

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR WALTER JESÚS PAUCAR
CASAS E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 02 / 04 / 1998

Renato Pavanello
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Concepção Ótima de Sistemas Elasto- Acústicos Interiores Acoplados

**Autor: Walter Jesús Paucar Casas
Orientador: Renato Pavanello**

04/98

P28c

34545/BC

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

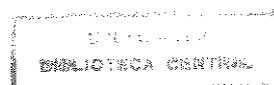
Concepção Ótima de Sistemas Elasto- Acústicos Interiores Acoplados

**Autor: Walter Jesús Paucar Casas
Orientador: Renato Pavanello**

**Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico**

Tese de Doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

**Campinas, 1998
S.P. - Brasil**



2815630

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

TESE DE DOUTORADO

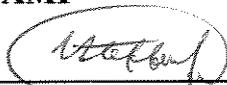
**Concepção Ótima de Sistemas Elasto-
Acústicos Interiores Acoplados**

Autor: Walter Jesús Paucar Casas

Orientador: Renato Pavanello



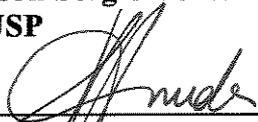
**Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP**



**Prof. Dr. Valder Steffen Júnior
DEEME/UFU**



**Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini
SET/EESC/USP**



**Prof. Dr. José Roberto de França Arruda
DMC/FEM/UNICAMP**



**Prof. Dr. Fernando Iguti
DMC/FEM/UNICAMP**

Campinas, 2 de abril de 1998

Dedicatória:

Ao meu pai Leonardo (in memoriam).

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas e instituições às quais presto minha homenagem:

A minha família pelo incentivo.

Ao meu orientador, pelo constante apoio, dedicação e paciência.

A todos os professores, colegas e funcionarias do *Departamento de Mecânica Computacional DMC* da *FEM/UNICAMP*, assim como as pessoas que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

À *Facultad de Ingeniería Mecánica* da *Universidad Nacional del Centro del Perú* pelo afastamento concedido para a realização destes estudos.

À *Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior CAPES* do Brasil pela concessão da bolsa de estudos.

Ao *Fundo de Apoio ao Ensino e à Pesquisa FAEP* da *PRP/UNICAMP* pela concessão do auxílio-ponte de fim de programa de pós graduação.

*Ser capaz de colocar continuamente em questão as suas próprias opiniões
- esta é, para mim, a condição preliminar de qualquer inteligência.*

ITALO CALVINO (1923-1985)

Romancista e ensaísta italiano

Resumo

PAUCAR CASAS, Walter Jesús, *Concepção Ótima de Sistemas Elasto-Acústicos Interiores Acoplados*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 180p., Tese (Doutorado).

Neste trabalho desenvolveram-se metodologias para a obtenção de formas ótimas em sistemas vibroacústicos acoplados, via mudança de parâmetros geométricos, usando a análise de sensibilidade e ferramentas de programação não linear. As equações matriciais do problema são determinadas com o método dos elementos finitos, e expostas de forma a se tornarem dependentes dos parâmetros estruturais. Uma formulação não simétrica em deslocamento da estrutura e pressão do fluido é utilizada para descrever o sistema. Obtidas as frequências e modos próprios para um conjunto de parâmetros, executa-se o processo de otimização usando a análise de sensibilidade modal. O objetivo é maximizar o afastamento de frequências naturais adjacentes, ou diminuir a resposta numa região do sistema para uma faixa predefinida de frequências de excitação, modificando para isso os parâmetros de forma. O efeito do amortecimento proporcional é incluído na modelagem. Os resultados obtidos são validados a partir de soluções numéricas disponíveis na literatura. A utilização da predição modal no processo de otimização também é analisada. A implementação da metodologia desenvolvida encontra aplicação, por exemplo, na melhora do conforto vibroacústico.

Palavras Chave

Método dos Elementos Finitos, Teoria de Modos Acoplados, Análise de Sensibilidade, Espectro de Frequência, Programação Não-Linear.

Abstract

PAUCAR CASAS, Walter Jesús, *Optimal Conception of Coupled Internal Elasto-Acoustics Systems*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 180p., Tese (Doutorado)

In this research some methodologies for obtaining optimal forms in coupled vibro-acoustic problems are developed, through geometrical parameter changing, using sensitivity analysis and non linear programming tools. The matrix equations of the problem are determined through the finite element method, and then put in such a form that they become functions of the structural parameters. A non symmetrical formulation in structural displacement and fluid pressure is used to describe the system. Once the natural frequencies and modes for a set of parameters are found, the optimization process is conducted using the modal sensitivity analysis. The objective is either to maximize the gap between some adjacent natural frequencies, or to minimize the frequency response in a specific region of the system for one set of excitation frequencies. This is done by modifying the shape parameters. The effect of proportional damping is included in the model. The results are validated with numerical solutions available in the literature. Additional results using the modal prediction in the optimization are also analyzed. The implemented methodology can be applied, for example, in the improvement of the vibroacoustic confort.

Key Words

Finite Element Method, Theory of Coupled Modes, Sensitivity Analysis, Frequency Spectra, Nonlinear Programming.

Índice

Capítulo 1. Introdução e Revisão Bibliográfica

1.1 Objetivos	1
1.2 Sistemas acoplados	1
1.3 Antecedentes	3
1.4 Organização da pesquisa	3
1.5 Revisão bibliográfica	5
1.5.1 Interação fluido-estrutura	6
1.5.2 Análise de sensibilidade modal em sistemas acoplados fluido-estrutura	9
1.5.3 Análise de resposta em frequência e sua sensibilidade em sistemas acoplados fluido-estrutura	11
1.5.4 Otimização de sistemas acoplados fluido-estrutura	12

Capítulo 2. Interação Fluido-Estrutura

2.1 Objetivos	15
2.2 Generalidades	15
2.3 Método dos resíduos ponderados do tipo Galerkin	17
2.4 Formulação $u-p$	19
2.4.1 Modelagem do domínio estrutural	20
2.4.1.1 Vibração transversal de vigas elásticas lineares	20
2.4.1.2 Aplicação do método dos resíduos ponderados e aproximação por elementos finitos	24
2.4.2 Modelagem do domínio fluido	28
2.4.2.1 Equação linearizada de onda	29
2.4.2.2 Aplicação do método dos resíduos ponderados e aproximação por elementos finitos	35
2.4.3 Acoplamento fluido-estrutura	38
2.4.4 Formulação matricial	40
2.4.5 Determinação das matrizes elementares	40

Capítulo 3. Análise de Sensibilidade em Sistemas Acoplados Fluido-Estrutura

3.1 Objetivos	44
3.2 Generalidades	44
3.3 Problema de autovalores nos sistemas acoplados fluido-estrutura	46
3.4 Sensibilidade modal dos sistemas acoplados fluido-estrutura	49
3.5 Determinação das derivadas das matrizes elementares acopladas	54
3.6 Predição dos autovalores e autovetores	55
3.7 Resposta em frequência direta do sistema acoplado fluido-estrutura	57
3.7.1 Método convencional com a matriz de impedância acoplada	58
3.7.2 Método iterativo com a matriz de impedância acoplada particionada ou desacoplada	59
3.8 Sensibilidade da resposta em frequência direta do sistema acoplado fluido-estrutura	62
3.8.1 Método convencional com a matriz de impedância acoplada	62
3.8.2 Método iterativo com a matriz de impedância acoplada particionada ou desacoplada	63
3.9 Resposta em frequência modal do sistema acoplado fluido-estrutura	65
3.10 Sensibilidade da resposta em frequência modal do sistema acoplado fluido-estrutura	69

Capítulo 4. Otimização em Sistemas Acoplados Fluido-Estrutura

4.1 Objetivos	73
4.2 Otimização paramétrica	73
4.3 Otimização restrita	74
4.4 Programação quadrática sequencial (SQP)	76
4.5 Implementação SQP	78
4.6 Otimização estrutural em sistemas acoplados fluido estrutura	79
4.6.1 Critério de separação de frequências naturais	79
4.6.2 Critério de diminuição da função de resposta em frequência	84
4.7 Algoritmo de otimização	86

Capítulo 5. Resultados e Discussões

5.1 Objetivos	89
5.2 Definição dos exemplos estudados	89
5.2.1 Sistema estrutural SE1 - Viga em balanço	90
5.2.2 Sistema estrutural SE2 - Eixo em balanço	90
5.2.3 Sistema estrutural SE3 - Viga biengastada	91
5.2.4 Sistema estrutural SE4 - Viga biengastada com seção retangular	91
5.2.5 Sistema fluido-estrutura SFE1 - Reservatório retangular	92
5.2.6 Sistema fluido-estrutura SF2 - Cavidade com parede flexível	95
5.2.7 Sistema fluido-estrutura SF3 - Compartimento de passageiros de um veículo	96
5.3 Sensibilidade modal e predição dos autovalores	99
5.3.1 Estudo no sistema SE1	99
5.3.2 Estudo no sistema SE4	102
5.3.3 Estudo no sistema SFE1	105
5.3.4 Conclusões sobre a sensibilidade modal e predição de autovalores	110
5.4 Resposta em frequência e análise de sensibilidade da resposta	111
5.4.1 Aproximações iterativas da resposta e sua sensibilidade no sistema SFE1	111
5.4.2 Análise de sensibilidade da resposta em frequência modal no sistema SFE1	114
5.5 Comparação dos processos <i>solução</i> e <i>predição</i> na otimização	117
5.5.1 Verificação do desempenho das fórmulas de predição	118
5.5.2 Avaliação da precisão das fórmulas de predição	120
5.6 Otimização estrutural em alguns sistemas	125
5.6.1 Otimização da separação de frequências naturais do sistema SE2	126
5.6.2 Otimização da separação de frequências naturais do sistema SE4	128
5.6.3 Otimização da separação de frequências naturais do sistema SFE1	132
5.6.4 Otimização da separação de frequências naturais do sistema SFE2	135
5.6.5 Otimização da separação de frequências naturais do sistema SFE3	139
5.6.6 Otimização da resposta do sistema SE4 com amortecimento	140
5.6.7 Otimização da resposta do sistema SFE1 com amortecimento	142

Capítulo 6. Conclusões e Sugestões

6.1 Conclusões	144
6.2 Sugestões para trabalhos futuros	147

Referências Bibliográficas	148
Anexo I	
Outras Formulações da Resposta em Frequência Modal e sua Sensibilidade em Sistemas Acoplados Fluido-Estrutura	160
Anexo II	
Otimização de Funções Matemáticas e Problemas Mecânicos	169

Lista de Figuras

Figura 1.1 Interação fluido-estrutura com domínios físicos diferentes	2
Figura 2.1 Esquema do sistema acoplado fluido-estrutura	17
Figura 2.2 Elemento diferencial da viga sujeito a vibração transversal	21
Figura 2.3 Elemento de viga com 4 graus de liberdade	25
Figura 2.4 Volume de controle diferencial em coordenadas retangulares	31
Figura 2.5 Tensões na direção x atuando num elemento finito	33
Figura 2.6 Funções de forma da curva cúbica para elementos C^1	41
Figura 2.7 Elemento triangular nos espaços a) isoparamétrico e b) real	42
Figura 4.1 Diagrama de fluxo do processo de otimização	88
Figura 5.1 Esquema do sistema estrutural SE1	90
Figura 5.2 Esquema do sistema estrutural SE2	90
Figura 5.3 Esquema do sistema estrutural SE3	91
Figura 5.4 Esquema do sistema estrutural SE4	92
Figura 5.5 Esquema do sistema fluido-estrutura SFE1	93
Figura 5.6 Modos acoplados sistema SFE1, a) pressão do fluido, b) deslocamento da estrutura	94
Figura 5.7 Esquema do sistema fluido-estrutura SFE2	95
Figura 5.8 Modos acoplados sistema SFE2, a) pressão do fluido, b) deslocamento da estrutura	96
Figura 5.9 Esquema do sistema fluido-estrutura SFE3	97
Figura 5.10 Modos acoplados sistema SFE3, a) pressão do fluido, b) deslocamento estrutural	98
Figura 5.11 Erro na predição de frequências ao incrementar \varnothing_1 no sistema SE1	101
Figura 5.12 Sensibilidade do 1° autovalor no sistema SE4	103
Figura 5.13 Sensibilidade dos autovalores 2° e 3° no sistema SE4	103
Figura 5.14 Erro na predição de frequências ao incrementar e_3 no sistema SE4	104
Figura 5.15 Sensibilidade do 1° autovalor no sistema SFE1	105
Figura 5.16 Sensibilidades dos autovalores 1° e 2° no sistema SFE1	106
Figura 5.17 Distribuição da sensibilidade dos modos 1° e 2° no sistema SFE1	108
Figura 5.18 Erro na predição de frequências ao incrementar e_5 no sistema SFE1	109
Figura 5.19 FRF do sistema SFE1 num domínio das dez primeiras frequências	115
Figura 5.20 Sensibilidade da resposta em frequência em relação as variáveis e_{10} , e_1 , e_3 e e_4	116
Figura 5.21 Diminuição da MFR para uma redução de e_5 , frequência de excitação 27.2 Hz	117
Figura 5.22 Flops com os modos para resolver uma vez o sistema SFE1	119

Figura 5.23 Flops com os modos para resolver duas vezes o sistema SFE1	120
Figura 5.24 Erro na predição das 10 primeiras frequências no sistema SE3	121
Figura 5.25 Erro na predição dos 10 primeiros autovetores no sistema SE3	122
Figura 5.26 Erro na predição das 10 primeiras frequências no sistema SE4	123
Figura 5.27 Erro na predição dos 10 primeiros autovetores no sistema SE4	123
Figura 5.28 Erro na predição das 10 primeiras frequências no sistema SFE1	124
Figura 5.29 Erro na predição dos 10 primeiros autovetores no sistema SFE1	125
Figura 5.30 Forma otimizada da viga engastada com uma massa adicional, sistema SE2	127
Figura 5.31 Distribuição otimizada das alturas no sistema SE4	130
Figura 5.32 Evolução da função objetivo na otimização do sistema SE4 para N=1,3,4	131
Figura 5.33 Evolução das frequências na otimização do sistema SE4 para N=1,3,4	131
Figura 5.34 Distribuição otimizada das alturas estruturais no sistema SFE1	134
Figura 5.35 Evolução da função objetivo na otimização do sistema SFE1 para N=1,3,4	134
Figura 5.36 Evolução das frequências na otimização do sistema SFE1 para N=1,3,4	135
Figura 5.37 Otimização do sistema SFE2 para N=3: a) função objetivo, b) frequências	136
Figura 5.38 Distribuição da altura estrutural ótima do sistema SFE2 para N=3	136
Figura 5.39 Modos após otimização para N=3: a) pressão fluido, b) deslocamento estrutura	137
Figura 5.40 Otimização do sistema SFE2 para N=4: a) função objetivo, b) frequências	137
Figura 5.41 Distribuição da altura estrutural ótima do sistema SFE2 para N=4	138
Figura 5.42 Modos após otimização para N=4: a) pressão fluido, b) deslocamento estrutura	138
Figura 5.43 Evolução da otimização: a) função objetivo, b) frequências, sistema SFE3, N=3	139
Figura 5.44 Distribuição otimizada das alturas no sistema SFE3 para N=3	140
Figura 5.45 Otimização da resposta no sistema SE4	141
Figura 5.46 Distribuição das alturas no sistema SE4 após otimizar a resposta	141
Figura 5.47 Otimização da resposta no sistema SFE1	143
Figura 5.48 Distribuição das alturas no sistema SFE1 após otimizar a resposta	143

Lista de Tabelas

Tabela 5.1 Sensibilidade dos autovalores em relação aos diâmetros elementares	100
Tabela 5.2 Sensibilidade dos autovetores em relação ao diâmetro do elemento 1	100
Tabela 5.3 Sensibilidade dos autovetores em relação as alturas	107
Tabela 5.4 Efeito dos modos de ordem superior na sensibilidade dos autovetores	107
Tabela 5.5 Efeito do parâmetro μ na sensibilidade do primeiro autovetor	108
Tabela 5.6 Convergência da DFR nos métodos iterativos, nó 92	112
Tabela 5.7 Convergência da sensibilidade da DFR nos métodos iterativos, nó 92, variável e_1	112
Tabela 5.8 Comparação da sensibilidade da DFR, método exato, nó 92	113
Tabela 5.9 Convergência da DFR nos métodos iterativos, fluido água, nó 92	114
Tabela 5.10 Sensibilidade da MFR, frequência de excitação 27.2 Hz	116
Tabela 5.11 Resultados da otimização de uma viga engastada com uma massa adicional	128
Tabela 5.12 Separação otimizada entre duas frequências no sistema SE4	129
Tabela 5.13 Separação otimizada entre duas frequências no sistema SFE1	133

Nomenclatura

Letras Latinas

a	: vetor de coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n ou coordenadas generalizadas	
a_y	: aceleração linear na direção y	[m/s ²]
a_α	: aceleração angular	[rad/s ²]
b	: largura da seção transversal retangular da estrutura	[m]
c	: velocidade do som ou velocidade de fase para ondas acústicas em fluidos	[m/s]
dm	: massa de uma partícula infinitesimal do fluido	[kg]
e	: variável altura da estrutura	[m]
e^*	: altura modificada da estrutura	[m]
e_l	: altura do elemento finito estrutural l	[m]
f	: função objetivo	
\mathbf{f}	: vetor de excitação no sistema acoplado	[N]
\mathbf{f}_s	: vetor da força de excitação atuando na estrutura	[N]
\mathbf{f}_f	: vetor da força de excitação atuando no fluido	[N]
$\mathbf{f}_{s\Gamma}$: vetor de forças de superfície atuando na estrutura	[N]
\mathbf{f}_{sB}	: vetor de forças de volume atuando na estrutura	[N]
f_Γ	: função de x , ou constante ou zero no contorno $\Gamma \in \Omega$	
f_Ω	: função de x , ou constante ou zero no domínio Ω	
g	: restrição	
k	: constante	
n	: número parcial de modos acoplados	
\hat{n}	: direção normal exterior à estrutura	
n_s	: vetor das funções de forma na estrutura	
n_f	: vetor das funções de forma no fluido	
p	: vetor de pressão nodal no domínio fluido	[Pa]
\tilde{p}	: solução aproximada do campo de pressões locais do fluido	[Pa]
p	: variação de pressão ou pressão acústica em qualquer ponto	[Pa]
p_I	: pressão instantânea num ponto	[Pa]
p_0	: pressão de equilíbrio constante no fluido	[Pa]
q	: carregamento transversal por unidade de comprimento	[N/m]
r_k	: k -ésima variável de projeto	
r	: raio de curvatura	[m]
u, u_y	: deflexão da curva elástica	[m]
\mathbf{u}	: vetor de variáveis dependentes, resposta do sistema	
$\tilde{\mathbf{u}}$: solução aproximada de \mathbf{u}	
u_f	: vetor de pressão do domínio fluido	[Pa]
u_s	: vetor de deslocamento nodal da estrutura	[m]

\tilde{u}	: solução aproximada do campo de deslocamento transversal estrutural	[m]
v	: vetor velocidade de uma partícula	[m/s]
$v_{\hat{n}}$: velocidade do fluido na direção normal \hat{n}	[m/s]
w_s	: vetor das funções de ponderação na estrutura	
w_f	: vetor das funções de ponderação no fluido	
x	: parâmetro do projeto	
x	: vetor de variáveis independentes, por exemplo as coordenadas nodais	
x_l	: contorno inferior de x	
x_u	: contorno superior de x	
A	: área da seção transversal da estrutura	[m ²]
A_T	: área do elemento finito triangular	[m ²]
B	: operador diferencial no contorno $\Gamma \in \Omega$	
D	: operador diferencial no domínio Ω	
E	: módulo de Young ou de elasticidade	[N/m ²]
F_y	: força no eixo y	[N]
F	: vetor de amplitude da excitação do sistema acoplado	
F_s	: amplitude da força de excitação f_s	[N]
H	: altura de uma cavidade acústica retangular	[m]
H	: matriz Hessiana da função Lagrangeana	
I, I_z	: momento de inércia de área relativo ao eixo z	[m ⁴]
K	: matriz de rigidez do sistema acoplado	
K_{ff}	: matriz volumétrica da energia cinética do domínio fluido	
K^*	: matriz de rigidez do sistema acoplado modificado	
K_{sf}	: matriz com os termos de acoplamento	
K_{ss}	: matriz de rigidez da estrutura	
L_k	: comprimento do elemento estrutural k	[m]
L_T	: comprimento total da viga	[m]
M	: matriz de massa do sistema acoplado	
M_{ff}	: matriz de inércia ou compressibilidade do domínio fluido	
M_{fs}	: matriz com os termos de acoplamento	
M^*	: matriz de massa do sistema acoplado modificado	
M_{ss}	: matriz de massa do domínio estrutural	
\bar{M}	: momento fletor prescrito	[N.m]
M, M_z	: momento fletor na direção do eixo z	[N.m]
N	: número total de coordenadas nodais incógnitas ou modos do sistema	
N_s	: número de graus de liberdade da estrutura	
N_f	: número de graus de liberdade do domínio fluido	
P_B	: variável que envolve as forças de corpo no fluido	[Pa/m ²]
Q	: massa de um disco não estrutural	[kg]
R_i	: resíduo ponderado i	
R_Γ	: resíduo no contorno Γ	
R_Ω	: resíduo no domínio Ω	
U	: vetor de amplitude da resposta do sistema acoplado	
U_s	: componente estrutural do vetor de amplitude da resposta	[m]
U_f	: componente no domínio fluido do vetor de amplitude da resposta	[Pa]
V	: força cortante transversal	[N]
\bar{V}	: força cortante transversal prescrita	[N]
Z	: matriz de impedância do sistema acoplado	

Letras Gregas

\aleph	: função ponderadora	
∇	: operador gradiente	
∇^2	: operador laplaciano	
ρ	: parâmetro de penalidade	
\mathcal{L}	: função lagrangeana	
α	: comprimento do passo	
ϵ_x	: deformação na direção do eixo x	
θ	: rotação da curva elástica	[rad]
ϑ	: volume constante da estrutura	[m ³]
κ	: constante arbitraria	
$\lambda_j^{(DF)}$: j -ésimo autovalor predito do projeto modificado via diferenças finitas	[rad ² /s ²]
$\lambda_j^{(R)}$: j -ésimo autovalor predito do projeto modificado via quociente de Rayleigh	[rad ² /s ²]
λ_j^*	: j -ésimo autovalor do projeto modificado	[rad ² /s ²]
λ	: autovalor do sistema acoplado	[rad ² /s ²]
λ_j	: j -ésimo autovalor do sistema acoplado	[rad ² /s ²]
μ	: parâmetro de mudança dado	
ρ_f	: densidade do fluido, ou densidade instantânea num ponto	[kg/m ³]
ρ_0	: densidade de equilíbrio constante do fluido	[kg/m ³]
ρ_s	: densidade da estrutura	[kg/m ³]
σ_{\max}	: tensão normal máxima no eixo x	[N/m ²]
σ_x	: tensão normal longitudinal no eixo x	[N/m ²]
σ_{ij}	: tensão normal na face i de um cubo atuando na direção j	[N/m ²]
ζ	: condensação	
τ_{ij}	: tensão cortante na face i de um cubo atuando na direção j	[N/m ²]
ν	: multiplicador de Lagrange	
ϕ	: autovetor à direita ou simplesmente autovetor do sistema acoplado	
ϕ_j	: j -ésimo autovetor à direita do sistema acoplado	
ϕ_{jf}	: componente de ϕ_j relativo a u_f	
ϕ_{sj}	: componente de ϕ_j relativo a u_s	
ϕ_j^*	: j -ésimo autovetor do projeto modificado	
$\phi_j^{(DF)}$: j -ésimo autovetor predito do projeto modificado via diferenças finitas	
$\bar{\phi}$: autovetor à esquerda do sistema acoplado	
$\bar{\phi}_j$: j -ésimo autovetor à esquerda do sistema acoplado	
$\bar{\phi}_j^*$: j -ésimo autovetor à esquerda do projeto modificado	
$\bar{\phi}_j^{(DF)}$: j -ésimo autovetor à esquerda predito do projeto modificado via DF	
ω	: frequência	[Hz]
Γ_I	: superfície de interface	
Γ_{SL}	: superfície livre do fluido	
Γ_{PR}	: superfície de parede rígida	
Δe	: variação da altura da estrutura	[m]
Δm	: massa do elemento diferencial da viga	[kg]
ΔJ	: diferencial de momento de inércia de massa	[kg.m ²]

Δr	: variação da variável de projeto r	
Δr_k	: variação da k -ésima variável de projeto ou controle r	
Δx	: diferencial de comprimento no eixo x	[m]
Λ	: matriz diagonal de autovalores do sistema acoplado	
Λ_s	: matriz de autovalores do sistema desacoplado estrutural	
Λ_f	: matriz de autovalores do sistema desacoplado fluido	
Ξ	: módulo de compressibilidade adiabático	[N/m ²]
Φ	: matriz de autovetores à direita do sistema acoplado	
Φ_s	: submatriz de Φ em relação a u_s	
Φ_f	: submatriz de Φ em relação a u_f	
Ψ_s	: matriz de autovetores do sistema desacoplado estrutural	
Ψ_f	: matriz de autovetores do sistema desacoplado fluido	
Ω_f	: domínio fluido	
Ω_s	: domínio estrutural	

Superescritos

$()$: diferenciação de $()$ em relação ao tempo (ordem segundo a quantidade de pontos)
$()'$: derivada de $()$ em relação à variável estrutural
$()^*$: valor de $()$ no projeto modificado
$()^{(m)}$: solução de $()$ na m -ésima iteração
$\ \cdot \ $: norma de uma matriz ou de um vetor
$()$: valor prescrito de $()$
(\sim)	: valor aproximado de $()$
$()^{(DF)}$: cálculo de $()$ utilizando o método de diferenças finitas em avanço
$()^{(R)}$: cálculo de $()$ utilizando o método do quociente de Rayleigh

Subscritos

f	: fluido
fs	: acoplamento fluido-estrutura
s	: estrutura
sf	: acoplamento fluido-estrutura
x,y,z	: componentes nas direções das coordenadas cartesianas x,y,z
G	: centro de massa
L	: extremo final do elemento estrutural
ξ,η,ζ	: coordenadas isoparamétricas
Γ	: contorno do domínio Ω
Ω	: domínio
0	: extremo inicial do elemento estrutural

Abreviações

BFGS	: Fórmula de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
DF	: Método de diferenças finitas
DFR	: Resposta em frequência direta (Direct Frequency Response)
KT	: Equações de Kuhn-Tucker
MEF	: Método dos elementos finitos

MFR : Resposta em frequência modal (Modal Frequency Response).
NP : Programação não linear (Nonlinear Programming)
QP : Programação quadrática (Quadratic Programming)
R : Quociente de Rayleigh
SPL : Nível de pressão do som (Sound Pressure Level)
SQP : Programação quadrática seqüencial (Sequential Quadratic Programming)

Capítulo 1

Introdução e Revisão Bibliográfica

1.1 Objetivos

É propósito deste capítulo apresentar uma definição e uma classificação dos problemas acoplados, mostrando a importância e justificativa da escolha do tema, bem como discutir a abrangência das formulações e hipóteses adotadas, delimitando os objetivos desta pesquisa. Na seqüência, a organização do presente texto é apresentada. Por último, faz-se uma revisão da literatura básica sobre o assunto, procurando-se situar o trabalho em relação ao estado da arte sobre o tema.

1.2 Sistemas acoplados

É comum encontrar na prática casos onde dois ou mais sistemas físicos interajam um com outro. Em muitas destas situações não é mais realística uma modelagem independente de qualquer um dos sistemas sem considerar a participação simultânea dos outros. Esses sistemas são conhecidos como acoplados, sendo que o acoplamento pode ser classificado genericamente como fraco ou forte em função do grau de interação.

Um caso típico de sistema acoplado é aquele de interação dinâmica fluido-estrutura, onde nem o domínio fluido nem o sistema estrutural pode ser resolvido de forma independente do outro, principalmente devido à existência de forças de interface que, em muitos casos, podem alterar significativamente o comportamento do sistema como um todo.

Com a finalidade de generalizar a classificação de sistemas acoplados, Zienkiewicz (1984) propôs a seguinte definição:

“Os sistemas acoplados são aqueles que envolvem múltiplos domínios cujas variáveis dependentes usadas em suas descrições matemáticas descrevem geralmente fenômenos físicos diferentes onde: a) nenhum domínio pode ser resolvido de forma independente e b) nenhum conjunto de variáveis dependentes pode ser eliminado ao nível da formulação das equações diferenciais.”

Os sistemas acoplados são divididos em duas classes (Zienkiewicz, 1989), em função de algumas características encontradas:

Classe I. Os domínios geralmente descrevem fenômenos físicos diferentes, sendo eventualmente possível considerar o acoplamento entre domínios fisicamente similares modelados por processos distintos. O acoplamento ocorre nas interfaces dos domínios via as condições de contorno impostas.

Classe II. Os domínios se superpõem total ou parcialmente descrevendo fenômenos físicos diferentes. O acoplamento ocorre através das equações diferenciais que governam o problema.

Exemplos típicos da *Classe I* são os problemas de interação fluido-estrutura onde domínios fisicamente diferentes interagem como os mostrados na Figura 1.1 sendo destacada a interface somente para fins de visualização. Incluem-se também nesta classe os problemas de interação estrutura-estrutura onde a interface simplesmente divide regiões escolhidas arbitrariamente, nas quais são utilizadas discretizações numéricas distintas.

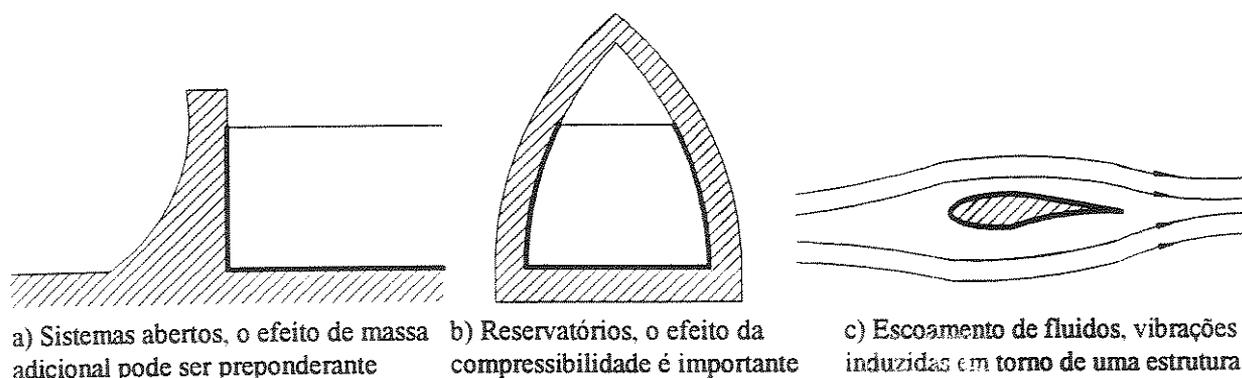


Figura 1.1 Interação fluido-estrutura com domínios físicos diferentes

Problemas típicos da *Classe II* são a extrusão de metais, onde o fluxo plástico é fortemente acoplado com o campo de temperaturas o qual é simultaneamente influenciado pelo calor gerado no fluxo plástico. Outro exemplo é a dinâmica de solos na resposta aos terremotos de uma barragem, onde as infiltrações e as pressões interagem com o comportamento dinâmico do solo. Tal fenômeno é conhecido como poroelasticidade e é bastante estudado na engenharia civil. Nestes casos o domínio é único e o acoplamento é realizado ao nível da formulação. Encontram-se na literatura muitos trabalhos nessa área como por exemplo aqueles de Lewis e Schrefler (1987), Zienkiewicz et al. (1990a,b), Marques de Barros, Mesquita Neto e Almeida Barros (1997), etc.

Neste trabalho estuda-se o problema de interação dinâmica fluido-estrutura (*Classe I*) considerando oscilações de pequenas amplitudes, ou seja, problemas onde o deslocamento do fluido é pequeno todavia a influência da interação é importante. Na Figura 1.1 a) e b) apresentam-se exemplos esquemáticos onde os movimentos estruturais modificam o campo de pressões do fluido, como no caso de uma represa ou de um recipiente, que por sua vez altera o campo de deslocamentos, não sendo assim possível resolver o problema de forma desacoplada.

1.3 Antecedentes

Inúmeras estruturas complexas são modeladas considerando-se o *acoplamento fluido-estrutura*. São exemplos notáveis as aplicações aeroespaciais (lançadores contendo combustível) ou em acústica submarina (estrutura imersa num meio fluido), podendo-se citar também os reservatórios de combustíveis, transformadores elétricos, habitáculos de veículos, tubulações e vasos de pressão, etc.

Tais estruturas podem entrar em *ressonância* devido ao efeito de certas solicitações. Em geral, é melhor evitar tal situação que pode, por exemplo, modificar as propriedades de transmissibilidade acústica, ou também provocar, por fratura, a quebra da estrutura. Esforços para diminuir tais efeitos ao nível da concepção das estruturas é um objetivo de grande interesse que tem motivado vários estudos.

Os problemas acoplados fluido-estrutura podem ser divididos em duas categorias: a) Problemas *acoplados em meio finito*, onde o fluido ocupa o interior de um recinto totalmente ou parcialmente fechado, b) Problemas *acoplados em meio infinito*, onde a estrutura está imersa num meio fluido que possui dimensões muito maiores que a estrutura e por isso pode ser considerado como ilimitado.

O objetivo principal da pesquisa é o controle das características vibroacústicas de sistemas acoplados interiores (em meio finito). Utilizam-se como critério de projeto o posicionamento das frequências e modos próprios de um sistema constituído por uma estrutura elástica que contém um fluido compressível. Isto é, procura-se alterar o posicionamento das frequências naturais acopladas modificando os parâmetros de forma da estrutura. Trata-se de um problema de *concepção ótima de forma* ou *projeto ótimo*

Um enfoque diferente do objetivo, porém não equivalente, é procurar a minimização da amplitude das funções de resposta em frequência, num intervalo predeterminado de frequências discretas, mudando, também neste caso, os parâmetros de forma estruturais.

O estudo é baseado em modelos bidimensionais simples, todavia representativos dos problemas acoplados vibroacústicos. Ênfase é dada à análise de sensibilidade e à utilização de códigos numéricos de otimização não linear.

1.4 Organização da pesquisa

O trabalho é dividido em cinco capítulos.

O *Capítulo 1* mostra essencialmente a revisão da literatura sobre o tema da pesquisa.

O *Capítulo 2* revisa a modelagem da formulação $u-p$, em deslocamento u da estrutura e pressão p do fluido, nos problemas acoplados de interação fluido-estrutura.

O *Capítulo 3* apresenta a análise de sensibilidade modal, assim como a análise de resposta em frequência e sua sensibilidade, em sistemas acoplados fluido-estrutura.

O *Capítulo 4* trata da otimização de sistemas acoplados fluido estrutura, considerando os casos de maximização da separação de frequências naturais e minimização da função de resposta em frequência, num intervalo discreto de frequências.

O *Capítulo 5* descreve e discute os resultados obtidos em diversos sistemas de estudo, comparando-os com alguns exemplos da literatura.

O *Capítulo 6* apresenta as conclusões e sugestões para próximos trabalhos.

Algumas informações e desenvolvimentos de interesse para melhor compreensão e referência direta do trabalho foram incluídos na forma de Anexos:

O *Anexo I* apresenta formulações adicionais para obter a resposta em frequência modal e sua sensibilidade, a serem utilizados em sistemas acoplados fluido-estrutura.

O *Anexo II* fornece os resultados da otimização de algumas funções matemáticas e problemas mecânicos utilizando-se o otimizador deste trabalho.

1.5 Revisão bibliográfica

Apresenta-se, neste item, uma revisão da literatura básica do assunto, discutindo e/ou comentando a informação já publicada, onde for pertinente. A revisão bibliográfica é feita em ordem cronológica por blocos de assunto em relação à interação fluido-estrutura, análise de sensibilidade modal em sistemas acoplados fluido-estrutura, análise de resposta em frequência e sua sensibilidade em sistemas acoplados fluido-estrutura e otimização de sistemas acoplados fluido-estrutura, mostrando-se a evolução do conhecimento.

1.5.1 Interação fluido-estrutura

Um passo importante na solução dos problemas acoplados de interação fluido-estrutura consiste na adequada escolha das variáveis do sistema. As equações para a estrutura são geralmente expressas em termos de deslocamentos. Para descrever o domínio fluido pode-se usar: deslocamentos, pressões, potencial de velocidades, potencial de deslocamentos, ou combinações delas (Ohayon e Valid, 1984).

No contexto da obtenção de uma solução aproximada do problema de interação fluido-estrutura, Zienkiewicz e Newton (1969) estudaram as vibrações acopladas de uma estrutura submersa num fluido compressível utilizando um tratamento por elementos finitos nos dois domínios. Neste trabalho pioneiro na área, uma formulação baseada nas variáveis deslocamento da estrutura e pressão do fluido foi desenvolvida, resultando numa formulação matricial não simétrica, e uma simetrização sugerida por Irons (1970) foi aplicada. Do ponto de vista computacional essa formulação tem a vantagem de introduzir só uma incógnita por nó para descrever o fluido.

A formulação em deslocamento da estrutura e potencial de velocidades do fluido foi introduzida por Tong (1966), sendo esta também apresentada por Everstine (1981). Na formulação proposta por estes autores o sistema matricial a ser resolvido tem a vantagem de ser simétrico, todavia o problema dinâmico de autovalores e autovetores é do tipo quadrático.

As formulação mistas em deslocamento da estrutura e pressão com potencial de deslocamento do fluido, deslocamento da estrutura e pressão com deslocamento do fluido foram propostas por Morand e Ohayon (1975, 1976).

Hamdi, Ousset e Verchery (1978) e Hamdi (1978), estudaram as vibrações elasto-acústicas segundo o método dos elementos finitos via deslocamentos na estrutura e no fluido, mostrando a aparição de modos parasitas de *circulação* para frequências não nulas, falseando o espectro próprio do problema pois o escoamento do fluido é irrotacional. A restrição de irrotacionalidade do campo de deslocamentos do fluido evita esse inconveniente. No trabalho de Hamdi (1978) uma formulação baseada em um método de penetração é apresentada, suprimindo aqueles modos da banda de frequência em estudo. As vantagens desta formulação

referem-se às características das matrizes resultantes do sistema discreto, que apresentam simetria, são do tipo banda e são definidas positivas, permitindo a utilização de algoritmos de procura de autovalores de alta performance.

As formulações que utilizam o deslocamento do fluido como incógnita apresentam a desvantagem no acréscimo das incógnitas nodais do fluido. Esse mesmo problema acontece nas formulações mistas. Por outro lado, quando o sistema é simetrizado, a desvantagem adicional é o incremento de operações nos termos das matrizes do sistema.

Olson e Bathe (1985) estudam os problemas de interação fluido-estrutura numa formulação matricial simétrica em deslocamento para a estrutura, e potencial de velocidade e pressão para o fluido. Ohayon (1984) e Dèneuvy (1986) utilizam uma formulação simétrica em deslocamento com força de reação dinâmica para a estrutura e pressão para o fluido.

A literatura mostra diversas resenhas bibliográficas, que apresentam o estado da arte dos problemas de interação fluido-estrutura considerando-se diferentes óticas, tendo-se uma variedade grande de métodos de modelagem e de resolução geralmente condicionados pela natureza do problema analisado. Por exemplo, Chen L. H. e Pierucci (1977) propõem uma classificação dos problemas de interação fluido-estrutura segundo os esforços aplicados; Belytschko (1977) escolhe os métodos de resolução para distinguir os grupos; Hamdi (1978) os classifica segundo o acoplamento interior ou exterior do fluido em relação à estrutura, Chen S. S. (1980) e Berhault, Chatel e Tephany (1985) utilizam uma classificação segundo grupos de aplicação nuclear e de turbomáquinas, respectivamente, e Zienkiewicz e Bettles (1981) e Bernhard, Gardner e Smith (1987) adotam uma classificação segundo os métodos de modelagem.

Considerando que, segundo a natureza do problema e a aplicação analisada, os fenômenos preponderantes são diferentes, Pavanello (1991) apresenta uma resenha bibliográfica onde agrupa os trabalhos segundo o tipo de fontes de excitação e de acordo com os diferentes movimentos relativos entre os dois domínios. Propõe-se uma classificação em três categorias, a saber: a) Problemas com movimentos relativos grandes e esforços hidrodinâmicos preponderantes, que engloba os problemas de vibração induzida pelo escoamento do fluido bem como os problemas de instabilidade, divergência, flutter, etc.,

b) Problemas com movimentos relativos grandes e esforços acústicos preponderantes, que ocorrem nas explosões, nas despressurizações e nos problemas de impacto de estruturas flexíveis imersas em líquidos, e c) Problemas com pequenos movimentos, que compreende o estudo do acoplamento de estruturas flexíveis com fluido incompressível ou com fluido compressível.

Problemas cujo domínio fluido é considerado incompressível são denominados problemas hidroelásticos. Quando consideram-se os efeitos da compressibilidade do fluido tem-se os problemas denominados elasto-acústicos, sendo estes últimos os de interesse deste trabalho. Neste contexto consideram-se pequenos movimentos do sistema em torno de uma posição de equilíbrio inicial estável, onde a equação do domínio fluido é a equação da onda (equação de Helmholtz) e a estrutura é considerada elástica linear.

Em relação aos métodos numéricos para resolver os sistemas elasto-acústicos, existem duas grandes tendências. O método dos elementos finitos é geralmente empregado em problemas interiores totalmente confinados ou com uma superfície livre. Para meios ilimitados onde a consideração dos efeitos da radiação acústica é importante, são preferidos os métodos do tipo equação integral ou o método dos elementos de contorno. Uma descrição mais detalhada referente aos métodos de resolução usados pode ser encontrada em Pavanello (1991) e Galli (1995).

Na solução dos sistemas acoplados fluido-estrutura modelados por uma discretização do tipo elementos finitos, tem-se diversos meios para reduzir a ordem das equações matriciais resultantes e, por consequência, o custo computacional. Para esse fim utiliza-se a simetria tanto geométrica quanto mecânica para limitar o domínio de análise, assim como aplicam-se técnicas de resolução do tipo sub-estruturação ou superposição modal que reduzem o número de incógnitas sem muita perda de precisão. (Daniel, 1980a,b), (Pavanello, 1991), (Morand e Ohayon, 1995), etc. Estes tipos de redução de modelos são importantes para estudos de otimização, onde necessita-se repetir diversas vezes as soluções dos sistemas nos processos iterativos de busca de mínimos.

Nos sistemas acoplados fluido-estrutura, para o caso de uma formulação em pressões do fluido e deslocamentos da estrutura, as matrizes do sistema acoplado são assimétricas, o que

impede a utilização de técnicas convencionais de superposição modal, como será comentado posteriormente. Existem técnicas que adotam uma simetrização do sistema, procurando-se aproveitar as vantagens dos algoritmos mais eficientes desenvolvidos para matrizes simétricas. Contudo, acrescenta-se nestes casos uma desvantagem referente ao incremento de custo computacional devido às operações adicionais de simetrização. Num processo de otimização, o custo computacional de uma análise é decisivo; por conseguinte, a escolha de uma formulação adequada para o sistema acoplado é fundamental. Além disso torna-se essencial a capacidade de se obter a sensibilidade do sistema acoplado via métodos analíticos, o que permite geralmente uma melhor convergência e estabilidade dos processos de otimização.

Neste trabalho é escolhida a formulação $u-p$ não simétrica, em deslocamento u da estrutura e pressão p do fluido. Essa formulação mesmo sendo simples caracteriza adequadamente o sistema e possibilita determinar as sensibilidades eficientemente.

Ma e Hagiwara (1991a) utilizam os conceitos de autovetores à direita e à esquerda na solução dos sistemas acoplados acústico-estruturais em formulação $u-p$ não simétrica, para desenvolver uma técnica de superposição de modos para esses sistemas, mostrando-se que os autovetores à esquerda podem ser facilmente determinados utilizando os autovetores à direita.

Recentemente foi editado um dos primeiros livros dedicado exclusivamente à área de modelagem numérica de problemas de interação fluido-estrutura por Morand e Ohayon (1995). Neste trabalho, descrevem-se os métodos que conduzem aos modelos discretos dos problemas de vibrações lineares de estruturas elásticas acopladas com fluidos líquidos ou gasosos internos (nos casos de *sloshing*, hidroelasticidade e acústica estrutural). Os modelos são aplicados a uma faixa restrita de comprimentos de onda, excluindo-se os casos de densidade modal elevada. Os métodos numéricos apresentados têm provado sua eficiência, exatidão e versatilidade em diversos campos da engenharia.

1.5.2 Análise de sensibilidade modal em sistemas acoplados fluido-estrutura

No contexto da concepção de sistemas dinâmicos, considerando-se que a análise da resposta é efetuada utilizando-se métodos computacionais, existe um requerimento constante de informação em relação às mudanças da resposta dinâmica devido à variação das variáveis

do projeto. Assim, surge a necessidade de uma rápida reavaliação dos projetos modificados sendo, portanto, imprescindível o conhecimento das derivadas ou sensibilidades das expressões modais. As sensibilidades são encontradas em relação às variáveis do projeto, podendo ser utilizadas na predição dos novos projetos, bem como no cálculo do gradiente das funções a serem otimizadas e no cálculo do gradiente das restrições do problema.

Existe atualmente uma literatura extensa nos aspectos teóricos e técnicos da análise da sensibilidade do projeto estrutural. Algumas destas referências dedicam-se diretamente ao assunto como Haug, Choi e Komkov (1986), entre outros, embora a maioria se encontra embutida em artigos dedicados à otimização estrutural.

Muitas técnicas têm sido propostas para analisar a sensibilidade modal de um sistema estrutural, sendo as quatro principais o *método de diferenças finitas*, o *método modal* de Fox e Kapoor (1968), o *método de Nelson* (Nelson, 1976) e o *método modal modificado* (Wang, 1985). Fox e Kapoor desenvolveram um método de sensibilidade modal baseado na técnica clássica de superposição modal, mas a precisão da sensibilidade decresce quando os modos superiores são omitidos.

Nelson (1976) calcula a sensibilidade modal em forma estrita, mas é preciso resolver uma equação do sistema diferente para cada modo; por conseguinte o método perde eficiência quando se deseja determinar a sensibilidade de vários modos.

O método modal modificado de Wang baseia-se nos modos em aceleração e na técnica de superposição modal, melhorando significativamente a exatidão numérica obtida, com relação ao método modal de Fox e Kapoor. No método de Wang é suficiente a resolução de um único sistema linear na determinação da sensibilidade de todos os modos selecionados para análise. Em consequência, o método modal de Wang é mais eficiente que o método de Nelson.

Esses métodos são baseados na simetria da formulação dinâmica dos sistemas estruturais, mas podem ser generalizados para sistemas não simétricos fazendo-se uso dos conceitos de autovetores à direita e autovetores à esquerda. Quando a formulação não simétrica de um sistema acoplado passa por uma etapa de simetrização, tem-se geralmente

custos computacionais adicionais, que também podem se tornar proibitivos para o cálculo da sensibilidade modal.

Utilizando uma técnica de superposição de modos, Ma e Hagiwara (1991a) propõem um método para calcular as sensibilidades dos autovalores e autovetores em sistemas acoplados acústico-estruturais. Esse método apresenta melhor convergência que o *método modal* (Fox e Kapoor, 1968) e que o *método modal modificado* (Wang, 1985), adaptado para sistemas acoplados, e melhor eficiência de cálculo que o *método de Nelson* (Nelson, 1976) ampliado quando se determina a sensibilidade de mais de um autovetor. Posteriormente, Hagiwara e Ma (1994) propuseram uma melhoria do método de sensibilidade modal em sistemas acoplados cancelando os modos inferiores e superiores.

Embora o assunto seja bastante amplo, no caso da sensibilidade modal em sistemas acoplados fluido-estrutura, poucas publicações puderam ser recuperadas, o que mostra que a área pode ainda ser bastante explorada. Neste trabalho foram implementados e testados os métodos: *modal* (Fox e Kapoor, 1968), *modal modificado* (Wang, 1985), *de Nelson* (Nelson, 1976) e de Ma e Hagiwara (1991a) para analisar a sensibilidade modal dos sistemas acoplados fluido-estrutura; tomando-se a decisão de utilizar o método de Ma e Hagiwara por oferecer melhores resultados de desempenho.

A escolha da formulação para realizar a análise de sensibilidade modal permitiu, neste trabalho, tratar também o problema de modos de corpo rígido. A análise de sensibilidade modal, além de ser utilizada no processo de otimização, também foi testada na predição modal de problemas acoplados fluido-estrutura.

1.5.3 Análise de resposta em frequência e sua sensibilidade em sistemas acoplados fluido-estrutura

Estudos sobre a resposta em frequência direta e sua sensibilidade em sistemas acoplados acústico-estruturais foram também realizados por Ma e Hagiwara (1991b), sendo proposto um método iterativo que não utiliza a inversa da matriz de impedância do sistema acoplado. Isso foi necessário para melhorar a análise convencional aplicada em sistemas acoplados não simétricos.

A resposta em frequência modal e sua sensibilidade em sistemas acoplados acústico-estruturais foram estudados por Ma e Hagiwara (1992), sendo propostos dois tipos de métodos analíticos para calcular a sensibilidade, um deles baseado na sensibilidade e predição modal do sistema acoplado e outro na diferenciação direta da resposta em frequência modal, sendo este último mais efetivo em termos de eficiência computacional e precisão dos resultados.

Hagiwara, Kozukue e Ma (1993) utilizam a análise de sensibilidade modal no estudo de sistemas acoplados acústico-estruturais, determinando como o modelo deveria ser modificado ou otimizado estruturalmente com o objetivo de reduzir a vibração e o ruído gerado. Neste caso não foram utilizados algoritmos de programação não linear para a resolução, sendo estabelecidos todavia, critérios práticos para a modificação estrutural com vistas à otimização dos sistemas.

Uma formulação melhorada para obter a resposta em frequência modal de um sistema acoplado acústico-estrutural é proposta por Ma e Hagiwara (1993), sendo compensados os efeitos do truncamento de modos inferiores e superiores fora do intervalo de frequências consideradas. O uso desta técnica melhora a convergência; permitindo determinar a resposta com maior exatidão que o método dos deslocamentos modais, o método de aceleração modal e o método de Hansteen e Bell (1979) adaptados para sistemas acoplados. Por outro lado o esforço computacional não é incrementado.

Neste trabalho, a partir da formulação modal da resposta em frequência e sua sensibilidade em sistemas acoplados acústico-estruturais baseada na diferenciação direta da resposta em frequência modal (Ma e Hagiwara, 1992), foram incluídos os termos de amortecimento proporcional, derivando-se da expressão de resposta amortecida uma nova formulação para a sensibilidade da resposta.

1.5.4 Otimização de sistemas acoplados fluido-estrutura

Embora os problemas de otimização estrutural tradicionais já tenham sido amplamente pesquisados, de diversas maneiras diferentes, somente alguns trabalhos dedicados a sistemas dinâmicos acoplados puderam ser recuperados.

Na área estrutural, Turner (1967) obteve soluções exatas e por elementos finitos em projetos que consideram o problema de minimização de massa para frequências especificadas, em modelos de barras e vigas engastadas com uma massa adicional na extremidade livre. Karihaloo e Niordson (1971) fornecem soluções quase-exatas para o problema de otimização de vigas engastadas sujeitas a vibração, com ou sem uma massa concentrada na extremidade livre, para seções transversais com momento de inércia I e área A relacionados por $I=kA^n$ (k e $n=1,2,3$ são constantes positivas).

