star para a subestrutura (1), subestrutura (2) e estrutura completa.

Tabela 7.1 - Autovalores identificados das subestruturas e da estrutura completa via análise experimental.

AUTOVALORES (Hz)		
SUB 1	SUB 2	ESTRUTURA COMPLETA
.110E+01 ± .2110E+02	.135E+01 ± .617E+03	.61447E+00 ± .74700E+02
.591E+00 ± .5860E+02	.122E+01 ± .919E+03	.92258E+00 ± .17474E+03
.712E+00 ± .2540E+03	.219E+01 ± .988E+03	.96081E+00 ± .35625E+03
.222E+00 ± .3540E+03	.131E+01 ± .121E+04	.66767E+00 ± .47505E+03
.959E+00 ± .6000E+03	.259E+01 ± .125E+04	.80327E+00 ± .55097E+03
.959E+00 ± .6260E+03	.105E+01 ± .130E+04	.63593E+00 ± .72631E+03
.785E+00 ± .6770E+03	.262E+01 ± .137E+04	.94811E+00 ± .79064E+03
.814E+00 ± .7840E+03	.230E+01 ± .143E+04	.14900E+01 ± .84633E+03
.548E+00 ± .8050E+03	.236E+01 ± .151E+04	.91326E+00 ± .93973E+03
.926E+00 ± .8090E+03	.275E+01 ± .151E+04	.55712E+00 ± .96660E+03
.200E+00 ± .9639E+03	.227E+01 ± .166E+04	----------
.260E+00 ± .964E+03	.276E+01 ± .171E+04	----------
----------	.293E+01 ± .177E+04	----------
----------	.269E+01 ± .181E+04	----------
----------	.258E+01 ± .190E+04	----------
----------	.435E-01 ± .198E+04	----------
----------	.253E+01 ± .199E+04	----------

7.3 - Modelo de Elementos Finitos da Estrutura

A estrutura real foi modelada pelo método dos elementos finitos com a finalidade de validar a síntese modal da estrutura completa à partir das informações dinâmicas analíticas das subestruturas.

Da mesma forma que na modelagem experimental, foram desenvolvidos modelos de elementos finitos para a subestrutura (1), para a subestrutura (2) e também para a estrutura completa. Os sistemas foram modelados utilizando-se o Programa Ansys [104], através de elementos de casca (Shell93), de oito nós e seis graus de liberdade por nó. A subestrutura (1) foi modelada com 136 elementos, totalizando 484 nós. A subestrutura (2) foi modelada com 112 elementos, totalizando 360 nós e a estrutura completa foi modelada com 244 elementos, totalizando 818 nós. As figuras 7.11, 7.12 e 7.13

apresentam os modelos de elementos finitos das estruturas analisadas, definidos através de suas respectivas áreas.

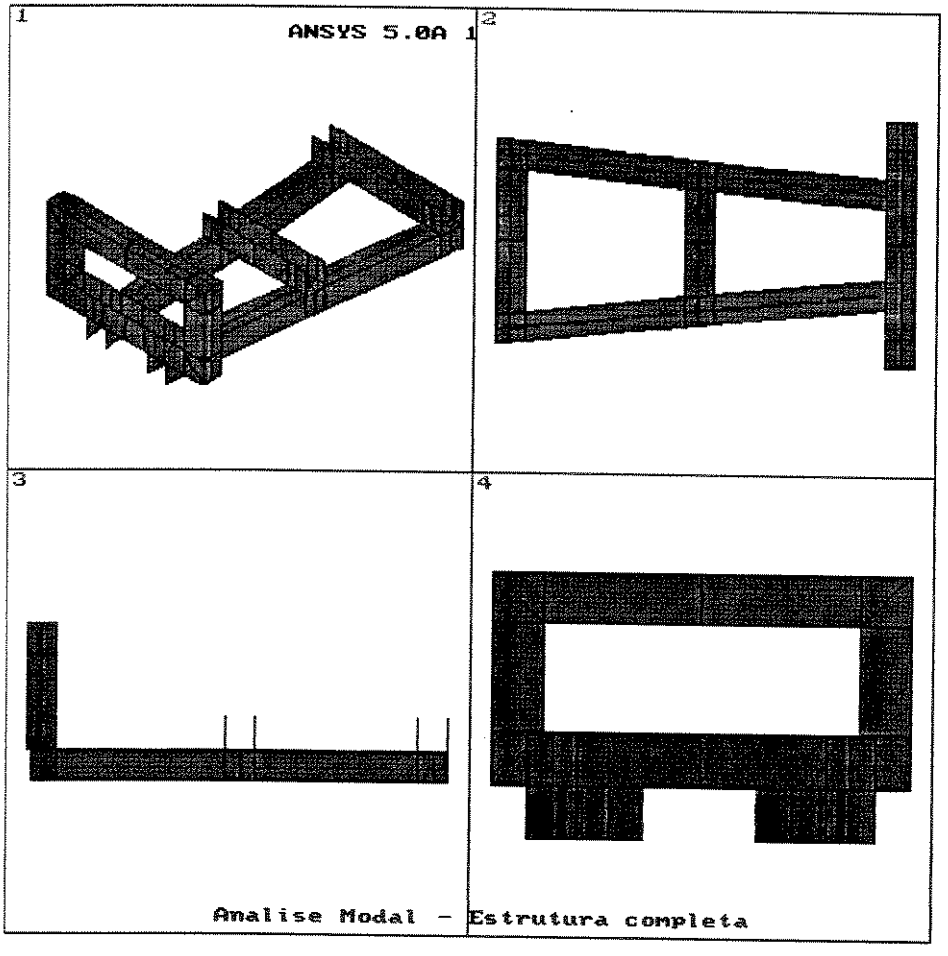


Figura 7.11 - Modelo matemático computacional da estrutura completa representado pelas áreas dos elementos de casca.

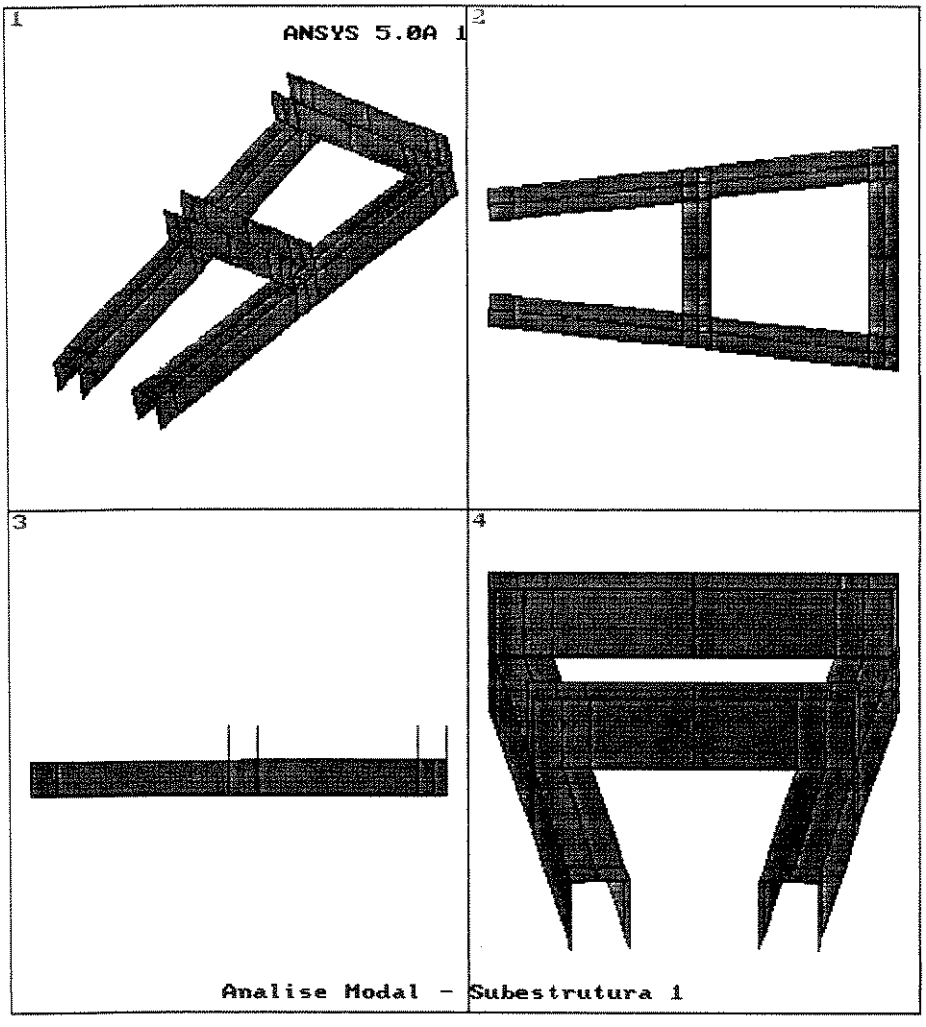


Figura 7.12 - Modelo matemático computacional da subestrutura (1) representado pelas áreas dos elementos de casca.

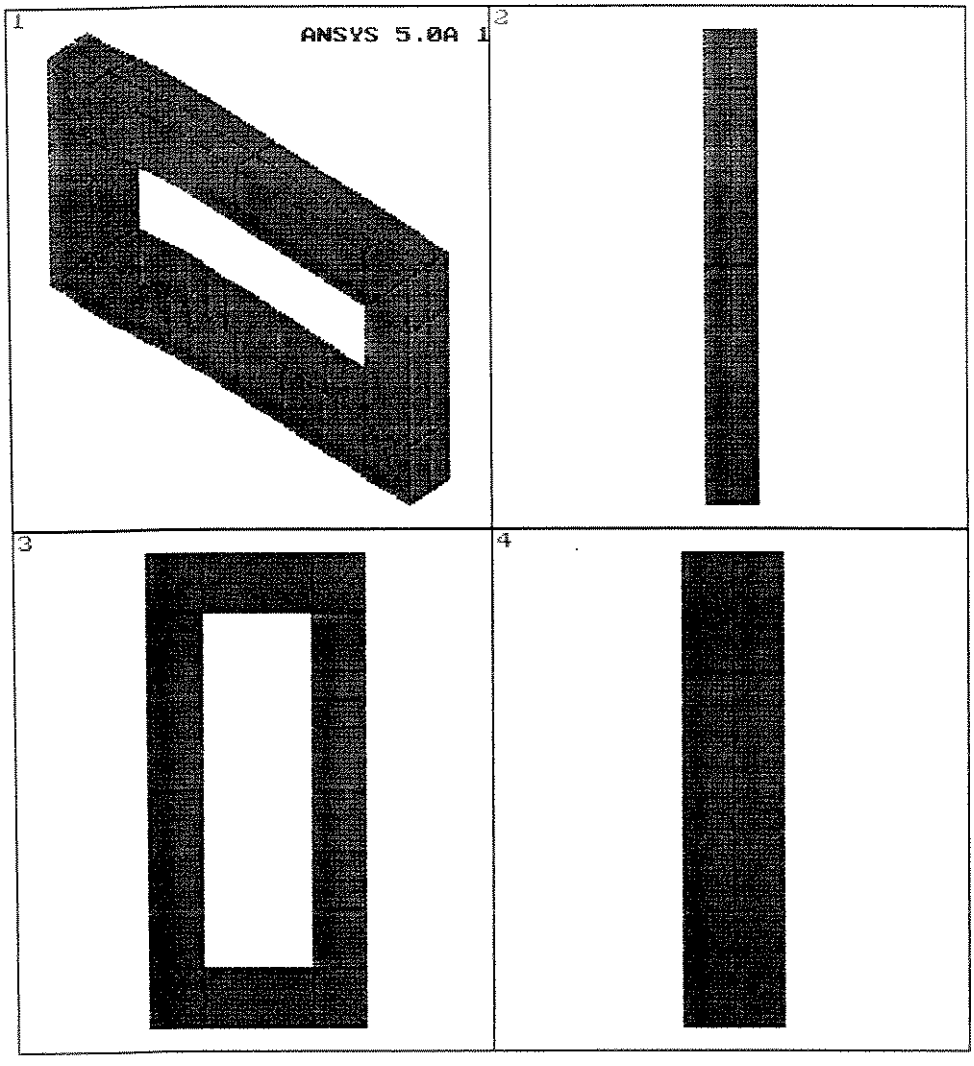


Figura 7.13 - Modelo matemático computacional da subestrutura (2) representado pelas áreas dos elementos de casca.

