

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO**

**Caracterização de Reservatórios pela Utilização da Teoria
da Percolação Conjugada às Propriedades de
Correlação Espacial**

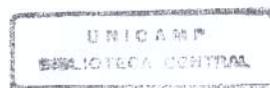
Autor: **Marcelo Curzio Salomão**
Orientador: **Armando Zaupa Remacre**
Co-orientador: **Regis Kruehl Romeu**

Curso: Engenharia de Petróleo

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós-graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Petróleo

Campinas, 1998

S.P. – Brasil



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
V	
34577	
395158	
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	31/07/98
N.º CPD	

CM-00113822-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Sa36c Salomão, Marcelo Curzio
Caracterização de reservatórios pela utilização da teoria da percolação conjugada às propriedades de correlação espacial. / Marcelo Curzio Salomão.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientadores: Armando Zaupa Remacre, Regis Kruel Romeu.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Percolação. 2. Processo estocástico. 3. Autocorrelação (Estatística). 4. Markov, Processos de. I. Remacre, Armando Zaupa. II. Romeu, Regis Kruel. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Este exemplar corresponde a redação final
da tese defendida por Marcelo Curzio
Salomão e aprovada
pela comissão julgadora em 11/03/1998

Armando Zaupa Remacre
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Caracterização de Reservatórios pela Utilização da Teoria
da Percolação Conjugada às Propriedades de
Correlação Espacial**

Autor: **Marcelo Curzio Salomão**
Orientador: **Armando Zaupa Remacre**
Co-orientador: **Regis Kruehl Romeu**

Março de 1998

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO**

TESE DE DOUTORADO

**Caracterização de Reservatórios pela Utilização da Teoria
da Percolação Conjugada às Propriedades de
Correlação Espacial**

Autor: **Marcelo Curzio Salomão**

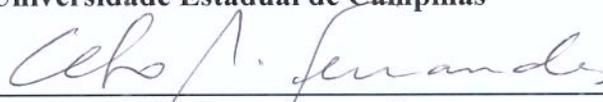
Orientador: **Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre**

Co-orientador: **Dr. Régis Krueel Romeu**

Banca Examinadora:



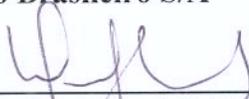
**Prof. Dr. Armando Zaupa Remacre
Universidade Estadual de Campinas**



**Prof. Dr. Celso Peres Fernandes
Universidade Federal de Santa Catarina**



**Dr. Paulo Roberto Ballin
Petróleo Brasileiro S/A**



**Prof. Dr. Denis José Schiozer
Universidade Estadual de Campinas**



**Prof. Dr. Maria Cristina de Castro Cunha
Universidade Estadual de Campinas**

Campinas, 11 de março de 1998

Dedicatória:

Este trabalho é dedicado a:

Simone, Helena e Luiza,
Edmée e Sebastião.

Agradecimentos

À Petrobrás pela oportunidade e a Armando Ferreira e Fernando Borges pela confiança em meu trabalho.

Ao professor Armando Zaupa Remacre pela orientação e constante criação de idéias (novos problemas) e pelas pedras que ajudou a retirar do meio do caminho.

A Regis Romeu pela ajuda nas encruzilhadas.

Aos professores Antônio Cláudio Corrêa e Maria Cristina Cunha pela colaboração em momentos importantes.

Aos colegas e funcionários da Unicamp e da Petrobrás que estavam juntos na estrada.

E a Simone, Helena e Luiza, que suportaram a grande variabilidade de humor e atenção e deram alegria à caminhada.

Resumo

Salomão, Marcelo Curzio. *Caracterização de Reservatórios pela Utilização da Teoria da Percolação Conjugada às Propriedades de Correlação Espacial*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 180p. Tese (Doutorado).

A Teoria da Percolação é uma ferramenta bastante útil na descrição da capacidade de fluxo e da comunicação interna nos meios porosos. Este trabalho objetivou primordialmente analisar a influência das propriedades de correlação espacial sobre o fluxo de fluidos em meios porosos. Para isto, foi utilizada a simulação de processos estocásticos associada à Teoria da Percolação em malhas finitas e aos modelos microscópicos de percolação por invasão.

Para representar sistemas espacialmente correlacionados, utilizaram-se os processos estocásticos multigaussianos e os campos aleatórios Markovianos. Foram pesquisadas as propriedades de autocorrelação presentes nos processos Markovianos, que mostraram-se ligadas aos seus parâmetros atrativos, além da aplicabilidade dos modelos de múltiplas fácies, e da condicionalização através dos métodos Bayesianos.

Os parâmetros de correlação e atração afetam fortemente as características de conectividade interna do sistema, dependendo do alcance da correlação, do tipo de modelo e da discretização imposta à malha. Os modelos de rede permitiram observar a influência da correlação espacial sobre as saturações residuais em regimes de fluxo diferenciados.

Palavras Chave

Percolação, Autocorrelação, Processos Markovianos, Modelos de Rede

Abstract

Salomão, Marcelo Curzio. *Reservoir Description by Applying the Percolation Theory associated to the Properties of Spatial Correlation*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 180p. Tese (Doutorado).

The Percolation Theory is helpful to describe flow capacity and internal communication in porous media. The present work verifies the influence of spatial correlation on percolation parameters and, as a consequence, on fluids flow. Simulation of stochastic process was applied in association with the Percolation Theory of finite sized lattices and the invasion percolation model.

Gaussian processes and Markovian random fields were used to represent the spatially correlated systems. This work investigates the autocorrelation function that exists on the Markovian process, which can be related to its attraction parameters, the application of the multifacies models, and the conditioning by using Bayesian models.

The spatial correlation and the attraction parameters affects the percolation characteristics, depending on the range of correlation, the model, and the discretization of the system. In network models, the spatial correlation affects the residual saturation in different flow types.

Key Words

Percolation, Autocorrelation, Markovian Processes, Network Models

Índice

LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xiv
NOTAÇÕES	xv
1 INTRODUÇÃO	1
2 TEORIA DA PERCOLAÇÃO.....	5
2.1 Conceitos	5
2.2 Descrição do Comportamento dos Parâmetros da Teoria da Percolação.....	16
2.3 Comportamento na Transição e Escala do Processo.....	25
2.4 Probabilidade de Percolação.....	30
2.5 Condutividade.....	34
2.6 Modelos Contínuos.....	36
3 PROCESSOS ESTOCÁSTICOS GAUSSIANOS.....	38
3.1 Processos Estocásticos.....	38
3.2 Processos Gaussianos	47
3.3 Variável Indicatriz – Principais Propriedades	51
3.4 Domínio de Correlação (<i>Integral Range</i>).....	56
4 PROCESSOS MARKOVIANOS	59
4.1 Definições e Teoremas Básicos	59
4.2 Simulação do Modelo de Ising	62
4.3 Simulação do Modelo de Potts-Strauss	68
4.4 Parâmetros de Correlação Espacial nos processos Markovianos.....	74
4.5 Métodos Bayesianos.....	86
5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS EM MALHAS CORRELACIONADAS	101
5.1 Algoritmo de Hoshen-Kopelman.....	102
5.2 Análise do Processo Gaussiano Truncado.....	103
5.3 Análise dos Processos Markovianos Discretos.....	124

5.4 Verificação da redução do ponto crítico de percolação	131
6 MODELOS DE FLUXO EM REDES MICROSCÓPICAS	137
6.1 Fundamentos	137
6.2 Principais Modelos de Rede.....	138
6.3 Métodos Analíticos.....	144
7 FLUXO EM REDES CORRELACIONADAS	150
7.1 Modelos com Correlação Espacial.....	150
7.2 Métodos Analíticos.....	153
7.3 Percolação por Invasão.....	154
CONCLUSÕES.....	159
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	162
ANEXO A.....	167
ANEXO B.....	174
ANEXO C.....	182

Lista de Figuras

2.1 – Malhas compostas de células condutoras (em cores) e isolantes (em branco), com dimensões $L \times L$, o valor de L sendo respectivamente 50, 100 e 200	6
2.2 – Componentes Conexos (ou clusters) formados em proporções próximas à crítica p_c	8
2.3 – Comportamento do Tamanho Médio dos Clusters à variação da proporção p	9
2.4 – Aspecto geral da Probabilidade Conectiva $P(p)$ e da Condutividade $K_{EFF}(p)$	11
2.5 – Aspecto geral da Função Conectividade $g(h)$	13
2.6 – Construção do tapete de Sierpinski	14
2.7 – Tapete de Sierpinski no quarto estágio de construção.....	14
2.8 – Densidade de ocupação do cluster percolante para duas proporções ligeiramente superiores a p_c . A figura foi extraída da referência [11]	27
2.9 – Probabilidade de Percolação em função do tamanho da malha; à esquerda a função de distribuição de probabilidade e à direita a probabilidade acumulada	31
2.10 – Probabilidade de Percolação de cada uma das configurações possíveis em uma malha de tamanho 2×2	32
3.1 – Três amostras de um Processo Estocástico unidimensional	39
3.2 – Processo Estocástico de amostras idênticas mas defasadas	40
3.3 – Processo Estocástico cujas amostras diferem-se em fase e amplitude	40
3.4 – Perfil básico das propriedades de Autocorrelação, Autocovariância e Semivariograma em processos estocásticos contínuos.....	46
3.5 – Imagens simuladas com modelos de correlação exponencial (acima), esférico (ao centro) e Gaussiano (abaixo), ao lado dos respectivos semivariogramas	50
3.6 – Autocorrelação, Autocovariância e Semivariograma da Função Aleatória Indicatriz.....	53
3.7 – Imagens simuladas com modelos de correlação exponencial fatorizado, exponencial isotrópico, esférico e Gaussiano, e subseqüentes truncamentos da variável contínua.....	55
4.1 – Estabilização, no algoritmo de Metropolis, do número de trocas e do valor da atração, em relação ao número de iterações	66

4.2 – Geração seqüencial das imagens no algoritmo de Metropolis – imagem inicial, intermediária após 10 iterações e final após 50 iterações.....	66
4.3 – Exemplos de imagens 160x160 simuladas com o algoritmo de Metropolis para valores de β indicados na cor preta	67
4.4 – Exemplos de imagens simuladas com o modelo de Flinn, no qual as trocas só ocorrem entre vizinhos	68
4.5 – Exemplos de imagens 160x160, simuladas com o algoritmo de Potts-Strauss para valores de repulsão entre os pares de fácies mostrados na respectiva matriz.....	71
4.6 – Exemplos de imagens do modelo difusão com 3 e 4 fácies simuladas com o algoritmo de Potts-Strauss em malha 160x160.....	72
4.7 – Exemplos de imagens 160x160 anisotrópicas com modelo mosaico.....	73
4.8 – Exemplos de imagens 160x160 isotrópicas (à esquerda) e anisotrópicas (à direita) do modelo difusão	73
4.9 – Ajuste do modelo exponencial ao variograma observado nas imagens Metropolis geradas com β respectivamente igual a 0,3, 0,5, 0,8 e 1,0	75
4.10 – Semivariogramas exponenciais isotrópico (à esquerda) e fatorizado (à direita) distribuídos sobre malhas bidimensionais	76
4.11 – Relação entre o parâmetro β e o alcance a do variograma observado nas imagens – valores observados e curva ajustada	77
4.12 – Relação entre o parâmetro β e o variograma na distância unitária $\gamma(1)$ – valores observados e curva ajustada.....	77
4.13 – Sensibilidade do variograma (observado) à proporção p entre as fácies de um processo Markoviano binário	78
4.14 – Variograma observado nos modelos Markovianos binários com vizinhanças de quatro e oito pontos.....	79
4.15 – Variogramas médios observados nas configurações dos tipos binário e difusão.....	80
4.16 – Ajuste do modelo de variograma exponencial modulado ao variograma observado nas imagens geradas com o modelo de Flinn	80
4.17 – Densidade espectral de potência nos modelos exponenciais sem modulação (à esquerda), e modulado (à direita).....	81
4.18 – Relação entre o parâmetro β e o alcance do variograma observado nas imagens – valores observados e curva teórica	84
4.19 – Relação entre o parâmetro β e o variograma na distância unitária $\gamma(1)$ – valores observados e curva teórica	84
4.20 – Imagem Metropolis comparada a imagens Gaussianas com modelo de correlação exponencial fatorizado, exponencial isotrópico, esférico e Gaussiano	85
4.21 – Aplicação do algoritmo de restauração GS em uma imagem binária com variograma exponencial –imagem original, imagem contaminada, imagem de máxima verossimilhança e imagem restaurada	93

4.22 – Semivariogramas das imagens da 4.21: original , contaminada e restaurada, além do variograma cruzado entre imagens original e restaurada	94
4.23 – Aplicação do algoritmo de restauração GS em uma imagem binária com variograma Gaussiano–imagem original, imagem contaminada , imagem de máxima verossimilhança e imagem restaurada	95
4.24 – Semivariograma das imagens da 4.23: original , contaminada e restaurada, além do variograma cruzado entre imagens original e restaurada	96
4.25 – Aplicação do algoritmo de restauração GS em uma variável contínua – imagem original, imagem contaminada , imagem krigada e imagem restaurada	98
4.26 – Variogramas das imagens original , contaminada e restaurada além do variograma cruzado entre imagens original e restaurada	99
4.27 – Aplicação do algoritmo de restauração ICM em uma variável contínua: imagens original , krigada e restaurada	99
4.28 – Aplicação do algoritmo de restauração GS em uma imagem contínua	100
5.1 – Algoritmo de Hoshen-Kopelman – Rotulações primária e secundária	102
5.2 – Proporção Crítica de Percolação p_c em função do domínio de correlação A para diferentes modelos de correlação espacial	107
5.3 – Variância de p_c em função de L para diferentes valores de A	108
5.4 – Efeito do alcance a da correlação sobre n_c e $\langle S \rangle$	110
5.5 – Efeito do modelo de correlação sobre n_c e $\langle S \rangle$	111
5.6 – Efeito do fator de escala sobre n_c e $\langle S \rangle$ nos modelos exponencial e Gaussiano	112
5.7 – Efeito da discretização da malha sobre n_c e $\langle S \rangle$	114
5.8 – Efeito da proporção p sobre $g(h)$	116
5.9 – Efeito do alcance a da correlação sobre $g(h)$	117
5.10 – Efeito do modelo de correlação sobre $g(h)$	118
5.11 – Efeito do fator de escala sobre $g(h)$	119
5.12 – Efeito da discretização da malha sobre $g(h)$	120
5.13 – Comportamento de ξ para proporção $p=0,45$ para diferentes valores de A em processos com autocorrelação exponencial	121
5.14 – Comportamento de ξ para proporções p abaixo de p_c	122
5.15 – Influência do parâmetro β sobre a proporção crítica p_c	126
5.16 – Intervalo de confiança de p_c com 95% de confiabilidade em função do parâmetro β e do tamanho L da malha	127
5.17 – Comportamento de p_c em função do domínio de correlação A (calculado a partir do valor de β) para os processos Markovianos	128
5.18 – Comportamento de p_c em função do domínio de correlação A , comparado aos processos Gaussianos	129

5.19 – Comportamento de p_c em função do parâmetro β para diferentes configurações de imagem	130
5.20 – Comportamento de p_c em função do parâmetro β para configurações dos tipos binário e difusão	131
5.21 – Seqüência aplicada na mudança de escala através da renormalização	132
5.22 – Probabilidades de ocorrência de cada configuração em malhas sem correlação (à esquerda) e correlacionadas (à direita)	133
5.23 – Probabilidade de percolação num sub-domínio 2x2 em uma malha sem correlação	134
6.1 – Regimes de Fluxo em função dos parâmetros capilares e viscosos	140
6.2 – Percolação por Invasão em malha quadrada – Posição no instante do <i>breakthrough</i>	142
6.3 – Percolação por Invasão em malha retangular – Posição no instante do <i>breakthrough</i>	142
6.4 – Pressão Capilar estimada através da Teoria da Percolação convencional	147
6.5 – Permeabilidade Relativa estimada através da Teoria da Percolação convencional	149
7.1 – Pressão Capilar em Redes Correlacionadas e não Correlacionadas calculada com os métodos analíticos baseados na Teoria da Percolação	153
7.2 – Permeabilidade Relativa em Redes Correlacionadas e não Correlacionadas calculada com os métodos analíticos baseados na Teoria da Percolação	154
7.3 – Percolação por Invasão em diferentes regimes de fluxo: estável, capilar, intermediário e viscoso	156
7.4 – Influência da Correlação espacial sobre parâmetros de fluxo em condições de baixa razão de mobilidades M	157
7.5 – Influência da Correlação espacial sobre parâmetros de fluxo em condições de alta razão de mobilidades M	157
A.1 – Semivariogramas médios das variáveis contínua e indicatriz simuladas com o modelo exponencial	168
A.2 – Semivariogramas médios das variáveis contínua e indicatriz simuladas com o modelo Gaussiano	169
A.3 – Variabilidade dos semivariogramas das variáveis contínua e indicatriz simuladas com o modelo exponencial ($A=16$)	170
A.4 – Variabilidade dos semivariogramas das variáveis contínua e indicatriz simuladas com o modelo Gaussiano ($A=16$)	170
A.5 – Variabilidade dos semivariogramas das variáveis contínua e indicatriz simuladas com o modelo exponencial ($A=64$)	171
A.6 – Variabilidade dos semivariogramas das variáveis contínuas e indicatriz para $A=64$, no modelo Gaussiano	171

A.7 – Relação entre os parâmetros Ac e A das variáveis contínuas em função da proporção de truncamento p	172
B.1 – Função conectividade e função de autocorrelação – aspecto geral	174
B.2 – Diferença entre as definições da função conectividade; à esquerda um caso com modelo exponencial, à direita com modelo Gaussiano	175
B.3 – Função conectividade e função de autocorrelação em modelo exponencial com $A=16$ nas proporções $p=0,45$ e $0,55$	176
B.4 – Função conectividade e função de autocorrelação em modelo exponencial com $A=64$ nas proporções $p=0,45$ e $0,55$	176
B.5 – Função conectividade e função de autocorrelação para os modelos exponencial e Gaussiano com $A=16$ e $p=0,45$	177
B.6 – Função conectividade e função de autocorrelação para os modelos exponencial e Gaussiano com $A=64$ e $p=0,45$	177
B.7 – Função conectividade e função de autocorrelação para os modelos exponencial e Gaussiano com $A=64$ e $p=0,55$	178
B.8 – Função conectividade e função de autocorrelação para o modelo exponencial com $p=0,45$ e $A=16$ e $A=64$	178
B.9 – Variabilidade da função conectividade e da função de autocorrelação para o modelo exponencial com $p=0,45$ e $A=64$, com 95% de significância	179
B.10 – Adoção do espaçamento (em número de células) entre os poços com base na função conectividade $g_1(h)$	180
C.1 – Pesos de krigagem ordinária com variograma exponencial de alcances respectivamente iguais a 3, 5 e 10.....	183
C.2 – Pesos de krigagem ordinária com variograma esférico (à esquerda) e variograma raiz de um Gaussiano (à direita) ambos com alcance igual a 5	183
C.3 – Pesos de krigagem ordinária com variograma exponencial fatorizado de alcance igual a 5	184
C.4 – Pesos de krigagem ordinária com variograma Gaussiano de alcance igual a 5 e dois tipos de vizinhança	184
C.5 – Pesos de krigagem ordinária com variograma exponencial de alcance igual a 5 para uma seção vertical.....	185
C.6 – Pesos de krigagem ordinária com variograma exponencial fatorizado de alcance igual a 5 para uma seção vertical.....	186
C.7 – Pesos de krigagem ordinária com variograma Gaussiano de alcance igual a 5 para uma seção vertical.....	186

Lista de Tabelas

2.1 – Proporções Críticas de Percolação	10
2.2 – Expoentes Universais da Teoria da Percolação	12
5.1 – Parâmetros de alcance da correlação espacial.....	104
5.2 – Valores simulados de K_{LIM} e K_{EFF} com variograma exponencial	123
5.3 – Valores de p_c em função do tamanho L da malha	125
5.4 – Desvio padrão de p_c em função do tamanho L da malha.....	126
5.5 – Comportamento de p_c em função da configuração da imagem.....	130
5.6 – Desvio padrão de p_c em função da configuração da imagem	130
A.1 – Desvio padrão de A e A_c nos processos Gaussianos	173

Notações

a	:	parâmetro de alcance da correlação espacial
A	:	domínio de correlação (integral range) de uma função indicatriz
A_c	:	domínio de correlação de uma função Gaussiana contínua
A_E	:	integral no domínio espacial da função conectividade $g(h)$
β	:	parâmetro de repulsão entre cores (fácies) diferentes em uma variável binária
β_{kl}	:	parâmetro de repulsão entre cores (fácies) k e l
β_0	:	expoente universal que regula o comportamento da probabilidade conectiva
$c(p)$:	tamanho limite do componente conexo para o comportamento de transição, em função da proporção p
C_V	:	relação entre as forças viscosas e capilares do deslocamento de fluidos
$C_z(h)$:	autocovariância estacionária da função $Z(x)$ em função da distância h entre dois pontos
$C_z(x_i, x_j)$:	autocovariância não estacionária entre x_i e x_j
$\xi(p)$:	comprimento conectivo em função da proporção p
D	:	dimensão Euclidiana
D_f	:	dimensão fractal
d_F	:	dimensão fracton
d_i	:	diâmetro do poro ou garganta de poro na posição x_i
$d(L)$:	densidade de células ocupadas em função do tamanho L da malha

$d(L,p)$ por	:	densidade do cluster percolante medida em número de células ativas área L^2 em função da proporção p e do tamanho L da malha
$E[\cdot]$:	esperança matemática de uma determinada variável
g	:	conjunto dos valores y_i de uma imagem da função aleatória $Y(x)$
$g(h)$:	conectividade de uma malha em função da distância entre pontos h
γ	:	expoente universal que regula o comportamento do tamanho médio dos clusters
$\gamma_z(h)$:	semivariograma estacionário da função $Z(x)$ em função da distância h entre dois pontos
$\gamma_z(x_i, x_j)$:	semivariograma não estacionário entre x_i e x_j
h	:	distância entre dois pontos medida em número de células
h_x	:	distância horizontal entre dois pontos medida em número de células
h_y	:	distância vertical entre dois pontos medida em número de células
$I_{z_0}(x)$:	função indicatriz no ponto x obtida com valor de corte z_0
$K_{EFF}(p)$:	condutividade efetiva da malha em função da proporção p
K_i	:	condutividade discretizada na célula i
K_{LIM}	:	condutividade limite na qual se forma o cluster percolante mínimo
L	:	número de células nas direções vertical e horizontal de uma malha quadrada
λ_i	:	pesos de ponderação usados na estimativa $Z^*(V)$ da variável $Z(x)$
M	:	razão entre as viscosidades dos fluidos invasor e deslocado
$M(L)$:	número de células ocupadas em função do tamanho L da malha
$M(L,p)$:	número de células ativas do cluster percolante diferente em função da Proporção p e do tamanho L da malha
$M_k[\cdot]$:	momento estatístico de ordem k de uma variável
n_d	:	número de pontos da vizinhança de x_i que apresentam um valor diferente para uma variável discreta naquele ponto

n_i	:	número de pontos na vizinhança de x_i que apresentam igual valor para uma variável discreta naquele ponto
$n_c(p)$:	número de clusters de tamanho qualquer em uma malha em função da proporção p
$n_s(p)$:	número de clusters de tamanho S em uma malha em função da proporção p
ν	:	expoente universal que regula o comportamento do comprimento conectivo $\xi(p)$
p	:	proporção de células ativas (ou condutoras) da malha
$P(p)$:	probabilidade conectiva de uma malha em função da proporção p
p_c	:	proporção crítica de percolação
P_{cap}	:	pressão capilar
$P_Z(\cdot)$:	probabilidade ligada à variável aleatória Z
$P_{Z_1, Z_2, \dots, Z_N}(\cdot)$:	probabilidade conjunta das variáveis aleatórias Z_1, Z_2, \dots, Z_N
$\pi(p)$:	probabilidade de uma malha finita percolar na proporção p
$\prod_{i=1}^N z_i$:	produto $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_N$
$R_z(h)$:	autocorrelação estacionária da função $Z(x)$ em função da distância h entre dois pontos
$R_z(x_i, x_j)$:	autocorrelação não estacionária entre x_i e x_j
S	:	número de células que compõem um determinado cluster
S_{nw}	:	saturação do fluido invasor no instante do <i>breakthrough</i>
S_{rd}	:	saturação residual do fluido deslocado
$\sum_{i=1}^N z_i$:	somatório $z_1 + z_2 + \dots + z_N$
σ	:	desvio padrão de uma variável aleatória
σ_o	:	expoente universal que regula o comportamento de $c(p)$
t	:	expoente universal que regula o comportamento da condutividade $K_{EFF}(p)$

τ	:	expoente universal que regula o comportamento do número de clusters em uma malha $n_s(p)$
$U(w)$:	função energia da imagem w
V	:	suporte de medida da variável $Z(x)$
$V(L,p)$:	variável genérica que tem comportamento ligado à diferença $(p-p_c)$
$var[\cdot]$:	variância de uma determinada variável
v_i	:	pontos que fazem parte de uma determinada vizinhança de x_i
w	:	conjunto dos valores z_i de uma imagem da função aleatória $Z(x)$
w_S	:	probabilidade de uma célula condutora pertencer a um cluster de tamanho S
x_i	:	posição espacial localizada na ordenada i
$Y(x)$:	variável secundária Y nos pontos x de uma malha
$Y(x_i)$:	função aleatória Y medida na posição i da malha
Y_i	:	variável $Y(x)$ na posição i , igual a $Y(x_i)$
y_i	:	valores observados da variável $Y(x)$ na posição i
$Z(x_i)$:	função aleatória Z medida na posição i da malha
Z_i	:	variável $Z(x)$ na posição i , igual a $Z(x_i)$
z_i	:	valores observados da variável $Z(x)$ na posição i
ζ_i	:	amostra de ordem seqüencial i de um processo estocástico

Capítulo 1

Introdução

A Teoria da Percolação, aplicada com bastante frequência na representação das propriedades dos meios heterogêneos ou desordenados, fornece uma base sólida para as análises de caracterização do fluxo no meio poroso, objetivo para o qual ela foi originalmente desenvolvida. De uma forma geral, a Teoria da Percolação estuda as propriedades de conexão e condução internas de um meio poroso, ligadas às suas características geométricas e estatísticas; descreve a morfologia e a capacidade condutiva do meio poroso através das dimensões e ligações entre seus componentes conexos, sendo capaz de relacionar as características estatísticas deste meio à sua capacidade de comunicação interna. Assim, estudar a Teoria da Percolação significa estudar parâmetros descritivos do fluxo no meio poroso.

Na grande maioria dos estudos em que se aplica a Teoria da Percolação não está incluída a correlação espacial das variáveis que descrevem as propriedades do meio; esta é a principal motivação deste trabalho, que, assim, tem como objetivo fundamental analisar a sensibilidade dos parâmetros de fluxo e recuperação de fluidos aos parâmetros de variabilidade e continuidade espacial das variáveis estocásticas. Para isto, utiliza-se a Teoria da Percolação e algumas de suas ramificações, capazes de representar o comportamento do fluxo na macro e na micro-escala. Os principais fundamentos da Teoria da Percolação são discutidos no Capítulo 2. Por meio dela, poderá ser verificada a influência e a ligação entre os parâmetros espaciais que caracterizam o meio poroso e as suas características de condutividade e conectividade, que são determinantes para o comportamento do fluxo dos fluidos. A correlação espacial de uma variável é um indicativo de sua continuidade e representa a probabilidade de que dois pontos, situados a uma determinada distância, tenham o mesmo valor, no caso de uma variá-

vel categórica. A conectividade de um sistema, por sua vez, reflete a probabilidade destes mesmos pontos não só terem o mesmo valor, mas também estarem em comunicação ou conexão, ou seja, pertencerem a um mesmo componente conexo.

A caracterização das propriedades físicas do meio poroso é o ponto de partida para a predição do comportamento do fluxo dos fluidos no subsolo. Esta análise é tanto mais representativa quanto melhor for a descrição daquelas propriedades; os resultados finais, que correspondem à resposta prevista do reservatório em termos de produção de fluidos, estão diretamente ligados aos valores obtidos para estas variáveis; como o reservatório é apenas parcialmente e muitas vezes escassamente amostrado, devido aos altos custos envolvidos na obtenção das amostras, a caracterização de suas propriedades passa necessariamente por uma análise estatística envolvendo a estimativa das possíveis imagens da formação, culminando em uma análise de incertezas acerca das respostas esperadas.

Esta caracterização considera a variável a ser descrita uma função aleatória ou processo estocástico, para o qual são admitidas as condições de estacionariedade e ergodicidade; estas condições permitem a captação, através dos valores amostrados, de seus parâmetros estatísticos de primeira e segunda ordem, que refletem a correlação espacial da variável; subseqüentemente, é feita a simulação estocástica desta função aleatória, gerando imagens que são fiéis a estes parâmetros de correlação. Esta é a seqüência básica da simulação dos processos multi-gaussianos ou espacialmente Gaussianos.

Também é corrente representar uma variável pela aplicação de um campo aleatório Markoviano e utilizar a correspondência com a distribuição de Gibbs, para a simulação, dentro de uma seqüência (Markoviana) de variáveis regidas por parâmetros atrativos, também características de continuidade espacial. Os processos Markovianos e Gaussianos pertencem à classe dos processos denominados pontuais (*pixel-based*), que tratam da caracterização da malha em cada um de seus pontos ou *pixels*.

Uma outra alternativa de grande aplicabilidade se encontra nos processos Booleanos, que correspondem à simulação de objetos (geradores), que têm probabilidade uniforme de ocorrência ao longo do espaço, ou seja, uma disposição espacial Poissoniana. São classifica-

dos como processos de objeto (*object-based*), em oposição aos processos pontuais, já que usam como base objetos de formato e dimensões preestabelecidas, como canais e leques turbidíticos. Em geral, são utilizados para uma macro-caracterização do meio e podem ser aplicados em conjunção aos processos pontuais, sendo, neste caso, a caracterização denominada híbrida.

Diversos outros métodos e combinações entre eles podem ser utilizados para caracterizar o reservatório, cada um adequado a uma determinada condição, que engloba o sistema deposicional gerador da rocha, a quantidade e o tipo dos dados disponíveis e o objetivo a que se destinam as análises.

A simulação estocástica propicia a geração de imagens plausíveis da variável analisada, ou seja, imagens que consideram a sua variabilidade espacial; a interpolação dos valores amostrados, mesmo criteriosa, resulta em uma imagem não plausível, com tendência de suavização em sua variabilidade. Assim, para se obter uma previsão mais realista do comportamento do reservatório é imprescindível a consideração das características de correlação espacial, para a caracterização de suas propriedades e das incertezas ligadas à descrição do reservatório e uma adequada avaliação dos riscos envolvidos na sua exploração. Os fundamentos dos processos estocásticos e as bases para a sua simulação, com ênfase nos processos Gaussianos e nas propriedades da variável discretizada, denominada indicatriz, são apresentados no Capítulo 3.

As bases para a simulação dos processos Markovianos, suas principais propriedades e suas aplicações na caracterização do meio são discutidas no Capítulo 4. É dado um destaque às propriedades espaciais destes processos, relacionando as características de atração aos parâmetros de correlação espacial normalmente avaliados somente nos processos Gaussianos. Além disso, exploram-se os procedimentos de condicionalização que utilizam métodos Bayesianos e os processos com múltiplas fácies, de grande utilidade e flexibilidade na descrição de variáveis categóricas. O grande potencial de utilização destes processos na caracterização dos meios porosos fez com que eles ganhassem um maior destaque e se tornassem um objeto de análise mais minuciosa por parte deste trabalho.

O Capítulo 5 trata da análise dos resultados das simulações dos processos estocásticos Gaussianos e Markovianos e dos resultados observados para o comportamento dos parâmetros da Teoria da Percolação. É analisada a influência do alcance da correlação, do modelo de correlação e da discretização da malha, sendo possível obter relações empíricas para os parâmetros conectivos dos processos espacialmente correlacionados.

Os Capítulos 6 e 7 visam a complementar a análise da influência da correlação, utilizando agora o fluxo em redes porosas, através do modelo de percolação por invasão, que se constitui numa ramificação da Teoria da Percolação. No Capítulo 6 são descritos os principais modelos correntemente utilizados para a simulação numérica do meio poroso em escala microscópica, dentre eles a percolação por invasão. Também são apresentados alguns modelos analíticos, baseados na Teoria da Percolação, que permitem estimar algumas propriedades ligadas ao fluxo, como a permeabilidade relativa e a pressão capilar. Pelo fato destes modelos não levarem em conta a estruturação das propriedades que comandam o movimento dos fluidos, as suas respostas podem apresentar imprecisões não avaliadas. Este é o assunto tratado no Capítulo 7. Para verificar a sensibilidade do fluxo de fluidos à presença da correlação espacial entre os diâmetros de poros e de gargantas de poros, são simuladas redes porosas correlacionadas e procedidas simulações de fluxo utilizando a percolação por invasão; paralelamente se faz uma necessária adequação das equações analíticas para considerar o efeito da correlação espacial sobre os parâmetros utilizados nas equações.

Em síntese, este trabalho analisa a sensibilidade dos parâmetros conectivos da Teoria da Percolação aos parâmetros de correlação espacial dos processos estocásticos, tanto nos processos Gaussianos como nos processos Markovianos; aproveita para aprofundar o conhecimento acerca das propriedades dos processos Markovianos e sua utilização na caracterização de reservatórios. Por fim, verifica a influência destes parâmetros diretamente sobre as características ligadas ao fluxo, utilizando a representação espacial do meio através de redes porosas espacialmente correlacionadas, seguida da aplicação do mecanismo de percolação por invasão.

Capítulo 2

Teoria da Percolação

Este capítulo dedica-se a uma leitura objetiva dos principais fundamentos da Teoria da Percolação, destacando-se as questões ligadas à comunicação interna e ao transporte dos fluidos nos meios porosos, representados por malhas de dimensões finitas. São também englobadas as análises dos modelos que tratam de variáveis contínuas, como a permeabilidade efetiva e os diâmetros de poro em redes microscópicas.

2.1 Conceitos

A Teoria da Percolação, assim denominada por Broadbent e Hammersley [1] em seu clássico trabalho de 1957, foi criada para descrever a morfologia e a natureza do transporte de fluidos em meios porosos desordenados. Tem aplicação destacada em vários campos da ciência, com a qualidade de fornecer leis universais que descrevem a geometria e as propriedades gerais do sistema, que engloba o meio e o fluido nele presente.

Fluido e meio têm aqui um significado mais amplo, podendo representar um soluto difundindo-se através de um solvente, uma doença infectando uma comunidade, um líquido percorrendo um espaço poroso de uma rocha no subsolo. Um aspecto importante dos processos de percolação reside no fato de sua dinâmica ser essencialmente governada pelo meio onde se dá o transporte e não pelo fluido, como nos processos de difusão; assim há um forte destaque para as características geométricas e estatísticas deste meio.

Inúmeros são os estudos que propiciaram inovações gradativas à Teoria da Percolação; publicações revisionais permitiram o agrupamento destes trabalhos e um conseqüente apro-

fundamento de suas questões fundamentais. São os casos dos trabalhos de Shante e Kirkpatrick [2] de 1971, Essam [3] de 1980, de Stauffer [4] de 1985 e Berkovitz e Balberg [5] de 1993.

Para definir alguns fundamentos, considera-se inicialmente uma malha quadrada, em que as células são condutoras de energia ou são isolantes, com uma fração p das mesmas sendo composta de células condutoras, aleatoriamente dispostas sobre a malha; assim, cada célula tem probabilidade p de ser condutora e $(1-p)$ de ser isolante, independente de qualquer outra célula. Em uma malha bidimensional de dimensões $L \times L$ células, as locações condutoras são aleatoriamente distribuídas, de forma semelhante à apresentada na figura a seguir.

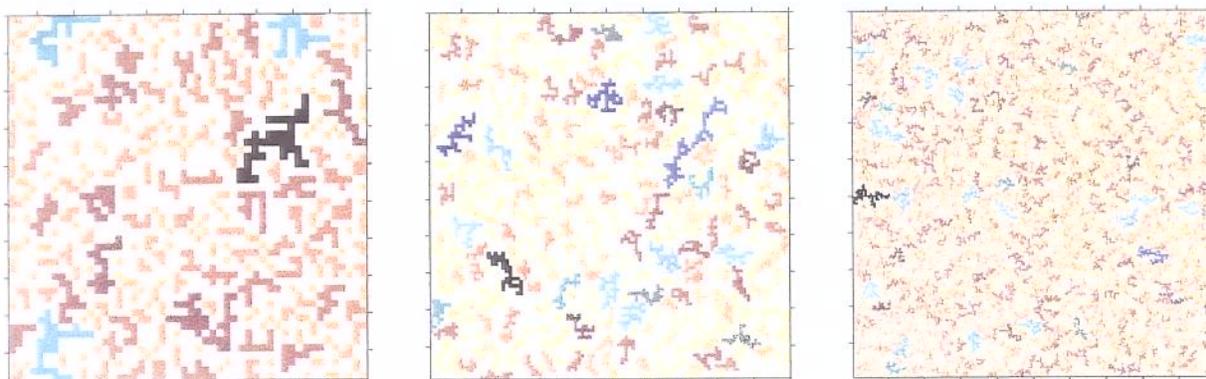


Figura 2.1 – Malhas compostas de células condutoras (em cores) e isolantes (em branco), com dimensões $L \times L$, o valor de L sendo respectivamente 50, 100 e 200

Supondo-se que a propagação de energia se dê apenas entre células condutoras que tenham uma aresta comum (ou uma face comum no caso tridimensional), a energia imposta a uma fronteira poderá ou não ser transmitida à fronteira oposta; se houver fluxo de energia entre fronteiras opostas diz-se, por definição, que há percolação. Pode-se perceber que quanto maior a proporção de células condutoras, maior a probabilidade de haver percolação; além disso, ela só se dá acima de uma determinada proporção, denominada crítica. O modelo que foi apresentado é o chamado *site percolation* ou percolação de locação. Se, no caso acima, todas as locações forem ativas, mas a conexão entre elas só for efetiva em uma fração p das ligações ou *bonds* ter-se-á um caso bastante análogo, denominado *bond percolation* ou per-

colação de ligação. Em certos modelos é interessante estudar um caso misto, onde não só as locações condutoras como também as ligações entre elas são distribuídas aleatoriamente; este caso é denominado *mixed percolation* ou percolação mista, em que pode ser feita uma analogia com a rede porosa, as locações representando os poros e as ligações representando as gargantas de poro, da forma descrita por Hammersley e Welsh [6].

Componentes Conexos (Clusters)

Considera-se, por definição, que duas células estão em conexão direta quando dividirem uma mesma aresta nos casos bidimensionais (ou uma mesma face nos casos tridimensionais), ou seja, numa malha retangular cada célula está em conexão com quatro pontos, denominados “vizinhos mais próximos” (*nearest neighbor*); da mesma forma, consideram-se duas células não vizinhas em comunicação ou conexão, quando existir um caminho conexo entre elas, isto é, quando a partir de uma delas for possível alcançar a outra através de múltiplas ligações entre vizinhos.

Define-se como componente conexo, correntemente chamado de *cluster*, um conjunto de células ativas em que todos os elementos estão em conexão. É possível observar que, para pequenas proporções, existem clusters de pequenas dimensões e isolados; mas à medida que esta proporção é gradualmente aumentada, os clusters vão se alargando e se ligando, tornando-se maiores e menos numerosos, até que, para um determinado valor, um cluster passa a ligar duas faces opostas; a partir deste ponto diz-se que há percolação e esta proporção limite é denominada proporção crítica de percolação, p_c . Este comportamento pode ser ilustrado na Figura 2.2, onde os maiores clusters são representados pelas cores mais fortes.

O tamanho médio dos componentes conexos formados, $\langle S \rangle$, aumenta com o aumento da proporção para valores de $p < p_c$; acima de p_c , há sempre a presença do cluster percolante, que incorpora novos clusters à medida que a proporção p aumenta e o parâmetro $\langle S \rangle$, agora descontando o cluster percolante, decresce. Observa-se a relação de potência:

$$\langle S \rangle \propto |p - p_c|^\gamma$$

onde γ é o parâmetro que regula este comportamento (Figura 2.3), que é descrito em detalhes na próxima seção.

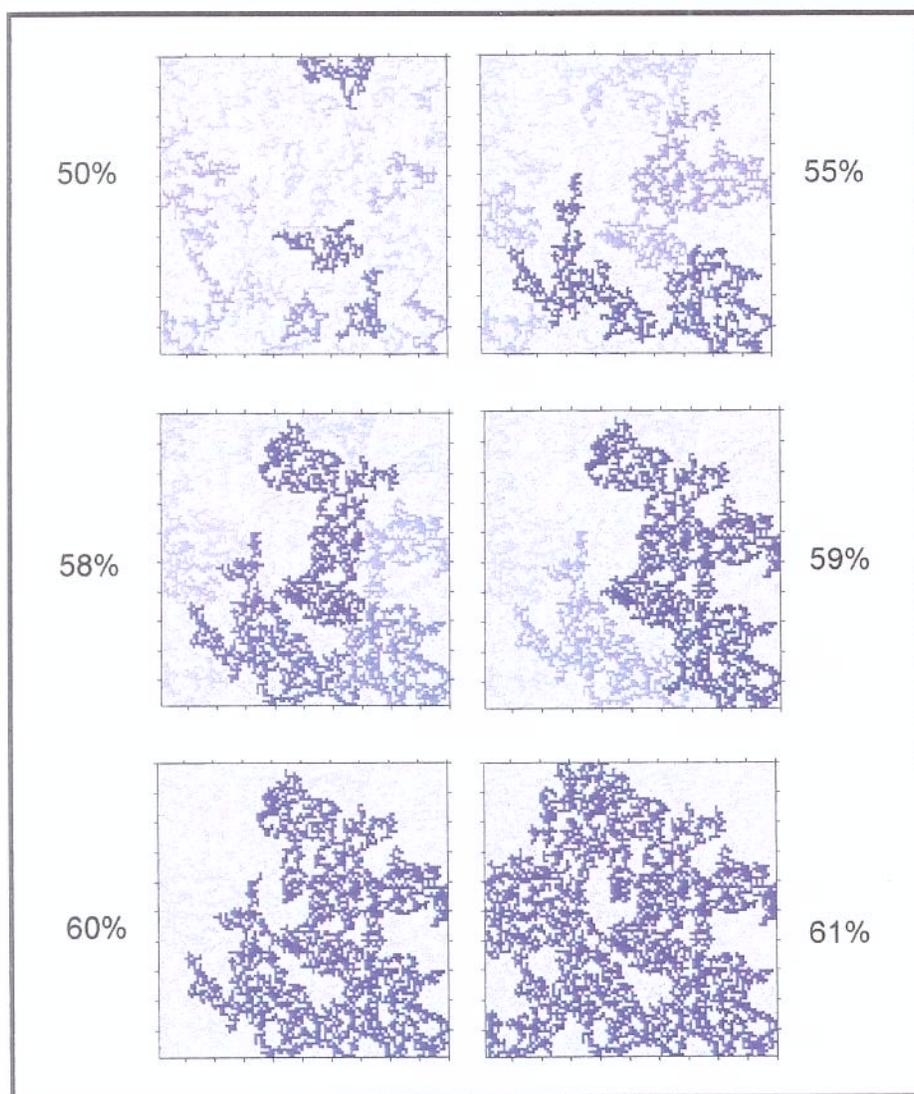


Figura 2.2 – Componentes Conexos (ou clusters) formados em proporções próximas à crítica p_c .

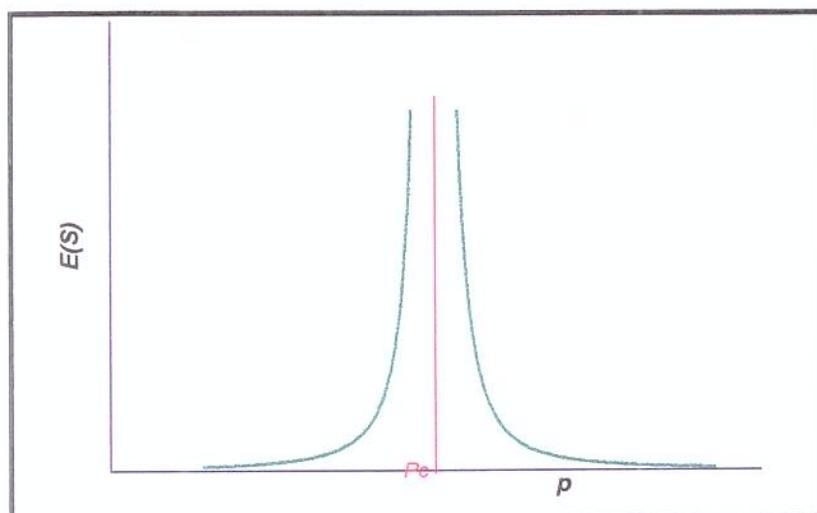


Figura 2.3 – Comportamento do Tamanho Médio dos Clusters à variação da proporção p

Proporção Crítica e Probabilidade de Percolação

A definição formal de p_c é rigorosamente feita para malhas infinitas e refere-se ao ponto de transição de fase, a partir do qual se forma um cluster infinito (percolante); pode-se provar que este cluster infinito que ocorre para $p > p_c$ é único [7]. Para malhas finitas ($L \times L$) verificam-se condições diversas, mas pode-se observar que os resultados obtidos são bastante próximos dos valores teóricos das malhas infinitas, quando os valores de L são suficientemente elevados.

A proporção crítica (p_c) tem um valor fixo para malhas infinitas, isto é, a probabilidade de haver percolação vale 0 para $p \leq p_c$ e 1 para $p > p_c$. Para malhas finitas, a proporção crítica é uma variável aleatória cuja média é próxima de p_c , e cuja variância é tanto menor quanto maior for o tamanho da malha. Assim, a percolação em uma malha finita pode acontecer antes (ou depois) da proporção limite estabelecida para as malhas infinitas. Por exemplo, em uma malha de dimensões 10×10 , um cluster percolante pode ser formado com uma taxa de ocupação p de apenas 0,10, apesar do valor estabelecido para as malhas quadradas ser próximo de 0,59; isto ocorre quando as 10 células ativas estiverem, por um evento raro, posicionadas sobre uma mesma fila. Da mesma forma, os valores são diferentes se definimos a conexão

na direção vertical ou horizontal. Estas discrepâncias se tornam desprezíveis para malhas suficientemente grandes.

O valor de p_c é extensivamente estudado e seu valor é calculado em função do tipo da malha (*bond* ou *site*), do desenho da malha (retangular, triangular, cúbica, etc) e da dimensão considerada (1- D , 2- D , 3- D , etc). Embora a teoria da percolação já exista há quase 40 anos, poucas são as soluções exatas já encontradas, mesmo para as malhas mais simples; procedem-se algumas vezes aproximações por séries, mas na grande maioria dos casos os valores são obtidos por simulações Monte Carlo em malhas finitas, com estabelecimento estatístico dos parâmetros. Alguns valores de p_c , obtidos por métodos diversos, para algumas malhas comuns, são mostrados na tabela abaixo, extraídos de Stauffer [4].

Tabela 2.1 – Proporções Críticas de Percolação

Malha	<i>Site</i>	<i>Bond</i>
Quadrada	0,5928	0,5000
Triangular	0,5000	0,3473
Cúbica	0,3116	0,2488

Probabilidade Conectiva e Condutividade

Denomina-se Probabilidade Conectiva $P(p)$ a probabilidade de uma locação pertencer a um cluster infinito (ou percolante); representa a proporção relativa às células do cluster percolante. Nas malhas infinitas, seu valor vale zero para as proporções p inferiores a p_c e maior que zero para $p > p_c$, sendo tanto maior quanto mais acima de p_c estiver a proporção de células ativas. Próximo à transição, $P(p)$ tem uma relação de potência com a diferença $(p - p_c)$:

$$\begin{aligned}
 P(p) &= 0 & p < p_c \\
 P(p) &\propto (p - p_c)^{\beta_0} & p \geq p_c
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

sendo β_o a constante reguladora deste comportamento.

A figura 2.4 ilustra o aspecto geral deste parâmetro.

A condutividade efetiva da malha, definida com condições de fluxo nulo nas fronteiras laterais, também depende do ponto onde se inicia a percolação; para $p < p_c$ tem valor nulo e para $p > p_c$ é estimada pela equação:

$$\begin{aligned} K_{eff}(p) &= 0 & p < p_c \\ K_{eff}(p) &\propto (p - p_c)^t & p \geq p_c \end{aligned} \quad (2.2)$$

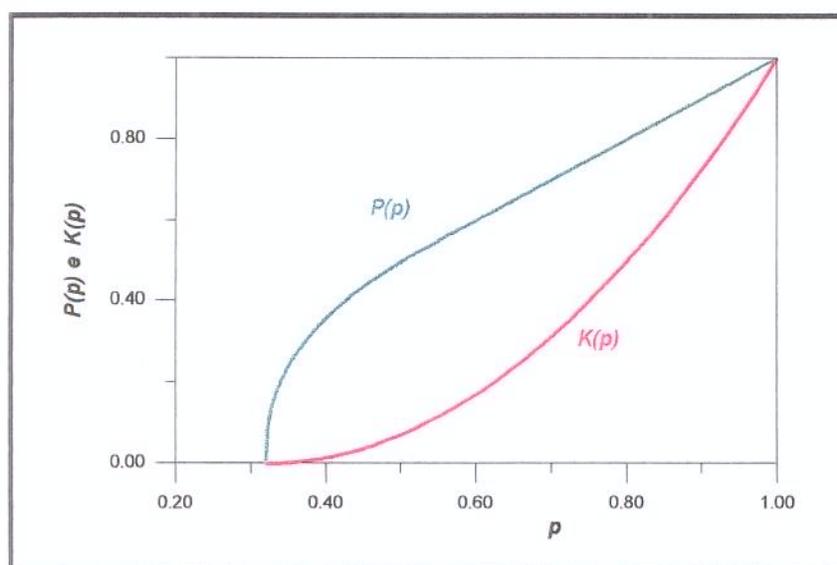


Figura 2.4 – Aspecto geral da Probabilidade Conectiva $P(p)$ e da Condutividade $K_{eff}(p)$

O aspecto geral da condutividade efetiva é também mostrado na Figura 2.4. O expoente t acima é em geral calculado sem grande precisão, havendo discrepâncias entre valores obtidos em diversos trabalhos, devendo, por isto, ser aplicado apenas em análises qualitativas. Da mesma forma que para o cálculo de p_c , também são obtidos os valores de β_o , γ e t para os di-

versos tipo de malha. Estes expoentes têm valores que se mostram independentes do tamanho ou do tipo da malha, variando apenas com a dimensão Euclidiana D , fenômeno comumente denominado universalidade. Alguns valores destes expoentes extraídos de Stauffer [4] estão selecionados na tabela abaixo.

Tabela 2.2 – Expoentes Universais

Expoentes	$D=2$	$D=3$
β_o	0,14	0,41
γ	2,39	1,80
t	1,30	2,00

Função Conectividade

Define-se como função conectividade $g(h)$ (*connectivity function*) a probabilidade de duas locações, separadas por uma distância h , estarem dentro do mesmo cluster, ou seja, estarem comunicadas ou conexas.

$$g(h) = p(x_1 \leftrightarrow x_2), \quad |x_1 - x_2| = h \quad (2.3)$$

Esta função tem uma qualidade importante, pois é um indicativo da comunicação interna do meio poroso, podendo auxiliar na adoção do espaçamento entre poços em malhas de produção de petróleo ou de injeção de água. Pode também ser utilizada para monitorar a resposta dos algoritmos de simulação estocástica das propriedades dos reservatórios, como no trabalho de Alabert e Modet [8]. Estes e outros aspectos deste parâmetro são apresentados com mais detalhes no Anexo B.

A conectividade vale p para distância 0 e decresce exponencialmente com a distância; para grandes distâncias seu valor é 0 se $p < p_c$ ou $P(p)^2$ se $p > p_c$, já que dois pontos muito distantes só estão em conexão se pertencerem ao cluster percolante. O aspecto desta função é

ilustrado na Figura 2.5, cujos valores foram calculados experimentalmente para malhas sem correlação espacial.

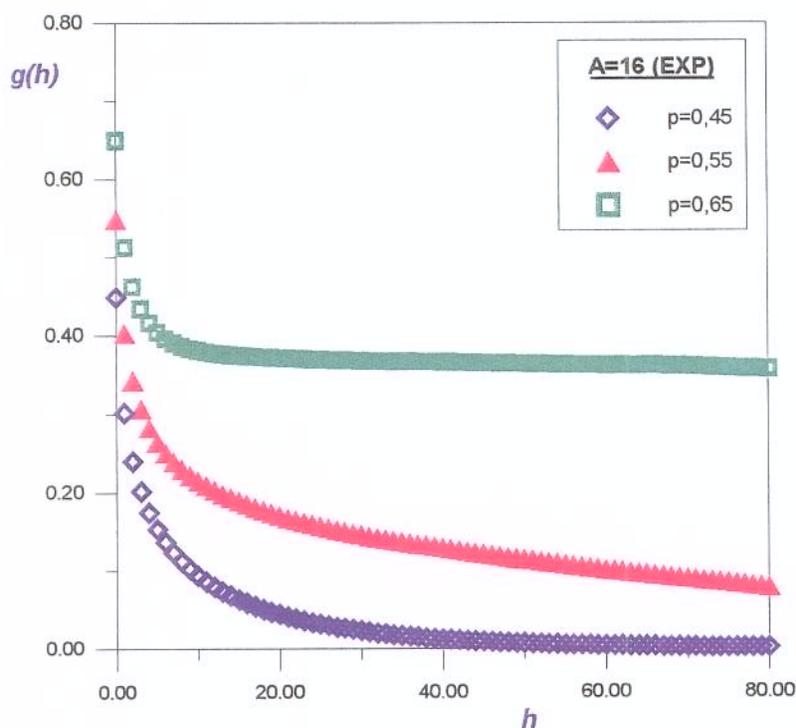


Figura 2.5 – Aspecto geral da Função Conectividade $g(h)$

Dimensão Fractal

A dimensão fractal D_f é um parâmetro que mede a taxa de crescimento de uma determinada medida (comprimento, área ou volume) em relação à dimensão Euclidiana. A área de uma figura compacta, por exemplo, cresce proporcionalmente ao quadrado da dimensão unitária L e, assim, o parâmetro regulador deste crescimento vale 2; para figuras vazadas, esta taxa já não é mais válida, ou seja, a área ocupada da figura não cresce proporcionalmente a L^2 . Observando a figura abaixo, um exemplo clássico chamado tapete de Sierpinski, pode-se entender melhor este conceito.

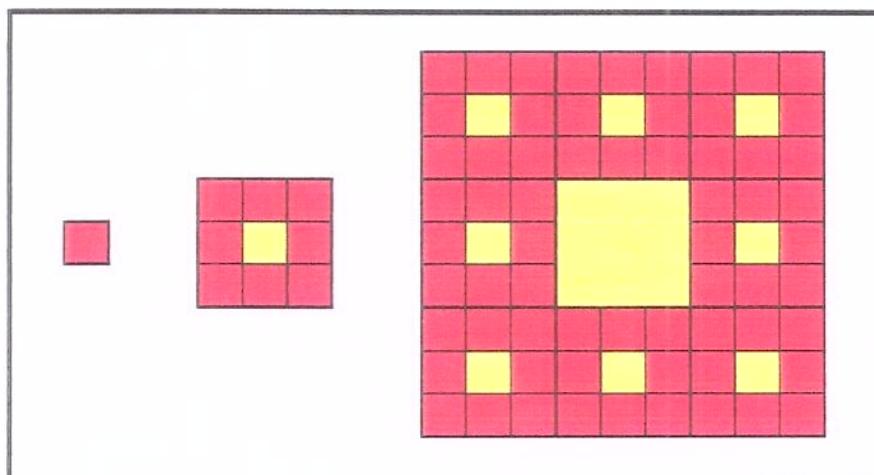


Figura 2.6 – Construção do tapete de Sierpinski

Pela lei de formação desta figura, ao se multiplicar a dimensão por 3, a quantidade de células ocupadas é multiplicada por 8. No quarto estágio de formação, a figura se apresenta como a seguir:

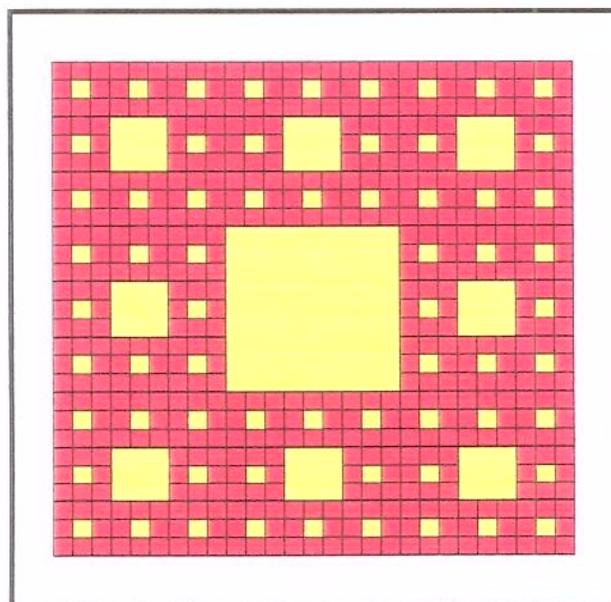


Figura 2.7 – Tapete de Sierpinski no quarto estágio de construção

Neste exemplo, a quantidade de células condutoras (em vermelho), convencionalmente denominada de massa $M(L)$, não cresce proporcionalmente a L^2 , mas proporcionalmente a L^{D_f} , e a densidade $d(L) = M(L)/L^2$ não é constante:

$$M(L) = KL^{D_f}$$

$$M(3L) = K(3L)^{D_f}$$

Mas, pela lei de formação, tem-se:

$$M(3L) = 8 \cdot M(L)$$

Igualando as duas equações anteriores tem-se:

$$8 \cdot M(L) = KL^{D_f} \cdot 3^{D_f}$$

e a dimensão fractal pode ser calculada:

$$D_f = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1,89$$

Observa-se que a dimensão fractal tem uma relação direta com a lei de formação. A densidade é calculada por:

$$d(L) = KL^{D_f - D}$$

e decresce com o aumento de L . Assim, o comportamento fractal pode ser identificado pela medição da densidade para valores de L variável, traçados em um gráfico logarítmico; o que consiste no método mais comum de medição da dimensão fractal D_f .

