

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Lázaro Valentim
Donadon E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 26/03/1998
Eurípedes Nóbrega
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Estudo de Métodos de Estimação de Parâmetros Aplicados ao Controle Adaptativo Auto-Sintonizado

Autor: **Lázaro Valentim Donadon**
Orientador: **Eurípedes G. O. Nóbrega**

06/98

D714e
34489/BC

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
BIBLIOTECA DE ENGENHARIA MECÂNICA

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Estudo de Métodos de Estimação de Parâmetros Aplicados ao Controle Adaptativo Auto-Sintonizado

**Autor: Lázaro Valentim Donadon
Orientador: Eurípedes G. O. Nóbrega**

publicação livre

**Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Projeto Mecânico**

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1998
S.P. – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

D714e Donadam, Lázaro Valentim
Estudo de métodos de estimação de parâmetros aplicados ao controle adaptativo auto-sintonizado. / Lázaro Valentim Donadam.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Eurípedes G. O. Nóbrega
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Sistemas de controle ajustável. 2. Estimativa de parâmetro. 3. Polinômios. 4. Automóveis - Molas e suspensão. 5. Controle de ruído. 6. Motores elétricos de corrente contínua. I. Nóbrega, Eurípedes G. O. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

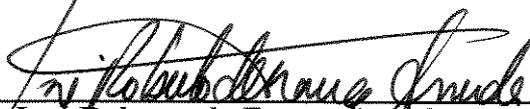
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estudo de Métodos de Estimação de Parâmetros Aplicados ao Controle Adaptativo Auto-Sintonizado

Autor: Lázaro Valentim Donadon
Orientador: Eurípedes G. O. Nóbrega



Prof. Dr. Eurípedes G. O. Nóbrega, Presidente
Instituição : UNICAMP / FEM / DMC



Prof. Dr. José Roberto de França Arruda
Instituição : UNICAMP / FEM / DMC



Prof. Dr. Fernando José Von Zuben
Instituição : UNICAMP / FEEC / DCA

Campinas, 26 de março de 1998

Dedicatória:

Dedico este trabalho à minha querida esposa Claudia.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

Aos meus pais Lazinho e Maria Aparecida pelo incentivo em todos os momentos da minha vida.

Ao meu orientador professor Eurípedes, que me mostrou os caminhos a serem seguidos.

A todos os professores e colegas do departamento, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

Os fins justificam os meios ...

Resumo

DONADON, Lázaro Valentim, *Estudo de Métodos de Estimação de Parâmetros Aplicados ao Controle Adaptativo Auto-Sintonizado*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 154 p. Dissertação (Mestrado)

Neste trabalho são analisados alguns dos principais métodos recursivos de estimação de parâmetros da família dos mínimos quadrados aplicados ao controle adaptativo auto-sintonizado. Para isto foi necessário um estudo do método de controle polinomial, utilizado como compensador do controle adaptativo para a alocação de pólos e zeros desejados. Os métodos analisados para a estimação recursiva de parâmetros foram três: método ordinário; com esquecimento exponencial; e de reinicialização da matriz de covariância. O controle adaptativo auto-sintonizável foi utilizado através da união dos métodos de estimação ao controle polinomial. A configuração assim obtida foi aplicada a três exemplos: no controle acústico de uma sala para supressão de ruído, em uma suspensão ativa com parâmetros variantes no tempo e na identificação experimental de um motor de corrente contínua. Os resultados foram usados para classificar e propor alternativas aos métodos de estimação recursiva estudados.

Palavras Chave

- Controle Polinomial, Estimação de Parâmetros, Controle Adaptativo Auto-Sintonizado, Controle de Ruído, Suspensão Ativa, Motor de Corrente Contínua.

Abstract

DONADON, Lázaro Valentim, *Estudo de Métodos de Estimação de Parâmetros Aplicados ao Controle Adaptativo Auto-Sintonizado*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 154 p. Dissertação (Mestrado)

The aim of this work is to analyze some recursive methods of parameter estimation using least squares applied to self-tuning adaptive control. The pole-zero placement method is used as a compensator for the self-tuning adaptive control. The chosen recursive estimation methods are three: ordinary; with exponential forgetting; and covariance resetting. The estimation and pole-zero placement methods were applied to three examples: acoustic control for noise suppression, active suspension with time-varying parameters and experimental identification of a DC motor. The obtained results were used to classify and propose some alternatives to the recursive estimation methods investigated.

Key Words

- Pole-zero placement, Parameter Estimation, Self-Tuning Regulator (STR), Acoustic Control, Active Suspension, DC Motor

Índice

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 CONTROLE ADAPTATIVO.....	1
1.2 CONTROLE ADAPTATIVO AUTO-SINTONIZADO	4
1.3 OBJETIVOS	6
2. MÉTODOS PARA O CONTROLE ADAPTATIVO	9
2.1 CONTROLE POLINOMIAL	9
2.1.1 <i>Planta</i>	9
2.1.2 <i>Modelo de Referência</i>	10
2.1.3 <i>Posição de Pólos e Zeros</i>	11
2.1.4 <i>Controlador Polinomial</i>	13
2.1.5 <i>Solução do Controlador</i>	13
2.1.5.1 <i>Condição de Solução Única da Equação Diophantina</i>	16
2.1.5.2 <i>Prova da Causalidade do Controlador</i>	19
2.1.5.3 <i>Solução Geral da Equação Diophantina</i>	21
2.1.5.4 <i>Controlador com Ação Integral</i>	22
2.1.5.5 <i>Conclusão da Solução da Equação Diophantina</i>	23
2.1.6 <i>Resumo do Método</i>	24
2.1.7 <i>Função de Transferência de Malha Fechada na Presença de Perturbação</i>	25
2.2 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.....	28
2.2.1 <i>Parametrização de Modelos</i>	28
2.2.2 <i>Princípio dos Mínimos Quadrados</i>	31
2.2.3 <i>Fator de Esquecimento</i>	34
2.2.4 <i>Mínimos Quadrados Recursivo</i>	35
2.2.5 <i>Propriedades da Matriz de Covariância</i>	38
2.2.6 <i>Erro de Polarização</i>	40
2.2.7 <i>Tipos de Estimadores da Família dos Mínimos Quadrados</i>	41
2.2.7.1 <i>Método dos Mínimos Quadrados Ordinário</i>	41

2.2.7.2 Método dos Mínimos Quadrados com Esquecimento Exponencial	41
2.2.7.3 Método dos Mínimos Quadrados com Esquecimento Exponencial	442
2.2.8 <i>Resumo do Método dos Mínimos Quadrados</i>	43
2.2.9 <i>Estimando Partes das Plantas</i>	45
2.3 FORMULAÇÃO DO CONTROLE ADAPTATIVO AUTO-SINTONIZADO	45
2.3.1 <i>Formulação Básica</i>	45
2.3.2 <i>Implementação do Método Adaptativo</i>	47
3. DESCRIÇÃO DOS SISTEMAS UTILIZADOS NO CONTROLE ADAPTATIVO.....	52
3.1 SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	53
3.1.1 <i>Definição do Sistema de Controle Acústico</i>	54
3.1.2 <i>Definição do Controlador Polinomial</i>	55
3.1.3 <i>Estimação dos Parâmetros do Sistema de Controle Acústico</i>	58
3.1.4 <i>Controle Adaptativo</i>	61
3.2 CONTROLE DE UMA SUSPENSÃO ATIVA.....	62
3.2.1 <i>Definição da Planta de uma Suspensão Ativa</i>	62
3.2.2 <i>Descrição do Controlador Polinomial</i>	67
3.2.3 <i>Controle Adaptativo</i>	69
3.3 MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA.....	72
3.3.1 <i>Definição da Planta de um Motor de Corrente Contínua</i>	72
3.3.2 <i>Estimação Experimental do Motor de Corrente Contínua</i>	72
4. SIMULAÇÃO DOS RESULTADOS.....	74
4.1 SIMULAÇÃO DO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	74
4.1.1 <i>Simulação do Controlador Polinomial</i>	75
4.1.2 <i>Simulação dos Métodos de Estimação de Parâmetros</i>	77
4.1.2.1 <i>Simulação do Método dos Mínimos Quadrados Ordinário</i>	77
4.1.2.2 <i>Simulação do Método dos Mínimos Quadrados com Esquecimento Exponencial</i>	81
4.1.2.3 <i>Simulação do Método dos Mínimos Quadrados com Reinicialização da Matriz de Covariância</i>	88
4.1.3 <i>Simulação do Controle Adaptativo Auto-Sintonizado</i>	95
4.1.3.1 <i>Simulação do Controle Adaptativo com Estimação Ordinária</i>	96
4.1.3.2 <i>Simulação do Controle Adaptativo com Estimação Exponencial</i>	97
4.1.3.3 <i>Simulação do Controle Adaptativo com Reinicialização da matriz de Covariância</i>	98
4.2 SIMULAÇÃO DA SUSPENSÃO ATIVA.....	99
4.2.1 <i>Simulação do Controlador Polinomial</i>	101
4.2.2 <i>Simulação do Controle Adaptativo Auto-Sintonizado</i>	103
4.2.3 <i>Análise dos Resultados do Controle Adaptativo Auto-Sintonizado</i>	107
4.3 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DE UM MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA.....	115

5. CONCLUSÕES	119
5.1 CONTROLADOR POLINOMIAL.....	119
5.2 CONTROLE ADAPTATIVO AUTO-SINTONIZADO.....	120
5.3 MÉTODOS DOS MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVO.....	121
5.4 SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS.....	123
BIBLIOGRAFIA	124
APÊNDICE A	127
APÊNDICE B	132
APÊNDICE C	134
APÊNDICE D	136

Lista de Figuras

Capítulo 1

FIGURA 1.1 : CONTROLADOR COMUM	2
FIGURA 1.2 : CONTROLE ADAPTATIVO POR MODELO DE REFERÊNCIA (MRAC).....	3
FIGURA 1.3 : CONTROLE ADAPTATIVO AUTO-SINTONIZADO INDIRETO (STR)	4

Capítulo 2

FIGURA 2.1: REGIÃO DE ESTABILIDADE DE ZEROS.....	12
FIGURA 2.2 : DIAGRAMA DE BLOCOS DO CONTROLADOR POLINOMIAL.....	13
FIGURA 2.3: CONTROLADOR POLINOMIAL COM DISTÚRBIOS DE ENTRADA E ERROS DE MEDIDA.....	25
FIGURA 2.4 : CONTROLE ADAPTATIVO AUTO-SINTONIZADO	51

Capítulo 3

FIGURA 3.1 : ESQUEMA DE UM SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	53
FIGURA 3.2 : DIAGRAMA DE BLOCOS DA PLANTA DE CONTROLE ACÚSTICO (MODELO ARMAX).....	54
FIGURA 3.3 : DIAGRAMA DE BLOCOS DO CONTROLADOR POLINOMIAL PARA UM MODELO ARMAX.....	55
FIGURA 3.4 : DIAGRAMA DE BLOCOS UTILIZADO PARA O CONTROLE POLINOMIAL APLICADO À PLANTA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	58
FIGURA 3.5 : DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DO SISTEMA DE ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DA PLANTA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	59
FIGURA 3.6 : DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DO CONTROLE ADAPTATIVO DA PLANTA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	61
FIGURA 3.7 : SUSPENSÃO ATIVA DE 2 GRAUS DE LIBERDADE COM MASSA VARIANTE NO TEMPO.....	62
FIGURA 3.8 : DIAGRAMA DE CORPO LIVRE DA SUSPENSÃO ATIVA	63
FIGURA 3.9 : DIAGRAMA DO CONTROLADOR POLINOMIAL DA SUSPENSÃO ATIVA	69
FIGURA 3.10 : DIAGRAMA DE BLOCOS DO CONTROLE ADAPTATIVO DA SUSPENSÃO ATIVA	71
FIGURA 3.11 : ESQUEMA DO PROCESSO DE ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA.....	72

Capítulo 4

FIGURA 4.1 : COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS DO SISTEMA COM CONTROLADOR POLINOMIAL COM E SEM AÇÃO INTEGRAL APLICADOS AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	75
FIGURA 4.2 : DIAGRAMA DE BODE DAS RESPOSTAS QUANDO APLICADO OS DOIS TIPOS DE CONTROLADOR	76
FIGURA 4.3 : RESPOSTAS DO CONTROLADOR POLINOMIAL COM AÇÃO INTEGRAL APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	77
FIGURA 4.4 : COMPARAÇÃO DA RESPOSTA REAL E DA RESPOSTA ESTIMADA GERADA PELO MÉTODO ORDINÁRIO COM DIFERENTES $P(0)$ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	78
FIGURA 4.5 : DIFERENÇA ENTRE A RESPOSTA REAL E A RESPOSTA ESTIMADA GERADA PELO MÉTODO ORDINÁRIO COM DIFERENTES $P(0)$ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	79
FIGURA 4.6 : CONVERGÊNCIA DOS PARÂMETROS ESTIMADOS PELO MÉTODO ORDINÁRIO COM DIFERENTES $P(0)$ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO	80
FIGURA 4.7 : TRAÇO DA INVERSA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA $P(k)$ GERADA PELO MÉTODO ORDINÁRIO COM DIFERENTES $P(0)$ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO	81
FIGURA 4.8 : COMPARAÇÃO DA RESPOSTA REAL E DA RESPOSTA ESTIMADA GERADA PELO MÉTODO EXPONENCIAL COM DIFERENTES ESCOLHAS DE λ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	82
FIGURA 4.9 : DIFERENÇA ENTRE A RESPOSTA REAL E A RESPOSTA ESTIMADA GERADA PELO MÉTODO EXPONENCIAL COM DIFERENTES λ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	83
FIGURA 4.10 : CONVERGÊNCIA DOS PARÂMETROS ESTIMADOS PELO MÉTODO EXPONENCIAL COM DIFERENTES ESCOLHAS DE λ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	84
FIGURA 4.11 : TRAÇO DA INVERSA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA $P(k)$ GERADA PELO MÉTODO EXPONENCIAL COM DIFERENTES ESCOLHAS DE λ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	85
FIGURA 4.12 : MÁXIMO VALOR DE $K(k)$ GERADO PELO MÉTODO EXPONENCIAL APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	86
FIGURA 4.13 :ERRO DEFINIDO NA EQUAÇÃO (2.56) GERADO PELO MÉTODO EXPONENCIAL APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO	87
FIGURA 4.14 : VALOR MÁXIMO DO PRODUTO DO ERRO PELO VETOR DE GANHO $K(k)$ GERADO PELO MÉTODO EXPONENCIAL APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	87
FIGURA 4.15 : COMPARAÇÃO DA RESPOSTA REAL E DA RESPOSTA ESTIMADA PELO MÉTODO DE REINICIALIZAÇÃO MANTENDO ξ CONSTANTE E VARIANDO $P(0)$ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	89
FIGURA 4.16 : CONVERGÊNCIA DOS PARÂMETROS ESTIMADOS PELO MÉTODO DE REINICIALIZAÇÃO MANTENDO ξ CONSTANTE E VARIANDO $P(0)$ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	90
FIGURA 4.17 : COMPARAÇÃO DO ERRO DO ESTIMADOR GERADO PELO MÉTODO DE REINICIALIZAÇÃO MANTENDO ξ CONSTANTE E VARIANDO $P(0)$ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	91

FIGURA 4.18 : COMPARAÇÃO DA RESPOSTA REAL E DA RESPOSTA ESTIMADA GERADA PELO MÉTODO DE REINICIALIZAÇÃO MANTENDO $P(0)$ CONSTANTE E VARIANDO ξ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	92
FIGURA 4.19 : DIFERENÇA ENTRE A RESPOSTA REAL E A RESPOSTA ESTIMADA GERADA PELO MÉTODO DE REINICIALIZAÇÃO MANTENDO $P(0)$ CONSTANTE E VARIANDO ξ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	93
FIGURA 4.20 : CONVERGÊNCIA DOS PARÂMETROS ESTIMADOS PELO MÉTODO DE REINICIALIZAÇÃO MANTENDO $P(0)$ CONSTANTE E VARIANDO ξ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO.....	94
FIGURA 4.21 : COMPARAÇÃO DO ERRO GERADO PELO MÉTODO DE REINICIALIZAÇÃO MANTENDO $P(0)$ CONSTANTE E VARIANDO ξ APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO	95
FIGURA 4.22 : APLICAÇÃO DO CONTROLE ADAPTATIVO AUTO-SINTONIZADO UTILIZANDO O MÉTODO ORDINÁRIO APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO COM $P(0) = 1000*I$	96
FIGURA 4.23 : APLICAÇÃO DO CONTROLE ADAPTATIVO AUTO-SINTONIZADO UTILIZANDO O MÉTODO EXPONENCIAL APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO COM $\lambda = 0.999$ E $P(0) = 1000*I$	97
FIGURA 4.24 : APLICAÇÃO DO CONTROLE ADAPTATIVO AUTO-SINTONIZADO UTILIZANDO O MÉTODO DE REINICIALIZAÇÃO APLICADO AO SISTEMA DE CONTROLE ACÚSTICO COM $\xi = 50$ ITERAÇÕES E $P(0) = I$	99
FIGURA 4.25 : ENTRADAS DA SUSPENSÃO	100
FIGURA 4.26 : VARIAÇÃO DE MASSA DA SUSPENSÃO	101
FIGURA 4.27 : LUGAR DOS PÓLOS DISCRETOS DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE MALHA FECHADA DO CONTROLADOR POLINOMIAL COM AÇÃO INTEGRAL.....	102
FIGURA 4.28 : COMPARAÇÃO ENTRE A RESPOSTA PASSIVA E A RESPOSTA CONTROLADA QUANDO APLICADO O CONTROLE ADAPTATIVO UTILIZANDO O MÉTODO ORDINÁRIO, COM $P(0) = 1000*I$	104
FIGURA 4.29 : COMPARAÇÃO ENTRE A RESPOSTA PASSIVA E A RESPOSTA CONTROLADA QUANDO APLICADO O CONTROLE ADAPTATIVO UTILIZANDO O MÉTODO EXPONENCIAL, COM $P(0) = 1000*I$ E $\lambda = 0.998$	105
FIGURA 4.30 : COMPARAÇÃO ENTRE A RESPOSTA PASSIVA E A RESPOSTA CONTROLADA QUANDO APLICADO O CONTROLE ADAPTATIVO UTILIZANDO O MÉTODO DA REINICIALIZAÇÃO, COM $P(0) = 1000*I$ E $\xi = 100$ ITERAÇÕES	106
FIGURA 4.31 : PARÂMETROS DO ESTIMADOR ORDINÁRIO COM $P(0) = 1000*I$	107
FIGURA 4.32 : PARÂMETROS DO ESTIMADOR EXPONENCIAL COM $P(0) = 1000*I$ E $\lambda = 0.998$	108
FIGURA 4.33 : TRAÇO DA MATRIZ $P(k)$	109
FIGURA 4.34 : LEI DE CONTROLE $U(k)$	110
FIGURA 4.35 : COMPARAÇÃO ENTRE AS RESPOSTAS CONTROLADAS QUANDO APLICADO O CONTROLE ADAPTATIVO UTILIZANDO O MÉTODO EXPONENCIAL COM LIMITAÇÃO DE $U(k)$, COM $P(k) = 1000*I$ E $\lambda = 0.998$	111

FIGURA 4.36 : COMPARAÇÃO ENTRE AS RESPOSTAS CONTROLADAS QUANDO APLICADO O CONTROLE ADAPTATIVO UTILIZANDO O MÉTODO DA REINICIALIZAÇÃO COM LIMITAÇÃO DE $U(k)$, COM $P(k) = 1000 * I$ E $\xi = 100$ ITERAÇÕES	112
FIGURA 4.37 : COMPARAÇÃO ENTRE A RESPOSTA PASSIVA E A RESPOSTA CONTROLADA QUANDO APLICADO O CONTROLE ADAPTATIVO UTILIZANDO O MÉTODO HÍBRIDO COM LIMITAÇÃO DE $U(k)$, COM $P(0) = 1000 * I$, $\lambda = 0.998$ E $\xi = 100$ ITERAÇÕES	114
FIGURA 4.38 : SINAIS DE ENTRADA E SAÍDA MEDIDOS DO MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA	116
FIGURA 4.39 : DADOS ESTIMADOS DO MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA	116
FIGURA 4.40 : COMPARAÇÃO ENTRE A RESPOSTA ESTIMADA E A RESPOSTA REAL DO MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA	118

Apêndice A

FIGURA A.1 : FAIXAS PERIÓDICAS NO PLANO COMPLEXO E A CORRESPONDENTE REGIÃO NO PLANO DISCRETO	129
FIGURA A.2 : LOCALIZAÇÃO DAS RAÍZES COMPLEXAS COM A MESMA PARTE REAL NO PLANO DISCRETO	129
FIGURA A.3 : LOCALIZAÇÃO DAS RAÍZES COMPLEXAS COM A MESMA PARTE IMAGINÁRIA NO PLANO DISCRETO	130
FIGURA A.4 : REPRESENTAÇÃO DAS CURVAS DE AMORTECIMENTO E FREQUÊNCIA CONSTANTE	130
FIGURA A.5 : LOCALIZAÇÃO DAS RAÍZES COMPLEXAS DESEJADAS NO PLANO DISCRETO	131

Apêndice B

FIGURA B.1 : ENTRADA ESTOCÁSTICA COM $v = 20$ M/S	132
---	-----

Lista de Tabelas

Capítulo 2

TABELA 2.1 : GRAUS DOS POLINÔMIOS DO CONTROLADOR POLINOMIAL.....	17
TABELA 2.1 : MODELOS POLINOMIAIS	31

Capítulo 3

TABELA 3.1 : VALORES DA SUSPENSÃO SEM CONTROLE	67
--	----

Capítulo 4

TABELA 4.1 : MELHOR FORMA DO CONTROLADOR PARA DIVERSAS FAIXAS DE FREQUÊNCIA.....	76
TABELA 4.2 : INICIALIZAÇÃO DOS MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS.....	103

Apêndice B

TABELA B.1 : VALORES DOS PARÂMETROS DO ESPECTRO DO TERRENO.....	103
---	-----

Nomenclatura

Letras Latinas

- A, B, C, G : Polinômios referentes à planta
R, S, T : Polinômios referentes ao controlador
Ac, Bc, Cc, Gc : Matrizes de estado contínuas
e(t) : Entrada estocástica
e(k) : Erro do estimador dos mínimos quadrados
R(k) : Matriz de covariância dos mínimos quadrados
P(k) : Inversa da matriz de covariância R(k)
w(t) : Entrada determinística
W(t) : Rotação do motor de corrente contínua
I(t) : corrente de entrada do motor de corrente contínua
r : Sinal de referência
y : Resposta da planta
t : Tempo
z : Variável complexa (Transformada discreta Z)
s : Variável complexa (Domínio de Laplace)
q : Operador avanço unitário

Letras Gregas

- β : Função de Esquecimento
 φ : Regressores ou sinais medidos
 λ : Fator de Esquecimento

θ : Parâmetros da planta
 ζ : fator de amortecimento
 ξ : tempo de ressetagem da matriz $P(k)$
 ω : Freqüência angular
 Φ : Matriz dos regressores
 δ_{st} : Deflexão estática da suspensão

Superescritos

$\hat{\cdot}$: Estimados
- : Zeros instáveis ou que causam perda de robustez
+ : Zeros Estáveis

Subscritos

i : número da iteração
 m : modelo de referência
 c : tempo contínuo

Siglas

SISO : Sistema com uma entrada e uma saída
MISO : Sistema com múltiplas entradas e uma saída
RST : Controlador polinomial
STR : Regulador auto-sintonizável
MRAC : Sistema adaptativo por modelo de referência
LS : Método dos mínimos quadrados
RLS : Método dos mínimos quadrados recursivos
ZOH : Segurador de ordem zero

Capítulo 1

Introdução

O desempenho dos sistemas mecânicos pode ser melhorado com o uso dos sistemas de controle. Com o avanço da tecnologia e dos recursos computacionais tem havido uma procura por sistemas de controle cada vez mais sofisticados que permitam um desempenho ótimo nas mais diversas possibilidades de funcionamento. Dentre estes novos sistemas de controle pode-se destacar o *Controle Adaptativo*, o qual necessita de uma ferramenta de estimação para prever as possíveis modificações dos sistemas controlados e assim alterar as características do controlador para possibilitar sempre o desempenho desejado.

O controle adaptativo tem sido estudado por diversos pesquisadores e ao longo dos anos várias vertentes apareceram. Mas a mais significativa delas foi proposta por Aström (1973) no trabalho intitulado “*On Self-Tuning Regulators*”. Desde então este método tem despertado grande interesse nos pesquisadores devido principalmente à sua concepção razoavelmente simples.

1.1 Controle Adaptativo

Um controlador convencional de malha fechada pode ser representado pela Figura 1.1. Seus parâmetros são calculados com base no conhecimento prévio do processo a ser controlado, significando que todas as características de projeto devem ser especificadas antes do controlador entrar em ação. Deste modo ele estará apto a trabalhar na faixa de operação previamente estabelecida. Quando o processo a ser controlado não for conhecido o controlador deverá ser ajustado manualmente depois de entrar em funcionamento.



Figura 1.1 : Controlador comum

O sistema de controle esquematizado na Figura 1.1 consiste de uma referência $r(t)$ que a resposta controlada $y(t)$ deve acompanhar e uma lei de controle $u(t)$ gerada pelo controlador que determina qual a excitação que a planta deve receber para que $y(t)$ tenda para $r(t)$.

Freqüentemente as características do processo variam no decorrer do seu funcionamento e portanto o controle convencional pode perder as especificações desejadas. As variações podem ser fruto de mudanças internas ou externas ao processo.

As mudanças internas podem estar relacionadas com a variação dos parâmetros do processo tais como alteração de massa, amortecimento e rigidez, etc.

As mudanças externas podem ser relacionadas com qualquer entrada não controlável e possivelmente não observável, como por exemplo variação de torque, corrente, rotação, posição, referência a ser seguida, etc.

Para contornar estas variações de forma automática é necessário empregar outro tipo de estratégia de controle, denominada *Controle Adaptativo*. Portanto ele não é um controle propriamente dito e sim uma *estratégia de controle*.

Uma característica básica de todo controle adaptativo é a presença de duas partes essenciais: a lei de controle e um estimador. O estimador acompanha as alterações internas e/ou externas ao processo, permitindo assim que se corrija o controlador para manter as características desejadas para o processo.

Dois tipos de controle adaptativo são freqüentemente encontrados na literatura: *Modelo de Referência* e *Auto-Sintonizável*. É comum o uso das siglas MRAC (“*Model Reference Adaptive Control*”) ou MRAS (“*Model Reference Adaptive Systems*”) e STR (“*Self-Tuning Regulator*”).

O MRAC, ou controle adaptativo por modelo de referência, consiste basicamente em dois módulos: um *modelo de referência* e um *mecanismo de ajuste*.

O modelo de referência é explícito na malha de controle, e tem a finalidade de estabelecer o desempenho desejado para o sistema. O *mecanismo de ajuste* altera os parâmetros do controlador baseado no erro entre resposta do modelo e a resposta do processo.

Seu diagrama de blocos é representado na Figura 1.2, onde a parte em azul representa a estratégia de adaptação.

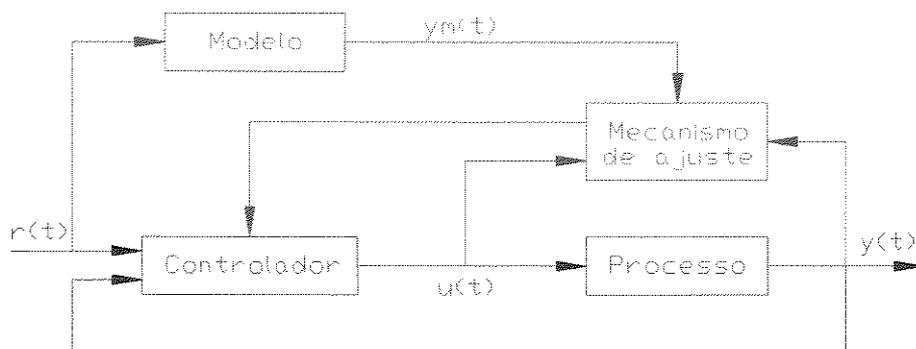


Figura 1.2 : Controle adaptativo por modelo de referência (MRAC)

O MRAC divide-se em outros dois tipos: *controle direto e indireto*. No MRAC direto os parâmetros do controlador são estimados diretamente e a lei de controle pode ser utilizada sem o conhecimento dos parâmetros do processo. No MRAC indireto os parâmetros da planta são estimados diretamente e os parâmetros do controlador são calculados com base nas estimativas obtidas do processo.

O STR ou controle adaptativo auto-sintonizável, consiste na idéia de separar a *estimação do sistema de controle*. Também existe um modelo de referência mas este está apenas implícito no projeto, isto é, ele cede seus pólos e zeros para o processo com a finalidade de dar o desempenho desejado à resposta. Seu diagrama de blocos encontra-se na Figura 1.3, onde o bloco chamado “Adaptação” representa a solução “on-line” dos parâmetros do controlador e a parte em azul representa a estratégia de adaptação.

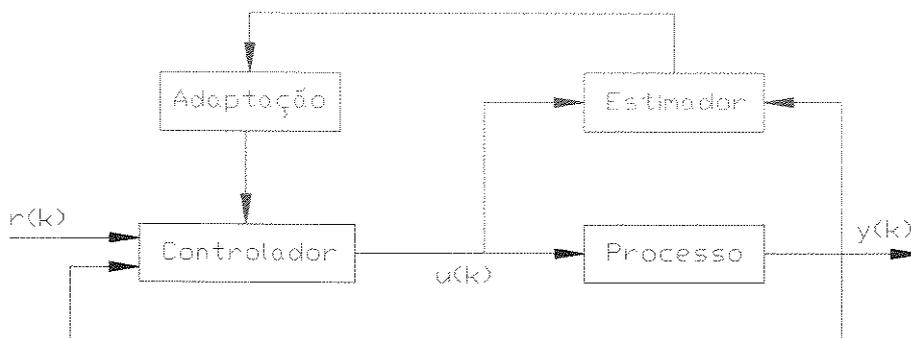


Figura 1.3 : Controle adaptativo auto-sintonizado indireto (STR)

Como no MRAC, o STR também se divide em duas categorias: no STR direto os parâmetros do controlador são estimados diretamente e a lei de controle pode ser utilizada sem o conhecimento dos parâmetros do processo. Já no STR indireto os parâmetros da planta são estimados diretamente e os parâmetros do controlador são calculados com base nas estimativas obtidas do processo.

1.2 Controle Adaptativo Auto-Sintonizado

O controle adaptativo auto-sintonizado originou-se do trabalho publicado por Aström e Wittenmark (1973), onde foi proposto controlar um sistema com parâmetros constantes mas desconhecidos. A idéia central foi que se as estimativas convergiam então era de se esperar que a lei de controle deveria tender para aquela calculada com base no conhecimento da planta. A estimação foi realizada pelo “Método dos Mínimos Quadrados Ordinário Recursivo” e o controlador foi do tipo “Variância Mínima”.

Vários testes foram realizados, todos em tempo discreto com processos do tipo SISO (“Single Input Single Output”) e entrada estocástica. A lei de controle era simples, isto é, não necessitava de cálculo para computar os parâmetros do controlador e sim bastava substituir os valores do numerador e do denominador do sistema estimado. (Variância Mínima)

Em outro trabalho fundamental, também proposto por Aström e Wittenmark (1980), a idéia foi iniciar o sistema de controle com parâmetros de um sistema conhecido, substituí-los com as estimativas obtidas recursivamente e recalculá-los para cada iteração do processo (esquema idêntico ao descrito na Figura 1.3).

Neste novo método previa-se que o sistema seguisse uma referência desejada e a resposta do sistema seria especificada por um modelo de referência. Além disso os parâmetros do processo poderiam variar no tempo.

O controlador utilizado foi o “Controle Polinomial”, o qual também será utilizado neste trabalho e portanto será estudado mais detalhadamente no próximo capítulo. O cálculo dos parâmetros deste controlador é realizado a cada iteração do processo a partir das estimativas dos parâmetros da planta, as quais eram realizadas pelo “Método dos Mínimos Quadrados com Esquecimento Exponencial”, utilizado devido às características de variação dos parâmetros da planta.

Depois deste trabalho seguiu-se uma série de publicações propondo alterações no controlador e no estimador e várias análises dos sistemas adaptativos utilizando os estimadores dos Mínimos Quadrados.

Goodwin et al. (1981) estabeleceram a convergência global para uma classe de algoritmos de sistemas lineares estocásticos sujeitos a uma condição de estabilidade inversa. A análise foi feita para sistemas SISO e também para sistemas MIMO.

Goodwin e Sin (1981) estabeleceram a convergência local para sistemas discretos, lineares, determinísticos e invariantes no tempo. O controle adaptativo utilizado era um STR utilizando o “Controle Polinomial” como controlador e o “Método dos Mínimos Quadrados Ordinário” como estimador. O principal avanço foi que os sistemas analisados não previam que a planta fosse estável ou inversamente estável.

Fortescue et al. (1981) aperfeiçoou o algoritmo proposto por Aström e Wittenmark (1980). Ele modificou o fator de esquecimento para ser variante no tempo, utilizando um controlador de variância mínima. Este trabalho é completado por Cordero e Mayne (1981), estabelecendo a convergência do algoritmo proposto por Fortescue et al. (1981), só que para plantas determinísticas.

Goodwin et al. (1983) e Goodwin e Teoh (1984) estabelecem a convergência do controle adaptativo auto-sintonizado utilizando o método dos mínimos quadrados com “reinicialização” da matriz de covariância aplicado a plantas determinísticas.

Moore (1983) provou a necessidade da persistência da excitação para o “Método dos Mínimos Quadrados Estendidos” aplicado na identificação de sistemas.

Guo e Chen (1991) provaram a convergência do controle adaptativo auto-sintonizado proposto por Aström e Wittenmark (1973) e estendeu suas definições para o caso estocástico com um modelo ARMAX utilizando como estimador o “Método dos Mínimos Quadrados Estendidos”.

1.3 Objetivos

O objetivo central deste trabalho é o estudo de alguns métodos de estimação recursiva de parâmetros aplicados ao controle adaptativo auto-sintonizado.

O controlador escolhido para trabalhar no controle adaptativo é o *Controlador Polinomial* e seu equacionamento será apresentado na seção 2.1 onde serão apresentadas as necessidades para sua implementação e as dificuldades de solução da equação característica do controlador.

Os estimadores aplicados pertencem à família dos Mínimos Quadrados Recursivo, sendo que na seção 2.2 será apresentado o equacionamento geral do método e na seção 2.2.6 serão mostradas as características esperadas dos métodos estudados desta família.

Os métodos de estimação de parâmetros aqui estudados são:

- Método dos Mínimos Quadrados Ordinário;
- Método dos Mínimos Quadrados com Esquecimento Exponencial;
- Método dos Mínimos Quadrados com Reinicialização da Matriz de Covariância.

Para ressaltar os aspectos teóricos e práticos dos métodos de estimação abordados, o controle adaptativo auto-sintonizado será aplicado em três sistemas diferentes apresentados no capítulo 3.

No primeiro sistema será verificada a convergência dos métodos de estimação de parâmetros em uma planta com parâmetros invariantes no tempo. No segundo sistema será aplicado o controle adaptativo auto-sintonizado em uma planta com parâmetros variantes no tempo e com diferentes tipos de excitação. No terceiro exemplo será realizada a estimação dos parâmetros de uma planta experimental.

Na seção 3.1 será mostrado o exemplo de controle acústico em uma sala, apresentando as propriedades de implementação do método de controle polinomial, do método de estimação de parâmetros e do controle adaptativo auto-sintonizado. Este exemplo será utilizado para verificar e comparar os métodos de estimação de parâmetros.

Na seção 3.2 será mostrado o equacionamento de uma suspensão ativa com massa variante no tempo. Ela será simulada com dois tipos de variação de massa e sujeita a três tipos de entrada (degrau, determinística periódica e estocástica).

Na seção 3.3 será mostrado o equacionamento de um motor de corrente contínua utilizado para a estimação experimental dos seus parâmetros.

No capítulo 4 serão mostrados os resultados obtidos com os métodos de estimação de parâmetros e do controle adaptativo.

Na seção 4.1 serão apresentados os resultados da comparação dos métodos de estimação de parâmetros, bem como do controle adaptativo auto-sintonizado, utilizando cada um dos métodos de estimação.

Na seção 4.2 será aplicado o controle adaptativo auto-sintonizado com uma junção dos três métodos de estimação de parâmetros, e será verificado o comportamento do controle adaptativo auto-sintonizado na presença de variação de parâmetros e sujeito a diferentes níveis de excitação.

Na seção 4.3 será aplicado um dos métodos de estimação de parâmetros nos dados experimentais do motor de corrente contínua.

No capítulo 5 serão analisados os resultados obtidos no capítulo 4.

Alguns aspectos matemáticos referentes aos métodos utilizados foram ressaltados por conveniência nos dois apêndices adicionados ao texto. Basicamente, o mapeamento de pólos e zeros discretos e a descrição espectral da entrada estocástica utilizada nas simulações.

Capítulo 2

Métodos para o Controle Adaptativo

Neste capítulo serão mostradas as bases do controle adaptativo auto-sintonizado indireto. Na seção 2.1 será feito o equacionamento do controlador, na seção 2.2 será feito o equacionamento do estimador e na seção 2.3 será mostrado como unir as duas teorias para formar o controle adaptativo auto-sintonizado.

2.1 Controle Polinomial

Nesta seção será mostrado o equacionamento do controlador polinomial que será utilizado no controle adaptativo. Para a aplicação do método é necessário o conhecimento dos zeros *instáveis* ou de *baixa robustez* da planta e como identificá-los no plano discreto (tratado com mais detalhes no Apêndice A). É também necessária a especificação de um modelo de referência para determinar o tipo de resposta desejada para a planta (tratado com mais detalhes no Apêndice B). Também será mostrado como resolver a equação Diophantina gerada pela lei de controle.

2.1.1 Planta

Adota-se para a planta ou processo a equação

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) \quad (2.1)$$

onde $u(k)$ e $y(k)$ representam respectivamente a entrada e a saída da planta discreta e $A(q)$ e $B(q)$ são polinômios no operador atraso unitário q .

Outra forma de escrever a equação (2.1) é no domínio da frequência, isto é, na *Transformada Z*, então

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2.2)$$

Na forma da equação (2.2) $B(z)$ e $A(z)$ representam respectivamente o numerador e o denominador da função de transferência discreta da planta.

Neste trabalho todos os polinômios e os sinais de entrada e saída serão tratados na forma discreta e frequentemente seus domínios serão suprimidos para a melhor visualização das equações.

Para a aplicação do método, que será descrito posteriormente, a planta representando o sistema deverá ter algumas características especiais:

- *A e B devem ser primos entre si. Caso isso não ocorra; deverá ser efetuado o cancelamento dos pólos com os respectivos zeros. Esta implicação tem resultado direto na determinação da lei de controle, o que será relatado posteriormente.*

- *A função de transferência deve ser própria ou seja,*

$$\text{grau}(A) \geq \text{grau}(B) \quad (2.3)$$

- *O denominador A deverá ser mônico, isto é, o coeficiente referente ao termo de maior grau deverá ser a unidade. Caso isto não ocorra, a equação (2.1) ou (2.2) deverá ser dividida por este coeficiente.*

2.1.2 Modelo de Referência

Em se tratando de controle adaptativo auto-sintonizável, não aparece claramente o modelo de referência, mas este está implícito na formulação do método. Então, o termo mais cabível aqui não é exatamente modelo de referência, e sim a determinação dos pólos e zeros que a planta controlada deverá apresentar.

O modelo de referência cederá seus pólos e zeros à planta e portanto este modelo deverá ser tal que descreva as especificações desejadas para o sistema, tais como resposta rápida, baixo sobressinal e estabilidade. Adota-se a seguinte equação para o modelo de referência

$$A_m(q)y_m(k) = B_m(q)r(k) \quad (2.4)$$

onde A_m representa o denominador, B_m o numerador, $y_m(k)$ a resposta do modelo, e $r(k)$ a entrada de referência que a planta deverá seguir.

Da mesma forma que a planta, o modelo de referência também deverá possuir algumas características especiais:

- A_m e B_m devem ser primos entre si;
- A_m deve ser mônico;
- O grau relativo (diferença entre o grau do denominador e o grau do numerador) do modelo deve ser maior ou igual ao grau relativo da planta. Então

$$\text{grau}A_m - \text{grau}B_m \geq \text{grau}A - \text{grau}B \quad (2.5)$$

Esta última característica deve ser seguida para que a lei de controle seja causal ou simplesmente constitua uma fração própria. A prova da necessidade do grau relativo será apresentada posteriormente.

2.1.3 Posição de Pólos e Zeros

De acordo com Ogata (1995), pólos instáveis de sistemas discretos são aqueles posicionados fora do círculo de raio unitário no plano discreto. Mas para os zeros a palavra instável não é cabível, isto porque não existem zeros instáveis ou estáveis. Para a classificação dos zeros como instáveis, leva-se em conta que na função de transferência de malha fechada, pelo método de controle polinomial, os zeros da planta tornam-se pólos do controlador, como será descrito posteriormente.

Assim, o primeiro tipo de zeros encontrado é aquele que posiciona-se fora do círculo de raio unitário. Este tipo trará claramente instabilidade à malha.

O segundo tipo de zeros são aqueles posicionados dentro do círculo de raio unitário mas próximo ao módulo 1 (ver apêndice A para definir esta localização). De acordo com Aström e Wittenmark (1989 e 1997), ele é mencionado como zero pouco amortecido, representando assim uma malha de pouca robustez ocasionando oscilação no sinal de controle.

O terceiro tipo representa os zeros estáveis e bem amortecidos; eles não apresentam instabilidade à função de transferência de malha fechada e asseguram boa robustez.

Devido aos três tipos de zeros mencionados acima, para um dado problema de controle, deve-se definir uma região no plano complexo na qual os zeros são estáveis e bem amortecidos. A Figura 2.1 ilustra tal região.

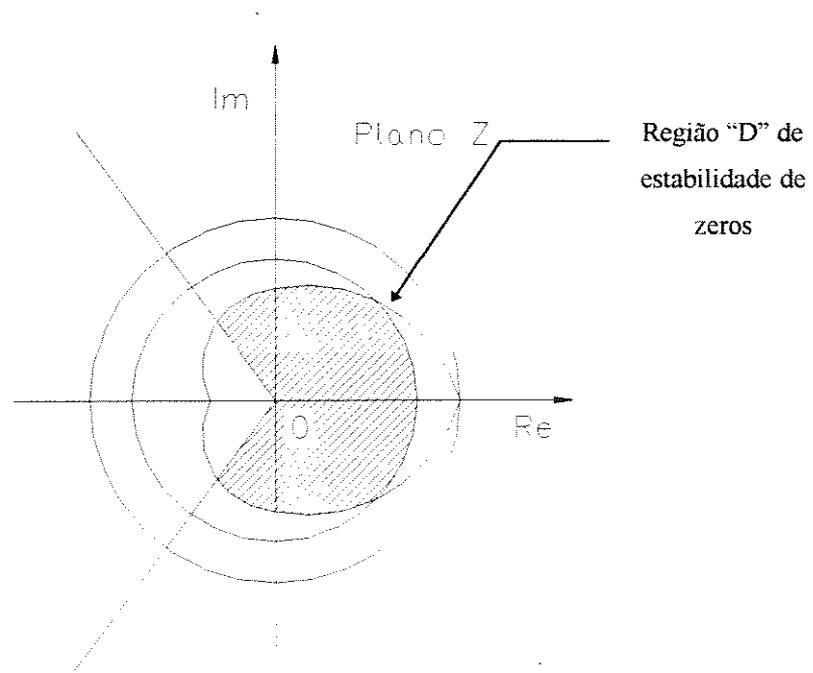


Figura 2.1: Região de estabilidade de zeros

Como definir esta região pode ser encontrado com mais detalhes no Apêndice A.

Um dado importante é que esta região varia de planta para planta, por isso não é possível especificar qual a região de estabilidade a priori.

A classificação dos zeros é o primeiro passo no projeto do controlador.

2.1.4 Controlador Polinomial

O método de controle polinomial tem a capacidade de definir arbitrariamente os pólos e zeros desejados para um determinado sistema. Sua equação é definida por

$$R(q)u(k) = T(q)r(k) - S(q)y(k) \quad (2.6)$$

onde $u(k)$ representa o sinal de controle, $r(k)$ o sinal de referência, $y(k)$ a saída da planta e R , S e T são polinômios no operador q . Devido aos polinômios presentes na sua equação, ele recebe também o nome de método RST [Shahian e Hassul (1993)].

O diagrama de blocos do controlador polinomial é dado na Figura 2.2

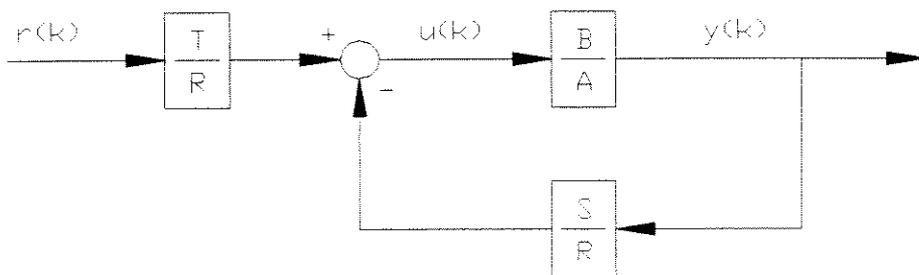


Figura 2.2 : Diagrama de blocos do controlador polinomial

Na Figura 2.2 os polinômios A e B são respectivamente o denominador e o numerador da planta como definido na seção 2.1.1. Observa-se ainda que o controlador é composto por duas partes: a primeira, em realimentação (“Feedback”) composta por $S(z)/R(z)$, possibilitando que a resposta $y(k)$ tenda para zero (resposta estável); a segunda parte, em antecipação (“Feedforward”) composta por $T(z)/R(z)$, possibilitando que a resposta $y(k)$ tenda para a entrada de referência $r(k)$.

2.1.5 Solução do Controlador

Para iniciar o procedimento de resolução do controlador, deve-se calcular a função de transferência de malha fechada da Figura 2.2 entre $y(k)$ e $r(k)$, ou simplesmente substituindo $u(k)$ de (2.6) em (2.1) e aplicando a transformada Z , chegando a

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + S(z)B(z)} \quad (2.7)$$

Como mencionado na seção 2.1.2, a equação (2.7) deve ter os mesmos pólos e zeros do modelo de referência (2.4), então

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \quad (2.8)$$

Para possibilitar que (2.8) seja verdade, há a necessidade de promover o cancelamento dos zeros da planta, isto é, as raízes de B . Para que isto aconteça necessariamente os fatores de B devem estar no denominador da função de transferência de malha fechada. Mas como dito na seção 2.1.3, se os zeros forem instáveis ou pouco amortecidos, isto ocasionará instabilidade ou falta de robustez. Portanto apenas os zeros bem amortecidos podem ser cancelados e os zeros instáveis ou pouco amortecidos ainda devem continuar no numerador da função de transferência de malha. Para que isso ocorra deve-se fatorar B tal que

$$B = B^+ B^- \quad (2.9)$$

onde B^+ contém os zeros estáveis e B^- os zeros instáveis ou pouco amortecidos. Para que a fatoração seja única, B^+ deve ser mônico.