Kamat e Simitses (1973) utilizam uma formulação em deslocamentos por elementos finitos para maximizar a primeira frequência natural de uma viga, a qual possui um volume especificado e se encontra sujeita a uma restrição de momento de inércia permissível mínimo. Para seções transversais satisfazendo a relação $I=kA^n$ ($n=1,2,3$), a condição de otimalidade é reduzida a uma relação entre as densidades de energia cinética e energia de deformação. Começando com uma viga uniforme, utiliza-se um procedimento iterativo para obter uma distribuição de material ótimo maximizando a primeira frequência.

Após este período, Olhoff (1989a) apresentou a maximização do espaçamento de frequências naturais adjacentes de uma viga engastada com uma massa na extremidade livre. Neste caso, um estudo de otimização estrutural multicritério via *formulação de contorno* e programação matemática foi apresentado.

Um dos primeiros estudos registrados na otimização de sistemas acoplados fluido-estrutura foi de Deneuvy (1985), onde é analisado o problema de concepção ótima estrutural sujeito a um critério de separação das frequências naturais considerando um sistema acoplado bidimensional, e meios fluidos finitos compressíveis, ou ainda meios infinitos incompressíveis. O método de otimização utilizado foi o *critério de otimalidade*, apresentando como maior desvantagem a dificuldade da escolha do parâmetro de convergência que permite estabilizar o processo iterativo de otimização.

Posteriormente, Pal e Hagiwara (1993, 1994) estudaram a otimização da redução do nível de ruído num problema acústico estrutural acoplado, utilizando no processo a análise de sensibilidade numa base modal truncada nos modos inferiores e superiores. São utilizados

algoritmos de otimização multiobjetiva inversa, tanto com o método de síntese estrutural quanto com o método pseudo inverso; sendo o objetivo o cálculo das mudanças mínimas necessárias das variáveis de projeto para atingir uma resposta predeterminada. O método por eles proposto é efetivo somente para modificar aqueles níveis de resposta acústica que são afetados pelos modos estruturais; em outras palavras, é válido somente para respostas acústicas ressonantes estruturalmente.

Neste trabalho foi utilizado o algoritmo de programação quadrática seqüencial implementado no software comercial MATLAB®; fornecendo-se as expressões analíticas dos gradientes da função objetivo e das restrições, assim como as formulações analíticas da predição modal. Verificou-se o desempenho do algoritmo através de aplicações em funções matemáticas clássicas e em diversos problemas de otimização estrutural em sistemas estruturais e vibroacústicos.

Capítulo 2

Interação Fluido-Estrutura

2.1 Objetivos

O propósito deste capítulo é analisar os métodos que conduzem à modelagem numérica das vibrações lineares de estruturas elásticas acopladas a um meio fluido que pode ser líquido ou gasoso. Discute-se também a formulação matricial do sistema acoplado, decorrente da aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF).

2.2 Generalidades

O estudo dos problemas acoplados fluido-estrutura é de interesse para vários domínios industriais, tais como a engenharia aeroespacial, aeronáutica, engenharia automotiva, engenharia nuclear, engenharia civil, engenharia naval, biomecânica, etc.

A particularidade do problema de interação fluido-estrutura reside nos seus aspectos multidisciplinares, envolvendo representações da estrutura e do fluido em conjunto com aspectos numéricos.

Num sistema acoplado genérico de interação fluido estrutura, os efeitos do *sloshing* da superfície livre do fluido, que surgem devido ao efeito da gravidade, são predominantes para frequências muito baixas. Já os efeitos incompressíveis hidroelásticos e efeitos acústicos podem ser predominantes para as frequências mais altas.

De uma forma geral, os diversos subsistemas físicos do problema do acoplamento dinâmico fluido-estrutura podem envolver os seguintes fenômenos: modos de *sloshing* (considerando os efeitos de tensão superficial), vibrações incompressíveis hidroelásticas (efeito de massa adicional), vibrações acústico-estruturais (para gases e líquidos compressíveis). Nestes casos são considerados apenas os fenômenos lineares de pequenas oscilações de estruturas flexíveis em contato com um fluido inicialmente em repouso.

As equações matriciais simétricas ou assimétricas resultantes do sistema acoplado são derivadas utilizando o MEF. Estes sistemas podem ser resolvidos diretamente ou utilizando-se procedimentos de redução modal dos subsistemas elementares apropriadamente definidos (modos estruturais, modos de *sloshing*, modos acústicos).

A presente pesquisa está restrita exclusivamente ao estudo das vibrações acústico-estruturais para líquidos e gases compressíveis.

Considera-se que o sistema está submetido a pequenas vibrações harmônicas, onde a presença do fluido pode modificar substancialmente as frequências naturais da estrutura e a propagação das ondas no fluido é perturbada pela existência da estrutura.

O estudo é realizado sobre o comportamento vibratório do sistema fluido-estrutura modelado conforme o esquema genérico mostrado na Figura 2.1, onde o fluido perfeito e compressível está contido dentro de uma estrutura elástica aberta ou fechada. A estrutura ocupa o domínio Ω_s , sendo impostos deslocamentos nulos em uma parte de sua fronteira Γ_{PR} conhecida como de parede rígida. O fluido ocupa o domínio Ω_f tendo uma superfície livre Γ_{SL} onde a pressão é zero. A excitação do sistema pode ser devida à aplicação de esforços externos harmônicos atuando na estrutura ou no fluido. É suposto que, no instante zero, o sistema ocupa uma posição de equilíbrio estático. A interação entre os domínios ocorre através da superfície de interface Γ_I , comum aos dois domínios. Por outro lado, denota-se como \hat{n} a direção normal exterior à estrutura em Γ_I .

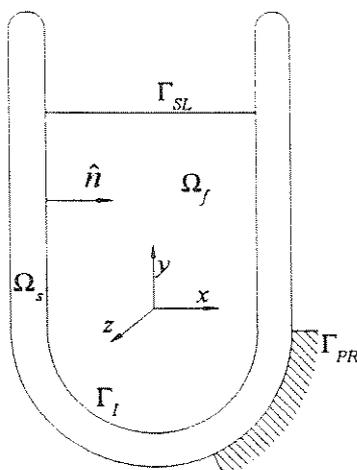


Figura 2.1 Esquema do sistema acoplado fluido-estrutura

Considera-se o sistema de dimensão infinita na direção z , o que significa que o problema pode ser reduzido ao caso bidimensional.

Na seqüência apresenta-se a formulação matemática do problema baseando-se na técnica de Galerkin e no método de resíduos ponderados. Para a resolução do problema de interação fluido-estrutura é utilizada uma discretização por elementos finitos, obtendo-se uma formulação matricial assimétrica $u-p$ em deslocamento u da estrutura e pressão p do fluido.

2.3 Método dos resíduos ponderados do tipo Galerkin

A solução aproximada das equações diferenciais que descrevem um problema pode ser obtida a partir do método dos Resíduos Ponderados, sendo utilizada neste trabalho a técnica de Galerkin na escolha das funções de ponderação, permitindo-se desta maneira a construção de uma forma integral adequada para a aplicação do Método dos Elementos Finitos.

O conjunto das equações diferenciais originais que governam um problema constituem a *forma forte*, enquanto a forma integral ou formulação residual gerada é conhecida como *forma fraca* onde os requisitos de diferenciabilidade são relaxados. A *forma forte* expõe condições de contorno que devem ser conhecidas em todos os pontos do domínio, enquanto a *forma fraca* expõe condições que devem ser conhecidas somente num sentido médio ou integral (Cook, Malkus e Plesha, 1989).

As equações diferenciais e as condições de contorno que governam um problema podem ser estabelecidas genericamente da seguinte forma:

$$Du(x) - f_{\Omega}(x) = 0, \quad \text{no domínio } \Omega \quad (2.1)$$

$$Bu(x) - f_{\Gamma}(x) = 0, \quad \text{no contorno } \Gamma \in \Omega \quad (2.2)$$

onde u são as variáveis dependentes, como por exemplo os deslocamentos nodais, x são as variáveis independentes, como por exemplo as coordenadas nodais, f_{Ω} e f_{Γ} são funções de x , constantes ou nulas, e representam os termos fonte, D e B são operadores diferenciais, definidos no domínio Ω e no contorno Γ respectivamente.

Em geral, a solução exata $u(x)$ é desconhecida e geralmente difícil de se obter. Nos métodos de aproximação, procura-se uma solução aproximada \tilde{u} normalmente do tipo polinomial que satisfaça as condições de contorno essenciais e que possua coeficientes indeterminados a_1, a_2, \dots, a_n . Portanto a solução aproximada \tilde{u} é denotada como sendo uma função de x e a na forma $\tilde{u}(x, a)$, onde os valores de a_i devem ser calculados de forma que u e \tilde{u} fiquem de certa forma próximos.

Ao utilizar \tilde{u} nas Equações (2.1) e (2.2) não é mais mantida a igualdade, gerando-se resíduos R_{Ω} no domínio e R_{Γ} no contorno de forma que:

$$R_{\Omega} = R_{\Omega}(a, x) = D\tilde{u}(a, x) - f_{\Omega}(x), \quad \text{em } \Omega \quad (2.3)$$

$$R_{\Gamma} = R_{\Gamma}(a, x) = B\tilde{u}(a, x) - f_{\Gamma}(x), \quad \text{em } \Gamma \quad (2.4)$$

Os resíduos podem desaparecer para determinados valores de x , mas eles não se anulam para todos os valores de x a não ser que \tilde{u} seja a solução exata. Então, assume-se que \tilde{u} já é uma boa aproximação de u se os resíduos são pequenos. Esses resíduos podem ser obtidos mediante diversos esquemas, todos eles projetados para produzir equações algébricas que se resolvam para os n coeficientes a_i . Alguns dos esquemas mais populares são colocação, subdomínios, mínimos quadrados, colocação por mínimos quadrados e Galerkin (Cook, Malkus e Plesha, 1989).

O método dos Resíduos Ponderados consiste em selecionar *funções de ponderação* $w_i(x)$ estabelecendo que as médias ponderadas do resíduo R_Ω sejam zero. Em termos matemáticos, R_Ω é ortogonalizado em relação às funções de ponderação na forma :

$$\int_{\Omega} w_i(x) R_\Omega(a, x) d\Omega = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

Os diversos métodos dos resíduos ponderados se diferenciam na forma da definição de $w_i(x)$. Na técnica de Bubnov-Galerkin, ou simplesmente Galerkin, as funções de ponderação $w_i(x)$ são os coeficientes das coordenadas generalizadas α_i , então:

$$w_i = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha_i} \quad (2.6)$$

Por outro lado, na técnica de Galerkin o resíduo do contorno R_r é inserido na Equação (2.5) após ela ter sido submetida a um processo de integração por partes que diminui a ordem das derivadas, introduzindo-se desta forma as condições de contorno naturais na formulação do problema. Finalmente as condições de contorno essenciais são impostas no sistema final de equações matriciais para resolver o problema.

Tendo sido determinados os resíduos ponderados, é estabelecida uma família de soluções teste, $\tilde{u} = \tilde{u}(x, a)$; onde os valores de a_i que definem a melhor forma de \tilde{u} são escolhidos a partir da Equação (2.5).

2.4 Formulação $u-p$

Apresenta-se em forma sucinta a formulação $u-p$, em deslocamento u da estrutura e pressão p do fluido, para resolver o comportamento vibratório de um sistema acoplado fluido-estrutura. As oscilações consideradas são de *baixa amplitude* com relação a uma *posição média*, que pode ser uma posição de equilíbrio ou uma posição de referência.

2.4.1 Modelagem do domínio estrutural

A modelagem das vibrações do domínio estrutural é feita em termos do *deslocamento* u , assumindo-se pequenos deslocamentos estruturais em relação às dimensões do sistema acoplado. A estrutura é, por hipótese, constituída de material elástico linear, isotrópico e homogêneo. Além disso, não se leva em conta a mudança de densidade no domínio sólido devido à compressão na superfície de interface.

Considerando o objetivo final da otimização paramétrica da estrutura, é de fundamental importância escolher um modelo da estrutura que garanta convergência e precisão no processo de otimização. Escolhe-se modelar a estrutura como sendo uma viga, o que permite uma parametrização simples, mas bastante representativa, da estrutura. Na sequência, apresentam-se as equações diferenciais que governam a vibração transversal de vigas elásticas para, em seguida, obter-se a equação matricial do problema discretizado por elementos finitos.

2.4.1.1 Vibração transversal de vigas elásticas lineares

A segunda lei de Newton é utilizada para determinar a equação de movimento em vigas elásticas lineares devido a vibrações transversais (Craig, 1981). A Figura 2.2 mostra o diagrama de corpo livre de um elemento diferencial da viga sujeito à flexão, onde o deslocamento transversal de um ponto em relação ao eixo neutro da viga na direção y é denotado por $u_y(x,t)$, ou abreviando $u(x,t)$, para um tempo t qualquer. O momento de flexão é dado por $M(x,t)$, a força cortante transversal é representada por $V(x,t)$, e o carregamento transversal externo por unidade de comprimento é denotado por $q(x,t)$.

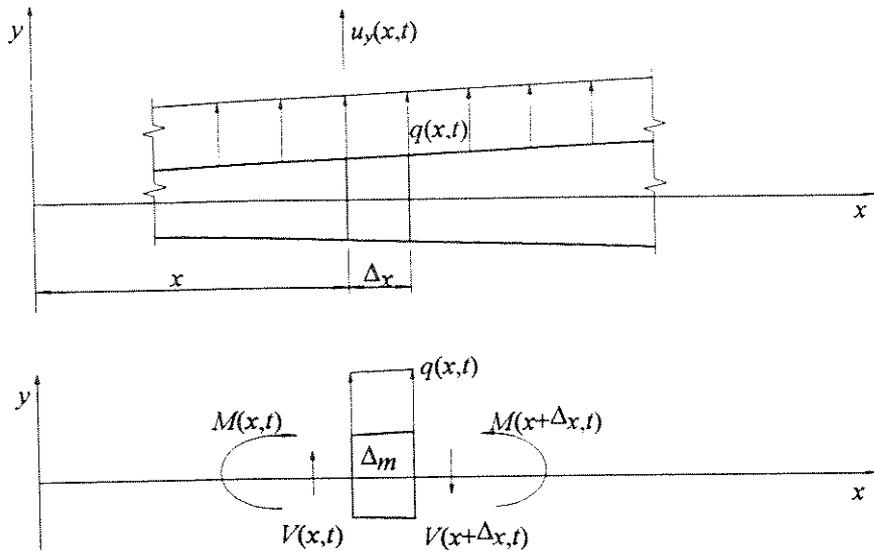


Figura 2.2 Elemento diferencial da viga sujeito a vibração transversal

Com base nos conceitos da mecânica dos sólidos (Popov, 1990) aplicados na flexão e deflexão no plano de simetria de vigas de seção transversal simétrica, pode-se colocar as hipóteses da teoria de viga de Bernoulli-Euler (Craig, 1981) como sendo:

- O plano xy é o plano principal, estando o eixo x localizado ao longo do eixo neutro da viga, que não sofre alongamento ou contração.
- O modelo cinemático envolvido, em relação à geometria deformada, considera que as seções transversais perpendiculares ao eixo neutro da viga sem deformação permanecem planas e perpendiculares em relação ao eixo neutro deformado. Portanto, as deformações normais ao longo da seção de uma viga variam linearmente a partir do eixo neutro, sendo omitidas as deformações transversais consideradas pela relação de Poisson.
- O modelo de material considera um material elástico linear e homogêneo, onde relações constitutivas como a Lei de Hooke aplicam-se para as deformações normais longitudinais.
- As tensões σ_y e σ_z são desprezíveis comparadas com σ_x .
- A inércia de rotação é omitida na equação do momento.

Para um ponto qualquer da viga localizado a uma distância y do eixo neutro, o modelo cinemático adotado considera que a deformação ϵ_x na direção do eixo x está relacionada à curvatura da viga $1/r$, sendo r o raio de curvatura, por:

$$\epsilon_x = -\frac{1}{r} y \quad (2.7)$$

Para uma viga elástica linear cujas propriedades são independentes da posição na seção transversal, o momento fletor $M(x,t)$ na direção do eixo z pode ser relacionado à curvatura por:

$$M(x,t) = \frac{EI}{r} \quad (2.8)$$

onde E denota o módulo de Young e I representa o momento de inércia da seção transversal com relação ao eixo z .

As equações de movimento para o elemento diferencial da viga de massa Δm da Figura 2.2 são derivadas utilizando as leis de Newton como:

$$\sum F_y = \Delta m a_y \quad (2.9)$$

$$\sum M_G = \Delta I_G a_\alpha \quad (2.10)$$

onde o subscrito G indica o centro da massa do elemento diferencial da viga, a_y é a aceleração linear na direção y , a_α é a aceleração angular. Posto que, por hipótese, a inércia de rotação é omitida na expressão do momento, a Equação (2.10) é reduzida para:

$$\sum M_G = 0 \quad (2.11)$$

Aplicando a Equação (2.9) no diagrama de corpo livre da Figura 2.2 tem-se:

$$V(x,t) - V(x + \Delta x, t) + q(x,t) \Delta x = \rho_s A \Delta x \ddot{u} \quad (2.12)$$

onde ρ_s denota a densidade da estrutura, A representa a área da seção transversal da viga. A carga de inércia efetiva é $-\rho_s A \ddot{u}$, onde o símbolo (\cdot) denota a diferenciação em relação ao tempo $d()/dt$. Dividindo a Equação (2.12) por Δx e tomando o limite obtém-se:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} + q(x, t) = \rho_s A \ddot{u} \quad (2.13)$$

Do somatório de momentos na Equação (2.11), e desprezando-se os termos de segunda ordem, tem-se de forma similar:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (2.14)$$

Se a rotação, $\frac{\partial u}{\partial x}$, da viga é pequena, a curvatura $1/r$ de uma linha segundo a geometria analítica é aproximada por $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, e o momento de flexão dado pela Equação (2.8) é expresso como:

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.15)$$

Combinando as Equações (2.13), (2.14) e (2.15) obtém-se a equação de movimento transversal de uma viga sujeita a vibração transversal forçada,

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho_s A \ddot{u} = q(x, t) \quad (2.16)$$

Para se resolver um problema, à equação anterior deve-se acrescentar um conjunto de condições de contorno essenciais e naturais. As condições de contorno essenciais são valores dados da deflexão \bar{u} , e da rotação $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$. As condições de contorno naturais são valores dados do momento de flexão \bar{M} e da força cortante transversal \bar{V} , geralmente aplicadas nos extremos da viga e denotadas como:

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \bar{M} = 0 \quad (2.17)$$

$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \bar{V} = 0 \quad (2.18)$$

As condições de contorno normalmente encontradas na análise de vibração de vigas envolvem certas condições de apoio nos extremos como:

- a. Apoio fixo ou engastamento, deslocamento transversal e rotação nulos.
- b. Apoio simples, deslocamento transversal e momento de flexão nulos.
- c. Extremo livre de força, momento de flexão e força cortante nulos.
- d. Engaste móvel, rotação e força cortante nulos.

2.4.1.2 Aplicação do método dos resíduos ponderados e aproximação por elementos finitos

A estrutura é governada por um conjunto de relações que consideram as Equações (2.16), (2.17) e (2.18) resumidas da seguinte forma:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho_s A \ddot{u} = q(x, t) \quad \text{em } \Omega_s \quad (2.19)$$

sujeito a:

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (2.21)$$

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \bar{M} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (2.22)$$

$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \bar{V} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (2.23)$$

salientando que, no sistema acoplado, a estrutura está sujeita a um carregamento distribuído $q(x, t)$ na superfície de interface devido a uma distribuição de pressão do fluido.

A solução elementar aproximada do sistema de equações diferenciais que descreve o problema é obtida com o método dos Resíduos Ponderados, onde, segundo a técnica de Galerkin, as funções de ponderação $w_{si}(x)$, ou w_{si} para abreviar, são escolhidas como sendo as mesmas funções de forma $n_{si}(x)$ ou n_{si} simplesmente:

$$w_s = n_s \quad (2.24)$$

o que concorda com a definição dada na Equação (2.6)

A solução aproximada do campo de deslocamento transversal $\tilde{u}(x)$ ou \tilde{u} para abreviar é dada por:

$$\tilde{u} = n_s^T u \quad (2.25)$$

sendo n_s o vetor de funções de forma ou de interpolação da estrutura, e u o vetor de deslocamentos transversais e rotações nodais. Para o elemento de viga com deslocamento plano com 4 graus de liberdade:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ u_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

A equação de resíduos ponderados utilizando a técnica de Galerkin, no domínio estrutural $\Omega_s = [0, L]$ correspondente a um elemento de comprimento L , conforme a Figura 2.3, pode ser escrita como:

$$\int_0^L n_s \left(EI \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4} + \rho_s A \ddot{\tilde{u}} - q \right) dx = 0 \quad (2.27)$$

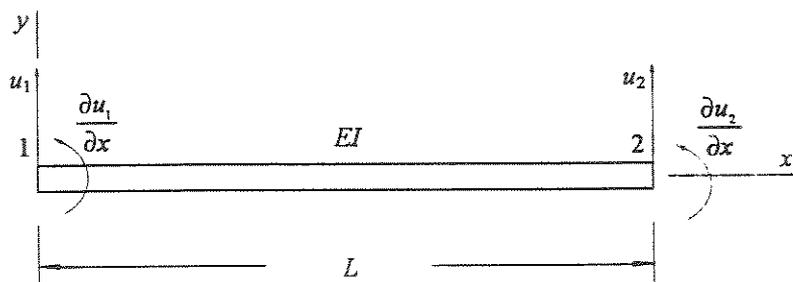


Figura 2.3 Elemento de viga com 4 graus de liberdade

Supondo EI constante, e após duas integrações por partes no primeiro termo da equação anterior, tem-se:

$$\int_0^L n_s EI \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4} dx = \int_0^L \frac{\partial^2 n_s}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} dx + \left[n_s EI \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x^3} - \frac{\partial n_s}{\partial x} EI \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \right]_0^L \quad (2.28)$$

Ao substituir as Equações (2.22), (2.23) e (2.28) na Equação (2.27) resulta:

$$\int_0^L \left(\frac{\partial^2 n_s}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \rho_s A n_s \ddot{u} \right) dx + \left[n_s \bar{V} - \frac{\partial n_s}{\partial x} \bar{M} \right]_0^L = \int_0^L n_s q dx \quad (2.29)$$

As condições de contorno naturais expressas pelos termos \bar{V} e \bar{M} , conforme mostrado na Equação (2.29), são utilizadas para o cálculo do vetor de carregamento. Da Equação (2.25) obtém-se as seguintes expressões:

$$\ddot{u} = n_s^T \ddot{u} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = b^T u \quad (2.31)$$

com

$$b = \frac{\partial^2 n_s}{\partial x^2} \quad (2.32)$$

Substituindo as Equações (2.30), (2.31) e (2.32) na Equação (2.29), e conhecendo-se que o resíduo total é o somatório dos resíduos dos elementos estruturais, $numel\ st.$, chega-se a:

$$\sum_{j=1}^{numel\ st.} \left(\int_0^L b E I b^T dx u + \int_0^L \rho_s A n_s n_s^T dx \ddot{u} = \int_0^L n_s q dx + \left[-n_s \bar{V} + \frac{\partial n_s}{\partial x} \bar{M} \right]_0^L \right) \quad (2.33)$$

que, na forma matricial, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$K_{ss} u + M_{ss} \ddot{u} = f_s \quad (2.34)$$

com

$$f_s = f_{s\Gamma} + f_{sB} \quad (2.35)$$

onde K_{ss} e M_{ss} são as matrizes de rigidez e massa da estrutura, respectivamente, e f_s simboliza o vetor de carregamentos na estrutura variantes no tempo constituído por forças de superfície $f_{s\Gamma}$ e forças de volume f_{sB} , expressas por:

$$K_{ss} = \int_0^L bEIb^T dx \quad (2.36)$$

$$M_{ss} = \int_0^L \rho_s A n_s n_s^T dx \quad (2.37)$$

$$f_{s\Gamma} = \int_0^L n_s q dx \quad (2.38)$$

Resolvendo o último termo da Equação (2.33), obtém-se f_{sB} através das condições de contorno avaliadas nos extremos 0 e L do elemento de viga, denotadas por \bar{V}_0 e \bar{V}_L para forças cortantes e \bar{M}_0 e \bar{M}_L para momentos flexores. Além disso, considerando a convenção de sentidos de forças e momentos num elemento de viga em flexão, Figura 2.3, tem-se

$$f_{sB} = [-n_s \bar{V} + n_{s,x} \bar{M}]_0^L = \begin{Bmatrix} \bar{V}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{V}_L \\ \bar{M}_L \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

O vetor f_s , de uma forma geral, está constituído de forças de corpo, forças de superfície e forças concentradas. Para o sistema acoplado as forças de corpo e forças concentradas podem estar englobadas na variável f_{sB} , enquanto as forças na superfície de interface na variável $f_{s\Gamma}$. As forças na superfície de interface são originadas pelo ação do fluido, que se equilibram com a força de superfície q na interface, o que corresponde à condição de equilíbrio na interface fluido-estrutura.

2.4.2 Modelagem do domínio fluido

A modelagem do domínio fluido é feita em termos de um modelo acústico numa formulação em pressão. Define-se a acústica como a geração, transmissão e recepção da energia na forma de ondas vibratórias na matéria, onde à medida que os átomos ou moléculas deslocam-se da posição inicial, aparece uma força restauradora elástica interna. Esta força acoplada com a inércia do sistema pode conduzir a um movimento oscilatório das partículas, caracterizando a geração e transmissão de ondas acústicas (Kinsler et al., 1982). A frequência da perturbação vibratória conhecida como som situa-se no intervalo de 20-20000 Hz, sendo que o interesse deste trabalho está centrado nas frequências baixas.

As ondas acústicas que produzem a sensação do som são uma das diversas perturbações de pressão que podem se propagar através de um fluido compressível. Estas ondas em fluidos não viscosos são ondas longitudinais. As moléculas se movimentam para frente e para trás na direção de propagação da onda, produzindo regiões adjacentes de compressão e expansão similares às produzidas pelas ondas longitudinais em uma barra. Os fluidos exibem menos restrições às deformações que os sólidos; portanto, a força restauradora responsável pela propagação de uma onda é simplesmente a mudança de pressão que ocorre quando o fluido é comprimido ou expandido.

Considera-se inicialmente a equação tridimensional da onda, adota-se a hipótese de ondas no plano, onde cada variável acústica (deslocamento das partículas, densidade, pressão, etc.) tem amplitude constante em qualquer plano perpendicular à direção de propagação da onda. As ondas no plano podem produzir-se facilmente em um fluido confinado através da vibração estrutural em baixas frequências.

As hipóteses acústicas consideram um fluido ideal, homogêneo, isotrópico, perfeitamente elástico, não viscoso, compressível, a pressão varia em torno de um valor de equilíbrio constante, as ondas são de amplitude pequena de forma que as mudanças na densidade do meio são pequenas com relação ao valor de equilíbrio. São omitidos os termos convectivos, despreza-se a existência do efeito de cisalhamento e o escoamento é irrotacional.

A formulação da equação da onda é obtida através dos princípios da conservação da massa e da conservação da quantidade de movimento (Fox e McDonald, 1985).

2.4.2.1 Equação linearizada de onda

A *partícula de um fluido* é um elemento de volume grande suficiente para conter milhões de moléculas representando um meio contínuo, mas pequeno o suficiente de forma que as variáveis acústicas sejam quase constantes. A velocidade de uma partícula é dada por:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (2.40)$$

A condensação ζ num ponto qualquer, relaciona a densidade instantânea ρ_f no ponto, com relação à densidade de equilíbrio constante do fluido ρ_{f0} , segundo:

$$\zeta = \frac{\rho_f - \rho_{f0}}{\rho_{f0}} \quad (2.41)$$

A variação de pressão ou *pressão acústica* p em qualquer ponto, relaciona a pressão instantânea p_I num ponto, e a pressão de equilíbrio constante p_0 no fluido, segundo:

$$p = p_I - p_0 \quad (2.42)$$

Como a análise limita-se a ondas de pequena amplitude, as mudanças na densidade instantânea ρ_f são mínimas; então da Equação (2.41) resulta que $|\zeta| \ll 1$. Os processos acústicos são quase adiabáticos, mas a equação de estado adiabática é complexa para fluidos que não sejam gases perfeitos. Usa-se a relação isoentrópica das variações de densidade e pressão desenvolvidas em série de Taylor (Kinsler et al., 1982):

$$p_I = p_0 + \left(\frac{\partial p_I}{\partial \rho_f} \right)_{\rho_{f0}} (\rho_f - \rho_{f0}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p_I}{\partial \rho_f^2} \right)_{\rho_{f0}} (\rho_f - \rho_{f0})^2 + \dots \quad (2.43)$$

onde as derivadas parciais são constantes determinadas pela expansão e compressão adiabática do fluido em torno de ρ_{f0} . Para pequenas flutuações, omitem-se os termos de maior ordem, originando-se a expressão linear entre as variações de pressão e densidade,

$$p_f - p_0 = \Xi \left(\frac{\rho_f - \rho_{f0}}{\rho_{f0}} \right) \quad (2.44)$$

com

$$\Xi = \rho_{f0} \left(\frac{\partial p_f}{\partial \rho_f} \right)_{\rho_{f0}} \quad (2.45)$$

onde Ξ é o módulo de compressibilidade adiabático. Em termos da pressão acústica, p , e da condensação, ζ , a equação de estado, Equação (2.44), escreve-se como:

$$p = \Xi \zeta, \quad \text{para } |\zeta| \ll 1 \quad (2.46)$$

As propriedades dos fluidos podem ter representação de campo quando o fluido é considerado como um contínuo. As propriedades de campo são definidas pelas funções contínuas das coordenadas do espaço e do tempo. Os campos da densidade e da velocidade estão relacionados através do princípio da conservação da massa.

O volume de controle é considerado como um cubo infinitesimal de arestas dx, dy, dz , segundo a Figura 2.4. A densidade no centro O do volume é ρ_f , e a velocidade é v segundo a Equação (2.40). Para avaliar as propriedades nas seis faces do volume de controle, utiliza-se a série de Taylor em relação ao ponto O . Assim para a face da direita tem-se:

$$\rho_f \Big|_{x+\frac{dx}{2}} = \rho_f + \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} + \left(\frac{\partial^2 \rho_f}{\partial x^2} \right) \frac{1}{2!} \left(\frac{dx}{2} \right)^2 + \dots \quad (2.47)$$

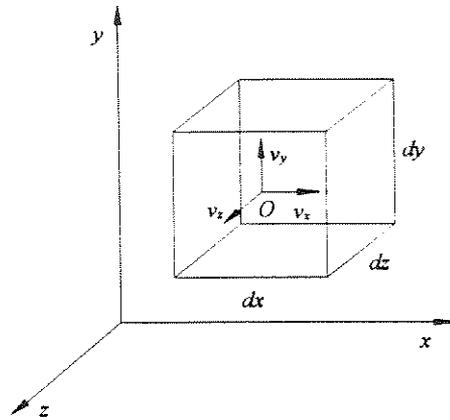


Figura 2.4 Volume de controle diferencial em coordenadas retangulares

Desprezando-se os termos de ordem superior, escreve-se para a face da direita,

$$\rho_f \Big|_{x+\frac{dx}{2}} = \rho_f + \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \quad (2.48)$$

$$v_x \Big|_{x+\frac{dx}{2}} = v_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \quad (2.49)$$

O princípio da conservação de massa afirma: “o fluxo de massa através da superfície de controle mais a variação da massa no interior do volume de controle é igual a zero”. O fluxo de massa através da superfície de controle SC , avaliada nas seis faces do volume de controle é,

$$\int_{SC} \rho_f \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = (\nabla \cdot \rho_f \mathbf{v}) dx dy dz \quad (2.50)$$

onde \cdot indica produto escalar, e ∇ denota o operador vetorial gradiente. Por outro lado, a variação da massa no interior do volume de controle é dada por:

$$\frac{dm}{dt} = \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \right) dx dy dz \quad (2.51)$$

Portanto, das Equações (2.50) e (2.51), o princípio de conservação da massa expressa:

$$\nabla \cdot \rho_f \mathbf{v} + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad (2.52)$$

Tem-se algumas simplificações desse princípio. No escoamento de fluidos incompressíveis, a densidade, por ser constante, não é função das coordenadas nem do tempo, e $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Em movimento permanente, as propriedades do fluido independem do tempo, ou seja, $\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0$.

Para linearizar a Equação (2.52), ρ_f equivale a $\rho_0(1+\zeta)$ segundo a Equação (2.41), onde para ρ_0 constante e $|\zeta| \ll 1$ a equação linearizada de conservação da massa resulta em,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (2.53)$$

A equação da quantidade de movimento é outra relação básica. A equação do movimento do fluido é obtida aplicando a segunda lei de Newton às partículas infinitesimais de massa, dm , as quais deslocam-se num campo de velocidades, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$, considerando-se a expressão da aceleração de uma partícula em qualquer ponto do campo de escoamento, sob a forma de equação vetorial tem-se:

$$d\mathbf{f}_f = dm \left(v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) \quad (2.54)$$

Num elemento fluido atuam forças de superfície e forças de corpo. As forças de superfície envolvem as forças normais e forças tangenciais (tensões). A componente da força de superfície na direção x , $df_{f,x}$, resulta do somatório de forças nessa direção (Figura 2.5), onde as tensões foram obtidas via série de Taylor, em relação ao centro do elemento:

$$df_{f,x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.55)$$

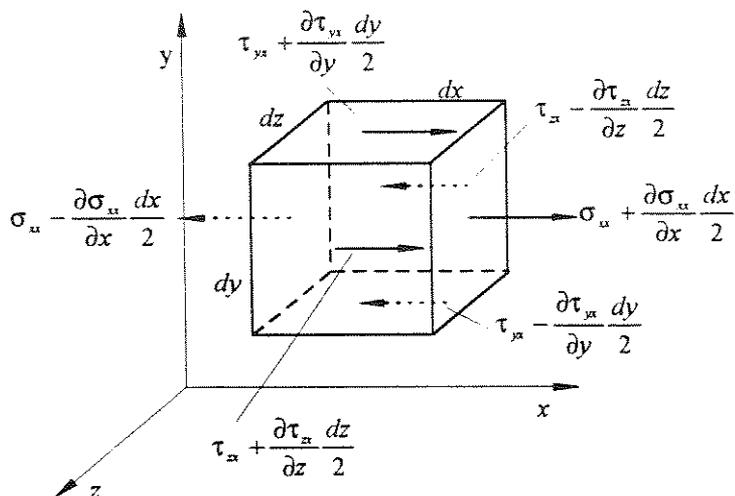


Figura 2.5 Tensões na direção x atuando num elemento fluido

Se a força da gravidade for a única que atua, a força de corpo por unidade de massa é g . Portanto, a componente da força total df_{fx} , na direção x é dada por:

$$df_{fx} = df_{f_{\Gamma x}} + df_{f_{Bx}} = \left(\rho_f g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.56)$$

onde g_x é a componente de g em x . Substituindo a componente df_{fx} da força df_f , Equação (2.56) na Equação (2.54), gera-se a *equação diferencial da quantidade de movimento* do fluido em x :

$$\rho_f g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho_f \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (2.57)$$

indicando-se que existem expressões semelhantes nas direções y e z . Considera-se um fluido ideal de viscosidade nula onde no escoamento não atuam as tensões tangenciais, mas sim as tensões normais; sendo a tensão normal num ponto a mesma em todas as direções (quantidade escalar), dada pela pressão negativa da Termodinâmica $\sigma_{nn} = -p_l$ e instantânea no elemento.

A equação da quantidade de movimento para o escoamento do fluido sem atrito, considerando a Equação (2.57) onde atuam unicamente as tensões normais dadas por $-p_l$, é denominada *equação de Euler* e dada em forma vetorial como:

$$\rho_f \mathbf{g} - \nabla p_l = \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) \quad (2.58)$$

A Equação (2.58) é não linear, mas simplifica-se para $|\zeta| \ll 1$ e $|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}| \ll |\partial \mathbf{v} / \partial t|$; substituindo ρ_f com ρ_0 , ∇p_l com ∇p pois p_0 é constante, resultando a equação válida para processos acústicos de pequena amplitude,

$$\rho_{f0} \mathbf{g} - \nabla p = \rho_{f0} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (2.59)$$

Na dedução da equação linearizada de onda combinam-se as Equações (2.46), (2.53) e (2.59) para gerar uma única equação diferencial com uma variável dependente. Toma-se a divergência da Equação (2.59),

$$\rho_{f0} \nabla \cdot \mathbf{g} - \nabla^2 p = \rho_{f0} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (2.60)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano em três dimensões,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.61)$$

Tomando a derivada no tempo da Equação (2.53), e considerando que $\partial(\nabla \cdot \mathbf{v}) / \partial t$ é similar a $\nabla \cdot (\partial \mathbf{v} / \partial t)$ tem-se:

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0 \quad (2.62)$$

Combinando as equações (2.60) e (2.62) resulta:

$$\nabla^2 p - \rho_{f0} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \rho_{f0} \nabla \cdot \mathbf{g} \quad (2.63)$$

e usando a Equação (2.46) obtém-se a equação da onda sem perda para propagação do som em fluidos:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_{f0} \nabla \cdot \mathbf{g} \quad (2.64)$$

onde c é a velocidade de fase para ondas acústicas em fluidos, definida por:

$$c = \sqrt{\frac{\Xi}{\rho_{f0}}} \quad (2.65)$$

2.4.2.2 Aplicação do método dos resíduos ponderados e aproximação por elementos finitos

O domínio fluido, dado o problema acoplado a resolver posteriormente, é governado pela equação de Helmholtz segundo a Equação (2.64), mais certas condições de contorno lineares dos tipos, superfície livre Γ_{SL} , de parede rígida Γ_{PR} e de interface fluido-estrutura Γ_I :

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + P_B = 0 \quad \text{em } \Omega_f \quad (2.66)$$

sujeito a:

$$p = 0, \quad \text{em } \Gamma_{SL} \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \hat{n}} = 0, \quad \text{em } \Gamma_{PR} \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \hat{n}} = -\rho_f \dot{v}_{\hat{n}}, \quad \text{em } \Gamma_I \quad (2.69)$$

onde P_B engloba as forças de corpo, \hat{n} é a direção normal exterior ao fluido, $v_{\hat{n}}$ é a velocidade do fluido na direção normal à interface, sendo $\dot{v}_{\hat{n}}$ um valor dado. A condição de interface deve satisfazer a compatibilidade cinemática na direção normal entre o fluido e a estrutura, não sendo consideradas situações de separação dos domínios como no caso da cavitação.

Para uma solução aproximada \tilde{p} da pressão p , define-se um resíduo $R(\tilde{p})$ na forma:

$$R(\tilde{p}) = \nabla^2 \tilde{p} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} + P_B \quad (2.70)$$

então o problema consiste em encontrar soluções aproximadas \tilde{p} do campo de pressões do fluido que satisfaçam a Equação (2.70) e as condições de contorno.

Para resolver o problema da dinâmica do fluido, torna-se factível discretizar o contínuo, devido à possibilidade de se fazer os cálculos ao nível elementar. A solução elementar aproximada do sistema de equações diferenciais que descrevem o problema é obtida com o método dos Resíduos Ponderados onde, segundo a técnica de Galerkin, as funções de ponderação do domínio fluido, $w_f(x,y)$ no caso bidimensional ou simplesmente w_{fi} , são escolhidas como sendo as mesmas funções de forma $n_f(x,y)$ ou simplesmente n_{fi} usadas na aproximação de \tilde{p} :

$$w_f = n_f \quad (2.71)$$

Portanto, a forma integral utilizando a técnica de Galerkin, correspondente a um elemento do domínio fluido Ω_f , é escrita como:

$$\int_{\Omega_f} n_f(x,y) \left(\nabla^2 \tilde{p} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} + P_B \right) d\Omega_f = 0 \quad (2.72)$$

onde n_f são as funções ponderadoras no espaço bidimensional, as quais não estão submetidas a nenhuma condição e, por outro lado, \tilde{p} deve ser duas vezes derivável e satisfazer todas as condições de contorno.

Fazendo-se uma vez a integração por partes em duas dimensões da Equação (2.72), (Dhatt e Touzot, 1984) e (Galli, 1995), e substituindo a condição de contorno de interface dada pela Equação (2.69), obtém-se a forma fraca:

$$-\int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial \mathbf{n}_f}{\partial x} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{n}_f}{\partial y} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \right) d\Omega_f - \rho_f \int_{\Gamma_i} \mathbf{n}_f \dot{\tilde{v}}_{\hat{n}} d\Gamma_i - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} \mathbf{n}_f \ddot{\tilde{p}} d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \mathbf{n}_f P_B d\Omega_f = \mathbf{0} \quad (2.73)$$

Considerando o método dos elementos finitos, tem-se a seguinte aproximação polinomial nodal para cada elemento fluido:

$$\tilde{p} = \mathbf{n}_f^T \mathbf{p} \quad (2.74)$$

onde \tilde{p} é a aproximação do campo escalar de pressões locais, \mathbf{n}_f o vetor das funções de forma do fluido, e \mathbf{p} o vetor de pressões nodais do elemento. Devido ao fato de que \mathbf{n}_f é independente do tempo e de \mathbf{p} , assim como \mathbf{p} é independente das coordenadas (x,y) , é possível escrever:

$$\ddot{\tilde{p}} = \mathbf{n}_f^T \ddot{\mathbf{p}} \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{n}_f^T}{\partial x} \mathbf{p} \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{n}_f^T}{\partial y} \mathbf{p} \quad (2.77)$$

Substituindo as Equações (2.75), (2.76) e (2.77) na Equação (2.73), e após efetuar a divisão por ρ_f obtém-se o residuo total no domínio fluido como sendo o somatório dos resíduos dos elementos fluidos, *numel fl*.

$$\sum_{j=1}^{numel\ fl} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial \mathbf{n}_f}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{n}_f^T}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{n}_f}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{n}_f^T}{\partial y} \right) d\Omega_f \mathbf{p} + \int_{\Gamma_i} \mathbf{n}_f \dot{\tilde{v}}_{\hat{n}} d\Gamma_i + \frac{1}{\rho_f c^2} \int_{\Omega_f} \mathbf{n}_f \mathbf{n}_f^T d\Omega_f \ddot{\mathbf{p}} \\ - \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \mathbf{n}_f P_B d\Omega_f = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (2.78)$$

Numa notação de matrizes globais, após a montagem dos elementos, tem-se:

$$\mathbf{M}_{ff} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_{ff} \mathbf{p} + \int_{\Gamma_i} \mathbf{n}_f \dot{\tilde{v}}_{\hat{n}} d\Gamma_i = \mathbf{f}_f \quad (2.79)$$

onde a parcela integral engloba os termos da matriz de interface M_{ff} . A matriz de inércia ou compressibilidade do fluido M_{ff} , a matriz volumétrica da energia cinética do fluido K_{ff} e o vetor com as excitações externas f_f são definidos por:

$$M_{ff} = \frac{1}{\rho_f c^2} \int_{\Omega_f} n_f n_f^T d\Omega_f \quad (2.80)$$

$$K_{ff} = \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} B^T B d\Omega_f \quad (2.81)$$

$$f_f = \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} n_f P_B d\Omega_f \quad (2.82)$$

com

$$B = \begin{Bmatrix} \frac{\partial n_f^T}{\partial x} \\ \frac{\partial n_f^T}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.83)$$

2.4.3 Acoplamento fluido-estrutura

Considerando que o efeito da distribuição de pressões do fluido sobre a estrutura na superfície de interface pode ser aproximada utilizando o termo $f_{s\Gamma}$ nas Equações (2.34) e (2.35), escreve-se para a superfície de acoplamento Γ_I a seguinte expressão:

$$K_{ss} u + M_{ss} \ddot{u} = f_{s\Gamma_I} + f_{sB} \quad (2.84)$$

com

$$f_{s\Gamma_I} = \int_0^L n_s q dx \quad (2.85)$$

As forças na superfície de interface são originadas pela ação do fluido, estando associada a componente normal da força de superfície q à distribuição de pressão sobre a interface; substituindo q por \tilde{p} e considerando a Equação (2.74), expressa-se a Equação (2.85) como:

$$f_{s\Gamma_I} = \int_0^L n_s n_f^T dx p \quad (2.86)$$

que representa a condição de equilíbrio na interface.

Levando a Equação (2.86) na Equação (2.84) tem-se:

$$\mathbf{K}_{ss}\mathbf{u} + \mathbf{M}_{ss}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{sf}\mathbf{p} = \mathbf{f}_s \quad (2.87)$$

onde

$$\mathbf{K}_{sf} = -\int_0^L \mathbf{n}_s \mathbf{n}_f^T dx \quad (2.88)$$

O acoplamento do domínio estrutural com o domínio fluido é imposto na direção normal \hat{n} da superfície de interface, através de uma identidade que garanta a compatibilidade cinemática (Zienkiewicz e Taylor, 1989):

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{\hat{n}} = \ddot{\mathbf{u}}_{\hat{n}} \quad (2.89)$$

o que representa uma condição de escorregamento na direção tangencial à interface.

Considerando o domínio fluido, o acoplamento fluido-estrutura é descrito em termos das variações de pressão na vizinhança do domínio estrutural segundo a condição de contorno na interface dada pela Equação (2.69), a qual utilizando a Equação (2.89) é escrita como:

$$\frac{\partial p}{\partial \hat{n}} = -\rho_f \ddot{\mathbf{u}}_{\hat{n}}, \quad \text{em } \Gamma_I \quad (2.90)$$

Introduzindo a Equação (2.89) na Equação (2.79), o que significa substituir o componente na direção normal $\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{\hat{n}}$ por $\ddot{\mathbf{u}}_{\hat{n}}$, e considerando a Equação (2.30) para aproximar o valor de $\ddot{\mathbf{u}}_{\hat{n}}$ por $\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_{\hat{n}}$, ou em forma discreta por $\mathbf{n}_s^T \ddot{\mathbf{u}}$, tem-se:

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_f \mathbf{p} + \mathbf{M}_{fs} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_f \quad (2.91)$$

sendo a matriz com os termos de interface:

$$M_{fs} = \int_{\Gamma_f} n_f n_s^T d\Gamma_f \quad (2.92)$$

o que permite escrever o sistema acoplado em sua forma semi-descretizada.

2.4.4 Formulação matricial

Rescrevendo as equações (2.87) e (2.91) em forma conjunta:

$$K_{ss}u + M_{ss}\ddot{u} + K_{sf}p = f_s \quad (2.93)$$

$$M_{ff}\ddot{p} + K_{ff}p + M_{fs}\ddot{u} = f_f \quad (2.94)$$

que colocadas numa forma matricial compacta, geram a formulação acoplada $u-p$:

$$\begin{bmatrix} M_{ss} & \mathbf{0} \\ M_{fs} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sf} \\ \mathbf{0} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_s \\ f_f \end{Bmatrix} \quad (2.95)$$

Para o caso de vibrações livres, o segundo termo da Equação (2.95) é zero. A apresentação não simétrica desta formulação constitui-se na sua principal desvantagem, pois não é possível utilizar diversos algoritmos eficientes desenvolvidos para matrizes simétricas. A principal vantagem desta formulação é o seu reduzido número de graus de liberdade para modelar o domínio fluido, especialmente quando comparado com modelos baseados em variáveis vetoriais para o meio fluido.

2.4.5 Determinação das matrizes elementares

Para o domínio estrutural, adotam-se como as componentes n_{si} do vetor n_s as funções de forma cúbicas clássicas, garantindo continuidade entre elementos através dos deslocamentos e de suas derivadas primeiras, conforme mostrado na Figura 2.6 onde são indicados os valores nodais, e definidas como se segue:

$$n_s = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{Bmatrix} \quad (2.96)$$

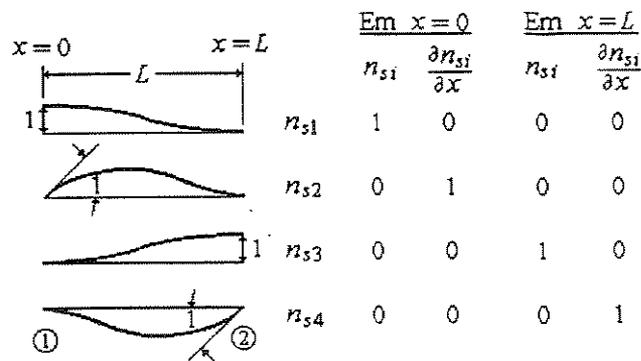


Figura 2.6 Funções de forma cúbicas para elementos da classe C^1

O cálculo das matrizes é desenvolvido no espaço isoparamétrico local em coordenadas $\xi=x/L$, ficando o vetor das funções de forma no domínio estrutural definido por:

$$n_s = \begin{Bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ L(-\xi^2 + \xi^3) \end{Bmatrix} \quad (2.97)$$

As expressões matriciais que representam o comportamento da estrutura são obtidas a partir da resolução das integrais das Equações (2.36), (2.37) e (2.38), resultando em:

$$K_{ss} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ Sim. & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

$$M_{ss} = \frac{\rho_s AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{Sim.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

$$f_{sT} = \frac{qL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ L/6 \\ 1 \\ -L/6 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

No que concerne ao domínio fluido, e com a finalidade de resolver problemas bidimensionais, foi escolhida a utilização de elementos finitos triangulares lineares com três nós, e um grau de liberdade por nó. A escolha desse elemento justifica-se pela sua eficácia mostrada em trabalhos anteriores de interação fluido-estrutura (Galli, 1995) e em estudos de cavidades acústicas (Ahmida, 1996). Além disso, este tipo de elemento apresentou resultados bastante próximos aos obtidos por Sandberg (1995) no estudo de um problema acoplado com o fluido discretizado por elementos quadrilaterais de oito nós. Para simplicidade usou-se um referencial local isoparámetro em coordenadas (ξ, η) , onde as correspondentes funções de forma neste espaço, Figura 2.7, são dadas por:

$$n_f = \begin{Bmatrix} 1 - \xi - \eta \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (2.101)$$

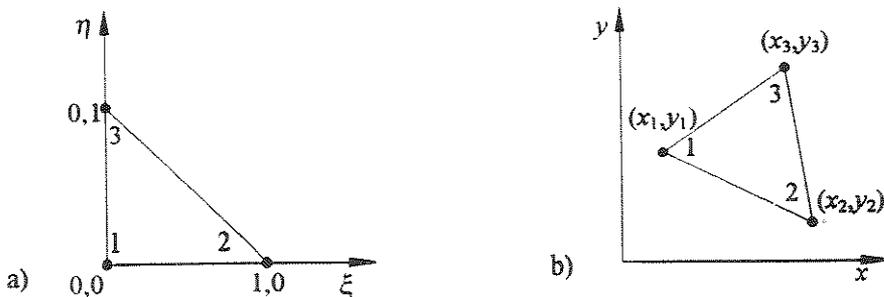


Figura 2.7 Elemento triangular nos espaços a) isoparámetro e b) real

As expressões matriciais que representam o comportamento acústico do meio fluido são obtidas ao resolver as integrais das Equações (2.80) e (2.81), obtendo-se:

$$M_{ff} = \frac{A_T}{12\rho_f c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

$$K_{ff} = \frac{1}{4\rho_f A_T} \begin{bmatrix} (y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2 & (y_3-y_2)(y_1-y_3)+(x_3-x_2)(x_1-x_3) & (y_2-y_1)(y_3-y_2)+(x_2-x_1)(x_3-x_2) \\ \text{Sim} & (y_3-y_1)^2+(x_3-x_1)^2 & (y_1-y_3)(y_2-y_1)+(x_1-x_3)(x_2-x_1) \\ & & (y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2 \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

onde A_T é a área do elemento triangular em função das coordenadas nodais $(x_i, y_i, i=1,2,3)$:

$$A_T = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}{2} \quad (2.104)$$

As matrizes de interface são obtidas após desenvolver as expressões integrais dadas pelas Equações (2.88) e (2.92), avaliadas na interface Γ_l , obtendo-se:

$$K_{sf} = -L \begin{bmatrix} 7/20 & 3/20 \\ L/20 & L/30 \\ 3/20 & 7/20 \\ -L/30 & -L/20 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

$$M_{fs} = L \begin{bmatrix} 7/20 & L/20 & 3/20 & -L/30 \\ 3/20 & L/30 & 7/20 & -L/20 \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

as quais satisfazem a relação:

$$K_{sf} = -M_{fs}^T \quad (2.107)$$

Deve-se salientar, que para a montagem das matrizes globais do sistema, quando se usa o método dos deslocamentos, faz-se necessária a aplicação das matrizes de transformação do referencial local para o global. Observa-se também que neste caso ao modelo de viga de Euler deve-se superpor o efeito dos movimentos longitudinais.

