

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Ruth Vanessa
Canahuire Cabello..... E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 09 / 03 / 2009
Alberto Luiz Serpa.....
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Controle H-infinito de Vibrações com Restrições no Esforço de Controle

Autor: Ruth Vanessa Canahuire Cabello
Orientador: Alberto Luiz Serpa

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Controle H-infinito de Vibrações com Restrições no Esforço de Controle

Autor: Ruth Vanessa Canahuire Cabello

Orientador: Alberto Luiz Serpa

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2009
SP - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

C16c	Canahuire Cabello, Ruth Vanessa Controle H-infinito de vibrações com restrições no esforço de controle / Ruth Vanessa Canahuire Cabello. -- Campinas, SP: [s.n.], 2009. Orientador: Alberto Luiz Serpa. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica. 1. Sistema de controle por realimentação. 2. Vibração - Controle. 3. Programação convexa. I. Serpa, Alberto Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.
------	---

Título em Inglês: Vibration H-infinity control with constrained force signal

Palavras-chave em Inglês: Feedback control systems, Control vibration, Convex programming

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: José Roberto de França Arruda, Marcelo Areias Trindade

Data da defesa: 09/03/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

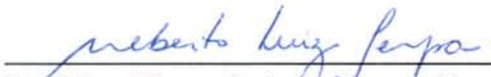
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Controle H-infinito de Vibrações com Restrições no Esforço de Controle

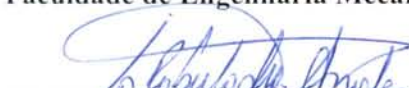
Autor: Ruth Vanessa Canahuire Cabello

Orientador: Alberto Luiz Serpa

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta dissertação:



Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, presidente
Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP



Prof. Dr. José Roberto de França Arruda
Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP



Prof. Dr. Marcelo Areias Trindade
Escola de Engenharia de São Carlos – USP

Campinas, 9 de março de 2009.

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha família por ser minha principal motivação e força nestes dois anos de formação acadêmica.

Agradecimentos

Agradeço a meu orientado Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa pela confiança, paciência e ajuda constante no desenvolvimento deste trabalho. Agradeço a minha família pelo apoio e compreensão no meu desenvolvimento profissional. Aos meus colegas do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP pela contribuição no enriquecimento do trabalho. Ao Prof. Walter Galarza e à Prof. Silvia Nebra pela confiança, apoio e por incentivar meu desenvolvimento científico. Aos meus amigos, e de forma especial, a minha amiga Rocío Cruz, pelos conselhos e amizade nos momentos de dificuldade. Finalmente, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Resumo

CANAHUIRE CABELLO, Ruth Vanessa. *Controle $\mathcal{H}_\infty$ de Vibrações com Restrições no Esforço de Controle*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. 2009.

Neste trabalho estudou-se o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ de vibrações levando em conta os efeitos da saturação dos atuadores. Duas situações de interesse foram exploradas. A primeira é aquela em que a saturação deve ser evitada para não causar danos no sistema, mesmo que nesta situação ocorra uma perda de desempenho. A segunda alternativa procura modificar o controlador no sentido de obter um melhor desempenho, mesmo que ocorra a saturação. O projeto dos controladores $\mathcal{H}_\infty$ foi feito usando as formulações baseadas em desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities* - LMI).

Entre as técnicas que evitam a saturação, foram empregadas as funções de ponderação, escolha do peso do esforço de controle como uma das saídas de desempenho do problema de otimização, o escalonamento da matriz de saída do controlador e a inclusão de uma restrição adicional na forma de LMI para limitar o esforço de controle. Para as técnicas que procuram melhorar o desempenho mesmo na presença da saturação, o controlador foi modificado através da metodologia conhecida como *Anti-windup*.

As técnicas estudadas foram avaliadas em dois problemas de controle de vibrações: um sistema massa-mola-amortecedor de dois graus de liberdade e em uma viga flexível. Estas técnicas foram implementadas usando o aplicativo MATLAB e ferramentas específicas para a solução de problemas de otimização com restrições na forma de LMI tais como o Yalmip, SeDuMi e SDPT3. Os resultados para estes dois exemplos são discutidos no trabalho.

Palavras-chave

Controle de vibrações, Controle $\mathcal{H}_\infty$, Desigualdades matriciais lineares, Saturação de atuadores, Otimização com restrições.

Abstract

CANAHUIRE CABELLO, Ruth Vanessa. *Vibration $\mathcal{H}_\infty$ control with constrained force signal*.
Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de
Campinas. 2009.

In this work, the $\mathcal{H}_\infty$ control of vibrations problem taking into account the effects of saturation of actuators is studied. Two situations of interest were explored. The first one considers that saturation should be avoided and does not cause damage to the system, even if this situation leads to loss of performance. The second alternative seeks to modify the controller to achieve better performance, even when the saturation occurs. The design of $\mathcal{H}_\infty$ controllers was done using the formulation based on linear matrix inequalities (LMI).

The techniques that avoid saturation are the weighting functions selection, selecting of the weight of the control signal as a performance output of the optimization problem, the scaling of the output matrix of the controller and the inclusion of an additional restriction in the form of LMI to limit the control effort. A technique that seeks to improve performance, even in the presence of saturation, is the controller modification using the methodology known as *Anti-windup*.

These techniques were evaluated in two problems of control of vibrations: a mass-spring-damper system of two degrees of freedom and a flexible beam. These techniques were implemented using MATLAB and with the application of specific tools to solve problems of optimization with restrictions in the form of LMI, such as Yalmip, SeDuMi and SDPT3. The results for these two examples are discussed in the work.

Keywords

Control of vibrations, $\mathcal{H}_\infty$ control, Linear matrix inequalities, Saturation of actuators, Optimization with constraints.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Revisão Bibliográfica	3
1.3	Objetivos	4
1.4	Estrutura do Trabalho	4
2	Projeto $\mathcal{H}_\infty$	6
2.1	Introdução	6
2.2	Norma $\mathcal{H}_\infty$	6
2.3	Formulação do Problema de Controle	7
2.4	Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)	9
2.4.1	História	9
2.4.2	Definição de LMI	10
2.5	Desigualdades Matriciais Lineares no Projeto $\mathcal{H}_\infty$	10
2.5.1	Lema do Limite Real	10
2.5.2	Controlador $\mathcal{H}_\infty$ por Realimentação de Saída	12
2.5.3	Controlador $\mathcal{H}_\infty$ por Realimentação de Estados	20
3	Funções de Ponderação	22
3.1	Introdução	22
3.2	Seleção das Funções de Ponderação	22
3.3	Modelo de Estados do Sistema com Filtros de Ponderação	23
3.4	Formulação do Problema de Controle com Filtros de Ponderação	26
3.4.1	Representação do Sistema Controlado	26
3.4.2	Problema de Controle $\mathcal{H}_\infty$	27
4	Técnicas para Problemas com Restrições do Esforço de Controle	29
4.1	Introdução	29
4.2	Definições Prévias	29
4.2.1	Restrição da Entrada de Controle	29

4.2.2	Entrada Exógena “Definida”	30
4.3	Métodos que Evitam a Saturação do Atuador	30
4.3.1	Funções de Ponderação	30
4.3.2	Ponderação da Matriz D_{12}	31
4.3.3	Compensação da Matriz C_c	32
4.3.4	Restrição do Sinal de Controle via LMIs	33
4.4	Métodos que não Evitam a Saturação	36
4.4.1	Projeto <i>Anti-windup</i>	36
5	Resultados	41
5.1	Exemplo 1: Sistema Massa-Mola-Amortecedor	41
5.1.1	Modelo sem Levar em Conta a Saturação (SIC)	41
5.1.2	Resposta do Sistema Submetido a Efeitos de Saturação (SICS)	45
5.1.3	Funções de Ponderação	47
5.1.4	Ponderação da Matriz D_{12}	52
5.1.5	Compensação da Matriz C_c	55
5.1.6	Restrição do Sinal de Controle via LMI	58
5.1.7	Controlador <i>Anti-windup</i>	63
5.1.8	Resumo dos Métodos	65
5.2	Exemplo 2: Viga Flexível	66
5.2.1	Modelo sem Levar em Conta a Saturação (SIC)	66
5.2.2	Resposta do Sistema Submetido a Efeitos de Saturação (SICS)	77
5.2.3	Compensação da Matriz C_c	79
5.2.4	Controlador Baseado no Método <i>Anti-windup</i>	82
5.2.5	Controlador com Restrição do Sinal de Controle via LMI	84
5.2.6	Resumo dos Métodos	88
6	Conclusão	89
A	Alguns Conceitos	94
A.1	Complemento de Schur	94
A.2	Desigualdade de Rayleigh-Ritz	94
A.3	Estabilidade de Lyapunov	95
A.4	Norma $\mathcal{L}_2$	95
A.5	Passividade	96
A.6	Transformação de Congruência	96

B	Método de Penalidades	97
B.1	Introdução	97
B.2	Exemplo Ilustrativo do Método das Penalidades	98
B.3	Algoritmo do Método das Penalidades	99
C	Algoritmo de Busca da Matriz D_{12}	100
C.1	Introdução	100
C.2	Algoritmo de Busca	100
D	Algoritmo de Busca do Fator de Compensação da Matriz C_c	102
D.1	Algoritmo de Busca	102
E	Exemplos de Realimentação de Estados	104
E.1	Exemplo 1: Modelo Massa-Mola-Amortecedor	104
E.2	Exemplo 1: Viga Flexível - Modelo Truncado	108

Lista de Figuras

2.1	Representação do problema $\mathcal{H}_\infty$	8
3.1	Características do filtro passa baixa como função de ponderação.	23
3.2	Sistema em malha aberta e filtros de ponderação	24
3.3	Diagrama do sistema aumentado onde $\mathbf{W}_u$, $\mathbf{W}_p$, $\mathbf{W}_n$ são os filtros de ponderação, $\mathbf{P}$ a planta e $\mathbf{K}$ o controlador.	24
4.1	Esquema do sistema controlado submetido a limites de saturação.	30
4.2	Esquema do sistema controlado com compensação na saída do controlador.	32
4.3	Diagrama do sistema com observador na forma do projeto $\mathcal{H}_\infty$	35
4.4	Sistema controlado submetido a limites de saturação SICS - situação <i>windup</i>	37
4.5	Sistema controlado linear irrestrito SIC.	37
4.6	Sistema <i>Anti-windup</i>	39
4.7	Sistema <i>Anti-windup</i> com $v_1 = 0$ e $dz(u_c) = u_c - \tau(u_c)$	39
4.8	Sistema equivalente <i>Anti-windup</i> para $v_1 = 0$ e $dz(u_c) = u_c - \tau(u_c)$	39
5.1	Sistema massa-mola-amortecedor de dois graus de liberdade.	42
5.2	Resposta em frequência do sistema sem controle e com controle.	43
5.3	Resposta temporal do sistema com e sem controle submetido à entrada de distúrbio - deslocamento da massa m_2	44
5.4	Sinal de controle associado à entrada distúrbio.	44
5.5	Resposta temporal do sistema massa-mola-amortecedor para uma entrada de distúrbio - com e sem efeitos de saturação.	45
5.6	Sinal de controle u da saída do controlador $\mathbf{K}$ e $\tau(u)$ entrada da planta $\mathbf{P}$	46
5.7	Resposta em frequência do sistema sem controle e dos filtros de ponderação.	47
5.8	Resposta em frequência sem e com controle com a inclusão dos filtros de ponderação no processo de projeto.	50
5.9	Sinal de controle associado à entrada de distúrbio com a inclusão dos filtros de ponderação no processo de projeto.	50
5.10	Resposta temporal $x_2(t)$ para uma entrada de distúrbio aleatório com filtros de ponderação (SCLS-FP) e com efeitos de saturação (SICS).	51

5.11	Resposta em frequência sem controle e do sistema em malha fechada com a ponderação da matriz $\mathbf{D}_{12}$ no processo de projeto $\mathcal{H}_\infty$	53
5.12	Sinal de controle associado com a ponderação da matriz $\mathbf{D}_{12}$	53
5.13	Resposta do sistema $x_2(t)$ com a ponderação da matriz $\mathbf{D}_{12}$	54
5.14	Sinal de controle associado à entrada de distúrbio com a compensação da matriz $\mathbf{C}_c$ após do projeto $\mathcal{H}_\infty$	56
5.15	Resposta temporal $x_2(t)$ com a compensação da matriz $\mathbf{C}_c$ - com e sem efeitos de saturação.	56
5.16	Resposta em frequência sem controle e do sistema com controle com a compensação da matriz $\mathbf{C}_c$ após do projeto $\mathcal{H}_\infty$	57
5.17	Resposta temporal do sistema com restrição do sinal de controle via LMI - realimentação de estados $\mathcal{H}_\infty$	59
5.18	Sinal de controle associado à entrada de distúrbio com restrição do sinal de controle via LMI.	59
5.19	Resposta em frequência do sistema sem e com controle (SCLS) com restrição do sinal de controle via LMI.	60
5.20	Resposta do sistema com restrição do sinal de controle via LMI - controlador de realimentação de estados com observador.	61
5.21	Sinal de controle associado com restrição do sinal de controle via LMI - realimentação de estados com observador.	61
5.22	Resposta em frequência sem e com controle com restrição do sinal de controle via LMI - realimentação de estados e observador.	62
5.23	Resposta temporal do sistema x_2	64
5.24	Sinal de controle u da saída do controlador $\mathbf{K}$ e $\tau(u)$ entrada da planta $\mathbf{P}$	64
5.25	Viga engastada-livre	66
5.26	Graus de liberdade da viga engastada-livre com 7 elementos finitos	67
5.27	Resposta em frequência da viga engastada-livre com 14 GDL e modelo truncado para os 3 primeiros modos de vibração.	68
5.28	Resposta em frequência da viga sem controle $\mathbf{P}_{zw}$, e do sistema em malha fechada.	71
5.29	Resposta em frequência do sistema truncado sem controle e dos filtros de ponderação.	73
5.30	Resposta em frequência do modelo não truncado sem e com controle.	75
5.31	Resposta da extremidade da viga do modelo não truncado para uma entrada de distúrbio - sistema com e sem controle.	76
5.32	Sinal de controle associado à entrada de distúrbio.	76
5.33	Resposta do sistema (saída de desempenho $z = v_8$) com e sem a saturação.	77
5.34	Sinal de controle u da saída do controlador $\mathbf{K}$ e $\tau(u)$ na entrada da planta $\mathbf{P}$	78
5.35	Sinal de controle associado à entrada de distúrbio com a compensação da matriz $\mathbf{C}_c$	79

5.36	Resposta temporal $x_2(t)$ com a compensação da matriz C_c e para a configuração SICS (com filtros de ponderação).	80
5.37	Resposta em frequência sem controle e do sistema com controle com a compensação da matriz C_c após do projeto $\mathcal{H}_\infty$	81
5.38	Resposta do sistema ($z = v_8$).	83
5.39	Sinal de controle u da saída do controlador $\mathbf{K}$ e $\tau(u)$ entrada da planta $\mathbf{P}$	83
5.40	Resposta temporal do extremo da viga (modelo truncado) - realimentação de estados restrito.	84
5.41	Sinal de controle com restrição via LMI - realimentação de estados.	85
5.42	Resposta temporal do extremo da viga (modelo truncado) para um SCLS com e sem observador - realimentação de estados.	86
E.1	Resposta temporal da massa m_2 - realimentação de estados.	105
E.2	Sinal de controle associado - realimentação de estados.	105
E.3	Resposta temporal do sistema com restrição via do sinal de controle - realimentação de estados.	106
E.4	Sinal de controle com restrição via LMI na formulação do projeto - realimentação de estados.	107
E.5	Resposta em frequência do sistema sem e com controle.	107
E.6	Resposta temporal do extremo da viga (modelo truncado) - realimentação de estados.	108
E.7	Sinal de controle associado - realimentação de estados (SIC).	109
E.8	Resposta temporal do extremo da viga (modelo truncado) para um SICS e para um SCLS - realimentação de estados.	110
E.9	Sinal de controle associado à entrada de distúrbio para o SCLS - realimentação de estados.	111

Lista de Tabelas

5.1	Polos da malha fechada do sistema controlado - SCLS	49
5.2	Polos da malha fechada do SCLS com ponderação da matriz $\mathbf{D}_{12}$	52
5.3	Polos da malha fechada do SCLS - realimentação de estados	58
5.4	Resumo dos métodos: Massa-mola-amortecedor	65
5.5	Custo Computacional: Massa-mola-amortecedor	65
5.6	Polos da malha fechada do sistema truncado	70
5.7	Polos da malha fechada do sistema não truncado	72
5.8	Polos da malha fechada do sistema truncado - realimentação de estados com restri- ção via LMI	85
5.9	Polos da malha fechada do sistema truncado	87
5.10	Resumo dos métodos: Viga flexível	88
5.11	Custo Computacional: Viga flexível	88
E.1	Polos da malha fechada do SCLS - realimentação de estados.	106
E.2	Polos da malha fechada do sistema truncado	109

Notação

No presente trabalho as letras minúsculas em negrito denotam vetores e as letras maiúsculas em negrito representam matrizes.

A nomenclatura usada é:

- $\mathbf{I}$: Matriz identidade;
- $\mathbf{A}^T$: Matriz $\mathbf{A}$ transposta;
- $\det(\mathbf{A})$: Determinante da matriz $\mathbf{A}$;
- $\text{tr}(\mathbf{A})$: Representa o traço da matriz $\mathbf{A}$;
- $\mathbf{A} > \mathbf{0}$: Matriz $\mathbf{A}$ é simétrica e positiva definida;
- $\|\mathbf{A}\|$: Norma euclidiana da matriz $\mathbf{A}$;
- $\mathbf{A}^*$: Hermitiana da matriz $\mathbf{A}$;
- $\lambda_i(\mathbf{A})$: Autovalor λ_i da matriz $\mathbf{A}$;
- $\lambda_{max}(\mathbf{A})$: Maior autovalor da matriz $\mathbf{A}$;
- $\|\mathbf{G}(s)\|_\infty$: Norma infinito da matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$, ou seja, representa o pico da resposta em frequência de $\mathbf{G}(s)$;
- $\|\mathbf{G}(s)\|_2$: Norma 2 da matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$;
- $\sup_w(g(w))$: Supremo da função $g(w)$;
- i : Unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$;
- s : Variável no domínio da transformada de Laplace.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m \times m}$: Conjunto dos números reais, vetor de números reais de ordem n , matriz de número reais de ordem $m \times m$ respectivamente;
- SISO: Denotação para sistemas de uma entrada e uma saída, do inglês *Simple Input Simple Output*;
- MIMO: Denotação para sistemas de mais de uma entrada e mais de uma saída, do inglês *Multiple Input Multiple Output*;
- GDL: Graus de Liberdade;

- SIC: Denotação para sistemas ideais controlados, ou seja, sistemas que não apresentam limitação do esforço de controle e são projetados sem levar em conta qualquer restrição no esforço de controle;
- SICS: Denotação para sistemas ideais controlados e com saturação, ou seja, sistemas que são projetados sem levar em conta a limitação do esforço de controle, mas que na situação real apresentam limitação (saturação) na entrada de controle da planta;
- SCLS: Denotação para sistemas controlados levando em conta a saturação, ou seja, sistemas que são projetados levando em conta a limitação do esforço de controle, e na situação real apresentam limitação na entrada de controle da planta para evitar a saturação;
- SAWS: Denotação para sistemas *Anti-windup* controlados com saturação, ou seja, sistemas projetados com compensação *Anti-windup* para minimizar os efeitos da limitação do esforço de controle. Na situação real procuram melhorar o desempenho do sistema mesmo quando ocorre a saturação.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

O problema de controle de vibrações em estruturas possui certa complexidade associada a algumas características típicas destas. Uma estrutura flexível apresenta uma grande quantidade de picos de ressonância próximos uns dos outros, caracterizando uma alta densidade de modos de vibração e geralmente baixo amortecimento. O projeto de sistemas de controle de vibrações para estruturas flexíveis requer especial atenção devido ao tamanho dos modelos das estruturas, em geral com elevado número de graus de liberdade. Além disso, o controle destas estruturas requer uma considerável quantidade de instrumentação em termos de sensores e atuadores, cuja localização também é uma questão que deve ser levada em consideração devido à sua grande importância nos resultados do projeto completo [3, 15]. Estes fatores requerem um tratamento computacional, que muitas vezes pode ser considerado complicado e que requer recursos computacionais e de instrumentação sofisticados.

Usualmente o modelo matemático da estrutura pode ser obtido através do método dos elementos finitos [4, 12, 19] ou através da identificação experimental da estrutura [1, 10], caso esta esteja disponível. Nestas duas situações, o modelo obtido terá uma ordem truncada em relação à estrutura real. Isso caracteriza uma dificuldade adicional do problema de controle de estruturas, que é o fato dos modos desconsiderados poderem ser excitados caracterizando o fenômeno conhecido como *spillover*, e que pode caracterizar altas amplitudes de vibração e a consequente saturação dos atuadores ou mesmo situações de instabilidade.

Uma das técnicas mais usadas recentemente nas áreas de controle ótimo e robusto de sistemas dinâmicos é o emprego das Desigualdades Matriciais Lineares ou do inglês *Linear Matrix Inequalities - LMI* [6, 25], e que consiste em caracterizar o problema de controle como um problema de otimização com restrições na forma de desigualdades matriciais, isto é,

$$\text{minimizar} \quad \gamma$$

$$\text{Sujeito a } \mathbf{A}(\mathbf{x}, \gamma) < \mathbf{0}$$

onde γ representa uma função objetivo linear a ser minimizada, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \gamma)$ é uma matriz que depende das variáveis de decisão/otimização, $\mathbf{x}$ são as variáveis de otimização e a restrição $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \gamma) < \mathbf{0}$ significa que a matriz $\mathbf{A}$ é negativo-definida. Este tipo de problema caracteriza um típico problema de otimização com restrições na forma de LMI.

Esse problema de otimização, quando convexo, permite o emprego de técnicas numéricas eficientes para a solução [14,24,35]. Caso o problema não seja convexo, ainda assim em muitos casos é possível fazer um tratamento para adaptar o problema de forma que este possa ser transformado em um problema alternativo ou em uma série de problemas convexos, e que permitam o emprego das técnicas baseadas em LMI, permitindo explorar as vantagens dos problemas colocados na forma de LMI [22] .

Um dos critérios usuais de projeto é a minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$, que consiste em atenuar o valor do pico da resposta em frequência do sistema controlado, mantendo obviamente a estabilidade. O controle $\mathcal{H}_\infty$ é particularmente interessante para aumentar a capacidade do sistema de rejeitar distúrbios, assim como aumentar a sua robustez. Uma das formas de resolver o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ é através da sua formulação como problema de desigualdade matricial linear [30]. Particularmente, no caso do problema de controle de vibrações de estruturas, o interesse pela redução do valor de pico é associado a reduzir os picos de ressonância. Salienta-se que para sistemas multivariáveis, a resposta em frequência é caracterizada pelos valores singulares.

O controle $\mathcal{H}_\infty$ é baseado na minimização da norma infinito correspondente à função de transferência entre as entradas exógenas e a saída de desempenho. A inclusão do esforço de controle como um dos sinais de desempenho tem o objetivo de limitá-lo, permitindo assim uma solução factível em função ao atuador adotado no projeto. Um tratamento adequado no que se refere aos atuadores deve considerar suas características em termos de saturação, e a respectiva inclusão destes efeitos nos modelos. Um outro aspecto importante no projeto de controladores $\mathcal{H}_\infty$ é a inclusão de filtros de ponderação para levar em conta a informação em termos de frequência dos sinais envolvidos, contribuindo para evitar a excitação de modos de vibração em regiões de frequência fora da faixa de interesse [38].

Geralmente, no processo do projeto $\mathcal{H}_\infty$, é comum não considerar os limites de saturação dos componentes do sistema de controle, o que levaria a uma perda de desempenho no caso do atuador se saturar. Neste trabalho a informação sobre os limites de trabalho do atuador é levada em consideração para o projeto $\mathcal{H}_\infty$. Métodos computacionais simples e iterativos e também de maior complexidade são empregados para a obtenção do controlador. Estas técnicas foram testadas em dois exemplos (um sistema massa-mola-amortecedor de dois graus de liberdade e uma viga engastada), e os principais aspectos dos métodos são discutidos no trabalho.

Na abordagem do problema de saturação foram empregados métodos para evitar a saturação do atuador. Dentro deste escopo destacam-se métodos iterativos de correção, a inclusão direta da

restrição do sinal de controle dentro do problema de minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ [6], e o emprego de filtros de ponderação para a minimização da amplitude do esforço de controle. Outro enfoque utilizado neste trabalho foi o método *Anti-windup* que não evita a saturação do atuador, mas busca garantir a melhora do desempenho mesmo quando ocorre a saturação [13, 17, 18, 21, 23].

Vale salientar que na situação real a escolha do método a implementar vai depender das situações apresentadas a seguir.

- Situação de sistemas que suportam a saturação: para estas situações podem-se explorar métodos que garantem uma melhora de desempenho mesmo na presença da saturação. Dentro deste escopo estão os controladores *Anti-windup* e controladores para sistemas não lineares.
- Situação de sistemas que não suportam a saturação: neste caso somente métodos conservadores podem ser usados, garantindo a não saturação todo o tempo. Contudo, estes métodos podem não garantir uma melhora do desempenho, pois o objetivo para estes tipos de controladores é evitar a saturação, evitando danos físicos ao sistema.

1.2 Revisão Bibliográfica

Este trabalho aborda os conceitos de projeto de controladores $\mathcal{H}_\infty$, onde o objetivo é a minimização do maior pico da resposta em frequência, o que corresponde à norma $\mathcal{H}_\infty$ [31, 32, 38]. A formulação é apresentada em forma de desigualdades matriciais lineares [6], para tratar o problema de controle como um problema de otimização convexa.

Uma preocupação deste escopo é a questão da possível saturação dos atuadores. Particularmente no caso do problema da rejeição de distúrbios, que podem não ser muito bem caracterizados em termos da distribuição em frequência e da amplitude, o controlador projetado poderá gerar um sinal de controle incompatível com o atuador empregado no sistema, ocorrendo a saturação (*wind-up*) [11].

A saturação caracteriza um comportamento não linear que passa a fazer parte do sistema e que pode ser analisado considerando ferramentas específicas da área de sistemas e controle não lineares, tais como discutido em [33]. Contudo, existem alternativas para levar em conta a questão da saturação nas formulações baseadas em desigualdades matriciais lineares LMIs [6, 17, 18, 21, 23, 36]. Neste trabalho são desenvolvidos métodos que procuram considerar a saturação dos atuadores no projeto de controladores baseados na minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$.

Entre os métodos desenvolvidos está o de limitar o esforço de controle diretamente na formulação matemática, com a inclusão de uma restrição adicional como mostrado em [6]. Outros métodos empregados aqui são baseados em projetar controladores que não superem o limite de saturação, tendo algum conhecimento das características das entradas exógenas que afetam o sistema. Dentro deste escopo está a inclusão do esforço de controle como um dos sinais de desempenho com o objetivo de limitá-lo. Para isso é importante a inclusão dos filtros de ponderação para levar em

conta a informação em termos de frequência dos sinais envolvidos. Embora este enfoque solucione o problema de saturação, ele é pouco flexível às alterações dos limites de saturação. Outro enfoque do projeto de controle com saturação é o método *Anti-windup*, baseado na inclusão de um compensador ao sistema de controle com o fim de minimizar os efeitos de saturação. Este método tem como vantagem a flexibilidade às mudanças dos limites de saturação [17, 18, 21, 23]. Todos os enfoques aqui comentados podem explorar formulações matemáticas baseadas em LMIs.

Na realização deste projeto foram empregadas ferramentas computacionais tais como os módulos *Robust Control Toolbox*, *LMI Control Toolbox* e *Optimization Toolbox* [7, 8, 14] do aplicativo MATLAB. Além disso, foram empregados resolvidores de problemas de controle através de desigualdades matriciais lineares, tais como o *Yalmip* e *SeDuMi* [29, 37], ambos públicos e desenvolvidos para o aplicativo MATLAB. Uma outra ferramenta muito útil na simulação de sistemas é o módulo SIMULINK do MATLAB, que permitiu realizar *experimentos virtuais* considerando distúrbios, saturação e outros efeitos, permitindo uma boa avaliação das metodologias desenvolvidas.

1.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho é projetar controladores $\mathcal{H}_\infty$ levando em conta a restrição no esforço de controle para problemas de controle de vibrações de estruturas flexíveis.

Uns dos enfoques considerados serão o de caracterizar o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ como um problema de desigualdades matriciais lineares, explorando as vantagens computacionais deste tipo de formulação.

1.4 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está estruturado como segue:

- O Capítulo 1 apresenta a introdução e uma ideia geral do que se desenvolve nesta dissertação.
- O Capítulo 2 aborda os conceitos do projeto $\mathcal{H}_\infty$ baseados em desigualdades matriciais lineares.
- O Capítulo 3 fornece os conhecimentos para o uso de filtros de ponderação, mostrando a formulação matemática para o caso de um sistema na forma padrão do problema $\mathcal{H}_\infty$.
- O Capítulo 4 apresenta as técnicas usadas que permitem minimizar os efeitos de saturação do atuador.
- O Capítulo 5 mostra os resultados das técnicas usadas para um exemplo simples de 2 graus de liberdade e para o caso de uma viga flexível.

- O Capítulo 6 mostra as conclusões obtidas no trabalho.
- É apresentada a lista de referências do trabalho.
- O Apêndice A apresenta o alguns conceitos utilizados no trabalho.
- O Apêndice B apresenta o método das penalidades.
- O Apêndice C apresenta o algoritmo de Busca da Matriz D_{12} .
- O Apêndice D apresenta o algoritmo de Busca do Fator de Compensação da Matriz C_c .
- O Apêndice E mostra os resultados do método de restrição do sinal de controle via LMI comparado com o sistema de realimentação de estados. São usados os exemplos massa-mola-amortecedor e uma viga flexível.

Capítulo 2

Projeto $\mathcal{H}_\infty$

2.1 Introdução

O projeto $\mathcal{H}_\infty$ representa um enfoque no projeto de controladores que pode ser tratado como problemas de otimização no domínio da frequência. É utilizado quando se deseja manter certos níveis de desempenho e estabilidade frente a distúrbios externos.

Formulado pela primeira vez por Zames (1981), o projeto do controlador $\mathcal{H}_\infty$ busca reduzir os efeitos de entradas externas, minimizando o pico da resposta em frequência do sistema. Métodos que abordam o projeto de controladores $\mathcal{H}_\infty$ têm sido desenvolvidos na atualidade, sendo tratados neste trabalho os baseados em desigualdades matriciais lineares, que transformam o projeto $\mathcal{H}_\infty$ num problema de otimização convexa [6].

2.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

O projeto $\mathcal{H}_\infty$ consiste em reduzir a norma infinito da função ou matriz de transferência da saída de desempenho com respeito às entradas exógenas, o que representa, minimizar o pico de resposta em frequência do sistema em malha fechada. Vale especificar que no caso de sistemas multivariáveis o diagrama da resposta em frequência se refere ao diagrama de valores singulares, e no caso de sistemas de entrada única, ao diagrama de Bode da amplitude. A norma $\mathcal{H}_\infty$ é definida como segue:

- A norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência $G(s)$ (SISO) é

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_w |G(jw)|$$

- A norma $\mathcal{H}_\infty$ da matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$ (MIMO) é

$$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty = \sup_w \sigma_{\max}(\mathbf{G}(jw))$$

onde $\sigma(\mathbf{G}(jw))$ representa os valores singulares da matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$, e é definido como

$$\sigma_{max}(\mathbf{G}(jw)) = \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{G}^*(jw)\mathbf{G}(jw))}$$

onde $\lambda_{max}(\cdot)$ denota o maior autovalor.

2.3 Formulação do Problema de Controle

Seja o sistema dinâmico a seguir na forma padrão do problema $\mathcal{H}_\infty$ [39],

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.1}$$

com as especificações seguintes:

- $\mathbf{w}$ representa o vetor de entradas exógenas;
- $\mathbf{z}$ representa o vetor das saídas de desempenho;
- $\mathbf{u}$ representa o vetor dos esforços de controle;
- $\mathbf{y}$ representa o vetor das saídas medidas;
- $\mathbf{x}$ representa o vetor de estados.

Este sistema pode ser representado na forma compacta como

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right]\tag{2.2}$$

O sistema (2.1) pode ser representado na forma de matriz de transferência como segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{zw}(s) & \mathbf{P}_{zu}(s) \\ \mathbf{P}_{yw}(s) & \mathbf{P}_{yu}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}\tag{2.3}$$

onde:

- $\mathbf{P}_{zw}(s)$ representa a função de transferência entre saída $\mathbf{z}$ para a entrada $\mathbf{w}$;
- $\mathbf{P}_{zu}(s)$ representa a função de transferência entre saída $\mathbf{z}$ para a entrada $\mathbf{u}$;
- $\mathbf{P}_{yw}(s)$ representa a função de transferência entre saída $\mathbf{y}$ para a entrada $\mathbf{w}$;

- $P_{yu}(s)$ representa a função de transferência entre saída y para a entrada u .

Do sistema (2.1) a matriz de transferência da saída de desempenho para a entrada de exógena é obtida como

$$P_{zw}(s) = C_1(sI - A)^{-1}B_1 + D_{11} \quad (2.4)$$

Deseja-se no projeto $\mathcal{H}_\infty$ encontrar um controlador para minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ da matriz de transferência (2.4), o que significa, reduzir os efeitos da entrada exógena sobre a saída de desempenho no pior caso (norma $\mathcal{H}_\infty$).