Para que os zeros instáveis ainda continuem no numerador, B^- deve necessariamente ser um fator de B_m , então

$$B_m = B^- B'_m \quad (2.10)$$

Para efeito de simplificação, observa-se que se B^+ for um fator de R , então R será definido como

$$R = B^+ R_1 \quad (2.11)$$

Substituindo as equações (2.9), (2.10) e (2.11) na equação (2.8), chega-se a

$$\frac{B^+ B^- T}{AB^+ R_1 + B^+ B^- S} = \frac{B^- B'_m}{A_m}$$

Procedendo com a simplificação, obtém-se

$$\frac{T}{AR_1 + B^- S} = \frac{B'_m}{A_m} \quad (2.12)$$

De acordo com Aström e Wittenmark (1989 e 1997) e Ogata (1995), para que o sistema (2.12) permita solução, o *grau*(A_m) deve ser suficientemente alto. Caso isso não ocorra, deve-se adicionar um polinômio A_0 estável e mônico ao modelo de referência. Então a equação (2.12) torna-se

$$\frac{T}{AR_l + B^- S} = \frac{A_0 B_m}{A_0 A_m} \quad (2.13)$$

De acordo com o procedimento descrito, observa-se que o denominador da equação (2.8), isto é, $AR + BS$, deve possuir três fatores: os zeros estáveis de B (isto é B^-) o polinômio A_0 e os pólos de A_m . Então

$$AR + BS = B^+ A_0 A_m \quad (2.14)$$

ou dividindo por B^+ , encontra-se

$$AR_l + B^- S = A_0 A_m \quad (2.15)$$

que representa o denominador da equação (2.13).

A equação (2.14) e a equação (2.15) fazem parte de uma classe de equações conhecida como “Equação Diophantina” e, para encontrar os polinômios R e S , ela deverá ser resolvida. As duas formas da equação Diophantina serão utilizadas: a forma (2.14) é útil para determinar os graus dos polinômios A_0 , R e S ; já a forma (2.15) será útil para resolver a equação Diophantina e encontrar os termos de R_l e S , resolvendo assim o denominador da equação (2.13).

Para encontrar o polinômio T , igualam-se os numeradores de (2.13), encontrando

$$T = A_0 B_m \quad (2.16)$$

Para a equação (2.14) ter uma solução fácil de ser encontrada, deve-se acrescentar algumas restrições. A primeira é que a lei de controle seja causal ou constitua uma função própria. Observando o diagrama de blocos da Figura 2.2, a lei de controle é causal se e somente se o termo em antecipação e o termo em realimentação também o forem, portanto

$$\text{grau}(S) \leq \text{grau}(R) \quad (2.17)$$

e

$$\text{grau}(T) \leq \text{grau}(R) \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \text{grau}(A) &\geq \text{grau}(B) \\ \text{grau}(R) &\geq \text{grau}(S) \end{aligned}$$

Devido às condições acima, no máximo o $\text{grau}(BS)$ deve ser igual ao $\text{grau}(AR)$, portanto

$$\text{grau}(AR) \geq \text{grau}(BS)$$

implicando que

$$\text{grau}(AR + BS) = \text{grau}(AR) = \text{grau}(B^+ A_0 A_m) \quad (2.22)$$

Depois de especificado o $\text{grau}(A_0)$ como primeiro passo do projeto, então o $\text{grau}(R)$ está automaticamente determinado devido à equação (2.22), já que depois de determinado o $\text{grau}(A_0)$ o grau do lado direito da equação (2.22) estará estabelecido e por simples igualdade de termos o grau do lado esquerdo também o está, retirando-se assim o $\text{grau}(R)$.

Mas para provar que a condição (2.20) deve ser cumprida para que o sistema tenha solução única, inverte-se o procedimento descrito no parágrafo anterior, isto é, estabelecido o $\text{grau}(R)$, encontra-se o $\text{grau}(A_0)$ para que o sistema tenha solução, e isto é feito também por simples igualdade polinomial.

Então, admitem-se os graus para os polinômios A, B, R, S e A_0 conforme apresentados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 : Graus dos polinômios do controlador polinomial

Polinômio	grau	número de termos
A	n	n + 1
B	m	m + 1
R	r	r + 1
S	s	s + 1
$B^+ A_0 A_m$	n + r	n + r + 1

Na equação (2.14) o número de incógnitas é expressa pelo número de termos de R e S , existindo assim $s + r + 2$ incógnitas; o número de equações é expressa pelo número de termos de $B^+ A_0 A_m$, existindo assim $n + r + 1$ equações. Estas afirmações são derivadas diretamente da equação (2.14) e da Tabela 2.1.

Uma vez especificado o $\text{grau}(R)$, basta especificar o $\text{grau}(S)$ para terminar a escolha dos polinômios do controlador.

Então variando os graus de R e S e verificando qual escolha que fornece um sistema de solução não única, procede-se da seguinte forma:

Caso 1 : $\text{grau}(R) < \text{grau}(B)$ ou $r = m - 1$.

Dentro deste caso podem ser encontradas duas hipóteses,

Hipótese 1: $\text{grau}(S) < \text{grau}(A)$ ou $s = n - 1$,

$$\begin{aligned} \text{Então, } \quad \text{grau}(AR) &= n + m - 1 \\ \text{grau}(BS) &= m + n - 1 \\ \text{grau}(R) &= m - 1 \\ \text{grau}(S) &= n - 1 \\ \text{grau}(B^+ A_0 A_m) &= n + m - 1 \end{aligned}$$

Gerando assim um sistema de $n + m$ equações com $n + m$ incógnitas, sendo portanto um sistema de solução única.

Hipótese 2 : $\text{grau}(S) \geq \text{grau}(A)$ ou $s = n$,

$$\begin{aligned} \text{Então, } \quad \text{grau}(AR) &= n + m - 1 \\ \text{grau}(BS) &= m + n \\ \text{grau}(R) &= m - 1 \\ \text{grau}(S) &= n \\ \text{grau}(B^+ A_0 A_m) &= n + m \end{aligned}$$

Gerando assim um sistema de $n + m + 1$ equações com $n + m + 1$ incógnitas, sendo portanto também um sistema de solução única.

Caso 2 : $\text{grau}(R) \geq \text{grau}(B)$ ou $r = m$.

Dentro deste caso podem ser encontradas duas hipóteses,

Hipótese 1: $\text{grau}(S) < \text{grau}(A)$ ou $s = n - 1$,

Então, $\text{grau}(AR) = n + m$

$$\text{grau}(BS) = m + n - 1$$

$$\text{grau}(R) = m$$

$$\text{grau}(S) = n - 1$$

$$\text{grau}(B^+ A_0 A_m) = n + m$$

Gerando assim um sistema de $n + m + 1$ equações com $n + m + 1$ incógnitas, sendo portanto também um sistema de solução única.

Hipótese 2: $\text{grau}(S) \geq \text{grau}(A)$ ou $s = n$,

Então, $\text{grau}(AR) = n + m$

$$\text{grau}(BS) = m + n$$

$$\text{grau}(R) = m$$

$$\text{grau}(S) = n$$

$$\text{grau}(B^+ A_0 A_m) = n + m$$

Gerando assim um sistema de $n + m + 1$ equações com $n + m + 2$ incógnitas, sendo portanto um sistema de solução não única.

Como observado, a única hipótese formulada com solução não única foi a segunda hipótese do caso 2, isto é, $\text{grau}(R) \geq \text{grau}(B)$ e $\text{grau}(S) \geq \text{grau}(A)$, provando assim a afirmação (2.20).

2.1.5.2 Prova da Causalidade do Controlador

Uma vez provada a condição de solução única, pode-se agora provar que a lei de controle

$$Ru = Tr - Sy \tag{2.6}$$

é causal ou simplesmente constitui uma fração própria se

$$\text{grau}(A_m) - \text{grau}(B_m) \geq \text{grau}(A) - \text{grau}(B) \tag{2.5}$$

e

$$\text{grau}(A_0) \geq 2 \text{grau}(A) - \text{grau}(A_m) - \text{grau}(B^+) - 1 \tag{2.19}$$

forem satisfeitas.

Para demonstrar a afirmação acima, parte-se da equação (2.22), isto é

$$\text{grau}(AR + BS) = \text{grau}(AR) = \text{grau}(B^+ A_0 A_m)$$

como $\text{grau}(AR) = \text{grau}(A) + \text{grau}(R)$, então

$$\text{grau}(R) = \text{grau}(A_0) + \text{grau}(A_m) + \text{grau}(B^-) - \text{grau}(A) \quad (2.23)$$

Aplicando o mesmo princípio com a equação (2.16) os graus ficam

$$\text{grau}(T) = \text{grau}(A_0 B_m) = \text{grau}(A_0) + \text{grau}(B_m) \quad (2.24)$$

e devido a equação (2.18) o $\text{grau}(R) \geq \text{grau}(T)$, então substituindo na equação (2.24), encontra-se

$$\text{grau}(R) \geq \text{grau}(A_0 B_m) = \text{grau}(A_0) + \text{grau}(B_m)$$

Substituindo (2.23) na equação acima, chega-se a

$$\text{grau}(A_0) + \text{grau}(A_m) + \text{grau}(B^+) - \text{grau}(A) \geq \text{grau}(A_0) + \text{grau}(B_m)$$

Simplificando e rearranjando a inequação acima encontra-se

$$\text{grau}(A_m) - \text{grau}(B_m) \geq \text{grau}(A) - \text{grau}(B^+) \quad (2.25)$$

Como $\text{grau}(B_m) = \text{grau}(B^-) + \text{grau}(B_m)$ e o $\text{grau}(B) = \text{grau}(B^+) + \text{grau}(B^-)$, então subtraindo o $\text{grau}(B^-)$ de ambos os lados de (2.25) encontra-se

$$\text{grau}(A_m) - \text{grau}(B_m) \geq \text{grau}(A) - \text{grau}(B)$$

Provando assim a condição (2.5).

Da prova de solução única da equação Diophantina, existe solução única para (2.14) se

$$\text{grau}(S) < \text{grau}(A)$$

ou

$$\text{grau}(R) < \text{grau}(B)$$

Como mencionado anteriormente, o $\text{grau}(R)$ deve ser escolhido antes do $\text{grau}(S)$, portanto se $\text{grau}(S)$ for sempre menor que o $\text{grau}(A)$, o sistema sempre terá solução única. Desta forma pode-se escolher o $\text{grau}(S)$ sendo

$$\text{grau}(S) = \text{grau}(A) - 1$$

e utilizando o fato que $\text{grau}(R) \geq \text{grau}(S)$, então

$$\text{grau}(R) \geq \text{grau}(A) - 1$$

substituindo na equação (2.23), encontra-se

$$\text{grau}(A_0) - \text{grau}(A_m) + \text{grau}(B^+) - \text{grau}(A) \geq \text{grau}(A) - 1$$

Rearranjando os termos, chega-se a

$$\text{grau}(A_0) \geq 2\text{grau}(A) - \text{grau}(A_m) - \text{grau}(B^+) - 1$$

Provando assim a condição (2.19).

2.1.5.3 Solução Geral da Equação Diophantina

O método para encontrar a solução da equação Diophantina pode ser encontrado em Barnett (1983), Middleton e Goodwin (1990), Ogata (1995) e Aström e Wittenmark (1989 e 1997).

Como mencionado anteriormente, para encontrar os polinômios R e S , considera-se a equação Diophantina na forma da equação (2.15), isto é

$$AR_1 + B^-S = D$$

onde D representa o polinômio gerado pela multiplicação de A_0A_m

Para resolver a equação Diophantina acima, é necessário realizar a multiplicação polinomial. Então, considerando os graus dos polinômios dados na Tabela 2.1

$$\begin{aligned} A &= z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n \\ B^- &= b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_{m-1}z + b_m \\ R_1 &= r_0z^r + r_1z^{r-1} + \dots + r_{r-1}z + r_r \\ S &= s_0z^s + s_1z^{s-1} + \dots + s_{s-1}z + s_s \\ D &= d_0z^d + d_1z^{d-1} + \dots + d_{d-1}z + d_d \end{aligned}$$

Realizada a multiplicação, escreve-se o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 a_1 & 1 & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & a_1 & \dots & 0 & \vdots & b_0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_n & a_{n-1} & \dots & 1 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 \\
 0 & a_n & \dots & a_1 & 0 & b_m & \dots & b_1 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & b_{m-1} \\
 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & b_m
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 r_0 \\
 r_1 \\
 \vdots \\
 r_{r-1} \\
 r_r \\
 s_0 \\
 s_1 \\
 \vdots \\
 s_{s-1} \\
 s_s
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 d_0 \\
 d_1 \\
 \vdots \\
 d_{i-1} \\
 d_i \\
 d_{i-1} \\
 d_{i+2} \\
 \vdots \\
 d_{d-1} \\
 d_d
 \end{bmatrix}
 \quad (2.26)$$

A matriz dos coeficientes de A e B ; conhecida como matriz de *Silvester*, tem a propriedade de posto (“rank”) completo se e apenas se os polinômios A e B forem primos entre si.

Como pode ser observado no sistema linear (2.26), se D for mônico, R também o será. A matriz de Silvester não é única, isto é, outras configurações podem ser encontradas dependendo da escolha dos graus de B , A_0 , R e S .

O sistema (2.26) pode ser resolvido por qualquer método de solução de sistemas de equações lineares [Middleton e Goodwin (1990); Ogata (1995)].

2.1.5.4 Controlador com Ação Integral

A ação integral no controle polinomial é empregada para minimizar os efeitos de distúrbios em baixa frequência. Para utilizar o efeito integral no controle polinomial, de acordo com Aström e Wittenmark (1989 e 1997), considera-se o ganho de malha da Figura 2.2, isto é

$$H(z) = \frac{SB}{RA}(z)$$

É interessante atribuir pólos em $z = 1$ no polinômio R , sendo que cada pólo em 1 no plano discreto representa no plano complexo pólos em zero, caracterizando assim a ação

integral. Ela causará uma maior atenuação em baixas frequências para o controlador polinomial. Para tanto, admite-se que o polinômio R tenha $(z - 1)^d$ como um de seus fatores.

Para uma ação integral simples, o expoente d é escolhido como 1. Introduzindo a ação integral no polinômio R , obtêm-se

$$R = (z - 1)^d B^+ R_f \quad (2.27)$$

e a equação Diophantina a ser resolvida torna-se

$$A(z - 1)^d R_f + B^- S = D$$

Uma solução considerando $d = 1$ pode ser encontrada através do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 - 1 & 1 & \cdots & 0 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ a_2 - a_1 & a_1 - 1 & \cdots & 0 & \vdots & b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_2 - a_1 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - a_{n-1} & a_{n-1} - a_{n-2} & \cdots & 1 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 \\ -a_n & a_n - a_{n-1} & \cdots & a_2 - a_1 & 0 & b_m & \cdots & b_1 \\ \vdots & -a_n & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & a_n - a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & b_{m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_n & 0 & 0 & \cdots & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{f-1} \\ r_f \\ s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{g-1} \\ s_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{i-1} \\ d_i \\ d_{i+1} \\ d_{i+2} \\ \vdots \\ d_{d-1} \\ d_d \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

2.1.5.5 Conclusão da Solução da Equação Diophantina

Como mostrado acima, existem várias formas para a solução da equação Diophantina, todas elas dependendo da escolha dos polinômios R , S e A_0 . Mas, como mencionado anteriormente, para existir solução basta que A e B sejam primos entre si e

$$\text{grau}(A) \geq \text{grau}(B)$$

que A_0 seja um polinômio estável e que

$$\text{grau}(A_0) \geq 2 \text{grau}(A) - \text{grau}(A_0) - \text{grau}(B^+) - 1$$

Sempre que estas proposições forem satisfeitas a solução existirá. Ela será sempre única

se

$$\text{grau}(S) < \text{grau}(A)$$

Quanto à escolha de R , S e A_0 , ela dependerá do desempenho desejado, o qual é expresso pela escolha do modelo de referência e pela presença do efeito integral.

2.1.6 Resumo do Método

Nesta seção será mostrado um resumo do método do controlador polinomial.

Primeiro Passo : Verificar a existência de zeros instáveis ou que geram baixa robustez na função de transferência de malha fechada definida na equação (2.8). Deve-se fatorar B tal que

$$B = B^+ B^- \quad (2.9)$$

onde B^- engloba estes zeros.

Segundo Passo : Determinar o modelo de referência tal que

$$\text{grau}(A_m) - \text{grau}(B_m) \geq \text{grau}(A) - \text{grau}(B) \quad (2.5)$$

e

$$B_m = B^- B_m^+ \quad (2.10)$$

Terceiro Passo : Determinar o polinômio A_0 , tal que seja estável e obedeça à seguinte configuração

$$\text{grau}(A_0) \geq 2 \text{grau}(A) - \text{grau}(A_m) - \text{grau}(B^+) - 1 \quad (2.19)$$

Quarto Passo : Resolver a seguinte equação Diophantina

$$AR + BS = B^+ A_0 A_m \quad (2.14)$$

Lembrando que $B = B^+ B^-$ e $R = B^+ R_1$, então a equação (2.14) pode ser escrita como

$$AB^+ R_1 + B^+ B^- S = B^+ A_0 A_m$$

Simplificando, encontra-se

$$AR_1 + B^- S = A_0 A_m \quad (2.15)$$

sem ação integral e

$$A(z-1)^d R_1 + B^- S = A_0 A_m \quad (2.29)$$

com ação integral.

Os graus devem ser escolhidos tal que

$$\text{grau}(R_1) = \text{grau}(A_0) + \text{grau}(A_m) - \text{grau}(A) - (\text{grau}(z-1))^d$$

$$\text{grau}(S) < \text{grau}(A) + (\text{grau}(z-1))^d$$

Para facilitar a resolução, procuram-se os graus que proporcionam n equações com n incógnitas.

Quinto Passo : Calcular R e T , tal que

$$R = B^+ (z-1)^d R_1 \quad (2.27)$$

$$T = A_0 B_m^+ \quad (2.16)$$

2.1.7 Função de Transferência de Malha Fechada na Presença de Perturbação

Nesta seção será considerada a função de transferência de malha fechada na presença de perturbação. O diagrama de blocos do controle polinomial com perturbação pode ser representado pela Figura 2.3, onde $v(k)$ representa a perturbação do sinal de controle e $e(k)$ representa a perturbação da resposta $y(k)$.

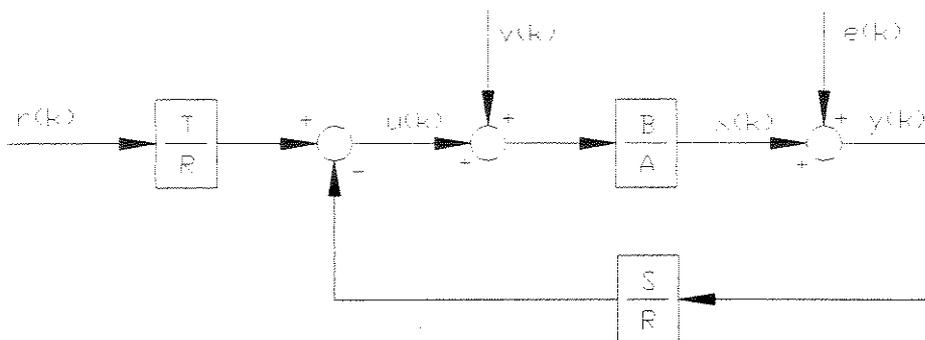


Figura 2.3: Controlador polinomial com distúrbios de entrada e erros de medida

As principais equações do sistema descrito na Figura 2.3 são:

$$Ax(k) = B(u(k) + v(k)) \quad (2.30)$$

$$y(k) = x(k) + e(k) \quad (2.31)$$

$$Ru(k) = Tr(k) - Sy(k) \quad (2.32)$$

Para encontrar as equações da função de transferência de malha fechada para os sinais $y(k)$, $x(k)$ e $u(k)$, procede-se da seguinte forma:

Isolando $y(k)$ da equação (2.32) e substituindo na equação (2.31), encontra-se

$$x(k) = \frac{T}{S} r(k) - \frac{R}{S} u(k) - e(k) \quad (2.33)$$

Isolando $u(k)$ da equação (2.30) e substituindo na equação(2.33), encontra-se

$$x(k) = \frac{T}{S} r(k) - \frac{RA}{SB} x(k) + \frac{R}{S} v(k) - e(k)$$

Isolando $x(k)$, chega-se a

$$x(k) = \frac{BT}{AR + BS} r(k) + \frac{BR}{AR + BS} v(k) - \frac{BS}{AR + BS} e(k) \quad (2.34)$$

Substituindo $x(k)$ da equação(2.31) na equação (2.34), encontra-se

$$y(k) - e(k) = \frac{BT}{AR + BS} r(k) + \frac{BR}{AR + BS} v(k) - \frac{BS}{AR + BS} e(k)$$

Isolando $y(k)$, chega-se a

$$y(k) = \frac{BT}{AR + BS} r(k) + \frac{BR}{AR + BS} v(k) + \frac{AR}{AR + BS} e(k) \quad (2.35)$$

Isolando $x(k)$ da equação (2.30) e substituindo na equação (2.34) encontra-se

$$\frac{B}{A} u(k) + \frac{B}{A} v(k) = \frac{BT}{AR + BS} r(k) + \frac{BR}{AR + BS} v(k) - \frac{BS}{AR + BS} e(k)$$

Isolando $u(k)$, chega-se a

$$u(k) = \frac{AT}{AR + BS} r(k) - \frac{BS}{AR + BS} v(k) - \frac{AS}{AR + BS} e(k) \quad (2.36)$$

Resumindo:

$$x(k) = \frac{BT}{AR + BS} r(k) + \frac{BR}{AR + BS} v(k) - \frac{BS}{AR + BS} e(k) \quad (2.34)$$

$$y(k) = \frac{BT}{AR + BS} r(k) + \frac{BR}{AR + BS} v(k) + \frac{AR}{AR + BS} e(k) \quad (2.35)$$

$$u(k) = \frac{AT}{AR + BS} r(k) - \frac{BS}{AR + BS} v(k) - \frac{AS}{AR + BS} e(k) \quad (2.36)$$

Um ponto comum nas equações acima é que todas têm o mesmo polinômio característico $AR + BS$. Portanto, após resolver a equação Diophantina todos os denominadores terão os fatores de A_m , A_0 e B^+ .

Como mencionado acima, $AR + BS$ representa A_m , A_0 e B^+ . Da mesma forma, B , R e B_m também têm os fatores de B^+ e os fatores de B^- . Então pode-se efetuar simplificações nas equações (2.34), (2.35) e (2.36) e verificar quais são os termos presentes nas equações (2.34), (2.35) e (2.36). Para tanto deve-se substituir

$$AR + BS = B^+ A_0 A_m$$

$$B = B^+ B^-$$

$$R = B^+ R_1$$

$$B_m = B^- B_m^*$$

Substituindo nas equações (2.34), (2.35) e (2.36) encontra-se

$$x(k) = \frac{B_m^*}{A_m} r(k) + \frac{BR_1}{A_0 A_m} v(k) - \frac{B^- S}{A_0 A_m} e(k) \quad (2.37)$$

$$y(k) = \frac{B_m^*}{A_m} r(k) + \frac{BR_1}{A_0 A_m} v(k) - \frac{AR_1}{A_0 A_m} e(k) \quad (2.38)$$

$$u(k) = \frac{AB_m^*}{B^+ A_m} r(k) - \frac{B^- S}{A_0 A_m} v(k) - \frac{AS}{B^+ A_0 A_m} e(k) \quad (2.39)$$

Nas equações (2.37), (2.38) e (2.39) observam-se os fatores que sobram na função de transferência de malha fechada.

Observa-se que, com a fatoração de $B = B^+ B^-$, na função de transferência de malha fechada B^- não aparece no denominador de nenhuma função de transferência.

2.2 Método dos Mínimos Quadrados

Nesta seção será mostrado o equacionamento do método dos Mínimos Quadrados de estimação de parâmetros. É necessário primeiro entender o conceito de parametrização tratado no item 2.2.1. Então pode-se entender os princípios básicos tratados no item 2.2.2. Inicialmente é apresentado o método convencional e posteriormente o método recursivo tratado no item 2.2.4.

2.2.1 Parametrização de Modelos

Para realizar a estimativa dos parâmetros de uma planta, a primeira necessidade é realizar a sua parametrização, ou seja, a separação dos sinais a serem tratados (entradas e saídas) dos elementos intrínsecos à planta. Esta parametrização deve ser tal que permita a identificação adequada para cada caso, isto é, dependendo do tipo de estimação desejada e das características da planta haverá uma parametrização a ser feita.

Serão estudadas plantas lineares SISO (“Single Input-Single Output”) ou MISO (“Multiple Input-Single Output”) com parâmetros variantes no tempo ou não. A principal necessidade dos modelos é que seja linear. Para modelos não lineares, a parametrização torna-se específica para cada caso.

A parametrização de plantas consiste em separar os coeficientes (ou parâmetros) dos sinais de entrada e de saída (ou regressores). Os parâmetros são representados pelo vetor θ e os regressores pelo vetor φ . Então, pode-se expressar um modelo genérico na forma

$$y = \varphi^T \theta \quad (2.40)$$

onde y representa a resposta, φ os sinais medidos e θ os parâmetros.

Observa-se que a equação (2.40) é um produto escalar entre o vetor dos regressores φ e o vetor dos parâmetros θ . Para computar este produto é necessário assim o conhecimento da entrada e da saída do modelo. Esta propriedade significa que, para o conhecimento dos parâmetros, não é necessário o conhecimento do estado interno da planta e sim apenas da entrada e saída de planta.

Para os modelos que serão apresentados adota-se a seguinte nomenclatura:

$e(k)$ representa um sinal de entrada estocástico;

$u(k)$ uma entrada determinística;

$y(k)$ o sinal de resposta do modelo.

Para problemas lineares alguns modelos são freqüentemente encontrados na literatura, [Aström e Wittenmark 1997; Ljung 1987]. O mais simples deles é aquele cuja resposta é formada apenas por um polinômio multiplicando a entrada, denominado de modelo MA (“Moving Average”) dado por

$$y(k) = Ce(k) \quad (2.41)$$

ou, escrevendo na forma estendida

$$y(k) = c_0e(k) + c_1e(k-1) + \dots + c_n e(k-p) \quad (2.42)$$

Sua parametrização resulta em

$$\begin{aligned} \varphi &= [e(k) \quad \dots \quad e(k-p)]^T \\ \theta &= [c_0 \quad \dots \quad c_p]^T \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde p representa o número de parâmetros do polinômio C , estando associado ao número de defasagens da entrada.

Outro modelo conhecido com AR (“autoregressivo”), tem sua resposta composta pela entrada atual somada com as respostas passadas, dado por

$$Ay(k) = c_0e(k) \quad (2.44)$$

ou, escrevendo na forma estendida

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = c_0e(k) \quad (2.45)$$

Sua parametrização resulta em

$$\begin{aligned} \varphi &= [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n) \quad e(k)]^T \\ \theta &= [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad c_0]^T \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde $n + 1$ representa o número de parâmetros do polinômio A .

A união dos dois modelos anteriores (AR e MA) resulta no modelo ARMA, dado por

$$Ay(k) = Ce(k) \quad (2.47)$$

ou, escrevendo na forma estendida

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = c_0 e(k) + c_1 e(k-1) + \dots + c_p e(k-p) \quad (2.48)$$

Sua parametrização resulta em

$$\begin{aligned} \varphi &= [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n) \quad e(k) \quad \dots \quad e(k-p)]^T \\ \theta &= [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad c_0 \quad \dots \quad c_p]^T \end{aligned} \quad (2.49)$$

Quando adicionado um sinal determinístico correlacionado ao modelo ARMA, resulta no modelo ARMAX, dado por

$$Ay(k) = Bu(k) + Ce(k) \quad (2.50)$$

ou, na forma estendida,

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = \\ b_1 u(k) + \dots + b_m u(k-m) + c_0 e(k) + c_1 e(k-1) + \dots + c_p e(k-p) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Sua parametrização resulta em

$$\begin{aligned} \varphi &= [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n) \quad u(k) \quad \dots \quad u(k-m) \quad e(k) \quad \dots \quad e(k-p)]^T \\ \theta &= [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad c_0 \quad \dots \quad c_p]^T \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde m representa o número de parâmetros do polinômio B .

Diversos outros modelos podem ser encontrados, [Ljung (1987)]. Para resumir, pode-se dizer que de uma forma geral os modelos são descritos com a seguinte equação

$$Ay(k) = \frac{B}{F} u(k) + \frac{C}{D} e(k) \quad (2.53)$$

Pode-se então montar a Tabela 2.2 onde resume-se a denominação recebida pela equação (2.53) de acordo com os polinômios presentes.

Tabela 2.2 : Modelos Polinomiais

Polinômios	Modelo
A	MA (Moving Average)
B	FIR (Finite impulse response)
C	AR (Autoregressivo)
A, B	ARX
A, C	ARMA
A, B, C	ARMAX
A, B, D	ARARX
A, B, C, D	ARARMAX
B, F	OE (output error)
B, F, C, D	BJ (Box-Jenkins)

A descrição acima varia para cada caso, podendo ser encontrado por exemplo um atraso na equação (2.53) da seguinte forma

$$A(q)y(k) = q^{-n} \frac{B(q)}{F(q)} u(k) + \frac{C(q)}{D(q)} e(k)$$

2.2.2 Princípio dos Mínimos Quadrados

Para apresentar o método dos mínimos quadrados, define-se inicialmente que a *resposta estimada* \hat{y} da planta é o produto escalar do *vetor conhecido* φ pelo *vetor dos parâmetros estimados* $\hat{\theta}$

$$\hat{y} = \varphi^T \hat{\theta} \quad (2.54)$$

Pode-se estabelecer o erro entre a resposta estimada e a resposta real como

$$\varepsilon = y - \hat{y} = y - \varphi^T \hat{\theta} \quad (2.55)$$

Definindo a equação (2.55) para cada iteração i , encontra-se

$$\varepsilon_i = y_i - \varphi_i^T \theta \quad (2.56)$$

Definido o erro entre a resposta real e a estimada, deve-se introduzir aqui uma função objetivo que permita a estimativa. É muito comum, de acordo com Aström e Wittenmark (1989), o uso de

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \beta(k,i) \varepsilon_i^2 \quad (2.57)$$

onde

$\beta(k,i)$ é um função de ponderação;
 k iteração atual do processo.

A função de ponderação é empregada para fazer com que o peso das estimativas atuais seja mais significativa do que o peso das estimativas passadas, por isso é chamada de *Função de Esquecimento*. Sua utilidade será explicada mais adiante.

Para encontrar qual o valor de θ que minimiza a função objetivo, deve-se escrever a equação (2.57) na forma vetorial. Para isto define-se um vetor dos erros E , na forma

$$E = [\varepsilon_1 \quad \cdots \quad \varepsilon_k]^T$$

e uma matriz Φ contendo os vetores de φ

$$\Phi = [\varphi_1^T \quad \cdots \quad \varphi_k^T]^T$$

Definindo um vetor Y da resposta real da planta

$$Y = [y_1 \quad \cdots \quad y_k]^T$$

e uma matriz β das ponderações

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta(k,1) & & [0] \\ & \ddots & \\ [0] & & \beta(k,k) \end{bmatrix}$$

encontra-se para a equação (2.56)

$$E = Y - \Phi\theta$$

e para a função objetivo

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \beta(k,i) \varepsilon_i^2 = \frac{1}{2} E^T \beta E$$

Para encontrar o mínimo deriva-se a equação acima e iguala-se a zero, então

$$\frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{2} E^T \beta E \right] = 0$$

Aplicando a regra do produto, encontra-se

$$\frac{1}{2} \frac{dE^T}{d\theta} [\beta E] + \frac{1}{2} [E^T \beta] \frac{dE}{d\theta} = 0$$

Como

$$E = Y - \Phi\theta \quad E^T = Y^T - \theta^T \Phi^T$$

Então

$$\frac{dE}{d\theta} = -\Phi \quad \frac{dE^T}{d\theta} = -\Phi^T$$

Substituindo na equação da derivada, encontra-se

$$-\frac{1}{2} \Phi^T \beta E - \frac{1}{2} E^T \beta \Phi = 0$$

Como $\Phi^T \beta E = (E^T \beta \Phi)^T$, então transpondo o segundo membro da equação acima e somando os termos, encontra-se

$$\Phi^T \beta E = 0$$

Substituindo o vetor dos erros,

$$\Phi^T \beta (Y - \Phi\theta) = 0$$

encontrando

$$\Phi^T \beta \Phi \theta = \Phi^T \beta Y$$

Admitindo que $\Phi^T \beta \Phi$ seja inversível, então θ_{min} é dado por

$$\theta_{min} = (\Phi^T \beta \Phi)^{-1} \Phi^T \beta Y \quad (2.58)$$

Para a aplicação deste método é necessário o conhecimento de todas as entradas e saídas da planta, portanto ele é um método “off-line”. Em muitas aplicações é necessário um método “on-line”, portanto recursivo, que permita estimar os parâmetros para cada instante de tempo.

2.2.3 Fator de Esquecimento

Para tornar a equação (2.58) recursiva, primeiro deve-se entender o papel da função de esquecimento.

A função de esquecimento é escrita de acordo com Haykin (1996) e Ljung (1987) como

$$\beta(k, i) = \lambda^{k-i}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$0 < \lambda \leq 1.$$

onde λ é conhecido como *Fator de Esquecimento*.

A função de esquecimento pode ser também escrita como

$$\beta(k, i) = \prod_{j=i}^k \lambda(j)$$

Apresentando a propriedade

$$\begin{aligned} \beta(k, i) &= \lambda(i)\beta(k-1, i), \quad 1 \leq i \leq k-1 \\ \beta(k, i) &= 1 \quad \quad \quad i = k \end{aligned} \tag{2.59}$$

Esta propriedade pode ser observada lembrando que a função de esquecimento é a multiplicação do fator no instante $k-1$ pelo fator no instante $k-2$.

À medida que o processo sofre iterações os instantes anteriores são multiplicados por um fator menor que um e decrescente, tendendo assim para zero com o passar do tempo. Significando que apenas uma faixa de valores é levada em consideração.

Um fato que é observado em alguns casos é que o fator de esquecimento pode variar em cada iteração do processo.

2.2.4 Mínimos Quadrados Recursivo

Uma vez mostrado o papel da função de esquecimento pode-se agora escrever o método na forma recursiva. Para tanto parte-se da equação (2.58) e define-se a *Matriz de Covariância* $R(k)$ como

$$R(k) = \Phi^T \beta \Phi = \sum_{i=1}^k \beta(k,i) \varphi_i \varphi_i^T \quad (2.60)$$

Aplicando a definição (2.59), encontra-se

$$R(k) = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda(k) \beta(k-1,i) \varphi_i \varphi_i^T + \varphi(k) \varphi^T(k) = \lambda(k) \sum_{i=1}^{k-1} \beta(k-1,i) \varphi_i \varphi_i^T + \varphi(k) \varphi^T(k)$$

Como o termo em somatória representa $\lambda(k)R(k-1)$, então

$$R(k) = \lambda(k)R(k-1) + \varphi(k) \varphi^T(k) \quad (2.61)$$

Também da equação (2.58), define-se uma matriz $f(k)$ da seguinte forma

$$f(k) = \Phi^T \beta Y = \sum_{i=1}^k \beta(k,i) \varphi_i y_i \quad (2.62)$$

e aplicando a definição (2.59) chega-se a

$$f(k) = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda(k) \beta(k-1,i) \varphi_i y_i + \varphi(k) y(k) = \lambda(k) \sum_{i=1}^{k-1} \beta(k-1,i) \varphi_i y_i + \varphi(k) y(k)$$

Como o termo em somatória representa $\lambda(k)f(k-1)$, então

$$f(k) = \lambda(k)f(k-1) + \varphi(k) y(k) \quad (2.63)$$

Escrevendo a equação (2.58) com as equações (2.60) e (2.62), encontra-se

$$\theta(k) = R^{-1}(k) f(k) \quad (2.64)$$

Substituindo $f(k)$ por (2.63), encontra-se

$$\theta(k) = R^{-1}(k) [\lambda(k) f(k-1) + \varphi(k) y(k)] \quad (2.65)$$

Da equação (2.64), para o instante $k-1$

$$\theta(k-1) = R^{-1}(k-1)f(k-1)$$

isolando $f(k-1)$ e substituindo em (2.65), chega-se a

$$\theta(k) = R^{-1}(k)[\lambda(k)R(k-1)\theta(k-1) + \varphi(k)y(k)] \quad (2.66)$$

Isolando $R(k-1)$ na equação (2.61)

$$R(k-1) = \frac{R(k) - \varphi(k)\varphi^T(k)}{\lambda(k)}$$

e substituindo em (2.66)

$$\theta(k) = R^{-1}(k) \left[\lambda(k) \frac{R(k) - \varphi(k)\varphi^T(k)}{\lambda(k)} \theta(k-1) + \varphi(k)y(k) \right]$$

Simplificando, encontra-se finalmente

$$\theta(k) = \theta(k-1) + R^{-1}(k)\varphi(k)[y(k) - \varphi^T(k)\theta(k-1)] \quad (2.67)$$

A equação (2.67) representa a forma recursiva da equação (2.58). Para simplificar esta equação, define-se um vetor $K(k)$ como sendo

$$K(k) = R^{-1}(k)\varphi(k) \quad (2.68)$$

e utilizando a definição (2.56), a equação (2.67) pode ser reescrita como

$$\theta(k) = \theta(k-1) + K(k)e(k) \quad (2.69)$$

Mas para se utilizar da equação acima deve-se computar a inversa de $R(k)$. Como o cálculo da inversa pode ser computacionalmente custoso, aplica-se o lema de inversão de matrizes, encontrada em Ljung (1987) e Aström e Wittenmark (1989), dado pela equação

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1}DA^{-1}$$

Para aplicar a equação acima, define-se uma matriz $P(k)$

$$P(k) = R^{-1}(k) \quad (2.70)$$

Para o instante $k-1$,

$$P(k-1) = R^{-1}(k-1) \quad (2.71)$$

Aplicando as definições (2.71) e (2.61) em (2.70), então

$$P(k) = \left(\lambda(k)P^{-1}(k-1) + \varphi(k)\varphi^T(k) \right)^{-1} \quad (2.72)$$

Fazendo $A = \lambda(k)P^{-1}(k)$, $B = \varphi(k)$, $C = I$, $D = \varphi^T(k)$, encontra-se

$$P(k) = \left(\lambda(k)P^{-1}(k-1) \right)^{-1} - \left(\lambda(k)P^{-1}(k-1) \right)^{-1} \varphi(k) \left[\varphi^T(k) \left(\lambda(k)P^{-1}(k-1) \right)^{-1} \varphi(k) + I \right]^{-1} \varphi^T(k) \left(\lambda(k)P^{-1}(k-1) \right)^{-1}$$

simplicando, encontra-se

$$P(k) = \left[P(k-1) - P(k-1)\varphi(k) \left[\varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k) + \lambda(k) \right]^{-1} \varphi^T(k)P(k-1) \right] \frac{1}{\lambda(k)}$$

Como o termo inverso é um escalar, então

$$P(k) = \left[P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{\lambda(k) + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \right] \frac{1}{\lambda(k)} \quad (2.73)$$

A equação (2.73) representa a inversa de $R(k)$. Para introduzir a inversa de $R(k)$ na equação (2.68) substitui-se a equação (2.73), encontrando-se

$$K(k) = P(k)\varphi(k) = \left[P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{\lambda(k) + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \right] \frac{\varphi(k)}{\lambda(k)} \quad (2.74)$$

Somando-se os termos entre colchetes, encontra-se

$$K(k) = \left[\frac{P(k-1)\lambda + P(k-1)\left(\varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)\right) - P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{\lambda(k) + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \right] \frac{\varphi(k)}{\lambda(k)}$$

Realizando a simplificação (esta simplificação pode ser observada no apêndice C),

$$K(k) = \left[\frac{P(k-1)\lambda(k)}{\lambda(k) + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \right] \frac{\varphi(k)}{\lambda(k)}$$

resultando em

$$K(k) = \frac{P(k-1)\varphi(k)}{\lambda(k) + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \quad (2.75)$$

Portanto o método recursivo pode ser resumido em

$$e(k) = y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1) \quad (2.56)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)e(k) \quad (2.69)$$

$$K(k) = \frac{P(k-1)\varphi(k)}{\lambda(k) + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \quad (2.75)$$

$$P(k) = \left[P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{\lambda(k) + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \right] \frac{1}{\lambda(k)} \quad (2.73)$$

A estimativa $\hat{\theta}(k)$ é obtida adicionando-se uma correção na estimativa $\hat{\theta}(k-1)$. Esta correção é proporcional ao erro $e(k)$, significando que ela é proporcional à diferença entre o valor $y(k)$ e o valor estimado $\hat{y}(k) = \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1)$, baseado na estimativa anterior dos parâmetros. O vetor $K(k)$ é composto por fatores ponderativos que mostram como a correção e a estimativa anterior devem ser combinadas para formar a nova estimativa dos parâmetros.

2.2.5 Propriedades da Matriz de Covariância

Como mencionado anteriormente, o método dos mínimos quadrados depende da inversão da matriz $R(k)$. São comentadas a seguir algumas propriedades que devem ser satisfeitas pela matriz de covariância $R(k)$.

Propriedade 1 : R é *inversível*. [Aström e Wittenmark (1997)].

Esta propriedade pode ser interpretada como a **Condição da Persistência da Excitação**.

Isto é fácil de observar considerando que Φ é a matriz de excitação, isto é

$$\Phi^T = [\varphi_1^T \quad \varphi_2^T \quad \cdots \quad \varphi_k^T]$$

Se o sistema não for excitado os termos $\varphi(i)$ e $\varphi(i-1)$ serão iguais, então Φ será uma matriz onde as colunas serão sempre iguais, isto é, linearmente dependentes, caracterizando que o posto de Φ será incompleto, o que implica que $\Phi^T \beta \Phi$ será não inversível.

Outra forma de observar esta propriedade então, é que o termo $\varphi(i)$ deve ser diferente de $\varphi(i-1)$ ou seja, que a entrada deve ser tal que permita que a saída seja diferente a cada instante. Devido a esta afirmação, a propriedade da inversão de R pode ser considerada como o atendimento da condição de persistência da excitação.

De acordo com Haykin (1996) a matriz de covariância tem as seguintes propriedades:

Propriedade 2 : R é *Simétrica*, isto é

$$R^T = R$$

Esta propriedade pode ser provada lembrando que β é simétrica e R é definida por (2.60)

$$R(k) = \Phi^T \beta \Phi = (\Phi^T \beta \Phi)^T$$

Propriedade 3 : *A matriz R é não definida negativa*, isto é

$$x^T R x \geq 0$$

para qualquer vetor x .

Para provar a propriedade 3, faz-se uso do teorema a seguir:



Teorema 1: Se $A \geq 0$ é uma matriz $p \times p$, então para qualquer matriz C de dimensão $p \times n$, $C^T A C \geq 0$.

Prova: Se $A \geq 0$, então para qualquer vetor de x de dimensão n ,

$$x^T C^T A C x = (Cx)^T A (Cx) \geq 0$$

o que implica que $C^T A C \geq 0$.

Se $A > 0$, $p \geq n$ e posto $(C) = n$, então $Cx \neq 0$. Logo, $(Cx)^T A (Cx) > 0$, o que implica que $C^T A C > 0$.

Sabendo-se que $\beta \geq 0$ por construção e Φ tem posto completo (na presença de excitação persistente), então o teorema 1 permite provar a propriedade 3.

Propriedade 4: *Os autovalores da matriz R são todos reais e não negativos.*

É Conseqüência das propriedades 2 e 3.

2.2.6 Erro de Polarização

A propriedade que será comentada é de vital importância por se tratar do erro de polarização do estimador.

Propriedade: *O método dos mínimos quadrados é não polarizado desde que o erro do processo tenha média zero.* [Aström e Wittenmark (1989), Haykin (1996)].

Significa que o método dos mínimos quadrados deve ser utilizado apenas quando o erro das estimativas for não polarizado. Considerando um modelo ARMAX na forma

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)e(k)$$

onde $e(k)$ representa uma entrada aleatória, o método dos mínimo quadrados é não polarizado desde que o erro do estimador seja não correlacionado, isto é, se $C(q) = q^n$ o estimador fornecerá estimativas sem erro de polarização, mas se $C(q) \neq q^n$, então as estimativas serão polarizadas.

Assim, para evitar o erro de polarização, deve-se também estimar o polinômio $C(q)$.

2.2.7 Tipos de Estimadores da Família dos Mínimos Quadrados

Existem diversas variantes do método dos mínimos quadrados, [Shah e Cluett (1988); Ljung (1987)]. Para o estudo atual foram selecionados os três métodos a seguir, conforme já mencionado:

- Mínimos Quadrados Ordinário
- Mínimos Quadrados com Esquecimento Exponencial
- Mínimos Quadrados com Reinicialização da Matriz de Covariância

2.2.7.1 Método dos Mínimos Quadrados Ordinário

Este método, o primeiro a ser desenvolvido, é formado tomando $\lambda(k) = 1$, obtendo-se as seguintes equações:

$$e(k) = y(k) - \varphi^T(k)\bar{\theta}(k-1)$$

$$\bar{\theta}(k) = \bar{\theta}(k-1) + K(k)e(k)$$

$$K(k) = \frac{P(k-1)\varphi(k)}{1 + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)}$$

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{1 + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)}$$

O método apresenta boa convergência dependendo da escolha do valor inicial de $P(0)$ e se os parâmetros não variam no tempo. Se $P(0)$ for escolhido muito pequeno a convergência será muito lenta. Sua principal desvantagem é que não acompanha a variação dos parâmetros da planta, porque todas as estimativas anteriores são ponderadas da mesma forma, conseqüentemente apresentando grande influência nas estimativas atuais.

2.2.7.2 Método dos Mínimos Quadrados com Esquecimento Exponencial

Este método procura solucionar o problema de aplicação a plantas variantes no tempo, tentando retirar a desvantagem do método ordinário. É formado tomando $\lambda(k)$ constante e entre 0 e 1, obtendo-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 e(k) &= y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1) \\
 \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + K(k)e(k) \\
 K(k) &= \frac{P(k-1)\varphi(k)}{\lambda + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \\
 P(k) &= \left[P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{\lambda + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \right] \frac{1}{\lambda}
 \end{aligned}$$

Ele consegue acompanhar as variações dos parâmetros da planta porque as estimativas têm pesos diferentes, isto é, a estimativa anterior é multiplicada pelo fator λ menor que 1, e na medida em que o número de iterações aumenta a sua influência diminui a uma taxa de λ^{k-1} . Por exemplo: se $\lambda = 0.9$ e a iteração está em 100, a estimativa mais antiga tem peso 2.9×10^{-5} , enquanto que a 50ª estimativa tem peso 5.7×10^{-3} , e a mais recente tem peso 0.9. E quanto menor o fator de esquecimento, mais rápido o algoritmo converge, ou simplesmente o fator de esquecimento diz quão rápido o algoritmo esquece os dados anteriores.

Mas a desvantagem deste método é que quando o estimador encontra os valores ótimos para as estimativas, isto é, quando o erro $e(k)$ tende a zero, a correção dos parâmetros é muito pequena e este fato se reflete na matriz $P(k)$, isto é, o termo depois do sinal negativo na equação de $P(k)$ é a correção que $P(k-1)$ sofre e se este termo for zero, a equação de $P(k)$ resume-se a

$$P(k) = \frac{P(k-1)}{\lambda}$$

como λ é menor que 1 então $P(k)$ crescerá exponencialmente, refletindo em $K(k)$ e por sua vez, refletindo na estimativa dos parâmetros.

