ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Alessandro Corrêa
Victorino E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 02/03/1998
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Controle de Trajetória e Estabilização de Robôs Móveis Não-Holonômicos

Autor: **Alessandro Corrêa Victorino**
Orientador: **Paulo Roberto G. Kurka**
Co-Orientador: **Eurípedes G. O. Nobrega**

01/98

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Controle de Trajetória e Estabilização de Robôs Móveis Não-Holonômicos

Autor: **Alessandro Corrêa Victorino**
Orientador: **Paulo Roberto G. Kurka**
Co-orientador: **Eurípedes G. O. Nobrega**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1998
S.P. – Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISERTAÇÃO DE MESTRADO

Controle de Trajetória e Estabilização de Robôs Móveis Não-Holonômicos

Autor: **Alessandro Corrêa Victorino**
Orientador: **Paulo Roberto Gardel Kurka**
Co-orientador: **Eurípedes G. O. Nobrega**

Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka, Presidente
DPM/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Alberto Elfes
IA/CTI/Campinas

Prof. Dr. João Maurício Rosário
DPM/FEM/UNICAMP

Campinas, 2 de março de1998

Dedicatória:

Dedico este trabalho à minha mãe Elza.

Agradecimentos

Expresso aqui os meus agradecimentos àqueles que tornaram este trabalho possível:

Ao meu orientador, que me indicou as possíveis direções não apenas no âmbito deste trabalho mas também em um contexto mais abrangente.

Ao meu co-orientador pela sua presença sempre constante.

Ao Dr. Samuel S. Bueno, cujos comentários e sugestões foram de grande valor. Sua ajuda foi decisiva não apenas para a conclusão deste trabalho mas também para os futuros.

Ao meu amigo Emersom O. Batista pela ajuda computacional.

Aos Drs. Reginaldo e Marcel que me acompanharam diretamente neste trabalho.

À CAPES pela cessão da bolsa

Ao CTI pela cessão dos equipamentos.

"Ele muda os tempos e as estações; Ele remove e

estabelece os reis; é Ele que dá

a sabedoria aos sábios e

o entendimento aos entendidos."

Daniel 2:21.

Resumo

VICTORINO, Alessandro Corrêa, *Controle de trajetória e Estabilização de Robôs Móveis Não-holonômicos*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 133 p. Dissertação (Mestrado)

Robô Móvel Não-holonômico com rodas (RMN) é um sistema mecânico caracterizado por restrições cinemáticas não integráveis. Esta classe de sistemas mecânicos apresenta sérios problemas para o estudo de controle e estabilização, discutidos nesta dissertação. A condição do posto de Brockett postula que um sistema não-holonômico não pode ser estabilizado para uma configuração de repouso através de leis suaves de realimentação. Os modelos cinemáticos de estado e algumas de suas propriedades estruturais são inicialmente considerados. Linearização por realimentação dinâmica de estados e controle com realimentação suave dependente do tempo são sucessivamente aplicados em uma estratégia híbrida, afim de se obter a convergência para a trajetória de referência e estabilizar o robô para uma configuração de repouso. É apresentado o controle de trajetória de um RMN com utilização de Linearização por Realimentação, com resultados simulados e experimentais baseados no robô KHEPERA, um robô móvel miniatura com 55mm de diâmetro. Os resultados experimentais mostram a aplicabilidade dos estudos teóricos apresentados.

Palavras-chaves: Robôs móveis, Sistemas não-holonômicos, Linearização por realimentação dinâmica, Realimentação contínua variante no tempo, Estratégia híbrida, Análise experimental.

Abstract

VICTORINO, Alessandro Corrêa, *Trajectory Control and Stabilization of NonHolonomic Wheeled Mobile Robot*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade estadual de Campinas, 1998. 133 p. Dissertação (Mestrado)

Nonholonomic Wheeled Mobile Robot (NWMR) is a mechanical system which is characterized by non integrable kinematic constraints. This class of mechanical system poses difficult problems to the study of control and stability, discussed here. Brockett's rank condition shows that a nonholonomic system cannot be stabilized to a rest configuration by means of smooth state feedback laws. Its structural properties are analyzed and the kinematic state space models necessary for the understanding of the behavior of the NWMR are presented. Trajectory tracking problems for mobile robots by means of feedback linearization is then considered. Dynamic feedback linearization and time-varying feedback are successively applied to handle the tracking of a moving reference trajectory and stabilization of the robot to a rest configuration. The trajectory control of a NWMR using feedback linearization is presented, with simulated and experimental results based on a Khepera, a 55 millimeters of diameter miniature mobile robot. Experimental results show the applicability of the theoretical studies presented.

Key-words: Mobile robots, Nonholonomic systems, Dynamic feedback linearization, Time-varying continuous feedback, Hybrid strategy, Experimental analysis.

Indice

1 - Introdução 01

1.1 - Motivação 01
1.2 - Pontos Importantes em Robótica Móvel Autônoma 02
1.3 - Os Sistemas mais Representativos 03
1.4 - O Modelo Cinemático e Dinâmico 06
1.5 - O Controle de Robôs Móveis por Realimentação de Estados 08
1.6 - Objetivos e Contribuições 10
1.7 - Organização da Dissertação 12

2 - Modelamento e Controle de Robôs Móveis 14

2.1 - O Modelo Cinemático de uma Base Móvel 14

2.1.1 - A Postura do Robô Móvel 14
2.1.2 - A Descrição das Rodas 16
2.1.3 - Mobilidade e Classificação dos Robôs Móveis 21
2.1.4 - Os Modelos de Estado dos Robôs Móveis 26
2.1.5 - O Modelo do Robô KHEPERA 30

2.2 - O Comando de Robôs Móveis 34

2.2.1 - Holonomia 35
2.2.2 - Controlabilidade 41
2.2.3 - Estabilização 43

3 - Controle de Trajetória e Estabilização por Realimentação de Estados 46

3.1 - Realimentação invariante no tempo 47

3.1.1 - Linearização por realimentação estática 48
3.1.2 - Linearização por realimentação dinâmica 54

3.2 - Realimentação variante no tempo e leis descontínuas 57

3.2.1 - Realimentação de estado descontínua 58
3.2.2 - Realimentação de estado suave e variante no tempo 59

3.3 - A estratégia híbrida 69

4 - Simulação Computacional 74

4.1 - Seguimento de Trajetória Não-Singular 75
4.2 - Estabilização 82
4.3 - Estratégia Híbrida 86

5 - Resultados Experimentais 90

5.1 - A plataforma Experimental 90
5.2 - Descrição do Experimento 92
5.3 - Os Casos Experimentados 94

5.3.1 - A Trajetória Não-Singular 94
5.3.2 - A Estabilização do Robô para um Ponto de Repouso 99
5.3.3 - A Estratégia Híbrida 101
5.3.4 - Posições Representativas 103

6.0 - Conclusões e Sugestões para Desenvolvimentos Futuros 108

Referências Bibliográficas 112

Lista de Figuras

1.1 O Robô Nomad 05

1.2 O Robô Khepera 06

2.1 Definição da postura do robô móvel 15

2.2 Rodas convencionais fixas e orientadas no centro 17

2.3 Rodas convencionais orientadas fora do centro 18

2.4 Rodas Suecas 19

2.5 Centro Instantâneo de Rotação - CIR 23

2.6 O chassi do robô KHEPERA 30

2.7 Uma bola rolando sobre uma mesa 36

2.8 Espaço de configuração x Espaço Euclidiano 38

3.1 Estabilização do robô para um ponto de repouso (0,0) 69

3.2 Velocidade de referência em função do tempo 72

3.3 N° de Condição da matriz de controlabilidade 72

3.4 Seguimento da trajetória singular 73

4.1 Malha de controle com o Sistema Completo 75

4.2 O Controlador Dinâmico 76

4.3 A postura do robô 77

4.4 Seguimento à trajetória de referência com um ângulo inicial de $3\pi/4rad$ 77

4.5 Erros de seguimento em x e em y 78

4.6 As velocidades das rodas do robô 78

4.7 Seguimento à trajetória de referência com um ângulo inicial de *-3π/4rad* 79

4.8 Erros de seguimento em *x* e em *y* 79

4.9 As velocidades das rodas do robô 80

4.10 Seguimento à trajetória de referência com um ângulo inicial de *-π/4rad* 81

4.11 Erros de seguimento em *x* e em *y* 81

4.12 As velocidades das rodas do robô 82

4.13 A estabilização do robô com *t = 8s* 83

4.14 As velocidades das rodas do robô 83

4.15 A estabilização do robô com *t = 14s* 84

4.16 As velocidades das rodas do robô 85

4.17 Ampliação do ponto final da trajetória na Figura 4.12 - A estabilização do robô com *t = 14s* 85

4.18 A Realimentação Variante no Tempo 87

4.19 Seguimento a uma trajetória singular 88

4.20 Erros de seguimento em *x* e em *y* 88

4.21 As velocidades das rodas do robô 89

5.1 Fotografia do robô móvel KHEPERA com o módulo básico 91

5.2 (a) Resultado da Simulação; (b) Resultado Experimental 95

5.3 a) Erros de convergência na simulação; (b) Erros de convergência no experimento 96

5.4 (a) Resultado da simulação;(b) Resultado da experimentação 97

5.5 (a) Erros na simulação; (b) Erros na experimentação 98

5.6 (a) Resultado da simulação; (b) Resultado Experimental 99

5.7 (a) Velocidade das rodas na simulação; (b) Velocidade das rodas na experimentação 100

5.8 (a) Resultado da simulação; (b) Resultado do experimento 101

5.9 (a) Erros de convergência na simulação; (b) Erros de convergência no experimento 102

5.10 Posições da trajetória não singular com $\theta(0) = 3\pi/4$rad 104

5.11 Posições da trajetória não singular com $\theta(0) = -3\pi/4$rad 105

5.12 Posições na estabilização do robô 106

5.13 Posições durante a aplicação da estratégia híbrida 107

Lista de Tabelas

1 - Restrições cinemáticas para cada classe de rodas 20

2 - Classe de robôs móveis de acordo com (δ_m,δ_s) 25

3 - Parâmetros do modelo tipo "Char", Classe (2,0) 31

Nomenclatura

Letras Latinas

x - Abcissa no plano cartesiano

y -Ordenada no plano cartesiano

I - Sistema de coordenadas cartesianas de referência

X - Sistema de coordenadas cartesianas móvel solidário ao Robô

P - Ponto no robô onde o sistema móvel de referência está assentado.

R - Matriz de transformação de coordenadas.

l - Distância entre o centro da roda e a origem do sistema móvel no robô.

r - Raio da roda.

d - Excentricidade nas rodas orientadas fora do centro

N - Número de rodas

z,q - Coordenada generalizada.

u - Vetor de entradas de controle.

v - Vetor de entradas de controle auxiliar.

L - Meia distância entre as rodas medida sobre o eixo destas.

Letras Gregas

θ - Posição angular do robô em relação ao sistema de referência inercial.

β - Ângulo de rotação das rodas orientáveis.

φ - Ângulo de rotação das rodas em torno do seu centro.

ξ - Postura cartesiana do robô.

η_1 - Velocidade longitudinal do robô.

η_2 - Velocidade angular do robô.

ζ -

λ - Matriz que relaciona as variáveis de controle internas coma as velocidades das rodas.

α - Posição angular do centro da roda em relação ao chassi do robô.

δ_m - Índice de Mobilidade.

δ_s - Índice de Dirigibilidade.

γ - Ângulo que determina a direção de não-deslizamento nas rodas suecas.

Σ - Matriz cujas colunas formam uma base no espaço nulo da matriz das restrições cinemáticas.

Δ - "Control Lie Algebra"

Δ_0 - Involutiva Fechada.

χ_e - Vetor de estado estendido.

ϕ - Trajetória.

Subscritos

c - Rodas orientáveis no centro.

fc - Rodas orientáveis fora do centro.

sw - Rodas suecas.

e - Estado estendido.

ref - Referência

Abreviações

RMC - Robô Móvel Comandado.

CIR - Centro Instantâneo de Rotação.

Siglas

DPM - Departamento de Projeto Mecânico.

LRV - Laboratório de Robótica e Visão.

IA - Instituto de Automação.

CTI - Fundação Centro Tecnológico para a Informática.

INRIA - Institut National de Recherche en Informatique et Automatique.

MIT - Massachusetts Institute of Technology.

Capítulo 1

Introdução

1.1 - Motivação.

Alguns robôs móveis com rodas, assim como satélites, robôs móveis com múltiplas pernas, etc., pertencem a uma classe de sistemas mecânicos denominada de sistemas não-holonômicos. Tais sistemas são caracterizados por possuirem restrições cinemáticas não integráveis. Os algoritmos de controle e planejamento de movimento de tais sistemas, requerem portanto uma diferente classe de procedimentos do que aqueles empregados no controle de manipuladores mecânicos estacionários.

Os conceitos básicos de controle e estabilização de robôs móveis são uma extensão direta do estudo dos manipuladores mecânicos, porém os modelos cinemáticos e dinâmicos dos robôs móveis apresentam algumas características especiais que exigem um enfoque diferente ao apresentado no estudo dos manipuladores. Essa diferença é introduzida neste ponto e fornece a idéia básica que caracteriza os sistemas holonômicos e os sistemas não-holonômicos. Os manipuladores mecânicos são sistemas holonômicos, isto é, possuem modelos de estados que podem ser integrados e, consequentemente, estabilizados para uma configuração desejável através de leis suaves de controle com realimentação de estados. Os robôs móveis sujeitos à restrições não-holonômicas, por sua vez, embora sejam completamente

controláveis em seu espaço de configuração (desde que o número de atuadores seja igual ao número de graus de liberdade do sistema), não podem ser estabilizados para uma configuração desejável com as mesmas leis de controle com realimentação de estados - Brockett(1983), Bloch(1990), Samson(1992), Samson(1993), D´Andrea-Novel(1995), Campion(1996). Isto significa que, embora a propriedade de controlabilidade indique teoricamente que qualquer configuração final do sistema possa ser obtida em um tempo finito através da aplicação de entradas de controle adequadas, nenhuma lei de controle que dependa somente dos erros de configuração pode assegurar convergência assintótica do veículo para uma configuração predeterminada. Essa característica é uma das áreas que tem motivado pesquisas em robótica móvel atualmente e tem induzido, na área de controle automático, o desenvolvimento de estratégias de controle e estabilização com realimentação de estados para robôs móveis mais sofisticadas. O maior enfoque em robótica móvel atualmente está na área de percepção.

É nesse contexto que se apresenta essa dissertação, que consiste no estudo das características não-holonômicas dos robôs móveis e na aplicação de técnicas de controle não linear por realimentação de estados. Uma outra motivação foi a necessidade de confirmar o formalismo teórico, bem estabelecido, na prática, com a utilização de um robô móvel experimental. Esta é uma característica importante dessa dissertação. Para uma reflexão da importância da convalidação experimental dos resultados teóricos, pode-se citar um comentário do Dr. Alberto Elfes do IA/CTI,Campinas:

"*A experimentação prática agrega um grande valor a um trabalho de pesquisa.*", Elfes(1997)

No restante deste capítulo, são introduzidos: Pontos importantes em robótica móvel autônoma (seção 1.2), Os sistemas mais representativos (seção 1.3), O modelo cinemático e dinâmico (seção 1.4), O controle de robôs móveis por realimentação de estados (seção 1.5), Objetivos e contribuições (seção 1.6), Organização da dissertação (seção 1.7).

1.2 - Pontos importantes em robótica móvel autônoma.

Antes de adentrar nesse estudo, é necessário a introdução de uma definição para robô móvel bem como a abordagem de alguns pontos básicos. Muir(1988) define um robô móvel como : "Um robô capaz de se locomover sobre uma superfície somente através da atuação de

rodas montadas no robô e em contato com a superfície. As rodas permitem um deslocamento relativo entre o seu eixo e a superfície sobre a qual se espera ter um único ponto de contato com rolamento puro.

Um robô móvel autônomo atual é equipado com sensores (visão, infra vermelho, sonar, tato, sistemas de navegação inercial, etc.) que promovem a percepção do ambiente externo totalmente ou parcialmente desconhecido e é dotado de capacidade de decisão que lhe permite cumprir uma determinada tarefa sem intervenção humana, Pissard(1993). Quando tais sensores estão disponíveis no robô, pose-se fazer uso da interação do robô com o ambiente, primeiramente fazendo-o perceber e construir o modelo do ambiente no qual o movimento se desenvolve e depois decidir sobre as ações a serem tomadas para a realização de uma determinada tarefa. Na maioria dos casos, a decisão se traduz por uma especificação de trajetória no espaço cartesiano ou no espaço de configuração do robô. Os processos de percepção e decisão podem ser considerados de três formas. Uma delas é a estratégia reativa onde o comportamento do robô é determinado pelos estímulos exteriores vindos do ambiente através dos sensores. Outra é a chamada estratégia deliberativa onde as informações do ambiente são previamente processadas e a tarefa e o comportamento do robô são, da mesma forma, previamente determinadas. A última estratégia é chamada de estratégia híbrida onde ocorre a junção das duas estratégias anteriores.

1.3 - Os sistemas mais representativos.

Um dos primeiros robôs móveis de relevância experimental foi o robô SHAKEY do Instituto de Pesquisa de Stanford, entre as décadas de 60 e 70. Esse robô foi desenvolvido com o objetivo de estudar as aplicações de inteligência artificial. O robô CART do mesmo Instituto de pesquisa foi desenvolvido para estudos de visão estéreo. As aplicações ficaram restritas devido à carência de recursos computacionais antes dos anos 80. Becker(1997), Cozman(1991).

O Laboratório de Robôs Móveis no Instituto de Robótica da Universidade de Carnegie-Mellon tem, desde 1982, projetado, construído e avaliado quatro protótipos de robôs móveis, Muir(1988):

- O robô PLUTO com três rodas independentemente acionadas, foi desenvolvido para o estudo dos problemas de controle e estabilização.

- O robô NEPTUNE é um triciclo equipado com duas câmaras e 24 sensores de ultra-som distribuídos em sua volta.

- O robô ILONATOR possui quatro rodas unidirecionais montadas simetricamente nos quatro vértices de um retângulo, resultando em um movimento com três graus de liberdade. Um microprocessador embarcado faz a interface com os atuadores das rodas (motores DC-Brushless) que possuem sensores (encoders ópticos) e o robô necessita de um computador para a comunicação dos comandos de auto-nível.

- O robô TERRAGATOR é dotado de um motor à gasolina. Ele se desloca a curtas distâncias em estradas e se orienta visualmente pelas bordas da pista.

Na França os robôs móveis mais representativos são:

- O HILARE do *Laboratoire d'Automatique et d'Analyses des Systemes* (LAAS) que é utilizado para pesquisas sobre programação de robôs móveis e planejamento de movimento.

- O robô móvel do projeto ICARE do INRIA/Sophia Antipolis que serve como plataforma experimental para o estudo de processamento de imagens em 3D.

Alguns sistemas mais representativos no *Artificial Intelligence Lab. Massachusetts Institute of Technology (MIT)* são listados abaixo:

- O robô PEBBLES, um robô móvel que usa uma câmera para evitar obstáculos em ambientes acidentados e desconhecidos.

- Os microrobôs ANTS foram projetados para explorar idéias sobre a ação de cooperação entre robôs. Esse projeto tem como objetivos estender os limites da micro-robótica integrando muitos sensores e atuadores em um espaço pequeno e formar uma

comunidade robótica estruturada a partir da interação de seus indivíduos. O projeto se inspirou em um fato da natureza - A colônia de formigas.

- O SOLETTE, um robô móvel de 30 gramas de massa, é completamente autônomo e alimentado por energia solar. A energia coletada de um painel solar é estocada em um capacitor de 1F para a alimentação do robô. Tal robô serve também aos propósitos de exploração espacial.

O caso mais representativo de estudo da robótica móvel no Brasil é o Laboratório de Robótica e Visão do Instituto de Automação no Centro Tecnológico para a Informática - LRV/IA/CTI em Campinas, SP. Os projetos se relacionam não apenas com robôs móveis mas a sistemas não-holonômicos tais como veículos aéreos autônomos (dirigível e helicópteros). Os projetos robóticos e robôs do CTI são:

- O projeto LEOPARD que abrange a questão do controle de robôs móveis atuando de forma cooperativa inclui os módulos de sensoriamento por visão computacional, estratégia de trajetórias e comunicação por telemetria.

- O robô NOMAD, Nomadic Technologies Company, Figura 1.1, de origem americana, que é uma plataforma para estudos experimentais, possui sensores de proximidade infravermelho e de ultra-som, dois anéis em sua base com sensores de tato e é equipado com uma câmera que faz parte do sistema de sensoriamento por visão. A navegação do robô é ainda auxiliada por uma bússola digital. O robô NOMAD é utilizado no desenvolvimento de softwares de controle, percepção e navegação.

Figura 1.1: O Robô Nomad.

- O robô KHEPERA, Figura 1.2, de origem suíça. Trata-se de um robô móvel miniaturizado, de seção circular com raio de 2,5cm e que se move através de duas rodas fixas atuadas por motores de corrente contínua independentes. Dispõe de módulos suplementares de visão, telemetria e garra mecânica. Em

sua circunferência existem oito sensores de infravermelho que detectam a aproximação a obstáculos. É utilizado no estudo de controle e estabilização de sistemas não-holonômicos.

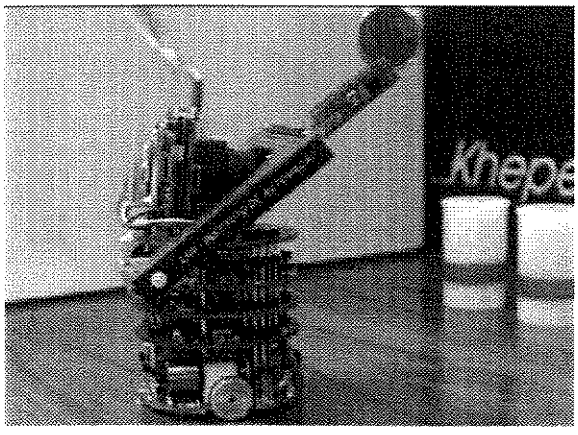


Figura 1.2: O Robô Khepera

O Laboratório de Automação e Sistemas da Escola Politécnica de São Paulo dispõe de um AGV (Autonomous Guided Vehicle), o ARIEL, uma base experimental construída no próprio laboratório. Possui duas rodas motrizes acionadas por motores de corrente contínua com torque máximo de 0,75 N.m. Possui ainda um computador de bordo destinado às operações de controle e interfaceamento.

O laboratório de robótica da Universidade Federal das Minas Gerais começa a ser montado com a aquisição de um robô NOMAD, sendo o segundo existente no Brasil.

1.4 - O modelo cinemático e dinâmico

O modelo matemático representativo de um sistema mecânico precede qualquer estudo de controle e estabilização do mesmo. Os robôs móveis, devido a complexidade da teoria de controle aplicada a sistemas não-holonômicos, muitas vezes recebem um tratamento simplificado em termos de modelagem dinâmica Siciliaco(1995), Samson(1990), Pomet(1992), D'Andea-Novel(1995). Os robôs móveis comerciais disponíveis e aplicados na indústria porém, possuem estrutura construtiva mais complexa que os modelos mais simples, usualmente considerados na literatura. Com esse entendimento, tem-se buscado uma abordagem mais representativa do robô real, Campion(1996).

A metodologia de modelagem cinemática e dinâmica apresentada em Muir(1988) unifica o cálculo do modelo de mecanismos robóticos, incluindo: Manipuladores estacionários, múlti-manipuladores, robôs móveis com rodas, robôs móveis com pernas e "patas" robóticas, incorporando os efeitos de inércia, efeitos gravitacionais, atuação de forças externas/torques; e atritos (de deslizamento, de Coulomb e de rolamento). A metodologia dinâmica é modular: cada força/torque e fenômeno de atrito é modelado independentemente; as equações de

força/torque e as equações cinemáticas são construídas sistematicamente a partir dos modelos de força/torque e atrito independentemente.

A característica chave dessa metodologia cinemática é a introdução de sistemas de coordenadas instantaneamente coincidentes. A aplicação desses sistemas permite a formulação das equações de movimento da posição, velocidade e aceleração diretamente a partir das matrizes de transformação de coordenadas homogêneas. Os parâmetros requeridos para esse modelo cinemático são ângulos e distâncias entre os sistemas coordenados. O modelo dinâmico descreve o relacionamento entre o movimento do robô móvel e as forças/torques aplicados pelos atuadores. A abordagem apresentada em Muir(1988) não estabelece as propriedades cinemáticas de mobilidade e dirigibilidade que são importantes no âmbito do robôs não-holonômicos. Essas propriedades e outras características estruturais do modelo cinemático estão descritas em Campion(1996).

A análise das propriedades estruturais dos modelos cinemáticos e dinâmicos e a divisão desses em classes é o objeto de estudo em Campion(1996) que considera um robô móvel genérico, com um numero arbitrário de rodas de vários tipos e várias possibilidades de motorizações, isto é a distribuição dos atuadores. As propriedades estruturais são estudadas levando em conta a restrição de mobilidade do robô induzida pelas características não-holonômicas e pela condição de dirigibilidade deste. Através da introdução do conceito de grau de mobilidade e grau de dirigibilidade, é mostrado que a variedade de construções e configurações de rodas pode ser agrupada em cinco classes. Quatro modelos de estados que são de interesse para o entendimento do comportamento de robôs móveis são então apresentados, a saber: O modelo cinemático de postura, o modelo cinemático de configuração, o modelo dinâmico de configuração e o modelo dinâmico de postura.

Essa abordagem se aplica facilmente aos propósitos de controle e estabilização do robô móvel, além disso permite uma abordagem sob o ponto de vista dos sistemas não-holonômicos, e por essa razão é apresentado e aplicado no desenvolvimento dessa dissertação, na seção 2.1.

1.5 - O controle de robôs móveis por realimentação de estados.

O controle por realimentação de estados de sistemas não-holonômicos, sobretudo dos robôs móveis, tem sido grandemente evocado nos anos recentes, Samson(1990), Samson(1992), Pomet(1992), Samson(1993), D'Andrea-Novel(1995), Thuilot(1996), Morin(1997). Isso é devido aos resultados obtidos em Brockett(1983), chamados de condição do posto (*Rank*), enunciado abaixo:

"*...Um sistema não-holonômico, embora seja completamente controlável, não pode ser assimptoticamente estabilizado para uma configuração de repouso por meio de leis suaves de realimentação de estados.*"

Esse é um problema de estabilização.

O desafio foi então desenvolver leis de realimentação de estados mais complexas para responder a este problema. Duas vertentes de pesquisa têm se levantado na solução desse problema com a utilização das leis descontínuas de realimentação, como a realimentação contínua por partes proposta em Bloch et all(1990) na análise do movimento de um gume de faca sobre uma superfície plana. Outros trabalhos têm seguido este desenvolvimento como Bloch et all(1992), Sϕrdalen(1995). O desenvolvimento das leis suaves de realimentação variantes no tempo podem ser encontrados nos trabalhos de Samson(1992), Pomet(1992), Samson(1993), Morim(1995), Samson(1997). A segunda metodologia está mais distante do que seria uma progressão natural das estratégias de estabilização existentes, mas tem a grande vantagem de preservar a suavidade do controle. Foi iniciado por Samson(1991) e aplicado ao caso de um robô móvel de três rodas.

A relevância da técnica foi demonstrada em Coron(1992) que afirma: "A condição de controlabilidade de um sistema no espaço R^n é suficiente para garantir a existência de uma lei suave de realimentação variante no tempo que venha estabilizar sistemas sem flutuação (em particular inclui os sistemas não-holonômicos)".

Um outro ponto importante quando se trata de estratégias de estabilização para sistemas não-holonômicos é a questão da velocidade ou taxa de convergência desses sistemas para uma

configuração de repouso. Esse é o tema em torno do qual estão concentradas as pesquisas atuais na área de sistemas não-holonômicos, em particular robôs móveis, Pomet(1993), M'Closey(1993), Sϕrdalen(1995), Morin(1995), Morin(1996). As leis descontínuas foram concebidas tendo convergência exponencial enquanto que as leis suaves variantes no tempo apresentavam uma taxa de convergência polinomial e portanto menor que a anterior, Sϕrdalen(1995), Pomet(1993). Entretanto, obteve-se a convergência exponencial para a estratégia suave com a aplicação do conceito de campos vetoriais homogêneos, M'Closey(1993), Pomet(1993), Morin(1996). Essa abordagem requer uma simplificação no modelo do robô móvel, e de qualquer outro sistema não-holonômico, e este, através de transformações de coordenadas convenientes, é representado sob as formas "presa", "normal" ou forma de "potência" e isto simplifica consideravelmente o formalismo matemático envolvido em todas estas formulações, Murray(1993), Pomet(1993), Samson(1995).

Ao lado do problema de estabilização para um ponto de repouso, vem o problema do seguimento de uma trajetória de referência, problema este de solução mais fácil que o de estabilização para robôs móveis, D'Andrea-Novel(1995). Dois problemas de controle de trajetória são formulados em D'Andrea-Novel(1995), o problema de seguimento de postura e o problema de seguimento de ponto. O primeiro, seguimento de postura, se resume na determinação de um controlador por realimentação de estados que conduza ao seguimento, com estabilidade, de uma dada postura de referência móvel no plano. Essa lei de controle é tal que:

- O erro de convergência e a entrada de controle são limitados em todo o tempo.

- O erro de seguimento converge assimptoticamente para zero quando o tempo tende para infinito.

- Se o erro de seguimento inicial é zero, então continua zero em todo o tempo.

Em termos mais concretos, isto pode ser visto como um problema de seguimento de um robô de referência virtual do mesmo tipo. O segundo, seguimento de ponto, não se trata mais de postura (duas coordenadas cartesianas e uma de rotação), mas da posição cartesiana (duas coordenadas planares x, y).

Essa formulação que envolve a abstração de uma referência móvel, descrito no trabalho de D'Andrea-Novel(1995) e também em Thuilot(1996), foi primeiramente observado por Samson(1990) que introduziu a noção de um robô de referência virtual cuja trajetória é determinada pelo controle de alto nível, tornando então possível obter o seguimento não só de um ponto *(x,y)* mas da postura do robô, desde que o carro de referência mantenha-se em movimento. Essa estratégia se baseia nas técnicas clássicas de Lyapunov, Slotine(1991).

Essas questões relacionadas ao seguimento da trajetória de referência têm como uma solução a estratégia de controle denominada de Linearização por Realimentação. O grande interesse nessa metodologia de controle não-linear nos últimos anos advém de sua importância teórica e prática, precisamente quando ela conduz à linearização completa do sistema. Quando este é o caso, o comportamento do sistema em malha fechada pode ser feito de forma linear e desacoplada, e o erro de trajetória converge para zero exponencialmente.

A linearização por realimentação estática conduz à linearização completa do sistema não-linear, Isidori(1989), Neijmejer(1990), Slotine(1991), mas isto não se aplica ao caso dos sistemas não-holonômicos, Thuilot(1996). Entretanto, pelo menos para uma grande classe de robôs móveis, a linearização completa pode ser obtida desde que a velocidade longitudinal do robô seja diferente de zero, por meio de leis de controle mais sofisticadas denominadas de Linearização por Realimentação Dinâmica, Thuilot(1996), D'Andrea-Novel, Pomet(1995), Aranda(1994).

A metodologia de linearização por realimentação é bem vista aos olhos dos estudiosos de automação porque ela garante o controle total sobre cada variável do sistema, em particular possibilidade de obtenção de convergência exponencial de cada variável para sua referência. Nesse contexto, então, a linearização por realimentação dinâmica aparece como uma técnica relevante para se obter o seguimento de trajetória que não contenham pontos de repouso, mesmo no caso de sistemas não-holonômicos.

1.6 - Objetivos e Contribuições.