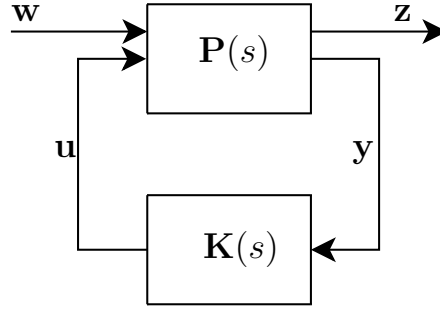


Figura 2.1: Representação do problema $\mathcal{H}_\infty$

Tendo como base a Figura 2.1 e a equação (2.3) pode-se reescrever as saídas do sistema como

$$z = P_{zw}w + P_{zu}u \quad (2.5)$$

$$y = P_{yw}w + P_{yu}u \quad (2.6)$$

e com a realimentação

$$u = Ky \quad (2.7)$$

Substituindo (2.7) em (2.6), isola-se y como se mostra:

$$\begin{aligned} y &= P_{yw}w + P_{yu}Ky \\ (I - P_{yu}K)y &= P_{yw}w \\ y &= (I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw}w \end{aligned} \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.7) tem-se:

$$u = K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw}w \quad (2.9)$$

Usando (2.9) em (2.5) tem-se:

$$z = P_{zw}w + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw}w$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw})\mathbf{w} \quad (2.10)$$

Finalmente a matriz de transferência entre a entrada de distúrbio $\mathbf{w}$ e a saída de desempenho $\mathbf{z}$ do sistema controlado é

$$\mathbf{T}_{zw} = \mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yw} \quad (2.11)$$

O projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ ótimo busca encontrar os controladores admissíveis (controladores que garantem a estabilidade do sistema) $\mathbf{K}(s)$ de modo que $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty$ seja minimizado [38], ou seja, procura minimizar, tanto quanto seja possível, o pico da resposta em frequência entre a entrada exógena e a saída de desempenho.

O projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótimo busca encontrar os controladores admissíveis $\mathbf{K}(s)$, se existir algum, de modo que, para um $\gamma > 0$,

$$\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (2.12)$$

Na busca do controlador $\mathbf{K}(s)$ ótimo o $\gamma > 0$ é minimizado até que a condição (2.12) deixe de ser satisfeita, então se diz que o controlador $\mathbf{K}(s)$ ótimo foi encontrado. Em outras palavras, o controlador $\mathbf{K}(s)$ é ótimo se resolve o seguinte problema de otimização [38]:

$$\begin{array}{ll} \min & \gamma \\ \text{s.a} & \|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma \end{array} \quad (2.13)$$

2.4 Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

2.4.1 História

A primeira apresentação das desigualdades matriciais lineares de sistemas dinâmicos foi feita por Lyapunov em 1890 para definir o que se conhece como a teoria de Lyapunov. Ele mostrou que a equação diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é estável se e somente se existir uma matriz $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ de modo que para $\mathbf{Q} > 0$ tem-se

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A} < 0 \quad (2.14)$$

O desenvolvimento das LMIs como ferramenta para problemas na engenharia de controle teve todo um processo de estudo e busca de técnicas de solução. Por volta de 1940 Lur'e, Postnikov, junto com outros pesquisadores aplicaram pela primeira vez os métodos de Lyapunov para problemas de estabilidade, obtendo LMIs que foram resolvidas analiticamente, com grande limitação para sistemas de ordem maior. Para contornar essa limitação, em 1960 Yakubovich, Popov e Kalman, usando o que se conhece como *Lema Real Positivo*, propuseram soluções gráficas, o que derivou no famoso critério de Popov. Posteriormente em torno de 1970 se descobriu que as LMIs apresen-

tadas no *Lema Real Positivo*, podiam também, ser resolvidas por certas equações de Ricatti (ARE). A partir disso, as LMIs derivadas da teoria de controle passaram a ser tratadas como problemas de otimização convexa [6]. Na atualidade, existem programas computacionais especializados na resolução das LMIs [29, 37].

2.4.2 Definição de LMI

Uma desigualdade matricial linear é uma restrição convexa da seguinte forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \mathbf{F}_0 + \mathbf{x}_1 \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{x}_n \mathbf{F}_n > \mathbf{0} \quad (2.15)$$

isto é, o conjunto

$$\{\mathbf{x} : \mathbf{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}\} \quad (2.16)$$

é um conjunto convexo. Neste caso, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis de otimização, $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ são matrizes simétricas conhecidas. Note que se $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ significa que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ deve ser definida positiva para todo $\mathbf{x}$, ou seja, $\mathbf{p}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{p} > 0$ para todo vetor $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. Se um problema de controle pode ser formulado na forma de LMIs e gerar um problema de otimização convexa, se garante encontrar uma solução se este a tiver.

2.5 Desigualdades Matriciais Lineares no Projeto $\mathcal{H}_\infty$

2.5.1 Lema do Limite Real

O *Lema do Limite Real* (ver [31, 39]) é importante no projeto de controladores $\mathcal{H}_\infty$ já que permite converter o problema de minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ num problema de otimização convexa na forma de LMIs. Para a apresentação do lema define-se o seguinte sistema padrão linear:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.17)$$

A matriz de transferência entre a entrada e a saída é definida como

$$\mathbf{T}(s) = \frac{\mathbf{z}(s)}{\mathbf{w}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

O *Lema do Limite Real* é definido como segue:

Lema. A desigualdade $\|\mathbf{T}(s)\|_\infty < \gamma$ é satisfeita se e somente se existir uma matriz simétrica $\mathbf{\Gamma}$

de modo que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} & \mathbf{\Gamma} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (2.18)$$

Este Lema pode ser provado como descrito a seguir.

É possível escrever, da definição de norma $\mathcal{H}_\infty$, que

$$\|\mathbf{T}(s)\|_\infty^2 = \lambda_{\max}(\mathbf{T}^*(jw)\mathbf{T}(jw))$$

ou ainda,

$$\|\mathbf{T}(s)\|_\infty^2 = \max \frac{\mathbf{w}^*(jw)\mathbf{T}^*(jw)\mathbf{T}(jw)\mathbf{w}(jw)}{\mathbf{w}(jw)^*\mathbf{w}(jw)} = \max \frac{\mathbf{z}^*(jw)\mathbf{z}(jw)}{\mathbf{w}(jw)^*\mathbf{w}(jw)} \geq \frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2}$$

Lembrando que $\|\mathbf{T}(s)\|_\infty < \gamma$ e usando a definição de norma $\mathcal{L}_2$ (ver Apêndice A.4). Logo,

$$\frac{\|\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{w}\|_2} < \gamma^2 \Rightarrow \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) < 0 \quad (2.19)$$

Do critério de estabilidade de Lyapunov (ver Apendice A) escreve-se que

$$\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}} < 0 \quad (2.20)$$

Combinando (2.19) e (2.20) tem-se

$$\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{z}^T \mathbf{z} - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} < 0 \quad (2.21)$$

Substituindo a equação (2.17) em (2.21) escreve-se que

$$(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w})^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w}) + (\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{w})^T (\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{w}) - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} < 0$$

que pode ser escrita matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \\ \mathbf{w}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{Q} + \mathbf{D}^T \mathbf{C} & -\gamma^2 \mathbf{I} + \mathbf{D}^T \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} < 0$$

e que leva à seguinte condição matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{Q} + \mathbf{D}^T \mathbf{C} & -\gamma^2 \mathbf{I} + \mathbf{D}^T \mathbf{D} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

ou também

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} & \mathbf{Q} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{Q} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix} [\mathbf{C} \ \mathbf{D}] < \mathbf{0} \quad (2.22)$$

Multiplicando (2.22) por γ^{-1} obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \gamma^{-1} + \gamma^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{A} & \gamma^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \gamma^{-1} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \gamma^{-1} [\mathbf{C} \ \mathbf{D}] < \mathbf{0} \quad (2.23)$$

Substituindo $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{Q} \gamma^{-1}$ e aplicando o complemento de Schur em (2.23) tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} & \mathbf{\Gamma} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (2.24)$$

2.5.2 Controlador $\mathcal{H}_\infty$ por Realimentação de Saída

Nesta seção é formulado o problema de minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ na forma de LMI de acordo com (2.13) para o sistema apresentado em (2.1) usando um controlador dinâmico de realimentação de saída.

Representação Geral do Sistema Controlado $\mathcal{H}_\infty$ - Realimentação de Saída

Para efeitos de explicação mostra-se novamente o sistema da planta $\mathbf{P}$ (2.1) como segue:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u} \quad (2.27)$$

Seja o controlador linear dinâmico $\mathbf{K}$ dado por

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{y} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c \mathbf{y} \quad (2.29)$$

Com base no sistema da Figura 2.1 é possível obter o sistema controlado conforme a seguir.

Substituindo (2.27) em (2.29) tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c (\mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22}) \mathbf{u} &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} \end{aligned}$$

e isolando u tem-se

$$\begin{aligned} u &= (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} \\ u &= \mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.30)$$

com $\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{22})^{-1}$.

Substituindo (2.30) na equação (2.25) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 (\mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}) \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2) \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}) \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Da mesma forma a equação (2.26) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} (\mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}) \\ &= (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2) \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + (\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}) \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Substituindo (2.27) e (2.30) em (2.28) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c (\mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{22} u) \\ &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} (\mathbf{N} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}) \\ &= (\mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2) \mathbf{x} + (\mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{C}_c) \mathbf{x}_c + (\mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}) \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.33)$$

As equações (2.31), (2.32) e (2.33) podem ser agrupadas matricialmente, caracterizando a representação geral do sistema controlado, ou malha fechada do sistema, como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{C}_c] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + [\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}] \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Finalmente, as matrizes do sistema de malha fechada são:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{22} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{C}_c] \\ \tilde{\mathbf{D}} &= \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{N} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Adaptação das Matrizes do Controlador usando o Controlador Projetado com $D_{22} = 0$

É mais simples matematicamente e computacionalmente projetar o controlador com $D_{22} = 0$ e depois corrigi-lo para o caso de $D_{22} \neq 0$.

Seja o sistema em malha fechada considerando $D_{22} = 0$ como se mostra:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + [\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}] \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.36)$$

com as matrizes em malha fechada descritas como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c] \\ \tilde{\mathbf{D}} &= \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \end{aligned} \quad (2.37)$$

É possível fazer um reajuste do controlador projetado, para casos $D_{22} \neq 0$, conforme descrito a seguir.

Considere o sistema $\hat{\mathbf{P}}$ dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \quad (2.39)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} \quad (2.40)$$

Considere o controlador $\hat{\mathbf{K}}$ correspondente ao caso $D_{22} = 0$ dado por

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \hat{\mathbf{A}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c \hat{\mathbf{y}} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{C}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{D}}_c \hat{\mathbf{y}} \quad (2.42)$$

Comparando o sistema $\mathbf{P}$ com o sistema $\hat{\mathbf{P}}$, ou (2.27) com (2.40) verifica-se que

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}$$

ou

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \quad (2.43)$$

Substituindo a equação (2.43) nas equações (2.41) e (2.42) do controlador tem-se

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \hat{\mathbf{A}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{A}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c (\mathbf{y} - \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}) \quad (2.44)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{C}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{D}}_c \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{C}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{D}}_c (\mathbf{y} - \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}) \quad (2.45)$$

Isolando $\mathbf{u}$ na equação (2.45) tem-se

$$(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22}) \mathbf{u} = \hat{\mathbf{C}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{y}$$

ou ainda

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{C}}_c \mathbf{x}_c + (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{y} \quad (2.46)$$

Substituindo (2.43) na equação (2.44) juntamente com (2.46) tem-se

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \hat{\mathbf{A}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{y} - \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{D}_{22}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \hat{\mathbf{A}}_c \mathbf{x}_c + \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{y} - \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{D}_{22} [(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{C}}_c \mathbf{x}_c + (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{y}]$$

$$\dot{\mathbf{x}}_c = [\hat{\mathbf{A}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{D}_{22} (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{C}}_c] \mathbf{x}_c + [\hat{\mathbf{B}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{D}_{22} (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{D}}_c] \mathbf{y} \quad (2.47)$$

Consequentemente, as matrizes de estado do controlador para o caso de $\mathbf{D}_{22} \neq \mathbf{0}$, em função das matrizes do controlador $\hat{\mathbf{K}}$, podem ser escritas de (2.46) e (2.47) como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \hat{\mathbf{A}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{D}_{22} (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{C}}_c \\ \mathbf{B}_c &= \hat{\mathbf{B}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{D}_{22} (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{C}_c &= (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{C}}_c \\ \mathbf{D}_c &= (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{D}}_c \mathbf{D}_{22})^{-1} \hat{\mathbf{D}}_c \end{aligned} \quad (2.48)$$

É considerado neste trabalho, para efeitos de solução do problema de otimização (2.13), que a matriz $\mathbf{D}_c = \mathbf{0}$. Isso corresponde ao caso de controladores próprios. Portanto, as matrizes do controlador para este caso são

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \hat{\mathbf{A}}_c - \hat{\mathbf{B}}_c \mathbf{D}_{22} \hat{\mathbf{C}}_c \\ \mathbf{B}_c &= \hat{\mathbf{B}}_c \\ \mathbf{C}_c &= \hat{\mathbf{C}}_c \\ \mathbf{D}_c &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Problema de Controle $\mathcal{H}_\infty$

Seja um sistema controlado (malha fechada) descrito pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{w}\end{aligned}\tag{2.50}$$

onde as matrizes $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ e $\tilde{\mathbf{D}}$ dependem das matrizes do sistema em malha aberta e das matrizes do controlador, como pode-se ver em (2.35) ou (2.37).

O problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ consiste em determinar o controlador que minimiza a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada, ou seja, o controlador $\mathbf{K}$ que resolva o problema de otimização apresentado em (2.13). Usando o *Lema do Limite Real* e com auxílio do complemento de Schur, o problema de otimização é descrito como

$$\begin{aligned}\min \quad & \mu \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\ & \tilde{\mathbf{P}} > \mathbf{0}\end{aligned}\tag{2.51}$$

O problema de otimização (2.51) apresenta termos não lineares na formulação, como é o caso do termo $\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}}$, fazendo impossível o uso das LMIs. Porém, este problema pode ser linearizado usando transformações de variáveis para eliminar os termos não lineares, como é detalhado a seguir.

A matriz $\tilde{\mathbf{P}}$ simétrica pode ser escrita como

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{V} & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}$$

onde as matrizes $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\hat{\mathbf{X}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$ são simétricas.

Verifica-se o seguinte:

$$\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{V} & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{XY} + \mathbf{U}^T \mathbf{V} & \mathbf{XV}^T + \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{UY} + \hat{\mathbf{X}} \mathbf{V} & \mathbf{UV}^T + \hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^{-1}\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{V} & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{YX} + \mathbf{V}^T \mathbf{U} & \mathbf{YU}^T + \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{X}} \\ \mathbf{VX} + \hat{\mathbf{Y}} \mathbf{U} & \mathbf{VU}^T + \hat{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Define-se a matriz de transformação Ξ dada por

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

É possível aplicar a seguinte transformação de congruência (ver Apêndice A) na matriz $\tilde{\mathbf{P}}$, ou seja,

$$\tilde{\mathbf{P}} > \mathbf{0} \Rightarrow \Xi^T \tilde{\mathbf{P}} \Xi > \mathbf{0}$$

e substituindo os valores das respectivas matrizes tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (2.52)$$

Fazendo uma transformação de congruência na restrição (2.51) do problema $\mathcal{H}_\infty$ tem-se

$$\begin{bmatrix} \Xi^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

o que leva à seguinte expressão

$$\begin{bmatrix} \Xi^T (\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}}) \Xi & \Xi^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} & \Xi^T \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \Xi & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} \Xi & \tilde{\mathbf{D}} & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (2.53)$$

Os termos da inequação (2.53) podem ser reescritos através de variáveis auxiliares para eliminar aqueles que causam não linearidades. Para este fim são usadas as matrizes em malha fechada mostradas em (2.37). Os termos são reescritos conforme se apresenta a seguir.

1. Termo $\tilde{\mathbf{C}} \Xi$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}} \Xi &= [(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2) \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c \mathbf{V} \quad \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2] \\ \tilde{\mathbf{C}} \Xi &= [\mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F} \quad \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2] \end{aligned} \quad (2.54)$$

com

$$\mathbf{F} = \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{Y} + \mathbf{C}_c \mathbf{V}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{C}_c = (\mathbf{F} - \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{Y}) \mathbf{V}^{-1} \quad (2.55)$$

2. Termo $\tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \Xi$

$$\tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \Xi = [\mathbf{B}_1^T + \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{D}_c^T \mathbf{B}_2^T \quad \mathbf{B}_1^T \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^T (\mathbf{D}_c^T \mathbf{B}_2^T \mathbf{X} + \mathbf{B}_c^T \mathbf{U})]$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \Xi = [\mathbf{B}_1^T + \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{D}_c^T \mathbf{B}_2^T \quad \mathbf{B}_1^T \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{L}^T] \quad (2.56)$$

com

$$\mathbf{L}^T = \mathbf{D}_c^T \mathbf{B}_2^T \mathbf{X} + \mathbf{B}_c^T \mathbf{U}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{B}_c = (\mathbf{U}^T)^{-1}(\mathbf{L} - \mathbf{X}^T \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c) \quad (2.57)$$

3. Termo $\Xi^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} \Xi$

$$\Xi^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} \Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{B}_2 \mathbf{F} + \mathbf{U}^T \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{Y} + \mathbf{U}^T \mathbf{A}_c \mathbf{V} & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{X}\mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 + \mathbf{U}^T \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Xi^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} \Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{M} & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

com

$$\mathbf{M} = \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{B}_2 \mathbf{F} + \mathbf{U}^T \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{Y} + \mathbf{U}^T \mathbf{A}_c \mathbf{V} \quad (2.59)$$

ou ainda,

$$\mathbf{A}_c = (\mathbf{U}^T)^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_2 \mathbf{F} - \mathbf{U}^T \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{Y})\mathbf{V}^{-1}$$

Substituindo os termos com a respectivas trocas de variáveis na expressão (2.53), obtém-se a nova matriz de restrição linearizada como se mostra em (2.60).

Finalmente, o problema de síntese do controlador $\mathcal{H}_\infty$ torna-se o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{sujeito a} \quad & (2.60) \\ & (2.52) \end{aligned} \quad (2.61)$$

com as variáveis de otimização μ , $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$, que permitem obter as matrizes $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{B}_c$, $\mathbf{C}_c$ do controlador conforme (2.55), (2.57) e (2.59).

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{Y}\mathbf{A}^T + \mathbf{F}^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 + \mathbf{M}^T & \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21} & \mathbf{Y}\mathbf{C}_1^T + \mathbf{F}^T\mathbf{D}_{12}^T \\
\mathbf{M} + \mathbf{A}^T + \mathbf{C}_2^T\mathbf{D}_c^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{C}_2^T\mathbf{L}^T & \mathbf{X}\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{D}_{21} & \mathbf{C}_1^T + \mathbf{C}_2^T\mathbf{D}_c^T\mathbf{D}_{12}^T \\
\mathbf{B}_1^T + \mathbf{D}_{21}^T\mathbf{D}_c^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{B}_1^T\mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^T\mathbf{L}^T & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T + \mathbf{D}_{21}^T\mathbf{D}_c^T\mathbf{D}_{12}^T \\
\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} & \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21} & -\mu\mathbf{I}
\end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (2.60)$$

2.5.3 Controlador $\mathcal{H}_\infty$ por Realimentação de Estados

Nesta seção é formulado o problema de minimização conforme (2.13) para um controlador na forma de realimentação de estados.

Representação do Sistema Controlado $\mathcal{H}_\infty$ - Realimentação de Estados

Seja o sistema mostrado na Figura 2.1 com a planta P dada por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.62}$$

e com realimentação de estados de modo que

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}\tag{2.63}$$

com $\mathbf{F}$ como matriz de realimentação de estados a ser determinada.

Substituindo (2.63) em (2.62) tem-se a representação do sistema controlado ou sistema em malha fechada como se mostra:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F})\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F})\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}\end{aligned}\tag{2.64}$$

com as matrizes em malha fechada mostradas a seguir.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{B}_1 \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} \\ \tilde{\mathbf{D}} &= \mathbf{D}_{11}\end{aligned}\tag{2.65}$$

Problema de Controle $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção se apresenta a obtenção da matriz de estados $\mathbf{F}$ que fornece a solução ao problema de otimização (2.13), onde a matriz de transferência do sistema controlado é

$$\mathbf{T}_{zw}(s) = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F})(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}))^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_{11}\tag{2.66}$$

Usando o *Lema do Limite Real* para o sistema em malha fechada (2.64) e com auxílio do complemento de Schur, o problema de otimização é descrito como:

$$\begin{aligned}
& \min \quad \mu \\
& \text{sujeito a} \quad \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\
& \quad \tilde{\mathbf{P}} > \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Fazendo uma transformação de congruência na restrição do problema $\mathcal{H}_\infty$, para fins de solução tem-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

Substituindo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \tilde{\mathbf{A}}^T + \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{X} & \tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{X} \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{B}}^T & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{X} & \tilde{\mathbf{D}} & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{2.68}$$

Substituindo as matrizes do sistema controlado (2.65) em (2.68) obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Y} + \mathbf{X} \mathbf{A}^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{X} \mathbf{C}_1^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{B}_1^T & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{Y} & \mathbf{D}_{11} & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{2.69}$$

com $\mathbf{Y} = \mathbf{F} \mathbf{X}$.

Finalmente, o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ para a realimentação de estados é reescrito como

$$\begin{aligned}
& \min \quad \gamma \\
& \text{sujeito a} \quad (2.69) \\
& \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{2.70}$$

com as variáveis de otimização $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ e $\mu = \gamma^2$ e a matriz de realimentação de estados obtida de $\mathbf{F} = \mathbf{Y} \mathbf{X}^{-1}$.

Capítulo 3

Funções de Ponderação

3.1 Introdução

As funções de ponderação, mais comumente chamadas de filtros de ponderação na área de controle, têm como objetivo impor pesos para certas regiões de frequências para os sinais de entrada ou saída do sistema durante a fase de projeto do controlador.

Quando colocados na entrada do sistema, os filtros garantem uma composição espectral específica, diminuindo o conservadorismo no projeto, pois a informação sobre o comportamento das entradas passa a ser levada em consideração para o projeto do controlador.

Os filtros aplicados na saída têm como objetivo que o sistema em malha fechada apresente um comportamento pré-determinado, ou seja, faz com que a função de transferência da saída de desempenho com respeito à entrada exógena tenha uma composição espectral definida.

A aplicação dos filtros de ponderação na entrada e na saída do sistema no projeto $\mathcal{H}_\infty$ tem a vantagem de priorizar e ponderar a minimização das saídas de desempenho com respeito às entradas exógenas, tornando-se uma ferramenta importante no caso das estruturas flexíveis, onde o modelo matemático é obtido comumente através do truncamento da sua composição espectral. A utilização dos filtros de ponderação garante que os modos desconsiderados na modelagem não sejam excitados, o que se conhece como fenômeno de *Spillover* [2]. Salienta-se que os filtros de ponderação devem ser considerados somente no processo de projeto do controlador, mas não são implementados fisicamente, pois são apenas uma forma de ponderação no problema de minimização.

3.2 Seleção das Funções de Ponderação

A seleção das funções ponderadoras para um problema específico requer um bom ajuste e algumas iterações. Neste trabalho são usadas funções de ponderação com as seguintes características no domínio de Laplace [38]:

- Filtro passa baixa $\mathbf{W}_p$

$$\mathbf{W}_p = \left(\frac{s + w_c / \sqrt[k]{M_p}}{\sqrt[k]{\epsilon_p} s + w_c} \right)^k \quad (3.1)$$

- Filtro passa alta $\mathbf{W}_u$

$$\mathbf{W}_u = \left(\frac{s / \sqrt[k]{M_u} + w_c}{s + w_c \sqrt[k]{\epsilon_u}} \right)^k \quad (3.2)$$

onde M_p e M_u representam os ganhos na passagem, ϵ_p e ϵ_u representam os ganhos na rejeição, w_c a frequência de cruzamento para o ganho unitário e k a ordem do filtro. A Figura 3.1 mostra estas especificações para o caso de um filtro passa baixa.

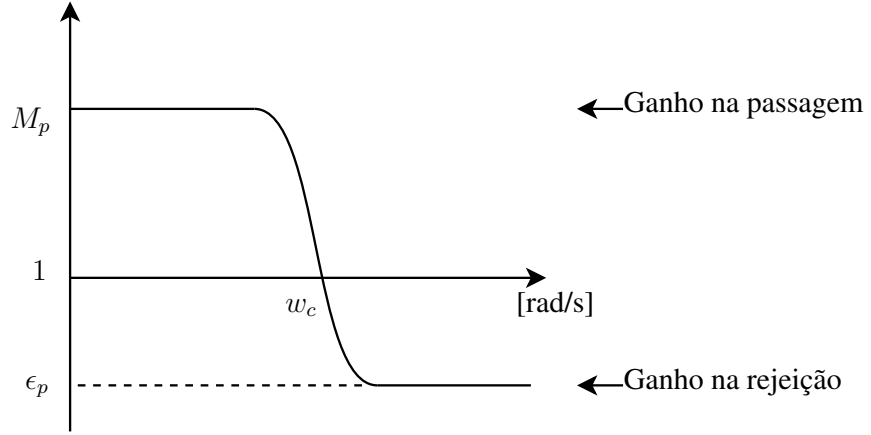


Figura 3.1: Características do filtro passa baixa como função de ponderação.

A escolha das especificações de cada função de ponderação dependem das características do sistema em malha aberta. Estas características dependem das faixas de frequência de interesse para a rejeição do distúrbio e dos pesos de cada filtro para a priorização das saídas de desempenho (ver Figura 3.2). Para o caso ilustrado na Figura 3.2, o filtro $\mathbf{W}_p$ assegura um peso grande na região de baixa frequência, buscando uma atenuação das amplitudes nesta região. O filtro $\mathbf{W}_u$ tem peso pequeno na baixa frequência, permitindo que o esforço de controle seja maior, já que este é considerado um dos sinais de desempenho do problema de otimização, e tem peso grande na região de alta frequência onde o sinal de controle deve ser pequeno para não excitar os modos de maior frequência. Na seção seguinte, é explicado com maior detalhes como as funções de ponderação são levadas em conta no projeto do controlador.

3.3 Modelo de Estados do Sistema com Filtros de Ponderação

São incluídos no processo de projeto $\mathcal{H}_\infty$ filtros de ponderação, como se mostra na Figura 3.3. Os filtros de ponderação mostrados na Figura 3.2 apresentam as seguintes especificações:

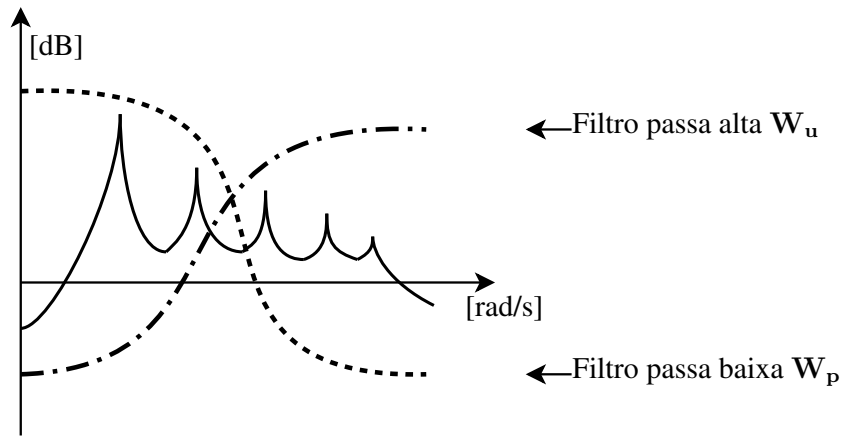


Figura 3.2: Sistema em malha aberta e filtros de ponderação

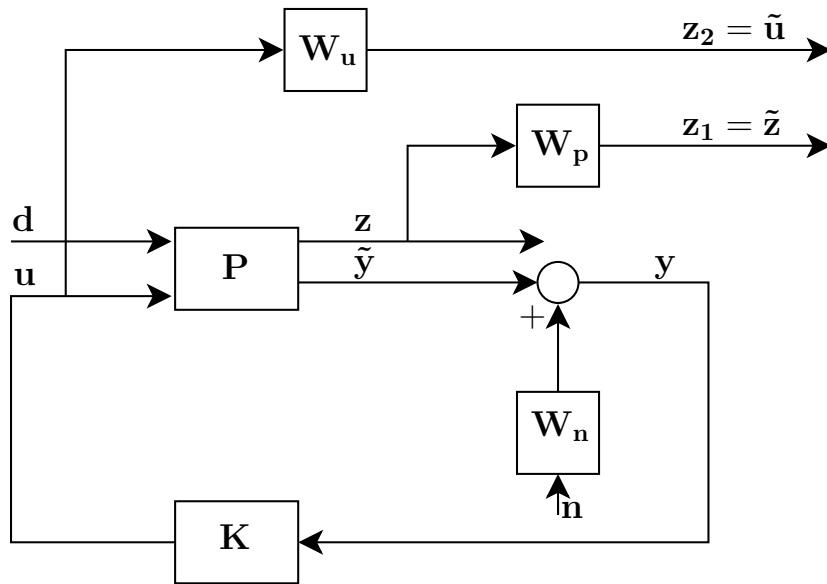


Figura 3.3: Diagrama do sistema aumentado onde W_u , W_p , W_n são os filtros de ponderação, P a planta e K o controlador.

- W_p : Filtro que especifica um peso alto na região de frequência de interesse para a atenuação de vibrações do sistema. É geralmente um filtro passa baixa cujo objetivo é a minimização dos efeitos dos sinais de distúrbio na região de frequência em que se deseja atenuar a vibração, o que significa um maior peso para o controle das saídas de desempenho na região;
- W_u : Filtro que especifica um peso alto para o esforço de controle fora da região onde se deseja controlar. É geralmente um filtro passa alta cujo objetivo é a eliminação do sinal de controle na região de frequência onde não se deseja excitação pelo controlador;
- W_n : Ganho que multiplica a entrada exógena associada ao ruído de medição para priorizar ou não estes efeitos no projeto. Geralmente $W_n < 1$. Neste trabalho, não foi considerada a presença de ruídos de medição, de forma que foi considerado $W_n = 0$.

Levando em conta esta informação apresentam-se os modelos de estados de cada bloco como segue:

- Modelo de estados da planta P :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{d} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{d} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{d} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{3.3}$$

onde $\mathbf{d}$ é o sinal de distúrbio.

- Modelo de estados do filtro W_p :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{A}_p\mathbf{x}_p + \mathbf{B}_p\mathbf{z} \\ \tilde{\mathbf{z}} &= \mathbf{C}_p\mathbf{x}_p + \mathbf{D}_p\mathbf{z}\end{aligned}\tag{3.4}$$

- Modelo de estados do filtro W_u :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_u &= \mathbf{A}_u\mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u\mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{C}_u\mathbf{x}_u + \mathbf{D}_u\mathbf{u}\end{aligned}\tag{3.5}$$

- Relação do ganho W_n :

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{W}_n\mathbf{n}\tag{3.6}$$

De (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6) obtém-se o sistema aumentado em malha aberta na forma adequada

ao projeto $\mathcal{H}_\infty$ como se mostra:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_u \\ \dot{x}_p \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ B_p C_1 & 0 & A_p \end{bmatrix}}_{A_a} \begin{bmatrix} x \\ x_u \\ x_p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_p D_{11} & 0 \end{bmatrix}}_{B_{a1}} \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_2 \\ B_u \\ B_p D_{12} \end{bmatrix}}_{B_{a2}} u \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_p C_1 & 0 & C_p \\ 0 & C_u & 0 \end{bmatrix}}_{C_{a1}} \begin{bmatrix} x \\ x_u \\ x_p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_p D_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{a11}} \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_p D_{12} \\ D_u \end{bmatrix}}_{D_{a12}} u \quad (3.8)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{a2}} \begin{bmatrix} x \\ x_u \\ x_p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{21} & W_n \end{bmatrix}}_{D_{a21}} \underbrace{\begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix}}_w + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{22} \end{bmatrix}}_{D_{a22}} u \quad (3.9)$$

3.4 Formulação do Problema de Controle com Filtros de Ponderação

3.4.1 Representação do Sistema Controlado

Reescrevendo as equações (3.7), (3.8) e (3.9) e considerando $x_a = [x \ x_u \ x_p]^T$, $w = [d \ n]^T$ e $z_a = [\tilde{z} \ \tilde{u}]^T$ tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= A_a x_a + B_{a1} w + B_{a2} u \\ z_a &= C_{a1} x_a + D_{a11} w + D_{a12} u \\ y &= C_{a2} x_a + D_{a21} w + D_{a22} u \end{aligned} \quad (3.10)$$

O controlador linear $K(s)$ por realimentação de saída é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c + D_c y \end{aligned} \quad (3.11)$$

De (3.10) e (3.11), e considerando $D_{a22} = D_{22} = 0$ sem perda da generalidade, pois as matrizes do controlador podem ser reajustadas quando a matriz $D_{a22} \neq 0$ conforme (2.48), o sistema

controlado ou em malha fechada é

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_a + B_{a2}D_cC_{a2} & B_{a2}C_c \\ B_cC_{a2} & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{a1} + B_{a2}D_cD_{a21} \\ B_cD_{a21} \end{bmatrix} w \\ z_a &= \begin{bmatrix} C_{a1} + D_{a21}D_cC_{a1} & D_{a12}C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{a11} + D_{a12}D_cD_{a21} \end{bmatrix} w \end{aligned} \quad (3.12)$$

com as matrizes em malha fechada apresentadas a seguir.

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A_a + B_{a2}D_cC_{a2} & B_{a2}C_c \\ B_cC_{a2} & A_c \end{bmatrix} \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B_{a1} + B_{a2}D_cD_{a21} \\ B_cD_{a21} \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= \begin{bmatrix} C_{a1} + D_{a21}D_cC_{a1} & D_{a12}C_c \end{bmatrix} \\ \tilde{D} &= \begin{bmatrix} D_{a11} + D_{a12}D_cD_{a21} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.4.2 Problema de Controle $\mathcal{H}_\infty$

Com o sistema em malha fechada apresentado em (3.12), o problema de controle descrito em (2.51) é reescrito a seguir.

A restrição do problema de controle (2.51) para o sistema em malha fechada (3.12) resulta na inequação (3.14).

