

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR ALBERTO COSTA NOGUEIRA JR.

_____ E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 20 / 02 / 98.



ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Desenvolvimento de um elemento finito do
tipo hierárquico para análise estática de
placas e cascas a partir do elemento
superparamétrico quadrilateral linear**

Autor: **Alberto Costa Nogueira Jr.**
Orientador: **Loir Afonso Moreira**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

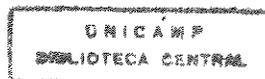
**Desenvolvimento de um elemento finito do
tipo hierárquico para análise estática de
placas e cascas a partir do elemento
superparamétrico quadrilateral linear**

Autor: **Alberto Costa Nogueira Jr.**
Orientador: **Loir Afonso Moreira**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1998
S.P. - Brasil



6592185

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

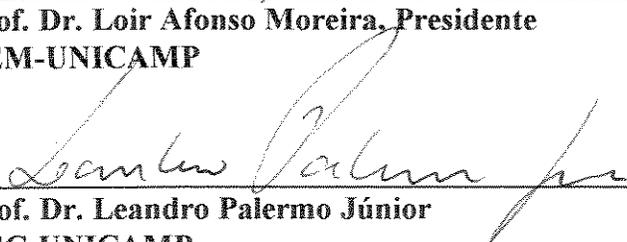
**Desenvolvimento de um elemento finito do
tipo hierárquico para análise estática de
placas e cascas a partir do elemento
superparamétrico quadrilateral linear**

Autor: Alberto Costa Nogueira Jr.

Orientador: Loir Afonso Moreira



Prof. Dr. Loir Afonso Moreira, Presidente
FEM-UNICAMP



Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior
FEC-UNICAMP



Prof. Dr. Fernando Iguti
FEM-UNICAMP

Campinas, 20 de fevereiro de 1998

Dedicatória:

Dedico este trabalho à minha querida esposa e à promessa de um dia sermos três.

Agradecimentos

Este trabalho não teria alcançado seu fim sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha humilde homenagem:

Aos meus pais *Alberto Costa Nogueira* e *Norma Aparecida Zumpano Nogueira* pela oportunidade que me deram de chegar onde cheguei e ao meu sempre companheiro-irmão *Jeferson Nogueira* pelo desprendido incentivo.

Ao meu orientador e amigo *Loir Afonso Moreira* pela abertura, espontaneidade e espírito democrático que muito dignificaram o nosso contato profissional e pessoal.

À minha tão adorável esposa *Natália Bromberg* pela incansável dedicação e indispensável colaboração na confecção deste trabalho.

Aos amigos *Renato Fernandes Cantão* e *Carlos Alberto de Almeida Vilela* pelo valioso companheirismo e pela inestimável contribuição na implementação de algoritmos e revisão de programas.

Ao Prof. *Fernando Iguti* pela sabedoria e presença de espírito tão gentilmente a mim dispensadas.

Aos Profs. *João Frederico C. A. Meyer* e *Petrônio Pulino* do Instituto de Matemática da UNICAMP pelas inserções oportunas, encorajamento e amizade.

Aos Profs. *Marco Lúcio Bittencourt* (DPM) e *José Luís Boldrini* (IMECC) por me terem revelado, através de irrepreensível competência e seriedade, novos horizontes dentro dos domínios da ciência.

À FAPESP pela credibilidade que me foi conferida na execução deste trabalho e pelo imprescindível apoio financeiro.

À Sra. *Sidnéa Aparecida Jorge* pelo esforço e empenho na revisão deste texto.

Aos companheiros *Roberto Funes Abrahão* e *Amarildo Tabone Paschoalini* pelo auxílio quando da elaboração deste trabalho.

Finalmente, a todos aqueles que sempre me apoiaram e acreditaram na minha capacidade.

O homem erudito é um descobridor de fatos que já existem — mas o homem sábio é um criador de valores que não existem e que ele os faz existir.

Albert Einstein

Por variados caminhos e de várias maneiras cheguei à minha verdade; não foi somente por uma escada que subi ao alto, de onde meus olhos vagueiam na distância que é minha... Experimentar e interrogar — consistiu nisso todo o meu caminhar; e, na verdade, deve-se aprender, também, a descobrir os próprios caminhos! Mas esse — é o meu gosto — Não um gosto melhor ou pior — mas o meu, do qual não mais me envergonho nem faço segredo. Este, agora, é o meu caminho; onde está o vosso? — assim respondia eu aos que me perguntavam “o caminho”. Porque o caminho — não existe! Assim falou Zarathustra.

Friedrich Wilhelm Nietzsche

Sumário

1 Introdução.....	1
1.1 O método de elementos finitos.....	1
1.2 A análise de placas e cascas pelo método de elementos finitos.....	2
1.3 Objetivo.....	6
2 Definição da geometria do elemento.....	7
2.1 Introdução.....	7
2.2 Determinação dos pontos situados sobre a superfície média do elemento.....	8
2.3 Determinação dos pontos situados fora a superfície média do elemento.....	11
2.4 Definição da geometria do elemento.....	15
3 Campo de deslocamento para o caso do elemento superparamétrico.....	18
3.1 Introdução.....	18
3.2 Definição dos sistemas de referência locais associados ao ponto O e ao nó <i>i</i>	18
3.3 Determinação do campo de deslocamento para o caso do elemento superparamétrico.....	23
4 Estado de deformação específica no caso do elemento superparamétrico.....	29
4.1 Introdução.....	29
4.2 Estado de deformação específica com relação ao sistema local de referência.....	33

5 Formulação das características do elemento superparamétrico.....	47
5.1 Introdução.....	47
5.2 Formulação das características do elemento superparamétrico.....	50
5.3 Determinação da matriz de rigidez do elemento superparamétrico.....	55
5.3.1 Determinação da submatriz: $[K_{ij}]$	56
5.4 Determinação do vetor de carga do elemento superparamétrico: $\{f^e\}$	68
5.4.1 Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento: $\{f_q^e\}$	68
5.4.1.1 Determinação da submatriz: $\{f_{qi}\}$	71
5.4.2 Determinação do vetor de carga correspondente à ação das forças de corpo: $\{f_b^e\}$	72
5.4.2.1 Determinação da submatriz: $\{f_{bi}\}$	73
5.4.3 Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces laterais do elemento: $\{f_l^e\}$	74
5.4.3.1 Determinação do vetor de carga associado ao lado 1.....	77
5.4.3.1.1 Determinação da submatriz: $\{f_{l1i}\}$	78
5.4.3.2 Determinação do vetor de carga associado ao lado 2.....	80
5.4.3.2.1 Determinação da submatriz: $\{f_{l2i}\}$	80
5.4.3.3 Determinação do vetor de carga associado ao lado 3.....	81
5.4.3.3.1 Determinação da submatriz: $\{f_{l3i}\}$	81
5.4.3.4 Determinação do vetor de carga associado ao lado 4.....	82

5.4.3.4.1 Determinação da submatriz: $\{f_{i4}\}$	82
5.4.4 Determinação do vetor de carga do elemento superparamétrico quando todos os carregamentos atuam simultaneamente.....	83
6 Desenvolvimento do elemento finito do tipo hierárquico para análise de placas e cascas.....	84
6.1 Introdução.....	84
6.2 Determinação do campo de deslocamento do elemento paramétrico do tipo hierárquico.....	85
6.3 Determinação do estado de deformação específica do elemento paramétrico do tipo hierárquico.....	97
6.4 Determinação da matriz de rigidez do elemento paramétrico do tipo hierárquico.....	104
6.4.1 Determinação da submatriz: $[K_{ij}]$	105
6.4.2 Determinação da submatriz: $[K_{i,mn}]$	105
6.4.3 Determinação da submatriz: $[K_{im}]$	112
6.4.4 Determinação da submatriz: $[K_{kj,mn}]$	118
6.4.5 Determinação da submatriz: $[K_{kj,m}]$	123
6.4.6 Determinação da submatriz: $[K_{km}]$	128
6.4.7 Determinação da submatriz: $[K_{kj,l}]$	133
6.4.8 Determinação da submatriz: $[K_{kl}]$	133
6.4.9 Determinação da submatriz $[K_{k,mn}]$	134

6.5 Determinação do vetor de carga do elemento paramétrico do tipo hierárquico.....	134
6.5.1 Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento hierárquico: $\{f_q^e\}$	134
6.5.1.1 Determinação da submatriz: $\{f_{qi}\}$	135
6.5.1.2 Determinação da submatriz: $\{f_{qkj}\}$	136
6.5.1.3 Determinação da submatriz: $\{f_{qk}\}$	137
6.5.2 Determinação do vetor de carga correspondente à ação das forças de corpo: $\{f_b^e\}$	138
6.5.2.1 Determinação da submatriz: $\{f_{bi}\}$	139
6.5.2.2 Determinação da submatriz: $\{f_{bjk}\}$	140
6.5.2.3 Determinação da submatriz: $\{f_{bk}\}$	141
6.5.3 Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces laterais do elemento hierárquico: $\{f_l^e\}$	142
6.5.3.1 Determinação do vetor de carga associado ao lado 1.....	145
6.5.3.1.1 Determinação da submatriz: $\{f_l1_i\}$	145
6.5.3.1.2 Determinação da submatriz: $\{f_l1_{kj}\}$	146
6.5.3.1.3 Determinação da submatriz: $\{f_l1_k\}$	147
6.5.3.2 Determinação do vetor de carga associado ao lado 2.....	148
6.5.3.2.1 Determinação da submatriz: $\{f_l2_i\}$	148
6.5.3.2.2 Determinação da submatriz: $\{f_l2_{kj}\}$	148
6.5.3.2.3 Determinação da submatriz: $\{f_l2_k\}$	149

