

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
TESE DEFENDIDA POR Luiz Carlos Facundo Sanches
Facundo Sanches E APROVADA P
COMISSÃO JULGADORA EM 3/07/02
Euclides de Mesquita Neto
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Análise Estática e Dinâmica de um Modelo de
Folhas Poliédricas e o Estudo de Lajes com
Fôrma de Aço Incorporada Utilizando o
Método dos Elementos de Contorno**

Autor: Luiz Carlos Facundo Sanches

Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

Co-orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

**Análise Estática e Dinâmica de um Modelo de
Folhas Poliédricas e o Estudo de Lajes com
Fôrma de Aço Incorporada Utilizando o
Método dos Elementos de Contorno**

Autor: Luiz Carlos Facundo Sanches

Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

Co-orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2002

S.P. - Brasil

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	T/Unicamp
	Sa 55a
V	EX
TOMBO BCI	55634
PROC.	16-72403
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	17/
Nº CPD	

CM00188937-9

Bib id 300076

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Sa55a Sanches, Luiz Carlos Facundo
Análise estática e dinâmica de um modelo de folhas poliédricas e o estudo de lajes com fôrma de aço incorporada utilizando o método dos elementos de contorno / Luiz Carlos Facundo Sanches. --Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: Euclides de Mesquita Neto.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Elasticidade. 2. Estática. 3. Dinâmica. 4. Análise numérica. 5. Métodos de elementos de contorno. 6. Placas (Engenharia). I. Mesquita Neto, Euclides de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

**Análise Estática e Dinâmica de um Modelo de Folhas Poliédricas e o
Estudo de Lajes com Fôrma de Aço Incorporada Utilizando o
Método dos Elementos de Contorno**

Autor: Luiz Carlos Facundo Sanches

Orientador Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

Tese de Doutorado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, Presidente
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini
EESC/USP



Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan
FEC/UNICAMP



Prof. Dr. Paulo Sollero
FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Renato Pavanello
FEM/UNICAMP

Campinas, 31 de Julho de 2002.

*Aos meus pais Pascoal e Ivonice e
à minha esposa, Gleiciane.*

Agradecimentos

Agradeço à **FAPESP**, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pela confiança em mim depositada e pelo auxílio fornecido para a realização deste trabalho.

Ao meu orientador Euclides de Mesquita Neto um agradecimento especial pelo grande apoio, direcionamento e acompanhamento durante a confecção deste trabalho.

Ao meu co-orientador Leandro Palermo Júnior, também um agradecimento especial pelo grande incentivo e orientação durante toda a tese.

Aos meus pais Pascoal Sanches Fiorentino e Ivonice Facundo Sanches pelo carinho e compreensão durante estes últimos anos.

À minha esposa Gleiciane Polizel Sanches pela paciência, dedicação e apoio durante a confecção deste trabalho.

Aos meus amigos do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp pelo convívio durante o período da tese.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp pela oportunidade que me foi oferecida.

Que eu não perca a vontade de ajudar as pessoas,
mesmo sabendo que muitas delas são incapazes de ver,
reconhecer e retribuir esta ajuda.

Que eu não perca o equilíbrio,
mesmo sabendo que inúmeras forças querem que eu caia.

Que eu não perca a vontade de amar,
mesmo sabendo que a pessoa que eu mais amo,
pode não sentir o mesmo sentimento por mim...

Que eu não perca a luz e o brilho no olhar,
mesmo sabendo que muitas coisas que verei no mundo,
escurecerão meus olhos...

Francisco Cândido Xavier

Índice

<i>Lista de Figuras</i>	vii
<i>Lista de Tabelas</i>	xii
<i>Nomenclatura</i>	xv
<i>Resumo</i>	xix
<i>Abstract</i>	xx
CAPÍTULO 1 <i>Introdução</i>	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Métodos numéricos aplicados aos modelos de membrana e placa	4
1.3 Métodos numéricos aplicados na análise de uma folha poliédrica	12
1.4 O modelo de laje com fôrma de aço incorporada “Steel Deck”	14
1.5 Objetivos	20
CAPÍTULO 2 <i>Formulação Estática da Elasticidade 2D e Flexão de Placas Finas</i>	21
2.1 Introdução	21
2.2 Equações básicas da elasticidade 2D	21
2.2.1 Hipóteses básicas	22
2.2.2 Equações de equilíbrio	23
2.2.3 Relações deformação-deslocamento	24
2.2.4 Relações constitutivas	25
2.2.5 Estados planos de tensão e deformação	26
2.2.6 Solução fundamental	28
2.2.7 Condições de contorno	32
2.3 Equações integrais da elasticidade 2D	33
2.4 Equações básicas da flexão de placas finas	38

2.4.1 Hipóteses básicas	38
2.4.2 Equações constitutivas	39
2.4.3 Condições de contorno	45
2.4.4 Equações constitutivas em coordenadas cilíndricas	47
2.4.5 Solução fundamental	53
2.5 Equações integrais de placas finas	55

CAPÍTULO 3 *Formulação Dinâmica Estacionária da Elasticidade 2D e Flexão de Placas Finas* **61**

3.1 Introdução	61
3.2 Equações básicas da elastodinâmica linear estacionária	61
3.2.1 Hipóteses básicas	62
3.2.2 Equações de equilíbrio	62
3.2.3 Condições iniciais e de contorno	65
3.2.4 Ondas harmônicas no tempo	65
3.2.5 Soluções fundamentais	68
3.3 Equações integrais da elastodinâmica linear estacionária	74
3.4 Equações básicas da dinâmica estacionária de placas finas	80
3.4.1 Hipóteses básicas	80
3.4.2 Equações constitutivas	81
3.4.3 Condições iniciais e de contorno	83
3.4.4 Equações constitutivas em coordenadas cilíndricas	83
3.4.5 Solução fundamental	85
3.5 Equações integrais da dinâmica estacionária de placas finas	93

CAPÍTULO 4 *Implementação do Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Formulação Estática e Dinâmica Estacionária da Elasticidade 2D e Flexão de Placas Finas* **101**

4.1 Introdução	101
4.2 Implementação do Método dos Elementos de Contorno	102
4.2.1 Discretização do contorno	102
4.2.2 Elementos de contorno	103

4.3	Elementos de contorno para problemas estáticos da elasticidade 2D	106
4.3.1	Discretização das equações integrais	106
4.3.2	Equações algébricas e montagem do sistema de equações	108
4.3.3	Integrais analíticas e numéricas	109
4.3.4	Deslocamentos em pontos internos	111
4.3.5	Tensões em pontos internos	112
4.4	Elementos de contorno para problemas estáticos da flexão de placas finas	113
4.4.1	Discretização das equações integrais	113
4.4.2	Integrais discretizadas	115
4.4.3	Montagem do sistema de equações	116
4.4.4	Integrais analíticas e numéricas	116
4.4.5	Deslocamentos e curvaturas em pontos internos	118
4.5	Carregamentos estáticos de domínio	119
4.6	Validação das formulações estáticas da elasticidade 2D e placas finas	122
4.6.1	Tubo de paredes espessas	122
4.6.2	Peças com concentração de tensões	124
4.6.3	Chapa fina sujeita à esforços na borda	127
4.6.4	Problema clássico de uma placa fina quadrada	128
4.6.5	Placa fina quadrada sujeita à condições de simetria	131
4.7	Elementos de contorno para problemas dinâmicos estacionários da elasticidade 2D	134
4.7.1	Discretização das equações integrais	134
4.7.2	Equações algébricas e montagem do sistema de equações	134
4.8	Elementos de contorno para problemas dinâmicos estacionários da flexão de placas finas	136
4.8.1	Discretização das equações integrais	137
4.8.2	Equações algébricas	137
4.8.3	Montagem do sistema de equações	142
4.8.4	Deslocamentos em pontos internos	143
4.8.5	Montagem alternativa do sistema de equações	144
4.9	Validação das formulações dinâmicas estacionárias da elasticidade 2D e placas finas	146
4.9.1	Barra engastada-livre submetida a uma vibração axial uniforme	146
4.9.2	Barra engastada-engastada submetida a uma vibração axial	158

4.9.3	Domínio quadrado plano submetido a um esforço de superfície uniforme	165
4.9.4	Placa quadrada engastada-livre-engastada-livre submetida a uma excitação transversal concentrada	172
4.9.5	Placa quadrada engastada-livre-apoiada-livre submetida a uma excitação transversal concentrada	181
4.9.6	Placa quadrada apoiada-livre-apoiada-livre submetida a uma excitação transversal concentrada	190
4.9.7	Placa retangular engastada-livre-engastada-livre submetida a uma excitação transversal concentrada	198
 CAPÍTULO 5 <i>Implementação do Macro-elemento Aplicado à Formulação Estática e Dinâmica Estacionária de uma Folha Poliédrica</i>		207
5.1	Introdução	207
5.2	Implementação do Método dos Elementos de Contorno	208
5.2.1	Discretização do contorno	208
5.2.2	Equações algébricas no macro-elemento	208
5.2.3	Montagem do sistema de equações	211
5.2.4	Deslocamentos, tensões e curvaturas em pontos do domínio	212
5.3	Validação das formulações estáticas de um macro-elemento	212
5.3.1	Viga em balanço sujeita a um carregamento parabólico	213
5.3.2	Peça com concentração de tensões	214
5.3.3	Chapa fina sujeita a esforços de borda	216
5.3.4	Placa retangular em balanço	218
5.3.5	Placa quadrada sujeita a condições de simetria	220
5.4	Validação das formulações da dinâmica estacionária de um macro-elemento	222
5.4.1	Barra engastada-livre submetida a uma excitação axial uniforme	222
5.4.2	Placa quadrada engastada-livre-engastada-livre submetida a uma excitação transversal concentrada	227
5.4.3	Placa retangular engastada-livre-engastada-livre submetida a uma excitação transversal concentrada	231

CAPÍTULO 6	<i>Implementação da Associação de Macro Elementos Via Sub-regiões do MEC para a Modelagem Estática e Dinâmica Estacionária de Estruturas de Parede Fina</i>	235
6.1	Introdução	235
6.2	Sistema de coordenadas	236
6.3	Matrizes elementares	238
6.4	Compatibilização dos momentos e rotações	240
6.5	Montagem das matrizes H, G e associação de macro-elementos via sub-região	242
6.6	Diafragmas	246
6.7	Validação das formulações estáticas envolvendo peças de parede fina	250
6.7.1	Placa quadrada engastada sujeita a um carregamento concentrado em seu centro	250
6.7.2	Viga em balanço com seção aberta U	253
6.7.3	Viga em balanço com seção fechada simétrica	257
6.8	Validação das formulações dinâmicas estacionárias envolvendo peças de parede fina	260
6.8.1	Placa quadrada engastada-livre, dividida em duas regiões e sujeita a uma excitação transversal concentrada	260
6.8.2	Barra em balanço com seção fechada simétrica submetida a uma excitação axial uniforme	265
6.8.3	Viga engastada nas extremidades com seção fechada simétrica submetida a uma excitação axial uniforme	272
6.8.4	Resposta Estacionária de viga seção T engastada nas extremidades	277
CAPÍTULO 7	<i>Laje com Fôrma de Aço Incorporada (Steel Deck)</i>	283
7.1	Introdução	283
7.2	O sistema de laje mista Steel Deck	284
7.3	O modelo de folhas poliédricas de Wright	288
7.4	Elementos verticais de cisalhamento (dummy elements)	289
7.5	Propriedades mecânicas de uma seção composta	291
7.6	Profundidade da linha neutra de uma seção composta	292
7.7	Modelagem numérica da laje com fôrma de aço incorporada	294
7.8	Modelagem numérica de um protótipo experimental de uma laje com fôrma de aço incorporada	297

CAPÍTULO 8	<i>Conclusões</i>	303
8.1	Conclusões gerais	303
8.2	Sobre os problemas estáticos de peças de parede fina	304
8.3	Sobre os problemas dinâmicos estacionários de peças de parede fina	304
8.4	Sobre o sistema de laje mista Steel Deck	306
8.5	Futuros trabalhos	307
	<i>Referências Bibliográficas</i>	309

Lista de Figuras

1.1	Detalhe de uma laje com fôrma de aço incorporada “Steel Deck”	14
1.2	Modelagem da laje Steel Deck em folhas poliédricas	19
2.1	Modelo físico para problemas de estado plano	22
2.2	Elemento infinitesimal	23
2.3	Forças de superfície em um tetraedro infinitesimal	24
2.4	Função delta de Dirac	28
2.5	Modelo geométrico e condições de contorno	32
2.6	Acréscimo de um domínio infinitesimal	36
2.7	Sistema de coordenadas no elemento de placa	39
2.8	Componentes de tensão de um elemento de placa	41
2.9	Esforços em um elemento de placa em flexão	42
2.10	Sistemas de coordenadas x_1 , x_2 e ns	44
2.11	Momentos volventes no contorno	47
2.12	Sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas	47
2.13	Relação das coordenadas ns de um ponto P do contorno da placa, com as coordenadas cartesianas e cilíndricas	51
2.14	Placa finita contida em uma placa infinita	55
2.15	Contorno circular acrescido a um canto da placa	57
3.1	Meio-espaço sob pressão normal (Domingues, 1993)	66
3.2	Acréscimo de um domínio infinitesimal	78
3.3	Relacionamento entre os sistemas de coordenadas	84
3.4	Resposta em x devido a uma distribuição delta de Dirac $\Delta(\xi, x)$	85
3.5	Ponto de carregamento ξ e de deslocamento x	86
3.6	Sistema de coordenadas mu com origem no ponto de deslocamento x	90
3.7	Placa finita contida em uma placa infinita	93

3.8 Canto i do contorno da placa	94
3.9 Contorno circular acrescentado a um canto da placa	95
4.1 Domínio bidimensional dividido em elementos de contorno	102
4.2 Descrição geométrica do elemento linear	103
4.3 Elemento linear contínuo	104
4.4 Elemento linear descontínuo	105
4.5 Definição de nó duplo	105
4.6 Ponto de colocação situado no elemento de contorno (elasticidade 2D)	110
4.7 Ponto de colocação no elemento de contorno (placa)	117
4.8 Integração sobre um domínio carregado	120
4.9 Tubo de parede espessa sob pressão interna	122
4.10 Peças com concentração de tensões em furos centrais	125
4.11 Condições de contorno e simetria das peças	126
4.12 Chapa fina sujeita a dois momentos aplicados	127
4.13 Placa fina simplesmente apoiada no contorno	129
4.14 Placa fina quadrada sujeita às condições de simetria	131
4.15 Pontos internos na placa com simetria	132
4.16 Ponto de colocação fora do domínio	135
4.17 Pontos distintos de colocação fora do domínio da placa	144
4.18 Barra engastada-livre sob esforço de superfície uniforme	146
4.19 Discretização do MEC para a barra engastada-livre	147
4.20 Três primeiros modos de vibração de uma barra engastada-livre	156
4.21 Barra engastada-engastada submetida a um esforço de superfície periódico e harmônico	158
4.22 Discretização do MEC para a barra engastada-engastada	158
4.23 Três primeiros modos de vibração de uma barra engastada- engastada	163
4.24 Domínio quadrado sob esforço de superfície periódico e harmônico	165
4.25 Discretização do MEC para o domínio quadrado	166
4.26 Refinamento da discretização do MEC para o domínio quadrado	167
4.27 Placa quadrada engastada-livre-engastada-livre sob carregamento concentrado	172
4.28 Discretização do MEC para a placa quadrada engastada-livre-engastada-livre	173

4.29 Placa quadrada engastada-livre-apoiada-livre sob carregamento concentrado	182
4.30 Discretização do MEC para a placa quadrada engastada-livre-apoiada-livre	182
4.31 Placa quadrada apoiada-livre-apoiada-livre sob carregamento concentrado	190
4.32 Discretização do MEC para a placa quadrada apoiada-livre-apoiada-livre	190
4.33 Placa retangular engastada-livre-engastada-livre sob carregamento concentrado	198
4.34 Discretizações do MEC para a placa retangular engastada-livre-engastada-livre	198
5.1 Deslocamentos e esforços em um nó ξ genérico de um macro-elemento	209
5.2 Viga em balanço sujeita a carregamentos externos	213
5.3 Peça com concentração de tensão em furo central	215
5.4 Condições de contorno e simetria da peça	215
5.5 Chapa fina sujeita a dois momentos aplicados	217
5.6 Placa retangular em balanço	218
5.7 Placa fina quadrada simplesmente apoiada no contorno	220
5.8 Barra engastada-livre-engastada-livre sob esforço de superfície periódico e harmônico	222
5.9 Discretização do MEC para a barra engastada-livre	223
5.10 Placa quadrada engastada-livre-engastada-livre sob excitação concentrada	227
5.11 Discretização do MEC para a placa quadrada engastada-livre-engastada-livre	228
5.12 Placa retangular engastada-livre-engastada-livre sob excitação concentrada	231
5.13 Discretização do MEC para a placa retangular engastada-livre-engastada-livre	232
6.1 Definição dos macro-elementos de uma peça de parede fina	236
6.2 Sistema de coordenadas no macro-elemento: (a) coordenadas locais, (b) coordenadas intermediárias, (c) coordenadas globais	237
6.3 Deslocamentos e esforços em um nó genérico de um macro-elemento	238
6.4 Compatibilização de momentos e rotações nos macro-elementos	241
6.5 Associação de dois macro-elementos	242
6.6 Associação de três macro-elementos em uma aresta comum	246
6.7 Tipos de diafragmas: a) Tipo I, b) Tipo II	247
6.8 Placa quadrada submetida a um carregamento transversal concentrado	250
6.9 Discretização da placa em dois macro-elementos	251

6.10	Formas deformada e não deformada da placa quadrada dividida em duas regiões	252
6.11	Viga em balanço com seção aberta em U	253
6.12	Forças distribuídas na direção x_3 , primeira discretização	254
6.13	Forças distribuídas na direção x_3 , segunda discretização	255
6.14	Viga em balanço com seção fechada simétrica	257
6.15	Forças distribuídas na direção x_3	258
6.16	Representação exagerada dos deslocamentos	259
6.17	Placa quadrada engastada livre, dividida em duas regiões e submetida a uma excitação transversal concentrada	260
6.18	Discretização da placa quadrada em dois macro-elementos	261
6.19	Parte real do primeiro modo de vibração da placa engastada-livre dividida em duas regiões ($i=1, j=1$)	263
6.20	Parte real do segundo modo de vibração da placa engastada-livre dividida em duas regiões($i=1, j=2$)	264
6.21	Parte real do terceiro modo de vibração da placa engastada-livre dividida em duas regiões($i=1, j=3$)	264
6.22	Barra em balanço com seção fechada simétrica	265
6.23	Discretizações dos quatro macro-elementos da barra em balanço	266
6.24	Parte real do primeiro modo de vibração da barra em balanço com seção fechada	271
6.25	Parte real do segundo modo de vibração da barra em balanço com seção fechada	271
6.26	Parte real do terceiro modo de vibração da barra em balanço com seção fechada	272
6.27	Viga engastada-engastada com seção fechada simétrica	273
6.28	Parte real do primeiro modo de vibração da viga engastada nas extremidades com seção fechada	276
6.29	Parte real do segundo modo de vibração da viga engastada nas extremidades com seção fechada	276
6.30	Parte real do terceiro modo de vibração da viga engastada nas extremidades com seção fechada	277
6.31	Parte real do primeiro modo de vibração da viga de seção T engastada nas extremidades	281
6.32	Parte real do segundo modo de vibração da viga de seção T engastada nas extremidades	281
6.33	Parte real do terceiro modo de vibração da viga de seção T engastada nas extremidades	282

7.1 Laje com fôrma de aço incorporada (Steel Deck)	284
7.2 Ilustração de possíveis seções críticas (Eurocode 4, 1992)	285
7.3 Relações de carga \times deflexão do vão central da laje composta (Wright, 1990)	287
7.4 Modelagem da laje composta Steel Deck em folhas poliédricas	288
7.5 Elementos verticais equivalentes (dummy elements)	290
7.6 Seção composta típica (ASCE, 1992)	293
7.7 Perfil típico adotado para a laje composta (Wright, 1990)	294
7.8 Laje composta: (a) Estrutura adotada, (b) macro-elementos, discretização	295
7.9 Pontos de contorno da seção transversal do meio do vão da laje composta	296
7.10 Esquema estrutural do protótipo analisado por Melo (1999)	297
7.11 Corte A-A do protótipo analisado por Melo (1999)	297
7.12 Célula adotada para a análise do protótipo experimental	299
7.13 Laje composta: (a) Célula adotada, (b) discretização	299

Lista de Tabelas

4.1	Deslocamentos nos pontos A, B e C em 10^{-3} mm	123
4.2	Tensões adimensionais no ponto A	126
4.3	Deslocamentos no canto X da chapa fina (m)	128
4.4	Deslocamentos na linha de centro da placa ($100D/g\ell^4$)	130
4.5	Momentos fletores máximos na linha de centro da placa ($10/g\ell^2$)	130
4.6	Deslocamentos na placa fina quadrada ($10^{-2}m$)	132
4.7	Momentos fletores máximos na placa fina (tf.m/m)	133
4.8	Momentos torçores na placa fina (tf.m/m)	133
4.9	Discretizações da barra engastada-livre	147
4.10	Influência da discretização do intervalo de frequência no cálculo das FRFs de uma barra engastada-livre	151
4.11	Valor estático do deslocamento e as vinte primeiras frequências de uma barra engastada-livre	153
4.12	Influência da discretização do intervalo de frequência no cálculo das FRFs de uma barra engastada-engastada	162
4.13	Valor estático do deslocamento normal ao contorno no ponto A	167
4.14	Valores numéricos das três primeiras frequências do domínio quadrado	171
4.15	Parâmetros adimensionais de frequência (λ_{ij}^2) para a placa quadrada engastada-livre-engastada-livre	174
4.16	Frequências naturais analíticas (w_{ij}) para a placa quadrada engastada-livre-engastada-livre	174
4.17	Frequências naturais analíticas e numéricas (w_{ij}) para a placa quadrada engastada-livre-engastada-livre	175
4.18	Parâmetros adimensionais de frequência (λ_{ij}^2) para a placa quadrada engastada-livre-apoiada-livre	183
4.19	Frequências naturais analíticas (w_{ij}) para a placa quadrada engastada-livre-apoiada-livre	183
4.20	Frequências naturais analíticas e numéricas (w_{ij}) para a placa quadrada engastada-livre-apoiada-livre	184

4.21	Parâmetros adimensionais de frequência (λ_{ij}^2) para a placa quadrada apoiada-livre-apoiada-livre	191
4.22	Frequências naturais analíticas (w_{ij}) para a placa quadrada apoiada-livre-apoiada-livre	191
4.23	Frequências naturais analíticas e numéricas (w_{ij}) para a placa quadrada apoiada-livre-apoiada-livre	192
4.24	Parâmetros adimensionais de frequência (λ_{ij}^2) para a placa retangular engastada-livre-engastada-livre	199
4.25	Frequências naturais analíticas (w_{ij}) para a placa retangular engastada-livre-engastada-livre	199
4.26	Frequências naturais analíticas e numéricas (w_{ij}) para a placa retangular engastada-livre-engastada-livre	200
5.1	Deslocamentos da borda livre da viga	214
5.2	Deslocamentos no canto A da chapa fina (m)	217
5.3	Deslocamentos e esforços no contorno de uma placa em balanço sujeita a a um carregamento distribuído linearmente no lado oposto da borda engastada	219
5.4	Deslocamentos e esforços no contorno de uma placa em balanço sujeita a a um carregamento uniformemente distribuído no domínio	219
5.5	Três primeiras frequências de uma barra engastada-livre ($a_1=1/4$ e $a_2=1/2$)	226
5.6	Três primeiras frequências de uma barra engastada-livre ($a_1=1/2$ e $a_2=1/4$)	226
5.7	Parâmetros adimensionais de frequência (λ_{ij}^2) para a placa quadrada engastada-livre-engastada-livre	229
5.8	Frequências naturais analíticas (w_{ij}) para a placa quadrada engastada-livre-engastada-livre	229
5.9	Frequências naturais analíticas e numéricas (w_{ij}) para a placa quadrada engastada-livre-engastada-livre	231
5.10	Parâmetros adimensionais de frequência (λ_{ij}^2) para a placa retangular engastada-livre-engastada-livre	232
5.11	Frequências naturais analíticas (w_{ij}) para a placa retangular engastada-livre-engastada-livre	232
5.12	Frequências naturais analíticas e numéricas (w_{ij}) para a placa retangular engastada-livre-engastada-livre	234
6.1	Frequências naturais analíticas e numéricas (w_{ij}) da placa quadrada engastada-livre, dividida em duas regiões	261

6.2	Três primeiras frequências de uma barra engastada livre (44 nós de contorno)	267
6.3	Três primeiras frequências de uma barra engastada livre (84 nós de contorno)	268
6.4	Três primeiras frequências de uma viga de seção fechada engastada nas duas extremidades	274
6.5	Três primeiras frequências de uma viga de seção T engastada nas duas extremidades	279
7.1	Valores práticos para a razão modular n	292
7.2	Propriedades mecânicas e geométricas dos macro-elementos	295
7.3	Deslocamentos da seção transversal do meio do vão da laje	296
7.4	Propriedades mecânicas e geométricas dos materiais dos macro-elementos utilizados para a laje composta	300
7.5	Carga \times flecha da seção transversal do meio do vão	300

Nomenclatura

Letras Latinas

A_i	: potenciais
$[A]$: matriz de variáveis incógnitas
$[B]$: matriz de variáveis prescritas
b_i	: componente da força de volume
C_i	: constantes de integração
C_{ijkl}	: tensor das componentes elásticas do material
$C(\xi)$: função que fornece o deslocamento do ponto onde se aplica a equação integral
D	: módulo de rigidez à flexão da placa
E	: módulo de elasticidade longitudinal
$[F]$: vetor dos coeficientes das forças distribuídas no domínio
g	: carregamento uniformemente distribuído
G	: módulo de elasticidade transversal
$[G]$: matriz dos coeficientes das forças
h	: espessura da placa
$[H]$: matriz dos coeficientes dos deslocamentos
I	: momento de inércia de área
I_0, I_1	: funções de <i>Bessel</i> modificadas
K_0, K_1	: funções de <i>Bessel</i> modificadas
Y_0, Y_1	: funções de <i>Bessel</i>
ℓ	: comprimento do elemento de contorno
M_{ij}	: momento interno por unidade de comprimento
M_n	: momento externo por unidade de comprimento para a flexão na direção normal ao contorno

M_s	: momento externo por unidade de comprimento para a flexão na direção tangencial ao contorno
M_{ns}	: momento volvente externo por unidade de comprimento
M_n^*	: valor da solução fundamental de M_n
M_{ns}^*	: valor da solução fundamental de M_{ns}
n	: vetor unitário normal ao contorno da placa
n_i	: cosseno diretor da normal em relação ao eixo x_i
N_c	: número total de cantos no contorno da placa
N_e	: número de elementos de contorno
N_n	: número total de nós de contorno
Q_{ii}	: cortantes internas por unidade de comprimento
Q_n	: cortante externa por unidade de comprimento na direção normal ao contorno
Q_n^*	: valor da solução fundamental de Q_n
r	: distância de onde se aplicou o carregamento unitário ao ponto onde se deseja obter a força ou deslocamento na solução fundamental
$r \theta x_3$: sistema de coordenadas cilíndricas
R	: raio de curvatura do contorno da placa no ponto P
R_c	: reação de canto
R_c^*	: valor da solução fundamental de R_c
s	: vetor unitário tangente ao contorno da placa
t_i	: componentes das forças de superfície
$\{t\}$: vetor das forças internas ao elemento
$\{T_k^j\}$: vetor das forças no nó do elemento
$\{T\}$: vetor das forças em todos os nós
T_{ij}^*	: valor da solução fundamental dos esforços generalizados no contorno
T	: matriz de transformação de coordenadas
u_i	: deslocamento generalizado na direção do eixo i
$\{u\}$: vetor dos deslocamentos internos ao elemento
$\{U_k^j\}$: vetor de deslocamentos no nó do elemento
$\{U\}$: vetor dos deslocamentos em todos os nós

U_{ij}^*	: valor da solução fundamental dos deslocamentos generalizados no contorno
V_n	: cortante equivalente por unidade de comprimento
V_n^*	: valor da solução fundamental de V_n
w, u_3	: deslocamento na direção do eixo x_3
w_c	: deslocamento do canto da placa
w^*	: valor da solução fundamental de w
w_c^*	: deslocamento fundamental do canto i da placa
$\partial w / \partial n$: rotação normal ao contorno
$\partial w / \partial s$: rotação tangencial ao contorno
$\partial w / \partial x_1$: rotação contida na direção do eixo x_1
$\partial w / \partial x_2$: rotação contida na direção do eixo x_2
$\partial w^* / \partial n$: solução fundamental de $\partial w / \partial n$
x_1, x_2, x_3	: sistema de coordenadas cartesianas
$\{x\}$: vetor das coordenadas internas ao elemento
$\{X_k^j\}$: vetor de coordenadas do nó do elemento
$\{X\}$: vetor das variáveis incógnitas

Letras Gregas

∇^2	: operador <i>Laplaciano</i> , $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$
α	: ângulo entre vetor \mathbf{n} normal ao contorno e os eixos coordenados
β	: ângulo entre o raio vetor r e o vetor \mathbf{n} normal ao contorno da placa
β_c	: angulosidade do canto da placa
Γ	: coordenada que percorre o contorno da placa
Γ_1, Γ_2	: coordenadas dos limites do contorno no qual se realiza a integração
Γ_∞	: contorno infinito
$\Gamma_\varepsilon, \Gamma^*$: regiões do contorno
Γ_j	: elemento de contorno
Ω	: coordenada de domínio

Ω_g	: área do carregamento distribuído
Ω_ε	: região do domínio
Ω_∞	: domínio infinito
$\Delta(x - \xi)$: função delta de <i>Dirac</i> no argumento $(x - \xi)$
$\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}$: deformações normais e cisalhantes
η	: variável que percorre os elementos de contorno
η_d	: variável de domínio
η_c	: valor da variável η nos cantos
ρ	: densidade
ν	: coeficiente de <i>Poisson</i>
λ, μ	: constantes de <i>Lamé</i>
ξ	: ponto onde se aplica a equação integral
δ_{ij}	: delta de <i>Kronecker</i>
σ_{ij}, τ_{ij}	: tensões internas normais e cisalhantes
Φ	: matriz das funções aproximadoras nas variáveis do elemento
ω	: frequências naturais de vibração do sistema

Superescritos

*	: identifica uma solução fundamental
—	: identifica um parâmetro conhecido
.	: derivação com relação ao tempo
..	: dupla derivação com relação ao tempo

Resumo

SANCHES, L. C. F. *Análise estática e dinâmica de um modelo de folhas poliédricas e o estudo de lajes com forma de aço incorporada através do Método dos Elementos de Contorno*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 318p. Tese (Doutorado)

O presente trabalho trata do estudo das formulações estática e dinâmica estacionária de um modelo de folhas poliédricas, através da implementação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) na análise de peças de parede fina e no modelamento do sistema de laje composta “Steel Deck”. Elementos planos contendo os estados de flexão (placa) e extensão (membrana) foram associados para representar o modelo final de folhas poliédricas. A análise é feita em regime elástico linear mediante a hipótese de pequenas deformações e com equilíbrio na posição não deslocada. O modelo final assume uma associação de lâminas (folhas poliédricas) no espaço, onde em cada lâmina estão associados os estados de flexão e extensão. O sistema final de equações é obtido tratando-se cada folha poliédrica individual, como uma sub-região do MEC. Nas equações de cada sub-região, após as transformações de coordenadas, procede-se a compatibilização de deslocamentos e equilíbrio de forças sobre as mesmas. O tratamento numérico foi feito através da formulação direta do Método dos Elementos de Contorno, utilizando-se elementos isoparamétricos lineares contínuos e descontínuos e gerando-se as equações integrais em pontos de colocação no contorno e fora do domínio. Com o propósito de mostrar a validade da formulação, foram resolvidos exemplos estáticos e dinâmicos estacionários de estados planos, placas finas, peças de parede fina e do sistema de lajes composta “Steel Deck”. Na análise dinâmica estacionária são determinadas as Funções de Resposta em Frequência. Das informações contidas nas FRF, são obtidas as frequências naturais e os modos próprios de vibração correspondentes. O procedimento é validado através de comparações com resultados analíticos e numéricos disponíveis na literatura.

Palavras chave: Elementos de contorno, Sub-regiões, Estado plano, Placa fina, Estática, Dinâmica estacionária, Folhas Poliédricas, Laje composta, “Steel Deck”.

Abstract

SANCHES, L. C. F. *Análise estática e dinâmica de um modelo de folhas poliédricas e o estudo de lajes com fôrma de aço incorporada através do Método dos Elementos de Contorno*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. 318p. Tese (Doutorado)

This study analyzes the static and stationary dynamic formulation of stretching and bending folded plate model to solve thin walled structures and composite slab “Steel Deck” using the direct Boundary Element Method. Plane elements containing out-of-plane flexural and in-plane (stretching) mechanisms were assembled to represent the folded plate model. The equilibrium was imposed at the initial position with the small strain hypothesis. The final system is obtained by assuming each individual plane structural element as a subregion. After the necessary transforming of these equations they can be combined together taking into account the displacement compatibility and equilibrium conditions. Continuous and/or discontinuous isoparametric linear elements were used on the boundary discretization and the integral equations were computed with the collocation points placed in the contour and out of the domain. Static and dynamic examples were solved for stretching, thin plates, thin walled structures and composite slabs “Steel Deck” with the purpose to show the accuracy of the presented formulation. In the dynamic analysis, the Frequency Response Functions are determined. Modal data, i.e., natural frequencies and the corresponding mode shapes are obtained from information contained in the FRF. The procedure is validated by comparison with analytical results and numerical results available in the literature.

Key words: Boundary Elements, Static, Stationary Dynamic, Folded Plates, Composite slabs, Steel Deck.

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Generalidades

Dentro do meio científico e tecnológico costuma ser comum a adoção de modelos simplificados para a resolução de problemas gerais da mecânica do contínuo. Ao longo dos tempos uma grande quantidade de modelos matemáticos foram exaustivamente estudados e, atualmente, são utilizados na análise de diversos problemas reais. Tais modelos podem ser mais facilmente caracterizados por meio da resolução, analítica ou numérica, de suas equações diferenciais governantes, seja pela imposição de condições iniciais, de contorno ou compatibilidade. Isto representa uma grande versatilidade de aplicações dentro da mecânica do contínuo, podendo ser considerados desde problemas da mecânica dos sólidos, lineares, não lineares, estáticos e dinâmicos até problemas térmicos, acústicos, de fratura, entre outros. Por outro lado, mesmo com a adoção de modelos matemáticos simplificados, não é possível obter uma solução geral analítica para a maioria dos problemas citados. As soluções analíticas conhecidas, na forma fechada, são restritas apenas a alguns casos particulares clássicos. Por este motivo, os métodos numéricos surgiram como grandes ferramentas de simulação computacional para a resolução aproximada de uma boa quantidade de problemas da mecânica do contínuo. Os métodos numéricos mereceram e continuam merecendo a atenção de muitos pesquisadores durante as últimas décadas, principalmente através do Método dos Elementos Finitos (MEF) e do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Todavia, inconsistências introduzidas com a adoção

de hipóteses simplificadoras e também devido às aproximações inerentes ao método numérico utilizado, deixa claro que a implementação destas ferramentas em modelos matemáticos específicos, requerem considerações detalhadas a respeito do problema físico que está sendo estudado.

Mais especificamente, sabe-se que os modelos matemáticos simplificados de placa e membrana são usualmente utilizados no estudo e resolução de estruturas correntes de engenharia. O primeiro modelo pode ser representado e resolvido pela teoria clássica de flexão de placas finas e, o segundo, pela teoria da elasticidade bidimensional. Em muitos casos particulares, é comum considerar um modelo mais completo que combine flexão e extensão, sendo o mesmo representado pela superposição dos modelos de placa e de membrana. Não seria exagero afirmar que uma grande variedade de peças estruturais podem ser analisadas através da associação de folhas poliédricas (lâminas) no espaço, onde é comum adotar os modelos de placa e membrana nas lâminas que compõem a peça.

Tomando como base os modelos de placa e membrana, o presente trabalho trata da análise direta pelo MEC de problemas estáticos e dinâmicos estacionários de peças de parede fina por meio da associação de folhas poliédricas no espaço. A associação destas folhas poliédricas, chamadas aqui de macro-elementos, foi implementada com a aplicação da técnica de sub-regiões do MEC. A análise foi feita em regime elástico linear e em teoria de primeira ordem. Como hipótese fundamental, tanto para o problema estático como para o dinâmico estacionário, convencionou-se que em cada folha poliédrica que compõe uma determinada peça estrutural estão superpostos os modelos usuais de placa e membrana.

Além de verificar a eficiência da formulação direta do MEC nos problemas citados, o interesse de analisar estática e dinamicamente as peças de parede fina foi essencialmente o de desenvolver uma formulação geral que pudesse resolver um problema específico de engenharia: o sistema de lajes com fôrma de aço incorporada, conhecido como *Steel Deck*. Este sistema de lajes também foi analisado neste trabalho através da associação de folhas poliédricas no espaço, por meio da técnica de sub-regiões do MEC.

Na seqüência deste capítulo foi feita uma revisão bibliográfica sobre as teorias estática e dinâmica da elasticidade bidimensional e da flexão de placas finas e o desenvolvimento dos métodos numéricos para a sua resolução. Adicionalmente, foi feita uma revisão envolvendo a análise de folhas poliédricas por meio de métodos analíticos e numéricos. Foi feita também uma revisão sobre o sistema de lajes com fôrma de aço incorporada. Por fim, foram apresentados os principais objetivos do presente trabalho.

O Capítulo 2 trata do problema estático dos modelos individuais de membrana e placa, apresentando as formulações básicas e as formulações integrais da elasticidade 2D e de placas finas, como também as hipóteses consideradas em cada uma das teorias.

O Capítulo 3 descreve o problema dinâmico estacionário dos modelos individuais de membrana e placa, apresentando as formulações básicas e as formulações integrais da elasticidade 2D e de placas finas, como também as hipóteses consideradas em cada uma das referidas teorias.

No Capítulo 4 foi implementado o Método Direto dos Elementos de Contorno. O mesmo foi aplicado na resolução dos problemas estáticos e dinâmicos individuais da elasticidade 2D e da flexão de placas finas. Na implementação do MEC as equações integrais de cada problema são discretizadas com a utilização de funções aproximadoras sobre o contorno de forma a representar deslocamentos e esforços generalizados. Nos problemas estáticos as equações integrais são transformadas em um sistema de equações algébricas que, resolvidas, apresentam resultados em pontos definidos do contorno e também do domínio do problema em questão. Nos problemas dinâmicos estacionários as equações integrais são transformadas em um sistema de equações algébricas, sendo que agora ficam implícitas dentro do sistema todas as frequências de excitação do problema em questão. Com a resolução do sistema final para cada frequência de excitação pode ser determinada a Função de Resposta em Frequência (FRF). A partir das informações contidas na FRF, são determinadas as frequências naturais em pontos definidos do contorno e, posteriormente, os modos próprios de vibração. Para a validação de cada formulação são apresentados exemplos individuais diferenciados das referidas teorias, considerando-se diferentes condições de contorno e de carregamento.

O Capítulo 5 trata da implementação das formulações do Método Direto dos Elementos de Contorno aplicado na resolução de uma folha poliédrica (macro-elemento). A validação da formulação proposta, foi feita com a resolução de problemas estáticos e dinâmicos estacionários de placa e membrana.

No Capítulo 6 é apresentada a implementação da análise da associação de folhas poliédricas (macro-elementos) através da técnica de sub-regiões do MEC. Alguns exemplos são apresentados para demonstrar a validade da formulação apresentada.

No Capítulo 7, baseado na análise da associação de folhas poliédricas através de sub-regiões do MEC, são apresentados os conceitos básicos para a resolução do sistema de lajes com fôrma de aço incorporada. Na validação do modelo adotado são resolvidos problemas específicos deste sistema de lajes.

O Capítulo 8 apresenta as conclusões sobre o estudo realizado no presente trabalho e tece algumas considerações a respeito dos passos complementares que podem ser desenvolvidos em estudos futuros.

1.2 Métodos numéricos aplicados aos modelos de membrana e placa

A solução aproximada de muitos problemas de engenharia através de métodos numéricos levou ao desenvolvimento de duas análises metodológicas diferentes: a primeira denominada métodos de domínio e, a segunda, métodos de contorno. Os chamados métodos de domínio aproximam a solução da equação diferencial do problema a partir dos valores das variáveis básicas associadas aos pontos adotados no domínio e no contorno do corpo analisado. Nos métodos de contorno, dadas as equações diferenciais do problema, são deduzidas as equações integrais que são aproximadas utilizando-se valores discretos das variáveis básicas do problema apenas em pontos do contorno do corpo analisado. Dentre os métodos de domínio destacam-se o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). O MDF é baseado na solução direta da equação diferencial do problema por meio de diferenças finitas. O

surgimento deste método se deu no início do século. No MEF o domínio do problema é discretizado em uma série de elementos que são equacionados individualmente como sub-regiões contínuas, podendo reuni-las na solução do problema geral. Bons textos sobre o assunto podem ser encontrados nos trabalhos de Turner, et. al. (1956) e Clough (1960).

Como alternativa aos métodos de domínio, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) surgiu como evolução natural dos esquemas de resolução de equações integrais. O desenvolvimento de equações integrais no final do século XIX, onde foram realizados uma grande quantidade de trabalhos teóricos para problemas da elasticidade estática e dinâmica, pode ser considerado como um dos passos mais importantes para o posterior desenvolvimento das técnicas de contorno.

Fredholm (1903) foi quem apresentou a primeira teoria clássica das equações integrais com núcleos definidos e integráveis para um problema linear elástico. Para solução das equações, ele enunciou as condições de existência e unicidade conhecidas como teoremas de *Fredholm*.

Nas décadas de 50 e 60 os trabalhos de uma série de autores russos como Muskhelishvili (1953), Mikhlin (1957), Smirnov (1964) e Kupradze (1965) ofereceram um entendimento mais rigoroso do uso das equações integrais em problemas físicos. Eles resolveram equações integrais singulares e descontínuas para problemas de elasticidade plana utilizando o chamado *Método Indireto*. A forma mais simples de utilização deste método consiste no uso de soluções singulares unitárias que satisfazem as equações diferenciais do problema no domínio com densidades e incógnitas especificadas. Estas densidades não tem significado físico mas, com sua obtenção a partir da prescrição de condições de contorno num número de pontos, deslocamentos e tensões podem ser facilmente encontrados. As bases das formulações indiretas foram estabelecidas por Kupradze (1965) adotando a solução fundamental de *Kelvin* (Love, 1944) para resolver problemas de elastostática.

Os trabalhos de Jaswon (1963) e Symm (1963), apresentaram uma técnica numérica para solução da equação integral de contorno de *Fredholm*, que consiste em discretizar o contorno em uma série de pequenos elementos e assumir uma fonte constante de densidade dentro de cada

elemento. Eles empregaram a técnica de colocação para obter o sistema de equações e computaram os coeficientes de influência usando a regra de *Simpson* como técnica numérica. Exceção foi feita aos coeficientes singulares, que foram computados analiticamente ou por soma dos termos de diagonais.

Como continuação dos trabalhos anteriores, Jaswon (1963) e Jaswon e Ponter (1963) propuseram uma formulação mais geral através da aplicação da terceira identidade de *Green* com potenciais e suas derivadas desconhecidas no contorno.

As formulações diretas do MEC para problemas elásticos foram apresentadas no trabalho de Rizzo (1967). A representação integral básica conhecida como identidade *Somigliana* (Love, 1944) foi escrita discretizando o contorno através de elementos constantes. As formulações diretas, que são mais confiáveis que as técnicas indiretas, têm por base a adoção das variáveis físicas do problema como incógnitas no sistema de equações.

O grande avanço nas técnicas de contorno tem sua origem no trabalho de Lachat (1975) que tratava de problemas bi e tridimensionais da elasticidade. Três anos depois, Brebbia (1978) consegue desenvolver uma maior generalização do método, onde apresenta uma formulação a partir da *Técnica dos Resíduos Ponderados*, começando desta forma a ser intensamente estudado em diversos centros de pesquisa. Destacam-se as formulações no campo da elasticidade linear utilizando soluções fundamentais próprias para a consideração de superfície livre, muito versáteis na solução de problemas que envolvem a análise de tensões próximas a uma borda livre (Nakaguma, 1979; Telles e Brebbia, 1981). Uma grande variedade de formulações não lineares, de grande interesse para a solução de problemas da engenharia, também foram desenvolvidas.

O desenvolvimento de formulações para a análise de placas através do *Método dos Elementos de Contorno* se dá neste contexto, onde a maioria dos trabalhos desenvolvidos são baseados nas hipóteses da teoria clássica de Kirchhoff (1850). O trabalho que pode ser considerado como referência inicial é devido a Jaswon et al. (1967), que sugeriu a decomposição de uma equação bi-harmônica em duas harmônicas que resolvidas e combinadas, permitem a obtenção de uma solução final do problema.

No ano de 1978, através da teoria de *Kirchhoff*, Bezine e Gamby (1978) propuseram uma formulação direta do MEC, considerando como variáveis de contorno as variáveis físicas do problema real.

Os trabalhos desenvolvidos por Bezine (1978), Danson (1979) e Stern (1979) também trataram o problema de flexão de placas através das formulações diretas do MEC considerando a teoria clássica de *Kirchhoff*. Numa extensão do trabalho de 1978, Bezine (1981) analisou problemas com vínculos ou forças concentradas no domínio. O acoplamento entre as incógnitas dos nós de domínio e de contorno é feito de tal forma que o vetor de incógnitas fica isolado na representação algébrica dos pontos de contorno, sendo o mesmo substituído na representação dos pontos de domínio. Desta forma, o sistema de equações final pode ser resolvido depois que forem prescritos os valores de domínio.

Também com base nas hipóteses de *Kirchhoff*, Paiva (1987), buscou diversas alternativas para o equacionamento do problema de flexão de placas, ora considerando as equações com pontos de colocação no contorno, ora fora dele. Também realizou uma extensão do método para analisar estruturas formadas por placas, vigas e pilares.

O trabalho de Shi e Bezine (1989), através do emprego do princípio dos trabalhos virtuais, apresentou a identidade de *Rayleigh-Green* para a obtenção das equações integrais. Na discretização do problema, foi utilizada uma interpolação constante para as variáveis, sendo que os momentos volventes foram aproximados por diferenças finitas dos valores nodais da derivada normal do deslocamento transversal.

No trabalho desenvolvido por Wearing e Bettahar (1995) foi mapeado o intervalo para as distâncias de colocação dos pontos-fonte em função do desempenho da formulação. Foram consideradas diversas configurações de geometria e condições de contorno, comparando-se sua eficiência com o desempenho das formulações singulares.

Paiva e Oliveira Neto (1995) apresentaram uma formulação a partir de alterações na representação integral obtida por Stern (1979), que leva à associação de três graus de liberdade

para o vetor de deslocamento (deslocamento transversal, derivada normal do deslocamento transversal, derivada tangencial do deslocamento transversal). Oliveira Neto (1998) implementou esta formulação primeiramente considerando que todas as variáveis do problema foram interpoladas por funções lineares. Posteriormente, foi utilizado um polinômio cúbico para os deslocamentos transversais. A derivada tangencial do deslocamento transversal foi aproximada por um polinômio obtido da diferenciação tangencial da função interpoladora do deslocamento. As demais variáveis foram interpoladas por funções lineares.

Além dos problemas envolvendo a análise estática dos modelos de membrana e placa, é necessário também descrever os problemas que envolvem a análise dinâmica destes modelos. Iniciando-se pelo modelo de membrana, cumpre afirmar que embora uma formulação integral básica para a elastodinâmica tenha sido conhecida por muitos anos, o seu uso sistemático está relacionado a eventos mais recentes. Uma boa revisão do assunto pode ser encontrada nos trabalhos de Beskos (1987), Beskos (1997) e também no livro escrito por Domingues (1993).

Aparentemente, as primeiras aplicações do MEC na dinâmica foram feitas por Friedman e Shaw (1962) e Banaugh e Goldsmith (1963a, b). Eles apresentaram uma solução numérica para problemas acústicos e elastodinâmicos utilizando uma equação integral de contorno.

Os trabalhos de Cruse e Rizzo (1968) e Cruse (1968) estenderam a formulação apresentada por Rizzo (1967) para o problema elastodinâmico. Eles derivaram o método direto do MEC em conjunto com uma transformada de *Laplace* para resolver problemas transientes da elastodinâmica. Uma solução dos problemas transientes através do MEC, no domínio da frequência e por meio de uma transformada de *Fourier*, foi obtida por Niwa et al. (1975, 1976).

A primeira formulação geral do MEC para problemas bidimensionais no domínio do tempo, tratando de problemas de anti-plano, ou seja, problemas de ondas escalares, foi apresentada por Cole et al. (1978). Ele apresentou também alguns exemplos de aplicação envolvendo este problema clássico.

Niwa et al. (1980) utilizaram uma formulação tridimensional para derivar uma formulação do MEC no domínio do tempo para analisar problemas de estado plano de deformações. Uma abordagem similar foi usada por Manolis (1983) em um trabalho onde ele compara o domínio do tempo, o domínio da frequência e a transformada de *Laplace* para solucionar problemas planos.

A análise de problemas dinâmicos da elasticidade, harmônicos no tempo, ou estacionários, no domínio da frequência pelo MEC, para os casos 2D e 3D, foi feita nos completos trabalhos de Bonnet (1987), Banerjee et al. (1992), Bonnet e Bui (1993), Wu e Lee (1993), Rego Silva et al. (1993) e Do Rego Silva (1994).

Estudos comparativos entre o domínio do tempo e o domínio da frequência pelo MEC podem ser encontrados nos trabalhos de Karabalis e Beskos (1990) e Fukui e Funato (1993). Cabe mencionar também o trabalho de Hong e Chen (1993), que lidaram com uma representação integral dual para a solução da elastodinâmica no domínio do tempo em forma de séries, envolvendo resultados (autovalores e autovetores) de frequências naturais e modos próprios.

Antes e Latz (1993) descreveram uma formulação no domínio da frequência para o MEC. Eles trabalharam com a rigidez independente da frequência, através de um polinômio quadrático em termos de frequência. As matrizes de massa e amortecimento foram obtidas pela aproximação da rigidez dinâmica dependente da frequência.

Na linha de pesquisa da análise dinâmica de vigas, membranas e placas, pode-se citar o trabalho de Tanaka e Matsumoto (1989) que estudaram a vibração axial de vigas através de uma metodologia do MEC para o domínio do tempo. De Langre et al. (1990a, b) estudaram a flexão forçada, torção e vibração axial de vigas e barras através do MEC no domínio da frequência. Katsikadelis e Sapountzakis (1988) estudaram um problema de vibração livre e transiente de membranas. Eles utilizaram na formulação do MEC a solução fundamental da equação de *Laplace*, no domínio do tempo e da frequência.

Mansur e De Lima-Silva (1992) estudaram um problema transiente de vibração forçada através de uma formulação do MEC no domínio do tempo. Pode-se citar também o trabalho de

Viktorovitch et al. (1995) que estudaram um problema de vibração harmônica forçada através de uma formulação do MEC no domínio da frequência. Nesta formulação, usando uma metodologia convencional do MEC, eles discretizaram somente o contorno do problema.

Considerando-se agora os modelos dinâmicos de placa, parece ter sido Vivoli (1972) e Vivoli e Filippi (1974) que primeiro consideraram os problemas de vibração livre de placas através do método indireto do MEC, apresentado resultados através da utilização de elementos de contorno constantes.

Niwa et al. (1981) e (1982) e Kitahara (1985) apresentaram de forma mais abrangente os problemas de vibração livre de placas através do método indireto do MEC, incluindo resultados numéricos mais detalhados para a vibração livre de placas. Eles apresentaram também uma formulação direta do MEC para o problema, que foi aplicada a casos de carregamento no plano da placa, na qual envolvia o deslocamento transversal, a derivada normal do deslocamento transversal, o momento fletor e a força cortante equivalente. Nesta formulação, não levaram em consideração o efeito das reações de canto.

Outra formulação direta do MEC para problemas de vibração livre, na qual envolvia o deslocamento transversal, a derivada normal do deslocamento transversal, o Laplaciano do deslocamento e a derivada normal do Laplaciano do deslocamento foi apresentada por Hutchinson e Wong (1979), seguindo as recomendações do trabalho de Hansen (1976) que analisou o comportamento estático de placas finas. Eles empregaram somente a parte real da solução fundamental dinâmica, em problemas envolvendo bordas simplesmente apoiadas e engastadas, com ganhos computacionais consideráveis.

Wong e Hutchinson (1981) também apresentaram uma formulação completa para o problema de vibração livre através do método direto dos elementos de contorno. Esta formulação incluía os efeitos das reações de canto e envolvia o deslocamento transversal, a derivada normal do deslocamento transversal, o momento fletor e a força cortante equivalente e baseava-se no trabalho de Stern (1979) para análise estática de placas finas. Contudo, neste trabalho não foram incluídos nenhum resultado numérico.

A vibração forçada de placas foi considerada pela primeira vez no trabalho de Bézine e Gamby (1982), onde foi desenvolvida uma formulação direta do MEC no domínio do tempo. Eles utilizaram um esquema de passos de carga para obter uma resposta transiente, considerando a solução fundamental da dinâmica no domínio do tempo. O efeito das reações de canto também foram consideradas neste estudo.

Providakis e Beskos (1986), (1988) e (1989) complementaram o trabalho de Wong e Hutchinson (1981) e apresentaram uma formulação geral para o método direto do MEC no domínio da frequência utilizando elementos de contorno quadráticos. Nesta formulação foi utilizada a solução fundamental da elastodinâmica e apenas o contorno do problema foi discretizado. Com isso, obtiveram uma resposta transiente para o problema dinâmico de flexão de placas por meio de uma extensão do trabalho de Stern (1979), que resolveu o problema estático. Esta metodologia não somente leva em conta o efeito das reações de canto como adota que os pontos nodais também podem ser posicionados nos cantos da placa.

Outra metodologia direta do MEC utiliza a solução fundamental da estática na formulação do problema. Isto cria integrais de domínio devido à presença de termos de inércia quando da adição do contorno na representação integral da solução. Além do contorno, a discretização do domínio também é necessária. Esta metodologia foi primeiramente introduzida por Bézine (1980), que utilizou elementos constantes no contorno e no domínio, para a análise de vibração livre de placas.

O'Donoghue e Atluri (1986), (1987), Providakis e Beskos (1986), (1987), (1989), Beskos et al. (1989) e Beskos (1990) estenderam a metodologia anterior para a análise de vibração forçada de placas. Adicionando uma formulação no domínio do tempo e também uma transformada de *Laplace*.

1.3 Métodos numéricos aplicados na análise de uma folha poliédrica

A análise estática de folhas poliédricas foi desenvolvida inicialmente por Goldberg e Leve (1957). Estes autores determinaram o comportamento linear elástico de estruturas compreendendo placas unidas ao longo de suas bordas e consideraram o caso específico de carregamentos aplicados ao longo dessas bordas. O trabalho de Evans (1967) estendeu este método para incluir a ação de carregamentos uniformes, sendo os mesmos aplicados normalmente e no plano de cada folha poliédrica.

Um modelo numérico geral através da análise de folhas poliédricas foi feito por Victor e Ellyin (1979). Importantes avanços foram feitos quando da inclusão da análise de folhas poliédricas através do procedimento padrão do Método do Elementos Finitos (Arizumi et. al., 1982; Onate e Suarez, 1983 e Zhang e Lyons, 1984). Em todos esses trabalhos os modelos desenvolvidos para as folhas poliédricas contêm as hipóteses de superposição dos estados de flexão de placas finas e estados planos nas lâminas que compõem a estrutura.

Um dos primeiros trabalhos envolvendo o MEC e estes estados, simultaneamente, foi apresentado por Palermo Júnior (1989). Neste trabalho a estrutura foi assumida como uma associação de folhas poliédricas no espaço, onde o estado plano de tensão está acoplado ao estado de flexão de placas finas. O sistema final foi obtido assumindo-se cada elemento estrutural plano individual como uma sub-região do MEC. Na montagem do sistema algébrico final são escritas duas equações para a representação integral clássica de placas finas (Stern, 1979). As outras duas equações remanescentes são escritas a partir das equações integrais da elastostática bidimensional (Rizzo, 1967).

Tanaka e Miyazaki (1988) apresentaram uma formulação direta do MEC para a associação em folhas poliédricas de estruturas formadas por lâminas no espaço. Rigorosa ênfase foi dada na implementação numérica das equações de equilíbrio e compatibilidade nas arestas da associação. Um procedimento de eliminação em bloco foi usado para obter a solução numérica da equação de contorno resultante.

Ohga et al. (1991) apresentaram uma formulação que utiliza as mesmas equações integrais. Todavia, o sistema de equações final foi obtido a partir da técnica da sub-estruturação ou método de transferência de matriz, possibilitando uma redução do número de operações na resolução do sistema final de equações algébricas.

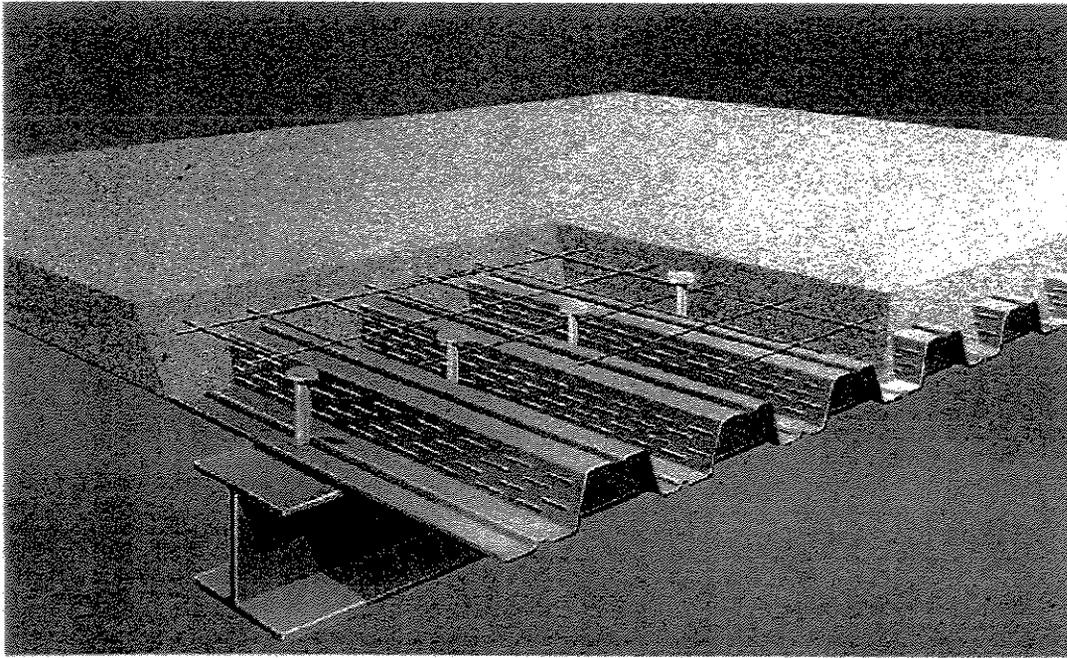
Outros autores também analisaram estruturas poliédricas delgadas utilizando o MEC. Kramin e Kramin (1997) analisaram estruturas poliédricas delgadas, onde a solução final do problema foi obtida por meio da superposição de uma solução particular e também pela solução homogênea das representações de Stern e Rizzo. No acoplamento das lâminas é fixado um eixo e posteriormente aplicada a técnica de sub-regiões. Na discretização do problema foram utilizadas interpolações constantes. As formulações ficaram restritas a casos particulares de estruturas de folhas poliédricas. Restrições adicionais foram introduzidas pelo fato de se utilizar soluções particulares para formular o problema.

Liu (1998) aplicou as equações integrais de problemas elásticos tridimensionais em estruturas poliédricas. A formulação integral para sólidos tridimensionais parece ser menos restritiva que as formulações integrais obtidas a partir das diversas teorias de placas e de membrana. Contudo, quando a formulação de problemas elásticos tridimensionais é aplicada nos casos em que as soluções fundamentais dos problemas laminares são conhecidas, a mesma pode se tornar ineficiente, uma vez que seus elementos de contorno estão definidos no espaço bidimensional e os associados às teorias de lâmina plana são representados por curvas unidimensionais.

Dentro da análise dinâmica de estruturas formadas por folhas poliédricas pode-se citar os trabalhos de Tanaka et al. (1987), (1988) e (1998). Eles também utilizaram na implementação do MEC a solução fundamental da estática na formulação do problema. Com isto, além do contorno, a discretização do domínio também é necessária. O sistema de equações final é obtido através da associação das equações de cada lâmina componente da estrutura, satisfazendo as condições de contorno, como também as condições de equilíbrio e compatibilidade nas arestas da conexão. Após a resolução do sistema final de equações, para cada frequência de excitação, determinam-se frequências naturais e modos próprios da estrutura analisada.

1.4 O modelo de laje com fôrma de aço incorporada “ Steel Deck “

A laje “Steel Deck “ é caracterizada pelo comportamento misto do aço e do concreto, que se combinam para formar um único elemento estrutural. Antes da cura do concreto a fôrma de aço atua como escoramento e superfície de trabalho da fase de construção, suportando as ações permanentes e as sobrecargas acidentais. Após a cura do concreto, a forma passa a atuar como uma armadura de tração da laje, trabalhando estruturalmente em conjunto com o concreto. O comportamento misto (associado) dos dois materiais ocorre se houver garantia de transmissão de esforços de cisalhamento na interface aço/concreto, seja por meio de ligação química, ou ligação mecânica entre o concreto e a forma de aço. De acordo com a Figura 1.1, a ligação mecânica é feita freqüentemente por mossas (saliências) colocadas nas reentrâncias da fôrma de aço.



Fonte: Codeme

Figura 1.1 Detalhe de uma laje com fôrma de aço incorporada “ Steel Deck “.

Existem várias referências indicando que este sistema misto foi inicialmente introduzido no mercado pela empresa *Granco Steel Products Co.*, na década de 50, utilizando-se como procedimento para determinação da capacidade de carregamento do sistema laje/fôrma as especificações de concreto armado. Nas aplicações citadas eram colocadas armaduras adicionais de reforço para distribuir adequadamente as forças de tensão na laje (Friberg, 1954).

Durante a década seguinte a laje com fôrma de aço incorporada foi analisada principalmente através das deformações na fôrma de aço, que fica interligada ao concreto. Muitas tabelas de cálculo, editadas por fabricantes, foram baseadas em resultados de testes realizados nesta época. Em 1968 o AISI (American Iron and Steel Institute) iniciou um programa de testes em grande escala, tendo como meta final o desenvolvimento de um procedimento geral de projeto e construção deste sistema de laje, conforme mostraram Porter e Ekberg (1976). A confecção dos testes padronizados são normalmente realizados em um único sentido da laje, considerando-se vão simples, reforço nominal e não levando em conta a ancoragem final. Amostras dos testes padrão demonstraram que a capacidade ao carregamento é normalmente assumida ser igual em uma única direção de uma laje simplesmente apoiada.

Pode-se citar uma série de testes realizados por Roeder (1981), onde se examinaram carregamentos concentrados sobre o sistema laje/fôrma. Estudou-se também a influência dos esforços cortantes e a inclusão de vãos adjacentes (continuidade). Cada protótipo foi testado segundo procedimento análogo ao ensaio de *shear bond* adotado pela norma ASCE vigente na época. Os resultados evidenciaram que a continuidade na laje restringe a flecha no meio do vão e mostra a natureza conservadora dos procedimentos da norma vigente.

Trabalhos importantes para a consolidação das normas vigentes foram apresentados por Luttrell e Prassanan (1984) e (1986), onde demonstraram que os resultados do teste *shear bond* poderiam ser adotados com precisão para formas de aço com mossas regulares e repetitivas. Estas características descrevem grande parte das formas de aço encontradas no mercado atualmente.

Estes intensivos programas de testes resultaram no desenvolvimento final do método de *shear bond* que se tornou a base das especificações da ASCE (American Society of Civil Engineers) do ano de 1984 e que trata especificamente do problema das lajes com fôrma de aço incorporada (ASCE, 1984). A mesma filosofia é utilizada nas especificações Britânicas, que tratam das construções com materiais compostos (BRITISH STANDARD BS5950: Part 4, 1982). As especificações da norma européia "*Design of composite steel and concrete structures*", trata o problema a partir da mesma perspectiva (EUROCODE 4 Part 1, 1990).

As pesquisas continuaram a ser desenvolvidas levando-se sempre em consideração a realização dos testes em grande escala. Os trabalhos desenvolvidos por Young e Easterling (1990) e Easterling e Young (1991) mostram os resultados de um amplo programa de pesquisa, no qual descrevem testes em grande escala em lajes compostas com vãos múltiplos. Wright e Evans (1990) fazem uma revisão de vários testes padronizados para a laje composta que são comparados com soluções obtidas através de métodos analíticos. O procedimento utilizado parece oferecer uma economia significativa se comparado aos métodos anteriormente utilizados.

Entre 1989 e 1992, novas especificações foram apresentadas pela ASCE (ASCE 7-88, 1989; ASCE 9-91, 1991; ASCE 3-92, 1992) para a determinação do comportamento e resistência das lajes com fôrma de aço incorporada. De acordo com Porter (1992), as novas especificações de projeto e construção dividem, modificam e suplementam as anteriormente produzidas. Na mesma linha, pode-se citar as novas especificações Britânicas (BRITISH STANDARD BS 5950: Part 4, 1994), e também as especificações européias EUROCODE 4: ENV 1994-1.1/1.2, 1994). Todas as especificações direcionam os critérios para a ação composta dos materiais depois do concreto endurecido, usando a fôrma de aço como reforço do momento positivo. Os critérios de não composição dos materiais aplicam-se prioritariamente ao endurecimento do concreto onde a fôrma atua como superfície de trabalho durante a construção. Para os critérios de não composição ou seja, antes da cura do concreto, devem ser consideradas as especificações do AISI (LRFD, 1991), ou as da norma européia (EUROCODE 4: ENV 1993-1.1/1.3, 1995).

Uma discussão das novas especificações americanas e européias foi feita por Daniels e Easterling (1997), apresentando um trabalho sobre as semelhanças e diferenças existentes nas especificações desenvolvidas na Europa e nos Estados Unidos sobre as construções com materiais compostos.

No Brasil, as pesquisas sobre o sistema de laje com fôrma de aço incorporada vêm sendo desenvolvidas desde 1996 e também seguiram a linha dos testes padronizados. O trabalho de Melo (1999) objetivou avaliar o comportamento e a resistência deste sistema composto utilizando-se protótipos em escala real. Uma série de 12 ensaios em protótipos simplesmente apoiados, nas fases de carregamento posteriores à cura do concreto, possibilitou determinar o

comportamento, resistência e o modo de ruptura predominante do sistema *Steel Deck*. Isto somente foi possível com as análises das curvas carga × flecha no meio do vão, carga × deslizamento de extremidade e carga × deformação no aço. Também foram determinados por Melo dois parâmetros empíricos m e k para o cálculo da carga última deste sistema misto.

Em 1999 foi editada a norma brasileira NBR 14323 que trata do dimensionamento de elementos de aço e elementos mistos aço-concreto em situação de incêndio. A norma também apresenta em um de seus apêndices (Apêndice C) recomendações para o dimensionamento da laje com fôrma de aço incorporada, tanto em situação de incêndio como em temperatura ambiente.

O trabalho de Campos (2001) estendeu o estudo feito por Melo (1999) e analisou o efeito da continuidade no comportamento e na resistência do sistema composto. Foram construídos seis protótipos, posicionados sobre três apoios equidistantes, de modo a obter dois vãos contínuos idênticos. O carregamento aplicado nos protótipos foi sempre simétrico e a continuidade foi assegurada pela presença da fôrma metálica, de uma tela soldada e uma armadura posicionada sobre o apoio intermediário. As análises das curvas carga × flecha no meio do vão, carga × deslizamento de extremidade, carga × deformação no aço e carga × curvatura na região do apoio intermediário revelaram a ductilidade e a elevada resistência dos protótipos. Estes resultados foram comparados com aqueles obtidos no trabalho de Melo (1999) para protótipos simplesmente apoiados.

No atual estágio de desenvolvimento, a análise numérica do comportamento deste sistema de laje pode ser uma ferramenta poderosa no estudo deste tipo de elemento estrutural. Os modelos numéricos são uma alternativa aos testes laboratoriais, principalmente no sentido de eficiência e economia. Dentro da perspectiva desta análise numérica, um procedimento geral de cálculo foi feito por Daniels e Crisinel (1993), provando ser uma alternativa aos testes laboratoriais. O procedimento consiste da combinação entre testes laboratoriais (*shear bond*) e uma análise numérica através do MEF por meio de elementos finitos de barra, no sentido de determinar o comportamento e a resistência das lajes com forma de aço incorporada. Neste procedimento, levam-se em conta os efeitos de escorregamento entre a fôrma de aço e a laje de

concreto e também algumas hipóteses simplificadoras, de acordo com as propriedades do material empregado.

Crisinel e Daniels (1992) utilizaram o mesmo procedimento numérico para analisar o comportamento e a resistência destas lajes. Nesse trabalho, foram feitas comparações com o método de cálculo da ASCE e também com o método de cálculo alternativo do EUROCODE 4. Para ambos os métodos são obtidas algumas conclusões sobre o uso dos procedimentos de cálculo. Analogamente, o trabalho desenvolvido por Tenhovuori et al. (1997) mostra os resultados de um estudo onde também foram feitas análises em elementos finitos com a inclusão de resultados de testes padrão.

Estendendo a análise numérica no que diz respeito às pesquisas sobre o método de análise em folhas poliédricas, pode-se citar o trabalho de Wright et. al. (1987) que, seguindo os trabalhos originais de Goldberg e Leve (1957) e Evans (1967), estenderam a folha poliédrica para o uso na análise da laje com fôrma de aço incorporada. Eles investigaram o sistema de laje “*Steel Deck*” descrevendo detalhes do comportamento deste sistema. Um total de 200 testes de laboratório foram realizados e os resultados comparados com métodos de análise correntes.

Adicionalmente, Wright e Evans (1987) modificaram o método de análise de folhas poliédricas para determinar o comportamento dos perfis de aço laminados utilizados nas lajes compostas. Na base desta metodologia, estabeleceu-se que a largura efetiva do perfil metálico utilizada usualmente foi convertida em uma rigidez efetiva. Para demonstrar a versatilidade do método, o comportamento de um perfil típico foi resolvido e comparado com os resultados da teoria de vigas. Uma adaptação a esta metodologia foi apresentada por Wright (1990), permitindo que o comportamento de uma laje composta pudesse ser determinado através da associação de folhas poliédricas no espaço. Uma seção transversal típica representativa do modelo em folhas poliédricas pode ser vista na Figura 1.2.

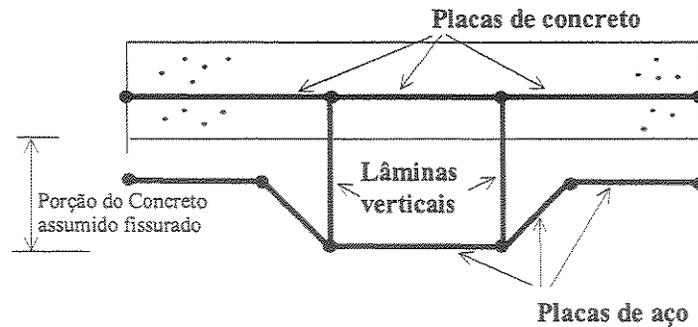


Figura 1.2 Modelagem da laje Steel Deck em folhas poliédricas.

A ação principal de flexão na laje composta é registrada por um par formado da compressão no concreto e tensão no aço. A resistência ao cisalhamento, embora sendo uma parte essencial do esforço na laje, apresenta menos efeito na rigidez global do que o par de momentos. Conseqüentemente, o sistema de lâminas mostrado na Figura 1.2, foi concebido para separar a ação principal de flexão da ação do cisalhamento. É através destas hipóteses que o modelo de Wright (1990) assume que o componente estrutural pode ser descrito por folhas poliédricas. Em outras palavras, a porção de concreto não fissurada é assumida como uma placa fina e a porção em chapa dobrada como uma associação de lâminas contendo os estados plano de tensão e de flexão de placas finas. Duas lâminas verticais (dummy elements), contendo apenas o estado plano de tensão, são utilizadas para a ligação entre o concreto e o aço. O método apresentado utiliza a superposição dos estados de flexão de placas finas e estados planos para a formação de um sistema de equações final. Este método foi utilizado para analisar os resultados de 32 testes laboratoriais.

Por outro lado, a análise estática de peças de seção delgada, através de modelos numéricos, considerando a interação de efeitos locais com globais foi estudada por Palermo Jr. (1989). Neste tratamento, a peça é assumida como uma associação de lâminas no espaço onde cada uma contém os efeitos do estado plano de tensão generalizado e de flexão de placas finas. A hipótese de pequenas deformações foi aplicada a um material homogêneo com relação constitutiva isotrópica tanto para deformações contidas no plano da lâmina (extensão) como para aquelas normais ao plano (flexão). A ortotropia necessária para a análise dos problemas onde a seção transversal seria rígida em seu plano foi incluída de maneira discreta com a inclusão de diafragmas transversais ao eixo longitudinal da associação. O tratamento numérico foi feito pelo método

direto do MEC utilizando-se elementos isoparamétricos lineares para a discretização de cada uma das equações integrais de contorno. Parte dos componentes estruturais para a análise estática sintetizados por Palermo Jr. (1989) utilizando o MEC estão também presentes no modelo de Wright (1990) utilizado para descrever lajes com fôrma de aço incorporada. Desta forma, uma das aplicações feitas neste trabalho foi a de construir o modelo de Wright (1990) para lajes compostas utilizando-se elementos estruturais de seção delgada descritos pelo MEC.

1.5 Objetivos

De acordo com o que foi descrito nas seções anteriores, o objetivo principal deste trabalho está ligado à análise de problemas estáticos e dinâmicos estacionários de peças de parede fina, através da associação de folhas poliédricas no espaço, utilizando como ferramenta numérica o Método dos Elementos de Contorno.

Embora existam análises dinâmicas tanto para a elasticidade 2D (tensões e deformações) quanto para placas finas, não foram obtidas referências da análise do comportamento dinâmico estacionário de um elemento estrutural que acople estes dois modelos. Assim a análise dinâmica estacionária de folhas poliédricas através do MEC, a princípio, constitui um problema com caráter original.

Além de analisar estática e dinamicamente problemas envolvendo as peças de parede fina, uma potencial aplicação da associação de folhas poliédricas no espaço é a resolução do sistema de lajes com forma de aço incorporada “Steel Deck”. A resolução numérica deste sistema de laje mista, através do modelo de folhas poliédricas, representou também um dos objetivos do presente trabalho.

Adicionalmente, a possibilidade de tratamento de lajes compostas pelo modelo proposto, poderá auxiliar o projeto desses elementos e/ou determinar parâmetros a serem obtidos em ensaios de modelos reais que possibilitem a análise da laje composta sem a total dependência de avaliação experimental, hoje existente .

CAPÍTULO 2

Formulação Estática da Elasticidade 2D e Flexão de Placas Finas

2.1 Introdução

A análise estática de peças de parede fina e esqueleto poligonal é feita admitindo-se que as lâminas que compõem as paredes de cada peça sejam analisadas como uma associação de folhas poliédricas no espaço. Em cada folha poliédrica está associado um estado plano de tensão superposto a um estado de flexão de placas finas. Para representar adequadamente estas teorias, neste capítulo são desenvolvidas as formulações dos modelos de estado plano e flexão de placas finas, apresentando as hipóteses básicas de cada um desses modelos e um resumo de cada teoria envolvida.

2.2 Equações básicas da elasticidade 2D

Esta seção apresenta o desenvolvimento de algumas equações básicas para obtenção das equações diferenciais e posteriormente uma solução fundamental que descreve problemas da elasticidade linear bidimensional e, particularmente, os conhecidos estados planos de tensão e deformação.

2.2.1 Hipóteses básicas

Os estados planos de tensão e deformação são tratados como casos particulares na análise bidimensional dos problemas da elasticidade linear. Para definir as hipóteses básicas que descrevem estes problemas, de acordo com um sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) , seja um corpo homogêneo e isotrópico cujo domínio é Ω , com um contorno qualquer Γ . A espessura h do corpo é uniforme na direção do eixo x_3 e o mesmo é bissecionado por dois planos $x_3 = -h/2$ e $x_3 = h/2$, conforme mostra a Figura 2.1.

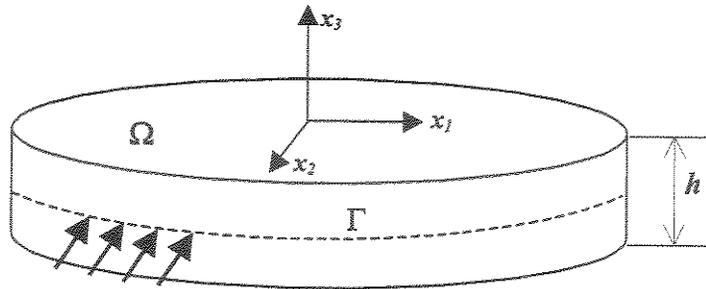


Figura 2.1 Modelo físico para problemas de estado plano.

Descrevendo-se o equilíbrio deste corpo na posição não deslocada e com a hipótese de pequenas deformações, ambos casos são examinados sob as seguintes hipóteses de carregamento Gould (1983):

- i) As forças aplicadas no contorno do corpo, se existirem, não possuem componentes na direção normal;
- ii) Não são aplicados carregamentos nos planos paralelos ao contorno nas superfícies do topo e da base.

No problema de estado plano de deformação, a hipótese formulada é a de que as deformações associadas à direção x_3 são nulas, deste modo:

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad (2.1)$$

Para o problema de estado plano de tensão, a hipótese de que as forças são nulas nos planos paralelos implicam no fato das tensões associadas à direção x_3 serem extremamente pequenas, podendo ser desprezadas, logo:

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (2.2)$$

2.2.2 Equações de equilíbrio

Seja um elemento infinitesimal de um corpo homogêneo e isotrópico qualquer em equilíbrio estático, sujeito a um sistema de forças de superfície e de volume, conforme mostrado na Figura 2.2.

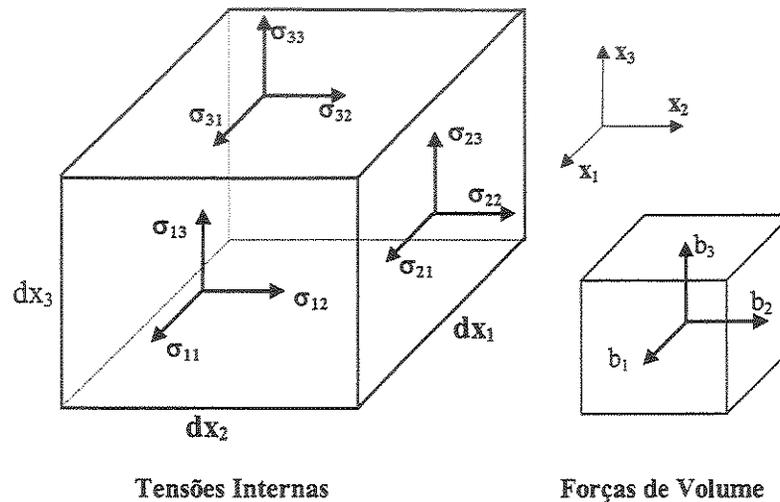


Figura 2.2 Elemento infinitesimal.

O equilíbrio estático do elemento infinitesimal deste corpo, onde atuam em cada ponto um conjunto de tensões internas e forças de volume, é dado por:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.3)$$

As forças de superfície (*tractions*) agindo em um elemento infinitesimal de área, na superfície do corpo e em uma direção n_j , normal a superfície (Fig. 2.3), são dadas por:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.4)$$

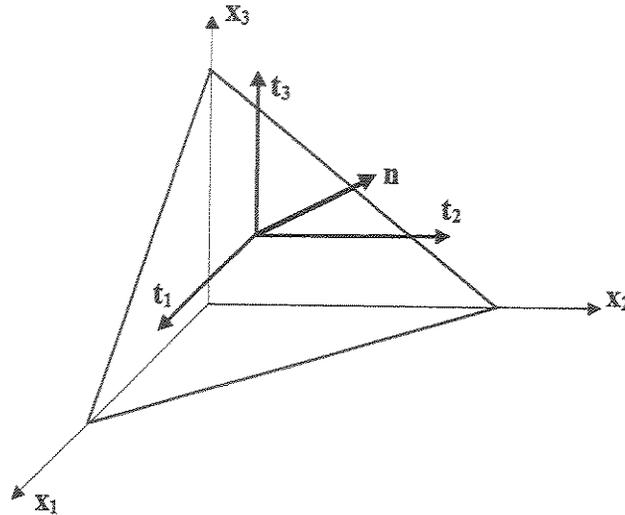


Figura 2.3 Forças de superfície em um tetraedro infinitesimal.

Considerando-se as componentes de tensão em um ponto, as forças de superfície são obtidas através do equilíbrio estático de um tetraedro infinitesimal formado por planos que passam por este ponto (Fig. 2.3).

2.2.3 Relações deformação-deslocamento

De acordo com uma descrição Lagrangiana, onde todas as quantidades são expressas em termos das coordenadas x_i da posição inicial, o tensor de deformações é definido por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (2.5)$$

Como os deslocamentos são infinitesimais, os produtos das derivadas do deslocamento apresentados pela equação (2.5) podem ser considerados desprezíveis. Assim, o tensor de deformações linearizado pode ser expresso por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.6)$$

2.2.4 Relações constitutivas

Pela lei de *Hooke* generalizada, as relações constitutivas expressam a interdependência entre as tensões e as deformações. Em qualquer ponto de um corpo contínuo e homogêneo, as componentes de tensão são relacionadas com as componentes de deformação da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.7)$$

O tensor de quarta ordem C_{ijkl} é composto por 81 componentes que contém as constantes elásticas do material. Entretanto, se forem consideradas as simetrias dos tensores de segunda ordem envolvidos, a existência de uma função de densidade de energia e as propriedades de isotropia, estas componentes podem ser resumidas a apenas duas. A equação (2.7) passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.8)$$

As constantes de *Lamé*, λ e μ , são escritas em função do módulo de elasticidade longitudinal E (módulo de *Young*) e do coeficiente de *Poisson* ν , ou seja:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.9)$$

e

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.10)$$

sendo a constante μ , também denotada como G , chamada de módulo de elasticidade transversal do material.

Substituindo-se a equação (2.6) na equação (2.8), obtêm-se as tensões escritas em função dos deslocamentos. Aplicando-se este resultado na equação (2.3) obtêm-se a equação estática de equilíbrio de *Navier*, escrita em função dos deslocamentos, ou seja:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (2.11a)$$

ou

$$G u_{i,jj} + \frac{G}{(1 - 2\nu)} u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (2.11b)$$

As equações de equilíbrio (2.4), com as forças aplicadas na superfície de contorno, também podem ser escritas em função dos deslocamentos. Desta forma, utilizando-se (2.6) e (2.8) de forma análoga à obtenção de (2.11), resulta:

$$t_i = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda u_{k,k} n_i \quad (2.12a)$$

ou

$$t_i = G (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} u_{k,k} n_i \quad (2.12b)$$

2.2.5 Estados planos de tensão e deformação

O estado plano de deformação é caracterizado pela hipótese de que as deformações associadas à direção x_3 são nulas (equação 2.1). Consequentemente, a função deslocamento $u_3(x_3)$ assume um valor constante, assim:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2) \quad u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad u_3 = u_3(x_3) \quad (2.13)$$

As relações constitutivas para este caso são dadas pela equação (2.8), com os índices i e j variando de 1 até 2. Além disto, as tensões tangenciais referentes à direção x_3 são nulas e a tensão normal σ_{33} tem seu valor determinado pela equação:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2.14)$$

O estado plano de tensão caracteriza-se pelas tensões normais e tangenciais associadas à direção x_3 serem nulas. Desta forma, a partir da equação (2.8), podem-se escrever as relações constitutivas para este caso:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.15)$$

Analogamente, observa-se que as deformações tangenciais referentes à direção x_3 são nulas e a deformação normal ε_{33} tem seu valor determinado pela equação a seguir:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (2.16)$$

Pode-se notar que, sem a alteração do estado, as relações para o estado plano de tensão são obtidas do estado plano de deformação, fazendo-se:

$$\lambda' = \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \quad (2.17)$$

ou

$$\nu' = \frac{\nu'}{1 - \nu'} \quad (2.18)$$

De modo inverso, passa-se do estado plano de deformação para o de tensão fazendo-se:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (2.19)$$

Deve-se observar que o estado não é alterado, mas apenas as relações tensão-deformação com i, j variando de 1 a 2.

2.2.6 Solução fundamental

As formulações integrais de contorno para problemas da elasticidade linear bidimensional (estados planos), que serão descritas mais adiante, necessitam do conhecimento da chamada solução fundamental. Sabe-se que as equações de *Navier* (2.11) podem ser resolvidas para uma força discreta aplicada em um ponto de um domínio infinito. No caso dos problemas gerais da elasticidade linear, a chamada solução fundamental é devida a *Kelvin* e corresponde a resposta em um domínio infinito devido a aplicação de uma força pontual concentrada em outro ponto deste domínio. A solução do problema de *Kelvin* é obtida das equações de *Navier* (2.11), quando um carregamento unitário é aplicado em um ponto ξ na direção de um vetor unitário e_i (Brebbia e Domingues, 1989):

$$F_i = \Delta(\xi, x)e_i \quad (2.20)$$

sendo $\Delta(\xi, x)$ a função delta de *Dirac*. Esta função pode ser definida da seguinte forma:

$$\Delta(\xi, x) = 0 \quad \text{se } x \neq \xi \quad (2.21a)$$

$$\Delta(\xi, x) = \infty \quad \text{se } x = \xi \quad (2.21b)$$

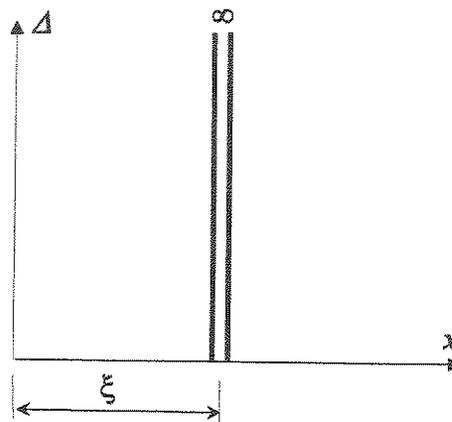


Figura 2.4 Função delta de *Dirac*.

Definida desta forma, a função delta de *Dirac* apresenta as seguintes propriedades:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\xi, x) dx = 1 \quad (2.22a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Delta(\xi, x) dx = f(\xi) \quad (2.22b)$$

Uma maneira de se determinar a solução fundamental é representar os deslocamentos a partir do vetor de *Galerkin* (Brebbia e Domingues, 1989), ou seja:

$$u_j = \bar{G}_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} \bar{G}_{m,jm} \quad (2.23)$$

Substituindo-se as equações (2.20) e (2.23) em (2.11a), obtém-se:

$$\bar{G}_{i,mmjj} + \frac{1}{\mu} \Delta(\xi, x) e_i = 0 \quad (2.24)$$

ou

$$\nabla^2 (\nabla^2 \bar{G}_i) + \frac{1}{\mu} \Delta(\xi, x) e_i = 0 \quad (2.25)$$

Sendo ∇^2 o operador de *Laplace*, a equação (2.25) pode ser escrita para um problema de estado plano de deformação como sendo:

$$\nabla^2 (P_i) + \frac{1}{\mu} \Delta(\xi, x) e_i = 0 \quad (2.26)$$

sendo,

$$P_i = \nabla^2 \bar{G}_i \quad (2.27)$$

A resolução da equação (2.26) em duas dimensões fornece:

$$P_i = -\frac{1}{2\pi\mu} \ln(r) e_i \quad (2.28)$$

sendo r a distância entre o ponto ξ e o ponto x .

Substituindo-se a equação (2.28) em (2.27) pode-se escrever:

$$\nabla^2 \bar{G}_i = -\frac{1}{2\pi\mu} \ln(r) e_i \quad (2.29)$$

então,

$$\bar{G} = -\frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln(r) \quad (2.30)$$

Tomando-se o carregamento em cada direção de forma independente, pode-se escrever a componente do vetor de *Galerkin* em uma direção k quando um carregamento unitário é aplicado em um ponto i na direção l , ou seja:

$$\bar{G}_{lk} = \bar{G} \delta_{lk} \quad (2.31)$$

Para cada direção independente os deslocamentos fundamentais dos pontos do domínio do problema podem ser escritos da seguinte forma:

$$u_k^* = U_{ik}^* e_i \quad (2.32)$$

De acordo com a definição apresentada pela equação (2.23), os deslocamentos fundamentais em pontos do domínio podem ser escritos da seguinte forma:

$$U_{ik}^* = \bar{G}_{ik,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} \bar{G}_{im,km} \quad (2.33)$$

No problema bidimensional dos estados planos de deformação a solução fundamental em termos de deslocamentos fundamentais é obtida substituindo-se as equações (2.30) e (2.31) em (2.33), chegando-se a:

$$U_{ik}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[-(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ik} + r_{,i} r_{,k} \right] \quad (2.34)$$

onde δ_{ik} é o delta de *Kroneker* e $r_{,i}$ e $r_{,k}$ são as projeções do vetor r nas direções x_1 e x_2 , ou seja:

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad e \quad r_{,k} = \frac{\partial r}{\partial x_k} \quad (2.35)$$

A equação (2.34) representa o deslocamento fundamental U^* na direção i sujeito a uma força aplicada na direção k . Esta equação inclui um movimento de corpo rígido, mas isto não altera a determinação de tensões e deformações. O resultado encontrado para o deslocamento fundamental pode ser usado em problemas envolvendo os estados planos de tensão, para isto basta modificar o coeficiente de *Poisson* conforme descrito pela equação (2.19).

No caso dos esforços fundamentais de superfície (*tractions*), aplica-se a mesma definição feita para os deslocamentos fundamentais ou seja, para cada direção independente os esforços fundamentais de superfície podem ser escritos da seguinte forma:

$$t_k^* = T_{ik}^* e_i \quad (2.36)$$

A partir das equações (2.34) e (2.36) e das equações (2.4), (2.6) e (2.8) pode-se escrever os esforços fundamentais de superfície T^* da seguinte forma:

$$T_{ik}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,i}r_{,k}] + (1-2\nu)(n_i r_{,k} - n_k r_{,i}) \right\} \quad (2.37)$$

onde n_i e n_j são os cossenos diretores do vetor normal com respeito às direções x_i e x_j , e $\partial r/\partial n$ é a derivada do vetor r com respeito à normal ao contorno.

2.2.7 Condições de Contorno

Seja um corpo de forma arbitrária descrito para um domínio Ω bidimensional e condicionado por um contorno Γ , conforme mostrado na Figura 2.5.

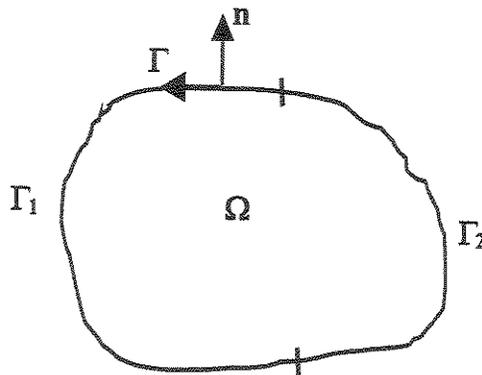


Figura 2.5 Modelo geométrico e condições de contorno.

Considerando-se o equilíbrio estático sobre o domínio Ω , as seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas:

i) Condição de contorno essencial

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sobre o contorno } \Gamma_1 \quad (2.38)$$

ii) Condição de contorno natural

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{no contorno } \Gamma_2 \quad (2.39)$$

onde n é a normal ao contorno Γ , Γ_1 e Γ_2 são porções deste mesmo contorno, \bar{t}_i denotam as forças de superfície (*tractions*) conhecidas e \bar{u}_i são os deslocamentos conhecidos.

2.3 Equações integrais da elasticidade linear

Nesta seção, através da aplicação do teorema de *Betti*, são desenvolvidas as equações integrais de contorno para problemas bidimensionais da elasticidade. Considerando-se inicialmente um corpo em equilíbrio sujeito a dois estados de tensão e deformação, o teorema de *Betti* estabelece que o trabalho realizado pelas tensões do primeiro estado com os deslocamentos do segundo é igual ao trabalho realizado pelas tensões do segundo estado com os deslocamentos do primeiro. Desta forma, dois estados de tensão σ e σ^* , com seus respectivos estados de deformação ε e ε^* , relacionam-se de acordo com a seguinte equação:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (2.40)$$

Torna-se mais conveniente considerar as deformações em função dos deslocamentos (equação 2.6), assim:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega \quad (2.41)$$

O primeiro termo da equação (2.41) pode ser expandido da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} \left[(\sigma_{ij}^* u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j}^* u_i \right] d\Omega \quad (2.42)$$

A equação de equilíbrio (2.3) pode ser usada para introduzir as forças de volume no último termo do lado direito da equação (2.42), resultando em:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} \left[(\sigma_{ij}^* u_i)_{,j} \right] d\Omega + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (2.43)$$

Aplicando-se o teorema da divergência no primeiro termo do lado direito da equação (2.43), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^* u_i) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (2.44)$$

Usando-se a equação (2.4) das forças de superfície, a tensão no primeiro termo do lado direito da equação (2.44) pode ser eliminada da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (2.45)$$

Retornando à equação (2.41) e adotando-se um procedimento idêntico para desenvolver o lado esquerdo desta equação, pode-se escrever a equação final para o teorema de *Betti*:

$$\int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega \quad (2.46)$$

Fazendo uso da solução fundamental devida a *Kelvin*, supõe-se que o carregamento b^* seja uma carga concentrada aplicada em um ponto ξ de um domínio infinito, distante de um ponto x , onde se pode obter deslocamentos e forças de superfície. Assim, define-se as seguintes relações para os de deslocamentos, forças de superfície e forças de volume:

$$u_i^* = U_{ik}^* (\xi, x) \quad (2.47a)$$

$$t_i^* = T_{ik}^* (\xi, x) \quad (2.47b)$$

$$b_i^* = \Delta(\xi, x) \delta_{ik} \quad (2.47c)$$

Considerando-se as propriedades da função delta de *Dirac*, aplicam-se os termos das equações (2.47) na equação (2.46) para obter uma equação integral sobre o contorno, acoplando dois estados distintos, ou seja:

$$u_i(\xi) = - \int_{\Gamma} T_{ik}^* (\xi, x) u_k(x) d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{ik}^* (\xi, x) t_k(x) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ik}^* (\xi, x) b_k(x) d\Omega \quad (2.48)$$

A equação (2.48) é conhecida como *Identidade de Somigliana* para os deslocamentos. Com esta relação pode-se encontrar o valor do deslocamento em qualquer ponto do domínio Ω , interno ao contorno Γ , em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno e das forças de volume. Para transformar esta equação numa relação com apenas valores do contorno é necessário um artifício. De acordo com a Figura 2.6, acrescenta-se ao domínio uma pequena região Ω_φ , de raio φ , com seu centro sobre o ponto ξ . Subtrai-se do contorno original uma pequena porção Γ' , adicionando-se em seu lugar um contorno Γ_φ .

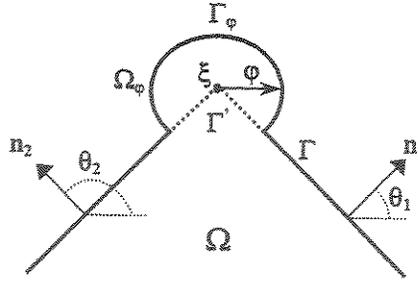


Figura 2.6 Acréscimo de um domínio infinitesimal.

Rescrevendo-se novamente a equação (2.48), agora para o ponto ξ deste novo domínio, resulta:

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi) = & - \int_{\Gamma-\Gamma'} T_{ik}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma - \int_{\Gamma_\phi} T_{ik}^*(\xi, x) u_k d\Gamma + \int_{\Gamma-\Gamma'} U_{ik}^*(\xi, x) t_k(x) d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_\phi} U_{ik}^*(\xi, x) t_k(x) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ik}^*(\xi, x) F_k(x) d\Omega + \int_{\Omega_\phi} U_{ik}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega \quad (2.49)
 \end{aligned}$$

Fazendo-se o raio ϕ se aproximar de zero, os termos das integrais sobre o contorno $\Gamma - \Gamma'$ são entendidos como um valor principal de *Cauchy*. As integrais sobre Γ_ϕ e Ω_ϕ são nulas, exceto:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_\phi} T_{ik}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma \right) = \bar{C}_{ik} u_k(\xi) \quad (2.50)$$

Do resultado de (2.50) pode-se escrever finalmente a equação integral para pontos ξ do contorno, ou seja:

$$C_{ik}(\xi) u_i(\xi) + \int_{\Gamma} T_{ik}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik}^*(\xi, x) t_k(x) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ik}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega \quad (2.51)$$

A matriz C_{ik} depende apenas da geometria do contorno. Para um contorno não suave como por exemplo o a Figura 2.5, esta matriz pode ser definida explicitamente, da seguinte forma:

$$[C] = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 4(1-\nu)(\pi+\theta_2-\theta_1) + \text{sen}2\theta_1 - \text{sen}2\theta_2 & \cos2\theta_2 - \cos2\theta_1 \\ \cos2\theta_2 - \cos2\theta_1 & 4(1-\nu)(\pi+\theta_2-\theta_1)\text{sen}2\theta_2 - \text{sen}2\theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

sendo θ_1 e θ_2 os ângulos formados entre o vetor normal e os eixos x_1 e x_2 .