O controlador $\mathcal{H}_\infty$ pode ser obtido da solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{sujeito a} \quad & (3.14) \\ & (2.52) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{A}_a \mathbf{Y} + \mathbf{B}_{a2} \mathbf{F} + \mathbf{Y} \mathbf{A}_a^T + \mathbf{F}^T \mathbf{B}_{a2}^T & \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_{a2} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_{a2} + \mathbf{M}^T & \mathbf{B}_{a1} + \mathbf{B}_{a2} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{a21} & \mathbf{Y} \mathbf{C}_{a1}^T + \mathbf{F}^T \mathbf{D}_{a12}^T \\
\mathbf{M} + \mathbf{A}_a^T + \mathbf{C}_{a2}^T \mathbf{D}_c^T \mathbf{B}_{a2}^T & \mathbf{X} \mathbf{A}_a + \mathbf{L} \mathbf{C}_{a2} + \mathbf{A}_a^T \mathbf{X} + \mathbf{C}_{a2}^T \mathbf{L}^T & \mathbf{X} \mathbf{B}_{a1} + \mathbf{L} \mathbf{D}_{a21} & \mathbf{C}_{a1}^T + \mathbf{C}_{a2}^T \mathbf{D}_c^T \mathbf{D}_{a12}^T \\
\mathbf{B}_{a1}^T + \mathbf{D}_{a21}^T \mathbf{D}_c^T \mathbf{B}_{a2}^T & \mathbf{B}_{a1}^T \mathbf{X} + \mathbf{D}_{a21}^T \mathbf{L}^T & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_{a11}^T + \mathbf{D}_{a21}^T \mathbf{D}_c^T \mathbf{D}_{a12}^T \\
\mathbf{C}_{a1} \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{a12} \mathbf{F} & \mathbf{C}_{a1} + \mathbf{D}_{a12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_{a2} & \mathbf{D}_{a11} + \mathbf{D}_{a12} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{a21} & -\mu \mathbf{I}
\end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.14)$$

Capítulo 4

Técnicas para Problemas com Restrições do Esforço de Controle

4.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas técnicas que levam em conta a limitação do esforço de controle visando evitar a saturação dos atuadores e técnicas que visam melhorar o desempenho do sistema de controle mesmo na presença da saturação.

Um primeiro enfoque é formado por métodos de controle convencionais que evitam a saturação e são projetados levando em consideração as características das entradas exógenas. Para este enfoque foram consideradas entradas exógenas para uma amplitude e faixa de frequência máximas determinadas. Estes métodos são iterativos (teste-e-erro) para evitar a saturação do sistema. Porém, a não saturação do atuador não garante necessariamente um melhor desempenho do sistema.

Outro enfoque tratado é o do método que tem por objetivo a melhora do desempenho do sistema mesmo em condições onde ocorra a saturação. Este método não requer o conhecimento prévio das características das entradas exógenas.

Neste trabalho é considerado como medida de avaliação do desempenho a amplitude de vibração.

4.2 Definições Prévias

4.2.1 Restrição da Entrada de Controle

Considere agora para o sistema padrão de controle $\mathcal{H}_\infty$ (Figura 2.1) a presença da não linearidade devido à saturação como se mostra na Figura 4.1. A saída do atuador é definida como

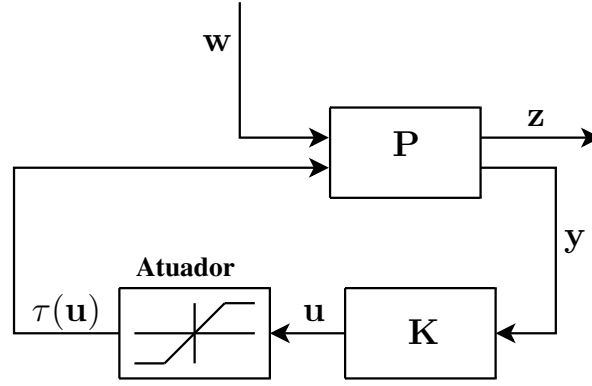


Figura 4.1: Esquema do sistema controlado submetido a limites de saturação.

segue:

$$\tau(u) = \begin{cases} u_{max}, & u > u_{max} \\ u, & -u_{max} \leq u \leq u_{max} \\ -u_{max}, & u < -u_{max} \end{cases} \quad (4.1)$$

com u_{max} definido como o limite máximo na saída do atuador. Salienta-se que o vetor u_{max} pode ser definido, de maneira geral, para controladores de mais de uma saída.

4.2.2 Entrada Exógena “Definida”

Estes métodos levam em consideração a informação em termos de amplitude e faixa de frequência das entradas exógenas. Nestes casos, estas informações são usadas no projeto do controlador, que é feito de forma iterativa.

A definição adequada da amplitude e da faixa de frequência dependem das características de operação do sistema e de como o sistema responde às entradas.

Neste trabalho, foram considerados apenas controladores próprios ($D_c = 0$) e com um único sinal de saída para o esforço de controle.

4.3 Métodos que Evitam a Saturação do Atuador

4.3.1 Funções de Ponderação

Podem ser usadas funções de ponderação para limitar o esforço de controle. Para este objetivo o vetor do sinal de controle é incluído dentro do vetor de saídas de desempenho com a inclusão de filtros de ponderação como se detalha no Capítulo 3.

4.3.2 Ponderação da Matriz D_{12}

Introdução

A inclusão do sinal de controle como um parâmetro de desempenho no problema de otimização é uma alternativa para limitar sua amplitude. Para ponderar a prioridade da minimização das componentes do vetor de desempenho é importante encontrar o peso adequado do sinal de controle. Este peso pode ser determinado por tentativa-e-erro para garantir que o atuador não sature. Contudo, é possível incluir técnicas para tentar automatizar este processo de escolha.

O objetivo desta seção é encontrar o peso do sinal de controle na matriz D_{12} , mediante um processo de busca, para projetar o controlador $\mathcal{H}_\infty$ garantindo que o sinal de controle não supere o limite máximo permitido, evitando assim a saturação.

Problema de Otimização

Sejam as seguintes definições prévias:

- Neste método, o vetor de desempenho é formado por duas componentes: a primeira uma medida da vibração e a segunda pelo esforço de controle;
- $D_{12} = [0 \ \delta]^T$ conforme dado na (2.1) e considerando os dois desempenhos. δ é o peso a ser obtido para o sinal de controle;
- Define-se $\bar{u}$ como o máximo valor absoluto do sinal de controle u . O sinal u é obtido do sistema controlado (2.34), para um δ determinado, excitado para uma entrada exógena definida.

Considerando que o sinal de controle, sem a imposição de qualquer restrição, excede o limite de interesse, o problema de busca do peso δ do sinal de controle pode ser definido como

$$\begin{aligned} \min_{\delta} \quad & \bar{u}(\delta) \\ \text{sujeito a} \quad & \bar{u}(\delta) \geq u_{max} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Este problema de minimização restrita é resolvido neste trabalho através do método das penalidades [5, 20] conforme descrito no Apêndice B com o algoritmo apresentado no Apêndice C. É escolhido o método de penalidade exterior no processo de busca pois, além de permitir tratar problemas de otimização restrita em múltiplos problemas de otimização irrestrita, ele não precisa do conhecimento de um ponto factível inicial.

Nesta seção, o sinal de controle é então ajustado através do peso δ durante o projeto do controlador.

4.3.3 Compensação da Matriz C_c

Introdução

Nesta seção, a saturação é evitada mediante a compensação da saída do controlador como se mostra na Figura 4.2.

Esta técnica consiste em encontrar o fator g que ajusta a matriz C_c do controlador, reduzindo assim o sinal de controle para o valor que evita a saturação.

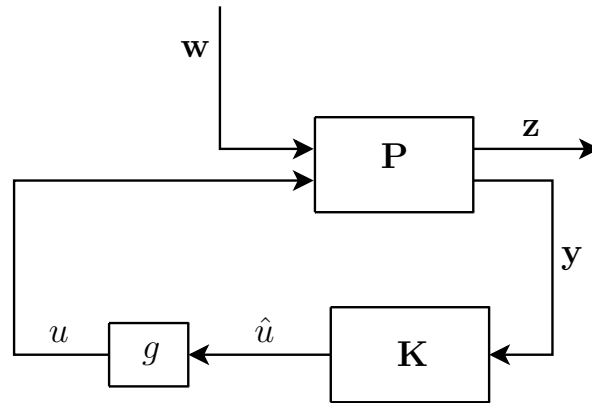


Figura 4.2: Esquema do sistema controlado com compensação na saída do controlador.

Para evitar que ocorra a saturação, a matriz C_c , calculada com o projeto $\mathcal{H}_\infty$ sem considerar qualquer restrição no esforço de controle, é multiplicada pelo fator g , com o propósito de reduzir o sinal de controle, ou seja,

$$|u|_{max} = |gC_c x_c|_{max} \leq u_{max} \quad (4.3)$$

O problema de busca do fator g pode ser resolvido mediante um problema de otimização com restrições conforme descrito a seguir.

Problema de Otimização

Define-se $\bar{u}$ como o máximo valor absoluto do sinal de controle u . O sinal u é obtido do sistema controlado (2.34) excitado com uma entrada exógena definida e para um fator g na saída do controlador.

O problema de busca do fator g é definido como

$$\begin{aligned} \min_g \quad & \bar{u}(g) \\ \text{sujeito a} \quad & \bar{u}(g) \geq u_{max} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Este problema de minimização restrita foi resolvido mediante o método das penalidades [5, 20] apresentado no Apêndice B com o algoritmo apresentado no Apêndice D. É escolhido o método

de penalidade exterior no processo de busca pois ele não precisa do conhecimento de um ponto factível inicial.

4.3.4 Restrição do Sinal de Controle via LMIs

Realimentação de Estados

Este método é baseado na inserção de uma restrição adicional no problema $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estados, apresentado em (2.70), para limitar a amplitude do esforço de controle [6].

Como se apresentou na seção 2.5.3 tem-se o vetor de realimentação de estados $\mathbf{F} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}$, com a lei de controle descrito como

$$u(t) = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}(t) \quad (4.5)$$

Seja $\mathbf{E}$ o elipsoide invariante definido como

$$\mathbf{E} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi^T \mathbf{X}^{-1} \xi \leq 1\} \quad (4.6)$$

O elipsoide $\mathbf{E}$ é invariante para o sistema apresentado em (2.62) se para cada trajetória de $\mathbf{x}$, definida em (2.62), com $\mathbf{x}(t_0) \in \mathbf{E}$, for satisfeito que $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{E}$, $\forall t \geq t_0$ [6]. Esta condição só é atingida se e somente se existir um $\mathbf{X}$ que satisfaz a condição de estabilidade

$$\mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{X} \leq \mathbf{0}$$

ou seu equivalente

$$\mathbf{A}^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{A} \leq \mathbf{0}$$

onde $\mathbf{\Pi} = \mathbf{X}^{-1}$.

De (4.5) e (4.6) é possível escrever a seguinte restrição:

$$\max_{t \geq 0} \|u(t)\| = \max_{t \geq 0} \|\mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}(t)\| \leq \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{E}} \|\mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}\|$$

Verifica-se que

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{E}} \|\mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}\| &= \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{E}} (\mathbf{x}^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x})^{1/2} \\ &= \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{E}} (\mathbf{x}^T \mathbf{X}^{-1/2} \mathbf{X}^{-1/2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \mathbf{X}^{-1/2} \mathbf{X}^{-1/2} \mathbf{x})^{1/2} \\ &\leq [\lambda_{\max} (\mathbf{X}^{-1/2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \mathbf{X}^{-1/2}) \mathbf{x}^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}]^{1/2} \end{aligned}$$

onde foi usado o quociente de Rayleigh conforme descrito no Apêndice A.2.

Como $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ tem-se

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{E}} \|\mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}\| &\leq [\lambda_{\max}(\mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1/2})]^{1/2} \leq \rho \\ \lambda_{\max}(\mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1/2}) &\leq \rho^2 \end{aligned}$$

onde ρ representa o limite máximo do sinal de controle.

Finalmente, tem-se

$$\mathbf{X}^{-1/2}\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1/2} \leq \rho^2 \mathbf{I} \quad (4.7)$$

cuja aplicação do complemento de Schur, leva à seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y}^T \\ \mathbf{Y} & \rho^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.8)$$

Finalmente pode-se dizer que para limitar a magnitude do esforço de controle, garantindo a redução do pico da resposta em frequência, o controlador é obtido, na forma de realimentação de estados, pela solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{sujeito a} \quad & (2.69) \\ & (4.8) \\ & \mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sistema de realimentação de estados com observador

Com o vetor de realimentação de estados $\mathbf{F}$ obtido na seção anterior, é possível incluir um observador no sistema para obter um controlador dinâmico. Para isto, o observador será obtido de modo que os polos do observador serão mais rápidos que os polos em malha fechada com o controlador de estados.

A Figura 4.3 ilustra a planta $\mathbf{P}$ e o controlador baseado em observador.

A planta em forma compacta é

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right] \quad (4.10)$$

O controlador por realimentação de estados usará como base os estados estimados $\hat{\mathbf{x}}$, ou seja,

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}. \quad (4.11)$$

Os estados estimados seguem a seguinte equação dinâmica conhecida como observador de Luen-

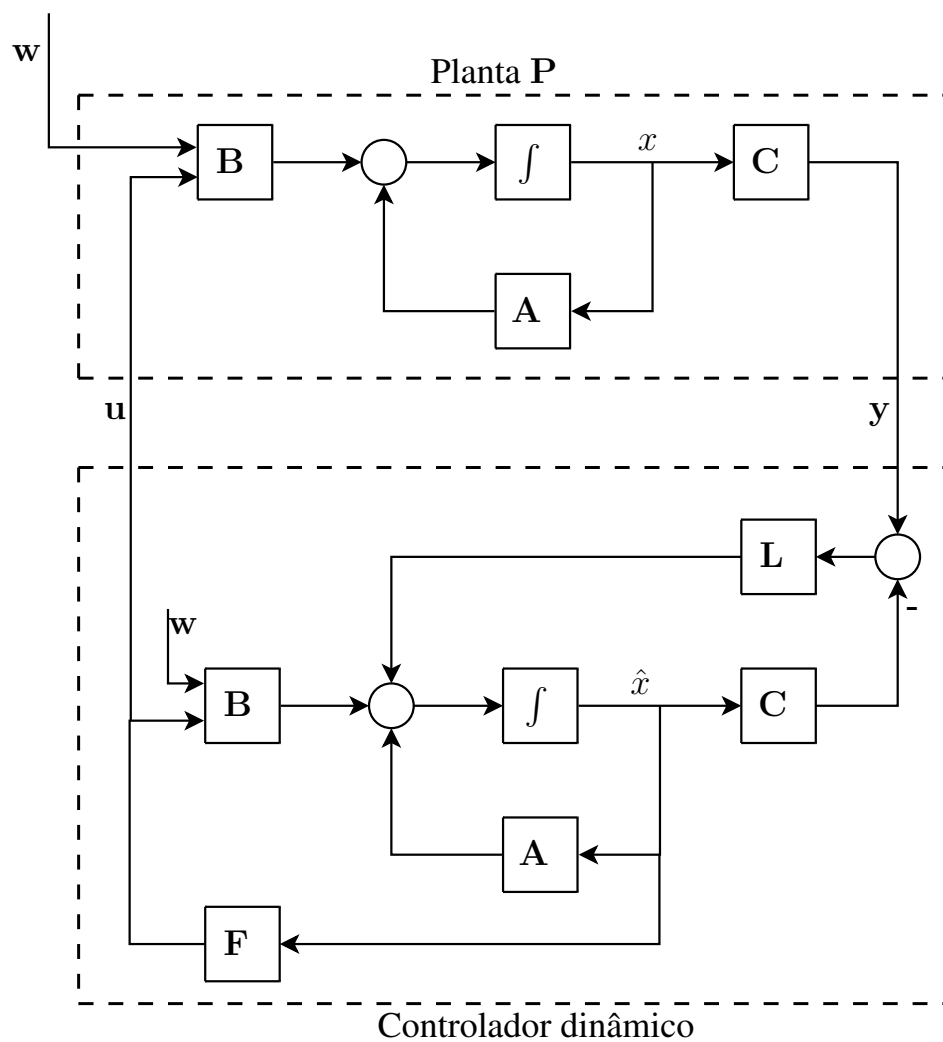


Figura 4.3: Diagrama do sistema com observador na forma do projeto $\mathcal{H}_\infty$

berger [26].

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2u + L(C_2x - C_2\hat{x}). \quad (4.12)$$

Das equações (4.10), (4.11) e (4.12), o sistema em malha fechada com base nos estados estimados é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_2F \\ LC_2 & A - LC_2 + B_2F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_1 \end{bmatrix} w \quad (4.13)$$

$$z = \begin{bmatrix} C_1 & D_{12}F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + D_{11} w \quad (4.14)$$

A obtenção do ganho do observador L é feita mediante a alocação de polos do sistema em malha fechada.

Este uso do observador tem a vantagem de permitir a obtenção de um controlador dinâmico baseado na realimentação da saída do sistema e não na realimentação de estados, que podem não estar disponíveis.

4.4 Métodos que não Evitam a Saturação

4.4.1 Projeto *Anti-windup*

Introdução

Um dos maiores problemas no projeto de controladores lineares é a saturação dos atuadores e os efeitos que eles causam como a degradação do desempenho do sistema e, em certos casos, a instabilidade do mesmo.

O projeto *Anti-windup* é baseado na correção do controlador mediante a inclusão de um compensador no sistema controlado. Este projeto tem por objetivo a melhora do desempenho do sistema controlado mesmo em situações de saturação. Existem diversas abordagens para a solução do projeto *Anti-windup* [13, 17, 18, 21, 23], sendo a [13] a usada no trabalho.

Para o estudo do projeto *Anti-windup* tem-se como referências o projeto do controlador $\mathcal{H}_\infty$ baseados em desigualdades matriciais lineares (LMIs) apresentado na seção 2.5.2, onde o problema $\mathcal{H}_\infty$ é descrito em termos de um problema de otimização convexa.

Efeito *windup*

É de conhecimento que todos os dispositivos de controle estão submetidos a limites de operação, sendo uma das mais comuns a restrição em amplitude dos sinais. O efeito *windup* é produzido quando o sinal de controle na entrada da planta é diferente do sinal de saída do controlador (ver

Figura 4.4), o que é resultado da saturação do atuador do sistema. Esta configuração onde o controlador $\mathbf{K}$ foi projetado sem a preocupação com a saturação é chamada aqui de SICS.

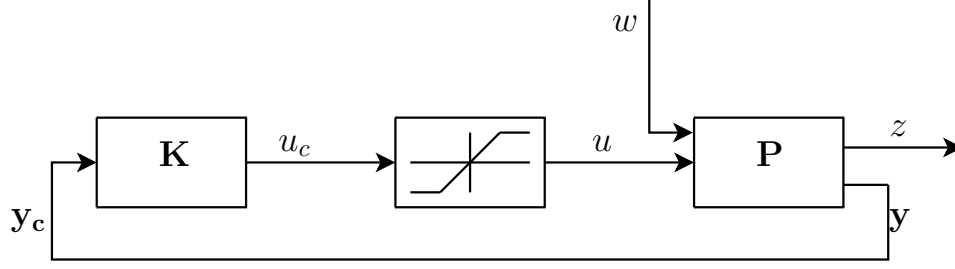


Figura 4.4: Sistema controlado submetido a limites de saturação SICS - situação *windup*.

A Planta $\mathbf{P}$, para uma entrada de distúrbio, uma entrada de controle e uma saída de desempenho, é definida como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 w + \mathbf{B}_2 u \\ z &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + D_{11} w + D_{12} u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} w + \mathbf{D}_{22} u\end{aligned}\tag{4.15}$$

Seja o sistema linear irrestrito definido como se mostra na Figura 4.5. Nesta figura as variáveis $\bar{z}$, $\bar{y}$, $\bar{y}_c$, $\bar{u}$ e $\bar{u}_c$ referem-se as variáveis do sistema ideal sem existência de saturação. Esta configuração ideal sem ocorrer a saturação é chamada aqui de SIC.

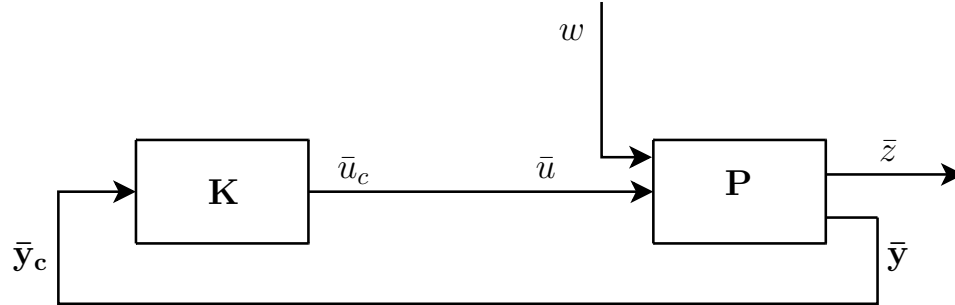


Figura 4.5: Sistema controlado linear irrestrito SIC.

O controlador $\mathbf{K}$ é obtido do projeto $\mathcal{H}_\infty$, para o sistema sem restrições no esforço de controle, na forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \bar{\mathbf{y}}_c \\ \bar{u}_c &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c \bar{\mathbf{y}}_c\end{aligned}\tag{4.16}$$

Abordagens ao Problema *windup*

Para contornar o problema de saturação são propostas três possíveis soluções [13]:

- **Projeto de controladores restritos:** Os controladores são projetados para evitar a saturação do sistema, e dependem dos limites de saturação de projeto o que leva a pouca flexibilidade quando estes limites variam.

Estes controladores apresentam uma perda de desempenho com respeito ao sistema projetado sem considerar a restrição do sinal de controle (SIC). Isso é uma desvantagem em regime permanente tendo em conta que a saturação, na maioria dos casos, só esta presente na situação transiente [13].

Salienta-se que esta abordagem não garante uma melhora do desempenho com respeito ao sistema que permite a saturação (SICS).

- **Projeto de controladores não lineares:** Apresentam um processo de projeto mais complicado, com poucas ferramentas de auxílio disponíveis. O projeto de controladores não lineares leva em consideração a não linearidade em todo o processo de projeto, o que leva a um pouco aproveitamento do comportamento do sistema na região em que este torna-se linear.
- **Projeto de controladores *Anti-windup* :** Uma compensação K_{AW} é incluída para ajudar o controlador K com o objetivo de melhorar o desempenho. K_{AW} é ativo quando existe a saturação. O projeto preserva o comportamento de K na ausência da saturação, ou seja, garante um bom desempenho na zona de comportamento linear.

Controlador *Anti-windup*

Seja o sistema *Anti-windup* a implementar-se como se mostra na Figura 4.6. Esta configuração é conhecida como forma externa de atuação do controlador *Anti-windup* e é usada quando os estados do controlador não estão disponíveis.

Supondo que $v_1 = 0$ e $dz(u_c) = u_c - \tau(u_c)$ como realimentação do controlador K_{AW} , como se mostra na Figura 4.7, pode-se compensar as saídas medidas do sistema.

Escolhe-se inicialmente $K_{AW} = P_{yu}$ de forma que

$$y_c = \underbrace{P_{yu} dz(u_c)}_{v_2} + \underbrace{P_{yu} \tau(u_c) + P_{yw} w}_y = \underbrace{P_{yu} u_c + P_{yw} w}_{\bar{y}}$$

e consequentemente $u_c = \bar{u}_c$ e $y_c = \bar{y}_c$. Sob estas condições um sistema equivalente ao da Figura 4.7 é representado na Figura 4.8.

O próximo passo no projeto do controlador *Anti-windup* é a realimentação dos erros do sistema, para que a entrada adicional $v_1 \neq 0$ seja incluída como se mostra na Figura 4.6. Para este objetivo

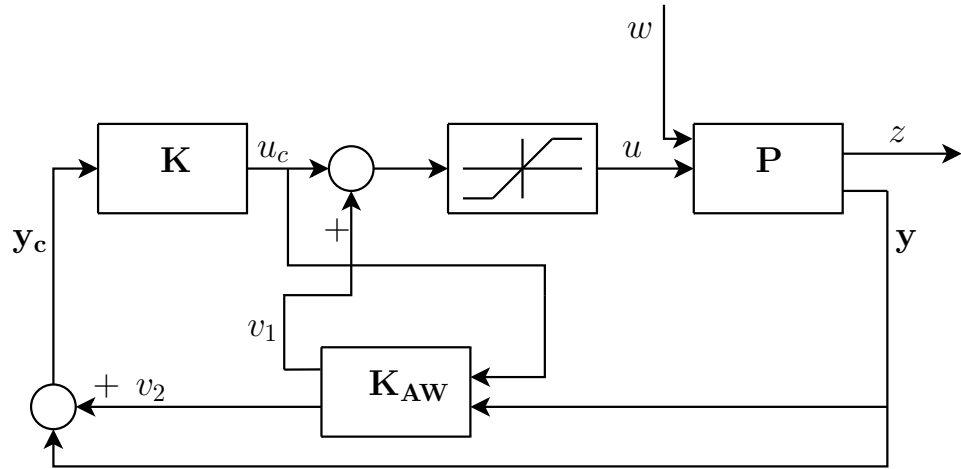


Figura 4.6: Sistema *Anti-windup*.

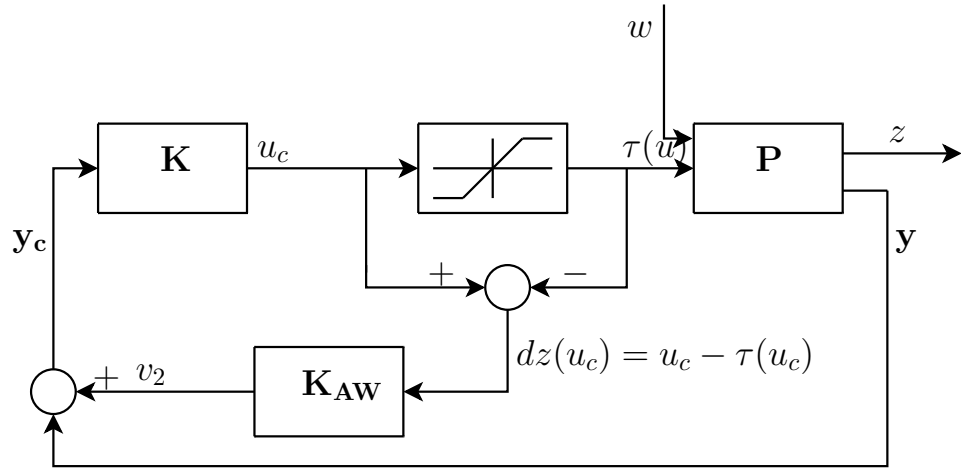


Figura 4.7: Sistema *Anti-windup* com $v_1 = 0$ e $dz(u_c) = u_c - \tau(u_c)$.

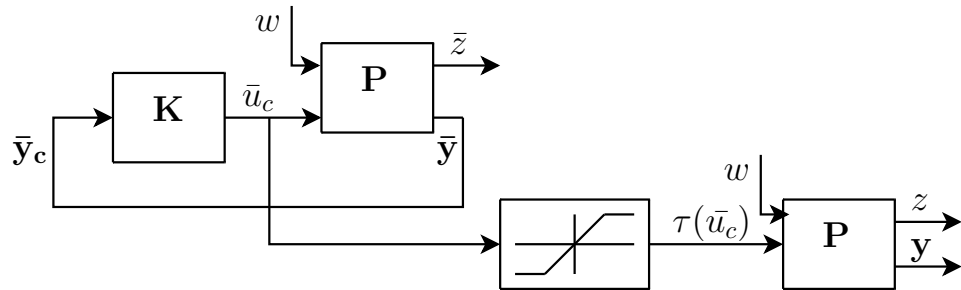


Figura 4.8: Sistema equivalente *Anti-windup* para $v_1 = 0$ e $dz(u_c) = u_c - \tau(u_c)$.

é usado o conceito de passividade do sistema. Neste caso, o problema de encontrar o controlador $\mathbf{K}_{\text{AW}}$ se reduz a encontrar uma matriz $\mathbf{\Pi}$ de forma que [13]:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi} &= \mathbf{\Pi}^T \\ \mathbf{A}^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{A} &\leq \mathbf{0}\end{aligned}\tag{4.17}$$

com o controlador $\mathbf{K}_{\text{AW}}$ definido como

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{AW}} = \mathbf{A} \mathbf{x}_{\text{AW}} + \mathbf{B}_2 (u_c - \tau(u_c + v_1))\tag{4.18}$$

$$v_1 = \mathbf{B}_2^T \mathbf{\Pi} \mathbf{x}_{\text{AW}}\tag{4.19}$$

$$v_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_{\text{AW}} + \mathbf{D}_{22} (u_c - \tau(u_c + v_1))\tag{4.20}$$

Note que o resultado de (4.17) assegura a estabilidade do controlador $\mathbf{K}_{\text{AW}}$.

A saída v_2 não envolve a determinação de novas matrizes (são usadas $\mathbf{C}_2$ e $\mathbf{D}_2$) pois o comportamento desta saída deve ser semelhante à planta $\mathbf{P}_{\text{yu}}$ conforme explicado em (4.4.1).

A saída v_1 dada pela equação (4.19) é resultado do teorema da passividade [9, 13, 16].

Capítulo 5

Resultados

Neste capítulo se aplicam as técnicas apresentadas no capítulo anterior ressaltando que o processo de obtenção dos controladores é feito pelo critério de minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$.

São denominados quatro sistemas para fins de análise dos resultados conforme a seguir:

- Sistema ideal controlado, SIC, que não apresenta limitação na entrada de controle da planta, e portanto os controladores são projetados sem levar em conta qualquer restrição no sinal de controle;
- Sistema ideal controlado com saturação, SICS, cujo controlador é projetado sem levar em conta a limitação do esforço de controle, mas o sinal de controle apresenta uma limitação na entrada da planta;
- Sistemas controlados levando em conta a saturação, SCLS, cujo controlador é projetado levando em conta a limitação do esforço de controle, e na situação real apresentam limitação na entrada de controle da planta. São controladores que evitam a saturação;
- Sistema com controle *Anti-Windup*, SAWS, cujo controlador é projetado considerando o limite de saturação para minimizar os efeitos da limitação do esforço de controle no desempenho.

São apresentados a seguir dois exemplos de sistemas mecânicos onde as técnicas são avaliadas.

5.1 Exemplo 1: Sistema Massa-Mola-Amortecedor

5.1.1 Modelo sem Levar em Conta a Saturação (SIC)

Seja o sistema de dois graus de liberdade apresentado na Figura 5.1 e que corresponde ao sistema da bancada do fabricante ECP [27]. Através da identificação experimental deste sistema obteve-se os seguintes parâmetros:

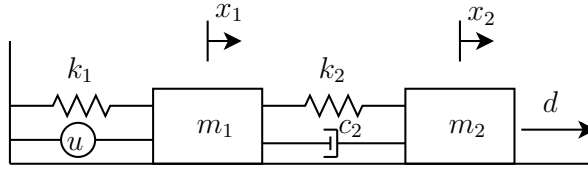


Figura 5.1: Sistema massa-mola-amortecedor de dois graus de liberdade.

- $m_1 = 2.59 \text{ Kg}$,
- $m_2 = 2.77 \text{ Kg}$,
- $k_1 = 738.95 \text{ N/m}$,
- $k_2 = 928.77 \text{ N/m}$,
- $c_2 = 7.8 \text{ N/m}$.

Na Figura 5.1 tem-se que

- u : esforço de controle aplicado na massa m_1 ,
- d : sinal de distúrbio aplicado na massa m_2 ,
- x_1 : posição da massa m_1 ,
- x_2 : posição da massa m_2 .

O problema do sistema mostrado na Figura 5.1 consiste no controle de vibração da massa m_2 para garantir um desempenho razoável na presença dos efeitos de saturação. O sistema é submetido a um sinal de distúrbio externo $d(t)$ na forma de uma varredura senoidal de amplitude de 2 N e media zero, iniciando em 5 rad/s e terminando em 350 rad/s, num tempo de varredura de 10 segundos. O atuador apresenta saturação fora da faixa de $[-2 \ 2] \text{ N}$.

Nesta seção se projeta um controlador $\mathcal{H}_\infty$ para rejeitar a vibração da massa m_2 com respeito à entrada de distúrbio, ou seja, projetar um controlador que minimize a norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência T_{zw} . A saída de desempenho z é a posição da massa m_2 (x_2), o vetor de saídas medidas y é composto pelas posições das massas m_1 (x_1) e m_2 (x_2) e a entrada exógena w é composta pelo distúrbio externo. A planta na forma compacta para o projeto $\mathcal{H}_\infty$ é mostrada a seguir:

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(k_1 + k_2)/m_1 & -c_2/m_1 & k_2/m_1 & c_2/m_1 & 0 & -1/m_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_2/m_2 & c_2/m_2 & -k_2/m_2 & -c_2/m_2 & 1/m_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema sem controle P_{zw} calculada usando a função *normhinf* do MATLAB é de -18.864 dB. Projetando o controlador $\mathcal{H}_\infty$ via LMIs conforme a formulação descrita na seção 2.5.2 obtemos a nova norma $\mathcal{H}_\infty$ de -67.552 dB, ou seja, houve uma redução da norma de 48.688 dB como se mostra na Figura 5.2. Para a solução do problema de projeto do controlador foi utilizado o resolvidor de problemas de otimização *SDPT3* [28] e a interface *Yalmip* [37].

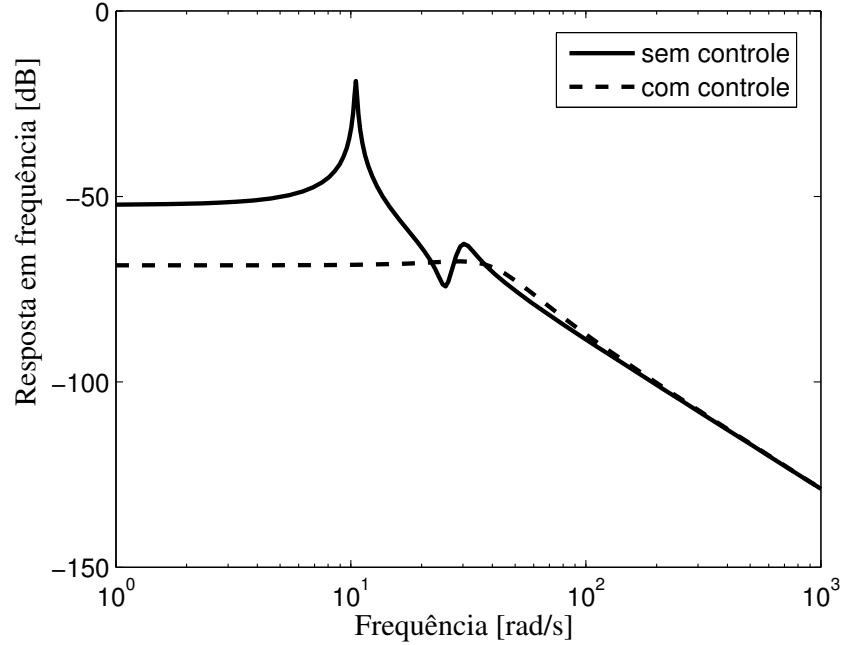


Figura 5.2: Resposta em frequência do sistema sem controle e com controle.