As dimensões dos modelos são as mesmas do modelo experimental e são mostradas na figura 7.1. As propriedades mecânicas utilizadas nos modelos de elementos finitos foram:

Densidade : 2700 Kg/m^3

Módulo de Elasticidade : 6.0 E+10 N/m^2

Coeficiente de Poisson : 0.32

Para a estrutura completa e para as subestruturas foram utilizados o processo de condensação [36] para a obtenção das bases modais. Nesta etapa, tomou-se o cuidado de manter como coordenadas mestres as mesmas coordenadas definidas no modelo experimental.

Com isso, as bases modais identificadas dos modelos de elementos finitos foram ajustados com 58 coordenadas para a subestrutura (1), 56 coordenadas para a subestrutura (2) e 106 coordenadas para a estrutura completa. Foram extraídos 18 modos para a subestrutura (1), 20 modos para a subestrutura (2) e 20 modos para a estrutura completa. Este procedimento visa manter a melhor similaridade possível entre os modelos analíticos e experimental. As coordenadas analisadas de cada subestrutura, definidas pelas coordenadas mestres são mostradas nas figuras 7.3 e 7.4.

A tabela 7.2 apresenta os resultados dos autovalores identificados pelo MEF para as subestruturas e para a estrutura completa. As bases modais extraídas das subestruturas, convenientemente normalizadas pela matriz de massa, foram montadas em um arquivo externo a fim de se proceder a síntese modal da estrutura completa. Observa-se, nesta tabela, que os seis primeiros modos da subestrutura 2 e da estrutura completa e os quatro primeiros modos da subestrutura 1 são devidos ao movimento de corpo rígido. Portanto, sem os modos de corpo rígido, foram considerados 14 modos de vibrar para as estruturas analisadas.

Tabela 7.2 - Autovalores identificados das subestruturas e da estrutura completa via MEF.

	AUTOVALORES (Hz)		
	SUB 1	SUB 2	ESTRUTURA COMPLETA
1	.457E-03	.197E-03	.10000E-08
2	.705E-01	.358E-03	.10000E-08
3	.968E-01	.466E-03	.10000E-08
4	.121E+00	.101E+00	.56703E-01
5	.572E+02	.123E+00	.66872E-01
6	.225E+03	.144E+00	0.12837
7	.322E+03	.776E+03	75.856
8	.616E+03	.933E+03	187.65
9	.679E+03	.954E+03	402.10
10	.810E+03	.107E+04	492.02
11	.894E+03	.116E+04	578.82
12	.912E+03	.131E+04	784.83
13	.103E+04	.152E+04	815.09
14	.103E+04	.160E+04	915.99
15	.106E+04	.170E+04	952.42
16	.106E+04	.190E+04	996.57
17	.111E+04	.201E+04	1047.7
18	.115E+04	.226E+04	1048.0
19	----------	.246E+04	1062.5
20	----------	.251E+04	1062.8

7.3.1 - Resultados analíticos versus resultados experimentais

A tabela 7.3 apresenta, novamente, os autovalores identificados para os modelos de elementos finitos dos sistemas, juntamente com os autovalores identificados do modelo experimental. Esta tabela também serve como uma base de orientação para avaliação da qualidade do ajuste.

Tabela 7.3 - Comparação modal entre os modelos analítico e experimental.

	AUTOVALORES (Hz)								
	SUB 1			SUB 2			ESTRUTURA COMPLETA		
	EXP.	MEF	ERRO RELA. (%)	EXP.	MEF	ERRO RELA. (%)	EXP.	MEF	ERRO RELA. (%)
1	58.6	57.2	2.4	617.0	776.0	25.8	74.7	75.9	1.6
2	254.0	225.0	11.4	919.0	933.0	1.5	174.7	187.7	7.4
3	354.0	322.0	9.0	988.0	954.0	3.4	356.3	402.1	12.9
4	600.0	616.0	2.7	1210.0	1070.0	11.6	475.1	492.0	3.6
5	626.0	679.0	8.5	1250.0	1160.0	7.2	550.9	578.8	5.1
6	677.0	810.0	19.7	1370.0	1310.0	4.4	726.3	784.8	8.1
7	784.0	894.0	14.0	1510.0	1520.0	0.7	790.6	815.1	3.1
8	809.0	912.0	12.7	1660.0	1600.0	3.6	846.3	915.9	8.2
9	963.9	1030.4	6.9	1770.0	1700.0	3.9	939.7	952.4	1.4
10	964.0	1030.2	6.9	1810.0	1900.0	4.9	966.6	996.6	3.1
11	---------	1060.0	----	1990.0	2010.0	1.0	-------	1047.7	---
12	---------	1060.0	----	------	2260.0	---	-------	1048.0	---
13	---------	1110.0	----	------	2460.0	---	-------	1062.5	---
14	-----	1150.0	----	-------	2510.0	---	---	1062.8	---

A comparação dos resultados analíticos com os resultados experimentais foi feita através de inspeção visual. Os resultados, mostrados na tabela 7.3, foram obtidos para uma faixa de análise de 0 a 1000 Hz para a subestrutura 1 e também para o modelo completo, e 0 a 2000 Hz para a subestrutura 2. A utilização de uma faixa maior para a subestrutura 2 visa obter uma quantidade maior de modos, uma vez que, na faixa de 0 à 1000 Hz, existiriam apenas 3 modos para a subestrutura. Comparando a tabela 7.3 com a tabela 7.1 observa-se que existem outros autovalores obtidos para as subestruturas 1 (21.1 Hz , 805 Hz) e para a subestrutura 2 (1300 Hz, 1430 Hz, 1510 Hz, 1710 Hz, 1900 Hz, 1980 Hz). Estes modos foram adaptados durante o procedimento de ajuste das curvas de FRF experimentais através do Programa Star. Neste procedimento, a suposição de uma quantidade maior de modos em

uma determinada banda de análise visa um melhor ajuste de curvas. Portanto, estes modos são, na verdade, modos computacionais em excesso dentro da base modal.

Deve-se ressaltar que alguns pontos medidos experimentalmente (direção y) da subestrutura (1) são levemente diferentes dos respectivos pontos do modelo de elementos finitos, devido à inclinação da barra. A implicação desta aproximação é uma influência nos valores identificados das bases modais, conforme foi verificado pela análise do índice de MAC.

Verifica-se portanto, através da tabela 7.3, que os autovalores identificados para as subestruturas e modelo completo, em ambas as modelagens, localizam-se bastante próximos com baixos erros relativos. O modelo da estrutura completa foi o que obteve melhores resultados e com baixos erros relativos. Pode-se concluir portanto que os modelos analíticos de elementos finitos dos sistemas estão ajustados aos respectivos modelos experimentais, com relação aos seus parâmetros dinâmicos.

7.3.2 - Modos complexos equivalentes

Para os modelos de elementos finitos definidos anteriormente, foram obtidas informações dinâmicas de valores reais. Estes valores, evidentemente, servirão para comparações e ajustes com as frequências naturais do modelo experimental. Estes dados portanto serão utilizados no ajuste modal da estrutura entre o método analítico de elementos finitos e o método experimental.

As bases modais dos modelos de elementos finitos anteriores não são adequadas para qualquer outro tipo de ajuste de modelos requerido, como por exemplo, ajuste de parâmetros físicos, ou também, comparações de parcelas de amortecimento dos modos. Com isso, foram obtidas informações modais complexas equivalentes. Ou seja, foram obtidos modos complexos à partir dos modos reais dos modelos de elementos finitos. Este procedimento foi feito utilizando as técnicas mostradas no capítulo 4. No trabalho não serão feitas comparações diretas de fatores de amortecimento dos modos para os modelos analítico e experimental. Além disso, não é objetivo do trabalho efetuar qualquer tipo de ajuste de parâmetros físicos dos modelos. Portanto, esta base modal complexa equivalente será utilizada apenas para validar a técnica de síntese modal generalizada proposta e os critérios de remontagem e de eliminação automática de modos. A tabela 7.4 apresenta os autovalores dos sistemas avaliados como valores complexos.

Tabela 7.4 - Autovalores identificados das subestruturas e da estrutura completa via modelos de elementos finitos com valores complexos equivalentes.

	AUTOVALORES (Hz)		
	SUB 1	SUB 2	ESTRUTURA COMPLETA
1	.1E-08 ± .457E-03 i	.1E-08 ± .197E-03i	0.0 ± .1E-09i
2	.1E-08 ± .705E-01i	.1E-08 ± .358E-03i	0.0 ± .1E-9i
3	.1E-08 ± .968E-01i	.1E-08 ± .466E-03i	0.0 ± .1E-9i
4	.1E-08 ± .121E+00i	.1E-08 ± .101E+00i	0.0 ± .0567i
5	.1E-08 ± .572E+02i	.1E-08 ± .123E+00i	0.0 ± .0669i
6	.1E-08 ± .225E+03i	.1E-08 ± .144E+00i	0.0 ± 0.1284i
7	.1E-08 ± .322E+03i	.1E-08 ± .776E+03i	0.0 ± 75.856i
8	.1E-08 ± .616E+03i	.1E-08 ± .933E+03i	0.0 ± 187.65i
9	.1E-08 ± .679E+03i	.1E-08 ± .954E+03i	0.0 ± 402.10i
10	.1E-08 ± .810E+03i	.1E-08 ± .107E+04i	0.0 ± 492.02i
11	.1E-08 ± .894E+03i	.1E-08 ± .116E+04i	0.0 ± 578.82i
12	.1E-08 ± .912E+03i	.1E-08 ± .131E+04i	0.0 ± 784.83i
13	.1E-08 ± .103E+04i	.1E-08 ± .152E+04i	0.0 ± 815.09i
14	.1E-08 ± .103E+04i	.1E-08 ± .160E+04i	0.0 ± 915.99i
15	.1E-08 ± .106E+04i	.1E-08 ± .170E+04i	0.0 ± 952.42i
16	.1E-08 ± .106E+04i	.1E-08 ± .190E+04i	0.0 ± 996.57i
17	.1E-08 ± .111E+04i	.1E-08 ± .201E+04i	0.0 ± 1047.7i
18	.1E-08 ± .115E+04i	.1E-08 ± .226E+04i	0.0 ± 1048.0i
19	---	.1E-08 ± .246E+04i	0.0 ± 1062.5i
20	---	.1E-08 ± .251E+04i	0.0 ± 1062.8i

7.4 - Sintese Modal da Estrutura Completa

7.4.1 - Síntese do Modelo de Elementos Finitos

As informações modais das subestruturas obtidas pelo MEF são armazenadas em um arquivo externo, que será utilizado no processo de síntese da estrutura completa, utilizando o Programa Struct. Em uma primeira etapa, foram utilizados os modos reais das subestruturas com uma condição aleatória para a quantidade de modos selecionados de cada subestrutura. A tabela 7.5 apresenta os pesos modais para as subestruturas (1) e (2) e os respectivos modos que serão eliminados utilizando-se o CEA. Neste caso, eliminaram-se 5 modos da subestrutura (1) e 8 modos da subestrutura (2), correspondendo a 27.8 % e 40% do total de modos da subestrutura (1) e subestrutura (2), respectivamente. Ou seja, foram selecionados aproximadamente 60% dos modos em cada subestrutura.