No caso do contorno ser suave ou seja, quando a tangente à linha de contorno permanece continua, a matriz C_{ik} se reduz a:

$$C_{ik} = \frac{1}{2} \delta_{ik} \quad (2.53)$$

Uma integral similar aos deslocamentos em um ponto ξ do domínio do problema, equação (2.48), pode ser obtida para o caso de tensões neste mesmo ponto. Para este fim, aplica-se a equação (2.6) nas relações tensão-deformação da equação (2.8), obtendo-se as tensões em função apenas dos deslocamentos, ou seja:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{m,m} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.54)$$

Diferenciando-se a equação (2.48) com relação aos deslocamentos e substituindo-se nos termos da equação (2.54) chega-se implicitamente a:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & - \int_{\Gamma} \left[\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} t_{mk,m}^* + \mu (t_{ik,j}^* + t_{jk,i}^*) \right] u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{mk,m}^* + \mu (u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] t_k d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} \left[\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{mk,m}^* + \mu (u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] b_k d\Omega \end{aligned} \quad (2.55)$$

A equação de tensões (2.55) pode ser escrita explicitamente de uma forma mais geral, semelhante à aquela escrita para os deslocamentos, ou seja:

$$\sigma_{ij}(\xi) = - \int_{\Gamma} S_{kij}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{kij}^*(\xi, x) t_k(x) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega \quad (2.56)$$

A equação (2.56) representa a expressão das tensões em um ponto ξ do domínio. Os tensores de deslocamento e força de superfície de terceira ordem S_{kij}^* e D_{kij}^* , determinados a partir das soluções fundamentais, são definidos da seguinte forma (Brebbia e Domingues, 1989):

$$D_{kij}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} S_{kij}^* = & \frac{2\mu}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2r_{,n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] + \right. \\ & + 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) \\ & \left. + (1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad (2.58) \end{aligned}$$

2.4 Equações básicas da flexão de placas finas

Esta seção apresenta o desenvolvimento para obtenção da equação diferencial e uma solução fundamental representativa dos problemas estáticos da flexão de placas finas.

2.4.1 Hipóteses básicas

Costuma-se descrever uma placa como um corpo contínuo e homogêneo limitado por duas superfícies paralelas cuja distância, chamada espessura, é pequena se comparada com as demais dimensões (Saada, 1974). O plano paralelo às faces inferior e superior, bissecionando a espessura h , é chamado de plano médio.

Em um sistema de coordenadas cartesianas de referência (x_1, x_2, x_3) , os eixos x_1 e x_2 estão contidos no plano médio e o eixo x_3 está posicionado na direção normal ao plano médio, com suas origens neste mesmo plano, conforme mostrado no elemento de placa da Figura 2.7.

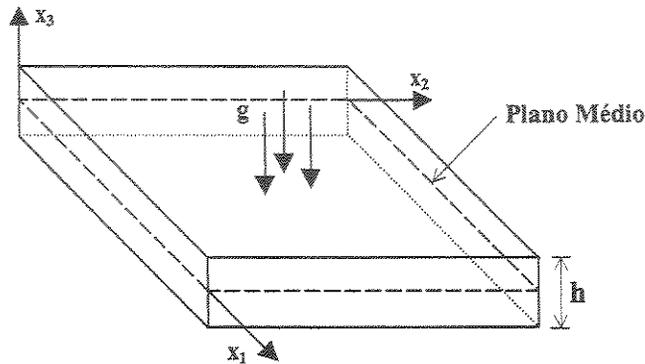


Figura 2.7 Sistema de coordenadas no elemento de placa.

Considerando-se a hipótese de pequenas deformações e um carregamento g normal ao plano médio da placa, as seguintes hipóteses podem ser adotadas:

- i) Os deslocamentos normais ao plano médio são pequenos e as deformações na direção da espessura pequenas o suficiente, podendo ser desprezadas,
- ii) As tensões normais atuando nos planos paralelos ao plano médio são pequenas quando comparadas com as outras componentes de tensão, e podem ser desprezadas,
- iii) Retas normais ao plano médio na posição não deformada permanecem normais após a deformação,
- iv) Não existem tensões de cisalhamento nas faces externas paralelas ao plano médio da placa.

2.4.2 Equações constitutivas

De acordo com as hipóteses apresentadas, sabe-se que as condições de deformação formuladas pela teoria de Kirchhoff (1850) são dadas por:

$$\gamma_{i3} = \frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.59a)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0 \quad (2.59b)$$

sendo ε a deformação normal, γ a deformação tangencial, u , v e w os deslocamentos nas direções x_1 , x_2 e x_3 da placa (Fig. 2.5), respectivamente.

Fazendo-se a integração das equações (2.59) em função dos deslocamentos, obtém-se:

$$u = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} \quad (2.60a)$$

$$v = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (2.60b)$$

$$w = w(x_1, x_2) \quad (2.60c)$$

Derivando-se as equações (2.60), determinam-se as deformações normal e tangencial ao plano da placa, em função apenas do deslocamento w , ou seja:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \quad (2.61a)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \quad (2.61b)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = -2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.61c)$$

Conhecidas as deformações em um ponto da placa, as relações de tensões para um material elástico e isotrópico são dadas através da lei de *Hooke* da seguinte forma:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) \quad (2.62a)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{22} + \nu \epsilon_{11}) \quad (2.62b)$$

$$\tau_{12} = G \gamma_{12} \quad (2.62c)$$

Substituindo-se nas componentes de tensão, dadas pelas equações (2.62), as componentes de deformação dadas pelas equações (2.61), obtêm-se as componentes de tensão em função das curvaturas:

$$\sigma_{11} = -\frac{E x_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \quad (2.63a)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{E x_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \quad (2.63b)$$

$$\tau_{12} = -2 G x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.63c)$$

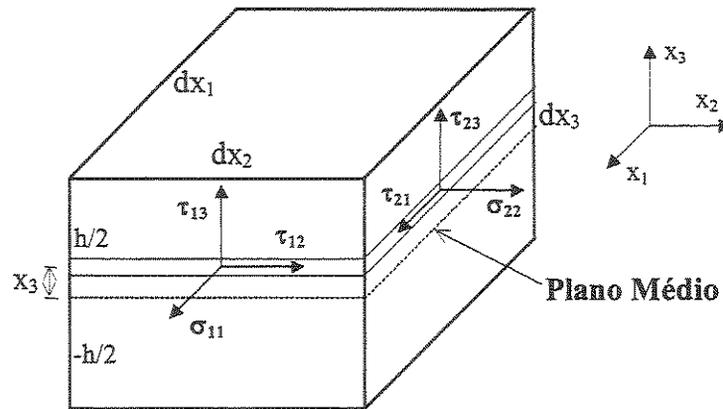


Figura 2.8 Componentes de tensão em um elemento de placa.

A Figura 2.8 mostra um elemento infinitesimal de placa onde estão dispostas as componentes de tensão atuantes em uma fatia paralela ao plano médio. Utilizando-se a regra da mão direita, os esforços momento fletor e força cortante por unidade de comprimento são obtidos a partir das resultantes destas componentes de tensão, da seguinte forma:

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3 \quad (2.64)$$

$$Q_{ii} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{i3} dx_3 \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.65)$$

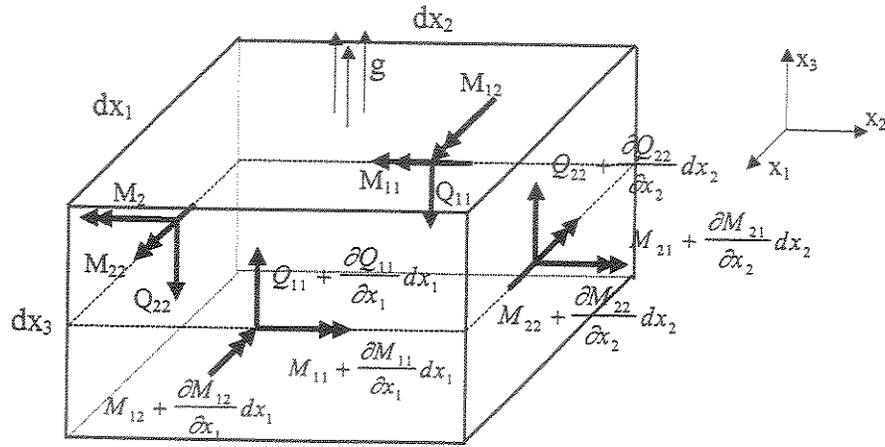


Figura 2.9 Esforços em um elemento de placa em flexão.

Fazendo-se o equilíbrio estático dos esforços atuantes no elemento de placa da Figura 2.9, as equações de equilíbrio escritas em termos de momentos fletores e forças cortantes são dadas por:

$$\frac{\partial Q_{ii}}{\partial x_i} + g = 0 \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} - Q_{ii} = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.67)$$

Considerando-se a simetria do tensor dos momentos ($M_{ji} = M_{ij}$), derivando-se as forças cortantes nas equações de equilíbrio (2.67) e substituindo-se as mesmas em (2.66), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 M_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = -g \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.68)$$

Encontrada uma equação diferencial em função de momentos fletores, torna-se necessário relacionar estes momentos com as curvaturas. Para este fim, substituem-se nas equações (2.64) os valores das componentes de tensão apresentados pelas equações (2.63). Lembrando-se da igualdade entre os momentos torçores ($M_{ji} = M_{ij}$), os momentos fletores por unidade de largura são dados por:

$$M_{ij} = -D \left(\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.69)$$

sendo D a rigidez à flexão da placa:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.70)$$

A equação (2.68) pode ser reescrita introduzindo os valores dos momentos fletores em função das curvaturas, apresentados pelas equações (2.69), obtendo-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} = \frac{g}{D} \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.71)$$

A equação (2.71), expressa em função dos deslocamentos w , é a equação diferencial de equilíbrio estático de uma placa fina sujeita a um carregamento distribuído g . Esta equação é normalmente escrita em sua forma implícita:

$$D \cdot \nabla^2 (\nabla^2 w) = g \quad (2.72)$$

sendo ∇^2 o operador diferencial de *Laplace*, definido por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (i = 1, 2) \quad (2.73)$$

As expressões das forças cortantes em função das curvaturas são obtidas substituindo-se nas equações de equilíbrio da placa (equação 2.67), as derivadas das equações (2.69), ou seja:

$$Q_{ii} = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \right) \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.74)$$

As componentes de momentos fletores e forças cortantes, inicialmente referidas às direções x_1, x_2 , podem ser escritas em relação a um sistema de coordenadas normais e tangenciais ns (Figura 2.10). A definição dos momentos fletores e forças cortantes em coordenadas normais e tangenciais ao contorno da placa é feito para expressar genericamente as condições de contorno e vinculação da mesma.

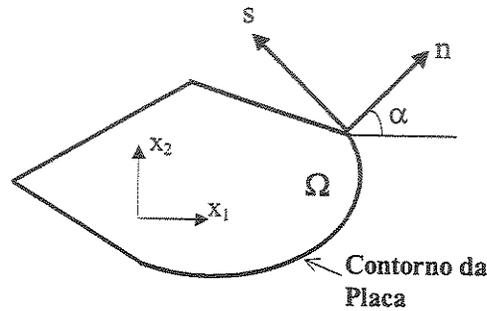


Figura 2.10 Sistemas de coordenadas x_1, x_2 e ns .

O sistema de coordenadas x_1, x_2 pode ser relacionado com o sistema de coordenadas ns a partir de uma matriz de transformação de coordenadas, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} \quad (2.75a)$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} = [T]^T \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (2.75b)$$

sendo, $[T]$ a matriz de transformação de coordenadas e $[T]^t$ sua transposta, ou seja:

$$[T] = \begin{Bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{Bmatrix} \quad (2.76a)$$

$$[T]^T = \begin{Bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & s_2 \end{Bmatrix} \quad (2.76b)$$

As componentes de momento fletor e força cortante nas novas coordenadas ns podem ser obtidas através de transformações tensoriais para momentos e cortantes, da seguinte forma:

$$[M_{ns}] = [T]^T [M_{x_1x_2}] [T] \quad (2.77a)$$

$$\{Q_{ns}\} = [T]^T \{Q_{x_1x_2}\} \quad (2.77b)$$

As componentes de momento fletor (2.77a) e de força cortante (2.77b) podem ser escritas explicitamente, da seguinte forma:

$$M_n = M_{11} \cos^2 \alpha + M_{22} \operatorname{sen}^2 \alpha + 2M_{12} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad (2.78a)$$

$$M_s = M_{11} \operatorname{sen}^2 \alpha + M_{22} \cos^2 \alpha - 2M_{12} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad (2.78b)$$

$$M_{ns} = (M_{22} - M_{11}) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + M_{12} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \quad (2.78c)$$

$$Q_n = Q_{11} \cos \alpha + Q_{22} \operatorname{sen} \alpha \quad (2.79a)$$

$$Q_s = Q_{22} \cos \alpha - Q_{11} \operatorname{sen} \alpha \quad (2.79b)$$

2.4.3 Condições de contorno

As condições de contorno necessárias para a resolução do problema de placa fina, para o caso de vinculações clássicas e um sistema genérico de coordenadas como o da Figura 2.10, são dadas por:

i) Engaste

$$w = 0 \quad (2.80a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (2.80b)$$

ii) Apoio Simples

$$w = 0 \quad (2.81a)$$

$$M_n = 0 \quad (2.81b)$$

iii) Borda livre

$$M_n = 0 \quad (2.82a)$$

$$M_{ns} = 0 \quad (2.82b)$$

$$Q_n = 0 \quad (2.82c)$$

Através da aplicação do método variacional, Kirchhoff (1850) mostrou que as condições de contorno para a borda livre são:

$$M_n = 0 \quad (2.83)$$

$$Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 \quad (2.84)$$

As condições de contorno relativas à força cortante Q_n e ao momento volvente M_{ns} , segundo Kirchhoff (1850), podem ser agrupadas em uma única. Esta suposição deu origem a um esforço denominado de força cortante equivalente, cuja intensidade por unidade de comprimento é dada por:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (2.85)$$

A partir das equações (2.83) e (2.85), a condição de borda livre torna-se compatível com a ordem da equação diferencial, que só pode ter quatro valores independentes no contorno.

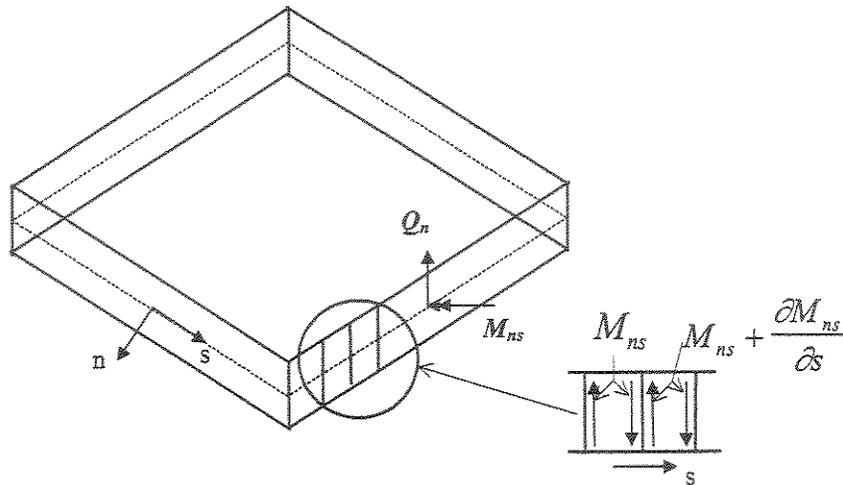


Figura 2.11 Momentos volventes no contorno.

A Figura 2.11 mostra a borda de uma placa com os momentos volventes colocados em forma de binários num elemento infinitesimal. Nota-se que no equilíbrio da interface entre dois elementos infinitesimais consecutivos resulta a equação (2.85).

2.4.4 Equações constitutivas em coordenadas cilíndricas

Na Figura 2.12, são mostrados o relacionamento entre os sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas:

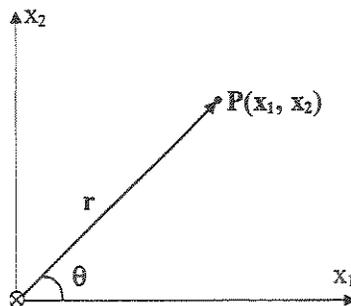


Figura 2.12 Sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas.

As relações existentes entre os sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas referidas ao ponto P da Figura 2.12, são as seguintes:

$$x_1 = r \cos \theta \quad (2.86)$$

$$x_2 = r \operatorname{sen} \theta \quad (2.87)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (2.88)$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \quad (2.89)$$

A partir das equações (2.86) a (2.89) pode-se obter as derivadas parciais de r e θ com relação aos eixos coordenados x_1, x_2 :

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r} = \cos \theta \quad (2.90a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r} = \operatorname{sen} \theta \quad (2.90b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{x_2}{r^2} = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \quad (2.91a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{x_1}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \quad (2.91b)$$

Sendo os deslocamentos transversais w da placa dados em função de x_1 e x_2 , pode-se escrever:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \quad (2.92)$$

Substituindo-se as equações (2.90a) e (2.91a) em (2.92), obtém-se:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (2.93)$$

De (2.93) pode-se definir o operador diferencial $\frac{\partial}{\partial x_1}$, da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.94)$$

Fazendo-se a aplicação do operador diferencial da equação (2.94) na equação (2.90), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = & \cos^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\ & - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.95)$$

De forma análoga à determinação das equações (2.93) e (2.95) pode-se obter, em relação ao eixo x_2 , as seguintes equações:

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} = \sin \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = & \sin^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\ & + 2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.97)$$

Derivando-se a equação (2.93) em relação a x_2 obtém-se a derivada mista em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\ + \left(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.98)$$

Somando-se as equações (2.95) e (2.97), obtém-se o operador diferencial de *Laplace* em coordenadas cilíndricas:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w \quad (2.99)$$

Aplicado o operador diferencial (2.99), a equação diferencial de placas finas (2.71) em coordenadas cilíndricas, é dada pela seguinte equação:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{g}{D} \quad (2.100)$$

A partir das definições dos deslocamentos w em coordenadas cilíndricas, os momentos fletores das equações (2.69) podem ser expressos neste sistema de coordenadas utilizando-se as relações encontradas nas equações (2.95), (2.97) e (2.98), resultando em:

$$\begin{aligned} M_{11} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\cos^2 \theta + \nu \operatorname{sen}^2 \theta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\operatorname{sen}^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) + \right. \\ \left. - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.101a)$$

$$\begin{aligned} M_{22} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\cos^2 \theta + \nu \operatorname{sen}^2 \theta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\operatorname{sen}^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) + \right. \\ \left. + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.101b)$$

$$M_{12} = -D(1-\nu) \left[\sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \left(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.101c)$$

De forma análoga, as equações (2.74) que representam as forças cortantes também podem ser escritas em coordenadas cilíndricas e suas expressões finais são dadas por:

$$Q_{11} = -D \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w \right] \quad (2.102a)$$

$$Q_{22} = -D \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w \right] \quad (2.102b)$$

Conhecidas as expressões em coordenadas cilíndricas dos momentos fletores e forças cortantes, pode-se deduzir neste mesmo sistema de coordenadas as expressões para momentos fletores e forças cortantes normais e tangenciais em um ponto genérico P (Fig. 2.12). Na Figura 2.13, β é o ângulo formado pelos versores r e n , que somado a θ , formam o ângulo α .

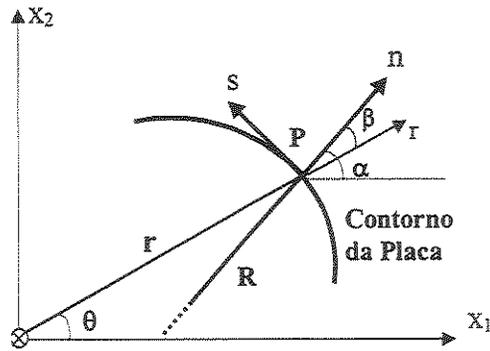


Figura 2.13 Relação das coordenadas ns de um ponto P do contorno da placa, com as coordenadas cartesianas e cilíndricas.

Substituindo-se nas equações (2.78) o valor de $\alpha = \theta + \beta$ e os valores das equações (2.101), obtém-se os momentos fletores normais e tangenciais em coordenadas cilíndricas:

$$M_n = -D \left[(\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2(1 - \nu) \sin \beta \cos \beta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.103a)$$

$$M_s = -D \left[(\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2(1 - \nu) \sin \beta \cos \beta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.103b)$$

$$M_{ns} = -D(1 - \nu) \left[\sin \beta \cos \beta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \quad (2.103c)$$

A força cortante normal ao contorno em coordenadas cilíndricas é obtida substituindo-se as equações (2.102) e o valor de α na equação (2.79a), obtém-se:

$$Q_n = -D \left(\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w \cos \beta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w \sin \beta \right) \quad (2.104)$$

Derivando-se a equação (2.103c), que é função de r , θ e β , em relação à coordenada s , obtém-se:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} \quad (2.105)$$

As equações das derivadas de r , θ e β , em relação à coordenada s , são dadas por:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s} = -\operatorname{sen} \beta \quad (2.106a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s} = \frac{\cos \beta}{r} \quad (2.106b)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (\alpha + \theta) = \frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \quad (2.106c)$$

sendo, R o raio de curvatura do contorno no ponto P (Figura 2.13).

Fazendo-se a substituição na equação (2.105), os resultados encontrados nas equações (2.106), obtém-se:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = -\frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \operatorname{sen} \beta + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \cos \beta + \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \right) \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \quad (2.107)$$

Somando-se as expressões obtidas das equações (2.104) e (2.107), respectivamente, pode-se escrever a expressão para a força cortante equivalente em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} V_n = & \left(-D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \right) \cos \beta - \left(D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w + \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \right) \operatorname{sen} \beta + \\ & + \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \right) \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (2.108)$$

2.4.5 Solução fundamental

Aplicando-se as definições da função delta de *Dirac* na equação de equilíbrio da placa em coordenadas cilíndricas (equação 2.100), e considerando-se a simetria existente, pode-se escrever:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right) = \frac{\Delta(\xi, x)}{D} \quad (2.109)$$

Redefinindo-se a equação (2.109) de uma forma mais conveniente, obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw^*}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{\Delta(\xi, x)}{D} \quad (2.110)$$

A solução fundamental de placas finas em relação ao deslocamento fundamental, w^* , é obtida com a resolução da equação diferencial de placas finas (2.110) para todos os pontos do domínio fundamental, exceto no ponto de carregamento. Impondo-se para esta equação as condições essenciais em relação a r , mostradas por Paiva (1987), pode-se escrever:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{em} \quad r = 0 \quad (2.111a)$$

$$Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r} \quad (2.111b)$$

Utilizando-se as hipóteses apresentadas por Danson (1979), as condições essenciais (2.111) e integrando-se sucessivamente a equação (2.110) em relação a r , chega-se a:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (2.112)$$

A equação (2.112) é a solução fundamental em relação ao deslocamento fundamental, w^* , de placas finas. Com esta equação podem ser obtidos os deslocamentos e esforços em um ponto genérico do domínio fundamental da placa. Especificamente, as componentes de momento fletor, a derivada do deslocamento transversal e a força cortante equivalente, são encontradas através da equação (2.112), ou seja:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r \cos \beta \quad (2.113)$$

$$M_n^* = -\frac{I}{4\pi} [(1+\nu)\ln r + (1-\nu)\cos^2 \beta + \nu] \quad (2.114)$$

$$M_{ns}^* = \frac{(1-\nu)}{8\pi} \text{sen } 2\beta \quad (2.115)$$

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4\pi r} [2(1-\nu)\text{sen}^2 \beta - 3 + \nu] + \frac{(1-\nu)}{4\pi R} \cos 2\beta \quad (2.116)$$

Uma dedução mais detalhada das equações (2.112) a (2.115) pode ser tirada do trabalho de Paiva (1987).

2.5 Equações integrais de placas finas

Nesta seção, através da aplicação do teorema de *Betti*, são desenvolvidas as equações integrais de contorno para problemas de flexão de placas finas. Para introduzir o tema, seja uma placa fina de domínio finito Ω e contorno Γ contida em outra de domínio infinito Ω_∞ e contorno Γ_∞ . De acordo com a Figura 2.14, a placa finita está submetida a um carregamento g distribuído em uma área Ω_g .

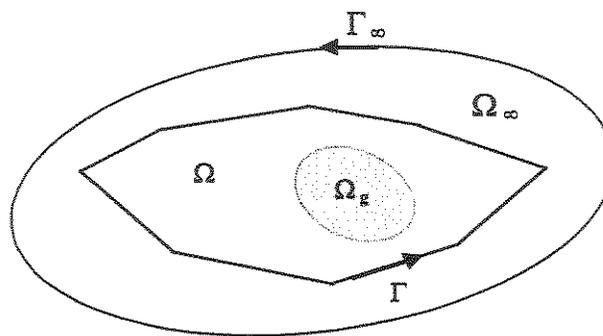


Figura 2.14 Placa finita contida em uma placa infinita.

Do teorema de *Betti* (equação 2.40), são identificados dois estados de tensão σ e σ^* , com seus respectivos estados de deformação ε e ε^* . No caso da placa de domínio finito, a mesma é

submetida a dois carregamentos não simultâneos g e g^* , associados a superfícies elásticas w e w^* , respectivamente. A equação final do teorema de *Betti*, aplicado ao estudo de placas finas, é dada por (Stern, 1978; Paiva, 1987):

$$\int_{\Gamma} \left(V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega = \int_{\Gamma} \left(V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (2.117)$$

Supondo-se que o carregamento g^* em (2.117) seja uma carga concentrada unitária aplicada em um ponto ξ do domínio da placa, tomando-se como função ponderadora a solução fundamental e aplicando as propriedades da função delta de *Dirac*, pode-se escrever:

$$w(\xi) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(\xi, x) w(x) - M_n^*(\xi, x) \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi, x_c) w_{ci}(x_c) = \int_{\Gamma} \left[V_n(x) w^*(\xi, x) - M_n(x) \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right] d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c) w_{ci}^*(\xi, x_c) + \int_{\Omega_g} g(x) w^*(\xi, x) d\Omega_g(x) \quad (2.118)$$

sendo x_c a coordenada dos cantos da placa.

A equação (2.118) representa a equação integral de placas finas para deslocamentos em pontos do domínio da placa. Esta equação fornece deslocamentos em todos os pontos do domínio a partir das variáveis conhecidas do contorno tais como, cortantes equivalentes (V_n), momentos de flexão na direção normal (M_n), reações de canto (R_c), deslocamentos (w) e rotações em relação à normal ($\partial w / \partial n$).

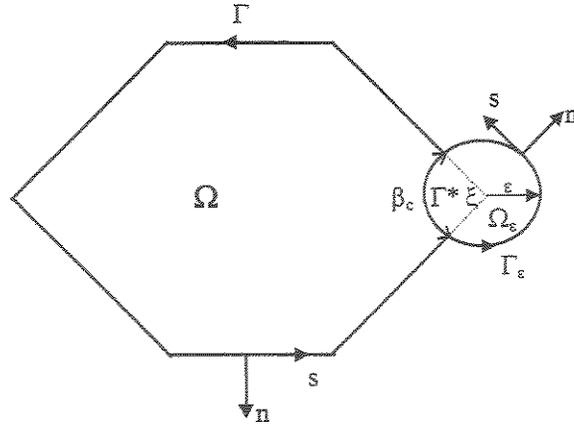


Figura 2.15 Contorno circular acrescido a um canto de placa.

Para transformar a equação (2.118), escrita em termos de valores de domínio, numa relação com apenas valores do contorno é necessário um artifício. Acrescenta-se ao domínio uma pequena região Ω_ε de modo que o novo domínio seja dado por Ω e Ω_ε com um contorno $\Gamma + \Gamma_\varepsilon - \Gamma^*$, como mostra a Figura 2.15. Com o artifício, após as integrações em Γ_ε e com as integrais sobre os contornos $\Gamma - \Gamma^*$ entendidas no sentido do valor principal de *Cauchy*, quando ε tende a zero, chega-se a (Stern, 1978; Paiva, 1987):

$$\begin{aligned}
 C(\xi)w(\xi) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(\xi, x)w(x) - M_n^*(\xi, x) \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi, x_c)w_{ci}(x_c) = \\
 \int_{\Gamma} \left[V_n(x)w^*(\xi, x) - M_n(x) \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right] d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c)w_{ci}^*(\xi, x_c) + \\
 + \int_{\Omega_\varepsilon} g(x)w^*(\xi, x) d\Omega_\varepsilon(x) \quad (2.119)
 \end{aligned}$$

A equação (4.119) representa a equação integral de placas finas para pontos do contorno da placa. O termo $C(\xi)$ está relacionado ao ângulo interno do canto da placa β_c , sendo dado por:

$$C(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \Omega \\ \frac{\beta_c}{2\pi}, & \xi \in \Gamma \\ 0, & \xi \notin (\Omega \cup \Gamma) \end{cases} \quad (2.120)$$

Quando o ponto do contorno não apresenta angulosidades, a equação (2.120) pode ser reduzida a:

$$C(\xi) = \frac{I}{2} \quad (2.121)$$

Os momentos fletores e esforços cortantes em pontos do domínio da placa podem ser obtidos a partir das curvaturas internas ou seja, como segunda derivada da função de deslocamentos w . A equação integral para deslocamentos em pontos do domínio da placa, equação (2.118), pode ser escrita como segunda derivada da função de deslocamentos w , representando as curvaturas internas, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} w_{,ij}(\xi) + \int_{\Gamma} \left[V_{n,ij}^*(\xi, x) w(x) - M_{n,ij}^*(\xi, x) \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci,ij}^*(\xi, x_c) w_{ci}(x_c) = \\ \int_{\Gamma} \left[V_n(x) w_{,ij}^*(\xi, x) - M_n(x) \frac{\partial w_{,ij}^*}{\partial n}(\xi, x) \right] d\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c) w_{ci,ij}^*(\xi, x_c) + \\ + \int_{\Omega_s} g(x) w_{,ij}^*(\xi, x) d\Omega_s(x) \end{aligned} \quad (2.122)$$

A segunda derivada dos esforços e deslocamentos fundamentais apresentados pela equação (2.122) são definidos da seguinte forma (Palermo Jr., 1989):

$$\begin{aligned} V_{n,ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ \left[\left(6 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right) 8 \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 - 8 \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} n_j + \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right) + \right. \right. \\ \left. \left. - 16 \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} s_j + \frac{\partial r}{\partial x_j} s_i \right) + 4 \frac{\partial r}{\partial s} (s_j n_i + s_i n_j) \right] + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left(2s_i s_j - 4 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} + \delta_{ij} \right) + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} n_j + \frac{\partial r}{\partial x_j} s_i \right) \right] (1 - \nu) + \\ \left. + 4 \frac{\partial r}{\partial n} \left(\delta_{ij} - 4 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) + 4 \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} n_j + \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned}
M_{n,ij}^*(\xi, x) = & -\frac{1}{4\pi r^2} \left\{ \left[(1+\nu) - 2 \left(\left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right) \right] \left(\delta_{ij} - 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) + \right. \\
& - 4 \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} n_j + \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right) - 4\nu \frac{\partial r}{\partial s} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} s_j + \frac{\partial r}{\partial x_j} s_i \right) + \\
& \left. + 4 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right) + 2n_i n_j + 2\nu s_i s_j \right\} \quad (2.124)
\end{aligned}$$

$$w^*_{,ij}(\xi, x) = \frac{1}{4\pi D} \left[\ln r \delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] \quad (2.125)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial n}_{,ij}(\xi, x) = \frac{1}{4\pi D r} \left[\left(\delta_{ij} - 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_i} n_j + \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right] \quad (2.126)$$

$$R_{ci,ij}^*(\xi, x) = M_{ns,ij}(\xi, x_f) - M_{ns,ij}(\xi, x_i) \quad (2.127)$$

$$\begin{aligned}
M_{ns,ij}(\xi, x) = & \frac{(1-\nu)}{4\pi r^2} \left\{ 2 \left(\delta_{ij} - 4 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} + 2 \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x_j} s_i + \frac{\partial r}{\partial x_i} s_j \right) \frac{\partial r}{\partial n} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} n_j + \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right) \frac{\partial r}{\partial s} \right] - n_i s_j - s_i n_j \right\} \quad (2.128)
\end{aligned}$$

As equações (2.122) a (2.128) representam os valores fundamentais de momentos fletores, de esforços cortantes, de deslocamentos, de rotações e de reações de canto.

CAPÍTULO 3

Formulação Dinâmica Estacionária da Elasticidade 2D e Flexão de Placas Finas

3.1 Introdução

Visando a análise dinâmica individual das lâminas que compõem as peças de parede fina, este capítulo trata da formulação dos modelos dinâmicos estacionários de problemas da elasticidade bidimensional e da flexão de placas finas. Assume-se agora que em cada folha poliédrica estão contidos o estado elastodinâmico bidimensional estacionário associado ao da flexão dinâmica estacionária de placas finas. Para representar adequadamente estas teorias, são desenvolvidas as formulações básicas dos referidos modelos, apresentando as hipóteses fundamentais e um resumo de cada teoria envolvida.

3.2 Equações básicas da elastodinâmica linear estacionária

Esta seção, apresenta o desenvolvimento de algumas equações básicas para obtenção das equações diferenciais de equilíbrio e posteriormente uma solução fundamental que descreve os problemas dinâmicos estacionários da elastodinâmica linear bidimensional.

3.2.1 Hipóteses básicas

A hipótese particular de que um dado problema da elastodinâmica linear apresenta movimento periódico e harmônico no tempo, ou estacionário, permite escrever as seguintes considerações:

- i) Os problemas harmônicos no tempo, ou estacionários, são aqueles no qual todas as variáveis dependentes do tempo variam na forma de $\sin \omega t$ ou $\cos \omega t$, sendo ω a frequência angular;
- ii) Regiões elásticas, sob condições de contorno homogêneas, oscilam harmonicamente com a frequência natural do sistema.

3.2.2 Equações de equilíbrio

Em um sistema de coordenadas cartesianas x_j , onde $j = 1, 2, 3$, o vetor de deslocamentos em um ponto x para um tempo t é dado por $u(x, t)$. Consequentemente, o tensor linear de deformações ε , em um ponto x de um corpo de domínio Ω , a um dado tempo t , é definido pela equação (2.6). Usualmente, define-se também o tensor de rotações ω , sendo dado por:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (3.1)$$

sendo ε , um tensor simétrico ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) e ω um tensor antissimétrico ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$).

A primeira lei do movimento de *Cauchy* para pontos de um corpo elástico é obtida do equilíbrio do momento linear, ou seja:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.2)$$

onde $\sigma(x, t)$ é o tensor de tensões, $b(x, t)$ são as forças de volume por unidade de massa e $\rho(x)$ é a densidade de massa. Do equilíbrio do momento angular, convencionou-se que o tensor de tensões é simétrico ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$).

O sistema de equações que governa o movimento de um corpo linear elástico, homogêneo e isotrópico é definido a partir da equação de equilíbrio de tensões (3.2), das relações cinemáticas (2.6) e da lei de *Hooke* (2.8). Substituindo-se as equações (2.6) e (2.8) em (3.2), obtêm-se as equações do movimento em relação aos deslocamentos:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.3)$$

A equação (3.3) pode ser escrita na forma implícita:

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u + \rho b = \rho \ddot{u} \quad (3.4)$$

ou

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot u - \mu \nabla \times \nabla \times u + \rho b = \rho \ddot{u} \quad (3.5)$$

sendo que a equação de equilíbrio, as relações cinemáticas e constitutivas e, portanto, as equações do movimento, podem ser satisfeitas em todos os pontos do interior de um domínio Ω .

Existem diferentes procedimentos para transformar as equações do movimento (*Navier*) em uma formulação matemática simples. A simplificação das equações do movimento por meio de um processo de diferenciação, foi apresentada primeiramente por Stokes (1850). Este procedimento transforma as mesmas em equações diferenciais simples em termos de dilatação e rotação. Segundo Stokes (1850), as equações de *Navier* podem ser transformadas em outras duas, ou seja:

$$c_i^2 \nabla^2 \theta + \nabla \cdot b = \ddot{\theta} \quad (3.6)$$

$$c_2^2 \nabla^2 \mathbf{w} + \nabla \times \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{w}} \quad (3.7)$$

onde,

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (3.8)$$

$$c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.9)$$

As duas constantes c_1 e c_2 têm dimensões de velocidade e dependem da densidade e das constantes elásticas do problema. As equações (3.6) e (3.7) são do mesmo tipo, sendo a primeira uma equação escalar de onda com velocidade de propagação c_1 e a segunda uma equação vetorial de onda com velocidade de propagação c_2 . Como estas equações se referem a dilatação e rotação, as constantes c_1 e c_2 são chamadas de velocidades de onda irrotacional e equivoluminal (Domingues, 1993), respectivamente.

Extrapolando a análise de um meio elástico para um meio viscoelástico, pode-se mostrar que não ocorre nenhuma mudança fundamental nas formulações quando são tratados problemas harmônicos no tempo. As equações de equilíbrio e equações cinemáticas são idênticas tanto para problemas elásticos como para viscoelásticos. A principal característica que diferencia as duas análises está relacionada somente com as equações constitutivas do material. Neste sentido, é preciso levar em conta que as constantes de Lamé (λ e μ) e também outros parâmetros derivados da mesma, assumem valores complexos quando são tratados problemas viscoelásticos. No tratamento de problemas puramente elásticos, simplesmente assume-se um valor nulo para a parte imaginária destas constantes. Os valores complexos das constantes de Lamé são freqüentemente escritos da seguinte forma:

$$\mu = \text{Re} [\mu] (1 + 2i \beta_\mu) \quad (3.10)$$

$$\lambda = \text{Re} [\lambda] (1 + 2i \beta_\lambda) \quad (3.11)$$

sendo $Re [\mu]$ e $Re [\lambda]$ as partes reais das constantes μ e λ , respectivamente. O parâmetro $\beta_{(\mu, \lambda)}$ é conhecido como fator de amortecimento. Geralmente, quando o coeficiente de *Poisson* é considerado real, assume-se que $\beta_\mu = \beta_\lambda = \beta_a$.

3.2.3 Condições iniciais e de contorno

As condições iniciais de um problema geral da elastodinâmica, são definidas em um domínio Ω para um tempo $t = 0$, ou seja:

$$u_i(x, 0) = u_{0i}(x) \quad (3.12)$$

$$\dot{u}_i(x, 0) = v_{0i}(x) \quad (3.13)$$

para todos os pontos x de um domínio Ω .

As condições de contorno são idênticas àquelas definidas na seção 2.2.7.

3.2.4 Ondas harmônicas no tempo

O estudo dos problemas harmônicos no tempo são aqueles onde todas as variáveis dependentes do tempo variam com o tempo na forma de $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$, sendo ω a frequência angular. As equações que governam este problema são bastante reduzidas ou seja, as equações de *Navier* e as equações de onda são simplificadas em equações contendo somente derivadas no espaço, fato este que permite a solução analítica de alguns problemas básicos. Em regiões elásticas e/ou em quaisquer regiões governadas pela equação de onda, os problemas harmônicos sujeitos a condições de contorno homogêneas oscilam harmônicamente através da frequência natural do sistema. Outro fato de grande importância a ser mencionado é que as funções harmônicas constituem uma classe completa de funções independentes. Qualquer função do tempo bem comportada pode ser escrita como uma integral de componentes harmônicos no tempo. Portanto, qualquer excitação dependente do tempo pode ser decomposta em uma integral (ou uma somatória) de excitações harmônicas no tempo. Consequentemente, sistemas lineares com comportamento no tempo podem ser estudados fazendo-se uma mudança do domínio do

tempo para o domínio da frequência. Assim, os resultados são calculados para cada frequência, podendo-se voltar ao domínio do tempo e, vice-versa.

No sentido de mostrar algumas idéias gerais da propagação de ondas (Love, 1904; Graff, 1975), esta seção é dedicado ao estudo do problema simples de propagação de ondas elásticas harmônicas no tempo. Sabe-se que em alguns problemas particulares, as equações gerais de *Navier* podem ser simplificadas através de equações de campo da elastodinâmica linear. Partindo da equação (3.7), quando as forças de volume são consideradas nulas, a equação geral de onda pode ser escrita como sendo:

$$\nabla^2 w = \frac{1}{c^2} \ddot{w} \quad (3.14)$$

onde c é uma constante com dimensão de velocidade e w pode ser um escalar ou um vetor dependendo do tipo da onda.

Como já foi dito, ondas harmônicas no tempo são aquelas cuja dependência no tempo é do tipo $\cos \omega t$, $\sin \omega t$, sendo ω a frequência angular. Usando uma notação complexa, a dependência no tempo pode ser escrita como $\exp [i\omega t]$ ou $\exp [-i\omega t]$. Neste caso, somente a parte real ou imaginária da função tem um significado físico. Um caso particular do problema de propagação de ondas pode ser demonstrado assumindo-se um meio-espaço elástico linear (Domingues, 1993) não perturbado ($x_1 \geq 0$), no qual uma pressão de superfície uniforme $p(t)$ é aplicada (Fig. 3.1).

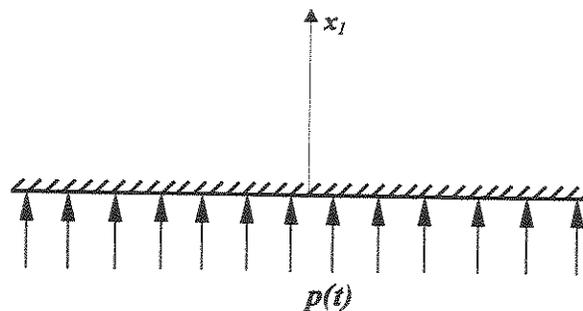


Figura 3.1 Meio-espaço sob pressão normal (Domingues, 1993).

A equação de equilíbrio deste problema é dada por:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (3.15)$$

onde $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$.

Em geral, assume-se para este problema unidimensional que a pressão tem uma dependência harmônica no tempo, ou seja:

$$p(t) = P e^{i\omega t} \quad (3.16)$$

A solução da equação (3.15), em termos de deslocamentos, é dada por:

$$u(x_1, t) = A e^{i\frac{\omega}{c}(ct-x_1)} + A' e^{i\frac{\omega}{c}(ct+x_1)} \quad (3.17)$$

onde A e A' são amplitudes independentes de x_1 e t . As funções $\exp [i(\omega/c)(ct-x_1)]$ e $\exp [i(\omega/c)(ct+x_1)]$ representam ondas nas direções negativa e positiva do eixo x_1 , respectivamente.

A constante c assume os valores c_1 e c_2 para as ondas conhecidas como irrotacional e equivoluminal, respectivamente. O argumento $(\omega/c)(ct-x_1)$ é chamado de fase da onda e c a velocidade de fase. O deslocamento u_1 é uma função harmônica no tempo com um período T , onde $T = 2\pi/\omega$ e um comprimento de onda $\lambda_c = c(2\pi/\omega) = cT$. A quantidade $k = \omega/c$ é conhecida como número de onda. Ela indica o número de comprimentos de onda dentro de um comprimento 2π ($k = 2\pi/\lambda_c$). Quando a velocidade de fase, isto é, a velocidade de propagação não depende da frequência, o sistema é dito não dispersivo. Materiais elásticos são não dispersivos, enquanto que materiais não elásticos são, em geral, dispersivos. Uma certa perturbação pode sempre ser decomposta em componentes harmônicas no tempo. Se todas as componentes têm a mesma velocidade de propagação, independente da sua frequência, o movimento mantém sua forma e se propaga através do corpo.

A equação (3.17) representa uma onda unidimensional harmônica no tempo. As ondas harmônicas planas têm a seguinte forma:

$$\mathbf{u} = A e^{\frac{i\omega}{c}(\mathbf{c}\mathbf{t} - \mathbf{q}\mathbf{x})} \mathbf{d} \quad (3.18)$$

onde A é a amplitude real ou complexa, \mathbf{d} define a direção do movimento e \mathbf{q} a direção de propagação.

Particularmente, pode-se observar que existem dois tipos de ondas harmônicas no tempo em um domínio infinito, as ondas-P e as ondas-S, com velocidade de fase c_1 e c_2 , respectivamente. Os deslocamentos seguem a direção de propagação das ondas-P e são perpendiculares à direção de propagação das ondas-S.

3.2.5 Soluções Fundamentais

Com a intenção de descrever uma solução fundamental para o problema harmônico no tempo, ou estacionário, nesta seção será mostrada a decomposição do movimento de um corpo em suas partes irrotacional e equivoluminal, por meio de potenciais (Domingues, 1993). Esta representação foi utilizada no sentido de apresentar a solução fundamental para o estado harmônico constante ou estacionário.

A equação geral de campo da elastodinâmica pode ser escrita de forma semelhante à equação de Navier (3.5), ou seja:

$$c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - c_2^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\mathbf{b} \quad (3.19)$$

onde $c_1 = (\lambda + 2\mu/\rho)^{1/2}$ é a velocidade da onda-P, $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$ é a velocidade da onda-S, λ e μ são as constantes de Lamé, ρ é a densidade, $\rho\mathbf{b}$ é o vetor de forças de volume e \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos.

Para problemas harmônicos no tempo, a equação (3.19) pode ser escrita como sendo:

$$c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - c_2^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \omega^2 \mathbf{u} = -\mathbf{b} \quad (3.20)$$

A resposta de um meio elástico infinito para uma carga harmônica concentrada de frequência ω , será obtida de (3.20) fazendo-se $\rho \mathbf{b} = \Delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}$; onde $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta(x - \xi)$ é a função delta de Dirac, r é a distância do ponto de carregamento ξ e \mathbf{e} o vetor unitário que segue a direção do carregamento. Dois potenciais A_1 e A_2 podem ser usados para decompor o vetor de deslocamentos \mathbf{u} nas partes irrotacional e equivolumentar por meio de

$$\mathbf{u} = \nabla(\nabla A_1) - \nabla \times \nabla \times A_2 \quad (3.21)$$

Assume-se também que o vetor \mathbf{b} pode ser escrito em termos de um potencial escalar V ,

$$\rho \mathbf{b} = \nabla^2 V \mathbf{e} = (\nabla \nabla V - \nabla \times \nabla \times V) \mathbf{e} \quad (3.22)$$

Chamando $k_1 = i(\omega/c_1)$ e $k_2 = i(\omega/c_2)$, as equações (3.20), (3.21) e (3.22) levam a seguinte equação:

$$\begin{aligned} c_1^2 \nabla \nabla \left\{ \nabla \nabla A_1 - k_1^2 A_1 + \frac{V}{\rho c_1^2} \mathbf{e} \right\} + c_2^2 \nabla \times \nabla \\ \times \left\{ \nabla \times \nabla \times A_2 + k_2^2 A_2 - \frac{V}{\rho c_2^2} \mathbf{e} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

A equação (3.23) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_1^2 \nabla \nabla \left\{ \nabla \nabla A_1 - \nabla \times \nabla \times A_1 - k_1^2 A_1 + \frac{V}{\rho c_1^2} \mathbf{e} \right\} + \\ + c_2^2 \nabla \times \nabla \times \left\{ \nabla \times \nabla \times A_2 - \nabla \nabla A_2 + k_2^2 A_2 - \frac{V}{\rho c_2^2} \mathbf{e} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

A equação (3.24) será satisfeita se

$$\nabla^2 A_1 - k_1^2 A_1 = -\frac{V}{\rho c_1^2} e \quad (3.25)$$

$$\nabla^2 A_2 - k_2^2 A_2 = -\frac{V}{\rho c_2^2} e \quad (3.26)$$

Assumindo-se que A_1 e A_2 seguem a direção do carregamento ($A_1 = A_1 e$ e $A_2 = A_2 e$), as equações (3.25) e (3.26) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\nabla^2 A_1 - k_1^2 A_1 = -\frac{V}{\rho c_1^2} \quad (3.27)$$

$$\nabla^2 A_2 - k_2^2 A_2 = -\frac{V}{\rho c_2^2} \quad (3.28)$$

Ambas equações são do tipo

$$\nabla^2 A - k^2 A = -\frac{V}{\rho c^2} \quad (3.29)$$

No caso de domínio bidimensional, a solução fundamental pode ser obtida da equação (3.29), a partir da adoção da função delta de *Dirac* em termos de um potencial, ou seja:

$$\Delta(r) = \frac{1}{2\pi} \nabla^2 (\ln r) \Rightarrow V = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad (3.30)$$

Substituindo-se a equação (3.30) em (3.29), obtém-se:

$$\nabla^2 A - k^2 A = -\frac{1}{2\pi\rho c^2} \ln r \quad (3.31)$$

Uma solução particular de (3.31) é dada por

$$A_p = \frac{1}{2\pi\rho\omega^2} \ln r \quad (3.32)$$

A solução geral da equação homogênea, pode ser escrita como sendo

$$A_g = C_1 K_0(kr) + C_2 I_0(kr) \quad (3.33)$$

onde I_0 e K_0 são as funções modificadas de *Bessel* de primeiro e segundo tipo e ordem zero.

As equações finais para os dois potenciais assumidos inicialmente, são dadas por:

$$A_1 = -\frac{1}{2\pi\rho\omega^2} \ln r + C_{11} K_0(k_1 r) + C_{21} I_0(k_1 r) \quad (3.34)$$

$$A_2 = -\frac{1}{2\pi\rho\omega^2} \ln r + C_{12} K_0(k_2 r) + C_{22} I_0(k_2 r) \quad (3.35)$$

Os deslocamentos e tensões são obtidos a partir da diferenciação das equações (3.34) e (3.35). As constantes podem ser obtidas das condições de equilíbrio e radiação. Os termos $I_0(k_i r)$ representam ondas chegando de um campo distante em direção à origem, então $C_{21} = C_{22} = 0$. Por meio do equilíbrio de uma pequena região circular ao redor do carregamento, os valores para as constantes C_{11} e C_{12} são dadas por:

$$C_{11} = C_{12} = -\frac{1}{2\pi\rho\omega^2} \quad (3.36)$$

Substituindo-se as equações (3.36), (3.34) e (3.35) na equação (3.21), obtêm-se que quando o carregamento é aplicado em uma direção i apresentará o seguinte deslocamento na direção j :

$$u_{ij}^* = \frac{1}{2\pi\rho c_2^2} [\psi \delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j}] \quad (3.37)$$

onde

$$\psi = K_0(k_2 r) + \frac{1}{k_2 r} \left[K_1(k_2 r) - \frac{c_2}{c_1} K_1(k_1 r) \right] \quad (3.38)$$

$$\chi = K_2(k_2 r) - \frac{c_2^2}{c_1^2} K_2(k_1 r) \quad (3.39)$$

A componente j do esforço de superfície na qual a normal externa ao contorno é n , quando um carregamento unitário é aplicado em uma direção i , é dada por:

$$\begin{aligned} t_{ij}^* = & \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r} \chi \right) \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_i \right) \right. \\ & - \frac{2}{r} \chi \left(n_j r_{,i} - 2 r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 \frac{d\chi}{dr} r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \\ & \left. + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{1}{r} \chi \right) r_{,i} n_j \right] \quad (3.40) \end{aligned}$$

As expressões para as soluções fundamentais de deslocamentos e esforços de superfície u_{ij}^* e t_{ij}^* são dadas pelas equações (3.37) e (3.40), respectivamente. As funções χ e ψ , apresentadas pelas equações (3.38) e (3.39) podem ser escritas de maneira mais conveniente, no sentido de obter as suas derivadas, assim:

$$\psi = K_0\left(\frac{i\omega r}{c_2}\right) + \frac{c_2}{i\omega r} \left[K_1\left(\frac{i\omega r}{c_2}\right) - \frac{c_2}{c_1} K_1\left(\frac{i\omega r}{c_1}\right) \right] \quad (3.41)$$

$$\chi = K_2 \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) - \frac{c_2^2}{c_1^2} K_2 \left(\frac{i\omega r}{c_1} \right) \quad (3.42)$$

Levando-se em conta que

$$\frac{d}{dr} K_0(k_i r) = -K_1(k_i r) k_i \quad (3.43)$$

$$\frac{d}{dr} K_1(k_i r) = -K_0(k_i r) k_i - \frac{1}{r} K_1(k_i r) \quad (3.44)$$

$$\frac{d}{dr} K_2(k_i r) = -K_1(k_i r) k_i - \frac{2}{r} K_2(k_i r) \quad (3.45)$$

As derivadas das funções χ e ψ são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dr} = i\omega K_1 \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) \left[\frac{2c_2}{\omega^2 r^2} - \frac{1}{c_2} \right] + K_1 \left(\frac{i\omega r}{c_1} \right) \frac{c_2^2}{c_1} \frac{2}{\omega r^2} \\ - K_0 \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) \frac{1}{r} + K_0 \left(\frac{i\omega r}{c_1} \right) \frac{c_2^2}{c_1^2} \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dr} = -K_1 \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) \frac{i\omega}{c_2} - \frac{2}{r} K_2 \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) \\ + \frac{c_2^2}{c_1^2} \frac{i\omega}{c_1} K_1 \left(\frac{i\omega r}{c_1} \right) + \frac{2}{r} \frac{c_2^2}{c_1^2} K_2 \left(\frac{i\omega r}{c_1} \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.3 Equações integrais da elastodinâmica linear estacionária

As equações diferenciais que regem a elastodinâmica linear, definidas sobre o domínio do problema na seção anterior, podem ser transformadas em equações integrais equivalentes, na qual podem estar definidas sobre o contorno deste domínio. Um dos meios de obter estas equações integrais de contorno está condicionado à utilização do teorema da reciprocidade para elastodinâmica, que é uma extensão do teorema da reciprocidade de *Betti*. A prova do teorema da reciprocidade pode ser feita a partir da equação de equilíbrio, ou seja, para um estado elastodinâmico em um domínio Ω com contorno Γ , a seguinte equação de equilíbrio é satisfeita em qualquer tempo (Domingues, 1993):

$$\sigma_{kj,j} + \rho b_k - \rho \ddot{u}_k = 0 \quad (3.48)$$

Assumindo-se um vetor contínuo $u^*(x, t)$ que é o deslocamento em outro estado elastodinâmico com tensão σ^* e força de volume b^* , definidos sobre o domínio Ω , pode-se escrever o resíduo ponderado da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} u_k^*) d\Omega + \int_{\Omega} \rho (b_k u_k^*) d\Omega - \int_{\Omega} \rho (\ddot{u}_k u_k^*) d\Omega = 0 \quad (3.49)$$

Através da regra da cadeia, pode-se escrever que:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{kj} u_k^*) = \sigma_{kj,j} u_k^* + \sigma_{kj} u_{k,j}^* \quad (3.50)$$

Utilizando-se na sequência o teorema da divergência, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{kj} u_k^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{kj} u_{k,j}^*) n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} (t_k u_k^*) d\Gamma \quad (3.51)$$

O primeiro termo da equação (3.49) pode ser obtido a partir de (3.50) e (3.51), ou seja:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj, j} u_k^*) d\Omega = - \int_{\Omega} (\sigma_{kj} u_{k, j}^*) d\Omega + \int_{\Gamma} (t_k u_k^*) d\Gamma \quad (3.52)$$

Lembrando-se neste ponto das leis de *Hooke*, das propriedades de comutação e distribuição e levando-se em conta a simetria do tensor de deformações, pode-se mostrar que:

$$\sigma_{kj}^* u_{kj} = \sigma_{kj}^* \varepsilon_{kj} = \varepsilon_{kj} \sigma_{kj}^* = u_{kj} \sigma_{kj}^* \quad (3.53)$$

Levando-se em conta a equação (3.53) e aplicando-se uma segunda integração por partes na equação (3.52), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj, j} u_k^*) d\Omega = \int_{\Omega} (u_k \sigma_{kj, j}^*) d\Omega - \int_{\Omega} (u_k t_k^*) d\Omega + \int_{\Gamma} (t_k u_k^*) d\Gamma \quad (3.54)$$

Para transformar o termo que contém a aceleração na equação (3.49), as seguintes identidades podem ser obtidas do cálculo matemático:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_k u_k^*) = \dot{u}_k u_k^* + u_{ok} u_k^* \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_k u_k^*) = \frac{\partial}{\partial t} (\dot{u}_k u_k^*) + u_{ok} \dot{u}_k^* \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_k u_k^*) = \ddot{u}_k u_k^* + v_{ok} u_k^* + u_{ok} \dot{u}_k^* \quad (3.57)$$

onde $u_{ok} = u_k(x, 0)$ e $v_{ok} = \dot{u}_k(x, 0)$.

O termo recíproco da equação (3.57) é dado por:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_k^* u_k) = \ddot{u}_k^* u_k + v_{ok}^* u_k + u_{ok}^* \dot{u}_k \quad (3.58)$$

Fica claro que os primeiros termos das equações (3.57) e (3.58) são idênticos, então:

$$\ddot{u}_k u_k^* = \ddot{u}_k^* u_k + v_{ok}^* u_k + u_{ok}^* \dot{u}_k - v_{ok} u_k^* - u_{ok} \dot{u}_k^* \quad (3.59)$$

Substituindo-se a equação (3.54) e (3.59) na equação (3.49), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (u_k \sigma_{kj,j}^*) d\Omega - \int_{\Gamma} (u_k t_k^*) d\Gamma + \int_{\Gamma} (t_k u_k^*) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (b_k u_k^*) d\Omega - \\ & \int_{\Omega} \rho (\ddot{u}_k^* u_k + v_{ok}^* u_k + u_{ok}^* \dot{u}_k - v_{ok} u_k^* - u_{ok} \dot{u}_k^*) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Como foi assumido que o vetor $u^*(x, t)$ era o deslocamento em outro estado elastodinâmico com tensão σ^* e força de volume b^* , definidos sobre um domínio Ω , pode-se escrever então que:

$$\sigma_{kj,j}^* - \rho \ddot{u}_k^* = -\rho b_k^* \quad (3.61)$$

Finalmente, a substituição da equação (3.61) na equação (3.60) leva a expressão matemática do teorema da reciprocidade entre dois estados elastodinâmicos. Portanto, a seguinte relação de reciprocidade pode ser escrita:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (t_k u_k^*) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (b_k u_k^* + u_{ok} \dot{u}_k^* + v_{ok} u_k^*) d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma} (t_k^* u_k) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (b_k^* u_k + u_{ok}^* \dot{u}_k + v_{ok}^* u_k) d\Omega \end{aligned} \quad (3.62)$$

sendo que os termos de deslocamentos, esforços de superfície, forças de volume, deslocamentos iniciais e velocidades iniciais do primeiro estado são denotados por u , t , b , u_0 e v_0 , respectivamente. Os termos do segundo estado são representados por u^* , t^* , b^* , u_0^* e v_0^* .

Se os dois estados elastodinâmicos tem a mesma frequência natural ω e são harmônicos no tempo, os produtos de convolução da equação (3.62) se transformam em produtos escalares (Domingues, 1993). Também, se os valores das condições iniciais são os mesmos valores do estado constante, os termos que representam as condições iniciais de ambos os lados da equação (3.62) tornam-se idênticos. Então, a relação de reciprocidade para o estado elastodinâmico harmônico no tempo de mesma frequência, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} t_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_k u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_k^* u_k d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_k^* u_k d\Omega \quad (3.63)$$

sendo que as variáveis u_k , t_k , b_k , u_k^* , t_k^* e b_k^* assumem valores reais ou complexos que dependem de x e da frequência natural ω .

A representação integral do deslocamento u de um ponto i de um estado elastodinâmico harmônico no tempo é obtido da equação (3.63). Primeiramente, assume-se que o segundo estado é a solução fundamental para um carregamento unitário harmônico no tempo aplicado ao longo de uma direção j do ponto i , ou seja:

$$\rho b_k^* = \Delta(r) \delta_{jk} \quad (3.64)$$

sendo $\Delta(r)$ a função delta de Dirac e r a distância do ponto i .

Aplicando-se a equação (3.64) no último termo da integral de domínio da equação (3.63), pode-se escrever que:

$$\int_{\Omega} \rho b_k^* u_k d\Omega = \int_{\Omega} \Delta(r) u_k \delta_{jk} d\Omega = u_j^i \quad (3.65)$$

Considerando-se a equação (3.65), a equação (3.63) pode ser escrita da seguinte forma:

$$u_j^i + \int_{\Gamma} t_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{jk}^* t_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{jk}^* \rho b_k d\Omega \quad (3.66)$$

A equação (3.66) é a representação integral do deslocamento em qualquer ponto interno ao domínio Ω em termos dos valores de contorno u_k e t_k , das forças de volume e das soluções fundamentais conhecidas. Esta equação é válida em qualquer ponto i onde o ponto de carregamento é aplicado. Na ausência de forças de volume, a representação integral de deslocamentos dos pontos internos, é dada por:

$$u_j^i + \int_{\Gamma} t_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{jk}^* t_k d\Gamma \quad (3.67)$$

A equação (3.67) calcula os deslocamentos em qualquer ponto interno uma vez que os deslocamentos e forças de superfície do contorno sejam conhecidos. Conseqüentemente, somente quando os valores de contorno forem determinados os valores dos pontos internos podem ser encontrados. Como esta equação é válida em qualquer ponto do domínio Ω , incluindo o contorno Γ , uma equação integral de contorno pode ser obtida levando-se a mesma para o contorno. Para transformar a equação (3.67) numa relação com apenas valores do contorno é necessário um artifício. Assumindo-se que o contorno é suave, acrescenta-se ao domínio uma pequena região, de raio φ , com seu centro sobre o ponto i , conforme mostra a Figura 3.2.

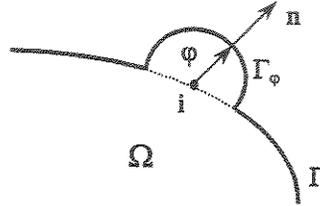


Figura 3.2 Acréscimo de um domínio infinitesimal.

Tomando o limite ou seja, fazendo-se o raio φ se aproximar de zero, existem dois tipos de integrais de contorno na equação (3.67) a serem consideradas. Considerando-se inicialmente a integral de contorno do lado direito desta equação e escrevendo a mesma em função do contorno Γ_φ , obtém-se:

$$\int_{\Gamma} u_{jk}^* t_k d\Gamma = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varphi} u_{jk}^* t_k d\Gamma \right\} + \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varphi} u_{jk}^* t_k d\Gamma \right\} \quad (3.68)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (3.68) é convertido em um valor principal de *Cauchy* sobre o contorno Γ , quando $\varphi \rightarrow 0$. O segundo termo pode ser escrito da seguinte forma:

$$t_k^i \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varphi} u_{jk}^* d\Gamma \right\} \quad (3.69)$$

Analisando a equação (3.69), pode-se observar que a solução fundamental do deslocamento é da ordem de $\ln \varphi$. Conseqüentemente a integral de contorno desta equação produzirá como resultado φ . Portanto, quando φ tende a zero, a equação (3.69) tem o mesmo comportamento, ou seja:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varphi} u_{jk}^* d\Gamma \right\} \equiv 0 \quad (3.70)$$

Considerando-se este desenvolvimento, pode-se concluir que as integrais analisadas não são afetadas por nenhuma singularidade no ponto i . Entretanto, a integral do lado esquerdo da equação (3.67), descreve um comportamento diferente. No limite, esta integral pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} t_{jk}^* u_k d\Gamma = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varphi} t_{jk}^* u_k d\Gamma \right\} + \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varphi} t_{jk}^* u_k d\Gamma \right\} \quad (3.71)$$

A primeira integral do lado direito da equação (3.71) pode ser entendida como sendo um valor principal de *Cauchy* sobre o contorno Γ , quando $\varphi \rightarrow 0$. O limite da segunda integral pode ser escrito da seguinte forma:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varphi} t_{jk}^* u_k d\Gamma \right\} = u_k^i \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varphi} t_{jk}^* d\Gamma \right\} \quad (3.72)$$

Pode-se observar agora que a solução fundamental dos esforços de superfície t_{jk}^* são da ordem de $1/\varphi$, enquanto que os termos resultantes da integração sobre o contorno da região acrescida são da ordem de φ . Como conseqüência, a equação integral (3.72) não desaparece quando $\varphi \rightarrow 0$. A substituição nessa equação da solução fundamental t_{jk}^* , equações (3.40), (3.42), (3.46) e (3.47) e também a integração sobre o contorno $\Gamma\varphi$, apresenta o seguinte resultado:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varphi} t_{jk}^* u_k d\Gamma \right\} = -\frac{1}{2} \delta_{jk} \quad (3.73)$$

O lado esquerdo da equação (3.71) pode ser escrita no limite como sendo,

$$\int_{\Gamma} t_{jk}^* u_k d\Gamma - \frac{1}{2} \delta_{jk} u_k^i = \int_{\Gamma} t_{jk}^* u_k d\Gamma - \frac{1}{2} u_j^i \quad (3.74)$$

onde as integrais sobre o contorno Γ são entendidas no sentido do Valor Principal de *Cauchy*.

Finalmente, a equação integral (3.67) para pontos do contorno se transforma em:

$$c_{jk}^i u_k^i + \int_{\Gamma} t_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{jk}^* t_k d\Gamma \quad (3.75)$$

onde c_{jk} é uma matriz de valores constantes e depende apenas da geometria do contorno.

A equação integral de contorno (3.75) permite a resolução de problemas gerais da elastodinâmica estacionária. Esta equação é idêntica ao problema elastostático, exceto pelas soluções fundamentais.

3.4 Equações básicas da dinâmica estacionária de placas finas

Esta seção trata da obtenção das equações diferenciais de movimento da dinâmica estacionária de placas finas através do equilíbrio dinâmico de um elemento infinitesimal de placa (Figura 2.7, Capítulo 2), sujeito agora a um dado carregamento dinâmico e esforços de momento fletor e força cortante.

3.4.1 Hipóteses básicas

Seguindo as bases da teoria clássica de Kirchhoff (1850), assume-se para o problema dinâmico estacionário de placas finas as mesmas hipóteses apresentadas na seção 2.5 do Capítulo 2. Contudo, semelhantemente o caso elastodinâmico estacionário, os problemas dinâmicos de placa fina, harmônicos no tempo, também apresentam o seguinte comportamento:

- i) Neste tipo de problema, as variáveis dependentes do tempo variam harmonicamente na forma de $\sin \omega t$ ou $\cos \omega t$.
- ii) Sob condições de contorno homogêneas, uma região elástica bidimensional, no caso a placa, oscila harmonicamente de acordo com a frequência natural do sistema.

3.4.2 Equações constitutivas

Fazendo-se o equilíbrio dinâmico do elemento infinitesimal de placa da Figura 2.7, deve-se observar agora que existem três equações do movimento a serem aplicadas para as forças, contudo, somente aquela relacionada à direção x_3 não é trivial. Em contrapartida, das três equações do movimento a serem aplicadas para os momentos, aquela relacionada ao eixo x_3 vale zero. As três equações do movimento remanescentes, são dadas por:

$$\begin{aligned}
 -Q_{11} dx_2 + \left(Q_{11} + \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 - Q_{22} dx_1 + \left(Q_{22} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 \\
 + g dx_1 dx_2 = \rho h dx_1 dx_2 \ddot{w}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
 \left(M_{22} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 - M_{22} dx_1 + M_{12} dx_2 - \left(M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \\
 - Q_{22} dx_1 dx_2 = 0
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}
 \left(M_{11} + \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 - M_{11} dx_2 + \left(M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 - M_{21} dx_1 \\
 - Q_{11} dx_1 dx_2 = 0
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

onde $w = w(x_1, x_2, t)$ é o deslocamento transversal na direção x_3 da placa, ρ é a densidade de massa, h é a espessura uniforme, $g = g(x_1, x_2, t)$ é o carregamento dinâmico na direção x_3 da placa e $\ddot{w} = \ddot{w}(x_1, x_2, t)$ representa a segunda derivada do deslocamento transversal w em relação ao tempo t .

Os deslocamentos $w(x_1, x_2, t)$ que aparecem na equação (3.76) representam o deslocamento do plano médio da placa. Na seqüência, pode-se notar que os efeitos que dizem respeito a inércia rotatória foram negligenciados nas equações dos momentos (3.77) e (3.78). Da mesma forma, foram negligenciadas as contribuições de ordem superior para os momentos advindos do carregamento dinâmico g . Assim, cancelando convenientemente os termos e escrevendo na forma indicial, as equações do movimento se reduzem a:

$$\frac{\partial Q_{ii}}{\partial x_i} + g = \rho h \ddot{w} \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} - Q_{ii} = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.80)$$

Considerando-se a simetria do tensor dos momentos ($M_{ji} = M_{ij}$), derivando-se as forças cortantes nas equações de equilíbrio (3.80) e substituindo-se as mesmas em (3.79), obtém-se uma equação diferencial em termos dos momentos fletores:

$$\frac{\partial^2 M_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} + g = \rho h \ddot{w} \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.81)$$

A equação diferencial em termos de momentos fletores (3.81), relacionada com os deslocamentos transversais w da placa, é dada por:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} - \frac{g}{D} = -\frac{\rho h}{D} \ddot{w} \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.82)$$

A equação (3.82), expressa em função dos deslocamentos transversais w , representa a equação diferencial de movimento de uma placa fina sujeita a um carregamento dinâmico g . Esta equação é normalmente escrita em sua forma implícita:

$$\nabla^2(\nabla^2 w) + \frac{\rho h}{D} \ddot{w} = \frac{g}{D} \quad (3.83)$$

O Laplaciano do Laplaciano, chamado operador biharmônico, é dado por:

$$\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2) \quad (3.84)$$

3.4.3 Condições iniciais e de contorno

As condições iniciais de um problema dinâmico estacionário de placas finas são definidas em um domínio Ω para um tempo $t = 0$, ou seja:

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad e \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial n} = \frac{\partial w_0(x)}{\partial n} \quad (3.85)$$

$$\dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x) \quad e \quad \frac{\partial \dot{w}(x, 0)}{\partial n} = \frac{\partial \dot{w}_0(x)}{\partial n} \quad (3.86)$$

As condições de contorno a serem adotadas para o problema dinâmico estacionário de placas finas, no caso de vinculações clássicas e um sistema genérico de coordenadas como o da Figura 2.8, são idênticas àquelas apresentadas no Capítulo 2 para o problema estático.

3.4.4 Equações constitutivas em coordenadas cilíndricas

Pode-se definir novamente as expressões de momento fletor M_n , momento torçor M_{ns} e força cortante equivalente V_n , definidas no sistema de coordenadas (ns) (Capítulo 2) em um sistema de coordenadas cilíndricas $(r\bar{\theta})$, conforme mostra a Figura 3.3.

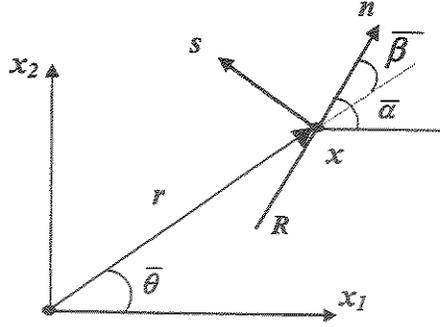


Figura 3.3 Relacionamento entre os sistemas de coordenadas.

Denotando-se por $\bar{\beta}$ o ângulo formado entre a direção radial e o vetor normal ao contorno, tem-se que $\bar{\beta} = \bar{\alpha} - \bar{\theta}$. A partir desta definição e considerando w em função das coordenadas cilíndricas mostradas na Figura 3.3, pode-se escrever que:

$$M_n = \frac{D}{2} \left\{ -(1+\nu)\nabla^2 w + (1-\nu) \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \cos 2\bar{\beta} - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \sin 2\bar{\beta} \right] \right\} \quad (3.87)$$

$$M_{ns} = -\frac{D(1-\nu)}{2} \left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \sin 2\bar{\beta} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \cos 2\bar{\beta} \right\} \quad (3.88)$$

Desde que o momento torçor M_{ns} dependa do ângulo $\bar{\beta}$ (ou $\bar{\alpha}$), como também de r e $\bar{\theta}$ (ou x_1 e x_2), pode-se observar que a derivada da tangente ao contorno contém termos adicionais. Sendo assim, $1/R$ é a curvatura em um ponto regular do contorno da placa. Conseqüentemente, adotando-se como convenção de sinal que uma curvatura negativa indica que o centro de curvatura está sobre o vetor normal para fora, pode-se escrever que:

$$\frac{d\bar{\alpha}}{ds} = \frac{1}{R} \quad (3.89)$$

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = \frac{1}{R} - \frac{\cos \bar{\beta}}{r} \quad (3.90)$$

A expressão para a força cortante equivalente, em coordenadas cilíndricas, é dada por:

$$V_n = \left[-D \frac{d}{dr} \nabla^2 w + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} M_{ns} - \frac{\partial}{\partial \beta} M_{ns} \right) \right] \cos \bar{\beta} - \left[\frac{D}{r} \frac{d}{d\theta} \nabla^2 w + \frac{\partial}{\partial r} M_{ns} \right] \text{sen } \bar{\beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} M_{ns} \quad (3.91)$$

3.4.5 Solução fundamental

A utilização de equações integrais, para a solução do problema dinâmico estacionário de placas finas, implica na necessidade do estudo de soluções fundamentais específicas na qual representem adequadamente o comportamento dinâmico do problema. Entende-se por solução fundamental, a resposta em um ponto genérico x de um domínio, denominado domínio fundamental, causada pela aplicação de uma carga unitária em outro ponto ξ deste domínio (Figura 3.4). Em geral, é considerado como domínio fundamental o domínio infinito. A carga unitária aplicada é normalmente representada pela função delta de Dirac $\Delta(\xi, x)$.

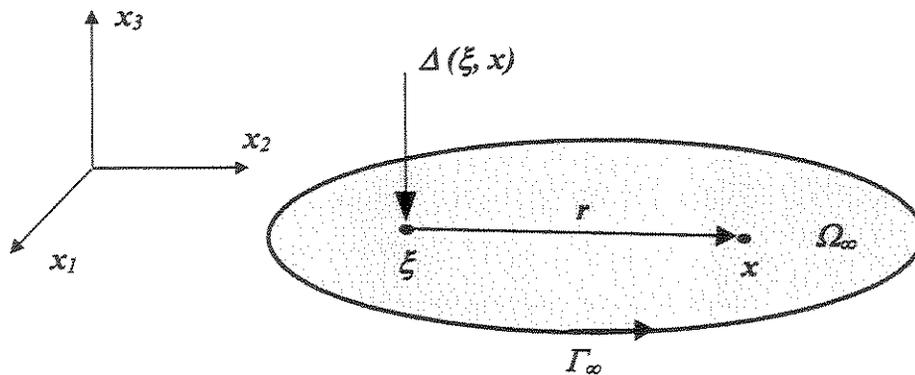


Figura 3.4 Resposta em x devido a uma distribuição delta de Dirac $\Delta(\xi, x)$.

Para a obtenção da solução fundamental da dinâmica estacionária de placas finas, adota-se um sistema de coordenadas cilíndricas de origem no ponto ξ , conforme mostra a Figura 3.5.

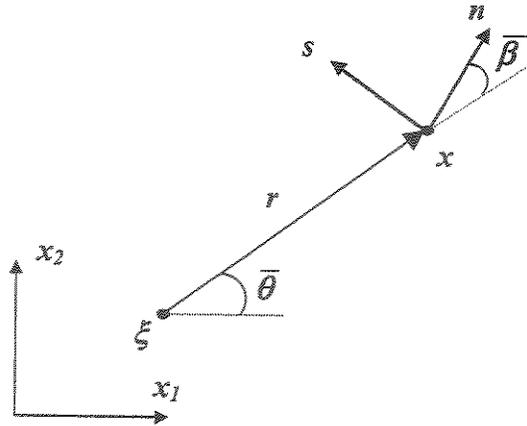


Figura 3.5 Ponto de carregamento ξ e de deslocamento x .

A solução fundamental em questão, denotada por w^* , é obtida com a resolução da equação diferencial de movimento da placa (equação 3.85) para todos os pontos do domínio fundamental, exceto no ponto de carregamento. Com base na teoria clássica de pequenas deformações, a equação (3.85) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla^4 w' + \frac{\rho h}{D} \ddot{w}' = \frac{g'}{D} \quad (3.92)$$

Considerando-se a hipótese de que o carregamento g' varia exponencialmente com o tempo, ou seja, movimento periódico e harmônico, conclui-se que o deslocamento w' também varia com o tempo, isto é:

$$g'(x_1, x_2, t) = g(x_1, x_2) \exp [i \omega t] \quad (3.93)$$

$$w'(x_1, x_2, t) = w(x_1, x_2) \exp [i \omega t] \quad (3.94)$$

onde $g(x_1, x_2)$ e $w(x_1, x_2)$ são as amplitudes de carregamento e deslocamento, respectivamente e ω é a frequência de vibração.

Substituindo-se as equações (3.93) e (3.94) em (3.92), obtém-se:

$$\nabla^4 w - \eta^4 w = \frac{g}{D} \quad (3.95)$$

onde

$$\eta^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad (3.96)$$

A solução fundamental $w^* = w^*(\xi, x)$ da equação (3.95) é definida por:

$$\nabla^4 w^* - \eta^4 w^* = -\Delta(\xi, x) \quad (3.97)$$

onde $\Delta(\xi, x)$ é a função delta de *Dirac* e representa o deslocamento no ponto x de uma placa infinita, devido a um carregamento unitário concentrado no ponto ξ

De acordo com Vivoli e Filippi (1974), Niwa et. al. (1981) e Beskos (1991), a solução da equação (3.97) tem a forma:

$$w^* = -\frac{i}{8\eta^2} [H_0^{(1)}(\eta r) - H_0^{(1)}(i\eta r)] \quad (3.98)$$

ou

$$w^* = -i C_1 J_0(\eta r) + C_1 Y_0(\eta r) + C_2 K_0(\eta r) \quad (3.99)$$

com

$$r = \left\{ [x_1(x) - x_1(\xi)]^2 + [x_2(x) - x_2(\xi)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.100)$$

$$C_1 = \frac{1}{8\eta^2} \quad (3.101)$$

$$C_2 = \frac{1}{4\pi\eta^2} \quad (3.102)$$

sendo que o termo $H_0^{(1)}$ representa a função de *Hankel* de ordem zero e primeiro tipo, os termos J_0 e Y_0 representam as funções de *Bessel* de ordem zero e primeiro e segundo tipo, respectivamente. O termo K_0 representa a função modificada de *Bessel* de ordem zero e segundo tipo e $i = \sqrt{-1}$.

As soluções fundamentais (3.98) e (3.99) satisfazem a condição de radiação de *Sommerfeld* no infinito (Vivoli e Filippi, 1974; Beskos, 1991), isto é:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial w^*}{\partial r} - i\eta w^* \right) = O(r^{-3/2}) \quad (3.103)$$

A condição de radiação de *Sommerfeld* leva em conta que somente as ondas emitidas estão presentes em uma placa infinita (Vivoli e Filippi, 1974).

A partir da solução fundamental (3.99), são obtidos os deslocamentos e esforços em um ponto x genérico do domínio fundamental. Especificamente, as componentes de momento fletor, a derivada do deslocamento transversal e a força cortante equivalente, referidas a um sistema de coordenadas localizado no ponto x (Figura 3.5), são determinadas a partir da equação (3.99), da seguinte forma (Vivoli e Filippi, 1974; Niwa et. al., 1981; Beskos, 1991):

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = i C_1 \eta J_1(\eta r) \cos \bar{\beta} - \eta [C_1 Y_1(\eta r) + C_2 K_1(\eta r)] \cos \bar{\beta} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} M_n^* = & -i \left\{ C_1 \frac{D}{2} [1 + \nu + (1 - \nu) \cos 2\bar{\beta}] \eta^2 J_0(\eta r) - C_1 D \eta (1 - \nu) \frac{J_1(\eta r)}{r} \cos 2\bar{\beta} \right\} \\ & + \frac{D}{2} \left\{ \eta^2 [1 + \nu + (1 - \nu) \cos 2\bar{\beta}] [C_1 Y_0(\eta r) - C_2 K_0(\eta r)] \right. \\ & \left. - 2\eta (1 - \nu) \frac{1}{r} [C_1 Y_1(\eta r) + C_2 K_1(\eta r)] \cos 2\bar{\beta} \right\} \quad (3.105) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{ns}^* = iC_1 \frac{D(1-\nu)}{2} & \left[\eta^2 J_0(\eta r) - 2\eta \frac{J_1(\eta r)}{r} \right] \text{sen } 2\bar{\beta} \\
& - \frac{D(1-\nu)}{2} \left\{ \eta^2 [C_1 Y_0(\eta r) - C_2 K_0(\eta r)] \right. \\
& \left. - \frac{2\eta}{r} [C_1 Y_1(\eta r) + C_2 K_1(\eta r)] \right\} \text{sen } 2\bar{\beta}
\end{aligned} \tag{3.106}$$

$$\begin{aligned}
V_n^* = iC_1 D & \left\{ J_1(\eta r) \left[\eta^3 \cos \bar{\beta} + \frac{\eta^3(1-\nu)}{2} \text{sen } 2\bar{\beta} \text{sen } \bar{\beta} + \frac{2\eta(1-\nu)}{r} \left(\frac{\cos 3\bar{\beta}}{r} - \frac{\cos 2\bar{\beta}}{R} \right) \right] \right. \\
& + (1-\nu) \eta^2 J_0(\eta r) \left(\frac{\cos 2\bar{\beta}}{R} - \frac{\cos 3\bar{\beta}}{r} \right) \left. \right\} - D \eta^3 [C_1 Y_1(\eta r) - C_2 K_1(\eta r)] \cos \bar{\beta} \\
& + D(1-\nu) \left\{ \frac{\eta^2}{r} [C_1 Y_0(\eta r) - C_2 K_0(\eta r)] - \frac{2\eta}{r^2} [C_1 Y_1(\eta r) + C_2 K_1(\eta r)] \cos 3\bar{\beta} \right\} \\
& - D(1-\nu) \left\{ \frac{\eta^2}{R} [C_1 Y_0(\eta r) - C_2 K_0(\eta r)] - \frac{2\eta}{rR} [C_1 Y_1(\eta r) + C_2 K_1(\eta r)] \cos 2\bar{\beta} \right\} \\
& - \frac{D(1-\nu)}{2} \eta^3 [C_1 Y_1(\eta r) - C_2 K_1(\eta r)] \text{sen } 2\bar{\beta} \text{sen } \bar{\beta}
\end{aligned} \tag{3.107}$$

onde J_0 e Y_0 representam as funções de *Bessel* de ordem zero e primeiro e segundo tipo, respectivamente, J_1 e Y_1 representam as funções de *Bessel* de ordem um e primeiro e segundo tipo, respectivamente. Os termos K_0 e K_1 representam as funções modificadas de *Bessel* de ordem zero e um e segundo tipo, $1/R$ denota a curvatura em um ponto regular do contorno e $i = \sqrt{-1}$. O ângulo $\bar{\beta}$ é definido de acordo com a Figura 3.5, assim:

$$\cos \bar{\beta} = \bar{r} \cdot \bar{n} \tag{3.108}$$

$$\text{sen } \bar{\beta} = -\bar{r} \cdot \bar{s} \tag{3.109}$$

onde \bar{r} é um versor associado ao vetor $\vec{\xi}_x$ e,

$$\cos 2\bar{\beta} = \cos^2 \bar{\beta} - \text{sen}^2 \bar{\beta} \quad (3.110)$$

$$\text{sen} 2\bar{\beta} = 2 \text{sen} \bar{\beta} \cos \bar{\beta} \quad (3.111)$$

$$\cos 3\bar{\beta} = \cos^3 \bar{\beta} - 3 \cos \bar{\beta} \text{sen}^2 \bar{\beta} \quad (3.112)$$

Também existe interesse especial em determinar a solução fundamental da derivada do deslocamento fundamental e as respectivas derivadas dos esforços fundamentais em relação à um sistema de coordenadas (mu) definido no ponto x , conforme mostra a Figura 3.6.

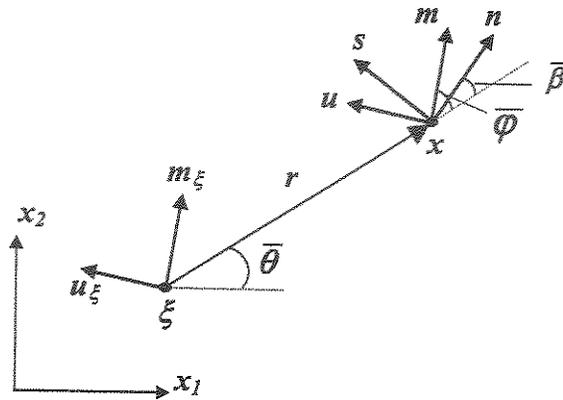


Figura 3.6 Sistema de coordenadas mu com origem no ponto de deslocamento x .

A expressão para a solução fundamental da derivada do deslocamento fundamental, em relação à coordenada m da Figura 3.6, é dada por (Beskos, 1991):

$$\frac{\partial}{\partial m}(w^*) = -i C_1 J_1(\eta r) \cos \bar{\varphi} + C_1 Y_1(\eta r) \cos \bar{\varphi} + C_2 K_1(\eta r) \cos \bar{\varphi} \quad (3.113)$$

e para a rotação,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right) &= -i C_1 \left[\eta J_0(\eta r) \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\beta} - \frac{J_1(\eta r)}{r} \cos(\bar{\varphi} - \bar{\beta}) \right] \\ &+ \eta [C_1 Y_0(\eta r) - C_2 K_0(\eta r)] \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\beta} \\ &- \frac{1}{r} [C_1 Y_1(\eta r) + C_2 K_1(\eta r)] \cos(\bar{\varphi} - \bar{\beta}) \end{aligned} \quad (3.114)$$

As respectivas derivadas dos esforços fundamentais em relação à coordenada m da Figura 3.6, são dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m}(M_n^*) = & -iC_1 D \left\{ J_1(\eta r) \left[\frac{\eta^2}{2} \cos \bar{\varphi} (1 + \nu + (1 - \nu) \cos 2\bar{\beta}) - \frac{2(1 - \nu)}{r^2} \cos(\bar{\varphi} - 2\bar{\beta}) \right] \right. \\
& \left. + (1 - \nu) \eta \frac{J_0(\eta r)}{r} \cos(\bar{\varphi} - 2\bar{\beta}) \right\} + \frac{D \eta^2}{2} [C_1 Y_1(\eta r) - C_2 K_1(\eta r)] \bullet \\
& \bullet [1 + \nu + (1 - \nu) \cos 2\bar{\beta}] \cos \bar{\varphi} + D(1 - \nu) \left\{ \frac{\eta}{r} [C_1 Y_0(\eta r) - C_2 K_0(\eta r)] \right. \\
& \left. - \frac{2}{r^2} [C_1 Y_1(\eta r) + C_2 K_1(\eta r)] \right\} \cos(\bar{\varphi} - 2\bar{\beta}) \quad (3.115)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m}(M_{ns}^*) = & iC_1 D(1 - \nu) \left\{ J_1(\eta r) \left[\frac{\eta^2}{2} \cos \bar{\varphi} \sin 2\bar{\beta} + \frac{2}{r^2} \sin(\bar{\varphi} - 2\bar{\beta}) \right] - \eta \frac{J_0(\eta r)}{r} \sin(\bar{\varphi} - 2\bar{\beta}) \right\} \\
& - \frac{D(1 - \nu)}{2} \eta^2 [C_1 Y_1(\eta r) - C_2 K_1(\eta r)] \cos \bar{\varphi} \sin 2\bar{\beta} \\
& + D(1 - \nu) \left\{ \frac{\eta}{r} [C_1 Y_0(\eta r) - C_2 K_0(\eta r)] - \frac{2}{r^2} [C_1 Y_1(\eta r) + C_2 K_1(\eta r)] \sin(\bar{\varphi} - 2\bar{\beta}) \right\} \quad (3.116)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m}(V_n^*) = & -iC_1 D \left\{ J_0(\eta r) \left[\eta^3 \left(\cos \bar{\varphi} \cos \bar{\beta} + \frac{(1 - \nu)}{2} \cos \bar{\varphi} \sin 2\bar{\beta} \sin \bar{\beta} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + (1 - \nu) \left(\cos(\bar{\varphi} - 3\bar{\beta}) - \frac{2\eta}{rR} \cos(\bar{\varphi} - 2\bar{\beta}) \right) \right] + J_1(\eta r) \left[\frac{\eta^2}{r} \left(-\cos(\bar{\varphi} - \bar{\beta}) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(1 - \nu)}{2} \left(\cos(\bar{\varphi} - 3\bar{\beta}) + \sin(\bar{\varphi} - 2\bar{\beta}) \sin \bar{\beta} + \cos 3\bar{\beta} \cos \bar{\varphi} \right) \right] \right\} \\
& - \frac{\eta^2}{R} (1 - \nu) \cos \bar{\varphi} \cos 2\bar{\beta} - \frac{6(1 - \nu)}{r^3} \cos(\bar{\varphi} - 3\bar{\beta}) + \frac{4}{r^2 R} (1 - \nu) \cos(\bar{\varphi} - 2\bar{\beta}) \left. \right\} \\
& + D \eta^3 [C_1 Y_0(\eta r) + C_2 K_0(\eta r)] \left(\cos \bar{\varphi} \cos \bar{\beta} + \frac{(1 - \nu)}{2} \cos \bar{\varphi} \sin 2\bar{\beta} \sin \bar{\beta} \right)
\end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned}
& + \frac{D\eta^2}{r} [C_1 Y_1(\eta r) - C_2 K_1(\eta r)] \left[-\cos(\bar{\varphi} - \bar{\beta}) + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\cos(\bar{\varphi} - 3\bar{\beta}) \operatorname{sen}(\bar{\varphi} - 2\bar{\beta}) \operatorname{sen} \bar{\beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \cos 3\bar{\beta} \cos \bar{\varphi} \right) \right] - \frac{D\eta^2}{R} [C_1 Y_1(\eta r) - C_2 K_1(\eta r)] [(1-\nu) \cos \bar{\varphi} \cos 2\bar{\beta}] \\
& + 3D(1-\nu) \left\{ \frac{\eta}{r^2} (C_1 Y_0(\eta r) - C_2 K_0(\eta r)) - \frac{2}{r^3} [C_1 Y_1(\eta r) + C_2 K_1(\eta r)] \cos(\bar{\varphi} - 3\bar{\beta}) \right\} \\
& - 2D(1-\nu) \left\{ \frac{\eta}{rR} (C_1 Y_0(\eta r) - C_2 K_0(\eta r)) - \frac{2}{r^2 R} [C_1 Y_1(\eta r) + C_2 K_1(\eta r)] \cos(\bar{\varphi} - 2\bar{\beta}) \right\}
\end{aligned} \tag{3.117}$$

onde novamente J_0 e Y_0 representam as funções de *Bessel* de ordem zero e primeiro e segundo tipo. J_1 e Y_1 representam as funções de *Bessel* de ordem um e primeiro e segundo tipo. Os termos K_0 e K_1 representam as funções modificadas de *Bessel* de ordem zero e um e segundo tipo e $i = \sqrt{-1}$. O ângulo $\bar{\varphi}$ é definido de acordo com a Figura 3.6, então:

$$\cos \bar{\varphi} = \bar{r} \cdot \bar{m} \tag{3.118}$$

$$\operatorname{sen} \bar{\varphi} = -\bar{r} \cdot \bar{u} \tag{3.119}$$

sendo \bar{r} é um versor associado ao vetor $\vec{\xi}_x$ e,

$$\cos(\bar{\varphi} - \bar{\beta}) = \cos \bar{\varphi} \cdot \cos \bar{\beta} + \operatorname{sen} \bar{\varphi} \cdot \operatorname{sen} \bar{\beta} \tag{3.120}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\bar{\varphi} - 2\bar{\beta}) &= \cos \bar{\varphi} \cdot \cos^2 \bar{\beta} + 2 \cdot \cos \bar{\beta} \cdot \operatorname{sen} \bar{\varphi} \cdot \operatorname{sen} \bar{\beta} \\
&\quad - \operatorname{sen} \bar{\varphi} \cdot \cos^2 \bar{\beta}
\end{aligned} \tag{3.121}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\bar{\varphi} - 3\bar{\beta}) &= \cos \bar{\varphi} \cdot \cos^3 \bar{\beta} + 3 \cdot \cos^2 \bar{\beta} \cdot \operatorname{sen} \bar{\varphi} \cdot \operatorname{sen} \bar{\beta} \\
&\quad - 3 \cos \bar{\varphi} \cdot \cos \bar{\beta} \cdot \operatorname{sen}^2 \bar{\beta} - \operatorname{sen} \bar{\varphi} \cdot \operatorname{sen}^3 \bar{\beta}
\end{aligned} \tag{3.122}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\bar{\varphi} - 2\bar{\beta}) &= \cos^2 \bar{\beta} \cdot \operatorname{sen} \bar{\varphi} - 2 \cdot \cos \bar{\varphi} \cdot \cos \bar{\beta} \cdot \operatorname{sen} \bar{\beta} \\
&\quad - \operatorname{sen} \bar{\varphi} \cdot \operatorname{sen}^2 \bar{\beta}
\end{aligned} \tag{3.123}$$

3.5 Equações integrais da dinâmica estacionária de placas finas

Esta seção tem a intenção de descrever uma equação integral para o problema dinâmico estacionário de placas finas. Das hipóteses formuladas para a resolução da equação diferencial da dinâmica estacionária de placas finas, pode-se observar que a forma estática da equação diferencial (3.95) sugere que uma representação integral para este problema pode ser facilmente encontrada com a aplicação da identidade de *Rayleigh-Green*. Esta identidade é uma relação recíproca entre dois estados elastostáticos em uma placa com N_c cantos, conforme descrito por Stern (1978) e Paiva (1987), para problemas estáticos de placa.

Na Figura 3.7, considera-se uma placa de domínio finito Ω e contorno Γ contida em outra de domínio infinito Ω_∞ e contorno Γ_∞ . A placa finita está submetida a um carregamento g distribuído em uma área Ω_g .

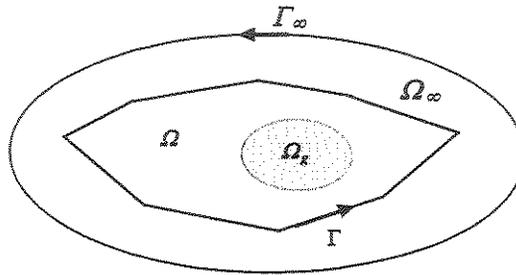


Figura 3.7 Placa finita contida em uma placa infinita.

Desta forma, são identificados dois estados de tensão σ e σ^* , com seus respectivos estados de deformação ε e ε^* . Consequentemente, os dois estados estão associados aos deslocamentos transversais w e w^* , resultando da seguinte equação:

$$D \int_{\Omega} (w^* \nabla^4 w - w \nabla^4 w^*) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega =$$

$$\int_{\Gamma} \left(V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (3.124)$$

sendo que o índice ‘*’ denota solução fundamental, N_c é o número total de cantos, w o deslocamento transversal, $\partial w / \partial n$ a rotação, V_n o esforço cortante equivalente, M_n o momento fletor, R_{ci} a reação de canto, g o carregamento e w_{ci} o deslocamento transversal do canto i da placa.

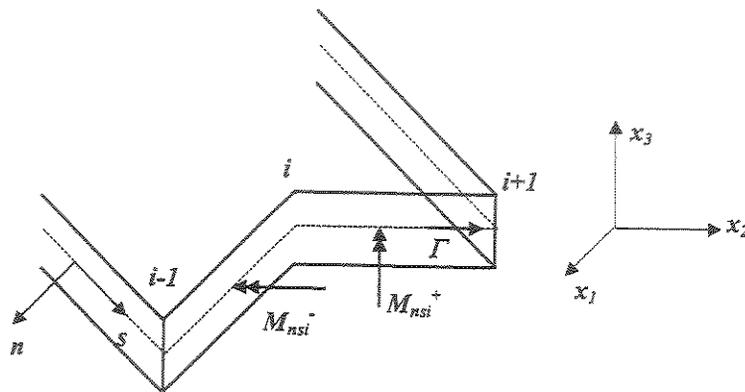


Figura 3.8 Canto i do contorno da placa.

A reação de canto R_{ci} , pode ser escrita a partir dos momentos torçores anterior e posterior ao canto da placa, conforme mostra a Figura 3.8, ou seja:

$$R_{ci} = M_{nsi}^+ - M_{nsi}^- \quad (3.125)$$

sendo, M_{ns}^+ e M_{ns}^- os momentos volventes posterior e anterior ao canto i da placa, respectivamente.

Lembrando-se de uma propriedade da função delta de Dirac, $\Delta(\xi, x)$, pode-se escrever que:

$$\int_{\Omega} w(x) \Delta(\xi, x) d\Omega = w(\xi) \quad (3.126)$$

Agora, supondo-se que o carregamento g^* seja uma carga concentrada unitária aplicada em um ponto ξ do domínio da placa, tomando-se como função ponderadora a solução fundamental e aplicando o resultado encontrado em (3.126), pode-se escrever a equação (3.124) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
w(\xi) + \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[V_n^*(\xi, x) w(x) - M_n^*(\xi, x) \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] d\Gamma(x) + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N R_{ci}^*(\xi, x_c) w_{ci}(x_c) = \\
\frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[V_n(x) w^*(\xi, x) - M_n(x) \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right] d\Gamma(x) + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N R_{ci}(x_c) w_{ci}^*(\xi, x_c) + \\
+ \frac{1}{D} \int_{\Omega_\varepsilon} g(x) w^*(\xi, x) d\Omega_\varepsilon(x) \quad (3.127)
\end{aligned}$$

A equação (3.127) representa uma equação integral de placas para deslocamentos em pontos do domínio da placa. Esta equação fornece deslocamentos em todos os pontos do domínio a partir das variáveis conhecidas do contorno tais como, força cortante equivalente (V_n), momento de flexão na direção normal (M_n), reação de canto (R_c), deslocamento transversal (w) e rotação em relação à normal ($\partial w/\partial n$).