A resposta temporal da saída $x_2(t)$ para a entrada de distúrbio é mostrada na Figura 5.3. Observa-se a atenuação da resposta do sistema controlado em relação do sistema sem controle. O sistema sem controle apresenta um deslocamento máximo de 4.093×10^{-4} m, enquanto o sistema com controle apresenta um deslocamento máximo de 2.666×10^{-4} m.

A Figura 5.4 mostra o esforço de controle associado. O esforço de controle máximo absoluto obtido foi de 5.824 N.

O controlador de ordem 4 obtido é

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1175 & -2.13 \times 10^5 & -1.378 \times 10^4 & -3.412 \times 10^9 & -1.626 \times 10^6 & -1.416 \times 10^6 \\ 4560 & -8.193 \times 10^5 & -5.298 \times 10^4 & -1.312 \times 10^{10} & 7.506 \times 10^5 & -5.568 \times 10^5 \\ -1.385 \times 10^4 & 2.488 \times 10^6 & 1.609 \times 10^5 & 3.984 \times 10^{10} & -1.401 \times 10^6 & 1.347 \times 10^6 \\ -0.2277 & 37.96 & 1.649 & 6.554 \times 10^5 & -3659 & -1.824 \times 10^5 \\ \hline 8.125 & -1459 & -94.37 & -2.337 \times 10^7 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

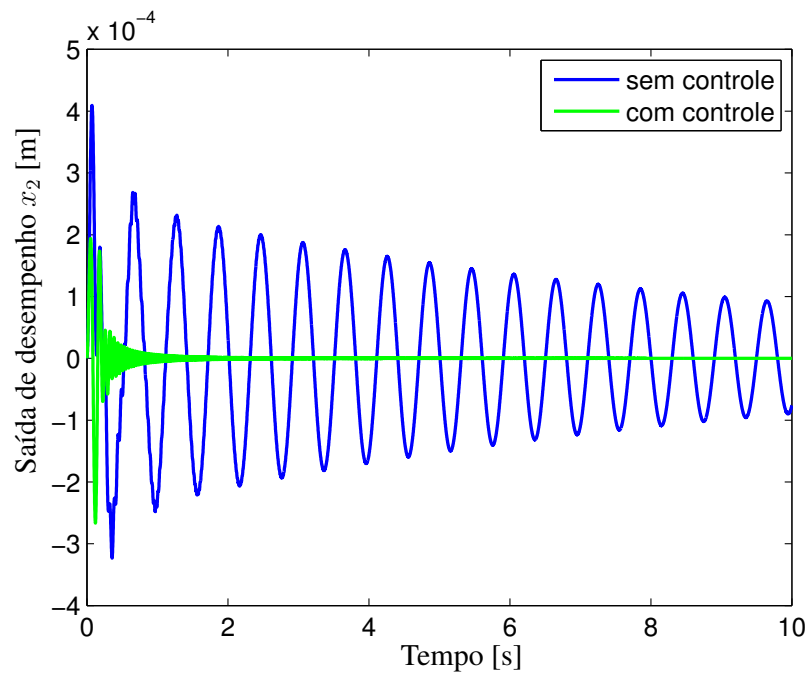


Figura 5.3: Resposta temporal do sistema com e sem controle submetido à entrada de distúrbio - deslocamento da massa m_2 .

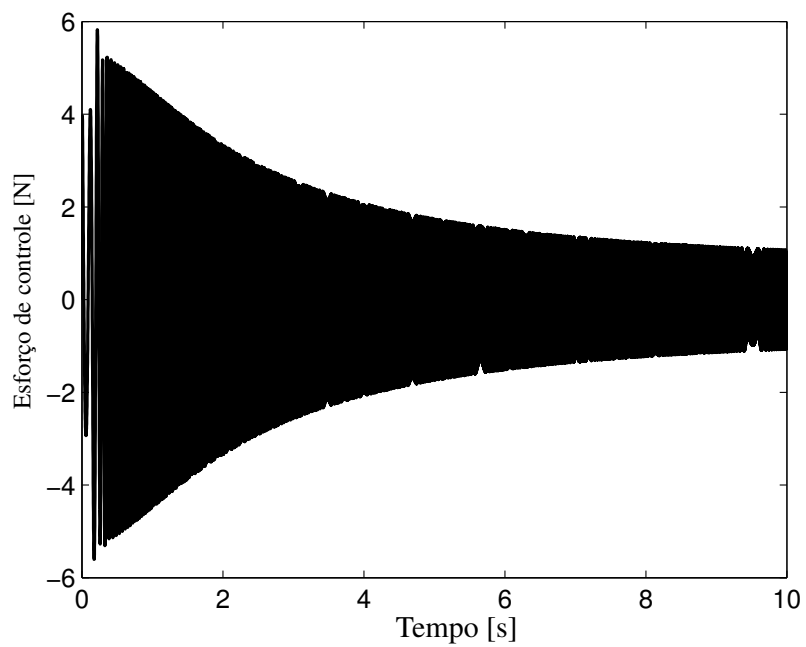


Figura 5.4: Sinal de controle associado à entrada distúrbio.

5.1.2 Resposta do Sistema Submetido a Efeitos de Saturação (SICS)

Seja o sistema submetido a saturação como se mostra na Figura 4.1. É considerado que o atuador do sistema se satura para valores fora da faixa de $[-2 \ 2]$ N. Os efeitos produzidos por esta limitação, para o sistema de controle obtido na seção anterior, são apresentados a seguir.

A Figura 5.5 mostra a comparação da saída de desempenho para o caso sem efeitos de saturação (SIC) e quando são incluídos os limites de saturação (SICS). Pode-se observar a perda do desempenho na rejeição do distúrbio, onde a massa m_2 apresenta um deslocamento máximo de 2.6663×10^{-4} m para o caso sem saturação (SIC) e um deslocamento máximo de 3.3904×10^{-4} m quando é submetido a saturação (SICS).

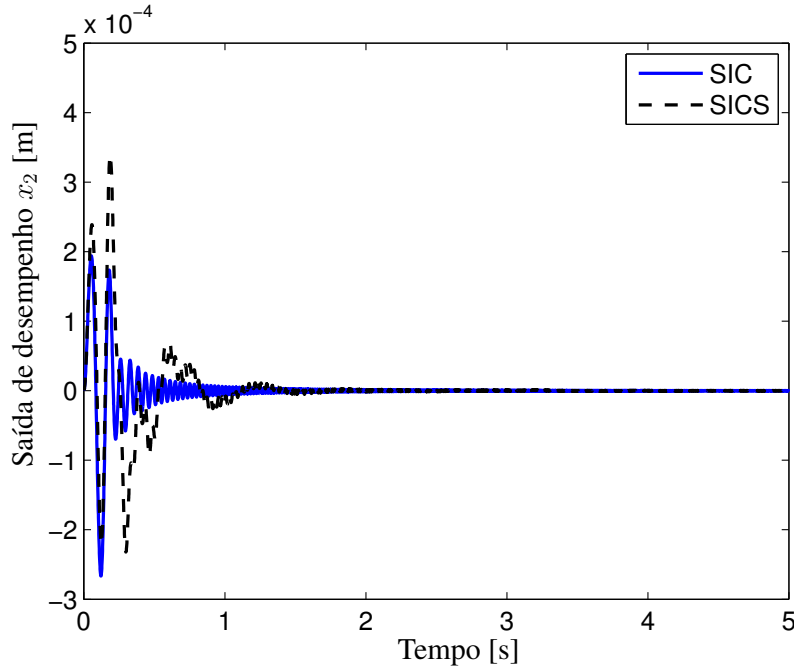


Figura 5.5: Resposta temporal do sistema massa-mola-amortecedor para uma entrada de distúrbio - com e sem efeitos de saturação.

Os sinais de controle associados, segundo o esquema da Figura 4.1, se mostram na Figura 5.6. Observa-se a diferença entre o sinal de controle u na saída do controlador e o sinal $\tau(u)$ na entrada da planta, o que leva à perda de desempenho na rejeição do distúrbio externo d .

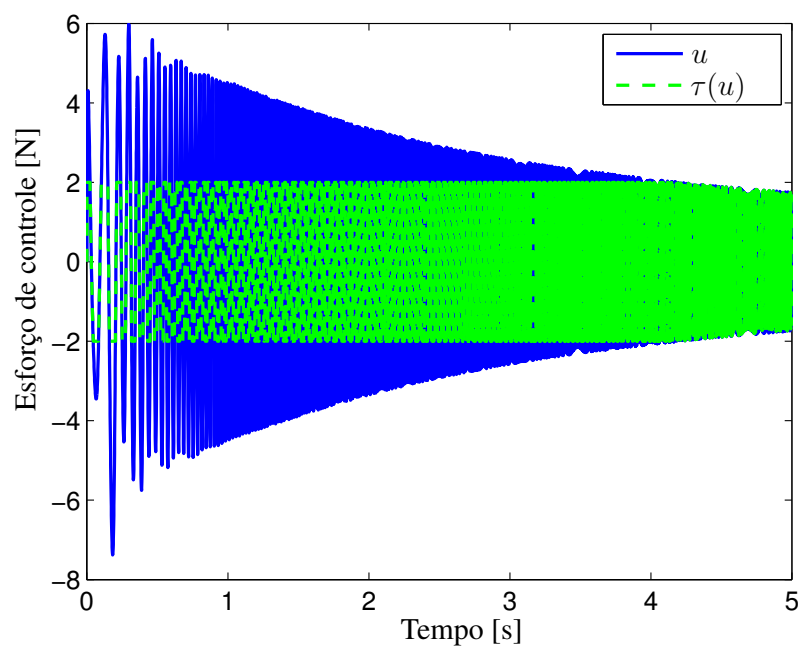


Figura 5.6: Sinal de controle u da saída do controlador $\mathbf{K}$ e $\tau(u)$ entrada da planta $\mathbf{P}$

5.1.3 Funções de Ponderação

Este método é baseado na obtenção do controlador usando filtros de ponderação para a minimização moderada da amplitude do esforço de controle, como já detalhado no Capítulo 3.

Para evitar a saturação deste exemplo, e considerando as características que os filtros devem ter para atuarem como elementos ponderadores, utilizou-se os seguintes filtros de segunda ordem, segundo as equações (3.1) e (3.2):

- Filtro passa baixa W_p

$$W_p = \frac{0.005623s^2 + 113.2s + 5.7 \times 10^5}{s^2 + 46.13s + 532}$$

- Filtro passa alta W_u

$$W_u = \frac{281.8s^2 + 1.795 \times 10^4 s + 2.857 \times 10^5}{s^2 + 2.535 \times 10^4 s + 1.607 \times 10^8}$$

Estes filtros foram obtidos das características em frequência do sistema em malha aberta como se mostra na Figura 5.7 e através de testes do controlador obtido.

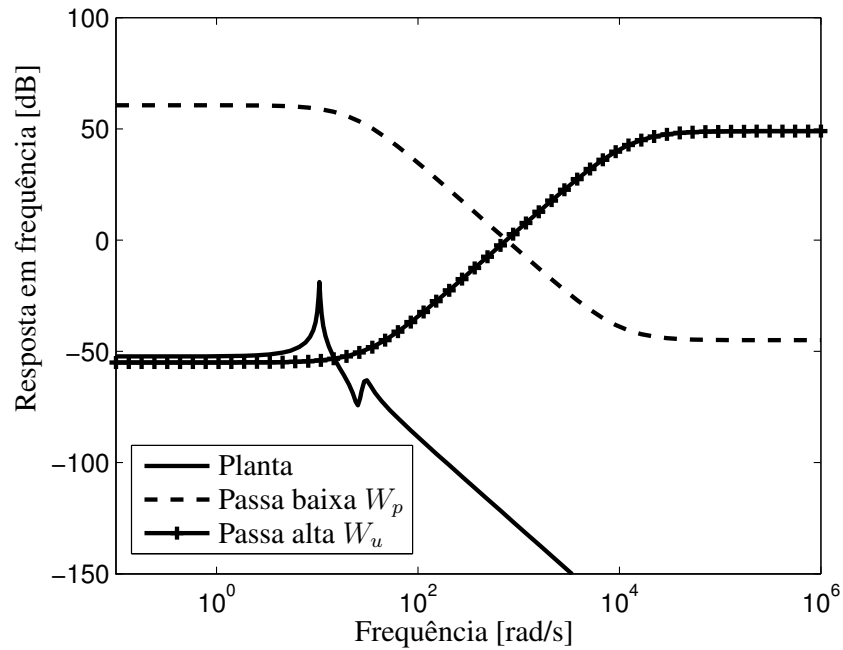


Figura 5.7: Resposta em frequência do sistema sem controle e dos filtros de ponderação.

As matrizes de estados do controlador de ordem 8 apresentada na forma compacta obtidas conforme descrito na seção 3.4.2 são

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{cc|cc} 8.6620 \times 10^{-1} & 9.1481 \times 10^1 & 5.5696 \times 10^1 & 9.3354 \times 10^1 & -4.3047 \times 10^1 & -1.4056 \times 10^1 & -2.4568 \times 10^2 & -3.6203 \times 10^2 & -2.3300 \times 10^7 & 5.1920 \times 10^7 \\ -1.6703 & -5.9543 & -1.4714 & 2.2846 & 1.0136 & 2.9483 \times 10^{-1} & 2.3947 \times 10^3 & 1.7508 \times 10^3 & 7.3339 \times 10^7 & -4.5153 \times 10^7 \\ -3.9236 \times 10^1 & 4.8417 \times 10^1 & 4.0707 \times 10^1 & 5.1108 \times 10^1 & -5.8171 \times 10^1 & -2.7606 \times 10^1 & -1.0435 \times 10^3 & -1.1830 \times 10^3 & -8.8868 \times 10^7 & 4.4301 \times 10^7 \\ -3.3056 \times 10^{-1} & -3.0789 & -2.0948 & -8.7758 & 1.7626 & 6.7326 \times 10^{-1} & -5.2541 \times 10^2 & -3.8093 \times 10^2 & -2.5312 \times 10^7 & 1.6259 \times 10^7 \\ 3.6644 \times 10^1 & 2.0569 \times 10^2 & 1.2031 \times 10^2 & 2.1425 \times 10^2 & -1.5332 \times 10^2 & -6.8084 \times 10^1 & 2.4610 \times 10^2 & 1.5841 \times 10^2 & 1.0191 \times 10^7 & -2.4086 \times 10^7 \\ 2.1994 & 1.1011 \times 10^1 & 6.5011 & 1.3938 \times 10^1 & 3.8756 \times 10^1 & 1.8973 \times 10^1 & -6.9806 \times 10^2 & -3.8227 \times 10^2 & 7.3953 \times 10^6 & 2.2918 \times 10^8 \\ 1.7337 & 1.6601 & 4.8544 \times 10^{-1} & 1.8099 & -8.5187 \times 10^{-1} & -4.1350 \times 10^{-1} & -1.8386 \times 10^4 & -8.9082 \times 10^3 & 1.7047 \times 10^5 & -3.6980 \times 10^3 \\ -9.4491 \times 10^{-1} & -1.6978 & -7.6229 \times 10^{-1} & -1.8223 & 1.1463 & 4.7188 \times 10^{-1} & 3.7202 \times 10^4 & 1.8024 \times 10^4 & 6.4723 \times 10^5 & 1.3420 \times 10^5 \\ \hline -5.2104 \times 10^{-6} & -6.3401 \times 10^{-6} & -2.2455 \times 10^{-6} & -6.9366 \times 10^{-6} & 3.2908 \times 10^{-6} & 1.4779 \times 10^{-6} & 5.8613 \times 10^{-2} & 4.3211 \times 10^{-2} & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Os polos em malha fechada são mostrados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Polos da malha fechada do sistema controlado - SCLS

Autovalores	Amortecimento	Freq. (rad/s)
-2.07	1.00	2.07
-5.83	1.00	5.83
$-8.42 + 1.00 \times 10^1 i$	6.44×10^{-1}	1.31×10^1
$-8.42 - 1.00 \times 10^1 i$	6.44×10^{-1}	1.31×10^1
$-1.75 \times 10^1 + 2.10 \times 10^1 i$	6.38×10^{-1}	2.73×10^1
$-1.75 \times 10^1 - 2.10 \times 10^1 i$	6.38×10^{-1}	2.73×10^1
-3.16×10^1	1.00	3.16×10^1
$-6.52 + 3.66 \times 10^1 i$	1.75×10^{-1}	3.72×10^1
$-6.52 - 3.66 \times 10^1 i$	1.75×10^{-1}	3.72×10^1
$-2.69 \times 10^1 + 4.29 \times 10^1 i$	5.32×10^{-1}	5.07×10^1
$-2.69 \times 10^1 - 4.29 \times 10^1 i$	5.32×10^{-1}	5.07×10^1
-3.17×10^2	1.00	3.17×10^2

Pode-se verificar que o sistema em malha fechada é estável. O sistema em malha fechada T_{zw} apresenta uma redução do pico da resposta em frequência de 22.543 dB em relação ao sistema sem controle, como se mostra na Figura 5.8. Na Figura 5.9 observa-se a redução da magnitude do esforço de controle com uma amplitude máxima de 1.927 N, evitando a saturação do atuador.

A redução na magnitude do esforço de controle acarreta a não saturação do sistema controlado o que em muitos casos não garante um melhor desempenho com respeito ao sistema sujeito a saturação (SICS), como é o caso deste exemplo. A massa m_2 apresenta um deslocamento máximo para o sistema controlado (SCLS) com a inclusão de filtros de ponderação de 6.0638×10^{-4} m. Lembra-se que o deslocamento do sistema com saturação (SICS) foi de 3.3904×10^{-4} mostrando a perda de desempenho.

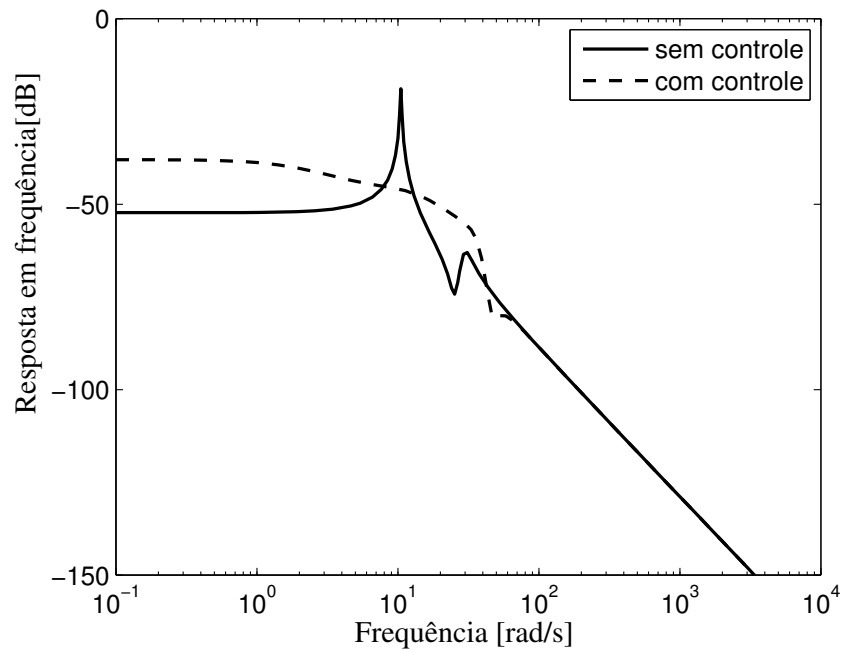


Figura 5.8: Resposta em frequência sem e com controle com a inclusão dos filtros de ponderação no processo de projeto.

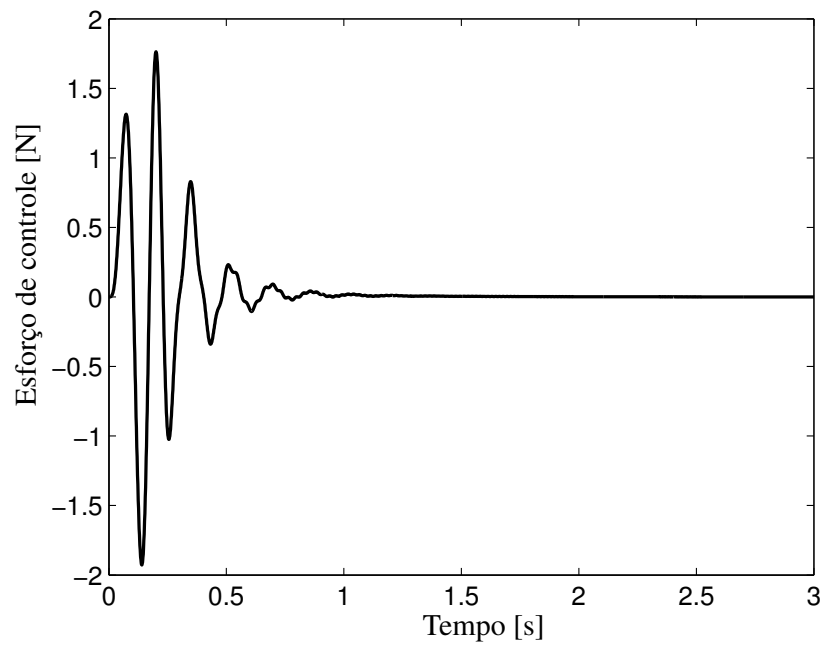


Figura 5.9: Sinal de controle associado à entrada de distúrbio com a inclusão dos filtros de ponderação no processo de projeto.

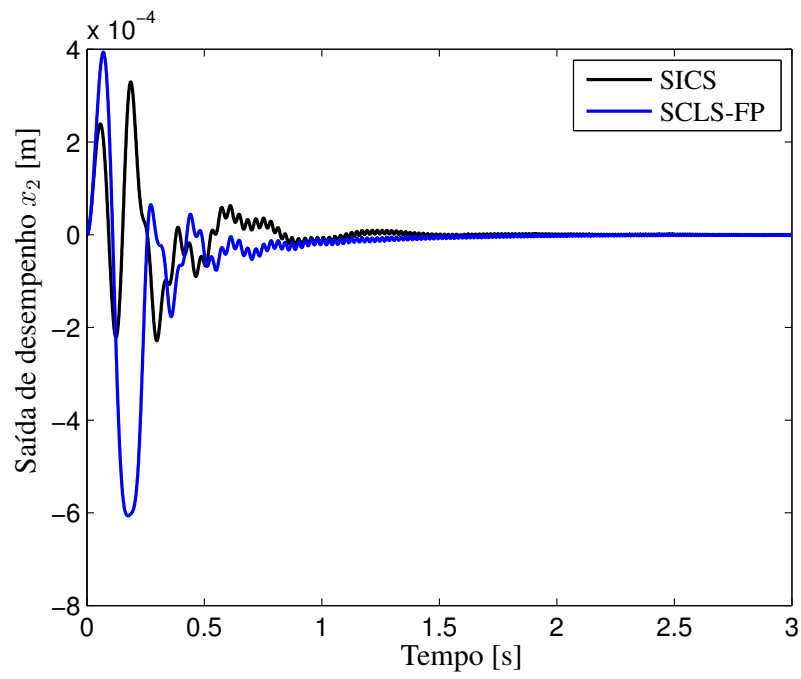


Figura 5.10: Resposta temporal $x_2(t)$ para uma entrada de distúrbio aleatório com filtros de ponderação (SCLS-FP) e com efeitos de saturação (SICS).

5.1.4 Ponderação da Matriz $\mathbf{D}_{12}$

Este método tem por objetivo a obtenção do controlador $\mathcal{H}_\infty$, mediante a ponderação do esforço de controle como parte do vetor de saída de desempenho. Vale salientar que a busca iterativa do peso para o sinal de controle δ realizar-se-á mediante o método de penalidades.

Para a aplicação deste método temos as seguintes condições para o método das penalidades:

- Parâmetro de penalidade inicial $c_0 = 1$,
- Incremento do parâmetro de penalidade $\alpha = 2$,
- Para a busca irrestrita da função penalizada $\phi(\delta, c)$ se considerou o $\delta_0 = 0$ e foi utilizada a função *fminsearch* do MATLAB,
- Critério de convergência:

$$|\delta_i - \delta_{i-1}| \leq 1 \times 10^{-5}$$

- Esforço de controle máximo permitido: $u_{max} = 2 \text{ N}$.

Com estas condições para o método das penalidades obteve-se a solução ótima $\delta = 0.0006$. Portanto, a matriz $\mathbf{D}_{12} = [0 \quad 0.0006]^T$ leva ao seguinte controlador de ordem 4:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 95.97 & -3.606 \times 10^4 & -1723 & -2.555 \times 10^8 & -1.832 \times 10^6 & -1.608 \times 10^6 \\ 561.7 & -1.987 \times 10^5 & -9438 & -1.401 \times 10^9 & 7.692 \times 10^5 & -6.563 \times 10^5 \\ -1762 & 6.216 \times 10^5 & 2.953 \times 10^4 & 4.384 \times 10^9 & -1.612 \times 10^6 & 1.45 \times 10^6 \\ -0.06743 & 20.83 & 0.1324 & 1.674 \times 10^5 & -3612 & -3.195 \times 10^5 \\ \hline 0.8564 & -302.4 & -14.36 & -2.132 \times 10^6 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Os polos da malha fechada são apresentadas na Tabela 5.2, o que mostra a estabilidade do sistema. Para este controlador se tem uma redução da norma $\mathcal{H}_\infty$, da posição x_2 com respeito à entrada de distúrbio, de 41.307 dB como se mostra na Figura 5.11.

Tabela 5.2: Polos da malha fechada do SCLS com ponderação da matriz $\mathbf{D}_{12}$

Autovalores	Amortecimento	Freq. (rad/s)
-7.20	1.00	7.20
$-4.62 + 1.37 \times 10^1 i$	3.20×10^{-1}	1.45×10^1
$-4.62 - 1.37 \times 10^1 i$	3.20×10^{-1}	1.45×10^1
$-6.63 + 2.99 \times 10^1 i$	2.17×10^{-1}	3.06×10^1
$-6.63 - 2.99 \times 10^1 i$	2.17×10^{-1}	3.06×10^1
-4.98×10^2	1.00	4.98×10^2
$-5.68 \times 10^2 + 1.66 \times 10^4 i$	3.42×10^{-2}	1.66×10^4
$-5.68 \times 10^2 - 1.66 \times 10^4 i$	3.42×10^{-2}	1.66×10^4

A Figura 5.12 mostra o respectivo sinal de controle. O máximo valor do sinal de controle associado é de 2 N, o que garante que o sinal não supera o limite máximo estabelecido.

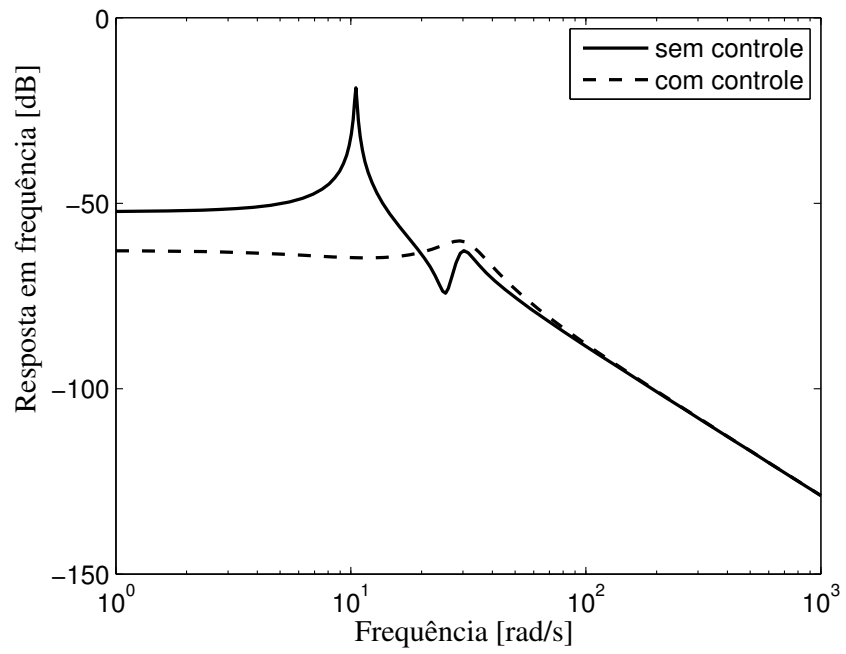


Figura 5.11: Resposta em frequência sem controle e do sistema em malha fechada com a ponderação da matriz D_{12} no processo de projeto $\mathcal{H}_\infty$.

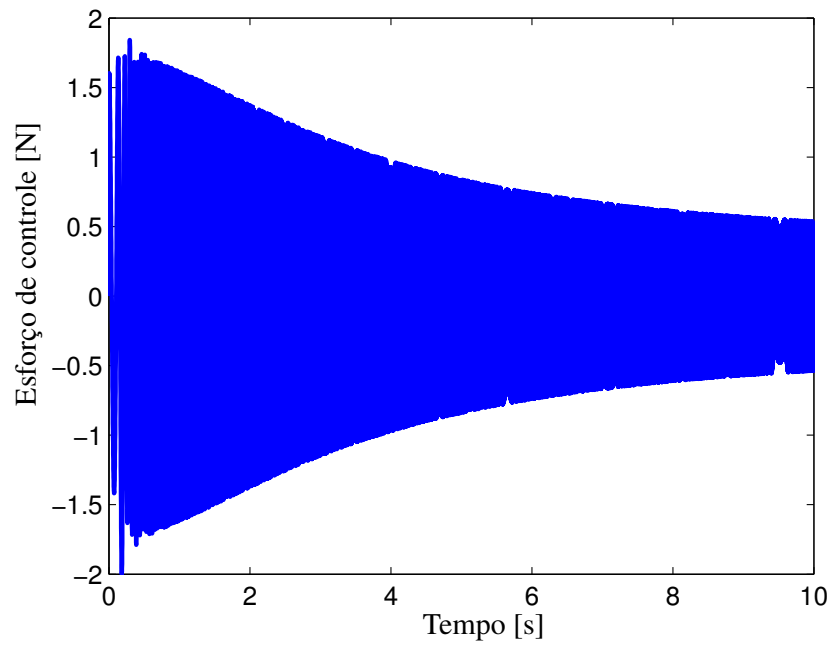


Figura 5.12: Sinal de controle associado com a ponderação da matriz D_{12} .

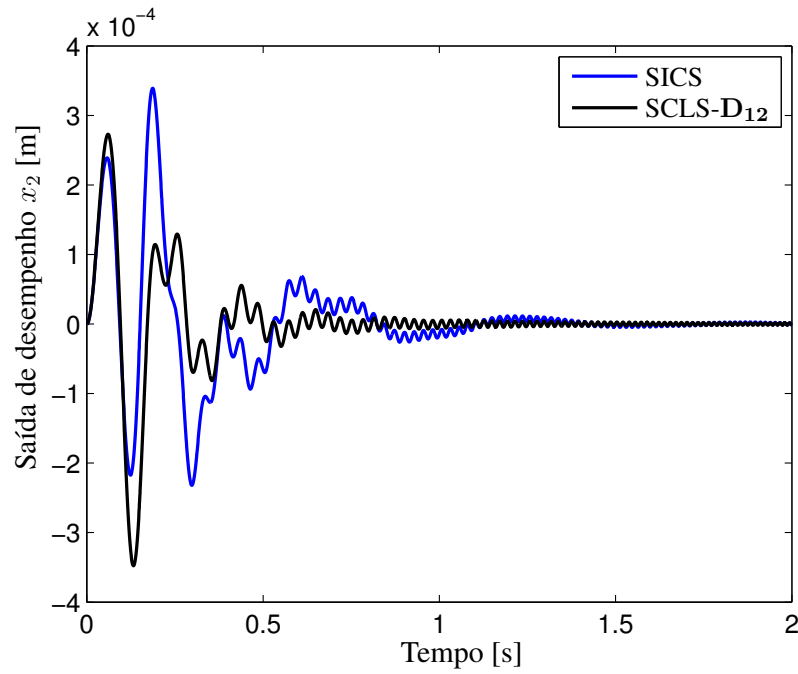


Figura 5.13: Resposta do sistema $x_2(t)$ com a ponderação da matriz D_{12} .

A Figura 5.13 fornece a resposta temporal da saída de desempenho $x_2(t)$. O SICS apresenta um deslocamento máximo de 3.3904×10^{-4} m e o SCLS apresenta um deslocamento máximo de 3.4569×10^{-4} m. O sistema SCLS foi capaz de evitar a saturação do sistema, mas não conseguiu melhorar o desempenho comparado ao SICS.

5.1.5 Compensação da Matriz C_c

O controlador de ordem 4 obtido para a configuração SIC é reescrito a seguir.

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1175 & -2.13 \times 10^5 & -1.378 \times 10^4 & -3.412 \times 10^9 & -1.626 \times 10^6 & -1.416 \times 10^6 \\ 4560 & -8.193 \times 10^5 & -5.298 \times 10^4 & -1.312 \times 10^{10} & 7.506 \times 10^5 & -5.568 \times 10^5 \\ -1.385 \times 10^4 & 2.488 \times 10^6 & 1.609 \times 10^5 & 3.984 \times 10^{10} & -1.401 \times 10^6 & 1.347 \times 10^6 \\ -0.2277 & 37.96 & 1.649 & 6.554 \times 10^5 & -3659 & -1.824 \times 10^5 \\ \hline 8.125 & -1459 & -94.37 & -2.337 \times 10^7 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Com as variáveis do controlador já calculadas, se procede à obtenção do fator g que resolva o problema de minimização (4.4). Para a solução deste problema de otimização foi utilizado o método das penalidades com as seguintes especificações:

- Parâmetro de penalidade inicial $c_0 = 1$,
- Incremento do parâmetro de penalidade $\alpha = 5$,
- Para a busca irrestrita da função penalizada $\phi(g, c)$ se considerou o $g_0 = 1$,
- Critério de convergência:

$$|g_i - g_{i-1}| \leq 1 \times 10^{-4}$$

- Esforço de controle máximo permitido: $u_{max} = 2$ N.

A solução ótima obtida nestas condições foi $g = 0.2995$, o que garante que o esforço de controle não supera o limite máximo de 2 N. A lei de controle torna-se então

$$u = 0.2995 \left[\begin{array}{cccc} 8.125 & -1459 & -94.37 & -2.337 \times 10^7 \end{array} \right] \mathbf{x}_c$$

A Figura 5.14 mostra o sinal de controle para a entrada de distúrbio com um valor máximo de 2 N, garantindo a não saturação do atuador.

