

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Juan Francisco
Camino dos Santos E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 20/03/98.

Douglas E. Zampieri
ORIENTADOR

Análise de Suspensões Veiculares Utilizando Técnicas de Controle Robusto

por Juan Francisco Camino dos Santos

orientador Prof. Dr. Douglas E. Zampieri

co-orientador Prof. Dr. Pedro L. D. Peres

Sa59a

34543/BC

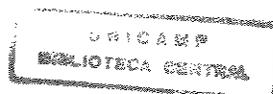
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Análise de Suspensões Veiculares Utilizando Técnicas de Controle Robusto

por Juan Francisco Camino dos Santos
orientador Prof. Dr. Douglas E. Zampieri
co-orientador Prof. Dr. Pedro L. D. Peres

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

20 de março de 1998



4295185

UNIDADE	BC
N.º COTAÇÃO:	100/1000
V.º	8
L.º	34543
PROJ.	395/98
C.º	0 X 1
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	30/07/98
N.º CPD	

CM-00113824-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Sa59a Santos, Juan Francisco Camino dos
Análise de suspensões veiculares utilizando técnicas de controle robusto. / Juan Francisco Camino dos Santos.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientadores: Douglas E. Zampieri, Pedro L. D. Peres.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Teoria do controle. 2. Veículos – Dinâmica. 3. Domínios convexos. 4. Sistemas de controle por realimentação. I. Zampieri, Douglas E. II. Peres, Pedro L. D. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Análise de Suspensões Veiculares Utilizando Técnicas de Controle Robusto

*por Juan Francisco Camino dos Santos
orientador Prof. Dr. Douglas E. Zampieri
co-orientador Prof. Dr. Pedro L. D. Peres*



Prof. Dr. Douglas E. Zampieri, Presidente
DMC / FEM - UNICAMP



Prof. Dr. José C. Geromel
DT / FEEC - UNICAMP



Prof. Dr. José R. F. Arruda
DMC / FEM - UNICAMP

20 de março de 1998

À minha avó
Luiza (*in memoriam*)
e à minha mãe
Cleonice

dedico

Agradecimentos

Ao Professor Douglas Zampieri, amigo e mestre, por me ter dado as condições e a orientação necessárias à elaboração deste trabalho.

Ao Professor Pedro Peres por seu expressivo apoio, que me permitiu solucionar boa parte dos problemas surgidos no decorrer do trabalho, e por sua amizade sempre presente.

Aos Professores José Arruda e José Geromel por suas contribuições imprescindíveis à versão final.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Aos meus pais pelo inextinguível apoio e incentivo, e à Creuza e Ana Luisa pela ajuda na correção do manuscrito.

Aos colegas de república, Ivan, Allan, Eder e Moacir, pela amizade e paciência que me ajudaram a superar momentos difíceis.

Aos colegas do DMC e do DT, em especial ao Ricardo Takahashi por sua parceria, que proporcionou um impulso substancial ao início do trabalho.

Aos colegas do CENAPAD-SP pela compreensão e solidariedade sempre presentes.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram à realização desta dissertação.

*... Há quem diga que todas as noites são de sonhos.
Mas há também quem garanta que nem todas, só as de
verão.*

*No fundo, isto não tem muita importância. O que
interessa mesmo não é a noite em si, são os sonhos.
Sonhos que o homem sonha sempre, em todos os lugares,
em todas as épocas do ano, dormindo ou acordado...*

Shakespeare

Sumário

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xi
Nomenclatura	xii
Resumo	xiii
Abstract	xiv
1 Introdução	1
2 Revisão Bibliográfica	4
2.1 Lineares Quadráticos	4
2.2 Robustos, Semi-ativos e “Previews”	7
3 Formulação do Problema de Controle Ótimo	10
3.1 Preâmbulo	10
3.2 Introdução	10
3.3 Regulador Linear Quadrático	13
3.4 Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞	16
3.5 Controle \mathcal{H}_2 Robusto	22

3.5.1	Problema \mathcal{H}_2 via Abordagem Clássica	22
3.5.2	Parametrização Convexa do Problema \mathcal{H}_2	25
3.5.3	Problema \mathcal{H}_2 de Custo Garantido	28
3.6	Controle \mathcal{H}_∞ Robusto	30
3.6.1	Problema \mathcal{H}_∞ via Abordagem Clássica	30
3.6.2	Parametrização Convexa do Problema \mathcal{H}_∞	33
3.6.3	Problema \mathcal{H}_∞ de Custo Garantido	35
3.7	Controle via Parametrização de Youla	37
3.8	Conclusões	40
4	Modelos Matemáticos de Uma Suspensão Veicular	42
4.1	Preâmbulo	42
4.2	Introdução	42
4.3	Modelo Unidimensional	44
4.3.1	Modelo Unidimensional sem Controlador	45
4.3.2	Modelo Unidimensional com Controlador	45
4.4	Modelo Bidimensional	46
4.4.1	Modelo Bidimensional sem Controlador	47
4.4.2	Modelo Bidimensional com Controlador	48
4.5	Modelo Tridimensional	49
4.5.1	Modelo Tridimensional sem Controlador	50
4.5.2	Modelo Tridimensional com Controlador	52
4.6	Incertezas de Modelo	53
4.7	Conclusões	54

5	Resultados Numéricos	55
5.1	Introdução	55
5.2	Simulações com o Modelo Unidimensional	56
5.3	Simulações com o Modelo Bidimensional	65
5.4	Simulações com o Modelo Tridimensional	78
5.5	Projeto via Parametrização de Youla	91
5.6	Conclusões	95
6	Conclusões Gerais e Perspectivas	97
	Bibliografia	99
A	Modelo Tridimensional	103
A.1	Modelo Tridimensional sem Controlador	103
A.2	Modelo Tridimensional com Controlador	114

Lista de Figuras

3.1	Sistema de controle em malha aberta	11
3.2	Sistema de controle em malha fechada	11
3.3	Sistema de controle (problema LQR)	14
3.4	Sistema de controle (problema \mathcal{H}_2)	22
3.5	Planta generalizada	37
3.6	Model-matching	39
4.1	Modelo unidimensional sem controlador	44
4.2	Modelo unidimensional com controlador	44
4.3	Modelo bidimensional sem controlador	46
4.4	Modelo bidimensional com controlador	46
4.5	Modelo tridimensional sem controlador	50
4.6	Modelo tridimensional com controlador	50
5.1	Dirigibilidade	57
5.2	Espaço de trabalho	57
5.3	Força de controle	58
5.4	Dirigibilidade	59
5.5	Espaço de trabalho	59

5.6	Força de controle	59
5.7	Dirigibilidade	60
5.8	Espaço de trabalho	60
5.9	Força de controle	60
5.10	Dirigibilidade	61
5.11	Espaço de trabalho	61
5.12	Força de controle	62
5.13	Valores singulares	62
5.14	Dirigibilidade	63
5.15	Espaço de trabalho	63
5.16	Força de controle	63
5.17	Valores singulares	63
5.18	Dirigibilidade	64
5.19	Espaço de trabalho	64
5.20	Força de controle	64
5.21	Valores singulares	64
5.22	Dirigibilidade ($\pm 20\%$ de incertezas)	68
5.23	Espaço de trabalho ($\pm 20\%$ de incertezas)	68
5.24	Deslocamento y_c e balanço ($\pm 20\%$ de incertezas)	69
5.25	Força de controle ($\pm 20\%$ de incertezas)	69
5.26	Dirigibilidade ($\pm 50\%$ de incertezas)	70
5.27	Espaço de trabalho ($\pm 50\%$ de incertezas)	70
5.28	Deslocamento y_c e balanço ($\pm 50\%$ de incertezas)	71

5.29	Força de controle ($\pm 50\%$ de incertezas)	71
5.30	Dirigibilidade ($\pm 20\%$ de incertezas)	74
5.31	Espaço de trabalho ($\pm 20\%$ de incertezas)	74
5.32	Deslocamento y_c e balanço ($\pm 20\%$ de incertezas)	75
5.33	Força de controle ($\pm 20\%$ de incertezas)	75
5.34	Dirigibilidade ($\pm 50\%$ de incertezas)	76
5.35	Espaço de trabalho ($\pm 50\%$ de incertezas)	76
5.36	Deslocamento y_c e balanço ($\pm 50\%$ de incertezas)	77
5.37	Força de controle ($\pm 50\%$ de incertezas)	77
5.38	Perfil da lombada assimétrica	79
5.39	Dirigibilidade (falha no atuador td)	81
5.40	Dirigibilidade (falha no atuador td)	81
5.41	Rolagem e balanço (falha no atuador td)	82
5.42	Rolagem e balanço (falha no atuador td)	82
5.43	Dirigibilidade ($\pm 50\%$ de incertezas)	83
5.44	Dirigibilidade ($\pm 50\%$ de incertezas)	83
5.45	Rolagem e balanço ($\pm 50\%$ de incertezas)	84
5.46	Rolagem e balanço ($\pm 50\%$ de incertezas)	84
5.47	Dirigibilidade (falha no atuador dd)	87
5.48	Dirigibilidade (falha no atuador dd)	87
5.49	Rolagem e balanço (falha no atuador dd)	88
5.50	Rolagem e balanço (falha no atuador dd)	88
5.51	Dirigibilidade ($\pm 50\%$ de incertezas)	89

5.52	Dirigibilidade ($\pm 50\%$ de incertezas)	89
5.53	Rolagem e balanço ($\pm 50\%$ de incertezas)	90
5.54	Rolagem e balanço ($\pm 50\%$ de incertezas)	90
5.55	Forma padrão	91
5.56	Sistema com 2 GDL	91
5.57	Suspensão passiva	93
5.58	Resposta na frequência de y_s	94
5.59	Resposta na frequência de y_c	94
5.60	Resposta ao degrau de y_s	94
5.61	Resposta ao degrau de y_c	94
5.62	Resposta ao degrau do espaço de trabalho da suspensão	95
5.63	Resposta ao degrau da força de controle	95
5.64	Resposta ao degrau da derivada da força de controle	95
A.1	Modelo tridimensional sem controlador	103
A.2	Bases Móveis	104
A.3	Diagrama de corpo livre	108
A.4	Modelo tridimensional com controlador	114

Lista de Tabelas

5.1	Normas \mathcal{H}_2 . Sistema unidimensional com incertezas de $\pm 20\%$	58
5.2	Normas \mathcal{H}_2 . Sistema unidimensional com incertezas de $\pm 50\%$	61
5.3	Normas \mathcal{H}_∞ . Sistema unidimensional com incertezas de $\pm 20\%$	62
5.4	Normas \mathcal{H}_∞ . Sistema unidimensional com incertezas de $\pm 50\%$	63
5.5	Normas \mathcal{H}_2 . Sistema unidimensional com incertezas de $\pm 20\%$	65
5.6	Normas \mathcal{H}_∞ . Sistema unidimensional com incertezas de $\pm 20\%$	65
5.7	Normas \mathcal{H}_2 . Sistema bidimensional com incertezas de $\pm 20\%$	67
5.8	Normas \mathcal{H}_2 . Sistema bidimensional com incertezas de $\pm 50\%$	67
5.9	Normas \mathcal{H}_∞ . Sistema bidimensional com incertezas de $\pm 20\%$	72
5.10	Normas \mathcal{H}_∞ . Sistema bidimensional com incertezas de $\pm 50\%$	73
5.11	Normas \mathcal{H}_2 . Sistema tridimensional com incertezas de $\pm 50\%$	80
5.12	Normas \mathcal{H}_∞ . Sistema tridimensional com incertezas de $\pm 50\%$	85

Nomenclatura

A, B, C, \dots	: indicam matrizes
x, y, z, \dots	: indicam vetores
$\ x\ _p$: norma p do vetor x
$\text{Tr}\{\cdot\}$: traço de $\{\cdot\}$
$\sup\{\cdot\}$: supremo de $\{\cdot\}$
$\sup \text{ess}\{\cdot\}$: supremo essencial de $\{\cdot\}$
$\bar{\sigma}\{\cdot\}$: máximo valor singular de $\{\cdot\}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$: produto interno
$\mathbf{I}, \mathbf{0}$: matriz identidade, e nula, de dimensão apropriada
$A > \mathbf{0}$ ($< \mathbf{0}$)	: indica que a matriz A é definida positiva (negativa)
A'	: transposta da matriz A
\mathbb{R}	: conjunto dos números reais
\mathbb{R}^+	: conjunto dos números reais não negativos
\mathbb{R}^n	: espaço vetorial real de dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times m}$: espaço das matrizes de dimensões $n \times m$
K_p	: rigidez do pneu
K_s, K_{sd}, K_{st}	: rigidez da suspensão
K_{bd}, K_{bt}	: rigidez das barras torcionais
C_s, C_{sd}, C_{st}	: coeficiente de amortecimento da suspensão
M_c	: massa do corpo principal
$M_s, M_{sd}, M_{st}, M_{de}, M_{te}, \dots$: massa das suspensões
I_{xx}, I_{zz}	: momentos de inércia do corpo principal
$b_c, l_t, l_d, l_{sd}, l_{st}$: parâmetros relativos à geometria do veículo
y_c	: coordenadas associadas com o corpo principal
$y_s, y_{sd}, y_{st}, y_{de}, y_{te}, \dots$: coordenadas associadas com as suspensões
θ, ψ	: ângulos de rolagem e de balanço
$w, w_d, w_t, w_{de}, w_{te}, \dots$: excitações provenientes da via

Resumo

Santos, Juan Francisco Camino dos. *Análise de Suspensões Veiculares Utilizando Técnicas de Controle Robusto*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 120p. Dissertação (mestrado).

Esta dissertação apresenta aplicações das teorias de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ via desigualdades matriciais lineares, e da parametrização de Youla em suspensões ativas. São abordados três modelos dinâmicos diferentes: o unidimensional, o bidimensional, e o tridimensional. Não foi considerada a implementação prática dos controladores projetados, restringindo-se o trabalho às análises comparativas das técnicas utilizadas.

Os problemas clássicos de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por realimentação completa de estado, obtidos a partir da solução de uma equação do tipo Riccati, são convertidos em problemas convexos similares, podendo assim ser resolvidos por um conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMI's). Este novo problema permite levar em consideração num sistema incertezas paramétricas descritas por um domínio poliedral convexo limitado.

A parametrização de Youla também é investigada. Esta metodologia pode ser vista como ponto de partida para outras técnicas, pois possibilita investigar o limite de desempenho do sistema. A abordagem aqui desenvolvida não leva em consideração incertezas paramétricas (mas poderia considerá-las) e é aplicada unicamente no sistema unidimensional.

Os modelos dinâmicos da suspensão veicular são levantados utilizando-se as equações de Newton-Euler. As hipóteses adotadas são: amortecedor, mola e atuador como sendo ideais, e movimento de corpo rígido. O modelo unidimensional possui dois graus de liberdade, um para o eixo e outro para o corpo principal. O modelo bidimensional inclui a mais o modo de balanço. O modelo tridimensional, permite investigar todos os modos de corpo rígido.

Simulações numéricas são efetuadas para cada um dos modelos dinâmicos levantados. As análises comparativas são baseadas na triade força de controle, espaço de trabalho da suspensão e dirigibilidade.

Palavras chaves:

Controle robusto, suspensão ativa, dinâmica veicular e otimização \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Abstract

Santos, Juan Francisco Camino dos. *Vehicular Suspension Analysis Utilizing Robust Control Techniques*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 120p. Dissertação (mestrado).

This thesis presents an analysis of the \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust control theory via linear matrix inequalities, and an approach by Youla parametrization of the closed loop transfer matrix, applied to the design of three different vehicular suspension models. The focus is on comparative analyses of the techniques employed rather than on a specific practical implementation.

The classical \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ optimal control problem through full state feedback, obtained from the solution of a Riccati type equation, can be turned into similar convex problems, which can be solved by a set of linear matrix inequalities. This procedure permits to take into account parametric uncertainties in the system, analyzing the uncertainty space by computing only the vertices of a polyhedral convex bounded domain.

An optimal control technique via Youla parametrization is also analyzed. This approach can be viewed as a benchmark for other techniques. In the specific problem here solved, uncertainties are not taken into account, but this could be done. This technique is only applied to a quarter-car model, the simplest one.

The dynamic models of the vehicular suspension are built by using Newton-Euler's law. Some assumptions have been adopted, such as ideal dampers, spring stiffness, and band width actuators, and rigid body motion. The first suspension model is unidimensional, with two degrees of freedom - one for the body mass mode, and another for the axle mass mode. The second model is twodimensional, permitting to analyze the pitch mode. The last one, treedimensional, permits to investigate all the rigid body modes.

Numerical results are carried out for the three models, within the whole span of uncertainties. The comparative analyses are based on the trade-off between the control force, the suspension stroke, and the road-holding ability.

Key Words:

Robust control, active suspension, \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ optimization and vehicular dynamics.

Capítulo 1

Introdução

Suspensões ativas são realmente necessárias? SHARP & CROLLA (1987) concluem que numa situação complexa¹ o melhor desempenho possível de uma suspensão passiva é bastante inferior ao de uma suspensão ativa. Portanto, a necessidade de se alcançar rigorosas especificações de desempenho tem motivado pesquisadores a trabalharem nas aplicações das técnicas de controle ativo em suspensões veiculares. Estes mecanismos utilizam-se de atuadores cuja entrada de comando é dada pela saída de um controlador, possibilitando modificar as características dinâmicas do sistema em tempo real.

As finalidades básicas de uma suspensão podem ser assim resumidas: suportar o peso do veículo e prover dirigibilidade e segurança ao longo da via; isolar o monobloco e os passageiros de distúrbios, tais como os provenientes das irregularidades da via e das forças externas. O primeiro dos objetivos pode ser alcançado por uma suspensão “dura” enquanto que o segundo necessita de uma suspensão “mole”. Ou seja, têm-se objetivos conflitantes entre si.

Desta forma, projetos de suspensões ativas têm sido largamente analisados, pois a necessidade de conciliar fatores conflitantes pode ser melhor tratada via processos de otimização, os quais fornecem controladores ótimos ou sub-ótimos capazes de atingir determinadas especificações de desempenho ou de satisfazer determinadas restrições.

Os primeiros trabalhos nesta área datam da década de 70 e baseiam-se, principalmente, no enfoque do Regulador Linear Quadrático, que fornece controladores ótimos em relação a um funcional de custo quadrático. A solução obtida a partir desta metodologia é simples, direta e expressa em termos de uma equação do tipo Riccati. Possui ainda a vantagem de poder ser resolvida por eficientes algoritmos numéricos.

Vale salientar que o problema do regulador linear quadrático nada mais é que

¹Por complexo entende-se que o projetista tenta formular seu modelo matemático de forma a representar o mais fielmente possível o comportamento real do sistema.

a minimização da norma \mathcal{H}_2 , sujeita a uma determinada condição inicial. Similarmente é possível minimizar a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência do sistema em malha fechada. Neste caso, a solução ótima do problema \mathcal{H}_∞ não é mais dada por uma expressão analítica, mas sim por um processo iterativo.

Infelizmente, projetos baseados em tais técnicas de controle são ótimos apenas para um conjunto de parâmetros nominais, tanto do modelo como do funcional de custo. Ou seja, se existir algum parâmetro de valor desconhecido, ou ainda, se o valor de um determinado parâmetro variar durante o tempo de execução, o controlador deixa de ser ótimo. Além do mais, não há como garantir estabilidade, podendo o desempenho do sistema decair de forma imprevisível, gerando um comportamento indesejável. Na realidade, isto é uma hipótese bastante realística que deve ser levada em consideração nos projetos de suspensões veiculares, pois geralmente a carga do veículo, o tipo da roda e a pressão do pneu, por exemplo, mudam constantemente.

As técnicas de controle robusto, apresentadas em capítulos posteriores, são capazes, por outro lado, de lidar com parâmetros incertos, o que é de grande utilidade para o projetista preocupado em manter uma determinada margem de segurança. Uma das formas de se avaliar o comportamento desses controladores, que levam em consideração incertezas, é compará-los aos controladores ótimos obtidos ao assumir-se apenas o conjunto de parâmetros nominais.

O desempenho dos controladores robustos também pode ser comparado com o de um sistema passivo. Na maioria dos artigos nesta área, principalmente naqueles baseados em modelos mais complexos, o erro estacionário causado pelo controlador não é levado em consideração. Neste trabalho é aplicada uma mudança de variável que possibilita anular este erro.

As técnicas de controle a serem descritas são, basicamente, as de controle robusto \mathcal{H}_2 , controle robusto \mathcal{H}_∞ e uma simples apresentação da parametrização de Youla. No que se refere ao projeto \mathcal{H}_2 , pode-se dizer que é uma formulação alternativa para o mesmo problema de otimização que o do regulador linear quadrático, admitindo a presença de incertezas estruturadas do tipo poliedral convexa. Este projeto leva a um controlador de custo garantido, ou seja, um controlador que assegura um conhecido limitante superior no índice de desempenho para todo o espaço de incertezas. O projeto \mathcal{H}_∞ possui características semelhantes ao \mathcal{H}_2 , no que diz respeito à possibilidade de ser tratado via programação convexa, entretanto é fundamentado numa norma diferente. No caso da parametrização de Youla, o enfoque empregado não leva em consideração incertezas, embora estas pudessem ter sido incorporadas. Isto não foi feito porque o custo computacional já era bastante alto para o modelo nominal, e para que as incertezas fossem consideradas ter-se-ia que analisar algoritmos eficientes que pudessem ser implementados, o que fugiria ao escopo deste trabalho. A finalidade de se apresentar esta técnica é que suas características são completamente diferentes das anteriores, permitindo resolver problemas do tipo multiobjetivo com restrições.

Este trabalho estrutura-se da seguinte forma: no primeiro capítulo é apresentado um levantamento bibliográfico com o intuito de localizar o tema estudado num contexto mais amplo, descrevendo o desenvolvimento das técnicas e de suas aplicações em suspensões ativas. No capítulo relativo à teoria de controle são investigados os problemas do regulador linear quadrático, do controlador robusto \mathcal{H}_2 , do controlador robusto \mathcal{H}_∞ , de suas parametrizações convexas e da parametrização de Youla. No capítulo de modelamento é formulado o equacionamento dinâmico da suspensão veicular para o sistema sem e com controlador e são discutidos os aspectos e as hipóteses utilizadas. No capítulo de resultados são analisadas e comparadas, para cada modelo, as técnicas de controle apresentadas anteriormente. Por último, nas conclusões, são comentados os objetivos propostos ao longo do tema estudado e quais os tópicos correlacionados, que podem ainda ser investigados.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Projetos de suspensões ativas vêm sendo pesquisados há pelo menos três décadas. Não obstante, é ainda um ramo frutífero para os profissionais da área, pois o crescente avanço tecnológico da teoria de controle aliado à disponibilidade de microprocessadores cada vez mais rápidos têm possibilitado uma análise experimental das técnicas estudadas.

É interessante perceber que os progressos na área de suspensão ativa são dependentes dos obtidos no campo das teorias de controle. Portanto, seu desenvolvimento indica também o da teoria em questão, claro que de uma forma completamente resumida, pois as teorias empregadas são apenas algumas poucas dentro de uma gama extremamente grande de técnicas que podem ou não ser aplicadas.

Neste capítulo, é apresentada uma revisão sobre o problema do controle ativo de suspensões automotivas, de forma cronológica e por seção. Primeiramente, são tratados os casos lineares quadráticos, que correspondem à grande maioria. Em seguida, são abordados os sistemas robustos, semi-ativos e com “preview”.

2.1 Lineares Quadráticos

THOMPSON (1971), um dos primeiros pesquisadores neste campo, analisou o comportamento dinâmico do modelo unidimensional de uma suspensão veicular do ponto de vista de um filtro passa-baixa. Projetou um controlador, na realidade um compensador clássico de segunda ordem, para que a função de resposta em frequência do sistema hidráulico em malha fechada atingisse um patamar desejado. A implementação deste sistema consistia num atuador ligado em paralelo com uma mola, alimentado unicamente pela medida da aceleração do corpo principal. O autor observou que para uma melhor filtragem dos distúrbios provenientes da via faziam-se necessários grandes movimentos da roda. Estas grandes amplitudes, infelizmente, causavam perda de dirigibilidade, e para minimizá-las ele investigou a possibilidade

de acoplar um absorvedor dinâmico à suspensão.

Num segundo passo, THOMPSON (1976) incorporou técnicas de controle ótimo, já que no caso anterior não havia garantia de otimalidade. Com esta finalidade, ele adotou um índice de desempenho que representava adequadamente as especificações do projeto. A otimização foi baseada na teoria do regulador linear quadrático, que possibilitou converter um problema de rastreamento num de regulador. Isto deveu-se: à associação feita entre o espectro de uma via com o valor médio quadrático da resposta de um sistema à uma excitação do tipo degrau; a uma mudança de variável apropriada; a um índice de desempenho dado por uma soma de integrais quadráticas relativas ao conforto, ao espaço de trabalho da suspensão e à dirigibilidade. Vale ressaltar que o resultado final obtido possuía uma implementação prática viável.

Já em HROVAT & HUBBARD, 1981, foi estudado o problema de controle ativo num sistema unidimensional de apenas um grau de liberdade, com base na teoria estocástica para o regulador linear quadrático. O índice de desempenho empregado não foi mais uma soma de integrais quadráticas como em THOMPSON, 1976, mas sim sua esperança. Os controladores foram dimensionados para os casos especiais: minimizar o espaço de trabalho juntamente com o “jerk”; minimizar o espaço de trabalho juntamente com a aceleração do corpo principal. Obtiveram-se curvas características dos autovalores do sistema em malha fechada relativas aos valores de ponderação. Num artigo mais recente (ELMADANY, 1988) o problema estocástico também foi pesquisado. Desta vez, num modelo bem mais complexo de onze graus de liberdade, relativos a uma jamanta.

O trabalho publicado anteriormente por THOMPSON (1976) foi aperfeiçoado em THOMPSON, 1984, permitindo que se projetasse um modelo de suspensão ativa que pudesse ser acoplado a uma mola de rigidez desconhecida. Para que isto fosse possível alterou-se a lei de controle de forma a incluir um termo extra de rigidez. Mostrou-se, também, que o sistema final podia ser implementado utilizando-se unicamente a medida do deslocamento relativo entre o corpo principal e o eixo, ao contrário dos casos anteriores onde era necessário medir o deslocamento relativo entre o corpo e a via. Esta demonstração baseou-se no fato de que o espectro de frequência do deslocamento do eixo aproximava-se do da via, podendo-se, portanto, substituir-se um pelo outro. Isto conseqüentemente leva a uma solução sub-ótima que, em suas análises, não difere significativamente da ótima.

Um extensivo trabalho sobre o potencial de se aumentar o desempenho de uma suspensão ativa para o caso unidimensional pode ser encontrado em CHALASANI, 1987a, e sua extensão para o caso tridimensional em CHALASANI, 1987b. No primeiro artigo, o funcional de custo era adimensional e a dirigibilidade era dada pela velocidade do eixo, ao invés do seu deslocamento. Concluiu-se que o sistema ativo tem uma aceleração vertical do corpo principal inferior à do passivo, em pelo menos 15%. Nas análises baseadas no modelo tridimensional, obtiveram-se resultados similares aos do modelo unidimensional. Portanto, para um estudo dos conceitos

fundamentais o modelo unidimensional pode ser empregado. Entretanto, para uma síntese final na qual se deseje verificar as interações que existem entre os movimentos de balanço e rolagem, e entre outros acoplamentos, o modelo tridimensional deve ser utilizado.

As limitações teóricas de uma suspensão ativa foram descritas por KARNOPP (1986). Seu trabalho baseia-se nas funções de transferência ideais entre a via e o eixo e entre a via e o corpo. Desta forma, ele concluiu que, dependendo dos parâmetros do veículo, uma suspensão ativa por realimentação completa de estado não oferecia grandes vantagens sobre o sistema passivo ou semi-ativo, principalmente quando visto pela relação custo-benefício.

Caso o sistema não seja completamente observável ou não tenha todos os estados disponíveis para realimentação, o método descrito em WILSON *et al.*, 1986 pode ser empregado. Seu algoritmo usa uma transformação de coordenadas que particiona os modos observáveis e os não observáveis. Inicialmente são atribuídos valores para os parâmetros da lei de controle que, em seguida, são recalculados por uma técnica de minimização via gradiente. O resultado final não difere muito do encontrado em THOMPSON, 1984.

Restrições derivativas com realimentação de saída foram usadas em THOMPSON & DAVIS, 1988, e restrições integrais foram usadas em DAVIS & THOMPSON, 1988, ELMADANY, 1990, e em ELMADANY, 1992, com o intuito de compensar erros estacionários em resposta às excitações do tipo rampa e cargas estáticas. As características do primeiro trabalho são: a inclusão nas equações do modelo de uma variável representativa de uma carga estática genérica; o projetado de um observador de estado; a realimentação da força de controle por um compensador proporcional mais integral. Já no segundo trabalho, as equações de estado do modelo unidimensional obtidas diferem das anteriores, pois a integral do deslocamento relativo entre o corpo e o eixo foi adicionada ao sistema. Em ambos os artigos, os resultados apresentados foram bastante semelhantes aos obtidos em THOMPSON, 1976.

Em HROVAT, 1990, mostrou-se que o sistema de um grau de liberdade (eixo de massa zero) representa um limite do melhor desempenho possível para o modelo com dois graus de liberdade. Foi analisada a vantagem da inclusão de absorvedores dinâmicos no sistema ativo e foi pesquisado o caso limite de nenhuma penalidade sobre a força de controle.

Foi estudado em SHARP & WILSON, 1990, a importância de se adicionar correlações entre as entradas envolvendo atraso de tempo ("time delay"). Para isto, a excitação nos dois lados do veículo foi dividida em componentes simétricas e não simétricas. Termos relativos ao atraso de tempo foram incorporados no funcional de custo quadrático. Isto, infelizmente, impossibilitou a obtenção de uma solução analítica para a lei de controle. Entretanto, métodos numéricos podem ser empregados para a determinação do ganho ótimo. Em CROLLA & ABDEL HADY, 1991 o estudo foi estendido para um modelo tridimensional, e em ELMADANY & ABDUL-

JABBAR, 1991 o sistema ativo foi comparado a um semi-ativo, e foi investigada a disponibilidade completa ou não dos estados para realimentação.

O problema de controle de uma suspensão automotiva via regulador LQG estocástico foi retomado por ELBEHEIRY & KARNOPP (1996). Foram analisados cinco tipos de suspensões: totalmente ativo, ativo limitado, passivo ótimo, amortecedor ativo e sistema com amortecedor variável. Todos os casos estudados foram para isolamento de vibração com restrições no espaço de trabalho da suspensão.

2.2 Robustos, Semi-ativos e “Previews”

KASHANI & KIRICZI (1992) estudaram a estabilidade robusta de uma suspensão ativa usando o controlador LQG. Reformularam o problema LQG em termos do problema \mathcal{H}_2 no domínio da frequência. Incorporaram na formulação do problema \mathcal{H}_2 incertezas estruturadas, representando as variações paramétricas do sistema. Projetaram o controlador baseando-se no teorema do pequeno ganho (“*small gain theorem*”).

Em MICHELBERG *et al.*, 1993 foi investigada a falta de robustez do problema LQR frente a incertezas e foi apresentada a formulação \mathcal{H}_∞ e suas características de robustez. Como solução proposta, foi usada uma combinação de ambos os métodos, conhecida como RLQR. A matriz Hamiltoniana do problema RLQR assemelha-se à do problema LQR, onde foram inclusos dois termos similares ao termo indefinido do problema \mathcal{H}_∞ . E, finalmente, foi investigado o problema misto \mathcal{H}_∞ /RLQR, permitindo levar em consideração as incertezas paramétricas e os distúrbios externos.

Em CHEN *et al.*, 1995, foram propostas condições de suficiência para a estabilidade robusta das suspensões ativa via controlador LQG com incertezas na entrada de distúrbio e com perturbações paramétricas variantes com o tempo.

Foi investigada em HAYAKAWA *et al.*, 1993, a teoria do controlador \mathcal{H}_∞ sobre um modelo dinâmico bastante complexo. Foram levadas em consideração as incertezas paramétricas e a dinâmica real do atuador. Foram efetuados testes experimentais para validar o controlador proposto, tanto em termos de desempenho como de robustez frente a incertezas dos distúrbios provenientes da via.

ULSOY *et al.* (1994), analisaram a robustez de suspensões ativas utilizando os controladores LQ, LQG e LTR. As incertezas utilizadas foram provenientes da impossibilidade de prever os valores exatos dos parâmetros da suspensão e da negligência no modelamento da dinâmica dos atuadores e sensores. Os autores verificaram que o LQR desenvolvia um comportamento mais robusto do que o LQG. Mas com o uso da técnica LTR as propriedades de robustez do LQG podiam ser melhoradas.

Em CAMINO *et al.*, 1997a, foi feita uma análise comparativa das técnicas \mathcal{H}_2 e LQR usando incertezas paramétricas num modelo unidimensional de uma suspensão automotiva. O espaço de incertezas era descrito por um politopo convexo. O problema de custo garantido \mathcal{H}_2 foi resolvido, de forma similar, por um problema de otimização via LMI's, possibilitando assim incorporar as incertezas. Os resultados mostraram que os controladores obtidos possuem robustez frente às variações paramétricas e também garantem estabilidade quadrática ao sistema, o que não é possível de ser estabelecido pelo projeto LQR. Os resultados das simulações deste trabalho também são apresentados no capítulo de resultados numéricos

Em BARABANOV & SOKOLOV, 1996, o projeto de uma suspensão ativa teve como base a otimização da norma l_1 com restrições l_∞ sobre os distúrbios na planta e nas medidas. Uma solução completa foi apresentada, ou seja, uma expressão para o valor mínimo do funcional l_1 e para o controlador ótimo, do tipo integro-diferencial, foi desenvolvida.

Suspensões semi-ótimas projetadas usando-se "preview" e técnica de controle ótimo, aplicados num modelo bidimensional, podem ser encontrados em MARTINUS *et al.*, 1996. A estratégia de controle foi baseada em: restrições no atuador, que era um amortecedor variável, e nos parâmetros representativos do conforto e da segurança. A solução encontrada forneceu desempenho superior ao de uma suspensão passiva. Esta metodologia pode ser aplicada de uma forma geral a qualquer modelo de suspensão.

A utilização da parametrização de Youla pode ser encontrada em CAMINO *et al.*, 1997b. Neste trabalho foi projetado um controlador por realimentação dinâmica de saída para uma suspensão unidimensional ativa utilizando-se otimização multi-objetiva afim no parâmetro Q . Foi mostrado que sobre este paradigma as restrições físicas do modelo e objetivos desejados podem ser expressos de uma forma mais realística, e que este tipo de abordagem leva ao limite de desempenho do sistema. O sistema demonstrou ser de fácil implementação, exigindo unicamente as medidas dos deslocamentos do eixo e do corpo principal. Os resultados das simulações deste artigo também são apresentados no capítulo de resultados numéricos

Uma outra abordagem multiobjetiva pode ser encontrada em TAKAHASHI *et al.*, 1997, na qual foi apresentada uma metodologia para a otimização de uma suspensão ativa. O método apresentado pode ser aplicado a qualquer técnica de controle que empregue um funcional de custo sobre o conforto, o espaço de trabalho da suspensão e a dirigibilidade. No estudo foram utilizados os controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Esta metodologia leva a uma solução do tipo Pareto-ótimo (local), e permite que sejam especificadas restrições sobre os controladores em termos dos objetivos primários. Simulações foram efetuadas mostrando a superioridade da metodologia apresentada sobre projetos clássicos.

Um problema diferente de controle de suspensão ativa foi abordado em WAL & JAGER, 1996, onde o enfoque dirige-se à otimização da seleção de sensores e atu-

adores, e não à otimização do controlador. Por seleção entende-se “uma apropriada escolha de número, localização e tipo”. A idéia central deste artigo é eliminar as possíveis combinações de sensores e atuadores para os quais não seja possível encontrar um controlador que atinja um nível específico de desempenho nominal, e ou estabilidade robusta. Todas as combinações são sujeitas a teste de viabilidade, que são condições necessárias para a existência dos controladores estáveis que satisfazem um determinado valor de norma \mathcal{H}_∞ .

Capítulo 3

Formulação do Problema de Controle Ótimo

3.1 Preâmbulo

Neste capítulo é investigada a teoria de controle ótimo. Não em um contexto geral, mas sim o enfoque dos *controladores robustos* \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , suas parametrizações convexas, e uma abordagem utilizando-se da *parametrização de Youla*.

Primeiramente, é apresentada na introdução, uma idéia dos conceitos relativos a controle, aos enfoques clássico e moderno, e ao problema de otimização das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Em seguida, o problema do regulador linear quadrático é desenvolvido de forma sucinta. Algumas noções sobre os *espaços* \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , cálculo das respectivas normas e alguns resultados teóricos preliminares são estudados na sequência, permitindo nas seções posteriores formular o problema do controlador robusto \mathcal{H}_2 e do controlador robusto \mathcal{H}_∞ , analisados por um enfoque convexo. Por último, é descrito o projeto de controladores utilizando a parametrização de Youla.

3.2 Introdução

Sistemas de controle podem ser, de uma forma ampla, definidos como mecanismos atuantes em um determinado processo, capazes de modificar, acrescentar e impor determinadas características. Por processo, entende-se qualquer fenômeno descrito em uma forma matemática, seja este físico, químico, biológico, econômico, etc. De uma forma geral um sistema de controle pode ser representado por quatro blocos distintos (funções): controle, atuador, planta e sensor. A planta sendo o processo (modelo) que se quer controlar; o controle tendo a função de estabelecer a lei de comando que dirige o atuador; o atuador sendo o mecanismo que age diretamente na planta modificando seu comportamento; e por último, o sensor que

monitora determinadas saídas da planta redirecionando-as para o controle.

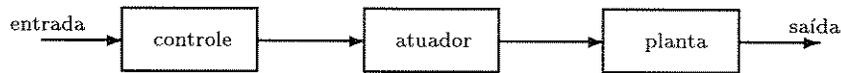


Figura 3.1: Sistema de controle em malha aberta

Os primeiros métodos de controle eram do tipo malha aberta (figura 3.1); ou seja, a saída da planta não causa nenhum efeito no controlador. A ação de controle, neste caso, independe de como se comporta a planta sob seu efeito ou sob efeito de um distúrbio externo.

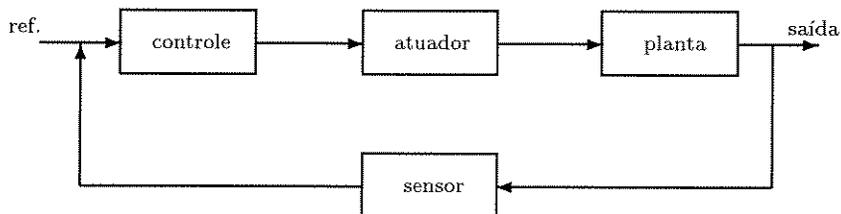


Figura 3.2: Sistema de controle em malha fechada

Por outro lado, no sistema de controle em malha fechada (figura 3.2), a saída da planta é um fator essencial; pois esta, após medida por um sensor, será realimentada no controlador. Portanto, há a possibilidade de se definir uma lei de controle que pondere o quanto o comportamento da planta está desviando-se de um padrão preestabelecido.

Para que o projeto de um controlador seja bem elaborado (BOYD & BARRATT, 1991), faz-se necessário que determinados índices ou especificações sejam satisfeitos. Os índices mais comumente empregados são: especificações de desempenho, de robustez e da lei de controle. A especificação de desempenho dá uma idéia de como o sistema em malha fechada deve atuar quando sujeito a distúrbios ou ainda de como o sistema rastreia uma determinada entrada de comando. Nas especificações de robustez é interessante saber como o sistema em malha fechada comporta-se frente a uma classe de incertezas nos parâmetros do modelo, imprecisões no modelo ou dinâmicas não modeladas (garantindo uma determinada faixa de desempenho). Nas especificações da lei de controle o projetista está mais preocupado com sua implementação prática, delimitando a forma do controle, linear e invariante no tempo, descentralizado, de determinada ordem e assim por diante.

A teoria de controle segue por dois enfoques bem distintos: O *método clássico* e o *método moderno*. Como o nome indica, o método clássico antecede ao moderno, compreendendo os anos 1930–1950. Já a abordagem moderna pode ser considerada como originária da década de 60. Para uma detalhada exposição dessas técnicas, as referências OGATA, 1993, FRANKLIN *et al.*, 1994, e as nelas citadas, são bem interessantes. Ambas as metodologias podem ser tratadas em dois planos distintos:

na em teoria de sistemas contínuos e na *teoria de sistemas discretos (controle digital)*. Neste trabalho, as formulações são baseadas na teoria de sistemas contínuos no tempo.

O enfoque clássico caracteriza-se principalmente por ser uma análise no domínio da frequência. Baseia-se principalmente no *método do lugar das raízes*, que possibilita determinar os pólos em malha fechada a partir dos pólos e zeros da função de transferência em malha aberta, considerando o ganho de realimentação como parâmetro; e no *método de resposta em frequência*, que usa o critério de estabilidade de Nyquist, possibilitando assim investigar a estabilidade absoluta e relativa de sistemas em malha fechada a partir do conhecimento de suas características de resposta em frequência de malha aberta. Os compensadores (controladores) geralmente empregados, neste caso, são os do tipo proporcional, integral e derivativo; ou uma combinação destes (PID's), controladores em avanço ou em atraso. Vale ressaltar que nesta metodologia é bastante difícil projetar um controlador que satisfaça um desempenho prescrito de uma forma ótima. Geralmente, as especificações são cumpridas de maneira aproximada, alternando heurísticamente os parâmetros de projeto. A abordagem clássica é geralmente aplicada em sistemas SISO – “Single Input Single Output”, pois nestes as relações matemáticas no domínio da frequência são mais facilmente estabelecidas do que no caso MIMO – “Multiple Input Multiple Output”, embora uma abordagem bastante completa do caso multivariável possa ser encontrada em MACIEJOWSKI, 1989 e uma análise de robustez em CRUZ, 1996.