Os objetivos principais desta dissertação podem ser agrupados em quatro itens: Primeiro, estudar as características estruturais de robôs móveis, principalmente a não-holonomicidade, e

apresentá-las em um contexto mais tratável, claro e simples de modo que facilite a análise de controle. Segundo, considerar a metodologia de linearização por realimentação para se obter o seguimento de trajetória de referência no plano cartesiano, tratando das características e limitações do método. Terceiro, designar uma tarefa completa para o robô que se traduz em chegar a um determinado ponto de repouso seguindo uma trajetória pré-especificada. Quarto, a validação experimental dos resultados obtidos nas simulações computacionais pela aplicação das metodologias de controle a um robô móvel real.

Durante o ano, março/97 a março/98, no qual este trabalho foi desenvolvido, todos os objetivos propostos para a dissertação foram alcançados. Teve-se uma apresentação clara dos problemas intrínsecos aos robôs móveis pela consideração dos tópicos: Controlabilidade, Holonomia e Estabilização. Isso possibilitou o entendimento claro da diferença entre a noção de controlabilidade e estabilização para sistemas não-lineares, mais especificamente para os robôs móveis. A não-holonomicidade foi analisada na literatura e sintetizada, dando a possibilidade de um entendimento intuitivo como complemento ao aspecto matemático de geometria diferencial puramente abstrata, como usualmente se apresentou nos trabalhos analisados.

Tem-se verificado, através de simulações computacionais e testes experimentais, a linearização por realimentação dinâmica de estados como uma metodologia robusta para o controle de seguimento de trajetória de referência, com a utilização de trajetória não-singular. Isto é, uma trajetória que não contenha pontos de repouso também denominados de pontos de singularidade. Associa-se também aqui, para o controle variante no tempo a trajetória singular, aquela que contém pontos de repouso.

Foi considerada a realização de uma tarefa completa de fazer o seguimento a uma trajetória preestabelecida e chegar em um ponto final de repouso. Considerou-se a parte final do movimento, o ponto de repouso, para uma análise em separado. Fez-se então o estudo das técnicas de estabilização: leis descontínuas e leis suaves de realimentação de estados variante no tempo. Tendo sido estabelecida a lei suave como técnica de estabilização, a parte inicial do movimento, que é o movimento de seguimento, voltou a ser considerada pela combinação das duas técnicas, ou seja, linearização dinâmica para a parte de seguimento longe do ponto de

repouso e leis suaves variantes no tempo para a parte final de estabilização. Tal estratégia foi denominada de estratégia híbrida.

Os testes experimentais foram conduzidos no Laboratório de Robótica e Visão Computacional, Instituto de Automação, Fundação Centro Tecnológico para Informática - LRV/IA/CTI com o robô móvel KHEPERA. Os resultados dos experimentos em tempo real validaram na prática os resultados obtidos com as simulações computacionais.

1.7 - Organização da dissertação.

A dissertação se estrutura em duas partes, a primeira chamada de parte teórica, onde se apresenta toda a fundamentação teórica para ser aplicada na segunda parte, diz respeito a simulação e experimentação. A primeira parte compreende os capítulos 2 e 3, e a segunda os capítulos 4 e 5.

O capítulo 2 está subdividido em duas partes: A seção 2.1 apresenta o modelo cinemático e dinâmico de uma base móvel, tratando inicialmente de robôs móveis genéricos e depois do robô móvel em estudo, o robô KHEPERA. É nesta seção que a estrutura e as propriedades dos modelos dos robôs móveis são tratados de tal modo que se pode inferir sobre a mobilidade e dirigibilidade de tais robôs. Quatro modelos de estados são propostos, segundo o desenvolvimento apresentado em Campion(1996), e aplicados à base móvel em estudo. Na seção 2.2 se coloca em evidência os problemas e os desafios que têm levado a comunidade de controle automático a se interessar pelos sistemas não-holonômicos. Nesta seção se aborda a questão da holonomia, controlabilidade e estabilização de sistemas não-holonômicos. Esta seção é de revisão para que melhor se compreenda as estratégias de controle e estabilização que aparecem logo a seguir, no capítulo 3.

É no capítulo 3 que está o centro dessa dissertação. Cada teorema, suposição e comentários ali apresentados são imprescindíveis para o desenvolvimento que se segue. A divisão de suas subseções acontecem de modo que o problema central a ser resolvido vai sendo gradativamente introduzido e investigado. A subseção 3.1 apresenta as estratégias de realimentação invariante no tempo, que são respectivamente a linearização estática, 3.1.1, e a linearização dinâmica, 3.1.2, estratégias utilizadas no controle de trajetória do robô móvel no

início e em boa parte do seu movimento, por isso esta estratégia aparece nesta ordem. Nas seções 3.2 e 3.3, é analisado e adotada uma solução para um problema referente à robótica móvel com rodas que tem intrigado os cientistas dessa área desde os anos 80. Trata-se do problema de estabilização de sistemas mecânicos não-holonômicos, e em particular os robôs móveis. Esta restrição tem incentivado pesquisas na área e duas correntes de pesquisadores com suas metodologias têm proposto possíveis soluções. A seção 3.3 apresenta uma estratégia, chamada de híbrida, que possibilita ao robô o cumprimento da tarefa completa.

Os capítulos 4 e 5 descrevem a parte experimental da dissertação. O capítulo 4 apresenta a simulação numérica que foi obtida com o uso do SIMULINK®, para a construção dos diagramas de blocos, no aplicativo MATLAB®; os gráficos resultantes são apresentados. O trabalho experimental descrito no capítulo 5 inclui uma descrição detalhada do robô móvel KHEPERA, a descrição do experimento e a apresentação dos resultados gráficos que esclarecem o comportamento das variáveis do robô.

O capítulo 6 apresenta as conclusões obtidas desta dissertação e alguns tópicos que podem complementar os estudos apresentados bem como possíveis desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2

Modelamento e Controle de Robôs Móveis

Esse capítulo se divide em duas partes. A primeira aborda a modelagem matemática de robôs móveis. A seção 2.1 apresenta a metodologia de modelagem proposta em Campion(1996) onde é feita uma descrição dos tipos de rodas com as respectivas restrições de movimento no ponto de contato com o solo. Modelos de estado cinemáticos são derivados a partir do modelamento das rodas. Inicialmente a modelagem é feita para robôs móveis genéricos e em seguida é feita uma particularização para o caso do robô móvel KHEPERA. A segunda parte aponta para as características especiais dos robôs móveis, como a não-holonomicidade que os inclui em uma classe de sistemas mecânicos diferentes das classes dos sistemas convencionais, agrupadas em três tópicos: Holonomia, Controlabilidade e Estabilização.

2.1 - Modelo cinemático de uma base móvel.

2.1.1 - A postura do robô.

Os robôs em estudos são considerados compostos de corpos rígidos equipados com rodas indeformáveis e se movimentam no plano horizontal. A posição do robô no plano está descrito na Figura 2.1, onde se vê uma base inercial ortonormal $\{0,I_1,I_2\}$ fixa no plano de

movimento e um ponto de referência P no robô, onde um referencial móvel $\{X_1,X_2\}$ está fixado.

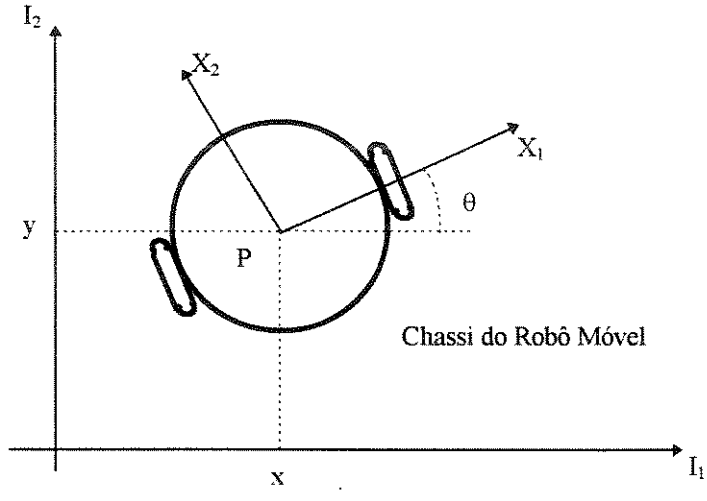


Figura 2.1: Definição da postura do robô móvel

A posição do robô fica, então, completamente especificada por 3 variáveis: x, y e θ.

- x, y são as coordenada de referência do ponto P na base inercial, isto é,

$$\overline{OP} = xI_1 + yI_2;$$

- θ é a orientação da base $\{X_1,X_2\}$ em relação ao referencial inercial $\{0,I_1,I_2\}$.

Pode-se então definir um vetor tridimensional ξ que descreve a postura do robô.

$$\xi = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

bem como uma matriz de transformação de coordenada do sistema móvel inercial

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta & 0 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Esta matriz transforma uma coordenada escrita no sistema inercial, ${}_I A = \{x, y, 0\}$, para o sistema móvel solidário à base móvel:

$${}_m A = R(\theta)\, {}_I A .$$

2.1.2 - A descrição das rodas.

Considera-se que as rodas, durante o movimento, permanecem no plano vertical e giram em torno do seu eixo horizontal que pode permanecer fixo ou variar em relação ao chassi do robô. Descreve-se abaixo as duas classes básicas de rodas, Campion(1996): As convencionais e as suecas. Considera-se que o contato dessas rodas com o chão se dá através de um único ponto no plano.

- **Rodas convencionais.**

Não existe deslizamento no ponto de contato entre a roda e o chão satisfazendo a condição de rolamento puro. Sendo assim a velocidade, e, naturalmente, suas componentes paralela e ortogonal ao plano da roda, são iguais a zero. Estas igualdades resultam em equações que modelam matematicamente o estado de movimento instantâneo do ponto de contato e conduzem aos modelos cinemáticos do robô móvel.

Pode-se separar as rodas convencionais em 3 grupos:

Rodas Fixas: O centro da roda denotado por A, é um ponto fixo no chassi do robô, Figura 2.2. A posição de A na base $\{X_1, X_2\}$ é descrito através das coordenadas polares $\overline{PA} = l$ e α. A orientação do plano da roda em relação a $\overline{PA}$ é representado por um ângulo fixo β. A rotação da roda em relação ao seu eixo horizontal é denotado por $\varphi(t)$ e o raio da roda é r.

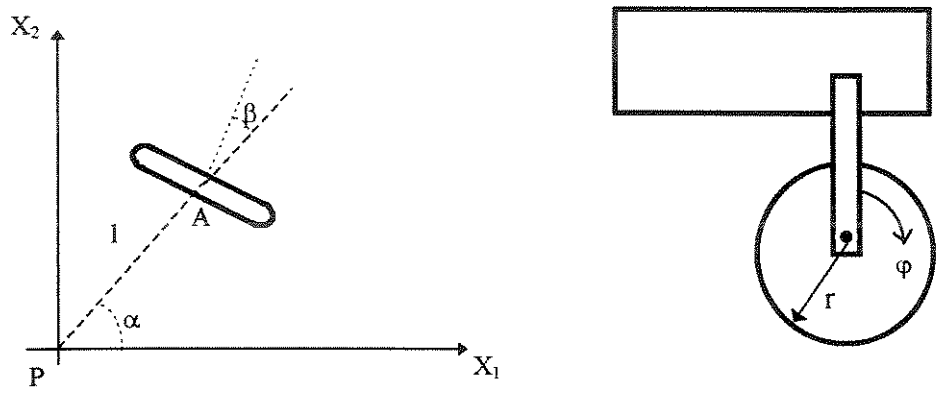


Figura 2.2: Rodas convencionais fixas e orientadas no centro

A posição da roda no plano é então caracterizada pelas constantes, α, β, l, r e pelo ângulo de rotação em torno do seu próprio eixo $\varphi(t)$. Com esta descrição, as componentes de velocidade nos pontos de contato são denotados através das seguintes restrições:

- Ao longo do plano da roda

$$\left[-sin(\alpha+\beta) \quad cos(\alpha+\beta) \quad l\cos\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}+r\dot{\varphi}=0\,, \qquad (2.3)$$

- Ortogonal ao plano da roda

$$\left[cos(\alpha+\beta) \quad sin(\alpha+\beta) \quad lsin\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}=0\,. \qquad (2.4)$$

Rodas Orientadas no Centro: Uma roda orientada no centro é tal que o seu movimento em relação ao sistema de referência é uma rotação em torno de um eixo vertical passando através do seu centro, Figura 2.2. A construção é a mesma que para as rodas fixas, porém, o ângulo $\beta(t)$ não é mais constante e sim variável com o tempo. A posição da roda é caracterizada por 3 constantes, l, α, r, e seu movimento em relação ao sistema de referência móvel por dois ângulos variantes no tempo $\beta(t)$ e $\varphi(t)$. As equações cinemáticas de restrição ao movimento possuem a mesma forma que para as rodas fixas:

- Ao longo do plano da roda.

$$\left[-sin(\alpha+\beta) \quad cos(\alpha+\beta) \quad l\cos\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}+r\dot{\varphi}=0, \qquad (2.5)$$

- Ortogonal ao plano da roda.

$$\left[cos(\alpha+\beta) \quad sin(\alpha+\beta) \quad lsin\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}=0, \qquad (2.6)$$

Rodas Orientadas Fora do Centro: Possuem orientação em relação ao chassi do robô, mas a rotação do plano da roda se dá em torno do eixo vertical que não passa pelo centro da roda, Figura 2.3. O centro da roda, denominado por *B*, é conectado ao chassi do robô pela haste rígida *AB* a qual pode girar em torno do eixo vertical que passa por *A*, a distância entre o centro da roda e o eixo vertical que passa por *A* é expressa por *d*.

A posição da roda é descrita por quatro constantes, *l*, α, *r*, *d* e o seu movimento em relação ao sistema de referência por dois ângulos variantes com o tempo é dado por $\beta(t)$ e $\varphi(t)$. As equações cinemáticas para tais rodas são as seguintes:

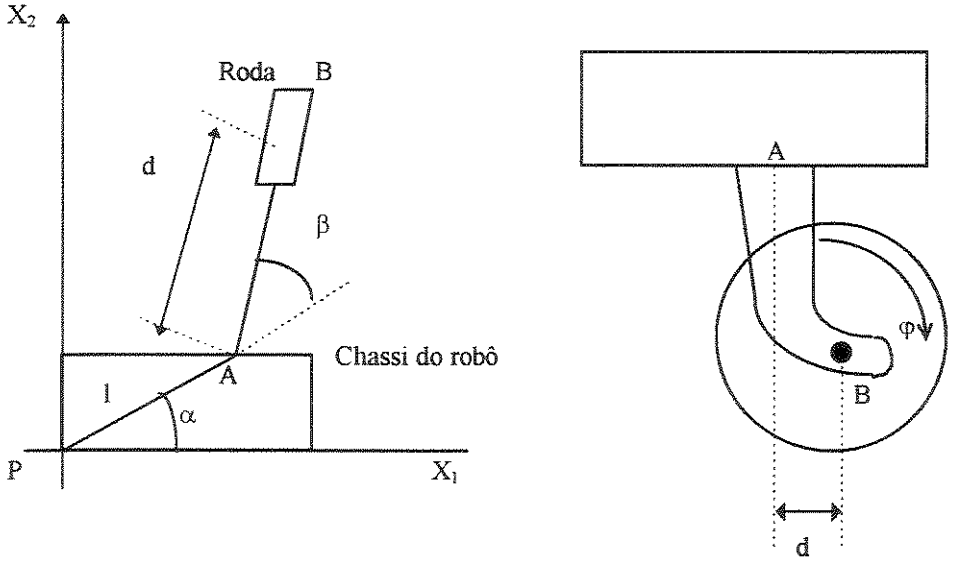


Figura 2.3: Rodas convencionais orientadas fora do centro.

- Ao longo do plano da roda.

$$\left[-sin(\alpha+\beta) \quad cos(\alpha+\beta) \quad l\cos\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}+r\dot{\varphi}=0, \tag{2.7}$$

- Ortogonal ao plano da roda.

$$\left[cos(\alpha+\beta) \quad sin(\alpha+\beta) \quad d+lsin\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}+d\dot{\beta}=0, \tag{2.8}$$

- **Rodas Suecas.**

Nesse caso somente uma das componentes da velocidade do ponto de contato da roda com o chão é considerada igual a zero, diferentemente das rodas convencionais onde todas as componentes da velocidade do ponto de contato são consideradas iguais a zero, ao longo do movimento. A posição da roda em relação ao sistema de referência móvel é descrito como para as rodas convencionais fixas, por 3 parâmetros constantes, α, β, l. Um parâmetro adicional é requerido para caracterizar a direção, em relação ao plano da roda, segundo a qual a componente da velocidade no ponto de contato é zero. Esta direção é representado pelo ângulo γ, Figura 2.4. A equação de restrição cinemática é escrita da seguinte forma:

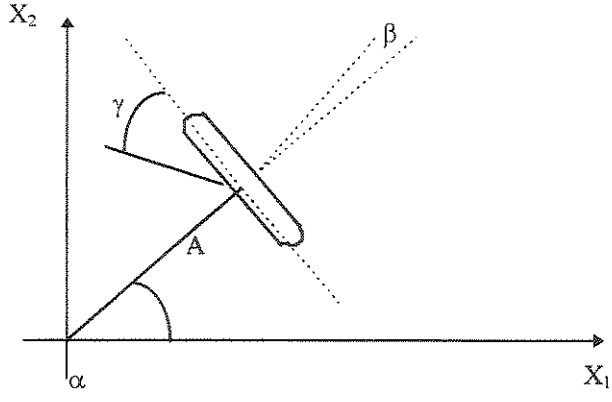


Figura 2.4: Rodas Suecas.

- Ao longo da direção representada por γ, na Figura 2.4.

$$\left[-sin(\alpha+\beta+\gamma) \quad cos(\alpha+\beta+\gamma) \quad l\,cos(\beta+\gamma)\right]R(\theta)\dot{\xi}+r\,cos\gamma\dot{\varphi}=0 \qquad (2.9)$$

As equações cinemáticas apresentadas podem ser resumidas na tabela 1 abaixo

Tabela 1: Restrições cinemáticas para cada classe de rodas.

Rodas Fixas	REF.
$\left[-\sin(\alpha+\beta) \quad \cos(\alpha+\beta) \quad l\cos\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}+r\dot{\varphi}=0$	(2.3)
$\left[\cos(\alpha+\beta) \quad sin(\alpha+\beta) \quad lsin\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}=0$	(2.4)
Rodas Orientadas no Centro	**REF.**
$\left[-\sin(\alpha+\beta) \quad \cos(\alpha+\beta) \quad l\cos\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}+r\dot{\varphi}=0$	(2.5)
$\left[\cos(\alpha+\beta) \quad sin(\alpha+\beta) \quad lsin\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}=0$	(2.6)
Rodas Orientadas Fora do Centro	**REF**
$\left[-\sin(\alpha+\beta) \quad \cos(\alpha+\beta) \quad l\cos\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}+r\dot{\varphi}=0$	(2.7)
$\left[\cos(\alpha+\beta) \quad \sin(\alpha+\beta) \quad d+l\sin\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}+d\dot{\beta}=0$	(2.8)
Rodas Suecas	**REF.**
$\left[-sin(\alpha+\beta+\gamma) \quad \cos(\alpha+\beta+\gamma) \quad l\cos(\beta+\gamma)\right]R(\theta)\dot{\xi}+r\cos\gamma\dot{\varphi}=0$	(2.9)

2.1.3 - Mobilidade e classificação dos robôs móveis.

Um robô móvel geral pode ser equipado com N rodas podendo ter N_F rodas fixas, N_C rodas convencionais orientadas no centro, N_{FC} rodas convencionais orientadas fora do centro e N_{SW} rodas suecas, resultando em um número total de rodas dado pela soma N, Campion(1996):

$$N = N_f + N_c + N_{fc} + N_{sw}.$$

Como se verá no decorrer do texto o número de rodas, fixas e direcionáveis é restringido por questões de mobilidade e não-singularidades na estrutura.

A configuração do robô no plano cartesiano é completamente descrita pelos seguintes vetores de coordenadas.

- Postura $\xi = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}$.

- Coordenada angular: $\beta_C(t)$ e $\beta_{FC}(t)$ para a orientação angular das rodas orientadas no centro e para as orientadas fora do centro, respectivamente.

- Coordenadas de rotação: $\varphi = \begin{Bmatrix} \varphi_f(t) \\ \varphi_c(t) \\ \varphi_{fc}(t) \\ \varphi_{sw}(t) \end{Bmatrix}$ para os ângulos de rotação das rodas em torno de seus eixos horizontais. Os sub-índices significam: *f* - Roda Fixa; *c* - Roda orientada no centro; *fc* - Roda orientada fora do centro; *sw* - Roda sueca.

O conjunto $\{\xi, \beta_C(t), \beta_{FC}(t), \varphi\}$ é chamado de coordenadas de configuração. O número total de coordenadas de configuração é $N_F + 2N_C + 2N_{FC} + N_{SW} + 3$.

As equações de restrições cinemáticas, resumidas na tabela 1, podem então ser escritas em uma forma matricial compacta:

$$J_1(\beta_c,\beta_{fc})R(\theta)\dot{\xi}+J_2\dot{\varphi}=0\,, \tag{2.10}$$

$$C_1(\beta_c,\beta_{fc})R(\theta)\dot{\xi}+C_2\dot{\beta}_{fc}=0\,, \tag{2.11}$$

com as seguintes definições :

$$J_1(\beta_c,\beta_{fc})=\begin{Bmatrix} J_{1f} \\ J_{1c}(\beta_c) \\ J_{1fc}(\beta_{fc}) \\ J_{1sw} \end{Bmatrix}; \qquad J_2=diag(r,r\cos\gamma)\,.$$

J_{1f}, J_{1c}, J_{fc}, J_{sw} são matrizes com dimensões $(N_F \times 3)$, $(N_c \times 3)$, $(N_{fc} \times 3)$, e $(N_{sw} \times 3)$, respectivamente, cuja forma vem diretamente das equações (2.3), (2.5), (2.7) e (2.9). J_2 é uma matriz $(N \times N)$ cuja diagonal é formada pelos raios das rodas, exceto para o raio das rodas suecas o qual é multiplicado por $\cos\gamma$.

$$C_1(\beta_c,\beta_{fc})=\begin{Bmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \\ C_{1fc}(\beta_{fc}) \end{Bmatrix}; \qquad C_2=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{2fc} \end{Bmatrix}.$$

C_{1f}, C_{1c}, C_{1fc} são 3 matrizes de dimensão $(N_F \times 3)$, $(N_c \times 3)$, $(N_{fc} \times 3)$, respectivamente, cujas linhas vêm diretamente das equações (2.4), (2.6) e (2.8), que são restrições na direção ortogonal ao plano da roda. C_{2FC} é uma matriz diagonal constante com elementos iguais a d, parâmetro das N_{FC} rodas orientadas fora do centro.

Considerando as $(N_F + N_C)$ primeiras equações de (2.11), pode-se escreve-las explicitamente como:

$$C_{1f}R(\theta)\dot{\xi}=0\,, \tag{2.12}$$

$$C_{1c}(\beta_c)R(\theta)\dot{\xi} = 0, \tag{2.13}$$

Essas equações implicam que o vetor $R(\theta)\dot{\xi}$ pertence ao espaço nulo da matriz $C_1^*(\beta_C)$ definida como :

$$C_1^*(\beta_c) = \begin{Bmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \end{Bmatrix}, \tag{2.14}$$

$$R(\theta)\dot{\xi} \in N\left[C_1^*(\beta_c)\right], \tag{2.15}$$

Sabe-se, assim, que $Posto\left[C_1^*(\beta_c)\right] \leq 3$, onde *Posto* está sendo usado como tradução do termo em inglês *"Rank"*. Se $Posto\left[C_1^*(\beta_c)\right] = 3$ então $R(\theta)\dot{\xi} = 0$ e qualquer movimento no plano é impossível. Uma interpretação geométrica para as equações (2.12) e (2.13) é que em cada instante o movimento do robô pode ser visto como uma rotação em torno do centro instantâneo de rotação *(CIR)* cuja posição relativa ao sistema de referência móvel pode ser variável com o tempo. Em cada instante também o vetor de velocidade de qualquer ponto no chassi do robô é ortogonal à linha reta que une este ponto ao *CIR*. Isto implica que, em qualquer instante, o eixo horizontal de rotação de todas as rodas convencionais fixas e orientadas no centro são concorrentes para o *CIR*. Este fato é ilustrado na Figura 2.5 e é equivalente à condição de $Posto\left[C_1^*(\beta_c)\right] \leq 2$.

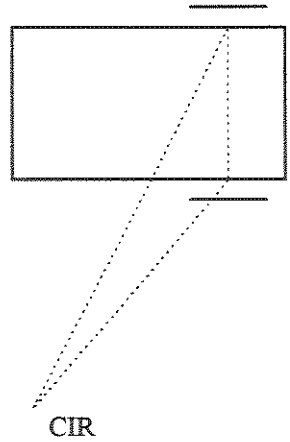


Figura 2.5: Centro Instantâneo de Rotação - CIR.

O Posto da matriz $C_1^*(\beta_C)$ depende do projeto do robô móvel.

O grau de mobilidade para um robô móvel pode então ser definido da seguinte forma:

$$\delta_m = dim\, N[C_1^*(\beta_C)] = 3 - posto[C_1^*(\beta_C)]$$

Se o posto da matriz C_{1f} for igual a 2, isto implica que o robô tem pelo menos duas rodas fixas cujos eixos são concorrentes para o *CIR*, que neste caso será fixo no sistema de referência. Sendo assim, o único movimento possível para o robô será a rotação em torno deste *CIR* fixo. Como na prática essa limitação é indesejável, assume-se que $posto[C_{1f}] \leq 1$.

Um robô é não-degenerado se:

- $Posto[C_{1f}] \leq 1$.
- $Posto[C_1^*(\beta_C)] = Posto[C_{1f}] + Posto[C_{1c}(\beta_C)] \leq 2$.

Isto é:

- Se o robô possui mais que uma roda fixa $(N_F > 1)$ e elas são montadas no mesmo eixo.
- O centro das rodas convencionais orientadas no centro não pertence ao eixo das rodas fixas.

- O $Posto[C_{1c}(\beta_C)]$ é o número de rodas convencionais orientadas no centro que podem ser guiadas independentemente para dirigir o robô. Este número é chamado de grau de dirigibilidade δ_s :

$$\delta_s = Posto[C_{1c}(\beta_c)]$$

Pode-se agrupar os robôs móveis não-singulares ou não-degenerados em cinco classes diferentes de interesse prático, de acordo com o grau de mobilidade δ_m e com o grau de

dirigibilidade δ_s. As classes são separadas de acordo com o par (δ_m,δ_s) e mostradas na tabela abaixo:

Tabela 2: Classes de robôs móveis de acordo com (δ_m,δ_s)

δ_m	3	2	2	1	1
δ_s	0	0	1	1	2

Essas classes são formadas devido às condições sobre δ_m, δ_s descritas a seguir:

- O grau de mobilidade δ_m satisfaz à inequação:

$$1 \le \delta_m \le 3, \tag{2.16}$$

O limite superior indica o número máximo de graus de liberdade que o robô pode ter no plano, as translações segundo as direções x e y, e a rotação θ; o inferior mostra que os robôs considerados devem ter pelo menos um movimento possível $(\delta_m \neq 0)$.

- O grau de dirigibilidade δ_s satisfaz a seguinte inequação:

$$1 \le \delta_s \le 2, \tag{2.17}$$

O limite superior da inequação aplica-se para os robôs sem rodas fixas $(N_f = 0)$, o limite inferior corresponde aos robôs sem rodas convencionais orientadas no centro $(N_c = 0)$.

- Satisfação ainda da seguinte inequação:

$$2 \le \delta_m + \delta_s \le 3 \tag{2.18}$$

COMENTÁRIO: Não existem classes onde $\delta_m + \delta_s = 1$, pois corresponderiam a uma rotação em torno do *CIR* fixo. Também não se admitem classes onde $\delta_m \ge 2$ e $\delta_s = 2$ para que o robô não apresente uma estrutura singular.

2.1.4 - Os modelos de estado dos robôs móveis.

O estudo do modelo de estado para os diversos tipos de robôs, entre eles os pertencente à classe (2,0) denominados de "Char", pode ser dividido em quatro tipos:

- O modelo cinemático de postura e o modelo cinemático de configuração:

São modelos matemáticos de estado que dão uma descrição geral dos robôs móveis; permitem que se discuta as propriedades de manobra do robô. Possibilitam uma análise do robô dentro do contexto de sistemas não-holonômicos.

Esses modelos são apresentados detalhadamente abaixo:

- O modelo cinemático da postura.

Como descrito pela equação (2.15), $R(\theta)\dot{\xi} \in N\left[C_1^*(\beta_c)\right]$, conclui-se que para qualquer instante de tempo t, existe um vetor variante com o tempo $\eta(t)$, tal que:

$$\dot{\xi} = R^T(\theta)\Sigma(\beta_c)\eta$$

Na representação acima as colunas de $\Sigma(\beta_c)$ formam uma base do espaço nulo de $C_1^*(\beta_c)$.

A dimensão do vetor $\eta(t)$ é o grau de mobilidade δ_m do robô. Quando o robô não tem rodas orientáveis ao centro (δ_s=0) a matriz Σ é constante e:

$$\dot{\xi} = R^T(\theta)\Sigma\eta .$$

De outra forma, o modelo pode ser descrito como:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= R^T(\theta)\Sigma(\beta_c)\eta \\ \dot{\beta}_c &= \varsigma \end{aligned} \tag{2.19}$$

As expressões acima formam o modelo cinemático de postura, com as coordenadas de postura ξ e a coordenada angular β_c como variáveis de estado, enquanto η e ζ são considerados como as entradas de controle. As verdadeiras entradas de controle em um sistema físico são os torques dos motores embarcados, logo, o modelo cinemático é apenas um subsistema do modelo dinâmico.

O modelo cinemático de postura escrito de forma compacta fica:

$$\dot{z} = B(z)u$$

se $N_c=0$

$$z = \xi;$$
$$B(z) = R^T(\theta)\Sigma$$
$$u = \eta$$

se $N_c \neq 0$

$$z = \begin{bmatrix} \xi \\ \beta_c \end{bmatrix}$$
$$B(z) = \begin{bmatrix} R^T(\theta)\Sigma & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$
$$u = \begin{bmatrix} \eta \\ \varsigma \end{bmatrix}$$

Para cada classe de robô móvel, entre as definidas na Tabela 2, existe um modelo cinemático de postura diferente. Todos os robôs pertencentes a uma mesma classe podem ser representados pelo mesmo modelo correspondente, variando a posição do ponto P e do referencial móvel (X_1,X_2) no robô. O modelo cinemático de postura permite inferir sobre conceitos de Mobilidade, Dirigibilidade e Manobrabilidade do robô móvel.

O grau de manobrabilidade de um robô móvel pode ser definido como o número de graus de liberdade que podem ser diretamente manipulados com as entradas η e ζ, instantaneamente, a partir da configuração do robô em um dado momento, sem redirecionar qualquer de suas rodas.

O grau de mobilidade δ_m é o primeiro critério de manobrabilidade, porém este não expressa a totalidade dos graus de liberdade que podem ser manipulados pelas entradas de controle η e ζ, mas somente as manipuladas por η. Entende-se portanto que a manobrabilidade do robô é expressa pela soma

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s ,$$

com δ_s adicionando os graus de liberdade manipulados pela entrada ζ.

Robôs com maior grau de manobrabilidade δ_M podem ter seu *CIR* localizado de forma a permitir maior liberdade de manobra.

- O modelo cinemático de configuração.

O modelo cinemático referente a postura, que se vê no item anterior, não envolve as velocidades angulares e de rotação $\dot{\beta}_{fc}$ e $\dot{\varphi}$. O modelo cinemático de configuração relaciona tais variáveis de estado.