Capítulo 3

Análise de Sensibilidade em Sistemas Acoplados Fluido-Estrutura

3.1 Objetivos

Neste Capítulo, apresenta-se uma formulação matemática para a análise de sensibilidade das frequências naturais, dos modos próprios de vibração e da resposta em frequência de sistemas acoplados e desacoplados fluido-estrutura. Mostra-se também a aplicação destas formulações no processo de otimização paramétrica, seja no cálculo do gradiente, seja para a predição das características dinâmicas do sistema.

3.2 Generalidades

A análise de sensibilidade do projeto trata da relação entre as variáveis do projeto disponíveis para o engenheiro e a resposta do sistema determinadas pelas leis da mecânica (Haug, Choi e Komkov, 1986). A dependência das variáveis de resposta como deslocamento, tensões, frequências naturais, etc. das variáveis do projeto como área da seção transversal do elemento, espessura de placas, etc. encontra-se implicitamente definida através das equações de estado da mecânica.

A análise de sensibilidade pode ser integrada no processo de um projeto em engenharia, cuja solução é obtida através de um procedimento iterativo de otimização. Para tanto, deve-se integrar os conceitos de análise por elementos finitos, análise de sensibilidade e otimização segundo a programação matemática (Olhoff e Lund, 1995). Alguns objetivos de projeto típicos

para otimização são: custo, deslocamentos, tensões, frequências de vibração e cargas de flambagem entre outros.

Diversas melhorias no projeto de sistemas mecânicos podem ser obtidas mediante uma análise repetitiva do projeto até que o sistema desejado seja encontrado. Para resolver este problema que consome bastante tempo, é mais vantajoso utilizar a análise de sensibilidade, que permite prever em algumas condições o comportamento do modelo sem recalculá-lo.

Na prática, os projetos dos sistemas mecânicos devem satisfazer determinadas restrições da resposta dinâmica, e métodos para essa análise devem ser econômicos em tempo e custo computacional. Esses problemas acentuam-se quando se adota um procedimento de otimização automático para o projeto. Assim sendo, faz-se necessário o conhecimento da variação da resposta dinâmica do sistema em relação às mudanças das variáveis do projeto, isto é, a sensibilidade da resposta do sistema em relação à variação dos parâmetros do projeto.

Neste trabalho a otimização do sistema fluido-estrutura é efetuada com o objetivo de maximizar a separação de duas frequências naturais adjacentes, ou para diminuir a resposta em frequência de um certo número de frequências de excitação. É portanto necessária, a determinação da sensibilidade das frequências, dos modos próprios de vibração e da resposta em frequência do sistema em relação aos parâmetros estruturais.

Existem diversos métodos para o cálculo da sensibilidade em sistemas estruturais, sendo publicadas continuamente diversas melhorias nos mesmos. Os principais métodos são o *método modal* (Fox e Kapoor, 1968), o método de Nelson (Nelson, 1976), e o *método modal modificado* (Wang, 1985). Estes métodos podem se estender facilmente para os sistemas acoplados. Junkins e Kim (1993) apresentam um método de sensibilidade modal mais geral baseado no método modal de Fox e Kapoor, sendo necessário considerar as condições de ortogonalidade dos autovetores à direita e autovetores à esquerda.

Ma e Hagiwara (1991a) apresentam um novo método de sensibilidade para sistemas desacoplados e acoplados fluido-estrutura, tendo boa precisão numérica e melhor convergência que o método modal e o método modal modificado. Este método também apresentou melhor eficiência que o método de Nelson quando se considera mais de um autovetor. Por outro lado,

este método é mais geral e pode-se reduzir aos outros, em função da escolha de um valor adequado de seus parâmetros.

O sistema acoplado fluido-estrutura é tratado em uma formulação matricial $u-p$ assimétrica. Em geral, as matrizes assimétricas resultam em um problema de autovalores complexos, não sendo o caso para o sistema acoplado fluido-estrutura na formulação $u-p$. Por outro lado, as condições convencionais de ortogonalidade de uma formulação matricial simétrica não são mais válidas. Isso conduz a necessidade de utilizar o conceito de autovetores à direita e autovetores à esquerda, os quais juntamente com os autovalores do sistema acoplado continuam sendo números reais como é provado entre outros por Ma e Hagiwara (1991a). Tal afirmação só é válida quando são omitidos na formulação os termos de amortecimento. Além disso, os autovetores à esquerda do sistema acoplado são determinados diretamente utilizando os autovetores à direita, não sendo necessário a resolução do autoproblema à esquerda.

Neste trabalho a análise de sensibilidade é utilizada no cálculo dos gradientes necessários para a otimização e na predição das características modais do sistema. Adota-se as expressões de Ma e Hagiwara para o cálculo das derivadas ou sensibilidades dos autovalores e autovetores em relação as variáveis de projeto da estrutura.

As expressões analíticas e o software desenvolvido, são testados no Capítulo 5 para casos simples de vibrações de estruturas e de sistemas acoplados fluido-estrutura.

3.3 Problema de autovalores nos sistemas acoplados fluido-estrutura

Considerando a discretização do método dos elementos finitos apresentado no Capítulo 2, o comportamento do sistema acoplado fluido-estrutura é dado pela equação,

$$M\ddot{u} + Ku = f \quad (3.1)$$

onde, M denota a matriz de massa, K simboliza a matriz de rigidez, u o vetor de incógnitas nodais e f representa o vetor de excitação, todos com relação ao sistema acoplado e dados por:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_f \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sf} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{fs} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

sendo, \mathbf{u}_s o vetor de deslocamento nodal da estrutura, \mathbf{u}_f o vetor de pressão do domínio fluido, \mathbf{M}_{ss} e \mathbf{K}_{ss} as matrizes de massa e rigidez da estrutura, \mathbf{M}_{ff} e \mathbf{K}_{ff} denominadas de matrizes de massa e rigidez do domínio fluido, \mathbf{M}_{fs} e \mathbf{K}_{sf} as matrizes com os termos de acoplamento, conforme mostrado no Capítulo 2. Observa-se que as pressões do fluido são representadas por \mathbf{u}_f , para facilitar a interpretação dos índices na formulação matricial. Tendo em vista a formulação adotada em deslocamento da estrutura e pressão do fluido, tem-se a seguinte relação para a interface,

$$\mathbf{K}_{sf} = -\mathbf{M}_{fs}^T \quad (3.5)$$

Usando-se as hipóteses de vibrações harmônicas livres, variáveis tempo e espaço separáveis, e variações infinitesimais e harmônicas no tempo, pode-se escrever o seguinte problema de autovalores a partir da Equação (3.1),

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

onde λ é o autovalor, e $\boldsymbol{\phi}$ o correspondente autovetor à direita. A partir da Equação (3.6) pode-se obter N pares de soluções, λ_j e $\boldsymbol{\phi}_j$ ($j=1,2,\dots,N$), sendo N o número total de coordenadas nodais incógnitas do sistema acoplado. Assume-se por simplicidade que não existem autovalores repetidos. Num sistema com autovalores repetidos, caso bastante improvável num sistema prático qualquer (Haug, Choi e Komkov, 1986), a sensibilidade dos autovetores para os autovalores repetidos é descontínua, não sendo mais aplicáveis os métodos usuais de sensibilidade. A literatura relata estudos de sensibilidade em sistemas estruturais com autovalores repetidos, por exemplo (Chen e Pan, 1986), (Ojalvo, 1988) e (Dailey, 1989). Estes

casos não foram discutidos neste trabalho, todavia o seu estudo não implica em modificações importantes às implementações efetuadas.

Como as matrizes K e M não são simétricas, as condições de ortogonalidade não são mais válidas, por conseguinte,

$$\phi_i^T K \phi_j \neq 0, \quad i \neq j \quad (3.7)$$

$$\phi_i^T M \phi_j \neq 0, \quad i \neq j \quad (3.8)$$

o que significa que o método de análise modal convencional (por exemplo o método de superposição modal clássico), não pode ser utilizado somente com os autovetores à direita ϕ_j . Portanto, considera-se o problema de autovalores à esquerda associado ao problema colocado na Equação (3.6), que se escreve da seguinte maneira,

$$\bar{\phi}^T (K - \lambda M) = 0 \quad (3.9)$$

onde $\bar{\phi}$ é chamado de autovetor à esquerda, que é calculado utilizando o autovetor à direita ϕ da Equação (3.6). Para tanto, escreve-se o autovetor à direita ϕ_j , em função de suas componentes ϕ_{sj} e ϕ_{fj} relativas a u_s e u_f respectivamente como sendo,

$$\phi_j = \begin{Bmatrix} \phi_{sj} \\ \phi_{fj} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Em consequência o autovetor à esquerda $\bar{\phi}_j$ correspondente ao autovalor λ_j pode ser calculado da seguinte forma, segundo demonstrado por Ma e Hagiwara (1991a) para a formulação $u-p$ assimétrica,

$$\bar{\phi}_j = \kappa \begin{Bmatrix} \phi_{sj} \\ (1/\lambda_j)\phi_{fj} \end{Bmatrix} \quad (\text{para } \lambda_j \neq 0) \quad \text{e} \quad \bar{\phi}_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_{fj} \end{Bmatrix} \quad (\text{para } \lambda_j = 0 \text{ e } \phi_{fj} \neq 0) \quad (3.11)$$

onde κ é uma constante arbitrária, assumida neste caso igual a um.

Desta forma as novas condições de ortogonalidade do sistema acoplado são,

$$\bar{\phi}_i^T K \phi_j = 0, \quad i \neq j \quad (3.12)$$

$$\bar{\phi}_i^T M \phi_j = 0, \quad i \neq j \quad (3.13)$$

$$\bar{\phi}_j^T K \phi_j = \lambda_j, \quad i = j \quad (3.14)$$

$$\bar{\phi}_j^T M \phi_j = 1, \quad i = j \quad (3.15)$$

sendo que neste caso adota-se uma normalização em relação a massa do sistema. Observa-se também, que embora as matrizes do sistema sejam não simétricas, o cálculo dos autovetores à esquerda é simples conforme a Equação (3.11), não acrescentando nenhuma dificuldade especial ao problema.

Observa-se no entanto, que o problema de autovalores da Equação (3.6) é não simétrico, o que significa alguma dificuldade adicional, principalmente ao que se refere a utilização de algoritmos de alta performance desenvolvidos para sistemas simétricos. Contudo, o uso da formulação $u-p$ parece mais vantajoso que simetrizar o sistema, dado que a simetrização envolve o cálculo da inversa de alguma matriz dos subsistemas fluido ou estrutura. Tal custo pode vir a se tornar proibitivo se o processo de otimização for iterativo. Além disso pode-se ter outra dificuldade adicional no cálculo da sensibilidade das matrizes inversas. Portanto adotou-se neste trabalho a formulação matricial $u-p$ assimétrica.

3.4 Sensibilidade modal dos sistemas acoplados fluido-estrutura

Um método eficiente e confiável para a análise da sensibilidade é indispensável no processo do projeto e otimização, onde as técnicas mais comuns utilizam a diferenciação implícita das equações de estado ou de equilíbrio discretizados por elementos finitos, com relação as variáveis de projeto (Olhoff e Lund, 1995). A implementação mais geral desta técnica, que é vantajosa do ponto de vista de custo computacional e facilidade de implementação, envolve a diferenciação numérica das matrizes dos elementos finitos, sendo denominada *método semi-analítico*. Quando o número de tipos de variáveis de projeto é pequeno, como neste trabalho, torna-se mais econômico o cálculo das sensibilidades em forma exata, usando-se um *método analítico*. Com este tipo de enfoque evitam-se os erros

cumulativos do processo de diferenciação numérica nos algoritmos de otimização (Grace, 1995).

O objetivo da análise de sensibilidade modal é determinar as derivadas (sensibilidades) dos autovalores e autovetores em relação as variáveis de projeto r_k ($k=1,2,\dots$). As sensibilidades do autovalor λ_j , autovetor à direita ϕ_j e autovetor à esquerda $\bar{\phi}_j$ em relação a qualquer variável r_k , podem ser escritas respectivamente como $\lambda_j'^k$, $\phi_j'^k$ e $\bar{\phi}_j'^k$. Neste trabalho escolhe-se como única variável de projeto um certo parâmetro da estrutura, por exemplo a *altura e* da estrutura a qual em particular denota a altura de um elemento finito estrutural e_l ($l=1,2,\dots$); então, o sobrescrito k nas derivadas pode ser omitido para simplicidade. Considerando que as componentes das matrizes do sistema acoplado fluido-estrutura são dependentes das variáveis de projeto; as derivadas das matrizes K e M com relação a única variável de projeto, o parâmetro e por exemplo, são denominadas como K' e M' .

Considerando o problema de autovalor à direita da Equação (3.6), e realizando-se a operação de derivada parcial, em relação a variável de projeto e , tem-se:

$$-\lambda_j' M \phi_j + (K - \lambda_j M) \phi_j' = -(K' - \lambda_j M') \phi_j \quad (3.16)$$

Por outro lado, realizando-se a operação de diferenciação parcial em relação a variável de projeto e na Equação (3.15), que expressa a condição de normalização em relação a massa,

$$\bar{\phi}_j'^T M \phi_j + \bar{\phi}_j^T M \phi_j' = -\bar{\phi}_j^T M' \phi_j \quad (3.17)$$

Premultiplicando a Equação (3.16) pelo autovetor à esquerda $\bar{\phi}_j^T$, e utilizando a condição de normalização em relação a massa da Equação (3.15) e a Equação (3.9), obtém-se a derivada do j -ésimo autovalor, λ_j' , definida como:

$$\lambda_j' = \bar{\phi}_j^T (K' - \lambda_j M') \phi_j = E_{jj} \quad (3.18)$$

onde o índice repetido não indica soma mas sim o termo na diagonal da matriz correspondente.

Para se calcular a sensibilidade do autovetor à direita, ϕ'_j , a Equação (3.16) é reescrita como:

$$(K - \lambda_j M)\phi'_j = b_j \quad (3.19)$$

com

$$b_j = (\lambda'_j M - K' + \lambda_j M')\phi_j \quad (3.20)$$

Uma solução direta da Equação (3.19) não é possível dado que $(K - \lambda_j M)$ é singular. Resolve-se este problema usando-se uma estratégia proposta por Ma e Hagiwara (1991a), onde define-se x_j como sendo a solução de:

$$(K - \mu M)x_j = b_j \quad (3.21)$$

sendo que μ é um parâmetro de mudança que é determinado a partir de testes numéricos. Como os autovetores formam um conjunto completo de vetores, qualquer vetor componente pode ser representado como uma combinação linear deles (Fox e Kapoor, 1968), e em particular as derivadas dos autovetores à direita podem expressar-se como (Ma e Hagiwara, 1991a):

$$\phi'_j = x_j + \sum_{i=1}^n \phi_i C_{ij} \quad (3.22)$$

onde $n \leq N$ e os coeficientes C_{ij} são obtidos a partir da seguinte expressão:

$$C_{ij} = \frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_i - \mu} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} E_{ij}, \quad i \neq j \quad (3.23)$$

com

$$E_{ij} = \bar{\phi}_i^T (K' - \lambda_j M')\phi_j \quad (3.24)$$

Analogamente, para o autovetor à esquerda é obtida a seguinte expressão:

$$\bar{\phi}'_j = \bar{x}_j + \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i D_{ij} \quad (3.25)$$

onde \bar{x}_j é a solução da Equação (3.26), a qual utiliza o mesmo parâmetro de mudança μ da Equação (3.21),

$$(K - \mu M)^T \bar{x}_j = \bar{b}_j \quad (3.26)$$

e por analogia ao caso do modo à direita, tem-se:

$$\bar{b}_j = (\lambda'_j M - K' + \lambda_j M')^T \bar{\phi}_j \quad (3.27)$$

onde os coeficientes D_{ij} são calculados utilizando-se

$$D_{ij} = \frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_i - \mu} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \bar{E}_{ij}, \quad i \neq j \quad (3.28)$$

com

$$\bar{E}_{ij} = \bar{\phi}_j^T (K' - \lambda_j M') \phi_i \quad (3.29)$$

Além disso, tem-se os valores de C_{jj} e D_{jj} expressas por:

$$C_{jj} = D_{jj} = -\frac{\bar{\phi}_j^T M' \phi_j}{2}, \quad \text{exceto para } \mu = \lambda_j \quad (3.30)$$

Observa-se que o método descrito é também aplicável para sistemas desacoplados tanto estruturais como exclusivamente de domínio fluido, simplesmente trocando-se as matrizes K e M das Equações (3.3) e (3.4), pelas correspondentes matrizes pertencentes à estrutura ou ao fluido. Nestes casos, os autovetores à esquerda $\bar{\phi}_j$ são iguais aos autovetores à direita ϕ_j .

Escolhendo-se valores específicos para o parâmetro de mudança μ , a partir do método descrito acima pode-se chegar as expressões dos métodos de sensibilidade modal estrutural encontrados na literatura. Por exemplo, o método descrito pode-se reduzir ao método modal

(Fox e Kapoor, 1968), para o qual μ assume um valor negativo perto de infinito; assim a solução da Equação (3.21), x_j , chega a ser zero, e os coeficientes C_{ij} da Equação (3.23) resultam,

$$C_{ij} = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} E_{ij}, \quad i \neq j \quad (3.31)$$

Também o método descrito pode-se reduzir ao método de Nelson para $\mu = \lambda_j$ (Nelson, 1976), então os coeficientes C_{ij} ($i \neq j$) da Equação (3.23) se anulam, e a Equação (3.22) converte-se em,

$$\phi'_j = x_j + C_{jj} \phi_j \quad (3.32)$$

Tal estratégia permite ainda que o método se reduza ao método modal modificado proposto por Wang (1985), adotando-se $\mu = 0$, e a Equação (3.23) pode ser expressa da seguinte maneira,

$$C_{ij} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} E_{ij}, \quad i \neq j \quad (3.33)$$

Em geral, um parâmetro de mudança apropriado é $\mu > 0$ onde $\mu \neq \lambda_j$ ($j=1,2,\dots,n$). A partir de ensaios numéricos mostra-se que um valor $\lambda_{j-1} < \mu < \lambda_j$ é apropriado para calcular as sensibilidades dos autovetores de ordem j ou superiores (Ma e Hagiwara, 1991a). Além disso, quanto mais próximo de λ_j for o valor de μ , o erro da sensibilidade do autovetor será menor. Tal tendência é reportada na literatura, e foi comprovada neste trabalho.

A avaliação da sensibilidade dos autovalores, Equação (3.18), e a sensibilidade dos autovetores à direita e autovetores à esquerda, Equações (3.22) e (3.25), é realizada a partir do cálculo das derivadas das matrizes do sistema acoplado. Assim no próximo item será descrito, para o caso particular de um modelo de estruturas unidimensionais em contato com um fluido, a técnica para obtenção destas derivadas.

3.5 Determinação das derivadas das matrizes elementares acopladas

Na determinação das sensibilidades das frequências naturais e dos modos de vibração do sistema acoplado, é necessário o cálculo das derivadas das matrizes elementares acopladas K e M em relação a variável de projeto. A expressão analítica das derivadas das matrizes pode ser escrita da seguinte forma,

$$K' = \begin{bmatrix} K'_{ss} & K'_{sf} \\ \mathbf{0} & K'_{ff} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$M' = \begin{bmatrix} M'_{ss} & \mathbf{0} \\ M'_{fs} & M'_{ff} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Para o caso dos elementos de viga considerados no Capítulo 2, as derivadas das matrizes do fluido e de acoplamento se anulam por ser independentes dos parâmetros da estrutura, e as derivadas das matrizes estruturais K'_{ss} e M'_{ss} são,

$$K'_{ss} = \frac{EI'}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sim.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$M'_{ss} = \frac{\rho_s A' L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{Sim.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

onde as matrizes K'_{ss} e M'_{ss} são funções dos termos I' e A' respectivamente, os quais dependem da seção transversal considerada. Por exemplo, numa seção retangular e tomando como variável de projeto a altura e da seção, tem-se as seguintes relações:

$$I' = \frac{be^2}{4} \quad (3.38)$$

$$A' = b \quad (3.39)$$

onde b denota a largura da seção retangular, considerada neste trabalho como unitária por simplicidade e sem perda de generalidade. Observa-se neste caso que K'_{ss} varia quadraticamente com a altura e segundo a Equação (3.38), e que M'_{ss} passa a ser independente do parâmetro e considerando a Equação (3.39).

Tal característica é obviamente função do tipo de seção transversal adotada, sendo que para o caso de seções circulares e tomando como variável de projeto o diâmetro \varnothing da seção, as matrizes K'_{ss} e M'_{ss} variam em forma cúbica e linear respectivamente em relação ao diâmetro:

$$I' = \frac{\pi \varnothing^3}{16} \quad (3.40)$$

$$A' = \frac{\pi \varnothing}{2} \quad (3.41)$$

Para uma seção transversal circular da estrutura e sendo a variável de projeto a área A da seção, a variação das matrizes K'_{ss} e M'_{ss} em relação ao parâmetro A é linear e independente desse parâmetro respectivamente, uma vez que:

$$I' = \frac{A}{2\pi} \quad (3.42)$$

$$A' = 1 \quad (3.43)$$

Uma das aplicações da análise de sensibilidade apresentada nos itens 3.4 e 3.5, é na predição dos novos parâmetros modais, sem a necessidade da reanálise do problema. Este tipo de aplicação é apresentado no próximo item, e é conhecido na literatura como técnica de modificação estrutural (Lalanne, Berthier e Der Hagopian, 1983).

3.6 Predição dos autovalores e autovetores

Para avaliar os novos valores das frequências naturais e dos modos próprios de vibração, num projeto modificado, são utilizados as expressões analíticas previamente definidas das derivadas dos autovalores e autovetores com relação à variável de projeto escolhida.

Supõe-se que λ_j é o autovalor correspondente a j -ésima frequência natural do sistema, para um projeto com r_k ($k=1,2,\dots$) variáveis. Se cada variável suporta uma alteração gerando um vetor de mudanças das variáveis Δr dado por $[\Delta r_1, \Delta r_2, \dots]^T$; uma aproximação do j -ésimo autovalor do projeto modificado, λ_j^* , para o novo vetor de variáveis de projeto modificadas r^* , segundo o conceito de diferenças finitas em avanço, $\lambda_j^{(DF)}$, é dado por

$$\lambda_j^* \approx \lambda_j + \Delta r^T \nabla \lambda_j \equiv \lambda_j^{(DF)} \quad (3.44)$$

onde $\nabla \lambda_j$ representa o vetor $\left[\frac{\partial \lambda_j}{\partial r_1}, \frac{\partial \lambda_j}{\partial r_2}, \dots \right]^T$.

Além disso, sendo os modos próprios de vibração à direita e à esquerda do sistema original, ϕ_j e $\bar{\phi}_j$, respectivamente; os autovetores à direita e à esquerda para o projeto modificado, ϕ_j^* e $\bar{\phi}_j^*$, são aproximados utilizando o conceito de diferenças finitas em avanço, resultando nas seguintes expressões para $\phi_j^{(DF)}$ e $\bar{\phi}_j^{(DF)}$:

$$\phi_j^* \approx \phi_j + [\nabla \phi_j] \Delta r \equiv \phi_j^{(DF)} \quad (3.45)$$

$$\bar{\phi}_j^* \approx \bar{\phi}_j + [\nabla \bar{\phi}_j] \Delta r \equiv \bar{\phi}_j^{(DF)} \quad (3.46)$$

onde as matrizes $[\nabla \phi_j]$ e $[\nabla \bar{\phi}_j]$, são dadas respectivamente por $\left[\frac{\partial \phi_j}{\partial r_1}, \frac{\partial \phi_j}{\partial r_2}, \dots \right]$ e $\left[\frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial r_1}, \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial r_2}, \dots \right]$.

Neste trabalho considera-se uma única variável de projeto, r_1 , por exemplo a altura e da estrutura, então a expressão predita das frequências naturais do projeto modificado λ_j^* , para a altura modificada e^* , segundo o conceito de diferenças finitas, $\lambda_j^{(DF)}$, simplifica-se para

$$\lambda_j^* \approx \lambda_j + \Delta e \lambda_j' \equiv \lambda_j^{(DF)} \quad (3.47)$$

sendo Δe a variação da altura da estrutura, e λ_j' implica $\partial \lambda_j / \partial e$ dada pela equação (3.18).

Similarmente, os valores preditos dos modos próprios de vibração à direita e à esquerda para o projeto modificado, dadas pelas equações (3.45) e (3.46), reduzem-se para,

$$\phi_j^* \approx \phi_j + \phi_j' \Delta e \equiv \phi_j^{(DF)} \quad (3.48)$$

$$\bar{\phi}_j^* \approx \bar{\phi}_j + \bar{\phi}_j' \Delta e \equiv \bar{\phi}_j^{(DF)} \quad (3.49)$$

onde ϕ_j' denota $\partial \phi_j / \partial e$, e $\bar{\phi}_j'$ significa $\partial \bar{\phi}_j / \partial e$, dadas pelas Equações (3.22) e (3.25).

Uma outra aproximação dos autovalores do projeto modificado λ_j^* , pode ser obtida usando-se a fórmula clássica do quociente de Rayleigh, calculando-se as frequências preditas $\lambda_j^{(R)}$ conforme a seguinte expressão:

$$\lambda_j^* \approx \frac{\bar{\phi}_j^{(DF)T} K^* \phi_j^{(DF)}}{\bar{\phi}_j^{(DF)T} M^* \phi_j^{(DF)}} \equiv \lambda_j^{(R)} \quad (3.50)$$

onde K^* e M^* são as matrizes de massa e rigidez para a nova configuração r^* , no caso e^* . A vantagem de $\lambda_j^{(R)}$ é que ela produz resultados mais aproximados em relação a $\lambda_j^{(DF)}$, mas tem a desvantagem de envolver um maior número de operações. Neste trabalho é utilizado o valor de $\lambda_j^{(R)}$ devido a seus valores mais exatos, garantindo a convergência na otimização e aproveitando-se os valores previamente calculados dos autovetores preditos $\phi_j^{(DF)}$ e $\bar{\phi}_j^{(DF)}$.

Nos próximos itens são apresentadas a análise da resposta em frequência e a sensibilidade da resposta em frequência, utilizando os métodos direto e modal.

3.7 Resposta em frequência direta do sistema acoplado fluido-estrutura

Aborda-se neste item os métodos diretos de cálculo da resposta em frequência em sistemas acoplados fluido-estrutura. A matriz de impedância da análise estrutural convencional

é simétrica e normalmente em banda quando os modelos são baseados no Método dos Elementos Finitos. Tais características podem ser utilizadas com vantagem para incrementar a eficiência computacional do cálculo da Resposta em Frequência Direta (DFR Direct Frequency Response).

No caso da formulação adotada para o sistema acoplado fluido-estrutura, a matriz de impedância é assimétrica e perde sua característica de ser uma matriz banda. Portanto, a determinação da Resposta em Frequência Direta, usando-se uma técnica analítica convencional, pode resultar numa baixa eficiência computacional. Para resolver este problema, é possível utilizar um método iterativo (Ma e Hagiwara, 1991b) que considera as matrizes de impedância dos sistemas estrutural e fluido desacoplados, ao invés de empregar a inversa ou a triangularização da matriz de impedância do sistema acoplado completo.

Neste item apresenta-se o algoritmo iterativo proposto por Ma e Hagiwara (1991b) para determinação da resposta em frequência. O método discutido é eficiente do ponto de vista computacional, mantendo-se uma precisão aceitável para o cálculo da resposta em frequência e sua sensibilidade. O método direto também é apresentado com o intuito de ressaltar as diferenças entre os métodos iterativos e diretos.

3.7.1 Método convencional com a matriz de impedância acoplada

O método direto convencional, consiste em resolver o problema baseando-se na formulação acoplada completa, para cada frequência de excitação. O problema de pequenas oscilações harmônicas forçadas é considerado, sendo o vetor de excitação f do sistema acoplado dado por:

$$f = \begin{Bmatrix} f_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

onde f_s é uma força harmônica de excitação atuando na estrutura, e u é a resposta harmônica que podem ser escritas da seguinte maneira:

$$f_s = F_s e^{j\omega t} \quad (3.52)$$

$$u = U e^{i\omega t} \quad (3.53)$$

onde F_s é a amplitude da força de excitação f_s , e ω a frequência de excitação. A resposta em frequência é obtida a partir da equação geral do sistema acoplado, utilizando a matriz de impedância Z , que é expressa da seguinte forma:

$$ZU = F \quad (3.54)$$

onde,

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{ss} & Z_{sf} \\ Z_{fs} & Z_{ff} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ss} - \omega^2 M_{ss} & K_{sf} \\ -\omega^2 M_{fs} & K_{ff} - \omega^2 M_{ff} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$U = \begin{Bmatrix} U_s \\ U_f \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

$$F = \begin{Bmatrix} F_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

sendo U_s e U_f as componentes da amplitude da resposta relativa às coordenadas da estrutura e do fluido. Resolvendo diretamente a Equação (3.54) para uma frequência dada, tem-se a Resposta em Frequência Direta, que é dada por:

$$U = Z^{-1} F \quad (3.58)$$

a qual gera uma solução exata. O volume de cálculo chega a ser proibitivo quando se deseja a resposta para muitas frequências. Isso se deve ao fato de que é preciso inverter para cada frequência a matriz de impedância Z , matriz que no sistema acoplado é assimétrica e não apresenta a característica de uma matriz banda. Para evitar em parte esses problemas é vantajoso aproximar a solução usando-se métodos iterativos.

3.7.2 Método iterativo com a matriz de impedância acoplada particionada ou desacoplada

Com o intuito de se procurar alternativas mais atraentes para o cálculo da resposta em frequência dos sistemas acoplados fluido-estrutura, diversos métodos iterativos foram

propostos na literatura. Ma e Hagiwara (1991b) utilizam o método de Gauss-Seidel, para o qual consideram a matriz de impedância acoplada de forma particionada. Nesta técnica, a matriz de impedância Z é dividida em dois blocos triangulares, superior Z_1 e inferior Z_2 , conforme as expressões abaixo:

$$Z = Z_1 + Z_2 \quad (3.59)$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} Z_{ss} & \mathbf{0} \\ Z_{fs} & Z_{ff} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ss} - \omega^2 M_{ss} & \mathbf{0} \\ -\omega^2 M_{fs} & K_{ff} - \omega^2 M_{ff} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & Z_{sf} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & K_{sf} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Substituindo a Equação (3.59) na Equação (3.54) tem-se o esquema para o cálculo da resposta em frequência dado por:

$$Z_1 U = F - Z_2 U \quad (3.62)$$

O algoritmo iterativo para o cálculo aproximado da resposta em frequência do sistema acoplado, utilizando a matriz de impedância acoplada particionada, é descrito a seguir.

1. Determinar o valor da matriz B definida por,

$$B = -Z_1^{-1} Z_2 \quad (3.63)$$

2. Calcular um valor de partida da resposta, $U^{(0)}$, expresso como

$$U^{(0)} = Z_1^{-1} F \quad (3.64)$$

3. Premultiplicar a Equação (3.62) por Z_1^{-1} , obtendo-se a expressão iterativa da m -ésima solução aproximada, $U^{(m)}$,

$$U^{(m)} = U^{(0)} + B U^{(m-1)}, \quad (m=1,2,\dots) \quad (3.65)$$

A condição necessária e suficiente para convergência da equação (3.65) é que $\|B\| < 1$ ou que o máximo autovalor de B seja menor que 1, onde $\|B\|$ é a norma da matriz B (Ma e Hagiwara, 1991b). Dado que $\|B\|$ é função da frequência ω , o valor da norma pode ser bastante grande quando ω coincida com uma frequência natural da estrutura ou do fluido, nesse caso a Equação (3.65) não converge, e aquela frequência estará perto de uma frequência de ressonância do sistema acoplado. Este fato mostra uma fragilidade deste esquema, com relação a sua convergência.

Uma maneira equivalente e mais econômica do método iterativo seria trabalhar com a matriz de impedância desacoplada. Considerando as relações da Equação (3.60), denota-se por Z_{ss} e Z_{ff} como sendo as matrizes de impedância da estrutura e do domínio fluido, e Z_{sf} e Z_{fs} como as matrizes de impedância do acoplamento.

A resposta em frequência U pode ser dividida na resposta estrutural U_s e na resposta do domínio fluido U_f . Desta forma o algoritmo iterativo para o cálculo aproximado da resposta em frequência, utilizando a matriz de impedância desacoplada, pode ser descrito da seguinte maneira:

1. Determinar as matrizes B_{fs} e B_{sf} , definidas por

$$B_{fs} = -Z_{ff}^{-1} Z_{fs} \quad (3.66)$$

$$B_{sf} = -Z_{ss}^{-1} Z_{sf} \quad (3.67)$$

2. Calcular um valor de partida da resposta estrutural, $U_s^{(0)}$, e da resposta no domínio fluido, $U_f^{(0)}$, expressas por,

$$U_s^{(0)} = Z_{ss}^{-1} F_s \quad (3.68)$$

$$U_f^{(0)} = B_{fs} U_s^{(0)} \quad (3.69)$$

3. Resolver as seguintes expressões iterativas para obter as m -ésimas soluções aproximadas da resposta estrutural, $U_s^{(m)}$, e da resposta no domínio fluido, $U_f^{(m)}$, expressas por,

$$\mathbf{U}_s^{(m)} = \mathbf{U}_s^{(0)} + \mathbf{B}_{sf} \mathbf{U}_f^{(m-1)}, \quad (m=1,2,\dots) \quad (3.70)$$

$$\mathbf{U}_f^{(m)} = \mathbf{B}_{fs} \mathbf{U}_s^{(m)}, \quad (m=1,2,\dots) \quad (3.71)$$

Sendo N_s o número de graus de liberdade da estrutura e N_f o número de graus de liberdade do domínio fluido, o número total das equações do sistema acoplado N é dado pela soma de N_s+N_f . Sabe-se que resolver a equação acoplada para uma ordem N grande é mais caro de que se solucionar as equações de dois sistemas com ordens menores, N_s e N_f . Além disso, ao determinar a inversa das matrizes \mathbf{Z}_{ss} e \mathbf{Z}_{ff} , pode-se utilizar a simetria e a natureza em banda destas matrizes, obtendo-se um ganho computacional considerável. No entanto o problema da convergência comentado previamente continua.

Neste trabalho adotou-se a utilização da matriz de impedância desacoplada, por oferecer alternativas mais econômicas do ponto de vista de custo computacional.

3.8 Sensibilidade da resposta em frequência direta do sistema acoplado fluido-estrutura

O objetivo da análise de sensibilidade, é encontrar as derivadas (sensibilidades) da resposta em frequência com relação às variáveis de projeto dadas. Sendo e a variável de projeto, a sensibilidade da resposta em frequência \mathbf{U} com relação a e pode ser escrita como \mathbf{U}' . Pode-se estabelecer uma estratégia de cálculo da sensibilidade para cada uma das técnicas de obtenção da resposta do sistema apresentadas no item 3.7. Estas estratégias são apresentadas na seqüência.

3.8.1 Método convencional com a matriz de impedância acoplada

A matriz \mathbf{Z}' representa a derivada da matriz de impedância \mathbf{Z} com relação à variável de projeto e , e pode ser obtida a partir da seguinte equação matricial:

$$\mathbf{Z}' = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}'_{ss} & \mathbf{Z}'_{sf} \\ \mathbf{Z}'_{fs} & \mathbf{Z}'_{ff} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{ss} - \omega^2 \mathbf{M}'_{ss} & \mathbf{K}'_{sf} \\ -\omega^2 \mathbf{M}'_{fs} & \mathbf{K}'_{ff} - \omega^2 \mathbf{M}'_{ff} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Realizando a operação de derivada parcial na Equação (3.54) em relação às variáveis de projeto, tem-se

$$Z'U + ZU' = 0 \quad (3.73)$$

o que permite escrever a sensibilidade da função de resposta em frequência obtida pelo método direto, U' , da seguinte forma:

$$U' = -Z^{-1}Z'U \quad (3.74)$$

onde observa-se que é preciso calcular a inversa da matriz Z ou a triangularização da matriz de impedância do sistema acoplado completo, o qual resulta numa baixa eficiência de cálculo. Portanto será examinado um método iterativo de análise da sensibilidade, baseado no método iterativo do cálculo da função de resposta em frequência descrito anteriormente.

3.8.2 Método iterativo com a matriz de impedância acoplada particionada ou desacoplada

O algoritmo de cálculo exposto previamente para encontrar de forma direta a função de resposta em frequência, está baseado numa estratégia iterativa, evitando o cômputo da inversa de Z . Neste item será apresentado o método correspondente para análise de sensibilidade das respostas obtidas.

Ao substituir a Equação (3.59) na Equação (3.74) encontra-se a expressão iterativa básica, que define o algoritmo iterativo para o cálculo aproximado da sensibilidade da resposta em frequência, utilizando a matriz de impedância acoplada particionada. Esse algoritmo pode ser escrito da seguinte maneira:

1. Determinar o valor da matriz B definida pela Equação (3.63).
2. Calcular um valor de partida da sensibilidade da resposta, $U'^{(0)}$, utilizando a expressão:

$$U'^{(0)} = -Z_1^{-1}Z'U \quad (3.75)$$

3. Determinar a m -ésima solução aproximada, $U'^{(m)}$, da sensibilidade da resposta, U' , utilizando a expressão iterativa seguinte:

$$U'^{(m)} = U'^{(0)} + BU'^{(m-1)} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.76)$$

Neste processo a inversa da matriz Z_1 é calculada para cada frequência ω , o que ainda assim é um processo caro. Nota-se também que os mesmos requisitos exigidos para a matriz B no item 3.7.2, são necessários e suficientes para convergência do método.

Uma maneira equivalente deste método iterativo é utilizar a matriz de impedância desacoplada, para o qual as Equações (3.75) e (3.76) podem ser divididas nas respostas em frequência da estrutura e do domínio fluido. Considerando que a matriz Z'_{ss} é a única componente matricial do sistema que é função da variável de projeto estrutural. Tem-se então o seguinte algoritmo para o cálculo da sensibilidade da resposta, U' :

1. Determinar os valores das matrizes B_{fs} e B_{sf} , utilizando as Equações (3.66) e (3.67).
2. Determinar a matriz D_{ss} definida por:

$$D_{ss} = -Z_{ss}^{-1} Z'_{ss} \quad (3.77)$$

3. Calcular valores de partida da sensibilidade da resposta estrutural e do domínio fluido, $U_s'^{(0)}$ e $U_f'^{(0)}$ respectivamente, utilizando as expressões:

$$U_s'^{(0)} = D_{ss} U_s \quad (3.78)$$

$$U_f'^{(0)} = B_{fs} U_s'^{(0)} \quad (3.79)$$

4. Determinar as m -ésimas soluções aproximadas da sensibilidade da resposta estrutural e do domínio fluido, $U_s'^{(m)}$ e $U_f'^{(m)}$ respectivamente, utilizando a expressão iterativa seguinte:

$$U_s^{(m)} = U_s^{(0)} + B_{sf} U_f^{(m-1)}, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.80)$$

$$U_f^{(m)} = B_{fs} U_s^{(m)}, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.81)$$

Pode-se apreciar no método iterativo que somente é preciso calcular a inversa ou a triangularização da matriz de impedância Z_{ss} e Z_{ff} do sistema desacoplado ao calcular as matrizes B_{fs} e B_{sf} , portanto os cálculos ficam bastante reduzidos, todavia faz-se ainda necessário uma resolução iterativa para cada frequência estudada. Cumpre salientar, que no caso da otimização da resposta em frequência de um sistema acoplado, procura-se controlar as amplitudes em uma faixa predefinida de frequências, o que reduz consideravelmente os cálculos, tornando viável o uso destes métodos.

Novamente, neste trabalho foi preferida a utilização da matriz de impedância desacoplada por oferecer alternativas mais econômicas do ponto de vista de custo computacional.

Outra possibilidade para o cálculo das respostas dos sistemas e sua sensibilidade, é o uso de técnicas de síntese modal. Tais métodos são apresentados na seqüência.

3.9 Resposta em frequência modal do sistema acoplado fluido-estrutura

Assume-se que os modos do sistema acoplado podem ser calculados usando-se técnicas convencionais de cálculo de autovalores e autovetores. Logo esses modos podem ser utilizados no cálculo da Resposta em Frequência Modal (MFR Modal Frequency Response).

O uso de uma base modal do sistema acoplado foi feito por diversos autores, como por exemplo Daniel (1980a,b). Assume-se que o sistema não tem autovalores nulos ou repetidos. Denota-se por Λ e Φ como sendo as matrizes de autovalores e de autovetores à direita do sistema acoplado dadas pelas expressões:

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\} \quad (3.82)$$

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] \quad (3.83)$$

Utilizando as condições de ortogonalidade e normalização em relação à massa dos sistemas acoplados, pode-se obter a seguinte expansão para a inversa da matriz de impedância:

$$Z^{-1} = \Phi \Omega^{-1} \bar{\Phi}^T \quad (3.84)$$

onde a transposta da matriz de autovetores à esquerda, $\bar{\Phi}$, e o termo Ω^{-1} são dados por:

$$\bar{\Phi}^T = \{ \Phi_s^T, \Phi_f^T \Lambda^{-1} \} \quad (3.85)$$

$$\Omega^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\lambda_i - \omega^2} \right\} \quad (3.86)$$

sendo Φ_s e Φ_f as submatrizes da matriz de autovetores acoplados à direita Φ em relação às coordenadas estruturais e do domínio fluido respectivamente.

A resposta em frequência U é expandida nos autovetores do sistema acoplado da seguinte maneira,

$$U = \Phi Q \quad (3.87)$$

sendo que a matriz Q é obtida a partir da substituição das Equações (3.84) e (3.87) na Equação (3.58) obtendo-se:

$$Q = \Omega^{-1} \bar{\Phi}^T F \quad (3.88)$$

Geralmente a Equação (3.87) pode ser razoavelmente bem aproximada utilizando unicamente os modos de ordem inferior, reduzindo-se significativamente os cálculos (Lalanne, Berthier e Der Hagopian, 1983).

Denotando-se a solução u da resposta em frequência como:

$$u = \sum_{i=1}^n \phi_i q_i \quad (3.89)$$

e substituindo esta expressão na Equação (3.1) do sistema acoplado, pré multiplicando-a por $\bar{\phi}_i^T$ e utilizando a condição de ortogonalidade do sistema acoplado obtém-se:

$$m_i \ddot{q}_i + k_i q_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.90)$$

onde,

$$m_i = \bar{\phi}_i^T M \phi_i \quad (3.91)$$

$$k_i = \bar{\phi}_i^T K \phi_i \quad (3.92)$$

$$f_i = \bar{\phi}_i^T f \quad (3.93)$$

Generalizando as Equações (3.52) e (3.53) da análise de resposta em frequência obtém-se:

$$f = F e^{j\omega t} \quad (3.94)$$

$$u = U e^{j\omega t} \quad (3.95)$$

$$q_i = Q_i e^{j\omega t} \quad (3.96)$$

que substituídas nas Equações (3.89) e (3.90) gera a expressão da resposta em frequência como sendo uma superposição de modos acoplados:

$$U = \sum_{i=1}^n \phi_i Q_i = \sum_{i=1}^n \phi_i \left(\frac{1}{\lambda_i - \omega^2} \right) \bar{\phi}_i^T F \quad (3.97)$$

onde

$$Q_i = \left(\frac{1}{\lambda_i - \omega^2} \right) \bar{\phi}_i^T F \quad (3.98)$$

Uma das vantagens da técnica de superposição de modos é a possibilidade de incluir somente um número limitado de modos na análise, bastante inferior ao número total de graus de liberdade do sistema.

Nos problemas de dinâmica estrutural o mecanismo preciso de amortecimento não é bem conhecido, e portanto não se encontram disponíveis formulações do amortecimento baseadas claramente em parâmetros físicos definidos. Devido ao fato de que o nível de amortecimento é usualmente baixo, este pode ser omitido ou também pode-se utilizar modelos simplificados retendo os modos do sistema não amortecido (Friswell e Mottershead, 1995).

No modelo de *amortecimento viscoso*, a resistência do amortecimento é dada pelo produto do coeficiente de amortecimento c e a velocidade \dot{u} , então a equação dinâmica do sistema acoplado dada pela Equação (3.1) considerando a matriz de coeficientes de amortecimento C , é expressa como:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f \quad (3.99)$$

Na solução da Equação (3.99) utiliza-se a aproximação de *amortecimento proporcional*, que expressa a matriz C como função das matrizes M e K e das constantes α e β visando o desacoplamento da matriz C na forma:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (3.100)$$

Utilizando os mesmos critérios para obter a Equação (3.90) gera-se uma nova expressão que resulta em:

$$m_i \ddot{q}_i + c_i \dot{q}_i + k_i q_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.101)$$

onde:

$$c_i = \bar{\phi}_i^T C \phi_i \quad (3.102)$$

Substituindo as Equações (3.94), (3.95) e (3.96) nas Equações (3.89) e (3.101), e desconsiderando a informação de fase, obtém-se a expressão da amplitude da resposta em frequência amortecida como uma superposição de modos acoplados:

$$U = \sum_{i=1}^n \phi_i Q_i = \sum_{i=1}^n \phi_i \left(\frac{1}{\lambda_i - \omega^2 + j\omega c_i} \right) \bar{\phi}_i^T F \quad (3.103)$$

onde, j é o número imaginário, e o novo valor de Q_i é calculado da seguinte maneira:

$$Q_i = \left(\frac{1}{\lambda_i - \omega^2 + j\omega c_i} \right) \overline{\phi}_i^T F \quad (3.104)$$

Embora não exista nenhuma justificativa física para sua aplicação, o uso desta abordagem conduz geralmente a resultados bastante satisfatórios para níveis de amortecimento baixos (<10% do crítico). A vantagem matemática se deve a que os modos não amortecidos são utilizados para diagonalizar a matriz de amortecimento utilizando a propriedade de ortogonalidade dos modos, dada pelas Equações (3.12) a (3.15), expressando-se os coeficientes c_i da Equação (3.102) como:

$$c_i = \alpha + \beta \lambda_i \quad (3.105)$$

Salienta-se que outra maneira mais satisfatória seria utilizar valores experimentais de c_i . Como referência no Anexo I são incluídas outras formulações para a determinação da resposta em frequência modal.

3.10 Sensibilidade da resposta em frequência modal do sistema acoplado fluido-estrutura

O objetivo da análise de sensibilidade é encontrar as derivadas (sensibilidades) da resposta em frequência modal em relação às mudanças nas variáveis de projeto dadas. Denota-se como U' o valor de sensibilidade da resposta em frequência U em relação à variável de projeto, seja ela por exemplo a altura estrutural e .

A utilização de uma base modal do sistema acoplado no cálculo de sensibilidade da resposta foi apresentada entre outros por Ma e Hagiwara (1992) e Hagiwara, Kozukue e Ma (1993). Supõe-se que a sensibilidade da resposta em frequência, U' , possa ser também expandida utilizando os autovetores do sistema acoplado, conforme a seguinte expressão:

$$U' = \Phi Q' \quad (3.106)$$

onde para reduzir os cálculos podem ser empregados somente os modos de ordem inferior. O valor de Q' é determinado ao substituir as Equações (3.106), (3.84) e (3.87) na Equação (3.74), obtendo-se,

$$Q' = SQ \quad (3.107)$$

onde

$$S = -\Omega^{-1}\overline{\Phi}^T Z' \Phi \quad (3.108)$$

A Equação (3.106) também pode ser encontrada a partir da análise de sensibilidade da resposta em frequência obtida pelo método direto, substituindo as Equações (3.84) e (3.87) na Equação (3.74), para depois usar a Equação (3.107).

Com a finalidade de obter em detalhe a forma de superposição de modos deste método, expressa-se a resposta em frequência modal segundo as Equações (3.87) e (3.88) como:

$$U = \Phi \Omega^{-1} \overline{\Phi}^T F \quad (3.109)$$

Derivando a equação anterior gera-se:

$$U' = [\Phi' \Omega^{-1} \overline{\Phi}^T + \Phi (\Omega^{-1})' \overline{\Phi}^T + \Phi \Omega^{-1} (\overline{\Phi}^T)'] F \quad (3.110)$$

onde

$$\Phi' = [\phi'_1, \phi'_2, \dots, \phi'_n] \quad (3.111)$$

$$\overline{\Phi}' = [\overline{\phi}'_1, \overline{\phi}'_2, \dots, \overline{\phi}'_n] \quad (3.112)$$

$$(\Omega^{-1})' = \text{diag} \left\{ \frac{-\lambda'_i}{(\lambda_i - \omega^2)^2} \right\} \quad (3.113)$$

Neste trabalho faz-se a extensão do método proposto por Hagiwara, Kozukue e Ma (1993) para o caso de um modelo com amortecimento proporcional, resultando na seguinte formulação:

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\lambda_i - \omega^2 + j\omega c_i} \right\} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\lambda_i - \omega^2 + j\omega(\alpha + \beta\lambda_i)} \right\} \quad (3.114)$$

$$(\mathbf{\Omega}^{-1})' = \text{diag} \left\{ -\frac{(1 + j\omega\beta)\lambda_i'}{[\lambda_i - \omega^2 + j\omega(\alpha + \beta\lambda_i)]^2} \right\} \quad (3.115)$$

Assumindo que λ_i', ϕ_i' e $\bar{\phi}_i'$ possam ser calculados, esses valores são substituídos na Equação (3.110) para determinar U' , resultando em uma metodologia para o cálculo da sensibilidade da resposta amortecida. Uma outra maneira é substituir as expressões:

$$\Phi' = \Phi C \quad (3.116)$$

$$\bar{\Phi}' = \bar{\Phi} D \quad (3.117)$$

na Equação (3.110) para C como (C_{ij}) e D como (D_{ij}) gerando

$$U' = \Phi A \bar{\Phi}'^T F \quad (3.118)$$

onde

$$A = C\mathbf{\Omega}^{-1} + \mathbf{\Omega}^{-1}D + (\mathbf{\Omega}^{-1})' \quad (3.119)$$

Utilizando os valores de C_{ij} e D_{ij} dados por

$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{-1}{\lambda_i - \lambda_j} \bar{\phi}_i'^T (K' - \lambda_j M') \phi_j & \text{para } i \neq j \\ -\frac{1}{2} \bar{\phi}_i'^T M' \phi_i & \text{para } i = j \end{cases} \quad (3.120)$$

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{-1}{\lambda_i - \lambda_j} \bar{\phi}_j'^T (K' - \lambda_i M') \phi_i & \text{para } i \neq j \\ -\frac{1}{2} \bar{\phi}_j'^T M' \phi_j & \text{para } i = j \end{cases} \quad (3.121)$$

e substituindo a Equação (3.113) na Equação (3.119), obtém-se a seguinte expressão da Equação (3.119),

$$A = -\mathbf{\Omega}^{-1} \bar{\Phi}'^T (K' - \omega^2 M') \Phi \mathbf{\Omega}^{-1} = S \mathbf{\Omega}^{-1} \quad (3.122)$$

onde S é similar ao valor obtido na Equação (3.108). Por outro lado expressando a Equação (3.98) em forma matricial tem-se:

$$Q = \Omega^{-1} \bar{\Phi}^T F \quad (3.123)$$

Substituindo a Equação (3.122) na Equação (3.118) e utilizando a expressão dada pela Equação (3.123), obtém-se o valor da sensibilidade da resposta U' de forma idêntica à Equação (3.106), ou seja:

$$U' = \Phi S Q \quad (3.124)$$

a qual também pode ser expressa segundo a técnica de superposição:

$$U' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i S_{ij} Q_j \quad (3.125)$$

onde

$$S_{ij} = -\frac{1}{\lambda_i - \omega^2} \bar{\phi}_i^T (K' - \omega^2 M') \phi_j \quad (3.126)$$

$$Q_j = \left(\frac{1}{\lambda_j - \omega^2} \right) \bar{\phi}_j^T F \quad (3.127)$$

Neste trabalho foi utilizada uma base modal na Equação (3.124) para o cálculo de sensibilidade da resposta. Para o caso de sensibilidade da resposta amortecida é utilizada uma base modal na Equação (3.110), onde são consideradas as expressões dadas pela Equações (3.114) e (3.115) As sensibilidades dos autovalores, autovetores à direita e autovetores à esquerda são determinados com as Equações (3.18), (3.22) e (3.25) respectivamente assumindo o parâmetro μ um valor negativo perto de infinito.