A Figura 5.15 fornece a resposta temporal da saída de desempenho x_2 para a entrada de distúrbio. O sistema apresenta uma melhora do desempenho com respeito ao sistema saturado. A massa m_2 apresenta um deslocamento máximo para o SICS de 3.3904×10^{-4} m e para o SCLS um deslocamento máximo de 2.9344×10^{-4} m.

Finalmente a Figura 5.16, mostra a redução do pico da resposta em frequência de 36.794 dB.

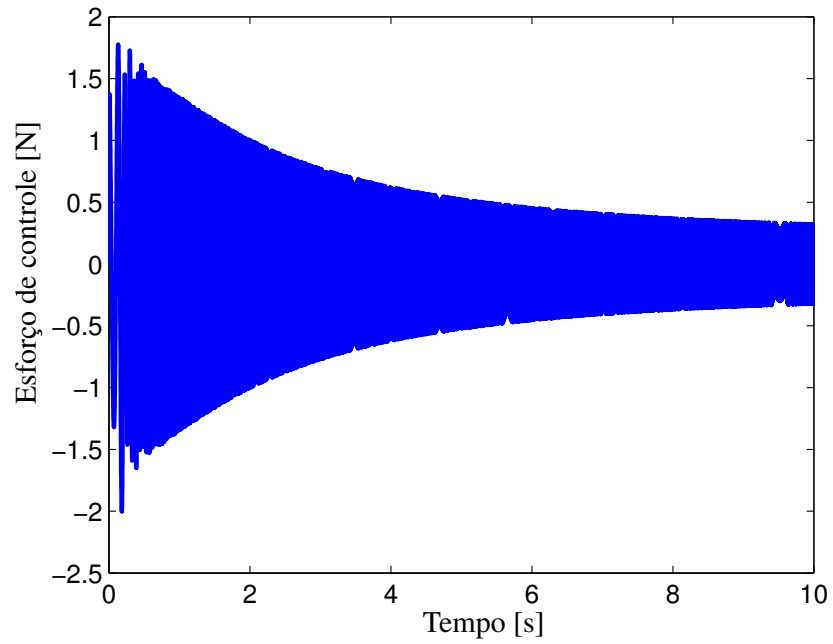


Figura 5.14: Sinal de controle associado à entrada de distúrbio com a compensação da matriz C_c após do projeto $\mathcal{H}_\infty$.

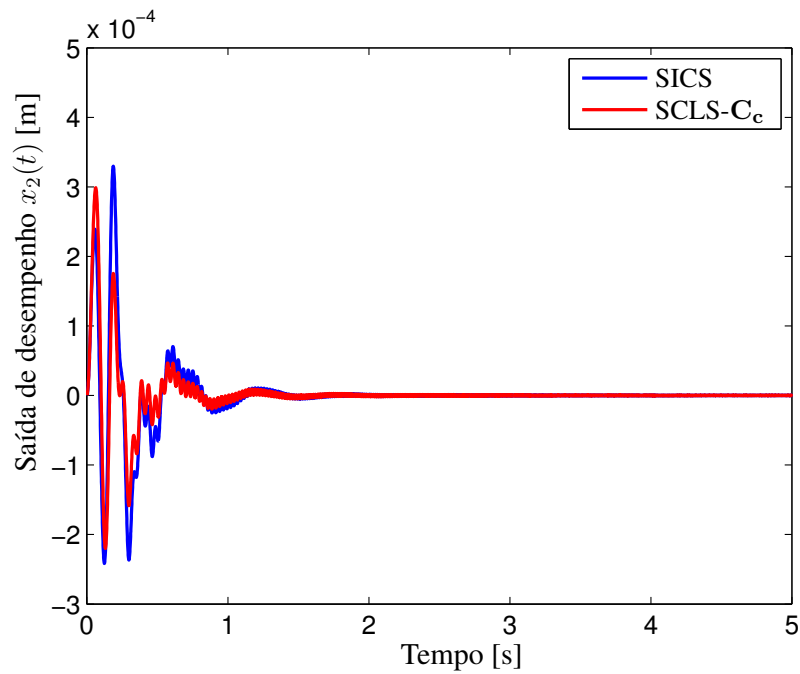


Figura 5.15: Resposta temporal $x_2(t)$ com a compensação da matriz C_c - com e sem efeitos de saturação.

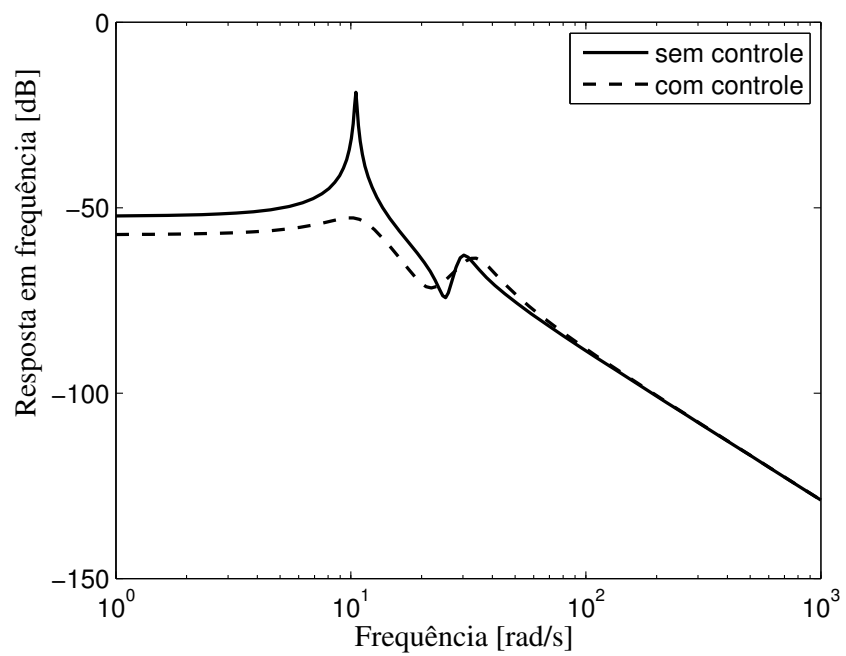


Figura 5.16: Resposta em frequência sem controle e do sistema com controle com a compensação da matriz C_c após do projeto $\mathcal{H}_\infty$.

5.1.6 Restrição do Sinal de Controle via LMI

Nesta seção apresenta-se os resultados da inclusão da restrição do esforço de controle na formulação do projeto $\mathcal{H}_\infty$ através de uma LMI adicional conforme apresentado na seção 4.3.4 para o casos de realimentação de estados conforme descrito a seguir.

Realimentação de Estados

Resolvendo o problema (4.9) considerando o limite máximo do esforço obtém-se o vetor de realimentação de estados $\mathbf{F}$ como se mostra a seguir:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2.3022 \times 10^3 & 1.0525 \times 10^2 & 1.5252 \times 10^3 & 2.3678 \times 10^2 \end{bmatrix}$$

Para o sistema realimentado tem-se a resposta temporal da saída de desempenho para o caso do controlador SCLS como se mostra na Figura 5.17. Pode-se ver que ainda evitando a saturação do sistema, o controlador não foi capaz de melhorar o desempenho comparado ao sistema submetido a saturação (SICS). A massa m_2 apresenta um deslocamento máximo de 3.3904×10^{-4} m para o SICS e um deslocamento máximo de 3.6007×10^{-4} m para o SCLS. Os polos em malha fechada são mostrados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Polos da malha fechada do SCLS - realimentação de estados

Autovalores	Amortecimento	Freq. (rad/s)
$-1.60 \times 10^1 + 1.36 \times 10^1 i$	7.63×10^{-1}	2.10×10^1
$-1.60 \times 10^1 - 1.36 \times 10^1 i$	7.63×10^{-1}	2.10×10^1
$-7.19 + 3.58 \times 10^1 i$	1.97×10^{-1}	3.66×10^1
$-7.19 - 3.58 \times 10^1 i$	1.97×10^{-1}	3.66×10^1

Este sistema realimentado apresenta um esforço de controle máximo de 1.9551 N, o que garante a não existência da saturação como se mostra na Figura 5.18.

Observa-se que o sistema em malha fechada apresenta uma redução do pico da resposta em frequência de 41.695 dB como se vê na Figura 5.19.

Realimentação de Estados com Observador

Neste caso, com o vetor de realimentação de estados já calculado na seção anterior, se procede a obter o vetor de ganhos do observador por alocação de polos. Considerando os polos do observador 7 vezes mas rápidos que os polos em malha fechada, ou seja, os pólos do observador são

$$\begin{aligned} & -5.0304 \times 10^1 - 2.5090 \times 10^2 i \\ & -5.0304 \times 10^1 + 2.5090 \times 10^2 i \\ & -1.1232 \times 10^2 - 9.5188 \times 10^1 i \\ & -1.1232 \times 10^2 + 9.5188 \times 10^1 i \end{aligned}$$

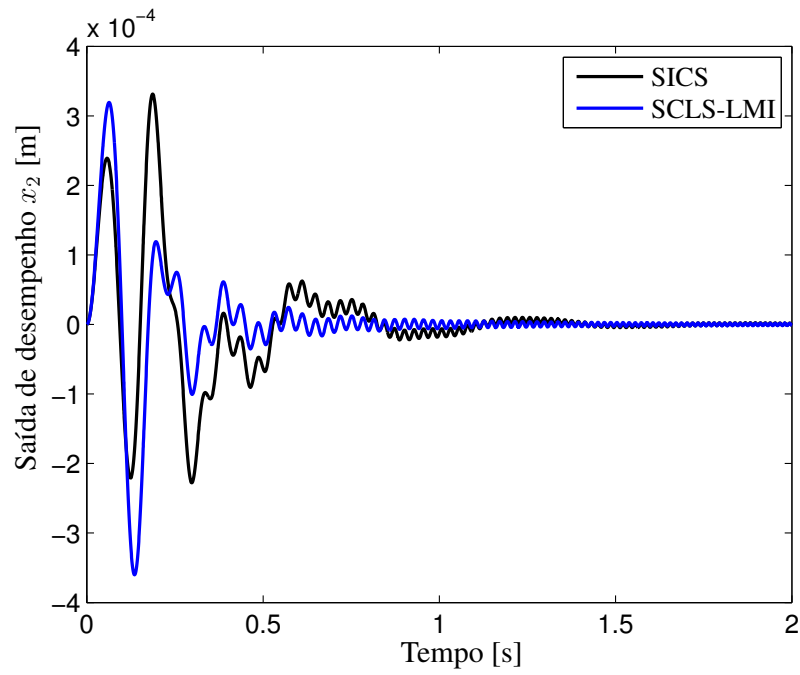


Figura 5.17: Resposta temporal do sistema com restrição do sinal de controle via LMI - realimentação de estados $\mathcal{H}_\infty$.

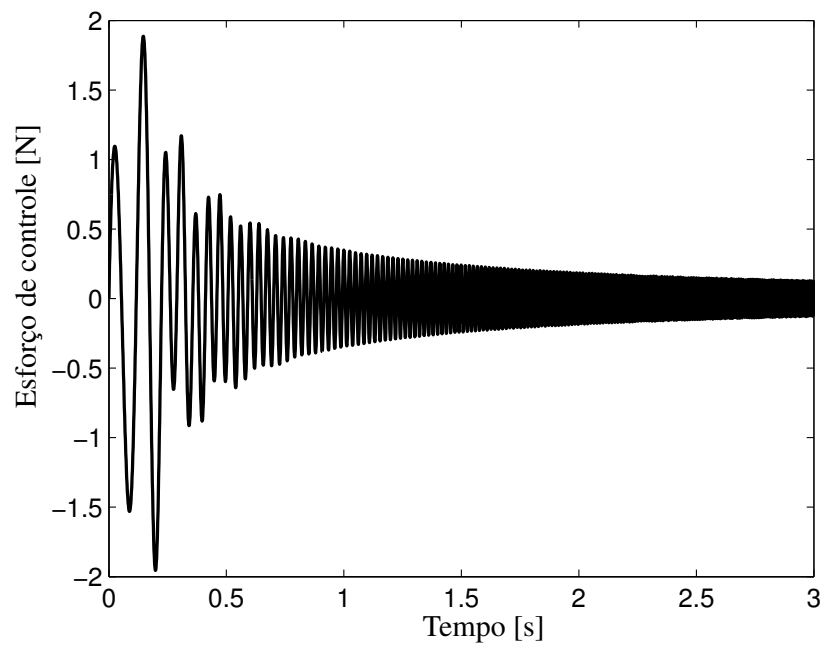


Figura 5.18: Sinal de controle associado à entrada de distúrbio com restrição do sinal de controle via LMI.

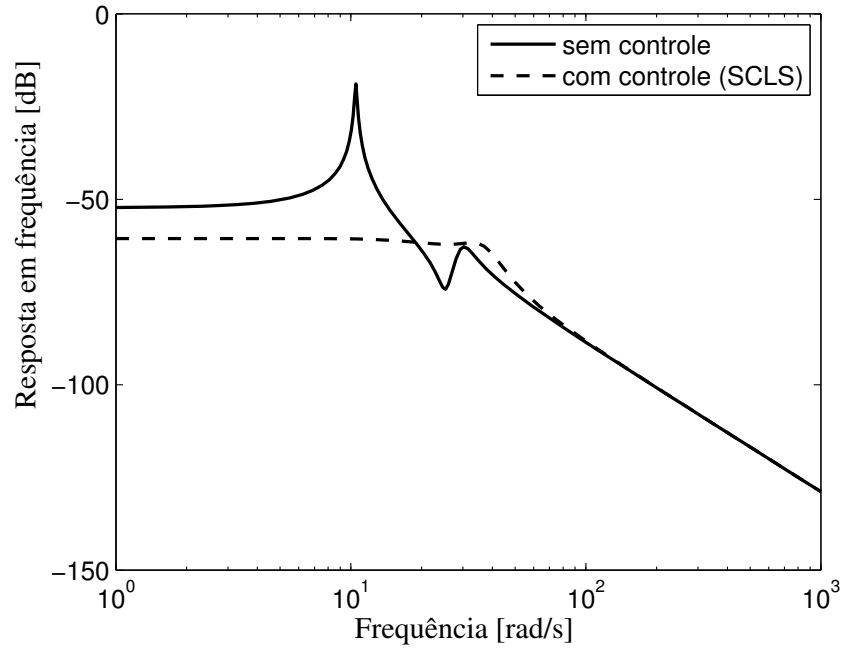


Figura 5.19: Resposta em frequência do sistema sem e com controle (SCLS) com restrição do sinal de controle via LMI.

e realizando a alocação de polos através do comando *place* do MATLAB, obtemos o vetor de ganho do observador $\mathbf{L}$ como segue:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.6115 \times 10^2 & 1.5512 \times 10^2 \\ 2.8056 \times 10^4 & 2.4607 \times 10^4 \\ -1.5614 \times 10^2 & 1.5826 \times 10^2 \\ -2.1260 \times 10^4 & 2.9136 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

Para o sistema controlado de acordo com (4.13) e (4.14) tem-se as respostas para a entrada de distúrbio. A resposta da saída de desempenho é visualizada na Figura 5.20. Neste caso a massa m_2 apresenta um deslocamento máximo de 3.601×10^{-4} m. O esforço de controle associado se mostra na Figura 5.21 e apresenta uma amplitude máxima de 1.9551 N. O sistema com observador apresenta uma boa aproximação ao de realimentação de estados, e da mesma forma não consegue melhorar o desempenho do sistema como era esperado.

A Figura 5.22 mostra a redução do pico da resposta em frequência do sistema em malha fechada onde se vê uma queda de 41.695 dB.

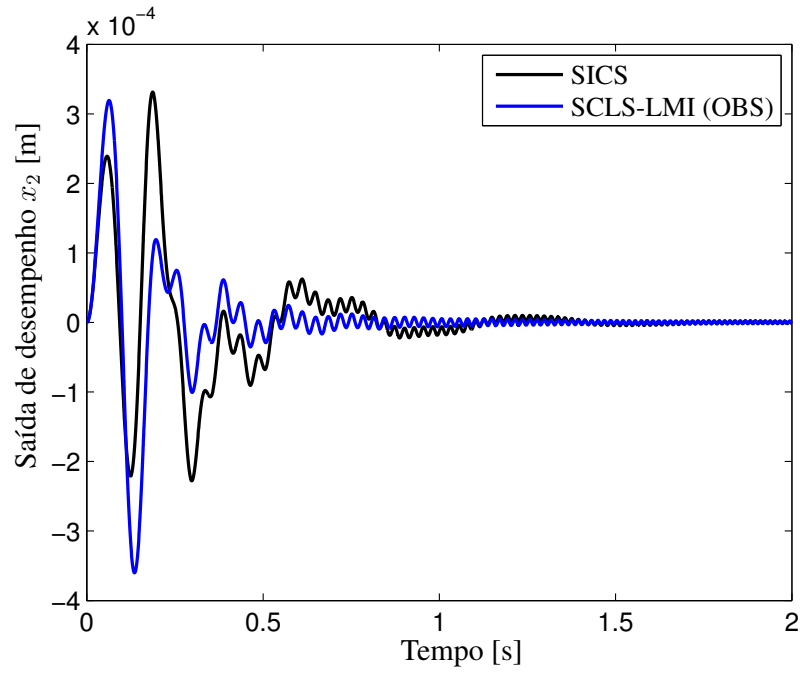


Figura 5.20: Resposta do sistema com restrição do sinal de controle via LMI - controlador de realimentação de estados com observador.

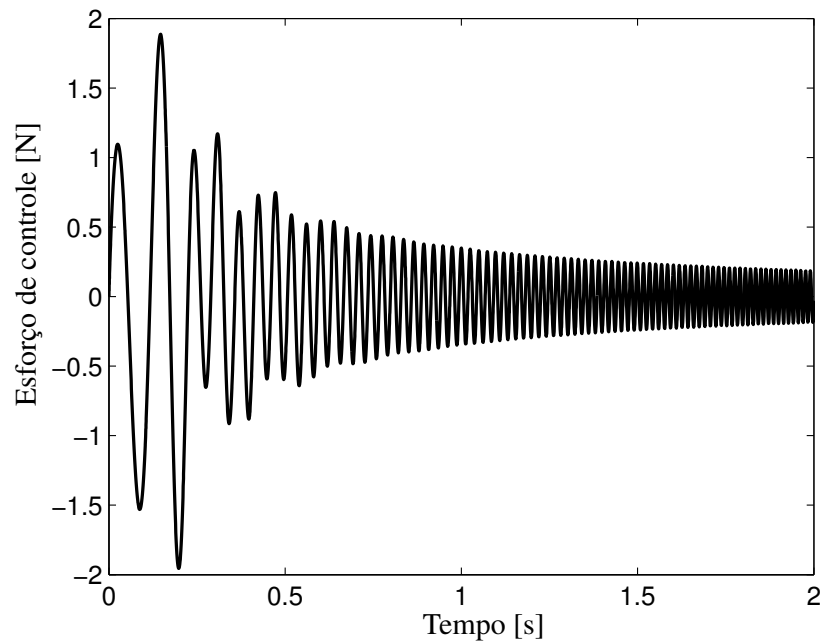


Figura 5.21: Sinal de controle associado com restrição do sinal de controle via LMI - realimentação de estados com observador.

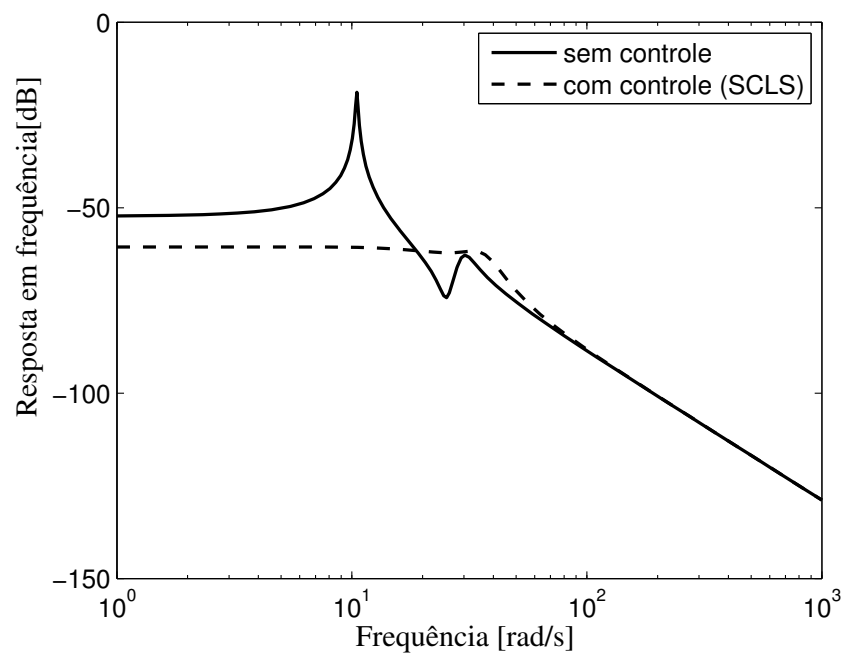


Figura 5.22: Resposta em frequência sem e com controle com restrição do sinal de controle via LMI - realimentação de estados e observador.

5.1.7 Controlador *Anti-windup*

Com base no resultado de um projeto para a situação SIC é projetado o controlador K_{AW} conforme descrito na seção 4.4.1 para obter uma configuração SAWS.

O controlador SIC já foi obtido na seção 5.1.1, onde o controlador K na forma compacta foi reportado.

Resolvendo o problema apresentado em (4.17) é encontrada a matriz Π conforme segue:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 5.9017 \times 10^5 & -3.4111 \times 10^3 & 1.0030 \times 10^5 & -6.5612 \times 10^3 \\ -3.4111 \times 10^3 & 2.3915 \times 10^3 & 3.4353 \times 10^3 & 2.8569 \times 10^3 \\ 1.0030 \times 10^5 & 3.4353 \times 10^3 & 7.0662 \times 10^5 & 3.6843 \times 10^3 \\ -6.5612 \times 10^3 & 2.8569 \times 10^3 & 3.6843 \times 10^3 & 5.1628 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

Com a matriz Π calculada o controlador K_{AW} de ordem 4 é, segundo (4.18), dado por

$$K_{AW} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6.4391 \times 10^2 & -3.0116 & 3.5860 \times 10^2 & 3.0116 & -3.8610 \times 10^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3.3530 \times 10^2 & 2.8159 & -3.3530 \times 10^2 & -2.8159 & 0 \\ \hline 1.3170 \times 10^3 & -9.2334 \times 10^2 & -1.3264 \times 10^3 & -1.1031 \times 10^3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A saída de desempenho da configuração SAWS é comparada com a do sistema saturado SICS. Esta respostas são apresentadas na Figura 5.23. O deslocamento máximo da massa m_2 no caso SAWS é 3.0551×10^{-4} m, e no caso SICS tem-se um deslocamento máximo de 3.3904×10^{-4} m, ou seja o sistema apresentou uma redução do deslocamento máximo de 9.862%. Nota-se que o sistema SAWS apresentou uma melhora no desempenho com respeito ao resultado do SICS.

O sinal de controle associado é apresentado na Figura 5.39. O sistema apresenta um esforço de controle máximo na saída do controlador de 33.931 N, mas devido à limitação da saturação, apenas valores na faixa de $[-2 \ 2]$ N foram usados. Neste caso, o sistema com correção *Anti-windup* contribui para melhorar o desempenho do sistema controlado, mesmo havendo a saturação.

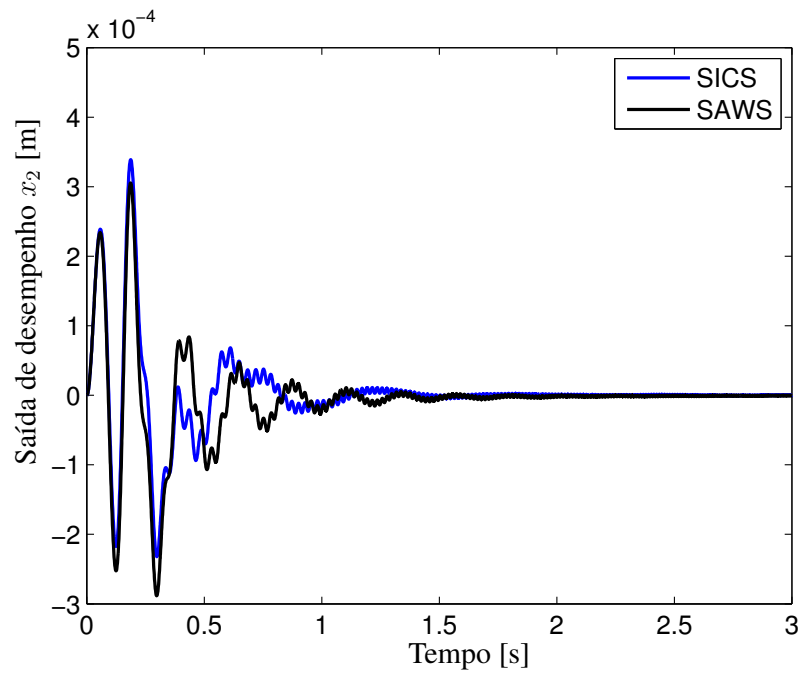


Figura 5.23: Resposta temporal do sistema x_2 .

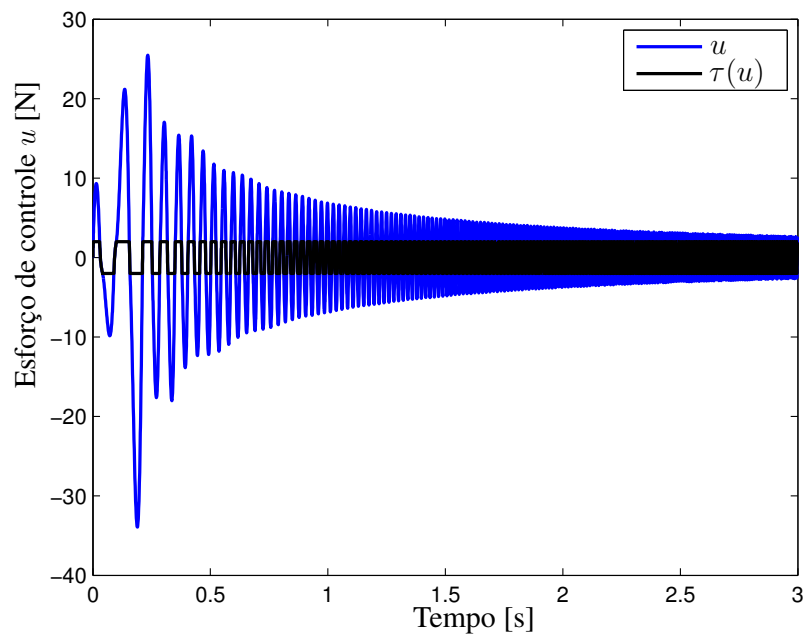


Figura 5.24: Sinal de controle u da saída do controlador $\mathbf{K}$ e $\tau(u)$ entrada da planta $\mathbf{P}$

5.1.8 Resumo dos Métodos

Os resultados relevantes, obtidos dos métodos para o exemplo 1, são resumidos na Tabela 5.4.

Tabela 5.4: Resumo dos métodos: Massa-mola-amortecedor

Método	Norma $\mathcal{H}_\infty$ [db]	$u_{\max}$ [N]	z [m]	Saturação
SIC	-67.552	5.824	2.666×10^{-4}	-
SICS	-67.552	7.421	3.3904×10^{-4}	sim
SCLS				
Funções de Ponderação	-41.407	1.927	6.0638×10^{-4}	não
Ponderação de D_{12}	-60.171	2.000	3.4569×10^{-4}	não
Compensação de C_c	-55.658	2.000	2.9344×10^{-4}	não
Restrição via LMI	-60.559	1.955	3.6010×10^{-4}	não
SAWS	-67.552	33.931	3.0551×10^{-4}	sim

O custo computacional na obtenção dos controladores são mostrados na Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Custo Computacional: Massa-mola-amortecedor

Método	Ordem do Controlador	Tempo de Obtenção [s]
SIC	4	4.3
SCLS		
Funções de Ponderação	8	8.7
Ponderação de D_{12}	4	121.7
Compensação de C_c	4	31.4
Restrição via LMI	4	6.8
SAWS	4	5.2

Salienta-se que no caso dos métodos das funções de ponderação não foi considerado o tempo de obtenção dos filtros (tempo para ajuste dos filtros) e no método de restrição via LMI não foi considerado o tempo de obtenção do escalar ρ (feito neste caso por tentativas). Estes parâmetros foram obtidos por ajuste onde o tempo de obtenção do escalar ρ foi muito menor que o tempo de obtenção dos filtros.

As matrizes de estado dos controladores foram obtidas num computador portátil com as seguintes características:

- Processador: Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU T5450 @1.66GHz 1.67GHz;
- Memória RAM: 2.00 GHz;
- Sistema Operacional: Windows Vista™ Home Premium - Service Pack 1 de 32 bits.

5.2 Exemplo 2: Viga Flexível

5.2.1 Modelo sem Levar em Conta a Saturação (SIC)

Redução do modelo

Seja uma viga flexível engastada em uma de suas extremidades, como se mostra na Figura 5.25. A viga é representada por um modelo de 14 GDL obtido de 7 elementos finitos.

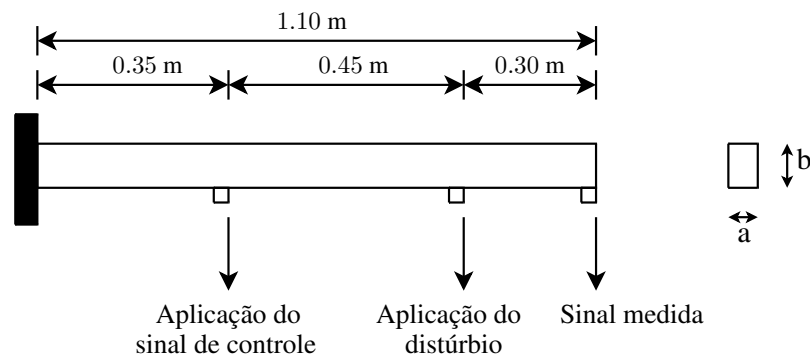


Figura 5.25: Viga engastada-livre

A viga apresenta as seguintes especificações:

- módulo de elasticidade: $E = 69 \times 10^9 Pa$,
- altura da seção transversal: $b = 0.032 m$,
- largura da seção transversal: $a = 0.003 m$,
- densidade de massa por volume: $\rho = 2.7 \times 10^3 Kg/m^3$.

A viga é discretizada em 7 elementos finitos e 8 nós com 3 graus de liberdade em cada nó como se mostra na Figura 5.26. Para facilitar a explicação da modelagem da viga os graus de liberdade são numerados como segue:

$$\begin{array}{l} u_1 : 1 \quad ; \quad u_2 : 4 \quad ; \quad u_3 : 7 \quad ; \quad u_4 : 10 \quad ; \quad u_5 : 13 \quad ; \quad u_6 : 16 \quad ; \quad u_7 : 19 \quad ; \quad u_8 : 22 \\ v_1 : 2 \quad ; \quad v_2 : 5 \quad ; \quad v_3 : 8 \quad ; \quad v_4 : 11 \quad ; \quad v_5 : 14 \quad ; \quad v_6 : 17 \quad ; \quad v_7 : 20 \quad ; \quad v_8 : 23 \\ \theta_1 : 3 \quad ; \quad \theta_2 : 6 \quad ; \quad \theta_3 : 9 \quad ; \quad \theta_4 : 12 \quad ; \quad \theta_5 : 15 \quad ; \quad \theta_6 : 18 \quad ; \quad \theta_7 : 21 \quad ; \quad \theta_8 : 24 \end{array}$$

tendo como

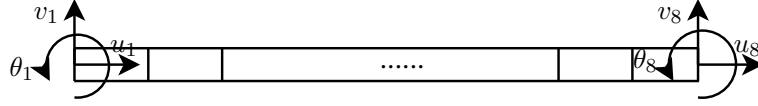


Figura 5.26: Graus de liberdade da viga engastada-livre com 7 elementos finitos

- deslocamento horizontal: u_i ,
- deslocamento vertical: v_i ,
- rotação: θ_i .

Neste exemplo, o nó 1 é engastado, portanto os graus de liberdade 1, 2 e 3 são nulos. Além disso, é considerado que a viga não apresenta deslocamento horizontal, assim os graus 4, 7, 10, 13, 16, 19 e 22 são nulos. Deste modo, o modelo de estados da viga é construído levando em conta apenas os graus de liberdade 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 23 e 24.

Na obtenção do modelo de estados da viga na forma padrão $\mathcal{H}_\infty$ apresentado em (2.1) é considerado como sinal medido a aceleração vertical do extremo livre da viga $\ddot{v}_8$. A saída de desempenho é representada pelo deslocamento vertical no extremo da viga v_8 . O sinal de controle é aplicado como um momento no nó 4 (GDL 12). O distúrbio, igualmente ao sinal de controle, é aplicado como um momento no nó 7 da viga (GDL 21).

Para projetar um controlador de menor ordem, o modelo do sistema foi reduzido. O sistema foi truncado nos três primeiros modos, ou seja, até uma frequência de 350 rad/s. Esta redução do modelo de estados foi feita através de um truncamento a seus três primeiros modos de vibração. Este truncamento foi feito usando o comando *modreal* do MATLAB. A Figura 5.27 apresenta a resposta em frequência do distúrbio para o sinal de desempenho dos modelos truncado e não truncado. Nota-se que o modelo truncado representa adequadamente os 3 primeiros modos do modelo da viga.