2.2.7.3 Método dos Mínimos Quadrados com Reinicialização da Matriz de Covariância

Este método tem o objetivo de corrigir o problema do crescimento da matriz $P(k)$ do método anterior. O método é o mesmo que o ordinário, mas em tempos determinados a matriz $P(k)$ é reinicializada. De acordo com Goodwin e Teoh (1984), existem duas maneiras de aplicar a reinicialização:

Método 1: Em tempos determinados $P(k)$ é reinicializada para $P(0)$,

Método 2: Em tempos determinados $P(k)$ é somada com uma matriz Q , sendo esta uma matriz diagonal definida positiva de posto igual ao posto de $P(k)$.

Então o método consiste em escolher um tempo de reinicialização ξ e no uso das seguintes equações:

$$e(k) = y(k) - \varphi^T(k)\bar{\theta}(k-1)$$

$$\bar{\theta}(k) = \bar{\theta}(k-1) + K(k)e(k)$$

$$K(k) = \frac{P(k-1)\varphi(k)}{1 + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)}$$

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{1 + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)}$$

Se ξ é múltiplo de k , então

$$P(k) = P(0)$$

ou

$$P(k) = P(k) + Q$$

Senão

$$P(k) = P(k)$$

A variação dos parâmetros também é acompanhada porque é como se o estimador sempre começasse novamente a cada período de reinicialização.

2.2.8 Resumo do Método dos Mínimos Quadrados Recursivo

Aqui será apresentado o algoritmo para a estimação de uma planta ARMAX que será o modelo básico dos exemplos utilizados nos capítulos 3 e 4.

Primeiro Passo : Especificar o número dos parâmetros a serem estimados:

A ordem n

B ordem m

C ordem p

Obs: Ver equação (2.52)

Segundo Passo : Escolher o tipo de estimador a ser aplicado e especificar seus dados iniciais

$P(0) = \delta I$, onde δ é um número real positivo maior que zero e I a matriz identidade de ordem $(n + m + p, n + m + p)$;

λ entre $(0,1]$

ξ representando o tempo de reinicialização

$$\hat{\theta}(0) = [0]_{(n+m+p,1)}$$

Obs: os parâmetros iniciais de estimação podem ser escolhidos com qualquer valor real, mas neste trabalho foi utilizado um vetor de zeros para que não haja interferência nas estimativas e possa ser observada a convergência do método quando utilizado apenas no processo de estimação.

Terceiro Passo (início do processo iterativo): Calcular a resposta da planta

$$y(k) = \frac{B}{A}u(k) + \frac{C}{A}w(k)$$

Quarto Passo : Computar $\varphi(k)$ tal que

$$\varphi^T(k) = [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n) \quad u(k) \quad \dots \quad u(k-m) \quad w(k) \quad \dots \quad w(k-p)]$$

Quinto Passo : Calcular o erro tal que

$$e(k) = y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1) \quad (2.56)$$

Sexto Passo : Calcular $K(k)$ tal que

$$K(k) = \frac{P(k-1)\varphi(k)}{\lambda + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \quad (2.75)$$

Sétimo Passo : Calcular $P(k)$ tal que

$$P(k) = \left[P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{\lambda + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \right] \frac{1}{\lambda} \quad (2.73)$$

Se ξ é múltiplo de k , então

$$P(k) = P(0)$$

ou

$$P(k) = P(k) - Q$$

Senão

$$P(k) = P(k)$$

Oitavo Passo : Calcular a nova estimativa tal que

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)e(k) \quad (2.69)$$

Nono Passo : Voltar ao terceiro passo para iteração.

2.2.9 Estimando Partes das Plantas

Quando é conhecida parte de uma planta, não há necessidade de estimá-la totalmente. Para usar o conhecimento prévio, altera-se a equação do erro da seguinte forma

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k) - v(k) = y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1) - \varphi_c^T(k)\theta_c \quad (2.76)$$

onde $v(k) = \varphi_c^T(k)\theta_c$, $v(k)$ representa a resposta da parte conhecida, $\varphi_c^T(k)$ representa os sinais de entrada e de saída destes parâmetros θ_c conhecidos.

2.3 Formulação do Controle Adaptativo Auto-Sintonizado

Nas seções 2.1 e 2.2 foi realizado o equacionamento do controlador e do estimador em separado; nesta seção será mostrado como fazer a união dos dois métodos para a realização do controle adaptativo auto-sintonizado.

2.3.1 Formulação Básica

O controle adaptativo auto-sintonizado, como foi mencionado anteriormente, apresenta um compromisso entre o controlador e o estimador, resolvendo-se o controlador com base nas

estimativas da planta, a cada iteração. Para formalizar esta definição emprega-se o seguinte algoritmo:

1. - Estimar os coeficientes da planta;
2. - Calcular os coeficientes do controlador baseado na estimativa anterior;
3. - Calcular a lei de controle;
4. - Repetir os passos 1, 2 e 3 para cada iteração (podendo ser a cada Δt ou em instantes pré-estabelecidos).

Três observações devem ser feitas quando aplicado o controle adaptativo auto-sintonizado.

Observação 1: A lei de controle é dada pela equação

$$u(k) = \frac{T}{R}r(k) - \frac{S}{R}y(k) \quad (2.6)$$

e a planta calculada com a equação

$$y(k) = \frac{B}{A}u(k) \quad (2.1)$$

Observa-se que a equação (2.6) e (2.1) estão em conflito, porque na equação (2.6) $u(k)$ depende de $y(k)$ e na equação (2.1) $y(k)$ depende de $u(k)$. Para resolver o problema, deve-se tomar a equação (2.6) na seguinte forma

$$u(k) = \frac{T}{R}r(k) - \frac{S}{R}y(k-1) \quad (2.77)$$

isto é, adiciona-se um atraso na resposta da planta que entra na lei de controle.

Mas observando a equação (2.77) nota-se que o polinômio R é o denominador de duas funções de transferência e portanto ele deve ser estável. Quando aplicado apenas o controle polinomial a estabilidade de R pode ser facilmente conseguida, mas no controle adaptativo nem sempre é possível devido a observação abaixo.

Observação 2: Apesar da planta estimada comparada com a planta real apresentar a mesma resposta (como poderá ser observado no capítulo 4), nada garante que os pólos e zeros da planta estimada sejam os mesmos pólos e zeros da planta real, e isto torna-se mais evidente quando os sinais de entrada e saída da planta apresentarem falta de excitação. Como os polinômios da lei de controle são calculados com base na planta estimada e não na planta real, torna-se difícil prever qual zero poderá ser cancelado.

Observação 3: Em decorrência da observação 2, torna-se difícil prever qual o numerador do modelo de referência, já que ele é calculado pela seguinte equação

$$B_m = B^- B_m^+$$

onde B^- representa os zeros instáveis ou pouco amortecidos.

2.3.2 Implementação do Método Adaptativo

Antes de realizar a implementação do processo adaptativo deve-se resolver os problemas comentados anteriormente.

Para contornar as observações de 1 a 3, basta considerar que todos os zeros estimados podem causar instabilidade ou falta de robustez ao controlador significando que nenhum zero será cancelado. Então a separação de \hat{B} torna-se

$$\hat{B} = \hat{B}^+ \hat{B}^- = I \times \hat{B}$$

Para garantir estabilidade à lei de controle, em vez dela ser calculada por (2.77), deve ser calculada pela função de transferência de malha fechada, isto é, pela equação (2.35), e os polinômios A e B devem ser substituídos por suas estimativas, isto é, \hat{A} e \hat{B} . Então a equação (2.35) pode ser reescrita

$$u(k) = \frac{\hat{A}T}{\hat{A}R + \hat{B}S} r(k) - \frac{\hat{B}S}{\hat{A}R + \hat{B}S} v(k) - \frac{\hat{A}S}{\hat{A}R + \hat{B}S} e(k) \quad (2.78)$$

onde os polinômios \hat{A} e \hat{B} são as estimativas dos polinômios reais A e B .

Desta forma o denominador de malha fechada terá sempre os mesmos pólos estabelecidos por $\bar{B}^+ A_0 A_m$ e portanto sempre será estável desde que a separação dos zeros seja feita.

Para garantir que os zeros permaneçam no numerador da função de transferência de malha fechada, o modelo de referência deve ser calculado a cada iteração do processo, isto é, o numerador do modelo de referência deve possuir a cada iteração do processo os zeros estimados da planta, permitindo assim que os zeros estimados da planta sempre sejam também os zeros do modelo de referência. Este processo deve ser realizado sempre que não se deseje o cancelamento de zeros.

Agora pode-se escrever o algoritmo completo do STR indireto aplicado a um modelo ARMAX que será o tipo de planta base utilizada para a verificação dos métodos de estimação, isto é

$$y(k) = \frac{B}{A} u(k) + \frac{C}{A} w(k)$$

Procedimento inicial

1. - Verificar se todos os parâmetros serão estimados
2. - Especificar o número de parâmetros a serem estimados
3. - Escolher o tipo de estimador
4. - Entrar com os dados do estimador escolhido

$$P(0) = \delta I;$$

$$\theta(0) = v[1 \dots 1]^T \text{ com } v \text{ qualquer número diferente de zero}$$

$$\lambda = (0, 1];$$

tempo de reinicialização ξ ;

Obs: Quando for utilizado o controle adaptativo auto-sintonizado, a estimativa inicial dos parâmetros deve ser diferente de zero, devido ao compromisso de calcular o controlador com base na estimativa anterior da planta, significando que deve ser conhecido inicialmente a estimativa dos parâmetros da planta ou uma estimativa inicial do controlador, neste trabalho optou-se por conhecer a estimativa inicial dos parâmetros da planta.

5. - Especificar a entrada de referência $r(k)$;

6. - Especificar o grau do modelo de referência tal que

$$\text{grau}(A_m) - \text{grau}(B_m) \geq \text{grau}(A) - \text{grau}(B)$$

Especificar os pólos de A_m

7. - Especificar o polinômio A_0 tal que

$$\text{grau}(A_0) \geq 2 \text{grau}(A) - \text{grau}(A_m) - \text{grau}(B^+) - 1$$

8. - Especificar os graus de R , S e T tal que

$$\text{grau}(S) \leq \text{grau}(R)$$

$$\text{grau}(T) \leq \text{grau}(R)$$

$$\text{grau}(S) < \text{grau}(A)$$

Obs: para o efeito integral os graus de R e S se alteram.

Controlador Polinomial (início do processo iterativo)

9. - Separar os polinômios A e B estimados de $\theta(k-1)$

10 - Separar os zeros de \hat{B} em

$$\hat{B} = \hat{B}^+ \hat{B}^-$$

onde $\hat{B}^+ = 1$ e $\hat{B}^- = \hat{B}$, isto devido à falta de conhecimento para prever qual zero pode ser cancelado, de acordo com o mencionado anteriormente.

11. - Adicionar os zeros de $B_m = \hat{B}^- B_m^+$

obs: adicionar um ganho estático a B_m para que não ocorra erro estacionário.

12. - Resolver a equação Diophantina

$$\hat{A}(z-1)^d R_1 + \hat{B}^- S = A_0 A_m$$

para R_1 e S .

13. - Calcular R tal que

$$R = (z-1)^d \hat{B}^+ R_1$$

14. - Calcular T tal que

$$T = A_0 \frac{B_m}{\hat{B}^-}$$

15. - Calcular a lei de controle

$$u(k) = \frac{\hat{A}T}{\hat{A}R + \hat{B}S} r(k) - \frac{\hat{B}S}{\hat{A}R + \hat{B}S} v(k) - \frac{\hat{A}S}{\hat{A}R + \hat{B}S} e(k)$$

16. - Obter a resposta da planta

$$y(k) = \frac{B}{A}u(k) + \frac{C}{A}w(k)$$

Método dos Mínimos Quadrados

17. - Formar o vetor φ

$$\varphi(k) = [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n-1) \quad u(k) \quad \dots \quad u(k-m) \quad w(k) \quad \dots \quad w(k-p)]^T$$

onde

n é o número de coeficientes de A a serem estimados

m é o número de coeficientes de B a serem estimados

p é o número de coeficientes de C a serem estimados

obs: as partes de $u(k)$ e $w(k)$ podem aparecer com um atraso dependendo da configuração dos polinômios.

18. - Calcular o erro do estimador

$$e(k) = y(k) - \varphi^T(k)\theta(k-1)$$

19 - Calcular o vetor de ganho $K(k)$

$$K(k) = \frac{P(k-1)\varphi(k)}{\lambda + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)}$$

20. - Calcular a matriz de covariância $P(k)$

$$P(k) = \left[P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{\lambda + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \right] \frac{1}{\lambda}$$

Se k for múltiplo do tempo de reinicialização então

$$P(k) = \delta I$$

21. - Calcular a nova estimativa dos parâmetros θ

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)e(k)$$

22. - Voltar para o passo 9 para cada iteração do processo.

No início do algoritmo, com $k = 1$, observa-se que θ é diferente de zero porque já na primeira iteração os polinômios R , S e T já serão calculados com base em $\theta(0)$.

Nas primeiras iterações deve-se observar a formação do vetor dos regressores φ .

O Algoritmo proposto corresponde à Figura 1.3, onde as perturbações estão implícitas.

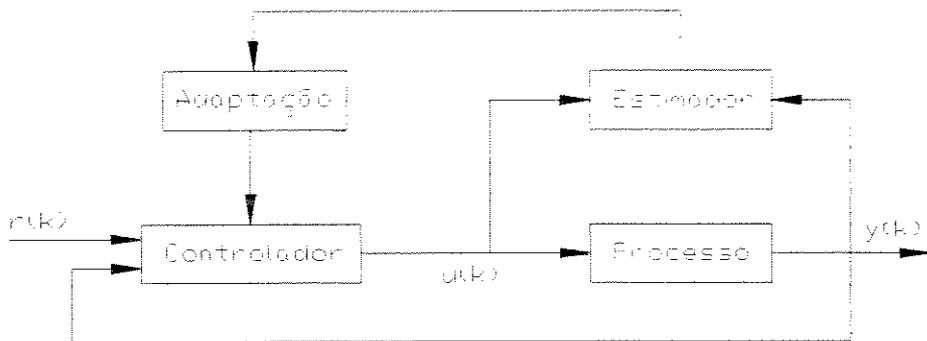


Figura 2.4 : Controle Adaptativo auto-sintonizado

Na Figura 2.4 o bloco denominado “Estimador” corresponde aos passos 17 a 21, o bloco denominado “Controlador” corresponde ao passo 15 e o bloco denominado “Adaptação” corresponde aos passos 9 a 14.

Como já mencionado, o controlador é calculado para cada iteração com os parâmetros obtidos pelo estimador. Então, quanto mais precisa for a estimação, melhor será o desempenho do controlador.

Capítulo 3

Descrição dos Sistemas Utilizados no Controle Adaptativo

Neste capítulo será feita a descrição dos sistemas utilizados no estudo dos métodos de estimação de parâmetros propostos na seção 2.2.7 e do controle adaptativo auto-sintonizado indireto proposto na seção 2.3. Para este fim, três sistemas são utilizados:

- Um sistema de controle acústico;
- Um modelo de suspensão ativa veicular (com massa variante no tempo);
- Um motor de corrente contínua.

No sistema de controle acústico o tratamento será todo simulado, sendo que primeiro será realizada a comparação das duas formas do controlador (sem ação integral e com ação integral), depois será realizada a estimação dos parâmetros e então será aplicado o controle adaptativo auto-sintonizado. Este exemplo foi escolhido por ser um assunto atual de pesquisa e principalmente por apresentar uma fácil observação dos resultados dos métodos de estimação propostos.

Na suspensão ativa o tratamento será simulado aplicando o controle adaptativo auto-sintonizado na presença de variação de massa e utilizando diversos tipos de entrada. Este exemplo foi escolhido por requerer maior capacidade do algoritmo adaptativo e incluir a variação dos parâmetros no tempo.

O motor de corrente contínua será estimado experimentalmente. Este exemplo foi escolhido para a verificação experimental do comportamento dos estimadores.

As simulações dos sistemas serão realizadas no ambiente Matlab® for Windows (The Mathworks, Inc.) versão 4.2c.1.

3.1 Sistema de Controle Acústico

Nesta seção o objetivo principal é o estudo do comportamento dos diversos tipos de estimadores da família dos Mínimos Quadrados, aplicados a um sistema de controle acústico. Portanto aqui o interesse é a verificação das características de cada um dos métodos propostos na seção 2.2.7.

Um sistema de controle acústico pode ser representado pela Figura 3.1.

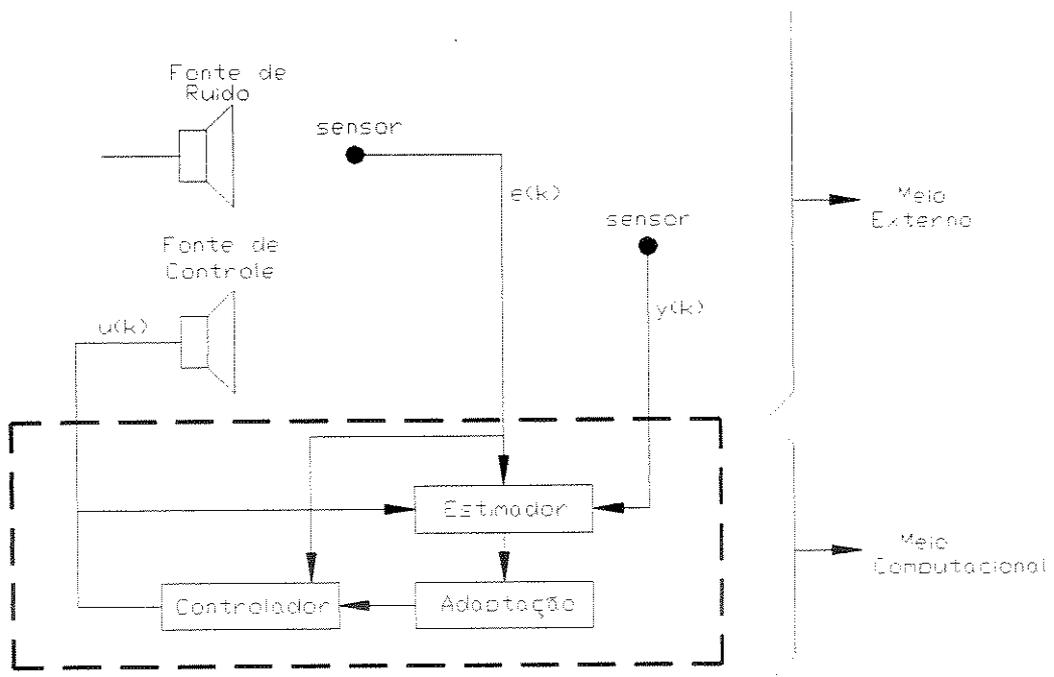


Figura 3.1 : Esquema de um sistema de controle acústico

Na Figura 3.1 o sensor $e(k)$ mede a perturbação gerada pela fonte de ruído, o sensor $y(k)$ mede o ponto onde se deseja cancelar a perturbação $e(k)$, e o cancelamento da perturbação $e(k)$ será realizado através do sinal de controle $u(k)$.

Este exemplo de controle acústico será utilizado para se obter o melhor controle adaptativo auto-sintonizado. Como mencionado anteriormente, o controle adaptativo consiste de um controlador mais um estimador. Portanto, o melhor controle adaptativo será aquele que tiver o melhor controlador e o melhor estimador. Então aqui será feita uma análise do

controlador polinomial e do estimador dos mínimos quadrados para serem aplicados ao controle adaptativo auto-sintonizado.

Como o sistema a ser estimado é um modelo ARMAX e o estimador necessita das entradas e saída da planta para realizar a estimação dos parâmetros, então pode-se primeiro aplicar o controle polinomial considerando que os parâmetros do sistema são conhecidos e com as entradas e saída geradas pelo controlador pode-se aplicar os métodos de estimação e verificar em que casos a resposta da planta estimada é igual a resposta controlada da planta real. Portanto a análise dos métodos deve ser iniciada pela análise do controlador polinomial.

3.1.1 Definição do Sistema de Controle Acústico

Um sistema de controle acústico pode ser representado por um modelo ARMAX. O diagrama de blocos do sistema é mostrado na Figura 3.2 e corresponde à equação

$$y(k) = \frac{B}{A}u(k) + \frac{C}{A}w(k)$$

onde $u(k)$ representa a lei de controle, $w(k)$ a excitação e $y(k)$ a resposta controlada.

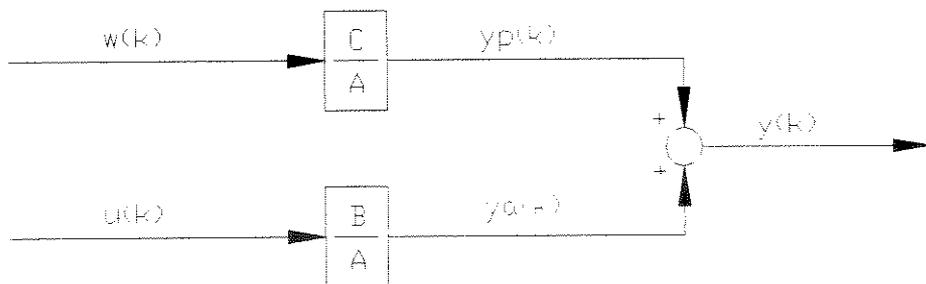


Figura 3.2 : Diagrama de blocos da planta de controle acústico (modelo ARMAX)

Comparando a Figura 3.2 com a Figura 3.1, observa-se que o termo C/A representa a função de transferência entre a fonte de ruído e o sensor $y(k)$ quando $u(k) = 0$ e o termo B/A representa a função de transferência entre a fonte de controle e o sensor de medida $y(k)$ quando $w(k) = 0$. Neste esquema utilizou-se $w(k)$, em vez de $e(k)$, como perturbação determinística (adotou-se $e(k)$ como entrada estocástica e $w(k)$ como entrada determinística).

O modelo da planta é extraído do trabalho de Shoureshi et al. (1993), representando a transmissão acústica em uma sala, e é definido por

$$y(k) = \frac{0.989z^2 + 0.03z + 0.01}{z^3 - 0.996z^2 + 0.099z} u(k) + \frac{0.997z^2 - 0.981z + 0.454}{z^3 - 0.996z^2 + 0.099z} w(k) \quad (3.1)$$

Para a simulação do sistema de controle acústico será utilizado um tempo de simulação de 1.2 segundos e uma frequência de amostragem de 1 kHz.

3.1.2 Definição do Controlador Polinomial

O controle polinomial para um sistema ARMAX é definido na Figura 3.3, onde $r(k)$ representa a entrada de referência que a resposta controlada $y(k)$ deverá acompanhar.

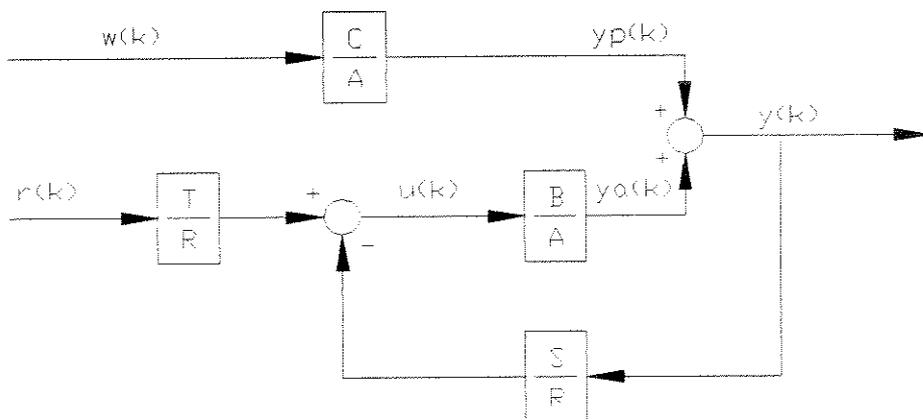


Figura 3.3 : Diagrama de blocos do controlador polinomial para um modelo ARMAX

O controle polinomial pode ser aplicado sem ação integral ou com ação integral, mas a parte inicial para os dois casos é a mesma, procedendo com o algoritmo definido na seção 2.1.6.

O primeiro passo é verificar a existência de zeros instáveis ou pouco amortecidos na função de transferência B/A . Os zeros encontrados são: $-0.0152 \pm 0.0994i$, portanto pode-se realizar o cancelamento dos zeros de B . Fatorando B de acordo com a equação (2.9), encontra-se

$$B = B^+ B^- = \begin{cases} B^+ = z^2 + 0.0303z + 0.0101 \\ B^- = 0.989 \end{cases} \quad (3.2)$$

O segundo passo é determinar um modelo de referência de acordo com as equações (2.5) e (2.10). Em se tratando de controle acústico a referência a ser adotada será zero, não há a necessidade de calcular o polinômio T , e o grau relativo da planta é 1. Então o modelo de referência é adotado como

$$\frac{B_m}{A_m} = \frac{0.49}{z^3 - 0.75z^2 + 0.24z} \quad (3.3)$$

Este modelo representa um fator de amortecimento de 0.707, uma frequência natural de 1000 rad/s e um pólo em zero. B_m não é calculado com a equação (2.10) porque não há a necessidade de calcular o polinômio T . Caso a referência fosse diferente de zero então haveria a necessidade de calcular o polinômio T e o modelo de referência deveria ser dado com a restrição da equação (2.10).

O terceiro passo consiste em determinar o polinômio A_0 de acordo com a equação (2.19). Como o $\text{grau}(A) = 3$, $\text{grau}(A_m) = 3$ e $\text{grau}(B^+) = 2$, então $\text{grau}(A_m) \geq 1$, e pode-se escolher

$$A_0 = z^3 - 0.75z^2 + 0.24z \quad (3.4)$$

Observa-se que este polinômio é igual ao denominador do modelo de referência, sendo portanto estável e bem amortecido.

O quarto passo é a determinação da equação Diophantina a ser resolvida de acordo com a equação (2.14). Primeiro deve-se especificar os graus de R e S de acordo com as equações (2.20) e (2.22). Como $\text{grau}(A) = 3$, $\text{grau}(A_m) = 3$, $\text{grau}(A_0) = 3$ e $\text{grau}(B^+) = 2$, da equação (2.22) encontra-se que $\text{grau}(R) = 5$.

Para encontrar o $\text{grau}(S)$ deve-se fazer a distinção entre o controlador sem ação integral e com ação integral.

Para o controlador sem ação integral a equação Diophantina a ser resolvida é dada pela equação (2.15). Então, da equação (2.11) e sabendo-se que $\text{grau}(R) = 5$ e que $\text{grau}(B^+) = 2$, o $\text{grau}(R_1) = 3$.

O $\text{grau}(S)$ deve ser escolhido de acordo com a equação (2.20), lembrando que o sistema deve possuir n incógnitas com n equações. Como a equação (2.15) possui 7 equações ($\text{grau}(A_m) = 3$ e $\text{grau}(A_0) = 3$, possuindo 7 termos) e como R_l possui 4 fatores (grau 3), então S deve possuir 3 fatores, representando um polinômio de grau 2. Resolvendo a equação (2.15) e aplicando a equação (2.11), encontram-se os seguintes valores para R e S

$$\begin{aligned} R &= z^5 - 0.4737z^4 + 0.4363z^3 + 0.1379z^2 + 0.0084z + 0.0013 \\ S &= 0.1446z^2 - 0.013z \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para o controlador com ação integral simples, isto é, fazendo $d = 1$, a equação Diophantina torna-se

$$A(z-1)R_l + B^-S = A_0A_m \quad (3.6)$$

onde R é dado por

$$R = (z-1)B^+R_l \quad (3.7)$$

Escolhendo os mesmos valores para o modelo de referência e para o polinômio A_0 , o $\text{grau}(R)$ continua sendo 5, mas o $\text{grau}(R_l)$ deve ser dado pela equação (3.7), como $\text{grau}(R) = 5$, $\text{grau}(z-1) = 1$ e $\text{grau}(B^+) = 2$, então $\text{grau}(R_l) = 2$.

O $\text{grau}(S)$ deve ser escolhido de acordo com a equação (2.20), lembrando que o sistema deve possuir n incógnitas com n equações. Como a equação Diophantina com ação integral simples, definida na equação (3.6), possui 7 equações ($\text{grau}(A_m) = 3$ e $\text{grau}(A_0) = 3$, possuindo 7 termos) e como R_l possui 3 fatores então S deve possuir 4 fatores, representando assim um polinômio de grau 3. Resolvendo a equação (3.6) e aplicando a equação (3.7), encontram-se os seguintes valores para R e S

$$\begin{aligned} R &= z^5 - 0.4737z^4 + 0.4363z^3 - 0.9292z^2 - 0.024z - 0.0095 \\ S &= 1.079z^3 - 0.9301z^2 + 0.0938z \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como mencionado na seção 2.3.2, a lei de controle definida pela equação (2.6) será instável se R também for instável. Para evitar qualquer problema de instabilidade devido ao polinômio R , o sinal de controle $u(k)$ será calculado pela equação (2.36) representando a função de transferência de malha fechada entre $u(k)$ e $w(k)$, dado na forma

$$u(k) = -\frac{CS}{AR+BS}w(k) \quad (3.9)$$

Então o diagrama de blocos do sistema de controle acústico não será o definido na Figura 3.3 e sim o definido na Figura 3.4.

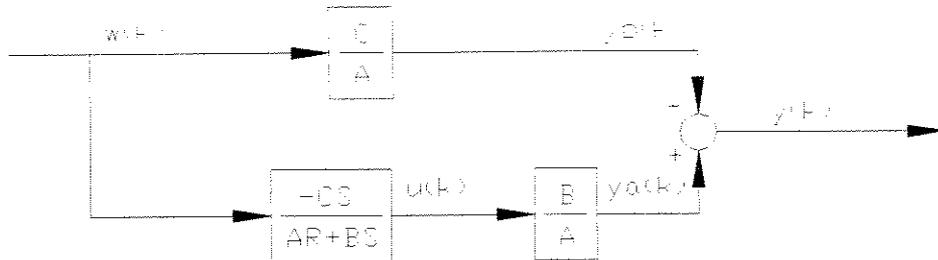


Figura 3.4 : Diagrama de blocos utilizado para o controle polinomial aplicado à planta de controle acústico

A Figura 3.3 e a Figura 3.4 representam o mesmo sistema, apenas é mais conveniente calcular a lei de controle pela Figura 3.4 porque o denominador será sempre estável, já que da equação (2.39), o denominador da função de transferência de malha fechada tem os mesmos pólos que B^+ , A_0 e A_m , isto é

$$u(k) = -\frac{CS}{B^+ A_0 A_m} w(k)$$

Desta forma não haverá problemas se o polinômio R apresentar pólos instáveis.

3.1.3 Estimação dos Parâmetros do Sistema de Controle Acústico

Partindo agora para a análise dos métodos de estimação propostos na seção 2.2.7.

Como mencionado anteriormente, as entradas $w(k)$ e $u(k)$ e a saída $y(k)$ serão fornecidas pelo controlador polinomial e depois serão aplicados os métodos de estimação para verificar se a diferença entre a resposta estimada e a resposta real tende para zero.

O diagrama esquemático do sistema de estimação de parâmetros para o modelo ARMAX é mostrado na Figura 3.5. Observa-se nesta figura que está definido o erro entre a resposta real e a resposta estimada, mas deve ser observado que este erro não é o erro definido pela equação (2.56).

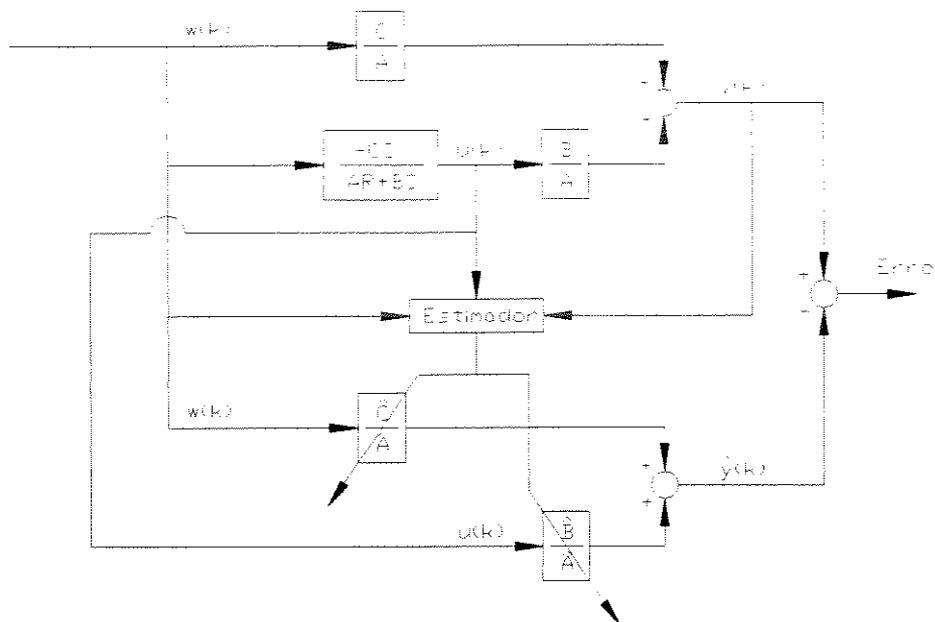


Figura 3.5 : Diagrama esquemático do sistema de estimação dos parâmetros da planta de controle acústico

No processo de estimação deseja-se que toda a planta seja estimada, portanto os polinômios A , B e C serão estimados em um total de 9 parâmetros.

Escrevendo a planta definida na equação (3.1) na forma parametrizada definida na seção 2.2.1, encontra-se

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + a_3 y(k-3) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 y(k-2) + c_0 w(k) + c_1 w(k-1) + c_2 w(k-2)$$

onde os termos a_i , b_i e c_i representam os parâmetros a serem estimados.

Separando os sinais de entrada e saída, isto é, os regressores φ , dos parâmetros a serem estimados, isto é, θ , encontra-se

$$\varphi(k) = [-y(k-1) \ -y(k-2) \ -y(k-3) \ u(k) \ u(k-1) \ y(k-2) \ w(k) \ w(k-1) \ w(k-2)]^T$$

$$\theta(k) = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_0 \ b_1 \ b_2 \ c_0 \ c_1 \ c_2]^T$$

Portanto, $P(k)$, a inversa da matriz de covariância $R(k)$, tem dimensão 9×9 , o vetor dos regressores $\varphi(k)$ tem dimensão 9×1 e o vetor dos parâmetros estimados $\hat{\theta}(k)$ tem dimensão 9×1 .

Os parâmetros iniciais de estimação serão adotados em função do tipo de estimador aplicado e da característica que se deseja observar.

Para o método dos mínimos quadrados ordinário, conforme mencionado na seção 2.2.7.1, o desempenho depende apenas do valor inicial de $P(k)$, isto é, $P(0)$. Assim, será estudada a influência deste valor nas estimativas dos parâmetros da planta. Para que o valor inicial de $\theta(k)$ não interfira nas estimativas seu valor será adotado como um vetor de zeros e os testes serão realizados para $P(0) = 1*I$, $P(0) = 10*I$, $P(0) = 100*I$, $P(0) = 1000*I$.

Para o método dos mínimos quadrados com esquecimento exponencial, conforme mencionado na seção 2.2.7.2, o desempenho depende do valor do fator de esquecimento λ . Assim, será estudado a influência deste valor nas estimativas dos parâmetros da planta. Para que o valor inicial de $\theta(k)$ não interfira nas estimativas seu valor será adotado como um vetor de zeros e também para que $P(0)$ não interfira nas estimativas seu valor será adotado como $1*I$. Os testes serão realizados para $\lambda = 0.99$, $\lambda = 0.97$, $\lambda = 0.965$ e $\lambda = 0.999$ com $P(0) = 1000*I$.

Para o método dos mínimos quadrados com reinicialização da matriz de covariância, conforme mencionado na seção 2.2.7.3, o desempenho depende do valor do tempo de reinicialização ξ e para qual valor $P(k)$ será reinicializada. Assim, será estudado a influência destes valores nas estimativas dos parâmetros da planta. Para que o valor inicial de $\theta(k)$ não interfira nas estimativas seu valor será adotado como um vetor de zeros.

Os testes serão realizados em duas etapas:

A primeira etapa será verificar a influência do valor para o qual $P(k)$ será reinicializada; para tanto será mantido o tempo de reinicialização $\xi = 50$ iterações e $P(0)$ irá variar de $1*I$, $10*I$, $100*I$ e $1000*I$.

A segunda etapa consiste em verificar qual a influência do tempo de reinicialização; para tanto será mantido o valor de $P(0) = 1000*I$ e o tempo de reinicialização ξ variando de 250, 125, 75 e 50 iterações.

Nas duas etapas $P(k)$ será reinicializada para o seu valor inicial, isto é, para $P(0)$.

3.1.4 Controle Adaptativo

O processo de estimação definido na seção 3.1.3 será utilizado para verificar qual a melhor inicialização do estimador para ser aplicado ao controle adaptativo auto-sintonizado. Portanto o controle adaptativo será aplicado para cada estimador com a sua melhor inicialização.

Como mencionado na seção 2.3.2, para que a lei de controle não seja instável, ela será calculada pela seguinte equação

$$u(k) = -\frac{\hat{C}S}{\hat{A}R + \hat{B}S} w(k)$$

onde \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} representam as estimativas de A , B e C .

Desta forma garante-se que, se a dinâmica da resposta da planta estimada for próxima da dinâmica da resposta da planta real, então a dinâmica da lei de controle gerada pelos parâmetros estimados será próxima da dinâmica da lei de controle calculada com base no conhecimento dos parâmetros da planta real. E ainda, os pólos da lei de controle serão os pólos estabelecidos por A_0 , A_m e \hat{B}^+ .

O diagrama esquemático do controle adaptativo pode ser observado na Figura 3.6.

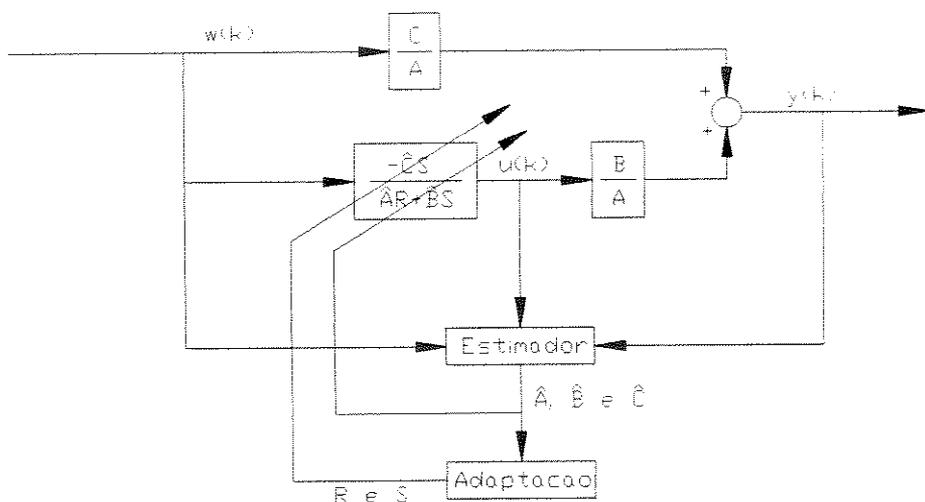


Figura 3.6 : Diagrama esquemático do controle adaptativo da planta de controle acústico

Além da lei de controle, também como mencionado na seção 2.3.2, já que não se conhecem os zeros estimados, é desejável manter todos no numerador da função de transferência de malha fechada, então \hat{B} será fatorado em

$$\hat{B} = B^+ B^- = \begin{cases} B^+ = 1 \\ B^- = b_0 z^2 + b_1 z + b_2 \end{cases}$$

Os graus dos polinômios R e S não serão alterados pela nova escolha de B^+ .

3.2 Controle de uma Suspensão Ativa

A seção anterior é útil para verificar o desempenho dos estimadores no controle adaptativo auto-sintonizado em uma planta com parâmetros constantes. Nesta seção o método será aplicado em um sistema com parâmetros variantes no tempo. Além disso o número de parâmetros a serem estimados será aumentado substancialmente e serão utilizados vários tipos de entrada (degrau unitário, determinística e estocástica).

3.2.1 Definição da Planta de uma Suspensão Ativa

Nesta seção será feito o equacionamento de uma suspensão veicular ativa representando 1/4 de veículo com 2 graus de liberdade e massa variante no tempo. O desenho estrutural é apresentado na Figura 3.7.

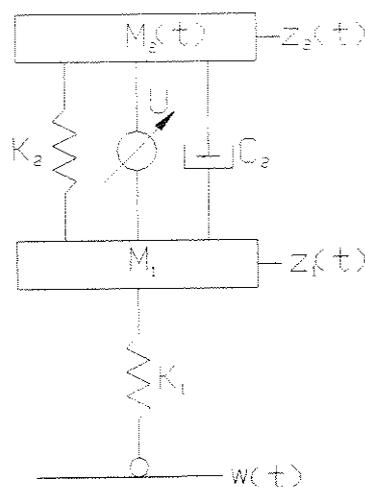


Figura 3.7 : Suspensão ativa de 2 graus de liberdade com massa variante no tempo

A massa do veículo que tem característica de variação no tempo é a massa M_2 .

Serão consideradas massas concentradas e forças pontuais aplicadas no mesmo eixo, isto é, desprezando qualquer tipo de momento no modelo. Então o diagrama de corpo livre é dado na Figura 3.8.

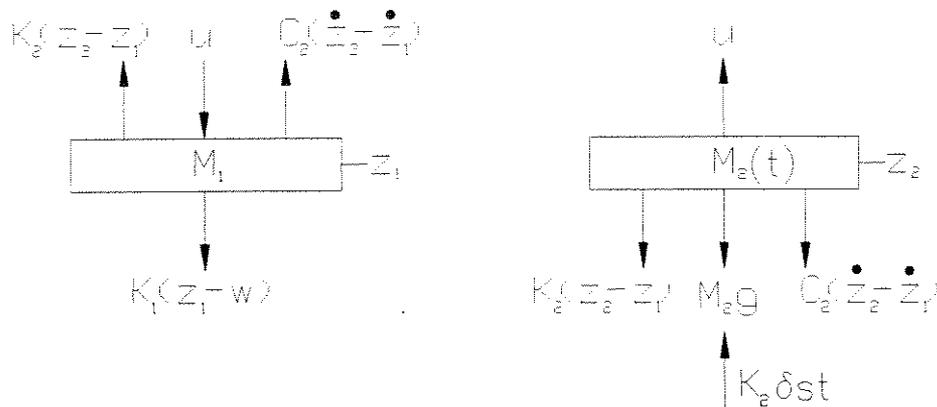


Figura 3.8 : Diagrama de corpo livre da suspensão ativa

onde :	$M_2(t)$: massa da suspensão variante no tempo	[Kg]
	K_2 : rigidez da suspensão	[N/m]
	C_2 : amortecimento da suspensão	[Ns/m]
	M_1 : massa da roda	[Kg]
	K_1 : rigidez do pneu	[N/m]
	u : força do atuador	[N]
	z_2 : deslocamento da suspensão	[m]
	z_1 : deslocamento da roda	[m]
	w : perturbação da via	[m]
	δ_{st} : deflexão estática nominal	[m]
	g : aceleração da gravidade	[m/s ²]

A deflexão estática da suspensão é dada por

$$\delta_{st} = \frac{M_2^* g}{K_2^*}$$

onde o * representa os valores nominais de projeto da suspensão. E δ_{st} representa a deflexão estática nominal da suspensão.

Aplicando a somatória das forças no corpo 1, chega-se a

$$M_1 \ddot{z}_1 = K_2(z_2 - z_1) + C_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - K_1(z_1 - w) - u \quad (3.10)$$

Aplicando a somatória das forças no corpo 2, chega-se a

$$M_2 \ddot{z}_2 = -K_2(z_2 - z_1) - C_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + u - m_2 g + K_2 \delta_{st} \quad (3.11)$$

Escrevendo as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, encontra-se

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_1 w - u \\ u - M_2 g + K_2 \delta_{st} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

A equação (3.12) representa a equação de movimento do sistema. Para escrever a equação (3.12) na forma de estado, deve-se aplicar a seguinte mudança de variável

$$\begin{array}{ll} x_1 = z_1 & \dot{x}_1 = x_3 \\ x_2 = z_2 & \dot{x}_2 = x_4 \\ x_3 = \dot{z}_1 & \dot{x}_3 = \ddot{z}_1 \\ x_4 = \dot{z}_2 & \dot{x}_4 = \ddot{z}_2 \end{array} \Rightarrow$$

onde x_1 representa o deslocamento da roda, x_2 o deslocamento da suspensão, x_3 a velocidade da roda, x_4 a velocidade da suspensão.

Uma vez definida as variáveis de estado pode-se escrever a equação de movimento (3.12) na forma de estado. Para tanto, encontra-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{C_2}{M_1}(x_4 - x_3) + \frac{K_2}{M_1}(x_2 - x_1) - \frac{K_1}{M_1}(x_1 - w) - \frac{1}{M_1}u \\ \dot{x}_4 &= -\frac{C_2}{M_2}(x_4 - x_3) - \frac{K_2}{M_2}(x_2 - x_1) + \frac{1}{M_2}u - g + \frac{k_2 \delta_{st}}{M_2} \end{aligned}$$

A equação de estado é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) + F_c w(t) + G_c \\ y(t) &= C_c x(t)\end{aligned}\quad (3.13)$$

onde o subíndice c indica tempo contínuo, e

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1 + K_2}{M_1} & \frac{K_2}{M_1} & -\frac{C_2}{M_1} & \frac{C_2}{M_1} \\ \frac{K_2}{M_2} & -\frac{K_2}{M_2} & \frac{C_2}{M_2} & -\frac{C_2}{M_2} \end{bmatrix}\quad (3.14)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{M_1} \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \quad F_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad G_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g + \frac{K_2 \delta_{st}}{M_2} \end{bmatrix}$$

O vetor de estado G_c representa o vetor da variação da deflexão estática devido à variação de massa. Ele não tem excitação externa, sua função é proporcionar uma “excitação extra” devido a variação de massa.