Capítulo 4

Otimização em Sistemas Acoplados Fluido-Estrutura

4.1 Objetivos

Neste capítulo pretende-se revisar alguns conceitos básicos de otimização não linear, bem como justificar a escolha de um algoritmo apropriado para os objetivos propostos neste trabalho. Apresentam-se as características principais do algoritmo utilizado e detalha-se as implementações efetuadas para obter a otimização estrutural em sistemas acoplados fluido-estrutura. As funções objetivo consideradas são o afastamento de frequências naturais e a diminuição da função de resposta em frequência de uma região do sistema num intervalo discreto de frequências, modificando para isso os parâmetros de forma da estrutura.

4.2 Otimização paramétrica

Utiliza-se a otimização paramétrica com a finalidade de calcular os valores de um conjunto de parâmetros do projeto, definidos pelo vetor $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, que podem em alguma maneira ser definidos como pertencentes a um conjunto ótimo. Para um problema simples isso pode ser visto como a otimização (maximização ou minimização) de alguma característica do sistema que seja função do vetor x . Num problema mais complexo a função objetivo a ser otimizada, $f(x)$, pode estar sujeita a restrições na forma de restrições de igualdade, $g_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, m_e$), restrições de desigualdade $g_i(x) \leq 0$ ($i = m_e + 1, \dots, m$), e/ou valores de contorno dos parâmetros tanto de limite inferior $x_l \leq x$ e de limite superior $x \leq x_u$.

Um problema qualquer de otimização restrita pode ser expressado genericamente como, (Luenberger, 1989), (Bazaraa, Sherali e Shetty, 1993), etc.,

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (4.1)$$

sujeita a:

$$g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m_e \quad (4.2)$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m \quad (4.3)$$

$$\mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u \quad (4.4)$$

onde $\mathbf{x} (\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n)$ é o vetor de parâmetros do projeto, $f (f: \mathfrak{R}^n \Rightarrow \mathfrak{R})$ é a função objetivo, e $g (g: \mathfrak{R}^n \Rightarrow \mathfrak{R}^m)$ é o vetor de restrições de igualdade e desigualdade. Observa-se que um problema de maximização equivale a minimizar $-f(\mathbf{x})$.

A solução de um problema com suficiente precisão e rápida convergência, depende tanto do tamanho do problema quantificado pelo número de variáveis de projeto mais o número das restrições, quanto das características de linearidade ou não linearidade da função objetivo e das restrições. Em um problema de programação não linear, como os problemas tratados neste trabalho, a função objetivo e as restrições são funções não lineares das variáveis de projeto.

A solução de um problema não linear geralmente precisa de um procedimento iterativo para estabelecer a direção de procura. Isto é usualmente conseguido através da solução de um subproblema irrestrito, de programação linear ou de programação quadrática (QP Quadratic Programming). Um problema QP envolve a minimização ou maximização de uma função objetivo quadrática linearmente restrita.

4.3 Otimização restrita

O passo inicial para resolver um problema de otimização restrita é transformar o problema restrito num subproblema mais simples, para em seguida resolve-lo e utilizando como base um processo iterativo. Uma característica comum da maioria dos métodos iniciais foi modificar o problema restrito num problema irrestrito básico, utilizando para isso uma função de penalidade para as restrições que estão perto ou além dos limites predefinidos.

Dessa forma o problema restrito é resolvido utilizando uma seqüência de otimizações irrestritas parametrizadas, que no limite convergem à solução do problema restrito.

Atualmente esses métodos são considerados relativamente ineficientes, e têm sido substituídos com métodos baseados na solução das equações de Kuhn-Tucker (KT), as quais são condições necessárias de otimalidade para um problema de otimização restrito. Em um problema de programação convexa, na qual a função objetivo e as restrições são funções convexas, as equações KT são condições necessárias e suficientes para obter um ponto de solução global.

Com relação ao problema geral de otimização restrita dado pelas Equações (4.1) a (4.4), as equações KT são estabelecidas como:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m v_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

$$v_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m \quad (4.6)$$

$$v_i^* \geq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m \quad (4.7)$$

A Equação (4.5) descreve o cancelamento dos gradientes entre a função objetivo e as restrições ativas no ponto de solução \mathbf{x}^* , usando-se os multiplicadores de Lagrange ($v_i, i = 1, \dots, m$) para equilibrar os gradientes da função objetivo e os gradientes das restrições. As restrições inativas não estão incluídas na operação de cancelamento e portanto são atribuídos para eles valores nulos dos multiplicadores de Lagrange. Isto fica implícito nas Equações (4.6) e (4.7).

A base para muitos algoritmos de programação não linear é a solução das equações KT, tentando conseguir o cálculo direto dos multiplicadores de Lagrange. Os métodos quase-Newton garantem convergência superlinear, ao acumular informação de segunda ordem com relação às equações KT, utilizando para isso um procedimento de atualização quase-Newton. Esses métodos são usualmente chamados como métodos de Programação Quadrática Seqüencial (SQP Sequential Quadratic Programming) visto que um subproblema QP é resolvido em cada iteração principal.

4.4 Programação quadrática seqüencial (SQP)

Os métodos SQP são amplamente difundidos atualmente na área de programação não linear. Encontra-se na literatura inúmeras aplicações deste método na otimização estrutural. Dentre outros, pode-se citar as aplicações na minimização da resposta vibratória via modificação estrutural (Bucher e Braun, 1993a,b), no projeto de estruturas ótimas (Mahmoud, Engl e Holzleitner, 1993), na minimização de peso de cascas não lineares (Ringertz, 1995), etc.

O desempenho dos métodos SQP com relação a outros métodos é melhor em termos de eficiência, exatidão e percentagem de êxito para uma grande variedade de tipos de problemas testados. Devido a isto, no momento o método SQP é o método mais amplamente empregado para otimização restrita não linear (Herskovits, 1995). A literatura também reporta estudos de performance de diferentes implementações do método SQP, Afonso e Horowitz (1997).

Os métodos SQP atualmente são os algoritmos de uso geral padrão para resolver problemas de otimização não linear que cumpram os seguintes pré-requisitos (Schittkowski, Zillober e Zotemantel, 1994):

- O problema não seja excessivamente grande em quanto ao número de variáveis, devido a necessidade de espaço de memória para guardar uma aproximação da matriz Hessiana.
- As funções e gradientes possam ser avaliados com alta precisão.
- O problema seja bem comportado.

Neste trabalho os pré-requisitos anteriores podem ser alcançados apropriadamente. Além disso, a função objetivo e as restrições chegam a mudar de grau de não linearidade em função da geometria da seção transversal da estrutura, o que implica que o problema a ser otimizado nem sempre possui a mesma não linearidade. Portanto, é mais conveniente utilizar um algoritmo de otimização mais genérico, como o método SQP, ao invés de utilizar um método específico melhor comportado somente para determinadas condições.

Em cada iteração principal do método SQP uma aproximação da Hessiana, H , da função Lagrangeana, \mathcal{L} , é obtida utilizando um método de atualização quase-Newton. Logo a Hessiana é utilizada para gerar um subproblema QP cuja solução é usada para formar uma direção de busca num procedimento de procura unidimensional.

Dada a descrição do problema pelas Equações (4.1) a (4.4), e assumindo por simplicidade que as condições de contorno dadas pela Equação (4.4) são expressas como restrições de desigualdade, a idéia básica é a formulação de um subproblema QP baseado numa aproximação quadrática da função Lagrangeana, \mathcal{L} ,

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m v_i g_i(\mathbf{x}) \quad (4.8)$$

cuja segunda derivada é dada por:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m v_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x}) \quad (4.9)$$

Definido o vetor \mathbf{x} numa iteração *principal* k como $\mathbf{x}^{(k)}$, a direção de procura \mathbf{d} para a próxima iteração ($k+1$) é calculada resolvendo um modelo simplificado do problema original. Para isso formula-se um subproblema QP de otimização que utilizando iterações *internas* envolvem a linearização das restrições não lineares, conforme mostrado a seguir:

$$\text{minimizar } \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d} + \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{d} \in \mathfrak{R}^n$$

sujeito a:

$$\nabla g_i(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}^{(k)}) = 0, \quad i = 1, \dots, m_e \quad (4.11)$$

$$\nabla g_i(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}^{(k)}) \leq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m \quad (4.12)$$

A matriz $\mathbf{H}^{(k)}$ é uma matriz aproximada definida positiva da matriz Hessiana da função Lagrangeana $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)})$, Equação (4.9), sendo atualizada por qualquer dos métodos quase-Newton, embora a fórmula de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) pareça ser a mais popular. O subproblema descrito pelas Equações (4.10) a (4.12) pode ser resolvido utilizando qualquer algoritmo QP, cuja solução é usada para obter um novo ponto $\mathbf{x}^{(k+1)}$, dado por:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} \quad (4.13)$$

O comprimento do passo, $\alpha^{(k)}$, é determinado via um procedimento apropriado de procura unidimensional, como por exemplo para produzir uma diminuição suficiente numa função mérito.

4.5 Implementação SQP

Considerando que na literatura existem diversas versões já implementadas do algoritmo SQP, foi conveniente fazer uso de uma versão suficientemente testada, e determinar o seu uso potencial neste trabalho. Levando-se em conta que a implementação do trabalho foi desenvolvido no ambiente do software comercial Matlab®, e após uma etapa de inúmeros ensaios numéricos e ajustes de parâmetros para atingir os objetivos, foi escolhida a versão SQP disponível na função *constr.m* do Toolbox de Otimização do software comercial Matlab®. No Anexo II são apresentados um resumo dos testes realizados com o otimizador.

Para a utilização da função *constr.m* alguns cuidados devem ser considerados:

- O cálculo das derivadas parciais da função objetivo e das restrições via diferenças finitas, que é a opção padrão da função, gera um erro cumulativo no valor das variáveis. Devido a este erro, em muitos casos não é possível obter convergência no processo de otimização. Portanto, é mais vantajoso fornecer os jacobianos ou derivadas parciais da função objetivo e das restrições em forma analítica.
- As restrições devem ser normalizadas e adimensionalizadas para uniformizar a magnitude das grandezas.
- A precisão na convergência das variáveis, função objetivo e restrições deve ser ajustada e/ou normalizada com relação a grandeza considerada.

O algoritmo SQP da função *constr.m*, consiste de três etapas principais (Grace, 1995), que podem ser enumeradas da seguinte forma:

- Atualização da matriz Hessiana da função Lagrangeana
- Solução do Problema de programação quadrática
- Cálculo da procura unidimensional e da função mérito

O procedimento acima especificado é repetido até a convergência.

4.6 Otimização estrutural em sistemas acoplados fluido estrutura

Neste trabalho aborda-se o problema de otimização de forma de sistemas acoplados fluido-estrutura, com o objetivo de se desenvolver métodos automáticos para o controle do espectro de frequência de modelos elasto-acústicos.

Os algoritmos desenvolvidos foram validados primeiro em diversos sistemas estruturais secos, sendo aplicados na seqüência em sistemas acoplados fluido-estrutura. Um modelo semi-discretizado de elementos finitos é adotado, considerando a estrutura modelada por elementos de viga, e o fluido por elementos isoparamétricos triangulares.

Estuda-se a otimização de forma, tomando como variável de controle a altura da viga. O algoritmo de programação seqüencial quadrática (SQP) apresentado anteriormente é utilizado para a otimização não linear com restrições. São objetivos do trabalho maximizar a separação entre duas frequências naturais adjacentes ou a diminuição da função de resposta em frequência em certa região do sistema, procurando-se evitar fenômenos de ressonância num intervalo discreto de frequências.

4.6.1 Critério de separação de frequências naturais

Considera-se o problema de vibrações harmônicas de uma estrutura elástica delgada, onde a altura e é pequena diante das outras dimensões, sendo considerados casos acoplados e desacoplados.

Estuda-se o problema da maximização do espaço entre duas pulsações de ressonância. O problema de otimização só considera um parâmetro funcional de forma, a altura e da viga, embora outras escolhas também sejam possíveis como o módulo de Young e a massa volumétrica da estrutura.

Sendo N uma ordem fixa de frequência, e considerando que os valores próprios são classificados em ordem crescente; o problema de otimização de forma é escrito de maneira que maximize a distância entre duas frequências naturais acopladas, $\omega_N(e)$ e $\omega_{N-1}(e)$ expressadas em

Hz, as quais são função do vetor de alturas dos elementos finitos estruturais e . Assim, pode-se gerar "buracos" no espectro do sistema, permitindo-se o controle de situações de ressonância.

As restrições são limites sobre os valores das outras frequências e sobre as alturas das seções transversais dos elementos estruturais, mantendo-se o volume total constante.

A descrição geral do problema de otimização de um modelo elasto-acústico, considerando uma estrutura de seção transversal retangular, de largura unitária, é estabelecido como:

$$\text{Minimizar - } [\omega_N(e) - \omega_{N-1}(e)] \quad (4.14)$$

$$e \in \mathcal{R}^r$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^r (e_i L_i) - \vartheta = 0 \quad (4.15)$$

$$\omega_j(e) - \omega_{N-1}(e) \leq 0, \quad j=1, \dots, N-2 \quad (4.16)$$

$$\omega_N(e) - \omega_j(e) \leq 0, \quad j=N+1, \dots, m \quad (4.17)$$

$$e_{min} \leq e \leq e_{max} \quad (4.18)$$

sendo N uma ordem de frequência qualquer escolhida entre $3 \leq N \leq m$, m a quantidade de modos escolhidos para otimização, $\omega_j(e)$ é a frequência natural j função do vetor de alturas e , r o número de elementos estruturais, e_i e L_i altura e comprimento do elemento estrutural i , ϑ volume total constante da estrutura, e_{min} altura mínima dos elementos estruturais, e_{max} altura máxima dos elementos estruturais.

Assim, existem algumas restrições de projeto em relação à altura estrutural, descritas pelas Equações (4.15) e (4.18). A Equação (4.15) indica que o volume da estrutura deve permanecer constante e igual a ϑ ao longo do processo de otimização, observando-se que se o volume inicial é menor que ϑ , aquela restrição de igualdade já é estabilizada nas primeiras iterações.

As restrições dadas pela Equação (4.18), $e_{min} \leq e \leq e_{max}$, são impostas por razões tecnológicas e matemáticas, pois os valores da altura ótima devem ter um significado físico.

Além disso, uma otimização sem estas restrições pode conduzir a pontos singulares de altura nula. Por outro lado, a restrição de contorno $e \leq e_{max}$ pode ser ignorada, escolhendo para isso um valor suficientemente grande de e_{max} , de forma que a desigualdade seja sempre verificada. Neste caso deve-se tomar cuidado para que permaneçam válidas as hipóteses de viga usadas na modelagem.

Para o caso em que a variável de controle seja a área da seção transversal A , o vetor e deve ser substituído pelo vetor das áreas A nas Equações (4.14) a (4.18), exceto a Equação (4.15) que é modificada para,

$$\sum_{i=1}^r (A_i L_i) - \vartheta = 0 \quad (4.19)$$

Quando a variável de controle for o diâmetro \varnothing de uma seção circular, o vetor e deve ser substituído pelo vetor dos diâmetros \varnothing , nas Equações (4.14) a (4.18), exceto a Equação (4.15) que é modificada para,

$$\sum_{i=1}^r \left(\frac{\pi \varnothing_i^2}{4} L_i \right) - \vartheta = 0 \quad (4.20)$$

Além disso, para variáveis de controle diferentes da altura, as expressões das sensibilidades das matrizes acopladas do sistema, K' e M' , devem ser modificadas apropriadamente, conforme descrito no item 3.5.

Com relação as restrições sobre as frequências naturais, a Equação (4.16) indica que as frequências naturais de ordem inferior a $N-1$ ficam no lado esquerdo, enquanto a Equação (4.17) indica que as frequências naturais de ordem superior a N ficam do lado direito. Isto significa que durante o processo de otimização não se tem controle explícito sobre o possível cruzamento dos modos nos intervalos $[1, N-2]$ e $[N+1, m]$. Todavia, garante-se uma abertura no espectro de frequências do sistema.

Para $N=1$, considerando uma estrutura de seção transversal retangular de largura unitária e sendo a variável de controle a altura estrutural, a descrição do problema de otimização de um modelo elasto-acústico é estabelecida de maneira particular como:

$$\text{Minimizar}_{e \in \mathcal{R}^r} -\omega_1(e) \quad (4.21)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^r (e_i L_i) - \vartheta = 0 \quad (4.22)$$

$$\omega_1(e) - \omega_j(e) \leq 0, \quad j=2, \dots, m \quad (4.23)$$

$$e_{\min} \leq e \leq e_{\max} \quad (4.24)$$

Se a variável de controle for a área A da seção transversal da estrutura, o vetor e deve ser substituído pelo vetor das áreas A nas Equações (4.21) a (4.24), exceto a Equação (4.22) que é substituída pela Equação (4.19). No caso de uma seção circular e sendo a variável de controle o diâmetro \varnothing da seção, o vetor e deve ser substituído pelo vetor dos diâmetros \varnothing , nas Equações (4.21) a (4.24), exceto a Equação (4.22) que é substituída pela Equação (4.20).

Para $N=2$, o algoritmo toma a seguinte forma:

$$\text{Minimizar}_{e \in \mathcal{R}^r} -[\omega_2(e) - \omega_1(e)] \quad (4.25)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^r (e_i L_i) - \vartheta = 0 \quad (4.26)$$

$$\omega_2(e) - \omega_j(e) \leq 0, \quad j=3, \dots, m \quad (4.27)$$

$$e_{\min} \leq e \leq e_{\max} \quad (4.28)$$

E valem as mesmas observações para as variáveis A área e \varnothing diâmetro, apresentadas anteriormente.

Considerando que as frequências ω são obtidas a partir dos autovalores λ , o vetor gradiente da função objetivo dada pela Equação (4.14) para $3 \leq N \leq m$ é fornecido no processo de otimização na forma,

$$\nabla f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial e_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial e_r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda_N(e)}} \frac{\partial \lambda_N(e)}{\partial e_1} - \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda_{N-1}(e)}} \frac{\partial \lambda_{N-1}(e)}{\partial e_1} \right) \\ \vdots \\ - \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda_N(e)}} \frac{\partial \lambda_N(e)}{\partial e_r} - \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda_{N-1}(e)}} \frac{\partial \lambda_{N-1}(e)}{\partial e_r} \right) \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Os vetores gradientes correspondentes às restrições expressas pelas Equações (4.15), (4.16) e (4.17) são fornecidos no processo de otimização em forma normalizada como:

$$\nabla g_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial e_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_i}{\partial e_r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{L_i}{\vartheta} \\ \vdots \\ \frac{L_r}{\vartheta} \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\nabla g_{j+1} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial g_{j+1}}{\partial e_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_{j+1}}{\partial e_r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4\pi\omega_{N-1}^2(e)} \left(\frac{\omega_{N-1}(e)}{\sqrt{\lambda_j(e)}} \frac{\partial \lambda_j(e)}{\partial e_1} - \frac{\omega_j(e)}{\sqrt{\lambda_{N-1}(e)}} \frac{\partial \lambda_{N-1}(e)}{\partial e_1} \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{4\pi\omega_{N-1}^2(e)} \left(\frac{\omega_{N-1}(e)}{\sqrt{\lambda_j(e)}} \frac{\partial \lambda_j(e)}{\partial e_r} - \frac{\omega_j(e)}{\sqrt{\lambda_{N-1}(e)}} \frac{\partial \lambda_{N-1}(e)}{\partial e_r} \right) \end{Bmatrix}_{j=1, \dots, N-2} \quad (4.31)$$

$$\nabla g_{j+1} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial g_{j+1}}{\partial e_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_{j+1}}{\partial e_r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4\pi\omega_j^2(e)} \left(\frac{\omega_j(e)}{\sqrt{\lambda_N(e)}} \frac{\partial \lambda_N(e)}{\partial e_1} - \frac{\omega_N(e)}{\sqrt{\lambda_j(e)}} \frac{\partial \lambda_j(e)}{\partial e_1} \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{4\pi\omega_j^2(e)} \left(\frac{\omega_j(e)}{\sqrt{\lambda_N(e)}} \frac{\partial \lambda_N(e)}{\partial e_r} - \frac{\omega_N(e)}{\sqrt{\lambda_j(e)}} \frac{\partial \lambda_j(e)}{\partial e_r} \right) \end{Bmatrix}_{j=N+1, \dots, m} \quad (4.32)$$

Nas Equações (4.29), (4.31) e (4.32) os termos de sensibilidade dos autovalores são calculados a partir da Equação (3.18). As Equações (4.29) e (4.32) são facilmente particularizadas para $N=1$ e $N=2$ não sendo mais necessária a Equação (4.31). Para as outras variáveis de controle diferentes da altura e , as Equações (4.29), (4.31) e (4.32) continuam sendo válidas, mas a Equação (4.30) deve ser modificada apropriadamente considerando por exemplo as Equações (4.19) ou (4.20).

4.6.2 Critério de diminuição da função de resposta em frequência

A resposta vibratória em sistemas de engenharia é usualmente um subproduto não desejado. Diversos enfoques podem ser utilizados para reduzir a resposta em sistemas existentes ou em sistemas que ainda se encontram na fase de projeto. Uma possibilidade é adicionar algum mecanismo de amortecimento de carácter passivo ou ativo. Outra possibilidade refere-se ao uso de sistemas de controle ativo.

Neste trabalho opta-se por um processo de concepção ótima, onde modificando os parâmetros do sistema como por exemplo a altura estrutural, é possível minimizar a resposta numa região previamente escolhida. Esta minimização é realizada com um processo de otimização restrita, procurando-se satisfazer determinadas restrições de engenharia fisicamente factíveis.

A resposta em frequência U_{ij} num ponto de medição i , devido a uma força de excitação aplicada em $GDLin$ graus de liberdade de entrada com uma frequência de excitação ω_j , pode ser obtida com a técnica de superposição de modos acoplados para n modos. Com este procedimento, calcula-se segundo a expressão da Equação (3.97), a seguinte curva de resposta:

$$U_{ij} = \sum_{k=1}^{GDLin} \sum_{l=1}^n \phi_{il} \left(\frac{1}{\lambda_l - \omega_j^2} \right) \bar{\phi}_{kl} F_k \quad (4.33)$$

sendo ϕ_{il} a componente i do autovetor à direita l , λ_l o autovalor l , $\bar{\phi}_{kl}$ a componente k do autovetor à esquerda l . Todas estas grandezas são função da variável de projeto, a altura e .

Para o caso que seja considerado o amortecimento c_l , a Equação (4.33) se apresenta como se segue:

$$U_{ij} = \sum_{k=1}^{GDLin} \sum_{l=1}^n \phi_{il} \left(\frac{1}{\lambda_l - \omega_j^2 + j\omega_j c_l} \right) \bar{\phi}_{kl} F_k \quad (4.34)$$

onde o valor de c_i para o caso de amortecimento proporcional é dado pela Equação (3.105).

Estuda-se o problema de minimizar a função de resposta num número discreto $freq$ de frequências de excitação, tendo como pontos de medição uma vizinhança do domínio fluido numa quantidade de graus de liberdade de saída denotada por $GLDout$.

A descrição geral do problema de otimização de um modelo elasto-acústico, considerando uma estrutura de seção transversal retangular de largura unitária e sendo a variável de controle a altura da estrutura, é estabelecido como:

$$\underset{e \in \mathcal{R}^r}{\text{Minimizar}} \sum_{j=1}^{freq} \sum_{i=1}^{GLDout} |U_{ij}(e, \omega_j)| \quad (4.35)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^r (e_i L_i) - \vartheta = 0 \quad (4.36)$$

$$e_{min} \leq e \leq e_{max} \quad (4.37)$$

Se a variável de controle for a área da seção transversal A , o vetor e deve ser substituído pelo vetor das áreas elementares, A , nas Equações (4.35) e (4.37), e a Equação (4.36) deve ser substituída pela Equação (4.19).

Quando a variável de controle for o diâmetro \varnothing de uma seção circular, o vetor e deve ser substituído pelo vetor dos diâmetros elementares, \varnothing , nas Equações (4.35) e (4.37), e a Equação (4.36) é substituída pela Equação (4.20).

Por outro lado, considerando as diversas possibilidades de variáveis de controle, as expressões analíticas das sensibilidades das matrizes acopladas do sistema, K' e M' , devem ser escolhidas adequadamente do item 3.5 ou serem calculadas apropriadamente.

O vetor gradiente da função objetivo expressa pela Equação (4.35) é fornecido no processo de otimização como:

$$\nabla f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial e_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial e_r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^{freq} \sum_{i=1}^{GDLout} \frac{\text{Re}[U_{ij}(e, \omega_j)] \frac{\partial \text{Re}[U_{ij}(e, \omega_j)]}{\partial e_1} + \text{Im}[U_{ij}(e, \omega_j)] \frac{\partial \text{Im}[U_{ij}(e, \omega_j)]}{\partial e_1}}{|U_{ij}(e, \omega_j)|} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{freq} \sum_{i=1}^{GDLout} \frac{\text{Re}[U_{ij}(e, \omega_j)] \frac{\partial \text{Re}[U_{ij}(e, \omega_j)]}{\partial e_r} + \text{Im}[U_{ij}(e, \omega_j)] \frac{\partial \text{Im}[U_{ij}(e, \omega_j)]}{\partial e_r}}{|U_{ij}(e, \omega_j)|} \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Na Equação (4.38) o termo de sensibilidade da resposta é determinado com uma base modal definida na Equação (3.110), onde são consideradas as expressões dadas pelas Equações (3.114) e (3.115) para o caso de amortecimento proporcional. Além disso considerando os termos da Equação (3.110), as sensibilidades dos autovalores, autovetores à direita e autovetores à esquerda são calculados com as Equações (3.18), (3.22) e (3.25) respectivamente, onde o parâmetro μ assume um valor negativo perto de infinito.

O vetor gradiente correspondente à restrição expressa pela Equação (4.36) é fornecido no processo de otimização em forma normalizada como:

$$\nabla g_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial e_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial e_r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{L_1}{\vartheta} \\ \vdots \\ \frac{L_r}{\vartheta} \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

4.7 Algoritmo de otimização

Na Figura 4.1 são mostrados os processos predefinidos implementados sobre o algoritmo original do método SQP do software comercial Matlab®. Os módulos onde foram realizadas alterações são comentados a seguir.

Módulo Solução: encarregada de calcular a função objetivo, f , e o vetor das restrições, g . Para o caso da otimização através da separação de frequências naturais, por exemplo a função objetivo é dada pela Equação (4.14) e as restrições pelas Equações (4.15) a (4.17). No caso da otimização através da diminuição da função de resposta a função objetivo é dada pela

Equação (4.35) e as restrições pela Equação (4.36). Observa-se que as restrições de contorno são impostas como restrições de desigualdade internamente pelo software.

Módulo *Gradfun*: encarregada de calcular em forma analítica o vetor gradiente da função objetivo, ∇f , e a matriz de gradientes das restrições, ∇g . Para o caso da otimização através da separação de frequências naturais, ∇f por exemplo é dado pela Equação (4.29) e ∇g é formado a partir das Equações (4.30) a (4.32). No caso da otimização através da diminuição da função de resposta, ∇f é calculado com a Equação (4.38) e ∇g com a Equação (4.39).

Módulo *Predição*: encarrega-se de prever a função objetivo, f , e o vetor das restrições, g , baseada na predição dos autovalores pelo método do quociente de Rayleigh. Sendo o parâmetro de controle a altura estrutural, a predição é válida para variações de até 10% da altura, devido aos erros maiores que os permissíveis na predição de autovetores por diferenças finitas para percentagens superiores. Por outro lado, a predição só é válida quando uma das condições de convergência seja $\text{abs}(\nabla f^T * \mathbf{d}) > 0.25$ para os problemas considerados, por quanto a predição não conseguiu garantir sempre a convergência perto do ponto ótimo.

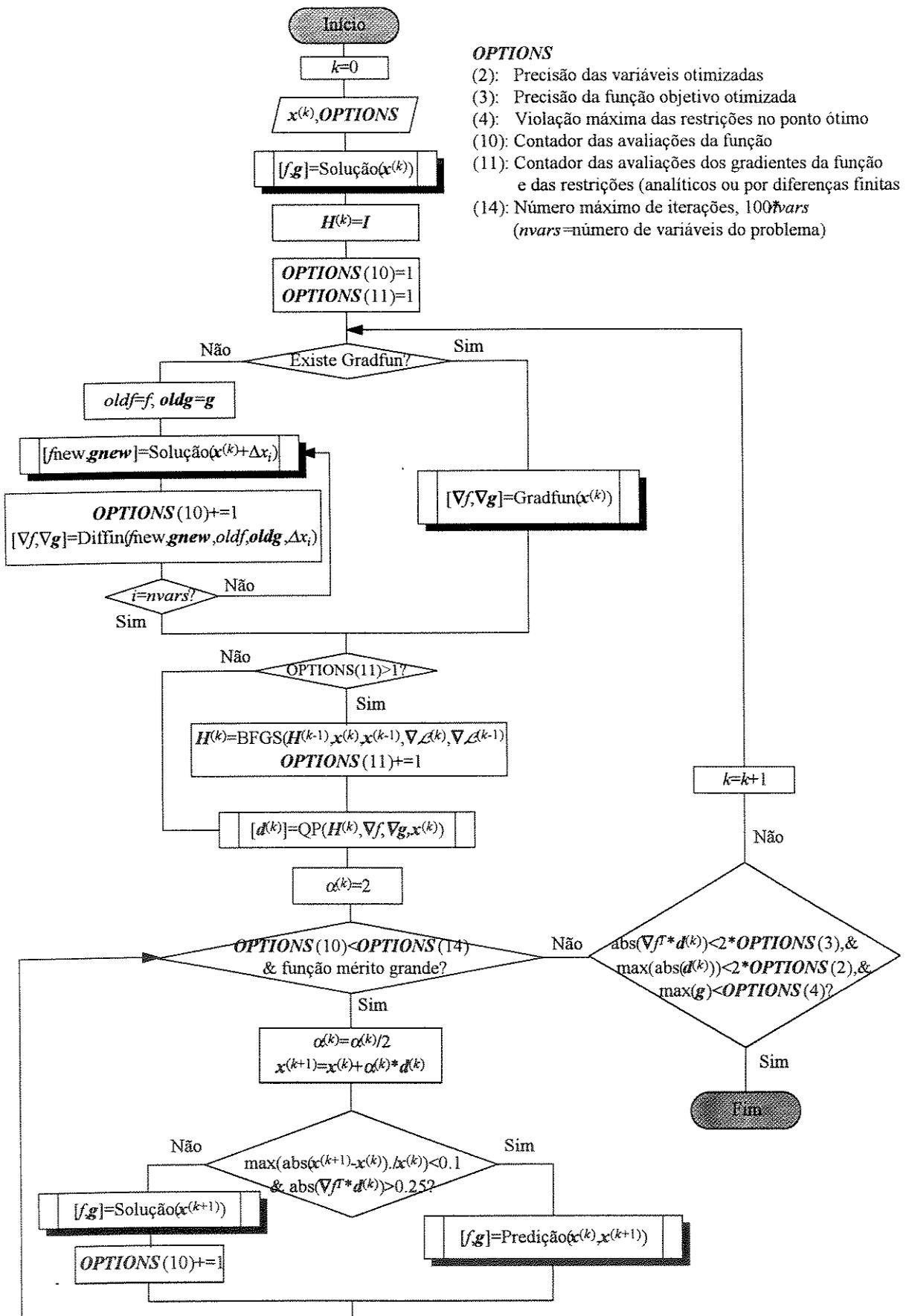


Figura 4.1 Diagrama de fluxo do processo de otimização

Capítulo 5

Resultados e Discussões

5.1 Objetivos

Os objetivos deste capítulo são: apresentar os sistemas estruturais e fluido-estrutura analisados; discutir os testes numéricos das formulações empregadas para calcular a sensibilidade modal e a predição das frequências naturais; analisar os resultados numéricos da resposta em frequência e uma análise de sua sensibilidade; comparar o desempenho dos processos de solução e predição nos algoritmos de otimização; e finalmente aplicar a otimização estrutural em alguns casos simples todavia representativos. As implementações foram feitas no ambiente do software comercial MATLAB® devido as facilidades numéricas e gráficas disponíveis, utilizando e ampliando as possibilidades do programa *MEFLAB*, para a análise e otimização estrutural dos sistemas acoplados fluido-estrutura. O programa de elementos finitos de uso geral *MEFLAB* foi desenvolvido para utilizar a ambiência numérica e gráfica do MATLAB®, estando em continuo desenvolvimento no Departamento de Mecânica Computacional, (Barbedo, 1995), (Pedreira, 1995), (Rodrigues, 1996).

5.2 Definição dos exemplos estudados

Apresenta-se a geometria e os dados dos sistemas estruturais e fluido-estrutura analisados ao longo deste capítulo.

5.2.1 Sistema estrutural SE1 - Viga em balanço

Trata-se de uma viga engastada de seção circular usada para os testes efetuados por Fox e Kapoor (1968), modelada por três elementos finitos de viga de Euler-Bernoulli, o que conduz a uma análise dinâmica aproximada por seis graus de liberdade. Usa-se as funções de forma do problema estático na avaliação da matriz de massa dos elementos, isto é usa-se um modelo clássico de massa consistente. As variáveis do projeto são os diâmetros elementares. Neste caso tem-se uma dependência quadrática da matriz de massa e quártica da matriz de rigidez com relação as variáveis de projeto que são os diâmetros de cada viga.

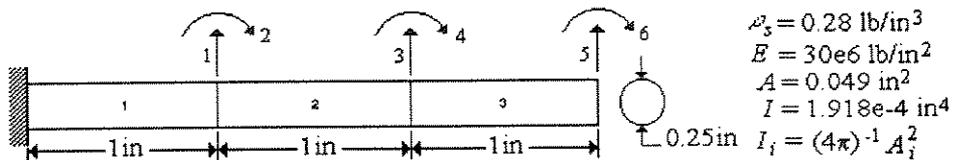


Figura 5.1 Esquema do sistema estrutural SE1

O sistema estrutural SE1 é classificado como sendo de ordem 2 em relação ao expoente da relação entre o momento de inércia e a área, $I=(4\pi)^{-1}A^2$.

5.2.2 Sistema estrutural SE2 - Eixo em balanço

Consiste de uma viga engastada-livre com volume total \bar{v} tendo em sua extremidade livre um disco rígido de massa Q conforme mostrado na Figura 5.2 (Olhoff, 1989). As variáveis do projeto são as áreas das seções transversais dos elementos A_i ($i=1,\dots,20$), os quais possuem comprimento L_i e seções transversais circulares com momento de inércia I_i . Observa-se que para este estudo a massa do sistema (vigas) varia linearmente com relação a área e a rigidez varia quadraticamente.

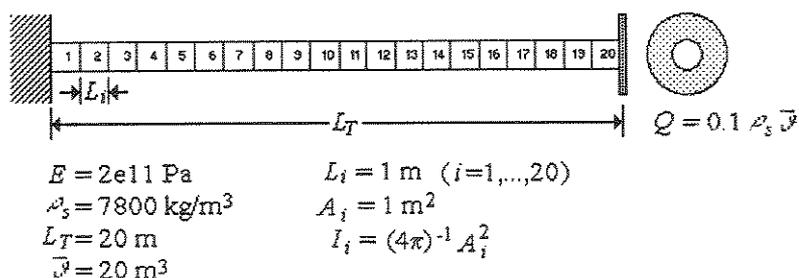


Figura 5.2 Esquema do sistema estrutural SE2

O material elástico da estrutura possui módulo de Young E e densidade ρ_s . O comprimento total da viga é dado por L_T .

5.2.3 Sistema estrutural SE3 - Viga biengastada

Trata-se de uma viga biengastada conforme mostrado na Figura 5.3, onde os elementos possuem comprimento L_i e seções transversais circulares de momento de inércia I_i . As possíveis variáveis de controle são as áreas das seções transversais dos elementos A_i ou os diâmetros dos elementos \varnothing_i . Este exemplo é estudado com o objetivo de se verificar o efeito do engastamento nos procedimentos de otimização propostos.

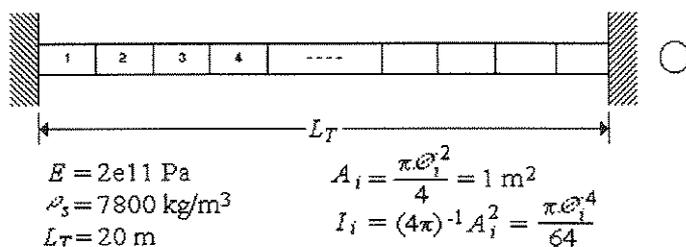


Figura 5.3 Esquema do sistema estrutural SE3

O material elástico da estrutura possui módulo de Young E e densidade ρ_s . O comprimento total da viga é denotado por L_T .

5.2.4 Sistema estrutural SE4 - Viga biengastada com seção retangular

Este sistema é uma viga biengastada em flexão com seção transversal retangular de largura unitária conforme mostrado na Figura 5.4. A viga é modelada em elementos de comprimento L_i e seção transversal com momento de inércia I_i . As possíveis variáveis do projeto são as áreas das seções transversais dos elementos A_i ou as alturas dos elementos e_i . Observa-se que para o caso estudado a matriz de massa varia linearmente e a matriz de rigidez varia de forma cúbica com relação a variável altura e .

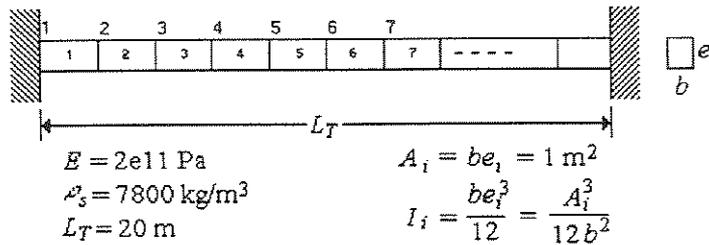


Figura 5.4 Esquema do sistema estrutural SE4

O material elástico da estrutura possui módulo de Young E e densidade ρ_s . O comprimento total da viga é denotado por L_T .

O sistema estrutural SE4 é classificado como sendo de ordem 3 em relação ao expoente da relação entre o momento de inércia e a área, $I=(12)^{-1}A^3$, para uma largura unitária.

5.2.5 Sistema fluido-estrutura SFE1 - Reservatório retangular

Considera-se o sistema acoplado fluido-estrutura de uma cavidade acústica bidimensional retangular de altura $H=40\text{m}$ e comprimento $L_T=20\text{m}$ mostrado na Figura 5.5. Este modelo foi previamente apresentado em (Olson e Bathe, 1985), (Galli e Pavanello, 1994), (Grosh e Pinsky, 1994), (Sandberg, 1995) e (Barbosa e Pedroso, 1997), sendo um exemplo clássico onde os fenômenos básicos do acoplamento fluido-estrutura podem ser evidenciados. Adotam-se condições de contorno de parede rígida nas paredes laterais, e de superfície livre linearizada na parte superior. Modela-se o fundo como uma viga biengastada em flexão com área de seção transversal retangular, inicialmente quadrada com altura uniforme de 1m e largura unitária.

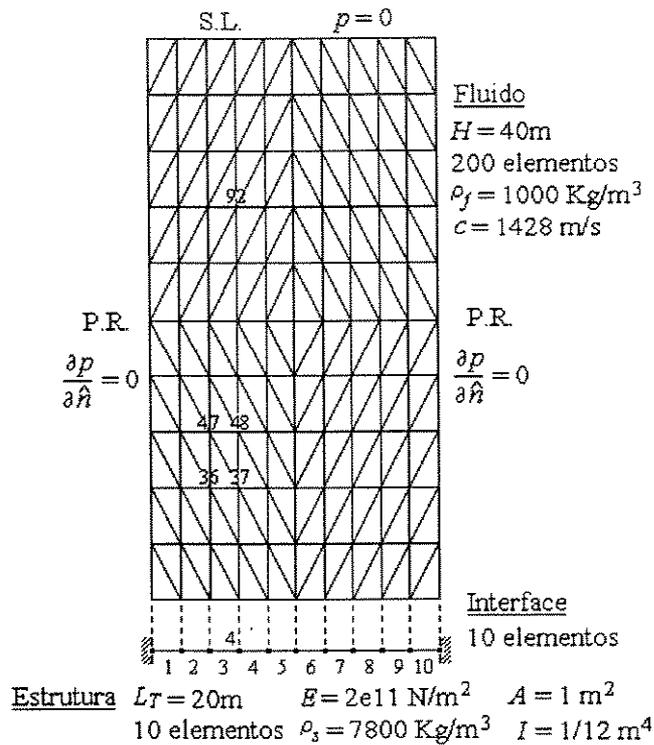


Figura 5.5 Esquema do sistema fluido-estrutura SFE1

As variáveis de projeto são as alturas dos elementos da viga, embora possam também ser utilizadas como variáveis as áreas das seções transversais. O sistema é discretizado da seguinte maneira: 10 elementos de viga na parte estrutural, 200 elementos triangulares no domínio fluido e 10 elementos na interface de acoplamento.

Na Figura 5.6 são apresentados os dez primeiros modos naturais acoplados do sistema em pressão para o fluido e deslocamento para a estrutura. Comparando-se os deslocamentos da estrutura e o perfil do campo de pressões do fluido observa-se uma adequada correlação, o que mostra os efeitos do acoplamento do modelo. Salienta-se que na Figura 5.6 os modos foram normalizados e utiliza-se escala única para as pressões e outra para os deslocamentos.

O sistema fluido-estrutura SFE1 é classificado como sendo de ordem 3 em relação ao expoente da relação entre o momento de inércia e a área da estrutura, $I=(12)^{-1}A^3$, para uma largura unitária.

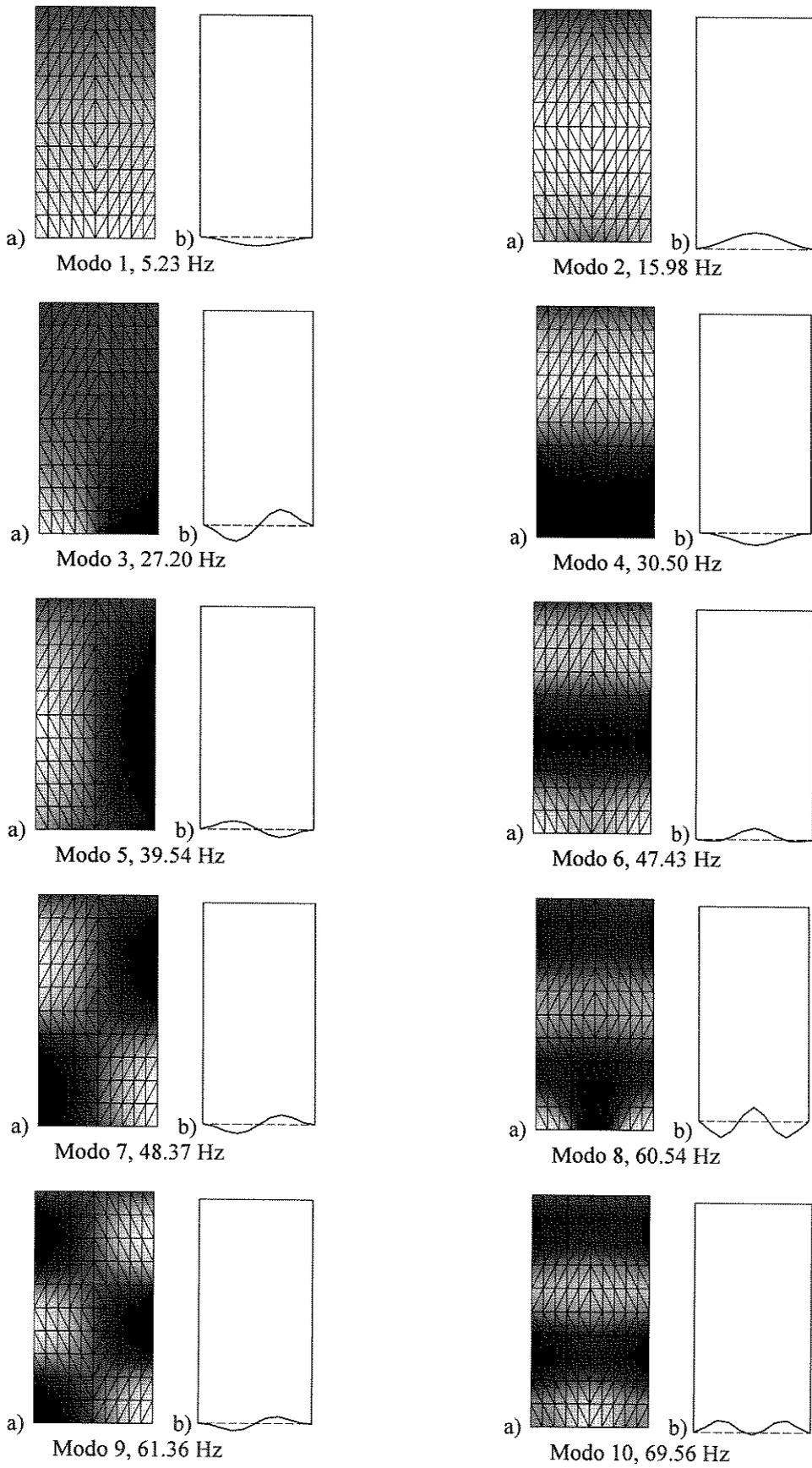


Figura 5.6 Modos acoplados sistema SFE1, a) pressão do fluido, b) deslocamento da estrutura

5.2.6 Sistema fluido-estrutura SF2 - Cavity with flexible wall

Estuda-se a caixa bidimensional descrita por Sandberg (1995), de comprimento 1.5 m e altura 0.45 m, com o lado superior flexível e com as propriedades da estrutura e do fluido indicadas na Figura 5.7. A viga possui suportes fixos nos extremos, e são adotadas condições de contorno de parede rígida no fundo e nas laterais. O modelo de elementos finitos utilizado consiste de 30 elementos de viga Bernoulli-Euler, 540 elementos triangulares de três nós para discretizar o fluido e 30 elementos na interface, com os quais foi possível obter resultados similares nas frequências naturais e nas formas modais fazendo uso dos valores das propriedades da estrutura e do fluido fornecidas por Sandberg (1995).

O lado superior modela-se como uma viga biengastada em flexão, de seção transversal retangular, inicialmente com altura uniforme e largura unitária, este último constante ao longo da otimização. Como variáveis de controle são escolhidas as alturas dos elementos da viga.

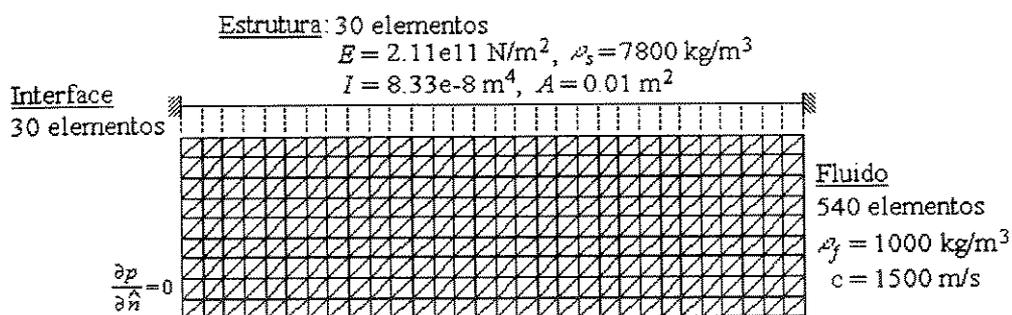


Figura 5.7 Esquema do sistema fluido-estrutura SFE2

Observa-se na Figura 5.8 as formas dos primeiros modos acoplados em pressão do fluido e deslocamento da estrutura, encontrando correspondência com os perfis dos modos obtidos por Sandberg (1995).