No exemplo acima, a densidade $d(L)$ da figura se reduz indefinidamente com o aumento de L ; em alguns casos, ela decresce até um certo ponto, a partir do qual se torna constante. Será mostrado que o cluster percolante das malhas finitas apresenta uma dimensão fractal fixa, para tamanhos de malha inferiores a um determinado limite; a partir deste ponto, ele passa a ter comportamento homogêneo.

2.2 Descrição do Comportamento dos Parâmetros da Teoria da Percolação

É objetivo desta seção destacar as principais relações que descrevem o comportamento dos parâmetros anteriormente definidos. Os problemas ligados à Teoria da Percolação possuem em alguns casos soluções exatas, em outros soluções aproximadas por expansões em séries e na maioria das vezes equações obtidas com o auxílio de simulações Monte Carlo em malhas finitas. No caso específico unidimensional, a obtenção exata de algumas relações pode facilitar o entendimento de questões essenciais e permitir a extrapolação para casos mais complexos.

Supondo inicialmente uma malha unidimensional com ocupação aleatória, na qual a ocorrência ou não de um determinado evento se dê com probabilidade p , pode-se estimar a probabilidade de formação de um cluster de tamanho fixo: por exemplo, para um cluster de três células, a probabilidade de três resultados positivos ladeados por dois negativos (para definir o cluster) é calculada, pela teoria das probabilidades em eventos independentes, por:

$$n_3 = p^3 \cdot (1-p)^2$$

Generalizando para qualquer tamanho de cluster S :

$$n_s = p^s \cdot (1-p)^2 \tag{2.4}$$

A proporção crítica de percolação para este caso é $p_c=1$, pois só ocorrerá percolação se todos os pontos estiverem ocupados. Estendendo as análises aos demais casos, pode-se calcular, por ponderação, a probabilidade w_s de um ponto ocupado pertencer a um cluster de tamanho S por:

$$w_s = \frac{n_s \cdot S}{\sum n_s \cdot S} = \frac{n_s \cdot S}{p} \quad (2.5)$$

Na equação anterior, o numerador representa a probabilidade de um ponto pertencer a um cluster de tamanho S , enquanto o denominador é a probabilidade de um ponto pertencer a um cluster qualquer (que vale p).

O valor esperado para o tamanho dos clusters $E(S)$ (que tem como estimativa o tamanho médio observado dos clusters $\langle S \rangle$) pode ser obtido pela ponderação dos tamanhos através das suas probabilidades. Assim:

$$E(S) = \sum_s w_s \cdot S = \sum_s \frac{n_s \cdot S^2}{p} = \sum_s \frac{n_s \cdot S^2}{\sum_s n_s \cdot S} \quad (2.6)$$

A partir de alguns casos simplificados, como o unidimensional, discutidos em Stauffer[4] é postulada a seguinte lei, válida para os clusters de grandes dimensões:

$$n_s(p) \propto S^{-\tau} \cdot \exp[-c(p) \cdot S] \quad (2.7)$$

$$c(p) \propto |p - p_c|^{\frac{1}{\sigma_c}} \quad (2.8)$$

sendo τ e σ_c constantes universais.

Próximo a p_c , $c(p)$ tende a zero e:

$$n_s(p) \propto S^{-\tau} \quad (2.9)$$

Deve-se observar que só os clusters com um valor de S menor que $1/c$ (o que faz o termo exponencial se anular) contribuem efetivamente para a média acima e têm ($n_s \propto S^{-\tau}$) de forma semelhante às proporções próximas a p_c . Clusters com $S \gg 1/c$ são raros ($n_s \sim 0$) e não

mais dominados pelo comportamento em p_c . Assim $S_c=1/c$ representa um tamanho limite (denominado de *crossover*) entre clusters críticos ($S < S_c$) e não críticos ($S > S_c$). Próximo a p_c , S_c fica próximo de infinito e todos os clusters têm comportamento crítico.

Dimensões do cluster percolante

O cluster percolante de uma malha finita é aquele que conecta duas faces opostas desta malha, sendo comumente denominado de cluster infinito, por ter analogia com o cluster percolante das redes infinitas. Abaixo da proporção crítica é válida a relação:

$$\sum_s n_s(p) \cdot S = p \quad (2.10)$$

Acima de p_c é válida a mesma equação, apenas acrescentando o tamanho do cluster percolante, tornando:

$$P(p) + \sum_s n_s(p) \cdot S = p \quad (2.11)$$

A proporção crítica p_c é a máxima proporção em que ainda não se formou o cluster percolante, e tem-se neste ponto:

$$0 + \sum_s n_s(p_c) \cdot S = p_c$$

Igualando-se as duas últimas equações anteriores, faz-se:

$$P(p) + \sum_s n_s(p) \cdot S - p = \sum_s n_s(p_c) \cdot S - p_c$$

$$P(p) = \sum_s [n_s(p_c) - n_s(p)] \cdot S + p - p_c$$

Substituindo-se a equação (2.7) relativa ao número de clusters n_s , obtém-se:

$$P(p) \propto \sum_s S^{1-\tau} \cdot [1 - \exp(-c(p) \cdot S)] \quad (2.12)$$

Estendendo-se o somatório acima a uma integral tem-se:

$$P(p) \propto \int S^{1-\tau} [1 - \exp(-c \cdot S)] \cdot dS$$

$$P(p) \propto c \int S^{2-\tau} \exp(-cS) \cdot dS$$

Criando-se a variável auxiliar $m=c \cdot s$ transforma-se a integral em:

$$P(p) \propto c^{\tau-2} \int m^{2-\tau} \exp(-m) \cdot dm$$

A integral acima pode ser representada pela função gama, resultando em:

$$P(p) \propto c^{\tau-2} \cdot \Gamma(3-\tau)$$

$$P(p) \propto c^{\tau-2}$$

Substituindo-se a equação (2.8), vem:

$$P(p) \propto (p - p_c)^{\frac{\tau-2}{\sigma_0}} \quad (2.13)$$

Definindo-se:

$$\beta_0 = \frac{\tau-2}{\sigma} \quad (2.14)$$

tem-se:

$$P(p) \propto (p - p_c)^{\beta_0} \quad (2.15)$$

Este resultado mostra a forma como o cluster infinito tende a zero ao se decrescer a proporção acima do ponto crítico, além de definir o parâmetro β_0 em relação aos parâmetros controladores do número de clusters.

Tamanho esperado dos clusters

Procedendo-se em uma seqüência semelhante à anterior, substitui-se a equação (2.7) relativa ao número de clusters n_s , agora na equação da esperança do tamanho dos clusters (2.6):

$$E(S) = \sum_s \frac{n_s \cdot S^2}{\sum_s n_s \cdot S} \propto \int n_s \cdot S^2 dS$$

$$E(S) \propto \int S^{2-\tau} \exp(-cS) \cdot dS$$

$$E(S) \propto c^{\tau-3} \int m^{2-\tau} \exp(-m) \cdot dm$$

$$E(S) \propto c^{\tau-3} \Gamma(3-\tau)$$

$$E(S) \propto |p - p_c|^{-\frac{3-\tau}{\sigma_0}} \quad (2.16)$$

Definindo-se:

$$\gamma = \frac{3-\tau}{\sigma} \quad (2.17)$$

tem-se:

$$E(S) \propto |p - p_c|^{-\gamma} \quad (2.18)$$

O valor de τ é próximo de 2, o que faz o parâmetro anterior próximo do valor $1/c$, equivalente ao tamanho de “*crossover*” S_c definido após a equação (2.9).

Os dois expoentes β_o e γ das equações anteriores podem ser extraídos da contagem e medição dos clusters e do cálculo de momentos de primeira e segunda ordem do tamanho dos mesmos; o momento de ordem k da variável S pode ser expresso por:

$$M_k(p) = \sum_S S^k \cdot n_S \quad (2.19)$$

Substituindo-se novamente a equação (2.7) vem:

$$M_k(p) \propto \sum_S S^{k-\tau} \cdot \exp(-cS) \quad (2.20)$$

$$M_k(p) \propto \int S^{k-\tau} \exp(-cS) \cdot dS$$

$$M_k(p) \propto c^{\tau-1-k} \int m^{k-\tau} \exp(-m) \cdot dm = c^{\tau-1-k} \Gamma(k+1-\tau)$$

$$M_k(p) \propto c^{\tau-1-k} \propto (p - p_c)^{\frac{\tau-1-k}{\sigma_o}}$$

$$M_k(p) \propto (p - p_c)^{\beta_o - (\beta_o + \gamma)(k-1)} \quad (2.21)$$

fazendo $k=1$, obtém-se:

$$M_1(p) \propto (p - p_c)^{\beta_o}$$

e fazendo $k=2$, chega-se a:

$$M_2(p) \propto (p - p_c)^{-\gamma}$$

Os expoentes apresentados acima dependem apenas da dimensão Euclidiana, pelo que são chamados expoentes universais. Alguns destes expoentes podem ser observados na Tabela 2.2.

Função Conectividade e Comprimento Conectivo

Define-se como função conectividade $g(h)$ a probabilidade de que dois pontos distantes h , pertençam ao mesmo cluster.

$$g(h) = p(x_1 \leftrightarrow x_2), \quad |x_1 - x_2| = h \quad (2.22)$$

A soma de $g(h)$ ao longo de todos os clusters fornece o tamanho médio dos clusters.

$$\sum_h g(h) = E(S) = \sum_s \frac{n_s \cdot S^2}{p} \quad (2.23)$$

$$p \cdot \sum_h g(h) = \sum_s n_s \cdot S^2 \quad (2.24)$$

A função conectividade diminui exponencialmente com o aumento de h ; ela vale p para h igual a 0 (probabilidade de um ponto ser ativo) e se estabiliza em zero quando $p < p_c$ ou em $P(p)^2$ para $p > p_c$ (dois pontos mais distantes só estão em conexão se ambos pertencerem ao cluster infinito).

Define-se como comprimento conectivo ξ a distância h média entre dois pontos que pertençam ao mesmo cluster:

$$\xi^2 = \frac{\sum_h h^2 g(h)}{\sum_h g(h)} \quad (2.25)$$

O comprimento conectivo é o raio dos clusters que fornecem a maior contribuição ao tamanho médio (segundo momento) próximo a p_c . O cálculo de ξ pode também ser obtido pela integral da função conectividade:

$$A_E = \int g(h) dh \quad (2.26)$$

$$A_E = \frac{\pi \cdot \xi^2}{4}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{4 \cdot A_E}{\pi}} \quad (2.27)$$

A hipótese fundamental da análise escalar, a ser discutida no próximo item, supõe a divergência de ξ descrita por:

$$\xi(p) \propto |p - p_c|^{-\nu} \quad (2.28)$$

Sendo esta variável uma medida das dimensões dos clusters, à medida que a proporção aumenta, seu valor crescerá, tendendo para infinito ao se aproximar de p_c . Resultados numéricos fornecem para as malhas bidimensionais valores de ν próximos a $4/3$. O seu perfil de crescimento próximo à proporção crítica é semelhante ao do tamanho médio dos componentes conexos, já apresentado na Figura 2.3.

Assim, da mesma forma que, pela Equação (2.8), $S_\xi = 1/c \propto |p - p_c|^{-1/\sigma}$ é o tamanho limite superior (“*crossover*”) para a contribuição ao número de clusters, abaixo do qual os clusters se comportam como na transição, ξ é o raio dos clusters que mais contribuem para o valor do segundo momento. Assumindo a relação:

$$\frac{1}{\sigma} = -D_f \cdot v \quad (2.29)$$

sendo D_f a dimensão fractal, tem-se:

$$S_\xi \propto |p - p_c|^{-1/\sigma} \quad (2.30)$$

$$S_\xi \propto |p - p_c|^{D_f v} \quad (2.31)$$

Substituindo a Equação (2.28) vem:

$$S_\xi \propto \xi^{D_f} \quad (2.32)$$

Para dimensões de cluster muito inferiores ao valor de ξ , sua existência é ignorada, e o comportamento se dá como se ξ fosse infinito (como em p_c). Deste modo, os maiores clusters, que ocorrem em proporções p próximas a p_c , apresentam a mesma dimensão fractal que o cluster infinito em p_c , desde que $h < \xi$.

As equações que descrevem a função conectividade reforçam as análises anteriores: de acordo com Grimmitt [9], a função conectividade e o comprimento conectivo se relacionam através das equações:

$$g(h) = \begin{cases} \exp(-h/\xi) & p \neq p_c \\ h^{-\frac{2\beta_o}{v}} & p = p_c \end{cases} \quad (2.33)$$

Desta forma, destaca-se novamente o comportamento limite para ξ ; o significado físico de ξ pode ser percebido na medida em que só para comprimentos de escala muito superiores a ξ o cluster percolante é macroscopicamente homogêneo, sendo válidas as equações que descrevem o transporte dos fluidos, como exemplo a lei de Darcy. Para comprimentos menores

que ξ os clusters possuem um comportamento auto-similar, identificado pela dimensão fractal. Este assunto é detalhado na seção a seguir.

2.3 Comportamento na Transição e Escala do Processo

À medida que se aumenta a concentração p , aumentam-se as dimensões dos componentes conexos, até uma proporção limite p_c no qual o maior deles se torna percolante. Neste limite, o comprimento conectivo ξ diverge de acordo com a equação (2.28), apresentando valor infinito e todos os clusters possuem $r < \xi$, apresentando comportamento auto-similar ou fractal: se for medida a massa $M(L)$ do cluster infinito (número de células ativas no cluster) em quadrados de tamanho crescente a partir do centro, poderá ser observado que o crescimento de $M(L)$ não se dá segundo L^2 , mas:

$$M(L) \propto L^{1,89} = L^{D_f} \quad (2.34)$$

O valor de $D_f=1,89$ pode ser observado no experimento de Kapitulnik et al [11] descrito à frente.

A densidade $d(L) = M(L)/L^2$ será:

$$d(L) \propto L^{-0,11} = L^{-D+D_f} \quad (2.35)$$

Tem-se comportamento semelhante por parte dos clusters próximos a p_c , quando ξ é finito mas muito grande, permanecendo maior que L .

Por outro lado, acima de p_c , em pontos onde $L > \xi$, o cluster infinito deixa de ter comportamento fractal e passa a variar proporcionalmente a L^2 (ou L^D para casos D -dimensionais). Mais precisamente a massa do cluster percolante pode ser calculada por:

$$M(L) = P(p) \cdot L^2 \quad (2.36)$$

Considerando-se por hipótese $L=\xi$, seriam válidas as duas condições e:

$$M(L) = P_{\infty} \cdot L^D = \text{const} \cdot L^{D_f} \quad (2.37)$$

sendo

$$L = \xi \propto (p - p_c)^{-\nu}$$

e

$$P(p) \propto (p - p_c)^{\beta}$$

tendo-se então:

$$(p - p_c)^{\beta} \cdot (p - p_c)^{-D\nu} \propto (p - p_c)^{-D_f\nu} \quad (2.38)$$

e assim:

$$\beta = \nu \cdot (D - D_f) \quad (2.39)$$

Este comportamento fractal dos clusters pode ser percebido quando se observa o formato dos clusters: aproximando-se de p_c aumentam-se os espaços vazios de forma similar em praticamente todos os clusters, caracterizando o comportamento fractal; quando $p \gg p_c$ ($L > \xi$) os clusters mostram-se mais homogêneos e com poucos espaços vazios.

Experimento efetuado por Kapitulnik et al [11] resultou em uma maneira engenhosa de observar o comportamento fractal que se dá para $L < \xi$, seguido pelo comportamento uniforme, a partir de $L \geq \xi$, além de propiciar a análise de questões ligadas à escala do fenômeno. Por este procedimento tomam-se valores de p um pouco acima de p_c e observa-se o comporta-

mento do cluster percolante para vários valores de L , em quadrados tomados a partir do centro da malha. Já que para $p > p_c$ tem-se que ξ é finito, $d(L)$ cairá de acordo com $L^{-0.11}$ para $L < \xi$; a partir de $L \geq \xi$, $d(L)$ será igual a $P(p)$. A Figura 2.8 a seguir (extraída do próprio artigo) mostra este comportamento para dois valores fixos de $(p-p_c)$.

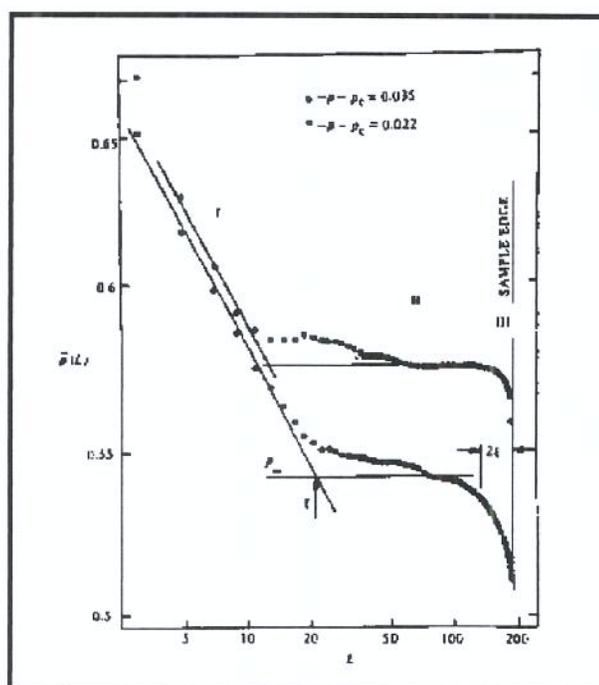


Figura 2.8- Densidade de ocupação do cluster percolante para duas proporções ligeiramente superiores a p_c . A figura foi extraída da referência [11]

Pode-se notar, por esta figura, que quanto mais próximo p estiver de p_c maior será ξ e mais tarde $d(L)$ se estabiliza, e ainda num patamar inferior. Para $p=p_c$ haveria um comportamento sempre decrescente ($\xi=\infty$).

Vale aqui chamar a atenção para o comportamento novamente decrescente de $d(L)$ após a estabilização (fase III): ele é justificado pelos chamados efeitos de fronteira, que ocorrem nas malhas finitas, pois ao limitarmos a dimensão da malha, existirão próximo à fronteira

clusters que seriam considerados isolados do cluster infinito, mas que estariam a ele ligado se a malha fosse infinita. E por esta razão a redução de $d(L)$ se mostra de forma marcante.

Já que a densidade do cluster se torna constante para $L \geq \xi$, pode-se por hipótese agrupar a malha em blocos de tamanho $\xi \times \xi$ (ξ^D para ser menos restrito). Neste caso haveria uma quantidade $(L/\xi)^2$ ou $(L/\xi)^D$ de blocos. Dentro de cada bloco a massa tem comportamento fractal e se comportaria como:

$$M(L) = \xi^{D_f}$$

$$M(L, \xi) = \xi^{D_f} \left(\frac{L}{\xi} \right)^D \quad (2.40)$$

$$M(L, \xi) = L^D \xi^{D_f - D} \quad (2.41)$$

Assim, para $p > p_c$ tem-se:

$$M(L, \xi) \propto L^D (p - p_c)^{-v(D_f - D)} \quad (2.42)$$

$$M(L, \xi) \propto L^D (p - p_c)^{\beta_o} = P(p) L^D \quad (2.43)$$

e o cluster infinito passa a ter densidade constante.

Resumidamente pode-se dizer que os clusters são auto-similares para $L < \xi$, similaridade esta quebrada para $L > \xi$. No ponto crítico todos os clusters são auto-similares. Voltando-se às Equações básicas (2.36) e (2.42) tem-se:

$$M(L, \xi) \propto \begin{cases} L^{D_f} & p / L < \xi \\ L^D \xi^{D_f - D} & p / L > \xi \end{cases} \quad (2.44)$$

$$d(L, \xi) \propto \begin{cases} L^{D_f-D} = L^{\beta/v} & p / L < \xi \\ \xi^{D_f-D} = \xi^{\beta/v} & p / L > \xi \end{cases} \quad (2.45)$$

Assim, observa-se que o cluster máximo se mostra variando em função de $L^{\beta/v}$ para $L < \xi$ e em função de $(p-p_c)^{\beta_0}$ ou $\xi^{\beta_0/v}$ para $L > \xi$.

Vale destacar novamente que o comportamento de $P(p)$ proporcional a $(p-p_c)^{\beta_0}$ representa o comportamento homogêneo do cluster percolante, mas só passa a valer para $L \geq \xi$. Antes disto, a densidade tem comportamento auto-similar. Será visto a seguir que este fenômeno se dá para diversos parâmetros, estando incluída a condutividade efetiva K_{eff} que é proporcional a $(p-p_c)^t$ mas somente a partir de $L \geq \xi$; abaixo deste valor a variável é auto-similar em L .

De uma forma mais ampla pode-se assumir:

$$P(L, \xi) = \xi^{\beta/v} f(L/\xi) \propto \begin{cases} L^{D_f-D} = L^{\beta_0/v} & p / L < \xi \\ \xi^{D_f-D} = \xi^{\beta_0/v} & p / L > \xi \end{cases} \quad (2.46)$$

Esta equação é também válida para $E(S) \propto (p-p_c)^y$, apresentado na Equação (2.18) e pode ser estendida para qualquer quantidade V que varie segundo $(p-p_c)^x$, como por exemplo a permeabilidade ao fluxo ($K_{eff} \propto (p-p_c)^t$) a ser discutida na seção 2.5. Assim, de uma forma geral:

$$V(L, \xi) = \xi^{x/v} f_1(L/\xi) \propto \begin{cases} L^{D_f-D} = L^{x/v} & p / L < \xi \\ \xi^{D_f-D} = \xi^{x/v} & p / L > \xi \end{cases} \quad (2.47)$$

ou

$$V(L, \xi) = (p-p_c)^x \cdot f \left[(p-p_c) L^{x/v} \right] \quad (2.48)$$

Uma maneira interessante de contemplar o problema é dada por Oliveira [10], em termos de fator de escala. Imagine-se que uma determinada malha seja vista por uma lente de aumento e suas dimensões sejam duplicadas; neste caso, as dimensões dos clusters e o comprimento conectivo (ξ) serão duplicados, fazendo valer:

$$\xi_1 = (p - p_c)^{-\nu}$$

$$\xi_2 = (p' - p_c)^{-\nu}$$

Para que o sistema ampliado seja equivalente ao original tem-se:

$$\xi_2 = 2 \cdot \xi_1$$

$$\left[\frac{(p - p_c)}{(p' - p_c)} \right]^{-\nu} = 2$$

$$(p' - p_c) = (p - p_c) \cdot (1/2)^{-1/\nu} \quad (2.49)$$

equação que permite o cálculo da nova proporção p' do sistema equivalente.

Da mesma forma, se forem as dimensões reduzidas à metade a proporção do sistema equivalente será aumentada segundo o fator $2^{1/\nu}$. Estas alterações de escala são a base da transformação denominada renormalização desenvolvida por Wilson [12], a qual permite o cálculo de propriedades equivalentes em escalas superiores.

2.4 Probabilidade de Percolação

As equações escalares mostradas anteriormente para uma variável qualquer $V(L, \xi)$ são agora estendidas para a probabilidade de percolação em uma malha de tamanho S , variável definida como $\pi(p)$.

Por definição, para sistemas com dimensões infinitas, abaixo de p_c não há percolação e não se forma o cluster infinito, mas acima de p_c sempre ocorre percolação. Deste modo, para sistemas infinitos, a probabilidade $\pi(p)$ de haver percolação vale zero para $p < p_c$ e vale 100% para $p > p_c$.

Para sistemas finitos, esta função não funciona exatamente assim: utilizando como exemplo o caso unidimensional ($p_c=1$), em redes com por exemplo $p=0,9$, cada ponto tem probabilidade $p=0,9$ de ser ativo, sendo a probabilidade de todos os pontos serem ativos maior que zero; neste caso $\pi(0,9) = 0,9^L$; seria pois um evento raro, de probabilidade baixa, mas maior que zero. Num exemplo ainda mais simples, uma malha quadrada ($p_c = 0,5927$) de tamanho 10×10 pode formar um cluster percolante, com $p=0,10$, se as 10 células ocupadas estiverem alinhadas.

A proporção crítica neste caso deixa de ser um valor fixo e passa a ser uma variável aleatória; o valor esperado para a proporção crítica $E(p_c)$ é próximo de p_c , mas a variância será tanto menor quanto maior for o tamanho $N \times N$ da malha, tendendo para zero quando N tender para infinito, de acordo com a própria definição de p_c .

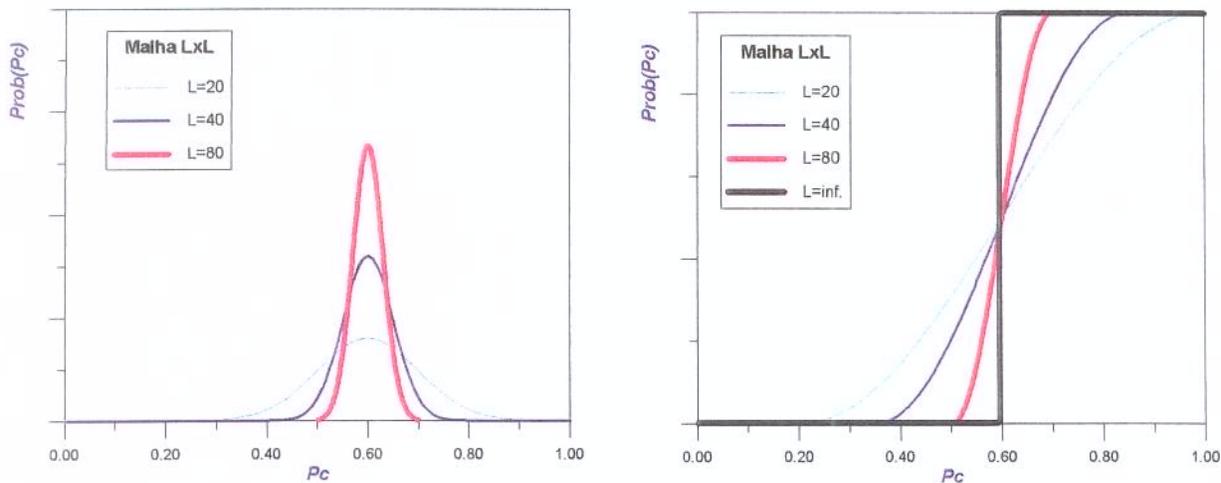


Figura 2.9 – Probabilidade de Percolação em função do tamanho da malha; à esquerda a função de distribuição de probabilidade e à direita a probabilidade acumulada.

O cálculo da probabilidade de percolação em malhas de pequeno porte pode ser feito através do cálculo das probabilidades, fazendo a contagem das possíveis configurações percolantes. Como exemplo tem-se o esquema a seguir (Figura 2.10), composto de uma malha 2x2, muito usado ao se fazer transferência de escala pela renormalização.

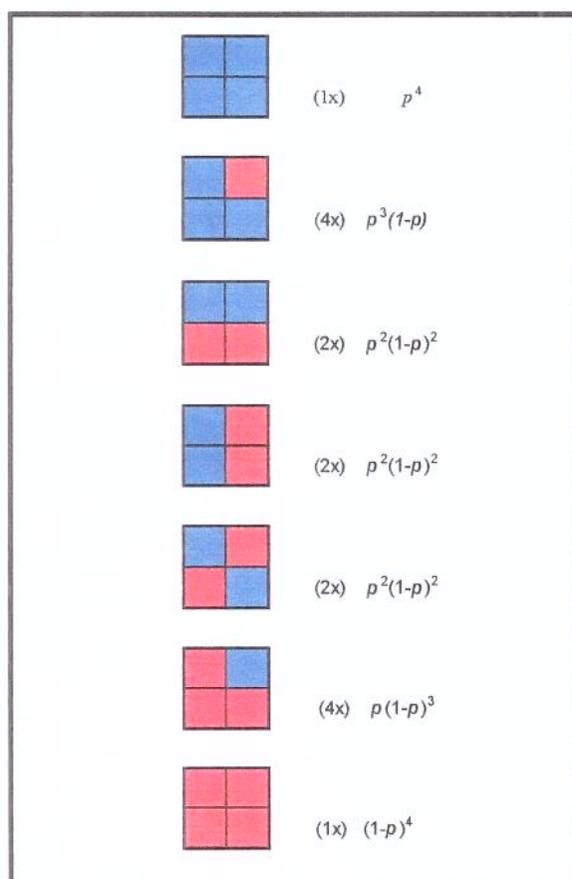


Figura 2.10 – Probabilidade de Percolação de cada uma das configurações possíveis em uma malha de tamanho 2x2

Deve-se observar que a função $\pi(p)$ representa a probabilidade de percolação acumulada, já que se a percolação se dá em p , ela também se dará em $p+\Delta p$, para Δp positivo; pode-se aqui fazer uma analogia com uma variável indicatriz definida por cortes crescentes, na qual a partir de um corte em $z=z_c$ em que houve percolação, todos os cortes em $z>z_c$ também fornecerão malhas percolantes.

A derivada $d\pi/dp$ representada na mesma figura fornece a probabilidade de haver percolação ao passarmos de p para $p+dp$. Pela mesma analogia anterior, esta derivada funciona como uma função distribuição de probabilidade para a ocorrência da percolação exatamente na proporção p .

Voltando agora ao conceito de escala, quantidades que variam segundo $(p-p_c)$ podem ser expressas de acordo com a Equação (2.48) por:

$$V(L, \xi) = (p - p_c)^\chi \cdot f \left[(p - p_c) L^{1/\nu} \right]$$

Para o caso da variável $\pi(p)$, para que ocorra $\pi(p)=1$ para todo $p > p_c$ nas malhas infinitas deve-se ter obrigatoriamente $\chi=0$. Deste modo:

$$\pi(p) = \Phi \left[(p - p_c) L^{1/\nu} \right] \quad (2.50)$$

A função escalar $\pi(p)$ varia de 0 a 1 quando o argumento varia de $-\infty$ (bem abaixo de p_c) a $+\infty$ (bem acima de p_c). Sua derivada vale:

$$\frac{d\pi(p)}{dp} = L^{1/\nu} \Phi' \left[(p - p_c) L^{1/\nu} \right] \quad (2.51)$$

Para $L \rightarrow \infty$ esta função se aproxima da função delta de Dirac. Sua integral $\int \frac{d\pi}{dp} dp = \pi(1) - \pi(0)$ vale 1, como era de se esperar para uma distribuição de probabilidade.

A esperança de p_c pode ser calculada por:

$$E(p_c) = \int p \frac{d\pi}{dp} dp \quad (2.52)$$

Combinando estas duas últimas equações obtém-se:

$$p_c - E(p_c) \propto L^{-1/\nu} \quad (2.53)$$

Define-se ainda o desvio padrão σ da distribuição como:

$$\sigma^2 = \int (p - p_{AV})^2 \frac{d\pi}{dp} dp \quad (2.54)$$

Combinando novamente as equações anteriores é obtido:

$$\sigma \propto L^{-1/\nu} \quad (2.55)$$

resultando ainda em:

$$p_c - E(p_c) \propto \sigma \quad (2.56)$$

Uma estimativa de $E(p_c)$ pode ser extraída pela obtenção de valores de p_c para várias realizações, seguida da extração de sua média $\langle p_c \rangle$.

Com as Equações (2.53), (2.55) e (2.56) podem-se obter estimativas de p_c e ν ; utilizando-se simulações Monte Carlo em malhas finitas, variando o valor de L e medindo os valores de p_c , obtendo suas médias e desvios padrões. Isto será efetuado no Capítulo 5, não só nas malhas aleatórias, mas também nas correlacionadas.

2.5 Condutividade

A comunicação interna no meio poroso é relacionada às características dos clusters formados e a capacidade de fluxo deste meio está relacionada às dimensões do cluster percolante, que propicia a passagem dos fluidos ao longo da sua extensão. Abaixo de p_c , pela não formação do cluster percolante, a condutividade entre duas fronteiras opostas é nula; acima de p_c poderia-se esperar que a condutividade se comportasse como $P(p)$, ou seja, uma relação de

potência em β_o , com $(p - p_c)$. Só que não é exatamente assim: conforme verificado por Last e Thouless[13], o crescimento da condutividade $K_{eff}(p)$ se dá bem mais suavemente, com uma relação de potência menor do que β_o . Isto se explica pelo fato de, próximo a p_c , o cluster percolante ser bastante limitado e a comunicação se dar através de caminhos tortuosos, que atuam contra a capacidade de fluxo; no mesmo sentido o crescimento do tamanho do cluster não é acompanhado por um crescimento na condutividade devido à formação de pontos de fuga ou *dead ends*, que não têm atuação efetiva na condução do fluido ao longo do meio. Foi obtida ainda a relação empírica:

$$K_{eff}(p) \propto (p - p_c)^t \quad (2.57)$$

O comportamento agora descrito pode ser visualizado na já apresentada figura 2.4, que mostra a condutividade K_{eff} associada à probabilidade conectiva $P(p)$. O expoente t foi estimado em diversos trabalhos dentre os quais citam-se os artigos de Kirkpatrick [14], de Bernasconi [15], de Normand et al [16] e de Alexander e Orbach [17]; estes últimos obtiveram-no com base na denominada “dimensão fracton” d_F do sistema:

$$t = \beta_o - 2\nu + \frac{2(D\nu - \beta_o)}{d_F} \quad (2.58)$$

Após calcular numericamente vários valores do parâmetro d_F para diversas malhas, foi obtido um número aproximadamente constante, igual a $4/3$, independente até da dimensão Euclidiana do sistema; adotando esta conjectura como correta e utilizando os parâmetros de Stauffer [4] para malhas retangulares em duas e três dimensões são obtidos os valores:

$$t=1,264 \quad p/ \quad D=2$$

$$t=1,995 \quad p/ \quad D=3$$

Por ser uma variável com comportamento ligado a $(p - p_c)$ é possível descrever seu comportamento de acordo com a equação desenvolvida no item anterior:

$$K_{eff} \propto L^{t/v} \quad p/L < \xi$$

$$K_{eff} \propto \begin{cases} P_{\infty} L^d \\ (p-p_c)^t \end{cases} \quad p/L > \xi \quad (2.59)$$

Desta forma, a permeabilidade (do cluster percolante) tem um comportamento fractal abaixo de ξ , só se estabilizando a partir de $L \geq \xi$. É, pois, possível estender à permeabilidade efetiva o experimento de Kapitulnik et al [11] (descrito na seção 2.3 e realizado para descrever a densidade do cluster percolante) para obter experimentalmente o parâmetro t .

De uma forma análoga, Deutsch [18] calcula o parâmetro acima em um reservatório composto por apenas 2 tipos de rocha: arenito e folhelho impermeável. Para isto, os depósitos de folhelho de tamanho fixo são posicionados aleatoriamente sobre a malha em um modelo do tipo Booleano, os corpos argilosos sendo os objetos básicos. Em seguida é imposto um fluxo monofásico estacionário e a permeabilidade efetiva é calculada através da equação de Darcy, possibilitando estimar a relação de potência entre K_{eff} e $(p-p_c)$.

2.6 Modelos Contínuos

As principais aplicações da Teoria da Percolação se referem aos processos discretos e binários. Porém, uma forma intuitiva de aplicação aos processos contínuos reside na utilização conjugada da teoria da percolação e dos modelos de fluxo em redes de poros e gargantas (modelos de rede ou “*network models*”). Neste caso, a proporção ativa é definida pela pressão capilar, que limita a entrada de fluido pelos respectivos diâmetros de entrada. Este assunto é tratado nos Capítulos 6 e 7, visando destacadamente ao estudo da sensibilidade das propriedades do fluxo à correlação espacial entre os diâmetros porosos.

Uma outra aplicação da Teoria da Percolação aos processos contínuos foi desenvolvida por Silliman e Wright [19], utilizando como variável a permeabilidade ao fluxo: supondo os valores de permeabilidade absoluta ou condutividade K discretizados ao longo da malha, são dados cortes sucessivos em K_i , com $K_1 > K_2 > \dots > K_n$, de modo que os valores inferiores a K_i tornam-se nulos e os valores superiores a K_i unitários; define-se K_{LIM} como o primeiro valor de K (ou o maior valor de K) que propicia a formação de um cluster percolante:

$$Pr ob(K > K_{LIM}) = 1 - p_c \quad (2.60)$$

Como a proporção em que se dá a percolação p_c é conhecida para as malhas mais comuns, pode-se estimar K_{LIM} a partir do conhecimento da distribuição de probabilidade de K .

Os autores tentaram estabelecer relações entre este parâmetro limite e a permeabilidade efetiva da malha. Estes experimentos são discutidos no Capítulo 5, com destaque para as análises dos processos espacialmente correlacionados.

Capítulo 3

Processos Estocásticos Gaussianos

São discutidos neste capítulo os principais fundamentos dos processos estocásticos, com ênfase nas relações e propriedades dos processos Gaussianos, as quais terão grande importância nas aplicações dos capítulos seguintes. Destacam-se as propriedades da função indicatriz, a utilização do domínio de correlação (*integral range*) e a aplicação da simulação estocástica, cujo entendimento se faz necessário para a estimativa dos parâmetros da Teoria da Percolação em malhas finitas espacialmente correlacionadas.

3.1 Processos Estocásticos

Considerando uma amostra ζ que represente os resultados aleatórios de um determinado experimento ou medida, a coleção de todas as amostras ζ é chamado espaço amostral do experimento; ele é o conjunto que engloba todas as realizações ou imagens possíveis para aquele experimento, como por exemplo a medição ou caracterização de uma determinada propriedade ao longo das dimensões espaciais.

O conjunto dos valores de uma variável, definida em um determinado ponto x , representa uma variável aleatória $Z(\zeta)$. Para os valores da variável ao longo de uma seqüência de pontos x tem-se um uma seqüência espacial de variáveis aleatórias; o conjunto das seqüências possíveis é denominado função aleatória ou processo estocástico $Z = Z(x, \zeta)$. Em cada realização ζ_i da propriedade, cada ponto x deste espaço assume um valor possível $Z = Z(x, \zeta_i)$.

O espaço amostral, agora representado pela função amostral, e suas respectivas funções de distribuição de probabilidade, representam o chamado processo aleatório ou processo esto-

cástico. Na notação que o representa $Z(x, \zeta)$ é comum omitir ζ e utilizar $Z(x)$. A figura abaixo ilustra esse conceito para o caso unidimensional, sendo intuitiva a sua extensão aos casos bi e tridimensionais.

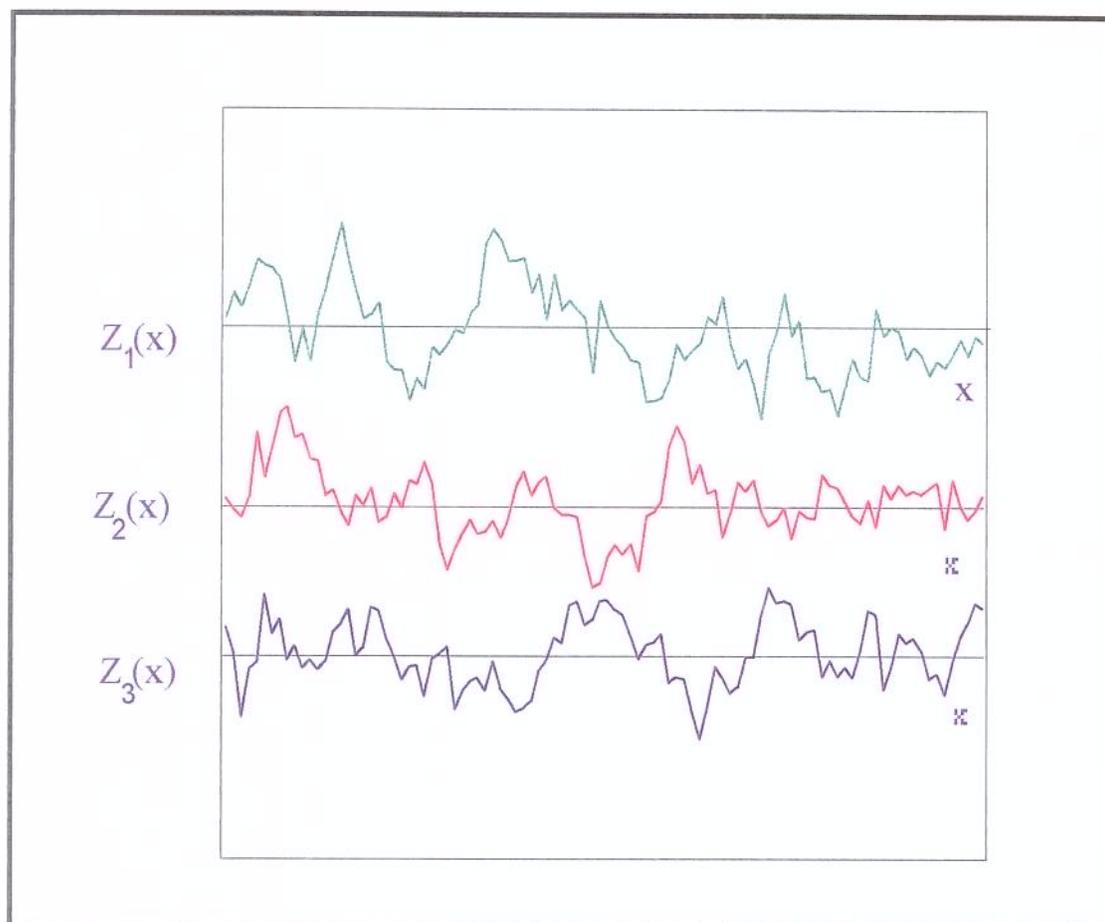


Figura 3.1 – Três amostras de um Processo Estocástico unidimensional

Alguns processos podem ser analiticamente descritos e ainda assim serem aleatórios. Por exemplo, uma senóide não seria, aparentemente, um processo estocástico, mas se a fase θ , que indica o ponto de início da oscilação, for uma variável aleatória tem-se:

$$Z(x) = A \cdot \cos(Kx + \theta)$$

sendo θ uma variável aleatória, a amplitude A a distância entre os valores máximo e mínimo da variável $Z(x)$ e K uma constante que define o período:

$$\theta = \begin{cases} 1/2\pi & p/ & 0 < \theta < 2\pi \\ 0 & p/ & \theta \leq 0 \text{ ou } \theta \geq 2\pi \end{cases}$$

Este processo terá o aspecto como representado pela figura abaixo:

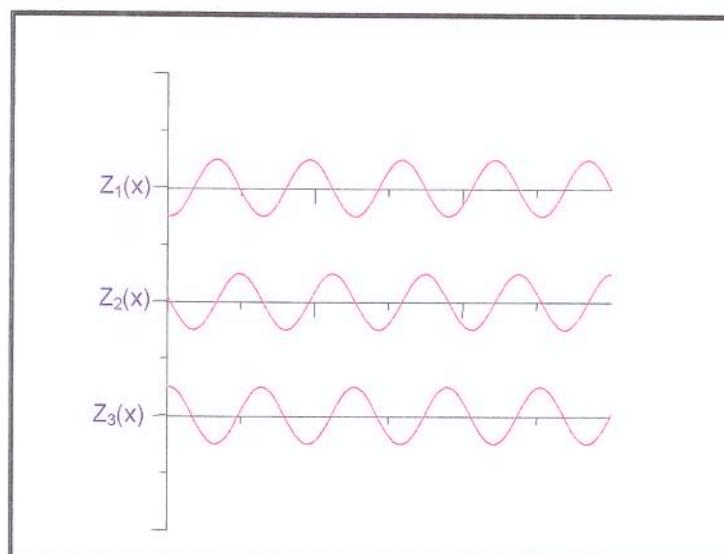


Figura 3.2 – Processo Estocástico de amostras idênticas mas defasadas

Observa-se que os perfis acima são idênticos, apenas defasados. Se A for também uma variável aleatória, será observado um aspecto como abaixo:

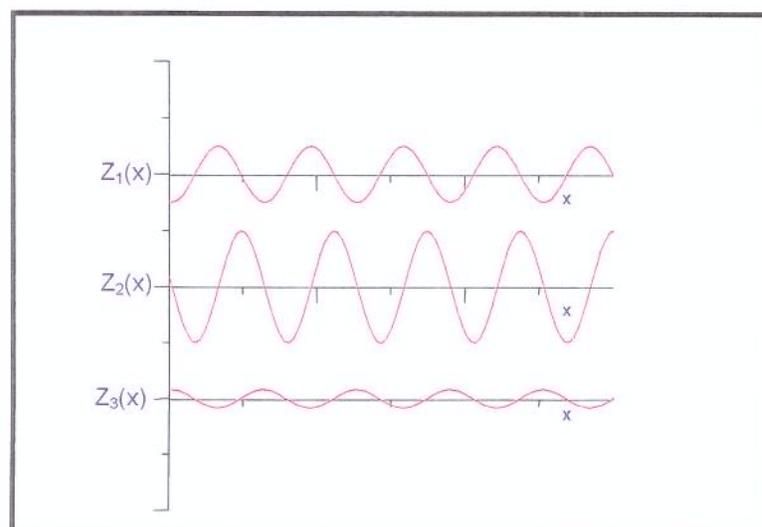


Figura 3.3 – Processo Estocástico cujas amostras diferem-se em fase e amplitude

A maioria dos processos existentes na natureza não são facilmente descritos de forma analítica e a medição e análise de suas propriedades estatísticas são a maneira utilizada para se conhecer mais profundamente o processo. Estas medições são aplicadas, na maioria das vezes, sobre uma única realização do processo; a caracterização e a simulação deste processo com base nos dados de uma só amostra exigem uma série de condições que serão discutidas a seguir.

Descrição dos processos

Considere-se o processo da Figura 3.1, representado por $Z(x) = Z(x, \zeta)$. No ponto $x = x_1$ o valor da propriedade, por exemplo a espessura de uma formação, é representado por uma coleção de valores $Z(x_1, \zeta)$, sendo $\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \dots$, cada valor obtido em uma realização do processo. Estes valores $Z(x_1)$ tomados num mesmo ponto ao longo do espaço amostral, ou seja, ao longo das realizações, compõem uma variável aleatória. Assim, tem-se em cada ponto $x = x_1, x_2 \dots$ uma variável aleatória $Z(x)$ cujas características estatísticas de primeira e segunda ordem serão avaliadas.

Uma estatística de primeira ordem representa a descrição individual de cada uma das variáveis aleatórias $Z(x_1), Z(x_2) \dots$ em termos de sua distribuição de probabilidade, enquanto uma estatística de enésima ordem descreve a distribuição de probabilidade conjunta de n variáveis $Z(x)$.

As estatísticas de primeira ordem comumente utilizadas são a esperança e a variância da distribuição. Já para a segunda ordem utiliza-se com frequência a função de autocorrelação, que tem uma equivalência ao semivariograma e à autocovariância, embora as três funções tenham definições distintas.

As estatísticas de primeira ordem, isoladamente, não são capazes de descrever adequadamente um processo estocástico, pois os valores das variáveis em pontos distintos, por exemplo $Z(x_1)$ e $Z(x_2)$, de uma mesma realização, em geral, não são independentes, o que

torna imprescindível o estudo da relação (ou co-relação) entre as diversas variáveis aleatórias $Z(x)$ do processo.

Quando as relações entre duas variáveis são estudadas na estatística clássica, é corrente a utilização dos conceitos de correlação e covariância. Como neste caso as variáveis estudadas não são distintas, mas a mesma variável em pontos distintos, estes parâmetros são denominados autocorrelação e autocovariância, com definição idêntica à original.

A função de autocorrelação é o valor esperado do produto de duas variáveis $Z_1 = Z(x_1)$ e $Z_2 = Z(x_2)$:

$$R_Z(x_1, x_2) = E(Z_1 \cdot Z_2) \quad (3.1)$$

Analogamente, define-se a autocovariância, que é a autocorrelação centrada na média

$$C_Z(x_1, x_2) = E\{[Z_1 - E(Z_1)] \cdot [Z_2 - E(Z_2)]\} \quad (3.2)$$

e o semivariograma

$$\gamma_Z(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \cdot E[(Z_1 - Z_2)^2] \quad (3.3)$$

Estas estatísticas de segunda ordem enriquecem substancialmente o conhecimento acerca do processo, embora não sejam suficientes para um conhecimento completo e uma reprodução perfeita de suas características. As relações analíticas entre as variáveis anteriores serão discutidas mais à frente para os processos estacionários.

Estacionariedade e Ergodicidade

Ao serem revistos os dois processos exemplificados anteriormente (Figuras 3.2 e 3.3) percebe-se um comportamento diferenciado das estatísticas de primeira ordem em posições diferentes. No primeiro caso (Figura 3.2), as variáveis aleatórias $Z(x_1)$, $Z(x_2)$, ... apresen-

tam médias e variâncias que mostram um caráter estacionário, ou seja, as propriedades se mantêm as mesmas quando se varia a posição no espaço; já no segundo exemplo (Figura 3.3), estes parâmetros estatísticos são completamente distintos se comparados em diferentes posições .

Assim, define-se um processo estocástico como estacionário quando suas propriedades estatísticas não variam com a posição. Para um processo estacionário, a distribuição de probabilidade independe da posição x :

$$p(Z, x) = p(Z) \quad (3.4)$$

Da mesma forma, num processo estacionário, uma probabilidade de segunda ordem $p(Z_1, Z_2, x_1, x_2)$ será dependente apenas da distância entre os pontos, permanecendo inalterada às translações. Por isso, tem-se:

$$p(Z_1, Z_2, x_1, x_2) = p(Z_1, Z_2, x_1 + b, x_2 + b), \quad \forall b \geq 0 \quad (3.5)$$

E a função de autocorrelação dependerá apenas da distância h entre os pontos:

$$R_z(x_1, x_2) = R_z(h) \quad (3.6)$$

Alguns processos são estacionários sob condições limitadas, o que torna necessária a denominação estacionariedade fraca (estacionariedade em sentido amplo, em contraposição à estacionariedade estrita): nestas condições os processos mantêm inalteradas, em relação à posição, apenas as propriedades estatísticas de primeira e segunda ordem (médias, variâncias e autocorrelações); já nos processos estritamente estacionários, todas as propriedades e todas as distribuições de probabilidade se mantêm inalteradas às translações.

Alguns processos não estacionários podem assim se tornar pela sua soma a uma outra variável dependente da posição no espaço; como exemplo, uma variação linear da média com a posição, denominada comumente deriva (*drift*), pode ser identificada e extraída do processo; após sua transformação, o processo passa a ser tratado normalmente como estacionário.

Pode-se observar que as propriedades estatísticas do processo estocástico são obtidas pela coleção de várias realizações deste mesmo processo. Na maioria dos casos é difícil e custoso realizar um processo diversas vezes; em formações geológicas isto é impossível. Deste modo dispõe-se somente de uma única amostra do processo e seria impossível o acesso às suas propriedades não fosse a condição de ergodicidade que será definida a seguir.

Um processo estocástico é chamado de ergódico quando suas médias espaciais, obtidas ao longo das distâncias, são idênticas às médias ao longo das amostras. Assim a condição de ergodicidade permite que as propriedades do processo, que só poderiam ser obtidas ao longo das várias realizações, sejam extraídas através dos dados de uma única amostra. É evidente que para que um processo seja ergódico é necessário que ele seja antes estacionário. A definição rigorosa do conceito de ergodicidade é feita para cada propriedade ou média estatística; os processos são definidos como ergódicos em média, ergódicos em autocorrelação, etc. Por este critério, um estimador, por exemplo, da esperança de uma variável, obtido com uma só realização, deve tender para a esperança verdadeira e a variância deste estimador deve tender para zero quando o número de pontos N tender para infinito, para que assim o processo seja ergódico em relação a este estimador $Z^*(x)$.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{var[Z^*(x)]\} = 0 \quad (3.7)$$

Uma característica dos processos ergódicos é gerar amostras de características estatísticas semelhantes às das variáveis em cada posição, e como consequência, amostras semelhantes entre si.

Relações e Propriedades

Os processos estacionários permitem que se relacionem suas propriedades de primeira e segunda ordem. Serão descritas as principais relações teóricas entre os parâmetros estatísticos de autocorrelação (R_z), autocovariância (C_z) e semivariograma (γ_z):

$$C_z(x_1, x_2) = E[(Z_1 - E(Z_1)) \cdot (Z_2 - E(Z_2))]$$

Como os processos são estacionários $E(Z_1)=E(Z_2)$ e:

$$C_z(x_1, x_2) = R_z(h) - [E(Z)]^2 \quad (3.8)$$

$$\gamma_z(x_1, x_2) = \frac{1}{2} E[(Z_1 - Z_2)^2]$$

Como os processos são estacionários $E(Z_1^2)=E(Z_2^2)$ e:

$$\gamma_z(x_1, x_2) = E(Z^2) - R_z(h) \quad (3.9)$$

mas,

$$E(Z^2) = \sigma^2 + [E(Z)]^2$$

logo:

$$\gamma_z(x_1, x_2) = \sigma^2 + [E(Z)]^2 - R_z(h) \quad (3.10)$$

ou,

$$\gamma_z(x_1, x_2) = \sigma^2 - C_z(h) \quad (3.11)$$

As figuras a seguir ilustram o perfil dos parâmetros de segunda ordem anteriormente discutidos:

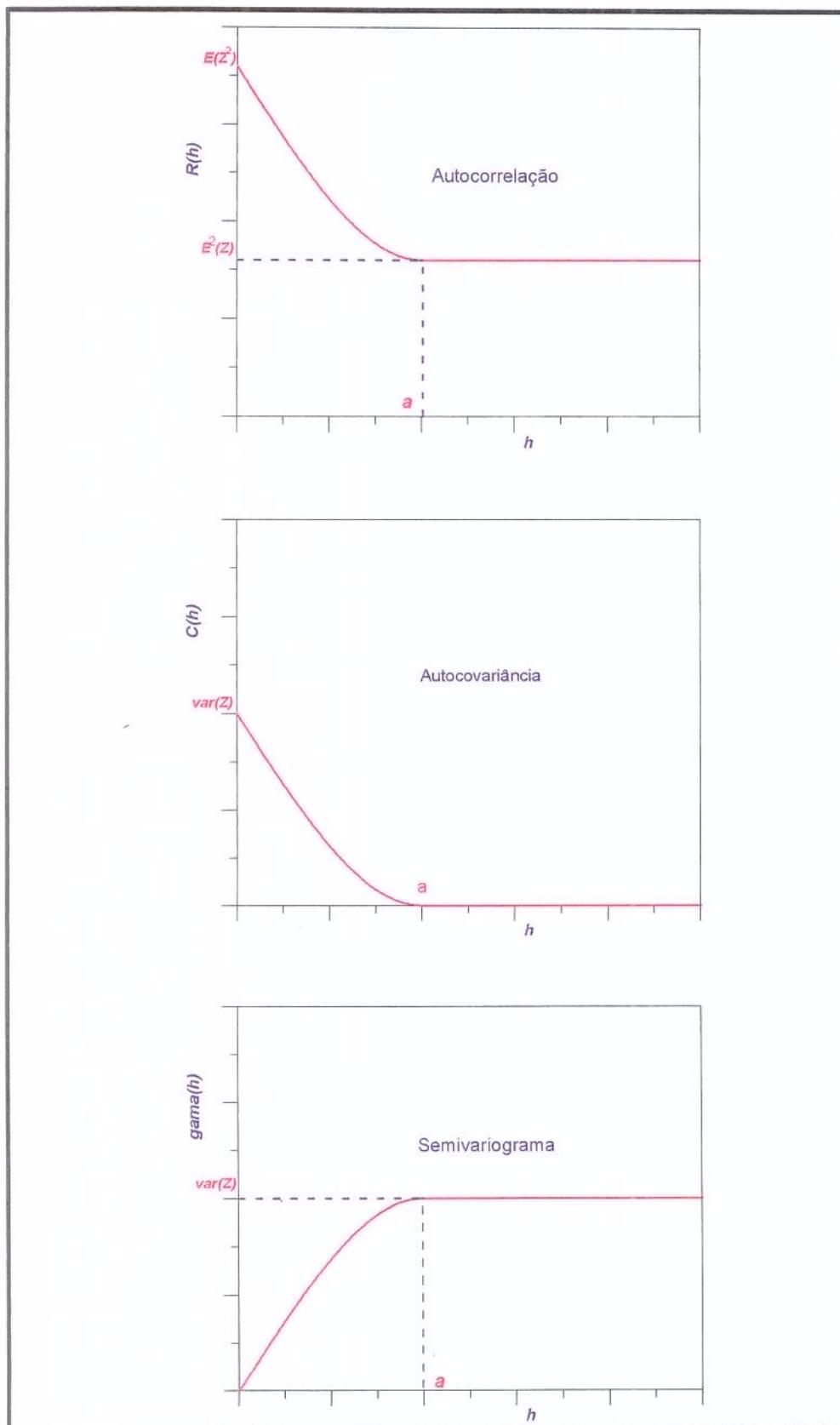


Figura 3.4 – Perfil básico das propriedades de Autocorrelação, Autocovariância e Semivariograma em processos estocásticos contínuos

3.2 Processos Gaussianos

Um processo estocástico é dito espacialmente Gaussiano ou multigaussiano quando as variáveis aleatórias $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$ são conjuntamente Gaussianas em todos os conjuntos de pontos (x_1, x_2, \dots, x_n) . Uma variável aleatória que resulta da associação de um grande número de outras variáveis aleatórias independentes tende a ser Gaussiana, como resultado do teorema do limite central unidimensional. Analogamente, um conjunto de realizações sobre x tende a ser conjuntamente Gaussiano, se as realizações são causadas por um grande número de perturbações independentes, de acordo com o teorema do limite central multidimensional.