A equação (3.13) representa o equacionamento da suspensão ativa. Para a suspensão passiva deve-se fazer $u(t) = 0$ ou simplesmente

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c x(t) + F_c w(t) + G_c(t) \\ y(t) &= C_c x(t)\end{aligned}\quad (3.15)$$

A forma de estado (3.13) da suspensão pode ser representada também por um modelo ARMAX somado com um termo independente, isto é

$$y(t) = \frac{B}{A} u(t) + \frac{C}{A} w(t) + \frac{G}{A}\quad (3.16)$$

Para tanto escolhe-se a matriz C_c que tenha apenas como resposta o deslocamento da massa M_2 , para isso basta fazer

$$C_c = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]\quad (3.17)$$

A função de transferência descrita por B/A é encontrada aplicando-se

$$G(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} B_c$$

e substituindo os valores, chega-se a

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\frac{s^2}{M_2} + \frac{K_1}{M_1 M_2}}{s^4 + \left(\frac{C_2}{M_1} + \frac{C_2}{M_2}\right)s^3 + \left(\frac{K_1}{M_1} + \frac{K_2}{M_1} + \frac{K_2}{M_2}\right)s^2 + \frac{K_1 C_2}{M_1 M_2}s + \frac{K_1 K_2}{M_1 M_2}} \quad (3.18)$$

Procedendo da mesma forma para a parte C/A , aplicando a transformação

$$G(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} F_c$$

e substituindo os valores, chega-se a

$$\frac{C(s)}{A(s)} = \frac{\frac{K_1 C_2}{M_1 M_2}s + \frac{K_1 K_2}{M_1 M_2}}{s^4 + \left(\frac{C_2}{M_1} + \frac{C_2}{M_2}\right)s^3 + \left(\frac{K_1}{M_1} + \frac{K_2}{M_1} + \frac{K_2}{M_2}\right)s^2 + \frac{K_1 C_2}{M_1 M_2}s + \frac{K_1 K_2}{M_1 M_2}} \quad (3.19)$$

Procedendo da mesma forma para a parte G/A , aplicando a transformação

$$G(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} G_c$$

e substituindo os valores, chega-se a

$$\frac{G(s)}{A(s)} = \frac{\left(\frac{K_2 \delta_{st}}{M_2} - g\right)s^2 + \left(\frac{K_2 C_2 \delta_{st}}{M_1 M_2} - \frac{C_2 g}{M_1}\right)s + \frac{\delta_{st} K_1 K_2}{M_1 M_2} + \frac{\delta_{st} K_2^2}{M_1 M_2} - \frac{g(K_2 + K_1)}{M_1}}{s^4 + \left(\frac{C_2}{M_1} + \frac{C_2}{M_2}\right)s^3 + \left(\frac{K_1}{M_1} + \frac{K_2}{M_1} + \frac{K_2}{M_2}\right)s^2 + \frac{K_1 C_2}{M_1 M_2}s + \frac{K_1 K_2}{M_1 M_2}} \quad (3.20)$$

Os valores da suspensão são retirados do trabalho de Hac (1987),

M_2^* : massa nominal da suspensão	= 250 Kg
K_2 : rigidez da suspensão	= 5.000 N/m
C_2 : amortecimento da suspensão	= 250 Ns/m
M_1 : massa da roda	= 25 Kg
K_1 : rigidez do pneu	= 100.000 N/m
δ_{st} : deflexão estática nominal	= 0.05 m
g : aceleração da gravidade	= 9.81 m/s ²

Será considerado o caso em que a massa $M_2(t)$ varia de 250 para 400 e depois para 150 kg, então pode-se extrair a tabela abaixo:

Tabela 3.1 : Valores da suspensão sem controle

massa M_2 [kg]	Frequência Natural [rad/s]	Fator de Amortecimento	Deflexão Estática [m]	Zeros de B discretos
250	4.3687 64.7437	0.1048 0.0779	0.05	-0.8066±0.5911i -0.9626
400	3.4524 64.7678	0.0882 0.0776	0.03924	-0.8066±0.5911i -0.9626
150	5.6437 64.70018	0.1342 0.0784	0.01472	-0.8066±0.5911i -0.9626

Para a discretização do sistema foi utilizada uma frequência de amostragem de 100 Hz.

3.2.2 Descrição do Controlador Polinomial

Antes de iniciar o projeto do controlador devem ser feitas duas observações:

A primeira observação é em relação ao ponto de operação em que o controlador será projetado. A massa da suspensão varia no tempo, mas o controlador será projetado para a massa nominal de 250 kg.

A segunda observação é em relação à referência que a suspensão deve acompanhar. Como é desejável que ela seja mantida na posição zero independentemente da deflexão estática, então a entrada de referência será sempre zero, e como consequência, não há necessidade de calcular o polinômio T da lei de controle.

O primeiro passo do controlador é verificar a existência de zeros instáveis ou que causam perda de robustez junto ao denominador da função de transferência de malha fechada e fatorar B de acordo com a equação (2.9). Os zeros de B estão apresentados na Tabela 3.1. Como percebe-se, eles não são instáveis mas irão causar perda de robustez. Portanto não deve ser efetuado o cancelamento destes zeros. Com isso a fatoração de B torna-se

$$B = B^+ B^- \begin{cases} B^+ = 1 \\ B^- = B = 1 \times 10^{-6} (0.1926z^3 - 0.1253z^2 - 0.1065z + 0.1855) \end{cases} \quad (3.21)$$

O segundo passo é determinar o modelo de referência de acordo com a equação (2.5); como a referência é zero, não há necessidade de utilizar a equação (2.10). Como o grau relativo de B/A é 1, então escolhe-se o modelo de referência discreto dado abaixo

$$\frac{B_m}{A_m} = \frac{0.0277z + 0.0246}{z^2 - 1.6499z + 0.7022} \quad (3.22)$$

Este modelo representa uma frequência natural de 25 rad/s e um fator de amortecimento de 0.707.

O terceiro passo é a determinação do polinômio A_0 de acordo com a equação (2.19). Como $\text{grau}(A) = 4$, $\text{grau}(A_m) = 2$ e $\text{grau}(B^+) = 0$, então $\text{grau}(A_0) \geq 5$. Escolhendo $\text{grau}(A_0) = 6$, e este polinômio é dado por

$$A_0 = z^6 - 2.1z^5 + 1.75z^4 - 0.7350z^3 + 0.1624z^2 - 0.0176z + 0.0007 \quad (3.23)$$

representando assim um polinômio cujas raízes são 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 e 0.6. Desta forma este polinômio é estável e com fator de amortecimento igual a 1.

O quarto passo é determinar a equação Diophantina a ser resolvida. Para tanto deve-se especificar se o controlador terá ação integral ou não e depois especificar os graus de R e S . Para encontrar o $\text{grau}(R)$ aplica-se a equação (2.22), encontrando $\text{grau}(R) = 4$. Admitindo-se a presença da ação integral simples, então $\text{grau}(S)$ deve ser escolhido igual ao $\text{grau}(R)$. Desta forma o sistema apresenta 7 equações ($\text{grau}(A_0A_m) = 6$, existindo assim 7 termos) com 7 incógnitas (3 de R e 4 de S). Resolvendo a equação Diophantina com ação integral simples e aplicando a equação

$$R = (z - 1)B^+ R_1$$

encontra-se para R e S

$$\begin{aligned} R &= z^4 + 1.2813z^3 - 0.7342z^2 - 1.9108z + 0.3637 \\ S &= 1 \times 10^7 (-0.7906z^4 + 2.7194z^3 - 3.2140z^2 + 1.4628z - 0.1754) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como mencionado anteriormente, para garantir a estabilidade da lei de controle, ela será calculada pela equação (2.35) dada na forma

$$u(k) = -\frac{CS}{AR + BS} w(k) - \frac{GS}{AR + BS}$$

O termo sem excitação é referente ao controle da variação da massa, sem o qual o controlador apresentaria deflexão estática igual à suspensão passiva.

Então pode-se montar o diagrama de blocos do controlador e da planta mostrado na Figura 3.9.

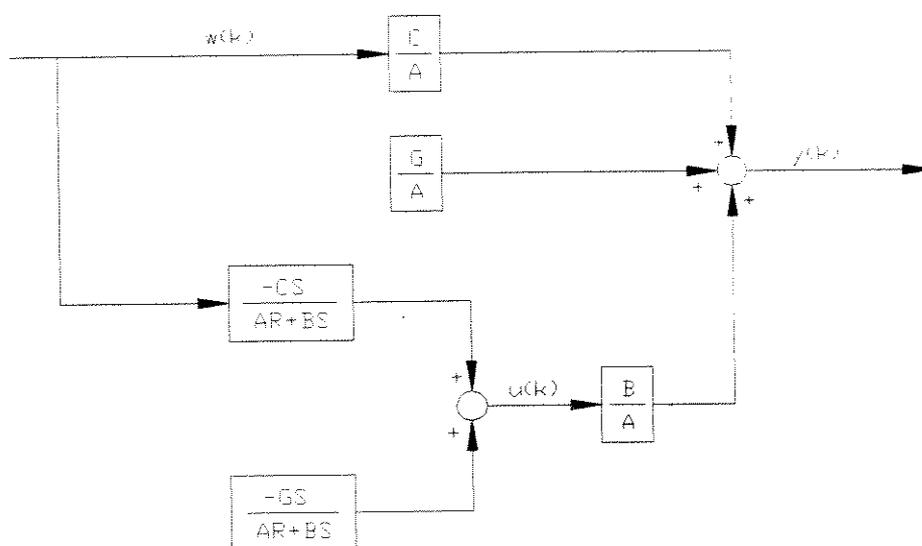


Figura 3.9 : Diagrama do controlador polinomial da suspensão ativa

Da Figura 3.9 percebe-se que a resposta controlada $y(k)$ é a soma da resposta passiva C/A , da variação da deflexão estática G/A e da resposta gerada por B/A . A lei de controle $u(k)$ é formada pela soma da parte que cancela a resposta da parte passiva formada por $GS/(AR + BS)$ com a parte que cancela a deflexão estática formada por $GS/(AR + BS)$.

3.2.3 Controle Adaptativo

Uma vez estabelecido o controlador utilizado, pode-se agora estabelecer as características do controle adaptativo.

Para aplicar os estimadores no processo adaptativo da suspensão toda a planta deverá ser estimada, isto é, os polinômios A , B , C e G serão estimados. Aplicando a discretização nas matrizes de estado definidas nas equações (3.13) e (3.14), encontra-se a equação (3.16) na forma discreta com seus termos definidos na equação abaixo

$$\begin{aligned}
y(k) = & \frac{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_4 z + a_5} u(k) \\
& + \frac{c_0 z^3 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3}{z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_4 z + a_5} w(k) \\
& + \frac{g_0 z^3 + g_1 z^2 + g_2 z + g_3}{z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_4 z + a_5}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

onde a_i , b_i , c_i e g_i representam os coeficientes que serão estimados.

Como pode ser observado existem 4 termos de A , 4 termos de B , 4 termos de C e 4 termos de G para serem estimados. Escrevendo a equação (3.25) na forma parametrizada, encontra-se para o vetor dos regressores φ e para o vetor dos parâmetros estimados θ

$$\begin{aligned}
\varphi(k) = & \begin{bmatrix} -y(k-1) & -y(k-2) & -y(k-3) & -y(k-4) & \dots \\ u(k) & u(k-1) & u(k-2) & u(k-3) & \dots \\ w(k) & w(k-1) & w(k-2) & w(k-3) & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \end{bmatrix}^T \\
\theta(k) = & [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ b_0 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3 \ g_0 \ g_1 \ g_2 \ g_3]^T \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Portanto a matriz $P(k)$ terá dimensão 16x16 e seu valor inicial será δI , onde δ será um número positivo real e I a matriz identidade de dimensão 16x16. O vetor dos parâmetros estimados $\theta(0)$ será um vetor de valor 0.01 com dimensão 16x1. A reinicialização da matriz de covariância será definida pelo intervalo ξ de iterações e ela será reinicializada para seu valor inicial.

A escolha de $\theta(0) = 0.01$ será feita para permitir que na primeira iteração do processo adaptativo possam ser calculados os polinômios R e S e portanto que seja também calculado $u(1)$.

A suspensão será simulada com as entradas degrau não unitário, determinística e estocástica e para cada tipo de entrada haverá dois tipos de variação de massa definidas abaixo.

Variação de massa do tipo 1 : A massa irá variar de 250 para 400 kg, esta variação ocorrerá de forma linear, e neste caso haverá influência da deflexão estática.

3.3 Motor de Corrente Contínua

Nesta seção será detalhado a formulação matemática de um motor de corrente contínua e será apresentado o esquema de estimação dos parâmetros a ser aplicado.

3.3.1 Definição da Planta de um Motor de Corrente Contínua

Para realizar o processo de estimação dos parâmetros será utilizada uma entrada em corrente. Devido a esta característica o sistema a ser estimado é de primeira ordem e é dado por

$$\frac{W(z)}{I(z)} = \frac{b_0}{z + a_0} \quad (3.27)$$

onde $W(z)$: rotação do motor [rad/s]
 $I(z)$: corrente de entrada [A]

3.3.2 Estimação Experimental do Motor de Corrente Contínua

O esquema de estimação a ser aplicado está representado na Figura 3.11

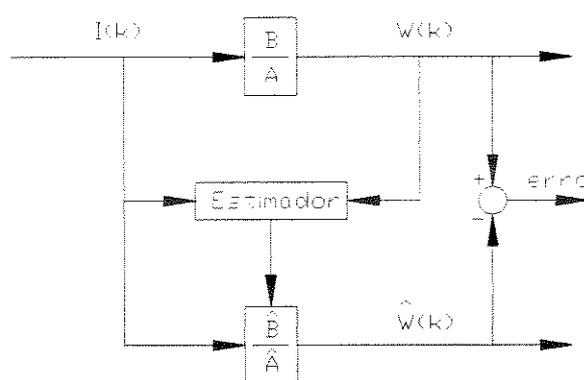


Figura 3.11 : Esquema do processo de estimação dos parâmetros do motor de corrente contínua

Na Figura 3.11, B/A representa a planta do motor definida na equação (3.27). A entrada $I(k)$ representa a entrada efetiva de corrente que é cedida ao motor e $W(k)$ é a rotação de saída do motor. \hat{B} e \hat{A} são as estimativas de B e A geradas pelo estimador e $\hat{W}(k)$ é a resposta em rad/s gerada pela função de transferência \hat{B}/\hat{A} .

Para realizar a estimativa dos parâmetros do motor de corrente contínua deve-se escrever a equação (3.27) na forma parametrizada, então

$$W(k) + a_1 W(k-1) = b_0 I(k)$$

Separando os sinais de entrada e saída dos parâmetros da planta, encontra-se

$$\varphi = [-W(k-1) \quad I(k)]^T$$

e

$$\theta = [a_1 \quad b_0]^T$$

Portanto, 2 parâmetros serão estimados, então a matriz $P(k)$ tem dimensão 2×2 e o vetor dos parâmetros estimados $\theta(k)$ tem dimensão 2×1 .

Capítulo 4

Análise dos Resultados

Neste capítulo será realizada a simulação dos problemas propostos no capítulo 3 para verificar se os estimadores e o controle adaptativo operam convenientemente.

4.1 Simulação do Sistema de Controle Acústico

Como mencionado anteriormente, este exemplo passará por três etapas.

Na primeira etapa será feita a comparação do controlador sem ação integral e com ação integral, para verificar qual o tipo de controlador que atuará melhor para uma determinada faixa de frequência a que o sistema de controle acústico será submetido.

Na segunda etapa será observada qual a melhor inicialização para os estimadores definidos na seção 2.2.7, verificando seu desempenho para posterior aplicação no controle adaptativo auto-sintonizado.

Na terceira etapa será aplicado o controle adaptativo auto-sintonizado, para averiguar se o estimador mais o controlador atendem à necessidade de controlar o ruído da planta.

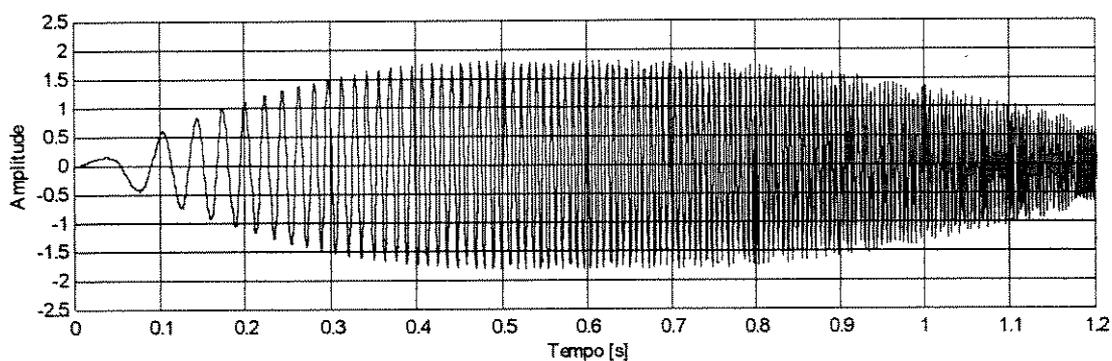
Para todos os gráficos desta seção em que o eixo x e o eixo y não forem especificados deve-se adotar a seguinte convenção:

EIXO X : representa o tempo de simulação dado em segundos;

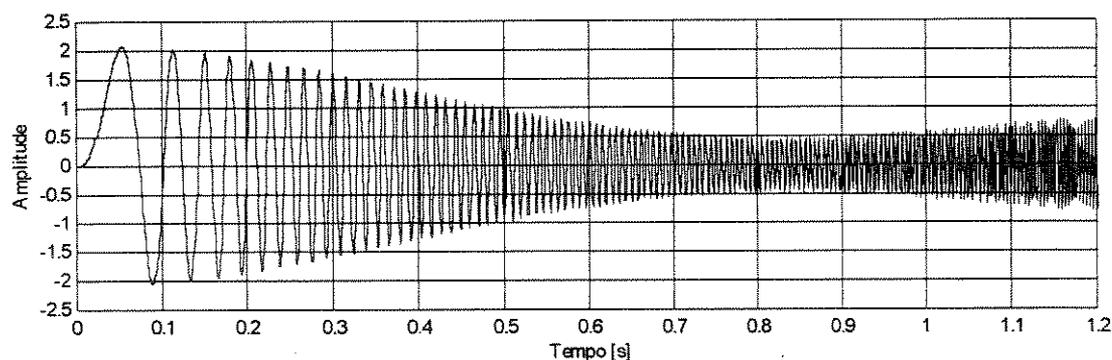
EIXO Y : representa a amplitude do sinal

4.1.1 Simulação do Controlador Polinomial

Para realizar o estudo do controlador polinomial será utilizada como entrada do sistema (entrada w) uma senoide variando de 0 a 250 Hz em 1.2 segundos. As duas formas do controlador são aplicadas e a amplitude da resposta controlada de cada um pode ser observada na Figura 4.1.



(a) - com ação integral



(b) - sem ação integral

Figura 4.1 : Comparação das respostas do sistema com controlador polinomial com e sem ação integral aplicados ao sistema de controle acústico

Como foi utilizado uma entrada em seno variando de 0 a 250 Hz em 1.2 segundos, então a Figura 4.1 representa também o desempenho do controlador na frequência.

Os diagramas da amplitude da resposta em frequência dos controladores encontram-se na Figura 4.2.

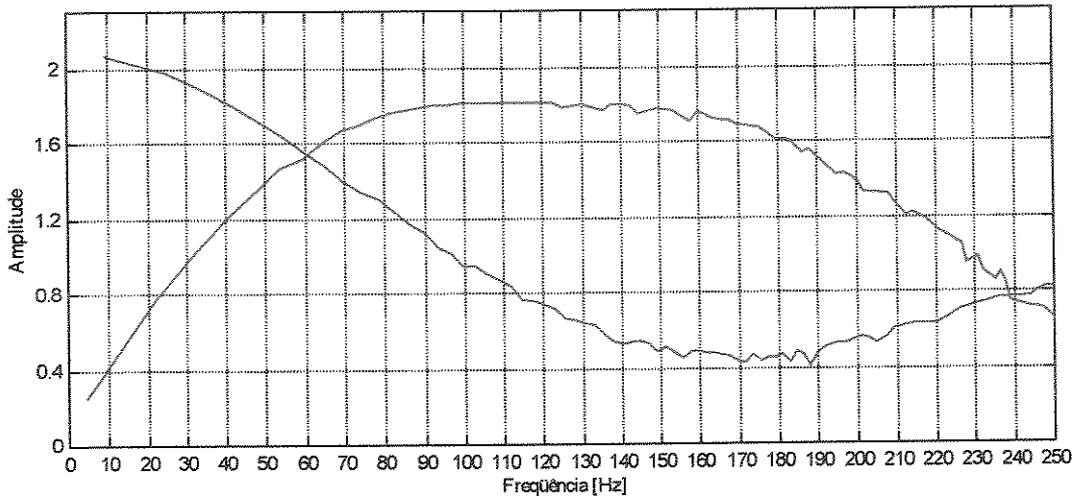


Figura 4.2 : Diagrama da amplitude da resposta em frequência dos controladores quando - linha azul representa a resposta do controlador sem ação integral e a linha vermelha representa a resposta do controlador com ação integral

O controlador que apresenta melhor desempenho é aquele que apresenta maior redução na amplitude do ruído. Observando a Figura 4.2 nota-se que existem faixas de frequência onde uma forma do controlador apresenta melhor desempenho que a outra. Desta maneira pode-se montar a Tabela 4.1 com a faixa de frequência e qual a forma do controlador que apresenta melhor desempenho.

Tabela 4.1 : Melhor forma do controlador para diversas faixas de frequência

Faixa de Frequência [Hz]	Forma do controlador
$f \leq 60$	com ação integral
$60 < f \leq 240$	sem ação integral
$240 < f \leq 250$	com ação integral

Para a observação dos métodos de estimação de parâmetros foi escolhida a faixa de frequência compreendida entre 6.25 a 25 Hz, simplesmente pela fácil observação dos resultados (visualmente torna-se melhor observar os gráficos gerados nesta faixa de frequência).

Devido à escolha da faixa de 6.25 a 25 Hz, então o melhor controlador é o que possui a ação integral, simulando novamente o sistema encontra-se a Figura 4.3.

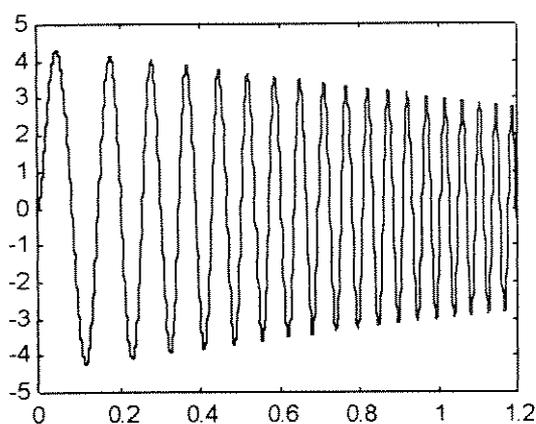
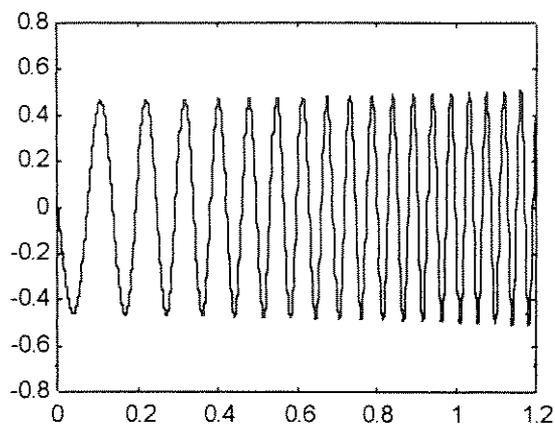
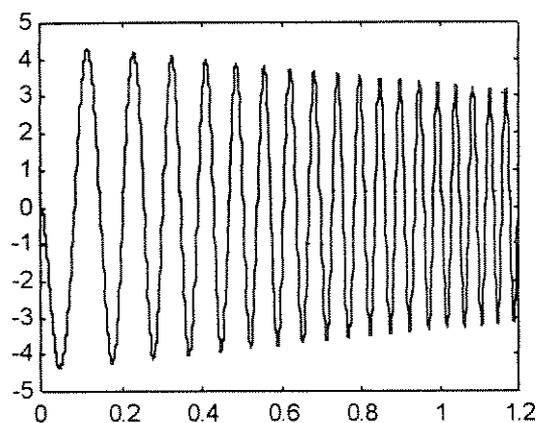
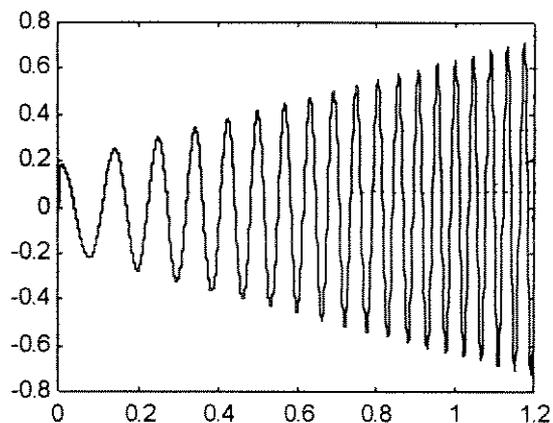
(a) resposta passiva y_p (b) lei de controle u (c) resposta do controlador y_α (d) resposta da planta controlada y

Figura 4.3 : Respostas do controlador polinomial com ação integral aplicado ao sistema de controle acústico

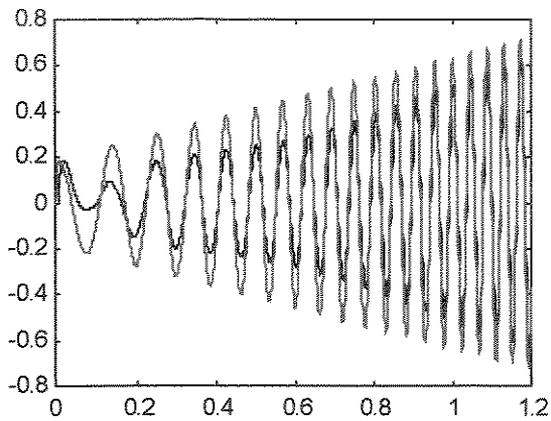
4.1.2 Simulação dos Métodos de Estimação de Parâmetros

Como mencionado no capítulo 3, para realizar a estimação dos parâmetros serão utilizadas as entradas e a saída geradas pelo controlador polinomial. Esta escolha é adequada porque no controle adaptativo auto-sintonizado o estimador deve funcionar nestas mesmas características, isto é, com as entradas e saída geradas pelo controlador polinomial.

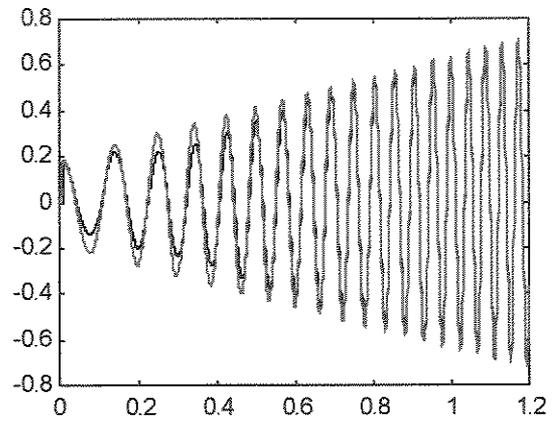
4.1.2.1 Simulação do Método dos Mínimos Quadrados Ordinário

Conforme mencionado na seção 2.3.7.1, o desempenho do método ordinário depende apenas do valor inicial de $P(k)$, isto é, $P(0)$. Assim, será estudada nesta seção a influência deste

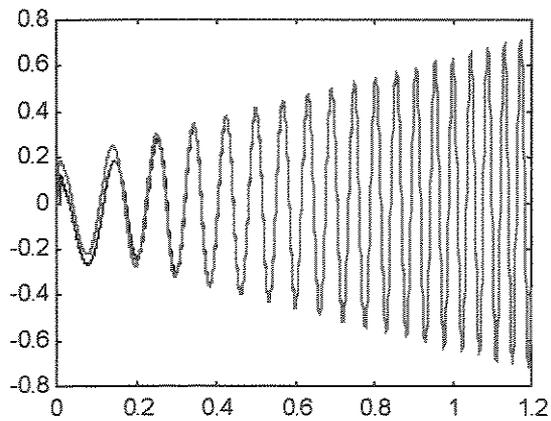
valor. Os resultados encontram-se na Figura 4.4, onde foram utilizados os valores de $\delta = I*I$, $10*I$, $100*I$ e $1000*I$.



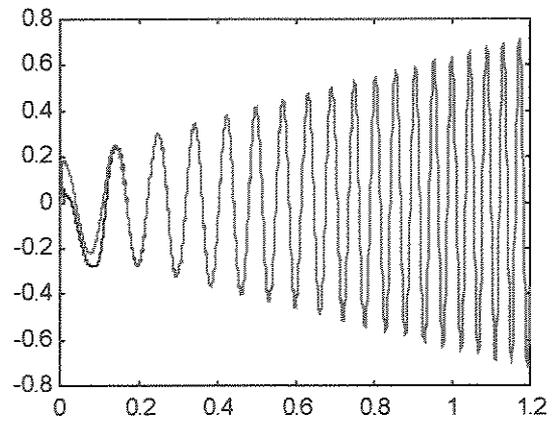
(a) $P(0) = I*I$



(b) $P(0) = 10*I$



(c) $P(0) = 100*I$



(d) $P(0) = 1000*I$

Figura 4.4 : Comparação da resposta real e da resposta estimada gerada pelo método ordinário com diferentes $P(0)$ aplicado ao sistema de controle acústico, onde a linha vermelha representa a resposta real $y(k)$ e a linha preta representa a resposta estimada $\hat{y}(k)$

Observa-se através da Figura 4.4 que aumentando o valor da matriz $P(0)$, a resposta estimada tende mais rapidamente para a resposta real, o que está de acordo com o esperado [Aström e Wittenmark (1989); Ljung (1987)].

A diferença entre a resposta real a resposta estimada podem ser observada na Figura 4.5.

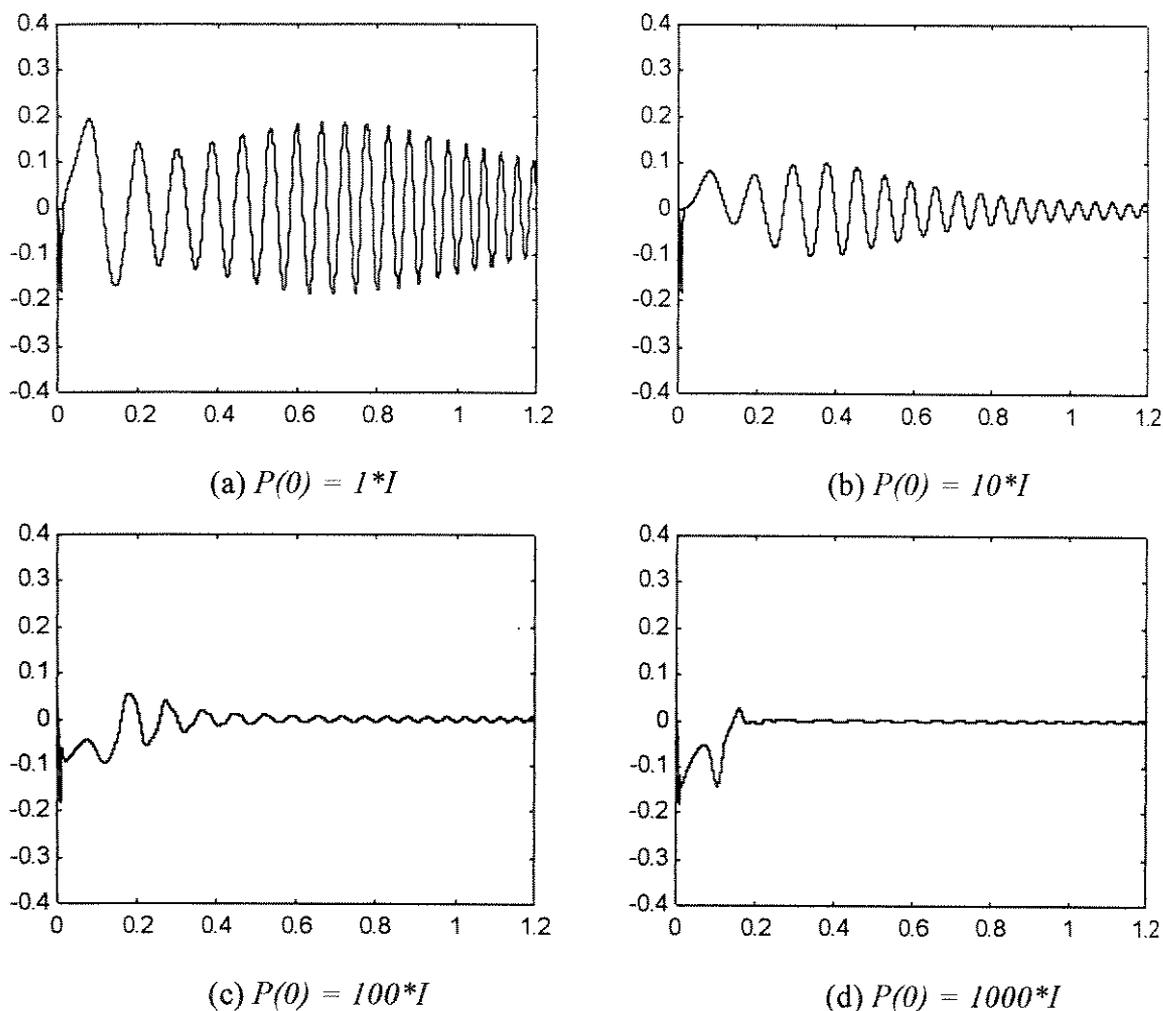


Figura 4.5 : Diferença entre a resposta real e a resposta estimada gerada pelo método ordinário com diferentes $P(0)$ aplicado ao sistema de controle acústico

O erro apresentado na Figura 4.5 não é o erro do estimador definido pela equação (2.56) e sim a diferença entre a resposta real e a resposta estimada dada na Figura 3.5, isto é,

$$erro = y(k) - \hat{y}(k)$$

Observa-se que todos os erros tendem para zero mas o mais rápido foi o de maior $P(0)$. Pode-se perceber a existência de um nível de saturação para $P(0)$, isto é, a partir de um certo valor não adianta aumentar $P(0)$ que o resultado permanecerá o mesmo.

A Figura 4.6 mostra o comportamento dos parâmetros estimados para $P(0) = 1*I$ e $P(0) = 1000*I$.

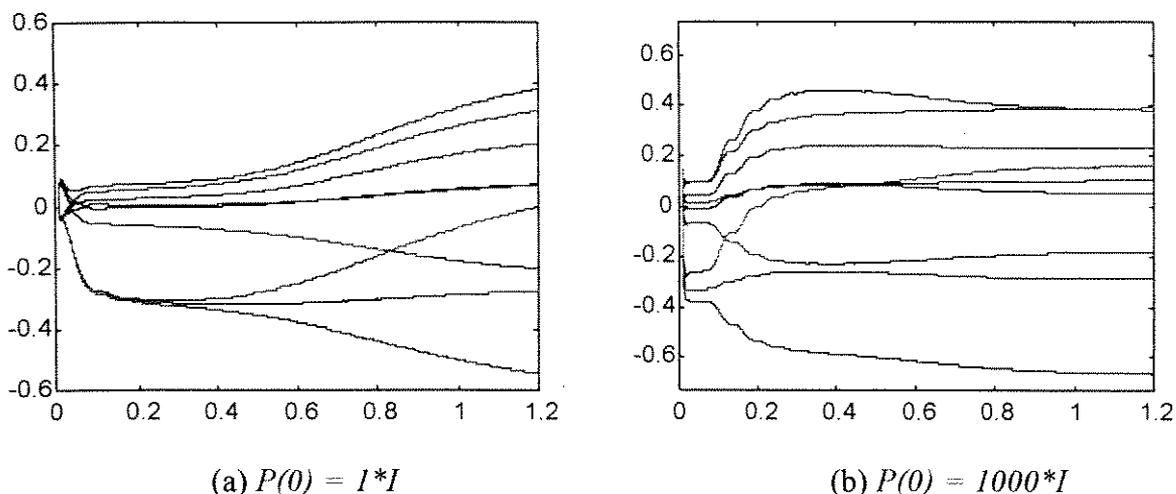


Figura 4.6 : Convergência dos parâmetros estimados pelo método ordinário com diferentes $P(0)$ aplicado ao sistema de controle acústico

Observa-se claramente na Figura 4.6 que a estimativa dos parâmetros melhora com o aumento de $P(0)$, isto é as estimativas estabilizam-se rapidamente na Figura 4.6b enquanto que na Figura 4.6a as estimativas ainda estão na fase transitória.

Outra constatação, comparando-se os resultados obtidos na Figura 4.6 com os valores dos parâmetros reais da planta, é que as estimativas podem não representar os valores reais, mas a resposta estimada representa a resposta real. Isto porque existe um sistema estimado cujos pólos e zeros estão próximos aos pólos e zeros reais da planta que com a excitação utilizada o sistema estimado apresenta a mesma resposta da planta real. Quanto mais rico em frequência for o sinal de excitação, mais próximos serão os pólos e zeros estimados dos pólos e zeros da planta.

Outra constatação é que para esta excitação o estimador encontrou os parâmetros que tornam o erro do estimador [equação (2.56)] igual a zero e enquanto o erro se mantiver neste nível os parâmetros estimados continuarão os mesmos. Para que ocorra mudanças nos parâmetros deve ocorrer algum tipo de mudança no processo tais como : mudança do sinal de referência a ser acompanhado, mudança nos próprios parâmetros da planta, alteração da frequência de excitação, entre outros.

Na Figura 4.7 é apresentado o traço da matriz $P(k)$.

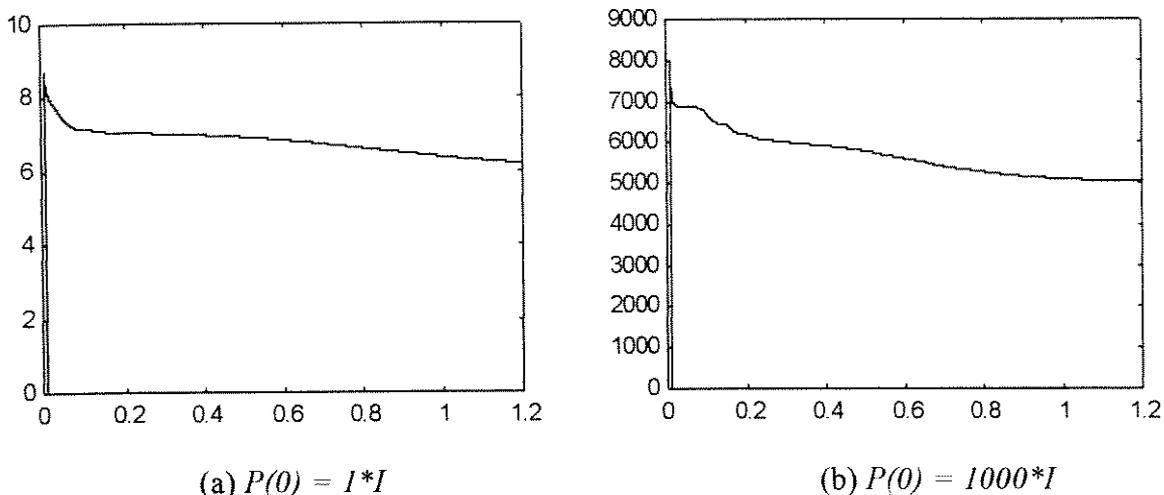


Figura 4.7 : Traço da inversa da matriz de covariância $P(k)$ gerada pelo método ordinário com diferentes $P(0)$ aplicado ao sistema de controle acústico

Observa-se que o traço de $P(k)$ tende para uma estabilização. Quando isto ocorre significa que o estimador aproxima-se dos valores dos parâmetros que torna o erro do estimador [equação (2.56)] igual a zero. Enquanto não houver mudanças no sistema o traço de $P(k)$ se manterá aproximadamente constante.

4.1.2.2 Simulação do Método dos Mínimos Quadrados com Esquecimento Exponencial

Conforme mencionado na seção 2.2.7.2, o desempenho do método com esquecimento exponencial depende da escolha do fator de esquecimento λ . Assim será estudada nesta seção a influência deste valor. Para que o valor inicial de $P(0)$ não interfira no resultado ele será escolhido como $P(0) = I * I$, e para $\theta(0)$ também não influenciar nas estimativas, seu valor inicial será um vetor nulo.

Será estudado o método de estimação com fator de esquecimento com $\lambda = 0.99, 0.97$ e 0.965 , e também com $P(0) = 1000 * I$ e $\lambda = 0.999$. Os resultados estão apresentados na Figura 4.8.

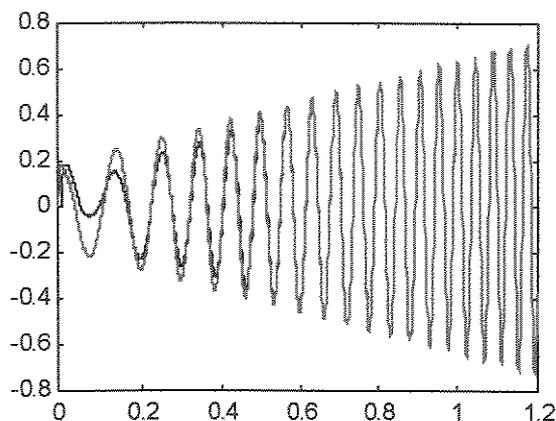
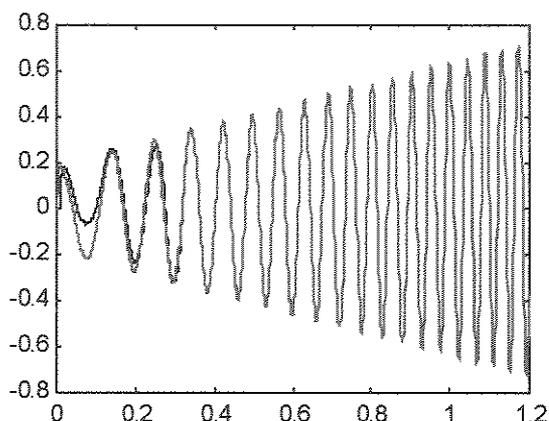
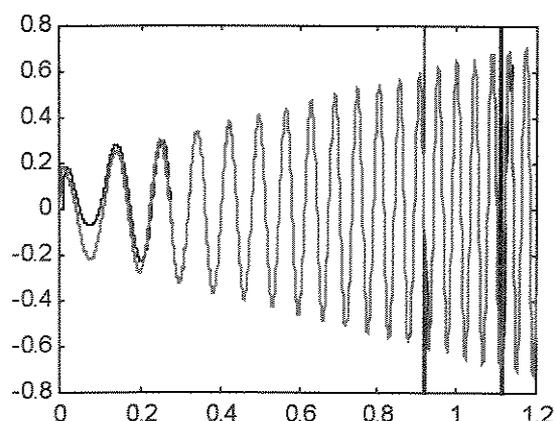
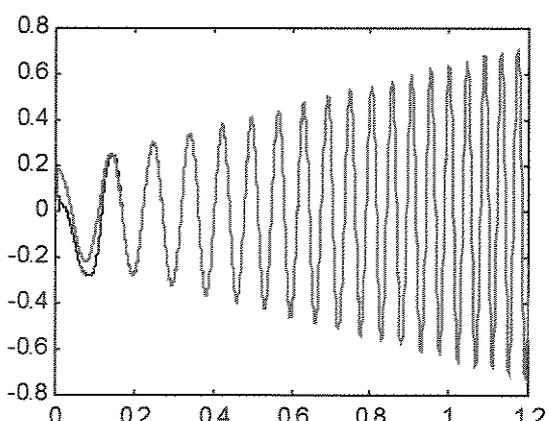
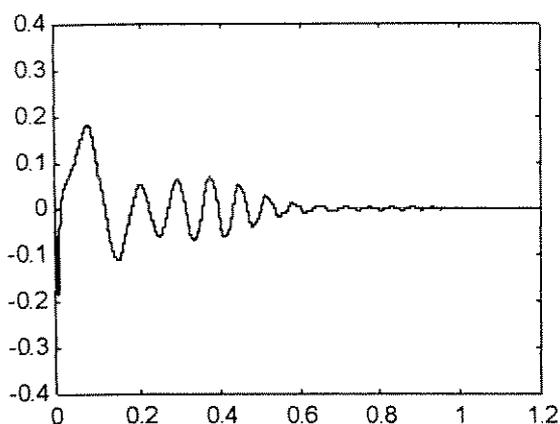
(a) $\lambda = 0.99; P(0) = I$ (b) $\lambda = 0.97; P(0) = I$ (c) $\lambda = 0.965; P(0) = I$ (d) $\lambda = 0.999; P(0) = 1000*I$

Figura 4.8 : Comparação da resposta real e da resposta estimada gerada pelo método exponencial com diferentes escolhas de λ aplicado ao sistema de controle acústico, onde a linha vermelha representa a resposta real $y(k)$ e a linha preta representa a resposta estimada $\hat{y}(k)$

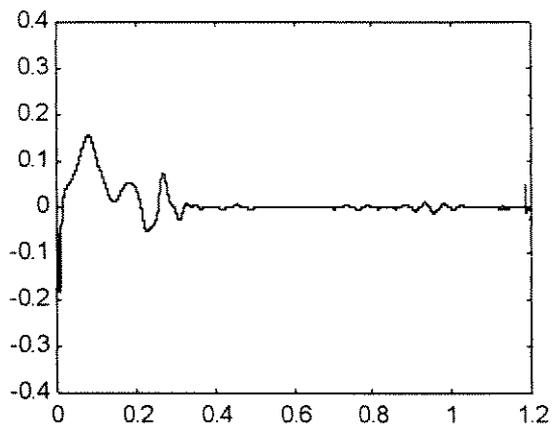
Observa-se que, diminuindo o fator de esquecimento de 0.99 para 0.97, ocorre uma convergência mais rápida. Este fato ocorre porque o fator de esquecimento aumenta o ganho $K(k)$ das estimativas como mencionado no final da seção 2.2.4. Mas quando $\lambda = 0.965$ (Figura 4.8c) o estimador diverge, porque o fator de esquecimento começa a interferir na matriz $P(k)$. Este fato será relatado mais a frente.

Na Figura 4.8d é evidente a influência do valor inicial de $P(0)$. Conseqüentemente o bom desempenho do estimador é proporcionado pela escolha de $P(0)$ e não pelo fator de esquecimento.

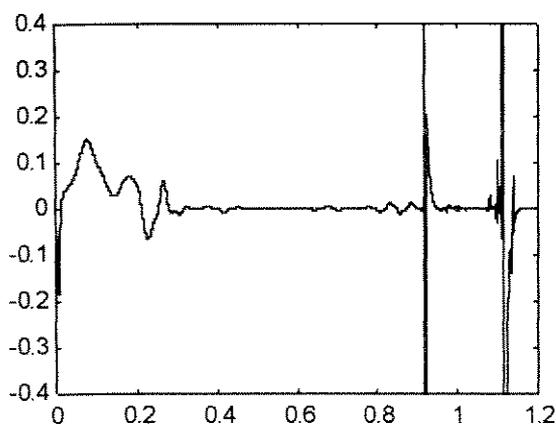
A diferença entre a resposta real e a resposta estimada pode ser observada na Figura 4.9.



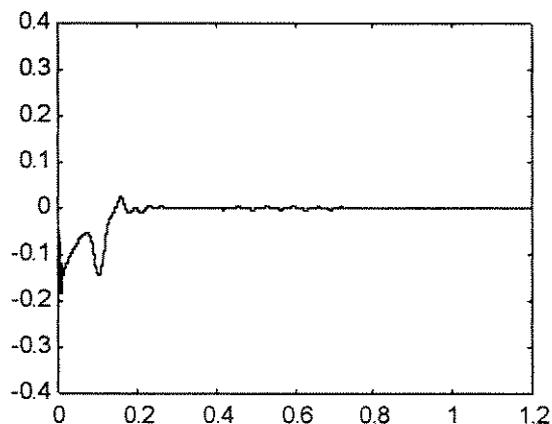
(a) $\lambda = 0.99; P(0) = I$



(b) $\lambda = 0.97; P(0) = I$



(c) $\lambda = 0.965; P(0) = I$



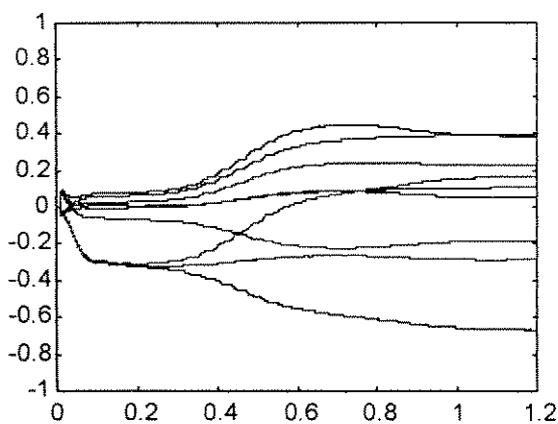
(d) $\lambda = 0.999; P(0) = 1000*I$

Figura 4.9 : Diferença entre a resposta real e a resposta estimada gerada pelo método exponencial com diferentes λ aplicado ao sistema de controle acústico

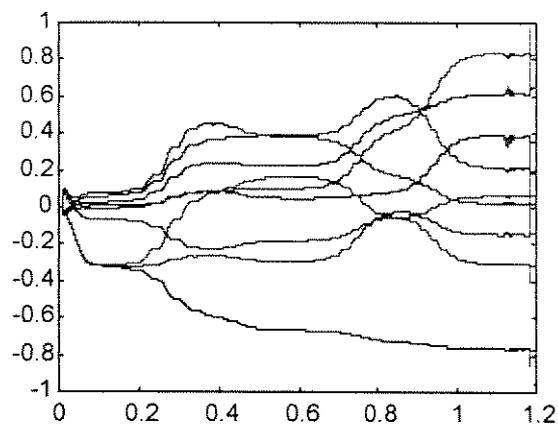
Observando a Figura 4.9 nota-se que a diferença entre a resposta real e a resposta estimada com a diminuição de λ tende para zero. Mas com $\lambda = 0.97$ já começa a existir instabilidade na estimativa dos parâmetros, o que ocorre devido ao crescimento exponencial de $P(k)$, que começa a interferir no ajuste dos parâmetros.