O modelo truncado na forma modal e com as matrizes na forma do projeto $\mathcal{H}_\infty$ é

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -0.4000 & 13.6104 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0229 & 0.0139 \\ -13.6104 & -0.4000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.1369 & -2.5063 \\ 0 & 0 & -0.4014 & 239.2800 & 0 & 0 & -333.7038 & -74.2265 \\ 0 & 0 & -239.2800 & -0.4014 & 0 & 0 & -9.8555 & -2.1922 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4002 & 85.3449 & -208.7124 & 125.7051 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -85.3449 & -0.4002 & -3.6087 & 2.1735 \\ \hline -0.3107 & -0.0017 & -0.0000 & 0.0002 & -0.0000 & 0.0026 & -5.1763 \times 10^{-4} & 1.8668 \times 10^{-4} \\ 57.4879 & 3.7019 & 0.3174 & -9.6512 & 0.5056 & -18.9552 & 77.3453 & -14.3370 \end{bmatrix}$$

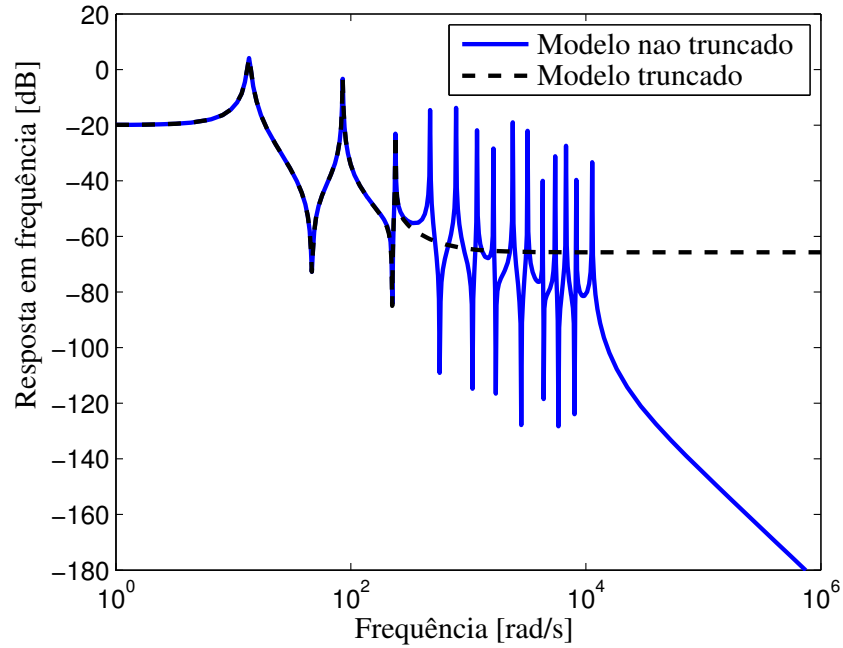


Figura 5.27: Resposta em frequência da viga engastada-livre com 14 GDL e modelo truncado para os 3 primeiros modos de vibração.

Projeto do Controlador $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção é projetado o controlador $\mathcal{H}_\infty$ com realimentação saída para o sistema truncado. Este controlador foi obtido através da solução do problema de otimização descrito na seção 2.5.2 usando o SEDUMI (resolvedor de problemas de programação semi-definida). O controlador de ordem 6 obtido na forma compacta é:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{cccccc|c} -1.0766 \times 10^5 & -4.0759 \times 10^3 & -1.5769 \times 10^4 & 4.9453 \times 10^5 & -1.9633 \times 10^4 & 8.6714 \times 10^5 & 5.5777 \times 10^3 \\ -3.8750 \times 10^6 & -1.4709 \times 10^5 & -5.5866 \times 10^5 & 1.7800 \times 10^7 & -7.0107 \times 10^5 & 3.1212 \times 10^7 & -3.1726 \times 10^4 \\ -8.9637 \times 10^7 & -3.4024 \times 10^6 & -1.2923 \times 10^7 & 4.1176 \times 10^8 & -1.6217 \times 10^7 & 7.2199 \times 10^8 & 4.5114 \times 10^5 \\ -2.6592 \times 10^6 & -1.0094 \times 10^5 & -3.8357 \times 10^5 & 1.2215 \times 10^7 & -4.8107 \times 10^5 & 2.1419 \times 10^7 & 1.4813 \times 10^4 \\ 2.1250 \times 10^7 & 8.0659 \times 10^5 & 3.0635 \times 10^6 & -9.7613 \times 10^7 & 3.8445 \times 10^6 & -1.7116 \times 10^8 & -4.2918 \times 10^3 \\ 3.5786 \times 10^5 & 1.3585 \times 10^4 & 5.1674 \times 10^4 & -1.6439 \times 10^6 & 6.4710 \times 10^4 & -2.8824 \times 10^6 & 7.3555 \times 10^1 \\ \hline -5.3454 & -2.0290 \times 10^{-1} & -7.7063 \times 10^{-1} & 2.4555 \times 10^1 & -9.6708 \times 10^{-1} & 4.3055 \times 10^1 & 0 \end{array} \right]$$

Os polos em malha fechada do sistema truncado com o controlador obtido são mostrados na Tabela 5.6. Pode-se verificar que o controlador obtido garante a estabilidade para o sistema truncado em malha fechada.

Tabela 5.6: Polos da malha fechada do sistema truncado

Autovalores	Amortecimento	Freq. (rad/s)
-6.34×10^{-2}	1.00	6.34×10^{-2}
-1.09×10^{-1}	1.00	1.09×10^{-1}
$-1.52 \times 10^1 + 1.82 \times 10^1 i$	6.41×10^{-1}	2.37×10^1
$-1.52 \times 10^1 - 1.82 \times 10^1 i$	6.41×10^{-1}	2.37×10^1
$-4.00 \times 10^{-1} + 4.57 \times 10^1 i$	8.75×10^{-3}	4.57×10^1
$-4.00 \times 10^{-1} - 4.57 \times 10^1 i$	8.75×10^{-3}	4.57×10^1
$-5.84 + 1.13 \times 10^2 i$	5.17×10^{-2}	1.13×10^2
$-5.84 - 1.13 \times 10^2 i$	5.17×10^{-2}	1.13×10^2
$-4.01 \times 10^{-1} + 2.20 \times 10^2 i$	1.83×10^{-3}	2.20×10^2
$-4.01 \times 10^{-1} - 2.20 \times 10^2 i$	1.83×10^{-3}	2.20×10^2
$-2.06 + 2.54 \times 10^2 i$	8.09×10^{-3}	2.54×10^2
$-2.06 - 2.54 \times 10^2 i$	8.09×10^{-3}	2.54×10^2

O sistema em malha aberta $\mathbf{P}_{zw}$, com a entrada de distúrbio e a saída em deslocamento, apresenta uma norma $\mathcal{H}_\infty$ de 4.109 dB. O sistema controlado apresenta uma norma $\mathcal{H}_\infty$ de -19.386 dB, ou seja, uma redução de 23.495 dB como se pode ver na Figura 5.28.

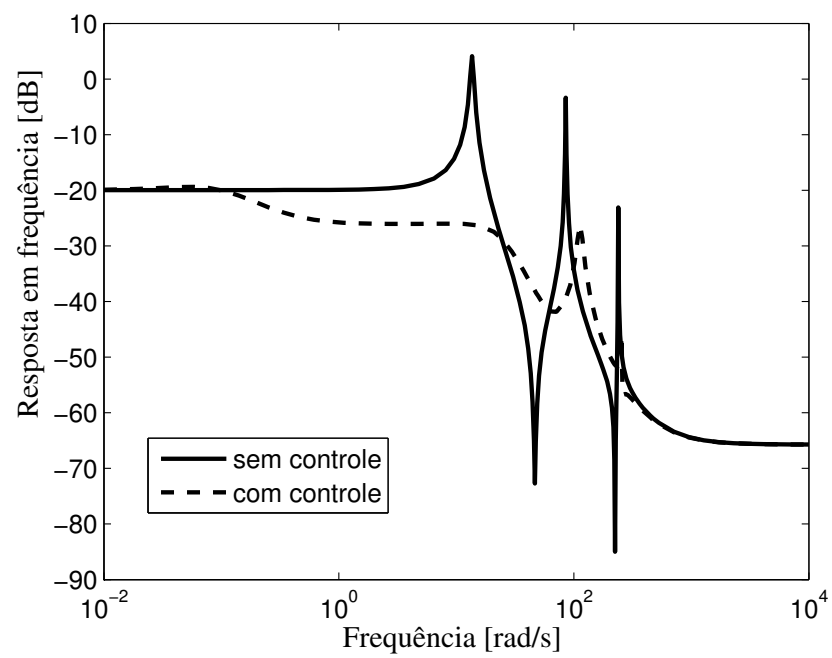


Figura 5.28: Resposta em frequência da viga sem controle P_{zw} , e do sistema em malha fechada.

A Tabela 5.7 mostra os polos em malha fechada utilizando o controlador projetado para o modelo da viga não truncada. Pode-se ver que o controlador obtido com o modelo truncado da viga não garante a estabilidade para o modelo não truncado. Isso era esperado, já que alguns modos foram desconsiderados no processo de projeto, fenômeno conhecido como *Spillover* [2]. Uma forma para conseguir um controlador que assegure a estabilidade do modelo não truncado é através do emprego de filtros de ponderação como será descrito na seção seguinte.

Tabela 5.7: Polos da malha fechada do sistema não truncado

Autovalores	Amortecimento	Freq. (rad/s)
-6.64×10^{-2}	1.00	6.64×10^{-2}
-1.07×10^{-1}	1.00	1.07×10^{-1}
$-1.53 \times 10^1 + 1.84 \times 10^1 i$	6.39×10^{-1}	2.39×10^1
$-1.53 \times 10^1 - 1.84 \times 10^1 i$	6.39×10^{-1}	2.39×10^1
$-7.84 \times 10^{-1} + 4.58 \times 10^1 i$	1.71×10^{-2}	4.58×10^1
$-7.84 \times 10^{-1} - 4.58 \times 10^1 i$	1.71×10^{-2}	4.58×10^1
$-5.88 + 1.14 \times 10^2 i$	5.14×10^{-2}	1.14×10^2
$-5.88 - 1.14 \times 10^2 i$	5.14×10^{-2}	1.14×10^2
$-1.20 + 2.12 \times 10^2 i$	5.68×10^{-3}	2.12×10^2
$-1.20 - 2.12 \times 10^2 i$	5.68×10^{-3}	2.12×10^2
$-9.65 \times 10^{-1} + 2.49 \times 10^2 i$	3.87×10^{-3}	2.49×10^2
$-9.65 \times 10^{-1} - 2.49 \times 10^2 i$	3.87×10^{-3}	2.49×10^2
$-5.75 \times 10^1 + 4.83 \times 10^2 i$	1.18×10^{-1}	4.87×10^2
$-5.75 \times 10^1 - 4.83 \times 10^2 i$	1.18×10^{-1}	4.87×10^2
$9.62 \times 10^1 + 7.71 \times 10^2 i$	-1.24×10^{-1}	7.77×10^2
$9.62 \times 10^1 - 7.71 \times 10^2 i$	-1.24×10^{-1}	7.77×10^2
$-6.31 \times 10^1 + 1.21 \times 10^3 i$	5.23×10^{-2}	1.21×10^3
$-6.31 \times 10^1 - 1.21 \times 10^3 i$	5.23×10^{-2}	1.21×10^3
$-4.25 \times 10^1 + 1.63 \times 10^3 i$	2.61×10^{-2}	1.63×10^3
$-4.25 \times 10^1 - 1.63 \times 10^3 i$	2.61×10^{-2}	1.63×10^3
$1.77 \times 10^2 + 2.35 \times 10^3 i$	-7.49×10^{-2}	2.36×10^3
$1.77 \times 10^2 - 2.35 \times 10^3 i$	-7.49×10^{-2}	2.36×10^3
$-2.67 \times 10^2 + 3.20 \times 10^3 i$	8.32×10^{-2}	3.21×10^3
$-2.67 \times 10^2 - 3.20 \times 10^3 i$	8.32×10^{-2}	3.21×10^3
$2.26 \times 10^2 + 4.31 \times 10^3 i$	-5.22×10^{-2}	4.32×10^3
$2.26 \times 10^2 - 4.31 \times 10^3 i$	-5.22×10^{-2}	4.32×10^3
$6.72 \times 10^1 + 5.46 \times 10^3 i$	-1.23×10^{-2}	5.46×10^3
$6.72 \times 10^1 - 5.46 \times 10^3 i$	-1.23×10^{-2}	5.46×10^3
$-4.20 \times 10^2 + 6.74 \times 10^3 i$	6.22×10^{-2}	6.75×10^3
$-4.20 \times 10^2 - 6.74 \times 10^3 i$	6.22×10^{-2}	6.75×10^3
$3.77 \times 10^2 + 8.36 \times 10^3 i$	-4.50×10^{-2}	8.37×10^3
$3.77 \times 10^2 - 8.36 \times 10^3 i$	-4.50×10^{-2}	8.37×10^3
$-1.22 \times 10^2 + 1.13 \times 10^4 i$	1.08×10^{-2}	1.13×10^4
$-1.22 \times 10^2 - 1.13 \times 10^4 i$	1.08×10^{-2}	1.13×10^4

Projeto do Controlador $\mathcal{H}_\infty$ com Filtros de Ponderação

Para evitar o fenômeno de *Spillover*, é usual empregar na entrada e saída do sistema filtros de ponderação para evitar que os modos não considerados sejam excitados, conforme descrito no Capítulo 3.

Neste caso, filtros de segunda ordem foram utilizados com as seguintes funções de transferência:

- Filtro passa baixa W_p

$$W_p = \frac{5.623 \times 10^{-5}s^2 + 10.5s + 490000}{s^2 + 235s + 1.381 \times 10^4}$$

- Filtro passa alta W_u

$$W_u = \frac{35.48s^2 + 372.5s + 977.7}{s^2 + 8339s + 1.739 \times 10^7}$$

Estes filtros foram obtidos das características em frequência do sistema em malha aberta como se mostra na Figura 5.29.

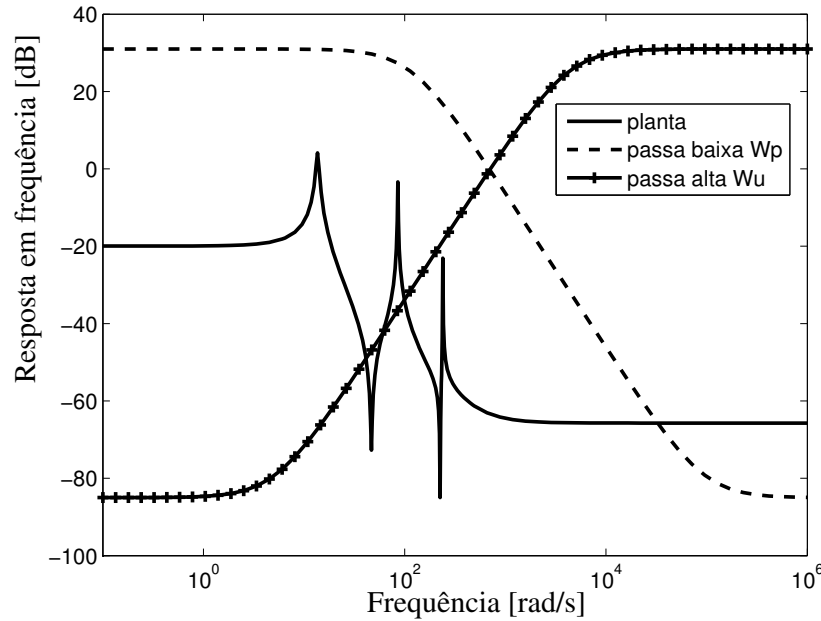


Figura 5.29: Resposta em frequência do sistema truncado sem controle e dos filtros de ponderação.

Para o sistema aumentado (planta truncada com filtros) foi projetado um novo controlador conforme apresentado no Capítulo 3. O controlador de ordem 10 obtido na forma compacta é:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1.7997 \times 10^{-1} & 1.0558 \times 10^1 & -2.4802 \times 10^2 & -7.3243 & -1.5507 \times 10^2 & -2.8118 & 9.5785 & -1.0158 \times 10^3 & 8.9686 \times 10^3 & 6.5821 \times 10^3 & 9.9868 \times 10^8 \\ -1.2778 \times 10^1 & -2.2696 \times 10^{-1} & -1.5912 \times 10^1 & -4.2069 & -1.0102 \times 10^1 & -6.7069 & 3.9349 \times 10^{-1} & -3.8722 \times 10^4 & 3.4190 \times 10^5 & 2.5092 \times 10^5 & -8.3228 \times 10^9 \\ -8.5357 \times 10^1 & -5.0383 & -1.4636 \times 10^1 & 6.3201 \times 10^2 & -1.8622 \times 10^1 & 6.8877 \times 10^2 & 1.0121 \times 10^1 & -8.6309 \times 10^5 & 7.6207 \times 10^6 & 5.5929 \times 10^6 & 6.6159 \times 10^{10} \\ -2.3988 & 3.6942 \times 10^{-1} & -1.9803 \times 10^2 & 1.2487 \times 10^1 & 2.5477 \times 10^1 & 2.1075 \times 10^1 & 4.5612 & -2.5675 \times 10^4 & 2.2670 \times 10^5 & 1.6638 \times 10^5 & 2.1821 \times 10^9 \\ 2.1743 \times 10^1 & 1.1784 & 9.9868 \times 10^{-1} & -1.0009 \times 10^2 & 2.2264 & -9.0070 \times 10^1 & -2.4900 & 2.0577 \times 10^5 & -1.8169 \times 10^6 & -1.3334 \times 10^6 & -6.7082 \times 10^8 \\ 4.4376 \times 10^{-1} & 1.0417 & 8.1852 \times 10^1 & 3.1302 \times 10^{-1} & -3.4092 \times 10^1 & -3.3211 & 6.1245 \times 10^{-1} & 3.5100 \times 10^3 & -3.0992 \times 10^4 & -2.2745 \times 10^4 & 2.9393 \times 10^7 \\ -3.0920 \times 10^{-1} & -5.8231 \times 10^{-3} & 2.6677 \times 10^{-2} & 1.2834 & 1.2937 \times 10^{-1} & 2.1093 & -1.1749 \times 10^2 & -9.1064 \times 10^1 & 8.0405 \times 10^2 & 5.9010 \times 10^2 & 1.7838 \times 10^7 \\ 1.5770 \times 10^{-6} & 9.1962 \times 10^{-8} & 2.3699 \times 10^{-7} & -7.2576 \times 10^{-6} & 3.2983 \times 10^{-7} & -1.2727 \times 10^{-5} & -2.7631 \times 10^{-6} & -1.0345 \times 10^{-2} & 1.3084 \times 10^{-5} & 9.6143 \times 10^{-6} & -1.3436 \times 10^{-1} \\ -1.5592 \times 10^{-3} & -9.1172 \times 10^{-5} & -2.3342 \times 10^{-4} & 7.1746 \times 10^{-3} & -3.2288 \times 10^{-4} & 1.2582 \times 10^{-2} & 1.8595 \times 10^{-4} & -1.5689 \times 10^1 & -9.5911 \times 10^3 & -5.4640 \times 10^3 & 6.0034 \times 10^{-5} \\ -1.2149 \times 10^{-1} & -7.1041 \times 10^{-3} & -1.8188 \times 10^{-2} & 5.5905 \times 10^{-1} & -2.5159 \times 10^{-2} & 9.8037 \times 10^{-1} & 1.4490 \times 10^{-2} & -1.2225 \times 10^3 & 1.6348 \times 10^4 & 9.3120 \times 10^3 & -1.0492 \times 10^{-4} \\ -3.4878 \times 10^{-11} & -2.0395 \times 10^{-12} & -5.2215 \times 10^{-12} & 1.6050 \times 10^{-10} & -7.2228 \times 10^{-12} & 2.8145 \times 10^{-10} & 4.1598 \times 10^{-12} & -3.5096 \times 10^{-7} & 3.0988 \times 10^{-6} & 2.2742 \times 10^{-6} & 0 \end{bmatrix}$$

O controlador $\mathbf{K}$ foi usado para controlar o modelo não truncado da viga. Neste caso, obteve-se uma malha fechada estável. A parte real do polo mais próximo do eixo imaginário teve valor de -0.0173 .

A Figura 5.30 mostra a resposta em frequência do sistema sem controle P_{zw} e do sistema controlado T_{zw} (com a inclusão dos filtros). O sistema sem controle apresentou uma norma $\mathcal{H}_\infty$ de 4.120 dB enquanto o sistema controlado apresentou uma norma $\mathcal{H}_\infty$ de -9.400 dB

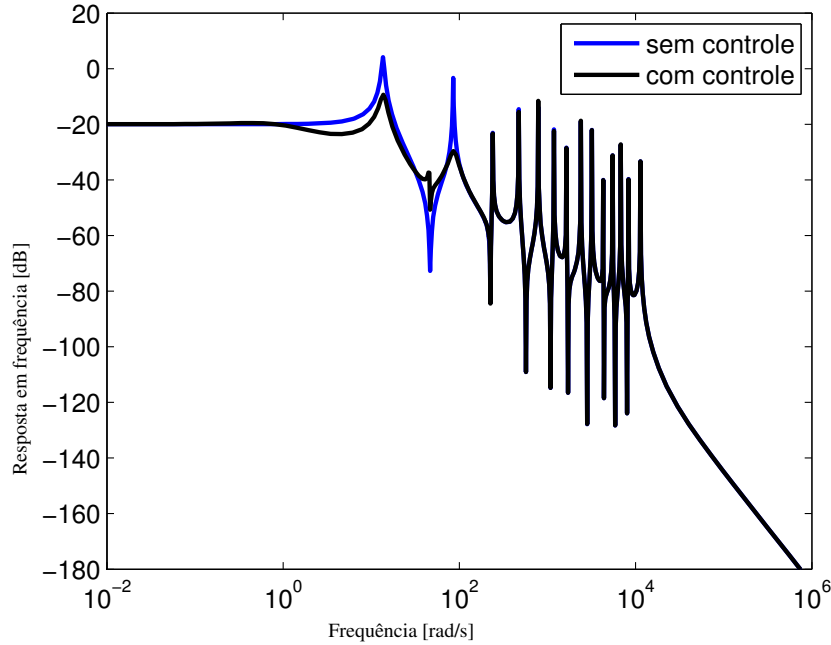


Figura 5.30: Resposta em frequência do modelo não truncado sem e com controle.

Para avaliar o desempenho do sistema controlado, foi aplicado um distúrbio na forma de uma varredura senoidal de amplitude de 0.2 N.m no grau de liberdade 21, iniciando em 2 rad/s e terminando em 400 rad/s, num tempo de varredura de 15 segundos. Este sinal foi gerado usando a função *chirp* do MATLAB. Mostra-se na Figura 5.31 o deslocamento vertical da extremidade da viga com o controlador projetado.

Observa-se na Figura 5.31 que o sistema em malha aberta apresentou um deslocamento máximo de 0.0158 m e o sistema controlado apresentou um deslocamento máximo de 0.0084 m.

O esforço de controle associado é apresentado na Figura 5.32. O valor máximo do esforço de controle foi de 0.1562 N.m.

Este sistema será considerado o sistema de referência (SIC).

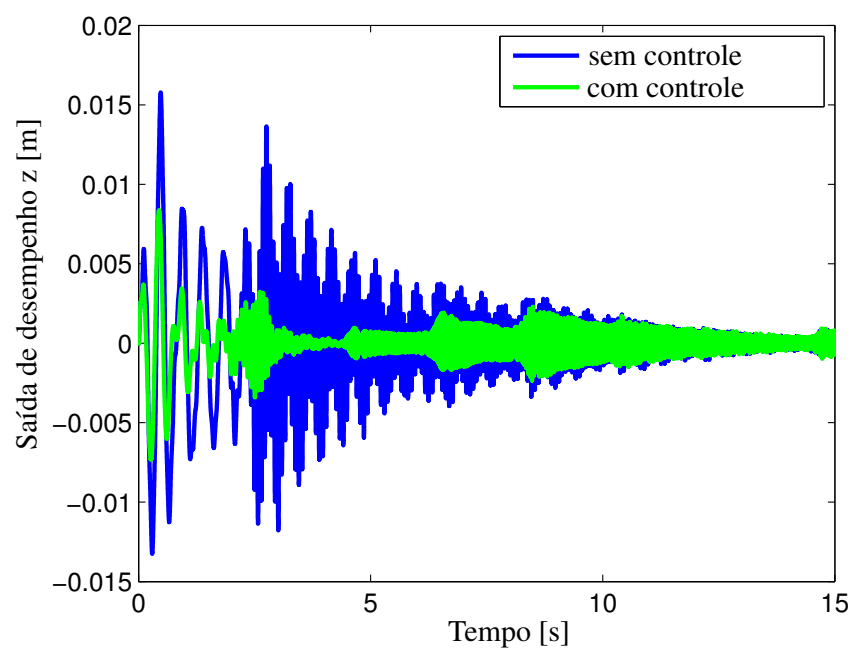


Figura 5.31: Resposta da extremidade da viga do modelo não truncado para uma entrada de distúrbio - sistema com e sem controle.

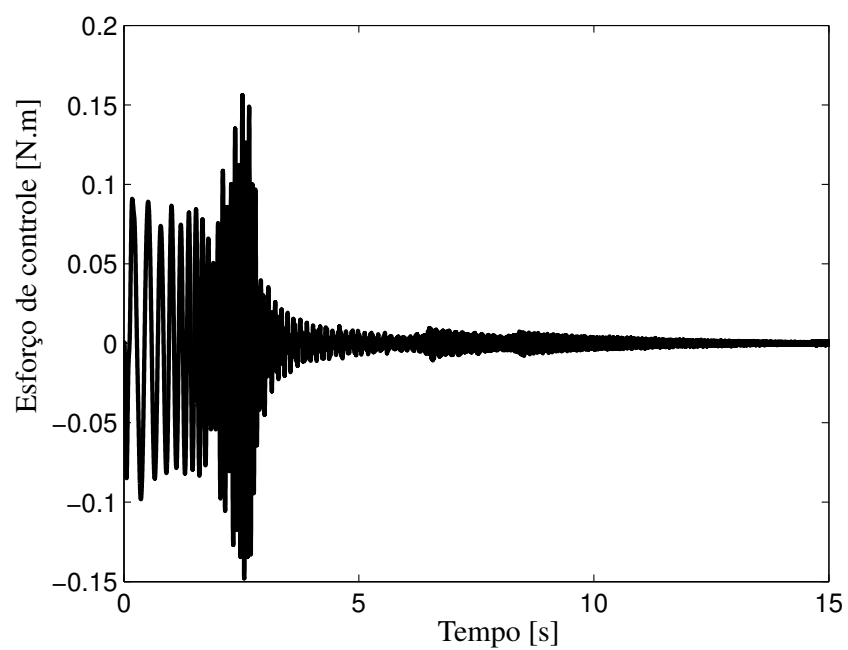


Figura 5.32: Sinal de controle associado à entrada de distúrbio.

5.2.2 Resposta do Sistema Submetido a Efeitos de Saturação (SICS)

Considere agora que ocorre a saturação do atuador como se mostra na Figura 4.1. É considerado neste caso que o atuador se satura para valores fora da faixa de $[-0.05 \ 0.05]$ N.m. Os efeitos produzidos por esta limitação, para o sistema controlado anteriormente, são apresentados a seguir.

A Figura 5.33 mostra uma comparação da saída de desempenho $z = v_8$ para o sistema controlado sem considerar os efeitos de saturação e também considerando a saturação. Pode-se observar a perda do desempenho na rejeição do distúrbio, onde o extremo livre da viga v_8 apresenta um deslocamento máximo de 0.0084 m para o caso sem saturação e um deslocamento máximo de 0.0114 m quando ocorre a saturação.

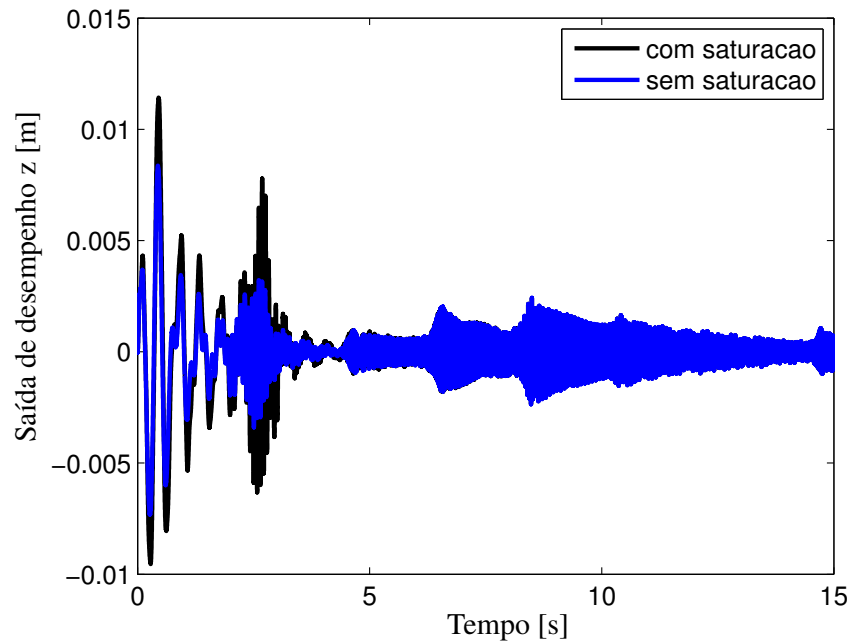


Figura 5.33: Resposta do sistema (saída de desempenho $z = v_8$) com e sem a saturação.

Os sinais de controle associados, segundo o esquema da Figura 4.1, são mostrados na Figura 5.34. Observa-se a diferença entre o sinal de controle u na saída do controlador e o sinal $\tau(u)$ na entrada da planta, acarretando a perda de desempenho na rejeição do distúrbio externo conforme visto na Figura 5.33.

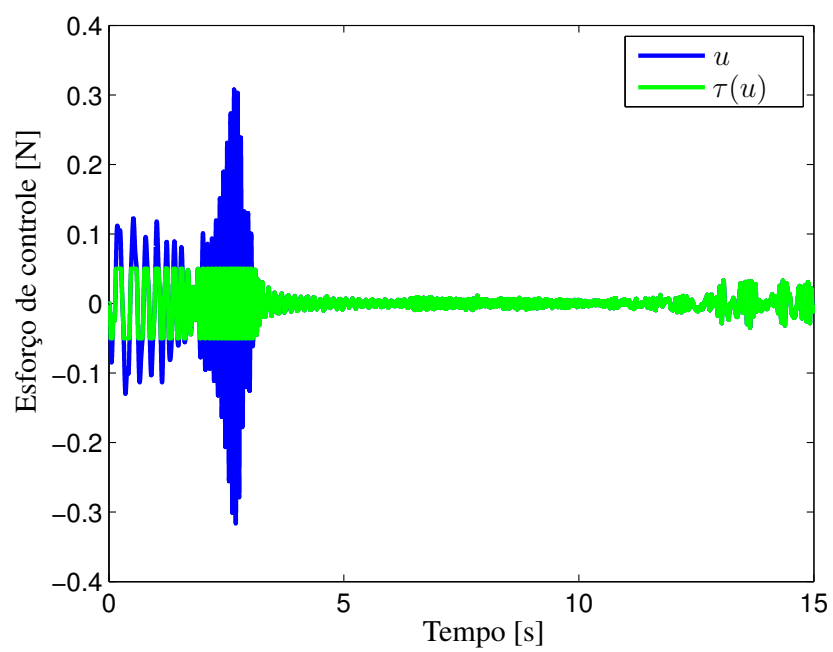


Figura 5.34: Sinal de controle u da saída do controlador $\mathbf{K}$ e $\tau(u)$ na entrada da planta $\mathbf{P}$

5.2.3 Compensação da Matriz C_c

Segundo o detalhado na seção 4.3.3 e com o controlador obtido do projeto $\mathcal{H}_\infty$ com filtros de ponderação (SIC), têm-se as seguintes especificações para o método das penalidades:

- Parâmetro de penalidade inicial $c_0 = 1$,
- Incremento do parâmetro de penalidade $\alpha = 10$,
- Para a busca irrestrita da função penalizada $\phi(g, c)$ se considerou o $g_0 = 1$,
- Critério de convergência:

$$|g_i - g_{i-1}| \leq 1 \times 10^{-6}$$

- Esforço de controle máximo permitido: $u_{max} = 0.05$ N.

Obteve-se o fator ótimo de $g = 0.1314$, o que garante que o esforço de controle não supera o limite máximo estabelecido. Na Figura 5.35 mostra-se a resposta temporal do sinal de controle. Pode-se verificar que o sistema controlado evita a saturação.

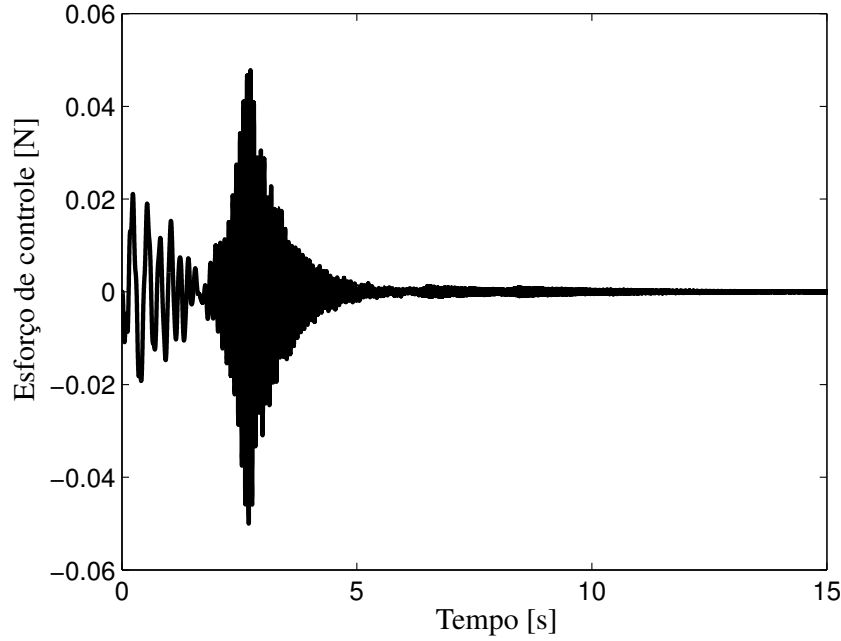


Figura 5.35: Sinal de controle associado à entrada de distúrbio com a compensação da matriz C_c .

A Figura 5.36 fornece a resposta temporal do extremo da viga ($z = v_8$) para a entrada de distúrbio. O sistema apresenta uma perda do desempenho com respeito ao sistema saturado. O extremo da viga apresenta um deslocamento máximo para o SICS de 0.0114 m, e para o SCLS- C_c um deslocamento máximo de 0.0143 m.