Das equações (2.10) e (2.11), vem:

$$\dot{\varphi} = -J_2^{-1} J_1(\beta_c, \beta_{fc}) R(\theta) \dot{\xi}$$

$$\dot{\beta}_{fc} = -C_2^{-1} C_1(\beta_c, \beta_{fc}) R(\theta) \dot{\xi}$$

As equações para $\dot{\beta}_{fc}$ e $\dot{\varphi}$ quando combinadas com o modelo de postura,

$$\begin{cases} \dot{\xi} = R^T(\theta)\Sigma(\beta_c)\eta \\ \dot{\beta}_c = \varsigma \end{cases}$$

, são escritas como:

$$\dot{\varphi} = E(\beta_c, \beta_{fc})\Sigma(\beta_c)\eta \tag{2.20}$$

$$\dot{\beta}_{fc} = D(\beta_{fc})\Sigma(\beta_c)\eta \tag{2.21}$$

sendo:

$$E(\beta_c, \beta_{fc}) = -J_2^{-1} J_1(\beta_c, \beta_{fc})$$

$$D(\beta_{fc}) = -C_2^{-1} C_1(\beta_c, \beta_{fc})$$

Observa-se também que essas matrizes satisfazem as seguintes equações:

$$J_1(\beta_c, \beta_{fc}) + J_2 E(\beta_c, \beta_{fc}) = 0 \tag{2.22}$$

$$C_1(\beta_{fc}) + C_2 D(\beta_{fc}) = 0 \tag{2.23}$$

O modelo cinemático de configuração do robô pode ser escrito a partir da definição de q como o vetor das coordenadas de configuração,

$$q = \begin{bmatrix} \xi \\ \beta_c \\ \beta_{fc} \\ \varphi \end{bmatrix},$$

como sendo:

$$\dot{q} = S(q)u \tag{2.24}$$

$$S(q)=\begin{bmatrix} R^T(\theta)\Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \\ D(\beta_{fc})\Sigma(\beta_c) & 0 \\ E(\beta_c,\beta_{fc})\Sigma(\beta_c) & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{e} \quad u=\begin{bmatrix} \eta \\ \varsigma \end{bmatrix}$$

2.1.5 - O modelo do robô Khepera.

O KHEPERA é um robô móvel de seção circular com raio de 2,65 cm. Possui duas rodas convencionais fixas no chassi diametralmente opostas com raio de 0,75 cm. A Figura 2.6 esquematiza o chassi do KHEPERA.

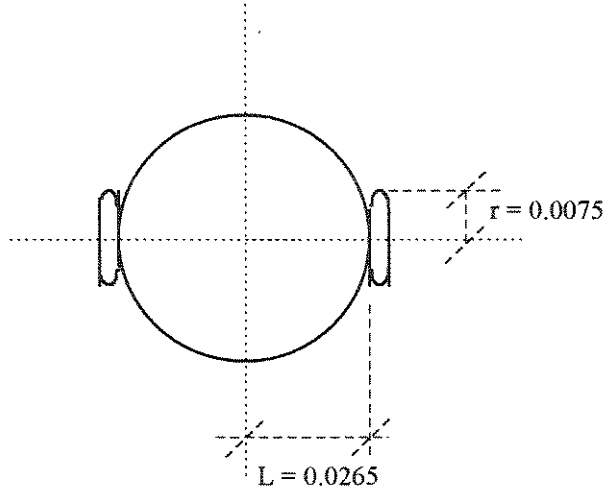


Figura 2.6: O chassi do robô KHEPERA.

O robô possui ainda dois apoios que mantém um contato perfeito com o chão e não interferem de forma significante em seu modelo cinemático. Os modelos cinemáticos de postura e de configuração do KHEPERA são derivados abaixo, seguindo o desenvolvimento apresentado na seção 2.1.4:

- O modelo cinemático de postura do robô KHEPERA.

O modelo cinemático de postura é o mesmo que para todos os robôs móveis pertencentes à classe (δ_m=2,δ_s=0), Tipo *Char*, e pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -sin\theta & 0 \\ cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix}$$

- O modelo cinemático de configuração do robô KHEPERA.

Os parâmetros do sistema estão na tabela 3, onde α, r, l são constantes, β e φ são variáveis com o tempo.

Tabela 3: Parâmetros do modelo tipo "Char", Classe (2,0).

	l	α	r	β	φ
Roda 1	L	0	r	0	φ_1
Roda 2	L	π	r	0	φ_2

onde $L = 0.0265m$ e $r = 0.0075m$.

As restrições cinemáticas têm a forma (2.10) e (2.11), onde:

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1oc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & L \\ 0 & -1 & L \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O modelo cinemático de configuração genérico, equação 2.24, é reescrito abaixo:

$$\dot{q} = S(q)u$$

$$S(q)=\begin{bmatrix} R^T(\theta)\Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \\ D(\beta_{fc})\Sigma(\beta_c) & 0 \\ E(\beta_c,\beta_{fc})\Sigma(\beta_c) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u=\begin{bmatrix} \eta \\ \varsigma \end{bmatrix}$$

O vetor de estado q é definido como:

$$q=\begin{bmatrix} \xi \\ \beta_c \\ \beta_{fc} \\ \varphi \end{bmatrix}$$

O robô não possui rodas orientáveis, logo as expressões são reduzidas para:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} R^T(\theta)\Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \\ E\Sigma & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} \tag{2.25}$$

onde E é dado por:

$$E=-J_2^{-1}J_1$$

$$E=\begin{bmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & -1/r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & L \\ 0 & -1 & L \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1/r & -L/r \\ 0 & 1/r & -L/r \end{bmatrix}$$

$$E\Sigma=\begin{bmatrix} 0 & -1/r & -L/r \\ 0 & 1/r & -L/r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1/r & -L/r \\ 1/r & -L/r \end{bmatrix}$$

Sendo assim:

$$\dot{q}=S(q)u$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -sin\theta & 0 \\ cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{r} & -\frac{L}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{L}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} \qquad (2.26)$$

onde η_1 é a velocidade longitudinal do robô e η_2 a velocidade de rotação do robô em relação ao referencial inercial; $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ são as velocidades de rotação das rodas do robô. O parágrafo seguinte apresenta um outro modelo cinemático de configuração para o robô (2,0) que foi obtido pela parametrização do movimento do robô em relação à trajetória realizada.

Em Samson(1990) é apresentado um modelo cinemático de configuração escrito em relação à base móvel e diferente do convencional onde a referência é o sistema inercial:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & y \\ 0 & -(d+x) \\ 0 & 1 \\ & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} \qquad (2.27)$$

onde d é a distância de um ponto fixo no chassi do robô, o qual se prepende controlar, à origem do sistema de referência móvel solidário ao robô.

Neste modelo, o vetor de entradas de controle é relacionado às velocidades das rodas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2L} & -\frac{r}{2L} \end{bmatrix}$$

Admitindo a matriz λ não singular, pode-se trabalhar indistintamente com (η_1,η_2) ou com $(\dot{\varphi}_1,\dot{\varphi}_2)$ como entradas de controle.

Usando a mesma matriz λ, uma outra forma de se escrever o modelo cinemático de configuração se dá quando as velocidades das rodas $(\dot{\varphi}_1,\dot{\varphi}_2)$ são consideradas como entradas de controle:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r}{2}sin\theta & -\frac{r}{2}sin\theta \\ \frac{r}{2}cos\theta & \frac{r}{2}cos\theta \\ \frac{r}{2L} & -\frac{r}{2L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} \tag{2.28}$$

Observa-se que existe uma relação finita entre θ e a posição angular das rodas φ_1 e φ_2:

$$\theta = \frac{r}{2L}(\varphi_1 - \varphi_2) + Const.$$

e, como se verá na próxima seção, esta relação diferencial inicial $\dot{\theta} = \frac{r}{2L}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$ é dita holonômica. As duas primeiras relações diferenciais são não-holonômicas pois nenhuma relação finita pode ser obtida através delas, elas não são integráveis. Isto introduz a discussão que segue na próxima seção.

2.2 - O comando de robôs móveis.

O estudo de robôs móveis está relacionado aos problemas específicos inerentes à dinâmica e ao controle desse sistema mecânico, as características dinâmicas e cinemáticas estão abordadas na seção 2.1. Na presente seção se introduzem os seguintes problemas específicos:

- O estudo das estruturas mecânicas com restrições não-holonômicas.

- A propriedade de Controlabilidade.

- A existência de leis de controle suaves com realimentação dos estados que venham estabilizar o robô em um ponto de repouso.

2.2.1 - Holonomia.

O estudo de um sistema mecânico resulta em equações cinemáticas e dinâmicas que expressam restrições ou limitam a possibilidade de movimento dos sólidos constituintes do sistema. As relações de dependência entre os parâmetros do sistema q, $\dot{q}$ e t, sendo q a coordenada generalizada e t o tempo, podem ser consideradas holonômicas ou não-holonômicas.

No caso de um braço manipulador, os sólidos constituintes do robô estão sujeitos apenas às restrições de contato geométrico entre si. Essas relações não sofrem interferência da derivada temporal dos parâmetros do sistema, $\dot{q}$. São chamadas de holonômicas e podem ser, genericamente, expressas por equações da forma:

$$f(q,t) = 0$$

Robôs móveis não-holonômicos equipados com rodas, assunto central dessa dissertação, constituem uma classe de sistemas caracterizados por restrições não apenas de contato físico mas também devido a certas condições cinemáticas de contato que não são integráveis. Essas restrições denominadas não-holonômicas são expressas por equações da forma:

$$f(q,\dot{q},t) = 0$$

Para uma fácil e rápida compreensão, o estudo da holonomia será dividido em duas partes: Uma primeira parte mostrando um conceito intuitivo tanto de sistemas holonômicos como de não-holonômicos; uma outra parte com conceitos e formulações matemáticas mais rigorosos abordando o aspecto de integrabilidade de sistemas.

O movimento de uma bola rolando sem deslizamento sobre a superfície de uma mesa é exemplo simples intuitivo de não-holonomicidade.

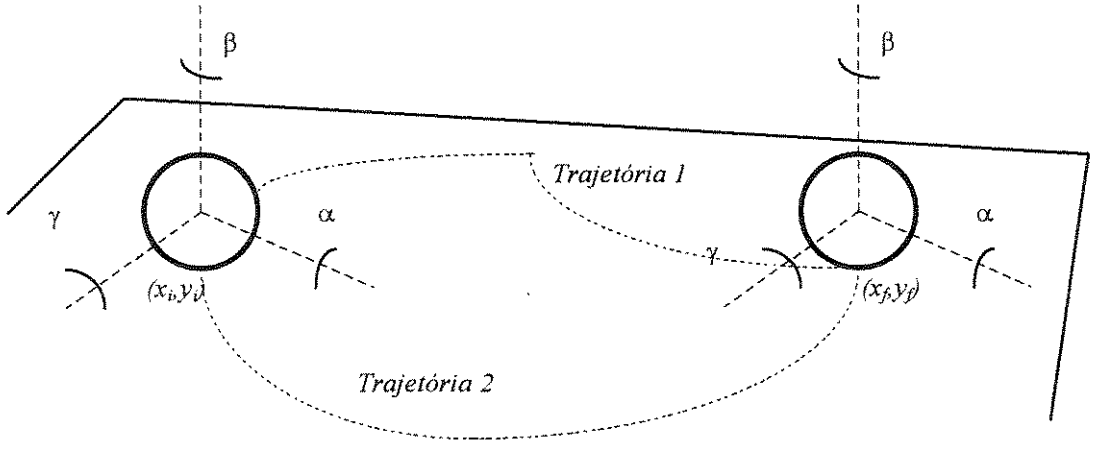


Figura 2.7: Uma bola rolando sobre uma mesa

A bola, movendo-se livremente no espaço, tem seis graus de liberdade. Estando sobre a superfície, o peso e sua força normal de reação aplicados ao centro de massa, representam uma restrição que reduz o número de graus de liberdade para cinco. Pode-se caracterizar a posição da bola por duas coordenadas retangulares, x e y, do ponto de contato, mais três ângulos α, β e γ os quais determinam a posição da bola em relação ao seu centro. Se a bola desliza ao longo da superfície da mesa, então se consideram todos os cincos graus de liberdade, entretanto o seu movimento está sujeito à condição de rolamento. O ponto de contato deve estar momentaneamente em repouso. Isto requer que o eixo instantâneo de rotação passe pelo ponto de contato. O rolamento puro restringe os graus de liberdade para dois. Se a trajetória do ponto de contato é dado por funções do tempo $x(t)$ e $y(t)$, a condição de rolamento determina, de uma forma única, a posição da bola em qualquer instante. Isto pode sugerir que talvez os ângulos α, β e γ pudessem ser dados como funções de $x(t)$ e $y(t)$, porém, isto não é possível.

Os diferenciais de α, β e γ são expressos em termos de diferenciais de x e y, mas estas relações diferenciais não são integráveis; elas não resultam em relações finitas entre as coordenadas. Isso pode ser confirmado quando se considera o seguinte:

Se a bola rola de uma posição inicial (x_i,y_i) até um ponto final (x_f,y_f) seguindo duas trajetórias diferentes, Figura 2.7, a posição final da bola, em cada caso, apresentará uma rotação em relação a outra, ou seja α, β e γ finais de uma trajetória são diferentes dos α, β e γ finais seguindo outra trajetória. Se os ângulos α, β e γ realmente pudessem ser dados como sendo funções de x e y, as posições finais da bola, tanto no plano cartesiano como em relação ao seu centro, seriam as mesmas em ambos os casos; pois a posição final x e y é única para qualquer que seja a trajetória seguida pela bola.

A Formulação geométrica do problema de planejamento de trajetória para um robô manipulador também é útil para fornecer uma visão intuitiva geométrica das diferenças entre relações holonômicas e relações não-holonômicas, Laumond(1996).

Considere-se a Figura 2.8 onde se vê um manipulador mecânico de três graus de liberdade representado no espaço euclidiano. O movimento do robô é representado por equações que relacionam os parâmetros de deslocamento q_1, q_2, e q_3. Estas relações são chamadas de restrições holonômicas e restringem o espaço dos deslocamentos possíveis a um sub-espaço do espaço dos deslocamentos de todos os corpos. Este sub-espaço é chamado de espaço de configuração.

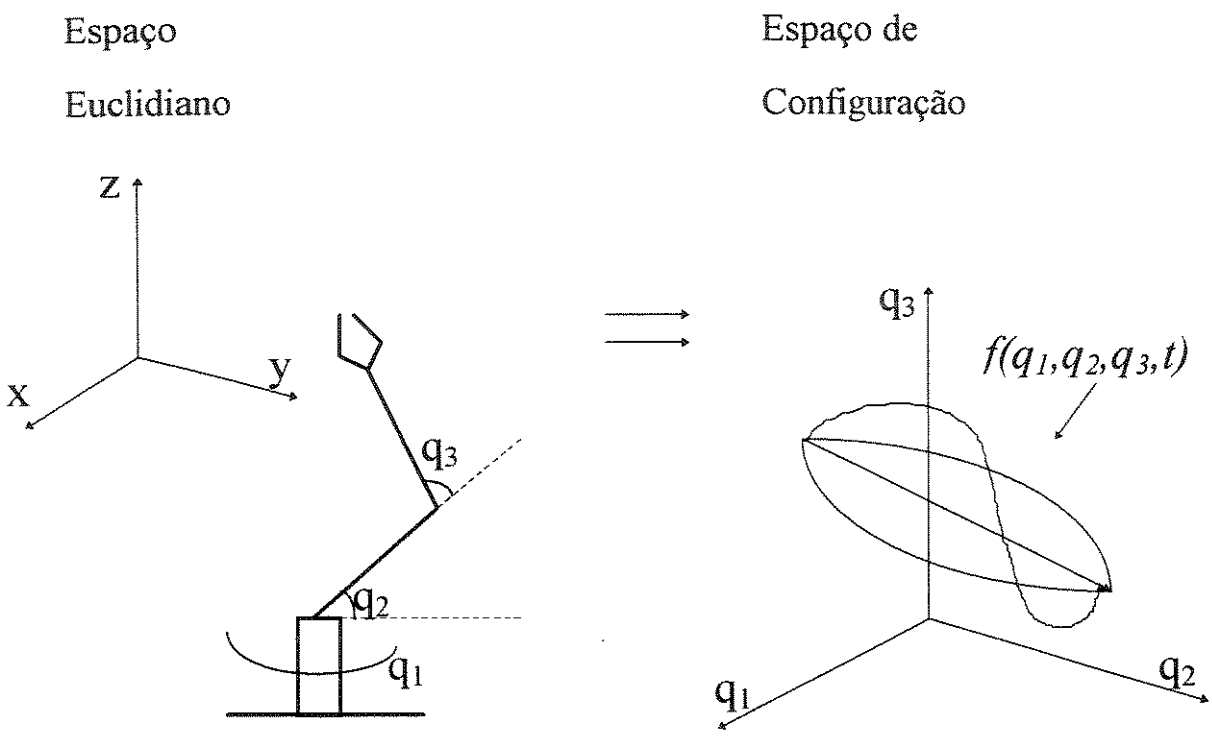


Figura 2.8: Espaço de configuração x Espaço Euclidiano.

A configuração do robô é representado por um ponto no espaço de configuração o qual define, precisamente, o domínio ocupado pelo robô no espaço euclidiano. Um conjunto de pontos formando uma linha no espaço de configuração, corresponde a um movimento do robô. Portanto, para um sistema holonômico, a solução do problema do planejamento de trajetória, requer apenas o cômputo do espaço de configurações admissíveis (isto é, transformar os obstáculos do espaço euclidiano em "obstáculos" no espaço de configuração). Entretanto, no planejamento de movimentos com restrições não-holonômicas tal formulação não é suficiente. Uma restrição não-holonômica é expressa como uma relação envolvendo derivadas dos parâmetros de configuração do sistema que não são integráveis. Essas restrições são expressas no espaço tangente a cada configuração. Portanto, a principal conseqüência de uma restrição não-holonômica é que um caminho arbitrário no espaço admissível de configuração não corresponde necessariamente a um movimento real do robô.

Uma restrição holonômica pode ser tratada de duas formas: Se existem *m* equações entre *n* variáveis, pode-se eliminar *m* dentre as *n* variáveis e reduzir o problema para *n* - *m* variáveis independentes. Pode-se alternativamente operar o excesso de variáveis e considerar as relações dadas como condições de restrição auxiliares. Tendo em vista estas duas formas de tratar o

problema, no caso das restrições ou condições não-holonômicas, apenas é possível aplicar a segunda delas. Nesse caso uma redução de variáveis não é possível e é necessário operar com mais variáveis do que demandam os graus de liberdade do sistema, Goldstein(1980). O espaço de configuração é então incluído em um espaço hiper-dimensional, mas sem formar um sub-espaço definido deste, pois as condições cinemáticas prescrevem certos traços de direções mas não chegam a indicar a formação de nenhuma superfície.

Pode-se resumir estas considerações sobre sistemas holonômicos e não-holonômicos, dizendo-se que um sistema não-holonômico é um sistema não integrável.

Cabe nesse ponto uma pergunta:

Quando uma restrição, ou, de forma mais geral, um sistema de equações, é não integrável?

A resposta a essa pergunta introduz um aspecto menos intuitivo e mais matemático sobre a questão da holonomicidade.

É sempre possível decidir por mera diferenciação e eliminação se um conjunto de restrições diferenciais é ou não integrável, ou seja, se é holonômico ou não-holonômico. Se uma dada equação de restrição, quando escrita na forma:

$$dq_3 = B_1 dq_1 + B_2 dq_2$$

onde dq indica o diferencial da variável q. É tal que:

$$\frac{\partial B_1}{\partial q_2} = \frac{\partial B_2}{\partial q_1}$$

então a restrição inicial é integrável ou holonômica, Lanczos(1970).

O caso acima é o de uma única equação com três variáveis q_1, q_2, e q_3, porém as mesmas considerações podem ser generalizadas para um número maior de variáveis e de equações.

Uma outra forma de verificar a integrabilidade de sistemas ou campos vetoriais se encontra em um teorema postulado na teoria de álgebra geométrica diferencial, denominado de teorema de Frobenius, Slotine(1991).

O teorema de Frobenius resumidamente se postula da seguinte forma:

O sistema $\dot{x} = B(x)u$ é completamente integrável se:

Posto(B1 B2...Bn)=Posto(B1 B2...Bn [Bi,Bj])

onde: Bi , $i=1...n$, são colunas de $B(x)$ e $[Bi,Bj] = \nabla BjBi - \nabla BiBj$ é um operador matemático chamado de Colchete de Lie ("Lie Bracket").

O espaço vetorial gerado por *(B1 B2...Bn [Bi,Bj])*, denominado de "*Control Lie Algebra*" do sistema $\dot{x} = B(x)u$ e simbolizado por $\Delta(x)$ na literatura, é a Involutiva Fechada da distribuição gerada por *(B1 B2...Bn)*, aqui simbolizada por Δ_0.

O entendimento do teorema ficará claro com uma aplicação ao modelo de estado do Robô Móvel, onde se constatará que o mesmo não é integrável e assim, não-holonômico.

O modelo cinemático de postura do Robô Móvel é escrito como:

$$\dot{z} = B(z)u$$

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}; \quad B(z) = \begin{bmatrix} -sin\theta & 0 \\ cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad u = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$B_3 = \left[B_1, B_2\right] = \nabla B_2 B_1 - \nabla B_1 B_2$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -sin\theta \\ cos\theta \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -cos\theta \\ 0 & 0 & -sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = 0 - \begin{Bmatrix} -\cos\theta \\ -sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Então:

$$Posto\left\{\begin{bmatrix} -sin\theta & 0 & cos\theta \\ cos\theta & 0 & sin\theta \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\} = 3 > Posto\left\{\begin{bmatrix} -sin\theta & 0 \\ cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Pode-se concluir pelo teorema de Frobenius, que o modelo de estado do Robô Móvel é não-holonômico.

2.2.2 - Controlabilidade.

Uma contribuição fundamental da teoria de controle não linear é o relacionamento do conceito de controlabilidade de um sistema com a dimensão do correspondente "*Control Lie Algebra*". Isto significa que, no caso do sistema $\dot{x} = B(x)u$, a propriedade de controlabilidade está relacionada com a dimensão de $\Delta(x)$, que é o espaço gerado por *(B1 B2...Bn [Bi,Bj])*. A propriedade de controlabilidade aqui é expressa quando qualquer estado x na vizinhança de qualquer estado inicial x_0 pode ser obtido, ou acessado, por meio de uma ação de controle finita $u(t)$.

De forma mais especifica, pode-se dizer que o sistema $\dot{x} = B(x)u$ é localmente controlável em R^n se $\dim(\Delta(x)) = n \quad \forall x \in R^n$. Esta é a chamada condição de controlabilidade do posto.

No caso do modelo do Robô Móvel não-holonômico onde $n = 3$, mostrou-se que $\dim(\Delta(x)) = 3$ (a dimensão do "*Control Lie Algebra*" é igual ao número de variáveis de estado); concluiu-se assim que o sistema é controlável.

Em Samson(1990) é observado que um robô do tipo *"Char"* não é somente controlável nas variáveis (x,y,θ) mas também em uma das posições angulares das rodas. Por exemplo, é possível conduzir o robô para qualquer posição/orientação desejada com uma das rodas na mesma posição como inicialmente.

No caso de sistemas não lineares, é importante que se diferencie a noção de controlabilidade da noção de estabilidade quando se considera o controle por meio de leis com realimentação de estados.

Controlabilidade em R^n, indica que existe uma lei de controle $u(t)$ capaz de dirigir o sistema de um estado inicial x_i para qualquer estado final x_f. Por exemplo, se $x_f = 0$ então existe algum controle $u(t)$, possivelmente não único, que dirige o sistema do estado inicial x_1 para o final 0. Para outro estado inicial x_2, relaciona-se uma outra lei de controle u_2 diferente de u_1. A propriedade de controlabilidade informa sobre a existência teórica da lei de controle mas não oferece uma metodologia para o seu cálculo. Para propósitos práticos, o problema de projeto da lei de controle ainda precisa ser resolvido. Uma importante diferença com o caso linear (invariante) é que a controlabilidade de sistemas não lineares não implica na existência de um controle por realimentação de estados que estabilize o sistema, isto é, uma lei de controle $u(x)$ (função suave dos estados x) capaz de fazer com que os estados convirjam para zero, independentemente dos estados iniciais x_i.

Enquanto as noções de controlabilidade e estabilização estão fortemente relacionadas no caso linear, isto não acontece no caso não-linear.

2.2.3 - Estabilização.

Em sistemas não lineares, é diferente a noção de controlabilidade da noção de estabilização. A propriedade de controlabilidade no espaço R^m, indica que existe uma lei de controle $U(t)$ capaz de levar o estado do sistema de um valor inicial x_i para um valor final x_f, se o estado final é zero, então o sistema é estabilizado para a origem.

Sabe-se, Slotine(1991), que a controlabilidade de sistemas não-lineares não implica em estabilização, ou seja, a controlabilidade não garante nesses casos a existência de uma lei suave com realimentação nos estados que faça o sistema convergir para o estado final zero, independente dos estados iniciais. No caso do robô tipo *"Char"*, é relativamente simples a determinação de uma estratégia de controle em malha aberta, combinando movimentos de rotação e translação, que conduza o robô para um certo ponto de repouso predeterminado. O controlador $U(t)$ assim obtido entretanto será dependente dos estados iniciais. É evidente que tal estratégia de controle não conduzirá o robô real para a configuração final desejada, pois tal controlador de malha aberta será projetado com base no modelo cinemático do veículo que é muito simples em relação ao modelo real e não será robusto diante de perturbações experimentais. A necessidade de se ter uma lei de controle estabilizadora e com realimentação, em malha fechada nos estados, fica evidenciada quando se considera a ação de perturbações no sistema, erros de modelagem, etc. É desejável que todos os sistemas fisicos controláveis sejam equipados com controladores em malha fechada com realimentação.

Surge então a seguinte questão: Existe uma lei de controle suave com realimentação dos estados que seja capaz de conduzir o estado do robô para a origem?

A discussão em torno desta questão será iniciada considerando o caso da controlabilidade do sistema linear associado ao sistema não-linear do robô móvel. A teoria de controle informa que se um sistema linear é controlável, fica então assegurada a existência de estabilidade local, Ogata(1995), Shahian(1993). Quando esta condição é satisfeita, o controle por realimentação de estados da forma $U=KX$ que estabiliza o sistema linear, também estabilizará o sistema não-linear associado. A linearização do modelo do robô móvel em torno da origem resulta: (considerando o modelo alternativo apresentado na seção 2.1.4, equação 2.27)

$$\dot{x} = B(0)u$$

com:

$$B(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz $B(0)$ não é uma matriz quadrada, e o sistema linear associado ao modelo não-linear do robô móvel não é controlável, não sendo, assim, possível inferir sobre a estabilidade do sistema não-linear original.

O teorema proposto por Brockett, Brockett(1983), permite uma conclusão sobre a estabilização de sistemas não-holonômicos. De acordo com este teorema, a condição necessária para a existência de uma lei de controle $u(x)$ dependente dos estados e que estabilize o sistema é que

$$f(x,u) = B(x)u$$

deve estar contido em um conjunto aberto de R^m contendo a origem 0. No caso do modelo do robô móvel, isto significa que o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} -1 & y \\ 0 & -(d+x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix}$$

deve possuir solução $(x, y, \theta, \eta_1, \eta_2)$ $\forall$ ε_i, $i=1,2,3$, perto o suficiente de zero. Desenvolvendo o produto matricial do lado esquerdo:

$$\begin{cases} \eta_1 + y\eta_2 = \varepsilon_1 \\ -(d+x)\eta_2 = \varepsilon_2 ; \\ \eta_2 = \varepsilon_3 \end{cases} \qquad \varepsilon_i,\ i=1,2,3 \text{ são números pequenos.}$$

verifica-se que este sistema não apresenta solução quando $\varepsilon_3 = 0$ e $\varepsilon_2 \neq 0$. A condição de Brockett não é satisfeita e portanto assim não existe uma lei de controle $u(x)$ suave e com realimentação dos estados que possa estabilizar o robô móvel para a origem.

A conclusão de Brockett é postulada com uma abrangência mais geral:

"Um sistema não-holonômico, embora seja completamente controlável, não pode ser estabilizado para uma configuração final de repouso através de leis suaves de realimentação nos estados." *Brockett, 1983.*

O desenvolvimento de leis de controle com realimentação de estados mais complexas tem sido um desafio para a comunidade de controle automático. Leis descontínuas têm se mostrado como solução alternativa para este problema, bem como as leis de controle que não somente dependem dos estados do sistema, mas também dependem explicitamente da variável temporal. Estas últimas são denominadas de Controle Variante no Tempo ("*Time-Varying Control Laws*"). Essas duas técnicas estão apresentadas no capítulo 3.

A estabilização de um ponto fixado no chassi do robô móvel para uma configuração de repouso, e também a estabilização do robô em torno de um ponto móvel (controle de trajetória) tem sido investigado em Samson(1991) com a utilização de várias leis de controle não-lineares e provando a convergência das variáveis de estado através de funções de Lyapunov escolhidas convenientemente.

Capítulo 3

Controle de Trajetória e Estabilização por Realimentação de Estados

Apresenta-se, neste capítulo, as metodologias utilizadas para se atingir os objetivos propostos no capítulo 1. O robô móvel deve partir de um ponto inicial e alcançar um ponto final seguindo uma trajetória de referência predeterminada utilizando leis suaves de realimentação. A realização dessa tarefa será dividida em duas partes: Uma parte onde o robô deverá seguir uma trajetória de referência que liga os pontos inicial e final do movimento, e uma outra parte que considera a partida do robô do ponto inicial e a estabilização deste para o ponto objetivo final, nesse caso um ponto de repouso. Essa divisão da tarefa se explica tendo em vista os problemas de controle e estabilização inerentes ao modelo cinemático de robôs, da classe dos sistemas não-holonômicos.

As leis de controle utilizadas durante a parte de seguimento da trajetória de referência, as quais consistem na linearização completa ou parcial do modelo do sistema, são leis contínuas e dependentes somente dos estados do sistema pois nesse caso não se trata de estabilização para um ponto. A parte final do movimento, estabilização para um ponto de repouso, se faz com a utilização de uma estratégia de controle diferente da utilizada durante o movimento de seguimento, pois o robô não pode ser estabilizado para um ponto final através de leis de

controle contínuas e somente dependente dos estados Brockett(1983). Para estes casos são necessárias técnicas descontínuas e variantes no tempo.

Por estas razões segue a divisão das seções abaixo e as metodologias de projeto apresentadas. Na seção 3.1 apresenta-se a metodologia utilizada na primeira parte da tarefa descrita acima, movimento de seguimento da trajetória de referência, mostrando conceitos e desenvolvimento de leis de controle com linearização por realimentação de estados contínuas e invariantes no tempo. A seção 3.2 mostra que é possível estabilizar o robô para uma configuração final quando se utilizam as estratégias de estabilização contínuas variantes no tempo (3.2.1) e descontínuas (3.2.2). Vê-se na seção 3.3 a tarefa imposta ao robô móvel novamente apresentada como um todo, considerando a junção das estratégias usadas nas seções 3.1 e 3.2. É a estratégia híbrida.

3.1 - Linearização por Realimentação Invariante no Tempo.

Conforme introduzido na seção anterior, o robô realizará o seguimento da trajetória de referência durante a primeira parte do seu movimento. Uma vez que essa trajetória de referência não contem configurações de repouso, a restrição imposta pela condição de estabilização de Brockett (Brockett, 1983) não se aplica a esse controle de trajetória. Assim, pode-se usar as leis de controle invariantes com realimentação de estados. A metodologia de controle descrita nesta seção é a linearização por realimentação estática (3.1.1) e dinâmica (3.1.2).