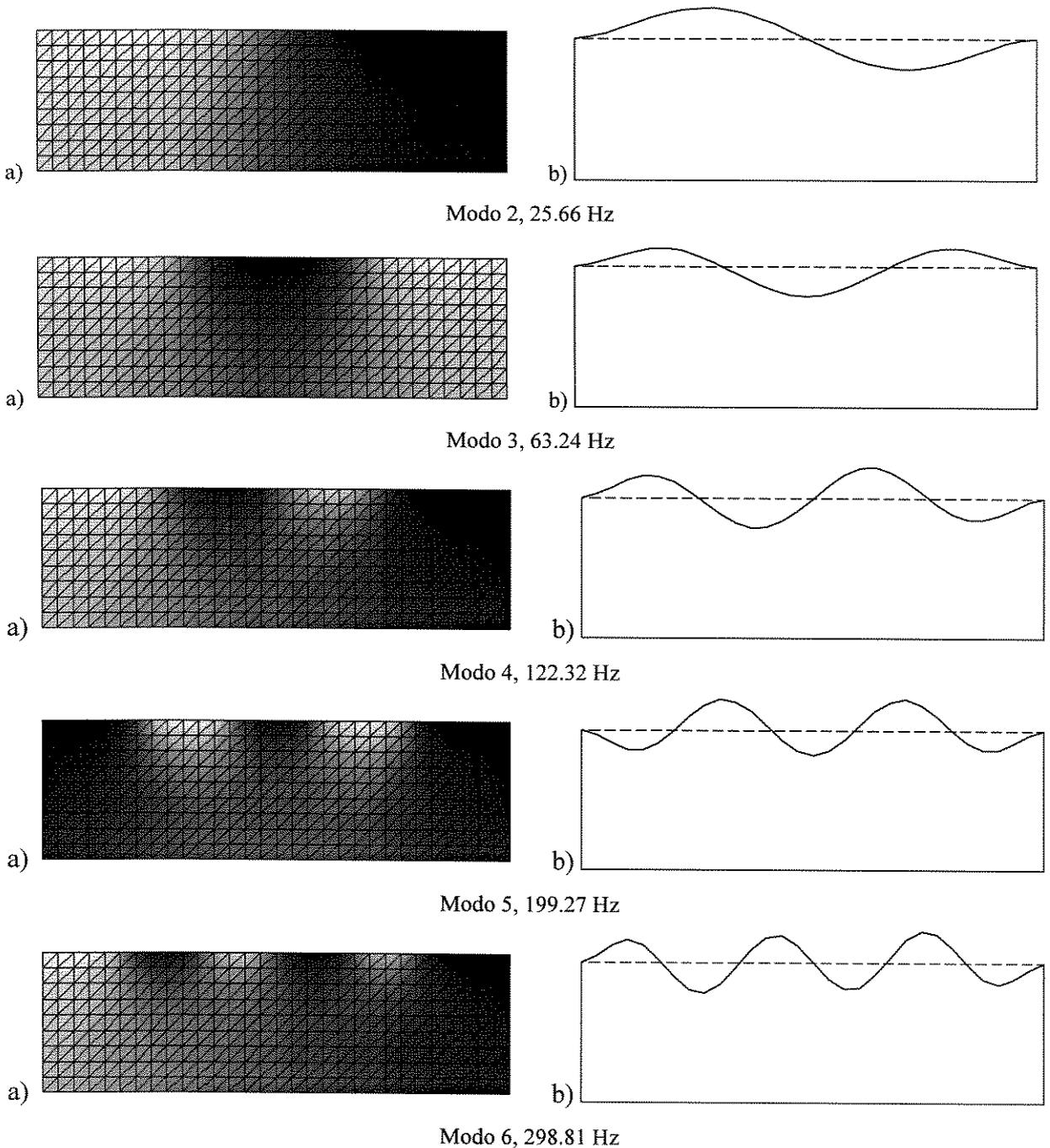


Figura 5.8 Modos acoplados sistema SFE2, a) pressão do fluido, b) deslocamento da estrutura

5.2.7 Sistema fluido-estrutura SF3 - Compartimento de passageiros de um veículo

Com o objetivo de apresentar uma aplicação mais prática de engenharia que ilustre o potencial da metodologia implementada, realiza-se um estudo elasto-acústico da cabine de um veículo analisando o espectro das baixas frequências de vibração. O estudo leva em conta a interação dinâmica entre parte do contorno flexível do veículo e seu fluido interior, o ar.

Medições experimentais deste sistema como se fosse uma cavidade acústica, ou seja com as paredes rígidas, foram realizados por Fyfe et al. (1985) num modelo experimental construído em escala 1:3, utilizando placas de PVC de 1 cm de espessura presas umas nas outras por parafusos. A faixa de frequências de interesse varia entre 150 a 600 Hz. Os modos de vibração são medidos enquanto a cavidade é excitada por uma função randômica, e calcula-se os contornos em pressão de um plano simétrico da cabine. No trabalho de Galli (1995) os resultados numéricos puramente acústicos, foram comparados com os resultados experimentais de Fyfe et al (1985), mostrando boa correlação.

O modelo físico adotado para uma largura unitária bem como as características físicas da estrutura e do fluido são mostrados na Figura 5.9. A discretização do sistema foi calculado por Galli (1995) utilizando o software comercial ANSYS. A malha de elementos finitos possui 200 nós, 14 elementos estruturais de viga, 321 elementos fluidos triangulares e 14 elementos de interface.

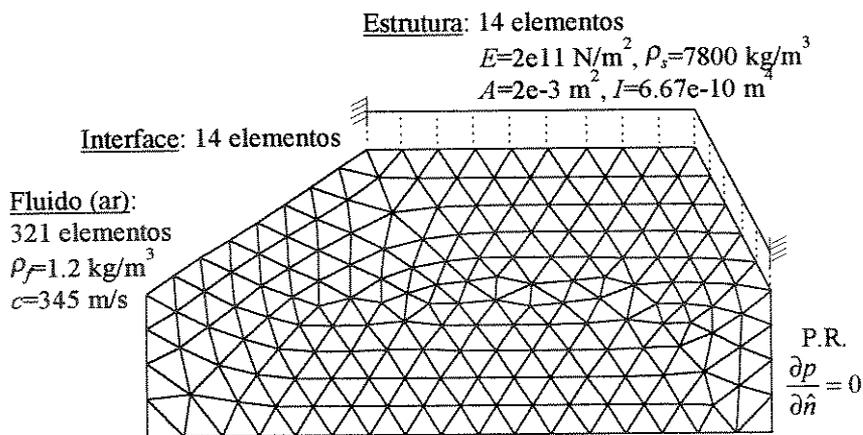


Figura 5.9 Esquema do sistema fluido-estrutura SFE3

Como referência na Figura 5.10 são apresentados os primeiros modos acoplados em pressões do fluido e deslocamentos da estrutura.

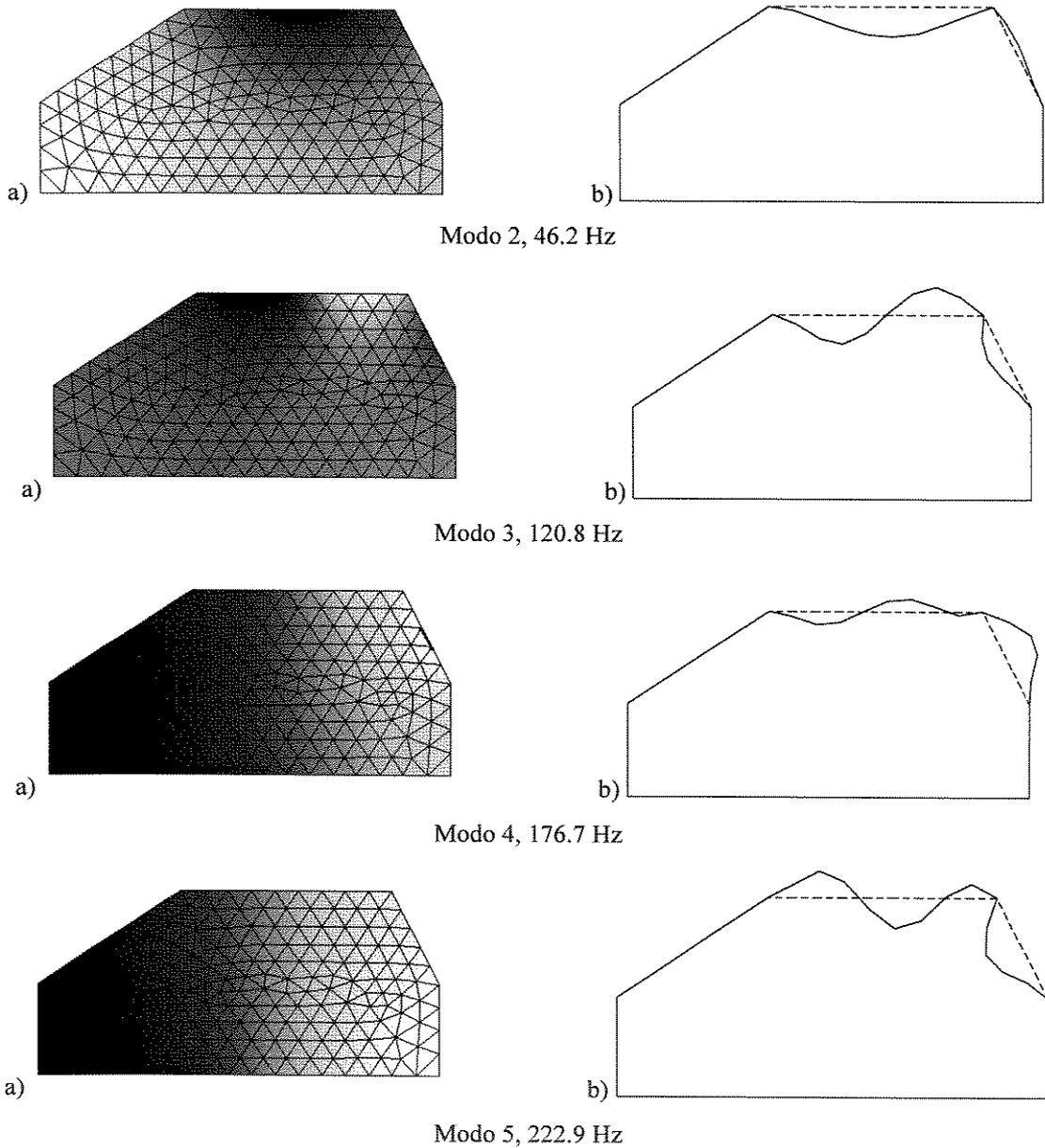


Figura 5.10 Modos acoplados sistema SFE3, a) pressão do fluido, b) deslocamento estrutural

As variáveis de projeto são as alturas dos elementos estruturais de viga, embora também possam ser utilizadas como variáveis as áreas das seções transversais.

Na seqüência foram realizadas uma série de testes com o objetivo de justificar a escolha dos métodos empregados e para validar as formulações e algoritmos implementados no trabalho. Em alguns casos, os resultados dos testes foram comparados com soluções apresentadas na literatura. A seguir, os resultados mais importantes destes testes são apresentados e discutidos.

5.3 Sensibilidade modal e predição dos autovalores

As sensibilidades modais foram calculadas utilizando a formulação apresentada no item 3.4 do Capítulo 3, e podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$\lambda'_j = \phi_j^T (K' - \lambda_j M') \phi_j \quad (5.1)$$

$$\phi'_j = x_j + \sum_{i=1}^n \phi_i C_{ij} \quad (5.2)$$

sendo feita a derivação em relação à variável de controle apropriada para cada exemplo.

5.3.1 Estudo no sistema SE1

Este sistema é estudado com o objetivo de validar as fórmulas de sensibilidade modal dadas pelas Equações (5.1) e (5.2), no que se refere a formulação da predição de autovalores segundo os métodos de diferenças finitas, Equação (3.47), e do quociente de Rayleigh, Equação (3.50). Por outro lado, a validação da predição de autovalores via quociente de Rayleigh, dada pela Equação (3.50), valida indiretamente a fórmula da predição dos autovetores à direita e autovetores à esquerda calculado pelo método de diferenças finitas, Equações (3.48) e (3.49).

Tomando as variáveis de controle como os diâmetros elementares \emptyset , compara-se os resultados obtidos da sensibilidade dos autovalores, na Tabela 5.1, e da sensibilidade dos autovetores, na Tabela 5.2, com os resultados apresentados por Fox e Kapoor (1968). Denota-se $\lambda'_{j,k}$ a sensibilidade do autovalor j em relação ao diâmetro do elemento k , $\phi_{ij,k}$ a sensibilidade da componente i do autovetor j em relação ao diâmetro do elemento k . Fox e Kapoor empregam as expressões similares as Equações (5.1) e (5.2), mas na Equação (5.2) é omitido o termo x_j .

Tabela 5.1 Sensibilidade dos autovalores em relação aos diâmetros elementares

j	Autovalor λ_j (rad/s) ²		$\lambda'_{j,1}$		$\lambda'_{j,2}$		$\lambda'_{j,3}$	
	*	**	*	**	*	**	*	**
1	0.2466e8	0.2466e8	0.3209e9	0.3210e9	0.3456e8	0.3457e8	-0.1582e9	-0.1582e9
2	0.9747e9	0.9749e9	0.3860e10	0.3861e10	0.4352e10	0.4353e10	-0.4144e9	-0.4145e9
3	0.7782e10	0.7784e10	0.2350e11	0.2350e11	0.1709e11	0.1709e11	0.2167e11	0.2168e11

* Fox e Kapoor (1968) ** Resultados obtidos

Tabela 5.2 Sensibilidade dos autovetores em relação ao diâmetro do elemento 1

Modo j		Modo $\phi_{1,j,1}$	$\phi_{2,j,1}$	$\phi_{3,j,1}$	$\phi_{4,j,1}$	$\phi_{5,j,1}$	$\phi_{6,j,1}$
1	*	-0.962e2	1.745e2	-0.668e2	-1.708e2	1.478e2	-2.298e2
	**	0.962e2	1.745e2	0.668e2	-1.708e2	-1.478e2	-2.298e2
2	*	2.644e2	5.737e2	-1.801e2	0.974e2	0.057e2	-3.046e2
	**	2.644e2	-5.737e2	-1.801e2	-0.974e2	0.057e2	3.046e2
3	*	-3.005e2	-25.78e2	-0.195e2	7.359e2	0.335e2	-5.307e2
	**	-3.005e2	25.783e2	-0.195e2	-7.359e2	0.335e2	5.308e2

* Fox e Kapoor (1968) ** Resultados obtidos

Os resultados da Tabela 5.1 apresentam boa concordância da sensibilidade dos autovalores. Com relação aos resultados da Tabela 5.2, os valores da sensibilidade dos três primeiros autovetores apresentam também boa concordância. As diferenças de sinal em certos casos dos modos em deslocamento (formado pelos componentes 1,3,5,...) e os modos em rotação (formado pelos componentes 2,4,6,...) deve-se à mudança de fase dos modos.

Na Figura 5.11 são mostrados os erros percentuais da predição dos primeiros quatro autovalores ao incrementar o diâmetro do elemento 1. Nessa predição foram utilizados o método de diferenças finitas, Equação (3.47) e o quociente de Rayleigh, Equação (3.50), obtendo-se os mesmos resultados que os da literatura apresentados por Fox e Kapoor (1968). Resultados semelhantes são obtidos ao incrementar os diâmetros dos elementos 2 e 3.

A variação percentual da variável de controle r no elemento k , é calculado como,

$$\% \frac{\Delta r_k}{r_k} = \frac{r_k^* - r_k}{r_k} 100\% \quad (5.3)$$

sendo r_k o valor inicial e r_k^* o valor modificado da variável de controle.

O erro percentual da predição do autovalor utilizando o método de diferenças finitas (DF) e o quociente de Rayleigh (R), são determinados segundo,

$$\% \text{ Erro (DF) } \lambda_j^* = \frac{\lambda_j^{(\text{DF})} - \lambda_j^*}{\lambda_j^*} 100\% \quad (5.4)$$

$$\% \text{ Erro (R) } \lambda_j^* = \frac{\lambda_j^{(\text{R})} - \lambda_j^*}{\lambda_j^*} 100\% \quad (5.5)$$

onde $\lambda_j^{(\text{DF})}$ é o autovalor predito segundo o método de diferenças finitas da Equação (3.47), $\lambda_j^{(\text{R})}$ é o autovalor predito segundo o quociente de Rayleigh da Equação (3.50), e λ_j^* é o valor exato do autovalor, recalculado com a variável de projeto modificada.

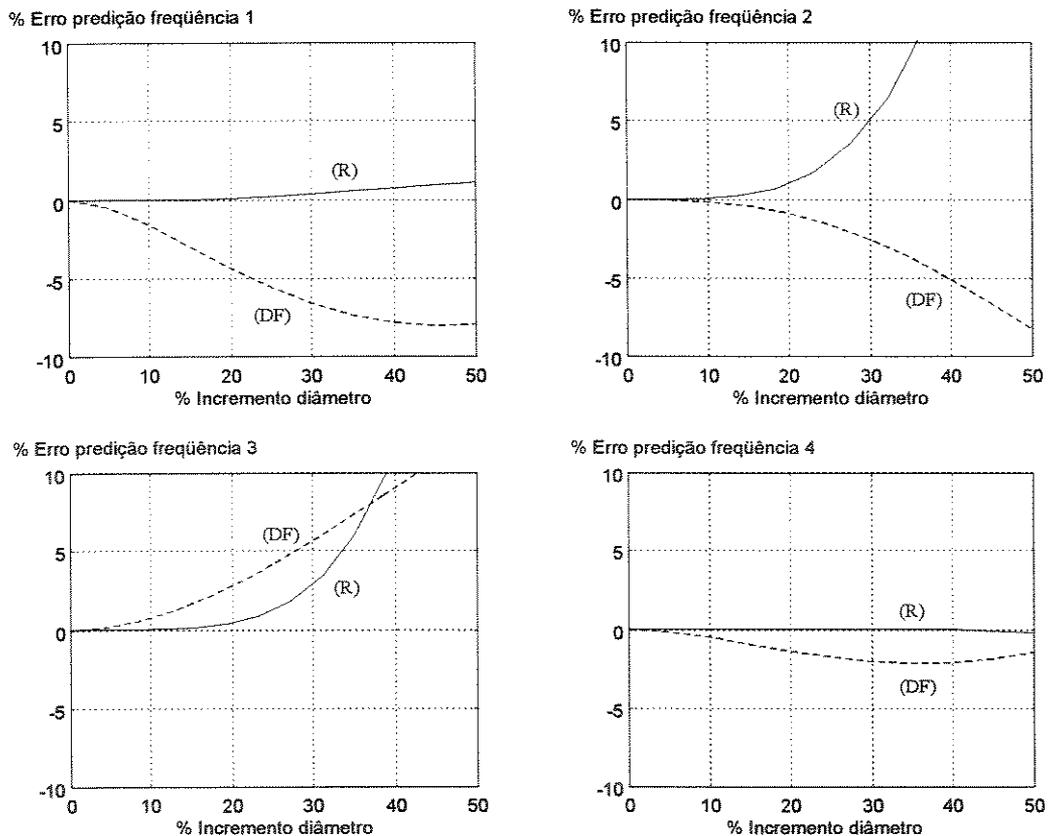


Figura 5.11 Erro na predição de frequências ao incrementar \varnothing_1 no sistema SE1

Os resultados mostram que para os autovalores analisados as predições são razoavelmente boas até uma mudança de 30% no diâmetro do elemento. O método de predição de autovalores baseado no quociente de Rayleigh é mais caro computacionalmente

que o método baseado em diferenças finitas. O método baseado no quociente de Rayleigh fornece previsões em geral de melhor qualidade, excetuando apenas alguns pontos, sendo assim será utilizado neste trabalho.

5.3.2 Estudo no sistema SE4

O objetivo deste estudo é verificar o comportamento dos preditores para um sistema estrutural de ordem 3. A semelhança do item anterior são validadas as fórmulas de previsão segundo os métodos de diferenças finitas, Equação (3.47), e do quociente de Rayleigh, Equação (3.50), delimitando sua abrangência.

Considera-se a viga discretizada por 10 elementos, tomando a altura da viga como a variável de controle.

A sensibilidade do primeiro autovalor em relação às alturas dos elementos é apresentada graficamente na Figura 5.12. Observa-se que este autovalor é mais sensível à variação dos elementos estruturais 1 e 5, e seus pares correspondentes 10 e 6 considerando a simetria geométrica do problema. Portanto, se o objetivo for maximizar o valor da primeira frequência, seria mais conveniente variar a altura nestes elementos. Observa-se neste caso o efeito importante que os elementos próximos ao engastamento têm sobre o sistema. De fato a energia de deformação é elevada nestes pontos do modelo, o que conduz a estes resultados na análise de sensibilidade, (Olhoff, 1989b) e (Pavanello, 1991).

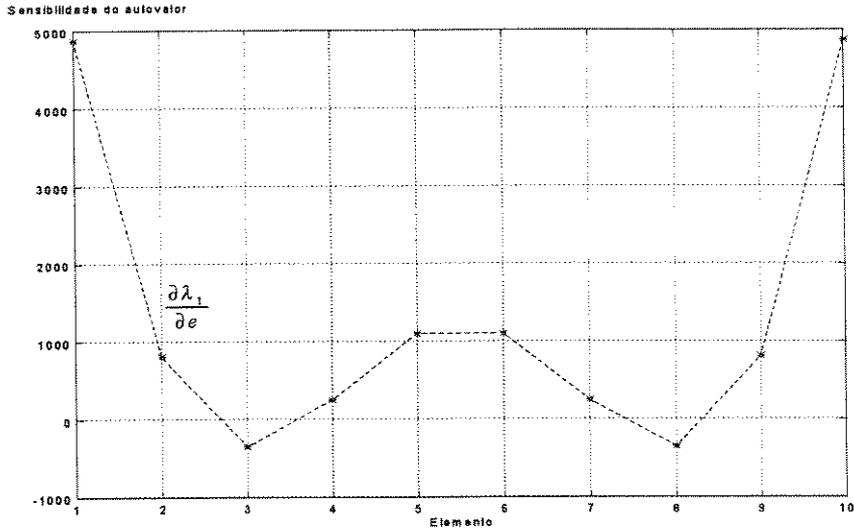


Figura 5.12 Sensibilidade do 1º autovalor no sistema SE4

A variação da sensibilidade dos autovalores do segundo e terceiro modo em relação às alturas elementares é apresentado na Figura 5.13. Se o objetivo é o afastamento destas duas frequências, pode-se induzir inicialmente que seria melhor variar a altura dos elementos da viga mais sensíveis. Isto é, alterando-se as propriedades dos elementos 5, 1, 3 e seus pares simétricos 6, 10, 8 respectivamente, deve-se obter as maiores variações nos autovalores 2 e 3. Esta lógica poderia ser utilizada para diminuir o número de variáveis num processo de otimização ao escolher somente aqueles elementos que apresentam maior sensibilidade, ou também com a finalidade de melhorar previamente o projeto na etapa de tomada de decisões.

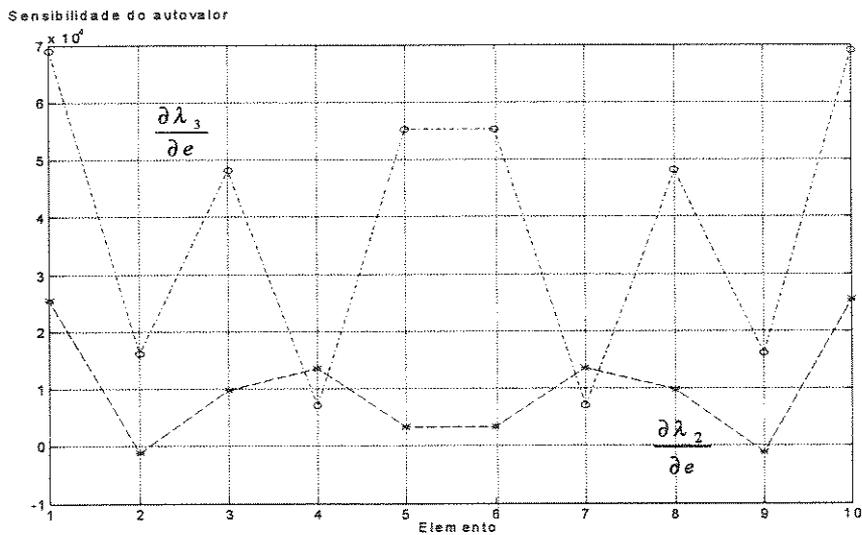


Figura 5.13 Sensibilidade dos autovalores 2º e 3º no sistema SE4

Com relação ao perfil dos modos de vibração da estrutura modificada, nota-se uma ligeira distorção do perfil original. Isso se explica pelo fato que a geometria da viga sofre uma certa variação pelas mudanças das alturas elementares, mas em termos gerais a forma do modo mantém sua tendência original.

Na Figura 5.14 apresenta-se o erro percentual na predição das primeiras quatro frequências do projeto modificado ao incrementar a altura do elemento 3. As curvas tracejadas indicam os resultados com o método de diferenças finitas (DF), enquanto as curvas cheias mostram os resultados com o quociente de Rayleigh (R). Os valores percentuais da Figura 5.14 foram calculados com as Equações (5.3) a (5.5).

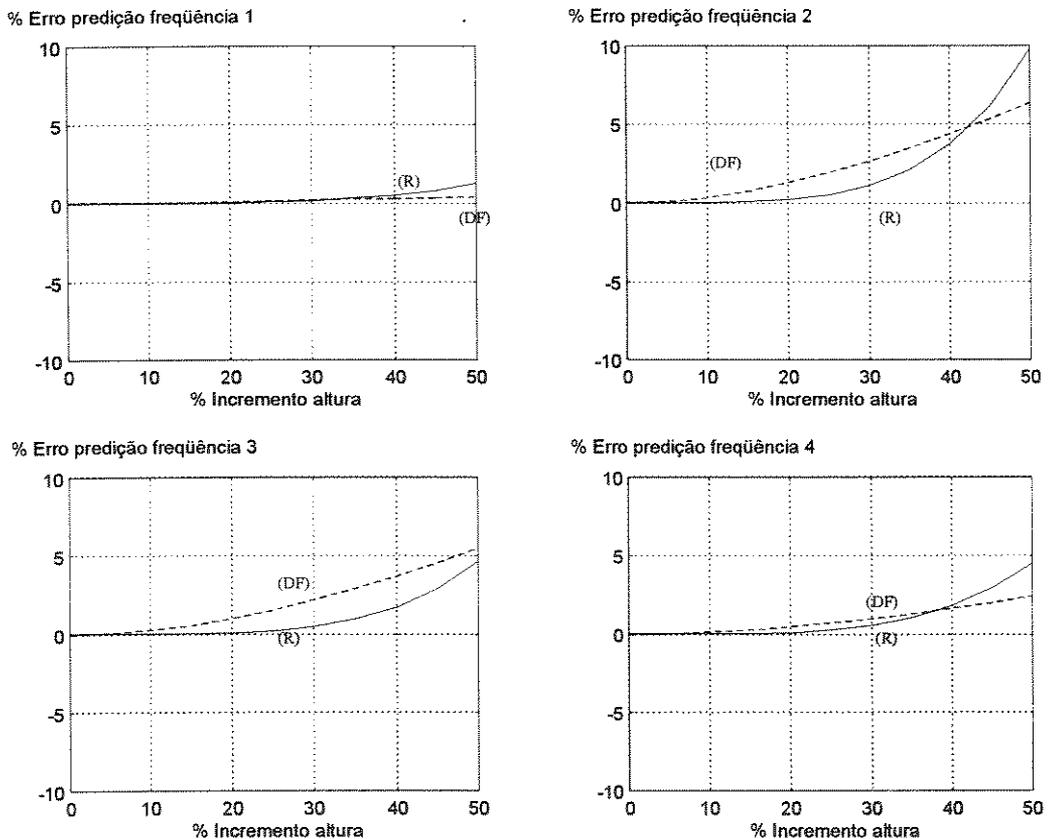


Figura 5.14 Erro na predição de frequências ao incrementar e_3 no sistema SE4

Observa-se na Figura 5.14 que os valores preditos das primeiras quatro frequências são bastante satisfatórios, se se considera uma mudança de no máximo 30% na altura e_3 . Tal resultado concorda com o observado na literatura (Fox e Kapoor, 1968) no estudo de um sistema de ordem 2. De uma forma geral, os valores preditos com o quociente de Rayleigh são

mais precisos que os obtidos com diferenças finitas. Uma possível indicação de quando as duas predições chegam a ser distintas pode ser feita a partir do ponto onde as curvas divergem.

5.3.3 Estudo no sistema SFE1

O estudo da sensibilidade e predição modal das frequências naturais e modos próprios de vibração do sistema fluido-estrutura SFE1, que possui ordem 3, $I=(1/12)A^3$, tem como objetivo validar a formulação de sensibilidade e predição usada e ampliar as conclusões para sua utilização em sistemas acoplados, (Paucar Casas e Pavanello, 1996b). Consideram-se como variáveis de controle as alturas elementares.

Os valores da sensibilidade do primeiro autovalor em função do elemento considerado é mostrada na Figura 5.15. Observa-se que se o interesse for maximizar este autovalor, seria mais conveniente alterar as alturas dos elementos que mostram maior sensibilidade, quer dizer nos elementos 1 e 5, e seus pares simétricos 10 e 6.

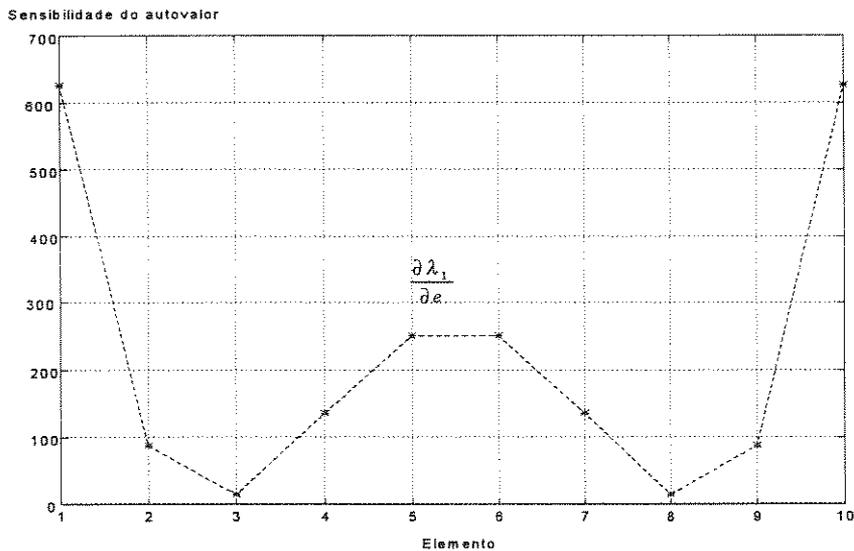


Figura 5.15 Sensibilidade do 1º autovalor no sistema SFE1

Na Figura 5.16 apresenta-se a sensibilidade do primeiro e do segundo autovalor do sistema acoplado. Se o objetivo for ampliar o afastamento destas frequências, os elementos de maior interesse seriam aqueles que inicialmente mostram a maior diferença algébrica positiva das sensibilidades, o qual envolve o elemento 1 e seu correspondente elemento simétrico 10.

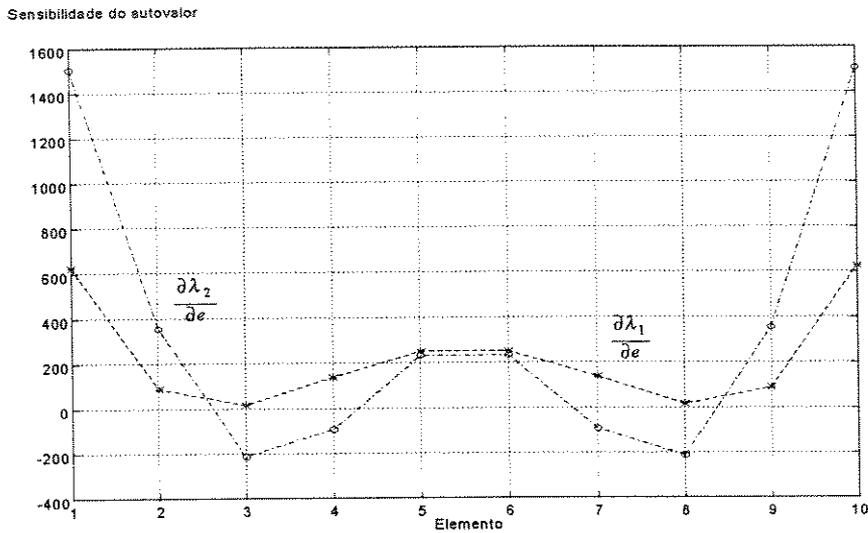


Figura 5.16 Sensibilidades dos autovalores 1º e 2º no sistema SFE1

O autovetor apresenta uma sensibilidade diferente para cada componente. Em geral, as sensibilidades dos componentes dos autovetores nos pontos de excitação (entrada) e nos pontos de medição (saída) são importantes. Por exemplo, considera-se como ponto de excitação o nó 4 na direção y atuando na estrutura, e como ponto de medição a pressão do nó 47 do domínio fluido, conforme Figura 5.5.

Na Tabela 5.3 é apresentada a sensibilidade destes componentes para os dez primeiros modos à direita do sistema, utilizando-se a Equação (5.2). Adotou-se $\mu=0,998\lambda_j$ ($j=1,\dots,10$) para calcular o termo x_j segundo a Equação (3.21). Foram utilizados neste cálculo todos os modos, ou seja $n=128$.

Fez-se também, uma análise da sensibilidade do deslocamento na direção y do nó 4 da viga. É possível induzir que esse componente no modo 1 é mais sensível a uma variação do elemento estrutural 1 e menos sensível as variações do elemento estrutural 6. Por outro lado, considerando os dez modos analisados, a variação do elemento 1 altera mais esse componente no modo 9 e menos no modo 7.

Faz-se outra análise similar da sensibilidade do componente modal de pressão do nó 47. Esse componente no modo 1 é mais sensível a uma variação do elemento estrutural 10 e menos sensível as variações do elemento estrutural 3. Por outro lado, considerando os dez modos analisados, a variação do elemento 1 altera mais esse componente no modo 8 e menos no

modo 2. Este tipo de análise embora seja pouco prática, pode dar subsídios ao projetista, de como deve ser alterado o sistema.

Tabela 5.3 Sensibilidade dos autovetores em relação as alturas

Comp.	Modo	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
GDL u_y nó 4	1	5.209e-4	5.375e-5	7.562e-5	2.272e-4	1.183e-4	-1.638e-5	-6.793e-5	-2.424e-5	3.448e-5	-4.768e-5
	2	-6.312e-4	1.083e-5	-2.716e-5	-3.309e-4	-8.909e-5	1.958e-4	1.707e-4	-5.222e-5	-2.442e-5	6.214e-4
	3	2.921e-4	-2.219e-5	6.841e-4	7.653e-4	-2.906e-5	1.764e-4	3.346e-4	1.573e-4	2.238e-5	2.280e-4
	4	-4.307e-4	2.644e-4	5.512e-4	1.797e-4	-1.509e-4	1.017e-4	1.419e-5	-5.769e-4	-3.514e-4	4.139e-4
	5	2.821e-4	-3.926e-5	-2.575e-4	-1.619e-4	1.158e-4	-6.156e-5	1.633e-4	3.080e-4	-6.868e-6	4.063e-4
	6	3.961e-4	-1.164e-4	9.603e-4	2.620e-4	7.527e-5	4.050e-4	-2.844e-4	-2.803e-4	4.686e-4	-8.126e-5
	7	3.553e-5	-2.640e-6	6.225e-4	3.079e-4	-2.526e-4	1.706e-4	-3.001e-4	-5.223e-4	1.725e-4	-6.835e-4
	8	3.124e-4	-1.114e-3	1.087e-3	2.812e-4	2.770e-4	1.666e-3	1.599e-4	6.853e-4	1.339e-3	6.378e-4
	9	-1.189e-3	1.537e-3	-1.838e-4	2.634e-4	1.056e-3	-1.119e-3	-1.613e-4	4.239e-4	-1.327e-3	9.735e-4
	10	1.135e-3	3.266e-5	-1.887e-4	-3.402e-4	-4.893e-5	2.347e-4	3.836e-5	2.854e-5	9.433e-5	7.839e-5
GDL p nó 47	1	-2.145e+4	-3.112e+3	-2.963e+2	-4.380e+3	-8.443e+3	-8.518e+3	-4.521e+3	-3.457e+2	-3.085e+3	-2.186e+4
	2	4.344e+3	8.885e+2	1.497e+3	2.988e+3	5.052e+3	7.045e+3	6.003e+3	1.064e+3	-4.884e+2	1.485e+4
	3	-1.248e+5	6.964e+3	-3.428e+4	-6.088e+4	-1.903e+4	-8.368e+3	-5.841e+4	-6.489e+4	-7.497e+3	-8.418e+4
	4	-3.441e+4	3.162e+4	4.847e+4	-1.006e+4	-2.519e+4	-6.009e+2	-2.105e+4	-5.354e+4	-6.230e+3	4.275e+4
	5	4.771e+4	4.601e+3	6.372e+4	4.087e+4	-7.069e+2	1.248e+4	8.691e+3	-2.724e+4	-7.808e+3	3.628e+4
	6	-1.379e+5	8.593e+3	-2.298e+5	-7.621e+4	6.145e+4	-4.044e+4	1.044e+5	2.077e+5	-5.421e+4	1.279e+5
	7	1.771e+5	-4.616e+4	1.853e+5	1.223e+5	-3.368e+4	6.463e+4	-3.042e+4	-1.884e+5	2.644e+4	-7.458e+4
	8	9.555e+5	-5.133e+5	4.303e+5	6.791e+3	-1.466e+5	8.408e+5	5.402e+4	2.205e+4	6.640e+5	-7.071e+4
	9	3.522e+5	-4.054e+5	8.227e+4	-1.283e+4	-3.338e+5	3.614e+5	7.863e+4	-1.102e+5	4.053e+5	-3.040e+5
	10	-1.194e+5	3.647e+4	-1.664e+4	3.211e+4	-5.237e+3	-1.256e+5	-3.405e+4	-7.045e+4	-7.166e+4	-9.741e+4

O efeito dos modos de ordem elevada no cálculo das sensibilidades dos autovetores é mostrada na Tabela 5.4. Os valores exatos das sensibilidades foram determinados considerando todos os modos, $n=128$. As sensibilidades da primeira componente dos autovetores primeiro ao décimo foram calculados para diferentes número de modos, $n=2,4,6,8,10,12$. Os valores das células em branco da tabela mostram que uma boa aproximação pode ser obtida usando poucos modos de ordem superior a mais que aquele modo em consideração.

Tabela 5.4 Efeito dos modos de ordem superior na sensibilidade dos autovetores

Comp.	Modo	Exato, $n=128$	$n=12$	$n=10$	$n=8$	$n=6$	$n=4$	$n=2$
GDL u_y nó 4	1	5.209e-4	5.209e-4	5.209e-4	5.209e-4	5.209e-4	5.209e-4	5.208e-4
	2	-6.312e-4	-6.314e-4	-6.312e-4	-6.292e-4	-6.216e-4	-6.153e-4	-4.289e-4
	3	2.921e-4	2.958e-4	2.945e-4	2.735e-4	1.853e-4	9.402e-5	8.625e-6
	4	-4.307e-4	-4.312e-4	-4.317e-4	-4.351e-4	-4.485e-4	-4.681e-4	8.578e-7
	5	2.821e-4	2.794e-4	2.811e-4	3.063e-4	4.437e-4	1.619e-6	-2.532e-6
	6	3.961e-4	4.037e-4	4.032e-4	3.761e-4	-2.036e-4	-4.108e-7	1.258e-6
	7	3.553e-5	3.753e-5	3.406e-5	-1.759e-5	-4.264e-7	-4.122e-7	2.190e-6
	8	3.124e-4	3.538e-4	3.330e-4	-9.852e-4	-1.085e-6	-3.003e-7	7.709e-6
	9	-1.189e-3	-1.194e-3	-1.201e-3	-3.383e-6	-4.071e-8	6.227e-8	8.678e-7
	10	1.135e-3	1.120e-3	1.175e-3	2.577e-6	1.595e-7	-1.383e-7	-3.473e-6
GDL p nó 47	1	-2.145e+4	-2.145e+4	-2.145e+4	-2.145e+4	-2.145e+4	-2.145e+4	-2.145e+4
	2	4.344e+3	4.580e+3	4.443e+3	5.705e+3	3.625e+3	2.711e+2	7.502e+3
	3	-1.248e+5	-1.275e+5	-1.252e+5	-1.384e+5	-1.143e+5	-6.531e+4	1.789e+2
	4	-3.441e+4	-3.462e+4	-3.474e+4	-3.679e+4	-3.299e+4	-2.407e+4	1.493e+1
	5	4.771e+4	5.030e+4	4.818e+4	6.380e+4	2.500e+4	1.402e+2	-1.699e+0
	6	-1.379e+5	-1.413e+5	-1.362e+5	-1.537e+5	2.272e+4	-8.083e+1	-8.016e+0
	7	1.771e+5	1.732e+5	1.761e+5	1.448e+5	5.896e+2	-9.374e+1	-4.625e+0
	8	9.555e+5	9.240e+5	9.796e+5	2.779e+5	3.124e+2	-3.671e+2	-4.877e+1
	9	3.522e+5	3.496e+5	3.490e+5	8.423e+2	3.017e+1	-2.555e+1	-1.874e+0
	10	-1.194e+5	-9.479e+4	-1.812e+5	-6.942e+2	-8.521e+1	1.503e+2	2.242e+1

A escolha de um parâmetro adequado de mudança μ , na avaliação da sensibilidade do autovetor é mostrado na Tabela 5.5. A sensibilidade de dois componentes do primeiro autovetor foram calculadas para diferentes valores do parâmetro, $\mu=-\infty$, 0, $5.181(0.9903\omega_1)$, $5.221(0.998\omega_1)$, e para diferentes bases modais $n=2, 4, 6, 8, 10, 12, 128$. Para $\mu=-\infty$ o método se reduz ao método modal apresentado no Capítulo 3, Equação (3.31); e para $\mu=0$ o método se reduz ao método modal modificado, Equação (3.33). Os resultados indicam que para μ positivo o método melhora na convergência, sendo esta mais rápida quando μ fica mais próxima da primeira frequência $\omega_1=5.23\text{Hz}$.

Tabela 5.5 Efeito do parâmetro μ na sensibilidade do primeiro autovetor

Componente	n	$\mu=-\infty$	$\mu=0$	$\mu=5.181$	$\mu=5.221$
GDL u_y Nó 4	2	1.751e-4	5.101e-4	5.208e-4	5.208e-4
	4	4.385e-4	5.198e-4	5.208e-4	5.209e-4
	6	4.609e-4	5.202e-4	5.209e-4	5.209e-4
	8	5.235e-4	5.207e-4	5.209e-4	5.209e-4
	10	5.487e-4	5.209e-4	5.209e-4	5.209e-4
	12	5.511e-4	5.209e-4	5.209e-4	5.209e-4
	Exato, 128		5.209e-4	5.209e-4	5.209e-4
GDL p Nó 47	2	-1.884e+4	-2.155e+4	-2.145e+4	-2.145e+4
	4	-9.250e+3	-2.117e+4	-2.145e+4	-2.145e+4
	6	-2.290e+4	-2.140e+4	-2.145e+4	-2.145e+4
	8	-3.942e+4	-2.155e+4	-2.145e+4	-2.145e+4
	10	-2.345e+4	-2.145e+4	-2.145e+4	-2.145e+4
	12	-2.601e+4	-2.145e+4	-2.145e+4	-2.145e+4
	Exato, 128		-2.145e+4	-2.145e+4	-2.145e+4

A distribuição da sensibilidade do autovetor no domínio fluido em relação a altura e_1 , para os dois primeiros modos, é mostrada na Figura 5.17, apreciando-se as áreas de maior sensibilidade absoluta como os lugares onde o modo sofre maior variação, detalhe que pode ser aproveitado para objetivos como a otimização da função de resposta.

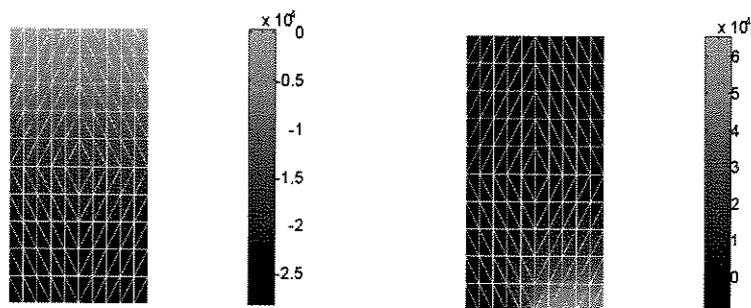


Figura 5.17 Distribuição da sensibilidade dos modos 1º e 2º no sistema SFE1

Foi realizada também uma comparação dos valores das frequências preditas obtidas com o quociente de Rayleigh em relação aos valores das frequências exatas obtidas por reanálise.

O erro percentual na predição das primeiras quatro frequências ao incrementar a altura e_5 , é mostrada na Figura 5.18. As curvas tracejadas mostram os resultados obtidos pelo método baseado em diferenças finitas (DF), Equação (3.47), e as curvas cheias mostram os resultados obtidos pelo algoritmo baseado no quociente de Rayleigh (R), Equação (3.50). Os valores percentuais da Figura 5.18 foram calculados com as Equações (5.3) a (5.5).

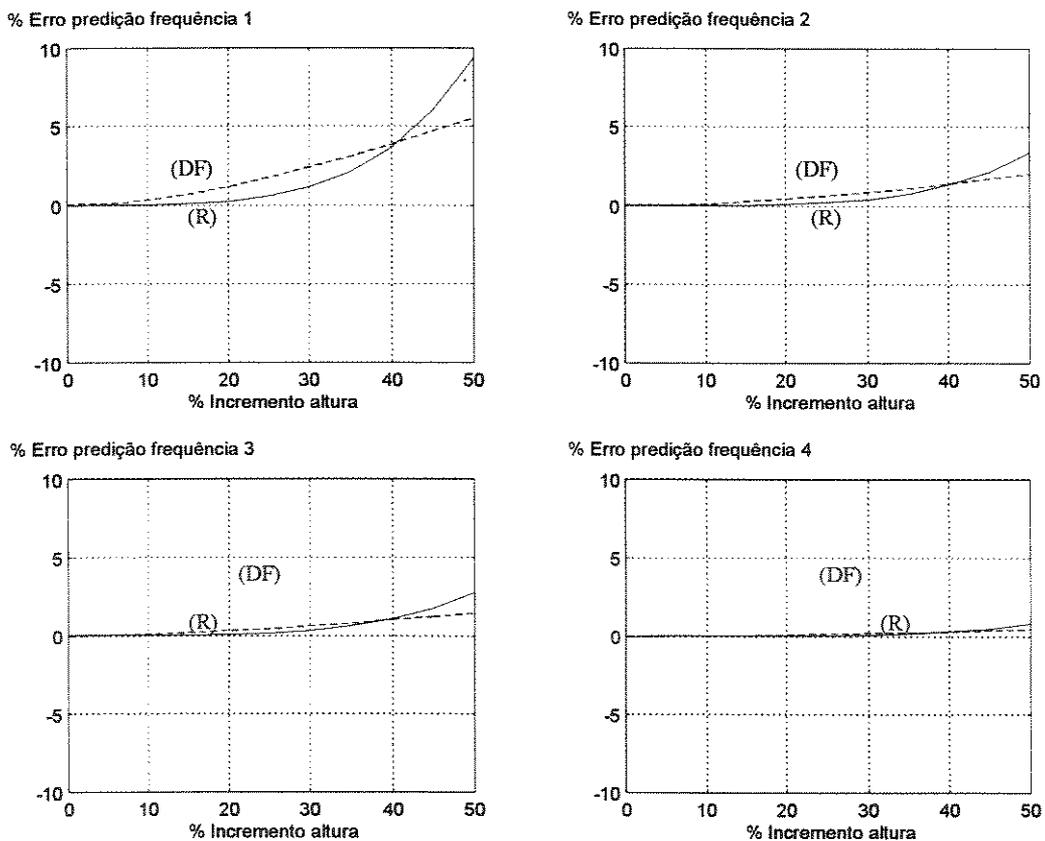


Figura 5.18 Erro na predição de frequências ao incrementar e_5 no sistema SFE1

Novamente, os valores preditos das frequências analisadas são razoavelmente precisos até uma mudança de 30% na altura do elemento 5, o qual concorda com o observado anteriormente nos sistemas estruturais SE1 e SE4. Nota-se também da Figura 5.18, que os valores preditos das frequências obtidas com o quociente de Rayleigh são melhores que as de diferenças finitas, mas isso não pode ser generalizado para qualquer geometria e nem para todas as frequências.

5.3.4 Conclusões sobre a sensibilidade modal e predição de autovalores

A determinação da sensibilidade dos autovalores em sistemas estruturais e acoplados fluido-estrutura utilizando a Equação (5.1) foi comprovada nos sistemas SE1, SE4 e SFE1. Nesses sistemas também foi comprovada a utilização da Equação (5.2) na determinação da sensibilidade dos autovetores à direita, e sendo necessários para o cálculo somente alguns modos a mais daquele em consideração. Por outro lado a escolha do parâmetro de mudança $\mu=0.998\lambda_j$ para calcular o termo x_j segundo a Equação (3.21) produz melhores resultados que fixar $\mu=0.998\lambda_1$.

Por outro lado foi realizada uma comparação do erro de predição de autovalores utilizando o método baseado em diferenças finitas, Equação (3.47), com o método baseado no quociente de Rayleigh, Equação (3.50). Mostrou-se que o método baseado no quociente de Rayleigh produz resultados mais precisos, embora de maior custo, até uma mudança de 30% da variável de projeto considerada, e sendo assim utilizados neste trabalho.

Por outro lado a predição de autovalores utilizando o método baseado no quociente de Rayleigh, Equação (3.50), valida indiretamente as fórmulas de predição de autovetores baseado no método de diferenças finitas, Equações (3.48) e (3.49), tendo em vista que a Equação (3.50) depende diretamente desses valores.

5.4 Resposta em frequência e análise de sensibilidade da resposta

Com o objetivo de validar as expressões iterativas das aproximações da resposta e sensibilidade da resposta, escolhe-se estudar o sistema acoplado SFE1. Além desta validação, apresenta-se neste item um estudo mais detalhado sobre a utilização da análise de sensibilidade no auxílio ao projeto, sem se considerar um método de otimização.

5.4.1 Aproximações iterativas da resposta e sua sensibilidade no sistema SFE1

Estuda-se o sistema SFE1, sendo o fluido interior ar de densidade ρ_f igual a 1.2 kg/m^3 , e considera-se uma velocidade do som no fluido c equivalente a 343 m/s . Toma-se como variáveis de controle as alturas dos elementos estruturais.

A análise de resposta em frequência varia em função dos pontos de excitação e resposta escolhidos. Excita-se o nó 4 da estrutura no sentido da direção y com uma força de 1 N , e o ponto de medição é o nó 92 do domínio fluido, conforme a Figura (5.5).

Quando o fluido é ar tem-se um domínio acústico, onde o nível de pressão do som (SPL Sound Pressure Level) é calculado em termos de dBA por,

$$p^{[\text{dBA}]} = \begin{cases} 10 \log_{10} \left(\frac{U_f}{U_0} \right)^2, & \text{para } U_f > U_0 \\ 0, & \text{para } U_f \leq U_0 \end{cases} \quad (5.6)$$

sendo o valor de referência U_0 igual a $2 \times 10^{-5} \text{ Pa}$. Quando a resposta do fluido U_f for inferior ao valor de referência U_0 , o som sai da faixa audível, adotando-se um valor nulo de pressão.

Sendo p' a sensibilidade do nível de pressão sonora com relação a variável de projeto e , obtém-se da Equação (5.6) a seguinte expressão:

$$p'^{[\text{dBA/m}]} = \begin{cases} \frac{20}{\ln 10} \left(\frac{U'_f}{U_f} \right), & \text{para } U_f > U_0 \\ 0, & \text{para } U_f \leq U_0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Na Tabela 5.6 apresenta-se a convergência do nível de pressão sonora, obtido pelo método iterativo definido pelas Equações (3.66) a (3.71), tomando-se como referência a solução obtida pelo método convencional segundo a Equação (3.58). Os resultados mostram convergência rápida nas primeiras iterações para as frequências de excitação consideradas, embora isso possa não acontecer quando a frequência de excitação fique próxima de uma frequência natural do sistema (Ma e Hagiwara, 1991b). Além disso, observa-se que a solução sem iterações gera uma boa aproximação da solução exata, o que indica que desprezando-se o termo Z_{sf} da matriz de impedância, Equação (3.55), o erro introduzido na solução é pequeno (inferior a 0.64%). Tal efeito pode ser explicado pelo fato de que o meio acústico tem pouca influência na vibração estrutural. Com efeito, sendo o fluido ar e considerando que existe uma superfície livre, a influência do fluido nas vibrações estruturais é pequena (Galli, 1995).