Quando $P(k)$ cresce exponencialmente significa que o sistema já encontrou os parâmetros que tornam o erro do estimador igual ou bem próximo a zero. No entanto, o valor de $P(k)$ passa a interferir nas estimativas. Além disso, como os parâmetros do exemplo são constantes, o efeito do crescimento de $P(k)$ torna-se mais visível.

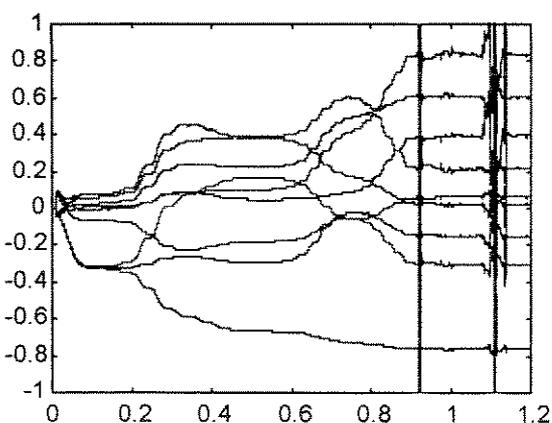
Na Figura 4.10 observa-se o que ocorre com a estimativa dos parâmetros.



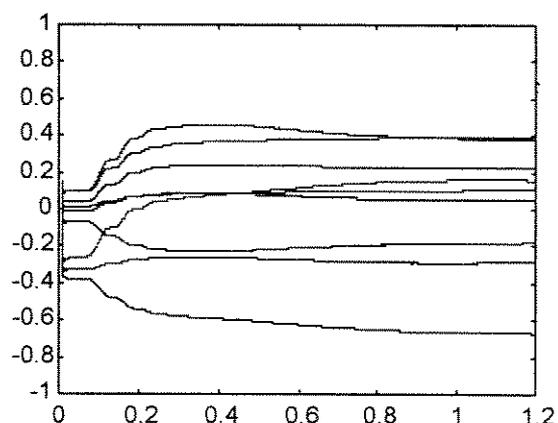
(a) $\lambda = 0.99; P(0) = I$



(b) $\lambda = 0.97; P(0) = I$



(c) $\lambda = 0.965; P(0) = I$



(d) $\lambda = 0.999; P(0) = 1000*I$

Figura 4.10 : Convergência dos parâmetros estimados pelo método exponencial com diferentes escolhas de λ aplicado ao sistema de controle acústico

Como pode ser notado na Figura 4.10, a convergência das estimativas ocorre de forma satisfatória apenas na Figura 4.10d, e razoavelmente na Figura 4.10a. Isto está associado com o crescimento de $P(k)$, que afeta os parâmetros estimados, podendo ser notado com detalhes na Figura 4.11.

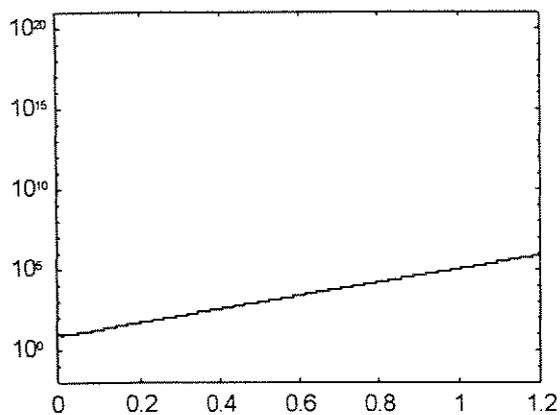
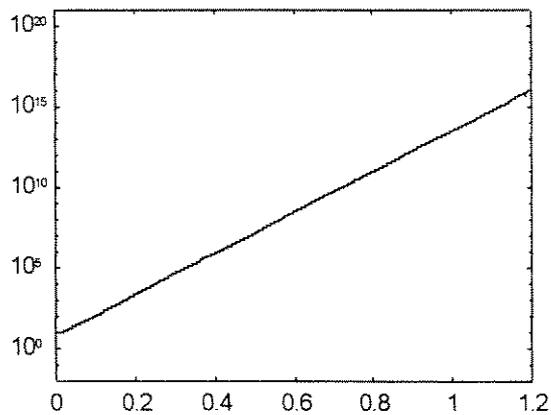
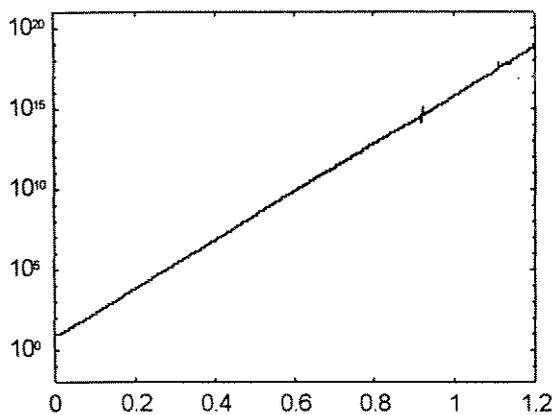
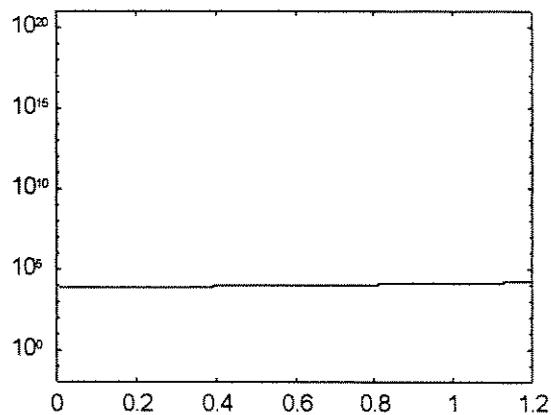
(a) $\lambda = 0.99; P(0) = I$ (b) $\lambda = 0.97; P(0) = I$ (c) $\lambda = 0.965; P(0) = I$ (d) $\lambda = 0.999; P(0) = 1000 * I$

Figura 4.11 : Traço da inversa da matriz de covariância $P(k)$ gerada pelo método exponencial com diferentes escolhas de λ aplicado ao sistema de controle acústico

Todos os fatores de esquecimento utilizados apresentam $P(k)$ crescente assumindo valores muito grandes e deteriorando as estimativas nos casos *b* e *c*. No entanto, com o passar do tempo todas as estimativas irão se deteriorar, mesmo quando utilizado um fator de esquecimento muito próximo a 1, como pode ser observado na Figura 4.11d.

Como mencionado na seção 2.2.7.2, quando o estimador encontra os valores ótimos, isto é, quando o erro do estimador tende para zero, a matriz $P(k)$ não sofre alteração, e neste caso ela torna-se

$$P(k) = \frac{P(k-1)}{\lambda}$$

e como λ é menor que 1 então $P(k)$ irá tender para o infinito. Quanto menor for o valor de λ mais rápido ocorre este fato. O crescimento do $P(k)$ interfere nas estimativas devido à equação (2.74)

$$K(k) = P(k)\varphi(k)$$

onde nota-se que se $P(k)$ tende para o infinito, $K(k)$ também tende para o infinito. Como mencionado na seção 2.2.4, $K(k)$ mostra como o erro e a estimativa anterior combinam-se para formar a nova estimativa dos parâmetros. Mesmo que o erro do estimador seja muito pequeno, se $K(k)$ for muito grande, a multiplicação de ambos causará ajustes bruscos nos parâmetros, o que pode ser comprovado nas figuras seguintes.

Devido a esta observação, o instante em que a resposta estimada começa a divergir corresponde ao mesmo instante que $P(k)$ oscila (este fato pode ser observado no instante 0.9 da Figura 4.10c, Figura 4.9c e Figura 4.8c).

A influência de $K(k)$ pode ser observada nas figuras abaixo.

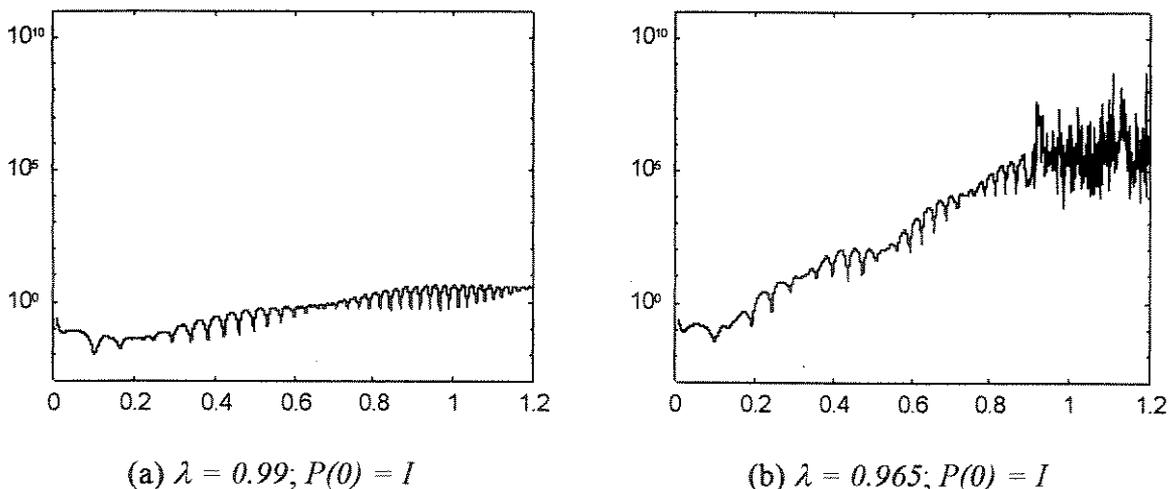


Figura 4.12 : Máximo valor de $K(k)$ gerado pelo método exponencial aplicado ao sistema de controle acústico

Comparando a Figura 4.12a com a Figura 4.12b, observa-se o crescimento de $K(k)$, mas na Figura 4.12b este é mais acentuado.

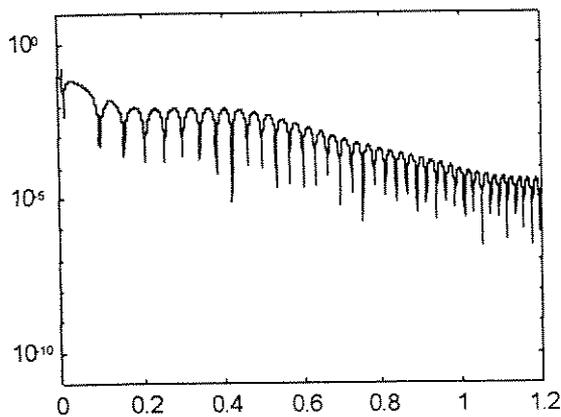
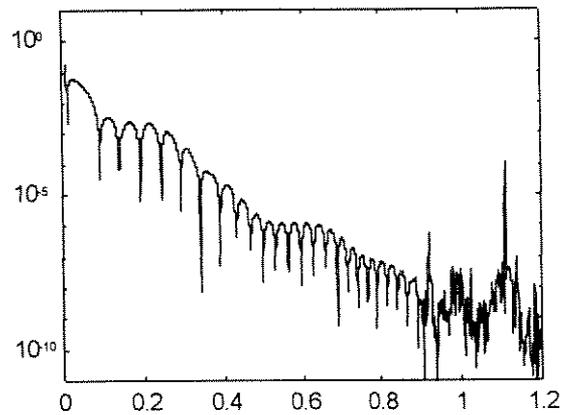
(a) $\lambda = 0.99; P(0) = I$ (b) $\lambda = 0.965; P(0) = I$

Figura 4.13 :Erro definido na equação (2.56) gerado pelo método exponencial aplicado ao sistema de controle acústico

Comparando a Figura 4.13a com a Figura 4.13b, observa-se que o erro do estimador diminui em ambos os casos.

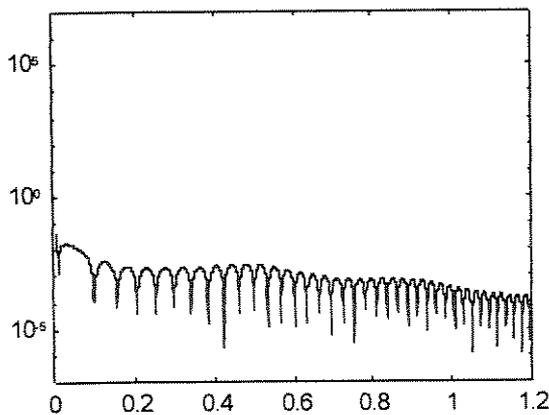
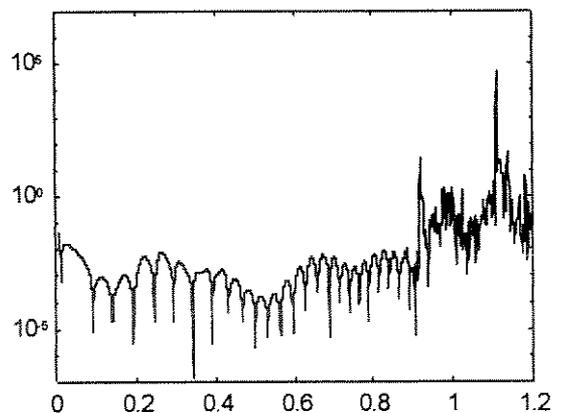
(a) $\lambda = 0.99; P(0) = I$ (b) $\lambda = 0.965; P(0) = I$

Figura 4.14 : Valor máximo do produto do erro pelo vetor de ganho $K(k)$ gerado pelo método exponencial aplicado ao sistema de controle acústico

O produto de $K(k)$ por $e(k)$ corresponde ao ajuste que os parâmetros sofrem. Como pode ser observado na Figura 4.14a este produto é sempre pequeno, mas na Figura 4.14b o produto acaba sofrendo um “salto”, e seu valor cresce o suficiente para causar um ajuste brusco dos parâmetros.

Portanto a seqüência de fatos ocorre da seguinte forma :

1° - O erro $e(k)$ do estimador tende para zero;

2° - $P(k)$ inicia seu crescimento e $K(k)$ também acompanha;

3° - $P(k)$ e $K(k)$ crescem até que o produto $K(k)$ por $e(k)$ sofra um salto brusco (Figura 4.14b - instante 0.9 segundo);

4° - Então $\theta(k)$ sofre um ajuste brusco (Figura 4.10c - instante 1 segundo).

4.1.2.3 Simulação do Método dos Mínimos Quadrados com Reinicialização da Matriz de Covariância

Conforme mencionado na seção 2.2.7.3, o desempenho do método de reinicialização da matriz de covariância depende da escolha do tempo de reinicialização e do valor para o qual ela será reinicializada. Portanto dois testes serão aplicados: primeiro mantendo o tempo de reinicialização constante e variando o valor inicial de $P(k)$; segundo mantendo o valor inicial e variando o tempo de reinicialização. Em ambos os testes a matriz $P(k)$ é reinicializada para o valor de $P(0)$.

Iniciando com o tempo de reinicialização ξ em 50 iterações e variando $P(0)$ com $1*I$, $10*I$, $100*I$ e $1000*I$, obtêm-se os resultados apresentados na Figura 4.15.

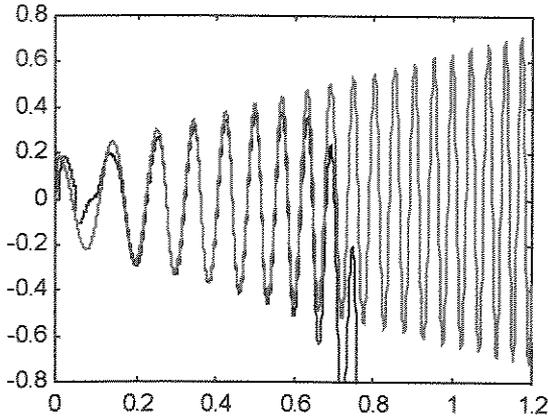
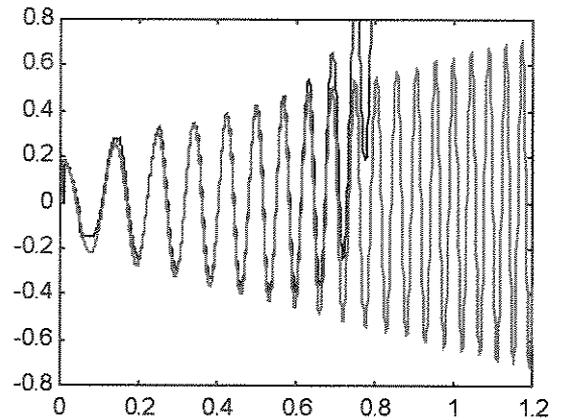
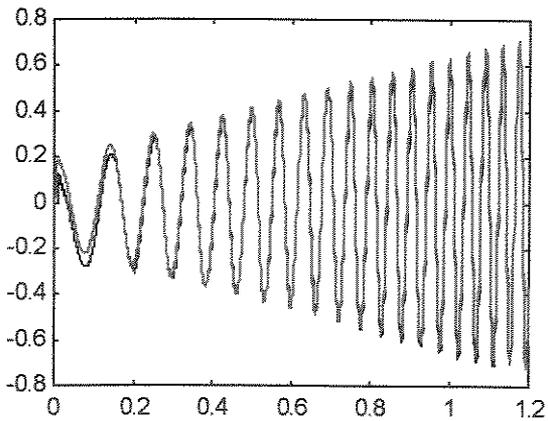
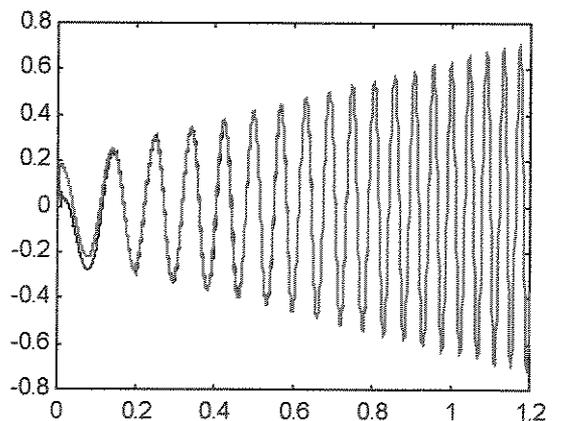
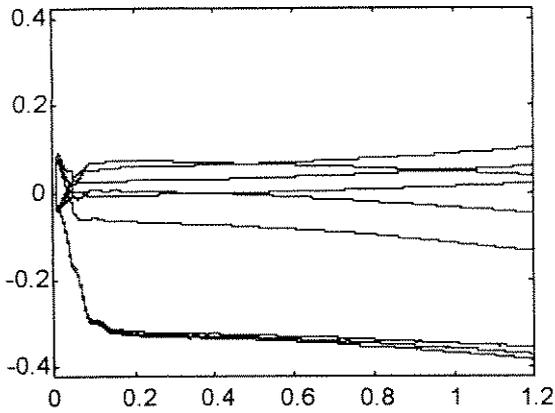
(a) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = I$ (b) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = 10*I$ (c) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = 100*I$ (d) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = 1000*I$

Figura 4.15 : Comparação da resposta real e da resposta estimada pelo método de reinicialização mantendo ξ constante e variando $P(0)$ aplicado ao sistema de controle acústico, onde a linha vermelha representa a resposta real $y(k)$ e a linha preta representa a resposta estimada $\hat{y}(k)$

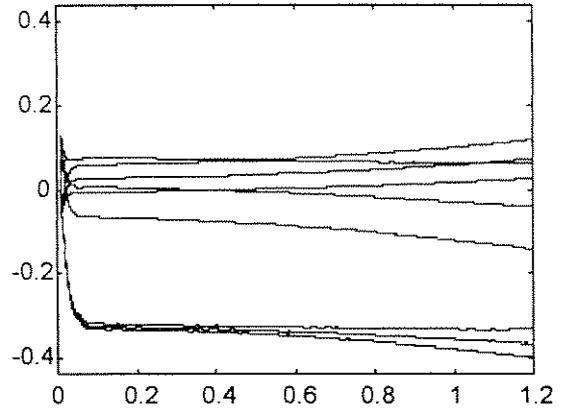
Observando a Figura 4.15 constata-se que mantendo o tempo de reinicialização $\xi = 50$ iterações e aumentando o valor para o qual $P(k)$ será reinicializada aumenta a convergência dos parâmetros.

As divergências encontradas na Figura 4.15a e Figura 4.15b são devidas à estimação de um pólo fora do círculo de raio unitário no plano discreto.

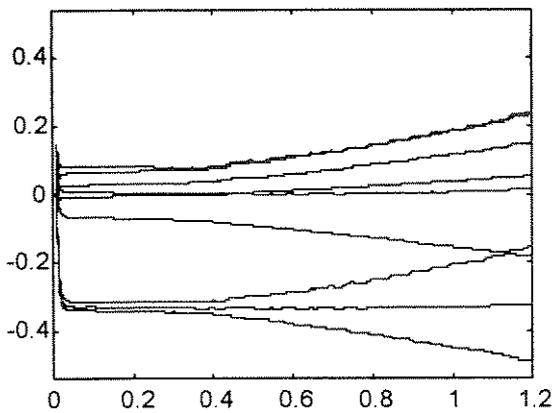
A Figura 4.16 apresenta os parâmetros estimados.



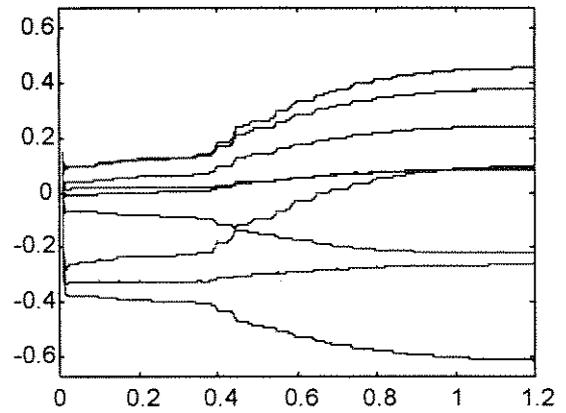
(a) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = I$



(b) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = 10*I$



(a) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = 100*I$



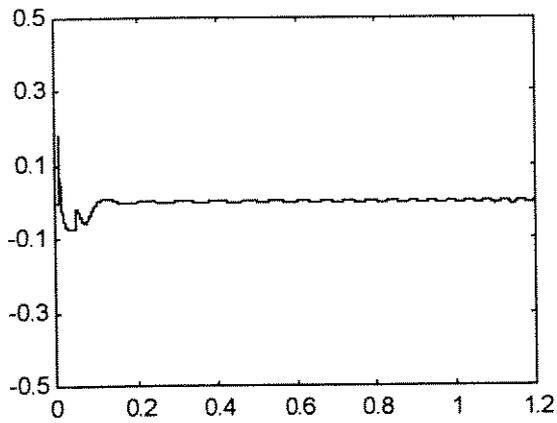
(b) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = 1000*I$

Figura 4.16 : Convergência dos parâmetros estimados pelo método de reinicialização mantendo ξ constante e variando $P(0)$ aplicado ao sistema de controle acústico

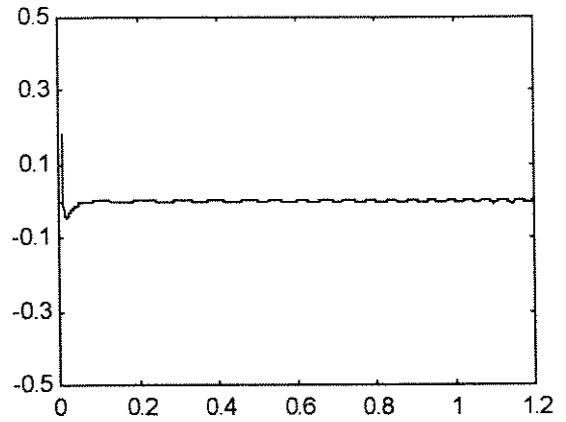
Observando a Figura 4.16, nota-se a tendência dos parâmetros estimados. A Figura 4.16a e a Figura 4.16b são bem parecidas e em ambas o sistema estimado diverge devido à estimação ser pobre e conseqüentemente ao aparecimento de um pólo discreto em 1.0568 e 1.0482 para a Figura 4.16a e Figura 4.16b respectivamente.

Aumentando o valor para o qual $P(k)$ será reinicializada, o problema do pólo instável estimado desaparece, e observa-se que passando $P(0)$ de $100*I$ para $1000*I$ há melhora nas estimativas, isto é, para $P(0) = 100*I$ os parâmetros ainda estão se ajustando, enquanto que em $P(0) = 1000*I$ eles praticamente já se ajustaram, no final da simulação.

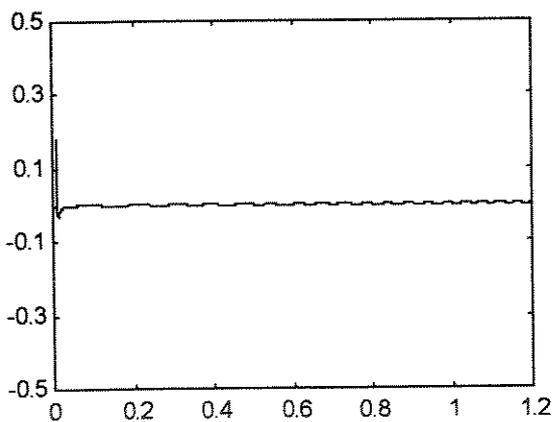
A Figura 4.17 apresenta o erro do estimador.



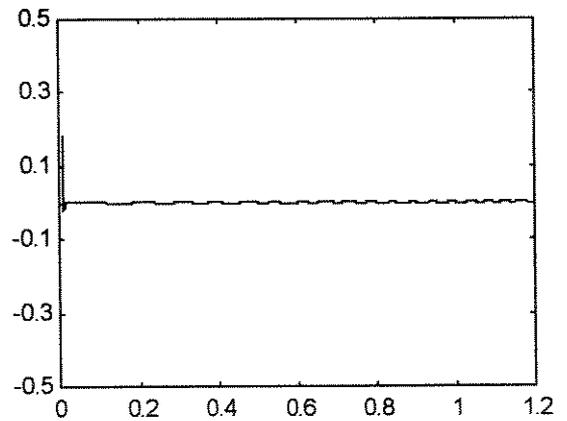
(a) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = I$



(b) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = 10*I$



(a) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = 100*I$



(b) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = 1000*I$

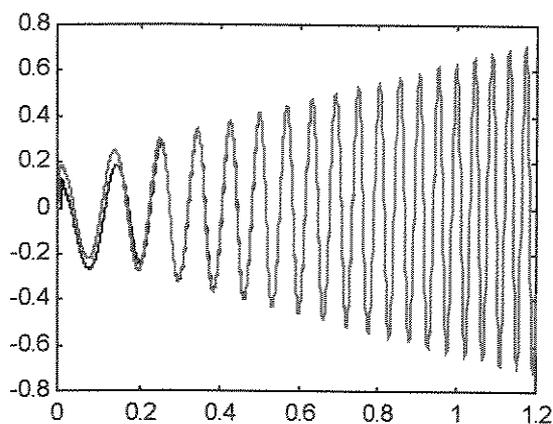
Figura 4.17 : Comparação do erro do estimador gerado pelo método de reinicialização mantendo ξ constante e variando $P(0)$ aplicado ao sistema de controle acústico

Na Figura 4.17 o erro apresentado é o erro do estimador, isto é

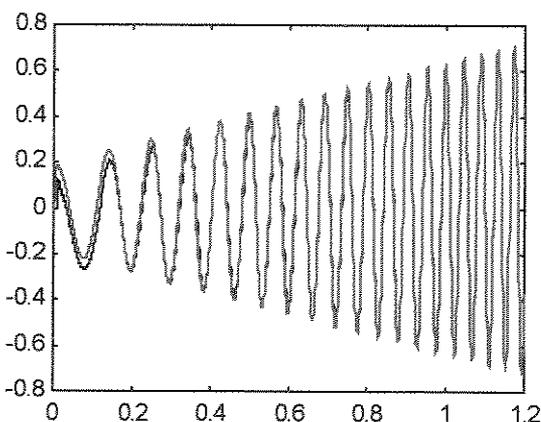
$$e(t) = y(t) - \varphi^T(t)\theta(t-1) \quad (2.56)$$

Na Figura 4.17 nota-se que o erro de todos os estimadores tende para zero. Mas, como observado na Figura 4.15, nos casos de $P(0) = 1*I$ e $P(0) = 10*I$, o sistema estimado diverge mas o erro da estimativa converge, o que comprova que nem sempre os valores estimados correspondem aos valores reais.

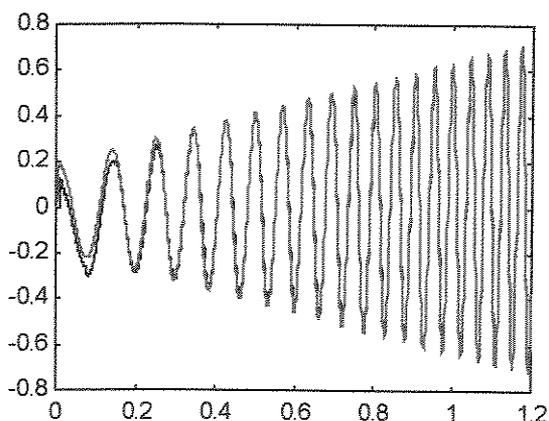
Os resultados apresentados na Figura 4.18 correspondendo ao segundo caso, isto é, mantendo-se $P(0) = 100*I$ e variando-se o tempo de reinicialização $\xi = 250, 125, 75$ e 50 .



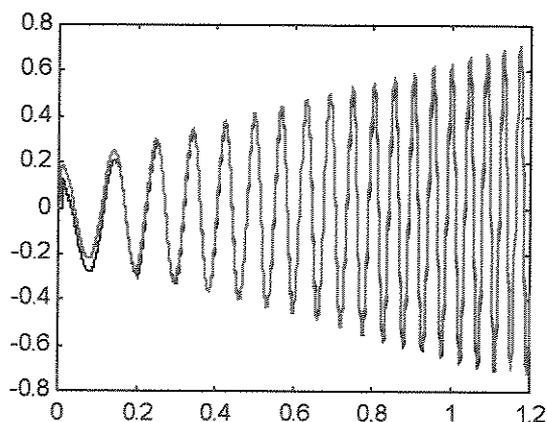
(a) $\xi = 250$ iterações; $P(0) = 100*I$



(b) $\xi = 125$ iterações; $P(0) = 100*I$



(c) $\xi = 75$ iterações; $P(0) = 100*I$



(d) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = 100*I$

Figura 4.18 : Comparação da resposta real e da resposta estimada gerada pelo método de reinicialização mantendo $P(0)$ constante e variando ξ aplicado ao sistema de controle acústico, onde a linha vermelha representa a resposta real $y(k)$ e a linha preta representa a resposta estimada $\hat{y}(k)$

Comparando as respostas real e estimada observa-se que com a diminuição do tempo de reinicialização ocorre uma piora nas estimativas, mostrando que há um termo de compromisso entre o tempo de reinicialização, observando o caso anterior, e o valor para o qual ela será reinicializada.

Detalhes da Figura 4.18 podem ser observados na Figura 4.19, sendo apresentada a diferença entre a resposta real e a resposta estimada.

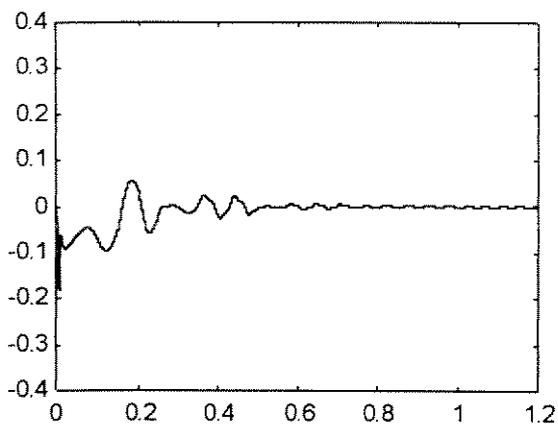
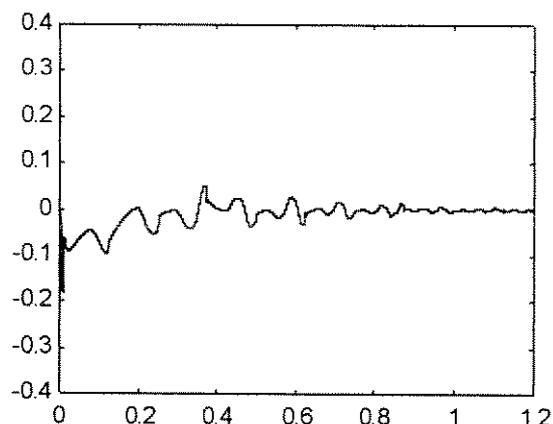
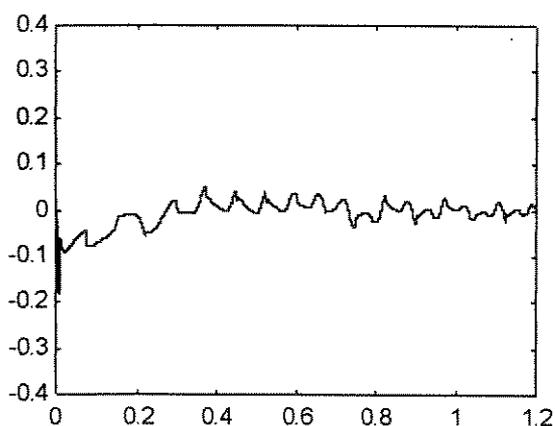
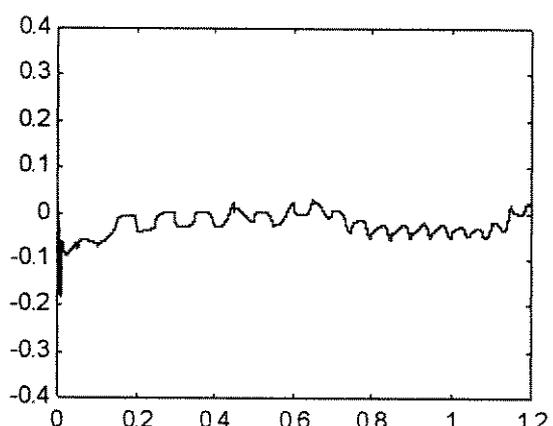
(a) $\xi = 250$ iterações; $P(0) = 100*I$ (b) $\xi = 125$ iterações; $P(0) = 100*I$ (c) $\xi = 75$ iterações; $P(0) = 100*I$ (d) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = 100*I$

Figura 4.19 : Diferença entre a resposta real e a resposta estimada gerada pelo método de reinicialização mantendo $P(0)$ constante e variando ξ aplicado ao sistema de controle acústico

Na Figura 4.19 fica mais claro que com a diminuição do tempo de reinicialização ocorre uma piora no sistema de estimação. Esta tendência é confirmada na Figura 4.20 com os parâmetros estimados, ficando bastante claro que os parâmetros estimados demoram mais para estabilizar.

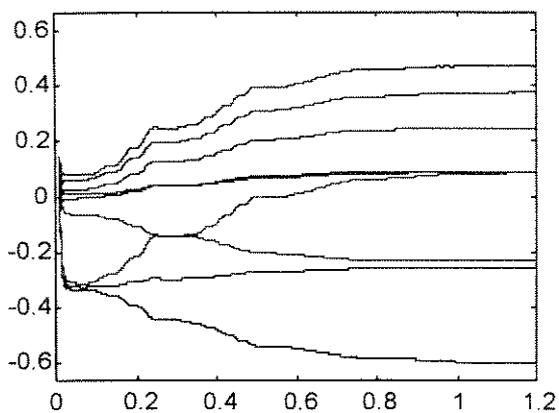
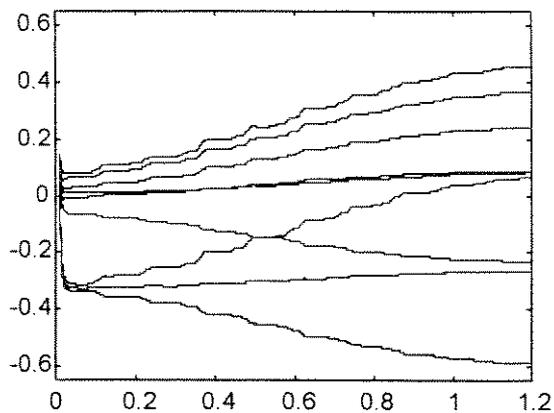
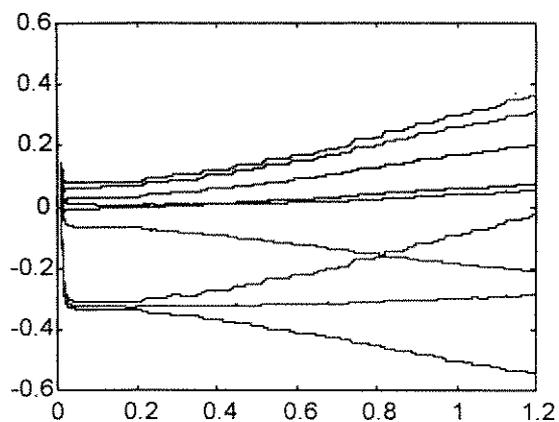
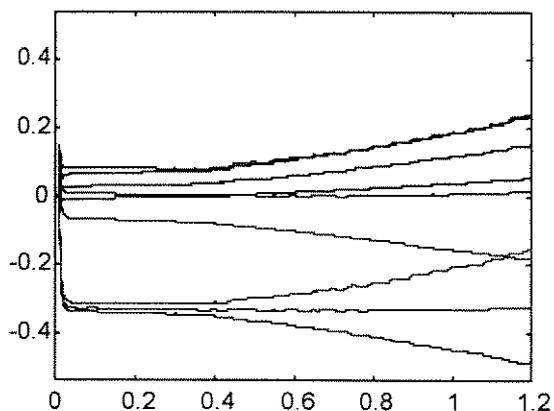
(a) $\xi = 250$ iterações; $P(0) = 100*I$ (b) $\xi = 125$ iterações; $P(0) = 100*I$ (c) $\xi = 75$ iterações; $P(0) = 100*I$ (d) $\xi = 50$ iterações; $P(0) = 100*I$

Figura 4.20 : Convergência dos parâmetros estimados pelo método de reinicialização mantendo $P(0)$ constante e variando ξ aplicado ao sistema de controle acústico

A Figura 4.21 representa o erro do estimador definido pela equação (2.56).

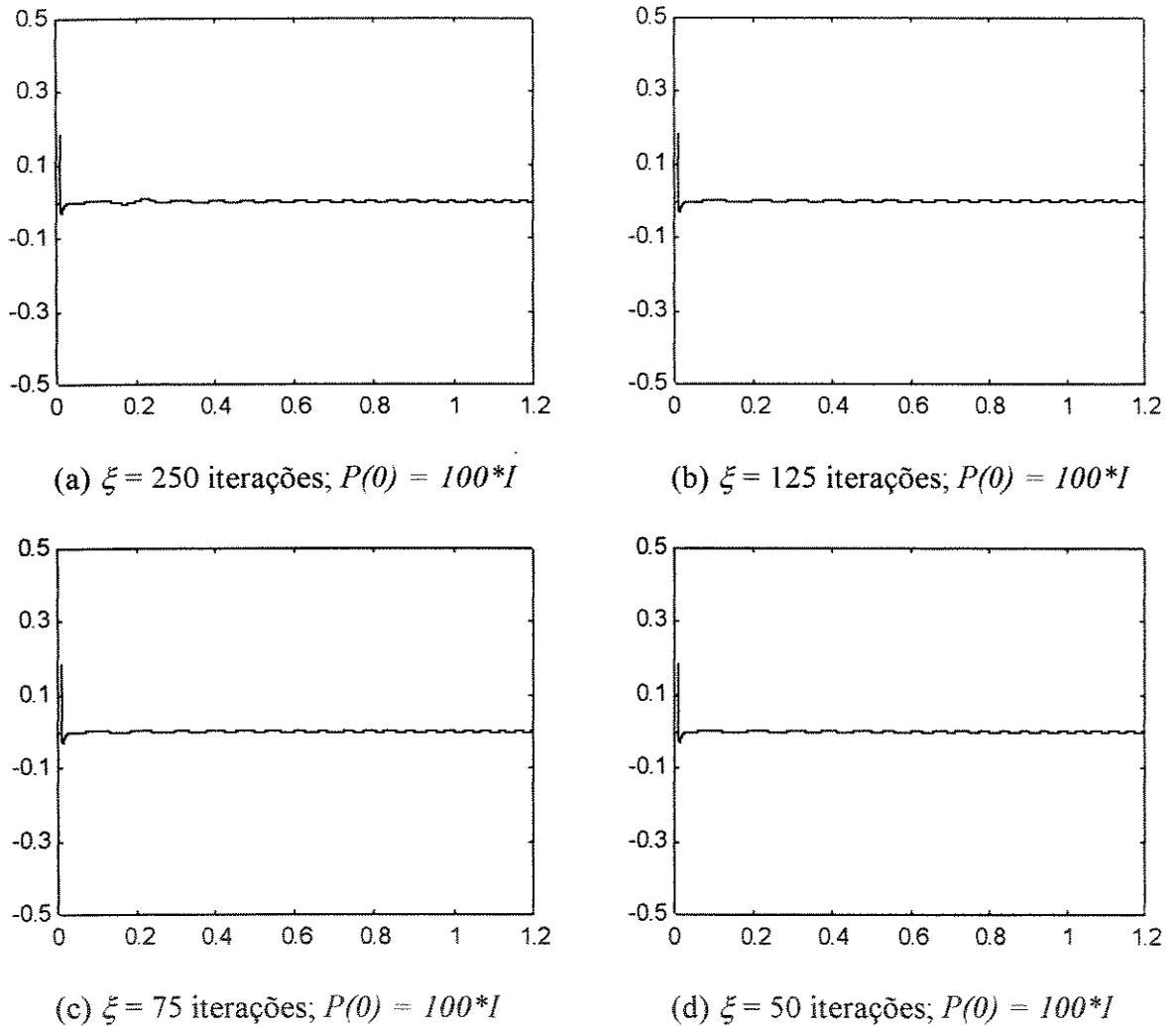


Figura 4.21 : Comparação do erro gerado pelo método de reinicialização mantendo $P(0)$ constante e variando ξ aplicado ao sistema de controle acústico

Na Figura 4.21 a única informação a ser retirada é que o erro do estimador, para todos os casos, tende rapidamente para zero, ressaltando mais uma vez que os parâmetros estimados podem não ser os parâmetros reais.

4.1.3 Simulação do Controle Adaptativo Auto-Sintonizado

Como mencionado no capítulo 3, agora será aplicado o controle adaptativo auto-sintonizado para a melhor inicialização de cada estimador.

4.1.3.1 Simulação do Controle Adaptativo com Estimação Ordinária

Terminada a análise do método dos mínimos quadrados ordinário, como foi dito anteriormente, a melhor inicialização de $P(0)$ será agora utilizada no controle adaptativo auto-sintonizado de acordo com a Figura 3.6. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 4.22.

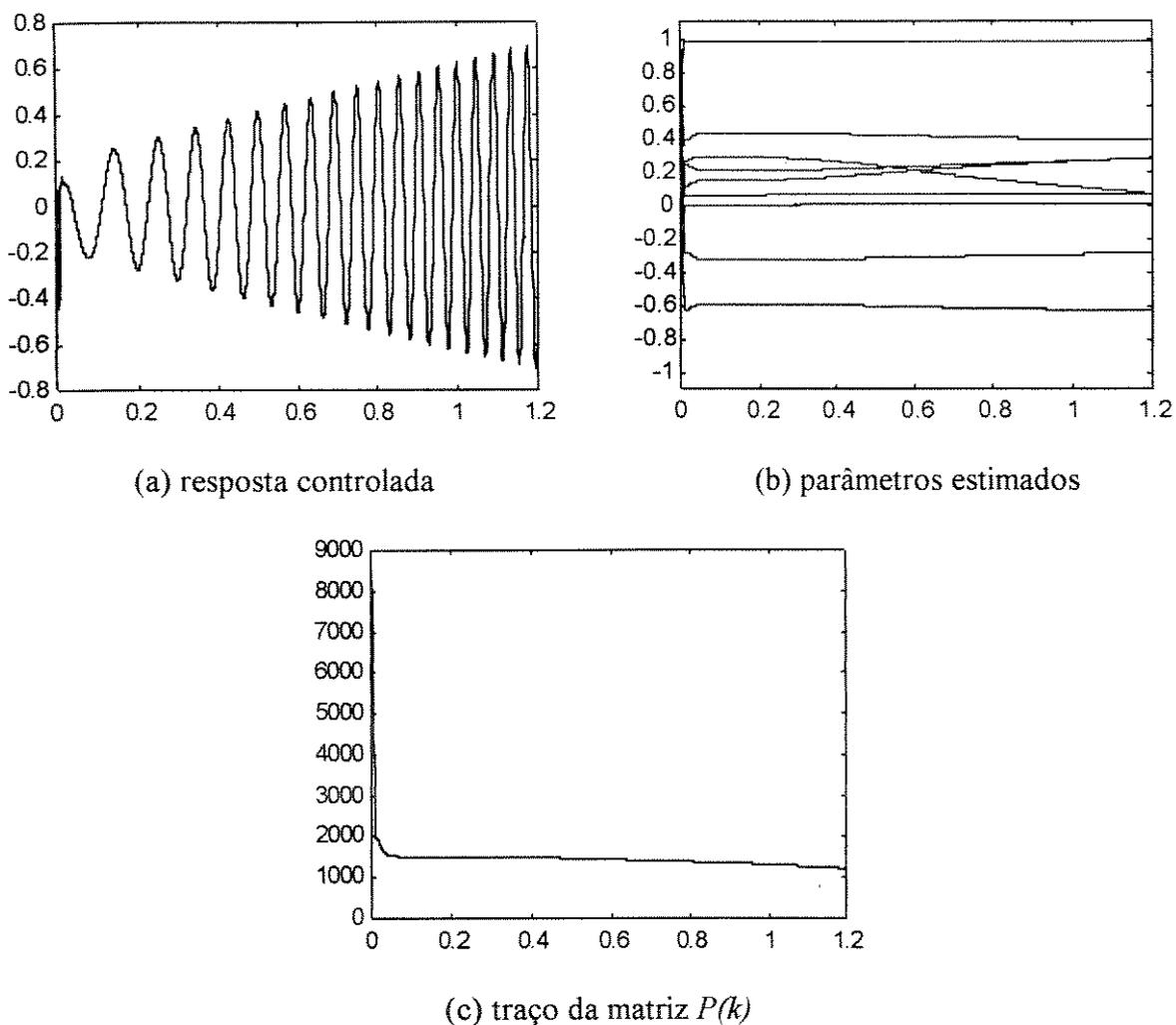


Figura 4.22 : Aplicação do controle adaptativo auto-sintonizado utilizando o método ordinário aplicado ao sistema de controle acústico com $P(0) = 1000 * I$

Observa-se comparando a Figura 4.22b e Figura 4.6b, que com o controle adaptativo a estimativa converge mais rapidamente. Isto ocorre devido à maior excitação inicial do sistema, [Aström e Wittenmark (1989); Ljung (1987)]. Esta “*excitação extra*” é proveniente do próprio ajuste inicial dos parâmetros que se reflete na lei de controle $u(k)$, proporcionando que $u(k)$

seja rica em componentes de frequência e conseqüentemente também a resposta $y(k)$. Esta excitação extra pode ser observada no início da Figura 4.22a comparada com a Figura 4.4d.

