

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR RICARDO LUIZ ANTONIOLLI
PASSALACQUA..... E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 27.1.02.2009.

.....R. Pavanello.....
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Análise de Reparos Estruturais Compósitos Colados Usando o Método dos Elementos Finitos

Autor: Ricardo Luiz Antonioli Passalacqua

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Análise de Reparos Estruturais Compósitos Colados Usando o Método dos Elementos Finitos

Autor: **Ricardo Luiz Antonioli Passalacqua**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2009

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

P265a Passalacqua, Ricardo Luiz Antonioli
Análise de reparos estruturais compósitos colados usando o método dos elementos finitos/ Ricardo Luiz Antonioli Passalacqua. – Campinas, SP: [s.n], 2009.

Orientador: Renato Pavanello
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Engenharia de estruturas. 2. Adesivos. 3. Materiais compostos. 4. Metodos dos elementos finitos. I. Pavanello, Renato. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Finite element analyses of bonded composite patch

Palavras-chave em Inglês: Patch Repair, Adhesives, Composite Materials, Finite Element

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Éder Lima de Albuquerque, Vicente Lopes Júnior

Data da defesa: 27/02/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

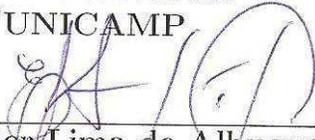
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Análise de Reparos Estruturais Compósitos Colados Usando o Método dos Elementos Finitos

Autor: Ricardo Luiz Antonioli Passalacqua
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello



Prof. Dr. Renato Pavanello
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Eder Lima de Albuquerque
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Vicente Lopes Junior
DEM/FEIS/UNESP

Campinas, 27 de fevereiro de 2009.

Dedicatória

Dedico este trabalho a minhas avós Maria Lidia e Zoe, aos meus pais Braz e Leidemar e a minha irmã Alessandra.

*“Nunca ande pelo caminho traçado,
pois ele conduz somente até onde os outros foram.*

Alexandre Graham Bell

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Renato Pavanello pela oportunidade, confiança, apoio, companheirismo e principalmente pela paciência durante este período que trabalhamos.

A FAPESP pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos grandes amigos do laboratório pelas horas de descontração, apoio e estudos juntos.

A Flávia, que mesmo ocupada com seus trabalhos, dava um grande apoio e ajuda nos textos.

Aos professores do departamento de mecânica computacional pela conhecimento transmitido.

Aos colegas em especial Rafael, Alberto, Leonardo e Labaki que trabalharam comigo de forma mais direta.

Resumo

Antoniolli Passalacqua, Ricardo Luiz, *Análise de reparos estruturais compósitos colados usando o método do elementos finitos*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009, 118 p. Dissertação (Mestrado).

Reparos estruturais são frequentemente utilizados para restauração da resistência original de estruturas que apresentem alguma falha considerando critérios associados à integridade estrutural ou à alteração de alguma capacidade inicial do projeto. As principais aplicações na engenharia são: em estruturas aeronáuticas, na recuperação de pontes e em dutos da indústria de petróleo e gás. Neste trabalho, estuda-se o comportamento mecânico de reparos estruturais manufaturados em materiais isotrópicos e compósitos. Duas técnicas de fixação dos reparos são consideradas: rebitagem para os reparos metálicos e colagem para os reparos metálicos e compósitos. Os critérios de falha considerados são: critérios da energia de distorção de von Mises e critério de fratura frágil linear elástica. O objetivo principal é o desenvolvimento de métodos de predição numérica do comportamento mecânico dos reforços estruturais levando-se em conta a modelagem das falhas na estrutura original, dos reparos adicionados e da técnica de adesão utilizada. As aplicações propostas envolvem análise numérica de chapas e placas homogêneas e de materiais compósitos. A técnica numérica selecionada é o método dos elementos finitos, que é empregado para os casos de estado plano de tensão e de flexão de placas delgadas. Critérios de desempenho relativo são propostos para auxiliar na análise e otimização de estruturas trincadas, reparadas pelo uso de chapas em compósito coladas. Para a modelagem do adesivo, são utilizadas formulações de parâmetros concentrados equivalentes, sendo que as tensões normais e cisalhantes são avaliadas na região dos adesivos. Exemplos bidimensionais e tridimensionais foram implementados para validar a metodologia proposta. Finalmente, as conclusões são apresentadas e sugestões de investigações futuras são propostas.

Palavras chaves:

Reparos Estruturais, Adesivos, Materiais Compósitos, Elementos Finitos.

Abstract

Antoniolli Passalacqua, Ricardo Luiz, *Finite Element Analyses of bonded composite patch.*

Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003, 118p. Dissertação (Mestrado).

Structural repairs are often used to restore the original strength of structures that present failure associated with structural integrity or the modification of any initial capacity. The main applications in engineering are: aeronautical structures, the rehabilitation of bridges and pipelines in the oil and gas industry. This work present an analysis of the mechanical behavior of structural repairs manufactured in isotropic or composites material. Two techniques for join the repairs are considered: riveting for metallic repairs and bonding for metallic and composite repairs. The considered failure criteria are: the criteria of distortion energy of von Mises and the criteria of fracture mechanics. The main objective is the development of methods for numerical prediction of the mechanical behavior of structural reinforcements considering the failures in the original structure, the repair and the join technique. The proposed applications involve numerical analysis of plates considering isotropic and composite materials. The numerical technique used is the finite elements method, applied to plane stress and bending plates cases. Criteria for relative performance are proposed to assist in the analysis and optimization of cracked structures, repaired by the bonding of composite patches. For the modeling of the adhesive, a concentrated parameters formulation is used, and the normal and shear stress are evaluated in the adhesive layer. Two-dimensional and three-dimensional examples have been implemented to validate the proposed methodology. Finally, conclusions are presented and suggestions for future research are proposed.

Key words:

Patch Repair, Adhesives, Composite Materials, Finite Element.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação e relevância	1
1.2	Objetivos, contexto e contribuições	3
1.3	Organização do texto	3
2	Revisão Bibliográfica	5
2.1	Modelagem de juntas coladas	5
2.2	Análise de reparos estruturais	7
3	Modelagem de chapas e placas com lei constitutiva isotrópica	11
3.1	Introdução	11
3.2	Modelo de estado plano de tensão	11
3.2.1	Hipóteses básicas e simplificações	11
3.2.2	Modelo cinemático	12
3.2.3	Equações constitutivas - relação tensão-deformação	13
3.3	Resolução numérica usando o método dos elementos finitos	14
3.3.1	Tipos de elementos implementados	18
3.3.2	Cálculo das tensões nos elementos implementados	21
3.4	Modelo de flexão de placas delgadas	24
3.4.1	Hipóteses da teoria de Kirchhoff	27
3.5	Resolução numérica usando o método dos elementos finitos - Placa delgada de Kirchhoff	28
3.5.1	Aplicação do Método dos Resíduos Ponderados	28
3.5.2	Funções de ponderação: Método de Galerkin	31
3.5.3	Aplicação do Método dos Elementos Finitos	32

3.5.4	Elemento implementado: quadrilátero de quatro nós	32
3.6	Conclusão	33
4	Modelagem de reparos estruturais compósitos	34
4.1	Introdução	34
4.2	Conceitos básicos sobre compósitos	34
4.2.1	Generalização da lei de Hooke	35
4.3	Modelagem de reparos usando a hipótese de estado plano de tensão	37
4.3.1	Reparos com compósito laminados usando lei de material ortotrópico	37
4.3.2	Reparos em compósito laminados usando lei de material anisotrópico	38
4.4	Modelagem de reparos usando a hipótese de placa delgada	39
4.5	Lei de empilhamento para laminados compósitos	40
4.5.1	Caracterização de um empilhamento unidirecional	40
4.5.2	Transformação de coordenadas	41
4.6	Conclusão	46
5	Comportamento mecânico das juntas e modelagem da camada adesiva	47
5.1	Introdução	47
5.2	Comportamento mecânico dos reparos	48
5.3	Modelagem da camada de adesivo	49
5.3.1	Hipóteses físicas e modelo mecânico	49
5.3.2	Modelos de Goland-Reissner e Ojalvo-Eidinoff	51
5.3.3	Aproximação numérica e matriz de rigidez do adesivo	55
5.4	Cálculo do campo de tensões nas juntas	60
5.5	Conclusão	60
6	Critério de projeto para dimensionamento e seleção de reparos	61
6.1	Introdução	61
6.2	Critério de projeto baseado em parâmetros da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE)	62
6.2.1	Conceitos básicos da MFLE	62
6.3	Critério de falha baseado no nível de tensão na camada de adesivo	69
6.3.1	Critério de falha considerando a máxima tensão de von-Mises (TMvM)	69

6.4	Conclusão	70
7	Implementação Computacional e validação	71
7.1	Introdução	71
7.2	Infraestrutura computacional	71
7.3	Estrutura geral da implementação	71
7.3.1	Elementos desenvolvidos	72
7.3.2	Pré-processamento	73
7.3.3	Processamento	73
7.3.4	Pós-processamento	74
7.4	Validação do elemento adesivo	74
7.5	Validação do cálculo do fator de intensidade de tensão	75
7.6	Conclusão	78
8	Resultados numéricos	80
8.1	Introdução	80
8.2	Análise de juntas usando o critério de falha baseado na MFLE	80
8.2.1	Aplicação em reparos isotrópicos rebitados	80
8.2.2	Aplicação em reparos isotrópicos colados	87
8.2.3	Aplicação em reparos compósitos colados	96
8.3	Análise de juntas usando critério de falha baseado na TM_{vM}	101
8.3.1	Aplicação em reparos isotrópicos colados	101
8.3.2	Aplicação em reparos compósitos colados	106
9	Disposições finais	112
9.1	Conclusão	112
9.2	Trabalhos futuros	113
	Referências Bibliográficas	115

Lista de Figuras

1.1	(a) Reparo rebitado e (b) reparo colado (Garcia 1998).	1
3.1	Tipos de elementos: quadrilateral quadrático (a), triangular quadrático (b) e quadrilateral linear (c)	18
3.2	Sistema de coordenada $r s$ e $\xi \eta$	22
3.3	Elemento de placa com os nós nos cantos.	25
3.4	(a) Tensões e distribuição lateral da força q em um elemento diferencial de uma placa. (b) Momento e força transversal de cisalhamento.	26
3.5	Representação genérica do domínio e contorno da placa.	30
3.6	Momentos e forças em um elemento infinitesimal.	30
4.1	Transferência de carregamento e distribuição de tensão.	36
4.2	Fibra reforçadora unidirecional laminada com as coordenadas do sistemas.	40
4.3	Laminado composto com as coordenadas globais e locais.	43
4.4	Empilhamento simétrico.	46
5.1	Configuração do reparo: (a) Vista plana. (b) Seção zy . (c) Reparo apenas em um lado. (d) Placa sem trinca.	48
5.2	(a) Deformação cisalhante na chapa e no reparo constantes. (b) Variação linear da deformação cisalhante na chapa e no reparo.	49
5.3	Elemento diferencial da configuração adesivo-aderente.	50
6.1	Modos de abertura da trinca.	63
6.2	Coordenada da trinca.	64
6.3	(a) Elemento quarter point e (b) Elemento normal.	65
6.4	Elemento unidirecional (a) espaço de referência e (b) espaço geométrico.	66
6.5	Modelo da ponta da trinca.	68

7.1	Esquema de validação do elemento adesivo.	75
7.2	Campo de tensão cisalhante no adesivo em Pa.	76
7.3	Comparação do resultado da tensão de cisalhamento no adesivo.	76
7.4	Modelo de placa submetida à tração.	77
7.5	Três tipos de refinamento.	78
8.1	Geometria dos reparos utilizados.	81
8.2	Esquema de rebiteagem escalonada.	82
8.3	Diagrama da restrições, trinca e carregamentos aplicados.	83
8.4	Variação do valor de K_I com o aumento da trinca para o reparo isotrópico quadrado.	84
8.5	Variação do valor de K_I com o aumento da trinca para o reparo isotrópico vertical.	84
8.6	Variação do valor de K_I com o aumento da trinca para o reparo isotrópico horizontal.	85
8.7	Índice de desempenho relativo do reparo isotrópico quadrado.	86
8.8	Índice de desempenho relativo do reparo isotrópico vertical.	86
8.9	Índice de desempenho relativo do reparo isotrópico horizontal.	87
8.10	Variação do valor de K_I com o aumento da trinca, adesivo 0,30mm para o reparo isotrópico quadrado.	89
8.11	Variação do valor de K_I com o aumento da trinca, adesivo 0,30mm para o reparo isotrópico vertical.	89
8.12	Variação do valor de K_I com o aumento da trinca, adesivo 0,30mm para o reparo isotrópico horizontal.	90
8.13	Variação do valor de K_I com o aumento da trinca, adesivo 0,15mm para o reparo isotrópico quadrado.	90
8.14	Variação do valor de K_I com o aumento da trinca, adesivo 0,15mm para o reparo isotrópico vertical.	91
8.15	Variação do valor de K_I com o aumento da trinca, adesivo 0,15mm para o reparo isotrópico horizontal.	91
8.16	Índice de desempenho relativo do reparo, adesivo 0,30mm para o reparo isotrópico quadrado.	92
8.17	Índice de desempenho relativo do reparo, adesivo 0,30mm para o reparo isotrópico vertical.	92

8.18 Índice de desempenho relativo do reparo, adesivo 0,30mm para o reparo isotrópico horizontal.	93
8.19 Índice de desempenho relativo do reparo, adesivo 0,15mm para o reparo isotrópico quadrado.	93
8.20 Índice de desempenho relativo do reparo, adesivo 0,15mm para o reparo isotrópico vertical.	94
8.21 Índice de desempenho relativo do reparo, adesivo 0,15mm para o reparo isotrópico horizontal.	94
8.22 Variação do valor de K_I com o aumento da trinca para reparo compósito quadrado.	97
8.23 Variação do valor de K_I com o aumento da trinca para reparo compósito vertical. .	98
8.24 Variação do valor de K_I com o aumento da trinca para reparo compósito horizontal.	98
8.25 Índice de desempenho relativo do reparo compósito colado quadrado.	99
8.26 Índice de desempenho relativo do reparo compósito colado vertical.	99
8.27 Índice de desempenho relativo do reparo compósito colado horizontal.	100
8.28 Geometria dos reforçadores, utilizando simetria de 1/4.	102
8.29 Campo de tensão do adesivo para o reforçador quadrado isotrópico com espessura de 2mm.	103
8.30 Campo de tensão do adesivo para o reforçador vertical isotrópico com espessura de 2mm.	104
8.31 Campo de tensão do adesivo para o reforçador horizontal isotrópico com espessura de 2mm.	105
8.32 Campo de tensão do adesivo para o reforçador quadrado composto do tipo 1 da Tabela 8.3.	107
8.33 Campo de tensão do adesivo para o reforçador quadrado composto do tipo 2 da Tabela 8.3.	108
8.34 Campo de tensão do adesivo para o reforçador vertical composto do tipo 1 da Tabela 8.3.	109
8.35 Campo de tensão do adesivo para o reforçador vertical composto do tipo 2 da Tabela 8.3.	109
8.36 Campo de tensão do adesivo para o reforçador horizontal composto do tipo 1 da Tabela 8.3.	110

8.37 Campo de tensão do adesivo para o reforçador horizontal composto do tipo 2 da

Tabela 8.3. 110

Lista de Tabelas

3.1	Peso de ponderação e pontos de integração, quadrilátero.	19
3.2	Peso de ponderação e pontos de integração, triangular.	19
7.1	Infraestrutura computacional.	71
7.2	Elementos desenvolvidos.	72
7.3	Pré-processamento.	73
7.4	Processamento.	74
7.5	Pós-processamento.	74
7.6	Comparação dos resultados obtidos com diferentes refinamentos.	78
8.1	Ângulos do empilhamento para o material composto do reparo.	97
8.2	Tensão máxima de von Mises na camada adesiva para o reforçador isotrópico. . . .	105
8.3	Ângulos do empilhamento para o material composto do reforçador.	107
8.4	Tensão máxima de von Mises na camada adesiva para o reforçador compósito da Tabela 8.3.	111

Nomenclatura

Letras Latinas

- a - Metade do comprimento da trinca
- D - Rigidez de flexão
- E - Módulo de elasticidade
- f - Função de integração
- G - Módulo de cisalhamento
- h - Espessura total do material compósito
- I - Integrador numérico
- r, s - Coordenadas proporcionais
- t - Espessura da placa
- U - Energia de deformação
- u, v, w - Graus de liberdade
- x, y, z - Sistema de referência global

Letras Gregas

- ν - Coeficiente de Poisson
- Π - Energia potencial do sistema
- ξ, η - Referência local
- θ - Ângulo de inclinação das fibras do material composto

Termos com Subscritos

- K_I, K_{II}, K_{III} - Fatores de intensidade de tensão

V_ξ - Volume do elemento ou área para o caso bidimensional
 S_ξ - Área do elemento ou aresta para o caso bidimensional
 w_i - Peso do integrador
 N_i - Funções de forma
 N_P - Função de forma calculada no ponto P
 θ_x, θ_y - Grau de liberdade de rotação
 M_x, M_y - Momento de flexão
 Q_x, Q_y - Força cortante
 M_{xy} - Momento de torção
 C_{ijkl} - Coeficientes do material
 G_{ij} - Módulo de cisalhamento no plano $i - j$
 E_i - Módulo de elasticidade na direção i
 ν_{ij} - Coeficiente de Poisson definida como uma razão de deformação transversa na direção j a deformação axial na direção i
 E_f - Módulo de Elasticidade da fibra
 E_m - Módulo de Elasticidade da matriz
 V_f - Fração de volume da fibra
 V_m - Fração de volume da matriz
 G_f - Módulo de Cisalhamento da fibra
 G_m - Módulo de Cisalhamento da matriz
 V_e - Volume do elemento
 S_e - Área do elemento
 t_r - Espessura do reparo
 t_a - Espessura do adesivo
 t_c - Espessura da chapa
 E_a - Módulo de elasticidade do adesivo
 E_c - Módulo de elasticidade da chapa
 G_a - Módulo de cisalhamento do adesivo
 G_c - Módulo de cisalhamento da chapa
 K_{Ic} - Fator de intensidade de tensão crítico
 Π_e - Energia potencial do elemento

σ_{ij} - Componente do tensor das tensões
 ϵ_{ij} - Componente do tensor das deformações
 ν_f - Razão de Poisson da fibra
 ν_m - Razão de Poisson da matriz
 σ_a - Tensão normal no adesivo
 τ_{max} - Tensão cisalhante máxima
 S_{eq} - Tensão equivalente de von Mises
 S_{TMvM} - Tensão máxima de von Mises no adesivo
 σ_{zz}^1 - Tensão normal entre o aderente 1 e o adesivo
 σ_{xz}^1 - Tensão cisalhante entre o aderente 1 e o adesivo
 Q_1 - Força cortante no aderente 1
 Q'_1 - Derivada da força cortante no aderente 1
 N_1 - Força normal no aderente 1
 N'_1 - Derivada da força normal no aderente 1
 Q_a - Força cortante presente no adesivo
 Q'_a - Derivada da força cortante no adesivo
 σ_{zz}^2 - Tensão normal entre o aderente 2 e o adesivo
 σ_{xz}^2 - Tensão cisalhante entre o aderente 2 e o adesivo
 Q_2 - Força cortante no aderente 2
 Q'_2 - Derivada da força cortante no aderente 2
 N_2 - Força normal no aderente 2
 N'_2 - Derivada da força normal no aderente 2

Termos com Sobrescritos

σ_{ij}^P - Tensão de interpolação para o ponto P
 σ^∞ - Tensão aplicada

Matrizes e vetores

$[D]$ - Matriz de elasticidade
 $\{\sigma\}$ - Vetor das componentes de tensão
 $\{\epsilon\}$ - Vetor das componentes de deformação

$\{p\}$ - Vetor das forças de corpo
 $\{q\}$ - Vetor das forças de superfície
 $\{\delta\}$ - Vetor de deslocamentos
 $[N]$ - Matriz das funções de forma
 $\{u\}$ - Vetor das variáveis nodais
 $[N_\xi]$ - Matriz das funções de forma na referência local
 $\{x_n\}, \{y_n\}$ - Vetores com as coordenadas nodais do elemento
 $[B]$ - Matriz das derivadas das funções de forma
 $\{\delta^e\}$ - Vetor dos deslocamentos do elemento
 $[J]$ - Matriz Jacobiana
 $\det[J]$ - Determinante da matriz Jacobiana
 $[B_\xi]$ - Derivada das funções de forma no referencial local
 $[k_e]$ - Matriz de rigidez do elemento
 $\{F^e\}$ - Vetor de força nodal equivalente
 $[\sigma^*]$ - Matriz das tensões interpoladas para os nós do elemento
 $[A]$ - Matriz de interpolação de tensão
 $[C]$ - Matriz dos coeficientes dos materiais
 $\{\sigma\}_P$ - Vetor das tensões calculadas no ponto P
 $[T]$ - Matriz de transformação
 $[\bar{C}]$ - Matriz dos coeficientes dos materiais transformado
 $[S]$ - Matriz de compliância dos materiais
 $[\bar{S}]$ - Matriz de compliância dos materiais transformada
 $[k]$ - Matriz de rigidez do elemento adesivo
 $[E]$ - Matriz constitutiva do material
 $[K]$ - Matriz de rigidez global
 $[\sigma_e]$ - Matriz contendo a tensão calculada nos pontos de integração do elemento
 $[D_f]$ - Matriz constitutiva do material a flexão

Notação indicial

A_{ij} - Matriz

A_i - Vetor

$A_{i,i}$ - Divergente de um vetor
 $a_{,j}$ - Gradiente de um escalar
 $a_{,jj}$ - Laplaciano de um escalar

Siglas

DMC - Departamento de Mecânica Computacional

MFLE - Mecânica da Fratura Linear Elástica

TMvM - Tensão Máxima de von Misses

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação e relevância

No contexto da indústria aeronáutica, a fuselagem é geralmente constituída de cascas com reforçadores metálicos. Um painel trincado pode ser recuperado rebitando-se ou colando-se um reparo sobre a região danificada. Na Figura 1.1, mostram-se dois esquemas de reparo rebitado e reparo colado.

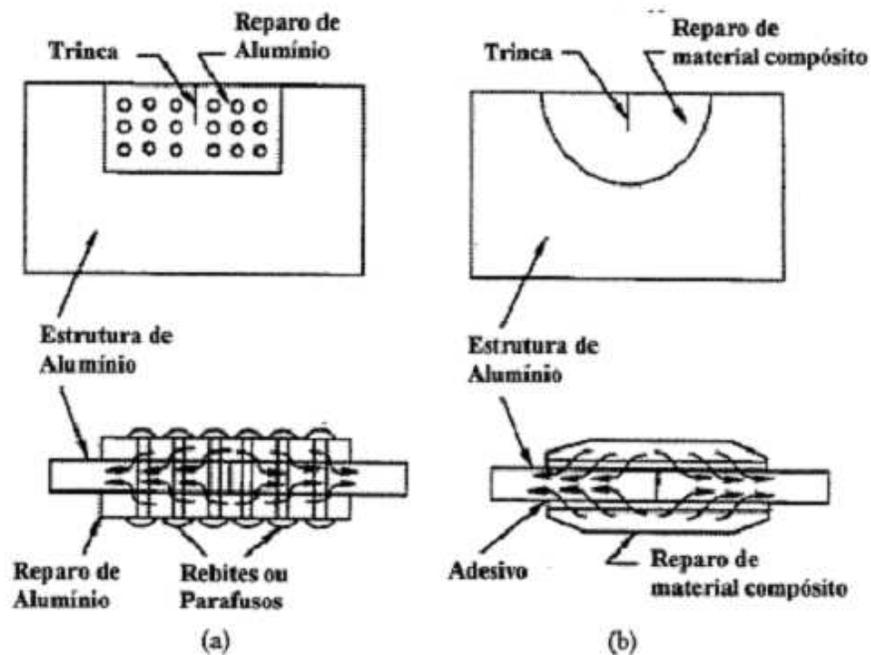


Figura 1.1: (a) Reparo rebitado e (b) reparo colado (Garcia 1998).

A presença de trincas em componentes mecânicos reduz a resistência mecânica e a resistência à fadiga desses componentes, causando um expressivo aumento nas tensões e deformações do material nas proximidades da ponta das trincas.

A preocupação com o estudo de estruturas trincadas aumentou consideravelmente com o desenvolvimento das indústrias aeronáutica, aeroespacial, automotiva, petrolífera e naval, nas quais existe a necessidade da realização de projetos otimizados, com baixo peso e alta resistência. Tendo em vista os requisitos severos de projeto, a probabilidade do surgimento de trinca ao longo da vida das estruturas é grande, e em alguns casos, como nas aeronaves, um monitoramento contínuo é obrigatório.

Algumas das falhas associadas ao surgimento de trincas, pode-se mencionar as falhas estáticas e por fadiga causadas por sobrecarga inesperadas e não contabilizadas no momento do projeto. Nestes casos, usam-se os reparos estruturais como reforçadores, para alterar a rigidez e resistência inicialmente prevista no projeto.

Uma das técnicas conhecidas para efetuar reparos em estruturas, é a técnica que usa placas de reforço de material composto colado na estrutura de alumínio, como pode ser visto na Figura 1.1(b).

Ao projetar um reparo composto, diversos fatores devem ser considerados para assegurar a eficácia e a integridade estrutural do reparo. Estes fatores incluem a rigidez, a força, a estabilidade, a temperatura de operação, a durabilidade, e a aerodinâmica (Cole 1999).

Apesar do crescente uso dos reparos estruturais colados em estruturas aeronáuticas (Baker e Jones 1988), os reparos mecânicos que utilizam rebites, ou parafusos, para unir as partes estruturais, continuam sendo os de uso mais comum. Os reparos colados são preferíveis em regiões sujeitas a baixo nível de carregamento, enquanto que os reparos rebitados, ou parafusados, são utilizados em regiões de alto nível de carregamento. A principal vantagem dos reparos colados é a de minimizar as concentrações de tensão por transmitirem as cargas de forma contínua. A principal limitação é associada a capacidade dos adesivos em transmitir cargas elevadas.

Reparos de componentes trincados em estruturas aeronáuticas são utilizados há vários anos e o seu projeto otimizado é uma exigência de segurança. O papel mais importante do reparo aeronáutico em estruturas trincadas é realizar um desvio no carregamento, absorvendo quantidade de energia que era suportada pela estrutura e, conseqüentemente, diminuindo o fator de intensidade de tensões nas vizinhanças da ponta da trinca.

Se o reparo for utilizado como reforçador, a sua função passa a ser aumentar a rigidez ou a resistência ou ambos, de forma a garantir a integridade estrutural do conjunto estrutura mais reparo.

1.2 Objetivos, contexto e contribuições

O objetivo amplo deste trabalho é realizar uma análise estática de reparos colados em estruturas aeronáuticas. A estrutura aeronáutica será considerada como um material isotrópico e para a representação do reparo inicialmente será utilizado um material também isotrópico colado ou rebitado à estrutura. Na seqüência um modelo de material anisotrópico será utilizado para análise do reparo. Os resultados com os dois modelos são comparados.

Os objetivos específicos propostos neste projeto, destacando os de maior importância, são os seguintes:

- Elaborar um estudo bibliográfico, sobre reforço estrutural, e técnicas de junção, com especial ênfase na técnica de colagem.
- Implementar e testar elementos de chapa e de placa para materiais isotrópicos, em um código desenvolvido pelo grupo de pesquisa do Departamento de Mecânica Computacional da Unicamp.
- Aplicar o modelo numérico em casos de chapas trincadas, usando-se os elementos de chapa para a modelagem do revestimento, e elementos *quarter point* para a modelagem das trincas.
- Estudar, implementar e testar as alternativas para modelagem de juntas coladas, sujeitas à tração e a flexão.
- Estudar, implementar e testar os modelos de materiais compósitos aplicados à descrição dos reparos.

Em relação ao grupo de trabalho onde está inserida essa dissertação, a principal contribuição refere-se à introdução dos modelos específicos em material composto e modelos de adesivos para a representação dos reparos estruturais em painéis aeronáuticos.

1.3 Organização do texto

Esta dissertação está dividida em oito capítulos principais, explicados a seguir:

No capítulo 1 apresenta-se a motivação para o desenvolvimento da tese e os principais itens desenvolvidos neste trabalho.

O capítulo 2 apresenta uma breve descrição bibliográfica sobre os aspectos teóricos da modelagem por elementos finitos de elementos adesivos e modelos de estruturas trincadas reparadas através da colagem de materiais compósitos.

O capítulo 3 mostra-se a formulação de elementos finitos, para materiais isotrópicos, utilizando a hipótese de estado plano de tensões e a hipótese de flexão de placa delgada destacando os elementos implementados e o cálculo de tensão com interpolação para os nós dos elementos.

O capítulo 4 demonstra-se a formulação de elementos finitos, para materiais compósitos, utilizando a hipótese de estado plano de tensões e a hipótese de flexão de placa fina.

No capítulo 5 dá-se ênfase ao comportamento de juntas coladas, demonstrando as formulações desenvolvidas por Goland-Reissner e Ojalvo-Eidinoff e a formulação por elementos finitos utilizada para a implementação realizada nesta dissertação.

No capítulo 6 estuda-se métodos de seleção de reparos ou reforçador a ser utilizado em uma determinada estrutura, com ou sem trinca, utilizando como critério o fator de intensidade de tensão calculado na ponta da trinca e a tensão máxima de von Mises na camada de adesivo. Neste capítulo o elemento *quarter point* é apresentado e uma utilização é ilustrada.

No capítulo 7 demonstra-se a implementação computacional desenvolvida, a validação para o cálculo da tensão no elemento adesivo e o cálculo do fator de intensidade de tensão na ponta da trinca.

Finalizando, no capítulo 8 são apresentados os resultados obtidos utilizando os estudos dos capítulos anteriormente apresentados, analisando chapas com trinca e reparo utilizando carregamento distribuído no plano e analisando casca sem trinca e com reforçador estrutural com carregamento normal a estrutura.

Por último, são apresentadas as conclusões gerais resultantes desta pesquisa de mestrado, assim como são feitas propostas para a continuidade do trabalho.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Neste capítulo será apresentada uma breve síntese bibliográfica sobre o estudo das características de estruturas, com ou sem trinca, com reparo colado para a finalidade de reforço estrutural. O estudo se concentra nos trabalhos relacionados à análise do comportamento mecânico dos adesivos, usando o método de elementos finitos como ferramenta para aproximação numérica. Também será apresentada uma revisão da literatura básica sobre modelagem de juntas coladas e análise de reparos estruturais.

2.1 Modelagem de juntas coladas

Apresenta-se em ordem cronológica uma breve síntese bibliográfica sobre o estudo das características de elementos adesivos, desenvolvidos usando o método de elementos finitos. Restringe-se ao caso da análise do comportamento estático de chapas e cascas coladas.

Um dos primeiros e mais importantes artigos publicados a respeito da modelagem de juntas coladas foi publicado por Goland e Reissner (1944). Este artigo mostra a determinação de tensão na camada de adesivo através de um método analítico. O artigo é dividido em duas partes, a primeira refere-se à determinação do carregamento na junta do adesivo, a segunda parte trata da determinação das tensões devido a esse carregamento aplicado. A solução é obtida considerando que a espessura do adesivo deve ser tão fina que o efeito da flexão na junta possa ser desprezado.

No Artigo de Ojalvo e Eidinoff (1978) é feita uma investigação analítica sobre a influência da espessura do adesivo na distribuição de tensão em uma junta adesiva. Este trabalho amplia a abordagem básica para juntas adesivas, originalmente proposta por Goland e Reissner (1944), através da utilização de uma equação mais completa da relação tensão deformação, onde é considerada a deformação por para a camada adesiva. Através das modificações propostas de alguns coeficientes

da equação da tensão de cisalhamento, novos termos da equação diferencial e condições de contorno para a tensão normal no adesivo foram obtidos. Adicionalmente, ocorre uma variação da tensão de cisalhamento na espessura do adesivo, não importando o quão fina seja esta camada.

No trabalho publicado por Carpenter (1980b) é apresentada uma nova formulação de elementos finitos para uma camada adesiva. O elemento é baseado na formulação de Goland e Reissner (1944) e na formulação de Ojalvo e Eidinoff (1978). As deficiências das outras teorias e outras formulações para elemento finito do adesivo já desenvolvidas são mostradas e uma convergência para uma nova formulação é discutida. Os resultados numéricos obtidos são comparados com resultados experimentais.

Os modelos dos adesivos são aplicados na modelagem de reparos colados. Geralmente usa-se elementos especiais que resistam exclusivamente ao esforço de cisalhamento. No artigo de Tong e Sun (2003b), é proposto um elemento adesivo utilizando o Método dos Elementos Finitos em estruturas curvas (casca), onde propõe-se uma análise de tensão simplificada. Utilizando este método, os autores propõem uma metodologia para determinação do projeto ótimo de reparo colado para estruturas curvas. A análise é feita considerando um sistema de 2,5 dimensões, ou seja, o material da base e o reparo são considerados como estruturas planas sem espessura e o adesivo modelado como uma estrutura sólida, considerando uma simetria de 1/8 da estrutura. A implementação do método de otimização é feita adotando-se as tensões principais e as tensões de von Mises como variáveis de projeto.

Atualmente, a utilização de reparos compósitos colados vem sendo reconhecida como sendo um método eficiente e econômico para ampliar a vida em serviço de um componente em alumínio trincado (Tong e Sun 2003a). Os dados empíricos para o projeto de juntas em material compósito coladas são limitados à problemas de flexão de placas planas laminadas, onde o efeito da curvatura no desempenho e na durabilidade dos reparos compósitos colados não é conhecido. O artigo de Tong e Sun (2003a) apresenta uma nova formulação de elementos finitos associado ao desenvolvimento de um novo elemento adesivo adequado para a análise de tensão de reparos colados em estruturas curvas. Exemplos são apresentados para demonstrar o efeito da curvatura e o efeito da localização do reparo no comportamento mecânico da estrutura.

Neste trabalho, usa-se os modelos de adesivos propostos por Goland e Reissner (1944) e Ojalvo e Eidinoff (1978) para a análise de estruturas planas e curvas. A implementação é feita de forma geral e flexível do modo com o que foi proposto por Carpenter (1980b).

2.2 Análise de reparos estruturais

Apresenta-se em ordem cronológica uma breve síntese bibliográfica sobre o estudo das características de painéis aeronáuticos com trinca e reparados com material compósito colado. O comportamento estático e dinâmico de estruturas trincadas com aplicação de reparos, vem sendo estudado por vários pesquisadores. Em geral, a placa e o reparo são considerados com pequena espessura, de forma que o sistema como um todo não apresente flexão fora do plano, e assim, a teoria da elasticidade bidimensional pode ser utilizada para estudar este problema.

Em outras pesquisas, introduz-se o efeito de flexão no problema, visando a modelagem de estruturas em casca onde o comportamento no plano e fora dele são acoplados.

As referências apresentadas, concentram-se nos artigos que apresentam formulações e implementações de soluções numéricas para o problema, que é o foco deste projeto de mestrado. Em particular, são apresentadas referências que usam o método dos elementos finitos como método numérico de solução.

Um dos primeiros artigos que apresentam uma análise computacional em elementos finitos de alguns tipos de defeitos, tais como: retirada de material superficial, trincas transversais, foi apresentado por Mitchell *et al.* (1975). A análise articula respostas em separado da chapa, do material compósito e do adesivo. O campo de tensão e de deformação é gerado automaticamente através do programa desenvolvido. A validação do resultado do software é feita através dos resultados experimentais utilizando os tipos de reparo descritos no artigo. Na validação foram feitos três tipos de análise: 1) chapa utilizando como reparo a retirada da superfície, fazendo um furo que envolve toda a trinca, e em seguida colando-se um reparo composto sobre o furo; 2) uma chapa com reparo para duas trincas transversais na placa, com direção para fora do contorno; 3) chapa com reparo compósito transversal a trinca. A análise é feita considerando uma estrutura bidimensional e simetria de 1/4.