No contexto moderno, também conhecido como *método no espaço de estado*, a abordagem é feita no domínio do tempo. Passa-se a não mais trabalhar com funções de transferência e sim com equações diferenciais ordinárias. Isso traz uma série de vantagens, principalmente: facilidade de aplicação no caso MIMO, disponibilidade de numerosas ferramentas computacionais eficientes, manipulações totalmente descritas através da álgebra matricial, aplicabilidade a sistemas não lineares e variantes no tempo. Neste caso, a planta, ou melhor, sua equação diferencial, é escrita na forma de espaço de estado, usando-se para isso variáveis de estado.

Este tipo de enfoque possui uma característica peculiar: é possível projetar sistemas de controle ótimo com respeito a determinados critérios de desempenho. A teoria que permite estabelecer as condições ótimas é conhecida como teoria do controle ótimo, estabelecida pelo *princípio da otimalidade* e pelo *princípio do mínimo de Pontryagin* (KIRK, 1970, ATHANS & FALB, 1966). Um critério de desempenho bastante utilizado é o índice de desempenho quadrático, que penaliza o vetor de estado e o controle, dando margem ao problema LQ – “linear quadrático”. A minimização do índice quadrático no problema LQ leva a uma lei de controle linear, obtida através da solução de uma equação de Riccati. Uma referência completa sobre controle ótimo via métodos lineares quadráticos é ANDERSON & MOORE, 1990.

De particular interesse é o LQR – “Linear Quadratic Regulator”, que permite projetar um controlador que leva o vetor de estado, a partir de uma condição inicial

x_0 no tempo t_0 , a um referencial fixo em um intervalo finito de tempo. Geralmente, alguns ou todos os estados não são disponíveis para realimentação, necessitando-se estimá-los. Neste caso, é empregado o controlador LQG – “Linear quadratic Gaussian”. Esta técnica estima os estados através do filtro de Kalman, alcançando assim a lei de controle ótima (*teorema da separação*). No entanto, as propriedades de robustez do problema de realimentação completa de estado podem ser perdidas com a incorporação dos estimadores. Uma forma de tentar contornar esta queda de robustez é utilizar-se do método LTR – “Loop Transfer Recovery” que melhora a robustez, no caso do LQG, através da seleção adequada de uma matriz de ganhos do observador.

É possível, também, projetar sistemas de controle ótimo através da otimização de um critério de desempenho dado por uma determinada norma da função de transferência em malha fechada. As normas mais comumente utilizadas, para este fim, são as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , ou o critério misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, as quais aplicam-se às matrizes de transferência que relacionam entradas exógenas à saída controlada do sistema. Este contexto dá margem ao problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ como apresentado em DOYLE *et al.*, 1989 e ao problema de controle ótimo misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ como em KHARGONEKAR, 1991. A abordagem clássica (década de 60) leva a uma solução via equação de Riccati. Mais recentemente, em PERES & GEROMEL, 1994, mostrou-se que este tipo de problema pode ser convertido em um problema convexo equivalente, o qual por sua vez pode ser resolvido por eficientes algoritmos de otimização convexa, permitindo ainda incorporar incerteza paramétrica e descentralização (GEROMEL *et al.*, 1992, PERES *et al.*, 1993b). Esta abordagem convexa a via programação linear pode ser convenientemente tratada por pacotes computacionais descritos em termos de LMI’s – “Linear Matrix Inequalities”. Uma referência bastante apropriada neste contexto é BOYD *et al.*, 1994.

3.3 Regulador Linear Quadrático

Tendo-se em vista que o problema do regulador linear quadrático já se encontra suficientemente consolidado, não se justifica que a abordagem aqui apresentada seja minuciosa. Portanto, nesta seção são apresentados os principais resultados desta teoria. Para uma explanação mais detalhada as melhores referências são KIRK, 1970, ATHANS & FALB, 1966 e ANDERSON & MOORE, 1990.

O caso de interesse é o do problema do regulador linear quadrático com horizonte de tempo infinito e invariante no tempo. Por horizonte infinito (tempo infinito) entende-se que o limite de integração na função custo varia de zero a infinito positivo. E o fato de ser invariante no tempo afirma que os parâmetros do sistema são constantes. Na realidade o controlador é inicialmente obtido para o caso de um tempo finito qualquer T .

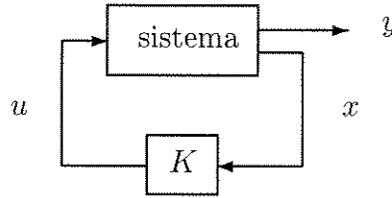


Figura 3.3: Sistema de controle (problema LQR)

O modelo de estado que descreve um sistema linear invariante (figura 3.3), assegurando que o mesmo se encontra na sua representação mínima, é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_2u, & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle e $y(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída do sistema.¹ As matrizes A , B_2 , C e D possuem dimensões apropriadas.

Antes de se levantar o problema, é conveniente fazer algumas hipóteses que simplificarão e permitirão a sua solução. A primeira delas é sobre a ponderação cruzada no vetor de saída y , exigindo, sem perda de generalidade, que as matrizes C e D devam ser ortogonais, ou seja $C'D = \mathbf{0}$. Enquanto que a segunda assegura que a ação de controle u seja ponderada positivamente, ou seja $D'D > \mathbf{0}$, limitando assim o ganho a ter valor finito.²

Pode-se agora estabelecer o problema LQR como: seja o índice de desempenho quadrático, que penaliza o vetor de estado e o vetor de controle, dado pela equação

$$J = \int_0^T x' C' C x + u' D' D u \, dt, \quad (3.2)$$

encontre um controlador que o minimize.

Este processo de otimização está sujeito à restrição dinâmica (3.1) com uma condição inicial x_0 , e leva a uma lei de controle por realimentação completa de estado linear, ou seja, proporcional a um ganho:

$$u = K(t)x. \quad (3.3)$$

Uma das formas de se encontrar o ganho ótimo K é através do princípio do mínimo. Para derivá-lo é preciso montar o *Hamiltoniano*, \mathcal{H} , associado ao problema, com o multiplicador de *Lagrange*, λ , relacionado à restrição (3.1). Seja \mathcal{H} definido como

$$\mathcal{H}(x, \lambda, u, t) = \frac{1}{2}(x' C' C x + u' D' D u) + \lambda'(Ax + B_2u). \quad (3.4)$$

¹Todos os vetores são funções do tempo, mas, por abuso de notação, omite-se esta dependência.

²Pois o ganho, como será visto, é proporcional a $(D'D)^{-1}$.

Do princípio do mínimo de Pontryagin, sabe-se que as condições necessárias de otimalidade são dadas por:

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = Ax + B_2 u, \quad x(0) = x_0; \quad (3.5)$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = C' C x + A' \lambda, \quad \lambda(T) = \mathbf{0}; \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = D' D u + B_2' \lambda = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Percebe-se que a condição (3.7) é satisfeita para todo $u^* = -(D'D)^{-1} B_2' \lambda$. Da equação (3.6) e da equação (3.5), com u substituído por u^* , monta-se a seguinte equação de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_2(D'D)^{-1}B_2' \\ -C'C & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \triangleq \mathbb{H} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

A matriz \mathbb{H} é conhecida como *matriz Hamiltoniana* e é freqüentemente usada na teoria de controle. A equação de estado acima não precisa, na realidade, ser resolvida para se obter a lei de controle ótimo, basta fazer $\lambda = Px$ em (3.8) que chega-se à seguinte equação de Riccati:

$$-\frac{dP}{dt} = A'P + PA - PB_2(D'D)^{-1}B_2'P + C'C, \quad P(T) = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

Neste caso, a lei de controle ótimo passa a ser

$$u(t) = K(t)x, \quad (3.10)$$

onde o ganho ótimo é

$$K^*(t) = -(D'D)^{-1}B_2'P(t). \quad (3.11)$$

E o índice de desempenho ótimo associado ao problema torna-se

$$J^* = x_0' P(t) x_0. \quad (3.12)$$

É interessante notar que a lei de controle obtida é função da matriz $P(t)$; a qual é solução da equação diferencial de Riccati (3.9), variável com o parâmetro tempo. Se as matrizes A , B_2 , D e C forem constantes, então $P(t)$ tenderá a uma matriz constante P quando $T \rightarrow \infty$ e a equação de Riccati (3.9) torna-se

$$A'P + PA - PB_2(D'D)^{-1}B_2'P + C'C = \mathbf{0}. \quad (3.13)$$

Obtendo-se, neste caso, o controlador com horizonte de tempo infinito desejado. A lei de controle e o índice de desempenho são agora: $u = Kx$ e $J^* = x_0' P x_0$, onde K é o ganho estabilizante dado por $K^* = -(D'D)^{-1}B_2'P$.

A equação de Riccati (3.13) possui solução³, com $P = P' > \mathbf{0}$, se e somente se o par (A, B_2) for controlável e o par (C, A) for observável. Isto, devido ao seguinte corolário.

Corolário 3.3.1. *Suponha que o par (A, B_2) seja controlável e o par (C, A) seja observável. Então, a equação de Riccati*

$$A'X + XA - XB_2(D'D)^{-1}B_2'X + C'C = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

tem uma única solução definida positiva. Além do mais, esta solução é estabilizante, ou seja, a matriz $A - B_2(D'D)^{-1}B_2'X$ é estável.

Prova. *A prova deste corolário encontra-se em ZHOU et al., 1996.*

3.4 Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

Os projetos de controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ têm por base a minimização do índice de desempenho dado pelas normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ da função de transferência em malha fechada. Sendo assim é conveniente descrever estas normas, os espaços normados associados e os métodos de calculá-las, antes de se aprofundar na problemática do controlador. As seguintes referências tratam destes conceitos mais detalhadamente no contexto da teoria de controle: FRANCIS, 1987, BOYD & BARRATT, 1991, ZHOU et al., 1996, DOYLE et al., 1992. Além disso, um enfoque puramente matemático pode ser encontrado em KREYSZIG, 1989.

Seja X um espaço vetorial real ou complexo. Uma norma $\|\cdot\|$ sobre X é uma aplicação $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ devendo satisfazer as seguintes propriedades:

- i) $\|x\| \geq 0$;
- ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$;
- iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Desta forma, pode-se definir a norma vetorial p de $x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ como

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (3.15)$$

³A única solução de interesse é a definida positiva, pois estabiliza o sistema.

Em particular, fazendo-se p igual a 2 e a ∞ , tem-se as normas clássicas euclidiana e infinita, dadas por

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (3.16)$$

e

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (3.17)$$

Definição 3.4.1. *Um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$, é um espaço vetorial com uma norma específica sobre ele definida.*

Uma norma sobre o espaço vetorial X define uma métrica d sobre X dada por $d(x, y) = \|x - y\|$ com $x, y \in X$, conhecida como *métrica induzida pela norma*. Portanto, $(X, \|\cdot\|)$ também é um espaço métrico.

Definição 3.4.2. *Se um espaço vetorial normado X é completo⁴ em sua métrica induzida, então X é chamado um espaço de Banach.*

Seja X um espaço vetorial real (ou complexo). Um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre X é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ devendo satisfazer as seguintes propriedades:

- i) $\langle x, x \rangle \geq 0$;
- ii) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- iv) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in X$;
- v) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Novamente, pode-se induzir uma norma, ou seja, um produto interno sobre X define uma *norma* sobre X dada por $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ e uma *métrica* sobre X dada por $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$.

Definição 3.4.3. *Um espaço de Hilbert é um espaço de Banach no qual a norma é induzida pelo respectivo produto interno.*

O espaço de Hilbert $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ consiste do conjunto de todas as funções quadraticamente (Lebesgue) integráveis $x(t)$ no intervalo $(-\infty, \infty)$, tais que

$$\|x\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty, \quad (3.18)$$

⁴Um espaço é dito completo se todas as *seqüências de Cauchy* são convergentes. Por seqüência de Cauchy entendem-se todas as seqüências $\{x_n\}$ que satisfazem o critério de convergência de Cauchy na forma $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, para todo $m, n > N$.

com o produto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^* y(t) dt, \quad (3.19)$$

ou se as funções forem matriciais por

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}\{x(t)^* y(t)\} dt, \quad (3.20)$$

para $x, y \in \mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$. Os subespaços $\mathcal{L}_{2+} = \mathcal{L}_2[0, \infty)$ e $\mathcal{L}_{2-} = \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ são obtidos de forma similar.

Torna-se necessário agora fazer semelhantes definições no domínio da frequência, chegando-se aos espaços $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$, $\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$, \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e a alguns subespaços relacionados.

O espaço $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$ consiste de todas as funções complexas, quadraticamente (Lebesgue) integráveis no intervalo $(-j\infty, j\infty)$ em relação a w , tais que

$$\|\hat{x}\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(j\omega)^* \hat{x}(j\omega) d\omega \right)^{1/2} < \infty, \quad (3.21)$$

com o produto interno definido por

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(j\omega)^* \hat{y}(j\omega) d\omega. \quad (3.22)$$

O subespaço⁵ \mathcal{RL}_2 de $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$ consiste de todas as funções de transferência⁶ racionais, estritamente próprias e sem pólos no eixo imaginário; donde conclui-se que uma função de transferência $\hat{x}(j\mathbb{R})$ pertencerá a \mathcal{RL}_2 , terá norma $\|\hat{x}\|_2$ finita, se for estritamente própria e não tiver pólos no eixo imaginário. O subespaço \mathcal{H}_2 consiste de todas as funções analíticas (funções definidas e diferenciáveis em todos os pontos de seu domínio) no semiplano direito do plano complexo com a norma dada por (3.21). O subespaço \mathcal{RH}_2 de \mathcal{H}_2 consiste de todas as funções de transferência racionais, estáveis e estritamente próprias.

Existe uma relação entre o espaço \mathcal{L}_2 no domínio da frequência e no domínio do tempo. Esta relação é conhecida como *Teorema de Plancherel* e pode ser obtida através da *transformada de Fourier* que produz uma aplicação bijetora e isométrica (preserva a métrica) entre o espaço $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ e o espaço $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$. Portanto, se uma função $x(t)$ pertencer a $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$, sua transformada de Fourier $\hat{x}(j\omega)$ pertencerá a $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$ e

$$\|x\|_2 = \|\hat{x}\|_2. \quad (3.23)$$

⁵O domínio dos espaços será omitido sempre que o contexto o indicar.

⁶Uma função de transferência \hat{x} é racional se seus coeficientes são reais, própria se $\hat{x}(\infty)$ é finito e estritamente própria se $\hat{x}(\infty)$ é zero.

Assim, a energia de um sinal independe da sua representação no domínio do tempo ou da frequência.

Uma das formas de se calcular a norma \mathcal{RL}_2 de uma função de transferência \hat{x} é através de sua própria definição (3.21) ou ainda por

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}\{\hat{x}(j\omega)^* \hat{x}(j\omega)\} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{Tr}\{\hat{x}(-s) \hat{x}(s)\} ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \text{Tr}\{\hat{x}(-s) \hat{x}(s)\} ds, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde a última integral é uma integral de contorno, com o contorno dado por um semicírculo infinito envolvendo o semiplano esquerdo do plano complexo. Pelo *teorema do resíduo* (KREYSZIG, 1993) esta integral pode ser escrita como a somatória dos resíduos de $\hat{x}(-s)\hat{x}(s)$ calculados nos seus pólos

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi j} \oint \text{Tr}\{\hat{x}(-s) \hat{x}(s)\} ds \\ &= \sum_{j=1}^k \text{Res}_{s=s_j} \text{Tr}\{\hat{x}(-s) \hat{x}(s)\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Entretanto, como será visto, torna-se mais vantajoso computar a norma \mathcal{RH}_2 através de métodos no espaço de estado. Para isto, o modelo de estado a ser considerado é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Aplicando a *transformada de Laplace* em (3.26) com condições iniciais nulas sobre x , e colocando y como função de w tem-se $\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{w}(s)$, onde $\hat{g}(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B_1$. Sabendo-se que a função resposta ao impulso unitário (*Delta de Dirac*) neste caso é $g(t) = Ce^{At}B_1$, $t \geq 0$ de (3.23) tem-se

$$\begin{aligned} \|\hat{g}\|_2^2 &= \text{Tr} \left\{ \int_0^{\infty} g(t)g(t)' dt \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \int_0^{\infty} Ce^{At}B_1B_1'e^{A't}C' dt \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ C \int_0^{\infty} e^{At}B_1B_1'e^{A't} dt C' \right\} \\ &= \text{Tr} \{CW_cC'\}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde $W_c = \int_0^\infty e^{At} B_1 B_1' e^{A't} dt$. Esta integral é denominada *gramiano de controlabilidade* e satisfaz a seguinte *equação de Lyapunov*⁷

$$AW_c + W_c A' + B_1 B_1' = 0. \quad (3.28)$$

Se em (3.27) a integral tivesse sido calculada sobre $g(t)'g(t)$, ter-se-ia

$$\|\hat{g}\|_2^2 = \text{Tr}\{B_1' W_o B_1\}, \quad (3.29)$$

onde $W_o = \int_0^\infty e^{A't} C' C e^{At} dt$ é o *gramiano de observabilidade* solução da equação de Lyapunov⁸

$$W_o A + A' W_o + C' C = 0. \quad (3.30)$$

As equações de Lyapunov (3.28) e (3.30) representativas dos gramianos de controlabilidade e de observabilidade respectivamente, sugerem que deva existir uma relação entre suas soluções e a *controlabilidade* e *observabilidade* de um sistema. Esta relação existe e pode ser anunciada no seguinte lema:

Lema 3.4.1. *Seja a função de transferência \hat{g} referente ao sistema (3.26) pertencente ao \mathcal{RH}_2 , ou seja $\text{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0$, $i = 1, \dots, n$, então*

- W_c será definida positiva se e somente se o par (A, B_1) for controlável.
- W_o será definida positiva se e somente se o par (C, A) for observável.

Prova. *A prova deste lema pode ser encontrada em ZHOU et al., 1996.*

Outro importante espaço é o \mathcal{L}_∞ que consiste de todas as funções limitadas essencialmente (limitadas exceto possivelmente num conjunto de medida zero) no domínio $j\mathbb{R}$, tais que

$$\sup_w \text{ess}\{\|\hat{x}(j\omega)\| : \omega \in \mathbb{R}\} < \infty, \quad (3.31)$$

com norma dada por

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup_w \text{ess}\bar{\sigma}\{\hat{x}(j\omega) : \omega \in \mathbb{R}\}. \quad (3.32)$$

O subespaço \mathcal{RL}_∞ de \mathcal{L}_∞ consiste de todas as funções de transferência racionais, próprias e sem pólos no eixo imaginário; logo, para que uma função de transferência \hat{x} pertença a \mathcal{RL}_∞ , tenha norma $nmi\hat{x}$ finita, precisa ser própria e não ter pólos no eixo imaginário. Além do mais, se $\hat{x}(j\omega)$ e $\hat{y}(j\omega)$ pertencem ao

⁷Basta integrar ambos os lados da equação $\frac{d}{dt}e^{At} B_1 B_1' e^{A't} = Ae^{At} B_1 B_1' e^{A't} + e^{At} B_1 B_1' e^{A't} A'$ de 0 a ∞ . Lembrando que $e^{At} \rightarrow 0$, pois $\hat{g}(s) \in \mathcal{RH}_2$, tem-se $-B_1 B_1' = AW_c + W_c A'$.

⁸Sua prova é idêntica à do gramiano de controlabilidade.

espaço \mathcal{RL}_∞ tem-se a seguinte propriedade: $\|\hat{x}\hat{y}\|_\infty \leq \|\hat{x}\|_\infty\|\hat{y}\|_\infty$. O subespaço \mathcal{H}_∞ consiste das funções analíticas e limitadas no semiplano direito do plano complexo, tendo a norma dada, pelo *teorema do modulo máximo*⁹, por

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup_s \bar{\sigma}\{\hat{x}(s) : \text{Re}(s) > 0\} = \sup_w \bar{\sigma}\{\hat{x}(j\omega) : \omega \in \mathbb{R}\}. \quad (3.33)$$

O subespaço \mathcal{RH}_∞ de \mathcal{H}_∞ consiste de todas as funções de transferência racionais, estáveis e próprias.

Da definição da norma \mathcal{RL}_∞ fica claro que uma forma de calculá-la é através de uma busca exaustiva do máximo *valor singular* da função de transferência em questão. Ou seja, se um intervalo refinado de frequência $\{w_1, \dots, w_N\}$ for definido, uma razoável estimativa para a norma \mathcal{RL}_∞ será $\max_{1 \leq k \leq N} \bar{\sigma}\{\hat{x}(j\omega_k)\}$. Entretanto, é preferível calcular a norma \mathcal{RH}_∞ pelo espaço de estado.

Lema 3.4.2. *Seja $\gamma > 0$ e $\hat{g} \in \mathcal{RH}_\infty$ uma função de transferência representada pelo modelo de estado (3.26). Definindo-se a matriz \mathbb{H} como*

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1' \\ -C'C & -A' \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

então, se o par (A, B_1) for controlável e o par (C, A) for observável, as seguintes afirmações são equivalentes:

- i) $\|\hat{g}\|_\infty < \gamma$;
- ii) A matriz \mathbb{H} não tem nenhum autovalor no eixo imaginário;
- iii) A equação de Riccati $XA + A'X + \gamma^{-2}XB_1B_1'X + C'C = \mathbf{0}$ admite uma solução $X = X' > \mathbf{0}$ com $A + \gamma^{-2}B_1B_1'X$ estável.

Prova. Este Lema é conhecido como “Bounded Real Lemma” e sua prova pode ser encontrada em DOYLE et al., 1989 e ZHOU et al., 1996.

Neste caso, $\|\hat{g}\|_\infty$ será dada pelo menor valor possível de γ para o qual a matriz \mathbb{H} continua a não ter autovalores em seu eixo imaginário. Similarmente, $\|\hat{g}\|_\infty$ pode ser dada pelo menor valor de γ para o qual a *desigualdade de Riccati* (3.35) admite uma solução simétrica definida positiva.

Lema 3.4.3. *Seja $\gamma > 0$ e $\hat{g} \in \mathcal{RH}_\infty$ uma função de transferência representada pelo modelo de estado (3.26). Então, $\|\hat{g}\|_\infty \leq \gamma$ se e somente se a desigualdade*

$$A'X + XA + \gamma^{-2}XB_1B_1'X + C'C \leq \mathbf{0} \quad (3.35)$$

admitir uma solução $X = X' > \mathbf{0}$.

⁹Se $\hat{x}(s)$ é analítica num domínio fechado e limitado \mathcal{D} , então o máximo de $|\hat{x}(s)|$ encontra-se no contorno de \mathcal{D} .

Prova. A prova deste lema encontra-se em SCHERER, 1990.

Com as normas definidas é possível estabelecer algumas relações importantes sobre o ganho de um sistema. Seja u um sinal de entrada, y um sinal de saída e g a função resposta ao impulso do sistema. Pode-se verificar que

$$\|y\|_2^2 \leq \|\hat{g}\|_\infty^2 \|w\|_2^2. \quad (3.36)$$

Portanto, se o sinal de entrada $w \in \mathcal{L}_2$ e a função de transferência $\hat{g} \in \mathcal{RH}_\infty$, então o sinal de saída $y \in \mathcal{L}_2$ e

$$\|\hat{g}\|_\infty = \sup_w \left\{ \frac{\|y\|_2}{\|w\|_2} : w \in \mathcal{L}_2 \right\}. \quad (3.37)$$

3.5 Controle \mathcal{H}_2 Robusto

Tendo-se definido a norma \mathcal{H}_2 e a forma de calculá-la, podem ser formulados o problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 por realimentação de estado via abordagem clássica, o problema de custo garantido e as respectivas parametrizações convexas.

3.5.1 Problema \mathcal{H}_2 via Abordagem Clássica

O modelo de estado aqui considerado que descreve um sistema linear invariante no tempo (figura 3.4), assegurando que o mesmo se encontra na sua representação minimal, é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $y \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída controlada, $w \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de entradas exógenas e $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle. As matrizes A , B_1 , B_2 , C e D possuem dimensões apropriadas. Novamente, as condições de ortogonalidade $C'D = \mathbf{0}$ e de ponderação positiva no controle $D'D > \mathbf{0}$ são assumidas.

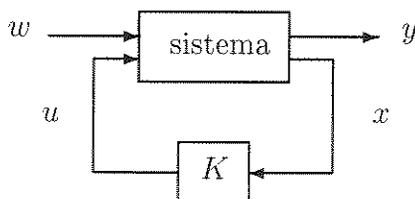


Figura 3.4: Sistema de controle (problema \mathcal{H}_2)

A lei de controle por realimentação completa de estado, linear e proporcional a um ganho é dada por

$$u = Kx, \quad (3.39)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é o ganho a determinar. Com o controlador assim definido, o sistema (3.38) em malha fechada pode ser descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_2K)x + B_1w \\ y &= (C + DK)x, \end{aligned} \quad (3.40)$$

e a matriz de transferência em malha fechada da entrada exógena w para a saída y por

$$H(s) = C_f(s\mathbf{I} - A_f)^{-1}B_1, \quad (3.41)$$

onde as matrizes A_f e C_f são respectivamente

$$\begin{aligned} A_f &\triangleq A + B_2K \\ C_f &\triangleq C + DK. \end{aligned} \quad (3.42)$$

O problema de otimização \mathcal{RH}_2 por realimentação de estado pode ser postulado como: Dado um sistema linear dinâmico, encontre um compensador que minimize a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência em malha fechada tal que $H(s) \in \mathcal{RH}_2$, ou seja

$$\min_K \{\|H(s)\|_2^2 : H(s) \in \mathcal{RH}_2\}. \quad (3.43)$$

Donde percebe-se que o ganho K deve, além de minimizar o critério norma \mathcal{H}_2 , estabilizar ou manter estável o sistema em malha fechada. Portanto

$$K \in \mathcal{K} \triangleq \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} : \operatorname{Re}\{\lambda_i(A_f)\} < 0\}, \quad (3.44)$$

conjunto dos ganhos estabilizantes (não convexo).

Na seção precedente, demonstrou-se que a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência pode ser calculada por

$$\|H(s)\|_2^2 = \operatorname{Tr}\{B_1'WB_1\}, \quad (3.45)$$

com $W = W'$ solução da equação de Lyapunov (gramiano de observabilidade)

$$(A + B_2K)'W + W(A + B_2K) + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0}. \quad (3.46)$$

Assim, o problema de otimização pode ser reformulado como

$$\min_{W,K} \operatorname{Tr}\{B_1'WB_1\} \quad (3.47)$$

sujeito a

$$\Lambda : (A + B_2K)'W + W(A + B_2K) + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0}, \quad (3.48)$$

onde $\Lambda = \Lambda'$ é a matriz dos *multiplicadores de Lagrange* associada à restrição (3.46).

Para obtenção das condições necessárias de otimalidade é preciso montar o *lagrangeano* e derivá-lo em relação às variáveis do problema. O lagrangeano é expresso pela equação

$$\mathcal{L}(W, \Lambda, K) = \text{Tr}\{B_1'WB_1 + \Lambda'[(A + B_2K)'W + W(A + B_2K) + (C + DK)'(C + DK)]\}. \quad (3.49)$$

As condições necessárias de otimalidade fornecem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W} = (A + B_2K)\Lambda + \Lambda(A + B_2K)' + B_1B_1' = \mathbf{0}; \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} = (A + B_2K)'W + W(A + B_2K) + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0}; \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = [D'DK + B_2'W]\Lambda = \mathbf{0}. \quad (3.52)$$

Se o par (A_f, B_1) for controlável (uma condição para isto é que a matriz B_1 tenha posto completo), então pelo lema 3.4.1 (página 20) a matriz Λ solução de (3.50) será definida positiva. Neste caso, a solução ótima a partir de (3.52) será única e o ganho ótimo K^* dado por

$$K^* = -(D'D)^{-1}B_2'W, \quad (3.53)$$

que substituído em (3.51) fornece a equação de Riccati para sistemas contínuos no tempo

$$A'W + WA - WB_2(D'D)^{-1}B_2'W + C'C = \mathbf{0}. \quad (3.54)$$

Esta equação terá uma solução, $W = W' > \mathbf{0}$, se e somente se o par (A, B_2) for controlável e o par (C, A) for observável (corolário 3.3.1, página 16). Desta forma o custo ótimo, para W solução de (3.54), será

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{Tr}\{B_1'WB_1\} \quad (3.55)$$

Este problema poderia ter sido resolvido de uma forma similar se na expressão (3.45) a norma fosse calculada por $\text{Tr}\{CPC'\}$, com $P = P'$ satisfazendo o gramiano de controlabilidade. Note-se que tanto o cálculo da norma \mathcal{H}_2 (3.45) como o cálculo

do ganho ótimo (3.53) envolvem unicamente a solução de uma equação matricial, que pode ser obtida em um número finito de passos.

É interessante perceber que o ganho estabilizante dado por (3.53) do problema de otimização \mathcal{RH}_2 é idêntico ao ganho K do problema do regulador linear quadrático, pois dependem da mesma equação de Riccati. E, ainda, os problemas terão custo mínimo igual sempre que $x_0 x_0' = B_1 B_1'$.

3.5.2 Parametrização Convexa do Problema \mathcal{H}_2

O problema de otimização anterior tinha uma geometria bastante complicada, pois nem a função objetivo nem o conjunto dos ganhos estabilizantes \mathcal{K} eram convexos com respeito a K . Entretanto, PERES & GEROMEL (1994) mostraram ser possível parametrizar este conjunto por um outro que seja convexo. Desta forma o problema gerado pode ser solucionado por eficientes algoritmos de otimização convexa; em especial através de LMI's.

Para obtenção desta parametrização, mostrar-se-á que a igualdade de Riccati (3.54) pode ser substituída por uma desigualdade e, em seguida, que através de convenientes manipulações algébricas esta pode ser escrita de forma convexa.

Considere a inequação

$$A'X + XA + C'C \leq 0, \quad (3.56)$$

com $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então uma solução na igualdade que pode ser expressa como

$$X = \int_0^\infty e^{A't}(C'C + Q)e^{At} dt, \quad (3.57)$$

onde $Q = Q' \geq 0$ complementa a desigualdade (3.56). Lembrando que a solução do gramiano de observabilidade

$$A'W + WA + C'C = 0 \quad (3.58)$$

é dada por

$$W = \int_0^\infty e^{A't}C'Ce^{At} dt, \quad (3.59)$$

percebe-se que $X \geq W$ e que $\text{Tr}\{B_1'XB_1\} \geq \text{Tr}\{B_1'WB_1\} = \|H(s)\|_2^2$. Portanto a norma \mathcal{H}_2 pode ser calculada por

$$\min_X \text{Tr}\{B_1'XB_1\} \quad (3.60)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} A'X + XA + C'C &\leq \mathbf{0} \\ X = X' &> \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Com a igualdade sendo garantida pela minimização. Além do mais, a restrição (3.61) é convexa, ou melhor, afim.

O problema de minimização \mathcal{RH}_2 pode então ser formulado como

$$\min_{K,W} \text{Tr}\{B_1'WB_1\} \quad (3.62)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} (A + B_2K)'W + W(A + B_2K) + (C + DK)'(C + DK) &\leq \mathbf{0} \\ W = W' &> \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

que, na minimização, o ótimo está garantido pela igualdade. Este problema é ainda não convexo, pois K depende explicitamente de W . Portanto, deve-se converter a inequação de Riccati, acima, em uma LMI. Para isto, far-se-á uso da seguinte *fórmula complementar de Schur*.

Lema 3.5.1. *Seja $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z = Z' \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Então*

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (3.64)$$

se e somente se

$$\begin{cases} X > \mathbf{0} \\ Z - Y'X^{-1}Y > \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} Z > \mathbf{0} \\ X - YZ^{-1}Y' > \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.65)$$

Prova. *Defina as matrizes*

$$T_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ Y'X^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad e \quad T_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & YZ^{-1} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Então

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Z - Y'X^{-1}Y \end{bmatrix} T_1^{-1} = T_2 \begin{bmatrix} X - YZ^{-1}Y' & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} T_2^{-1}. \quad (3.67)$$

Fazendo-se as seguintes manipulações algébricas: $X \triangleq W^{-1}$ e $Y \triangleq KW^{-1}$, o problema anterior torna-se

$$\min_{X,Y} \text{Tr}\{B_1'X^{-1}B_1\} \quad (3.68)$$

sujeito a¹⁰

$$\begin{aligned} AX + XA' + B_2Y + Y'B_2' + (CX + DY)'(CX + DY) &\leq \mathbf{0} \\ X = X' &> \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Portanto o problema de minimização \mathcal{H}_2 , pode ser descrito pelo seguinte teorema:

Teorema 3.5.1. *A solução ótima do problema*

$$\min_{X,Y,Z} \text{Tr}\{Z\} \quad (3.70)$$

sujeito a

$$X > \mathbf{0} \quad (3.71)$$

$$\begin{bmatrix} X & B_1 \\ B_1' & Z \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.72)$$

$$\begin{bmatrix} -AX - XA' - B_2Y - Y'B_2' & XC' + Y'D' \\ CX + DY & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.73)$$

fornece

$$\text{Tr}\{Z\} = \|H(s)\|_2^2 \quad (3.74)$$

com o ganho ótimo de realimentação dado por

$$K^* = YX^{-1}. \quad (3.75)$$

Prova. *Aplicando a fórmula complementar de Schur na desigualdade (3.72), tem-se $\text{Tr}\{Z\} \geq \text{Tr}\{B_1'WB_1\}$ com a igualdade sendo garantida pela minimização. Para obter a restrição (3.63) aplica-se a fórmula complementar de Schur na desigualdade (3.73), que após algumas simplificações fornece*

$$(A + B_2YX^{-1})'W + W(A + B_2YX^{-1}) + (C + DYX^{-1})'(C + DYX^{-1}) \leq \mathbf{0}. \quad (3.76)$$

Portanto o ganho $K = YX^{-1}$ é realmente um ganho estabilizante que assegura na solução ótima $\text{Tr}\{Z\} = \min_K \{\|H(s)\|_2^2 : H(s) \in \mathcal{RH}_2\}$. Estabelecer (3.70) – (3.73) é trivial a partir de (3.62) – (3.63).

Desta forma, a solução ótima de realimentação de estado do problema \mathcal{H}_2 pode ser obtida por meio de um problema convexo. Note que este problema também poderia ter sido resolvido usando-se o gramiano de controlabilidade. Uma prova das condições de suficiência e necessidade da parametrização do problema linear quadrático pode ser encontrada em PERES & GEROMEL, 1994.

¹⁰Esta restrição é a equação (3.63) pré e pós multiplicada por $X = W^{-1}$.

3.5.3 Problema \mathcal{H}_2 de Custo Garantido

Com o problema \mathcal{H}_2 tendo sido formulado de uma forma convexa, torna-se possível sua extensão para o caso incerto. Isto deve-se ao fato de que o ganho estabilizante (3.75) não depende explicitamente dos parâmetros que descrevem o sistema, ou seja, das matrizes A , B_1 , B_2 , C e D . Além do mais, as desigualdades (3.71) a (3.73) são afins em relação a estes parâmetros. A formulação aqui descrita é baseada nas referências GEROMEL *et al.*, 1992, GEROMEL *et al.*, 1991 e PERES *et al.*, 1993a.

Considere um sistema incerto com incertezas paramétricas nas matrizes A e B_2 . A estrutura dessa incerteza é representada por um domínio incerto do tipo poliedral convexo dado por

$$\mathcal{D} \triangleq \left\{ M : M = \sum_{i=1}^N \alpha_i M_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}. \quad (3.77)$$

Ou seja, qualquer matriz M factível pode ser expressa como uma combinação convexa das matrizes extremas $M_i \sim (A, B_2)_i$, $i = 1, \dots, N$.

Para um determinado $M \in \mathcal{D}$ a matriz de transferência em malha fechada de w para y é dada por

$$H_M(s) = (C + DK)[s\mathbf{I} - (A + B_2K)]^{-1}B_1. \quad (3.78)$$

O problema \mathcal{H}_2 de custo garantido pode ser formulado como: Dado um sistema incerto com a estrutura acima, encontre um controlador por realimentação completa de estado K e um limitante superior $\mu \in \mathbb{R}^+$ tais que $K \in \mathcal{K}$ e $\|H_M(s)\|_2 \leq \mu$, para todo $M \in \mathcal{D}$.

Este problema é não convexo nas variáveis de interesse. Entretanto é possível parametrizar os elementos do conjunto \mathcal{K} sobre um outro que seja convexo. O limitante μ é qualquer, tal que toda norma calculada no domínio \mathcal{D} seja menor que este. Portanto uma escolha bastante conveniente para o cálculo de μ é aquela que minimize a máxima norma dentro do politopo convexo de incertezas.

O fato de se projetar um controlador que garanta estabilidade em todo domínio \mathcal{D} é um conceito bastante importante no enfoque de robustez frente a incertezas paramétricas conhecido como *estabilização quadrática de sistemas incertos*.

Definição 3.5.1. O conjunto de sistemas lineares definidos pelas matrizes extremas $M_i \sim (A, B_2)_i$, $i = 1, \dots, N$ é quadraticamente estabilizável via realimentação completa de estado se existe $W = W' > \mathbf{0}$ e K tais que

$$(A + B_2K)W + W(A + B_2K)' + B_1B_1' \leq \mathbf{0}, \quad \forall M \in \mathcal{D}, \quad (3.79)$$

ou equivalentemente

$$A_i W + W A_i' + B_{2i} K W + W K' B_{2i}' + B_1 B_1' \leq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.80)$$

Suponha que este par exista, então $\|H_M(s)\|_2 \leq \mu, \forall M \in \mathcal{D}$. Assim, o problema de custo garantido¹¹ mínimo pode ser formulado como:

$$\mu_{sub}^2 = \min_{K, W} \text{Tr}\{(C + DK)W(C + DK)'\} \quad (3.81)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} (A_i + B_{2i}K)W + W(A_i + B_{2i}K)' + B_1 B_1' &\leq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N \\ W = W' &> \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Este problema é ainda não convexo, pois K depende explicitamente de W . É necessário, portanto, transformá-lo num problema convexo escrito em termos de LMI's. Fazendo-se as seguintes manipulações algébricas: $X \triangleq W$ e $Y \triangleq KW$, o problema anterior torna-se

$$\mu_{sub}^2 = \min_{X, Y} \text{Tr}\{(CX + DY)X^{-1}(CX + DY)'\} \quad (3.83)$$

sujeito

$$\begin{aligned} A_i X + X A_i' + B_{2i} Y + Y' B_{2i}' + B_1 B_1' &\leq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N \\ X = X' &> \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Portanto o problema de minimização \mathcal{H}_2 de custo garantido pode ser descrito pelo seguinte teorema:

Teorema 3.5.2. *A solução ótima do problema*

$$\mu_{sub}^2 = \min_{X, Y, Z} \text{Tr}\{Z\} \quad (3.85)$$

sujeito a

$$X > \mathbf{0} \quad (3.86)$$

$$\begin{bmatrix} X & X C' + Y' D' \\ C X + D Y & Z \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.87)$$

$$A_i X + X A_i' + B_{2i} Y + Y' B_{2i}' + B_1 B_1' \leq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.88)$$

¹¹Este problema fornece solução sub-ótima, pois a minimização não é mais sobre uma norma, mas sim sobre um limitante superior para o conjunto de normas possíveis dentro do conjunto de incertezas.

fornece

$$\text{Tr}\{Z\} \geq \min_K \{\|H_M(s)\|_2^2 : K \in \mathcal{K}, \forall M \in \mathcal{D}\} \quad (3.89)$$

com o ganho sub-ótimo de realimentação dado por

$$K^* = YX^{-1}. \quad (3.90)$$

Prova. Aplicando a fórmula complementar de Schur na desigualdade (3.87), tem-se $\text{Tr}\{Z\} \geq \text{Tr}\{(C + DK)W(C + DK)'\}$. Para obter a restrição (3.82) basta trabalhar a desigualdade (3.88), que após algumas simplificações fornece

$$(A + B_{2i}YX^{-1})W + W(A + B_{2i}YX^{-1})' + B_1B_1' \leq 0. \quad (3.91)$$

Portanto o ganho $K = YX^{-1}$ é realmente um ganho estabilizante que assegura na solução ótima $\text{Tr}\{Z\} \geq \min_K \{\|H_M(s)\|_2^2 : H_M(s) \in \mathcal{RH}_2, \forall M \in \mathcal{D}\}$. A volta segue passos semelhantes.

Assim, o controlador \mathcal{H}_2 de custo garantido minimiza um limitante superior para todas as possíveis normas \mathcal{H}_2 sobre o conjunto de incertezas, e torna-se equivalente ao problema de minimização \mathcal{H}_2 quando o sistema é precisamente conhecido.

3.6 Controle \mathcal{H}_∞ Robusto

Nesta seção, o problema de controle ótimo \mathcal{H}_∞ por realimentação completa de estado via abordagem clássica, o problema de custo garantido, e as respectivas parametrizações convexas estão descritos seguindo a mesma metodologia do problema \mathcal{H}_2 .

3.6.1 Problema \mathcal{H}_∞ via Abordagem Clássica

Para este caso o modelo linear invariante no tempo, a lei de controle e as hipóteses adotadas são os mesmos que os utilizados na seção anterior (figura 3.4). Portanto as equações (3.38) a (3.42) continuam válidas.

O problema de otimização \mathcal{RH}_∞ por realimentação completa de estado pode ser postulado como: dado um sistema linear dinâmico, encontre um controlador que minimize a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência em malha fechada tal que $H(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, ou seja

$$\min_K \{\|H(s)\|_\infty : H(s) \in \mathcal{RH}_\infty\} \quad (3.92)$$

ou ainda

$$\min_K \{ \gamma : \|H(s)\|_\infty \leq \gamma, H(s) \in \mathcal{RH}_\infty \}. \quad (3.93)$$

Fazendo-se uso do lema 3.4.3 (página 21) este problema pode ser descrito equivalentemente como

$$\min_{K,W} \{ \gamma : H(s) \in \mathcal{RH}_\infty \} \quad (3.94)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} (A + B_2K)'W + W(A + B_2K) + \gamma^{-2}WB_1B_1'W + (C + DK)'(C + DK) &\leq \mathbf{0} \\ W = W' &> \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Donde percebe-se que o ganho K deve, além de minimizar o critério norma \mathcal{H}_∞ , estabilizar ou manter estável o sistema em malha fechada. Portanto

$$K \in \mathcal{K}_\gamma \triangleq \{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} : \operatorname{Re}\{\lambda_i(A_f)\} < 0, \|H(s)\|_\infty \leq \gamma \}, \quad (3.96)$$

conjunto dos ganhos estabilizantes.