Linearização por realimentação não é a única técnica que pode ser utilizada no controle de trajetória. Wash et al(1994) apresentam uma solução baseada na aproximação linear do sistema em torno de uma trajetória de referência utilizando na solução o conceito de matriz de transição, proposto na teoria de controle clássico (Ogata, 1995), e também define o problema de seguimento de uma trajetória de referência como sendo um problema de estabilização em torno de uma trajetória ao invés de um ponto. Samson(1990) propõe técnicas de Lyapunov e parametrização do modelo do robô em relação à trajetória a ser seguida para a solução deste problema. Esse método sugere um domínio de estabilização maior e garante convergência exponencial dos erros de seguimento. Entretanto, o método de linearização por realimentação é de interesse prático e teórico, principalmente quando resulta em linearização completa do

sistema. Quando este é o caso, o comportamento em malha fechada pode ser linear e desacoplado, os erros de seguimento convergem para zero exponencialmente e cada variável converge exponencialmente para sua referência. Não se pode obter linearização completa de sistemas com restrições não-holonômicas por meio de linearização por realimentação estática (Isidori, 1989), no entanto, uma grande variedade de robôs móveis pode ser completamente linearizada por realimentação dinâmica desde que a trajetória de referência não contenha pontos de repouso.

Linearização por realimentação é um método de controle não linear cuja idéia central é transformar algebricamente um sistema dinâmico não linear em um sistema correspondente completamente ou parcialmente linear, de tal forma que as técnicas de controle linear possam ser aplicadas. Sabe-se que a forma e complexidade do modelo de um sistema mecânico dependem consideravelmente da escolha do sistema de referência sob o qual as equações deste modelo são escritas. A técnica de linearização por realimentação de estados pode ser considerada como uma forma de transformar o modelo do sistema original em modelos equivalentes descritos de maneira mais simples. Essa metodologia de controle de sistemas não lineares tem sido utilizada com sucesso na solução de problemas práticos. Entretanto existem observações e limitações relacionadas com o método que são objeto de discussão nas seções seguintes.

3.1.1 - Linearização por Realimentação Estática.

Considere o seguinte sistema não linear:

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \tag{3.1}$$

$$\dot{x}_i = f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} g_{ij} u_j \tag{3.2}$$

onde $i = 1,...,n$, $f(x)$ é um vetor de dimensão n de funções suaves, $G(x)$ é uma matriz de dimensão nxm de funções suaves de elementos g_{ij}. Os vetores x e u de dimensões n e m, respectivamente, são os vetores de estado e de entrada de controle. O projeto de uma lei de

controle que linearize o sistema com realimentação estática é então estabelecido através dos seguintes passos (Slotine, 1991 e Thuilot, 1996):

- A escolha de uma função de saída de dimensão m, $y = h(x) = (y_1(x)...y_m(x))$ que corresponda a uma matriz de controlabilidade desacoplada não singular após a realimentação estática de estados.

- Diferenciação das saídas y até que uma entrada u apareça.

- Escolha de uma entrada de controle u de modo que as não linearidades sejam canceladas e garanta a convergência durante o movimento de seguimento.

Inicialmente se apresenta o caso de sistemas de uma entrada e uma saída descritos pelas equações simultâneas abaixo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

Usando a notação de geometria diferencial, o processo de repetidas diferenciações no vetor de saída é então iniciado.

Diferenciando a saída y tem-se:

$$\dot{y} = \nabla h(f + gu) = \nabla hf + \nabla hgu$$
$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x)u$$

onde $L_f h(x)$ é um operador matemático chamado de derivada de Lie e definido conforme sugerido pela equação acima. Observe-se que $h(x)$ é uma função suave dos estados do sistema e f é um campo vetorial igualmente suave. Suavidade implica, aqui, na existência de derivadas de ordem tão grande quanto necessárias.

Se $L_g h(x) \neq 0$ para algum $x = x_0$ no espaço de estados do sistema Ω_x então, por continuidade também o é em uma vizinhança finita Ω de x_0. Em Ω, a transformação na entrada,

$$u = \frac{1}{L_g h(x)}(\nu - L_f h(x))$$

resulta em uma relação linear entre y e ν dada por,

$$\dot{y} = \nu$$

Porém, se $L_g h(x) = 0$ para todo x em Ω_x, pode-se diferenciar a saída y novamente e se obter:

$$\ddot{y} = L_f{}^2 h(x) + L_g L_f h(x) u .$$

Se $L_g L_f h(x) u$ for novamente igual a zero para todo x em Ω_x, procede-se às diferenciações seguintes,

$$y^{(i)} = L_f{}^i h(x) + L_g L_f{}^{i-1} h(x) u$$

até que, para alguma ordem de derivação r, se tenha:

$$L_g L_f{}^{r-1} h(x) u \neq 0 ,$$

para algum x em Ω_x, e em uma vizinhança finita Ω de x_0. Em Ω a lei de controle,

$$u = \frac{1}{L_g L_f{}^{r-1} h(x)}(\nu - L_f{}^r h(x))$$

aplicado a,

$$y^{(r)} = L_f{}^r h(x) + L_g L_f{}^{r-1} h(x) u$$

transforma o sistema não linear original na seguinte relação linear simples,

$$y^{(r)} = \nu$$

O número r de diferenciações necessárias para que a entrada u apareça é chamado de *Grau Relativo* do sistema. Para qualquer sistema controlável de ordem n, será tomado no máximo n diferenciações de alguma saída desse sistema até que apareça a entrada de controle Slotine(1991). Se o número de diferenciações for menor que a ordem do sistema, $r < n$, então a dinâmica linear resultante também será de ordem menor que n e a linearização não será completa, ou seja, uma parte do sistema não linear original continuará não linear. Essa parte resultante não-linear é denominada de *dinâmica interna* do sistema, Marino(1986). Quando ocorrer este fato, será necessário uma análise da estabilidade da parte do sistema resultante não linear. Se esta for estável a linearização por realimentação funcionará e ter-se-á o controle do sistema, mas se a dinâmica interna for instável a metodologia de controle aplicada não funcionará.

A escolha das funções de saída $y = h(x)$ está relacionada aos objetivos finais do problema de controle. Se o problema for de seguimento de uma determinada referência então a função de saída é determinada pela tarefa física a ser realizada. Se o problema de controle for de estabilização então qualquer função suave dos estados poderá ser utilizada como saída artificial (ou saída de projeto) para gerar uma relação linear entre a saída e a entrada. Diferentes escolhas de função de saída levam a diferentes dinâmicas internas e é possível, para uma determinada escolha de função de saída, haver uma dinâmica interna estável (ou nenhuma dinâmica interna) enquanto uma outra escolha poderia conduzir à instabilidade do sistema.

Um caso especial ocorre quando o grau relativo de um sistema é igual a sua ordem, $r = n$, ou seja quando a saída y precisa ser diferenciada n vezes (com n sendo a ordem do sistema) para se obter uma relação linear entre a entrada e a saída. Neste caso, as variáveis

$y, \dot{y}, \ddot{y}, \cdots, y^{(n-1)}$ podem ser usadas como um novo conjunto de variáveis de estado para o sistema, e assim não existe dinâmica interna associada com esta linearização por realimentação.

Os conceitos usados para os sistemas com uma entrada e uma saída, podem ser estendidos para os sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Considera-se para este caso que os sistemas são quadrados, mesmo número de entradas e saídas, na vizinhança de um ponto x_0, da seguinte forma,

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^{m} g_j u_j$$
$$y = h(x)$$

onde $f(x)$ é um vetor de dimensão n de funções suaves, $G(x)$ é uma matriz de dimensão n x m de funções suaves com elementos g_{ij}. Os vetores x e u de dimensões n e m, respectivamente, são os vetores de estado e de entrada de controle e y é o vetor de saídas do sistema com dimensão m de componentes y_i.

A linearização por realimentação para sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas é obtida da mesma forma que no caso anterior, diferenciando as funções de saída y_i até que as entradas apareçam. Inicia-se , então, o processo de diferenciação na saída y_i:

$$\dot{y}_i = \nabla h_i (f + \sum_{j=1}^{m} g_j u_j) = L_f h_i + \sum_{j=1}^{m} L_{g_j} h_i u_j \qquad (3.3)$$

Aplicando o processo de diferenciação até que as entradas apareçam e assumindo que a ordem de derivação (r_i) é o menor inteiro tal que pelo menos uma das entradas apareça em $y_i^{(r_i)}$, então:

$$y_i^{(r_i)} = L_f{}^{(r_i)} h_i + \sum_{j=1}^{m} L_{g_j} L_f{}^{(r_i-1)} h_i u_j \qquad (3.4)$$

com $L_{g_j} L_f{}^{(r_i-1)} h_i \neq 0$ para pelo menos um j, na vizinhança Ω_i do ponto x_0 em Ω_x (conjunto aberto no espaço dos estados).

Aplicando o procedimento acima para cada saída y_i tem-se:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{(r_1)} h_1 \\ \vdots \\ L_f^{(r_m)} h_m \end{bmatrix} + E(x)u \tag{3.5}$$

onde a matriz $E(x)$ de dimensão m x n é definida de acordo com a equação (3.4), a partir dos coeficientes não nulos de u_j em cada $y_i^{(r_i)}$, $i = 1 \cdots n$. Se $E(x)$ é inversível em uma região Ω, vizinhança finita de x_0, então a equação (3.5) sugere a seguinte transformação nas entradas:

$$u = E^{-1} \begin{bmatrix} v_1 - L_f^{(r_1)} h_1 \\ \vdots \\ v_m - L_f^{(r_m)} h_m \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Tal transformação resulta em m equações de forma simples,

$$y_i^{(r_i)} = v_i \tag{3.7}$$

Onde v é um vetor de dimensão m de entradas auxiliares que pode ser escolhido de modo a se ter convergência exponencial.

Como a entrada v_i somente afeta a saída y_i, E é chamada de matriz de desacoplamento do sistema. O sistema (3.5) é dito ter grau relativo $(r_1, \ldots, r_m)$ em x_0. O sistema é considerado totalmente linearizado com realimentação estática se seu grau relativo for igual a n, Slotine(1991). O sistema (3.1) é representado sob a forma canônica de Brunovsky com índices de controlabilidade $r_1, \ldots, r_m$, Marino(1986), Thuilot(1996).

O procedimento de linearização estática descrito acima somente pode ser aplicado quando a matriz de desacoplamento E for inversível em uma região Ω. Sabe-se que tal condição é restritiva e apenas se verifica para o caso dos robôs omnidirecionais; robôs com mobilidade restrita não são completamente linearizados ou, mais precisamente, linearização estática completa para o robô não-holonômico é impossível, D'Andrea-Novel(1995). Este fato

pode ser interpretado como segue: na ordem de derivação r, as funções de saída y são afetadas por algumas entradas ou combinações de entradas, mas não por todo o campo de entrada. O que se propõe nessa situação é a aplicação de Linearização por Realimentação Dinâmica de estados, Marino(1986), D'Andrea-Novel(1995), mostrada na próxima seção.

3.1.2 - Linearização por Realimentação Dinâmica.

O método consiste em escolher algumas novas variáveis de entrada tal que a matriz E, equação (3.5), correspondente seja inversível. Tais novas entradas podem ser derivadas de algumas entradas originais do sistema ou combinações de entradas que aparecem na ordem de derivação r. O sistema de controle é projetado baseado no novo conjunto de entradas, e as entradas reais do sistema são assim calculadas por integração. A representação do robô consiste então no modelo original aumentado com alguns integradores, e será chamado de Modelo Estendido de Estado. O processo de derivação pode ser feito até ordens mais elevadas, e o modelo estendido de estado pode ser então completamente linearizado com realimentação estática. O modelo original é considerado dinamicamente linearizável. O procedimento pode ser repetido adicionando-se mais integradores, até que se tenha a linearização completa do modelo.

A estratégia descrita anteriormente é aplicada ao modelo cinemático do robô móvel sob consideração, aplicando-se primeiramente o procedimento de Linearização com realimentação estática. Assim, seja o modelo cinemático do robô rescrito a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

$$\varphi = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

onde φ é o vetor de funções de saída escolhido.

Diferenciando a função de saída,

$$\varphi = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\varphi} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

$$\dot{\varphi} = \begin{bmatrix} -sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix}$$

Vê-se que $\dot{\varphi}$ independe de η_2 e se verifica facilmente a presença da entrada η_1, a velocidade longitudinal do robô. A matriz E porém é singular. O vetor de entrada será então "atrasado" gerando uma nova entrada η_3 definida como:

$$\dot{\eta}_1 = \eta_3$$

Isto resulta no seguinte modelo estendido:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\eta_1 sin\theta \\ \dot{y} &= \eta_1 \cos\theta \\ \dot{\theta} &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_3 \end{aligned} \tag{3.11}$$

com:

$$\chi_e = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \eta_1 \end{bmatrix}$$

$$u_e = \begin{Bmatrix} \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix}$$

sendo χ_e o vetor estendido de estado, e u_e o novo vetor de entradas.

Tendo em vista o modelo estendido de estado, é possível continuar com a linearização estática. Deriva-se novamente o vetor de saída φ na equação (3.10), tendo em vista o modelo estendido.

$$\ddot{\varphi} = \begin{bmatrix} -\eta_1 \cos\theta & -sin\theta \\ -\eta_1 sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{\varphi} = E(\chi_e)U \tag{3.12}$$

Nota-se que a matriz E é inversível sempre que $\eta_1 \neq 0$ ou seja, a velocidade do robô é diferente de zero. Projeta-se uma lei de controle U tal que as não linearidades sejam canceladas,

$$U = E^{-1}(\chi_e)\nu \tag{3.13}$$

onde ν é um vetor com mesma dimensão de U de entradas auxiliares que será convenientemente projetado. A aplicação desta lei de controle permite que o modelo estendido, descrito pela equação (3.12), seja escrito como o seguinte sistema linear,

$$\ddot{\varphi} = \nu \tag{3.14}$$

Considerando ϕ_{ref} como a trajetória de referência a ser seguida pela função de saída φ, k_1 e k_2 os ganhos de realimentação calculados de modo que os pólos do sistema linear estejam localizados no lado esquerdo do plano complexo, então o controle auxiliar ν pode ser projetado como,

$$\nu = \ddot{\varphi}_{ref} - k_2\dot{\tilde{\varphi}} - k_1\tilde{\varphi} \tag{3.15}$$

onde $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_{ref}$ é o erro de convergência.

A substituição de (3.15) em (3.14) resulta em uma dinâmica exponencialmente convergente para o erro,

$$\ddot{\tilde{\varphi}} + k_2\dot{\tilde{\varphi}} + k_1\tilde{\varphi} = 0$$

Os resultados de simulação estão mostrados no capítulo 4.

3.2 - Realimentação Variante no Tempo e Leis Descontínuas de Estabilização.

Foi apresentado no capítulo 2 que um sistema não-holonômico, embora controlável, não pode ser estabilizado para um ponto de repouso através de leis contínuas e suaves de realimentação de estados *u(x)*, onde *x* é o estado do sistema (Bloch, 1990; Samson, 1990; Samson, 1993; D'Andrea-Novel, 1991). O projeto de leis de realimentação suaves e invariantes no tempo apresentado na seção 3.1 somente funciona nos casos onde a condição de Brockett é evitada (trajetória sem configurações de repouso). Como visto na seção 3.1.2, a matriz desacoplada $E(x, \eta_1)$ é inversível somente se a entrada original do sistema η_1 for diferente de zero. A entrada η_1 é a velocidade longitudinal do robô móvel e se esta não pode ser zero isto significa uma restrição considerável ao movimento do robô ao casos onde não se encontra pontos de repouso, aqui chamados pontos de singularidade. Entretanto, o que se espera do robô móvel é a realização de uma tarefa completa de mover-se de um ponto inicial para um ponto final seguindo uma trajetória previamente estabelecida no plano. Como mencionado no capítulo 1 desta dissertação, esta tarefa tem sido um desafio que requer soluções de controle mais avançadas. Duas técnicas vêm sendo desenvolvidas desde a última década e propostas como soluções para o problema de estabilização de sistemas não-holonômicos: Realimentação suave variante no tempo e Realimentação contínua por partes.

A metodologia para a obtenção de leis de controle de realimentação suave variante no tempo *u(t,x)*, ou globalmente denominadas de "Time-varying Feedback Control", tem sido proposta pelos pesquisadores como uma técnica geral de estabilização para sistemas não-holonômicos. O método foi primeiramente proposto por Samson(1990), utilizando-o para o caso de um robô móvel tipo carro; entretanto a idéia de realimentação variante no tempo foi explorada antes de Samson no trabalho apresentado por Sontag(1980). A técnica de

realimentação contínua por partes foi primeiramente proposta por Bloch(1989), utilizando-a para o controle do movimento de um gume ou aresta de faca sobre uma superfície plana. Os dois métodos tiveram desenvolvimentos subsequentes nos trabalhos de Bloch et al(1992) e Sϕrdalen(1995), para o caso de realimentação contínua por partes e em Samson(1992), Pomet(1992), Samson(1993), Morim(1995), Samson(1997) para o caso de realimentação variante no tempo. As características relevantes das leis de realimentação variantes no tempo foram exploradas por Coron(1992), neste trabalho foi provado que: "Qualquer sistema controlável sem flutuação (isto inclui os sistemas não-holonômicos) pode ser assintoticamente estabilizado através de leis suaves variantes no tempo". Estas duas metodologias estão abordas nas seções seguintes.

3.2.1 - Realimentação de estado descontínua.

A estratégia de estabilização com realimentação contínua em partes está proposta em Bloch et al(1992) e aplicada para uma classe de sistemas não-holonômicos denominados de sistemas de Clapygin, que são sistemas não-holonômicos com certas propriedades de simetria. Esta estratégia se baseia em um algoritmo que é construído considerando uma partição da trajetória do sistema de um estado inicial até à origem, e para cada parte ou caminho fechado dessa partição, relaciona-se funções de realimentação que dependem dos parâmetros dos respectivos caminhos fechados. A justificativa para a estabilização assimptótica dos estados do sistema para a origem segue como uma conseqüência do procedimento de construção. A comutação entre funções de realimentação garante que o correto caminho fechado (ou uma seqüência desses caminhos) será atravessado no espaço de configuração de tal forma que a origem será necessariamente alcançada em um tempo finito. A idéia básica do método pode ser exemplificado como se segue.

Seja $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ o vetor de estado inicial de um sistema tridimensional (x_1, x_2, x_3). Os dois passos seguintes envolvem a construção desta estratégia de controle que transfere o estado inicial para a origem.

Passo 1: Levar o sistema para a origem de (x_1, x_3), espaço de configuração base, isto é, determinar uma ação de controle (função de realimentação) que transfira o estado inicial (x_1^0, x_2^0, x_3^0) para $(0, x_2^1, 0)$ em um tempo finito, para algum x_2^1.

Passo 2: Determinar uma ação de controle que transfira $(0,x_2^1,0)$ para (0,0,0). Bloch et al(1992).

Essa estratégia é, por construção, descontínua.

Uma outra lei de realimentação descontínua que tem sido apresentada como uma alternativa para contornar o problema da estabilização de sistemas não-holonômicos é a proposta em Canudas(1991), Sϕrdalen(1995). A estabilização é obtida pela dependência da realimentação dos estados com a variável temporal independente e com uma função que não é suave em relação aos estados em determinados instantes de tempo. Essa lei de realimentação estabiliza o sistema para a origem com convergência exponencial, Sϕrdalen(1995).

3.2.2 - Realimentação de Estado Suave e Variante no Tempo.

Seguindo a primeira idéia de controle com realimentação variante no tempo apresentada no trabalho de Sontag(1980), Samson(1990) demonstrou que leis contínuas de realimentação variantes no tempo, isto é, lei de controle em malha fechada que não apenas depende dos estados do sistema mas também da variável independente temporal, são de interesse para a estabilização de sistemas não-holonômicos que não podem ser estabilizados por leis de realimentação contínuas e invariantes no tempo (ver capítulo 2). Desenvolvimentos e aplicações subsequentes foram obtidos. Entre 1991 e 1992 metodologias de construção foram apresentadas, Samson et al(1991), Pomet(1992). Em Pomet(1992) é apresentado uma forma sistemática para o projeto de leis de realimentação variantes no tempo para uma classe de sistemas não lineares controláveis baseado inteiramente na análise clássica de Lyapunov. Em Samson(1993), aplica-se a metodologia de realimentação variante no tempo para um robô móvel tipo carro equipado com uma roda dianteira orientável. Neste desenvolvimento é mostrado como, para um dado conjunto de controles com realimentação, a propriedade de controlabilidade do sistema pode interagir com a dependência temporal do controle estabelecendo o conjunto de variáveis que podem ser estabilizadas para zero, Samson(1993), lema 2.2/apêndice B.

Os resultados apresentados em Coron(1992) estabeleceram que os sistemas localmente controláveis podem ser estabilizados por realimentação suave, contínua e variante no tempo.

Em Thuilot(1996) afirma-se que a prova do teorema apresentado por Coron(1992) não é genérica e que até então não se tinha conhecimento sobre nenhum método geral de projeto de realimentação suave variante no tempo, principalmente para sistemas de ordem elevada, maior que 4. Tal assunto portanto era tido como um tema de pesquisa a ser investigado. Em Thuilot(1996) é proposto uma metodologia própria de projeto para a estabilização de um robô móvel com três rodas orientáveis para um ponto de repouso utilizando realimentação suave periódica variante no tempo. A metodologia apresentada é particular dada a especificidade do caso.

Sendo a estratégia de controle variante no tempo e suave estabelecida em 1992 para todos os sistemas localmente controláveis, Coron(1992), surgiu então a questão da taxa de convergência. Nesse ponto pode-se fazer uma comparação entre o desempenho das duas metodologias de estabilização para sistemas não-holonômicos que contornam a obstrução de Brockett(1983) (ver capítulo 2), que são: A realimentação descontínua e a realimentação suave e variante no tempo.

A estratégia descontínua converge para o estado zero exponencialmente e globalmente, tal como mostrado em Sϕrdalen(1995). A estratégia suave variante no tempo apresenta convergência assimptótica mas não exponencial, isso se deve a suavidade da lei de controle, este fato está notado em Samson(1991), Samson et al(1991). Os trabalhos subsequentes a estes apresentaram metodologias que buscam a convergência global e exponencial para a técnica de realimentação suave variante no tempo, principalmente os publicados pelos autores que desenvolveram o método, Pomet(1993), M'Closey(1993), Sϕrdalen(1995), Morin(1995), Morin(1996). Um primeiro avanço nesse sentido foi obtido por Murray(1992) que visava aumentar a taxa de convergência tornando-a exponencial na vizinhança da origem para um sistema de terceira ordem. O comportamento assimptótico foi obtido tornando a lei de controle dependente da variável temporal e a convergência exponencial na vizinhança da origem foi obtido pela descontinuidade da lei nesse local. O uso de leis de controle suaves aplicando o conceito de campos vetoriais homogêneos tem sido explorado (Pomet, 1993; Morin, 1995) na obtenção de convergência exponencial e global, obtendo a equivalência entre estabilização local, estabilização global e convergência exponencial. Pomet e Samson, Pomet(1993), julgam o trabalho apresentado em M'Closey(1993) e avaliam que a análise de estabilidade proposta não é inteiramente conclusiva e que a construção da lei de controle adequada para um sistema

de dimensão n não é sistemática, e propõem um método sistemático para derivar, inclusive para sistemas de dimensão n na forma normal, uma família de leis de realimentação contínuas variantes no tempo e homogêneas que estabilizam o sistema e estabelecem resultados de homogeneidade-relacionada (Pomet, 1993), necessários para a desejada estabilização exponencial.

Quando um sistema mecânico não-holonômico, tal qual o robô móvel, é escrito na forma normal, forma de potência, forma presa ou forma canônica (os termos anteriores são equivalentes), tem-se um conjunto de equações diferenciais reduzidas equivalentes ao sistema original oferecendo maior facilidade à análise de controle. As equações reduzidas são obtidas por uma adequada mudança local de coordenadas.

Os esforços de pesquisa atuais nesta área têm se concentrado na obtenção de uma taxa de convergência exponencial para o controle com realimentação suave variante no tempo e avanços têm sido conseguidos com a utilização do conceito de homogeneidade de campos vetoriais, Pomet(1993), Morin(1994), Morin(1995). Em Morin e Samson, Morin(1996), utiliza-se a técnica de "Backsteping" na obtenção de estabilização exponencial de sistemas não-holonômicos. O princípio está na inclusão de integradores no nível de entradas do sistema com alguns parâmetros de projeto do controlador sendo adequadamente escolhidos.

A estratégia de estabilização utilizada neste trabalho é a lei de controle com realimentação suave e variante no tempo. A metodologia de projeto aplicada na obtenção dos controladores é a sugerida em Pomet et al(1992), cujo desenvolvimento é uma aplicação da metodologia de construção sugerida em Pomet(1992) a qual é apresentada à seguir.

O método propõem a determinação de leis de controle variantes no tempo para sistemas controláveis não-holonômicos. No capítulo 2, vê-se que um sistema não-holonômico é controlável quando sua Álgebra de Lie ("Control Lie Algebra") possui dimensão completa.

Seja o sistema de controle,

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{m} u_k f_k \tag{3.16}$$

onde $x \in R^n$ e as entradas de controle u_k são escalares e reais. A condição do posto completo para o Álgebra de Lie significa: Pomet(1992), suposição 1.

$$\begin{aligned} &Rank\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x), [f_1(x), f_2(x)](x), \cdots, [f_1(x), f_2(x)](x), \cdots, \\ &, ad_{f_1}{}^j f_2(x), \cdots, ad_{f_1}{}^j f_m(x), \cdots\} = n \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde $ad_{f_1} f_2(x) = [f_1(x), f_2(x)](x) = \nabla f_2 f_1 - \nabla f_1 f_2$ é um operador matemático utilizado em geometria diferencial e denominado de Colchetes de Lie. A aplicação sucessiva resulta em,

$$\begin{aligned} &ad_{f_1}{}^2 f_2(x) = [f_1(x), [f_1(x), f_2(x)](x)](x) \\ &\vdots \\ &ad_{f_1}{}^j f_2(x) = [f_1(x), [f_1(x), [\ldots, [f_1(x), f_2(x)](x)](x)](x) \end{aligned}$$

As técnicas para se obter as leis de controle são baseadas na análise de Lyapunov, Slotine(1991), e no princípio da invariância de LaSalle, LaSalle(1968), e podem ser aplicadas de duas formas, uma primeira para situações gerais, proposição 1 em Pomet(1992), onde escrever as leis de controle envolve o fluxo de uma equação diferencial ordinária, e uma outra para casos simplificados onde não há necessidade de solução de nenhuma relação diferencial. Esta estratégia é apresentada na sequência, primeiramente mostrando-se a metodologia para o caso mais geral e depois para casos mais restritos:

O projeto para o caso mais geral proposto em Pomet(1992) consiste de dois pontos básicos:

- Escolher uma função variante no tempo $\alpha(t,x)$ com as seguintes propriedades:

- $\alpha(t + 2\pi, x) = \alpha(t, x) \quad \forall(x,t)$ (3.18)
- $\alpha(-t, x) = -\alpha(t, x) \quad \forall(x,t)$ (3.19)

- $\alpha(t,0) = 0 \qquad \forall(x,t)$ (3.20)

isto é, α é uma função periódica de período 2 em relação ao tempo, é função "par" e se anula para $x=0$.

- Resolver a seguinte equação diferencial para V; V é uma função de Lyapunov.

$$\frac{\partial}{\partial t}V(t,x) + \alpha(t,x)\frac{\partial}{\partial x}V(t,x)f_1(x) = 0 \tag{3.21}$$

com condição inicial em t=0:

$$V(0,x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 \tag{3.22}$$

Então, como provado em Pomet(1992), para qualquer função α satisfazendo (3.18), (3.19), (3.20), a função de Lyapunov será decrescente para o sistema de malha fechada que utilize o seguinte vetor de entradas:

$$\begin{aligned} u_1(t,x) &= \alpha(t,x) - L_{f1}V(t,x) \\ u_2(t,x) &= -L_{f2}V(t,x) \\ &\vdots \\ u_m(t,x) &= -L_{fm}V(t,x) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Obs.: Lembrando ainda que o operador Derivada de Lie se define $L_f g = \nabla g f$ onde g e f são funções suaves.

Se o sistema é controlável e α satisfaz as propriedades (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21) acima, então a lei de controle (3.23) estabilizará assintoticamente o sistema (3.16). Na metodologia de projeto acima a função de Lyapunov $V(t,x)$ é calculada a partir do fluxo da equação diferencial (3.21). Também está proposto em Pomet(1992) uma forma mais simples de se obter a lei de controle (3.23). É o método simplificado, que é restrito em relação ao caso mais geral, mostrado acima, mas quando aplicável oferece uma forma simples de se obter a

função de Lyapunov $V(t,x)$, sem necessidade de resolver qualquer relação diferencial, e assim se obter a lei de controle $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ expressa em (3.23).

O projeto simplificado se baseia na seguinte suposição, e esta é a restrição em relação ao caso geral: [Pomet(1992), suposição 2]

Existe um sistema de coordenadas $(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ tal que,

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1} \tag{3.24}$$

Se esta condição é satisfeita para o sistema (3.16), então é sempre possível escolher uma função de Lyapunov $V(t,x)$ da forma:

$$V(t,x) = \frac{1}{2}[x_1 + h(t,x_2,\cdots,x_n)]^2 + \frac{1}{2}x_2^{\,2} + \cdots + \frac{1}{2}x_n^{\,2} \tag{3.25}$$

Impõem-se algumas condições sobre a função h, tal que, ao invés de se tomar α como parâmetro de projeto e resolver a equação diferencial para a função de Lyapunov V (3.21), toma-se h como parâmetro de projeto e calcula-se a função α para satisfazer (3.21), sendo V em (3.21) dado agora por (3.25). Dado o modelo do robô escrito na forma (3.16), se a condição (3.24) for satisfeita, então para qualquer função $h(t,x_2,x_3, \ldots ,x_n)$ satisfazendo as seguintes condições:

$$h(t+2\pi,x_2,\cdots,x_n) = h(t,x_2,\cdots,x_n) \qquad \forall (t,x) \tag{3.26}$$

$$h(t,0) = 0 \qquad \forall (t,x) \tag{3.27}$$

a função de Lyapunov V dada por (3.25) e a função α dada por

$$\alpha(t,x) = -\frac{\partial}{\partial t}h(t,x_2,\cdots,x_n) \qquad \forall t \tag{3.28}$$

são tais que as condições (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21) são verificadas, e assim pode-se calcular a lei de controle (3.23) reescrita abaixo.

$$
\begin{aligned}
&u_1(t,x) = \alpha(t,x) - L_{f_1}V(t,x)\\
&u_2(t,x) = -L_{f_2}V(t,x)\\
&\vdots\\
&u_m(t,x) = -L_{f_m}V(t,x)
\end{aligned}
$$

Segue-se a aplicação dessa metodologia ao caso do robô móvel KHEPERA que possui duas rodas motorizadas e independentes, e cujo modelo reduzido é: Pomet(1992)

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = u_1\\
&\dot{x}_2 = x_1 u_2\\
&\dot{x}_3 = u_2
\end{aligned}
\qquad (3.29)
$$

Esse modelo é obtido através de uma conveniente mudança de coordenadas, Murray(1993), Samson(1995), Pomet(1993). Tem-se:

$$
f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Como:

$$
[f_1, f_2] = \nabla f_2 f_1 - \nabla f_1 f_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

tem-se que o $Posto\{f_1, f_2, [f_1, f_2]\} = 3 = n$ e portanto o sistema é controlável e a suposição 1 é satisfeita. A forma de f_1 satisfaz a suposição 2 e o método simplificado pode então ser aplicado. Tomando a função de Lyapunov da forma (3.25):

$$V(t,x) = \frac{1}{2}[x_1 + h(t,x_2,x_3)]^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2$$

e escolhendo a função h como:

$$h(t,x_2,x_3) = x_2 \cos t$$

as condições (3.26) e (3.27) são satisfeitas e V é dado por:

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \frac{1}{2}[x_1 + h(t,x_2,x_3)]^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 \\ V(t,x) &= \frac{1}{2}[x_1 + x_2 \cos t]^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 \end{aligned} \qquad (3.30)$$

Então, calcula-se:

$$L_{f_1}V = \nabla V f_1 = \begin{Bmatrix} x_1 + x_2\cos t & (x_1 + x_2\cos t)\cos t + x_2 & x_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$L_{f_1}V = x_1 + x_2\cos t$$

$$L_{f_2}V = \nabla V f_2 = \begin{Bmatrix} x_1 + x_2\cos t & (x_1 + x_2\cos t)\cos t + x_2 & x_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ x_1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$L_{f_2}V = (x_1 + x_2\cos t)x_1\cos t + x_1x_2 + x_3$$

e a função α se calcula:

$$\alpha(t,x) = -\frac{\partial}{\partial t}h(t,x_2,x_3)$$
$$\alpha(t,x) = x_2 \sin t$$

logo:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha(t,h) - L_{f_1}V(t,x) \\ u_2 = -L_{f_2}V(t,x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = x_2 sint - (x_1 + x_2 cost) \\ u_2 = -(x_1 + x_2 cost)x_1 cost - (x_1 x_2 + x_3) \end{cases}$$

Este é o vetor de controle com realimentação de estados, suave e variante no tempo e que estabiliza o sistema para a origem.