Tabela 7.5 - Pesos relativos dos modos reais das subestruturas para o MEF.

MODOS	SUB1	SUB2
1	.561E+02	.471E+02
2	.567E+02	.472E+02
3	.524E+02	.471E+02
4	.562E+02	.517E+02
5	.516E+02	.160E+03
6	.284E+03	.462E+02
7	.156E+03	.115E+03
8	.512E+02	.141E+03
9	.511E+02	.124E+03
10	.503E+02	.460E+02
11	.563E+02	.465E+02
12	.213E+03	.458E+02
13	.533E+02	.460E+02
14	.517E+02	.502E+02
15	.550E+02	.877E+02
16	.552E+02	.469E+02
17	.485E+02	.456E+02
18	.496E+02	.486E+02
19	-------	.569E+02
20	-------	.148E+03
C E A	6, 12, 7, 16, 11	14, 20, 8, 9, 7, 15, 19, 18

A tabela 7.6 apresenta os resultados da síntese modal das subestruturas utilizando o CEA dos modos para configurar quais os modos deveram ser eliminados de cada subestrutura, como mostrado na tabela 7.6. Deve-se ressaltar, que os traços indicados na tabela representam modos que não foram identificados pelo processo de síntese modal.

Tabela 7.6 - Resultados da síntese para os modos reais do modelo de elementos finitos da estrutura real, utilizando o CEA.

NÚMERO	AUTOVALORES DO SISTEMA (Hz)	AUTOVALORES SINTETIZADOS (Hz)	ERRO RELATIVO (%)	INDICE MAC
1	.0567	. 0706	24.5	. 38
2	.0669	. 0457	31.7	. 88
3	.1284	. 1335	3.9	. 86
4	75.9	23.2	69.4	. 91
5	187.7	156.3	16.7	. 60
6	402.1	-------	——	——
7	492.0	369.5	24.9	. 89
8	578.8	-----	——	——
9	784.8	682.1	13.1	. 50
10	815.1	------	——	——
11	915.9	------	——	——
12	952.4	865.4	9.2	. 60
13	996.6	------	——	——
14	1047.7	1028.1	1.9	. 84
15	1048.0	1007.2	3.9	. 55
16	1062.5	-------	——	——
17	1062.8	1058.6	. 40	. 83
VALORES MÉDIOS			18.2	0. 71

Os resultados da tabela 7.6 mostram que cerca de oito modos foram identificados com um erro relativo nos autovalores inferior a 20% e 10 modos foram identificados com índice MAC superior a 0.5. Estes resultados representam cerca de 47% e 59% do total de modos do sistema completo, respectivamente. Dentre os modos identificados, os três primeiros representam os modos de corpo rígido do sistema, que apesar dos erros relativos altos, apresentaram um valor de MAC razoável. Portanto, observa-se que um modelo analítico que representa adequadamente a estrutura real pode ser sintetizado à partir das informações dinâmicas das subestruturas, utilizando a técnica de síntese modal generalizada proposta no trabalho. Além disso, tanto o critério de remontagem das subestruturas, bem como, o CEA de modos obtiveram resultados coerentes dentro das faixas razoáveis de identificação.

Os modos reais das subestruturas, avaliados como modos complexos, também são utilizados no processo de síntese modal generalizada aplicada ao caso com amortecimento geral, que utiliza álgebra complexa para a solução do problema. A tabela 7.7 apresenta os pesos modais das subestruturas utilizando o CEA para uma determinada quantidade de modos. Neste caso, foram eliminados 10 modos da subestrutura (1) e 20 modos da subestrutura (2) correspondendo a 28% e 50% do total dos modos das respectivas subestruturas. Deve-se ressaltar, que os autovalores dos sistemas no caso complexo equivalente são montados com uma parte real desprezível, que indica um baixo fator de amortecimento e com a parte imaginária idêntica aos autovalores identificados nos respectivos modelos de elementos finitos. Além disso, a base de autovalores também é montada com os seus respectivos complexos conjugados. Os pesos modais, mostrados na tabela 7.7, são relativos aos autovalores das subestruturas, sendo que, os respectivos complexos conjugados, também possuem o mesmo peso modal. Com isso, a eliminação dos modos, no caso complexo, é sempre feita aos pares, devido a utilização da formulação de estado.

A tabela 7.8 apresenta os resultados da síntese modal da estrutura real utilizando-se a condição de eliminação de modos das subestruturas definida pela tabela 7.7.

Tabela 7.7 - Pesos relativos dos modos complexos equivalentes das subestruturas para o MEF.

MODOS	SUB1	SUB2
1	.1133E+03	.9428E+02
2	.1049E+03	.9433E+02
3	.1125E+03	.9426E+02
4	.1031E+03	.1034E+03
5	.5672E+03	.3192E+03
6	.3115E+03	.9243E+02
7	.1024E+03	.2307E+03
8	.1022E+03	.2824E+03
9	.1007E+03	.2478E+03
10	.1126E+03	.9193E+02
11	.4250E+03	.9296E+02
12	.1067E+03	.9151E+02
13	.1035E+03	.9205E+02
14	.1100E+03	.1005E+03
15	.1105E+03	.1755E+03
16	.9695E+02	.9384E+02
17	.9923E+02	.9129E+02
18	----------	.9729E+02
19	----------	.1137E+03
20	----------	.2952E+03
C E A	6, 12, 7, 16, 11	14, 20, 8, 9, 7, 15, 19, 18,11,16

Tabela 7.8 - Resultados da síntese modal usando o CEA para os modos complexos equivalentes das subestruturas.

NÚMERO DO MODO	AUTOVALORES DO SISTEMA (Hz)	AUTOVALORES SINTETIZADOS (Hz)	ERRO RELATIVO (%)	INDICE MAC
1	0.0 ± 0.0567i	.1E-08 ± 0.0706i	24.5	.38
2	0.0 ± 0.0669i	.1E-08 ± 0.0676i	1.1	.89
3	0.0 ± 0.128i	.1E-08 ± 0.134 i	4.7	.86
4	0.0 ± 75.86i	.1E-08 ± 95.30i	25.6	.91
5	0.0 ± 187.65i	--------	——	——
6	0.0 ± 402.10i	--------	——	——
7	0.0 ± 492.02i	--------	——	——
8	0.0 ± 578.82i	.2E-07 ± 567.85i	15.4	.58
9	0.0 ± 784.83i	.1E-08 ± 566.21i	2.2	.50
10	0.0 ± 815.09i	.1E-08 ± 845.78i	7.8	.89
11	0.0 ± 915.99i	------	——	——
12	0.0 ± 952.42i	------	——	——
13	0.0 ± 996.57i	------	——	——
14	0.0 ± 1047.70i	------	——	——
15	0.0 ± 1048.00i	.1E-08 ± 1029.20i	1.8	.83
16	0.0 ± 1062.50i	.1E-08 ± 1027.30i	1.9	.79
17	0.0 ± 1062.80i	------	——	——
		.1E-08 ± 1058.80i	0.4	.83
VALORES MÉDIOS			8. 54	0. 75

Observa-se na tabela 7.8 que foram identificados 18 modos com erro relativo inferior a 20%, que representam cerca de 53% dos modos da estrutura. Quanto à um índice MAC superior a 0.5 também foram identificados 18 modos, que representam 53% dos modos da estrutura completa. Dos modos com maior erro relativo, dois eram relativos aos movimentos de corpo rígido. Os índices médios do erro relativo e do valor de MAC representam uma boa condição de identificação dinâmica para o caso analisado. A porcentagem de modos identificados foi bastante próxima às porcentagens de identificação obtidas para os modos reais, indicando uma boa consistência da metodologia de síntese modal generalizada proposta no trabalho.

7.4.2 - Síntese do Modelo Experimental

Teoricamente, a síntese modal generalizada aplicada ao modelo de elementos finitos da estrutura real estaria validada à partir dos resultados mostrados na seção anterior, uma vez que, os modelos já foram convenientemente ajustados. No entanto, a técnica de síntese modal generalizada é também avaliada utilizando-se as informações modais identificadas do modelo experimental. Sabe-se que, na maioria dos casos, estas informações modais vêm carregada de ruídos e de uma série de aproximações, que prejudicam as condições de ortogonalidade dos modos. Com isso, o objetivo principal é avaliar a influência destas aproximações nos resultados sintetizados, através das metodologias propostas no trabalho.

As bases modais das subestruturas, identificadas pelo Programa Star, são utilizadas pelo Programa Struct com a finalidade de sintetizar a estrutura completa. A tabela 7.9 apresenta os pesos modais das subestruturas utilizando-se o CEA de modos. Os valores mostrados na tabela 7.9 são relativos aos modos representados na tabela 7.1. Neste caso, são incluídos na análise todos os modos, inclusive os modos computacionais que foram obtidos através do procedimento de refinamento do ajuste de curvas, como mencionado anteriormente. Além disso, os pesos modais são, também, devidos aos respectivos valores dos complexos conjugados. Foram eliminados quatro modos de cada subestrutura, conforme mostra a tabela 7.9, os modos 1 e 3 e seus conjugados para a subestrutura (1) e os modos 1 e 16 e seus conjugados para a subestrutura (2).

Tabela 7.9 - Pesos relativos dos modos das subestruturas obtidos da análise experimental.