Comparando a Figura 4.22c e a Figura 4.7b, nota-se que o efeito da excitação extra também é percebido no traço da matriz $P(k)$. Na Figura 4.22c o traço de $P(k)$ cai de 8.000 para aproximadamente 1.500 inicialmente e no decorrer da simulação, ele cai para 1.200. Enquanto que na Figura 4.7b ele cai de 8.000 para aproximadamente 7.000 inicialmente e no decorrer das estimativas chega a 5.000, mostrando que ainda ocorre ajuste dos parâmetros.

Os parâmetros estimados serão os parâmetros reais apenas se o traço de $P(k)$ for zero. Este fato pode ser observado através das equações do estimador. Para que não haja mais ajustes nos parâmetros estimados, ou o vetor de ganho $K(k)$, ou o erro do estimador, devem ser zero, e, para que isto aconteça, necessariamente $P(k)$ deve ser também zero. Assim, quanto mais próximo de zero $P(k)$ estiver, melhores serão as estimativas da planta.

4.1.3.2 Simulação do Controle Adaptativo com Estimação Exponencial

Será analisada agora a implementação do controle adaptativo utilizando a melhor das estimativas do método dos mínimos quadrados com esquecimento exponencial, isto é, $P(0) = 1000 * I$ e $\lambda = 0.999$. Os resultados são encontrados na Figura 4.23.

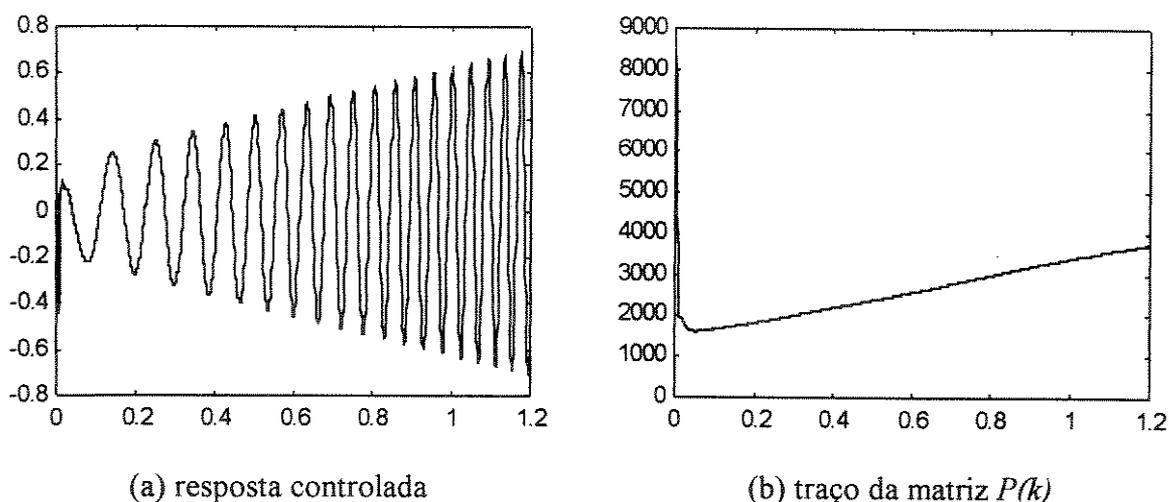


Figura 4.23 : Aplicação do controle adaptativo auto-sintonizado utilizando o método exponencial aplicado ao sistema de controle acústico com $\lambda = 0.999$ e $P(0) = 1000 * I$

Mesmo no controle adaptativo o crescimento de $P(k)$ é observado. Inicialmente $P(k)$ tende rapidamente para zero, mas, quando o sistema encontra os valores ótimos, a influência do fator de esquecimento λ torna $P(k)$ crescente.

Para resumir, o traço de $P(k)$ tende para o infinito quando o estimador encontra os valores ótimos, significando que não haverá mais alteração nos parâmetros estimados. Isto pode ser explicado através da equação de $P(k)$ dada por

$$P(k) = \left[P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{\lambda + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \right] \frac{1}{\lambda}$$

O termo do lado direito do sinal negativo indica qual o ajuste que $P(k-1)$ sofrerá para formar $P(k)$; se o ajuste for muito pequeno, então o termo é desprezível sobrando apenas $P(k-1)$, então a equação resume-se a

$$P(k) = \frac{P(k-1)}{\lambda}$$

Como λ está no intervalo de $(0,1)$ então $P(k)$ terá crescimento exponencial causando danos à estimativa.

Comparando a Figura 4.23b com a Figura 4.22c observa-se claramente a influência do fator de esquecimento quando o ajuste de $P(k)$ é pequeno. Na Figura 4.22c o traço de $P(k)$ estabiliza-se rapidamente em aproximadamente 1500 e no decorrer do controle adaptativo, ele cai para 1200, significando que em aproximadamente 1.1 segundos o traço de $P(k)$ sofre um ajuste de 300. Passando este valor para cada iteração, ele sofre um ajuste de 300/1100 ou simplesmente 0.3 em 1000, que significa um ajuste desprezível.

4.1.3.3 Simulação do Controle Adaptativo com Reinicialização da matriz de Covariância

Como mencionado anteriormente, após verificar a convergência do método de estimação será agora aplicado o controle adaptativo, mas não será aplicado na melhor das estimativas e sim na pior, isto é, para o caso da Figura 4.15a.

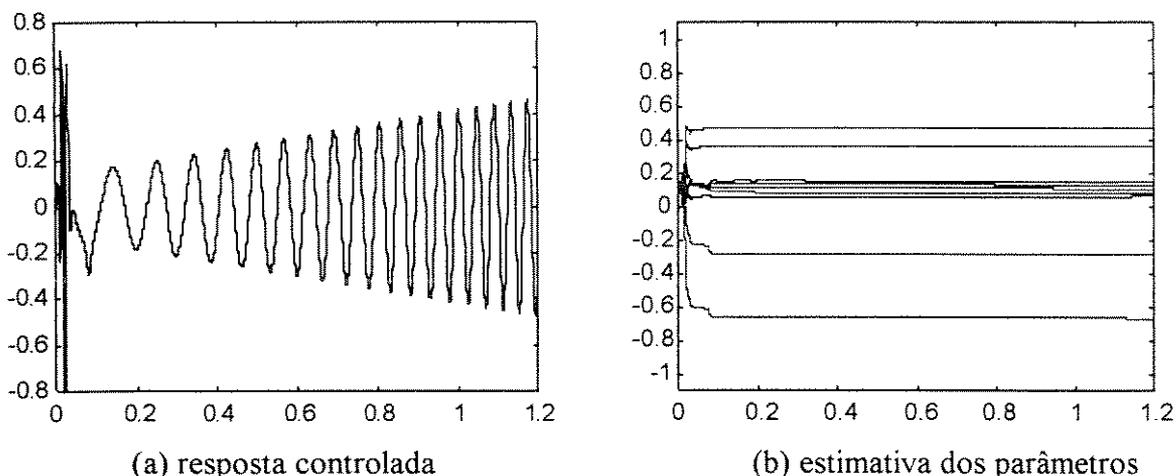


Figura 4.24 : Aplicação do controle adaptativo auto-sintonizado utilizando o método de reinicialização aplicado ao sistema de controle acústico com $\xi = 50$ iterações e $P(0) = I$

Mesmo que a estimativa apresentada na Figura 4.15a diverja, quando aplicado o controle adaptativo, a excitação extra devido ao ajuste inicial dos parâmetros força uma convergência, possibilitando desta forma a utilização deste método no controle adaptativo.

Outra observação pode ser feita comparando a Figura 4.24a e a Figura 4.3d. A resposta controlada na Figura 4.24a apresenta uma redução maior de ruído (amplitude máxima de aproximadamente 0.4 enquanto que na Figura 4.3d a amplitude máxima foi aproximadamente de 0.6). Isto mostra que enquanto a estimação pura diverge, no controle adaptativo com este método encontra-se a melhor das respostas controladas.

4.2 Simulação da Suspensão Ativa

Este exemplo foi escolhido por apresentar maior dificuldade ao controle adaptativo; além da variação de massa no tempo existe a correspondente deflexão estática e as diversas possibilidades de excitação do sistema.

Como mencionado na seção 3.2.2, foi utilizada uma frequência de amostragem de 100 Hz. O tempo de simulação será de 60 segundos. Três entradas serão aplicadas no sistema: um degrau não unitário; um sinal determinístico formado pela soma de senos com frequências de 1.5π , 3.5π , 5π rad/s, com amplitude de 0.005 metros; e uma entrada estocástica definida no Apêndice C. A entrada determinística e a entrada estocástica podem ser visualizadas na Figura 4.25.

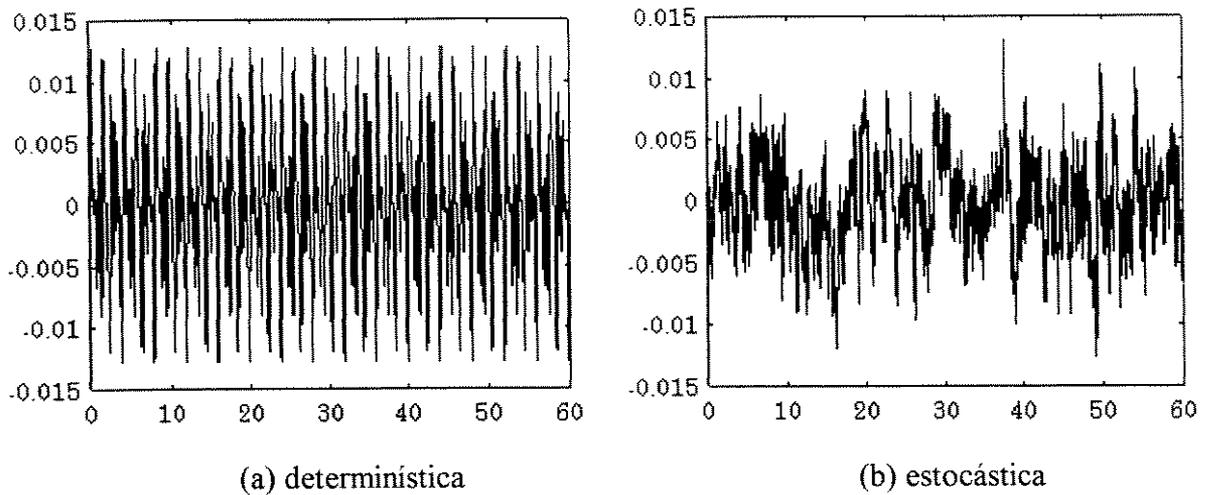


Figura 4.25 : Entradas da suspensão

A entrada estocástica representa o perfil de uma via de asfalto com o veículo a uma velocidade de 20 m/s (72 km/h).

Para cada uma das entradas a suspensão estará condicionada a dois tipos de variação de massa:

A variação de massa do **tipo 1** é definida de acordo com a equação abaixo

$$M_2(t) = \begin{cases} +5t + 250 & 0 \leq t \leq 30 \\ -5t + 550 & 30 < t \leq 60 \end{cases}$$

Desta forma a deflexão estática assumirá um valor diferente para cada instante.

A variação de massa do **tipo 2** é definida de acordo com a equação abaixo

$$M_2(t) = \begin{cases} 250 & 0 \leq t \leq 15 \\ 400 & 15 < t \leq 30 \\ 250 & 30 < t \leq 45 \\ 150 & 45 < t \leq 60 \end{cases}$$

Os dois tipos de variação de massa podem ser observados na Figura 4.26.

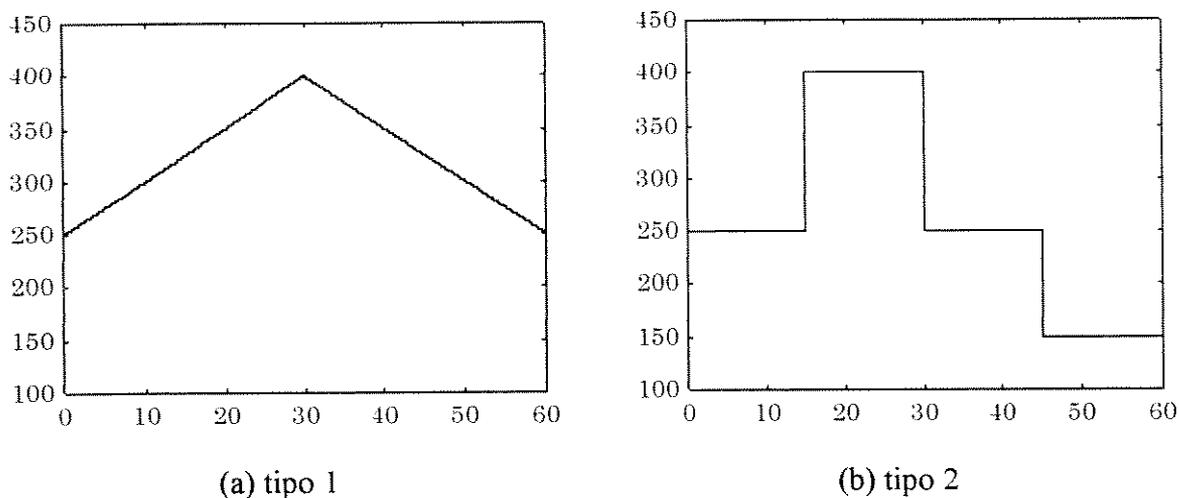


Figura 4.26 : Variação de massa da suspensão, onde o eixo y representa a massa da suspensão em kg e o eixo x representa o tempo de simulação em segundos

4.2.1 Simulação do Controlador Polinomial

Como mencionado nos capítulos 2 e 3, o controlador polinomial é calculado com base nos dados da função de transferência B/A quando a massa do veículo é a massa nominal de 250 kg, mas à medida que a massa varia o controlador perde sua característica básica, isto é, quando a lei de controle

$$u(k) = -\frac{CS}{AR + BS} w(k)$$

com ação integral simples é calculada com base na massa de 250 kg e é utilizada na suspensão com massa de 250 kg, seus pólos são os mesmos pólos do modelo de referência, do polinômio A_0 e dos zeros estáveis B^+ , como pode ser observado através da equação (2.39), isto é,

$$\frac{CS}{AR + BS} = \frac{CS}{B^+ A_0 A_m}$$

Mas quando a massa do veículo varia os pólos de malha fechada não são mais os pólos definidos acima. Na Figura 4.27 podem ser observados os pólos de malha fechada, isto é, as raízes de $(AR + BS)$, com a massa da suspensão variando de 10 em 10 kg entre 150 a 400 kg.

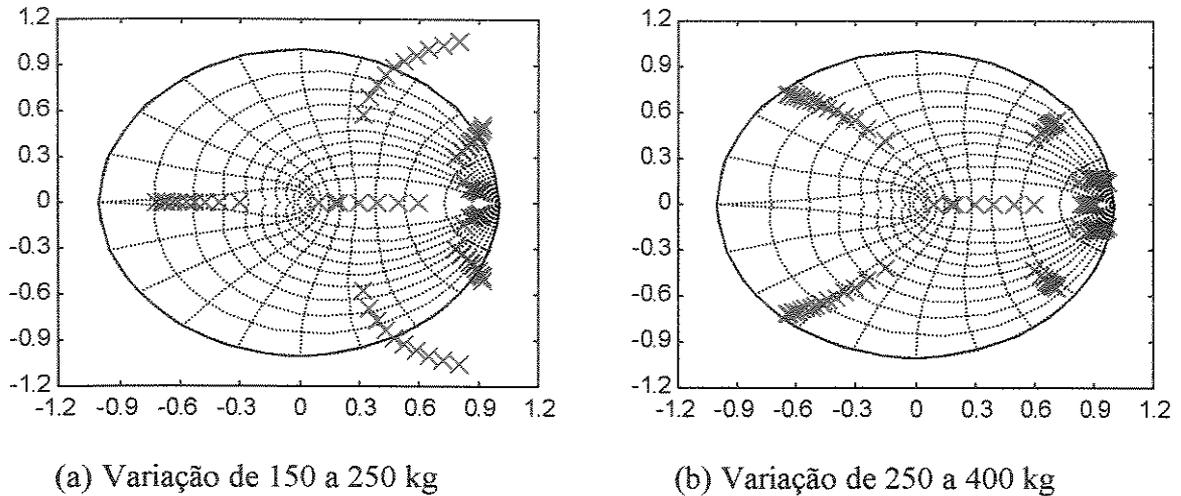


Figura 4.27 : Lugar dos pólos discretos da função de transferência de malha fechada do controlador polinomial com ação integral, onde os pólos em vermelho são os pólos calculados com a massa nominal de 250 kg.

A Figura 4.27a representa os pólos da suspensão com o controlador calculado com base em 250 kg, mas com a massa da suspensão variando de 150 a 250 kg. No início dois pares de pólos estão fora do círculo unitário, caracterizando instabilidade e à medida que a massa varia os pólos tornam-se mais estáveis, isto é, aproximam-se da origem.

A Figura 4.27b representa os pólos da suspensão com o controlador calculado com base em 250 kg, mas com a massa da suspensão variando de 250 a 400 kg. O efeito agora é o oposto ao caso anterior, ou seja, à medida que a massa varia os pólos tendem para a instabilidade, dirigindo-se para fora da circunferência unitária.

Portanto, com variação de massa, o controlador perde suas características, tornando-se instável tanto quando a massa cresce como quando diminui.

No exemplo do sistema de controle acústico, o controle adaptativo é necessário porque não eram conhecidos os parâmetros da planta; no caso da suspensão ativa o controle adaptativo é necessário pela variação de massa.

Neste exemplo será adotada como “resposta desejada” aquela que acompanhar a entrada de referência, oscilando menos que a resposta passiva e eliminando a deflexão estática.

4.2.2 Simulação do Controle Adaptativo Auto-Sintonizado

Na aplicação do controle adaptativo auto-sintonizado será observado, em alguns casos, que o sobressinal no início do processo é relativamente grande, significando que a suspensão necessitará de um grande curso para suportar o deslocamento, mas o interesse principal da simulação é verificar se o algoritmo adaptativo consegue estabilizar oscilando menos que a planta passiva, retirando a deflexão estática e seguindo a entrada de referência. Por isso os parâmetros iniciais de estimação $\hat{\theta}(0)$ foram escolhidos como um vetor de valor 0.01.

Para os gráficos da Figura 4.28, Figura 4.29 e Figura 4.30 utilizou-se da seguinte convenção:

EIXO X : indica o tempo de simulação em segundos;

EIXO Y : indica o deslocamento em metros.

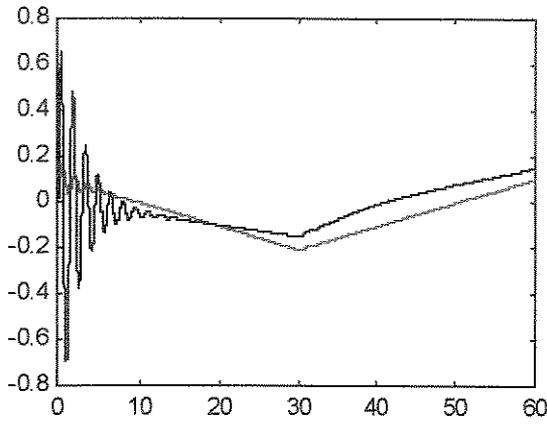
A entrada estocástica utilizada foi sempre a apresentada na Figura 4.25, isto é, não foi calculada uma nova entrada para cada caso estocástico.

Como este exemplo visa comparar o controle adaptativo auto-sintonizado para vários tipos de entrada e sujeita à variação de massa, será utilizada sempre a mesma inicialização para os métodos de estimação de parâmetros, como pode ser observado na Tabela 4.2. Desta forma permite-se uma comparação entre as diversas entradas e os diferentes tipos de variação de massa.

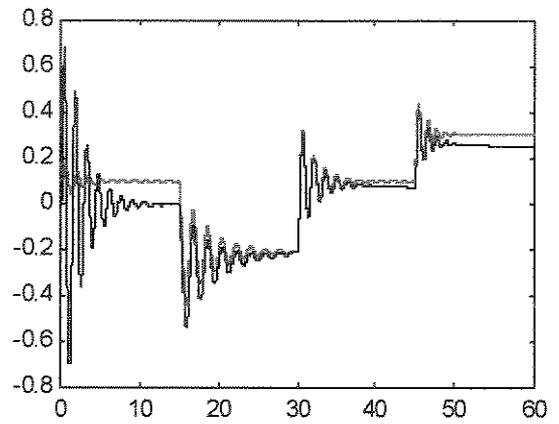
Tabela 4.2 : Inicialização dos métodos de estimação de parâmetros

Método	Inicialização
ordinário	$P(0) = 1000 \cdot I$
exponencial	$P(0) = 1000 \cdot I$ $\lambda = 0.998$
reinicialização	$P(0) = 1000 \cdot I$ $\xi = 100$

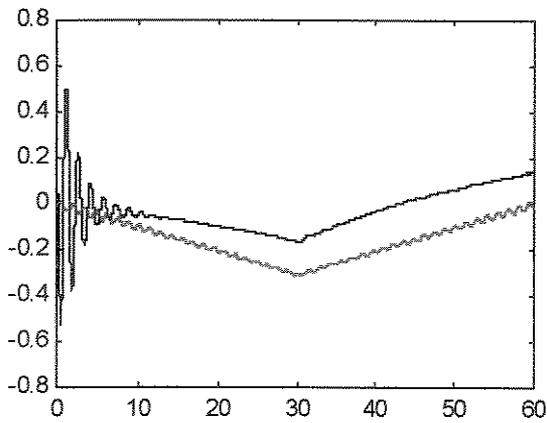
Realizada a simulação, encontram-se as figuras a seguir.



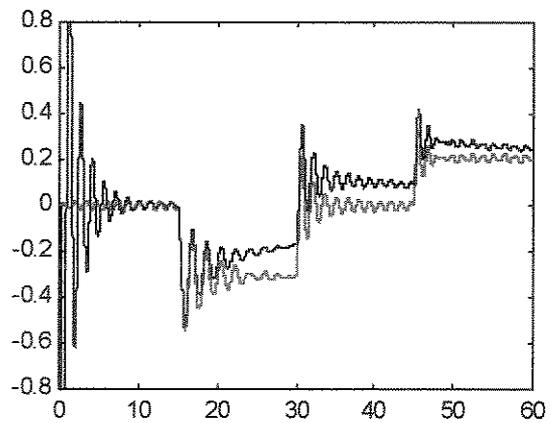
(a) massa tipo 1, entrada degrau



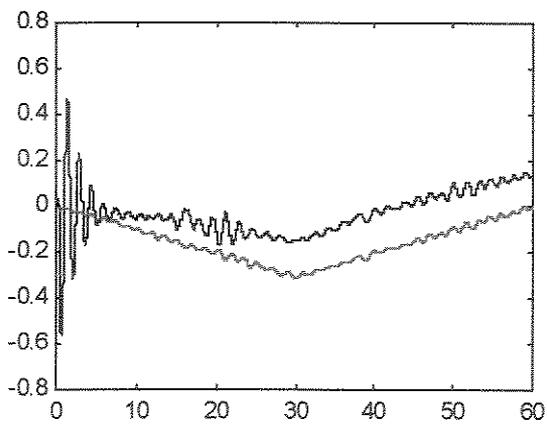
(b) massa tipo 2, entrada degrau



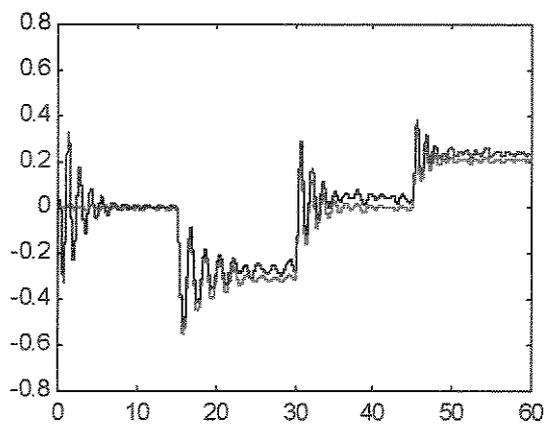
(c) massa tipo 1, entrada determinística



(d) massa tipo 2, entrada determinística

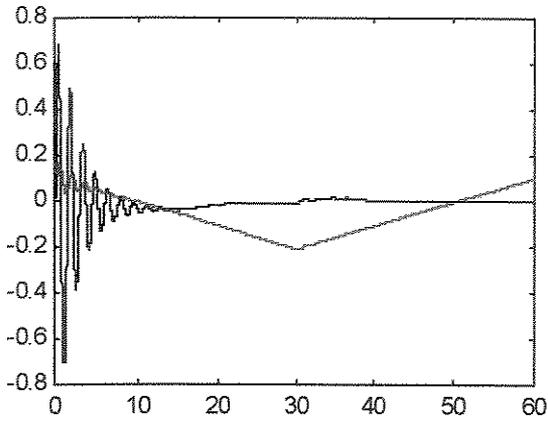


(e) massa tipo 1, entrada estocástica

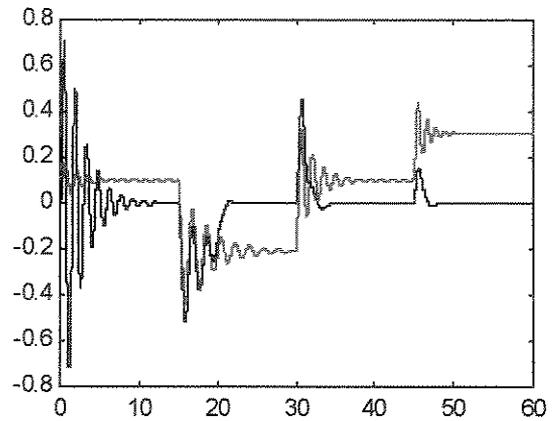


(f) massa tipo 2, entrada estocástica

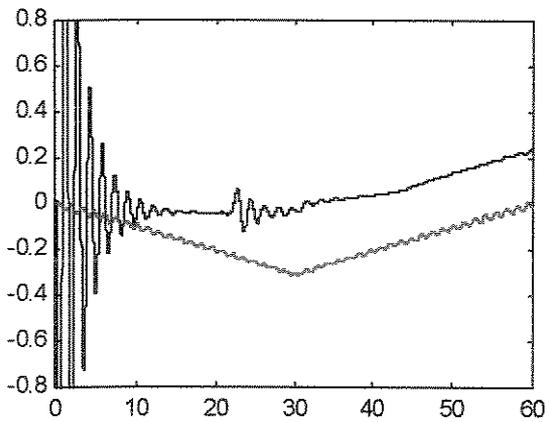
Figura 4.28 : Comparação entre a resposta passiva e a resposta controlada quando aplicado o controle adaptativo utilizando o método ordinário, com $P(0) = 1000 \cdot I$, onde a linha vermelha representa a resposta da planta e a linha preta a resposta ativa



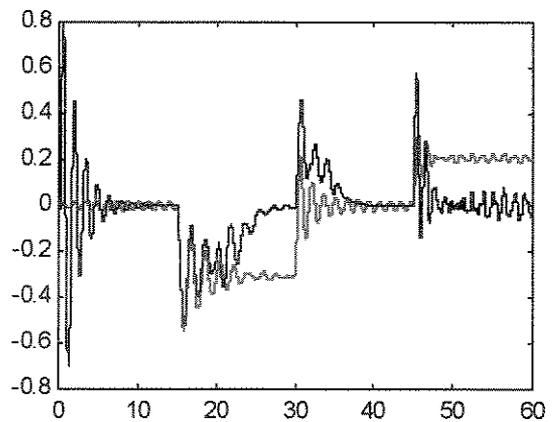
(a) massa tipo 1, entrada degrau



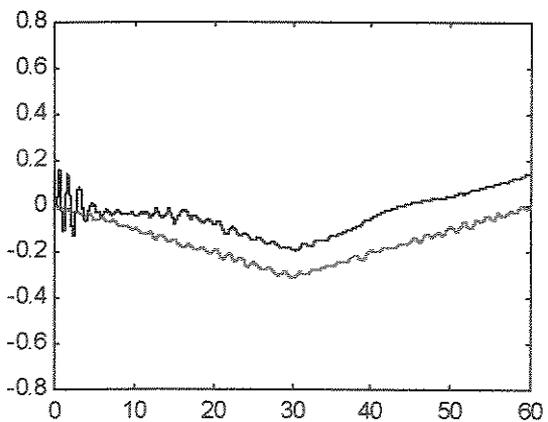
(b) massa tipo 2, entrada degrau



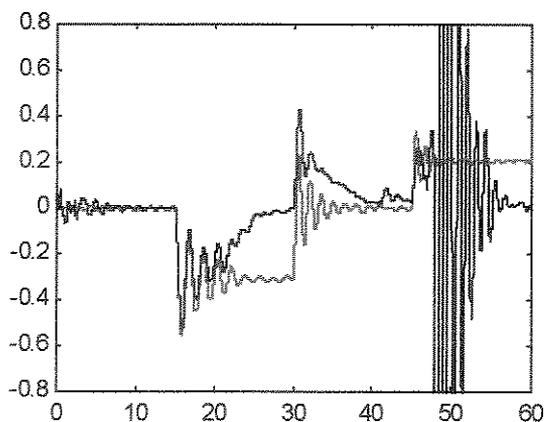
(c) massa tipo 1, entrada determinística



(d) massa tipo 2, entrada determinística

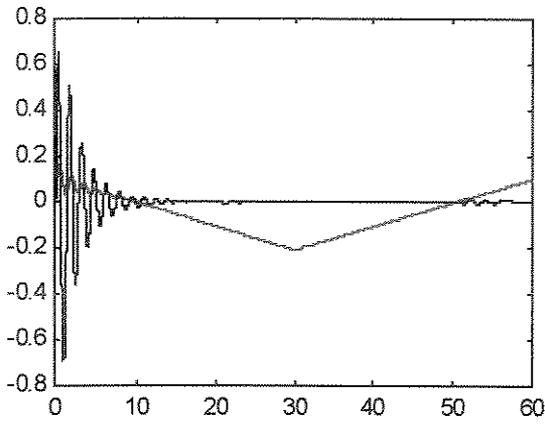


(e) massa tipo 1, entrada estocástica

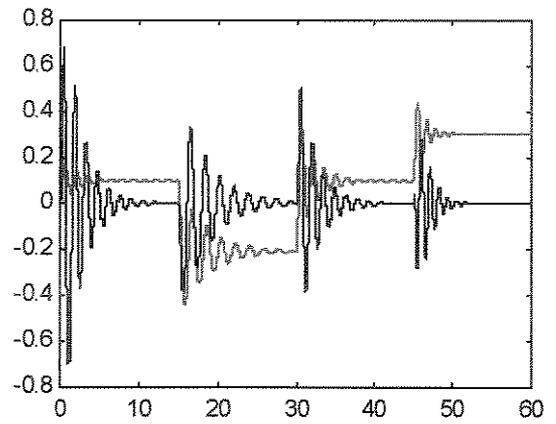


(f) massa tipo 2, entrada estocástica

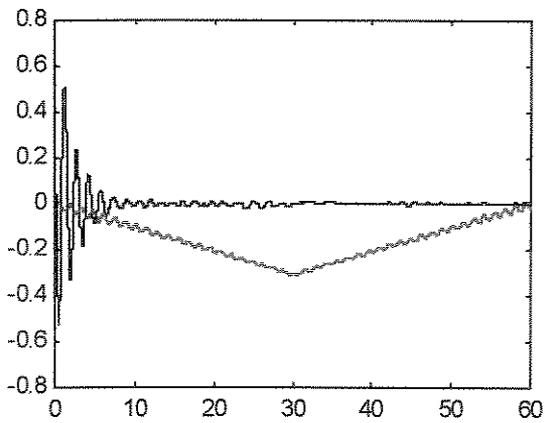
Figura 4.29 : Comparação entre a resposta passiva e a resposta controlada quando aplicado o controle adaptativo utilizando o método exponencial, com $P(0) = 1000 \cdot I$ e $\lambda = 0.998$, onde a linha vermelha representa a resposta da planta e a linha preta a resposta ativa



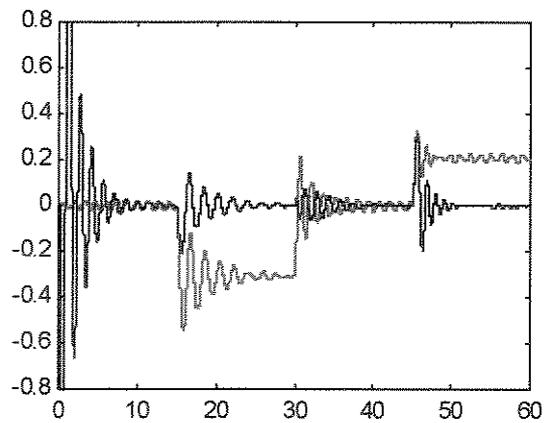
(a) massa tipo 1, entrada degrau



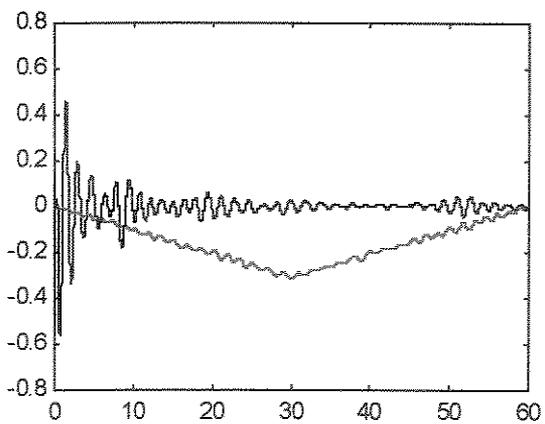
(b) massa tipo 2, entrada degrau



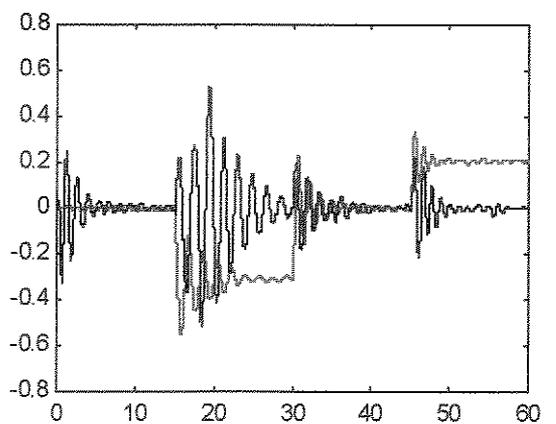
(c) massa tipo 1, entrada determinística



(d) massa tipo 2, entrada determinística



(e) massa tipo 1, entrada estocástica



(f) massa tipo 2, entrada estocástica

Figura 4.30 : Comparação entre a resposta passiva e a resposta controlada quando aplicado o controle adaptativo utilizando o método da reinicialização, com $P(0) = 1000 \cdot I$ e $\xi = 100$ iterações, onde a linha vermelha representa a resposta da planta e a linha preta a resposta ativa

4.2.3 Análise dos Resultados do Controle Adaptativo Auto-Sintonizado

Iniciando a análise pelo controle adaptativo auto-sintonizado utilizando o método ordinário com $P(0) = 1000 \cdot I$, os resultados são apresentados na Figura 4.28. Observa-se que o método ordinário não consegue acompanhar a variação dos parâmetros. Este fato pode ser explicado através do gráfico do valor absoluto do erro $e(k)$ e do gráfico do valor absoluto do produto $k(k)$ por $e(k)$. Escolhendo os dados da Figura 4.28d para serem analisados, encontra-se

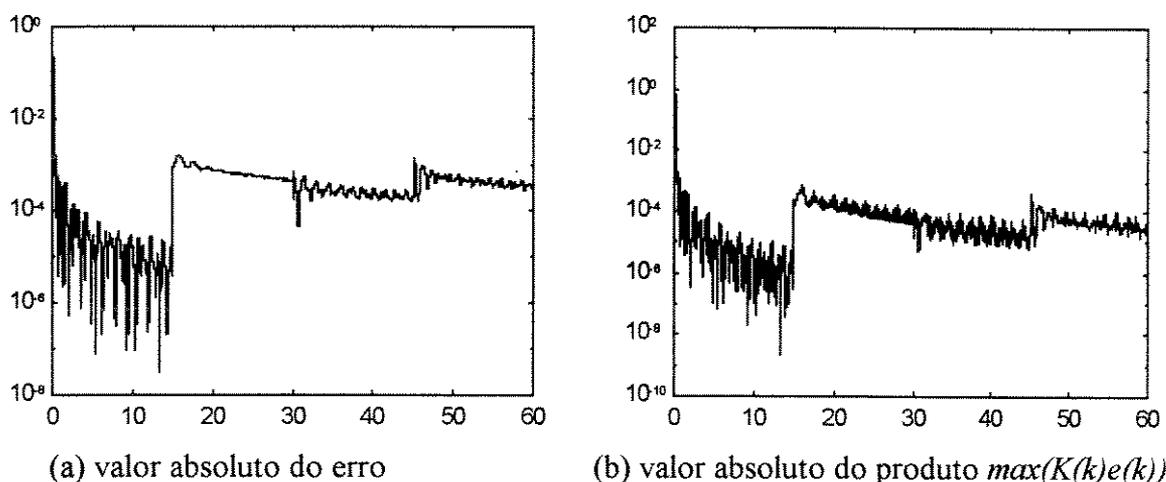


Figura 4.31 : Parâmetros do estimador ordinário com $P(0) = 1000 \cdot I$

Nota-se na Figura 4.31a que o estimador detecta o aumento do erro mas o produto $K(k)$ por $e(k)$, que indica como os parâmetros são ajustados, não produz uma alteração significativa nos parâmetros estimados. O mesmo fato também é observado nos outros casos do estimador ordinário.

Observa-se também que na Figura 4.28b, Figura 4.28d e Figura 4.28f, no intervalo de 0 a 15 segundos em que a massa tem sempre o valor de 250 kg, o método apresenta o desempenho desejado, mas após este período a massa varia e o algoritmo não consegue mais acompanhar, mostrando que se o sistema não apresentar variação de parâmetros, uma boa escolha para o método de estimação é o método ordinário.

Observando a Figura 4.28a, Figura 4.28c e Figura 4.28e, nota-se que até o instante de 30 segundos o algoritmo ainda apresenta uma pequena adaptação, isto é, a resposta controlada apresenta uma queda menos acentuada que a resposta passiva, e após este instante as duas respostas praticamente são paralelas.

Analisando agora o controle adaptativo auto-sintonizado utilizando o método exponencial com $P(0) = 1000 * I$ e $\lambda = 0.998$, os resultados são apresentados na Figura 4.29.

Foi utilizado um fator de esquecimento de 0.998 por apresentar um desempenho “razoável”, se a escolha fosse de 0.999 a resposta controlada acaba acompanhando a resposta passiva e se a escolha fosse de 0.997 o método apresentaria uma deterioração mais “rápida”.

Observando a Figura 4.29a e a Figura 4.29b, nota-se que a resposta controlada apresenta um desempenho desejado, mas nas outras figuras o método acaba se deteriorando devido à influência do fator de esquecimento na matriz de covariância. Esta influência pode ser observada na Figura 4.32 que corresponde aos dados da Figura 4.29f.

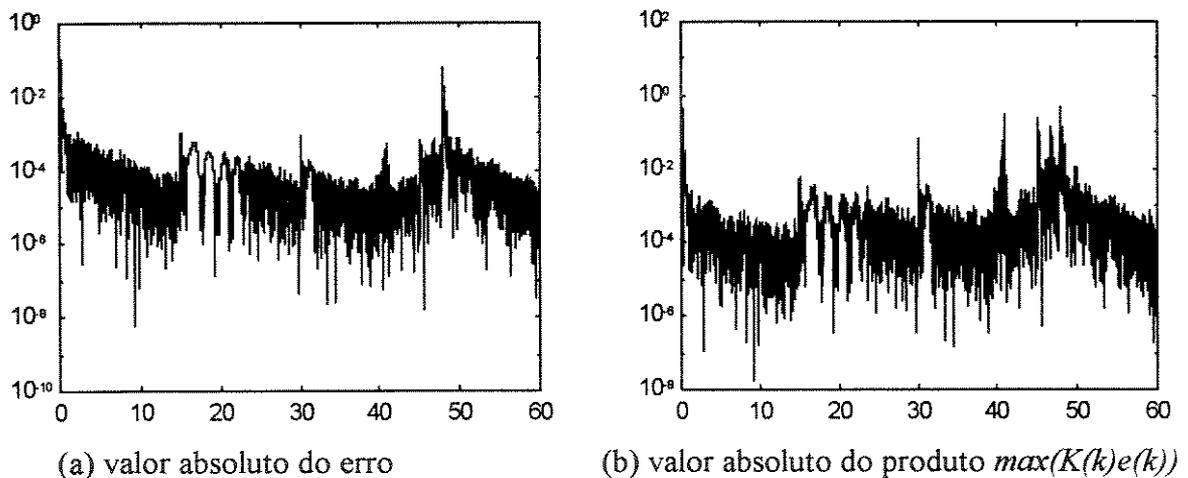


Figura 4.32 : Parâmetros do estimador exponencial com $P(0) = 1000 * I$ e $\lambda = 0.998$

Observa-se na Figura 4.32a que o erro permanece sempre baixo, mas já não ocorre o mesmo no ajuste que os parâmetros sofrem (Figura 4.32b), observa-se ainda na Figura 4.32b que os parâmetros sofrem três ajustes consecutivos (três últimos picos) e conseqüentemente isto acaba refletindo na resposta controlada.

Outra observação pode ser feita analisando a Figura 4.29b, Figura 4.29d e Figura 4.29f nos instantes de 15 a 20 segundos e de 30 a 35 segundos. Nestes instantes observa-se que a resposta controlada “demora mais” para voltar para a posição zero, significando que o fator de esquecimento deve ser diminuído para que o sistema tenha uma resposta mais rápida, mas neste caso a influência do fator de esquecimento seria mais evidenciada na matriz de covariância.

Observa-se ainda que nos instantes de 30 a 35 segundos a resposta acaba sendo mais rápida do que nos instantes de 15 a 20 segundos. Este fato pode ser explicado pela matriz de covariância e pela Figura 4.31b. Observando a Figura 4.31a observa-se que o erro nos dois instantes é praticamente o mesmo, mas o ajuste dos parâmetros (Figura 4.31b) é mais evidenciado no segundo instante devido à matriz de covariância ser maior neste instante.

Uma outra observação importante sobre este método é que apesar da Figura 4.29a e Figura 4.29b apresentarem um desempenho desejado, suas matrizes de covariância estão tendendo para o infinito, como pode ser observado na Figura 4.33.

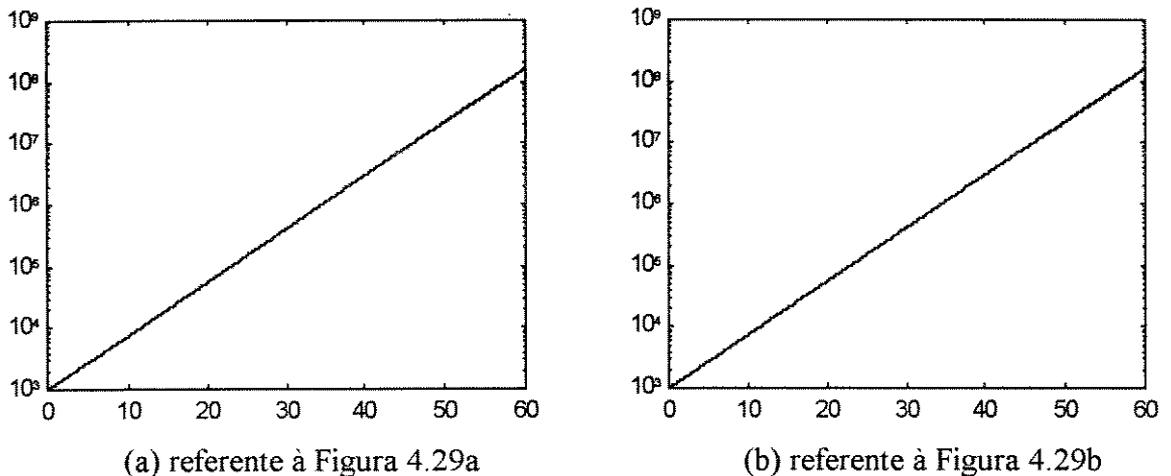


Figura 4.33 : Traço da matriz $P(k)$

Isto significa que se o tempo de simulação fosse estendido, a matriz de covariância acabaria interferindo na resposta controlada e, conseqüentemente, este método não é recomendado para uma aplicação prática, exceto nos casos em que a matriz de covariância permanece limitada.

Analisando agora o controle adaptativo auto-sintonizado utilizando o método de reinicialização com $P(0) = 1000 \cdot I$ e $\xi = 100$ iterações, os resultados são apresentados na Figura 4.30.

Observa-se que neste método a resposta controlada apresenta um desempenho desejável, não apresentando o problema do método ordinário (o não acompanhamento das variações de massa) e também do método exponencial (crescimento da matriz de covariância e conseqüentemente deterioração da resposta controlada).

Mas a resposta controlada apresenta um sobressinal relativamente “alto” (em se tratando de uma suspensão o deslocamento inicial de ± 0.8 metros é elevado), fato este também verificado nos dois métodos anteriores, devido ao ajuste inicial dos parâmetros que acaba gerando uma lei de controle também grande, como pode ser observado na figura abaixo onde o “eixo y” representa a força de controle em newtons.