Para transformar a equação (3.127), numa relação com apenas valores de contorno é necessário um artifício. Paiva (1987) considerou para um canto genérico um acréscimo no domínio do contorno circular, de raio ε , cujo centro coincide com o vértice deste canto, como mostra a Figura 3.9. Assim, acrescenta-se ao domínio uma pequena região Ω_ε de modo que o novo domínio seja dado por Ω e Ω_ε com um contorno $\Gamma + \Gamma_\varepsilon - \Gamma^*$.

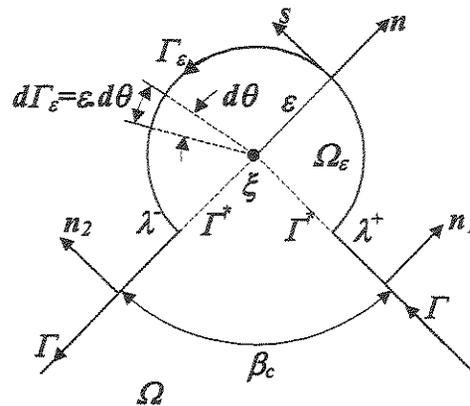


Figura 3.9 Contorno circular acrescentado a um canto da placa.

Fazendo-se com que o ponto de aplicação da carga ξ coincida com o vértice do canto, a equação (3.127) é satisfeita, já que ξ pertence ao novo domínio. O domínio modificado gera os cantos λ^- e λ^+ e sua integral para o ponto ξ , através de um processo limite, torna-se:

$$\begin{aligned}
C(\xi)w(\xi) + \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[V_n^*(\xi, x)w(x) - M_n^*(\xi, x) \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] d\Gamma(x) + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi, x_c)w_{ci}(x_c) = \\
\frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[V_n(x)w^*(\xi, x) - M_n(x) \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right] d\Gamma(x) + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c)w_{ci}^*(\xi, x_c) + \\
+ \frac{1}{D} \int_{\Omega_g} g(x)w^*(\xi, x) d\Omega_g(x) \quad (3.128)
\end{aligned}$$

Na equação (3.128), o termo $C(\xi)$ está relacionado ao ângulo interno do canto da placa β_c , com isso pode-se concluir que:

$$C(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \Omega \\ \frac{\beta_c}{2\pi}, & \xi \in \Gamma \\ 0, & \xi \notin (\Omega \cap \Gamma) \end{cases} \quad (3.129)$$

As variáveis de contorno da equação (3.128) são os deslocamentos $w(x)$ e $\partial w(x)/\partial n$ e os esforços $M_n(x)$ e $V_n(x)$, além da reação de canto $R_c(x)$. Em função da vinculação do contorno da placa, alguns valores são conhecidos e outros não. Voltando à seção anterior, uma das alternativas possíveis para a determinação dos valores desconhecidos é escrever também a equação integral correspondente à derivada do deslocamento w em relação à coordenada m_ξ de um sistema de coordenadas genérico (m_ξ, u_ξ) e de origem em ξ (ver Figura 3.6). Esta equação é obtida a partir de (3.127) e é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial m_\xi}(\xi) + \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m_\xi}(\xi, x)w(x) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m_\xi}(\xi, x) \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] d\Gamma(x) + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m_\xi}(\xi, x_c)w_{ci}(x_c) = \\
\frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[V_n(x) \frac{\partial w^*}{\partial m_\xi}(\xi, x) - M_n(x) \frac{\partial}{\partial m_\xi} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right) \right] d\Gamma(x) + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m_\xi}(\xi, x_c) + \\
+ \frac{1}{D} \int_{\Omega_g} g(x) \frac{\partial w^*}{\partial m_\xi}(\xi, x) d\Omega_g(x) \quad (3.130)
\end{aligned}$$

O processo limite da equação (3.130) para o contorno, resulta em duas equações integrais para a derivada do deslocamento em relação às duas normais anterior e posterior ao canto da placa (Figura 3.9). Cada uma dessas equações são escritas para os pontos anterior e posterior ao canto, sendo dadas por:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_c}{2\pi} \frac{\partial w}{\partial n_1}(\xi) + \frac{\nu}{2\pi} \operatorname{sen} \beta_c \frac{\partial w}{\partial n_2}(\xi) + \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial n_1}(\xi, x) [w(x) - w(x)] - \frac{\partial M_n^*}{\partial n_1}(\xi, x) \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] d\Gamma(x) + \\ & + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial n_1}(\xi, x_c) [w_{ci}(x_c) - w(\xi)] = \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[V_n(x) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(\xi, x) - M_n(x) \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right) \right] d\Gamma(x) + \\ & + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n_1}(\xi, x_c) + \frac{1}{D} \int_{\Omega_g} g(x) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(\xi, x) d\Omega_g(x) \end{aligned} \quad (3.131)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2\pi} \operatorname{sen} \beta_c \frac{\partial w}{\partial n_1}(\xi) + \frac{\beta_c}{2\pi} \frac{\partial w}{\partial n_2}(\xi) + \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial n_2}(\xi, x) [w(x) - w(x)] - \frac{\partial M_n^*}{\partial n_2}(\xi, x) \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] d\Gamma(x) + \\ & + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial n_2}(\xi, x_c) [w_{ci}(x_c) - w(\xi)] = \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[V_n(x) \frac{\partial w^*}{\partial n_2}(\xi, x) - M_n(x) \frac{\partial}{\partial n_2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right) \right] d\Gamma(x) + \\ & + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n_2}(\xi, x_c) + \frac{1}{D} \int_{\Omega_g} g(x) \frac{\partial w^*}{\partial n_2}(\xi, x) d\Omega_g(x) \end{aligned} \quad (3.132)$$

Do resultado apresentado pelas equações (3.131) e (3.132), cumpre observar que a derivada da solução fundamental é outra solução fundamental (Tottenham, 1979), agora para um momento unitário aplicado no ponto ξ . Neste sentido, da condição de equilíbrio vertical, pode-se escrever que a força cortante equivalente e as reações de canto da placa para um momento unitário aplicado no ponto ξ , apresentam a seguinte configuração:

$$\frac{1}{D} \int_{\Gamma} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_{(1,2)}}(\xi, x) d\Gamma(x) + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial n_{(1,2)}}(\xi, x_c) = 0 \quad (3.133)$$

Considerando-se a equação (3.133), que $w(\xi)$ é um deslocamento de corpo rígido e, portanto, uma constante, pode-se escrever novamente as duas equações integrais para a derivada do deslocamento em relação às duas normais anterior e posterior ao canto da placa, ou seja:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_c}{2\pi} \frac{\partial w}{\partial n_1}(\xi) + \frac{\nu}{2\pi} \operatorname{sen} \beta_c \frac{\partial w}{\partial n_2}(\xi) + \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial n_1}(\xi, x) w(x) - \frac{\partial M_n^*}{\partial n_1}(\xi, x) \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] d\Gamma(x) + \\ & + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial n_1}(\xi, x_c) w_{ci}(x_c) = \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[V_n(x) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(\xi, x) - M_n(x) \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right) \right] d\Gamma(x) + \\ & + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N R_{ci}(x_c) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n_1}(\xi, x_c) + \frac{1}{D} \int_{\Omega_s} g(x) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(\xi, x) d\Omega_s(x) \end{aligned} \quad (3.134)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2\pi} \operatorname{sen} \beta_c \frac{\partial w}{\partial n_1}(\xi) + \frac{\beta_c}{2\pi} \frac{\partial w}{\partial n_2}(\xi) + \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial n_2}(\xi, x) w(x) - \frac{\partial M_n^*}{\partial n_2}(\xi, x) \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] d\Gamma(x) + \\ & + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial n_2}(\xi, x_c) w_{ci}(x_c) = \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[V_n(x) \frac{\partial w^*}{\partial n_2}(\xi, x) - M_n(x) \frac{\partial}{\partial n_2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right) \right] d\Gamma(x) + \\ & + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N R_{ci}(x_c) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n_2}(\xi, x_c) + \frac{1}{D} \int_{\Omega_s} g(x) \frac{\partial w^*}{\partial n_2}(\xi, x) d\Omega_s(x) \end{aligned} \quad (3.135)$$

Para o caso particular de pontos do contorno com uma única tangente, isto é, com um único vetor normal, o valor do ângulo interno β_c é igual a π e, assim, as equações (3.134) e (3.135) se reduzem a uma única equação, dada por:

$$\begin{aligned} & C(\xi) \frac{\partial w}{\partial n_1}(\xi) + \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial n_1}(\xi, x) w(x) - \frac{\partial M_n^*}{\partial n_1}(\xi, x) \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] d\Gamma(x) + \\ & + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial n_1}(\xi, x_c) w_{ci}(x_c) = \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[V_n(x) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(\xi, x) - M_n(x) \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right) \right] d\Gamma(x) + \\ & + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N R_{ci}(x_c) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n_1}(\xi, x_c) + \frac{1}{D} \int_{\Omega_s} g(x) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(\xi, x) d\Omega_s(x) \end{aligned} \quad (3.136)$$

onde neste caso $C(\xi)$ vale $\frac{1}{2}$.

Portanto, para um ponto de canto, a formulação integral de contorno do problema dinâmico estacionário de placas finas consiste na aplicação de três equações integrais 3.128, 3.134 e 3.135. Para um ponto suave do contorno, entretanto, o problema consiste na aplicação de apenas duas equações integrais 3.128 e 3.135. Para um ponto que não pertença ao domínio e também ao contorno o problema consiste novamente na aplicação de apenas duas equações integrais 3.128 e 3.135. Outra possibilidade é escrever apenas uma das equações anteriores para dois pontos distintos, não pertencentes ao domínio. Nestes casos, o primeiro termo destas equações integrais são nulos.

CAPÍTULO 4

Implementação do Método dos Elementos de Contorno aplicado à Formulação Estática e Dinâmica Estacionária da Elasticidade 2D e Flexão de Placas Finas

4.1 Introdução

Este capítulo é dedicado ao estudo e aplicação do Método Direto dos Elementos de Contorno (MEC) em problemas estáticos e dinâmicos estacionários envolvendo a elasticidade linear bidimensional (estados planos) e a flexão de placas finas. Na implementação do MEC, as equações integrais que descrevem os problemas citados são transformadas em equações algébricas através da discretização do contorno em elementos de contorno. As variáveis físicas do problema são aproximadas pelas variáveis nodais do elemento, sendo ponderadas por funções de interpolação previamente escolhidas. Um sistema algébrico pode ser obtido aplicando-se as equações integrais em todos os nós associados aos elementos de contorno. Com a imposição das condições de contorno do problema, estas equações algébricas produzem um sistema de equações lineares que, resolvido, permite determinar genericamente valores de deslocamentos e esforços em nós definidos do contorno, e também em pontos do domínio.

De acordo com cada formulação apresentada, foram resolvidos alguns exemplos numéricos de problemas estáticos e dinâmicos estacionários envolvendo a elasticidade linear bidimensional (Estado Plano) e a flexão de Placas finas, no sentido validar a técnica de contorno aplicada.

4.2 Implementação do Método dos Elementos de Contorno

De maneira generalizada, nesta seção é feita a discretização do contorno, através de elementos de contorno, dos problemas estáticos e dinâmicos estacionários da elasticidade 2D e da flexão de placas finas.

4.2.1 Discretização do contorno

Seja o domínio Ω , uma região elástica regular bidimensional com um contorno Γ , conforme mostra a Figura 4.1. Esta região foi aproximada por um número finito de segmentos Γ_j escolhidos de modo a representar, da melhor maneira possível, o contorno real do problema. Aos pontos extremos de cada um dos segmentos dá-se o nome de **nós**. Se estes segmentos são lineares, ou podem ser aproximados por trechos lineares, os mesmos podem ter sua geometria descrita por uma função de interpolação das coordenadas dos nós. Aos segmentos aproximados por funções de interpolação, dá-se o nome de **elementos de contorno**.

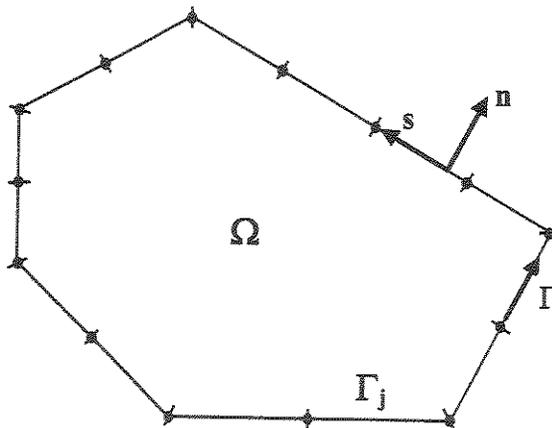


Figura 4.1 Domínio bidimensional dividido em elementos de contorno.

4.2.2 Elementos de contorno

Como os elementos de contorno definem a geometria de um dado problema, tanto os deslocamentos quanto as forças no contorno podem ser aproximados a partir dos seus valores nodais da mesma forma que a geometria. Portanto, para cada elemento de contorno Γ_j , tanto a aproximação da geometria do elemento quanto as variáveis de deslocamento e esforço de superfície serão descritas pela mesma função de interpolação. A geometria do elemento adotado é definida pelas coordenadas cartesianas dos seus pontos nodais, sendo o mesmo conhecido como **isoparamétrico** (Figura 4.2.), assim

$$x_k = \Phi^T x^j \quad (4.1)$$

o índice k refere-se às direções 1 ou 2 e o índice j refere-se ao número do nó.

A matriz transposta Φ^T é definida por meio de funções de interpolação lineares ϕ_j conhecidas como polinômios de *Lagrange*, assim:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad ; \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.2)$$

sendo ξ uma coordenada homogênea adimensional que varia entre $-1 \leq \xi \leq 1$.

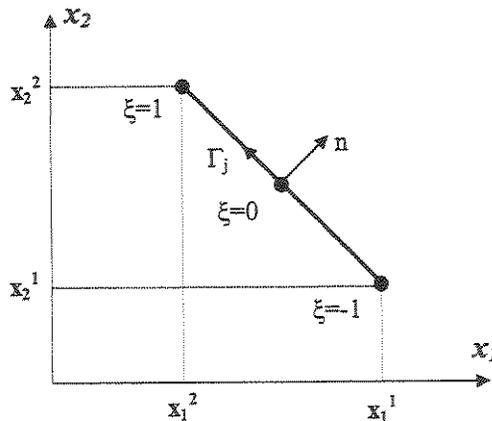


Figura 4.2 Descrição geométrica do elemento linear.

De forma análoga, as variáveis de deslocamentos e esforços são expressas através de funções de interpolação e valores nodais da seguinte forma:

$$u_k = \Phi^T u^j \quad (4.3)$$

$$t_k = \Phi^T t^j \quad (4.4)$$

As funções aproximadoras estão diretamente relacionadas com a posição dos pontos nodais no elemento. Este posicionamento determina que os elementos sejam contínuos ou descontínuos. Um elemento linear é contínuo quando os pontos nodais são comuns entre os elementos adjacentes, assumindo nos mesmos valores únicos (Figura 4.3).

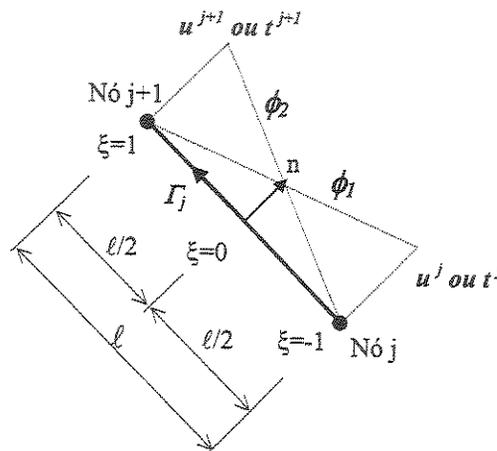


Figura 4.3 Elemento linear contínuo.

No elemento linear descontínuo (Figura 4.4), os seus pontos nodais são definidos nos extremos do elemento coincidindo com os seus nós geométricos. Entretanto, os **pontos de colocação** onde são calculadas as equações integrais são deslocados para o interior do elemento. Este fato permite a descontinuidade das variáveis entre elementos adjacentes.

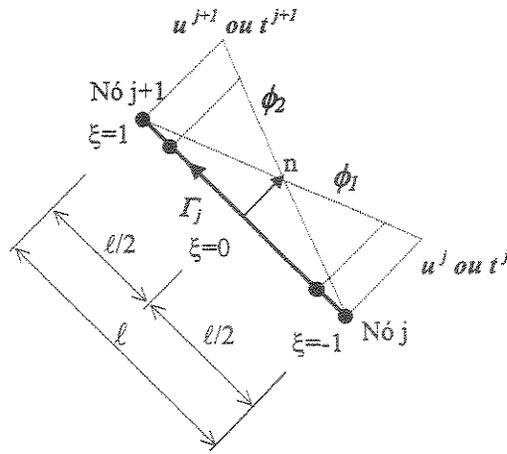


Figura 4.4 Elemento linear descontínuo.

Para representar descontinuidades de deslocamentos e esforços de superfície, quando são usados elementos descontínuos, adota-se a estratégia do nó duplo. Esta estratégia se resume na adoção de dois nós de coordenadas idênticas em locais onde existe uma descontinuidade no contorno, sendo reposicionados em lugares geométricos diferentes no sentido de eliminar uma singularidade. A Figura 4.5 apresenta uma descontinuidade no contorno onde os nós com as mesmas coordenadas são reposicionados para o interior do elemento adjacente a uma distância de $\frac{1}{4}$ do seu comprimento.

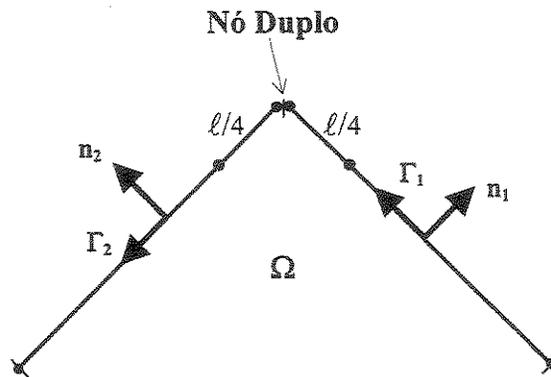


Figura 4.5 Definição de nó duplo.

4.3 Elementos de contorno para problemas estáticos da elasticidade 2D

Nesta seção é feita a discretização das equações integrais de contorno dos problemas estáticos da elasticidade 2D.

4.3.1 Discretização das equações integrais

As representações integrais do deslocamento u em um ponto i de um estado estático, são definidas pela equação (2.51). Os vetores e tensores apresentados por estas equações, podem ser escritos na forma matricial. No caso 2D, os vetores de deslocamentos e esforços de superfície são dados por:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} ; \quad t = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Os tensores que representam as soluções fundamentais, podem ser escritos como sendo:

$$u^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} ; \quad t^* = \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Generalizadamente, a equação (2.51) pode ser escrita da seguinte forma:

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} t^* u \, d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* t \, d\Gamma + \int_{\Omega} u^* b \, d\Omega \quad (4.7)$$

sendo, u^i o deslocamento do ponto i onde o carregamento unitário é aplicado e c^i é uma matriz de dimensões (2×2) com valores constantes que dependem do tipo de ponto sob consideração (ver equação 2.52).

Assumindo-se que o contorno do problema é dividido em N_e elementos de contorno (Figura 4.1), a equação (4.7) pode ser escrita na forma discretizada, ou seja:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} t^* d\Gamma_j \right\} u^j = \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma_j \right\} t^j + \int_{\Omega} u^* b d\Omega \quad (4.8)$$

sendo que as integrais de contorno foram escritas como uma somatória de integrais ao longo dos elementos. Os termos u^j e t^j representam, respectivamente, os deslocamentos e esforços de superfície do nó j . Estas variáveis nodais foram levadas para fora das integrais pois, as mesmas são constantes sobre cada elemento.

De acordo com estas definições, a equação integral de contorno discretizada (4.8) pode agora ser escrita como sendo,

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} t^* \Phi d\Gamma_j \right\} u^j = \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma_j \right\} t^j + \int_{\Omega} u^* b d\Omega \quad (4.9)$$

Pode-se simplificar a forma de escrever a equação (4.9) introduzindo-se os seguintes termos:

$$h^j = \int_{\Gamma_j} t^* \Phi d\Gamma_j \quad ; \quad g^j = \int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma_j \quad (4.10)$$

As integrais ao longo do contorno Γ_j das equações (4.10) necessitam ser transformadas através de uma mudança de variável de Γ para uma coordenada homogênea ξ . Esta transformação é dada por:

$$d\Gamma = \left\{ \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi} \right)^2} \right\} d\xi = |J| d\xi \quad (4.11)$$

onde $|J|$ é o determinante do jacobiano da transformação e $dx_1/d\xi$ e $dx_2/d\xi$ são obtidos através da diferenciação da equação (4.1) em termos de ξ .

Para o elemento isoparamétrico linear, o determinante do jacobiano da transformação assume um valor constante igual a metade do comprimento do elemento ($J = \ell/2$), então:

$$d\Gamma = \frac{\ell}{2} d\xi \quad (4.12)$$

Desta forma, as equações (4.10) passam a ser escritas como sendo:

$$h^{\psi} = \int_{\Gamma_j} t^* \Phi d\Gamma_j = \int_{-1}^1 t^* \Phi |J| d\xi = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 t^* \Phi d\xi \quad (4.13)$$

$$g^{\psi} = \int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma_j = \int_{-1}^1 u^* \Phi |J| d\xi = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 u^* \Phi d\xi \quad (4.14)$$

Considerando-se as definições apresentadas pela equação (4.10), a equação (4.9) passa a ser escrita como sendo:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^{N_e} h^{\psi} u^j = \sum_{j=1}^{N_e} g^{\psi} t^j + \int_{\Omega} u^* b d\Omega \quad (4.15)$$

A equação (4.15) relaciona os valores de u no nó i com os valores de u e t em todos os nós do contorno, incluindo i . As matrizes h^{ψ} e g^{ψ} , de dimensão (2×2) , relacionam o nó de colocação i com o nó do elemento de integração j .

4.3.2 Equações algébricas e montagem do sistema de equações

A equação (4.15) relaciona os deslocamentos de qualquer ponto, no espaço bidimensional (Figura 4.1), com os valores de força e deslocamento dos pontos nodais. Aplicando-se um número de pontos N conforme o número de incógnitas do contorno, pode-se escrever um sistema de equações relacionando os efeitos de domínio, as forças e os deslocamentos no contorno, da seguinte forma:

$$[C]u^i + [\hat{H}]\{U\} = [G]\{T\} + \{B\} \quad (4.16)$$

A equação (4.16) representa um conjunto de equações que podem ser obtidas, uma para cada direção i . Portanto, com N pontos de colocação, gera-se $2N$ equações.

A equação (4.16) pode ser redefinida de acordo com a aplicação das condições de contorno do problema. O processo consiste na movimentação para o lado esquerdo da equação todas as colunas multiplicadas pelas incógnitas e acumulação do lado direito os termos correspondentes de todos os valores obtidos pela multiplicação das condições de contorno conhecidas. Isto produz o seguinte sistema de equações:

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (4.17)$$

O vetor X representa todos os valores desconhecidos de deslocamento ou esforço de superfície. O vetor F contém os efeitos dos deslocamentos e esforços de superfície prescritos no contorno e o efeito do carregamento de domínio. A matriz A contém os termos das variáveis incógnitas, que foram obtidos com a troca das colunas das matrizes H e G .

4.3.3 Integrais analíticas e numéricas

Na aplicação da equação (4.15) a um ponto do contorno pertencente ao elemento a ser integrado, foram utilizadas expressões analíticas para realizar as integrações. As demais integrações foram feitas numericamente através de quadratura de *Gauss*.

A Figura 4.6 mostra um elemento de contorno cujo ponto de integração situa-se a uma distância x de sua extremidade. A integração da matriz elementar h , para este caso, torna-se:

$$\int_0^{\ell} i^* \phi_i d\Gamma = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\ell} \left[(\ell-x) \ln\left(\frac{\ell-x}{x}\right) - \ell \right] \quad (4.18a)$$

$$\int_{\Gamma} t^* \phi_2 d\Gamma = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\ell} \left[x \ln\left(\frac{\ell-x}{x}\right) + \ell \right] \quad (4.18b)$$

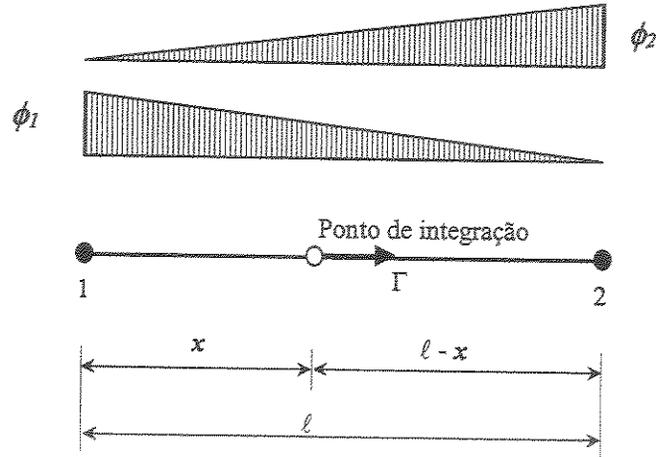


Figura 4.6 Ponto de colocação situado no elemento de contorno (elasticidade 2D).

Se $x = 0$, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} t^* \phi_1 d\Gamma = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\ell} [(\ell-x)\ln(\ell-x) - \ell] \quad (4.18c)$$

$$\int_{\Gamma} t^* \phi_2 d\Gamma = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \quad (4.18d)$$

Se $x = \ell$, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} t^* \phi_1 d\Gamma = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \quad (4.18d)$$

$$\int_{\Gamma} t^* \phi_2 d\Gamma = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)\ell} [(x)\ln(x) - \ell] \quad (4.18c)$$

E o caso geral de integração da matriz elementar g , é dado por:

$$\int_{\Gamma} u^* \phi_1 d\Gamma = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)\ell} \left\{ r_{,i} r_{,k} \ell^2 - \delta_{ik} (3-4\nu) \left[\ln(x^{(\ell-x)^2+2x(\ell-x)} \cdot (\ell-x)^{(\ell-x)}) - \ell \left(\frac{\ell}{2} + (\ell-x) \right) \right] \right\} \quad (4.19a)$$

$$\int_{\Gamma} u^* \phi_2 d\Gamma = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)\ell} \left\{ r_{,i} r_{,k} \ell^2 - \delta_{ik} (3-4\nu) \left[\ln(x^{(\ell-x)^2+2x(\ell-x)} \cdot (\ell-x)^{(\ell-x)}) - \ell \left(\frac{\ell}{2} + (\ell-x) \right) \right] \right\} \quad (4.19b)$$

As integrais mostradas pelas equações (4.18) e (4.19) devem ser avaliadas em termos do valor principal de *Cauchy*.

4.3.4 Deslocamentos em pontos internos

Uma vez conhecidos os deslocamentos e esforços de superfície no contorno é possível calcular os deslocamentos em qualquer ponto de domínio. Os deslocamentos são calculados pela equação (4.15), fazendo-se $c^i = I$, onde I é a matriz identidade, então:

$$u^i = - \int_{\Gamma} t^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* t d\Gamma + \int_{\Omega} u^* b d\Omega \quad (4.20)$$

Fazendo-se a discretização da equação (4.20), obtém-se:

$$u^i = - \sum_{j=1}^{N_{\epsilon}} \left\{ \int_{\Gamma_j} t^* \Phi d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^{N_{\epsilon}} \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma \right\} t^j + \int_{\Omega} u^* b d\Omega \quad (4.21)$$

Escrevendo-se a equação (4.21) para todos os pontos internos onde se deseja encontrar os deslocamentos, obtém-se:

$$\{U\} = -[H'] \{U\} + [G'] \{T\} + \{B\} \quad (4.22)$$

sendo U' o vetor que contém os deslocamentos nos pontos internos, H' e G' matrizes semelhantes às aquelas obtidas para os pontos de contorno, U e T são os vetores que contém os esforços e

deslocamentos do contorno e \mathbf{B} é o vetor que contém os efeitos do carregamento de domínio. Sendo assim, para encontrar os deslocamentos nos pontos internos basta integrar numericamente a equação (4.22) através de uma quadratura gaussiana.

4.3.5 Tensões em pontos internos e no contorno

O cálculo das tensões internas pode ser feito através da equação integral (2.56). Escrevendo de forma generalizada, a equação (2.56) é dada por:

$$\sigma^i = - \int_{\Gamma} S^* u d\Gamma + \int_{\Gamma} D^* t d\Gamma + \int_{\Omega} D^* b d\Omega \quad (4.23)$$

Fazendo-se a discretização da equação (4.23), obtém-se:

$$\sigma^i = - \sum_{j=1}^{N_s} \left\{ \int_{\Gamma_j} S^* \Phi d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^{N_s} \left\{ \int_{\Gamma_j} D^* \Phi d\Gamma \right\} t^j + \int_{\Omega} D^* b d\Omega \quad (4.24)$$

Escrevendo-se a equação integral (4.24) para todos os pontos internos onde se deseja encontrar as tensões, obtém-se:

$$\{\sigma'\} = -[H''] \{U\} + [G''] \{T\} + \{B'\} \quad (4.25)$$

A resolução da equação algébrica (4.25), referentes às integrais mostradas em (4.24), pode ser feita com o uso da quadratura de *Gauss*, analogamente ao que foi descrito nas seções anteriores.

As tensões na superfície de contorno podem ser calculadas diretamente ou através de diferenças finitas da forma:

$$\sigma_n = t_n \quad (4.26)$$

$$\sigma_{ns} = t_{ns} \quad (4.27)$$

$$\sigma_{ss} = \frac{1}{1-\nu'} (\nu' \sigma_{nn} + 2\mu \epsilon_{ss}) \quad (4.28)$$

sendo, n e s as coordenadas normais e tangenciais ao contorno (Figura 4.1).

Da resolução do sistema de equações obtém-se os esforços de superfície normais t_n e tangenciais t_{ns} ao contorno, de onde são obtidas as respectivas tensões. No cálculo de σ_{ss} é necessário encontrar ϵ_{ss} , ou seja:

$$\epsilon_{ss} = \frac{\partial u_s}{\partial s} \quad (4.29)$$

sendo, u_s o deslocamento na direção tangencial que foi obtido da solução do sistema de equações.

4.4 Elementos de contorno para problemas estáticos da flexão de placas finas

Nesta seção é feita a discretização das equações integrais de contorno dos problemas estáticos da flexão de placas finas.

4.4.1 Discretização das equações integrais

Para aplicar as equações integrais da estática de placas finas a problemas físicos, é necessário que as mesmas possam ser facilmente explicitadas em um contorno particular, como o da Figura 4.1. Define-se novamente o elemento linear contínuo como a aproximação da geometria do contorno da placa, sendo o mesmo representado pelas coordenadas cartesianas dos seus pontos nodais (equação 4.1). Em cada elemento de contorno Γ_j , as variáveis são aproximadas pelas funções de interpolação lineares de maneira análoga à geometria.

Os deslocamentos e esforços na placa são dados a partir das equações (4.3) e (4.4), e podem ser escritos explicitamente da seguinte forma:

$$u_k = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \Phi^T U_k^i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.30a)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1^1 \\ w_1^2 \\ \frac{\partial w_1^1}{\partial n} \\ \frac{\partial w_1^2}{\partial n} \end{Bmatrix} \quad (4.30b)$$

$$t_k = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \Phi^T T_k^i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_1^2 \\ T_2^1 \\ T_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.31a)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} V_n \\ M_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{n1}^1 \\ V_{n1}^2 \\ M_{n2}^1 \\ M_{n2}^2 \end{Bmatrix} \quad (4.31b)$$

Na representação das discontinuidades de deslocamentos e esforços na placa, adota-se novamente a estratégia do **nó duplo**.

4.4.2 Integrais discretizadas

De acordo com a equação integral de flexão de placas finas para pontos do contorno, equação (2.119), as variáveis relacionadas a este problema são w , $\partial w/\partial n$, V_n e M_n e, quando existem cantos, R_c em cada um dos cantos. Independentemente das reações de canto R_c , sabe-se que a partir de condições naturais ou essenciais de cada problema, sempre são conhecidas duas das quatro variáveis mencionadas. Das quatro variáveis iniciais resultam duas incógnitas, sendo necessário a obtenção de duas equações integrais para resolver completamente o problema. Sabe-se que de uma placa com N nós resultam duas vezes o número de nós em incógnitas ($2N$) além de uma reação de canto R_c para cada canto. Aplicando-se a equação integral (2.119) para os pontos de contorno em cada um dos nós obtém-se N equações. Para pontos externos ao domínio, onde tem-se um ponto externo para cada nó de contorno, obtém-se mais N equações. Cada ponto externo fica posicionado na direção normal ao contorno em cada nó associado. Discretizando-se o contorno da placa em N_e elementos de contorno e substituindo-se as variáveis por suas aproximações (4.30) e (4.31), a equação integral de placas finas para pontos no contorno, equação (2.119), pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 C(\xi)w(\xi) + \sum_{j=1}^{N_e} w_k^i \int_{\Gamma_j} V_n^*(\xi, x) \phi_i(x) d\Gamma_j - \sum_{j=1}^{N_e} \frac{\partial w_k^i}{\partial n} \int_{\Gamma_j} M_n^*(\xi, x) \phi_i(x) d\Gamma_j + \\
 + \sum_{i=1}^{N_e} R_{ci}(\eta_c) w_i(\eta_c) = \sum_{j=1}^{N_e} V_k^i \int_{\Gamma} w^*(\xi, \eta) \phi_i(\eta) d\Gamma_j - \sum_{j=1}^{N_e} M_k^i \int_{\Gamma_j} \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, \eta) \phi_i(\eta) d\Gamma_j + \\
 + \sum_{i=1}^{N_e} R_{ci}(\eta_c) w_i^*(\eta_c) + \int_{\Omega_g} g(\eta_d) w^*(\xi, \eta_d) d\Omega_g(\eta_d) \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

sendo, η uma variável que percorre o contorno, η_d uma variável do domínio, η_c o valor da variável η nos cantos e ξ o ponto onde se aplica a equação integral.

A forma algébrica das integrais de contorno mostradas na equação (4.32) são feitas numericamente para todos os elementos, exceto para os elementos que contém o ponto de aplicação da equação integral, onde as mesmas são feitas analiticamente. Com este procedimento, encontram-se $2N$ equações para as variáveis incógnitas, variáveis conhecidas e reações de canto.

4.4.3 Montagem do sistema de equações

Realizadas as operações numéricas das integrais de contorno na equação (4.32) sobre cada elemento genérico Γ_j , somam-se estas influências para todos os N_e elementos em todos os nós de contorno. Desta forma, a equação (4.32) pode ser escrita da seguinte forma matricial:

$$Cw + [\bar{H}] \{U\} = [G] \{T\} + \{B\} \quad (4.33)$$

Na matriz \bar{H} não simétrica da equação (4.33), é necessário acrescentar o deslocamento correspondente ao ponto do contorno no qual foi aplicada a equação integral. Com este procedimento, e impondo-se as condições de contorno a todos os nós do contorno da placa, a equação (4.33) pode ser escrita da seguinte forma:

$$[H] \{U\} = [G] \{T\} + \{B\} \quad (4.34)$$

Impondo-se as $2N$ variáveis conhecidas do contorno da placa em (4.34) e após conveniente troca de membros das colunas das matrizes elementares H e G , obtém-se um sistema de final de equações $AX = F$, análogo ao obtido na seção anterior. Novamente, X é o vetor que contém as variáveis incógnitas, F é o vetor que contém os efeitos dos deslocamentos (deslocamento transversal e rotação normal) e esforços (esforço cortante equivalente e momento fletor) prescritos no contorno e também o valor do carregamento de domínio e A é a matriz que contém os coeficientes das variáveis incógnitas, obtida com a troca das colunas das matrizes H e G .

4.4.4 Integrais analíticas e numéricas

Na aplicação da equação algébrica (4.33) a um ponto do contorno da placa, pertencente ao elemento a ser integrado, foram utilizadas expressões analíticas para realizar as integrações. As demais integrações foram feitas numericamente através de quadratura de *Gauss*.

De acordo com o que foi adotado para os elementos contínuos e descontínuos, as funções aproximadoras ϕ_j têm valor unitário nas extremidades opostas. A Figura 4.7, mostra um elemento de contorno cujo ponto de integração situa-se a uma distância x de sua extremidade.

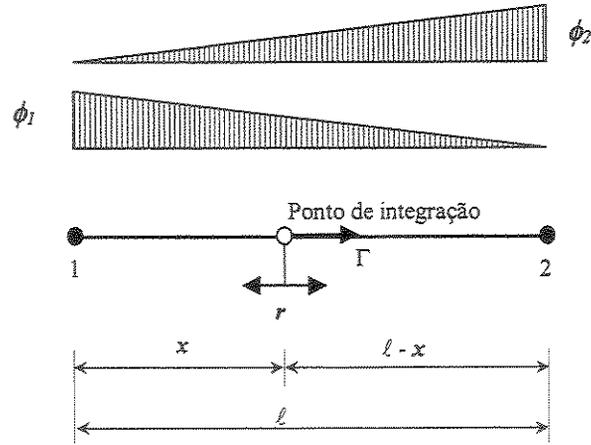


Figura 4.7 Ponto de colocação no elemento de contorno (placa).

As funções aproximadoras, para o ponto de colocação mostrado na Figura 4.7 são dadas por:

$$\phi_1 = \begin{cases} 1 + \frac{r-x}{\ell} & (\Gamma \leq 0) \\ 1 - \frac{r+x}{\ell} & (\Gamma > 0) \end{cases} \quad (4.35)$$

e

$$\phi_2 = \begin{cases} \frac{x-r}{\ell} & (\Gamma \leq 0) \\ \frac{x+r}{\ell} & (\Gamma > 0) \end{cases} \quad (4.36)$$

A partir destas considerações, as integrais analíticas da equação integral de placas finas (4.32), são dadas por:

$$\int_{\Gamma} M_n^* \phi_i d\Gamma = -\frac{1}{4\pi\ell} \left\{ [(\ell-x)A_1 + A_2](1+\nu) + \frac{\nu\ell^2}{2} \right\} \quad (4.37a)$$

$$\int_{\Gamma} M_n^* \phi_2 d\Gamma = -\frac{1}{4\pi\ell} \left\{ [xA_1 - A_2](1+\nu) + \frac{\nu\ell^2}{2} \right\} \quad (4.37b)$$

$$\int_{\Gamma} w^* \phi_1 d\Gamma = -\frac{1}{8\pi D\ell} \left[\frac{1}{18}(\ell-x)A_3 + \frac{1}{16}A_4 \right] \quad (4.38a)$$

$$\int_{\Gamma} w^* \phi_2 d\Gamma = -\frac{1}{8\pi D\ell} \left[\frac{1}{18}xA_3 - \frac{1}{16}A_4 \right] \quad (4.38b)$$

sendo,

$$A_1 = (\ell-x)\ln(\ell-x) + x\ln(x) - \ell \quad (4.39)$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \left\{ x^2 [2\ln(x) - 1] - (\ell-x)^2 [2\ln(\ell-x) - 1] \right\} \quad (4.40)$$

$$A_3 = x^3 [6\ln(x) - 5] + (\ell-x)^3 [6\ln(\ell-x) - 5] \quad (4.41)$$

$$A_4 = x^4 [4\ln(x) - 3] - (\ell-x)^4 [4\ln(\ell-x) - 3] \quad (4.42)$$

As integrais analíticas V_n^* e $\partial w/\partial n^*$ relacionadas com as funções aproximadoras ϕ_1 e ϕ_2 são nulas. Nos casos em que a coordenada x vale zero ou ℓ podem ser tratados assumindo-se valores nulos nas equações (4.39) a (4.42) para os respectivos logaritmos, $\ln(x)$ e $\ln(\ell-x)$, para cada caso individual.

4.4.5 Deslocamentos e curvaturas em pontos internos

Uma vez determinados os deslocamentos e esforços no contorno através da solução do sistema de equações final é possível calcular os deslocamentos em qualquer ponto do domínio. Estes deslocamentos são calculados diretamente através da discretização das equações (2.118), de forma análoga à aquela utilizada para se escrever o sistema de equações final da placa fina.

Escrevendo-se as equações (2.118) para todos os pontos internos onde se deseja encontrar os deslocamentos, obtém-se:

$$w(\xi) + [H'] \{U\} = [G'] \{T\} + \{B\} \quad (4.43)$$

sendo $w(\xi)$ o vetor que contém os deslocamentos nos pontos internos ξ onde $C(\xi) = 1$, H' e G' matrizes semelhantes às aquelas obtidas para os pontos de contorno, U e T são os vetores que contém os esforços e deslocamentos do contorno e B o vetor que contém as influências de domínio. O cálculo dos coeficientes das matrizes H' e G' é realizado de maneira análoga ao procedimento de obtenção das matrizes H e G sendo possível, neste caso, efetuarem-se sempre integrações numéricas através de quadratura de Gauss.

De forma semelhante, os valores de domínio do momento fletor, momento torçor e do esforço cortante equivalente, podem ser obtidos a partir da discretização da equação (2.122) que representa a segunda derivada do deslocamento transversal da placa, ou seja, as curvaturas internas.

4.5 Carregamentos estáticos de domínio

Nesta seção, são tratados os termos de domínio das equações integrais estáticas da elasticidade 2D e placas finas, com relação aos deslocamentos, às tensões e às curvaturas internas. Considerando-se as integrais de domínio mostradas nas equações da elasticidade 2D (2.51) e de placas finas (2.119), podem-se definir as seguintes expressões:

$$B_e = \int_{\Omega} U_{ik}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) \quad (4.44)$$

$$B_p = \int_{\Omega} g(x) w^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad (4.45)$$

Uma simplificação do problema é quando as forças de volume b_k e o carregamento g têm expressões analíticas integráveis no domínio. Com isso as equações (4.44) e (4.45) podem ser transformadas em uma integral sobre o contorno do domínio Ω . Para esta transformação, utiliza-se o esquema de integração mostrado na Figura 4.8.

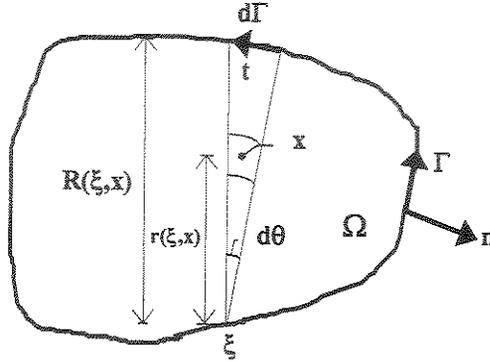


Figura 4.8 Integração sobre um domínio carregado.

Conforme a Figura 4.8, as equações (4.44) e (4.45) podem ser escritas da seguinte forma:

$$B_e = \int_{\Gamma} \left[\int_0^{R(\xi, t)} U_{ik}^*(\xi, x) b_k(x) r(\xi, x) dr(x) \right] \frac{r_{,\gamma} n_{\gamma}}{R(\xi, t)} d\Gamma(t) \quad (4.46)$$

$$B_p = \int_{\theta} \left[\int_0^R w^*(\xi, x) g(x) r(\xi, x) dr(x) \right] d\theta \quad (4.47)$$

As integrações sobre o ângulo θ podem ser feitas através de uma mudança de variáveis, da seguinte forma:

$$d\theta = \frac{1}{R(\xi, t)} r_{,\gamma} n_{\gamma} d\Gamma(t) \quad (4.48)$$

As integrais de contorno, com a mudança de variáveis, são do seguinte tipo:

$$B_e = \int_{\Gamma} \left[\int_0^{R(\xi, t)} U_{ik}^*(\xi, x) b_k(x) r(\xi, x) dr(x) \right] \frac{r_{,\gamma} n_{\gamma}}{R(\xi, t)} d\Gamma(t) \quad (4.49)$$

$$B_p = \int_{\Gamma} \left[\int_0^{R(\xi,t)} w^*(\xi, x) g(x) r(\xi, x) dr(x) \right] \frac{r_{,\gamma} n_\gamma}{R(\xi, t)} d\Gamma(t) \quad (4.50)$$

Considerando-se a força de volume b_k e o carregamento g constantes, obtém-se para as equações (4.49) e (4.50) o seguinte resultado (Palermo Jr., 1989):

$$B_e = \int_{\Gamma} \frac{b_k R}{16 \pi \mu (1 - \nu)} \left[- (3 - 4\nu) \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) \delta_{ij} + R_{,i} R_{,j} \right] R_{,\gamma} n_\gamma d\Gamma \quad (4.51)$$

$$B_p = \int_{\Gamma} \left[\frac{g R^3}{32 \pi D} \left(\ln r - \frac{3}{4} \right) \right] R_{,\gamma} n_\gamma d\Gamma_g \quad (4.52)$$

No cálculo das curvaturas e tensões internas as integrais de domínio da elasticidade 2D (2.56) e da flexão de placas (2.122), respectivamente, são do tipo:

$$B'_e = \int_{\Omega} D_{kij}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) \quad (4.53)$$

$$B'_p = \int_{\Omega} g(x) w_{,ij}^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad (4.54)$$

A transformação das integrais (4.53) e (4.54) em integrais de contorno, para o caso de forças constantes, é dada por:

$$B'_e = \int_{\Gamma} \frac{b_k}{4\pi} \left[(\delta_{ik} R_{,j} + \delta_{jk} R_{,i} - \delta_{ij} R_{,k}) (1 - 2\nu) + 2 R_{,i} R_{,j} R_{,k} \right] R_{,\gamma} n_\gamma d\Gamma \quad (4.55)$$

$$B'_p = \int_{\Gamma} \left[\frac{g R^3}{8\pi D} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \delta_{ij} + R_{,i} R_{,j} \right] R_{,\gamma} n_\gamma d\Gamma_g \quad (4.56)$$

As equações integrais de domínio apresentadas são inseridas adequadamente nas equações algébricas finais dos problemas estáticos da elasticidade 2D e placas finas.

4.6 Validação das formulações estáticas da elasticidade 2D e placas finas

Visando a aplicação do Método Direto dos Elementos de Contorno, através dos programas computacionais em linguagem **FORTRAN 90**, desenvolvidos neste trabalho, que envolve as formulações estáticas da elasticidade 2D (*ESTPLAN*) e da flexão de placas finas (*PLAFIN*), são apresentados nesta seção alguns exemplos numéricos para análise de problemas estáticos de estado plano de tensão e deformação e problemas de flexão de placas finas. O número de pontos de *Gauss* utilizado nas integrações numéricas dos exemplos analisados foi igual a 12 e o fator de posicionamento do ponto de colocação externo ao domínio foi $a = 1/2$.

4.6.1 Tubo de paredes espessas

Conforme mostra a Figura 4.9a, um tubo de parede espessa de raio interno igual a 10 mm e raio externo igual a 25 mm está submetido a uma pressão interna P de 100 N/mm². O módulo de elasticidade do material E é de 200 kN/mm² e o coeficiente de *Poisson* ν é de 0.25. Este problema foi tratado através de estado plano de deformação.

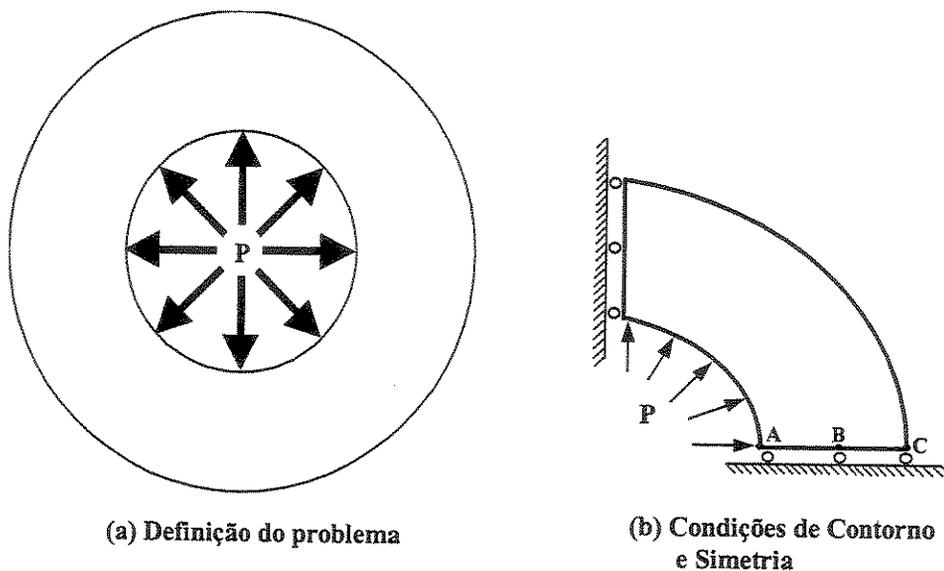


Figura 4.9 Tubo de paredes espessas sob pressão interna.

Devido à simetria existente, somente um quarto da seção transversal do tubo necessitou ser discretizada. A Figura 4.9b mostra as condições de contorno utilizadas para a implementação dos dados necessários à resolução do problema. Foram utilizadas quatro diferentes discretizações em elementos de contorno, consistindo-se em 12, 24, 48 e 72 elementos lineares, no sentido de obter uma melhor aproximação da solução analítica. Os resultados dos deslocamentos dos pontos A, B e C, mostrados na Figura 4.9b, são apresentados na Tabela 4.1. Estes resultados são comparados com os valores exatos apresentados por Brebbia e Domingues (1992), sendo os mesmos extraídos diretamente da teoria da elasticidade.

Tabela 4.1 Deslocamentos nos pontos A, B e C em 10^{-3} mm.

Pontos	Discretização Utilizada				Valor Exato
	12 <i>elementos</i>	24 <i>elementos</i>	48 <i>elementos</i>	72 <i>elementos</i>	
A	7.2514	7.7722	7.8431	7.8443	8.0325
% Erro	9.7	3.2	2.4	2.3	
B	5.1491	5.2531	5.2614	5.2622	5.2912
% Erro	2.7	0.7	0.6	0.6	
C	4.2493	4.4063	4.4127	4.4139	4.4526
% Erro	4.6	1.0	0.9	0.9	

Lembrando da geometria curva do exemplo analisado, deve-se observar que o carregamento aplicado na parede curva do tubo não pode ser completamente descrito, devido a geometria plana do elemento linear. Entretanto, verificando os resultados obtidos com uma discretização de 12, 24, 48 e 72 elementos, pode-se observar que os mesmos apresentaram uma boa aproximação da solução analítica. Na discretização com 12 elementos lineares, obteve-se valores em média 5.7% menores que o valor exato. Quando procedeu-se a uma discretização com 72 elementos, obtiveram-se valores médios da ordem de 1.2% menores que a solução exata. Isto mostra que, mesmo em uma situação desfavorável, o elemento linear aproxima-se razoavelmente bem da solução do problema. Entretanto, com uma discretização de 15 elementos quadráticos, Brebbia e Domingues (1992) obtiveram para este problema resultados da ordem de 0,1% da solução exata.

Para uma melhor visualização, são apresentados no Gráfico 4.1 os resultados dos deslocamentos na direção x_1 em função dos raios interno e externo do tubo de paredes espessas.

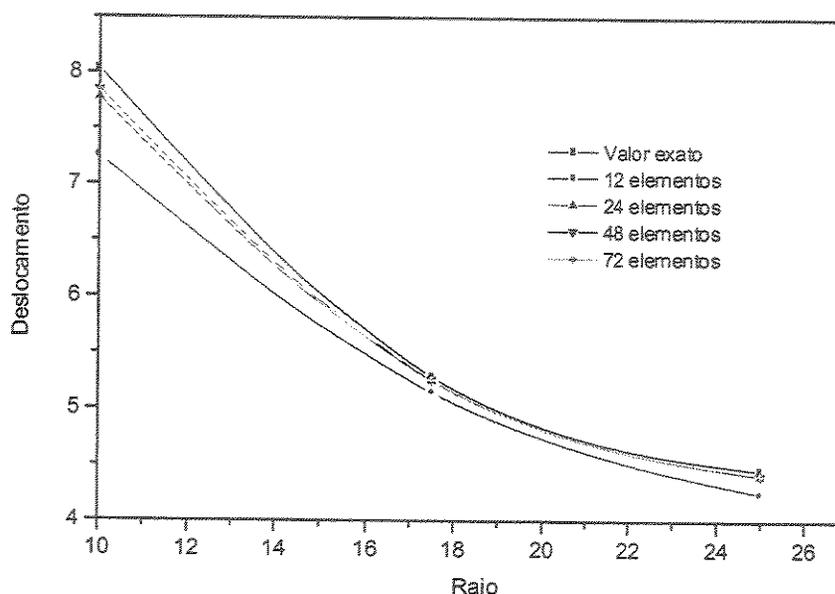


Gráfico 4.1 Deslocamentos no tubo de paredes espessas (10^{-3}mm).

Pode-se observar claramente pelo gráfico que os resultados obtidos são menos significativos nos lugares onde existem descontinuidades ou seja, nas bordas interna e externa do tubo. Uma baixa discretização de elementos lineares, com os pontos de colocação posicionados sobre o contorno, não produzem resultados concordantes com o valor analítico. Uma discretização mais densa melhorou significativamente os resultados finais.

4.6.2 Peças com concentração de tensões

O problema de concentração de tensões é bastante comum em peças estruturais de pequena espessura que contém alguma descontinuidade, como furos ou variação brusca de seção. Nos pontos de descontinuidade mais desfavoráveis podem ocorrer valores de tensão bastante elevados que podem ser de difícil mensuração. Este tipo de problema é normalmente analisado através de um estado plano de tensões por se tratar de peças estruturais bastante finas. Em vista disto, o presente exemplo estuda a concentração de tensões uniaxiais em furos de peças estruturais de pequena espessura.

Conforme mostra a Figura 4.10, são considerados duas discontinuidades básicas, um furo circular e um elíptico. Aplicando-se um carregamento uniaxial, as concentrações máximas de tensões ocorrem nas seções transversais de menor área geométrica. Para os casos aqui analisados, o valor máximo de tensão ocorre no ponto A das seções transversais centrais, sendo a mesma obtida através de formulação analítica apresentada por Roark e Young (1975).

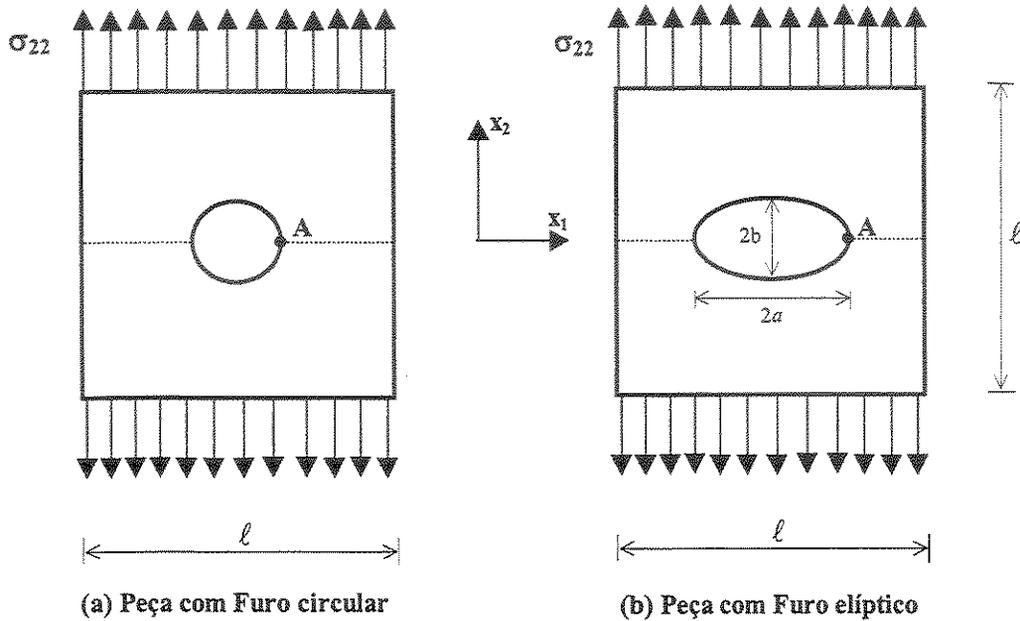


Figura 4.10 Peças com concentração de tensões em furos centrais.

Para o caso do furo circular, Figura 4.10a, a solução analítica para a tensão no ponto A é dada pela seguinte equação (Roark e Young, 1975):

$$\sigma_A = 3\sigma_{22} \quad (4.57)$$

No caso do furo elíptico, Figura 4.10b, a solução analítica para a tensão no ponto A é dada pela seguinte equação (Roark e Young, 1975):

$$\sigma_A = \left(1 + \frac{2a}{b}\right)\sigma_{22} \quad (4.58)$$

A Figura 4.11 mostra as condições de contorno utilizadas para a implementação dos dados necessários à resolução do problema. Mais uma vez, considerando-se a simetria existente nas peças, somente um quarto da seção transversal necessitou ser discretizada.

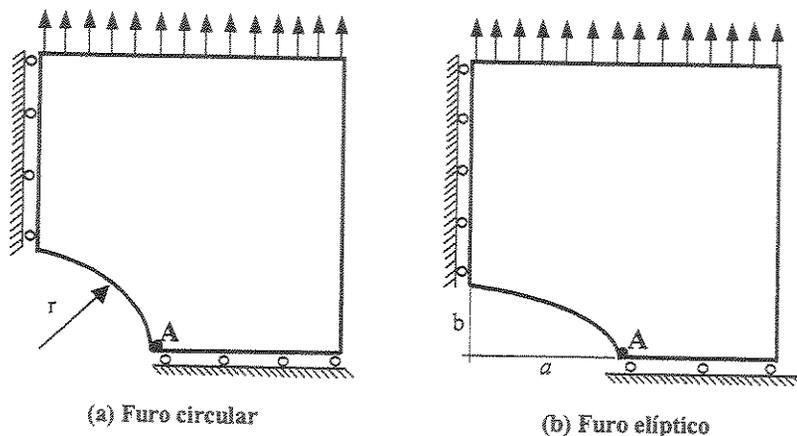


Figura 4.11 Condições de contorno e simetria das peças.

Na resolução dos problemas, o comprimento ℓ e a tensão uniaxial σ_{22} foram considerados unitários. O módulo de elasticidade do material E também foi considerado unitário e o coeficiente de Poisson ν é de 0.3. O raio r do círculo e a distância a foram mensurados de 10% do comprimento ℓ . A distância b é de 5% do comprimento ℓ . Foram utilizadas duas diferentes discretizações em elementos de contorno, consistindo-se em 20, 40 e 80 elementos lineares. Os resultados das tensões uniaxiais nos pontos A mostrados nas Figuras 4.11a e 4.11b, são apresentados na Tabela 4.2. Estes resultados são comparados com os valores exatos extraídos das equações (4.57) e (4.58).

Tabela 4.2 Tensões adimensionais no ponto A.

Peça	Discretização Utilizada			
	20 elementos	40 elementos	80 elementos	Valor exato
Furo Circular	2.5984	2.8944	2.9134	3.0
% Erro	13.4	3.5	2.9	
Furo Elíptico	5.2144	5.7456	5.4126	5.0
% Erro	4.3	14.9	8.3	

Analisando-se os resultados encontrados para o furo circular, observa-se que para uma discretização com 80 elementos lineares o resultado encontrado aproximou-se razoavelmente do valor exato, com uma discrepância de 2.9%. Se forem analisados os resultados encontrados para o furo elíptico, não se obtiveram resultados satisfatórios. Observou-se que para uma discretização com 12 elementos lineares, houve uma discrepância de 4.3%. Todavia, para uma discretização com 40 e 80 elementos lineares, houve uma discrepância de 14.9% e 8.3%, respectivamente.

4.6.3 Chapa fina sujeita a esforços na borda

Este exemplo procura demonstrar o comportamento do elemento linear em um problema envolvendo uma distribuição linear de esforços no plano de uma chapa fina retangular. Para resolver o problema em questão, devido à espessura da chapa, foi considerada a aplicação do estado plano de tensão. A Figura 4.12 mostra uma chapa fina retangular sob o efeito de uma distribuição linear de forças de superfície t de 1000 MPa na direção horizontal (lados esquerdo e direito da placa). O módulo de elasticidade E adotado para o material é de 192.000 MPa e o coeficiente de *Poisson* ν é de 0.2.

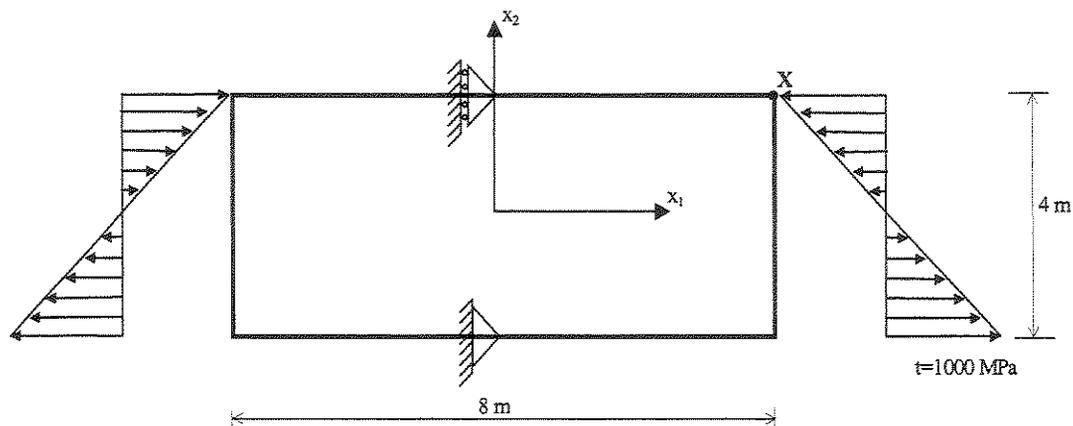


Figura 4.12 Chapa fina sujeita a dois momentos aplicados.

A própria Figura 4.12, apresenta as condições de contorno na qual o problema foi resolvido. O contorno foi discretizado em 8, 16, 32 e 64 elementos lineares, sendo que as forças de superfície são prescritas como zero nos lados superior e inferior da chapa. Os deslocamentos são prescritos apenas nos apoios fixo e móvel mostrados na figura.

Os resultados dos deslocamentos no canto X , mostrado na Figura 4.12, são apresentados na Tabela 4.3. Os mesmos são comparados com os valores exatos extraídos do exemplo mostrado por Brebbia e Domingues (1992).

Tabela 4.3 Deslocamentos no canto X da chapa fina (m).

Deslocamentos	Discretização Utilizada				Brebbia e Domingues (1992)
	8 elementos	16 elementos	32 elementos	64 elementos	
u_1	-0.0166	-0.01874	-0.0201	-0.0202	-0.02
% Erro	17.0	6.3	0.5	1.0	
u_2	0.0129	0.01698	0.0195	0.0197	0.02
% Erro	35.5	15.1	2.5	1.5	

Os resultados obtidos demonstram um bom comportamento para o elemento linear quando se utiliza uma discretização mais densa. Para a discretização com 8 elementos, obtiveram-se resultados em média 26% inferiores à solução analítica. Contudo, para uma discretização com 32 e 64 elementos obtiveram-se resultados com discrepâncias em média de 1.5% e 1.25% em relação à solução analítica.

4.6.4 Problema clássico de uma placa fina quadrada

Neste exemplo analisa-se um problema clássico de uma placa quadrada de lado ℓ , simplesmente apoiada no contorno, conforme ilustra a Figura 4.13. Não foi feita nenhuma consideração sobre a condição de simetria do problema em questão, no sentido de representar a mesma análise feita no trabalho de Paiva (1987).

O carregamento g unitário foi considerado uniformemente distribuído no domínio. A rigidez à flexão da placa D também foi considerada unitária. O coeficiente de *Poisson* ν foi considerado igual a 0.3.

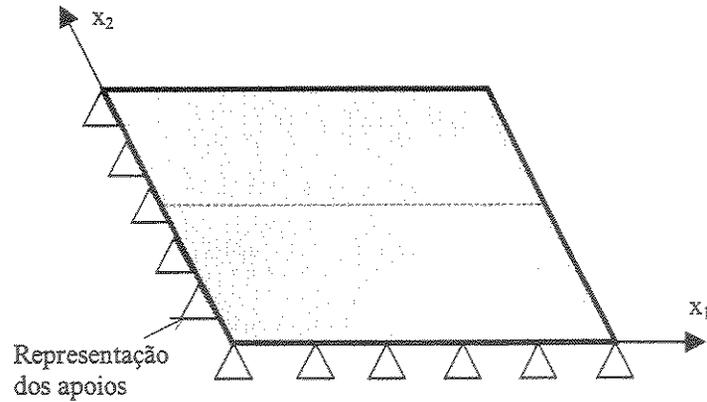


Figura 4.13 Placa fina simplesmente apoiada no contorno.

Foram utilizadas três discretizações em elementos de contorno, consistindo-se em 12, 24 e 40 elementos lineares. As condições de contorno para o problema podem ser tiradas diretamente da Figura 4.13, considerando-se a placa como sendo simplesmente apoiada ao longo das suas bordas.

Os resultados de deslocamentos na linha de centro da placa são apresentados no Gráfico 4.2. Todos os resultados encontrados são comparados com os da teoria clássica apresentados por Paiva (1987).

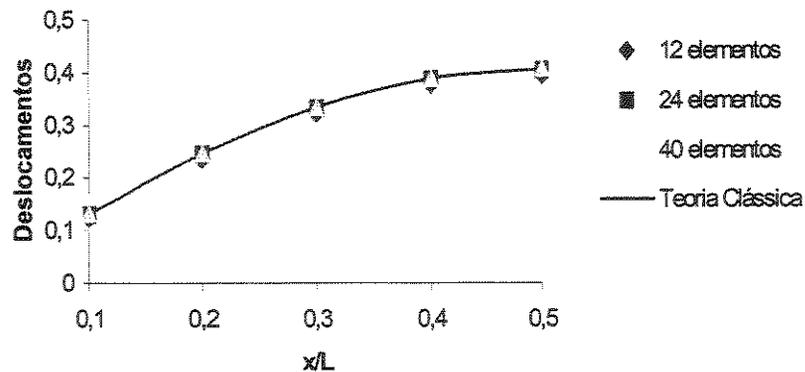


Gráfico 4.2 Deslocamentos na linha de centro da placa ($100D/g\ell^4$).

Os resultados numéricos de cada um dos deslocamentos na linha de centro da placa, são apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 Deslocamentos na linha de centro da placa ($100D/g\ell^4$).

x_1	Discretização Utilizada			Teoria Clássica
	12 elementos	24 elementos	40 elementos	
0.1 ℓ	0,1236	0,1309	0,1321	0,132
0.2 ℓ	0,2344	0,2448	0,2464	0,246
0.3 ℓ	0,3223	0,3327	0,3345	0,334
0.4 ℓ	0,3761	0,3864	0,3889	0,388
0.5 ℓ	0,3944	0,4041	0,4064	0,406

Da mesma forma, os resultados encontrados de momentos fletores máximos na linha de centro da placa, são apresentados no Gráfico 4.3 e na Tabela 4.5.

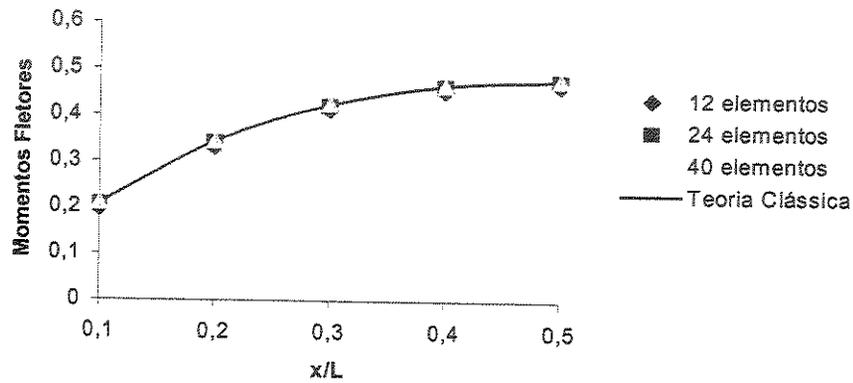


Gráfico 4.3 Momentos fletores máximos na linha de centro da placa ($10/g\ell^2$).

Tabela 4.5 Momentos fletores máximos na linha de centro da placa ($10/g\ell^2$).

x_1	Discretização Utilizada			Teoria Clássica
	12 elementos	24 elementos	40 elementos	
0.1 ℓ	0,1973	0,2073	0,2093	0,209
0.2 ℓ	0,3310	0,3418	0,3433	0,343
0.3 ℓ	0,4122	0,4228	0,4247	0,424
0.4 ℓ	0,4546	0,4645	0,4661	0,466
0.5 ℓ	0,4672	0,4771	0,4792	0,479

Analisando os resultados encontrados, pode-se verificar que o aumento da discretização do contorno, faz com que os valores encontrados para os deslocamentos e momentos fletores se aproximem bastante dos valores da teoria clássica. Isto mostra o bom comportamento do elemento linear neste problema clássico de placa fina.

4.6.5 Placa fina quadrada sujeita às condições de simetria

Este exemplo procurou resolver um problema prático de uma placa fina quadrada, apoiada no contorno e sujeita a condições de simetria, com a intenção principal de verificar a análise feita por Karam e Telles (1988). De acordo com a Figura 4.14, considerou-se inicialmente as condições de simetria de uma placa quadrada, discretizando-se apenas um quarto da mesma. O comprimento total do lado da placa em questão é de 4 m, para sua espessura foi adotado o valor de 0.02 m e, sobre o domínio, foi aplicado um carregamento uniformemente distribuído igual a -0.64 tf/m². O coeficiente de *Poisson* foi considerado igual a 0.3 e para o módulo de elasticidade longitudinal foi adotado o valor de 2×10^6 tf/m².

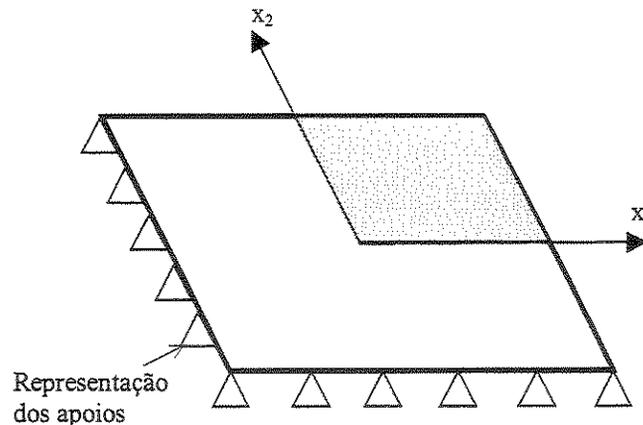


Figura 4.14 Placa fina quadrada sujeita às condições de simetria.

Da Figura 4.14 pode-se observar que as bordas externas da placa estão apoiadas sobre o contorno e as bordas sujeitas à condição de simetria (eixos x_1 e x_2) estão livres para se deslocar. Portanto, as condições de contorno e vinculação da placa com condições de simetria podem ser definidas da seguinte forma:

$$\text{Em } x_1 = 0: M_{12} = Q_1 = 0 \qquad x_1 = 2: M_{11} = w = 0$$

Em $x_2 = 0$: $M_{12} = Q_2 = 0$ $x_2 = 2$: $M_{22} = w = 0$

O contorno simétrico da placa foi discretizado em 24 e 40 elementos lineares. Para obter os valores representativos do domínio discretizado, foram considerado nove pontos internos, conforme mostra a Figura 4.15.

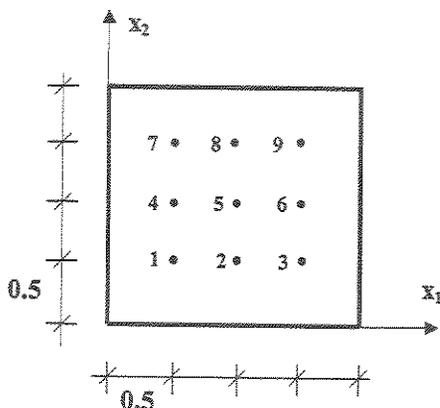


Figura 4.15 Pontos internos na placa com simetria.

Os resultados de deslocamentos, momento fletor máximo e momento torçor são apresentados nas Tabelas 4.6, 4.7 e 4.8, respectivamente. Os valores encontrados são comparado com os resultados obtidos por Karam e Telles (1988).

Tabela 4.6 Deslocamentos na placa fina quadrada (10^{-2} m).

Pontos internos	Discretização Utilizada		Karam e Telles (1988) $\times(2/\pi)$
	24 elementos	40 elementos	
1	-0,3896	-0,3919	-0,3909
2	-0,3038	-0,3055	-0,3047
3	-0,1677	-0,1689	-0,1686
4	-0,3038	-0,3055	-0,3047
5	-0,2372	-0,2387	-0,2378
6	-0,1307	-0,1322	-0,1319
7	-0,1677	-0,1689	-0,1686
8	-0,1307	-0,1322	-0,1319
9	-0,0719	-0,0735	-0,0710

Tabela 4.7 Momentos fletores máximos na placa fina (tf.m/m).

Pontos internos	Discretização Utilizada		Karam e Telles (1988)
	24 elementos	40 elementos	
1	-0,4394	-0,4446	-0,4419
2	-0,3718	-0,3790	-0,3764
3	-0,2402	-0,2439	-0,2417
4	-0,3533	-0,3577	-0,3528
5	-0,3009	-0,3045	-0,3026
6	-0,1967	-0,1990	-0,1985
7	-0,2019	-0,2035	-0,2033
8	-0,1757	-0,1789	-0,1774
9	-0,1227	-0,1232	-0,1212

Tabela 4.8 Momentos torçores na placa fina (tf.m/m).

Pontos internos	Discretização Utilizada		Karam e Telles (1988)
	24 elementos	40 elementos	
1	0,0427	0,0439	0,0360
2	0,0704	0,0711	0,0717
3	0,0913	0,0929	0,0947
4	0,0704	0,0711	0,0717
5	0,1342	0,1364	0,1366
6	0,1823	0,1846	0,1857
7	0,0913	0,0929	0,0947
8	0,1823	0,1846	0,1857
9	0,2507	0,2615	0,2579

Os resultados de momentos fletores e torçores, aproximam-se bastante dos valores encontrados por Karam e Telles (1988), quando se aumenta a discretização. O resultados de deslocamentos também apresentam valores bastante significativos se comparados com os valores encontrados em Karam e Telles (1988).

4.7 Elementos de contorno para problemas dinâmicos estacionários da elasticidade 2D

Nesta seção é feita a discretização das equações integrais de contorno dos problemas dinâmicos estacionários da elasticidade 2D.

4.7.1 Discretização das equações integrais

A discretização das equações integrais para os problemas dinâmicos estacionários da elasticidade 2D (equação 3.80), segue procedimento semelhante ao realizado na seção 4.3 para o caso estático. Todavia, na integração destas equações para a formação do sistema de equações algébrico final, as singularidades são tratadas tomando o **ponto de colocação** (ponto onde são realizadas as integrações) externo ao domínio.

Assumindo-se novamente que o contorno do problema é dividido em N_e elementos de contorno, na ausência de forças de volume, a equação integral de contorno (3.80) passa a ser escrita como sendo:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^{N_e} h^j u^j = \sum_{j=1}^{N_e} g^j t^j \quad (4.59)$$

Pode-se perceber que a equação (4.59) é semelhante ao problema estático. A diferença principal está relacionada ao uso das soluções fundamentais de cada problema.

4.7.2 Equações algébricas e montagem do sistema de equações

A equação (4.59) relaciona os deslocamentos de qualquer ponto, no espaço bidimensional, com os valores de força e deslocamento dos pontos nodais. Quando o ponto de colocação i estiver situado sobre o elemento de contorno que vai ser integrado, ocorrem singularidades. Visando-se evitar as singularidades, adotou-se pontos de colocação i correspondentes aos nós de contorno fora do domínio, conforme mostra a Figura 4.16. Os pontos de colocação são localizados a uma distância d do contorno, definida por:

$$d = \alpha L \quad (4.60)$$

sendo, L o comprimento médio dos elementos concorrentes ao nó e α um fator positivo.

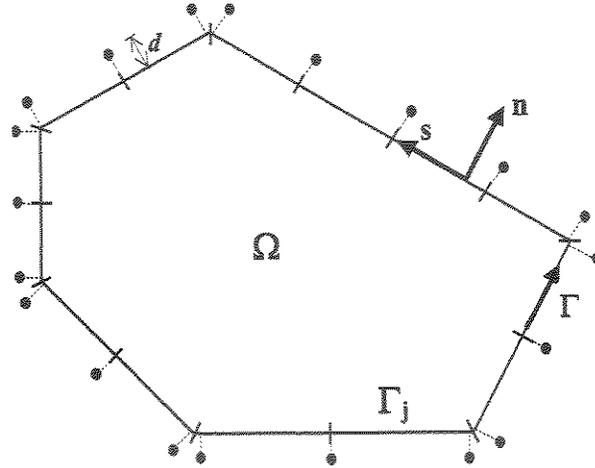


Figura 4.16 Ponto de colocação fora do domínio.

Com a aplicação dos pontos de colocação fora do domínio, o valor da constante c^j da equação (4.59) se anula. Por meio desta consideração, a equação (4.59) passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^{N_e} h^{ij} u^j = \sum_{j=1}^{N_e} g^{ij} t^j \quad (4.61)$$

Aplicando-se a equação (4.61) em todos os pontos de contorno, os resultados também podem ser escritos na forma matricial, ou seja:

$$[H]\{U\} = [G]\{T\} \quad (4.62)$$

A aplicação das condições de contorno do problema dinâmico estacionário da elasticidade 2D, produz o seguinte sistema de equações:

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (4.63)$$

O vetor X representa todos os valores complexos incógnitos de deslocamento ou esforço de superfície. O vetor F contém os valores complexos dos deslocamentos e esforços de superfície prescritos no contorno. A matriz complexa A , contém os termos das variáveis incógnitas, que foram obtidos com a troca das colunas das matrizes de influência H e G .

No sistema (4.63), as matrizes de influência H e G contém as soluções fundamentais da dinâmica estacionária da elasticidade 2D, mostradas no Capítulo 3, na qual está implícito as frequências de excitação ω . Aplicando uma força de excitação no contorno (vibração forçada), este sistema pode ser resolvido para uma faixa de frequências determinadas. Esta faixa de frequências leva a posterior obtenção da Função de Resposta em Frequência (FRF). Obtida a FRF, pode-se determinar as frequências naturais e os modos de vibração (em pontos do domínio) correspondentes.

A forma de análise dos resultados de um problema geral, foi feita a partir da determinação numérica das frequências naturais através das FRFs, comparando-se as mesmas com o cálculo analítico. Posteriormente, para cada frequência natural encontrada, foram determinados os modos de vibração do sistema a partir dos deslocamentos em pontos do domínio previamente estabelecidos.

Analogamente ao problema estático, os deslocamentos em pontos do domínio, podem ser determinados através do procedimento mostrado na seção 4.3.4.

4.8 Elementos de contorno para problemas dinâmicos estacionários da flexão de placas finas

Nesta seção é feita a discretização das equações integrais de contorno dos problemas dinâmicos estacionários da flexão de placas finas. O procedimento é semelhante ao problema estático. Todavia, na integração destas equações para a formação do sistema de equações algébrico final, as singularidades são tratadas tomando-se os **pontos de colocação** (pontos onde são realizadas as integrações) externos ao domínio da placa.

4.8.1 Discretização das equações integrais

A forma de discretização das equações integrais da dinâmica estacionária de placas finas é semelhante ao caso estático, isto é, define-se mais uma vez o elemento linear contínuo, como sendo a aproximação da geometria do contorno. Assim, em cada elemento de contorno Γ_j , as variáveis são aproximadas pelas funções de interpolação lineares de maneira análoga à geometria. Os deslocamentos e esforços na placa são tomados a partir das equações (4.30) e (4.31) e na representação das descontinuidades de deslocamentos e esforços, adota-se mais uma vez a estratégia do **nó duplo**.

4.8.2 Equações Algébricas

As equações integrais (3.128) a (3.136) para um ponto genérico ξ do contorno da placa, são agora transformadas em equações algébricas em função dos parâmetros nodais de contorno. Todavia, quando o ponto de colocação ξ (ponto onde se está aplicando a equação integral) estiver situado sobre o elemento de contorno no qual vai ser realizada a integração ocorrem singularidades. Visando evitar as singularidades, adotou-se pontos de colocação ξ correspondentes aos nós de contorno fora do domínio, conforme mostra a Figura 4.16. Cada ponto externo ao domínio fica posicionado na direção normal ao contorno em cada nó geométrico associado. Os pontos de colocação são localizados a uma distância d do contorno (equação 4.60).

De acordo com as equações integrais apresentadas (equações 3.128 e 3.136), as variáveis de contorno relacionadas ao problema dinâmico estacionário de placa fina são w , $\partial w/\partial n$, V_n e M_n e, quando existem cantos, R_c em cada um dos cantos. Independentemente das reações de canto R_c , sabe-se que a partir de condições naturais ou essenciais de cada problema, sempre são conhecidas duas das quatro variáveis mencionadas. Das quatro variáveis iniciais resultam duas incógnitas, sendo necessário a aplicação de pelo menos duas equações integrais para resolver completamente o problema. Sabe-se que de uma placa com N nós de contorno resultam duas vezes o número de nós em incógnitas ($2N$) além de uma reação de canto R_c para cada canto. Aplicando-se as equações integrais (3.128) e (3.136) em pontos ξ externos ao domínio, onde tem-se um ponto externo para cada nó de contorno, obtém-se as $2N$ equações necessárias para as variáveis incógnitas, as variáveis conhecidas e as reações de canto. Caso não houvessem cantos, não

existiriam reações R_c incógnitas e o problema pode ser resolvido. Quando existem as reações de canto, pode-se tratar o problema das seguintes formas:

- i) Escrever tantas equações a mais para tantos quantos forem os números de cantos, em pontos onde não foram usados para escrever as $2N$ equações.
- ii) Escrever a reação de canto incógnita em função das rotações $\partial w / \partial n$, com o uso de diferenças finitas relacionadas com os momentos torçores mostrados pela equação (3.125).
- iii) Desprezar o termo que contém a reação de canto incógnita, ou seja, tornar a reação de canto nula em cada um dos cantos.

Deve-se lembrar que quando se aplica as equações integrais em pontos ξ externos ao domínio, o carregamento g^* é uma carga unitária representada pela função delta de *Dirac*, então:

$$\int_{\Omega} g^*(\xi, x) w(x) d\Omega(x) = 0 \quad (4.64)$$

Do resultado apresentado pela equação (4.64), conclui-se que as constantes $C(\xi)$ presentes nas equações (3.128) e (3.136) se anulam. Sendo assim, estas equações integrais correspondentes ao ponto ξ , fora do domínio da placa, são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[V_n^*(\xi, x) w(x) - M_n^*(\xi, x) \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] d\Gamma(x) + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi, x_c) w_{ci}(x_c) = \\ \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[V_n(x) w^*(\xi, x) - M_n(x) \frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right] d\Gamma(x) + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c) w_{ci}^*(\xi, x_c) + \\ + \frac{1}{D} \int_{\Omega_s} g(x) w^*(\xi, x) d\Omega_s(x) \end{aligned} \quad (4.65)$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial n_1}(\xi, x) w(x) - \frac{\partial M_n^*}{\partial n_1}(\xi, x) \frac{\partial w}{\partial n}(x) \right] d\Gamma(x) + \\
& + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial n_1}(\xi, x_c) w_{ci}(x_c) = \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left[V_n(x) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(\xi, x) - M_n(x) \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right) \right] d\Gamma(x) + \\
& + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n_1}(\xi, x_c) + \frac{1}{D} \int_{\Omega_s} g(x) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(\xi, x) d\Omega_s(x) \quad (4.66)
\end{aligned}$$

As equações integrais (4.65) e (4.66) podem ser agrupadas em numa única equação, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{D} \int_{\Gamma} t^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\xi, x_c) w_{ci}(x_c) = \\
& \frac{1}{D} \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) v(x) d\Gamma(x) + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(x_c) u_{ci}^*(\xi, x_c) + \\
& + \frac{1}{D} \int_{\Omega_s} g(x) u_{\Omega}^*(\xi, x) d\Omega_s(x) \quad (4.67)
\end{aligned}$$

onde N_c é o número de cantos da placa e,

$$t^*(\xi, x) = \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_n^*(\xi, x) & -M_n^*(\xi, x) \\ \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1}(\xi, x) & -\frac{\partial M_n^*}{\partial n_1}(\xi, x) \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$u(x) = \begin{Bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(x) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(x) \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$

$$R_{ci}^*(\xi, x_c) = \begin{Bmatrix} R_{ci}^*(\xi, x_c) \\ \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial n_1}(\xi, x_c) \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

$$u^*(\xi, x) = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^*(\xi, x) & -\frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \\ \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(\xi, x) & -\frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(\xi, x) \right) \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$t(x) = \begin{Bmatrix} t_1(x) \\ t_2(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_n(x) \\ M_n(x) \end{Bmatrix} \quad (4.72)$$

$$u_{ci}^*(\xi, x_c) = \begin{bmatrix} w_{ci}^*(\xi, x_c) \\ \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n_1}(\xi, x_c) \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$u_{\Omega}^*(\xi, x) = \begin{bmatrix} w^*(\xi, x) \\ \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(\xi, x) \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

sendo n_1 um vetor normal ao contorno, x uma variável de domínio e de contorno e ξ o ponto onde se aplica a equação integral.

Discretizando-se o contorno da placa em N_e elementos de contorno e substituindo-se as variáveis por suas aproximações (4.30) e (4.31), a equação integral (4.67) para pontos ξ externos ao domínio pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_e} \frac{1}{D} \int_{\Gamma_j} t^*(\xi, x) \Phi^T(x) d\Gamma_j(x) U_k^i + \frac{1}{D} \sum_{l=1}^{N_e} R_{cl}^*(\xi, x_c) w_{cl}(x_c) = \\ \sum_{j=1}^{N_e} \frac{1}{D} \int_{\Gamma_j} u^*(\xi, x) \Phi^T(x) d\Gamma_j(x) \Gamma_k^i + \frac{1}{D} \sum_{l=1}^{N_e} R_{cl}(x_c) u_{cl}^*(\xi, x_c) + \\ + \frac{1}{D} \int_{\Omega_g} g(x) u_{\Omega}^*(\xi, x) d\Omega_g(x) \end{aligned} \quad (4.75)$$

A equação (4.75) representa na verdade um sistema de equações onde as incógnitas são os valores nodais U_k^i ou T_k^i , nos pontos definidos sobre o contorno. A integração sobre os elementos depende apenas das soluções fundamentais e das funções aproximadoras. Isto permite escrever os coeficientes da integração sobre os elementos independentemente das grandezas do contorno, introduzindo-se os seguintes termos:

$$h(\xi) = \int_{\Gamma_j} t^*(\xi, x) \Phi^T(x) d\Gamma_j(x) \quad (4.76)$$

$$g(\xi) = \int_{\Gamma_j} u^*(\xi, x) \Phi^T(x) d\Gamma_j(x) \quad (4.77)$$

As integrais ao longo do contorno Γ_j das equações (4.76) e (4.77) necessitam ser transformadas através de uma mudança de variável de Γ para uma coordenada homogênea ξ . Esta transformação é dada pela equação (4.11). Considerando-se esta mudança de variável, as equações (4.76) e (4.77) passam a ser escritas como,

$$h_{jk}^i(\xi) = \int_{-1}^1 t^* \Phi^T |J| d\xi = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 t_{jk}^*(\xi, x) \phi_i(x) d\xi(x) \quad (4.78)$$

$$g_{jk}^i(\xi) = \int_{-1}^1 u^* \Phi^T |J| d\xi = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 u_{jk}^*(\xi, x) \phi_i(x) d\xi(x) \quad (4.79)$$

onde,

- i nó local do elemento onde se mede a resposta ao carregamento unitário;
- ξ ponto de colocação (ponto fonte);
- j índice que identifica a equação que está sendo gerada; para $i = 1$ tem-se a equação em $w(\xi)$, para $i = 2$ tem-se a equação em $\partial w(\xi) / \partial n_1$. Generalizando, $i = 1$ indica carga unitária aplicada em ξ $i = 2$ indica momento unitário aplicado em ξ ;

k índice que identifica a natureza da resposta medida em 4. Se $k = 1$ a resposta fundamental é V_n^* , para h_{jk}^i , ou w^* para g_{jk}^i . Se $k = 2$ a resposta fundamental é M_n^* , para h_{jk}^i , ou $\partial w^*/\partial n$ para g_{jk}^i .

Os coeficientes $h_{jk}^i(\xi)$ e $g_{jk}^i(\xi)$ medem, respectivamente, a contribuição dos valores nodais de deslocamentos e esforços, correspondentes ao elemento de contorno em consideração, para os deslocamentos do ponto de colocação ξ .

4.8.3 Montagem do Sistema de Equações

Realizadas as operações das integrais de contorno na equação (4.75) sobre cada elemento genérico T_j , de acordo com o procedimento mostrado pelas equações (4.78) e (4.79), soma-se estas contribuições para todos os N_e elementos em todos os nós de contorno. Este procedimento, convenientemente endereçado, pode ser escrito na forma matricial, ou seja:

$$[H]\{U\} = [G]\{T\} + \{F\} \quad (4.80)$$

onde H e G são matrizes quadradas resultantes da integração sobre os elementos, U e T são, respectivamente, vetores de deslocamento e esforços nodais de contorno, e F o vetor que contém as contribuições do domínio.

A influência das reações de canto dada pelas parcelas:

$$\frac{1}{D} \sum_{l=1}^{N_c} R_{cl}^*(\xi, x_c) w_{cl}(x_c) \quad \text{e} \quad \frac{1}{D} \sum_{l=1}^{N_c} R_{cl}(x_c) \mu_{cl}^*(\xi, x_c)$$

pode ser incorporada à matriz H , conforme procedimento descrito no item anterior.

Na análise realizada, a integral de domínio presente na equação (4.75) dada pela parcela:

$$\frac{1}{D} \int_{\Omega_e} g(x) u_{,\Omega}^*(\xi, x) d\Omega_e(x)$$

foi considerada nula.

Portanto, de acordo com a aplicação das condições de contorno do problema dinâmico estacionário de placas finas, faz-se a reordenação do sistema algébrico de equações (4.80), obtendo um sistema final do tipo $AX = F$. O vetor X representa todos os valores desconhecidos de deslocamento (deslocamento ou rotação) ou esforço (força cortante equivalente ou momento fletor). O vetor B contém os efeitos dos deslocamentos e esforços prescritos no contorno. A matriz A contém os termos das variáveis incógnitas.

Cabe lembrar novamente que a frequência de excitação ω está inserida implicitamente no sistema de equações final, por meio das soluções fundamentais da dinâmica estacionária de placas finas, apresentadas no Capítulo 3. Este sistema pode ser resolvido para uma faixa de frequências determinadas, aplicando uma força de excitação no contorno da placa. Esta faixa de frequências leva a obtenção da Função de Resposta em Frequência (FRF). A partir da FRF, pode-se determinar as frequências naturais e os modos próprios de vibração de problemas dinâmicos estacionários da flexão de placas finas.

4.8.4 Deslocamentos em pontos internos

Uma vez determinados os deslocamentos e esforços no contorno, através da solução do sistema de equações final para cada frequência de excitação, é possível calcular os deslocamentos em qualquer ponto do domínio. Estes deslocamentos são calculados diretamente através das equações (3.128) e (3.136), de forma análoga à aquela utilizada para se escrever o sistema de equações final. Escrevendo-se as equações (3.128) e (3.136) para todos os pontos internos onde se deseja encontrar os deslocamentos, obtém-se:

$$w(\xi) + [H'] \{U\} = [G'] \{T\} \quad (4.81)$$

sendo $w(\xi)$ o vetor que contém os deslocamentos nos pontos internos ξ onde $C(\xi) = 1$, H' e G' matrizes semelhantes às aquelas obtidas para os pontos de contorno, U e T são os vetores que contém os esforços e deslocamentos do contorno. O cálculo dos coeficientes das matrizes H' e G' é realizado de maneira análoga ao procedimento de obtenção das matrizes H e G podendo, neste caso, efetuarem-se sempre integrações numéricas.

4.8.5 Montagem alternativa do sistema de equações

Além da forma de montagem do sistema de equações apresentado nas seções anteriores, onde as equações do deslocamento transversal e da derivada do deslocamento transversal são geradas em pontos de colocação situados fora do domínio da placa, optou-se por outra alternativa que também pudesse resolver o problema adequadamente.

De acordo com o que foi descrito por Paiva e Venturini (1988), existem algumas alternativas viáveis para a montagem do sistema de equações na placa. A formulação alternativa adotada também evita o problema das singularidades, sendo definida da seguinte forma:

- i) Formulação integral de contorno referente ao deslocamento transversal w com a adoção de pontos situados fora do domínio da placa. Neste caso, conforme mostra a Figura 4.17, são utilizados dois pontos de colocação distintos situados sobre a normal de um ponto nodal, distantes d_1 e d_2 do contorno.

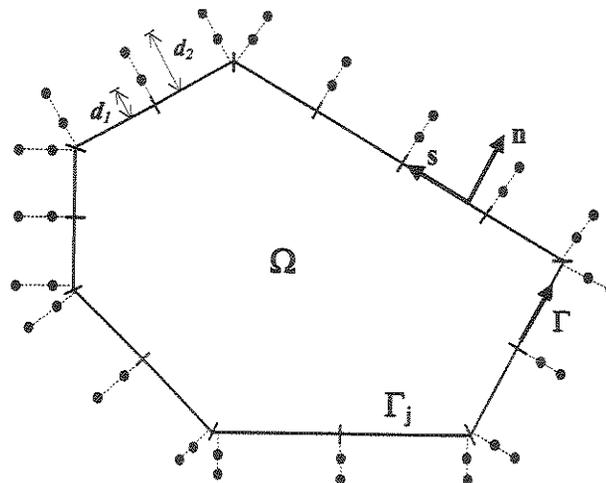


Figura 4.17 Pontos distintos de colocação fora do domínio da placa.

Cada ponto externo ao domínio fica posicionado na direção normal ao contorno, para cada nó geométrico associado. Os pontos de colocação são localizados a distâncias d_1 e d_2 do contorno, definidas por:

$$d_1 = a_1 L \quad (4.82)$$

$$d_2 = a_2 L \quad (4.83)$$

sendo, L o comprimento médio dos elementos concorrentes ao nó e a_1 e a_2 fatores positivos que definem o posicionamento dos pontos de colocação.

Como já foi dito, as variáveis de contorno relacionadas ao problema estacionário de placa fina são w , $\partial w / \partial n$, V_n e M_n e, quando existem cantos, R_c em cada um dos cantos. Independentemente das reações de canto R_c , sabe-se que a partir de condições naturais ou essenciais de cada problema, sempre são conhecidas duas das quatro variáveis mencionadas. Das quatro variáveis iniciais resultam duas incógnitas, sendo necessário a aplicação de duas equações integrais para resolver completamente o problema. Em uma placa com N nós de contorno resultam duas vezes o número de nós em incógnitas ($2N$) além de uma reação de canto R_c para cada canto. Aplicando-se a equação integral de deslocamento em pontos externos distintos, onde agora passará a existir dois pontos externos para cada nó de contorno, obtém-se as $2N$ equações necessárias para as variáveis incógnitas, as variáveis conhecidas e as reações de canto.

A contribuição da reação de canto é incorporada à matriz H , quando se opta pela colocação de nós duplos no canto da placa. Esta contribuição é endereçada e acumulada nas linhas da matriz H , correspondentes a cada ponto colocação e colunas relacionadas ao nó do canto e aos nós próximos do mesmo.

4.9 Validação das formulações dinâmicas estacionárias da elasticidade 2D e placas finas

Visando a aplicação do Método Direto dos Elementos de Contorno, através dos programas computacionais em linguagem **FORTRAN 90** desenvolvidos neste trabalho, são apresentados nesta seção alguns exemplos numéricos para análise de problemas dinâmicos estacionários da elasticidade 2D (**DINESTAPLAN**) e de flexão de placas finas (**DINPLAFIN**). Os programas montados com base nas referidas teorias foram testados considerando-se o cálculo numérico das frequências naturais e dos modos de vibração dos problemas exemplificados. Para a visualização dos modos de vibração foi utilizado o software **Array Visualiser 1.0** contido no Visual Fortran 6.1 da Digital. Os tempos de processamento destes exemplos foram tomados considerando-se um computador com processador Intel Pentium III 500 MHz.

4.9.1 Barra engastada-livre submetida a uma vibração axial uniforme

Uma barra retangular em balanço e com relação entre lados igual a $1/7$, foi submetida a um esforço de superfície t , periódico e harmônico, sobre o lado livre oposto ao engastamento. De acordo com a Figura 4.18, as condições de contorno são de um lado engastado e os outros três lados livres. As dimensões são de 7m na direção longitudinal e 1m na direção transversal. O coeficiente de *Poisson* ν foi considerado nulo. Para o Módulo de *Young* foi adotado $E = 2.0 \text{ N/m}^2$ e para a densidade, foi adotado um valor unitário, isto é, $\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$. O número de pontos de Gauss utilizado foi igual a 12. Inicialmente o fator de amortecimento β_a foi considerado nulo, posteriormente ele foi aumentado progressivamente para considerar a variação de amortecimento da barra.