Diferentemente do problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 , no qual tanto a norma \mathcal{H}_2 quanto o ganho ótimo podem ser obtidos da solução de uma equação matricial, o problema de controle ótimo \mathcal{H}_∞ é bem mais difícil de ser caracterizado. De fato como apontado em SCHERER (1990), pode ser necessária uma sequência de ganhos tendendo a ∞ para se atingir o valor ótimo γ^* .

Um problema preliminar que pode ser considerado é o problema de controle sub-ótimo \mathcal{H}_∞ : encontre um conjunto de controladores factíveis K tais que $\|H(s)\|_\infty \leq \gamma$. É interessante verificar que com $K \in \mathcal{K}_\gamma$ a função de transferência em malha fechada $H(s)$ é estritamente própria, logo tem-se que $H(s) \in \mathcal{RH}_2$. Assim, uma escolha conveniente para K é aquela que minimiza o critério norma \mathcal{H}_2 , dando-se margem ao seguinte problema misto de otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ com um limitante de distúrbio γ prescrito

$$\min_K \{ \|H(s)\|_2^2 : \|H(s)\|_\infty \leq \gamma \}. \quad (3.97)$$

Este problema pode ser convenientemente tratado se for adotado um limitante superior para $\|H(s)\|_2^2$. Este limitante é chamado de função custo auxiliar e é dado por $\operatorname{Tr}\{B_1'WB_1\}$, que fornece $\operatorname{Tr}\{B_1'WB_1\} \geq \|H(s)\|_2^2$ com $W = W'$ solução da inequação (3.95) na igualdade. Desta forma o problema pode ser reescrito como

$$\min_{W,K} \operatorname{Tr}\{B_1'WB_1\} \quad (3.98)$$

sujeito a

$$\Lambda : (A + B_2K)'W + W(A + B_2K) + \gamma^{-2}WB_1B_1'W + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0}, \quad (3.99)$$

onde $\Lambda = \Lambda'$ é a matriz dos multiplicadores de Lagrange associada à restrição (3.95) na igualdade.

A função lagrangeana neste caso é expressa por

$$\mathcal{L}(W, \Lambda, K) = \text{Tr}\{B_1'WB_1 + \Lambda'[(A + B_2K)'W + W(A + B_2K) + \gamma^{-2}WB_1B_1'W + (C + DK)'(C + DK)]\} \quad (3.100)$$

E as condições necessárias de otimalidade fornecem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W} = (A + B_2K + \gamma^{-2}B_1B_1'W)\Lambda + \Lambda(A + B_2K + \gamma^{-2}B_1B_1'W)' + B_1B_1' = \mathbf{0}; \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} = (A + B_2K)'W + W(A + B_2K) + \gamma^{-2}WB_1B_1'W + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0}; \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = [D'DK + B_2'W]\Lambda = \mathbf{0}. \quad (3.103)$$

Se o sistema for controlável e $B_1B_1' > \mathbf{0}$, então a matriz Λ solução (3.101) será definida positiva¹². Neste caso, a solução ótima a partir de (3.103) será única e o ganho sub-ótimo K_{sub} dado por

$$K_{sub} = -(D'D)^{-1}B_2'W, \quad (3.104)$$

que substituído em (3.102) fornece a equação de Riccati associada ao problema de controle \mathcal{H}_∞

$$A'W + WA + W(\gamma^{-2}B_1B_1' - B_2(D'D)^{-1}B_2')W + C'C = \mathbf{0}. \quad (3.105)$$

O controlador K_{sub} assim projetado pertence ao conjunto \mathcal{K}_γ e é conhecido como *controlador central* \mathcal{H}_∞ . Percebe-se que o controlador sub-ótimo \mathcal{H}_∞ , neste caso, é obtido de uma forma similar que o controlador ótimo \mathcal{H}_2 , ou seja, através da solução de uma equação matricial de Riccati. E que, quando $\gamma \rightarrow \infty$ a equação (3.105) tende à equação de Riccati (3.54) e a solução sub-ótima K_{sub} tende à solução ótima do problema \mathcal{H}_2 .

¹²Uma prova das condições de existência e unicidade de solução pode ser encontrada em DOYLE *et al.*, 1989.

A diferença fundamental deste problema com o problema \mathcal{H}_2 encontra-se no fato de que a expressão quadrática em (3.105) não tem o sinal completamente definido, o que impossibilita o uso dos lemas (3.4.2) e (3.4.3). Na realidade, as condições necessárias e suficientes para existência de um controlador tal que $\|H(s)\|_\infty \leq \gamma$ estão relacionadas com a existência ou não de uma solução definida positiva para a equação (3.105). Estas condições de existência de solução do problema aqui apresentado podem ser encontradas em DOYLE *et al.*, 1989.

3.6.2 Parametrização Convexa do Problema \mathcal{H}_∞

O problema de otimização misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ anterior é não convexo nos parâmetros de interesse, mas pode, com uma apropriada mudança de variável, ser descrito de uma forma convexa através de LMI's.

Como feito na parametrização do problema \mathcal{H}_2 é conveniente trabalhar com a restrição sendo uma desigualdade, que para o caso \mathcal{H}_∞ se encontra no próprio lema (3.4.3). Fazendo-se as seguintes manipulações algébricas: $X \triangleq W^{-1}$, $Y \triangleq KW^{-1}$ e $\mu \triangleq \gamma^{-2}$, o problema misto de otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para um $\gamma > 0$ dado, torna-se

$$\min_{X,Y} \text{Tr}\{B_1'X^{-1}B_1\} \quad (3.106)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} AX + XA' + B_2Y + Y'B_2' + \mu B_1B_1' + (CX + DY)'(CX + DY) &\leq \mathbf{0} \\ X = X' &> \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Portanto o problema de minimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ com um limitante γ fixo, pode ser descrito pelo seguinte teorema:

Teorema 3.6.1. *Dado um $\gamma > 0$, a solução ótima do problema*

$$\min_{X,Y,Z} \text{Tr}\{Z\} \quad (3.108)$$

sujeito a

$$X > \mathbf{0} \quad (3.109)$$

$$\begin{bmatrix} X & B_1 \\ B_1' & Z \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.110)$$

$$\begin{bmatrix} -AX - XA' - B_2Y - Y'B_2' - \mu B_1B_1' & XC' + Y'D' \\ CX + DY & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.111)$$

fornece

$$\text{Tr}\{Z\} = \text{Tr}\{B_1'WB_1\} \geq \|H(s)\|_2^2 \quad (3.112)$$

com o ganho sub-ótimo de realimentação dado por

$$K_{sub} = YX^{-1} \quad (3.113)$$

tal que $\|H(s)\|_\infty \leq \gamma$.

Prova. Aplicando a formula complementar de Schur na desigualdade (3.110), tem-se $\text{Tr}\{Z\} \geq \text{Tr}\{B_1'WB_1\}$, com a igualdade sendo garantida pela minimização. Para obter a restrição (3.107) aplica-se a fórmula complementar de Schur na desigualdade (3.111), que após algumas simplificações fornece

$$(A + B_2YX^{-1})'W + W(A + B_2YX^{-1}) + \gamma^{-2}WB_1B_1'W + (C + DYX^{-1})'(C + DYX^{-1}) \leq \mathbf{0}. \quad (3.114)$$

Portanto o ganho sub-ótimo é $K_{sub} = YX^{-1} \in \mathcal{K}_\gamma$ que assegura na solução ótima $\text{Tr}\{Z\} = \min_K \{\text{Tr}\{B_1'WB_1\} \geq \|H(s)\|_2^2 : \|H(s)\|_\infty \leq \gamma\}$. Estabelecer a volta é trivial.

Desta forma está apresentado o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ através de uma abordagem clássica e sua parametrização convexa. Entretanto, o problema inicial de controle ótimo \mathcal{H}_∞ não se encontra ainda formulado. Mas percebe-se que as restrições (3.109) e (3.111) juntas parametrizam todos os controladores que fornecem $\|H(s)\|_\infty \leq \gamma$. Então, pela abordagem convexa o problema de otimização \mathcal{H}_∞ pode ser postulado pelo seguinte teorema:

Teorema 3.6.2. *A solução ótima do problema*

$$\max_{X,Y,\mu} \{\mu\} \quad (3.115)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} X = X' > \mathbf{0} \\ -AX - XA' - B_2Y - Y'B_2' - \mu B_1B_1' & XC' + Y'D' \\ CX + DY & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.116)$$

fornece

$$\gamma_{\min} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{\max}}} = \min\{\|H(s)\|_\infty\} \quad (3.117)$$

com o ganho ótimo de realimentação dado por

$$K = YX^{-1}. \quad (3.118)$$

Prova. Aplicando a fórmula complementar de Schur na desigualdade (3.116), tem-se após algumas simplificações

$$(A + B_2 Y X^{-1})' W + W(A + B_2 Y X^{-1}) + \gamma^{-2} W B_1 B_1' W + (C + D Y X^{-1})'(C + D Y X^{-1}) \leq \mathbf{0}, \quad (3.119)$$

que é a desigualdade do lema (3.4.3) para o sistema em malha fechada. Portanto o ganho $K = Y X^{-1} \in \mathcal{K}_\gamma$ é um ganho estabilizante que assegura na solução ótima $\gamma_{\min} = \min\{\|H(s)\|_\infty\}$. O caminho inverso segue passos semelhantes.

3.6.3 Problema \mathcal{H}_∞ de Custo Garantido

Similarmente ao problema \mathcal{H}_2 de custo garantido, o problema \mathcal{H}_∞ de custo garantido para sistemas incertos consiste na determinação de um ganho por realimentação completa de estado estabilizante que impõe sobre todos os possíveis sistemas em malha fechada um limitante superior $\gamma > 0$ para a norma \mathcal{H}_∞ . As propriedades que levam às condições de suficiência e necessidade da parametrização convexa aqui apresentada encontram-se em PERES *et al.*, 1993b.

O modelo de incerteza é o mesmo que o adotado no caso \mathcal{H}_2 , descrito por (3.77), ou seja, é um conjunto convexo do tipo poliedral com incertezas nas matrizes A e B_2 . A estabilização quadrática com atenuação de distúrbio γ neste tipo de problema é definida como:

Definição 3.6.1. O conjunto de sistemas lineares definidos pelas matrizes extremas $M_i \sim (A, B_2)_i$, $i = 1, \dots, N$ é quadraticamente estabilizável com atenuação de distúrbio γ via realimentação completa de estado se existe $W = W' > \mathbf{0}$ e K tais que

$$(A + B_2 K)' W + W(A + B_2 K) + \gamma^{-2} W B_1 B_1' W + (C + D K)'(C + D K) \leq \mathbf{0}, \quad \forall M \in \mathcal{D}, \quad (3.120)$$

ou equivalentemente

$$(A_i + B_{2i} K)' W + W(A_i + B_{2i} K) + \gamma^{-2} W B_1 B_1' W + (C + D K)'(C + D K) \leq \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.121)$$

O problema \mathcal{H}_∞ de custo garantido pode então ser formulado como: Dado um sistema incerto com a estrutura acima, encontre um controlador K e um limitante superior $\gamma > 0$ tais que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável e $\|H_M(s)\|_\infty \leq \gamma$. Ou seja

$$\min_{K, W} \{\gamma : H_M(s) \in \mathcal{RH}_\infty\} \quad (3.122)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} (A_i + B_{2i}K)'W + W(A_i + B_{2i}K) + \gamma^{-2}WB_1B_1'W + (C + DK)'(C + DK) &\leq \mathbf{0} \\ W = W' > \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Este problema é ainda não convexo. É necessário, pois, transformá-lo num problema convexo escrito em termos de LMI's. Fazendo-se as seguintes manipulações algébricas: $X \triangleq W^{-1}$, $Y \triangleq KW^{-1}$ e $\mu \triangleq \gamma^{-2}$, o problema anterior torna-se

$$\max_{X, Y, \mu} \{\mu\} \quad (3.124)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} A_iX + XA_i' + B_{2i}Y + Y'B_{2i}' + \mu B_1B_1' + (CX + DY)'(CX + DY) &\leq \mathbf{0} \\ X = X' > \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Assim o problema \mathcal{H}_∞ de custo garantido pode ser descrito pelo seguinte teorema:

Teorema 3.6.3. *A solução ótima do problema*

$$\max_{X, Y, \mu} \{\mu\} \quad (3.126)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} &X = X' > \mathbf{0} \\ \left[\begin{array}{cc} -A_iX - XA_i' - B_{2i}Y - Y'B_{2i}' - \mu B_1B_1' & XC' + Y'D' \\ CX + DY & \mathbf{I} \end{array} \right] &\geq \mathbf{0} \\ &i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.127)$$

fornece

$$\gamma_{sub} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \geq \min_K \{\|H_M(s)\|_\infty : H_M(s) \in \mathcal{RH}_\infty, \forall M \in \mathcal{D}\} \quad (3.128)$$

com o ganho ótimo de realimentação dado por

$$K^* = YX^{-1}. \quad (3.129)$$

Prova. *Aplicando a fórmula complementar de Schur na desigualdade (3.127), tem-se após algumas simplificações*

$$\begin{aligned} (A_i + B_{2i}YX^{-1})'W + W(A_i + B_{2i}YX^{-1}) + \gamma^{-2}WB_1B_1'W \\ + (C + DYX^{-1})'(C + DYX^{-1}) &\leq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.130)$$

que é a restrição (3.123). Portanto, da definição de estabilidade quadrática, o ganho $K = YX^{-1} \in \mathcal{K}_\gamma$ é um ganho estabilizante que assegura na solução ótima $\gamma_{sub} \geq \min\{\|H_M(s)\|_\infty\}$. O caminho inverso é trivial.

3.7 Controle via Parametrização de Youla

Nesta seção o problema a ser considerado é o da parametrização de todos os controladores que estabilizam um determinado sistema, via *fatorações coprimas* de funções de transferência. Ao contrário das técnicas apresentadas anteriormente, a maioria dos resultados desta parametrização encontra-se no domínio da frequência (apesar de poder ser tratada no espaço de estado) e os controladores obtidos são dinâmicos. O enfoque aqui descrito segue principalmente o apresentado em FRANCIS, 1987, embora MACIEJOWSKI, 1989 e ZHOU *et al.*, 1996 tratem do mesmo tipo de problema.

Neste tipo de abordagem é conveniente representar a planta de uma forma mais ampla, conhecida como planta generalizada (figura 3.5), onde w representa as entradas exógenas, u as entradas controladas, z as saídas controladas e y as saídas medidas.

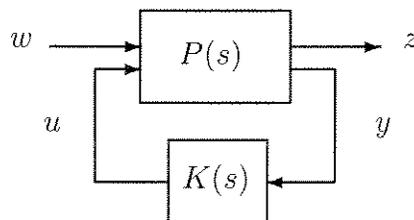


Figura 3.5: Planta generalizada

Nesta descrição, as informações de como os sinais de distúrbios e ruídos entram no sistema tornam-se evidentes. O vetor z deve conter todos os sinais de interesse. Assim, as especificações podem ser formuladas em termos de w e z unicamente (para uma interessante explanação ver BOYD & BARRATT, 1991).

A matriz de transferência da planta generalizada $P(s)$ pode ser particionada como¹³

$$P = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix}, \quad (3.131)$$

dando

$$\begin{aligned} z &= P_{zw}w + P_{zu}u \\ y &= P_{yw}w + P_{yu}u, \end{aligned} \quad (3.132)$$

onde P_{zw} , P_{yw} , P_{zu} e P_{yu} são matrizes de transferência de w para z e y , e de u para z e y respectivamente.

Com o controlador $K(s)$ atuando tem-se que $u = Ky$ e a matriz de transferência em malha fechada de w para z pode ser representada como

$$z = Hw, \quad (3.133)$$

¹³O domínio s é omitido para simplificar as expressões.

com

$$H = (P_{zw} + P_{zu} K (I - P_{yu} K)^{-1} P_{yw}). \quad (3.134)$$

Lema 3.7.1. *Para uma matriz própria e racional G existem oito matrizes pertencentes ao \mathcal{RH}_∞ que representam sua fatoração duplamente coprima*

$$G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N} \quad (3.135)$$

e

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & -\tilde{Y} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & Y \\ N & X \end{bmatrix} = \mathbf{I}. \quad (3.136)$$

Prova. *Uma prova pode ser encontrada em ZHOU et al., 1996.*

Suponha que P_{yu} tenha uma fatoração duplamente coprima dada por (3.135) e (3.136), e que o controlador K possua uma fatoração coprima (não necessariamente dupla) dada por $K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$. Então de posse do lema (3.7.1) e dos teoremas (3.7.1) e (3.7.2) é obtida uma parametrização de todos os controladores que estabilizam a planta generalizada $P(s)$.

Teorema 3.7.1. *O conjunto de todos os controladores K que estabilizam P_{yu} é parametrizado por*

$$\begin{aligned} K &= (Y - MQ)(X - NQ)^{-1} \\ &= (\tilde{X} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} - Q\tilde{M}), \quad Q \in \mathbf{RH}_\infty. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Prova. Ver FRANCIS, 1987.

Teorema 3.7.2. *K estabiliza $P \iff K$ estabiliza P_{yu} .*

Prova. Ver FRANCIS, 1987.

Com a parametrização obtida, pode ser formulado o seguinte problema: encontre um controlador $K(s)$ que estabilize $P(s)$, tal que a norma \mathcal{H}_∞ de (3.134) seja mínima.

Este problema pode ser convertido num problema de *model matching* equivalente (figura 3.6). Em que a matriz de transferência T_1 representa o modelo que será aproximado por um sistema em cascada ligado em paralelo, dado pelas matrizes de transferência T_2 , T_3 e Q . É assumido que T_i , $i = 1, \dots, 3$ e $Q \in \mathcal{RH}_\infty$.

O objetivo neste caso é minimizar a energia da saída z para a pior entrada w de energia unitária, ou seja

$$\min \sup \{ \|z\|_2 : \|w\|_2 \leq 1, w \in \mathcal{H}_2 \}, \quad (3.138)$$

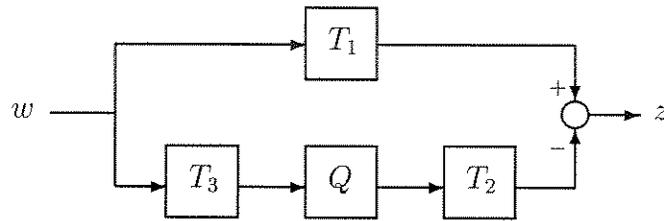


Figura 3.6: Model-matching

que pela definição da norma \mathcal{H}_∞ pode ser equivalentemente escrito como

$$\min\{\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty\}. \quad (3.139)$$

Definindo-se $P \triangleq \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & 0 \end{bmatrix}$ e $K \triangleq -Q$, o problema de model-matching torna-se similar ao problema anterior. As condições de estabilidade são agora dadas pelo seguinte teorema.

Teorema 3.7.3. *Sejam as matrizes T_1 , T_2 e T_3 definidas como*

$$\begin{aligned} T_1 &= P_{zw} + P_{zu}M\tilde{Y}P_{yw} \\ T_2 &= P_{zu}M \\ T_3 &= \tilde{M}P_{yw}. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Então, as matrizes T_1 , T_2 e T_3 pertencem ao \mathcal{RH}_∞ e com K dado por (3.137) a matriz de transferência de w para z é estável, dada por

$$H = T_1 - T_2QT_3. \quad (3.141)$$

Prova. Ver FRANCIS, 1987.

Desta forma o problema é afim no parâmetro Q , ou seja, este parametriza todo conjunto de controladores que estabilizam a matriz de transferência em malha fechada H , e portanto sua solução pode ser obtida por algoritmos de otimização convexa.

A restrição de que o controlador K estabiliza a planta pode ser substituída pela que o parâmetro Q pertença ao \mathcal{RH}_∞ . Portanto os seguintes problemas são equivalentes

$$\min_K \{\|H(s)\|_\infty : P(s) \in \mathcal{RH}_\infty\} \equiv \min_Q \{\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty : Q \in \mathcal{RH}_\infty\}, \quad (3.142)$$

e o problema de otimização passa a ser a solução do problema de model-matching, ou seja, encontre um $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ que minimize $\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty$, em seguida obtenha K substituindo Q em (3.43).

O método proposto em FRANCIS, 1987 para resolver o problema de model-matching pode ser sucintamente colocado como: Se o problema for escalar, uma condição de suficiência para que exista um Q ótimo é que as matrizes T_2 e T_3 tenham posto constante, assim sendo o problema se reduz a $\|T_1 - T_2Q\|_\infty$ e a norma \mathcal{H}_∞ pode ser obtida através da norma de um certo *operador de Hankel*. Já no caso matricial o problema é iterativo e de difícil solução. Primeiramente o problema é convertido num *problema de Nehari*, que em seguida através de convenientes operadores pode ser resolvido.

Entretanto o método aqui adotado é o exposto em BOYD & BARRATT, 1991, que aproveita a convexidade da parametrização e do funcional a ser otimizado. Assim o problema de model-matching pode ser satisfatoriamente resolvido pelas *aproximações de Ritz*.

A aproximação de Ritz de dimensão finita (ordem N) para resolver um problema de projeto de controlador é determinada por uma sequência de matrizes de transferência $H_0, H_1, H_2, \dots, H_N \in \mathcal{RH}_\infty$

$$H_N \triangleq \left\{ H_0 + \sum_1^N x_i H_i : x_i \in \mathbb{R} \right\}. \quad (3.143)$$

O problema de model-matching pode ser transformado num problema de otimização de dimensão finita através da seguinte aproximação de Ritz: $H_0 = T_1$, $H_i = T_2Q_iT_3$, $i = 1, \dots, N$, dando

$$\mathcal{H}_N(X) = \left\{ \begin{array}{l} H : H = T_1 - \sum_{i=1}^N T_2X_iQ_iT_3, \\ X_i \in \mathbb{R}^3, \quad Q_i \in \mathbf{RH}_\infty \end{array} \right\} \quad (3.144)$$

com

$$Q_i = \mathbf{I}_3 \left(\frac{a}{s+a} \right)^i \quad (3.145)$$

e

$$X_i = \begin{bmatrix} x_i^1 & x_i^2 & x_i^3 \end{bmatrix}. \quad (3.146)$$

3.8 Conclusões

Foi apresentado o problema do regulador linear quadrático, as condições de suficiência e necessidade, e foram descritas suas relações com a controlabilidade e observabilidade do sistema.

Foi introduzido o problema de otimização \mathcal{H}_2 via abordagem clássica, ou seja, aquela que se utiliza da solução de uma equação matricial de Riccati. Mostrou-se que, sob certas condições, o problema \mathcal{H}_2 fornece o mesmo custo ótimo que o LQR. Em seguida foi colocada uma parametrização convexa escrita em forma de LMI. Com esta, foi possível incorporar incertezas paramétricas no sistema, e foi obtida uma solução sub-ótima, garantindo um limitante superior da norma para o conjunto de incertezas.

O problema de controle \mathcal{H}_∞ pode ser caracterizado por uma equação matricial de Riccati, e também pode ser tratado por LMI's. Foi preliminarmente investigado um problema sub-ótimo $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ no qual um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ era fixo e, dentro do conjunto factível, era obtido aquele controlador que minimizasse um limitante da norma \mathcal{H}_2 da função de transferência em malha fechada. Em seguida, foi apresentada a parametrização convexa para o problema ótimo \mathcal{H}_∞ escrita em termos de LMI's. O caso incerto foi logo após incorporado e foi obtida uma solução que garante um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ sobre o conjunto de incertezas.

Foi apresentado um outro enfoque de projeto de controladores, que se utiliza da parametrização de Youla (parametrização Q). O problema padrão é convertido num problema de "model-matching", que através das aproximações de Ritz pode ser solucionado por um processo de otimização.

Capítulo 4

Modelos Matemáticos de Uma Suspensão Veicular

4.1 Preâmbulo

Neste capítulo, é apresentado o modelo do veículo quanto a sua geometria unidimensional, bidimensional ou tridimensional. Para cada caso o equacionamento dinâmico é obtido sem e com controlador.

Primeiramente, na introdução, são apresentadas as características de cada um dos modelos, bem como as hipóteses admitidas. Em seguida, é formulado o equacionamento do modelo unidimensional de uma suspensão veicular sem o controlador incorporado, depois substitui-se a mola e o amortecedor por um atuador obtendo o modelo dinâmico com controlador. Logo após, o modelo dinâmico da suspensão para o caso bidimensional é obtido sem e com controlador incorporado. O mesmo é feito no caso tridimensional, que possui uma maior complexidade matemática envolvida. Por último, são apresentados o tipo e a estrutura das incertezas de modelo a serem considerados.

4.2 Introdução

Os modelos matemáticos de uma suspensão devem representar as características dinâmicas da mesma ou, pelo menos, aquelas de vital importância. Não podendo omitir comportamentos que os distanciam dos de uma suspensão real, que tem como principais funções: suportar o peso do veículo, manter estabilidade durante diferentes tipos de manobra, assegurar conforto aos passageiros, minimizar a ação das forças provenientes do contato com a via, etc.

Esta necessidade de representar o sistema real pode levar a um aumento da

complexidade do modelo e a uma concentração de dados de pouca utilidade. É necessário, pois, se ter em mente quais os objetivos a serem alcançados; direcionando assim esforços nas áreas de interesse.

Em JONSSON, 1991, teve-se como objetivo prever o comportamento dinâmico de uma determinada suspensão e validá-lo com resultados experimentais (técnicas de análise modal). O modelo foi obtido utilizando-se o método de elementos finitos. Neste trabalho também foi incorporado elasticidade e não-linearidades relativas à geometria e características dos componentes utilizados.

Numa análise mais acurada pode-se ainda incorporar uma descrição da cinemática do mecanismo. Neste caso, as significantes influências do ângulo de cambagem, do ângulo de caster e da largura de trilha (distância do centro da roda esquerda ao da roda direita) são fundamentais; bem como suas implicações nas forças laterais, na dirigibilidade, no conforto e na segurança (RAGHAVAN, 1991).

Nos projetos em que se façam aplicações de técnicas avançadas de controle ativo de vibração, as quais podem embutir por si próprias bastante complexidades, tornam-se necessários modelos simples ou simplificações nos mais complexos. Essas técnicas, de uma forma geral, visam melhorar o compromisso entre os conflitantes fatores: espaço de trabalho da suspensão, conforto do passageiro e segurança, e utilizam-se dos modelos unidimensional, bidimensional e tridimensional.

Os modelos aqui adotados são todos lineares e de parâmetros discretos. Ou seja, as molas e os amortecedores da suspensão são funções lineares do deslocamento e da velocidade, respectivamente. A massa da suspensão, constituída da massa do eixo e da roda, é considerada como sendo pontual (despreza-se a inércia de rotação); e a do corpo principal, nos modelos bidimensional e tridimensional, como sendo de corpo rígido (a inércia de rotação encontra-se presente). É importante salientar que o peso não está incluso nas equações levantadas, pois o interesse reside no comportamento dinâmico; e um referencial de equilíbrio estático pode ser feito igual a zero.

A ação do pneu é diversa. Seu contato com a via, sendo através de uma superfície complexa, gera toda uma distribuição de forças: forças de contato com o solo, forças laterais, forças longitudinais, etc. Por conveniência, a área de contato (pneu-via) é considerada como sendo um ponto, produzindo forças unicamente na direção vertical, proporcionais à deformação do pneu. O amortecimento do pneu é negligenciado, já que sua inclusão, no intervalo de velocidade e frequência de interesse, não altera significativamente as características dinâmicas da suspensão como exposto por SHARP & CROLLA, 1987. Portanto, a ação do pneu é equivalente à de uma mola tendo similar rigidez.

4.3 Modelo Unidimensional

O modelo unidimensional foi largamente utilizado na literatura (ver THOMPSON, 1976, THOMPSON, 1984, WILSON *et al.*, 1986, CHALASANI, 1987a, DAVIS & THOMPSON, 1988, ELMADANY, 1990, KASHANI & KIRICZI, 1992, MICHELBERG *et al.*, 1993), pois, tendo poucos graus de liberdade (GDL) seu equacionamento, é simples, facilitando a aplicação de técnicas de controle.

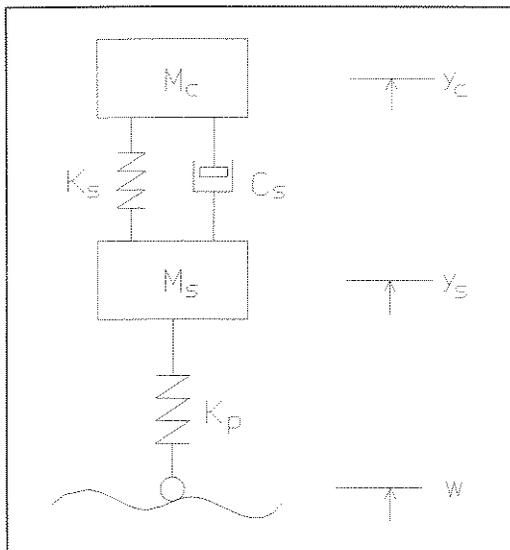


Figura 4.1: Modelo unidimensional sem controlador

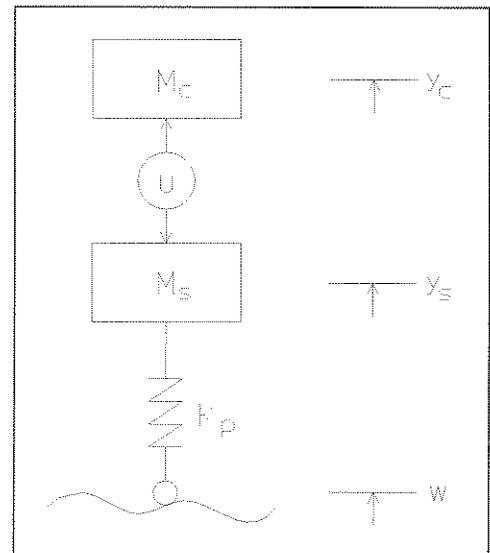


Figura 4.2: Modelo unidimensional com controlador

Este modelo pode ser de um ou dois graus de liberdade. O de um GDL permite unicamente analisar o comportamento do eixo ou o do corpo principal (HROVAT, 1993); sendo portanto pouco utilizado na prática. O de dois GDL (figuras 4.1 e 4.2), por outro lado, aborda juntos o corpo principal e o eixo, possibilitando observar os efeitos dos componentes da suspensão, das ações de controle e dos distúrbios, na tríade: espaço de trabalho, segurança e conforto.

Assume-se que o veículo trafega a uma velocidade constante V e que as excitações provenientes da via aparecem como uma entrada vertical e proporcional a esta. Para o modelo de dois GDL, os principais modos são de $1Hz$ para o corpo principal e de $10Hz$ para o eixo (aproximadamente).

Os modelos unidimensionais, sem e com controlador, são descritos a seguir; primeiramente o modelo sem controlador, figura 4.1, que tem entre o eixo e o corpo principal uma mola e um amortecedor, ambos lineares; posteriormente o modelo com controlador, figura 4.2, que nada mais é que um atuador posicionado entre o eixo e o corpo principal, produzindo uma força u (gerada por uma estabelecida lei de controle), que atua por igual em ambas as massas.

4.3.1 Modelo Unidimensional sem Controlador

Para se obter o equacionamento dinâmico deste modelo (e dos seguintes) utilizam-se as leis de Newton, em especial a segunda: $\sum_I \vec{F} = m_i \vec{a}_i$, onde I denota um referencial inercial e i representa cada corpo.

Do somatório de forças atuantes na massa M_s , obtém-se a equação de movimento

$$\ddot{y}_s = -\frac{C_s}{M_s}(\dot{y}_s - \dot{y}_c) - \frac{K_s}{M_s}(y_s - y_c) - \frac{K_p}{M_s}(y_s - w)$$

e do balanço de forças agindo na massa M_c , chega-se a

$$\ddot{y}_c = \frac{C_s}{M_c}(\dot{y}_s - \dot{y}_c) + \frac{K_s}{M_c}(y_s - y_c).$$

Estas equações podem ser arranjadas de uma forma mais conveniente, na equação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_s+K_p}{M_s} & \frac{K_s}{M_s} & -\frac{C_s}{M_s} & \frac{C_s}{M_s} \\ \frac{K_s}{M_c} & -\frac{K_s}{M_c} & \frac{C_s}{M_c} & -\frac{C_s}{M_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_p}{M_s} \\ 0 \end{bmatrix} w \quad (4.1)$$

ou seja,

$$\dot{x} = Ax + B_1 w \quad (4.2)$$

com as matrizes A e B_1 subentendidas pela equação (4.1) e os estados definidos como:

$$x_1 = y_s; \quad x_2 = y_c; \quad x_3 = \dot{y}_s; \quad x_4 = \dot{y}_c. \quad (4.3)$$

4.3.2 Modelo Unidimensional com Controlador

Procedendo-se de uma forma análoga à anterior, obtém-se o equacionamento do modelo com controlador.

A equação de movimento da massa M_s é dada por

$$\ddot{y}_s = -\frac{K_p}{M_s}(y_s - w) - \frac{u}{M_s}$$

e a da massa M_c por

$$\ddot{y}_c = \frac{u}{M_c},$$

que podem ser reescritas na forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_p}{M_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{M_s} \\ \frac{1}{M_c} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_p}{M_s} \\ 0 \end{bmatrix} w \quad (4.4)$$

ou ainda como

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (4.5)$$

com as matrizes A , B_1 e B_2 subentendidas pela equação (4.4) e os estados definidos em (4.3).

4.4 Modelo Bidimensional

Este modelo, embora tendo apenas dois GDL a mais que o modelo unidimensional, é bastante utilizado, pois possibilita uma análise mais completa do comportamento dinâmico do veículo sem aumentar significativamente a complexidade das equações (SHARP & WILSON, 1990, HROVAT, 1991).

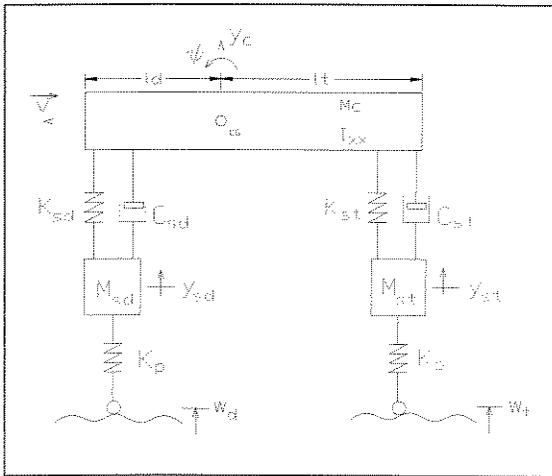


Figura 4.3: Modelo bidimensional sem controlador

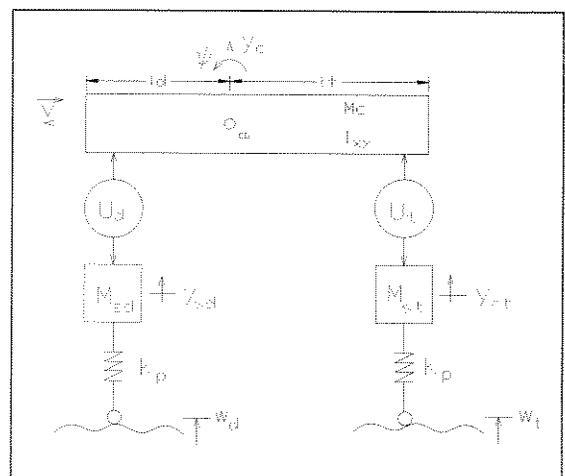


Figura 4.4: Modelo bidimensional com controlador

Os quatro GDL dos modelos das figuras 4.3 e 4.4 correspondem: ao deslocamento vertical do corpo principal, tendo $1Hz$ como modo principal; a sua rotação em relação ao centro de gravidade (modo de “balanço” representado pelo ângulo ψ), “pitch”, tendo $1.5Hz$ e os outros dois são relativos ao deslocamento da suspensão dianteira e ao da traseira, ambos tendo $10Hz$ (valores estes aproximados, dependentes do tipo de suspensão empregada).

Os modelos sem e com controlador são obtidos assumindo-se alguns dos critérios já citados: velocidade constante, atuador u ideal e linearidade.

4.4.1 Modelo Bidimensional sem Controlador

O equacionamento dinâmico é obtido por Newton-Euler fazendo-se o balanço das forças e momentos relativos ao centro de gravidade, atuantes nos corpos.

Do somatório das forças relativas à massa M_{sd} , obtém-se a equação de movimento

$$\ddot{y}_{sd} = \frac{1}{M_{sd}}[-K_{sd}(y_{sd} - y_c + l_d\psi) - K_p(y_{sd} - w_d) - \dots - C_{sd}(\dot{y}_{sd} - \dot{y}_c + l_d\dot{\psi})]. \quad (4.6)$$

Do balanço de forças agindo na massa M_{st} , chega-se a

$$\ddot{y}_{st} = \frac{1}{M_{st}}[-K_{st}(y_{st} - y_c - l_t\psi) - K_p(y_{st} - w_t) - \dots - C_{st}(\dot{y}_{st} - \dot{y}_c - l_t\dot{\psi})]. \quad (4.7)$$

Do balanço de forças agindo no corpo principal, chega-se a

$$\ddot{y}_c = \frac{1}{M_c}[K_{sd}(y_{sd} - y_c + l_d\psi) + K_{st}(y_{st} - y_c - l_t\psi) + \dots + C_{sd}(\dot{y}_{sd} - \dot{y}_c + l_d\dot{\psi}) + C_{st}(\dot{y}_{st} - \dot{y}_c - l_t\dot{\psi})]. \quad (4.8)$$

E do equilíbrio de momentos no corpo principal, tem-se

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_{xx}}[-K_{sd}l_d(y_{sd} - y_c + l_d\psi) + K_{st}l_t(y_{st} - y_c - l_t\psi) - \dots - C_{sd}l_d(\dot{y}_{sd} - \dot{y}_c + l_d\dot{\psi}) + C_{st}l_t(\dot{y}_{st} - \dot{y}_c - l_t\dot{\psi})]. \quad (4.9)$$

As equações acima podem ser colocadas na forma de estado

$$\dot{x} = Ax + B_1w \quad (4.10)$$

com as matrizes A , B_1 e o vetor w particionados na forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & I_{4 \times 4} \\ a_{4 \times 4}^1 & a_{4 \times 4}^2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ b_{4 \times 2} \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_d \\ w_t \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

As partições estabelecidas acima são dadas por:

$$a^1 = \begin{bmatrix} -\frac{K_{sd}+K_p}{M_{sd}} & 0 & \frac{K_{sd}}{M_{sd}} & -\frac{K_{sd}l_d}{M_{sd}} \\ 0 & -\frac{K_{st}+K_p}{M_{st}} & \frac{K_{st}}{M_{st}} & \frac{K_{st}l_t}{M_{st}} \\ \frac{K_{sd}}{M_c} & \frac{K_{st}}{M_c} & -\frac{K_{sd}+K_{st}}{M_c} & \frac{l_dK_{sd}-l_tK_{st}}{M_c} \\ -\frac{l_dK_{sd}}{I_{xx}} & \frac{l_tK_{st}}{I_{xx}} & \frac{l_dK_{sd}-l_tK_{st}}{I_{xx}} & -\frac{l_d^2K_{sd}+l_t^2K_{st}}{I_{xx}} \end{bmatrix},$$

$$a^2 = \begin{bmatrix} -\frac{C_{sd}}{M_{sd}} & 0 & \frac{C_{sd}}{M_{sd}} & -\frac{l_d C_{sd}}{M_{sd}} \\ 0 & -\frac{C_{st}}{M_{st}} & \frac{C_{st}}{M_{st}} & \frac{l_t C_{st}}{M_{st}} \\ \frac{C_{sd}}{M_c} & \frac{C_{st}}{M_c} & -\frac{C_{sd}+C_{st}}{M_c} & \frac{l_d C_{sd}-l_t C_{st}}{M_c} \\ -\frac{l_d C_{sd}}{I_{xx}} & \frac{l_t C_{st}}{I_{xx}} & \frac{l_d C_{sd}-l_t C_{st}}{I_{xx}} & -\frac{l_d^2 C_{sd}+l_t^2 C_{st}}{I_{xx}} \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{K_p}{M_{sd}} & 0 \\ 0 & \frac{K_p}{M_{st}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e os estados definidos como:

$$\begin{aligned} x_1 &\triangleq y_{sd} & x_2 &\triangleq y_{st} & x_3 &\triangleq y_c & x_4 &\triangleq \psi \\ x_5 &\triangleq \dot{y}_{sd} & x_6 &\triangleq \dot{y}_{st} & x_7 &\triangleq \dot{y}_c & x_8 &\triangleq \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.4.2 Modelo Bidimensional com Controlador

Utilizando-se dos mesmos princípios, equaciona-se o modelo com controlador (figura 4.4).

A equação de movimento da massa M_{sd} é dada por

$$\ddot{y}_{sd} = -\frac{K_p}{M_{sd}}(y_{sd} - w_d + u_d),$$

a da massa M_{st} por

$$\ddot{y}_{st} = -\frac{K_p}{M_{st}}(y_{st} - w_t + u_t),$$

e a do corpo principal por

$$\ddot{y}_c = \frac{u_d + u_t}{M_c}.$$

Do balanço de momento tem-se

$$\ddot{\psi} = -\frac{l_d u_{sd} - l_t u_{st}}{I_{xx}}.$$

Essas equações podem ser reescritas como

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (4.13)$$

onde as matrizes A , B_1 e B_2 são:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & I_{4 \times 4} \\ a_{4 \times 4}^1 & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ b_{4 \times 2}^1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ b_{4 \times 2}^2 \end{bmatrix};$$

e suas partições dadas por:

$$a^1 = \begin{bmatrix} -\frac{K_p}{M_{sd}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_p}{M_{st}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b^1 = \begin{bmatrix} \frac{K_p}{M_{sd}} & 0 \\ 0 & \frac{K_p}{M_{st}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{M_{sd}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{M_{st}} \\ \frac{1}{M_c} & \frac{1}{M_c} \\ -\frac{l_d}{I_{xx}} & \frac{l_t}{I_{xx}} \end{bmatrix}.$$

O vetor u está definido como $u = \begin{bmatrix} u_d & u_t \end{bmatrix}'$, e o vetor w e os estados são os definidos anteriormente em (4.11) e (4.12).