6.5.3.3 Determinação do vetor de carga associado ao lado 3.....	149
6.5.3.3.1 Determinação da submatriz: $\{f_{i3}\}$	149
6.5.3.3.2 Determinação da submatriz: $\{f_{i3_{ij}}\}$	150
6.5.3.3.3 Determinação da submatriz: $\{f_{i3_k}\}$	150
6.5.3.4 Determinação do vetor de carga associado ao lado 4.....	151
6.5.3.4.1 Determinação da submatriz: $\{f_{i4}\}$	151
6.5.3.4.2 Determinação da submatriz: $\{f_{i4_{ij}}\}$	151
6.5.3.4.3 Determinação da submatriz: $\{f_{i4_k}\}$	152
6.5.4 Determinação do vetor de carga do elemento hierárquico quando todos os carregamentos atuam simultaneamente.....	152
7 Formulação das características do sistema.....	153
7.1 Introdução.....	153
7.2 Determinação da matriz de rigidez global e do vetor de carga global.....	155
7.3 Resolução do sistema estrutural em análise.....	158
7.3.1 Determinação do sistema de equações lineares.....	158
7.3.2 Resolução do sistema de equações lineares.....	161
7.3.3 Reanálise do sistema estrutural.....	164
8 Resultados e discussões.....	166
8.1 Introdução.....	166
8.2 Placa submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano.....	167

8.2.1 Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados.....	167
8.2.2 Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados.....	171
8.2.3 Placa quadrada engastada em seus lados.....	173
8.2.4 Placa retangular engastada em seus lados.....	175
8.2.5 Placa quadrada simplesmente apoiada em seus cantos.....	177
8.3 Placa submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano.....	179
8.3.1 Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados.....	179
8.3.2 Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados.....	181
8.3.3 Placa quadrada engastada em seus lados.....	183
8.3.4 Placa retangular engastada em seus lados.....	185
8.4 Placa submetida à ação de uma carga distribuída de perfil senoidal, perpendicular a seu plano.....	187
8.4.1 Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados.....	188
8.4.2 Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados.....	190
8.5 Vigas retas em balanço.....	192
8.5.1 Viga submetida à flexão pura.....	193
8.5.2 Viga submetida à flexão no plano.....	194
8.5.3 Viga submetida à flexão fora do plano.....	195
8.6 Cascas.....	197
8.6.1 Casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio.....	197

8.6.2 Casca cilíndrica com extremidades livres, submetida a duas cargas concentradas de sentidos opostos (“Pinched cylinder”).....	199
8.7 Estudo de casos com malha distorcida.....	201
8.7.1 Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a ação de uma carga uniformemente distribuída perpendicular a seu plano.....	202
8.7.1.1 Interpolação da geometria do elemento proposto a partir das funções de forma das famílias Lagrangiana e Serendipity.....	203
8.7.2 Casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio.....	204
8.7.2.1 Interpolação da geometria do elemento proposto a partir das funções de forma da família Lagrangiana.....	205
8.7.2.2 Interpolação da geometria do elemento proposto a partir das funções de forma da família Serendipity.....	206
9 Conclusões.....	209
Referências Bibliográficas.....	212
Apêndice A.....	216
Apêndice B.....	225
Apêndice C.....	230

Lista de figuras

1.1 (a) Elemento sólido tridimensional; (b) elemento de casca obtido a partir da degeneração do elemento sólido tridimensional.....	4
1.2 Elemento de casca quadrilateral quadrático da família Serendipity.....	6
2.1 Elemento quadrilateral quadrático e os nós associados a ele: (a) família Serendipity; (b) família Lagrangiana.....	7
2.2 Vetor \vec{r} que define a posição de qualquer ponto O da superfície média do elemento.....	10
2.3 Mapeamento da superfície média do elemento finito da família Lagrangiana do elemento padrão para o elemento real.....	11
2.4 Vetor \vec{r}_3 normal à superfície média e vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 tangentes a ela.....	12
2.5 Espessura t_i no nó i , os versores \vec{v}_3 e \vec{v}_{3i} , e os vetores \vec{m}_i e \vec{m} que definem, respectivamente, os pontos P e Q fora da superfície média do elemento.....	15
2.6 Vetor \vec{R} que define a posição de qualquer ponto Q do elemento.....	16
3.1 Sistema local de referência (ξ, η, ζ) associado ao elemento quadrilateral linear.....	19
3.2 Sistema local de referência (x', y', z') associado ao ponto.....	20
3.3 Sistema local de referência (x', y', z') associado ao nó i	22

3.4 Deslocamento $\bar{\delta}_i$, apresentado pelo nó genérico i da superfície média do elemento.....	23
3.5 Deslocamento $\bar{\Delta}_i$, apresentado pelo ponto P.....	24
3.6 Termos da expansão polinomial obtida a partir das funções de forma lineares das famílias Serendipity e Lagrangiana.....	27
4.1 Sistema local de referência (x', y', z') associado ao ponto O.....	33
5.1 Estado de tensão no ponto Q segundo o sistema local de referência (x', y', z') associado ao ponto O.....	48
6.1 Elementos da família Serendipity de ordens $p = 1, p = 2$ e $p = 3$ (onde p é o grau do polinômio interpolador completo presente na expansão).....	85
6.2 Definição dos lados do elemento hierárquico.....	86
6.3 Termos da expansão quadrática obtida a partir do refinamento de ordem dois para os lados do elemento.....	86
6.4 Função de forma hierárquica de grau dois associada ao lado 1 (M_{21}).....	87
6.5 Função de forma hierárquica de grau dois associada ao lado 2 (M_{22}).....	87
6.6 Função de forma hierárquica de grau dois associada ao lado 3 (M_{23}).....	87
6.7 Função de forma hierárquica de grau dois associada ao lado 4 (M_{24}).....	88
6.8 Termos da expansão cúbica obtida a partir do refinamento de ordem três para os lados do elemento.....	88
6.9 Função de forma hierárquica de grau três associada ao lado 1 (M_{31}).....	89
6.10 Função de forma hierárquica de grau três associada ao lado 2 (M_{32}).....	89

6.11 Função de forma hierárquica de grau três associada ao lado 3 (M_{33}).....	89
6.12 Função de forma hierárquica de grau três associada ao lado 4 (M_{34}).....	90
6.13 Termos da expansão de quarto grau obtida a partir do refinamento de ordem quatro para os lados do elemento.....	90
6.14 Função de forma hierárquica de grau quatro associada ao lado 1 (M_{41}).....	91
6.15 Função de forma hierárquica de grau quatro associada ao lado 2 (M_{42}).....	91
6.16 Função de forma hierárquica de grau quatro associada ao lado 3 (M_{43}).....	91
6.17 Função de forma hierárquica de grau quatro associada ao lado 4 (M_{44}).....	92
6.18 Termos da expansão de quarto grau obtida a partir do refinamento de ordem quatro para o interior do elemento.....	92
6.19 Função de forma hierárquica de grau quatro associada ao interior do elemento (M_4).....	93
8.1 Malha de discretização sobre um quarto da placa quadrada.....	168
8.2 Malha de discretização sobre um quarto da placa retangular.....	171
8.3 Placa de dimensões a e b submetida a um perfil senoidal de carregamento.....	187
8.4 Carregamentos atuantes nos vários exemplos de viga reta.....	193
8.5 Casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio.....	197
8.6 Casca cilíndrica com extremidades livres, submetida a duas cargas concentradas de sentidos opostos (“Pinched cylinder”).....	199
8.7 Malha de discretização distorcida adaptada a partir de MACNEAL et al. [28].....	202

Lista de tabelas

8.1 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	168
8.2 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , para diversos elementos e diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	170
8.3 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qb^4/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	172
8.4 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada engastada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	174
8.5 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qb^4/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular engastada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	176

8.6 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus cantos, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	178
8.7 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pa^2/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).....	180
8.8 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pb^2/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).....	182
8.9 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pa^2/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada engastada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).....	184
8.10 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pb^2/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular engastada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).....	186
8.11 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator q_0a^4/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga distribuída de perfil senoidal).....	188

8.12 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator $q_0 a^4/D$, para dois tipos de elementos e diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga distribuída de perfil senoidal).....	189
8.13 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator $q_0 b^4/D$, para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga distribuída de perfil senoidal).....	191
8.14 Valores das flechas na extremidade livre da viga e seus respectivos erros, comparativamente ao valor teórico dado por MACNEAL et al. [28] (viga reta submetida à flexão pura).....	193
8.15 Valores das flechas na extremidade livre da viga e seus respectivos erros, comparativamente ao valor teórico dado por MACNEAL et al. [28] (viga reta submetida à flexão no plano).....	195
8.16 Valores das flechas na extremidade livre da viga e seus respectivos erros, comparativamente ao valor teórico dado por MACNEAL et al. [28] (viga reta submetida à flexão fora do plano).....	196
8.17 Deflexões v_1 , w_2 e w_3 nos nós 1, 2 e 3 respectivamente, utilizando-se malha de 8x8 elementos (casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio).....	198
8.18 Deflexão w_c sofrida pelo nó 1 (figura 8.6), para várias malhas de discretização situadas sobre a oitava parte da casca cilíndrica (“Pinched cylinder”).....	200