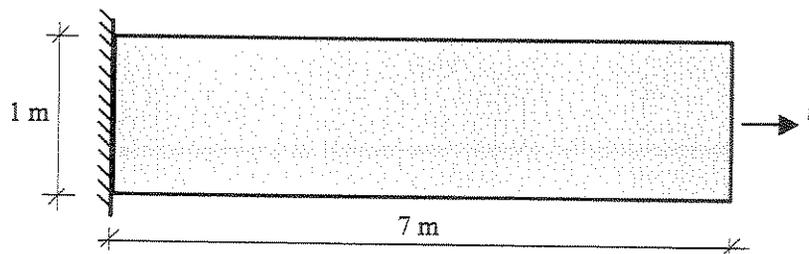


Figura 4.18 Barra engastada-livre sob esforço de superfície uniforme.

A Tabela 4.9 mostra as duas discretizações utilizadas para a resolução do problema.

Tabela 4.9 Discretizações da barra engastada-livre.

Discretização	L_A	L_B	L_C	L_D
48 elementos	4	20	4	20
96 elementos	8	40	8	40

A Figura 4.19 mostra a primeira discretização do contorno com 48 elementos lineares, sendo utilizados nos cantos da barra nós duplos, perfazendo um total de 52 nós de contorno. Também foram alocados 81 pontos internos para a determinação dos modos de vibração da barra, sendo que uma linha de 3 pontos está disposta na direção x_2 e conseqüentemente uma linha de 27 pontos está disposta na direção x_1 .

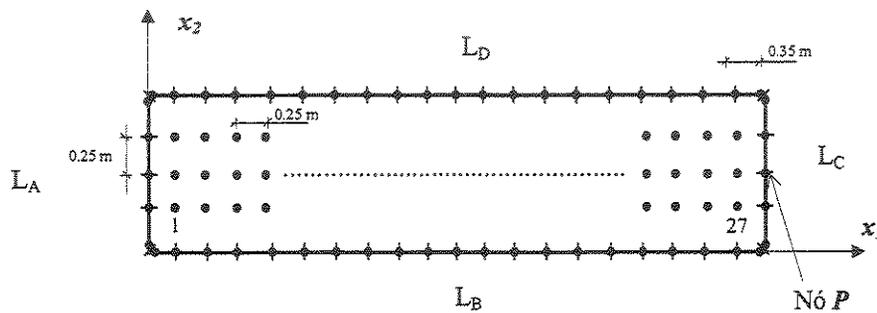


Figura 4.19 Discretização do MEC para a barra engastada-livre.

Os resultados de frequência obtidos deste problema 2D, foram comparados com a solução analítica 1D que foi mostrada por Clough e Penzien (1975) e apresenta as seguintes frequências naturais:

$$\omega_n = \frac{2n-1}{2} \pi \sqrt{\frac{EA}{m\ell^2}} \quad n = 1, 2, 3... \quad (4.84)$$

Adotando-se valores unitários para a massa por unidade de comprimento m e para a área A , as três primeiras frequências de ressonância da solução analítica apresentada em (4.84) conduz a $\omega_n = 0.3173, 0.9520, 1.5867$ rad./s. Conhecidas as três primeiras frequências naturais do sistema,

torna-se necessário fazer uma varredura ao longo da faixa de frequências para construir a Função de Resposta em Frequência (FRF). A regra utilizada para a determinação do número de passos em que foi feita esta varredura, é dada por:

$$NFR = 2^{n^*} \quad n^* = 1, 2, 3 \dots \quad (4.85)$$

sendo que o número de frequências avaliadas no intervalo é $2^{n^*}+1$. Este procedimento garante que dentre os pontos avaliados para um determinado valor de n^* estão todos aqueles considerados para o valor $n^* - 1$.

Consequentemente, em função do resultado apresentado para as três primeiras frequências naturais, adotou-se uma faixa de frequência de 0 a 2 para a resolução numérica do problema. Desta forma, construiu-se a Função de Resposta em Frequência (FRF) para os deslocamentos na direção x_1 do nó P da Figura 4.19.

De acordo com os Gráficos 4.4 e 4.5, para a primeira discretização do problema, são apresentadas as FRFs do módulo do deslocamento normalizado \times frequência normalizada para os números de passos $n^* = 5, 6, 7$ e 8 . Nestes gráficos, são apresentados também os tempos de processamento (tp) de cada FRF e também os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação onde são realizadas as integrações.

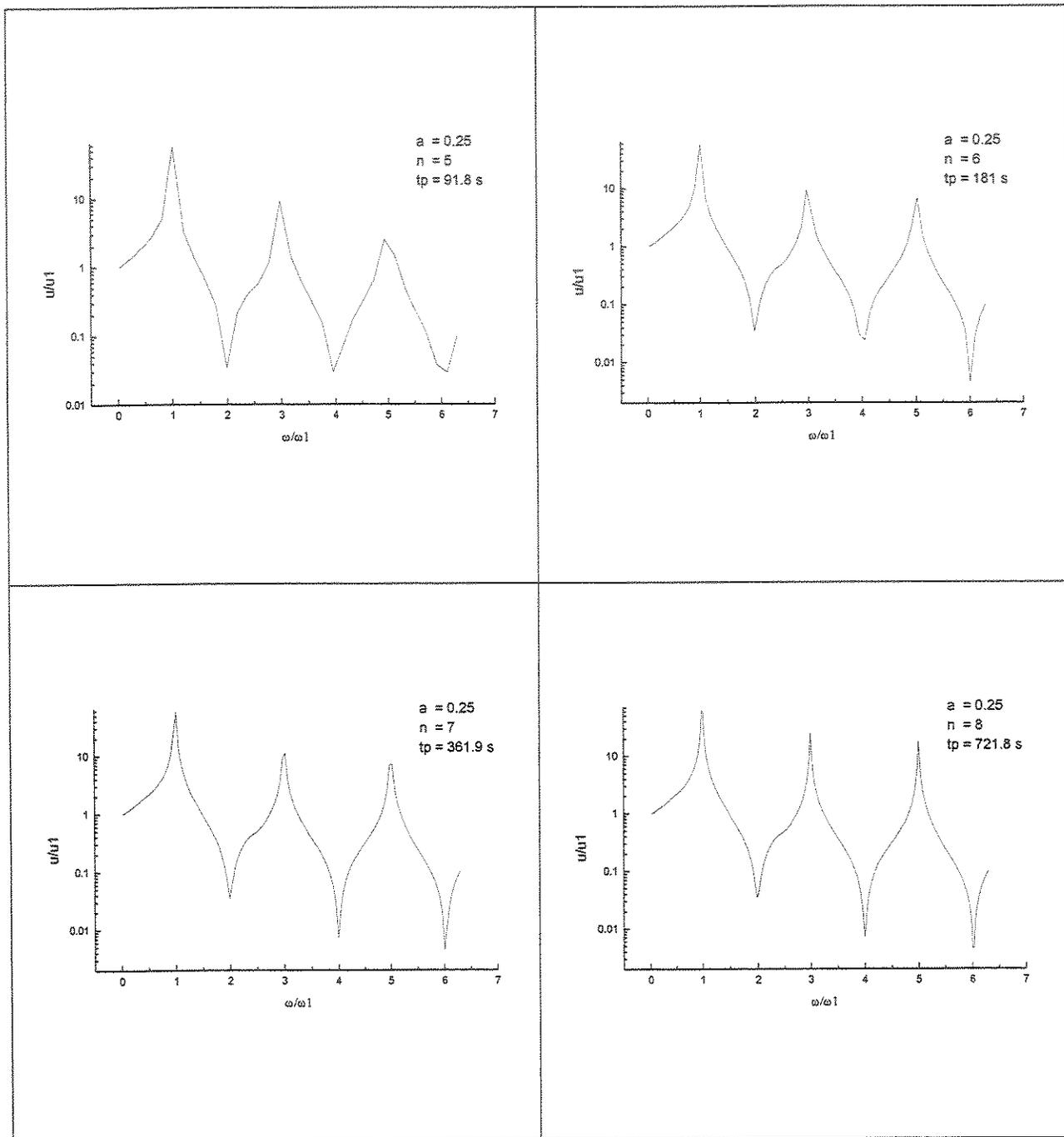


Gráfico 4.4 FRFs do deslocamento normalizado na direção x_1 do ponto P.

Analisando o Gráfico 4.4, pode-se observar que à medida que o intervalo de frequência aumenta os valores convergem para o resultado analítico, com porcentagem de erro bastante baixa para $n^* = 8$ (Tabela 4.9). Portanto, para este exemplo, o ponto de colocação posicionado a $\frac{1}{4}$ do comprimento dos elementos consecutivos apresentou resultados bastante significativos.

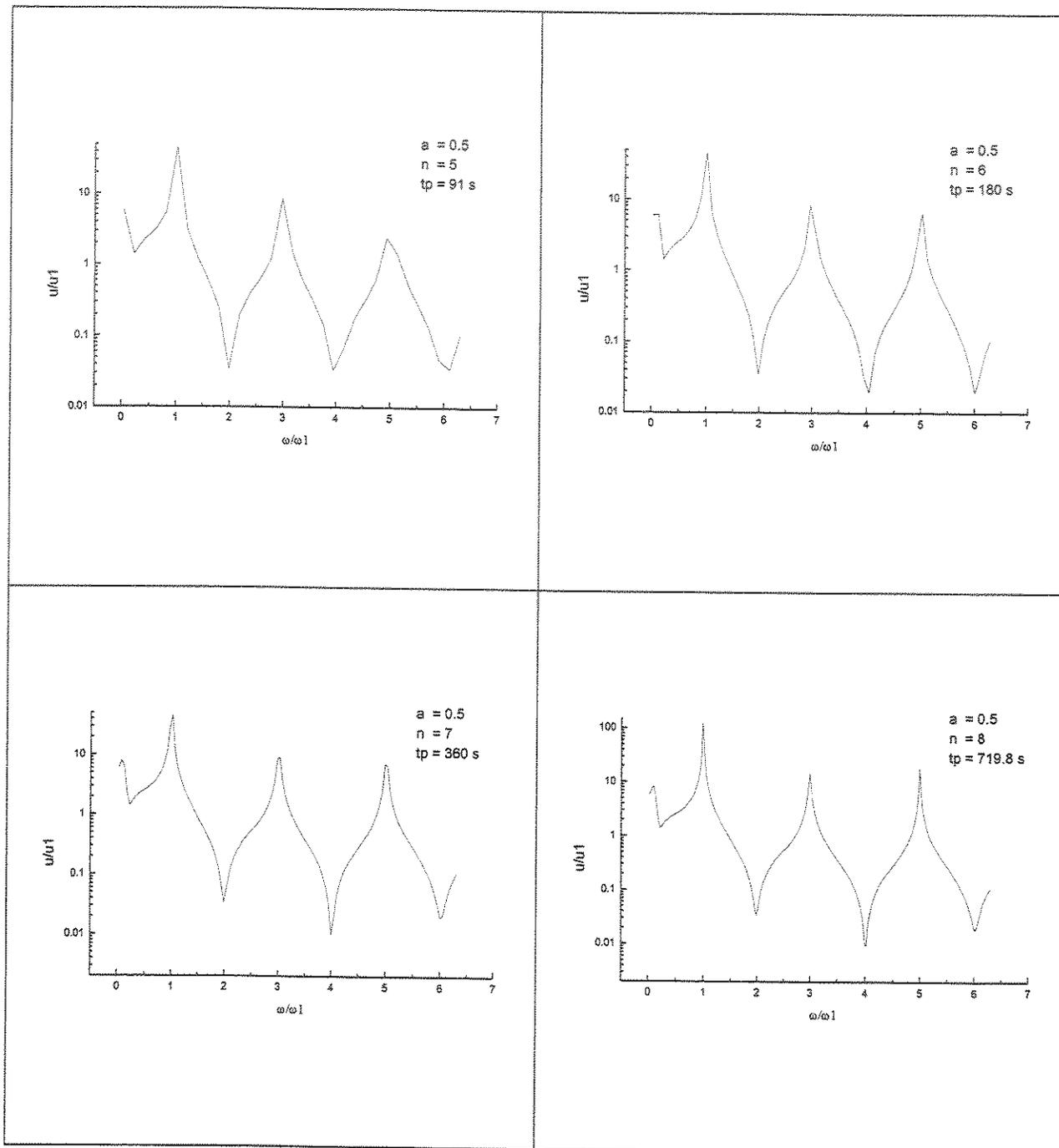


Gráfico 4.5 FRFs do deslocamento normalizado na direção x_1 do ponto P.

Analisando o gráfico 4.5, novamente pode-se observar que a medida que o intervalo de frequência aumenta os valores convergem para o resultado analítico, com porcentagem de erro bastante baixa para $n^* = 8$ (Tabela 4.9). Neste caso, o ponto de colocação foi posicionado a $\frac{1}{2}$ do comprimento dos elementos consecutivos, obtendo-se também resultados bastante significativos.

Todavia, estes resultados apresentaram uma pequena inconsistência quando a frequência natural se aproximou de zero. Com relação aos tempos de processamento, que foram aferidos apenas para se ter uma idéia do tempo gasto para processar cada exemplo, como era de se esperar, os dois casos analisados estes tempos estiveram bastante próximos. Em média, o tempo gasto para processar cada frequência foi de 2,8 segundos.

Considerando-se a primeira discretização, a Tabela 4.10 apresenta os valores comparativos para as três primeiras frequências naturais calculadas numérica ($n^* = 5, 6, 7$ e 8) e analiticamente, sendo que estes valores são exatamente iguais para os dois fatores de posicionamento do ponto de colocação ($a = 1/2, a = 1/4$). Os resultados estão normalizados, tendo como base os valores analíticos.

Tabela 4.10 Influência da discretização do intervalo de frequência no cálculo das FRFs de uma barra engastada-livre.

Frequências	ω_1	ω_2	ω_3
$n^* = 5$	1.02	2.97	4.93
$n^* = 6$	1.01	2.97	5.03
$n^* = 7$	1.01	3.02	4.98
$n^* = 8$	0.997	3.00	5.00
Resultado Analítico	1.00	3.00	5.00

Analisando a Tabela 4.9, pode-se observar que existe boa convergência dos valores numéricos para o analítico, a medida que o intervalo de frequência aumenta. Os números de passos 7 e 8 apresentaram pouca variação e, portanto, o último valor foi considerado o mais representativo na resolução numérica do problema.

Adicionalmente, com a intenção de analisar mais detalhadamente a FRF da barra, são apresentadas no Gráfico 4.6 as vinte primeiras frequências naturais da barra engastada-livre para as duas discretizações apresentadas.

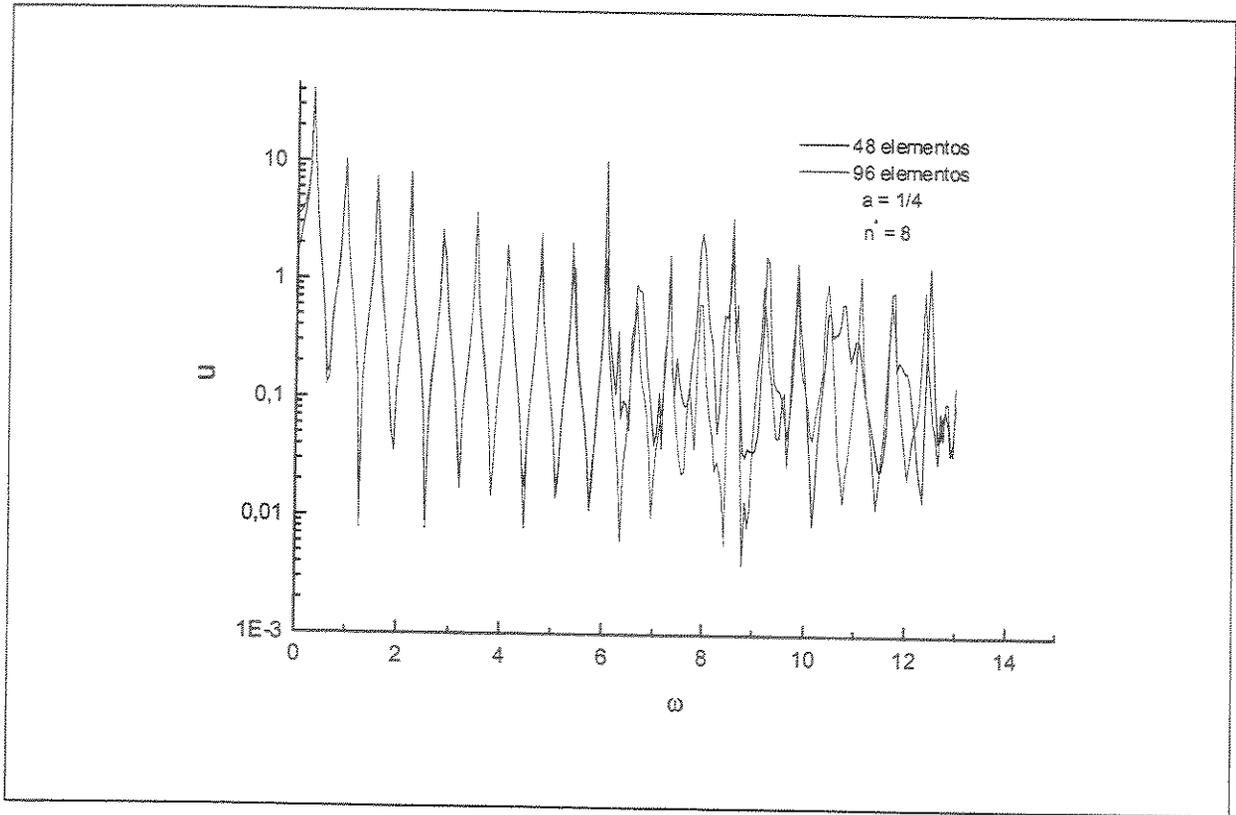


Gráfico 4.6 Vinte primeiras frequências naturais de uma barra engastada-livre.

Analisando o Gráfico 4.6, pode-se observar que as dez primeiras frequências naturais da barra são obtidas com clareza. Contudo, a partir da décima frequência são encontrados outros picos de frequência que provavelmente aparecem devido ao efeito da outra direção do problema 2D. Lembrando que os resultados do problema 2D encontrados neste trabalho são comparados com valores analíticos do problema 1D.

A Tabela 4.11, além do valor estático encontrado, apresenta os valores analíticos e numéricos das vinte primeiras frequências naturais da barra engastada-livre. O valor estático do deslocamento longitudinal da barra engastada-livre pode ser comparado com o valor teórico conhecido da resistência dos materiais, sendo este valor teórico dado pela seguinte equação:

$$u_1 = \frac{FL}{AE} = 3.5 \text{ m} \quad (4.86)$$

Tabela 4.11 Valor estático do deslocamento e as vinte primeiras frequências de uma barra engastada-livre.

Frequências	Analítica	48 elementos	96 elementos
ω_1	0.3173	0.3057	0.3057
ω_2	0.9520	0.9657	0.9657
ω_3	1.5867	1.5751	1.5751
ω_4	2.2214	2.2352	2.2352
ω_5	2.8561	2.8445	2.8445
ω_6	3.4908	3.5046	3.5046
ω_7	4.1255	4.1140	4.1140
ω_8	4.7602	4.7741	4.7741
ω_9	5.3949	5.4342	5.3834
ω_{10}	6.0296	6.0435	6.0435
ω_{11}	6.6643	6.6528	6.6528
ω_{12}	7.2990	7.3129	7.3129
ω_{13}	7.9337	7.9730	7.9730
ω_{14}	8.5684	8.5824	8.5824
ω_{15}	9.2031	9.2425	9.1917
ω_{16}	9.8378	9.8518	9.8518
ω_{17}	10.4725	10.4611	10.4611
ω_{18}	11.1072	11.0197	11.1212
ω_{19}	11.7419	11.7813	11.7306
ω_{20}	12.3766	12.4922	12.3907
Valor estático do deslocamento longitudinal (m)	3.5	1.6412	3.5000

Na sequência, com o objetivo de extrapolar a análise da barra engastada-livre em meio elástico para um meio viscoelástico, foram testados diferentes valores para o fator de amortecimento β_a . Os resultados finais das três primeiras frequências naturais mostradas pelas FRFs estão apresentados no Gráfico 4.7. Estes resultados mostram claramente o amortecimento do sistema, quando o fator β_a aumenta, e atestam o bom comportamento da quadratura numérica na integração dos elementos de contorno lineares.

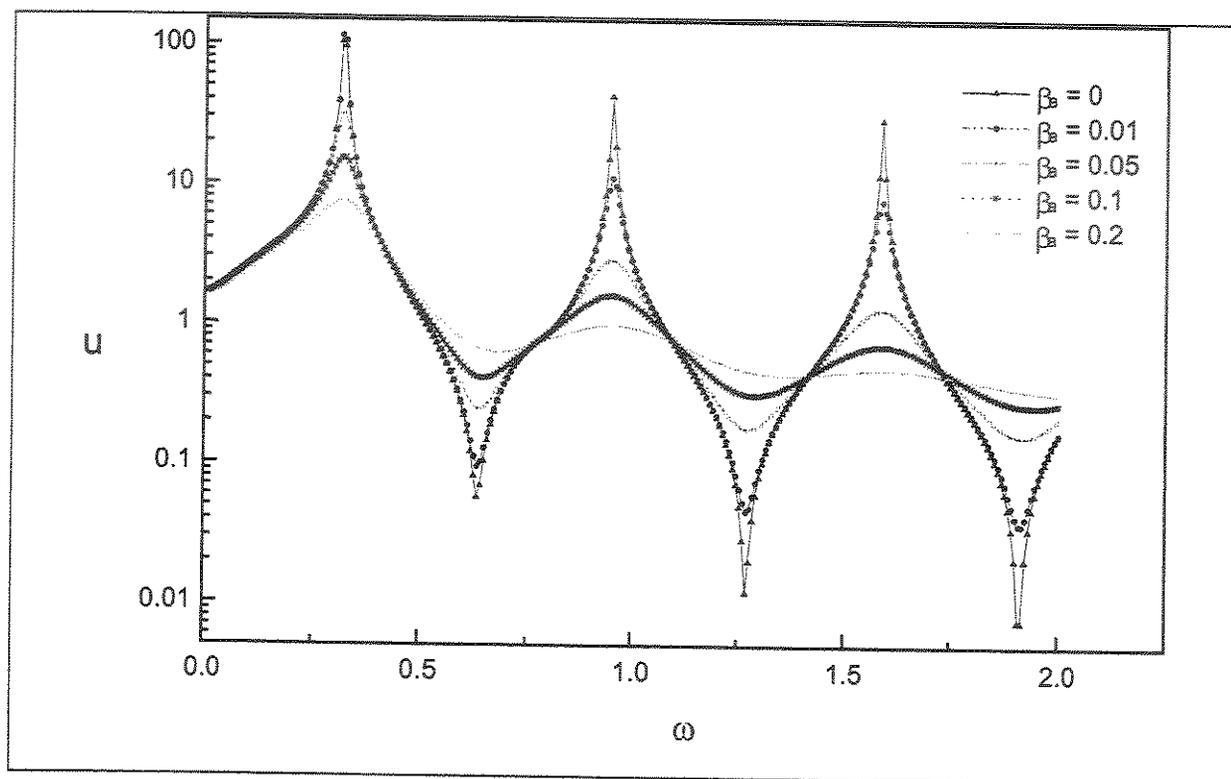


Gráfico 4.7 FRFs de uma barra engastada-livre com amortecimento.

Conforme foi mostrado no Gráfico 4.8, pode-se analisar também o ângulo de fase ϕ_j (em graus) de cada FRF, a partir da parte real e imaginária dos valores complexos do vetor de deslocamentos. ($\phi_j = \arctan(I/R)$). Neste gráfico, foi apresentada uma FRF do ângulo de fase \times frequência para o número de passo $n^* = 8$

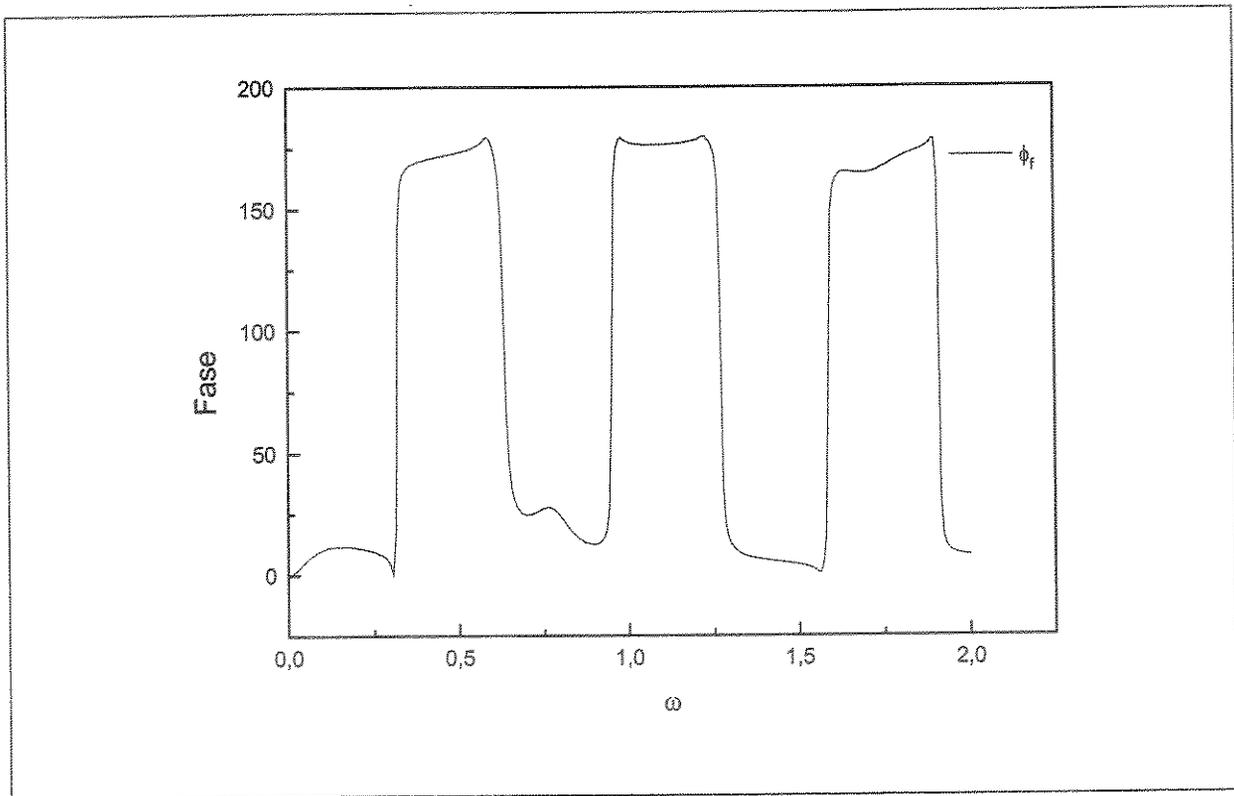


Gráfico 4.8 FRF do ângulo de fase \times frequência de uma barra engastada-livre.

Como última análise deste exemplo, comparando-se com a representação unidimensional mostrada na Figura 4.20, são apresentados na sequência os gráficos de uma representação tridimensional dos três primeiros modos de vibração da barra. Estes modos de vibração foram obtidos a partir da parte real dos deslocamentos na direção x_1 dos pontos internos mostrados na Figura 4.19. O fator de posicionamento do ponto de colocação para a obtenção destes modos de vibração foi $a = 1/4$.

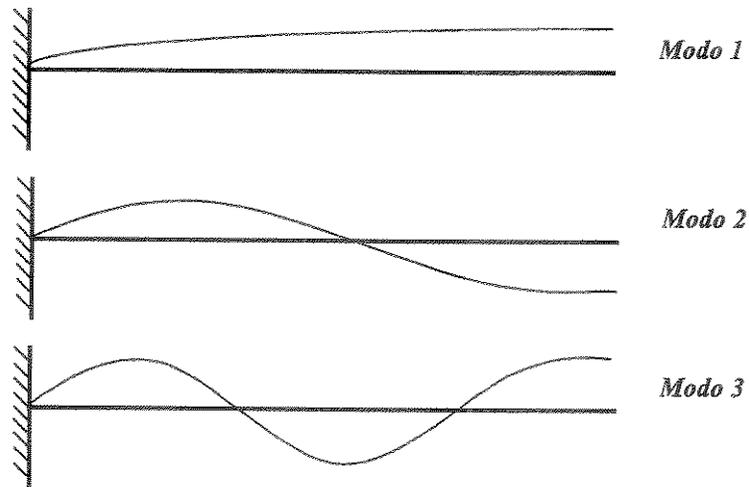


Figura 4.20 Três primeiros modos de vibração de uma barra engastada-livre.

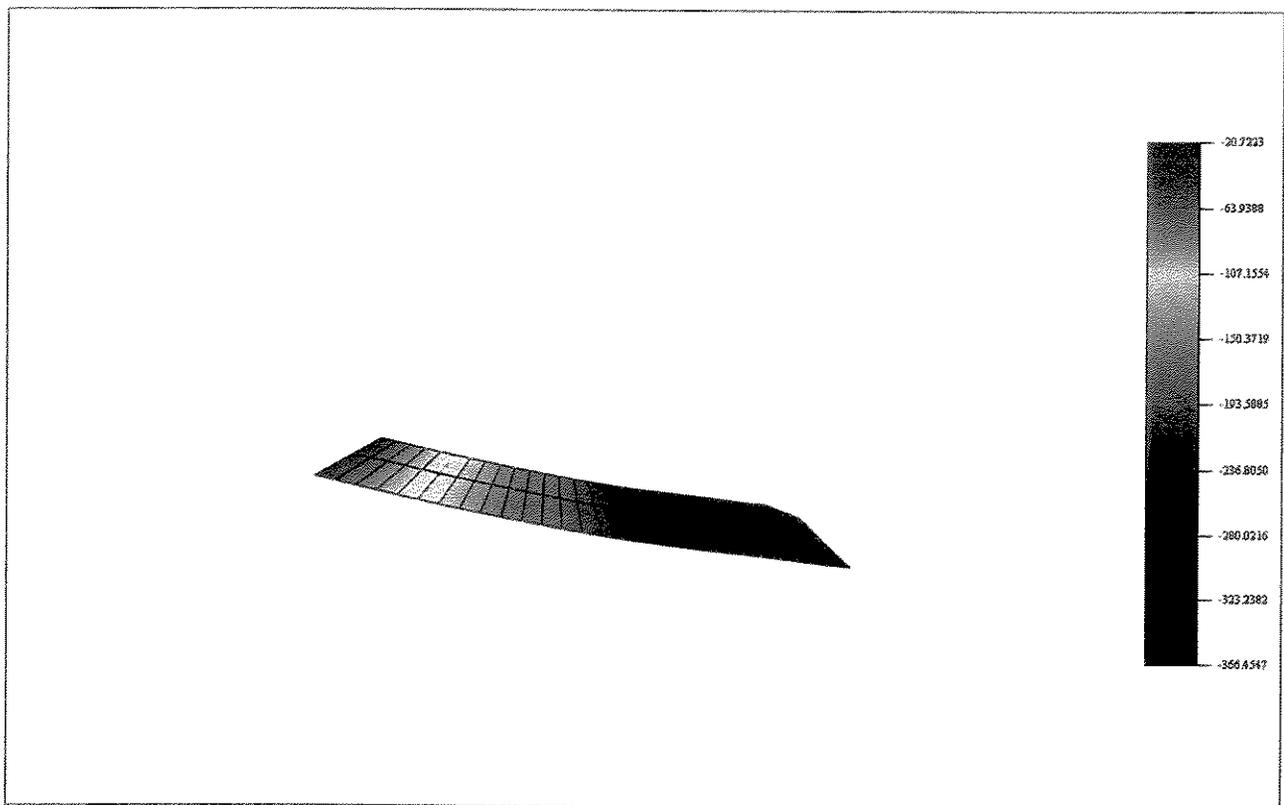


Gráfico 4.9 Parte real do primeiro modo de vibração de uma barra engastada-livre (direção x_1).

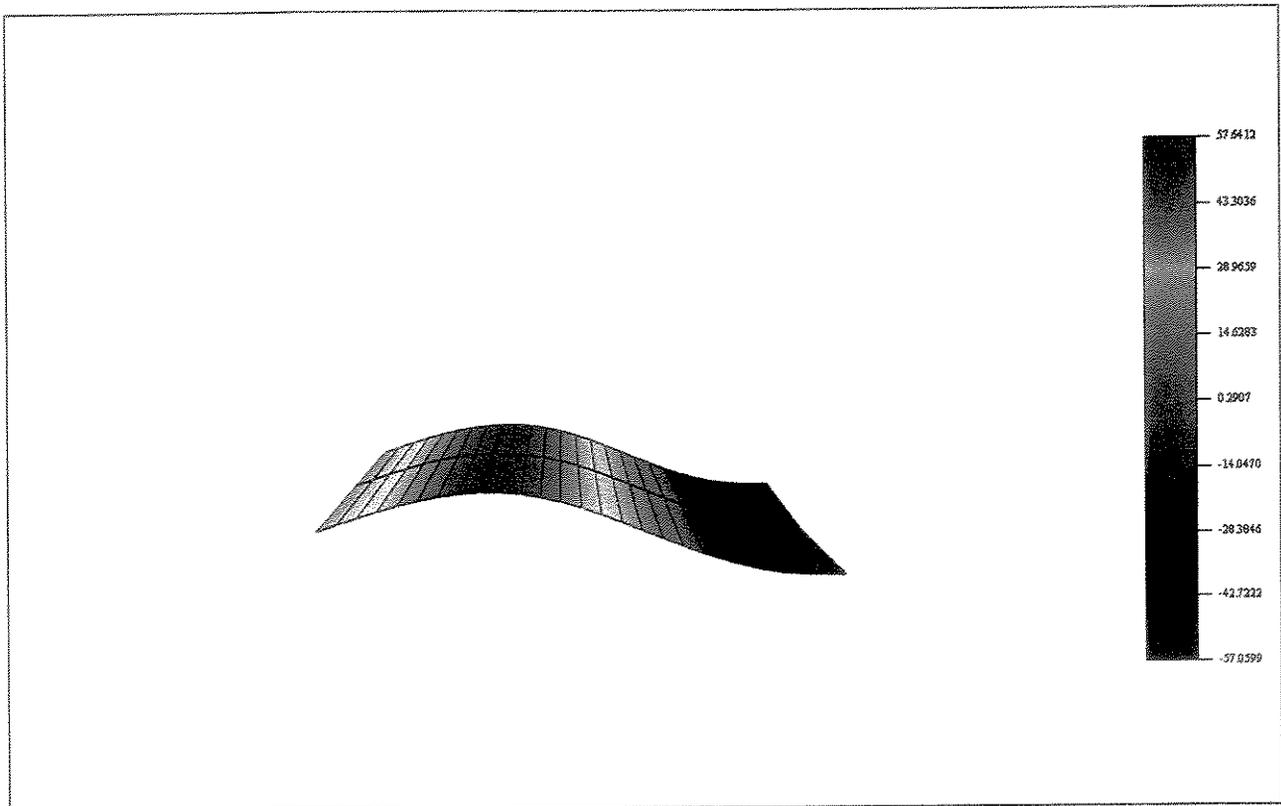


Gráfico 4.10 Parte real do segundo modo de vibração de uma barra engastada-livre (direção x_1).

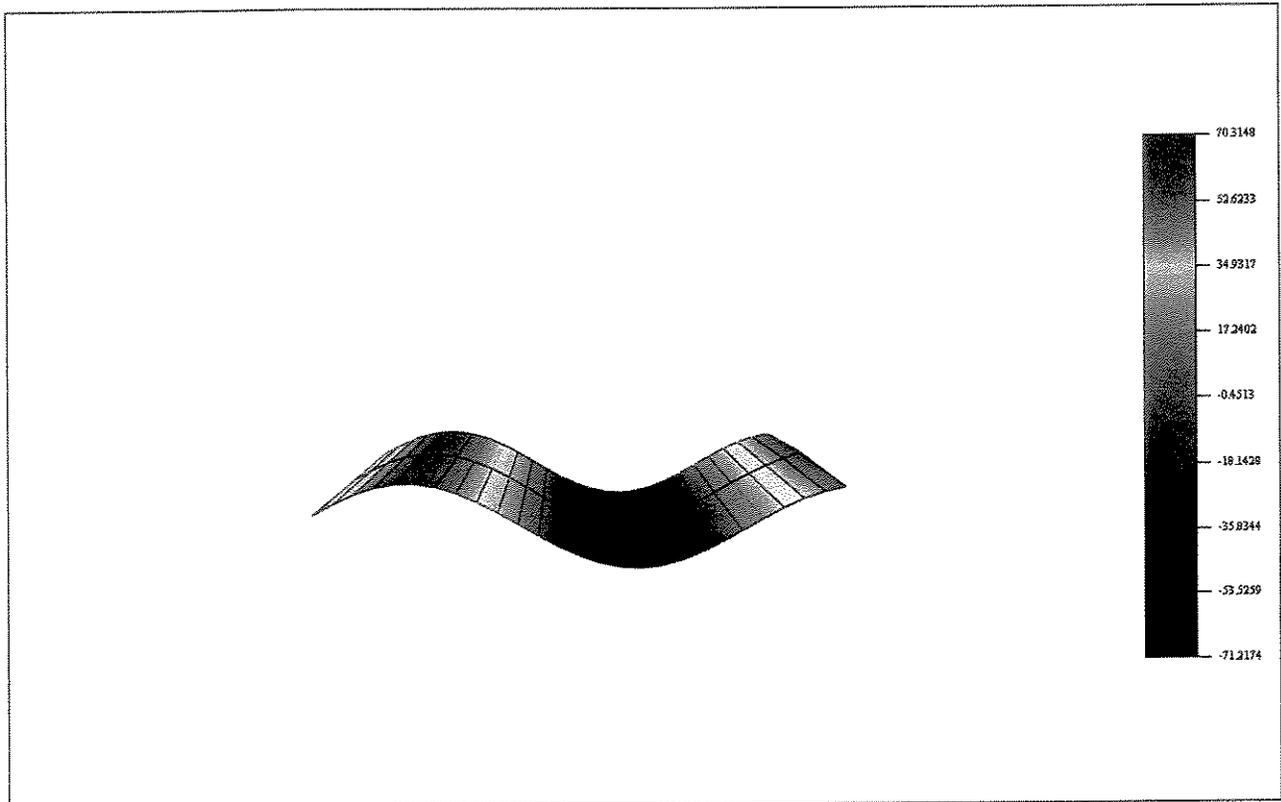


Gráfico 4.11 Parte real do terceiro modo de vibração de uma barra engastada-livre (direção x_1).

4.9.2 Barra engastada-engastada submetida a uma vibração axial

Este exemplo trata uma barra retangular, engastada nas extremidades e submetida a esforço de superfície periódico e harmônico t na direção longitudinal. As condições de contorno são de dois lados opostos engastados na direção transversal e os outros dois livres, conforme mostra a Figura 4.21. As dimensões da barra são de 12m na direção longitudinal e 1m na direção transversal. Novamente, o coeficiente de *Poisson* ν e o fator de amortecimento β_a , foram considerados nulos. Foi adotado $E = 2.6 \text{ N/m}^2$ para o Módulo de *Young* e um valor unitário, $\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$, para a densidade. O número de pontos de Gauss utilizado neste exemplo foi igual a 12.

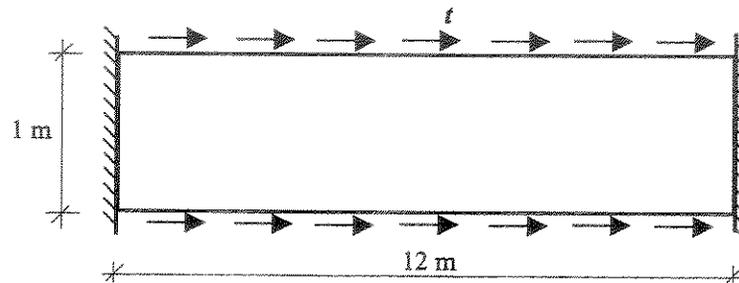


Figura 4.21 Barra engastada-engastada submetida a um esforço de superfície periódico e harmônico.

Conforme mostra a Figura 4.22, o contorno do problema foi discretizado em 48 elementos lineares, sendo utilizados nos cantos da barra nós duplos, perfazendo um total de 52 nós de contorno. De forma idêntica ao exemplo anterior, foram alocados 81 pontos internos para a determinação dos modos de vibração da barra.

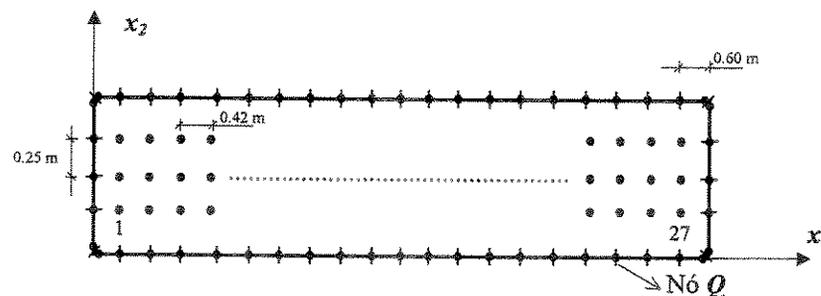


Figura 4.22 Discretização do MEC para a barra engastada-engastada.

A solução analítica 1D para este problema foi mostrada em Richart et. al. (1970), e apresenta as seguintes frequências naturais:

$$\omega_n = n \frac{\pi v_c}{\ell} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (4.87)$$

onde,

$$v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.88)$$

Impondo os valores adotados, as três primeiras frequências de ressonância da solução analítica apresentada em (4.87) conduz a $\omega_n = 0.4221, 0.8442, 1.2664$ rad./s. Definidas as três primeiras frequências naturais e de acordo com definições do exemplo anterior, adotou-se uma faixa de frequência de 0 a 1.4 para a resolução numérica do problema. Sendo assim, construiu-se a FRF para os deslocamentos na direção x_I do nó Q da Figura 4.22.

Nos Gráficos 4.12 e 4.13, são apresentadas as FRFs do deslocamento normalizado versus frequência normalizada para os números de passos $n^* = 5, 6, 7$ e 8. Novamente, são apresentados os tempos de processamento (tp) de cada FRF, bem como os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação onde são realizadas as integrações. Os resultados encontrados estão normalizados, tendo como base os valores analíticos.

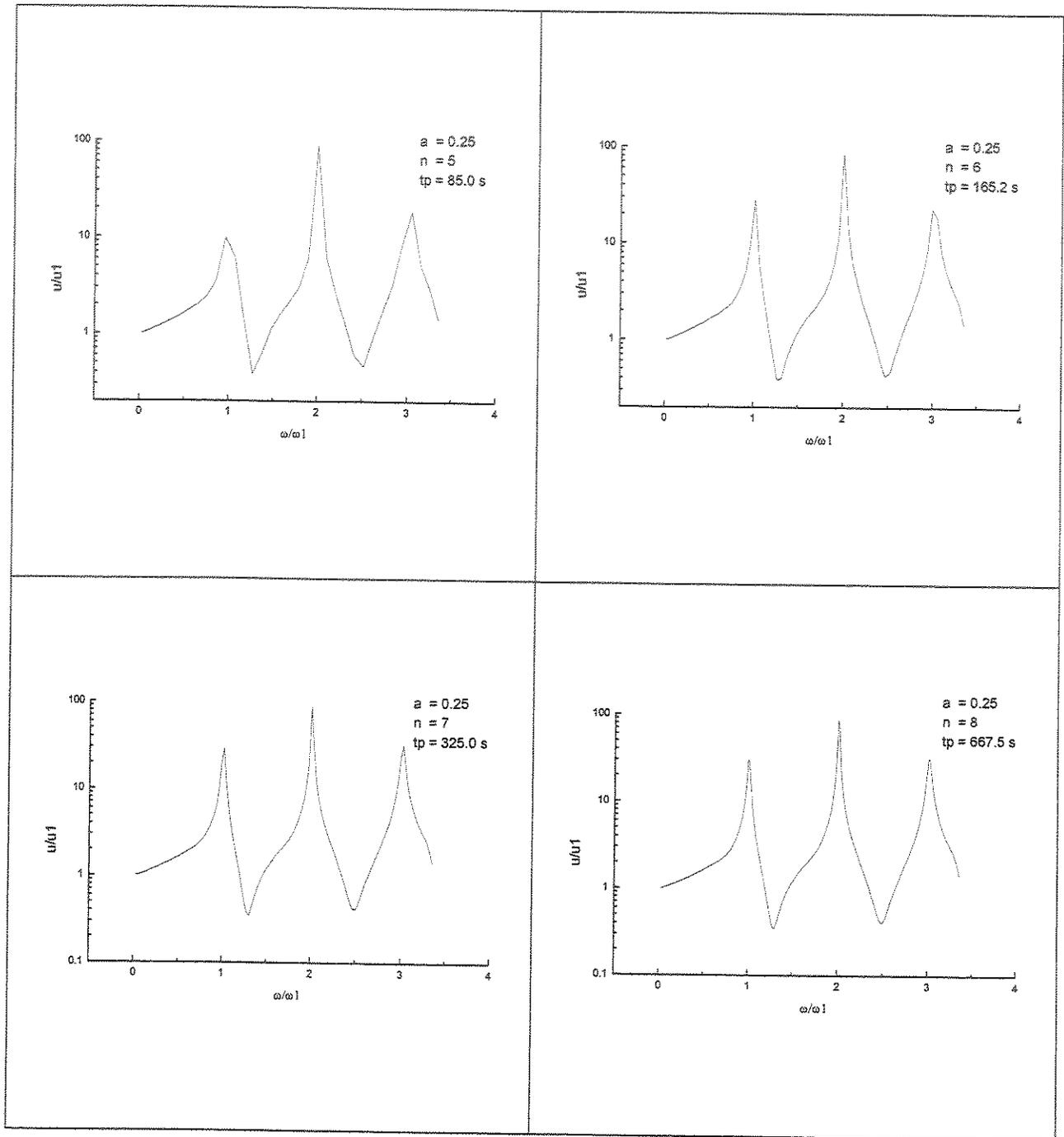


Gráfico 4.12 FRFs do deslocamento normalizado na direção x_1 do ponto Q.

Analisando o Gráfico 4.12, de forma análoga ao exemplo anterior, pode-se observar que à medida que o intervalo de frequência aumenta os valores convergem para o resultado analítico apresentado pela equação (4.87). Novamente, o ponto de colocação posicionado a $\frac{1}{4}$ do comprimento dos elementos consecutivos apresentou resultados bastante significativos.

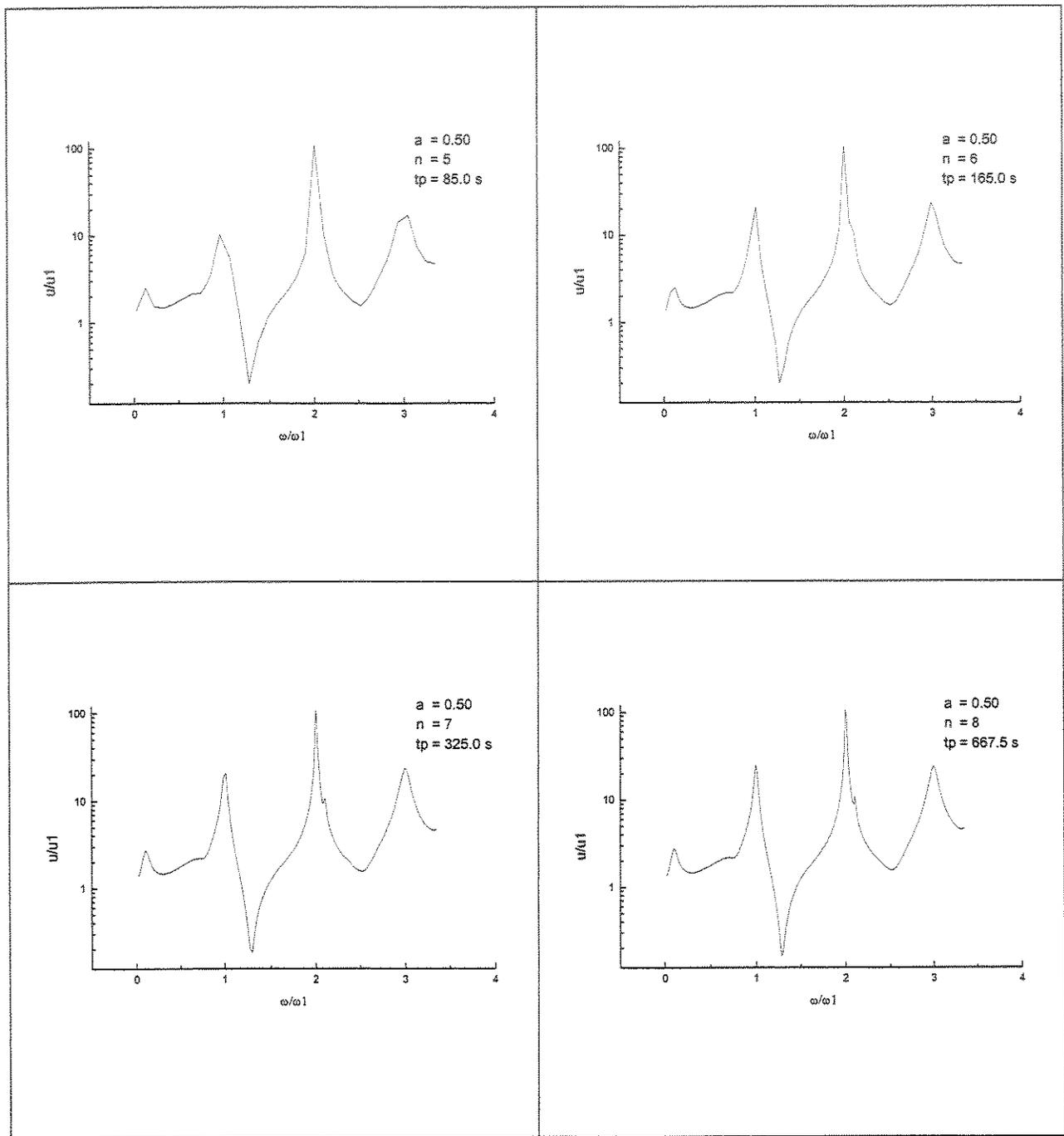


Gráfico 4.13 FRFs do deslocamento normalizado na direção x_1 do ponto Q.

Analisando o Gráfico 4.13, mais uma vez pode-se observar que à medida que o intervalo de frequência aumenta os valores convergem para o resultado analítico apresentado pela equação (4.87). Neste caso, o ponto de colocação foi posicionado a $\frac{1}{2}$ do comprimento dos elementos consecutivos, obtendo-se também resultados bastante significativos. No entanto, percebeu-se

novamente que os resultados apresentaram uma pequena inconsistência quando a frequência natural se aproximou de zero. Com relação aos tempos de processamento, pode-se observar que para os dois casos analisados estes tempos estiveram bastante próximos. Para cada frequência analisada, o tempo médio foi de 2,5 segundos.

A Tabela 4.12 apresenta os valores comparativos para as três primeiras frequências naturais calculadas numérica ($n^* = 5, 6, 7$ e 8) e analiticamente, sendo que novamente os valores encontrados são exatamente iguais para os dois fatores de posicionamento do ponto de colocação ($a = 1/2, a = 1/4$). Os resultados estão normalizados, tendo como base os valores analíticos.

Tabela 4.12 Influência da discretização do intervalo de frequência no cálculo das FRFs de uma barra engastada-engastada.

Frequências	ω_1	ω_2	ω_3
$n^* = 5$	1.02	1.97	2.93
$n^* = 6$	1.01	1.97	3.03
$n^* = 7$	1.01	2.02	2.98
$n^* = 8$	0.996	2.01	3.01
Resultado Analítico	1.00	2.00	3.00

Analisando a Tabela 4.12, pode-se observar novamente que existe boa convergência dos valores numéricos para o analítico, a medida que o intervalo de frequência aumenta. Os números de passos 7 e 8 apresentaram pouca variação e, portanto, novamente o último valor foi considerado o mais representativo na resolução numérica do problema.

Como última análise do exemplo, comparando-se com a representação unidimensional mostrada na Figura 4.23, são apresentados na sequência os gráficos dos três primeiros modos de vibração da barra engastada-engastada. Estes modos de vibração foram obtidos a partir dos deslocamentos na direção x_1 dos pontos internos mostrados na Figura 4.21. Novamente, o fator de posicionamento do ponto de colocação para a obtenção destes modos foi $a = 1/4$.

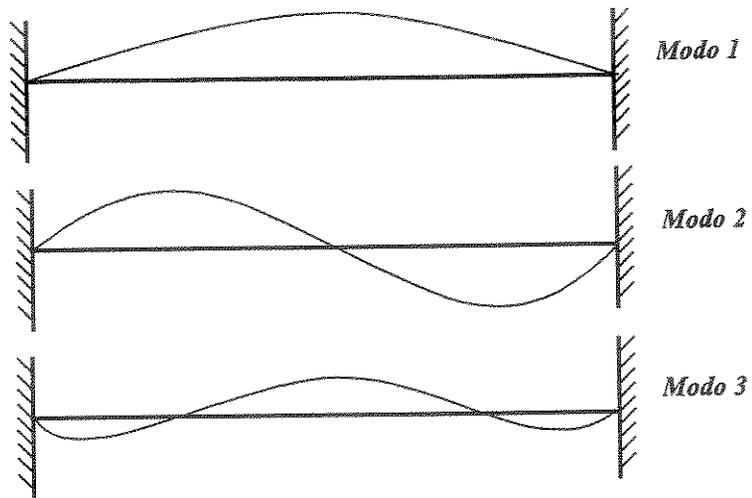


Figura 4.23 Três primeiros modos de vibração de uma barra engastada-engastada.

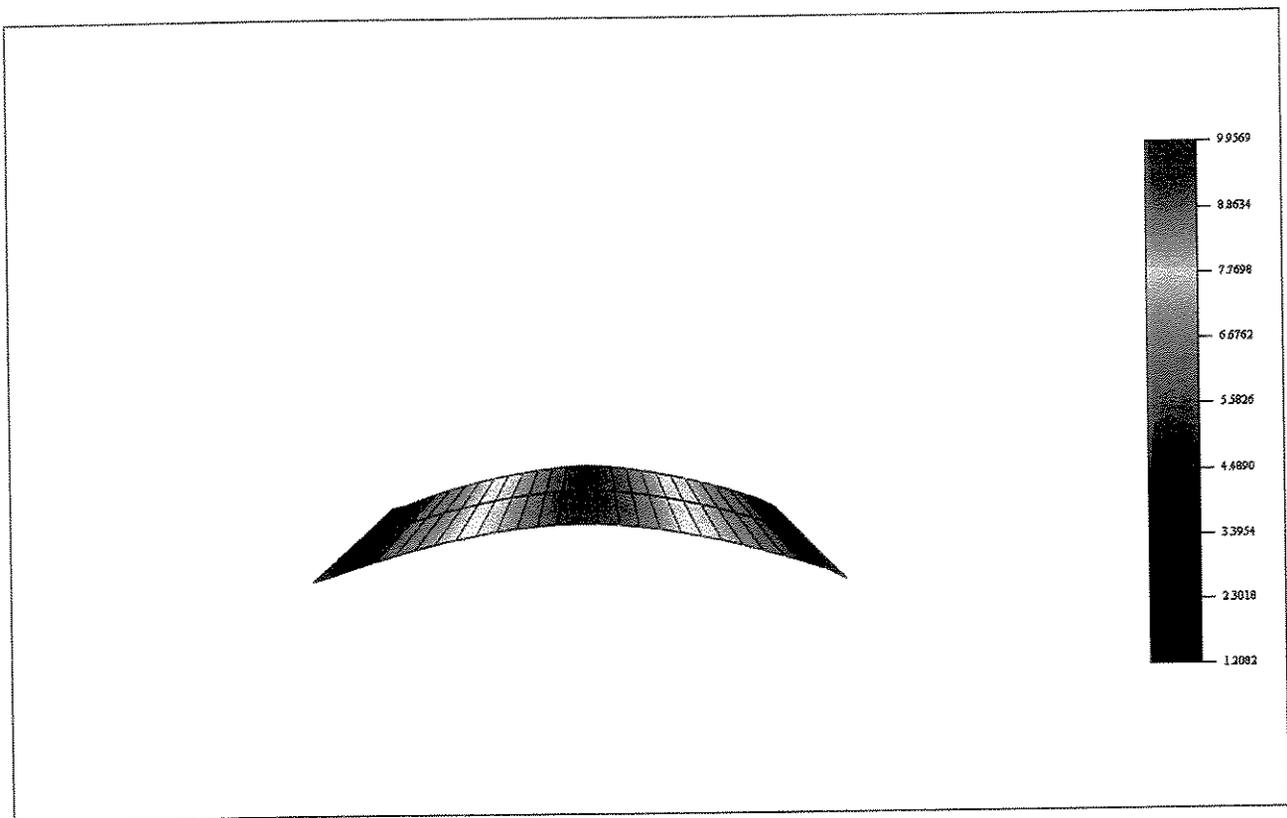


Gráfico 4.14 Parte real do primeiro modo de vibração de uma barra engastada- engastada (direção x_1).

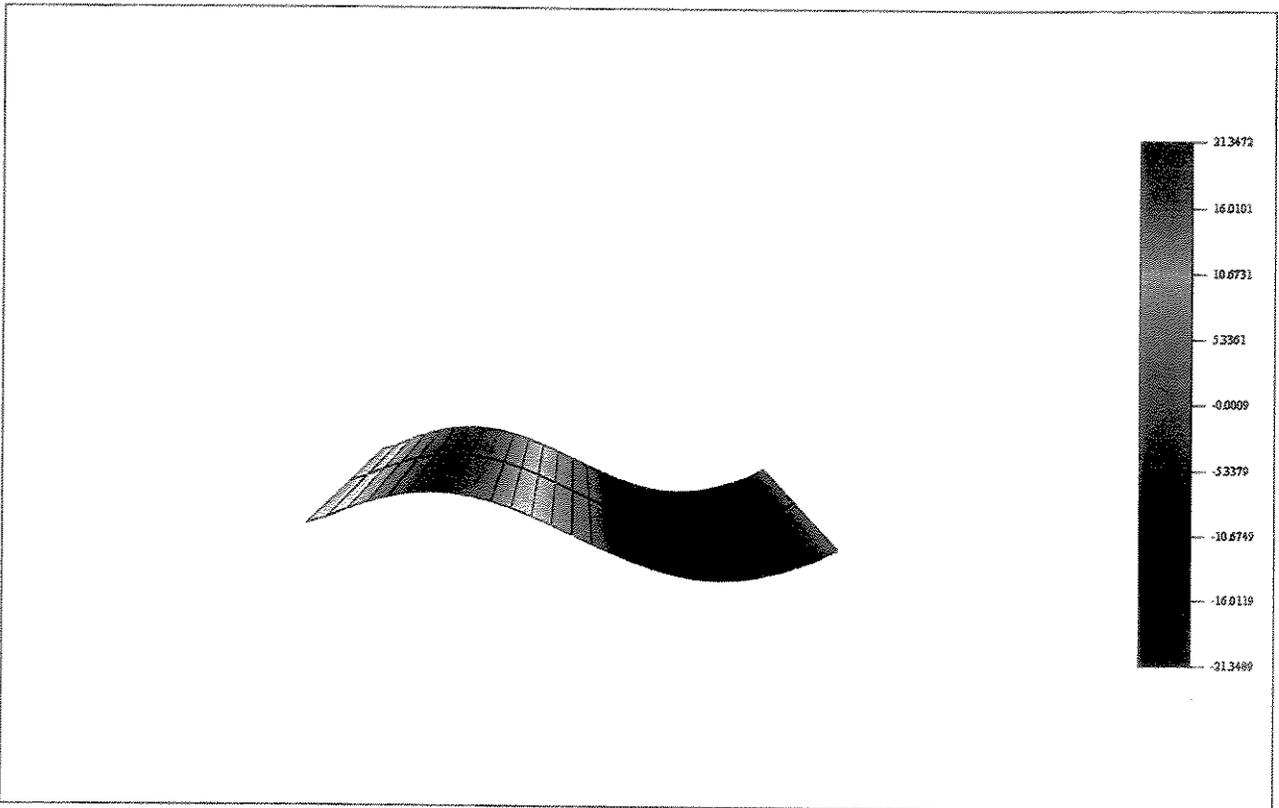


Gráfico 4.15 Parte real do segundo modo de vibração de uma barra engastada- engastada (direção x_I).

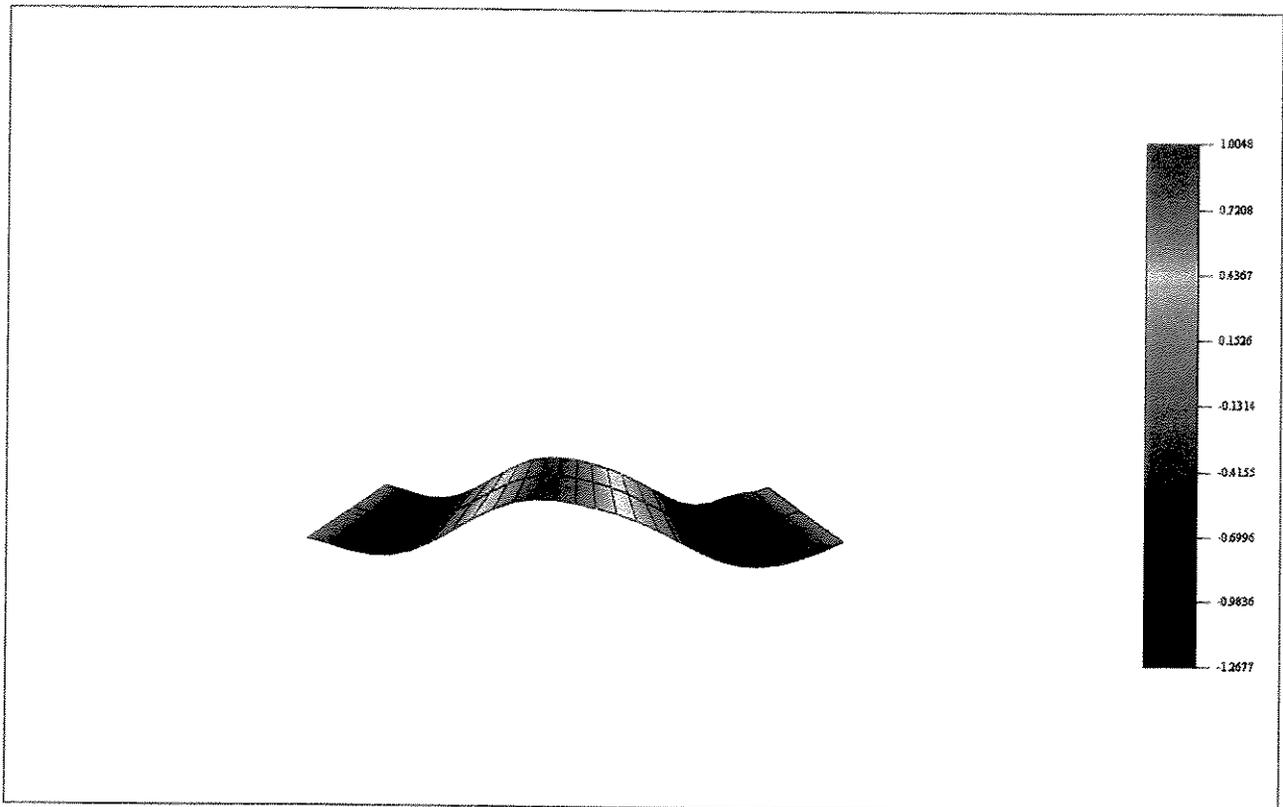


Gráfico 4.16 Parte real do terceiro modo de vibração de uma barra engastada- engastada (direção x_I).

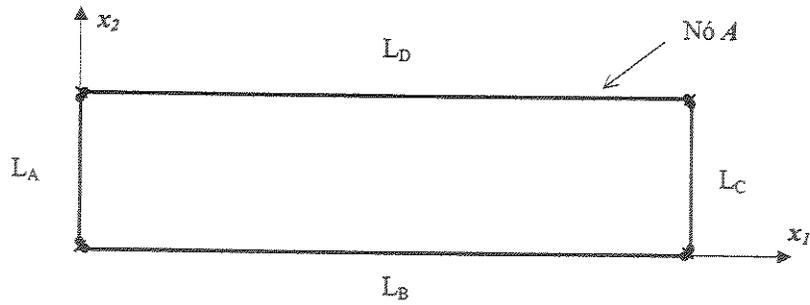


Figura 4.25 Discretização do MEC para a viga engastada-engastada.

Adotou-se uma faixa de frequências de 0 a 2 para a resolução numérica do problema. Desta forma, construiu-se a Função de Resposta em Frequência (FRF) para os deslocamentos na direção x_2 do nó A (ver Fig. 4.25). Para efeito de comparação, os valores das dez primeiras frequências naturais tanto de flexão quanto axiais foram obtidos pelo software ANSYS, levando a $\omega_n = 0.1691, 0.4201, 0.6347$ (axial), $0.7395, 1.0994, 1.2698$ (axial), $1.4855, 1.8889, 1.9055$ (axial), 2.3038 rad/s. No Gráfico 4.17, são apresentadas as FRFs do deslocamento normal ao contorno (direção x_2) considerando-se as quatro primeiras frequências de flexão da viga.

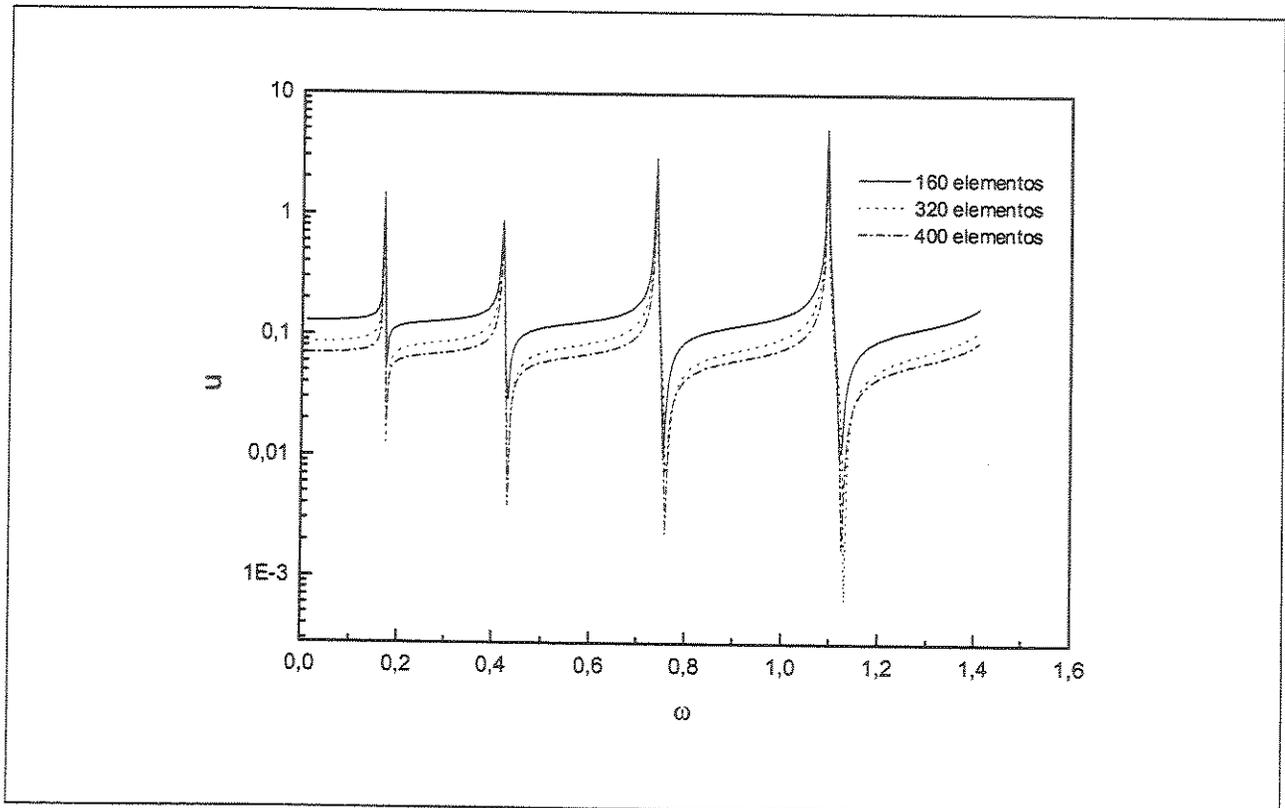


Gráfico 4.17 FRFs do deslocamento normal ao contorno no ponto A.

No Gráfico 4.18 são apresentadas as FRFs das dez primeiras frequências naturais tanto de flexão (curva 1) como axiais (curva 2) para a discretização de 160 elementos. As frequências axiais (curva 2) foram excitadas inclinando o carregamento.

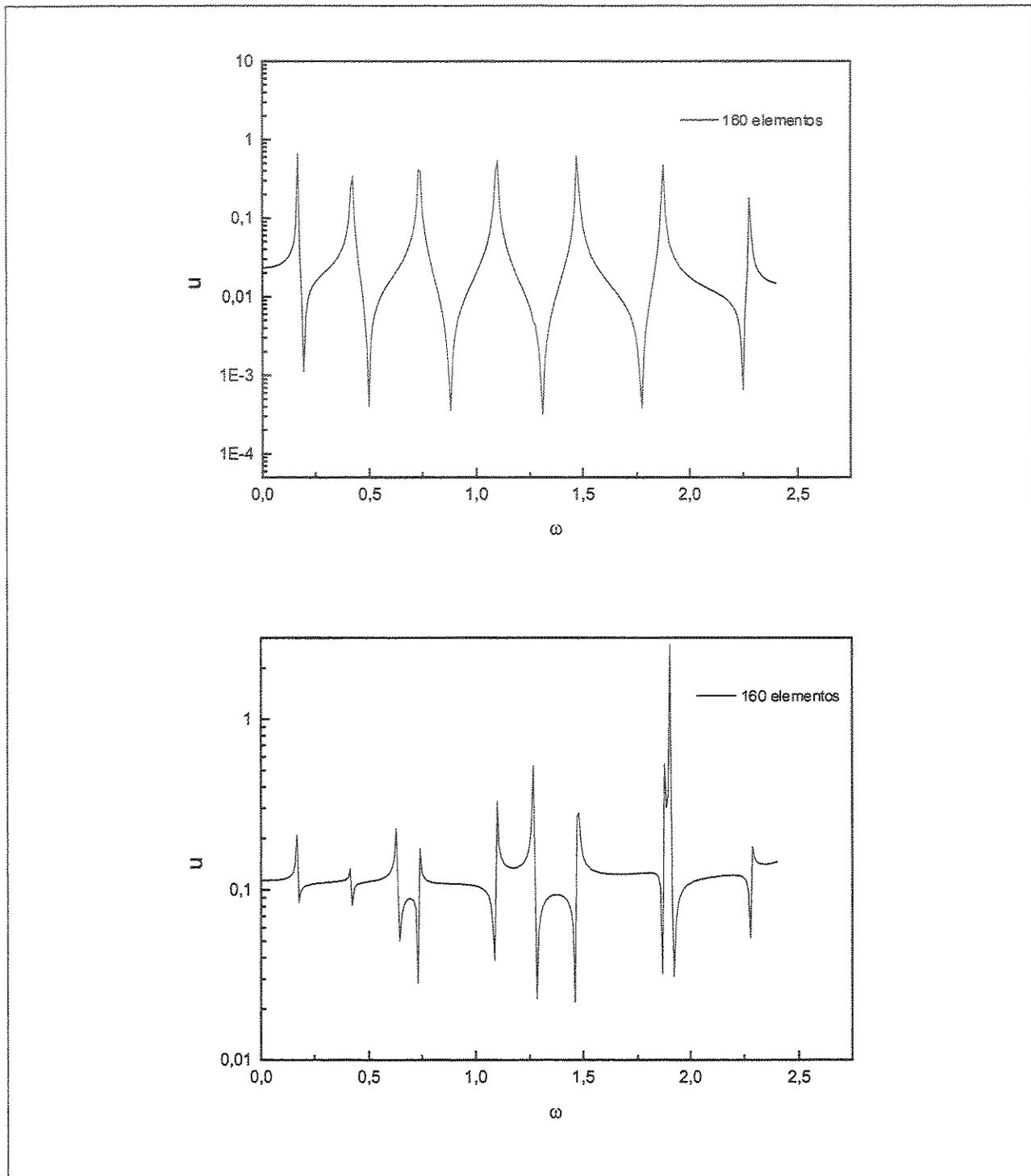


Gráfico 4.18 FRFs do deslocamento normal ao contorno no A.

Os valores numéricos do deslocamento do ponto A, para a discretização de 160 elementos, são apresentados na Tabela 4.14.

Tabela 4.14 Dez primeiras frequências de uma viga engastada-engastada.

Frequências	ANSYS	160 elementos
ω_1	0.1691	0.1697
ω_2	0.4201	0.4227
ω_3 (axial)	0.6347	0.6289
ω_4	0.7395	0.7319
ω_5	1.0994	1.0974
ω_6 (axial)	1.2698	1.2661
ω_7	1.4855	1.4723
ω_8	1.8889	1.8752
ω_9 (axial)	1.9055	1.9033
ω_{10}	2.3038	2.2782

Pode-se observar do Gráfico 4.17 que houve uma estabilização dos valores das frequências naturais obtidas numericamente, frente aos resultados de elementos finitos pelo ANSYS, quando se aumentou a discretização do problema refinando a malha de elementos de contorno. Do Gráfico 4.18, observa-se também que é perfeitamente possível obter tanto as frequências de flexão quanto as axiais, para isto basta inclinar o carregamento. A Tabela 4.14 apresenta estes resultados para efeito de comparação.

Na sequência, o Gráfico 4.19 apresenta os três primeiros modos de vibração da viga engastada-engastada obtidos pela malha de elementos finitos do ANSYS e de elementos de contorno. Deve-se observar que nesta última, somente o pontos do contorno são plotados.

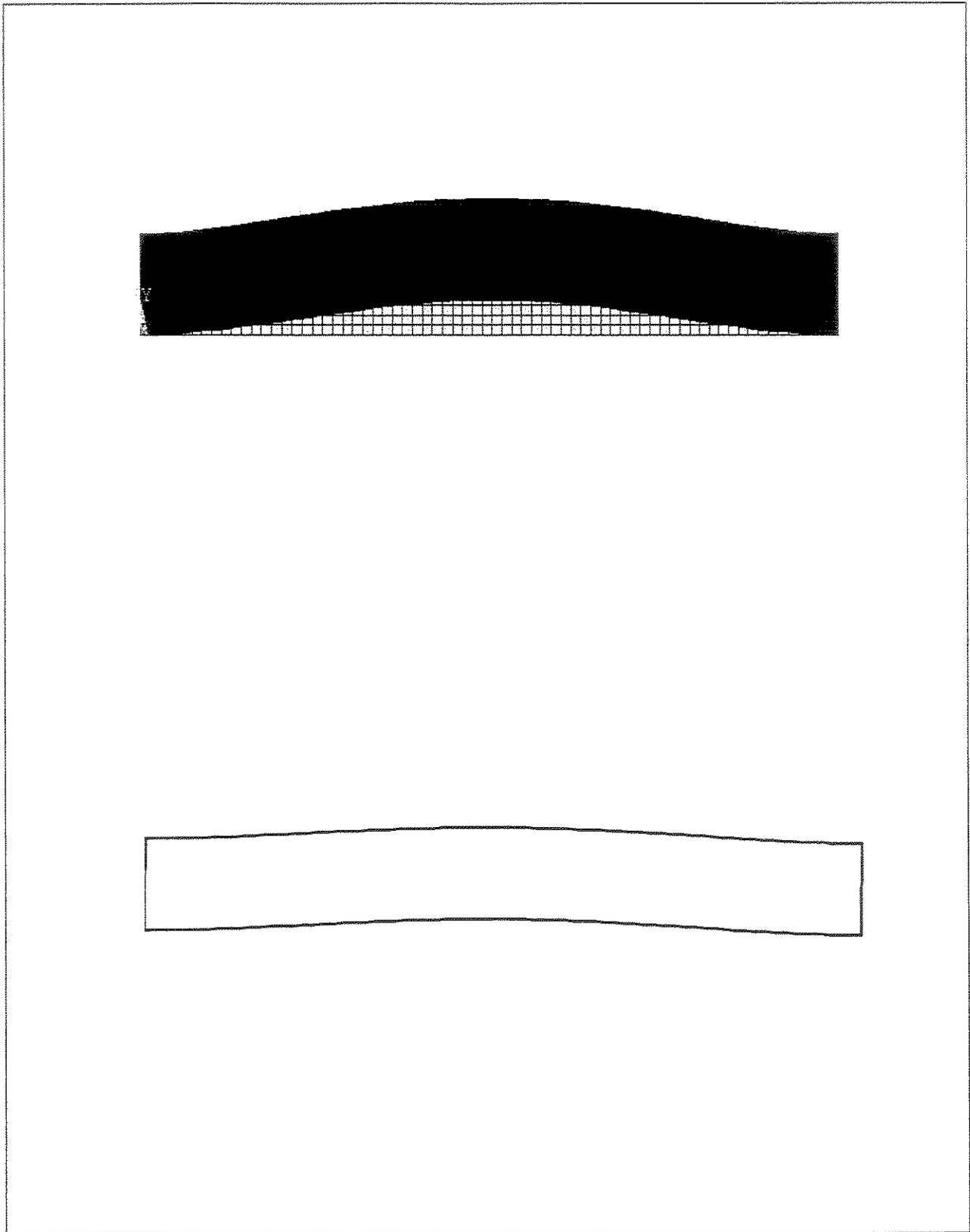


Gráfico 4.19 Modos de vibração da viga engastada-engastada.

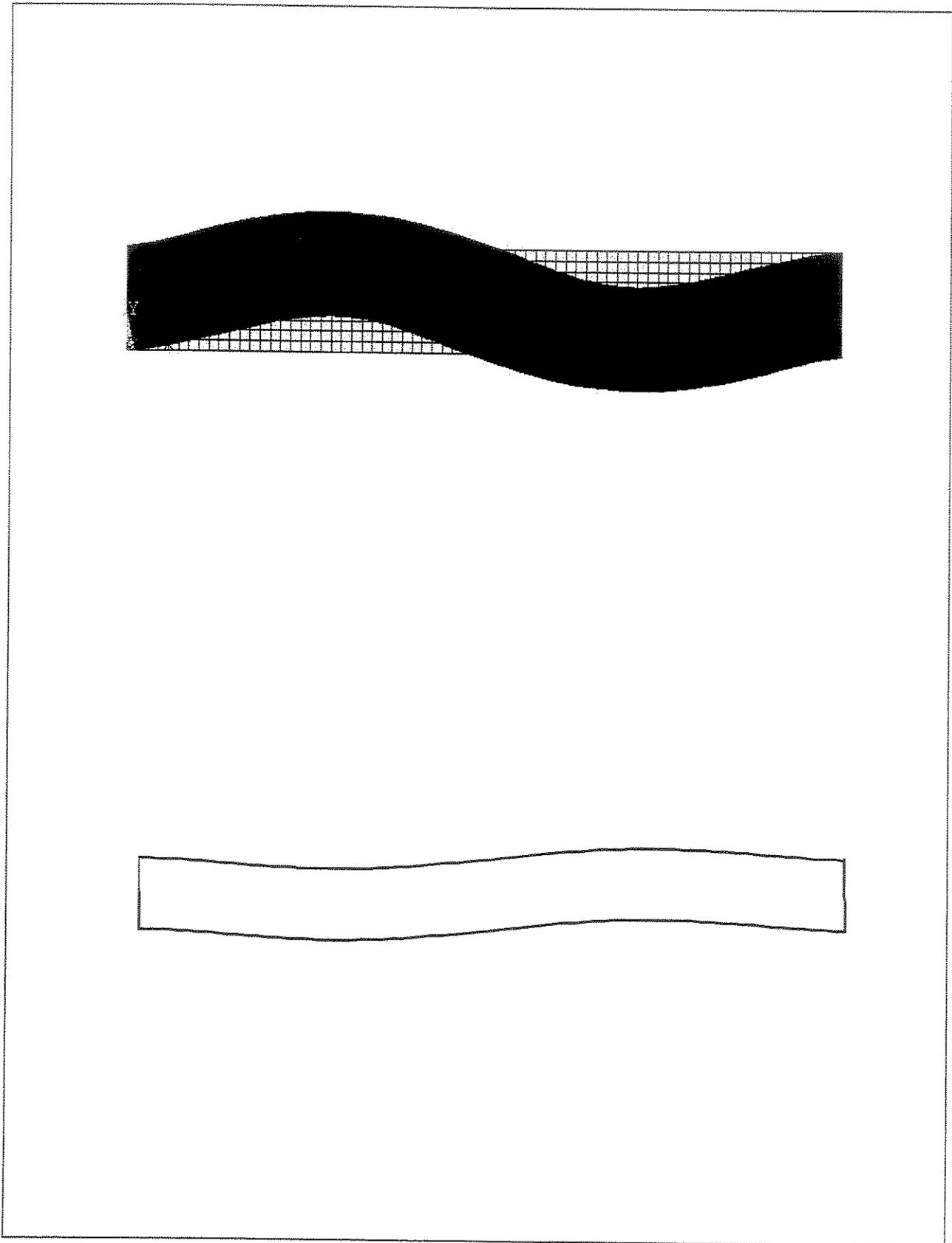


Gráfico 4.19 Modos de vibração da viga engastada-engastada.

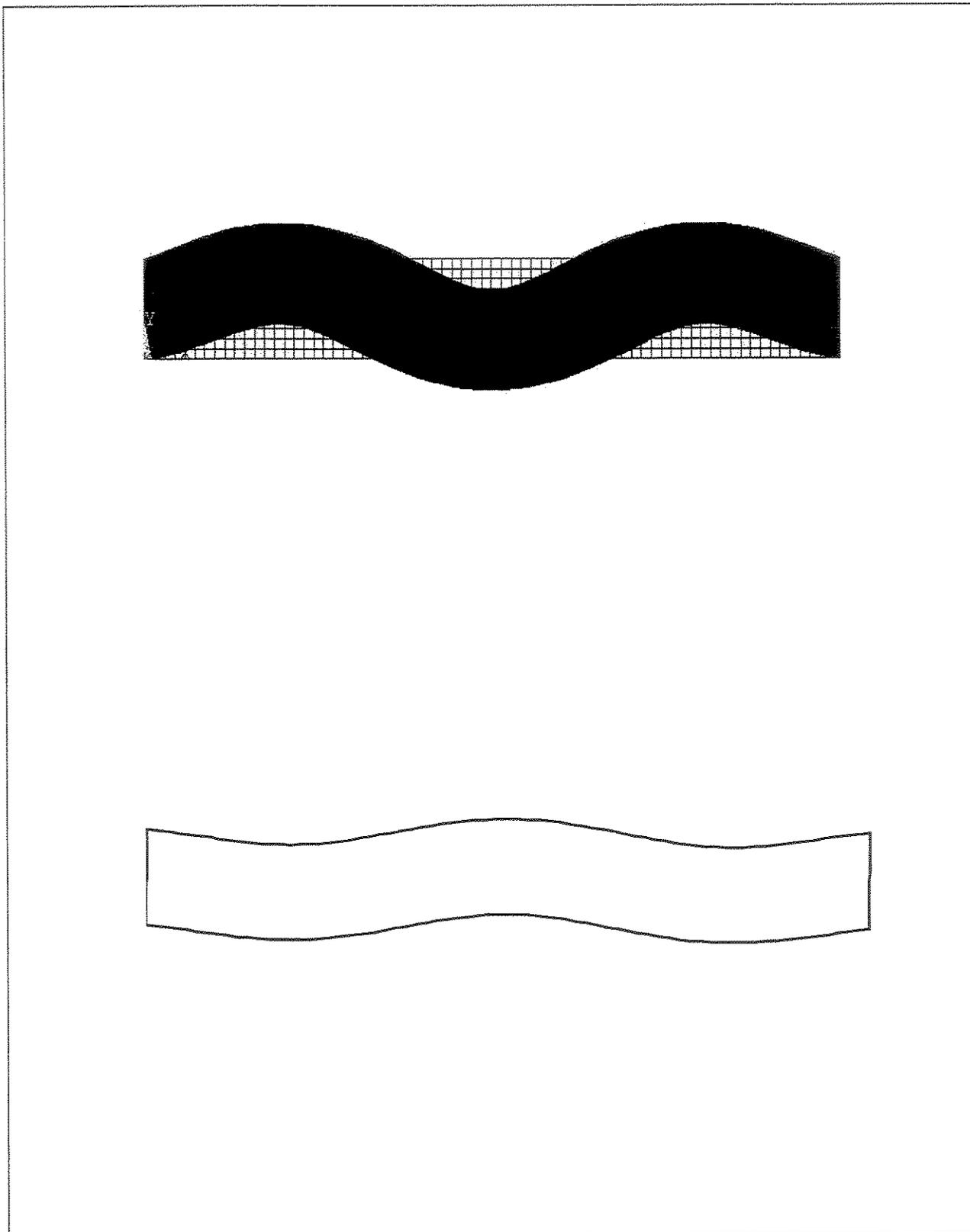


Gráfico 4.19 Modos de vibração da viga engastada-engastada.

4.9.4 Placa quadrada engastada-livre-engastada-livre submetida a uma excitação transversal concentrada

Uma placa fina quadrada, com comprimento $\ell = 1.0$ e largura $b = 1.0$, foi excitada com um carregamento transversal concentrado assimétrico, em uma de suas bordas livres. De acordo com a Figura 4.27, as condições de contorno do problema são de dois lados engastados e os outros dois lados livres. A espessura da placa é $h = 0.05$, o coeficiente de *Poisson* foi considerado $\nu = 0.3$. Para o Módulo de *Young* foi adotado $E = 1000.0$ e para a densidade, foi adotado $\rho = 0.229$. O número de pontos de Gauss utilizado nos cálculos numéricos foi igual a 12.

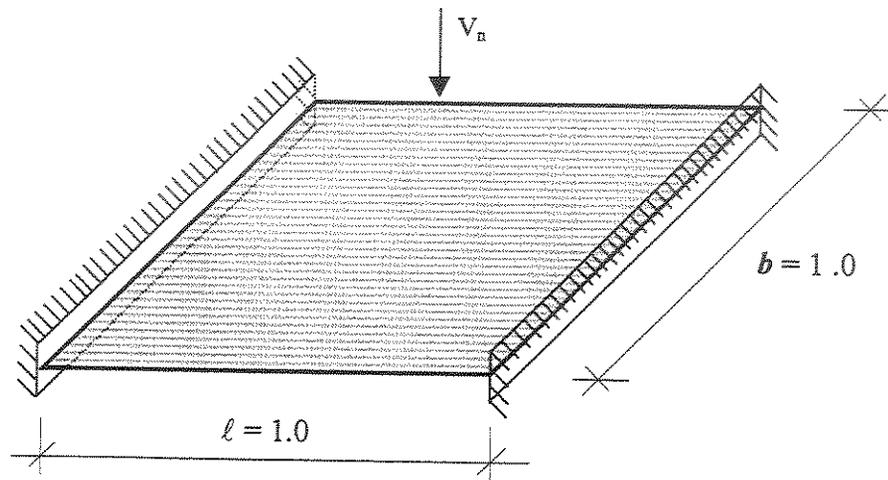


Figura 4.27 Placa quadrada engastada-livre-engastada-livre sob carregamento concentrado.

O contorno da placa foi discretizado em 40 e 80 elementos lineares, sendo utilizados nos cantos da placa nós duplos, perfazendo um total de 44 e 84 nós de contorno, respectivamente, conforme mostra a Figura 4.28. Também foram alocados 49 pontos internos para a determinação dos modos de vibração da placa, sendo que uma linha de 7 pontos está disposta na direção x_2 e conseqüentemente uma linha de 7 pontos está disposta na direção x_1 .

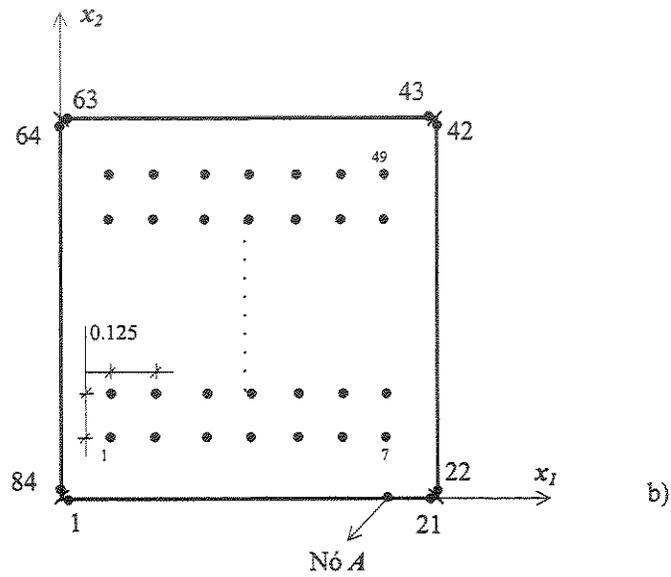
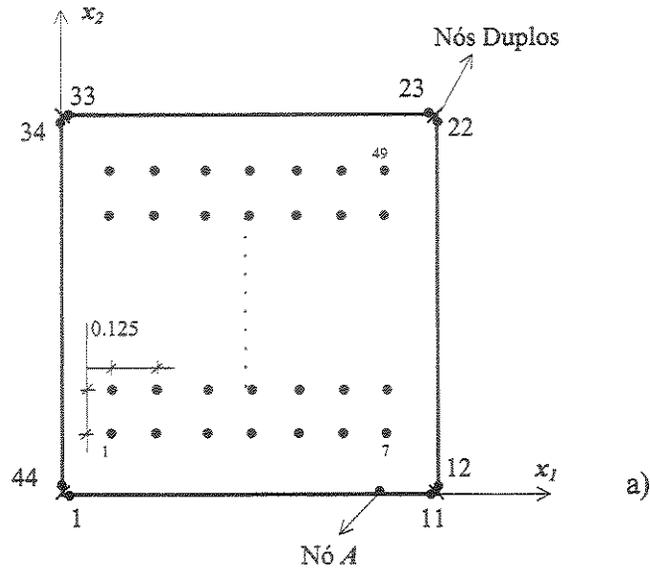


Figura 4.28 Discretizações do MEC para a placa quadrada engastada-livre engastada-livre.

A solução analítica para este problema, para a obtenção das frequências naturais foi descrita por Blevins (1979), e apresenta a seguinte equação:

$$\omega_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi\ell^2} \left[\frac{Eh^3}{12\gamma(1-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad i = 1, 2, 3 \dots; j = 1, 2, 3 \dots \quad (4.90)$$

onde, w_{ij} são as frequências naturais em hertz, ℓ é o comprimento da placa, b é a largura da placa, h é a espessura da placa, i é o número de meia onda do modo de vibração ao longo do eixo horizontal x_1 , j é o número de meia onda do modo de vibração ao longo do eixo vertical x_2 , γ é a massa por unidade de área da placa (ρh para um material de densidade ρ), ν é o coeficiente de *Poisson* e λ_{ij}^2 é o parâmetro adimensional de frequência. Este parâmetro é geralmente uma função das condições de contorno da placa, da sua geometria e, em muitos casos, do coeficiente de *Poisson*.

O parâmetro adimensional de frequência λ_{ij}^2 para este exemplo, em particular, é dado pela Tabela 4.15 (Blevins, 1979):

Tabela 4.15 Parâmetros adimensionais de frequência (λ_{ij}^2) para a placa quadrada engastada-livre-engastada-livre.

ℓ/b	λ_{ij}^2 e (i,j)					
	Sequência dos Modos					
	1	2	3	4	5	6
1.0	22.27 (11)	26.53 (12)	43.66 (13)	61.47 (21)	67.55 (22)	79.90 (14)

A frequência natural analítica pode agora ser determinada através da equação (4.90), os valores finais encontrados são mostrados na Tabela 4.16.

Tabela 4.16 Frequências naturais analíticas (w_{ij}) para a placa quadrada engastada-livre-engastada-livre.

ℓ/b	w_{ij} (rad/s) e (i,j)					
	Sequência dos Modos					
	1	2	3	4	5	6
1.0	22.2670 (11)	26.5264 (12)	43.6541 (13)	61.4616 (21)	67.5408 (22)	79.8891 (14)

Determinadas as frequências naturais analíticas da placa, fez-se uma varredura ao longo desta faixa de frequências para construir a Função de Resposta em Frequência (FRF). A regra utilizada para a determinação do número de passos em que foi feita esta varredura, é representada pela equação (4.85).

Em função do resultado analítico apresentado para as seis primeiras frequências naturais e também do intervalo de frequências considerado, adotou-se uma faixa de frequência de 0 a 100 para a resolução numérica do problema. Com este procedimento, considerando-se as duas discretizações adotadas, construiu-se a FRF em função dos deslocamentos transversais da placa na direção x_3 .

A Tabela 4.17 apresenta os valores comparativos das seis primeiras frequências naturais calculadas numérica (FRF) e analiticamente.

Tabela 4.17 Frequências naturais analíticas e numéricas (ω_{ij}) da placa quadrada engastada-livre-engastada-livre.

DISCRETIZAÇÃO	ω_{ij} (rad./s) e (ij)					
	1	2	3	4	5	6
40 Elementos lineares	22.156	26.374	43.599	61.180	66.799	79.806
80 Elementos lineares	22.156	26.374	43.599	61.180	67.151	79.810
ANALÍTICO	22.2670 (11)	26.5264 (12)	43.6541 (13)	61.4616 (21)	67.5408 (22)	79.8891 (14)

Analisando a Tabela 4.17, pode-se observar que existe uma convergência entre as frequências obtidas numericamente através das (FRFs), em relação ao valor analítico. Para o mesmo intervalo numérico de frequências ($n^* = 8$), observou-se também que uma maior discretização do problema apresentou uma melhor convergência nos resultados numéricos finais.

Na sequência, com a intenção de representar graficamente cada FRF, são apresentadas nos Gráficos 4.20 e 4.21 as FRFs em função do deslocamento transversal da placa na direção x_3 do nó A (Figura 4.28), considerando-se as discretizações de 40 e 80 elementos lineares, respectivamente. Nestes gráficos, são apresentados também os tempos de processamento (tp) de cada FRF, juntamente com os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação.

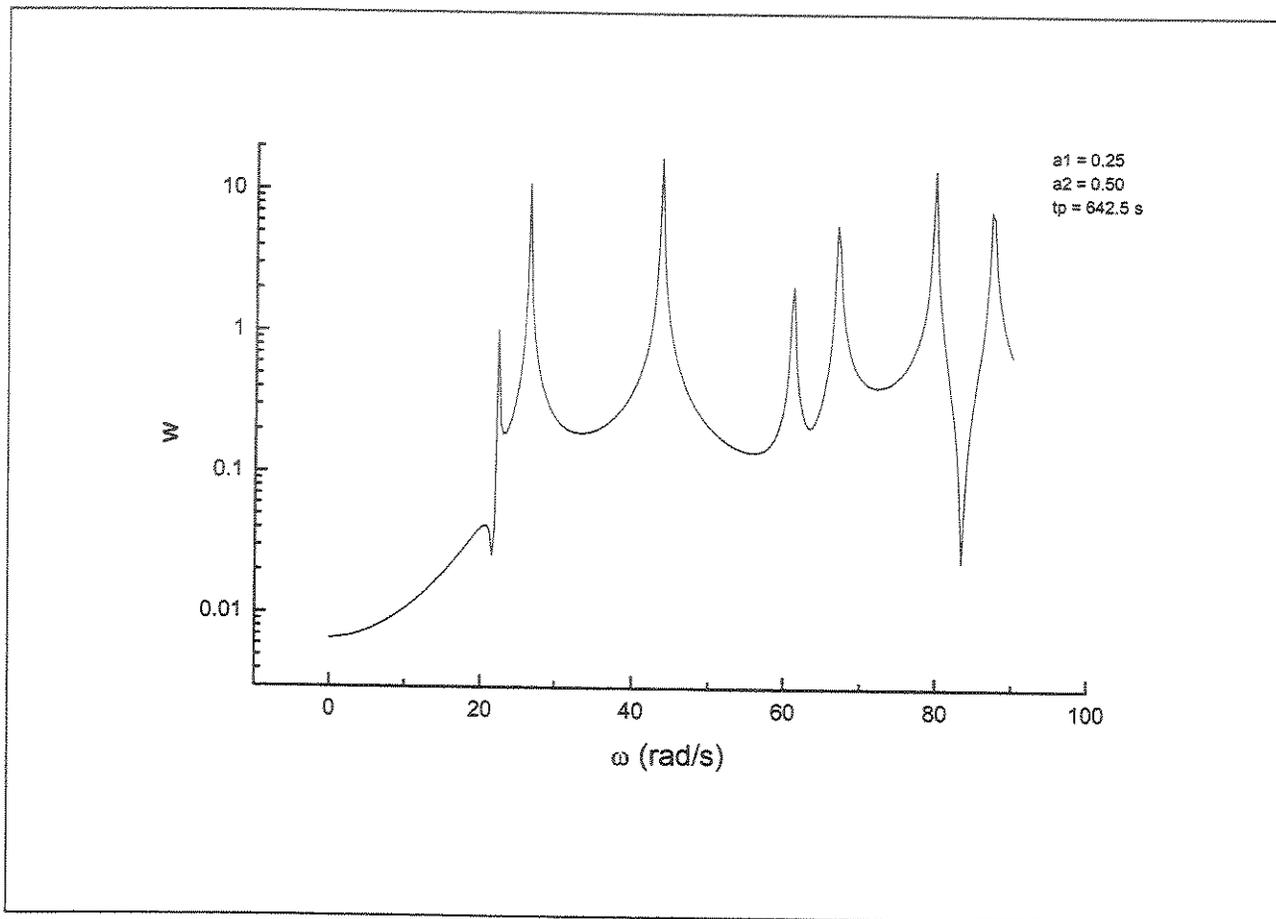


Gráfico 4.20 FRF do deslocamento transversal da placa na direção x_3 do ponto A (40 elementos).