Além de serem comumente encontrados, os processos Gaussianos possuem uma característica marcante que torna sua utilização bastante facilitada: as suas propriedades estatísticas completas podem ser determinadas apenas com o conhecimento das propriedades de primeira e segunda ordem, ou seja, conhecendo-se a média e a autocorrelação tem-se acesso à sua distribuição de probabilidade conjunta, pois:

$$p_{Z_1, Z_2, \dots, Z_n}(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|C|}} \exp\left(-\frac{1}{2|C|} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} [Z_i - E(Z_i)][Z_j - E(Z_j)]\right) \quad (3.12)$$

onde C é a matriz de covariâncias:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

sendo

$$C_{ij} = E\{[Z_i - E(Z_i)][Z_j - E(Z_j)]\}$$

$|C|$ o determinante da matriz de covariâncias

Δ_{ij} o cofator do elemento C_{ij} .

Denominando:

$$p_{z_1, z_2, \dots, z_N}(z_1, z_2, \dots, z_N) = p_z(z)$$

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

z^T a matriz transposta de z

tem-se:

$$p_z(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|C|}} \exp\left(-\frac{1}{2}[z - E(z)] \cdot C^{-1} \cdot [z^T - E(z^T)]\right) \quad (3.13)$$

e se o processo for estacionário de média zero:

$$p_z(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|C|}} \exp\left(-\frac{1}{2} z \cdot C^{-1} \cdot z^T\right) \quad (3.14)$$

Assim, apenas com as estatísticas de primeira e segunda ordem tem-se acesso à distribuição de probabilidade conjunta. Pode-se perceber, como consequência do exposto acima, que se um processo Gaussiano é estacionário em sentido amplo (até a segunda ordem) ele será estritamente estacionário.

Outra propriedade importante vem do fato de duas variáveis Gaussianas não correlacionadas serem também independentes; assim um processo estocástico sem autocorrelação é composto de variáveis aleatórias independentes, desde que o processo seja Gaussiano. Isto porque, se $C_{ij}=0$ para $i \neq j$ (correlação espacial nula), a distribuição de probabilidade conjunta se torna:

$$p_z(z) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi C_{ii}}} \exp\left(-\frac{(z_i - E(z_i))^2}{2C_{ii}}\right) \right] \quad (3.15)$$

no qual a probabilidade é o produto das probabilidades locais, relação válida apenas para variáveis independentes.

A obtenção da autocorrelação é em geral feita utilizando-se as amostras disponíveis e ajustando-se os valores observados a um modelo conhecido; isto se faz porque não é qualquer função que pode ser uma covariância, já que é necessário que ela seja positiva definida. Os modelos de semivariograma de utilização mais comum são:

Exponencial:

$$\gamma_z(h) = 1 - \exp(-3h/a) \quad (3.16)$$

Esférico:

$$\gamma_z(h) = \begin{cases} 1.5h/a - 0.5(h/a)^3 & h \leq a \\ 1 & h > a \end{cases} \quad (3.17)$$

Gaussiano:

$$\gamma_z(h) = 1 - \exp[-3(h/a)^2] \quad (3.18)$$

Exponencial Fatorizado:

$$\gamma_z(h) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{|h_x|}{a} + \frac{|h_y|}{a}\right)\right] \quad (3.19)$$

sendo:

a o alcance da correlação

h a distância entre os pontos

h_x a distância na direção do eixo horizontal

h_y a distância na direção do eixo vertical

$$h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$$

A simulação dos processos estocásticos Gaussianos consiste na obtenção de inúmeras realizações da função aleatória, apresentando as características de média e autocorrelação preestabelecidas. Além disso, o processo gerado deve ser fiel às condições de estacionariedade e ergodicidade e às outras condições adicionais particulares do processo. Diversos são os algoritmos e métodos que desempenham este papel, dentre os quais se destacam a decomposi-

ção em matrizes triangulares LU [20-22], o método *Turning Bands* [23] e a Simulação Gaussiana Sequencial [24]. A Figura 3.5 a seguir mostra imagens de uma malha bidimensional de tamanho 160×160 células, simulada com diferentes modelos de correlação espacial.

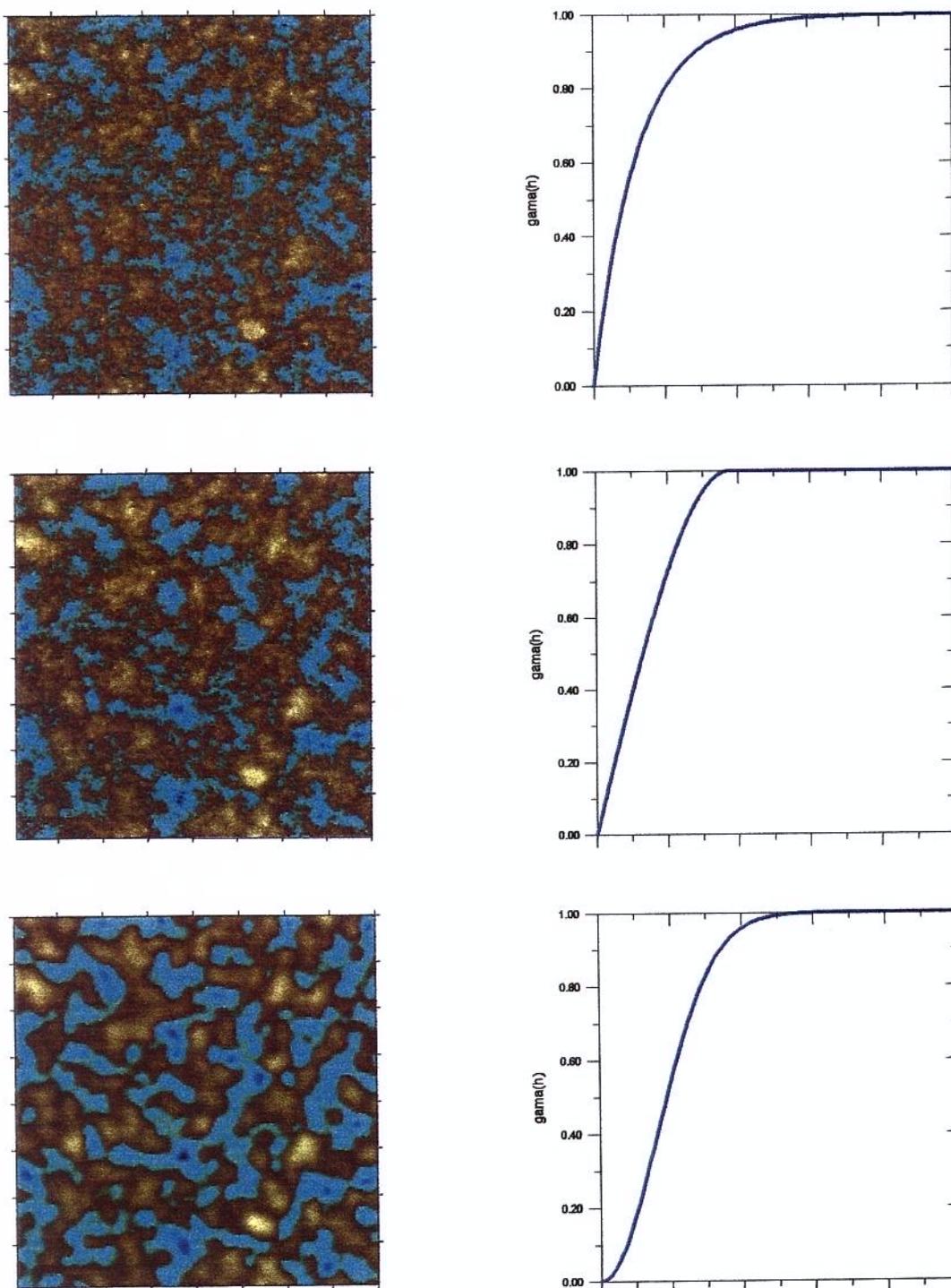


Figura 3.5 – Imagens simuladas com modelos de correlação exponencial (acima), esférico (ao centro) e Gaussiano (abaixo), ao lado dos respectivos semivariogramas

3.3 Variável Indicatriz – Principais Propriedades

Uma variável aleatória *indicatriz* ou *indicadora* é uma função da variável aleatória $Z(x)$ definida como:

$$I_{z_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } Z(x) \leq z_0 \\ 0 & \text{se } Z(x) > z_0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Assim a variável $Z(x)$ é transformada em uma função discreta ou categórica $I_{z_0}(x) = I(x)$, bastante prática na descrição de fácies reservatório. Pode representar, por exemplo, a distinção entre rocha permeável e não permeável, ou entre células condutoras e não condutoras. A definição da variável acima pode ser feita com vários cortes definindo várias fácies.

As principais relações da função indicatriz e do modelo Gaussiano Truncado extraídas dos trabalhos de Journel e Isaaks [25], Journel e Posa [26], Galli [27] e Remacre [28] são apresentadas a seguir. Considerando-se a definição da indicatriz feita anteriormente, pode-se estimar a esperança, a variância, o variograma e a autocorrelação desta variável em função de algumas características da variável contínua tomada como base:

Esperança:

$$E[I(x)] = 1 \cdot p(Z(x) \leq z_0) + 0 \cdot p(Z(x) > z_0)$$

$$E[I(x)] = p(Z(x) \leq z_0)$$

$$E[I(x)] = p \quad (3.21)$$

Variância:

$$\text{var}[I(x)] = E\{I(x)^2\} - \{E[I(x)]\}^2$$

$$\text{var}[I(x)] = E[I(x)] - \{E[I(x)]\}^2$$

$$\text{var}[I(x)] = p - p^2 = p \cdot (1 - p) \quad (3.22)$$

Semivariograma:

$$\gamma_z(h) = \frac{1}{2} E\{[I(x) - I(x+h)]^2\}$$

$$2 \cdot \gamma_z(h) = 1 \cdot p[I(x)=1, I(x+h)=0] + 1 \cdot p[I(x)=0, I(x+h)=1] \\ + 0 \cdot p[I(x)=1, I(x+h)=1] + 0 \cdot p[I(x)=0, I(x+h)=0]$$

$$\gamma_z(h) = p[I(x) \neq I(x+h)] \quad (3.23)$$

Autocorrelação:

$$R_z(h) = E[I(x) \cdot I(x+h)]$$

$$R_z(h) = 1 \cdot p[I(x)=1, I(x+h)=1] + 0 \cdot p[I(x)=0, I(x+h)=1] \\ + 0 \cdot p[I(x)=1, I(x+h)=0] + 0 \cdot p[I(x)=0, I(x+h)=0]$$

$$R_z(h) = p[I(x) = I(x+h) = 1] \quad (3.24)$$

$$R_z(h) = p[Z(x) \leq z_0, Z(x+h) \leq z_0] \quad (3.25)$$

As propriedades de segunda ordem da variável indicatriz são bastante semelhantes às da variável Gaussiana contínua, como mostram as figuras seguintes, devendo-se destacar os valores próximos à origem e nas maiores distâncias.

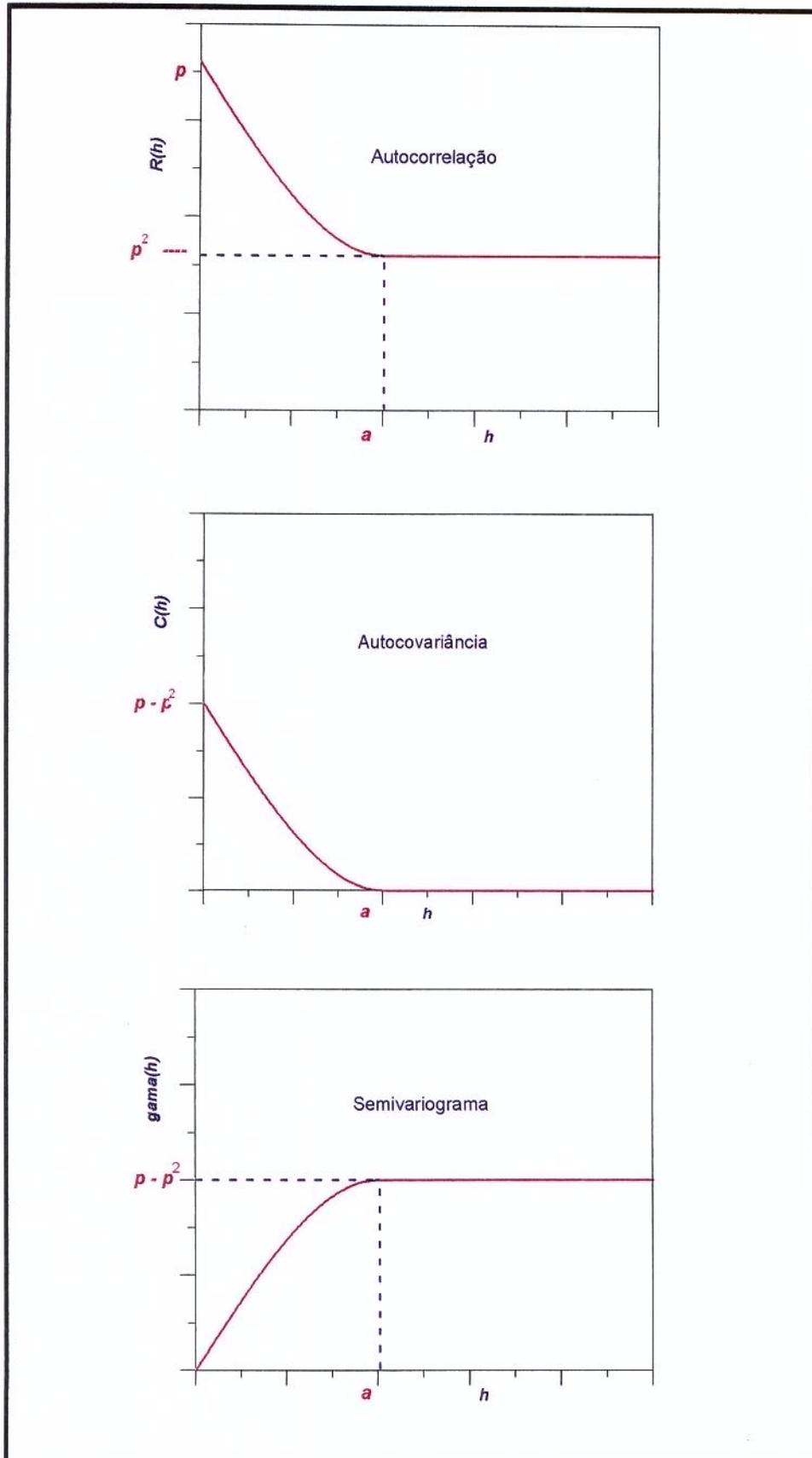


Figura 3.6 – Autocorrelação, Autocovariância e Semivariograma da Função Aleatória Indictriz

Deve-se chamar atenção para o fato de que a probabilidade da última equação acima representa exatamente a probabilidade de uma distribuição normal bivariada. Recorda-se que uma distribuição de probabilidades bivariada em $Z(x)$ e $Y(x)$ é a interseção no plano das probabilidades acumuladas em Z e Y , ou seja:

$$L(x, y) = p[Z(x) \leq z_0, Y(y) \leq y_0]$$

Além disso, como a variável contínua é multigaussiana, $Z(x)$ e $Z(x+h)$ são Gaussianas, e a função de autocorrelação pode ser calculada com o auxílio da distribuição normal bivariada; o mesmo vale para a autocovariância e para o semivariograma. Outras relações podem ser estabelecidas para a variável indicatriz; foram aqui destacadas apenas as mais importantes e utilizadas diretamente em desenvolvimentos posteriores. O anexo A destaca as relações entre o variograma da variável contínua e aquele resultante do truncamento gerador da indicatriz.

Para simular uma variável indicatriz, simula-se um campo aleatório contínuo e, em seguida, procedem-se os cortes de acordo com as proporções desejadas; assim, por exemplo, para simular uma variável com 40% de células condutoras, simula-se uma variável contínua uniformemente distribuída entre 0 e 1, e adotam-se como condutoras as que apresentarem valor menor ou igual a $z_0=0,40$.

Da mesma forma, para simular uma variável categórica espacialmente correlacionada, simula-se um campo Gaussiano contínuo correlacionado e procedem-se os cortes necessários. Está sendo utilizado, neste caso, o chamado modelo Gaussiano Truncado. Uma outra alternativa utilizada consiste em simular a variável categórica a partir do variograma da própria indicatriz, utilizando um algoritmo seqüencial, de forma análoga à variável contínua [24].

Apresentam-se, a seguir, na Figura 3.7, imagens de campos Gaussianos truncados com diferentes modelos de correlação espacial. A imagem da primeira coluna representa a realização da variável contínua, a da coluna central seu truncamento em duas fácies de igual proporção e a da coluna à direita um truncamento em três fácies.

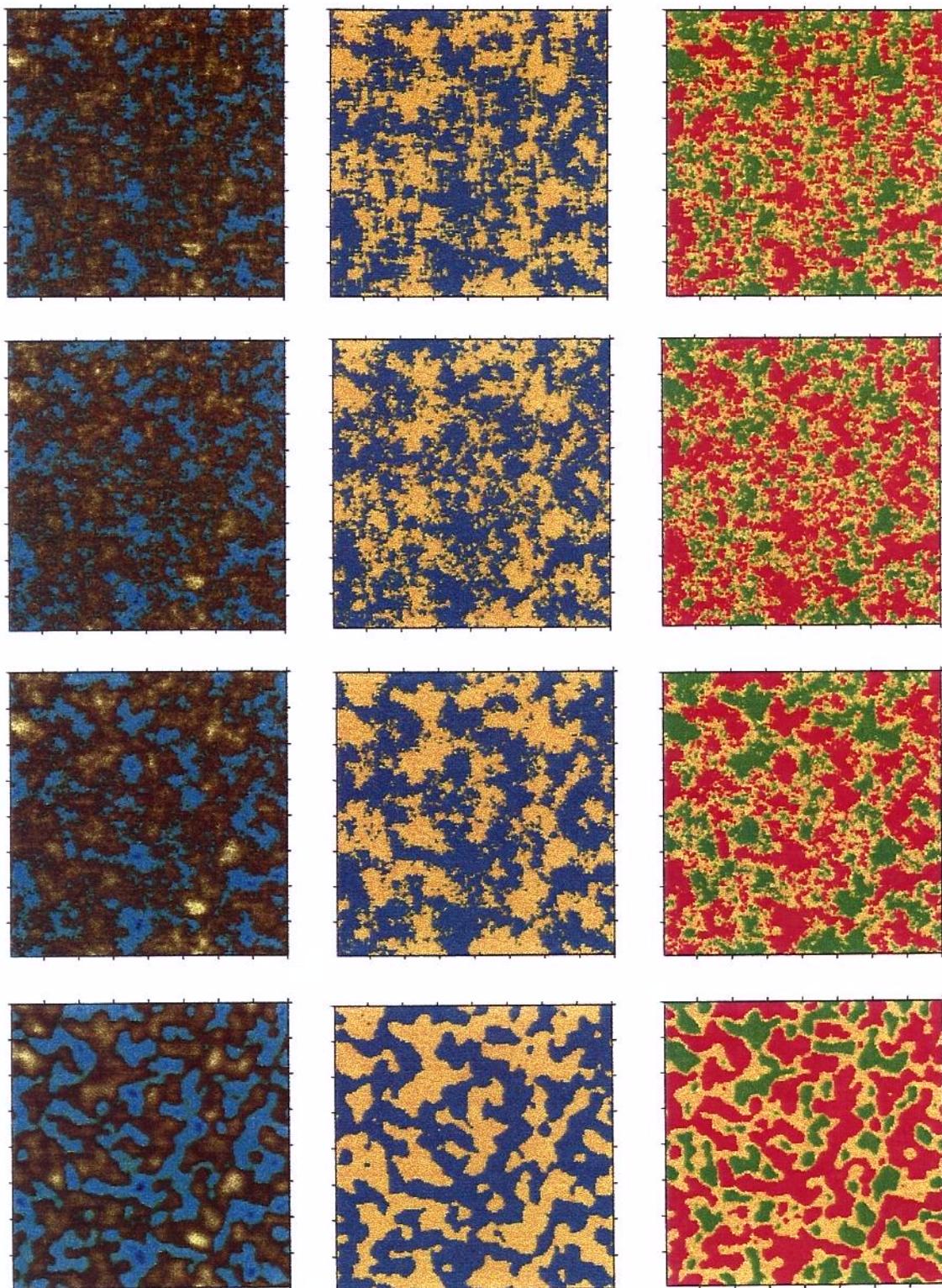


Figura 3.7 –Imagens simuladas com modelos de correlação exponencial fatorizado, exponencial isotrópico, esférico e Gaussiano, e subseqüentes truncamentos da variável contínua

3.4 Domínio de Correlação (*Integral Range*)

O conceito de domínio de correlação (*integral range*) está associado à noção de escala do processo e pode ser utilizado, em alguns casos, para controlar a variabilidade do experimento através da adoção adequada do suporte de medição. As análises de Lantuejoul [29] aprofundam este conceito integrando-o às questões de estacionariedade, variância de uma estimativa e variância de dispersão. A definição do domínio de correlação A é dada por:

$$A = \lim_{|V| \rightarrow \infty} \left\{ |V| \cdot \frac{\text{var}[Z(V)]}{\sigma^2} \right\} \quad (3.26)$$

sendo o estimador $Z(V)$:

$$Z(V) = \frac{1}{|V|} \int_V Z(x) \cdot dx$$

e V o suporte de medição da variável $Z(x)$.

O domínio de correlação pode também ser obtido pela integral da função de autocovariância normalizada $C_v(h)/C_v(0)$ ao longo da distância h .

$$A_c = \frac{1}{C(0)} \int C(h) \cdot dh \quad (3.27)$$

Os valores deste parâmetro para alguns tipos de variograma em malhas bidimensionais são apresentados a seguir:

Exponencial

$$A_c = \frac{\pi \cdot \alpha^2}{4,5}$$

Esférico

$$A_c = \frac{\pi \cdot a^2}{5}$$

Gaussiano

$$A_c = \frac{\pi \cdot a^2}{3}$$

Exponencial Fatorizado

$$A_c = \frac{4 \cdot a^2}{9}$$

Para grandes suportes e A finito, a equação (3.26) pode ser aproximada por:

$$\text{var}[Z(V)] \approx \frac{\sigma^2 \cdot A}{|V|} = \frac{\sigma^2}{|V|/A} \quad (3.28)$$

Definindo $|V|/A = n$, como o número de domínios de correlação compostos pelo suporte, vem:

$$\text{var}[Z(V)] \approx \frac{\sigma^2}{n} \quad (3.29)$$

que representa a variância das n observações independentes de tamanho A ($\sqrt{Ax}\sqrt{A}$ no caso bidimensional); este valor corresponde à variância da média de n observações de um processo de variância σ^2 , valor este igual a σ^2/n . Assim, se forem tomadas estimativas com suporte A , têm-se eventos aproximadamente independentes ou pepíticos, pois está sendo eliminado o alcance da correlação.

Uma relação entre este parâmetro e a variância da dispersão é obtida por:

$$\sigma^2(v/V) = \text{var}[Z(v)] - \text{var}[Z(V)]$$

$$\sigma^2(v/V) = \sigma^2 \cdot A \cdot \left[\frac{1}{|v|} - \frac{1}{|V|} \right] \approx \frac{\sigma^2 \cdot A}{|v|} \quad (3.30)$$

Por outro lado a variância de um determinado experimento pode ser estimada por:

$$s^2(v/V) = \frac{1}{n} \sum [z(v_i) - z(V)]^2 \quad (3.31)$$

Com isto, um procedimento que permite a obtenção de $\sigma^2 A$ consiste em efetuar o experimento em vários suportes e em seguida traçar $s^2 \times |v|$. Obtido $\sigma^2 A$ pode-se adotar suportes adequados para a obtenção de variâncias preestabelecidas.

Pelo fato de o alcance “ α ” da correlação ter significados diferenciados em cada modelo e o domínio de correlação A ser um fator ligado à escala e ao comportamento do processo, ele será usado como fator de normalização e de escala, quando for analisada a resposta do processo às mudanças de dimensões. As variações de tamanho da malha serão observadas comparativamente ao parâmetro A e, da mesma forma, as malhas serão discretizadas mantendo o fator de escala, ou seja o número de domínios de correlação comportados pela malha. Também a sensibilidade dos parâmetros de fluxo aos tipos ou modelos de variograma será observada mantendo fixo o valor deste parâmetro.

Capítulo 4

Processos Markovianos

Este capítulo apresenta os princípios fundamentais da simulação dos campos aleatórios Markovianos, para, em seguida, ampliar os conhecimentos acerca de suas propriedades e de suas possibilidades de aplicação na caracterização de reservatórios. São estudados os processos discretos binários e de múltiplas fácies e os processos contínuos, os principais algoritmos usados na simulação, além da condicionalização das variáveis através dos procedimentos Bayesianos.

As principais inovações se situam: na adaptação do modelo de múltiplas fácies, aplicados em processos de dupla troca, para representar configurações faciológicas, a partir das propriedades ligadas à transição de fácies e à anisotropia; na utilização de procedimentos Bayesianos de restauração de imagens, a partir de uma variável secundária correlacionada; no estudo das relações entre os parâmetros de atração e de correlação espacial, permitindo uma associação entre imagens dos processos Gaussianos e Markovianos.

4.1 Definições e Teoremas Básicos

Um processo estocástico é denominado Markoviano quando apresenta probabilidades pontuais relacionadas à vizinhança de cada ponto. Pode ser considerado uma extensão das cadeias temporais de Markov, as quais descrevem uma seqüência temporal de variáveis aleatórias; o estado do sistema é representado pelo valor da variável aleatória num determinado tempo, regido por probabilidades de transição entre este tempo e o tempo seguinte. Para um

processo estocástico, o estado de um sistema representa a imagem espacial da variável num determinado tempo.

A definição formal dos campos Markovianos é feita de acordo com Feller [30], da seguinte forma: uma seqüência de variáveis aleatórias discretas é um processo Markoviano quando a distribuição conjunta $(Z(1), Z(2), \dots, Z(N-1), Z(N))$ é definida de tal modo que a probabilidade condicional $p(Z(N)=z_N)$ conhecidos $Z(1)=z_1, Z(2)=z_2, \dots, Z(N-1)=z_{N-1}$ é idêntica à probabilidade condicional $p(Z(N)=z_N)$ conhecido apenas $Z(N-1)=z_{N-1}$. Para processos temporais tem-se:

$$p(Z_N = z_N | Z_i = z_i, i \leq N-1) = p(Z_N = z_N | Z_{N-1} = z_{N-1}) \quad (4.1)$$

Esta definição permite que seja estabelecida uma relação para a probabilidade condicional conjunta em relação às probabilidades condicionais locais:

$$p(Z_k, Z_{k-1}, \dots, Z_1) = \prod_{i=0}^{k-2} p(Z_{k-i} | Z_{k-i-1}) p(Z_1) \quad (4.2)$$

A definição da propriedade Markoviana, válida para processos temporais, pode ser estendida para os processos espaciais e o processo estocástico Markoviano é determinado pelas probabilidades condicionais de cada ponto em relação aos pontos de sua vizinhança espacial. Diversas são as configurações definidas para a vizinhança, sendo a mais comum a vizinhança dos 4 pontos mais próximos (*nearest neighbor systems*). Deste modo, um processo é dito Markoviano se, para a vizinhança ∂_s de cada ponto s pertencente ao conjunto de posições S da malha, é válida a relação:

$$p(Z_s = z_s | Z_r = z_r, r \neq s) = p(Z_s = z_s | Z_r = z_r, r \in \partial_s) \quad (4.3)$$

Correspondência entre os processos Markovianos e a distribuição de Gibbs

Seja a configuração da imagem $\{Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots, Z_N = z_N\}$ representada abreviadamente por $\{Z=w\}$. Um processo é regido pela distribuição de Gibbs quando sua imagem apresenta probabilidade conjunta:

$$p(w) = \frac{1}{K} \exp(-U(w)/T) \quad (4.4)$$

sendo

$$U(w) = \sum_{x \in \partial_s} V_x(w) \quad (4.5)$$

$U(w)$ é chamado de função energia; $V_x(w)$ representa as relações de vizinhança; T é uma constante análoga à temperatura e dita as relações de atração ou repulsão entre pontos vizinhos e K é a constante de normalização representada pela equação:

$$K = \sum_w \exp(-U(w)/T) \quad (4.6)$$

Para um caso bidimensional anisotrópico (relações diferentes nas duas direções principais), com vizinhança de quatro pontos e malha de tamanho $N \times N$, a função energia é:

$$U(w) = \beta_1 \sum z_i \cdot (z_{i+1} + z_{i-1}) + \beta_2 \sum z_i \cdot (z_{i+N} + z_{i-N})$$

O modelo de Ising, criado para explicar as características ferromagnéticas, é um caso especial em que a variável é binária e isotrópica (invariante à rotação):

$$U(w) = \beta \cdot \sum z_i \cdot (z_{i+1} + z_{i-1} + z_{i+N} + z_{i-N})$$

$$U(w) = \beta \cdot \sum (z_i \cdot \sum v_i) \quad (4.7)$$

sendo a soma dos vizinhos mais próximos:

$$\sum v_i = z_{i+1} + z_{i-1} + z_{i+N} + z_{i-N} \quad (4.8)$$

Baseado nas análises de Spitzer [31] e apoiado no teorema apresentado no trabalho de Geman e Geman [32] verifica-se que um processo é Markoviano em relação à uma vizinhança se e somente se sua probabilidade conjunta é uma distribuição de Gibbs. Assim:

$$p(Z_i = z_i | Z_r = z_r, r \neq i) = \frac{1}{K} \exp(-U(w)/T) \quad (4.9)$$

Para o Modelo de Ising, a probabilidade condicional local é calculada pela equação:

$$p(Z_i = z_i | Z_r = z_r, r \neq s) = \frac{\exp(-\beta \cdot z_i \sum v_i)}{1 + \exp(-\beta \sum v_i)} \quad (4.10)$$

Relação entre as probabilidades de duas imagens

A relação entre as probabilidades de duas configurações Z e Z' , a qual permite estabelecer a probabilidade de troca entre duas posições, deduzida em Besag [33,34], pode ser calculada segundo a equação:

$$\frac{P(Z)}{P(Z')} = \prod_{i=1}^n \frac{P(z_i | z_1, \dots, z_{i-1}, z'_{i+1}, \dots, z'_n)}{P(z'_i | z_1, \dots, z_{i-1}, z'_{i+1}, \dots, z'_n)} \quad (4.11)$$

Esta equação é bastante prática e simples de implementar, sendo o ponto de partida dos algoritmos geradores de campos aleatórios Markovianos; consiste na estimativa das probabilidades em cada ponto com a imagem parcialmente modificada de acordo com o ponto observado. Nos casos de simples ou dupla troca, em que a imagem sofre pequenas modificações a

cada iteração, a maioria dos termos é igual no numerador e no denominador e só não se anulam os valores relativos aos pontos a serem modificados e à sua vizinhança.

4.2 Simulação do Modelo de Ising

A simulação dos processos discretos é feita, em geral, a partir de uma imagem aleatória, sobre a qual são procedidas trocas de valor em um ou dois pontos, de acordo com a probabilidade de transição entre a imagem inicial e a imagem modificada. Esta seqüência é uma extensão das cadeias de Markov para processos estocásticos, proposta inicialmente por Metropolis [36], sendo a probabilidade de transição relacionada à probabilidade conjunta a ser atingida no fim da seqüência.

Será inicialmente analisado o modelo Ising definido anteriormente, no qual é mantida fixa a proporção entre os valores 1 e -1 (ou spin positivo x spin negativo, célula condutora x não condutora de energia, 1 x 0, arenito x folhelho).

A transição entre as imagens é feita através de duplas trocas, ou seja, troca de valores entre dois pontos aleatórios da malha. As probabilidades de transição podem ser referidas tanto em relação ao produto do valor no ponto e seus vizinhos, $z_i \sum v_i$, quanto em relação ao número de vizinhos de valor igual ao ponto em questão (n_i) ou ao número de vizinhos de valor diferente (n_d). Serão apresentadas a seguir as relações entre estes parâmetros:

$$z_i \cdot \sum v_i = n_i - n_d \quad (4.12)$$

$$n_i = 4 - n_d$$

$$z_i \cdot \sum v_i = 2n_i - 4$$

$$z_i \cdot \sum v_i = 4 - 2n_d$$

$$n_i = 2 + \frac{z_i \cdot \sum v_i}{2} \quad (4.13)$$

$$n_d = 2 - \frac{z_i \cdot \sum v_i}{2} \quad (4.14)$$

Assim, é indiferente usar como referência um parâmetro ou outro, já que a relação entre eles é direta. Será normalmente adotado a dupla +1 e -1, pela facilidade gerada pela simetria dos valores. Além disso, nos casos de simples ou dupla troca, a probabilidade de uma imagem é igual à outra com o expoente simétrico; assim, a relação entre as duas probabilidades, na equação que dita a transição (4.11), consistirá no cálculo da variação de energia com a possível troca ou na energia da imagem atual multiplicada por 2.

Algoritmo de Metropolis

Apresentado por Metropolis et al [36] em 1953 para descrever propriedades ligadas ao equilíbrio térmico de moléculas de um gás, este algoritmo fornece a base para a maioria dos algoritmos de geração sequencial de imagens, sendo uma extensão das cadeias de Markov (normalmente aplicadas a uma única variável aleatória) ao conjunto de variáveis aleatórias que compõem a imagem de um processo estocástico. Consiste basicamente em uma seqüência de trocas pontuais, regidas pelo fator de Boltzmann (que calcula a probabilidade de trocas termodinâmicas), cuja equação se enquadra na distribuição de Gibbs apresentada anteriormente. As probabilidades de trocas em cada passo estão relacionadas à probabilidade final a ser atingida após infinitas trocas.

O modelo utilizado por Metropolis et al [36] corresponde a uma placa composta de um número fixo de moléculas, que se movem para posições que tornam a configuração da imagem menos energética (modelo de Ising). A probabilidade de transição entre as imagens, as quais se diferem em apenas dois pontos (dupla troca) corresponde à variação de energia da troca de posições:

$$\frac{P(Z)}{P(Z')} = \exp(-\beta \cdot \Delta U) \quad (4.15)$$

Observa-se que a equação anterior é uma variante da equação (4.11), aquela apresentando vantagens devido à facilidade de codificação dentro do algoritmo.

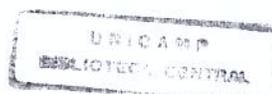
A estabilização na probabilidade conjunta especificada, bem como a ergodicidade do processo, estão garantidas pelas demonstrações apresentadas em Geman e Geman [32], as quais são válidas para condições mais amplas, onde o algoritmo de Metropolis se enquadra como um caso particular simplificado.

O deslocamento de uma molécula para outra posição é aleatório, de modo que é sorteada a posição a ser movida e o novo ponto a ser ocupado (logicamente se estiver desocupado); isto equivale a uma dupla troca entre 0 e 1 ou entre spins -1 e $+1$. Cross e Jain [37] aplicaram uma metodologia similar para análises de textura em ligas binárias, impondo a restrição de trocas somente entre pontos não vizinhos, o que não interfere significativamente no método e nos resultados.

A seqüência de trocas se encerra quando a energia global do sistema se apresenta praticamente estável; um outro critério utilizável é a estabilização da taxa de trocas (número de trocas por iteração), que mantém a subjetividade da definição anterior.

Um critério mais objetivo é apresentado por Frery [41], através da estimativa sequencial do parâmetro de atração β , que tem uma tendência de crescimento em direção ao valor desejado; é estabelecido o encerramento da seqüência na imagem que pela primeira vez superar o valor preestabelecido.

A Figura 4.1 mostra a estabilização do número de trocas e do parâmetro atrativo, em relação ao número de iterações, para um valor de β igual a 0,9; a contagem das iterações corresponde ao número de tentativas de troca igual ao número de pontos da malha, ou seja, equivale em quantidade a uma passagem por todos os pontos da imagem, se a varredura fosse do tipo *scan*.



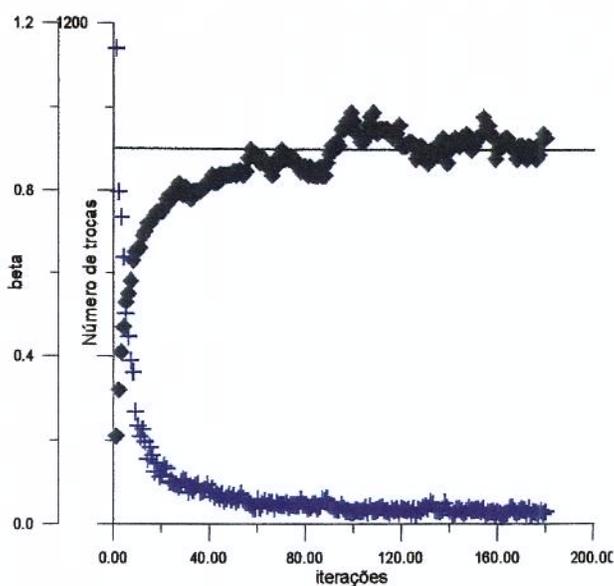


Figura 4.1 – Estabilização, no algoritmo de Metropolis, do número de trocas e do valor da atração, em relação ao número de iterações

No presente trabalho serão geradas as imagens de acordo com a seqüência do algoritmo de Metropolis, encerrando as trocas com o critério proposto por Frery. A figura 4.2 mostra a imagem inicial (gerada aleatoriamente) do processo, as imagens resultantes após 10 iterações e a imagem final após 50 iterações.

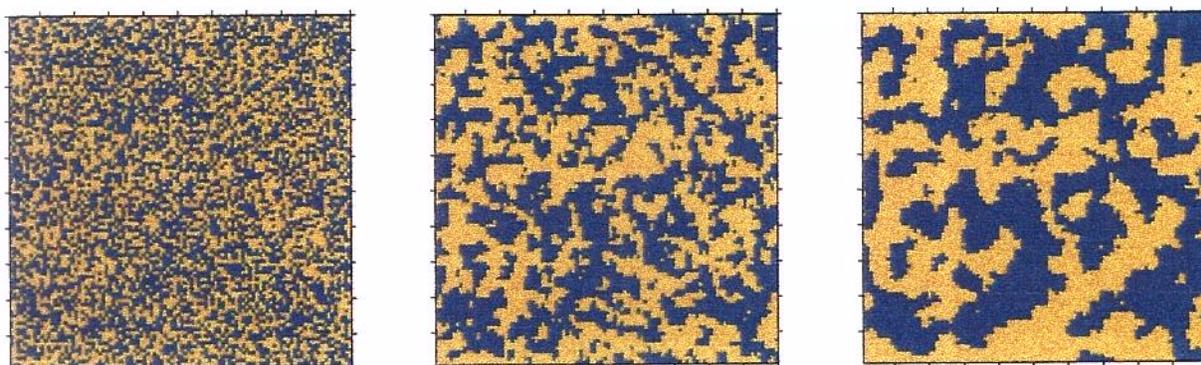


Figura 4.2 – Geração seqüencial das imagens no algoritmo de Metropolis – imagem inicial, intermediária após 10 iterações e final após 50 iterações

Algumas imagens resultantes desta seqüência estão apresentadas na figura seguinte, para diversos valores de β , em malhas de tamanho 160x160.

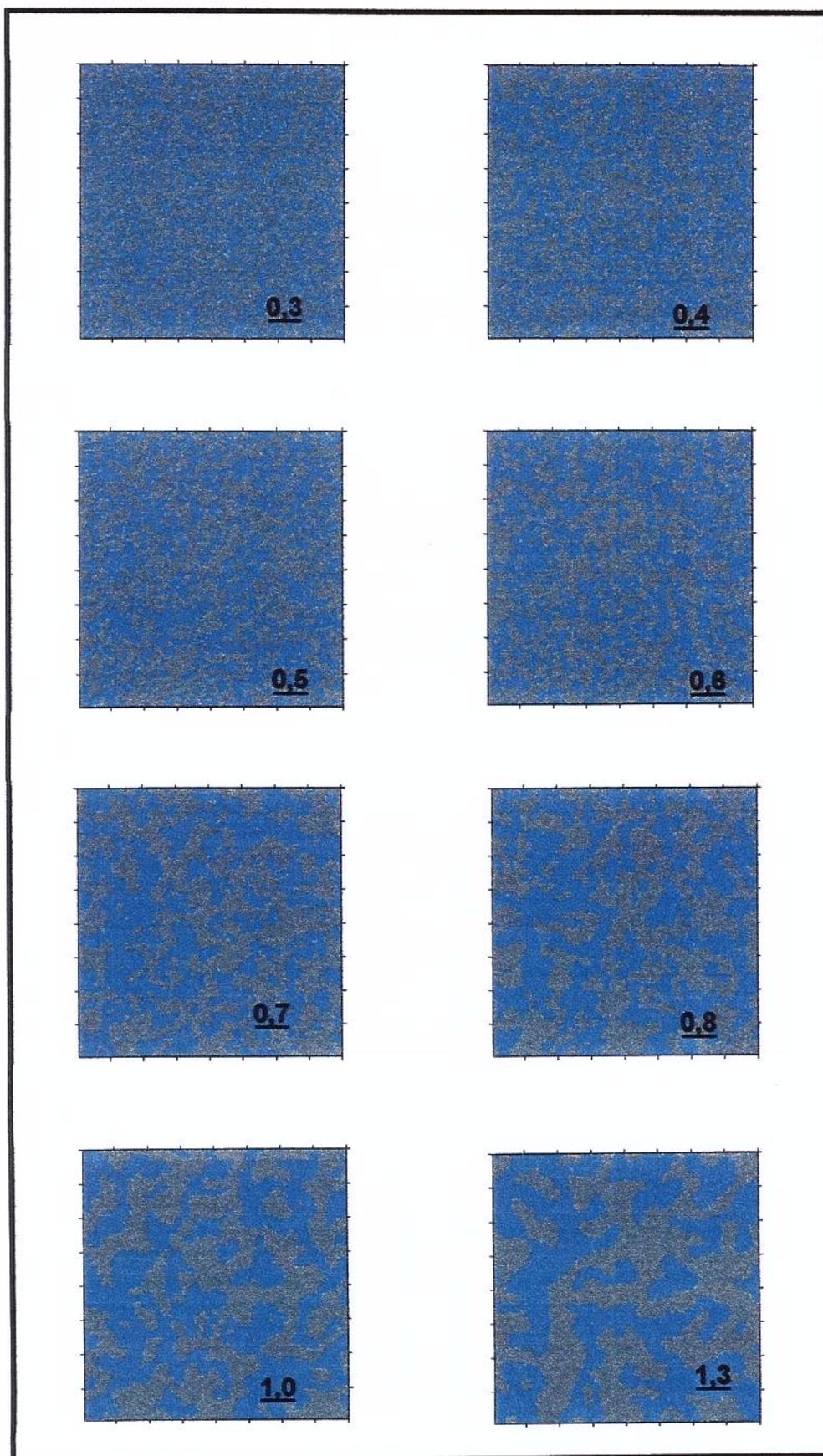


Figura 4.3 – Exemplos de imagens 160x160 simuladas com o algoritmo de Metropolis para valores de β indicados na cor preta

Modelo de Flinn

O modelo proposto por Flinn [38] consiste numa seqüência de trocas semelhante ao algoritmo de Metropolis, mas restritas apenas aos pontos da vizinhança do ponto avaliado. A equação que rege a transição pode ser expressa por:

$$q = \frac{p(Z)}{p(Za)} = \exp(-\beta \cdot \Delta n_d) \quad (4.16)$$

A estabilização, para este caso, se dá após um número muito maior de iterações, se comparado ao algoritmo de Metropolis, por causa da restrição de trocas apenas entre vizinhos. Algumas imagens resultantes são apresentadas na Figura 4.4.

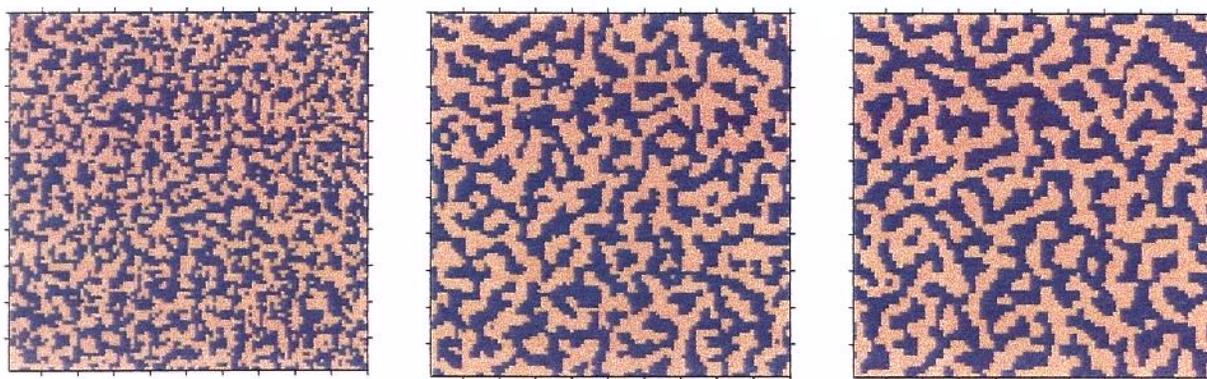


Figura 4.4 – Exemplos de imagens simuladas com o modelo de Flinn, no qual as trocas só ocorrem entre vizinhos

Amostrador de Gibbs

Este algoritmo, proposto no trabalho de Geman e Geman [32], consiste na aplicação da correspondência Markov-Gibbs para amostrar, ponto a ponto, um valor para a variável relacionada à sua vizinhança, a partir de sua probabilidade condicional. Aplica-se não só às variá-

veis discretas mas também às contínuas, e é explorado neste trabalho ao se aplicar a condicionalização através dos métodos Bayesianos, assunto tratado em detalhes na seção 4.5.

4.3 Simulação do Modelo de Potts-Strauss

O modelo de Potts representa a extensão do modelo de Ising para o caso em que a malha apresenta mais do que duas feições, sendo possíveis os valores $(0, 1, \dots, N-1)$ para a variável sendo N o número de valores possíveis; esta variável pode representar um tipo faciológico de rocha, uma espessura porosa ou simplesmente a cor de um pixel em uma imagem. O modelo de cores foi descrito por Strauss [39,40] (daí a denominação comum *Potts-Strauss*) como um campo aleatório Markoviano, regulado pela equação abaixo:

$$p(w) \propto \exp\left(-\sum_{0 \leq k < l \leq N-1} \beta_{kl} \cdot n_{kl}\right) \quad (4.17)$$

onde n_{kl} representa o número de pares das cores (k, l) e β_{kl} o fator de repulsão (repulsividade) entre duas cores diferentes. Este fator é também um indicativo da tendência de atração entre cores iguais, daí a utilização comum do termo atração, principalmente para os casos binários. Para duas possíveis realizações que diferem em apenas um ponto é válido:

$$p(Z_i = k) \propto \exp\left(-\sum_{l \neq k} \beta_{kl} \cdot u_i(l)\right) \quad (4.18)$$

onde $u_i(l)$ representa o número de vizinhos de i possuindo a cor l .

Este modelo é geral e permite a representação não só de modelos homogêneos e isotrópicos, mas a variação de β relacionada a cada par de cores permite a composição de modelos com configurações diversas, conforme mostrado nos exemplos a seguir.

A sua simulação pode ser feita tanto pelo algoritmo de Metropolis por duplas trocas, quanto pelo amostrador de Gibbs; será aqui utilizado o primeiro deles, pois o objeto de estudo

são rochas portadoras de fluido, que apresentam uma proporção prefixada entre as diversas fácies componentes. Assim, são sorteadas duas posições aleatórias na malha, cuja probabilidade de transição é calculada pela equação (4.11); as trocas se sucedem até a estabilização da energia ou do número de trocas, de forma análoga à dos modelos binários.

Como os valores de β_{kl} se referem a cada par de cores, a repulsividade dos sistema será representada por uma matriz de valores, sendo omitidos os valores quando $k>l$, já que $\beta_{kl}=\beta_{lk}$. Estão implícitos nesta representação os valores nulos da diagonal e os termos idênticos abaixo dela.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ & & \beta_{23} & \beta_{24} \\ & & & \beta_{24} \\ \hline \end{array}$$

Por exemplo, um modelo de 3 cores, com $\beta_{12}=0,3$, $\beta_{13}=0,7$ e $\beta_{23}=0,5$ é representado pela matriz:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 0,3 & 0,7 \\ & & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

Se na equação básica anterior (4.17) forem consideradas apenas duas cores e atração igual nas duas direções, fica representado o modelo de Ising. Se houver mais de duas cores e β for constante, está sendo tratado o modelo de *Potts*, aplicado em estudos ferromagnéticos em que a configuração é afetada pela temperatura (única), o que justifica a existência de um β único. Para esta configuração também é utilizado o termo “cores desordenadas” (*unordered colors*), pelo fato de não haver ligação preferencial entre nenhum par de cores. A equação anterior, devido ao β único, pode ser referida ao número de pares iguais ao valor analisado (já que $n_i=4-n_d$), tornando-se:

$$p(Z_i = k) \propto \exp[+ \beta \cdot u_i(k)] \quad (4.19)$$

observando-se, no caso, a troca de sinal.

Este último modelo apresenta um aspecto do tipo “mosaico”, como mostra a Figura 4.5 na imagem à esquerda, simulada para 3 fâcies com proporções iguais. O tamanho dos corpos formados é determinado pelos valores absolutos dos parâmetros repulsivos.

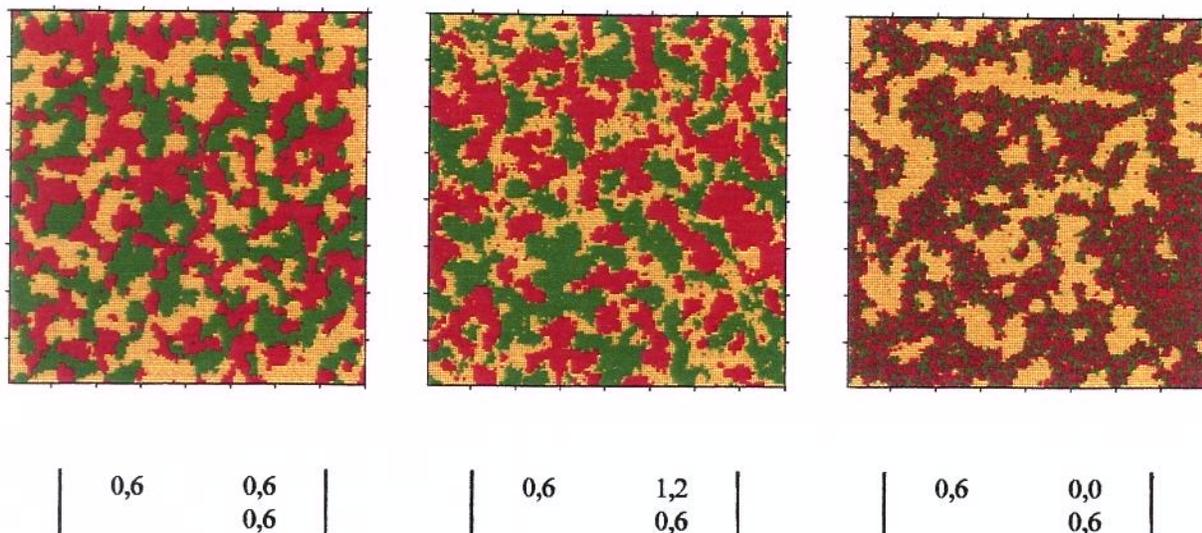


Figura 4.5 – Exemplos de imagens 160x160, simuladas com o algoritmo de Potts-Strauss para valores de repulsão entre os pares de fâcies mostrados na respectiva matriz

Uma configuração bastante diferente ocorre quando a repulsão é maior entre alguns tipos de cores, por exemplo $\beta_{13} > \beta_{23}$, representada na figura anterior ao centro. Pode-se ver que a passagem da cor verde para a cor vermelha se dá quase sempre com uma transição pela cor amarela.

Se a repulsão entre duas cores for nula, estas cores vão se misturar, propiciando uma imagem bastante semelhante à do modelo binário, como pode ser visto na figura anterior à direita. Uma matriz com valores por exemplo (0,9 ; 0,0 / 0,9) na figura anterior ao invés de (0,6 ; 0,0 / 0,6) geraria uma configuração semelhante, mas com corpos de tamanho maior.

Uma configuração bastante usual e prática se encontra no modelo denominado “níveis de cinza” (*gray levels*) ou modelo “difusão”, no qual a repulsão entre as cores é proporcional à “distância” (diferença de intensidade de cor) entre elas, ou seja $\beta(k,l) = b|k-l|$, sendo b uma constante, que quanto maior resulta em corpos de maiores dimensões. Deste modo, a transi-

ção entre as cores 1 e 2 tem a mesma força (mesmo β) que a transição entre 3 e 4, mas a transição entre 1 e 3 terá $\beta'=2\beta$ e a transição entre 1 e 4 terá $\beta''=3\beta$. Neste modelo, transição de níveis será sempre gradual, como mostra a figura abaixo para 3 e 4 fácies. O modelo é também perfeitamente adequado para representar frações de uma espessura porosa, desde que estabelecidas proporções fixas, igualmente espaçadas, da espessura total:

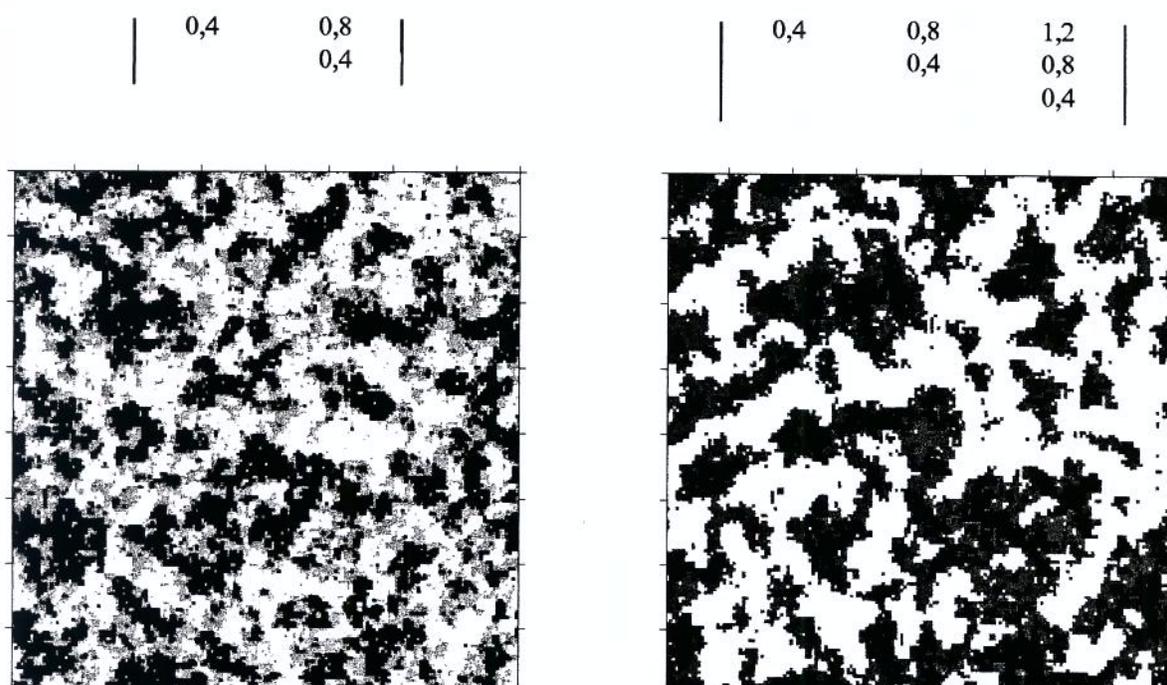


Figura 4.6 – Exemplos de imagens do modelo difusão com 3 e 4 fácies simuladas com o algoritmo de Potts-Strauss em malha 160x160

Para simular imagens anisotrópicas, basta adotar parâmetros diferenciados nas duas direções principais. A figura a seguir à esquerda mostra um caso de anisotropia suave ao lado de um caso de anisotropia mais incisiva à direita, ambas com repulsividade única entre as diversas cores.