No artigo de Ratwani (1979) é feita uma análise de um painel aeronáutico com trinca reparada com material compósito colado nos dois planos que envolvem a trinca. É utilizado o método dos Elementos Finitos e métodos matemáticos para determinar o fator de intensidade de tensão. O valor obtido é comparado com resultados experimentais. O método leva em conta as tensões fora do plano como um adicional para o cálculo do fator de intensidade de tensão. O cálculo e o experimento são feitos para várias geometrias dos painéis e da trinca, além de serem considerados efeitos de descolamento do material adesivo e suas propriedades de aderência na análise do fator

de intensidade de tensão. A análise é feita em duas dimensões e a simetria de 1/4.

O trabalho desenvolvido por Jones e Callinan (1979) utiliza o Método dos Elementos Finitos para a análise do comportamento de uma chapa metálica com trinca, reparada com um material compósito em camadas. A análise inclui respostas em separado da chapa, do reparo e do adesivo. O descolamento do adesivo é permitido e o fator de intensidade de tensão e a distribuição de tensão são calculados. O fator de intensidade de tensão é calculado pelo método dos deslocamentos, a análise é feita na condição bidimensional e na simetria de 1/2. São estudadas várias geometrias realizando-se uma análise de sensibilidade do modelo aos principais parâmetros da trinca.

Tern e Shek (1991) faz em uma junção entre dois métodos de cálculo estrutural, Elementos Finitos e Elementos de Contorno. O reparo e o adesivo são simulados pelo Método dos Elementos Finitos e a chapa trincada pelo Método dos Elementos de Contorno. O método utilizado por este artigo utiliza o adesivo como uma mola de cisalhamento, ou seja, não sofrendo tensões no plano. O método de análise não é feito em simetria, e sim separando uma parte da estrutura, que envolve 1/4 do reparo e do adesivo, além da parte da chapa que ocupa este espaço. O fator de intensidade de tensão é utilizado como forma de comparação dos resultados. A análise é feita considerando estado plano (duas dimensões).

Pai *et al.* (1998) desenvolvem um modelo dinâmico de elementos finitos de uma placa de alumínio trincada reparada com lâminas de material compósito, considerando a influência da trinca e do descolamento do reparo com forças estáticas e dinâmicas. É utilizado o programa NASTRAN para o desenvolvimento e refinamento do modelo de elementos finitos bidimensionais, a modelagem da trinca na placa de alumínio, análise do descolamento do reparo da placa de alumínio e a deformação transversal de cisalhamento. O efeito transversal do cisalhamento é avaliado utilizando-se a energia equivalente de primeira ordem, a teoria da deformação de cisalhamento é obtida a partir de um novo modelo de alta ordem de deformação transversal de cisalhamento. Os autores realizaram uma análise modal mostrando que a presença do reparo induz uma redução nas frequências naturais do sistema, principalmente para os modos mais altos. A análise das funções de resposta em frequência mostra que a presença do reparo causa uma mudança na magnitude e na forma da (FRF). Além disso, a análise linear das formas de onda mostram que o descolamento reduz o carregamento residual em algumas porcentagens melhorando a segurança, dependendo das condições de contorno. A deformação transversal de cisalhamento reduz também a frequência natural, muda a FRF e reduz o carregamento residual, mas eles apresentam influência na forma

dos modos e na forma das FRFs. O estudo da caracterização dos danos promove informações úteis para o projeto de reparo compósito e o desenvolvimento do monitoramento seguro usando sistemas de FRFs em frequência. A modelagem é feita considerando a estrutura completa.

Muitos aviões comerciais e militares limitam a sua vida útil através de experiências de danos como trinca e corrosão e muitas vezes causam falhas catastróficas. No artigo de Okafor e Bhogapurapu (2006), o projeto, a fabricação e a análise de reparos compósitos colados com adesivo em estruturas sujeitas a danos por corrosão circular são apresentados. Um estudo da propagação da trinca na periferia deste material danificado pela corrosão, utilizando como base uma estrutura de alumínio aeronáutico 2024 T3 é realizado. A espessura do reparo composto apresenta configuração entre 7 e 25 camadas, que poderá ser utilizado para o reparo de trincas ou corrosão, utilizando um software chamado CRAS, desenvolvido pela força aérea dos Estados Unidos da América. Uma análise em elementos finitos foi utilizado para testar o carregamento uniaxial. A distribuição de tensão deformação é obtida e analisada. Painéis reparados e não reparados estão sujeitos ao teste de tensão. Os resultados experimentais e por elementos finitos mostram que a máxima tensão diminui significativamente após a aplicação do reparo compósito. A capacidade de carregamento da estrutura reparada aumenta significativamente em comparação com o sem reparo.

Os objetivos do artigo Okafor e Bhogapurapu (2006) é desenvolver um procedimento de projeto da espessura do reparo compósito, estudar a distribuição de tensão em uma placa em alumínio danificada reparada com um reparo simétrico ortogonal e a verificação experimental da durabilidade de um painel reparado e sem reparo. A análise é feita considerando uma estrutura tridimensional, com simetria 1/2.

No artigo Heller e Kaye (2006) é feita a avaliação numérica da concentração de tensão para um reparo compósito de uma única camada, várias camadas simétricas e várias camadas não simétricas. É feita também a modelagem de efeitos térmicos residuais causados pela cura do adesivo. O adesivo e a placa são modelados como materiais isotrópicos e o reparo compósito em material ortotrópico. A análise é feita considerando uma estrutura tridimensional, com simetria de 1/4 e utiliza o fator de intensidade de tensão como forma de análise dos resultados.

O estudo proposto por Bouiadjara *et al.* (2007) utiliza o Método dos Elementos Finitos para fazer uma análise comparativa de dois tipos de reparo de estruturas, aplicando reparo em apenas um dos planos da estrutura ou nos dois planos. O fator de intensidade de tensão é usado como critério de desempenho do reparo. As propriedades do adesivo são otimizadas para aumentar a

vantagem do reparo duplo e diminuir a falha do adesivo. A análise é feita em duas dimensões e a simetria utilizada é de 1/2.

No do trabalho Ellyin *et al.* (2007), os autores utilizam um modelo tridimensional para analisar os efeitos de plastificação induzida pelo fechamento da trinca (do inglês Plasticity Induced Crack Closure PICC) em uma placa trincada com um reparo compósito colado. Para ilustrar o processo PICC a escolha do material e modelo empregado é de grande importância. O modelo proposto por Ellyin *et al.* (2007) mostra que o fenômeno PICC é benéfico para o reparo. Foi utilizado o software Ansys para a simulação, a placa e o reparo utilizam o elemento Solid 185 e o adesivo o Solid 45.

Capítulo 3

Modelagem de chapas e placas com lei constitutiva isotrópica

3.1 Introdução

Em engenharia, podem-se efetuar aproximações para estados particulares de tensão ou deformação a fim de retratar condições de solicitação ocorridas em corpos tridimensionais. Neste capítulo serão revistas duas aproximações clássicas: as teorias da elasticidade plana e a teoria de flexão de placa delgada de Kirchhoff para materiais isotrópicos, além da formulação de Elementos Finitos para cada caso em questão.

3.2 Modelo de estado plano de tensão

3.2.1 Hipóteses básicas e simplificações

Em alguns casos, pode-se reduzir um problema físico levando a uma análise bidimensional, onde as variações das tensões na direção ortogonal ao plano analisado são pouco significativas. Nestes casos, o problema é caracterizado como sendo o de estado plano de tensão. Este trabalho aborda inicialmente este tipo de configuração, no qual a maior parte dos fenômenos físicos representativos de uma análise de tensões tridimensional estão representados, o que permite dizer que o problema bidimensional resguarda a generalidade do problema.

Quando reduz-se a estrutura espacial para o estado plano de tensão, admite-se a hipótese de que as estruturas possam ser consideradas como chapas finas carregadas no plano (x, y) cujo carregamento é uniforme ao longo da espessura.

Nestas condições é possível escrever que (Gould 1989):

$$\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0 \quad (3.1)$$

Restando um campo de tensões representado por três componentes do tensor de tensões: σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy} .

3.2.2 Modelo cinemático

No caso tridimensional, os deslocamentos de uma estrutura sob um determinado carregamento podem ser descritos pelas equações 3.2.

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde u , v e w são os deslocamentos de um ponto material, especificado no referencial fixo (x, y, z) . Os deslocamentos podem ser representados em função de x , y e z , e as deformações, na estrutura, podem ser definidas a partir das derivadas parciais dos deslocamentos (Gould 1989). Considerando pequenas deformações lineares, estas podem ser obtidas através das equações 3.3.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde ϵ_{xx} , ϵ_{yy} e ϵ_{zz} representam as deformações normais e ϵ_{xy} , ϵ_{yz} e ϵ_{xz} representam as deformações cisalhantes. Considerando o caso de estado plano de tensões, o modelo cinemático se reduz a um

campo de deslocamento com duas componentes:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned} \tag{3.4}$$

e o tensor de deformação é formado de três componentes.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{3.5}$$

As equações 3.5 configuram o modelo cinemático do problema e serão usadas na sequência para escrever o modelo constitutivo do problema.

3.2.3 Equações constitutivas - relação tensão-deformação

No caso termo-elástico desacoplado, a deformação linear em cada ponto de um corpo, pode ser calculado pela superposição de uma componente de deformação de origem térmica e outra de deformação devido ao sistema de forças mecânicas externas. Considera-se neste trabalho, que as deformações elásticas são relacionadas com as tensões pela lei de Hooke, considerando o caso de elasticidade isotérmica linear (Gould 1989), e material isotrópico, tem-se:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] \\ \epsilon_{xz} &= 2 \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xz} \end{aligned} \tag{3.6}$$

sendo E o módulo de elasticidade e ν coeficiente de Poisson. As equações apresentadas podem ser escritas em função das tensões e a relação tensão deformação é dada pela equação 3.7.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{xx}] \\ \sigma_{xz} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \epsilon_{xz} \end{aligned} \tag{3.7}$$

As equações 3.6 e 3.7 representam a lei constitutiva do material e neste caso representa a fase linear elástica do seu comportamento.

Considerando uma notação matricial, a lei constitutiva do material é definida de acordo com a equação 3.8.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

sendo $[D]$ a matriz de elasticidade do problema de estado plano de tensões isotrópico. Quando a equação é escrita em função das deformações, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

As deformações em z , podem ser obtidas pela equação 3.10.

$$\epsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{-\nu}{1-\nu}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \quad (3.10)$$

Definido os modelos cinemáticos e constitutivos, pode-se escrever as condições de equilíbrio do sistema, na forma contínua ou na forma discreta.

3.3 Resolução numérica usando o método dos elementos finitos

Adotando uma formulação com base na equação da energia (Cook *et al.* 2002), o problema de equilíbrio de um corpo com material de comportamento linear elástico pode ser resolvido minimizando-se a energia potencial do sistema Π , da equação 3.11.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV - \int_V \{\delta\}^T \{p\} dV - \int_S \{\delta\}^T \{q\} dS \quad (3.11)$$

onde $\{\sigma\}$ é o vetor das componentes de tensão, $\{\epsilon\}$ é o vetor das componentes de deformação, $\{\delta\}$ é o vetor deslocamento, $\{p\}$ são as forças de corpo por unidade de volume e $\{q\}$ são as forças de superfície. O primeiro termo da equação 3.11 representa a energia de deformação do corpo, o

segundo e o terceiro representam as contribuições do trabalho realizado pelas forças de corpo e as de superfície.

Considerando que os deslocamentos não sejam conhecidos nos nós e adotando-se uma aproximação clássica de elementos finitos, do tipo da equação 3.12, tem-se:

$$\{\delta\} = [N] \{u\} \quad (3.12)$$

onde $[N]$ é a matriz que contém as funções de forma e $\{u\}$ é o vetor das variáveis nodais de cada elemento, que são constantes para cada elemento.

Usando-se uma transformação de coordenadas isoparamétricas, define-se a aproximação da geometria usando o método dos elementos finitos da forma da equação 3.13.

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i = [N_\xi] \{x_n\} \\ y &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i = [N_\xi] \{y_n\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

sendo $[N_\xi]$ a matriz que contém as funções de forma de um elemento no referencial local (ξ, η) (Cook *et al.* 2002) e $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são os vetores com as coordenadas nodais de um elemento. Considerando o espaço de referência, (ξ, η) os deslocamentos são aproximados como se segue:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i = [N_\xi] \{u\} \\ v &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) v_i = [N_\xi] \{v\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

sendo $\{u\}$ e $\{v\}$ os vetores dos deslocamentos nodais de um elemento.

As mesmas funções de forma N_i são usadas para a aproximação geométrica (x, y) e para as variáveis do problema (u, v) . Usando-se a definição de deformação adotada no início deste capítulo, equações 3.5, determina-se para o modelo discreto a relação matricial disposta na equação 3.15, que para cada elemento toma a seguinte forma:

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta^e\} = [B] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

onde $[B]$ é denotada matriz das derivadas das funções de forma. Para o caso de estado plano de tensão, a matriz $[B]$ pode ser escrita pela equação 3.16, de forma genérica para um elemento com n nós ($i = 1, n$).

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Os operadores diferenciais são definidos no espaço real (x, y) e se relacionam com os operadores no espaço (ξ, η) , como mostra a equação 3.17 (Touzot e Dhatt 1984).

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

Neste caso, $[J]$ é a matriz Jacobiana da transformação isoparamétrica, calculada através da expressão 3.18.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Fazendo Π_e como a energia potencial de cada elemento, obtém-se a seguinte equação:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\delta^e\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta^e\} dV - \int_{V_e} \{\delta^e\}^T [N]^T \{p\} dV - \int_{S_e} \{\delta^e\}^T [N]^T \{q\} dS \quad (3.19)$$

O termo V_e é o volume do elemento, S_e representa a área do contorno de cada elemento e $[D]$ é a matriz de elasticidade no problema linear elástico isotrópico.

Reescrevendo a equação 3.19 no espaço isoparamétrico, obtém-se a equação 3.20.

$$\begin{aligned} \Pi_e = & \frac{1}{2} \int_{V_\xi} \{\delta^e\}^T [J]^{-1} [B_\xi]^T [D] [B_\xi] [J]^{-1} \det[J] d\eta d\xi - \int_{V_\xi} \{\delta^e\}^T [N_\xi]^T \{p\} d\eta d\xi \\ & - \int_{S_\xi} \{\delta^e\}^T [N_\xi]^T \{q\} \det[J] d\xi \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde o termo V_ξ é o volume do elemento ou área para o caso bidimensional e S_ξ a área do elemento ou aresta para o caso bidimensional. Na formulação isoparamétrica o $\det[J]$ corresponde ao determinante da matriz Jacobiana obtida pela equação 3.18, as funções de forma $[N_\xi]$ são

definidas no espaço de referência, para este caso, a matriz que contém as derivadas das funções de forma é obtida pela equação 3.21.

$$[B_\xi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_\xi}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_\xi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_\xi}{\partial \eta} & \frac{\partial N_\xi}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Por definição, as soluções nodais são obtidas, a partir da hipótese de que a energia total do sistema corresponde a somatória da energia potencial de cada elemento, de acordo com a equação 3.22.

$$\Pi = \sum_{i=1}^{nel} \Pi_e \quad (3.22)$$

onde nel é o número de elementos.

Minimizando a energia do sistema com relação ao deslocamento nodal, que são as incógnitas do problema, para cada elemento, tem-se:

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta^e} = [k^e] \{\delta^e\} - \{F^e\} = 0 \quad (3.23)$$

A matriz de rigidez $[k^e]$ para um dado elemento, pode ser obtida pela equação 3.24.

$$[k^e] = \int_{\xi} \int_{\eta} [B]^T [D] [B] \det[J] d\eta d\xi \quad (3.24)$$

e o vetor de força nodal equivalente $\{F^e\}$ é obtido pela equação 3.25, para o caso de um espaço bidimensional.

$$\{F^e\} = \int_{V_\xi} [N_\xi]^T \{p\} d\eta d\xi + \int_{S_\xi} [N_\xi]^T \{q\} \det[J] d\xi \quad (3.25)$$

Para que os deslocamentos nodais sejam encontrados, realiza-se a superposição da energia de cada elemento, montando-se assim um sistema global, e resolvendo-se o sistema algébrico de equações utilizando um método numérico para a solução de sistemas lineares.

3.3.1 Tipos de elementos implementados

Vários autores apresentam a implementação computacional do elemento isoparamétrico (Cook *et al.* 2002), (Bathe 1982), (Hilton e Owen 1977) e (Hughes 1987). A obtenção das matrizes dos elementos é feita a partir da integração numérica da equação 3.24.

Neste trabalho, usam-se elementos finitos bidimensionais quadrilaterais e triangulares, com aproximação quadrática e linear conforme a Figura 3.1.

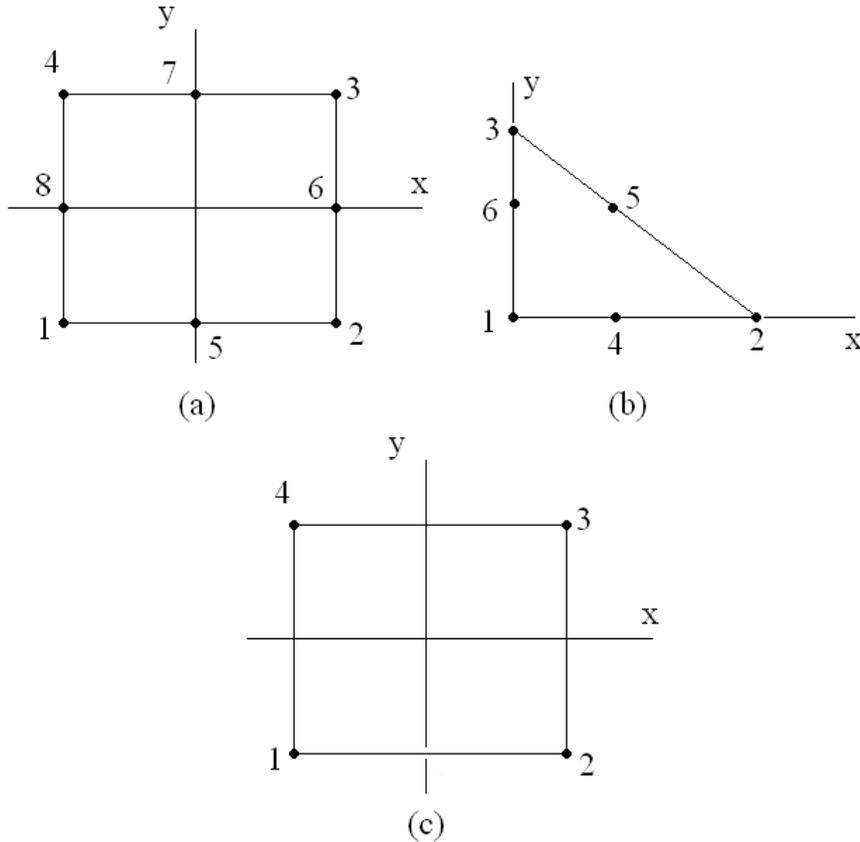


Figura 3.1: Tipos de elementos: quadrilateral quadrático (a), triangular quadrático (b) e quadrilateral linear (c)

Para se calcular a matriz de rigidez dos elementos da Figura 3.1 utiliza-se o método de integração numérica da quadratura de Gauss (Touzot e Dhatt 1984), que consiste na integração da equação 3.24, através de uma integração numérica, da forma da equação 3.26.

$$I = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta_i) \tag{3.26}$$

onde w_i é o peso da ponderação, $f(\xi_i, \eta_i)$ é a função a ser integrada e (ξ, η) são as coordenadas dos pontos de integração.

Quadrilátero de quatro nós

Para o caso dos elementos quadrilaterais com aproximação linear, pode-se usar dois pontos de Gauss em cada direção, cujos pesos e coordenadas são dadas na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Peso de ponderação e pontos de integração, quadrilátero.

Pontos	Coordenadas (ξ, η)	Pesos w_i
1	$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
2	$\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$	1
4	$\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$	1

Para o elemento cuja geometria é mostrada na Figura 3.1(c), adota-se as funções de forma para o elemento quadrilateral de quatro nós, conforme indicado a seguir:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\
 N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Triangular de seis nós

Para o caso dos elementos triangulares com aproximação quadrática, pode-se usar seis pontos de Hammer, cujos pesos e coordenadas são dadas na tabela 3.2

Tabela 3.2: Peso de ponderação e pontos de integração, triangular.

Pontos	Coordenadas (ξ, η)	Pesos w_i
1	a, a	0,111690794839005
2	$1 - 2a, a$	0,111690794839005
3	$a, 1 - 2a$	0,111690794839005
4	b, b	0,054975871827661
5	$1 - 2b, b$	0,054975871827661
6	$b, 1 - 2b$	0,054975871827661

Na tabela 3.2 $a = 0,445948490915965$ e $b = 0,091576213509771$. Considerando a geometria da Figura 3.1(b), adota-se as funções de forma para o elemento triangular de seis nós, conforme indicado abaixo:

$$\begin{aligned}
N_1 &= -\lambda(1 - 2\lambda) \\
N_2 &= -\xi(1 - 2\xi) \\
N_3 &= -\eta(1 - 2\eta) \\
N_4 &= 4\eta\lambda \\
N_5 &= 4\xi\eta \\
N_6 &= 4\eta\lambda
\end{aligned} \tag{3.28}$$

sendo $\lambda = 1 - \xi - \eta$.

Quadrilátero de oito nós

Para o caso dos elementos quadrilaterais com aproximação quadrática, pode-se usar os mesmos pontos de Gauss, utilizados para o elemento quadrilateral de 4 nós listados na Tabela 3.1.

Para a geometria da Figura 3.1(a), adota-se as funções de forma para o elemento quadrilateral de oito nós, conforme indicado na equação 3.29.

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{-1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta) \\
N_2 &= \frac{-1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta) \\
N_3 &= \frac{-1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta) \\
N_4 &= \frac{-1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta) \\
N_5 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\
N_6 &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\
N_7 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\
N_8 &= \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

A matriz Jacobiana, para uma geometria bidimensional, pode ser obtida através da equação 3.30.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde n é o número de nós do elemento e a inversa da matriz Jacobiana é obtida pela equação 3.31.

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

3.3.2 Cálculo das tensões nos elementos implementados

No pós-processamento, as tensões podem ser calculadas multiplicando-se a matriz elasticidade $[D]$ pelo vetor deformação, como mostra a equação 3.32. O cálculo do vetor deformação está descrito pela equação 3.33.

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (3.32)$$

$$\{\epsilon\} = [B] \{u\} \quad (3.33)$$

onde $\{u\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais e $\{\epsilon\}$ é o vetor que contém as componentes de deformação. Nesta etapa as tensões calculadas são as tensões nos pontos de integração, substituindo-se as coordenadas dos pontos de integração nas derivadas das funções de forma, que compõem a matriz $[B]$, que neste caso o cálculo é feito como se segue:

$$\{\sigma_e\} = [D][J]^{-1}[B_\xi] \{u_e\} \quad (3.34)$$

onde $\{\sigma_e\}$ é a tensão calculada nos pontos de integração do elemento, $[D]$ a matriz das propriedades do material, $[B_\xi]$ as derivadas das funções de forma e $\{u_e\}$ os deslocamentos dos nós.

Extrapolação para os nós

Após a determinação das tensões nos pontos de integração do elemento, pode-se determinar os valores das tensões nos nós dos elementos (Cook *et al.* 2002).

Considerando para a interpolação do elemento quadrilátero de oito nós da Figura 3.2, um sistema de coordenadas r e s proporcional a ξ e η , onde no ponto 3 da Figura 3.2, $r = s = 1$ e $\xi = \eta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, o que conduz a um fator de proporcionalidade de $\sqrt{3}$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{3}\xi \\ s &= \sqrt{3}\eta \end{aligned} \tag{3.35}$$

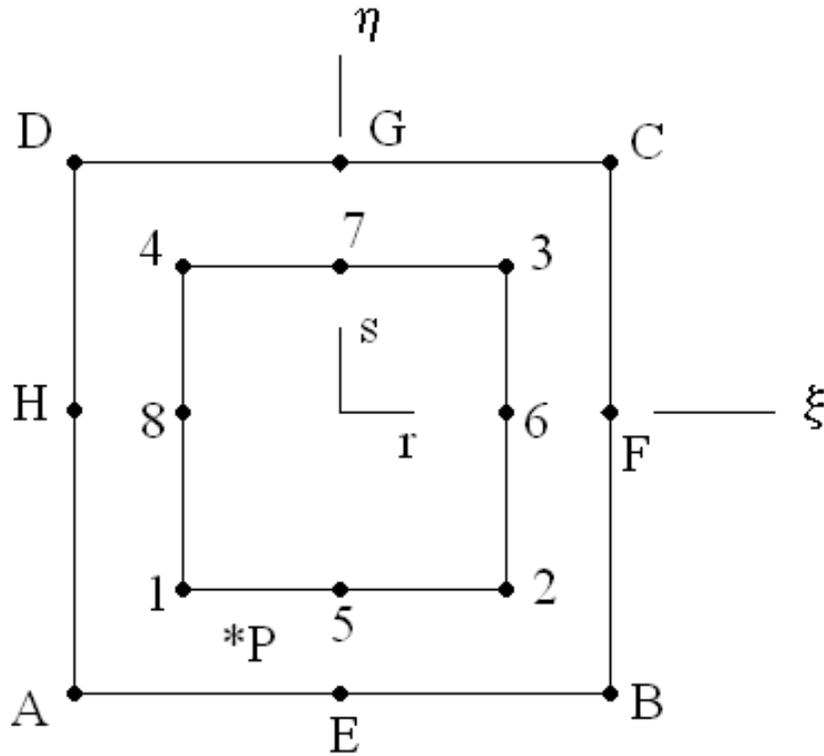


Figura 3.2: Sistema de coordenada r s e ξ η

Assim, para um ponto arbitrário P no elemento, a tensão pode ser obtida através das funções de forma avaliadas nas coordenadas do ponto P , o que conduz a:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^P &= N_P \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy}^P &= N_P \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy}^P &= N_P \sigma_{xy} \end{aligned} \tag{3.36}$$

onde σ_{ij}^P são as tensões no ponto de interesse, N_P são as funções de forma calculadas com as coordenadas do ponto P e σ_{ij} são as tensões calculadas nos pontos de integração. As funções

de forma são as mesmas anteriormente apresentadas na equação 3.29, porém ao invés de ξ e η utilizando r e s , onde r e s são as coordenadas locais que respeitam a relação 3.35. Tal procedimento permite escrever:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{-1}{4}(1-r)(1-s)(1+r+s) \\
N_2 &= \frac{-1}{4}(1+r)(1-s)(r+s+1) \\
N_3 &= \frac{-1}{4}(1+r)(1+s)(1-r-s) \\
N_4 &= \frac{-1}{4}(1-r)(1+s)(1+r-s) \\
N_5 &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s) \\
N_6 &= \frac{1}{2}(1+r)(1-s^2) \\
N_7 &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s) \\
N_8 &= \frac{1}{2}(1-r)(1-s^2)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Para interpolar para os nós calcula-se as funções de forma da equação 3.37 nos pontos de integração, obtendo uma matriz $[A]$, esta por sua vez multiplica-se pela tensão calculada nos pontos de integração e obtém-se as tensões nos nós.

$$[\sigma^*] = [A]^T [\sigma] \tag{3.38}$$

onde,

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^1 & \sigma_{yy}^1 & \sigma_{xy}^1 \\ \sigma_{xx}^2 & \sigma_{yy}^2 & \sigma_{xy}^2 \\ \sigma_{xx}^3 & \sigma_{yy}^3 & \sigma_{xy}^3 \\ \sigma_{xx}^4 & \sigma_{yy}^4 & \sigma_{xy}^4 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} N_1(r_1, s_1) & N_2(r_1, s_1) & N_3(r_1, s_1) & N_4(r_1, s_1) & N_5(r_1, s_1) & N_6(r_1, s_1) & N_7(r_1, s_1) & N_8(r_1, s_1) \\ N_1(r_2, s_2) & N_2(r_2, s_2) & N_3(r_2, s_2) & N_4(r_2, s_2) & N_5(r_2, s_2) & N_6(r_2, s_2) & N_7(r_2, s_2) & N_8(r_2, s_2) \\ N_1(r_3, s_3) & N_2(r_3, s_3) & N_3(r_3, s_3) & N_4(r_3, s_3) & N_5(r_3, s_3) & N_6(r_3, s_3) & N_7(r_3, s_3) & N_8(r_3, s_3) \\ N_1(r_4, s_4) & N_2(r_4, s_4) & N_3(r_4, s_4) & N_4(r_4, s_4) & N_5(r_4, s_4) & N_6(r_4, s_4) & N_7(r_4, s_4) & N_8(r_4, s_4) \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

$$[\sigma^*] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^A & \sigma_{yy}^A & \sigma_{xy}^A \\ \sigma_{xx}^B & \sigma_{yy}^B & \sigma_{xy}^B \\ \sigma_{xx}^C & \sigma_{yy}^C & \sigma_{xy}^C \\ \sigma_{xx}^D & \sigma_{yy}^D & \sigma_{xy}^D \\ \sigma_{xx}^E & \sigma_{yy}^E & \sigma_{xy}^E \\ \sigma_{xx}^F & \sigma_{yy}^F & \sigma_{xy}^F \\ \sigma_{xx}^G & \sigma_{yy}^G & \sigma_{xy}^G \\ \sigma_{xx}^H & \sigma_{yy}^H & \sigma_{xy}^H \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

sendo $[\sigma^*]$ a matriz contendo as tensões interpolada para os nós, $[\sigma]$ a matriz contendo as tensões nos pontos de integração e $[A]$ é a matriz de interpolação. Considerando um elemento de oito nós com quatro pontos de integração a matriz $[A]$ é do tipo apresentada na equação 3.40. Os expoentes numéricos das tensões indicam os pontos de integração e os expoentes em letras maiúsculas indicam os nós do elemento.

De forma análoga, pode ser obtido a matriz $[A]$, para o elemento triangular de seis nós e para o quadrilátero de quatro nós.

3.4 Modelo de flexão de placas delgadas

Neste capítulo um breve resumo do modelo de placa delgada é revisto, com o objetivo de evidenciar os diferentes modelos adotados. Esta parte da dissertação foi desenvolvida com base em várias bibliografias, como (Cook *et al.* 2002), (Touzot e Dhett 1984), (Cueto 2007b), (Camargo 2004).

Uma placa de espessura t tem sua superfície média a uma distância $t/2$ de cada superfície lateral. Para definição da geometria, adota-se o plano xy na superfície média conforme ilustrado na Figura 3.3, onde $z = 0$ identifica a superfície média. Na teoria da flexão de placas é assumido que a flexão de uma placa homogênea faz da superfície média uma superfície neutra, que se caracteriza por $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{xy} = 0$ em $z = 0$. Se o carregamento no plano esta presente, porém associado com uma grande deflexão lateral, a deformação na superfície média não é nula (Cook *et al.* 2002). Caso contrário o problema é considerado desacoplado.

Para cada nó $i = 1, 2, 3, 4$ da Figura 3.3 os graus de liberdade considerados são w_i , θ_{xi} e θ_{yi} , sendo w_i são as deflexões laterais e θ_{xi} e θ_{yi} são as rotações em relação aos eixos x e y respectivamente. Para pequenos deslocamentos e rotações, os deslocamento e as deformações

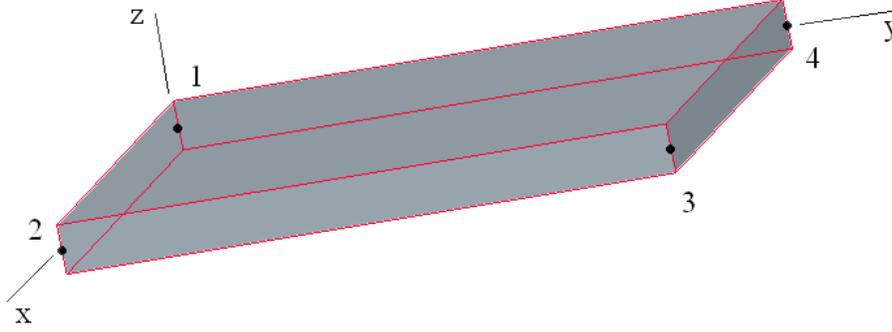


Figura 3.3: Elemento de placa com os nós nos cantos.

podem ser relacionados de acordo com a equação 3.42 (Cook *et al.* 2002).

$$\begin{aligned}
 u &= -z\theta_x \\
 v &= -z\theta_y \\
 \epsilon_{xx} &= -z\theta_{x,x} \\
 \epsilon_{yy} &= -z\theta_{y,y} \\
 \epsilon_{xy} &= -z(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \\
 \epsilon_{yz} &= w_{,y} - \theta_y \\
 \epsilon_{zx} &= w_{,x} - \theta_x
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

onde a vírgula denota a derivada com respeito ao termo seguinte.

As tensões presentes na seção transversal da placa são ilustradas na Figura 3.4a. Aplicando-se as condições de equilíbrio é possível associar as tensões com os momentos e as forças por unidade de comprimento no plano xy . Por exemplo, um incremento de M_x é $dM_x = z(\sigma_{xx}dA)$, onde $dA = (1)dz$ é um incremento da área da seção a uma distância z a partir da superfície média. Integrando-se M_x ao longo da espessura, tem-se:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx}zdz \tag{3.43}$$

Analogamente para os demais momentos e esforços cortantes tem-se:

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} z dz \\
 M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} z dz \\
 Q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{zx} dz \\
 Q_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yz} dz
 \end{aligned}
 \tag{3.44}$$

As grandezas descritas nas equações 3.43 e 3.44 são representadas na Figura 3.4b, cujas orientações seguem a mesma convenção adotada para as tensões mostradas na Figura 3.4a. Os momentos M_x e M_y são os momentos de flexão, enquanto M_{xy} é o momento de torção (Cook *et al.* 2002).

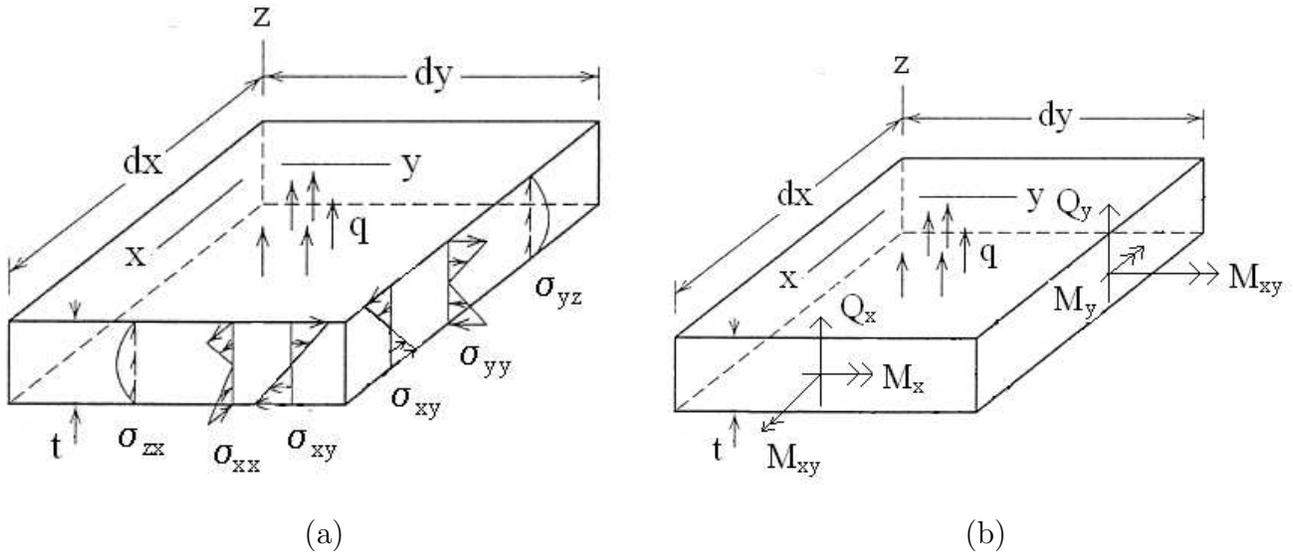


Figura 3.4: (a) Tensões e distribuição lateral da força q em um elemento diferencial de uma placa. (b) Momento e força transversal de cisalhamento.