MODOS	SUB1	SUB2
1	.6992E+02	.2468E+02
2	.1802E+02	.1418E+02
3	.2910E+02	.1170E+02
4	.1984E+02	.2072E+02
5	.1689E+02	.1795E+02
6	.1674E+02	.1489E+02
7	.1702E+02	.1064E+02
8	.1695E+02	.1022E+02
9	.1759E+02	.2144E+02
10	.1684E+02	.1349E+02
11	.1924E+02	.1588E+02
12	.1872E+02	.1799E+02
13	--------	.1408E+02
14	--------	.1130E+02
15	--------	.9406E+01
16	--------	.3802E+02
17	--------	.1029E+02
C E A	1, 3	1, 16

A tabela 7.10 apresenta os resultados da síntese modal utilizando as informações modais experimentais, considerando a condição de eliminação de modos definida pelo CEA e mostrado na tabela 7.9.

Tabela 7.10 - Resultados da síntese modal usando o CEA para os modos obtidos da análise experimental.

NÚMERO DO MODO	AUTOVALORES DO SISTEMA (Hz)	AUTOVALORES SINTETIZADOS (Hz)	ERRO RELATIVO (%)	INDICE MAC
1	.61 +74.7 i	----------	——	——
2	.92 + 174.7i	----------	——	——
3	.96 + 356.3i	.76 + 374.0i	4.9	.002
4	.67 + 475.1i	.78 + 401.3i	15.5	.03
5	.80 + 551.0i	1.35 + 638.9i	15.9	.02
6	.64 + 726.3i	.94 +699.4i	3.9	.26
7	.95 + 790.6i	.85 +729.2i	7.8	.33
8	1.50 + 846.3i	.66 + 842.4i	.49	.04
9	.91 + 939.7i	1.36 + 938.2i	.20	.04
10	.56 + 966.6I	.83 + 982.7i	1.7	.51
11	.61 -74.7 i	----------	——	——
12	.92 - 174.7i	----------	——	——
13	.96 - 356.3i	.74 - 373.8i	4.9	.002
14	.67 - 475.1i	.78 - 401.8i	15.5	.03
15	.80 - 551.0i	1.35 - 643.1i	16.7	.02
16	.64 - 726.3i	.94 -699.5i	3.9	.25
17	.95 - 790.6i	.85 -729.1i	7.8	.37
18	1.50 - 846.3i	.66 - 842.3i	.49	.11
19	.91 - 939.7i	1.36 - 938.1i	.20	.07
20	.56 - 966.6i	.83 - 982.7i	1.7	.51
VALORES MÉDIOS			6. 35	0. 16

A tabela 7.8 mostra que os respectivos autovalores conjugados identificados não são necessariamente iguais aos seus valores complexos originais, porém são bastante próximos. Observa-se que foram identificados 16 modos com erro relativo inferior a 20%, representando cerca de 80% do total de modos verdadeiros da estrutura completa. No entanto, foram observados baixos valores de MAC dos modos identificados. A razão desta baixa precisão é fundamentada em uma normalização por massa unitária ineficiente para os modos das subestruturas e da estrutura completa. Esta normalização foi feita através do Programa Star e é fundamentada em uma suposição de leve amortecimento para obtenção de resultados precisos. A suposição de leve amortecimento é indicada através de uma parte real dos autovalores desprezível com relação à parte imaginária e de uma parte imaginária dos autovetores desprezível com relação à parte real. Para a estrutura analisada a primeira suposição é verdadeira, no entanto, a segunda suposição, para alguns modos, não foi verificada completamente. Além disso, a simplificação do modelo da subestrutura (1) desprezando a inclinação da barra, contribuiu no aumento da imprecisão do processo de normalização de massa unitária, diminuindo a ortogonalidade dos modos.

A implicação de uma normalização ineficiente é uma baixa condição de ortogonalidade dos modos que influencia significativamente no processo de síntese modal, conforme mostrado na formulação da técnica definida no capítulo 2. O processo de normalização utilizado pelo Programa Star é mostrado no apêndice I.

7.4.3 - Discussão dos resultados

As informações modais da estrutura real obtidas através do modelo de elementos finitos ou do modelo experimental, além de representar um problema de maiores proporções, carrega imprecisões nos valores devido às aproximações feitas e também graças a ruídos presentes no sinal. Estes fatores afetam, principalmente, as propriedades de ortogonalidade dos modos dos sistemas. Em vista disso, algumas observações foram obtidas decorrentes da análise da estrutura utilizando-se estas modelagens, e podem ser enumeradas como:

a) A princípio, pode-se definir qualquer quantidade de modos das subestruturas para serem não selecionados. Porém, notou-se que, para o método proposto, existe uma quantidade máxima de modos que podem ser eliminados para cada subestrutura. Esta quantidade é definida pelo

somatório do número de modos não selecionados das duas subestruturas, que deve ser maior ou igual ao número de coordenadas do contorno entre as duas subestruturas. Por exemplo, para a estrutura real analisada, se por acaso, deleta-se dois modos da subestrutura (1), deve-se deletar no mínimo seis modos da subestrutura (2), uma vez que, existem oito coordenadas no contorno das subestruturas. A não utilização deste procedimento pode gerar resultados de baixa precisão ou, até mesmo, ocorrer a não convergência da síntese final. Este problema está relacionado com os modos de flexibilidade residual que são construídos visando atenuar os efeitos de uma base de modos normais reduzida. No método proposto, a quantidade de modos de flexibilidade residual é sempre igual ao número de coordenadas de contorno. Com isso, se uma quantidade total de modos eliminados das subestruturas é inferior ao número de coordenadas de contorno, modos computacionais extras serão introduzidos no superconjunto modal. Portanto, estes modos computacionais extras podem influenciar bastante o processo de identificação dinâmica através da síntese modal.

b) Os modos de corpo rígido devem sempre serem selecionados nas bases modais das subestruturas. Isto deve ser feito, porque, idealmente, são modos de frequência nula e devido a formulação dos modos de flexibilidade residual, mostradas no capítulo 2, se forem eliminados podem causar a não convergência da síntese.

c) O critério de Hurty [41] que define que uma faixa consistente de modos identificados, através do processo de síntese, é da ordem de 65 a 80%, pode ser obtida, desde que, sejam mantidas as quantidades máximas permissíveis de modos em cada subestrutura. Se uma quantidade menor de modos das subestruturas for mantida, esta faixa de identificação pode ser inferior. Porém, no método proposto, até mesmo, uma quantidade mínima de modos selecionados pode identificar algum modo do sistema completo.

d) O critério de Rubin [49] que representa um índice alternativo da qualidade de modos selecionados na base, e que define que sejam selecionados todos os modos cujas frequências naturais sejam maiores do que 40% da menor frequência natural de interêsse e todos os modos cujas frequências naturais sejam menores do que 2.25 vezes a maior frequência natural de interêsse, é bastante conservativo, uma vez que, representa um caso em que serão retidos grandes quantidades de modos das subestruturas e a tendência é sempre a obtenção de

resultados satisfatórios. Porém, a fixação de uma faixa única de modos selecionados, diminue a flexibilidade do método de síntese modal, que poderia ser aplicado, com sucesso, a outras condições de manutenção/eliminação de modos. Com isso, o critério de eliminação automática, proposto no trabalho, além de mais flexível, permite otimizar a síntese final com a possível análise de um problema mais reduzido.

e) Um dos inconvenientes observado no processo de síntese modal de estruturas práticas é a incerteza da precisão final dos modos sintetizados. Ou seja, dependendo da quantidade de modos selecionados nas bases, podem ser sintetizados diferentes modos da estrutura real possuindo uma baixa ou alta precisão. Uma vez que, quando é feita a análise da estrutura real, através da análise experimental, geralmente, não se conhecem os parâmetros dinâmicos desta estrutura, não se poderia afirmar até que ponto um determinado modo identificado pela síntese modal possuiría uma precisão satisfatória. De certa forma, esta incerteza é um fator limitante da técnica de síntese modal de estruturas.

Capítulo 8

Conclusões

O trabalho implementou um método generalizado de síntese modal de estruturas, que utiliza o superconjunto modal de flexibilidade residual. O método pode ser aplicado em análise de modelos teóricos, porém é direcionado, principalmente, para a análise experimental. Os modos de flexibilidade residual foram construídos utilizando uma formulação generalizada, sendo aplicado tanto em sistemas conservativos, como em sistemas não conservativos.

Como foi visto, a síntese modal é uma importante ferramenta que pode ser utilizada em vários tipos de análise estrutural. No entanto, existem algumas limitações no método que, inclusive, já foram observadas por outros pesquisadores [11,41,49]. Estas limitações vão, principalmente, influenciar na precisão dos resultados obtidos e podem ser discriminadas como:

- Quantidade de modos selecionados na base;
- Qualidade ou indicativo de possíveis modos que seriam os melhores candidatos para serem selecionados nas bases modais.

Quanto a quantidade e a qualidade de modos selecionados de cada subestrutura, foi observado que o critério de Rubin [49] define uma faixa conservativa, em função do pré-estabelecimento de uma região de frequências naturais de interêsse. Este critério é eficiente, porém pouco flexível, limitando, de certa forma, a aplicabilidade do método. O CEA de modos proposto no trabalho pode eliminar este inconveniente, uma vez que, indica quais os modos das subestruturas devem ser selecionados ou eliminados, através da determinação de um peso específico para cada modo. A indicação destes modos selecionados ou não selecionados das subestruturas, é um fator decisivo para a obtenção de bons resultados finais. Neste aspecto, o trabalho apresentado é único e contribui, além do método proposto aqui, para todos os tipos de métodos de síntese modal, através da formulação de um índice qualitativo dos modos das subestruturas, indicando a base modal mantida mais coerente para a realização da síntese final

da estrutura global. Evidentemente, o critério proposto é uma indicação das melhores bases modais que poderiam ser empregadas no processo, não descartando, porém, a possibilidade de existência de outras bases modais que também poderiam levar a resultados satisfatórios. Esta afirmativa foi verificada através dos exemplos de simulação numérica e do exemplo experimental, que indicaram o sucesso da utilização do critério formulado para o método de síntese modal proposto.

O trabalho portanto, propõe formulações que ajudam na eliminação dos inconvenientes do método de síntese modal, através de procedimentos simplificados que facilitam a automatização do processo, evitando a interferência do usuário na análise estrutural.

Desenvolveu-se um código computacional (Programa Struct) utilizado na análise dinâmica de estruturas, a partir da metodologia de síntese modal formulada. O programa desenvolvido em linguagem Fortran, utiliza um procedimento de síntese diferenciado, onde a equação do movimento global é sempre montada com duas subestruturas isoladas. Através deste procedimento o problema analisado possui dimensões menores, com um consequente aumento da eficiência computacional aliado a um aumento da precisão dos resultados finais.

O método desenvolvido foi avaliado à partir de quatro exemplos numéricos. Dois exemplos foram aplicados ao caso sem amortecimento. Nestes exemplos, um utiliza um sistema discreto e o outro utiliza informações analíticas do método de elementos finitos obtidas através do programa Ansys [104]. No primeiro exemplo não amortecido, foram verificadas todas as possibilidades de eliminação de modos das subestruturas, a fim de validar completamente a técnica de síntese proposta, além de avaliar também o critério de eliminação automática de modos das subestruturas. Verificou-se que este indice de qualidade proposto, na maioria dos casos, foi uma das melhores condições de eliminação de modos.