4.5 Modelo Tridimensional

O modelo tridimensional já passa a ser uma representação bastante completa de uma suspensão veicular, possuindo pelo menos 7 GDL. Seu equacionamento é complexo e extenso, não sendo largamente utilizado na literatura de suspensões ativas. O comportamento deste modelo foi bem descrito e analisado por CHALASANI, 1987b e posteriormente empregado por CROLLA & ABDEL HADY, 1991, ABDEL HADY & CROLLA, 1992 e VENHOVENS *et al.*, 1993.

Os modelos levantados, sem e com controlador, têm 7 GDL (figuras 4.5 e 4.6), correspondentes: ao deslocamento vertical do centro de gravidade do corpo principal, representado por y_c ; ao modo de balanço do corpo principal, representado por ψ ; ao modo de rolagem do corpo principal, representado por θ (ângulo este relativo a ψ); e a cada uma das suspensões, representados por y_{de} , y_{dd} , y_{te} , y_{td} . O modo de rolagem está aproximadamente em 1Hz, enquanto que os outros assumem valores idênticos ao do sistema bidimensional.

Convém ressaltar, novamente, que os modelos obtidos levam em consideração as seguintes hipóteses: dinâmica de corpo rígido (não incluem elasticidade), dinâmica de parâmetros discretos, não inclusão do peso e linear idade.

Os equacionamentos, para os modelos sem e com controlador, são obtidos utilizando-se as equações de Newton-Euler. Os procedimentos de resolução são um pouco extensos; portanto, estão descritas nesta seção apenas as equações de movimento; os detalhes encontram-se no apêndice A.

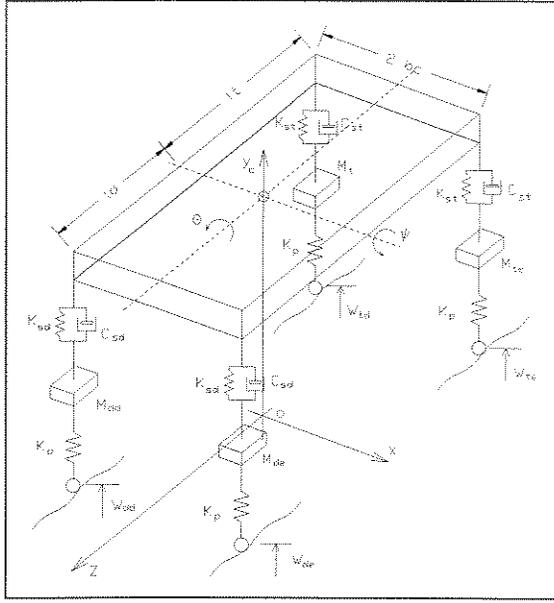


Figura 4.5: Modelo tridimensional sem controlador

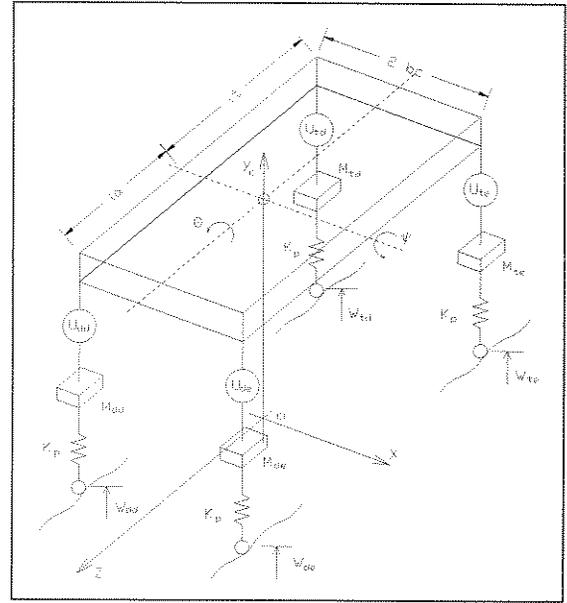


Figura 4.6: Modelo tridimensional com controlador

4.5.1 Modelo Tridimensional sem Controlador

A equação de movimento relativa à massa M_{de} é dada por

$$\ddot{y}_{de} = \frac{1}{M_{de}} [K_p(w_{de} - y_{de}) + \frac{K_{hd}}{4b_c^2} (y_{dd} - y_{de} + 2b_c\theta) + K_{sd}(y_c - y_{de} + b_c\theta - l_d\psi) + C_{sd}(\dot{y}_c - \dot{y}_{de} + b_c\dot{\theta} - l_d\dot{\psi})], \quad (4.14)$$

a da massa M_{dd} por

$$\ddot{y}_{dd} = \frac{1}{M_{dd}} [K_p(w_{dd} - y_{dd}) + \frac{K_{hd}}{4b_c^2} (y_{de} - y_{dd} - 2b_c\theta) + K_{sd}(y_c - y_{dd} - b_c\theta - l_d\psi) + C_{sd}(\dot{y}_c - \dot{y}_{dd} - b_c\dot{\theta} - l_d\dot{\psi})], \quad (4.15)$$

a da massa M_{te} por

$$\ddot{y}_{te} = \frac{1}{M_{te}} [K_p(w_{te} - y_{te}) + \frac{K_{ht}}{4b_c^2} (y_{td} - y_{te} + 2b_c\theta) + K_{st}(y_c - y_{te} + b_c\theta + l_t\psi) + C_{st}(\dot{y}_c + \dot{y}_{te} + b_c\dot{\theta} + l_t\dot{\psi})]. \quad (4.16)$$

Para a massa M_{td} , tem-se

$$\ddot{y}_{td} = \frac{1}{M_{td}} [K_p(w_{td} - y_{td}) + \frac{K_{ht}}{4b_c^2} (y_{te} - y_{td} - 2b_c\theta) + K_{st}(y_c - y_{td} - b_c\theta + l_t\psi) + C_{st}(\dot{y}_c + \dot{y}_{td} - b_c\dot{\theta} + l_t\dot{\psi})] \quad (4.17)$$

e a equação para o corpo principal é dada por

$$\ddot{y}_c = \frac{1}{M_c} [K_{sd}(y_{de} + y_{dd} - 2y_c + 2l_d\psi) + K_{st}(y_{te} + y_{td} - 2y_c - 2l_t\psi) + C_{sd}(\dot{y}_{de} + \dot{y}_{dd} - 2\dot{y}_c + 2l_d\dot{\psi}) + C_{st}(\dot{y}_{te} + \dot{y}_{td} - 2\dot{y}_c - 2l_t\dot{\psi})]. \quad (4.18)$$

Finalmente, as equações de movimento para a rolagem e o balanço são respectivamente:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \frac{1}{I_{zz}} [b_c K_{sd}(y_{de} - y_{dd} - 2b_c\theta) + b_c K_{st}(y_{te} - y_{td} - 2b_c\theta) \\ & + \frac{K_{bd}}{2b_c}(y_{de} - y_{dd} - 2b_c\theta) + \frac{K_{bt}}{2b_c}(y_{te} - y_{td} - 2b_c\theta) \\ & + b_c C_{sd}(\dot{y}_{de} - \dot{y}_{dd} - 2b_c\dot{\theta}) + b_c C_{st}(\dot{y}_{te} - \dot{y}_{td} - 2b_c\dot{\theta})] \end{aligned} \quad (4.19)$$

e

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} = & \frac{1}{I_{xx}} [l_d K_{sd}(2y_c - y_{de} - y_{dd} - 2l_d\psi) + l_t K_{st}(y_{te} + y_{td} - 2y_c - 2l_t\psi) \\ & + l_d C_{sd}(2\dot{y}_c - \dot{y}_{de} - \dot{y}_{dd} - 2l_d\dot{\psi}) + l_t C_{st}(\dot{y}_{te} + \dot{y}_{td} - 2\dot{y}_c - 2l_t\dot{\psi})]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

As equações de movimento acima podem ser colocadas na forma matricial

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F_1 w \quad (4.21)$$

onde M representa a matrix de massa, C a matrix de amortecimento, K a matrix de rigidez, X o vetor das coordenadas generalizadas e F_1 a matrix dos termos independente que multiplica a excitação w (ver apêndice A, pg. 113).

Na forma de estado:

$$\dot{x} = Ax + B_1 w \quad (4.22)$$

com a matriz A , B_1 e o vetor w particionados como:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 7} & I_{7 \times 7} \\ a_{7 \times 7}^1 & a_{7 \times 7}^2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 4} \\ b_{7 \times 4} \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_{de} \\ w_{dd} \\ w_{te} \\ w_{td} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

As partições dadas como:

$$\begin{aligned} a^1 &= -M^{-1}K, \\ a^2 &= -M^{-1}C, \\ b &= -M^{-1}F_1. \end{aligned}$$

E o vetor de estado $x = \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}$, onde:

$$\begin{aligned} x_1 &\triangleq y_{de} & x_2 &\triangleq y_{dd} & x_3 &\triangleq y_{te} & x_4 &\triangleq y_{td} & x_5 &\triangleq y_c & x_6 &\triangleq \theta & x_7 &\triangleq \psi \\ x_8 &\triangleq \dot{x}_1 & x_9 &\triangleq \dot{x}_2 & x_{10} &\triangleq \dot{x}_3 & x_{11} &\triangleq \dot{x}_4 & x_{12} &\triangleq \dot{x}_5 & x_{13} &\triangleq \dot{x}_6 & x_{14} &\triangleq \dot{x}_7. \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.5.2 Modelo Tridimensional com Controlador

As equações de movimento obtidas para as massas M_{de} , M_{dd} , M_{te} e M_{td} , após algumas simplificações, são como segue:

$$\ddot{y}_{de} = \frac{1}{M_{de}} [K_p(w_{de} - y_{de}) + \frac{K_{bd}}{4b_c^2}(y_{dd} - y_{de} + 2b_c\theta) - u_{de}],$$

$$\ddot{y}_{dd} = \frac{1}{M_{dd}} [K_p(w_{dd} - y_{dd}) + \frac{K_{bd}}{4b_c^2}(y_{de} - y_{dd} - 2b_c\theta) - u_{dd}],$$

$$\ddot{y}_{te} = \frac{1}{M_{te}} [K_p(w_{te} - y_{te}) + \frac{K_{bt}}{4b_c^2}(y_{td} - y_{te} + 2b_c\theta) - u_{te}],$$

$$\ddot{y}_{td} = \frac{1}{M_{td}} [K_p(w_{td} - y_{td}) + \frac{K_{bt}}{4b_c^2}(y_{te} - y_{td} - 2b_c\theta) - u_{td}].$$

A equação para o corpo principal é

$$\ddot{y}_c = \frac{1}{M_c} [u_{de} + u_{dd} + u_{te} + u_{td}]$$

e as equações para a rolagem e o balanço são, respectivamente:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_{zz}} \left[\frac{K_{bd}}{2b_c}(y_{de} - y_{dd} - 2b_c\theta) + \frac{K_{bt}}{2b_c}(y_{te} - y_{td} - 2b_c\theta) + b_c(u_{de} - u_{dd} + u_{te} - u_{td}) \right] \quad (4.25)$$

e

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_{xx}} [l_t(u_{te} + u_{td}) - l_d(u_{de} - u_{dd})].$$

Na forma matricial,

$$M\ddot{X} + KX = F \quad (4.26)$$

onde M , K , F e X representam as mesmas matrizes que as citadas na seção anterior; embora possuam valores distintos (ver apêndice A, pg. 115).

A forma de estado é escrita como:

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \quad (4.27)$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 7} & I_{7 \times 7} \\ a_{7 \times 7} & 0_{7 \times 7} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 4} \\ b_{7 \times 4}^1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 4} \\ b_{7 \times 4}^2 \end{bmatrix},$$

e suas partições sendo:

$$\begin{aligned} a &= -M^{-1}K, \\ b^1 &= -M^{-1}F_1, \\ b^2 &= -M^{-1}F_2, \end{aligned}$$

com as submatrizes F_1 e F_2 de F representando os coeficientes da excitação w e da força de controle u , respectivamente (ver apêndice A, pg. 116). O vetor u é definido como $u = [u_{de} \ u_{dd} \ u_{te} \ u_{td}]'$ e o vetor w e os estados são os mesmos que os definidos anteriormente em (4.23) e (4.24).

4.6 Incertezas de Modelo

Quando nas seções precedentes levantaram-se as equações dinâmicas para os modelos unidimensional, bidimensional e tridimensional, foram estabelecidas certas premissas, tornando assim as equações obtidas particularizações do real. Descartando-se a possibilidade de obtenção de modelos matemáticos exatos, modelos mais realísticos podem ser obtidos levando-se em conta a presença de incertezas.

No desenvolvimento dos modelos dinâmicos de suspensões veiculares, as frequentes incertezas associadas, podem ser classificadas como:

1. Estruturadas (Paramétricas): surgem do imperfeito conhecimento dos valores dos parâmetros físicos ou variações dos mesmos durante a operação
 - rigidez do pneu, que pode variar de acordo com o tipo e a dimensão do mesmo, ou ainda com a pressão de calibragem;
 - coeficiente de amortecimento, que é dependente do tipo e do modelo do amortecedor, tendo suas características alteradas significativamente com a variação da temperatura;
 - massa da roda, que é sujeita ao tipo do conjunto roda-pneu empregado, se é de uma liga leve ou de aço;
 - massa do carro, que está constantemente se alterando em função da carga a ser transportada e do número de passageiros.
2. Não-Estruturadas (Dinâmicas): simplificações no comportamento dinâmico ou variações no mesmo
 - não linearidades, que geralmente são deixadas de lado na elaboração dos modelos;
 - discretização de um sistema contínuo, que quase sempre simplifica as equações dos modelos a serem obtidas;
 - modos de alta frequência não modelados, por não se conhecer seus comportamentos ou pela complexidade associada aos mesmos.

Um método conveniente para se contornar tal disparidade é prever em quais limites as variações ocorrerão e incluí-los no modelo de estado do sistema correspondente. Desta forma, as leis de controle a serem calculadas estarão levando em conta estas variações, tornando o projeto mais eficiente e robusto.

Para cada variação nos parâmetros do sistema, as matrizes da equação de estado correspondente terão valores distintos. Se o conjunto destas incertezas for convexo, sabe-se que determinadas propriedades, como a estabilidade quadrática ou o desempenho de custo garantido, podem ser apreendidas da verificação dos vértices do polítopo de incertezas apenas. A convexidade também pode ser explorada na fase de projeto da ação de controle.

Sendo assim, qualquer conjunto de restrições satisfeitas nos limites implicará que valores dentro do envelope convexo de incertezas, o qual representa todas as combinações possíveis dos parâmetros incertos, também satisfarão.

O modelo de incertezas a ser utilizado leva unicamente em conta as incertezas paramétricas. Sua formulação pode ser colocada como segue:

Dado o modelo de estado para um determinado sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{4.28}$$

este poderá variar dentro de uma matriz politópica fixa (envelope convexo), tal como:

$$\Delta(t) \in Co\{\Delta_1, \dots, \Delta_K\} \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^K \alpha_i \Delta_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^K \alpha_i = 1 \right\}\tag{4.29}$$

onde $\Delta_1, \dots, \Delta_K$ são sistemas vértices dados por:

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \dots, \Delta_K = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}.\tag{4.30}$$

4.7 Conclusões

Neste capítulo foram deduzidos os modelos necessários às simulações. Primeiramente, foi obtido o modelo unidimensional sem controlador e colocado na forma de estado. O modelamento bidimensional e tridimensional, sem e com controlador, foram subsequentemente levantados. E por último foram descritas as incertezas paramétricas que se encontram presentes.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

5.1 Introdução

Neste capítulo as técnicas de controle estudadas são aplicadas nos modelos dinâmicos levantados. A análise é feita em cada modelo individualmente. Dois projetos distintos são apresentados: um primeiro, no qual se supõe como entrada exógena um degrau, e a otimização baseia-se na norma \mathcal{H}_2 (neste contexto uma apropriada mudança de variáveis é efetuada); e um segundo, no qual a excitação exógena é qualquer sinal $w \in \mathcal{L}_2$, e o problema de otimização é o \mathcal{H}_∞ e o $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (sem mudança de variáveis). Estes projetos são aplicados nos modelos unidimensional e bidimensional. Já no caso tridimensional, analisa-se o problema de falha em atuadores, fazendo-se uso das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ (sem mudança de variáveis).

A mudança de variáveis deve-se ao fato que uma suspensão possui características básicas, como mencionado na seção de modelamento, independentemente de serem suspensões ativas ou passivas¹. De uma forma geral, uma suspensão deve seguir sinais de baixa frequência e filtrar sinais de alta frequência. Em outras palavras, se um degrau for aplicado, o sistema deverá ser capaz de minimizar o efeito da vibração e estabelecer um novo nível para o referencial estático. Isto ocorre numa suspensão convencional, que possui apenas amortecedores e molas. No caso de suspensões ativas, o controlador obtido pode ou não gerar um erro estacionário. Geralmente a lei de controle é da forma $u = Kx$, e quando um novo nível é estabelecido os estados tendem a este patamar; desta forma, a força de controle não se anula, fazendo com que o sistema mantenha um erro estacionário. Uma maneira de contornar isto é aplicar uma mudança de variáveis quando o sistema for implementado ou simulado (THOMPSON, 1976).

Para uma padronização ao longo de todas as simulações, os sistemas serão excitados por entradas do tipo degrau, exceto no caso tridimensional em que a

¹Na literatura costuma-se chamar de suspensão ativa aquela que possui um controlador incorporado e de suspensão passiva a tradicional.

excitação tem o perfil de uma lombada.

5.2 Simulações com o Modelo Unidimensional

Iniciando com o projeto \mathcal{H}_2 , pode-se definir um índice de desempenho para o modelo unidimensional dado pela seguinte soma de integrais quadráticas:

$$J = \int_0^{\infty} \rho u^2 + \alpha(x_1 - w)^2 + \beta(x_1 - x_2)^2 dt. \quad (5.1)$$

Portanto a força de controle, dada por u , está sendo ponderada pelo coeficiente ρ , a dirigibilidade $(x_1 - w)$ por α e o espaço de trabalho da suspensão $(x_1 - x_2)$ por β .

A equação de estado é dada por

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \quad (5.2)$$

onde w é a entrada de distúrbio, um degrau unitário, e $x(0) = 0$ é o estado inicial. As matrizes A , B_1 e B_2 são como segue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_p}{M_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_p}{M_s} \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{M_s} \\ \frac{1}{M_c} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Como mencionado anteriormente, faz-se necessário uma mudança de variáveis, para que o sistema não tenha erro estacionário à entrada em degrau (THOMPSON, 1976). O novo sistema de variáveis \hat{x} é: $\hat{x}_1 = x_1 - w$, $\hat{x}_2 = x_2 - w$, $\hat{x}_3 = x_3$ e $\hat{x}_4 = x_4$.

Os valores iniciais desta nova variável de estado, no instante imediatamente após a aplicação do degrau, serão dados por $\hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = -1$ e $\hat{x}_3(0) = \hat{x}_4(0) = 0$. A equação (5.2) pode ser reescrita como:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2u, \quad (5.4)$$

com o estado inicial dado por: $\hat{x}(0) = [-1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]'$.

Com esta transformação o custo (5.1) passa a ser

$$J = \int_0^{\infty} \hat{x}'C'C\hat{x} + u'D'Du dt, \quad (5.5)$$

onde

$$C'C = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D'D = [\rho]. \quad (5.6)$$

Para todas as simulações o projeto LQR é aplicado de forma convencional sobre os parâmetros “nominais”, sem incluir as incertezas. Já no projeto \mathcal{H}_2 as incertezas são consideradas. As simulações para ambos os projetos LQR e \mathcal{H}_2 são executadas sobre todos os vértices do politopo convexo.

Os valores nominais² dos parâmetros empregados nas simulações foram: $M_s = 28.58 \text{ kg}$; $M_c = 288.90 \text{ kg}$; $K_p = 1.559 \times 10^5 \text{ N/m}$, todos sujeitos à presença de incertezas. Como distúrbio proveniente da via considerou-se um degrau unitário.

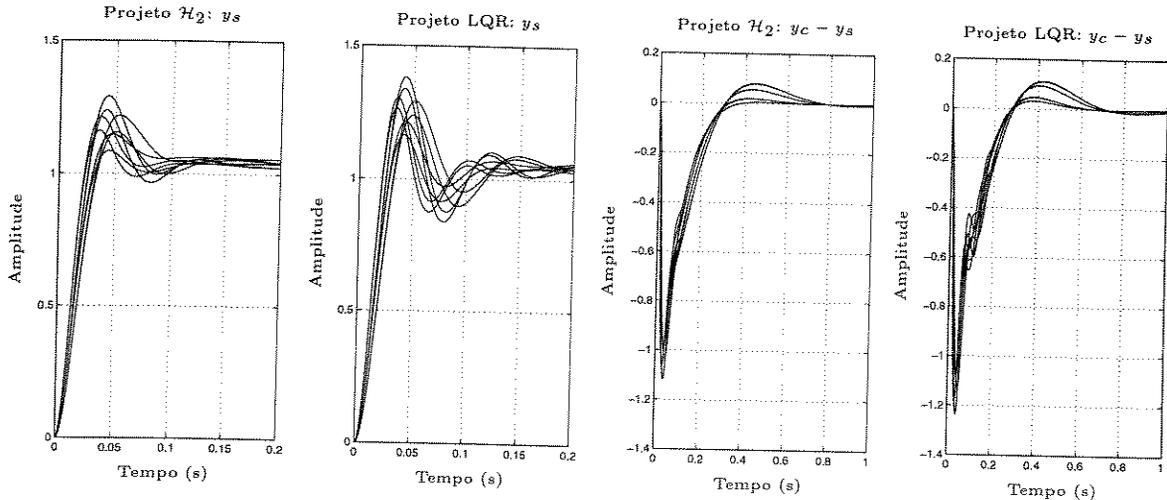


Figura 5.1: Dirigibilidade

Figura 5.2: Espaço de trabalho

Os fatores de peso do funcional de custo para os projetos \mathcal{H}_2 e LQR possuem inicialmente valores iguais, dados por: $\alpha = 10$; $\beta = 1$; $\rho = 8 \times 10^{-10}$. As incertezas paramétricas são de $\pm 20\%$, calculadas sobre os valores nominais do sistema. Tomando-se como exemplo a massa suspensa M_c , esta variará de $80\%M_c$ a $120\%M_c$.

Pelos resultados da simulação (em todos os vértices do politopo de incertezas do sistema incerto) apresentados nas figuras 5.1-5.3, verifica-se que o projeto \mathcal{H}_2 demonstrou ter um comportamento melhor em relação à dirigibilidade (devido a um melhor controle sobre a variável x_1) e um menor espaço de trabalho da suspensão, mas com uma aceleração maior do corpo principal.

A minimização \mathcal{H}_2 custo garantido forneceu um limitante superior para a

²Estes são os valores utilizados na referência THOMPSON, 1976.

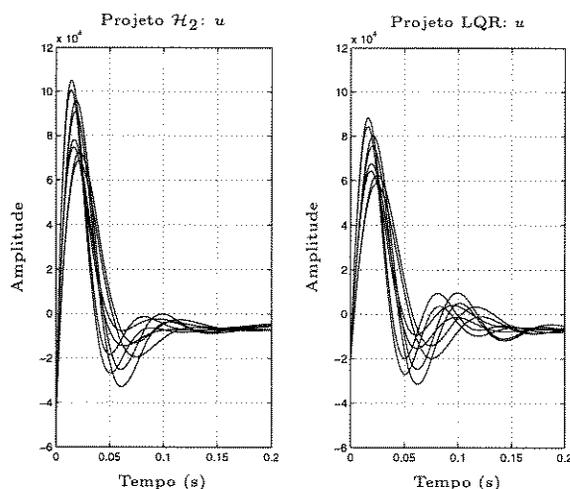


Figura 5.3: Força de controle

norma \mathcal{H}_2 de 0.7945, isto é,

$$\|H_{K_{\mathcal{H}_2}}\|_2 \leq 0.7945, \quad (5.7)$$

quaisquer que sejam os valores dos parâmetros incertos M_s , M_c e K_p dentro do politopo de incerteza considerado. A tabela 5.1 apresenta os valores da norma \mathcal{H}_2 calculados, usando-se os ganhos dos projetos \mathcal{H}_2 e LQR, no sistema nominal e em todos os vértices do politopo de incertezas do sistema incerto. É curioso constatar que o ganho do projeto LQR fornece valores inferiores para a norma \mathcal{H}_2 do que os fornecidos pelo ganho robusto \mathcal{H}_2 ; embora este fato não possa ser garantido a priori.

Controlador	Vértices								Nominal
	1	2	3	4	5	6	7	8	
\mathcal{H}_2	0.56	0.59	0.58	0.61	0.53	0.57	0.55	0.58	0.57
LQR	0.54	0.57	0.55	0.59	0.52	0.56	0.54	0.57	0.55

Tabela 5.1: Normas \mathcal{H}_2 . Sistema unidimensional com incertezas de $\pm 20\%$.

Os ganhos³ $K_{\mathcal{H}_2}$ e K_{LQR} são respectivamente:

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{H}_2} &= \begin{bmatrix} -104738 & 35355 & -2426 & 6318 \end{bmatrix} \\ K_{LQR} &= \begin{bmatrix} -57234 & 35355 & -1385 & 4826 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

É interessante fazer uma comparação estabelecendo uma restrição na máxima força de controle. Portanto, os pesos são modificados no projeto \mathcal{H}_2 para fazer com que em ambos os projetos a aceleração máxima do corpo principal seja igual: $\alpha = 10$; $\beta = 1$; $\rho = 9.80 \times 10^{-9}$.

³Vale salientar que os valores apresentados foram arredondados por questões de espaço; portanto, alguma variações podem ser encontradas se os ganhos forem utilizados com esta precisão, em vez de serem computados novamente.

Os resultados estão apresentados nas figuras 5.4-5.6. Neste caso o pico da variável x_1 em ambos os projetos é praticamente igual, e o espaço de trabalho da suspensão também encontra-se similar. Percebe-se que ambos os projetos demonstram um comportamento robusto frente às variações paramétricas da planta.

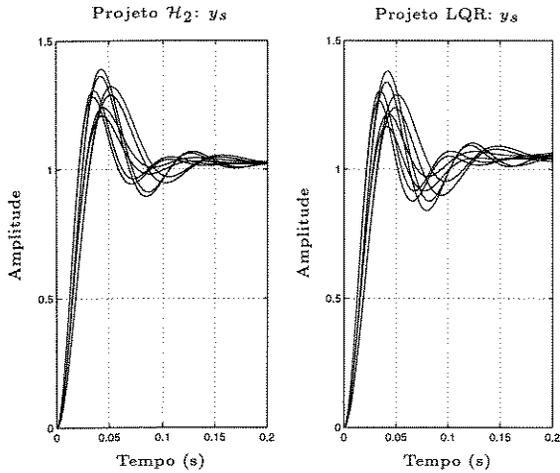


Figura 5.4: Dirigibilidade

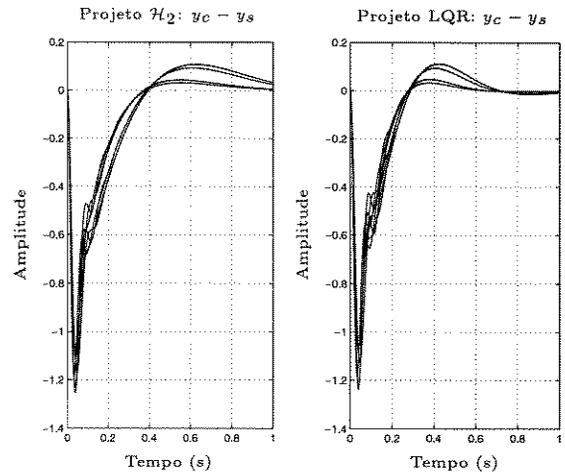


Figura 5.5: Espaço de trabalho

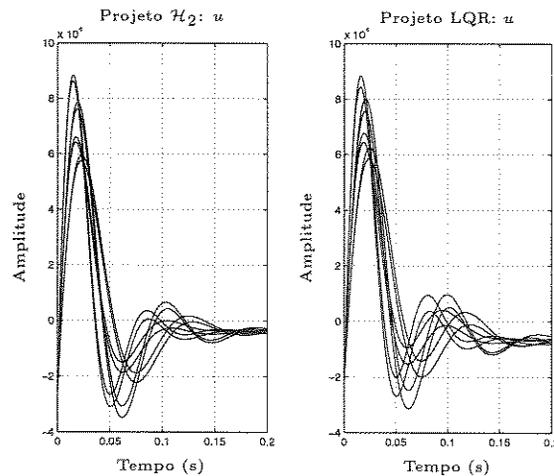


Figura 5.6: Força de controle

Uma outra simulação foi efetuada utilizando-se os mesmos dados que o da primeira, exceto que as incertezas passaram de $\pm 20\%$ para $\pm 50\%$ em torno dos valores nominais. Isto é interessante de se fazer para poder verificar como a robustez dos controladores se comporta frente a estas variações. Os resultados desta simulação estão apresentados nas figuras 5.7-5.9.

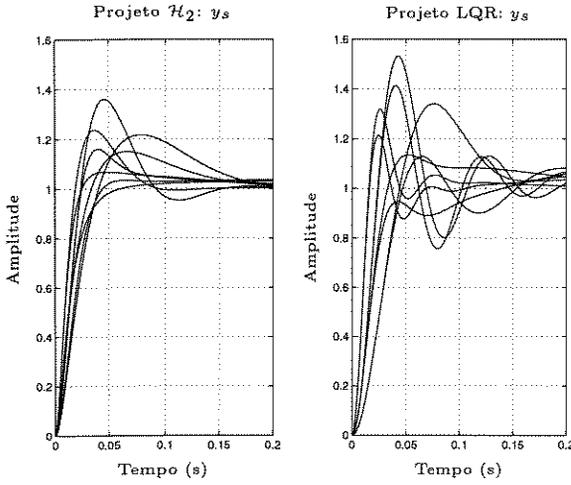


Figura 5.7: Dirigibilidade

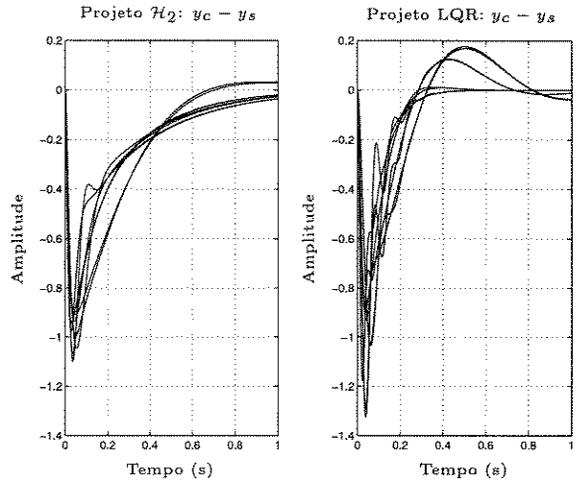


Figura 5.8: Espaço de trabalho

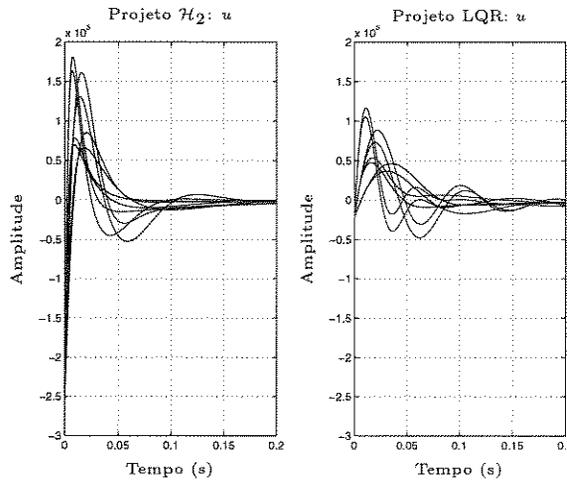


Figura 5.9: Força de controle

Verifica-se que o controlador \mathcal{H}_2 teve um desempenho bem mais robusto sobre o conjunto incerto do que o controlador LQR. A minimização \mathcal{H}_2 custo garantido forneceu um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 de 1.9208. A tabela 5.2 apresenta os valores da norma \mathcal{H}_2 para todos os vértices do sistema incerto. De uma forma geral, para todas as simulações, o projeto \mathcal{H}_2 demonstrou ter um desempenho mais uniforme sobre o conjunto de incertezas (embora o projeto LQR tenha se mostrado também um projeto robusto).

Controlador	Vértices								Nominal
	1	2	3	4	5	6	7	8	
\mathcal{H}_2	0.68	0.79	0.71	0.86	0.57	0.71	0.62	0.78	0.71
LQR	0.51	0.61	0.56	0.65	0.48	0.59	0.54	0.62	0.55

Tabela 5.2: Normas \mathcal{H}_2 . Sistema unidimensional com incertezas de $\pm 50\%$.

O ganho K_{LQR} é como em (5.8) e o ganho $K_{\mathcal{H}_2}$ é dado por:

$$K_{\mathcal{H}_2} = \begin{bmatrix} -391814 & 35360 & -6190 & 14474 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

As simulações do projeto \mathcal{H}_∞ não levam em consideração a mudança de variáveis; portanto, representa-se o equacionamento dinâmico pela equação (5.2) e o custo pelas matrizes (5.6). As simulações do projeto \mathcal{H}_∞ são efetuadas de forma similar às do projeto \mathcal{H}_2 , utilizando-se os mesmos parâmetros iniciais: $\alpha = 10$; $\beta = 1$; $\rho = 8 \times 10^{-10}$. As incertezas são de $\pm 20\%$. Os resultados estão apresentados nas figuras 5.10-5.13.

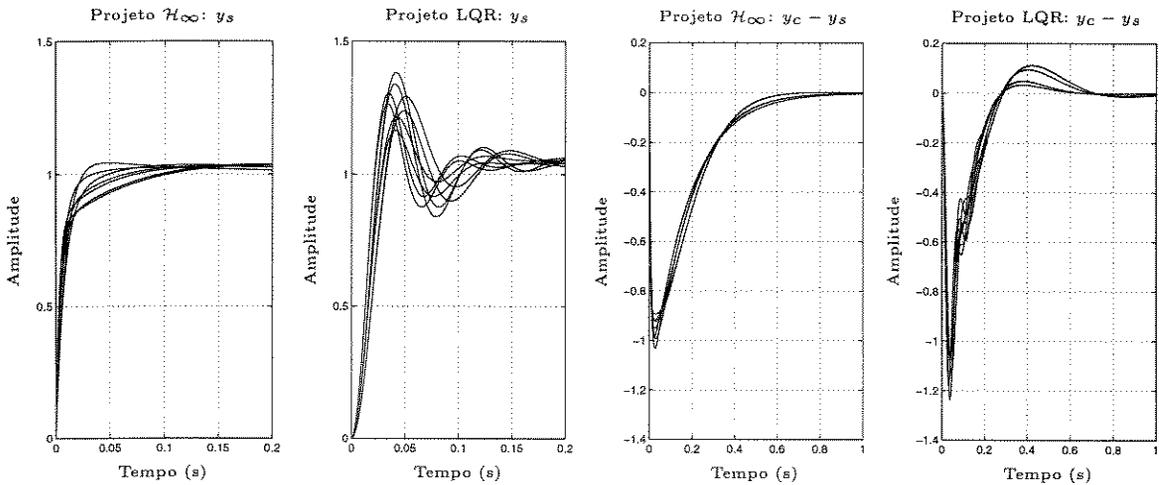


Figura 5.10: Dirigibilidade

Figura 5.11: Espaço de trabalho

Neste caso, tanto a dirigibilidade quanto o espaço de trabalho da suspensão estão sendo controlados de uma forma melhor no projeto \mathcal{H}_∞ que no LQR; entretanto, a custa de altos ganhos. A ocorrência desses altos ganhos no processo de otimização \mathcal{H}_∞ é prevista na literatura (SCHERER, 1989), e depende sobremaneira da dinâmica do sistema. Em particular, da figura 5.13 dá para se ter uma idéia de como a otimização \mathcal{H}_∞ se processa; percebe-se nitidamente que o processo de otimização suaviza os picos da curva dos valores singulares do sistema em malha fechada.

A minimização \mathcal{H}_∞ custo garantido forneceu um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ de 6.39. A tabela 5.3 apresenta os valores das normas \mathcal{H}_∞ para todos os vértices do politopo de incertezas. Note que o projeto LQR, que de certa forma

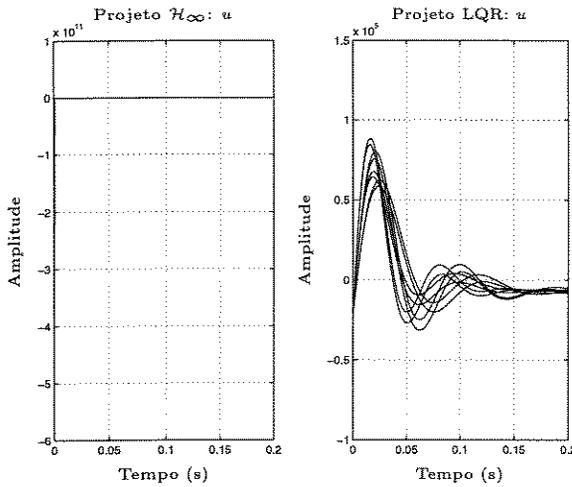


Figura 5.12: Força de controle

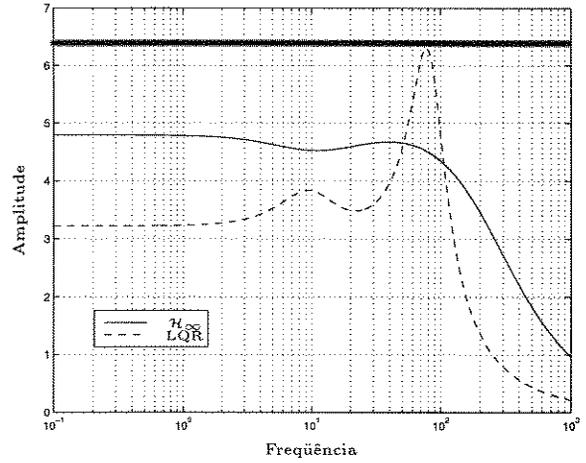


Figura 5.13: Valores singulares

mostrou-se robusto em termos da norma \mathcal{H}_2 , forneceu normas \mathcal{H}_∞ nitidamente piores do que as do custo garantido \mathcal{H}_∞ .

Controlador	Vértices								Nominal
	1	2	3	4	5	6	7	8	
$K_{\mathcal{H}_\infty}$	2.60	3.95	2.72	4.11	3.46	5.25	3.68	5.55	3.77
K_{LQR}	4.67	7.58	4.63	7.63	5.03	8.23	5.04	8.27	6.32

Tabela 5.3: Normas \mathcal{H}_∞ . Sistema unidimensional com incertezas de $\pm 20\%$.

O ganho K_{LQR} é como em (5.8) e o ganho $K_{\mathcal{H}_\infty}$ é dado por:

$$K_{\mathcal{H}_\infty} = 1 \times 10^9 \begin{bmatrix} -6.51 & 1.41 & -4.52 & 2.90 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Uma segunda simulação foi efetuada com o controlador \mathcal{H}_∞ . Neste caso as incertezas passaram a ser de $\pm 50\%$. Os resultados da simulação encontram-se nas figuras 5.14-5.17.

Como era de se esperar, os resultados não se alteraram em relação à simulação anterior, ou seja, tanto a dirigibilidade quanto o espaço de trabalho da suspensão estão sendo controlados de uma forma melhor no projeto \mathcal{H}_∞ que no LQR, com um custo bastante alto. A minimização \mathcal{H}_∞ custo garantido forneceu um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ de 24.97. A tabela 5.4 apresenta os valores da norma \mathcal{H}_∞ para todos os vértices do sistema incerto.