Tabela 5.6 Convergência da DFR nos métodos iterativos, nó 92

SPL, dB (iteração)	Frequência de excitação, Hz				
	7.6915	10.9	20	40	60
$p^{(0)}$	5.2839	32.6097	4.2504	37.3992	14.1283
$p^{(1)}$	5.2814	32.8164	4.2439	37.3013	14.1405
$p^{(2)}$	5.2814	32.8208	4.2439	37.3024	14.1405
$p^{(3)}$	5.2814	32.8209	4.2439	37.3024	14.1405
$p^{(4)}$	5.2814	32.8209	4.2439	37.3024	14.1405
$p^{(5)}$	5.2814	32.8209	4.2439	37.3024	14.1405
Exato	5.2814	32.8209	4.2439	37.3024	14.1405

Os valores da sensibilidade do nível de pressão do som, em função do número de iterações obtida mediante os métodos iterativos definidos no item 3.8.2, é mostrada na Tabela 5.7. Esses resultados são comparados com os valores obtidos pelo método convencional dado pela Equação (3.74), tendo como variável de controle a altura e_1 . Observa que as soluções convergem com poucas iterações.

Tabela 5.7 Convergência da sensibilidade da DFR nos métodos iterativos, nó 92, variável e_1

Sensibilidade SPL, dB/m (iteração)	Frequência de excitação, Hz				
	7.915	10.9	20	40	60
$p^{(0)}$	-13.2253	-21.5143	0.5459	18.5631	-0.1693
$p^{(1)}$	-13.2214	-22.0994	0.5454	18.3735	-0.1694
$p^{(2)}$	-13.2214	-22.1120	0.5454	18.3758	-0.1694
$p^{(3)}$	-13.2214	-22.1123	0.5454	18.3758	-0.1694
$p^{(4)}$	-13.2214	-22.1123	0.5454	18.3758	-0.1694
$p^{(5)}$	-13.2214	-22.1123	0.5454	18.3758	-0.1694
Exato	-13.2214	-22.1123	0.5454	18.3758	-0.1694

A Tabela 5.8 compara os resultados de sensibilidade da resposta em frequência direta em relação às variáveis do projeto e_1 até e_5 , utilizando-se diferentes valores de frequências de excitação. Os resultados da Tabela 5.8 mostram uma variação nos valores de sensibilidades da resposta para cada altura em função da frequência de excitação utilizada. Esse mapeamento de sensibilidade pode ser aproveitado no processo de otimização, variando-se apenas aquelas variáveis que fornecem os valores mais significativos de sensibilidade. Tal estratégia pode ser usada na escolha do número e da posição de variável de controle a ser usada.

Tabela 5.8 Comparação da sensibilidade da DFR, método exato, nó 92

Frequência excitação, Hz	SPL, dB	Sensibilidade do SPL para cada e_i , dB/m				
		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
7.6915	5.2814	-13.2214	-1.6455	-0.6616	-3.5123	-3.9236
10.9	32.8209	-22.1123	-4.6282	1.5548	-2.0398	-6.5169
20	4.2439	0.5454	1.9076	1.0784	-2.0789	-0.5043
40	37.3024	18.3758	-1.5041	3.9616	6.9852	1.5634
60	14.1405	-0.1694	-0.4762	-1.7084	-2.3701	2.7782

O bom comportamento dos métodos iterativos restringe-se ao caso de fluidos pouco densos, como os gases. As formulações iterativas não apresentam boa convergência para outros fluidos densos, tal como os líquidos.

Com o intuito de comprovar esta afirmação, apresenta-se na Tabela 5.9 os valores da resposta do sistema SFE1, adotando-se uma densidade ρ_f igual a 1000 kg/m^3 e velocidade do som no fluido c equivalente a 1428 m/s . Observa-se que a convergência é alcançada após varias iterações e apenas para as frequências 20 e 40 Hz. A explicação deve-se ao fato de que o termo Z_{sf} ou K_{sf} da matriz de impedância, Equação 3.55, possui valores significativos em relação ao caso anterior do fluido pouco denso, restringindo o uso do método.

Estes resultados mostraram a limitação da metodologia iterativa.

Tabela 5.9 Convergência da DFR nos métodos iterativos, fluido água, nó 92

p , Pa (iteração)	Frequência de excitação, Hz				
	10	20	27	40	60
$p^{(0)}$	-0.5212	0.1064	17.3616	0.2678	0.3576
$p^{(1)}$	7.4397	0.0161	-4693.6	0.2922	2.2465
$p^{(2)}$	-114.1469	0.0926	1.2738e6	0.2776	12.1847
$p^{(3)}$	1742.9	0.0280	-3.4571e8	0.2841	64.3574
$p^{(4)}$	-26619	0.0827	9.3824e10	0.2805	338.2281
$p^{(5)}$	40.656e4	0.0364	-2.5463e13	0.2825	1.7758e3
$p^{(10)}$	-3.3788e11	0.0668	3.7491e25	0.2818	7.0767e6
$p^{(30)}$	1.9395e29	0.0579	1.7618e74	0.2818	1.7884e21
Exato	-0.0320	0.0576	0.1559	0.2818	-0.1155

5.4.2 Análise de sensibilidade da resposta em frequência modal no sistema SFE1

O estudo e validação das diversas formulações da resposta em frequência em sistemas estruturais utilizando uma base modal, Capítulo 3, é amplamente discutido na literatura atual, porém sua aplicação em sistemas acoplados somente é encontrado em alguns trabalhos como aquele realizado num sistema acústico-estrutural por Hagiwara, Kozukue e Ma (1993).

Usando-se a formulação modal amortecida proposta neste trabalho, estuda-se o sistema SFE1, com amortecimento do tipo proporcional, toma-se as constantes α e β iguais a 0.0001. Testou-se inicialmente a convergência do método modal para obtenção da resposta e sua sensibilidade, para fluidos densos ou gases, encontrando-se resultados satisfatórios (Pauca Casas e Pavanello, 1997).

Com o intuito de efetuar uma análise de sensibilidade da resposta em frequência modal MFR é discutir sua aplicação num processo de otimização da resposta, estuda-se o sistema SFE1 onde o fluido interior é água de densidade ρ_f de 1000 kg/m³ e velocidade do som no fluido c de 1428 m/s. O nó 4 da estrutura é excitado na direção y (GDL 5) com uma força de 1 N, sendo o ponto de medição o nó 47 (GDL 54) do domínio fluido, conforme a Figura 5.5. As variáveis do projeto são as alturas dos elementos estruturais.

Um processo semi automático de projeto pode ser obtido conforme o seguinte esquema:

1. Utilizar a análise da resposta em frequência modal (MFR Modal Frequency Response) para gerar a curva função da resposta em frequência (FRF Frequency Response Function),

escolhendo a partir desta a frequência de excitação que produz a resposta significativa a ser controlada.

2. Realizar uma análise de sensibilidade da resposta em frequência em relação à frequência escolhida, definindo as variáveis de projeto mais importantes, isto é, as variáveis com os maiores valores absolutos de sensibilidade.
3. Efetuar uma análise de sensibilidade da MFR para as variáveis de projeto escolhidas em 2, para uma faixa de frequências em torno do valor especificado em 1.
4. Modificar as variáveis de projeto com o propósito de reduzir a vibração e o ruído do sistema acoplado.

Os resultados do primeiro passo são mostrados na Figura 5.19, tendo sido avaliada a resposta em frequência pelo método de superposição de modos acoplados, num domínio abrangendo as dez primeiras frequências naturais do sistema para incrementos de 0.1 Hz. Da Figura 5.19, escolhesse três pontos de interesse que geram as maiores respostas: 2.34 Pa em 5.2 Hz; 2.72 Pa em 16 Hz e 0.62 Pa em 27.2 Hz.

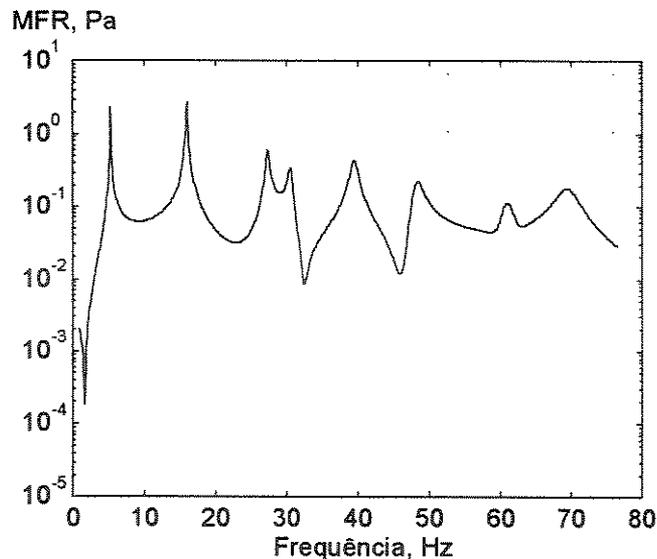


Figura 5.19 FRF do sistema SFE1 num domínio das dez primeiras frequências

O segundo passo é selecionar uma determinada resposta, no caso foi selecionada a resposta de 0.62 Pa em 27.2 Hz que está relacionada a uma frequência de ressonância do sistema; efetuando-se uma análise de sensibilidade da MFR segundo o método de superposição de modos acoplados. A Tabela 5.10 mostra os resultados de sensibilidade da resposta em frequência em relação às variáveis estruturais. As variáveis e_{10} , e_1 , e_3 e e_4 são escolhidas para a

etapa seguinte da análise por apresentar os maiores valores absolutos de sensibilidade da resposta.

Tabela 5.10 Sensibilidade da MFR, frequência de excitação 27.2 Hz

Altura i	Sensibilidade, Pa/m
e_1	-0.8149
e_2	-0.1000
e_3	-0.6161
e_4	-0.4937
e_5	-0.0531
e_6	-0.1537
e_7	-0.4635
e_8	-0.3325
e_9	-0.0103
e_{10}	-0.9215

A Figura 5.20 mostra os resultados do terceiro passo. Foi realizada uma análise da sensibilidade da MFR em relação as alturas e_{10} , e_1 , e_3 e e_4 no intervalo de frequências de 24 até 30 Hz. De acordo a Tabela 5.10 as sensibilidades da MFR em relação a aquelas alturas possuem valores negativos da sensibilidade para uma frequência de excitação de 27.2 Hz. Então para diminuir a resposta nessa frequência teria que se acrescentar os valores destas alturas. Analisando a distribuição da sensibilidade no intervalo 24-27.2 Hz, as variáveis e_{10} e e_1 apresentam os maiores valores negativos de sensibilidade próximos da posição de ressonância de 27.2 Hz, conforme a Figura 5.20. Portanto, é mais vantajoso incrementar as variáveis e_{10} e e_1 para produzir uma maior diminuição da resposta.

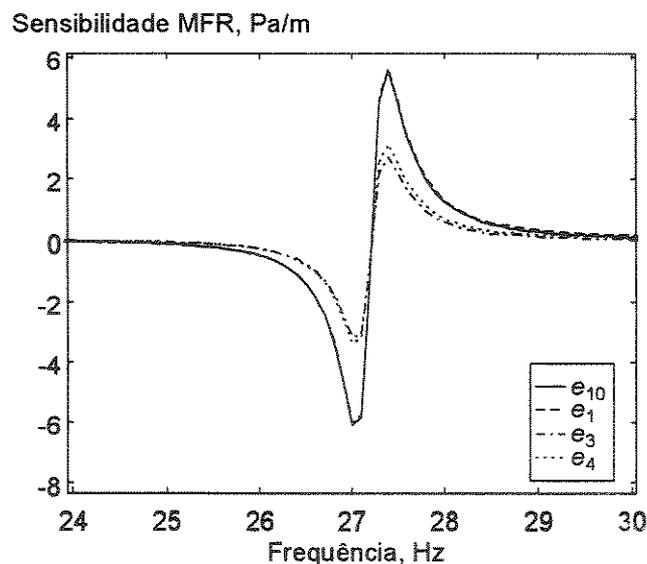


Figura 5.20 Sensibilidade da resposta em frequência em relação as variáveis e_{10} , e_1 , e_3 e e_4

Finalmente no quarto passo, as variáveis e_{10} e e_1 são incrementadas em 25% com o propósito de reduzir a resposta. Como mostra a Figura 5.21 foi obtida uma redução de 0.59 Pa na frequência de 27.2 Hz, quer dizer de 0.62 Pa para 0.03 Pa, observando-se que a ressonância desloca-se para a direita.

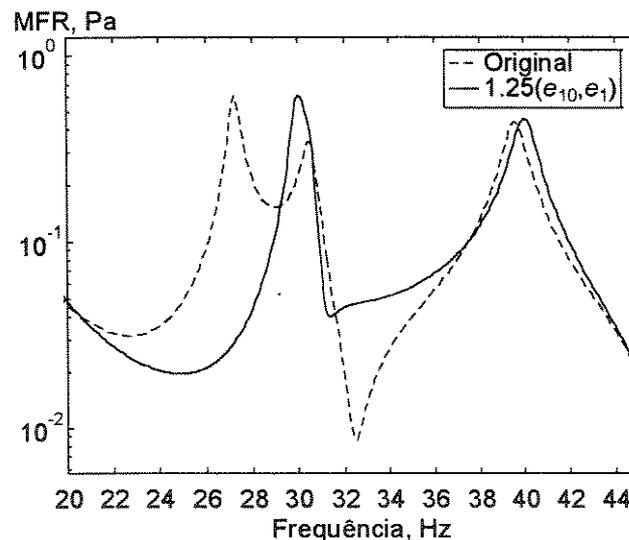


Figura 5.21 Diminuição da MFR para uma redução de e_5 , frequência de excitação 27.2 Hz

Este procedimento, que depende fortemente da intervenção e conhecimento do engenheiro, mostrou-se pouco efetivo para fins práticos, todavia permite uma análise inicial do problema de otimização.

5.5 Comparação dos processos *solução* e *predição* na otimização

Problemas de otimização baseados em critérios dinâmicos envolvem o cálculo dos autovalores do sistema, os quais dependem diretamente dos valores das variáveis do projeto. Como durante o processo de otimização a função objetivo é calculada repetidamente para cada novo conjunto das variáveis do projeto, uma alternativa mais econômica do ponto de vista computacional seria prever os autovalores para o conjunto das novas variáveis ao invés de solucionar novamente o problema. Assim o objetivo deste item é determinar a possibilidade, vantagens e abrangência da utilização da predição de autovalores nas iterações do processo de otimização.

Usa-se o número de operações de ponto flutuante *flops* na avaliação do custo computacional das soluções direta e via predição.

A contagem de flops é uma aproximação primária mas necessária na avaliação da eficiência de um programa; ela ignora as comunicações (*subscripting*), o tráfego na memória, e outras inúmeras despesas gerais associadas com a execução do programa. Segundo Golub e Van Loan (1990), a contagem de flops é somente um método de contabilidade “simples mas impreciso” que captura uma das várias dimensões da eficiência, portanto não é possível deduzir muito de uma comparação de contagem de flops. Considerando-se que as implementações realizadas tiveram o objetivo principal de testar a aplicabilidade e viabilidade dos métodos, pode-se dizer que a contagem de ponto flutuante é uma medida adequada.

Neste trabalho é utilizado o contador de flops do software comercial *Matlab*®, onde as operações aritméticas e funções elementares contam um flop, não sendo factível contar absolutamente todas as operações de ponto flutuante com o comando *flops* do *Matlab*®, conta-se no entanto a maioria das operações principais.

Compara-se o número de operações entre os processos *solução* e *predição* do sistema, no âmbito de uma iteração principal da otimização. Geralmente é necessário resolver ou predizer o sistema mais de uma vez para avançar uma iteração principal, sendo o ganho da predição melhor neste caso, pois precisa-se calcular só uma vez a sensibilidade dos autovetores para cada iteração principal do algoritmo mostrado no Capítulo 4.

Posteriormente é feita uma análise do erro dos autovalores e autovetores na predição do sistema, com a finalidade de limitar o escopo da predição no processo de otimização.

5.5.1 Verificação do desempenho das fórmulas de predição

Com o objetivo de se verificar o desempenho numérico das fórmulas de predição, em relação ao número de operações de ponto flutuante (flops), estuda-se o sistema acoplado fluido-estrutura SFE1, sendo as variáveis de projeto as alturas dos elementos da viga as quais tiveram uma variação de até 15%.

Apresenta-se na Figura 5.22 a quantidade de flops em função do número de modos analisados para resolver uma vez o problema de autovalores e autovetores, usando os processos *solução* e *predição* conforme definição do item 3.6. Observa-se uma menor quantidade de flops ao se utilizar a opção *predição* para poucos modos.

No processo de solução usa-se a rotina *sptarn*© fornecida no *Partial Differential Equation Toolbox*© do *Matlab*®. A função *sptarn*© resolve problemas de autovalores generalizados do sistema $(A-\lambda B)x=0$ no intervalo $[lb,ub]$, onde A e B são matrizes esparsas, lb e ub são os limites inferior e superior dos autovalores procurados. A função *sptarn*© utiliza o método de Lanczos com inicialmente $jmax=100$ vetores de base, necessitando de um espaço de trabalho de $jmax \cdot GDL$ sendo GDL o número de graus de liberdade do sistema. Normalmente o algoritmo para antecipadamente quando um número suficiente de autovalores convergiu, todavia como o número de vetores de base foi mantido constante o número de flops obtido para a faixa analisada variou pouco, conforme mostra a Figura 5.22.

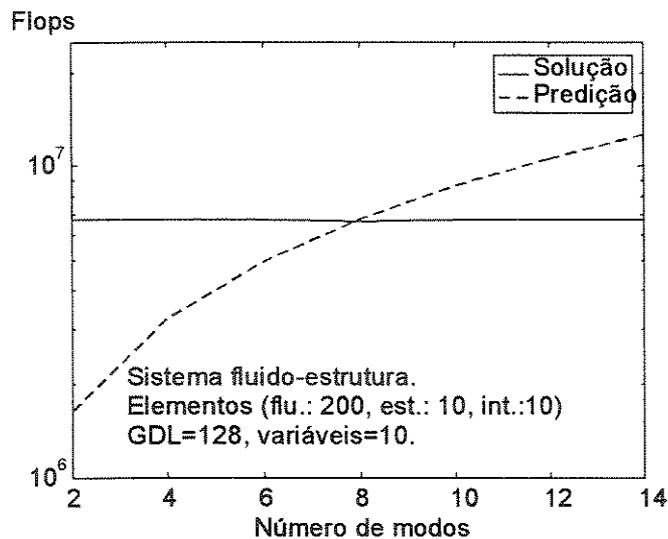


Figura 5.22 Flops com os modos para resolver uma vez o sistema SFE1

A quantidade de flops quando se resolve o sistema duas vezes para uma iteração da otimização, usando os processos *solução* e *predição*, é mostrado na Figura 5.23. Nesse caso a quantidade de flops é menor com a opção *predição* para todos os modos analisados, o que justifica sua utilização no processo de otimização destes sistemas, onde vários ciclos podem ser realizados para cada iteração.

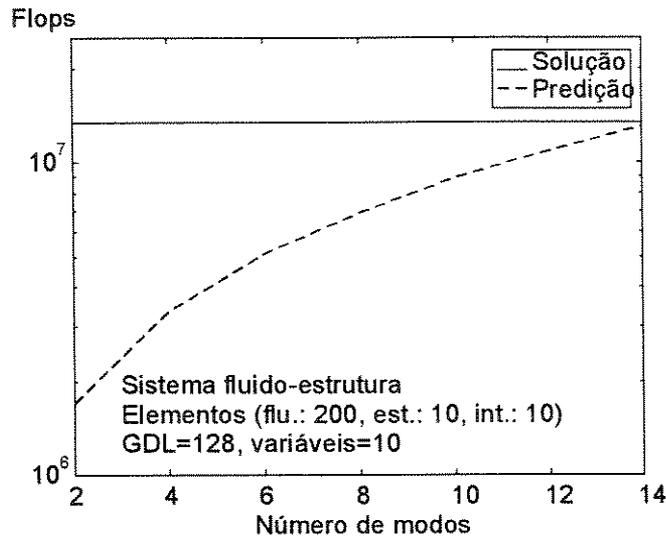


Figura 5.23 Flops com os modos para resolver duas vezes o sistema SFE1

Este resultado, permite afirmar que neste caso o uso das fórmulas de predição em sistemas acoplados fluido-estrutura, conduz à algoritmos mais eficientes no que se refere ao seu custo computacional. Cumpre salientar no entanto, que o uso de técnicas especiais de resolução do problema de autovalores e autovetores do sistema pode conduzir a situações mais favoráveis em relação ao processo de *solução* (Sandberg, 1995).

5.5.2 Avaliação da precisão das fórmulas de predição

Efetua-se uma análise do erro na predição dos autovalores segundo o método baseado no quociente de Rayleigh dada pela Equação (3.58), e do erro na predição dos autovetores segundo o método baseado em diferenças finitas dada pela Equação (3.48); m função das variações permissíveis das variáveis de projeto. Este estudo tem a finalidade de verificar a validade das fórmulas de predição, de forma que o processo de otimização possa convergir adequadamente.

Para calcular o erro dos autovetores foi necessário colocar previamente em fase os autovetores obtidos do processo de *predição* em relação aqueles do processo de *solução*. Para tanto usou-se o seguinte procedimento:

$$\frac{\phi_{\text{soluç}}^T \phi_{\text{prediç}}}{\phi_{\text{soluç}}^T \phi_{\text{soluç}}} = \begin{cases} < 0, & \phi_{\text{prediç}} = -\phi_{\text{prediç}} \\ > 0, & \phi_{\text{prediç}} = \phi_{\text{prediç}} \end{cases} \quad (5.8)$$

Na avaliação do erro da predição do autovetor foi adotada a norma euclidiana que permite definir o erro da seguinte maneira:

$$\text{erro}_{\phi_{\text{prediç \~{o}}}} = \|\phi_{\text{prediç \~{o}}} - \phi_{\text{soluç \~{o}}}\| \quad (5.9)$$

Considera-se inicialmente o sistema estrutural SE3, sendo a viga discretizada em 20 elementos que envolve 38 GDL. As variáveis do sistemas são as áreas elementares cuja variação foi feita aleatoriamente, dentro de intervalos especificados, mantendo-se o volume inicial e a simetria da viga.

Observa-se na Figura 5.24 um erro máximo de 0.96% na predição das dez primeiras freqüências para uma variação simultânea de 25-30% das áreas. O erro máximo encontrado é significativamente inferior ao erro máximo de quase 5% obtido por Fox e Kapoor (1968), que estudaram apenas as três primeiras freqüências de uma viga engastada-livre de seção circular, variando-se somente um dos diâmetros elementares em até 30%.

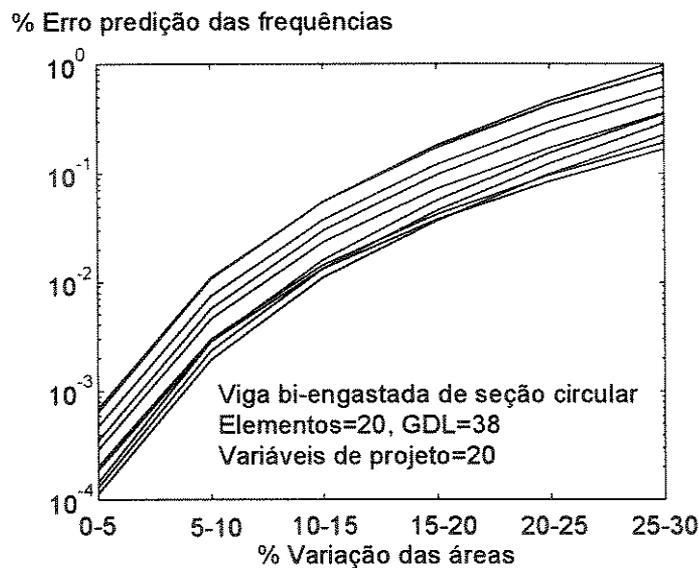


Figura 5.24 Erro na predição das 10 primeiras freqüências no sistema SE3

A Figura 5.25 mostra um erro máximo de 10.48% na predição dos dez primeiros modos próprios do sistema SE3, calculados a partir da Equação (3.48), para uma variação de 25-30%

das variáveis de projeto. Observa-se também que até uma variação de 10-15% o erro máximo foi de 2.45%, valor aceitável para fins de otimização.

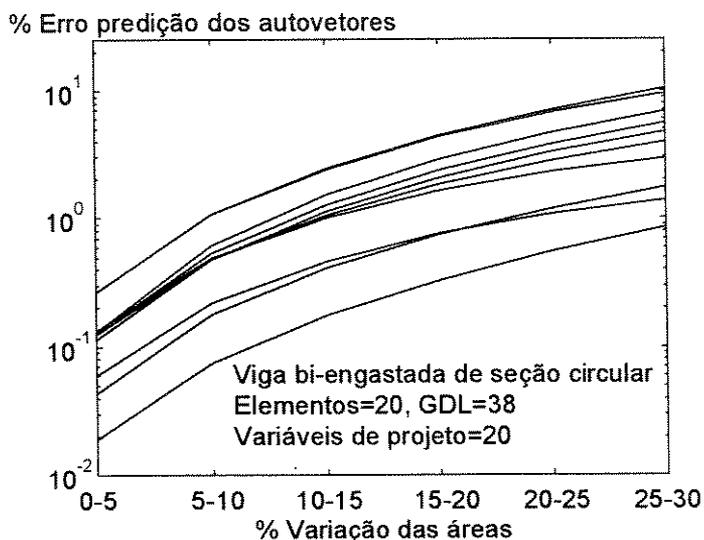


Figura 5.25 Erro na predição dos 10 primeiros autovetores no sistema SE3

Com a finalidade de ampliar as conclusões sobre a análise do erro modal da predição foi analisado o sistema SE4, de ordem 3. A viga biengastada foi discretizada em 20 elementos o que conduz a um modelo com 38 GDL. As variáveis do sistema são as alturas dos elementos, cuja variação foi feita aleatoriamente, dentro de intervalos especificados, mantendo-se constante o volume inicial, a simetria da viga e uma largura unitária.

Pode-se observar na Figura 5.26 um erro máximo de 7.28% na predição dos dez primeiros autovalores para uma variação simultânea de 25-30% das variáveis. Este valor é bastante superior à 0.96% do sistema SE3 de ordem 2, e um tanto superior ao erro máximo de quase 5% obtido por Fox e Kapoor (1968). Tal resultado indica que o erro cresce em função da ordem de não linearidade expressado pelo expoente da relação entre o momento de inércia e a área, $I=kA^n$.

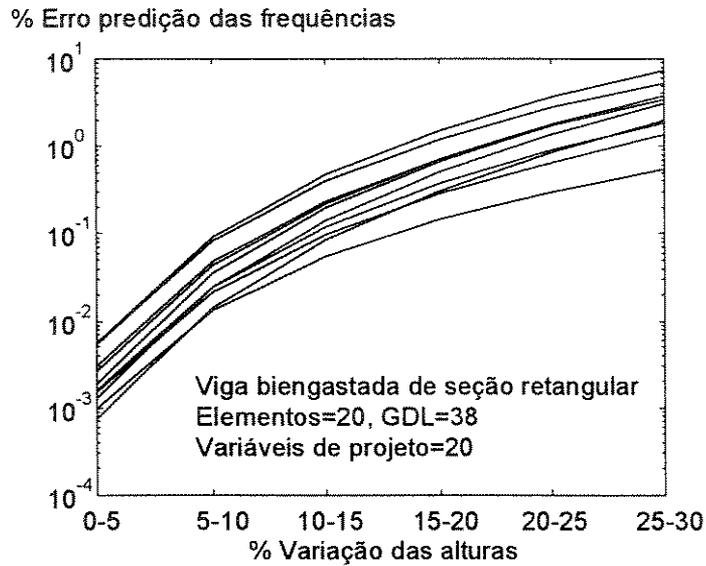


Figura 5.26 Erro na predição das 10 primeiras frequências no sistema SE4

Os autovetores foram preditos utilizando-se o método de diferenças finitas dada pela Equação (3.48). A Figura 5.27 indica um erro máximo de 30.58% na predição dos dez primeiros autovetores para uma variação de 25-30% das variáveis de projeto. Além disso, observa-se que até uma variação de 10-15% o erro máximo foi de 7.27%, valor aparentemente elevado para um processo de otimização, sendo todavia difícil que as variáveis apresentem essas variações de forma simultânea.

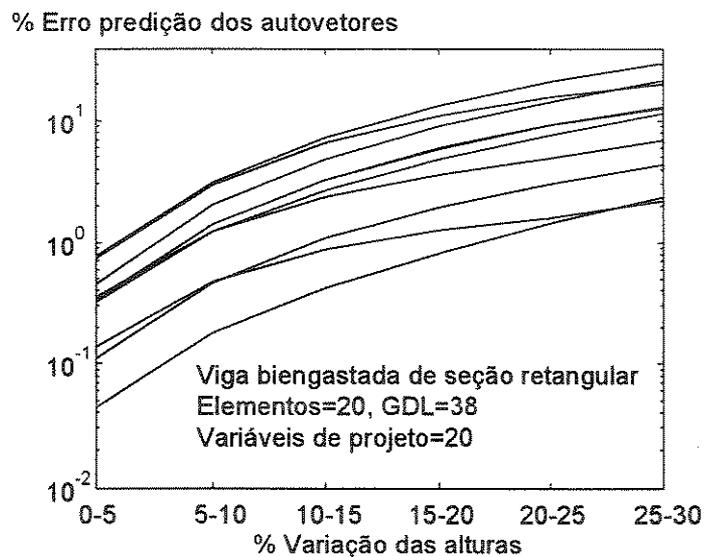


Figura 5.27 Erro na predição dos 10 primeiros autovetores no sistema SE4

Por último, estuda-se o erro da predição modal no sistema SFE1, de ordem 3, com o objetivo de estabelecer conclusões sobre a predição de autovalores e autovetores em sistemas acoplados. As variáveis do sistema são as alturas dos elementos, cuja variação foi feita aleatoriamente nos intervalos previamente especificados mantendo-se o volume inicial, a simetria da viga e uma largura unitária. Observa-se neste caso que a ordem do expoente da relação entre o momento de inércia e a área é 3, idêntica ao caso analisado anteriormente.

Pode-se observar da Figura 5.28 um erro máximo de 0.42% na predição das dez primeiras frequências para uma variação simultânea de 25-30% das variáveis, valor bastante inferior ao erro máximo de 7.28% no sistema estrutural SE4 de ordem 3. Alguma explicação encontra-se pelo fato que o erro das seis frequências predominantes fluido devem apresentar um valor baixo, uma vez que elas variam pouco quando se modificam as alturas estruturais. Por outro lado, mesmo para as frequências acopladas predominantes estruturais 2ª e 3ª, o erro máximo é menor para o caso acoplado que para o caso puramente estrutural do sistema SE4. Observa-se neste caso, que os erros das baixas frequências não necessariamente correspondem as curvas inferiores dos gráficos.

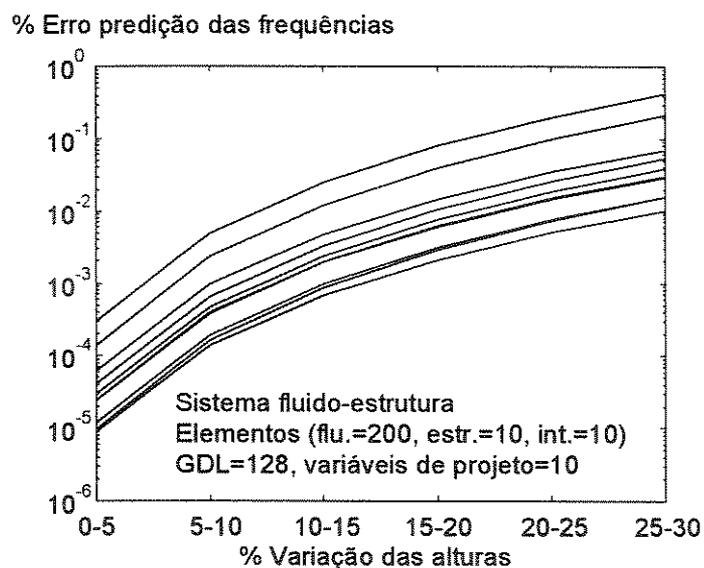


Figura 5.28 Erro na predição das 10 primeiras frequências no sistema SFE1

A partir da Figura 5.29 observa-se que o erro máximo na predição dos dez primeiros modos próprios, utilizando o método baseado em diferenças finitas da Equação (3.48), é de 9.60% para uma variação de 25-30% das alturas, valor inferior ao erro máximo de 30.58% do

sistema seco SE4. Observa-se também, que para uma variação de até 10-15% das variáveis, o erro máximo da predição de autovetores foi de 2.38%, valor inferior ao erro máximo de 7.27% no sistema seco SE4.

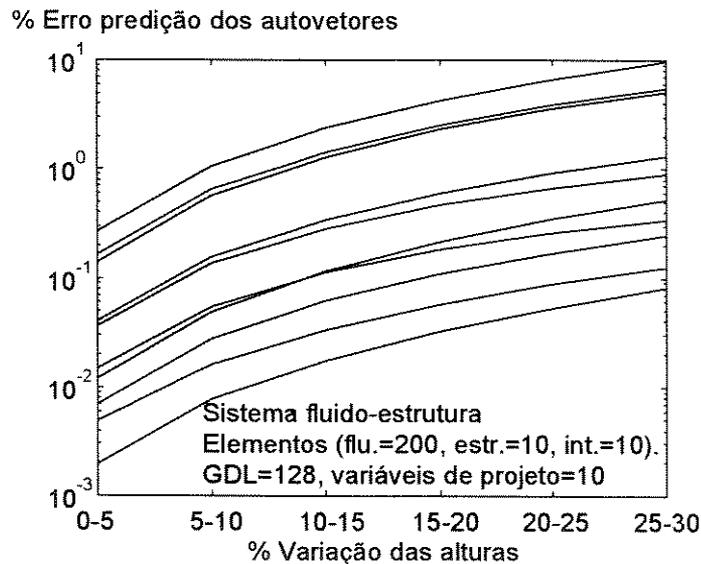


Figura 5.29 Erro na predição dos 10 primeiros autovetores no sistema SFE1

A partir dos resultados obtidos, e de testes de convergência efetuados com o algoritmo de otimização, constatou-se que para os casos estudados uma variação máxima dentro do intervalo 10 a 15% das variáveis de projeto, é tolerada pelo algoritmo de otimização.

5.6 Otimização estrutural em alguns sistemas

Com a finalidade de testar as qualidades do otimizador utilizado, inicialmente foram resolvidos uma série de exemplos de funções matemáticas e problemas estáticos de engenharia mecânica com restrições, apresentando-se os resultados no Anexo II. Estes testes permitiram conhecer melhor o conjunto de rotinas usadas, a sua confiabilidade, bem como sua performance e limitações. Na seqüência foram efetuadas uma série de aplicações de otimização estrutural em sistemas estruturais e fluido-estrutura, sendo os seus resultados comparados com os da literatura sempre que foi possível.

5.6.1 Otimização da separação de frequências naturais do sistema SE2

A otimização estrutural no sistema estrutural SE2 é efetuada com o propósito de validar o software implementado num caso dinâmico e comparar seus resultados com os apresentados por Olhoff (1989a).

A otimização é realizada sobre uma viga engastada vibrando transversalmente. O objetivo do projeto é maximizar a diferença entre frequências naturais adjacentes de uma viga sujeita a vibrações transversais. Essa formulação matemática é também aplicável ao problema de maximização da diferença entre velocidades críticas adjacentes de eixos de máquinas rotativas.

As variáveis do projeto A_i ($i=1, \dots, N$) são as áreas das seções transversais dos elementos. Os elementos possuem comprimento L_i e seções transversais circulares com momento de inércia igual a kA_i^2 , onde k assume o valor de $(4\pi)^{-1}$ e o expoente 2 é a ordem do sistema.

O material da estrutura possui módulo de Young E e densidade ρ_s . Denota-se o comprimento total da estrutura por L_T , sendo introduzido na extremidade livre da viga um disco representado por uma massa Q .

Considera-se como exemplo o problema de maximizar a diferença $(\omega_3 - \omega_2)$, o que conduz ao seguinte problema de otimização,

$$\begin{aligned}
 & \underset{A_i}{\text{maximizar}} \quad (\omega_3 - \omega_2) \\
 & \text{sujeita a:} \quad \omega_1 - \omega_2 \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad \omega_3 - \omega_j \leq 0, \quad j = 4, \dots, N \\
 & \quad \quad \quad \sum_{i=1}^{\text{numel st.}} A_i L_i - \bar{\vartheta} \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad \underline{A}_i \leq A_i \leq \bar{A}_i, \quad i = 1, \dots, \text{numel st.}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

sendo N é o número total de modos do sistema, *numel st.* o número de elementos estruturais, $\bar{\vartheta}$ o volume total máximo da estrutura, \underline{A}_i e \bar{A}_i os valores de área mínima e área máxima respectivamente que pode ser atribuído a cada elemento i .

A viga engastada-livre é discretizada em 20 elementos estruturais de mesmo comprimento e uma massa não estrutural Q igual a $0.1\rho_s\bar{v}$ na extremidade livre. Um valor de restrição de contorno equivalente a $0.5\bar{v}/L_T$ é dada para as áreas mínimas \underline{A}_i das seções transversais dos elementos. A Figura 5.30 mostra a forma otimizada da viga. A solução encontrada é similar a obtida por Olhoff (1989a), onde a restrição de área mínima chega a ser ativa numa parte do sistema.

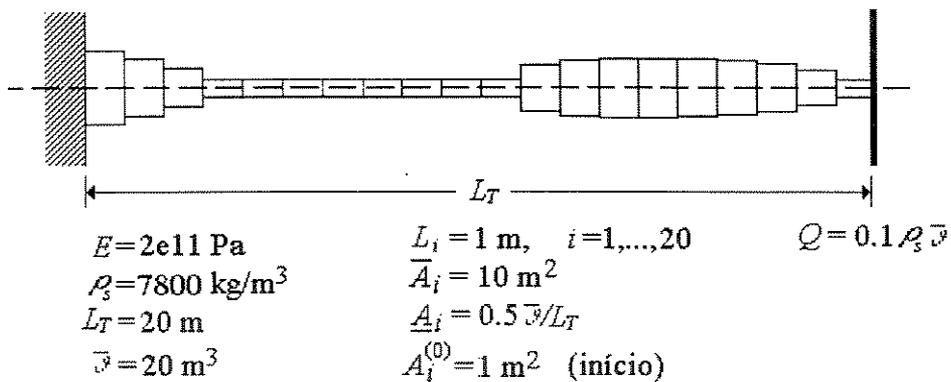


Figura 5.30 Forma otimizada da viga engastada com uma massa adicional, sistema SE2

Na referência (Olhoff, 1989a) cada segmento da viga é subdividido em vários elementos para um cálculo mais exato dos autovalores e os modos associados, utilizando-se uma aproximação por diferenças finitas baseada em iterações sucessivas, e as sensibilidades são calculadas analiticamente. Neste trabalho cada segmento da viga equivale a um elemento finito, e os gradientes da função objetivo e das restrições são fornecidas analiticamente durante o processo de otimização.

Na otimização foram usados os seguintes dados: nenhuma restrição de igualdade, área mínima 0.5 m^2 , área máxima 10 m^2 . Os limites de convergência do processo de otimização foram fixados em: precisão mínima das variáveis $1e-2$, precisão requerida da função objetivo $1e-2$, violação máxima permissível nas restrições $1e-2$.

Na Tabela 5.11 compara-se os resultados numéricos obtidos com os da referência (Olhoff, 1989a) encontrando-se valores bastante similares.

Tabela 5.11 Resultados da otimização de uma viga engastada com uma massa adicional

Frequência j ω_j , Hz	(Olhoff, 1989a)		Resultados obtidos	
	Início	Otimizado	Início	Otimizado
1	1.687	1.091	1.687	1.078
2	11.003	10.623	11.001	10.539
3	31.589	39.893	31.555	39.607

Após 15 iterações foi obtido o seguinte vetor de áreas elementares [1.9347, 1.5089, 1.0039, 0.5000, 0.5000, 0.5000, 0.5000, 0.5000, 0.5000, 0.5000, 1.2583, 1.4858, 1.5596, 1.5728, 1.5400, 1.4474, 1.2652, 0.9235, 0.5000].

5.6.2 Otimização da separação de frequências naturais do sistema SE4

O objetivo de estudar o sistema SE4 é analisar o comportamento da otimização em um sistema estrutural de ordem 3, (Paucar Casas e Pavanello, 1996a). Trata-se de um problema clássico de vibrações lineares de uma viga biengastada em flexão com área de seção transversal retangular. Considera-se inicialmente uma seção transversal quadrada de altura uniforme de 1m. A viga tem comprimento de 20m, e os cálculos das frequências naturais de vibração foram realizados com 10 elementos finitos tipo viga. As variáveis de otimização são as alturas elementares, cujo limite mínimo foi assumido igual a 0.5m e o limite máximo igual a 10m. Além disso, manteve-se a restrição de igualdade em relação ao volume de 20m^3 .

O limite máximo de altura é ignorado na seqüência, para isso é escolhe-se um valor suficientemente grande de e_{max} (por exemplo 10m) para que $e \leq e_{max}$ seja sempre verificada como desigualdade.

Os limites de convergência do processo de otimização foram fixados em: precisão mínima das variáveis $1\text{e-}2$, precisão requerida da função objetivo $1\text{e-}2$, violação máxima permissível nas restrições $1\text{e-}2$.

Os resultados da otimização utilizando os 10 primeiros modos são mostrados na Tabela 5.12. Na terceira coluna são apresentados as frequências naturais obtidas para a configuração inicial, ou seja $e_i^{(0)}=1$ para todos os elementos. Esses resultados são comparados as soluções analíticas fornecidas por Blevins(1995) na coluna 2.

A função objetivo do problema é o afastamento de duas frequências naturais adjacentes. Nas colunas 4 e 5 são apresentados os valores de espaçamento entre duas frequências antes e após o processo de otimização. Para todos os casos observou-se um ganho significativo, entre o sistema original e após a otimização.

Tabela 5.12 Separação otimizada entre duas frequências no sistema SE4

Modo N	ω_N , Hz		$(\omega_N - \omega_{N-1})$, Hz		
	Analítica*	MEF	Inicial	Otimizada	% Ganho
1	13.01	13.01	13.01 [†]	20.51 [†]	57.65 [†]
2	35.87	35.88	22.87	28.64	25.23
3	70.32	70.39	34.51	50.33	45.84
4	116.24	116.55	46.16	55.57	20.39
5	173.65	174.64	58.09	103.31	77.85
6	242.53	245.13	70.49	88.55	25.62
7	322.89	328.64	83.51	160.65	92.37
8	414.74	425.39	96.75	176.59	82.52
9	518.06	529.18	103.79	293.81	183.08
10	632.87	706.07	176.89	561.67	217.53

*(Blevins, 1995), [†] ω_N

Na Figura 5.31 apresenta-se a forma final da viga otimizada para diferentes ordens de separação de frequências N, sendo N a diferença $(\omega_N - \omega_{N-1})$. Nota-se em alguns casos uma concentração de material a nível dos engastes similar ao observado por Olhoff (1989b) em vigas de seção circular. Por outro lado, a viga otimizada tende a conservar a simetria geométrica do problema inicial em função da quantidade dos elementos considerados. É interessante também observar que para valores elevados de N, mesmo acrescentando elementos na discretização, existe a tendência de perder a simetria original do problema, devido aos erros na aproximação de elementos finitos.

Um estudo mais detalhado da influência da discretização de elementos finitos no comportamento do algoritmo de otimização não foi efetuado, todavia os resultados mostrados na Figura 5.31 indicam que para frequências mais elevadas, estudos mais específicos devem ser realizados.

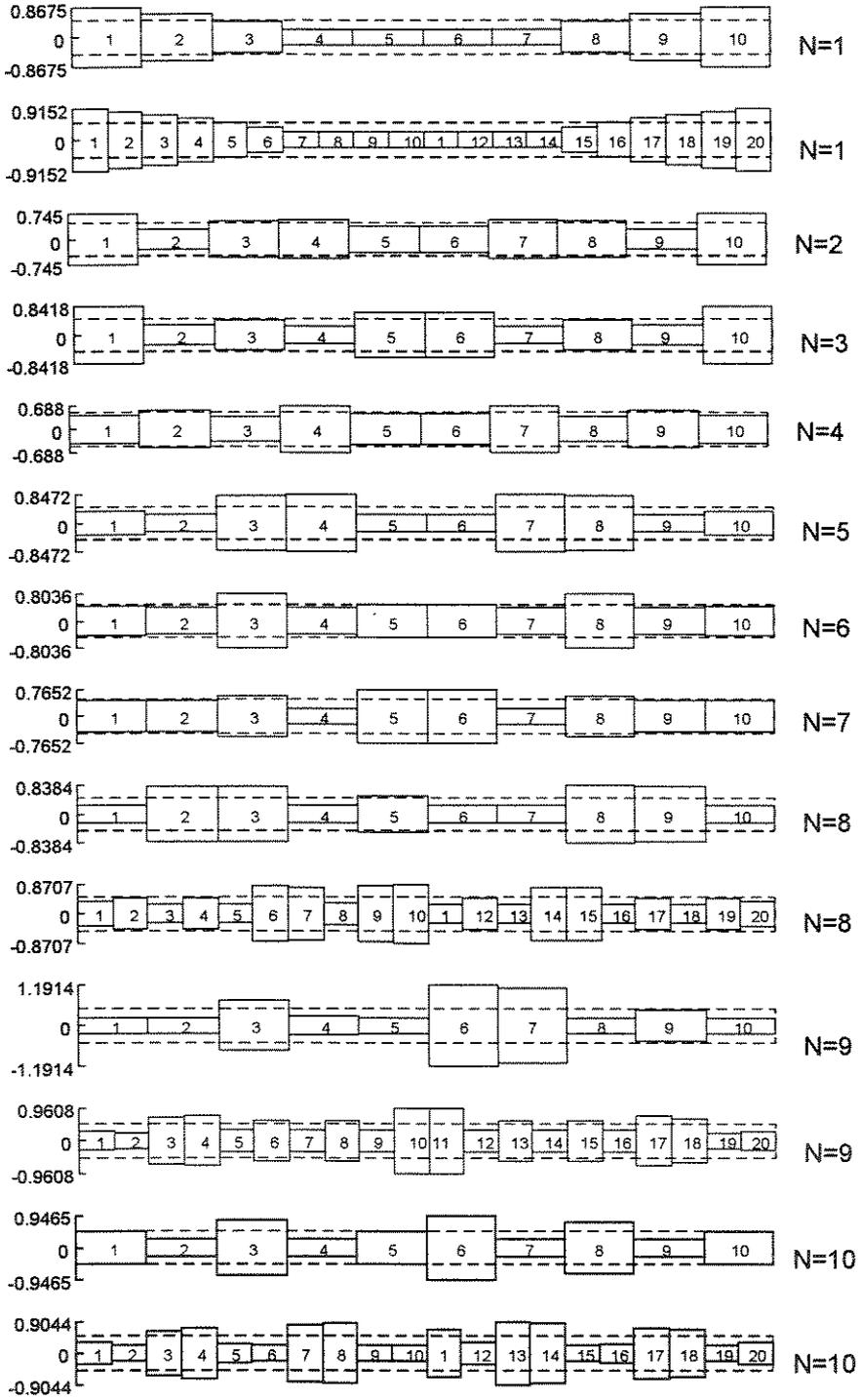


Figura 5.31 Distribuição otimizada das alturas no sistema SE4

Na Figura 5.32 apresenta-se a variação da função objetivo ao longo das iterações para alguns valores de N , mostrando que o sistema geralmente converge em poucas iterações ($N=1$ com 7 iterações, $N=3$ com 16 iterações e $N=4$ com 8 iterações)..

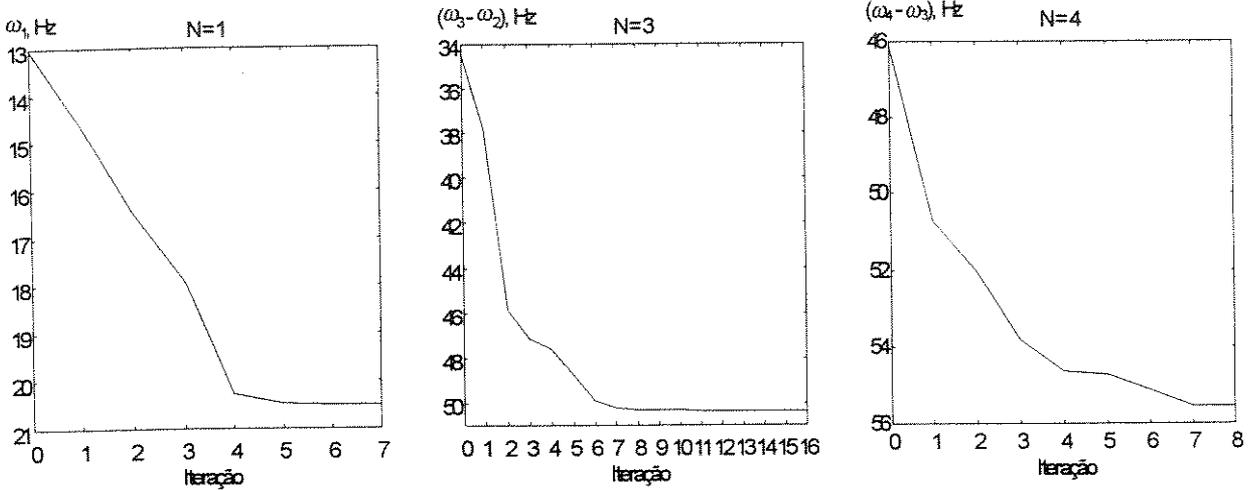


Figura 5.32 Evolução da função objetivo na otimização do sistema SE4 para $N=1,3,4$

Na Figura 5.33 apresenta-se a variação das frequências naturais ao longo das iterações para alguns valores de N , observando-se que não é feito controle sobre o cruzamento de modos. Utilizando um algoritmo de otimização baseado em critérios de otimalidade, Kikuchi, Cheng e Ma (1995) propõem uma modificação na função objetivo original do problema, procurando-se evitar dificuldades numéricas no cálculo das sensibilidades da função objetivo. Esse procedimento permitiu o controle do cruzamento dos modos na otimização de sistemas estruturais. Tais instabilidades numéricas não foram observadas em nenhum dos exemplos estudados.