8.19 Deflexão w_c sofrida pelo nó 1 (figura 8.6), para diversos elementos (casca cilíndrica com extremidades livres, submetida a duas cargas concentradas de sentidos opostos).....	201
8.20 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa, utilizando-se malha de discretização distorcida e diferentes famílias de funções para se interpolar a geometria do elemento (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	203
8.21 Deflexões v_1 , w_2 e w_3 nos nós 1, 2 e 3 respectivamente (figura 8.5), utilizando-se malha de discretização distorcida de 8x8 elementos e as funções da família Lagrangiana para interpolar a geometria do elemento (casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio).....	205
8.22 Deflexões v_1 , w_2 e w_3 nos nós 1, 2 e 3 respectivamente (figura 8.5), utilizando-se malha de discretização distorcida de 8x8 elementos e as funções da família Serendipity para interpolar a geometria do elemento (casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio).....	207

Lista de gráficos

- 8.1 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída)..... 169
- 8.2 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída)..... 172
- 8.3 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada engastada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída)..... 174
- 8.4 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular engastada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída)..... 176

8.5 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus cantos, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	178
8.6 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).....	180
8.7 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).....	182
8.8 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada engastada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).....	184
8.9 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular engastada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).....	186

8.10	Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga distribuída de perfil senoidal).....	189
8.11	Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga distribuída de perfil senoidal).....	191
8.12	Curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação (viga reta submetida à flexão pura).....	194
8.13	Curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação (viga reta submetida à flexão no plano).....	195
8.14	Curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação (viga reta submetida à flexão fora do plano).....	196
8.15	Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para as diferentes deflexões examinadas (casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio).....	198

8.16	Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para o caso da malha de 10x10 elementos (casca cilíndrica com extremidades livres, submetida a duas cargas concentradas de sentidos opostos).....	200
8.17	Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa utilizando-se malha de discretização distorcida (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).....	204
8.18	Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para as diferentes deflexões examinadas, utilizando-se malha de discretização distorcida e as funções da família Lagrangiana para interpolar a geometria do elemento (casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio).....	206
8.19	Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para as diferentes deflexões examinadas, utilizando-se malha de discretização distorcida e as funções da família Serendipity para interpolar a geometria do elemento (casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio).....	207
A.1	Função de forma $N_1(\xi, \eta)$ associada ao nó 1 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.....	216

A.2 Função de forma $N_2(\xi, \eta)$ associada ao nó 2 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.....	217
A.3 Função de forma $N_3(\xi, \eta)$ associada ao nó 3 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.....	217
A.4 Função de forma $N_4(\xi, \eta)$ associada ao nó 4 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.....	217
A.5 Função de forma $N_5(\xi, \eta)$ associada ao nó 5 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.....	218
A.6 Função de forma $N_6(\xi, \eta)$ associada ao nó 6 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.....	218
A.7 Função de forma $N_7(\xi, \eta)$ associada ao nó 7 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.....	218
A.8 Função de forma $N_8(\xi, \eta)$ associada ao nó 8 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.....	219
A.9 Função de forma $N_1(\xi, \eta)$ associada ao nó 1 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.....	219
A.10 Função de forma $N_2(\xi, \eta)$ associada ao nó 2 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.....	220
A.11 Função de forma $N_3(\xi, \eta)$ associada ao nó 3 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.....	220
A.12 Função de forma $N_4(\xi, \eta)$ associada ao nó 4 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.....	220

A.13 Função de forma $N_5(\xi, \eta)$ associada ao nó 5 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.....	221
A.14 Função de forma $N_6(\xi, \eta)$ associada ao nó 6 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.....	221
A.15 Função de forma $N_7(\xi, \eta)$ associada ao nó 7 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.....	221
A.16 Função de forma $N_8(\xi, \eta)$ associada ao nó 8 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.....	222
A.17 Função de forma $N_9(\xi, \eta)$ associada ao nó 9 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.....	222
A.18 Função de forma $N'_1(\xi, \eta)$ associada ao nó 1 do elemento quadrilateral linear das famílias Serendipity e Lagrangiana.....	223
A.19 Função de forma $N'_2(\xi, \eta)$ associada ao nó 2 do elemento quadrilateral linear das famílias Serendipity e Lagrangiana.....	223
A.20 Função de forma $N'_3(\xi, \eta)$ associada ao nó 3 do elemento quadrilateral linear das famílias Serendipity e Lagrangiana.....	224
A.21 Função de forma $N'_4(\xi, \eta)$ associada ao nó 4 do elemento quadrilateral linear das famílias Serendipity e Lagrangiana.....	224

Resumo

NOGUEIRA Jr., Alberto Costa, *Desenvolvimento de um elemento finito do tipo hierárquico para análise estática de placas e cascas a partir do elemento superparamétrico quadrilateral linear*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 230 p. Dissertação (Mestrado).

Este trabalho apresenta uma formulação hierárquica baseada no conceito de aproximação p , de um elemento finito aplicado ao estudo de problemas de valor de contorno envolvendo placas e cascas. Partindo-se de um elemento superparamétrico quadrilateral linear com integração numérica consistente, obtém-se, através do refinamento hierárquico sucessivo, um elemento que se demonstra suficientemente confiável e eficaz dentro de uma ampla variedade de casos. A natureza hierárquica da formulação proposta resulta num modelo bastante eficiente do ponto de vista computacional, sobretudo ao se considerar a possibilidade de implementação do refinamento adaptativo, uma vez que se permite empregar expansões polinomiais diferentes ao longo de lados e elementos distintos, criando-se novos graus de liberdade hierárquicos somente quando a magnitude do erro envolvido na análise o exige. Efetua-se ainda, através de um conjunto de exemplos, uma discussão sobre a aproximação hierárquica quando da utilização de elementos distorcidos, na qual sugere-se o emprego do elemento de 9 nós da família Lagrangiana para a descrição da geometria de problemas abrangendo a análise estática de cascas.

Palavras-Chave

- Elemento Finito, Hierárquico, Placas, Cascas.

Abstract

NOGUEIRA Jr., Alberto Costa, *Development of a hierarchical finite element for static plates and shells analysis from the superparametric quadrilateral linear element*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998. 230 p. Master's Thesis.

This investigation presents a hierarchical plate and shell finite element formulation based on the p -approximation concept. Starting with the superparametric quadrilateral linear element with consistent numerical integration, it is achieved, after successive hierarchical refinements, a finite element which is sufficiently accurate and effective in a large variety of cases. The hierarchical nature of this formulation yields a computationally efficient model specially when considering the adaptative refinements since it can use different polynomial expansions at distinct sides and elements generating new hierarchical degrees of freedom just when required by the errors involved in the analysis. It is made at last, through a set of examples, a discussion about hierarchical approximation when employing distorted elements, in which it is suggested the use of the 9-node Lagrangian family element to describe the geometry of boundary value problems concerning shell analysis.

Key Words

-Finite Element, Hierarchical, Plates, Shells.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 O método de elementos finitos

O processo de subdivisão de sistemas complexos em seus componentes básicos, cujo comportamento pode mais facilmente ser apreendido, e a subsequente recomposição do sistema original a partir de seus ‘elementos’ constituintes, para se compreender o seu comportamento global, parece constituir um procedimento básico do intelecto humano. De fato, em diversas situações envolvendo problemas de engenharia é possível se conceber modelos que representem satisfatoriamente a realidade através de um número finito de componentes. Tais modelos são comumente chamados de ‘discretos’. Por outro lado, para um número não menos expressivo de situações, essa descrição idealizada não é suficiente, de modo que apenas a quantidade infinita de componentes é capaz de retratar convenientemente o sistema analisado. Aos modelos pertencentes a essa classe dá-se o nome de ‘contínuos’.

Com o advento do computador digital, os problemas oriundos de formulações discretas puderam, em geral, ser resolvidos rápida e eficazmente, mesmo em se tratando de um extenso número de componentes básicos. Entretanto, como a capacidade dos computadores é finita, os problemas resultantes de formulações contínuas permanecem admitindo solução exata somente através de manipulações matemáticas, o que reduz as possibilidades de análise a casos extremamente simplificados.

Objetivando superar os obstáculos intrínsecos aos problemas de caráter contínuo, vários métodos de discretização têm sido propostos ao longo das últimas décadas. A idéia central em

todos esses métodos envolve uma sucessão de aproximações que acercam tanto mais as soluções contínuas exatas quanto maior for o número de variáveis discretas considerado. Dentre a vasta gama de métodos que se valem dessa característica fundamental, destaca-se o método de elementos finitos, o qual tem demonstrado grande popularidade tanto no meio acadêmico como no industrial. Essa virtude decorre particularmente de sua versatilidade e abrangência como método numérico.

O método de elementos finitos deve ser entendido essencialmente como um procedimento para se buscar soluções aproximadas de problemas envolvendo modelos matemáticos idealizados ou simplificados, sejam eles de caráter discreto ou contínuo. O tratamento numérico inerente ao método reduz o modelo simplificado a uma forma capaz de ser resolvida por um número finito de operações o que implica, de imediato, a caracterização da solução aproximada por um conjunto finito de parâmetros N , denominados graus de liberdade. Evidentemente, presume-se nesse contexto que ao se estender N ao limite, i.e. $N \rightarrow \infty$, as soluções originárias do método convirjam para a solução exata do problema simplificado independentemente do tipo de discretização escolhida. As sucessivas etapas de aproximação, através do incremento sobre os parâmetros N , que levam a solução do problema simplificado podem se dar basicamente de três maneiras: a primeira, denominada aproximação tipo- h , está baseada no refinamento da malha de discretização do problema; a segunda, denominada aproximação tipo- p , baseia-se no aumento da ordem polinomial dos elementos presentes na malha; e a terceira, denominada aproximação tipo- hp , consiste numa combinação das duas precedentes. As soluções numéricas provenientes de qualquer um desses tipos de aproximação, bem como o próprio comportamento destas, fornecem informações sobre as quais é possível concluir a respeito da qualidade global da solução fornecida pelo método de elementos finitos. Esse tratamento ainda é capaz de oferecer informações a cerca da confiabilidade e do grau de precisão dos dados computados pelo método, de forma que a partir daí seja possível a tomada de decisões no âmbito de ciências como a engenharia.