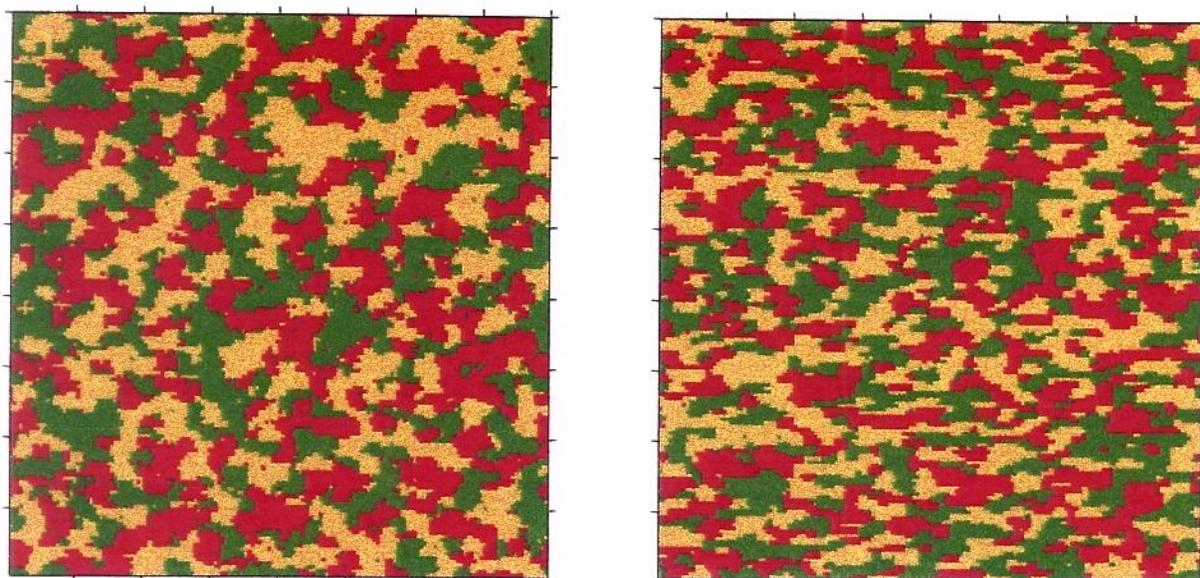


Figura 4.7 – Exemplos de imagens 160x160 anisotrópicas com modelo mosaico

A figura abaixo apresenta o modelo “níveis de cinza” (“difusão”) isotrópico ao lado de um anisotrópico.

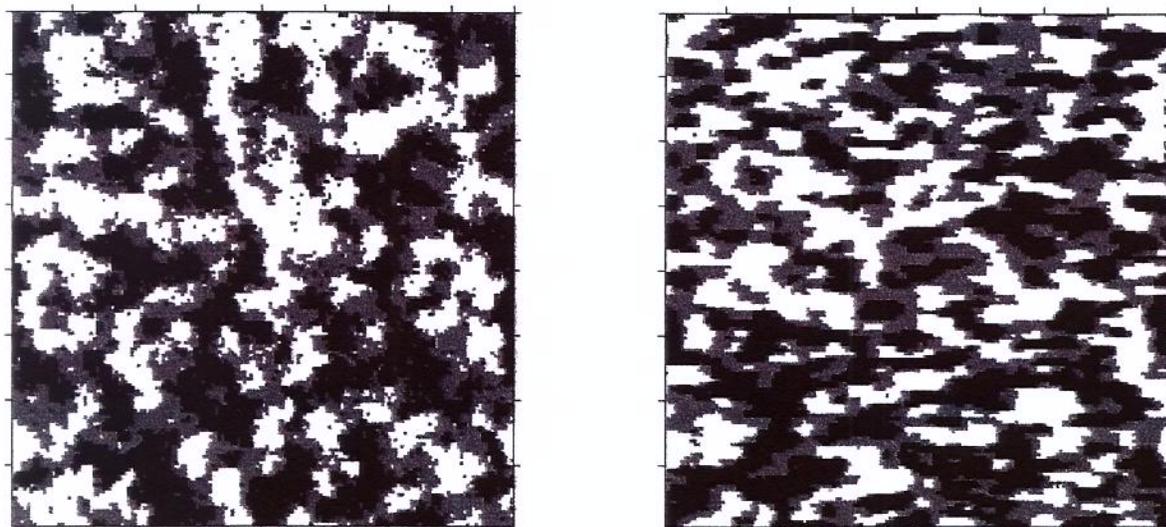


Figura 4.8 – Exemplos de imagens 160x160 isotrópicas (à esquerda) e anisotrópicas (à direita) do modelo difusão

Diversas outras configurações podem ser representadas com o modelo de *Potts-Strauss*, através da combinação adequada dos diversos valores do parâmetro repulsivo β .

4.4 Parâmetros de Correlação Espacial nos processos Markovianos

Com o objetivo de aprofundar o entendimento acerca das propriedades dos processos Markovianos binários, serão estimados os valores dos parâmetros estatísticos de segunda ordem (autocovariância, autocorrelação ou semivariograma, descritos em detalhes no Capítulo 3) para as imagens geradas através do algoritmo de Metropolis e do modelo de Flinn.

Algumas estimativas feitas nos processos Gaussianos para o valor de uma variável, conhecidos os valores em uma determinada vizinhança, se baseiam no conhecimento da correlação espacial entre os valores desta variável. A estimativa que minimiza a variância é comumente denominada de krigagem, a qual consiste no cálculo dos pesos de ponderação a serem dados a cada ponto da vizinhança. Quando o modelo de variograma é, por exemplo, exponencial, num caso unidimensional, ocorre um forte efeito de filtragem, de modo que os pesos são dados exclusivamente aos vizinhos mais próximos, o que é uma propriedade Markoviana. Este efeito de filtragem, mais fortemente marcante nos processos com variograma linear próximo à origem, é apresentado em diversos exemplos no Anexo C.

Para cada valor do parâmetro de atração β foram geradas 100 imagens de dimensões 160x160, das quais são calculados os valores observados do variograma. Em seguida é ajustado um modelo de variograma conhecido, cujos parâmetros poderão estar relacionados a β . Serão empregados o algoritmo de Metropolis e o modelo de Flinn, já discutidos na seção 4.2.

Imagens Metropolis

Para cada uma das imagens geradas foram calculados os variogramas nas várias distâncias, sendo os valores médios ajustados a um modelo conhecido. A Figura 4.9 mostra o ajuste para $\beta=0,3, 0,5, 0,8$ e $1,0$, nas duas direções principais. Os melhores ajustes se deram com o modelo exponencial, empregando maiores alcances quanto maiores os valores de β . Observou-se também uma maior variabilidade das curvas para maiores valores de β , fato que também ocorre nos processos Gaussianos quando se aumenta o alcance da correlação (ver Anexo A).

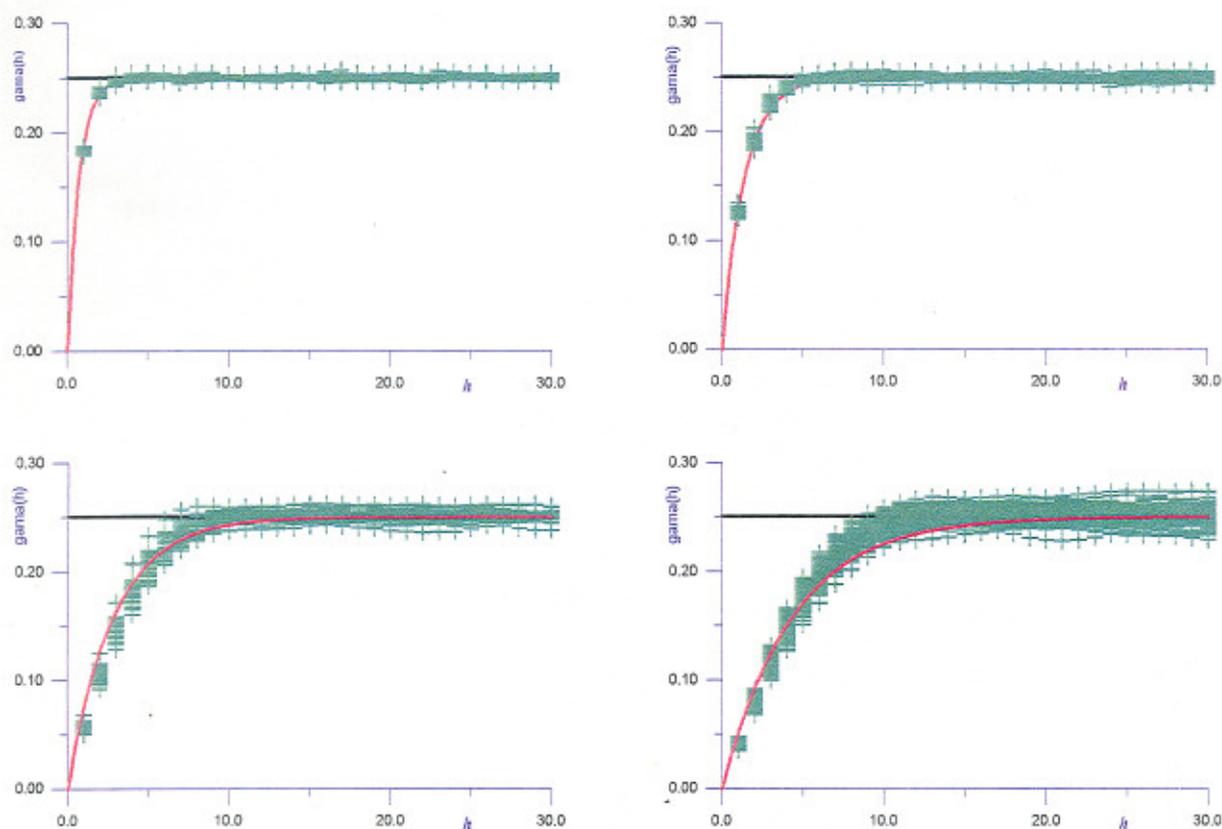


Figura 4.9 – Ajuste do modelo exponencial ao variograma observado nas imagens Metropolis geradas com β respectivamente igual a 0,3, 0,5, 0,8 e 1,0

Embora os variogramas sejam semelhantes nas duas direções, indicando um caráter isotrópico, seria possível que o modelo exponencial fatorado fosse válido, já que o mesmo apresenta valores iguais em direções perpendiculares. Por isso, foi investigado o variograma das imagens geradas, nas direções 45° e 135° . Os resultados mostraram valores de alcance bastante próximos em todas as direções, indicando a ocorrência de um modelo exponencial isotrópico. Assim, há uma correspondência, em termos de correlação espacial, entre as imagens dos processos Markovianos, definidos com vizinhança de quatro pontos e gerados pelo

algoritmo de Metropolis com dupla troca, e as do processo Gaussiano de variograma exponencial isotrópico.

A figura abaixo mostra a distribuição espacial dos semivariogramas nos modelos exponencial fatorizado e exponencial isotrópico.

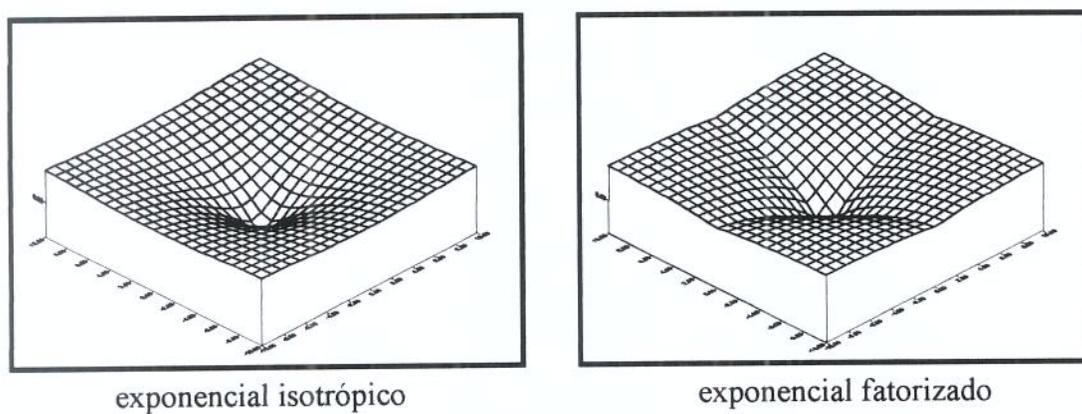


Figura 4.10 – Semivariogramas exponenciais isotrópico e fatorizado distribuídos sobre malhas bidimensionais

Foi também buscada uma relação entre os valores de β e o alcance a do variograma, e entre β e o variograma à distância unitária $\gamma(1)$. As principais relações empíricas obtidas foram:

$$\gamma(1)\beta^{1.1} = 0,05$$

$$a = 12,7.\beta - 1,8$$

Estas relações serão, posteriormente, trabalhadas analiticamente e comparadas com os resultados experimentais. O aspecto geral destes parâmetros é mostrado nas Figuras 4.11 e 4.12.

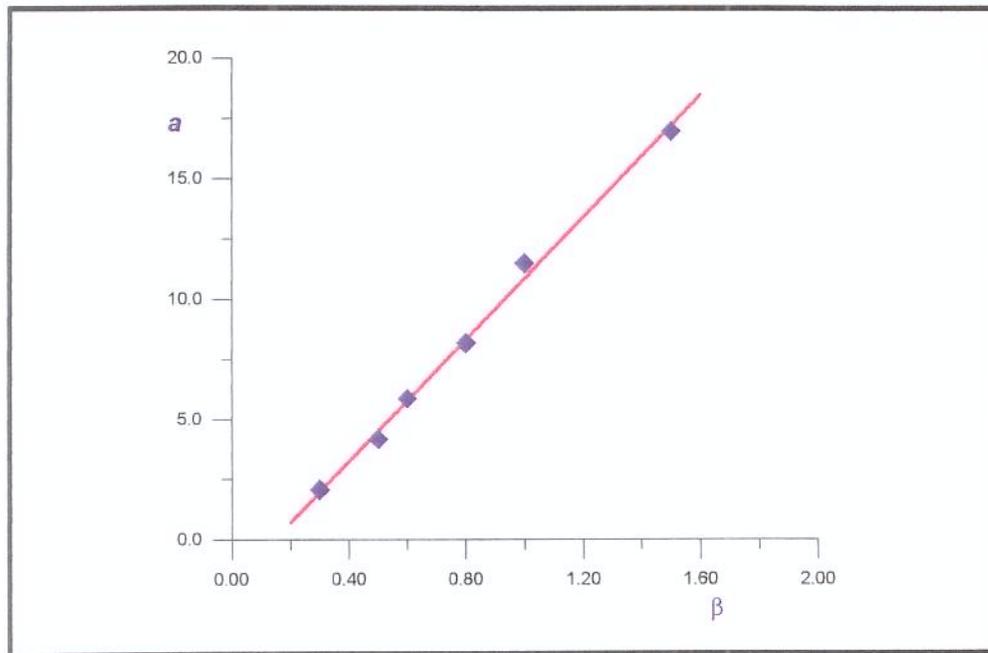


Figura 4.11 – Relação entre o parâmetro β e o alcance a do variograma observado nas imagens – valores observados e curva ajustada

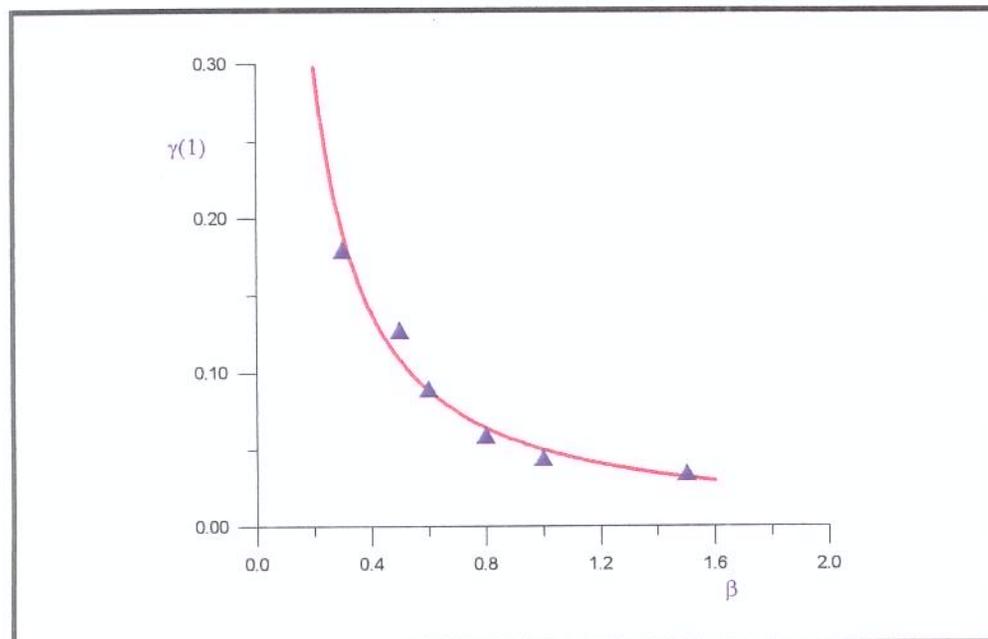


Figura 4.12 – Relação entre o parâmetro β e o variograma na distância unitária $\gamma(1)$ – valores observados e curva ajustada

Foi também verificada a influência da proporção p entre as duas fácies no variograma observado. A figura seguinte ilustra este comportamento:

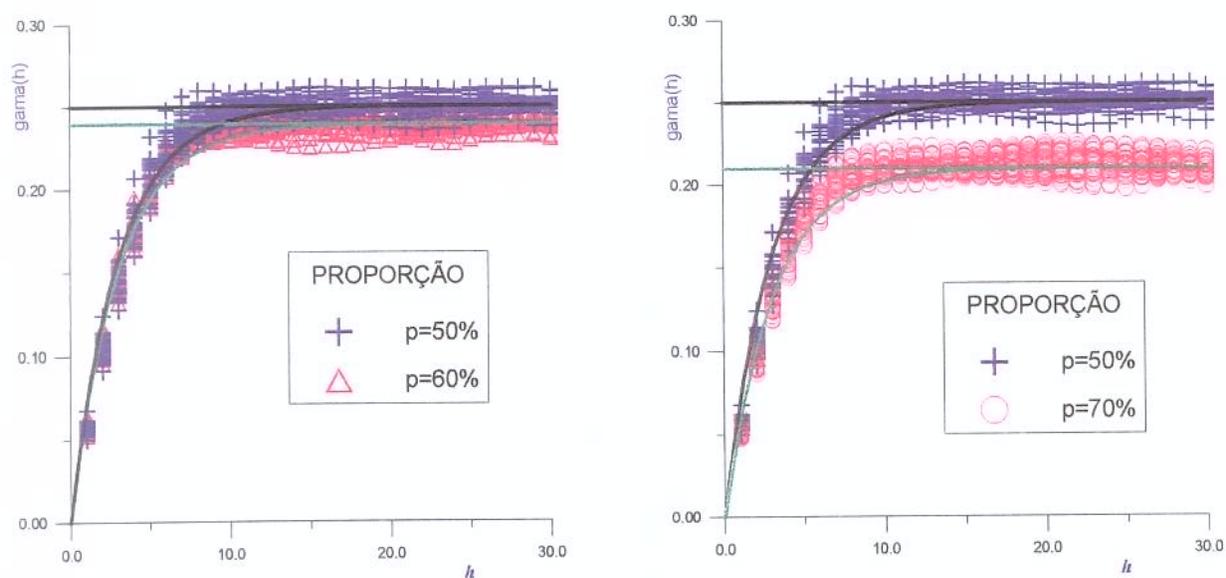


Figura 4.13 – Sensibilidade do variograma (observado) à proporção p entre as fácies de um processo Markoviano binário

Observa-se pela figura que a proporção pouco altera a correlação observada; a equação ajustada é praticamente idêntica, diferenciando apenas na variância, que é o fator multiplicador da equação. Ela vale 0,25 para $p=0,50$, 0,24 para $p=0,60$ e 0,21 para $p=0,7$.

Foi também simulado o algoritmo de Metropolis com a consideração de uma vizinhança de oito pontos (os quatro vizinhos laterais e os quatro diagonais); os resultados indicaram que a diferença na correlação espacial é pouco significativa, como mostra a Figura 4.14 a seguir.

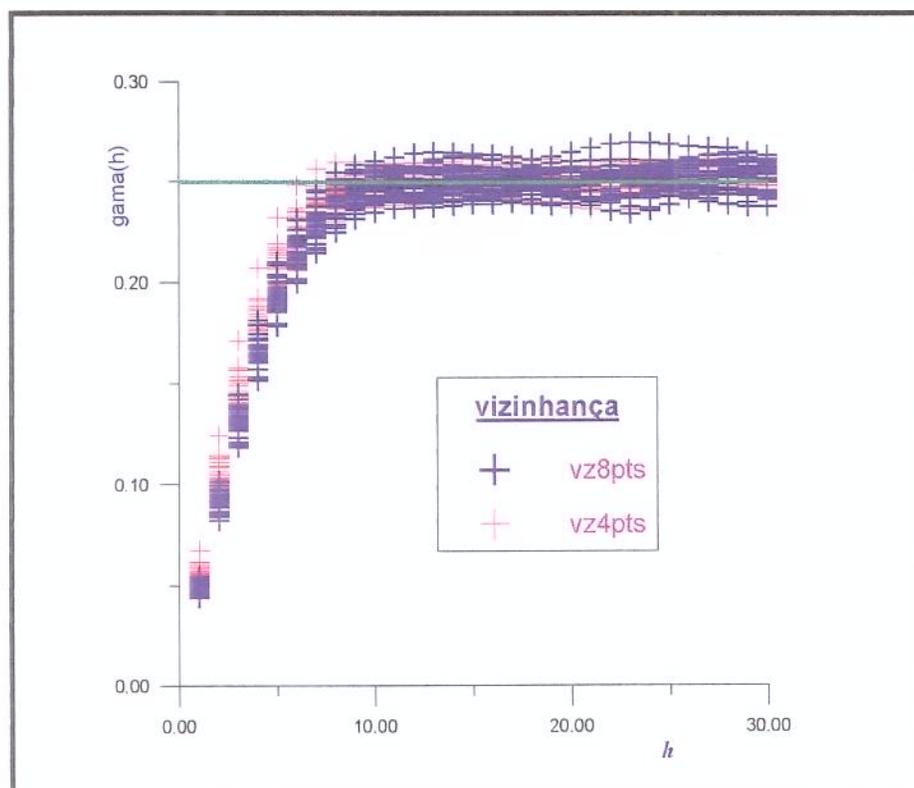


Figura 4.14 – Variograma observado nos modelos Markovianos binários com vizinhanças de quatro e oito pontos

Também foi analisado o variograma das imagens do modelo de Potts-Strauss, nas configurações do tipo difusão (níveis de cinza), com a proporção da fácies intermediária considerada como condutora. Houve uma ligeira redução no alcance e na intensidade da correlação, coerente com a redução na conectividade e aumento da proporção crítica de percolação analisadas e discutidas no próximo capítulo. A figura 4.16 mostra os variogramas médios nos dois modelos.

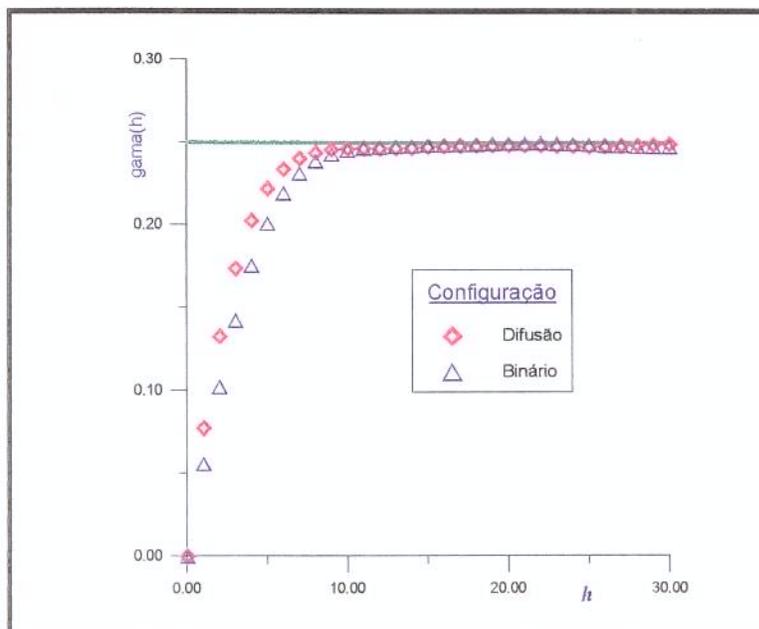


Figura 4.15 – Variogramas médios observados nas configurações dos tipos binário e difusão

Imagens Flinn

Para as imagens geradas com modelo de Flinn, o ajuste se deu com um modelo de correlação diferente em relação às imagens Metropolis.

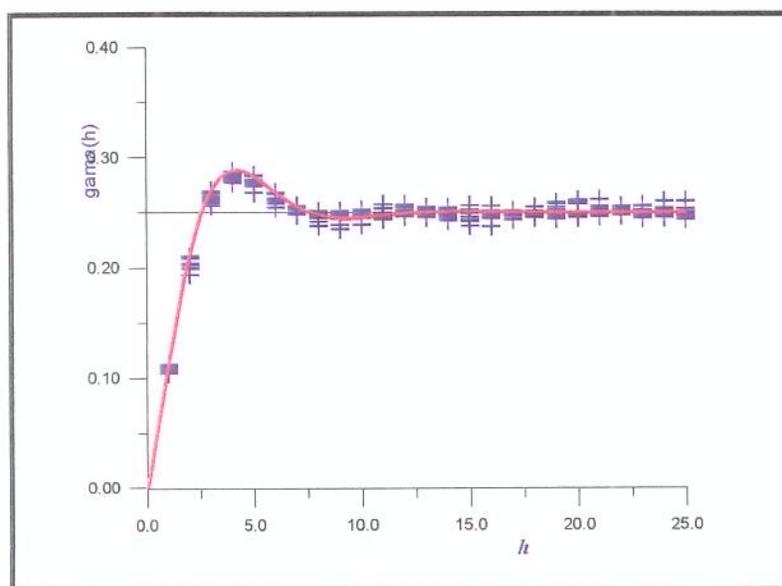


Figura 4.16 – Ajuste do modelo de variograma exponencial modulado ao variograma observado nas imagens geradas com o modelo de Flinn

O variograma ajustado para este caso tem um modelo denominado efeito buraco suavizado (*dumped hole effect*);

$$\gamma(h) = 1 - \exp(-3h/a) \cos(\pi h/d)$$

com d representando o parâmetro que define a componente periódica. O valor do alcance é maior quanto maior for o valor da atração β .

Este tipo de variograma foi sugerido por Flinn [38] não só para a imagem final após a estabilização de β , como também para as imagens intermediárias. No trabalho atual é analisada apenas a imagem final, já que os processos Markovianos se baseiam em uma probabilidade condicional que é atingida, em tese, após um número infinito de iterações, não tendo sentido prático o estudo das imagens intermediárias.

O termo que contém o cosseno representa o efeito buraco e sua periodicidade; o termo exponencial representa a suavização daquele efeito. Este modelo pode também ser interpretado como exponencial modulado, já que a multiplicação pelo cosseno provoca uma modulação na frequência da correlação, ou seja, uma translação no sinal da variável e na densidade espectral de potência para maiores valores de frequência. A figura abaixo mostra a densidade espectral de potência do modelo exponencial e do mesmo modelo modulado em frequência:

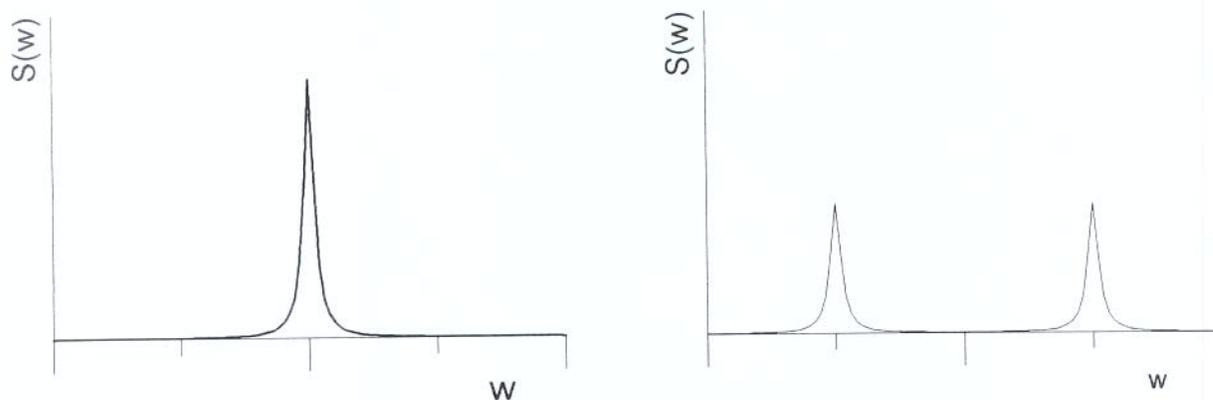


Figura 4.17 – Densidade espectral de potência nos modelos exponenciais sem modulação (à esquerda), e modulado (à direita)

Da mesma forma que para o algoritmo de Metropolis foi constatada a isotropia do processo através do cálculo dos variogramas nas outras direções que não as principais. Buscaram-se ainda relações empíricas entre os parâmetros atrativos e os parâmetros de correlação espacial. A principal relação obtida foi:

$$\gamma(1)\beta^{1/2} = 0,10$$

Obtenção de relações analíticas:

Partindo das probabilidades condicionais dos processos Markovianos e Gaussianos, foi possível obter uma relação entre os parâmetros atrativos e os de correlação espacial.

Para um processo de Ising é válido:

$$p(x) \propto \exp(-\beta \cdot n_d) = \exp[-\beta(2 - \sum v_i / 2)] \quad (4.20)$$

Para um processo Gaussiano, a estimativa pela krigagem pode ser aproximada por:

$$p(x) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1 - \mu_k}{4\sigma_k}\right)^2\right] \quad (4.21)$$

Mas, para uma estimativa que utiliza apenas os 4 vizinhos mais próximos com forte efeito de filtragem, que se observa, por exemplo, quando o variograma é exponencial (ver Anexo C), a média e a variância da krigagem valem:

$$\mu_k = 0,25 \sum v_i \quad (4.22)$$

$$\sigma_k^2(x) = C(0) - \sum \lambda C(1) = C(0) - C(1) = \gamma(1) \quad (4.23)$$

gerando:

$$\pi(x) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(1 - 0,25 \sum v_i)^2}{4\gamma(1)} \right] \quad (4.24)$$

Igualando-se as duas probabilidades anteriores vem:

$$\gamma(1)\beta = \frac{1 - 0,25 \sum v_i}{16} \quad (4.25)$$

Para a proporção 0,50 entre os valores da variável tem-se $\sum v_i = 0$, o que faz:

$$\gamma(1)\beta = \frac{1}{16} = 0,0625 \quad (4.26)$$

Esta relação é bastante semelhante à obtida na simulação das imagens Metropolis (página 75), e permite relacionar a atração β com o variograma na distância unitária.

Para proporções diferentes de 0,50, $\sum v_i = 2p - 1$, mantendo a equação anterior praticamente inalterada. Se for admitido que o variograma é exponencial, de acordo com as observações experimentais, o alcance a da correlação pode ser relacionada a β :

$$\gamma(1) = 0,25[1 - \exp(-3/a)] = \frac{1}{16\beta}$$

$$a = \frac{3}{\ln \left(\frac{\beta}{\beta - 0,25} \right)} \quad (4.27)$$

As equações acima são representadas graficamente nas figuras abaixo juntamente com os valores empíricos já mostrados nas Figuras 4.11 e 4.12, mostrando uma boa concordância.

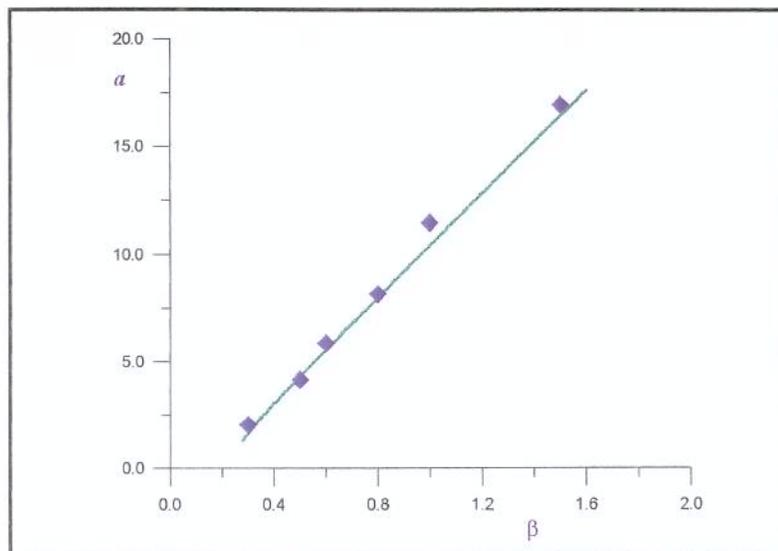


Figura 4.18 – Relação entre o parâmetro β e o alcance do variograma observado nas imagens – valores observados e curva teórica

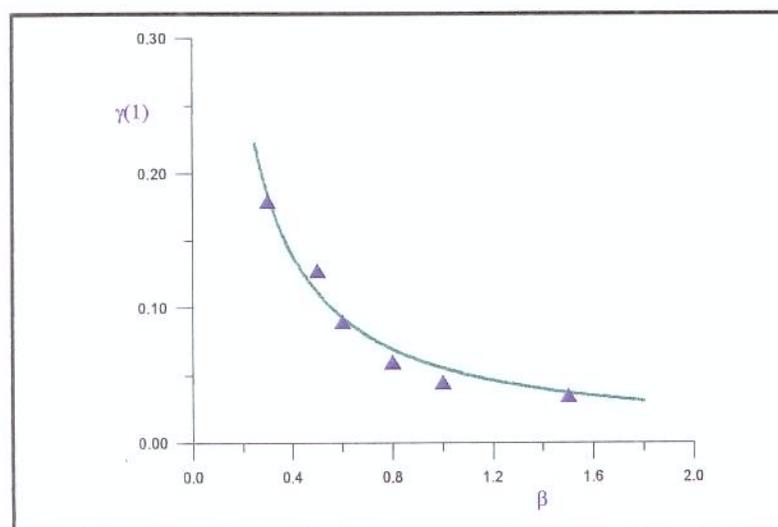


Figura 4.19 – Relação entre o parâmetro β e o variograma na distância unitária $\gamma(1)$ – valores observados e curva teórica

Relações entre as imagens dos processos Gaussianos e Markovianos

Pelo que foi discutido acima, poderia-se concluir, erroneamente, que as imagens geradas pelos processos Markovianos binários seriam similares às geradas pelos processos Gaussianos Truncados com modelo de variograma exponencial. Para aprofundar a questão, vale

observar as imagens geradas pelos dois processos, conforme apresentado na Figura 4.20 abaixo. Ela mostra uma imagem Metrópolis, com $\beta=0,8$, e as imagens geradas com diferentes modelos de variograma, no processo Gaussiano Truncado, discutido no Capítulo 3.

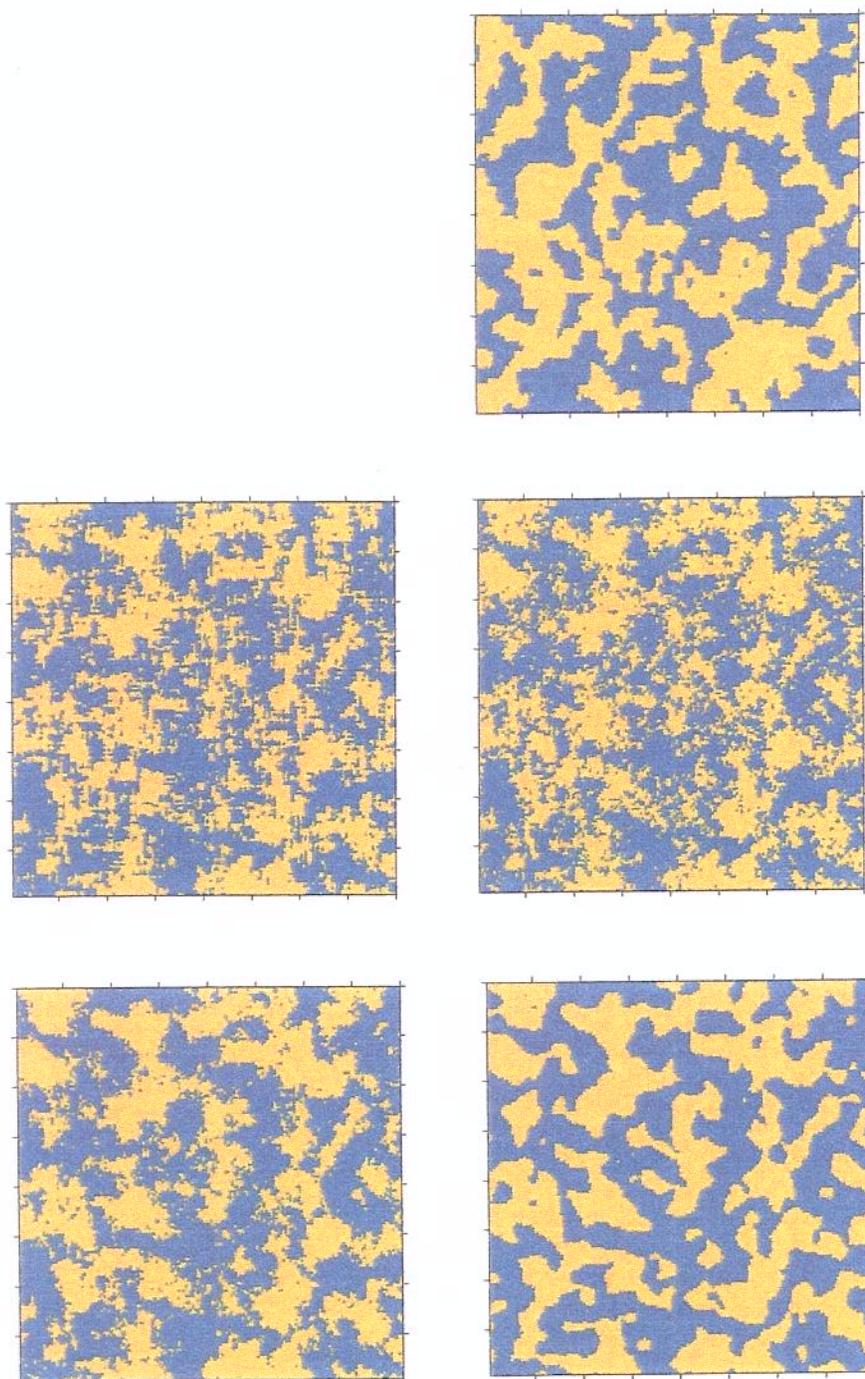


Figura 4.20 – Imagem Metrópolis comparada a imagens Gaussianas com modelo de correla o exponencial fatorizado, exponencial isotrópico, esférico e Gaussiano.

Não resta dúvida que a semelhança é maior com o modelo de correlação Gaussiana; chama-se atenção aqui para o fato de que o modelo de correlação se refere à variável contínua antes do truncamento. No anexo A é discutida a relação entre os variogramas (e o domínio de correlação A) dos processos Gaussianos contínuos e truncados; observa-se que uma imagem contínua com variograma Gaussiano (parabólico na origem), após o truncamento, passa a ter um variograma linear na origem. Isto mantém a coerência das relações anteriores, já que as mesmas utilizaram variáveis binárias ou truncadas.

Deste modo, há sim, uma relação entre as características geométricas das imagens Metropolis e das imagens dos processos Gaussianos com modelo de variograma Gaussiano (parabólico na origem), os quais, após o truncamento, apresentam variograma linear na origem (discutido no Anexo A). Este fato, baseado até então nas características geométricas visuais das imagens, é corroborado pelas propriedades de fluxo dos processos, avaliadas através dos parâmetros da Teoria da Percolação, principal assunto do capítulo seguinte.

4.5 Métodos Bayesianos

Definição

Os fundamentos dos métodos Bayesianos, extensivamente discutidos por Berger [42], são apresentados a seguir de forma sintética, visando sua aplicação na simulação condicional de variáveis aleatórias com propriedades Markovianas. O conhecido teorema de Bayes calcula a distribuição posterior de uma variável aleatória $Z(x)$ condicionada a seus dados amostrais g :

$$p(Z|g) = \frac{f(g|Z) \cdot p(Z)}{M(x)} \quad (4.28)$$

$M(x)$ é a distribuição marginal de $Z(x)$:

$$M(x) = \int_x p(Z) f(y|Z) dx \quad (4.29)$$

Um aspecto primordial deste teorema é a inversão da probabilidade nos dois lados da equação, permitindo calcular a probabilidade posterior, de difícil obtenção, em função da probabilidade de ocorrência de uma determinada amostra, mais facilmente estimada. Esta probabilidade adicional oferece uma grande flexibilidade na condicionalização de um processo estocástico definido como Markoviano.

Estendendo o conceito de variável aleatória para processo estocástico, considera-se a configuração da imagem $\{Z_1=z_1, Z_2=z_2, \dots, Z_N=z_N\}$ representada abreviadamente por $\{Z=w\}$ e uma leitura ruidosa desta imagem ou uma variável secundária amostrada em todos os pontos da malha $\{Y_1=y_1, Y_2=y_2, \dots, Y_N=y_N\}$ representada por $\{Y=g\}$. Assim, a probabilidade condicional da variável é representada pelo produto Bayesiano:

$$p(Z = w|Y = g) = \frac{p(Y = g|Z = w)p(Z = w)}{p(Y = g)} \quad (4.30)$$

A probabilidade $P(Z=w)$ é definida pelas relações de vizinhança apresentadas na seção anterior. A probabilidade da variável secundária condicionada ao valor da primária, $P(Y|Z)$, é estimada de acordo com cada caso particular. Estes dois termos serão focalizados a seguir. Os algoritmos seqüenciais que simulam os processos Markovianos utilizam trocas pontuais, e por isso basta que as probabilidades sejam calculadas para o valor em cada ponto.

Foi demonstrado por Geman e Geman [32], que se a probabilidade a priori da variável primária for Markoviana e a probabilidade da variável secundária for uma função daquela, acrescida de um ruído Gaussiano aditivo ou multiplicativo, o produto Bayesiano terá também uma distribuição de Gibbs. Assim, uma variável cuja probabilidade condicional é descrita por um produto Bayesiano da forma anterior pode ser simulada com os algoritmos empregados nos processos Markovianos. Com isto, a simulação sob condições Bayesianas consistirá na determinação das probabilidades a priori e dos dados, seguida da aplicação do *algoritmo de Metropolis* ou do *amostrador de Gibbs*.

Probabilidade “a priori”

Modelo de Ising:

Modelo binário apresentado na seção 4.2, é capaz de representar rochas permeáveis e folhelhos, spins positivos e negativos, células condutoras e não condutoras, fácies 1 e fácies 2, etc. A probabilidade condicional dos valores da variável em um determinado ponto pode ser obtida por uma das equações abaixo, que são equivalentes:

$$p(z_i | \partial z_i) \propto \exp\left(-\beta \cdot z_i \sum_{j \in \partial z_i} v_j\right) \quad (4.31)$$

$$p(z_i | \partial z_i) \propto \exp\left(-\beta \cdot \sum_{j \in \partial z_i} n_d\right) \quad (4.32)$$

$$p(z_i | \partial z_i) \propto \exp\left(+\beta \cdot \sum_{j \in \partial z_i} n_i\right) \quad (4.33)$$

Modelo de Potts:

Consiste na extensão do modelo de Ising para variáveis não binárias, que podem apresentar valores (0,1,2...n) Pode ser regido pelas equações anteriores, sendo mais comumente apresentado, em relação ao número de vizinhos de mesma cor (n_i) do ponto visitado; a sua probabilidade condicional é, assim, representada por:

$$p(z_i | \partial z_i) \propto \exp(\beta n_i) \quad (4.34)$$

Modelo Contínuo Gaussiano (autonormal):

Sua probabilidade condicionada à vizinhança é expressa pela equação:

$$p(z_i|z_{oi}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}\left(z_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j z_j\right)^2\right\} \quad (4.35)$$

A função energia deste modelo faz com que sua equação corresponda a uma distribuição Gaussiana relacionada a uma vizinhança, daí o nome autonormal.

Probabilidade dos dados amostrais

A distribuição dos dados amostrais pode ser construída de acordo com os objetivos e com os dados disponíveis; podem-se destacar os casos:

Leitura ruidosa da variável:

Sendo a variável secundária igual à variável primária acrescida de um ruído Gaussiano de média zero e variância σ^2 , a sua probabilidade é calculada por:

$$p(Y_i = y_i|Z_i = z_i) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - z_i)^2\right\} \quad (4.36)$$

Variável secundária correlacionada:

Sendo a variável secundária correlacionada à variável primária, sua média será a estimativa correlacionada à variável primária, e sua variância será a variância da correlação, parâmetros obtidos através das análises de regressão linear:

$$p(Y_i = y_i|Z_i = z_i) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_i - (a_0 \cdot z_i + a_1)]^2\right\} \quad (4.37)$$

Leitura indicatriz da variável:

A função indicatriz ou indicadora de uma variável contínua é representada pelas equações:

$$I(z_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \geq z_c \\ 0 & \text{se } z \leq z_c \end{cases}$$

Considerando y como a indicatriz de z , a probabilidade condicional de y será:

$$p(I(z_i) = 1 | Z_i = z_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \geq z_c \\ 0 & \text{se } z_i \leq z_c \end{cases} = I(z_i) \quad (4.38)$$

Esta probabilidade é utilizada por Freulon e de Fouquet [43] para simular um processo estocástico condicionado por valores da função indicatriz, ou seja, sob condições de desigualdade (*inequalities conditions*).

Composição do Bayesiano

Várias são as combinações entre as probabilidades “a priori” e amostrais na composição do Bayesiano permitindo uma gama muito grande de aplicações. Um exemplo simples aplicado por Besag [34] é a composição de um modelo de Ising com um ruído normal:

$$p(Z = w | Y = g) \propto \exp\left(-z_i \cdot \beta \sum_{j \in \partial x_i} v_j\right) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (y_i - z_i)^2\right\}$$

$$p(X = w | Y = g) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (y_i - z_i)^2 - z_i \cdot \beta \sum_{j \in \partial x_i} v_j\right\} \quad (4.39)$$

Outras combinações foram desenvolvidas e testadas: Geman e Geman [32] aplicaram esta seqüência compondo, entre diversos casos, o modelo discreto de Potts associado a uma “sujeira” provocada pela leitura convolucionada da imagem, associada a um ruído normal aditivo; Freulon e de Fouquet [43] utilizaram o modelo autonormal condicionado por condições de desigualdade (dados indicatrizes) disponíveis em alguns pontos do grid; Allard [44] aplicou o mesmo modelo autonormal sujeito a condições de ligação entre determinados pares de pontos.

Estabelecido o produto Bayesiano, o processo de restauração pode ser feito segundo duas metodologias semelhantes: a primeira delas é o algoritmo “amostrador de Gibbs” (GS) proposto por Geman e Geman [32], já descrito na Seção 4.2; uma proposta alternativa foi desenvolvida por Besag [35], que difere da anterior apenas por não amostrar um valor qualquer da distribuição, mas sim, tomar seu valor mais provável, ou seja, sua moda; o procedimento é por isso denominado Moda Condicional Iterada (*Iterated Conditional Modes* - ICM).

Na seção a seguir são apresentadas as equações da distribuição de probabilidades e da moda do Bayesiano para que sejam utilizados e comparados os dois procedimentos.

Seqüência Bayesiana com dados amostrais correlacionados à função aleatória

São mostradas agora as equações Bayesianas para algumas combinações entre as probabilidades “a priori” e “amostral” que podem ter grande utilidade na caracterização de uma propriedade da formação. Os dados amostrais são considerados como uma variável secundária, disponível em todos os pontos da malha, da qual é possível extrair uma correlação linear com a variável primária. Um exemplo bastante comum é uma variável extraída de dados geofísicos, que seja diretamente correlacionada a uma propriedade da formação. Esta variável representa uma leitura “suja” da variável objetivo, que seria restaurada pelos processos apresentados, ou simplesmente uma simulação da variável objetivo condicionada pelas observações da variável secundária. Considerando que a correlação linear seja homosedástica, na qual a variância do erro ε é a mesma em todos os pontos, a equação que relaciona Y e Z pode ser representada como:

$$Y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot Z(x) + \varepsilon(x) \quad (4.40)$$

Uma aplicação possível deste caso seria a leitura ruidosa de uma variável primária, ou seja, a variável secundária corresponde à primária acrescida de um ruído aditivo; neste caso, o coeficiente angular é unitário e o coeficiente linear é nulo. Assim, dada uma variável secundária correlacionada ao processo, ou uma leitura ruidosa da variável primária, de quem se conhece o variograma ou outra relação de vizinhança, é possível aplicar os algoritmos GS e ICM para estimar os valores desta variável em todos os pontos do grid.

Caso Discreto: Processo binário Markoviano, dados amostrais correlacionados

$$p(Z = w|Y = g) \propto \exp\left(-z_i \cdot \beta \sum_{j \in \partial z_i} v_j\right) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [y_i - (a_0 \cdot z_i + a_1)]^2\right\}$$

$$p(Z = w|Y = g) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [y_i - (a_0 \cdot z_i + a_1)]^2 - \beta \cdot z_i \sum_{j \in \partial z_i} v_j\right\} \quad (4.41)$$

Algoritmo:

O algoritmo, neste caso, é desenvolvido calculando-se a probabilidade de cada um dos valores possíveis da variável binária em cada ponto a ser percorrido. Assim:

$$p(+1) = p(Z_i = 1|Y_i = y_i) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [y_i - (a_0 + a_1)]^2 - \beta \sum_{j \in \partial z_i} v_j\right\}$$

$$p(-1) = p(Z_i = -1|Y_i = y_i) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [y_i - (-a_0 + a_1)]^2 + \beta \sum_{j \in \partial z_i} v_j\right\}$$

Em seguida, calcula-se :

$$c = \frac{p(+1)}{p(+1) + p(-1)}$$

O amostrador da distribuição acima consiste em extrair um valor de uma distribuição uniforme $U(0,1)$, adotando o valor da variável conforme o valor amostrado for maior ou menor que c .

A Figura 4.21 a seguir mostra a uma seqüência de restauração aplicada a uma variável binária, gerada por um algoritmo Gaussiano, com variograma exponencial.

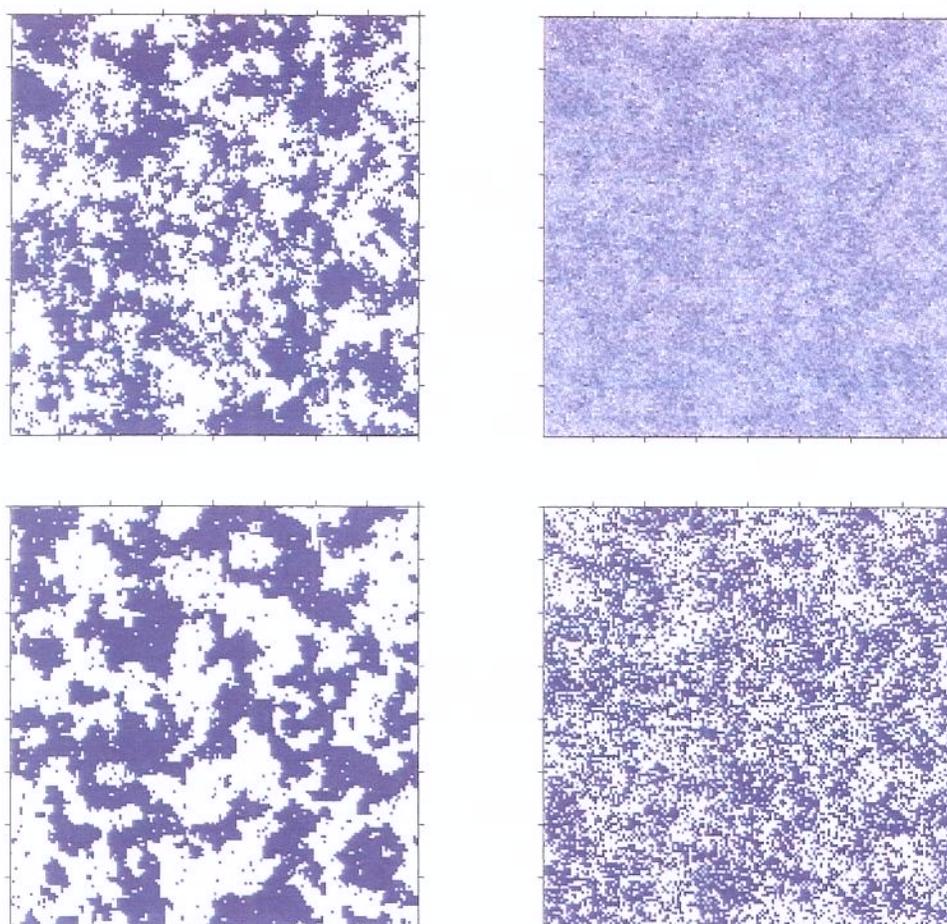


Figura 4.21 – Aplicação do algoritmo de restauração GS em uma imagem binária com variograma exponencial –imagem original, imagem contaminada, imagem de máxima verossimilhança e imagem restaurada

Na parte superior à esquerda apresenta-se a imagem original, supostamente desconhecida, à qual é imposto um ruído aditivo, ou uma variável correlacionada; à sua direita a imagem contaminada; em baixo à direita a imagem calculada por aproximação ao valor mais próximo, equivalendo a uma estimativa de máxima verossimilhança; e à sua esquerda a imagem restaurada, após a realização de 20 iterações (número de vezes que a malha é percorrida) e já tendo a energia do sistema (e o número de trocas) atingido o patamar de estabilização.

A qualidade da restauração é avaliada não só pela semelhança visual entre as imagens, mas pelos variogramas das imagens base e restaurada, e do variograma cruzado entre elas:

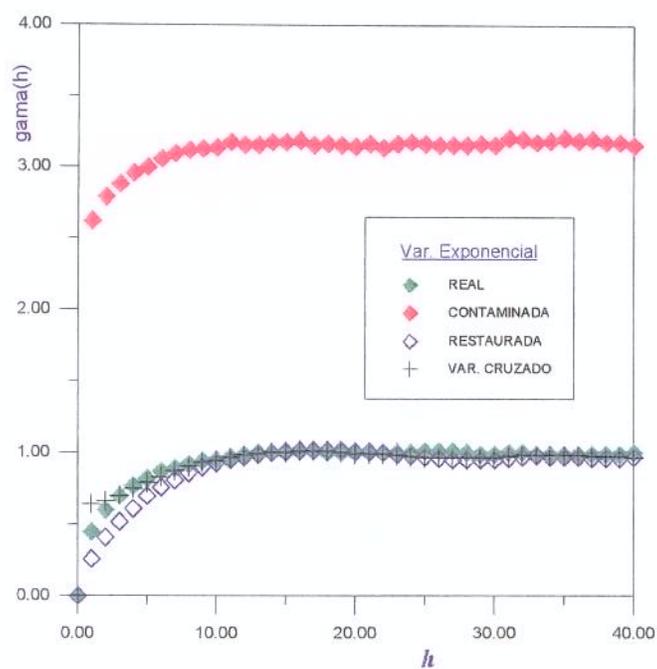


Figura 4.22 – Semivariogramas das imagens da Figura 4.21: original , contaminada e restaurada, além do variograma cruzado entre imagens original e restaurada

Procedimento idêntico foi realizado com uma imagem de variograma Gaussiano; os resultados estão representados na figura 4.23 a seguir:

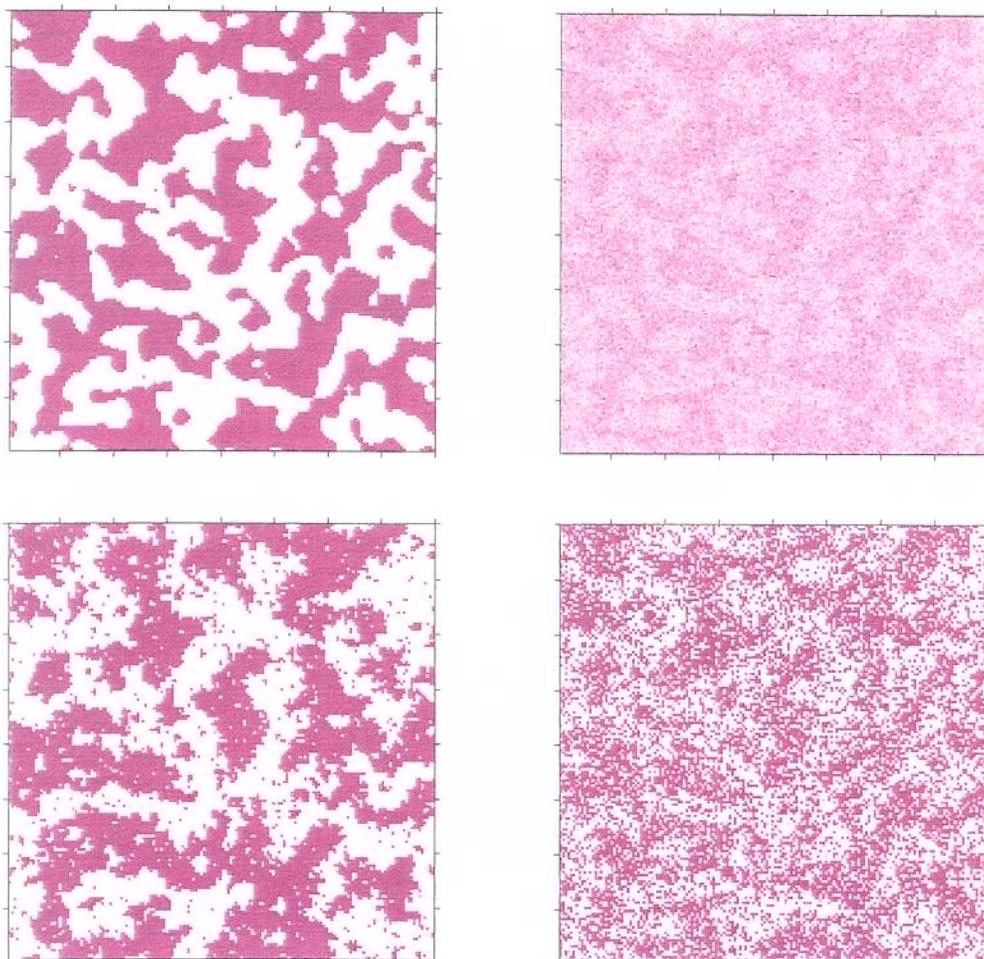


Figura 4.23 – Aplicação do algoritmo de restauração GS em uma imagem binária com variograma Gaussiano—imagem original, imagem contaminada , imagem de máxima verossimilhança e imagem restaurada

E o variograma das imagens pode ser observado a seguir:

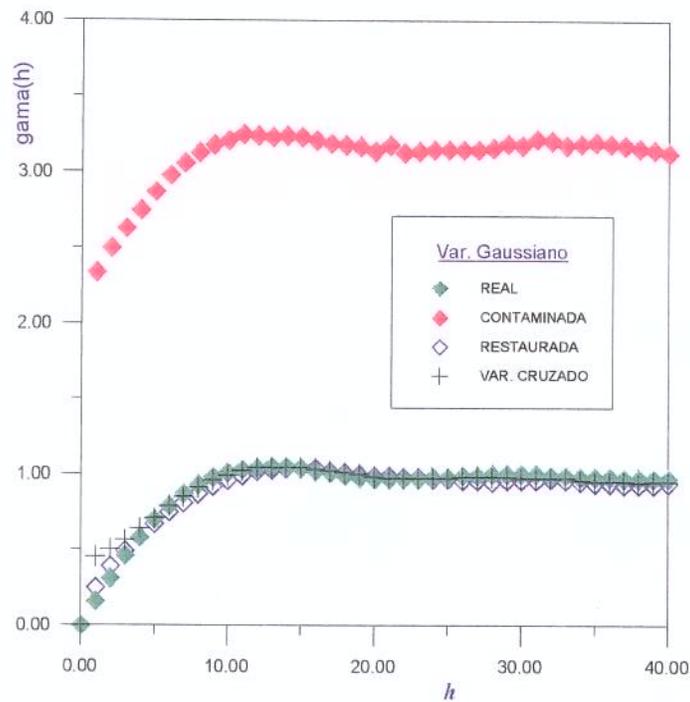


Figura 4.24 – Semivariograma das imagens da Figura 4.23: original , contaminada e restaurada, além do variograma cruzado entre imagens original e restaurada

Caso Contínuo: Processo Gaussiano, dados amostrais correlacionados

$$p(Z_i = x_i | Y = g) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}\left(z_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j z_j\right)^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_c^2}\left[y_i - (a_0 \cdot z_i + a_1)\right]^2\right\}$$

A distribuição de probabilidade resultante é Gaussiana, com média μ e desvio padrão τ , calculados em função dos desvios padrões da krigagem e da correlação e do valor da estimativa da variável pela krigagem (σ_b , σ_c , $\mu_k = \sum \lambda_j z_j$).