Utilizando as relações expressas pela lei de Hooke, obtém-se para as equações 3.43 e 3.44, a

seguinte relação:

$$\begin{aligned}
M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
M_{xy} &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

onde $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ é chamado de rigidez a flexão, t é a espessura da placa, ν o coeficiente de Poisson do material e E é o módulo de elasticidade longitudinal do material, $\{\kappa\}$ é o vetor com as curvaturas e $[D_f]$ é a matriz constitutiva do material.

3.4.1 Hipóteses da teoria de Kirchhoff

A principal hipótese da teoria de Kirchhoff é que qualquer superfície que é normal à superfície média antes da deformação da placa permanecerá normal a esta superfície após a deformação. Desta forma, as deformações devido ao esforço cortante são desprezadas. Considerando estas hipóteses a teoria torna-se aplicável apenas para a análise de placas finas.

Uma vez que na teoria de Kirchhoff a deformação de cisalhamento transversal não é levada em conta, pode-se fazer algumas simplificações na equação 3.42, tais como:

$$\begin{aligned}
w_{,x} &= \theta_x \\
w_{,y} &= \theta_y
\end{aligned} \tag{3.46}$$

desta aproximação decorre que:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= -z w_{,xx} \\
\epsilon_{yy} &= -z w_{,yy} \\
\epsilon_{xy} &= -2z w_{,xy}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Esta relação pode ser substituída na equação 3.43, o que leva a uma relação do momento com a curvatura, para o caso de uma placa de Kirchhoff homogênea e isotrópica, conforme mostrado na equação 3.48.

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} = [D_f] \{\kappa\} \quad (3.48)$$

onde $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ é chamado de rigidez a flexão, t é a espessura da placa, ν o coeficiente de Poisson do material e E é o módulo de elasticidade longitudinal do material, $\{\kappa\}$ é o vetor com as curvaturas e $[D_f]$ é a matriz constitutiva do material.

3.5 Resolução numérica usando o método dos elementos finitos - Placa delgada de Kirchhoff

O problema anteriormente descrito, pode ser enunciado da seguinte maneira:

Achar w que satisfaça:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{p}{D} = 0 \text{ no domínio } \Omega$$

sujeito a :

$$w = \bar{w}; \theta_n = \bar{\theta}_n \text{ em } \Gamma_1 \quad (3.49)$$

$$Q_n = \bar{Q}_n; M_n = \bar{M}_n \text{ em } \Gamma_2$$

O problema diferencial deve então ser passado para a forma integral usando-se o Método dos Resíduos Ponderados para posterior aproximação por Elementos Finitos, e conseqüentemente obtenção das equações de análise matricial.

3.5.1 Aplicação do Método dos Resíduos Ponderados

Para a resolução da equação 3.49, utiliza-se a teoria do Método dos Resíduos Ponderados que induz à obtenção de uma aproximação para tal equação. Nesta aproximação, a minimização do resíduo R_Ω em $\Omega = [\Gamma_1, \Gamma_2]$ implica em:

$$\int_{\Omega} W_i R_\Omega d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.50)$$

sendo $W_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ o conjunto de funções de ponderação.

Para o caso da placa, a equação da minimização do resíduo será:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 \quad (3.51)$$

Desta forma, substituindo a equação 3.51 na equação 3.50, tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p \right) W_i d\Omega = 0 \quad (3.52)$$

Integrando os termos diferenciais por partes duas vezes, utilizando o Teorema de Green com base na figura 3.5, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_i \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial M_x}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma_2} W_i \frac{\partial M_x}{\partial x} \cos \gamma ds = \\ \int_{\Omega} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} M_x d\Omega &- \int_{\Gamma_2} \frac{\partial W_i}{\partial x} M_x \cos \gamma ds + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial W_i}{\partial x} M_x \cos \gamma ds \end{aligned} \quad (3.53)$$

para a direção y ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_i \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial M_y}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma_2} W_i \frac{\partial M_y}{\partial y} \text{sen} \gamma ds = \\ \int_{\Omega} \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} M_y d\Omega &- \int_{\Gamma_2} \frac{\partial W_i}{\partial y} M_y \text{sen} \gamma ds + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial W_i}{\partial y} M_y \text{sen} \gamma ds \end{aligned} \quad (3.54)$$

para os termos cruzados,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_i 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} d\Omega &= - \int_{\Omega} 2 \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} d\Omega + \\ \int_{\Gamma_2} W_i \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} \text{sen} \gamma + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \cos \gamma \right) ds &+ \int_{\Gamma_2} M_{xy} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \text{sen} \gamma + \frac{\partial W_i}{\partial y} \cos \gamma \right) ds \end{aligned} \quad (3.55)$$

Somando os termos obtidos acima, a equação 3.52 após a integração:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} M_y + 2 \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} M_{xy} d\Omega + \int_{\Omega} W_i p d\Omega + \\ \int_{\Gamma_2} \frac{\partial W_i}{\partial x} (M_x \cos \gamma + M_{xy} \text{sen} \gamma) ds - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial W_i}{\partial y} (M_y \text{sen} \gamma + M_{xy} \cos \gamma) ds + \\ \int_{\Gamma_2} W_i \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cos \gamma + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \text{sen} \gamma \right] ds \end{aligned} \quad (3.56)$$

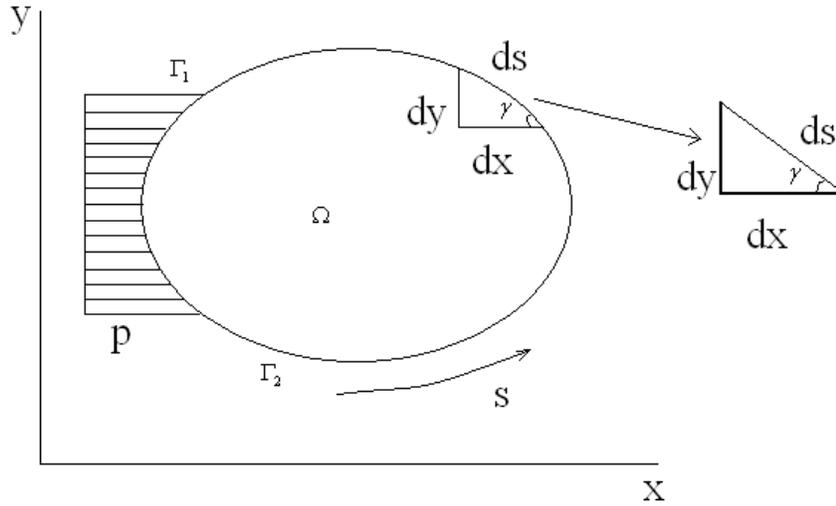


Figura 3.5: Representação genérica do domínio e contorno da placa.

Substituindo as relações momento curvatura dadas pela equação 3.45, na primeira integral da equação 3.56, tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} M_y + 2 \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} M_{xy} d\Omega = -D \int_{\Omega} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} d\Omega \quad (3.57)$$

Para a simplificação das demais integrais da equação 3.56, é necessário primeiramente obter equações de equilíbrio para um elemento infinitesimal em Γ_2 , o qual esta representado na figura 3.5. As forças e momentos atuantes em tal elemento estão representados na figura 3.6

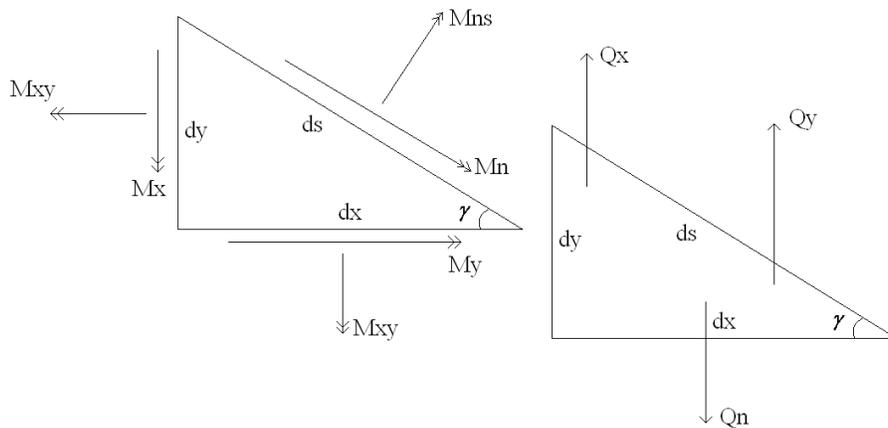


Figura 3.6: Momentos e forças em um elemento infinitesimal.

A partir desta figura derivam-se então as seguintes equações de equilíbrio:

Equilíbrio das forças verticais:

$$Q_n = Q_x \cos \gamma + Q_y \operatorname{sen} \gamma \quad (3.58)$$

Equilíbrio dos momentos em x e y , respectivamente:

$$M_n \operatorname{sen} \gamma - M_{sn} \cos \gamma = M_{xy} \cos \gamma + M_y \operatorname{sen} \gamma \quad (3.59)$$

$$M_n \cos \gamma + M_{sn} \operatorname{sen} \gamma = M_x \cos \gamma + M_{xy} \operatorname{sen} \gamma$$

Substituindo as relações 3.59 e 3.58 na equação 3.57, fazendo as aplicações das condições de contorno e considerando a definição de cisalhamento efetivo, obtém-se:

$$\begin{aligned} & -D \int_{\Omega} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} d\Omega \int_{\Omega} W_i p d\Omega + \int_{\Gamma_2} W_i V_n ds - \int_{\Gamma_2} M_n \frac{\partial W_i}{\partial n} ds = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

que corresponde a forma integral do problema, obtida pelo Método dos Resíduos Ponderados. O próximo passo é então a escolha das funções de ponderação, que será baseada no Método de Galerkin.

3.5.2 Funções de ponderação: Método de Galerkin

escolha das funções de ponderação será baseada no Método de Galerkin, no qual estas são escolhidas como as funções de forma, as quais serão definidas posteriormente, desta forma:

$$W_i = N_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.61)$$

A equação 3.60 fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & -D \int_{\Omega} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} d\Omega \int_{\Omega} N_i p d\Omega + \int_{\Gamma_2} N_i V_n ds - \int_{\Gamma_2} M_n \frac{\partial N_i}{\partial n} ds = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Após a escolha do tipo de ponderação, o próximo passo é a aplicação do Método dos Elementos Finitos.

3.5.3 Aplicação do Método dos Elementos Finitos

A análise dos elementos de placa submetida a flexão, da maneira como proposta, é um caso do Método dos Elementos Finitos no qual apenas um domínio é utilizado. Portanto, o domínio $\Omega = [\Gamma_1, \Gamma_2]$ considerado até então, corresponde a apenas um elemento, e a fronteira do problema. Γ_1 e Γ_2 , correspondem as laterais da placa.

A aplicação do MEF induz a obtenção de uma aproximação \tilde{w} , válida no domínio Ω , que possui a seguinte forma:

$$w \approx \tilde{w} = \sum_{i=1}^n w_i N_i \quad (3.63)$$

sendo w_i ($i=1,2,3,\dots,n$) são parâmetros utilizados na aproximação, neste caso equivalente a variáveis nodais e N_i são as funções de forma.

Matriz de rigidez e vetor de carga nodal equivalente

Inserindo-se a aproximação \tilde{w} dada por 3.63, chega-se a um sistema de equações lineares que leva a equação 3.62 à seguinte forma:

$$D \sum_{i,j=1}^n \int_0^b \int_0^a \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} dx dy w_j = \int_0^b \int_0^a N_i p dx dy + \int_{\Gamma_2} N_i V_n ds - \int_{\Gamma_2} M_n \frac{\partial N_i}{\partial n} ds = 0 \quad (3.64)$$

a qual, levando-se em conta a notação indicial, pode-se escrever matricialmente:

$$[K]_{ixj} \{\tilde{w}\}_{jx1} = \{R_T\}_{ix1} + \{R_B\}_{ix1} \quad (3.65)$$

Associa-se à equação 3.65 uma analogia física. No caso, $[K]$ corresponde a matriz de rigidez do elemento, w são as deflexões nodais e rotações em x e y e $f = \{R_T\} + \{R_B\}$ representa o vetor de carregamento nodal equivalente.

3.5.4 Elemento implementado: quadrilátero de quatro nós

O elemento implementado foi desenvolvido da mesma forma do elemento plano de quatro nós, como mostra a Figura 3.1(c), para mais detalhes sobre o cálculo das funções de forma pode

ser encontrada em Rodrigues e Pavanello (1996) e Rodrigues e Pavanello (1997), os pontos de integração são os mesmos da Tabela 3.1. O diferencial deste elemento é a utilização da teoria de placa fina de Kirchhoff.

$$\begin{aligned}
N_1 &= 1 - \frac{3x^2}{a^2} - \frac{xy}{ba} - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2x^3}{a^3} + \frac{3x^2y}{ba^2} + \frac{3xy^2}{b^2a} + \frac{2y^3}{b^3} - \frac{2x^3y}{ba^3} - \frac{2xy^3}{b^3a} \\
N_2 &= -y + \frac{xy}{a} + \frac{2y^2}{b} - \frac{2xy^2}{ba} - \frac{y^3}{b^2} + \frac{xy^3}{b^2a} \\
N_3 &= x - \frac{2x^2}{a} - \frac{xy}{b} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{2x^2y}{ba} - \frac{x^3y}{ba^2} \\
N_4 &= \frac{xy}{ba} + \frac{3y^2}{b^2} - \frac{3x^2y}{ba^2} - \frac{3xy^2}{b^2a} - \frac{2y^3}{b^3} + \frac{2x^3y}{ba^3} + \frac{2xy^3}{b^3a} \\
N_5 &= \frac{y^2}{b} - \frac{xy^2}{ba} - \frac{y^3}{b^2} + \frac{xy^3}{b^2a} \\
N_6 &= \frac{xy}{b} - \frac{2x^2y}{ba} + \frac{x^3y}{ba^2} \\
N_7 &= \frac{-xy}{ba} + \frac{3x^2y}{ba^2} + \frac{3xy^2}{b^2a} - \frac{2x^3y}{ba^3} - \frac{2xy^3}{b^3a} \\
N_8 &= \frac{xy^2}{ba} - \frac{xy^3}{b^2a} \\
N_9 &= -\frac{x^2y}{ba} + \frac{x^3y}{ba^2} \\
N_{10} &= \frac{3x^2}{a^2} + \frac{xy}{ba} - \frac{2x^3}{a^3} - \frac{3x^2y}{ba^2} - \frac{3xy^2}{b^2a} + \frac{2x^3y}{ba^3} + \frac{2xy^3}{b^3a} \\
N_{11} &= \frac{-xy}{a} + \frac{2xy^2}{ba} - \frac{xy^3}{b^2a} \\
N_{12} &= \frac{-x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^2y}{ba} - \frac{x^3y}{ba^2}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

3.6 Conclusão

Neste capítulo foi apresentado a formulação teórica para o estado plano de tensão e flexão de placa fina de Kirchhoff utilizando materiais isotrópicos, bem como a sua resolução numérica usando o Método dos Elementos Finitos.

Capítulo 4

Modelagem de reparos estruturais compósitos

4.1 Introdução

Quando uma falha por trinca ocorre na estrutura, um reparo colado, rebitado ou parafusado em material metálico na área trincada pode ser utilizado. A vida em fadiga e as tensões residuais na estrutura reparada é dependente da eficiência da transferência de carga do reparo. Os reparos colados tem sido usado na indústria aeronáutica, civil e petrolífera e são aceitos como solução eficientes para o reparo de danos em estruturas metálicas. A vantagem principal da utilização de reparos colados em comparação com os reparos rebitados ou parafusado é a transferência da carga relativamente uniforme entre os componentes estruturais que estão ligados. A utilização de reparos rebitados ou parafusados adicionam concentradores de tensão na estrutura devido aos furos que são necessários para a sua fixação. Além disso, os reparos rebitados e parafusados exigem uma utilização de materiais metálicos enquanto que na utilização de reparos colados é possível a utilização de materiais mais avançados como é o caso dos materiais compósitos.

Neste capítulo serão apresentados teorias para a modelagem de materiais compósitos, considerando a teoria de materiais ortotrópicos e anisotrópicos, além de desenvolver modelos para análise em estado plano de tensão e de placa fina de Kirchhoff ((Lourenço 2000), (Albuquerque 2001)).

4.2 Conceitos básicos sobre compósitos

Materiais compósitos são formados pela combinação de dois ou mais materiais. Em uma escala macroscópica eles apresentam melhores propriedades de engenharia que os materiais convencionais.

Algumas das propriedades que podem ser melhoradas através da formação de materiais compósitos são a rigidez, redução de peso, resistência a corrosão, propriedades térmicas, vida em fadiga e resistência ao desgaste. A maioria dos materiais compósitos são formados a partir de dois materiais: o material de reforço chamado de *fibra* e o material base chamado *matriz* (Reddy 1996).

Existem três tipos principais de materiais compósitos: (1) *fibras compostas*: que consiste em fibras de um material em uma matriz de outro material; (2) *partículas compostas*: que é composta de micro partículas de uma material em uma matriz de outro material; e (3) *compósitos laminados*: que é composto de lâminas de diferentes materiais, incluindo compósitos dos primeiros dois tipos (Reddy 1996).

O mecanismo básico de transferência de carregamento entre a matriz e a fibra pode ser explicada através da consideração de uma barra de uma única fibra em uma matriz (Figura 4.1). A transmissão de carregamento entre o material da matriz e a fibra é feita através de tensão de cisalhamento τ . Quando a aplicação do carregamento é uma tensão normal σ , a tensão de cisalhamento τ é desenvolvida na outra superfície da fibra, a sua magnitude diminui de um valor alto no final da fibra até zero a uma certa distância a partir da outra extremidade. A tensão normal σ na seção da fibra tem uma característica oposta. Inicia com zero no final da fibra atingindo o máximo a uma certa distância. A distância que a tensão normal σ vai de zero ao seu valor máximo é conhecida como *distância característica* (Reddy 1996), e esta distribuição está ilustrada na Figura 4.1.

O comportamento dos materiais compósitos pode ser representado usando-se uma lei de material equivalente homogenizado conforme descrito nas próximas seções.

4.2.1 Generalização da lei de Hooke

A relação cinemática, mecânica e os princípios termodinâmicos são aplicados a qualquer sistema, independente da sua constituição física. Considera-se inicialmente a caracterização de equações constitutivas de cada material individualmente e as suas correspondentes relações de equilíbrio relativas à aplicação de carregamento. A definição das equações constitutivas dependem das características básicas do comportamento mecânico e constituição física do material.

Um corpo material é dito ser *homogêneo* se as suas propriedades são as mesmas em todo o corpo. Em um corpo *heterogêneo*, as propriedades do material são função da posição. Um material *anisotrópico* é aquele que apresenta diferentes valores para as suas propriedades mecânicas em

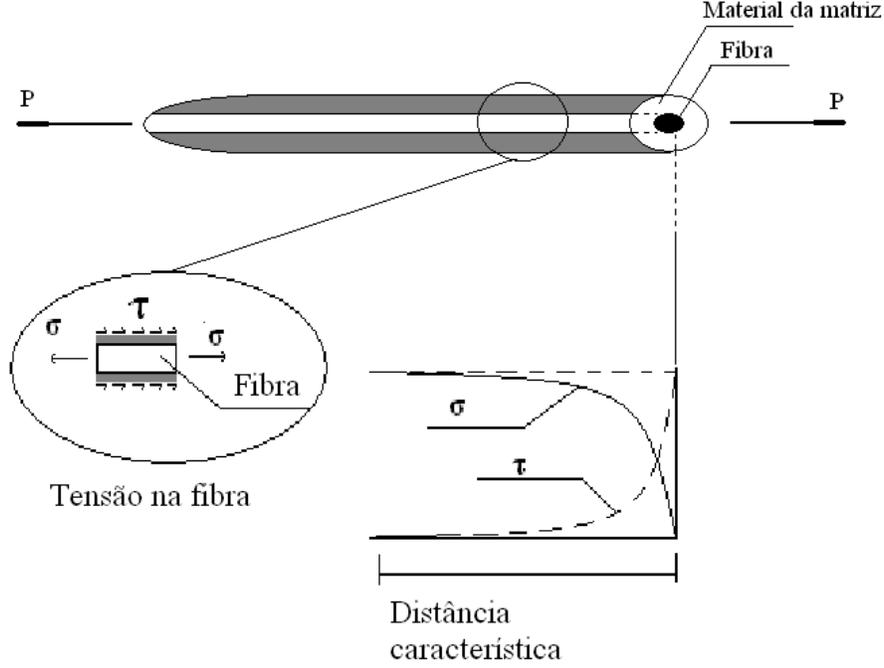


Figura 4.1: Transferência de carregamento e distribuição de tensão.

diferentes direções em um mesmo ponto. Um material *isotrópico* é o que apresenta as mesmas propriedades em qualquer direção em um mesmo ponto. Um material anisotrópico e isotrópico podem ser homogêneos ou heterogêneos.

A generalização da lei de Hooke relaciona as nove componentes de tensão com os nove componentes de deformação, de acordo com a equação 4.1, que é dada em notação indicial,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (4.1)$$

onde ϵ_{kl} é o tensor de segunda ordem de deformação infinitesimal, σ_{ij} é o tensor de tensão de Cauchy e C_{ijkl} é o tensor constitutivo do material. As nove equações da equação 4.1 contém 81 coeficientes do material. Considerando a simetria de ϵ_{kl} e σ_{ij} , tem-se:

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (4.2)$$

o que permite reduzir o problema a 36 coeficientes elásticos independentes, que podem ser expressos em uma forma matricial, utilizando apenas um índice para notação dos componentes dos

tensores de tensão e deformação e dois índices para as constantes elásticas, o que permite escrever:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

onde C_{ij} são os coeficientes elásticos da matriz constitutiva, e os termos de tensão e deformação são:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33}, \quad \sigma_4 = \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12} \\ \epsilon_1 &= \epsilon_{11}, \quad \epsilon_2 = \epsilon_{22}, \quad \epsilon_3 = \epsilon_{33}, \quad \epsilon_4 = 2\epsilon_{23}, \quad \epsilon_5 = 2\epsilon_{13}, \quad \epsilon_6 = 2\epsilon_{12} \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde 1, 2 e 3 indicam as direções x , y e z , respectivamente.

Os resultados para C_{ij} são também simétricos. Desta forma, existem apenas 21 coeficientes independentes para a matriz $[C]$. Esta forma geral, será simplificada para casos de estado plano de tensões e flexão de placas.

4.3 Modelagem de reparos usando a hipótese de estado plano de tensão

Para o caso de estado plano de tensão a lei de Hooke generalizada pode ser reduzida a forma da equação 4.5.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Neste caso, conforme mostrado no capítulo 3, as demais componentes de tensão são nulas.

4.3.1 Reparos com compósito laminados usando lei de material ortotrópico

Considerando-se três planos mutuamente ortogonais para a definição do material, o número de coeficientes elásticos da equação 4.3 é reduzido para 9, e este material é conhecido como *ortotrópico*.

A relação tensão deformação para um material ortotrópico supondo um estado plano de tensões, reduz a equação 4.5 a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

onde os termos elásticos C_{ij} presentes na equação 4.6 são relacionados com as constantes de engenharia E_i , ν_{ij} e G_{ij} pelas seguintes expressões (Reddy 1996):

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_1 \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta}, \quad C_{12} = E_1 \frac{\nu_{21} - \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta} = E_2 \frac{\nu_{12} - \nu_{32}\nu_{13}}{\Delta} \\ C_{22} &= E_2 \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta}, \quad C_{66} = G_{12} \\ \Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo E_1 e E_2 módulo de Young nas direções 1 e 2 respectivamente, ν_{ij} coeficiente de Poisson definido como uma razão entre a deformação transversal na direção j e a deformação axial na direção i , e G_{12} é o módulo de cisalhamento no plano 1 – 2. Estas constantes são obtidas experimentalmente, modelo constitutivo ortotrópico.

4.3.2 Reparos em compósito laminados usando lei de material anisotrópico

Quando o material é dito anisotrópico as suas propriedades são diferentes de acordo com a direção em um mesmo ponto. O número de constantes independentes para um material anisotrópico é 21, conforme será mostrado na equação 4.8.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Considerando o estado plano de tensão, a equação 4.8 pode ser simplificada para a forma 4.9, que é apresentada abaixo.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Para a análise desenvolvida o reparo será inicialmente considerado como um material ortotrópico, a partir dos ângulos de inclinação das fibra o reparo deverá ser representado por uma lei anisotrópica, desta forma, os coeficientes da equação 4.9 são calculados da mesma forma da equação 4.7, os termos C_{16} e C_{26} serão inicialmente nulos. A forma para se considerar o ângulo de inclinação das fibras será descrita nas próximas seções.

4.4 Modelagem de reparos usando a hipótese de placa delgada

A teoria que foi implementada para a modelagem da placa é a teoria clássica de placas laminadas, que utiliza a formulação de Kirchhoff, cujas hipóteses são listadas abaixo:

1. Linhas retas perpendiculares a superfície média que se manterão retas antes e depois da deformação.
2. A normal transversal não permite alongamento.
3. A rotação da normal transversal permanece perpendicular a superfície média depois da deformação.

Para uma única camada de material compósito e com inclinação das fibras nulo, este será considerado como material ortotrópico, cuja equação constitutiva clássica para placa pode ser verificada abaixo:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \frac{t^3}{12} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = [D] \{\epsilon\} \quad (4.10)$$

onde M_1 , M_2 e M_6 são os momentos M_x , M_y e M_{xy} respectivamente, esta nova notação foi adotada para simplificar a notação da matriz das propriedades, os termos Q_{ij} , podem ser obtidos segundo as equações abaixo:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \nu_{12} \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (4.11)$$

A matriz de rigidez a flexão é obtida a partir da matriz dos coeficientes presente na equação 4.10, como é observado na equação abaixo:

$$[D] = \frac{t^3}{12} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

onde t é a espessura da placa.

4.5 Lei de empilhamento para laminados compósitos

4.5.1 Caracterização de um empilhamento unidirecional

A laminação unidirecional de fibras reforçadoras é tratada como um material ortotrópico, cujos eixos de simetria do material são paralelos e transversais à direção das fibras. As coordenadas do material estão mostradas na Figura (4.2). As propriedades do material ortotrópicos laminados são obtidas em laboratório ou de forma teórica.

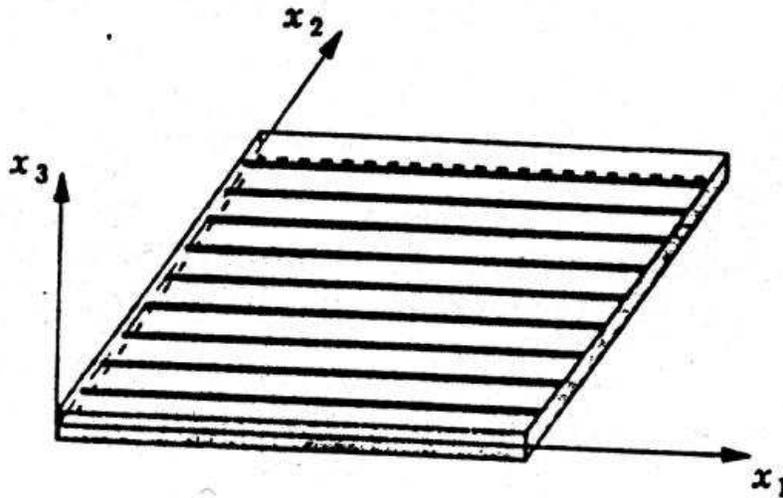


Figura 4.2: Fibra reforçadora unidirecional laminada com as coordenadas do sistemas.

A abordagem teórica, chamada abordagem micromecânica, usada para determinar as constantes de engenharia de uma fibra reforçadora contínua é baseada nas seguintes hipóteses (Reddy 1996), colagem perfeita entre a fibra e a matriz, as fibras são paralelas e uniformemente distribuídas, a matriz está livre de vazios ou micro trincas e inicialmente no estado livre de tensão, as fibras e a

matriz são isotrópicas e o comportamento de seus materiais podem ser representados pela lei de Hooke, as forças aplicadas são paralelas ou perpendiculares à direção da fibra.

O módulo de elasticidade e a razão de Poisson do material compósito, pode ser calculado em termos das propriedades dos materiais que o constituem, considerando a notação abaixo,

$E_f \rightarrow$ é o Módulo de Elasticidade da fibra,

$E_m \rightarrow$ é o Módulo de Elasticidade da matriz,

$G_f \rightarrow$ é o Módulo de Cisalhamento da fibra,

$G_m \rightarrow$ é o Módulo de Cisalhamento da matriz,

$\nu_f \rightarrow$ é a Razão de Poisson da fibra,

$\nu_m \rightarrow$ é a Razão de Poisson da matriz,

$V_f \rightarrow$ é a Fração de volume da fibra,

$V_m \rightarrow$ é a Fração de volume da matriz, pode-se, com base na teoria básica de misturas, calcular constantes de engenharia da seguinte maneira (Reddy 1996):

$$\begin{aligned} E_1 &= E_f V_f + E_m V_m; \quad \nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \\ E_2 &= \frac{E_m}{(1 - V_f) + \frac{E_m}{E_f} V_f}; \quad G_{12} = \frac{G_m}{(1 - V_f) + \frac{G_m}{G_f} V_f} \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde E_1 é o módulo longitudinal, E_2 é o módulo transversal, ν_{12} é a razão de Poisson e G_{12} é o módulo de cisalhamento do material equivalente homogeneizado a partir das propriedades da fibra e da matriz. Na equação (4.13) os valores dos módulos de cisalhamento são:

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)}; \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} \quad (4.14)$$

Estas expressões clássicas das leis de mistura serão aplicadas para a determinação de um material compósito constituído a partir do empilhamento de várias camadas laminadas.

4.5.2 Transformação de coordenadas

A relação constitutiva para materiais ortotrópicos foi desenvolvida em termos dos componentes de tensão e deformação, que têm referência a um sistema de coordenadas que coincide com o sistema de coordenadas globais. O sistema de coordenadas, usado na solução do problema, em geral, não coincide com o sistema de coordenadas do material. Os compósitos laminados são constituídos de várias camadas, e cada uma das camadas possui um sistema de coordenadas particular e distintos.

Assim, é necessário estabelecer uma relação de transformação da tensão e deformação em um sistema de coordenadas para uma quantidade correspondente em outro sistema de coordenadas (Reddy 1996). Nota-se neste caso, que grandezas tensoriais estão associadas ao problema, o que acarreta uma transformação de coordenadas esféricas.

Transformação dos coeficientes do material

Os coeficientes C_{ij} na forma original da lei constitutiva mostrada na equação (4.3), são componentes de um tensor de quarta ordem. A quarta ordem do tensor dos componentes \bar{C}_{ijkl} nas coordenadas globais podem ser relacionada com os componentes C_{mnpq} , nas coordenadas do material através da relação de transformação do tensor.

$$\bar{C}_{ijkl} = a_{im}a_{in}a_{kp}a_{lq}C_{mnpq} \quad (4.15)$$

sendo a_{ij} o tensor das rotações para mudança de coordenada.

Assim mesmo, a equação 4.15 envolve a multiplicação de cinco matrizes, com quatro coeficientes do material. Alternativamente, o mesmo resultado pode ser obtido através da utilização da relação tensão-deformação (equação 4.3).

$$\{\sigma\}_p = [T] \{\sigma\}_m = [T][C]_m \{\epsilon\}_m = [T][C]_m [T]^T \{\epsilon\}_p \quad (4.16)$$

sendo $\{\sigma\}_p$ as tensões no sistema de coordenadas global, $\{\sigma\}_m$ as tensões no sistema de coordenadas do material, $[C]_m$ matriz dos coeficientes nas coordenadas do material e $[T]$ é a matriz de transformação de coordenadas. Usando a lei de Hooke no sistema de coordenadas globais, tem-se:

$$\{\sigma\}_p = [C]_p \{\epsilon\}_p \quad (4.17)$$

Assim, comparando as equações (4.16) e (4.17) chega-se a conclusão que $([C]_p \equiv [\bar{C}]$ e $[C]_m \equiv [C])$, o que permite escrever:

$$[\bar{C}] = [T][C][T]^T \quad (4.18)$$

onde a matriz da transformação é:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

sendo os termos m e n da expressão (4.19), iguais a $m = \cos\theta$ e $n = \sin\theta$, onde o ângulo θ é medido em relação a coordenada x e x_1 na Figura 4.3.

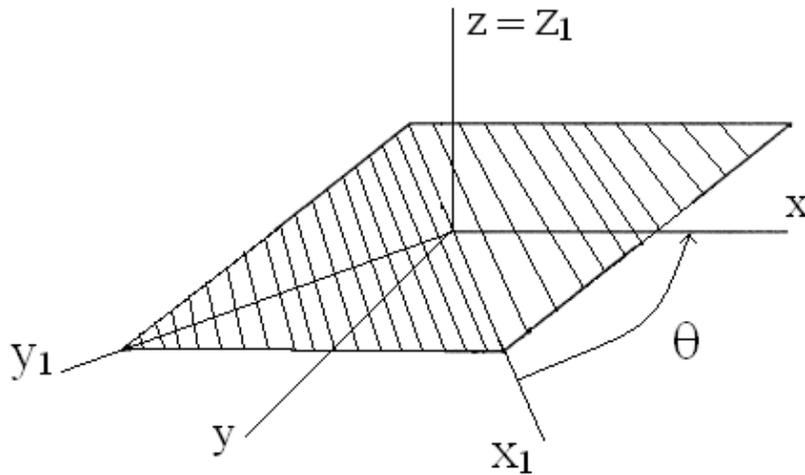


Figura 4.3: Laminado composto com as coordenadas globais e locais.

Realizando a multiplicação das matrizes, na equação (4.18) para o caso anisotrópico e estado

plano de tensões, obtêm-se a equação 4.20 (Reddy 1996) dada abaixo:

$$\begin{aligned}
\overline{C}_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta - 4C_{16} \cos^3 \theta \sin \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 4C_{26} \cos \theta \sin^3 \theta + C_{22} \sin^4 \theta \\
\overline{C}_{12} &= C_{12} \cos^4 \theta + 2(C_{16} - C_{26}) \cos^3 \theta \sin \theta + (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\
&\quad 2(C_{26} - C_{16}) \cos \theta \sin^3 \theta + C_{12} \sin^4 \theta \\
\overline{C}_{16} &= C_{16} \cos^4 \theta + (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + 3(C_{26} - C_{16}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\
&\quad (2C_{66} + C_{12} - C_{22}) \cos \theta \sin^3 \theta + C_{26} \sin^4 \theta \\
\overline{C}_{22} &= C_{22} \cos^4 \theta - 4C_{26} \cos^3 \theta \sin \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 4C_{16} \cos \theta \sin^3 \theta + C_{11} \sin^4 \theta \\
\overline{C}_{26} &= C_{26} \cos^4 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + 3(C_{16} - C_{26}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\
&\quad (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta - C_{16} \sin^4 \theta \\
\overline{C}_{66} &= 2(C_{16} - C_{26}) \cos^3 \theta \sin \theta + (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2(C_{26} - C_{16}) \cos \theta \sin^3 \theta + \\
&\quad C_{66}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Quando $[C]$ for a matriz correspondente a um material ortotrópico, tem-se a forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{16} \\ \overline{C}_{21} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{26} \\ \overline{C}_{16} & \overline{C}_{26} & \overline{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

De forma análoga pode ser feito para os coeficientes da matriz $[S]$ que é a inversa de $[C]$.

$$[\overline{S}] = [\overline{C}]^{-1} \tag{4.22}$$

A matriz das propriedades do material para o caso de estado plano com ângulos de inclinação e várias camadas, é obtida da forma abaixo:

$$[D] = \sum_{i=1}^n \frac{[\overline{Q}_i] h_i}{h} \tag{4.23}$$

sendo $[D]$ a matriz constitutiva de um material com camadas e inclinações arbitrárias, $[\overline{Q}_i]$ a matriz constitutiva de cada camada no referencial global, h_i a espessura de cada camada e h a espessura total do laminado compósito.

Para a obtenção da matriz das propriedades do material considerando a hipótese de flexão de placa delgada de Kirchhoff, utilizando ângulos de inclinação das fibras e várias camadas, a equação constitutiva esta descrita na equação abaixo:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} [T] \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} [T]^T \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} z dz \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} z dz = [D_f] \{\epsilon\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde n é o número de camadas do laminado composto. Resolvendo a integral da equação 4.24, a matriz $[D_f]$ é calculada da forma abaixo:

$$[D_f] = \sum_{i=1}^n \frac{[\overline{Q}_i](z_{i+1}^3 - z_i^3)}{3} \quad (4.25)$$

onde z_{i+1} é a coordenada z do ponto superior da espessura da camada e z_i é a coordenada z do ponto inferior da espessura da camada.