1.2 A análise de placas e cascas pelo método de elementos finitos

Embora cerca de 30 anos de experiência mostrem que o *método dos deslocamentos* é a base mais eficiente para a obtenção do elemento finito de caráter comercial e que é, por isso mesmo, aplicado na maioria dos programas em uso, o campo da análise de placas e cascas

através dessa metodologia ainda está em evolução. Uma razão para isso está na necessidade de obtenção de um elemento que possa ser manejado facilmente e seja aplicável a qualquer situação, i.e., *placas e cascas finas e placas e cascas moderadamente grossas*.

As placas e as cascas são componentes estruturais respectivamente planos e curvos que apresentam sua espessura muito menor que qualquer outra de suas dimensões. Esses tipos de componentes encontram grande aplicação na indústria moderna, principalmente mecânica, naval, aeronáutica e construção civil. A espessura do componente, nesses casos, é medida na direção perpendicular à sua superfície média e quando comparada às suas outras dimensões, determina seu tipo de comportamento. Dessa forma, é possível, segundo TIMOSHENKO [1], estabelecer o seguinte critério de classificação para placas e cascas quando os deslocamentos envolvidos são da ordem da espessura desses componentes estruturais:

(a) Se a relação entre a espessura t e uma dimensão característica a de sua superfície média for menor que $1/20$ ($t/a < 0,05$), tem-se o caso de *placa e casca finas* [2] que se caracterizam por seguir as hipóteses de KIRCHHOFF [3]. Quais sejam:

(1^a) Um elemento reto da placa ou casca normal a superfície média do componente estrutural, após a deformação deste último, permanece perpendicular a essa superfície e mantém seu comprimento inicial. Essa hipótese é equivalente a desconsiderar as tensões de cisalhamento atuantes na direção da espessura, bem como, a deformação específica na direção perpendicular à superfície média.

(2^a) As tensões normais à superfície média são pequenas em comparação com as outras tensões e podem, portanto, ser desprezadas. Essa hipótese é equivalente a desconsiderar a energia de deformação correspondente a essas tensões.

(b) Se a relação entre a espessura t e uma dimensão característica a de sua superfície média for maior ou igual a $1/20$ ($t/a \geq 0,05$), as tensões de cisalhamento na direção da espessura tornam-se importantes, não podendo mais ser desprezadas. Nesse caso, se um elemento reto da placa ou casca é normal a superfície média do componente estrutural, após a deformação deste último, ele permanece reto, mantém seu comprimento inicial, porém não é mais perpendicular a essa superfície. Esta é a hipótese básica de *Mindlin-Reissner* que caracteriza *placa ou casca moderadamente grossas*.

Em 1970, AHMAD et al. [4] apresentaram uma formulação isoparamétrica de um elemento finito aplicado a placas e cascas baseada na degeneração de um elemento sólido tridimensional, através da redução de uma de suas dimensões na direção da espessura (figura 1.1). Nessa formulação, considerou-se que as normais à superfície média permanecessem retas após a deformação do componente estrutural sem, contudo, continuarem normais a ela. Esse fato possibilita que sejam levadas em conta as tensões de cisalhamento na direção da espessura. Desconsiderou-se, no entanto, a energia de deformação correspondente às tensões normais à superfície média, com o objetivo de se obter um melhor condicionamento numérico do modelo.

A geometria desse elemento foi descrita pelas coordenadas dos nós i , situados em sua superfície média, e por vetores nodais \vec{v}_{3i} , normais a essa superfície (figura 1.1), que definem os pontos que estão fora dela. Em cada nó, foram considerados cinco graus de liberdade, sendo três deslocamentos associados ao sistema global de referência (translações u_i, v_i e w_i) e duas rotações associadas ao sistema local de referência (rotações α_i e β_i do vetor \vec{v}_{3i} em torno dos vetores \vec{v}_{1i} e \vec{v}_{2i} normais a ele).

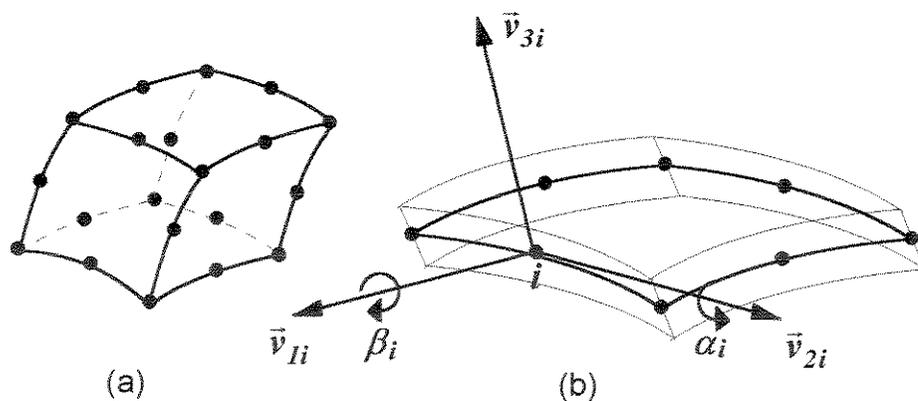


Figura 1.1 (a) Elemento sólido tridimensional; (b) elemento de casca obtido a partir da degeneração do elemento sólido tridimensional.

A matriz de rigidez do elemento foi obtida da maneira usual, a partir da integração numérica da expressão:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta, \zeta)]^T [D'] [B(\xi, \eta, \zeta)] |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta d\zeta \quad (1.1)$$

utilizando-se 2 pontos de integração na direção ζ e, para o caso do elemento quadrático, (3×3) pontos de integração na sua superfície média (ξ e η), caracterizando assim uma *integração numérica consistente*, uma vez que este é o número de pontos necessário para que se integre exatamente esta última expressão [5]. As funções de forma utilizadas na obtenção da matriz $[B(\xi, \eta, \zeta)]$ da equação anterior foram aquelas da família Serendipity que, no caso do elemento quadrático, empregam oito nós na superfície média do elemento (figura 1.2).

Os resultados obtidos por esse elemento foram excelentes para situações de placas e cascas moderadamente grossas [6], atendendo portanto à teoria de *Mindlin-Reissner*. Entretanto, com a redução de sua espessura, os resultados não tendiam, como era de se esperar, àqueles da teoria clássica de *Kirchhoff* para placas e cascas finas. De fato, embora esse elemento parecesse muito promissor quando foi introduzido, verificou-se que, ao se reduzir progressivamente sua espessura, sua rigidez aumentava aparentemente sem limite e os resultados então alcançados tornavam-se totalmente não confiáveis.

A partir de então, um grande número de autores tem estudado esse elemento e feito suas propostas para melhorar seu comportamento, colocando ênfase especial em aplicações de *placas e cascas finas*. Com a introdução da *Técnica de Integração Reduzida*, proposta por ZIENKIEWICZ [6], conseguiu-se uma melhora considerável no desempenho do elemento para essas aplicações. Nesse caso, para se obter a matriz de rigidez do elemento (equação 1.1), em vez de 3×3, são utilizados 2×2 pontos de integração na superfície média, justificando desse modo o nome atribuído a uma tal técnica. Na formulação do elemento de *Zienkiewicz*, assim como na de *Ahmad*, foram consideradas as funções de forma da família Serendipity com 8 nós na superfície média, conforme mostra a figura 1.2. A integração *totalmente reduzida* mostrou resultados notáveis para as situações de placas e cascas finas [6], no entanto, como o fenômeno da *melhoria do desempenho do elemento pela redução do número de pontos de integração* não foi explicado de maneira satisfatória, foi considerado por muitos autores como um embuste [7], tendo sido feitas, a partir de então, várias tentativas [8, 9, 10, 11, 12] visando encontrar uma explicação plausível para esse fato sem, contudo, lograr efeito.

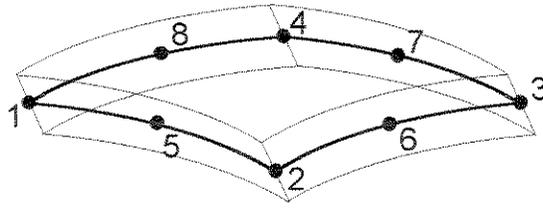


Figura 1.2 Elemento de casca quadrilateral quadrático da família Serendipity.

1.3 Objetivo

Com o objetivo de se retirar a característica de rigidez excessiva do elemento de *Ahmad*, o presente trabalho se propõe a obter um *novo elemento finito para análise de placa e casca* que, mesmo considerando *integração consistente*, refine sua solução através de uma formulação do tipo hierárquica baseada no conceito da aproximação p . Pretende-se portanto, partindo-se de um elemento superparamétrico quadrilateral linear, *com integração numérica consistente*, refinar sua solução pela introdução de polinômios completos de segundo, terceiro e quarto grau. A natureza hierárquica da formulação a ser proposta apresenta a vantagem de que as matrizes produzidas nos estágios anteriores àquele da aproximação pretendida reocorrem e não precisam ser recalculadas, evidenciando assim um ganho de caráter computacional. Essa formulação possibilita ainda empregar expansões polinomiais diferentes ao longo de lados e elementos diferentes. Tal característica, essencial dos elementos hierárquicos, é explorada no refinamento adaptativo no qual novos graus de liberdade hierárquicos são criados somente quando requeridos pela magnitude do erro envolvido na análise. Finalmente, um outro aspecto positivo é a possibilidade de se reaproveitar, por ocasião da resolução do sistema de equações lineares, as matrizes triangulares superior e inferior obtidas para as análises anteriores àquela da aproximação desejada.