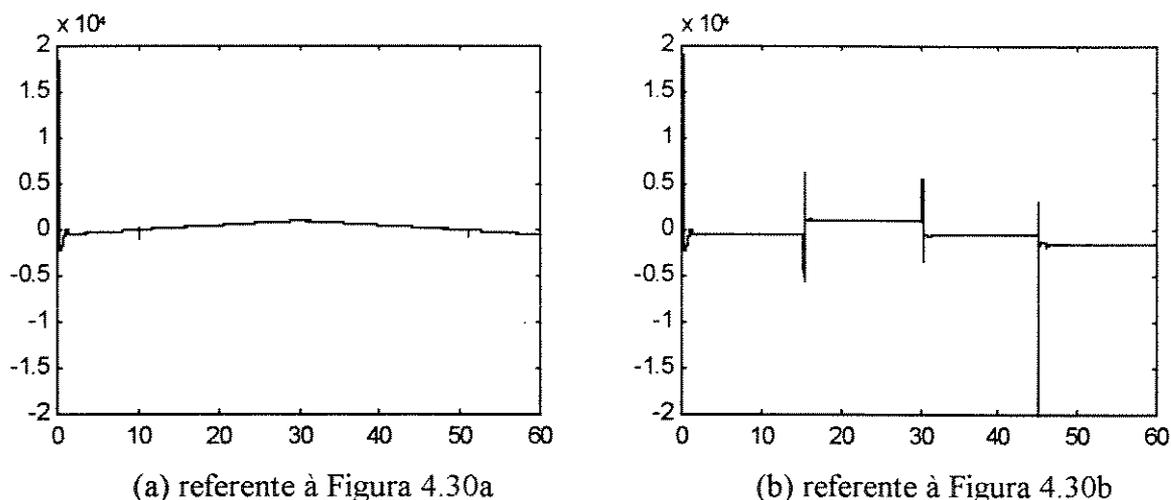


Figura 4.34 : Lei de controle $u(k)$

Como é observado, ocorre um “pico” inicial em torno de 20.000 newtons e na Figura 4.34b, em cada instante de variação de massa, ocorre um “pico em torno de 5.000 newtons. Mas para manter a suspensão no nível desejado (próximo à posição zero) observa-se que a lei de controle limita-se a ± 2.000 newtons.

Então pode-se acrescentar uma limitação à lei de controle em torno de 2.000 newtons e comparar a resposta controlada com e sem limitação da lei de controle.

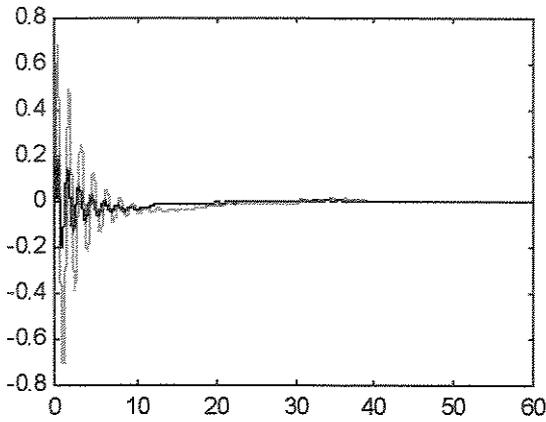
Esta comparação será aplicada tanto para o método exponencial quanto para o método da reinicialização.

Simulando novamente os métodos exponencial e de reinicialização, encontram-se os resultados apresentados na Figura 4.35 e na Figura 4.36, onde:

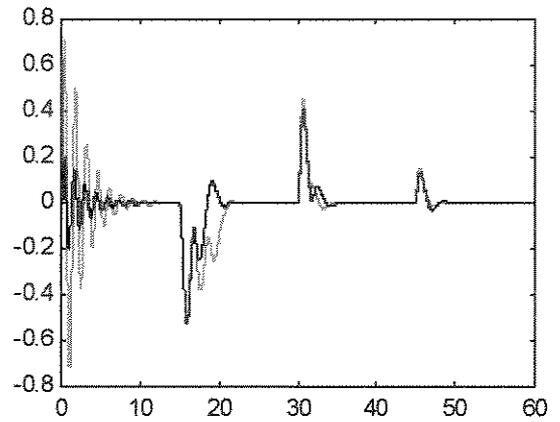
EIXO X : indica o tempo de simulação em segundos;

EIXO Y : indica o deslocamento em metros.

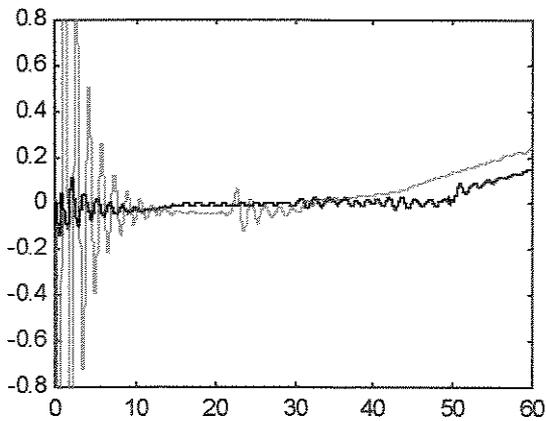
Os dados utilizados para simulação são os mesmos apresentados na Tabela 4.2.



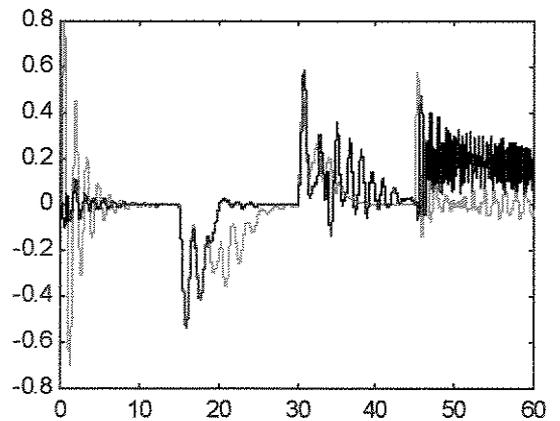
(a) massa tipo 1, entrada degrau



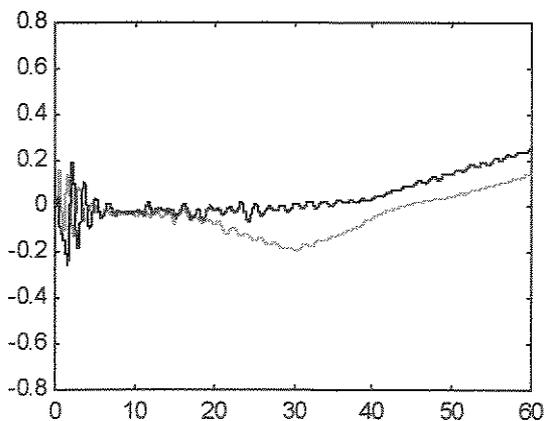
(b) massa tipo 2, entrada degrau



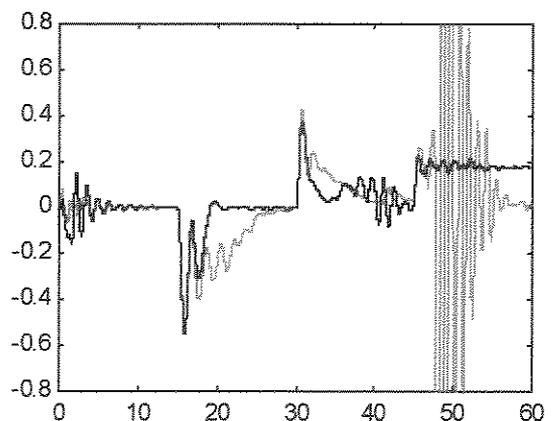
(c) massa tipo 1, entrada determinística



(d) massa tipo 2, entrada determinística

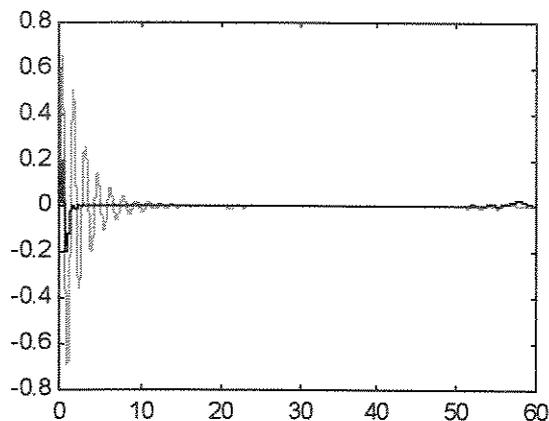


(e) massa tipo 1, entrada estocástica

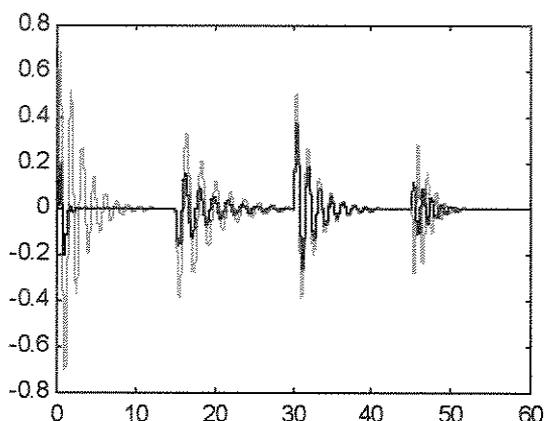


(f) massa tipo 2, entrada estocástica

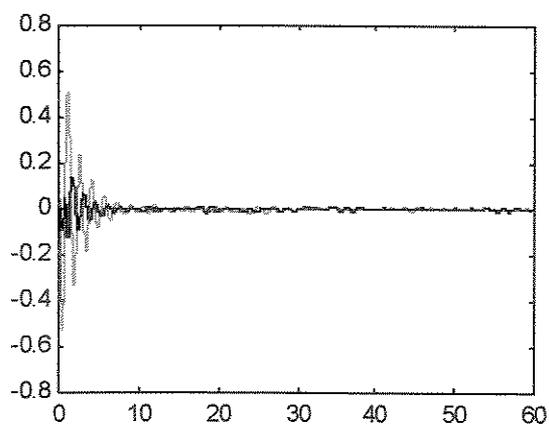
Figura 4.35 : Comparação entre as respostas controladas quando aplicado o controle adaptativo utilizando o método exponencial com limitação de $u(k)$, com $P(k) = 1000 * I$ e $\lambda = 0.998$, onde a linha verde representa a resposta sem limitação de $u(k)$ e a linha preta a resposta com limitação de $u(k)$



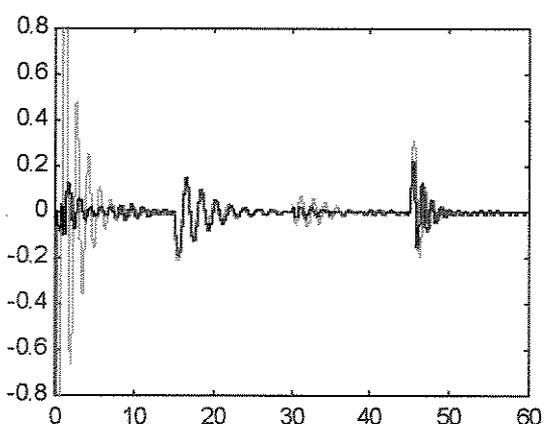
(a) massa tipo 1, entrada estocástica



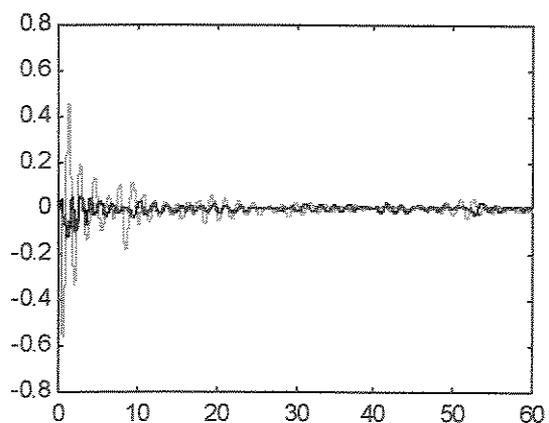
(b) massa tipo 2, entrada degrau



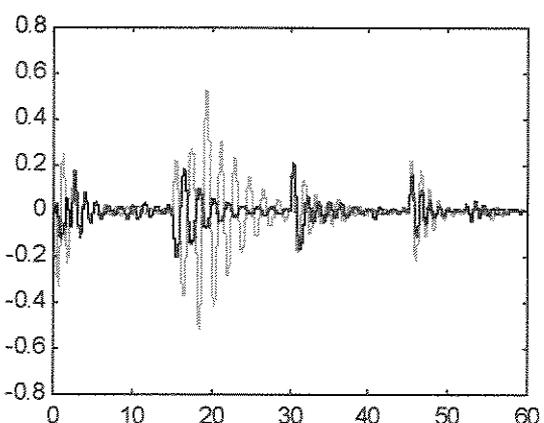
(c) massa tipo 1, entrada determinística



(d) massa tipo 2, entrada determinística



(e) massa tipo 1, entrada estocástica



(f) massa tipo 2, entrada estocástica

Figura 4.36 : Comparação entre as respostas controladas quando aplicado o controle adaptativo utilizando o método da reinicialização com limitação de $u(k)$, com $P(k) = 1000 * I$ e $\xi = 100$ iterações, onde a linha verde representa a resposta sem limitação de $u(k)$ e a linha preta a resposta com limitação de $u(k)$

Serão comparadas a resposta controlada gerada pelo método exponencial sem a limitação da lei de controle com a limitação da lei de controle, isto é, a resposta controlada da Figura 4.29 com a resposta controlada da Figura 4.35.

Observa-se claramente que adicionando a limitação da lei de controle ocorre uma diminuição do sobressinal no início do processo e ainda há uma melhora geral do desempenho da resposta controlada. Na Figura 4.35a percebe-se que a resposta controlada com limitação de sinal apresenta um desempenho mais desejável. Na Figura 4.35b, no instante de 15 a 20 segundos, a resposta controlada com limitação de sinal acaba tendo um tempo de resposta menor. Na Figura 4.35c a resposta controlada com limitação de sinal permanece mais tempo em torno de zero (aproximadamente 50 segundos contra 30 segundos da Figura 4.29c). Na Figura 4.35e a resposta controlada com limitação de sinal também permanece por mais tempo em torno de zero. Na Figura 4.35f, apesar da resposta controlada com limitação de sinal no instante de 45 a 60 segundos não estar em torno de zero, ela não apresenta a grande oscilação da Figura 4.29f no mesmo instante.

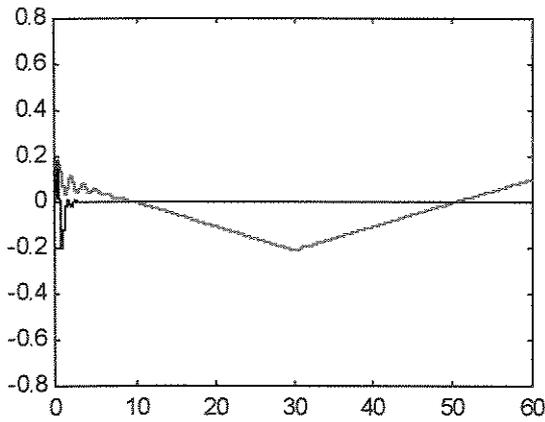
Serão comparados agora as respostas controladas geradas pelo método da reinicialização sem a limitação da lei de controle e com a limitação da lei de controle, isto é, a resposta controlada da Figura 4.30 com a resposta controlada da Figura 4.36.

Como no caso anterior, este caso também apresenta um sobressinal mais aceitável para uma suspensão, e observa-se ainda uma redução geral na amplitude do deslocamento em todos os casos, tornando o método da reinicialização com limitação da lei de controle mais estável do que sem esta limitação e, conseqüentemente, reduzindo ainda mais o nível da resposta controlada.

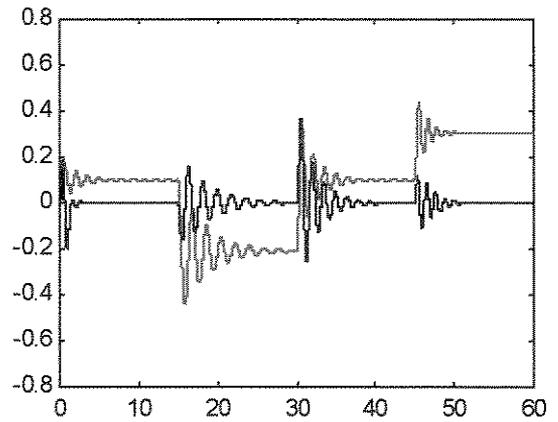
Portanto, para os dois casos, a limitação da lei de controle gera um controle adaptativo mais robusto e aumenta a convergência do método. Ainda deve ser observado que esta limitação da lei de controle existirá na prática.

Em relação aos métodos de estimação, pode-se ainda utilizar um método “híbrido”, isto é, tomando o método da reinicialização da matriz de covariância e adicionando o fator de

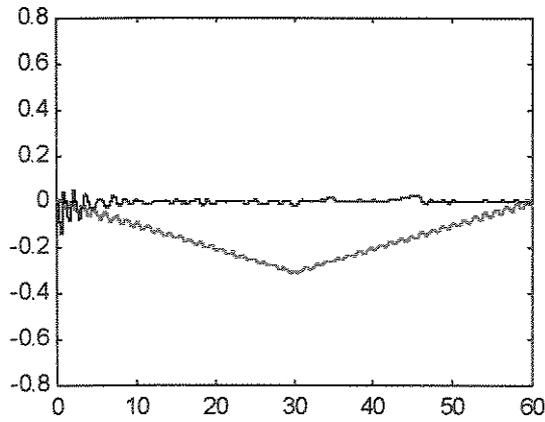
esquecimento. Simulando novamente o sistema com os dados iniciais dos dois algoritmos, isto é $P(k) = 1000 \cdot I$, $\lambda = 0.998$ e $\xi = 100$ iterações, encontram-se os resultados na Figura 4.37.



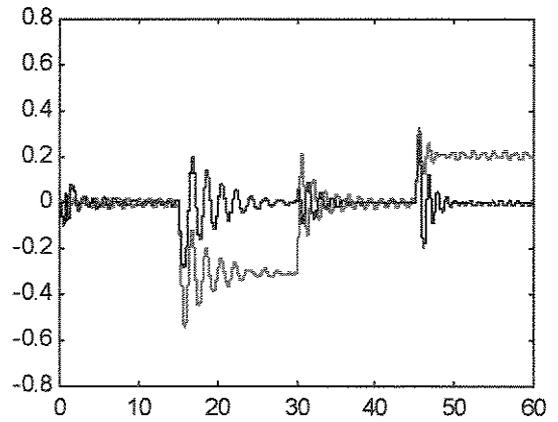
(a) massa tipo 1, entrada degrau



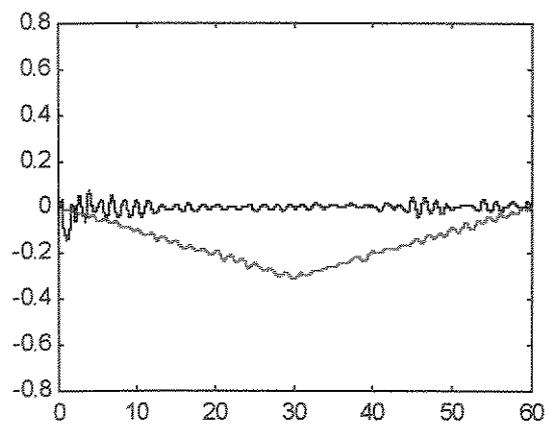
(b) massa tipo 2, entrada degrau



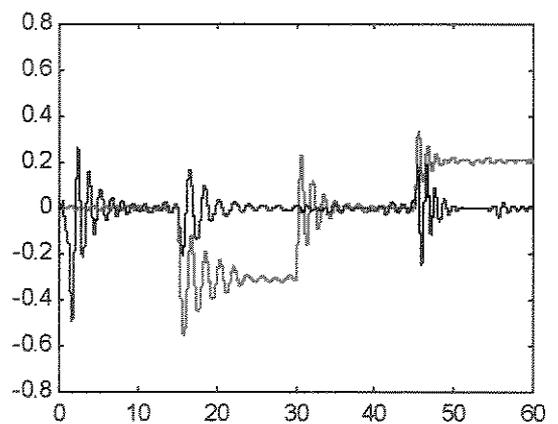
(c) massa tipo 1, entrada determinística



(d) massa tipo 2, entrada determinística



(e) massa tipo 1, entrada estocástica



(f) massa tipo 2, entrada estocástica

Figura 4.37 : Comparação entre a resposta passiva e a resposta controlada quando aplicado o controle adaptativo utilizando o método híbrido com limitação de $u(k)$, com $P(0) = 1000 \cdot I$, $\lambda = 0.998$ e $\xi = 100$ iterações, onde a linha vermelha representa a resposta da planta e a linha preta a resposta ativa

Para analisar o método “híbrido” deve-se compará-lo com os métodos em separado, isto é, deve-se comparar a resposta controlada da Figura 4.37 com a resposta controlada da Figura 4.35 e da Figura 4.36, isto é, quando utilizado o fator de esquecimento e quando utilizado o tempo de reinicialização.

Comparando o método exponencial com o método híbrido (Figura 4.35 e Figura 4.37 respectivamente) observa-se que o método híbrido não apresenta o problema do crescimento da matriz de covariância e conseqüentemente seu resultado é superior ao método exponencial.

Comparando o método de reinicialização com o método híbrido (Figura 4.36 e Figura 4.37, respectivamente) observa-se que quando utilizada a entrada degrau não unitário, isto é, as figuras *a* e *b*, o método híbrido acaba apresentando um resultado superior, e para as outras entradas, observa-se que a resposta do método híbrido permanece no mesmo nível do método de reinicialização, exceto em instantes isolados (Figura 4.37c instante 45 segundos, Figura 4.37d instante 30 segundos, Figura 4.37e a partir do instante 45 segundos e Figura 4.37f instante 45 segundos). Mas também apresenta instantes de melhora (Figura 4.37f instantes 30 segundos e a partir de 50 segundos).

Como foi observado existe também a possibilidade da união dos métodos, mostrando uma flexibilidade do método dos mínimos quadrados.

4.3 Estimação dos Parâmetros de um Motor de Corrente Contínua

Nesta seção será realizada a estimação experimental dos parâmetros de um motor de corrente contínua.

O método escolhido para estimar os coeficientes da planta é o método dos mínimos quadrados com esquecimento exponencial. O estimador será inicializado com a matriz $P(0) = \delta I$, onde $\delta = 1000$, o fator de esquecimento λ é escolhido como 0.993 e os parâmetros iniciais de estimação $\theta(0) = [0 \ 0]^T$.

Para a aquisição dos sinais de entrada (corrente) e saída (rotação) foi utilizado um tempo de aquisição de dados de 95 segundos e um tempo de discretização de 0.0203 segundos. A entrada foi uma senóide com frequência variando de 0 a 10 Hz, obtendo-se os sinais de entrada e saída do motor apresentados na Figura 4.38.

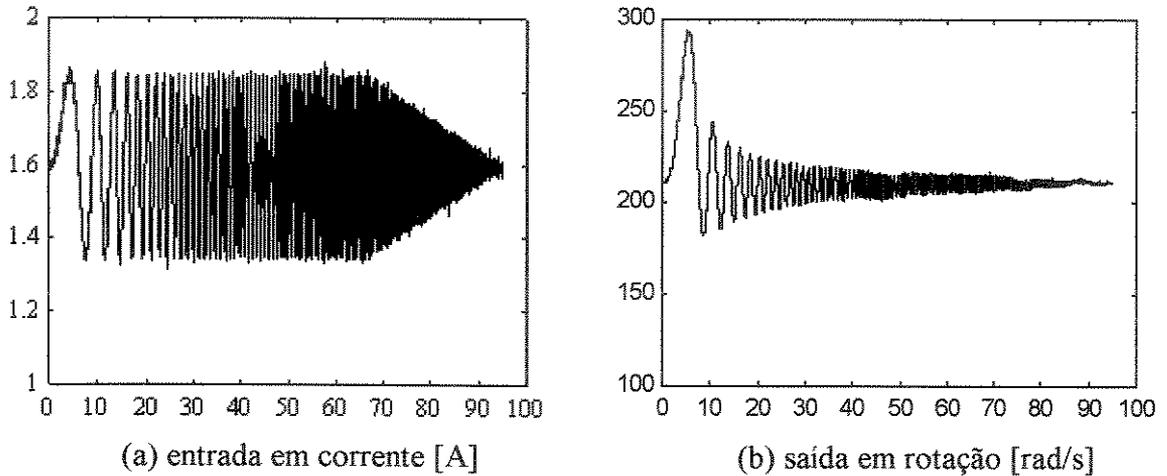


Figura 4.38 : Sinais de entrada e saída medidos do motor de corrente contínua

Uma vez realizada a leitura dos sinais de entrada e saída, foi aplicada a estimação recursiva “off-line”, significando que a estimação não foi realizada enquanto o processo estava em funcionamento, mas foram coletados os sinais e depois aplicado o método de estimação dos parâmetros, obtendo os resultados apresentados na Figura 4.39.

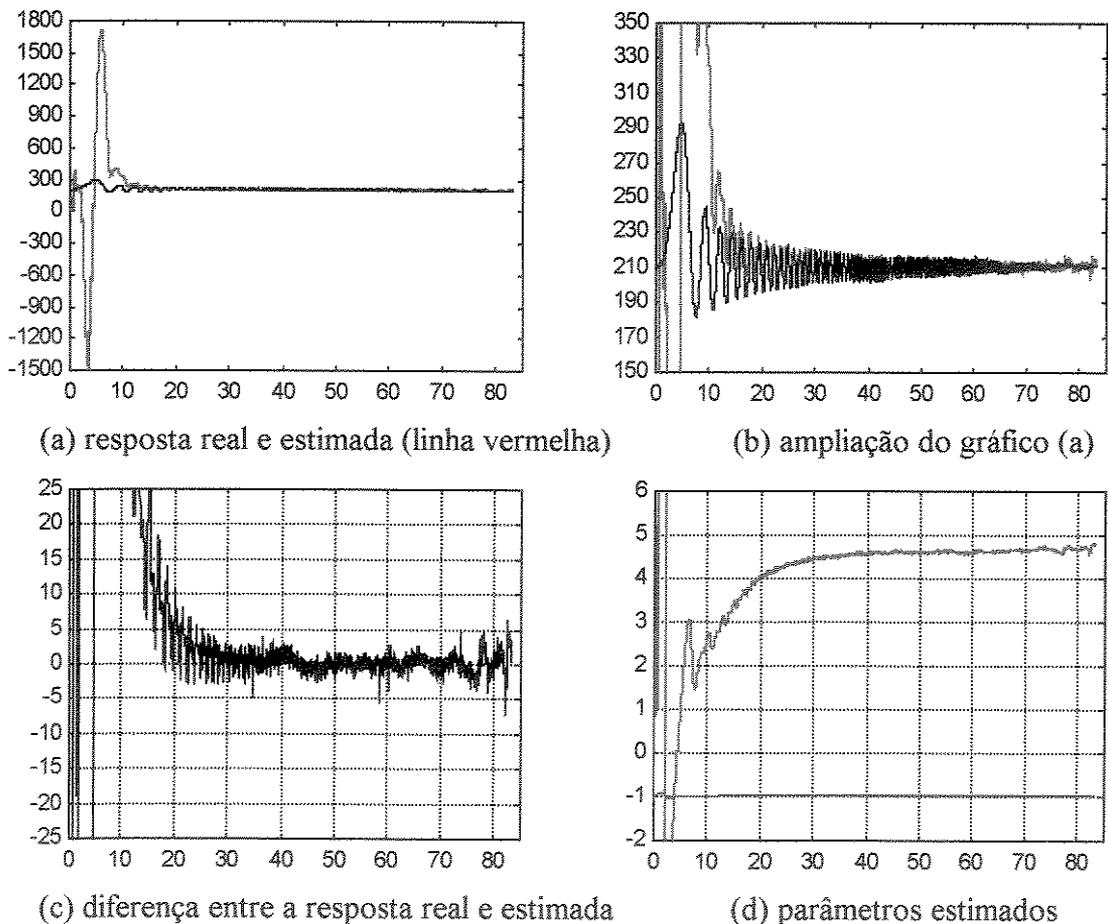


Figura 4.39 : Dados estimados do motor de corrente contínua

A Figura 4.39 apresenta os dados estimados do motor de corrente contínua, onde a Figura 4.39a apresenta a resposta da planta estimada recursivamente (linha vermelha) e a resposta real da planta (linha preta). Na Figura 4.39b é feita uma ampliação gráfica da Figura 4.39a para observar a convergência do método.

A Figura 4.39c representa o erro entre a resposta estimada e a resposta real definido na Figura 3.11. Observa-se que este erro foi de 10 em 210 rad/s, portanto da ordem de 5%.

Na Figura 4.39d são visualizados os parâmetros estimados, onde a linha vermelha indica o numerador b_0 e a linha azul o denominador a_0 . Pode ser observado que o denominador a_0 estimado é praticamente constante em todo o tempo de simulação, enquanto que o numerador b_0 demora mais para estabilizar e também sofre a ação dos erros de medida.

O valor estimado da planta discreta foi

$$\frac{W(z)}{I(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{4.7804}{z - 0.9638} \quad (4.1)$$

e para a planta contínua

$$\frac{W(s)}{I(s)} = \frac{239.8}{s + 1.812} \quad (4.2)$$

Simulando a planta estimada definida na equação (4.1) com a entrada em corrente apresentada na Figura 4.38a e comparando com a resposta real da planta apresentada na Figura 4.38b, encontra-se a Figura 4.40.

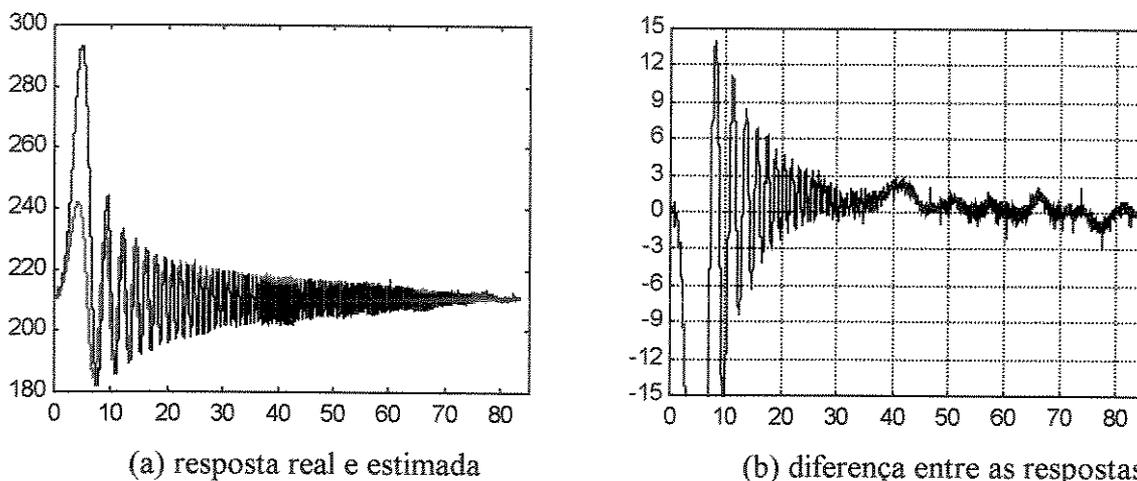


Figura 4.40 : Comparação entre a resposta estimada e a resposta real do motor de corrente contínua

Pode ser notado na Figura 4.40 que o erro entre a resposta real e a resposta estimada é de no máximo 12% (± 12 rad/s de erro em 210 rad/s de rotação) e no final é encontrado um erro de 3 % (± 3 rad/s de erro em 210 rad/s de rotação). Isto ocorre devido à característica do estimador e do sinal analisado.

O estimador e o tipo de sinal analisado influenciam na estimativa dos parâmetros porque o estimador escolhido é o método exponencial com um fator de esquecimento de 0.993. O fator de esquecimento pondera mais os dados recentes que os dados antigos, portanto os parâmetros são ajustados melhor para os dados finais do que para os dados iniciais. Outro fator que pode explicar um erro maior para o início da simulação é a presença de não linearidade como amortecimento devido aos rolamentos, atritos do eixo com o suporte e o contato com as escovas. Como o estimador demora para se ajustar (aproximadamente 30 segundos) no período inicial de estimação não é percebido a variação dos parâmetros, portanto as influências citadas não são levadas em consideração pelo estimador.

Capítulo 5

Conclusões

Neste capítulo serão apresentadas as conclusões gerais deste trabalho e também apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

5.1 Controlador Polinomial

O controlador polinomial é um excelente método de controle devido a sua capacidade de cancelamento de pólos e zeros, mas a solução da equação característica gerada pelo método pode ser de difícil solução, principalmente se o determinante da matriz de Silvester for próximo de zero.

Foi constatado que o controlador polinomial com ou sem efeito integral está intimamente ligado à faixa de frequência em que entrará em operação. Com efeito integral, ele apresenta melhor redução da amplitude da resposta controlada para baixas frequências, significando que sistemas com excitação de baixa frequência devem conter o controlador com efeito integral.

Outro problema do controlador polinomial é a baixa robustez apresentada, isto é, fora da faixa de operação o controlador pode ser instável, como foi constatado no exemplo da suspensão ativa.

Foi constatado que a escolha tanto do modelo de referência quanto do polinômio A_0 , influenciam no desempenho do método, isto é, deve-se especificar adequadamente cada um destes itens para um perfeito controle do sistema, em geral para o modelo de referência quanto

maior a frequência natural e maior o fator de amortecimento melhor será o desempenho do controle, da mesma forma que o modelo, o polinômio A_0 deve ter suas raízes o mais próximo do eixo real do plano complexo e posicionadas do lado direito (comparação utilizando o apêndice A).

5.2 Controle Adaptativo Auto-Sintonizado

Foi constatado que o controle adaptativo auto-sintonizado deve ser utilizado quando os parâmetros dos sistemas não são conhecidos ou quando eles apresentaram variação no tempo. Outra utilização do controle adaptativo seria a de controlar plantas não lineares, mas este tema não foi abordado neste trabalho. Nos casos aqui estudados o método adaptativo obteve bom desempenho, isto é, sempre acompanhou a entrada de referência mesmo quando havia problemas com a deflexão estática, no caso da suspensão ativa.

Por ser um método adaptativo, seu desempenho está altamente ligado ao desempenho do estimador, então quanto melhor forem as estimativas, melhor será o resultado do controle adaptativo auto-sintonizado.

Foi constatado que limitando a lei de controle o método adaptativo apresenta uma convergência mais rápida do que sem a limitação da lei de controle. Isto é devido ao ajuste inicial dos parâmetros, acarretando também que quanto mais rápida a convergência do método de estimação melhor o desempenho do controle adaptativo.

Observou-se que o tipo de variação dos parâmetros também interfere no desempenho do método, isto é, quando os parâmetros variam linearmente o método apresenta melhor desempenho do que quando aplicado em parâmetros que variam bruscamente. Esta característica está ligada à convergência do método de estimação de parâmetros, isto é, se o estimador apresentar convergência rápida as mudanças nos parâmetros podem ser identificadas mais rápidas e conseqüentemente o método de controle apresentará também uma convergência mais rápida.

5.3 Métodos dos Mínimos Quadrados Recursivo

Foi constatado que este método de estimação de parâmetros apresenta boa convergência, e os três métodos aqui estudados têm características próprias, isto é o método ordinário só deve ser aplicado em sistemas com parâmetros constantes, e os outros dois métodos podem ser aplicados em plantas variantes no tempo ou não.

As observações a respeito de cada método podem ser resumidas da seguinte forma:

Método Ordinário : Sua convergência está ligada com a escolha inicial da matriz de covariância, a qual varia para cada caso, e em geral quanto maior este maior mais rápida será a convergência do método. O problema apresentado foi o não acompanhamento de variação de parâmetros. Este método é o mais recomendado quando é previsto um sistema de parâmetros desconhecidos porém constantes.

Método com Esquecimento Exponencial : Sua convergência está ligada com a escolha do valor inicial da matriz de covariância e ao fator de esquecimento. Ele acompanha a variação de parâmetros, mas o problema apresentado é o crescimento exponencial da matriz de covariância que acaba interferindo nas estimativas dos parâmetros. Devido a este problema ele não é recomendado para o controle adaptativo, como pode ser observado no exemplo da suspensão ativa, exceto para os casos onde a matriz de covariância permaneça limitada todo o tempo, o que não ocorreu em nenhum dos exemplos analisados.

Como observado no decorrer do capítulo 4, o problema do crescimento da matriz de covariância para este método é crucial, e foi verificado que o fenômeno apresenta a seguinte seqüência:

1. O erro do estimador tende para zero, significando que não haverá mais ajustes nos parâmetros.
2. Uma vez o ajuste dos parâmetros seja muito pequeno, a matriz de covariância inicia seu crescimento exponencial e continuará crescendo até que ocorram mudanças na excitação, na referência a ser acompanhada ou alteração dos parâmetros, em outras palavras, o erro seja diferente de zero.

3. Com o crescimento da matriz de covariância, o vetor dos ganhos, vetor K , também começa a crescer, mas o produto do erro por este vetor ainda é muito pequeno, mas com o decorrer do crescimento da matriz de covariância e do vetor dos ganhos, em algum instante, o produto do erro pelo vetor dos ganhos acaba causando uma mudança significativa nos parâmetros.

4. Quando ocorrer uma mudança significativa nos parâmetros, o erro do estimador acaba aumentando e, conseqüentemente, o produto K por e acaba gerando uma mudança brusca nos parâmetros conhecida com o “salto” ou “burst” deteriorando assim a resposta controlada.

Método de Reinicialização da Matriz de Covariância : Sua convergência está ligada com o valor inicial da matriz de covariância, pelo tempo de reinicialização e para qual valor ela será reinicializada. Ele acompanha a variação de parâmetros, mas seu principal problema é estabelecer o tempo de reinicialização. Por não apresentar problemas com as estimativas dos parâmetros, este método é recomendado para o controle adaptativo como pode ser observado no exemplo da suspensão ativa.

Foi verificado que para o sistema de controle acústico quanto maior o tempo de reinicialização e maior o valor para o qual a matriz de covariância será reinicializada melhor a convergência do método, mas estabelecer estes valores não é uma tarefa fácil de ser realizada. Por exemplo, para plantas com características de variação de parâmetros deve-se estabelecer o tempo de reinicialização de acordo com a probabilidade da variação dos parâmetros, isto é, para variações freqüentes um menor intervalo de reinicialização deve ser utilizado.

Finalmente foi constatado que o método híbrido, juntamente com a limitação da amplitude da lei de controle, apresentou boa convergência e um dos melhores resultados para o controle da suspensão. Devendo assim ser um dos métodos mais indicados quando há variação de parâmetros. Mas um problema foi encontrado neste método quando utilizado um fator de esquecimento muito baixo, como mencionado acima, o fator de esquecimento provoca crescimento exponencial da matriz de covariância, e se o tempo de reinicialização não for ajustado convenientemente pode ocorrer uma grande oscilação da resposta da planta controlada devido ao valor que a matriz de covariância esteja assumindo no instante da variação.

Um dos problemas encontrados no método de estimação dos mínimos quadrados é que ele é um método dependente do modelo da planta, isto é, para não haver problemas com erros de polarização há necessidade de estimar toda a planta. Nos exemplos utilizados neste trabalho foram necessário estimar nove parâmetros para o sistema de controle de ruído e dezesseis parâmetros para o caso da suspensão ativa, significando que quanto maior a planta mais parâmetros devem ser estimados, e como consequência, mais difícil tornam-se as estimativas.

Foi observado que a monitoração do traço da matriz de covariância mostra se os parâmetros estimados estão convergindo e quão boa é esta convergência, significando que não há necessidade da observação dos parâmetros (em muitos casos esta monitoração pode acarretar alto custo computacional). Para os casos em que há possibilidade do crescimento da matriz de covariância há a necessidade de monitoração do produto do erro pelo vetor de ganho, já que ele está diretamente relacionado com os ajustes que os parâmetros sofrem. Portanto para um perfeito acompanhamento dos estimadores apenas há necessidade de se monitorar dois parâmetros ao invés de monitorar os parâmetros em si, diminuindo substancialmente o custo computacional.

5.4 Sugestões para Próximos Trabalhos

Para os métodos de estimação recursiva de parâmetros, a análise aqui apresentada deveria ser feita para outros tipos de estimadores desta família, envolvendo também testes experimentais.

Referências Bibliográficas

- Astrom, K.J., Wittenmark, B. On Self Tuning Regulators. **Automatica**, v.9, p.185-199, 1973.
- Astrom, K.J., Wittenmark, B. Self-tuning controllers based on pole-zero placement. **IEE PROCEEDINGS - Pt. D**. v.127, n.3, p.120-130, May 1980.
- Astrom, K.J. Theory and Applications of Adaptive Control - A Survey. **Automatica**. v.19, n.5, p.471-486, 1983.
- Astrom, K.J., Wittenmark, B. **Adaptive Control**. Massachusetts: Prentice Hall. 1989. p.1-26, 58-213, 402-437, 499-511.
- Astrom, K.J., Wittenmark, B. **Computer Controlled Systems - Theory and Design**. Upper Sadle River: Prentice Hall, 1997. p30-75, 165-223, 505-527.
- Barnett, S. **Polynomial and Linear Control Systems**. New York: Marcel Dekker. 1983. p 1-130.
- Cordero, A., Mayne, D.Q. Deterministic Convergence of a Self-Tuning Regulator with A Variable Forgetting Factor. **IEE PROCEEDINGS - Pt. D**. v.128, n.1, p.19-23, Jan 1981.

- Dukkipati, R.V., Osman, M.O.M., Vallurupalli, S.S. Adaptive Active Suspension to attain optimal performance and maintain static equilibrium level. **Vehicle System Dynamics**. v.14, n.5/6, p.471-496, 1993.
- Fortescue, T.R., Kershenbaum, L.S., Ydstie, B.E. Implementation of Self-Tuning Regulators with Variable Forgetting Factors. **Automatica**, v.17, n.6, p.831-835, Apr 1981.
- Goodwin, G.C., Sin, K.S. Adaptive Control of Nonminimum Phase Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**. v.AC-26, n.2, p.478-483, Apr. 1981.
- Goodwin, G.C., Ramadge, P.J., Caines, P.E. Discrete Time Stochastic Adaptive Control. **SIAM Journal of Control and Optimization**. v.19, n.6, p.829-853, Nov 1981.
- Goodwin, G.C., Elliot, H. Teoh, E.K. Deterministic Convergence of a Self-Tuning Regulator with Covariance Resetting. **IEE PROCEEDINGS - Pt. D**. v.130, n.1, p.6-8, Jan 1983.
- Goodwin, G.C., Teoh, E.K. Adaptive Control of a Class of Linear Time Varying Systems. In: Landau, I.D., Tonizuka, M., Auslander, D.M. (Eds) **Adaptive Systems in Control and Signal Processing 1983**. Oxford: Pergamon Press, 1984. p. 137-146.
- Guo, L., Chen, H.F. The Astrom-Wittenmark Self-Tuning Regulator Revised and ELS-Based Adaptive Trackers. **IEEE Transactions on Automatic Control**. v.36, n.7, p.802-812, jul 1991.
- Hac, A. Adaptive Control of Vehicle Suspension. **Vehicle System Dynamics**. v.16, p.57-74, 1987.
- Haykin, S. **Adaptive Filter Theory**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996. p 483-532, 562-587.
- Ljung, L. **System Identification - Theory for the user**. Englewood Cliffs: Prentice Hall. 1987. p. 69-115, 169-206, 303-329.

- Middleton, R.H., Goodwin, R.H. **Digital Control and Estimation - A Unified Approach.** Englewood Cliffs: Prentice Hall. 1990. p 219-258.
- Moore, J.B. Persistence of Excitation in Extended Least Squares. **IEE Transaction on Automatic Control.** v.AC-18, n.1, p.60-68. Jan. 1983
- Ogata, K. **Discrete-Time Control Systems.** Upper Saddle River: Prentice Hall. 1995. 757p.
- Shah, S.L., Cluett, W.R. RLS based schemes for self-tuning control. In: Warwick, K. **Implementation of self-tuning controllers.** London: Peter Pergrinus. 1988. p 23-38.
- Shahian, B., Hassul, M. **Control System Design Using Matlab.** Englewood Clif: Prentice Hall. 1993. p 253-343.
- Shoureshi, R., Brackney, L., Kubota, N. Batta, G. A modern Control Approach to Active Noise Control. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control.** v.115, p.673-678, Dec. 1993.
- Sorenson, H.W. Least-Squares Estimation : from Gauss to Kalman. **IEEE Spectrum.** p.63-68. Jul 1970.
- Vallurupalli, S.S., Dukkupati, R.V., Osman, M.O.M. Discrete Adaptive Active Suspension for Hardware Implementation. **Vehicle System Dynamics.** v.26, p.161-196, 1996.

Apêndice A

Mapeamento de raízes complexas no plano discreto

Neste apêndice será mostrado como retirar das raízes no plano complexo para sistemas discretos as mesmas informações que se obtêm das raízes no plano complexo para sistemas no tempo contínuo. Esta análise pode ser encontrada em Ogata (1995) e Aström e Wittenmark (1997). Numa primeira abordagem será relacionada a passagem do plano complexo para o plano discreto. Posteriormente será apresentado o comportamento das raízes complexas no plano discreto e mencionado como retirar as informações de amortecimento e frequência natural. No final será apresentada qual a localização das raízes discretas em função das raízes complexas desejadas.

Quando a amostragem é incorporada no processo, a relação que rege a transformação do plano complexo S para o plano discreto Z é dada pela equação

$$z = e^{Ts}$$

onde T representa o tempo de amostragem e s a raiz complexa. Como uma raiz complexa é dada na forma

$$s = \sigma + j\omega$$

onde σ representa a parte real e ω representa a parte imaginária, então a transformação para o plano discreto torna-se

$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{j(T\omega + 2\pi k)}$$

Desta última relação pode-se retirar algumas observações:

Primeiro, quanto menor o tempo de discretização mais próximo do círculo de raio unitário encontra-se a raiz. Isto ocorre porque se T tende para zero então $e^{T\sigma}$ tende para 1.

Segundo, existem muitas raízes complexas que correspondem à mesma raiz discreta, isto é, raízes de mesma parte real e frequência múltipla da frequência de amostragem ($2\pi/T$) localizam-se no mesmo ponto no plano discreto. Isto pode ser visualizado passando a exponencial para seno e coseno

$$z = e^{T\sigma} e^{\pm j(T\omega + 2\pi k)} = e^{T\sigma} (\cos(T\omega + 2\pi k) \pm i \sin(T\omega + 2\pi k))$$

Terceiro, todo o lado negativo do plano complexo é localizado dentro do círculo de raio unitário no plano discreto. Este fato ocorre devido à forma da transformação, isto é, se um sistema tem raízes com parte real negativa,

$$s = -\sigma \pm j\omega$$

aplicando-se a transformação encontra-se

$$z = e^{-T\sigma} e^{\pm jT\omega} = e^{-T\sigma} (\cos T\omega \pm i \sin T\omega)$$

Como a parte imaginária representa o termo “girante” (passando a exponencial para seno e coseno) e a parte real representa o raio, então

$$|z| = e^{-T\sigma} < 1$$

portanto o raio será sempre menor que 1.

Devido a estas afirmações, observa-se que as áreas das faixas complementares da Figura A.1 localizam-se todas dentro do círculo de raio unitário.