A lei de estabilização aplicada para o robô KHEPERA é a mostrada em Pomet et al(1992) identificada por CL3 e apresentada abaixo:

$$\begin{cases} u_1 = x sin\theta - y cos\theta \\ u_2 = \lambda[x sin(t) + cos(t) sin(\theta) u_1] - (\theta + \lambda x cos(t)) \end{cases} \quad (3.31)$$

Esta lei de controle foi obtida seguindo o desenvolvimento apresentado em Pomet(1992), com o método simplificado, porém com a utilização de uma outra função de Lyapunov ligeiramente diferente:

$$V(t,x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\psi(\theta)}{\lambda} + x cos(t)\right]^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \quad (3.32)$$

com α sendo uma constante real positiva e ψ uma função real suave com $\psi' > 0$ e $\psi(\theta) = 0$ para $\theta = 0$. Observa-se a semelhança entre esta função de Lyapunov (3.32) e a apresentada em (3.30) na aplicação do método para o robô móvel.

A lei de controle (3.31) garante convergência da configuração (x,y,θ) para zero, conforme demonstrado em Pomet(1992), onde se faz uso do princípio da invariância de LaSalle que estabelece que o único conjunto invariante contido em $\{(t,x,y,\theta) \in R^4, \dot{V} = 0\}$ é $\{(t,0,0,0), t \in R\}$. Tem-se também que a distância do robô ao ponto final de estabilização é decrescente ao longo da trajetória:

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}(x^2 + y^2)] = -(-x\sin(\theta) + y\cos(\theta))^2$$

o que indica que o movimento do robô será sempre no sentido de encontrar o ponto final objetivo.

Em Pomet et al(1992) é feito uma análise da influência dos parâmetros de projeto $\psi(\theta)$ e λ. Verifica-se que para λ=20 (um valor grande), a velocidade de convergência de (x,y) para (0,0) é maior que para o caso de λ=1, e que para o caso de $\psi(\theta)=\theta$ o movimento é errático e a trajetória apresenta maior número de "pontas" que para o caso de, por exemplo, $\psi(\theta)=tg(\theta/a)$, a>2.

Esta estratégia de controle será utilizada na seção 3.3 quando o robô estiver nas proximidades do ponto de estabilização, sendo assim, os resultados obtidos para o parâmetro $\psi(\theta)=\theta$, trajetória oscilante e com pontas, são aplicáveis visto que o robô estará sob este controle somente nas proximidades do ponto final de repouso. A Figura 3.1 mostra a aplicação dessa lei de controle na estabilização do robô KHEPERA para a origem com os parâmetros de projeto $\psi(\theta)=\theta$ e λ=40 na lei de controle (3.31), Victorino(May/1998).

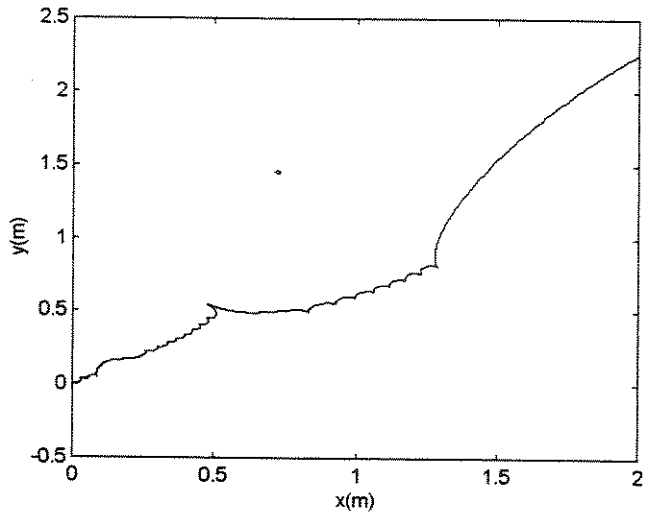


Figura 3.1: Estabilização do robô para um ponto de repouso (0,0).

Observa-se na Figura 3.1 e pela própria natureza da lei de controle (3.31) que nenhuma trajetória pode ser especificada e a trajetória resultante se mostra oscilante. Os estados do robô convergem para a origem, neste caso, fato este considerado impossível com o uso de realimentação de estados invariantes no tempo, como a linearização por realimentação dinâmica visto na seção 3.1.2.

3.3 - A Estratégia Híbrida

As leis de controle variantes no tempo não são suficientes para a realização de uma tarefa completa para o robô, que é mover-se segundo uma trajetória determinada até um ponto final de repouso. Com tais leis, o robô pode ser levado de uma estado inicial para um final mas nenhuma trajetória de referência pode ser especificada. Além disso, desde que as trajetórias realizadas com tais leis são muito oscilantes, devido a dependência temporal das funções de Lyapunov, é impraticável aplicar tais estratégias se o ponto alvo do robô for muito longe do ponto inicial. A linearização dinâmica, apresentada na seção 3.1.2, igualmente não é apropriada para atender a tarefa requerida para o robô. Esta metodologia se aplica à parte de movimento caracterizado pela ausência de pontos de repouso, mas não funciona no ponto final objetivo que é um ponto de repouso.

A idéia natural para a solução deste problema, proposto em D'Andrea-Novel(1995), Pomet et al(1992), Thuilot(1996), é a junção das duas estratégias anteriores, a lei de controle resultante

é uma realimentação dos estados descontínua que combina as vantagens do controle com linearização dinâmica longe do ponto final de repouso, com a realimentação suave variante no tempo próximo do ponto de estabilização. Tal estratégia é denominada de híbrida, pois faz uso das duas técnicas: Linearização com realimentação dinâmica durante o controle de seguimento da trajetória de referência e Realimentação variante no tempo durante a estabilização do robô para o ponto final de repouso.

Em Thuilot(1996) a estratégia híbrida proposta esta dividida nas seguintes etapas:

- Primeiramente as variáveis do robô são iniciadas através de um controle em malha aberta. Este passo objetiva iniciar o robô e colocar suas variáveis de estados em uma faixa tal que as singularidades da estratégia de seguimento, linearização com realimentação dinâmica, não sejam encontradas durante o movimento do robô.

- Aplica-se a estratégia Linearização com realimentação dinâmica, que possibilitará o seguimento da trajetória de referência projetada pelo operador. Esta estratégia será usada durante grande parte do movimento do robô.

- Quando o robô se aproxima de sua configuração final, que é um estado de repouso, procede-se à comutação para a estratégia de estabilização Realimentação variante no tempo para parar o robô. As possíveis oscilações geradas devido este tipo de lei de controle serão desprezíveis, considerando que a comutação ocorre quando o robô próximo o suficiente do ponto de repouso.

A metodologia proposta em Pomet et al(1992) é semelhante à descrita acima, mas o método de linearização utilizado não é a Linearização dinâmica e portanto o modelo resultante é parcialmente linear. O momento ideal para a comutação entre as estratégias de controle não está justificado em Pomet et al(1992), D'Andrea-Novel(1995), Thuilot(1996); porém, na aplicação da estratégia híbrida ao caso do robô KHEPERA, que está apresentada abaixo, faz-se uma estimativa do momento da comutação com base no número de condição da matriz de controlabilidade, Victorino(September/1998).

O ponto final da tarefa imposta ao robô é caracterizado por um estado de repouso onde a velocidade longitudinal, expressa por η_1 no modelo de estado (2.19), é igual a zero. A lei de realimentação dinâmica, apresentada na seção 3.1.2, não é apropriada para ser aplicada nessa parte do movimento, pois como se vê no modelo estendido (3.12), a matriz de controlabilidade, $E(\chi_e, \eta_1)$ dada por:

$$E(\chi_e, \eta_1) = \begin{bmatrix} -\eta_1 \cos\theta & -sin\theta \\ -\eta_1 sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

é função de η_1 e não possui inversa se η_1=0, nesse caso a lei de controle dada por $U = E^{-1}(\chi_e, \eta_1)\nu$ não pode ser calculada. Seja uma trajetória de referência singular com um ponto final de repouso na origem (0,0) dada por:

$$x_{ref} = y_{ref} = \frac{0.0125}{3}(8-t)^3, \qquad 0 \le t \le 8s$$

com as seguintes condições iniciais para o posicionamento do robô:

$$x(0) = 2m$$
$$y(0) = 2.26m$$

As velocidades iniciais de referência e do robô são iguais a:

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_{ref}(0) = \dot{y}(0) = \dot{y}_{ref}(0) = -0.8m/s$$

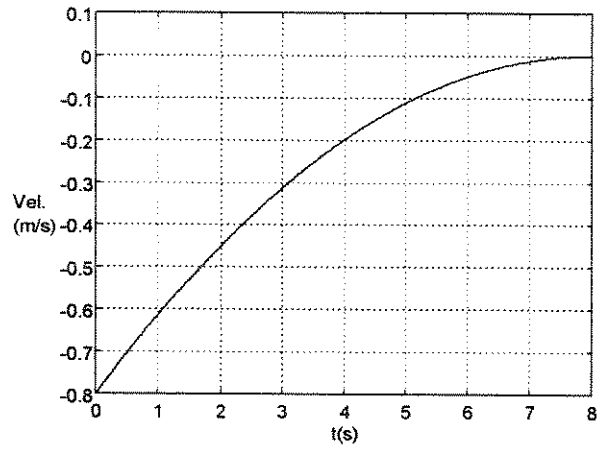


Figura 3.2: Velocidade de referência em função do tempo.

A Figura 3.2 mostra a velocidade de referência em função do tempo, vê-se que em $t=8s$ a velocidade é zero o que constitui um ponto de singularidade na trajetória. Portanto, para que o robô seja conduzido para o ponto final de repouso, se faz necessário o uso da estratégia híbrida que combina a realimentação dinâmica com a realimentação variante no tempo. A metodologia é a seguinte: o movimento de seguimento da trajetória de referência sob o comando de realimentação dinâmica se estende até que o robô esteja em uma circunferência centrada na origem com um certo raio; neste ponto ocorre uma comutação para estratégia de controle variante no tempo para que o estado do robô possa ser estabilizado para a origem, onde a lei de realimentação dinâmica tenderia para o infinito.

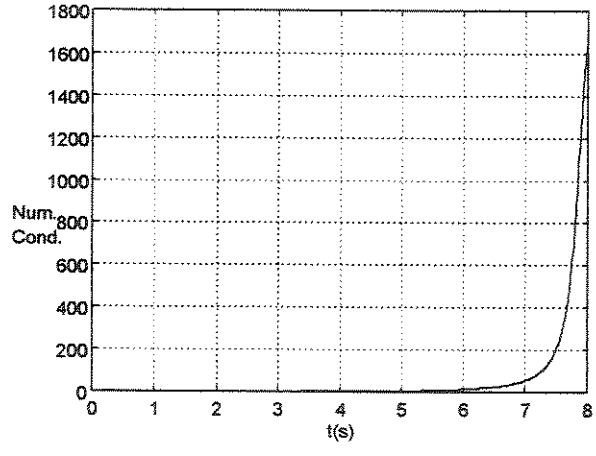


Figura 3.3: Nº de Condição da matriz de controlabilidade.

O momento da comutação será estimado pela observação da variação do número de condição da matriz de controlabilidade $E(\chi_e, \eta_l)$. A Figura 3.3 mostra a variação do número de condição da matriz de controlabilidade em função tempo.

Para $t>3,5s$ o número de condição da matriz $E(\chi_e, \eta_l)$ é maior que *2*, conclui-se então que a partir desse ponto a matriz de controle se torna extremamente mal condicionada e o calculo de sua inversa é numericamente instável, o que indica que este ponto é uma estimativa para se efetuar a comutação entre as estratégias de controle.

A Figura 3.4 mostra a estabilização do robô para o ponto de repouso *(0,0)* no plano cartesiano. A comutação para a lei de controle variante no tempo ocorre quando o robô atinge a circunferência de raio *0.37m* centrada na origem, que corresponde a um nº de condição maior que dois.

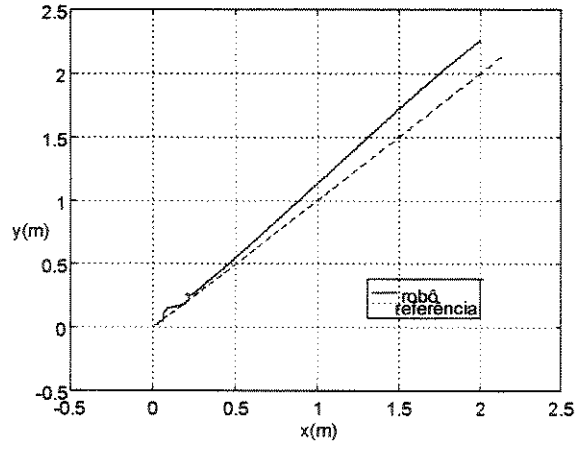


Figura 3.4: Seguimento da trajetória singular.

Capítulo 4

Simulação Computacional

A partir deste capítulo se tem as partes de aplicação deste trabalho: os testes de simulação computacional aqui apresentados e a convalidação experimental apresentada no capítulo 5.

Os testes de simulação, apresentados a seguir, constituem uma forma de se verificar a aplicação da teoria apresentada nos capítulos 2 e 3 desta dissertação. Três situações reais foram consideradas, que representam os problemas para os quais a metodologia desenvolvida se presta: seguimento de uma trajetória de referência no plano cartesiano sem pontos de singularidade (pontos de repouso), estabilização do robô para um ponto de repouso no plano cartesiano, seguimento de uma trajetória de referência no plano cartesiano com um ponto de singularidade. Essas situações integram a tarefa completa imposta ao robô móvel como descrito no capítulo 1, a saber chegar a um ponto final de repouso seguindo uma trajetória predeterminada.

A seqüência nas simulações é devido a divisão desse problema em partes: varrer a trajetória e depois estabilizar em torno do ponto final objetivo. A seção 4.1 trata da primeira parte do problema de seguimento com a aplicação da estratégia de linearização com realimentação dinâmica, estudada na seção 3.1.2. Uma trajetória de referência é especificada e

três situações iniciais são consideradas. Na seção 4.2 são simulados os casos de estabilização do robô para um ponto de repouso através da estratégia de realimentação de estados variante no tempo. Na seção 4.3 é considerado a tarefa completa com a simulação de uma estratégia híbrida que compreende a junção das duas técnicas anteriores. É apresentada uma aplicação de linearização dinâmica durante o movimento de seguimento e realimentação variante no tempo para estabilizar o robô para o ponto final, que é um ponto singular da trajetória.

Os testes computacionais foram realizados com a utilização do pacote SIMULINK® do aplicativo MATLAB®. Diagramas de blocos que são importantes na compreensão dos testes são incluídos neste capítulo.

4.1 - Seguimento de trajetória não-singular.

A trajetória de referência não-singular considerada foi projetada de modo a não exceder o limite de velocidade do robô real:

$$x_{ref} = y_{ref} = 0.3 - 0.08t + 0.00565685t^2 - 0.000377124t^3$$

$$x_{ref}(0) = y_{ref}(0) = 0.30m$$

$$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{x}_{ref}(0) = \dot{y}_{ref}(0) = -0.08m/s$$

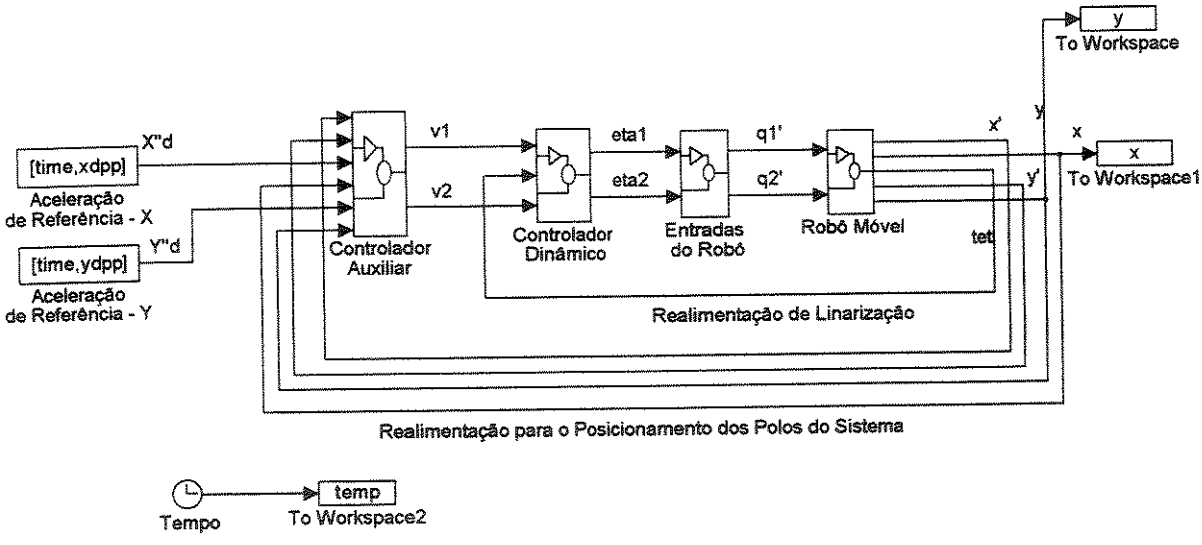


Figura 4.1: Malha de controle com o Sistema Completo.

O diagrama de blocos apresentado na Figura 4.1 mostra a malha de controle completa com as realimentações dos estados para a linearização dinâmica do sistema e para a alocação dos polos no lado esquerdo do plano complexo. Os principais sub-sistemas são: *Robô Móvel* e o *Controlador Dinâmico.*

O sub-sistema *Robô Móvel* contém o modelo cinemático de postura, escrito como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r}{2}sin\theta & -\frac{r}{2}sin\theta \\ \frac{r}{2}cos\theta & \frac{r}{2}cos\theta \\ \frac{r}{2L} & -\frac{r}{2L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

que tem como entradas as velocidades das rodas $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ e os estados do sistema como saídas.

O sub-sistema *Controlador Dinâmico* está apresentado na Figura 4.2, observa-se que a variável de controle interna η_1, velocidade longitudinal do robô, é obtido através de um integrador, essa é a característica dinâmica do controlador. A lei de controle está apresentada na equação (3.13), e reescrita abaixo:

$$U = E^{-1}(\chi_e)\nu \Rightarrow \begin{Bmatrix} \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\cos\theta}{\eta_1} & -\frac{sin\theta}{\eta_1} \\ -sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{Bmatrix}$$

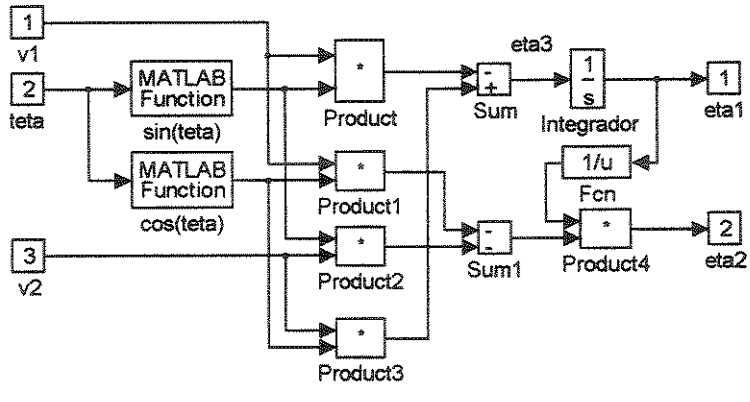


Figura 4.2: O Controlador Dinâmico.

Os três estados iniciais de onde o robô foi disparado são:

- $x(0) = 0.22m; y(0) = 0.30m; \theta(0) = 3\pi / 4\, rad$

A Figura 4.3 mostra a postura do robô no sistema cartesiano, a direção indicada por X_2 é a parte frontal do robô, φ_1 e φ_2 são os deslocamentos angulares das rodas 1 e 2. A Figura 4.4 mostra o seguimento da trajetória de referência quando a posição angular inicial do robô em relação ao sistema inercial é *3π/4rad.*

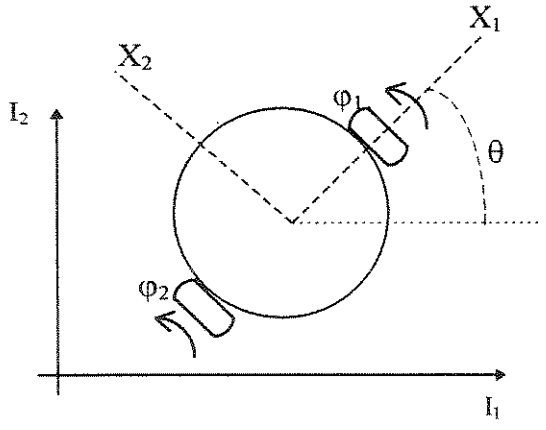


Figura 4.3: A postura do robô.

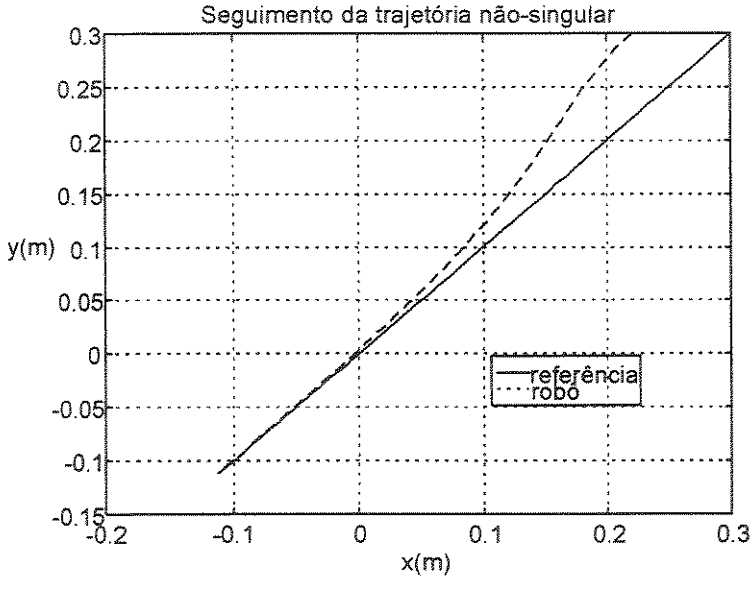


Figura 4.4: Seguimento à trajetória de referência com um ângulo inicial de 3π/4rad.

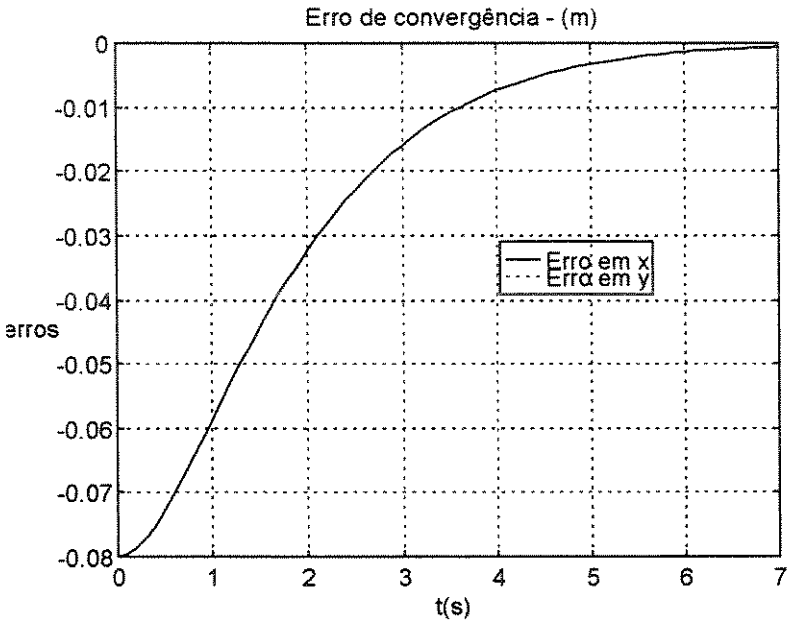


Figura 4.5: Erros de seguimento em x e em y.

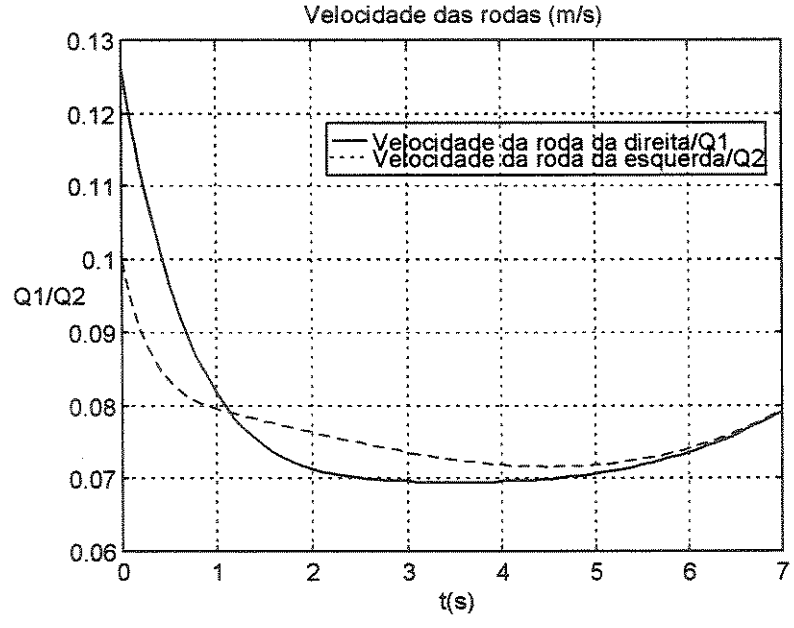


Figura 4.6: As velocidades das rodas do robô.

Vê-se na Figura 4.5 que os erros de seguimento convergem assintoticamente para para zero, conforme previsto teoricamente. A Figura 4.6 mostra o comportamento das entradas de controle, observa-se que a patir de $t=5,5s$ o robô se deslocar em linha reta acompanhando a trajetória de referência.

O próximo item mostra o caso onde o robô é disparado da posição angular *-3π/4rad*, este é o ângulo que posiciona o sistema móvel solidário ao robô em relação ao sistema inercial, como mostra a Figura 4.3.

- $x(0) = 0.22m; y(0) = 0.30m; \theta(0) = -3\pi / 4\pi$ rad

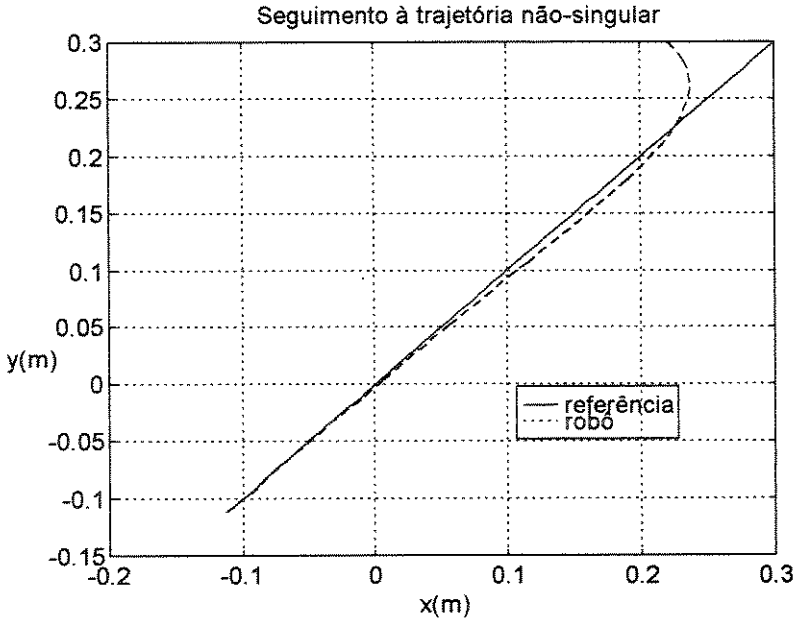


Figura 4.7: Seguimento à trajetória de referência com um ângulo inicial de -3π/4rad.

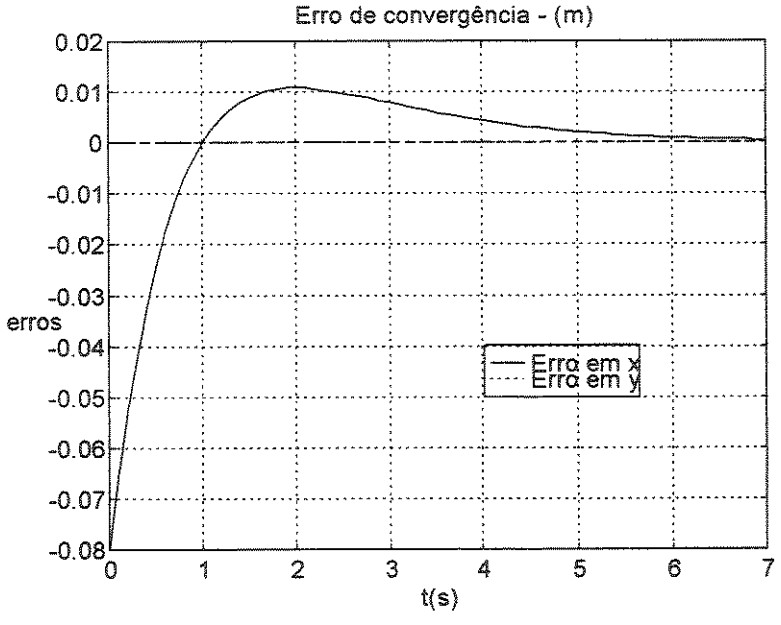


Figura 4.8: Erros de seguimento em x e em y.

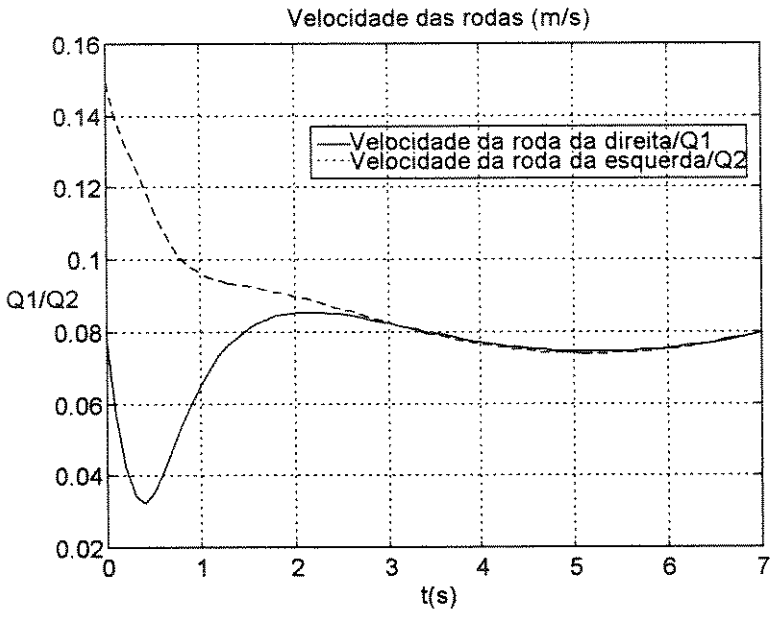


Figura 4.9: As velocidades das rodas do robô.