Capítulo 2

DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA DO ELEMENTO

2.1 Introdução

Considere-se um elemento finito quadrilateral quadrático no qual as seções ao longo da espessura sejam geradas por linhas retas. Na superfície média desse elemento, considerem-se os nós i de 1 a 8 para o elemento da família Serendipity e de 1 a 9 para o elemento da família Lagrangiana, dispostos de acordo com a representação da figura 2.1 .

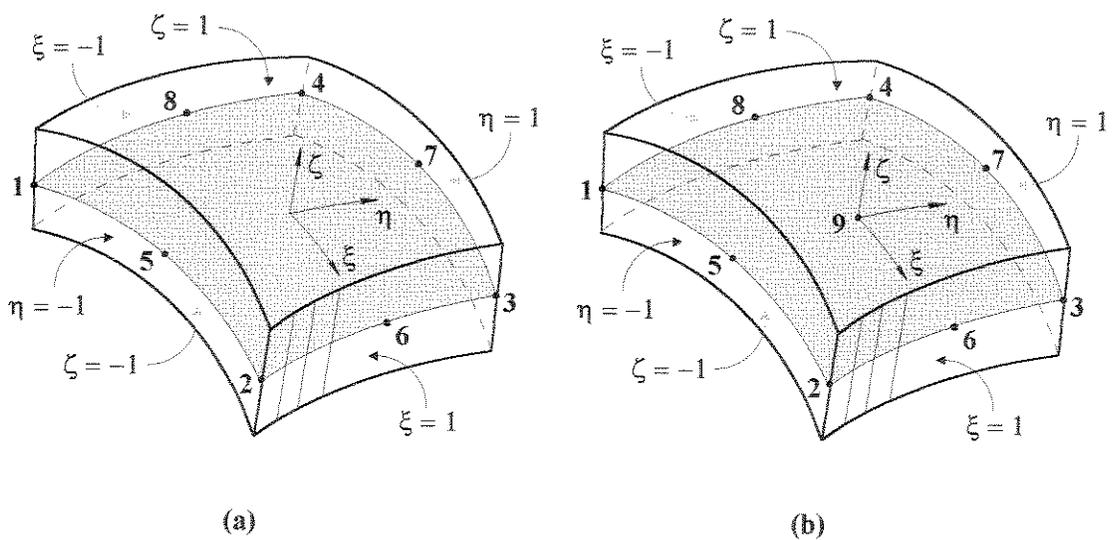


Figura 2.1 Elemento quadrilateral quadrático e os nós associados a ele: (a) família Serendipity; (b) família Lagrangiana.

Considere-se ainda o sistema local de referência associado ao elemento e constituído das coordenadas curvilíneas ξ , η na sua superfície média e da coordenada linear ζ na direção da espessura do elemento (figura 2.1). Essas coordenadas devem variar entre -1 e 1 , de tal forma que $\xi = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$ definam as faces laterais do elemento e $\zeta = \pm 1$, suas faces externas.

2.2 Determinação dos pontos situados sobre a superfície média do elemento

De acordo com a figura 2.2, quando se associa ao elemento um sistema cartesiano de referência (X, Y, Z) , denominado global, a posição de qualquer ponto O de sua superfície média será dada pelo vetor \vec{r} e a posição de um nó genérico i , pelo vetor nodal \vec{r}_i que tem suas componentes x_i , y_i e z_i descritas segundo os eixos X , Y , e Z respectivamente. Dessa forma

$$\vec{r}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

O vetor \vec{r} , que define a posição de qualquer ponto O da superfície média, pode então ser interpolado a partir dos vetores nodais \vec{r}_i e das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ associadas a cada um dos nós dessa superfície [13,14]:

$$\vec{r}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \vec{r}_i \quad (2.2)$$

onde n , no caso do elemento da família Serendipity, assume o valor 8, com as funções de forma sendo dadas por [15]:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$\begin{aligned}
N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\
N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\
N_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\
N_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\
N_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\
N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

e, no caso do elemento da família Lagrangiana, n assume o valor 9, com as funções de forma sendo dadas por [15]:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta) \\
N_2 &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta) \\
N_3 &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta) \\
N_4 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta) \\
N_5 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 - \eta) \\
N_6 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - 1) \\
N_7 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 + \eta) \\
N_8 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - 1) \\
N_9 &= (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Os gráficos dessas funções de forma (elemento quadrilateral quadrático), para cada nó da superfície média, são apresentados no apêndice A.

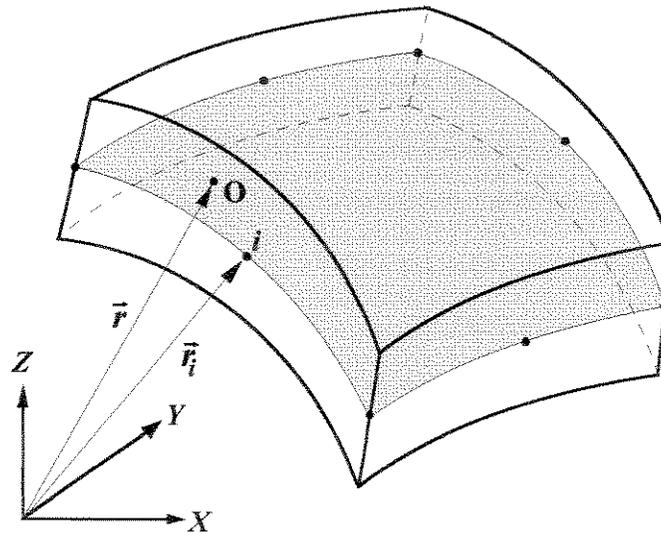


Figura 2.2 Vetor \vec{r} que define a posição de qualquer ponto O da superfície média do elemento.

Se x , y e z são as componentes do vetor \vec{r} segundo o sistema global de referência, a equação (2.2) pode ser escrita como se segue:

$$\vec{r}(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \\ z(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

ou ainda

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \quad (2.6)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \quad (2.7)$$

$$z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot z_i \quad (2.8)$$

Essas equações executam o mapeamento da superfície média do elemento, através da transformação de coordenadas do elemento padrão para o elemento real, como mostra a

figura 2.3. Para que esse mapeamento se dê de forma biunívoca é necessário que nenhum ângulo interno à superfície média do elemento seja superior a 180° e ainda, que os nós situados entre os vértices da superfície média estejam dentro do terço central da distância que separa seus dois nós adjacentes [16,17].

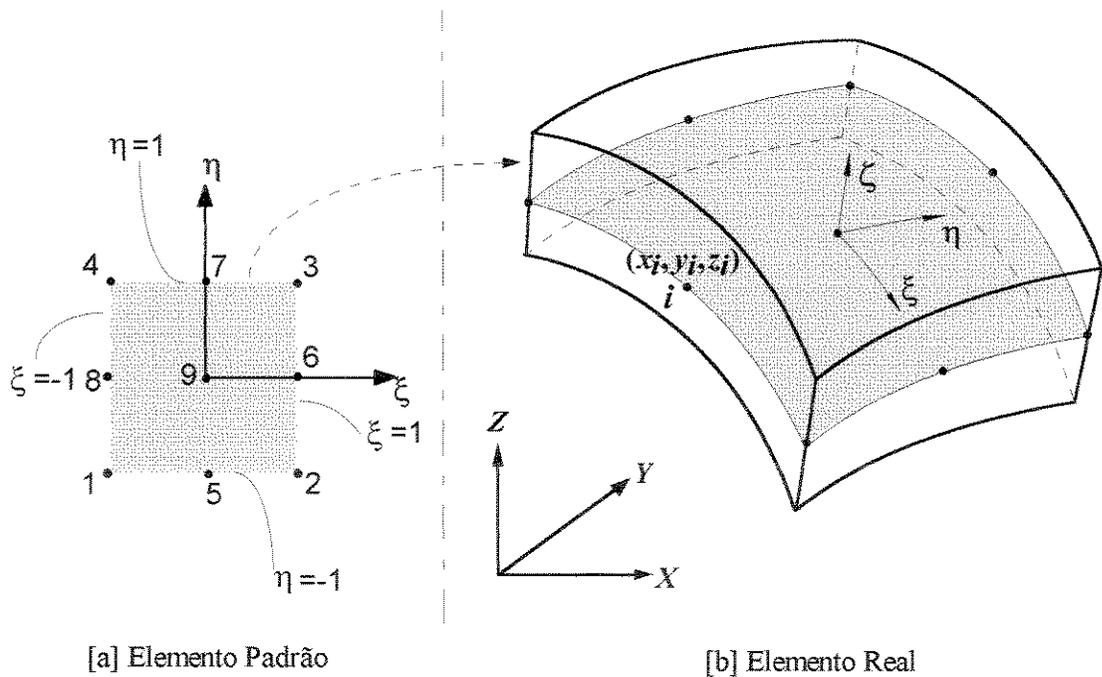


Figura 2.3 Mapeamento da superfície média do elemento finito da família Lagrangiana, do elemento padrão para o elemento real.