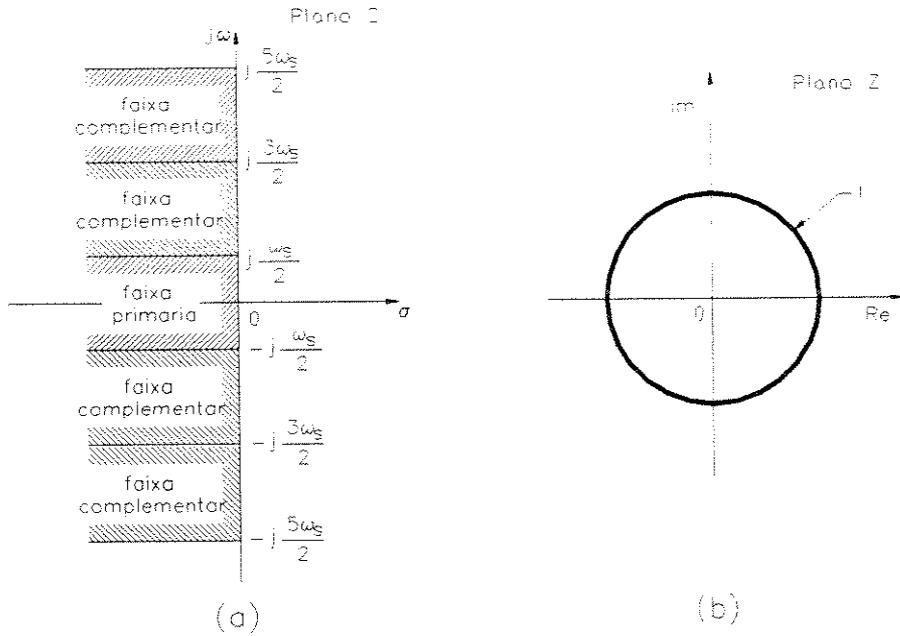


Figura A.1 : Faixas periódicas no plano complexo e a correspondente região no plano discreto.

Na Figura A.1 ω_s corresponde à frequência de amostragem.

Observa-se pela equação de transformação que raízes com a mesma parte real mas com parte imaginária diferente localizam-se em forma de círculo no plano complexo, de acordo com a Figura A.2. Isto também significa que a parte real dá a distância da origem no plano z, isto é, o raio.

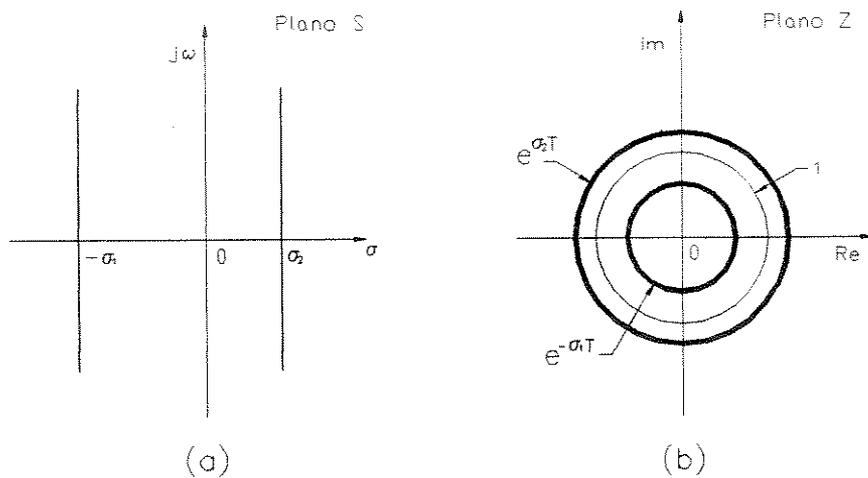


Figura A.2 : Localização das raízes complexas com a mesma parte real no plano discreto

No caso de raízes complexas com a mesma parte imaginária, elas encontram-se na forma de retas inclinadas de ω de acordo com a Figura A.3.

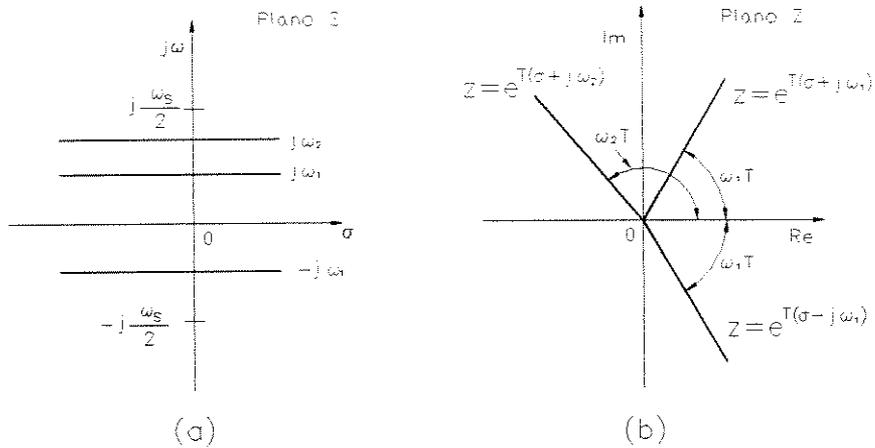


Figura A.3 : Localização das raízes complexas com a mesma parte imaginária no plano discreto

A partir das figuras anteriores pode-se definir o comportamento de curvas de amortecimento ζ constante e frequência natural ω_n constante, mostradas na Figura A.4. Observa-se que o fator de amortecimento é direto mas para a frequência natural deve-se aplicar a transformação indicada na Figura A.4 para cada localização.

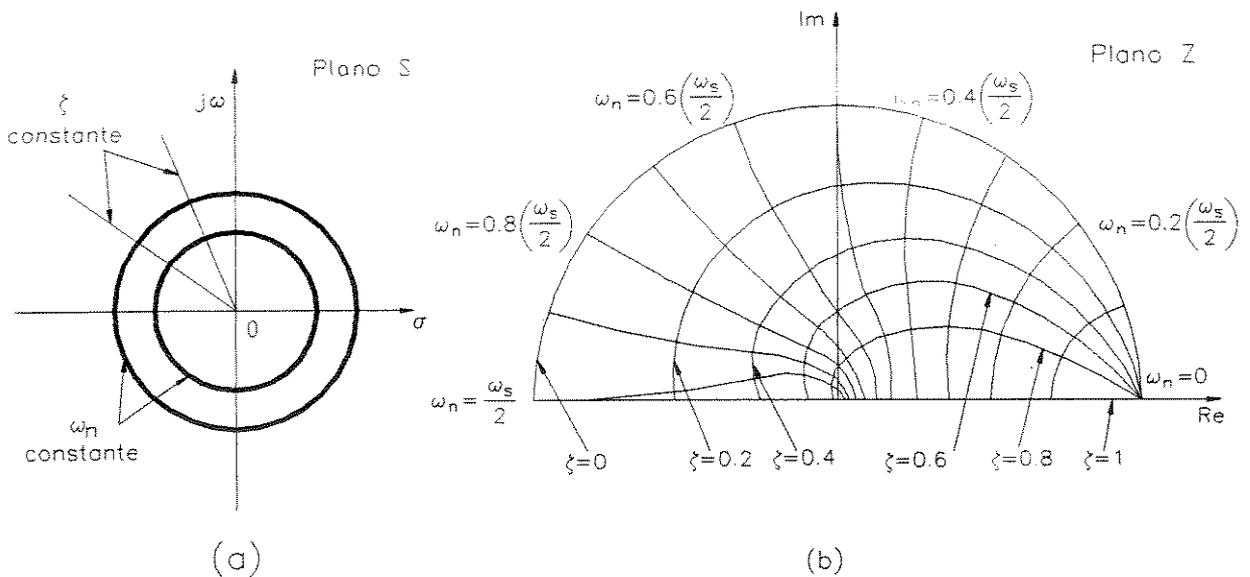


Figura A.4 : Representação das curvas de amortecimento e frequência constante.

Esta abordagem anterior foi feita para determinar qual a região dos pólos e zeros desejados para os modelos de referência. Então a partir dos gráficos anteriores pode-se determinar a região desejada dos pólos e zeros discretos.

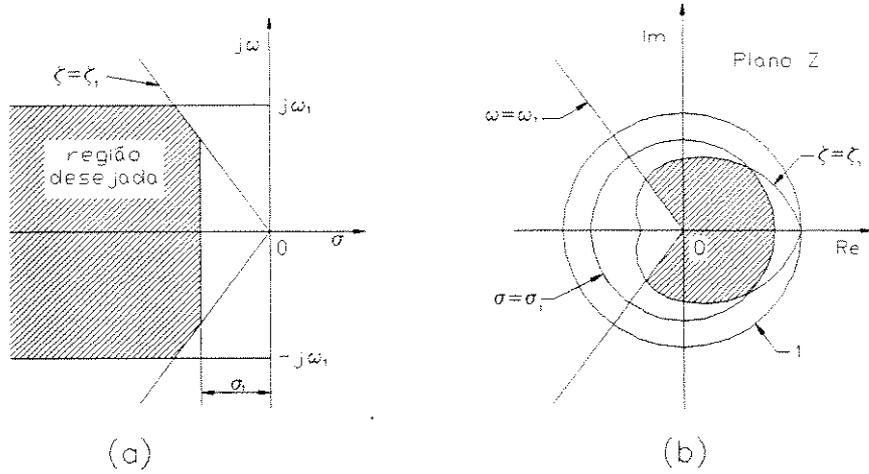


Figura A.5 : Localização das raízes complexas desejadas no plano discreto

Apêndice B

Equacionamento da Entrada Estocástica

Neste apêndice será apresentado o equacionamento da entrada estocástica para a simulação da suspensão.

De acordo com Hac (1987) as vias de terra, concreto e asfalto têm boa aproximação pela seguinte densidade espectral de potência

$$S(\omega) = \left(\frac{\sigma_1^2}{\pi} \right) \left[\frac{\alpha_1 v}{\omega^2 + \alpha_1^2 v^2} \right] + \left(\frac{\sigma_2^2}{\pi} \right) \left[\frac{\alpha_2 v (\omega^2 + \alpha_2^2 v^2 + \beta^2 v^2)}{(\omega^2 + \alpha_2^2 v^2 - \beta^2 v^2)^2 + 4\alpha_2^2 \beta^2 v^4} \right] \quad (\text{B.1})$$

onde ω denota a frequência angular, v a velocidade do veículo e as constantes são dadas na Tabela B.1.

Tabela B.1 : Valores dos parâmetros do espectro do terreno

Terreno	$\alpha_1[\text{m}^{-1}]$	$\alpha_2[\text{m}^{-1}]$	$\beta[\text{m}^{-1}]$	$\sigma_1^2[\text{m}^2]$	$\sigma_2^2[\text{m}^2]$
Asfalto	0.2	0.05	0.6	7.65×10^{-6}	1.35×10^{-6}

A densidade espectral de potência definida na equação (B.1) pode ser representada por

$$S(\omega) = \left(\frac{b_4}{\pi} \right) \frac{(\omega^4 + b_2 \omega^2 + b_0^2)}{(\omega^2 + a_1^2)(\omega^4 + a_2 \omega^2 + a_0^2)} \quad (\text{B.2})$$

onde

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \alpha_1 v \\
 a_2 &= 2(\alpha_2^2 - \beta^2) v^2 \\
 a_0^2 &= (\alpha_2^2 - \beta^2)^2 v^4 + 4\alpha_2^2 \beta^2 v^4 \\
 b_4 &= (\sigma_1^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \alpha_2) v \\
 b_2 &= \left[2\sigma_1^2 \alpha_1 (\alpha_2^2 - \beta^2) + \sigma_2^2 \alpha_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta^2) \right] v^3 / b_4 \\
 b_0^2 &= \left[\sigma_1^2 \alpha_1 (\alpha_2^2 - \beta^2)^2 + \sigma_2^2 \alpha_1^2 \alpha_2 (\alpha_2^2 + \beta^2) + 4\sigma_1^2 \alpha_1 \alpha_2^2 \beta^2 \right] v^5 / b_4
 \end{aligned}$$

O processo $w_1(t)$ descreve as irregularidades das vias com a densidade espectral (B.2) e pode ser tratado como uma solução estacionária de um filtro de terceira ordem definido por

$$\dddot{w}_1 + (a_1 + a_3) \ddot{w}_1 + (a_0 + a_1 a_3) \dot{w}_1 + a_0 a_1 w_1 = d_1 \left(\ddot{\xi} + b_3 \dot{\xi} + b_0 \xi \right) \quad (\text{B.3})$$

onde

$$\begin{aligned}
 a_3 &= (a_2 + 2a_0)^{1/2} \\
 b_3 &= (b_2 + 2b_0)^{1/2} \\
 d_1 &= (b_4 / \pi)^{1/2}
 \end{aligned}$$

Realizando a simulação para o asfalto com um veículo a uma velocidade de 20 m/s, encontra-se os resultados apresentados na Figura B.1.

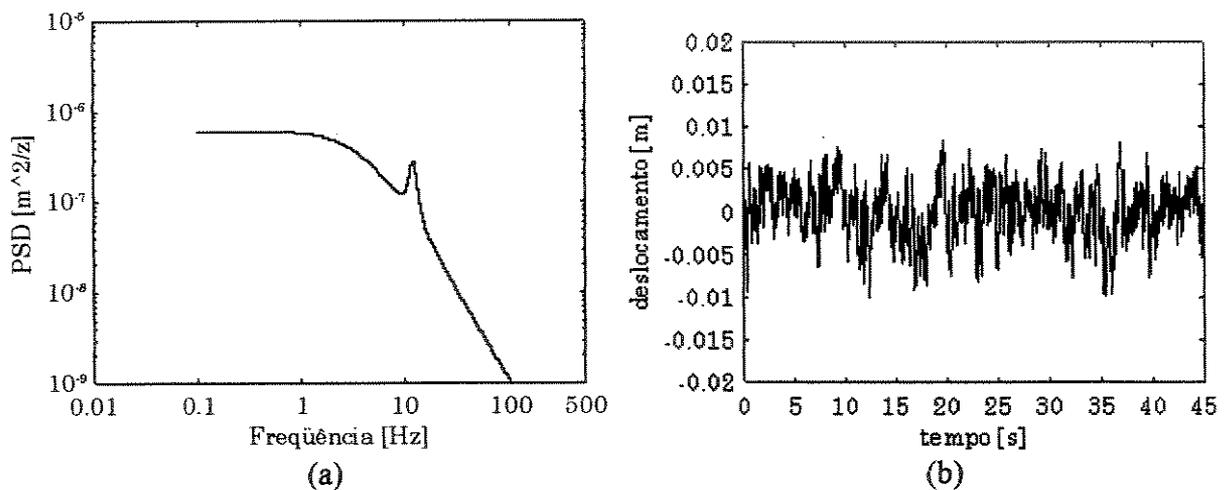


Figura B.1 : Entrada estocástica com $v = 20$ m/s (72 km/h)

Apêndice C

Demonstração

Neste apêndice será mostrado que

$$P(k-1)(\varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)) - P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1) = 0$$

Para simplificar o problema, assume-se

$$\varphi(k) = \varphi = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad P(k-1) = P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Iniciando pela multiplicação do segundo membro da equação, encontra-se

$$\begin{aligned} P\varphi\varphi^T P &= \varphi = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (f_1 P_{11} + f_2 P_{21})(f_1 P_{11} + f_2 P_{12}) & (f_1 P_{12} + f_2 P_{22})(f_1 P_{11} + f_2 P_{12}) \\ (f_1 P_{11} + f_2 P_{21})(f_1 P_{21} + f_2 P_{22}) & (f_1 P_{12} + f_2 P_{22})(f_1 P_{21} + f_2 P_{22}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agora multiplicando o termo entre parênteses do primeiro membro, encontra-se

$$\varphi^T P \varphi = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = f_1(f_1 P_{11} + f_2 P_{21}) + f_2(f_1 P_{12} + f_2 P_{22})$$

Multiplicando por P , encontra-se

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \left[f_1(f_1 p_{11} + f_2 p_{21}) + f_2(f_1 p_{12} + f_2 p_{22}) \right] =$$

$$\begin{bmatrix} f_1 p_{11}(f_1 p_{11} + f_2 p_{21}) + f_2 p_{11}(f_1 p_{12} + f_2 p_{22}) & f_1 p_{12}(f_1 p_{11} + f_2 p_{21}) + f_2 p_{12}(f_1 p_{12} + f_2 p_{22}) \\ f_1 p_{21}(f_1 p_{11} + f_2 p_{21}) + f_2 p_{21}(f_1 p_{12} + f_2 p_{22}) & f_1 p_{22}(f_1 p_{11} + f_2 p_{21}) + f_2 p_{22}(f_1 p_{12} + f_2 p_{22}) \end{bmatrix}$$

Fazendo a subtração, chega-se a

$$P(\varphi^T P \varphi) - P \varphi \varphi^T P = \begin{bmatrix} f_2^2(p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}) & f_1 f_2(p_{12}p_{21} - p_{11}p_{22}) \\ f_1 f_2(p_{12}p_{21} - p_{11}p_{22}) & f_1^2(p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}) \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante, encontra-se

$$\text{Det} \begin{vmatrix} f_2^2(p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}) & f_1 f_2(p_{12}p_{21} - p_{11}p_{22}) \\ f_1 f_2(p_{12}p_{21} - p_{11}p_{22}) & f_1^2(p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}) \end{vmatrix} =$$

$$f_1^2 f_2^2 (p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21})^2 - f_1^2 f_2^2 (p_{12}p_{21} - p_{11}p_{22})^2 = 0$$

Portanto, provando que

$$P(\varphi^T P \varphi) - P \varphi \varphi^T P = 0$$

Apêndice D

Programas Implementados

D.1 Sistema de Controle Acústico

D.1.1 Controlador Polinomial Sem Ação Integral

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%           SIMULAÇÃO DO SISTEMA DE RUÍDO
%
% EXTRAÍDO : A modern Control Approach to
%           Active Noise Control
%
% AUTORES : Shoureshi, Brakney, Kubota, Batta
%
% PUBLICCAÇÃO : Journal of Dynamic Systems,
%           Measurement, and Control
%
% DATA : Dezembro de 1993, volume 115, pg 673-678
%
% IMPLEMENTADO POR : Lázaro Valentim Donadon
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear;clc;close all

%=====
%                               Dados Gerais
%=====

load w                % leitura da entrada

td=0.001;             % tempo de discretização
temp=length(w)*td;    % tempo de simulação

t=td:td:temp;         % vetor de tempo

r=zeros(size(1:length(w))); % vetor da referência
```

```

=====
%
%                                definição da planta
%
=====

A=[1 -0.996 0.099 0];
B=[0.989 0.03 0.01];
C=[0.997 -0.981 0.454];

%
%   y(k) = (A/B)u(k) + (C/A)e(k)
%
%   obs : existe um avanço em y

%
%                                modelo de referência
%
=====

Bm=0.49;
Am=[1 -0.75 0.24 0];

A0=[1 -0.75 0.24 0];

%
%                                Pole Placement
%
=====

Be=B(1);
Ba=B/Be;

d=conv(A0,Am);

r0=d(1)/A(1);
r1=-(-d(2)+A(2)*r0)/A(1);
r2=-(-d(3)+A(3)*r0+A(2)*r1)/A(1);
r3=-(-d(4)+A(4)*r0+A(3)*r1+A(2)*r2)/A(1);

s0=-(-d(5)+A(4)*r1+A(3)*r2+A(2)*r3)/Be;
s1=-(-d(6)+A(4)*r2+A(3)*r3)/Be;
s2=-(-d(7)-A(4)*r3)/Be;

R=conv(Ba,[r0 r1 r2 r3]);
S=[s0 s1 s2];
T=conv(A0,Bm)/Be;

%
%                                simulação da planta
%
=====

[ye,xe]=dlsim(C,A,w);

[ya1,xa1]=dlsim(conv(B,T),conv(A,R)+[0 0 0 0 conv(B,S)],r);
[ya2,xa2]=dlsim(conv(C,R),conv(A,R)+[0 0 0 0 conv(B,S)],w);

ya=ya1+ya2;

[u1,xu1]=dlsim(conv(A,T),conv(A,R)+[0 0 0 0 conv(B,S)],r);
[u2,xu2]=dlsim(conv(C,S),conv(A,R)+[0 0 0 0 conv(B,S)],w);

u=u1-u2;

[yu,xu]=dlsim(B,A,u);

```

```

=====
%                               Plotagem das respostas
=====

fig=figure( ...
    'Position',[76 240 688 227],...
    'Color',[1 1 1]);

axes('Position',[0.1 0.15 0.8 0.8]);

plot(t,ya,'k')
axis([0 1.2 -2.5 2.5])
grid

set(gca,'FontSize',9,'Fontname','TimesNewRoman');
set(gca,'xtick',[0:0.1:1.2],'ytick',[-2.5:0.5:2.5]);
set(gca,'XColor','k','YColor','k');
xlabel('Tempo [s]','Color','k','FontSize',9,'Fontname','TimesNewRoman')
ylabel('Amplitude','Color','k','FontSize',9,'Fontname','TimesNewRoman')

```

D.1.2 Controlador Polinomial com Ação Integral Simples

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               SIMULAÇÃO DO SISTEMA DE RUÍDO
%                               %
%                               %
% EXTRAÍDO : A modern Control Approach to
%                               Active Noise Control
%                               %
% AUTORES : Shoureshi, Brakney, Kubota, Batta
%                               %
% PUBLICCAÇÃO : Journal of Dynamic Systems,
%                               Measurement, and Control
%                               %
% DATA : Dezembro de 1993, volume 115, pg 673-678
%                               %
% IMPLEMENTADO POR : Lázaro Valentim Donadon
%                               %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear;clc;close all

=====
%                               Dados Gerais
=====

load w                               % entrada da planta

td=0.001;                             % tempo de discretização
temp=length(w)*td;                    % tempo de simulação

t=td:td:temp;                          % vetor de tempo

r=zeros(size(1:length(w)));           % vetor da referência

=====
%                               definição da planta
=====

A=[1 -0.996 0.099 0];
B=[0.989 0.03 0.01];
C=[0.997 -0.981 0.454];

```

```

%
%      y(k) = (A/B)u(k) + (C/A)e(k)
%
%      obs : existe um avanço em y
%
%=====
%                               modelo de referência
%=====

Bm=0.49;
Am=[1 -0.75 0.24 0];

A0=[1 -0.75 0.24 0];

%=====
%                               Pole Placement
%=====

Be=B(1);
Ba=B/Be;

d=conv(A0,Am);

r0=d(1)/A(1);
r1=-(-d(2)-A(1)*r0+A(2)*r0)/A(1);
r2=-(-d(3)-A(2)*r0+A(3)*r0-A(1)*r1+A(2)*r1)/A(1);

s0=-(-d(4)-A(3)*r0+A(4)*r0-A(2)*r1+A(3)*r1-A(1)*r2+A(2)*r2)/Be;
s1=-(-d(5)-A(4)*r0-A(3)*r1+A(4)*r1-A(2)*r2+A(3)*r2)/Be;
s2=-(-d(6)-A(4)*r1-A(3)*r2+A(4)*r2)/Be;
s3=-(-d(7)-A(4)*r2)/Be;

R=conv(Ba,conv([1 -1],[r0 r1 r2]));
S=[s0 s1 s2 s3];
T=conv(A0,Bm)/Be;

%=====
%                               simulação da planta
%=====

[ye,xe]=dlsim(C,A,w);

[ya1,xa1]=dlsim(conv(B,T),conv(A,R)+[0 0 0 conv(B,S)],r);
[ya2,xa2]=dlsim(conv(C,R),conv(A,R)+[0 0 0 conv(B,S)],w);

ya=ya1+ya2;

[u1,xu1]=dlsim(conv(A,T),conv(A,R)+[0 0 0 conv(B,S)],r);
[u2,xu2]=dlsim(conv(C,S),conv(A,R)+[0 0 0 conv(B,S)],w);

u=u1-u2;

[yu,xu]=dlsim(B,A,u);

%=====
%                               Plotagem das respostas
%=====

fig=figure( ...
    'Position',[76 240 688 227],...
    'Color',[1 1 1]);

axes('Position',[0.1 0.15 0.8 0.8]);

```

```
f=6.25:393.75/1201:400;

plot(t,ya,'k')
axis([0 1.2 -2.5 2.5])
grid

set(gca,'FontSize',9,'Fontname','TimesNewRoman');
set(gca,'xtick',[0:0.1:1.2],'ytick',[-2.5:0.5:2.5]);
set(gca,'XColor','k','YColor','k');
xlabel('Tempo [s]','Color','k','FontSize',9,'Fontname','TimesNewRoman')
ylabel('Amplitude','Color','k','FontSize',9,'Fontname','TimesNewRoman')
%title('Fig 2.8','Color','k','FontSize',12,'Fontname','TimesNewRoman');
```

D.1.3 Método de Estimação de Parâmetros

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%                               SIMULAÇÃO DO SISTEMA DE RUÍDO
%
% EXTRAÍDO : A modern Control Approach to
%           Active Noise Control
%
% AUTORES : Shoureshi, Brakney, Kubota, Batta
%
% PUBLICAÇÃO : Journal of Dynamic Systems,
%             Measurement, and Control
%
% DATA : Dezembro de 1993, volume 115, pg 673-678
%
% IMPLEMENTADO POR : Lázaro Valentim Donadon
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear;clc;close all

%=====
%                               Dados Gerais
%=====

load w                               % entrada da planta

td=0.001;                             % tempo de discretização
temp=length(w)*td;                   % tempo de simulação

t=td:td:temp;                         % vetor de tempo

r=zeros(size(1:length(w)));          % vetor da referência

%=====
%                               definição da planta
%=====

A=[1 -0.996 0.099 0];
B=[0.989 0.03 0.01];
C=[0.997 -0.981 0.454];

%
%   y(k) = (A/B)u(k) + (C/A)e(k)
%
%   obs : existe um avanço em y
```

```

%=====
%                               modelo de referência
%=====

Bm=0.49;
Am=[1 -0.75 0.24 0];

A0=[1 -0.75 0.24 0];

%=====
%                               Pole Placement
%=====

Be=B(1);
Ba=B/Be;

d=conv(A0,Am);

r0=d(1)/A(1);
r1=-(-d(2)-A(1)*r0+A(2)*r0)/A(1);
r2=-(-d(3)-A(2)*r0+A(3)*r0-A(1)*r1+A(2)*r1)/A(1);

s0=-(-d(4)-A(3)*r0+A(4)*r0-A(2)*r1+A(3)*r1-A(1)*r2+A(2)*r2)/Be;
s1=-(-d(5)-A(4)*r0-A(3)*r1+A(4)*r1-A(2)*r2+A(3)*r2)/Be;
s2=-(-d(6)-A(4)*r1-A(3)*r2+A(4)*r2)/Be;
s3=-(-d(7)-A(4)*r2)/Be;

R=conv(Ba,conv([1 -1],[r0 r1 r2]));
S=[s0 s1 s2 s3];
T=conv(A0,Bm)/Be;

%=====
%                               simulação da planta
%=====

[ye,xe]=dlsim(C,A,w);

[ya1,xa1]=dlsim(conv(B,T),conv(A,R)+[0 0 0 conv(B,S)],r);
[ya2,xa2]=dlsim(conv(C,R),conv(A,R)+[0 0 0 conv(B,S)],w);

ya=ya1+ya2;

[u1,xu1]=dlsim(conv(A,T),conv(A,R)+[0 0 0 conv(B,S)],r);
[u2,xu2]=dlsim(conv(C,S),conv(A,R)+[0 0 0 conv(B,S)],w);

u=u1-u2;

%=====
%                               parâmetros iniciais da estimação
%=====

tetach(:,9) = [0;0;0;0;0;0;0;0;0];
xb=[0;0;0];
xc=[0;0;0];

kss=input('matriz inicial =');
la=input('fator de esquecimento =');
ps=input('fator de resetagem =');

P=kss*eye(9);

```

```

=====
%           iterações do Estimador RLS
=====

for k=1:temp/td,

%-----
%           cálculo de fi(t)
%-----

if k>9
fi = [-ya(k-1) -ya(k-2) -ya(k-3) ...
      u(k)      u(k-1)   u(k-2) ...
      w(k)      w(k-1)   w(k-2)]';
end

if k>9

%-----
%           cálculo do e(t)
%-----

e(k)=ya(k)-tetach(:,k-1)*fi;

%-----
%           cálculo do K(t)
%-----

K=P*fi/(1a+fi'*P*fi);

KK(k)=max(max(abs(K)));

Ke(k)=max(max(abs(KK*e(k))));

%-----
%           cálculo do P(t)
%-----

P=(P-(P*fi*fi'*P)/(1a+fi'*P*fi))/1a;

if (k/ps)==floor(k/ps)
    P = kss*eye(9);
    k
end

maximo(k)=trace(P);

%-----
%           nova estimativa de tetach(t)
%-----

tetach(:,k)=tetach(:,k-1)+K*e(k);

=====
%           resposta estimada
=====

Ae=[1 tetach(1,k) tetach(2,k) tetach(3,k)];
Be=[tetach(4,k) tetach(5,k) tetach(6,k)];
Ce=[tetach(7,k) tetach(8,k) tetach(9,k)];

[Ab,Bb,Cb,Db]=tf2ss(Be,Ae);
[Ac,Bc,Cc,DC]=tf2ss(Ce,Ae);

```

```

xb3=Ab(1,:)*xb+Bb(1)*u(k);
xb2=Ab(2,:)*xb+Bb(2)*u(k);
xb1=Ab(3,:)*xb+Bb(3)*u(k);
yeb=Cb*xb+Db*u(k);

xb=[xb3;xb2;xb1];

xc3=Ac(1,:)*xc+Bc(1)*w(k);
xc2=Ac(2,:)*xc+Bc(2)*w(k);
xc1=Ac(3,:)*xc+Bc(3)*w(k);
yec=Cc*xc+Dc*w(k);

xc=[xc3;xc2;xc1];

yep(k)=yec+yeb;

end

end

%=====
%          plotagem das respostas
%=====

yep=[yep(2:length(yep)) 0];

wxs=[yep ya'];

plot(t,yep,t,ya)
axis([0 1.2 -max(wxs)*1.1 max(wxs)*1.1])

figure

erro=yep-ya';

plot(t(1:length(t)-1),erro(1:length(erro)-1))
axis([0 1.2 -max(erro)*1.1 max(erro)*1.1])

figure

plot(t,tetach')
axis([0 1.2 -1.1*max(max(abs(tetach))) 1.1*max(max(abs(tetach)))])

figure

semilogy(t,maximo)

save teste_4 ya yep erro e maximo tetach KK Ke la ps kss

```

D.1.4 Controle Adaptativo

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%              SIMULAÇÃO DO SISTEMA DE RUÍDO
%
% EXTRAÍDO : A modern Control Approach to
%             Active Noise Control
%
% AUTORES : Shoureshi, Brakney, Kubota, Batta
%
% PUBLICAÇÃO : Journal of Dynamic Systems,
%             Measurement, and Control
%
% DATA : Dezembro de 1993, volume 115, pg 673-678
%
% IMPLEMENTADO POR : Lázaro Valentin Donadon
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear;clc;close all

%=====
%                      Dados Gerais
%=====

load w                % entrada da planta

td=0.001;              % tempo de discretização
temp=length(w)*td;    % tempo de simulação

t=td:td:temp;         % vetor de tempo

r=zeros(size(1:length(w))); % vetor da referência

%=====
%                      definição da planta
%=====

A=[1 -0.996 0.099 0];
B=[0.989 0.03 0.01];
C=[0.997 -0.981 0.454];

%
%    $y(k) = (A/B)u(k) + (C/A)e(k)$ 
%
%   obs : existe um avanço em y

%=====
%                      parâmetros iniciais da estimação
%=====

tetach(:,1) = 0.1*ones(size(1:9))';

kss=input('matriz inicial =');
la=input('fator de esquecimento =');
ps=input('fator de resetagem =');

P=kss*eye(9);

```

```

=====
%
%                               modelo de referência
%
=====

for k=1:temp/td

if k<3
    Aest=[1 tetach(1,1) tetach(2,1) tetach(3,1)];
    Best=[tetach(4,1) tetach(5,1) tetach(6,1)];
    Cest=[tetach(7,1) tetach(8,1) tetach(9,1)];
end

if k>2
    Aest=[1 tetach(1,k-1) tetach(2,k-1) tetach(3,k-1)];
    Best=[tetach(4,k-1) tetach(5,k-1) tetach(6,k-1)];
    Cest=[tetach(7,k-1) tetach(8,k-1) tetach(9,k-1)];
end

%Aest=A;
%Best=B;
%Cest=C;

Bm=conv(0.49,B);
Am=[1 -0.75 0.24 0];

[Amd, Bmd, Cmd, Dmd]=tf2ss(Bm,Am);
[Amc, Bmc]=d2c(Amd,Bmd,td);
[numc, denc]=ss2tf(Amc,Bmc,Cmd,Dmd);
ganho=numc(length(numc))/denc(length(denc));
Bm=ganho*Bm;

A0=[1 -0.75 0.24 0];

%
%                               Pole Placement
%
=====

Be=Best;
Ba=1;

d=conv(A0,Am);

sil=[A(1)      0      0      0      0      0      0
      A(2)-A(1) A(1)      0      Be(1) 0      0      0
      A(3)-A(2) A(2)-A(1) A(1)      Be(2) Be(1) 0      0
      A(4)-A(3) A(3)-A(2) A(2)-A(1) Be(3) Be(2) Be(1) 0
      -A(4)      A(4)-A(3) A(3)-A(2) 0      Be(3) Be(2) Be(1)
      0      -A(4)      A(4)-A(3) 0      0      Be(3) Be(2)
      0      0      -A(4)      0      0      0      Be(3)];

M=inv(sil)*d';

R=conv(Ba,conv([1 -1],[M(1) M(2) M(3)]));
S=[M(4) M(5) M(6) M(7)];

%
%                               simulação da planta
%
=====

if k==1
    [Ab,Bb,Cb,Db]=tf2ss(B,A);
    [Ac,Bc,Cc,Dc]=tf2ss(C,A);
end

```

```

[Au,Bu,Cu,Du]=tf2ss(conv(Cest,S),conv(Aest,R)+[0 conv(Best,S)]);
if k==1
    xb=[0;0;0];
    xc=[0;0;0];
    xu=[0;0;0;0;0;0];
end
if k==1
    xc3=Ac(1,:)*xc+Bc(1)*w(k);
    xc2=Ac(2,:)*xc+Bc(2)*w(k);
    xc1=Ac(3,:)*xc+Bc(3)*w(k);
    ye(k)=Cc*xc+Dc*w(k);
    xc=[xc3;xc2;xc1];
    ya(k)=ye(k);
end
if k>1
    xu6=Au(1,:)*xu+Bu(1)*w(k);
    xu5=Au(2,:)*xu+Bu(2)*w(k);
    xu4=Au(3,:)*xu+Bu(3)*w(k);
    xu3=Au(4,:)*xu+Bu(4)*w(k);
    xu2=Au(5,:)*xu+Bu(5)*w(k);
    xu1=Au(6,:)*xu+Bu(6)*w(k);
    u(k)=-(Cu*xu+Du*w(k));
    xu=[xu6;xu5;xu4;xu3;xu2;xu1];
    xc3=Ac(1,:)*xc+Bc(1)*w(k);
    xc2=Ac(2,:)*xc+Bc(2)*w(k);
    xc1=Ac(3,:)*xc+Bc(3)*w(k);
    ye(k)=Cc*xc+Dc*w(k);
    xc=[xc3;xc2;xc1];
    xb3=Ab(1,:)*xb+Bb(1)*u(k);
    xb2=Ab(2,:)*xb+Bb(2)*u(k);
    xb1=Ab(3,:)*xb+Bb(3)*u(k);
    yu(k)=Cb*xb+Db*u(k);
    xb=[xb3;xb2;xb1];
    ya(k)=yu(k)+ye(k);
end
%-----
%           cálculo de fi(t)
%-----
if k==1
fi = [-ya(k) 0 0 ...
      0      0 0 ...
      w(k)  0 0]';
end
if k==2
fi = [-ya(k) -ya(k-1) 0 ...
      u(k)   0      0 ...
      w(k)   w(k-1) 0]';
end

```

```

if k==3

fi = [-ya(k) -ya(k-1) -ya(k-2) ...
      u(k)    u(k-1)    0 ...
      w(k)    w(k-1)    w(k-2)]';

end

if k>3
fi = [-ya(k-1) -ya(k-2) -ya(k-3) ...
      u(k)     u(k-1)   u(k-2) ...
      w(k)     w(k-1)   w(k-2)]';
end

if k>1

%-----
%          cálculo do e(t)
%-----

e(k)=ya(k)-tetach(:,k-1) '*fi;

%-----
%          cálculo do K(t)
%-----

K=P*fi/(la+fi '*P*fi);

jj(k)=max(K);

%-----
%          cálculo do P(t)
%-----

P=(P-(P*fi*fi '*P)/(la+fi '*P*fi))/la;

if (k/ps)==floor(k/ps)
    P = kss*eye(9);
    k
end

j(k)=det(P);

maximo(k)=trace(P);

%-----
%          nova estimativa de tetach(t)
%-----

tetach(:,k)=tetach(:,k-1)+K*e(k);

end

end

%=====
%          plotagem dos resultados
%=====

fig=figure( ...
    'Position',[120 120 308 231],...
    'Color',[1 1 1]);

```



```

=====
%
%                                dados da simulação
%
=====

td=0.01;           % tempo de discretização
temp=60;           % tempo de simulação

%
%                                excitação de entrada
%
=====

t=0:td:temp;

KK=menu('Escolha a entrada','degrau','determinística','aleatória');

if KK==3
    [w]=aleat(td,temp,t);
    w=w(1:length(w)-1);
end

clear t
t=td:td:temp;

if KK==2
    w=0.005*sin(2*pi*t*0.75)+...
        0.005*sin(2*pi*t*1.25)+...
        0.005*sin(2*pi*t*2);
end

if KK==1
    w=0.1*ones(size(t));
end

%
%                                variação da massa
%
=====

KK=menu('Escolha massa','contínua', ...
        'degrau', ...
        'rampa', ...
        'quadrada');

if KK==1
    m2=[250*ones(size(1:6000))];
end

if KK==2
    m2=[250 400*ones(size(1:5999))];
end

if KK==3
    m2=[(1/20)*t(1:3000)/td+250 ...
        -(1/20)*t(3001:6000)/td+550];
end

if KK==4
    m2=[250*ones(size(1:1500)) ...
        400*ones(size(1:1500)) ...
        250*ones(size(1:1500)) ...
        150*ones(size(1:1500))];
end

```

```

=====
%
%                                dados do veículo
%
=====
m2n=250;           % massa de 1/4 de veículo           [Kg]
m1=25;             % massa da roda                               [Kg]
K2=5000;          % rigidez da suspensão              [N/m]
K1=100000;        % rigidez do pneu                          [N/m]
C2=250;           % amortecimento                       [Ms/m]
g=9.81;           % gravidade                          [m/s^2]
xp=[0;0;0;0];    % vetor de estado da planta passiva
xa=[0;0;0;0];    % vetor de estado da planta ativa
xu1=[0;0;0;0;0;0;0;0]; % vetor de estado do controlador
xu2=[0;0;0;0;0;0;0;0]; % vetor de estado do controlador

%
%                                Modelo de Referência
%
=====

wm=25;
sm=0.707;

numc=wm^2;
denc=[1 2*sm*wm wm^2];
[Amc, Bmc, Cmc, Dmc]=tf2ss(numc, denc);
[Amd, Bmd]=c2d(Amc, Bmc, td);
[Bm, Am]=ss2tf(Amd, Bmd, Cmc, Dmc);
Bm=Bm(2:length(Bm));

A0=real(poly([0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6]));

%
%                                parâmetros iniciais da estimação
%
=====

kss=input('matriz inicial =');
la=input('fator de esquecimento =');
ps=input('fator de resetagem =');

P=kss*eye(16);

tetach = 0.01*ones(size(1:16))';

%
%                                Matrisez de estado continua
%                                xp(k+1) = Ax(k) + Fw(k) + Gc
%
=====

for k=1:temp/td

Ac=[
    0          0          1          0
    0          0          0          1
    -(K1+K2)/m1  K2/m1     -C2/m1    C2/m1
    K2/m2(k)   -K2/m2(k)  C2/m2(k)  -C2/m2(k)];

Bc=[0;0;-1/m1;1/m2(k)];

Fc=[0;0;K1/m1;0];

dst=m2n*g/K2;

Gc=[0;0;0;-g+K2*dst/m2(k)];

Cc=[0 1 0 0];

```

```
Dc=[0];
```

```

%=====
%                               Matrizes de estado Discretas
%=====

```

```
[Ad,Gd]=c2d(Ac,Gc,td);
[Ad,Fd]=c2d(Ac,Fc,td);
[Ad,Bd]=c2d(Ac,Bc,td);
```

```
Cd=Cc;
Dd=Dc;
```

```

%=====
%                               Função de Transferência Discreta
%=====

```

```
[B,A]=ss2tf(Ad,Bd,Cd,Dd);
B=B(2:length(B));
```

```
[C,A]=ss2tf(Ad,Fd,Cd,Dd);
C=C(2:length(C));
```

```
[G,A]=ss2tf(Ad,Gd,Cd,Dd);
G=G(2:length(G));
```

```

%=====
%                               Processo do RST
%=====

```

```
%tetach=[A(2:length(A)) B C G]';
```

```

%-----
%                               Separação de B em B+ e B-
%-----

```

```
Aest=[1 tetach(1) tetach(2) tetach(3) tetach(4)];
Best=[tetach(5) tetach(6) tetach(7) tetach(8)];
Cest=[tetach(9) tetach(10) tetach(11) tetach(12)];
Gest=[tetach(13) tetach(14) tetach(15) tetach(16)];
```

```
Ba=1;           % parte estável
Be=Best;       % parte instável
```

```

%-----
%                               Montagem da Matriz Silvester
%-----

```

```

sil=[Aest(1)           0           0           0           0
0      0      0      0
      Aest(2)-Aest(1) Aest(1)       0           0           Be(1)
0      0      0      0
      Aest(3)-Aest(2) Aest(2)-Aest(1) Aest(1)       0           Be(2)
Be(1) 0      0      0
      Aest(4)-Aest(3) Aest(3)-Aest(2) Aest(2)-Aest(1) Aest(1)       Be(3)
Be(2) Be(1) 0      0
      Aest(5)-Aest(4) Aest(4)-Aest(3) Aest(3)-Aest(2) Aest(2)-Aest(1) Be(4)
Be(3) Be(2) Be(1) 0
      -Aest(5)           Aest(5)-Aest(4) Aest(4)-Aest(3) Aest(3)-Aest(2) 0
Be(4) Be(3) Be(2) Be(1)
      0           -Aest(5)           Aest(5)-Aest(4) Aest(4)-Aest(3) 0
0      Be(4) Be(3) Be(2)

```

```

0      0      0      -Aest(5)      Aest(5)-Aest(4) 0
0      0      Be(4) Be(3)
0      0      0      0      0      -Aest(5)      0
0      0      0      Be(4)];

```

```

%-----
%                               Montagem de R e S
%-----

```

```

d=conv(A0,Am)';
m=inv(sil)*d;

```

```

R1=conv([1 -1],[m(1) m(2) m(3) m(4)]);
S=[m(5) m(6) m(7) m(8) m(9)];

```

```

R=conv(R1,Ba);

```

```

%=====
%                               simulação da planta e Controle
%=====

```

```

[Au1,Bu1,Cu1,Du1]=tf2ss(conv(Cest,S),conv(Aest,R)+[0 conv(Best,S)]);
[Au2,Bu2,Cu2,Du2]=tf2ss(conv(Gest,S),conv(Aest,R)+[0 conv(Best,S)]);

```

```

xu18=Au1(1,:)*xu1+Bu1(1)*w(k);
xu17=Au1(2,:)*xu1+Bu1(2)*w(k);
xu16=Au1(3,:)*xu1+Bu1(3)*w(k);
xu15=Au1(4,:)*xu1+Bu1(4)*w(k);
xu14=Au1(5,:)*xu1+Bu1(5)*w(k);
xu13=Au1(6,:)*xu1+Bu1(6)*w(k);
xu12=Au1(7,:)*xu1+Bu1(7)*w(k);
xu11=Au1(8,:)*xu1+Bu1(8)*w(k);
u1(k)=- (Cu1*xu1+Du1*w(k));
xu1=[xu18;xu17;xu16;xu15;xu14;xu13;xu12;xu11];

```

```

xu28=Au2(1,:)*xu2+Bu2(1);
xu27=Au2(2,:)*xu2+Bu2(2);
xu26=Au2(3,:)*xu2+Bu2(3);
xu25=Au2(4,:)*xu2+Bu2(4);
xu24=Au2(5,:)*xu2+Bu2(5);
xu23=Au2(6,:)*xu2+Bu2(6);
xu22=Au2(7,:)*xu2+Bu2(7);
xu21=Au2(8,:)*xu2+Bu2(8);
u2(k)=- (Cu2*xu2+Du2);
xu2=[xu28;xu27;xu26;xu25;xu24;xu23;xu22;xu21];

```

```

u(k)=u1(k)+u2(k);

```

```

if u(k)>2000
    u(k)=2000;
end

```

```

if u(k)<-2000
    u(k)=-2000;
end

```

```

xa4=Ad(1,:)*xa+Bd(1)*u(k)+Fd(1)*w(k)+Gd(1);
xa3=Ad(2,:)*xa+Bd(2)*u(k)+Fd(2)*w(k)+Gd(2);
xa2=Ad(3,:)*xa+Bd(3)*u(k)+Fd(3)*w(k)+Gd(3);
xa1=Ad(4,:)*xa+Bd(4)*u(k)+Fd(4)*w(k)+Gd(4);
ya(k)=Cd*xa;
xa=[xa4;xa3;xa2;xa1];

```

```

xp4=Ad(1,:)*xp+Fd(1)*w(k)+Gd(1);
xp3=Ad(2,:)*xp+Fd(2)*w(k)+Gd(2);
xp2=Ad(3,:)*xp+Fd(3)*w(k)+Gd(3);
xp1=Ad(4,:)*xp+Fd(4)*w(k)+Gd(4);
yp(k)=Cd*xp;
xp=[xp4;xp3;xp2;xp1];

%=====
%                               iterações do Estimador RLS
%=====

%-----
%                               cálculo de fi(t)
%-----

if k==1
    fi = [0      0 0 0 ...
          u(k)  0 0 0 ...
          w(k)  0 0 0 ...
          1     0 0 0]';
end

if k==2
    fi = [-ya(k-1) 0      0 0 ...
          u(k)     u(k-1) 0 0 ...
          w(k)     w(k-1) 0 0 ...
          1        1      0 0]';
end

if k==3
    fi = [-ya(k-1) -ya(k-2) 0      0 ...
          u(k)     u(k-1)  u(k-2) 0 ...
          w(k)     w(k-1)  w(k-2) 0 ...
          1        1      1      0]';
end

if k==4
    fi = [-ya(k-1) -ya(k-2) -ya(k-3) 0 ...
          u(k)     u(k-1)  u(k-2)  u(k-3) ...
          w(k)     w(k-1)  w(k-2)  w(k-3) ...
          1        1      1      1]';
end

if k>4
    fi = [-ya(k-1) -ya(k-2) -ya(k-3) -ya(k-4) ...
          u(k)     u(k-1)  u(k-2)  u(k-3) ...
          w(k)     w(k-1)  w(k-2)  w(k-3) ...
          1        1      1      1]';
end

if k>1

%-----
%                               cálculo do e(t)
%-----

e(k)=ya(k)-tetach'*fi;

%-----
%                               cálculo do K(t)
%-----

K=P*fi/(la+fi'*P*fi);

```

```

%-----
%                                cálculo do P(t)
%-----

P=(P-(P*fi*fi'*P)/(la+fi'*P*fi))/la;

if (k/ps)==floor(k/ps)
    P = kss*eye(16);
end

%-----
%                                nova estimativa de tetach(t)
%-----

tetach=tetach+K*e(k);

%=====
%                                Aquisição de dados para plotagem
%=====

KK(k)=max(max(abs(K*e(k))));

maximo(k)=max(max(P));

end

if (k/100)==floor(k/100)
    close all
    figure
    plot(ya)
    hold on
    plot(yp,'b')
    grid
    pause(0.1)
end

end

close all
plot(t,ya,t,yp)

save teste_14 t ya yp e w u la ps kss m2 KK maximo wm A0

```