Analisando a FRF do Gráfico 4.20, pode-se observar os picos de frequência obtidos numericamente através do MEC para a discretização de 40 elementos lineares. A discretização utilizada apresentou resultados bastante significativos em relação ao valor analítico. A formulação alternativa adotada para a resolução do exemplo, considerando-se os pontos de colocação com fatores de posicionamento a $\frac{1}{4}$ e a $\frac{1}{2}$ do comprimento dos elementos consecutivos apresentaram as melhores respostas numéricas. Outros fatores de posicionamento apresentaram respostas menos significativas.

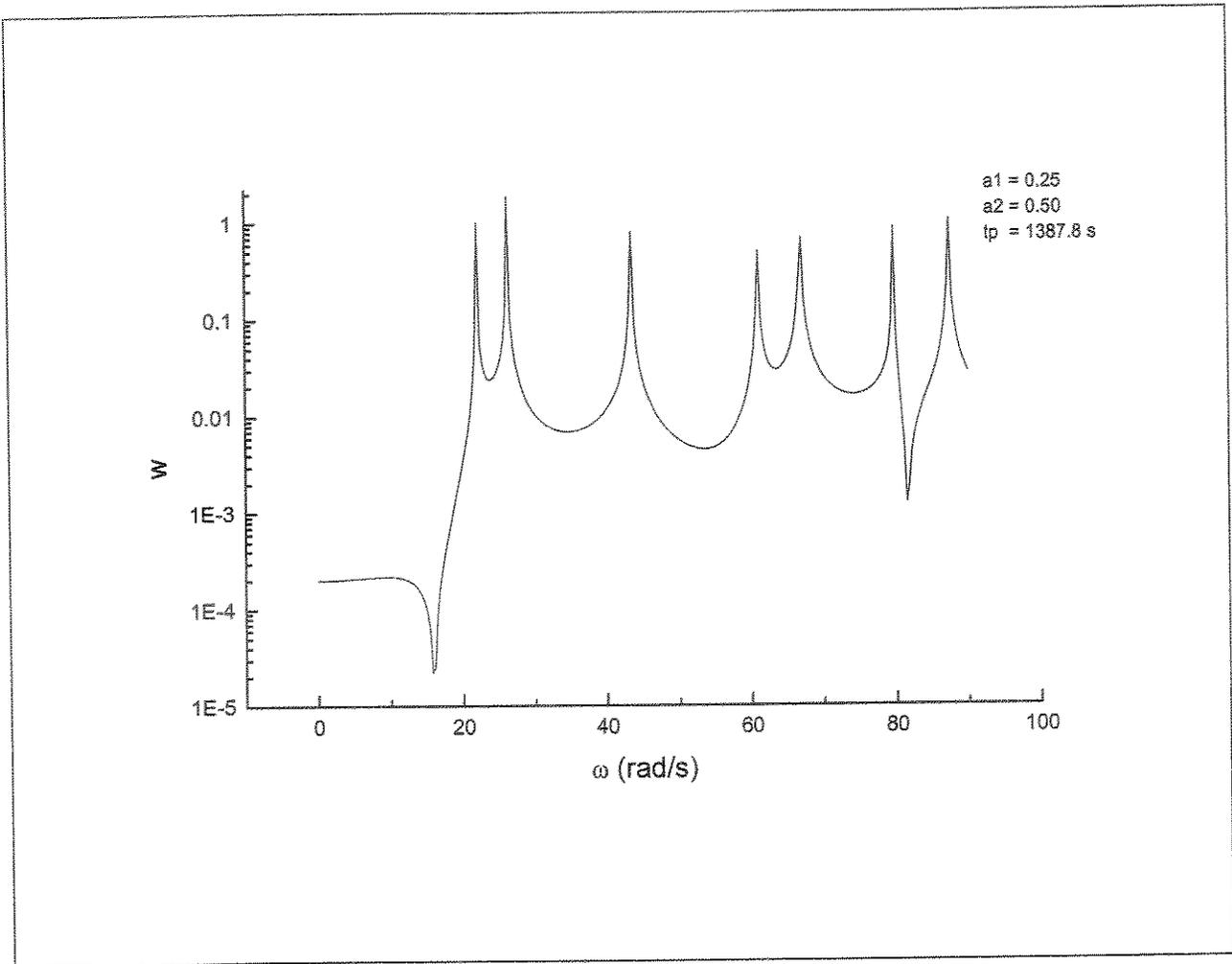


Gráfico 4.21 FRF do deslocamento transversal da placa na direção x_3 do ponto A (80 elementos).

Analisando agora a FRF do Gráfico 4.21, pode-se observar uma maior homogeneidade nos picos de frequência obtidos numericamente através do MEC para a discretização de 80 elementos lineares. Neste sentido, a discretização utilizada apresentou resultados mais expressivos em relação ao valor analítico da frequência natural.

Com relação aos tempos de processamento, pode-se observar para os dois casos analisados que o tempo gasto para processar cada frequência foi de 2.5 e 5.4 segundos, respectivamente.

Como última análise deste exemplo, são apresentados a seguir os gráficos da parte real primeiros modos de vibração da placa, para a discretização de 40 elementos. Os modos de vibração foram obtidos a partir dos deslocamentos transversais na direção x_3 dos pontos internos mostrados na Figura 4.28. Na visualização dos modos de vibração foi utilizado o software Array Visualiser 1.0.

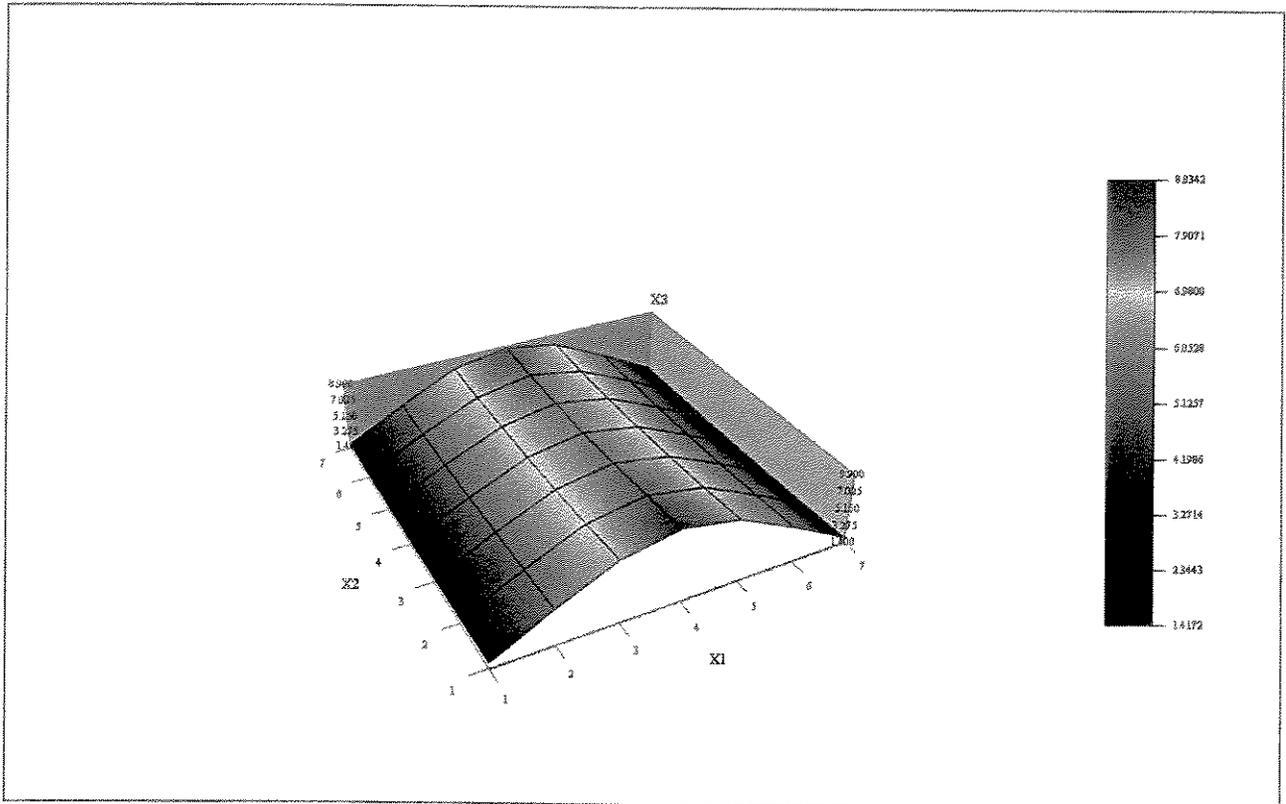


Gráfico 4.22 Parte real do primeiro modo de vibração da placa engastada-livre-engastada-livre ($i=1, j=1$).

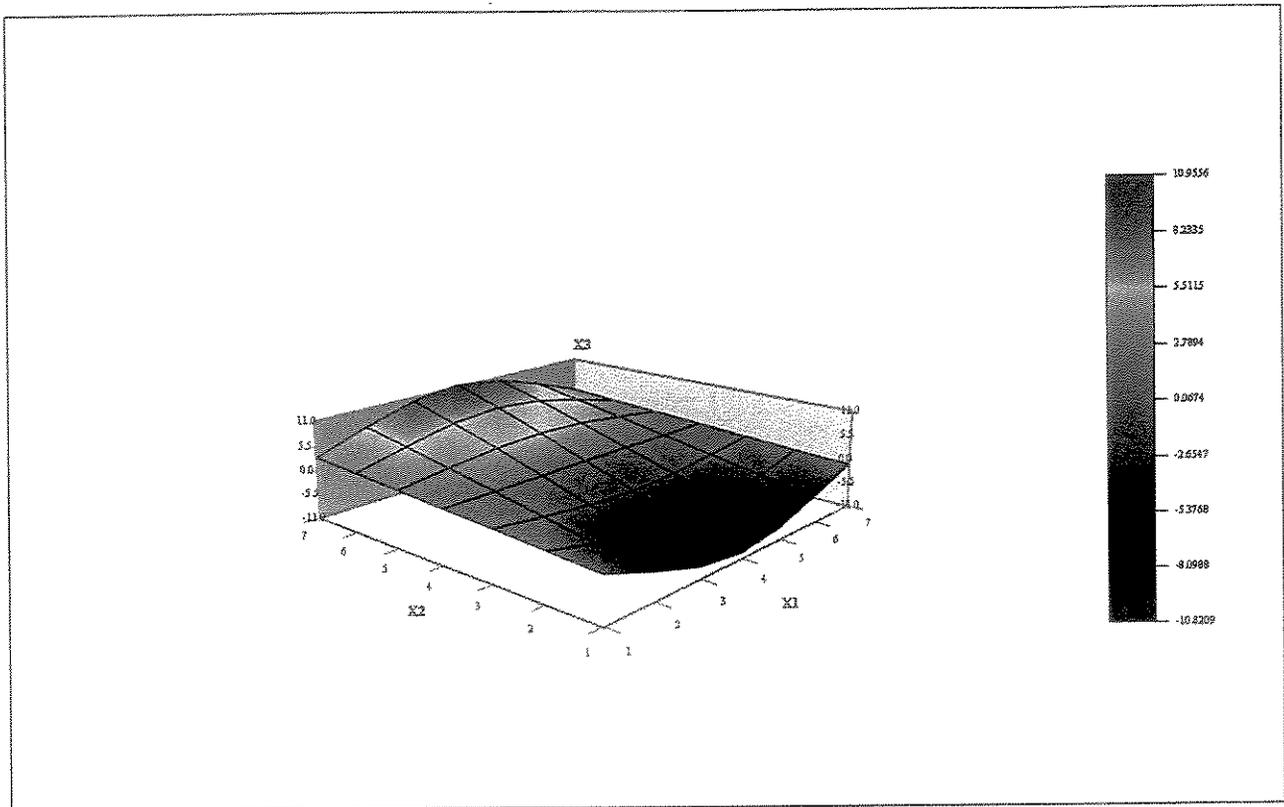


Gráfico 4.23 Parte real do segundo modo de vibração da placa engastada-livre-engastada-livre ($i=1, j=2$).

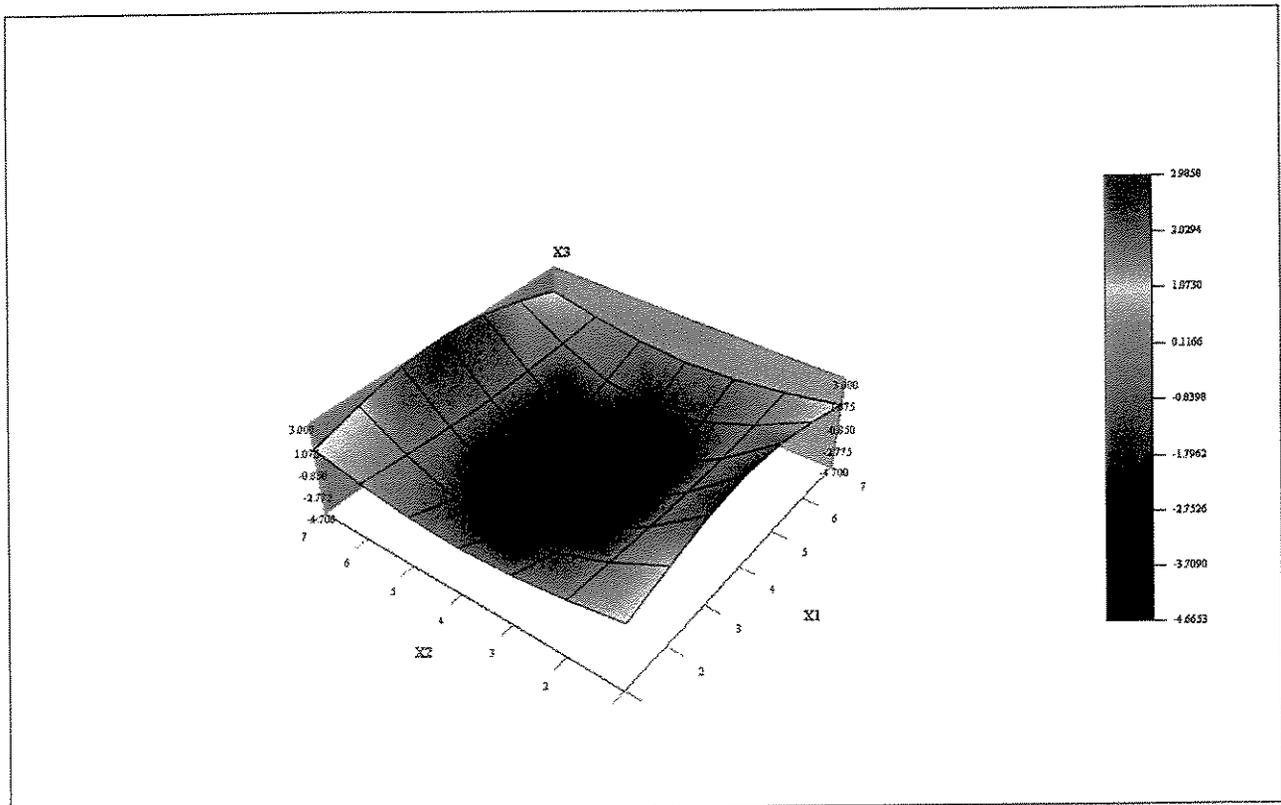


Gráfico 4.24 Parte real do terceiro modo de vibração da placa engastada-livre-engastada-livre ($i=1, j=3$).

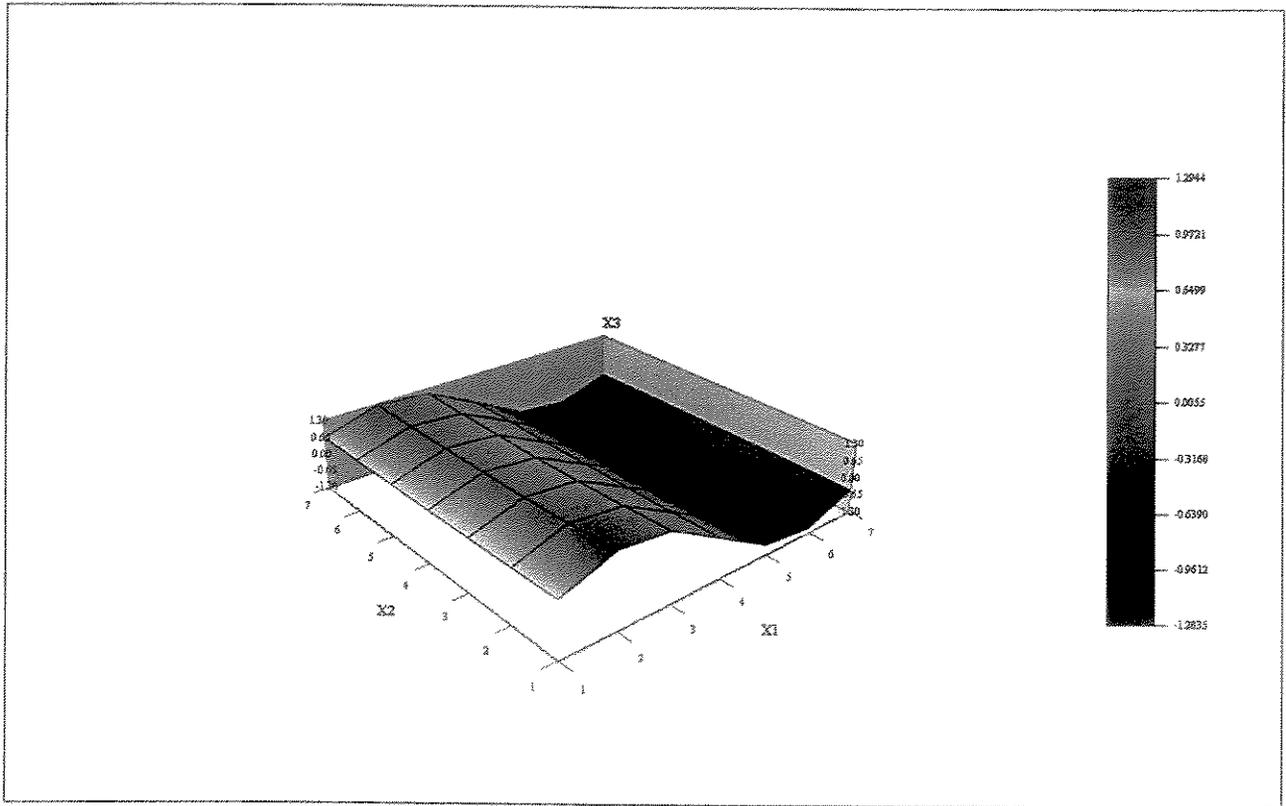


Gráfico 4.25 Parte real do quarto modo de vibração da placa engastada-livre-engastada-livre (i=2, j=1).

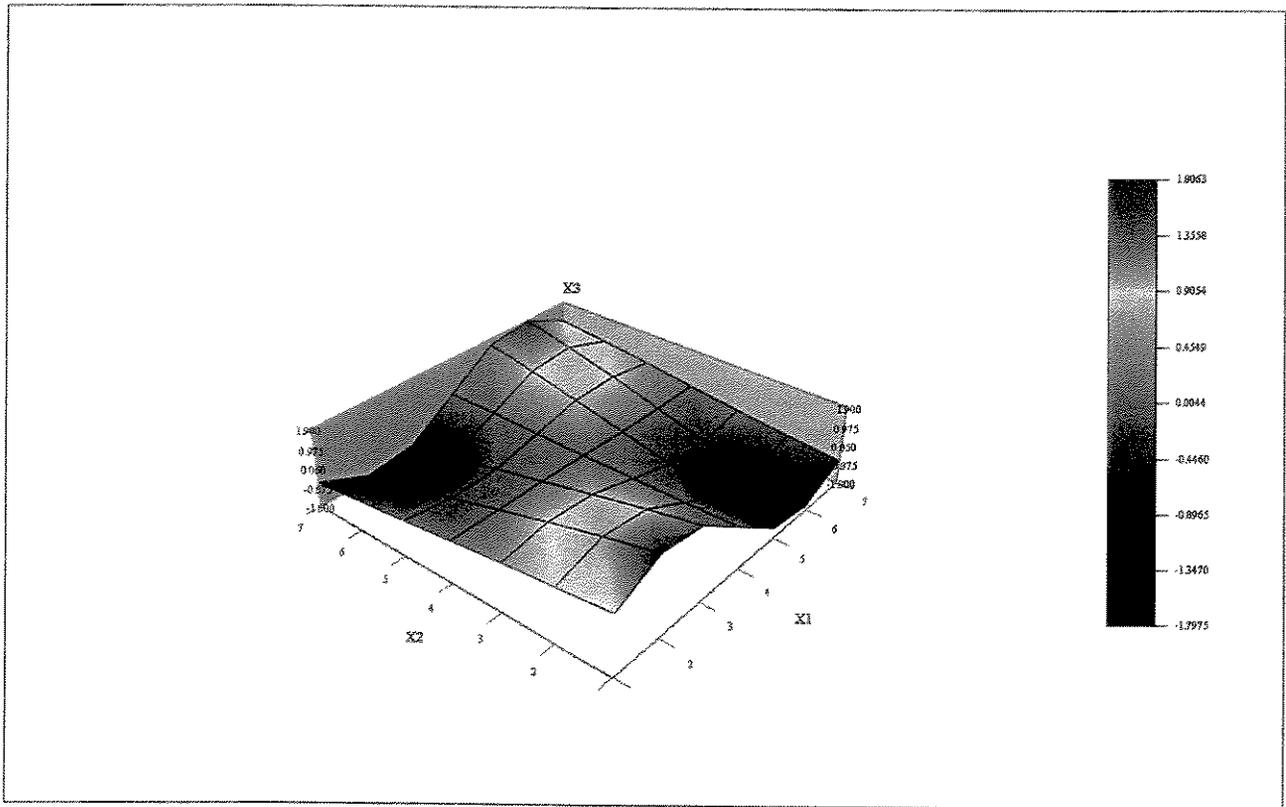


Gráfico 4.26 Parte real do quinto modo de vibração da placa engastada-livre-engastada-livre (i=2, j=2).

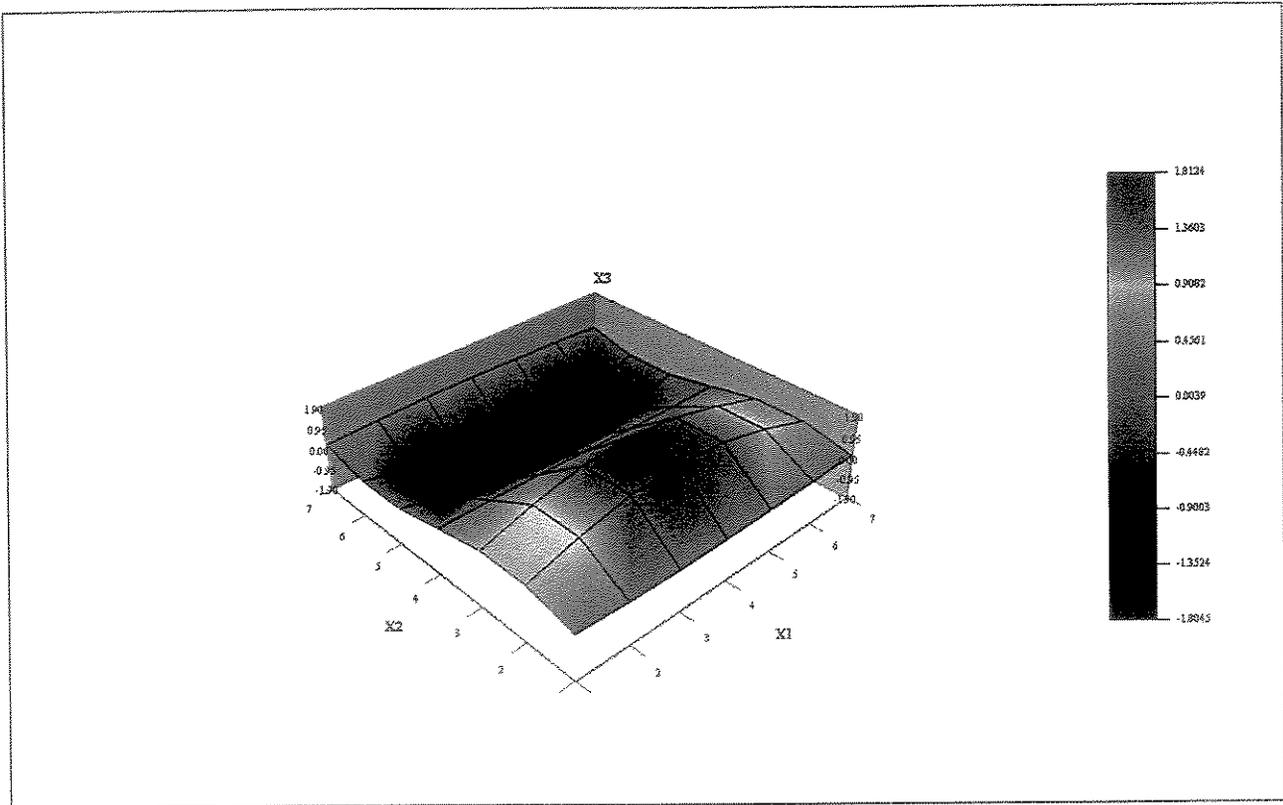


Gráfico 4.27 Parte real do sexto modo de vibração da placa engastada-livre-engastada-livre ($i=1, j=4$).

4.9.5 Placa quadrada engastada-livre-apoiada-livre submetida a uma excitação transversal concentrada

Uma placa fina quadrada, com comprimento $\ell = 1$ e largura $b = 1$, foi excitada com um carregamento transversal concentrado assimétrico em uma de suas bordas livres. De acordo com a Figura 4.29, as condições de contorno do problema são de um lado engastado, o lado oposto apoiado e os outros dois lados livres. A espessura da placa é $h = 0.05$, o coeficiente de *Poisson* foi considerado $\nu = 0.3$. Para o Módulo de *Young* foi adotado $E = 1000.0$ e para a densidade, foi adotado $\rho = 0.229$. O número de pontos de Gauss utilizado nos cálculos numéricos foi igual a 12.

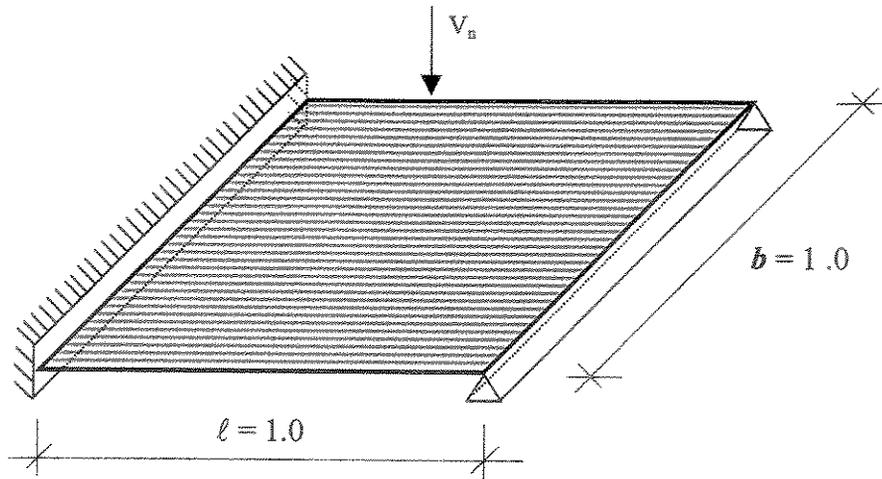


Figura 4.29 Placa quadrada engastada-livre-apoiada-livre sob carregamento concentrado.

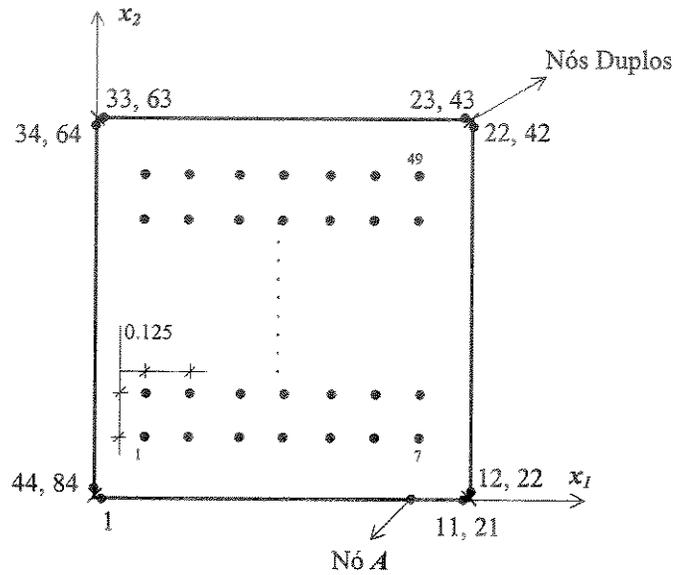


Figura 4.30 Discretizações do MEC para a placa quadrada engastada-livre-apoiada-livre.

O contorno da placa foi discretizado em 40 e 80 elementos lineares, sendo utilizados nos cantos da placa nós duplos, perfazendo um total de 44 e 84 nós de contorno, respectivamente, conforme mostra a Figura 4.30. Também foram alocados 49 pontos internos para a determinação dos modos de vibração da placa. A solução analítica para a obtenção das frequências naturais é dada pela equação (4.90). Sendo que, o parâmetro adimensional de frequência λ_{ij}^2 para este exemplo em particular é dado pela Tabela 4.18 (Blevins, 1979):

Tabela 4.18 Parâmetros adimensionais de frequência (λ_{ij}^2) para a placa quadrada engastada-livre-apoiada-livre.

l/b	λ_{ij}^2 e (ij)					
	Sequência dos Modos					
	1	2	3	4	5	6
1.0	15.29 (11)	20.67 (12)	39.78 (13)	49.73 (21)	56.62 (22)	77.37 (14)

A frequência natural analítica pode agora ser determinada através da equação (4.90), os valores finais encontrados, são mostrados na Tabela 4.19.

Tabela 4.19 Frequências naturais analíticas (w_{ij}) para a placa quadrada engastada-livre-engastada-livre.

l/b	w_{ij} (rad/s) e (ij)					
	Sequência dos Modos					
	1	2	3	4	5	6
1.0	15.2879 (11)	20.6672 (12)	39.7746 (13)	49.7232 (21)	56.6123 (22)	77.3595 (14)

A partir das frequências naturais analíticas da placa, fez-se uma varredura ao longo desta faixa de frequências para construir a FRF. Considerando-se a equação (4.85), adotou-se $n^* = 8$ para a varredura das frequências, obtendo 257 frequências no intervalo considerado. Desta forma, adotou-se uma faixa de frequência de 0 a 100 para a resolução numérica do problema. Com este procedimento, considerando-se as duas discretizações adotadas (Figura 4.30), construiu-se a FRF em função dos deslocamentos transversais w na direção x_3 .

A Tabela 4.20 apresenta os valores comparativos das seis primeiras frequências naturais calculadas numérica (FRF) e analiticamente.

Tabela 4.20 Frequências naturais analíticas e numéricas (ω_{ij}) da placa quadrada engastada-livre-apoiada-livre.

DISCRETIZAÇÃO	ω_{ij} (rad/s) e (ij)					
	1	2	3	4	5	6
40 Elementos lineares	15.126	20.398	39.732	49.223	56.254	77.345
80 Elementos lineares	15.126	20.398	39.732	49.223	56.254	77.345
ANALÍTICO	15.2879 (11)	20.6672 (12)	39.7746 (13)	49.7232 (21)	56.6123 (22)	77.3595 (14)

Analisando a Tabela 4.20, pode-se observar que há uma convergência entre as frequências obtidas numericamente através das FRFs, com pouca diferença em relação ao valor analítico. Neste caso, uma maior discretização do problema não alterou os resultados obtidos para as frequências naturais.

Na sequência, com a intenção de mostrar graficamente as Funções de Resposta em Frequência, são apresentadas nos Gráficos 4.28 e 4.29 as FRFs em função do deslocamento transversal da placa na direção x_3 do nó A (Figura 4.30), considerando-se a discretização de 40 e 80 elementos lineares, respectivamente. Nestes gráficos, são apresentados também os tempos de processamento (tp) de cada FRF, juntamente com os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação.

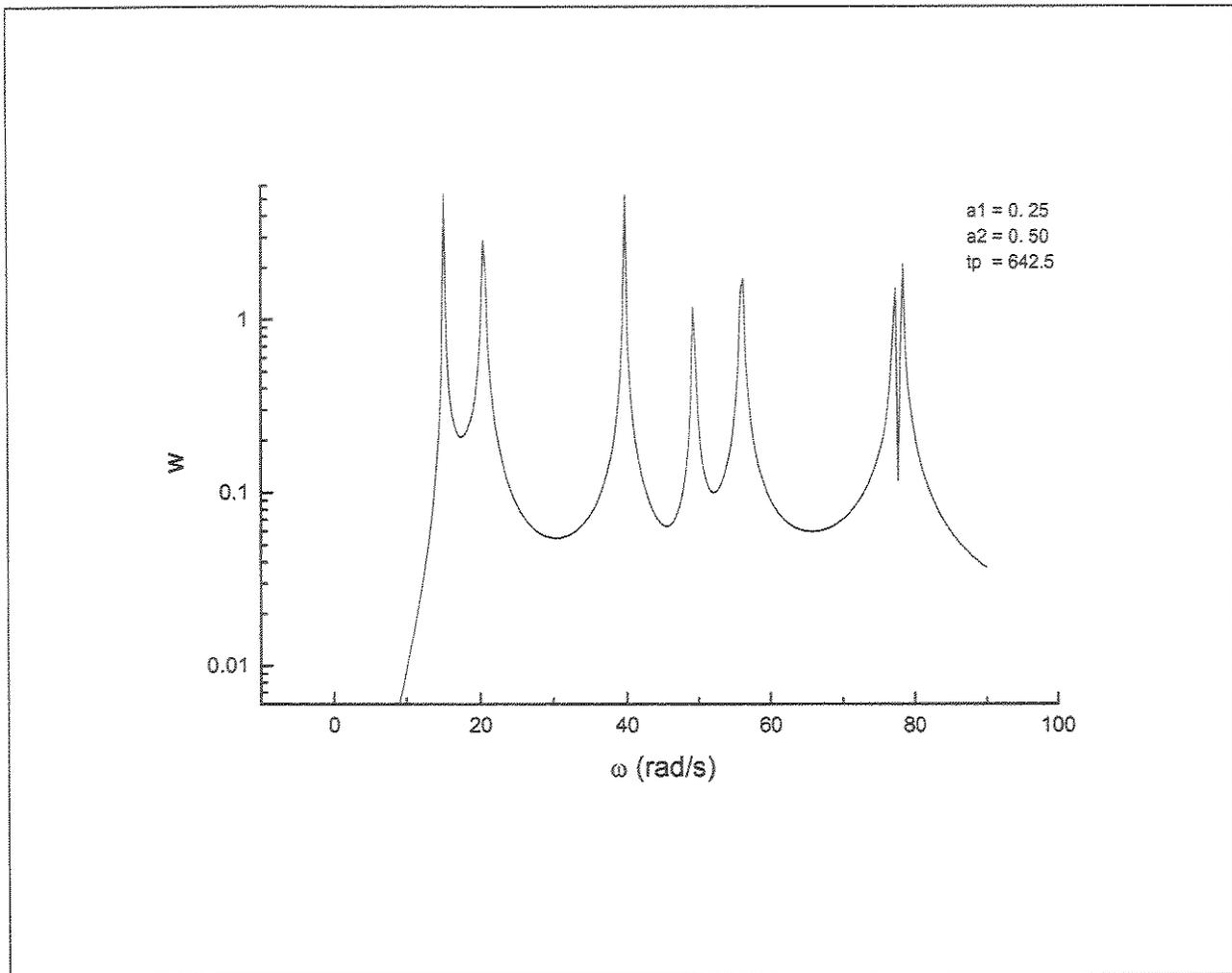


Gráfico 4.28 FRF do deslocamento transversal da placa na direção x_3 do ponto A (40 elementos).

Analisando a FRF do Gráfico 4.28, pode-se observar os picos de frequência obtidos numericamente através do MEC para a discretização de 40 elementos lineares. A discretização utilizada apresentou resultados bastante significativos em relação ao valor analítico. A formulação alternativa adotada para a resolução do exemplo, considerando-se os pontos de colocação com fatores de posicionamento a $\frac{1}{4}$ e a $\frac{1}{2}$ do comprimento dos elementos consecutivos apresentaram as melhores respostas numéricas. Outros fatores de posicionamento apresentaram respostas menos significativas.

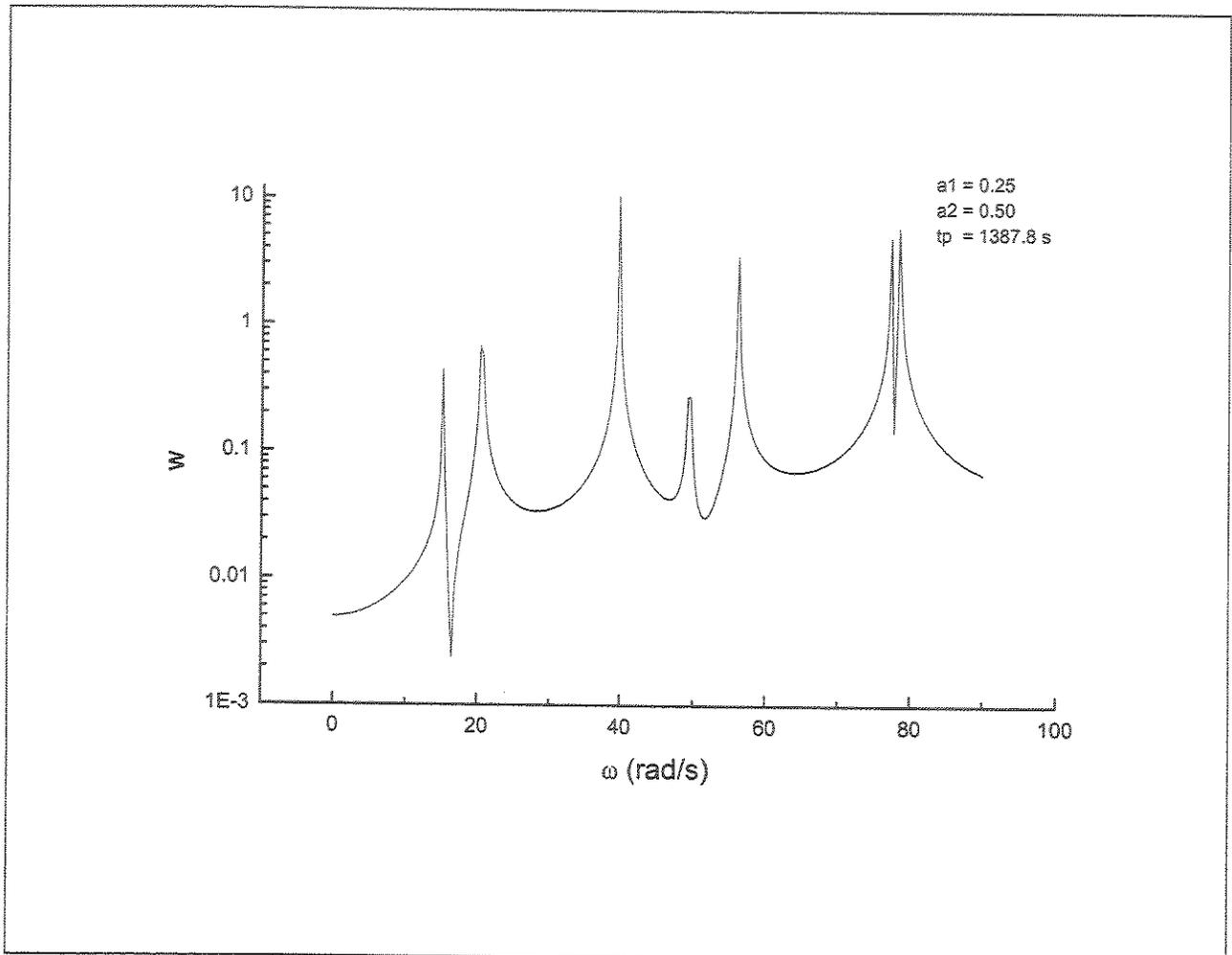


Gráfico 4.29 FRF do deslocamento transversal da placa na direção x_3 do ponto A (80 elementos).

Analisando agora a FRF do Gráfico 4.29, pode-se observar claramente os picos de frequência obtidos numericamente através do MEC para a discretização de 80 elementos lineares. Entretanto, a discretização utilizada apresentou os mesmos resultados com relação à discretização com 40 elementos.

Como última análise deste exemplo, são apresentados a seguir os gráficos da parte real dos seis primeiros modos de vibração da placa, para a discretização de 40 elementos. Os modos de vibração foram obtidos a partir dos valores da parte real dos deslocamentos transversais, na direção x_3 , dos pontos internos mostrados na Figura 4.30. Com relação aos tempos de processamento, pode-se observar para os dois casos analisados que o tempo gasto para processar cada frequência foi de 2.5 e 5.4 segundos, respectivamente.

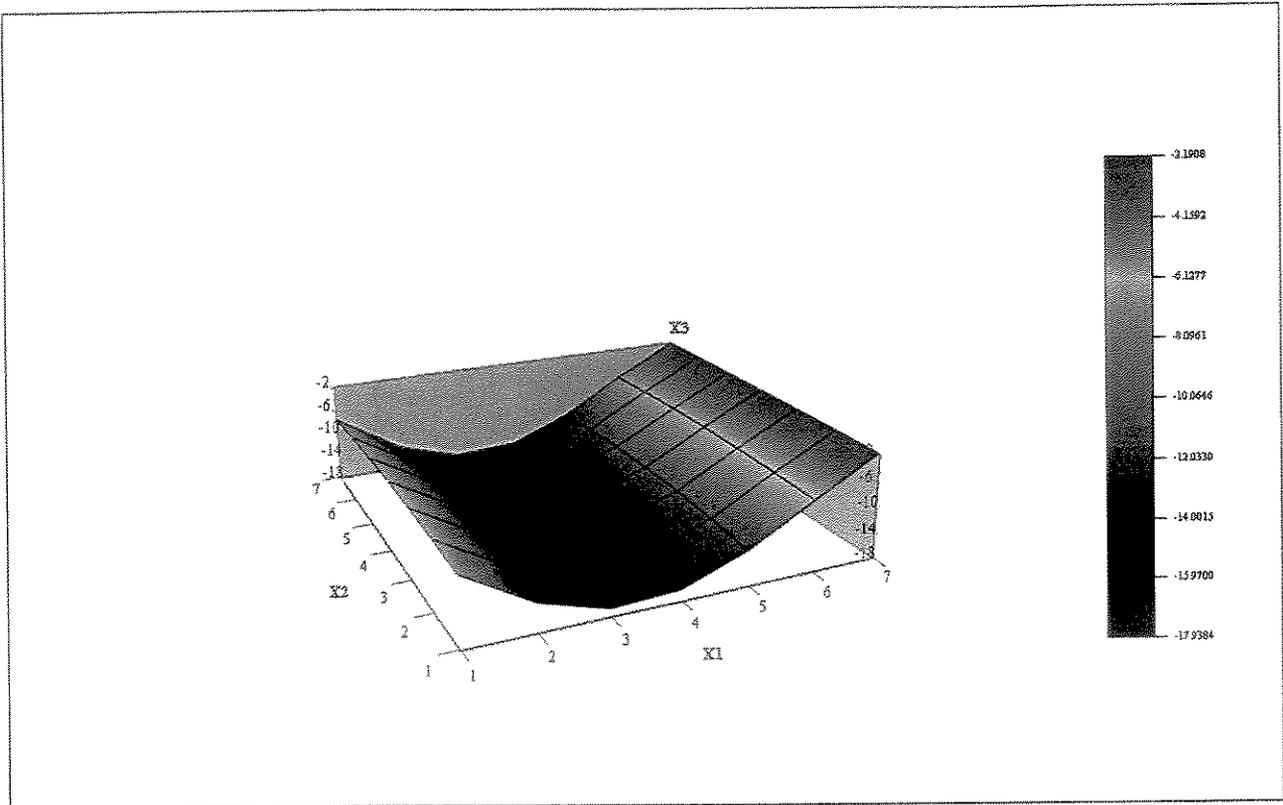


Gráfico 4.30 Parte real do primeiro modo de vibração da placa engastada-livre-apoiada-livre ($i=1, j=1$).

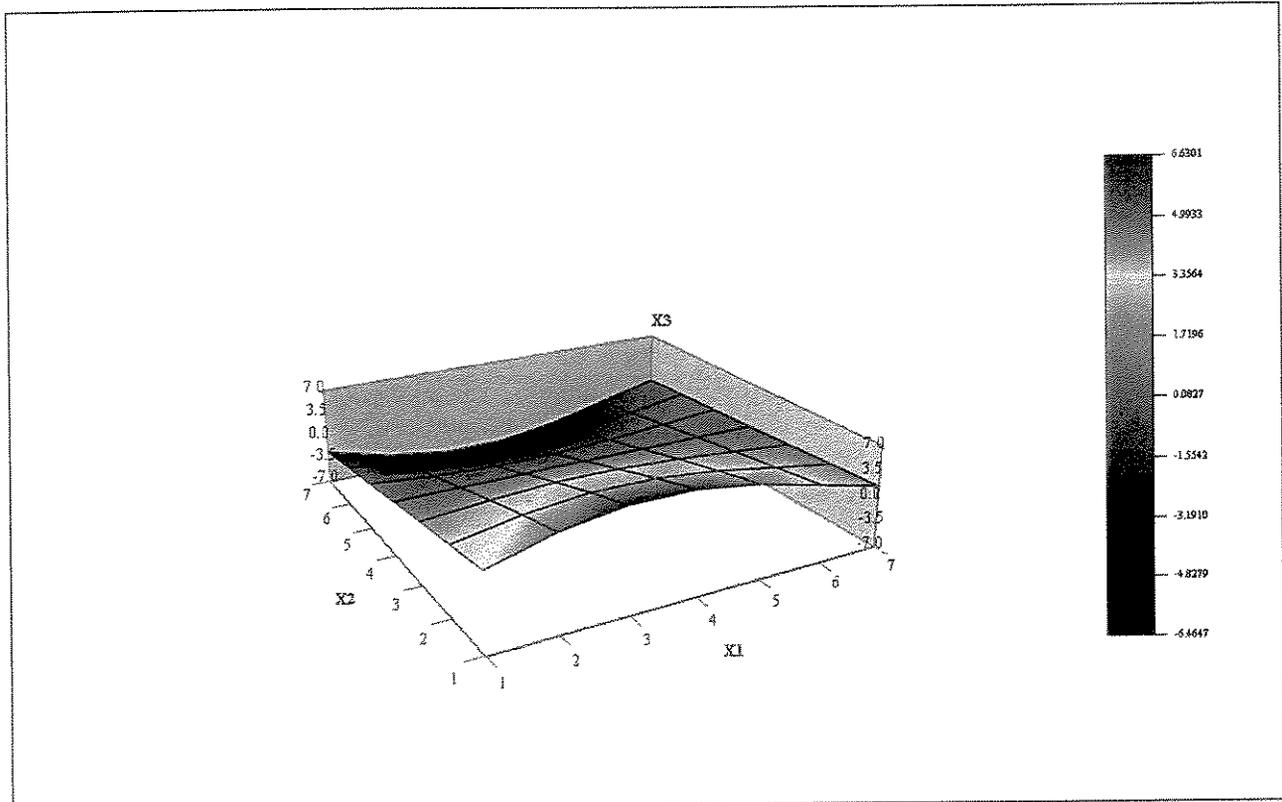


Gráfico 4.31 Parte real do segundo modo de vibração da placa engastada-livre-apoiada-livre ($i=1, j=2$).

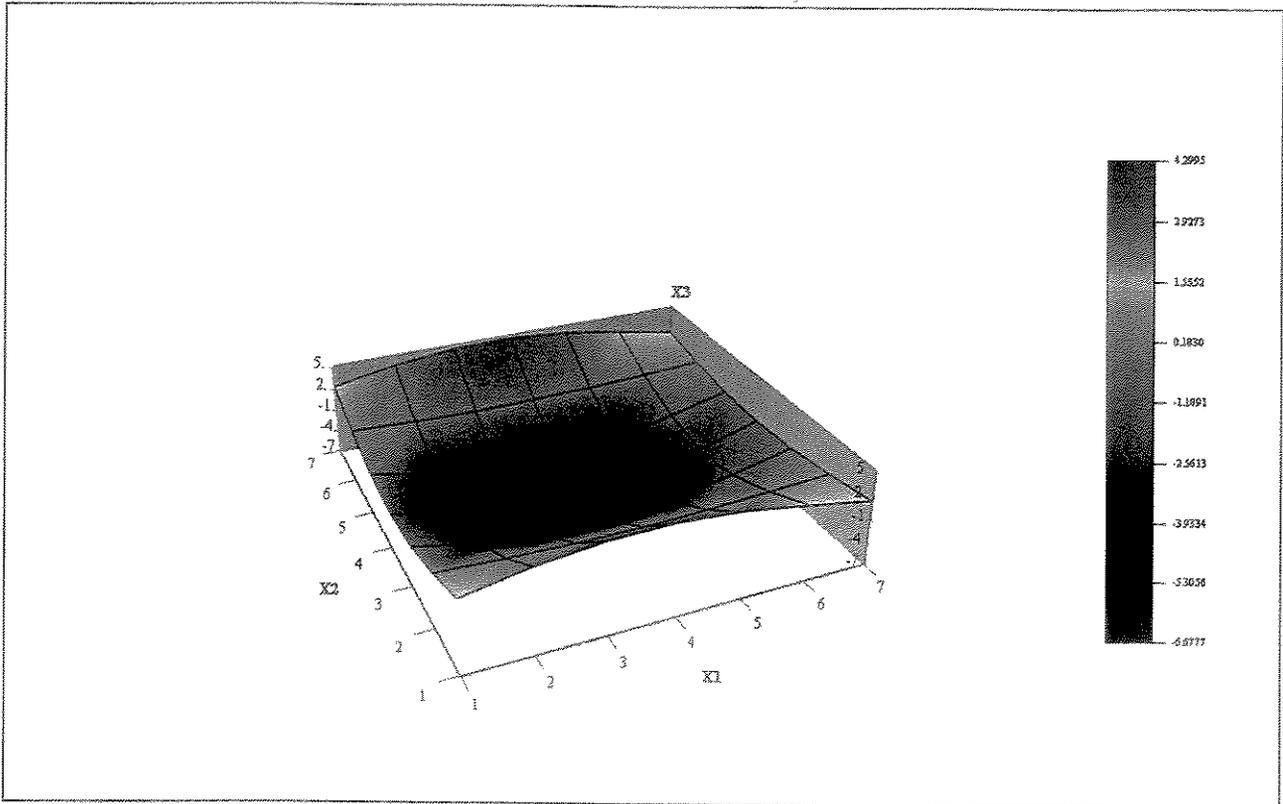


Gráfico 4.32 Parte real do terceiro modo de vibração da placa engastada-livre-apoiada-livre (i=1, j=3).

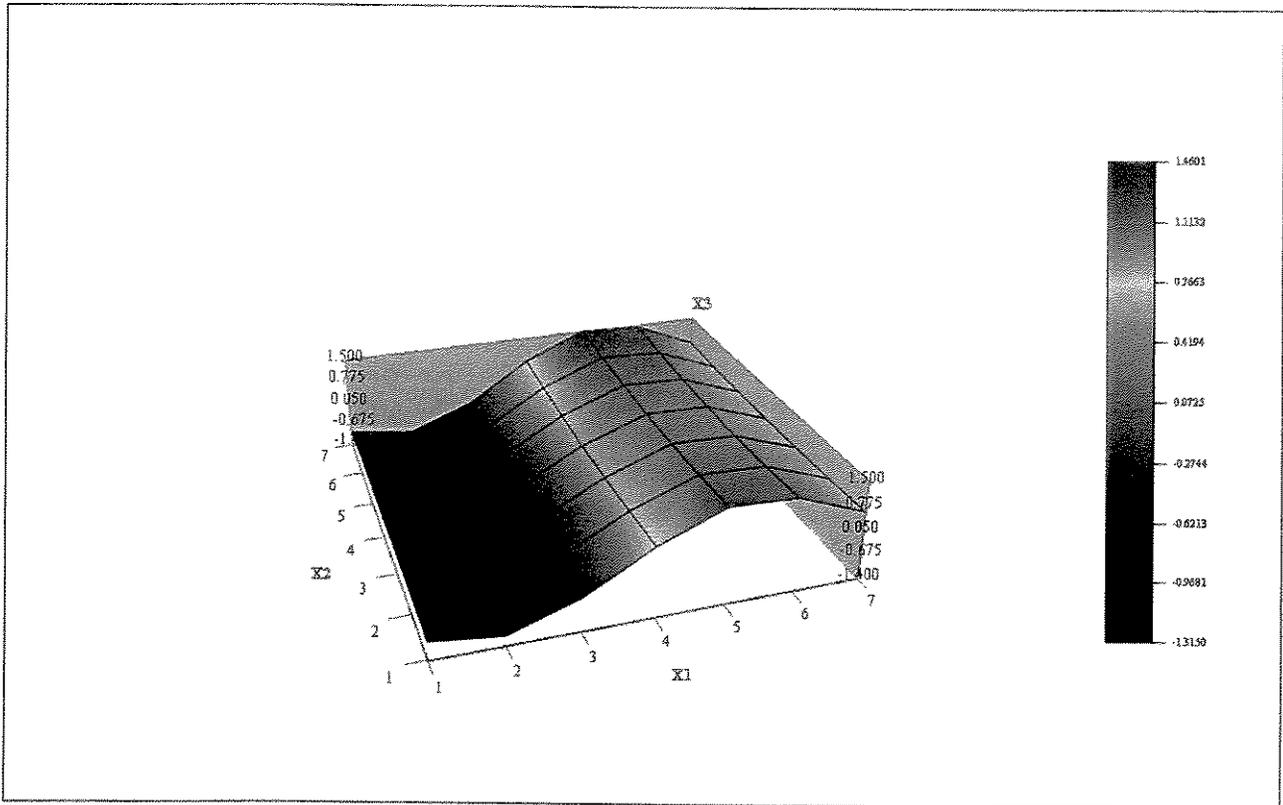


Gráfico 4.33 Parte real do quarto modo de vibração da placa engastada-livre-apoiada-livre (i=2, j=1).

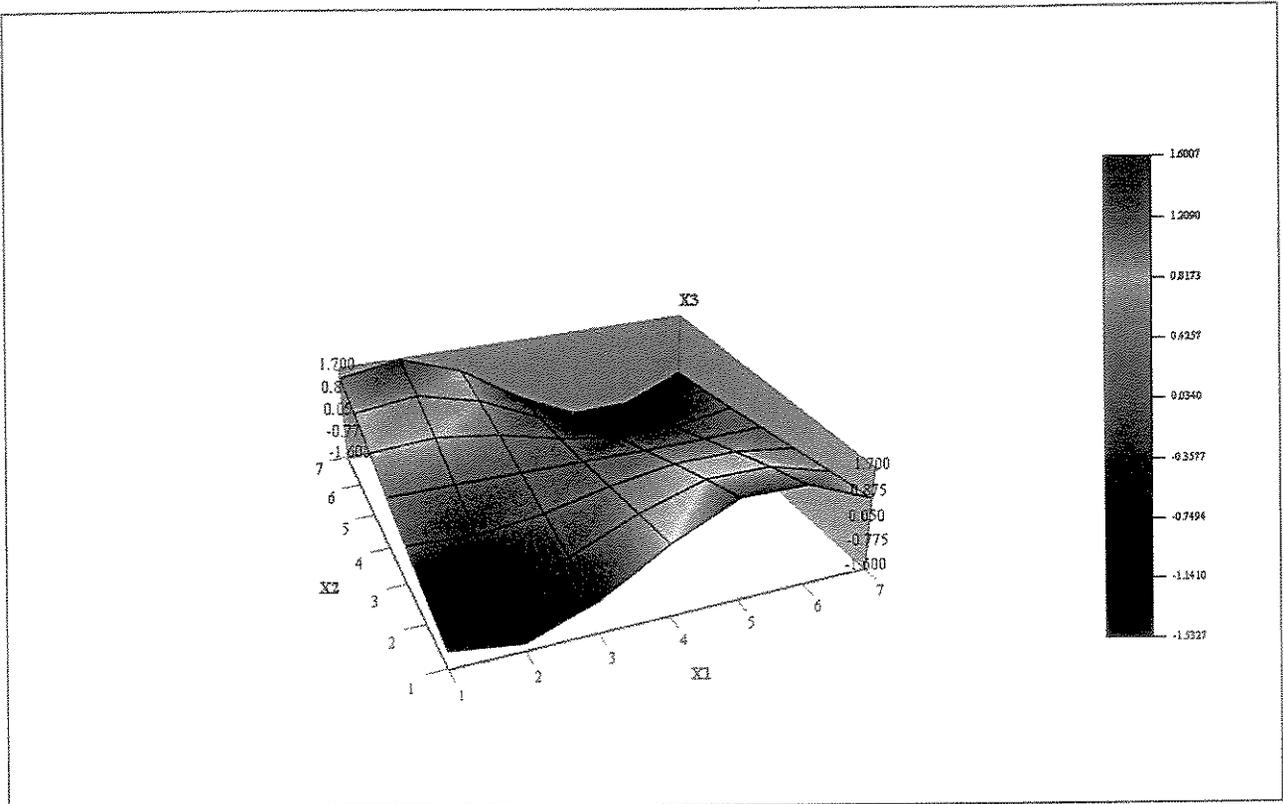


Gráfico 4.34 Parte real do quinto modo de vibração da placa engastada-livre- apoiada-livre ($i=2, j=2$).

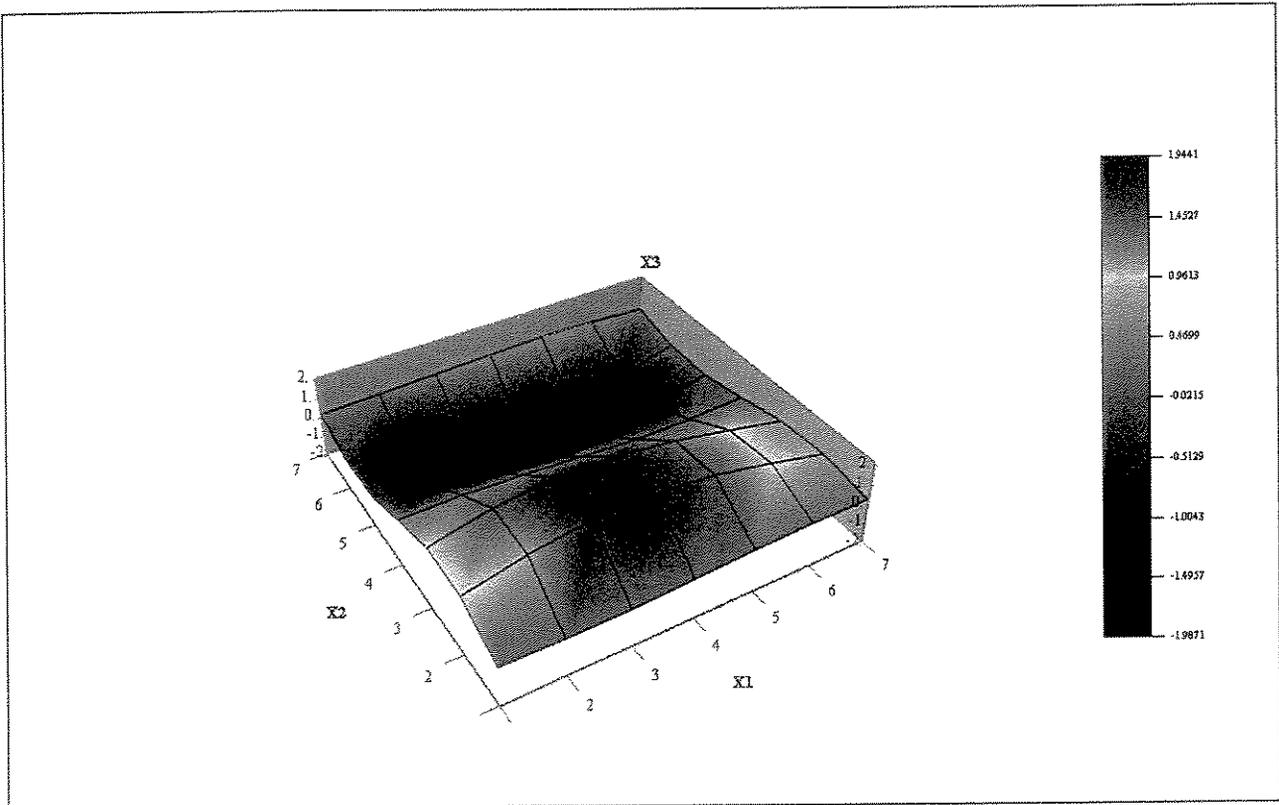


Gráfico 4.35 Parte real do sexto modo de vibração da placa engastada-livre- apoiada-livre ($i=1, j=4$).

4.9.6 Placa quadrada apoiada-livre-apoiada-livre submetida a uma excitação transversal concentrado

Uma placa fina quadrada, com comprimento $\ell = 1.0$ e largura $b = 1.0$, foi excitada com um carregamento transversal concentrado assimétrico, em uma de suas bordas livres. De acordo com a Figura 4.31, as condições de contorno do problema são de dois lados apoiados e os outros dois lados livres. A espessura da placa é $h = 0.05$, o coeficiente de *Poisson* foi considerado $\nu = 0.3$. Para o Módulo de *Young* foi adotado $E = 1000.0$ e para a densidade, foi adotado $\rho = 0.229$. O número de pontos de Gauss utilizado nos cálculos numéricos foi igual a 12.

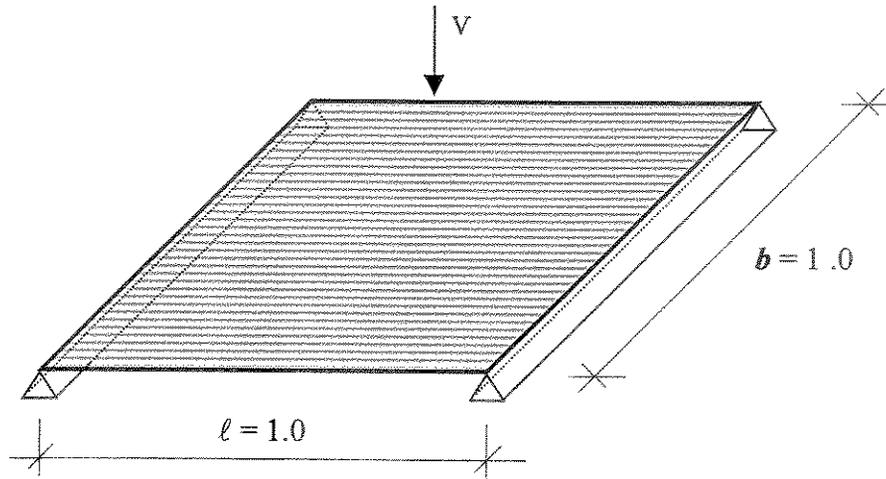


Figura 4.31 Placa quadrada apoiada-livre-apoiada-livre sob carregamento concentrado.

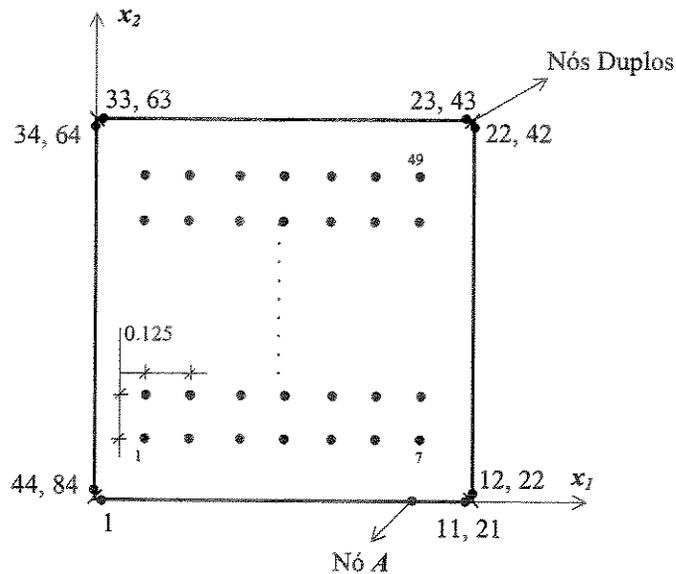


Figura 4.32 Discretizações do MEC para a placa quadrada apoiada-livre-apoiada-livre.

O contorno foi discretizado em 40 e 80 elementos lineares, sendo utilizados nos cantos da placa nós duplos, perfazendo um total de 44 e 84 nós de contorno, respectivamente, conforme mostra a Figura 4.32. Também, foram alocados 49 pontos internos para a determinação dos modos de vibração da placa.

A solução analítica para a obtenção das frequências naturais é dada pela equação (4.90). O parâmetro adimensional de frequência λ_{ij}^2 , é dado pela Tabela 4.21 (Blevins, 1979):

Tabela 4.21 Parâmetros adimensionais de frequência (λ_{ij}^2) para a placa quadrada apoiada-livre-apoiada-livre.

l/b	λ_{ij}^2 e (i j)					
	Sequência dos Modos					
	1	2	3	4	5	6
1.0	9.631 (11)	16.14 (12)	36.73 (13)	38.95 (21)	46.74 (22)	70.74 (23)

A frequência natural analítica pode agora ser determinada através da equação (4.89), os valores finais encontrados, são mostrados na Tabela 4.22:

Tabela 4.22 Frequências naturais analíticas (w_{ij}) para a placa quadrada apoiada-livre-apoiada-livre.

l/b	w_{ij} (rad/s) e (i j)					
	Sequência dos Modos					
	1	2	3	4	5	6
1.0	9.6297 (11)	16.1378 (12)	36.7250 (13)	38.9447 (21)	46.7336 (22)	70.7304 (23)

A partir das frequências naturais analíticas da placa, fez-se uma varredura ao longo desta faixa de frequências para construir a FRF. Considerando-se a equação (4.85), adotou-se $n^* = 8$ para a varredura das frequências, obtendo 257 frequências no intervalo considerado. Desta forma, adotou-se uma faixa de frequência de 0 a 100 para a resolução numérica do problema. Com este procedimento, considerando-se as duas discretizações adotadas (Figura 4.32), construiu-se a FRF em função dos deslocamentos transversais w na direção x_3 .

A Tabela 4.23 apresenta os valores comparativos das seis primeiras frequências naturais calculadas numérica (FRF) e analiticamente. As porcentagens de erro foram calculadas tendo como base o valor analítico.

Tabela 4.23 Frequências naturais analíticas e numéricas (ω_{ij}) da placa quadrada apoiada-livre-apoiada-livre.

DISCRETIZAÇÃO	ω_{ij} (rad/s) e (ij)					
	1	2	3	4	5	6
40 Elementos lineares	9.501	16.180	36.568	39.029	46.763	70.666
80 Elementos lineares	9.501	16.180	36.568	39.029	46.763	70.666
ANALÍTICO	9.6297 (11)	16.1378 (12)	36.7250 (13)	38.9447 (21)	46.7336 (22)	70.7304 (23)

Analisando a Tabela 4.23, pode-se observar que há uma convergência entre as frequências obtidas numericamente através das (FRFs), em relação ao valor analítico. Novamente, uma maior discretização do problema não alterou os resultados numéricos obtidos para as frequências naturais.

Na sequência, considerando-se as discretizações de 40 e 80 elementos lineares, são apresentadas nos Gráficos 4.36 e 4.37 as Funções de Resposta em Frequência em função do deslocamento transversal da placa na direção x_3 do nó A (Figura 4.32). Nestes gráficos, são apresentados também os tempos de processamento (tp) de cada FRF, juntamente com os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação onde são realizadas as integrações do MEC.

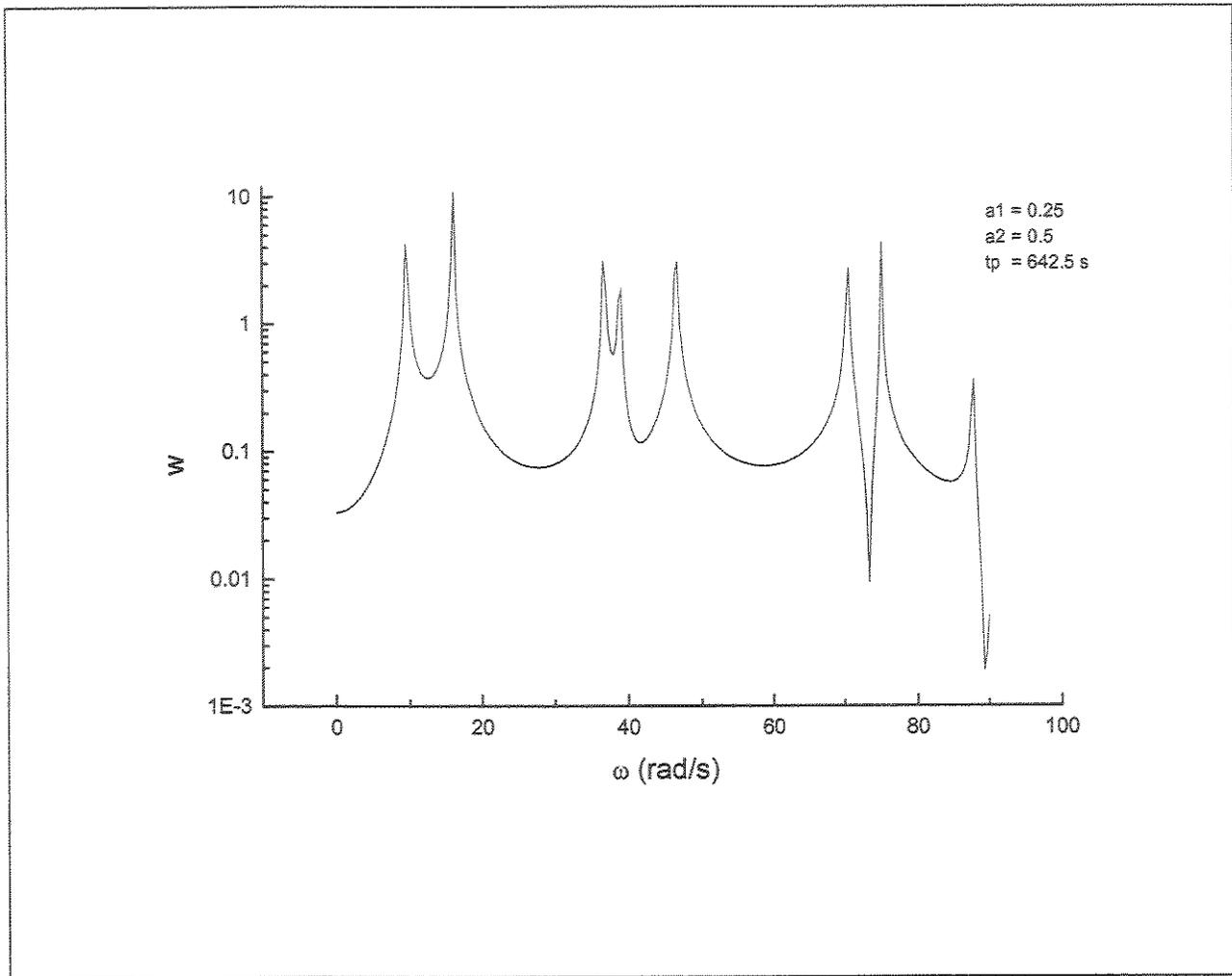


Gráfico 4.36 FRF do deslocamento transversal da placa na direção x , do ponto A (40 elementos).

Analisando a FRF do Gráfico 4.36, pode-se observar os picos de frequência obtidos numericamente através do MEC para a discretização de 40 elementos lineares. Novamente, a discretização utilizada apresentou resultados bastante significativos em relação ao valor analítico. Mais uma vez, a formulação alternativa adotada para a resolução do exemplo, considerando-se os pontos de colocação com fatores de posicionamento a $\frac{1}{4}$ e a $\frac{1}{2}$ do comprimento dos elementos consecutivos apresentaram as melhores respostas numéricas. Outros fatores de posicionamento apresentaram respostas menos significativas.

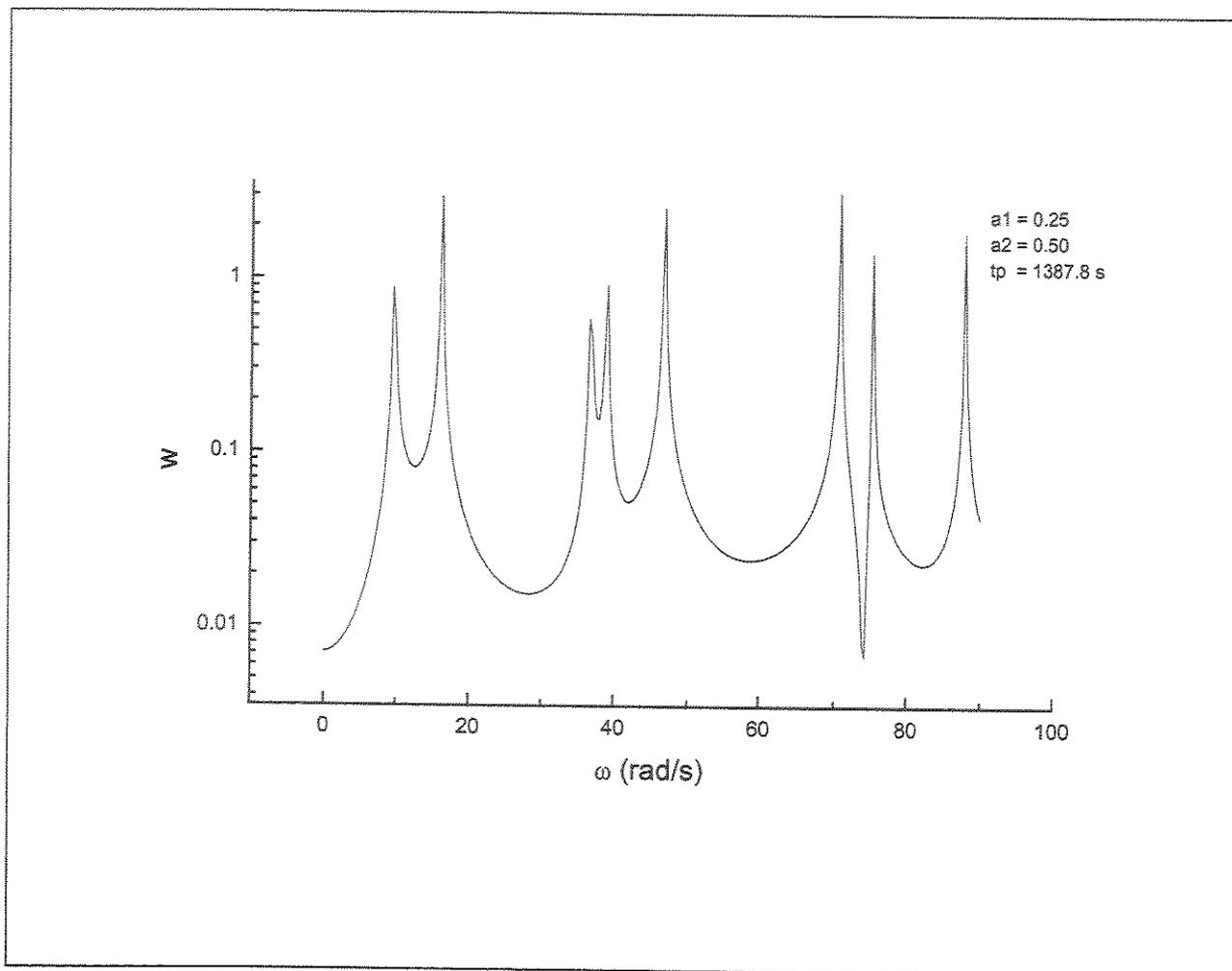


Gráfico 4.37 FRF do deslocamento transversal da placa na direção x_3 do ponto A (80 elementos).

Analisando FRF do Gráfico 4.37, pode-se observar mais uma vez uma maior homogeneidade nos picos de frequência obtidos numericamente através do MEC para a discretização de 80 elementos lineares. Entretanto, a discretização utilizada apresentou os mesmos resultados com relação à discretização com 40 elementos.

Como última análise deste exemplo, são apresentados na sequência os gráficos da parte real dos seis primeiros modos de vibração da placa, para a discretização de 40 elementos. Os modos de vibração foram obtidos a partir dos deslocamentos transversais na direção x_3 dos pontos internos mostrados na Figura 4.32. Com relação aos tempos de processamento, pode-se observar para os dois casos analisados que o tempo gasto para processar cada frequência foi de 2.5 e 5.4 segundos, respectivamente.

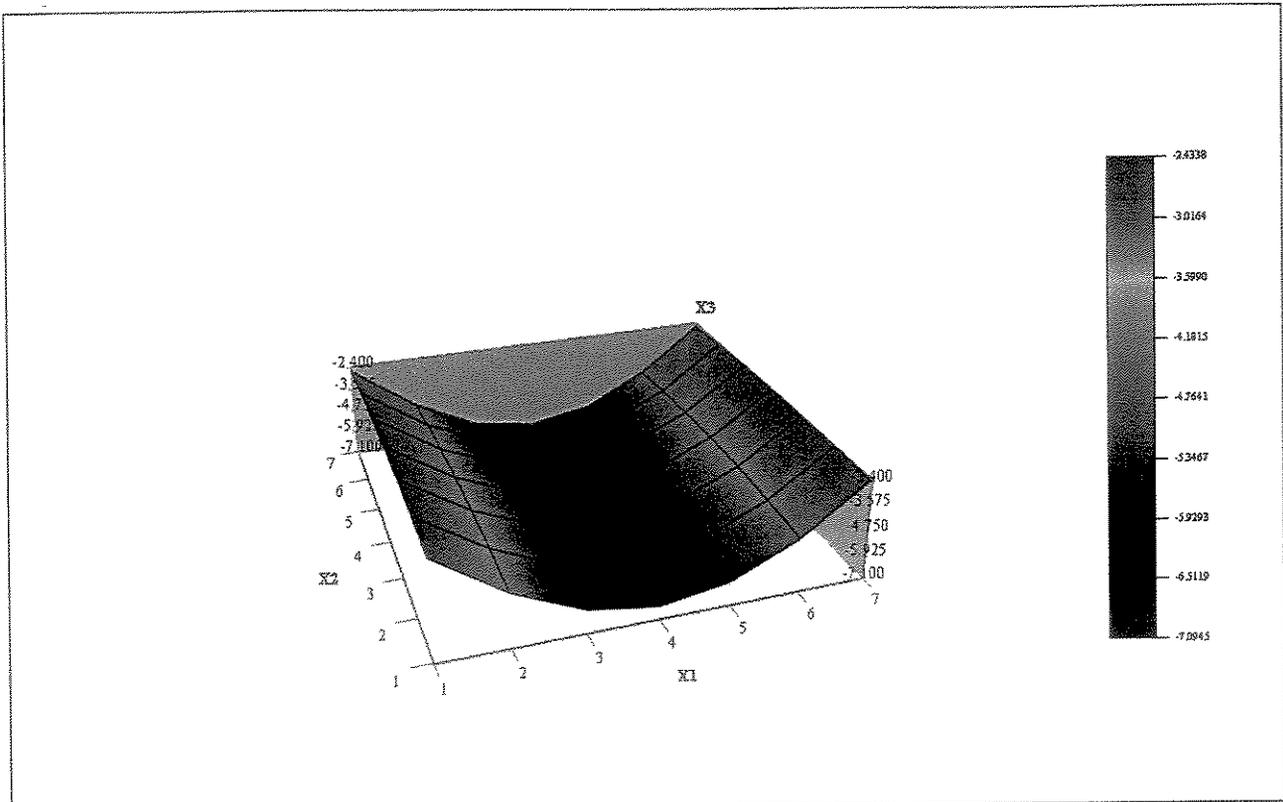


Gráfico 4.38 Parte real do primeiro modo de vibração da placa apoiada-livre-apoiada-livre ($i=1, j=1$).

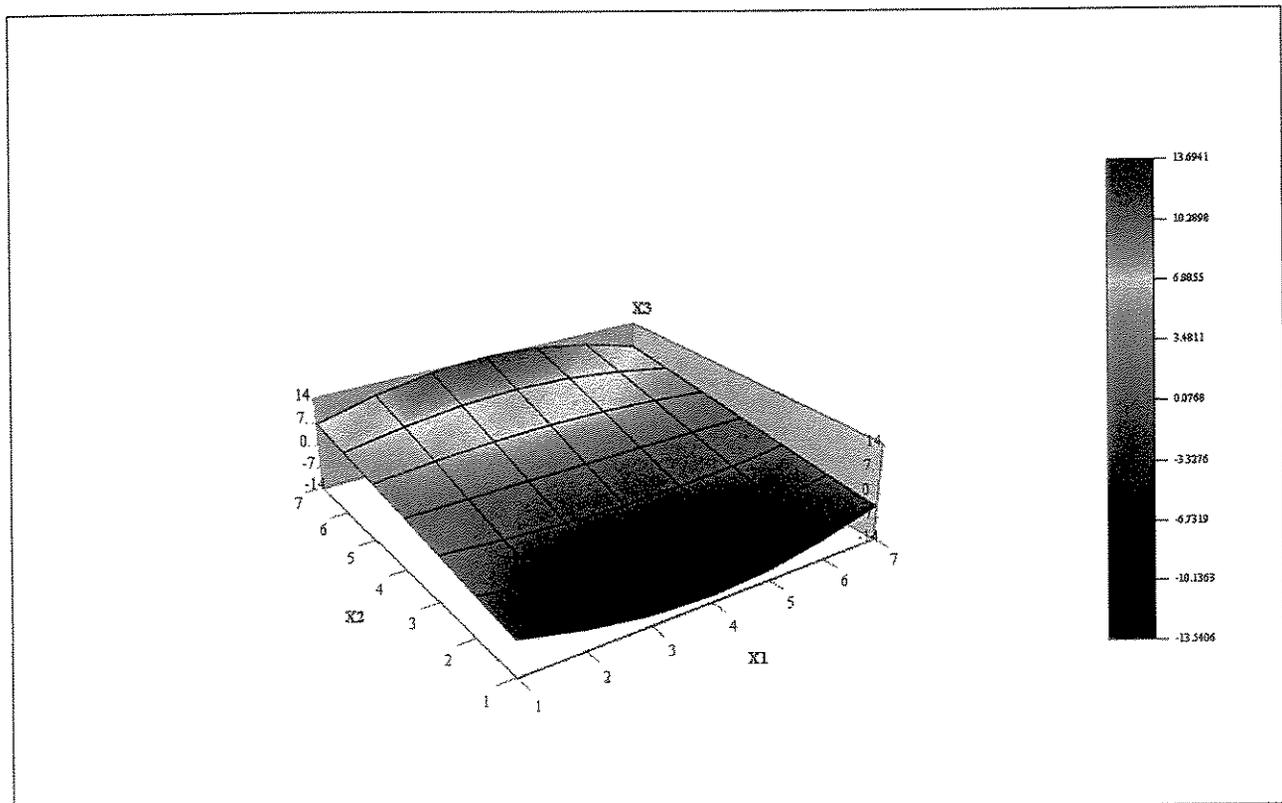


Gráfico 4.39 Parte real do segundo modo de vibração da placa apoiada-livre-apoiada-livre ($i=1, j=2$).

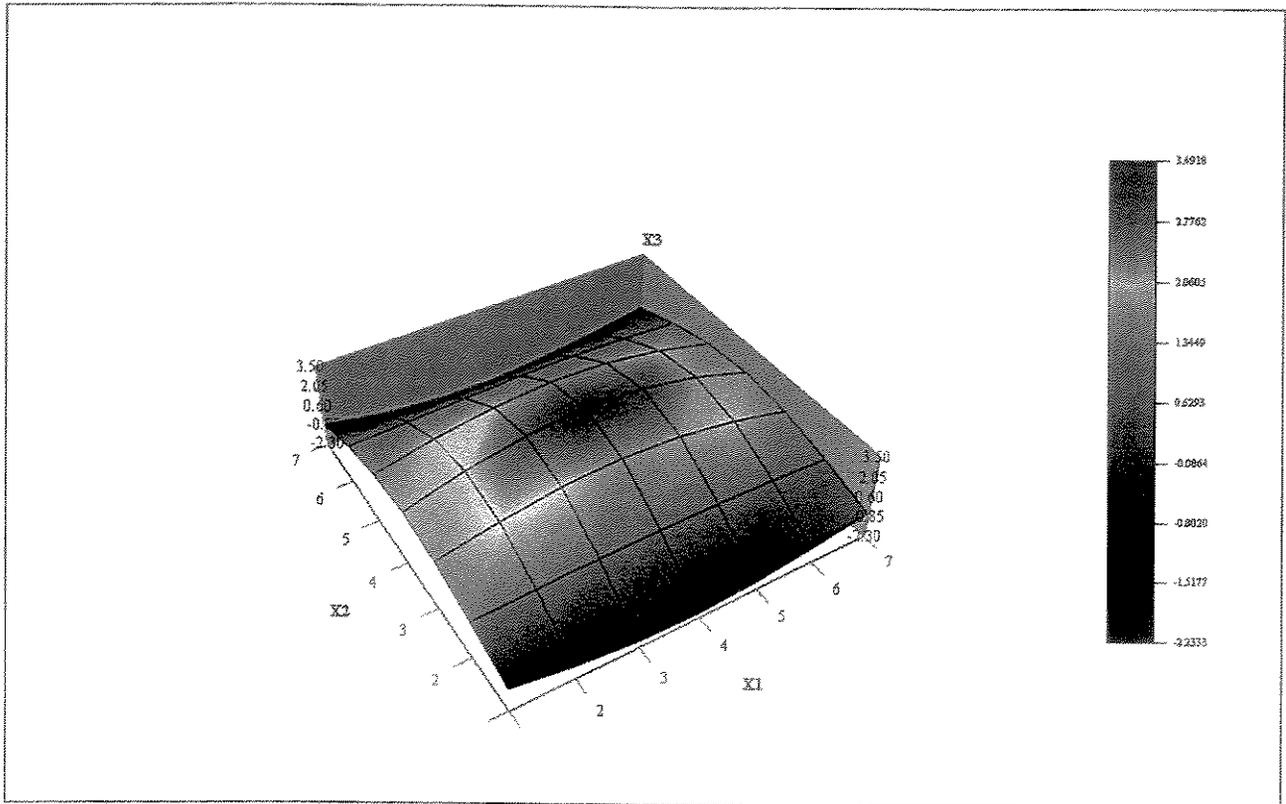


Gráfico 4.40 Parte real do terceiro modo de vibração da placa apoiada-livre-apoiada-livre ($i=1, j=3$).

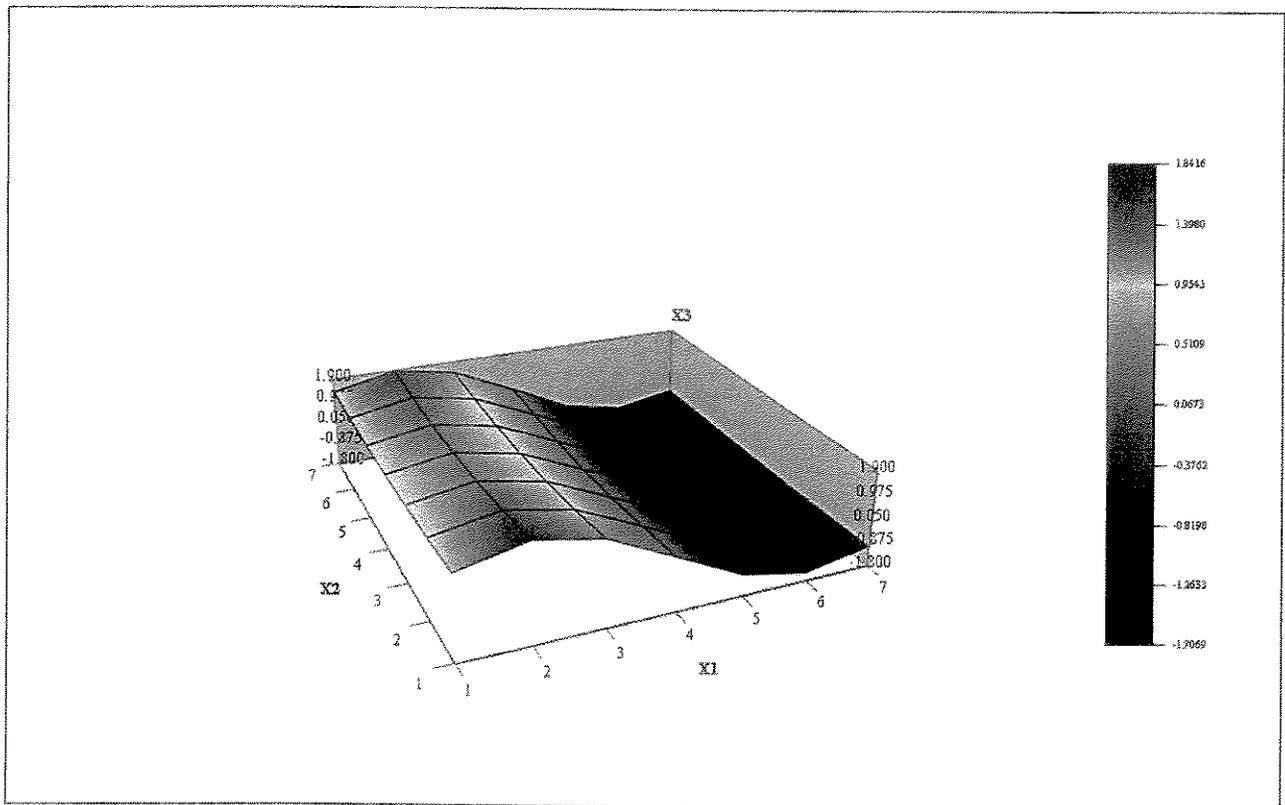


Gráfico 4.41 Parte real do quarto modo de vibração da placa apoiada-livre-apoiada-livre ($i=2, j=1$).

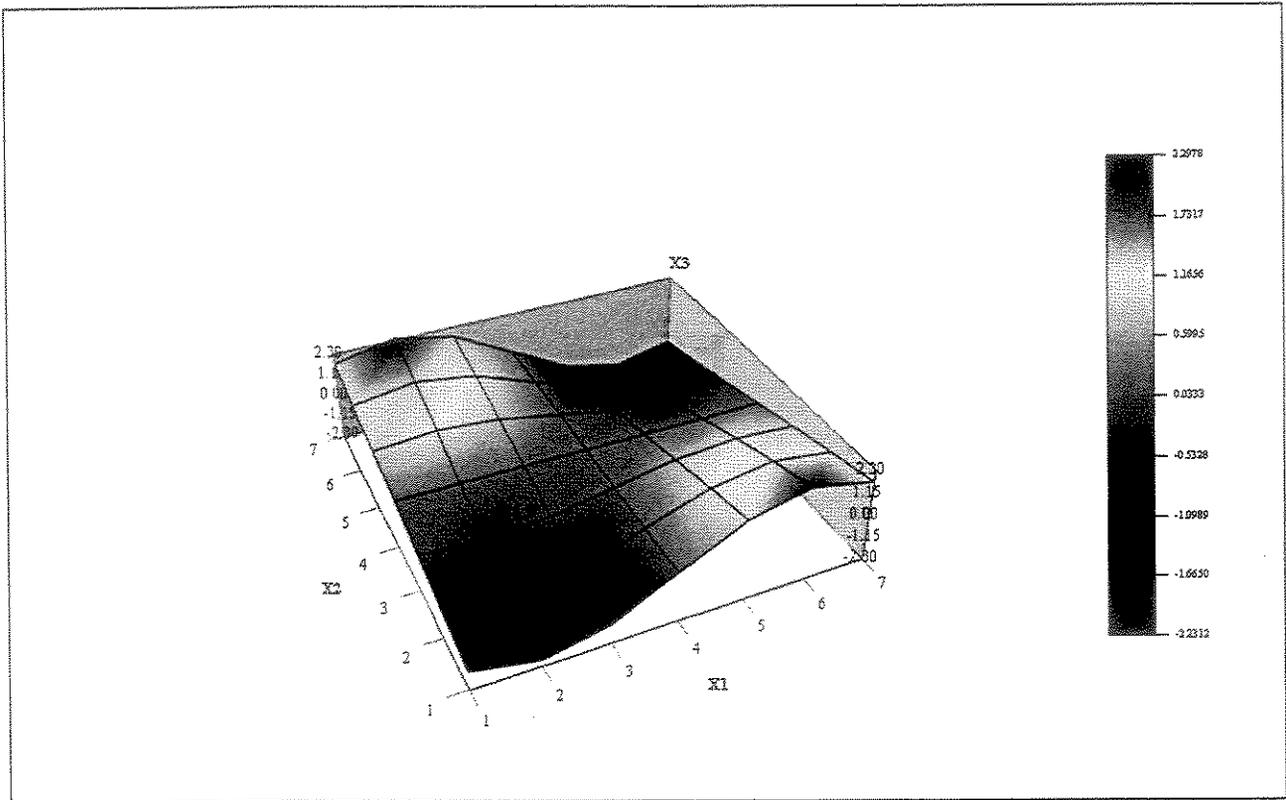


Gráfico 4.42 Parte real do quinto modo de vibração da placa apoiada-livre-apoiada-livre ($i=2, j=2$).

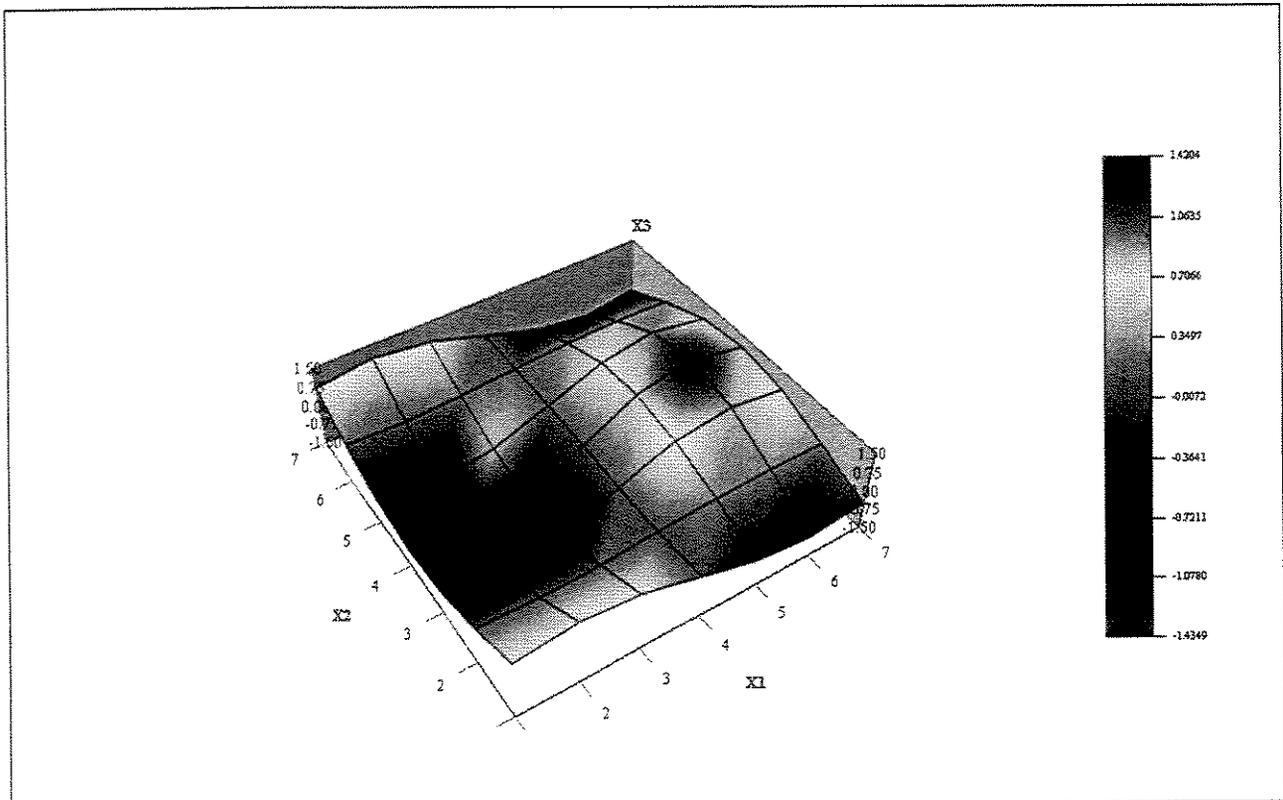


Gráfico 4.43 Parte real do sexto modo de vibração da placa apoiada-livre-apoiada-livre ($i=2, j=3$).

4.9.7 Placa retangular engastada-livre-engastada-livre submetida a uma excitação transversal concentrada

Uma placa retangular, com comprimento $\ell = 1.0$ e largura $b = 0.4$, foi excitada com um carregamento transversal concentrado assimétrico, em uma de suas bordas livres. De acordo com a Figura 4.33, as condições de contorno do problema são de dois lados engastados e os outros dois lados livres. A espessura da placa é $h = 0.05$, o coeficiente de *Poisson* foi considerado $\nu = 0.3$. Para o Módulo de *Young* foi adotado $E = 1000.0$ e para a densidade, foi adotado $\rho = 0.229$. O número de pontos de Gauss utilizado nos cálculos numéricos foi igual a 12.