Assim, o algoritmo consiste em amostrar de uma distribuição normal $N(0,1)$ e transformar o valor extraído de acordo com a média μ e o desvio padrão τ da distribuição de probabilidade relativa a cada ponto.

Algoritmo:

$$p(Z_i = x_i | Y = g) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2}(z_i - \mu)^2\right\}$$

$$\mu = \left[\frac{\mu_k}{\sigma_k^2} + \frac{\bar{y}}{\bar{\sigma}_c^2} \right] \tau^2$$

$$\tau = \frac{\sigma_k \sigma_c}{\sqrt{\sigma_k^2 + \sigma_c^2}}$$

$$\bar{\sigma}_c = \sigma_c / a_0$$

$$\bar{y} = (y - a_1) / a_0$$

A imagem base foi gerada com o algoritmo de simulação Gaussiana seqüencial tendo variograma exponencial e foi restaurada com o amostrador de Gibbs (GS) e com o algoritmo de Besag (ICM).

A Figura 4.25 a seguir mostra o resultado da aplicação do amostrador de Gibbs, comparado com o resultado da krigagem.

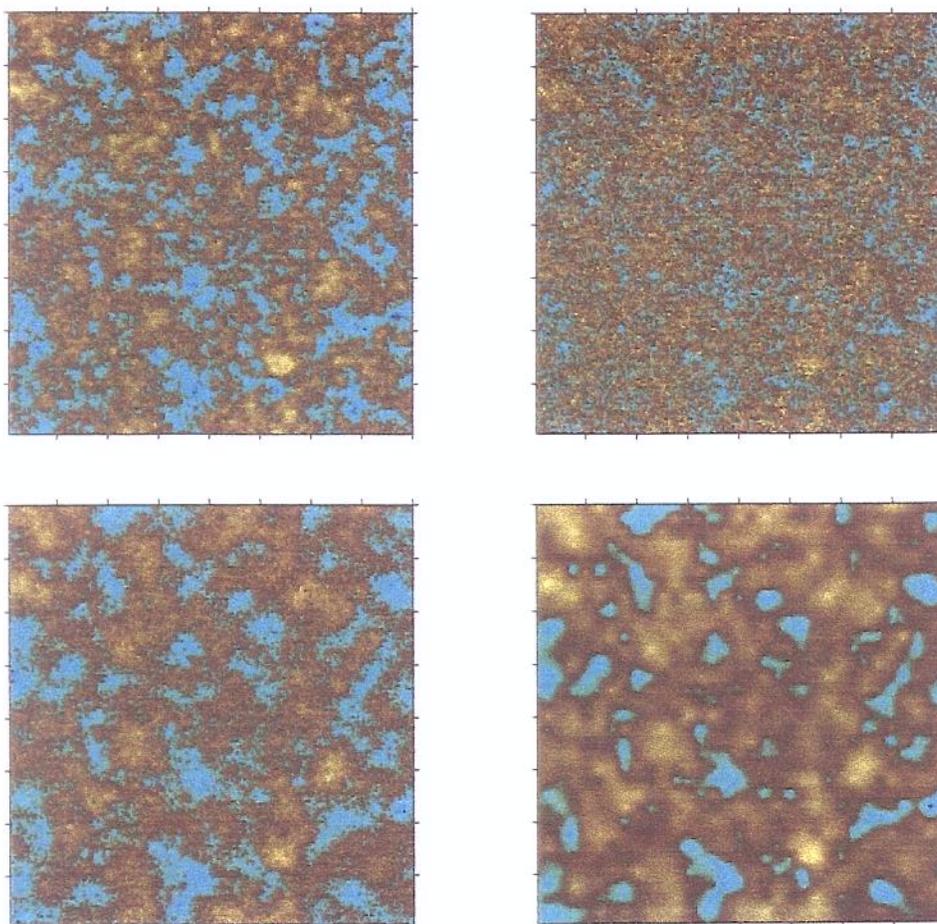


Figura 4.25 – Aplicação do algoritmo de restauração GS em uma variável contínua – imagem original, imagem contaminada , imagem krigada e imagem restaurada

Os variogramas das imagens original e restaurada, além do variograma cruzado entre elas são mostrados na figura a seguir:

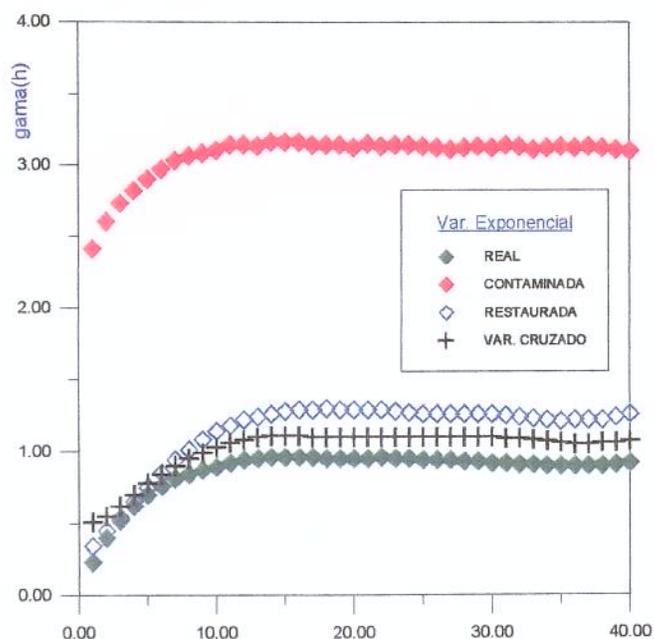


Figura 4.26 – Variogramas das imagens original , contaminada e restaurada além do variograma cruzado entre imagens original e restaurada

A utilização de ICM conduziu a uma configuração representando as probabilidades máximas locais, com a imagem resultante sendo idêntica à obtida por krigagem simples. A Figura 4.27 compara a imagem gerada com a obtida por uma krigagem apoiada em amostras obtidas em cada retângulo de dimensões 10x10.

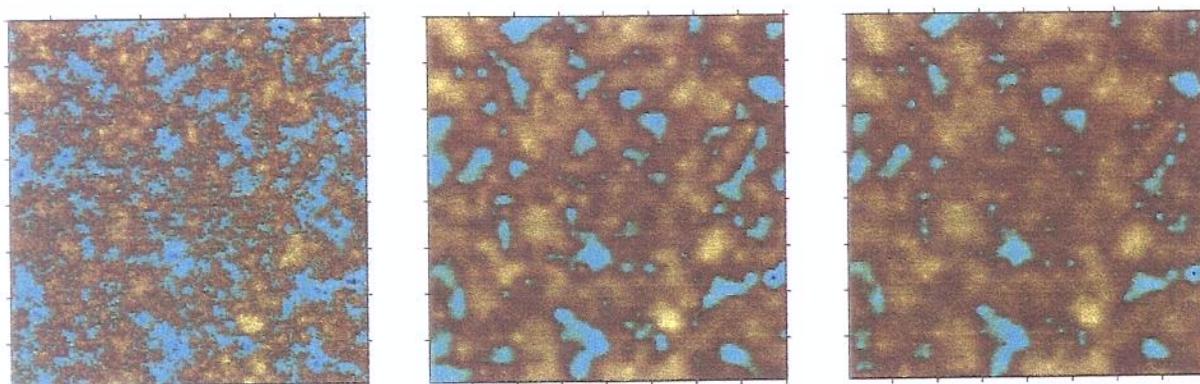


Figura 4.27 – Aplicação do algoritmo de restauração ICM em uma variável contínua: imagens original , krigada e restaurada

A figura abaixo ilustra a imagem base, a imagem contaminada e a seqüência de iterações no amostrador de Gibbs para as iterações de número 1, 2, 3, 4, 5, 10 e 20.

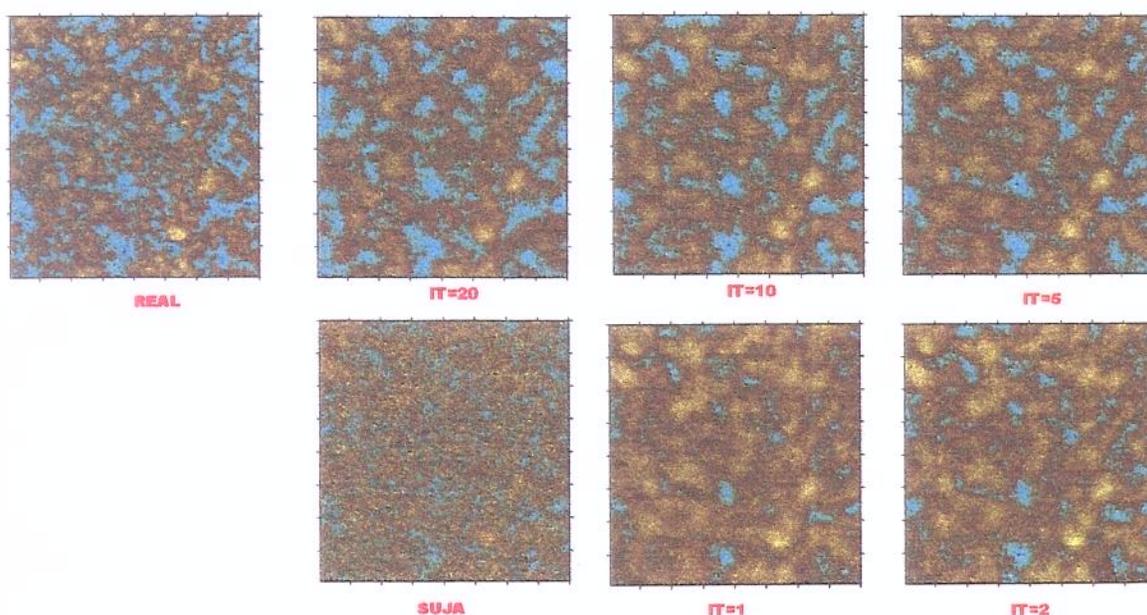


Figura 4.28 – Aplicação do algoritmo de restauração GS em uma imagem contínua

É possível ainda a utilização de diversos tipos de dados não relatados neste trabalho, os quais permitem a simulação do processo estocástico sob condições especiais diversas, como por exemplo dados de produção, de pressão ou mesmo dados qualitativos oriundos de análises geológicas; estas informações, correntemente denominadas *soft*, podem ser incorporadas ao processo, sendo capazes de reduzir as variações das características do processo e, conseqüentemente, a incerteza quanto às respostas do reservatório em termos de recuperação de fluidos.

Capítulo 5

Resultados Experimentais em Malhas Correlacionadas

Os valores estabelecidos pela Teoria da Percolação dizem respeito às malhas com ocupação aleatória, ou seja, onde a probabilidade de ocupação de um ponto independe de qualquer outro ponto da malha. Uma malha é dita espacialmente correlacionada, ou autocorrelacionada, quando há dependência entre os valores de um ponto e de seus vizinhos, dependência esta dada pela função de autocorrelação ou pelo semivariograma nos processos Gaussianos, ou pela repulsividade β nos processos Markovianos. Havendo autocorrelação, a malha possuirá maior continuidade, facilitando o agrupamento dos clusters e reduzindo a proporção percolante, com conseqüente alteração nas condições de fluxo.

Poucos trabalhos analisam os efeitos da correlação espacial sobre os parâmetros da Teoria da Percolação. Webman et al [45] em 1975 e Blumberg et al [46] em 1980 observaram que as malhas correlacionadas apresentavam valores de p_c menores que nas malhas aleatórias. Nestes trabalhos, a geração das malhas correlacionadas não era feita de modo sistemático, mas pela adoção de valores de variáveis em cada ponto como médias dos vizinhos mais próximos. Silliman e Wright [19] em 1988 verificaram um aumento na permeabilidade limite K_{LIM} (discutida na Seção 2.4) em uma malha espacialmente correlacionada, quando comparada a uma malha aleatória, efeito equivalente a uma redução de p_c . Apenas os trabalhos de Renault [47] em 1991 e Allard [48] em 1993 estudaram o comportamento das malhas correlacionadas em relação ao alcance e ao modelo de correlação. O primeiro analisou a influência do alcance da correlação sobre p_c em malhas bi e tridimensionais com modelos de variograma exponencial, esférico e Gaussiano. O segundo estudou o comportamento dos parâmetros de percolação no modelo Gaussiano truncado de forma comparativa aos modelos Booleanos.

Este capítulo aprofunda a análise do comportamento dos parâmetros da Teoria da Percolação e de sua sensibilidade às características de correlação espacial do meio, como o modelo e o alcance da correlação; estuda ainda a influência do fator de escala e da discretização da malha, estabelecendo limites para a manutenção da conectividade do sistema; é ainda verificada a conservação dos parâmetros universais nas malhas espacialmente correlacionadas e são estabelecidas relações empíricas que adimensionalizam os parâmetros em relação ao domínio de correlação. A correlação é atribuída ao meio através da aplicação dos processos estocásticos Gaussianos e dos campos aleatórios Markovianos discretos, em malhas bidimensionais quadradas.

5.1 Algoritmo de Hoshen-Kopelman

O algoritmo de Hoshen-Kopelman [49], aplicado na rotulação dos clusters, consiste em uma varredura na malha (da esquerda para a direita e de cima para baixo), através da qual é pesquisado, em cada ponto, se os vizinhos anteriores (situados nas posições $i-1$ e $i-L$) estão conectados a este ponto, fazendo-se a rotulação dita primária; adicionalmente é feita uma rotulação secundária, que informa se dois rótulos primários, aparentemente desconexos na primeira rotulação, estão conectados; ao mesmo tempo, é medido o tamanho de cada componente conexo ou cluster. Em suma, percorrendo a malha uma única vez são identificados e medidos todos os componentes conexos. A figura abaixo ilustra as rotulações primária e secundária em uma malha hipotética.

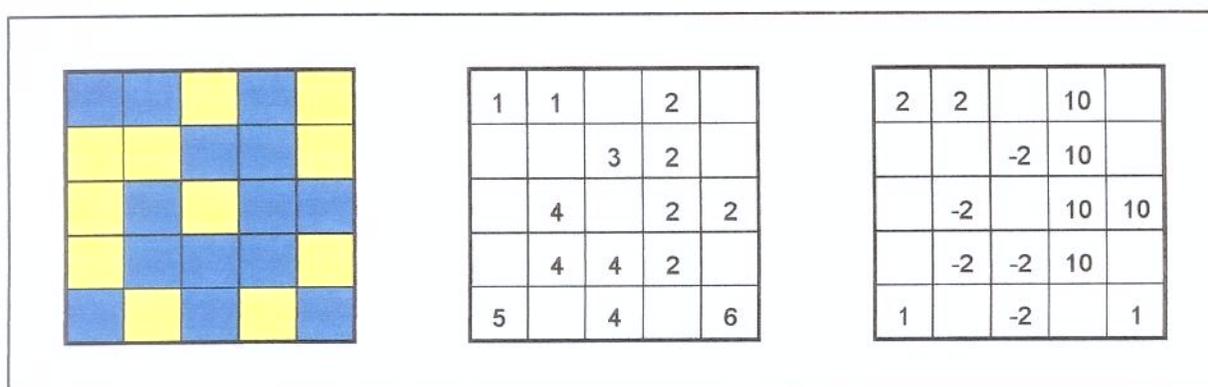


Figura 5.1 – Algoritmo de Hoshen-Kopelman – Rotulações primária e secundária

Nesta figura, o desenho à esquerda mostra as células ativas (em azul) e as células inativas (em amarelo). O desenho ao centro mostra a rotulação primária, que verifica apenas se as posições vizinhas já percorridas ($i-1$ e $i-L$) estavam ocupadas e já tinham um rótulo primário; em caso positivo, a célula recebe o mesmo rótulo do seu vizinho; caso contrário, é criado um novo rótulo primário. O desenho da direita mostra os rótulos secundários, os quais indicam se o novo cluster está ligado a outro já rotulado; em caso positivo, o rótulo secundário terá sinal negativo e valor absoluto igual ao rótulo primário do cluster a que está ligado; caso ele seja o cluster base ao qual os outros se uniram, o rótulo secundário é utilizado para guardar o número de células que compõem o cluster.

Com estas duas rotulações é possível identificar e medir os componentes conexos. Para verificar se há percolação, basta percorrer as duas fronteiras externas e verificar se algum rótulo aparece em ambas.

Assim, para cada proporção fixa p é possível determinar, através do algoritmo, o número de clusters n_c , o tamanho de cada um deles, o tamanho médio dos clusters $\langle S \rangle$, o tamanho do cluster máximo ($P(p)$ se $p > p_c$) e se há ou não percolação. Além disto são implementadas seqüências adicionais que propiciam a obtenção da proporção crítica (p_c) e da função conectividade $g(h)$.

5.2 Análise do Processo Gaussiano Truncado

5.2.1 Descrição do Experimento

Foram utilizadas neste experimento malhas totalmente aleatórias e malhas espacialmente correlacionadas. As primeiras com o objetivo de validar os métodos aplicados por meio dos parâmetros teóricos conhecidos e dos experimentos já realizados; as outras para observar a influência da autocorrelação sobre as características de conectividade do meio. Foi utilizado o modelo Gaussiano Truncado, obtido a partir do truncamento de uma variável Gaussiana contínua, simulada com o algoritmo de Simulação Gaussiana Seqüencial [24-25].

Aplicaram-se os modelos de variograma exponencial, esférico e Gaussiano, com valores de domínio de correlação A iguais a 16, 64 e 256. O experimento se realizou com 100 simula-

ções para cada tamanho de malha, modelo de variograma e alcance a da correlação. Os valores de alcance a correspondentes aos valores de domínio de correlação A , para cada um dos modelos analisados, são mostrados na tabela a seguir.

Tabela 5.1 – Parâmetros de alcance da correlação espacial

A	Variograma Esférico	Variograma Exponencial	Variograma Gaussiano
16	6,2	5,8	2,7
64	12,4	11,7	5,5
256	24,8	22,4	11,0

O domínio de correlação A se refere à variável indicatriz. As relações entre a correlação espacial (e conseqüentemente o valor do domínio de correlação) antes e depois do truncamento da variável contínua estão detalhados no anexo A.

Para calcular p_c aplicou-se o método de biseção (*bisection*), em que é verificada por tentativa e erro a proporção p acima da qual passa a haver percolação; para isso verifica-se a ocorrência ou não da percolação para o valor de p , que varia em intervalos cada vez menores, até um certo limite de precisão desejado. A variação de p se faz truncando a imagem Gaussiana contínua em proporções diferentes; este procedimento equivale à manutenção da semente geradora da imagem para pontos diferentes de corte. A cada p testado corresponde uma rotulação pelo algoritmo de Hoshen-Kopelman.

Desta forma, cada realização da variável Gaussiana fornece um valor de p_c . De acordo com o descrito na Seção 2.4, para a estimativa de p_c a partir de malhas finitas, é necessária a obtenção da média e da variância de p_c para cada tamanho de malha; estes valores são obtidos para as malhas de tamanho $L \times L$, com L variando de 20 a 160 em intervalos de dimensão 20; foram realizadas 100 simulações para cada uma das dez condições acima (nove correlacionadas e uma aleatória) e em cada tamanho da malha.

Os parâmetros de percolação foram calculados com o auxílio do algoritmo de Hoshen-Kopelman, que faz a rotulação do sistema conforme descrito na seção anterior. A função conectividade $g(h)$ é obtida após esta rotulação, pela contagem do número de pares distantes h que fazem parte do mesmo cluster. A contagem estatística do número de clusters, tamanho médio dos clusters e função conectividade foi feita com a aplicação de 100 simulações em malhas de dimensões 160x160, nas 10 condições de correlação espacial acima descritas. Foi analisada destacadamente a influência do alcance do variograma, do tipo de modelo, da discretização da malha e do fator de escala sobre as características geométricas do meio, como o tamanho e a quantidade de clusters e a função conectividade.

A influência do alcance da correlação foi verificada para uma malha fixa 160x160, sobre a qual o alcance a (e conseqüentemente o domínio de correlação A) é gradativamente elevado. O tipo de modelo foi variado com a atenção voltada para o comportamento do mesmo próximo à origem (maior ou menor continuidade), mantendo fixo o valor de A .

O fator de escala é definido pela relação entre o tamanho da malha L e o número de células cobertas pelo alcance a da correlação. Como o valor do alcance tem significados diferentes em cada modelo variográfico, é utilizado o domínio de correlação A . Assim, o fator de escala é representado pela razão L/\sqrt{A} .

A discretização é feita pelo aumento simultâneo do tamanho da malha L e do valor do parâmetro A , de modo a manter fixo o fator de escala; observa-se que neste caso o tamanho representado por cada célula é inversamente proporcional ao tamanho da malha, por exemplo, um alcance de 5m cobre um total de 5 células de 1m ou 10 células de 0,5m; neste último caso representa-se o meio por um alcance a de valor 10 e com o tamanho da malha duplicado em relação ao inicial, para manter inalterado o fator de escala, ou seja, está sendo representada a mesma malha, com mesmo alcance, mas duplamente discretizada. Para analisar este efeito as malhas foram discretizadas aplicando os valores: ($A=1$ com $L=20$), ($A=16$ com $L=80$), ($A=64$ com $L=160$) e ($A=256$ com $L=320$).

Para investigar a relação entre a permeabilidade efetiva K_{EFF} e a permeabilidade limite K_{LIM} , foi utilizada a distribuição contínua gerada pela simulação Gaussiana e obtida uma dis-

tribuição lognormal com média 100 e variância do $\log K_i$ igual a 1; para cada realização foram calculados K_{LIM} e K_{EFF} . Conforme descrito na Seção 2.6, a permeabilidade limite K_{LIM} é um valor limite estabelecido pela conectividade do sistema e pode ser obtido com o auxílio de p_c . A permeabilidade efetiva foi calculada através de um modelo de fluxo monofásico permanente, utilizando médias entre as aproximações por diferenças finitas e elementos finitos, processo proposto por Ribeiro e Romeu [50], que permite a obtenção de resultados precisos sem grandes refinamentos de malha; para o cálculo da permeabilidade, são fixas as pressões nas faces verticais de entrada e de saída de fluidos, além de ser assumido fluxo nulo nas faces horizontais; a permeabilidade efetiva (equivalente) é calculada pela lei de Darcy.

Da mesma forma que para p_c é necessário observar o comportamento da variância dos valores de permeabilidade em relação ao aumento de tamanho da malha. Assim, para cada uma das dez condições de correlação e para os tamanhos de malha L entre 20 e 160 foram efetuadas 100 simulações, observando a relação entre K_{LIM} e K_{EFF} e sua sensibilidade ao tamanho da malha, ao alcance e ao modelo de correlação.

5.2.2 Resultados para Proporção Crítica e Probabilidade de Percolação

Para malhas com alcances crescentes, foram obtidos os valores de média e desvio padrão, para a estimativa do valor teórico de p_c , de acordo com as Equações (2.53), (2.55) e (2.56). Os valores obtidos em cada modelo são mostrados na figura a seguir.

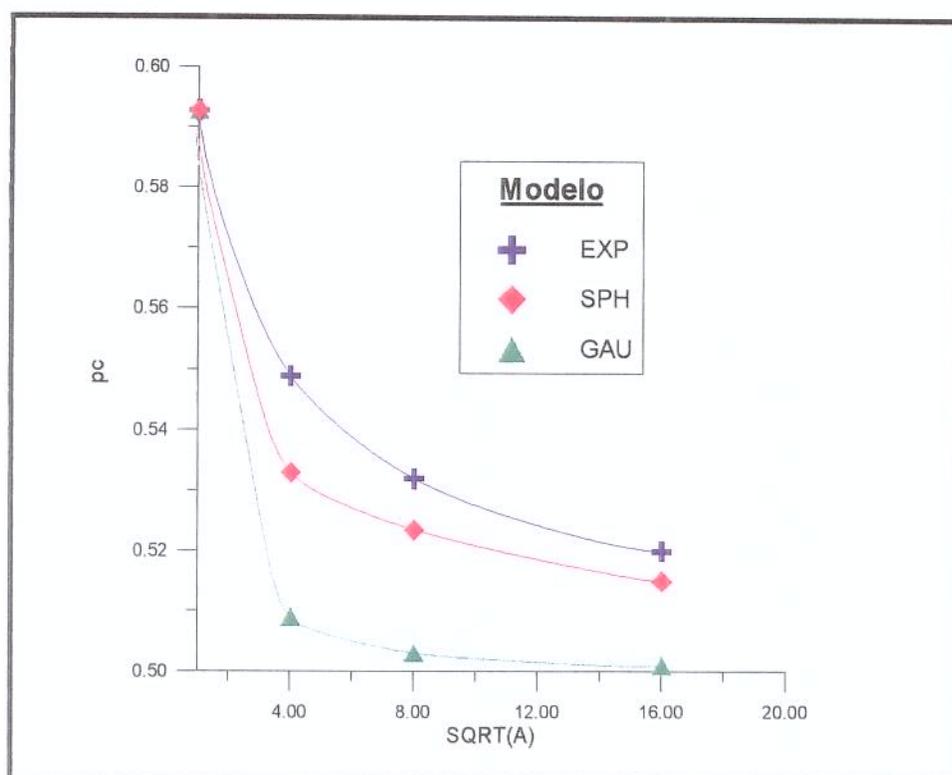


Figura 5.2 – Proporção Crítica de Percolação p_c em função do domínio de correlação A para diferentes modelos de correlação espacial

Pode-se perceber que a elevação no alcance α provoca uma notável redução no valor da proporção crítica p_c . Isto era previsível, já que a correlação tende a agrupar mais fortemente os corpos permeáveis, facilitando o fluxo e a percolação. O decréscimo de p_c se torna menor à medida que se aumenta o alcance, tendendo a uma estabilização num patamar próximo a 0,50. O comportamento de p_c tem aspecto semelhante nos variogramas esférico e exponencial, mas bastante diferente no variograma do tipo Gaussiano, o qual, devido a uma maior continuidade, tem uma redução mais brusca ao se aumentar a correlação. A seguir é analisado o comportamento do desvio padrão de p_c (Figura 5.3):

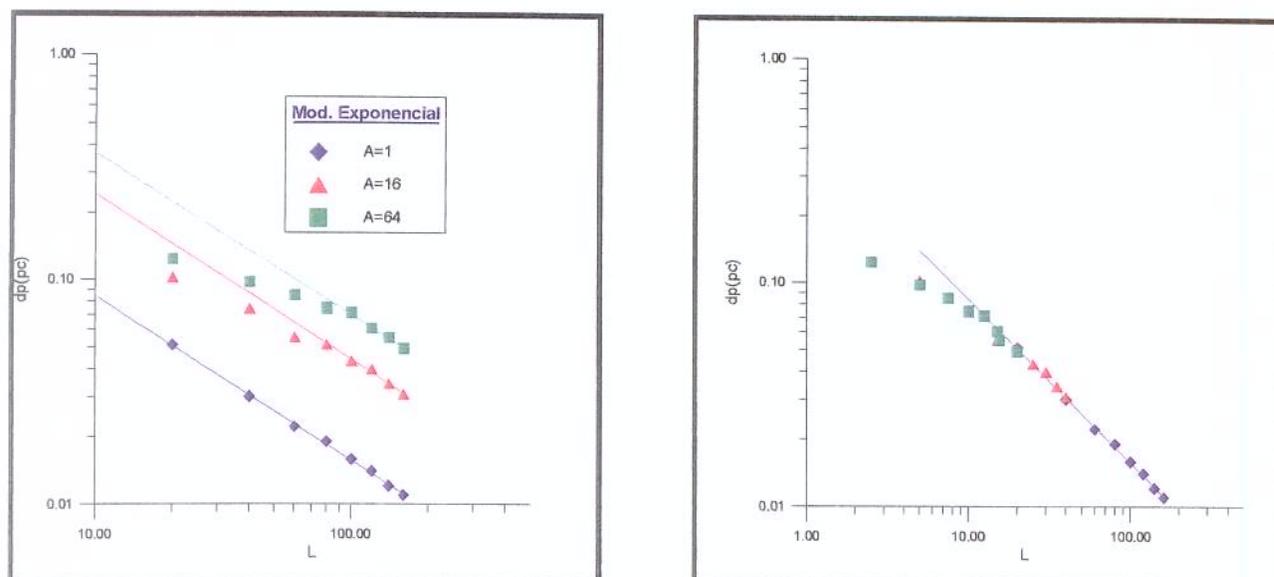


Figura 5.3 – Variância de p_c em função de L para diferentes valores de A

Os gráficos anteriores mostram o comportamento do desvio padrão de p_c para as malhas correlacionadas em função de L e de L/\sqrt{A} ; sabe-se da Seção 2.3 (Equações 2.55 e 2.56) que $[p_c - E(p_c)] \propto \sigma$ e que $[\sigma \propto L^{-1/\nu}]$ e deste modo, são extraídos das figuras anteriores os valores de $\nu = 1,32$ e $p_c = 0,5933$, nas malhas aleatórias ($A=1$), valores coerentes com os estabelecidos 1,33 (4/3) e 0,5927. A variância de p_c decresce de acordo com o aumento do fator de escala, e os valores se sobrepõem na Figura 5.3, quando o tamanho L é adimensionalizado por \sqrt{A} ; permitindo-se estabelecer as equações empíricas:

$$\sigma(p_c) \propto (L/\sqrt{A})^{-1/\nu}$$

$$E(p_c) - p_c \propto (L/\sqrt{A})^{-1/\nu}$$

5.2.3 Resultados para Tamanho e Número de Componentes Conexos

O tamanho médio observado dos clusters $\langle S \rangle$ fornece a estimativa do valor esperado do tamanho de um cluster $E(S)$, conforme apresentado no Capítulo 2.

A presença da correlação espacial altera consideravelmente o comportamento dos componentes conexos, a rapidez com que eles se agrupam frente ao aumento da concentração. A influência do alcance de uma correlação, balizado pelo aumento do domínio de correlação (A) pode ser analisada com o auxílio da Figura 5.4, para cada um dos tipos de modelo de correlação. Em todos os casos, um aumento no alcance da correlação provoca um maior agrupamento dos clusters, com redução na sua quantidade e aumento de seu tamanho médio; este comportamento é mais marcante nas proporções mais baixas e inferiores ao ponto crítico; assim, a correlação espacial age a favor do fenômeno de percolação, culminando na redução do valor do ponto crítico, discutido no item anterior.

A comparação entre o comportamento dos três modelos é mostrada na figura 5.5. Observa-se uma redução mais brusca na quantidade de clusters no modelo Gaussiano, destacadamente nas menores proporções e nos menores alcances. Esta alteração já se mostra bastante efetiva para $A=16$, tendo pequena alteração ao se aumentar A para 64 e 256. Este comportamento é coerente com o observado para a proporção crítica (p_c) neste modelo, que já se aproxima de 0,50 para pequenos alcances. Os modelos esférico e exponencial se comportam de forma semelhante, o modelo esférico apresentando sempre características ligeiramente superiores de continuidade, representadas por maiores dimensões dos clusters. Deste modo, o fator preponderante na diferenciação dos modelos diz respeito ao seu comportamento na origem.

Já a influência do fator de escala pode ser observada na Figura 5.6, que apresenta alguns exemplos simulados para o número de clusters e o tamanho médio dos mesmos, nos modelos sem correlação, exponencial (linear na origem) e Gaussiano (parabólico na origem). Observou-se que em todos os casos, independente do modelo e do alcance, os parâmetros em questão tendem a se estabilizar a partir de dimensões próximas a 80 (ou para fatores de escala superiores a 10), exceção feita ao modelo Gaussiano que se estabiliza para maiores fatores de escala. A estabilização se dá logicamente em valores diferentes em cada modelo e correlação.

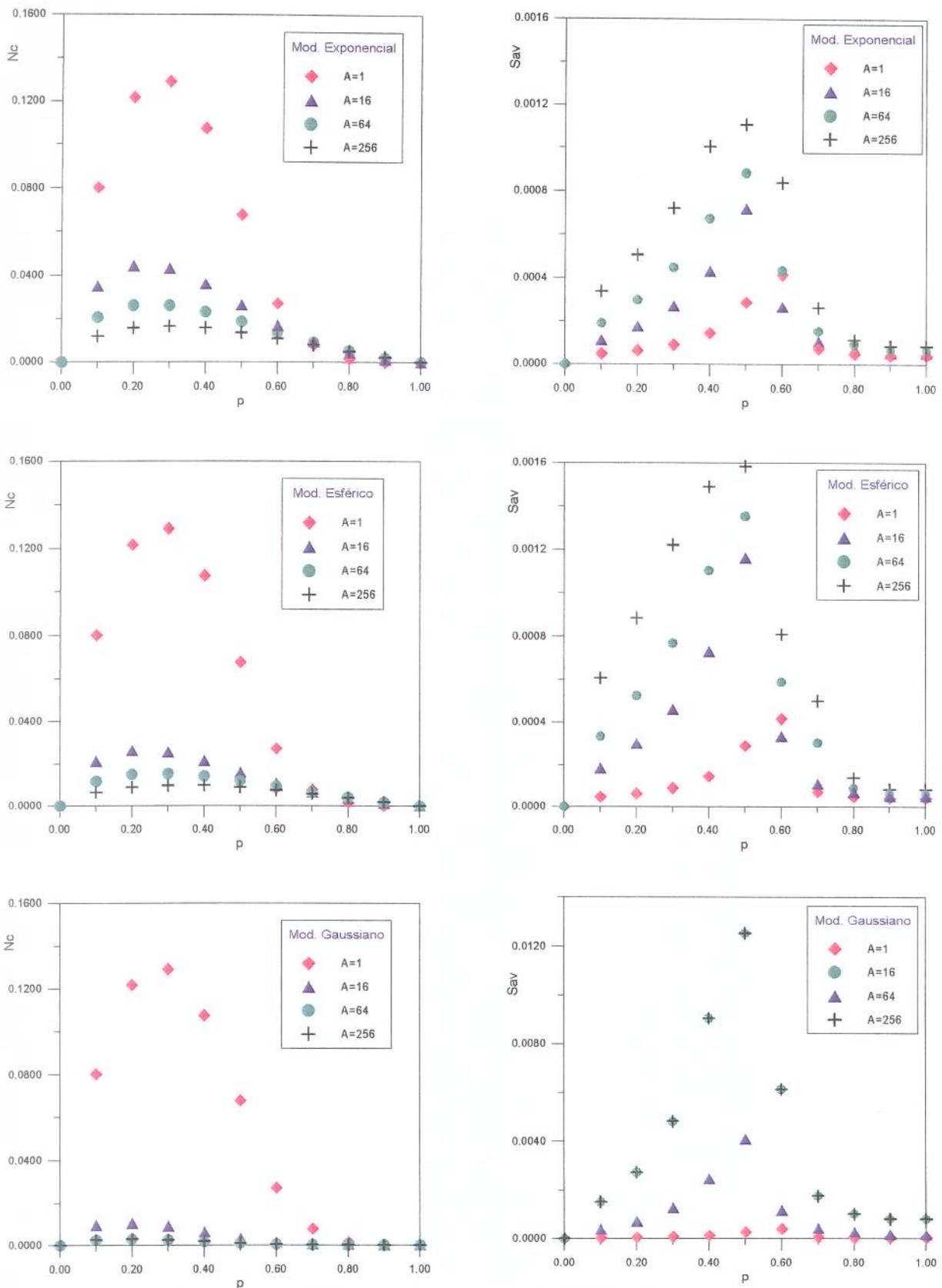


Figura 5.4 – Efeito do alcance a da correlação sobre n_c e $\langle S \rangle$

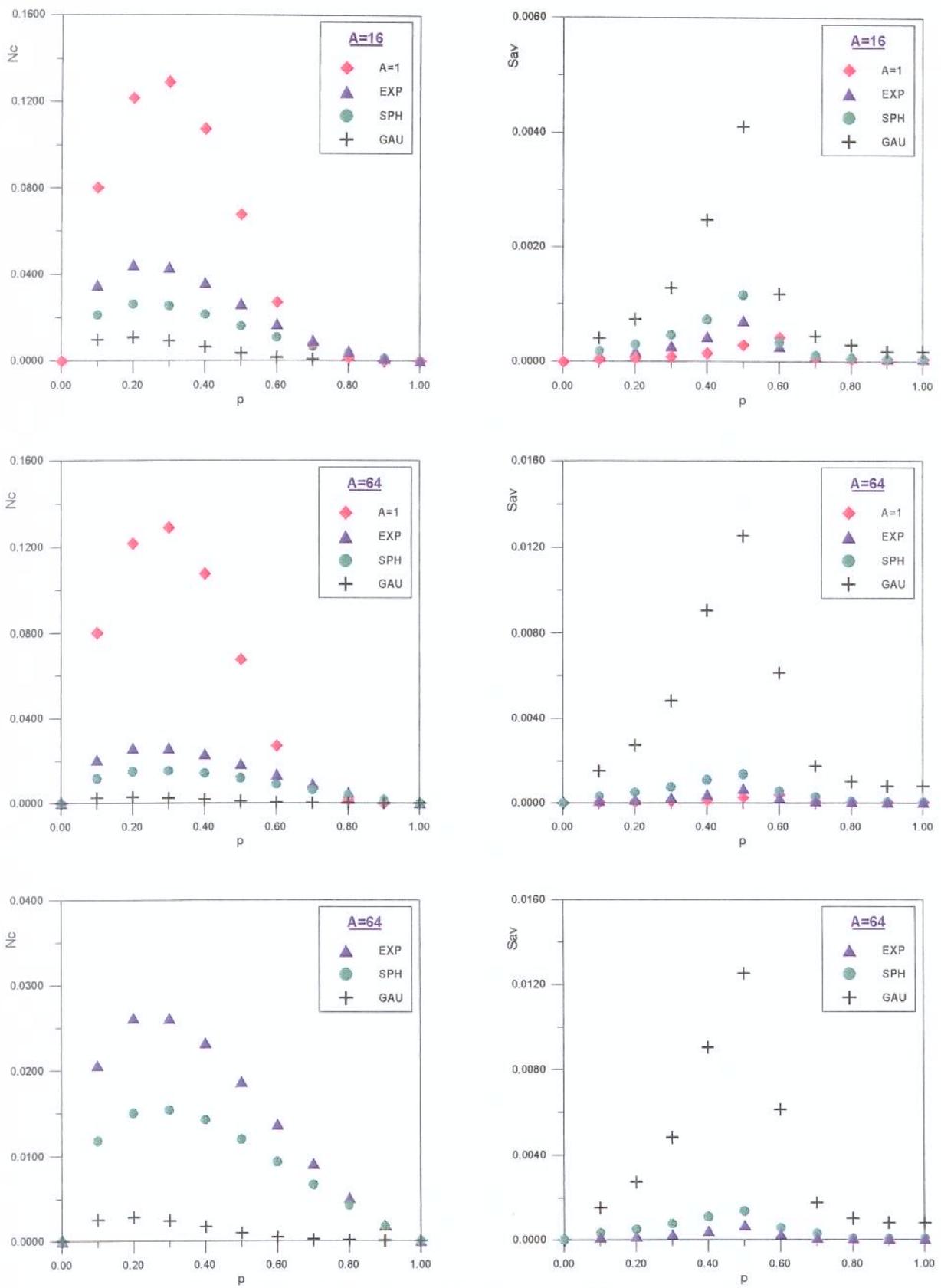


Figura 5.5 – Efeito do modelo de correlação sobre n_c e $\langle S \rangle$

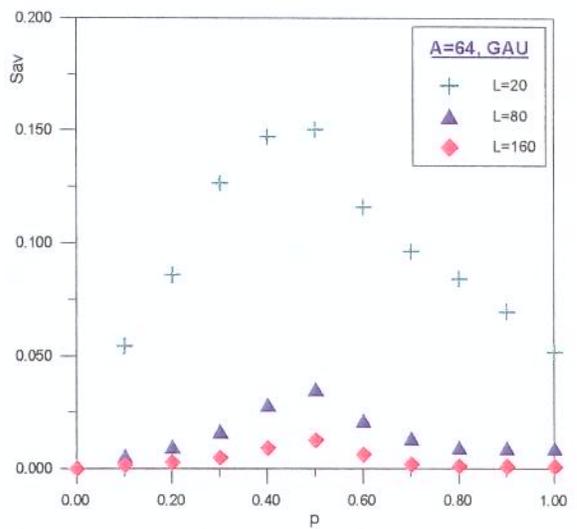
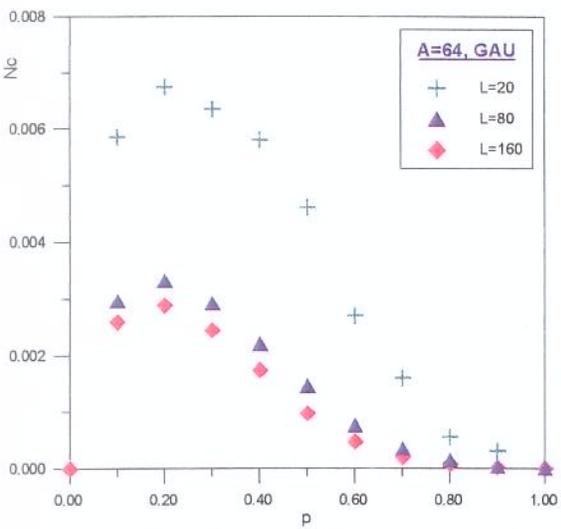
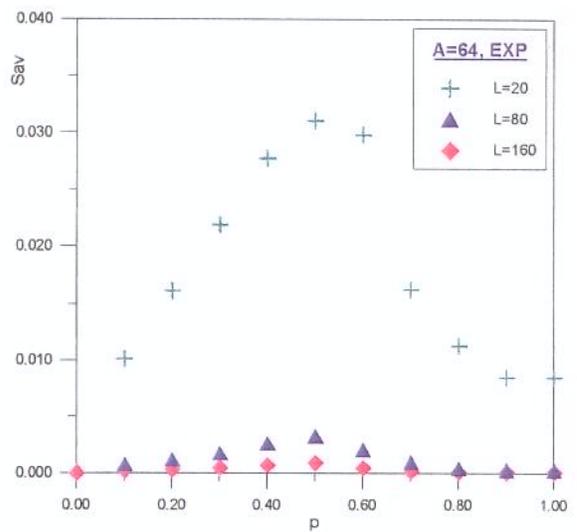
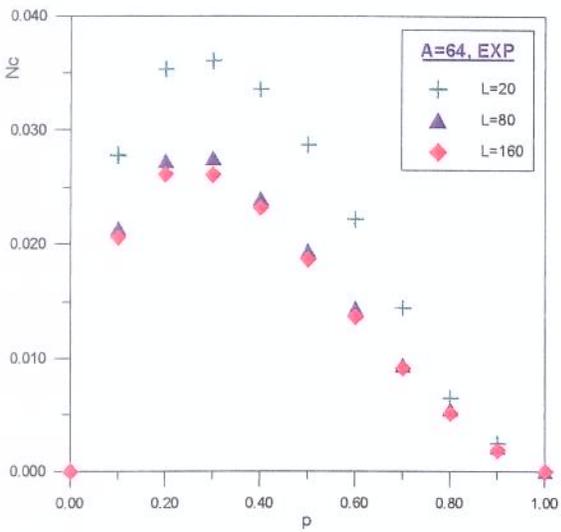
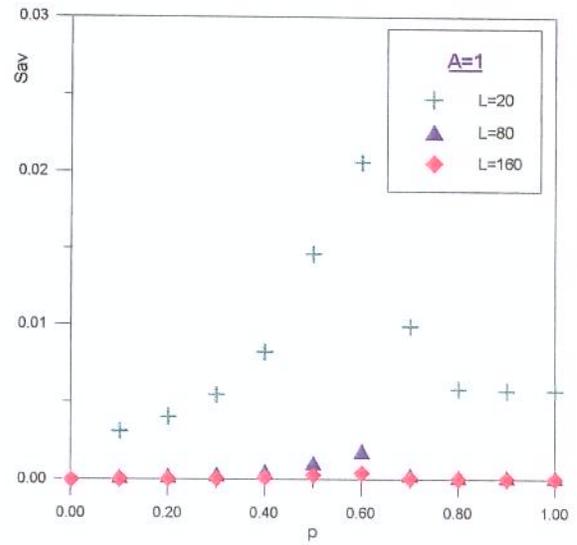
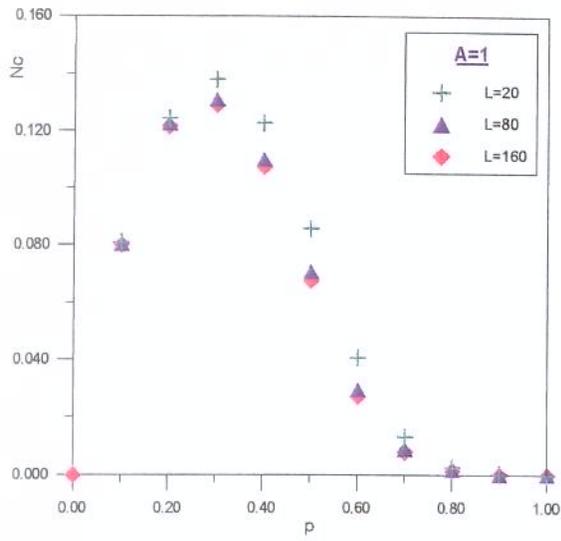


Figura 5.6 – Efeito do fator de escala sobre n_c e $\langle S \rangle$ nos modelos exponencial e Gaussiano

A discretização da malha (aumento concomitante do domínio de correlação e das dimensões da malha), analisada com auxílio da Figura 5.7, indicou um aumento significativo na quantidade de clusters dos modelos exponencial e esférico, mas desprezível no modelo Gaussiano; a discretização de $A=16$ para $A=64$ causou uma alteração de pequeno valor nos modelos lineares na origem e de valor nulo no modelo Gaussiano. Este comportamento é coerente com o comportamento do ponto crítico para o modelo Gaussiano, que já se aproxima do limite 0,50 quando se discretiza de $A=1$ para $A=16$, favorecendo a percolação nas proporções inferiores; o aumento de $A=16$ para $A=64$ pouco afeta o ponto crítico e também pouco interfere na quantidade e tamanho dos clusters. Novamente, o comportamento na origem do variograma é o fator diferenciador em relação ao comportamento do meio.

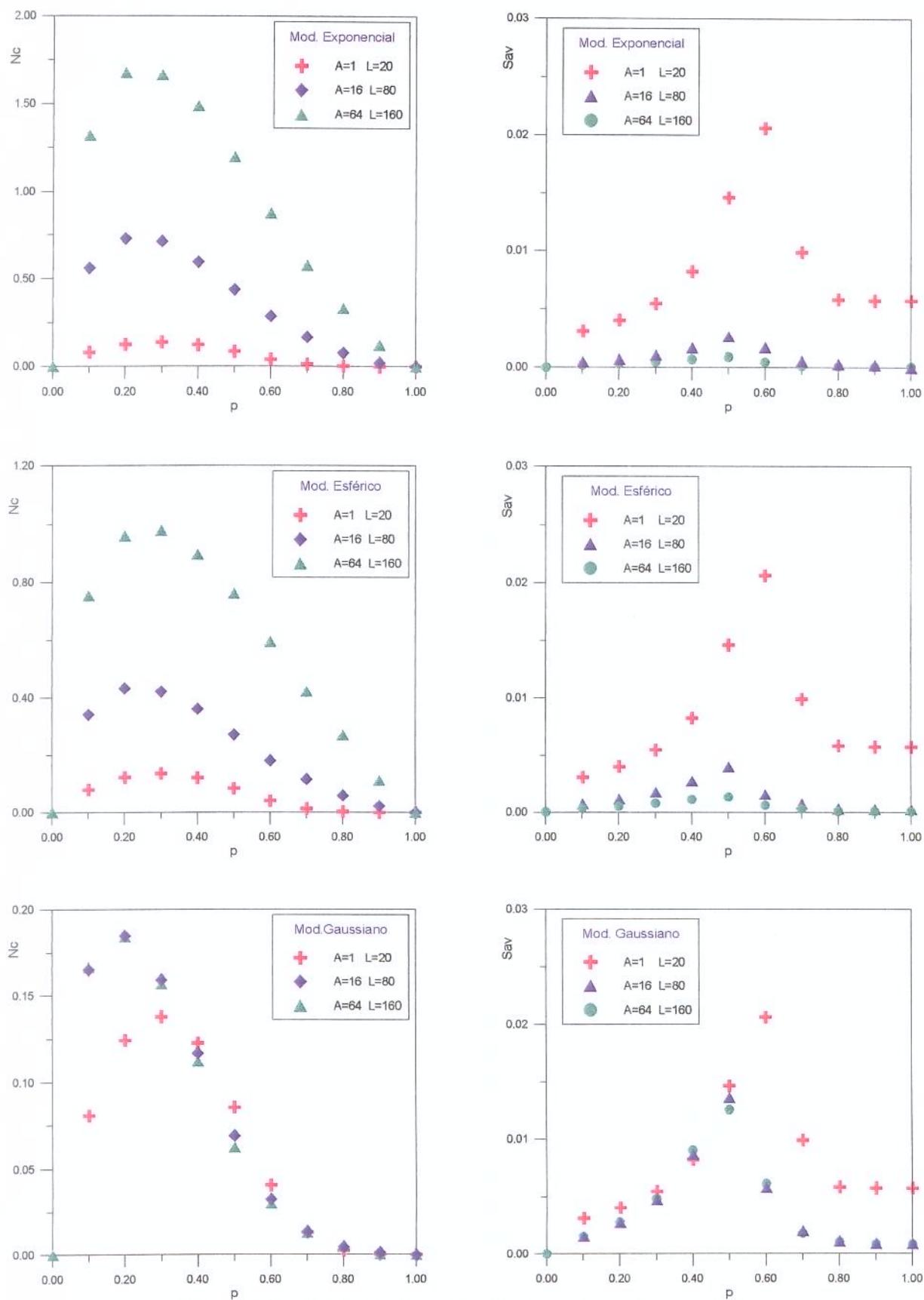


Figura 5.7 – Efeito da discretização da malha sobre n_c e $\langle S \rangle$

5.2.4 Resultados para Função Conectividade

De acordo com o Seção 2.2, a função conectividade $g(h)$ se define como a probabilidade de dois pontos ativos estarem em conexão. Ela vale p para $h=0$ e decresce exponencialmente com o aumento de h . Se a proporção p for inferior à proporção crítica p_c , a função se estabiliza em zero, se for superior a estabilização será em $P(p)^2$.

O efeito da proporção p é o fator que mais fortemente afeta a conectividade. Os gráficos da Figura 5.8 mostram o comportamento de $g(h)$ em malhas correlacionadas em modelos e alcances diversos, para as proporções 0,45, 0,55, e 0,65. Observa-se que em qualquer dos casos a conectividade aumenta fortemente com o aumento da concentração de células condutivas.

O efeito do alcance da correlação, mostrado na Figura 5.9, indica um aumento considerável na conectividade para as proporções inferiores ao ponto crítico e um aumento desprezível a partir de um determinado alcance para as proporções mais altas, independente do modelo de variograma.

O comportamento da conectividade para as distâncias mais curtas indica um comportamento mais interligado para o modelo Gaussiano, que mostra esta função com um formato parabólico convexo, enquanto nos modelos lineares o aspecto é também linear. A comparação entre os modelos (Figura 5.10), mostra maiores valores desta função para o modelo Gaussiano, tanto para as curtas como para as longas distâncias. Os modelos exponencial e esférico têm valores bastante próximos de conectividade para qualquer proporção e qualquer domínio de correlação.