2.3 Determinação dos pontos situados fora da superfície média do elemento

Dado um ponto genérico O da superfície média do elemento (figura 2.4), considere-se nesse ponto a definição de um vetor \vec{r}_3 normal a ela e obtido a partir do produto vetorial de dois outros vetores: \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , tangentes a essa superfície no mesmo ponto e dados por [18]:

$$\vec{r}_1(\xi, \eta) = \frac{\partial \vec{r}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \tag{2.9}$$

$$\bar{r}_2(\xi, \eta) = \frac{\partial \bar{r}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (2.10)$$

Portanto:

$$\bar{r}_3(\xi, \eta) = \bar{r}_1(\xi, \eta) \wedge \bar{r}_2(\xi, \eta) \quad (2.11)$$

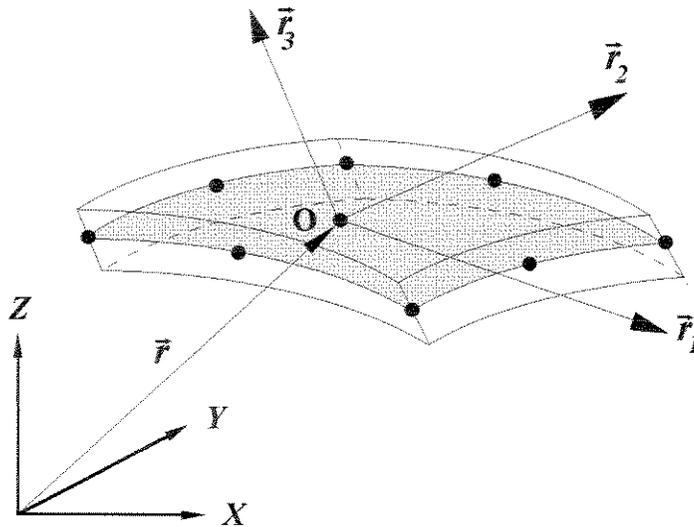


Figura 2.4 Vetor \bar{r}_3 normal à superfície média e vetores \bar{r}_1 e \bar{r}_2 tangentes a ela.

Denominando-se as componentes do vetor \bar{r}_1 , segundo os eixos X, Y e Z do sistema global de referência, por r_{11} , r_{12} e r_{13} respectivamente e da mesma forma, as componentes do vetor \bar{r}_2 por r_{21} , r_{22} e r_{23} , pode-se, a partir da equação (2.2), escrever:

$$\bar{r}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{11}(\xi, \eta) \\ r_{12}(\xi, \eta) \\ r_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\bar{r}_2(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{21}(\xi, \eta) \\ r_{22}(\xi, \eta) \\ r_{23}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

sendo que as expressões para as derivadas das funções de forma associadas ao elemento quadrilateral quadrático das famílias Serendipity e Lagrangiana são apresentadas no apêndice B.

Se \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} formam uma base ortonormal associada ao sistema global de referência, o vetor \vec{r}_3 , de componentes r_{31} , r_{32} e r_{33} , obtido a partir da equação (2.11) será dado por:

$$\vec{r}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_{31}(\xi, \eta) \\ r_{32}(\xi, \eta) \\ r_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{11}(\xi, \eta) & r_{12}(\xi, \eta) & r_{13}(\xi, \eta) \\ r_{21}(\xi, \eta) & r_{22}(\xi, \eta) & r_{23}(\xi, \eta) \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

Resolvendo-se a equação anterior e substituindo-se nela as componentes de \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , dadas através das equações (2.12) e (2.13), obtém-se:

$$r_{31}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} (y_i z_j - y_j z_i) \quad (2.15)$$

$$r_{32}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} (z_i x_j - x_i z_j) \quad (2.16)$$

$$r_{33}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} (x_i y_j - y_i x_j) \quad (2.17)$$

Tendo-se obtido o vetor \vec{r}_3 , pode-se então determinar, no ponto O, o versor \vec{v}_3 (figura 2.5) normal à superfície média do elemento

$$\vec{v}_3(\xi, \eta) = \frac{\vec{r}_3(\xi, \eta)}{\|\vec{r}_3(\xi, \eta)\|} \quad (2.18)$$

onde $\|\vec{r}_3(\xi, \eta)\|$ é a norma euclidiana do vetor \vec{r}_3 , obtida de maneira usual quando se considera o espaço \mathfrak{R}^3 :

$$\|\vec{r}_3(\xi, \eta)\| = \sqrt{r_{31}^2(\xi, \eta) + r_{32}^2(\xi, \eta) + r_{33}^2(\xi, \eta)} \quad (2.19)$$

Se v_{31} , v_{32} e v_{33} são as componentes do vetor \vec{v}_3 , segundo o sistema global de referência, a equação (2.18) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\vec{v}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{31}(\xi, \eta) \\ v_{32}(\xi, \eta) \\ v_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\|\vec{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot \begin{Bmatrix} r_{31}(\xi, \eta) \\ r_{32}(\xi, \eta) \\ r_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

ou ainda

$$v_{31}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\vec{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot r_{31}(\xi, \eta) \quad (2.21)$$

$$v_{32}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\vec{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot r_{32}(\xi, \eta) \quad (2.22)$$

$$v_{33}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\vec{r}_3(\xi, \eta)\|} \cdot r_{33}(\xi, \eta) \quad (2.23)$$

Quando se considera o nó i , de coordenadas ξ_i e η_i , o vetor \vec{v}_{3i} (figura 2.5) normal à superfície média nesse nó se torna

$$\vec{v}_{3i} = \vec{v}_3(\xi_i, \eta_i) \quad (2.24)$$

cujas componentes v_{31i} , v_{32i} e v_{33i} , descritas segundo os eixos X, Y e Z do sistema global de referência respectivamente, podem ser escritas da seguinte forma:

$$v_{31i} = v_{31}(\xi_i, \eta_i) \quad (2.25)$$

$$v_{32i} = v_{32}(\xi_i, \eta_i) \quad (2.26)$$

$$v_{33i} = v_{33}(\xi_i, \eta_i) \quad (2.27)$$

De acordo com a figura 2.5, se t_i é a espessura do elemento no nó i , qualquer ponto P ao longo dessa espessura será dado pelo vetor \vec{m}_i , obtido da seguinte maneira:

$$\vec{m}_i(\zeta) = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \vec{v}_{3i} \quad (2.28)$$

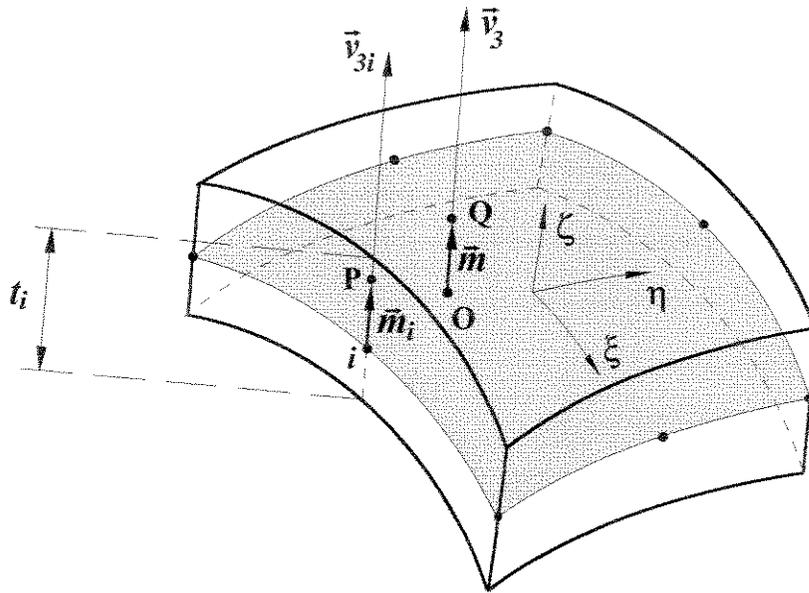


Figura 2.5 Espessura t_i no nó i , os versores \bar{v}_3 e \bar{v}_{3i} , e os vetores \bar{m}_i e \bar{m} que definem, respectivamente, os pontos P e Q fora da superfície média do elemento.

Assim, o vetor \bar{m} (figura 2.5), que define qualquer ponto Q fora da superfície média do elemento, pode então ser interpolado a partir dos vetores \bar{m}_i e das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$, associadas a cada nó da superfície média. Portanto:

$$\bar{m}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{m}_i \tag{2.29}$$

ou ainda, levando-se em conta a equação (2.28):

$$\bar{m}(\xi, \eta, \zeta) = \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \bar{v}_{3i} \tag{2.30}$$

2.4 Definição da geometria do elemento

De acordo com a figura 2.6, o vetor \bar{R} , que define a posição de qualquer ponto Q do elemento, é determinado pela soma de dois outros vetores: o vetor \bar{r} , que define a posição de

qualquer ponto O sobre a superfície média, e o vetor \vec{m} , que define a posição de qualquer ponto Q fora dessa superfície. Assim:

$$\vec{R}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{r}(\xi, \eta) + \vec{m}(\xi, \eta, \zeta) \tag{2.31}$$

Levando-se em conta as equações (2.2) e (2.30), o vetor \vec{R} será dado por:

$$\vec{R}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \vec{r}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot \vec{v}_{3i} \tag{2.32}$$

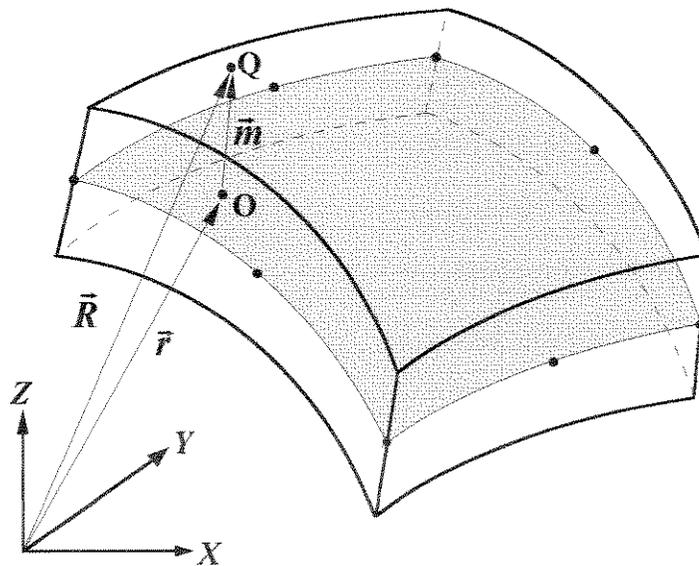


Figura 2.6 Vetor \vec{R} que define a posição de qualquer ponto Q do elemento.