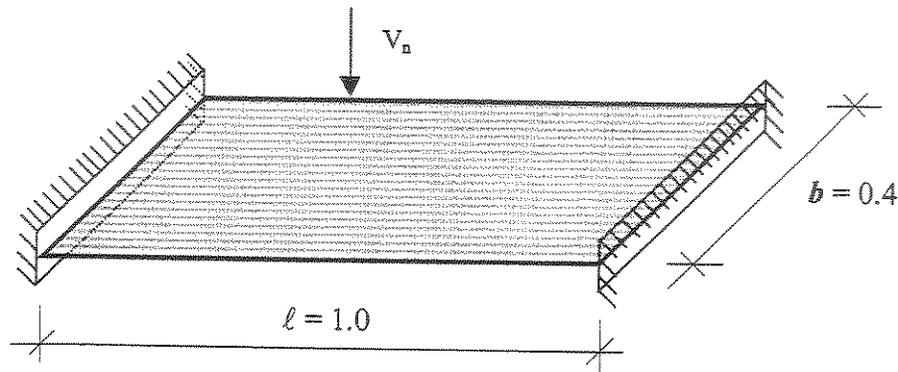


Figura 4.33 Placa retangular engastada-livre-engastada-livre sob carregamento concentrado.

O contorno da placa foi discretizado em 40 e 80 elementos lineares, sendo utilizados nos cantos da placa nós duplos, perfazendo um total de 44 e 84 nós de contorno, respectivamente, conforme mostra a Figura 4.34. Para a determinação dos modos de vibração da placa, foram alocados apenas 21 pontos internos sendo que uma linha de 7 pontos está disposta na direção x_1 e conseqüentemente uma linha de 3 pontos está disposta na direção x_2 .

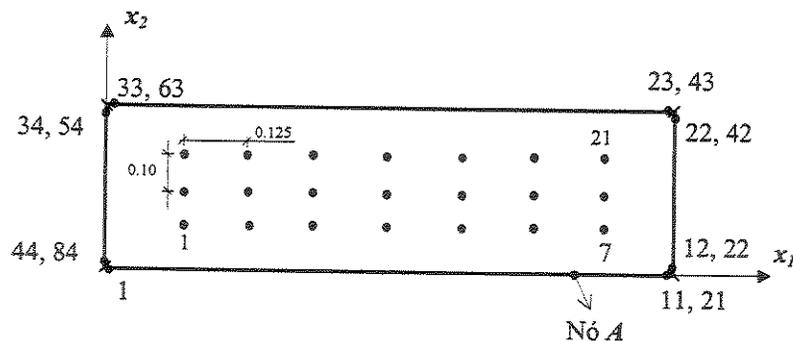


Figura 4.34 Discretizações do MEC para a placa retangular engastada-livre-engastada-livre.

A solução analítica para a obtenção das frequências naturais é dada pela equação (4.90). O parâmetro adimensional de frequência λ_{ij}^2 , é dado pela Tabela 4.24 (Blevins, 1979):

Tabela 4.24 Parâmetros adimensionais de frequência (λ_{ij}^2) para a placa retangular engastada-livre-engastada-livre.

l/b	λ_{ij}^2 e (i,j)					
	Sequência dos Modos					
	1	2	3	4	5	6
2.5	22.13 (11)	41.69 (12)	61.00 (21)	92.38 (22)	119.9 (31)	157.8 (32)

A frequência natural analítica pode ser determinada através da equação (4.90). Os valores finais encontrados são mostrados na Tabela 4.25:

Tabela 4.25 Frequências naturais analíticas (w_{ij}) para a placa retangular apoiada-livre-apoiada-livre.

l/b	w_{ij} (rad/s) e (i,j)					
	Sequência dos Modos					
	1	2	3	4	5	6
1.0	22.1270 (11)	41.6843 (12)	61.9917 (21)	92.3674 (22)	119.8837 (31)	157.7785 (32)

Em função das frequências naturais analíticas da placa retangular, fez-se uma varredura ao longo desta faixa de frequências para construir a FRF. Considerando-se a equação (4.85), adotou-se $n^* = 8$ para a varredura das frequências, obtendo 257 frequências no intervalo considerado. Desta forma, adotou-se uma faixa de frequência de 0 a 200 para a resolução numérica do problema. Com este procedimento, considerando-se as duas discretizações adotadas (Figura 4.34), construiu-se as FRFs em função dos deslocamentos transversais w na direção x_3 .

A Tabela 4.26 apresenta os valores comparativos das seis primeiras frequências naturais calculadas numérica (FRF) e analiticamente. As porcentagens de erro foram calculadas tendo como base o valor analítico.

Tabela 4.26 Frequências naturais analíticas e numéricas (ω_{ij}) da placa retangular apoiada-livre-apoiada-livre.

DISCRETIZAÇÃO	ω_{ij} (rad/s) e (ij)					
	1	2	3	4	5	6
40 Elementos lineares	21.103	41.492	59.772	91.411	118.128	155.392
80 Elementos lineares	21.806	41.492	60.475	91.411	118.832	156.095
ANALÍTICO	22.1270 (11)	41.6843 (12)	61.9917 (21)	92.3674 (22)	119.8837 (31)	157.7785 (32)

Analisando a Tabela 4.26, pode-se observar que para a discretização de 80 elementos há uma convergência maior entre as frequências obtidas numericamente através das (FRFs), com pouca discrepância em relação ao valor analítico. A discretização de 40 elementos, com discrepâncias maiores, apresentou resultados aparentemente menos significativos para algumas frequências em relação ao valor analítico.

Na sequência, considerando-se as discretizações de 40 e 80 elementos lineares, são apresentadas nos Gráficos 4.44 e 4.45 as Funções de Resposta em Frequência em função do deslocamento transversal da placa na direção x_3 do nó A (Figura 4.34). Nestes gráficos, são apresentados também os tempos de processamento (tp) de cada FRF, juntamente com os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação onde são realizadas as integrações do MEC.

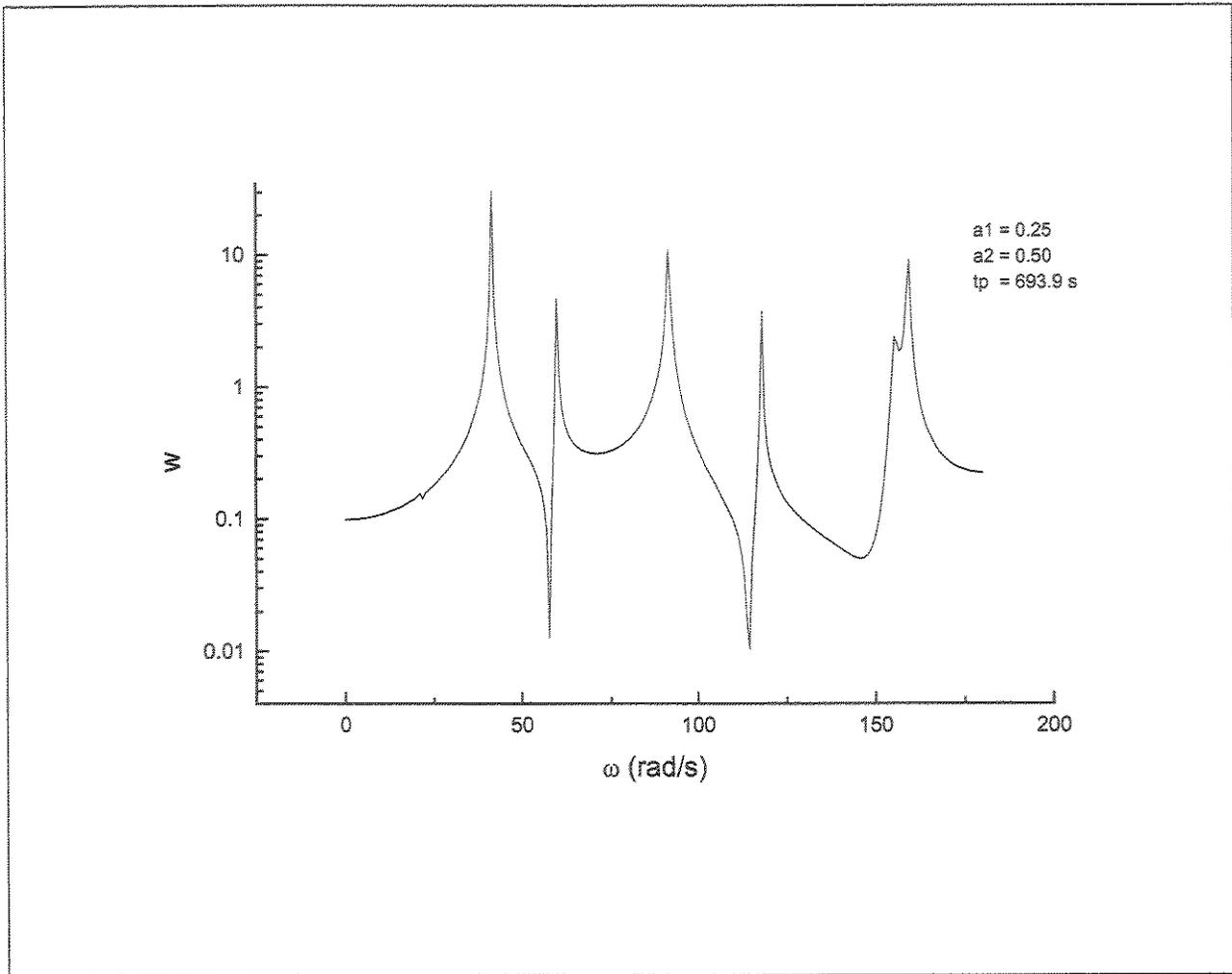


Gráfico 4.44 FRF do deslocamento transversal da placa na direção x_3 do ponto A (40 elementos).

Analisando a FRF do Gráfico 4.44, pode-se observar os picos de frequência obtidos numericamente através do MEC para a discretização de 40 elementos lineares. Apenas a primeira frequência natural é aparentemente mais difícil de ser visualizada. Pode-se dizer mais uma vez que a discretização utilizada apresentou resultados significativos em relação ao valor analítico. A formulação alternativa adotada para a resolução do exemplo, considerando-se os pontos de colocação com fatores de posicionamento a $\frac{1}{4}$ e a $\frac{1}{2}$ do comprimento dos elementos consecutivos apresentaram as melhores respostas numéricas. Outros fatores de posicionamento apresentaram respostas menos expressivas.

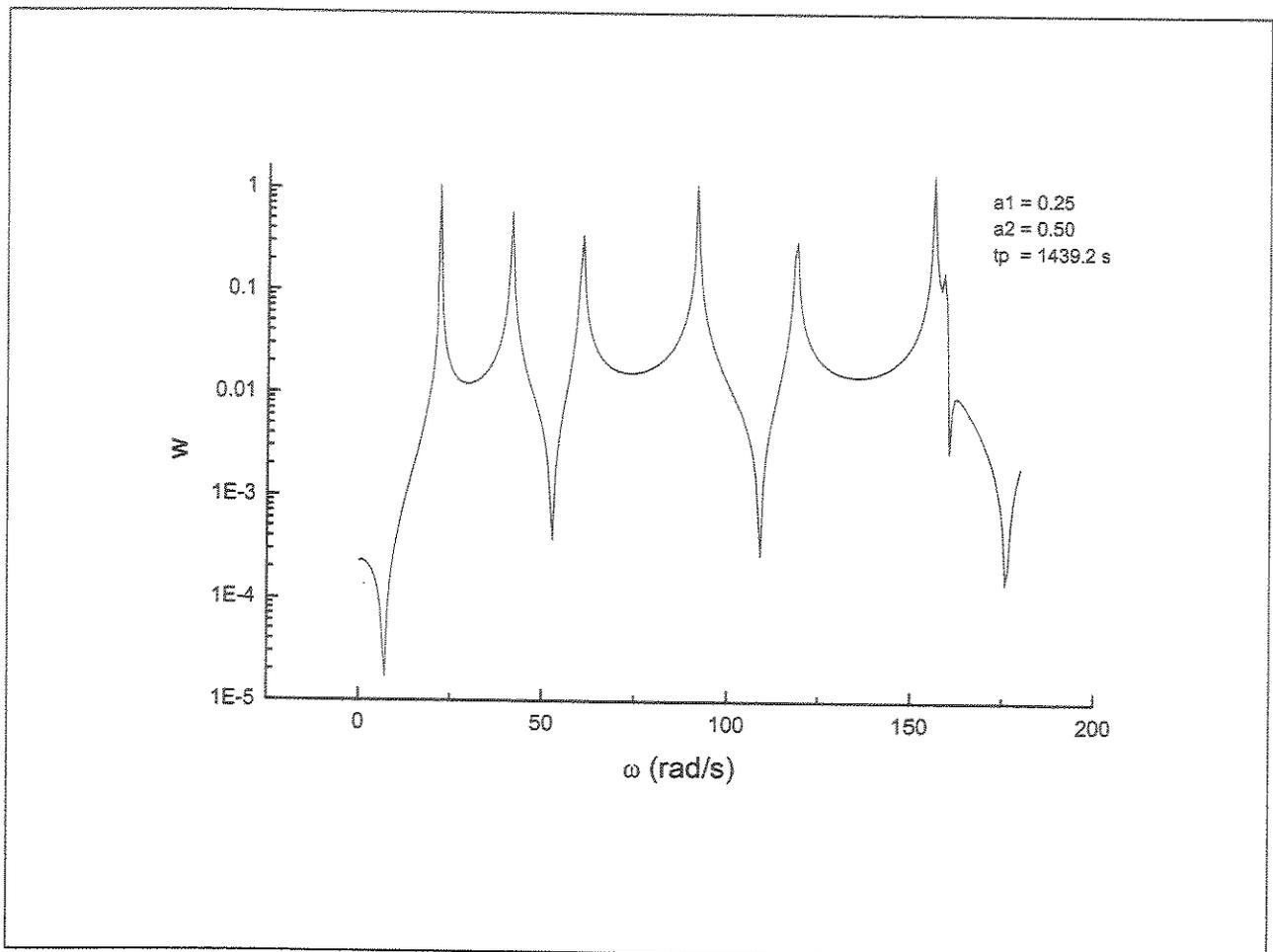


Gráfico 4.45 FRF do deslocamento transversal da placa na direção x_3 do ponto A (80 elementos).

Analisando a FRF do Gráfico 4.45, em função da discretização com 80 elementos lineares pode-se observar uma maior homogeneidade nos picos de frequência obtidos numericamente, principalmente com relação à primeira frequência natural. Fato este não obtido com a discretização anterior.

Como última análise deste exemplo, são apresentados a seguir os gráficos da parte real dos seis primeiros modos de vibração da placa retangular, para a discretização de 40 elementos. Os modos de vibração foram obtidos a partir dos deslocamentos transversais na direção x_3 dos pontos internos mostrados na Figura 4.34. Mesmo uma discretização pobre de nós internos, propiciou uma razoável obtenção dos modos de vibração da placa retangular. Com relação aos tempos de processamento, pode-se observar para os dois casos analisados que o tempo gasto para processar cada frequência foi de 2.7 e 5.6 segundos, respectivamente.

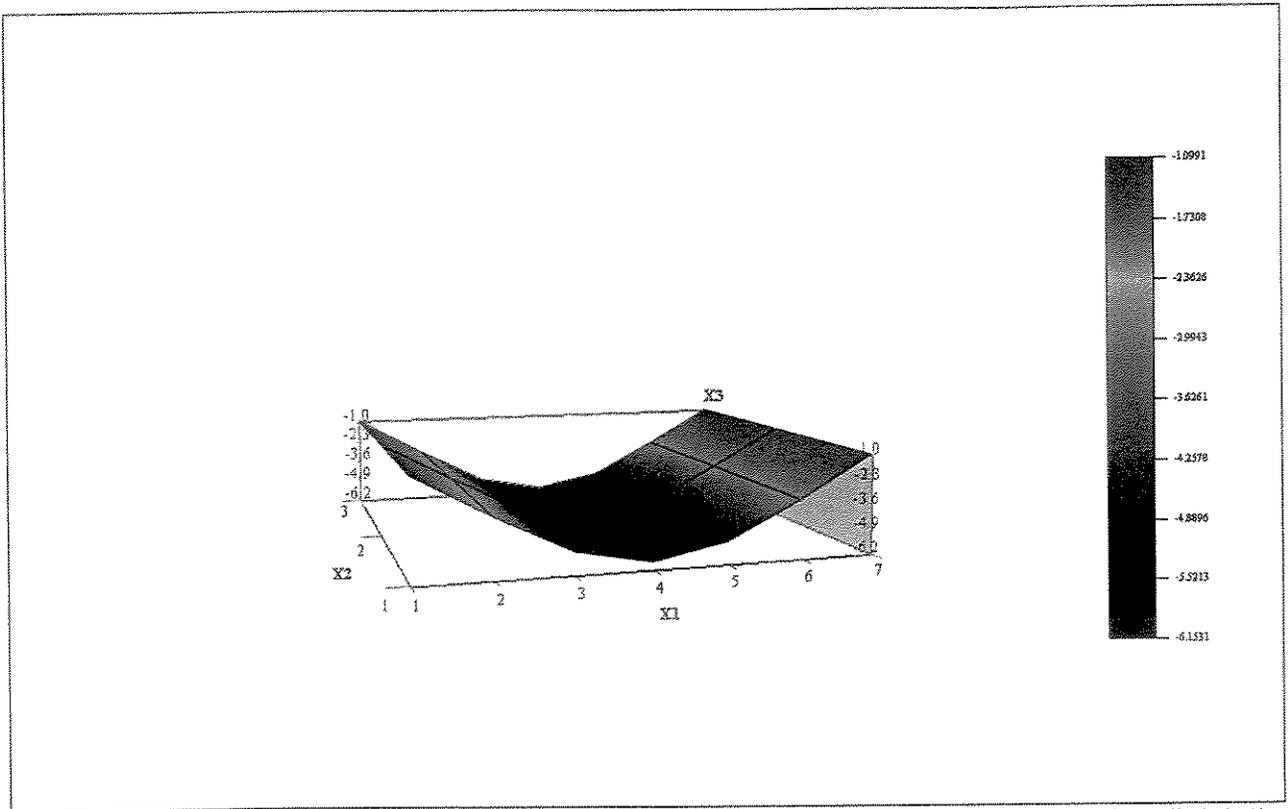


Gráfico 4.46 Parte real do primeiro modo de vibração da placa retangular engastada-livre-engastada-livre (i=1, j=1).

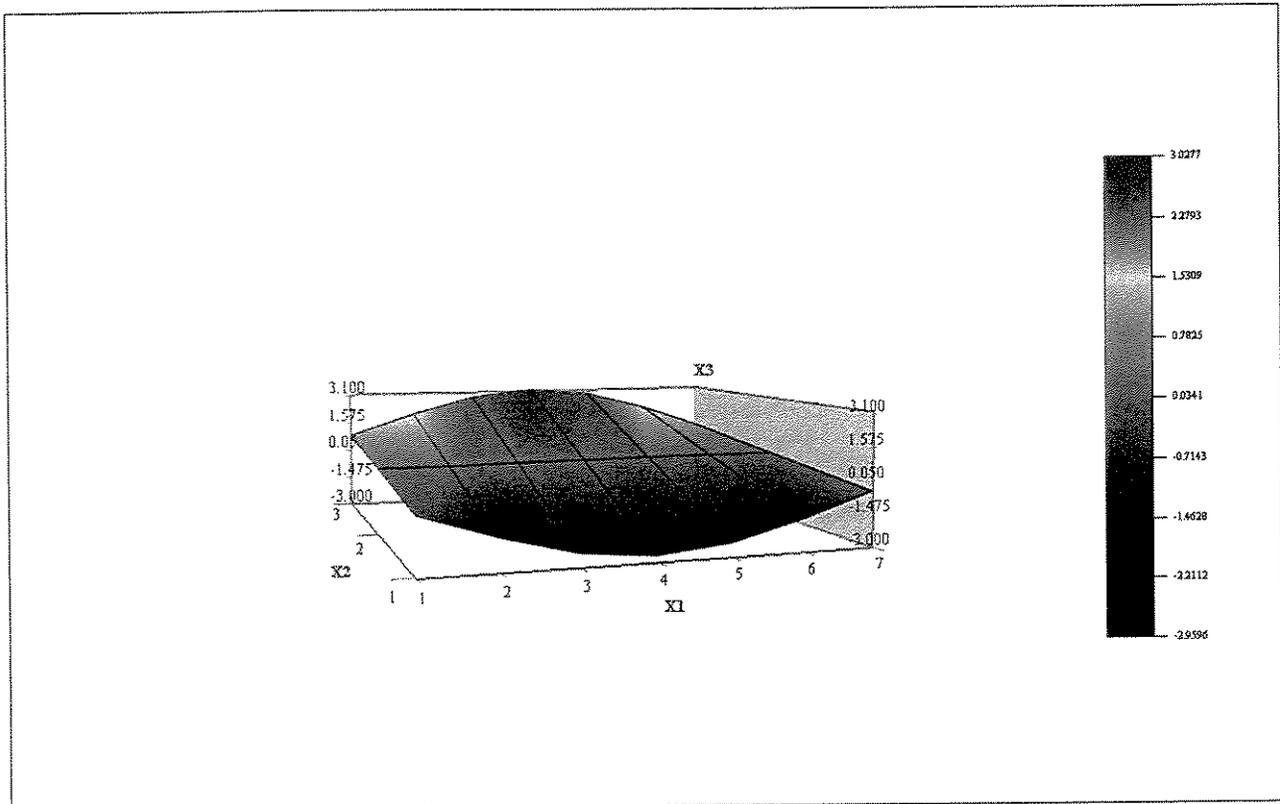


Gráfico 4.47 Parte real do segundo modo de vibração da placa retangular engastada-livre-engastada-livre (i=1, j=2).

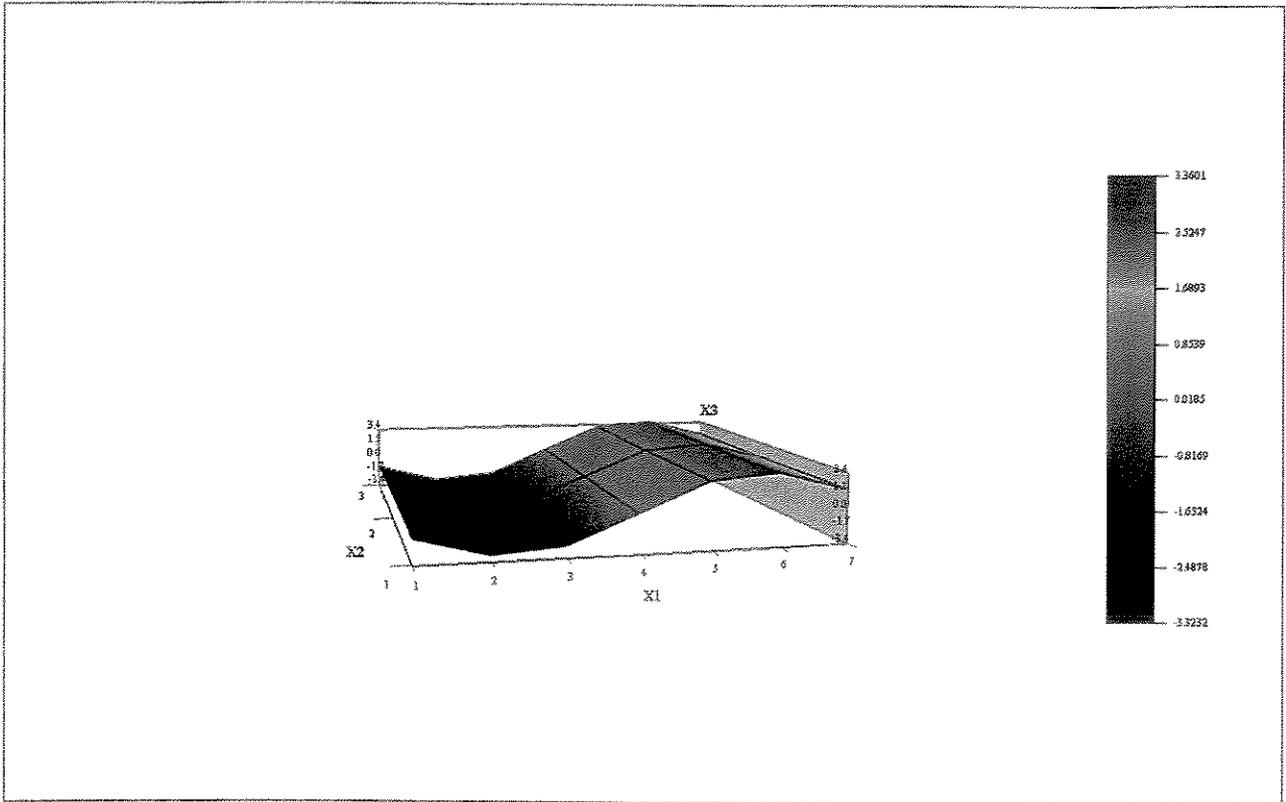


Gráfico 4.48 Parte real do terceiro modo de vibração da placa retangular engastada-livre-engastada-livre ($i=2, j=1$).

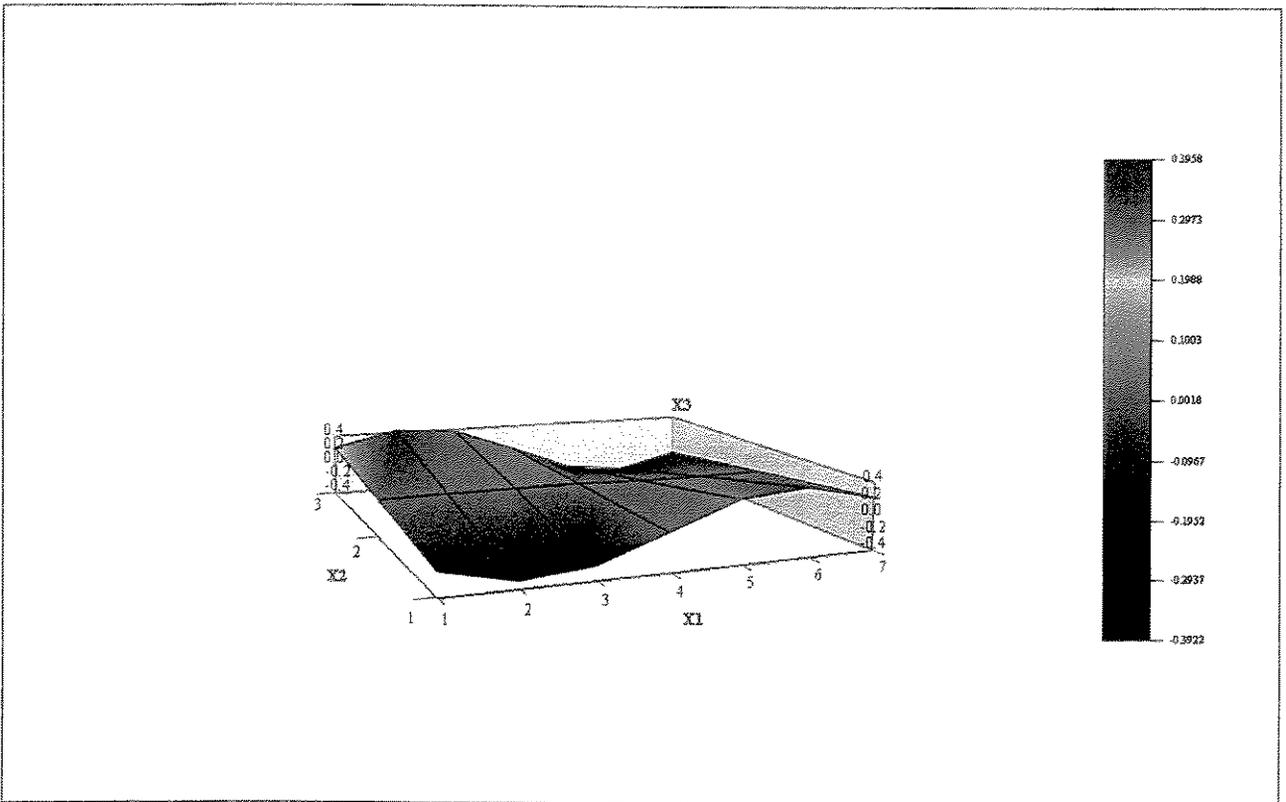


Gráfico 4.49 Parte real do quarto modo de vibração da placa retangular engastada-livre-engastada-livre ($i=2, j=2$).

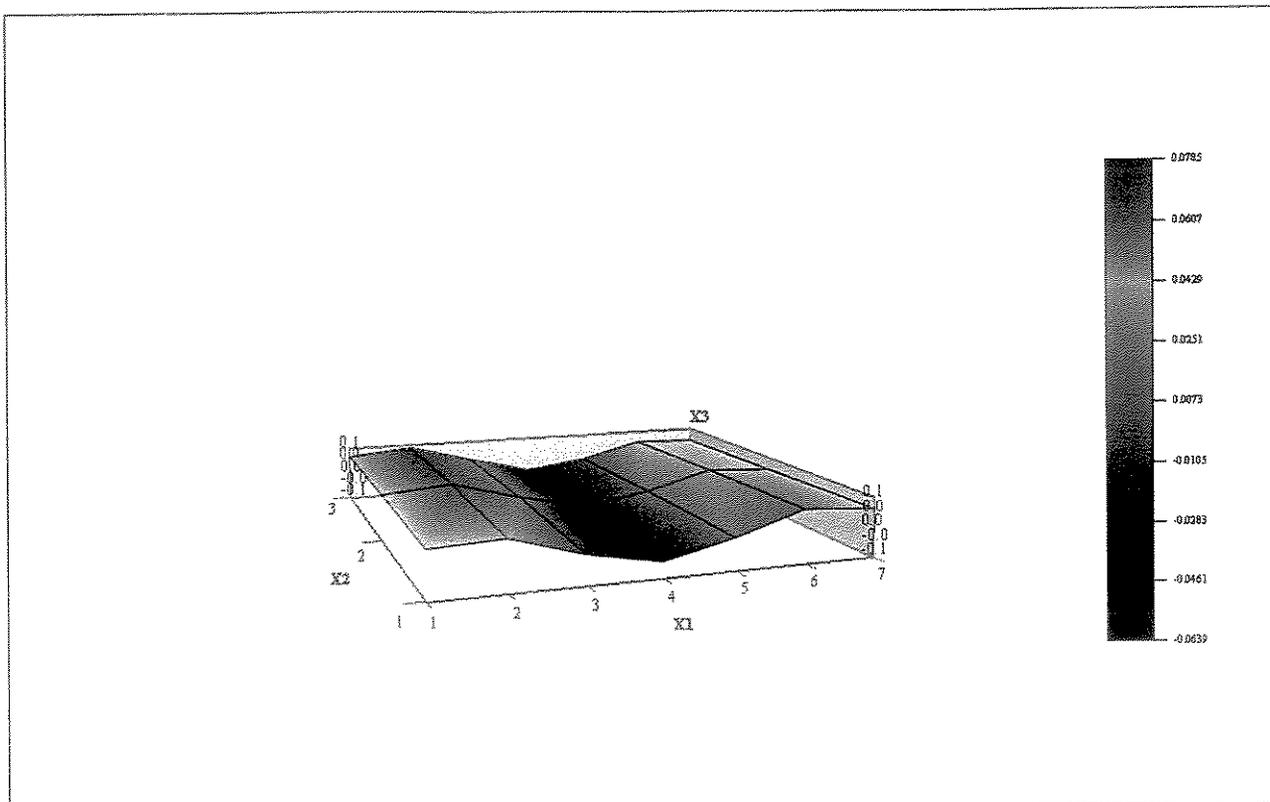


Gráfico 4.50 Parte real do quinto modo de vibração da placa retangular engastada-livre-engastada-livre ($i=3, j=1$).

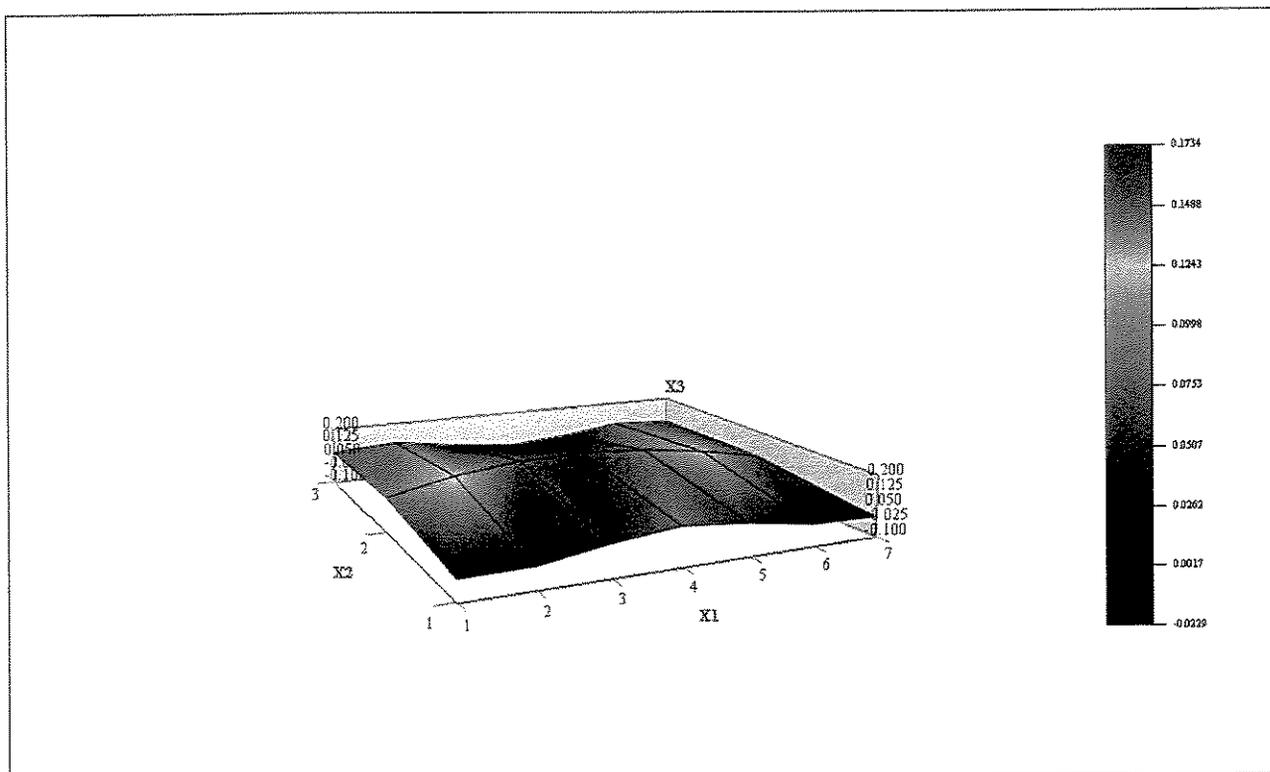


Gráfico 4.51 Parte real do sexto modo de vibração da placa retangular engastada-livre-engastada-livre ($i=3, j=2$).

CAPÍTULO 5

Implementação do Método dos Elementos de Contorno aplicado à Formulação Estática e Dinâmica Estacionária de uma Folha Poliédrica

5.1 Introdução

A análise de estruturas de parede fina formadas pela associação de folhas poliédricas no espaço considera os efeitos de extensão e flexão das paredes da folha a partir da hipótese de que, para cada elemento plano componente da estrutura, tanto no problema estático como no dinâmico estacionário, está associado um estado plano de tensão superposto a um estado de flexão de placas finas. Seguindo-se estas hipóteses fundamentais e com a intenção de generalizar o problema, convencionou-se chamar de *macro-elemento* a cada folha poliédrica componente da estrutura. Em um *macro-elemento* está associado um estado plano de tensão superposto a um estado de flexão de placas finas.

Neste capítulo, o Método Direto dos Elementos de Contorno é aplicado para discretizar as equações integrais estáticas e dinâmicas estacionárias de flexão de placas finas e estado plano em um *macro-elemento*. Realizada a discretização, as equações integrais são transformadas através de equações algébricas em um sistema de equações lineares onde as incógnitas são

deslocamentos e esforços em nós definidos do contorno. Finalmente, com a imposição das condições de contorno e a resolução do sistema de equações resultante, resultados nodais do contorno e domínio do *macro-elemento* podem ser determinados.

Foram realizados exemplos numéricos para a análise estática e dinâmica estacionária de problemas bidimensionais da elasticidade (estados planos) e problemas de flexão de placas finas. Os exemplos visam obter parâmetros mais confiáveis e detalhados com relação ao nível de discretização a ser adotado na resolução de problemas isolados, tendo como objetivo principal a minimização de erros numéricos.

5.2 Implementação do Método dos Elementos de Contorno

5.2.1 Discretização do contorno

Para cada elemento de contorno Γ_j do macro-elemento, tanto a aproximação da geometria quanto as variáveis de deslocamento e esforço, são descritas pela mesma função de interpolação (equação 4.1). As variáveis de deslocamentos e esforços são expressas através de funções de interpolação e valores nodais (equações 4.3 e 4.4). Em um contorno suave do macro-elemento, são utilizados elementos contínuos isoparamétricos lineares e para representar descontinuidades de deslocamentos e esforços são usados elementos descontínuos e adota-se a estratégia do nó duplo.

5.2.2 Equações algébricas no macro-elemento

Para um ponto genérico (ξ) do contorno de um macro-elemento mostrado na Figura 5.1, as equações integrais dos problemas estáticos da elasticidade 2D e placas finas e dos problemas da dinâmica estacionária da elasticidade 2D e placas finas são agora discretizadas e transformadas em equações algébricas, a partir dos parâmetros nodais do contorno definidos na seção 5.2.1. Cabe lembrar que os estados estão desacoplados e as equações finais encontradas serão sempre independentes.

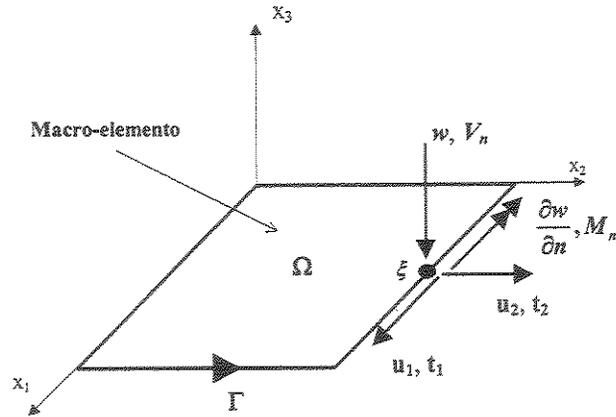


Figura 5.1 Deslocamentos e esforços em um nó ξ genérico de um macro-elemento.

Considerando-se as variáveis de deslocamentos e esforços de um nó genérico ξ do contorno Γ de um macro-elemento (Figura 5.1), o vetor u é o vetor dos deslocamentos do nó ξ deste macro-elemento. Os deslocamentos de um nó sucedem ao do outro e são organizados em cada nó da seguinte forma:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ w \\ u_2 \\ \partial w / \partial n \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Analogamente, o vetor t é o vetor dos esforços do nó ξ do macro-elemento, sendo o mesmo, correspondente ao vetor u e organizado da mesma forma para um nó:

$$t = \begin{Bmatrix} t_1 \\ V_n \\ t_2 \\ M_n \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

As componentes matriciais elementares do MEC, em função dos deslocamentos e esforços de um nó genérico ξ de um macro-elemento, são do tipo:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & 0 & h_{13} & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 & h_{24} \\ h_{31} & 0 & h_{33} & 0 \\ 0 & h_{42} & 0 & h_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w \\ u_2 \\ \partial w / \partial n \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & g_{24} \\ g_{31} & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & g_{42} & 0 & g_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ V_n \\ t_2 \\ M_n \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Os termos elementares não nulos das primeiras e terceiras linhas da matriz referem-se aos problemas da elasticidade 2D, enquanto que as segundas e quartas linhas, ao problema de placa fina.

Em um macro-elemento, a discretização em elementos de contorno das equações integrais da estática e dinâmica estacionária da elasticidade 2D e de placas finas pode-se iniciar pela elasticidade e depois passar à de placas ou vice-versa pois estas equações estão desacopladas e a discretização de uma não afeta a outra. Nas equações integrais da elasticidade 2D, estática e dinâmica estacionária, as variáveis do problema são dois deslocamentos u_1 e u_2 e dois esforços de superfície t_1 e t_2 . Sabe-se que a partir de condições naturais ou essenciais deste problema, sempre são conhecidas duas das quatro variáveis mencionadas, necessitando aplicar as equações integrais nas duas direções do problema 2D. A obtenção das equações algébricas do MEC para cada formulação foi mostrada pelas seções 4.3 e 4.7 do Capítulo 4.

Nas equações integrais da estática e dinâmica estacionária de placas finas, as variáveis relacionadas são w , $\partial w / \partial n$, V_n e M_n . Sabe-se novamente que a partir de condições naturais ou essenciais dos problemas de placa e, desprezando-se as reações de canto R_c , sempre são conhecidas duas das quatro variáveis mencionadas. Das quatro variáveis iniciais resultam duas incógnitas, sendo necessárias a aplicação de dois conjuntos de equações integrais para resolver completamente o problema. A obtenção das equações algébricas do MEC para cada formulação foi mostrada pelas seções 4.4 e 4.8 do Capítulo 4.

As equações algébricas apresentadas no Capítulo 4, são calculadas numericamente para todos os micro-elementos do contorno do macro-elemento, de acordo com as componentes matriciais elementares dadas pelas equações (5.3) e (5.4) encontrando $4N$ equações algébricas para as variáveis incógnitas e variáveis conhecidas dos problemas estáticos e dinâmicos estacionários da elasticidade 2D e da flexão de placas finas.

5.2.3 Montagem do Sistema de Equações

Após as integrações numéricas das equações integrais dos problemas estáticos e dinâmicos estacionários da elasticidade 2D e da flexão de placas finas sobre os N_e elementos de contorno, nos N nós do contorno do macro-elemento, pode-se escrever genericamente o seguinte sistema algébrico final de $4N$ equações:

$$[H]\{U\} = [G]\{T\} + \{B\} \quad (5.5)$$

onde H e G são matrizes não simétricas de dimensão $4N \times 4N$.

Impondo-se $4N$ variáveis conhecidas de deslocamento ou esforço em (5.5) e após conveniente troca de membros das colunas das matrizes H e G , obtém-se o seguinte sistema de equações final:

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (5.6)$$

sendo, X o vetor com as $4N$ variáveis incógnitas de deslocamentos ou esforços no contorno (duas da elasticidade 2D e duas da flexão de placas), F o vetor que contém os efeitos dos deslocamentos ou esforços conhecidos no contorno e, no caso estático, os valores de domínio, A é a matriz que contém os coeficientes das variáveis incógnitas que foi obtida com a troca das colunas das matrizes H e G . Lembrando que, nos problemas dinâmicos estacionários, está implícito no sistema final (5.6) o valor de cada frequência de excitação do problema.

4.9.3 Viga engastada-livre submetida a uma excitação transversal uniforme

Este exemplo trata uma viga retangular, engastada nas extremidades e submetida a esforço de superfície periódico e harmônico t na direção transversal. As condições de contorno são de dois lados opostos engastados na direção transversal e os outros dois livres, conforme mostra a Figura 4.24. As dimensões da barra são de 7m na direção longitudinal e 1m na direção transversal. Novamente, o coeficiente de *Poisson* ν e o fator de amortecimento β_a , foram considerados nulos. O Módulo de *Young* foi considerado $E = 2.0 \text{ N/m}^2$ e a densidade foi considerada $\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$. O número de pontos de Gauss utilizado neste exemplo foi igual a 12.

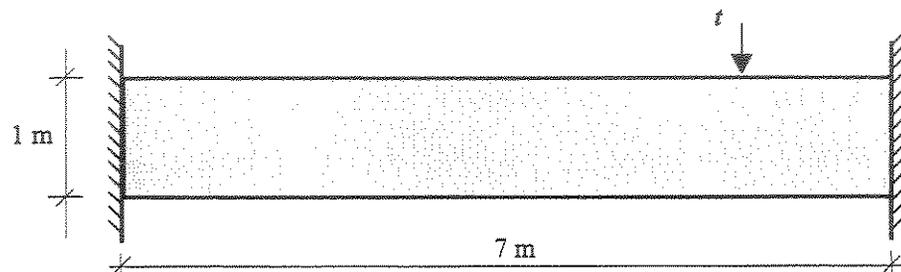


Figura 4.24 Viga engastada-engastada sob esforço perpendicular periódico e harmônico.

A Tabela 4.13 mostra as discretizações utilizadas para a resolução do problema.

Tabela 4.13 Discretizações da viga engastada-engastada.

Discretização	L_A	L_B	L_C	L_D
160 elementos	10	70	10	70
320 elementos	20	140	20	140
400 elementos	25	175	25	175

A Figura 4.25 mostra a forma de discretização do contorno com elementos lineares, sendo utilizados nos cantos nós duplos.

Novamente, após a determinação dos valores de deslocamentos ou esforços no contorno do macro-elemento, pode-se encontrar também os deslocamentos, esforços e tensões em pontos do domínio, a partir dos valores encontrados no contorno, conforme mostrado no Capítulo 4.

5.2.4 Deslocamentos, tensões e curvaturas em pontos do domínio

A determinação dos deslocamentos em pontos do domínio do macro-elemento é feita diretamente, a partir dos valores encontrados no contorno (conforme mostrado no Capítulo 4), sendo que agora duas das variáveis são do problema estático e dinâmico estacionário da elasticidade 2D e duas da flexão de placas. Escrevendo-se as equações integrais dos problemas estáticos e dinâmicos nos pontos do domínio do macro-elemento onde necessitam ser determinados os deslocamentos, obtém-se:

$$\{U\} = -[H']\{U\} + [G']\{T\} \quad (5.7)$$

onde, U é o vetor dos deslocamentos nos pontos do domínio do macro-elemento. Os coeficientes das matrizes H' e G' são obtidos de maneira semelhante à aqueles determinados para os pontos de contorno.

A determinação das tensões e curvaturas no domínio do macro-elemento segue procedimento análogo ao apresentado no Capítulo 4.

5.3 Validação das formulações estáticas de um macro-elemento

Nesta seção, foram realizados exemplos numéricos para a análise de problemas bidimensionais da elasticidade (Estados Planos) e problemas de placa fina. Os exemplos visaram obter parâmetros mais confiáveis e detalhados com relação ao nível de discretização a ser adotado na resolução de problemas isolados, tendo como objetivo principal a minimização de erros numéricos. Através desta linha de raciocínio, procurou-se testar a acuidade do programa computacional desenvolvido para a resolução do macro-elemento com os programas individuais

de estado plano e de placa fina. Com isso, foram utilizados na resolução dos exemplos os seguintes programas computacionais: **ESTPLAN**: programa para a análise de problemas bidimensionais da elasticidade (Estados Planos), **PLAFIN**: programa para a análise de problemas de placas finas e **MACRO**: programa para a análise e resolução de um macro-elemento.

5.3.1 Viga em balanço sujeita a um carregamento parabólico

Uma viga em balanço foi submetida a uma distribuição de carregamento parabólico transversal, conforme mostra a Figura 5.2. Este problema foi analisado através de um Estado Plano de Tensões. A tensão transversal máxima σ_0 foi considerada igual a 15 kN/m^2 . O módulo de elasticidade longitudinal do material E foi considerado igual a $1.920.000 \text{ kN/m}^2$ e o coeficiente de *Poisson* ν foi de 0.2. Foram utilizadas três diferentes discretizações em elementos de contorno, consistindo-se em 20, 40 e 60 elementos lineares.

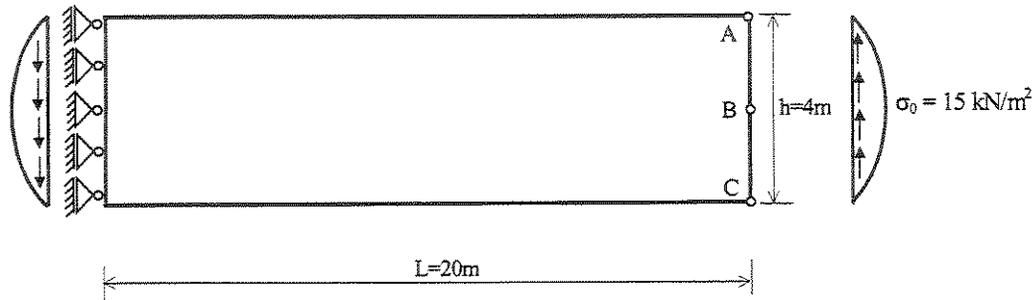


Figura 5.2 Viga em balanço sujeita a carregamentos nos extremos.

A teoria de vigas apresenta como solução analítica para o deslocamento da borda livre a seguinte equação (Brebbia e Domingues, 1992):

$$u_2 = \frac{P\ell^3}{3EI} = 10 \text{ mm} \quad (5.8)$$

onde P é o carregamento total aplicado, ℓ é o comprimento da viga E o módulo de elasticidade longitudinal e I o momento de inércia.

Os resultados dos deslocamentos na borda livre da viga nos pontos A, B e C mostrados na Figura 5.2, são apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 Deslocamentos da borda livre da viga.

Pontos	Deslocamentos (mm)						Teoria de vigas
	ESTPLAN			MACRO			
	20 elementos	40 elementos	60 elementos	20 elementos	40 elementos	60 elementos	
A	9,515	10,027	10,080	9,537	10,057	10,068	10
% Erro	4.85	0.27	0.80	4.63	0.57	0.68	
B	9,938	10,036	10,089	9,939	10,065	10,074	
% Erro	0.62	0.36	0.89	0.62	0.36	0.74	
C	9,515	10,027	10,080	9,537	10,057	10,068	
% Erro	4.85	0.27	0.80	4.63	0.57	0.68	

No programa **MACRO**, os casos foram processados com os pontos de colocação externos ao domínio a uma distância de $\frac{1}{4}$ do comprimento do elemento e utilizando-se 48 pontos de *Gauss*. Já no programa **ESTPLAN**, os pontos de colocação foram posicionados sobre o contorno e também se utilizou 48 pontos de *Gauss*, nas integrações numéricas. Os resultados encontrados para os pontos considerados são aparentemente idênticos com discrepâncias da ordem de 0.8% para a maior discretização, aproximando-se bastante do valor teórico.

5.3.2 Peça com concentração de tensões

Conforme mostra a Figura 5.3, as concentrações máximas de tensões em uma peça ocorrem nas seções transversais de menor área geométrica ou seja, o valor máximo de tensão ocorre no ponto A da seção transversal central. A Figura 5.4, mostra as condições de contorno utilizadas para a implementação dos dados necessários à resolução do problema. Considerando-se a simetria existente na peça, somente um quarto da seção transversal necessitou ser discretizada. O comprimento ℓ e a tensão uniaxial σ_{22} foram considerados unitários. O módulo de elasticidade do material E também foi considerado unitário e o coeficiente de *Poisson* ν é de 0.3. O raio r do círculo foi mensurado em $1/10$ do comprimento ℓ .

A solução analítica para a tensão no ponto *A* da Figura 5.3 é dada pela seguinte equação (Roark e Young, 1975):

$$\sigma_A = 3\sigma_{22} \quad (5.9)$$

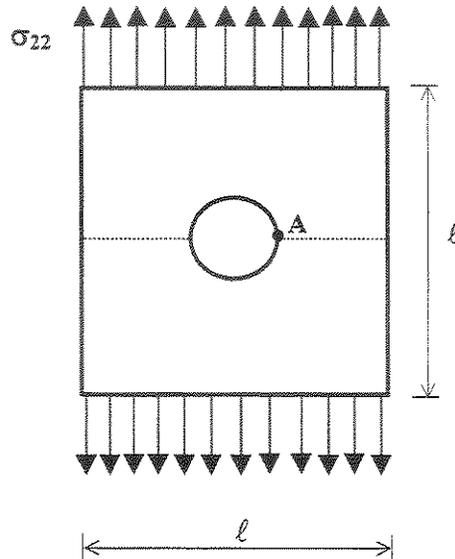


Figura 5.3 Peça com concentração de tensão em furo central.

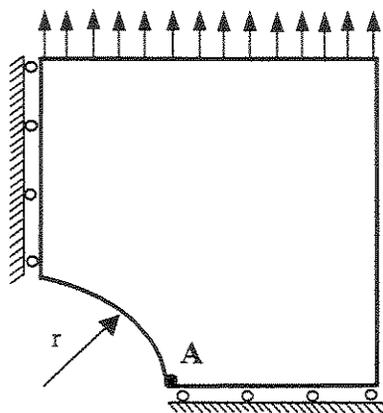


Figura 5.4 Condições de contorno e simetria da peça.

Foram utilizadas quatro diferentes discretizações em elementos de contorno, consistindo em 20, 40, 60 e 80 elementos lineares. Os resultados das tensões uniaxiais no ponto *A* em função do número de elementos de contorno utilizados, são apresentados no Gráfico 4.1. Novamente, no programa **MACRO**, os casos foram processados com os pontos de colocação externos ao domínio a uma distância de $\frac{1}{4}$ do comprimento do elemento e utilizando-se 48 pontos de *Gauss*. E no programa **ESTPLAN**, os pontos de colocação foram posicionados sobre o contorno e utilizando-se 48 pontos de *Gauss* nas integrações numéricas.

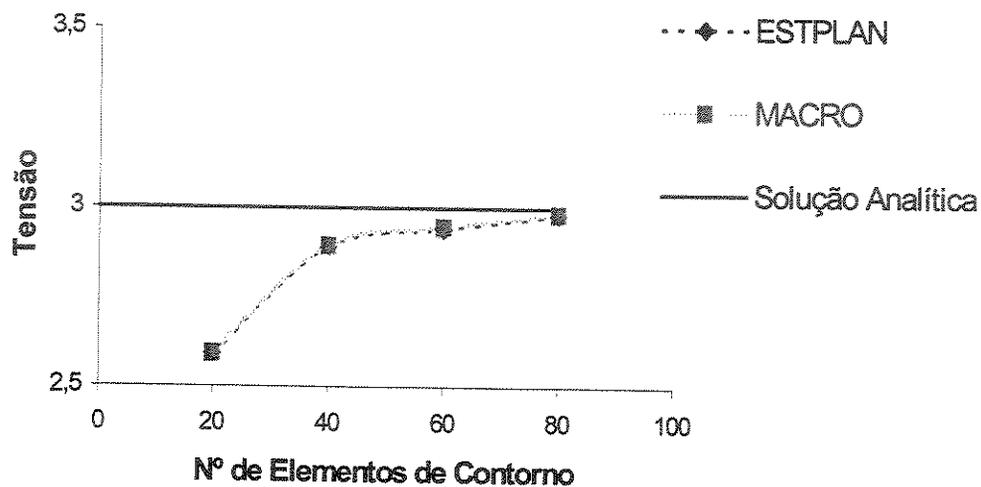


Gráfico 5.1 Tensões adimensionais no ponto A.

Neste exemplo, pode-se observar uma maior convergência de resultados a partir da utilização de 40 elementos lineares. Novamente, não foram encontradas diferenças significativas com a adoção de uma discretização com maior número de elementos.

5.3.3 Chapa fina sujeita a esforços de borda

A Figura 5.5 mostra uma chapa fina retangular sob o efeito de uma distribuição linear de forças de superfície t de 1000 MPa na direção horizontal (lados esquerdo e direito da chapa). O módulo de elasticidade E adotado para o material é de 192.000 MPa e o coeficiente de *Poisson* ν é de 0.2.

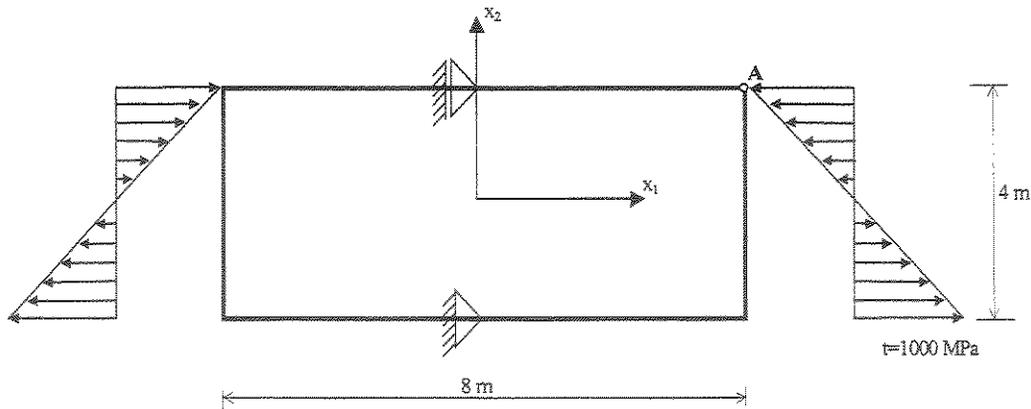


Figura 5.5 Chapa fina sujeita a dois momentos aplicados.

O contorno foi discretizado em 8, 16, 32, 64 elementos lineares, sendo que as forças de superfície são prescritas como zero nos lados de maior dimensão da chapa. Os deslocamentos são impedidos apenas nos apoios fixo e móvel mostrados na figura. Os resultados dos deslocamentos no canto A, mostrado na Figura 5.5, são apresentados na Tabela 5.2. Os mesmos são comparados com os valores exatos extraídos do exemplo apresentado por Brebbia e Domingues (1992).

Tabela 5.2 Deslocamentos no canto A da chapa fina (m).

Elementos de Contorno	Deslocamentos (m)					
	ESTPLAN		MACRO		Brebbia Domingues (1992). ϵ	
	u_1	u_2	u_1	u_2	u_1	u_2
8	-0,01660	0,01290	-0,01668	0,01296	- 0,02	0,02
16	-0,01874	0,01698	-0,01881	0,01704		
32	-0,02010	0,01950	-0,02018	0,01956		
64	-0,02014	0,01982	-0,02018	0,01986		

Utilizando o mesmo procedimento adotado para os dois programas no exemplo anterior, pode-se perceber que com uma discretização a partir de 32 elementos lineares, os resultados convergem para a solução analítica.

5.3.4 Placa retangular em balanço

Uma placa retangular em balanço, com relação entre lados igual a 1/4, foi submetida a um carregamento unitário uniformemente distribuído sobre o seu domínio e a um carregamento unitário linearmente uniforme sobre uma de suas bordas. Como mostra a Figura 5.6, as condições de contorno são de uma borda engastada e as outras bordas livres. O coeficiente de *Poisson* foi considerado nulo e para o cálculo dos esforços e deslocamentos no contorno, foi adotado o valor de $0.02 \text{ kN.m}^3/\text{m}$ para rigidez à flexão da placa D . O contorno do problema foi discretizado em 20, 40 e 60 elementos lineares.

Nos programas **PLAFIN** e **MACRO**, os casos foram processados com os pontos de colocação posicionados sobre o contorno e externos ao domínio, a uma distância de $\frac{1}{4}$ do comprimento do elemento. Nas integrações numéricas, foram utilizados 12 pontos de *Gauss*.

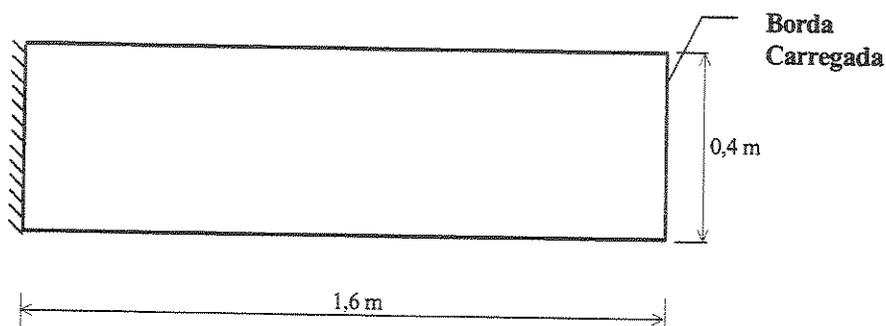


Figura 5.6 Placa retangular em balanço.

A Tabela 5.3 apresenta resultados de deslocamentos e esforços nos pontos de contorno obtidos para um carregamento unitário distribuído linearmente e aplicado sobre a borda livre, oposta ao engastamento. Para o cálculo dos valores representativos de esforços e deslocamentos em cada seção, foi efetuada a média dos valores nos pontos situados sobre a seção.

A Tabela 5.4 apresenta resultados de deslocamentos e esforços nos pontos de contorno obtidos para um carregamento distribuído uniformemente sobre o domínio da placa.

Tabela 5.3 Deslocamentos e esforços no contorno de uma placa em balanço sujeita a um carregamento distribuído linearmente no lado oposto da borda engastada.

kN; m	PLAFIN			MACRO			Teoria de vigas
	20 elementos	40 elementos	60 elementos	20 elementos	40 elementos	60 elementos	
Cortante ($x = 0$)	0,3840	0,3983	0,4019	0,3832	0,3972	0,4010	0,4
% Erro	4.00	0.43	0.48	4.20	0.70	0.25	
Mom. fletor ($x = 0$)	0,6099	0,6254	0,6421	0,6087	0,6241	0,6415	0,64
% Erro	4.70	2.28	0.33	4.89	2.48	0.23	
Deslocamento ($x = 1,6$)	68,6625	68,698	69,017	68,6613	68,677	69,008	68,267
% Erro	0.58	0.63	1.10	0.58	0.6	1.09	

Tabela 5.4 Deslocamentos e esforços no contorno de uma placa em balanço sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no domínio.

kN; m	PLAFIN			MACRO			Teoria de vigas
	20 elementos	40 elementos	60 elementos	20 elementos	40 elementos	60 elementos	
Cortante ($x = 0$)	0,6319	0,6405	0,6421	0,6209	0,6385	0,6397	0,64
% Erro	1.27	0.10	0.33	2.98	0.23	0.10	
Mom. fletor ($x = 0$)	0,5022	0,5106	0,5153	0,4982	0,5094	0,5116	0,512
% Erro	1.91	0.27	0.64	2.70	0.51	0.10	
Deslocamento ($x = 1,6$)	41,2410	41,3540	41,4570	41,0317	41,1562	41,1880	40,960
% Erro	0.69	0.96	1.21	0.20	0.48	0.56	

Os resultados obtidos para os dois carregamentos na placa em balanço foram bastante próximos ao problema clássico da teoria de vigas simples. As discretizações do contorno mostraram que a partir da utilização de 40 elementos lineares os resultados convergem para o valor teórico.

5.3.5 Placa quadrada sujeita a condições de simetria

Analisa-se aqui um problema clássico de uma placa quadrada de lado ℓ simplesmente apoiada no contorno, conforme ilustra a Figura 5.7. Foi considerado um carregamento unitário uniformemente distribuído no domínio. A rigidez à flexão da placa D também foi considerada unitária. O coeficiente de *Poisson* ν foi considerado igual a 0.3. Foram utilizadas quatro discretizações em elementos de contorno, consistindo-se em 12, 24, 40 e 60 elementos lineares. O processamento foi feito de maneira idêntica ao exemplo anterior.

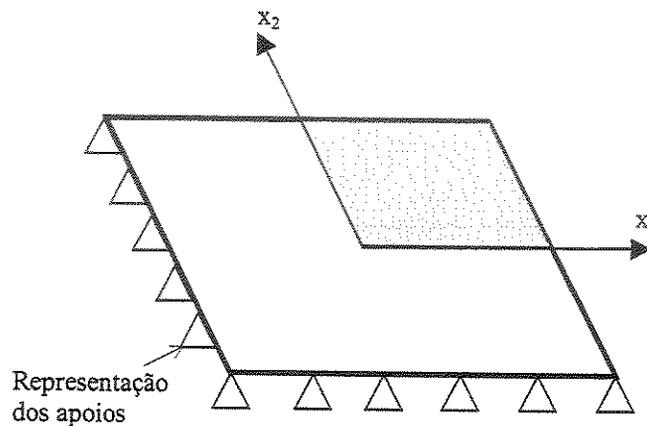


Figura 5.7 Placa fina quadrada simplesmente apoiada no contorno.

Da Figura 5.7, pode-se observar que as bordas externas da placa estão apoiadas sobre o contorno e as bordas sujeitas à condição de simetria (eixos x_1 e x_2) estão livres para se deslocar. Portanto, as condições de contorno e vinculação da placa com condições de simetria podem ser definidas da seguinte forma:

$$\text{Em } x_1 = 0: M_{12} = Q_1 = 0 \quad x_1 = \ell/2: M_{11} = w = 0$$

$$\text{Em } x_2 = 0: M_{12} = Q_2 = 0 \quad x_2 = \ell/2: M_{22} = w = 0$$

Os resultados de deslocamentos no centro da placa em função do número de elementos utilizados são apresentados no Gráfico 5.2.

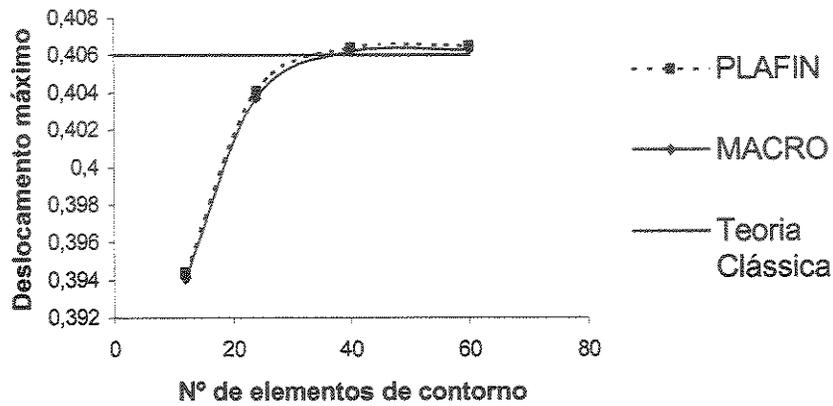


Gráfico 5.2 Deslocamentos máximos no centro da placa ($100D/g\ell^4$).

Os resultados dos momentos fletores máximos no centro da placa em função do número de elementos utilizados são apresentados no Gráfico 5.3.

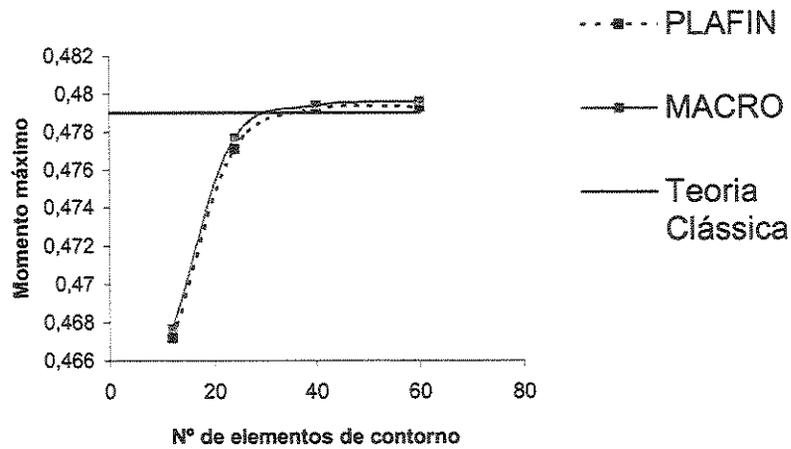


Gráfico 5.3 Momentos fletores máximos no centro da placa ($10/g\ell^2$).

Pode-se observar novamente que a discretização com 40 elementos leva a uma convergência de resultados para a teoria clássica.

5.4 Validação das formulações da dinâmica estacionária de um macro elemento

Nesta seção, procurou-se validar a implementação do programa computacional desenvolvido para a resolução dinâmica estacionária de um macro-elemento. Foram confeccionados exemplos numéricos para a análise de problemas individuais da elastodinâmica bidimensional e da dinâmica de placa fina. O programa foi testado considerando-se o cálculo numérico, a partir das FRFs, das frequências naturais de vibração. Os tempos de processamento destes exemplos foram tomados considerando-se um computador com processador Intel Pentium III 500 MHz. Os resultados foram comparados com os programas individuais das referidas teorias e também com valores analíticos. Foram utilizados na resolução dos exemplos os seguintes programas computacionais: **DINESTAPLAN**: programa para a análise de problemas elastodinâmicos bidimensionais estacionários, **DINPLAFIN**: programa para a análise de problemas dinâmicos estacionários de placas finas e **DINMACRO**: programa para a análise e resolução do modelo dinâmico estacionário de um macro-elemento.

5.4.1 Barra engastada-livre submetida a uma excitação axial uniforme

Uma barra retangular em balanço e com relação entre lados igual a 1/7, foi submetida a um esforço de superfície periódico e harmônico t sobre o lado livre oposto ao engastamento. De acordo com a Figura 5.8, as condições de contorno são de um lado engastado e os outros três lados livres. As dimensões são de 7m na direção longitudinal e 1m na direção transversal. O coeficiente de *Poisson* ν foi considerado nulo. Para o Módulo de *Young* foi adotado $E = 2.0 \text{ N/m}^2$ e para a densidade, foi adotado um valor unitário, isto é, $\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$. O número de pontos de Gauss utilizado foi igual a 12.

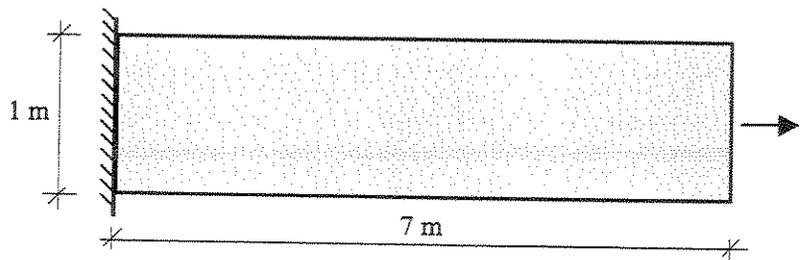


Figura 5.8 Barra engastada-livre sob esforço de superfície periódico e harmônico.

Conforme mostra a Figura 5.9, o contorno do problema foi discretizado em 48 elementos lineares, sendo utilizados nos cantos da barra nós duplos, perfazendo um total de 52 nós de contorno.

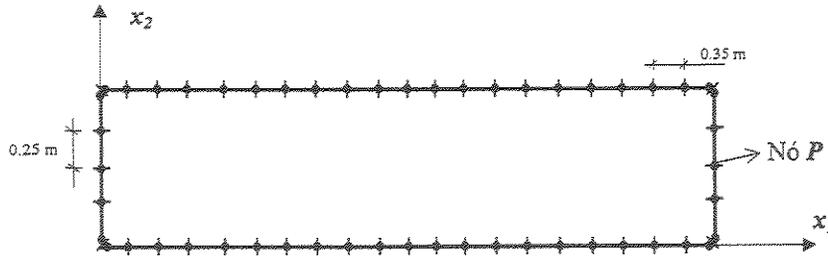


Figura 5.9 Discretização do MEC para a barra engastada-livre.

Considerando-se a geometria e as constantes elásticas iniciais do problema, encontrou-se valores unitários para a massa por unidade de comprimento m e para a área A . Então, as três primeiras frequências de ressonância da solução analítica apresentada em (4.84) conduz a $\omega_n = 0.3173, 0.9520, 1.5867$ rad./s. Conseqüentemente, em função do resultado apresentado para as três primeiras frequências naturais, adotou-se uma faixa de frequência de 0 a 2 para a resolução numérica do problema. Desta forma, construiu-se a Função de Resposta em Frequência (FRF) para os deslocamentos na direção x_1 do nó P da Figura 5.9. Conforme mostram os Gráficos 5.4 e 5.5, para testar a convergência entre os programas, são apresentadas as Funções de Resposta em Frequências do deslocamento \times frequência para o número de passos $n^* = 8$ (Equação 4.85). Nestes gráficos, são apresentados também os tempos de processamento (tp) de cada FRF e também os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação onde são realizadas as integrações.

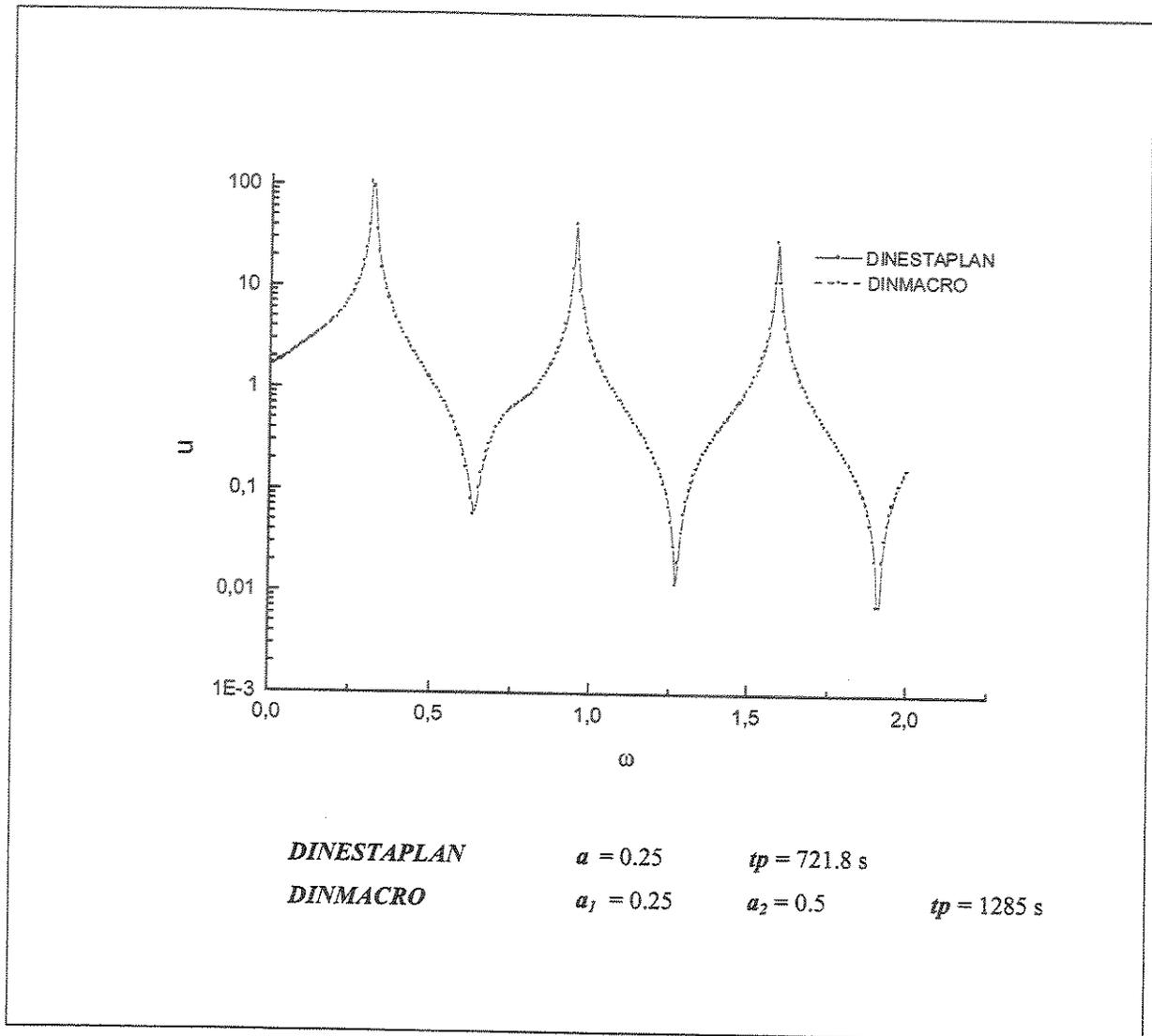


Gráfico 5.4 FRFs do deslocamento na direção x_1 do ponto P.

Analisando o Gráfico 5.4, pode-se observar que os resultados apresentados pelos dois programas são idênticos e consegue-se determinar com clareza as três primeiras frequências naturais do sistema. Portanto, para este exemplo, o ponto de colocação posicionado a $\frac{1}{4}$ do comprimento dos elementos consecutivos apresentou resultados bastante convergentes em relação ao valor analítico.

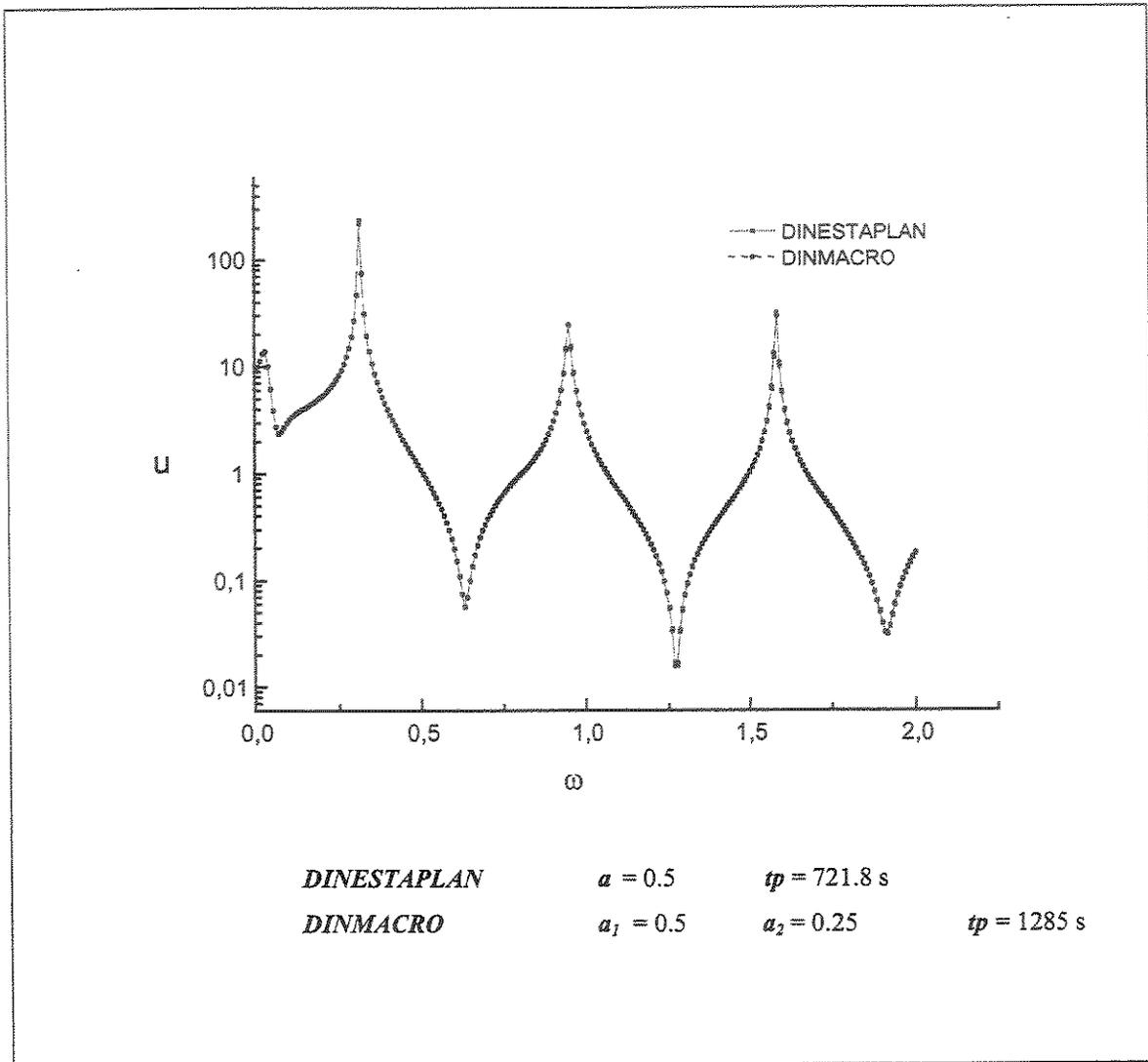


Gráfico 5.5 FRFs do deslocamento normalizado na direção x_1 do ponto P.

Analisando o Gráfico 5.5, pode-se observar novamente que os resultados apresentados pelos dois programas apresentam a mesma convergência. Novamente, se consegue determinar de forma idêntica as três primeiras frequências naturais do sistema. Portanto, para este exemplo, o ponto de colocação posicionado a $\frac{1}{2}$ do comprimento dos elementos consecutivos também apresentou resultados bastante convergentes em relação ao valor analítico.

Os tempos de processamento foram aferidos para se ter uma idéia do tempo gasto para processar o exemplo no programa individual específico (**DINESTAPLAN**) e no programa macro (**DINMACRO**). Desta forma, pode-se perceber que houve um aumento significativo no tempo de processamento do exemplo no programa **DINMACRO**. Isto já era esperado pois o mesmo trabalha na montagem de matrizes que são o dobro do tamanho daquelas que são montadas no programa individual.

A Tabela 5.5 apresenta os valores comparativos para as três primeiras frequências naturais calculadas analítica e numericamente ($n^* = 8$), sendo que os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação são $a_1 = 1/4$ e $a_2 = 1/2$.

Tabela 5.5 Três primeiras frequências de uma barra engastada-livre ($a_1 = 1/4$ e $a_2 = 1/2$).

Frequências	ω_1	ω_2	ω_3
DINESTAPLAN	0.3132	0.9506	1.5880
DINMACRO	0.3132	0.9506	1.5880
Analítico	0.3173	0.9520	1.5867

A Tabela 5.6 também apresenta os valores comparativos para as três primeiras frequências naturais calculadas analítica e numericamente ($n^* = 8$), sendo que agora os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação onde são realizadas as integrações são $a_1 = 1/2$ e $a_2 = 1/4$.

Tabela 5.6 Três primeiras frequências de uma barra engastada-livre ($a_1 = 1/2$ e $a_2 = 1/4$).

FREQUÊNCIAS	ω_1	ω_2	ω_3
DINESTAPLAN	0.3132	0.9506	1.5880
DINMACRO	0.3132	0.9506	1.5880
ANALÍTICO	0.3173	0.9520	1.5867

Observando-se as Tabelas 5.5 e 5.6, pode-se concluir que para os dois programas testados, existe uma convergência dos valores numéricos de frequência para os valores analíticos. Cabe lembrar que o valor numérico de frequência é escolhido quando o mesmo atinge o pico numérico dos valores de deslocamento, dentro da faixa de frequências adotada.

5.4.2 Placa quadrada engastada-livre-engastada-livre submetida a uma excitação transversal concentrada

Uma placa fina quadrada, com comprimento $\ell = 1.0$ e largura $b = 1.0$, foi excitada com um carregamento transversal concentrado assimétrico, em uma de suas bordas livres. De acordo com a Figura 5.10, as condições de contorno do problema são de dois lados engastados e os outros dois lados livres. A espessura da placa é $h = 0.05$, o coeficiente de *Poisson* foi considerado $\nu = 0.3$. Para o Módulo de *Young* foi adotado $E = 1000.0$ e para a densidade, foi adotado $\rho = 0.229$. O número de pontos de Gauss utilizado nos cálculos numéricos foi igual a 12.

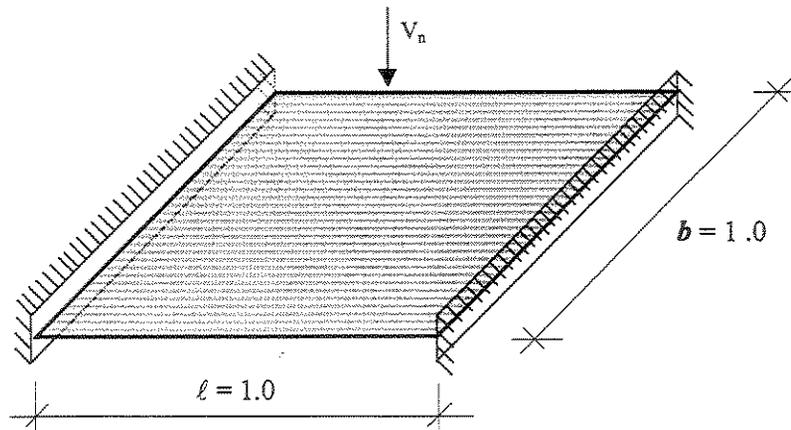


Figura 5.10 Placa quadrada engastada-livre-engastada-livre sob excitação concentrada.

O contorno da placa quadrada engastada-livre-engastada-livre foi discretizado em 40 elementos lineares, sendo utilizados nos cantos da placa nós duplos, perfazendo um total de 44 nós de contorno, conforme mostra a Figura 5.11.

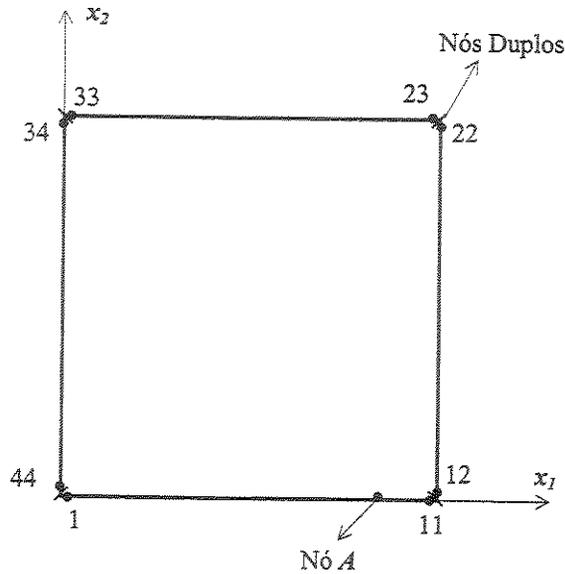


Figura 5.11 Discretizações do MEC para a placa quadrada engastada-livre engastada-livre.

A solução analítica para este problema, para a obtenção das frequências naturais, apresenta a seguinte equação (Blevins, 1979):

$$\omega_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi\ell^2} \left[\frac{EH^3}{12\gamma(1-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad i, j = 1, 2, 3 \dots \quad (5.3)$$

onde, ω_{ij} são as frequências naturais em hertz, ℓ é o comprimento da placa, b é a largura da placa, h é a espessura da placa, i é o número de meia onda do modo de vibração ao longo do eixo horizontal x_1 , j é o número de meia onda do modo de vibração ao longo do eixo vertical x_2 , γ é a massa por unidade de área da placa (ρh para um material de densidade ρ), ν é o coeficiente de Poisson e λ_{ij}^2 é parâmetro adimensional de frequência. Este parâmetro é geralmente uma função das condições de contorno da placa, da sua geometria e, em muitos casos, do coeficiente de Poisson. O parâmetro adimensional de frequência λ_{ij}^2 para este exemplo em particular é dado pela Tabela 5.7:

Tabela 5.7 Parâmetros adimensionais de frequência (λ_{ij}^2) para a placa quadrada engastada-livre-engastada-livre.

l/b	λ_{ij}^2 e (i,j)					
	Sequência dos Modos					
	1	2	3	4	5	6
1.0	22.27 (11)	26.53 (12)	43.66 (13)	61.47 (21)	67.55 (22)	79.90 (14)

A frequência natural analítica pode agora ser determinada através da equação (5.3), os valores finais encontrados, são mostrados na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 Frequências naturais analíticas (w_{ij}) para a placa quadrada engastada-livre-engastada-livre.

l/b	w_{ij} (rad/s) e (i,j)					
	Sequência dos Modos					
	1	2	3	4	5	6
1.0	22.2670 (11)	26.5264 (12)	43.6541 (13)	61.4616 (21)	67.5408 (22)	79.8891 (14)

Determinadas as frequências naturais analíticas da placa, fez-se uma varredura ao longo desta faixa de frequências para construir a Função de Resposta em Frequência (FRF). Em função do resultado analítico apresentado para as seis primeiras frequências naturais e também do intervalo de frequências considerado, adotou-se uma faixa de frequência de 0 a 100 para a resolução numérica do problema. Com este procedimento, construiu-se a Função de Resposta em Frequência (FRF) em função dos deslocamentos w transversais da placa no nó A .

São apresentadas no Gráfico 5.6, as FRFs em função do deslocamento w transversal da placa. São apresentados também os tempos de processamento (tp) de cada FRF, juntamente com os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação.

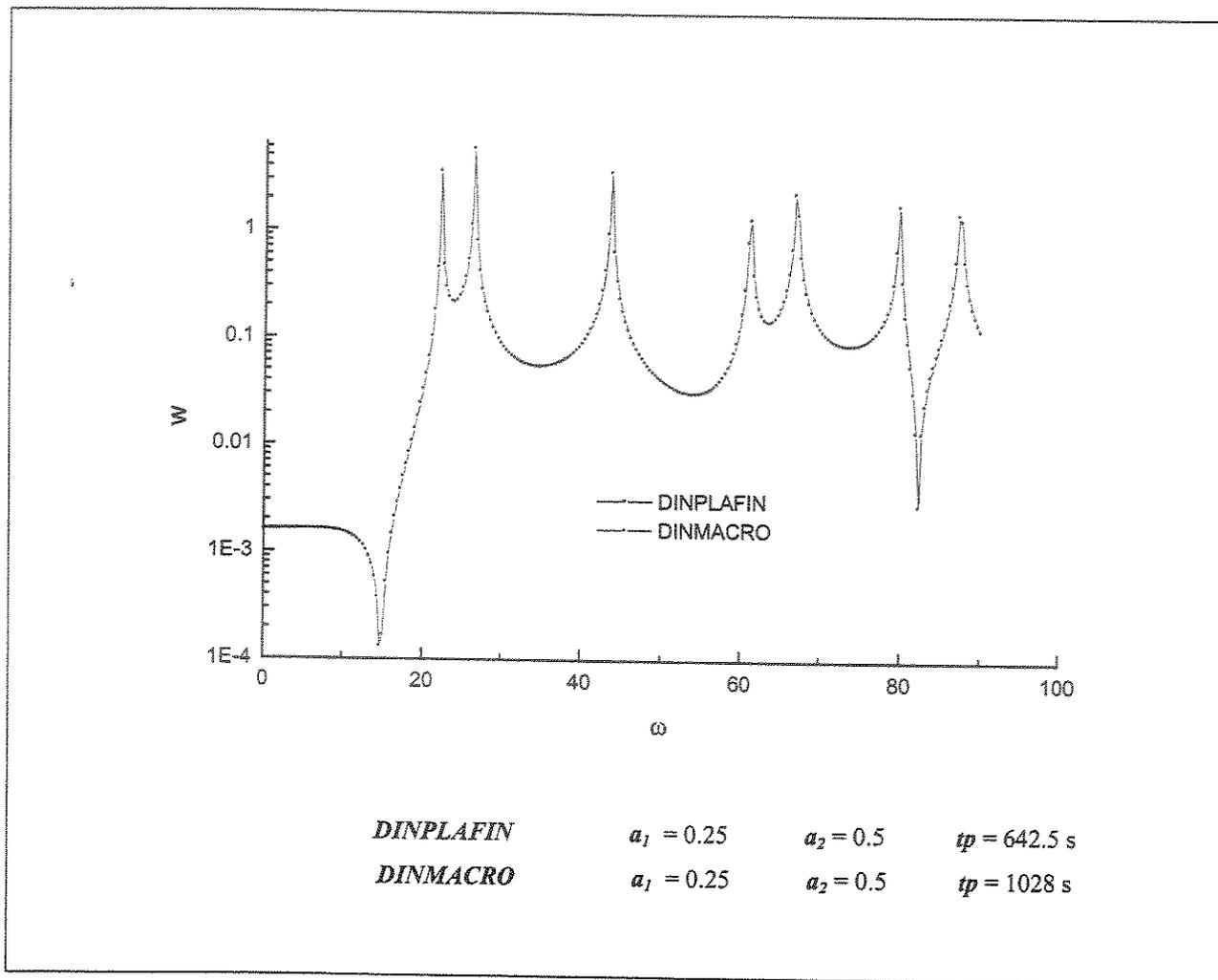


Gráfico 5.6 FRF do deslocamento transversal w da placa.

Analisando as FRFs do Gráfico 5.6, pode-se observar uma grande concordância entre os picos de frequência obtidos numericamente através do MEC para os dois programas analisados. O tempo de processamento também aumentou significativamente quando se utilizou o programa que trata do macro-elemento.

A Tabela 5.9 apresenta os valores das seis primeiras frequências naturais calculadas numérica (FRF) e analiticamente.

Tabela 5.9 Frequências naturais analíticas e numéricas (ω_{ij}) da placa quadrada engastada-livre-engastada-livre.

PROGRAMAS	ω_{ij} (rad/s) e (i, j)					
	1	2	3	4	5	6
DINPLAFIN	22.156	26.374	43.599	61.180	66.799	79.806
DINMACRO	22.156	26.374	43.599	61.180	66.799	79.806
ANALÍTICO	22.2670 (11)	26.5264 (12)	43.6541 (13)	61.4616 (21)	67.5408 (22)	79.8891 (14)

Analisando a Tabela 5.9, pode-se observar que para os dois programas analisados, existe uma grande concordância entre as frequências obtidas numericamente através das (FRFs), em relação ao valor analítico.

5.4.3 Placa retangular engastada-livre-engastada-livre submetida a uma excitação transversal concentrada

Uma placa retangular, com comprimento $\ell = 1.0$ e largura $b = 0.4$, foi excitada com um carregamento transversal concentrado assimétrico, em uma de suas bordas livres. De acordo com a Figura 5.12, as condições de contorno do problema são de dois lados engastados e os outros dois lados livres. A espessura da placa é $h = 0.05$, o coeficiente de *Poisson* foi considerado $\nu = 0.3$. Para o Módulo de *Young* foi adotado $E = 1000.0$ e para a densidade, foi adotado $\rho = 0.229$. O número de pontos de Gauss utilizado nos cálculos foi igual a 12.

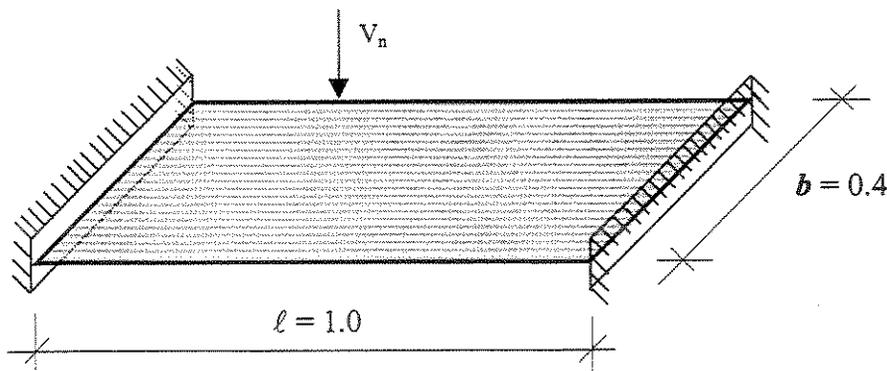


Figura 5.12 Placa retangular engastada-livre-engastada-livre sob carregamento concentrado.

O contorno da placa foi discretizado em 40 elementos lineares, sendo utilizados nos cantos da placa nós duplos, perfazendo um total de 44 nós de contorno, conforme mostra a Figura 5.13.

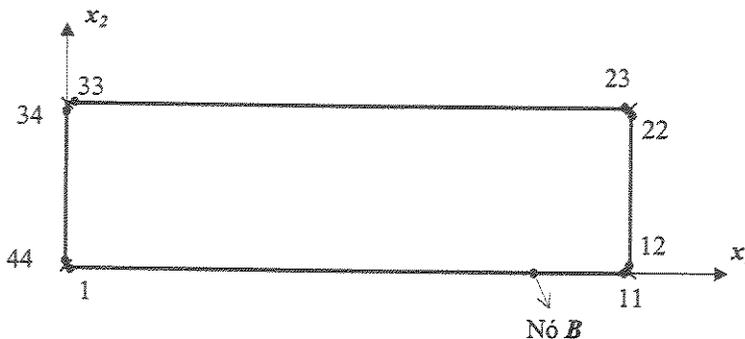


Figura 5.13 Discretizações do MEC para a placa retangular engastada-livre-engastada-livre.

A solução analítica para a obtenção das frequências naturais é dada pela equação (5.3). O parâmetro adimensional de frequência λ_{ij}^2 , é dado pela Tabela 5.10.

Tabela 5.10 Parâmetros adimensionais de frequência (λ_{ij}^2) para a placa retangular engastada-livre-engastada-livre.

l/b	λ_{ij}^2 e (i j)					
	Sequência dos Modos					
	1	2	3	4	5	6
2.5	22.13 (11)	41.69 (12)	61.00 (21)	92.38 (22)	119.9 (31)	157.8 (32)

A frequência natural analítica pode ser determinada através da equação (5.3). Os valores finais encontrados são mostrados na Tabela 5.11.

Tabela 5.11 Frequências naturais analíticas (w_{ij}) para a placa retangular engastada-livre-engastada-livre.

l/b	w_{ij} (rad/s) e (i j)					
	Sequência dos Modos					
	1	2	3	4	5	6
2.5	22.1270 (11)	41.6843 (12)	61.9917 (21)	92.3674 (22)	119.8837 (31)	157.7785 (32)

Em função das frequências naturais analíticas da placa retangular, adotou-se uma faixa de frequência de 0 a 200 para a resolução numérica do problema. Com este procedimento, considerando-se a discretização adotada (Figura 5.13), construiu-se a Função de Resposta em Frequência (FRF) em função dos deslocamentos transversais w do nó B .

Na sequência, são apresentadas no Gráfico 5.7 as Funções de Resposta em Frequência em função do deslocamento transversal da placa do nó B . Nestes gráficos, são apresentados também os tempos de processamento (tp) de cada FRF, juntamente com os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação onde são realizadas as integrações do MEC.