Para o caso com amortecimento geral, também foram estudados dois exemplos numéricos discretos. O primeiro exemplo é um sistema discreto de massas conectadas através de molas e amortecedores com seis graus de liberdade. Este sistema foi subdividido em duas subestruturas. onde foram avaliadas todas as combinações de eliminação de modos entre as mesmas. O segundo exemplo é um sistema discretizado de massas com molas e amortecedores com 15 graus de liberdade. Este sistema é idêntico ao analisado no trabalho de Greif [82].

A técnica de síntese modal generalizada empregada nos sistemas com amortecimento geral também gerou resultados satisfatórios dentro das faixas pré-estabelecidas de identificação

[11,41]. Além disso, nestes casos também o CEA de modos foi uma das melhores condições de eliminação de modos.

Foi investigado também uma estrutura experimental, composta por perfil U de formato cônico com um quadro conectado na sua extremidade. Este sistema visa representar um modelo esquemático e bastante simplificado, em escala reduzida, de uma asa de avião com um tanque de combustível conectado em sua extremidade. A estrutura foi sub-dividida em duas subestruturas, definidas pela estrutura principal (asa) e pelo quadro (tanque de combustível). A análise isolada destas subestruturas foi comparada com o modelo da estrutura completa. A estrutura completa e as subestruturas foram também modeladas analíticamente através do método de elementos finitos, utilizando-se o Programa Ansys.

Os parâmetros dinâmicos dos modelos analíticos de elementos finitos da estrutura completa e das subestruturas foram ajustados aos respectivos valores obtidos da análise experimental. Foram extraídos os modos de vibrar através dos modelos de elementos finitos das subestruturas, que neste caso possuem valores reais. Estes modos foram utilizados pelo Programa Struct para realizar a síntese modal generalizada proposta no trabalho. Estes valores sintetizados foram então comparados com os resultados da estrutura completa obtidos via elementos finitos.

Em uma outra análise, os modos reais das subestruturas foram convertidos em modos complexos equivalentes, através de uma normalização conveniente, definida no capítulo 4. Estes modos complexos foram então utilizados pelo Programa Struct para sintetizar a estrutura completa, aplicando, neste caso, a formulação para sistemas com amortecimento geral.

Além da avaliação do método de síntese modal proposto através das bases modais obtidas dos modelos de elementos finitos ajustados, realizou-se também a síntese com os parâmetros modais identificados experimentalmente. Neste caso, as bases modais das subestruturas foram identificadas pelo Programa Star [105] que utilizou as FRF obtidas da análise experimental. Estas bases modais foram utilizadas para sintetizar a estrutura completa utilizando o Programa Struct.

A síntese modal da estrutura real modelada pelo método dos elementos finitos, utilizando-se os modos reais ou os modos complexos equivalentes das subestruturas, produziu resultados finais satisfatórios. Verificou-se para o modelo experimental que a estrutura real foi convenientemente identificada através da análise dos autovalores. Obteve-se porém um baixo valor de MAC para os autovetores identificados através da síntese modal experimental devido

à uma normalização de massa unitária ineficiente dos modos das subestruturas, o que ocasionou uma baixa condição de ortogonalidade destes modos. O processo de normalização ineficiente pode ser explicado pela suposição de baixo amortecimento que o sistema deve possuir para a utilização da metodologia de normalização. Além disso, uma outra fonte de erro para a base modal foi a consideração de um modelo simplificado para algumas das coordenadas da subestrutura 1.

Algumas conclusões foram obtidas através das várias formulações propostas no trabalho, juntamente com a avaliação dos exemplos de simulação e do exemplo experimental. Pode-se resumir estas conclusões como:

a) A técnica de síntese modal generalizada proposta no trabalho mostrou-se consistente gerando, na maioria dos casos, resultados satisfatórios para sistemas sem amortecimento ou com amortecimento geral.

b) O critério proposto de remontagem das subestruturas mostrou-se eficiente, convergindo, na maioria dos casos, para resultados satisfatórios. A grande vantagem deste procedimento é que ele pode ser aplicado com vantagens à outras técnicas de síntese modal.

c) O CEA dos modos, não foi, na maioria dos casos, a melhor configuração de eliminação de modos das subestruturas. Porém, a sua utilização sempre convergiu para valores próximos daqueles resultados de melhor precisão. O CEA pode portanto ser utilizado, não só na metodologia de síntese modal proposta no trabalho, mas em qualquer outro método de síntese modal. Sua aplicação é uma importante "ferramenta" que indica os modos das subestruturas mais apropriados para serem selecionados ou não selecionados das bases modais. Com isso, pode-se formular a técnica de síntese modal através de um procedimento automático, minimizando a interferência do usuário, e eliminando uma das dificuldades comuns a tais técnicas.

d) A formulação dos modos de flexibilidade residual que foi adaptada aos casos sem amortecimento e com amortecimento geral, mostrou-se eficiente, sendo indicada, principalmente, para a análise modal experimental.

e) O Programa Struct que foi construído à partir da formulação de síntese modal proposta, mostrou-se consistente, com dispositivos de parada para sistemas mal condicionados e com o processamento feito a um baixo custo computacional.

f) Apesar dos exemplos simulados e, também, do exemplo experimental, não serem sistemas de elevada ordem, a metodologia está adaptada e preparada para análise de sistemas complexos ou de grande porte.

Através dos procedimentos realizados, procurou-se fazer uma avaliação criteriosa da metodologia proposta, porém outros aspectos têm de ser observados para a sua completa validação. Além disso, os métodos propostos neste trabalho ainda podem servir como um complemento para outros tipos de análise de sistemas. Com isso, citam-se algumas sugestões para futuras pesquisas:

a) Aplicação de técnicas mais precisas de normalização de massa unitária em modos obtidos da análise experimental com a finalidade de melhorar a condição de ortogonalidade dos modos. Consideração de um modelo mais adequado para a subestrutura (1) com a finalidade de minimizar as fontes de erro nas bases modais.

b) Avaliação do método de síntese modal generalizado proposto em uma estrutura real de grande porte.

c) Automatização completa do método de síntese modal proposto, não só no aspecto qualitativo dos modos, através do CEA de modos, mas também, no aspecto quantitativo dos modos.

d) Implementação de uma interface do Programa Struct mais amigável para o usuário.

e) Investigação mais criteriosa do ajuste de modelos de elementos finitos aos respectivos modelos experimentais, via informações da síntese modal de subestruturas, aplicada em sistemas complexos ou de grande porte.

Referências Bibliográficas

[1] Araldsen, P. O. An example of large-scale structural analysis. Comparison between finite element calculation an full scale measurement on the oil tanker Esso norway. Computers Structural, v 4, p. 69-93, 1974.

[2] Silva, Leandro Afonso. Identificação de falhas estruturais baseada na sensibilidade inversa de pólos e de zeros de funções de resposta em frequência. Uberlândia: Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade federal de Uberlândia, 1996. 113 p. Tese (Mestrado).

[3] Santos, J. M. C. Ajuste de modelos de estruturas acopladas por juntas mecânicas usando funções de resposta em frequência e síntese modal de componentes. Campinas: Departamento de Mecânica Computacional, Unicamp, 1993. 99 p. Tese (Doutorado).

[4] Lin, R. M., Ewins, D. J. Model updating using FRF data. Proceedings of the 15th International Seminar On Modal Analysis, Leuven, Belgium, p.19-21, Sep 1990.

[5] Martinez, D. R. Parameter estimation in structural dynamics models. Sandia National Laboratories, Report SAND80-0135, 315 p., mar 1981.

[6] Arruda, J. R. F. Frequency domain estimation of structural parameters. VIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, ITA, S. J. dos Campos, Brasil, p.741-744, Dez 1985.

[7] Imregun, M., Sanlitur, K. Y., Ewins, D. J. Correcting a medium-size finite element model using measured FRF data. Proceedings of the 17th International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Belgium, p. 547 - 562, 1992.

[8] Kurka, Paulo Roberto Gardel. Investigation of dynamic identification techniques and their applications. England: University of Manchester Institute of Science and Technology, 1989. Thesis (Phd).

[9] Kurka, P. R. G. Modal parameter identification in the time domain from a random force. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 4, N. 5, p. 393-404, 1990.

[10] Bazán, Fermin S. V. Desenvolvimento de ferramentas de identificação paramétrica de sistemas mecânicos no domínio do tempo. Campinas: Departamento de Projeto mecânico, Unicamp, 1996. 90 p. Tese (Doutorado).

[11] Duarte, Marcus Antônio Viana. Ajuste de modelos dinâmicos de estruturas com não linearidades concentradas. Campinas: Departamento de Mecânica Computacional, Unicamp, 1994. 190 p. Tese (Doutorado).

[12] Mohammad, K., Tomlinson, G. R. Estimating Physical parameters of linear and onlinear structures. Proc. of 15th International Modal Analysis, Leuven, Belgium, p. 873 - 887, Sept. 1990.

[13] Yasuda, K., Kawamura, S., Watanabe, K. Identification of nonlinear multi-degree-of-freedom systems. JSME International Journal, v 31, series 11, n. 1, p. 8-14, 1988.

[14] Argoul, P., Jezequel, L. Improvement of a nonparametric identification procedure used n nonlinear dynamics. Journal of Applied Mechanics, v. 56, p. 697-703, Sept. 1989.

[15] Masri, S. F., Miller, R. K., Saud, A. F. Caughey, T. K. Identification of nonlinear vibrating structures: Part I - Formulation, Part II - Applications. Journal of Applied Mechanics, V. 54, p. 918-929, Dec. 1987.

[16] Thouverez, F., Jezequel, L. Identification of nonlinearity joints from dynamical tests. Proc. of the 9th Int. Modal Analysis Conference, Florence, Italy, p. 1583-1588, 1991.

[17] Wang, J., Sas, P. A method for identifying parameters of mechanical joints. Journal of Applied Mechanics, v. 57, p. 337-342, June 1990.

[18] Lin, Y., Kortün, W. A new direct identification of system physical parameters for systems with nonlinear elements. Proc. of the 8th Int. Modal Analysis Conference, Florida, USA, p.1223-1226, 1990.

[19] Benhafsi, Y., Penny, J. E. T., Friswell, M. I. A parametric identification for discrete nonlinear systems incorporating cubic stiffiness elements. Proc. of the 15th Int. Modal Analysis Conference, Leuven, Belgium, p.1175-1191, Sept. 1990.

[20] Elliott, K. B., Mitchell, C. D. The effect of modal truncation on modal modification. Proc. of the 5th International Modal Analysis. Conference, London, England, v 1, p. 72-78, April 1987.

[21] Avitable, P., O'Callahan, J. C. Understanding structural dynamic modification and theeffects of truncation. International J. of Analytical and Exp. Modal Analysis, v. 6, n. 4, p. 215-235, Oct. 1991.

[22] Chou, C. M. Structural dynamics modification of 3D beam elements using a local eigenvalue modification procedure. Lowell: University of Lowell, 1984. Thesis (Phd).

[23] Herbert, M. R., Kientzy, D. W. Applications of structural dynamics modification. SAE pap. 80-1125, 1980.

[24] Formenti, D., Wecaratna, S. Structural dynamics modification - An extension to modal analysis. SAE pap. 81-1043, 1981.