Quando as propriedades do material, localização e esquema de laminação são simétricos em relação ao plano médio, o laminado é chamado *laminado simétrico*. Na prática, os laminados simétricos não apresentam tendência a torcer devido a cargas térmicas oriundos do processo de cura do adesivo, e por isso são mais utilizados na construção de reparos estruturais. Uma ilustração do laminado simétrico pode ser observado na Figura 4.4, a nomenclatura 0/90/90/0 indica os ângulos de referência de cada camada do laminado composto.

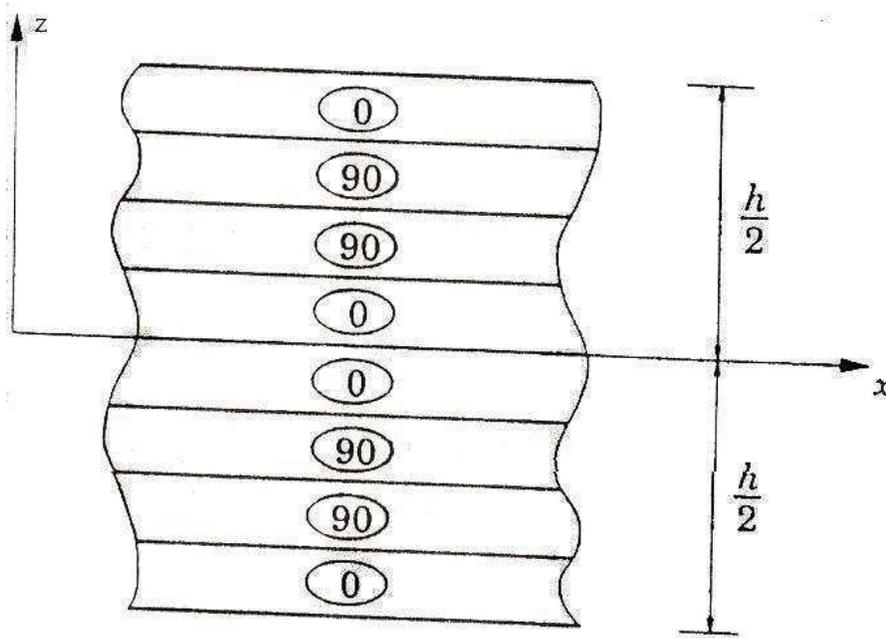


Figura 4.4: Empilhamento simétrico.

4.6 Conclusão

Neste capítulo foi apresentado a formulação teórica para o modelo de estado plano de tensão e flexão de placa delgada de Kirchhoff para materiais compósitos, bem como a técnica de homogeneização para laminados compósitos. A sua aplicação no contexto do método do elementos finitos é imediata alterando-se apenas a matriz constitutiva usada no contexto dos elementos finitos, sendo que a sua implementação será discutida nos próximos capítulos.

Capítulo 5

Comportamento mecânico das juntas e modelagem da camada adesiva

5.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo, as hipóteses mecânicas para a análise de reparos colados, com ênfase na modelagem do adesivo e nos critérios para projeto e avaliação de reparos colados. Considera-se o caso da análise do campo de tensões de reparos compósitos colados em estruturas com ou sem trinca usando adesivo polimérico (Rose e Wang 2002). A função principal do reparo é reduzir o fator de intensidade de tensão devido a existência da trinca no material da base. Com isso, restaurar a resistência residual do conjunto a um nível aceitável. Isto é, deseja-se evitar que o crescimento da trinca devido a um carregamento em fadiga entre na fase instável assegurando assim uma vida residual aceitável. Desta forma, o fator de intensidade de tensão da estrutura reparada é uma variável relevante no projeto e avaliação do reparo (Useche 2007).

Além do fator de intensidade de tensão, adota-se como critério de avaliação da integridade da junta o nível de tensões de cada ponto do adesivo, caracterizando pela tensão equivalente do critério de falha de von Mises.

Será apresentada uma formulação de elementos finitos para elementos adesivos. No artigo Goland e Reissner (1944) os autores apresentaram um modelo linear para representar o comportamento de juntas coladas. Este modelo foi modificado por outros autores. No entanto, ainda é usado como base para a formulação de vários elementos adesivos.

Os autores Ojalvo e Eidinoff (1978) apontaram para uma derivação baseada na formulação desenvolvida por Goland e Reissner (1944) foi baseada em uma relação incompleta entre a deformação cisalhante e deformação normal no adesivo.

Carpenter (1980a), propõe um modelo combinando as teorias propostas por Goland e Reissner

(1944) e Ojalvo e Eidinoff (1978), que é representado por uma equação diferencial escrita em função das tensões no adesivo. Neste artigo, a modelagem é feita de forma um pouco mais geral, podendo-se simplificar a formulação para os casos do modelo de Goland e Reissner (1944) e Ojalvo e Eidinoff (1978).

Os modelos acima comentados serão revistos nas próximas seções.

5.2 Comportamento mecânico dos reparos

O primeiro problema em consideração neste trabalho é o de uma chapa trincada com um reparo colado (Figura 5.1). A chapa, com espessura t_c contém uma trinca de comprimento $2a$. A espessura do reparo e da camada de adesivo são respectivamente t_r e t_a . A ilustração do reparo duplo e do reparo simples podem ser observados nas Figuras 5.1(b) e 5.1(c), respectivamente. Os subscritos c , r e a são utilizados para descrever as propriedades, respectivamente, da chapa, do reparo e da camada de adesivo. A trinca atravessa a chapa e localiza-se em um segmento de $-a \leq x \leq a$, $y = 0$ e o reparo está sobre uma região quadrilateral, colocado simetricamente em torno da trinca.

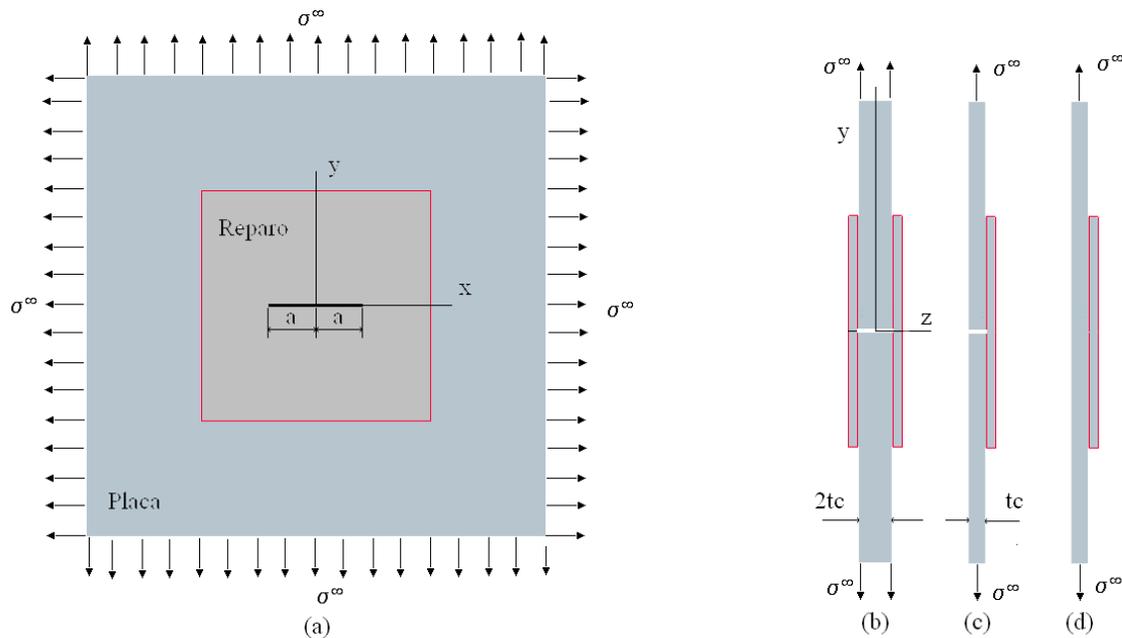


Figura 5.1: Configuração do reparo: (a) Vista plana. (b) Seção zy . (c) Reparo apenas em um lado. (d) Placa sem trinca.

Através de considerações geométricas, reparos colados podem ser inseridos em duas categorias: dois lados (simétrico) e um lado (não simétrico) (Rose e Wang 2002). No primeiro caso dois reparos idênticos são colados em duas superfícies em uma placa trincada. O arranjo simétrico previne a

deflexão fora do plano sobre a placa trincada. Na realidade, os reparos usuais são empregados apenas em um lado.

Duas diferentes abordagens foram desenvolvidas para avaliar a flexão através do cisalhamento. No primeiro método, que é usado com maior frequência, desconsidera-se a deformação por cisalhamento na placa e no reparo, assumindo que a deformação de cisalhamento no adesivo é uniforme na espessura, como pode ser visto na Figura 5.2(a). No segundo método, assume-se que na placa e no reparo a distribuição da deformação de cisalhamento ao longo da espessura é linear e no adesivo a deformação de cisalhamento é constante ao longo da espessura, como pode ser visto na Figura 5.2(b).

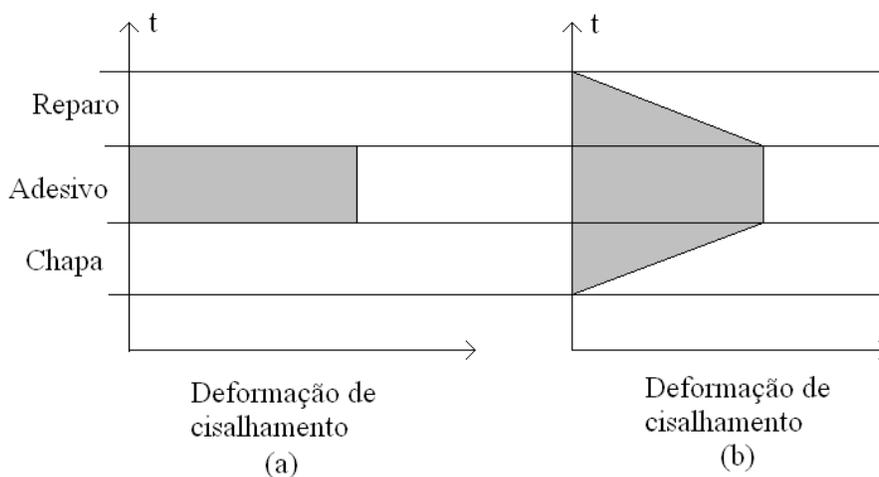


Figura 5.2: (a) Deformação cisalhante na chapa e no reparo constantes. (b) Variação linear da deformação cisalhante na chapa e no reparo.

Nos dois modelos, o campo de deformação cisalhante do adesivo é considerado constante, o que é uma hipótese aceitável, tendo em vista a pequena espessura desta camada.

5.3 Modelagem da camada de adesivo

5.3.1 Hipóteses físicas e modelo mecânico

As teorias apresentadas por Goland e Reissner (1944) e Ojalvo e Eidinoff (1978) são baseadas em quatro consideração:

1. As tensões no plano longitudinal do material do adesivo são desconsideradas quando comparada com as tensões nos planos transversais.

2. O adesivo deforma como um material clássico de pequena espessura, ou seja, a seção plana continua plana e a deformação normal na seção é relacionada a sua seção plana.
3. Deflexão longitudinal e transversal em ambos os materiais variam linearmente através da espessura do adesivo e entre os aderentes. Para o sistema de coordenadas xz , como mostra a Figura 5.3, se u é o deslocamento na direção x , w é o deslocamento na direção z e o subscrito i refere-se a quantidade da interface com o aderente i , desta forma $u = (u_1 + u_2)/2 + (u_1 - u_2)z/t_a$ e $w = (w_1 + w_2)/2 + (w_1 - w_2)z/t_a$.
4. A razão de Poisson para o adesivo é nula.

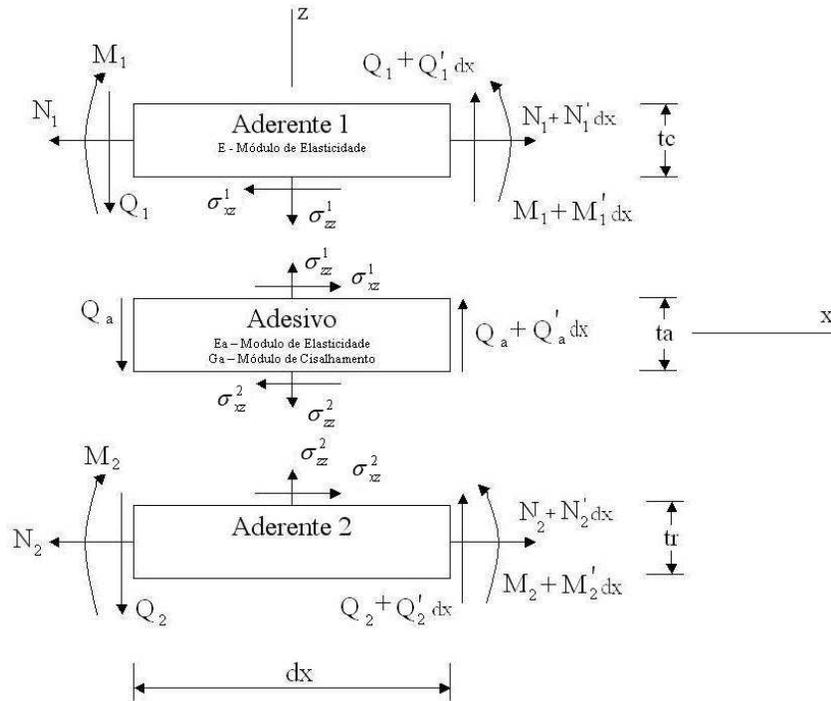


Figura 5.3: Elemento diferencial da configuração adesivo-aderente.

Os termos presentes na Figura 5.3 estão descritos abaixo:

- σ_{zz}^1 é a tensão normal entre o aderente 1 e o adesivo com unidades em $[N/m^2]$,
- σ_{xz}^1 é a tensão cisalhante entre o aderente 1 e o adesivo com unidades em $[N/m^2]$,
- Q_1 é a força cortante no aderente 1 com unidades em $[N/m]$,
- Q_1' é a derivada da força cortante no aderente 1 com unidades em $[N/m^2]$,

- N_1 é a força normal no aderente 1 com unidades em $[N/m]$,
- N'_1 é a derivada da força normal no aderente 1 com unidades em $[N/m^2]$,
- t_c é a espessura do aderente 1 com unidades em $[m]$,
- Q_a é a força cortante presente no adesivo com unidades em $[N/m]$,
- Q'_a é a derivada da força cortante no adesivo com unidades em N/m^2 ,
- t_a é a espessura do adesivo com unidades em $[m]$
- σ_{zz}^2 é a tensão normal entre o aderente 2 e o adesivo com unidades em $[N/m^2]$,
- σ_{xz}^2 é a tensão cisalhante entre o aderente 2 e o adesivo com unidades em $[N/m^2]$,
- Q_2 é a força cortante no aderente 2 com unidades em $[N/m]$,
- Q'_2 é a derivada da força cortante no aderente 2 com unidades em $[N/m^2]$,
- N_2 é a força normal no aderente 2 com unidades em $[N/m]$,
- N'_2 é a derivada da força normal no aderente 2 com unidades em $[N/m^2]$,
- t_r é a espessura do aderente 2 com unidades em $[m]$,

A partir desta hipótese, para o modelo cinemático do adesivo, pode-se escrever as condições de equilíbrio para cada teoria e conseqüentemente montar as relações força deslocamento requeridas.

5.3.2 Modelos de Goland-Reissner e Ojalvo-Eidinoff

A partir dos modelos cinemáticos adotados, pode-se escrever as demais equações do modelo das juntas. Nas equações 5.1 até 5.15 resume-se as equações de equilíbrio e equações das relações força-deslocamento do elemento adesivo diferencial mostrado na Figura 5.3.

Na Figura 5.3, fazendo-se a somatória das forças na direção do eixo z apenas para o aderente 1, obtém-se:

$$Q'_1 - \sigma_{zz}^1 = 0 \tag{5.1}$$

Agora, fazendo-se a mesma somatória para o aderente 2, obtém-se:

$$Q'_2 + \sigma_{zz}^2 = 0 \quad (5.2)$$

Na sequencia, fazendo o mesmo para o adesivo, tem-se:

$$Q'_a = \sigma_{zz}^2 - \sigma_{zz}^1 \quad (5.3)$$

Novamente para a Figura 5.3, fazendo-se a somatória das forças na direção do eixo x para o aderente 1, aderente 2 e adesivo, que serão mostradas em separado, pelas equações 5.4, 5.5 e 5.6 respectivamente, são:

$$N'_1 - \sigma_{xz}^1 = 0 \quad (5.4)$$

$$N'_2 + \sigma_{xz}^2 = 0 \quad (5.5)$$

$$\sigma_{xz}^1 = \sigma_{xz}^2 \quad (5.6)$$

Fazendo agora a somatória dos momentos na Figura 5.3 para o aderente 1, aderente 2 e adesivo, cada caso analisado em separado nas equações 5.7, 5.8 e 5.9, respectivamente.

$$M'_1 + Q_1 - \frac{t_c}{2} \sigma_{xz}^1 = 0 \quad (5.7)$$

$$M'_2 + Q_2 - \frac{t_r}{2} \sigma_{xz}^2 = 0 \quad (5.8)$$

$$Q_a = \frac{(\sigma_{xz}^1 + \sigma_{xz}^2)}{2} t_a \quad (5.9)$$

Para as equações 5.10, 5.11 e 5.12 são demonstradas as relações força-deformação respectivamente para o aderente 1, aderente 2 e adesivo.

$$u'_1 = \frac{1}{Et_c} \left(\frac{6M_1}{t_c} + N_1 \right) \quad (5.10)$$

$$u'_2 = \frac{1}{Et_r} \left(\frac{-6M_2}{t_c} + N_2 \right) \quad (5.11)$$

$$\sigma_{xz}^a = G_a \left[\frac{u_1 - u_2}{t_a} + \alpha_1 \left(\frac{w'_1 + w'_2}{2} \right) + \alpha_2 \frac{z}{t_a} (w'_1 - w'_2) \right] \quad (5.12)$$

Nas equações 5.13, 5.14 e 5.15 estão as relações tensão-deformação para o aderente 1, aderente 2 e adesivo respectivamente.

$$w''_1 = \frac{12M_1}{Et_c^3} \quad (5.13)$$

$$w''_2 = \frac{12M_2}{Et_r^3} \quad (5.14)$$

$$\sigma_{zz}^a = \frac{E_a}{t_a} (w_1 - w_2) \quad (5.15)$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{xz}^1 + \sigma_{xz}^2}{2} \quad (5.16)$$

onde α_1 e α_2 são constantes que dependem da equação da relação tensão de cisalhamento de formação usada para o adesivo, σ_{xz}^a tensão cisalhante no adesivo e σ_{zz}^a tensão normal no adesivo, assumindo a razão de Poisson nula.

Derivando a equação 5.15 quatro vezes e substituindo as equações 5.1, 5.2, 5.4, 5.5, 5.7, 5.10, 5.12, 5.13 e 5.14, obtém-se:

$$\sigma_{zz}^{a(iv)} - \frac{6\alpha_2\lambda^2\beta}{c^2}\sigma_{zz}^{a(IV)} + \frac{\rho^2}{c^4}\sigma_{zz}^a = 0 \quad (5.17)$$

sendo,

$$\rho^2 = \frac{24E_a c^4}{Et_c^3 t_a} \quad (5.18)$$

$$\lambda^2 = \frac{G_a c^2}{Et_c t_a} \quad (5.19)$$

$$\beta = \frac{t_a}{t_c} \quad (5.20)$$

sendo c metade do comprimento do adesivo, $\sigma_{zz}^{a(iv)}$ é a derivada a quarta da equação da tensão normal no adesivo e $\sigma_{zz}^{a''}$ é a derivada segunda da equação da tensão normal do adesivo.

A equação da tensão normal obtida considerando-se $\alpha_2 = 0$ é a equação da tensão normal no adesivo proposta por Goland e Reissner (1944), enquanto que $\alpha_2 = 1$ obtém-se a equação proposta por Ojalvo e Eidinoff (1978). Adotando-se $\alpha_2 = 1$ obtém-se, a partir da equação 5.12, uma variação linear da tensão de cisalhamento a partir da espessura do adesivo, o que viola a equação 5.9, enquanto que a escolha de $\alpha_2 = 0$ conduz a uma relação da tensão de cisalhamento constante através da espessura do adesivo o que satisfaz a equação 5.12. Desta forma, dando ênfase a tensão normal, a teoria de Goland e Reissner (1944) viola a equação da relação tensão de cisalhamento deformação, enquanto isso, a teoria de Ojalvo e Eidinoff (1978) viola o equilíbrio das forças horizontais para o adesivo.

Derivando a equação 5.16 três vezes, e substituindo as equações 5.4, 5.7, 5.10, 5.13 e 5.12, a equação 5.6 multiplicada por uma constante arbitrária α_3 e a equação 5.3 multiplicada por uma constante arbitrária $(1 - \alpha_3)$, obtém-se:

$$\sigma_{xz}^{a''''} - \frac{\lambda^2}{c^2} \theta \sigma_{xz}^{a'} = 0 \quad (5.21)$$

onde

$$\theta = 8 + 6\alpha_1\beta + 6\alpha_3\beta + 6\alpha_1\alpha_3\beta^2 \quad (5.22)$$

onde α_1 é uma constante que depende da equação que relaciona a tensão de cisalhamento com a deformação para o adesivo, $\sigma_{xz}^{a(III)}$ é a tensão cisalhante no adesivo derivada a terceira e $\sigma_{xz}^{a(I)}$ é a tensão cisalhante no adesivo derivada a primeira.

A equação diferencial para a tensão de cisalhamento, depende de α_1 e α_3 .

Para $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_3 = \frac{-1}{1+\beta}$ obtém-se a equação diferencial do modelo de Goland e Reissner (1944), enquanto que para $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$ obtém-se a equação diferencial do modelo de Ojalvo e Eidinoff (1978). Ambas as equações diferenciais da tensão de cisalhamento podem ser desenvolvidas usando a relação de tensão de cisalhamento deformação. No entanto, no que diz respeito a tensão de cisalhamento, pode ser mostrado que ambas as equações propostas nos modelos Goland e Reissner (1944) e Ojalvo e Eidinoff (1978) são para um valor arbitrário de α_3 . Além disso, a deformação usada nos dois casos são inadequadas para satisfazer o equilíbrio das forças verticais do adesivo. Com o pressuposto, $\sigma_1 = \sigma_2$, $Q'_a = 0$ para a equação 5.3, o que contradiz a equação 5.6 que é dada por $Q'_a = t_a \tau'_0 \neq 0$.

5.3.3 Aproximação numérica e matriz de rigidez do adesivo

Pressupondo que w varia linearmente através da espessura do adesivo em qualquer distância x , dita que θ_y deve também variar linearmente através da espessura do adesivo. O elemento finito de adesivo é desenvolvido considerando neste momento apenas o plano xz , os deslocamentos dos nós serão u , w e θ_y variando linearmente através da espessura do elemento. Na equação 5.23 são mostrados os deslocamentos nos nós do elemento e o vetor de forças nodais correspondentes, sendo que os índices 1 e 2 referem-se aos aderentes 1 e 2 respectivamente.

$$\{\delta\}^T = [u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2] \quad (5.23)$$

$$\{P\}^T = [X_1 \quad Z_1 \quad M_1 \quad X_2 \quad Z_2 \quad M_2] \quad (5.24)$$

A matriz de rigidez para o elemento adesivo $[k]$ relaciona $\{P\}$ e $\{\delta\}$, e segue a relação a seguir:

$$\{P\} = [k] \{\delta\} \quad (5.25)$$

A energia de deformação elástica, U , segundo Goland e Reissner (1944) e Ojalvo e Eidinoff (1978) é dada por:

$$U = \int_V \left(\frac{(\sigma_{zz}^a)^2}{2E_a} \right) + \left(\frac{(\sigma_{xz}^a)^2}{2G_a} \right) dV = \int_z \left(\frac{(\sigma_{zz}^a)^2}{2E_a} \right) + \left(\frac{(\sigma_{xz}^a)^2}{2G_a} \right) A_a dz \quad (5.26)$$

sendo A_a a área projetada do adesivo no plano xz .

Substituindo as equações 5.12 e 5.15 na equação 5.26 e integrando-se, tem-se:

$$U = \frac{E_a A_a}{2t_a} (w_1 - w_2)^2 + \frac{G_a A_a}{2} \left[\left(\frac{u_1 - u_2}{t_a} \right)^2 t_a + \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)^2 t_a \alpha_1^2 + \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{t_a} \right)^2 \frac{t_a^3 \alpha_2^2}{12} \right] \\ + \frac{G_a A_a}{2} \left[2 \left(\frac{u_1 - u_2}{t_a} \right) \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) t_a \alpha_1 \right] \quad (5.27)$$

Os termos i, j da matriz de rigidez $[k]$ são determinados a partir da equação 5.28, que é obtida a partir das condições de estacionalidade do funcional da energia U :

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_i \partial \delta_j} \quad (5.28)$$

sendo δ_i os deslocamentos do vetor nodal definido na equação 5.23.

Analisando o termo (1, 3), apenas a título de exemplo, chega-se a:

$$k_{13} = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_1 \partial \delta_3} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_1 \partial \theta_1} = \frac{G_a A_a \alpha_1}{2} \quad (5.29)$$

Repetindo este procedimento para todos os termos da equação 5.28 a matriz de rigidez do elemento adesivo pode ser determinada, chegando-se a:

$$[k] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 & -C_1 & 0 & C_3 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & -C_2 & 0 \\ C_3 & 0 & C_4 & -C_3 & 0 & C_5 \\ -C_1 & 0 & -C_3 & C_1 & 0 & -C_3 \\ 0 & -C_2 & 0 & 0 & C_2 & 0 \\ C_3 & 0 & C_5 & -C_3 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

sendo

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{G_a A_a}{t_a} \\
 C_2 &= \frac{E_a A_a}{t_a} \\
 C_3 &= C_1 \alpha_1 \frac{t_a}{2} \\
 C_4 &= C_1 \left(\alpha_1^2 + \frac{\alpha_2^2}{3} \right) \frac{t_a^2}{4} \\
 C_5 &= C_1 \left(\alpha_1^2 - \frac{\alpha_2^2}{3} \right) \frac{t_a^2}{4}
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

A matriz de rigidez do elemento da equação 5.30 é utilizada para para a análise de placa. Para a análise considerando o estado plano de tensão, onde:

$$\{\delta\}^T = [u_1 \quad u_2] \tag{5.32}$$

A matriz de rigidez é do tipo:

$$[k] = \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & C_1 \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

Para a análise considerando o estado plano de tensão a tensão que pode ser analisada é apenas a tensão cisalhante.

Elemento usando o modelo de Goland-Reissner

De acordo com a teoria proposta por Goland e Reissner (1944):

$$\alpha_1 = 1 \text{ e } \alpha_2 = 0 \tag{5.34}$$

Os termos da matriz de rigidez para o elemento adesivo utilizando esta teoria são obtidos

substituindo a equação 5.34 em 5.31, o que resulta em:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{G_a A_a}{t_a} \\
 C_2 &= \frac{E_a A_a}{t_a} \\
 C_3 &= C_1 \alpha_1 \frac{t_a}{2} \\
 C_4 &= C_1 \frac{t_a^2}{4} \\
 C_5 &= C_1 \frac{t_a^2}{4}
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Neste caso considera-se a tensão cisalhante como sendo constante através da espessura do adesivo.

Elemento usando o modelo de Ojalvo-Eidinoff

De acordo o modelo proposta por Ojalvo e Eidinoff (1978), adota-se:

$$\alpha_1 = 1 \text{ e } \alpha_2 = 1 \tag{5.36}$$

Os termos da matriz de rigidez para o elemento adesivo utilizando esta teoria são obtidos substituindo a equação 5.36 em 5.31, o que resulta em:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{G_a A_a}{t_a} \\
 C_2 &= \frac{E_a A_a}{t_a} \\
 C_3 &= C_1 \alpha_1 \frac{t_a}{2} \\
 C_4 &= C_1 \frac{t_a^2}{3} \\
 C_5 &= C_1 \frac{t_a^2}{6}
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Para este modelo a distribuição da tensão cisalhante na espessura do adesivo é linear.

Elemento usando o modelo de Carpenter

A matriz de rigidez proposta por Carpenter (1980a) é obtida assumindo:

$$\alpha_1 = 0 \text{ e } \alpha_2 = 0 \quad (5.38)$$

Para o elemento de Carpenter (1980a) o elemento funciona com corpos rígidos conectados, ou seja, os aderentes são considerados como corpos rígidos. Assim, a matriz $[T]$ da equação 5.39 é utilizada para interligar os graus de liberdade dos aderentes com o adesivo, com isso, de acordo com o modelo, resolve-se os problemas de equilíbrio do adesivo.

A matriz de rigidez ainda depende de uma multiplicação de uma matriz de acoplamento $[T]$ que esta descrita pela equação 5.39.

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_c}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{t_r}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

A matriz de rigidez $[\bar{k}]$, utilizando a teoria de Carpenter (1980a), é obtida a partir da equação 5.40.

$$[\bar{k}] = [T][k][T]^T \quad (5.40)$$

onde $[k]$ dado por:

$$[k] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Resolvendo a multiplicação matricial da equação 5.40, obtém se:

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \frac{t_c}{2}C_1 & -C_1 & 0 & \frac{t_r}{2}C_1 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & -C_2 & 0 \\ \frac{t_c}{2}C_1 & 0 & \frac{t_c^2}{4}C_1 & -\frac{t_c}{2}C_1 & 0 & \frac{t_c t_r}{4}C_1 \\ -C_1 & 0 & -\frac{t_c}{2}C_1 & C_1 & 0 & -\frac{t_r}{2}C_1 \\ 0 & -C_2 & 0 & 0 & C_2 & 0 \\ \frac{t_r}{2}C_1 & 0 & \frac{t_r t_c}{4}C_1 & -\frac{t_r}{2}C_1 & 0 & \frac{t_r^2}{2}C_1 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Desta forma, a matriz de rigidez do adesivo para o modelo de Carpenter (1980a) esta descrita.

5.4 Cálculo do campo de tensões nas juntas

O cálculo da tensão é feito de acordo com o método proposto por Tong e Sun (2003a) que apresenta bons resultados tanto para estruturas planas quanto para estruturas curvas. O cálculo é desenvolvido seguindo a equação 5.43, abaixo apresentada.

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (5.43)$$

onde o vetor $\{\sigma\}$ é o vetor contendo as tensões no elemento, a matriz $[D]$ é a matriz das propriedades dos materiais e $\{\epsilon\}$ são as deformações. O cálculo das deformações e a montagem da matriz das propriedades dos materiais são demonstradas respectivamente pelas equações 5.44 e 5.45.

$$[D] = \begin{bmatrix} E_a & 0 & 0 \\ 0 & G_a & 0 \\ 0 & 0 & G_a \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{w_1 - w_2}{t_a} \\ \frac{v_1 - v_2}{t_a} + \frac{t_c}{2} \theta_{x1} + \frac{t_r}{2} \theta_{x2} \\ \frac{u_1 - u_2}{t_a} - \frac{t_c}{2} \theta_{y1} - \frac{t_r}{2} \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

Observa-se que este modelo pressupõe uma distribuição constante das tensões normais e cisalhantes no adesivo, e é compatível com os modelos apresentados anteriormente.

5.5 Conclusão

Neste capítulo foi apresentado o comportamento mecânico do reparo e a modelagem da camada adesiva, apresentação de teorias de camada adesiva já desenvolvidas por outros autores, utilizando como base estas teorias, apresentação da formulação utilizando o Método dos Elementos Finitos empregada para o desenvolvimento do elemento presente nesta dissertação.

Capítulo 6

Critério de projeto para dimensionamento e seleção de reparos

6.1 Introdução

Um material sob a aplicação de uma determinada carga mecânica sofre alterações nas suas condições de equilíbrio, que podem ser avaliadas, usando-se modelos matemáticos representativos através de suas variáveis de estado mecânicas que representam grandezas do tipo tensão de tração, de compressão, de flexão, de cisalhamento, entre outras. Os materiais apresentam um comportamento bem definido até determinados limites de carga mecânica significativas, inclusive perdendo a capacidade de resistir às cargas mecânicas.

No contexto da mecânica das estruturas, três estados podem ser definidos previamente. Estes estados são definidos como segue: o estado de alongamento elástico, o estado de alongamento permanente ou de dano e o estado de ruptura. Estes estados possuem limites extremos de resistência mecânica à carga aplicada, a partir dos quais se modifica o comportamento do material, passando de um estado ao outro. A ultrapassagem destes limites pode culminar com a ruptura total do material.

Para prever a mudança de estado de uma estrutura com reparos, dois critérios serão usados. O primeiro critério é baseado na mecânica da fratura linear elástica, cujos princípios básicos serão apresentados de forma resumida neste capítulo. O segundo critério, refere-se ao monitoramento do estado de alongamento elástico do domínio do adesivo. Neste caso, usa-se um método ligado a tensão de von Mises máxima admissível para o adesivo.

6.2 Critério de projeto baseado em parâmetros da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE)

Neste item, será apresentada, uma breve descrição dos aspectos estruturais da mecânica da fratura aplicados a problemas bidimensionais. Os aspectos ligados à engenharia dos materiais com relação à micro-estrutura e a fenomenologia da fratura não serão discutidos, e podem ser encontrados em livros clássicos da literatura (Broek 1987), (Gdoutos 1993), (Kanninen e Popelar 1985).

Este critério de falha é considerado, pois na aplicação aeronáutica, os reparos estruturais são muito utilizados para restituir a integridade estrutural das fuselagens, quando são detectadas trincas devido às cargas de trabalho.

6.2.1 Conceitos básicos da MFLE

A prevenção contra a falha de uma estrutura é o principal motivo para a realização da análise estrutural. A fratura é apenas um dos exemplos pelo qual a estrutura pode falhar. O mecanismo de falha catastrófica por fratura caracteriza-se por um crescimento instável e extremamente rápido da trinca, que é, geralmente, a etapa final do processo de falha. A falha por fadiga ocorre quando um componente estrutural, ou corpo de prova, submetido a testes de fadiga fratura-se em duas partes distintas. A falha por fadiga geralmente ocorre com cargas que, se aplicadas estaticamente não produziram dano à estrutura. O ponto de partida da falha é, normalmente, uma região com concentração de tensão, na presença ou não de um dano inicial, que pode se transformar em uma trinca. Um furo, feito, por exemplo, para a instalação de um rebite, é uma região de concentração de tensão em relação ao carregamento aplicado. O dano pode estar presente na estrutura de diversas formas como: arranhões, trincas, vazios etc., oriundos do próprio processo de fabricação ou do uso indevido em serviço. Uma vez que a estrutura danificada é submetida a cargas cíclicas, uma trinca poderá se desenvolver e aumentar de tamanho em um processo conhecido como crescimento da trinca por fadiga. Inicialmente o crescimento da trinca é estável e lento até que a trinca atinja o seu comprimento crítico, onde há uma região de propagação instável, e a estrutura não mais possui condição de suportar as cargas de serviço, conduzindo a fratura. Na Mecânica da Fratura Linear Elástica, o parâmetro que mede de forma indireta o efeito da concentração de tensão nas proximidades da ponta da trinca é denominado por fator de intensidade de tensão (K). Os conceitos para sua obtenção não são aqui revisados, podendo ser encontrado em vários textos

básicos de Mecânica da fratura, tais como Gdoutos (1993), Kanninen e Popelar (1985), Becker e Shipley (1992), Broek (1982), Silveira (1997), Useche (2007).

Fatores de intensidade de tensão

Existem três tipos de fatores de intensidade de tensão (K_I , K_{II} e K_{III}), que correspondem, respectivamente, aos modos *I*, *II* e *III* de abertura da trinca, conforme ilustra a Figura 6.1 (Broek 1982).