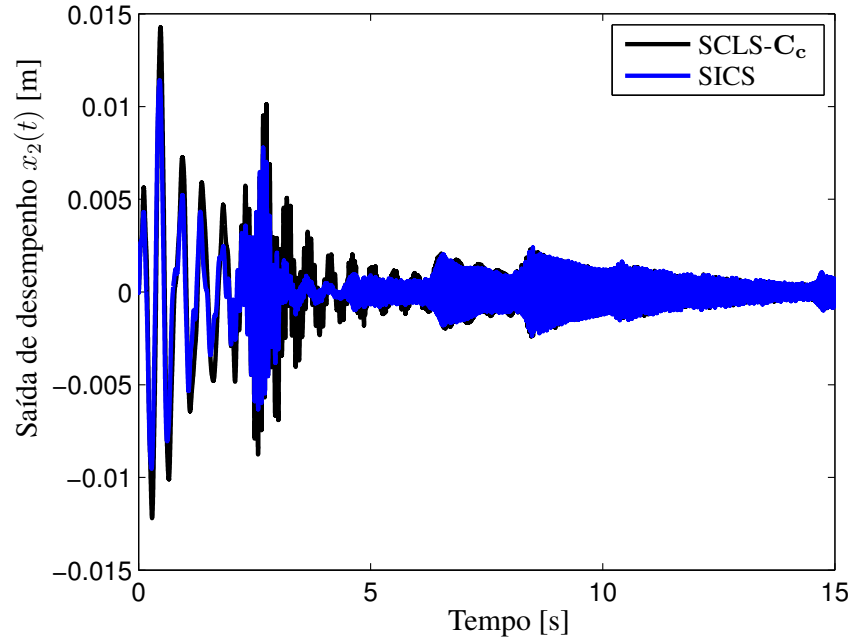


Figura 5.36: Resposta temporal $x_2(t)$ com a compensação da matriz C_c e para a configuração SICS (com filtros de ponderação).

A Figura 5.37 fornece a resposta em frequência do sistema controlado SCLS- C_c (T_{zw}) e do sistema sem controle P_{zw} . O sistema controlado apresentou um pico da resposta em frequência de 0.9075 dB, ou seja, uma redução de 3.212 dB com respeito ao sistema sem controle.

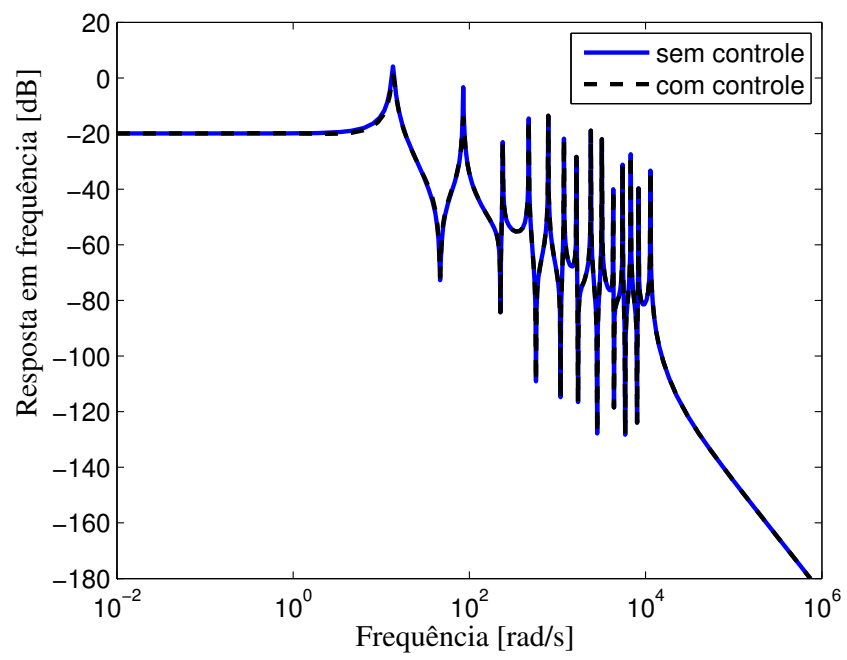


Figura 5.37: Resposta em frequência sem controle e do sistema com controle com a compensação da matriz C_c após do projeto $\mathcal{H}_\infty$.

5.2.4 Controlador Baseado no Método *Anti-windup*

Com base no resultado de um projeto para a situação SIC é projetado o controlador K_{AW} conforme descrito na seção 4.4.1 para obter uma configuração SAWS.

O controlador SIC já foi obtido na seção 5.2.1, onde o controlador K na forma compacta foi reportado.

Resolvendo o problema apresentado em (4.17) usando o comando *Lyap* do MATLAB é encontrado a matriz Π conforme segue:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2455 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2455 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2494 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2494 \end{bmatrix}$$

Com a matriz Π calculada o controlador K_{AW} de ordem 6 é, segundo (4.18), dado por

$$K_{AW} = \begin{bmatrix} -4.000 \times 10^{-1} & 1.361 \times 10^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.389 \times 10^{-2} \\ -1.361 \times 10^1 & -4.000 \times 10^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.506 \\ 0 & 0 & -4.014 \times 10^{-1} & 2.392 \times 10^2 & 0 & 0 & -7.422 \times 10^1 \\ 0 & 0 & -2.392 \times 10^2 & -4.014 \times 10^{-1} & 0 & 0 & -2.192 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4.001 \times 10^{-1} & 8.534 \times 10^1 & 1.257 \times 10^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8.534 \times 10^1 & -4.001 \times 10^{-1} & 2.173 \\ \hline 1.736 \times 10^{-2} & -3.132 & -9.245 \times 10^1 & -2.730 & 1.570 \times 10^2 & 2.715 & 0 \\ 5.748 \times 10^1 & 3.701 & 3.174 \times 10^{-1} & -9.651 & 5.055 \times 10^{-1} & -1.895 \times 10^1 & -1.433 \times 10^1 \end{bmatrix}$$

Este controlador K_{AW} foi incluído no sistema permitindo obter os resultados a seguir.

A saída de desempenho $z = v_8$ da configuração SAWS é comparada com a do sistema saturado SICS. Esta respostas são apresentadas na Figura 5.38. O deslocamento máximo do extremo da viga v_8 no caso SAWS é 9.9253×10^{-3} m, e no caso SICS tem-se um deslocamento máximo de 0.0114 m. Nota-se que o sistema SAWS apresentou um melhor desempenho, com uma redução da máxima amplitude de 13.15% em relação ao resultado do SICS.

O sinal de controle associado é apresentado na Figura 5.39. O sistema apresenta um esforço de controle máximo na saída do controlador de 2.6607 N.m, mas devido à limitação da saturação, apenas valores na faixa de [-0.05 0.05] N.m são aplicados. Neste caso, o sistema com compensação *Anti-windup* contribui para melhorar o desempenho do sistema controlado, mesmo havendo a saturação.

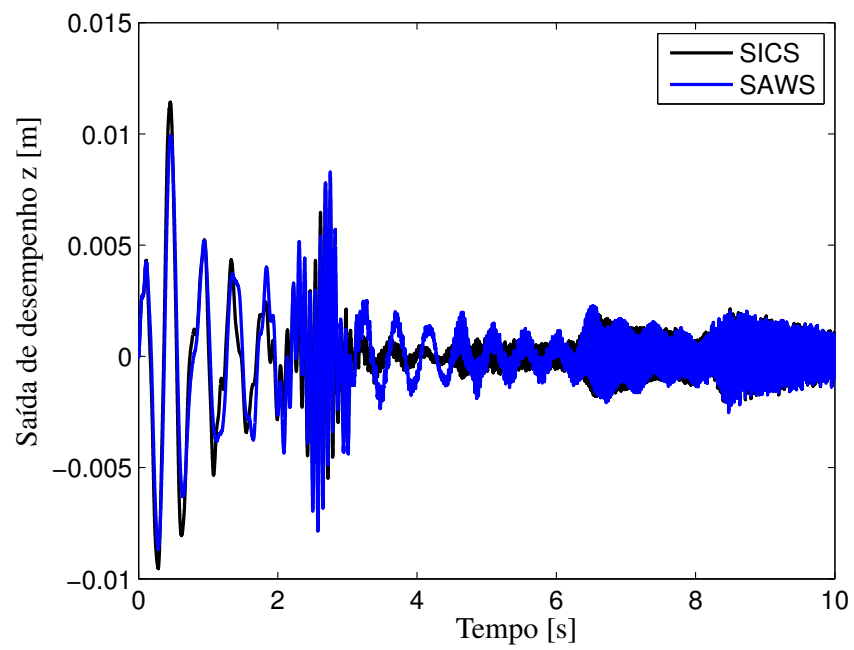


Figura 5.38: Resposta do sistema ($z = v_8$).

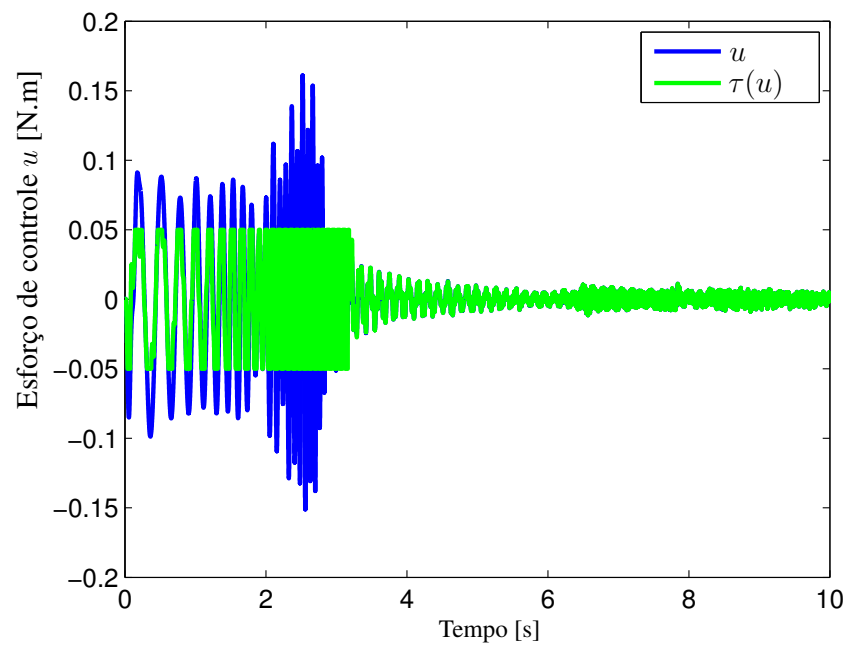


Figura 5.39: Sinal de controle u da saída do controlador $\mathbf{K}$ e $\tau(u)$ entrada da planta $\mathbf{P}$

5.2.5 Controlador com Restrição do Sinal de Controle via LMI

Nesta seção é projetado um controlador de realimentação de estados com observador para o modelo truncado como se detalha na seção 4.3.4.

Realimentação de Estados

Projetando o controlador incluindo a restrição do esforço de controle via LMI na formulação do problema de controle como se apresentou em (4.9), a matriz de ganhos do controlador de estados é

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1.301 \times 10^{-1} & 7.228 \times 10^{-2} & -2.635 \times 10^{-2} & 1.236 \times 10^{-1} & -8.244 \times 10^{-3} & -2.227 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Para este controlador mostra-se, Figura 5.40, a diferença do sistema controlado submetido a saturação (SICS) e do sistema controlado levando em conta a os limites de saturação na formulação (SCLS). Mostra-se que o SICS apresenta um deslocamento máximo de 1.6396×10^{-2} m caracterizando uma deterioração do desempenho, enquanto o SCLS apresenta um deslocamento máximo de 1.1881×10^{-2} m.

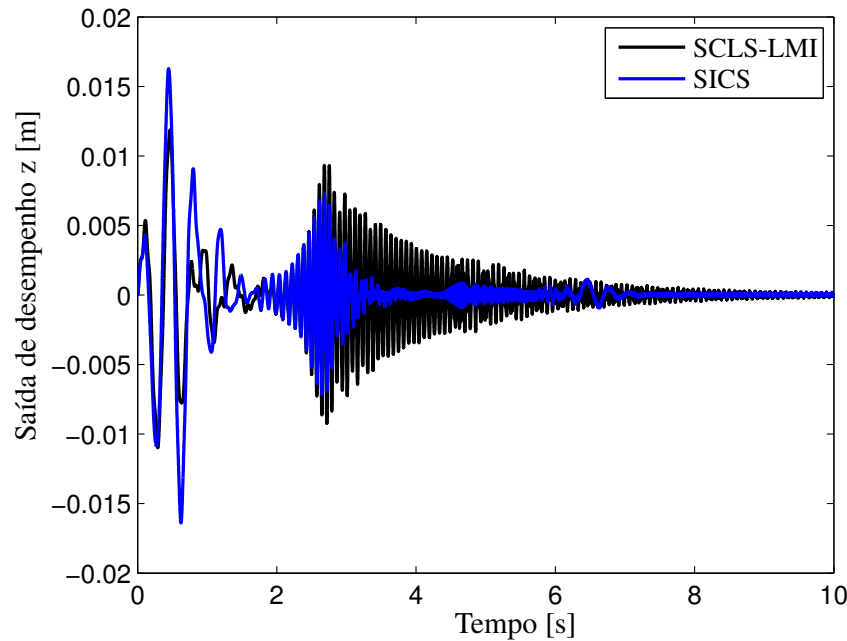


Figura 5.40: Resposta temporal do extremo da viga (modelo truncado) - realimentação de estados restrito.

O esforço de controle associado a o SCLS se mostra na Figura 5.41. Observa-se que o máximo esforço de controle utilizado é 0.0491 N.m, o que garante que o atuador não sature.

Os polos do sistema em malha fechada são apresentados na Tabela 5.8. Pode-se verificar que o sistema controlado é estável.

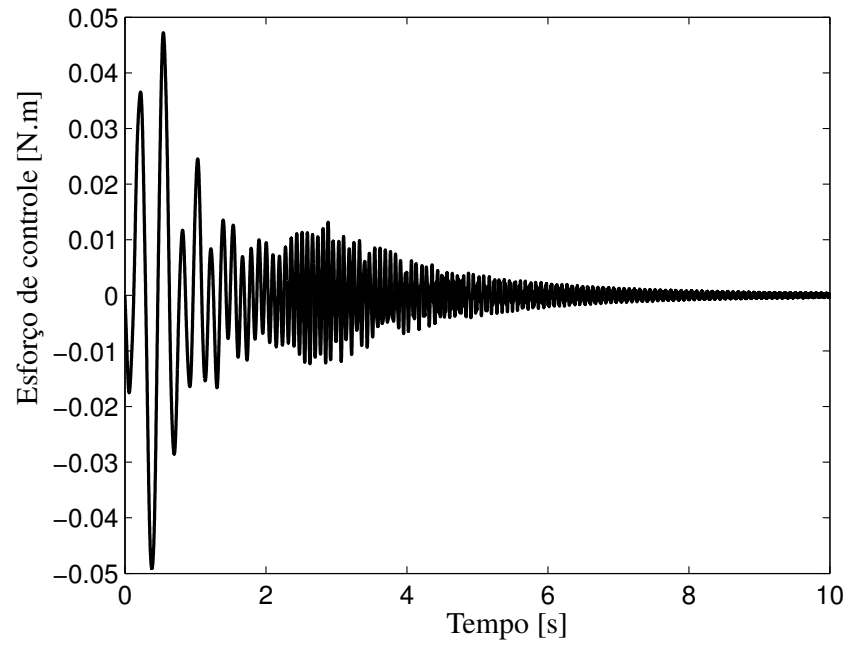


Figura 5.41: Sinal de controle com restrição via LMI - realimentação de estados.

Tabela 5.8: Polos da malha fechada do sistema truncado - realimentação de estados com restrição via LMI

Autovalores	Amortecimento	Freq. (rad/s)
$-1.63 + 1.37 \times 10^1 i$	1.18×10^{-1}	1.38×10^1
$; 1.63 - 1.37 \times 10^1 i$	1.18×10^{-1}	1.38×10^1
$-6.54 \times 10^{-1} + 8.53 \times 10^1 i$	7.66×10^{-3}	8.54×10^1
$-6.54 \times 10^{-1} - 8.53 \times 10^1 i$	7.66×10^{-3}	8.54×10^1
$-4.01 \times 10^{-1} + 2.39 \times 10^2 i$	1.68×10^{-3}	2.39×10^2
$-4.01 \times 10^{-1} - 2.39 \times 10^2 i$	1.68×10^{-3}	2.39×10^2

Realimentação de Estados com Observador

Com o fim de projetar um sistema de controle dinâmico é incluído um observador de ordem completa no sistema já controlado (SCLS). Para isto é considerado que os polos do observador são duas vezes mais rápidos que os polos do controlador de estados. O ganho do observador obtido, como se detalha na seção 4.3.4, é

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 8.1288 \times 10^{-1} \\ 2.2785 \times 10^2 \\ 8.4430 \times 10^1 \\ -2.2894 \times 10^1 \\ -1.6335 \times 10^1 \\ -7.5712 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

A Figura 5.42 mostra a comparação da saída de deslocamento do extremo da viga para o SCLS com e sem observador. O SCLS com observador apresenta um deslocamento máximo de 1.1881×10^{-2} m.

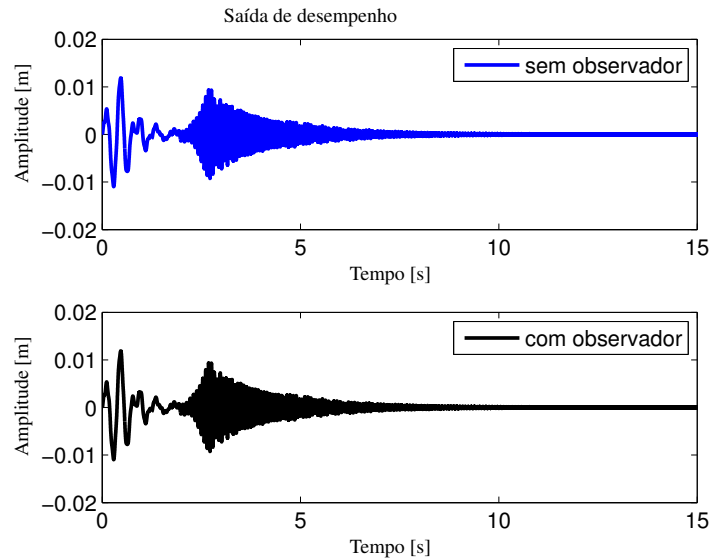


Figura 5.42: Resposta temporal do extremo da viga (modelo truncado) para um SCLS com e sem observador - realimentação de estados.

O controlador do SCLS (realimentação de estados com observador) é utilizado no modelo não truncado da viga, obtendo os polos em malha fechada como se mostra na Tabela 5.9.

O controlador não foi capaz de estabilizar o modelo não truncado da viga. Uma alternativa para contornar este problema é o emprego de filtros de ponderação para evitar o *Spillover*. Porém, o sistema aumentado obtido foi não observável. Constatou-se que este problema de observabilidade

Tabela 5.9: Polos da malha fechada do sistema truncado

Autovalores	Amortecimento	Freq. (rad/s)
$3.72 \times 10^4 + 6.69 \times 10^4 i$	-4.86×10^{-1}	7.65×10^4
$3.72 \times 10^4 - 6.69 \times 10^4 i$	-4.86×10^{-1}	7.65×10^4
-7.50×10^4	1.00	7.50×10^4
$4.77 \times 10^3 + 5.83 \times 10^3 i$	-6.33×10^{-1}	7.53×10^3
$4.77 \times 10^3 - 5.83 \times 10^3 i$	-6.33×10^{-1}	7.53×10^3
$-4.78 \times 10^3 + 5.83 \times 10^3 i$	6.34×10^{-1}	7.54×10^3
$-4.78 \times 10^3 - 5.83 \times 10^3 i$	6.34×10^{-1}	7.54×10^3
$-1.10 + 5.26 \times 10^3 i$	2.09×10^{-4}	5.26×10^3
$-1.10 - 5.26 \times 10^3 i$	2.09×10^{-4}	5.26×10^3
$2.26 \times 10^3 + 2.99 \times 10^3 i$	-6.02×10^{-1}	3.75×10^3
$2.26 \times 10^3 - 2.99 \times 10^3 i$	-6.02×10^{-1}	3.75×10^3
$-2.26 \times 10^3 + 2.99 \times 10^3 i$	6.03×10^{-1}	3.75×10^3
$-2.26 \times 10^3 - 2.99 \times 10^3 i$	6.03×10^{-1}	3.75×10^3
$1.09 \times 10^3 + 1.36 \times 10^3 i$	-6.25×10^{-1}	1.74×10^3
$1.09 \times 10^3 - 1.36 \times 10^3 i$	-6.25×10^{-1}	1.74×10^3
$-1.09 \times 10^3 + 1.36 \times 10^3 i$	6.26×10^{-1}	1.74×10^3
$-1.09 \times 10^3 - 1.36 \times 10^3 i$	6.26×10^{-1}	1.74×10^3
$-4.54 \times 10^{-1} + 1.46 \times 10^3 i$	3.10×10^{-4}	1.46×10^3
$-4.54 \times 10^{-1} - 1.46 \times 10^3 i$	3.10×10^{-4}	1.46×10^3
$4.21 \times 10^2 + 3.76 \times 10^2 i$	-7.46×10^{-1}	5.64×10^2
$4.21 \times 10^2 - 3.76 \times 10^2 i$	-7.46×10^{-1}	5.64×10^2
$-4.22 \times 10^2 + 3.74 \times 10^2 i$	7.48×10^{-1}	5.64×10^2
$-4.22 \times 10^2 - 3.74 \times 10^2 i$	7.48×10^{-1}	5.64×10^2
$-7.31 \times 10^{-1} + 2.40 \times 10^2 i$	3.05×10^{-3}	2.40×10^2
$-7.31 \times 10^{-1} - 2.40 \times 10^2 i$	3.05×10^{-3}	2.40×10^2
$-1.02 \times 10^{-2} + 2.39 \times 10^2 i$	4.28×10^{-5}	2.39×10^2
$-1.02 \times 10^{-2} - 2.39 \times 10^2 i$	4.28×10^{-5}	2.39×10^2
$3.87 + 8.54 \times 10^1 i$	-4.53×10^{-2}	8.54×10^1
$3.87 - 8.54 \times 10^1 i$	-4.53×10^{-2}	8.54×10^1
$-4.02 + 8.54 \times 10^1 i$	4.70×10^{-2}	8.55×10^1
$-4.02 - 8.54 \times 10^1 i$	4.70×10^{-2}	8.55×10^1
$-6.73 \times 10^{-1} + 1.61 \times 10^1 i$	4.16×10^{-2}	1.62×10^1
$-6.73 \times 10^{-1} - 1.61 \times 10^1 i$	4.16×10^{-2}	1.62×10^1
-1.66×10^1	1.00	1.66×10^1

foi causado pela inclusão de filtros de ponderação, caracterizando um aspecto a ser estudado futuramente.

5.2.6 Resumo dos Métodos

Os resultados relevantes, obtidos dos métodos para o exemplo 2, são resumidos na Tabela 5.10.

Tabela 5.10: Resumo dos métodos: Viga flexível

Método	Norma $\mathcal{H}_\infty$ [dB]	$u_{\max}$ [N]	z [m]	Saturação
SIC				
Funções de Ponderação	-9.400	0.156	0.0084	-
SICS	-9.400	0.311	0.0114	sim
SCLS				
Compensação de C_c	0.9075	0.0496	0.0143	não
Restrição via LMI	-7.6135	0.0491	0.0118	não
SAWS	-9.400	2.660	0.0099	sim

O custo computacional na obtenção dos controladores são mostrados na Tabela 5.11.

Tabela 5.11: Custo Computacional: Viga flexível

Método	Ordem do Controlador	Tempo de Obtenção [s]
SIC		
Funções de Ponderação	10	13.4
SCLS		
Compensação de C_c	10	103.5
Restrição via LMI	6	9.8
SAWS	6	12.4

Salienta-se que no caso dos métodos das funções de ponderação não foi considerado o tempo de obtenção dos filtros (tempo para ajuste dos filtros) e no método de restrição via LMI não foi considerado o tempo de obtenção do escalar ρ (feito neste caso por tentativas). Estes parâmetros foram obtidos por ajuste onde o tempo de obtenção do escalar ρ foi muito menor que o tempo de obtenção dos filtros.

O método de restrição do sinal de controle via LMI, neste exemplo, apresentou resultados estáveis somente para o controle do modelo truncado da viga.

As matrizes de estado dos controladores foram obtidas, da mesma forma que para o exemplo 1, num computador portátil com as seguintes características:

- Processador: Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU T5450 @1.66GHz 1.67GHz;
- Memória RAM: 2.00 GHz;
- Sistema Operacional: Windows Vista™ Home Premium - Service Pack 1 de 32 bits.

Capítulo 6

Conclusão

O trabalho apresentou uma série de métodos que contornam, de alguma forma, o problema da saturação de atuadores, mostrando desde métodos simples de ponderação ou fatores de correção dos controladores até técnicas mais sofisticadas de correção automática. Os métodos foram baseados no projeto de controladores $\mathcal{H}_\infty$ via LMIs com modificações especiais, dependendo do método, para evitar ou contornar o problema de saturação. Estes métodos foram divididos em dois tipos: os que não permitem a saturação e os que permitem a saturação. Dentro deste primeiro tipo tem-se métodos iterativos que procuram automatizar via a solução de um problema de penalização a escolha do parâmetro a ser determinado.

O primeira ideia, para contornar o problema de saturação, foi a de projetar controladores que evitem a saturação do atuador. Teoricamente e como é esperado o custo de evitar a saturação do sistema acarreta a perda de desempenho com respeito ao sistema ideal sem saturação. Por outro lado, o fato da existência de uma não linearidade pode conduzir, em certas situações, a uma perda de desempenho severa. Em situações na qual a resposta do sistema não é alterada severamente pela saturação, podem acontecer casos em que é melhor deixar o sistema saturar. Isso só se aplica para sistemas que suportam a saturação (não apresentam danos físicos).

A segunda ideia consiste em projetar controladores que garantam a melhora do desempenho em situações de saturação como foi o método *Anti-windup*. Neste caso, o sistema não pode sofrer danos físicos com a saturação.

Todos os métodos apresentados no trabalho, com exceção do *Anti-windup*, foram métodos de projeto de controladores conservadores que têm o propósito de evitar a saturação. Porém, muitos deles não foram capazes de melhorar o desempenho com respeito ao sistema que teria saturação, em situações em que a saturação não causava uma degradação severa, como se mostrou no Capítulo 5. Estes tipos de controladores conservadores podem ser uma solução razoável em situações nas quais o sistema físico não seja capaz de suportar a saturação do atuador (situações de danos físicos).

O método de projeto de controladores *Anti-windup* não leva em conta o limite máximo do atuador. Este método pode ser considerado uma alternativa de solução flexível e mais sofisticada.

O método é projetado com o objetivo de melhorar o desempenho do sistema mesmo em situações de saturação. Uma vantagem deste método com respeito aos outros mais conservadores é que ele preserva o comportamento do controlador na zona linear, onde este não seria afetado pela saturação. Porém, a utilização deste método é possível somente nos casos em que o sistema físico suporta a saturação do atuador.

Os métodos apresentados neste trabalho foram empregados para dois exemplos propostos no Capítulo 5, apresentando as seguintes características:

- Massa-mola-amortecedor: Para este exemplo os métodos de ponderação da matriz D_{12} , funções de ponderação e restrição do esforço de controle foram capazes de evitar a saturação do atuador, mas não apresentaram uma melhora no desempenho do sistema. O método de compensação da matriz C_c foi capaz de evitar a saturação e garantir uma melhora no desempenho do sistema. Enquanto, o método *Anti-windup* apresentou uma melhora de desempenho, mas este método não evitou a saturação do sistema.
- Viga flexível: Neste exemplo o modelo da viga foi truncado para obter um controlador de ordem menor. Portanto, funções de ponderação foram usadas para evitar o fenômeno de *spillover*. Tendo-se como referência o modelo com filtros de ponderação foi projetado o controlador *Anti-windup* apresentando uma melhora do desempenho sobre o modelo não truncado da viga.

No exemplo da viga flexível tentou-se aplicar o método de restrição do sinal de controle via LMI usando o modelo truncado da viga. Como o controlador de realimentação de estados não foi capaz de estabilizar a viga (modelo não truncado) foi necessária a inclusão de funções de ponderação. O modelo aumentado (viga truncada com filtros) resultou ser não observável. Estudos futuros mais aprofundados terão que ser realizados para uma melhor compreensão desta situação.

A escolha do método mais adequado vai depender, primeiramente, das condições físicas do sistema, ou seja, se o sistema é capaz de suportar a saturação. Nesta situação o método *Anti-windup* destaca-se tanto por sua flexibilidade aos limites de saturação como por seu comportamento na zona linear do operação do atuador. Se o sistema não é capaz de suportar fisicamente a saturação, então entre os métodos apresentados no trabalho pode-se escolher a compensação da Matriz C_c como um método mais prático por seu menor custo computacional.

Existem outras configurações e formas de obter controladores *Anti-windup* [17, 18, 21, 23]. A maior interesse das técnicas *Anti-windup* está em corrigir o controlador apenas em situações de saturação. Isso garante um desempenho ótimo nos casos em que não ocorre a saturação. O enfoque *Anti-windup* é portanto bastante promissor para trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] Alvin K. F., Park K. C., “Second-order Structural Identification Procedure via State-Space-Based System Identification”, AIAA Journal, 32 (2), 397-406, 1994.
- [2] Balas, M., “Trends in Large Space Structure Control Theory: Fondest Hopes, Wildest Dreams”. IEEE Transactions on Automatic Control, 27(3)522-535, 1982.
- [3] Balas G. J., “Robust Control of Flexible Structures: Theory and Experiments”, PhD Thesis, California Institute of Technology, 1989.
- [4] Bathe K. J., Wilson E. L., “Numerical Methods in Finite Element Analysis”, Prentice-Hall, 1976.
- [5] Bazaraa M. S., Sherali H. D., Shetty C. M., “Nonlinear Programming - Theory and Algorithms”, John Wiley & Sons, 1993.
- [6] Boyd S., Ghaoui L. E., Feron E., Balakrishnan V., “Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory”, SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol. 15, 1994.
- [7] Branch M. A., Grace A., “Matlab - Optimization Toolbox - User’s Guide”, The Mathworks, Inc., 1996.
- [8] Chiang R. Y., Safonov M. G., “Robust Control Toolbox User’s Guide”, The MathWorks, Inc., 1998.
- [9] Colaneri P., Geromel J. C., Locatelli A., “Control Theory and Design - An RH_2 and RH_∞ Viewpoint”, Academic Press, 1997.
- [10] Ewins D. J., “Modal Testing: Theory and Practice”, Research Studies Press Ltd., 1984.
- [11] Forrai A., Hashimoto S., Funato H., Kamiyama K., “Robust-controller design with hard constraint on the control signal - application for active vibration suppression of flexible structure”, Archive of Applied Mechanics, 72, 379-394, 2002.
- [12] Friswell M. I., Mottershead J. E., “Finite Element Model Updating in Structural Dynamics”, Kluwer Academic Publishers, 1996.

- [13] Galeani S., “Robustification of anti-windup controllers: a performance-robustness trade-off”, *Giornata di Studio su Identificazione e Controllo Robusto di Sistemi Incerti*, Università di Roma, Dip. di Informatica, Sistemi e Produzione, 2005.
- [14] Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M., “LMI Control Toolbox”, The MathWorks, Inc., 1998.
- [15] Gawronski W. K., “Dynamics and Control of Structures - A Modal Approach”, Springer-Verlag New York, Inc., 1998.
- [16] Geromel J. C., “Notas de Aula - Frequency Domain Analysis of Dynamic Systems”, School of Electrical and Computer Engineering, UNICAMP, 2006, consultado em www.dt.fee.unicamp.br/~geromel, 2008.
- [17] Gomes da Silva J. M., Jr., Tarbouriech S., “Antiwindup Design With Guaranteed Regions of Stability: An LMI-Based Approach”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50(1), 2005.
- [18] Grimm G., Hatfield J., Postlethwaite I., Teel A., Turner M., Zaccarian L., “Antiwindup for Stable Linear Systems with Input Saturation: An LMI-Based Synthesis”, *IEEE Transactions on Automatic control*, 48(9), 2003
- [19] Kwon Y. W., Bang H., “The Finite Element Method using Matlab”, CRC Press, 1997.
- [20] Luenberger D. G., “Linear and Non Linear Programming”, Addison Wesley, 2nd Edition, 1984.
- [21] Matthew C. T, Tarbouriech S., “Anti-windup for linear systems with sensor saturation: sufficient conditions for global stability and L2 gain”, *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, Manchester Grand Hyatt Hotel, San Diego, CA, USA, December 13-15, 2006.
- [22] Mazoni F. A., “Estudo de técnicas de controle H-infinito para estruturas flexíveis com incertezas”, *Tese de Mestrado*, FEM-UNICAMP, 2008.
- [23] Nguyen T., Jabbari F., “Design for Systems with Saturation: an LMI Approach”, *Proceedings of the American Control Conference*, Albuquerque, New Mexico, 1997.
- [24] Overton M., Wolkowicz H., “Semidefinite Programming”, *Mathematical Programming*, 77, 105-109, 1977.
- [25] Oliveira M. C., “Controle de sistemas lineares baseado nas desigualdades matriciais lineares”, *Tese de Doutorado*, Faculdade de Engenharia Elétrica, UNICAMP, 1999.

- [26] Okata K., “Engenharia de Controle Moderno”, Prentice-Hall, 2004.
- [27] Parks R. T, “Manual for Model 210/210a Rectilinear Control System”, Educational Control Product, 1999.
- [28] SDPT3-4.0: “A MATLAB software for semidefinite-quadratic-linear programming”, Free Software Foundation Inc., 1999.
- [29] SeDuMi 1.0x: “A Matlab toolbox for Optimization over Symmetric Cones”, McMaster University, 1998.
- [30] Scherer C., Gahinet P., Chilali M., “Multiobjective output-feedback control via LMI optimization”, IEEE Transactions on Automatic Control, 42 (7), 896-911, 1997.
- [31] Skelton R. E., Iwasaki T., E Grigoriadis K., “An unified Algebraic Approach to Linear Control Design”, Taylor and Francis, 1998.
- [32] Skogestad S., Postlethwaite I., “Multivariable Feedback Control - Analysis and Design”, John Wiley & Sons, 1996.
- [33] Slotine J. J. E., Li W., “Applied Non-linear Control”, Prentice-Hall, 1991.
- [34] Strang G., “Linear Algebra and its Applications ”, Harcourt Brace Jovanovich, Inc, 1988.
- [35] Van Antwerp J. G., Braatz R. D., “A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities”, Journal of Process Control, 10, 363-385, 2000.
- [36] Vikram K., Andrew G. S., Haizhou P., “Control of systems with actuator saturation nonlinearities: an LMI approach”, International Journal of Control, 74(6), 586 - 599, 2001.
- [37] Yalmip: “A Matlab toolbox for rapid prototyping of optimization problems”, Institute fur Automatik - Automatic Control Laboratory.
- [38] Zhou K., Doyle J. C., “Essentials of Robust Control”, Prentice Hall, 1998.
- [39] Zhou K., Doyle J. C., E Glover, K., “Robust and Optimal Control”, Prentice Hall, 1996.