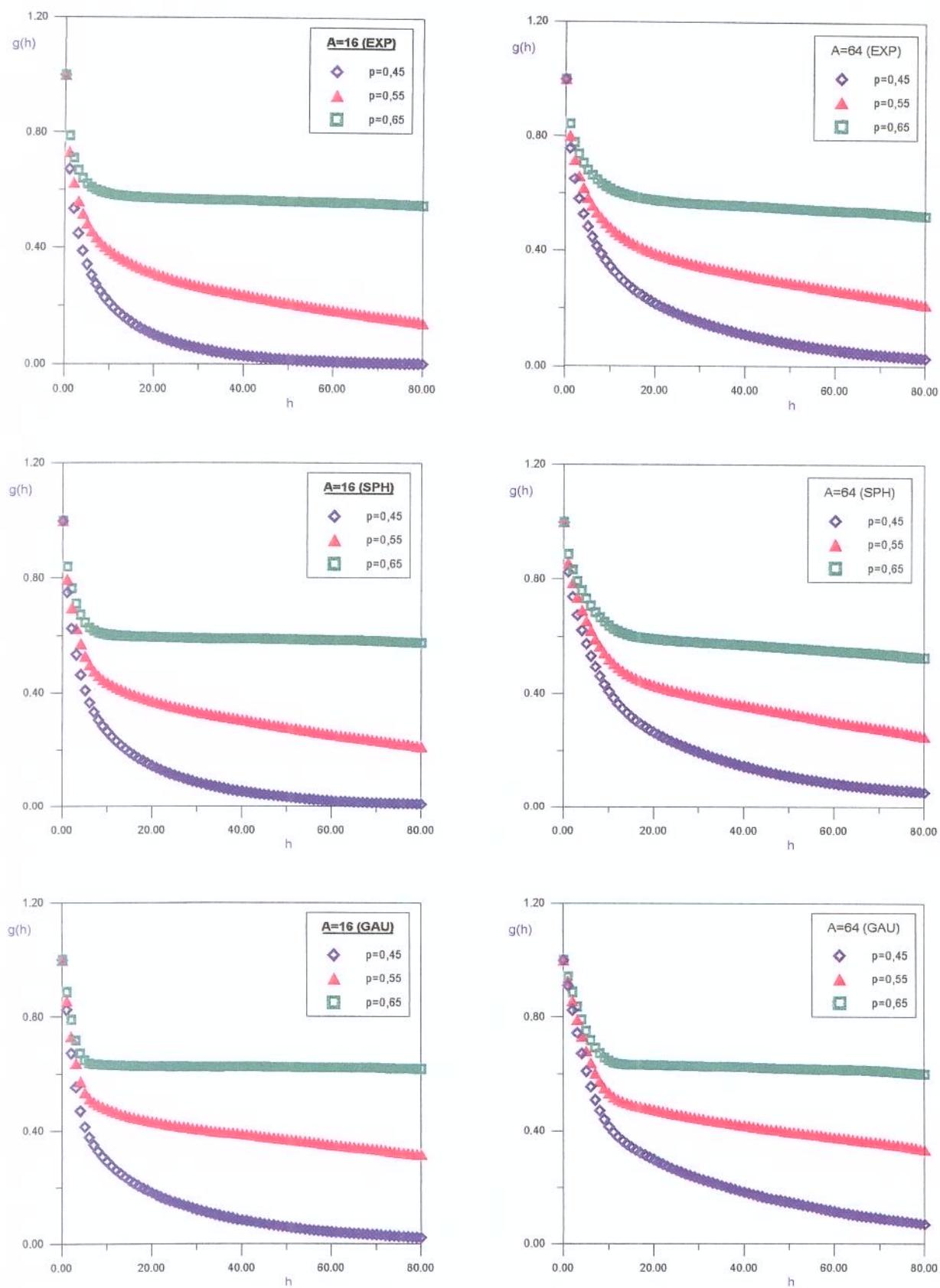


Figura 5.8 – Efeito da proporção p sobre $g(h)$

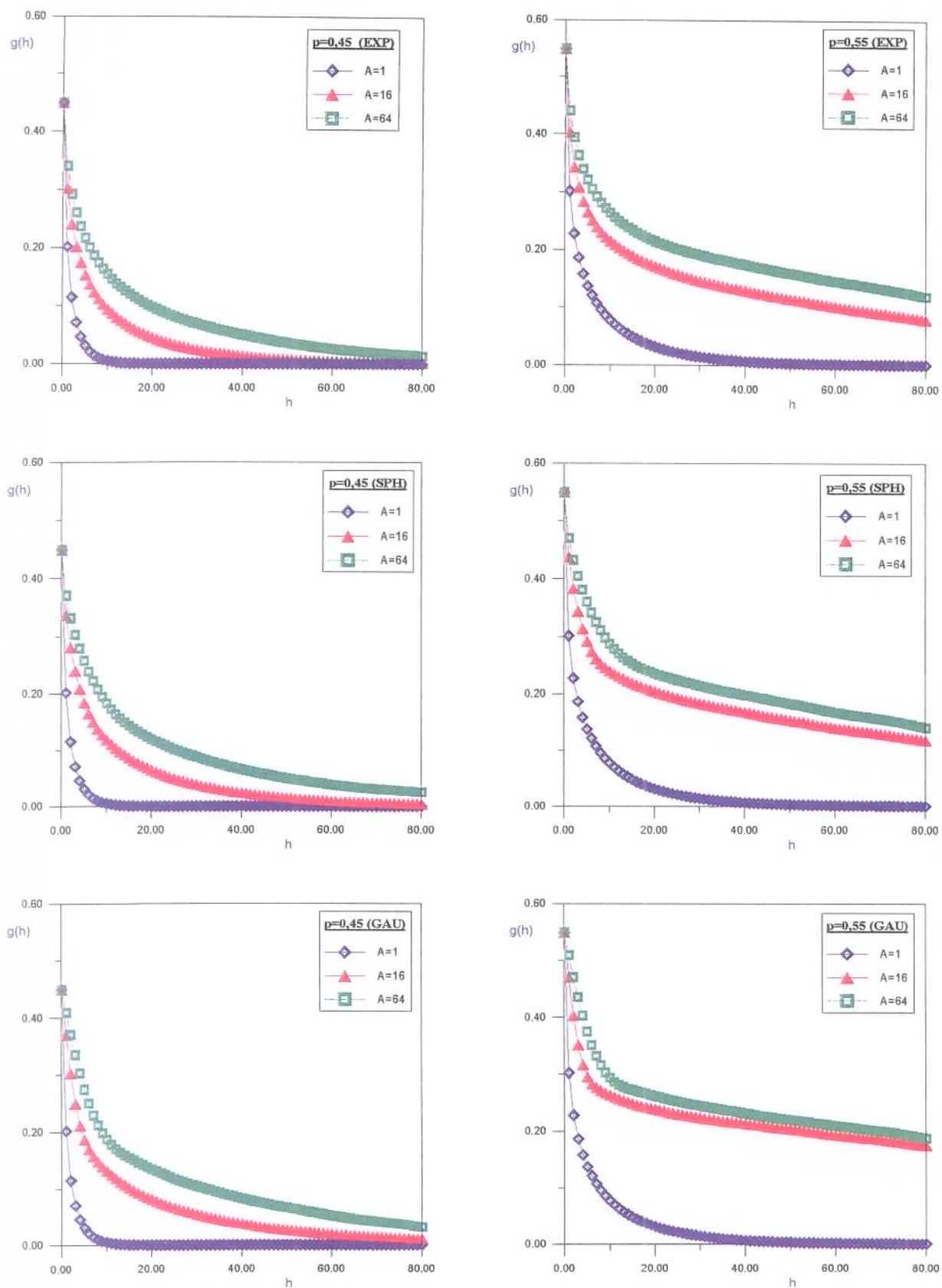


Figura 5.9 – Efeito do alcance a da correlação sobre $g(h)$

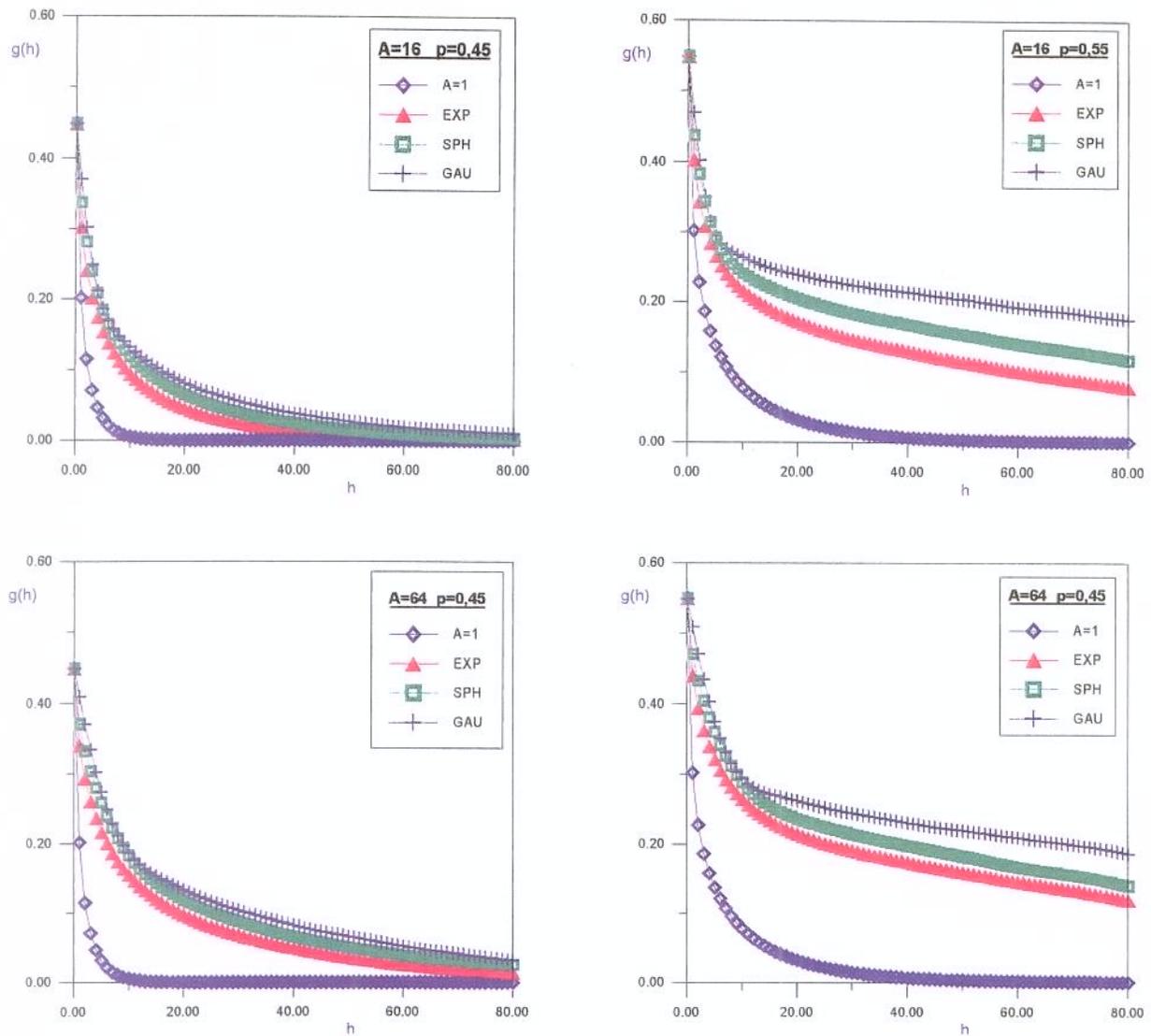


Figura 5.10 – Efeito do modelo de correlação sobre $g(h)$

A variação do fator de escala alterou a conectividade ao se aumentar a dimensão de 20×20 para 80×80 , mas a elevação acima deste valor provocou alterações desprezíveis para as baixas proporções em qualquer distância e para as altas proporções a curtas distâncias. Este efeito pode ser observado na Figura 5.11.

O efeito da discretização, mostrado na Figura 5.12, é semelhante ao observado para os parâmetros conectivos anteriores, ou seja, tem um efeito marcante ao se aumentar o valor de A de 1 para 16, mas tem um efeito praticamente desprezível ao se aumentar este parâmetro de 16 para 64, para todos os modelos de variograma. Deve-se observar que as distâncias foram adimensionalizadas pelo valor de A , para manter o fator de escala constante.

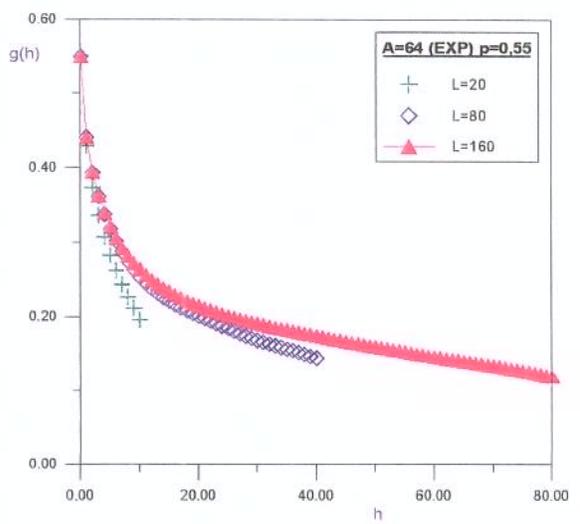
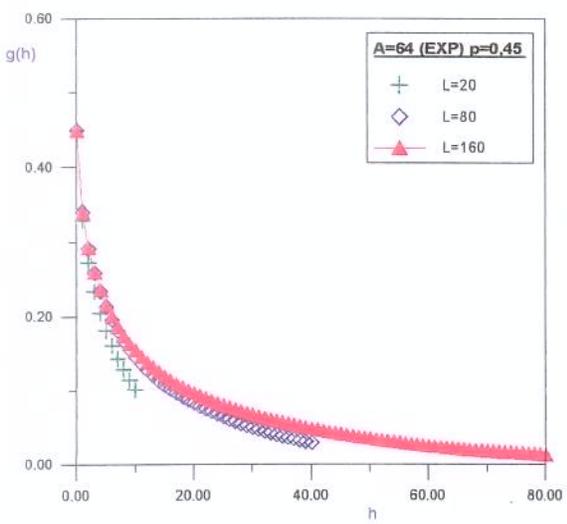
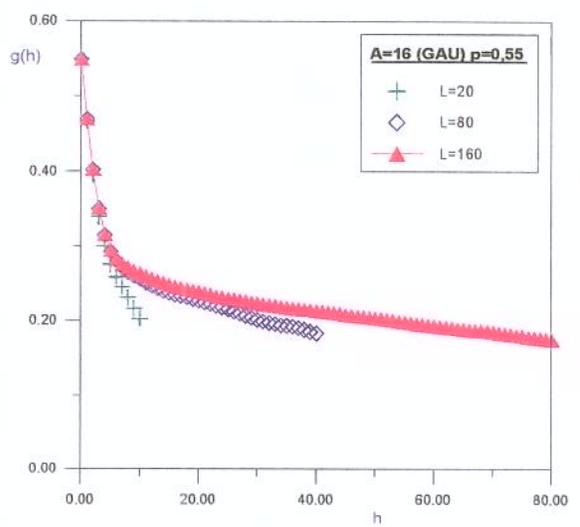
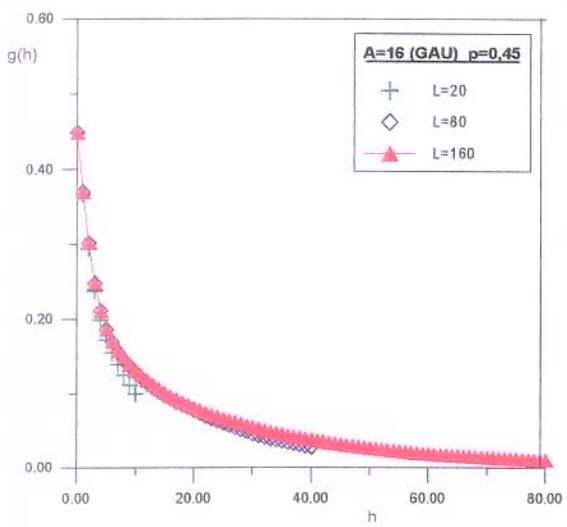
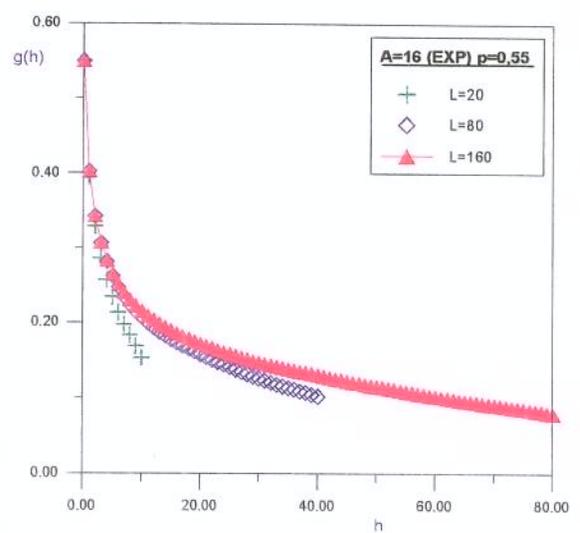
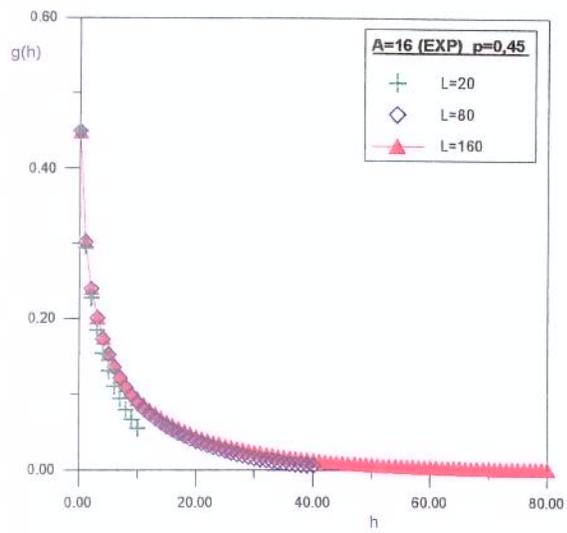


Figura 5.11 – Efeito do fator de escala sobre $g(h)$

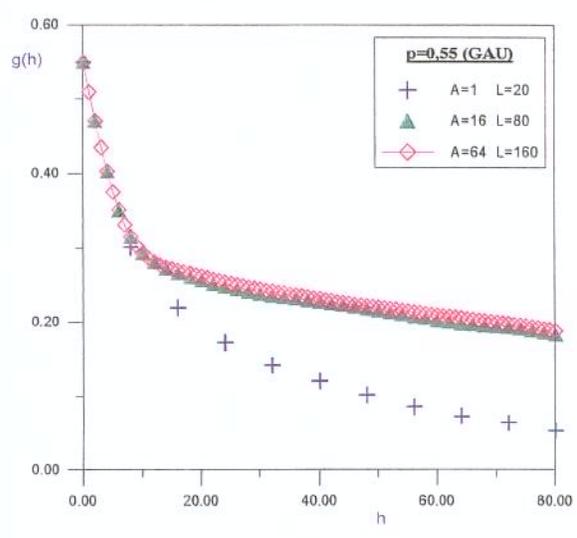
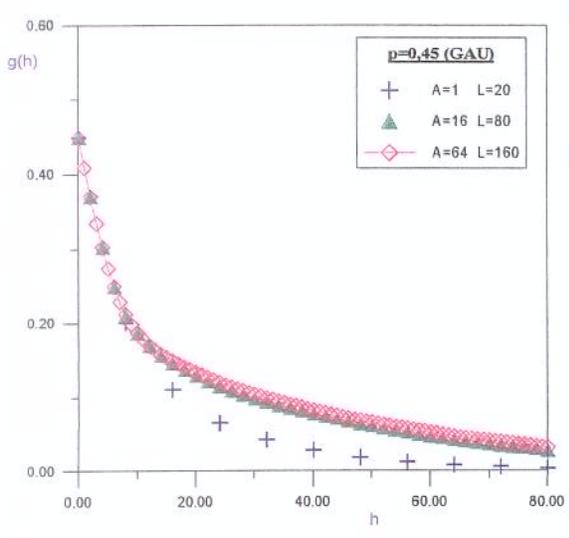
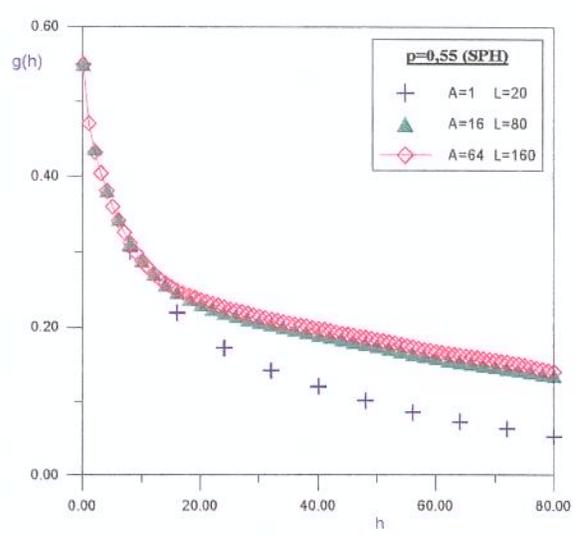
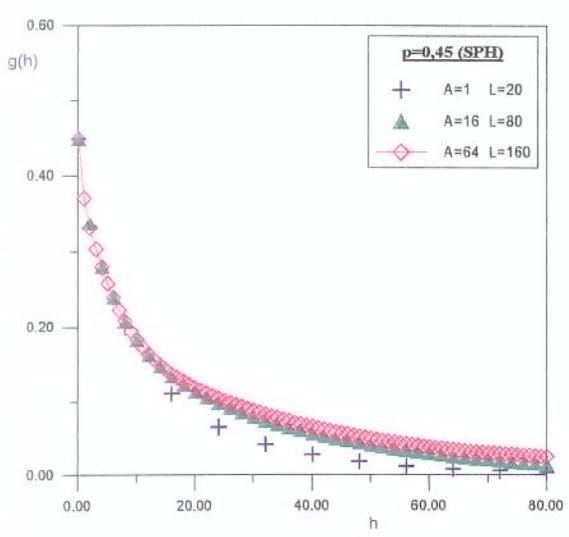
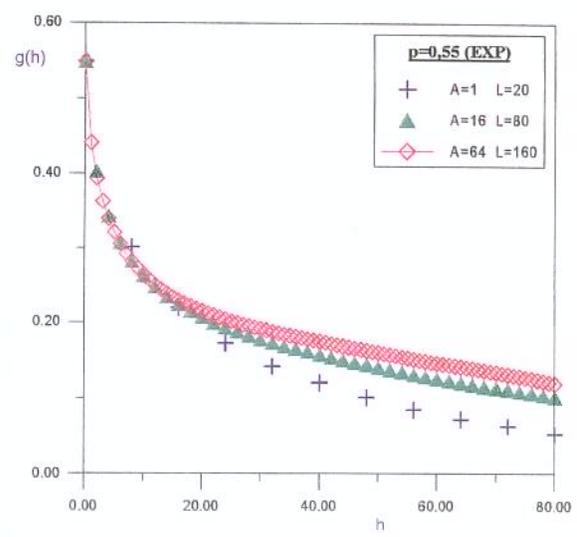
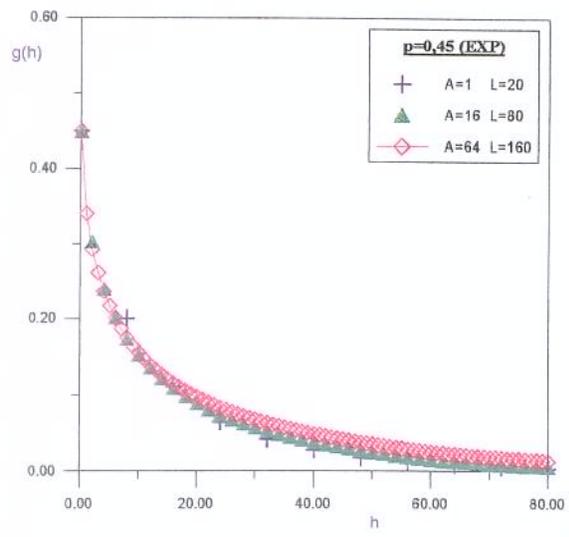


Figura 5.12 – Efeito da discretização da malha sobre $g(h)$

A medição da conectividade $g(h)$ abaixo de p_c permitiu que se observasse o valor do comprimento conectivo ξ e sua ligação com o domínio de correlação A . Calculando os valores de ξ para $p=0,45$ ($p < p_c$), através da Equação (2.33), que o relaciona a $g(h)$, pode-se observar que o mesmo aumenta ao se aumentar A , plenamente de acordo com o tamanho das dimensões médias dos clusters nas malhas correlacionadas, como mostra a Figura 5.13.

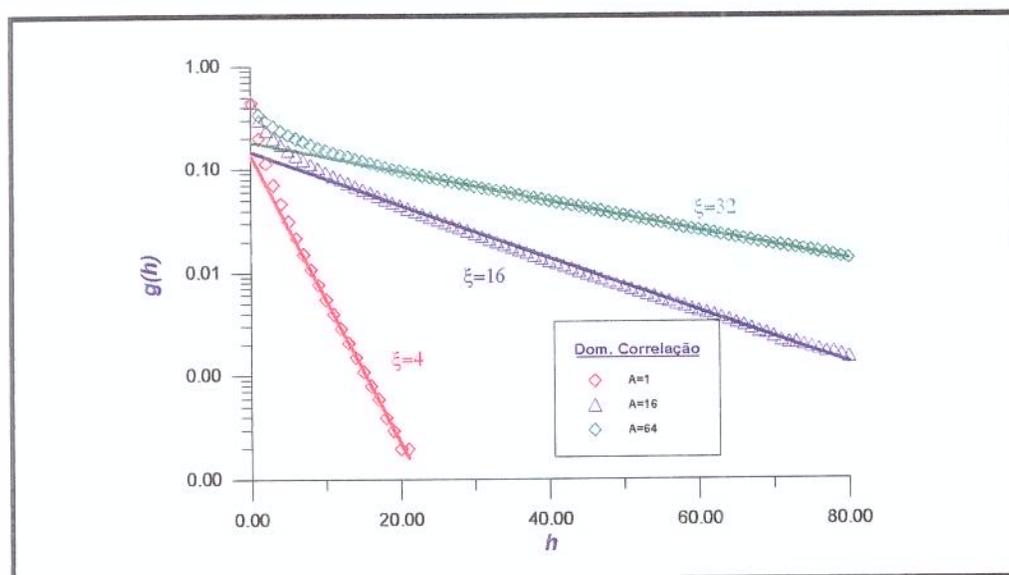


Figura 5.13 – Comportamento de ξ para proporção $p=0,45$ para diferentes valores de A em processos com autocorrelação exponencial

Observa-se que o aumento no valor de A faz com que ξ aumente proporcionalmente a \sqrt{A} , ou seja $\xi(A=16)=4*\xi(A=1)$ e $\xi(A=64)=2*\xi(A=16)$.

Para as malhas sem correlação, de acordo com a Equação (2.28), é válido:

$$\xi \propto (p - p_c)^{-\nu}$$

e

$$(p - p_c) \propto \xi^{-1/\nu}$$

que para malhas bidimensionais vale:

$$(p - p_c) \propto \xi^{-0.75}$$

Calculando agora o valor da conectividade para várias proporções abaixo de p_c , obtendo para cada uma delas o valor de ξ , e adimensionalizando os valores calculados de ξ em relação a A , pode-se obter o gráfico abaixo, que mostra um comportamento linear entre $(\xi / \sqrt{A})^{-1/\nu}$ e p :

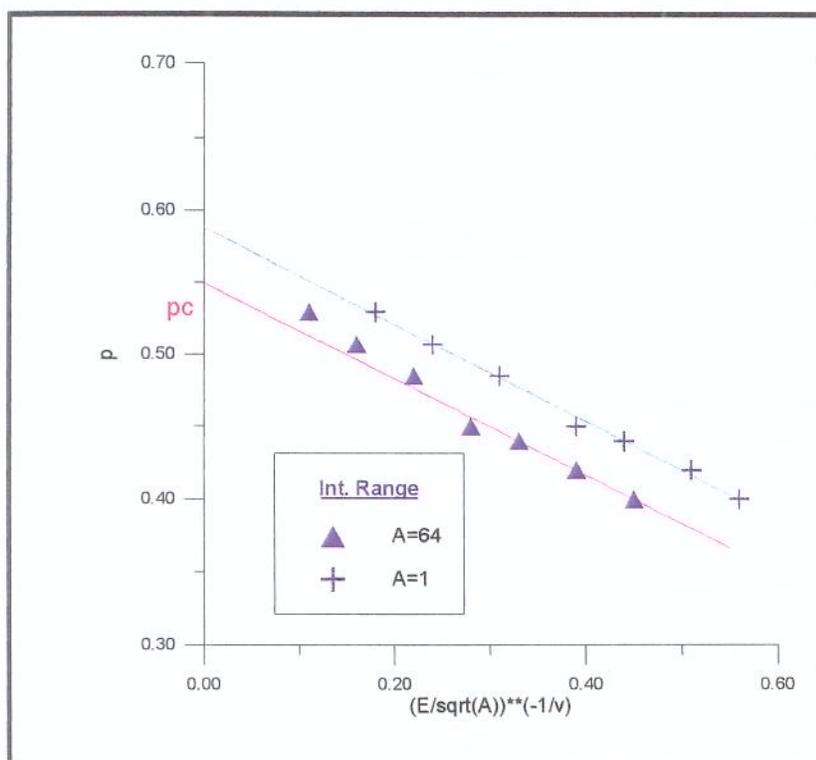


Figura 5.14 – Comportamento de ξ para proporções p abaixo de p_c .

Assim, pode-se inferir, para as malhas correlacionadas, de acordo com as observações anteriores:

$$\frac{\xi}{\sqrt{A}} \propto (p - p_c)^{-\nu}$$

adimensionalizando a relação original (2.28) válida para as malhas sem correlação.

5.2.5 Resultados para Permeabilidade Limite e Efetiva

Os resultados de média e variância estão apresentados de forma sucinta na Tabela 5.2, para um processo com variograma exponencial; os outros modelos apresentam um comportamento qualitativamente semelhante:

Tabela 5.2 - Valores simulados de K_{LIM} e K_{EFF} com variograma exponencial

	L	K_{lim}	$Dp(K_{lim})$	K_{eDF}	$Dp(K_{eDF})$	K_{eff}	$Dp(k_{eff})$
A=1	40	81.08	6.2	88.06	2.6	101.02	3.6
	80	79.52	4.0	87.66	1.2	100.85	1.3
	120	79.61	2.5	87.57	0.9	100.79	1.0
	160	79.26	2.2	87.56	0.7	100.82	0.8
A=16	40	94.12	20.6	96.91	11.7	102.23	12.3
	80	92.02	14.7	95.62	5.5	101.02	5.8
	120	89.86	11.8	94.80	4.5	100.20	4.7
	160	88.66	7.8	94.52	3.3	99.93	3.4
A=64	40	102.77	41.2	103.64	25.8	106.90	26.6
	80	97.49	18.4	98.95	11.0	102.15	11.4
	120	94.19	16.1	97.09	8.4	100.25	8.7
	160	92.02	13.9	96.61	6.5	99.77	6.7
A=256	40	124.35	72.2	122.12	53.3	124.19	54.2
	80	106.36	35.3	107.30	24.1	109.18	24.5
	120	97.98	25.2	101.17	16.1	102.95	16.4
	160	92.41	21.9	99.08	12.6	100.84	12.8

Para pequenos valores de fator de escala, o aumento na correlação espacial torna a condutividade K_{EFF} mais elevada. Mas percebe-se que os valores médios de K_{EFF} para dimensões L muito superiores ao alcance α são praticamente iguais, qualquer que seja o domínio de correlação. Já o valor de K_{LIM} , fortemente ligado ao ponto crítico de percolação, é bastante sensível à correlação, para todos os valores de L ; ele se torna maior, quanto maior for o alcance da correlação (para cada valor fixo de L), tendendo a se estabilizar no ponto correspondente a $p_c=0,50$, ou seja na mediana da distribuição, que, no caso da distribuição lognormal, coincide com a média geométrica.

Assim, o valor de K_{EFF} se mostrou independente da correlação para grandes fatores de escala, mas K_{LIM} depende fortemente da correlação, de modo que fica descaracterizada uma possível relação entre estes parâmetros. Este fato se explica, em linhas gerais, pelas características próprias de cada um dos parâmetros, K_{LIM} descrevendo propriedades internas de conectividade, K_{EFF} representando uma característica global do sistema.

5.3 Análise dos Processos Markovianos Discretos

Foram medidos por simulações de Monte Carlo os parâmetros de percolação dos processos Markovianos discretos, observando seu comportamento em relação aos parâmetros repulsivos do processo. Os resultados foram ainda analisados no contexto dos sistemas ferromagnéticos, onde algumas das propriedades analisadas são conhecidas.

5.3.1 Descrição dos Experimentos

Como os processos Markovianos são gerados a partir de trocas aleatórias de posição até a estabilização em uma condição preestabelecida, não é possível a determinação de p_c para cada imagem por truncamentos sucessivos que mantêm a semente inicial, como nos processos Gaussianos. A alternativa adotada foi verificar, para cada imagem discreta, gerada a partir de uma determinada semente, se a mesma propicia ou não a percolação de fluidos, efetuando para cada valor de β a seguinte seqüência: fixa-se uma proporção p , simulam-se 100 imagens e calcula-se a fração destas imagens que são percolantes; adotam-se novas proporções e repete-se a seqüência, que tem como objetivo determinar, por tentativa e erro, a proporção p que

propicia a percolação com 50% de probabilidade, valor adotado como $\langle p_c \rangle$, além das proporções em que 15% e 85% das imagens são percolantes, auxiliando na estimativa da variância de p_c . Para a determinação destes pontos é necessária a verificação de cerca de sete proporções para cada valor de β . São testados os valores de β iguais a 0,30, 0,40, 0,50, 0,60 e 0,80. Da mesma forma que nos processos Gaussianos, é necessária a estimativa de p_c em tamanhos de malha variável, de modo que as simulações acima são realizadas para L valendo 80, 120 e 160. Os processos Markovianos binários (modelo de Ising) são simulados utilizando o algoritmo de Metropolis com dupla troca, e ponto de estabilização de acordo com o critério de Frery, assunto detalhado no Capítulo 4.

Já os processos discretos de múltiplas fácies (modelo de Potts-Strauss) foram testados para diversas configurações ligadas às combinações de valores dos parâmetros de repulsão (β_{kl}) entre as fácies. Foi observado o comportamento dos parâmetros de percolação em relação à variação dos parâmetros β_{kl} nos modelos do tipo mosaico, difusão e algumas combinações destes. Para isto, após a simulação da imagem, é efetuada uma binarização, ou seja, uma das fácies é considerada ativa (ou condutora) e as demais inativas (ou isolantes); em seguida, sua proporção é variada para a obtenção da proporção crítica p_c , de forma idêntica à efetuada para o modelo binário.

5.3.2 Resultados para o modelo de Ising

Como o valor de p_c se reduz com o aumento da correlação nos processos Gaussianos, era esperada uma redução deste parâmetro com o aumento de β ; os valores encontrados estão apresentados na Tabela 5.3 e na Figura 5.15.

Tabela 5.3 - Valores de p_c em função do tamanho L da malha

beta	$p_c(L=80)$	$p_c(L=120)$	$p_c(L=160)$
0	0,593	0,593	0,593
0,3	0,549	0,55	0,551
0,4	0,531	0,535	0,536
0,5	0,52	0,521	0,522
0,6	0,509	0,51	0,511
0,8	0,501	0,502	0,502

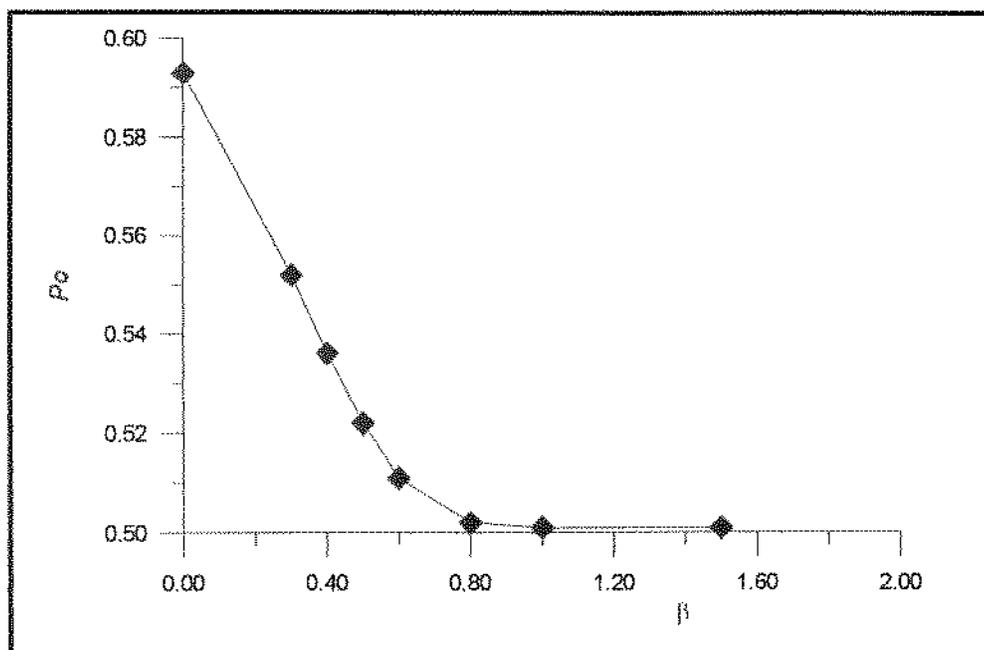


Figura 5.15 – Influência do parâmetro β sobre a proporção crítica p_c .

Observa-se que as variações são pequenas quando se eleva o tamanho da malha, mas a variância dos resultados diminui substancialmente com este aumento. A Tabela 5.4 mostra o desvio padrão das proporções críticas, e a Figura 5.16 mostra os intervalos de confiança para a esperança de p_c com um grau de confiabilidade de 95%, para valores de L iguais a 80, 120 e 160.

Tabela 5.4 – Desvio padrão de p_c em função do tamanho L da malha

β	$L=80$	$L=120$	$L=160$
0	0,030	0,017	0,014
0,3	0,034	0,020	0,016
0,4	0,039	0,028	0,022
0,5	0,041	0,033	0,025
0,6	0,044	0,035	0,030
0,8	0,049	0,041	0,036

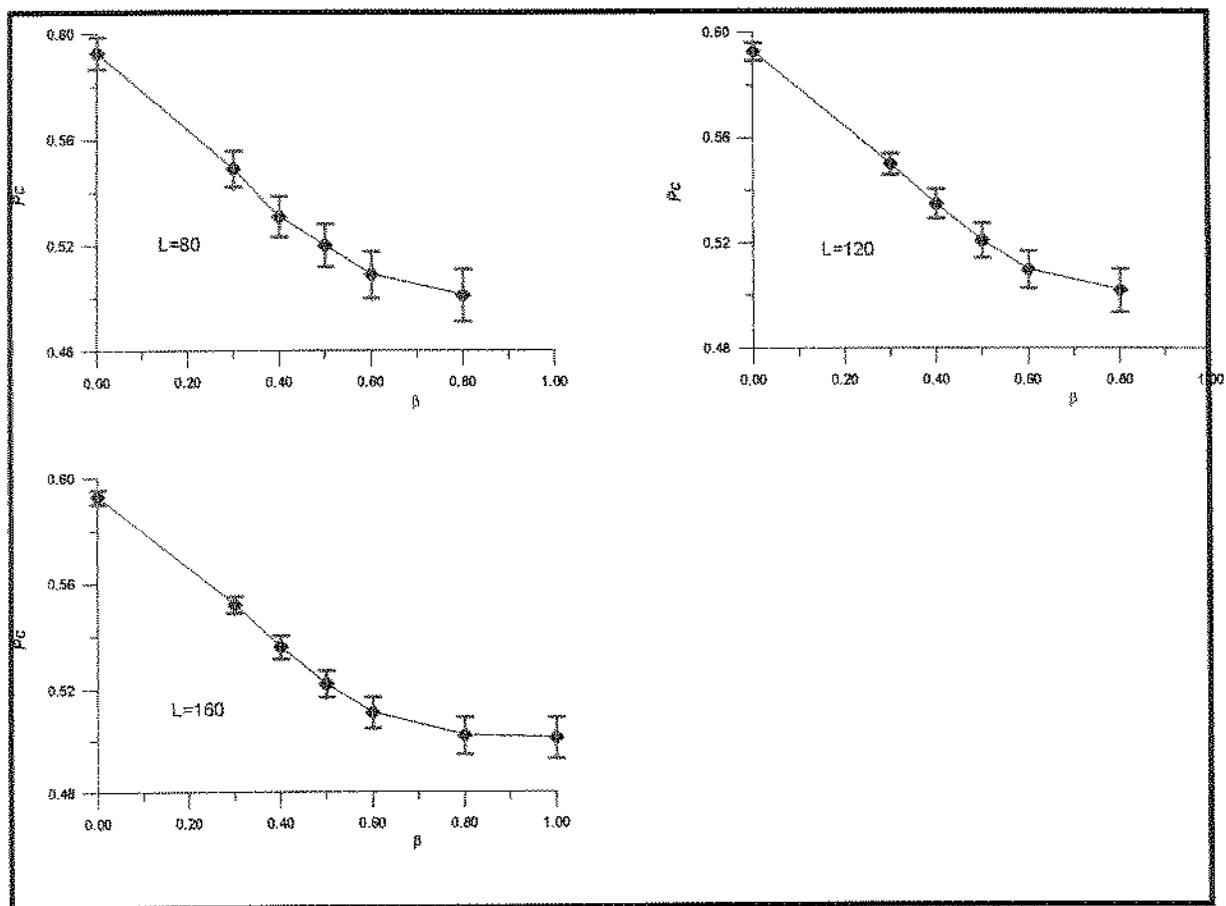


Figura 5.16 – Intervalo de confiança de p_c com 95% de confiabilidade em função do parâmetro β e do tamanho L da malha

Assim como observado nos processos Gaussianos, a redução de p_c com β atinge um patamar próximo de 0,50; este patamar ocorre para valores de $\beta > 0,88$, que é o ponto crítico de magnetização espontânea nos modelos ferromagnéticos binários e também corresponde à temperatura crítica de um fluido. Em Coniglio et al [51] é demonstrado que $p_c = 0,50$ quando β é superior ao ponto crítico

Utilizando as relações teóricas obtidas no capítulo anterior, entre β e o alcance α da correlação (4.39), e a equação do domínio de correlação A em função de α para o variograma exponencial ($A=\pi\alpha^2/4,5$), pode-se transpor a curva da Figura 5.15, relacionando p_c e A :

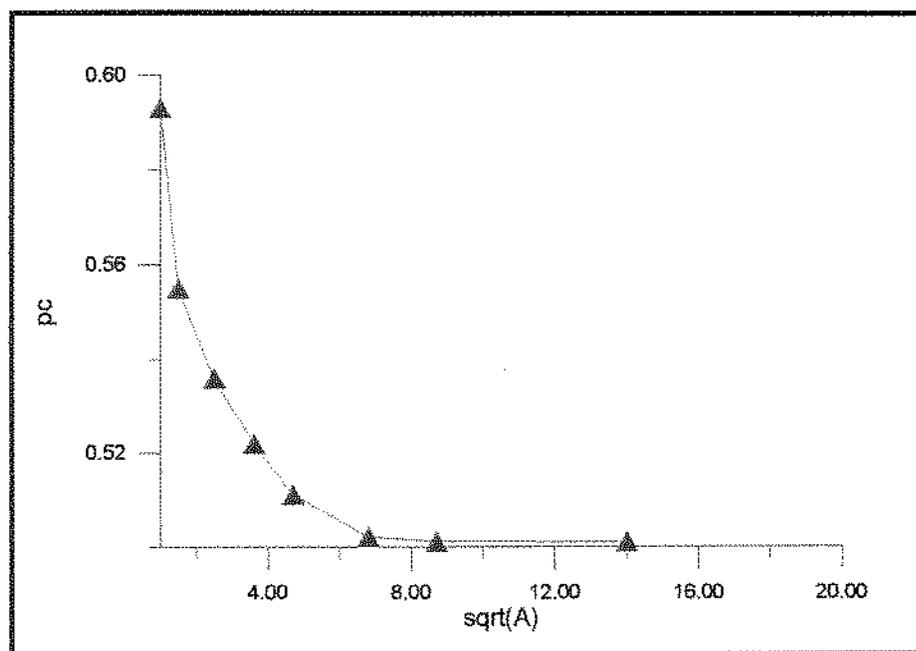


Figura 5.17 – Comportamento de p_c em função do domínio de correlação A (calculado a partir do valor de β) para os processos Markovianos

Percebe-se um rápido declínio em p_c semelhante ao comportamento observado no processo Gaussiano Truncado com modelo de variograma Gaussiano. Isto reforça as semelhanças já discutidas entre os dois modelos no Capítulo 4. A Figura 5.18 a seguir compara os resultados anteriores com os valores calculados para os processos Gaussianos (apresentados na Figura 5.2), onde fica nítida a superposição das curvas.

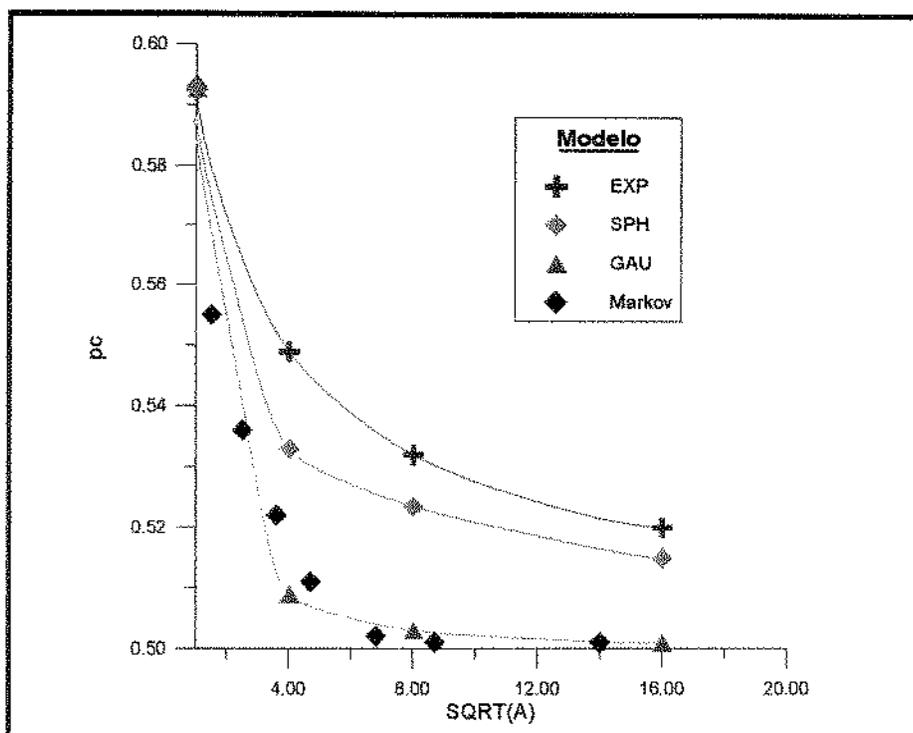


Figura 5.18 – Comportamento de p_c em função do domínio de correlação A , comparado aos processos Gaussianos

5.3.3 Resultados para o modelo de Potts-Strauss

Embora a capacidade de percolação dependa do conjunto dos valores repulsivos, algumas análises podem ser feitas em relação a alguns valores de β . Serão comparados três tipos de configuração para um processo com três fâcies: o primeiro deles com igual repulsão entre todas as fâcies (mosaico), o segundo com repulsão nula entre duas delas (correspondendo a um modelo binário) e o terceiro com uma maior repulsão entre duas das fâcies (difusão); estes três casos estão reunidos na Figura 4.5 do capítulo anterior. A malha utilizada tem dimensão 160×160 e foram simuladas 100 imagens para cada caso. A comparação entre as proporções críticas e o desvio padrão de p_c nos três modelos pode ser vista nas tabelas abaixo:

Tabela 5.5 – Comportamento de p_c em função da configuração da imagem

β	binário	mosaico	difusão
0	0,593		
0,3	0,551		
0,4	0,536	0,549	0,559
0,5	0,522		
0,6	0,511	0,524	0,531
0,8	0,502	0,505	0,512

Tabela 5.6 – Desvio padrão de p_c em função da configuração da imagem

β	binário	mosaico	difusão
0	0,014		
0,3	0,016		
0,4	0,022	0,019	0,012
0,5	0,025		
0,6	0,03	0,022	0,013
0,8	0,036	0,028	0,016

Percebe-se um aumento em p_c quando se aumenta a repulsão entre as duas fácies secundárias, ou seja, a percolação é mais fácil no caso binário que no modelo mosaico, e mais fácil neste que no modelo difusão. A figura abaixo ilustra os testes realizados:

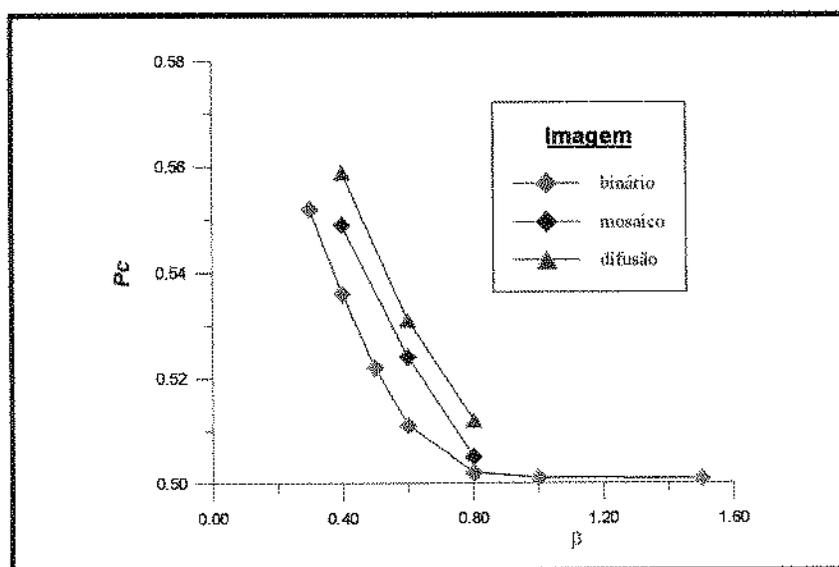


Figura 5.19 – Comportamento de p_c em função do parâmetro β para diferentes configurações de imagem

Na figura a seguir são comparados os modelos binário e difusão, observando-se ainda uma menor variabilidade para esta configuração:

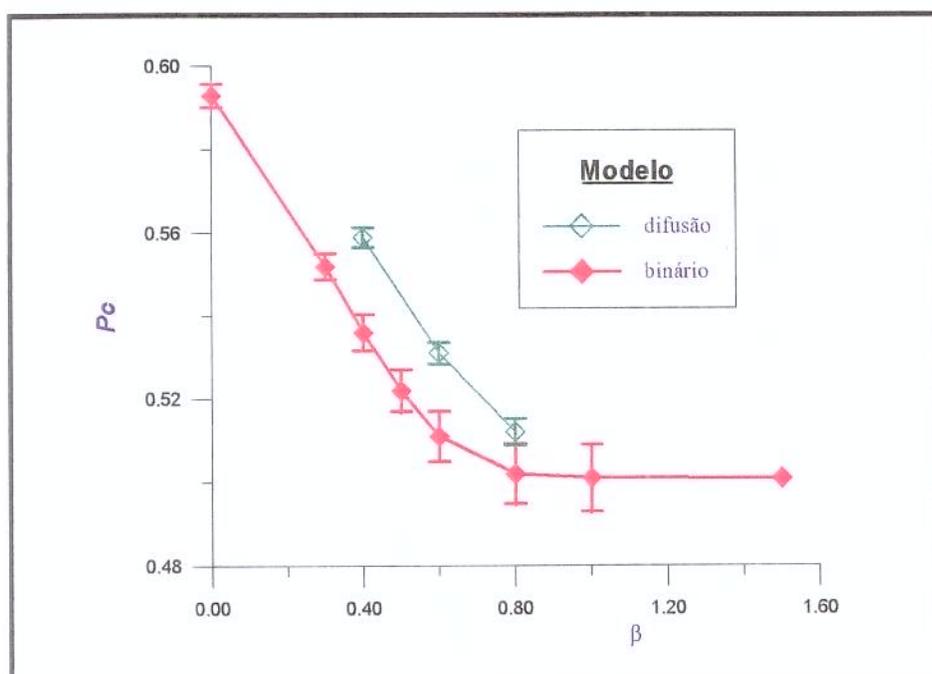


Figura 5.20 – Comportamento de p_c em função do parâmetro β para configurações dos tipos binário e difusão

Este comportamento se explica pelo fato de, ao se impor uma estruturação para as fácies secundárias, fica mais dificultada a percolação e o fluxo na fácies primária, em oposição ao caso extremo, no qual as fácies secundárias se misturam e a liberdade de posicionamento da fácies condutiva atuará favoravelmente à percolação e à condutividade efetiva.

5.4 Verificação da redução do ponto crítico de percolação para as malhas correlacionadas

Através da análise dos processos Markovianos, pode-se verificar a redução da proporção crítica das malhas quadradas bidimensionais e sua estabilização em 0,50 para valores elevados de β ; este patamar de valor 0,50 é teoricamente demonstrado no contexto da modelagem dos processos ferromagnéticos. O comportamento similar, que foi observado experimentalmente nos processos Gaussianos, não tem ainda o suporte de uma demonstração analí-

tica; no entanto, com a ajuda dos conceitos de renormalização, probabilidade de percolação e correlação espacial da variável indicatriz, pode-se verificar esta redução e justificar o comportamento do ponto crítico em relação ao aumento do domínio de correlação.

Foi apresentada no Capítulo 2 a definição de probabilidade de percolação $\pi(p)$ de uma malha a uma dada proporção p , que é a base da mudança de escala que utiliza a renormalização desenvolvida por Wilson [12]. Ela consiste da redução passo a passo das dimensões da malha, através dos agrupamentos sucessivos das células. Em uma malha quadrada, quando se deseja reduzir a escala em um fator igual a 2, reúnem-se as células em grupo de quatro, e cada grupo é transformado em uma única célula. A figura abaixo mostra a redução da malha de 8x8 para 4x4, 2x2 e 1x1.

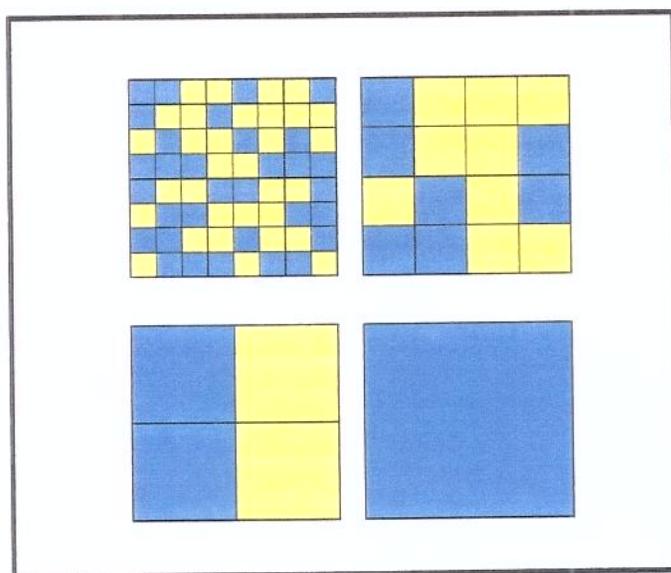


Figura 5.21 – Seqüência aplicada na mudança de escala através da renormalização

A cada passo na escala é calculada a nova proporção transformada, denominada p^* . A probabilidade de que a célula transformada seja ativa equivale à probabilidade do grupo permitir a ligação entre as células vizinhas, ou seja, que propicie a percolação. Assim, o cálculo da nova proporção se faz pelo cálculo da probabilidade de percolação do sistema original.

Esta probabilidade pode ser calculada pela montagem das configurações possíveis para o agrupamento e verificação das configurações percolantes. Para o caso de quatro células em

uma malha aleatória, tem-se as probabilidades de ocorrência de cada configuração apresentadas na coluna da esquerda da Figura 5.22, conforme já discutido na Seção 2.4,:

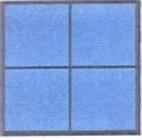
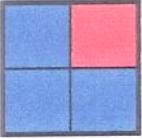
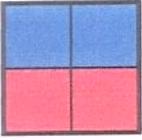
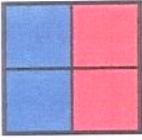
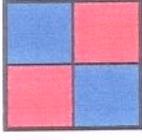
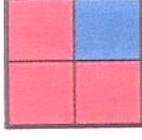
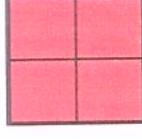
	(1x) p^4	(1x) R^4
	(4x) $p^3(1-p)$	(4x) $R^2(p-R)^2$
	(2x) $p^2(1-p)^2$	(2x) $R(1-2p+R)(p-R)^2$
	(2x) $p^2(1-p)^2$	(2x) $R(1-2p+R)(p-R)^2$
	(2x) $p^2(1-p)^2$	(2x) $(p-R)^4$
	(4x) $p(1-p)^3$	(4x) $(1-2p+R)^2(p-R)^2$
	(1x) $(1-p)^4$	(1x) $(1-2p+R)^4$

Figura 5.22 – Probabilidades de ocorrência de cada configuração em malhas sem correlação (à esquerda) e correlacionadas (à direita)

A soma das probabilidades das configurações percolantes resulta em:

$$P(p) = 2p^2 - p^4$$

Esta passagem é repetida passo a passo até se atingirem as dimensões desejadas. A probabilidade de percolação ou proporção transformada pode ser vista na figura a seguir em função do tamanho da discretização:

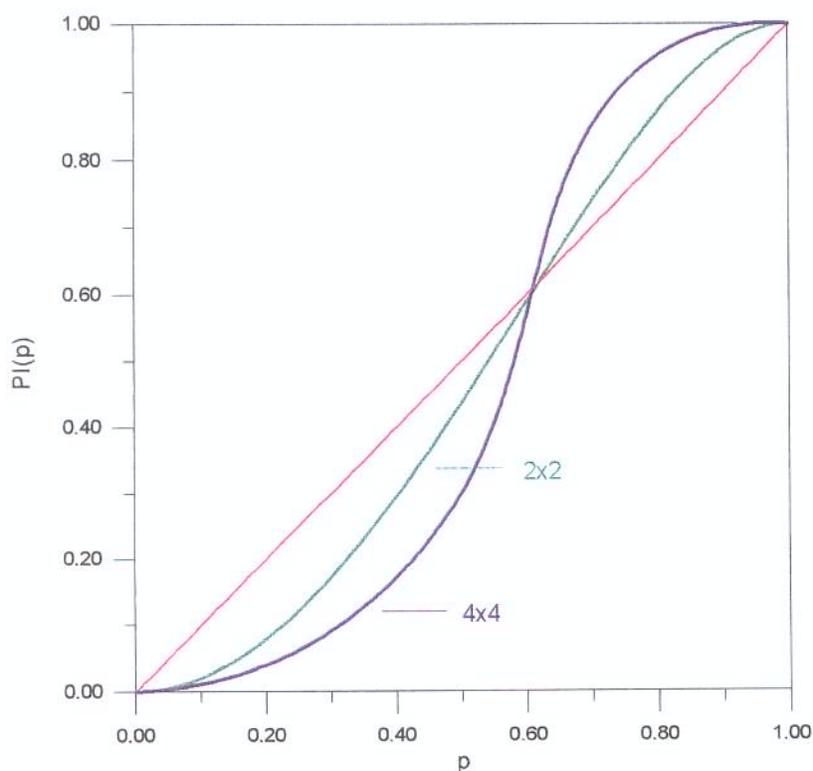


Figura 5.23 – Probabilidade de percolação num sub-domínios 2×2 e 4×4 em malhas sem correlação

Este método se torna menos prático à medida que se aumenta o tamanho do grupo, tornando o cálculo das probabilidades bastante trabalhoso.