As Figuras 4.7-4.9 mostram que para configuração inicial $\theta(0) = -3\pi / 4\,rad$, como no caso anterior, os erros de seguimento convergem assintoticamente para para zero, e a posição angular do robô no plano cartesiano converge para a referência $3\pi/4rad$.

- $x(0) = 0.22m; y(0) = 0.30m; \theta(0) = -\pi / 4$

Nesta situação o robô está posicionado inicialmente em sentido contrário a que deve ser seguida, observa-se na Figura 4.10 que o robô inicialmente se desloca no sentido contrário ao da trajetória de refrência e, em seguida, gira em um ângulo de 180° e converge para a referência.

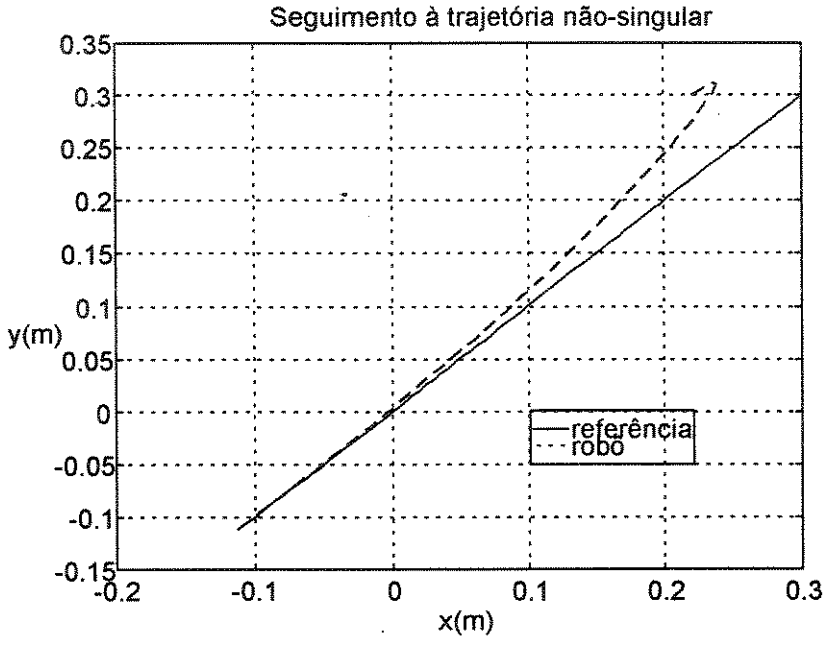


Figura 4.10: Seguimento à trajetória de referência com um ângulo inicial de -π/4rad

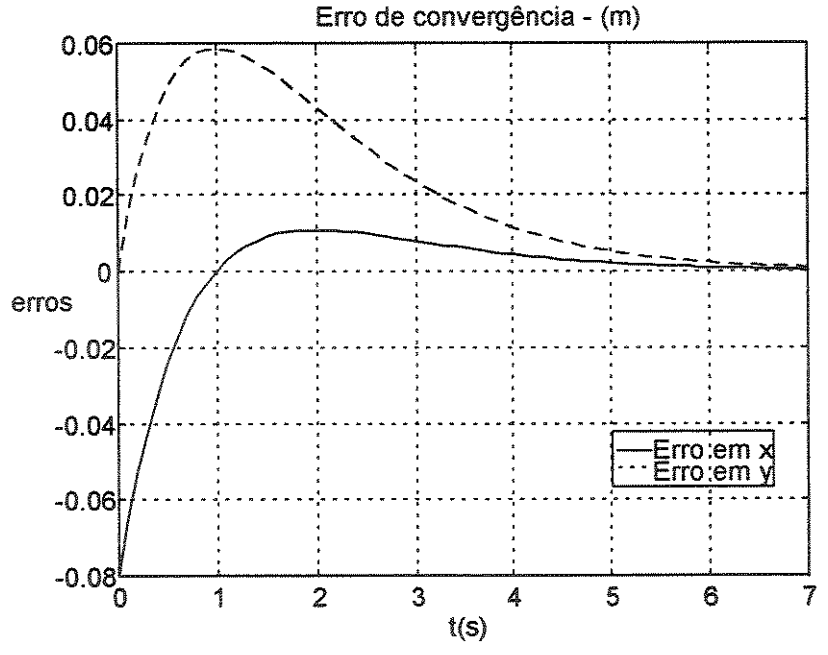


Figura 4.11: Erros de seguimento em x e em y.

A Figura 4.11 mostra a convergência dos erros de seguimento da trajetória de referência no plano cartesiano para zero. A variação das velocidades das rodas do robô com o tempo está mostrada na Figura 4.12, observa-se que em torno de $t=0,4s$ ocorre uma mudança brusca no

perfil das velocidades, a velocidade da roda da esquerda, *Q2* na Figura 4.12, varia 3,5 vezes o seu valor de regime. Essa variação ocorre quando o robô gira em torno do seu eixo.

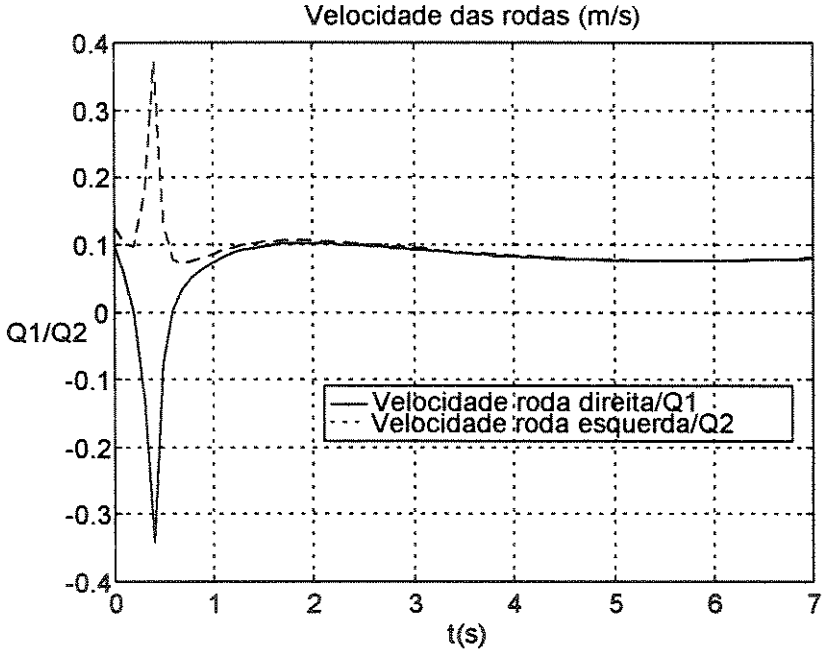


Figura 4.12: As velocidades das rodas do robô.

4.2 - Estabilização

Nesta simulação o robô é disparado de um ponto inicial no plano e governado pelo lei de realimentação variante no tempo para se estabilizar no ponto final *(0,0)*. Essa simulação foi realizada com dois tempos finais: $t = 8s$ e $t = 14s$.

- $t = 8s$

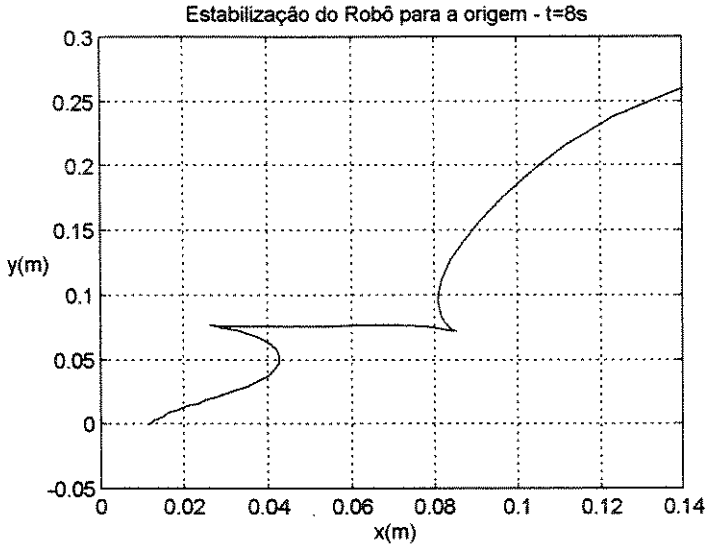


Figura 4.13: A estabilização do robô com t = 8s.

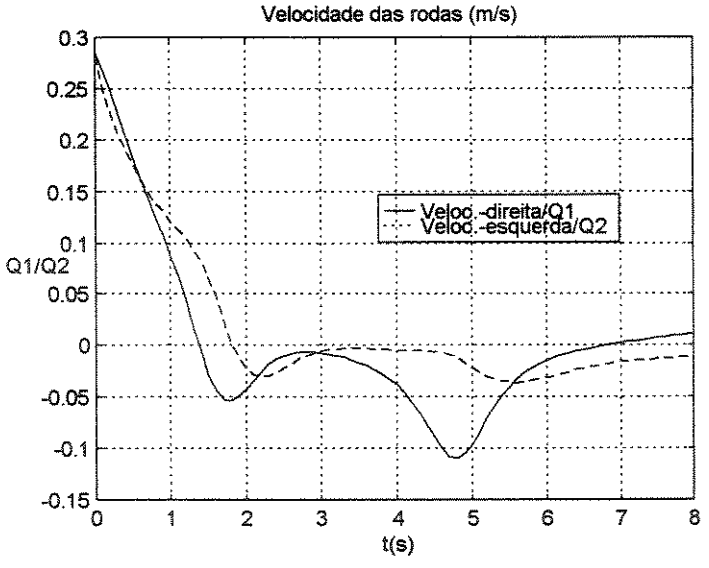


Figura 4.14: As velocidades das rodas do robô.

A Figura 4.13 mostra a trajetória realizada pelo robô no plano cartesiano quando este é liberado da posição cartesiana *(0,14;0,26)*. Observa-se que a trajetória é irregular e isto torna este tipo de controlador impraticável quando o estado inicial está longe do estado final. Entretanto, a sua aplicação é importante no caso da estratégia híbrida quando a comutação

ocorre próximo do ponto de repouso e as oscilações produzidas pela realimentação dependente do tempo não têm influência prática. A Figura 4.14 mostra o comportamento das velocidades das rodas e sua variação em torno do estado de repouso.

- *t = 14s*

A convergência do robô para a origem é assimptótica e quanto maior for o tempo de simulação mais próximo ele estará de (0,0). A Figura 4.15 se diferencia da Figura 4.13 nos pontos finais da trajetória, percebe-se na Figura 4.15 uma pequena oscilação em torno da reta *y=0* se aproximando do ponto (0,0).

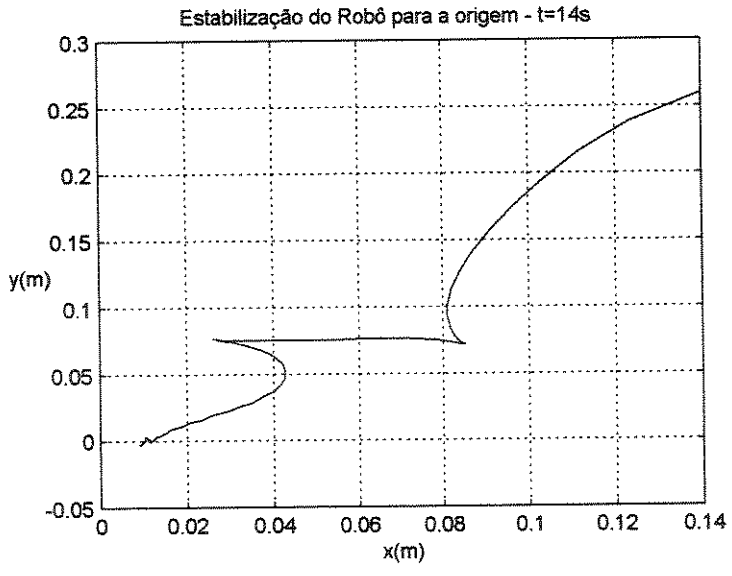


Figura 4.15: A estabilização do robô com t = 14s.

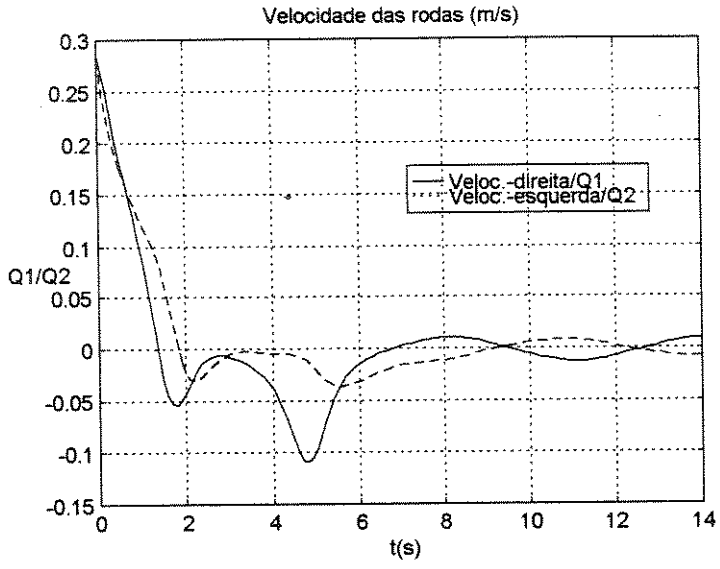


Figura 4.16: As velocidades das rodas do robô.

As velocidades das rodas, Figura 4.16, se alternam periodicamente entre valores positivos e negativos indicando um movimento de vibração rotativa do robô.

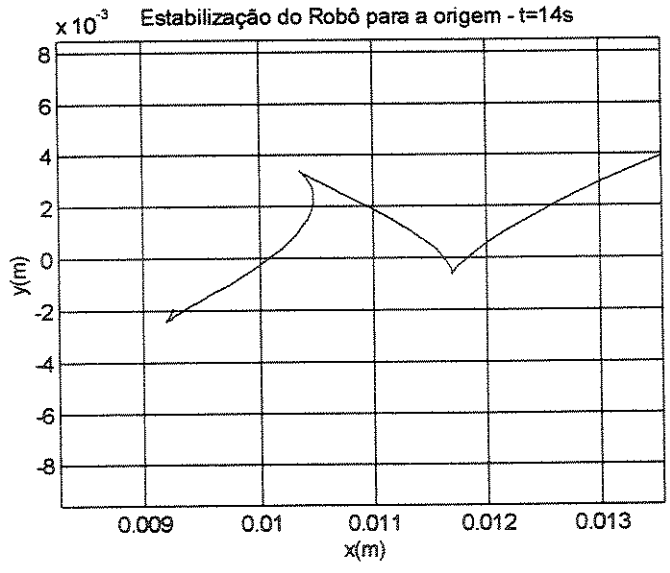


Figura 4.17: Ampliação do ponto final da trajetória na Figura 4.15 - A estabilização do robô com t = 14s

A Figura 4.17 mostra a ampliação da oscilação nos pontos finais da trajetória mostrada na Figura 4.15, o estado cartesiano do robô tende para (0,0). Esse fato, como está mostrado

no capítulo 5, não se verifica experimentalmente. O torque desenvolvido pelos motores em resposta aos comandos de velocidades referentes a esses deslocamentos milimétricos não são grandes o suficiente para superar os atritos estáticos, e o robô permanece imóvel a partir de um certo ponto. Adota-se, na prática, uma certa tolerância em torno do alvo e se o robô alcança este limite, considera-se que ele alcançou o alvo.

4.3 - Estratégia híbrida.

A matriz de controlabilidade, equação (3.12), se torna singular próximo ao ponto de repouso, e a realimentação dinâmica não se aplica nesta situação. Por outro lado, não seria possível liberar o robô controlado pela lei variante no tempo a partir do estado inicial que está relativamente distante do objetivo final, devido à irregularidade na trajetória mostradas na Figura 4.13 e ao fato de não ser possível o seguimento de nenhuma trajetória preespecificada. Isso sugere uma estratégia híbrida com a junção das duas leis de controle.

A Figura 4.18 mostra a malha de controle para a estratégia híbrida. mostrando o sub-sistema referente ao controlador variante no tempo. Os blocos *Switch* e *Switch1* fazem a comutação do controlador dinâmico para o controlador variante no tempo quando $x^2 + y^2 \leq 0.0032m$. O sub-sistema *Controlador Variante no Tempo* contém a lei de controle proposta em Pomet et al(1992), equação (3.31):

$$\begin{cases} u_1 = x\sin\theta - y\cos\theta \\ u_2 = 40[x\sin(t) + \cos(t)\sin(\theta)u_1] - (\theta + 40x\cos(t)) \end{cases}$$

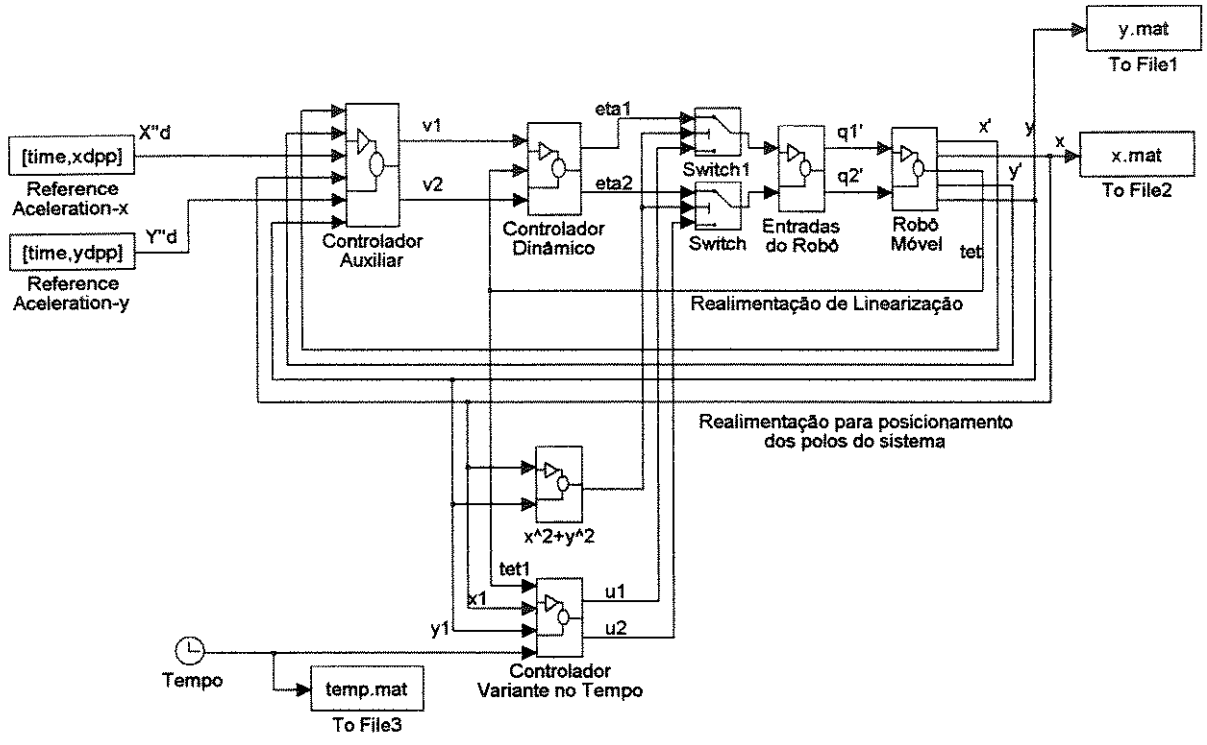


Figura 4.18: A Realimentação Variante no tempo.

A trajetória singular de referência é:

$$x_{ref} = y_{ref} = (1/3) \cdot 0.00125 \cdot (8 - t)^3$$

e o robô parte do seguinte estado inicial:

$$x(0) = 0.14m$$
$$y(0) = 0.26m$$
$$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = -0.08m/s$$

Observa-se que em 8s a velocidade de referência é zero, o que caracteriza o ponto de singularidade. A Figura 4.19 mostra o seguimento da trajetória singular com ponto de comutação entre as estratégias de controle, Victorino(Setembro/1998).

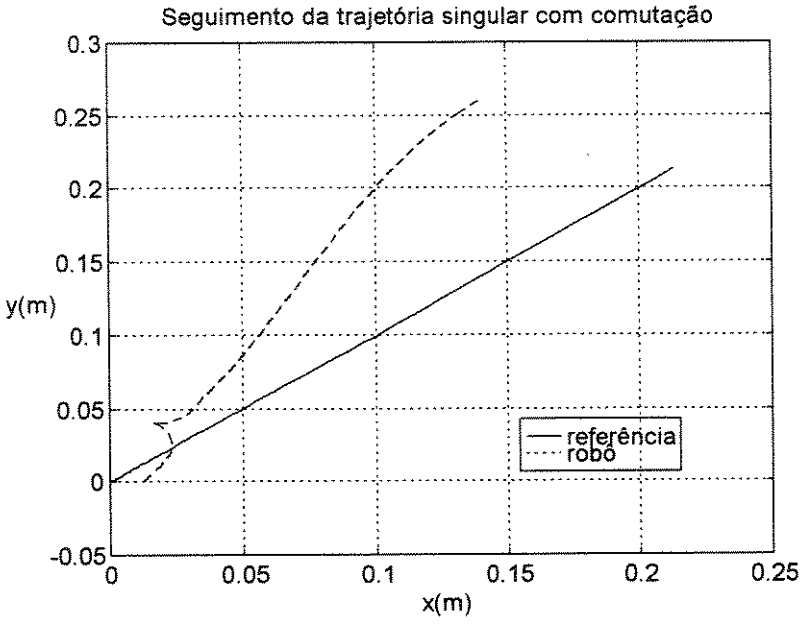


Figura 4.19: Seguimento de uma trajetória singular.

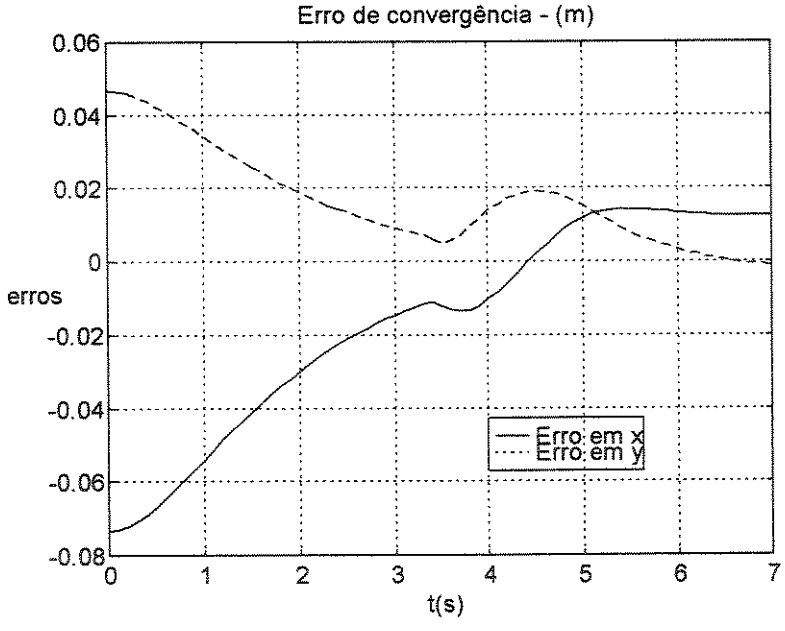


Figura 4.20: Erros de seguimento em x e em y.

Observa-se na Figura 4.20 que após o ponto de comutação, que ocorre em $t=3.5s$, a característica oscilante nos erros de convergência.

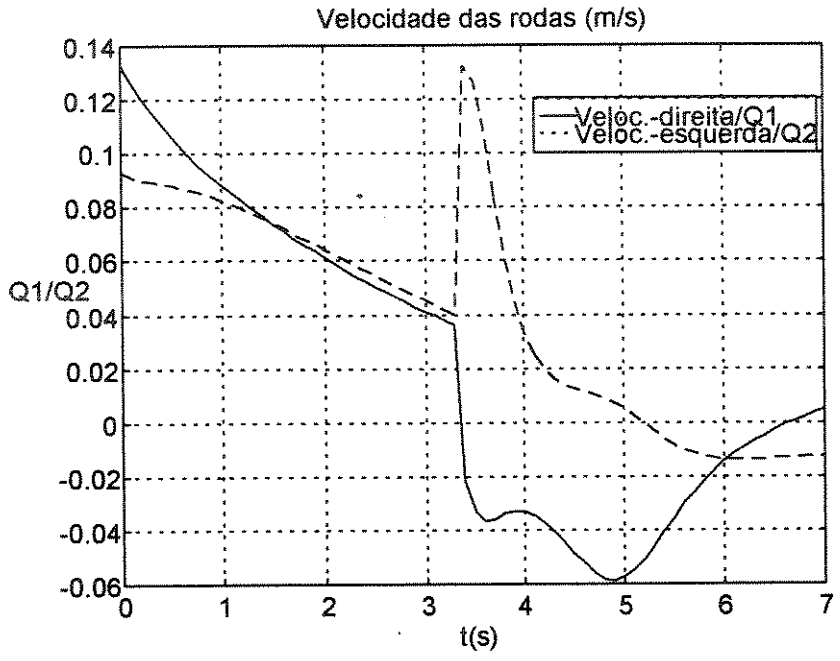


Figura 4.21: As velocidades das rodas do robô.

A Figura 4.21 mostra o comportamento das velocidades das rodas do robô. Nota-se que quando ocorre a comutação entre as estratégias de controle, ocorre também um transitório na velocidade das rodas. Para evitar este problema, é necessário uma estratégia de transição suave (*bumpless transfer*) entre as leis de controle e seus respectivos sinais, Bueno(1998).

Os resultados das simulações são satisfatórios e mostram reproduzem os resultados que foram previstos na teoria apresentada nos capítulos 2 e 3. Estes casos simulados foram implementados experimentalmente e os resultados são apresentados no capítulo 5, onde se faz comparações entre os gráficos referentes aos testes simulados e os gráficos com os dados experimentais.

Capítulo 5

Resultados Experimentais

Este capítulo traz a validação experimental dos resultados de simulação obtidos no capítulo 4. As situações que foram experimentadas são, propositadamente, as mesmas que foram simuladas numericamente. Inicialmente, na seção 5.1, faz-se uma descrição detalhada da plataforma experimental utilizada. Na seção 5.2 está apresentado detalhes do experimento e em seguida, na seção 5.3, são mostrados os resultados práticos de controle.

O experimento foi realizado no Laboratório de Robótica e Visão do Instituto de Automação no Centro Tecnológico para a Informática (LRV/IA/CTI) em Campinas,SP.

5.1 - A plataforma experimental

Utilizou-se como plataforma experimental o micro-robô móvel KHEPERA. Esse robô, fabricado por K-Team SA na Suíça, foi desenvolvido para fins experimentais. É possível, com a sua utilização, confrontar com situações do mundo real os algoritmos desenvolvidos em simulação para execução de trajetórias, desvio de obstáculos, pré-processamento de informações sensoriais, etc.. A Figura 1.2, apresentada no capítulo 1, mostra o robô com sua estrutura completa com os módulos referentes à visão, à comunicação por telemetria e um

básico com o qual os testes experimentais foram realizados. Algumas de suas características são listadas abaixo:

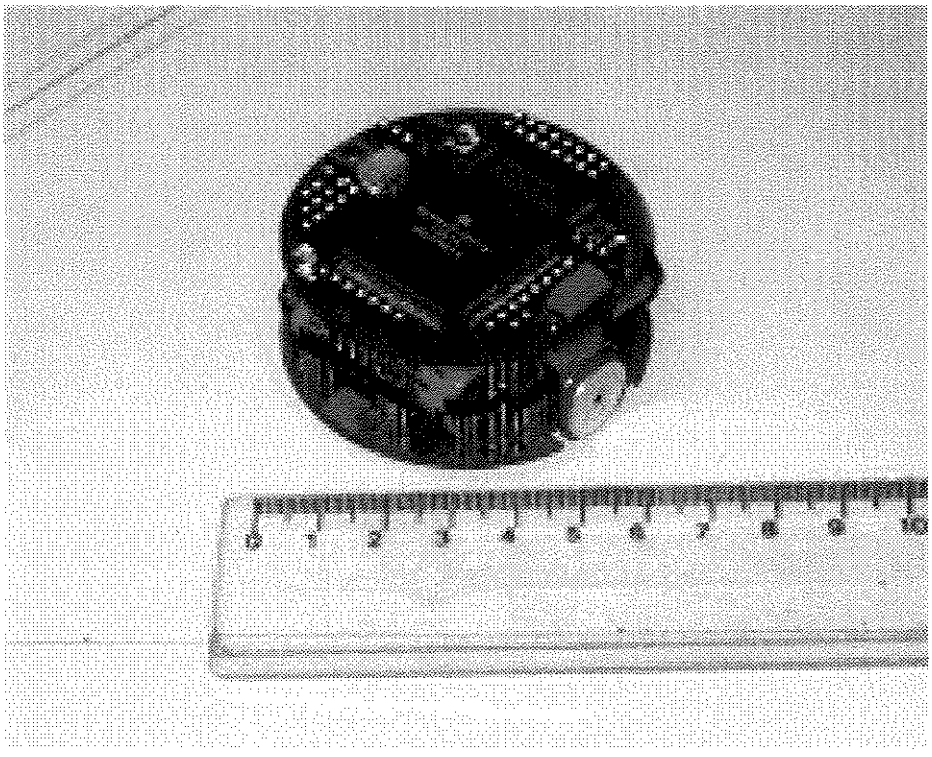


Figura 5.1 : Fotografia do robô móvel KHEPERA com o módulo básico.

- É equipado com microprocessadores responsáveis pelo interfaceamento e controle interno.

- No seu topo possui três chaves que podem ser combinadas para alterar os modos de funcionamento do robô.

- A comunicação pode ser feita via cabo RS232 padrão, uma linha serial assíncrona com níveis TTL, ou por um sistema de telemetria.

- Possui duas rodas motrizes que são acionadas independentemente por motores DC através de uma redução de 25:1. Um encoder é colocado no eixo do motor e dá 24 pulsos por revolução do motor. A velocidade máxima é *1m/s*

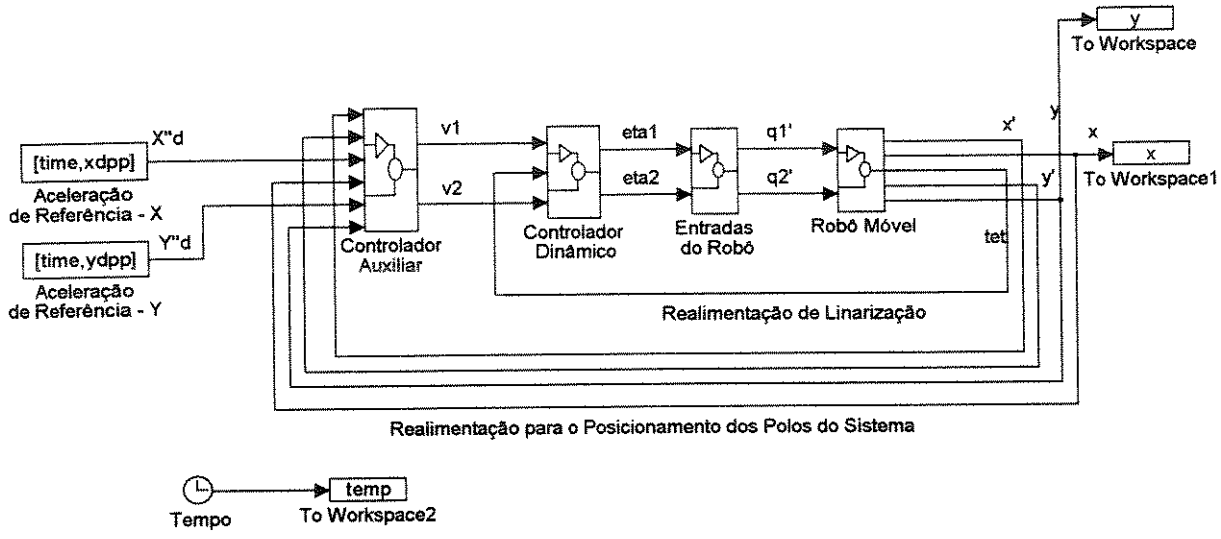
- Possui 8 sensores de infravermelho que podem detectar obstáculos em redor.