Se x , y e z são as componentes do vetor \vec{R} , segundo o sistema global de referência, a equação anterior pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\vec{R}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{31i} \\ v_{32i} \\ v_{33i} \end{Bmatrix} \tag{2.33}$$

ou ainda

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot x_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{31i} \quad (2.34)$$

$$y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot y_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{32i} \quad (2.35)$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot z_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{33i} \quad (2.36)$$

Estas equações, através das coordenadas x , y e z , descrevem de maneira completa a geometria do elemento quadrilateral quadrático considerado.

Capítulo 3

CAMPO DE DESLOCAMENTO PARA O CASO DO ELEMENTO SUPERPARAMÉTRICO

3.1 Introdução

Neste trabalho, ao se aproximar o comportamento de um meio elástico contínuo, através de sua discretização pelo método de elementos finitos, utiliza-se a formulação de deslocamento, na qual os parâmetros básicos desconhecidos são os deslocamentos dos pontos nodais. Levando-se em conta esse aspecto da formulação, escolhe-se um conjunto de polinômios (funções de forma) para interpolar o campo de deslocamento dentro de cada elemento finito, em termos dos deslocamentos de seus pontos nodais. Se as funções de forma que interpolam o campo de deslocamento são de grau inferior àquelas que interpolam a geometria, o elemento é denominado superparamétrico, se de mesmo grau, elemento isoparamétrico e se finalmente, as funções de forma que interpolam o campo de deslocamento são de grau superior àquelas que interpolam a geometria, tem-se o caso do elemento subparamétrico.

3.2 Definição dos sistemas de referência locais associados ao ponto O e ao nó i

Considere-se, a princípio, um elemento finito quadrilateral linear como mostra a figura 3.1 e associados a ele os nós i de 1 a 4, dispostos de acordo com a representação da

mesma figura. Associe-se ainda ao elemento, um sistema local de referência constituído das coordenadas ξ, η na sua superfície média e da coordenada ζ na direção de sua espessura.

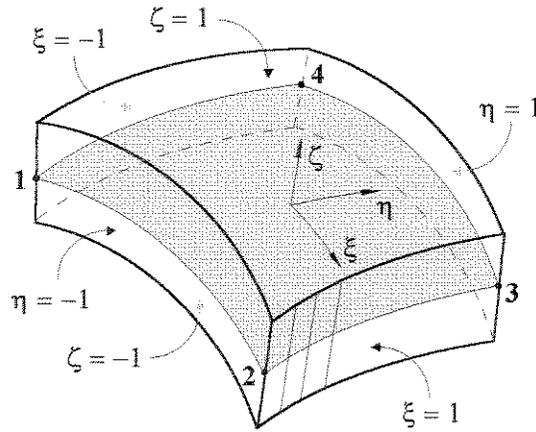


Figura 3.1 Sistema local de referência (ξ, η, ζ) associado ao elemento quadrilátero linear.

Num ponto genérico O da superfície média desse elemento, considere-se a definição de um sistema cartesiano local de referência, constituído dos eixos x', y' e z' , cuja base é representada pelos versores \bar{v}_1, \bar{v}_2 e \bar{v}_3 respectivamente (figura 3.2).

O versor \bar{v}_3 , normal à superfície média do elemento, já foi definido anteriormente através da equação (2.18). Os versores \bar{v}_1 e \bar{v}_2 , tangentes a essa superfície, são obtidos através das seguintes equações:

$$\bar{v}_1(\xi, \eta) = \frac{\bar{r}_1(\xi, \eta)}{\|\bar{r}_1(\xi, \eta)\|} \tag{3.1}$$

e

$$\bar{v}_2(\xi, \eta) = \bar{v}_3(\xi, \eta) \wedge \bar{v}_1(\xi, \eta) \tag{3.2}$$

Na equação (3.1), o termo $\bar{r}_1(\xi, \eta)$ já foi obtido previamente através da equação (2.12) e o termo $\|\bar{r}_1(\xi, \eta)\|$ é a norma euclidiana do vetor \bar{r}_1 , calculada de maneira análoga à equação (2.19):

$$\|\vec{r}_1(\xi, \eta)\| = \sqrt{r_{11}^2(\xi, \eta) + r_{12}^2(\xi, \eta) + r_{13}^2(\xi, \eta)} \quad (3.3)$$

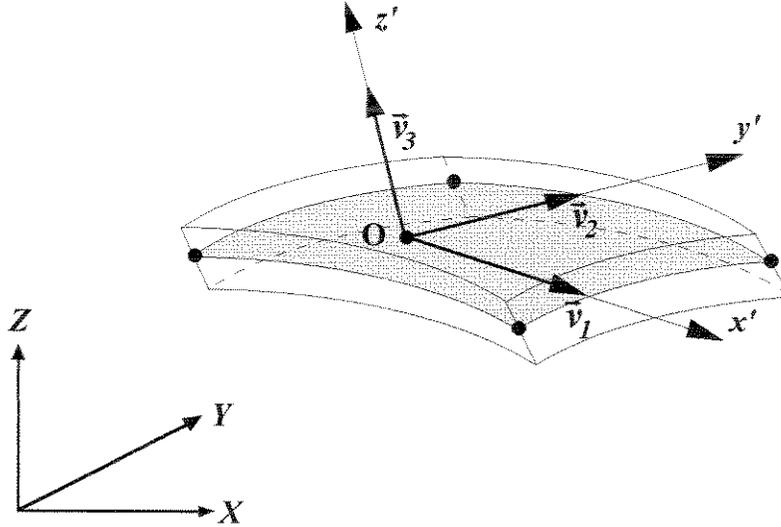


Figura 3.2 Sistema local de referência (x' , y' , z') associado ao ponto O.

Portanto, se v_{11} , v_{12} e v_{13} são as componentes do vetor \vec{v}_1 , segundo o sistema global de referência, pode-se rescrever a equação (3.1) da seguinte forma:

$$\vec{v}_1(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{11}(\xi, \eta) \\ v_{12}(\xi, \eta) \\ v_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\|\vec{r}_1(\xi, \eta)\|} \cdot \begin{Bmatrix} r_{11}(\xi, \eta) \\ r_{12}(\xi, \eta) \\ r_{13}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

ou ainda

$$v_{11}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\vec{r}_1(\xi, \eta)\|} \cdot r_{11}(\xi, \eta) \quad (3.5)$$

$$v_{12}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\vec{r}_1(\xi, \eta)\|} \cdot r_{12}(\xi, \eta) \quad (3.6)$$

$$v_{13}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|\vec{r}_1(\xi, \eta)\|} \cdot r_{13}(\xi, \eta) \quad (3.7)$$

Para a determinação do versor \vec{v}_2 , de componentes v_{21} , v_{22} e v_{23} , segundo o sistema global de referência, basta executar o produto vetorial entre \vec{v}_3 e \vec{v}_1 especificado na equação (3.2):

$$\vec{v}_2(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{21}(\xi, \eta) \\ v_{22}(\xi, \eta) \\ v_{23}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_{31}(\xi, \eta) & v_{32}(\xi, \eta) & v_{33}(\xi, \eta) \\ v_{11}(\xi, \eta) & v_{12}(\xi, \eta) & v_{13}(\xi, \eta) \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

Resolvendo-se o determinante indicado na equação anterior, tem-se:

$$\vec{v}_2(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} v_{21}(\xi, \eta) \\ v_{22}(\xi, \eta) \\ v_{23}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{32}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) - v_{33}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \\ v_{33}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) - v_{31}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \\ v_{31}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) - v_{32}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

ou ainda

$$v_{21}(\xi, \eta) = v_{32}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) - v_{33}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \quad (3.10)$$

$$v_{22}(\xi, \eta) = v_{33}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) - v_{31}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \quad (3.11)$$

$$v_{23}(\xi, \eta) = v_{31}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) - v_{32}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \quad (3.12)$$

As equações (3.5), (3.6), (3.7), (3.10), (3.11), (3.12), (2.21), (2.22) e (2.23) fornecem as componentes dos versores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 , definindo assim o sistema cartesiano local de referência (x', y', z') associado ao ponto O.

Quando se considera o nó i , de coordenadas ξ_i e η_i , a base do sistema local de referência (x', y', z') a ele associada (figura 3.3), é definida pelos seguintes versores:

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_1(\xi_i, \eta_i) \quad (3.13)$$

$$\vec{v}_{2i} = \vec{v}_2(\xi_i, \eta_i) \quad (3.14)$$

$$\vec{v}_{3i} = \vec{v}_3(\xi_i, \eta_i) \quad (2.24)$$

tendo, o versor \vec{v}_{3i} , sido definido no capítulo precedente pela equação (2.24).