Apêndice A

Alguns Conceitos

A.1 Complemento de Schur

Seja a matriz simétrica $\mathbf{X}$ como se mostra:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

com $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T \in \Re^{n \times n}$. Se $\det(\mathbf{M}) \neq 0$, então se diz que a matriz $\mathbf{S} - \mathbf{N}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$ é o complemento de Schur de $\mathbf{X}$ com respeito a $\mathbf{M}$. Da mesma forma se $\det(\mathbf{S}) \neq 0$, então se diz que a matriz $\mathbf{M} - \mathbf{N} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{N}^T$ é o complemento de Schur de $\mathbf{X}$ com respeito a $\mathbf{S}$.

O complemento de Schur [6] é uma ferramenta bastante útil já que, para certos casos, permite converter formas não lineares em LMIs, como se mostra a seguir:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}(\mathbf{x}) \mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{U}(\mathbf{x})^T > \mathbf{0} \quad (\text{A.2})$$

pode ser representado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{U}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{U}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Desigualdade de Rayleigh-Ritz

Para uma matriz simétrica $\mathbf{Q}$ a desigualdade de Rayleigh-Ritz [34] garante que $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}^n$ tem-se

$$\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{Q}) \mathbf{x}^T \mathbf{x}$$

A.3 Estabilidade de Lyapunov

O critério de estabilidade de Lyapunov é bastante geral e é usado tanto para sistemas lineares como para sistemas não lineares.

No caso de um sistema linear, o critério de estabilidade de Lyapunov estabelece que um sistema na forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é estável se possui uma função de Lyapunov $V(\mathbf{x}, t)$ positiva definida e que a derivada desta função deve ser negativa definida [26], ou seja,

1. $V(\mathbf{x}, t) > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0 \text{ e } \forall t$
2. $\dot{V}(\mathbf{x}, t) < 0, \forall \mathbf{x} \neq 0 \text{ e } \forall t$

Neste caso, é usual considerar a função de Lyapunov na forma quadrática

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{x} > 0, \quad \mathbf{\Pi} > 0$$

onde $\mathbf{\Pi}$ é uma matriz simétrica.

Verifica-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{\Pi} \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{A}) \mathbf{x} < 0 \end{aligned}$$

que corresponde à seguinte condição para a estabilidade do sistema

$$\mathbf{A}^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{A} < 0$$

A.4 Norma $\mathcal{L}_2$

Seja um sinal $x(t)$. A norma $\mathcal{L}_2$ é definida como

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty x'(t)x(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(jw)X(jw)dw},$$

onde se utilizou o teorema de Parseval [32] para relacionar esta norma nos domínios do tempo t e da frequência w .

A.5 Passividade

Seja um sistema na forma como se apresenta a seguir.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bw} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Dw}\end{aligned}\tag{A.4}$$

O sistema (A.4) é passivo se para $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ a seguinte desigualdade é satisfeita [16]:

$$\int_0^T \mathbf{z}(t)^T \mathbf{w}(t) dt \geq \mathbf{0}, \quad \forall T \geq 0\tag{A.5}$$

A passividade pode ser verificada usando a função de Lyapunov $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{x}$ com $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^T > \mathbf{0}$ de forma que

$$\int_0^T (\mathbf{w}(t)^T \mathbf{z}(t) + \mathbf{z}(t)^T \mathbf{w}(t)) dt > \mathbf{V}(\mathbf{x}(T)) > \mathbf{0},\tag{A.6}$$

o que implica uma passividade estrita.

Derivando a equação (A.6) tem-se

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) < \mathbf{w}^T \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \mathbf{w}\tag{A.7}$$

Substituindo (A.4) em (A.7) tem-se

$$(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bw})^T \mathbf{\Pi} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{\Pi} (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bw}) < \mathbf{w}^T (\mathbf{Cx} + \mathbf{Dw}) + (\mathbf{Cx} + \mathbf{Dw})^T \mathbf{w}\tag{A.8}$$

Colocando $[\mathbf{w} \quad \mathbf{x}]^T$ em evidência e aplicando o complemento de Schur em (A.8) obtém-se a forma de LMI seguinte:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{A} & \mathbf{\Pi} \mathbf{B} - \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{\Pi} - \mathbf{C} & -\mathbf{D} - \mathbf{D}^T \end{bmatrix} < \mathbf{0}\tag{A.9}$$

No caso de $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ a passividade é garantida se $\mathbf{A}^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{A} < \mathbf{0}$, $\mathbf{\Pi} \mathbf{B} = \mathbf{C}^T$ com $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^T > \mathbf{0}$.

A.6 Transformação de Congruência

Duas matrizes simétricas $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ são congruentes se existe uma matriz $\mathbf{\Pi}$ não singular tal que $\mathbf{Y} = \mathbf{\Pi}^T \mathbf{X} \mathbf{\Pi}$. Se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ são congruentes, então $\mathbf{Y} > \mathbf{0}$ se e somente se $\mathbf{X} > \mathbf{0}$.

Apêndice B

Método de Penalidades

B.1 Introdução

O método de penalidades é um procedimento para resolver problemas de otimização restrita através de uma sequência de problemas de otimização irrestritos. Neste método, os termos associados às restrições são incluídos na função objetivo e são penalizados quando as restrições são violadas. Um parâmetro $c > 0$ determina a severidade da penalização e consequentemente o grau de aproximação da solução do problema irrestrito com a solução do problema original restrito [20].

Seja o problema (P) padrão de minimização com restrições que se deseja resolver na forma:

$$(P) \begin{cases} \text{minimizar} & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

O problema penalizado (PP) é definido como

$$(\text{PP}) \quad \text{minimizar} \quad \phi(\mathbf{x}, c) = f(\mathbf{x}) + cP(\mathbf{x}) \quad (\text{B.2})$$

onde $P(\mathbf{x})$ é chamada de função de penalidade e c de parâmetro de penalidade.

A função $P(\mathbf{x})$ deve apresentar as seguintes características:

- $P(\mathbf{x}) \geq 0$;
- $P(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$.

O problema (PP) caracteriza uma família de problemas de minimização dependentes do parâmetro de penalidade c . Quando c cresce, as restrições são penalizadas e tendem a se aproximar da região factível.

Uma função de penalidade muito usada é a de forma quadrática como

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (\max[0, g_i(\mathbf{x})])^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p [g_i(\mathbf{x})]_+^2 \quad (\text{B.3})$$

com $g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, p$, p o número de restrições e $[a]_+ = \max(0, a)$.

Algumas características dos métodos das penalidades são:

- Generalidade, a função objetivo pode ser não linear, admitindo restrições não lineares de igualdade e desigualdade;
- A taxa baixa de convergência e que depende da escolha do parâmetro c e como este cresce durante as iterações;
- Apresenta mau condicionamento numérico quando $c \rightarrow +\infty$, caracterizando dificuldades na solução do problema (PP).
- Simplicidade conceitual e de implementação computacional.

B.2 Exemplo Ilustrativo do Método das Penalidades

Seja o seguinte problema de minimização:

$$(P) \begin{cases} \text{minimizar} & x \\ \text{sujeito a} & -x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

A função penalizada neste caso é

$$(PP) \quad \text{minimizar} \quad \phi(\mathbf{x}, c) = x + cP(\mathbf{x})$$

com

$$P(x) = (\max[0, -x + 2])^2 = \begin{cases} 0, & \text{se } -x + 2 \leq 0 \\ (-x + 2)^2, & \text{se } -x + 2 > 0 \end{cases}$$

onde foi usada a penalização quadrática.

A solução ótima do problema (PP) pode ser obtida analiticamente através de

$$\frac{d}{dx} (f(x) + cP(x)) = \begin{cases} 1, & \text{se } -x + 2 \leq 0 \\ 1 + c[2(-x + 2)(-1)], & \text{se } -x + 2 > 0 \end{cases}$$

Impondo a condição de gradiente nulo para obter o ponto crítico, tem-se

$$1 + c[-2(-x + 2)] = 0$$

$$1 + 2cx - 4c = 0$$

$$x = \frac{4c - 1}{2c} = 2 - \frac{1}{2c}$$

Note que quando $c \rightarrow \infty$ então $x = x^* = 2$, solução do problema (P).

B.3 Algoritmo do Método das Penalidades

O seguintes passos principais caracterizam o algoritmo do método das penalidades.

1. Seja o problema restrito a ser resolvido

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\end{array}$$

2. Inicializar o contador de iterações: $i = 0$
3. Definir o parâmetro de penalidade inicial: c_0 .
4. Montar a função penalizada:

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i) = f(\mathbf{x}) + c_i P(\mathbf{x})$$

5. Minimizar a função penalizada $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i)$ utilizando algum método de minimização irrestrita. Neste trabalho foi usada a função *fminsearch* do MATLAB.
6. Verificar o critério de convergência. Por exemplo, se

$$\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}\| \leq \varepsilon$$

então termine e $\mathbf{x}_i$ é a solução. Caso contrário continue.

7. Atualizar o parâmetro de penalidade com $c_{i+1} \geq c_i$. Por exemplo, $c_{i+1} = \alpha c_i$, com $\alpha > 1$.
8. Incrementar o contador de iterações: $i = i + 1$
9. Voltar para o passo 4.

Apêndice C

Algoritmo de Busca da Matriz D_{12}

C.1 Introdução

É apresentado o algoritmo de busca para a obtenção da matriz D_{12} usando o método das penalidades. Para este objetivo, tem-se a matriz definida como

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \end{bmatrix}$$

Portanto, o processo de busca se reduz a encontrar o valor δ que satisfaz o problema de otimização apresentado em (4.2).

C.2 Algoritmo de Busca

1. Seja o problema restrito a ser resolvido

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \bar{u}(\delta) \\ \text{sujeito a} & u_{max} - \bar{u}(\delta) \leq 0 \end{array}$$

2. Inicializar o contador de iterações: $i = 0$
3. Definir o parâmetro de penalidade inicial: c_0 .
4. Montar a função penalizada:

$$\phi(\delta, c_i) = \bar{u}(\delta) + \frac{c_i}{2} [u_{max} - \bar{u}(\delta)]_+^2$$

5. Minimizar a função penalizada $\phi(\delta, c_i)$ utilizando algum método de minimização irrestrita. Neste trabalho foi usada a função *fminsearch* do MATLAB.

6. Verificar o critério de convergência. Se

$$|\delta_i - \delta_{i-1}| \leq \varepsilon$$

então termine. δ_i é a solução e a matriz $\mathbf{D}_{12}$ é

$$\mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \end{bmatrix}$$

Caso contrario continue.

7. Atualizar o parâmetro de penalidade com $c_{i+1} \geq c_i$. Por exemplo, $c_{i+1} = \alpha c_i$, com $\alpha > 1$.

8. Incrementar o contador de iterações: $i = i + 1$

9. Voltar para o passo 4.

Apêndice D

Algoritmo de Busca do Fator de Compensação da Matriz C_c

É apresentado o algoritmo de busca para a obtenção do fator g de compensação da matriz C_c usando o método das penalidades. O problema de minimização foi apresentado em (4.4).

D.1 Algoritmo de Busca

1. Seja o problema restrito a ser resolvido

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \bar{u}(g) \\ \text{sujeito a} & u_{max} - \bar{u}(g) \leq 0 \end{array}$$

2. Inicializar o contador de iterações: $i = 0$
3. Definir o parâmetro de penalidade inicial: c_0 .
4. Montar a função penalizada:

$$\phi(g, c_i) = \bar{u}(g) + \frac{c_i}{2} [u_{max} - \bar{u}(g)]_+^2$$

5. Minimizar a função penalizada $\phi(g, c_i)$ utilizando algum método de minimização irrestrita. Neste trabalho foi usada a função *fminsearch* do MATLAB.
6. Verificar o critério de convergência

$$|g_i - g_{i-1}| \leq \varepsilon$$

Se o critério é satisfeito, então termine. g_i é a solução. Caso contrário continue.

7. Atualizar o parâmetro de penalidade com $c_{i+1} \geq c_i$. Por exemplo, $c_{i+1} = \alpha c_i$, com $\alpha > 1$.
8. Incrementar o contador de iterações: $i = i + 1$
9. Voltar para o passo 4.

Apêndice E

Exemplos de Realimentação de Estados

Nesta seção são apresentados os exemplos estudados usando o conceito de realimentação de estados e a inclusão da restrição na forma de LMI de acordo com a seção 4.3.4.

E.1 Exemplo 1: Modelo Massa-Mola-Amortecedor

Do mesmo exemplo detalhado na seção 5.1 é apresentado a seguir o comportamento do método de restrição do esforço de controle da seção 4.3.4 para o caso de realimentação de estados.

A matriz de ganhos do controlador obtida é

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3.8810 \times 10^4 & 6.1630 \times 10^2 & 1.6301 \times 10^5 & 7.0683 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

Para este controlador a resposta temporal do deslocamento da massa m_2 para o sistema sem e com controle se mostra na Figura E.1. O sistema sem controle apresenta um deslocamento máximo de 4.0935×10^{-4} m e o sistema controlado (SIC) apresenta um deslocamento máximo de 1.5970×10^{-4} m. O sinal de controle associado é apresentado na Figura E.2 e mostra uma amplitude máxima de 15.3 N. Note-se que o caso de realimentação de estados apresenta maior rejeição ao distúrbio do que o caso de realimentação de saída apresentado na seção 5.1.1. Portanto, para avaliar o comportamento deste método, os limites de saturação foram alterados para a faixa de $[-8 \ 8]$ N.

Resolvendo o problema (4.9) considerando o limite máximo do esforço através da inclusão da LMI adicional obtém-se o vetor de realimentação de estados $\mathbf{F}$ como se mostra a seguir:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 4.6699 \times 10^3 & 1.1117 \times 10^2 & 7.2659 \times 10^3 & 5.2325 \times 10^2 \end{bmatrix}$$

com o que o esforço de controle fica definido como

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4.6699 \times 10^3 & 1.1117 \times 10^2 & 7.2659 \times 10^3 & 5.2325 \times 10^2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

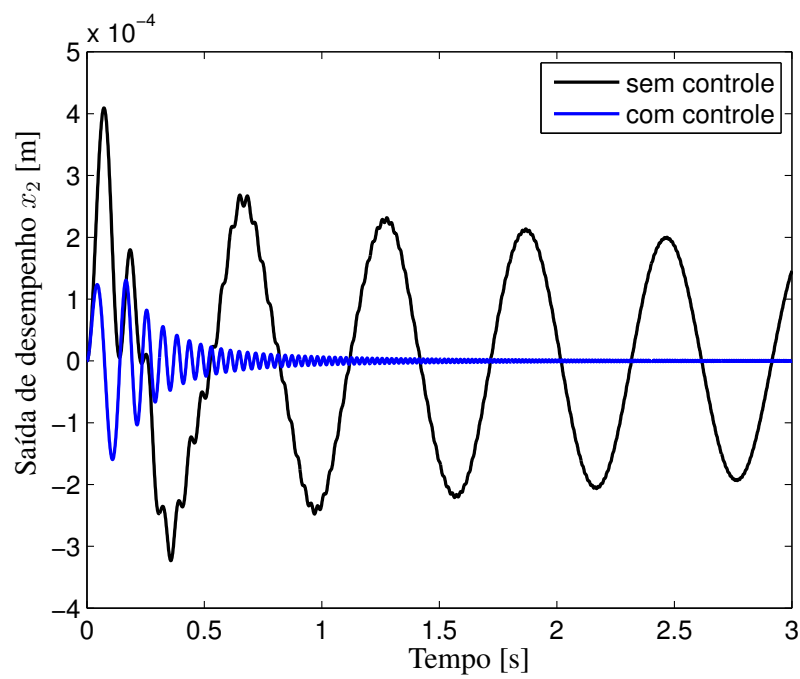


Figura E.1: Resposta temporal da massa m_2 - realimentação de estados.

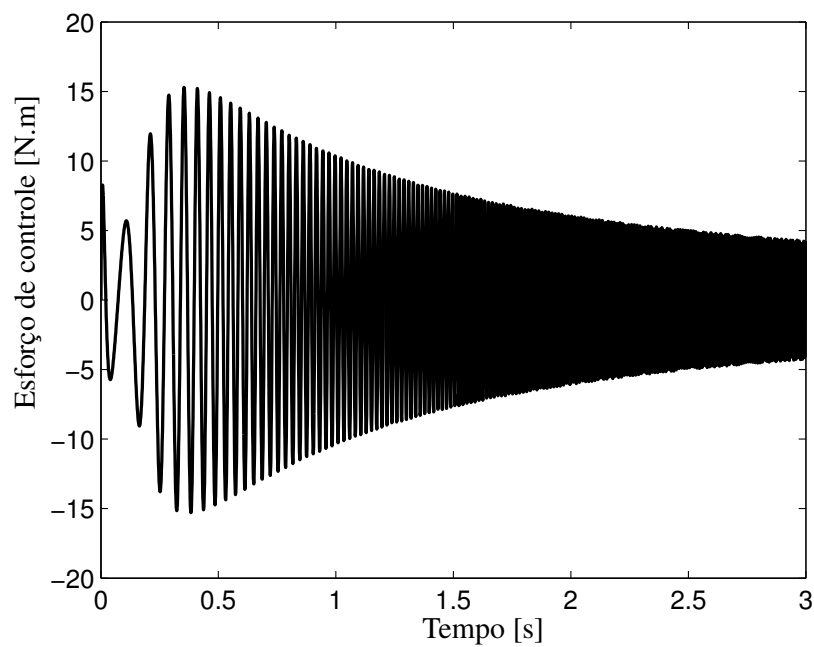


Figura E.2: Sinal de controle associado - realimentação de estados.

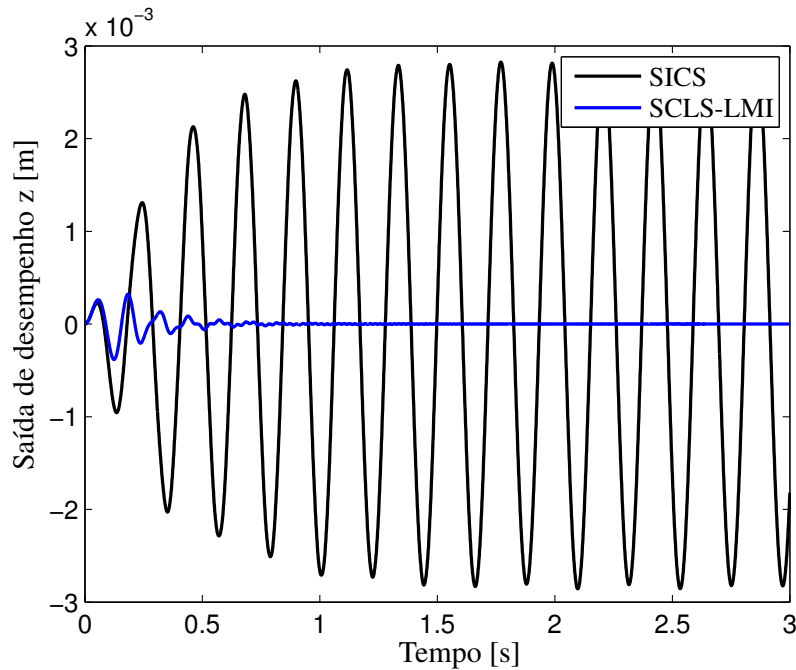


Figura E.3: Resposta temporal do sistema com restrição via do sinal de controle - realimentação de estados.

Para o sistema realimentado tem-se a resposta temporal da saída de desempenho para o caso do controlador obtido de SCLS como se mostra na Figura E.3. Pode-se ver a melhora no desempenho sobre o sistema submetido a saturação (SICS). A massa m_2 apresenta um deslocamento máximo de 2.8571×10^{-3} m para o SICS e um deslocamento máximo de 3.8135×10^{-4} m para o SCLS. Os polos em malha fechada são mostrados na Tabela E.1.

Tabela E.1: Polos da malha fechada do SCLS - realimentação de estados.

Autovalores	Amortecimento	Freq. (rad/s)
$-1.87 \times 10^1 + 1.86 \times 10^1 i$	7.09×10^{-1}	2.64×10^1
$-1.87 \times 10^1 - 1.86 \times 10^1 i$	7.09×10^{-1}	2.64×10^1
$-5.65 + 4.82 \times 10^1 i$	1.17×10^{-1}	4.85×10^1
$-5.65 - 4.82 \times 10^1 i$	1.17×10^{-1}	4.85×10^1

Este sistema realimentado apresenta um esforço de controle máximo de 7.927 N o que garante a não existência da saturação como se mostra na Figura E.4.

Observa-se que o sistema em malha fechada apresenta uma redução do pico da resposta em frequência de 45.226 dB como se vê na Figura E.5.

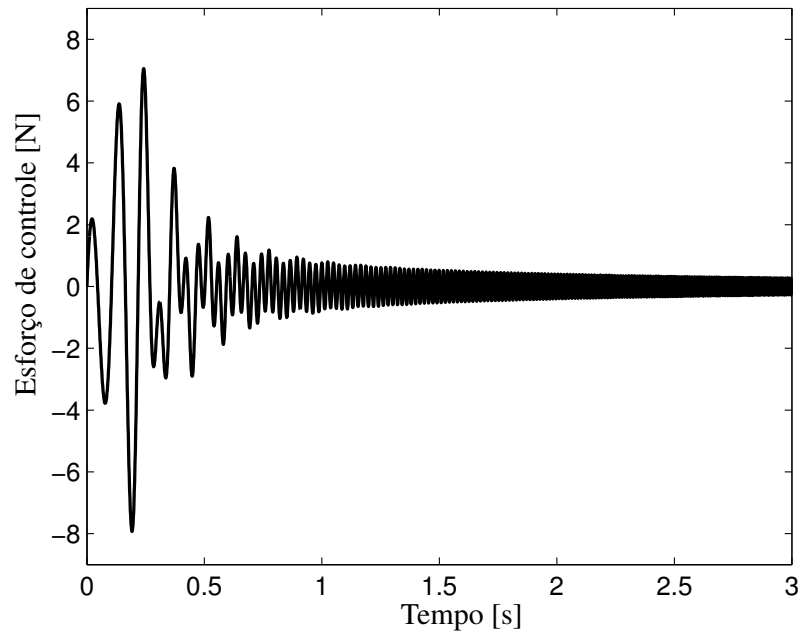


Figura E.4: Sinal de controle com restrição via LMI na formulação do projeto - realimentação de estados.

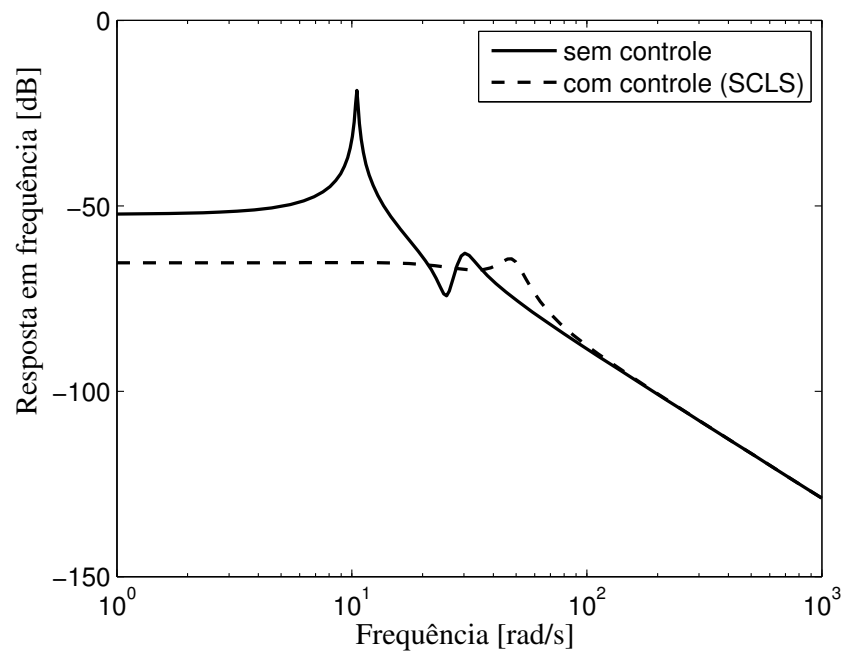


Figura E.5: Resposta em frequência do sistema sem e com controle.

E.2 Exemplo 1: Viga Flexível - Modelo Truncado

Do mesmo exemplo detalhado na seção 5.2 é apresentado a seguir a comparação do método de restrição do esforço de controle via LMI apresentado na seção 4.3.4 para o caso de realimentação de estados como se detalha a seguir.

A matriz de ganhos do controlador obtida é

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1.5720 \times 10^3 & 5.9592 \times 10^1 & 4.8073 \times 10^2 & 1.9188 \times 10^3 & 1.6998 \times 10^1 & -3.4711 \times 10^2 \end{bmatrix}$$

Para este controlador a resposta temporal do deslocamento vertical do extremo da viga para o sistema sem controle é de 15.7 mm, e para o sistema com controle o deslocamento máximo é 2.3 mm como se mostra na Figura E.6. O sinal de controle associado é apresentado na Figura E.7 e mostra uma amplitude máxima de 0.918 N.m. Note-se que o caso de realimentação de estados apresenta maior rejeição ao distúrbio do que o caso de realimentação de saída apresentado na seção 5.2.1. Portanto, para avaliar a eficiência deste método os limites de saturação foram alterados para a faixa de $[-0.5 \ 0.5]$ N.m.

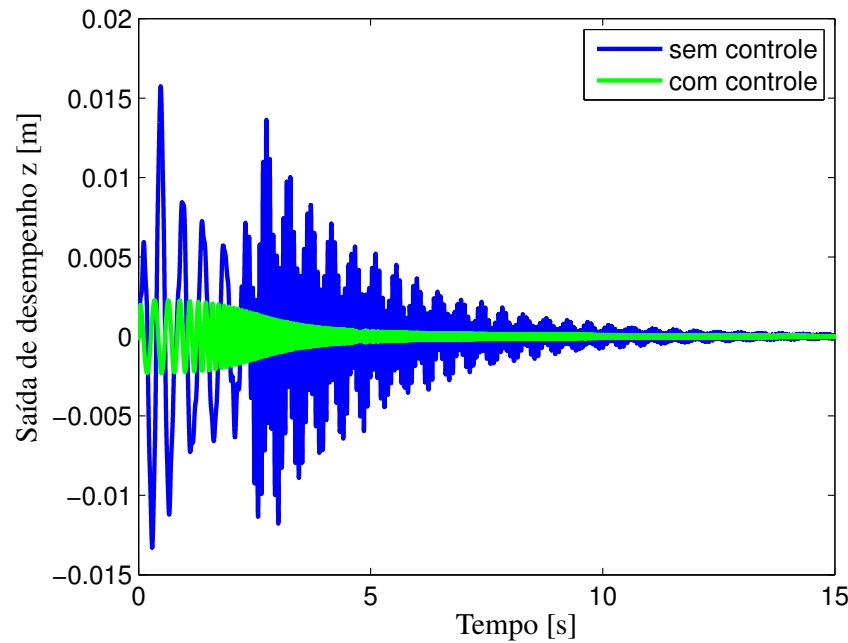


Figura E.6: Resposta temporal do extremo da viga (modelo truncado) - realimentação de estados.

Os polos do sistema em malha fechada são apresentados na Tabela E.2. Pode-se verificar que o sistema controlado é estável.

Projetando o controlador incluindo a restrição do esforço de controle na formulação do problema de controle como se apresentou em (4.9), a matriz de ganhos do controlador de estados

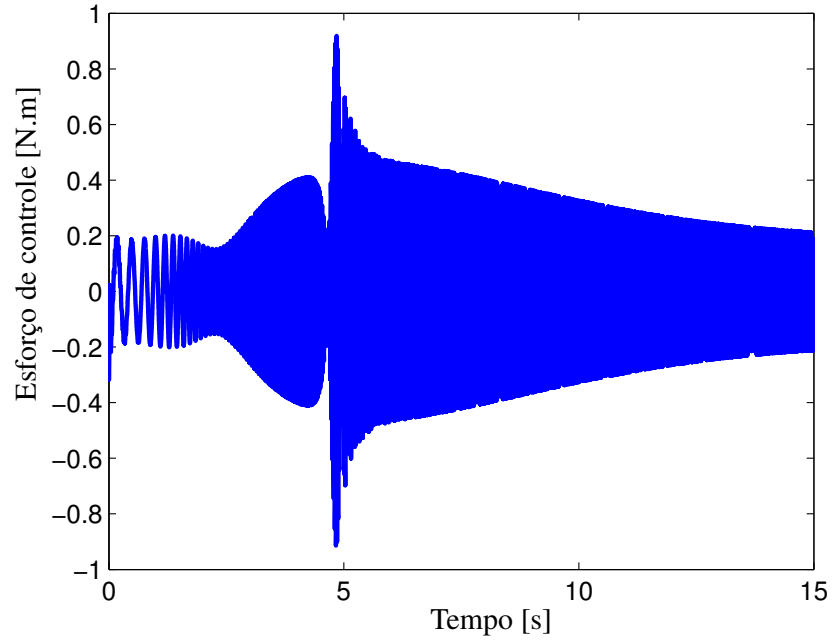


Figura E.7: Sinal de controle associado - realimentação de estados (SIC).

Tabela E.2: Polos da malha fechada do sistema truncado

Autovalores	Amortecimento	Freq. (rad/s)
-7.84×10^1	1.00	7.84×10^1
$-6.48 \times 10^1 + 4.43 \times 10^1 i$	8.26×10^{-1}	7.85×10^1
$-6.48 \times 10^1 - 4.43 \times 10^1 i$	8.26×10^{-1}	7.85×10^1
$-3.50 + 2.52 \times 10^2 i$	1.39×10^{-2}	2.52×10^2
$-3.50 - 2.52 \times 10^2 i$	1.39×10^{-2}	2.52×10^2
-7.78×10^2	1.00	7.78×10^2

é

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 10.5876 & 0.9094 & 2.3181 & 11.4269 & 0.0363 & -4.0256 \end{bmatrix}$$

Para este controlador mostra-se, na Figura E.8, a diferença do sistema controlado submetido a saturação (SICS) e do sistema controlado levando em conta a os limites de saturação na formulação (SCLS). Mostra-se que o SICS apresenta um deslocamento máximo de 12.911 cm, enquanto o SCLS apresenta um deslocamento máximo de 2.479 mm.

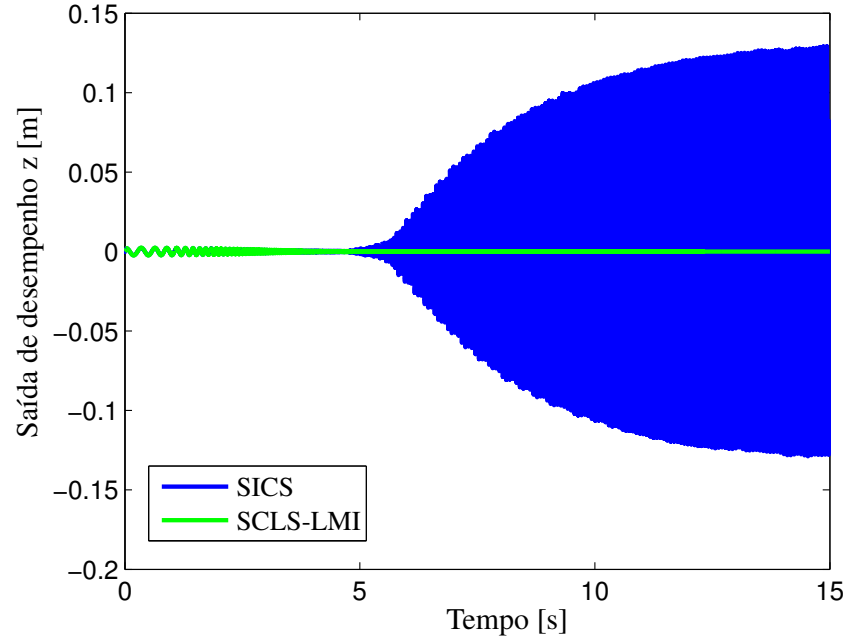


Figura E.8: Resposta temporal do extremo da viga (modelo truncado) para um SICS e para um SCLS - realimentação de estados.

O esforço de controle associado a o SCLS se mostra na Figura E.9. Observa-se que o máximo esforço de controle utilizado é 0.469 N.m, o que garante que o atuador não sature.

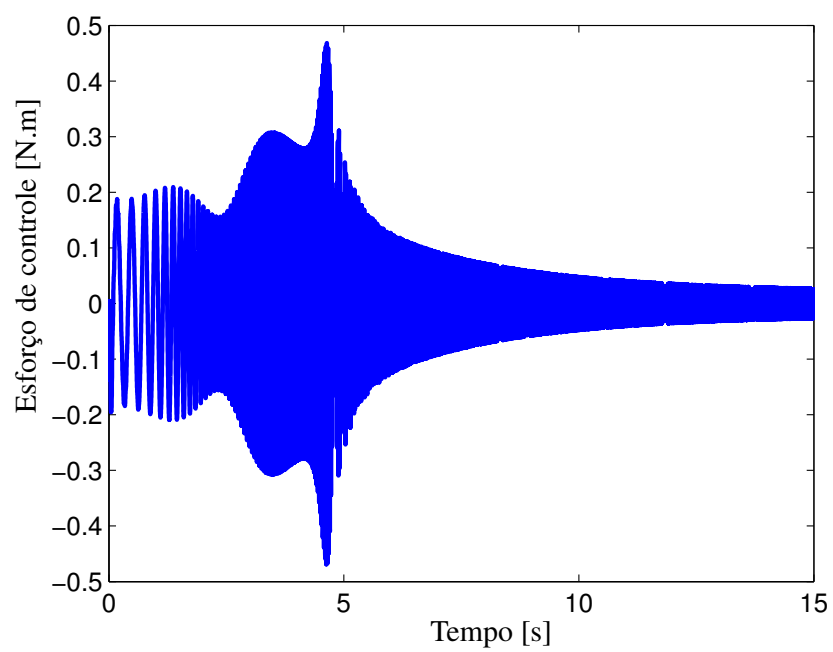


Figura E.9: Sinal de controle associado à entrada de distúrbio para o SCLS - realimentação de estados.