O ganho K_{LQR} é como em (5.8) e o ganho $K_{\mathcal{H}_\infty}$ é dado por:

$$K_{\mathcal{H}_\infty} = 1 \times 10^{10} \begin{bmatrix} -1.30 & 0.18 & -0.01 & 0.05 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

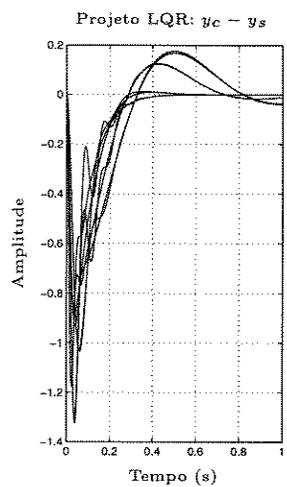
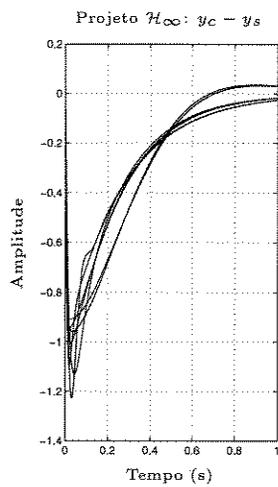
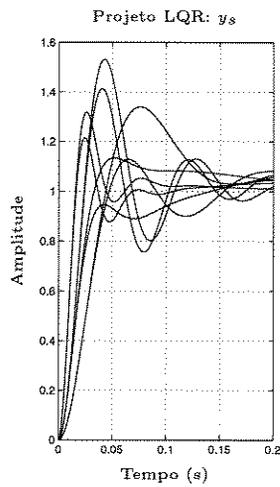
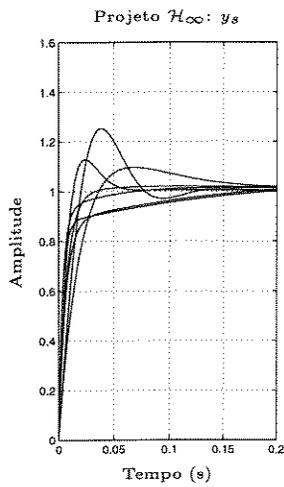


Figura 5.14: Dirigibilidade

Figura 5.15: Espaço de trabalho

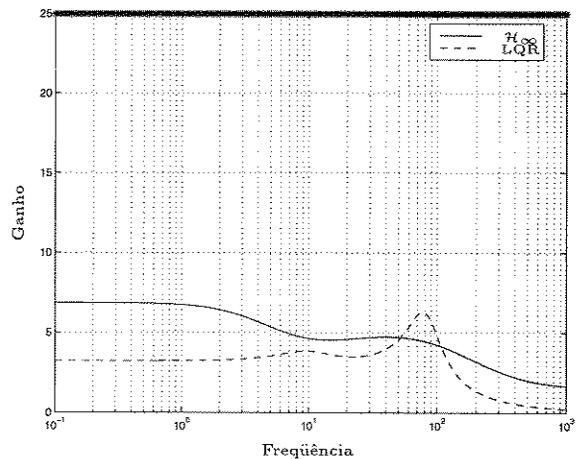
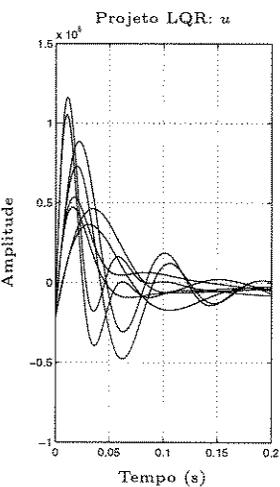
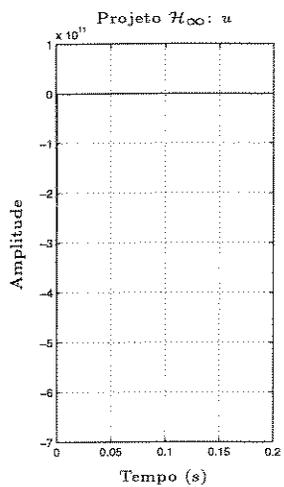


Figura 5.16: Força de controle

Figura 5.17: Valores singulares

Controlador	Vértices								Nominal
	1	2	3	4	5	6	7	8	
\mathcal{H}_∞	4.64	4.74	5.16	5.18	4.18	4.26	4.97	5.01	4.52
LQR	7.87	9.64	7.87	9.65	3.87	4.47	4.30	4.37	6.31

Tabela 5.4: Normas \mathcal{H}_∞ . Sistema unidimensional com incertezas de $\pm 50\%$.

Finalmente, o controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é obtido utilizando-se os seguintes fatores de pesos: $\alpha = 10$; $\beta = 1$; $\rho = 8 \times 10^{-10}$. As incertezas são de 20% sobre os valores nominais. O limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ estabelecido foi $\gamma = 6.9$. Os resultados estão apresentados nas figuras 5.18-5.21.

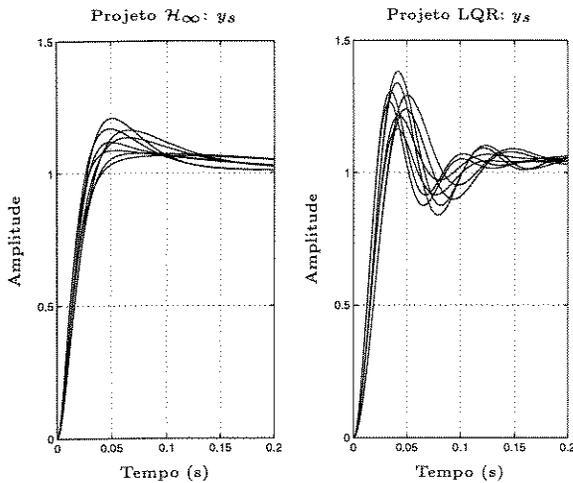


Figura 5.18: Dirigibilidade

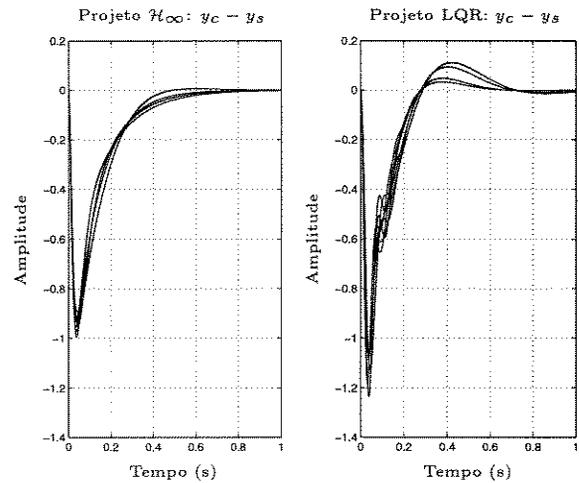


Figura 5.19: Espaço de trabalho

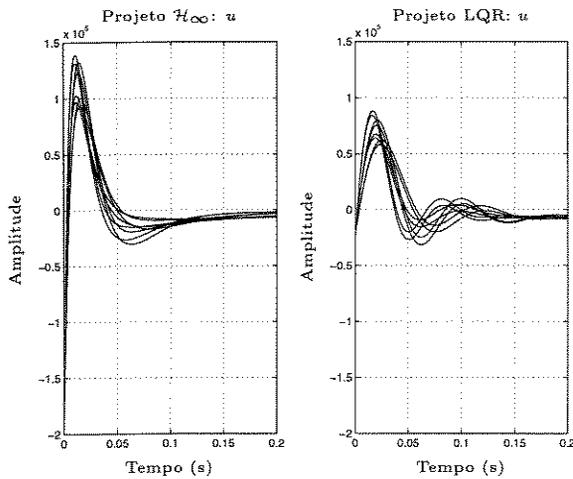


Figura 5.20: Força de controle

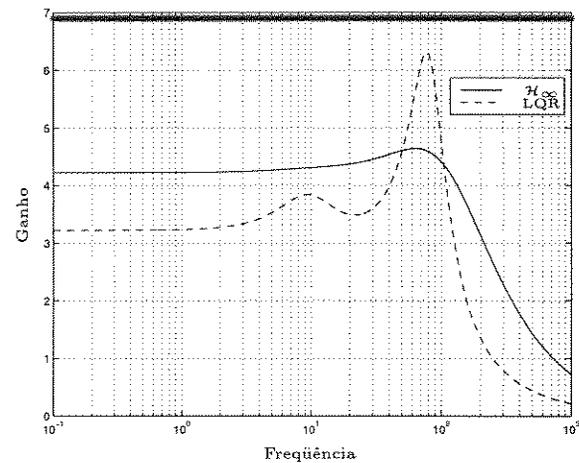


Figura 5.21: Valores singulares

Percebe-se que estes resultados estão a meio caminho entre os resultados do projeto \mathcal{H}_2 e os do projeto \mathcal{H}_∞ . Ou seja, é uma metodologia interessante pois estabelecido um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ , o controlador obtido será aquele que minimiza o limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 . Podendo, portanto, gerar resultados satisfatórios para a dirigibilidade e o espaço de trabalho da suspensão a custo de um ganho não tão elevado. A minimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ custo garantido forneceu um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 de 78.78.⁴ As tabelas 5.5 e 5.6 apresentam os valores das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para todos os vértices do sistema incerto.

⁴Este valor é bem maior que o do problema \mathcal{H}_2 devido a diferença entre a ordem de grandeza da condição inicial de ambos projetos.

Controlador	Vértices								Nominal
	1	2	3	4	5	6	7	8	
$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	56.3	46.9	57.1	47.8	38.5	32.4	39.0	32.9	43.3
LQR	39.5	35.5	39.4	35.5	28.8	26.3	28.6	26.1	32.2

Tabela 5.5: Normas \mathcal{H}_2 . Sistema unidimensional com incertezas de $\pm 20\%$.

Controlador	Vértices								Nominal
	1	2	3	4	5	6	7	8	
$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	5.60	5.74	5.46	5.53	4.23	4.29	4.54	5.46	4.64
LQR	6.99	7.58	7.02	7.62	5.03	5.48	5.04	5.51	6.31

Tabela 5.6: Normas \mathcal{H}_∞ . Sistema unidimensional com incertezas de $\pm 20\%$.

O ganho K_{LQR} é como em (5.8) e o ganho $K_{\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty}$ é dado por:

$$K_{\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty} = \begin{bmatrix} -323970 & 195600 & -2320 & 29660 \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

5.3 Simulações com o Modelo Bidimensional

O índice de desempenho para o modelo bidimensional é definido de forma similar à do modelo unidimensional, ponderando-se a força de controle, a dirigibilidade, o conforto e o ângulo de balanço:

$$J = \int_0^\infty \rho u_i^2 + \alpha(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) + \delta \hat{x}_4^2 + \beta \left[(\hat{x}_1 - (\hat{x}_3 - l_d \hat{x}_4))^2 + (\hat{x}_2 - (\hat{x}_3 + l_t \hat{x}_4))^2 \right] dt. \quad (5.13)$$

Para que o sistema não tenha erro estacionário à entrada em degrau, o novo sistema de variáveis \hat{x} é:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 - w_1 \\ x_2 - w_2 \\ x_3 - \left(\frac{w_1 l_t + w_2 l_d}{l_t + l_d} \right) \\ x_4 - \left(\frac{w_1 + w_2}{l_t + l_d} \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Em todas as simulações, será aplicado um degrau de amplitude 1 na suspensão dianteira e um degrau de amplitude 1.5 na traseira. O valor inicial desta variável

de estado, no instante imediatamente após a aplicação do degrau, é dado por

$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -1.2037 & -0.1852 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Com esta transformação o custo (5.13) passa a ser

$$J = \int_0^{\infty} \hat{x}' C' C \hat{x} + u' D' D u \, dt, \quad (5.16)$$

onde

$$C' C = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & 0 & -\beta & l_d & & & & \\ 0 & \alpha + \beta & -\beta & -l_t & & & & \\ -\beta & -\beta & 2\beta & l_t - l_d & & & 0_{4 \times 4} & \\ l_d & -l_t & l_t - l_d & \delta + l_d^2 + l_t^2 & & & & \\ & & 0_{4 \times 4} & & & & 0_{4 \times 4} & \end{bmatrix} \quad D' D = \text{diag}\{\rho, \rho\}. \quad (5.17)$$

De forma análoga às simulações do modelo unidimensional, o projeto LQR é aplicado nominalmente e o projeto \mathcal{H}_2 leva em consideração o espaço de incertezas.

Os parâmetros nominais empregados nas simulações foram: $M_{sd} = 28.58 \text{ Kg}$; $M_{st} = 28.58 \text{ kg}$; $M_c = 640.00 \text{ kg}$; $K_p = 1.559 \times 10^5 \text{ N/m}$; $l_d = 1.1 \text{ m}$; $l_t = 1.60 \text{ m}$; $I_{xx} = 2300.00 \text{ Kg m}^2$. Os parâmetros incertos são: M_c , M_{sd} , M_{st} e K_p .

Para todas as simulações os pesos do funcional de custo para os controladores \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e LQR foram iguais. Os fatores de peso utilizados foram: $\alpha = 10$; $\beta = 1$; $\rho = 8 \times 10^{-10}$; $\delta = 1$. As incertezas foram de $\pm 20\%$.

Pelos resultados da simulação apresentados nas figuras 5.22-5.25, verifica-se que o projeto \mathcal{H}_2 forneceu uma melhor dirigibilidade para ambas as suspensões, dianteira e traseira, aliada à necessidade de um menor espaço de trabalho. Com relação ao deslocamento do corpo principal e ao balanço, os projetos revelaram comportamentos semelhantes. A força de controle necessária no caso \mathcal{H}_2 foi maior que a do projeto LQR.

Os ganhos $K_{\mathcal{H}_2}$ e K_{LQR} são respectivamente:

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{H}_2} &= \begin{bmatrix} -9.30 & -4.29 & 3.33 & -4.77 & -0.17 & -0.05 & 0.71 & -1.02 \\ -2.04 & -6.19 & 3.70 & 5.93 & -0.06 & -0.21 & 0.57 & 0.90 \end{bmatrix} \times 10^4 \\ K_{LQR} &= \begin{bmatrix} -5.35 & -0.20 & 3.56 & -4.45 & -0.14 & 0.00 & 0.55 & -0.94 \\ -0.21 & -5.54 & 3.50 & 6.30 & 0.00 & -0.14 & 0.46 & 1.09 \end{bmatrix} \times 10^4. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A minimização \mathcal{H}_2 custo garantido forneceu um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 de 1.3712. A tabela 5.7 apresenta os valores das normas \mathcal{H}_2 para todos os sistemas incertos.

	Vértices								
Controlador	1	2	3	4	5	6	7	8	Nominal
\mathcal{H}_2	1.12	1.14	1.09	1.11	1.09	1.11	1.06	1.08	1.07
LQR	1.07	1.08	1.02	1.04	1.04	1.05	0.99	1.00	1.02
	Vértices								
Controlador	9	10	11	12	13	14	15	16	
\mathcal{H}_2	1.08	1.09	1.04	1.06	1.05	1.07	1.02	1.03	
LQR	1.04	1.05	0.99	1.00	1.01	1.01	0.96	0.96	

Tabela 5.7: Normas \mathcal{H}_2 . Sistema bidimensional com incertezas de $\pm 20\%$.

Uma segunda simulação foi efetuada na qual as incertezas passaram de $\pm 20\%$ para $\pm 50\%$, mantendo-se todos os outros parâmetros iguais aos da primeira simulação.

Verifica-se novamente que os resultados apresentados nas figuras 5.26-5.29 demonstram um desempenho superior para o controlador \mathcal{H}_2 quando visto em função da dirigibilidade e do espaço de trabalho da suspensão. Com relação ao deslocamento da massa suspensa y_c houve um aumento de amortecimento no projeto robusto; já em relação ao balanço houve uma diminuição. Isto pode ser modificado variando-se os respectivos pesos no funcional de custo.

A minimização \mathcal{H}_2 custo garantido forneceu um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 de 2.4316. A tabela 5.8 apresenta os valores das normas \mathcal{H}_2 para todos os sistemas incertos.

	Vértices								
Controlador	1	2	3	4	5	6	7	8	Nominal
\mathcal{H}_2	1.75	1.78	1.67	1.75	1.67	1.70	1.60	1.67	1.65
LQR	1.57	1.61	1.51	1.55	1.53	1.55	1.46	1.48	1.49
	Vértices								
Controlador	9	10	11	12	13	14	15	16	
\mathcal{H}_2	1.86	1.86	1.80	1.81	1.75	1.71	1.69	1.65	
LQR	1.64	1.63	1.60	1.59	1.65	1.54	1.59	1.48	

Tabela 5.8: Normas \mathcal{H}_2 . Sistema bidimensional com incertezas de $\pm 50\%$.

O ganho K_{LQR} é como em (5.18) e o ganho $K_{\mathcal{H}_2}$ é dado por:

$$K_{\mathcal{H}_2} = \begin{bmatrix} -2.19 & -1.10 & 0.28 & -0.54 & -0.02 & -0.01 & 0.10 & -0.15 \\ -0.59 & -0.93 & 0.40 & 0.53 & -0.01 & -0.03 & 0.07 & 0.07 \end{bmatrix} \times 10^5. \quad (5.19)$$

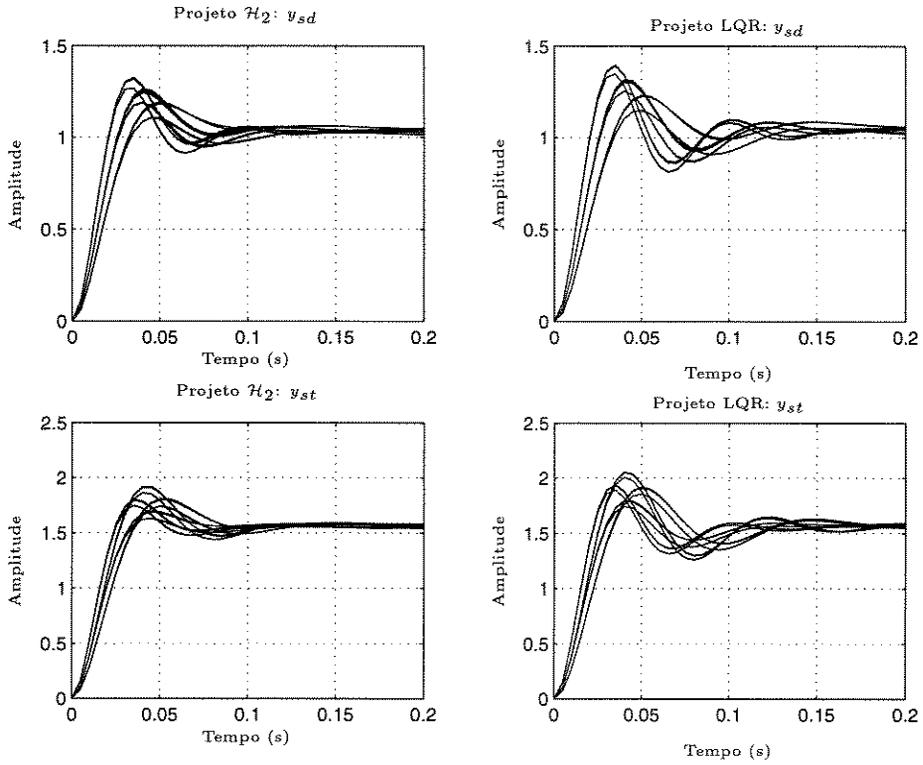


Figura 5.22: Dirigibilidade ($\pm 20\%$ de incertezas)

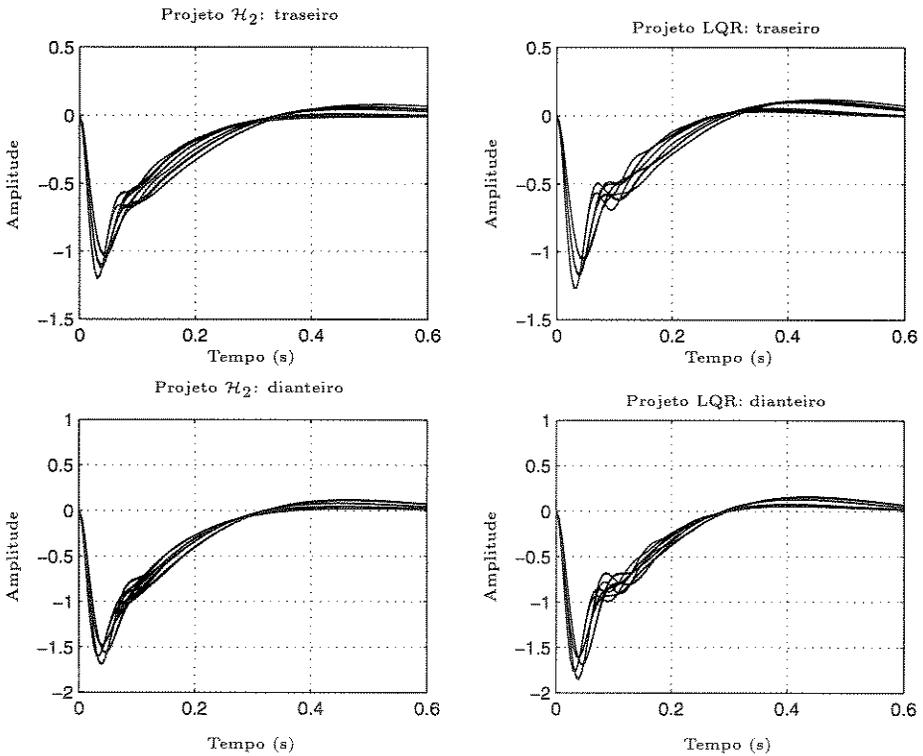


Figura 5.23: Espaço de trabalho ($\pm 20\%$ de incertezas)

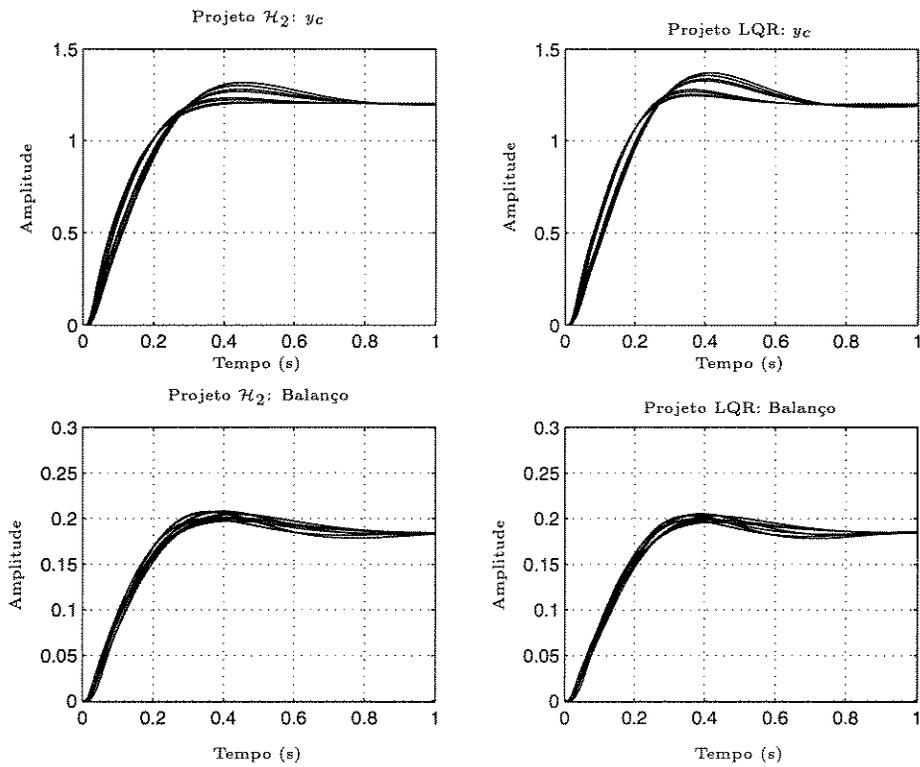


Figura 5.24: Deslocamento y_c e balanço ($\pm 20\%$ de incertezas)

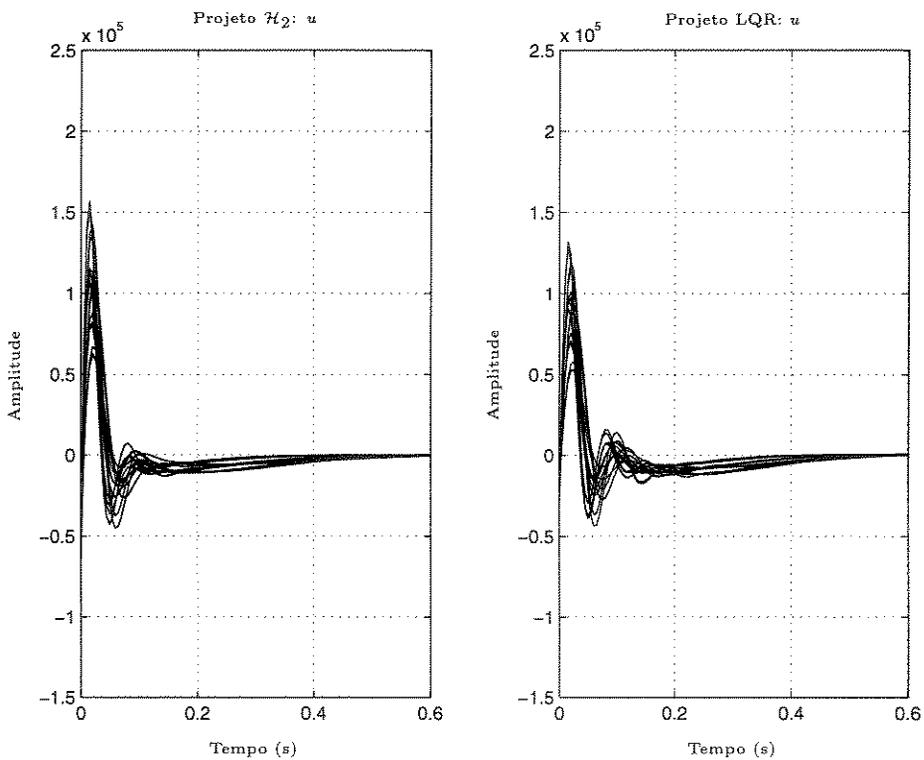


Figura 5.25: Força de controle ($\pm 20\%$ de incertezas)

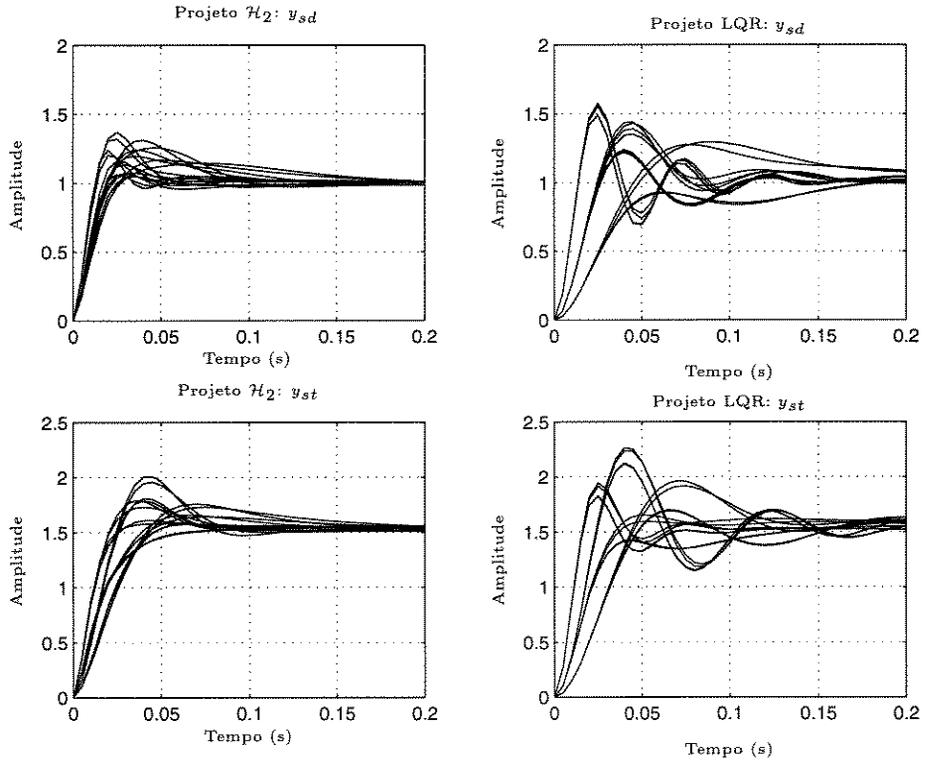


Figura 5.26: Dirigibilidade ($\pm 50\%$ de incertezas)

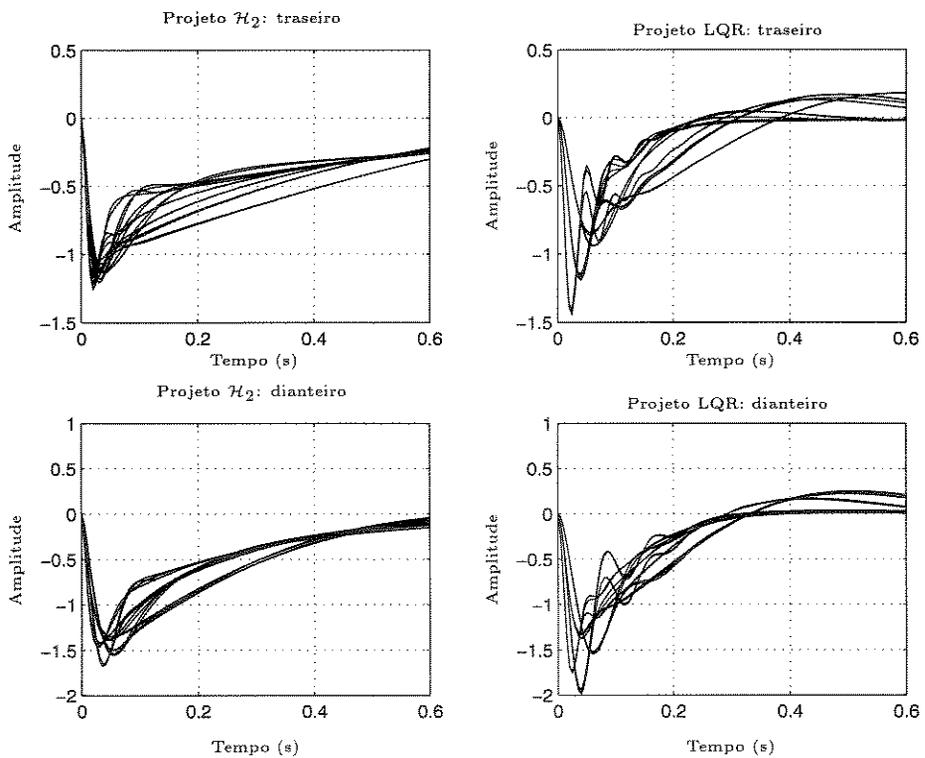


Figura 5.27: Espaço de trabalho ($\pm 50\%$ de incertezas)

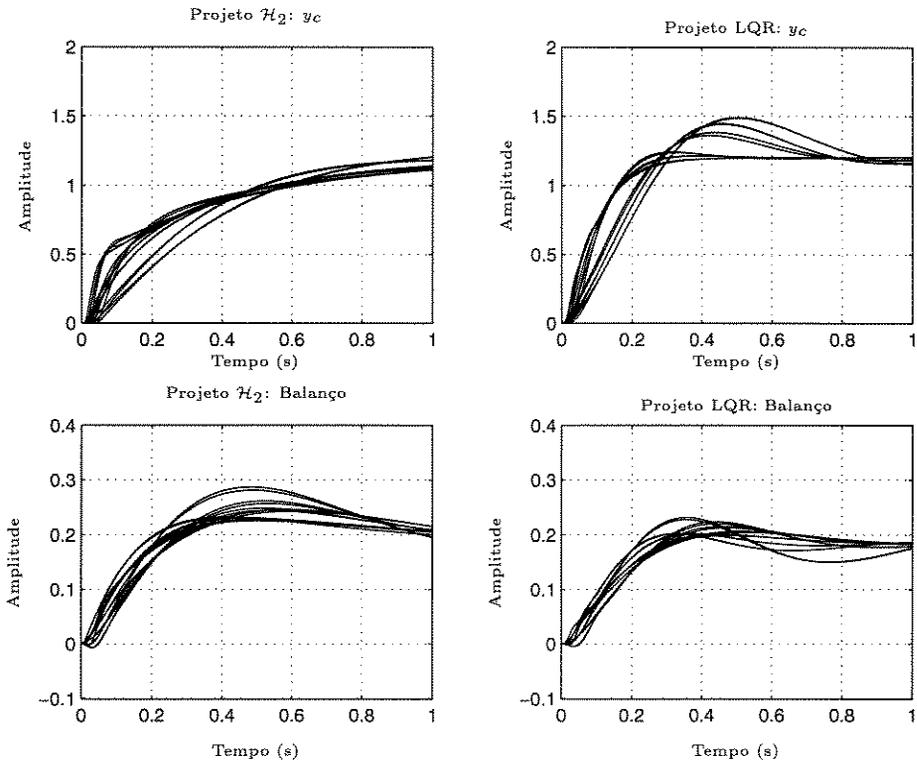


Figura 5.28: Deslocamento y_c e balanço ($\pm 50\%$ de incertezas)

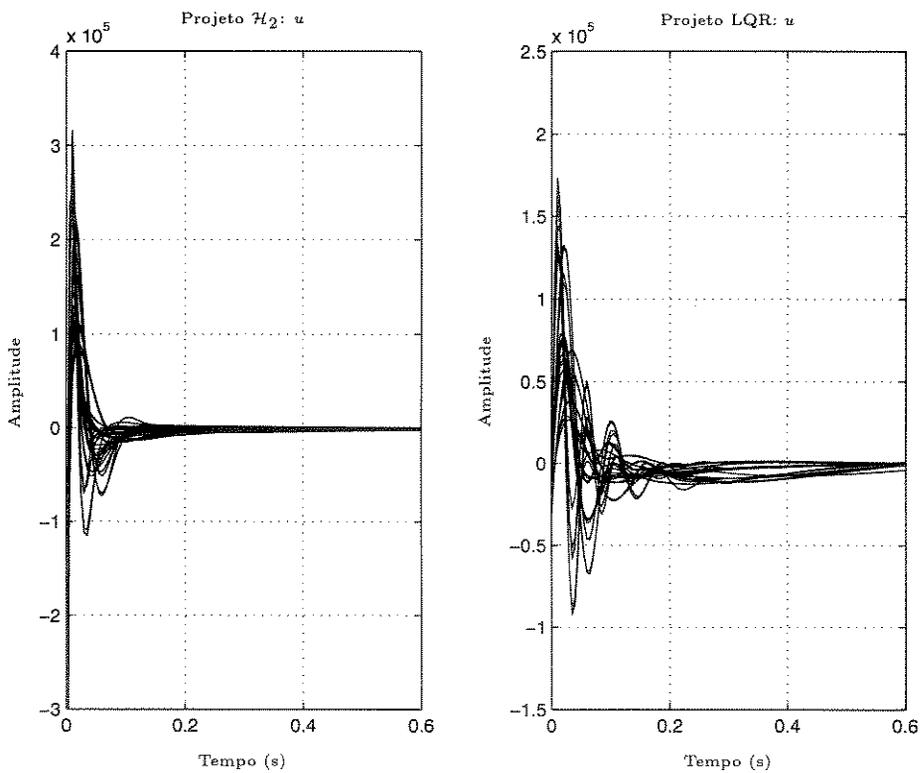


Figura 5.29: Força de controle ($\pm 50\%$ de incertezas)

As simulações com o controlador \mathcal{H}_∞ são agora apresentadas. Nesta primeira simulação as incertezas são de $\pm 20\%$. Os pesos do funcional de custo permanecem os mesmos.

Similarmente ao caso unidimensional, o controlador \mathcal{H}_∞ pondera fortemente a dirigibilidade e o espaço de trabalho da suspensão, como apresentado nas figuras 5.30-5.33. Isto, novamente, a custa de uma grande força de controle. O fato do balanço ter sido maior no caso \mathcal{H}_∞ , deveu-se às escolhas dos pesos; para diminuí-lo é necessário estabelecer-se nova ponderação no funcional de custo.

A minimização \mathcal{H}_∞ custo garantido forneceu um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ de 7.16. A tabela 5.9 apresenta os valores das normas \mathcal{H}_∞ para todos os sistemas incertos.

	Vértices								
Controlador	1	2	3	4	5	6	7	8	Nominal
\mathcal{H}_∞	3.99	4.58	3.97	4.56	3.88	4.37	3.84	4.37	3.86
K_{LQR}	7.61	8.77	7.00	8.78	7.59	8.75	6.99	8.75	6.31
	Vértices								
Controlador	9	10	11	12	13	14	15	16	
\mathcal{H}_∞	3.76	3.94	3.76	3.92	3.57	3.72	3.56	3.73	
LQR	5.51	6.32	5.03	6.32	5.49	6.30	5.02	6.30	

Tabela 5.9: Normas \mathcal{H}_∞ . Sistema bidimensional com incertezas de $\pm 20\%$.

O ganho K_{LQR} é como dado em (5.18) e o ganho $K_{\mathcal{H}_\infty}$ é dado por:

$$K_{\mathcal{H}_\infty} = \begin{bmatrix} -1.40 & -0.55 & 0.40 & -0.15 & 0.00 & 0.00 & 0.09 & -0.06 \\ -0.33 & -0.13 & 0.09 & -0.04 & 0.00 & 0.00 & 0.02 & -0.01 \end{bmatrix} \times 10^5. \quad (5.20)$$

Foi efetuada uma segunda simulação na qual as incertezas passaram de $\pm 20\%$ para $\pm 50\%$, mantendo-se todos os outros parâmetros iguais aos da simulação anterior.

O tipo de resposta (figuras 5.34-5.37) não diferiu muito do da simulação anterior. Observa-se sobremaneira que a otimização \mathcal{H}_∞ custo garantido forneceu maior robustez ao sistema do que o projeto LQR, em ambas as simulações.

A minimização \mathcal{H}_∞ custo garantido forneceu um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ de 31.23. A tabela 5.10 apresenta os valores das normas \mathcal{H}_∞ para todos os vértices dos sistemas incertos.

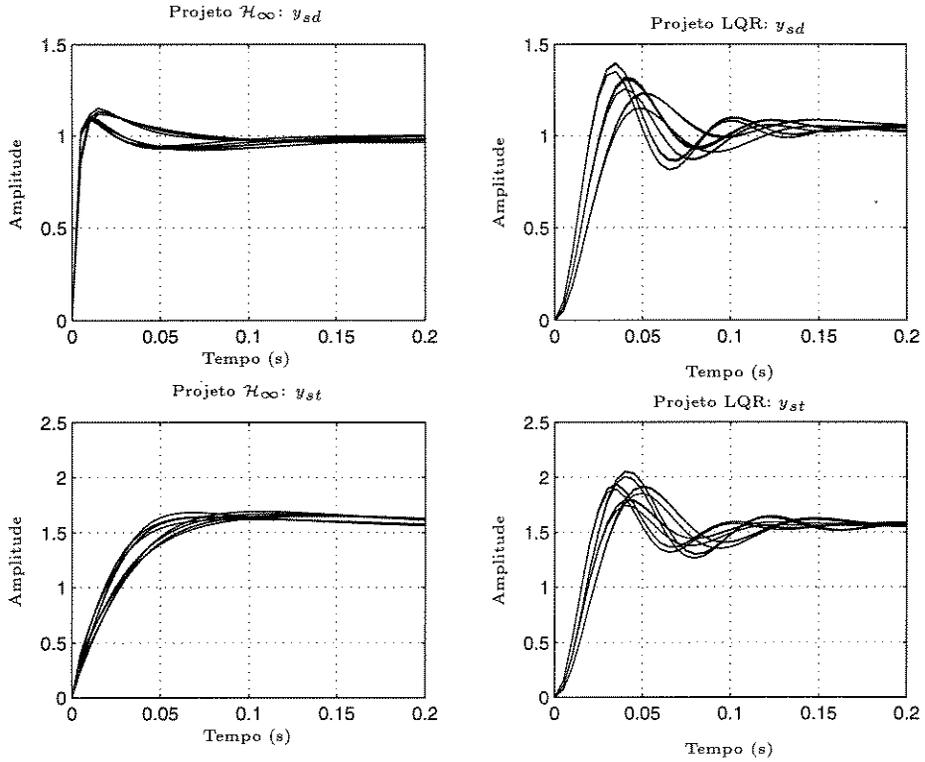
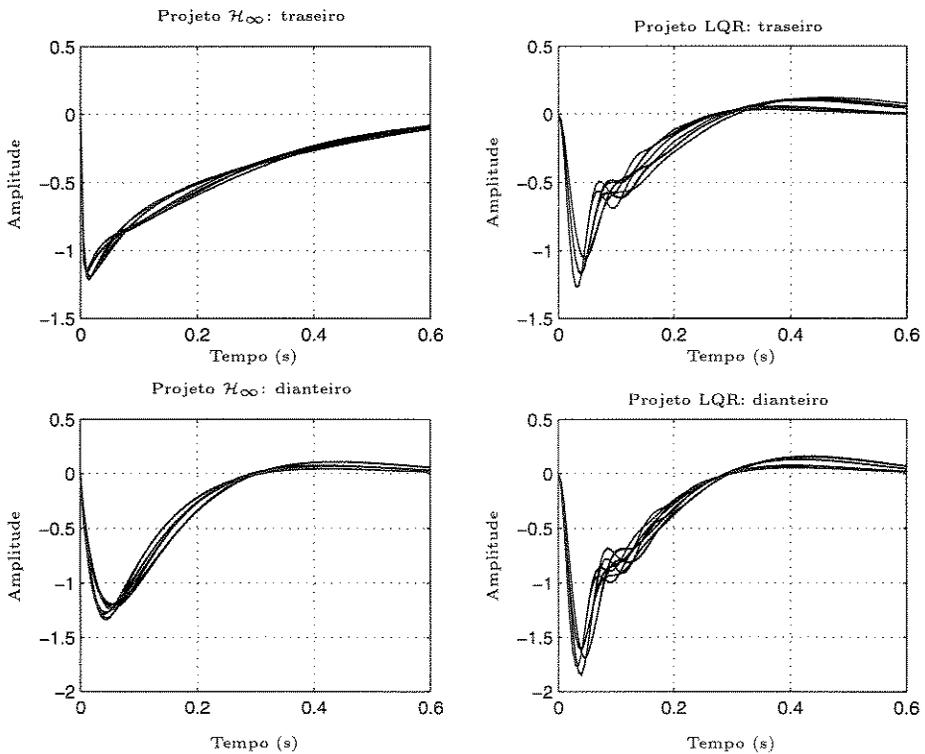
O ganho K_{LQR} é como em (5.18) e o ganho $K_{\mathcal{H}_\infty}$ é dado por:

$$K_{\mathcal{H}_\infty} = \begin{bmatrix} -2.40 & -1.53 & 0.51 & -0.08 & 0.00 & -0.00 & 0.17 & -0.07 \\ 0.12 & 0.08 & -0.03 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \times 10^9. \quad (5.21)$$

		Vértices							
Controlador	1	2	3	4	5	6	7	8	Nominal
\mathcal{H}_∞	5.20	7.86	7.78	7.73	5.20	7.28	5.00	7.30	4.90
LQR	9.59	15.77	7.84	15.77	9.53	15.68	7.84	15.66	6.31
		Vértices							
Controlador	9	10	11	12	13	14	15	16	
\mathcal{H}_∞	5.71	5.15	5.71	5.14	4.99	4.78	4.96	4.72	
LQR	4.45	6.34	4.44	6.33	4.17	6.34	4.12	6.32	

Tabela 5.10: Normas \mathcal{H}_∞ . Sistema bidimensional com incertezas de $\pm 50\%$.