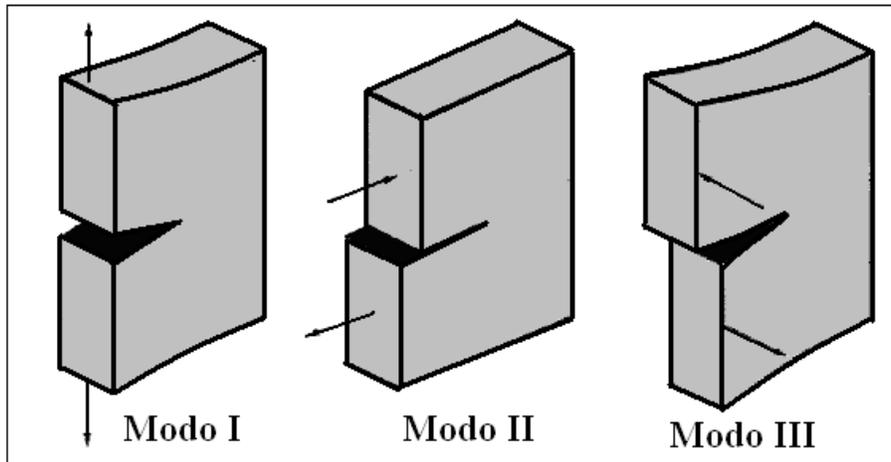


Figura 6.1: Modos de abertura da trinca.

Denomina-se de modo *I* quando a trinca é solicitada por forças de tração perpendicular ao plano onde se encontra. O modo *II* caracteriza-se pela aplicação de uma força de cisalhamento paralela ao eixo da trinca em uma representação bidimensional. O modo *III* corresponde à aplicação de uma força de cisalhamento perpendicular ao plano que contém a trinca em uma representação bidimensional.

Os campos de tensão e deslocamento, na região da trinca, são usualmente descritos em termos de um sistema de coordenadas, com origem em sua ponta, conforme mostrado na Figura 6.2 e são definidas através de funções paramétricas, envolvendo o fator de intensidade de tensão K , a distância r em relação a ponta da trinca e o ângulo θ , formado com o eixo x (Broek 1987).

Considerando uma placa infinita sob um carregamento bidimensional, os campos de tensões, para o caso de estado plano de tensões podem ser obtidos através das seguintes equações, para o

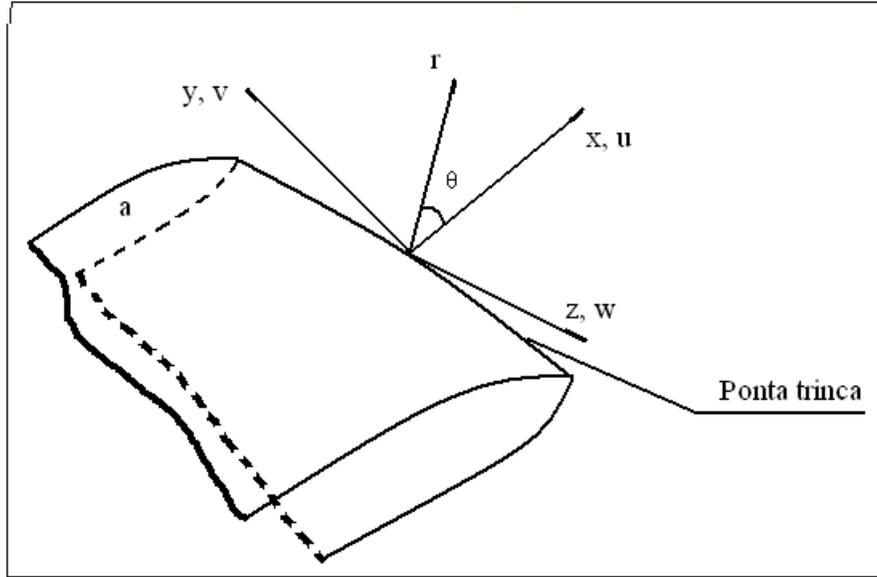


Figura 6.2: Coordenada da trinca.

modo I (Paris e Sih 1965).

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\
 \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

sendo K_I o fator de intensidade de tensão para o modo I .

As equações (6.1) permitem avaliar as tensões para regiões perto da ponta da trinca apenas. O campo completo de tensões é obtido pela superposição dos demais esforços que ocorrem na estrutura, e podem ser representados por:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + 2^\circ termo + 3^\circ termo + \dots + n^\circ termo \tag{6.2}$$

Para pequenos valores de r , todos os termos são finitos, mas, o primeiro termo tende a infinito uma vez que r tende a zero. Assim, todos os termos subsequentes podem ser desconsiderados nas regiões próximas à ponta da trinca. Para $r \rightarrow 0$, o primeiro termo é o único termo com relevância e a solução para a equação (6.1) permite uma boa aproximação para casos onde o comportamento do material na ponta da trinca não envolve dissipação de energia por plastificação significativa.

Pode-se também obter, considerando o carregamento em modo I , os deslocamentos (u, v) de qualquer ponto da estrutura próximo à trinca, usando-se as seguintes expressões.

$$\begin{aligned} u &= \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left((2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ v &= \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left((2\kappa - 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

sendo para o estado plano de deformação $\kappa = 3 - 4\nu$ e para o estado plano de tensão $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ e o módulo de cisalhamento $G = E/2(1 + \nu)$.

Modelo numérico para cálculo dos parâmetros da MFLE - Elementos quarter-point

Existem vários métodos para a avaliação dos fatores de intensidade de tensão K . As metodologias desenvolvidas são geralmente baseadas nos campos de deslocamentos ou em critérios de energia. O método utilizado para este trabalho é o método baseado no deslocamento.

O método consiste na determinação do fator de intensidade de tensão K , a partir do campo de deslocamentos que define a abertura da trinca.

Para o cálculo de K_I , é gerado um tipo de elemento para a região da ponta da trinca chamado *quarter point* (Figura 6.3). O elemento recebe este nome, pois desloca-se o nó central das laterais para a posição de 1/4 da origem, aproximando-o do nó que determina a ponta da trinca e mantendo as mesmas funções de forma. Com isso, cria-se uma singularidade, onde o Jacobiano do nó que representa a ponta da trinca assume o valor zero. Este elemento é de simples implementação, e melhora a precisão da análise numérica, aliviando os requisitos de refinamento da malha na região da ponta da trinca.

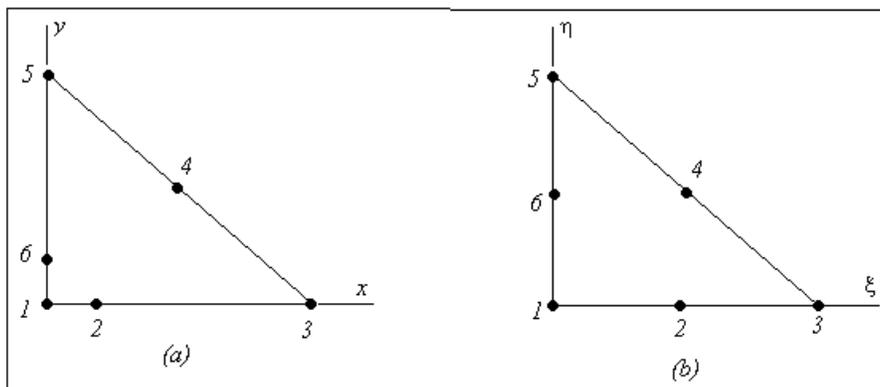


Figura 6.3: (a) Elemento quarter point e (b) Elemento normal.

Pode-se demonstrar que o Jacobiano tende a zero, observando um elemento unidirecional quadrático. Sabe-se que os deslocamentos são interpolados no espaço de referência de acordo com a equação 6.4.

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)u_i \quad (6.4)$$

para o caso de um elemento com três nós, conforme o lado 1 – 3 do elemento da Figura 6.4. Neste caso, as seguintes funções de forma são adotadas:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \\ N_2(\xi) &= (1 - \xi^2) \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Para o espaço geométrico, tem-se a transformação da equação 6.6.

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta)x_i \quad (6.6)$$

O que resulta em:

$$x = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi)x_1 + (1 - \xi^2)x_2 + \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)x_3 \quad (6.7)$$

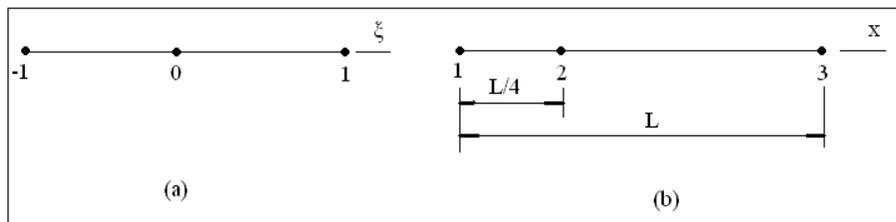


Figura 6.4: Elemento unidirecional (a) espaço de referência e (b) espaço geométrico.

Escolhendo $x_1 = 0$, $x_2 = L/4$ e $x_3 = L$, ou seja, deslocando o nó central (nó 2), para a posição $L/4$, tem-se a representação no espaço isoparamétrico de acordo com a equação 6.8.

$$x = (1 - \xi^2)\frac{L}{4} + \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)L \quad (6.8)$$

A equação que relaciona as coordenadas globais com as coordenadas locais, mostrado na Figura 6.4 é mostrada abaixo:

$$\xi = -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L}} \quad (6.9)$$

Para o cálculo do Jacobiano, deriva-se a equação 6.8 em função de ξ e substituí-se a equação 6.9 nesta derivada, obtendo a relação abaixo:

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{L}{2}(1 + \xi) = \sqrt{\frac{x}{L}} \quad (6.10)$$

O que torna o Jacobiano nulo em $x = 0$ e corresponde a $\xi = -1$, que é o nó a ser gerado na ponta da trinca.

Sabendo que a deformação é dada pela equação 6.11.

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = J^{-1} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (6.11)$$

O nó x_1 iguala-se a zero ocorrendo a singularidade.

Método computacional de determinação dos fatores de intensidade de tensão

O método baseia-se na obtenção dos valores da relação $\frac{|v|}{\sqrt{r}}$ em pontos próximos à ponta da trinca e em extrapolá-los para onde a singularidade, ou seja o ponto onde o raio é zero, conforme mostrado na Figura 6.5. Assim, avalia-se inicialmente o campo de deslocamentos para uma dada configuração de abertura, e define-se uma abertura $|v|$, como mostrado na Figura 6.5, considerando $\theta = 180^\circ$.

O método consiste na implementação da equação (6.3), para a determinação do fator de intensidade de tensão K_I diretamente dos deslocamentos obtidos após a execução do programa de elementos finitos.

Determina-se os valores dessas equações para $\theta = 180^\circ$, os valores de K_I podem ser obtidos para trinca não simétrica em modo I , ou seja, os deslocamentos dos nós indicados por J e L não necessitam ser iguais.

$$v = (\kappa + 1) \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (6.12)$$

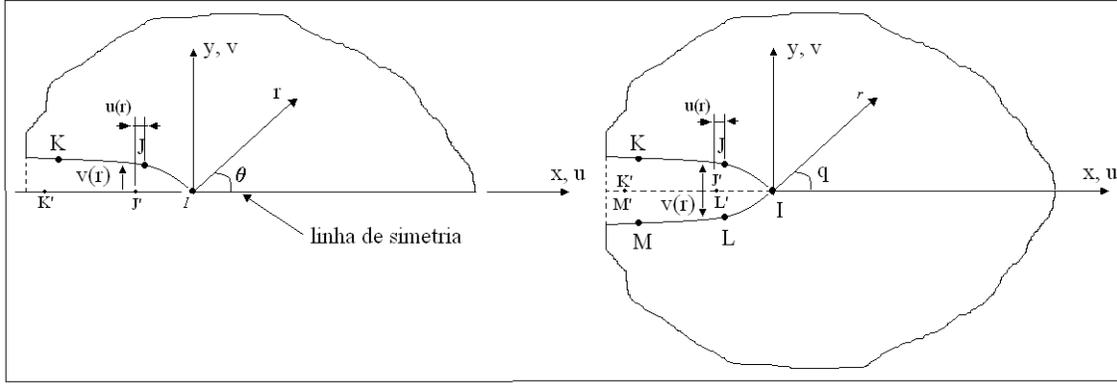


Figura 6.5: Modelo da ponta da trinca.

$$K_I = \sqrt{2\pi} \frac{2G}{1 + \kappa} \frac{|\Delta v|}{\sqrt{r}} \quad (6.13)$$

sendo que Δv representa a medida da diferença dos deslocamentos dos nós $(J - L)$ e $(K - M)$. Estabelecendo-se uma equação de reta a partir dos valores nos pontos conhecidos de deslocamento na borda da trinca, pode-se calcular o coeficiente b e c da reta estipulada, conforme abaixo.

$$\frac{|\Delta v|}{\sqrt{r}} = c + br \quad (6.14)$$

No ponto limite onde r tende a zero, tem-se:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\Delta v|}{\sqrt{r}} = c \quad (6.15)$$

Assim, determina-se o valor de c para o nó I , e obtém-se, o fator de intensidade de tensão para a ponta da trinca:

$$K_I = \sqrt{2\pi} \frac{2G}{1 + \kappa} c \quad (6.16)$$

Neste caso, a falha é prevista quando o fator de intensidade de tensão calculado pela equação 6.16, ultrapassa o valor do fator de intensidade de tensão crítico K_{Ic} , a menos de um coeficiente de segurança, conforme relação a seguir:

$$K_I \leq \frac{K_{Ic}}{n} \quad (6.17)$$

onde K_I é o fator de intensidade de tensão calculado com ou sem a presença do reparo, K_{Ic} é o fator de intensidade de tensão crítico, que depende do material empregado e n é o fator de segurança.

6.3 Critério de falha baseado no nível de tensão na camada de adesivo

O segundo critério de falha utilizado neste trabalho, é baseado na análise da resistência da camada adesiva, situada entre o reparo e a estrutura. A análise estrutural de juntas coladas, conduz a regiões de alta concentração de tensão no adesivo em regiões situadas próxima ao contorno do reparo. Assim, os modos de falha considerados para a camada adesiva dependem das propriedades do material do adesivo e do carregamento aplicado. Neste caso a falha está associada a perda da linearidade do material do adesivo, ou à sua ruptura.

6.3.1 Critério de falha considerando a máxima tensão de von-Mises (TMvM)

Na mecânica dos sólidos, vários critérios de falha podem ser aplicados aos materiais usuais da engenharia. Dentre outros, destacam-se os critérios da tensão normal máxima, da tensão cisalhante máxima e da energia de distorção.

O critério da tensão normal máxima pode ser facilmente aplicado comparando-se a tensão normal σ_{zz} do adesivo, que é obtida diretamente do programa, com o limite de escoamento do material do adesivo a menos de um fator de segurança.

O critério do cisalhamento máximo é aplicado seguindo a equação abaixo:

$$\tau_{max} = \sqrt{\sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2} \leq \frac{S_y}{n} \quad (6.18)$$

onde n é o coeficiente de segurança. Para o critério de energia de distorção, usa-se a tensão equivalente de von Mises que é dada pela equação abaixo:

$$S_{eqv} = \frac{1}{6} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)} \quad (6.19)$$

onde S_{eqv} é a tensão equivalente de von Mises.

Porém, de acordo com as hipóteses usadas no modelo do adesivo $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$. Desta forma, a tensão de von Mises pode ser obtida por:

$$S_{eqv} = \frac{1}{6} \sqrt{2[\sigma_{zz}^2 + 3(\sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)]} \quad (6.20)$$

Agora a tensão máxima de von Mises é obtida por:

$$S_{TMvM} = \max S_{eqv} \quad (6.21)$$

Para o rendimento do adesivo é feita a análise da tensão máxima de von Mises obtida pela equação 6.21.

6.4 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados dois critérios de projeto que podem ser aplicados para reparos e reforçadores colados. Para o caso da utilização da Mecânica da Fratura Linear Elástica foi apresentado de forma resumida os parâmetros da mecânica da fratura, formas de abertura da trinca e formas de avaliação dos fatores de intensidade de tensão, bem como elementos especiais (quarter-point) utilizados para um cálculo mais preciso dos fatores de intensidade de tensão. Para o caso de falha estática sugere-se o caso do critério de energia de distorção, onde a tensão equivalente de von Mises é utilizada empregando-se para o seu cálculo as tensões normais (σ_{zz}) e as tensões cisalhantes (σ_{yz} e σ_{xz}) no adesivo.

Capítulo 7

Implementação Computacional e validação

7.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados a infraestrutura computacional e os principais algoritmos utilizados neste implementação. Todos os detalhes das etapas do programa serão apresentados, de forma a gerar uma documentação básica do sistema que será disponibilizado para futuros alunos.

7.2 Infraestrutura computacional

Para a implementação foi usada a infraestrutura na Tabela 7.1. Todos os programas desenvolvidos foram escritos em linguagem Fortran.

Tabela 7.1: Infraestrutura computacional.

Item	Nome	Informação
Sistema Operacional	Microsoft Windows XP Professional	Service Pack 3
Compilador Fortran	Compaq Visual Fortran Professional Edition	6.6.0
Biblioteca	IMSL	
Análise Estrutural	Ansys	10.0
Processador	AMD Athlon 64X2 Dual	2.61 GHz 4.0 GB RAM

7.3 Estrutura geral da implementação

Algoritmo base do sistema é apresentado na seqüência:

- Pré-processamento
- Processamento

- Pós-processamento

A parte de pré-processamento é efetuado no software Ansys e a transferência dos dados para o simulador escrito em Fortran é feita utilizando um programa chamado *Ansys2meflab*, o qual, gera um arquivo de dados com todas as propriedades do material, nós, elementos, restrições e carregamentos aplicados.

A parte de integração é o algoritmo mais importante do programa, onde são efetuadas a leitura dos dados em um arquivo gerado pelo programa *Ansys2meflab*, a montagem da matriz de rigidez global e por fim a resolução do sistema linear, onde são obtidos todos os deslocamentos nodais. Este programa é denominado Meflab e vem sendo desenvolvido pelo grupo do DMC há aproximadamente quatro anos((Cueto 2007a), (da Silva Júnior 2007)).

Na fase de pós-processamento, a partir dos deslocamento nos nós são feito os cálculos do fator de intensidade de tensão, quando houver trinca, e o cálculo das tensões nos elementos, os dados obtidos são transferidos novamente para o programa do Ansys por um programa chamado *res2Ansys*, onde são feitas as análises dos resultados.

7.3.1 Elementos desenvolvidos

Nesta etapa serão apresentados os elementos implementados pelo autor e elementos já implementados que foram utilizados no trabalho. A descrição é feita na Tabela 7.2.

Tabela 7.2: Elementos desenvolvidos.

Item	Descrição	Número de nós	Pontos de Integração	Desenvolvimento
1	Triangular/Isotrópico/Estado plano	6	6	Desenvolvido
2	Triangular/Anisotrópico/Estado plano	6	6	Desenvolvido
3	Quadrilátero/Isotrópico/Estado plano	4	4	Disponível
4	Quadrilátero/Anisotrópico/Estado plano	4	4	Desenvolvido
5	Quadrilátero/Isotrópico/Kirchhoff	4	4	Disponível
6	Quadrilátero/Anisotrópico/Kirchhoff	4	4	Desnvolvido
7	Adesivo/Tridimensional	8	0	Desenvolvido

Pode-se observar, que no escopo deste trabalho, os elementos com lei de material anisotrópico foram implementados e um elemento tridimensional hexaédrico de oito nós, adesivo foi desenvolvido e implementado.

7.3.2 Pré-processamento

O processo de pré-processamento do sistema é apresentado na Tabela 7.3.

Tabela 7.3: Pré-processamento.

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none">1. Escolha do elemento2. Escolha do material3. Definição da geometria4. Criação da malha de Elementos Finitos5. Aplicação de restrições6. Aplicação de carregamento7. Transferência para o MEFLAB<ol style="list-style-type: none">7.1. Identificação do elemento7.2. Identificação do material7.3. Identificação dos nós e elementos7.4. Gravação dos dados em um arquivo de texto *.dat (Ansys2mefflab)<ol style="list-style-type: none">a. Número de nósb. Número de elementosc. Número de materiaisd. Número de propriedades geométricas diferentese. Listagem dos nós e coordenadasf. Listagem dos elementos com suas respectivas informaçõesg. Restrições aplicadash. Carregamentos aplicados |
|---|

Com esta etapa finalizada, tem-se um arquivo de dados, obedecendo as características que o *MEFLAB* necessita para a leitura, contendo o número de nós e elementos, as propriedades do material, tipo de elemento utilizado, restrições da análise e carregamento aplicado.

7.3.3 Processamento

As tarefas básicas desta etapa estão descritas na Tabela 7.4. A leitura do arquivo gerado no pré-processamento, integração numérica para a obtenção da matriz de rigidez do elementos, montagem da matriz de rigidez global, cálculo do vetor de carga nodal equivalente e finalmente resolução do sistema linear.

Tabela 7.4: Processamento.

1. Leitura do arquivo de texto gerado pelo pré-processamento
2. Montagem da matriz de rigidez do elemento segundo a equação abaixo

$$[K_e] = \int_{\xi\eta} [B]^T [D] [B] \det J d\xi d\eta$$
3. Montagem da matriz de rigidez global
4. Cálculo da carga nodal equivalente

$$\{F\} = \int_L [N]^T [N] dx \{q\}$$
5. Resolução do sistema linear

A partir desta etapa os deslocamentos dos nós estão disponíveis, restando apenas o cálculo do fator de intensidade de tensão, quando for o caso, e as tensões no elemento, que serão feitas no pós-processamento.

7.3.4 Pós-processamento

O algoritmo para a parte de pós-processamento esta descrito na Tabela 7.5.

Tabela 7.5: Pós-processamento.

1. Cálculo do fator de intensidade de tensão na ponta da trinca

$$K_I = \sqrt{2\pi} \frac{2G_e c}{1+\kappa}$$
2. Cálculo da tensão no elemento

$$\{\sigma\} = [D][B] \{u_e\}$$
3. Exportação dos dados para o Ansys
 - 3.1. Gravação dos valores de deslocamento nos nós
 - 3.2. Gravando os valores das tensões no elemento
 - 3.3. Os dados são gravados em um arquivo de texto *.mac
4. Análise dos resultados

7.4 Validação do elemento adesivo

O elemento adesivo, já apresentado no capítulo 5, foi desenvolvido utilizando os artigos Goland e Reissner (1944), Ojalvo e Eidinoff (1978), Carpenter (1980b) e Tong e Sun (2003a), para a sua validação foi utilizado o resultado proposto por Tong e Sun (2003a) que utiliza a formulação proposta pelos outros três autores com uma mudança para a utilização de estruturas curvas. Na Figura 7.1 representa-se um esquema da estrutura utilizada para a validação, onde as chapas a serem coladas são de alumínio com as seguintes propriedades mecânicas: $E = 70GPa$, $\nu = 0,33$. As dimensões da peça são: $L = 150mm$, $c = 30mm$, $w = 10mm$ e a espessura da chapa de $5mm$. O material do adesivo apresenta módulo de elasticidade $E_a = 2,4GPa$ e módulo de cisalhamento $G_a =$

1,5GPa com espessura 0,15mm. A estrutura esta carregada com uma carregamento distribuído de tração no valor de $q = 60N/mm$.

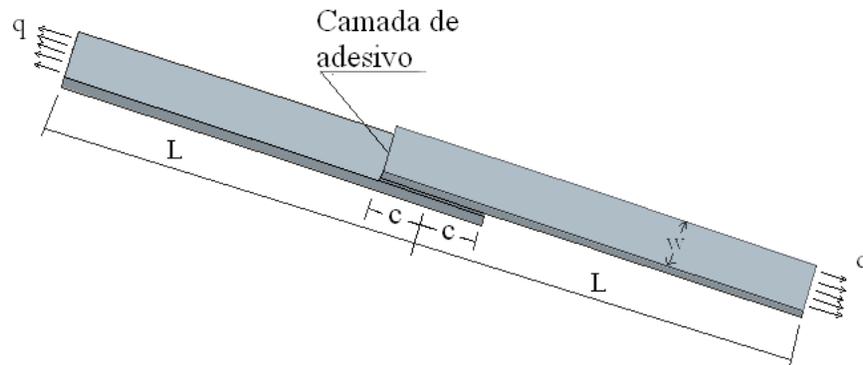


Figura 7.1: Esquema de validação do elemento adesivo.

O campo de tensões obtido para o adesivo e um gráfico contendo as tensões de cisalhamento no adesivo estão demonstrados nas Figuras 7.2 e 7.3, respectivamente. Na Figura 7.3, compara-se os resultados obtidos com o Meflab com aqueles publicados por Tong e Sun (2003a), com uma concordância entre eles. O resultado em valores de tensão de cisalhamento usadas na comparação são obtidos na linha média do campo de tensões mostrado na Figura 7.2.

A boa correlação obtida entre os resultados demonstra que a implementação efetuada é adequada para a análise em questão.

7.5 Validação do cálculo do fator de intensidade de tensão

Para a validação das rotinas de cálculo dos parâmetros da Mecânica da Fratura, foram feitas análises em uma placa de aço com propriedades mecânicas $E = 210 GPa$ e $\nu = 0,3$, com dimensões $0,4m \times 0,4m \times 0,02m$, submetida a uma sollicitação de tração de $\sigma = 1 MPa$, contendo uma trinca de comprimento $0,0267 m$ no centro conforme indica a Figura 7.4 (Silveira 1997).

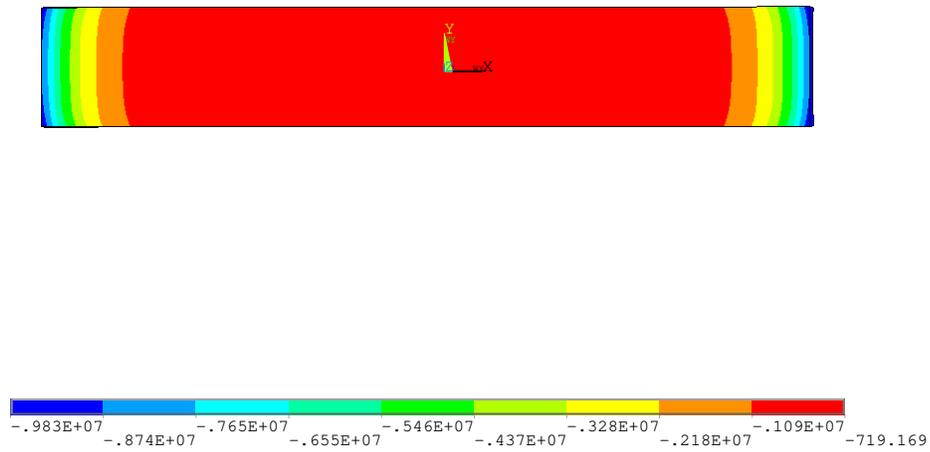


Figura 7.2: Campo de tensão cisalhante no adesivo em Pa.

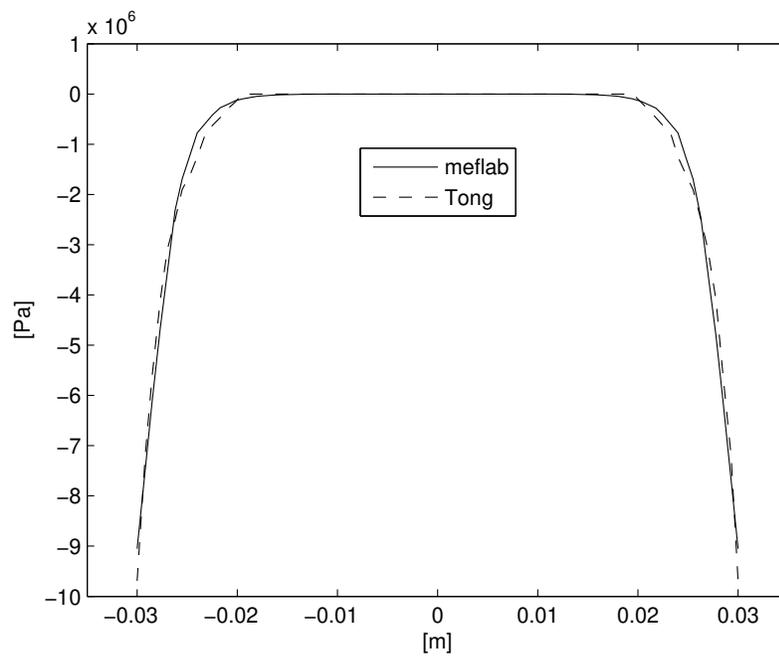


Figura 7.3: Comparação do resultado da tensão de cisalhamento no adesivo.

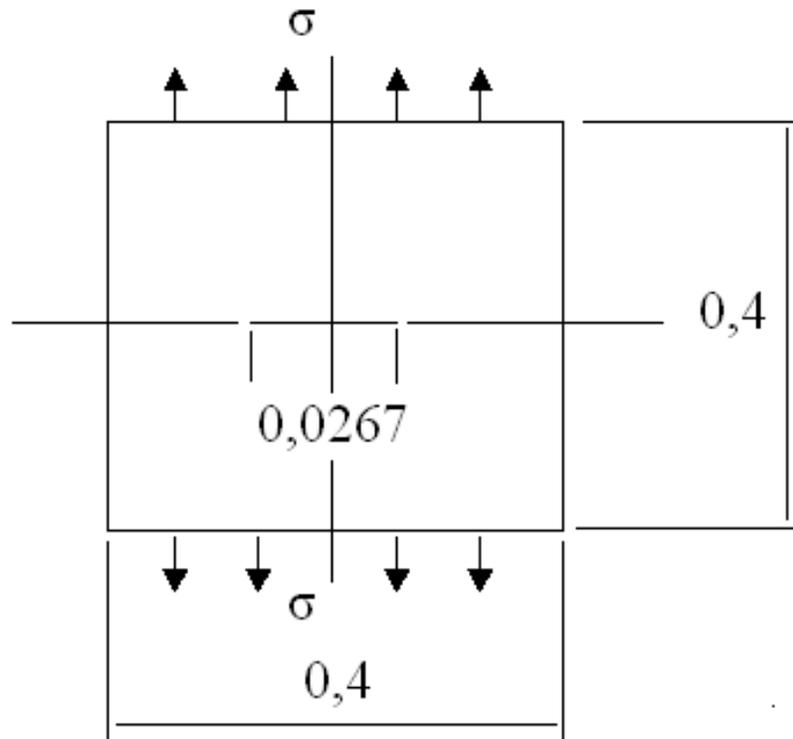


Figura 7.4: Modelo de placa submetida à tração.

Observa-se que as dimensões da placa são significativamente maiores que o comprimento da trinca, o que permite desprezar os efeito de borda para o cálculo do fator de intensidade de tensão. Pode-se através da equação 7.1, determinar o valor do fator de intensidade de tensão teórico, como sendo:

$$K_I = \sigma \sqrt{(\pi a)} \quad (7.1)$$

Este problema foi modelado por elementos finitos, considerando-se a simetria geométrica e de carregamento existente na peça. Com isso, a geração da malha, para o modelo, é efetuada através de 1/4 da peça somente.

Foram testadas três malhas com refinamentos distintos, com elementos triangulares, efetuando-se um refinamento maior na região da ponta da trinca. A Figura 7.5 representa uma ampliação das três malhas na região próxima a ponta da trinca com diferentes tipos de refinamento. A malha foi feita no Ansys 10.0 e os dados do modelo foram exportados para o Meflab usando-se um

Tabela 7.6: Comparação dos resultados obtidos com diferentes refinamentos.

Malha	Raio da Roseta [m]	Número de elementos	K_I FEM [$MPa.m^{1/2}$]	K_I Analítico [$MPa.m^{1/2}$]	Desvio [%]
1	0,0015	876	0,208643	0,204793	1,88
2	0,001	948	0,208622	0,204793	1,87
3	0,0005	1062	0,205059	0,204793	0,13

programa dedicado *ansys2meflab*. A resolução é realizada no Meflab. O refinamento das malhas é especificado pelo raio da roseta gerada na ponta da trinca, conforme ilustrado na Tabela 7.6.

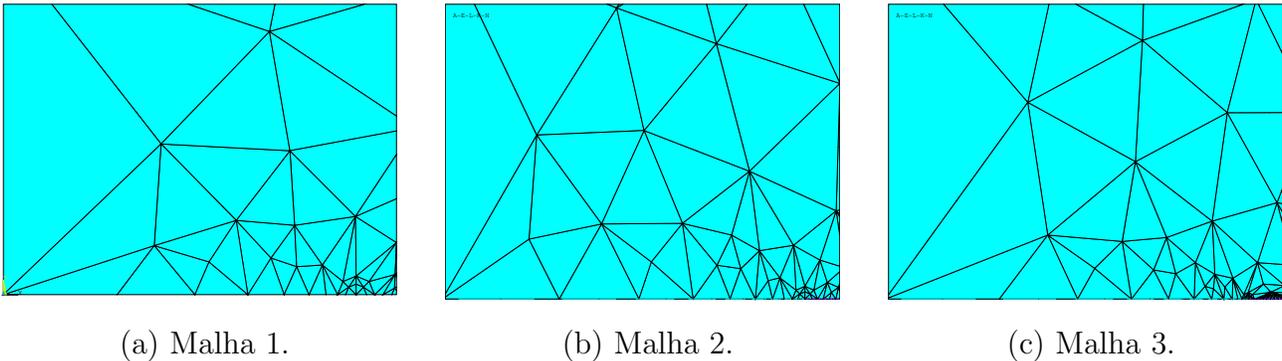


Figura 7.5: Três tipos de refinamento.

Os resultados dos cálculos dos fatores de intensidade de tensão, utilizando elementos triangulares de 6 nós, utilizando as malhas demonstradas na Figura 7.5, podem ser observados na Tabela 7.6. Nesta Tabela também são mostrados os resultados analíticos obtidos para o caso da chapa infinita.

Os erros encontrados em relação à solução analítica, para o caso da malha 3, é de 0,13 %, o que pode ser considerado satisfatório. Para todos os casos analisados nas próximas seções, o refinamento com a roseta de raio 0,0005m será adotado.

7.6 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas as implementações computacionais e algumas validações necessárias para a dissertação. As implementações para o pré-processamento foram desenvolvidas em APDL, (linguagem utilizada para o desenvolvimento de macros no programa Ansys). O programa desenvolvido para transferir dados do Ansys para o processamento no Meflab também foi desenvolvido utilizando a linguagem APDL (*ansys2meflab*). O processamento foi desenvolvido em FORTRAN, utilizando o programa Meflab. Parte do pós-processamento é feita no Meflab: o

cálculo das tensões e o cálculo do fator de intensidade de tensão quando há a presença de trincas. Os dados são transferidos para a sua visualização no Ansys através de um arquivo gerado pelo Meflab.

Capítulo 8

Resultados numéricos

8.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os resultados de análises para dois tipos de estruturas: chapas planas e cascas cilíndricas.

São considerados duas técnicas de adesão: rebites e cola. Considera-se também, dois tipos de reparos: isotrópico e laminado compósito. Como critério de falha considera-se separadamente os critérios da mecânica da fratura e de falha estática do adesivo.

8.2 Análise de juntas usando o critério de falha baseado na MFLE

Para o critério da MFLE foram analisadas chapas com trinca e carregamento no plano com e sem reparo, com reparos do tipo isotrópico rebitado, isotrópico colado e compósito colado, além de fazer uma comparação dos resultados.