[25] O'Callahan, J. C. SMOD - A structural dynamics modification program. University of Lowell, 1982.

[26] SYSTAN - System analysis program. Structural Dynamics Research Corporation, Cincinnati.

[27] SDM - Structural dynamics modification program. Structural Measurement System's, Inc., San Jose, CA.

[28] ESMOD - Entek structural modification package. Entek Corporation, Cincinnati, OH.

[29] SMP - Structural modification program. Solartron Instruments, Elmsford, NY.

[30] Lammens, S., Heylen, W., Sas, P., Brown, D. Model updating and perturbed boundary condition testing. Proc. of the 11th International Modal Analysis Conference, p. 449-455, 1993.

[31] Nalitolela, N. G., Penny, J. E., Friswell, M. I. Updating structural parameters of a finite element model by adding mass or stiffness to the system. Proc. of the 8th International Modal Analysis Conference, p. 836-842, 1990.

[32] Nalitolela, N. G. A mass or stiffness addition technique for structural parameter updating. The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, v.7, n.3, p. 157-168, 1992.

[33] Dobson, B. J. Modification of finite element models using experimental modal analysis. Royal Naval Eng. College, Devon, UK, p. 593-601, 1990.

[34] Link, M., Rohrmann, R. G., Pietrzko, S. Experience with automated procedures for adjusting the finite element model of a complex highway bridge to experimental modal data. D-34109, Kassel, Germany, p. 218 - 225, 1991.

[35] Pinotti Jr., M. Técnica de redução em análise dinâmica por subestruturação. Departamento de Engenharia Mecânica, EESC, São Carlos, SP., 1987.

[36] Guyan, R. J. Reduction of stiffness and mass matrices. AIAA J., v. 2, n. 3, p. 380, 1965.

[37] Hurty, W. C. Dynamic Analysis of structural systems using component modes. AIAA J., v. 3, n. 4, p. 678-685, april 1965.

[38] Meirovitch, L. Computational methods in structural dynamics. Alphen Aan Den Rijn, Sijthoff & Noordhoff, 1980.

[39] Macneal, R. H. Vibrations of composite system. Air Force Office of Scientific Research, Rept. OSR TN-55-120, Oct. 1964, Arlington, VA.

[40] Goldman, R. L. Vibration analysis by dynamic partitioning. AIAA J., v. 7, p. 1152-1154, June 1969.

[41] Hurty, W. C., Collins, J. D., Hart, G. C. Dynamic analysis of large structures by modal synthesis techniques. Computers & Structures, v. 1, p. 535-563, Dec. 1971.

[42] Collins, J. D., Hart G. C., Hurty, W. C., Kennedy, B. Review and development of modal synthesis techniques. Tech. Report 1073-1, J. H. Wiggins Co., Redondo Beach, CA, May 1972.

[43] Macneal, R. H. A hybrid method of component mode synthesis. Computers & structures, v. 1, p. 581-601, Dec. 1971.

[44] Bamford, R. M. A modal combination program for dynamic analysis of structures. Tech. Memo. 33-290, Jet Propulsion Lab. Pasadena, CA, Aug. 1966.

[45] Craig Jr., R. R. A review of time-domain and frequency-domain component mode synthesis methods. Journal of modal analysis, p. 59-72, April 1987.

[46] Craig Jr., R. R. Structural dynamics - An introduction to computer methods. New York: John Wiley & Sons Inc., 1981, 527 p.

[47] Schwendler, R. G., Macneal, R. H. Optimum structural representation in aeroelastic analysis. Tech. Report Asd -tr-61-68, Air Force system's Command, Washington, DC., Mar 1962.

[48] Rubin, S. Mechanical immittance and transmission - Matrix concepts. Journal of the Acoustical Society of América, v. 41, p. 1171-1179, May 1967.

[49] Rubin S. Improved component mode representation for structural dynamic analysis. AIAA J., v. 13, n. 8, p. 995-1006, August 1975.

[50] Hasselman, T. K., kaplan, A. Dynamic analysis of large systems by complex mode synthesis. Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, p. 307-333, Sept. 1974.

[51] Craig Jr., R. R., Bampton, M. C. C. Coupling of substructures for dynamic analysis. AIAA J., v. 6, n. 7, July 1968.

[52] Craig Jr., R. R., Chung, Y-T. Generalized substructure coupling procedure for damped systems. AIAA J., v. 20, n. 3, p. 442-444, April 1981.

[53] Craig Jr., R. R., Chang, C-J. On the attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis. AIAA J., paper 77-405, March 1977.

[54] Martim, K. F.; Ghlaim, K. M. System prediction using damped component modes. Proc. Instn. Mech. Engrs., V. 198C, n. 16, p. 261-268, March 1984.

[55] Hurty, W. C. Dynamic analysis of structural frequency equations. AIAA J., v. 11, n. 6, p. 892, 1966.

[56] Hou, S. Review of modal synthesis techniques and a new approach. Shock and Vibration Bulletin, US Naval Research Laboratory, Proc. 40(4), p. 25-39, 1969.

[57] Gladwell, G. M. L. Branch mode analysis by vibrating systems. Journal of Sound and Vibration, v. 1, p. 41-59, 1964.

[58] Bajan, R. L., Feng, C. C., Jaszlics, I. J. Vibration analysis of complex structural system by modal substitution. Shock and Vibration Bulletin, v. 39, n. 3, p. 99-106, 1969.

[59] Benfield, W. A., Hruda, R. F. Vibrational analysis of structures by component mode substitution. AIAA J., v. 9, n. 7, p. 1255-1261, 1971.

[60] Klosterman, A. L., McClelland, W. A. Combining experimental and analytical Techniques for dynamic system analysis. Tokyo Seminar on Finite Element Analysis, Nov. 1973.

[61] Hintz, R. M. Analytical methods in component modal synthesis. AIAA J., v. 13, n. 8, p. 1007-1016, 1975.

[62] Baker, M. Component mode synthesis methods for test-based, rigidly connected, flexible components. AIAA J., paper 84-0943, p. 153-163, 1984.

[63] Hale, A. L., Meirovitch, L. A general substructure synthesis method for dynamic simulation of complex structures. Journal of Sound and Vibration, v. 69, n. 2, p. 309-326, 1980.

[64] Kubomura, K. A theory of substructure modal synthesis. J. Applies Mech., Trans. ASME, v. 49, p. 903-909, Dec. 1982.

[65] Greif, R., Wu, L. Substructure analysis of vibration systems. Shock Vibration Digest, v.15, n. 1, p. 17-24, Jan. 1983.

[66] Kuang, J. H., Tsuei, Y. G. A more general method of substructure mode synthesis for dynamic analysis. AIAA J., v. 23, n. 4, p. 618-623, Nov. 1983.

[67] Curnier, A. On three modal synthesis variants. J. Sound Vibration, v. 90, n. 4, p. 527-540, 1983.

[68] Sokimoto, S. A study on truncation error in substructure testing. 3rd IMAC, p. 1220-1226, Jan. 1985.

[69] Shabama, A. A., Wehage, R. A. A coordinate reduction technique for dynamic analysis of spatial substructures with large angular rotations. J. Structure Mech., v. 11, n. 3, p. 401-431, 1983.

[70] Engels, R. C. A solution to the Craig/Bampton eigenvalue problem for multi-component structures. 3rd IMAC, p. 299-304, Jan. 1985.

[71] Ewins, D. J. Modal testing: Theory and Practice. New York: John Wiley & Sons Inc, 1985, 269 p.

[72] Allemang, R. J., Brown, D. L., Soni, M. L. Experimental modal analysis and dynamic component synthesis. Tech. Report AFWAL-TR-87-3069, v. IV, Dec. 1987.

[73] Jezequel, L. A method of damped systems from substructure tests. ASME Design Eng. Tech. conf., paper 79-det-11, St. Louis, Sept. 1979.

[74] Klahs, J. W., Townley, G. E. Determining component loads and stresses with improved system modeling techniques. Proc. 3rd. IMAC, Union College, Schenectady, NY, p. 941-948, 1985.

[75] Martinez, D. M. Carne, T. G., Gregory, D. L., Miller A. K. Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis. Rep. SAND83 - 1889, Sandia Nat. Lab., Albuquerque, April 1984.

[76] Martinez, D. M., Gregory, D. L. A comparison of free component mode synthesis techniques using MSC/Nastran. Rep. SAND 83-0025, Sandia Nat. Lab., Albuquerque, June 1984.

[77] Craig Jr., R. R., Chang, C-J. A review of substructure coupling methods of dynamic analysis. 13th Annual MTG. Soc. for Eng. Sci., Advances in Eng. Sci., 2, Nasa CP-2001, p. 393-408, Nov. 1976.

[78] Nelson, F. C., Greif, R. Damping models and their use in computer programs. Structural mechanics software series, University Press of Virginia, 1980.

[79] Likins, P. W. Dynamics and control of flexible space vehicles. Technical report 32-329, Jet Propulsion Lab., Pasadena, CA, Feb. 1969.

[80] Kana, D. D., Unruh, J. F. Substructure energy methods for prediction of space shuttle modal damping. Journal of Spacecraft, v. 12, p. 294-301, 1975.

[81] Glasgow, D. A., Nelson, H. D. Stability analysis of rotor-bearing systems using component mode synthesis. Journal of Mechanical Design, v. 102, p. 352-359, 1980.

[82] Greif, R., Wu, L. Dynamic response of non-proportionally damped systems using a successive transformation technique. 4 th IMAC, p. 349-353, Feb. 1986.

[83] Soni, M. L. Prediction of damping for flexible spacecraft appendages. Proc. of the 2nd. International Modal Analysis Conference, 1984.

[84] Soni, M. L., Kluesener, M., Drake, M. L. Damping synthesis and damped design for flexible spacecraft structures. Computers & Structures, v. 20, n. 1, p. 563- 574, 1985.

[85] Tongue, B. H., Dowell, E. H. Component mode analysis of nonlinear nonconservative systems. Trans. ASME, v. 50, p. 204-209, Mar. 1983.

[86] Hale, A. L., Bergman, L. A. The dynamic synthesis of general non-conservative structures from separately identified substructure models. J. Sound of Vibration, v. 98, n. 3, p. 431-446, 1985.

[87] Gaul, L. Analytical and experimental study of the dynamics of structures with joints and attached substructures. ASME 85-DET-164, Sept. 1985.

[88] Lips, K. W., Vigneron, F.R. Damping synthesis for a spacecraft using substructure and component data. AIAA J.-84-1053, May 1984.

[89] Li, L., Stühler, A. Modal synthesis for non-proportional damped systems. Institute Für Mechanik, F. R. Germany, p. 1521-1529, 1989.

[90] Santos, J. M. C., Zimmerman, D. C. Damage detection in complex structures using component mode synthesis and residual modal force vector. Proc. IMAC, p. 1299- 1305, 1996.

[91] Chang, K. J., Jung, J. H., Jee, T. H., Park, Y. P. Modal synthesis method using interpolated rotational degrees-of-freedom. Proc. IMAC, p. 1621 - 1627, 1996.