Como era de se esperar, de uma forma geral, os controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ custo garantido demonstraram um desempenho significativamente mais robusto que o controlador LQR, garantindo desta forma um comportamento dinâmico estável frente ao conjunto de incertezas. Comportamentos intermediários poderiam ser obtidos com a utilização do critério misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

Figura 5.30: Dirigibilidade ($\pm 20\%$ de incertezas)Figura 5.31: Espaço de trabalho ($\pm 20\%$ de incertezas)

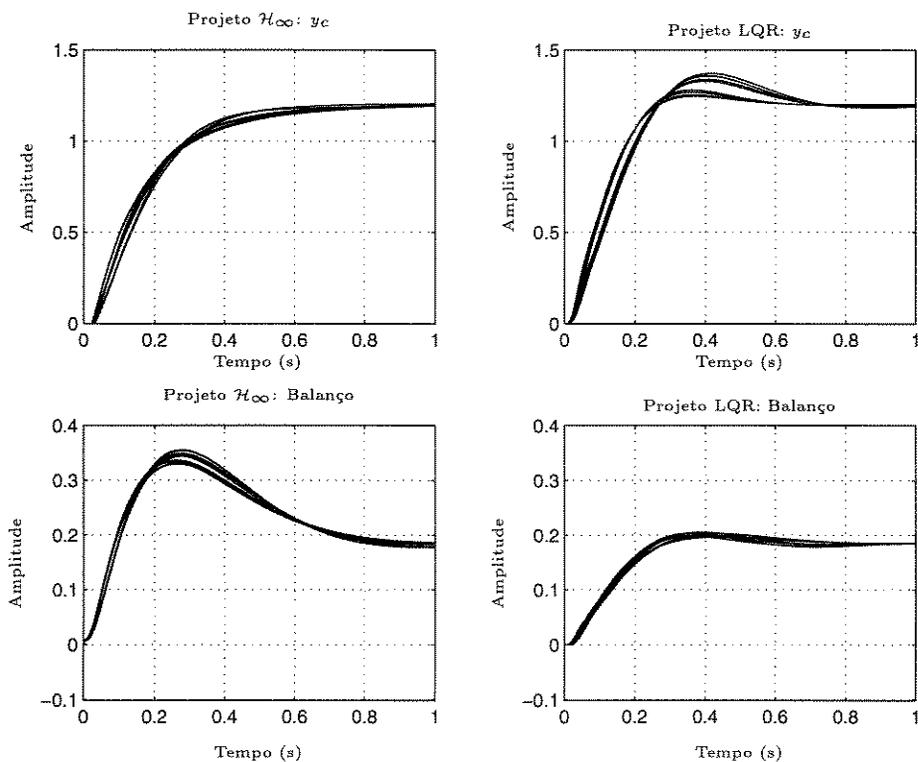


Figura 5.32: Deslocamento y_c e balanço ($\pm 20\%$ de incertezas)

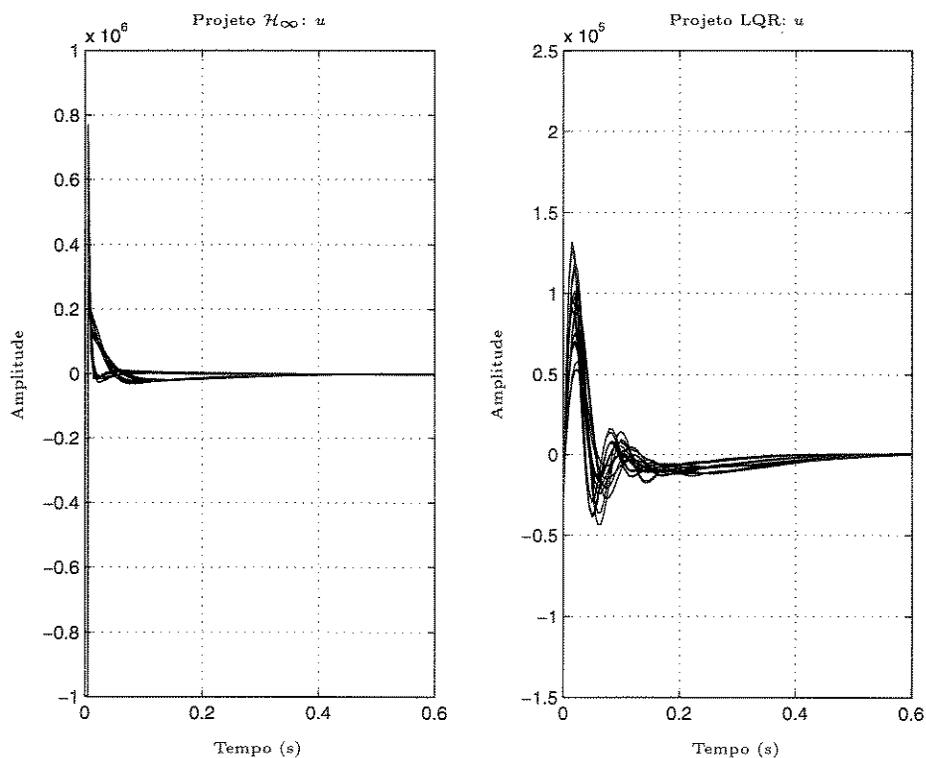


Figura 5.33: Força de controle ($\pm 20\%$ de incertezas)

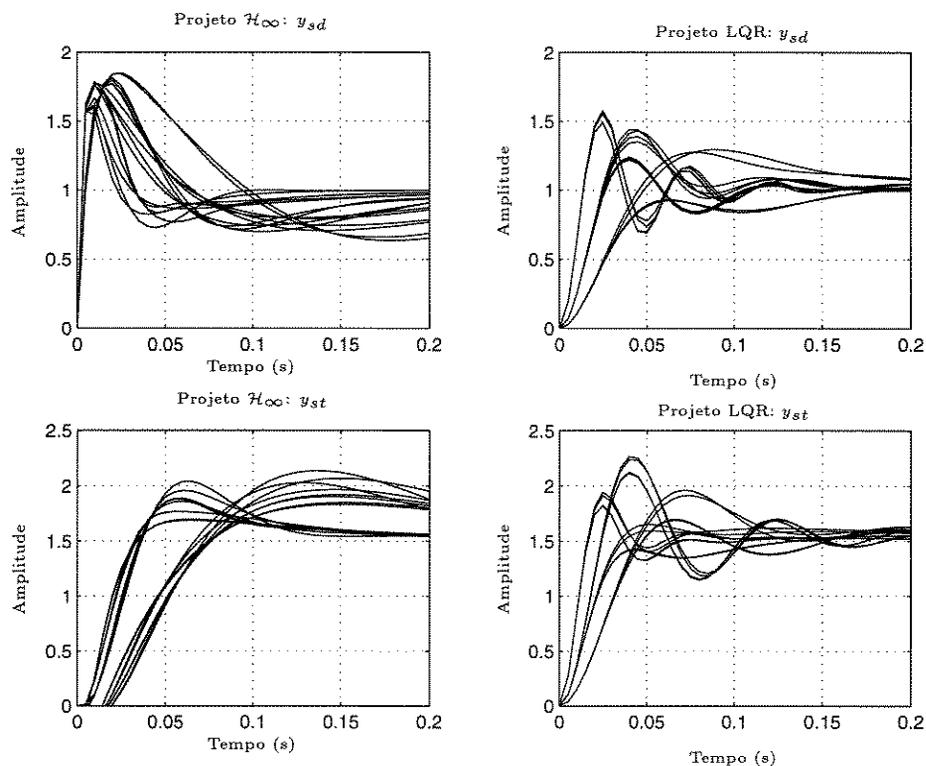


Figura 5.34: Dirigibilidade ($\pm 50\%$ de incertezas)

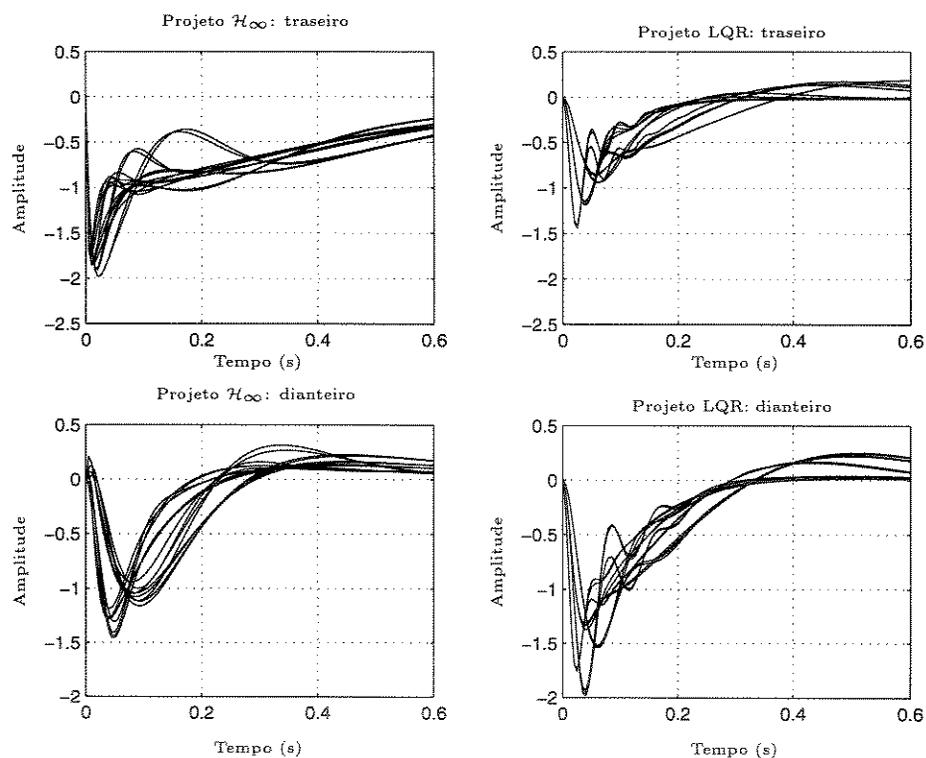


Figura 5.35: Espaço de trabalho ($\pm 50\%$ de incertezas)

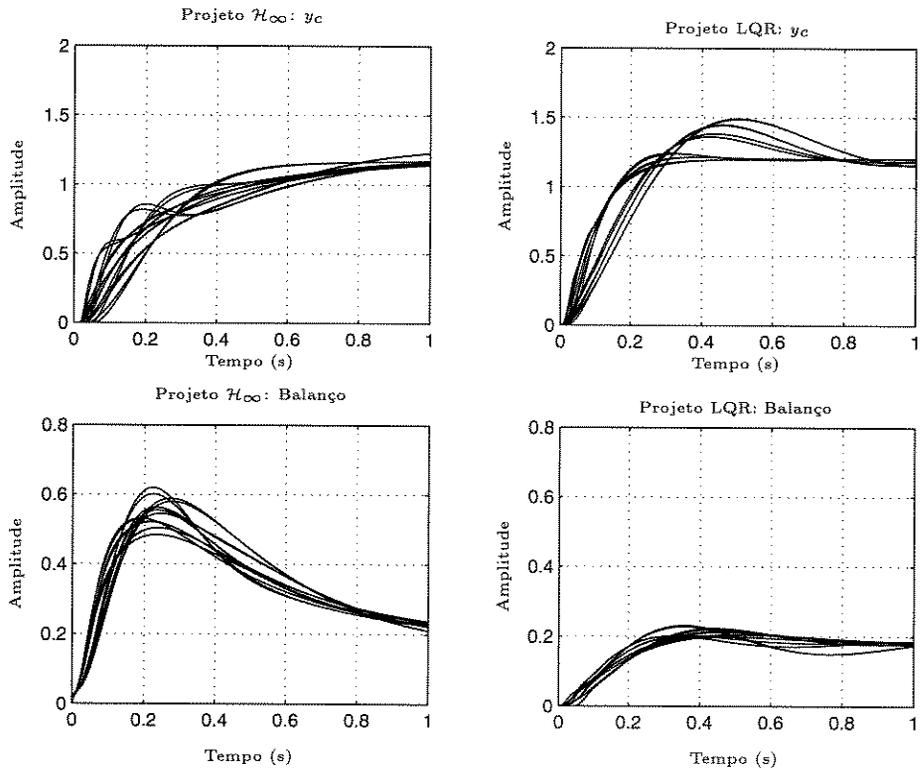


Figura 5.36: Deslocamento y_c e balanço ($\pm 50\%$ de incertezas)

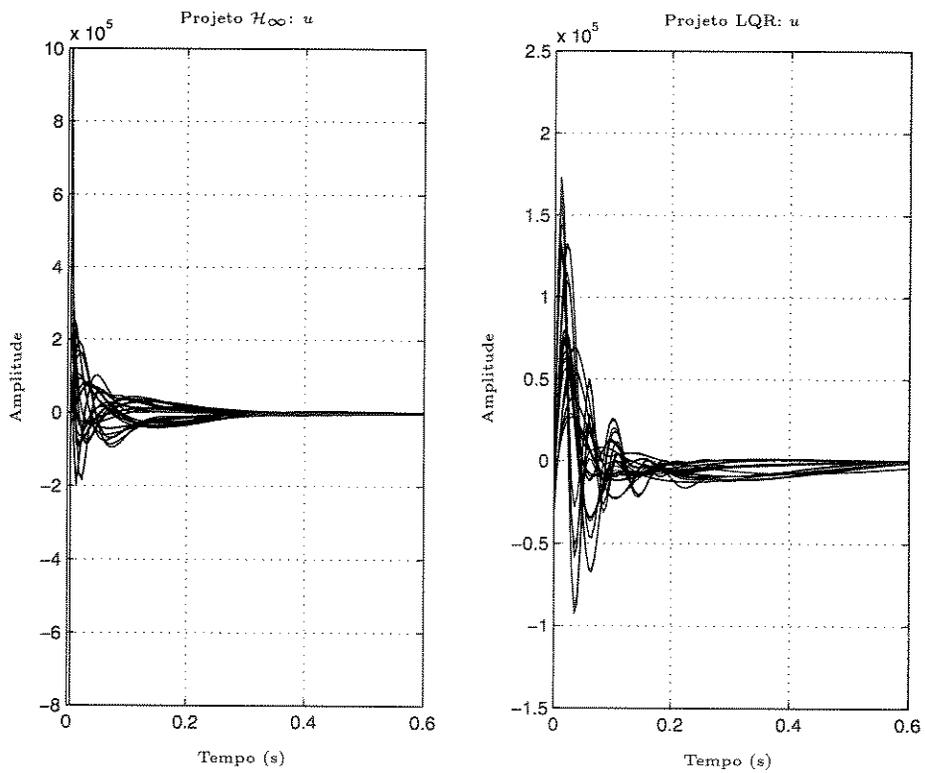


Figura 5.37: Força de controle ($\pm 50\%$ de incertezas)

5.4 Simulações com o Modelo Tridimensional

Para o modelo tridimensional o índice de desempenho pondera a força de controle, a dirigibilidade, o ângulo de balanço e o ângulo de rolagem. O funcional tem a seguinte expressão:

$$J = \int_0^{\infty} \rho u_i^2 + \alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + \gamma x_6^2 + \delta x_7^2 + \beta[(x_1 - x_{de})^2 + (x_2 - x_{dd})^2 + (x_3 - x_{te})^2 + (x_4 - x_{td})^2] dt. \quad (5.22)$$

Reescrevendo a equação acima na forma quadrática, tem-se:

$$J = \int_0^{\infty} x' C' C x + u' D' D u dt, \quad (5.23)$$

onde

$$C' C = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & 0 & 0 & 0 & -\beta & -b_c \beta & l_d \beta \\ 0 & \alpha + \beta & 0 & 0 & -\beta & b_c \beta & l_d \beta \\ 0 & 0 & \alpha + \beta & 0 & -\beta & -b_c \beta & -l_t \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + \beta & -\beta & b_c \beta & -l_t \beta \\ -\beta & -\beta & -\beta & -\beta & 4\beta & 0 & 2(l_t - l_d)\beta \\ -b_c \beta & b_c \beta & -b_c \beta & b_c \beta & 0 & \gamma + 4b_c^2 \beta & 0 \\ l_d \beta & l_d \beta & -l_t \beta & -l_t \beta & 2(l_t - l_d)\beta & 0 & \delta + 2(l_d^2 + l_t^2)\beta \end{bmatrix} \begin{matrix} 0_{7 \times 7} \\ 0_{7 \times 7} \end{matrix} \quad (5.24)$$

e

$$D' D = \text{diag}\{\rho, \rho, \rho, \rho\} \quad (5.25)$$

Os parâmetros nominais empregados nas simulações (comumente utilizados na literatura) foram: $M_{de} = 40.0 \text{ Kg}$; $M_{dd} = 40.0 \text{ Kg}$; $M_{te} = 35.5 \text{ Kg}$; $M_{td} = 35.5 \text{ Kg}$; $M_c = 1460 \text{ Kg}$; $K_p = 175500 \text{ N/m}$; $l_d = 1.1 \text{ m}$; $l_t = 1.8 \text{ m}$; $b_c = 0.75 \text{ m}$; $I_{xx} = 2460 \text{ Kg m}^2$; $I_{zz} = 460 \text{ Kg m}^2$. Os parâmetros incertos são: M_c , M_{de} , M_{td} , K_p . Os pesos do funcional de custo utilizados foram: $\alpha = 10$; $\beta = 1$; $\gamma = 10$; $\delta = 10$; $\rho = 8 \times 10^{-10}$ (em todas as simulações).

Este modelo permite, ao contrário dos modelos unidimensional e bidimensional, analisar a ocorrência de falha em atuadores, uma situação que pode ocorrer na prática. Foram efetuadas quatro simulações: duas correspondentes ao projeto \mathcal{H}_2 e duas ao projeto \mathcal{H}_∞ . Estas simulações são como segue: primeiramente analisa-se falha num único atuador, sem considerar as incertezas paramétricas; por último consideram-se apenas as incertezas.

Para as análises desta seção, admitiu-se que o carro passa por uma lombada com o formato mostrado na figura 5.38. A velocidade do carro é $V = 70 \text{ Km/h}$. Os dados da lombada são: $L = 2 \text{ m}$; $l = 0.5 \text{ m}$.

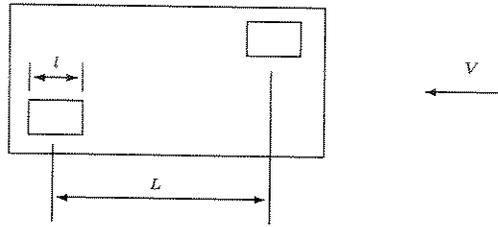


Figura 5.38: Perfil da lombada assimétrica

Nesta primeira simulação, utilizando-se o projeto \mathcal{H}_2 , incluiu-se uma falha no atuador da suspensão traseira do lado direito (*td*). Pelos resultados das simulações apresentadas nas figuras 5.39-5.42, verifica-se que o projeto LQR, que não inclui a possibilidade de falha num dos atuadores, desestabiliza o sistema quando do surgimento da falha. Já o projeto \mathcal{H}_2 continuou a garantir estabilidade ao sistema, tornando-se um projeto mais seguro e robusto. Observa-se, também, que tanto o ângulo de rolagem, bem como o de balanço, são controlados de uma forma melhor.

Os ganhos $K_{\mathcal{H}_2}$ e K_{LQR} foram, respectivamente:

$$K_{\mathcal{H}_2} = \begin{bmatrix} 0.58 & -0.02 & 0.03 & 0.00 & -0.20 & -0.61 & 0.91 \\ -0.02 & 0.57 & -0.07 & -0.02 & -0.49 & 0.59 & 0.38 \\ 0.03 & -0.06 & 0.65 & -0.93 & -0.46 & -0.61 & -1.18 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.01 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.03 & -0.07 & 0.13 \\ 0.00 & 0.01 & 0.00 & -0.00 & -0.09 & 0.07 & 0.03 \\ -0.00 & 0.00 & 0.02 & 0.00 & -0.08 & -0.03 & -0.16 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$K_{LQR} = \begin{bmatrix} -5.29 & -0.17 & -0.66 & 0.93 & 3.70 & 5.23 & -5.38 \\ -0.17 & -5.35 & 0.98 & -0.66 & 3.73 & -5.47 & -6.32 \\ -0.71 & 1.05 & -5.46 & -0.52 & 3.32 & 5.45 & 9.61 \\ 0.98 & -0.70 & -0.52 & -5.39 & 3.36 & -5.05 & 8.66 \\ -0.15 & -0.00 & 0.01 & -0.01 & 0.62 & 0.48 & -0.73 \\ -0.00 & -0.15 & -0.01 & 0.01 & 0.62 & -0.49 & -0.79 \\ 0.01 & -0.01 & -0.14 & -0.00 & 0.44 & 0.49 & 1.01 \\ -0.01 & 0.01 & -0.00 & -0.14 & 0.45 & -0.47 & 0.95 \end{bmatrix} \times 10^4.$$

É interessante verificar, agora, o desempenho do controlador \mathcal{H}_2 custo garantido com relação às incertezas paramétricas. As incertezas foram da ordem de $\pm 50\%$, calculadas de forma análoga às simulações com os modelos anteriores. Pelos resultados apresentados nas figuras 5.43-5.46 observa-se que o projeto \mathcal{H}_2 custo garantido foi mais robusto que o projeto LQR, tanto do ponto de vista da dirigibilidade como dos ângulos de rolagem e de balanço.

A minimização \mathcal{H}_2 custo garantido forneceu um limitante superior para a norma

\mathcal{H}_2 de 179.96 (ver nota de rodapé 4). A tabela 5.11 apresenta os valores das normas \mathcal{H}_2 calculados para todos os vértices do conjunto de incertezas e também para o sistema nominal.

Controlador	Vértices								
	1	2	3	4	5	6	7	8	Nominal
\mathcal{H}_2	88.9	76.5	77.1	62.6	87.9	75.6	76.4	62.0	79.3
LQR	71.6	61.5	62.1	50.1	71.6	61.5	62.15	50.16	65.90
Controlador	Vértices								
	9	10	11	12	13	14	15	16	
\mathcal{H}_2	107.7	91.4	92.6	73.4	107.8	91.5	92.8	73.3	
LQR	97.0	82.0	82.9	64.9	98.7	83.4	84.3	65.9	

Tabela 5.11: Normas \mathcal{H}_2 . Sistema tridimensional com incertezas de $\pm 50\%$.

O ganho $K_{\mathcal{H}_2}$ encontrado foi:

$$K_{\mathcal{H}_2} = \begin{bmatrix} 1.85 & 0.21 & 0.30 & -0.34 & -0.29 & -0.44 & 0.68 \\ 0.20 & 1.40 & -0.05 & 0.41 & -0.40 & 0.60 & 0.58 \\ 0.52 & 0.02 & 1.39 & 0.20 & -0.40 & -0.59 & -0.88 \\ -0.28 & 0.39 & 0.26 & 1.83 & -0.29 & 0.45 & -0.87 \\ \\ 0.04 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & -0.12 & -0.07 & 0.13 \\ 0.00 & 0.02 & 0.00 & -0.00 & -0.12 & 0.06 & 0.09 \\ -0.0 & 0.00 & 0.02 & 0.00 & -0.10 & -0.06 & -0.11 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.05 & -0.08 & 0.07 & -0.15 \end{bmatrix} \times 10^5.$$

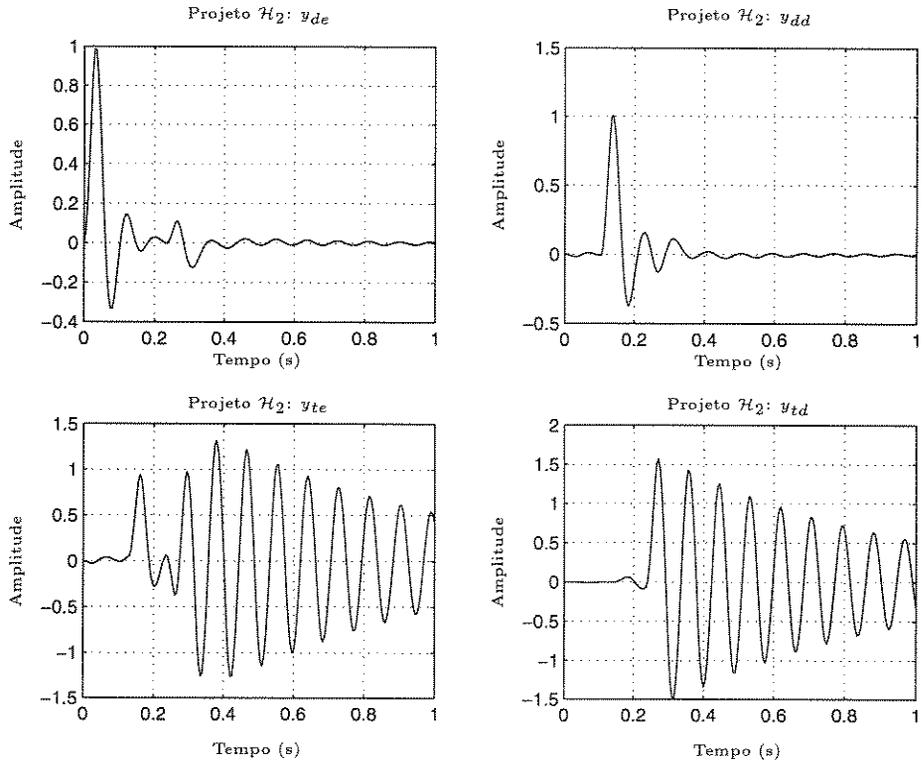


Figura 5.39: Dirigibilidade (falha no atuador td)

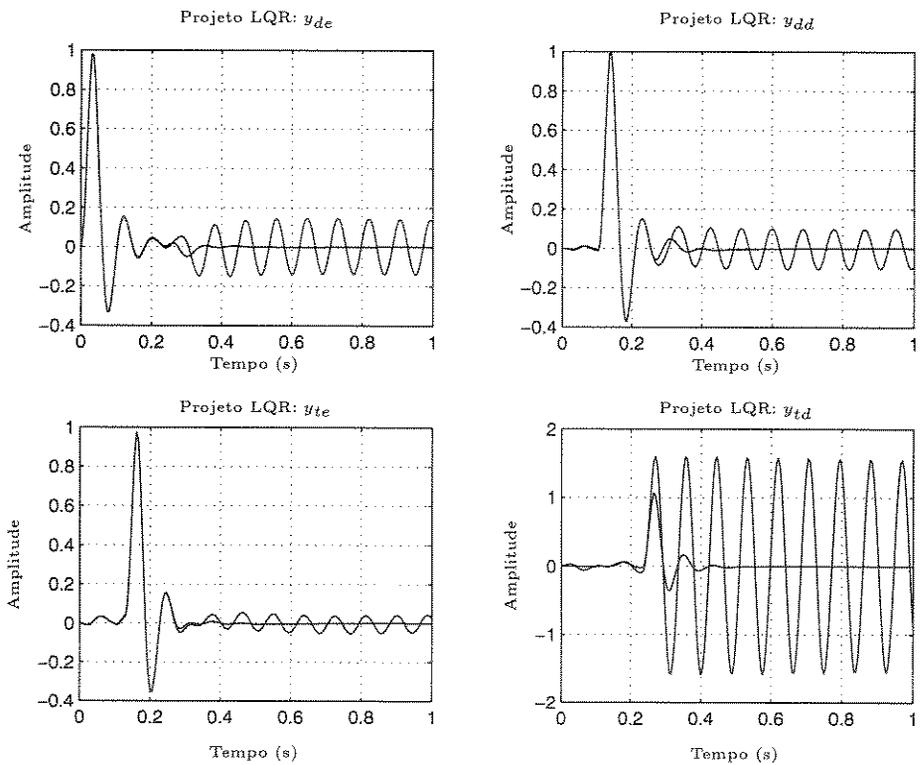


Figura 5.40: Dirigibilidade (falha no atuador td)

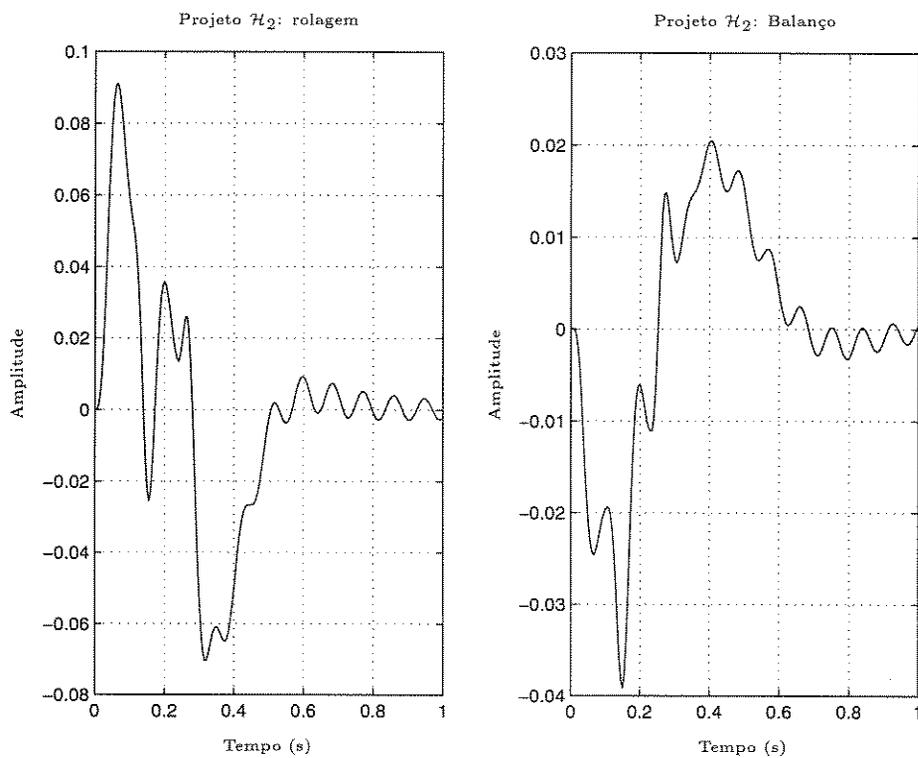


Figura 5.41: Rolagem e balanço (falha no atuador td)

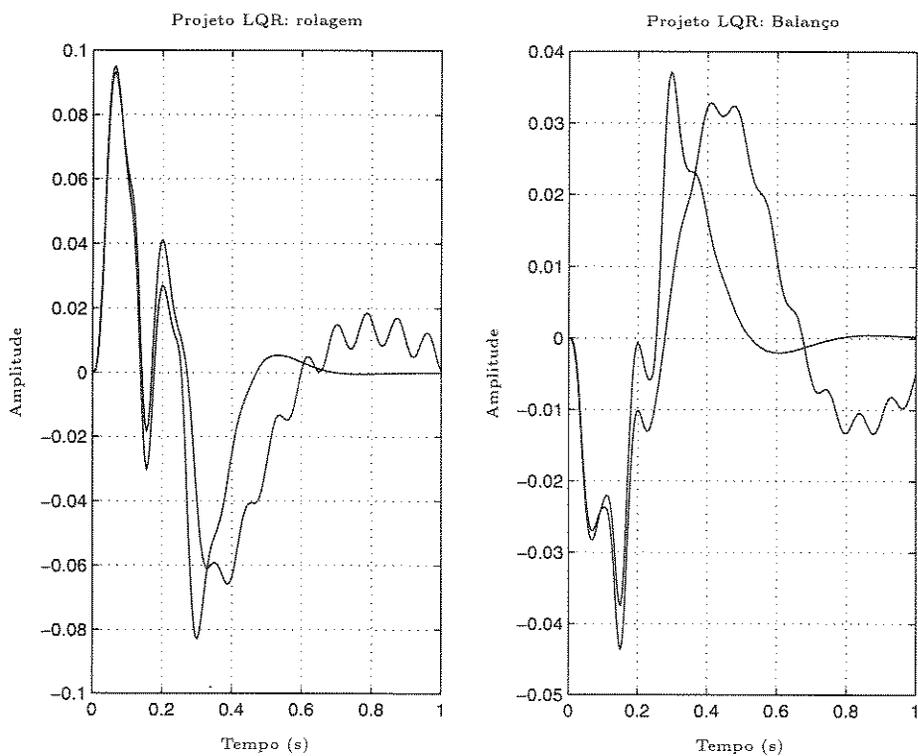
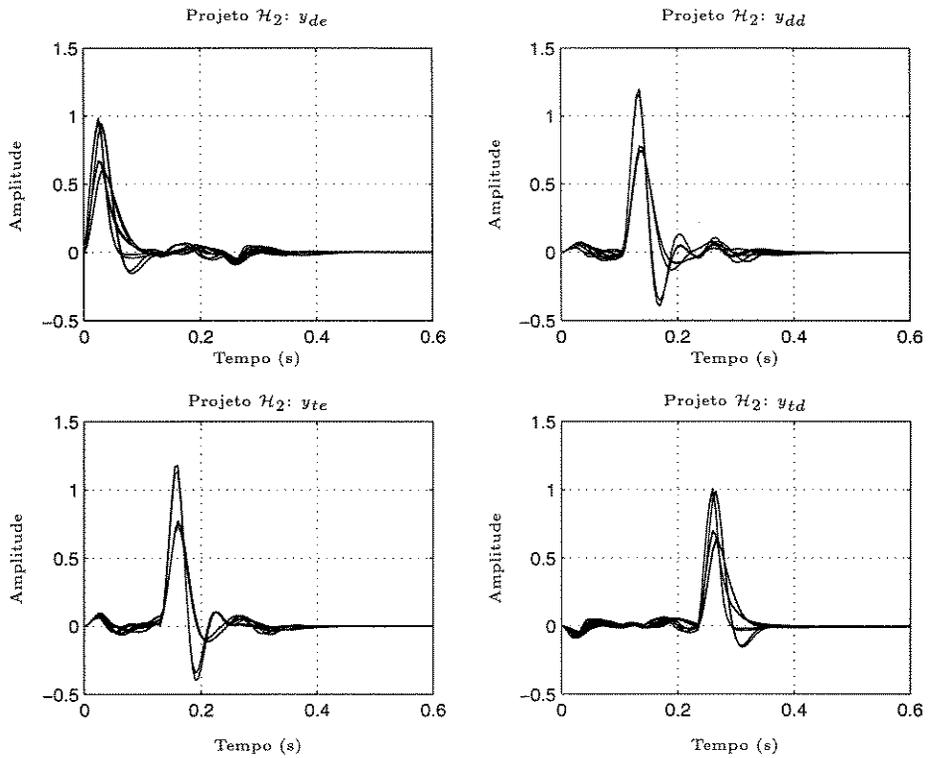
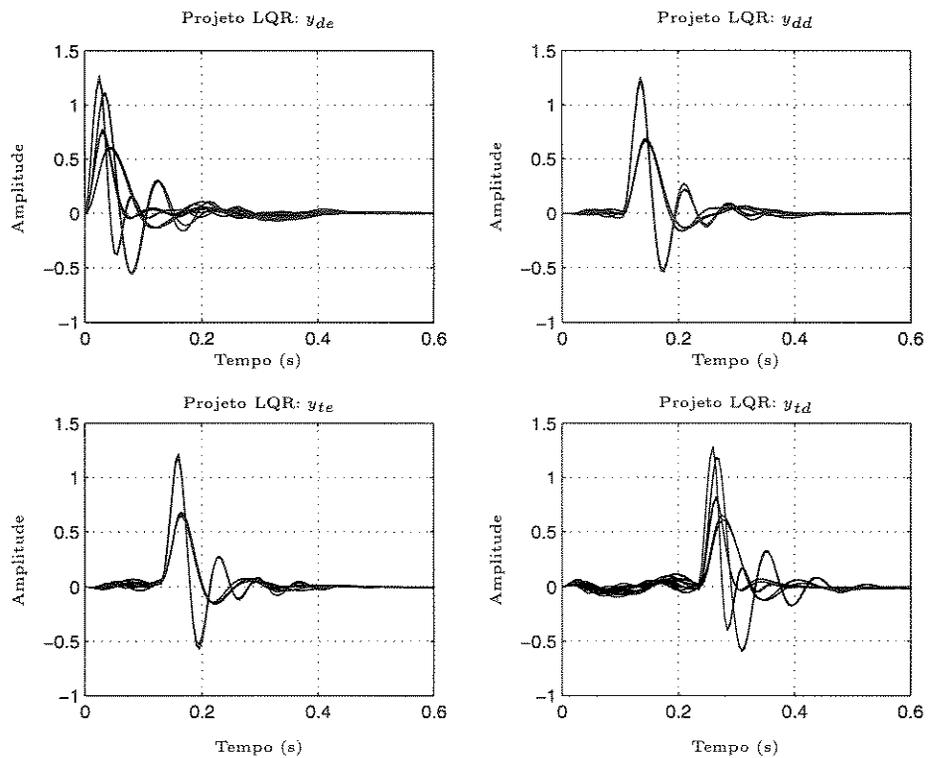


Figura 5.42: Rolagem e balanço (falha no atuador td)

Figura 5.43: Dirigibilidade ($\pm 50\%$ de incertezas)Figura 5.44: Dirigibilidade ($\pm 50\%$ de incertezas)

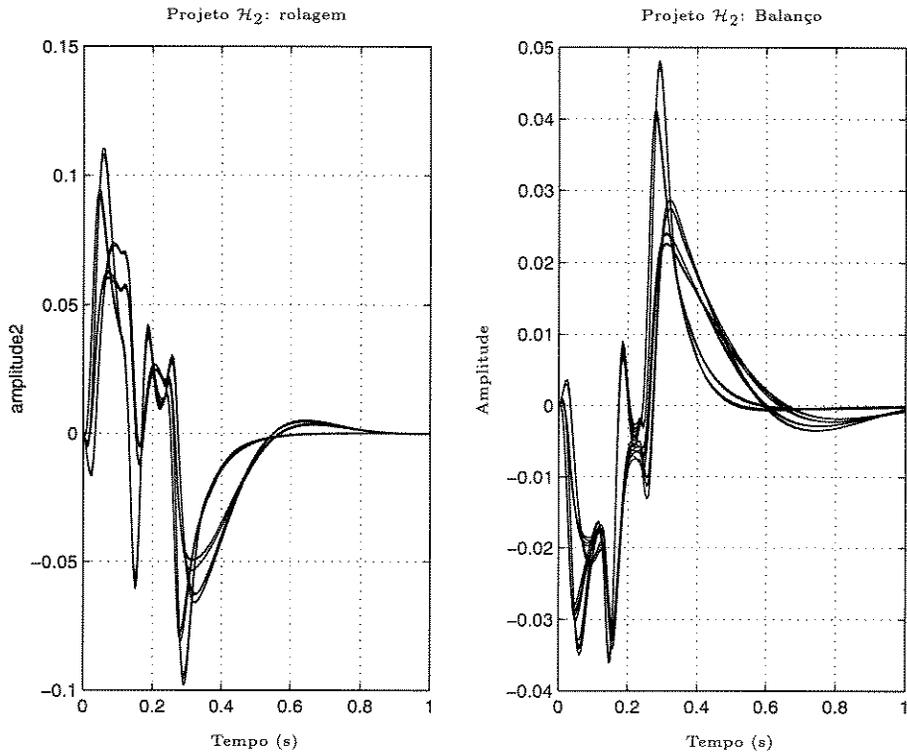


Figura 5.45: Rolagem e balanço ($\pm 50\%$ de incertezas)

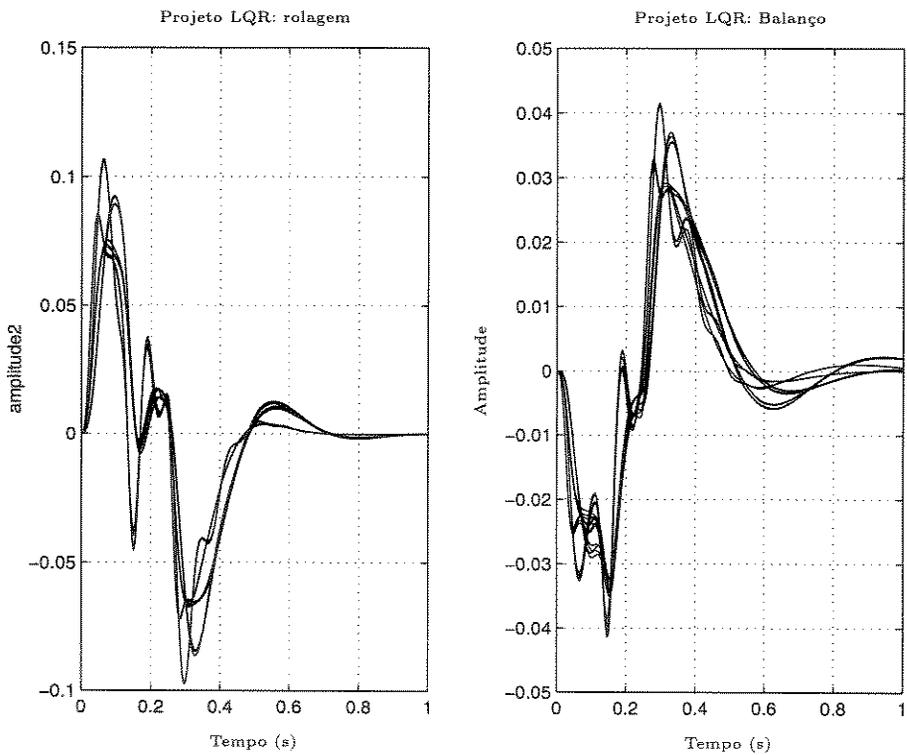


Figura 5.46: Rolagem e balanço ($\pm 50\%$ de incertezas)