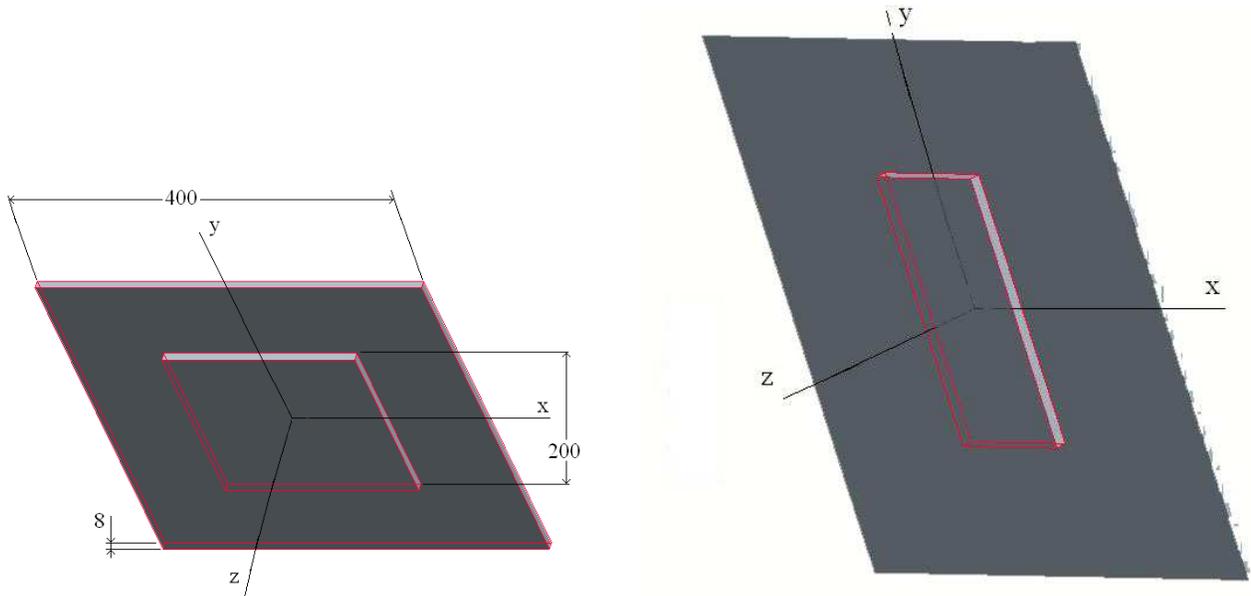
8.2.1 Aplicação em reparos isotrópicos rebitados

O objetivo deste estudo numérico é fazer uma análise do rendimento do reparo isotrópico rebitado, utilizando o fator de intensidade de tensão de modo I calculado na ponta da trinca como critério de projeto para a comparação dos diferentes reparos rebitados empregados. Adicionalmente, os resultados obtidos para reparos rebitados são comparados com os resultados obtidos para os reparos colados (Passalacqua e Pavanello 2008).

Para o reparo isotrópico rebitado serão considerados três tipos de geometria do reparo. Para cada geometria serão analisados seis espessuras de reparo. A chapa base localizada no plano x, y com dimensões de $0,4m \times 0,4m$ e espessura de $8mm$. A trinca na estrutura base é situada no

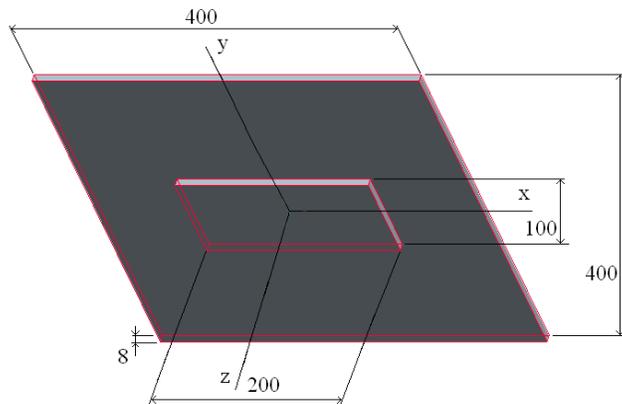
centro da chapa com dimensão $2a$ variando de $4mm$ a $100mm$. Três geometrias do reparo foram testadas e estão descritas abaixo:

- Reparo quadrado centralizado, com $0,2m \times 0,2m$ e espessura variando de $2mm$ a $12mm$.
- Reparo vertical centralizado, com $0,1m \times 0,2m$ e espessura variando de $2mm$ a $12mm$.
- Reparo horizontal centralizado, com $0,2m \times 0,1m$ e espessura variando de $2mm$ a $12mm$.



Reparo quadrado (a).

Reparo vertical (b).



Reparo horizontal (c).

Figura 8.1: Geometria dos reparos utilizados.

O material da chapa de base e do reparo são os mesmos, alumínio (Al 7075-T651) com propriedades mecânicas de módulo de elasticidade $E = 71,0GPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$ e fator de intensidade de tensão crítico $K_c = 29,7MPa\sqrt{m}$. A análise é feita considerando apenas

um quarto da estrutura total, ou seja, apenas o primeiro quadrante mostrado pela Figura 8.1(a). Na Figura 8.1(a) a trinca esta localizada paralela ao eixo x . As restrições no problema são as seguintes: para os nós com coordenada $y = 0$ e coordenada $x \geq a$ a restrição é para o grau de liberdade v , para os nós com coordenada $x = 0$ a restrição é para o grau de liberdade u , o carregamento é feito para a coordenada $y = 0, 2m$ na direção paralela ao eixo y no valor de $q = 1000N/m$ como mostrado na Figura 8.3.

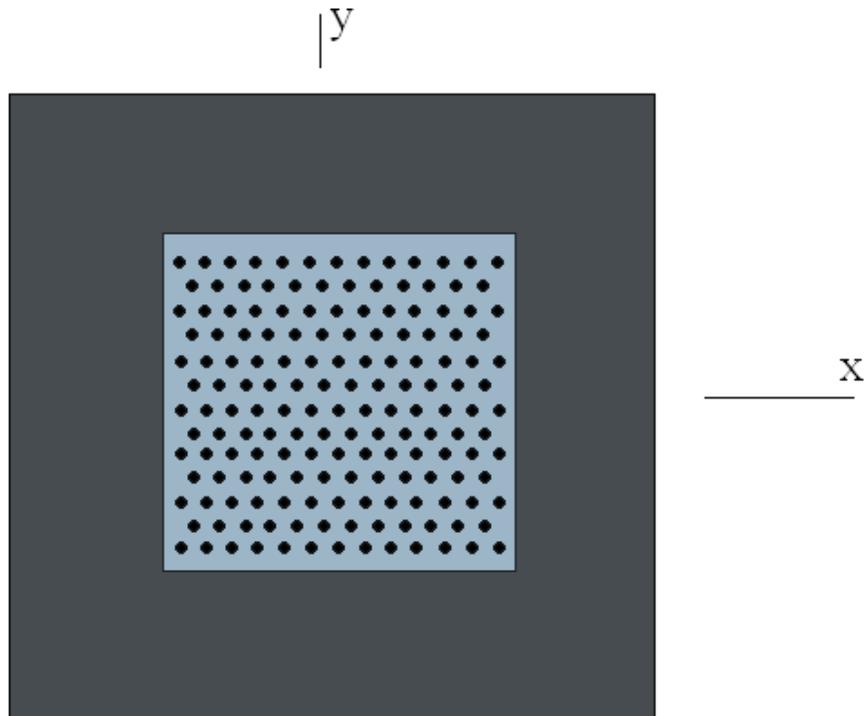


Figura 8.2: Esquema de rebitagem escalonada.

A esquema de rebitagem escolhido foi o escalonado, apresentado na Dissertação Garcia (1998), este esquema foi escolhido devido a apresentar o melhor desempenho em fadiga, comparado com os outros exemplos analisado pelo trabalho Garcia (1998), o esquema de rebitagem pode ser visualizado na Figura 8.2.

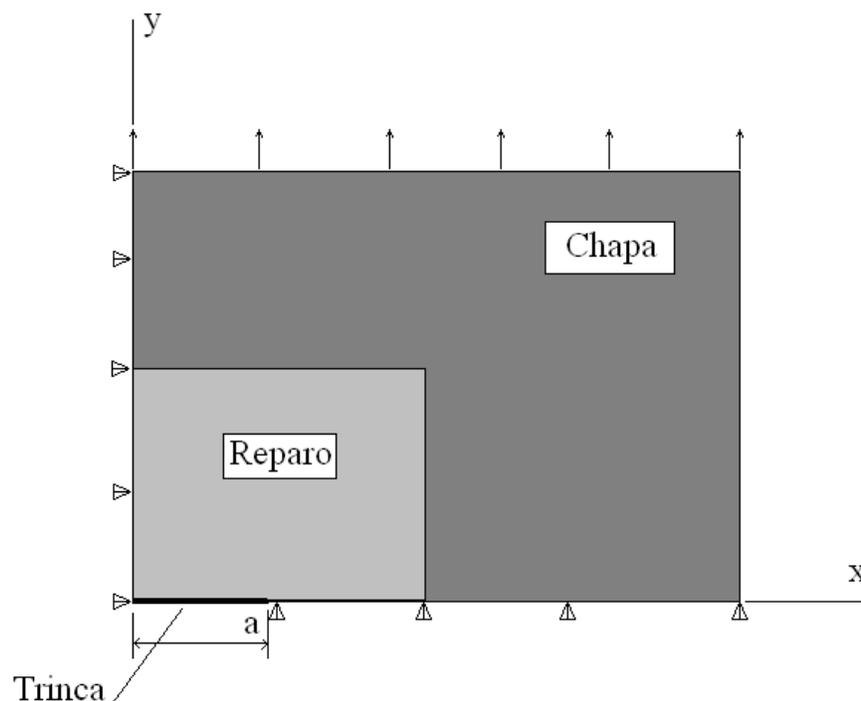


Figura 8.3: Diagrama da restrições, trinca e carregamentos aplicados.

Neste exemplo, o único critério de projeto considerado foi o de instabilidade para a propagação da trinca.

Os resultados das Figuras 8.4, 8.5 e 8.6 são referentes ao fator de intensidade de tensão de modo I (K_I), calculado para diferentes comprimentos de trinca, com e sem reparo. Ainda analisando as Figuras 8.4, 8.5 e 8.6, para todos os gráficos o eixo das abscissas refere-se ao comprimento da trinca ($2a$) em mm e o eixo das ordenadas ao valor de K_I em $MPa\sqrt{m}$. São mostrados os resultados de K_I para diferentes espessuras do material do reparo, em função dessa largura da trinca. Além disso, mostra-se a evolução de K_I da chapa sem reparo. Inclui-se também, o valor do fator de intensidade de tensão crítico (K_{Ic}) e o valor do fator de intensidade de tensão crítico ponderado por um fator de segurança (n), adotado com valor 2 neste trabalho.

Os resultados das Figuras 8.7, 8.8 e 8.9 são referentes ao cálculo do índice de desempenho relativo IDR , calculado para diferentes comprimentos de trinca e várias espessuras de reparo. Ainda nas Figuras 8.7, 8.8 e 8.9, para todos os gráficos a abscissas refere-se ao comprimento da trinca ($2a$) em mm e a ordenada ao valor do IDR em porcentagem, que é calculado conforme a equação 8.1. Cada linha dos gráficos refere-se ao IDR calculado para uma dada espessura de

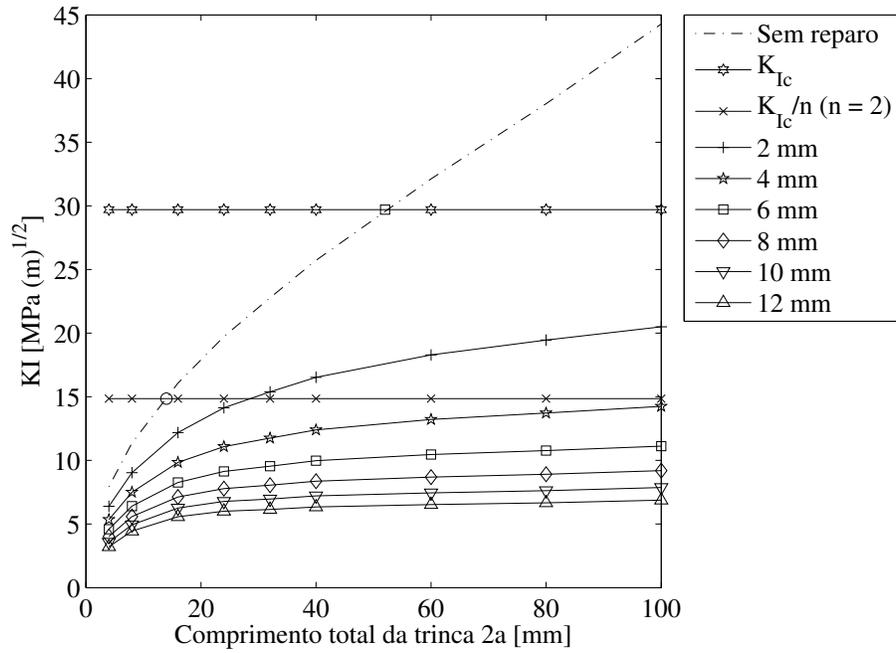


Figura 8.4: Variação do valor de K_I com o aumento da trinca para o reparo isotrópico quadrado.

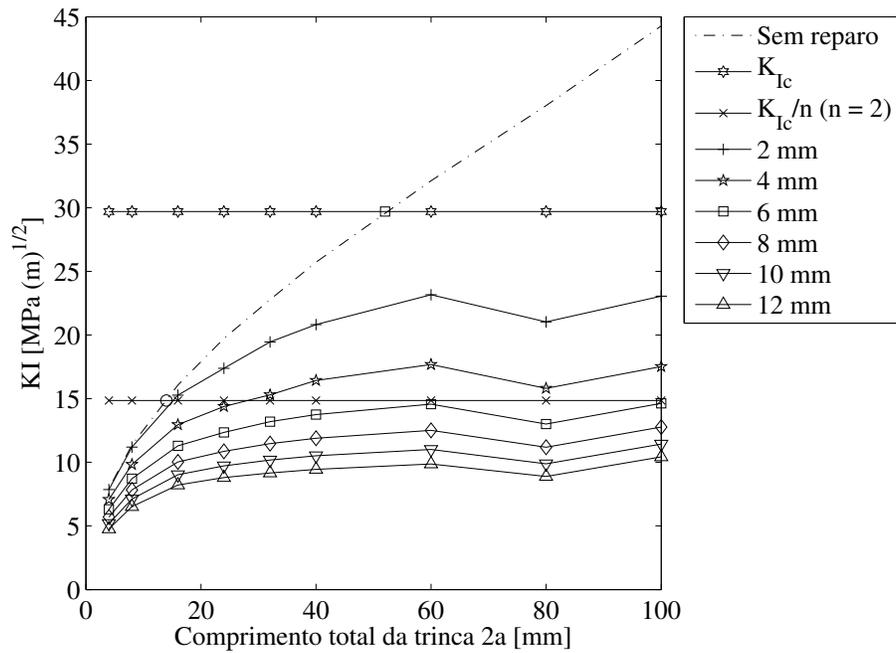


Figura 8.5: Variação do valor de K_I com o aumento da trinca para o reparo isotrópico vertical.

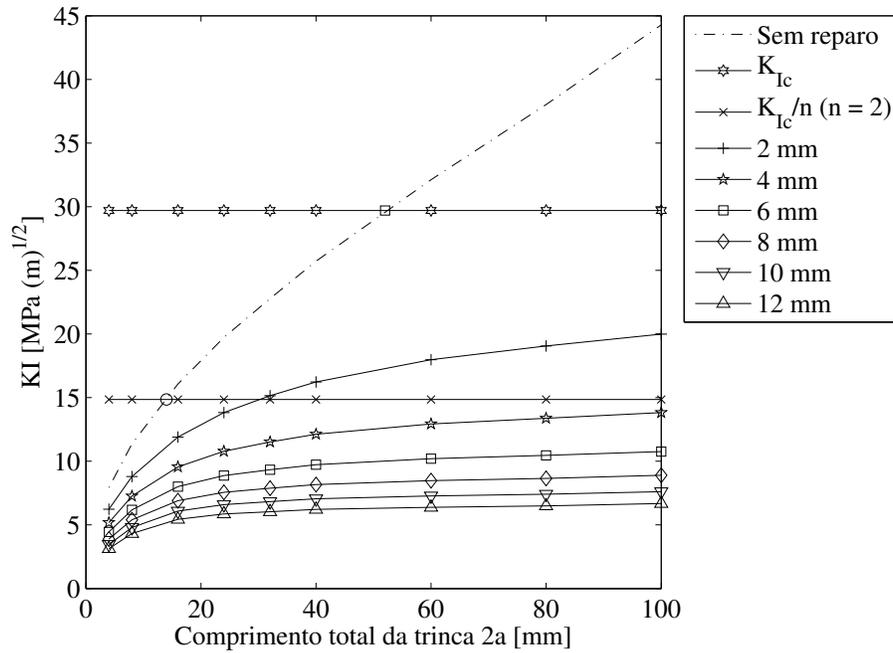


Figura 8.6: Variação do valor de K_I com o aumento da trinca para o reparo isotrópico horizontal.

reparo.

$$IDR = \frac{K_I(\text{semreparo}) - K_I(\text{comreparo})}{K_I(\text{semreparo})} 100\% \quad (8.1)$$

Analisando os gráficos das Figuras 8.4, 8.5 e 8.6, a partir do ponto indicado com 'quadrado' a propagação da trinca ocorrerá, ou seja, a aplicação do reparo deve ser feita antes da trinca atingir esse ponto $2a = 52mm$ para o caso da chapa sem reparo. O reparo deve pelo menos obedecer a algum coeficiente de segurança, como, por exemplo, o coeficiente de segurança igual a 2 proposto, o que corresponde ao ponto indicado com 'O' nos gráficos das Figuras 8.4, 8.5 e 8.6.

Analisando a Figura 8.4, observa-se que o limite de projeto do reparo, considerando $K_c/2$ como limite máximo admissível, corresponde a uma trinca de comprimento $2a$ igual a aproximadamente $14mm$. Nesta região todos os reparos calculados podem ser aplicados, com ganhos da ordem de 20% a 65% em função da espessura da chapa de reparo como pode ser visto na Figura 8.7. Para trincas com comprimento $2a$ acima de $14mm$, e abaixo de $52mm$, que corresponde ao valor crítico $K_I = K_{Ic}$ (ponto 'quadrado'), deve-se escolher um reparo com no mínimo 4 mm de espessura para atender os requisitos do projeto. Nesta região os reparos terão um índice de desempenho melhor. Ainda observando a Figura 8.4, tem-se que reparos com espessuras acima de $4mm$, garantem que não ocorrerá falha para chapas com trinca de até $2a = 100mm$.

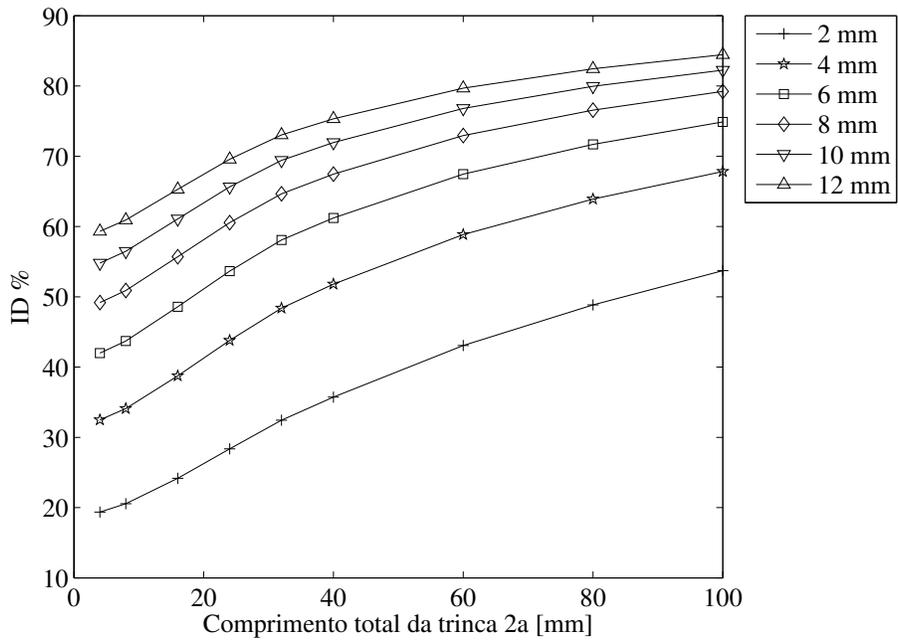


Figura 8.7: Índice de desempenho relativo do reparo isotrópico quadrado.

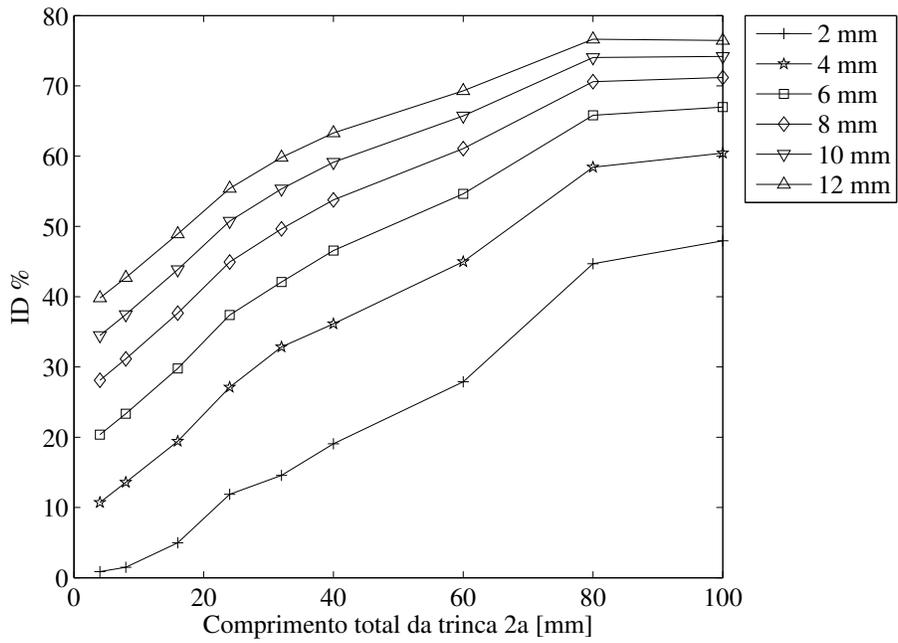


Figura 8.8: Índice de desempenho relativo do reparo isotrópico vertical.

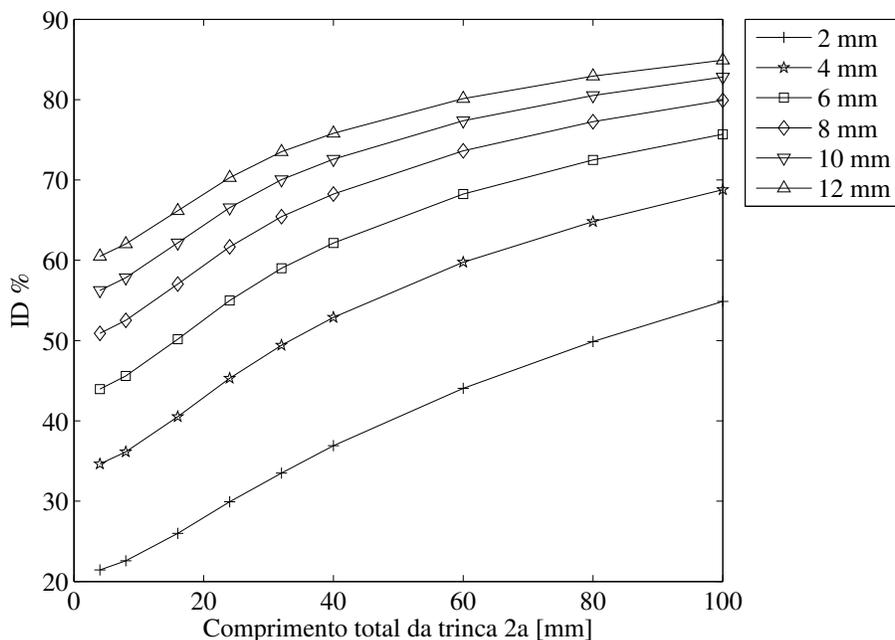


Figura 8.9: Índice de desempenho relativo do reparo isotrópico horizontal.

Analisando a Figura 8.5, para comprimentos de trinca inferiores a 14mm , observa-se que todos os reparos tem rendimentos inferiores ao caso anterior, sendo que todos eles apresentam rendimento abaixo de 50%.

Analisando os gráficos das Figuras 8.4, 8.5 e 8.6 e das Figuras 8.7, 8.8 e 8.9 observa-se, que para este tipo de carregamento, quando modifica-se a geometria do reparo, pode-se observar sensíveis modificações no rendimento dos reparos. O reparo horizontal (Figura 8.1c) tem o melhor rendimento global neste caso, para todos os comprimentos de trinca considerados. O reparo quadrado (Figura 8.1a) fornece bons índices de rendimento, todavia o peso adicional é duplicado. Para o caso do reparo vertical (Figura 8.1b) o resultado não foi satisfatório. As oscilações dos resultados mostrados nas Figuras 8.5 e 8.8, ocorrem pois, os comprimentos de trinca considerados atingem o final da chapa de reparo, o que inclui efeitos de borda não considerados nesta análise.

Outro aspecto não considerado nesta análise é o efeito de concentração de tensão nas regiões rebitadas. Um estudo detalhado pode ser encontrado em Garcia (1998).

8.2.2 Aplicação em reparos isotrópicos colados

O objetivo desta seção é fazer uma análise do rendimento de reparos isotrópicos colados, utilizando o fator de intensidade de tensão de modo I calculado na ponta da trinca da chapa de base como critério de projeto. Uma análise da influência da espessura do adesivo é feita e uma

comparação dos resultados obtidos com o reparo isotrópico rebitado e colado é apresentada.

Para o reparo isotrópico colado serão considerados três tipos de geometria do reparo da mesma forma como foi feito com o reparo isotrópico rebitado. Para cada geometria serão analisadas seis espessuras de reparo. As análises serão feitas para as duas espessuras do adesivo de $0,15mm$ e $0,30mm$. A chapa aderente situa-se no plano xy e tem dimensões de $0,4m \times 0,4m$ com espessura de $8mm$. A trinca na estrutura de base é situada no centro da chapa com dimensão $2a$ variando de $4mm$ a $100mm$, três geometrias da chapa aderente foram consideradas:

- Reparo quadrado $0,2m \times 0,2m$ com espessura variando de $2mm$ a $12mm$.
- Reparo vertical $0,1m \times 0,2m$ com espessura variando de $2mm$ a $12mm$.
- Reparo horizontal $0,2m \times 0,1m$ com espessura variando de $2mm$ a $12mm$.

O material da estrutura da chapa de base e do reparo são os mesmos, alumínio (Al 7075-T651) com propriedades mecânicas de módulo de elasticidade $E = 71,0GPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$ e fator de intensidade de tensão crítico $K_{Ic} = 29,7MPa\sqrt{m}$. O material do adesivo tem módulo de elasticidade $E = 2,4GPa$, com coeficiente de Poisson nulo e módulo de cisalhamento $G = 1,4GPa$. A análise é feita considerando apenas um quarto da estrutura total, ou seja, apenas o primeiro quadrante mostrado pela Figura 8.1. Só o modo I de abertura é considerado para o cálculo do fator de intensidade de tensão.

Os resultados das Figuras 8.10 a 8.15 são referentes ao (K_I), calculado na ponta da trinca para diferentes comprimentos de trinca, com e sem reparo com espessura do adesivo de $0,30mm$ e $0,15mm$ respectivamente. Ainda nas Figuras 8.10 a 8.15, para todos os gráficos o eixo horizontal refere-se ao comprimento da trinca ($2a$) em mm e no eixo vertical ao valor de K_I em $MPa\sqrt{m}$. Nestes gráficos as curvas que referem-se ao K_I calculado sem reparo para cada uma das espessuras de reparo são mostradas. Além disso, as referências K_{Ic} e K_{Ic}/n são apresentados.

Os resultados das Figuras 8.16 a 8.21 são referentes ao cálculo do IDR , calculado para diferentes comprimentos de trinca e várias espessuras de reparo e espessura do adesivo de $0,30mm$ e $0,15mm$ respectivamente. Ainda nas Figuras 8.16 a 8.21, para todos os gráficos o eixo horizontal refere-se ao comprimento da trinca ($2a$) em mm e o eixo vertical ao valor do IDR em porcentagem. Cada curva dos gráficos refere-se ao IDR calculado para cada espessuras de reparo.

Analisando os gráficos das Figuras 8.10 a 8.15 a partir do ponto indicado com 'quadrado' a propagação da trinca ocorrerá, ou seja, a aplicação do reparo deve ser feita antes da trinca atingir

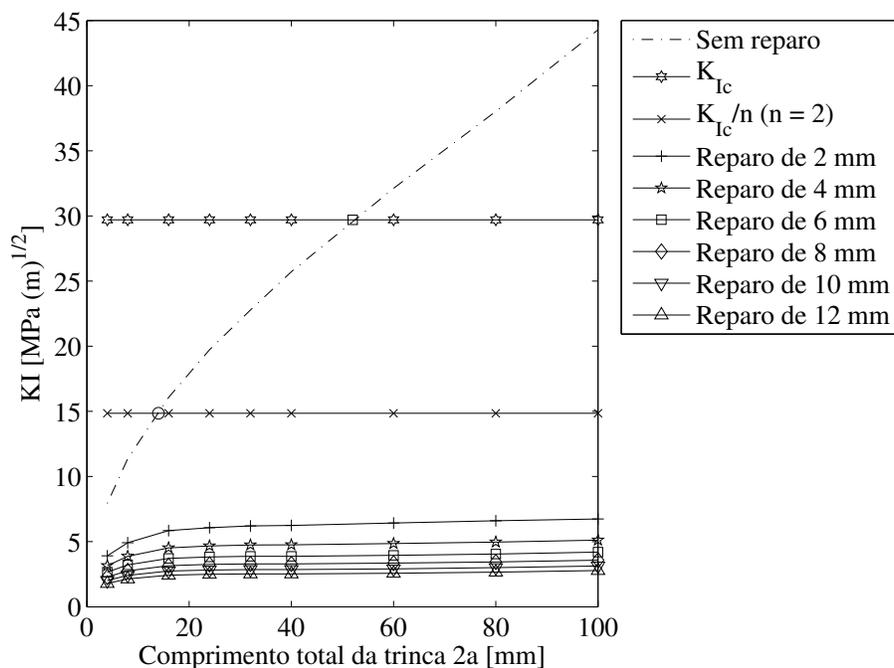


Figura 8.10: Variação do valor de K_I com o aumento da trinca, adesivo 0,30mm para o reparo isotrópico quadrado.

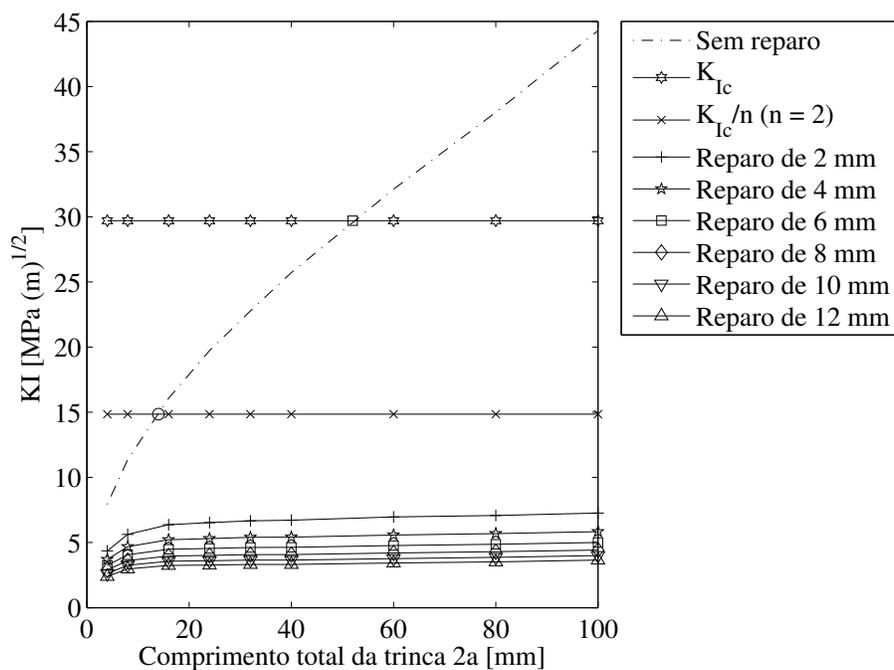


Figura 8.11: Variação do valor de K_I com o aumento da trinca, adesivo 0,30mm para o reparo isotrópico vertical.

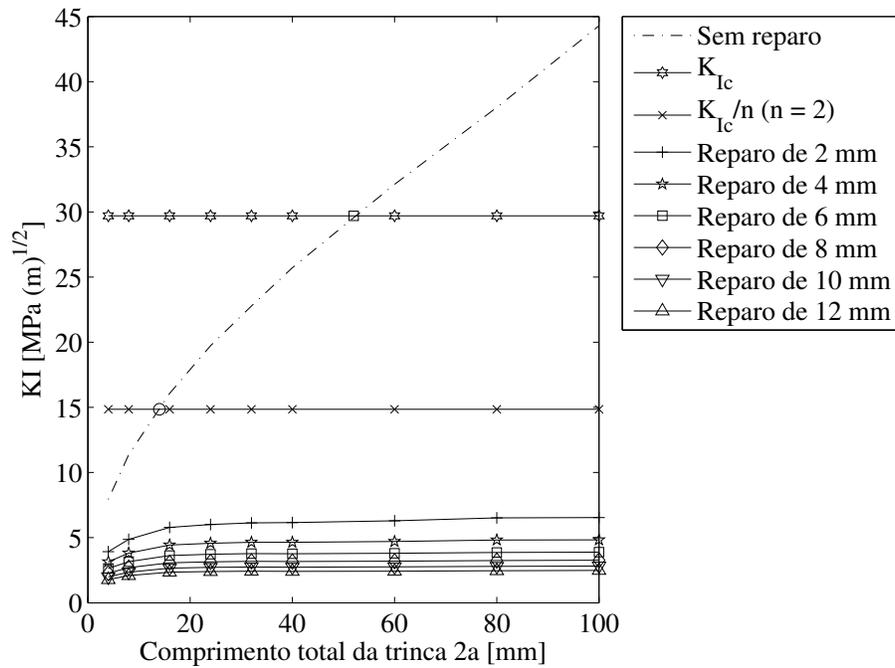


Figura 8.12: Variação do valor de K_I com o aumento da trinca, adesivo 0,30mm para o reparo isotrópico horizontal.

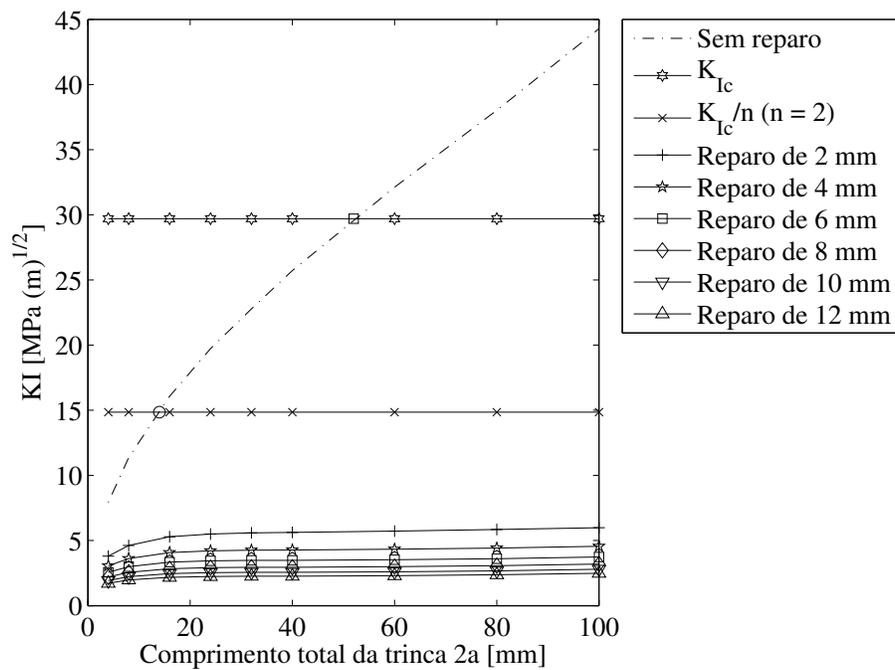


Figura 8.13: Variação do valor de K_I com o aumento da trinca, adesivo 0,15mm para o reparo isotrópico quadrado.