Para os casos correlacionados, as configurações anteriores têm probabilidades alteradas em função da correlação, já que a probabilidade de uma célula ser ou não ativa não ocorre mais independentemente das demais. As propriedades da variável indicatriz, apresentadas no Capítulo 3, fornecem condições para o cálculo das probabilidades ligadas a cada configuração possível:

$$\gamma(h) = p[I(x) \neq I(x+h)]$$

$$R(h) = p[I(x) = I(x+h) = 1]$$

$$\gamma(h) = p - R(h)$$

Observa-se, assim, que o semivariograma permite estimar a probabilidade de ocorrência de pares diferentes e a autocorrelação a probabilidade de ocorrência de pares iguais e condutores. A probabilidade de ocorrência de pares iguais e isolantes é calculada por diferença e vale:

$$p[I(x) = I(x+h) = 0] = 1 - 2p + R(h)$$

Assim, utilizando o valor da autocorrelação à distância unitária, podem-se estimar as probabilidades relativas às configurações possíveis, cujos valores se apresentam na Figura 5.22, na coluna da direita. A soma das probabilidades das configurações percolantes permitem estimar a probabilidade de percolação $\pi(p)$:

$$\pi(p) = \frac{R^4 + 4R^2(p-R)^2 + 2R(1-2p+R)(p-R)^2}{\text{Soma de todos os termos}}$$

Imagine-se agora uma malha infinita aleatória quadrada; esta malha será percolante exatamente na proporção 0,59. Supondo que esta malha foi obtida de uma mudança de escala em uma malha inicialmente correlacionada, a proporção limite de percolação p_c da malha original será aquela que resultar em uma proporção transformada (probabilidade de percola-

ção) de valor 0,59. Assim, a estimativa consiste em igualar a equação anterior a 0,59 e resolver a equação não linear em p .

Para uma malha correlacionada com semivariograma à distância unitária valendo, por exemplo, em torno de 0,12, a equação acima propicia o cálculo de p em 0,52. A repetição sucessiva desta seqüência, até a malha equivalente se tornar sem correlação, faz p convergir para 0,50, coerente com o valor observado nos experimentos em malhas correlacionadas de grande alcance.

Capítulo 6

Modelos de Fluxo em Redes Microscópicas

Este capítulo tem por objetivo apresentar e discutir os principais modelos que representam o fluxo em redes microscópicas, modelos estes que podem ser analíticos, numéricos ou estatísticos. São enfocadas as suas limitações, simplificações e aplicabilidade, além da adequação aos diversos regimes de fluxo, estes relacionados à atuação das forças capilares e viscosas.

6.1 Fundamentos

A representação do fenômeno de transporte nos meios porosos em escala real tem uma importância destacada nas áreas de engenharia de petróleo e de hidrologia. Diversos são os modelos utilizados na estimativa das propriedades ligadas ao fluxo, a maioria representando o meio poroso através de uma rede de poros e gargantas; são os chamados modelos de rede (*network models*), onde os nós (poros) que contêm o fluido se interligam através das ligações entre eles (gargantas de poro).

Apesar da complexidade e irregularidade normalmente encontradas num meio poroso real, é possível o seu estudo utilizando os modelos idealizados, que simulam numericamente o fluxo dos fluidos através de redes de poros, permitindo estimar os parâmetros e a geometria deste fluxo.

As redes podem apresentar geometria regular, em geral retangular ou cúbica, ou irregular como o exemplo das malhas do tipo *Voronoi*. O fluxo simulado, em geral, é do tipo

monofásico ou bifásico imiscível, embora seja possível a utilização dos modelos de rede para estimativas em fluxo miscível.

Pelo fato do termo percolação significar passagem ou filtragem de um fluido através de um meio, alguns autores denominam os modelos de fluxo em redes porosas de modelos de percolação, ou de percolação por invasão, embora sem utilizar nenhum conceito ligado à Teoria da Percolação. Sem entrar no mérito da adequação ou não do termo, no presente trabalho estes modelos são denominados de modelos de fluxo em redes porosas ou simplesmente modelos de rede; serão denominados modelos de Percolação os que utilizam a Teoria da Percolação descrita no Capítulo 2 e modelos de Percolação por Invasão (*invasion percolation*) os modelos de fluxo em rede cujo critério de avanço permite uma analogia à Teoria da Percolação; estes últimos estão descritos na seção seguinte.

São apresentados a seguir os principais modelos de fluxo em rede já propostos e testados. Inúmeros outros foram desenvolvidos, mas podem ser considerados variações destes modelos principais, com implementação de melhorias que, porém, não alteram sobremaneira os seus princípios básicos.

6.2 Principais Modelos de Rede

Modelo de Fatt

Considerado o precursor dos modelos de rede, o modelo idealizado por Fatt [52,54] tomou o lugar dos modelos do tipo “*bundle of tubes*” que utilizavam uma distribuição de gargantas de diâmetro fixo não interconectadas, que, por sua simplicidade, não eram capazes de representar de forma adequada o fluxo nos caminhos porosos.

No modelo de Fatt, os nós são conectados por capilares de diâmetro aleatório, saturados inicialmente com o fluido molhante; a rede é então circundada pelo fluido não molhante, que penetra pelas gargantas permitidas pela pressão capilar, ou seja, a cada aumento sucessivo na pressão capilar, são preenchidos os diâmetros iguais ou maiores que o diâmetro de entrada, que estejam em contato direto com a fronteira entre os fluidos. Na época, Fatt fez uso de ta-

belas de números aleatórios para estabelecer os diâmetros das redes hoje consideradas de pequeno porte, com 200 a 400 tubos (15x15 a 20x20).

Este modelo vem recebendo diversos aperfeiçoamentos ao longo dos anos, não só através da adequação dos critérios de penetração bem como pelo aumento nas dimensões da rede, dentre os quais destaca-se o trabalho de Chatzis e Dullien [55], e continua sendo a base de quase todos os modelos de “rede”. Os modelos com forma de ocupação semelhante se aplicam exclusivamente aos deslocamentos onde prevalecem as forças capilares. Para descrever deslocamentos onde as forças viscosas não são desprezíveis em relação às capilares, torna-se necessária a implementação de critérios de fluxo mais complexos, razão pela qual ganharam destaque os modelos a seguir apresentados.

Modelos de Fluxo Poiseuille

O modelo proposto por Lenormand et al [58] e estendido para condições mais amplas por Blunt e King [59], foi desenvolvido para representar o fluxo dos fluidos em condições de velocidade tais que passa haver predomínio das forças viscosas, ou seja, não se restringem apenas aos fluxos dominados pelas forças capilares.

No primeiro dos dois trabalhos citados acima é utilizada uma malha regular quadrada bidimensional, composta de poros (nós) e gargantas (passagem entre os poros) com distribuição aleatória de diâmetros, sendo as duas distribuições consideradas independentes. O fluxo entre as gargantas é assumido como Poiseuille, mas também regido por critérios capilares de acordo com a molhabilidade. As condições anteriores já haviam sido testadas por Koplik e Lasseter [56] e por Dias e Payatakes [57], mas as restrições em relação à não linearidade do problema (e por conseguinte ao tempo de simulação) limitaram suas redes a dimensões da ordem de 10x10 e 15x30 células respectivamente. Nos dois casos a não linearidade era substituída por uma seqüência de problemas lineares.

No trabalho de Lenormand et al [58] foi utilizada uma aproximação direta do problema não linear, ao invés de uma porção de problemas lineares, o que propiciou a extensão das redes para dimensões da ordem de 100x100 células, permitindo análises mais representativas. Foram destacadas no desenvolvimento do mesmo trabalho a caracterização dos diversos re-

gimes de fluxo, através das relações entre as forças capilares e viscosas: o deslocamento estável, cuja principal força é ligada à viscosidade do fluido injetado; deslocamento viscoso, no qual a principal força é devida à viscosidade do fluido deslocado; o deslocamento capilar, no qual as forças viscosas são desprezíveis. O gráfico traçado com os valores de C_v (razão entre forças viscosas e capilares), parâmetro regulador das forças capilares, e de M (razão entre as viscosidades dos fluidos), regulador das forças viscosas, permite a identificação de regiões características de cada um dos regimes de fluxo acima, como mostra a Figura 6.1.

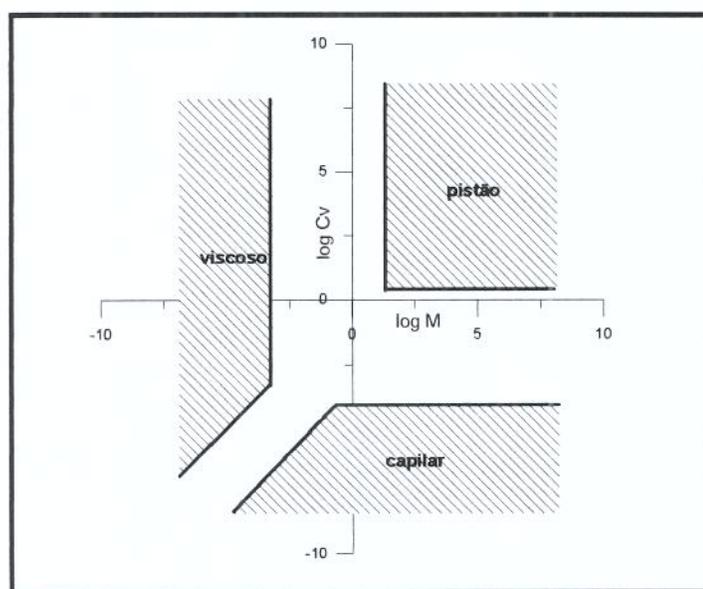


Figura 6.1 – Regimes de Fluxo em função dos parâmetros capilares e viscosos

Foram analisados os perfis de deslocamento e as saturações limites em diversos pontos ao longo deste plano, propiciando a relação entre os parâmetros e o regime de fluxo. O referido trabalho atesta ainda a boa representatividade dos modelos numéricos através da sua comparação com resultados experimentais, indicando a sua possibilidade de utilização em condições $C_v \times M$ de difícil realização experimental. Foi também considerada válida a representação de deslocamentos do tipo capilar através dos modelos de percolação por invasão, modelo descrito em detalhes na próxima seção.

Blunt e King [59] estenderam os testes anteriores para condições de malhas tridimensionais e redes irregulares do tipo *Delaunay* e *Voronoi* (posição espacial de acordo com a distribuição de Poisson). Além disso estabeleceram critérios para o cálculo do fluxo fracionário e das curvas de permeabilidade relativa.

Modelo de Percolação por Invasão

O termo acima identifica os modelos de rede, que possuem critérios de deslocamento e características particulares, que tornam possível a sua utilização conjugada à Teoria da Percolação convencional. Este modelo foi descrito inicialmente por Chandler et al [60] e estudado com maior detalhamento por Wilkinson e Willemsen [61].

O movimento dos fluidos se processa da seguinte forma: a cada ponto da rede (representando o diâmetro dos poros, nas malhas do tipo *site*, ou das gargantas, nas malhas do tipo *bond*) é atribuído inicialmente um valor aleatório pertencente a uma determinada distribuição. Toda a malha está inicialmente ocupada com o fluido a ser deslocado. As fronteiras laterais são consideradas impermeáveis e as fronteiras horizontais servem para a entrada do fluido deslocante e saída do fluido deslocado. A cada passo de tempo, um ponto da fronteira entre os fluidos torna-se ocupado, com prioridade para aquele que possuir o maior diâmetro, no caso do fluido deslocado ser molhante, ou o menor diâmetro, quando estiver sendo deslocado o fluido não molhante. O processo se encerra quando o fluido deslocante ocupa pela primeira vez um ponto da fronteira oposta à inicial (fronteira de saída).

Existe uma clara analogia entre o mecanismo de ocupação dos poros deste modelo e o crescimento lento na pressão capilar, já que a cada valor da mesma está associado um valor de diâmetro de entrada, correspondendo a um fluxo quasi-estático, com predomínio amplo das forças capilares. As Figuras 6.2 e 6.3 ilustram a discussão.

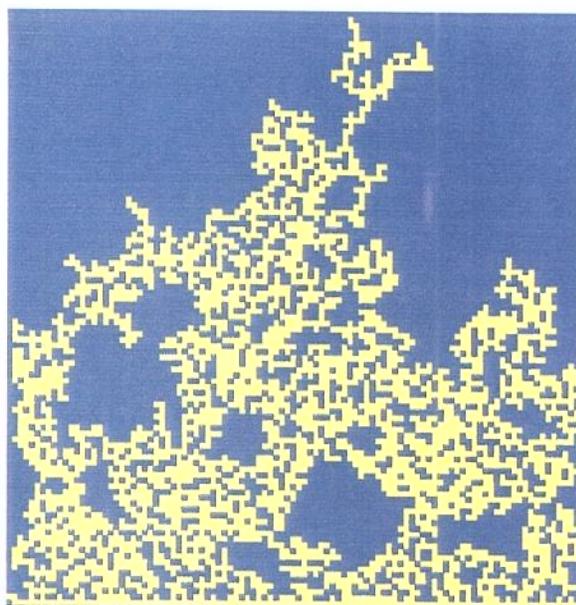


Figura 6.2 – Percolação por Invasão em malha quadrada – Posição no instante do *breakthrough*

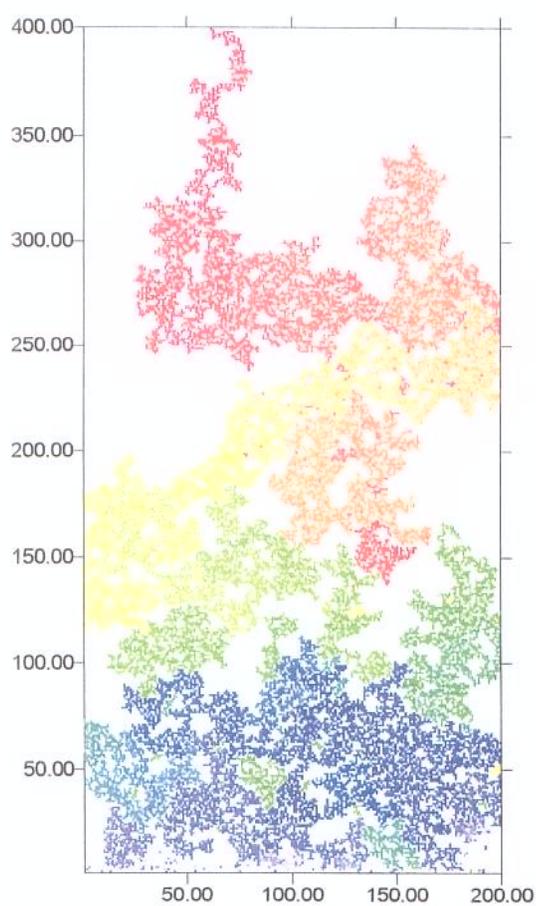


Figura 6.3 – Percolação por Invasão em malha retangular – Posição no instante do *breakthrough*

Ao atingir a fronteira oposta será formado um cluster semelhante ao cluster percolante convencional, com dimensão fractal D_f idêntica, conforme apontado nos trabalhos de Lenormand e Zarcone [62], de Dias e Wilkinson [63] e de Furunberg et al [64].

Em relação à percolação convencional, para um determinado valor de P_{cap} corresponde uma ocupação de diâmetros $d > d_c$, totalizando uma proporção p de diâmetros possíveis de serem ocupados; todavia, são ocupados apenas aqueles que têm ligação direta à fronteira de avanço, formando o cluster percolante. Recorda-se aqui que o tamanho do cluster percolante é estimado em função da proporção p e de parâmetros e expoentes da teoria da percolação.

Segundo os critérios acima descritos, foi construído no presente trabalho, um algoritmo que efetua o processo de percolação por invasão; ele será utilizado com o objetivo de verificar a importância da correlação espacial na representação do meio poroso pelos modelos de rede.

Para tornar o problema mais próximo à realidade dos deslocamentos imiscíveis, foi introduzido por Wilkinson e Willemsen [61] um critério que impede a ocupação dos poros que estejam ilhados pelo fluido deslocante, ou seja, que estejam desconexos das fronteiras. A implementação deste melhoramento tem um custo no tempo de simulação, pois a cada avanço é aplicado o algoritmo de Hoshen-Kopelman (mostrado no Capítulo 5), através do qual são rotulados os clusters presentes para identificar os pontos de trapeamento; com este critério adicional o modelo passa a se chamar percolação por invasão com trapeamento.

Modelo DLA (*Diffusion Limited Agregation*)

Descrito e desenvolvido por Witten e Sander [65], o DLA é um modelo estatístico que utiliza uma série de “passeios aleatórios” sobre a rede porosa. O início do passeio se dá em um ponto distante da fronteira e percorre aleatoriamente a rede até que seja atingido um ponto da fronteira entre os fluidos; este ponto passa então a ser considerado ocupado e pertencente à nova fronteira; o processo se repete até que a fronteira externa seja atingida.

Observa-se que este processo tem características geométricas bastante similares às do deslocamento viscoso. Isto se justifica pelo fato do fenômeno de agregação ser regido pela

equação de Laplace ($\nabla^2 p(x,t)=0$) para a probabilidade $p(x,t)$ de ocupação de uma posição x no tempo t [66].

De forma análoga desenvolveu-se o modelo anti-DLA, que se diferencia do processo DLA apenas no ponto de partida do passeio, que agora é dentro da própria fronteira; este modelo estatístico é capaz de reproduzir, de uma forma aproximada, o regime de deslocamento do tipo estabilizado.

Assim como a percolação por invasão é capaz de descrever o fluxo com predomínio das forças capilares, os modelos estatísticos do tipo DLA são capazes de representar um fluxo com características viscosas e o anti-DLA é adequado ao fluxo do tipo pistão.

6.3 Métodos Analíticos

O modelo de percolação por invasão descrito anteriormente, ao mesmo tempo em que representa a ocupação gradual dos poros e gargantas pela elevação da pressão capilar, permite o estudo da formação de clusters percolantes e residuais, possibilitando a análise do fluxo dos fluidos através da Teoria da Percolação convencional.

Pressão Capilar

A analogia entre fluxo capilar e a percolação por invasão pode ser vista mais claramente ao se relacionar a pressão capilar ao valor do diâmetro de poro a ele correspondente, segundo a equação de Young-Laplace:

$$P_{cap} = \frac{2\gamma \cos \varphi}{d_p}$$

onde:

d_p é o diâmetro do poro,

γ é a tensão interfacial,

φ o ângulo de contato.

Define-se aqui o conceito de diâmetros permitidos e diâmetros ocupados: os poros ou gargantas com diâmetro maior que o diâmetro d_i correspondente à pressão capilar atual (ordinariamente denominada de pressão de entrada) são passíveis de serem ocupados. Porém, estes diâmetros só são ocupados quando estão em conexão com a fronteira de avanço do fluido deslocante; assim distinguem-se poros permitidos ($d \geq d_i$) dos poros efetivamente ocupados, que representam a fração dos poros permitidos que pertencem ao cluster percolante. Transpondo os conceitos acima para a Teoria da Percolação, os poros permitidos representam a proporção ativa p e os poros ocupados a proporção ocupada pelo cluster percolante $P(p)$.

Vale recordar, a partir do Capítulo 2, que o tamanho do cluster percolante (ou infinito) é um parâmetro da Teoria da Percolação, denominado de probabilidade conectiva e que pode ser estimado em função da proporção ativa pela equação:

$$P(p) \propto (p - p_c)^{\beta_c}$$

Assim, em função da pressão capilar, tem-se o diâmetro limite dos poros permitidos e conseqüentemente a proporção de poros ativos ($d \geq d_0$). Com a equação anterior estima-se o tamanho do cluster percolante que corresponde à saturação do fluido deslocante. O valor da pressão capilar funciona exatamente como o corte de uma variável indicatriz que fornece a proporção de poros permitidos.

As definições dadas anteriormente são válidas quando o fluido deslocante é não molhante, ocupando preferencialmente os poros de maior diâmetro. Se o fluido deslocante molhar preferencialmente a rocha, basta inverter a definição e considerar os poros permitidos como aqueles de diâmetro inferior ao diâmetro de entrada (referente à pressão capilar). A analogia com a percolação permanece válida para estas condições.

Com as definições acima, que têm como referência o trabalho de Wilkinson [67], são estimadas as curvas de pressão capilar para redes aleatórias e correlacionadas; mais adiante será possível estimar também as curvas de permeabilidade relativa e verificar a influência da

autocorrelação entre os diâmetros de poros ou de gargantas sobre os parâmetros representativos do fluxo.

Será considerado inicialmente o caso em que todo volume de fluidos se concentra nos poros, estes com volume constante, enquanto o fluxo entre eles é regulado pelo diâmetro das gargantas. A adequação ao caso mais geral dos poros com diâmetro variável é um passo bastante simples. Será tratada inicialmente a injeção de fluido não molhante em uma malha saturada com fluido molhante. A obtenção da curva de pressão capilar em função da saturação de fluidos, conforme desenvolvimento anterior, pode ser sintetizada na seqüência apresentada a seguir:

- 1) Fixam-se as proporções de cálculo, que representam a quantidade de poros ativos, no caso, poros permitidos:

$$P(d \geq d_i) = 0,10, 0,20 \dots 1,00$$

$$d_i = P^{-1}(0,10, 0,20, \dots, 1,0)$$

- 2) Cada proporção acumulada anterior representa um valor de diâmetro de garganta e consequentemente de pressão capilar, de acordo com a equação:

$$P_{cap} \propto \frac{1}{d}$$

- 3) A saturação correspondente às proporções e pressões capilares anteriores é obtida pela equação:

$$S_{NW}(P_{cap}) \propto S_{NW}(d_i)$$

$$S_{NW}(P_{cap}) \propto (p - p_c)^{B_s}$$

Vale aqui lembrar que p_c é assumido como o valor limite relativo à malha infinita, já que o volume estudado engloba uma grande quantidade de poros e gargantas microscópicas, o que faz com que a variabilidade em torno daqueles valores teóricos seja baixo. O valor de p_c é função da malha adotada e, conforme discutido no Capítulo 5, da autocorrelação entre os diâmetros; o valor de β é universal e varia apenas com a dimensionalidade, valendo 0,14 para $D=2$ e 0,33 para $D=3$.

Para o caso de poros com volumes variáveis basta calcular os valores das saturações pela integração da proporção saturada ao longo dos poros de maior volume.

O gráfico a seguir mostra a curva obtida para uma distribuição de diâmetros de garganta lognormal sem correlação, regida pela equação:

$$p(d) = \frac{1}{0,5\sqrt{2\pi} \cdot d} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln d - 2}{0,5}\right)^2\right)$$

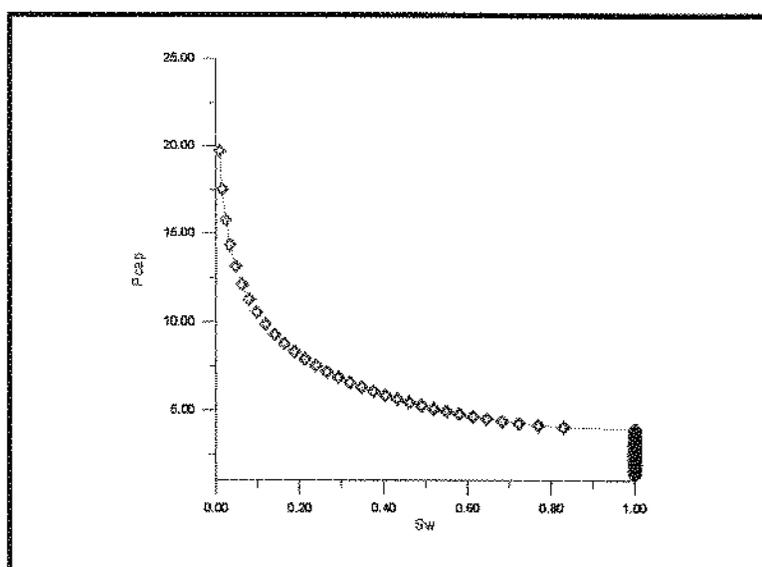


Figura 6.4 – Pressão Capilar estimada através da Teoria da Percolação convencional

Permeabilidade Relativa

De acordo com o Capítulo 2, Seção 2.5, a condutividade se relaciona à proporção de ocupação p através da relação:

$$K_{EFF}(p) \propto (p - p_c)^t$$

Como a proporção não ativa representa neste caso o fluido deslocado, a condutividade acima é efetiva ao fluido deslocante, no caso o não molhante:

$$K_{NW}(p) \propto (p - p_c)^t$$

O cálculo da permeabilidade relativa se faz dividindo a efetiva pela absoluta, sendo esta última constante. O expoente t que propicia o cálculo da condutividade é em geral obtido com pouca precisão, conforme discutido no Capítulo 2. Por este motivo foi proposto por Kadet e Seliakov [68] um método alternativo, também aproximado, mas fundamentado em constantes melhor estabelecidas. O procedimento em questão utiliza a seqüência de equações apresentadas a seguir, devendo as integrais ser resolvidas numericamente.

$$S_{rw}(r_k) = \int_0^{r_k} f(r) r^2 dr / \int_0^\infty f(r) r^2 dr \quad (6.1)$$

$$K_{rw} = I_1(r_k) / I_2(r) \quad (6.2)$$

$$I_1(r_k) = \int_{r_k}^r \left[\int_r^{r_k} f(r) dr \right]^{2\nu-1} \frac{f(r) dr}{I_0(r)} \quad (6.3)$$

$$I_2(r) = \int_{r_0}^r \left[\int_r^{r_k} f(r) dr \right]^{2\nu-1} \frac{f(r) dr}{I_0(r)} \quad (6.4)$$

$$I_o(r) = \int_r^{\infty} \frac{f(r)dr}{r^4} / \left(\int_r^{\infty} f(r)dr \right) \quad (6.5)$$

A aplicação desta seqüência em uma rede sem correlação, com mesma distribuição de diâmetros do exemplo anterior, é mostrada na Figura 6.5.

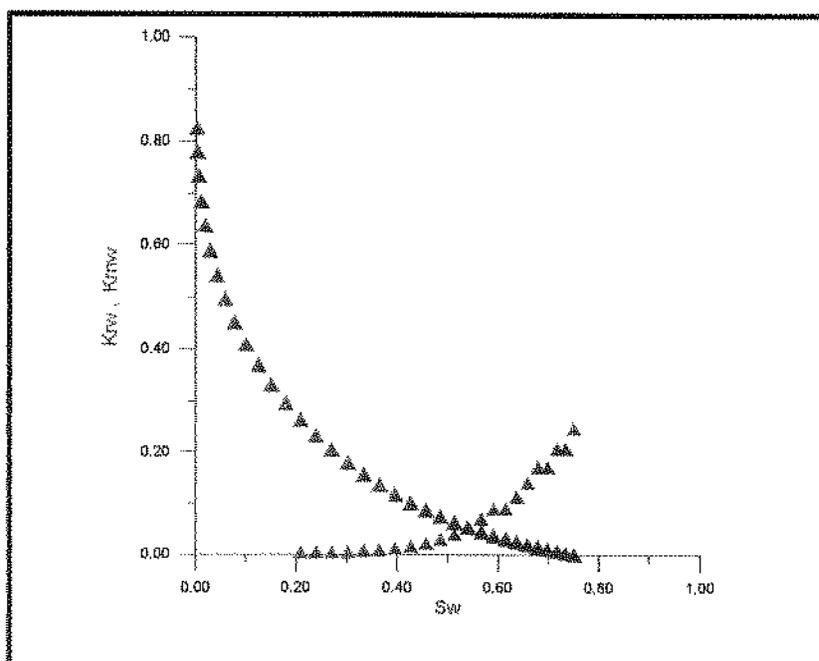


Figura 6.5 – Permeabilidade Relativa estimada através da Teoria da Percolação convencional

O capítulo a seguir trata da utilização dos modelos aqui apresentados em malhas espacialmente correlacionadas, com a conseqüente avaliação da sensibilidade dos parâmetros de fluxo e recuperação de fluidos.

Capítulo 7

Fluxo em Redes Correlacionadas

Verifica-se neste capítulo a sensibilidade do fluxo de fluidos à correlação espacial entre os diâmetros de poro. Esta autocorrelação é imposta aos modelos analíticos e ao modelo de percolação por invasão, aqui modificado para representar não só o fluxo em condições capilares, mas também em condições viscosas e em regime estabilizado. Os resultados mostram uma forte influência da correlação espacial sobre a recuperação de fluidos e as saturações residuais, permitindo avaliar a imprecisão que pode ser cometida quando ela não é considerada na representação do sistema.

7.1 Modelos com Correlação Espacial

Os modelos apresentados no Capítulo 6 adotam redes que apresentam valores totalmente aleatórios para os diâmetros porosos. O termo “totalmente aleatório” indica que os valores em um determinado ponto são inferidos de forma independente em relação a todos os outros pontos; não existe correlação entre o valor de uma variável em ponto e o valor desta mesma variável em um ponto próximo, não há correlação espacial ou autocorrelação.

Na maior parte dos modelos é adotada uma distribuição uniforme ao longo de um intervalo preestabelecido de valores de diâmetro; alguns trabalhos utilizam uma distribuição normal ou uma lognormal (distribuição normal dos logaritmos dos diâmetros); mas pouquíssimos modelos consideram uma correlação espacial entre os valores dos diâmetros porosos.

Vale aqui destacar um aspecto interessante ligado aos modelos de fluxo microscópicos: o controle do fluxo é exercido destacadamente pelo valor do diâmetro da garganta, que se

relaciona à pressão capilar nos regimes de baixa velocidade, controlando a passagem ou não do fluido, segundo a equação já apresentada no capítulo anterior:

$$P_{cap} = \frac{2\gamma \cos\phi}{d_i}$$

bem como à capacidade de fluxo do conduto, de acordo com a equação de Poiseuille:

$$q = \frac{\pi \cdot r^4}{8\mu L} \Delta p$$

Diversos modelos utilizam uma rede de gargantas de poro, ou uma rede de gargantas e nós, onde o poro cumpre apenas a função de armazenar o fluido. Na prática, o diâmetro efetivo da garganta relaciona-se aos diâmetros dos poros que interliga; cada poro atuará sobre o valor de uma determinada garganta ao mesmo tempo que da garganta vizinha, sendo uma fonte de correlação espacial; assim, se for montada uma rede de gargantas, os seus diâmetros devem ser correlacionados e a ausência de correlação não representa o caso mais comum.

A analogia é válida para os modelos numéricos que calculam a permeabilidade efetiva e as propriedades do fluxo na macro-escala. Lá são especificados os valores de permeabilidade, correlacionados ou não, mas a transmissibilidade reguladora do fluxo é calculada, internamente ao modelo, como a média harmônica entre as permeabilidades dos nós. Assim as transmissibilidades são naturalmente autocorrelacionadas, da mesma forma que as gargantas, e, se forem impostas ao modelo, devem ser consideradas correlacionadas. No caso da permeabilidade, o problema é menos destacado, já que, em geral, a permeabilidade é especificada e a transmissibilidade é uma consequência, ao contrário dos modelos de redes microscópicas, nos quais o diâmetro da garganta é, em geral, a variável informada.

Mesmo as redes com poros sem correlação implicam em gargantas com uma correlação de pequeno alcance. Se os poros forem correlacionados, a correlação entre as gargantas será próxima à dos poros, porém com valor mais elevado para as pequenas distâncias (próximo à

origem), gerando uma maior continuidade para a variável, com uma autocorrelação de modelo similar ao Gaussiano (parabólico na origem).

O Capítulo 5 estudou as condições de autocorrelação dos modelos espaciais de caracterização da rocha, com a atenção voltada principalmente para a simulação das propriedades geológicas da formação na macro-escala. Porém, nenhuma restrição foi imposta no tocante às dimensões da malha, e de acordo com a discussão do parágrafo anterior, o problema é semelhante nas diversas escalas; assim os resultados lá obtidos podem ser aqui utilizados, tais como o comportamento da proporção crítica p_c e do comprimento conectivo ξ . A verificação da sensibilidade das características do fluxo à consideração da autocorrelação nos modelos de rede tem como objetivo avaliar o erro que pode estar sendo cometido ao desprezá-la.

Como já foi afirmado, poucos são os modelos de rede que utilizam a correlação espacial entre as variáveis, e os que o fazem impõem a correlação dos diâmetros das gargantas calculando seu valor em função dos diâmetros dos poros vizinhos. Neste caso incluem-se os trabalhos de Wardlaw et al [69], Constantinides e Payatakes [70], Jerauld e Salter [71] e Bryant et al [72].

Os trabalhos de Wardlaw [69] e de Constantinides e Payatakes [70] analisam a sensibilidade dos parâmetros de fluxo à correlação entre os diâmetros de poros e de gargantas de poro. Como este tipo de correlação acarreta uma autocorrelação entre os diâmetros das gargantas, os meios estudados são autocorrelacionados.

Jerauld e Salter [71] impõem a autocorrelação ao seu modelo pelo cálculo do diâmetro da garganta como uma média dos poros vizinhos, estes últimos gerados por uma distribuição aleatória. A autocorrelação gerada fez com que a permeabilidade relativa à fase molhante ficasse maior, ao mesmo tempo em que foi reduzida a saturação residual do mesmo fluido.

Bryant et al [72] reconstituíram um meio poroso e calcularam os valores de correlação espacial relativa à condutividade das gargantas e constataram que esta variável deveria ser tratada como espacialmente correlacionada. Em seguida, calcularam o fluxo monofásico em meios correlacionados e em outros isentos de correlação, constatando diferenças expressivas.

Por fim, sugerem que sejam aumentados os esforços para estimar a autocorrelação das propriedades do meio, para que possam ser utilizadas nos modelos de rede, gerando resultados mais confiáveis.

O objetivo primordial deste capítulo é analisar a influência dos parâmetros de correlação espacial sobre o fluxo de fluidos em meios porosos, utilizando os métodos analíticos e os modelos de percolação por invasão, este último modificado para representar regimes de fluxo em condições viscosas ou estáveis.

7.2 Métodos Analíticos

O emprego dos métodos analíticos descritos no capítulo anterior permite a avaliação da influência da correlação espacial sobre as curvas de pressão capilar e de permeabilidade relativa.

Foi analisada uma rede tridimensional com a mesma distribuição lognormal dos diâmetros de garganta de poro utilizada nos exemplos do Capítulo 6; a correlação espacial adotada é tal que o valor de p_c se reduz de 0,25 para 0,14, conforme descrito por Renault [47]. O resultado da aplicação do algoritmo de cálculo da pressão capilar, para este caso correlacionado, pode ser visualizado na Figura 7.5, associado ao resultado obtido com a mesma distribuição de diâmetros isenta de correlação.

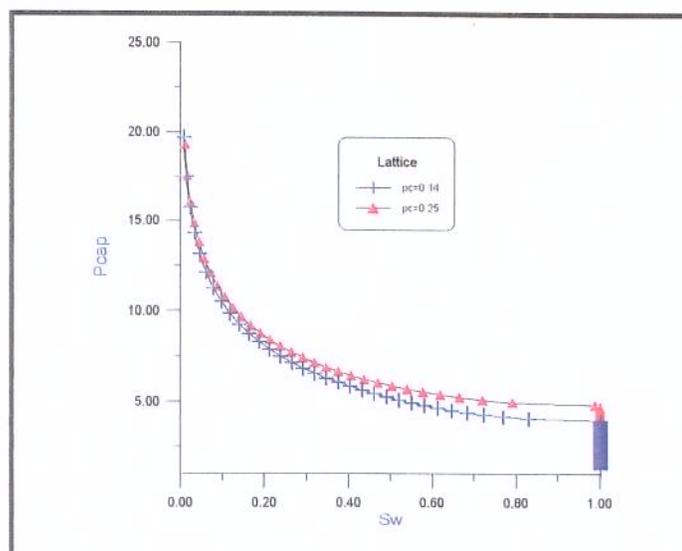


Figura 7.1 – Pressão Capilar em Redes Correlacionadas e não Correlacionadas calculada com os métodos analíticos baseados na Teoria da Percolação

As curvas de permeabilidade relativa, calculadas para as mesmas redes porosas anteriores, pelo método de Kadet e Seliakov [68] apresentado no Capítulo 6, também se mostram sensíveis à consideração da correlação espacial entre os diâmetros (figura 7.2).

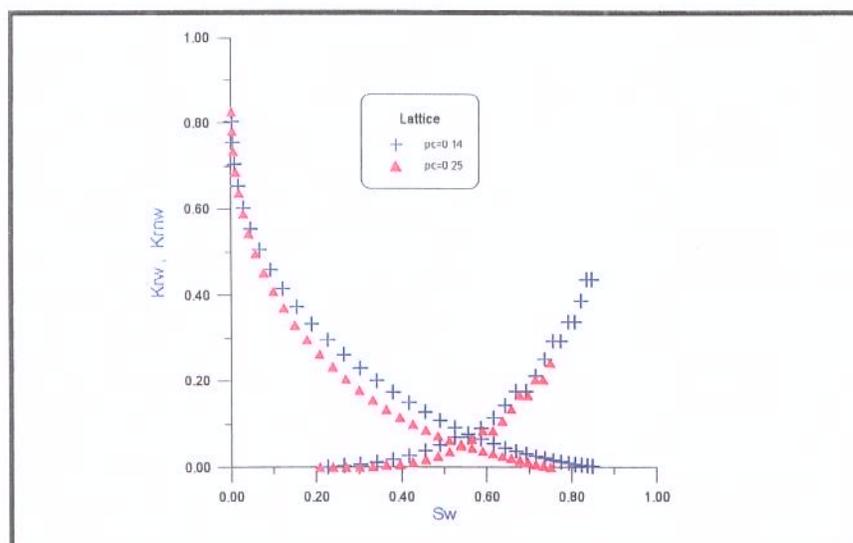


Figura 7.2 – Permeabilidade Relativa em Redes Correlacionadas e não Correlacionadas calculada com os métodos analíticos baseados na Teoria da Percolação

Embora os métodos analíticos sejam apenas aproximados, eles são capazes de indicar uma sensível diferença no comportamento das propriedades ligadas ao fluxo de fluidos, quando se considera a correlação espacial entre os diâmetros.

7.3 Percolação por Invasão

Foi verificada por Lenormand et al [58] a capacidade do modelo de percolação por invasão representar fluxo de fluidos em condições de predominância de forças capilares, fornecendo resultados similares em termos de perfil de deslocamento e saturações residuais. Deste modo, a influência da correlação entre os diâmetros sobre o deslocamento de fluidos em condições capilares pode ser observada com os modelos de percolação por invasão.

Utilizam-se para isto dois modelos: um deles sem correlação e o outro com autocorrelação do tipo exponencial, $A=100$, em redes de dimensões 200x200 células. Para cada caso, são procedidas 100 simulações de fluxo e medidas as saturações de fluido invasor (S_{NW}) quando ele atinge a fronteira oposta (*breakthrough*) e a saturação residual do fluido deslocado (S_{rd}). Os resultados mostram uma sensível alteração destes parâmetros quando se considera a correlação espacial entre os diâmetros (S_{nw} de 0,40 para 0,55 e S_{rd} de 0,36 para 0,20 em média). Este fato se justifica pelo maior agrupamento e continuidade entre os diâmetros de maior valor.

Para fazer com que o modelo de percolação por invasão representasse o fluxo também em condições viscosas ou estáveis (deslocamento pistão) foram impostas algumas modificações ao critério de invasão, através do parâmetro auxiliar denominado *diâmetro efetivo*: como o processo privilegia os maiores grãos em contato com a fronteira, cada diâmetro sofrerá uma modificação de valor a depender da sua posição em relação às fronteiras iniciais e finais, já que quanto maior a relação entre as viscosidades do invasor e do deslocado, maior o predomínio das forças viscosas e quanto menor a mesma relação mais estáveis são as condições de fluxo; a intensidade do fator que transforma o diâmetro em efetivo é regulada pela relação entre as viscosidades dos fluidos (M) e a relação destas com as forças capilares (C_V); esta relação de forças é que dita o regime a ser seguido pela frente de avanço. Assim, os fatores que modificam o diâmetro são ajustados para se tornarem proporcionais aos fatores M (razão de

mobilidades) e C_v (relação entre forças viscosas e capilares) utilizados por Lenormand et al [58] como indicativos do regime de fluxo.

Com estas modificações, foi possível testar a influência da correlação espacial utilizando a percolação por invasão em regimes de fluxo diferentes do capilar (figura 7.3).

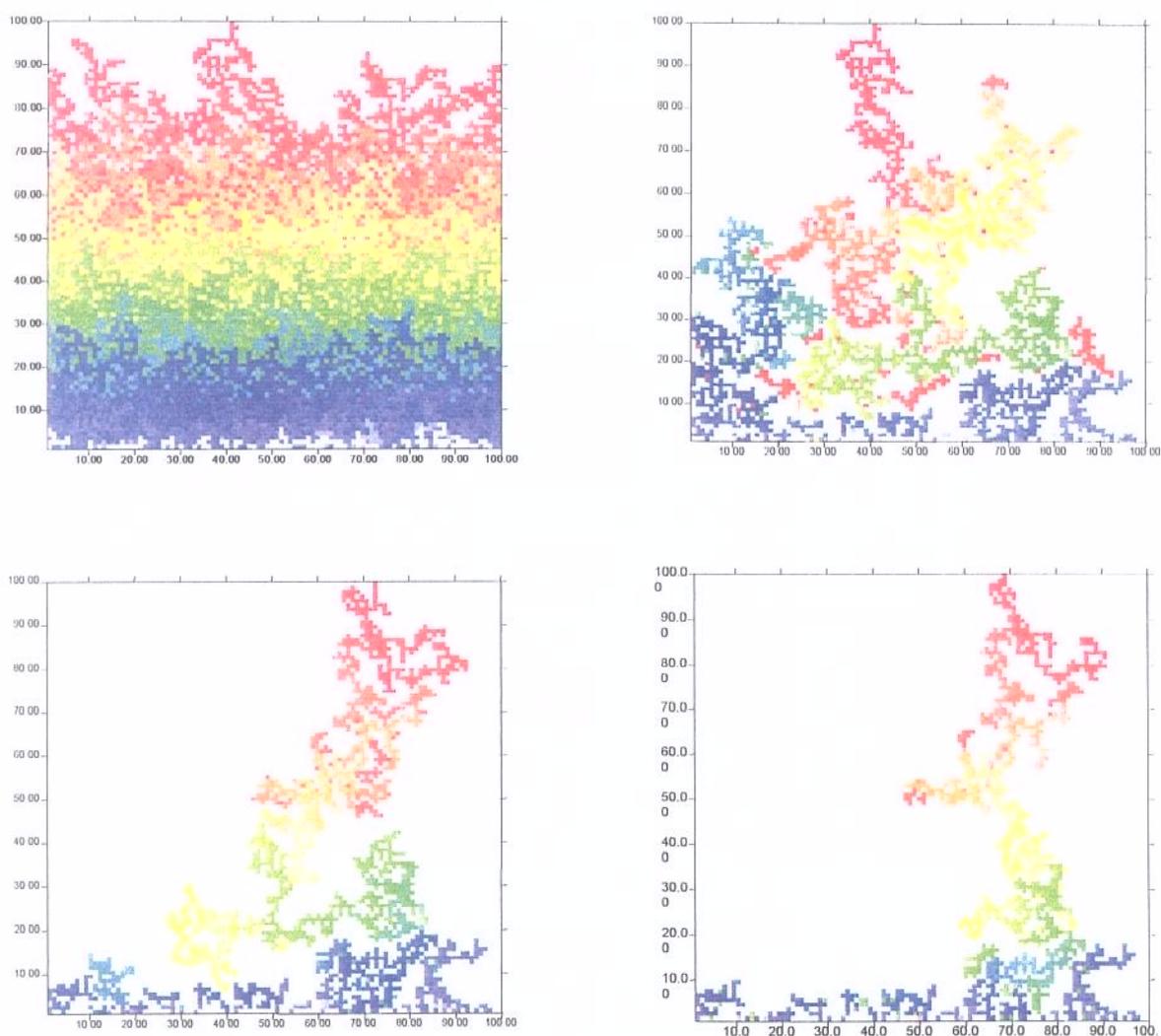


Figura 7.3 – Percolação por Invasão em diferentes regimes de fluxo: estável, capilar, intermediário e viscoso

Foram analisadas as respostas das redes correlacionadas e seu comportamento foi comparado à resposta de uma malha aleatória de mesmas dimensões. Os resultados obtidos

para os valores médios da saturação média do fluido invasor S_{NW} e da saturação residual do fluido deslocado S_{rd} estão resumidos nas Figuras 7.4 e 7.5.

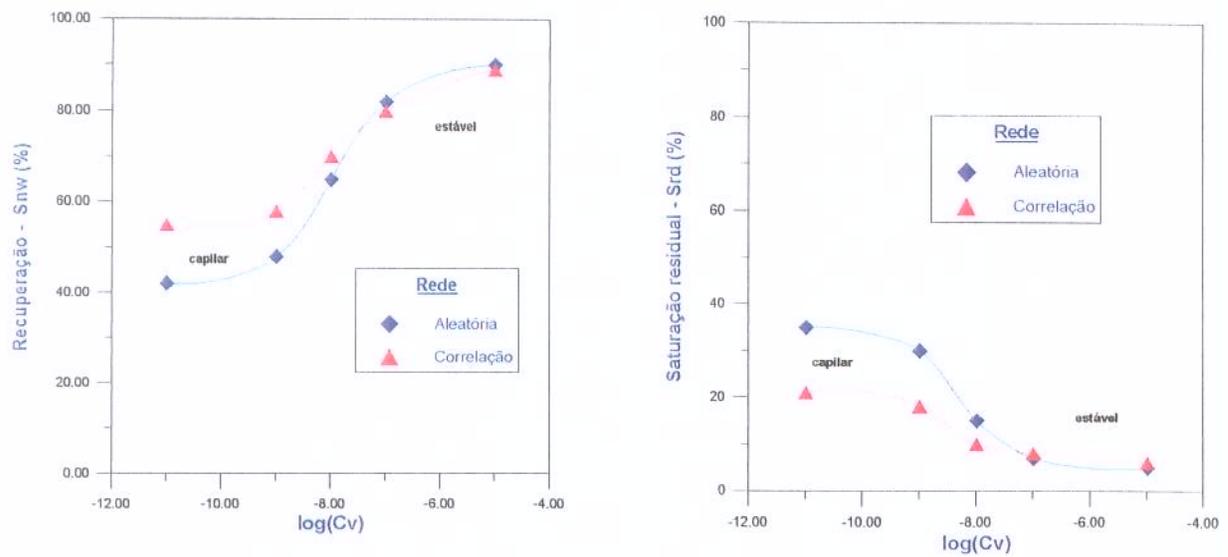


Figura 7.4 – Influência da Correlação espacial sobre parâmetros de fluxo em condições de baixa razão de mobilidades M

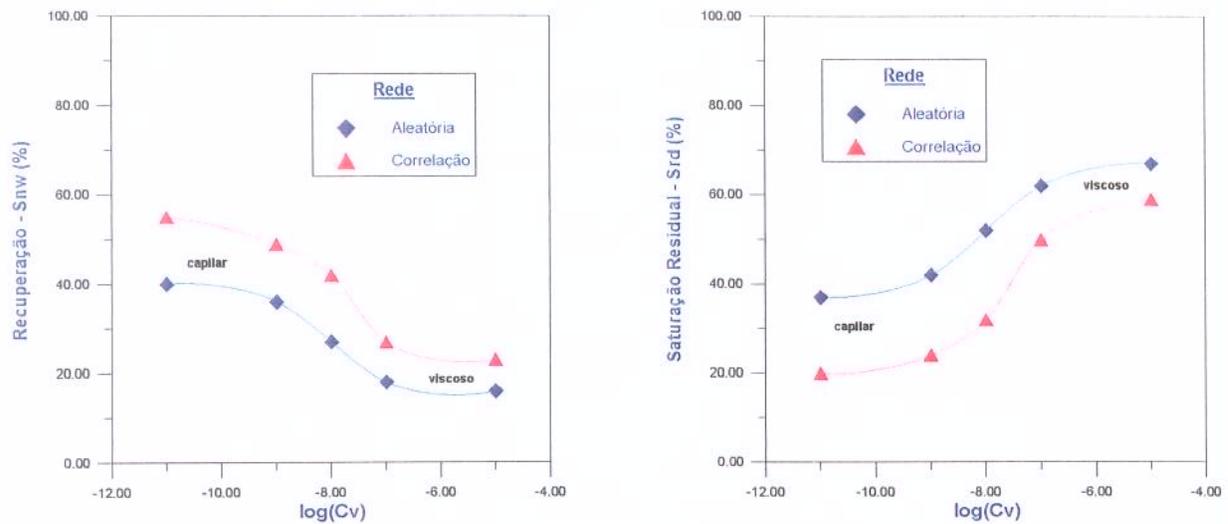


Figura 7.5 – Influência da Correlação espacial sobre parâmetros de fluxo em condições de alta razão de mobilidades M

Os resultados indicam uma sensibilidade à correlação espacial, qualquer que seja o regime de deslocamento, sendo mais intensa no fluxo capilar, menos intensa no fluxo viscoso e bastante reduzida em regime de deslocamento pistão. A saturação do fluido invasor no tempo de *breakthrough* é maior nos casos correlacionados, o que pode ser explicado por uma atração mais forte entre os maiores diâmetros. A saturação residual do fluido deslocado é menor nos casos correlacionados, que têm menor proporção crítica de percolação e conseqüentemente menor saturação abaixo da qual o fluxo é nulo (clusters desconexos).

Conclusões

Através deste trabalho, são aprofundadas as análises ligadas ao fluxo de fluidos em meios espacialmente correlacionados. A Teoria da Percolação mostra-se adequada à quantificação das características de comunicação interna em meios porosos. O capítulo inicial visou a fornecer as principais ferramentas necessárias à sua utilização.

À Teoria da Percolação, que representa a caracterização do fluxo, conjugaram-se os processos estocásticos Gaussianos e os campos aleatórios Markovianos, capazes de simular meios espacialmente correlacionados.

Foram analisadas as características de correlação espacial dos processos Markovianos binários (modelo de Ising) gerados com os algoritmos de Metropolis e Flinn. O modelo de correlação observado se mostrou ligado ao processo de geração do campo aleatório na seqüência Markoviana; constatou-se experimentalmente que as imagens geradas com algoritmo de Metropolis apresentam variograma exponencial, enquanto as imagens geradas com modelo de Flinn apresentam variograma exponencial modulado em frequência. O valor do alcance observado da correlação foi relacionado ao parâmetro atrativo; a relação observada empiricamente nas imagens simuladas com o algoritmo de Metropolis é coerente com a relação teórica desenvolvida neste trabalho.

Foi verificado que os processos Markovianos de múltiplas fácies apresentam grande flexibilidade na representação das diversas configurações de imagens, no tocante à transição entre as fácies e à anisotropia e são gerados com algoritmos simples e de fácil aplicação.

Os procedimentos Bayesianos de simulação condicionada utilizam algoritmos similares aos dos processos Markovianos e permitem a simulação sob condições mais complexas. Propiciam ainda a restauração de imagens sujeitas a ruído Gaussiano aditivo e quando se dispõe da leitura de uma variável secundária mais intensamente amostrada.

O estudo estatístico dos parâmetros da Teoria da Percolação nos processos correlacionados bidimensionais indicou uma forte sensibilidade não só ao domínio de correlação (ligado ao alcance), como também ao modelo variográfico e à discretização do sistema. O aumento do domínio de correlação facilita a percolação do meio, reduzindo a proporção crítica p_c até o limite de 0,50. Esta redução é mais rápida nos modelos parabólicos na origem (de maior continuidade), como os Gaussianos e mais lenta nos lineares na origem, como o exponencial e o esférico.

O alcance da correlação aumenta a conectividade e o tamanho dos componentes conexos. Relações empíricas, com base no domínio de correlação, permitem a adimensionalização de algumas equações, como as que descrevem o comportamento do comprimento conectivo e da variância do ponto crítico. O modelo de correlação, mais especificamente o seu comportamento na origem, tem forte influência sobre a conectividade. A discretização da malha altera consideravelmente os parâmetros conectivos do sistema até um limite em $A=20$, que equivale a um alcance de 7 células; a partir deste valor a discretização tem um efeito desprezível sobre a comunicação interna do sistema.

Nos processos Markovianos, a percolação é facilitada pelo aumento do parâmetro atrativo, que também é um indicativo de correlação espacial. Seu comportamento se mostrou bastante similar aos processos Gaussianos de variograma Gaussiano, os quais, ao serem truncados, passam a apresentar variograma exponencial. O limite de 0,50 para a proporção crítica, também observado nos experimentos com processos Markovianos, é teoricamente demonstrado para parâmetros de atração superiores ao valor crítico.

Num último momento, este trabalho verificou a influência da correlação espacial sobre o deslocamento de fluidos nas redes porosas; isto foi feito com a aplicação de modelos de percolação por invasão, apoiando-se também nos modelos analíticos desenvolvidos com

base na Teoria da Percolação convencional. Estes modelos analíticos indicaram um aumento considerável na permeabilidade relativa e redução na saturação residual da fase não molhante e também na curva de pressão capilar, ao se usarem redes correlacionadas. Os resultados observados na simulação de fluxo através da percolação por invasão indicaram que a correlação espacial altera fortemente as características de recuperação e deslocamento de fluidos, especialmente em condições de fluxo dominadas pelas forças capilares.

Referências Bibliográficas

1. BROADBENT S. R. e HAMMERSLEY, J. M.: "Percolation Process, Crystals and Mazes", Proc. Cambridge Philos. Soc. (1957) 53, 629-691.
2. SHANTE, V.K.S. e KIRKPATRICK, S.: "An Introduction to Percolation Theory", Advances in Physics (1971) 20, 325-357.
3. ESSAM, J.W.: "Percolation Theory", Rep. Prog. Phys. (1980) 43, 833-912.
4. STAUFFER, D.: "Introduction to Percolation Theory" - Taylor e Francis-London, (1985).
5. BERKOVITZ, B. e BALBERG, I.: "Percolation Theory and its Applications to Groundwater Hydrology", Water Resources Research (1993) 29, 775-794.
6. HAMMERSLEY, J.M. e WELSH, J.A.: "Percolation Theory and its Ramifications", Comtemp. Physics (1980) 21, 593-605.
7. FISHER, M.E.: "Infinite Cluster in Percolation Systems", J. Math. Phys. (1961) 2, 620.
8. ALABERT, F.G. e MODOT, V.: "Stochastic Models of Reservoir Heterogeneity: Impact on Connectivity and Average Permeability", paper SPE 24893 presented at the 1992 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Washington, DC, Oct. 4-7.
9. GRIMMETT, G.: "Percolation" – Springer-Verlag , (1989)
10. OLIVEIRA, P.M.C.: "Uma Teoria Matemática Descreve as Mudanças de Fase: o Exemplo da Percolação" Ciência Hoje (1983) 2(9), 17-25
11. KAPITULNIK, A., AHARONY, G.D., DEUTSCHER, G. E STAUFER, D.: "Self Similarity and Correlations in Percolation", J. Phys. A (1983) 16, L269-L274.
12. WILSON, G.K.: "Problems in Physics with Many Scales of Length", Scientific American (1979) 241, 140-157.
13. LAST, B.J. e THOULESS, D.J.: "Percolation Theory and Electrical Conductivity", Physical Review Letters (1971), 27(25), 1719-1721.
14. KIRKPATRICK, S.: "Percolation and Conduction", Reviews of Modern Physics

- (1973), 45(4), 574-588.
15. BERNASCONI, J.: "Real-Space Renormalization of Bond-Disordered Conductance Lattices", *Physical Review B* (1978), 18(5), 2185-2191.
 16. NORMAND, J.M., HERRMANN, H.J. e HAJJAR, M.: "Precise Calculation of the Dynamical Exponent of Two-Dimensional Percolation", *J. Stat. Physics* (1988), 52, 441-446.
 17. ALEXANDER, S. e ORBACH, R.: "Density of States on Fractals: Fractons", *Le Journal de Physique-Lettres* (1982), 43(17), L625-L631.
 18. DEUTSCH, C.: "Calculating Effective Absolute Permeability in Sandstones/shales Sequences", *SPE Form. Eval.* (1989), 4, 343-348.
 19. SILLIMAN, S.E. e WRIGHT, A.L.: "Stochastic Analysis of Path of High Hydraulic Conductivity in Porous Media", *Water Resour. Res.* (1988), 24(11), 1901-1910.
 20. DAVIS, M.: "Production of Conditional Simulations via the LU Triangular Decomposition of the Covariance Matrix", *Jour. Math. Geology* (1987) 19(2), 91-98.
 21. DAVIS, M.: "Generating Large Stochastic Simulation – the Matrix Polynomial Approximation Method", *Jour. Math. Geology* (1987) 19(2), 99-108.
 22. ALABERT, F.G.: "The Practice of Fast Conditional Simulation through the LU Decomposition of the Covariance Matrix", *Jour. Math. Geology* (1987) 19(5), 369-386.
 23. MONTGLOU, A. e WILSON, J.L.: "The Turning Bands Method for Simulation of random Fields Using Line Generation by a Spectral Method", *Water Resources Research* (1982) 18(5), 1379-1394.
 24. JOURNEL, A.G. e ALABERT, F.: "New Method for Reservoir Mapping", *Jour. Petroleum Technology* (1990), 42(2), 212-218.
 25. JOURNEL, A.G. e ISAACS, E.H.: "Conditional Indicator Simulation: Application to a Saskatchewan Uranium Deposit", *Jour. Math. Geology* (1984) 16(7), 685-718.
 26. JOURNEL, A.G. e POSA, D.: "Characteristic Behaviour and Order Relations for Indicator Variograms", *Jour. Math. Geology* (1990) 22(8), 1011-1026.
 27. GALLI, A., BEUCHER H., LE LOC'H, G. e DOLIGEZ, B.: "The Pros and Cons of the Truncated Gaussian Method, Proceedings of the Geostatistical Simulation Workshop (1994), 197-211 - Kluwer Academic Publishers.
 28. REMACRE, A.Z.: "Propriedades Básicas dos Indicadores", *Material Didático*, 1995.
 29. LANTUEJOL, Ch.: "Ergodicity and Integral Range", *J. Microscopy* (1991) 161, 387-403.
 30. FELLER, W.: "An Introduction to Probability Theory and its Application, v. 1 (3rd ed.), John Wiley & Sons, New York (1968), 509 p.