O ganho $K_{\mathcal{H}_\infty}$ encontrado foi:

$$K_{\mathcal{H}_\infty} = \begin{bmatrix} 1.26 & 0.89 & 0.81 & 1.03 & -0.64 & -0.01 & 0.00 \\ 3.32 & 2.34 & 2.14 & 2.70 & -1.68 & -0.02 & 0.01 \\ 6.20 & 4.38 & 4.00 & 5.04 & -3.14 & -0.03 & 0.03 \\ 2.90 & 2.05 & 1.88 & 2.38 & -1.47 & -0.01 & 0.01 \\ \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.19 & 0.00 & 0.01 \\ 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & -0.49 & -0.01 & 0.04 \\ 0.02 & -0.01 & 0.00 & 0.02 & -0.93 & -0.01 & 0.08 \\ 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & -0.44 & -0.01 & 0.04 \end{bmatrix} \times 10^{11}.$$

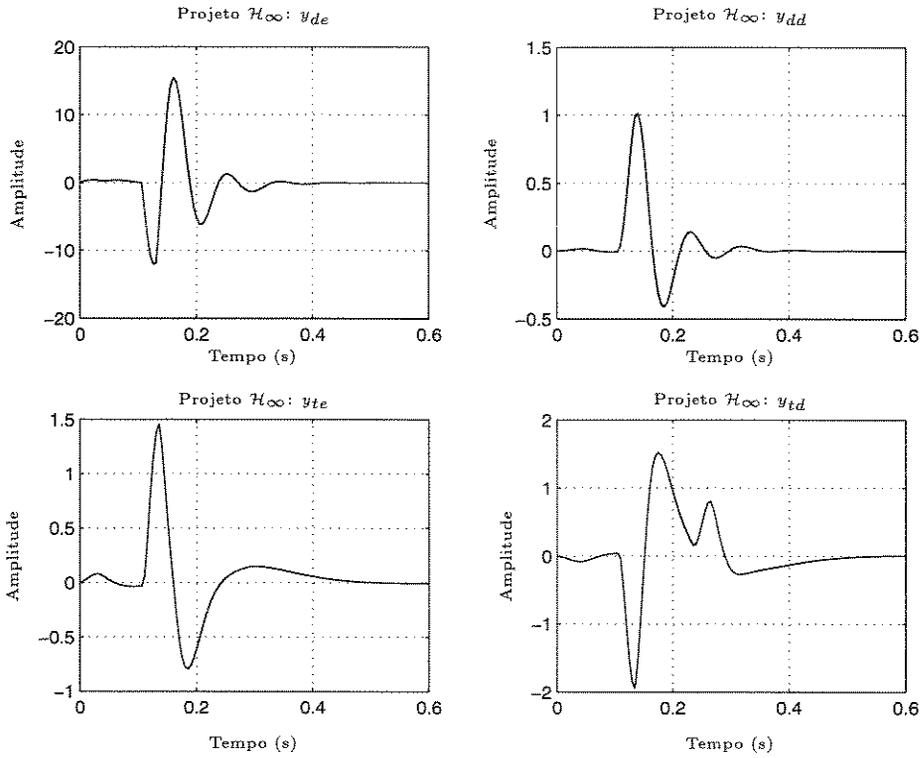


Figura 5.47: Dirigibilidade (falha no atuador dd)

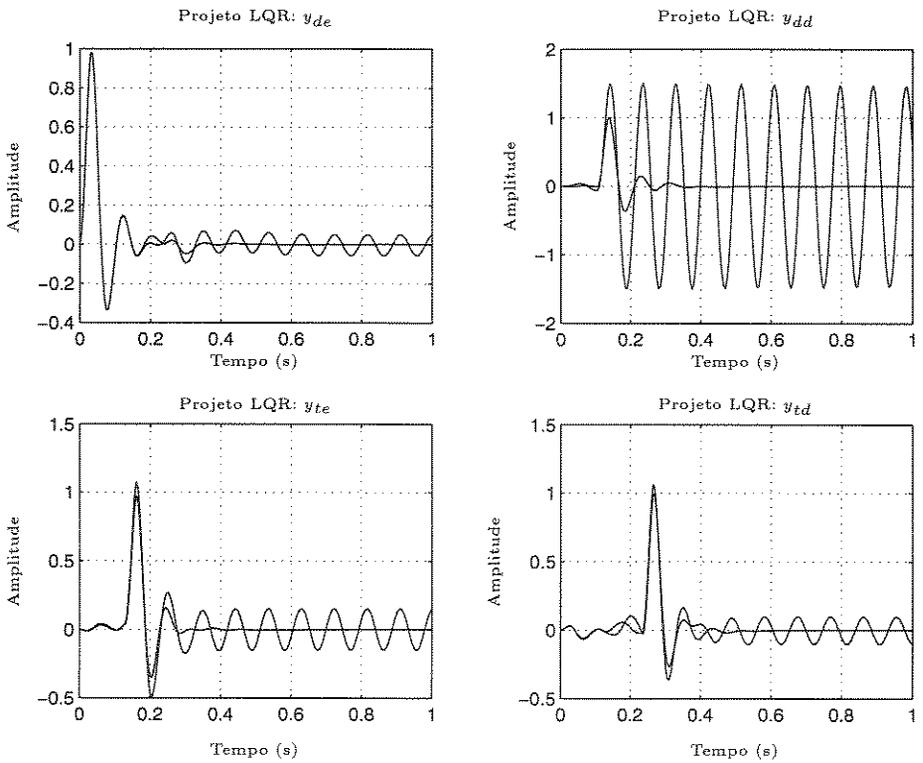


Figura 5.48: Dirigibilidade (falha no atuador dd)

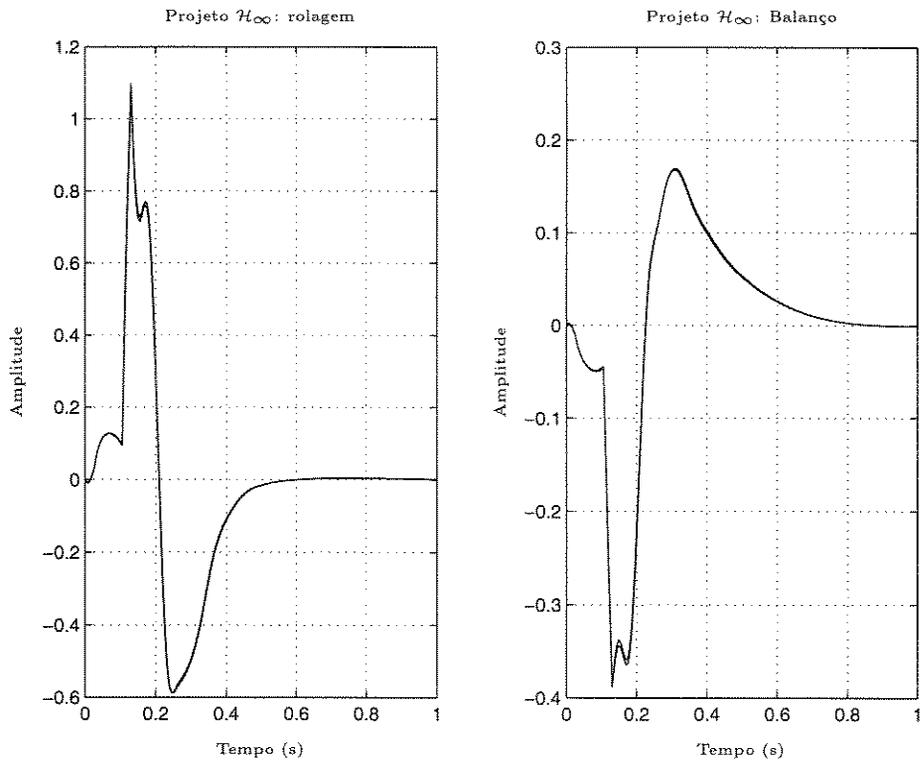


Figura 5.49: Rolagem e balanço (falha no atuador dd)

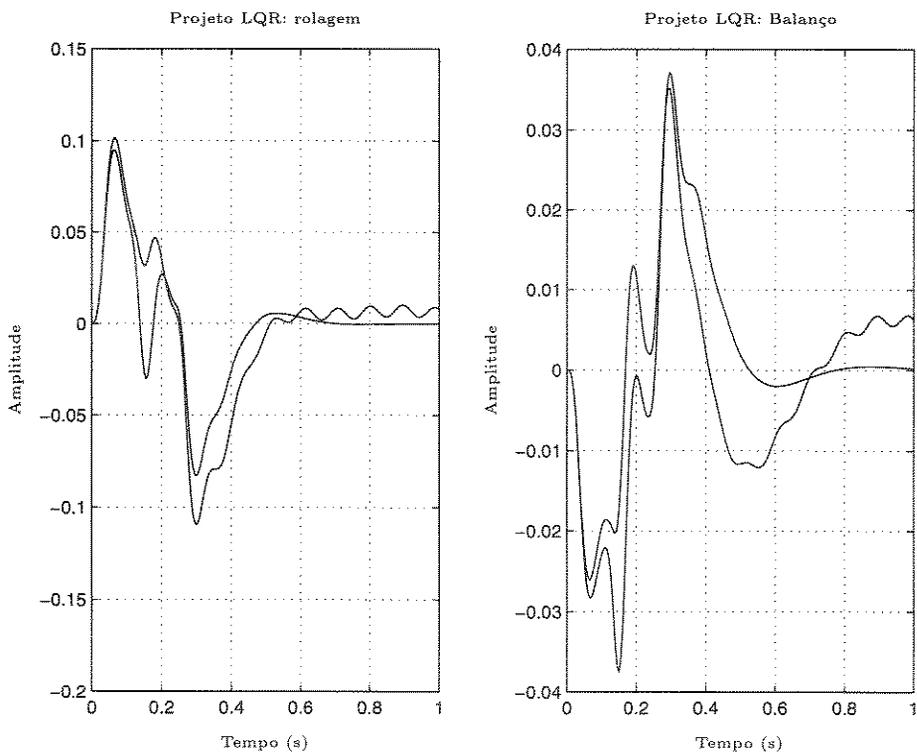


Figura 5.50: Rolagem e balanço (falha no atuador dd)

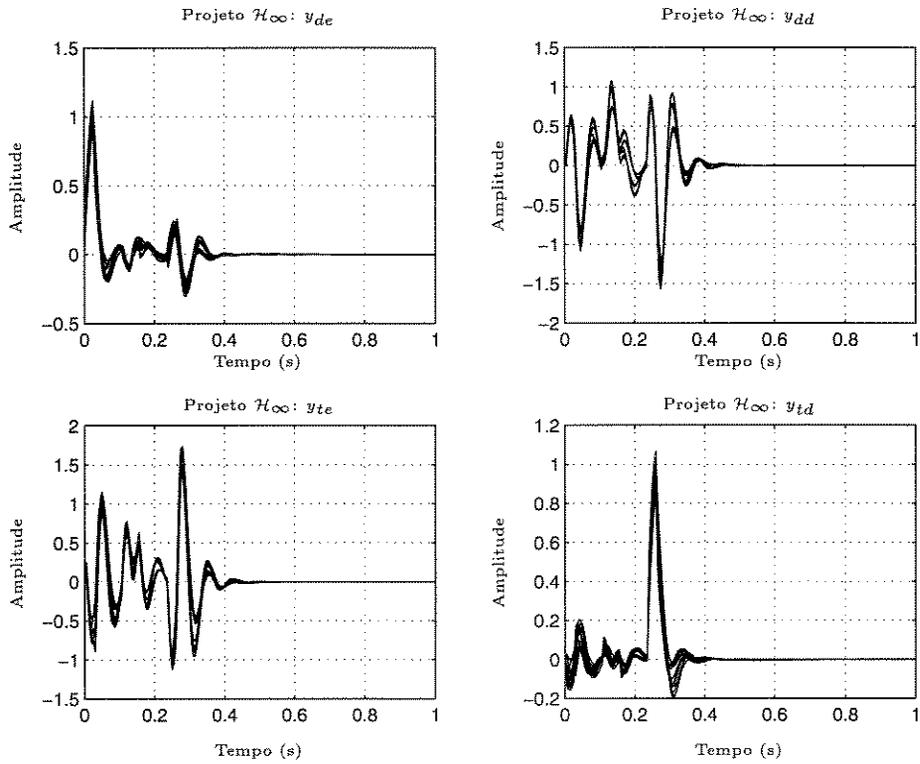


Figura 5.51: Dirigibilidade ($\pm 50\%$ de incertezas)

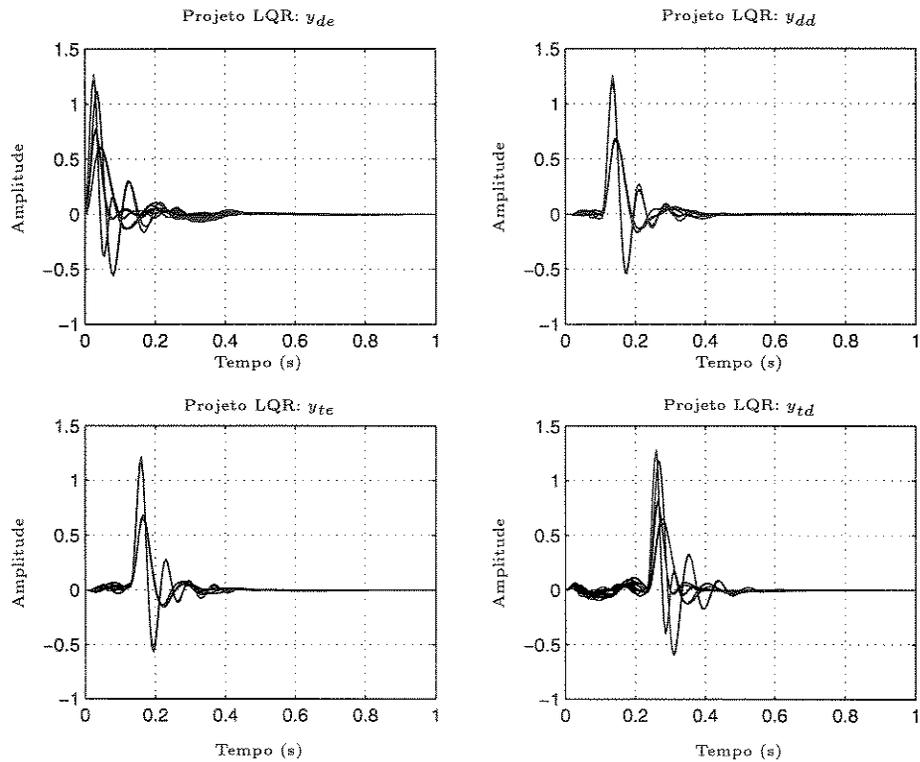
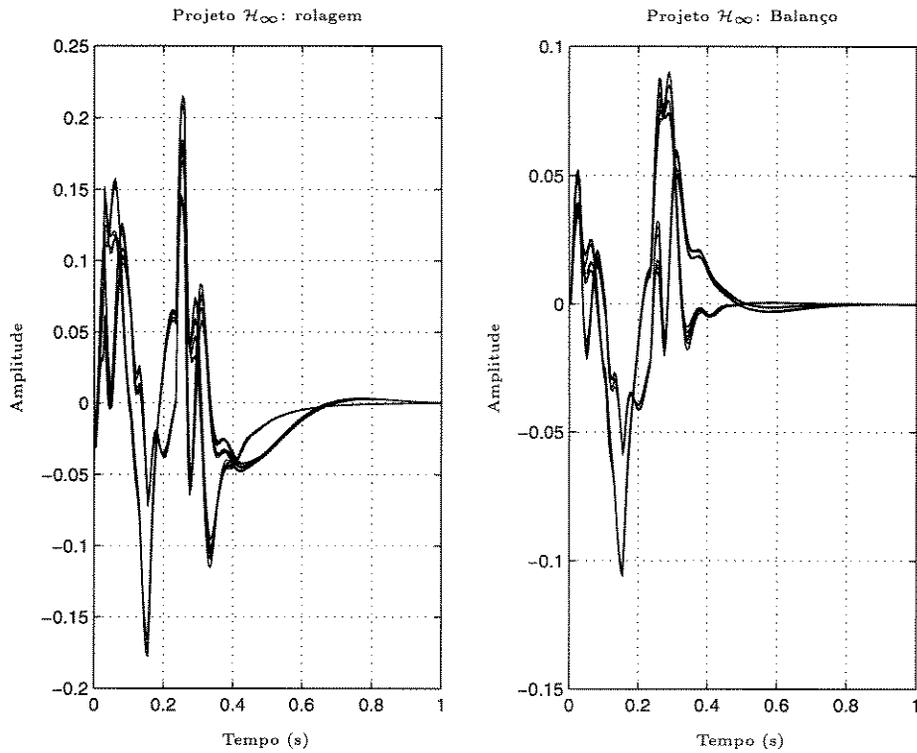
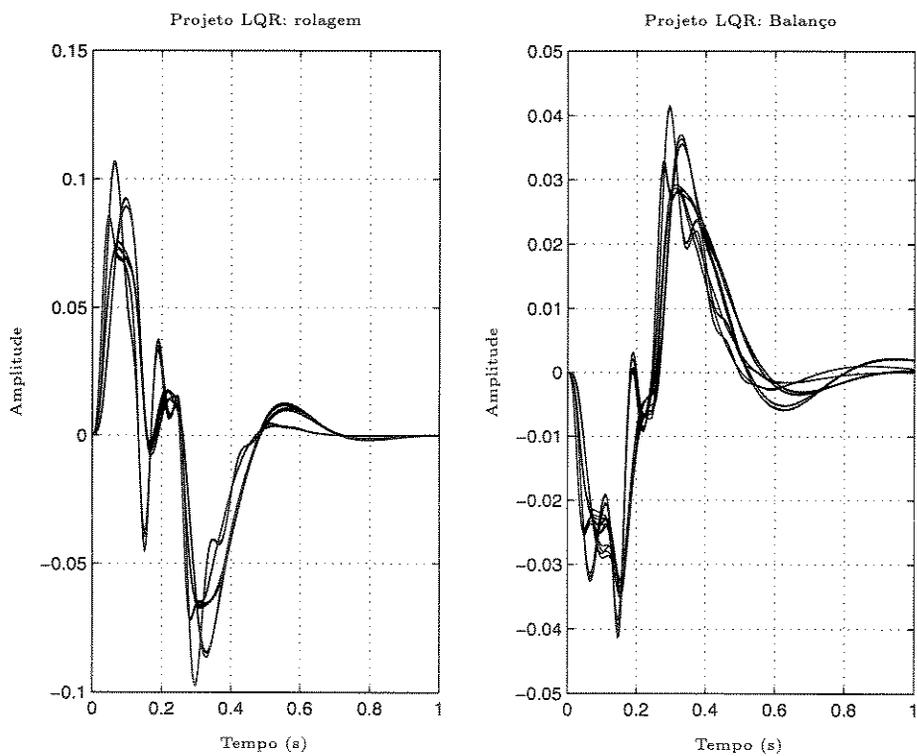


Figura 5.52: Dirigibilidade ($\pm 50\%$ de incertezas)

Figura 5.53: Rolagem e balanço ($\pm 50\%$ de incertezas)Figura 5.54: Rolagem e balanço ($\pm 50\%$ de incertezas)

5.5 Projeto via Parametrização de Youla

Para este tipo de projeto é conveniente descrever o sistema, o modelo da suspensão, na forma padrão (BOYD & BARRATT, 1991). O sistema de controle está representado na figura 5.55, onde a saída z já se encontra estabelecida.

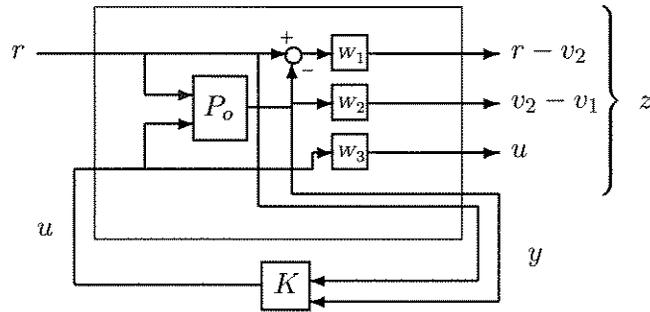


Figura 5.55: Forma padrão

Percebe-se que este modelo representa um sistema com 2 GDL (graus de liberdade) com pesos sobre as saídas (figura 5.56).

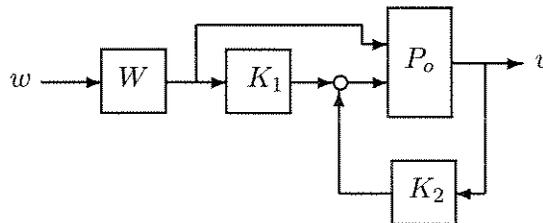


Figura 5.56: Sistema com 2 GDL

A planta P_o é a matriz de transferência de w, u para y obtida do modelo dinâmico da suspensão unidimensional. Esta planta pode ser particionada como mostrado em (5.26).

$$P_o = [P_o^w \quad P_o^u] = \begin{bmatrix} P_{o1}^w & P_{o1}^u \\ P_{o2}^w & P_{o2}^u \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

A partir da figura 5.55 e de (5.26), as partições da planta generalizada

$$P = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

são

$$\begin{aligned}
 P_{zw} &= \begin{bmatrix} W_1 (I - P o_1^w) \\ W_2 (P o_2^w - P o_1^w) \\ 0 \end{bmatrix}; & P_{yw} &= \begin{bmatrix} I \\ P_o^w \end{bmatrix}; \\
 P_{zu} &= \begin{bmatrix} -W_1 P o_2^u \\ W_2 (P o_2^u - P o_1^u) \\ W_3 I \end{bmatrix}; & P_{yu} &= \begin{bmatrix} 0 \\ P_o^u \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

O controlador a ser projetado, nesta metodologia, é baseado na minimização do funcional de custo \mathcal{H}_∞ . Para tanto, é necessário uma correta seleção das saídas controladas, para que o processo de minimização otimize realmente o comportamento desejado.

O sistema ativo deve ser capaz de seguir sinais de baixa frequência (um problema de rastreamento), manter um espaço de trabalho da suspensão relativamente pequeno e oferecer conforto ao passageiro. Portanto, uma adequada escolha para o vetor das saídas controladas z é $z = [r - v_2 \quad v_2 - v_1 \quad u]'$; o vetor das entradas exógenas é $w = [r]$; as saídas medidas, $y = [r \quad v_2 \quad v_1]'$; para a entrada controlada u tem-se a própria força de controle $u = [u]$. Os componentes do vetor v são $v_1 = y_s$ e $v_2 = y_c$.

A minimização do pior caso de um funcional quadrático de custo do tipo $J = (\|r - v_2\|_2 + \|v_2 - v_1\|_2 + \|u\|_2)^{1/2}$ com o sinal r pertencente à classe $\{r : r = W w, w \in \mathcal{H}_2, \|w\|_2 \leq 1\}$ é equivalente a minimizar $\|H\|_\infty$ onde $z = Hw$; w e z como definido acima (FRANCIS, 1987).

O problema de otimização aqui proposto é convexo, dado por:

$$\min_{K \in \mathbf{RH}_\infty} \phi(H) \equiv \min_{Q \in \Omega^*} \phi^*(Q)$$

onde os funcionais ϕ e ψ são:

$$\Omega^* := \{Q \in \mathbf{RH}_\infty : \psi^*(Q) \leq \alpha\}$$

$$\phi^*(Q) := \phi(T_1 - T_2 Q T_3)$$

$$\psi^*(Q) := \psi(T_1 - T_2 Q T_3)$$

com $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ também convexos.

Este problema de *model-matching* foi resolvido pelas aproximações N-dimensionais de Ritz (citeBB:91), aqui reescritas:

$$\mathcal{H}_N = \left\{ \begin{array}{l} H : H = T_1 - \sum_{i=1}^N T_2 X_i Q_i T_3, \\ X_i \in \mathcal{R}^3, Q_i \in \mathbf{RH}_\infty \end{array} \right\}$$

com

$$Q_i = \left(\frac{a}{s+a} \right)^i, \quad X_i = \begin{bmatrix} x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} \end{bmatrix}.$$

A escolha das matrizes T_1 , T_2 e T_3 , bem como a do parâmetro a , número de elementos da base na aproximação de Ritz, e os procedimentos numéricos para resolver o problema de otimização afetam a solução obtida (a menos que o ótimo seja alcançado, o que requer um controlador de dimensão infinita). Como o objetivo desta apresentação é dar uma idéia qualitativa da análise convexa via parametrização de Youla, os detalhes sobre a implementação numérica são omitidos.

Para este exemplo, o erro de rastreamento foi imposto como restrição sobre o deslocamento da massa suspensa y_c e a força de controle foi também limitada. Vale salientar que qualquer outro tipo de restrição e ou função objetiva, convexas, poderiam ser incorporados ao problema.

As funções de peso foram: $W_1 = 1$, $W_2 = 1$ and $W_3 = 8 \times 10^{-6}$, ou seja, pesos estáticos. Entretanto, poderiam ser funções no domínio da frequência. Por exemplo, uma análise do sistema passivo (figura 5.57) produziria uma apropriada escolha das funções de peso.

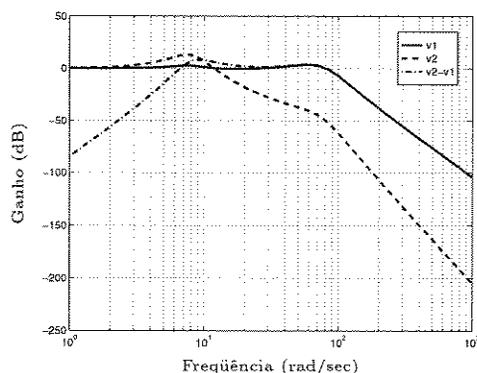


Figura 5.57: Suspensão passiva

Desta forma, W_1 , a função de peso sobre o erro de rastreamento $r - v_2$, poderia ter sido escolhido com a finalidade de selecionar o intervalo de frequência 0 – 1 Hz.

Os dados adotados nas simulações foram: $M_s = 28.58 \text{ Kg}$, $M_c = 288.9 \text{ Kg}$, $K_p = 155900 \text{ N/m}$, para o sistema com controlador; e, $K_s = 19960 \text{ N/m}$, $C_s = 1861 \text{ Ns/m}$, para o sistema sem controlador. Os dados usados na aproximação de Ritz foram: $a = 15$ e $N = 5$ (foi escolhida uma dimensão pequena para a base com a finalidade de permitir uma “rápida” simulação). A fatorização coprima foi escolhida de tal forma que os autovalores da matriz de transferência T_1 fossem: $-49.68 \pm 102.93j$, $-49.68 \pm 102.93j$ e $-3.98 \pm 11.41j$.

Os resultados da simulação, onde o projeto LQR é o mesmo que o apresentado em THOMPSON, 1976, são:

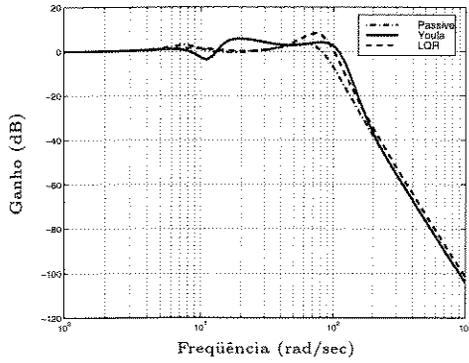


Figura 5.58: Resposta na frequência de y_s

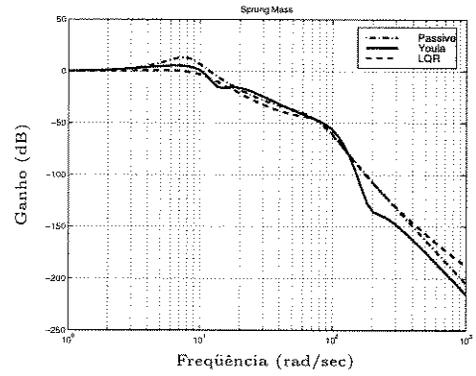


Figura 5.59: Resposta na frequência de y_c

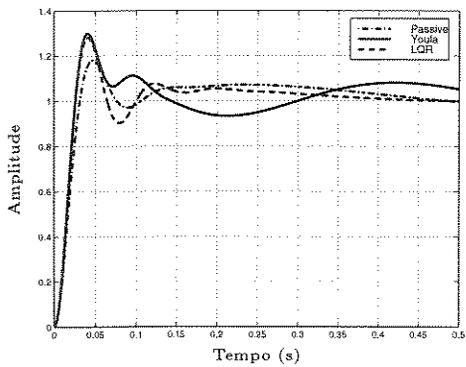


Figura 5.60: Resposta ao degrau de y_s

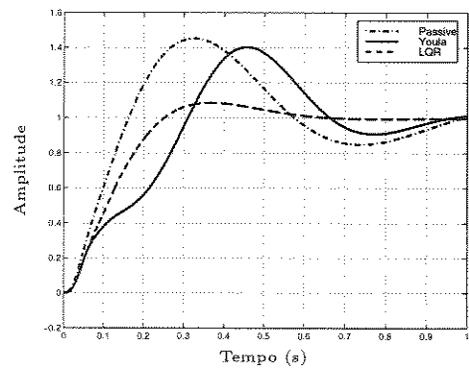


Figura 5.61: Resposta ao degrau de y_c

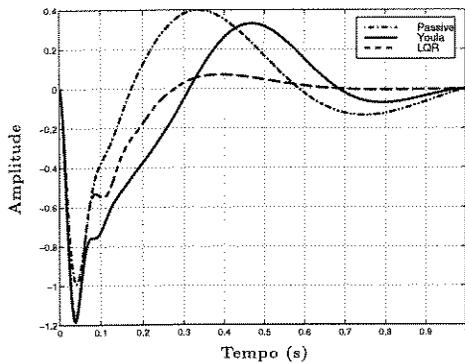


Figura 5.62: Resposta ao degrau do espaço de trabalho da suspensão

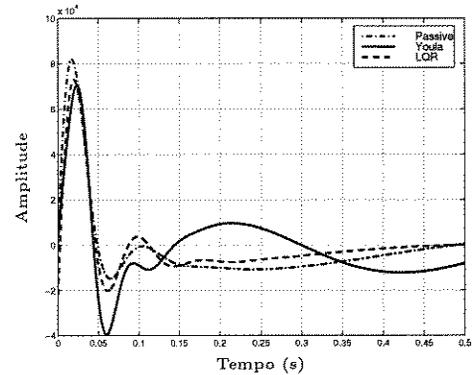


Figura 5.63: Resposta ao degrau da força de controle

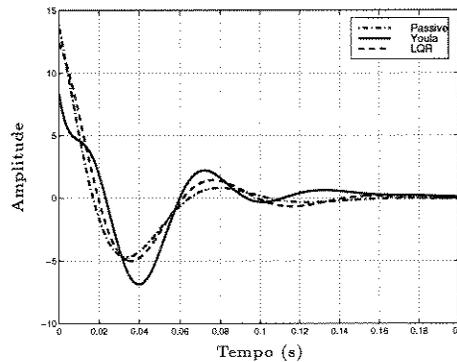


Figura 5.64: Resposta ao degrau da derivada da força de controle

Como pode ser visto, uma apropriada escolha dos fatores de peso, restrições e funções objetivo determina o comportamento dinâmico do sistema em malha fechada. Desta forma, a metodologia apresentada propicia uma técnica alternativa para o projeto de suspensões ativas.

Nesta seção foi apresentado o paradigma do projeto de um controlador dinâmico por realimentação de saída via otimização multiobjetiva convexa da parametrização de Youla para o projeto de uma suspensão ativa.

Foi demonstrado que, com esta metodologia, as restrições físicas do modelo e os objetivos podem ser expressos de uma forma mais natural, podendo alcançar os limites de desempenho do sistema (BOYD & BARRATT, 1991).

5.6 Conclusões

O objetivo deste capítulo foi aplicar a teoria exposta anteriormente para a síntese de controle de suspensões automotivas. Como pôde ser visto, o comportamento dinâmico

dessas suspensões é fortemente influenciado pelo projeto do controlador. Varias simulações foram efetuadas; entretanto, para uma análise detalhada da superioridade de uma técnica com relação à outra, deve-se efetuar uma ampla gama de simulações, o que foge aos objetivos deste trabalho.

A otimização \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ custo garantido foi aplicada a cada um dos três modelos dinâmicos levantados. Incertezas foram incorporadas ao sistema, com diferentes ordens de valores. Seus desempenhos foram comparados com o do controlador LQR, demonstrando serem mais robustos na maioria dos casos. No caso tridimensional foi possível analisar o estudo de falhas em atuadores, ficando evidente a superioridade do projeto de controle robusto.

O projeto de controladores que utiliza a parametrização de Youla também foi aplicado no modelo unidimensional, e comparado com o projeto clássico LQR. Nesta abordagem as incertezas não foram levadas em consideração. Verifica-se que o controlador obtido não é mais estático como nos casos anteriores, mas sim dinâmico.

Capítulo 6

Conclusões Gerais e Perspectivas

O objetivo principal deste trabalho foi aplicar as técnicas de controle robusto \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e o critério misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ na otimização de uma suspensão veicular. Desta forma, foram apresentadas as técnicas de controle, as formas de computá-las, as parametrizações convexas, e o enfoque baseado na parametrização de Youla. Em seguida, levantaram-se os modelos dinâmicos representativos da suspensão: o modelo unidimensional, o modelo bidimensional e o modelo tridimensional, cada qual capaz de representar diferentes comportamentos dinâmicos. Com os modelos levantados e as técnicas equacionadas, foram efetuadas simulações sobre o sistema dinâmico, com e sem incertezas paramétricas.

Os resultados obtidos utilizando-se os controladores custo garantido demonstraram de forma geral uma maior robustez quando comparados com o controlador clássico, que não leva em consideração as incertezas. Verifica-se que o projeto LQR, apesar de levar em consideração apenas os parâmetros nominais do sistema, demonstra uma grande robustez. Na realidade, o controlador LQR é o que apresenta um maior ganho de margem e frequência, quando aplicado sobre sistemas nominais, portanto é explicável que seu desempenho não tenha variado abruptamente sob incertezas. Entretanto, é importante explicitar que não há garantia nenhuma quanto a esta estabilidade. Também sabe-se que um sistema massa-mola-amortecedor é altamente estável, independentemente de quais valores reais seus parâmetros venham a ter, o que conseqüentemente influenciou para que o controlador LQR mantivesse um desempenho satisfatório. Deve-se ficar claro que as simulações foram efetuadas sobre todos os vértices do politopo de incertezas, mas não dentro do mesmo, e que os problemas do tipo custo garantido não só mantêm estabilidade aos sistemas incertos dados pelos vértices do politopo, mas também a qualquer combinação convexa dentro deste espaço de incertezas. Como conclusão final, com relação aos controladores robustos, estes demonstraram ser o tipo de projeto mais eficiente e seguro, pois matematicamente garante estabilidade ao sistema frente às incertezas e falhas de atuadores, fornecendo comportamento dinâmico equivalente ao caso ideal (projeto LQR sobre os parâmetros nominais).

Quanto às diferenças entre os projetos \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e o misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, percebe-se uma forte tendência a amortecer o sistema no caso \mathcal{H}_∞ , entretanto, à custa de altos ganhos. Deve-se salientar que, para uma conclusão mais elaborada, faz-se necessário investigar o

comportamento dinâmico do sistema em malha fechada como uma função dos pesos do funcional de custo. Lembrando que estes pesos partiram das escolhas feita por THOMPSON, 1976, provavelmente não se trata da melhor opção para o caso \mathcal{H}_∞ . Sobre o critério misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, parece ser uma técnica bem interessante, pois pode combinar as características de amortecimento oferecido pelo projeto \mathcal{H}_∞ aliadas aos baixos ganhos oferecidos pelo projeto \mathcal{H}_2 .

Com relação à parametrização de Youla, esta demonstrou ser uma metodologia flexível, quando vista pela possibilidade de inclusão de restrições de naturezas mais realísticas e da ampla disponibilidade de funções objetivo convexas, permitindo generalizar mais o projeto como um todo. Infelizmente, a implementação numérica não é de toda fácil, mas se eficientes algoritmos numéricos forem implementados, provavelmente será ideal para uma primeira análise. Possui ainda como vantagem levar o projeto aos limite de desempenho do sistema. Esta técnica demonstrou ser bastante sensível às modificações nas escolhas dos filtros e dos autovalores da matriz T_1 .

Várias são as possibilidades de continuação das idéias aqui propostas: estudar os controladores de realimentação estática e dinâmica de saída, dirigir o estudo de forma a considerar a implementação prática dos controladores, analisar experimentalmente os controladores obtidos, etc.

Lista dos artigos originados no decorrer da tese:

J. F. Camino, R. H. C. Takahashi, D. E. Zampieri, and P. L. D. Peres. (1997). \mathcal{H}_2 and LQR active suspension control schemes with uncertain parameters: A comparison. In: *Proceedings of the 7th International Conference on Dynamic Problems in Mechanics*. Angra dos reis - RJ, Brazil. pp. 226–228. A versão ampliada foi submetida à *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*.

J. F. Camino, R. H. C. Takahashi, D. E. Zampieri, and P. L. D. Peres. (1997). Optimal active suspension design via convex analysis. In: *Proceedings of the 6th IEEE Conference on Control Applications*. Hartford - CT, USA. pp. 411–416.

R. H. C. Takahashi, J. F. Camino, D. E. Zampieri, and P. L. D. Peres. (1998). A multiobjective approach for \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ active suspension control. A ser publicado nos *Proceedings of the 1998 American Control Conference*. Philadelphia - PA, USA. A versão ampliada foi submetida ao *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*.

J. F. Camino, D. E. Zampieri, and P. L. D. Peres. \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Optimization Techniques Applied to a Quarter-car Suspension Model. Submetido ao *8th International Conference on Dynamic Problems in Mechanics*, Rio de Janeiro - RJ, Brazil, 3–7 Janeiro 1999.

J. F. Camino, D. E. Zampieri, and P. L. D. Peres. \mathcal{H}_2 Robust Control Technique Applied to a Full-car Model - Failure Analysis. Submetido ao *V Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste*, Fortaleza, CE, Brazil, setembro 1998.

Referências Bibliográficas

- ABDEL HADY, M. B. A. & CROLLA, D. A. (1992). Active Suspension Control Algorithms for a Four-Wheel Vehicle Model. *Int. J. of Vehicle Design* **13**(2), 144–158.
- ANDERSON, B. D. O. & MOORE, J. B. (1990). *Optimal Control - Linear Quadratic Methods*. Prentice Hall. New Jersey.
- ATHANS, M. & FALB, P. L. (1966). *Optimal Control - An Introduction to the Theory and Its Applications*. McGraw-Hill. New York.
- BARABANOV, A. E. & SOKOLOV, A. A. (1996). l_1 -Optimal Control for Quarter-Car Active Suspension. In: *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*. Kobe, Japan. pp. 4052–4055.
- BOYD, S.; EL GHAOUI, L.; FERON, E. & BALAKRISHNAN, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM Books. Philadelphia.
- BOYD, S. P. & BARRATT, C. H. (1991). *Linear Controller Design - Limits of Performance*. Prentice Hall. New Jersey.
- CAMINO, J. F.; TAKAHASHI, R. H. C.; ZAMPIERI, D. E. & PERES, P. L. D. (1997a). \mathcal{H}_2 and LQR Active Suspension Control Schemes with Uncertain Parameters: A Comparison. In: *Proceedings of the 7th International Conference on Dynamic Problems in Mechanics*. Angra dos reis, Rio de Janeiro. pp. 226–228.
- CAMINO, J. F.; TAKAHASHI, R. H. C.; ZAMPIERI, D. E. & PERES, P. L. D. (1997b). Optimal Active Suspension Design Via Convex Analysis. In: *Proceedings of the 6th IEEE Conference on Applications*. Hartford, Connecticut. pp. 411–416.
- CHALASANI, R. M. (1987a). Ride Performance of Active Suspension Systems - Part I: Simplified Analysis Based on a Quarter-car Model. *ASME, AMD* **80**, 187–204.
- CHALASANI, R. M. (1987b). Ride Performance of Active Suspension Systems - Part II: Comprehensive Analysis Based on a Full-car Model. *ASME, AMD* **80**, 205–234.
- CHEN, S. H.; CHOU, J. H. & CHAOS, C. H. (1995). Stability Robustness of the LQG Active Suspensions with Disturbance/Noise Uncertainties and Time-Varying Parametrical Perturbations. *Int. J. of Vehicle Design* **16**(4/5), 428–440.
- CROLLA, D. A. & ABDEL HADY, M. B. A. (1991). Active Suspension Control; Performance Comparisons Using Control Laws Applied to a Full Vehicle Model. *Vehicle System Dynamics* **20**(2), 107–120.
- CRUZ, J. J. (1996). *Controle Robusto Multivariável*. Edusp. SP.