[92] Saitoh, M., Hayashi, J., Iwatsuki, N. The estimation of the sound power radiated from modified structures by the modal synthesis method. Proc. IMAC, p. 1363-1368, 1996.

[93] Bonnecase, D., Roumagoux, J. Modal synthesis: A performing way of using modal analysis modal. Proc. IMAC, p. 728-734, 1996.

[94] Chiao, K. P. A systematic coupling procedure for component mode synthesis with least squares model reduction. Proc. IMAC, p. 648-654, 1996.

[95] Duarte, M. L. M., Ewins, D. J. Improved experimental component mode synthesis (IECMS) with residual compensation based purely on experimental results. Proc. IMAC, p. 641-647, 1996.

[96] Balmés, E. Use of generalized interface degrees of freedom in component mode synthesis. Proc. IMAC, p. 204-210, 1996.

[97] Shu, E. F., Chu, F. H. A general superelement approach by the component mode synthesis method. Proc. IMAC, p. 676-682, 1996.

[98] Kreyszig, E. Advanced Engineering mathematics. New York: John Wiley & Sons Inc., 1993, 1271 p.

[99] Lecture Notes in Computer Science , Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide. Springer-Verlag, 2nd Edition, Vol. 6, 1976.

[100] Lang, G. F. Demystifying complex modes. J. Sound and Vibration, p. 36-40, Jan. 1989.

[101] Mitchell, L. Complex modes: A Review. Proc. of the 8th International Modal Analysis Conference. Kissimmee, USA, p. 891 -899, Jan. 1990.

[102] Liang, Z., Tong, M., Lee, G. C. Complex modes in damped linear dynamic systems. The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, v.7, n. 1, p. 1-20, Jan. 1992.

[103] Matrix Laboratories - Programa Matlab- versão 4.2c.1, The Mathworks Inc.

[104] Programa Ansys - ver 5.0. Swanson Analysis Systems Inc, Dec. 1992.

[105] Programa Star - Theory and Aplications. Structural Measurement Systems, Jan 1990.

Anexos

Anexo I

Modal Assurance Criterion - MAC

O índice MAC [71] fornece uma maneira de obter a correlação entre os modos reais do sistema com os respectivos modos identificados pela síntese modal. Este valor é obtido através dos desvios de mínimos quadrados entre as bases modais correlacinadas. Se o índice MAC possui valor unitário, então as bases modais analisadas possuem uma boa correlação. Se este valor for próximo de zero, as bases modais possuem um baixo índice de correlação. O índice de MAC pode ser definido pela seguinte expressão:

$$MAC_j(s,x) = \frac{\left(\left|\phi_x^T \cdot \phi_s\right|\right)^2}{(\phi_x^T \cdot \phi_x) \cdot (\phi_s^T \cdot \phi_s)}$$

$$\overline{MAC} = \frac{\sum_{j=1}^{m} MAC_j(s,x)}{m}$$

Os termos em x da equação anterior representam os modos originais do sistema e os termos em p representam os modos sintetizados do sistema.

Anexo II

Arquivo de saída - Programa Struct (Caso não amortecido)

Os resultados apresentados abaixo referem-se ao caso sem amortecimento definido pelo exemplo 6.2.1, utilizando-se o CEA de modos, conforme mostrado no capítulo 6.

SUB.	MODOS		PESOS	C E A	MANTIDOS	DELETADOS
	NUM.	AUTOVALOR				
	1	.382E+03	.162E+01	.414E+01	2	1
1	2	.262E+04	.618E+00	.903E+00	0	0
	1	-.292E-13	.577E+00	.108E+01	2	4
	2	.136E+04	.393E+00	.145E+01	1	0
	3	.200E+04	.100E+01	.100E+01	3	0
2	4	.704E+04	.363E+00	.151E+01	0	0
	1	.464E+03	.236E+01	.542E+01	1	2
	2	.122E+04	.702E+01	.241E+02	3	0
3	3	.532E+04	.456E+00	.256E+01	0	0
	1	.853E+02	.659E+00	.827E+01	1	4
	2	.110E+04	.832E+00	.810E+01	2	0
	3	.157E+04	.226E+01	.667E+01	3	0
4	4	.245E+04	.274E+00	.902E+01	0	0

AUTOVETORES		
AUTOVALOR	Real: .2086E+03 Posicao(mac): 1	Imag: .0000E+00 Posicao(freq): 1
COORD.	MAC(1): .100E+01	MAC(1): .000E+00
1	.660E-01	
2	.118E+00	
3	.119E+00	
4	.105E+00	
5	.117E+00	
6	.640E-01	

AUTOVETORES		
AUTOVALOR	Real: .9735E+03 Posicao(mac): 2	Imag: .0000E+00 Posicao(freq): 2
COORD.	MAC(2): .999E+00	MAC(2): .999E+00
1	-.136E+00	
2	-.140E+00	
3	-.130E-01	
4	.126E+00	
5	.539E-01	
6	.689E-01	

AUTOVETORES		
AUTOVALOR	Real: .1389E+04 Posicao(mac): 3	Imag: .0000E+00 Posicao(freq): 3
COORD.	MAC(3): .100E+01	MAC(3): .100E+01
1	-.580E-01	
2	-.356E-01	
3	.224E-01	
4	-.137E+00	
5	.167E+00	
6	-.126E-01	

AUTOVETORES		
AUTOVALOR	Real: .2396E+04 Posicao(mac): 4	Imag: .0000E+00 Posicao(freq): 4
COORD.	MAC(4): .996E+00	MAC(4): .996E+00
1	-.272E+00	
2	.107E+00	
3	.267E-01	
4	-.697E-02	
5	-.327E-01	
6	-.205E-01	

AUTOVETORES		
AUTOVALOR	Real: .4894E+04 Posicao(mac): 5	Imag: .0000E+00 Posicao(freq): 5
COORD.	MAC(5): .943E+00	MAC(5): .943E+00
1	-.390E-02	
2	.127E-01	
3	-.195E-01	
4	-.574E-01	
5	-.326E-01	
6	.301E+00	

Anexo III

Arquivo de saída - Programa Struct (Caso com amortecimento geral)

Os resultados apresentados abaixo referem-se ao caso com amortecimento definido pelo exemplo 6.3.1, utilizando-se o CEA de modos, conforme mostrado no capítulo 6.

SUB.	MODOS		C E A	MANTIDOS	DELETADOS
	NUM.	AUTOVALOR REAL IMAG			
	1	.855E-02 .100E+02	.1564E+02	6	10
	2	.343E+00 .360E+02	.1562E+02	1	5
	3	.371E+00 .402E+02	.1532E+02	7	9
	4	.576E+00 .565E+02	.1705E+02	2	4
	5	.175E+01 .849E+02	.1734E+02	8	0
	6	.855E-02 -.100E+02	.1564E+02	3	0
	7	.343E+00 -.360E+02	.1562E+02	0	0
	8	.371E+00 -.402E+02	.1532E+02	0	0
	9	.576E+00 -.565E+02	.1705E+02	0	0
1	10	.175E+01 -.849E+02	.1734E+02	0	0
	1	.444E-01 .215E+02	.1503E+02	4	5
	2	.275E+00 .349E+02	.6156E+02	1	2
	3	.680E+00 .729E+02	.4375E+01	6	0
	4	.444E-01 -.215E+02	.1503E+02	3	0
	5	.275E+00 -.349E+02	.6156E+02	0	0
2	6	.680E+00 -.729E+02	.4375E+01	0	0

AUTOVETORES		
AUTOVALOR 1	Real: .18843E-01 Posicao(mac): 2 Fr. Nat.: .155E+02	Imag: .15483E+02 Posicao(freq): 2 Fat. Amort.: .122E-02
COORD.	MAC(2): .100E+01 REAL	MAC(2): .100E+01 IMAG
1	.844086E-02	.840447E-02
2	.147376E-01	.147569E-01
3	.161655E-01	.161913E-01
4	.147950E-01	.147469E-01
5	.165351E-01	.165811E-01
6	.910845E-02	.904352E-02

AUTOVETORES		
AUTOVALOR 2	Real: .15071E+00 Posicao(mac): 4 Fr. Nat.: .357E+02	Imag: .35702E+02 Posicao(freq): 4 Fat. Amort.: .422E-02
COORD.	MAC(4): .843E+00 REAL	MAC(4): .843E+00 IMAG
1	.193458E-01	.192026E-01
2	.131890E-01	.133077E-01
3	.205906E-02	.222662E-02
4	-.700671E-02	-.708919E-02
5	-.442563E-02	-.445203E-02
6	-.450834E-02	-.446909E-02

AUTOVETORES		
AUTOVALOR 3	Real: .78870E+00 Imag: .51750E+02 Posicao(mac): 5 Posicao(freq): 7 Fr. Nat.: .518E+02 Fat. Amort.: .152E-01	
COORD.	MAC(5): .588E+00 REAL	MAC(7): .228E-01 IMAG
1	.440476E-02	.398188E-02
2	-.148314E-02	-.886831E-03
3	-.344819E-02	-.286188E-02
4	.165625E-01	.165817E-01
5	-.132769E-01	-.134849E-01
6	.200371E-02	.173917E-02

AUTOVETORES		
AUTOVALOR 4	Real: .47085E+00 Imag: .69498E+02 Posicao(mac): 10 Posicao(freq): 10 Fr. Nat.: .695E+02 Fat. Amort.: .677E-02	
COORD.	MAC(10): .867E+00 REAL	MAC(10): .867E+00 IMAG
1	.324800E-02	.317674E-02
2	-.173214E-02	-.161072E-02
3	-.366487E-02	-.351131E-02
4	-.172483E-02	-.138894E-02
5	-.179106E-02	-.204179E-02
6	.183507E-01	.184328E-01

AUTOVETORES		
AUTOVALOR 5	Real: .47260E+01 Imag: .17381E+03 Posicao(mac): 8 Posicao(freq): 11 Fr. Nat.: .174E+03 Fat. Amort.: .272E-01	
COORD.	MAC(8): .838E+00 REAL	MAC(11): .957E-01 IMAG
1	-.180468E-01	-.183389E-01
2	.163177E-01	.162878E-01
3	.206689E-01	.207312E-01
4	-.930313E-03	-.127211E-02
5	-.114289E-01	-.110639E-01
6	.169899E-02	.154546E-02

AUTOVETORES		
AUTOVALOR 6	Real: .18843E-01 Imag: -.15483E+02 Posicao(mac): 1 Posicao(freq): 1 Fr. Nat.: .155E+02 Fat. Amort.: .122E-02	
COORD.	MAC(1): .100E+01 REAL	MAC(1): .100E+01 IMAG
1	.844086E-02	-.840447E-02
2	.147376E-01	-.147570E-01
3	.161655E-01	-.161913E-01
4	.147950E-01	-.147469E-01
5	.165351E-01	-.165811E-01
6	.910845E-02	-.904352E-02