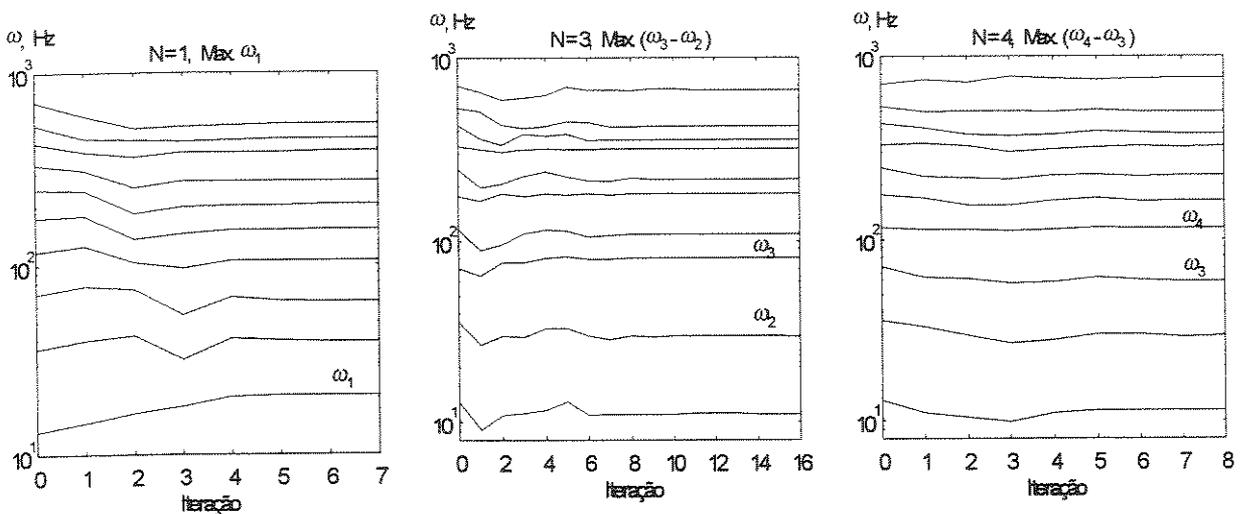


Figura 5.33 Evolução das frequências na otimização do sistema SE4 para $N=1,3,4$

Pretende-se em estudos posteriores, avaliar melhor o problema de cruzamento de modos em processos de otimização com critérios de separação de frequências naturais.

5.6.3 Otimização da separação de frequências naturais do sistema SFE1

O objetivo de estudar o sistema SFE1 é analisar o comportamento do processo de otimização da separação de frequências num sistema fluido-estrutura de ordem 3, (Paucar Casas, Galli e Pavanello, 1996) e (Paucar Casas e Pavanello, 1996a). A viga possui inicialmente uma seção transversal quadrada com altura uniforme de 1m. As variáveis de otimização são as alturas elementares, mantendo-se uma espessura unitária. As restrições consideram uma altura mínima de 0.5m, e máxima de 10m, garantindo que a restrição de contorno máxima fique inativa. O volume é mantido constante, e igual a 10m^3 , o que corresponde a uma restrição de igualdade.

Os limites de convergência fixados são: precisão mínima das variáveis $1\text{e-}2$, precisão requerida da função objetivo $1\text{e-}2$, violação máxima permissível nas restrições $1\text{e-}2$.

Na segunda coluna da Tabela 5.13 são mostradas as frequências naturais dos dez primeiros modos, sendo as frequências 2 e 3 predominantes estrutural, como pode ser observado na Figura 5.6.

A função objetivo do problema é o afastamento de duas frequências naturais adjacentes do sistema acoplado. Nas colunas 3 e 4 são apresentados os valores de espaçamento entre duas frequências antes e após o processo de otimização utilizando as dez primeiras frequências no processo. Para todos os casos observou-se um ganho entre o sistema original e após a otimização.

Observa-se que o ganho para $N=1,3$ no sistema fluido-estrutura SFE1 é inferior ao do sistema estrutural SE4, o qual pode encontrar explicação pelo fato que o fluido influi na separação daquelas frequências.

Tabela 5.13 Separação otimizada entre duas frequências no sistema SFE1

Modo N	ω_N , Hz MEF	$(\omega_N - \omega_{N-1})$, Hz		
		Inicial	Otimizada	% Ganho
1	5.23	5.23 ^t	6.31 ^t	20.65 ^t
2	15.98	10.75	12.89	19.91
3	27.20	11.22	14.84	32.26
4	30.50	3.30	15.92	382.42
5	39.54	9.04	9.92	9.74
6	47.43	7.89	8.84	12.04
7	48.37	0.94	8.36	7.89
8	60.54	12.17	13.34	9.61
9	61.36	0.82	12.07	1372.00
10	69.56	8.20	11.79	43.78

^t ω_N

Na Figura 5.34 mostra-se a forma final da viga otimizada do sistema acoplado SFE1 para diversos valores de N, apreciando-se novamente em alguns casos uma concentração de material a nível dos engastes, que concorda com o observado por Deneuvy (1986) em exemplos fluido-estrutura com paredes rígidas. A concentração de material para N=1,3 na região central da viga, quando comparado ao caso sem fluido, pode ser devido ao efeito de massa adicional do fluido. O sistema tende a manter a simetria dos modos. Para as frequências mais altas deve-se melhorar a qualidade do modelo de elementos finitos, com vistas a se obter uma melhor aproximação dos modos próprios de vibração, e por conseguinte um comportamento mais estável do algoritmo de otimização.

Na Figura 5.35 apresenta-se a variação da função objetivo ao longo das iterações para alguns valores de N.

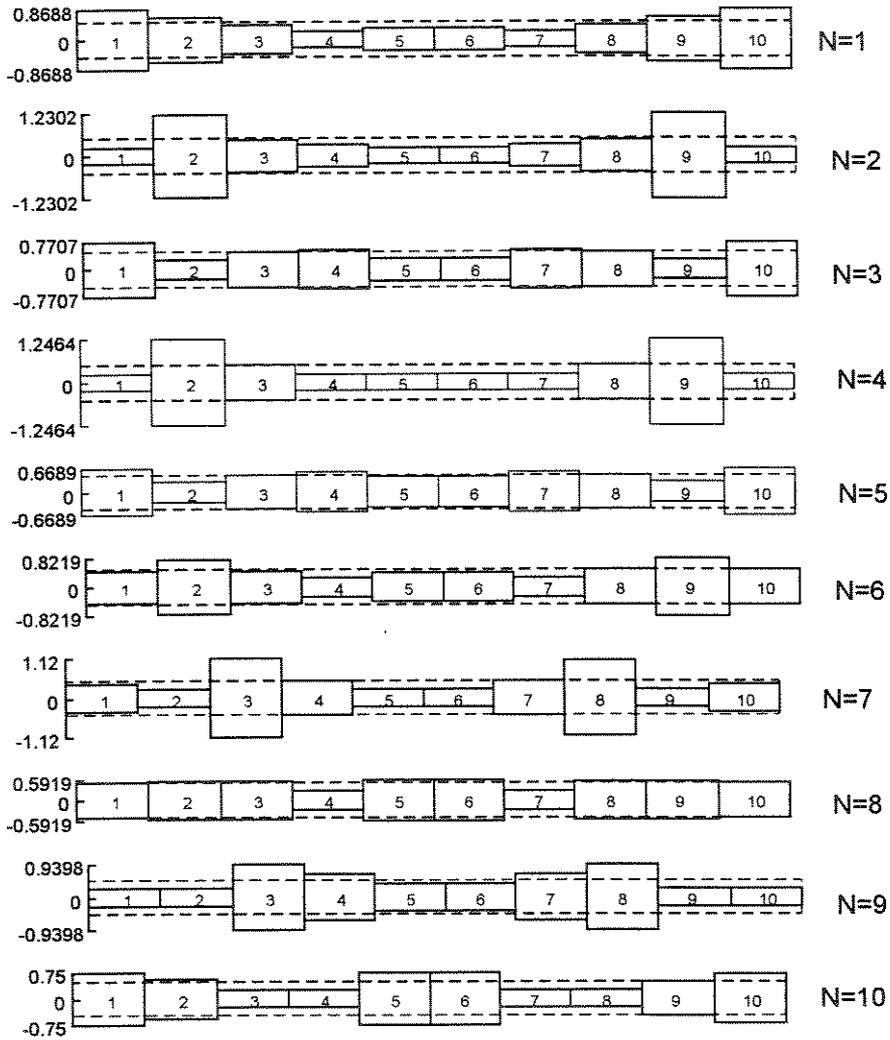


Figura 5.34 Distribuição otimizada das alturas estruturais no sistema SFE1

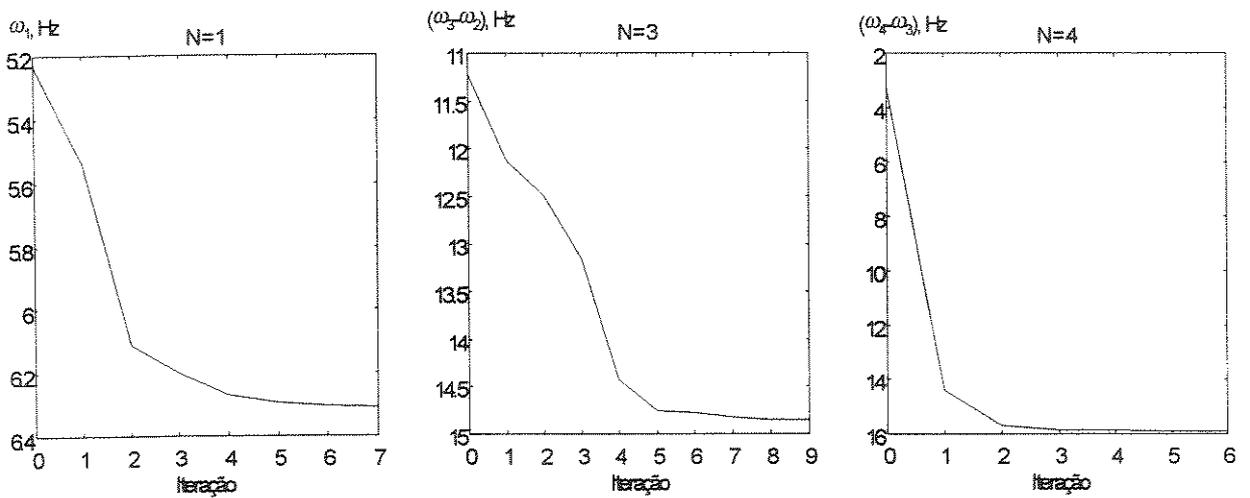


Figura 5.35 Evolução da função objetivo na otimização do sistema SFE1 para N=1,3,4

Na Figura 5.36 apresenta-se a variação das freqüências naturais ao longo das iterações para alguns valores de N , observando-se que é possível ter certo controle sobre o cruzamento de modos no processo de otimização. Aparentemente as freqüências 2 e 3 que são predominantes estrutural sofrem maiores variações que as predominantes fluido.

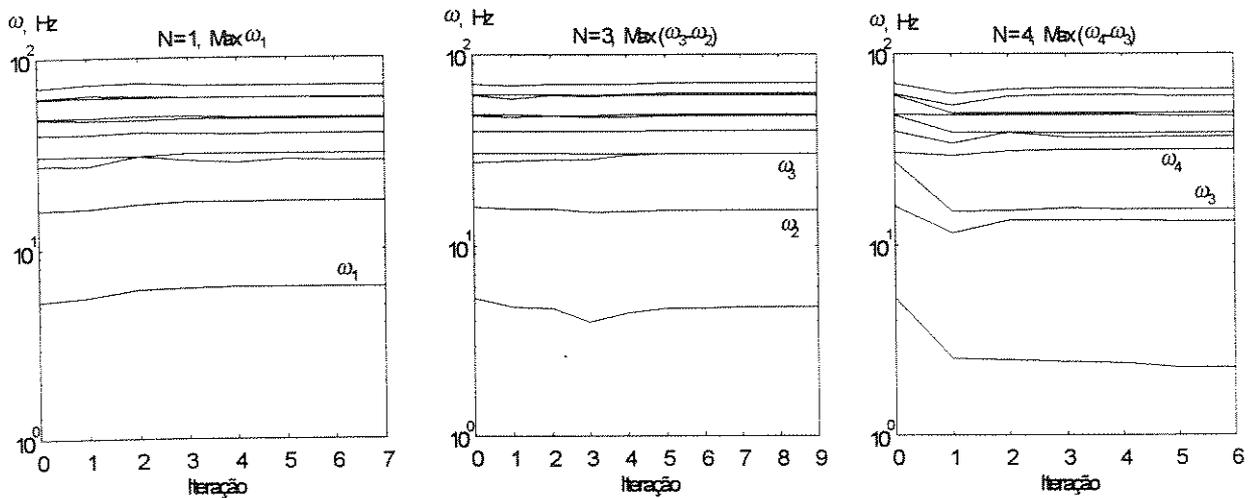


Figura 5.36 Evolução das freqüências na otimização do sistema SFE1 para $N=1,3,4$

5.6.4 Otimização da separação de freqüências naturais do sistema SFE2

O objetivo de estudar o sistema SFE2 é analisar o comportamento do processo de otimização da separação de freqüências num sistema fluido-estrutura de ordem 3 tendo um modo de corpo rígido (Paucar Casas e Pavanello, 1998c). Foi otimizada a separação entre a terceira e a segunda freqüência natural do sistema acoplado, cuja estrutura flexível possui inicialmente uma altura uniforme de 0.01 m. Os valores limites sobre a altura são um mínimo de 0.005 m e um máximo de 0.1 m. As variáveis de otimização são as alturas elementares. Considera-se também uma restrição sobre o volume, que deve ser constante ao longo do processo de otimização significando a existência de uma restrição de igualdade.

Os limites de convergência fixados são: precisão mínima das variáveis $1e-4$, precisão requerida da função objetivo $1e-2$, violação máxima permissível nas restrições $1e-4$.

Na Figura 5.37 mostra-se a variação da função objetivo e das freqüências até convergência resultantes do processo de otimização, observando-se um limitado deslocamento nas freqüências que em alguma maneira são predominantemente fluido. Utilizando dez modos

na análise, a separação das frequências cresce de 37.58 a 55.82 Hz, o que significa um incremento de 48.54%.

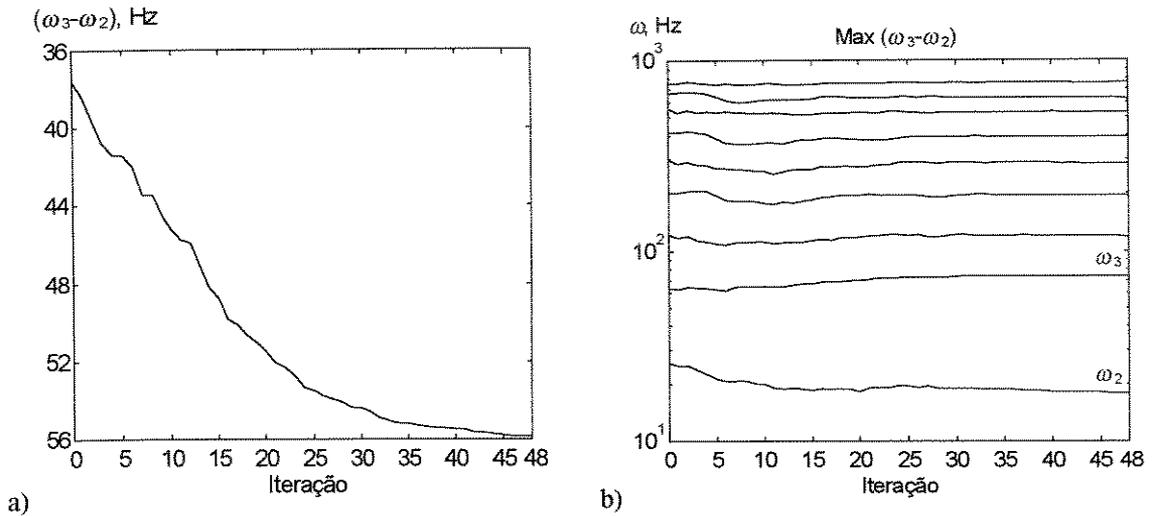


Figura 5.37 Otimização do sistema SFE2 para $N=3$: a) função objetivo, b) frequências

A distribuição otimizada das alturas dos elementos estruturais com relação a altura inicial de 0.01m é mostrada na Figura 5.38, observando-se que algumas alturas se aproximam do valor limite de altura mínima de 0.005m. Como referência as alturas ótimas dos elementos estruturais em metros são [0.0146, 0.0102, 0.0052, 0.0076, 0.0104, 0.0120, 0.0118, 0.0113, 0.0093, 0.0052, 0.0052, 0.0101, 0.0117, 0.0129, 0.0136, 0.0132, 0.0130, 0.0117, 0.0094, 0.0053, 0.0052, 0.0086, 0.0110, 0.0115, 0.0115, 0.0105, 0.0079, 0.0052, 0.0100, 0.0150].

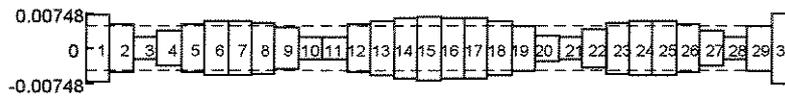


Figura 5.38 Distribuição da altura estrutural ótima do sistema SFE2 para $N=3$

O perfil dos modos acoplados 2º e 3º em pressão do fluido e deslocamento da estrutura, após o processo de otimização, são mostrados na Figura 5.39, observando-se poucas diferenças com relação ao perfil dos modos originais apresentados na Figura 5.8.

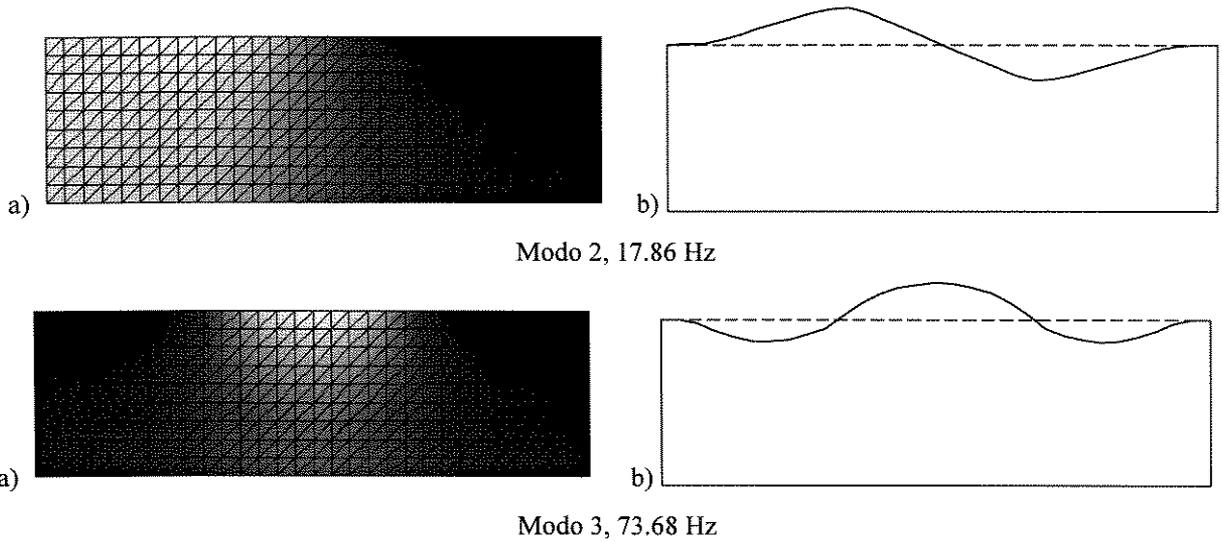


Figura 5.39 Modos após otimização para $N=3$: a) pressão fluido, b) deslocamento estrutura

Também foi otimizada a separação entre a 4^a e 3^a frequência natural do sistema acoplado. Na Figura 5.40 mostra-se a variação até convergência da função objetivo e das frequências. Usando-se dez modos na análise, a separação dessas frequências cresce de 59.07 a 97.63 Hz, o que significa um incremento de 65.28%.

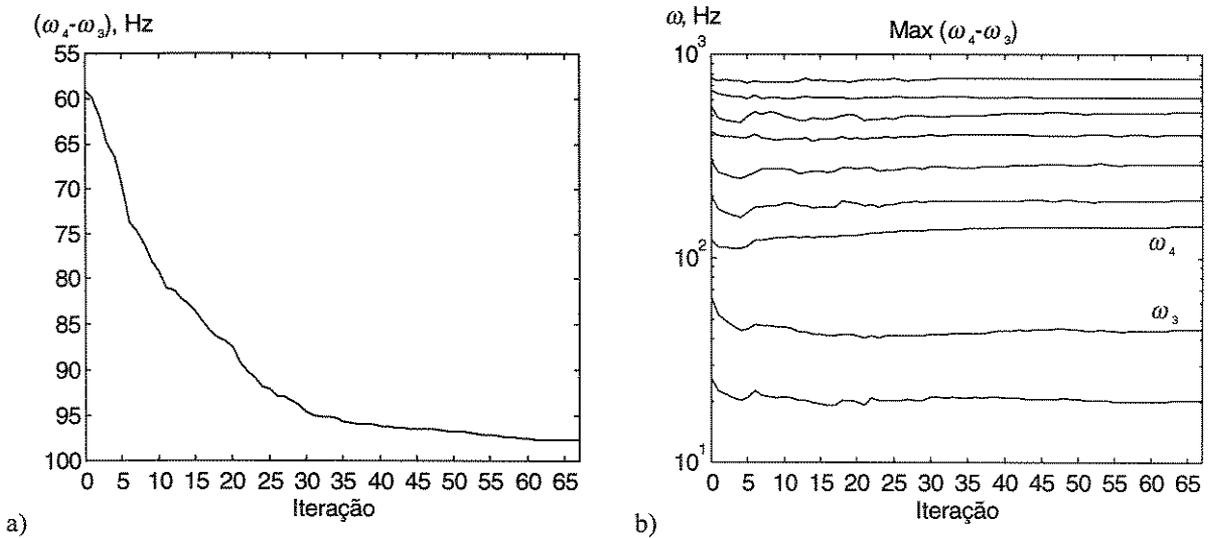


Figura 5.40 Otimização do sistema SFE2 para $N=4$: a) função objetivo, b) frequências

Mostra-se na Figura 5.44 a distribuição ótima da altura estrutural com relação ao valor inicial de 0.01 m, observando-se que alguns elementos atingem o valor limite de altura mínima de 0.005m. Como referência as alturas elementares ótimas em metros são [0.0163, 0.0109, 0.0050, 0.0087, 0.0104, 0.0101, 0.0076, 0.0050, 0.0087, 0.0121, 0.0137, 0.0143,

0.0139, 0.0122, 0.0079, 0.0050, 0.0091, 0.0121, 0.0132, 0.0131, 0.0119, 0.0093, 0.0050, 0.0060, 0.0093, 0.0098, 0.0083, 0.0050, 0.0104, 0.0157]. Esta informação pode ser utilizada para adicionar reforços ou alívio de massa na estrutura, em função do objetivo proposto.

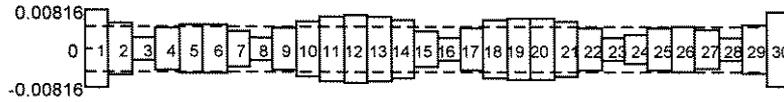


Figura 5.41 Distribuição da altura estrutural ótima do sistema SFE2 para $N=4$

O perfil dos modos acoplados 3^o e 4^o em pressão do fluido e deslocamento da estrutura, após o processo de otimização, são mostrados na Figura 5.45, observando-se poucas diferenças com relação ao perfil dos modos originais apresentados na Figura 5.8.

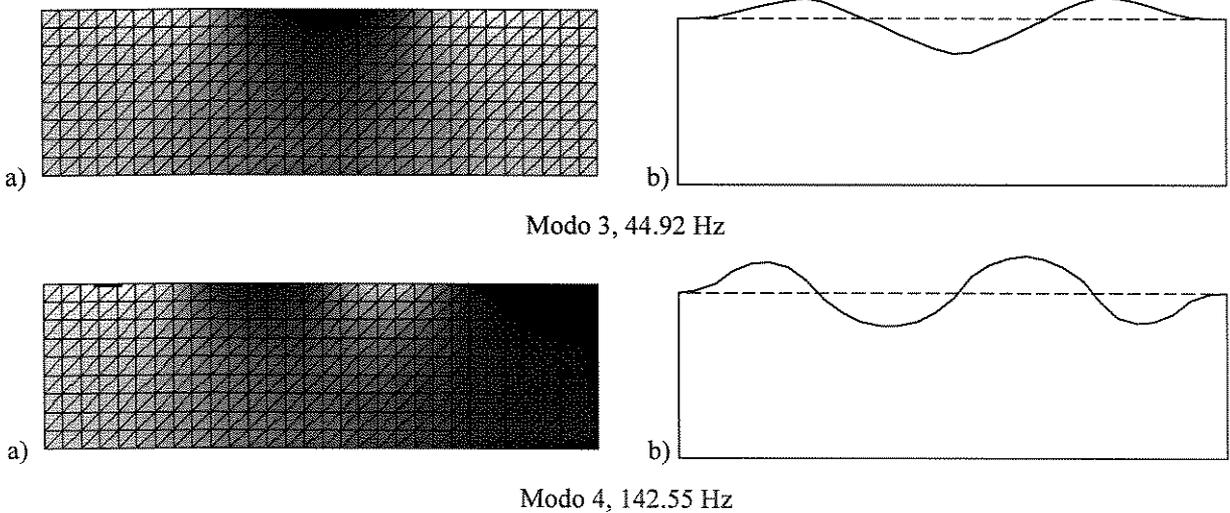


Figura 5.42 Modos após otimização para $N=4$: a) pressão fluido, b) deslocamento estrutura

Os resultados obtidos mostram correspondência com testes numéricos sem sensibilidade analítica e sem as formulas de predição. Por outro lado, observa-se que a distribuição da estrutura ótima apresenta certa simetria, e evidenciou-se um engrossamento da estrutura próximo da posição dos engastes. Estes resultados guardam semelhança com os apresentados por Deneuvy (1986).

5.6.5 Otimização da separação de frequências naturais do sistema SFE3

O objetivo de estudar o sistema SFE3 é analisar o comportamento do processo de otimização da separação de frequências num sistema acústico-estrutural de ordem 3 tendo um modo de corpo rígido (Paucar Casas e Pavanello, 1998a,b). A parte estrutural considerada como uma viga flexível de largura unitária possui inicialmente uma altura uniforme de 0.002m. As variáveis de otimização são as alturas elementares. As restrições consideram uma altura mínima de 0.001m, uma altura máxima de 0.02m para garantir que a restrição de contorno máxima fique inativa, e o volume inicial permanece constante ao longo do processo de otimização o que corresponde a uma restrição de igualdade.

Os limites de convergência do processo de otimização foram fixados em: precisão mínima das variáveis $1e-5$, precisão requerida da função objetivo $1e-2$, violação máxima permitível nas restrições $1e-5$.

Foi otimizada o espaço entre a terceira e a segunda frequência do sistema acoplado original. Na Figura 5.43 são apresentadas a variação até a convergência da função objetivo e das frequências ao longo do processo de otimização observando-se um deslocamento limitado dos modos claramente predominantes fluido.

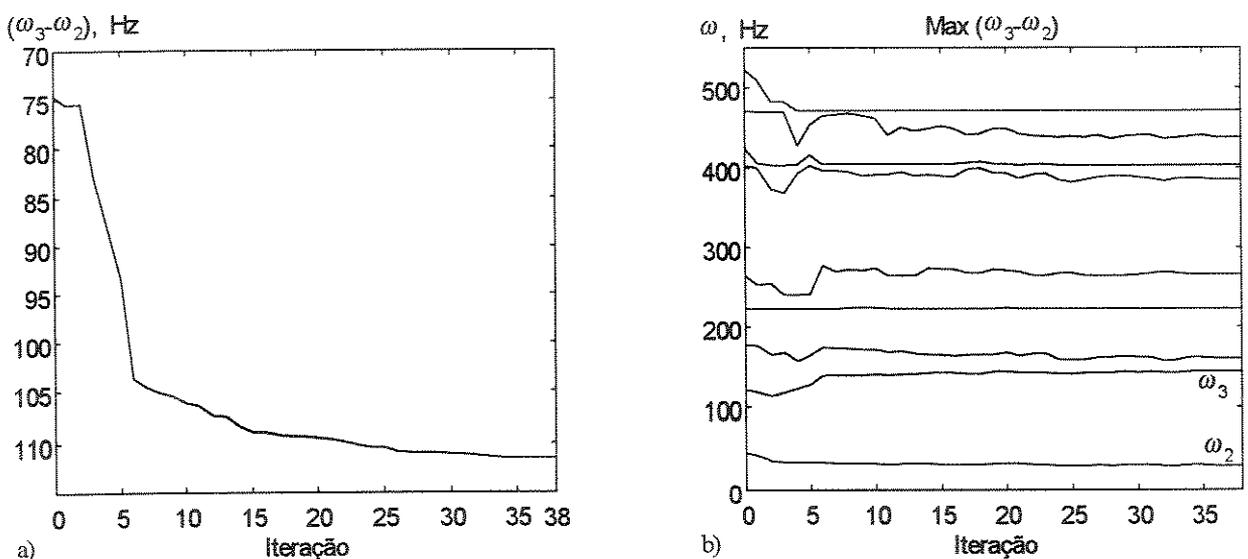


Figura 5.43 Evolução da otimização: a) função objetivo, b) frequências, sistema SFE3, N=3

Na Figura 5.44 mostra-se a distribuição otimizada das alturas em relação a distribuição original de 0.002 m, observando-se que alguns elementos alcançam a restrição de altura mínima de 0.001m.

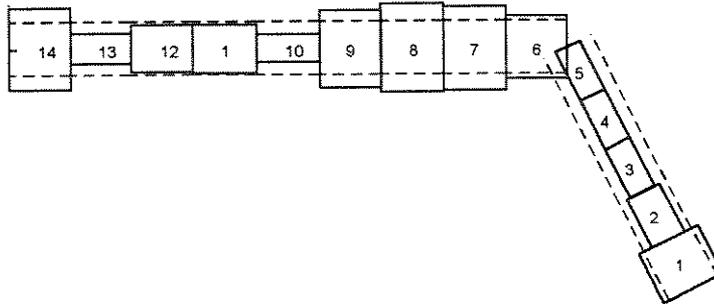


Figura 5.44 Distribuição otimizada das alturas no sistema SFE3 para $N=3$

Como referência as alturas otimizadas para cada elemento em metros é [0.0025, 0.0014, 0.0010, 0.0010, 0.0010, 0.0024, 0.0032, 0.0033, 0.0029, 0.0010, 0.0018, 0.0018, 0.0012, 0.0031]. A separação inicial das frequências passa de 74.7 para 111.5 Hz com um ganho de 49.3% quando se considera os 10 primeiros modos na análise. O ganho obtido foi satisfatório, e o resultado da Figura 5.44 indica os melhores pontos para se incluir reforços ou alívio de massa na estrutura, dado o objetivo proposto.

5.6.6 Otimização da resposta do sistema SE4 com amortecimento

Para realizar o estudo da otimização da resposta do sistema SE4 considera-se como variáveis de controle as dez alturas elementares, tendo a viga uma largura unitária e mantendo um volume constante ao longo do processo de otimização o que corresponde a uma restrição de igualdade. As restrições sobre as alturas são um valor mínimo de 0.5 m e um valor máximo de 10 m. Pretende-se otimizar a resposta da região em torno da terceira frequência natural de 70.39 Hz. Para isso considera-se três valores de frequências de excitação, a saber 65, 70 e 75 Hz. A otimização da resposta é realizada considerando dez modos, conforme a formulação apresentada no item 3.9 Equação (3.103). A força de excitação é aplicada na direção y do nó 5 (GDL 7), com um valor de $1e10$ N, e o único ponto de medição da resposta é tomado na direção y do nó 7 (GDL 11), conforme a Figura 5.4.

Neste caso, os limites de convergência do processo de otimização foram fixados em: precisão mínima das variáveis $1e-2$, precisão requerida da função objetivo $1e-2$, violação

máxima permissível nas restrições $1e-2$. As constantes de amortecimento proporcional α e β foram fixadas como 0.0001 no processo de otimização.

Na Figura 5.45 apresenta-se a forma inicial e otimizada da resposta na direção y do nó 7 (GDL 11). Pode-se apreciar uma diminuição da resposta na região da terceira frequência natural.

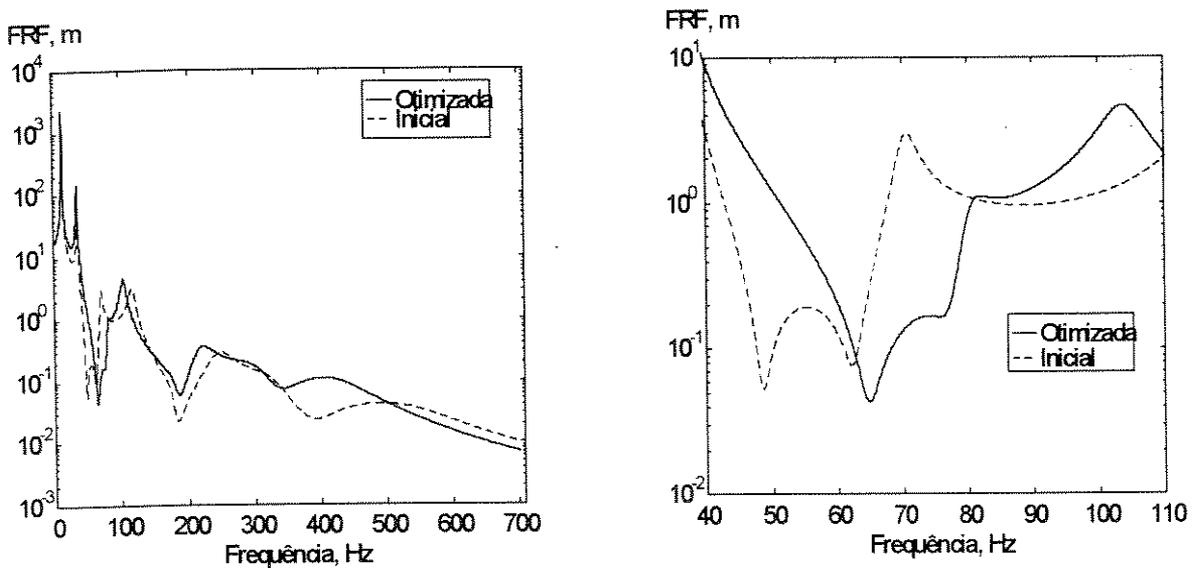


Figura 5.45 Otimização da resposta no sistema SE4

A função objetivo diminuiu de 4.557 m para 0.345 m significando um ganho de 92.43%. Mostra-se na Figura 5.46 a distribuição das alturas após a otimização, assinalando que não é mantida a simetria da viga para todos os casos, pois o problema depende diretamente do ponto de excitação e do ponto de medição da resposta. Somente como referência as novas alturas em metros são [1.7308, 0.8307, 0.5290, 0.5675, 1.3419, 1.3419, 0.5675, 0.5290, 0.8307, 1.7308]. Os resultados obtidos encontram correspondência com os estudos estruturais de Bucher e Braun (1993b).

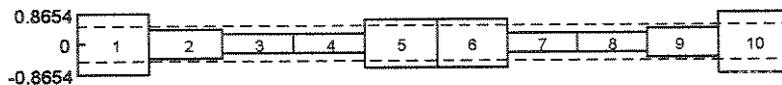


Figura 5.46 Distribuição das alturas no sistema SE4 após otimizar a resposta

5.6.7 Otimização da resposta do sistema SFE1 com amortecimento

A otimização da resposta no sistema fluido-estrutura SFE1 considera como variáveis de controle as alturas elementares, tendo a viga uma espessura unitária e mantendo um volume constante ao longo do processo de otimização. As restrições sobre as alturas são um valor mínimo de 0.5 m e máximo de 10 m. Pretende-se otimizar a resposta da região em torno da segunda frequência natural de 15.98 Hz, para isso considera-se três valores de frequências de excitação, a saber 14,17,20 Hz. A otimização da função de resposta em frequência, obtida pelo método modal (MFR), é realizada considerando dez modos, conforme a formulação apresentada no item 3.9 Equação (3.103). Aplica-se uma força de excitação unitária na direção y do nó estrutural 4 (GDL 5), e mede-se a resposta em uma região do domínio fluido constituído pelos nós 36,37,47,48 (GDLs 43,44,54,55), conforme a Figura 5.5. Isto é, a resposta a ser otimizada foi tomada como a somatória, nas três frequências de excitação, dos módulos de resposta nos pontos de medição.

Neste caso, os limites de convergência do processo de otimização foram fixados em: precisão mínima das variáveis $1e-2$, precisão requerida da função objetivo $1e-2$, violação máxima permissível nas restrições $1e-2$. As constantes de amortecimento proporcional α e β foram fixadas como 0.0001 no processo de otimização.

Na Figura 5.47 apresenta-se a forma inicial e otimizada da soma dos módulos de resposta nos pontos de medição, para incrementos de 0.1 Hz. Nota-se uma diminuição da resposta na região da terceira frequência natural entre 14 e 20 Hz.

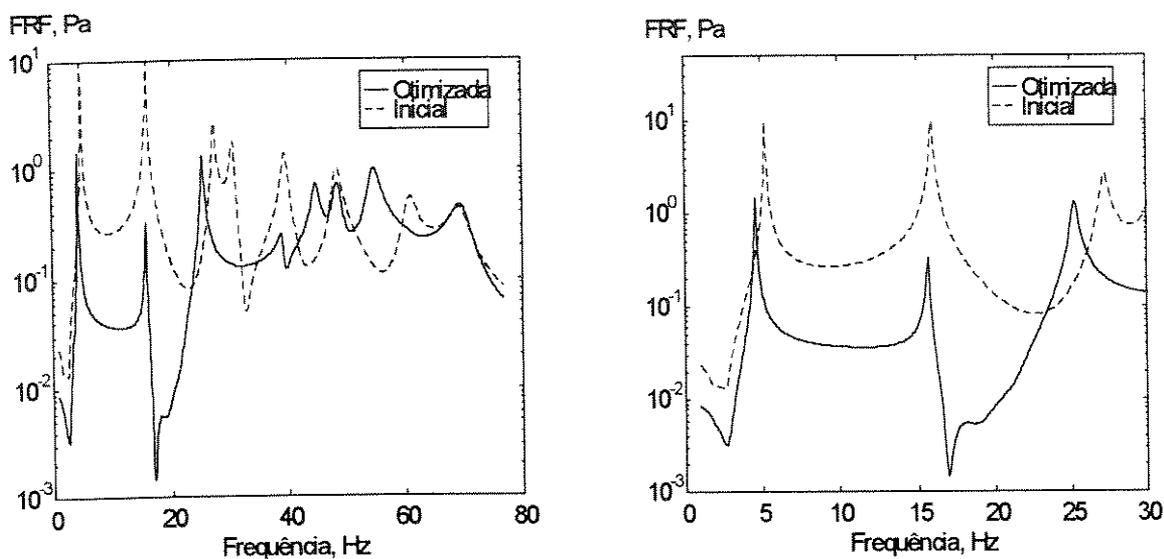


Figura 5.47 Otimização da resposta no sistema SFE1

A função objetivo diminui de 1.3809 para 0.0516 significando um ganho de 96.26%. A distribuição de alturas da estrutura otimizada é apresentada na Figura 5.48, observando-se que se perde a simetria original devido a escolha do ponto de excitação e dos pontos de medição. Como referência as alturas otimizadas são [2.7275, 2.1077, 1.5015, 0.5056, 0.6178, 0.5000, 0.5000, 0.5000, 0.5000, 0.5399], mostrando-se que algumas alturas atingem o limite mínimo.

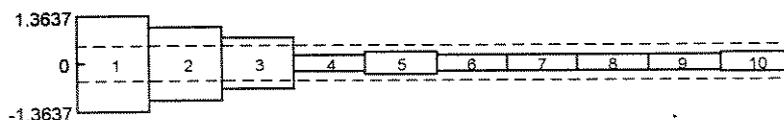


Figura 5.48 Distribuição das alturas no sistema SFE1 após otimizar a resposta

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões

6.1 Conclusões

Neste trabalho pesquisaram-se diversos aspectos da concepção ótima de sistemas acoplados fluido-estrutura, através da mudança dos parâmetros estruturais. O problema de otimização de forma foi colocado como um problema de otimização matemática, onde o método dos elementos finitos foi utilizado para avaliar as características modais do sistema, a resposta do sistema, a função objetivo, as restrições e suas sensibilidades com relação às variáveis de projeto.

As bases teóricas da formulação do problema de interação fluido-estrutura e alguns conceitos básicos de otimização matemática foram revisados. Foram analisados diversos métodos de análise de sensibilidade modal, assim como a resposta em frequência e sua sensibilidade, aplicados em sistemas fluido-estrutura. Diversos exemplos serviram de teste para validar a implementação computacional.

As principais conclusões de cada etapa da metodologia utilizada são apresentadas na seqüência:

- Interação fluido-estrutura

Usou-se uma formulação não simétrica em deslocamento da estrutura e pressão do fluido para descrever o sistema acoplado fluido-estrutura. Com esta formulação inviabiliza-se o uso de algoritmos especializados para matrizes simétricas, mas aproveita-se a vantagem de se usar

uma só variável para descrever o domínio fluido, além de ser possível a solução do autoproblema à esquerda do sistema acoplado a partir do conhecimento dos autovetores à direita, o que reduz os cálculos significativamente. Esta formulação simples, todavia representativa do sistema acoplado, é adequada para um processo de otimização, onde é necessário resolver o sistema várias vezes.

- Sensibilidade modal em sistemas acoplados fluido-estrutura

A sensibilidade das frequências naturais e dos modos próprios foram calculadas com a formulação proposta por Ma e Hagiwara (1991a). Esta formulação depende da escolha de um parâmetro de mudança μ ; por exemplo, para problemas acústico-estruturais, costuma-se escolher um valor de μ bastante próximo da primeira frequência natural. Na determinação da sensibilidade dos autovetores para problemas fluido-estrutura cuja densidade do domínio fluido é maior que dos gases (fluidos densos) faz-se necessário considerar um valor do parâmetro μ próximo do autovalor associado ao autovetor estudado.

- Predição modal em sistemas acoplados fluido-estrutura

A predição dos autovalores através do quociente de Rayleigh e dos autovetores através do método de diferenças finitas foi implementada com o intuito de ter uma menor quantidade de operações no processo de otimização da separação de frequências naturais. A utilização das fórmulas de predição estão limitadas a certas condições durante o processo, principalmente quanto à variação máxima permissível das variáveis de controle. O uso das fórmulas de predição também não se mostrou adequado em regiões próximas da condição de convergência do problema.

- Resposta em frequência e sua sensibilidade em sistemas acoplados fluido-estrutura

Os métodos iterativos para o cálculo da resposta em frequência e sua sensibilidade mostraram somente convergência para gases. Para problemas mais gerais com líquidos de densidade qualquer, como os deste trabalho, é mais conveniente utilizar os métodos modais. Foram desenvolvidas as expressões de resposta amortecida e sua sensibilidade, considerando um amortecimento do tipo proporcional. Neste caso, e com a finalidade de diminuir o número de operações e sem perda aparente de precisão, o parâmetro μ toma um valor negativo perto do infinito.

- Algoritmo de otimização

Utilizou-se o algoritmo de programação seqüencial quadrática na otimização. A desvantagem principal deste algoritmo para tratar problemas reais de grande porte reside na necessidade de espaço de memória para guardar uma aproximação da matriz Hessiana. Os gradientes da função objetivo e das restrições são fornecidos em forma analítica no processo de otimização com a finalidade de evitar que os erros de aproximação possam ter um impacto significativo na performance numérica do algoritmo. As soluções das expressões analíticas foram comparadas com as soluções obtidas usando-se diferenças finitas obtendo-se melhores resultados com um número menor de iterações para convergência.

- Problemas de otimização em sistemas acoplados fluido-estrutura

Foi considerado o problema de maximizar a separação de duas frequências naturais acopladas adjacentes, e o problema de minimizar a resposta de uma região do sistema numa faixa predefinida de frequências de excitação. Nos dois casos as variáveis de controle foram os parâmetros geométricos estruturais. Na implementação computacional foi preciso que as restrições do problema fossem normalizadas e adimensionalizadas para uniformizar a magnitude das grandezas. Além disso, a precisão na convergência das variáveis, da função objetivo e das restrições, devem ser ajustadas com relação à grandeza considerada.

- Implementação do problema de otimização utilizando análise de sensibilidade

O problema de otimização utilizando a análise de sensibilidade modal, foi implementado e verificado com alguns resultados da literatura. Diversos exemplos estruturais e acoplados fluido-estrutura foram utilizados para a validação dos resultados da formulação e da metodologia utilizada.

Alguns resultados típicos foram encontrados nos problemas resolvidos. A estrutura otimizada para sistemas simétricos aparentemente tenta manter a simetria de forma. Com frequência apresenta-se o caso de engrossamento da estrutura otimizada na região dos engastes. Ao longo do processo de otimização, as frequências predominantes estruturais sofrem maior variação que as frequências predominantes fluido.

Os resultados podem ser utilizados, por exemplo, para evitar alguma situação de ressonância do sistema, e na prevenção dos problemas de ruído em veículos, salas, etc.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Embora o problema de otimização em sistemas estruturais venha sendo amplamente pesquisado, o mesmo não acontece com a otimização de problemas acoplados. Na seqüência, são dadas algumas sugestões de continuação relativas ao presente trabalho.

- Testar outros tipos de formulações fluido-estrutura, principalmente as formulações simétricas, procurando-se explorar as vantagens dos algoritmos especialmente desenvolvidos para matrizes simétricas.
- Utilizar formulações mistas de elementos finitos e elementos de contorno para otimizar problemas de domínio infinito.
- Estender a análise a problemas em três dimensões.
- Incluir a análise de sensibilidade modal para considerar os casos de problemas com autovalores repetidos.
- Testar outros algoritmos de otimização que explorem as características dependentes do modelo do sistema. Testar algoritmos de convergência global, mesmo sendo caros computacionalmente, para analisar a existência do mínimo global no problema. Testar algoritmos de otimização de programação inteira para garantir os resultados numéricos das variáveis de uma maneira técnica.
- Utilizar outras variáveis de controle, sendo elas da estrutura, do fluido ou da interface; ou ainda considerar o caso da otimização multiobjetivo.
- Considerar outras funções objetivo tais como a separação simultânea de várias faixas de frequências naturais adjacentes e a inclusão de um referencial fixo na separação de frequências.

Referências Bibliográficas

- Ahmida, K. M. *Estudo de cavidades acústicas usando o método de elementos finitos via Galerkin/mínimos quadrados*. Campinas, São Paulo, Brasil: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996, 109p., Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica.
- Arora, J. S. *Introduction to optimum design*. McGraw-Hill, Inc., 1989, 625p.
- Barbedo, R. P. *Modelagem, pré e pós processamento de problemas de torção elastoestática utilizando o método dos elementos finitos*. Campinas - SP, Brasil, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Agosto de 1995, Relatório do CNPq/PIBIC UNICAMP.
- Barbosa, A. N., Pedroso, L. J. Uma formulação potencial simétrica para o cálculo de interação fluido-estrutura. Em: XVIII CILAMCE Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, 29-31 outubro 1997, Brasília - Brasil, *Anais do XVIII Cilamce*, 1997, v.III, p.981-988.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M. *Nonlinear programming*. John Wiley & Sons, Inc., 1993, 638p.
- Belytschko, T. Methods and programs for analysis of fluid-structure systems. *Nuclear Engineering and Design*, v.42, n.1, p.41-52, 1977.

- Bernhard, R. J., Gardner, B. K., Smith, D. C. Alternatives methods for computing sound radiation from vibrating surfaces. *Proceedings of International Modal Analysis Conference*, Imperial College London, April 6-9, 1987, p.343-344.
- Berhault, J. P., Chatel, G., Tephany, F. Modélisation des sources aéro-hydrodynamiques de bruit dans les turbomachines. *La Houille Blanche*, n.8, p.680-695, 1985.
- Blevins, R. D. *Formulas for natural frequency and mode shape*. Krieger Publishing Company, 1995.
- Bucher, I., Braun, S. Efficient optimization procedure for minimizing vibratory response via redesign or modification, Part I: Theory. *Journal of Sound and Vibration*, v.175, n.4, p.433-453, 1993a.
- Bucher, I., Braun, S. Efficient optimization procedure for minimizing vibratory response via redesign or modification, Part II: Examples. *Journal of Sound and Vibration*, v.175, n.4, p.455-473, 1993b.
- Chen, L. H., Pierucci, M. Underwater fluid-structure interaction. *The Shock and Vibration Digest*, v.9, n.4, p.23-24, 1977.
- Chen, S. H., Pan, H. H. Design sensitivity analysis of vibration modes by finite element perturbation. In: *Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference*, p.38, 1986.
- Chen S. S. Cross-flow-induced instabilities of circular cylinders. *The Shock and Vibration Digest*, v.12, n.5, p.21-34, 1980.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, 1989, 630p.
- Craig Jr., R. R. *Structural dynamics*. John Wiley & Sons, 1981, 527p.

- Dailey, R. L. Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues. *AIAA Journal*, v.27, n.4, p.486, April 1989.
- Daniel, W. J. T. Modal methods in finite element fluid-structure eigenvalue problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.15, p.1161-1175, 1980a.
- Daniel, W. J. T. Performance of reduction methods for fluid-structure and acoustic eigenvalue problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.15, p.1585-1594, 1980b.
- Deneuvy, A.-C. *Etude d'un probleme de conception optimale avec critere sur les frequences pour un systeme couple fluide-structure*. Lyon, França, L'École Centrale de Lyon, 1986, 203 p., Thèse de Docteur, Spécialité: Mathematiques Appliquees.
- Dhatt, G., Touzot, G. *The finite element method displayed*. John Wiley & Sons, 1984, 509p.
- Everstine, G. C. A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction. Letter to the Editor. *Journal of Sound and Vibration*, v.79, n.1, p.157-160, 1981.
- Faria, M. L. de M. *Uma contribuição aos procedimentos de otimização aplicados a sistemas mecânicos*. Uberlândia, MG, Brasil, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de Uberlândia, 1991, 97p., Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica.
- Fyfe, K. R., Cremers, L., Sas, P. e Creemers, G. The use of acoustic streamlines and reciprocity methods in automotive design sensitivity studies. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.5, n.5, p.431-441, 1991.
- Fox, R. L., Kapoor, M. P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal*, v.6, n.12, p.2426-2429, December 1968.

- Fox, R. W., McDonald, A. T. *Introduction to fluid mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., 1992, 662p.
- Friswell, M. I., Mottershead, J. E. *Finite element model updating in structural dynamics*. Kluwer Academic Publishers, 1995, 286 p.
- Galli, L. A. F. *Estudo do comportamento dinâmico de sistemas acoplados fluido-estrutura utilizando uma formulação simétrica em potenciais de velocidade*. Campinas, São Paulo, Brasil: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1995, 111p., Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica.
- Galli, L., Pavanello, R. Modelos de elementos finitos aplicados a problemas de interação fluido-estrutura. Em: 8º Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, 2º Simpósio Latino Americano sobre Tubulações e Vasos de Pressão, 1994, Gramado - RS, Brasil. *Anais do 8º Sibrat*, 1994, p.584-596.
- Golub, G. H., Van Loan, C. F. *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, 1990, 642p.
- Grace, A. *Optimization toolbox for use with Matlab®. User's guide*. The MathWorks, Inc., 1995.
- Grosh, K., Pinsky, P. M. Complex wave-number dispersion analysis of Galerkin and Galerkin least-squares methods for fluid-loaded plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.113, p.67-98. 1994.
- Hagiwara, I., Kozukue, W., Ma, Z. D. The development of eigenmode sensitivity analysis methods for coupled acoustic-structural systems and their application to reduction of vehicle interior noise. *Finite Elements Analysis and Design*, v.14, p.235-248, 1993.
- Hagiwara, I., Ma, Z. D. Development of new mode-superposition technique for truncating lower - and/or higher - frequency modes (Application to eigenmode sensitivity analysis). *JSME International Journal Series C*, v.37, n.1, p.14-20, 1994.