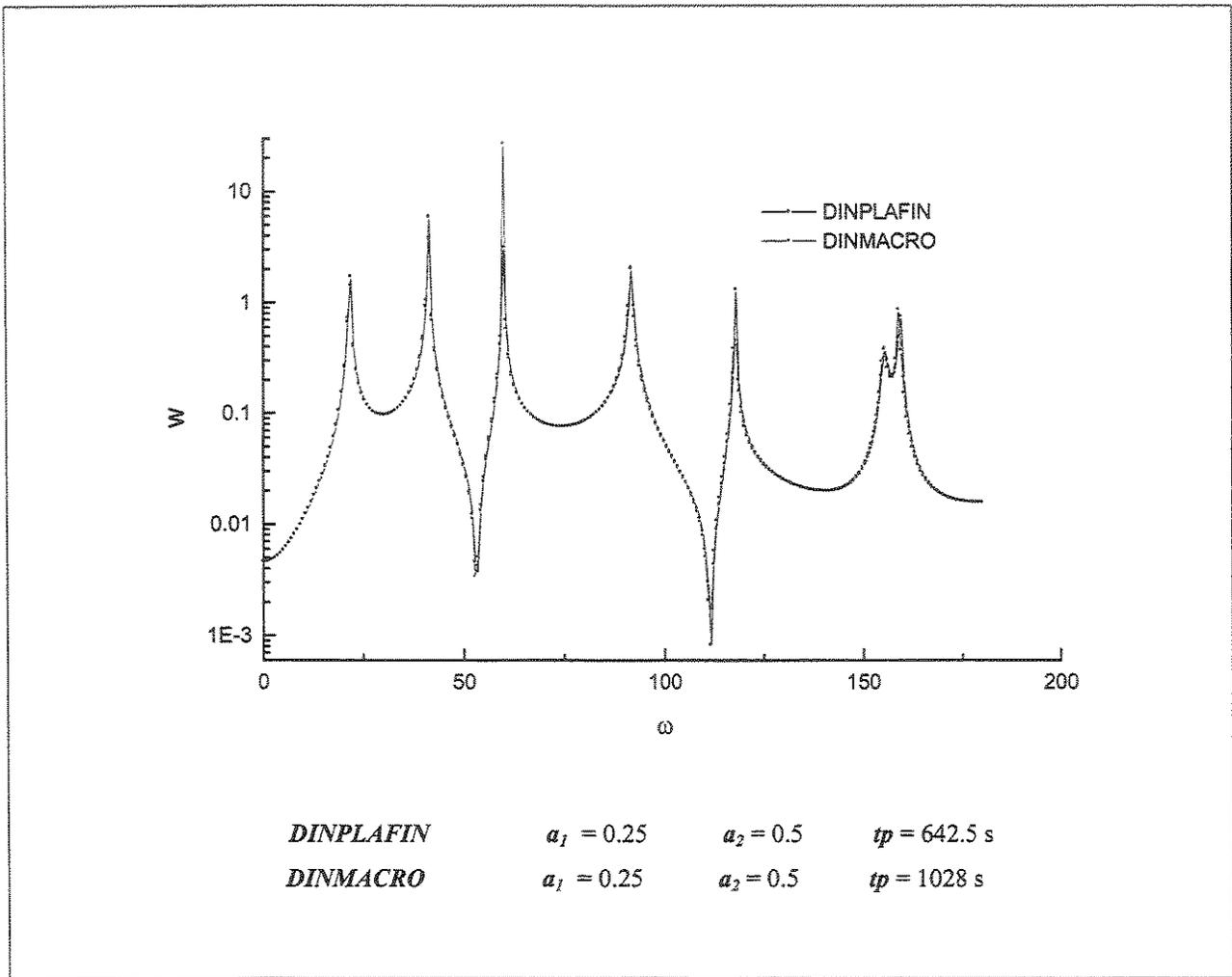


Gráfico 5.7 FRF do deslocamento transversal da placa no ponto B .

Analisando as FRFs do gráfico 5.7, pode-se observar que os picos de frequência obtidos numericamente através do MEC para os dois programas analisados são bastante semelhantes. Pode-se dizer mais uma vez que a discretização utilizada apresentou bons resultados em relação ao valor analítico. Com relação aos tempos de processamento, pode-se dizer que os mesmos aumentaram proporcionalmente com a utilização do programa DINMACRO.

A Tabela 5.12 apresenta os valores comparativos das seis primeiras frequências naturais calculadas numérica (FRF) e analiticamente. As porcentagens de erro foram calculadas tendo como base o valor analítico.

Tabela 5.12 Frequências naturais analíticas e numéricas (ω_{ij}) da placa retangular apoiada-livre-apoiada-livre.

PROGRAMAS	ω_{ij} (rad/s) e (ij)					
	1	2	3	4	5	6
DINPLAFIN	21.103	41.492	59.772	91.411	118.128	155.392
DINMACRO	21.806	41.492	59.772	91.411	118.128	155.392
ANALÍTICO	22.1270 (11)	41.6843 (12)	61.9917 (21)	92.3674 (22)	119.8837 (31)	157.7785 (32)

Analisando a Tabela 5.12, pode-se observar que para os dois programas analisados há uma boa concordância entre as frequências obtidas numericamente através das (FRFs) e o valor analítico.

CAPÍTULO 6

Implementação da Associação de Macro Elementos Via Sub-regiões do MEC para a Modelagem Estática e Dinâmica Estacionária de Estruturas de Parede Fina

6.1 Introdução

No presente capítulo, a técnica de sub-regiões do MEC foi aplicada no desenvolvimento de uma formulação para a associação de macro-elementos no espaço. A associação espacial dos macro-elementos foi feita com a intenção de representar e resolver problemas estáticos e dinâmicos estacionários de estruturas de parede fina. No problema estático cada sub-região de contorno fica definida como sendo um macro-elemento contendo o estado plano de tensão e o da flexão de placas finas superpostos. No problema dinâmico estacionário estão superpostos no macro-elemento o estado elastodinâmico bidimensional e o da flexão dinâmica de placas finas. O sistema algébrico de equações para a estrutura como um todo é obtido através da associação dos sistemas de equações de cada macro-elemento individual. A junção destes sistemas de equações foi feita através do equilíbrio e compatibilidade de esforços e deslocamentos entre as interfaces (arestas) comuns. Realizadas as compatibilizações entre os macro-elementos, podem ser feitas as trocas das colunas entre deslocamentos conhecidos e forças incógnitas para a formação e resolução do sistema final de equações.

Foram resolvidos problemas estáticos e dinâmicos estacionários envolvendo peças de parede fina com diferentes geometrias e condições de contorno para demonstrar e validar a formulação proposta.

6.2 Sistema de coordenadas

Na Figura 6.1 é mostrada uma peça de parede fina juntamente com os macro-elementos que a compõe. Com base no sistema de coordenadas global x_i desta figura, e por conveniência da análise de peças de parede fina, definiu-se o posicionamento de cada macro-elemento de forma longitudinal à peça no sentido do eixo x_3 .

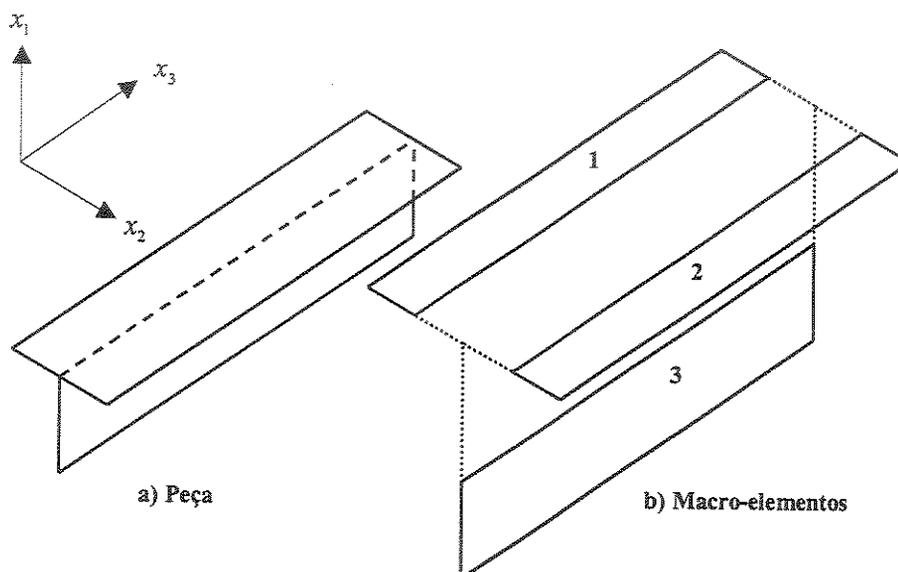


Figura 6.1 Definição dos macro-elementos de uma peça de parede fina.

Adotou-se o eixo x_3 como sendo o eixo do comprimento da peça e os eixos x_1 e x_2 para descreverem a sua seção transversal, conforme mostra a Figura 6.1. Assim, os macro-elementos sempre estarão perpendiculares ao plano $x_1 x_2$. Todavia, como as todas as equações integrais foram deduzidas no sistema local de coordenadas x'_i , mostrado na Figura 6.2a, necessita-se trabalhar com matrizes de transformação de coordenadas para representar estes elementos estruturais adequadamente em um sistema de coordenadas global x_i .

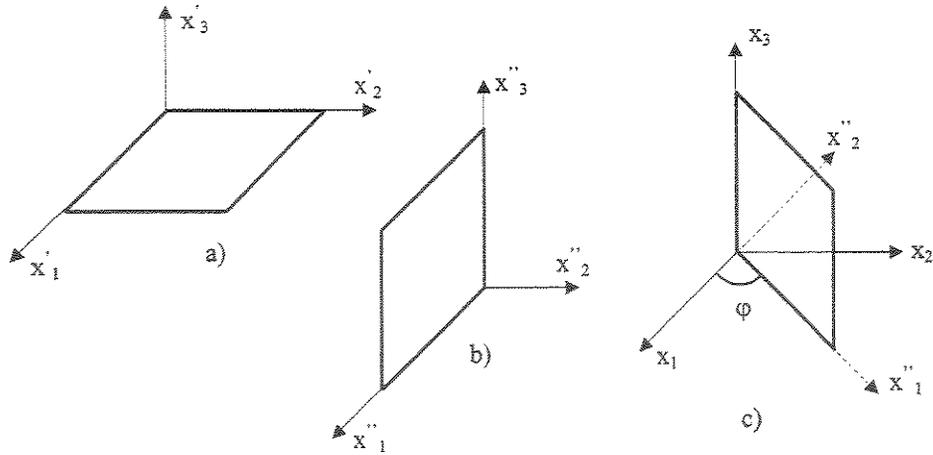


Figura 6.2 Sistema de Coordenadas no macro-elemento: (a) Coordenadas Locais, (b) Coordenadas Intermediárias, (c) Coordenadas Globais.

O sistema de coordenadas local x'_i é transformado em um sistema auxiliar intermediário x''_i , conforme mostrado na Figura 6.2b, de acordo com a seguinte transformação:

$$\begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

No sistema auxiliar intermediário x''_i , o macro-elemento forma um ângulo φ com o plano global $x_1 x_3$, sendo esta transformação dada por:

$$\begin{Bmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

Efetuada-se o produto das matrizes de transformação apresentadas pelas equações (6.2) em (6.1), o sistema local de coordenadas é levado diretamente ao sistema global, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

6.3 Matrizes elementares

Considerando-se generalizadamente as variáveis de um nó genérico i do contorno Γ de um macro-elemento no sistema global de coordenadas x_i , o vetor u é o vetor dos deslocamentos do nó i deste macro-elemento. Os deslocamentos de um nó sucedem ao do outro e são organizados em cada nó da seguinte forma:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ w \\ u_2 \\ \partial w / \partial n \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

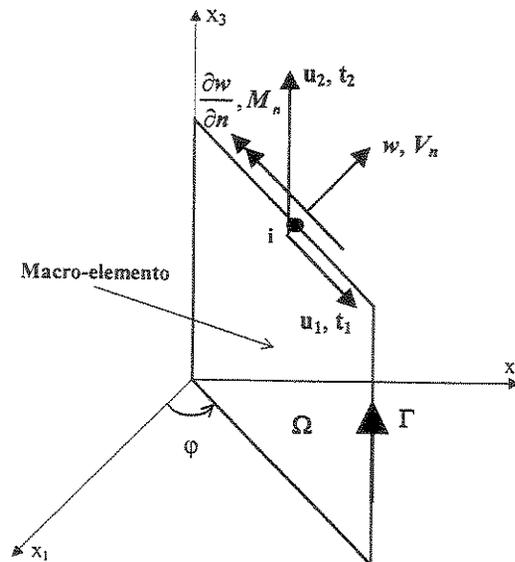


Figura 6.3 Deslocamentos e esforços em um nó genérico de um macro-elemento.

De forma análoga, o vetor t é o vetor dos esforços do nó i do macro-elemento, sendo o mesmo, correspondente ao vetor u e organizado da mesma forma para um nó:

$$t = \begin{Bmatrix} t_1 \\ V_n \\ t_2 \\ M_n \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

O primeiro e o terceiro termo dos vetores u e t , nas equações (6.4) e (6.5), se referem ao problema de estado plano e o segundo e o quarto termo, se referem ao problema de flexão de placas. Cabe lembrar, que o equacionamento de um macro-elemento envolve, para o problema estático, a superposição dos estados de flexão de placas e estado plano. No problema dinâmico estacionário, o equacionamento do macro-elemento envolve a superposição dos estados estacionários da flexão de placas e estado plano. As contribuições de nó de cada micro-elemento de contorno, no sistema de coordenadas local do macro-elemento, são dadas pelas seguintes matrizes elementares:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & 0 & h_{13} & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 & h_{24} \\ h_{31} & 0 & h_{33} & 0 \\ 0 & h_{42} & 0 & h_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ w' \\ u'_2 \\ \partial w / \partial n' \end{Bmatrix} \quad (6.6a)$$

e

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & g_{24} \\ g_{31} & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & g_{42} & 0 & g_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t'_1 \\ V'_n \\ t'_2 \\ M'_n \end{Bmatrix} \quad (6.6b)$$

A transformação da contribuição das variáveis de nó de cada micro-elemento de contorno, do sistema local de coordenadas do macro-elemento para o sistema global (ver equação 6.3), são dadas pelas seguintes matrizes de transformação:

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ w' \\ u'_2 \\ \partial w / \partial n' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w \\ u_2 \\ \partial w / \partial n \end{Bmatrix} \quad (6.7a)$$

e

$$\begin{Bmatrix} t'_1 \\ V'_n \\ t'_2 \\ M'_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 & 0 \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ V_n \\ t_2 \\ M_n \end{Bmatrix} \quad (6.7b)$$

Substituindo-se as contribuições de deslocamentos e esforços dados pelas equações (6.7) nas matrizes elementares (6.6), obtém-se as matrizes elementares do macro-elemento no sistema global de coordenadas para um ângulo φ diferente de zero, ou seja:

$$\begin{bmatrix} h_{11} \cos \varphi & h_{11} \text{sen } \varphi & -h_{13} & 0 \\ -h_{22} \text{sen } \varphi & h_{22} \cos \varphi & 0 & h_{24} \\ h_{31} \cos \varphi & h_{31} \text{sen } \varphi & -h_{33} & 0 \\ -h_{42} \text{sen } \varphi & h_{42} \cos \varphi & 0 & h_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w \\ u_2 \\ \partial w / \partial n \end{Bmatrix} \quad (6.8a)$$

e

$$\begin{bmatrix} g_{11} \cos \varphi & g_{11} \text{sen } \varphi & -g_{13} & 0 \\ -g_{22} \text{sen } \varphi & g_{22} \cos \varphi & 0 & g_{24} \\ g_{31} \cos \varphi & g_{31} \text{sen } \varphi & -g_{33} & 0 \\ -g_{42} \text{sen } \varphi & g_{42} \cos \varphi & 0 & g_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ V_n \\ t_2 \\ M_n \end{Bmatrix} \quad (6.8b)$$

onde φ é o ângulo que o macro-elemento faz com o plano $x_1 x_3$.

6.4 Compatibilização dos momentos e rotações

Atenção especial deve ser dada na interface da associação entre dois macro-elementos. Na interface, aparecem momentos de flexão (ou rotações) na direção normal que podem estar em sentidos opostos ao sentido de percurso dos contornos adjacentes. Em um nó genérico de um macro-elemento, as matrizes de mudança de coordenadas mostradas em (6.7) adotam o sentido positivo para o momento de flexão e rotações na direção normal. Como os momentos e rotações podem ter sentido contrário ao adotado, deve-se proceder a compatibilização dos seus valores.

A Figura 6.4a mostra os sentidos do momento de flexão M_n num macro-elemento.

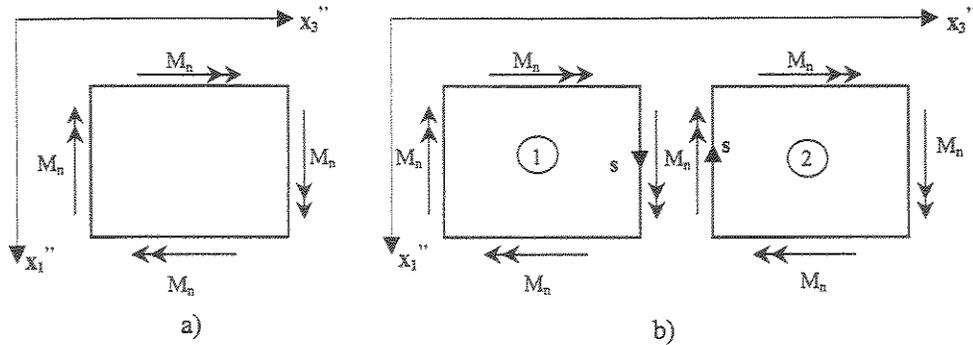


Figura 6.4 Compatibilização de momentos e rotações nos macro-elementos.

A Figura 6.4b mostra a associação de dois macro-elementos dispostos ao longo do eixo x_3'' e no plano $x_1'' x_3''$. Na interface da associação, convencionou-se que os momentos de flexão M_n tem sentidos opostos concordando com a coordenada s de orientação do contorno e que as direções das rotações não se alteram, apenas alteram-se o seu sentido. Através de uma associação ao sentido de percurso s , compatibiliza-se os momentos de flexão M_n ou as rotações.

Na interface da associação de dois macro-elementos (Fig. 6.4b), define-se como positivo o sentido de s que concorda com o eixo coordenado x_1'' e assim inverte-se o sentido para aqueles momentos M_n onde a coordenada s não é positiva. Usualmente, para determinar o sentido de percurso da coordenada de orientação do contorno s , basta realizar a inspeção dos cossenos diretores dos elementos de contorno em cada Macro elemento. Partindo deste princípio, para aqueles cossenos diretores do elemento que são negativos, altera-se os correspondentes sinais do momento de flexão M_n e das rotações. O mesmo procedimento pode ser feito para as interfaces de dois macro-elementos paralelas ao eixo x_2'' e x_3'' .

6.5 Montagem das matrizes H, G e associação de macro-elementos via sub-região

De acordo com o que foi desenvolvido em capítulos anteriores, nos nós genéricos do contorno de um macro-elemento, obtém-se quatro vezes o número de nós $4N$ de variáveis incógnitas, onde $2N$ vem do problema da dinâmica estacionária de placas finas e $2N$ do estado elastodinâmico estacionário, $4N$ variáveis conhecidas, $2N$ de cada problema, e $4N$ equações. Na análise da aresta (interface) de uma associação de macro-elementos pertencentes ao mesmo plano (Fig. 6.5) aparecem mais incógnitas.

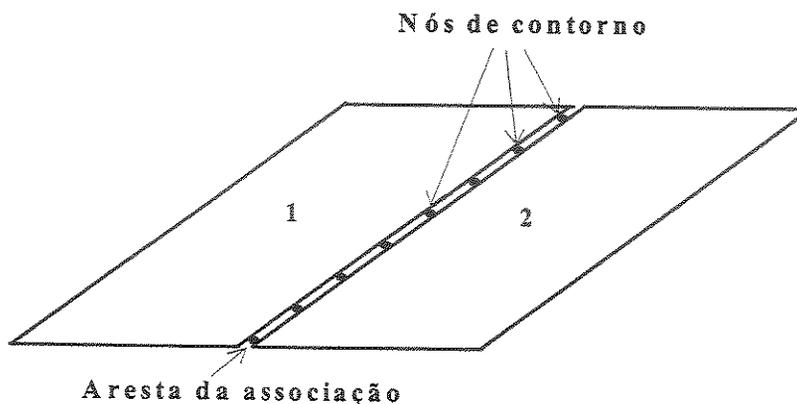


Figura 6.5 Associação de dois macro-elementos.

Admitindo-se que os macro-elementos da Figura 6.5 tenham $(N+M)$ nós, onde M nós pertencem às arestas, cada macro-elemento independente fornece $4(N+M)$ equações para $4N$ incógnitas dos três lados não conectados. Para a aresta não foi deduzida nenhuma relação, mas sabe-se que existem 8 variáveis por nó ($u_1, u_2, w, \partial w/\partial n, t_1, t_2, V_n$ e M_n), resultando $8M$ incógnitas. Da soma dos dois macro-elementos resultam $8(N+M)$ equações a $8N$ incógnitas dos lados independentes acrescidas de $16M$ incógnitas da aresta ($8M$ incógnitas de cada macro-elemento).

As $8M$ condições restantes para a solução do problema são:

- i) Da compatibilidade de deslocamentos ($u_1, u_2, w, \partial w/\partial n$) correspondentes, em cada nó, resultam $4M$ condições, ou:

$$u_i^1 = u_i^2 \quad (6.9a)$$

$$w^1 = w^2 \quad (6.9b)$$

$$\frac{\partial w^1}{\partial n} = \frac{\partial w^2}{\partial n} \quad (6.9c)$$

onde os índices superiores referem-se ao número do macro-elemento.

- ii) Do equilíbrio de esforços (t_1 , t_2 , V_n e M_n) correspondentes em cada nó resultam $4M$ condições, ou:

$$t_i^1 + t_i^2 + t_i = 0 \quad (6.10a)$$

$$V_n^1 + V_n^2 + V_n = 0 \quad (6.10b)$$

$$M_n^1 + M_n^2 + M_n = 0 \quad (6.10c)$$

onde os índices superiores referem-se ao número do macro-elemento.

Da análise das equações (6.10), deve-se observar que além das forças de cada macro-elemento há o aparecimento de esforços na aresta (a terceira parcela de cada equação). Entretanto, estas forças relacionam-se com os deslocamentos das arestas, ou quando o deslocamento é incógnito, a força é conhecida ou vice-versa, sem o aumento do número de incógnitas.

Na montagem do sistema de equações de um macro-elemento, na ausência do termo de domínio, o sistema final de equações algébricas obtido após o cálculo das integrais pode ser escrito da seguinte forma:

$$[H]\{U\} = [G]\{T\} \quad (6.11)$$

sendo que as matrizes elementares que fazem parte das matrizes finais H e G da equação (6.11), são montadas a partir das equações de transformação de coordenadas locais em globais mostradas na seção 6.3.

Através da técnica de sub-regiões do MEC, o sistema de equações final generalizado, correspondente ao macro-elemento 1 da Figura 6.5, pode ser escrito de maneira análoga à equação (6.11), da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{1i}^1 \\ H_{i1}^1 & H_{ii}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}^1 & G_{1i}^1 \\ G_{i1}^1 & G_{ii}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_A \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

Igualmente, o sistema de equações final, correspondente ao macro-elemento 2 da Figura 6.5, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} H_{11}^2 & H_{1i}^2 \\ H_{i1}^2 & H_{ii}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}^2 & G_{1i}^2 \\ G_{i1}^2 & G_{ii}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_A \end{Bmatrix} \quad (6.13)$$

sendo,

- U_1 e U_2 os deslocamentos nodais sobre o contorno dos macro-elementos 1 e 2, respectivamente.
- T_1 e T_2 os esforços nodais sobre o contorno dos macro-elementos 1 e 2, respectivamente.
- U_A e T_A os deslocamentos e esforços nodais na aresta da associação.
- H_{ij}^k e G_{ij}^k são sub-matrizes elementares, dos efeitos de i em j do macro elemento k .

O sistema de equações do conjunto de dois macro-elementos, após um conveniente arranjo das equações (6.12) e (6.13) e da imposição das condições (6.9) e (6.10), tem o seguinte arranjo final:

$$\begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{1i}^1 & 0 & -G_{1i}^1 & 0 \\ H_{i1}^1 & H_{ii}^1 & 0 & -G_{ii}^1 & 0 \\ 0 & H_{ii}^2 & H_{i2}^2 & 0 & -G_{ii}^2 \\ 0 & H_{2i}^2 & H_{22}^2 & 0 & -G_{2i}^2 \\ 0 & 0 & 0 & I & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_A \\ U_2 \\ T_i^1 \\ T_i^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}^1 & 0 & 0 \\ G_{ii}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{i2}^2 \\ 0 & 0 & G_{22}^2 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_A \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

sendo,

- T_i^1 e T_i^2 : os esforços nos macro-elementos 1 e 2, respectivamente.
- I : matriz identidade para compor as condições (6.10) em (6.14).

A montagem do sistema algébrico de equações (6.14) de dois macro-elementos, permite a fácil extensão deste conceito para a associação de uma maior quantidade de macro-elementos em uma aresta comum. A Figura 6.6 mostra a associação de três macro-elementos em uma aresta comum, podendo os mesmos estarem contidos em um mesmo plano (macro-elementos 1 e 2) ou não (macro-elementos 1,3 e 2,3).

Considerando-se um procedimento semelhante, quando da montagem do sistema algébrico de equações (6.14), o sistema algébrico final obtido da associação de três macro-elementos em uma aresta é mostrado a seguir:

$$\begin{bmatrix}
 H_{11}^1 & H_{1i}^1 & 0 & 0 & -G_{1i}^1 & 0 & 0 \\
 H_{i1}^1 & H_{ii}^1 & 0 & 0 & -G_{ii}^1 & 0 & 0 \\
 0 & H_{ii}^2 & H_{i2}^2 & 0 & 0 & -G_{ii}^2 & 0 \\
 0 & H_{2i}^2 & H_{22}^2 & 0 & 0 & -G_{2i}^2 & 0 \\
 0 & H_{ii}^3 & 0 & H_{i3}^3 & 0 & 0 & -G_{ii}^3 \\
 0 & H_{3i}^3 & 0 & H_{33}^3 & 0 & 0 & -G_{3i}^3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & I & I & I
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 U_1 \\
 U_A \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 T_i^1 \\
 T_i^2 \\
 T_i^3
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 G_{11}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{1i}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & G_{i2}^2 & 0 \\
 0 & 0 & G_{22}^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & G_{i3}^3 \\
 0 & 0 & 0 & G_{33}^3 \\
 0 & I & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 T_1 \\
 T_A \\
 T_2 \\
 T_3
 \end{Bmatrix}
 \quad (6.15)$$

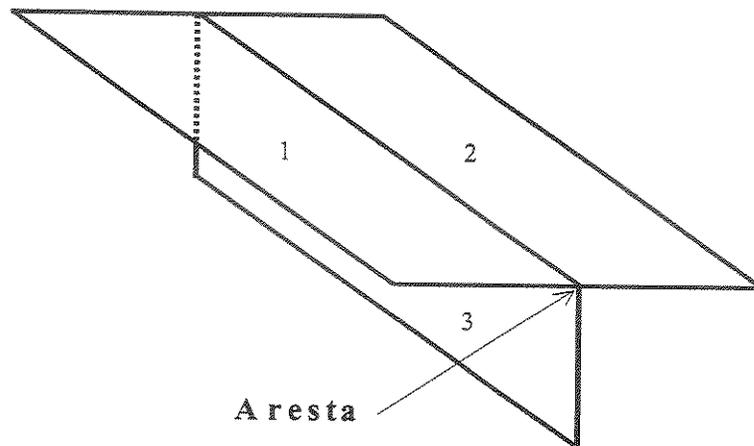


Figura 6.6 Associação de três macro-elementos em uma aresta comum.

Os sistemas de equações algébricas (6.14) e (6.15) podem ser compilados para formar um sistema de equações final, do tipo $AX = F$. Para resolver este sistema, basta conhecer os deslocamentos genéricos ou as forças genéricas de cada macro e das arestas da associação. Com isso, procede-se a troca das colunas das matrizes para a posterior formação e resolução do sistema final e determinação das variáveis incógnitas.

6.6 Diafragmas

A análise estática de peças de parede fina como associação de macro-elementos no espaço, através da técnica de sub-regiões do MEC, pode ser usada em uma boa parte de problemas envolvendo estas estruturas. Entretanto, conforme mostrado por Palermo Jr. (1989), estruturas de parede fina sob forte influência de distorção da seção transversal nos locais de aplicação de

cargas concentradas. No trabalho citado, procurou-se minimizar a distorção da seção transversal onde atuam cargas concentradas através da inclusão de diafragmas relacionados com os graus de liberdade da seção transversal. Utilizou-se os seguintes efeitos independentes de diafragmas:

- i) **Diafragma tipo I:** Enrijecimento da seção transversal em seu plano mas, com os deslocamentos na direção longitudinal livres (Figura 6.7a).
- ii) **Diafragma tipo II:** Restrição dos deslocamentos na direção longitudinal dos pontos da seção transversal mas, com liberdade de deformação da seção no seu plano (Figura 6. 7b).
- iii) A associação dos dois efeitos também foi utilizada ou seja, seção rígida em seu plano e sem empenamento.

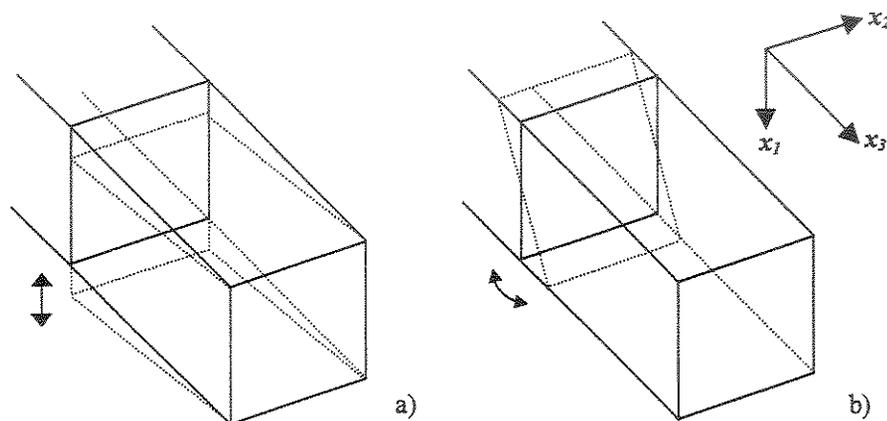


Figura 6.7 Tipos de diafragmas: a) Tipo I, b) Tipo II.

O papel do diafragma constitui na possibilidade de redução dos graus de liberdade no seu campo de atuação, impondo aos infinitos graus de liberdade dos pontos da seção transversal movimentos de corpo rígido ou mais exatamente movimentos de plano rígido.

Na ausência dos diafragmas, os deslocamentos relativos dos pontos da seção transversal são independentes. Estes deslocamentos relativos passam a ser dependentes quando da existência do diafragma. Os deslocamentos de um ponto no plano de atuação do diafragma são relacionados com a distância deste ponto a um ponto adotado para referência dos deslocamentos do diafragma, que é usualmente chamado de pólo.

Para que os pontos da seção transversal de uma peça apresentem deslocamentos associados ao de um plano, torna-se necessário a introdução de equações que restrinjam o movimento destes pontos. Para isto, é preciso inserir no sistema final de equações relações de compatibilidade de movimento ao longo do contorno do diafragma e também o equilíbrio de forças interativas do mesmo. As equações compatibilidades de deslocamento ao longo das interfaces dos diafragmas, são dadas por:

$$u_1(\Gamma) = u_1(A) - [x_2(\Gamma) - x_2(A)] \frac{\partial w}{\partial x_3}(\Gamma) \quad (6.16)$$

$$u_2(\Gamma) = u_2(A) - [x_1(\Gamma) - x_1(A)] \frac{\partial w}{\partial x_3}(\Gamma) \quad (6.17)$$

$$u_3(\Gamma) = u_3(A) - [x_2(\Gamma) - x_2(A)] \frac{\partial w}{\partial x_1}(\Gamma) - [x_1(\Gamma) - x_1(A)] \frac{\partial w}{\partial x_2}(\Gamma) \quad (6.18)$$

onde A é um ponto particular definido sobre o plano do diafragma e $\partial w / \partial x_i(\Gamma)$ é a rotação em torno do eixo x_i .

As condições de equilíbrio, ao longo do contorno do diafragma, em termos do sistema global de coordenadas, podem ser representadas por:

$$\int_{\Gamma_j} t_1(\Gamma) d\Gamma = Q_1 \quad (6.19)$$

$$\int_{\Gamma_j} t_2(\Gamma) d\Gamma = Q_2 \quad (6.20)$$

$$\int_{\Gamma_j} \{ -t_2(\Gamma)[x_1(\Gamma) - x_1(A)] - t_1(\Gamma)[x_2(\Gamma) - x_2(A)] \} d\Gamma = M_{12} \quad (6.21)$$

$$\int_{\Gamma_j} t_3(\Gamma) d\Gamma = N \quad (6.22)$$

$$\int_{\Gamma_j} t_3(\Gamma) [x_2(\Gamma) - x_2(A)] d\Gamma = M_1 \quad (6.23)$$

$$\int_{\Gamma_j} t_3(\Gamma) [x_1(\Gamma) - x_1(A)] d\Gamma = M_2 \quad (6.24)$$

sendo, Q_i e M_i as forças cortantes e os momentos fletores do diafragma nas direções x_1 e x_2 , respectivamente, M_{12} e N o momento torçor e o esforço axial total na direção x_3 , respectivamente. Todos estes esforços são relacionados a um ponto A , previamente definido.

Conforme mostrado por Palermo Jr. (1989), as equações (6.16), (6.17), (6.19), (6.20) e (6.21) são usadas para modelar o diafragma transversalmente rígido (diafragma tipo I). Enquanto que as equações (6.18), (6.22), (6.23) e (6.24) são usadas para a restrição dos deslocamentos na direção longitudinal do diafragma (diafragma tipo II).

Como o objetivo desse trabalho não foi o de avaliar a influência da distorção da seção transversal das peças de parede fina, pois este aspecto já fora abordado Palermo Jr. (1989) e como a distorção não é levada em conta no modelo descrito por Wright (1990), procurou-se avaliar apenas a eficiência do MEC em problemas com a inclusão de diafragmas. Além do mais, como será mostrado no capítulo seguinte, alguns ensaios de laboratório avaliam a laje composta com a aplicação de carregamentos concentrados, motivo pelo qual se faz uso dessa formulação, isto é, considera-se adequadamente o carregamento concentrado através da colocação do diafragma.

6.7 Validação das formulações estáticas envolvendo peças de parede fina

Nesta seção, são apresentados alguns problemas estáticos envolvendo peças de parede fina com o objetivo de demonstrar a eficiência da formulação proposta para a associação em macro-elementos, que foi sistematizada em um programa de computador. Na construção deste programa, codificado em linguagem FORTRAN 90, foi implementada a formulação proposta através da aplicação do Método Direto dos Elementos de Contorno.

6.7.1 Placa quadrada engastada sujeita a um carregamento concentrado em seu centro

Para checar se o programa segue exatamente a formulação proposta, este exemplo analisa uma placa quadrada engastada em todas as suas bordas e submetida a um carregamento transversal concentrado no seu centro. A análise segue as mesmas considerações feitas por Tanaka e Miyazaki (1985).

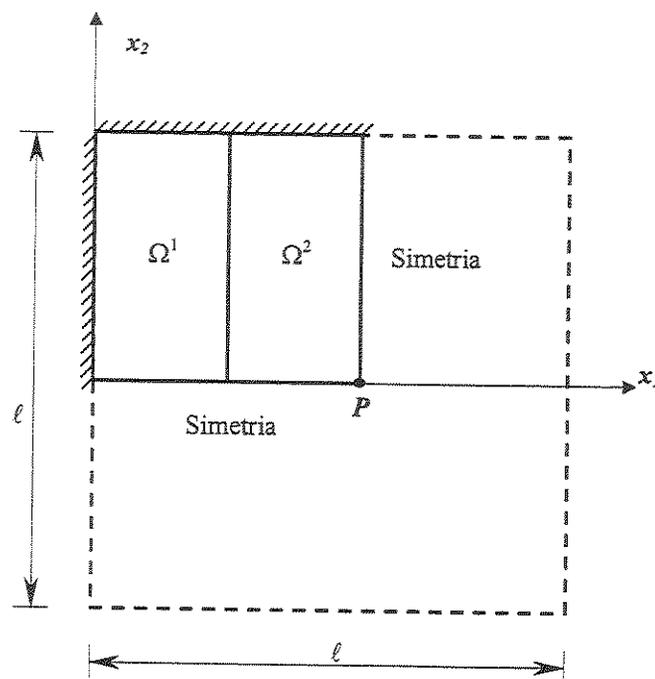


Figura 6.8 Placa quadrada submetida a um carregamento transversal concentrado.

Conforme mostrado na Figura 6.8, depois que as propriedades de simetria da placa são adotadas, um quarto da mesma é dividida em duas regiões iguais (Ω^1 e Ω^2). Foi associado a estas duas regiões dois macro-elementos, sendo que os mesmos foram engastados na borda externa e mantidos livres no interior da placa, de acordo com as condições de simetria. A discretização dos dois macro-elementos adotados contou com 57 nós de contorno, incluindo as arestas, 34 nós para cada macro-elemento com 30 micro-elementos lineares, sendo que nos cantos foram utilizados nós duplos, conforme mostra a Figura 6.9.

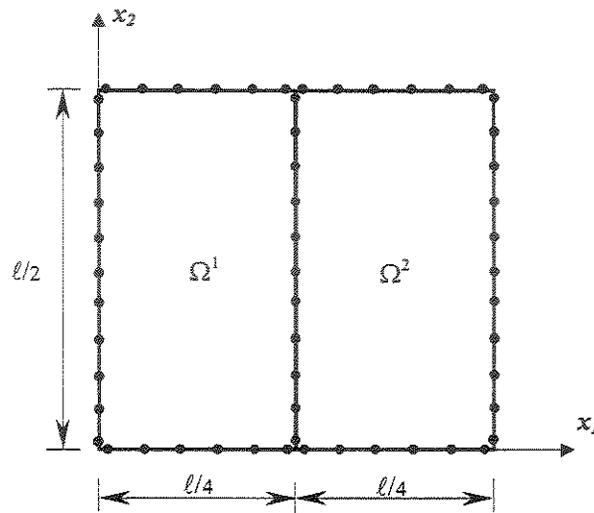


Figura 6.9 Discretização da placa em dois macro-elementos.

O carregamento foi aplicado no ponto central P . A razão entre comprimento e espessura da placa foi assumida como sendo $\ell/h = 100$. O módulo de *Young* E foi considerado igual a $2,058 \times 10^2$ Gpa e o coeficiente de *Poisson* ν igual a 0.3.

A Figura 6.10 ilustra a forma deformada e não deformada da placa quadrada engastada nas bordas, sujeita a condições de simetria e dividida em duas sub-regiões (macro-elementos).

O Gráfico 6.1 apresenta os resultados do momento fletor M_n ao longo da borda engastada da placa. Estes resultados são comparados com os valores apresentados no trabalho de Tanaka e Miyazaki (1985).

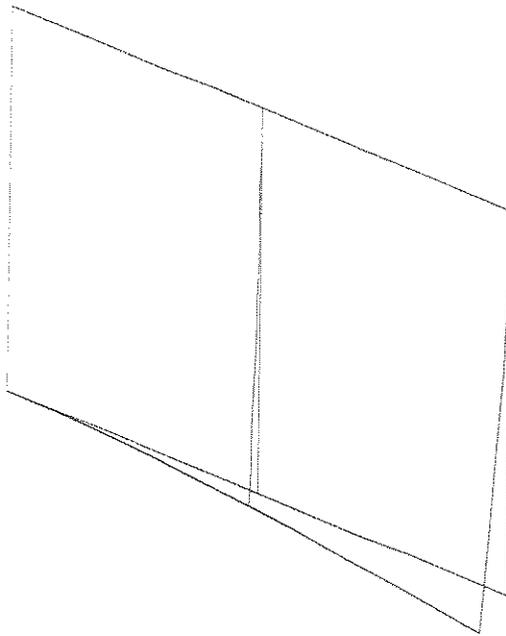


Figura 6.10 Formas deformada e não deformada da placa quadrada dividida em duas regiões.

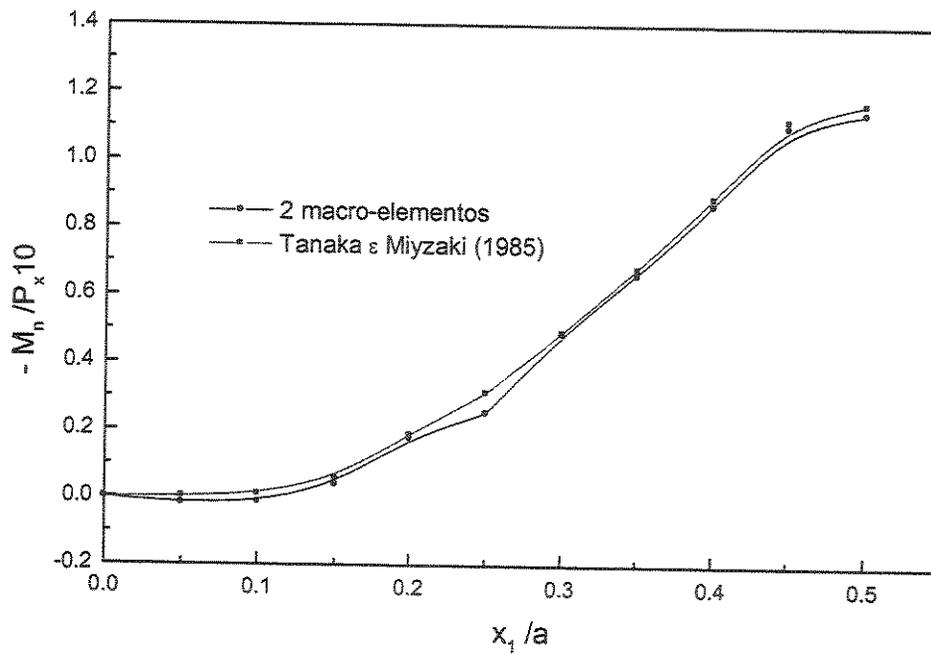


Gráfico 6.1 Momento fletor M_n ao longo da borda engastada da placa.

6.7.2 Viga em balanço com seção aberta U

Conforme mostrado na Figura 6.11, este exemplo analisa uma viga de parede fina em balanço com seção aberta U. A mesa e a alma da viga têm a mesma largura (2m). O comprimento ℓ foi variado, considerando-se os valores de 4 e 8m, respectivamente. O módulo de *Young* E foi considerado igual a $2,0 \text{ tf/m}^2$ e o coeficiente de *Poisson* zero.

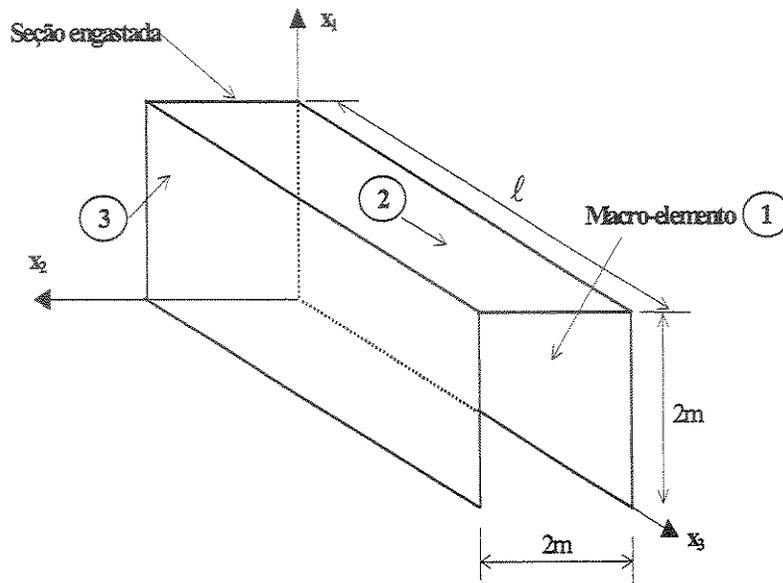


Figura 6.11 Viga em balanço com seção aberta em U.

Foram realizadas duas diferentes discretizações para o comprimento de 4m. Na primeira discretização, foram associados à peça três macro-elementos, sendo que os mesmos foram engastados em uma extremidade ($x_3 = 0$) e os carregamentos foram aplicados na extremidade livre ($x_3 = \ell$). Esta discretização contou com 38 nós de contorno, incluindo as arestas, 16 nós para cada macro-elemento com 36 micro-elementos, sendo que nos cantos foram utilizados nós duplos. A espessura dos macro-elementos que compõem a viga foi considerada constante e igual a 0,05m.

Os resultados encontrados são divididos em dois grupos de acordo com o local de aplicação do carregamento:

- i) Esforço Normal de 1,0 tf, aplicado na direção x_3 .

Na seção transversal do engaste (Fig. 6.11), obteve-se uma força distribuída de 0,1582 tf/m na direção do eixo x_3 para um valor de referência (Palermo Jr., 1989) de 0,1667 tf/m (diferença de 5,1%). O valor encontrado também se aproxima do resultado da Resistência dos Materiais pois, se for realizada uma integração, resulta uma reação de 1,0tf.

ii) Carga transversal de 1,0 tf, aplicada na direção x_1 .

Na seção transversal do engaste (Fig. 6.11), a força distribuída na direção do eixo x_3 na extremidade da alma é de 2,149 tf/m para um valor teórico de 2,0 tf/m (erro de 7,5%). Na mesa a força distribuída média foi de 0,968 tf/m para um valor teórico de 1,0 tf/m (erro de 3,2%). Na Figura 6.12 são apresentados os resultados encontrados nos pontos nodais da força distribuída na direção do eixo x_3 juntamente com os valores de referência (Palermo Jr., 1989), sendo que na junção alma-mesa observam-se picos. Os picos estão relacionados a adoção de nós duplos nos cantos.

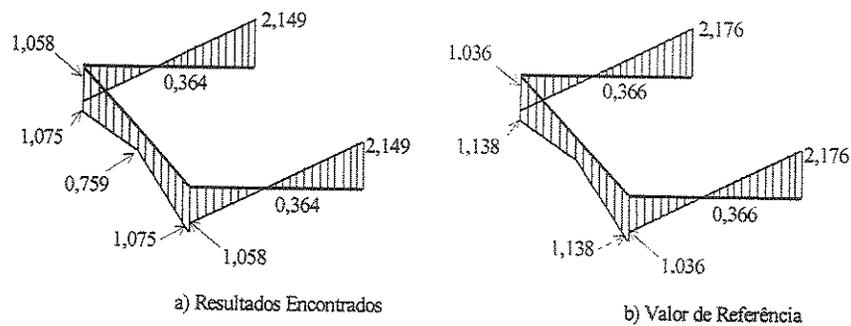


Figura 6.12 Forças distribuídas na direção x_3 , primeira discretização.

A segunda discretização contou com 76 nós de contorno, incluindo as arestas, 32 nós para cada macro-elemento com 36 micro-elementos, sendo que nos cantos foram utilizados nós duplos. Os resultados encontrados, novamente são divididos em dois grupos de acordo com o local do carregamento aplicado:

i) Esforço Normal de 1,0 tf, aplicado na direção x_3 .

Na seção transversal do engaste (Fig. 6.11), obteve-se uma força distribuída de 0,1569 tf/m na direção do eixo x_3 para um valor de referência (Palermo Jr., 1989) de 0,1667 tf/m (diferença de 6,2%). O valor encontrado aproxima-se mais ainda do resultado da Resistência dos Materiais pois, se for realizada uma integração, resulta uma reação de 1,0tf.

ii) Carga transversal de 1,0 tf, aplicada na direção x_1 .

Na seção transversal do engaste (Fig. 6.11), a força distribuída na direção do eixo x_3 na extremidade da alma é de 2,127 tf/m para um valor teórico de 2,0 tf/m (erro de 6,4%). Na mesa a força distribuída média foi de 0,979 tf/m para um valor teórico de 1,0 tf/m (erro de 2,1%). Na Figura 6.13, são apresentados os resultados encontrados nos pontos nodais para a força distribuída na direção do eixo x_3 juntamente com os valores de referência (Palermo Jr., 1989).

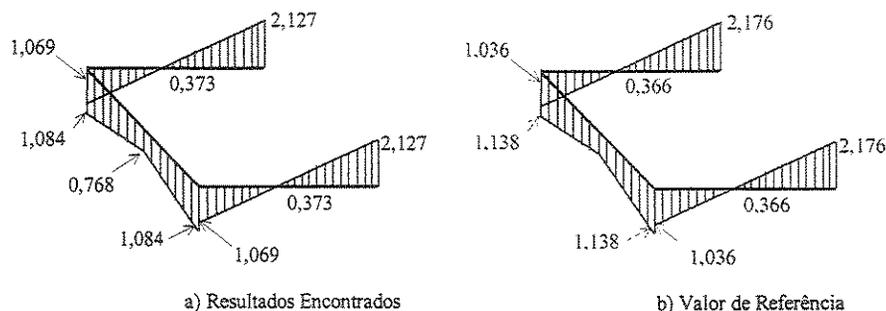


Figura 6.13 Forças distribuídas na direção x_3 , segunda discretização.

Os resultados encontrados para os esforços na seção engastada nesta segunda discretização foram mais coerentes com os valores teóricos da Resistência dos Materiais. Todavia, mesmo para esta segunda discretização os deslocamentos na seção livre com relação às almas ficaram em torno de 5% menores do que a flecha máxima na seção. Com relação à mesa, onde foi aplicado o carregamento, os deslocamentos foram aproximadamente 10 vezes maiores do que o valor da flecha máxima. Isto parece ser devido a aplicação de um carregamento pontual, ou mais provavelmente a não consideração de diafragmas rígidos na seção. A colocação de diafragmas nos locais de aplicação de carga, aumenta a rigidez da seção transversal.

A discretização para o comprimento de 8m contou com 38 nós de contorno (16 nós para cada macro-elemento) com 36 micro-elementos. Os resultados encontrados para a carga transversal de 1,0 tf, aplicada na direção x_1 :

- i) Na seção transversal do engaste (Fig. 6.11), a força distribuída na direção do eixo x_3 na extremidade da alma é de 3,697 tf/m para um valor teórico de 4,0 tf/m (erro de 7,5%). Na mesa a força distribuída média foi de 1,91 tf/m para um valor teórico de 2,0 tf/m (erro de 4,5%).
- ii) Os deslocamentos na seção livre com relação às almas estiveram em torno de 8% maiores do que a flecha máxima na seção. Com relação à mesa, onde foi aplicado o carregamento os deslocamentos são de 15 vezes maiores do que o valor da flecha máxima.

Uma segunda discretização para o comprimento de 8m contou com 76 nós de contorno, 32 nós para cada Macro-elemento com 36 micro-elementos. Novamente, os resultados encontrados para a carga transversal de 1,0 tf, aplicada na direção x_1 , no centro de cisalhamento são:

- i) Na seção transversal do engaste (Fig. 6.11), a força distribuída na direção do eixo x_3 na extremidade da alma é de 3,754 tf/m para um valor teórico de 4,0 tf/m (erro de 6,6%). Na mesa a força distribuída média foi de 1,922 tf/m para um valor teórico de 2,0 tf/m (erro de 4,1%).
- ii) Os deslocamentos na seção livre com relação às almas continuaram em torno de aproximadamente 8% maiores do que a flecha máxima na seção. Com relação à mesa, onde foi aplicado o carregamento os deslocamentos foram novamente de aproximadamente 15 vezes maiores do que o valor da flecha máxima.

6.7.3 Viga em balanço com seção fechada simétrica

Este exemplo analisa uma viga em balanço com seção fechada simétrica. As mesas e as almas da viga tem a mesma largura (2m) e o comprimento da mesma foi considerado igual a 4m. O módulo de *Young* E foi considerado igual a $2,0 \text{ tf/m}^2$ e o coeficiente de *Poisson* zero. Conforme é mostrado na figura 6.14, a estrutura analisada contou com 4 macro-elementos, sendo que os mesmos foram engastados em uma extremidade ($x_3 = 0$) e os carregamentos foram aplicados na extremidade livre ($x_3 = \ell$). A espessura dos macro-elementos que compõem a viga foi considerada constante e igual a 0,05m. A discretização contou com 44 nós de contorno (16 nós para cada Macro-elemento) com 48 micro-elementos, sendo que nos cantos foram utilizados nós duplos.

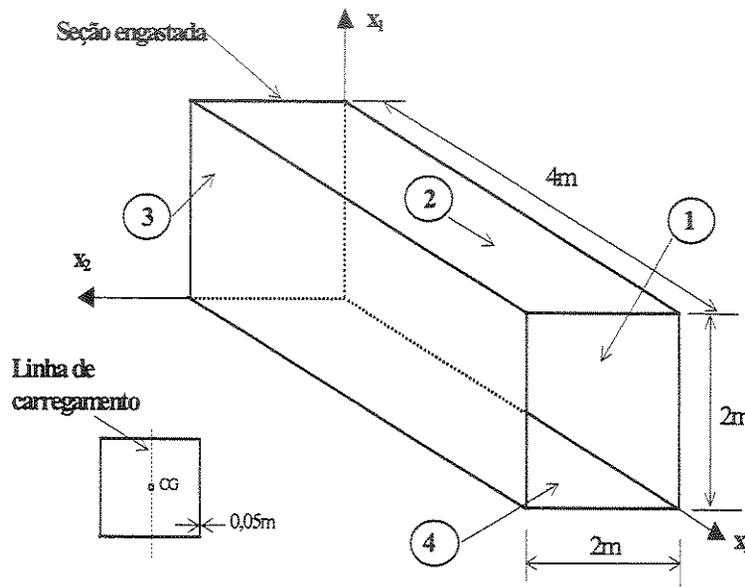


Figura 6.14 Viga em balanço com seção fechada simétrica.

Considerando-se para o carregamento de flexão em torno do eixo x_1 , uma carga concentrada de 1,0 tf, foi obtido nas mesas uma força média resultante na direção x_3 de 0,7673 tf/m para um valor da Resistência dos Materiais de 0,75 tf/m (erro de 2,3%). A Figura 6.15 mostra uma distribuição de forças na região do engaste, juntamente com os valores de referência apresentados por Palermo Jr. (1989).

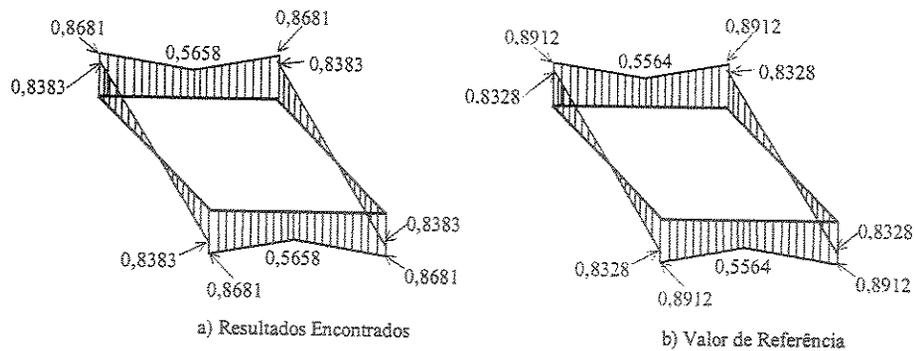


Figura 6.15 Forças distribuídas na direção x_3 .

A flecha máxima adimensional obtida da Resistência dos Materiais é dada por:

$$f = \frac{P \ell^3}{3 EI} = 83,333$$

sendo o momento de inércia da seção I igual a $0,128 \text{ m}^4$.

Os resultados finais encontrados para os deslocamentos na seção livre da viga em balanço apresentam a seguinte configuração:

- i) Os deslocamentos na seção livre com relação às almas da viga estiveram em torno de 8% menores do que o valor da flecha máxima na seção para valores máximos. Para valores médios, os mesmos estiveram em torno de 19% menores do que a flecha máxima.
- ii) Com relação à mesa, local onde foi aplicado o carregamento, os deslocamentos são de aproximadamente 6 vezes maiores do que o valor da flecha máxima.

Pode-se observar primeiramente que os resultados finais encontrados para os esforços na seção do engaste foram bastante próximos à Resistência dos Materiais e também ao valor de referência consultado. Posteriormente, os resultados finais encontrados para os deslocamentos na seção livre parecem ter sido mais coerentes do que aqueles obtidos para a viga de seção U. Parece

ser evidente que a seção fechada tenha uma maior rigidez à flexão, devido a forma da seção transversal, com isso para um mesmo comprimento de viga o resultado geral para o valor do deslocamento foi menor. Entretanto, os valores encontrados para os deslocamentos da alma e da mesa do perfil encontram-se distantes do valor teórico da flecha máxima da Mecânica dos Materiais. Novamente, acredita-se que a não colocação de diafragmas rígidos no local de aplicação da carga pode ter interferido nos diferentes valores encontrados para a alma e a mesa da viga.

Com a intenção de ilustrar este fato, a Figura 6.16 mostra uma representação exagerada dos deslocamentos na extremidade livre da viga, onde pode-se observar, dos resultados encontrados, que a alma transfere uma maior rigidez ao perfil ou seja, há uma tendência da mesma se deslocar muito menos. Enquanto que no local de aplicação do carregamento (mesa) os deslocamentos são maiores.

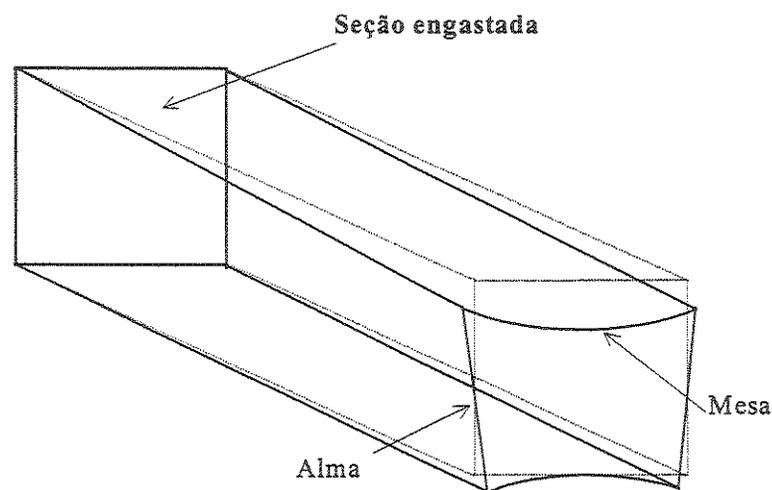


Figura 6.16 Representação exagerada dos deslocamentos.

6.8 Validação das formulações dinâmicas estacionárias envolvendo peças de parede fina

Nesta seção, são apresentados problemas relacionados a dinâmica estacionária de estruturas de parede fina com o objetivo de validar a formulação proposta para a associação em macro-elementos que foi sistematizada em um programa de computador. Na construção deste programa, codificado em linguagem FORTRAN 90, foi implementada a formulação proposta através da aplicação do Método Direto dos Elementos de Contorno. Os problemas foram analisados considerando-se o cálculo numérico das frequências naturais e modos próprios de vibração de cada peça estrutural. Os resultados foram comparados com valores analíticos conhecidos.

6.8.1 Placa quadrada engastada-livre-engastada-livre, dividida em duas regiões e sujeita a uma excitação transversal concentrada

Com a intenção de demonstrar a validade da formulação proposta, este exemplo inicial analisa uma placa quadrada de lado $\ell = 1,0$, engastada em duas bordas, livre nas outras duas e submetida a uma excitação transversal concentrada em um ponto do contorno da borda livre. A placa foi dividida em duas regiões Ω^1 e Ω^2 , conforme mostra a Figura 6.17. Nas duas regiões, a espessura foi adotada como sendo $h=0,05$, o coeficiente de *Poisson* foi considerado $\nu=0,3$. Para o Módulo de *Young* foi adotado $E = 1000,0$ e para a densidade, foi adotado $\rho = 0,229$.

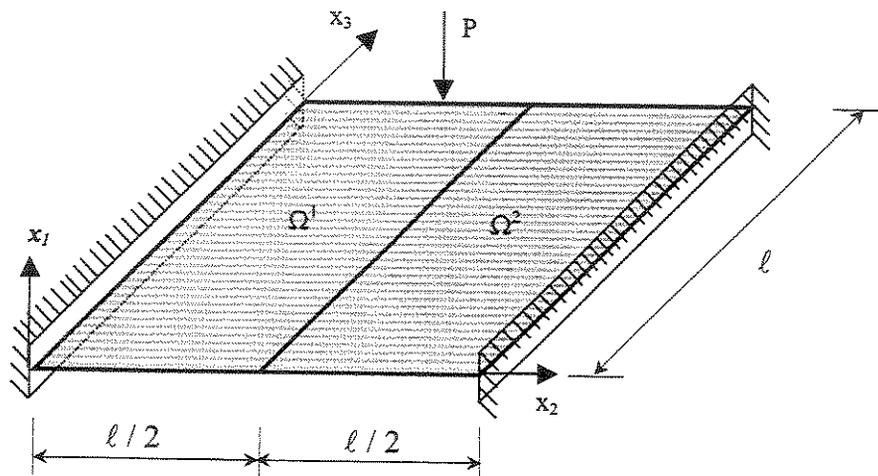


Figura 6.17 Placa quadrada engastada livre, dividida em duas regiões e submetida a uma excitação transversal concentrada.

Foi associado às duas regiões da placa, dois macro-elementos, sendo que os mesmos foram engastados na direção x_3 das duas bordas externas e mantidos livres na direção x_2 das outras duas bordas, de acordo com as condições de contorno mostradas na Figura 6.17. A discretização destes dois macro-elementos adotados contou com 57 nós de contorno, incluindo as arestas, 34 nós para cada macro-elemento com 30 micro-elementos lineares, sendo que nos cantos foram utilizados nós duplos, conforme mostra a Figura 6.18.

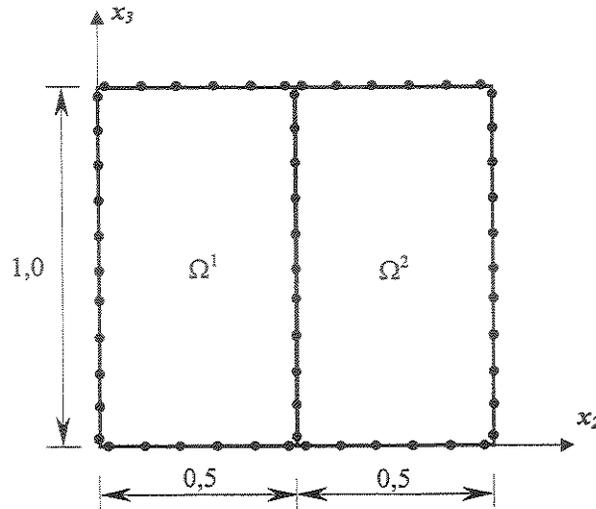


Figura 6.18 Discretização da placa quadrada em dois macro-elementos.

A Tabela 6.1 apresenta os valores comparativos das seis primeiras frequências naturais calculadas numérica (FRF) e analiticamente através da equação (4.89). As porcentagens de erro foram calculadas tendo como base o valor analítico.

Tabela 6.1 Frequências naturais analíticas e numéricas (ω_{ij}) da placa quadrada engastada-livre, dividida em duas regiões.

Resutados	ω_{ij} (rad./s) e (ij)					
	1	2	3	4	5	6
2 macro-elementos	22.156	26.374	43.599	61.180	66.799	79.806
Analítico	22,2670 (11)	26,5264 (12)	43,6541 (13)	61,4616 (21)	67,5408 (22)	79,8891 (14)

Analisando a Tabela 6.1, pode-se observar que existe uma boa convergência entre as frequências obtidas numericamente através das (FRFs), com uma baixa porcentagem de erro em relação ao valor analítico.

O Gráfico 6.2 apresenta a FRF em função do deslocamento transversal da estrutura na direção x_1 . Neste gráfico, são apresentados também os tempos de processamento (tp) de cada FRF, juntamente com os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação.

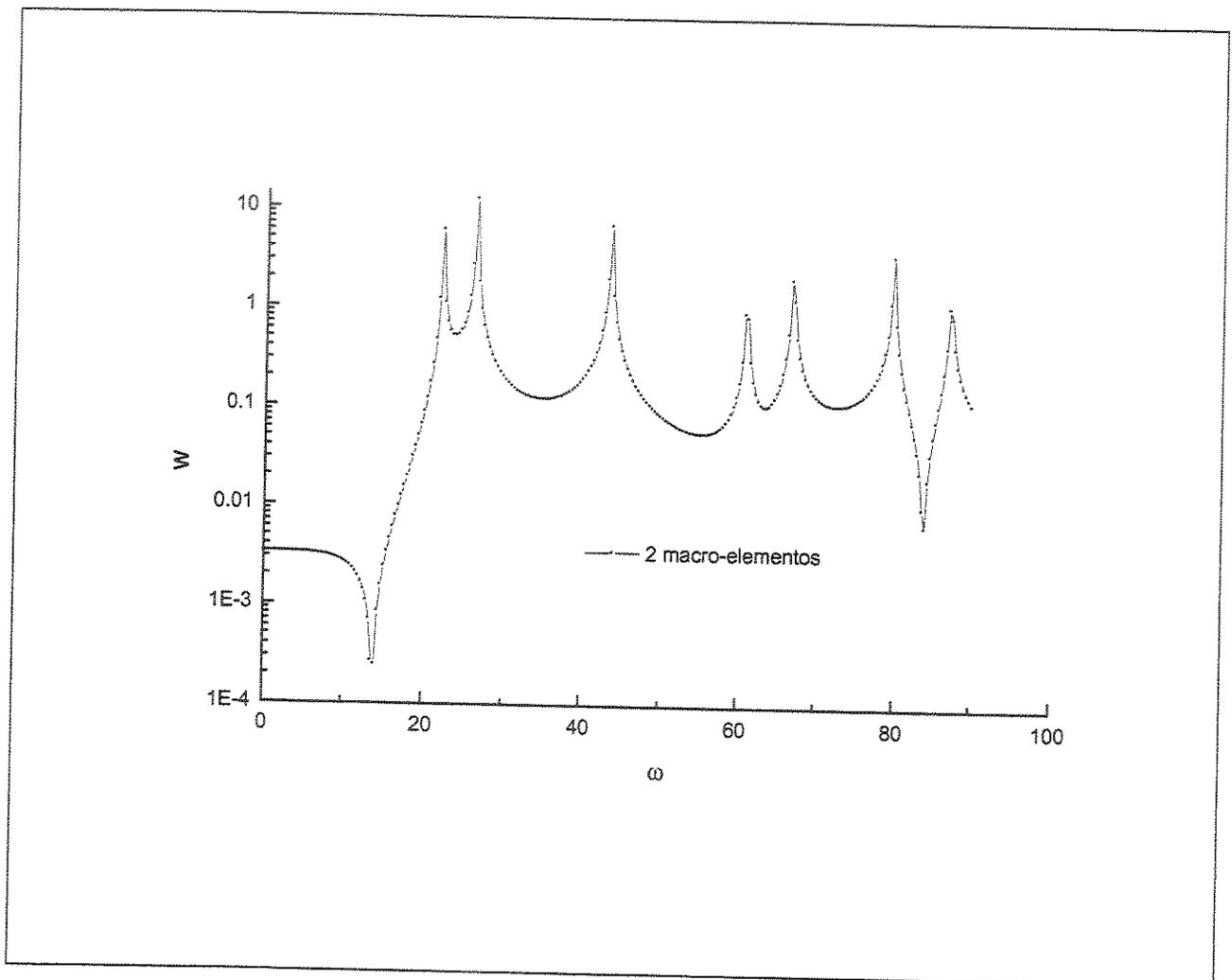


Gráfico 6.2 FRF do deslocamento transversal na direção x_1 da placa dividida em duas regiões.

Analisando a FRF do Gráfico 6.2, pode-se observar nitidamente os picos de frequência obtidos numericamente através do MEC. Os pontos de colocação com fatores de posicionamento a $\frac{1}{4}$ e a $\frac{1}{2}$ do comprimento dos elementos consecutivos apresentaram as melhores respostas numéricas. Outros fatores de posicionamento apresentaram respostas menos significativas.

Como última análise deste exemplo, nas Figuras 6.19, 6.20 e 6.21 são apresentados a parte real dos três primeiros modos de vibração da estrutura composta por dois macro-elementos. Estes modos de vibração foram obtidos a partir dos deslocamentos transversais na direção x_1 dos nós do contorno da mesma. A visualização dos modos de vibração foi feita através de um programa em linguagem Matlab 5.3 (1999) desenvolvido para este fim.

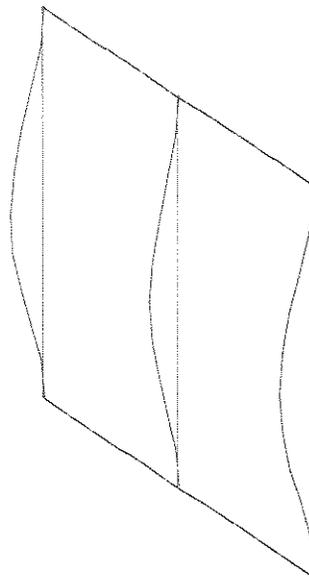


Figura 6.19 Parte real do primeiro modo de vibração da placa engastada-livre dividida em duas regiões ($i=1, j=1$).

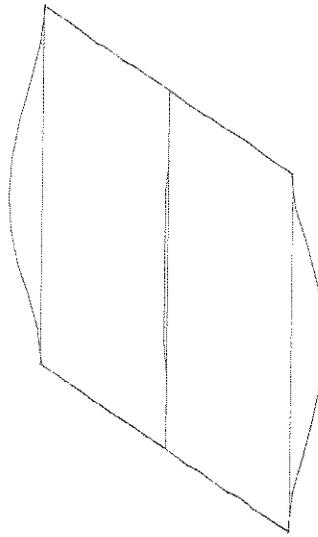


Figura 6.20 Parte real do segundo modo de vibração da placa engastada-livre dividida em duas regiões ($i=1, j=2$).

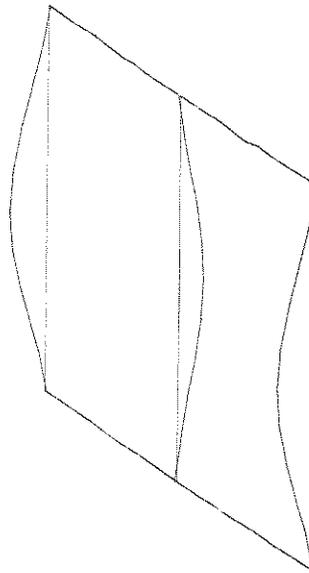


Figura 6.21 Parte real do terceiro modo de vibração da placa engastada-livre dividida em duas regiões ($i=1, j=3$).

6.8.2 Barra em balanço com seção fechada simétrica submetida a uma excitação axial uniforme

Este exemplo analisa uma barra em balanço de seção fechada simétrica submetida a um esforço axial periódico e harmônico linearmente distribuído na sua extremidade livre ($x_3 = \ell$). As mesas e as almas da barra tem a mesma largura (1m) e o comprimento ℓ da mesma foi considerado igual a 3m. A espessura de cada lâmina que compõe a peça é $h = 0.1\text{m}$ (Figura 6.22). O módulo de *Young* E foi considerado igual a $2,0\text{ N/m}^2$, a densidade ρ unitária e o coeficiente de *Poisson* zero.

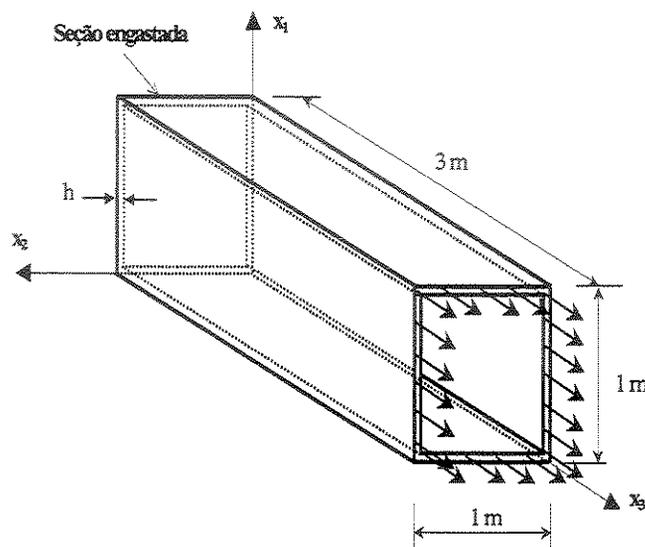


Figura 6.22 Barra em balanço com seção fechada simétrica.

Conforme mostrado na Figura 6.23, a barra em balanço analisada é composta por quatro macro-elementos, sendo que os mesmos foram engastados na extremidade $x_3 = 0$. A primeira discretização contou com 44 nós de contorno (16 nós para cada macro-elemento) perfazendo um total de 48 micro-elementos (12 micro-elementos para cada macro). A segunda discretização contou com 84 nós de contorno (32 nós para cada macro-elemento) perfazendo um total de 112 micro-elementos (28 micro-elementos para cada macro), sendo que nos cantos foram utilizados nós duplos.

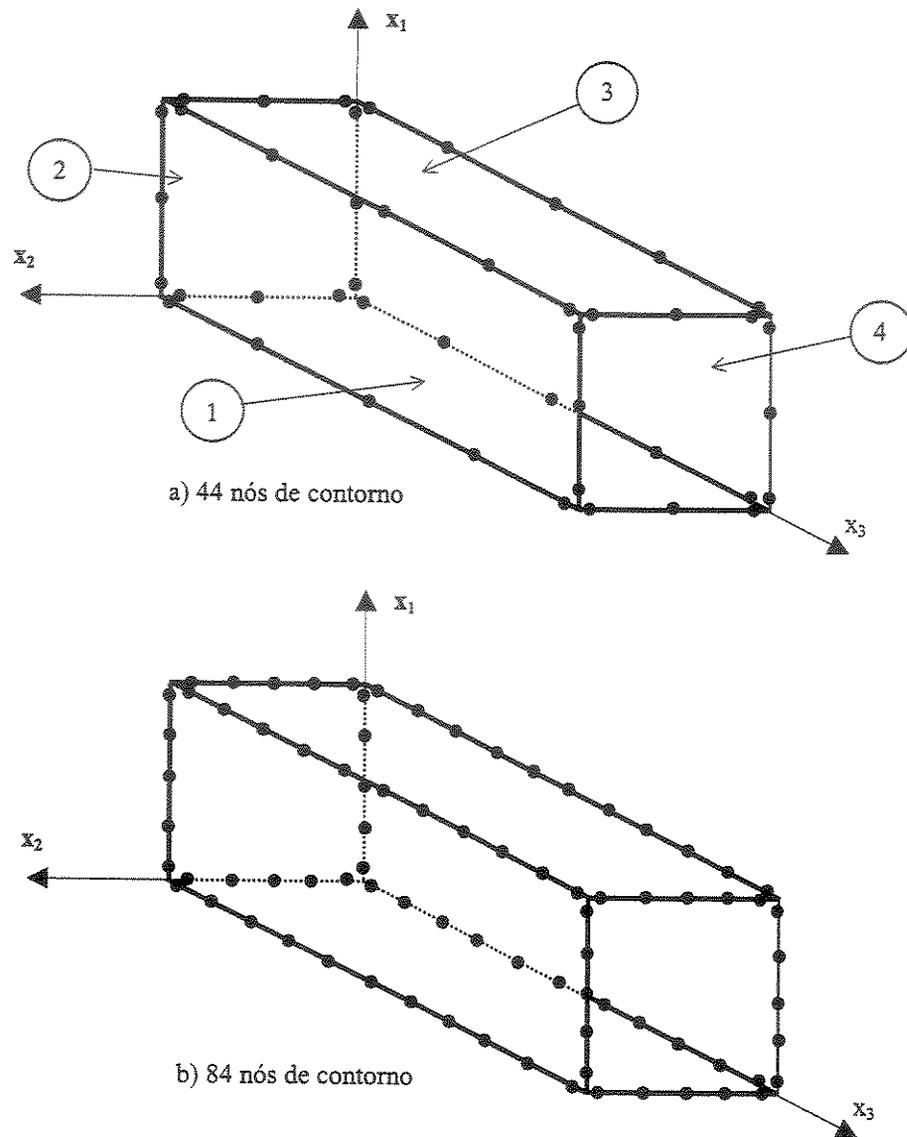


Figura 6.23 Discretizações dos quatro macro-elementos da barra em balanço.

A intenção é simular através da associação de macro-elementos um problema de barra unidimensional com solução conhecida. A solução analítica para o problema de barra unidimensional, apresentam as seguintes frequências naturais (Clough e Penzien, 1975):

$$\omega_n = \frac{2n-1}{2} \pi \sqrt{\frac{EA}{m\ell^2}} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (6.25)$$

Aplicando os valores da geometria e das constantes elásticas iniciais do problema, encontrou-se valores unitários para a massa por unidade de comprimento m e para a área A . Então, os valores das três primeiras frequências naturais da solução analítica apresentada em (6.25) conduz a $\omega_n = 0.7405, 2.2214, 3.7024$ rad./s. Adotou-se uma faixa de frequência de 0 a 5 para a resolução numérica do problema. Desta forma, construiu-se a Função de Resposta em Frequência (FRF) para os deslocamentos na direção x_3 de um nó da extremidade livre da barra.

A Tabela 6.2 apresenta os valores comparativos para as três primeiras frequências naturais calculadas analítica e numericamente, para a primeira discretização de 44 nós de contorno, sendo que são dois os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação.

Tabela 6.2 Três primeiras frequências de uma barra engastada-livre (44 nós de contorno).

Frequências naturais	ω_1	ω_2	ω_3
$a_1 = 1/4$ e $a_2 = 1/2$	0.7312	2.2126	3.6745
$a_1 = 1/2$ e $a_2 = 1/4$	0.7507	2.2126	3.6745
Analítico	0.7405	2.2214	3.7024

Observando-se a Tabela 6.2, pode-se concluir que para os dois casos analisados existe uma concordância dos valores numéricos das três primeiras frequências para os valores analíticos, com porcentagem de erro relativamente baixas. Cabe lembrar que o valor numérico de frequência é escolhido quando o mesmo atinge o pico dos valores de deslocamento, dentro da faixa de frequências adotada.

A Tabela 6.3 apresenta os valores comparativos para as três primeiras frequências naturais calculadas analítica e numericamente, para a segunda discretização de 84 nós de contorno, sendo que são dois os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação.

Tabela 6.3 Três primeiras frequências de uma barra engastada-livre (84 nós de contorno).

Frequências naturais	ω_1	ω_2	ω_3
$a_1 = \frac{1}{4}$ e $a_2 = \frac{1}{2}$	0.7312	2.2126	3.6940
$a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_2 = \frac{1}{4}$	0.7312	2.2321	3.6940
Analítico	0.7405	2.2214	3.7024

Observando-se a Tabela 6.3, pode-se concluir que para os dois casos analisados também que existe uma boa concordância dos valores numéricos das três primeiras frequências para os valores analíticos, com porcentagem de erro relativamente baixas.

Na sequência, são apresentadas as Funções de Resposta em Frequências do deslocamento \times frequência para o número de passos $n^* = 8$, para as duas discretizações adotadas, como mostram os Gráficos 6.3 e 6.4. São apresentados os tempos de processamento (tp) de cada FRF e também os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação onde são realizadas as integrações.

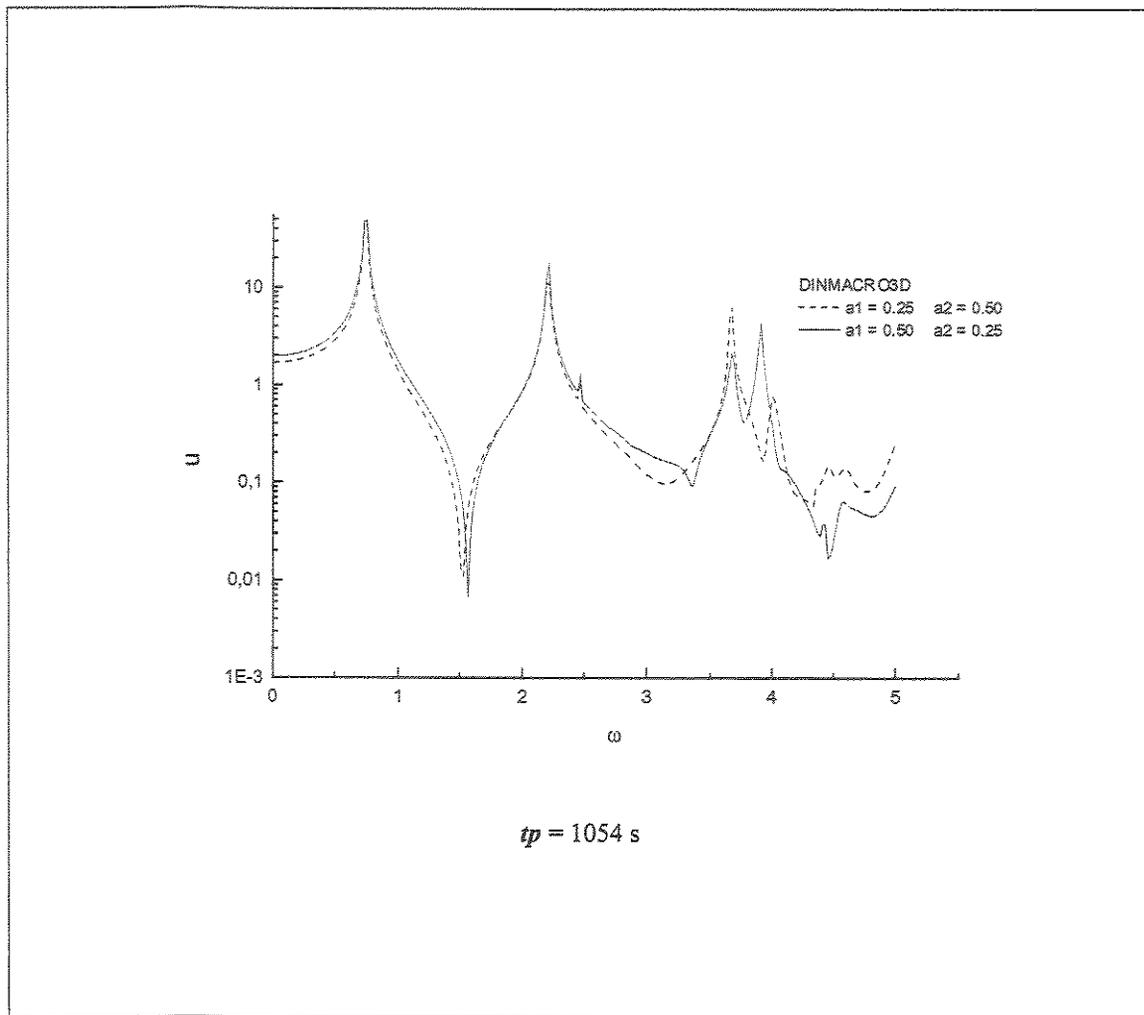


Gráfico 6.3 FRFs do deslocamento na direção x , da extremidade livre (44 nós de contorno).

Analisando o gráfico 6.3, pode-se observar que estão muito próximos os resultados apresentados para os dois casos em questão, no que diz respeito a representação das três primeiras frequências da barra. Contudo, a partir da terceira frequência natural os valores são divergentes.

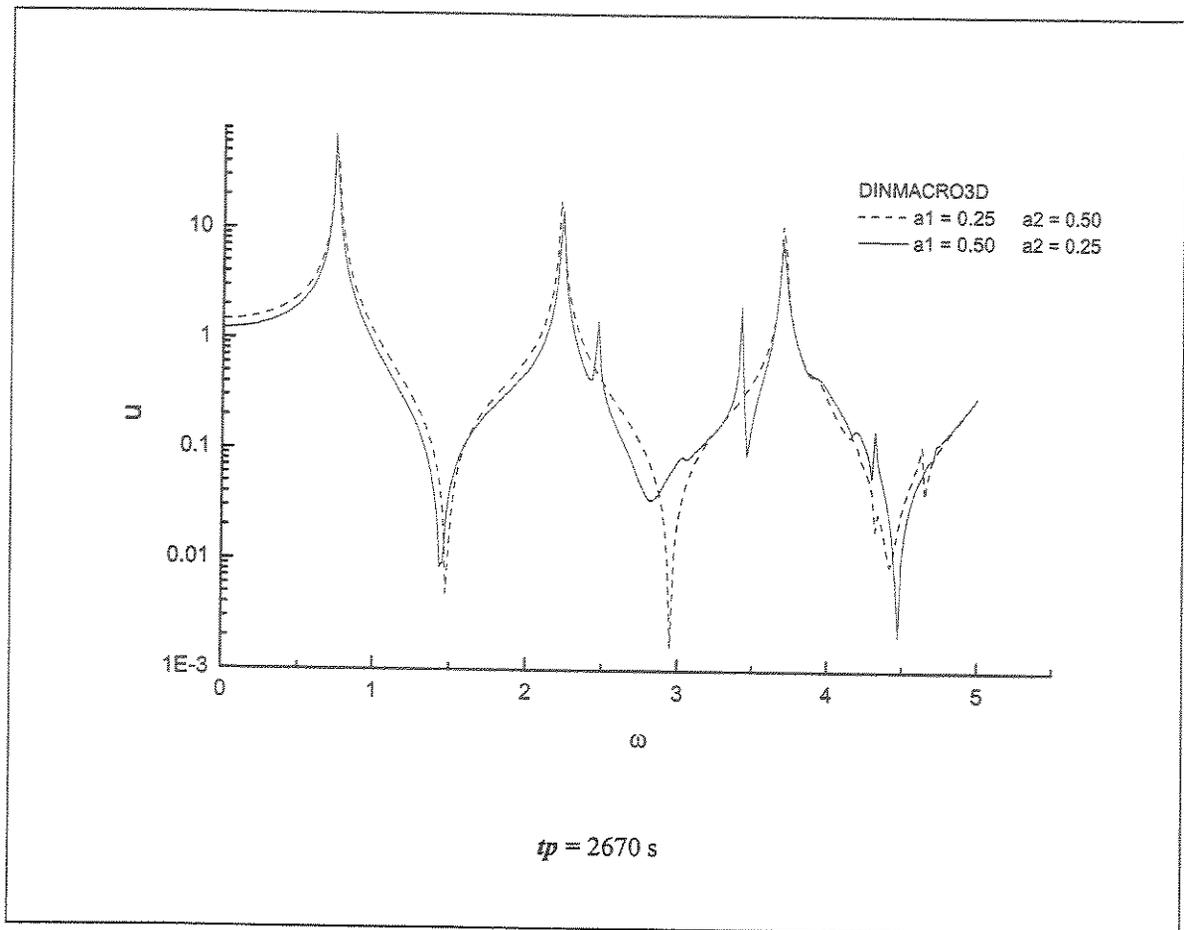


Gráfico 6.4 FRFs do deslocamento na direção x_3 da extremidade livre (84 nós de contorno).

Analisando o gráfico 6.4, no que diz respeito a representação das três primeiras frequências da barra, pode-se observar novamente que estão muito próximos os resultados apresentados para os dois casos em questão, sendo que agora é possível observar com nitidez os picos de frequência. Contudo, o posicionamento do ponto de colocação na metade do comprimento dos elementos consecutivos apresentou uma FRF com algumas inconsistências numéricas.

Como última análise deste exemplo, nas Figuras 6.24, 6.25 e 6.26 são apresentados a parte real dos três primeiros modos de vibração da estrutura composta por dois macro-elementos. Estes modos de vibração foram obtidos a partir dos deslocamentos transversais na direção x_3 dos nós do contorno, sendo plotados na direção x_2 para possibilitar uma melhor visualização.

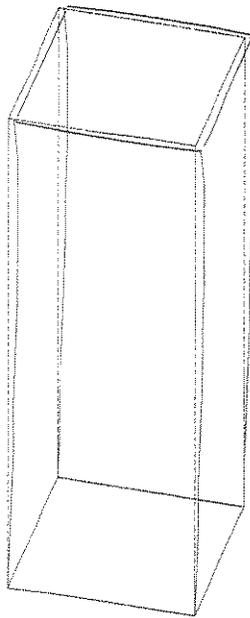


Figura 6.24 Parte real do primeiro modo de vibração da barra em balanço com seção fechada.

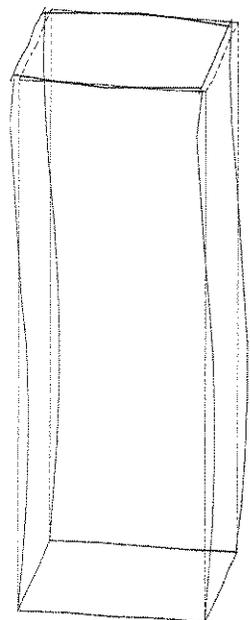


Figura 6.25 Parte real do segundo modo de vibração da barra em balanço com seção fechada.

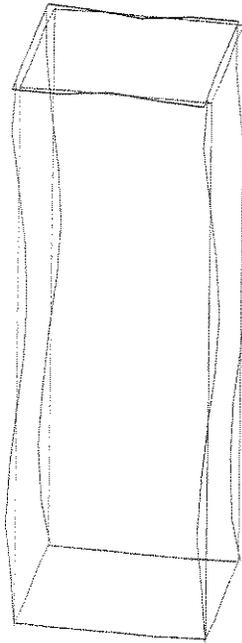


Figura 6.26 Parte real do terceiro modo de vibração da barra em balanço com seção fechada.

6.8.3 Viga engastada nas extremidades com seção fechada simétrica submetida a uma excitação transversal

Conforme mostra a Figura 6.27, analisa-se aqui uma viga engastada nas suas extremidades, de seção fechada simétrica, de comprimento ℓ igual a 7m, submetida a dois esforços periódicos e harmônicos aplicados perpendicularmente a sua seção transversal. As mesas e as almas da viga tem a mesma largura (1m). A espessura de cada elemento individual que compõe a peça é $h = 0.1$ m. O módulo de *Young* E foi considerado igual a 1000 N/m^2 , a densidade foi adotada como $\rho = 0.1145 \text{ Kg/m}^3$ e o coeficiente de *Poisson* igual a 0.3.

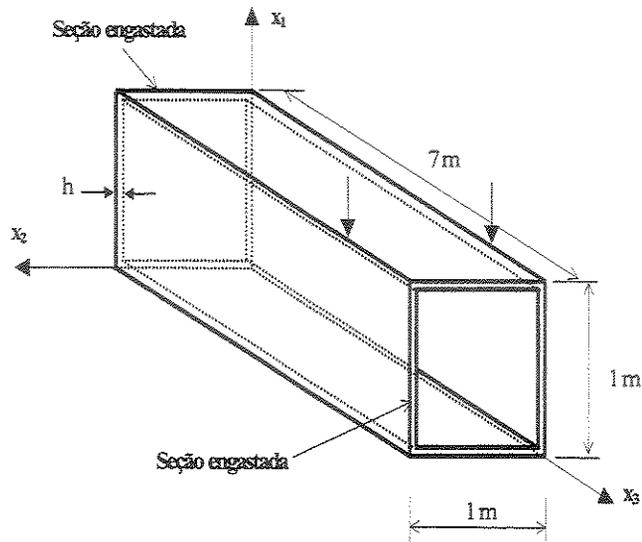


Figura 6.27 Viga engastada-engastada com seção fechada simétrica.

A estrutura analisada é composta por quatro macro-elementos, sendo que os mesmos foram engastados na extremidade $x_3 = 0$ e $x_3 = 7\text{m}$. A discretização dos macro-elementos é idêntica a segunda discretização do exemplo anterior (Figura 6.23b) e contou com 84 nós de contorno (32 nós para cada macro-elemento) perfazendo um total de 112 micro-elementos, sendo que nos cantos foram utilizados nós duplos. A intenção agora é simular através da associação de macro-elementos um problema de viga unidimensional com solução conhecida. A solução analítica para o problema de viga unidimensional, apresenta a seguinte equação para a obtenção das frequências naturais (Clough e Penzien, 1975):

$$\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (6.26)$$

sendo λ_n um parâmetro adimensional que para a viga engastada-engastada assume os seguintes valores (Clough e Penzien, 1975): $\lambda_n = 4.7300, 7.8532, 10.9956$ ($n = 1, \dots, 3$).

Aplicando os valores da geometria e das constantes elásticas do problema, encontrou-se o valores para a massa por unidade de comprimento m e para o momento de inércia I . Então, considerando-se os valores apresentados para o parâmetro adimensional λ_n , os valores das três

primeiras frequências naturais da solução analítica apresentada em (6.26) conduz a $\omega_n = 17.1595, 48.0196, 94.1377$ rad./s. Adotou-se portanto uma faixa de frequência de 0 a 100 para a resolução numérica do problema. Desta forma, construiu-se a Função de Resposta em Frequência (FRF) para os deslocamentos na direção x_1 de um nó do vão central da viga.

A Tabela 6.4 apresenta os valores comparativos para as três primeiras frequências naturais calculadas analítica e numericamente, para a discretização de 84 nós de contorno, sendo que os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação são $a_1 = 1/4$ e $a_2 = 1/2$.

Tabela 6.4 Três primeiras frequências da viga de seção fechada engastada nas duas extremidades.

Frequências naturais	ω_1	ω_2	ω_3
$a_1 = 1/4$ e $a_2 = 1/2$	17.2349	47.9937	91.8763
Analítico	17.1595	48.0196	94.1377

Observando-se a Tabela 6.4, pode-se concluir existe uma boa concordância dos valores numéricos das três primeiras frequências para os valores analíticos

No Gráfico 6.5, são apresentadas as Funções de Resposta em Frequências do deslocamento \times frequência, e também os tempos de processamento (tp) da FRF.

Analisando o Gráfico 6.5, pode-se observar os picos para as três frequências naturais do problema da viga engastada-engastada. Há uma boa concordância dos resultados apresentados, no que diz respeito a representação das três primeiras frequências naturais. Contudo, aparecem outros picos de frequência que não estão presentes no caso de viga unidimensional.

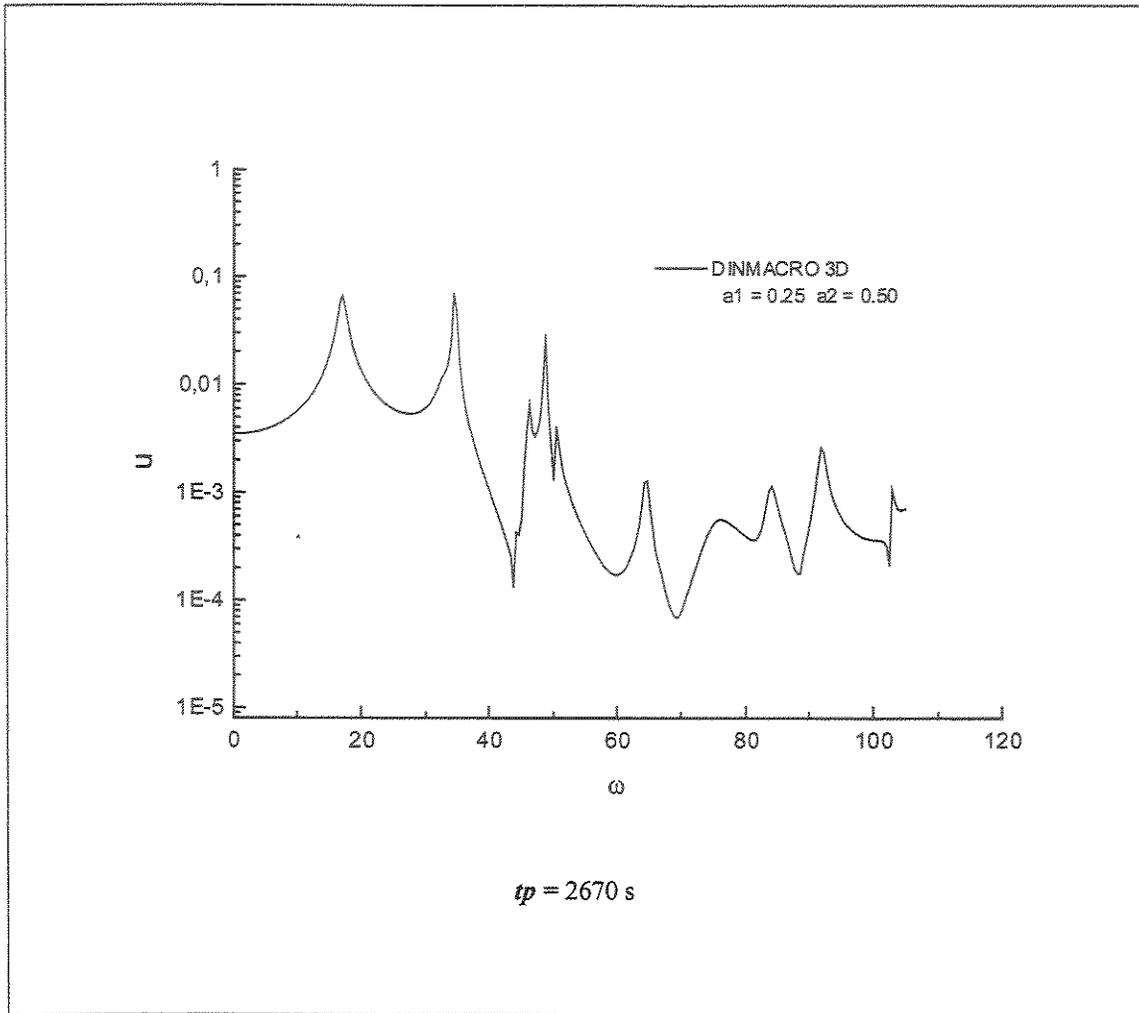


Gráfico 6.5 FRFs do deslocamento na direção x_1 de um ponto do vão central.

Nas Figuras 6.28, 6.29 e 6.30 são apresentados a parte real dos três primeiros modos de vibração da estrutura composta por quatro macro-elementos. Estes modos de vibração foram obtidos a partir dos deslocamentos transversais na direção x_1 dos nós do contorno.