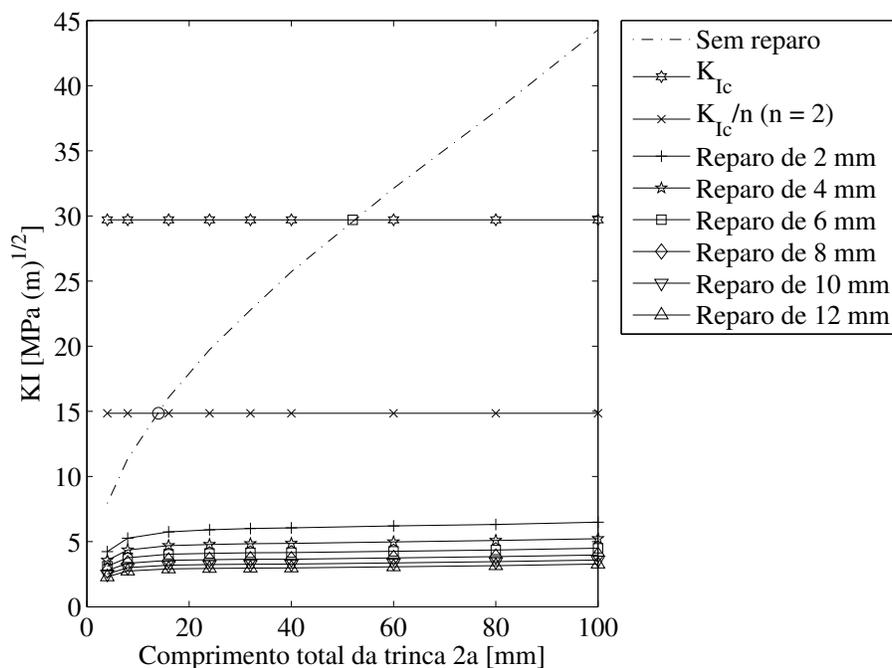


Figura 8.14: Variação do valor de K_I com o aumento da trinca, adesivo $0,15mm$ para o reparo isotrópico vertical.

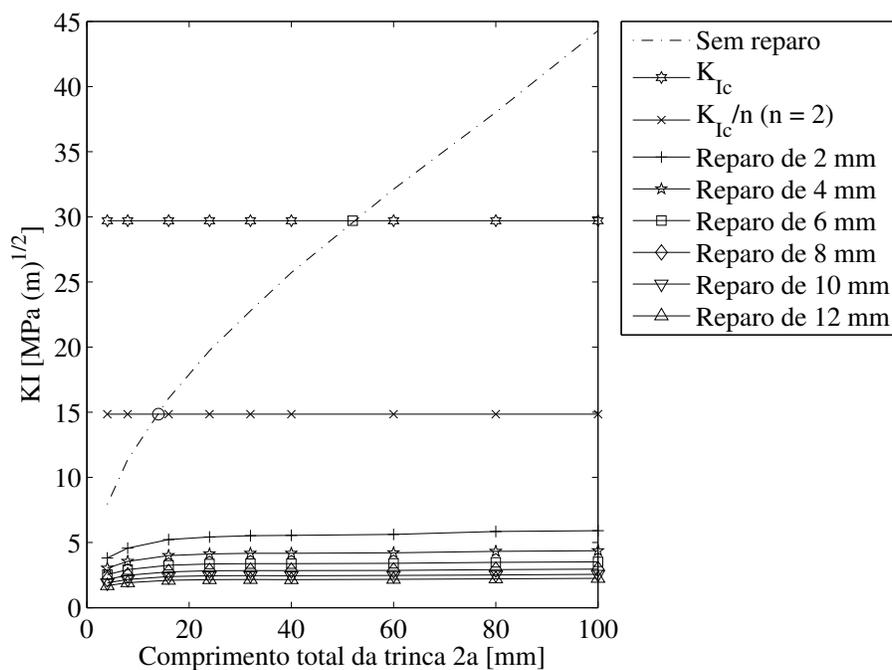


Figura 8.15: Variação do valor de K_I com o aumento da trinca, adesivo $0,15mm$ para o reparo isotrópico horizontal.

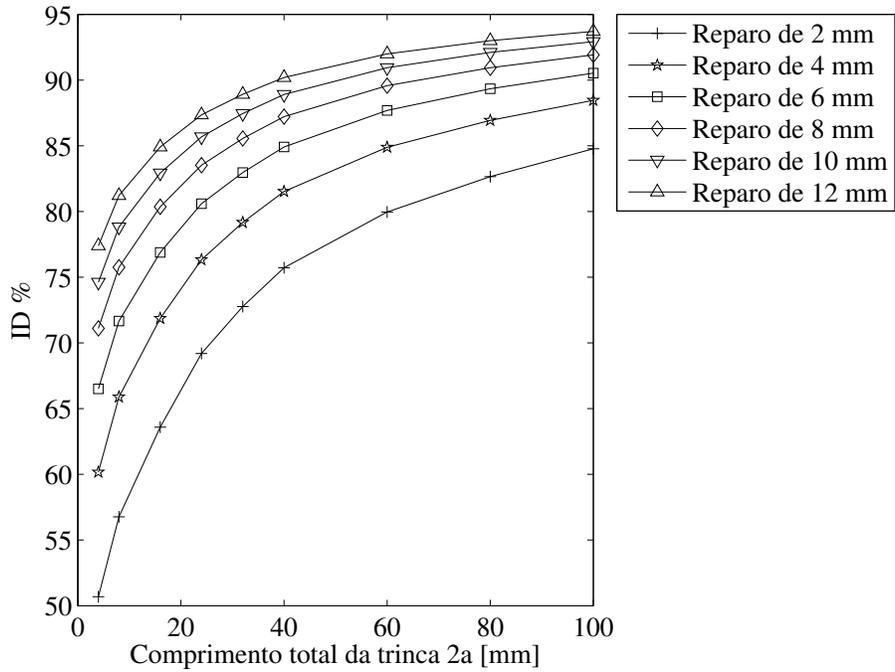


Figura 8.16: Índice de desempenho relativo do reparo, adesivo 0,30mm para o reparo isotrópico quadrado.

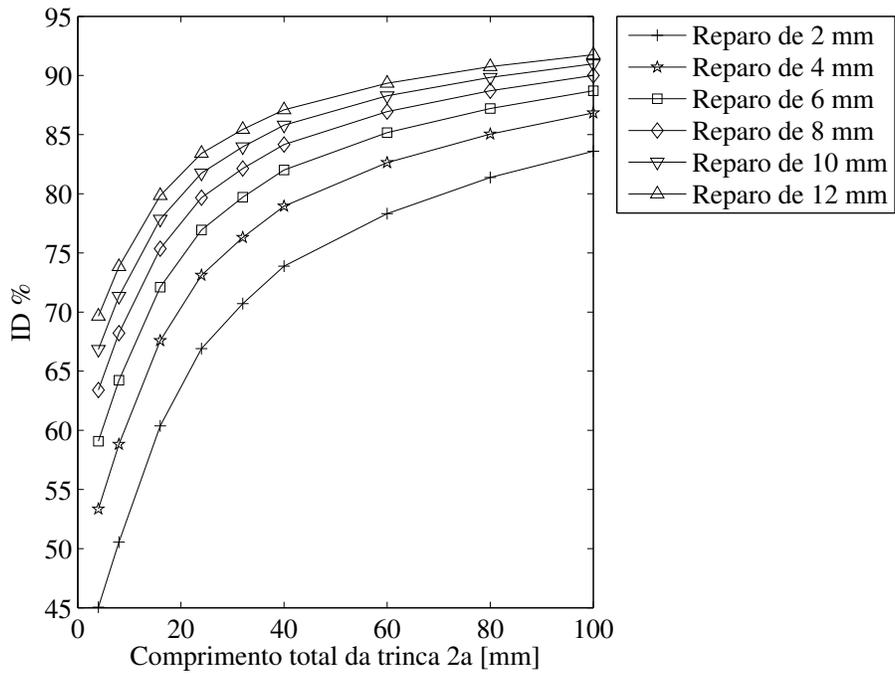


Figura 8.17: Índice de desempenho relativo do reparo, adesivo 0,30mm para o reparo isotrópico vertical.

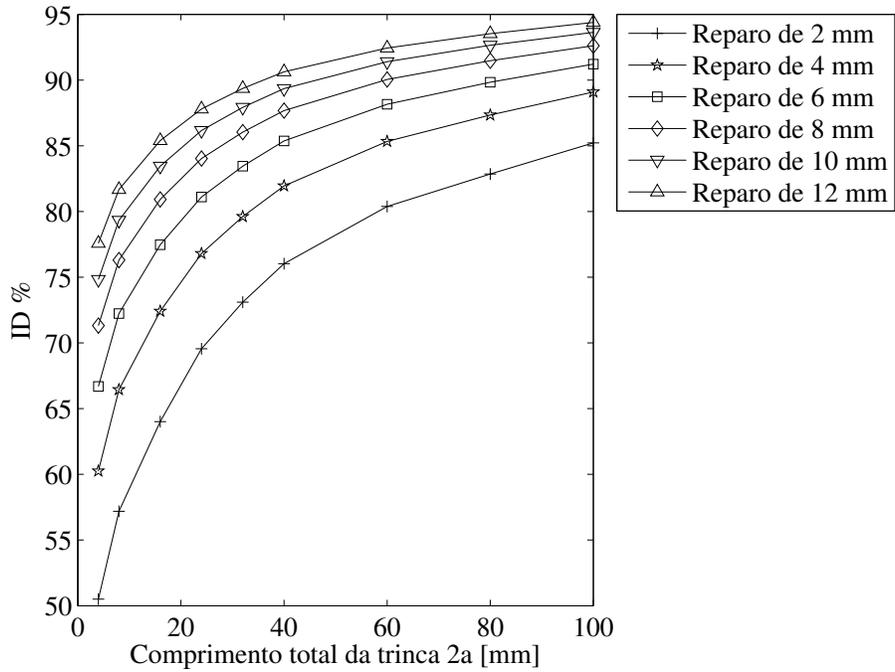


Figura 8.18: Índice de desempenho relativo do reparo, adesivo 0,30mm para o reparo isotrópico horizontal.

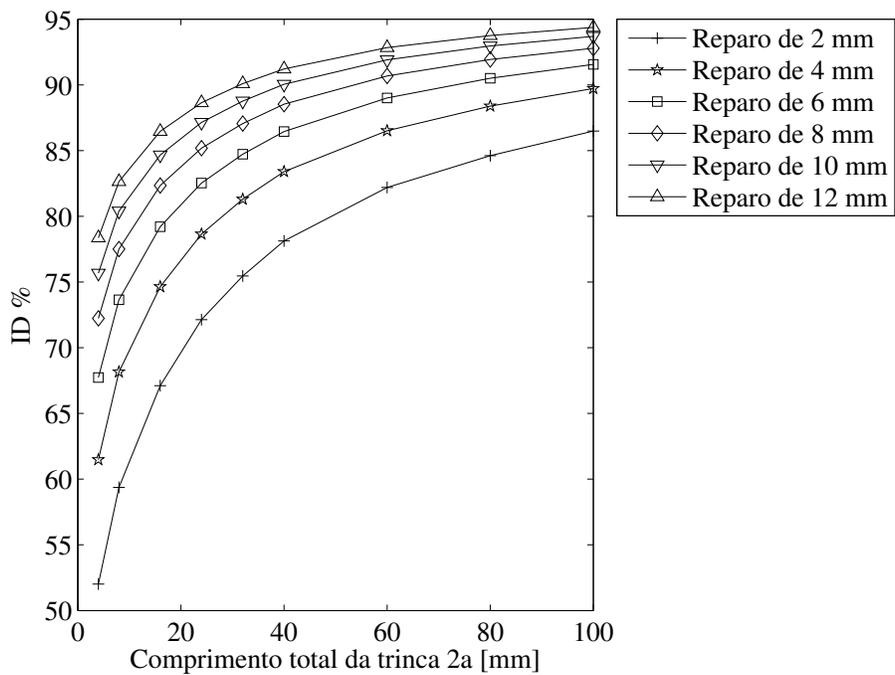


Figura 8.19: Índice de desempenho relativo do reparo, adesivo 0,15mm para o reparo isotrópico quadrado.

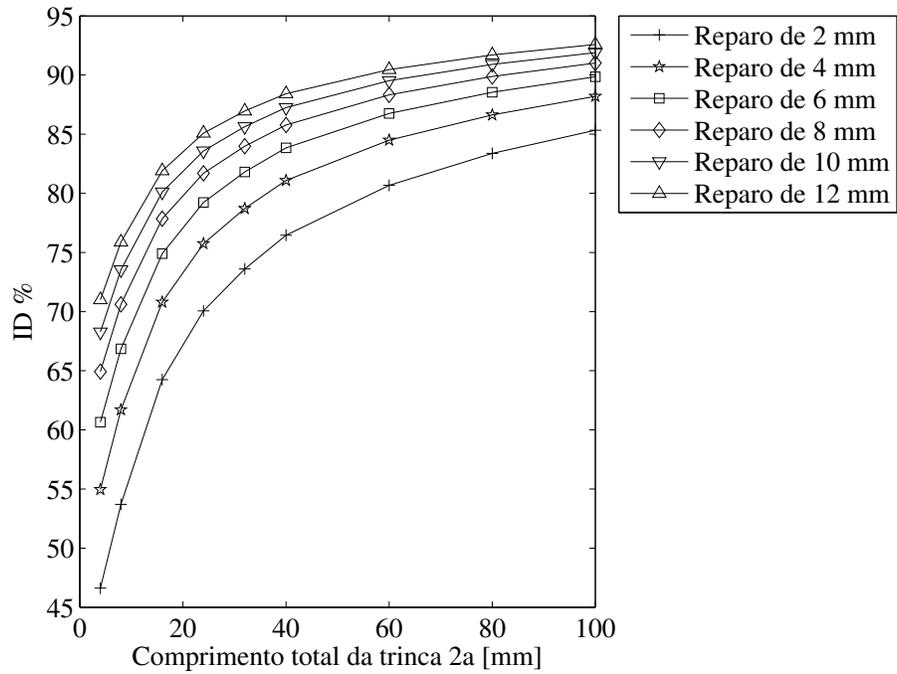


Figura 8.20: Índice de desempenho relativo do reparo, adesivo 0,15mm para o reparo isotrópico vertical.

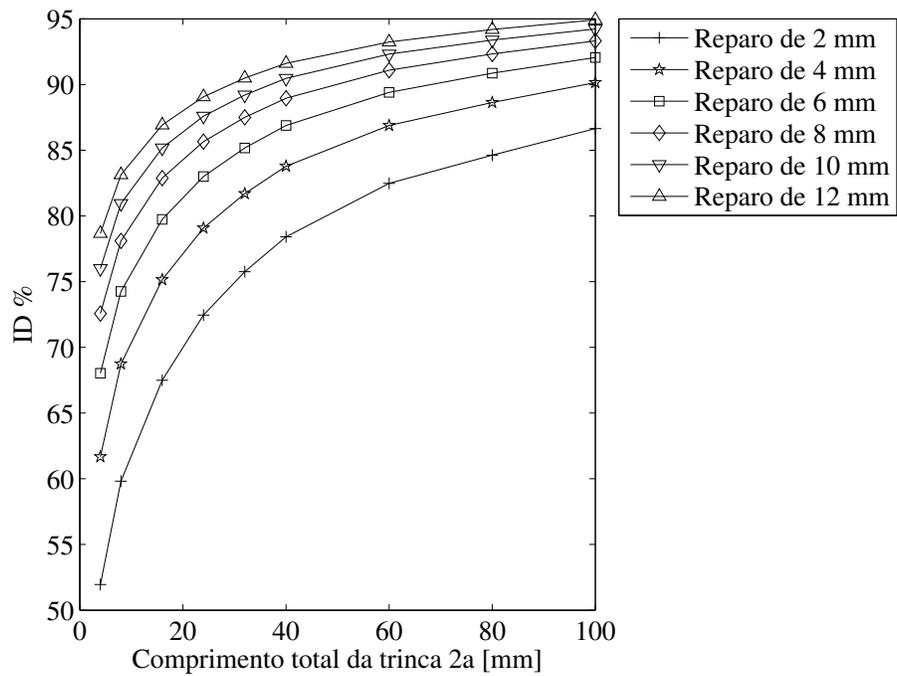


Figura 8.21: Índice de desempenho relativo do reparo, adesivo 0,15mm para o reparo isotrópico horizontal.

esse ponto ($2a = 52mm$). O reparo deve pelo menos obedecer a algum coeficiente de segurança, como, por exemplo, o coeficiente de segurança igual a 2 proposto, o que corresponde ao ponto indicado com 'O' nos gráficos das Figuras 8.10 a 8.15. Além disso, das figuras é possível observar que para a espessura de adesivo de $0,30mm$ os resultados são ligeiramente piores que os do adesivo com $0,15mm$ mostrando que para adesivos com espessuras mais finas e bem controladas o resultado melhora, a utilização da espessura do adesivo a $0,15mm$ é utilizada por vários artigos como (Rose 1988), (Bouiadjara *et al.* 2007), (Tong e Sun 2003b), entre outros. Um estudo detalhado da influência da espessura no comportamento do IDR baseado nos critérios de mecânica da fratura é uma das sugestões para trabalhos futuros.

Analisando as Figuras 8.10 e 8.16, observa-se que o limite de projeto do reparo considerando $K_{Ic}/2$ corresponde a uma trinca de comprimento $2a$ igual a $14mm$. Nesta região todos os reparos calculados podem ser aplicados, com ganhos da ordem de 57% a 82% em função da espessura da chapa do reparo. Para trincas com comprimento $2a$ acima de $14mm$, e abaixo de $52mm$, que corresponde ao valor crítico $K_I = K_{Ic}$ (ponto 'quadrado') da chapa sem reparo, qualquer espessura entre $2mm$ e $12mm$ pode ser escolhido, porém se um dos requisitos de projeto redução de peso, a melhor escolha é o reparo de $2mm$ que apresenta um bom rendimento e com peso reduzido. Observa-se neste caso, que só o critério da mecânica da fratura foi avaliado. Outra possibilidade de otimização refere-se a forma do reparo. Este assunto será trabalhado em trabalhos futuros.

Analisando as Figuras 8.11 e 8.17, para comprimentos de trinca inferiores a $52mm$, observa-se que todos os reparos tem rendimentos ligeiramente inferiores ao caso anterior. Isto é, os reparos com forma quadrada são mais eficientes no caso do adesivo com $0,30mm$ de espessura.

Analisando os gráficos das Figuras 8.10, 8.11, 8.12 e das Figuras 8.16, 8.17 e 8.18 observa-se, que para este tipo de carregamento, quando modifica-se a geometria do reparo, pode-se observar modificações no rendimento dos reparos, mas de uma maneira geral, a partir de $2a = 20mm$ todos os reparos tendem a estabilizar o valor de K_I , independente do fato de considerarmos $2a$ maiores. O reparo horizontal (Figura 8.12) tem o melhor rendimento global neste caso, para todos os comprimentos de trinca considerados. O reparo quadrado (Figura 8.10) fornece bons índices de rendimento, todavia o peso adicional é duplicado. Para o caso do reparo vertical (Figura 8.11) o resultado não foi satisfatório.

Nota-se de uma maneira geral, que os resultados para K_I se estabilizam para trincas a partir de $20mm$ aproximadamente. Todavia, considerando a referência de falha a peça sem reparo, o

IDR demonstrou sensibilidade ao valor de $2a$ até $2a$ igual a $100mm$.

A metodologia mostrada para análise mostrou-se adequada neste caso. Todavia, em estudos considerando chapas de alumínio com espessuras menores, pode conduzir a alterações de K_I e IDR maiores em função da aplicação dos reparos colados.

Em relação ao reparo rebitado (Figura 8.4 e 8.7), pode-se notar que os rendimentos encontrados para os reparos colados (Figura 8.10 e 8.16) são superiores, o que mostra a melhor capacidade da junta colada para transferir a carga da chapa de base, através da região com falha.

8.2.3 Aplicação em reparos compósitos colados

O objetivo deste exemplo é mostrar o comportamento do rendimento do reparo compósitos colados, utilizando o fator de intensidade de tensão de modo I calculado na ponta da trinca como indicador de falha entre os diferentes reparos empregados.

Para o reparo compósito colado serão considerados três tipos de geometria do reparo, para cada geometria serão analisados cinco tipos de empilhamento. A chapa trincada $0,4m \times 0,4m$ com espessura de $8mm$. A trinca na estrutura da base é situada no centro da mesma com dimensão $2a$ variando de $4mm$ a $100mm$. As três geometrias de reparo considerada estão descritas abaixo:

- Reparo quadrado $0,2m \times 0,2m$.
- Reparo vertical $0,1m \times 0,2m$.
- Reparo horizontal $0,2m \times 0,1m$.

O material da estrutura da base é o alumínio (Al 7075-T651) com propriedades mecânicas de módulo de elasticidade $E = 71,0GPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$ e fator de intensidade de tensão crítico $K_{Ic} = 29,7MPa\sqrt{m}$. Para a chapa de reforço é utilizado um material composto Boro-Epóxi com propriedades mecânica $E_1 = 204GPa$, $E_2 = E_3 = 18,5GPa$, $\nu_{12} = 0,23$, $\nu_{23} = \nu_{13} = 0,25$ e $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5,59GPa$. Cada camada desse material composto apresenta uma espessura de $1,25mm$. Para o adesivo, o material terá módulo de elasticidade $E = 2,4GPa$, coeficiente de Poisson nulo e módulo de cisalhamento $G = 1,4GPa$. A espessura do adesivo é de $0,15mm$.

A análise é feita considerando apenas empilhamento simétrico. Foram feitas apenas cinco configurações de empilhamentos que estão mostradas na Tabela 8.1, os ângulos são considerados

de acordo com o eixo x da Figura 8.1. Considera-se apenas um quarto da estrutura total, ou seja, apenas o primeiro quadrante mostrado pela Figura 8.1.

Tabela 8.1: Ângulos do empilhamento para o material composto do reparo.

Reparo	Empilhamento [$^{\circ}$]	Espessura [mm]
1	0/0	2,5
2	0/90/90/0	5,0
3	0/90/45/45/90/0	7,5
4	0/45/30/90/90/30/45/0	10,0
5	90/90/90/90/90/90/90/90	10,0

Os resultados das Figuras 8.22, 8.23 e 8.24 são referentes ao (K_I), calculado para diferentes comprimentos de trinca, com e sem reparo. Para todos os gráficos a abcissa refere-se ao comprimento da trinca ($2a$) em mm e a ordenada ao valor de K_I em $MPa\sqrt{m}$. Mostram-se os resultados de K_I calculados sem reparo e com reparo para cada um dos empilhamentos propostos na Tabela 8.1 além de incluir as referências para K_{Ic} e K_{Ic}/n , adotando-se neste um fator de segurança igual a dois.

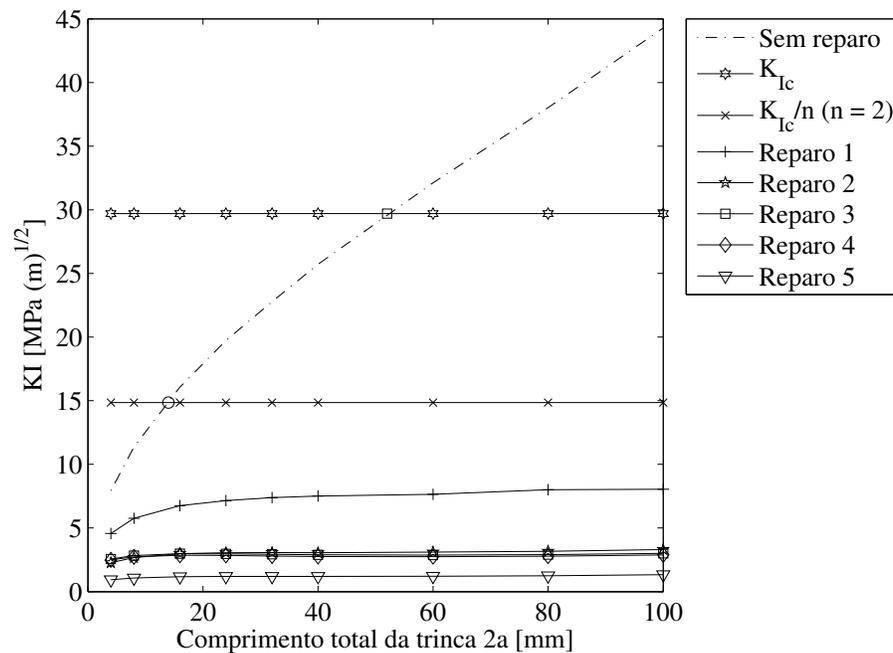


Figura 8.22: Variação do valor de K_I com o aumento da trinca para reparo composto quadrado.

Os resultados das Figuras 8.25, 8.26 e 8.27 são referentes ao cálculo do IDR , para diferentes comprimentos de trinca e vários empilhamentos do reparo. Para todos os gráficos a abcissa refere-se ao comprimento da trinca ($2a$) em mm e a ordenada ao valor do IDR em porcentagem.

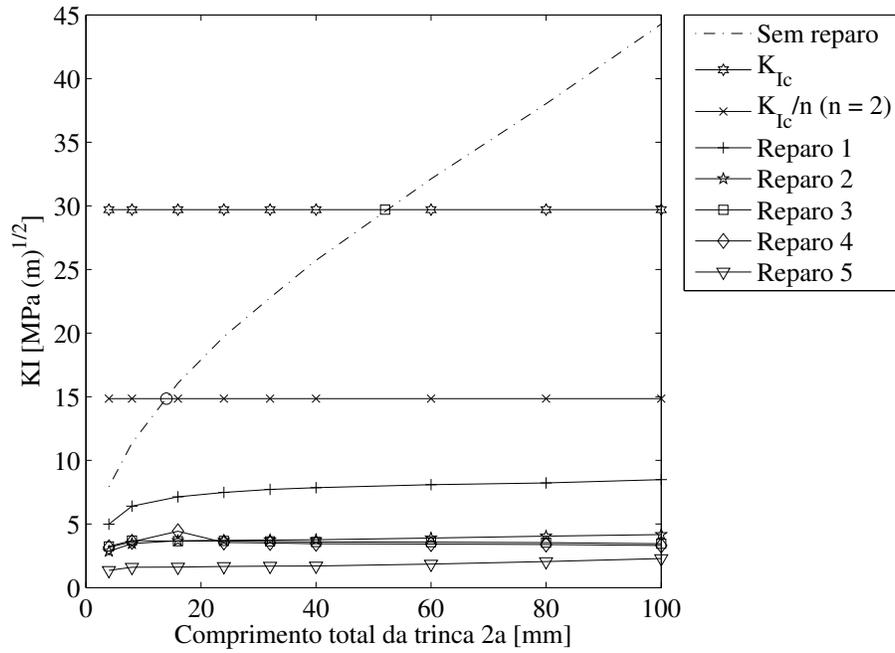


Figura 8.23: Variação do valor de K_I com o aumento da trinca para reparo compósito vertical.

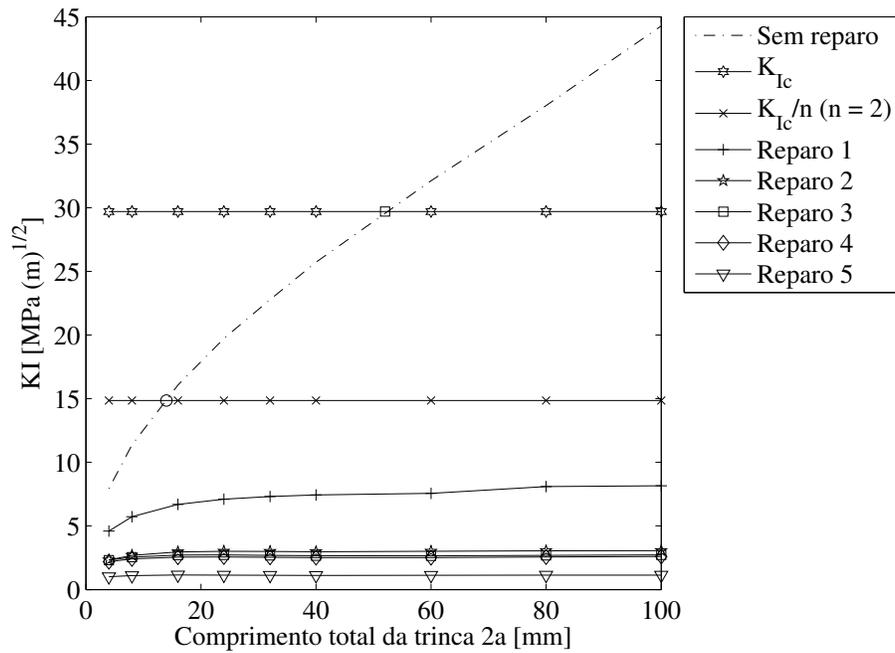


Figura 8.24: Variação do valor de K_I com o aumento da trinca para reparo compósito horizontal.

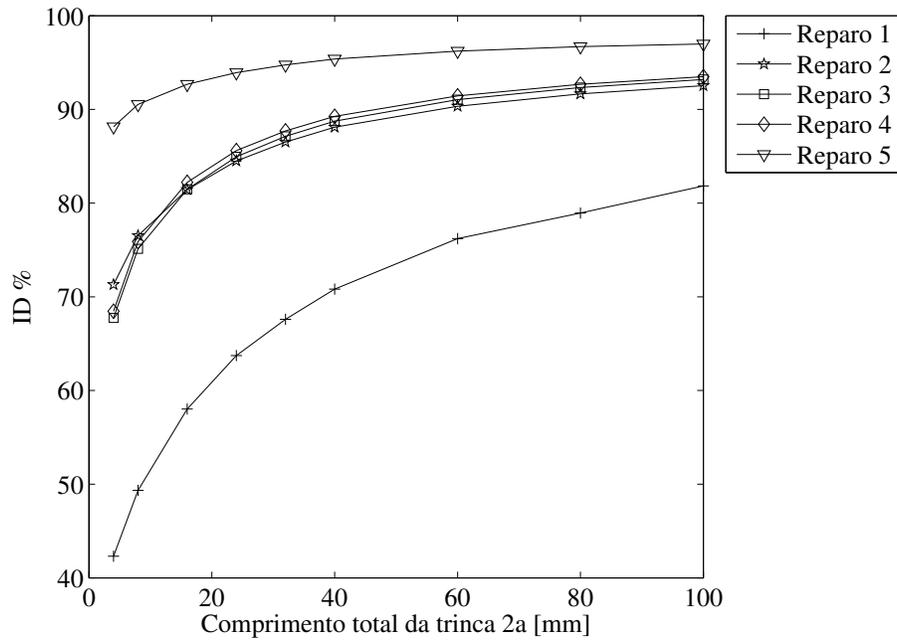


Figura 8.25: Índice de desempenho relativo do reparo composto colado quadrado.

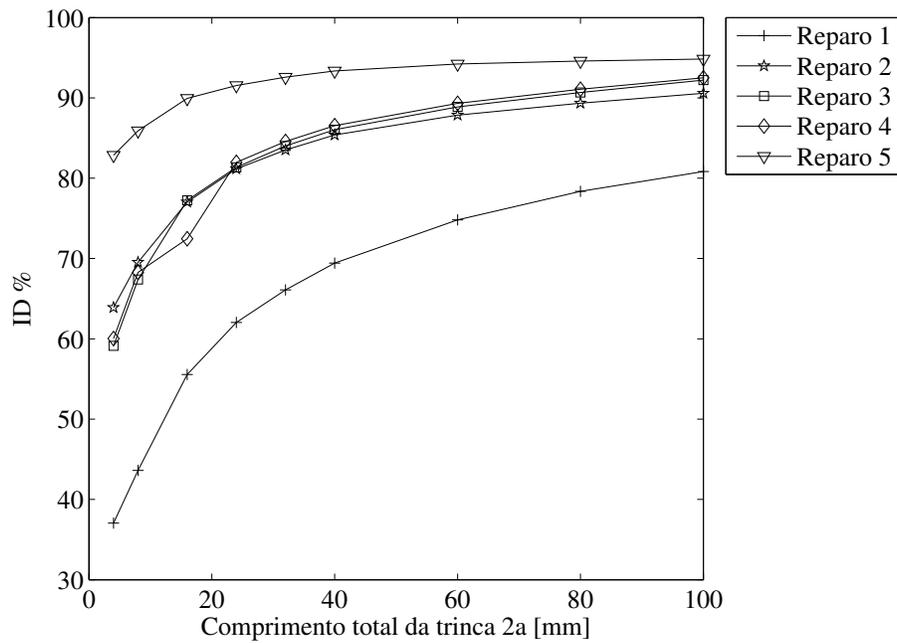


Figura 8.26: Índice de desempenho relativo do reparo composto colado vertical.

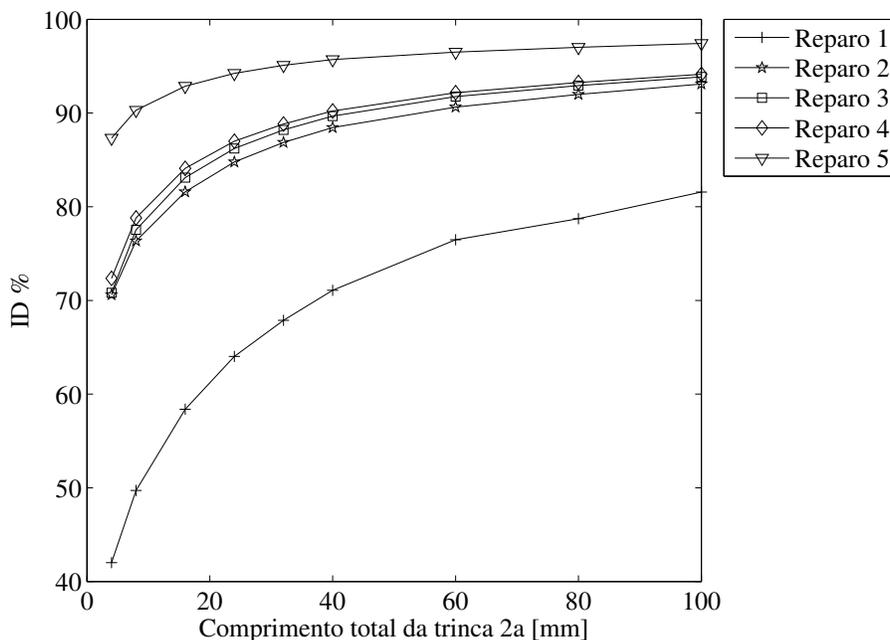


Figura 8.27: Índice de desempenho relativo do reparo compósito colado horizontal.

Analisando os gráficos das Figuras 8.22, 8.23 e 8.24 pode-se notar que a chapa de base é a mesma, portanto o ponto crítico para propagação é o de $2a = 52mm$. O reparo deve pelo menos obedecer a algum coeficiente de segurança, como, por exemplo, o coeficiente de segurança igual a 2 proposto, o que corresponde ao ponto indicado com 'O' nos gráficos das Figuras 8.22, 8.23 e 8.24. Para fins de projeto, considera-se trincas com comprimento crítico a partir do ponto 'O'.

Analisando as Figuras 8.22 e 8.25, observa-se que o limite de projeto do reparo considerando $K_{Ic}/2$ corresponde a uma trinca de comprimento $2a$ igual a $14mm$. Nesta região todos os reparos calculados podem ser aplicados, com ganhos da ordem de 40% a 90% em função do empilhamento utilizado no reparo. Para trincas com comprimento $2a$ acima de $14mm$, e abaixo de $52mm$, que corresponde ao valor crítico $K_I = K_{Ic}$ (ponto 'quadrado'), qualquer empilhamento pode ser empregado, porém obedecendo os requisitos do projeto o único reparo que não apresenta um bom rendimento é o reparo de número 1, que pode ser utilizado porém terá um rendimento um pouco superior a 40% enquanto que se optar pelo reparo de número 2 o rendimento já sobe para 70%.

Analisando as Figuras 8.23 e 8.26, para comprimentos de trinca inferiores a $52mm$, observa-se que todos os reparos tem rendimentos inferiores ao caso anterior.

Analisando os gráficos das Figuras 8.22, 8.23 e 8.24 observa-se, que para este tipo de carregamento, quando modifica-se a geometria do reparo, as modificações no rendimento dos reparos podem ser notadas. O reparo horizontal (Figura 8.27) tem o melhor rendimento global neste caso,

para todos os comprimentos de trinca considerados. O reparo quadrado (Figura 8.25) fornece bons índices de rendimento, todavia o peso adicional é duplicado. Para o caso do reparo vertical (Figura 8.26) o resultado teve um desempenho pior.