AUTOVETORES			
AUTOVALOR 7	Real: .15071E+00	Imag: -.35702E+02	
	Posicao(mac): 3	Posicao(freq): 4	
	Fr. Nat.: .357E+02	Fat. Amort.: .422E-02	
COORD.	MAC(3): .843E+00	MAC(4): .843E+00	
	REAL	IMAG	
1	-.193458E-01	.192026E-01	
2	-.131890E-01	.133077E-01	
3	-.205906E-02	.222662E-02	
4	.700670E-02	-.708919E-02	
5	.442562E-02	-.445202E-02	
6	.450834E-02	-.446908E-02	

AUTOVETORES			
AUTOVALOR 8	Real: .78870E+00	Imag: -.51750E+02	
	Posicao(mac): 6	Posicao(freq): 7	
	Fr. Nat.: .518E+02	Fat. Amort.: .152E-01	
COORD.	MAC(6): .588E+00	MAC(7): .229E-01	
	REAL	IMAG	
1	.440476E-02	-.398187E-02	
2	-.148314E-02	.886830E-03	
3	-.344819E-02	.286188E-02	
4	.165625E-01	-.165817E-01	
5	-.132769E-01	.134849E-01	
6	.200371E-02	-.173917E-02	

AUTOVETORES			
AUTOVALOR 9	Real: .47085E+00	Imag: -.69498E+02	
	Posicao(mac): 9	Posicao(freq): 10	
	Fr. Nat.: .695E+02	Fat. Amort.: .677E-02	
COORD.	MAC(9): .867E+00	MAC(10): .867E+00	
	REAL	IMAG	
1	-.324800E-02	.317674E-02	
2	.173214E-02	-.161072E-02	
3	.366487E-02	-.351131E-02	
4	.172483E-02	-.138894E-02	
5	.179106E-02	-.204179E-02	
6	-.183507E-01	.184328E-01	

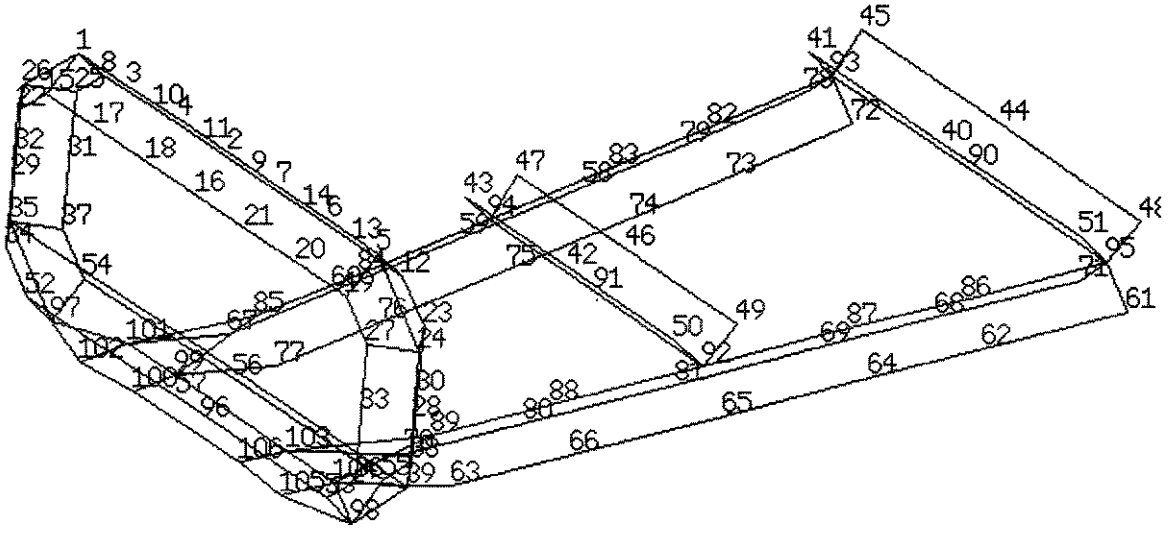
AUTOVETORES			
AUTOVALOR 10	Real: .47260E+01	Imag: -.17381E+03	
	Posicao(mac): 7	Posicao(freq): 11	
	Fr. Nat.: .174E+03	Fat. Amort.: .272E-01	
COORD.	MAC(7): .838E+00	MAC(11): .957E-01	
	REAL	IMAG	
1	.180468E-01	-.183389E-01	
2	-.163177E-01	.162878E-01	
3	-.206689E-01	.207312E-01	
4	.930311E-03	-.127211E-02	
5	.114289E-01	-.110639E-01	
6	-.169899E-02	.154546E-02	

Anexo IV

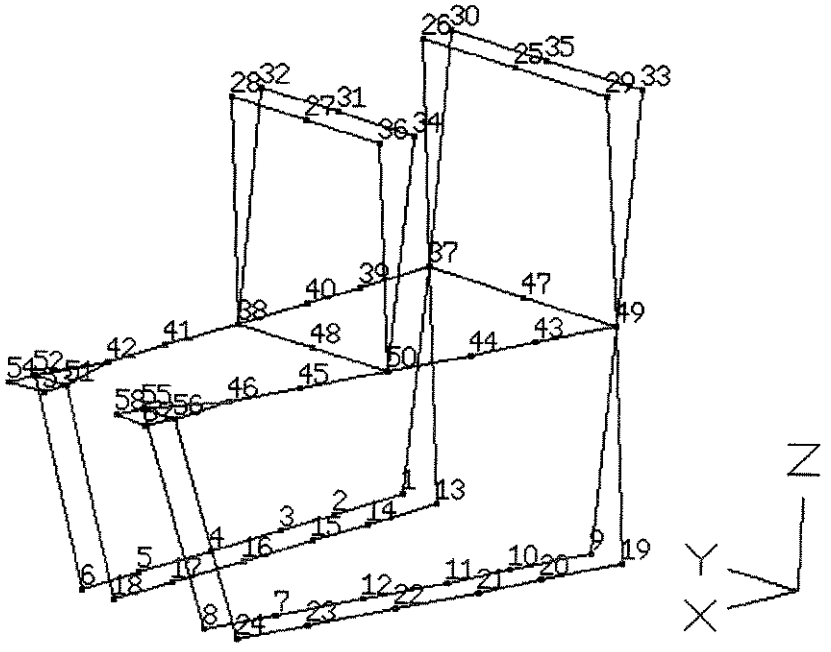
Desenhos esquemáticos da estrutura experimental - Programa Star

As figuras abaixo, representam a estrutura experimental completa e as suas respectivas subestruturas utilizadas no programa de síntese modal. Os esquemas foram gerados pelo programa Star e os números representam os pontos utilizados em cada uma das estruturas para obtenção das funções de resposta em frequência.

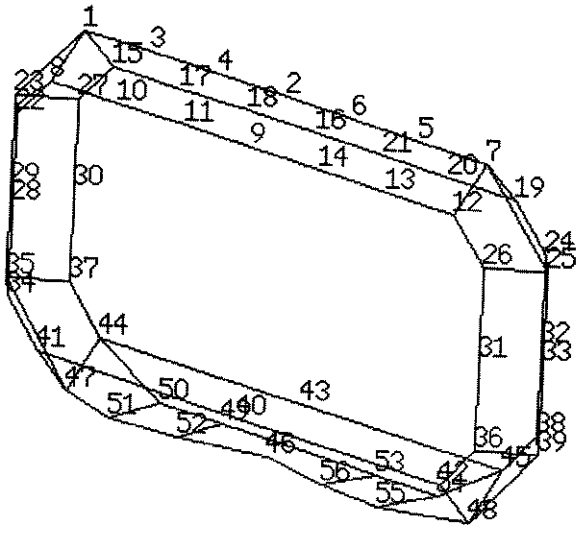
- Estrutura Completa



- Subestrutura (1)



- Subestrutura (2)



Apêndices

Apêndice A

Normalização de Modos Experimentais pela Matriz de Massa Unitária

Esta formulação foi desenvolvida a partir de aspectos teóricos do Programa Star [105] e apresenta uma maneira de normalizar os modos, obtidos da análise experimental, através de uma matriz de massa unitária fictícia, que é representada em termos dos resíduos modais.

A equação do movimento de um sistema pode ser representada por:

$$\mathbf{M}\{\ddot{u}\} + \mathbf{C}\{\dot{u}\} + \mathbf{K}\{u\} = \mathbf{F} \tag{1}$$

A função de resposta em frequência pode ser obtida através dos parâmetros modais e dos resíduos através da seguinte expressão:

$$\mathbf{H(s)} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{r_k}{2j\,(s - p_k)} - \frac{r_k^*}{2j\,(s - p_k^*)} \right) \tag{2}$$

Onde;

$$r_k = A_k\, \phi_k\, \phi_k^t$$

Na equação (2) os resíduos (r_k) são representados em termos de uma constante modal (A_k) e das parcelas relativas dos modos de vibrar.

As matrizes físicas do sistema podem ser representadas em termos das funções de resposta em frequência analisada no ponto s=0, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\mathbf{H}(0)]^{-1} \\ \mathbf{C} &= -\mathbf{K}\,[\dot{\mathbf{H}}(0)]\,\mathbf{K} \\ \mathbf{M} &= \mathbf{C}\,[\mathbf{H}(0)]\,\mathbf{C} - \mathbf{K}\,[\ddot{\mathbf{H}}(0)]\,\frac{\mathbf{K}}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Supondo que o amortecimento do sistema é pequeno , ou seja;

$$\alpha_k \langle\langle w_k$$

$$Im\phi_k \langle\langle Re\,\phi_k \tag{4}$$

Onde;

$$p_k = \alpha_k + j\,w_k$$

$$\phi_k = Re\,\phi_k + j\,Im\phi_k$$

Utilizando-se as suposições anteriores e aplicando-se uma transformação linear nas matrizes fisicas através da base modal. Com isso, são obtidos a rigidez modal, amortecimento modal e matriz de massa modal, definidos como:

$$k_k = \phi^t K \phi = \frac{\alpha_k^2 + w_k^2}{A_k\, w_k}$$

$$c_k = \phi^t C \phi = \frac{2\alpha_k}{A_k\, w_k} \tag{5}$$

$$m_k = \phi^t M \phi = \frac{1}{A_k\, w_k}$$

Com a suposição de pequeno amortecimento, as matrizes modais anteriores são diagonais e a matriz de massa modal é função da constante modal do sistema. Como foi visto, os resíduos são definidos em termos da constante modal e dos modos do sistema. Para uma j-ésima coluna ou linha da matriz de resíduos, pode-se escrever que:

$$r_{jj} = A_k\ \phi_{jk}^2 \tag{6}$$

Como os resíduos possuem um valor numérico único, os deslocamentos modais podem ser escritos em termos de um j-ésimo termo como:

$$\phi_{nk} = \frac{1}{A_k\ \phi_{jk}}\ r_{nj}(k) \qquad k = 1,\ldots,m \tag{7}$$

Para obter uma massa modal unitária, escolhe-se para a constante modal um fator de escalonamento igual a:

$$A_k = \frac{1}{w_k} \qquad k = 1,\ldots,m \tag{8}$$

Finalmente, a forma dos modos normalizada por uma matriz de massa unitária definida em termos dos resíduos é obtida como:

$$\phi_{nk} = \sqrt{\frac{w_k}{r_{jj}(k)}}\, r_{nj}(k) \qquad k = 1,\ldots,m \tag{9}$$