31. SPITZER, F.: "Markov Random Fields and Gibbs Ensembles", Amer. Math. Monthly (1971) 78, 142-154.
32. GEMAN, S. e GEMAN, D.: "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images", IEEE Trans. PAMI (1984) 6, 721-741.
33. BESAG, J. E.: "Nearest-neighbor Systems and the Auto-logistic Model for Binary Data", J. R. Statist. Soc. B.(1972), 34, 75-83.
34. BESAG, J.E.: "Spatial Interaction and the Statistical Analysis of Lattice Systems", J. R. Statist. Soc. B (1974) 36, 192-221.
35. BESAG, J.E.: "On the Statistical of Dirty Pictures", J. R. Statist. Soc. B (1974) 36, 192-221.
36. METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A.W., TELLER, A.H. and TELLER, E.: "Equations of State Calculations by Fast Computing Machines", J. Chem. Phys. (1953) 21, 1087-1092.
37. CROSS, G.C. e JAIN, A.K.: "Markov Random Field Texture Models", IEEE Trans. PAMI (1983) 5, 25-39.
38. FLINN, P.A.: "Monte Carlo of Phase Separation in a 2-dimensional Ising System", J. Statist. Phys. (1974)10, 89-97.
39. STRAUSS, D.J.: "Analysing Binary Lattice Data with the Nearest-Neighbor Property", J. Appl. Prob. (1975) 12, 702-712.
40. STRAUSS, D.J.: "Clustering on Coloured Lattices", J. Appl. Prob. (1977) 14, 135-143.
41. FRERY, A.C.: "Monte Carlo Determination of the Convergence Time of Two Cluster-Flip Algorithms in the Ising Model", Revista Brasileira de Fisica (1991) 21, 482.
42. BERGER, J.O: "Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis", 2nd ed., Springer-Verlag, New York (1985), 616p.
43. FREULON, X. e de FOUQUET, Ch.: "Conditioning a Gaussian Model with Inequalities", Proceedings of the Geostatistics TROIA'92 (1993), v.1,201-212- Kluwer Academic Publishers.
44. ALLARD, D.: "Simulation of Geologic Lithofacies with respect of Connectivity. Information Using the Truncated Gaussian Model", Proceedings of the Geostatistical Simulation Workshop (1994), 197-211 - Kluwer Academic Publishers.
45. WEBMAN, I. e JORTNER, J.: "Numerical Simulation of Electrical Conductivity in Microscopically Inhomogeneous Materials" Phys. Review B (1975) 11, 2885-2891.
46. BLUMBERG, R.L., SHLIFER, G. e STANLEY, H.E.: "Monte Carlo Tests of Universality in a Correlated-Site Percolation Problem", J. Phys. A (1980) 13, L147-L152.
47. RENAULT, P.: "The effect of Spatially Correlated Blocking-up Of some Bonds or

- nodes of a Network on The Percolation Threshold", *Transp. Porous Media* (1991) 6, 451-468.
48. ALLARD, D. e Heresim Group: "On the Connectivity of Two Random Set Models: the Truncated Gaussian and the Boolean", *Proceedings of the Geostatistics TROIA'92* (1993), v.1,223-230- Kluwer Academic Publishers.
 49. HOSHEN, J. e KOPELMAN, R.: "Percolation and Cluster Distribution, I, Cluster Multiple Labeling Technique and Critical Concentration algorithm", *Phys. Rev. B* (1976) 14, 3428.
 50. RIBEIRO, R.F. e ROMEU, R.K.: "Computing the Effetive Permeability by Finite Differences, Finite Elements, and Mixed-Hybrid Finite Elements", paper SPE 39068 (1997) presented at the Fifth Latin American and Caribbean and Petroleum Engineering Conference and Exhibition, Rio de Janeiro, Brazil, 30 August-3 September.
 51. CONIGLIO, A.C., NAPPI, C.R., PERUGGI, F. e RUSSO, L.: "Percolation Points and Critical Point in the Ising Model", *J. Fhys. A* (1977) 10, 205.
 52. FATT, I.: "The Network Models of Porous Media, I, Capillary Pressure Characteristics", *Trans. AIME* (1956), 207, 144-159.
 53. FATT, I.: "The Network Models of Porous Media, II, Dynamic Properties of a Single Size Tube Network", *Trans. AIME* (1956), 207, 160-163.
 54. FATT, I.: "The Network Models of Porous Media, III, Dynamic Properties of Network with Tube Radius Distributions", *Trans. AIME* (1956), 207, 164-177..
 55. CHATZIS, I. e DULLIEN F.A.L.: "Modeling of pore Structure By 2-D and 3-D Networks with Applications to Sandstones", *J. Can. Pet. Technol.* (1977) 16, 97-108.
 56. KOPLIK, J. e LASSETER, T.J.: "One and Two Phase Flow in Network Models of Porous Media", *Chem. Eng. Comm.* (1984) 26, 285-295
 57. DIAS, M.M. e PAYATAKES, A.C.: "Network Models for Two Phase Flow in Porous Media", *J. Fluid Mech.* (1986) 164, 305.
 58. LENORMAND, R., TOUBOUL, E. e ZARCONE, C.: "Numerical Models and Experiments on Immiscible Displacements in Porous Media", *J. Fluid Mech.* (1988) 189, 165-187.
 59. BLUNT, M. e KING, P.: "Relative Permeabilities For Two- and Three-Dimensional Pore-Scale Network Modeling", *Transp. Porous Media* (1991) 6, 407-433.
 60. CHANDLER, R., KOPLIK, J., LERMAN, K. e WILLEMSSEN, J.F.: "Capillary Displacement and Percolation in Porous Media", *J. Fluid Mech.* (1982) 1119, 249-267.
 61. WILKINSON, D. e WILLEMSSEN, J.F.: "Invasion Percolation: A New Form Of Percolation Theory", *J. Phis. A* (1983) 16, 3365-3376.
 62. LENORMAND, R. e ZARCONE, C.: Invasion Percolation in na Etched Network:

- Mesurement of a Fractal Dimension”, *Physical Review Letters* (1985), 54(20), 2226-2229.
63. DIAS, M.M. e WILKINSON, D.: “Percolation with Trapping”, *J. Physics A* (1986) 19, 3131-3146.
 64. FURUNBERG, L., FEDER, J., AHARONY, A. e JOSSANG, T.: “Dynamics of Invasion Percolation”, *Physical Review Letters* (1988), 61(18), 2117-2120.
 65. WITTEN, T.A. e SANDER, L.M.: “Diffusion-limited Aggregation”, *Phys. Review B* (1983), 27(9), 5686-5697.
 66. PATERSON, L.: “Diffusion-limited Aggregation and Two-fluid Displacement in Porous Media”, *Physical Review Letters* (1984), 52, 1621-1624.
 67. WILKINSON, D.: “Percolation Effects in Immiscible Displacement”, *Phis. Review A* (1986) 34, 1380-1391.
 68. KADET, V.V. e SELIAKOV, V.I.: “Percolation Model of Two Phase Flow through Porous Media”, *Izv. Akad. Nauk SSSR* (1987) 1, 88.
 69. WARDLAW, N.C., LI, Y. e FORBES, D.: “Pore-Throat Size Correlation from Capillary Pressure Curves”, *Transp. Porous Media* (1987) 2, 597-614.
 70. CONSTANTINIDES, G.N. e PAYATAKES, A.C.: “A Three Dimensional Network Model for Consolidated Porous Media. Basic Studies”, *Chem. Eng. Comm.* (1989), 81, 55-81.
 71. JERAULD, G.R. e SALTER, S.J.: “The Effect of Pore Structure On Histeresis in Relative Permeability and Capillary Pressure: Pore Level Modeling”, *Transp. Porous Media* (1990) 5, 103-151.
 72. BRYANT, S.L., KING, P.R. e MELLOR, D.W.: “Network Model Evaluation of Permeability and Spatial Correlation in a Real Random Sphere Packing”, *Transp. Porous Media* (1993) 11, 53.
 73. MATHERON, G.: “The Internal Consistency of Models in Geostatistics”, in M. Armstrong (org.)- *Geostatistics – Kluwer Academic Publishers* (1989) vol. 1, 21-38.
 74. CUNHA, C.: “Métodos Numéricos”, Ed. da Unicamp – Campinas, 1993.
 75. FERNANDES, C.P., MAGNANI, F.S., PHILIPPI, P.C. e DAIAN, J.F.: “Multiscale geometrical reconstruction of porous structures”, *Physical Review E* (1996), 54(1), 1-8.
 76. BALLIN, P.R, JOURNEL, A.G. e AZIZ, K.: “Prediction of Uncertainty in Reservoir Performance Forecast”, *J. Can. Pet. Technology* (1992) 31, 52-62.
 77. RIVOIRARD, J.: “Le Comportement des poids de krigeage”, *Thèse Docteur* (1984), Fontainebleau, École des Mines de Paris.

ANEXO A

Variograma e domínio de correlação da variável indicatriz

Será aqui apresentado o comportamento da correlação espacial da variável Gaussiana contínua e de sua respectiva indicatriz obtida por truncamento. Também será discutida a relação entre os valores do domínio de correlação A antes e depois do truncamento.

A.1 Comparação entre os variogramas

O variograma da indicatriz relaciona-se ao variograma da variável Gaussiana contínua, usada como base, através da equação:

$$\gamma_I(h, z_c) = p - L(z_c, z_c, 1 - \gamma_Z(h)) \quad (\text{A.1})$$

sendo

$$L(z_c, z_c, 1 - \gamma_Z(h)) = p(Z(x) > z_c, Z(x+h) > z_c) \quad (\text{A.2})$$

a equação da distribuição de probabilidade normal bivariada.

O desenvolvimento apresentado por Matheron [73] permite que os parâmetros anteriores sejam relacionados com auxílio dos polinômios de Hermite:

$$C_I(h, z_c) = g^2(z_c) \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{H_{n-1}^2(z_c) \cdot \rho^n(h)}{n!} \quad (\text{A.3})$$

A equação anterior, após desenvolvimento, resulta na caracterização do variograma da indicatriz como tendo um comportamento igual à raiz quadrada do variograma da variável contínua. Para verificar experimentalmente esta relação foram utilizados os variogramas medidos em 100 imagens geradas com o algoritmo de Simulação Gaussiana Seqüencial, e sua indicatriz truncada na proporção 0,50.

O gráfico da Figura A.1, a seguir, apresenta em pontos azuis o semivariograma médio das 100 realizações da variável contínua, cujo semivariograma preestabelecido foi:

$$\gamma(h) = 1 - \exp(-3h/12)$$

A curva contínua em vermelho é traçada com esta equação, em pleno acordo com o observado.

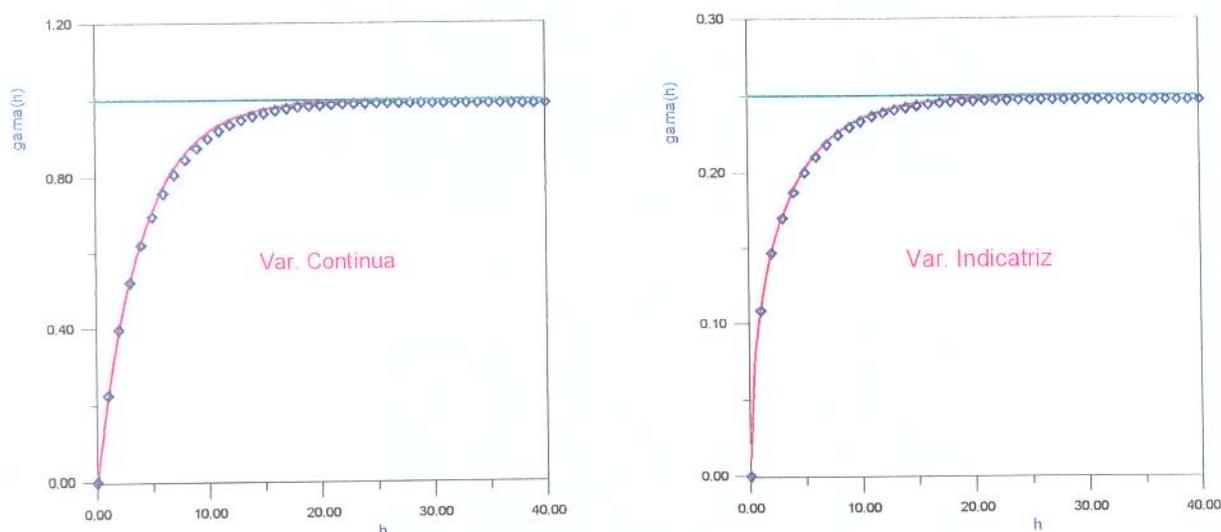


Figura A.1 – Semivariogramas médios das variáveis contínua e indicatriz simuladas com o modelo exponencial

Na figura à direita, apresenta-se o semivariograma médio observado para a variável indicatriz. A curva contínua é traçada segundo a raiz quadrada da equação anterior, de acordo com o desenvolvimento teórico de Matheron [73]; a concordância é excelente.

A Figura A.2 representa o mesmo procedimento para uma variável contínua com modelo de correlação de Gaussiano cuja equação é:

$$\gamma(h) = 1 - \exp(-3h^2/7)$$

Sabe-se que próximo à origem esta curva é parabólica, crescendo proporcionalmente a h^2 . O semivariograma da indicatriz, sendo aproximadamente a raiz quadrada do semivariograma base, será linear próximo à origem, com comportamento semelhante ao modelo exponencial.

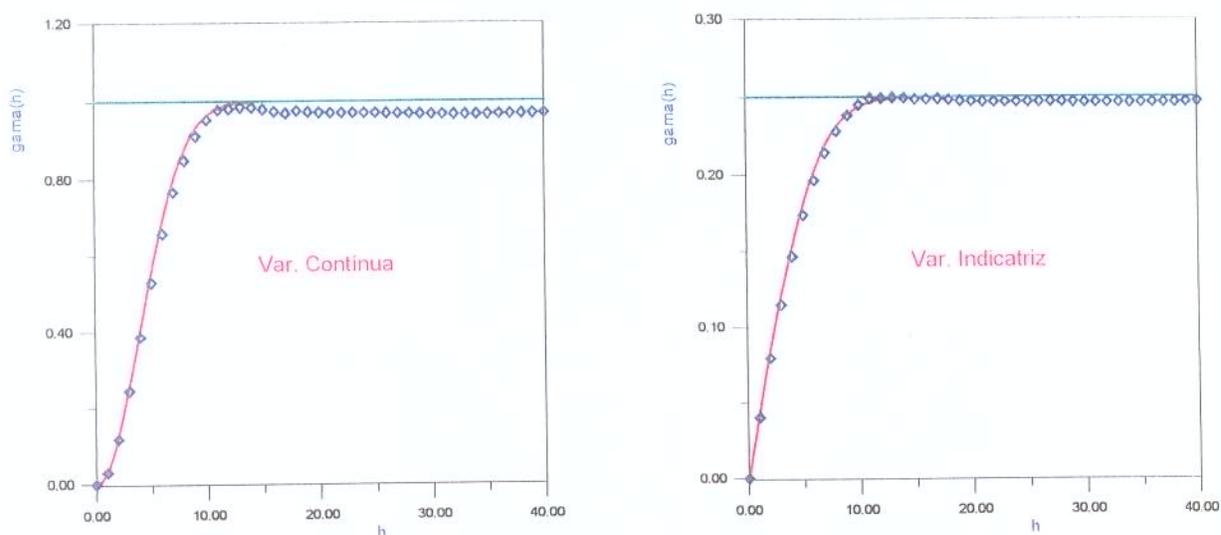


Figura A.2 – Semivariogramas médios das variáveis contínua e indicatriz simuladas com o modelo Gaussiano

Observa-se, também neste caso, uma concordância entre os valores teórico e prático do semivariograma da variável truncada.

A.2 Variabilidade dos semivariogramas

Analisando agora a variância dos semivariogramas observados em relação ao valor teórico de entrada, percebe-se que a variabilidade é bem menor no caso da variável indicatriz, se comparado com a variável contínua:

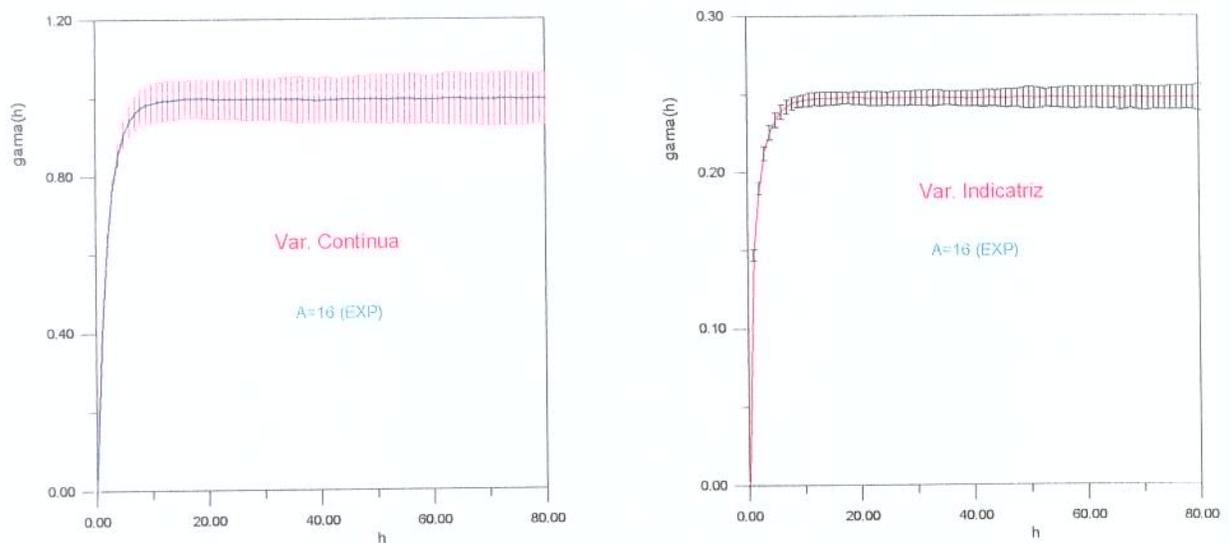


Figura A.3 – Variabilidade dos semivariogramas das variáveis contínua e indicatriz simuladas com o modelo exponencial ($A=16$)

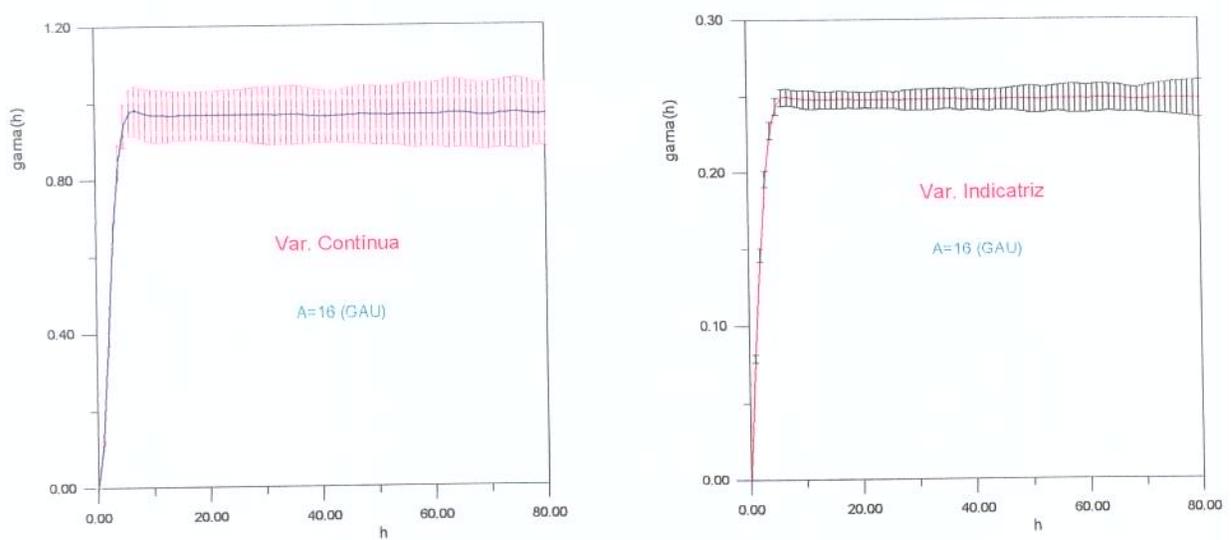


Figura A.4 – Variabilidade dos semivariogramas das variáveis contínua e indicatriz simuladas com o modelo Gaussiano ($A=16$)

Além disso, se o domínio de correlação A é o mesmo, a variabilidade dos semivariogramas é aproximadamente a mesma, qualquer que seja o modelo. Pode-se também observar que a variabilidade dos semivariogramas é maior quanto maior for o valor de A , qualquer que seja o modelo.

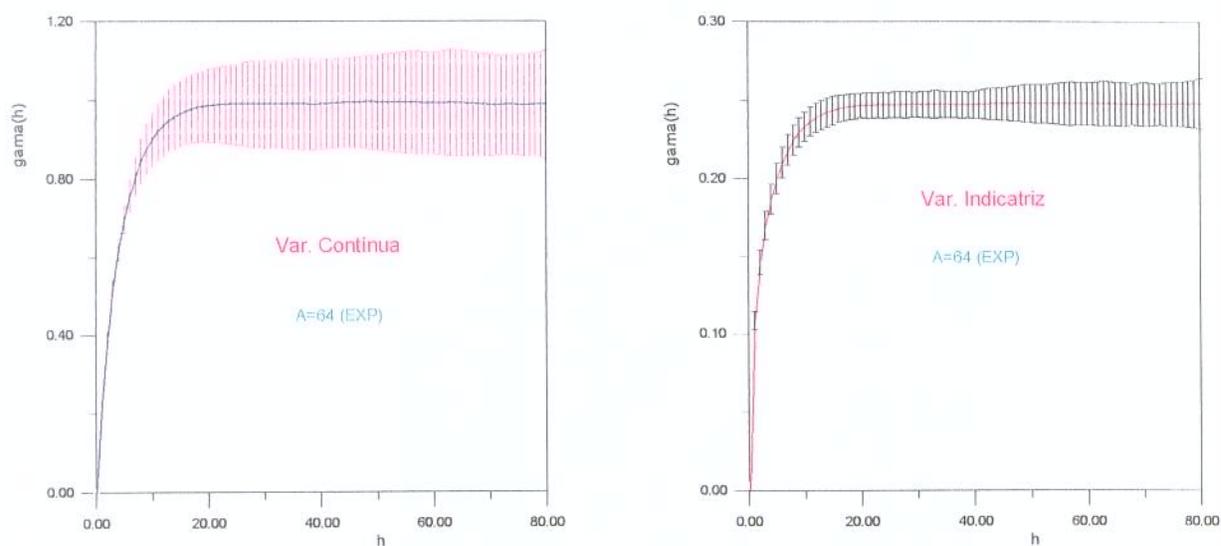


Figura A.5 – Variabilidade dos semivariogramas das variáveis contínua e indicatriz simuladas com o modelo exponencial ($A=64$)

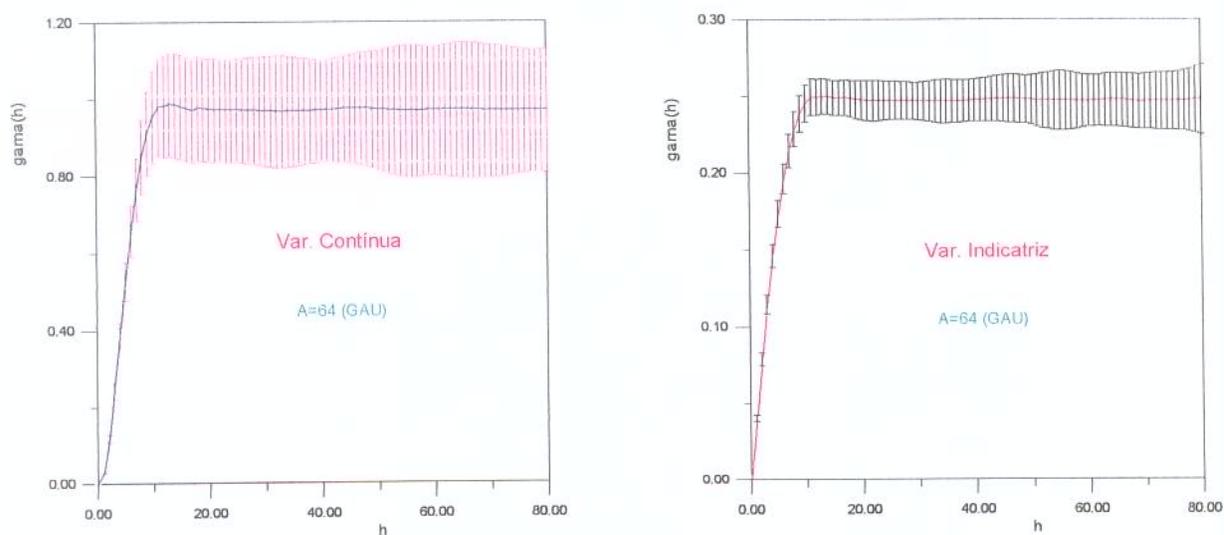


Figura A.6 – Variabilidade dos semivariogramas das variáveis contínuas e indicatriz para $A=64$, no modelo Gaussiano

A.3 Domínio de Correlação A

O domínio de correlação é calculado pela integral da covariância, como mostrado no Capítulo 3, equação (3.27). Utilizando a equação (A.3) que relaciona as correlações das variáveis contínuas e truncadas, é possível calcular, com auxílio dos polinômios de Hermite, a relação entre os domínios de correlação das variáveis contínua A_c e truncada A em função da proporção de truncamento p . Alguns valores teóricos de A/A_c são mostrados na figura a seguir.

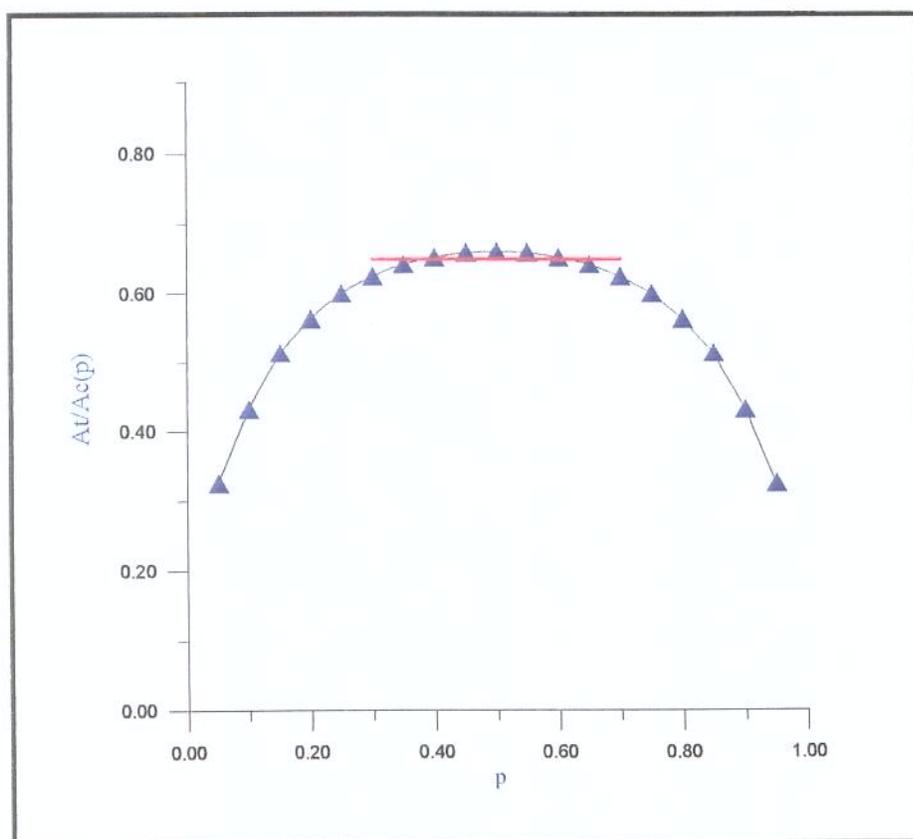


Figura A.7 – Relação entre os parâmetros A_c e A das variáveis contínuas em função da proporção de truncamento p

Observa-se que a relação é praticamente constante no intervalo entre as proporções 0,30 e 0,70 onde se aplicam as análises dos parâmetros da Teoria da Percolação. Por esse motivo o alcance a fixado na variável contínua propicia um valor esperado de A praticamente fixo na variável truncada.

Em cada uma das 100 imagens simuladas foi obtida a correlação observada, e por meio dela foram calculados numericamente os valores de A_c (variável contínua) e A (variável truncada). Utilizou-se na integração o método de Simpson e quando necessária a interpolação parabólica nas distâncias não inteiras, métodos numéricos estes aplicados de acordo com Cunha [74].

Os valores médios observados se apresentam bastante próximos aos valores teóricos da curva anterior. A variabilidade (medida pelo desvio padrão) aumenta com o valor de A , sendo menor na variável truncada que na contínua (aproximadamente a metade) como mostra a tabela abaixo.

Tabela A.1 – Desvio padrão de A e A_c nos processos Gaussianos

A_c	A	$\sigma(A_c)$	$\sigma(A)$
25	16	6,5	3,1
100	64	25,5	12,4
400	256	52,7	25,7

ANEXO B

Função Conectividade e Autocorrelação

A função conectividade $g(h)$, definida no Capítulo 2, reflete a probabilidade de dois pontos, situados a uma certa distância, terem valores iguais e pertencerem ao mesmo cluster. Percebe-se que ela tem maior significado que a função de autocorrelação, que indica apenas a probabilidade de dois pontos terem valores iguais.

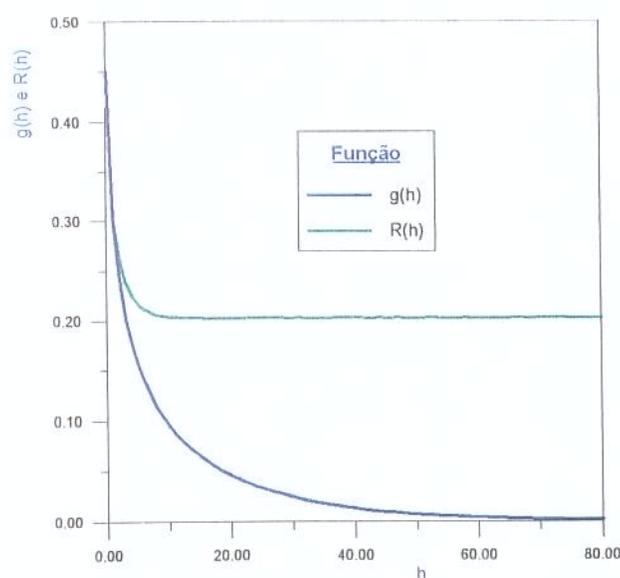


Figura B.1 – Função conectividade $g(h)$ e função de autocorrelação $R_c(h)$ – aspecto geral

Alguns autores apresentam a definição desta função de uma forma um pouco diferente, mas que não altera a sua essência e seu significado: na definição original, apresentada em Grimmett [9] e discutida em Fernandes et ali [75] a conectividade $g(h)$ representa a probabili-

dade de dois pontos serem ativos e pertencerem ao mesmo cluster, conforme já apresentado na equação (2.3). Na definição alternativa a conectividade $g1(h)$ representa a probabilidade de um ponto, localizado a uma certa distância de um ponto ativo, pertencer ao mesmo cluster. As duas funções têm o mesmo aspecto, com $g1(h)$ valendo aproximadamente $g(h)/p$, e tendo a particularidade de valer 1 na origem ao invés de p ; isto facilita as comparações quando as proporções são diferentes e permite a análise da função como uma probabilidade normada; por outro lado, torna-se imprópria a comparação com a função de autocorrelação, que também vale p na origem, devendo ser usada a definição original. A Figura B.2 abaixo ilustra a diferença entre as duas definições.

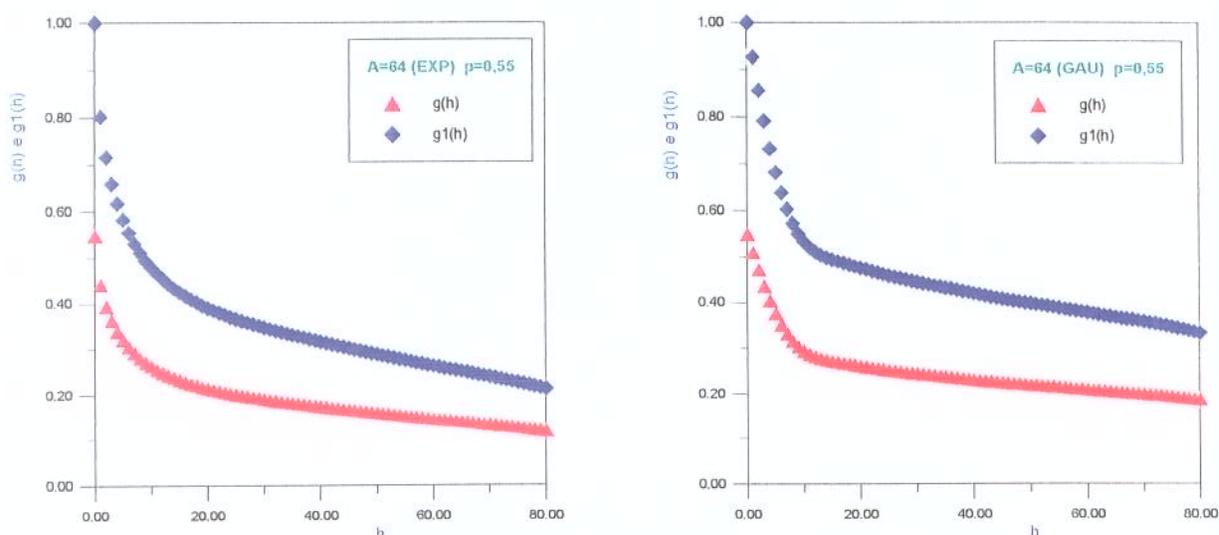


Figura B.2 – Diferença entre as definições da função conectividade; à esquerda um caso com modelo exponencial, à direita com modelo Gaussiano

Conforme foi analisado no Capítulo 5, a elevação na proporção p de 0,45 para 0,55 aumenta substancialmente a comunicação interna do sistema. As Figuras B.3 e B.4 a seguir mostram que as curvas de conectividade (em azul) refletem esta variação, enquanto a autocorrelação sofre uma simples translação.

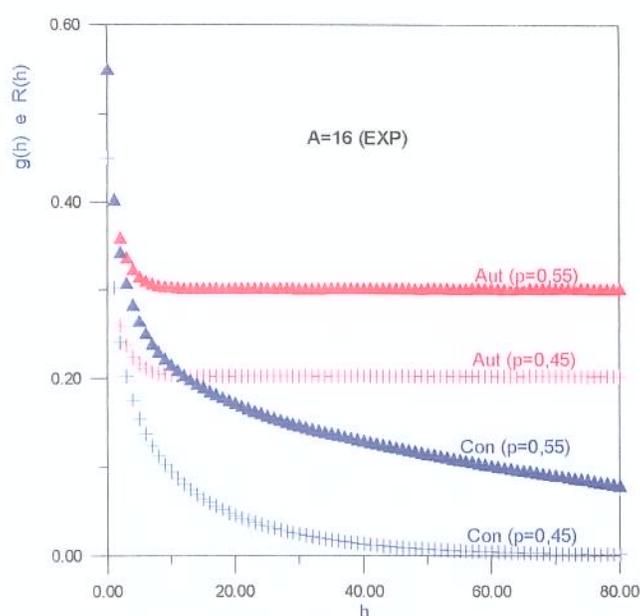


Figura B.3 – Função conectividade e função de autocorrelação em modelo exponencial com $A=16$ nas proporções $p=0,45$ e $0,55$

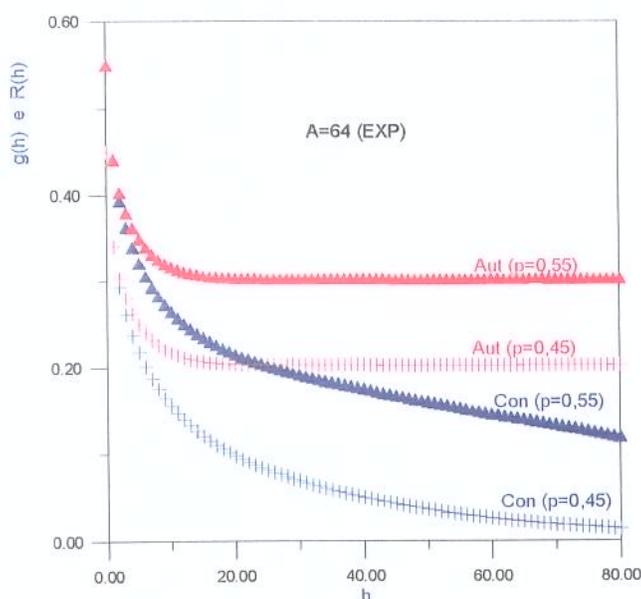


Figura B.4 – Função conectividade e função de autocorrelação em modelo exponencial com $A=64$ nas proporções $p=0,45$ e $0,55$

A alteração no modelo de correlação espacial é também um fator de grande importância no tocante ao comportamento do meio; suas curvas de autocorrelação, no entanto, apresentam diferenças pouco marcantes, enquanto as curvas de conectividade refletem melhor esta sensibilidade, tanto para as menores quanto para as maiores distâncias.

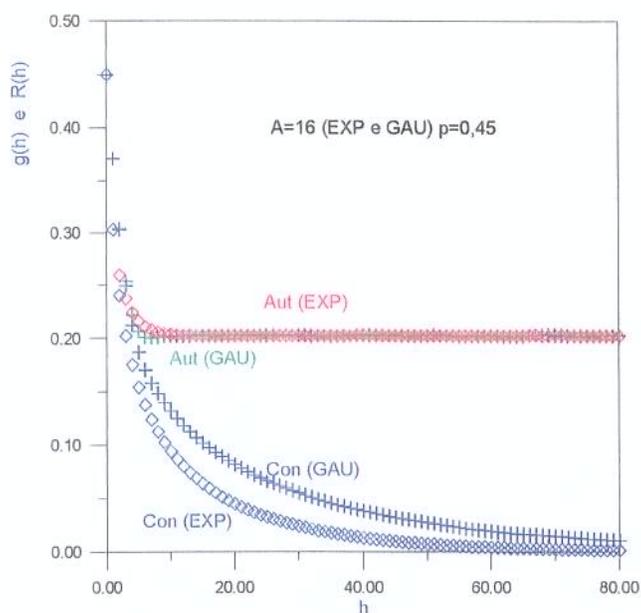


Figura B.5 – Função conectividade e função de autocorrelação para os modelos exponencial e Gaussiano com $A=16$ e $p=0,45$

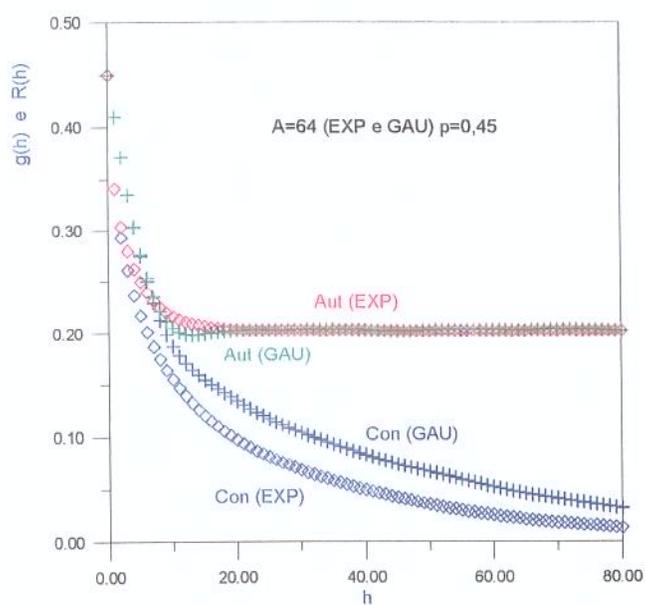


Figura B.6 – Função conectividade e função de autocorrelação para os modelos exponencial e Gaussiano com $A=64$ e $p=0,45$

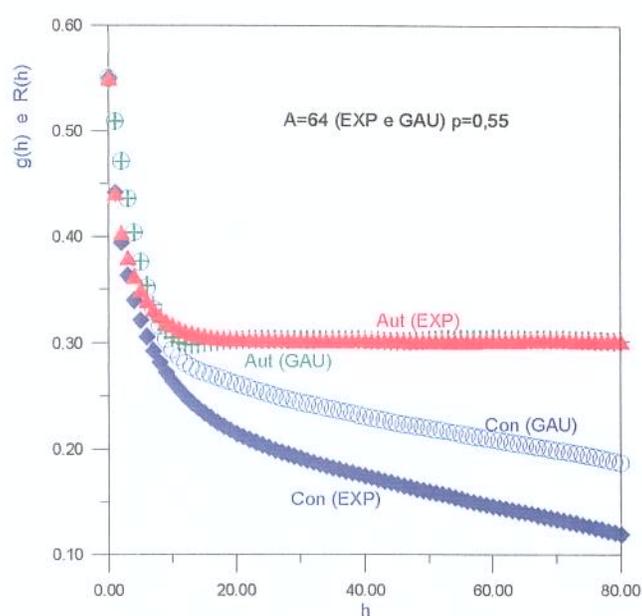


Figura B.7 – Função conectividade e função de autocorrelação para os modelos exponencial e Gaussiano com $A=64$ e $p=0,55$

Da mesma forma, um aumento no alcance α provoca uma alteração que é mais perceptível através da função conectividade, principalmente nas maiores distâncias.

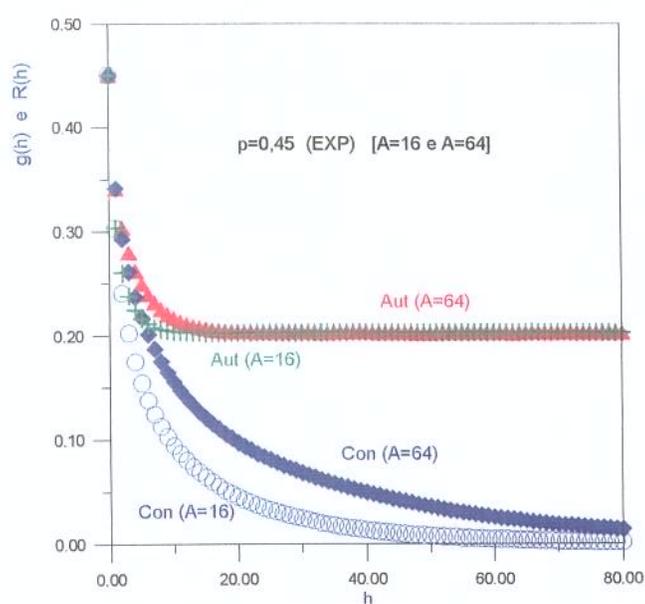


Figura B.8 – Função conectividade e função de autocorrelação para o modelo exponencial com $p=0,45$ e $A=16$ e $A=64$

Outro detalhe interessante se refere à sensibilidade à discretização e ao fator de escala, os quais, conforme discutido no Capítulo 5, alteram o comportamento da função conectividade e conseqüentemente da resposta ao fluxo, mas não provoca efeito algum sobre a autocorrelação.

A variabilidade da função conectividade é maior que a da autocorrelação, indicando uma não unicidade das imagens: podem estar sendo simuladas imagens cujo semivariograma é fiel ao valor estabelecido, mas apresentando conectividade com uma diferença significativa, o que reflete em maiores incertezas em termos de fluxo e recuperação de fluidos. Esta não unicidade foi observada no trabalho de Fernandes et al [75], que simulou uma variável binária representando o meio poroso, obtendo correlação espacial compatível com a amostra real, mas com função conectividade divergindo bastante desta amostra base.

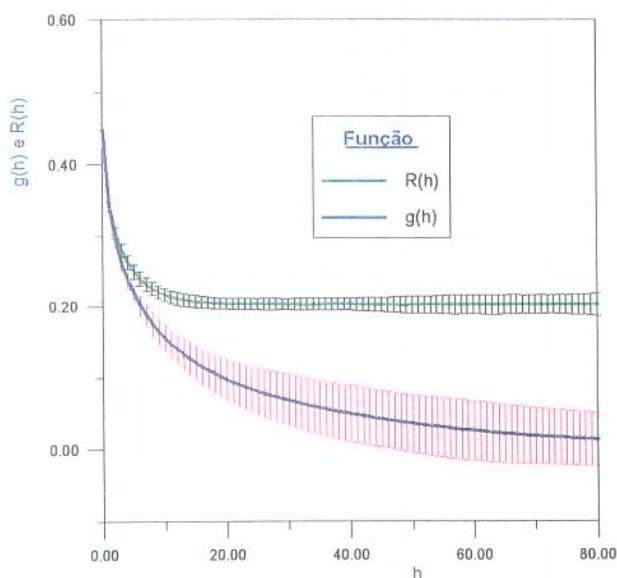


Figura B.9 – Variabilidade da função conectividade e da função de autocorrelação para o modelo exponencial com $p=0,45$ e $A=64$, com 95% de significância

Percebe-se que esta função trata de pontos ou distâncias entre pontos com maior ou menor probabilidade de estarem comunicados ou conexos. Embora represente, por definição, uma ligação entre variáveis discretas, é perfeitamente possível a utilização desta função em variáveis contínuas, desde que procedidos os truncamentos necessários. Por exem-

plo, poderia ser verificada a conectividade entre permeabilidades de alto valor, superior a um determinado limite, de forma semelhante à proposta na definição de K_{LIM} , feita nos capítulos 2 e 5.

Assim, pode-se propor um critério de adoção de espaçamento em malha de produção ou produção e injeção. Por exemplo, o espaçamento mínimo seria adotado como aquele que correspondesse a uma probabilidade de conexão de 70% do valor da função de origem: seria equivalente a adotar a distância correspondente a $g_1(h)=0,70$ na segunda definição da função conectividade.

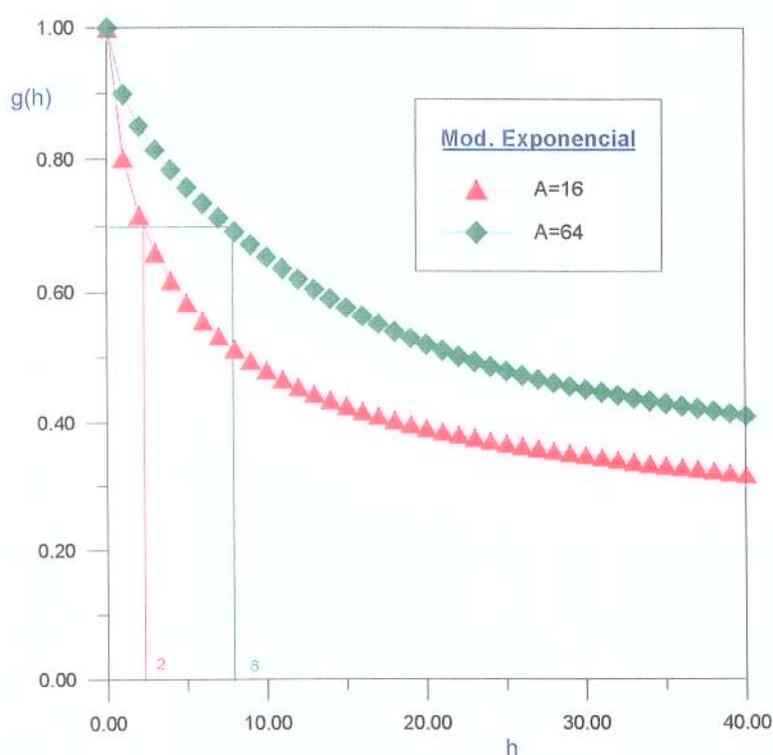


Figura B.10 – Adoção do espaçamento (em número de células) entre os poços com base na função conectividade $g_1(h)$

Assim, o espaçamento necessário é maior quanto maior o alcance da correlação, quanto maior a proporção, quanto mais contínua for a variável, em suma quanto mais favorável for a conectividade.

Outra aplicação interessante é o ranqueamento das imagens simuladas, utilizando como base a função conectividade; este procedimento visa à captação da variabilidade do parâmetro de recuperação de fluidos, utilizando um número reduzido de simulações de fluxo, num procedimento análogo ao utilizado por Ballin et al [76].

ANEXO C

Efeito de Filtragem – uma propriedade Markoviana

A estimativa do valor de uma variável em um determinado ponto pode ser obtida com auxílio dos valores conhecidos em pontos vizinhos, utilizando a correlação espacial previamente conhecida ou estimada.

$$Z^*(x) = \sum_i \lambda_i \cdot Z(x_i)$$

A estimativa de variância mínima é comumente denominada de krigagem. A krigagem ordinária, utilizada quando não se conhece a esperança da variável, possui a condição de não viés, pela qual a soma dos pesos deve ser igual à unidade. Quando é conhecida a esperança, esta condição não é necessária e a estimativa é denominada krigagem simples.

Os pesos λ calculados na estimativa são em geral maiores para os pontos situados a menores distâncias; este efeito, sob determinadas condições torna-se extremo a ponto de anular os pesos atribuídos aos pontos mais afastados, fenômeno que se denomina efeito de filtragem (*screen effect*) [77].

Como exemplo, são apresentados a seguir, para uma uma malha bidimensional, os pesos calculados nos pontos vizinhos, cujos valores são supostamente conhecidos. Para um modelo exponencial (Figura C.1) de alcance a respectivamente igual a 3, 5 e 10, os pesos calculados são:

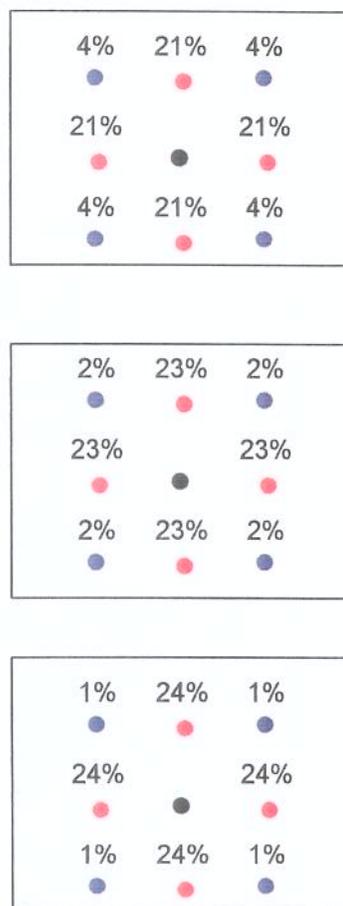


Figura C.1 –Pesos de krigagem ordinária com variograma exponencial de alcances respectivamente iguais a 3, 5 e 10

Os pontos que compõem a vizinhança em torno dos pontos apresentados nas figuras tiveram peso calculado aproximadamente igual a zero. O mesmo procedimento se realiza para o modelo esférico e para o modelo raiz quadrada de um Gaussiano (discutido no Anexo A), que representa o variograma da indicatriz de um processo contínuo de variograma Gaussiano. Nos dois casos os pesos foram aproximadamente iguais:

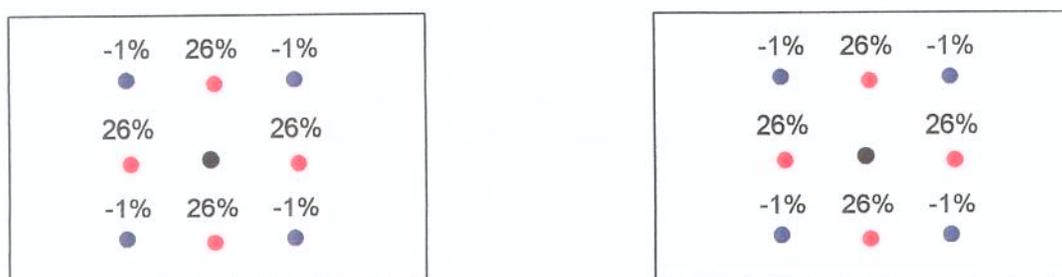


Figura C.2 –Pesos de krigagem ordinária com variograma esférico (à esquerda) e variograma raiz de um Gaussiano (à direita) ambos com alcance igual a 5

Já para o modelo exponencial fatorizado os pesos calculados foram:

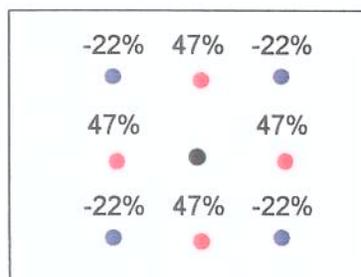


Figura C.3 –Pesos de krigagem ordinária com variograma exponencial fatorizado de alcance igual a 5

E o modelo Gaussiano fornece os pesos apresentados a seguir, para dois tipos de vizinhança.



Figura C.4 –Pesos de krigagem ordinária com variograma Gaussiano de alcance igual a 5 e dois tipos de vizinhança

Percebe-se claramente um forte efeito de filtragem nos modelos de correlação exponencial, esférico e raiz quadrada do Gaussiano com os pesos de krigagem sendo atribuídos apenas aos quatro vizinhos mais próximos, apresentando assim uma notável propriedade Markoviana; este efeito não é destacado para o modelo exponencial fatorizado.

Consideram-se agora as estimativas feitas numa seção vertical (*cross section*) as quais utilizam os valores amostrados nos poços perfurados. Neste caso, não se dispõe de amostra nos vizinhos localizados acima e abaixo do ponto estimado. Este tipo de estimativa feita com modelo exponencial forneceu:

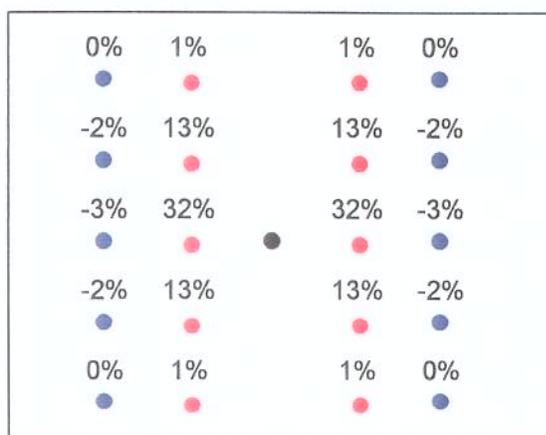


Figura C.5 –Pesos de krigagem ordinária com variograma exponencial de alcance igual a 5 para uma seção vertical

Os modelos lineares na origem apresentaram comportamento idêntico ao da figura anterior, exceção ao modelo exponencial fatorizado, com o qual calcularam-se os seguintes pesos:

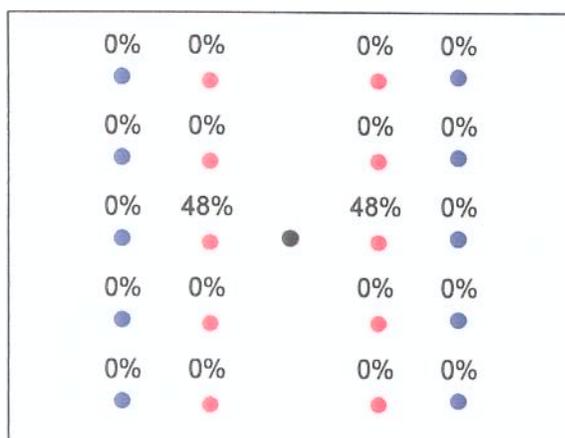


Figura C.6 –Pesos de krigagem ordinária com variograma exponencial fatorizado de alcance igual a 5 para uma seção vertical

Pode-se observar que, com este modelo, são atribuídos pesos apenas aos dois vizinhos mais próximos no caso bidimensional e aos quatro vizinhos mais próximos num caso hipotético tridimensional.

O modelo Gaussiano, conforme esperado, não apresentou efeito de filtragem significativo:

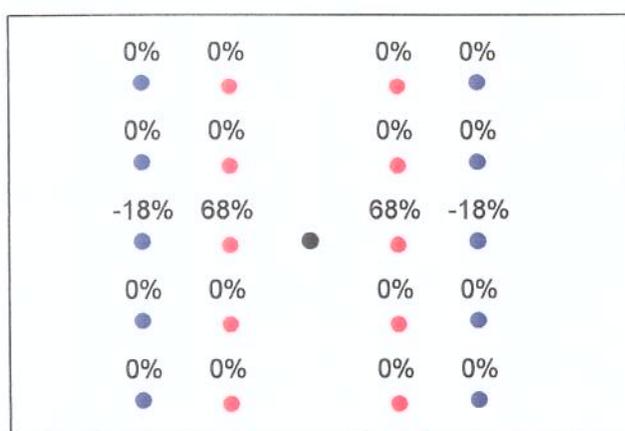


Figura C.7 –Pesos de krigagem ordinária com variograma Gaussiano de alcance igual a 5 para uma seção vertical

Assim, para as malhas bidimensionais representativas do plano horizontal, estudadas ao longo deste trabalho, as propriedades Markovianas se manifestam mais intensamente nos modelos isotrópicos de comportamento linear próximo à origem, como o exponencial, o esférico e o raiz quadrada do Gaussiano. Apenas para as estimativas em seção vertical (Figuras C.5 a C.7) o modelo exponencial fatorizado apresenta um forte efeito de filtragem, não observado nos demais modelos, mesmo os de comportamento linear próximo à origem.