- Hamdi, M. A. *Etude des vibrations élastoacoustiques par une méthode d'éléments finis aux déplacements*. Compiègne, França, Université de Technologie de Compiègne, 1978, 181p., Thèse de Docteur-Ingenieur, Spécialité: Mécanique Appliquée à la Construction.
- Hamdi, M. A., Ousset, Y., Verchery, G. A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.13, n.1, p.139-150, 1978.
- Hansteen, O. E., Bell, K. On the accuracy of mode superposition analysis in structural dynamics. *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, v.7, n.5, p.405-411, 1979.
- Haug, E., Choi, K. K., Komkov, V. *Design sensitivity analysis of structural systems*. Academic Press, Inc., 1986, 381p.
- Herskovits, J. A view on nonlinear optimization. In: Herskovits, J. (Ed.). *Advances in structural optimization*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands, 1995, p.71-116.
- Irons, B. M. Role of part inversion in fluid-structure problems with mixed variables. *AIAA Journal*, v.7, p.568, 1970.
- Junkins, J. L., Kim, Y. *Introduction to dynamics and control of flexible structures*. AIAA Education Series, 1993, 452p.
- Kamat, M. P., Simitises, G. J. Optimal beam frequencies by the finite element displacement method. *International Journal of Solids Structures*, v.9, p.415-429, 1973.
- Karihaloo, B. L., Niordson, F. I. Optimum design of vibrating cantilevers. *Danish Center for Appl. Math and Mech*, n.15, 1971.

- Kikuchi, N., Cheng, H.-C., Ma, Z. D. Optimal shape and topology design of vibrating structures. In: Herskovits, J. (Ed.). *Advances in structural optimization*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands, 1995, p.189-222.
- Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., Sanders, J. V. *Fundamentals of acoustics*. John Wiley & Sons, 1982, 480p.
- Lalanne, M., Berthier, P., Der Hagopian, J. *Mechanical vibrations for engineers*. John Wiley & Sons, 1983, 266p.
- Lewis, R. L., Schrefler, B. A. *The finite element method in the deformation and consolidation of porous media*. Wiley, Chichester, 1987.
- Luenberger, D. G. *Linear and nonlinear programming*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989, 491p.
- Ma, Z. D., Hagiwara, I. Sensitivity analysis methods for coupled acoustic-structural systems Part I: Modal sensitivities. *AIAA Journal*, v.29, n.11, p.1787-1795, November 1991a.
- Ma, Z. D., Hagiwara, I. Sensitivity analysis methods for coupled acoustic-structural systems Part II: Direct frequency response and its sensitivities. *AIAA Journal*, v.29, n.11, p.1796-1801, November 1991b.
- Ma, Z. D., Hagiwara, I. Sensitivity calculation methods for conducting modal frequency response analysis of coupled acoustic-structural systems. *JSME International Journal Series III*, v.35, n.1, p.14-21, 1992.
- Ma, Z. D., Hagiwara, I. Development of a new mode-superposition technique for modal frequency response analysis of coupled acoustic-structural systems. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.14, p.209-223, 1993.
- Madsen, L. E. *Engineering design optimization by the augmented lagrange multiplier method*, Monterey-CA, USA, Naval Postgraduate School, 1981, 65p., Master Thesis.

- Mahmoud, K. G., Engl, H. W., Holzleitner, L. Optimum structural design using MSC/Nastran and sequential quadratic programming. *Computers & Structures*, v.52, n.3, p.437-447, 1994.
- Marques de Barros, R., De Mesquita Neto, E., De Almeida Barros, P. Análise dinâmica de estruturas engastadas no semi-espaço através do método dos elementos finitos incluindo o amortecimento geométrico. Em *Anais-Resumos do XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica COBEM 97*, Bauru-S.P., Brasil, dezembro 8-12, 1997, p.150, 1997.
- Miele, A., Moseley, P. E., Levy, A. V., Coggins, G. M. On the method of multipliers for mathematical programming problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v.10, n.1, p.1-33, 1972.
- Morand, H. J.-P., Ohayon, R. Internal pressures effects on the vibration of partially filled elastic tanks. In: *Proceedings World Congress on Finite Element Methods in Structural Mechanics*, TP ONERA 66, Bournemouth, Great Britain, October 12-17, 1975.
- Morand, H. J.-P., Ohayon, R. Investigation of variational formulations for the elasto-acoustic problem. In: *Proceedings of the Second International Symposium on Finite Element Method in Flow Problems*, Rappallo, Italy, June 14-18, 1976.
- Morand, H. J.-P., Ohayon, R. *Fluid structure interaction*. John Wiley & Sons, 1995, 212p.
- Nelson, R. B. Simplified calculations of eigenvector derivatives. *AIAA Journal*, v.14, n.9, p.1201-1205, 1976.
- Ohayon, R. Transient and modal analysis of bounded medium fluid-structure problems. In: Lewis, R. W., Bettess, P., Hinton, E. (Eds.). *Proceedings International Conference on Numerical Methods for Transient and Coupled Problems*. Pineridge Press, 1984.

- Ohayon, R., Valid, R. True symmetric variational formulation for fluid-structure interaction in bounded media. Finite element results. In: Lewis, R. W., Bettes, P., Hinton E. (Eds.). *Numerical methods in coupled systems*. Wiley, 1984, chapter 10.
- Ojalvo, I. U. Efficient computation of modal sensitivities for systems with repeated frequencies. *AIAA Journal*, v.26, n.3, p.361, March 1988.
- Olhoff, N. Multicriterion structural optimization via bound formulation and mathematical programming. *Structural Optimization*, n.1, p.11-17, 1989a.
- Olhoff, N. Part III. In: Zyczkowski, M. (Ed.). *Structural optimization under stability and vibration constraints*, International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures N° 308. Springer-Verlag, Udine, Italy, 1989b, p.145-212.
- Olhoff, N., Lund, E. Finite element based engineering design sensitivity analysis and optimization. In: Herskovits, J. (Ed.). *Advances in structural optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1995, p.1-46.
- Olson, L. G., Bathe, K.-J. Analysis of fluid-structure interactions. A direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potential. *Computers & Structures*, v.21, n.1/2, p.21-32, 1985.
- Pal, C., Hagiwara, I. Dynamic analysis of a coupled structural-acoustic problem. Simultaneous multi-modal reduction of vehicle interior noise level by combined optimization. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.14, p.225-234, 1993.
- Pal, C., Hagiwara, I. Optimization of noise level reduction by truncated modal coupled structural-acoustic sensitivity analysis. *JSME International Journal, Series C*, v.37, n.2, p.246-251, 1994.
- Paucar Casas, W., Galli, L. A. F., Pavanello, R., Projeto de um sistema gerenciador e integrador orientado a objetos para análise e otimização estrutural. Aplicações em problemas acoplados. Em: CIMENICS'96 Terceiro Congresso Internacional em Métodos

Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, 25-29 março 1996, Mérida, Venezuela, *Anais do CIMENICS'96*, 1996, p. OP9-OP16.

Paucar Casas, W., Pavanello, R., Otimização de forma de sistemas acoplados fluido-estrutura baseada em critério de separação de frequências naturais. Em: IV CEM-NNE/96 Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, 16-20 junho 1996, Recife-PE, Brasil, *Anais do IV CEM-NNE/96*, 1996a, p. 663-668.

Paucar Casas, W., Pavanello, R. Análise de sensibilidade modal em sistemas acoplados fluido-estrutura. Em: COTEQ 96 Conferência sobre Tecnologia de Equipamentos. 9º SIBRAT Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, 20-22 novembro 1996, Rio de Janeiro, Brasil, *Anais da COTEQ.96*, 1996b, p. 285-288.

Paucar Casas, W., Pavanello, R. Direct and modal frequency response analysis and its sensitivities in coupled fluid-structure systems. In: DINAME 97 7th International Conference on Dynamics Problems in Mechanics, March 3-7 1997, Rio de Janeiro, Brazil, *Proceedings of DINAME 97*, 1997, p. 52-54.

Paucar Casas, W., Pavanello, R. Otimização de sistemas acústico-estruturais sujeito a restrições dinâmicas. Em: I FIA/I SEMNAV/18º SOBRAC I Congresso Iberoamericano de Acústica, I Simpósio de Metrologia e Normalização em Acústica e Vibrações do Mercosul, 18º Encontro da SOBRAC, 4-8 abril 1998, Florianópolis-SC, Brasil, *Anais do I FIA/I SEMNAV/18º SOBRAC*, 1998a, p. 655-658.

Paucar Casas, W., Pavanello, R. Eigenvalues gap optimization using sensitivity in coupled acoustic-structural systems. Em: ICA/ASA '98 16th International Congress on Acoustics and 135th Meeting Acoustical Society of America, 20-26 June 1998, Seattle-Washington, USA, *Proceedings of ICA/ASA '98*, 1998b, (accepted for publication).

Paucar Casas, W., Pavanello, R. Eigenvalues gap optimization with sensitivity criteria in coupled fluid-structure systems. Em: IV WCCM Fourth World Congress on Computational Mechanics, 29 June-2 July 1998, Buenos Aires, Argentina, *Proceedings of IV WCCM*, 1998c, (accepted for publication).

- Pavanello, R. *Contribution a l'etude hydroelastique des structures a symetrie cyclique*. Lyon, França, L'Institut National des Sciences Appliquees de Lyon, 1991, 198p., Thèse de Docteur, Spécialité: Mecanique.
- Pedreira, C. M. *Modelagem de problemas de elasticidade, incluindo-se efeitos de não-linearidade geométrica, utilizando o método dos elementos finitos*. Campinas - SP, Brasil, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1995, 114p., Relatório de Bolsa da FAPESP (Proc. 95/01687-0).
- Popov, E. P. *Engineering Mechanics of Solids*. Prentice-Hall, 1990, 727p.
- Powell, M. J. D. Algorithms for nonlinear constraints that use lagrangian functions. *Mathematical Programming*, v.14, p.224-248, 1978.
- Ringertz, U. T. An algorithm for optimization of non-linear shell structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.38, p.299-314, 1995.
- Rodrigues, F. A. *Desenvolvimento de um aplicativo para análise estática e estruturas reticuladas, usando o Ambiente MATLAB*. Campinas - SP, Brasil, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996, 73p., Relatório de Bolsa da FAPESP (Proc. 96/00326-6).
- Sandberg, G. A new strategy for solving fluid-structure problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.38, p.357-370, 1995.
- Saramago, S. F. P., Steffen Jr., V. Aspectos fundamentais ao usar técnicas de otimização no projeto de sistemas dinâmicos. Em: IV Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, 1996, Recife. *Anais do IV CEM-NNE*, ABCM: Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 1996, v.1., p.421-426.

- Schittkowski, K., Zillober, C., Zotemantel, R. Numerical comparison of nonlinear programming algorithms for structural optimization. *Structural Optimization*, n.7, p.1-19, 1994
- Serpa, A. L. *Otimização de malhas de elementos finitos pelo método da relocação dos nós na elasticidade linear*. Campinas, SP, Brasil, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1991, 118 p., Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica.
- Tong, P. The finite element method for fluid flow. In: Gallagher, R. N., Yamada, Y., Oden, J. T. (Eds.). p.787-808, 1966.
- Turner, M. J. Design of minimum mass structures with specified natural frequencies. *AIAA Journal*, v.5, n.10, p.1911-1913, 1967.
- Vanderplaats, G. N. *Numerical optimization techniques for engineering design*. McGraw-Hill Publishing Company, 1984, 333p.
- Wang, B. P. An improved approximate method for computing eigenvector derivatives. In: AIAA/ASME/ASCE/AHS 26th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Orlando, FL, April 1985.
- Zienkiewicz, O. C. Coupled problems and their numerical solution. In: Lewis, R. W., Bettes, E., Hinton, E. (Eds.). *Numerical methods in coupled systems*. Wiley, Chichester, 1984, chap. 1, p.35-68.
- Zienkiewicz, O. C., Bettes, P. Fluid-structure dynamic interaction and some unified approximation processes. *Lecture notes for the finite element method*, Paris, June 17-19, 1981. Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur, 1981, 24p.
- Zienkiewicz, O. C., Newton, R. E. Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid. In: *Proceedings International Symposium on Finite Elements Techniques*. Stuttgart, 1969, p.359-379.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. *The finite element method*. McGraw-Hill, 1989, v.2.

Zienkiewicz, O. C., Chan, A. H. C., Pastor, M., Paul, D. K., Shiomi, T. Static and dynamic behaviour of soils: a rational approach to quantitative solutions: Part I-fully saturated problems. *Proc. Roy. Soc. A.*, v.429, p.285-309, 1990a.

Zienkiewicz, O. C., Xie, Y. M., Schrefler, B. A., Ladesme, A., Bicanic, N. Static and dynamic behaviour of soils: a rational approach to quantitative solutions: Part II-semi saturated problems. *Proc. Roy. Soc. A.*, v.429, p.311-321, 1990.

Anexo I

Outras Formulações da Resposta em Frequência Modal e sua Sensibilidade em Sistemas Acoplados Fluido-Estrutura

I.1 Introdução

Apresenta-se algumas formulações adicionais para o cálculo da resposta em frequência modal e da sensibilidade da resposta em frequência modal aplicados a sistemas acoplados fluido-estrutura. Estas formulações foram testadas mas acabaram não sendo utilizadas no processo de otimização da resposta em sistemas acoplados neste trabalho. Não obstante elas apresentam uma informação importante para desenvolver trabalhos futuros.

I.2 Resposta em frequência modal do sistema acoplado fluido-estrutura

No cálculo da resposta em frequência modal do sistema acoplado fluido-estrutura apresenta-se duas formulações adicionais. Uma delas utiliza uma base modal truncada do sistema acoplado mas envolve uma inversão da matriz de impedância do sistema. A outra é um método iterativo que utiliza uma base modal do sistema desacoplada.

I.2.1 Método utilizando uma base modal truncada do sistema acoplado

Uma técnica melhorada de superposição de modos acoplados com truncamento foi proposta por Ma e Hagiwara (1993), compensando a contribuição dos modos truncados tanto inferiores quanto superiores fora do domínio da frequência numa análise de Resposta em Frequência Modal. Foi demonstrado que o uso desta técnica melhora a convergência e permite

determinar a resposta em frequência com melhor exatidão que o método utilizado por Craig (1981) e o método de Hansteen-Bell (Hansteen e Bell, 1979). Além disso, o esforço computacional não é incrementado.

Uma das vantagens do método de superposição de modos é a capacidade de utilizar um número limitado de modos na análise. Porém, utilizando uma técnica padrão de superposição modal (método em deslocamento dos modos) na análise estrutural, os deslocamentos são obtidos com boa exatidão utilizando poucos modos, mas isso pode não acontecer com as tensões. Ao utilizar o método dos modos em deslocamento na análise acústica-estrutural, podem-se obter adequados deslocamentos estruturais, mas as respostas de pressão do som podem estar incorretas, dada sua semelhança física com as tensões do caso estrutural. A explicação deve-se ao fato de que em um sistema acoplado, os modos estruturais de ordem superior relacionam-se com os modos acústicos de ordem inferior. Então, para conduzir um cálculo de superposição modal com truncamento em forma mais eficiente, seria possível truncar tanto os modos superiores quanto os modos inferiores, especialmente numa análise de ressonância acústica interior.

Assume-se que as frequências de excitação consideradas ficam no intervalo $[\omega_a, \omega_b]$ ($\omega_a \leq \omega_b$), sendo m e n as ordens dos modos inferiores e superiores respectivamente utilizados no cálculo da resposta modal, com $\omega_m < \omega_a$ e $\omega_n > \omega_b$. Uma solução exata neste caso pode ser escrita como,

$$U = \sum_{i=m}^n \phi_i Q_i + U_r \quad (I.1)$$

sendo U_r a MFR residual incógnita, que expressa a contribuição dos modos truncados como,

$$U_r = \sum_{i=1}^{m-1} \phi_i Q_i + \sum_{i=n+1}^N \phi_i Q_i \quad (I.2)$$

onde Q_i está dado novamente pela Equação (3.98), a mesma que expandida via série de Taylor sobre um valor ω igual a ω_c de modo que $\omega_c \in [\omega_a, \omega_b]$ resulta:

$$Q_i = \frac{\bar{\phi}_i^T F}{\lambda_i - \omega_c^2} \left(1 + \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\lambda_i - \omega_c^2} + \dots \right) = \frac{\bar{\phi}_i^T F}{\lambda_i - \omega_c^2}, \quad |\omega^2 - \omega_c^2| < |\lambda_i - \omega_c^2| \quad (I.3)$$

Substituindo a Equação (I.3) na Equação (I.2) obtém-se:

$$U_r = GF = U_0 \quad (I.4)$$

onde U_r é aproximada pela solução quase-estática U_0 , e a matriz de flexibilidade residual G é dada por:

$$G = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\phi_i \bar{\phi}_i^T}{\lambda_i - \omega_c^2} + \sum_{i=n+1}^N \frac{\phi_i \bar{\phi}_i^T}{\lambda_i - \omega_c^2} \quad (I.5)$$

Contudo a matriz G não pode ser calculada com a Equação (I.5), pois os modos truncados não devem ser calculados. Expandindo-se a matriz $(K - \omega_c^2 M)^{-1}$ nos modos do sistema acoplado segundo a Equação (3.84), tem-se:

$$(K - \omega_c^2 M)^{-1} = \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i \bar{\phi}_i^T}{\lambda_i - \omega_c^2} \quad (I.6)$$

e a matriz de flexibilidade residual pode ser escrita da seguinte maneira:

$$G = (K - \omega_c^2 M)^{-1} - \sum_{i=m}^n \frac{\phi_i \bar{\phi}_i^T}{\lambda_i - \omega_c^2} \quad (I.7)$$

Substituindo a Equação (I.7) na Equação (I.4), e levando o resultado na Equação (I.1), obtém-se a aproximação da MFR expressada como a soma da solução quase-estática, U_0 , e uma resposta dinâmica residual, U_d , de forma que:

$$U = U_0 + U_d = (K - \omega_c^2 M)^{-1} F + \sum_{i=m}^n \phi_i Q_i^d \quad (I.8)$$

onde

$$Q_i^d = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\lambda_i - \omega_c^2} Q_i \quad (\text{I.9})$$

$$U_0 = (K - \omega_c^2 M)^{-1} F \quad (\text{I.10})$$

$$U_d = \sum_{i=m}^n \phi_i Q_i^d = \sum_{i=m}^n \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\lambda_i - \omega_c^2} \phi_i Q_i \quad (\text{I.11})$$

Denotando a relação ω_c/ω como β , segundo Ma e Hagiwara (1993) para truncar os modos elevados por exemplo pode-se escolher o valor ω_c igual a ω_a que satisfaz $\beta \leq 1$ para todo $\omega \in [\omega_a, \omega_b]$, e escolher o valor $\beta \geq 1/\sqrt{2}$ quando os modos de ordem inferior são truncados. A vantagem deste método é que permite truncar os modos inferiores, e possibilita a solução do problema mesmo com uma matriz K singular.

I.2.2 Método iterativo utilizando uma base modal do sistema desacoplado

Neste método são utilizados os autovalores e autovetores do sistema estrutural, λ_s e Ψ_s , e do domínio fluido, λ_f e Ψ_f , calculados considerando os meios desacoplados, isto é resolvendo dois sistemas independentes:

$$(K_{ss} - \lambda_s M_{ss}) \Psi_s = 0 \quad (\text{I.12})$$

$$(K_{ff} - \lambda_f M_{ff}) \Psi_f = 0 \quad (\text{I.13})$$

Sendo Λ_s e Ψ_s as matrizes de autovalores e autovetores desacoplados do sistema estrutural, Λ_f e Ψ_f as matrizes de autovalores e autovetores do sistema desacoplado no domínio fluido, que podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\Lambda_s = \text{diag}\{\lambda_{s1}\} \quad (\text{I.14})$$

$$\Psi_s = [\Psi_{s1}, \Psi_{s2}, \dots, \Psi_{sn_s}] \quad (\text{I.15})$$

$$\Lambda_f = \text{diag}\{\lambda_{f1}\} \quad (\text{I.16})$$

$$\Psi_f = [\Psi_{f1}, \Psi_{f2}, \dots, \Psi_{fn_f}] \quad (\text{I.17})$$

As componentes da resposta em frequência, U_s e U_f , podem ser expandidas nas matrizes de autovetores Ψ_s e Ψ_f independentemente resultando em:

$$U_s = \Psi_s Q_s \quad (\text{I.18})$$

$$U_f = \Psi_f Q_f \quad (\text{I.19})$$

Substituindo a Equações (I.18) e (I.19) nas Equações (3.66) a (3.71), utilizadas para determinar a resposta em frequência direta segundo o método iterativo com a matriz de impedância desacoplada, gera-se o seguinte algoritmo:

1. Determinar os vetores e matrizes seguintes:

$$\Omega_s^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\lambda_{si} - \omega^2} \right\} \quad (\text{I.20})$$

$$\Omega_f^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{\omega^2}{\lambda_{fi} - \omega^2} \right\} \quad (\text{I.21})$$

$$\tilde{Z}_{sf} = \Psi_s^T K_{sf} \Psi_f \quad (\text{I.22})$$

$$\tilde{B}_{sf} = -\Omega_s^{-1} \tilde{Z}_{sf} \quad (\text{I.23})$$

$$\tilde{B}_{fs} = -\Omega_f^{-1} \tilde{Z}_{sf}^T \quad (\text{I.24})$$

2. Calcular valores de partida dos vetores $Q_s^{(0)}$ e $Q_f^{(0)}$, utilizando as expressões:

$$Q_s^{(0)} = \Omega_s^{-1} \Psi_s^T F_s \quad (\text{I.25})$$

$$Q_f^{(0)} = \tilde{B}_{fs} Q_s^{(0)} \quad (\text{I.26})$$

3. Determinar a m -ésima aproximação dos vetores $Q_s^{(m)}$ e $Q_f^{(m)}$, utilizando as expressões iterativas seguintes:

$$Q_s^{(m)} = Q_s^{(0)} + \tilde{B}_{sf} Q_f^{(m-1)}, \quad (m=1,2,\dots) \quad (\text{I.27})$$

$$Q_f^{(m)} = \tilde{B}_{fs} Q_s^{(m)}, \quad (m=1,2,\dots) \quad (\text{I.28})$$

4. Obter a m -ésima solução aproximada da resposta estrutural, $U_s^{(m)}$, e da resposta no domínio fluido, $U_f^{(m)}$, expressadas por,

$$U_s^{(m)} = \Psi_s Q_s^{(m)} \quad (I.29)$$

$$U_f^{(m)} = \Psi_f Q_f^{(m)} \quad (I.30)$$

O método de cálculo baseado nos modos desacoplados, pode também ser utilizado truncando-se a base dos modos do meio sólido e fluido. Tal enfoque foi utilizado no trabalho de Pavanello (1991), mostrando uma necessidade de se utilizar bases modais com ordem elevada no caso de sistemas elasto-acústicos, para garantir uma precisão mínima desejável. Um enfoque usando vetores de Ritz foi proposto por Daniel (1980a,b) e Pavanello (1991) conduzindo a resultados satisfatórios. Este tipo de metodologia não foi utilizada neste trabalho.

I.3 Sensibilidade da resposta em frequência modal do sistema acoplado fluido-estrutura

No cálculo da sensibilidade da resposta em frequência modal do sistema acoplado fluido-estrutura apresenta-se duas formulações adicionais. Uma delas baseia-se num método iterativo utilizando uma base modal do sistema desacoplado, precisando-se bases modais com ordem elevada em sistemas acoplados para conseguir uma precisão adequada. A outra é um método baseado na sensibilidade de autovalores e autovetores, cujos cálculos são caros computacionalmente.

I.3.1 Método iterativo utilizando uma base modal do sistema desacoplado

As componentes da sensibilidade da resposta em frequência, no domínio estrutural U'_s e no domínio fluido U'_f , podem ser expandidas utilizando as matrizes de autovetores desacoplados Ψ_s e Ψ_f dadas pelas Equações (I.15) e (I.17), originando as expressões:

$$U'_s = \Psi_s Q'_s \quad (I.31)$$

$$U'_f = \Psi_f Q'_f \quad (I.32)$$

As expressões de Q'_s e Q'_f são determinadas ao substituir as Equações (I.18), (I.19), (I.31) e (I.32) na formulação iterativa do cálculo da sensibilidade da resposta em frequência direta com a inversa da matriz de impedância desacoplada, dada pelas Equações (3.77) a (3.81), obtendo-se o seguinte algoritmo iterativo de cálculo da sensibilidade de resposta utilizando uma base modal desacoplada:

1. Utilizando as Equações (I.23) e (I.24) determinar as matrizes \tilde{B}_{sf} e \tilde{B}_{fs} , e o vetor Q_s com a Equação (I.25).

2. Determinar a matriz \tilde{D}_{ss} com a expressão:

$$\tilde{D}_{ss} = -\Omega_s^{-1} \Psi_s^T Z'_{ss} \Psi_s \quad (\text{I.33})$$

3. Calcular valores de partida dos vetores $Q_s^{(0)}$ e $Q_f^{(0)}$ utilizando:

$$Q_s^{(0)} = \tilde{D}_{ss} Q_s \quad (\text{I.34})$$

$$Q_f^{(0)} = \tilde{B}_{fs} Q_s^{(0)} \quad (\text{I.35})$$

4. Determinar a m -ésima aproximação dos vetores $Q_s^{(m)}$ e $Q_f^{(m)}$, utilizando as expressões iterativas seguintes:

$$Q_s^{(m)} = Q_s^{(0)} + \tilde{B}_{sf} Q_f^{(m-1)}, \quad (m=1,2,\dots) \quad (\text{I.36})$$

$$Q_f^{(m)} = \tilde{B}_{fs} Q_s^{(m)}, \quad (m=1,2,\dots) \quad (\text{I.37})$$

5. Calcular a m -ésima aproximação da sensibilidade da resposta estrutural e do domínio fluido, $U_s^{(m)}$ e $U_f^{(m)}$ respectivamente, dada pelas expressões:

$$U_s^{(m)} = \Psi_s Q_s^{(m)} \quad (\text{I.38})$$

$$U_f^{(m)} = \Psi_f Q_f^{(m)} \quad (\text{I.39})$$

I.3.2 Método baseado na sensibilidade de autovalores e autovetores

Este método foi apresentado por Ma e Hagiwara (1992) e Hagiwara, Kozukue e Ma (1993). Lembra-se que K' e M' são as derivadas das matrizes K e M respectivamente com relação a variável de projeto, e , dada pelas Equações (3.34) e (3.35).

Sendo U a resposta em frequência modal e U_1 a resposta em frequência com a variável de projeto modificada; a mudança da resposta em frequência ΔU pode ser obtida da seguinte forma:

$$\Delta U = U_1 - U \quad (\text{I.40})$$

onde as respostas em frequência modal utilizando a Equação (3.97) são expressas como:

$$U = \sum_{i=1}^n \phi_i \left(\frac{1}{\lambda_i - \omega^2} \right) \bar{\phi}_i^T F \quad (\text{I.41})$$

$$U_1 = \sum_{i=1}^n \phi_{1i} \left(\frac{1}{\lambda_{1i} - \omega^2} \right) \bar{\phi}_{1i}^T F \quad (\text{I.42})$$

para,

$$\lambda_{1j} = \lambda_j + \Delta e \lambda'_j \quad (\text{I.43})$$

$$\phi_{1j} = \phi_j + \Delta e \phi'_j \quad (\text{I.44})$$

$$\bar{\phi}_{1j} = \bar{\phi}_j + \Delta e \bar{\phi}'_j \quad (\text{I.45})$$

simbolizando Δe a variação da variável de projeto e ; $\lambda'_j, \phi'_j, \bar{\phi}'_j$ as derivadas do autovalor, autovetor à direita e autovetor à esquerda j respectivamente com relação a variável de projeto e , as quais são calculadas com base na metodologia de Fox e Kapoor (1968) como:

$$\lambda'_j = \bar{\phi}_j^T (K' - \lambda_j M') \phi_j \quad (\text{I.46})$$

$$\phi'_j = \sum_{i=m}^n \phi_i C_{ij}, \quad (1 \leq m, n \leq N) \quad (\text{I.47})$$

$$\bar{\phi}'_j = \sum_{i=m}^n \bar{\phi}_i D_{ij}, \quad (1 \leq m, n \leq N) \quad (\text{I.48})$$

para:

$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{-1}{\lambda_i - \lambda_j} \bar{\phi}^T (\mathbf{K}' - \lambda_j \mathbf{M}') \phi_j & \text{para } i \neq j \\ -\frac{1}{2} \bar{\phi}^T \mathbf{M}' \phi_j & \text{para } i = j \end{cases} \quad (\text{I.49})$$

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{-1}{\lambda_i - \lambda_j} \bar{\phi}_j^T (\mathbf{K}' - \lambda_j \mathbf{M}') \phi_i & \text{para } i \neq j \\ -\frac{1}{2} \bar{\phi}_i^T \mathbf{M}' \phi_j & \text{para } i = j \end{cases} \quad (\text{I.50})$$

Finalmente a sensibilidade da resposta em frequência U' é determinada com a relação:

$$U' = \frac{\Delta U}{\Delta e} \quad (\text{I.51})$$

Anexo II

Otimização de Funções Matemáticas e Problemas Mecânicos

II.1 Introdução

Com a finalidade de testar a eficiência do otimizador utilizado, o qual é uma implementação do método SQP na função *constr.m* do software Matlab®, foram otimizadas diversas funções matemáticas e problemas mecânicos com restrições, alguns deles descritos na literatura como clássicos. Nos casos apresentados o otimizador calcula os gradientes da função objetivo e das restrições mediante o método de diferenças finitas, embora seja preferível fornecer os gradientes em forma analítica para garantir a convergência.

Em relação a precisão dos resultados, os problemas apresentados têm sua solução numérica comparada com resultados da literatura. Em muitos casos não foi possível fazer uma comparação do número de avaliações da função objetivo e do número de iterações principais dos métodos de otimização, tendo em vista que em geral os métodos utilizados foram distintos.

II.2 Otimização de funções matemáticas

II.2.1 Minimização de uma função matemática

$$\text{minimizar } f(\mathbf{x}) = 4x_1 - x_2^2 - 12$$

$$\text{sujeita a: } h(\mathbf{x}) = 25 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$g(\mathbf{x}) = 34 + x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

Os resultados apresentam-se na Tabela II.1

Tabela II.1 Resultados da minimização da função do item II.2.1

	Início	Teórico	Madsen (1981)	Faria (1991)	Matlab
$f(\mathbf{x})$	-9	-32	-31.998	-31.993	-31.9923
x_1	1	1	1.0019	1.0010	1.0013
x_2	1	4.899	4.8986	4.8987	4.8987
$h(\mathbf{x})$	23	0	-0.0017	0.0012	0.1066e-12
$g(\mathbf{x})$	16	0.0010	0.0025	0.0012	-0.0959e-12

II.2.2 Minimização de uma função matemática

$$\text{minimizar } f(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3 - 2)^2 + (x_4 - 1)^2 + (x_5 - 1)^2$$

$$\text{sujeita a: } h_1(\mathbf{x}) = x_1 + 3x_2 = 0$$

$$h_2(\mathbf{x}) = x_3 + x_4 - 2x_5 = 0$$

$$h_3(\mathbf{x}) = x_2 - x_5 = 0$$

Os resultados apresentam-se na Tabela II.2

Tabela II.2 Resultados da minimização da função do item II.2.2

	Início	Miele et al. (1972)	Faria (1991)	Matlab
$f(\mathbf{x})$	0	4.0930	4.0826	4.0930
x_1	1	-0.7674	-0.7668	-0.7674
x_2	1	0.2558	0.2562	0.2558
x_3	1	0.6279	0.6319	0.6279
x_4	1	-0.1162	-0.1171	-0.1163
x_5	1	0.2558	0.2572	0.2558
$h_1(\mathbf{x})$	4		0.0018	0.9914e-13
$h_2(\mathbf{x})$	0		0.0003	-0.5218e-13
$h_3(\mathbf{x})$	0		-0.0010	0.5063e-13

II.2.3 Minimização de uma função matemática

$$\text{minimizar } f(\mathbf{x}) = \exp(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$$

$$\text{sujeita a: } h_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 10 = 0$$

$$h_2(\mathbf{x}) = x_2 x_3 - 5x_4 x_5 = 0$$

$$h_3(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3 + 1 = 0$$

Os resultados apresentam-se na Tabela II.3

Tabela II.3 Resultados da minimização da função do item II.2.3

	Início	Powell (1978)	Serpa (1991)	Matlab
$f(\mathbf{x})$	3e-4	0.054	0.0539	0.0539
x_1	-2	-1.717	-1.718	-1.7171
x_2	2	1.596	1.596	1.5957
x_3	2	1.827	1.827	1.8273
x_4	-1	-0.764	-0.7636	-0.7636
x_5	-1	-0.764	-0.7636	-0.7636
$h_1(\mathbf{x})$	4			-0.5741e-8
$h_2(\mathbf{x})$	0			-0.2051e-8
$h_3(\mathbf{x})$	0			0.1096e-8

Nos resultados das referências foi utilizado um algoritmo de Lagrangeano aumentado.

II.2.4 Minimização da função de Rosen-Suzuki

$$\text{minimizar } f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 5x_1 + x_2^2 - 5x_2 + 2x_3^2 - 21x_3 + x_4^2 + 7x_4 + 50$$

$$\text{sujeita a: } f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_4 - 10$$

$$f_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 + x_2^2 - x_2 + x_3^2 + x_3 + x_4^2 - x_4 - 8$$

$$f_3(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - x_2 + x_3^2 - x_3 - 5$$

$$\text{caso 1: } f_1(\mathbf{x}) \leq 0, f_2(\mathbf{x}) \leq 0, f_3(\mathbf{x}) \leq 0$$

$$\text{caso 2: } f_1(\mathbf{x}) \leq 0, f_2(\mathbf{x}) = 0, f_3(\mathbf{x}) = 0$$

Os resultados para os dois casos apresentam-se na Tabela II.4

Tabela II.4 Resultados da minimização da função de Rosen-Suzuki, casos 1 e 2

	Início Casos 1 e 2	Teórico Casos 1 e 2	Madsen (1981)		Faria (1991)		Matlab Casos 1 e 2
			Caso 1	Caso 2	Caso 1	Caso 2	
$f(x)$	31	6	6.12	6.0075	6.03	6.0074	6
x_1	1	0	0.03	0.016	0.06	0.000	0
x_2	1	1	1.03	1.028	0.95	0.999	1
x_3	1	2	1.95	1.980	1.95	2.000	2
x_4	1	-1	-1.05	-1.018	-1.04	-0.999	-1
$f_1(x)$	-4	-1	-0.89	-0.890	-1.11	-1.008	-1
$f_2(x)$	-6	0	-0.11	-0.005	0.01	-0.003	0
$f_3(x)$	-1	0	-0.12	-0.004	0.04	0.0002	0

II.2.5 Minimização de uma função matemática

minimizar $f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^4 + (x_5 - 1)^6$

sujeita a: $h_1(x) = x_1^2 x_4 + \sin(x_4 - x_5) - 2\sqrt{2} = 0$

$h_2(x) = x_2 + x_3^4 x_4^2 - 8 - \sqrt{2} = 0$

Os resultados apresentam-se na Tabela II.5

Tabela II.5 Resultados da minimização da função do item II.2.5

	Início	Miele et al. (1972)	Faria (1991)	Início	Matlab
$f(x)$	16300	0.2415	0.239	4	0.2415
x_1	6	1.1661	1.16	2	1.1662
x_2	6	1.1821	1.17	2	1.1821
x_3	6	1.3802	1.38	2	1.3803
x_4	6	1.5060	1.50	2	1.5060
x_5	6	0.6109	1.62	2	0.6110
$h_1(x)$	213.1716		-0.038	5.1716	0.0071e-7
$h_2(x)$	46653		-0.019	56.5858	0.3246e-7

Deve-se notar que para chegar ao valor ótimo foi necessário mudar os valores iniciais das variáveis, o que evidencia a existência de mínimos locais na função.

II.3 Otimização de problemas mecânicos

II.3.1 Minimização de peso de uma estrutura simétrica de três barras

A estrutura estaticamente indeterminada mostrada na Figura II.1 vai ser projetada para peso mínimo (equivalentemente massa ou volume mínimo) com a finalidade de suportar uma carga P . Deve-se satisfazer diversas restrições tecnológicas e de desempenho, tais como compressão de membros, flambagem de membros, falha por deflexão em excesso do nó 4 e falha por ressonância quando a frequência natural da estrutura está baixo um mínimo, (Arora, 1989).

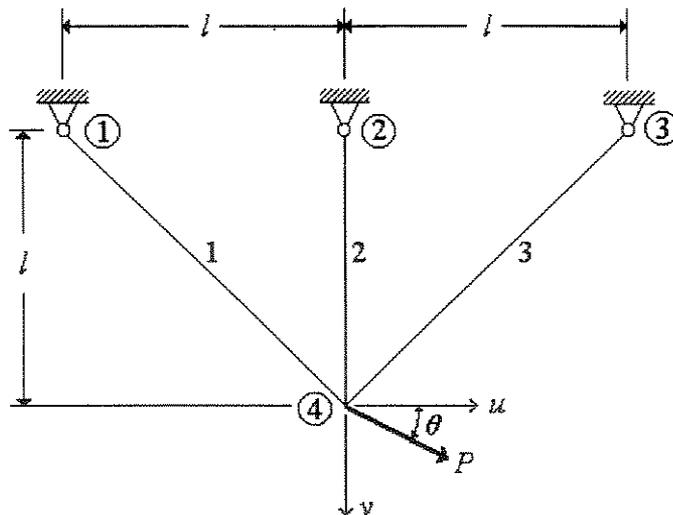


Figura II.1 Estrutura de três barras

Considerando que a estrutura é simétrica, são definidas como variáveis do projeto A_1 (área da seção transversal dos membros 1 e 3) e A_2 (área da seção transversal do membro 2). Outras variáveis de projeto para o problema são possíveis em função da forma da seção transversal dos membros. A função objetivo do problema está dada pelo peso total do material da estrutura,

$$\text{peso} = \rho l (2\sqrt{2}A_1 + A_2) \quad (\text{II.1})$$

onde o comprimento l está definido na Figura II.1 e ρ é a densidade do material da estrutura.

Para definir as restrições do problema, considera-se as tensões, deflexões e frequência natural fundamental da estrutura. Segundo a análise de estruturas estáticamente indeterminadas, os deslocamentos horizontal u e vertical v do nó 4 são dados por:

$$u = \frac{\sqrt{2}IP_u}{A_1E} \quad (\text{II.2})$$

$$v = \frac{\sqrt{2}IP_v}{(A_1 + \sqrt{2}A_2)E} \quad (\text{II.3})$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, P_u e P_v são as componentes horizontal e vertical da carga P ,

$$P_u = P \cos \theta \quad (\text{II.4})$$

$$P_v = P \sin \theta \quad (\text{II.5})$$

As tensões σ_1 , σ_2 e σ_3 nos membros 1, 2 e 3 respectivamente são dados por,

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{P_u}{A_1} + \frac{P_v}{(A_1 + \sqrt{2}A_2)} \right] \quad (\text{II.6})$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{2}P_v}{(A_1 + \sqrt{2}A_2)} \quad (\text{II.7})$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{P_v}{(A_1 + \sqrt{2}A_2)} - \frac{P_u}{A_1} \right] \quad (\text{II.8})$$

O modo de vibração correspondente à frequência natural mais baixa é importante dado que este modo é excitado primeiro, porem é importante fazer que a frequência natural mais baixa da estrutura fique tão alta quanto seja possível para evitar qualquer possibilidade de ressonância, resultando numa estrutura mais rígida. O autovalor mais baixo λ relacionado à frequência natural mais baixa desta estrutura segundo um modelo de massa consistente é,

$$\lambda = \frac{3EA_1}{\rho l^2(4A_1 + \sqrt{2}A_2)} \quad (\text{II.9})$$

Posteriormente desenvolve-se várias expressões das restrições. A estrutura é projetada para suportar diferentes aplicações de carga. Considerando uma tensão permissível σ_{ia} para o membro i , impõe-se restrições nas tensões σ_1 , σ_2 e σ_3 dos membros 1, 2 e 3 de forma que,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{P_u}{A_1} + \frac{P_v}{(A_1 + \sqrt{2}A_2)} \right] \leq \sigma_{1a} \quad (\text{II.10})$$

$$\frac{\sqrt{2}P_v}{(A_1 + \sqrt{2}A_2)} \leq \sigma_{2a} \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{P_v}{(A_1 + \sqrt{2}A_2)} - \frac{P_u}{A_1} \right] \leq \sigma_{3a} \quad (\text{II.12})$$

As deflexões horizontal e vertical do nó 4 devem ficar dentro dos limites Δu_a e Δv_a ,

$$\frac{\sqrt{2}IP_u}{A_1E} \leq \Delta u_a \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{\sqrt{2}IP_v}{(A_1 + \sqrt{2}A_2)E} \leq \Delta v_a \quad (\text{II.14})$$

A frequência natural fundamental deve ser maior que a frequência especificada ω_0 (Hz),

$$\frac{3EA_1}{\rho l^2(4A_1 + \sqrt{2}A_2)} \geq (2\pi\omega_0)^2 \quad (\text{II.15})$$

A carga de flambagem para um membro i de comprimento l_i é dado como $\pi^2 EI_i / l_i^2$, no qual a dependência do momento de inércia I_i respeito da área da seção transversal A_i do membro é expressada por $I_i = \beta A_i$, sendo β uma constante sem dimensões. As restrições de flambagem são expressadas como $-A_i \sigma_i \leq \pi^2 EI_i / l_i^2$ resultando em,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{P_u}{A_1} + \frac{P_v}{(A_1 + \sqrt{2}A_2)} \right] \leq \frac{\pi^2 E \beta A_1}{2l^2} \quad (\text{II.16})$$

$$-\frac{\sqrt{2}P_v}{(A_1 + \sqrt{2}A_2)} \leq \frac{\pi^2 E \beta A_2}{l^2} \quad (\text{II.17})$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{P_v}{(A_1 + \sqrt{2}A_2)} - \frac{P_u}{A_1} \right] \leq \frac{\pi^2 E \beta A_1}{2l^2} \quad (\text{II.18})$$

Finalmente, A_1 e A_2 devem ser positivos, quer dizer $A_1, A_2 \geq 0$. Além em problemas práticos a área do membro deve ficar entre uma área mínima A_{min} e uma área máxima A_{max} , resultando nas seguintes restrições ou valores de contorno,

$$A_1, A_2 \geq A_{min} \quad (\text{II.19})$$

$$A_1, A_2 \leq A_{max} \quad (\text{II.20})$$

Logo o problema de otimização é encontrar as áreas das seções transversais A_1, A_2 de modo que minimize o peso da estrutura da Equação (II.1) sujeita às restrições das Equações (II.10-II.20) respeito das tensões nos membros, deflexão do nó 4, flambagem dos membros, frequência de vibração e limites explícitos nas variáveis do projeto.

Neste caso a estrutura é projetada para suportar três condições de carregamento com os dados da Tabela II.6.

Tabela II.6 Dados para a estrutura de três barras

Tensões permissíveis	$\sigma_{1a} = 5000$ psi, $\sigma_{2a} = 20000$ psi, $\sigma_{3a} = 5000$ psi			
Deslocamentos permissíveis	$\Delta u_a = 0.005$ in, $\Delta v_a = 0.005$ in			
Módulo de elasticidade	$E = 1e7$ psi			
Peso específico	$\gamma = 1e-1$ lb/in ³			
Constante	$\beta = 1.0$			
Limite inferior das variáveis	$(0.1, 0.1, 0.1)$ in ²			
Limite superior das variáveis	$(100, 100, 100)$ in ²			
Valor inicial das variáveis	$(1, 1, 1)$ in ²			
Limite inferior na frequência	$\omega_0 = 2500$ Hz			
Condições de carga (3)	Ângulo θ , graus	45	90	135
	Carga P, lb	40000	30000	20000

As funções das restrições são apropriadamente normalizadas e expressadas na forma padrão. Para estudar o efeito de impor maiores requerimentos de desempenho, são definidos os seguintes três casos de projeto no qual as restrições explícitas de contorno das variáveis são impostas em todos os casos.

Caso 1: Restrições nas tensões, (total restrições = 13)

Caso 2: Restrições nas tensões e deslocamentos do nó 4, (total restrições = 19)

Caso 3: Restrições nas tensões, deslocamentos do nó 4, flambagem dos membros e frequência (total restrições = 29)

A Tabela II.7 mostra a comparação dos resultados otimizados para os três casos utilizando um método SQP segundo Arora (1989) com os resultados deste estudo. Pode-se apreciar que a função objetivo otimizada é maior para o *Caso 2* comparada com o *Caso 1*, o qual é consistente com a hipótese que muitas restrições para o sistema implicam uma região factível mais pequena, originando um valor maior para a função custo ótima. Não existe diferença entre o *Caso 2* e o *Caso 3* pois nenhuma das restrições adicionais para o *Caso 3* está ativa.

Tabela II.7 Minimização do peso da estrutura de três barras

Grandeza	Início	<i>Caso 1</i>		<i>Caso 2</i>		<i>Caso 3</i>	
		(Arora, 1989)	Matlab	(Arora, 1989)	Matlab	(Arora, 1989)	Matlab
Peso, lb	3.8284	21.1114	21.1116	22.970	22.970	22.970	22.970
$A_1=A_3, \text{in}^2$	1.0000	6.3094	6.3094	7.9999	8.0000	7.9999	8.0000
A_2, in^2	1.0000	3.2656	3.2659	0.3432	0.3431	0.3432	0.3431

II.3.2 Minimização do volume de uma viga engastada

A viga engastada mostrada na Figura II.2 é projetada para um volume de material mínimo. As variáveis de projeto são a largura b e a altura h para cada um dos $N=5$ elementos. Deseja-se projetar a viga sujeita a limites na tensão (calculada no extremo esquerdo de cada segmento), deflexão no extremo livre sob a carga, e a exigência geométrica que a altura de qualquer segmento não exceda trinta vezes sua largura.

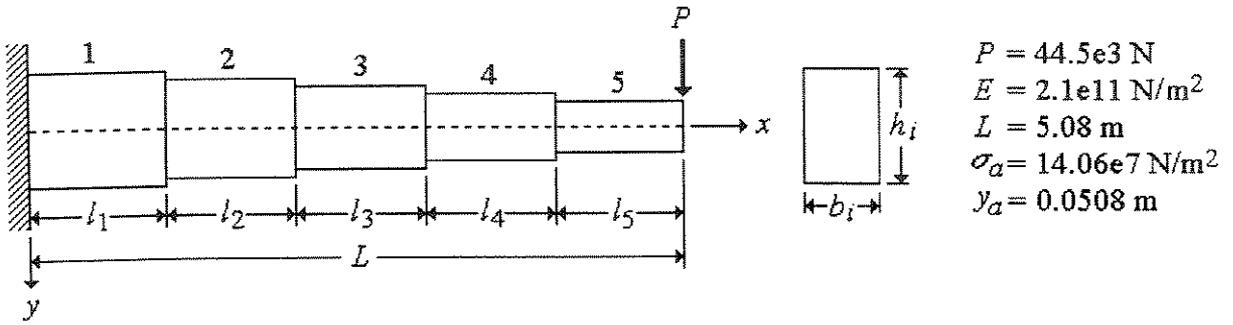


Figura II.2 Minimização do volume de uma viga engastada

A deflexão y_i no extremo direito do segmento i é calculada pelas fórmulas recursivas apresentadas em Vanderplaats (1984):

$$y_0 = y'_0 = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$y'_i = \frac{Pl_i}{EI_i} \left[L + l_i - \sum_{j=1}^i l_j \right] + y'_{i-1} \quad (\text{II.22})$$

$$y_i = \frac{Pl_i^2}{2EI_i} \left[L - \sum_{j=1}^i l_j + \frac{2l_i}{3} \right] + y'_{i-1}l_i + y_{i-1} \quad (\text{II.23})$$

na qual a deflexão y é definida como positiva para baixo, y' é a derivada de y em relação de x , l_i é o comprimento do segmento i . O módulo de Young E é o mesmo para todos os segmentos, e o momento de inércia para o segmento i é,

$$I_i = \frac{b_i h_i^3}{12} \quad (\text{II.24})$$

O momento de inércia no extremo esquerdo do segmento i é calculado como,

$$M_i = P \left[L + l_i - \sum_{j=1}^i l_j \right] \quad (\text{II.25})$$

e a tensão de flexão máxima correspondente é,

$$\sigma_i = \frac{M_i h_i}{2I_i} \quad (\text{II.26})$$

Portanto, o problema de otimização é definido como,

$$\text{minimizar } V = \sum_{i=1}^N b_i h_i l_i$$

$$\text{sujeita a: } \frac{\sigma_i}{\sigma_a} - 1 \leq 0, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\frac{y_N}{y_a} - 1 \leq 0$$

$$\frac{h_i}{30b_i} - 1 \leq 0, \quad i = 1, \dots, N$$

$$0.0127 \leq b_i \leq 0.127 \text{ m}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$0.0254 \leq h_i \leq 0.762 \text{ m}, \quad i = 1, \dots, N$$

Neste caso σ_a é a tensão de flexão admissível e y_a o deslocamento admissível no extremo livre. O problema tem $n=2N$ variáveis, $N+1$ restrições não lineares, N restrições lineares e $4N$ restrições de valores de contorno das variáveis. As grandezas estão expressas em unidades S.I.

O problema foi resolvido utilizando 5 segmentos (10 variáveis de projeto) com o método SQP implementado no software Matlab, e seus resultados comparados com outros métodos de otimização utilizados por Saramago e Steffen (1996).

Os resultados do processo são apresentados na Tabela II.8.

Tabela II.8 Minimização do volume de uma viga engastada

Grandeza	Início	Programa		
		DAS ^(*)	OPT3.2 ^(*)	Matlab
V, m^3	0.1475	0.0565	0.0520	0.0512
b_1, m	0.076	0.029	0.022	0.022
b_2, m	0.076	0.025	0.021	0.021
b_3, m	0.076	0.021	0.019	0.019
b_4, m	0.076	0.017	0.016	0.016
b_5, m	0.076	0.014	0.013	0.013
h_1, m	0.381	0.582	0.666	0.666
h_2, m	0.381	0.566	0.618	0.614
h_3, m	0.381	0.534	0.562	0.558
h_4, m	0.381	0.489	0.491	0.487
h_5, m	0.381	0.389	0.389	0.387

(*) Saramago e Steffen (1996)

No caso dos métodos seqüenciais (SUMT Sequential Unconstrained Minimization Techniques) através de uma função pseudo-objetivo, obtém-se o projeto restrito ótimo pela solução seqüencial do problema sem restrições, onde foi utilizado o programa "ADS - A Fortran Program for Automated Design Synthesis" de Vanderplaats o mesmo que é um método de multiplicadores de Lagrange aumentado. Nos métodos diretos a busca do ótimo é feita trabalhando diretamente com a função objetivo e as restrições, para o qual foi utilizado o programa "OPT3.2 - A Nonlinear Code in Fortran Implementing the Generalized Reduced Gradient Method" de Ragsdell e Gabriele.

Contudo, a tarefa de comparar os métodos de otimização não é simples pois depende de diversos parâmetros, tais como critérios de convergência, métodos de procura unidimensional, tolerâncias utilizadas, etc.

Os resultados dos exemplos apresentados somente são indicativos da eficiência e confiabilidade do algoritmo testado. Na prática, uma melhor ou pior eficiência e exatidão dependerá do problema e de uma adequada entrada dos dados.