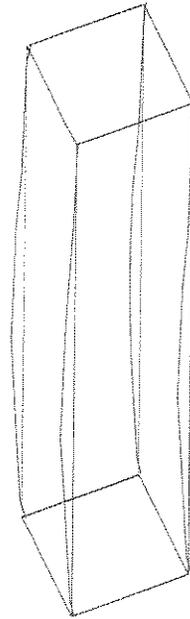


Figura 6.28 Parte real do primeiro modo de vibração da viga engastada nas extremidades com seção fechada.

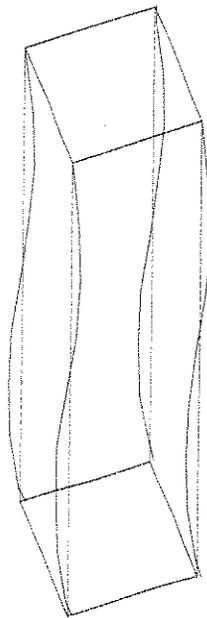


Figura 6.29 Parte real do segundo modo de vibração da viga engastada nas extremidades com seção fechada.

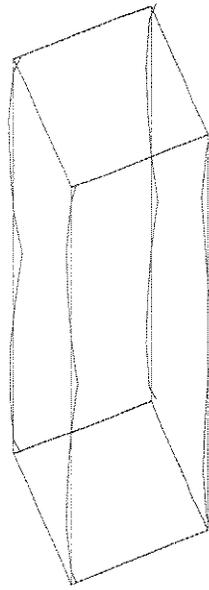


Figura 6.30 Terceiro modo de vibração da viga engastada nas extremidades com seção fechada.

6.8.4 Resposta Estacionária de viga seção T engastada nas extremidades

Este exemplo analisa uma viga com seção transversal em forma de T, com comprimento $\ell = 7\text{m}$, engastada nas suas extremidades e submetida a um esforço periódico harmônico aplicado perpendicularmente ao plano de sua mesa, conforme mostra a Figura 6.31. A mesa da viga tem largura de 1m e a alma tem altura de 1m. A espessura de cada elemento individual que compõe a peça é $h = 0.15\text{ m}$. O valor do módulo considerado foi de *Young* $E=2\text{ N/m}^2$, a densidade foi adotada como $\rho = 1\text{ Kg/m}^3$ e o coeficiente de *Poisson* $\nu=0$.

A estrutura analisada é composta por três macro-elementos, sendo que os mesmos foram engastados nas extremidades $x_3 = 0$ e $x_3 = 7\text{m}$. A análise foi realizada com duas discretizações. Na primeira discretização, mais grosseira, cada um dos três macro-elementos foi discretizado com 40 elementos lineares de contorno, sendo 10 elementos em cada face. Na segunda discretização utilizou-se 160 elementos de contorno em cada macro-elemento. Neste último caso, as faces menores (1m) e maiores (7m) foram respectivamente subdivididas em 10 e 70 elementos.

O número total de nós das estruturas já montadas resultou em 102 e 350 nós, respectivamente. Cada nó possui 4 graus de liberdade, como já explicitado. Uma ilustração típica da discretização resultante pode ser visualizada da Figura 6.32.

Para efeitos de validação dos resultados obtidos, efetuou-se uma análise equivalente com um programa comercial baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), Ansys[®]. Na modelagem com o programa comercial foi utilizado um elemento de casca fina, ao qual estava associado um efeito de membrana. Este tipo de elemento aproxima-se bastante da modelagem de placa fina com membrana associada, objeto do presente trabalho baseado no Método dos Elementos de Contorno. Para o caso do MEF a malha era constituída por 3 sub-regiões, de forma análoga aos macro-elementos do MEC. Duas malhas foram testadas, sendo que em cada sub-região estas malhas possuíam, respectivamente, 48 (malha 1) e 560 (malha 2) elementos.

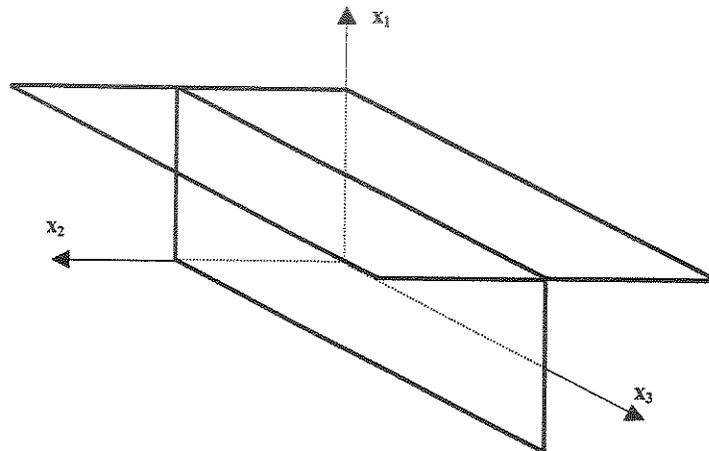


Figura 6.31 Viga bi-engastada com seção T.

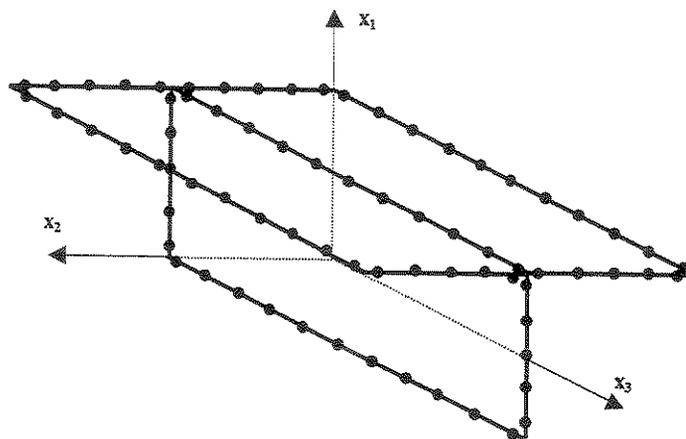


Figura 6.32 Discretização típica dos três macro-elementos da viga de seção T.

No exemplo considerado, obteve-se as frequências naturais e os modos de vibração associados à flexão pura excitando-se a viga T com uma força aplicada verticalmente na junção dos macro elementos que compõe a mesa da viga. Esta forma de excitação simétrica, em relação ao plano x_1-x_3 , não excita modos associados à torção da viga. A Tabela 6.5 apresenta os valores comparativos para as três primeiras frequências naturais calculadas através do MEC e do MEF para as malhas já discutidas. Os fatores escolhidos para o posicionamento do ponto de colocação do MEC são $a_1 = 1/4$ e $a_2 = 1/2$.

Tabela 6.5 Três primeiras frequências da viga de seção T engastada nas duas extremidades.

Frequências naturais	ω_1 (rad/s)	ω_2 (rad/s)	ω_3 (rad/s)
<i>MEC - malha 1</i>	0,169	0,382	0,601
<i>MEC malha 2</i>	0,168	0,381	0,609
<i>MEF - malha 1</i>	0,166	0,372	-----
<i>MEF - malha 2</i>	0,162	0,358	0,571

Os resultados acima mostrados indicam que a implementação do MEC efetuada neste trabalho está correta. Existem pequenas discrepâncias entre os resultados fornecidos pelo MEC e pelo MEF, especialmente para a terceira frequência natural associada à flexão. Pode-se tentar minimizar esta diferença refinando ainda mais as malhas. Mas deve-se também levar em conta que os resultados foram obtidos com métodos distintos e modelos também diferentes de elementos.

No Gráfico 6.6, está apresentada a Função de Resposta em Frequência obtida para a malha 1 do MEC. A excitação ocorreu no ponto de coordenadas ($x_1=1,0$; $x_2=0,5$, $x_3=1,5$) e a resposta foi medida no mesmo ponto. Esta FRF foi obtida com 257 pontos de frequência. Ressalta-se que foi a partir das ressonâncias em FRFs deste tipo, que foram obtidas as frequências naturais do sistema. Associada a cada frequência de ressonância presente na FRF existe um modo de vibração. Nas Figuras 6.33, 6.34 e 6.35 são apresentados os três primeiros modos de vibração da

viga de seção T obtidos através do método desenvolvido no presente trabalho. Uma comparação entre os dois métodos indica que o MEC foi capaz de reproduzir corretamente os modos de vibração da estrutura composta. Isto tende a validar a implementação aqui efetuada.

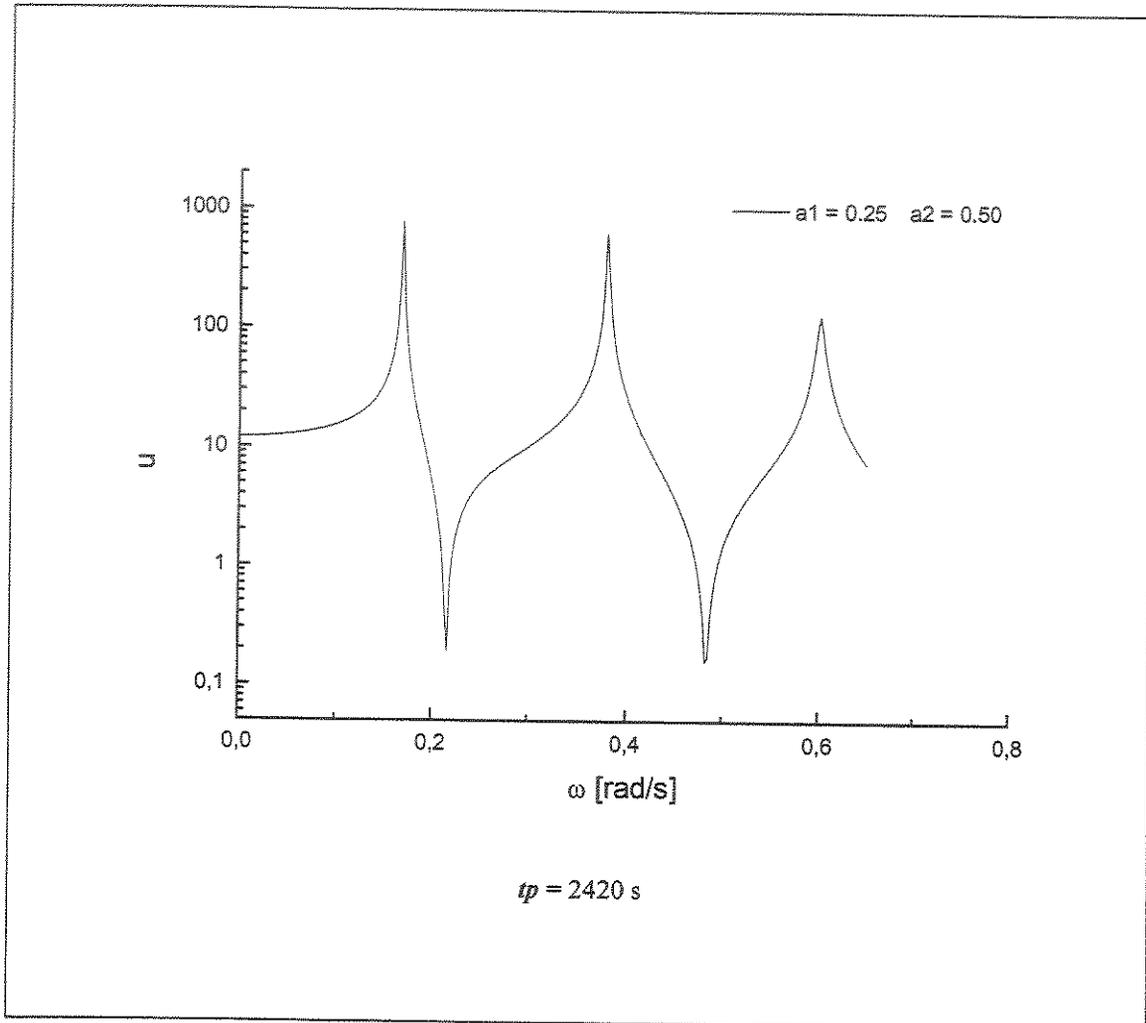


Gráfico 6.6 FRF da viga T modelada através do MEC. Excitação simétrica no plano x_1 - x_3 .

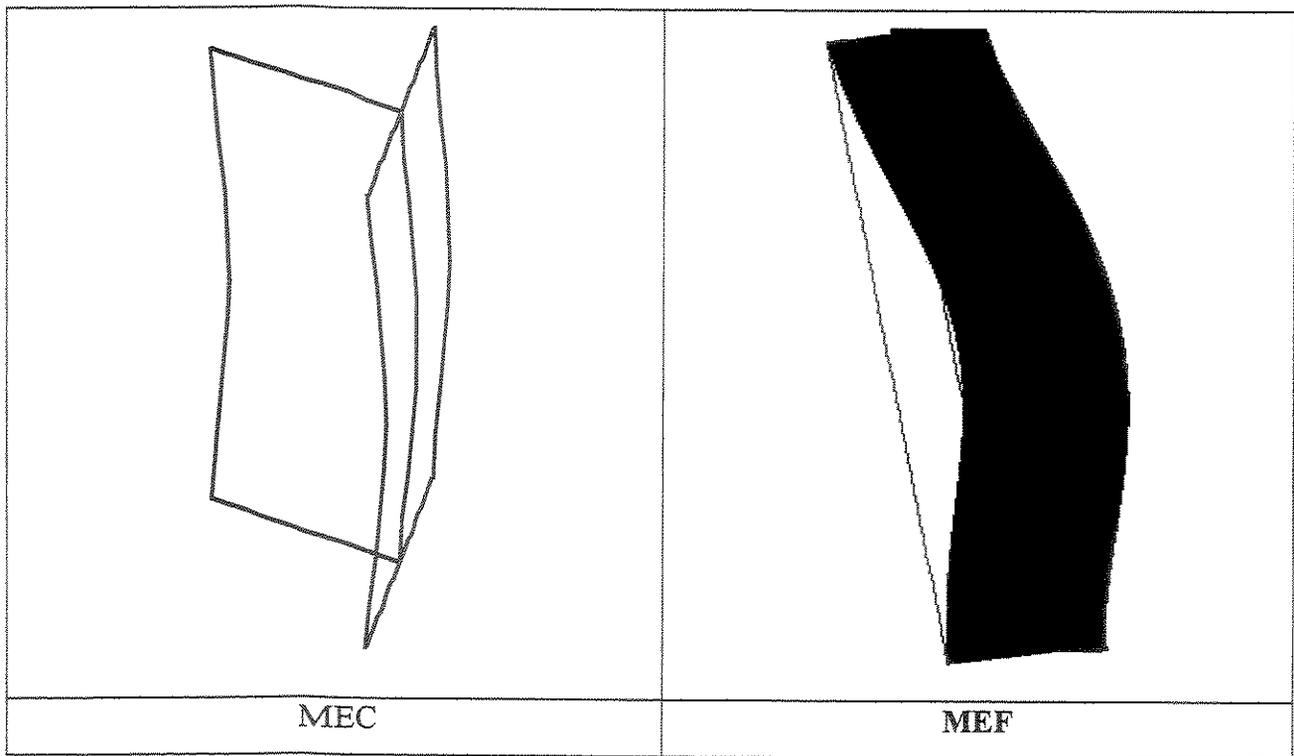


Figura 6.33 Primeiro modo de vibração da viga de seção T engastada nas extremidades.

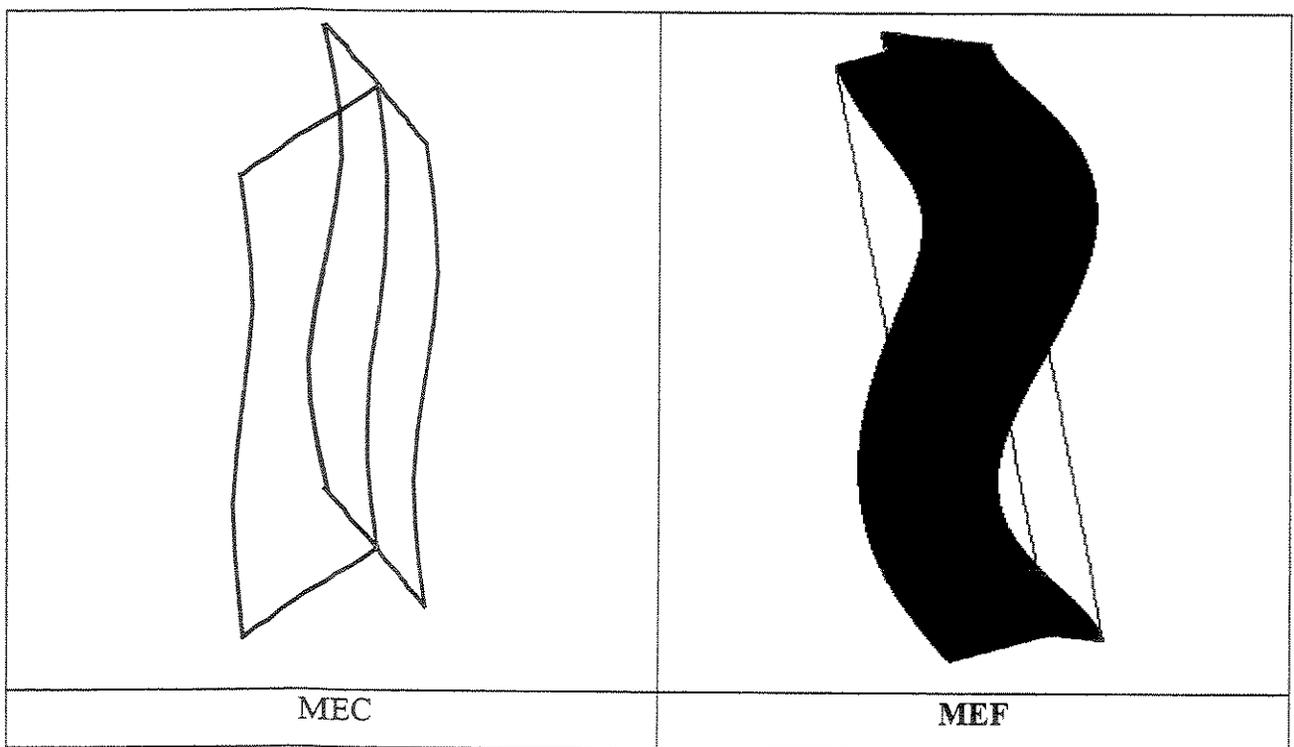


Figura 6.34 Segundo modo de vibração da viga de seção T engastada nas extremidades.

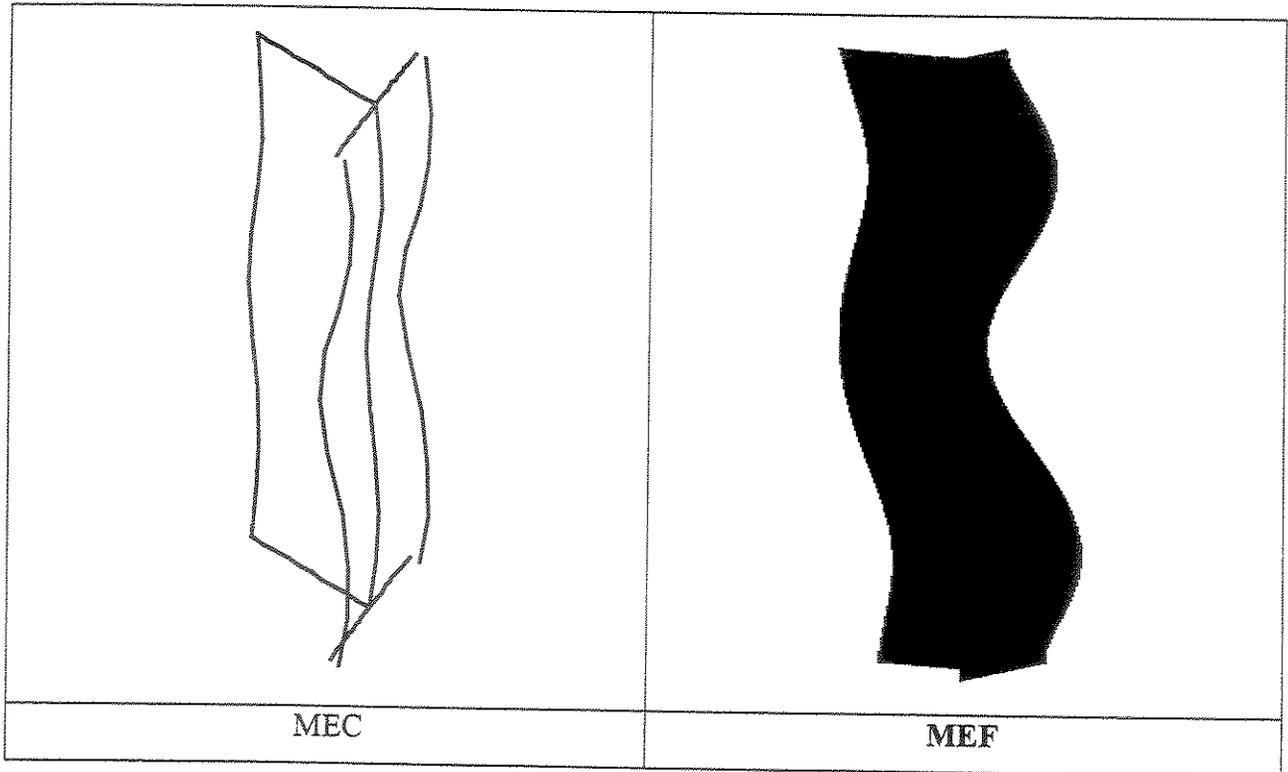


Figura 6.35 Terceiro modo de vibração da viga de seção T engastada nas extremidades.

Para finalizar o capítulo, reiteramos que a associação de macro-elementos compostos por placas finas e pelo efeito de membrana, baseada na teoria do estado plano de tensão, implementados no âmbito do Método dos Elementos de Contorno, mostrou-se capaz de reproduzir o comportamento dinâmico estacionário de estruturas de paredes finas. As características do comportamento dinâmico, quais sejam, as frequências naturais e os modos de vibração foram corretamente determinados.

CAPÍTULO 7

Laje com Fôrma de Aço Incorporada (Steel Deck)

7.1 Introdução

O sistema de lajes mistas com fôrma de aço incorporada começou a fazer parte da construção civil brasileira apenas na década de 90. Nos Estados Unidos, na Europa e na Austrália, este tipo de elemento estrutural é muito mais conhecido devido principalmente às suas vantagens funcionais, estruturais e econômicas. Dentre as muitas vantagens, destacam-se a facilidade de instalação, a alta qualidade de acabamento, a dispensa de escoramentos, facilidade para passagem de dutos e fixação de foros, etc..

Embora difundido mundialmente, este elemento estrutural depende muito de testes laboratoriais para a sua total representação, motivo pela qual a análise numérica é pouco utilizada. Com a intenção de analisar o sistema de lajes *Steel Deck* por meio de tratamento numérico, este capítulo apresenta algumas hipóteses e particularizações para que este objetivo seja alcançado. Em outras palavras, considera-se inicialmente o modelo de folhas poliédricas descrito por Wright (1990). A partir deste modelo, a análise da laje com fôrma de aço incorporada passa a ser uma particularização dos problemas que envolvem as estruturas de parede fina, descritas nos capítulos anteriores. Portanto, o sistema *Steel Deck* passa a ser resolvido como sendo a associação de macro-elementos no espaço, através da técnica de sub-regiões do MEC.

São apresentados alguns exemplos numéricos para demonstrar a acuidade da formulação proposta.

7.2 O sistema de laje mista Steel Deck

O sistema de lajes *Steel Deck* (Figura 7.1) é composto de uma laje de concreto com uma fôrma de aço incorporada, utilizando o perfil metálico como estrutura permanente na qual o concreto é lançado. Durante a fase de construção, o concreto é líquido e a fôrma de aço atua como escoramento e superfície de trabalho, suportando as ações permanentes e as sobrecargas acidentais. Com o concreto endurecido, a fôrma passa a atuar como uma armadura de tração da laje, trabalhando estruturalmente em conjunto com o concreto.

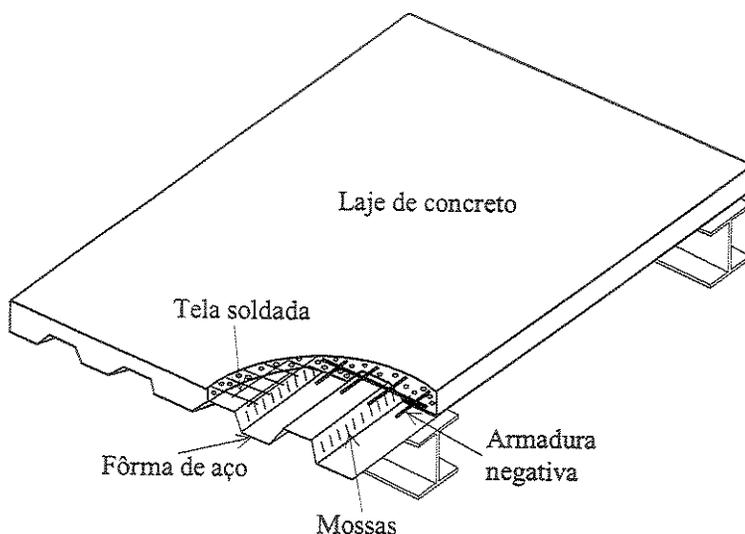


Figura 7.1. Laje com fôrma de aço incorporada (*Steel Deck*).

O sistema resiste aos carregamentos permanentes e acidentais de uma maneira composta, com a ação de flexão no vão central sendo suportada pelo concreto em compressão e a fôrma de aço em tração. O comportamento associado dos dois materiais ocorre se houver a garantia de transmissão de esforços de cisalhamento na interface aço/concreto, seja por meio de ligação química, ou ligação mecânica entre o concreto e a fôrma de aço. As mossas (embossments) ou dispositivos similares de conexão ao esforço cisalhante, perfilados nas reentrâncias e saliências do perfil metálico, permitem que o concreto endurecido e a fôrma de aço atuem conjuntamente

para formar a laje composta. As características das mossas influem bastante na resistência ao cisalhamento horizontal do sistema, sendo comum cada fabricante desenvolver um padrão próprio. O comportamento estrutural do sistema composto é influenciado grandemente pelo concreto que forma a maior parte da laje. Este concreto deve resistir aos esforços de compressão e cisalhamento vertical. Usualmente a sua resistência característica à compressão (f_{ck}) é igual ou superior a 20 MPa. A tela soldada, posicionada nas duas direções da laje, é colocada para controlar as fissuras decorrentes do processo de retração do concreto e da variação de temperatura. A armadura negativa é normalmente colocada em locais onde haja continuidade da laje, existindo portanto regiões de momento negativo.

A normalização atual da laje composta prevê que o modo de ruptura mais verificado experimentalmente é o cisalhamento longitudinal entre a fôrma de aço e o concreto, caracterizado pelo deslizamento relativo entre os dois materiais, conforme mostra a Figura 7.2 seção crítica II (Eurocode 4, 1992). Os outros possíveis estados limites últimos que devem ser verificados incluem a resistência ao momento fletor (seção crítica I), resistência à força cortante vertical e resistência ao puncionamento (seção crítica III) e finalmente resistência ao momento fletor, quando a carga é concentrada ou em linha.

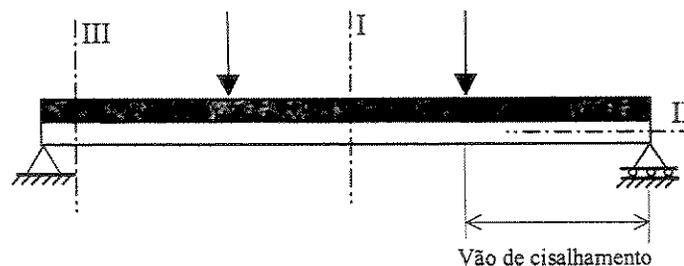


Figura 7.2. Ilustração de possíveis seções críticas (Eurocode 4, 1992).

Em uma laje típica, a espessura do concreto gira em torno de aproximadamente 120 a 200 mm e o comprimento (vão) da mesma fica entre 2 a 4m (Fig. 7.1). A ação deste concreto durante a fase de construção depende de muitos fatores tais como resistência, densidade, tipo de agregado, trabalhabilidade durante o lançamento, etc.. Isto mostra, portanto, a grande dificuldade de se prever com clareza o comportamento exato da laje composta, quando a mesma for submetida a acréscimos de carregamento ao longo do tempo. Segundo Wright (1990), é possível estabelecer através de testes laboratoriais um padrão de comportamento de uma laje típica sujeita

a um aumento progressivo de carga até sua ruptura, conforme mostra a Figura 7.3, sendo este padrão descrito sucintamente a seguir:

Para pequenos carregamentos (Fig. 7.3: fase a) a laje composta age teoricamente como uma viga, com a linha neutra posicionada geralmente na porção de concreto perto do topo da seção. Este comportamento continua até que a tensão no concreto encontre sua tensão de ruptura. O segundo estágio de comportamento ocorre com o início da ruptura (Fig. 7.3: fase b). As fissuras podem ser inicialmente micro fissuras mas, depois que isso ocorre, o concreto diminui sua capacidade de tração e esta zona fissurada não faz mais parte do momento resistente da laje. Como resultado, a linha neutra move-se para cima. Este comportamento apresenta um certo grau de não linearidade; contudo, na prática, isto é muito pequeno, sendo normalmente ignorado na maioria dos métodos de análise. Um outro aspecto deste estágio é a transferência de cisalhamento no concreto fissurado e entre o concreto e a fôrma de aço. De fato, pode-se observar que os próximos estágios de comportamento da laje são dominados pela diminuição da resistência ao cisalhamento. Como o concreto na zona de tração fissura, sua capacidade de transferir cisalhamento diminui e o cisalhamento total sobre a seção é redistribuído para o concreto não fissurado acima da linha neutra e também para o perfil de aço. Como resultado, a capacidade da seção ao cisalhamento é reduzida e ocorrem deformações de cisalhamento. Pode-se deduzir então que a zona de tração no concreto e o perfil de aço ganham uma parte substancial do carregamento cisalhante. Embora este cisalhamento seja transferido pelo entrelaçamento dos agregados do concreto, o esforço cisalhante longitudinal complementar pode ser transferido pela interface entre a fôrma de aço e o concreto. Além do mais, as ligações químicas formadas pela pasta de cimento com a fôrma de aço são surpreendentemente fortes e adequadas para transferir este cisalhamento (Fig. 7.3: fase c).

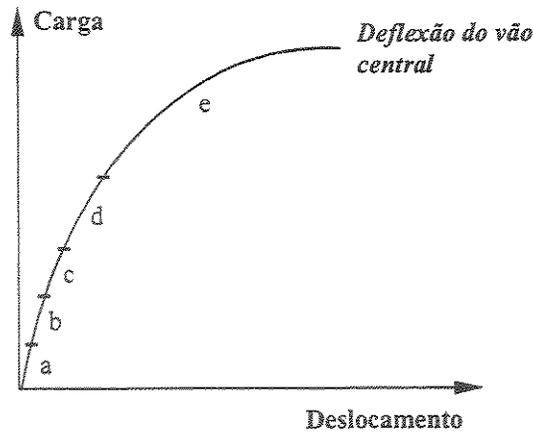


Figura 7.3. Relações de carga \times deflexão do vão central da laje composta (Wright, 1990).

Quando os carregamentos sobre a laje aumentam, as mossas são acionadas no sentido de transferir mais e mais cisalhamento. Isto pode causar algum escorregamento entre os materiais (Fig. 7.3: fase e), com o concreto tendendo a romper os dispositivos de conexão. Crisinel et al. (1986) identificaram dois tipos de colapso. O primeiro, um colapso frágil, ocorre quando as mossas ainda podem transferir pequenas cargas, que levam ao rompimento da laje logo depois que as ligações químicas entre o aço e o concreto se rompem. O segundo, um colapso dúctil, ocorre quando as mossas continuam a transferir cisalhamento mesmo depois que as ligações químicas entre o aço e o concreto tenham se rompido. Entretanto, segundo Wright (1990), o comportamento deste tipo de laje na fase de colapso é relativamente imprevisível, mesmo com o uso de testes laboratoriais. Segundo ele, depois que as mossas são requisitadas a trabalhar em sua capacidade máxima, a análise do seu comportamento envolve deformações plásticas consideráveis. Isto dependerá essencialmente da análise da extensão das fissuras na zona de tração do concreto. Embora estas fissuras possam ocorrer em níveis de carregamento relativamente baixos, a exata extensão das mesmas é de difícil detecção. Adicionalmente, mesmo que a largura da seção fissurada possa variar ao longo do comprimento da laje, o seu efeito é pequeno em comparação com o comportamento geral da peça. Além do mais, as fissuras no concreto e o escorregamento entre o concreto e o aço podem apresentar deformações cisalhantes relativamente grandes, a qual pode influenciar grandemente o comportamento geral da laje. A quantificação da deformação por cisalhamento é dependente da extensão das fissuras, da largura das mesmas e da rigidez da transferência longitudinal de cisalhamento entre o concreto e a fôrma

de aço. Em consequência disto, uma hipótese razoável e conservadora é a de que a laje composta possa se comportar como uma viga prismática e que a tração no concreto não é considerada no cálculo da flexão. Portanto, uma conservadora descrição e análise linear elástica do comportamento da laje composta deve permanecer aproximadamente entre as fases (c) e (d) da Figura 7.3.

As normas de cálculo atuais ASCE (1992), Eurocode 4 (1992), BS 5950 Parte 4 (1994) e a norma brasileira NBR 14323 (1999) mostram que os procedimentos para análise do comportamento da laje composta são baseados em equações derivadas empiricamente. As mesmas prevêm dois métodos de verificação, ambos dependentes de ensaios experimentais: o método m-k e o método da interação parcial. Estes métodos empíricos dependem de testes individuais para cada tipo de perfil de aço a ser utilizado. Uma alternativa aos ensaios experimentais foi apresentada por Wright (1990), onde descreveu o sistema de lajes Steel Deck através de um modelo de folhas poliédricas. A descrição deste modelo é feita a seguir.

7.3 O modelo de folhas poliédricas de Wright

Uma seção transversal típica representativa do modelo em folhas poliédricas apresentado por Wright (1990) pode ser vista na Figura 7.4.

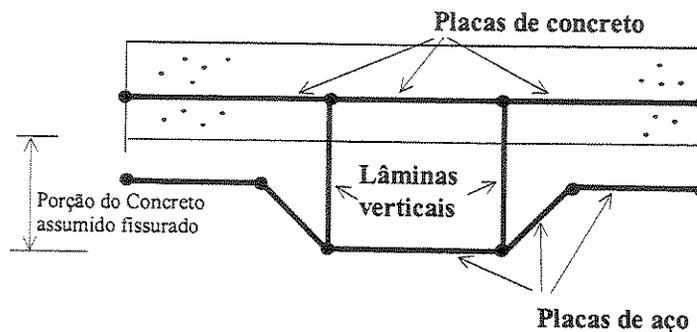


Figura 7.4. Modelagem da laje composta Steel Deck em folhas poliédricas.

A ação principal de flexão na laje composta é registrada por um par formado pela compressão no concreto e tensão no aço. A resistência ao cisalhamento, embora sendo uma parte essencial do esforço na laje, apresenta menor efeito na rigidez global do que o par de momentos. Consequentemente, o sistema de lâminas mostrado na Figura 7.4, foi concebido para separar a ação principal de flexão da ação do cisalhamento. Através desta hipótese o modelo de Wright (1990) assume que o componente estrutural pode ser descrito por folhas poliédricas. Em outras palavras, a porção de concreto não fissurada é assumida como uma placa fina e a porção em chapa dobrada como uma associação de lâminas contendo o estados plano de tensão e de flexão de placas finas. Duas lâminas verticais (dummy elements) contendo apenas o estado plano de tensão são utilizadas para a ligação entre o concreto e o aço. Adicionalmente, estas lâminas verticais são usadas para o estudo do efeito das tensões de cisalhamento no contato aço-concreto e na influência do escorregamento na capacidade portante. O modelo apresentado utiliza a superposição dos estados de flexão de placas finas e estados planos para a formação de um sistema de equações final. Este modelo foi utilizado por Wright para analisar os resultados de 32 testes laboratoriais.

Dentro deste contexto, uma potencial aplicação da formulação desenvolvida no presente trabalho é tratar o modelamento numérico da laje composta, através da adoção de folhas poliédricas por sub-regiões do Método Direto dos Elementos de Contorno. Contudo, é preciso tecer antecipadamente algumas hipóteses e considerações a respeito das propriedades individuais das folhas poliédricas (macro-elementos) a serem consideradas.

7.4 Elementos verticais de cisalhamento (dummy elements)

Segundo Wright (1990), os elementos verticais (dummy elements) que fazem a conexão das placas de concreto com as placas do perfil de aço transferem o cisalhamento entre o concreto e o aço, conforme mostra a Figura 7.4. Para que esta transferência aconteça, e para que esses elementos sejam equivalentes ao concreto que representam, os mesmos necessitam possuir grande rigidez ao cisalhamento. Como no modelo o concreto é considerado fissurado, a adoção exata das dimensões e propriedades dos elementos verticais não é correta. Em outras palavras, os

elementos verticais de cisalhamento precisam possuir grande rigidez ao cisalhamento combinado com uma baixa resistência à flexão. Sabe-se que em um material elástico e isotrópico, a relação entre rigidez ao cisalhamento e rigidez à flexão é dada pela lei de Hooke, ou seja:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (7.1)$$

Qualquer mudança no módulo de Young E do elemento vertical, causará uma mudança diretamente proporcional ao módulo de cisalhamento G . Infelizmente, mudanças no módulo de Young causam mudanças na rigidez à flexão do elemento vertical. Além disto, mudanças no coeficiente de Poisson afetarão a rigidez ao cisalhamento do elemento vertical. Todavia, neste caso, esta mudança afetarão muito pouco a rigidez à flexão. No caso extremo, o coeficiente de Poisson pode ser feito negativo. Como os dois elementos verticais mostrados na Figura 7.4 possuem a mesma rigidez ao cisalhamento, eles podem ser determinados através do equacionamento desta rigidez, conforme mostra a Figura 7.5. Por exemplo, assumindo que o concreto seja um material elástico, o seu módulo de cisalhamento é de aproximadamente 10000 N/mm^2 . Uma placa de concreto de largura $b \text{ mm}$ teria uma rigidez ao cisalhamento de $10000 b \text{ N/mm}$. Usando a equação (7.1), pode-se escrever que (Wright, 1990):

$$10000 b = G = \frac{E \times 2h}{2(1 + \nu)} \quad (7.2)$$

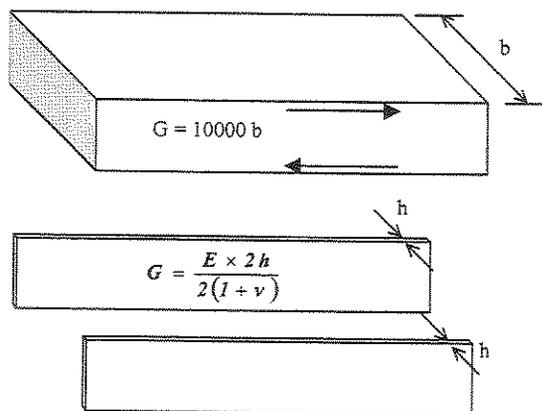


Figura 7.5 Elementos verticais equivalentes (dummy elements).

7.5 Propriedades mecânicas de uma seção composta

As propriedades mecânicas dos materiais utilizados na laje composta Steel Deck, tem importância fundamental na análise deste elemento estrutural. Neste sentido é preciso lembrar que pelo modelo descrito por Wright (1990), assume-se que na laje composta submetida à flexão, a parte do concreto que está submetido a tração encontra-se fissurada. Para quantificar a hipótese de que parte do concreto na laje está fissurada, utilizou-se os conceitos de seção composta transformada apresentado pela ASCE (1992). Uma das propriedades a serem determinadas para a utilização dos conceitos de seção composta é a chamada razão modular.

Certas propriedades de uma seção composta aço-concreto podem ser determinadas pelo método da seção transformada (transformed section method). Ao contrário das especificações de concreto armado, onde uma barra de aço da armadura é transformada em uma área equivalente de concreto, esta metodologia convencionada que a laje de concreto da seção composta é equivalentemente transformada em aço. Como resultado, a área de concreto é reduzida através do uso de uma largura de laje igual a b/n , onde $n = E_s/E_c$ é a razão entre os módulos de elasticidade da fôrma de aço e do concreto, respectivamente.

O módulo de elasticidade da fôrma de aço E_s é adotado, normalmente, de acordo com especificações do fabricante. O módulo de elasticidade do concreto E_c pode ser efetivamente calculado através da seguinte equação da ACI:

$$E_c = w^{1,5} (0,043) \sqrt{f_{ck}} \quad (\text{MPa}) \quad (7.3)$$

onde w é a densidade do concreto em Kg/m^3 e f_{ck} é a resistência à compressão no concreto em MPa. A equação (7.3) pode ser convertida aproximadamente para

$$E_c = w^{1,5} (0,041) \sqrt{f_{ck}} \quad (\text{MPa}) \quad (7.4)$$

A equação (7.4) mostra que E_c é aproximadamente 4% menor, quando comparado com a equação (7.3). Para um concreto com peso normal, a equação (7.4) também pode ser escrita da seguinte forma

$$E_c = 4600 \sqrt{f_{ck}} \quad (\text{MPa}) \quad (7.5)$$

Definidas as propriedades mecânicas dos materiais utilizados na laje composta, é possível determinar a chamada razão modular. A Tabela 7.1 indica alguns valores práticos usualmente utilizados no cálculo de uma seção composta.

Tabela 7.1 Valores práticos para a razão modular n .

Razão modular $n = E_s/E_c$	f_{ck} (Mpa)
9	21
8 ½	24
8	28
7 ½	31
7	35
6 ½	42

7.6. Profundidade da linha neutra de uma seção composta

No modelo descrito por Wright (1990), a ação principal de flexão é condicionada por um par formado entre a compressão no concreto e a tensão no aço. Este princípio foi aplicado ao modelo mostrado na Figura 7.4, onde um sistema de lâminas foi idealizado para separar a ação de flexão e a ação de cisalhamento. As lâminas horizontais representam a ação de flexão e as lâminas verticais a ação de cisalhamento. É assumido que a maioria do concreto da parte tracionada está fissurado e o concreto remanescente está submetido a compressão somente. A espessura do concreto submetido a compressão é dependente da profundidade da linha neutra

(*N.A.*). Consequentemente, o concreto em compressão pode ser modelado como uma placa fina de mesma espessura, posicionada no meio da seção de concreto não fissurada.

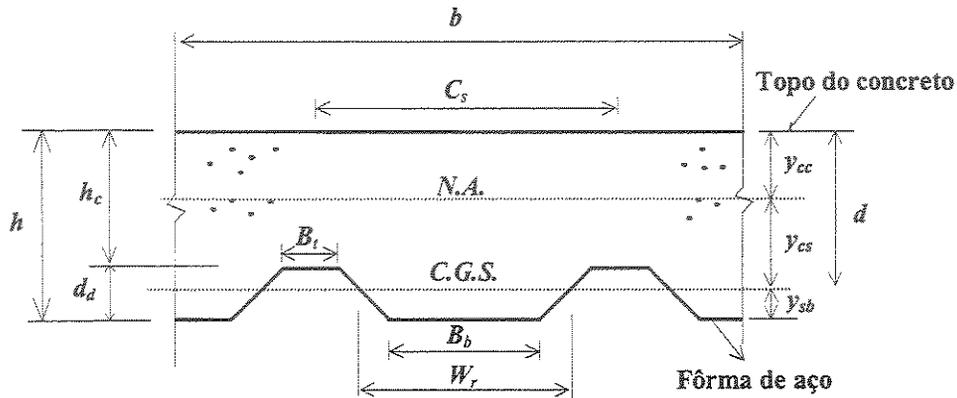


Figura 7.6. Seção composta típica (ASCE, 1992).

A linha neutra da laje composta está posicionada normalmente na área de concreto acima do topo da fôrma de aço. A distância y_{cc} , da fibra extrema de compressão do concreto à linha neutra da seção composta transformada, pode ser determinada usando-se a notação dada pela Figura 7.6. Pela figura, segundo a ASCE (1992), *C.G.S.* é o centróide da seção transversal da fôrma de aço, *N.A.* é a linha neutra da seção composta transformada, b é a largura da laje, B_b é a largura da nervura inferior da fôrma, C_s é o espaçamento de cada célula, d é a altura efetiva da laje, distância entre a fibra extrema de compressão do concreto e o centróide da seção transversal da fôrma de aço, d_d é a altura total do perfil de aço, h é a altura total da laje composta, h_c é a altura de concreto sobre o topo das nervuras da fôrma de aço, W_r é a largura média da nervura inferior, y_{cs} é a distância entre a linha neutra da seção composta ao centróide da fôrma de aço e y_{sb} é a distância entre o centróide e a parte inferior da fôrma de aço.

A distância da fibra extrema de compressão é calculada da seguinte forma: quando y_{cc} é igual ou menor que a altura do concreto, h_c , sobre a parte superior das nervuras da forma de aço, isto é, $y_{cc} \leq h_c$, então (ASCE, 1992)

$$y_{cc} = d \left\{ \left[2\rho n + (\rho n)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \rho n \right\} \quad (7.6)$$

se $y_{cc} > h_c$, utiliza-se $y_{cc} = h_c$. Em (7.6), $\rho = A_s/bd$ é a razão de reforço entre a área A_s da fôrma de aço e a área efetiva de concreto (bd), $n = E_s/E_c$ é a razão modular, E_s é o módulo de elasticidade da fôrma de aço e E_c é o módulo de elasticidade do concreto.

A equação (7.6) é baseada nos conceitos de seção de concreto armado transformada, utilizando as hipóteses apresentadas pela ASCE (1992). O seu desenvolvimento é baseado no conceito de que a parte de concreto submetida à tração está fissurada.

7.7 Modelagem numérica da laje com fôrma de aço incorporada

Nesta seção, é analisado um sistema de laje com fôrma de aço incorporada por meio da associação de macro-elementos no espaço. A formulação direta do método dos elementos de contorno, desenvolvida nos capítulos anteriores, foi utilizada para resolver o modelo em folhas poliédricas apresentado por Wright (1990). A Figura 7.7 mostra as propriedades geométricas da seção transversal adotada por Wright (1990) para a laje composta.

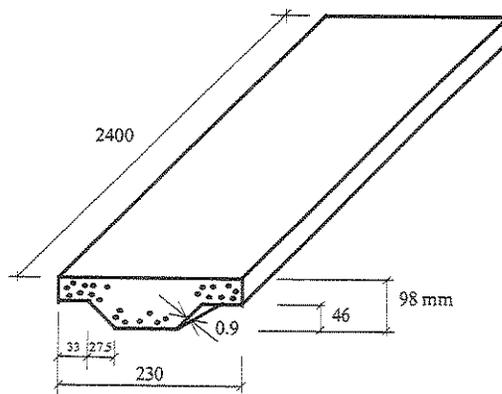


Figura 7.7 Perfil típico, adotado para a laje composta (Wright, 1990).

A Figura 7.8, descreve o modelamento estrutural e a implementação adotada do MEC para o perfil típico apresentado pela Figura 7.7. O acoplamento entre a laje de concreto e a fôrma de aço é feito por dois macro-elementos verticais (dummy elements). As suas características e propriedades são determinadas através do desenvolvimento mostrado na seção 7.4. O comportamento do concreto, na parte superior da seção, é representado por macro-elementos horizontais. As características e propriedades destes macro-elementos horizontais são

determinadas pelo desenvolvimento mostrado na seção 7.6. A fôrma de aço é representada por macro-elementos posicionados na parte inferior da seção.

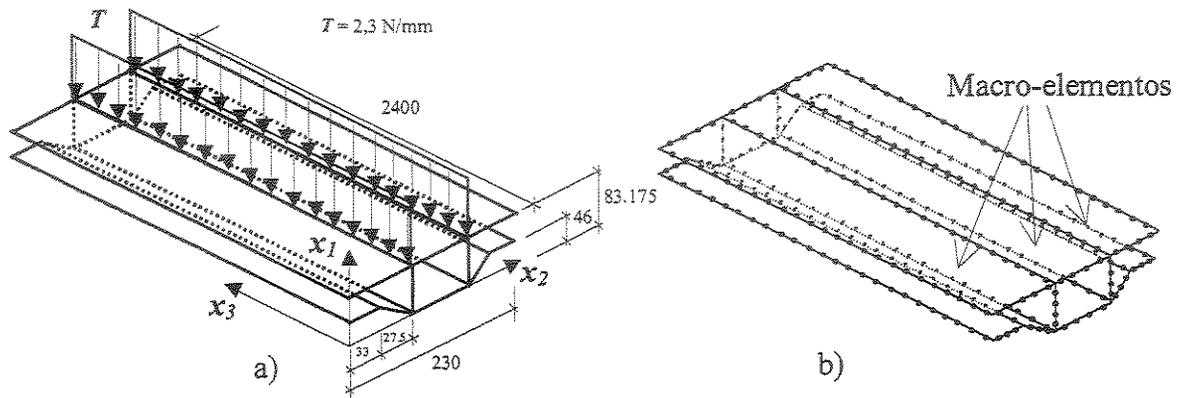


Figura 7.8 Laje composta: (a) Estrutura adotada. (b) macro-elementos, discretização.

Na implementação numérica do MEC foram utilizados na discretização do contorno 258 nós e 10 macro-elementos contendo 388 elementos de contorno. A estrutura foi adotada simplesmente apoiada nas suas extremidades e livre ao longo do seu comprimento. Nas duas seções das extremidades, estão impedidos todos os deslocamentos nas direções x_1 e x_2 do sistema global de coordenadas. As propriedades mecânicas dos macro-elementos são independentes para cada placa individual. A Tabela 7.2 apresenta propriedades mecânicas e geométricas individuais dos materiais dos macro-elementos adotados.

Tabela 7.2 Propriedades mecânicas e geométricas dos macro-elementos.

[N/mm]	E	ν	G	h
Concreto	23000,0	0,17	10000,0	29,65 (y_{cc})
Fôrma de aço	200000,0	0,0	100000,0	0,9
Dummy	23000,0	-0,999	$\frac{E \times 2h}{2(1 + \nu)}$	0,1

O problema foi resolvido assumindo-se carregamentos transversais equivalentes aplicados ao longo dos 34 nós de contorno dos dois macro-elementos verticais do modelo (Figura 7.8a). O carregamento transversal adotado foi de 2,3 N/mm, para cada nó de contorno. Os resultados obtidos nos pontos de contorno **a**, **b**, **c**, **d**, e da seção transversal do meio do vão mostrada na Figura 7.9, são comparados na Tabela 7.3 com os resultados apresentados por Wright (1990) através de seu modelo de folhas poliédricas e de uma aproximação clássica de vigas.

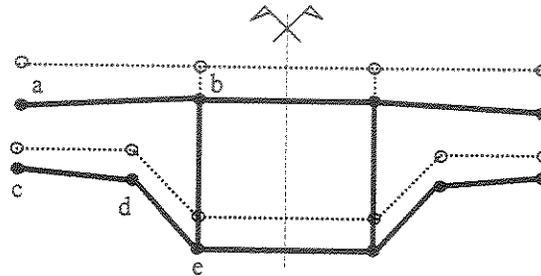


Figura 7.9 Pontos de contorno da seção transversal do meio do vão da laje composta.

Os resultados apresentados mostram uma boa concordância com os resultados obtidos por Wright (1990). O seu modelo de folhas poliédricas, apresentou uma deflexão do vão central de 11,08 mm para o carregamento imposto. A sua aproximação clássica de vigas, apresentou uma deflexão do vão central de 11,25 mm para o mesmo carregamento.

Tabela 7.3 Deslocamentos da seção transversal do meio do vão da laje.

Nós de contorno	Deslocamentos (mm)			
	$a = 1$	$a = 1/2$	$a = 1/4$	$a = 1/8$
a	11,07	11,24	8,23	5,00
b	11,03	11,20	8,18	4,96
c	10,28	10,42	7,68	4,75
d	10,72	10,89	7,98	4,88
e	11,06	11,24	8,21	4,98
Wright (1990)	Vigas			11,25
	Folhas poliédricas			11,08

Como pode ser visto, o posicionamento do ponto de colocação altera significativamente os resultados. Contudo, existem parâmetros importantes como, por exemplo, as constantes elásticas de cada material, que também podem influenciar bastante os resultados finais.

7.8 Modelagem numérica de um protótipo experimental de uma laje com fôrma de aço incorporada

Através da aplicação da associação de macro-elementos do MEC, esta seção apresenta uma análise numérica comparativa da relação carregamento \times flecha no meio do vão de um protótipo experimental para uma laje com fôrma de aço incorporada, ensaiada por Melo (1999). A comparação se baseou no comportamento carga no vão \times flecha no meio do vão da laje. A Figura 7.10, mostra o esquema estrutural adotado e as principais dimensões do protótipo analisado.

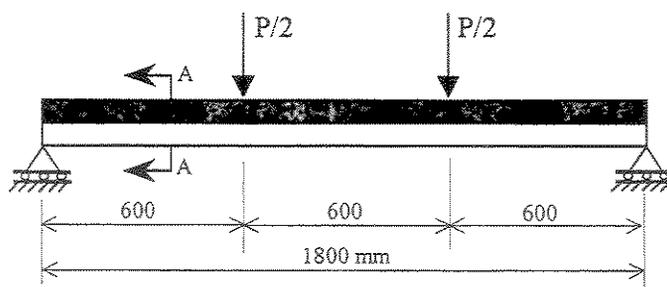


Figura 7.10 Esquema estrutural do protótipo analisado por Melo (1999).

Na construção do protótipo, o perfil de aço utilizado como fôrma incorporada na laje composta foi o Steel Deck MF-75 da Metform S.A (2000). As dimensões transversais da seção de corte A-A (Figura 7.10) da laje composta é mostrada pela Figura 7.11.

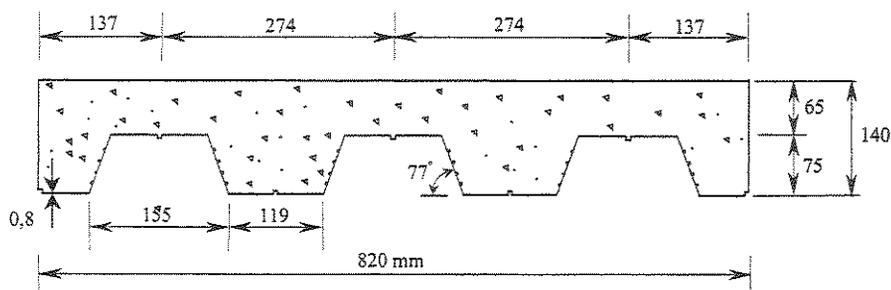


Figura 7.11 Corte A-A do protótipo analisado por Melo (1999).

No Gráfico 7.1, são apresentados os resultados encontrados por Melo (1999), da relação carregamento \times flecha no meio do vão, através de ensaio laboratorial do esquema mostrado na Figura 7.10.

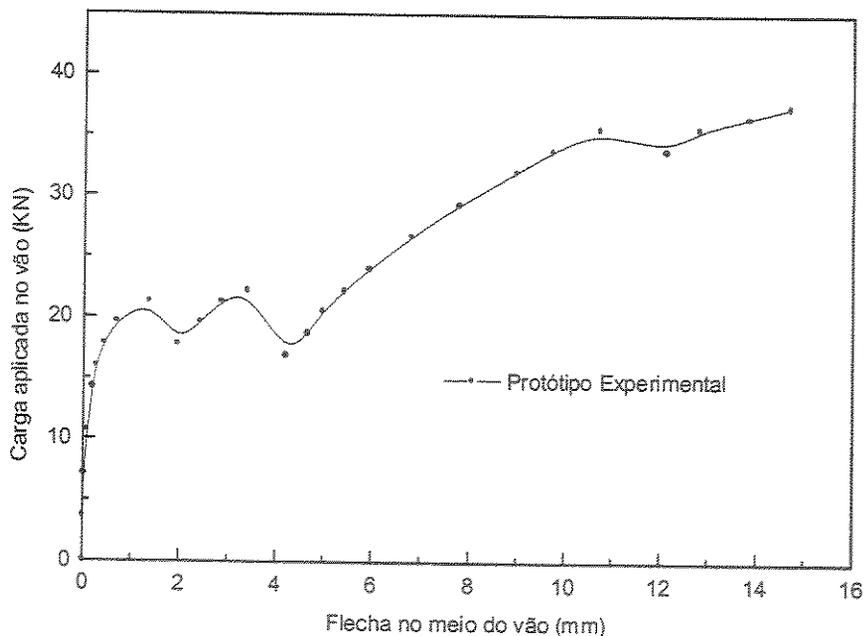


Gráfico 7.1 Curva carga × flecha no meio do vão (Melo, 1999).

Pelo gráfico 7.1, pode-se observar que o comportamento inicial do protótipo se encontra na fase elástica. Após a fissuração do concreto, há uma redução da rigidez da laje e sucessivas acomodações de carga ocorrem. É nesta fase que se inicia a interação parcial entre o concreto e a fôrma metálica. A transferência do fluxo de cisalhamento passa a ser representada pelas mossas da fôrma de aço que impedem que a laje perca imediatamente a sua capacidade resistente. A estrutura entra em colapso quando as mossas perdem totalmente a eficiência em transmitir o cisalhamento. Na análise numérica do problema, o comportamento real do protótipo experimental pode ser linearizado, conforme mostrado pela Figura 7.3, para a obtenção de um valor numérico representativo do modelo.

Para representar a seção transversal original do protótipo construído por Melo (1999), na aplicação do MEC, foi adotada uma célula C_s (ASCE, 1992), exatamente igual a 1/3 do tamanho original. A Figura 7.12, mostra as propriedades geométricas da célula adotada para representar o modelo adotado para a resolução numérica do protótipo experimental. A tela soldada e uma provável armadura negativa, não foram consideradas no modelo numérico.

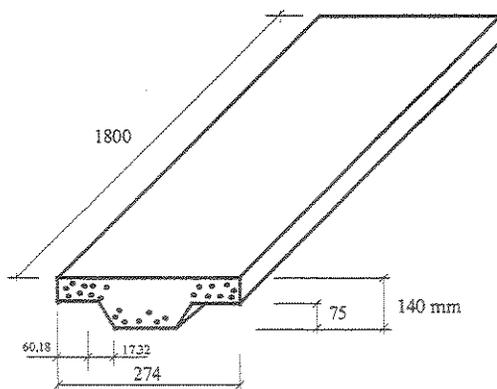


Figura 7.12 Célula adotada para a análise do protótipo experimental.

O modelamento estrutural e a implementação adotada pelo MEC para o perfil típico apresentado pela Figura 7.12, é semelhante ao apresentado na seção anterior. O acoplamento entre a laje de concreto e a fôrma de aço é feito por dois macro-elementos verticais (dummy elements). O concreto, na parte superior da seção, é representado por macro-elementos horizontais e a fôrma de aço é representada por macro-elementos posicionados na parte inferior da seção, conforme mostra a Figura 7.13.

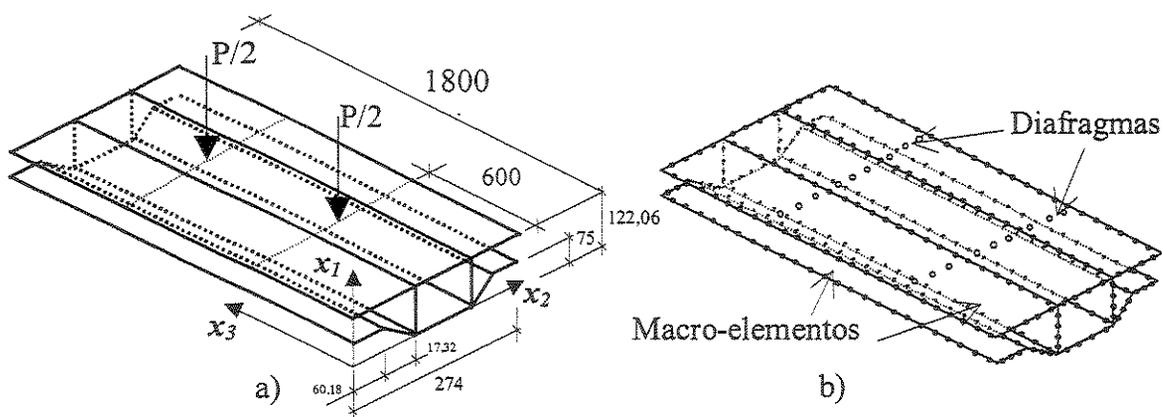


Figura 7.13 Laje composta: (a) Célula adotada. (b) Discretização.

Novamente, foram utilizados na discretização do contorno 258 nós e 10 macro-elementos contendo 388 elementos de contorno, sendo a estrutura simplesmente apoiada nas suas extremidades. A Tabela 7.4 apresenta propriedades mecânicas e geométricas individuais dos materiais dos macro-elementos adotados.

Tabela 7.4 Propriedades mecânicas e geométricas dos materiais dos macro-elementos utilizados para a laje composta.

[N/mm]	E	ν	G	h
Concreto	23000,0	0,17	10000,0	35,87 (y_{cc})
Fôrma de aço	194187,0	0,0	97093,5	0,8
Dummy	23000,0	-0,999	$\frac{E \times 2h}{2(1 + \nu)}$	0,1

O problema foi resolvido assumindo-se carregamentos transversais aplicados em dois diafragmas posicionados exatamente nos locais de aplicação de carga do protótipo real (Figura 7.10). O carregamento adotado foi de exatamente 1/3 do carregamento aplicado no protótipo real pois, a seção transversal da célula adotada para a análise numérica é exatamente 2/3 menor que a seção transversal do protótipo real.

Na Tabela 7.5 são apresentados os resultados numéricos obtidos para uma carga equivalente aplicada de 7,1 KN (23,1 KN no protótipo real). Estes resultados foram extraídos dos pontos de contorno a, b, c, d, e (Figura 7.9) da seção transversal do meio do vão da laje. O fator de posicionamento dos pontos de colocação (fator a) foi adequadamente alterado para verificar sua influência neste problema específico. Os valores numéricos finais são comparados com o resultado experimental apresentado por Melo (1999).

Tabela 7.5 Carga x flecha da seção transversal do meio do vão.

Pontos	Flecha (mm)				Melo(1999)
	$a = 1,0$	$a = 1/2$	$a = 1/4$	$a = 1/8$	
a	2,46	2,40	2,49	2,33	2,87
b	2,47	2,41	2,48	2,32	
c	2,41	2,34	2,41	2,28	
d	2,42	2,36	2,43	2,29	
e	2,47	2,41	2,48	2,32	
Carga aplicada no vão $\times(1/3) = 7,1$ KN					

Não é difícil perceber que existem vários parâmetros do modelo numérico adotado que podem variar. Por exemplo, as propriedades mecânicas e geométricas tanto do concreto e do aço como dos elementos verticais de ligação podem facilmente alterar os resultados finais. Em vista disto, não foram feitas alterações nestes parâmetros específicos para possibilitar um padrão de comportamento do modelo.

Neste sentido, dos resultados apresentados pela Tabela 7.5, alterando-se apenas o fator de posicionamento de nó, observa-se que este fator tem pouca influência, provavelmente devido a colocação dos diafragmas rígidos na seção. Com relação aos resultados numéricos, observa-se que os mesmos podem variar bastante dentro da faixa de carregamento adotada (Gráfico 7.1).

Para uma análise mais ampla deste comportamento, de acordo com um procedimento de ensaio, são comparados os resultados de carga \times flecha no meio do vão para os modelos numérico e experimental, conforme mostra o Gráfico 7.2. No modelo numérico, para cada incremento de carga, são plotados os valores obtidos para o ponto b da seção transversal do meio do vão da laje. Adotou-se $a = 1$ para o fator de posicionamento do ponto de colocação, visto que este fator não é preponderante.

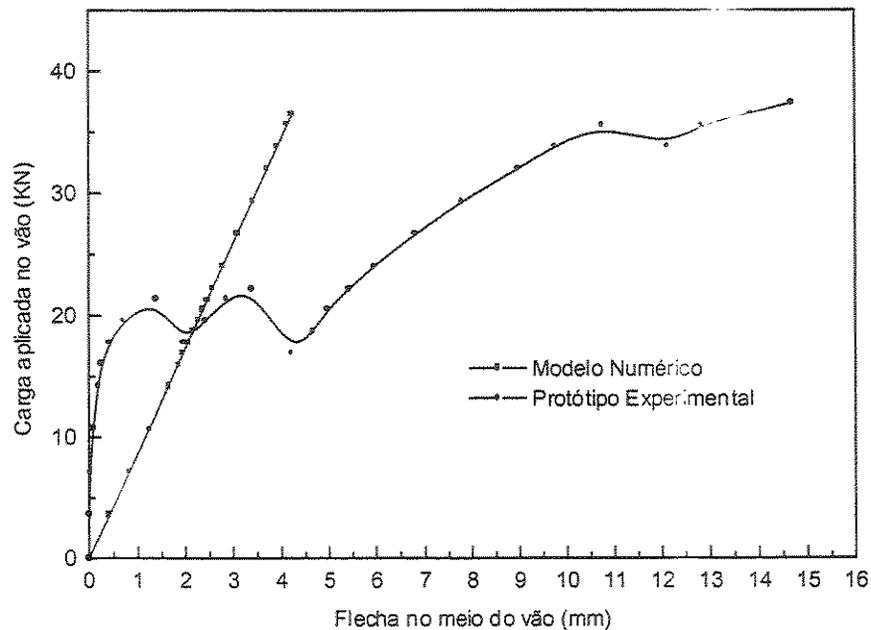


Gráfico 7.2 Curva carga \times flecha no meio do vão dos modelos numérico e experimental.

Dos resultados apresentados pelo Gráfico 7.2, observa-se que a reta linearizada do modelo numérico é válida até na fase onde se inicia a fissuração do concreto (Fases b e c da Figura 7.3). De acordo com este resultado, pode-se concluir que somente é possível estabelecer um padrão de comportamento do modelo numérico frente ao protótipo real na fase linear até o início da fissuração do concreto. Nada se pode concluir além desta fase.

Portanto, na fase elástica de comportamento, parece ser perfeitamente possível construir modelos numéricos pelo MEC representativos do sistema de lajes “Steel Deck”. Para isto, o parâmetro a ser estabelecido nos ensaios reais é exatamente a fase de fissuração do concreto.

CAPÍTULO 8

Conclusões

8.1 Conclusões gerais

A princípio, os principais objetivos a que este trabalho se propôs parecem ter sido atingidos com sucesso. Tanto a análise estática e dinâmica estacionária de peças de parede fina quanto o modelamento do sistema de laje composta “Steel Deck”, atestam a eficácia do uso do Método dos Elementos de Contorno na resolução destes problemas.

A implementação do MEC no estudo das formulações individuais da estática e dinâmica estacionária da elasticidade 2D e da flexão de placas finas, apresentou boa convergência de resultados se comparados com os valores de referência da literatura consultada. Mesmo assim, com perspectiva de aprimoramento do que já foi feito. A técnica de colocação dos pontos singulares fora do domínio bem como a utilização de elementos isoparamétricos lineares contínuos e/ou descontínuos, apresentou resultados satisfatórios em praticamente todos os exemplos analisados. Todavia, existe uma grande influência do posicionamento dos pontos de colocação no resultado final de cada problema. Uma escolha inadequada do posicionamento destes pontos, em alguns casos, pode degenerar totalmente os resultados que se pretende obter. O posicionamento externo localizado a um quarto do comprimento de dois elementos consecutivos apresentaram os resultados mais representativos. O posicionamento externo localizado na metade do comprimento de dois elementos consecutivos, também apresentaram bons resultados.

O nível de discretizações a ser utilizado na resolução dos problemas estáticos vai depender entre outras coisas da sua geometria, das condições de contorno, do tipo de problema, etc.. Contudo, para os problemas analisados neste trabalho, percebeu-se que um nível confiável de discretização do contorno deve ficar sempre acima de 40 elementos lineares. O nível de discretizações do MEC dos problemas dinâmicos estacionários também devem ficar acima de 40 elementos lineares. Entretanto, problemas analisados com discretizações menores, aproximadamente a metade ou até menos, também apresentaram bons resultados.

8.2 Sobre os problemas estáticos de peças de parede fina

A implementação do MEC no estudo das formulações individuais da estática da elasticidade 2D e da flexão de placas finas, apresentou boa concordância nos resultados finais encontrados. Consequentemente, a validação de um macro-elemento foi feita através da resolução de alguns problemas individuais de estado plano e flexão de placa fina. Os resultados encontrados na resolução destes problemas também foram bastante satisfatórios. Os resultados obtidos para as estruturas parede fina, resolvidas pelo MEC através da associação de macro-elementos no espaço, parecem ter sido aceitáveis. Entretanto, através da experiência adquirida com os problemas resolvidos, percebeu-se a forte influência do empenamento nas folhas poliédricas que compõe a estrutura. Percebeu-se também que as condições de contorno e a forma de carregamento devem ser cuidadosamente estabelecidas para a resolução estática das estruturas de parede fina.

8.3 Sobre os problemas dinâmicos estacionários de peças de parede fina

A validação do problema dinâmico estacionário da elasticidade 2D foi feita pelo MEC, através da obtenção das Funções de Resposta em Frequência (FRFs) de alguns problemas individuais conhecidos. As FRFs proporcionaram a obtenção das frequências naturais e dos modos próprios de cada problema específico. Os resultados encontrados com a resolução destes problemas parecem ter sido bastante satisfatórios, comparados com as soluções 1D.

A faixa de frequências a ser adotada para a obtenção das FRFs deve estar entre 65 e 257 ($2^{n^*} + 1$, onde $n^* = 6, 7, 8$), sendo que a faixa com 257 frequências apresentou a menor variação entre o valor obtido e o valor analítico. Além do mais, com um maior refinamento pode-se observar com mais nitidez os picos de frequência natural do sistema. Entretanto, o tempo de processamento é diretamente proporcional ao tamanho da faixa de frequência adotada.

A validação do problema dinâmico estacionário de placas pelo MEC, com a utilização da formulação alternativa apresentada no Capítulo 4, foi feita através da obtenção das Funções de Resposta em Frequência de alguns problemas clássicos de placas. A metodologia que utiliza as soluções fundamentais do deslocamento transversal da placa e da derivada do deslocamento transversal, apresentou respostas muito ruins. Por este motivo, não se apresentou os resultados encontrados para este caso.

As FRFs obtidas com a formulação alternativa do MEC, proporcionaram a obtenção das frequências naturais e a partir destas, foi possível determinar os modos de operação plotando os deslocamentos na direção do carregamento aplicado. A maioria dos resultados encontrados para os casos gerais de placa apresentaram resultados bastante significativos, com pequenas variações. A obtenção das FRFs está diretamente relacionada com as condições de contorno, com a forma de carregamento, bem como com o local de leitura dos resultados. Estes fatores precisam ser cuidadosamente estabelecidos para uma correta obtenção das FRFs e conseqüentemente dos modos de vibração da placa.

Os fatores de posicionamento do ponto de colocação, para a montagem alternativa do sistema de equações do MEC com dois pontos externos distintos, podem influenciar o resultado final a ser obtido. Os posicionamentos externos localizados a um quarto e a metade do comprimento de dois elementos consecutivos, foram os que apresentaram os resultados mais representativos. Para os casos aqui analisados, estes parecem ser os melhores locais para o posicionamento dos nós externos. Outros posicionamentos externos apresentaram resultados menos significativos.

A implementação de um macro-elemento para descrição do comportamento dinâmico estacionário de problemas elastodinâmicos bidimensionais e problemas dinâmicos da flexão de placas finas foi feita de forma semelhante às formulações individuais. A validação da implementação do macro-elemento foi feita através da montagem das Funções de Resposta em Frequência (FRF), em casos individuais das referidas teorias. As FRFs proporcionaram a obtenção das frequências naturais de cada problema específico. Os resultados encontrados com a resolução destes problemas parecem ter sido bastante satisfatórios.

A associação dos macro elementos via sub-regiões do MEC, para reproduzir o comportamento dinâmico estacionário de peças de parede fina, segundo o modelo proposto, também foi feita com sucesso. Ressalta-se aqui que esta associação forneceu um elemento estrutural novo sendo necessário validação do seu comportamento com base no comportamento dinâmico estacionário de peças de seção delgada. A validação da implementação da associação de macro-elementos no espaço 3D foi feita através da montagem das Funções de Resposta em Frequência (FRF), em problemas envolvendo peças de parede fina. As FRFs proporcionaram a obtenção das frequências naturais de cada problema específico. Contudo, mesmo com a obtenção de valores próximos ao valor analítico, os resultados numéricos encontrados foram comparados com resultados analíticos 1D. Esta não parece ser a melhor forma de comparação de resultados, sendo necessário uma comparação mais apurada através de um software comercial de elementos finitos, por exemplo.

8.4 Sobre o sistema de laje mista Steel Deck

A resolução numérica do problema da laje com fôrma de aço incorporada, através da associação pelo MEC de macro-elementos no espaço, proporcionou um melhor entendimento do comportamento da laje composta *Steel Deck*. A adoção de macro-elementos horizontais e inclinados para representar o comportamento do concreto de a fôrma de aço, e de macro-elementos verticais para representar o cisalhamento, apresentou resultados bastante convergentes com o modelo analítico descrito por Wright. Estes resultados atestam a eficácia do MEC na resolução deste problema específico. Desta forma, o modelo de Wright, que trata o problema da

laje composta por meio resolução analítica da associação de folhas poliédricas no espaço, foi adequadamente descrito pelo modelo adotado neste trabalho.

Uma potencial aplicação da metodologia desenvolvida neste trabalho está associada à análise numérica do comportamento real de protótipos construídos para analisar a laje “Steel Deck”. Dos resultados obtidos, observou-se que o modelo numérico reproduz o comportamento deste sistema na fase elástica até o início da fissuração do concreto. Portanto, o parâmetro de comparação a ser obtido é exatamente o início da fase de fissuração do concreto. Este resultados demonstram o potencial da formulação do MEC e atestam a eficácia do modelamento numérico através associação de macro-elementos no espaço para o problema da laje com forma de aço incorporada. Acredita-se que em um futuro próximo, estes elementos estruturais sejam menos dependentes do estudo experimental e que se possa fazer uso dos resultados obtidos neste trabalho.

8.5 Futuros trabalhos

Existem alguns aspectos que poderão ser abordados para a continuidade deste trabalho:

- i) Implementar a formulação apresentada utilizando-se elementos quadráticos.
- ii) Tratar as singularidades nos problemas dinâmicos estacionários da elasticidade 2D e de placas finas.
- iii) Implementar técnica para extrair dados modais das FRFs, considerando uma análise tridimensional dos problemas analisados.
- iv) Analisar outras configurações do sistema de lajes “Steel Deck”, comparando-se adequadamente os resultados do modelamento numérico com resultados obtidos dos protótipos experimentais.

Referências Bibliográficas

- Arizumi Y., Oshiro T., Hamada S. Finite Strip Analysis of Curved Composite Girders with Incomplete Interaction. *Computers & Structures*, v. 15, n. 6, p. 603-12, 1982.
- ASCE. *Specifications for the design and construction of composite slabs*. American Society of Civil Engineers (ASCE) Standard, New York, 1984.
- ASCE 7-88. *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*. American Society of Civil Engineers, American National Standards Institute, New York, 1989.
- ASCE 9-91. *Standard Practice for Construction and Inspection of Composite Slabs*. American Society of Civil Engineers, Steel deck with concrete standards committee, New York, July 1991.
- ASCE 3-92. *Standard for the Structural Design of Composite Slabs*. American Society of Civil Engineers, Steel deck with concrete standards committee of management group F, New York, 1992.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Dimensionamento de estruturas de aço de edifícios em situação de incêndio – procedimento – NBR 14323*, Rio de Janeiro, 1999.
- Banaugh, R. P., Goldsmith, W. Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape. *J. Acoust. Soc. Am.* v. 35, p. 1590-1601, 1963a.
- Banaugh, R. P., Goldsmith, W. Diffraction of steady elastic waves by surfaces of arbitrary shape. *J. Appl. Mech.* v. 30, p. 589-597, 1963b.
- Banerjee, P. K., Wang, H. C., Ahmad. S. Multiregion periodic dynamic analysis by BEM of 2D, 3D and axisymmetric problems. In: *Advanced Dynamic Analysis by Boundary Element Methods, Developments in Boundary Element Methods-7*, Banerjee PK and Kobayashi S (eds), Elsevier Appl. Scis. London, p 27-74, 1992.
- Beskos, D. E. Boundary element methods in dynamic analysis. *Appl. Mech. Rev.* v. 40, n. 1, 1987.
- Beskos, D. E. Dynamic analysis of plates and shallow shells by the D/BEM. In: *Advances in the theory of plates and shells*, G.Z. Voyiadjis and D. Karamanlidis (eds.), Elsevier, Amsterdam, p. 177-196, 1990.
- Beskos, D. E. *Boundary element analysis of plates and shells*. Springer Verlag, Berlin, 1991.

- Beskos, D. E. Boundary element methods in dynamic analysis: Part II (1986-1996). *Appl. Mech. Rev.* v. 50, n. 3, 1997.
- Beskos, D. E., Providakis, C. P., Stamos, C. A. Dynamic response of plates by the domain / boundary element method. *In: Proceedings of 2nd national congress of mechanics*, Athens, June 29-July 1, 1989.
- Bezine, G. P. Boundary integral formulations for plate flexure with arbitrary boundary conditions. *Mech. Res. Comm.*, v.5, n.4, p.197-206, 1978.
- Bezine, G. P. A mixed boundary integral-finite element approach to plate vibration problems. *Mech. Res. Commun.*, v. 7, p. 141-150, 1980.
- Bezine, G. P. A boundary integral equation method for plate flexure with conditions inside the domain. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, v. 17, p. 1647-1657, 1981.
- Bezine, G. P., Gamby, D.A. A new integral equation formulation for plate bending problems. *In: Brebbia, C.A., ed., Recent advances in boundary element methods*. London: Pentech Press, p.327-342, 1978.
- Bezine, G. P., Gamby, D.A. Étude des mouvements transitoires de flexion d'une plaque par la méthode des équations intégrales de frontière. *J. Méc. Theor. Appl.*, v. 1, p. 451-466, 1982.
- Blevins, R. D., *Formulas for natural frequency and mode shape*. Van Nostrand Reinhold Company, 1979.
- Bonnet, M. Méthode des équations intégrales regularisées en élastodynamique. *Bulletin de la Direction des Études et Recherches, Electricité de France*, Serie C, n. 1/2, 1987.
- Bonnet, M., Bui, H. D. Regularization of the displacement and traction BIE for 3D elastodynamics using indirect methods. *In: Advances in Boundary Element Techniques*, Kane JH, Maier G, Tosaka N, and Atluri SN (eds), Springer Verlag, Berlin, 1993.
- Brebbia, C.A. *The boundary element method for engineers*. London: Pentech Press, 1978.
- Brebbia, C. A., Domingues J., *Boundary Elements: an Introductory Course*. Computational Mechanics, Southampton, 1992.
- BRITISH STANDARD BS 5950: Part 4 *Structural use of steelwork in buildings. Part 4: Code of practice for design of floors with profiled steel sheeting*. British Standards Institution, London, 1982.
- BRITISH STANDARD BS 5950: Part 4. *Structural use of steelwork in buildings. Part 4: Code of practice for design of composite slabs with profiled steel sheeting*. British Standards Institution, London, 1994.

- Campos, P. C. *Efeito da continuidade no comportamento e na resistência de lajes mistas com forma de aço incorporada*. Belo Horizonte, 2001. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, 2001.
- Clough, R. W., Original formulation of the finite element method. *J. Finite Elem. Anal. Des.*, v.7, n.2, p. 89-101, 1960.
- Clough, R. W., Penzien, J. *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, Singapore, 1975.
- Cole, D. M., Kosloff, D. D., Minster, J. B. A numerical boundary integral equation method for elastodynamics I. *Bull. Seismol. Soc. Am.* v. 68, p. 1331-1357, 1978.
- Gould, Phillip L., *Introduction to linear elasticity*. Springer Verlag, New York, 1983.
- Crisinel, M., Daniels, B., Ren, P., Numerical analysis of composite slab behavior. *Proc. of an Engineering Foundation Conference*. Publ. by ASCE, New York, p.798-808, 1992.
- Cruse, T. A. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem: II. *J. Math. Anal. Appl.* v. 22, p. 341-355, 1968.
- Cruse, T. A., Rizzo, F. J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem: I. *J. Math. Anal. Appl.* v. 22, p. 244-259, 1968.
- Daniels, B., Crisinel, M., Composite slab behavior and strength analysis. Part I: Calculation procedure. *Journal of Structural Engineering*, v.119, n.1, p.16-35, 1993.
- Daniels, B. J., Easterling, W. S., Shortcomings in composite slab design codes. *Proceedings of the 1996 Engineering Foudation Conference on Composite Construction in Steel and Concrete III*. Publ. By ASCE, New York, p.370-379, 1997.
- Danson, D.J. *Analysis of plate bending problems by direct boundary element method*. Southampton: US, 1979. Dissertation (M.Sc.) University of Southampton, 1979.
- De Langre, E., Axisa, F., Guilband, D. Forced flexural vibrations of beams using a time-stepping boundary element method. *In: Boundary Elements in Mechanical and Eletrical Engineering*. Brebbia CA and Chaudonet-Miranda A (eds), Springer-Verlag, Berlin, p. 139-150, 1990a.
- De Langre, E., Axisa, F., Guilband, D. Three-dimensional vibrations of beams structures using a time-stepping boundary element method. *In: Boundary Elements XII*. Tanaka M Brebbia CA and Honma T (eds), Springer-Verlag, Berlin, p. 567-579, 1990b.
- Do Rego Silva, J. J., Acoustic and elastic wave scattering using boundary elements. *Comput. Mech. Publ.*, Southampton, 1994.
- Dominguez, J. *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993.

- Easterling, S. W., Young, C. S., The effects of end restraint on steel deck reinforced concrete floor systems. *Rep. No. CE/VPI - ST 90/04*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, 1991.
- EUROCODE 4, *Design of composite steel and concrete structures. Part 1: general rules and rules for buildings*. Commission of the European Communities, Brussels, 1990.
- EUROCODE 4: ENV 1994-1.1/1.2. *Design of composite steel and concrete structures*. European Committee for Standardisation, Brussels, 1994.
- EUROCODE 4: ENV 1993-1.1/1.3. *Design of Steel Structures*. European Committee for Standardisation, Brussels, 1995.
- Evans, H. R. *The analysis of folded plate structures*. Swansea, 1967. PhD thesis. University of Wales, 1967.
- Fredholm, I. Sur une classe d'equations fonctionelles. *Acta Math.*, v.27, p.365-390, 1903.
- Friberg, B. F., Combined form and reinforcement for concrete slabs. *J. Am. Conc. Inst.*, p.697-716, March 1954.
- Friedman, M. B. Shaw, R. P. Diffraction of pulses by cyclical obstacles of arbitrary cross-section. *J. Appl. Mech.* v. 29, p. 40-46, 1962.
- Fukui, T., Funato, K., Comparison between boundary element systems in frequency and time domain wave equation. *In: Boundary Element Method*, Tanaka M, Du Q, and Honma T (eds), Elsevier, Amsterdam, p. 21-30, 1993.
- Goldberg, J. E., Leve, H. L. Theory of prismatic folded plate structures. *Publ. Int. Assn. Bridge and Struct. Engineers*.v. 17, p. 59-86, 1957.
- Graff, K. F. *Wave Motion in Elastic Solids*. Clarendon Press, Oxford, 1975.
- Hansen, E. B. Numerical solution of integrodifferential and singular integral equations for plate bending problems. *J. Elasticity*, v. 6, p. 39-56, 1976.
- Hong, H. K., Chen, J. T., On the dual integral representation and its application to vibration problems. *In: Boundary Element XV*, Brebbia CA and JJ Rencis (eds), Elsevier Science Publishers, London, v. 2, p. 377-392, 1993.
- Hutchinson, J. R., Wong, G. K. K. The boundary element method for plate vibrations. *In: Proceedings of the ASCE 7th conference on electronic computation in St. Louis, Missouri*. ASCE, New York, p. 297-311, 1979.
- Jaswon, M.A. Integral equation methods in potencial theory. *I. Proc. Roy. Soc. Ser. A.*, v.275, p.23-32, 1963.

- Jaswon, M.A., Ponter, A.R. An integral equation solution of the torsion problem. *Proc. Roy. Soc. Ser. A.*, v.273, p.237-246, 1963.
- Jaswon, M.A., Maiti, M., Symm, G.J. Numerical biharmonic analysis and some applications. *Int. J. Solids Struct.*, v.3, p.309-332, 1967.
- Karabalis, D. L., Beskos, D. E. Time-domain transient elastodynamics analysis of 3D solids by BEM. *Int. J. Num. Meth Eng.*, v. 29, p. 211-215, 1990.
- Karan, V.J., Telles, J.C.F. On boundary elements for Reissner's plate theory. *Eng. Analysis*, v.5, n.1, p.21-27, 1988.
- Katsikadelis, J. T., Sapountzakis, E. J. Approach to the vibration problem of homogeneous, non-homogeneous and composite membranes based on the boundary element method. *Int. J. Num. Meth Eng.*, v. 26, p. 2439-2455, 1988.
- Kirchhoff, G.R. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. *J. Math.*, Crelle, v.40, p.51-58, 1850.
- Kitahara, M. *Boundary integral equation methods in eigenvalue problems of elastodynamics and thin plates*. Elsevier, Amsterdam, 1985.
- Kramin, T., Kramin, M. V. The investigation of the thin-walled three-dimensional structures of complex shape using BEM. In: *BEM XIX*, p. 35-44, Marchetti et al.(eds.), CMP, London, 1997.
- Kupradze, O.D. *Potencial methods in the theory of elasticity*. NY: Daniel Davey, 1965.
- Lachat, J.C. *A further development of the boundary integral technique for elastostatics*. Southampton: US, 1975. Thesis (Ph.D.) University of Southampton, 1975.
- Liu, Y. Analysis of shell-like structures by the boundary element method based on 3D elasticity: formulation and verification. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, v. 41, p. 541-558, 1998.
- Love, A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. New York: Dover, 1944.
- LRFD *Cold-Formed Steel Design Manual*. AISI American Iron and Steel Institute, Washington, 1991.
- Luttrell, L. D., Prassanan, S., Strength formulations for composite slabs. *Proc. 7th Int. Specialty Conf. Cold Formed Steel Structures*, Univ. of Missouri. Rolla, pp.307-326, 1984.
- Luttrell, L. D., Prassanan, S., Method for predicting strengths in composite slabs. *Proc. 8th Int. Specialty Conf. Cold Formed Steel Structures*, Univ. of Missouri. Rolla, pp.419-431, 1986.
- Manolis, G. D., A comparative study on three boundary element method approaches to problems in elastodynamics. *Int. J. Numer. Methods Eng.* v. 19, p 73-91, 1983.

- Mansur, W. J., De Lima-Silva, W. Efficient time truncation in two-dimensional BEM analysis of transient wave propagation problems. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, v. 21, p. 51-63, 1992.
- Melo, C. B. F. *Análise do comportamento e da resistência do sistema de lajes mistas*. Belo Horizonte, 1999. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, 1999.
- Mikhlin, S.G. *Integral equations*. NY: Pergamon Press, 1957.
- Muskhelishvili, N.I. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Groningen: P. Noordhoff, 1953.
- Nakaguma, R.K. *Three dimensional elastostatics using the boundary element method*. Southampton: US, 1979. Thesis (Ph.D.) University of Southampton, 1979.
- Niwa, Y., Kobayashi, S., Azuma, N. An analysis of transient stresses produced around cavities of arbitrary shape during the passage of traveling waves. *Memoirs Fac. Eng. Kyoto Univ.* v. 37, p. 28-46, 1975.
- Niwa, Y., Kobayashi, S., Fukui, T. Applications of integral equation method to some geomechanical problems. In: *Numerical methods in geomechanics*. Desai, C. S., Ed. ASCE-New York, p. 120-131, 1976.
- Niwa, Y., Fukui, T., Kato, S., Fujiki, K. An application of the integral equation method to two-dimensional elastodynamics. *Theoretical and applied mechanics*. University of Tokyo Press, Tokyo, v. 28, p. 281-290, 1980.
- Niwa, Y., Kobayashi, S., Kitahara, M. Eigenfrequency analysis of a plate by the integral equation method. *Theor. Appl. Mech.*, v. 29, p. 287-307, 1981.
- Niwa, Y., Kobayashi, S., Kitahara, M. Determination of eigenvalues by boundary element methods. In: *Developments in boundary element methods – 2*, P. K. Banerjee and R. P. Shaw (eds.), Applied Science, London, p. 143-176, 1982.
- O'Donoghue, P. E., Atluri, S. N. Control of dynamic response of a continuum model of a large space structure. *Comput. Struct.*, v. 23, p. 199-209, 1986.
- O'Donoghue, P. E., Atluri, S. N. Field / boundary element approach to the large deflection of thin flat plates. *Comput. Struct.*, v. 27, p. 427-435, 1987.
- Ohga, M., Shigematsu, T., Takashi, H. Boundary element-transfer matrix method for plated structures. ASCE, *J. Eng. Mech.*, v.117, n. 11, p.2509-2526, 1991.
- Oliveira Neto, L. *Uma formulação do método dos elementos de contorno com três parâmetros nodais em deslocamentos para placas delgadas e suas aplicações em engenharia estrutural*. São Carlos: EESC, USP, 1998. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1998.

- Onate E., Suarez B. A Unified Approach for the Analysis of Bridges, Plates and Axisymmetric Shells Using the Linear Mindlin Strip Element. *Computers & Structures*, v. 17, n. 1-3, p. 3-9, 1983.
- Paiva, J. B. *Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas*. São Carlos: EESC, USP, 1987. Tese (Doutorado) Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1987. 195p.
- Paiva, J. B., Oliveira Neto, L. An alternative boundary element formulation for plate bending analysis. In: *BETECH 95*, Adelaide, Austrália, 1995.
- Paiva, J.B., Venturini, W.S. Escolha do ponto singular na análise de placas pelo método dos elementos de contorno. In: CONGRESSO LATINO AMERICANO E IBÉRICO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS, 9, 1988, Argentina. *Anais...* Argentina: MECON-88, 1988.
- Palermo Jr., L. *Análise de Peças de Seção Delgada como Associação de Placas pelo Método dos Elementos de Contorno*. São Carlos: EESC, USP, 1989. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1989. 148p.
- Pontes Jr., B. R. *Interação dinâmica de estruturas bidimensionais com o solo: uma comparação entre um método semi-analítico e o método dos elementos de contorno*. Campinas: UNICAMP, FEM, 1992. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, 1992.
- Porter, M. L., Ekberg, C. E. Jr., Design recommendations for steel deck floor slabs. *J. Struct. Div. ASCE*, v.102, n.11, p.2121-2136, 1976.
- Porter, M. L., Highlights of the new ASCE standards on composite deck floor slabs. *Proc. of an Engineering Foundation Conference*. Publ. By ASCE, New York, p.114-124, 1992.
- Providakis, C. P., Beskos, D. E., Two BEM approaches for plate dynamic analysis. In: *Computational mechanics '88*, S. N. Atluri and G. Yagawa (eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- Providakis, C. P., Beskos, D. E., Forced vibrations of plates and shells by boundary-interior elements. In: *Boundary elements IX*, Vol. 2. Stress-analysis applications. C.A. Brebbia, W.L. Wendland and G. Kuhn (eds.), Springer-Verlag, Berlin, p. 97-109, 1987.
- Providakis, C. P., Beskos, D. E., Dynamic analysis of elastic plates. In: *Boundary elements X*, Vol. 4: geomechanics, wave propagation and vibrations, C. A. Brebbia (ed.), Springer-Verlag, p. 403-413, 1988.
- Providakis, C. P., Beskos, D. E., Free and Forced vibrations of plates by boundary elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, v. 74, p. 231-250, 1989.

- Rego Silva, J. J., Power, H., Wrobel, L. C. Boundary element method for 3D time-harmonic elastodynamics - numerical aspects. *In: Boundary Elements XV.*, Brebbia, CA and JJ Rencis (eds), Elsevier Sci. Publ., London, v. 2, p. 423-439, 1993.
- Richart, Jr. F. E., Hall, Jr. Woods, R. D. *Vibrations os Soils and Foundations*. Prentice Hall, 1970.
- Rizzo, F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quart. Appl. Math.*, v.25, p.41-52, 1967.
- Roark, R. J., Young, W. C., *Formulas for Stress and Strain*. McGraw-Hill, Fifth edition, New York, 1975.
- Roeder, C. W., Point loads on composite deck reinforced slabs. *J. Struct. Div. ASCE*, v.107, n.12, p.2421-2429, 1981.
- Saada, A. S. *Elasticity: theory and applications*. New York: Pergamon Press Inc., 1974.
- Shi, G., Bezine, G. A direct boundary element method for the bending analysis of arbitrary planform plates with square or circular opening. *Eur. J. Mech. – A/Solids*, v. 8, n. 5, p. 341-359, 1989.
- Smirnov, V.J. *Integral equations and partial differential equations*. In: Course in Higher Mathematics. London: Addison-Wesley, v.4, 1964.
- Stern, M.A. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. *Int. J. Solids Struct.*, v.15, p.769-782, 1979.
- Stokes, G. G. On the Dynamical Theory of Diffraction. *Trans. Camb. Phil. Soc.* v. 9, p. 1-62, 1849.
- Symm, G.T. Integral equation methods in potencial theory. *II. Proc. Roy. Soc. Ser. A.*, v.275, p.33-46, 1963.
- Tanaka, M., Yamagiwa, K., Miyazaki, K., Ueda, T. Integral equation approach to free vibration problems of assembled plate structures. *In: Theory and applications of boundary element methods*, M. Tanaka and Q. Du (eds.), Pergamon Prress, Oxford, p. 375-384, 1987.
- Tanaka, M., Miyazaki, K. A direct BEM for elastic plate-structures subjected to arbitrary loadings. *Shinshu University*, Japan, 1988.
- Tanaka, M., Yamagiwa, K., Miyazaki, K., Ueda, T. Free vibration analysis of elastic plate structures by boundary element method. *Engng. Anal.*, v. 5, p. 182-188, 1988.

- Tanaka, M., Matsumoto, T. A new boundary element formulation for transient elastodynamic problems with damping based on time-stepping schemes. *In: Advances in Boundary Elements*, Brebbia CA and JJ Connor (eds) Springer-Verlag, Berlin, v. 3, p.331-342, 1989.
- Tanaka, M., Matsumoto, T., Shiozaki, A. Application of boundary-domain element method to the free vibration problem of plate structures. *Computers & Structures*, v. 66, n. 6, p. 725-735, 1998.
- Telles, J. C. F., Brebbia, C.A. Boundary element solution of half-plane problems. *Int. J. Solids Struct.*, v.17, p.1149-1158, 1981.
- Tenhovuori, A., Karkkainen, K., Kanerva, P., Parameters and definitions for classifying the behavior of composite slabs. *Proceedings of the 1996 Engineering Foundation Conference on Composite Construction in Steel and Concrete III*. Publ. By ASCE, New York, p.752-765, 1997.
- Tottenham, H. *The boundary element method for plates and shells*. In: Banerjee, P. K., Butterfield, R. eds: *Developments in Boundary Element Methods – 1*, Applied Science Publ. London, p. 173-205, 1979.
- Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., Topp, L. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal Aeronaut Sciences*, v. 23, n. 9, p. 805-823, 1956.
- Victor F. H., Ellyin F., Assemblage Method for Folded Plate Analysis. *Journal of the Structural Division*, Proc. ASCE, v. 105, n. 7, p. 1509-24, 1979.
- Viktorovitch, M., Jezequel, L., Thouverez, F. A boundary element solution to the vibration problem of bidimensional structures on a wide frequency range. *In: Boundary Elements XVII*, Brebbia CA, Kim S, Oswald TA, and Power H (eds), Comput. Mech. Publ., Southampton, p. 211-218, 1995.
- Vivoli, J., Vibrations de plaques et potentiels de couches. *Acustica*, v. 26, p. 305-314, 1972.
- Vivoli, J., Filippi, P. Eigenfrequencies of thin plates and layer potentials. *J. Acoust. Soc. Am.*, v. 55, p. 562-567, 1974.
- Wearing, J. L., Bettahar, O. The analysis of plate bending problems using the regular direct boundary element method. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, v. 16, p. 261-271, 1995.
- Wong, G. K. K., Hutchinson, J. R. An improved boundary element method for plate vibrations. *In: Boundary element methods*. C. A. Brebbia (ed.), Springer-Verlag, Berlin, p. 272-289, 1981.
- Wright, H. D., A plate model for composite slab analysis. *Thin-Walled Structures*. V.10, p.299-238, 1990.

- Wright, H. D., Evans, H. R., A folded plate method of analysis for profiled steel sheeting in composite floor construction. *Thin-Walled Structures*, p. 21-37, 1987.
- Wright, H. D., Evans, H. R., Review of composite slabs design. *Tenth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, St. Louis, p.27-47, Oct. 1990.
- Wright, H. D., Evans, H. R., Harding, P. W. The use of profiled steel sheeting in floor construction. *Journal of Constructional Steel Research* 7, p. 279-95, 1987.
- Wu, T. W., Lee, L. A choice of interpolation schemes for the boundary element method in elastodynamics. *Comm. Num. Meth. Eng.*, v. 9, p 375-385, 1993.
- Young, C. S., Easterling, W. S., Strength of composite slabs. *Tenth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, St. Louis, p.65-80, Oct. 1990.
- Zhang S. H., Lyons L. P. R., A Thin Walled Box Beam Finite Element for Curved Bridge Analysis. *Computers & Structures*, v. 18, n. 6, p. 1035-46, 1984.