O processador principal do robô faz o controle direto do motor via controlador *PID*, onde os ganhos podem ser determinados pelo usuário. Dois modos de operação são possíveis: modo de velocidade, onde o controlador tem como entrada as velocidades das rodas e o motor é ajustado de modo que esta velocidade seja alcançada, e o modo de posição onde o controlador tem como entrada uma posição desejada para a roda, uma aceleração e uma velocidade máxima. Com esses parâmetros o controlador acelera a roda até que a velocidade e aceleração máxima sejam alcançada para se chegar no objetivo final.

Os diagramas de blocos do SIMULINK® utilizados na simulação foram convertidos em código do VISUAL BASIC® de modo a possibilitar os trabalhos experimentais. Foi utilizado no experimento um microcomputador 486.

5.2 - Descrição do Experimento.

O diagrama de bloco mostrado na figura 4.1 e repetido abaixo é útil para visualizar a forma como o robô foi acessado:



O programa de controle segue o mesmo fluxo do diagrama, ou seja, a partir do estado do robô e da trajetória de referência, determinam-se as velocidades das rodas do robô, q_1 e q_2. No caso da simulação numérica esses valores foram levados nas equações de estado (2.28), repetida abaixo:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r}{2}sin\theta & -\frac{r}{2}sin\theta \\ \frac{r}{2}\cos\theta & \frac{r}{2}\cos\theta \\ \frac{r}{2L} & -\frac{r}{2L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix},$$

e o novo estado do robô é obtido por integração deste sistema. No caso do experimento, as velocidades calculadas pelo controlador são enviadas ao Robô, e não diretamente para o modelo de estado representado pelo bloco Robô Móvel, que as processa e atua nas rodas correspondentes. Em seguida as velocidades instantâneas são requeridas do robô para serem processadas no programa de controle. Esses valores vindos do robô são as entradas do bloco Robô Móvel, como se vê no diagrama, e os estados são calculadas da mesma forma que na simulação, ou seja, pela integração numérica do modelo de estado do robô.

5.3 - Os Casos Experimentados

Foram experimentados os casos de Varredura da trajetória não-singular, Estabilização do robô para um ponto de repouso e a Estratégia Híbrida. Para cada caso é feito uma comparação entre os resultados simulados e os experimentais. Os resultados experimentais mostrados nos gráficos identificados como robô real, foram obtidos através das velocidades vindas do robô. Essas velocidades são plotadas diretamente no caso de gráfico de velocidades, e manipuladas segundo o modelo cinemático de estado para a obtenção dos estados correspondentes plotados nos gráficos de trajetória.

5.3.1 - A trajetória não-singular.

Dois resultados experimentais foram obtidos considerando a trajetória não-singular descrita no capítulo 4, o caso onde o robô é disparado de um ângulo de $3\pi/4$ e outro para o caso onde o robô é liberado de um ângulo de $-3\pi/4$.

A trajetória de referência é a mesma usada na simulação:

$$x_{ref} = y_{ref} = 0.3 - 0.08t + 0.00565685t^2 - 0.000377124t^3$$

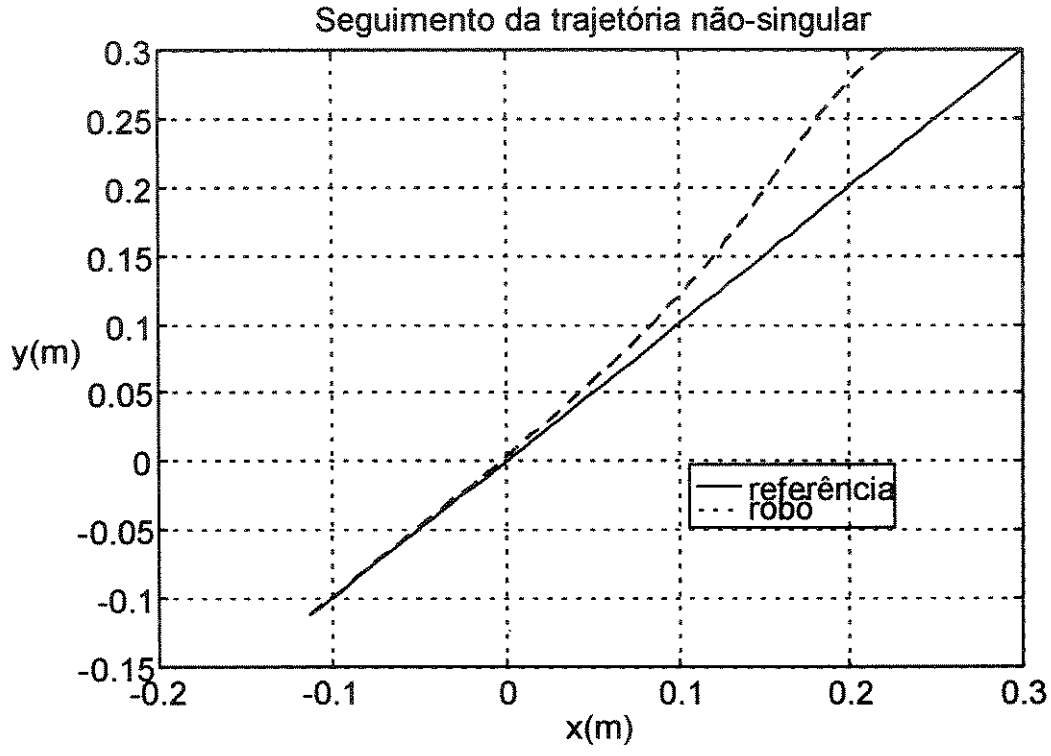
$$x_{ref}(0) = y_{ref}(0) = 0.30m$$

$$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{x}_{ref}(0) = \dot{y}_{ref}(0) = -0.08m/s$$

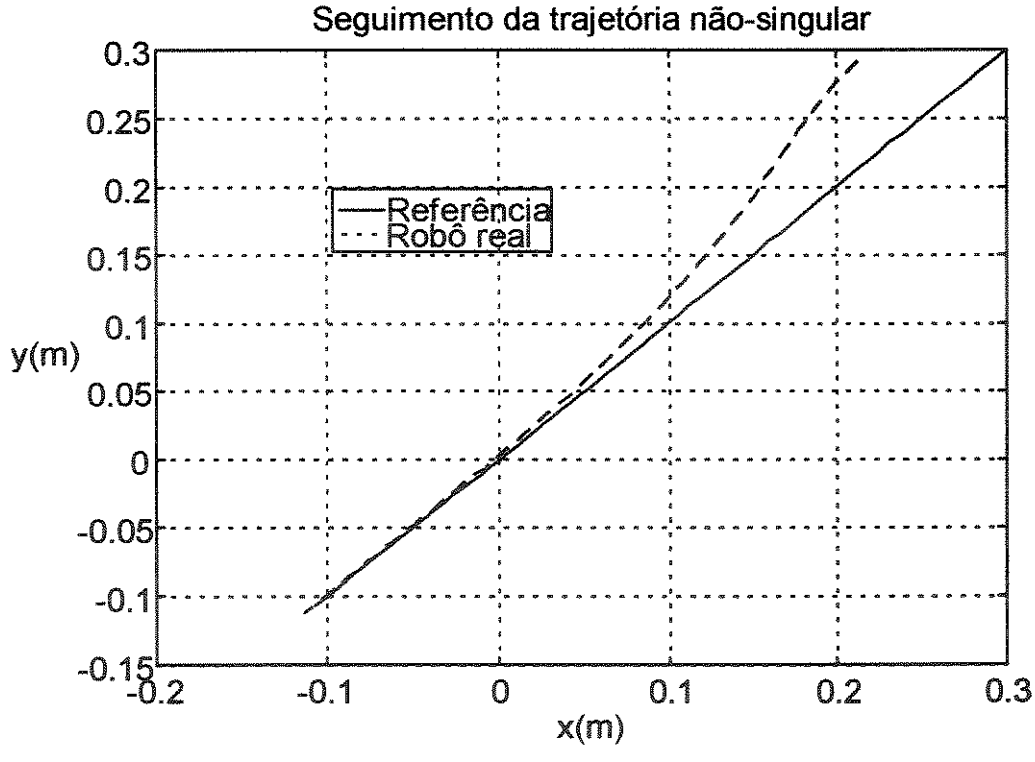
e o robô sai do estado inicial: $x(0) = 0.22m; y(0) = 0.30m$

- O caso onde $\theta(0) = 3\pi/4$.

Os resultados da experimentação são, a seguir, comparados aos da simulação:

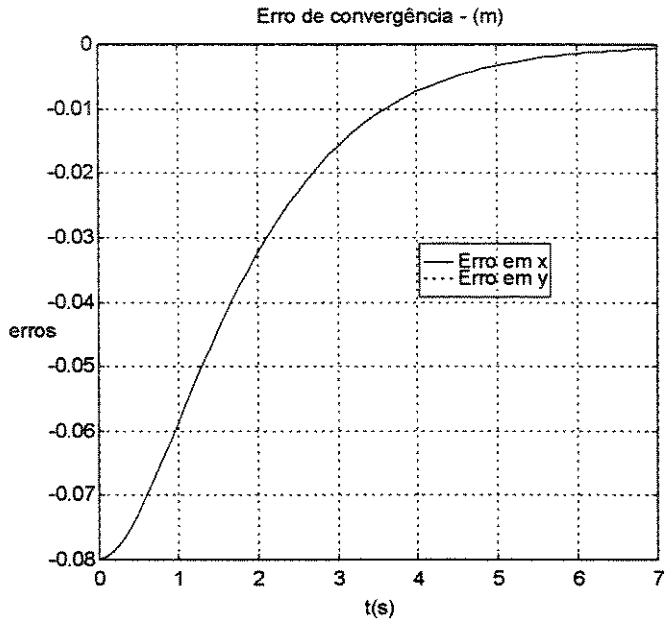


(a)

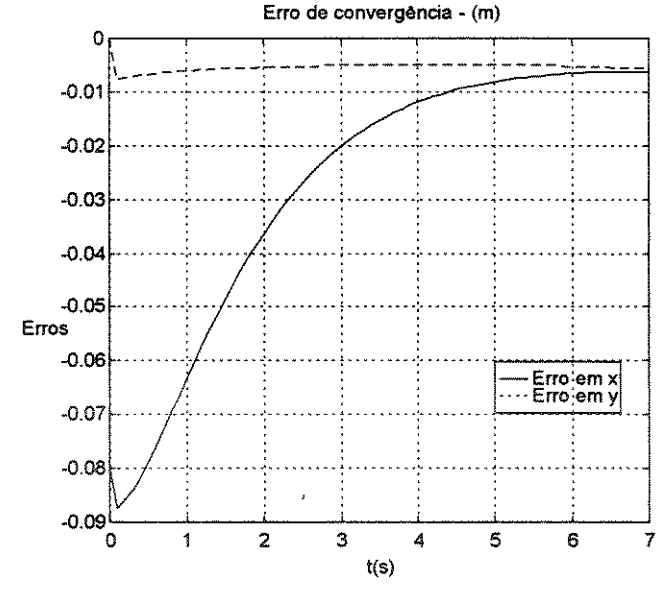


(b)

Figura 5.2: (a) Resultado da Simulação; (b) Resultado Experimental



(a)



(b)

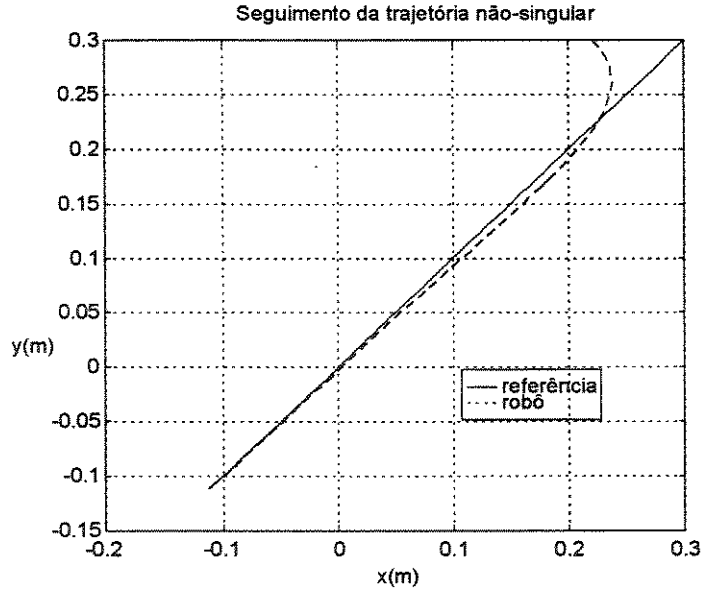
Figura 5.3: a) Erros de convergência na simulação; (b) Erros de convergência no experimento

Observando-se a Figura 5.2 não se percebe claramente a diferença entre o caso simulado, Figura 5.2(a), e o caso experimental, Figura 5.2(b). A diferença entre os casos simulado e experimental é vista na Figura 5.3(b), onde os erros de convergência são maiores. Os erros experimentais podem ser explicados como segue:

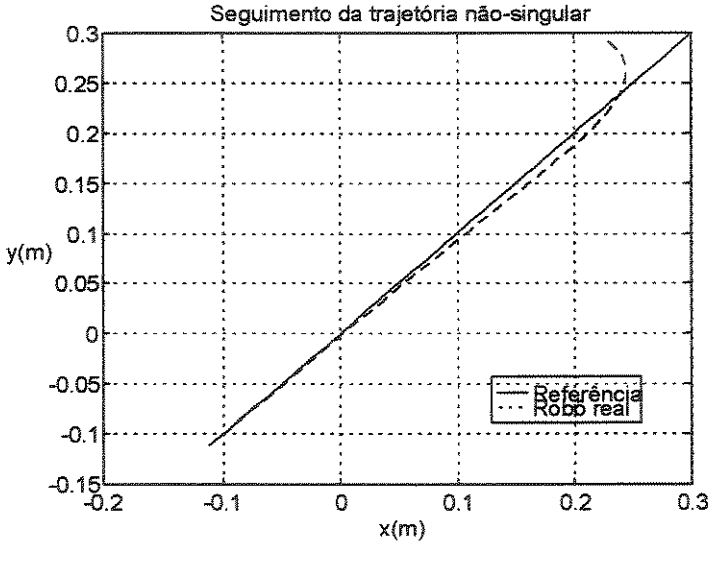
O protocolo de comunicação com o robô estabelece comandos pré-definidos e a comunicação se faz através de comandos e respostas. A unidade de velocidade é o pulso/10ms

que corresponde a 8mm/s e a máxima velocidade é 127pulsos/10ms que corresponde a 1m/s. Vê-se que na unidade do processador do KHEPERA a velocidade toma valores inteiros entre 1 e 127 em módulo, portanto se faz necessário uma transformação no valor das velocidades calculadas pelo controlador para o maior inteiro, isto representa uma fonte de erros constante. Em adição, os estados estão sendo estimados pela integração do modelo cinemático de configuração, o que introduz erros de modelagem no sistema de controle.

- O caso onde $\theta(0) = -3\pi / 4$

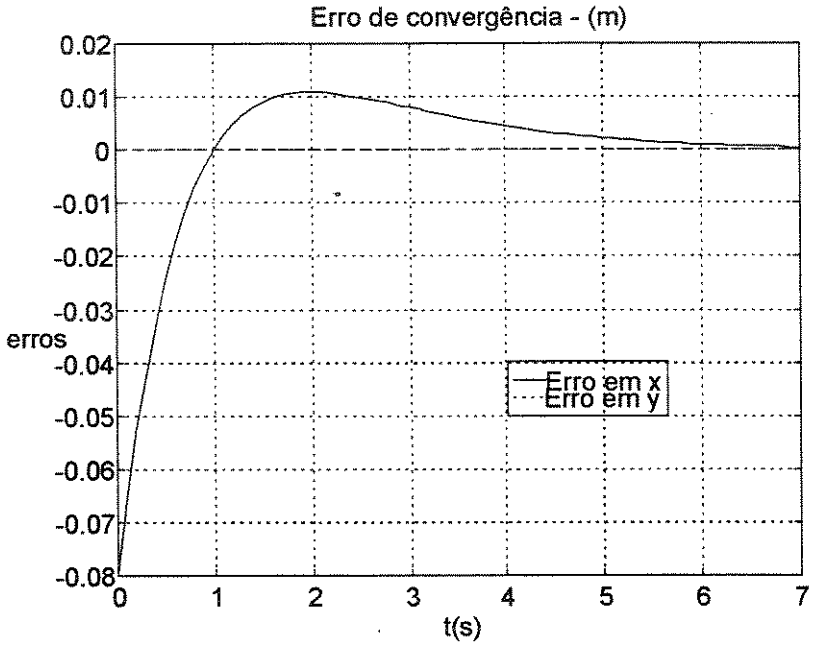


(a)

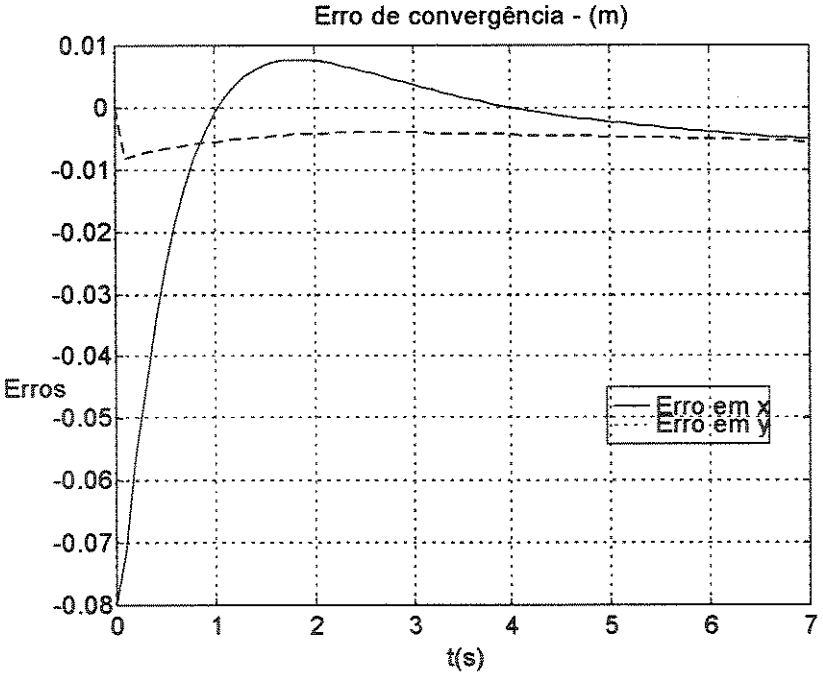


(b)

Figura 5.4: (a) Resultado da simulação;(b) Resultado da experimentação



(a)



(b)

Figura 5.5: (a) Erros na simulação; (b) Erros na experimentação

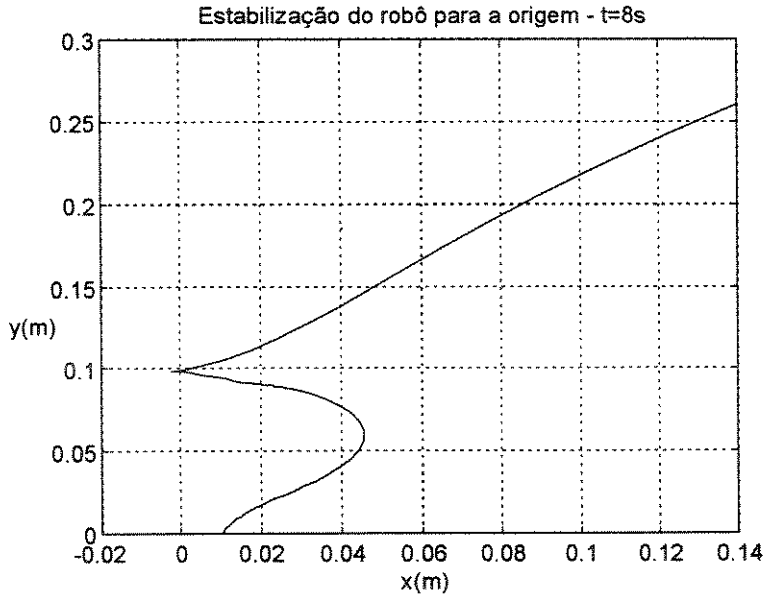
Novamente, os erros são da ordem de *0.05 cm*. A inclusão de um elemento integrador na entrada do controlador poderia anular o erro estacionário que aparece nos resultados do experimento.

5.3.2 - A estabilização do robô para um ponto de repouso.

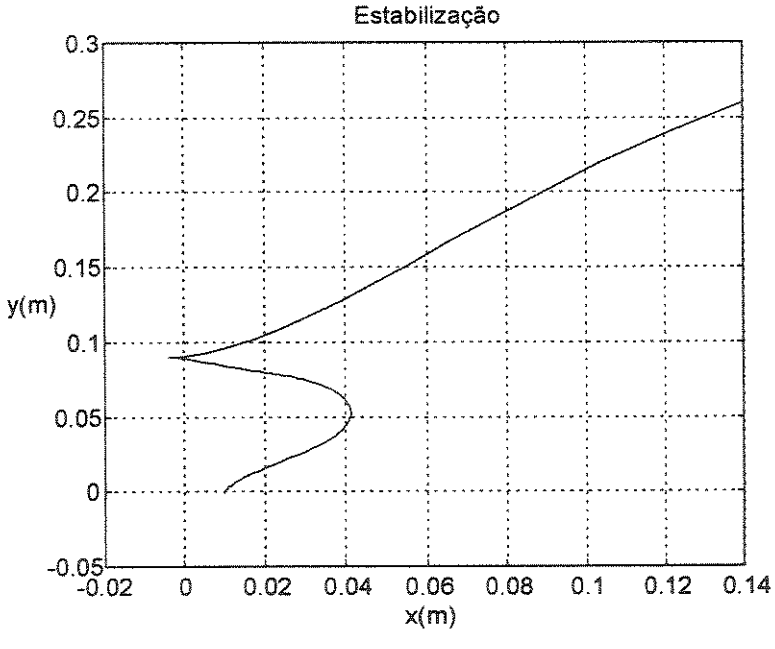
Esse experimento foi realizado de duas formas considerando tempos de experimentação de *8s* e de *14s*, como apresentado no capítulo 4 na simulação.

- Para $t = 8s$

As trajetórias simulada e a do robô real são as seguintes:



(a)

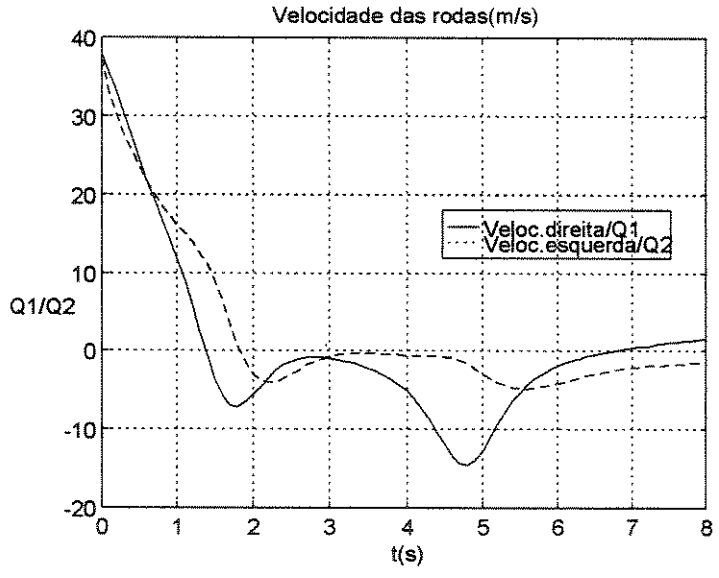


(b)

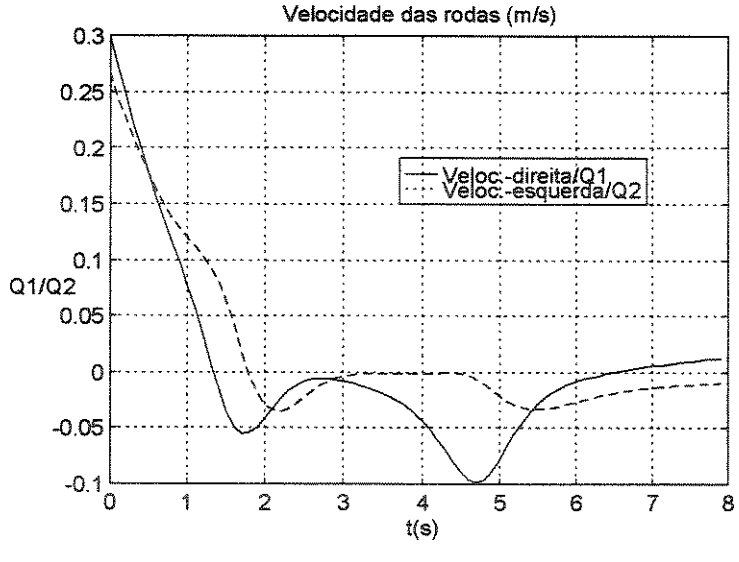
Figura 5.6: (a) Resultado da simulação; (b) Resultado Experimental.

Observa-se nas Figuras 5.7(a) e (b) que o robô real reproduz a trajetória obtida da simulação.

As velocidades das rodas também são comparadas:



(a)



(b)

Figura 5.7: (a) Velocidade das rodas na simulação; (b) Velocidade das rodas na experimentação

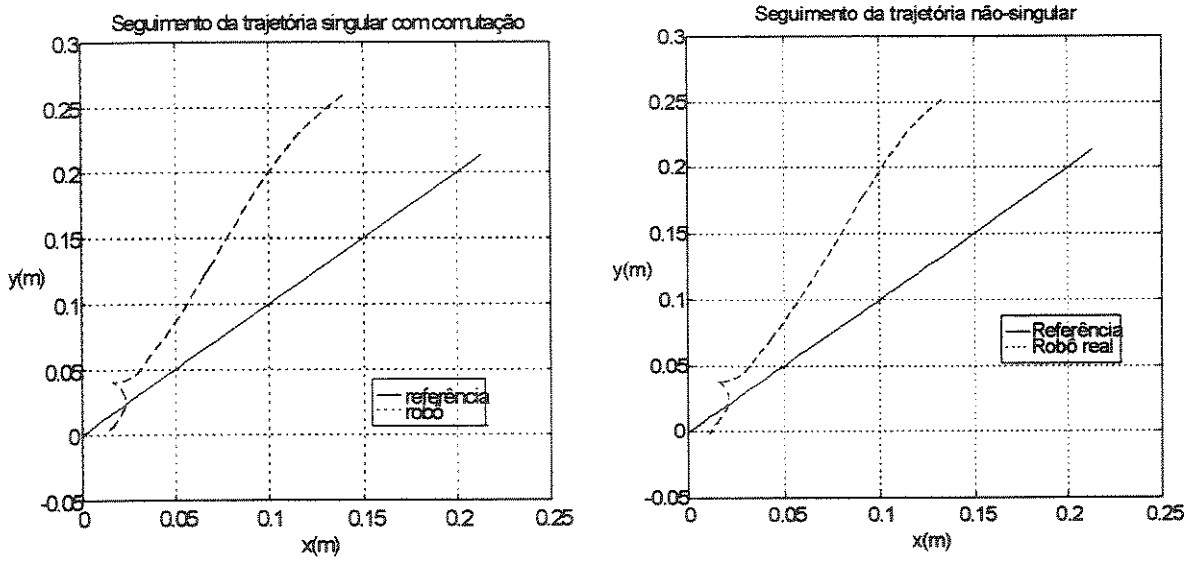
Observa-se que no experimento as velocidades são identicas àquelas da simulação.

- Para $t = 14s$

Não foi possível recolher dados deste caso. O tempo de simulação foi acrescido para verificar uma aproximação maior do robô em direção à origem, isso ocorre na simulação como está mostrado nas Figuras 4.15 e 4.17. Entretanto, com o robô real as velocidades correspondentes a esta aproximação ao alvo são pequenas o bastante para não moverem a inércia do sistema mecânico. Durante a realização do experimento, o robô se deslocou até um certo ponto, que era a posição final para o caso de $t = 8s$, e permaneceu imóvel nessa posição. O Experimento não chegou ao fim e foi cancelado.

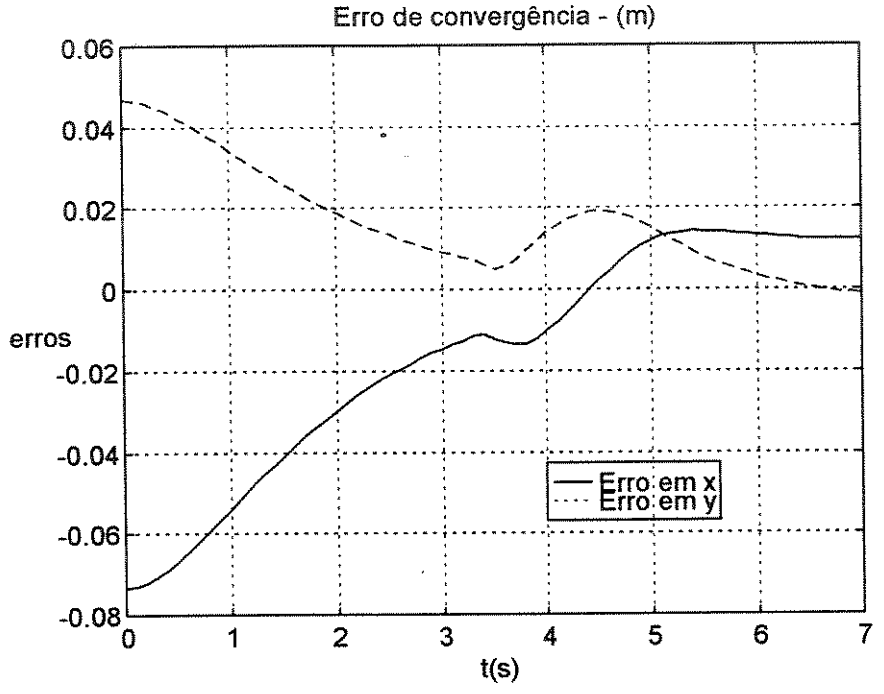
5.3.3 - A estratégia híbrida.

Como nas seções anteriores, os resultados são apresentados fazendo-se comparações entre os casos simulados e os experimentais.