Nota-se nesta análise que os empilhamentos 2, 3 e 4 conduzem a um rendimento semelhante. Este fato demonstra que adição de camadas que não estejam na direção 90° acrescentam muito pouca rigidez ao sistema, na direção de abertura da trinca, o que não acarreta uma redução significativa nos valores de K_I da junta.

No caso de carregamento combinados, modo *I* e modo *II*, os laminados compósitos empilhados devem mostrar-se mais eficientes.

Considerando-se que para o caso de reparos compósitos além da espessura, considera-se o empilhamento na composição da equação constitutiva, torna-se inadequada a comparação entre reparos isotrópicos e compósitos.

8.3 Análise de juntas usando critério de falha baseado na TMvM

Nesta etapa são analisadas apenas os reforçadores estruturais colados utilizando elementos de casca para o material da base e para o reforçador. São gerados resultados para reforçadores em material isotrópico e compósito, além de fazer uma análise comparativa entre os mesmos.

Considera-se neste caso, que a falha é governada por um critério de perda de linearidade do material do adesivo.

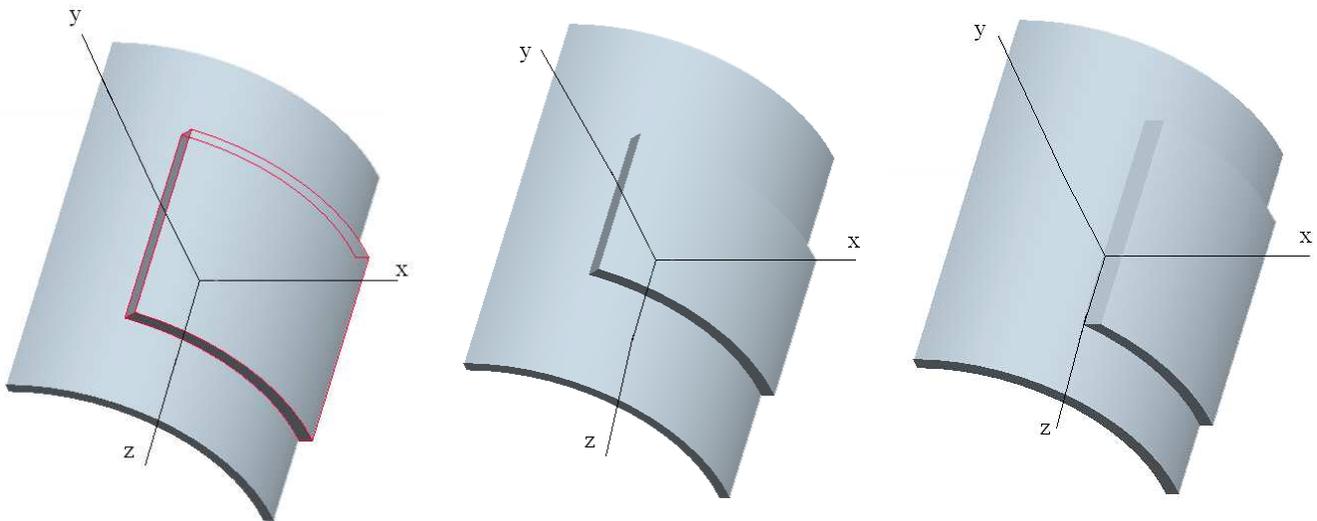
8.3.1 Aplicação em reparos isotrópicos colados

O objetivo deste exemplo é analisar o rendimento de reforçadores em material isotrópicos colados. Utiliza-se a Tensão Máxima de von Mises calculado na camada adesiva como indicador do critério de falha da teoria da energia de distorção.

Para o reforçador isotrópico colado são considerados três tipos de geometria do reparo. Para cada geometria serão analisados seis espessuras diferentes variando de $2mm$ à $12mm$. A geometria da base é uma casca com dimensões de $0,30m$ de comprimento e $0,15m$ de raio com espessura de $8mm$. A estrutura não é danificada e o carregamento aplicado é uma pressão interna de $1MPa$. As três geometrias do reparo estão descritas abaixo:

- Reparo quadrado $0,16m \times 0,16m$.

- Reparo vertical $0,12m \times 0,16m$.
- Reparo horizontal $0,16m \times 0,12m$.



Reforçador quadrado (a).

Reforçador vertical (b).

Reforçador horizontal (c).

Figura 8.28: Geometria dos reforçadores, utilizando simetria de $1/4$.

O material da estrutura da base e do reforçador é o alumínio (Al 7075-T651) com propriedades mecânicas de módulo de elasticidade $E = 71,0GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$. Para o adesivo o material terá módulo de elasticidade $E = 2,4GPa$, coeficiente de Poisson nulo e módulo de cisalhamento $G = 1,4GPa$ e a espessura do adesivo é de $0,15mm$.

Os resultados para o campo de tensão do adesivo com a configuração de reforçador quadrado conforme mostrado na Figura 8.28(a) e com variação da espessura proposta, podem ser observados na Figura 8.29, os valores estão em Pa .

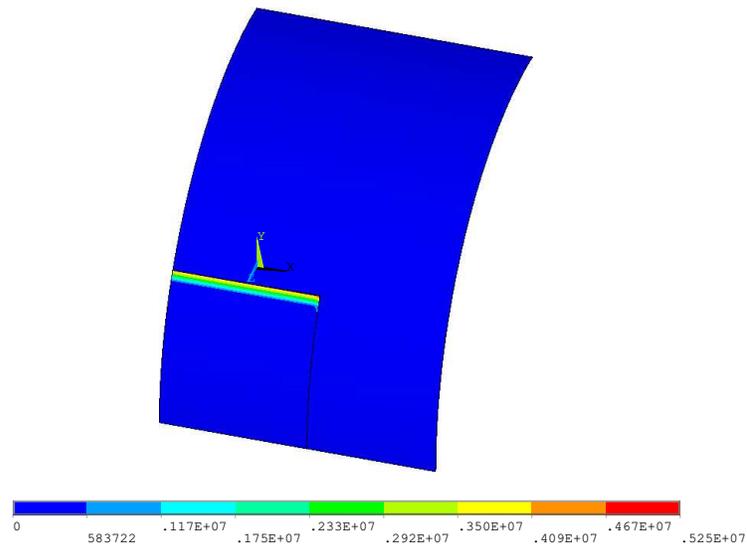


Figura 8.29: Campo de tensão do adesivo para o reforçador quadrado isotrópico com espessura de $2mm$.

Para todas as espessuras do reforçador proposta o campo de tensão é praticamente o mesmo, mudando apenas a amplitude da tensão. Os valores máximos para todas as espessura de reforçador estão mostrados na Tabela 8.2.

Os resultados para o campo de tensão do adesivo com a configuração de reforçador vertical conforme ilustrado na Figura 8.28(b), com a variação da espessura de reforçador proposta, pode ser observado na Figura 8.30, os valores estão em Pa .

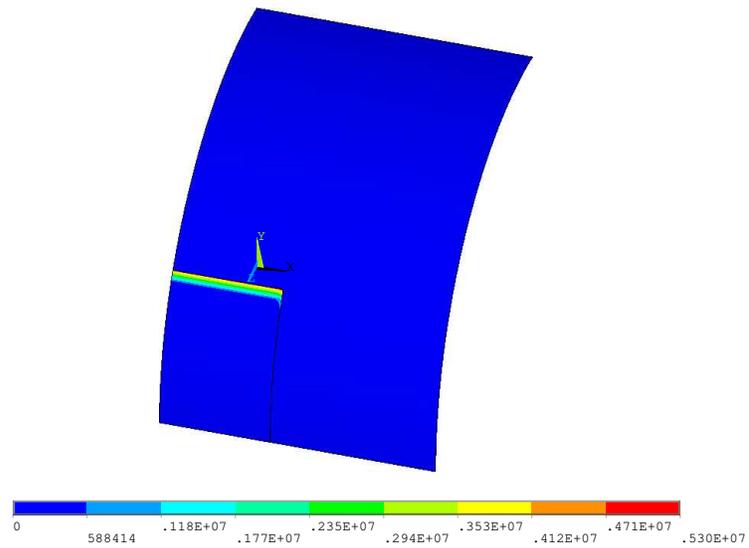


Figura 8.30: Campo de tensão do adesivo para o reforçador vertical isotrópico com espessura de $2mm$.

O resultado para o campo de tensão do adesivo com a configuração de reforçador horizontal conforme ilustrado na Figura 8.28(c), com a variação da espessura proposta, pode ser observado na Figura 8.31, os valores estão em Pa .

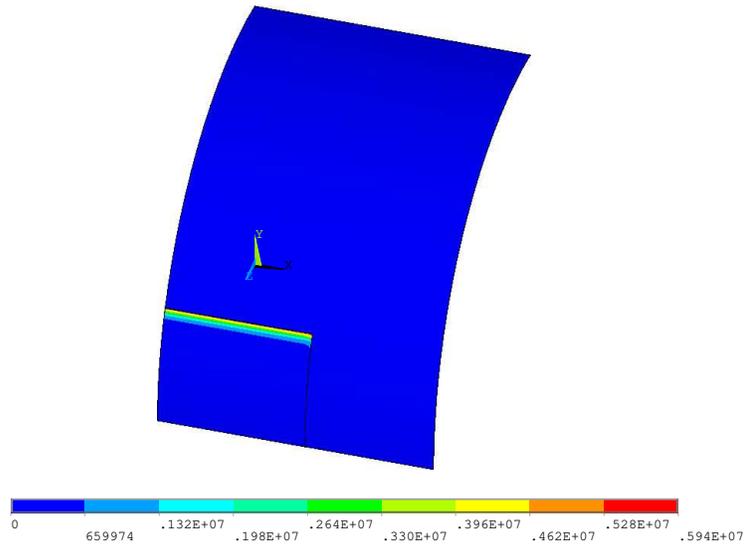


Figura 8.31: Campo de tensão do adesivo para o reforçador horizontal isotrópico com espessura de $2mm$.

Para todas as espessuras do reforçador proposta o campo de tensão é praticamente o mesmo, mudando apenas a amplitude da tensão, os valores máximos para todas as espessura de reforçador estão mostrados na Tabela 8.2.

Tabela 8.2: Tensão máxima de von Mises na camada adesiva para o reforçador isotrópico.

Tipo de Reforçador	Tensão máxima de von Mises MPa					
	2[mm]	4[mm]	6[mm]	8[mm]	10[mm]	12[mm]
Quadrado	15,6	16,1	16,6	16,9	17,1	17,3
Vertical	15,8	16,1	16,5	16,7	17,0	17,2
Horizontal	15,5	16,2	16,6	16,9	17,1	17,3

Analisando os resultados das Figuras 8.29 até 8.31 e da Tabela 8.2, observa-se que a tensão máxima de von Mises na camada adesiva não varia significativamente para as geometrias do reforçador consideradas, mas nota-se a que a variação neste indicador em função da espessura é um pouco maior, sendo quanto maior a espessura do reforço maior a tensão máxima de von Mises no adesivo. Contudo, é notável que as variações são pequenas.

8.3.2 Aplicação em reparos compósitos colados

O objetivo deste exemplo é analisar o rendimento de reforçadores em material compósitos colados. O critério de falha considerado refere-se a integridade estrutural do adesivo, e o indicador utilizado é a Tensão Máxima de von Mises calculada na camada adesiva. Os resultados obtidos são comparados com os resultados obtidos com reforçadores isotrópicos colados analisados no item anterior.

Para o reforçador compósito colado são considerados três tipos de geometria do reparo. Para cada geometria serão analisados cinco tipos de empilhamento. A geometria da base é uma casca com dimensões de $0,30m$ de comprimento e $0,15m$ de raio com espessura de $8mm$. A estrutura não é danificada o carregamento aplicado é uma pressão interna de $1MPa$. As três geometrias do reparo estão descritas abaixo:

- Reparo quadrado $0,16m \times 0,16m$.
- Reparo vertical $0,12m \times 0,16m$.
- Reparo horizontal $0,16m \times 0,12m$.

O material da estrutura da base é o alumínio (Al 7075-T651) com propriedades mecânicas de módulo de elasticidade $E = 71,0GPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$. Para o material do reparo é utilizado um material composto Boro-Epóxi com propriedades mecânica $E_1 = 204GPa$, $E_2 = E_3 = 18,5GPa$, $\nu_{12} = 0,23$, $\nu_{23} = \nu_{13} = 0,25$ e $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5,59GPa$, cada camada desse material composto apresenta uma espessura de $1,25mm$. Para o adesivo o material terá módulo de elasticidade $E = 2,4GPa$, coeficiente de Poisson nulo e módulo de cisalhamento $G = 1,4GPa$ e a espessura do adesivo é de $0,15mm$.

A análise é feita considerando apenas empilhamento simétrico. Foram selecionadas cinco configurações de empilhamentos que estão dispostos na Tabela 8.3, os ângulos são referentes ao eixo z positivo da Figura 8.28, ou seja para $\theta = 0^\circ$ o alinhamento das fibras é paralelo ao eixo z . Considera-se apenas um oitavo da estrutura total, ou seja, apenas metade do que esta descrito pela Figura 8.28.

Tabela 8.3: Ângulos do empilhamento para o material composto do reforçador.

Reforçador	Empilhamento [°]	Espessura [mm]
1	0/0	2,5
2	0/90/90/0	5,0
3	0/90/45/45/90/0	7,5
4	0/45/30/90/90/30/45/0	10,0
5	90/90/90/90/90/90/90/90	10,0

Os resultados para o campo de tensão do adesivo com a configuração de reforçador quadrado conforme ilustração da Figura 8.28(a) considerando os reforçadores estruturais da tabela 8.3, podem ser observados nas Figuras 8.32 e 8.33, onde os valores estão em Pa .

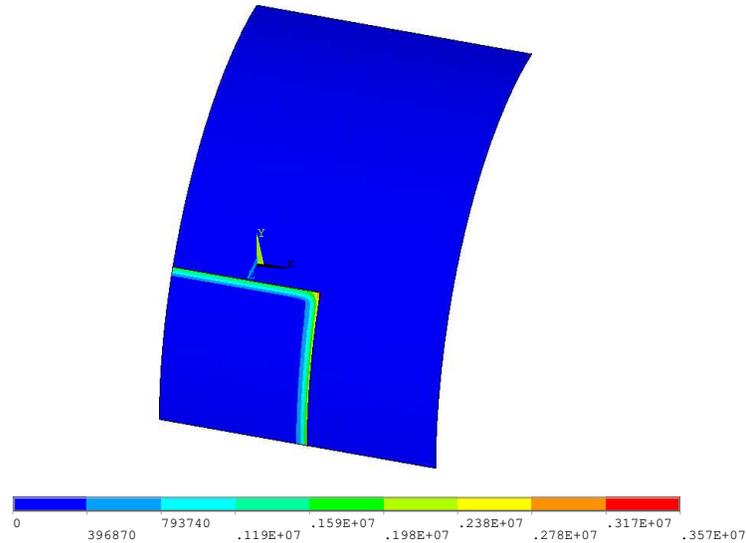


Figura 8.32: Campo de tensão do adesivo para o reforçador quadrado composto do tipo 1 da Tabela 8.3.

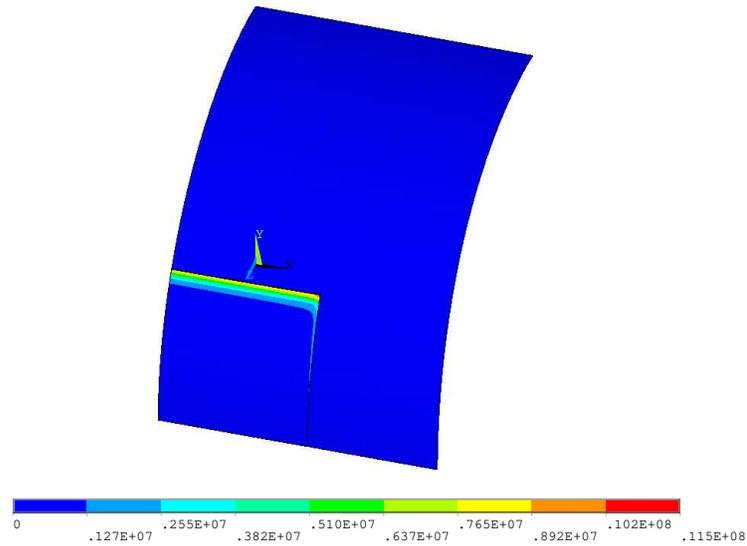


Figura 8.33: Campo de tensão do adesivo para o reforçador quadrado composto do tipo 2 da Tabela 8.3.

A orientação das fibras 0/0 no reparo 1, conduz a uma maior rigidez nesta direção sem reforçar a direção ortogonal, o que contribui para as tensões se distribuírem de forma mais homogênea em torno de todo o reparo.

Os resultados para o campo de tensão do adesivo com a configuração de reforçador vertical do tipo da Figura 8.28(b) e com os reforçadores estruturais da tabela 8.3 podem ser observados nas Figuras 8.34 e 8.35, onde os valores estão em Pa .

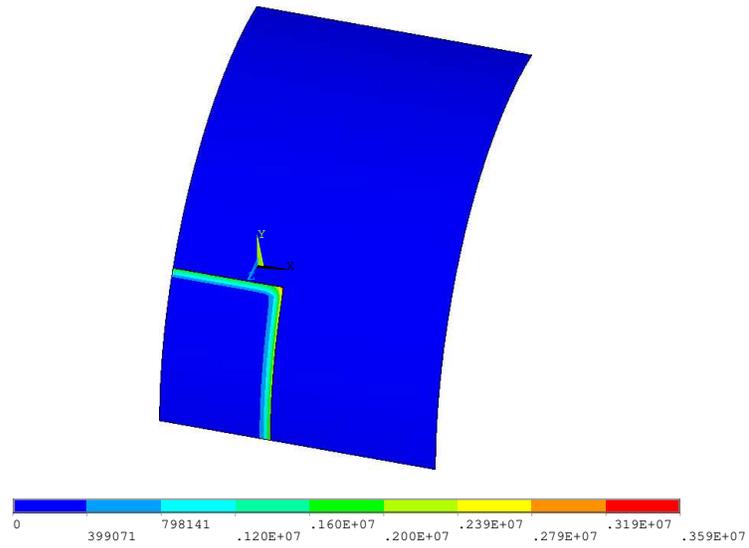


Figura 8.34: Campo de tensão do adesivo para o reforçador vertical composto do tipo 1 da Tabela 8.3.

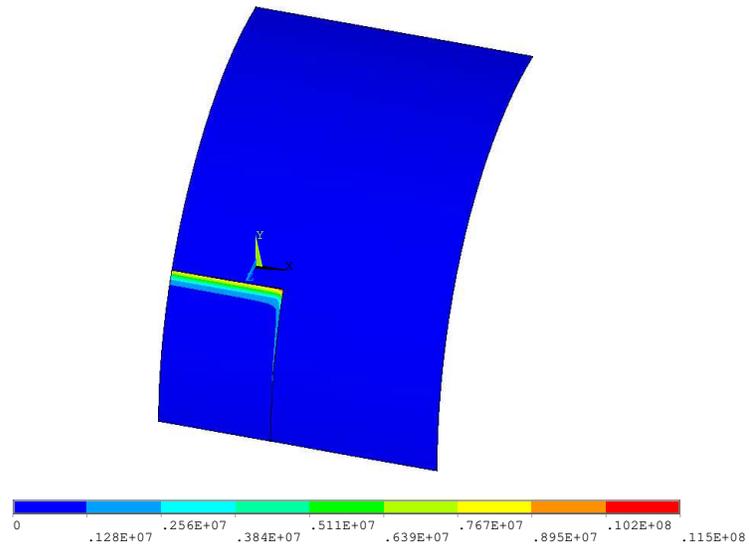


Figura 8.35: Campo de tensão do adesivo para o reforçador vertical composto do tipo 2 da Tabela 8.3.

Os resultados para o campo de tensão do adesivo com a configuração de reforçador vertical do

tipo da Figura 8.28(c) e com os reforçadores estruturais da tabela 8.3 podem ser observados nas Figuras 8.36 e 8.37, os valores estão em Pa .

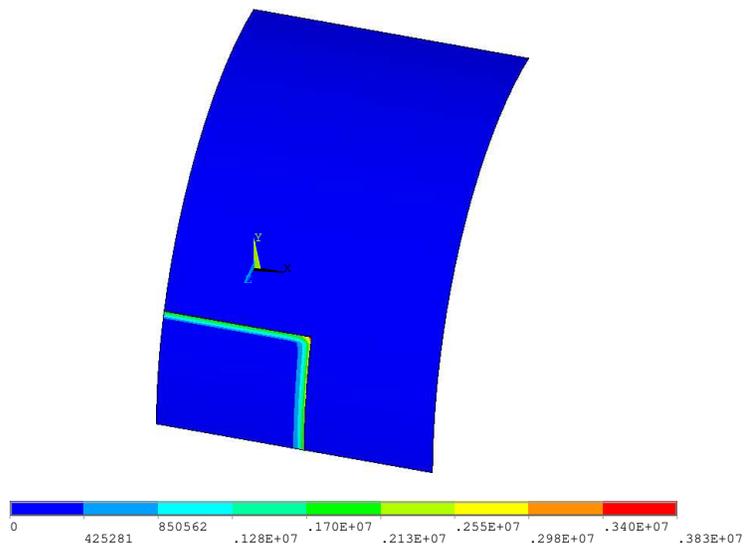


Figura 8.36: Campo de tensão do adesivo para o reforçador horizontal composto do tipo 1 da Tabela 8.3.

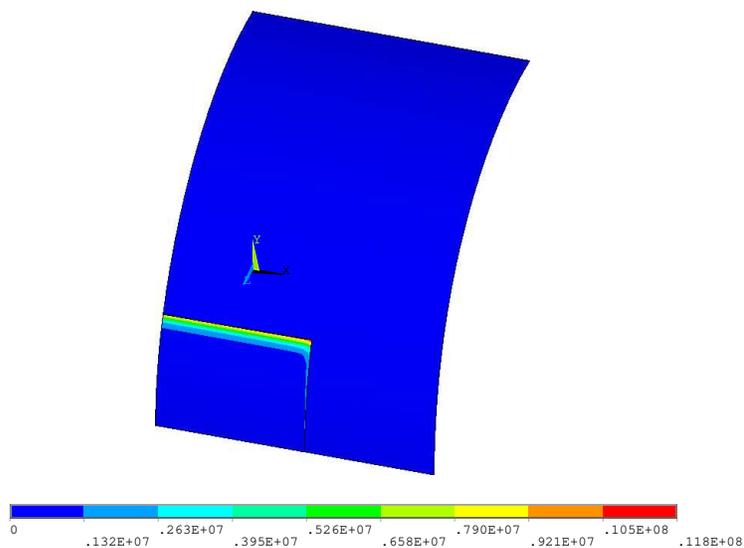


Figura 8.37: Campo de tensão do adesivo para o reforçador horizontal composto do tipo 2 da Tabela 8.3.

Quando se utiliza reforçadores muito finos, como é o caso do reforçador 1 da Tabela 8.3, o campo de tensão (Figuras 8.36, 8.34 e 8.32) no adesivo fica mais espalhado, justamente pela menor rigidez empregada por este reforçador, o que não ocorre para os outros reforçadores analisados. Para os reforçadores de 2 a 5 da Tabela 8.3 o campo de tensão é praticamente o mesmo das Figuras 8.37, 8.35 e 8.33, mudando apenas a amplitude da tensão.

Os valores máximos para todos os reforçadores podem ser facilmente observados na Tabela 8.4.

Tabela 8.4: Tensão máxima de von Mises na camada adesiva para o reforçador compósito da Tabela 8.3.

Tipo de Reforçador	Tensão máxima de von Mises MPa				
	1	2	3	4	5
Quadrado	3,6	11,5	11,7	12,7	19,2
Vertical	3,6	11,5	11,4	12,4	19,0
Horizontal	3,8	11,8	12,1	13,0	19,1

Analisando os resultados das Figuras 8.32 até 8.37 e a Tabela 8.4, observa-se que a tensão máxima de von Mises na camada adesiva não varia muito dependendo da geometrias do reforçador mais sim com a utilização de diferentes empilhamentos. Nota-se que para o caso do empilhamento 1, o nível de tensão no adesivo é muito inferior aos demais, uma vez que o esforço foi mais bem distribuído ao longo de todo o contorno do reparo.

Este fato pode ser explorado para a formulação de um problema de otimização de reparos estruturais, e será explorado em trabalhos futuros.

Analisando-se as Figuras 8.29 até 8.37 e as Tabelas 8.2 e 8.4, observa-se que a tensão máxima de von Mises na camada adesiva é menor com a utilização de reforçadores compósitos, a não ser pela utilização do reparo com empilhamento do tipo 5 da Tabela 8.3, que apresenta tensões em valores superiores às encontradas nos casos de utilização de reforçadores isotrópicos. Tal fato ocorre, devido a excessiva rigidez adicionada na direção 90° , conduzindo a uma concentração de tensão na borda do reparo.

Uma outra forma de análise ainda pode ser empregada, quanto maior a rigidez proporcionada pelo reparo maior será a tensão máxima de von Mises no adesivo.

Capítulo 9

Disposições finais

Neste capítulo são apresentadas as conclusões e discussões pertinentes ao desenvolvimento desta dissertação. No final do capítulo são feitas algumas sugestões de trabalhos futuros para um maior aprofundamento em alguns tópicos estudados.

9.1 Conclusão

Foram apresentados ao longo deste trabalho uma breve dedução do modelo de elasticidade plana para materiais isotrópicos e compósitos, modelo de placa delgada de Kirchhoff também para materiais isotrópicos e compósitos, teorias utilizando métodos numéricos para a consideração do adesivo, além de possíveis critérios de falha para a utilização de reparos rebitados e colados.

Para as teorias apresentadas, foram demonstradas as formulações utilizando o método dos elementos finitos, consideração de estado plano de tensões e placa delgada de Kirchhoff, bem como, os elementos implementados usando esta teoria.

O método dos elementos finitos foi utilizado também no desenvolvimento de um elemento adesivo, mostrou-se a sua formulação, implementação e validação artigos publicados em revistas (Goland e Reissner 1944), (Ojalvo e Eidinoff 1978), (Carpenter 1980a), (Carpenter 1980b), (Tong e Sun 2003a) e (Tong e Sun 2003b).

Problemas que envolvem síntese de projetos de reparos estruturais em materiais compósito ou isotrópicos são componentes de uma linha de pesquisa de grande aplicação acadêmica e industrial.

O modelo de elementos finitos para adesivos se constitui de uma ferramenta útil em projetos de estruturas coladas. As teorias apresentadas, utilizadas neste trabalho, mostram-se adequadas à implementação realizada para a determinação do campo de tensão no adesivo.

Os resultados obtidos mostraram que as formas de análise propostas conduzem a projetos

ótimos conflitantes, ou seja, analisando apenas o fator de intensidade na ponta da trinca, verifica-se que a forma do reparo e a sua espessura alteram o seu rendimento. No entanto, analisando apenas a tensão máxima de von Mises na camada adesiva, a forma do reforçador não altera significativamente o rendimento do reforçador, porém a sua espessura altera a tensão no adesivo. Quanto mais espesso o reforçador, maior a tensão máxima de von Mises na camada adesiva, tendo em vista que a rigidez do reparo torna-se muito maior que a rigidez da chapa ou do cilindro.

Os materiais compósitos utilizados como reparo e reforçador estruturais colados, apresentam um melhor rendimento se comparados aos de materiais isotrópicos colados e rebitados, justificando o grande número de pesquisadores trabalhando na área.

O método numérico de Elementos Finitos, aplicado às formulações em deslocamento e pressões, constituem uma ferramenta útil para análise estrutural de chapas e cascas. Os deslocamentos das cascas e das chapas foram resultado de um programa dedicado à análise estrutural usando o Método dos Elementos Finitos, que foi testado e validado neste trabalho. Para o desenvolvimento do elemento adesivo baseou-se em teorias desenvolvidas por autores consagrados da área Goland e Reissner (1944), Ojalvo e Eidinoff (1978), Carpenter (1980a) e Tong e Sun (2003a).

A implementação foi desenvolvida na linguagem FORTRAN e foi baseada em módulos de resolução utilizando matrizes esparsas, que permite a solução de problemas com número considerável de graus de liberdade com boa eficiência computacional.

9.2 Trabalhos futuros

O presente trabalho abre uma série de perspectivas promissoras para pesquisa na área de análise e síntese de estruturas danificadas e reparadas usando reparos isotrópicos ou compósitos.

As principais sugestões de continuidade mais imediatas para a sequência deste trabalho são:

- Implementação de modelos de painéis aeronáuticos reforçados e com trinca, utilizando reparos isotrópicos e compósitos colados.
- Implementar modelos mais completos da mecânica da fratura, com outros componentes de fatores de intensidade de tensão na ponta da trinca, considerando modo II e misto para o caso de estado plano de tensões e modo II a V no caso de cascas espaciais.
- Desenvolver um modelo dinâmico para a análise da trinca e reparo, verificando a influência do reparo no comportamento vibratório do sistema.

- Formular um problema de otimização topológica e de forma para o projeto de reparos isotrópicos e compósitos (da Silva 2001) e (Porto 2006).
- Acoplar o problema estrutural com o problema acústico interior, buscando-se avaliar a influência dos reparos na resposta vibroacústica do sistema (Cueto 2007a).
- Estudar e implementar elementos de placa utilizando a teoria de Reissner, com lei constitutiva anisotrópica.

Referências

- Albuquerque, E. L. (2001). “Análise de problemas dinâmicos em materiais anisotrópicos usando o método dos elementos de contorno,” PhD thesis, Unicamp.
- Baker, A. A. e Jones, R. (1988). *Bonded Repair of Aircraft Structure*. Martinus Nijhoff, Dordrecht.
- Bathe, K. J. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Becker, W. T. e Shipley, R. J. (1992). *Failure Analysis and Prevention Handbook*. ASM International, Philadelphia.
- Bouiadjara, B. B., Fekirini, H., Serier, B., e Benguediab, M. (2007). “Numerical analysis of the beneficial effect of the double symmetric patch repair compared to single one in aircraft structures.” *Computational Materials Science*, 38, 824–829.
- Broek, D. (1982). *Elementary engineering fracture mechanics*. Kluwer Academic.
- Broek, D. (1987). *Elementary engineering fracture mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, Ohio.
- Camargo, J. R. (2004). “Análise comparativa e de desempenho de elementos finitos de placa. Master’s thesis, Unicamp.
- Carpenter, W. (1980a). “A comment on two current adhesive lap joint theories.” *AIAA Journal*, 18(3), 350–352.
- Carpenter, W. (1980b). “Stresses in bonded connections using finite elements.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15, 1659–1680.
- Cole, W. F. (1999). “Technical justification of repairs to composite laminates.” *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 19, 107–120.

- Cook, R. D., Malkus, D. S., e Plesha, M. E. (2002). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wile & Sons, New York.
- Cueto, L. R. (2007a). “Análise de sensibilidade vibroacústica de painéis aeronáuticos reforçados. Master’s thesis, Unicamp.
- Cueto, L. R. (2007b). “Análise de sensibilidade vibroacústica de painéis aeronáuticos reforçados. Master’s thesis, Unicamp.
- da Silva, J. A. B. (2001). “Investigação de um método evolucionário de otimização estrutural. Master’s thesis, Unicamp.
- da Silva Júnior, F. I. (2007). “Síntese computacional de absorvedores acústicos poroelásticos,” PhD thesis, Unicamp.
- Ellyin, F., Ozah, F., e Xia, Z. (2007). “3-d modeling of cyclically loaded composite patch repair of a cracked plate.” *Composite Structures*, 78, 486–494.
- Garcia, A. N. (1998). “Reparos rebitados em estruturas aeronáuticas tolerantes a dano. Master’s thesis, ITA.
- Gdoutos, E. E. (1993). *Fracture Mechanics An Introduction*. Springer, New York.
- Goland, M. e Reissner, E. (1944). “The stresses in cemented joints.” *Journal of Applied Mechanics*, 66, 1727.
- Gould, P. L. (1989). *Introduction to Linear Elasticity*. Springer-Verlag, New York.
- Heller, M. e Kaye, R. (2006). “Finite element-based three-dimensional stress analysis of composite bonded repair to metallic aircraft structure.” *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 26, 261–273.
- Hilton, E. e Owen, D. R. J. (1977). *Finite Element Programming*. Academic Press Inc., London.
- Hughes, T. J. R. (1987). *The finite element method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Jones, R. e Callinan, R. J. (1979). “Finite element analysis of patched cracks.” *Journal of Structure Mechanics*, 7(2).

- Kanninen, M. F. e Popelar, C. H. (1985). *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford University Press, USA.
- Lourenço, F. A. G. (2000). “Análise de reparos de trincas através do método dos elementos de contorno. Master’s thesis, Unicamp.
- Mitchell, R. A., Wooley, R. M., e Chwirut, D. J. (1975). “Analysis of composite-reinforced cutouts and cracks.” *AIAA Journal*, 17(6), 744–749.
- Ojalvo, I. e Eidinoff, H. (1978). “Bonded thickness effects upon stresses in single-lap adhesive joints.” *AIAA Journal*, 16(3), 204–211.
- Okafor, A. C. e Bhogapurapu, H. (2006). “Design and analysis of adhesively bonded thick composite patch repair of corrosion grind-out and cracks on 2024 t3 clad aluminum aging aircraft structure.” *Composite Structures*, 76, 138–150.
- Pai, P. F., Naghshineh-Pour, A. H., Schulz, M. J., e Chung, J. (1998). “Dynamic characteristics and buckling strength of composite-repaired aluminum plates.” *Finite Elements in Analysis and Design*, 28, 255–275.
- Paris, P. C. e Sih, C. G. (1965). “Stress analysis os cracks.” *Am. Soc. Testing and Material Special Tech*, 381, 30–83.
- Passalacqua, R. L. A. e Pavanello, R. (2008). “Estudo da eficiência de reparos rebitados sobre a integridade estrutural de chapas trincadas.” *XXIX CILAMCE*.
- Porto, E. C. B. (2006). “Metodo da homogeneização aplicado a otimização estrutural topológica. Master’s thesis, Unicamp.
- Ratwani, M. M. (1979). “Analysis of cracked, adhesively bonded laminated structure.” *AIAA journal*, 17(9), 988–994.
- Reddy, J. N. (1996). *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*. McGraw-Hill, New York.
- Rodrigues, F. A. e Pavanello, R. (1996). “Desenvolvimento de um aplicativo para análise estática de estruturas reticulada.” *CICTE-XV Congresso de Iniciação Científica e Tecnológica*.

- Rodrigues, F. A. e Pavanello, R. (1997). “Criação de software para análise estrutural por elementos finito.” *Congresso Interno de Iniciação Científica da UNICAMP*.
- Rose, L. R. F. (1988). “Theoretical analysis of crack patching.” *In Bonded Repair of Aircraft Structure ed. A. A. Baker and R. Jones*, Martinus Nijhoff, New York, 77–105.
- Rose, L. R. F. e Wang, C. (2002). *Analytical methods for designing composite repairs. In Advances in the Bonded Composite Repair of Metallic Aircraft Structure, Vol. 1, Baker A., Rose F., Jones R.* Elsevier, Oxford.
- Silveira, V. A. F. (1997). “Simulação da propagação de trincas bidimensionais em problemas de mecânica da fratura elástica através do método de elementos finitos. Master’s thesis, Unicamp.
- Tern, J. e Shek, K. (1991). “Analysis of cracked plates with a bonded patch.” *Engineering Fracture Mechanics*, 40(6), 1055–1065.
- Tong, L. e Sun, X. (2003a). “Adhesive elements for stress analysis of bonded patch to curved thin-walled structure.” *Computational Mechanics*, 30, 143–154.
- Tong, L. e Sun, X. (2003b). “Shape optimization of bonded patch to cylindrical shell structures.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58, 793–820.
- Touzot, G. e Dhatt, G. (1984). *The finite element method displayed*. John Wile & Sons, New York.
- Useche, J. F. (2007). “Análise pelo método dos elementos de contorno de placas de reissner trincadas e reparadas com compósito colados,” PhD thesis, Unicamp.