- DAVIS, B. R. & THOMPSON, A. G. (1988). Optimal Linear Active Suspensions with Integral Constraint. *Vehicle System Dynamics* **17**, 357–366.
- DOYLE, J. C.; FRANCIS, B. A. & TANNENBAUM, A. R. (1992). *Feedback Control Theory*. Macmillan. New York.
- DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P.P. & FRANCIS, B. A. (1989). State-space Solution to Standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Control Problems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **34**(8), 831–847.
- ELBEHEIRY, E. M. & KARNOPP, D. C. (1996). Optimal Control of Vehicle Random Vibration with Constrained Suspension Deflection. *Journal of Sound and Vibration* **189**(5), 547–564.
- ELMADANY, M. M. (1988). Stochastic Optimal Control of Highway Tractors with Active Suspensions. *Vehicle System Dynamics* **17**, 193–210.
- ELMADANY, M. M. (1990). Optimal Linear Active Suspensions with Multivariable Integral Control. *Vehicle System Dynamics* **19**(6), 313–329.
- ELMADANY, M. M. (1992). Integral and State Variable Feedback controllers for Improved Performance in Automotive Vehicle. *Computer & Structures* **42**(2), 237–244.
- ELMADANY, M. M. & ABDULJABBAR, Z. (1991). Alternative Control Laws for Active and Semi-Active Automotive Suspensions - A Comparative Study. *Computers & Structures* **39**(6), 623–629.
- FRANCIS, B. A. (1987). *A Course in \mathcal{H}_∞ Control Theory*. Vol. 88 of Lecture Notes in Control and Information Sciences. Addison-Wesley. Springer-Verlag.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D. & E.-NAEINI, A. (1994). *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley. New York.
- GEROMEL, J. C.; PERES, P. L. D. & BERNUSSOU, J. (1991). On a Convex Parameter Space Method for Linear Control Design of Uncertain Systems. *SIAM J. Control Optim.* **29**(2), 381–402.
- GEROMEL, J. C.; PERES, P. L. D. & SOUZA, S. R. (1992). \mathcal{H}_2 Guaranteed Cost Control for Uncertain Continuous-time Linear Systems. *Systems & Control Letters* **19**, 23–27.
- HAYAKAWA, K.; MATSUMOTO, K.; YAMASHITA, M.; SUZUKI, Y.; FUJIMORI, K. & KIMURA, H. (1993). Robust \mathcal{H}_∞ Output Feedback Control of Decoupled Automobile Active Suspension Systems. In: *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*. San Antonio, Texas. pp. 2931–2936.
- HROVAT, D. (1990). Optimal Active Suspension Structures for Quarter-car Vehicle Models. *Automatica* **26**(5), 845–860.
- HROVAT, D. (1991). Optimal Suspension Performance for 2-D Vehicle Models. *Journal of Sound and Vibration* **146**(1), 93–110.
- HROVAT, D. (1993). Applications of Optimal Control to Advanced Automotive Suspension Design. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **115**(2B), 328–342.

- HROVAT, D. & HUBBARD, M. (1981). Optimum Vehicle Suspensions Minimizing RMS Rattlespace, Spring-mass Acceleration and Jerk. *Journal of Dynamic Systems Measurement, and Control* **103**, 228–236.
- JONSSON, M. (1991). Simulation of Dynamics Behaviour of a Front Wheel Suspension. *Vehicle System Dynamics* **20**(5), 269–281.
- KARNOPP, D. (1986). Theoretical Limitations in Active Vehicle Suspensions. *Vehicle System Dynamics* **15**, 41–54.
- KASHANI, R. & KIRICZI, S. (1992). Robust Stability Analysis of LQG-Controlled Active Suspension with Model Uncertainty Using Structured Singular Value, μ , Method. *Vehicle System Dynamics* **21**, 361–384.
- KHARGONEKAR, P.P. (1991). Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control: A Convex Optimization Approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **36**(7), 824–837.
- KIRK, D. E. (1970). *Optimal Control Theory*. Prentice Hall. New Jersey.
- KREYSZIG, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. New York.
- KREYSZIG, E. (1993). *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons. New York.
- MACIEJOWSKI, J. M. (1989). *Multivariable Feedback Design*. Addison-Wesley. New York.
- MARTINUS, D.; SOENARKO, B. & NAZARUDDIN, Y. Y. (1996). Optimal Control Design with Preview for Semi-Active Suspension on a Half-vehicle Model. In: *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*. Kobe, Japan. pp. 2798–2801.
- MICHELBERG, P.; PALKOVICS, L. & BOKOR, J. (1993). Robust Design of Active Suspension System. *Int. J. of Vehicle Design* **14**(2/3), 145–165.
- OGATA, K. (1993). *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice Hall. Rio de Janeiro.
- PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. & BERNUSSOU, J. (1993a). Quadratic Stabilizability of Linear Uncertain System in Convex-bounded Domains. *Automatica* **29**(2), 491–493.
- PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. & SOUZA, S. R. (1993b). \mathcal{H}_∞ Guaranteed Cost Control for Uncertain Continuous-time Linear Systems. *Systems & Control Letters* **20**, 413–418.
- PERES, P. L. D. & GEROMEL, J. C. (1994). An Alternate Numerical Solution to the Linear Quadratic Problem. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **39**(1), 198–202.
- RAGHAVAN, M. (1991). Suspension Kinematic Structure for Passive Control of Vehicle Attitude. *Int. J. of Vehicle Design* **12**(5/6), 525–547.
- SCHERER, C. (1989). \mathcal{H}_∞ -control by state-feedback: an iterative algorithm and characterization of high-gain occurrence. *Systems & Control Letters* **12**, 383–391.
- SCHERER, C. (1990). \mathcal{H}_∞ - Control by State-feedback and Fast Algorithms for the Computation of Optimal \mathcal{H}_∞ - Norms. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **35**(10), 1090–1099.
- SHARP, R. S. & CROLLA, D. A. (1987). Road Vehicle Suspension System Design - A Review. *Vehicle System Dynamics* **16**, 167–192.

- SHARP, R. S. & WILSON, D. A. (1990). On Control Laws for Vehicle Suspensions Accounting for Input Correlations. *Vehicle System Dynamics* **19**, 353–363.
- TAKAHASHI, R. H. C.; CAMINO, J. F.; ZAMPIERI, D. E. & PERES, P. L. D. (1997). A Multiobjective Approach for \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Active Suspension Control. In: *Proceedings of the 1998 American Control Conference*. To appear.
- THOMPSON, A. G. (1971). Design of Active Suspensions. *Proc. Instn. Mech. Engrs* **185**(36), 553–563.
- THOMPSON, A. G. (1976). An Active Suspension with Optimal Linear State Feedback. *Vehicle System Dynamics* **5**, 187–203.
- THOMPSON, A. G. (1984). Optimal and Suboptimal Linear Active Suspensions for Road Vehicles. *Vehicle System Dynamics* **13**, 61–72.
- THOMPSON, A. G. & DAVIS, B. R. (1988). Optimal Linear Active Suspensions with Derivative Constraints and Output Feedback Control. *Vehicle System Dynamics* **17**(4), 179–192.
- ULSOY, A. G.; HROVAT, D. & TSENG, T. (1994). Stability Robustness of LQ and LQG Active Suspensions. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **116**, 123–131.
- VENHOVENS, T. P. J.; KNAAP, A. C. M. & PACEJKA, H. B. (1993). Semi-Active Attitude and Vibration Control. *Vehicle System Dynamics* **22**, 359–381.
- WAL, M. & JAGER, B. (1996). Selection of Sensors and Actuators for an Active Suspension Control Problem. In: *Proceedings of the 1996 IEEE Internacional Conference on Control Applications*. Dearborn, MI. pp. 55–60.
- WILSON, D. A.; SHARP, R. S. & HASSAN, S. A. (1986). The Application of Linear Optimal Control Theory to the Design of Active Automotive Suspensions. *Vehicle System Dynamics* **15**, 105–118.
- ZHOU, K.; DOYLE, J. C. & GLOVER, K. (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall. New Jersey.

1. Sistema de Referência.

O corpo principal é o único que sofre rotação. Que neste caso são duas: a primeira é a de rolagem representada pela coordenada θ ; e a segunda é a de balanço representada pela coordenada ψ . Portanto necessita-se de dois referenciais associados a ambas as coordenadas, e de um terceiro inercial.

As bases dos sistemas de referência e suas respectivas rotações encontram-se representadas na figura A.2.

- (a) Base Inercial $I : X, Y, Z$ $[\vec{i} \vec{j} \vec{k}]$ que está fixa ao solo.
- (b) Base Móvel Intermediária $B_{1i} : X_{1i}, Y_{1i}, Z_{1i}$ $[\vec{i}_{1i} \vec{j}_{1i} \vec{k}_{1i}]$ que possui uma rotação θ em torno do eixo Z .
- (c) Base Móvel solidária ao Corpo Principal $B_1 : X_1, Y_1, Z_1$ $[\vec{i}_1 \vec{j}_1 \vec{k}_1]$ que sofre uma rotação ψ em torno de X_{1i} .

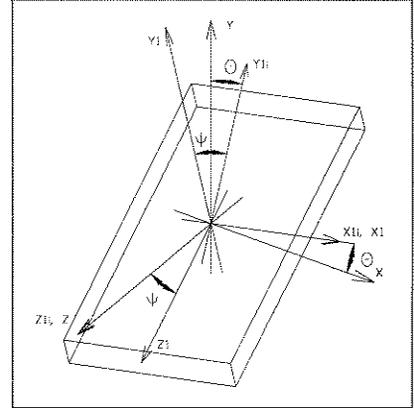


Figura A.2: Bases Móveis

2. Rotações e matrizes de transformação de coordenadas.

A transformação que leva um vetor na base B_{1i} para a base B_1 é dada por $({}_{B_1}\vec{S} = [T_\psi]_{B_{1i}}\vec{S})$, com

$$[T_\psi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \psi \\ 0 & -\psi & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

A rotação que leva um vetor na base B_1 para a base inercial I é $({}_{B_1}\vec{S} = [T_\theta]_I\vec{S})$, onde

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

A transformação total que leva um vetor na base B_{1i} para a base inercial I é portanto $({}_{B_1}\vec{S} = [T]_I\vec{S})$, onde

$$[T] = [T_\psi] \cdot [T_\theta] = \begin{bmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & \psi \\ \psi \theta & -\psi & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Os deslocamentos angulares θ e ψ , e suas derivadas representados nas respectivas bases são:

$$\begin{aligned} {}_I\vec{\theta} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix} & {}_I\dot{\vec{\theta}} &= \frac{d}{dt}{}_I\vec{\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ {}_{B1i}\vec{\psi} &= \begin{bmatrix} \psi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & {}_{B1i}\dot{\vec{\psi}} &= \frac{d}{dt}{}_{B1i}\vec{\psi} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

3. Posição do centro de massa dos corpos.

Estas posições são representadas pelo vetor deslocamento \vec{S} . Vetores estes que vão da base inercial ao centro de massa de cada corpo, dados por:

$$\begin{aligned} {}_I\vec{S}_{decm} &= \begin{bmatrix} b_c \\ y_{de} \\ l_d \end{bmatrix} & {}_I\vec{S}_{ddcm} &= \begin{bmatrix} -b_c \\ y_{dd} \\ l_d \end{bmatrix} \\ {}_I\vec{S}_{tecm} &= \begin{bmatrix} b_c \\ y_{te} \\ -l_t \end{bmatrix} & {}_I\vec{S}_{tdcm} &= \begin{bmatrix} -b_c \\ y_{td} \\ -l_t \end{bmatrix} \\ {}_I\vec{S}_{cm} &= \begin{bmatrix} 0 \\ y_c \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

4. Excitação.

As excitações são distúrbios provenientes da via. Estes distúrbios são simulados como sendo um deslocamento $w(t)$ aplicado em cada uma das rodas na direção Y do referencial inercial. Portanto tem-se:

$$\begin{aligned} {}_I\vec{W}_{de} &= \begin{bmatrix} b_c \\ w_{de} \\ l_d \end{bmatrix} & {}_I\vec{W}_{dd} &= \begin{bmatrix} -b_c \\ w_{dd} \\ l_d \end{bmatrix} \\ {}_I\vec{W}_{te} &= \begin{bmatrix} b_c \\ w_{te} \\ -l_t \end{bmatrix} & {}_I\vec{W}_{td} &= \begin{bmatrix} -b_c \\ w_{td} \\ -l_t \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

5. Pontos de contato com as suspensões.

Estas posições podem ser representadas por vetores deslocamento do centro de massa do corpo principal aos pontos de conexão de cada suspensão na base inercial.

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{S}_{cde} &= [T]' \begin{bmatrix} b_c \\ 0 \\ l_d \end{bmatrix} \Rightarrow {}_I\vec{S}_{cde} = \begin{bmatrix} b_c + l_d \psi \theta \\ -l_d \psi + b_c \theta \\ l_d \end{bmatrix} \\
 {}_I\vec{S}_{cdd} &= [T]' \begin{bmatrix} -b_c \\ 0 \\ l_d \end{bmatrix} \Rightarrow {}_I\vec{S}_{cdd} = \begin{bmatrix} -b_c + l_d \psi \theta \\ -l_d \psi - b_c \theta \\ l_d \end{bmatrix} \\
 {}_I\vec{S}_{cte} &= [T]' \begin{bmatrix} b_c \\ 0 \\ -l_t \end{bmatrix} \Rightarrow {}_I\vec{S}_{cte} = \begin{bmatrix} b_c - l_t \psi \theta \\ l_t \psi + b_c \theta \\ -l_t \end{bmatrix} \\
 {}_I\vec{S}_{ctd} &= [T]' \begin{bmatrix} -b_c \\ 0 \\ -l_t \end{bmatrix} \Rightarrow {}_I\vec{S}_{ctd} = \begin{bmatrix} -b_c - l_t \psi \theta \\ l_t \psi - b_c \theta \\ -l_t \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

6. Deflexão da mola em cada suspensão.

Estas deflexões estão representadas na base inercial. São dadas como sendo a diferença entre o quanto se deslocou a suspensão e o quanto se deslocou o ponto de conexão no corpo principal, ou seja:

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{D}_{fde} &= \begin{bmatrix} 0 \\ y_{de} \\ 0 \end{bmatrix} - \left({}_I\vec{S}_{cde} - \begin{bmatrix} b_c \\ 0 \\ l_d \end{bmatrix} + {}_I\vec{S}_{cm} \right) \\
 {}_I\vec{D}_{fdd} &= \begin{bmatrix} 0 \\ y_{dd} \\ 0 \end{bmatrix} - \left({}_I\vec{S}_{cdd} - \begin{bmatrix} -b_c \\ 0 \\ l_d \end{bmatrix} + {}_I\vec{S}_{cm} \right) \\
 {}_I\vec{D}_{fte} &= \begin{bmatrix} 0 \\ y_{te} \\ 0 \end{bmatrix} - \left({}_I\vec{S}_{cte} - \begin{bmatrix} b_c \\ 0 \\ -l_t \end{bmatrix} + {}_I\vec{S}_{cm} \right) \\
 {}_I\vec{D}_{ftd} &= \begin{bmatrix} 0 \\ y_{td} \\ 0 \end{bmatrix} - \left({}_I\vec{S}_{ctd} - \begin{bmatrix} -b_c \\ 0 \\ -l_t \end{bmatrix} + {}_I\vec{S}_{cm} \right).
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

7. Deflexão da rigidez de cada pneu.

É obtida similarmente ao caso anterior. Sendo a diferença entre o deslocamento referente à excitação e o quanto se deslocou cada respectiva suspensão.

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{D}_{w_{de}} &= {}_I\vec{W}_{de} - {}_I\vec{S}_{dec} & {}_I\vec{D}_{w_{dd}} &= {}_I\vec{W}_{dd} - {}_I\vec{S}_{ddc} \\
 {}_I\vec{D}_{w_{te}} &= {}_I\vec{W}_{te} - {}_I\vec{S}_{tec} & {}_I\vec{D}_{w_{td}} &= {}_I\vec{W}_{td} - {}_I\vec{S}_{tdc}.
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

8. Velocidade do centro de massa dos corpos.

A velocidade linear absoluta do centro de massa de cada corpo, na base inercial, é obtida derivando-se os respectivos vetores deslocamento:

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{V}_{decm} &= \frac{d}{dt} {}_I\vec{S}_{decm} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y}_{de} \\ 0 \end{bmatrix} & {}_I\vec{V}_{ddcm} &= \frac{d}{dt} {}_I\vec{S}_{ddcm} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y}_{dd} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}_I\vec{V}_{tecm} &= \frac{d}{dt} {}_I\vec{S}_{tecm} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y}_{te} \\ 0 \end{bmatrix} & {}_I\vec{V}_{tdcm} &= \frac{d}{dt} {}_I\vec{S}_{tdcm} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y}_{td} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}_I\vec{V}_{cm} &= \frac{d}{dt} {}_I\vec{S}_{cm} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y}_c \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

9. Velocidade da Deflexão de cada mola.

Essa velocidade absoluta, representada na base inercial, é a derivada da deflexão de cada mola:

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{V}_{fde} &= \frac{d}{dt} {}_I\vec{D}_{fde} & {}_I\vec{V}_{fdd} &= \frac{d}{dt} {}_I\vec{D}_{fdd} \\
 {}_I\vec{V}_{fte} &= \frac{d}{dt} {}_I\vec{D}_{fte} & {}_I\vec{V}_{ftd} &= \frac{d}{dt} {}_I\vec{D}_{ftd}.
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

10. Velocidade angular absoluta da base B_1 .

Esta velocidade está representada na própria base e nada mais é que a somatória das rotações que a mesma sofre, ou seja

$${}_{B_1}\vec{\Omega} = [T]_I\vec{\theta} + [T_\psi]_{B_1}\vec{\psi} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta}\psi \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}. \tag{A.12}$$

11. Velocidade angular absoluta do corpo principal.

É idêntica à velocidade da base móvel B_1 , já que a mesma se encontra fixa ao corpo principal:

$${}_{B_1}\vec{\omega} = {}_{B_1}\vec{\Omega}. \tag{A.13}$$

12. Aceleração angular absoluta da base móvel B_1 e do corpo principal.

É a derivada das velocidades definidas anteriormente, representadas na base B_1 :

$${}_{B_1}\vec{\Omega} = \frac{d}{dt} {}_{B_1}\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \dot{\psi}\dot{\theta} + \ddot{\theta}\psi \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

$${}_{B_1}\vec{\omega} = \frac{d}{dt} {}_{B_1}\vec{\Omega}. \tag{A.15}$$

13. Aceleração linear absoluta do centro de massa dos corpos.

É a derivada da velocidade linear absoluta do centro de massa de cada corpo, representada na base inercial I :

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{A}_{decm} &= \frac{d}{dt} {}_I\vec{V}_{decm} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{y}_{de} \\ 0 \end{bmatrix} & {}_I\vec{A}_{ddcm} &= \frac{d}{dt} {}_I\vec{V}_{ddcm} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{y}_{dd} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}_I\vec{A}_{tecm} &= \frac{d}{dt} {}_I\vec{V}_{tecm} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{y}_{te} \\ 0 \end{bmatrix} & {}_I\vec{A}_{tdcm} &= \frac{d}{dt} {}_I\vec{V}_{tdcm} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{y}_{td} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}_I\vec{A}_{cm} &= \frac{d}{dt} {}_I\vec{V}_{cm} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{y}_c \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

14. Diagrama de corpo livre.

O cerne das equações de Newton-Euler é o diagrama de corpo livre, no qual todas as forças de ação e reação devem estar representadas, possibilitando assim, a montagem das equações.

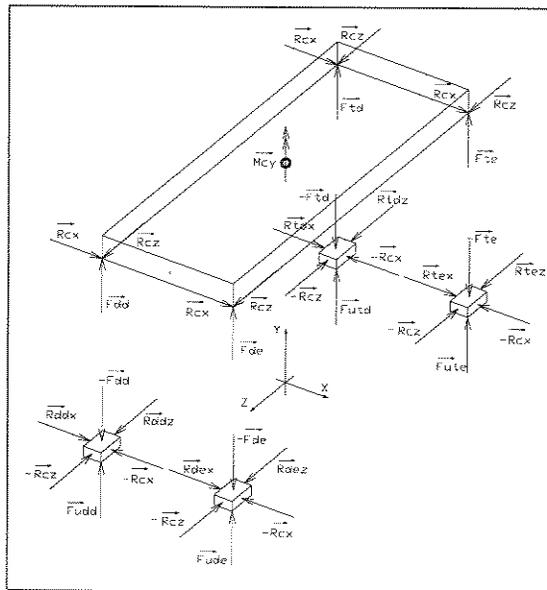


Figura A.3: Diagrama de corpo livre

As forças de ação e reação (figura A.3) estão representadas em convenientes bases, como pode ser visto pelos subscritos. Seus módulos, direções e sentidos são dados

como sendo:

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{F}_{wde} &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_{wdey} \\ 0 \end{bmatrix} & {}_I\vec{F}_{wdd} &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_{wddy} \\ 0 \end{bmatrix} & {}_I\vec{F}_{wte} &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_{wtey} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}_I\vec{F}_{wtd} &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_{wtdy} \\ 0 \end{bmatrix} & {}_I\vec{F}_{de} &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_{dey} \\ 0 \end{bmatrix} & {}_I\vec{F}_{dd} &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_{ddy} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}_I\vec{F}_{te} &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_{tey} \\ 0 \end{bmatrix} & {}_I\vec{F}_{td} &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_{tdy} \\ 0 \end{bmatrix} & {}_I\vec{F}_{bde} &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_{bdey} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 {}_I\vec{F}_{bdd} &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_{bddy} \\ 0 \end{bmatrix} & {}_I\vec{F}_{bte} &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_{btey} \\ 0 \end{bmatrix} & {}_I\vec{F}_{btd} &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_{btdy} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
 {}_I\vec{R}_{de} &= \begin{bmatrix} R_{dex} \\ 0 \\ R_{dez} \end{bmatrix} & {}_I\vec{R}_{dd} &= \begin{bmatrix} R_{ddx} \\ 0 \\ R_{ddz} \end{bmatrix} & {}_I\vec{R}_{te} &= \begin{bmatrix} R_{tex} \\ 0 \\ R_{tez} \end{bmatrix} \\
 {}_I\vec{R}_{td} &= \begin{bmatrix} R_{tdx} \\ 0 \\ R_{tdz} \end{bmatrix} & {}_{B_1}\vec{R}_c &= \begin{bmatrix} R_{cx} \\ 0 \\ R_{cy} \end{bmatrix} & {}_{B_1}\vec{M}_{cy} &= \begin{bmatrix} 0 \\ M_{cy} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

$${}_I\vec{R}_C = [T]{}' {}_{B_1}\vec{R}_c.$$

15. Tensor de inércia do corpo principal.

Este é diagonal e está representado na base móvel B_1

$${}_{B_1}\vec{I}_c = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \tag{A.19}$$

16. Equilíbrio dinâmico [Newton - Euler].

Com os passos acima efetuados, pode-se montar a equação de Newton e a de Euler. A equação de Newton (*no sistema inercial I*) é do tipo

$$\sum {}_I\vec{F} = m_i {}_I\vec{a}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \tag{A.20}$$

e a de Euler (*no sistema móvel B_i*)

$$\sum {}_{B_i}\vec{M}_c = {}_{B_i}\vec{I}_c \frac{d}{{}_I} ({}_{B_i}\vec{\omega}) + {}_{B_1}\vec{\Omega}_c \wedge ({}_{B_1}\vec{I}_c {}_{B_1}\vec{\omega}). \tag{A.21}$$

Aplicando para cada um dos corpos, tem-se:

(a) Corpo “de”

$${}_I\vec{F}_{ext} = {}_I\vec{F}_{w_{de}} - {}_I\vec{F}_{de} + {}_I\vec{R}_{de} - {}_I\vec{F}_{bde} - {}_I\vec{R}_c = M_{de} {}_I\vec{A}_{decm}$$

ou, matricialmente

$$\begin{bmatrix} R_{dex} - R_{cx} - R_{cz} \psi \theta \\ -F_{bdey} - F_{dey} + F_{wdey} + R_{cz} \psi - R_{cx} \theta \\ R_{dez} - R_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{de} \ddot{y}_{de} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

(b) Corpo “dd”

$${}_I\vec{F}_{ext} = {}_I\vec{F}_{w_{dd}} - {}_I\vec{F}_{dd} + {}_I\vec{R}_{dd} - {}_I\vec{F}_{bdd} - {}_I\vec{R}_c = M_{dd} {}_I\vec{A}_{ddcm}$$

dando

$$\begin{bmatrix} R_{ddx} - R_{cx} - R_{cz} \psi \theta \\ -F_{bddy} - F_{ddy} + F_{wddy} + R_{cz} \psi - R_{cx} \theta \\ R_{ddz} - R_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{dd} \ddot{y}_{dd} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

(c) Corpo “te”

$${}_I\vec{F}_{ext} = {}_I\vec{F}_{w_{te}} - {}_I\vec{F}_{te} + {}_I\vec{R}_{te} - {}_I\vec{F}_{bte} - {}_I\vec{R}_c = M_{te} {}_I\vec{A}_{tecm}$$

levando a

$$\begin{bmatrix} R_{tex} - R_{cx} - R_{cz} \psi \theta \\ -F_{btey} - F_{tey} + F_{wtey} + R_{cz} \psi - R_{cx} \theta \\ R_{tez} - R_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{te} \ddot{y}_{te} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

(d) Corpo “td”

$${}_I\vec{F}_{ext} = {}_I\vec{F}_{w_{td}} - {}_I\vec{F}_{td} + {}_I\vec{R}_{td} - {}_I\vec{F}_{btd} - {}_I\vec{R}_c = M_{td} {}_I\vec{A}_{tdcm}$$

dando

$$\begin{bmatrix} R_{tdx} - R_{cx} - R_{cz} \psi \theta \\ -F_{btdy} - F_{tdy} + F_{wtdy} + R_{cz} \psi - R_{cx} \theta \\ R_{tdz} - R_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{td} \ddot{y}_{td} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

(e) Corpo Principal

De Newton, tem-se

$${}_I\vec{F}_{ext} = {}_I\vec{F}_{de} + {}_I\vec{F}_{dd} + {}_I\vec{F}_{te} + {}_I\vec{F}_{td} + 4{}_I\vec{R}_c + {}_I\vec{F}_{bde} + {}_I\vec{F}_{bdd} + {}_I\vec{F}_{bte} + {}_I\vec{F}_{btd} = M_c {}_I\vec{A}_{cvm}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} 4(R_{cx} + R_{cz} \psi \theta) \\ F_{bdey} + F_{bddy} + F_{btey} + F_{btdy} + F_{dey} + F_{ddy} \\ + F_{tey} + F_{tdy} + 4R_{cz} \psi + 4R_{cx} \theta \\ 4R_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_c \ddot{y}_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

E de Euler, chega-se a:

$$\begin{aligned}
{}_{B1}\vec{M}_{ext} &= [I] ({}_I\vec{S}_{cde} \wedge ({}_I\vec{F}_{de} + {}_I\vec{F}_{bde}) + {}_I\vec{S}_{cdd} \wedge ({}_I\vec{F}_{dd} + {}_I\vec{F}_{bdd}) \\
&\quad + {}_I\vec{S}_{cte} \wedge ({}_I\vec{F}_{te} + {}_I\vec{F}_{bte}) + {}_I\vec{S}_{ctd} \wedge ({}_I\vec{F}_{td} + {}_I\vec{F}_{btd}) \\
&= {}_{B1}\vec{I}_c {}_{B1}\vec{\omega} + {}_{B1}\vec{\Omega}_c \wedge ({}_{B1}\vec{I}_c {}_{B1}\vec{\omega})
\end{aligned}$$

ou, na forma matricial

$$\left[\begin{array}{c} -F_{bddy} l_d - F_{bdey} l_d - F_{ddy} l_d - F_{dey} l_d + F_{btdy} l_t \\ \quad + F_{btey} l_t + F_{tdy} l_t + F_{tey} l_t \\ \\ M_{cy} + (F_{bddy} l_d + F_{bdey} l_d + F_{ddy} l_d + F_{dey} l_d \\ \quad - F_{btdy} l_t - F_{btey} l_t - F_{tdy} l_t - F_{tey} l_t) \theta \\ + (F_{bddy} + F_{ddy})(-b_c + l_d \psi \theta) + (F_{bdey} + F_{dey})(b_c + l_d \psi \theta) \psi \\ \quad + (F_{btey} + F_{tey})(b_c - l_t \psi \theta) - (F_{btdy} + F_{tdy})(b_c + l_t \psi \theta) \\ \\ (-F_{bddy} + F_{bdey} - F_{btdy} + F_{btey} - F_{ddy} \\ \quad + F_{dey} - F_{tdy} + F_{tey}) b_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -I_{yy} \dot{\theta}^2 \psi + I_{zz} \dot{\theta}^2 \psi + I_{xx} \ddot{\psi} \\ I_{xx} \dot{\psi} \dot{\theta} + I_{yy} \dot{\psi} \dot{\theta} - I_{zz} \dot{\psi} \dot{\theta} + I_{yy} \ddot{\theta} \psi \\ -I_{xx} \dot{\psi} \dot{\theta} \psi + I_{yy} \dot{\psi} \dot{\theta} \psi + I_{zz} \ddot{\theta} \end{array} \right]. \quad (A.27)$$

17. Solução do Sistema.

Convém ressaltar que no modelo empregado as forças provenientes das molas e amortecedores atuam unicamente na direção vertical da base inercial I . Portanto, é utilizada apenas a componente na direção Y (segunda componente de cada vetor). Os valores dos módulos são dados como sendo:

$$\begin{aligned}
F_{wdey} &= K_p {}_I\vec{D}_{wde} \\
F_{wddy} &= K_p {}_I\vec{D}_{wdd} \\
F_{wtey} &= K_p {}_I\vec{D}_{wte} \\
F_{wtdy} &= K_p {}_I\vec{D}_{wtd}
\end{aligned} \quad (A.28)$$

$$\begin{aligned}
F_{dey} &= K_{sd} {}_I\vec{D}_{fde} + C_{sd} {}_I\vec{V}_{fde} \\
F_{ddy} &= K_{sd} {}_I\vec{D}_{fdd} + C_{sd} {}_I\vec{V}_{fdd} \\
F_{tey} &= K_{st} {}_I\vec{D}_{fte} + C_{st} {}_I\vec{V}_{fte} \\
F_{tdy} &= K_{st} {}_I\vec{D}_{ftd} + C_{st} {}_I\vec{V}_{ftd}
\end{aligned} \quad (A.29)$$

$$\begin{aligned}
F_{bdey} &= K_{bd} ({}_I\vec{D}_{fde} - {}_I\vec{D}_{fdd}) / (2b_c)^2 \\
F_{bddy} &= K_{bd} ({}_I\vec{D}_{fdd} - {}_I\vec{D}_{fde}) / (2b_c)^2 \\
F_{btey} &= K_{bt} ({}_I\vec{D}_{fte} - {}_I\vec{D}_{ftd}) / (2b_c)^2 \\
F_{btdy} &= K_{bt} ({}_I\vec{D}_{ftd} - {}_I\vec{D}_{fte}) / (2b_c)^2
\end{aligned} \quad (A.30)$$

Agrupando-se as equações de (A.22) a (A.27), chega-se a um sistema de 18 equações com 18 incógnitas, podendo ser colocado na forma $\alpha x = \beta$, onde: α é a matriz

dos coeficientes, x o vetor das incógnitas e β o vetor dos termos independentes. Resolvendo o sistema chega-se finalmente às equações de movimento:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{de} = & \frac{1}{M_{de}} [K_p (w_{de} - y_{de}) + \frac{K_{bd}}{4b_c^2} (y_{dd} - y_{de} + 2b_c \theta) \\ & + K_{sd} (y_c - y_{de} + b_c \theta - l_d \psi) + C_{sd} (\dot{y}_c - \dot{y}_{de} + b_c \dot{\theta} - l_d \dot{\psi})] \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{dd} = & \frac{1}{M_{dd}} [K_p (w_{dd} - y_{dd}) + \frac{K_{bd}}{4b_c^2} (y_{de} - y_{dd} - 2b_c \theta) \\ & + K_{sd} (y_c - y_{dd} - b_c \theta - l_d \psi) + C_{sd} (\dot{y}_c - \dot{y}_{dd} - b_c \dot{\theta} - l_d \dot{\psi})] \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{te} = & \frac{1}{M_{te}} [K_p (w_{te} - y_{te}) + \frac{K_{bt}}{4b_c^2} (y_{td} - y_{te} + 2b_c \theta) \\ & + K_{st} (y_c - y_{te} + b_c \theta + l_t \psi) + C_{st} (\dot{y}_c + \dot{y}_{te} + b_c \dot{\theta} + l_t \dot{\psi})] \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{td} = & \frac{1}{M_{td}} [K_p (w_{td} - y_{td}) + \frac{K_{bt}}{4b_c^2} (y_{te} - y_{td} - 2b_c \theta) \\ & + K_{st} (y_c - y_{td} - b_c \theta + l_t \psi) + C_{st} (\dot{y}_c + \dot{y}_{td} - b_c \dot{\theta} + l_t \dot{\psi})] \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_c = & \frac{1}{M_c} [K_{sd} (y_{de} + y_{dd} - 2y_c + 2l_d \psi) + K_{st} (y_{te} + y_{td} - 2y_c - 2l_t \psi) \\ & + C_{sd} (\dot{y}_{de} + \dot{y}_{dd} - 2\dot{y}_c + 2l_d \dot{\psi}) + C_{st} (\dot{y}_{te} + \dot{y}_{td} - 2\dot{y}_c - 2l_t \dot{\psi})] \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \frac{1}{I_{zz}} [b_c K_{sd} (y_{de} - y_{dd} - 2b_c \theta) + b_c K_{st} (y_{te} - y_{td} - 2b_c \theta) \\ & + \frac{K_{bd}}{2b_c} (y_{de} - y_{dd} - 2b_c \theta) + \frac{K_{bt}}{2b_c} (y_{te} - y_{td} - 2b_c \theta) \\ & + b_c C_{sd} (\dot{y}_{de} - \dot{y}_{dd} - 2b_c \dot{\theta}) + b_c C_{st} (\dot{y}_{te} - \dot{y}_{td} - 2b_c \dot{\theta})] \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} = & \frac{1}{I_{xx}} [l_d K_{sd} (2y_c - y_{de} - y_{dd} - 2l_d \psi) + \\ & l_t K_{st} (y_{te} + y_{td} - 2y_c - 2l_t \psi) \\ & + l_d C_{sd} (2\dot{y}_c - \dot{y}_{de} - \dot{y}_{dd} - 2l_d \dot{\psi}) \\ & + l_t C_{st} (\dot{y}_{te} + \dot{y}_{td} - 2\dot{y}_c - 2l_t \dot{\psi})] \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

O sistema também dá como solução as reações. Entretanto, por não ser de interesse as mesmas não se encontram aqui descritas.

Estas equações (de A.32 a A.37) podem ser colocadas na forma matricial

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + K X = F \quad (\text{A.38})$$

onde as matrizes M , C e K são simétricas e dadas por:

$$M_{7 \times 7} = \text{diag}\{M_{de}, M_{dd}, M_{te}, M_{td}, M_c, I_{zz}, I_{xx}\} \quad (\text{A.39})$$

$$C_{7 \times 7} = \begin{bmatrix} C_{sd} & 0 & 0 & 0 & -C_{sd} & -b_c C_{sd} & l_d C_{sd} \\ & C_{sd} & 0 & 0 & -C_{sd} & b_c C_{sd} & l_d C_{sd} \\ & & C_{st} & 0 & -C_{st} & -b_c C_{st} & -l_t C_{st} \\ & & & C_{st} & -C_{st} & b_c C_{st} & -l_t C_{st} \\ & \ddots & & & 2(C_{sd} + C_{st}) & 0 & -2(l_d C_{sd} - l_t C_{st}) \\ & & & & & 2b_c^2(C_{sd} + C_{st}) & 0 \\ & & & & & & 2(l_d^2 C_{sd} + l_t^2 C_{st}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

$$K_{7 \times 7} = \begin{bmatrix} k^1 & -\frac{K_{bd}}{4b_c^2} & 0 & 0 & -K_{sd} & -\frac{K_{bd}}{2b_c} - b_c K_{sd} & l_d K_{sd} \\ & k^1 & 0 & 0 & -K_{sd} & \frac{K_{bd}}{2b_c} + b_c K_{sd} & l_d K_{sd} \\ & & k^2 & -\frac{K_{bt}}{4b_c^2} & -K_{st} & -\frac{K_{bt}}{2b_c} - b_c K_{st} & -l_t K_{st} \\ & & & k^2 & -K_{st} & \frac{K_{bt}}{2b_c} + b_c K_{st} & -l_t K_{st} \\ & \ddots & & & 2(K_{sd} + K_{st}) & -2(l_d K_{sd} - l_t K_{st}) & 0 \\ & & & & & k^3 & 0 \\ & & & & & & k^4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

com

$$k^1 = \frac{K_{bd}}{4b_c^2} + K_p + K_{sd}$$

$$k^2 = \frac{K_{bt}}{4b_c^2} + K_p + K_{st}$$

$$k^3 = K_{bd} + K_{bt} + 2b_c^2(K_{sd} + K_{st})$$

$$k^4 = 2l_d^2 K_{sd} + 2l_t^2 K_{st}$$

Os vetores F e X são:

$$F_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} -K_p w_{de} \\ -K_p w_{dd} \\ -K_p w_{te} \\ -K_p w_{td} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} y_{de} \\ y_{dd} \\ y_{te} \\ y_{td} \\ y_c \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

O vetor F pode ser subdividido, expressando-se como o produto de uma matrix F_1 pela entrada w , ou seja $F = F_1 w$:

$$F = \begin{bmatrix} -K_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{de} \\ w_{dd} \\ w_{te} \\ w_{td} \end{bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

A.2 Modelo Tridimensional com Controlador

O equacionamento dinâmico do modelo tridimensional com controlador (figura A.4) também é obtido através das equações de Newton e Euler.

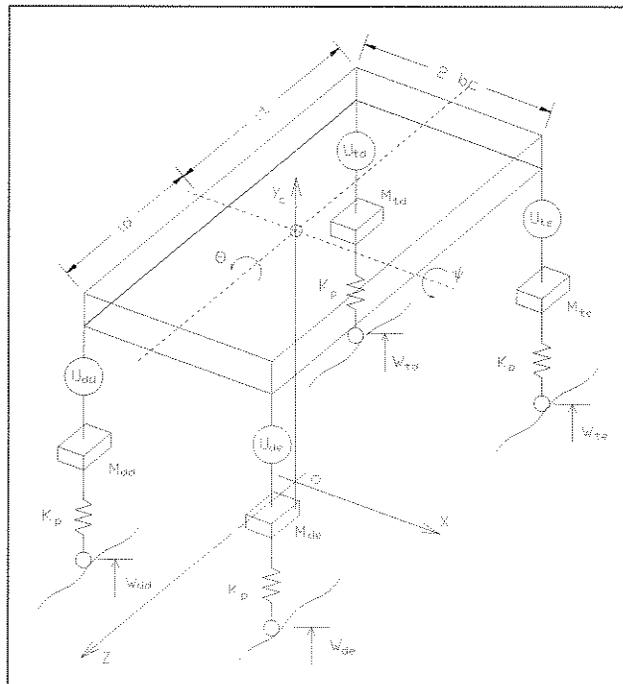


Figura A.4: Modelo tridimensional com controlador

Para isto, basta fazer as modificações dadas por (A.44) no conjunto de equações (A.29), antes de resolver o sistema.

$$\begin{aligned} F_{dey} &= u_{de} \\ F_{ddy} &= u_{dd} \\ F_{tey} &= u_{te} \\ F_{tdy} &= u_{td} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Que fornece como resultado as seguintes equações de movimento:

$$\ddot{y}_{de} = \frac{1}{M_{de}} [K_p (w_{de} - y_{de}) + \frac{K_{bd}}{4b_c^2} (y_{dd} - y_{de} + 2b_c \theta) - u_{de}] \quad (\text{A.45})$$

$$\ddot{y}_{dd} = \frac{1}{M_{dd}} [K_p (w_{dd} - y_{dd}) + \frac{K_{bd}}{4b_c^2} (y_{de} - y_{dd} - 2b_c \theta) - u_{dd}] \quad (\text{A.46})$$

$$\ddot{y}_{te} = \frac{1}{M_{te}} [K_p (w_{te} - y_{te}) + \frac{K_{bt}}{4b_c^2} (y_{td} - y_{te} + 2b_c \theta) - u_{te}] \quad (\text{A.47})$$

$$\ddot{y}_{td} = \frac{1}{M_{td}} [K_p (w_{td} - y_{td}) + \frac{K_{bt}}{4b_c^2} (y_{te} - y_{td} - 2b_c \theta) - u_{td}] \quad (\text{A.48})$$

$$\ddot{y}_c = \frac{1}{M_c} [u_{de} + u_{dd} + u_{te} + u_{td}] \quad (\text{A.49})$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_{zz}} \left[\frac{K_{bd}}{2b_c} (y_{de} - y_{dd} - 2b_c \theta) + \frac{K_{bt}}{2b_c} (y_{te} - y_{td} - 2b_c \theta) + b_c (u_{de} - u_{dd} + u_{te} - u_{td}) \right] \quad (\text{A.50})$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_{xx}} [l_t (u_{te} + u_{td}) - l_d (u_{de} - u_{dd})] \quad (\text{A.51})$$

Estas equações podem ser reescritas como

$$M \ddot{X} + K X = F \quad (\text{A.52})$$

onde as matrizes M e K são simétricas, dadas por:

$$M_{7 \times 7} = \text{diag}\{M_{de}, M_{dd}, M_{te}, M_{td}, M_c, I_{zz}, I_{xx}\} \quad (\text{A.53})$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{K_{bd}}{4b_c^2} + K_p & -\frac{K_{bd}}{4b_c^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_{bd}}{2b_c} \\ & \frac{K_{bd}}{4b_c^2} + K_p & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{bd}}{2b_c} & 0 \\ & & \frac{K_{bt}}{4b_c^2} + K_p & -\frac{K_{bd}}{4b_c^2} & 0 & -\frac{K_{bt}}{2b_c} & 0 \\ & & & \frac{K_{bt}}{4b_c^2} + K_p & 0 & \frac{K_{bt}}{2b_c} & 0 \\ & & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & K_{bd} + K_{bt} & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.54})$$

e o vetor F dado por:

$$F = \begin{bmatrix} u_{de} - K_p w_{de} \\ u_{dd} - K_p w_{dd} \\ u_{te} - K_p w_{te} \\ u_{td} - K_p w_{td} \\ -(u_{de} + u_{dd} + u_{te} + u_{td}) \\ -b_c (u_{de} - u_{dd} + u_{te} - u_{td}) \\ l_d (u_{de} + u_{dd}) - l_t (u_{te} + u_{td}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.55})$$

Este vetor pode ser ainda subdividido, expressando-se como a soma de duas matrizes F_1 e F_2 pós multiplicadas pelas entradas u e w , respectivamente ($F = F_1 u + F_2 w$), ou seja

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -b_c & b_c & -b_c & b_c \\ l_d & l_d & -l_t & -l_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{de} \\ u_{dd} \\ u_{te} \\ u_{td} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{de} \\ w_{dd} \\ w_{te} \\ w_{td} \end{bmatrix} \quad (\text{A.56})$$

O vetor X é o mesmo que o definido em (A.42).