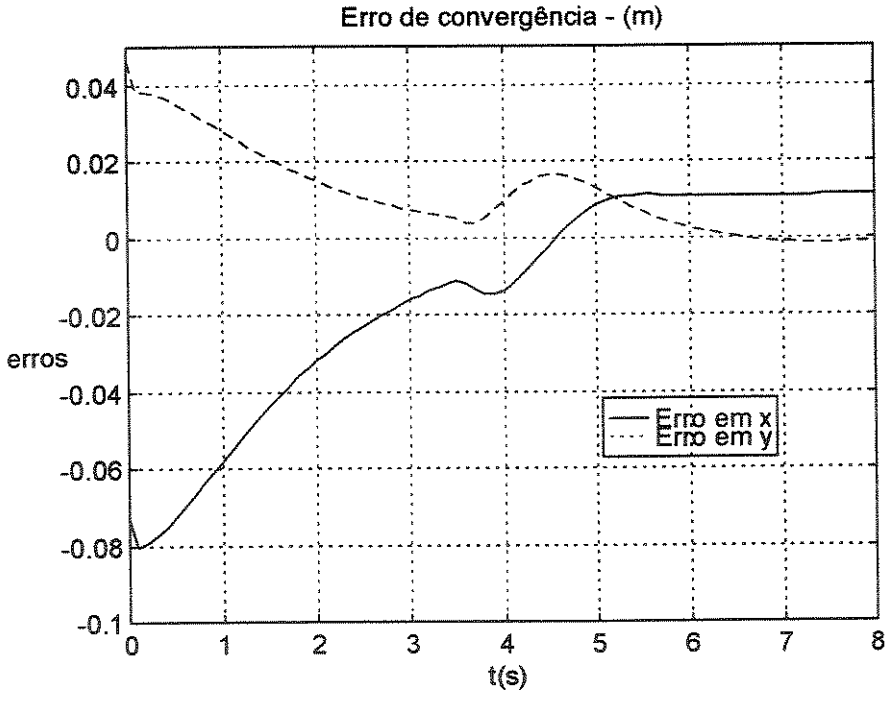


(a) *(b)*

Figura 5.8: (a) Resultado da simulação; (b) Resultado do experimento



(a)



(b)

Figura 5.9: (a) Erros de convergência na simulação; (b) Erros de convergência no experimento

Como no caso da trajetória não-singular, os gráficos da Figura 5.8 que mostram a varredura da trajetória de referência para para a simulação e o experimento, não apresentam diferenças aparentes. Porém os erros de varredura, mostrados na Figura 5.9(b), se apresentam com um valores estacionários, no final do experimento, aproximadamente zero para a ordenada y e, como no caso não-singular, em torno de $1cm$ para a abcissa x.

5.3.4 - Posições representativas

Veja nas Figuras 5.12, 5.13, 5.14 e 5.15 as trajetórias experimentais com algumas posições chaves sendo relacionadas à fotos do robô KHEPERA.

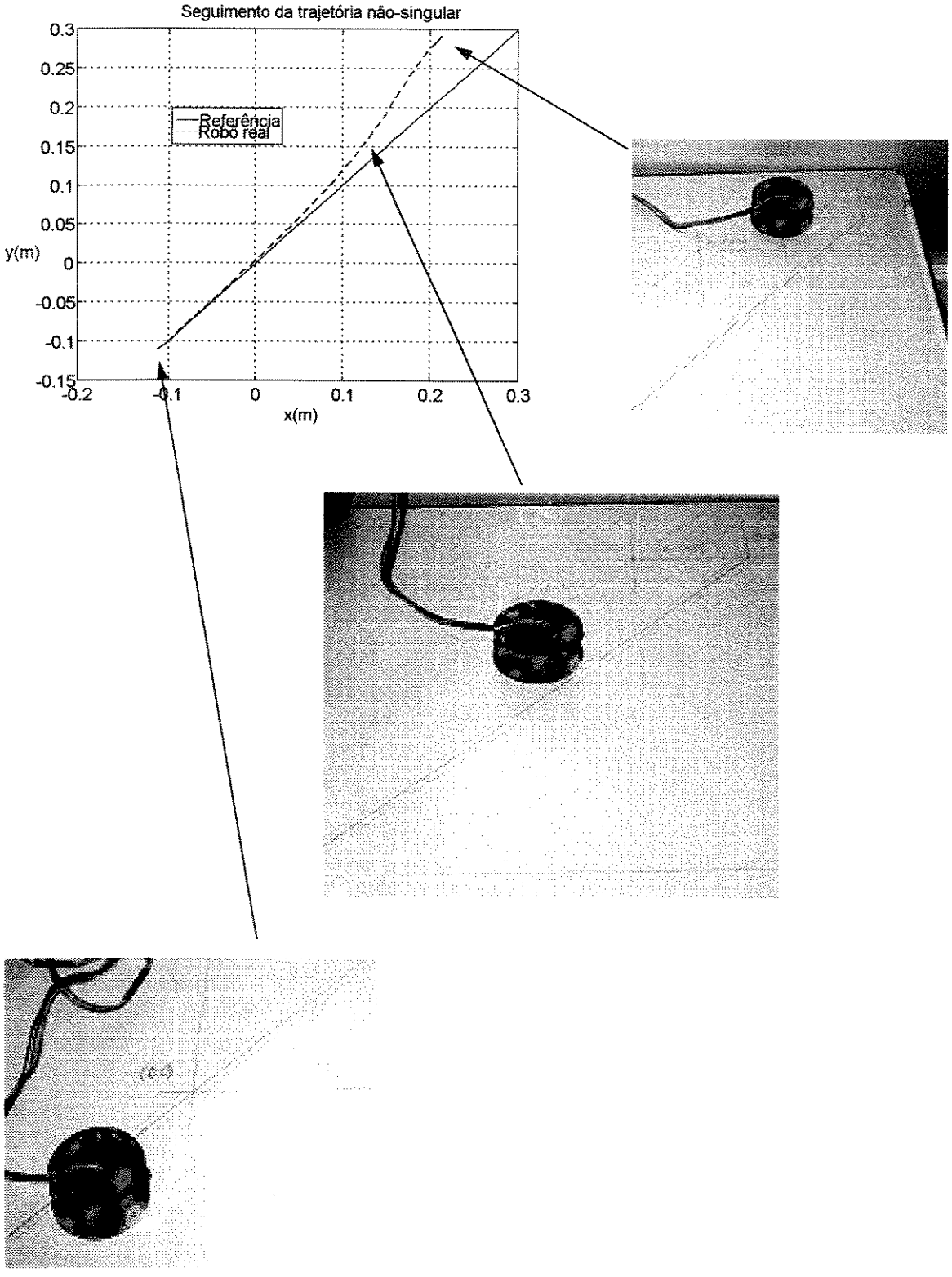


Figura 5.10: Posições da trajetória não singular com $\theta(0) = 3\pi/4$rad.

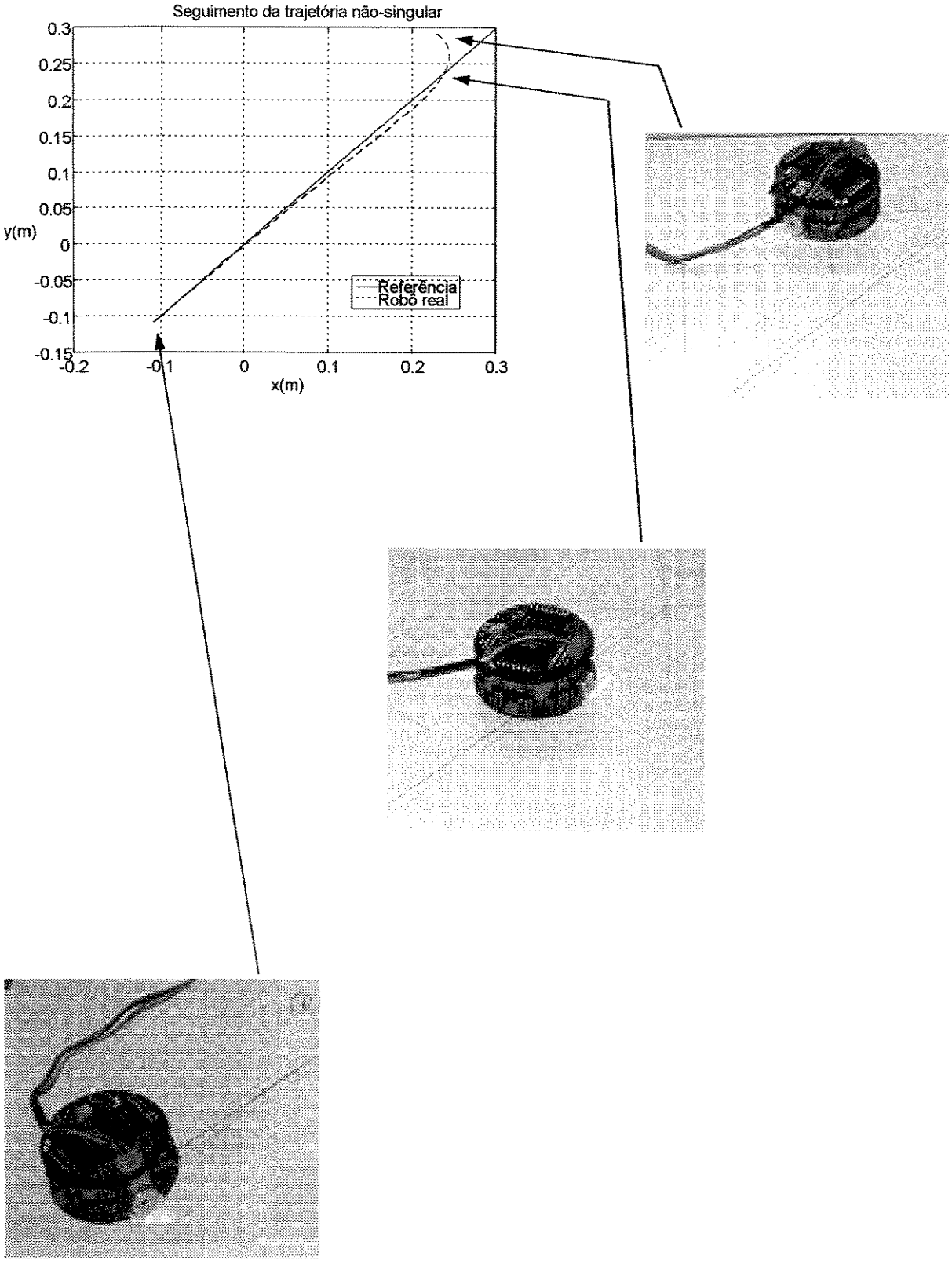


Figura 5.11: Posições da trajetória não singular com $\theta(0) = -3\pi/4$rad.

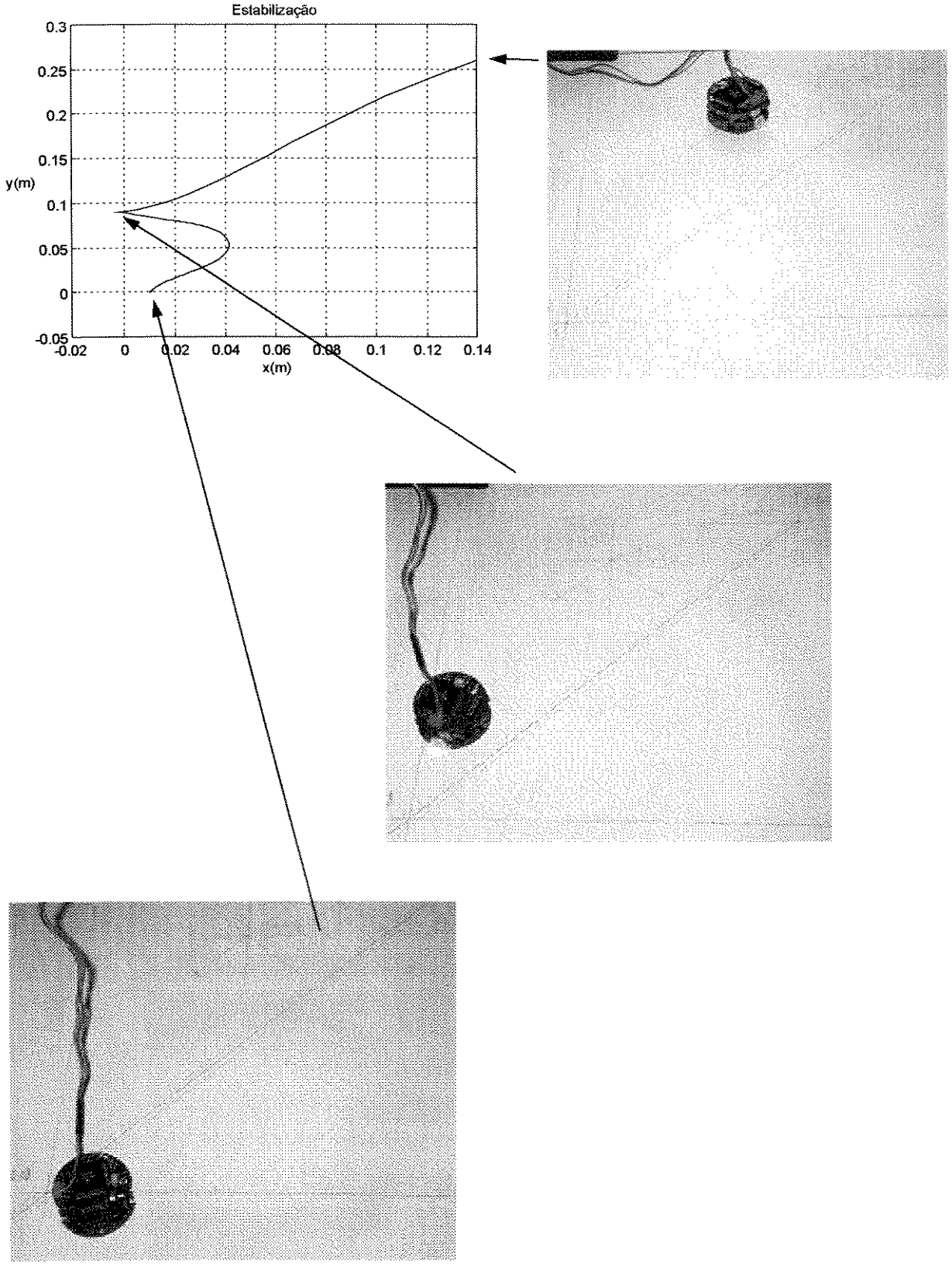


Figura 5.12: Posições na estabilização do robô.

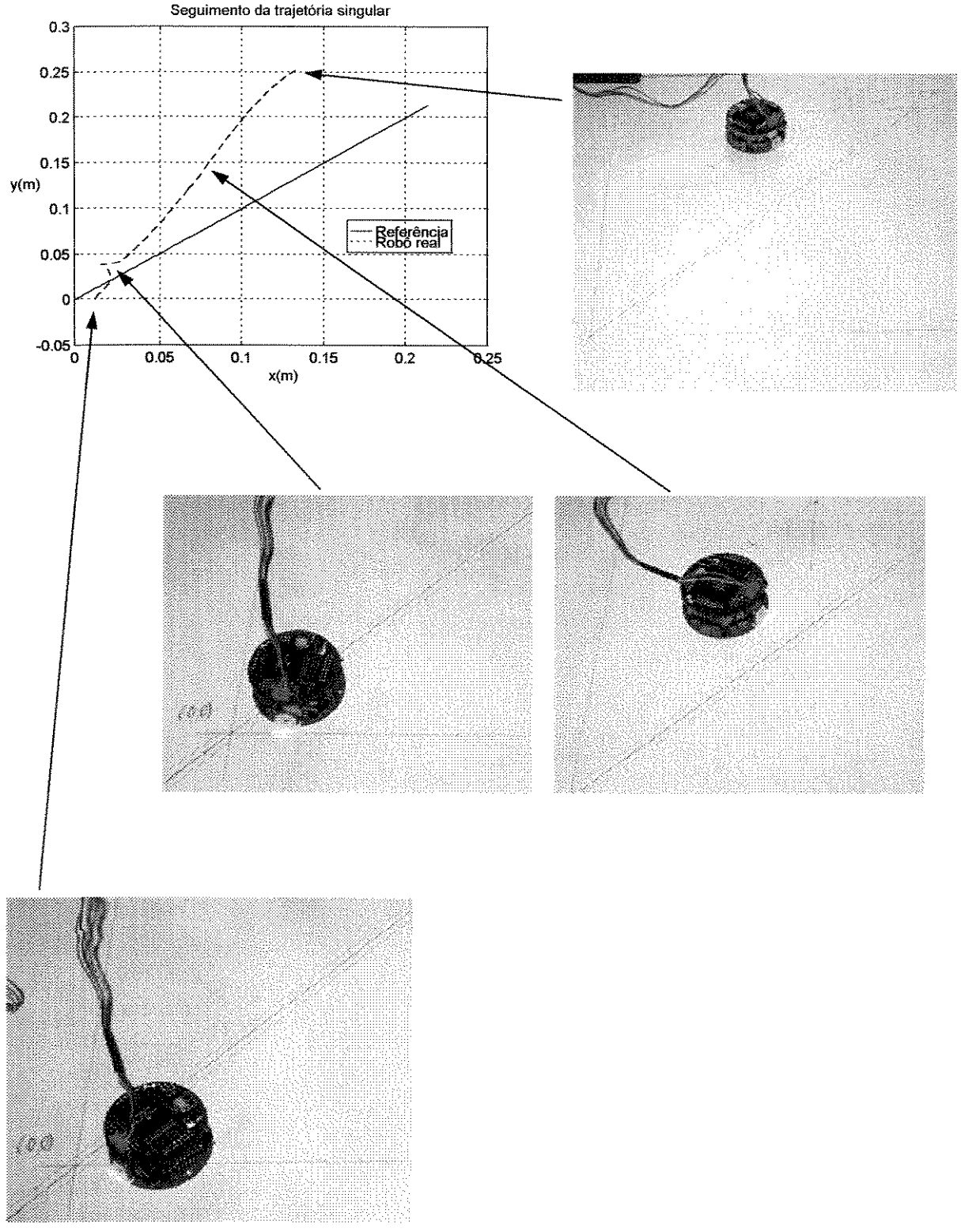


Figura 5.13: Posições durante a aplicação da estratégia híbrida.

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões para Desenvolvimentos Futuros

Nesta dissertação foi apresentada uma metodologia de controle por realimentação de estados para robôs móveis genéricos e aplicada ao caso particular do robô móvel KHEPERA. As técnicas de controle adotadas, consolidadas teoricamente na literatura consultada, foram validadas na prática com a execução do trabalho experimental descrito nesta dissertação.

A tarefa imposta ao robô móvel, identificada no texto como "tarefa completa", que consiste em partir de um determinado ponto e ser estabilizado para um outro ponto final de repouso, seguindo uma trajetória de referência, foi dividida em duas partes para melhor análise. Na primeira parte o robô convergiu assimptoticamente para a trajetória de referência e fez a varredura dessa trajetória até a um ponto próximo do ponto final de repouso. A segunda parte da estratégia consistiu na estabilização dos estados do robô para os estados finais de referência.

Para cada parte dessa tarefa foi proposto e aplicado uma lei de controle que respondeu satisfatoriamente às exigências propostas. Apresentou-se a metodologia de realimentação por linearização completa do modelo de estado do robô. Tal metodologia consistindo na Linearização por realimentação estática e linearização por realimentação dinâmica para a realização a parte de varredura da trajetória de referência. Inicialmente foi aplicado a

realimentação estática, visando a obtenção de um modelo desacoplado e linear para a aplicação dos métodos clássicos de controle. Entretanto, como apresentado no capítulo 3, o robô móvel não pode ser completamente linearizado através da realimentação estática devido as restrições cinemáticas não-holonômicas. A linearização dinâmica e o algoritmo da dinâmica estendida foram aplicados possibilitando a linearização completa do modelo cinemático do robô KHEPERA, resultando em um sistema duplo integrador que tem solução clássica. Foi assim realizado o controle de trajetória.

O robô não pode ser estabilizado para um ponto final de repouso através da aplicação de leis suaves de controle por realimentação dos estados. Na seção 3.2 foram abordadas metodologias de estabilização que contornam este problema. A realimentação suave de estados variante no tempo e a realimentação descontínua. Para a manutenção da lei de controle suave adotou-se como a estratégia de controle a realimentação de estados suave e variante no tempo.

O robô foi estabilizado para o ponto de repouso final e a solução apresentada não contradiz a falta de solução para o problema de estabilização, porque a realimentação nas leis de controle utilizadas não dependem somente dos estados mas também da variável temporal externa t.

Na aplicação das metodologias de controle, abordou-se alguns conceitos envolvendo os sistemas não-holonômicos como a questão da controlabilidade e estabilização. Quando se considera robôs móveis não-holonômicos, isto pode ser feito sob dois aspectos: do ponto de vista de planejamento e trajetória ("Path planning") ou sob o aspecto de controle com realimentação ("Feedback control"). O problema, que ainda é parcialmente conhecido, é fazer o relacionamento entre a propriedade de controlabilidade para sistemas lineares (o qual está essencialmente relacionado ao planejamento de trajetória e, portanto, ao controle em malha aberta) às várias possibilidades de controle por realimentação. O robô móvel, que é o representante dos sistemas não-holonômicos nesse estudo, tem suas variáveis controladas no espaço de configuração, mas não pode ser estabilizado por realimentação de estados, fato que para um sistema holonômico, como no caso dos manipuladores mecânicos, não ocorre, pois, neste caso, a noção de controlabilidade se confunde com a de estabilização como para qualquer sistema holonômico.

O robô móvel não-holonômico tem suas variáveis controladas no espaço de configuração, mesmo que estas sejam em número excedente ao dos atuadores. A conseqüência desta possibilidade, que não existe para o caso de manipuladores robóticos holonômicos, é que as estratégias de controle desenvolvidas para os robôs manipuladores se aplicam parcialmente ao caso dos robôs móveis. Estes fatos mostram a necessidade de estudos complementares, e isto foi uma das justificativas que motivaram esta dissertação.

Os trabalhos experimentais foram realizados com base nas simulações computacionais, a estratégia de controle foi experimentada em três situações: Varredura de trajetória não-singular, estabilização para um ponto de repouso e varredura da trajetória singular. Para cada uma dessas situações foram mostrados resultados gráficos e comparados com os resultados de simulação. Observou-se a robustez da estratégia proposta visto que os resultados dos testes em tempo real foram idênticos aqueles da simulação, com pequenas diferenças devido a imprecisão no modelo considerado.

Testes experimentais utilizando controladores com linearização por realimentação de estados não são frequêntes na literatura consultada. E isto estabelece a importância dos resultados experimentais obtidos nesta dissertação.

Em adição a estas questões, pode-se levantar alguns pontos que podem complementar os resultados obtidos e apresentados nesta dissertação:

- A extensão do estudo apresentado de leis para o controle de velocidade, controle de alto-nível, para as leis de controle de força, controle de baixo-nível, nas quais as variáveis de controle não são as velocidades angulares das rodas mas o torque produzido pelos atuadores. Isto implica na consideração da dinâmica do sistema mecânico. Esta passagem do modelo cinemático para o modelo dinâmico apresenta um modelo do movimento do robô mais preciso, e leva em consideração fenômenos de natureza mecânica que não podem ser modelados através do modelo cinemático.

- A incorporação de um procedimento de transição suave entre as técnicas de controle na estratégia híbrida, de modo a se evitar a perturbação na velocidade do robô no momento da comutação.

Referências Bibliográficas

ARANDA, E. -B., Infinitesimal Brunovsky form for nonlinear systems with application to dynamic linearization. Report/INRIA n. 2313, December 1994.

BECKER, M., *Estudo sobre robôs de locomoção: Formas construtivas, dirigibilidade e controle.* Campinas: Departameto de Projeto Mecânico, Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas-SP, 137 p, Dissertação(Mestrado).

BLOCH, A. M., McCLAMROCH, N. H., Contollability and stabilizability properties of a nonholonomic control system. In: 29th Conf. on decision and control. Proceeding...., December 1990.

BLOCH, A. M., Stabilizability of a nonholonomic control system. *Automatica*, v.28, n.2, pp 431-435,1992.

BLOCH, A. M., REYHANOGLU, M., McCLAMROCH, N. H, Control and stabilization of nonholonomic dynamic system. *IEEE Trans. Automatic control*, v.37, n.11, pp 1746-1757,1992.

BLOCH, A. M., McCLAMROCH, N. H., Contol of mechanical systems with classical nonholonomic constraints. In: 28th IEEE Conf. on Decision and Control, Tampa. Proceeding...,pp. 201-205, 1989.

BROCKETT; R. W. at al, Asymptotic stability and feedback stabilization, *Differential geometric control theory*. Boston: Birkhauser. pp. 181-191, 1983.

BUENO, S. S., Comunicação pessoal, 1998.

CAMPION, G., et al. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots, *IEEE Trans. robotics and automation*, v.12, n.1, pp. 47-62, 1996.

CANUDAS, C., SϕRDARLEN, O. J., Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints. In: 30th IEEE Conf. on Decision and Control, Brighton, UK. Proceeding..., pp. 692-697, 1991.

CORON, J. -M., Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift. *Math. Control Signals Systems*, v.5, pp. 295-312, 1992.

COZMAN, F. G., *Controlador de trajetória para o robô móvel Ariel - Solução de controle ótimo.* São Paulo: Engenharia elétrica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1991, 180 p. Dissertação(Mestrado).

D'ANDREA-NOVEL, B., Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization, *The int. Journal of robotics research*,v.14, n.6, pp.543-559, 1995.

D'ANDREA-NOVEL, B., Modelling and control of non holonomic wheeled mobile robots, In: International Conference on robotics and automation, Sacramento , California. Proceeding..., pp 1130-1135, April 1991.

D'ANDREA-NOVEL, B., CAMPION, G., BASTIN, G., Control of wheeled mobile robots not satisfying ideal velocity constraints: a singular perturbation approach. Technical Report 94.25/ Belgian Programme on Interuniversity poles.

ELFES, A. Personal communications, 1997.

GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*, MA: Addison-Wesley, 2nd ed. Reading, 1980.

ISIDORI, A. *Non Linear Control Systems*. New York: Springer-Verlag, 2nd Ed., 1989.

KEPERA USER MANUAL. Version 4.06. 1995.

LASALLE, J. P. Stability teory for ordinary differential equations. *Jornal of differential equations*, v.4, pp. 57-65, 1968.

LANCZOS, C. *The Variational Principles of Mechanics*. Toronto: University of Toronto Press, 1970, 418p.

LAUMOND, J.-P., RISLER, J.-J., Nonholonomic Systems: Controllability and complexity. *Theoretical Computer Science*,v.157, pp. 101-114, 1996.

MARINO, R., On the largest feedback linearizable subsystem, *Systems & Control Letters*, v.6, pp. 345-351, 1986.

M'CLOSEY, R. T., MURRAY, R. M., Nonholonomic systems and exponential convergence: Some analysis tools. In: 32nd IEEE Conf. on Decision and Cont., San Antonio, Texas. Proceeding..., December 1993.

MORIN, P., SAMSON, C.,Time-varying exponential stabilization of a rigid spacecraft with two controls. Report/INRIA n. 2493, February 1995.

MORIN, P., SAMSON, C.,Time-varying feedback stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls. Report/INRIA n. 2275, Mai 1994.

MORIN, P., SAMSON, C., Control of Nonlinear chained systems. From the Routh-Hurwitz stability criterion to time-varying exponetial stabilizers. Report/INRIA n. 3126, Mars 1997.

MORIN, P., SAMSON, C.,Application of backstepping techniques to the time-varying exponential stabilization of chained form systems. Report/INRIA n. 2792, February 1996.

MUIR P. F., *Modeling and control of wheeled mobile robots.* Pittsburgh, PA, USA: Department of Electrical and Computer Engineering and Robotics Institute, Carnegie Mellon University, 1988. 335 p. These(Ph.D.)

MUIR P. F., NEUMAN, C. P.,. Kinematic modeling for feedback control of an omnidirectional mobile robot, *Proc. IEEE Conf. on robotics and automation*, Raleigh, NC, pp. 1172-1178, 1987.

MURRAY, R. M., SASTRY, S. S. Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids. *IEEE Trans. on Automatic control*, v.38, n.5 , May 1993

MURRAY, R. M., WALSH, G. Stabilization and tracking for nonholonomic control systems using time-varying state feedback. In: Nonlinear Control Syst. Design Symp., Bordeaux, France. Proceeding.... pp. 182-187, june 1992.

NIJMEIJER, H., VAN DER SCHAFT, A. J. *Nonlinear Dynamic Control Systems*, New York: Springer-Verlag, 1990.

OGATA, K., *Discret-Time Control Systems*, New Jersey: Printice-Hall, 1995.

PISSARD, R.-G., *Conception et Commande par Asservissement Visuel d'un Robot Mobile.* Paris: L'Ecole des Mines de Paris, 1993, 149 p. Tese(Ph.D.).

POMET, J. -B., Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift, *Systems & Control Letters*, v.18, pp. 147-158, 1992.

POMET, J. -B. et al, A hybrid strategy for the feedback stabilization of nonholonomic mobile robots, *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Nice, France, 1992.

POMET, J. -B., SAMSON, C.,Time-varying stabilization of nonholonomic systems in power form , Report/INRIA n. 2126, 1993.

POMET, J. -B., SAMSON, C.,On Dynamic Feedback linearization of four-dimensional affine control systems with two inputs, Report/INRIA n. 2751, December 1995.

SAMSON, C., Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots ,*IEEE Trans. Automatic control*, v.40, n.1, pp. 64-77, 1995.

SAMSON, C., AIT-ABDERRAHIM, K., Mobile robot control part 1: feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space, Report/INRIA, ICARE n.1288, 1990.

SAMSON, C. Path following and time-varying feedback stabilization of a wheeled mobile robot, In: ICARV'92, Singapore. Proceeding..., September, 1992.

SAMSON, C. Time-varying feedback stabilization of Car-like wheeled mobile robots, The Internation Jornal of Robotics Research, v.12, n.1, February 1993.

SAMSON, C. Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart. In: Workshop in Adaptive and Nonlinear control, Issues in Robotics, Grenoble, France, 1990. Proceedings in Advanced Robot Control, v.162, Springer-Verlag, 1991

SAMSON, C., AIT-ABDERRAHIM, K., Feedback stabilization of a non holonomic wheeled mobile robot. In: IEEE/RSJ Int. Workshop on Intelligent Robots and Syst., Osaka, Japan. Proceeding..., pp. 1242-1247, 1991.

SHAHIAN, B., HASSUL, M., *Control Systems Design Using MATLAB*, New Jersey: Printice-Hall, 1993.

SICILIANO, B., VILLANI, L., A simple control estrategy for a robot cart,In: American Control Conference, Seattle, Washington. Proceeding..., june 1995.

SLOTINE, J. J., LI, W., *Applied nonlinear control*, Englewood Cliffs, NF: Prentice Hall 1991.

SONTAG, E. D., SUSSMANN,H. J., Remarks on continuous feedback. *IEEE Conf. on Decision and Control* Albuquerque, 1980.

SϕRDALEN, O. J., Exponential stabilization of nonholonomic chained systems. *IEEE Trans. on automatic control*, 40(1), pp. 35-49, 1995.

THUILOT, B. et al. , Modeling and feedback control of mobile robots equipped with several steering wheels, *IEEE Trans. robotics and automation*, v.12, n.3, pp. 375-390, 1996.

VICTORINO, A. C., KURKA, P. R. G., NOBREGA, E. G. O., Trajectory Control of NonHolonomic Wheeled Mobile Robot, to appear in 1998 Canadian Society for Mechanical Engineering Forum, Proceedings..., Ontario, Toronto, Canada, May, 1998.

VICTORINO, A. C., KURKA, P. R. G., NOBREGA, E. G. O., Trajectory control and time-varying stabilization of nonholonomic wheeled mobile robot: A hybrid strategy, to appear in The 6th UK Mechatronics Forum International Conference, Proceedings..., Mount Billingen, Skövde, Sweden, September,1998.

VICTORINO, A. C., KURKA, P. R. G., NOBREGA, E. G. O., Controle de Trajetória de Robô Móvel Não-Holonômico com Realimentação Variante no Tempo, submetido ao XII Congresso Brasileiro de Automática, Anais..., Uberlândia, MG, Brasil, Setembro de 1998.

VICTORINO, A. C., NOBREGA, E. G. O., KURKA, P. R. G., Trajectory Control and Stabilization of NonHolonomic Wheeled Mobile Robot: An experimental case, to appear in V Congresso de Engenharia Mecanica Norte-Nordeste, Proceedings..., Fortaleza, Ceará, Brasil, October,1998.

WALSH, G., et al, Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints. *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 39, n.1, January 1994.