Da mesma forma, as componentes dos versores \vec{v}_{1i} , \vec{v}_{2i} e \vec{v}_{3i} , segundo o sistema global de referência, serão dadas por:

$$v_{11i} = v_{11}(\xi_i, \eta_i) \tag{3.15}$$

$$v_{12i} = v_{12}(\xi_i, \eta_i) \tag{3.16}$$

$$v_{13i} = v_{13}(\xi_i, \eta_i) \tag{3.17}$$

$$v_{21i} = v_{21}(\xi_i, \eta_i) \tag{3.18}$$

$$v_{22i} = v_{22}(\xi_i, \eta_i) \tag{3.19}$$

$$v_{23i} = v_{23}(\xi_i, \eta_i) \tag{3.20}$$

$$v_{31i} = v_{31}(\xi_i, \eta_i) \tag{2.25}$$

$$v_{32i} = v_{32}(\xi_i, \eta_i) \tag{2.26}$$

$$v_{33i} = v_{33}(\xi_i, \eta_i) \tag{2.27}$$

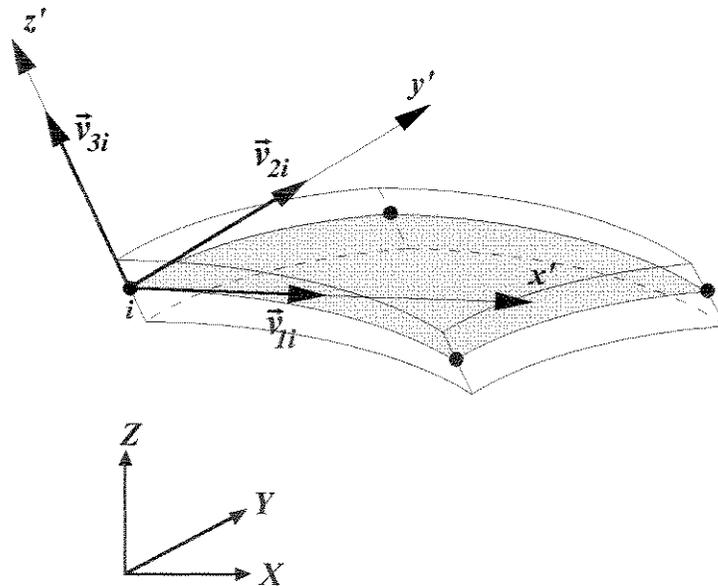


Figura 3.3 Sistema local de referência (x', y', z') associado ao nó i .

As equações (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (2.25), (2.26) e (2.27) fornecem as componentes dos versores \vec{v}_{1i} , \vec{v}_{2i} e \vec{v}_{3i} , definindo dessa maneira a base do sistema cartesiano local de referência (x', y', z') associado ao nó i .

3.3 Determinação do campo de deslocamento para o caso elemento superparamétrico

Se, em função da solicitação aplicada, o elemento finito considerado é deformado, o nó genérico i de sua superfície média apresentará um deslocamento $\bar{\delta}_i$ (figura 3.4) cujas componentes nas direções X, Y e Z do sistema global de referência são respectivamente: u_i , v_i e w_i .

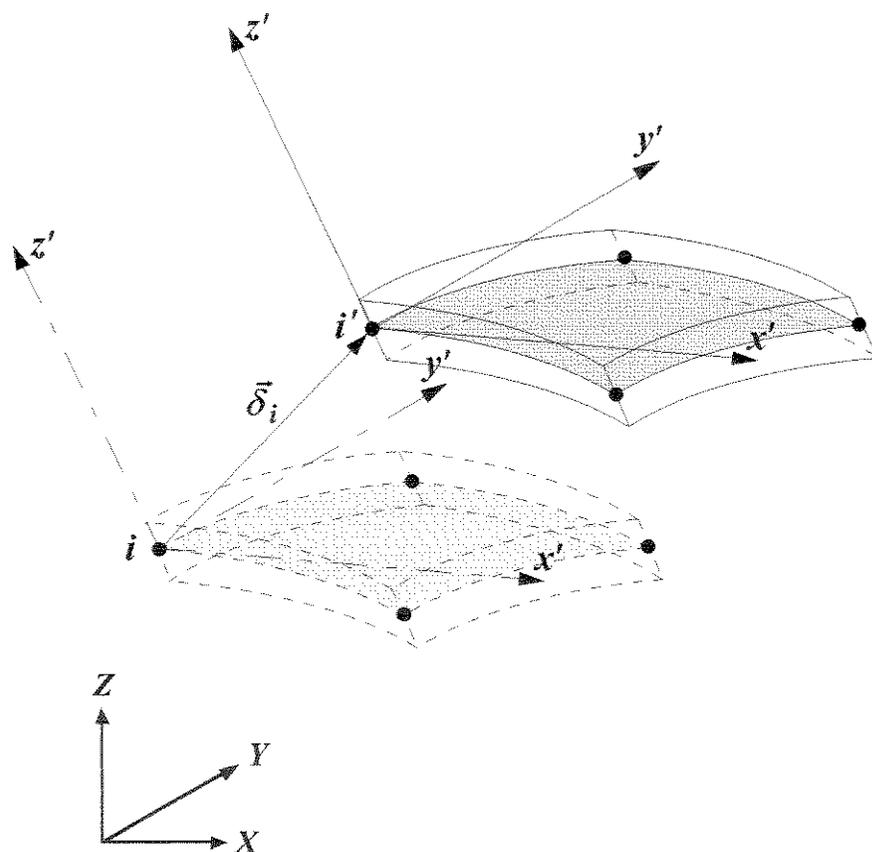


Figura 3.4 Deslocamento $\bar{\delta}_i$ apresentado pelo nó genérico i da superfície média do elemento.

De acordo com o modelo cinemático de *Mindlin-Reissner*, que possibilita considerar as tensões de cisalhamento ao longo da espessura, se um elemento reto da placa ou casca é normal a sua superfície média, após a deformação do componente estrutural, ele permanece reto, mantém seu comprimento inicial ($\epsilon_{z'} = 0$), porém não é mais normal a essa superfície. Assim, o estado de deformação específica do elemento, com relação ao sistema local de referência (x', y', z') , deverá conter as seguintes componentes: $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$, $\gamma_{x'y'}$, $\gamma_{x'z'}$ e $\gamma_{y'z'}$.

Em função do exposto, quando se considera o vetor \vec{m}_i , normal à superfície média e que define o ponto P fora dessa superfície (figura 2.5), após a deformação do componente estrutural, ele deverá continuar reto, não mais perpendicular à superfície média, mas conservará seu comprimento inicial. Portanto, no caso mais geral de sollicitação, o vetor \vec{m}_i deverá apresentar duas rotações (figura 3.5): α_i e β_i em torno dos eixos y' e x' , respectivamente.

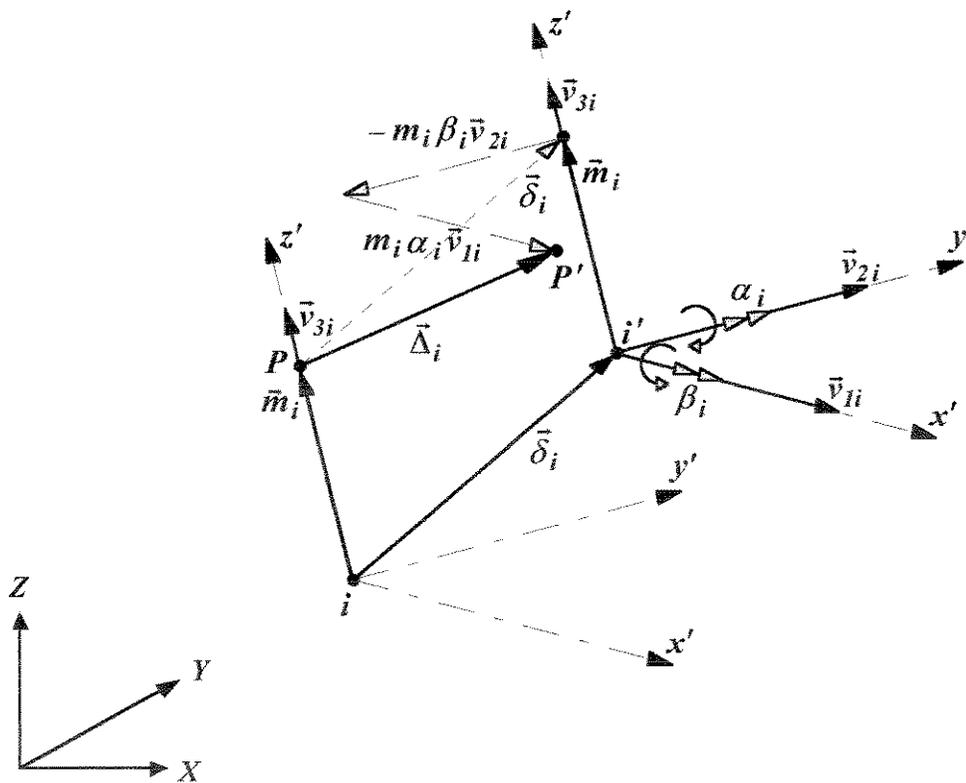


Figura 3.5 Deslocamento $\bar{\Delta}_i$ apresentado pelo ponto P.

O ponto P assume então a posição P', apresentando um deslocamento $\bar{\Delta}_i$ que, de acordo com a figura 2.5 e admitindo-se a hipótese de deformações e deslocamentos pequenos ($\text{sen}(\alpha_i) \approx \alpha_i$ e $\text{sen}(\beta_i) \approx \beta_i$), será dado por:

$$\bar{\Delta}_i = \vec{\delta}_i + m_i \alpha_i \cdot \vec{v}_{1i} - m_i \beta_i \cdot \vec{v}_{2i} \tag{3.21}$$

onde \bar{v}_{1i} e \bar{v}_{2i} são os versores tangentes à superfície média do elemento no nó i , dados respectivamente pelas equações (3.13) e (3.14) e m_i é a norma euclidiana do vetor \bar{m}_i que, de acordo com a equação (2.28), é dada por:

$$m_i = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \quad (3.22)$$

Substituindo-se esse valor na equação (3.21), tem-se:

$$\bar{\Delta}_i(\zeta) = \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i \quad (3.23)$$

Essa expressão possibilita determinar o deslocamento apresentado por qualquer ponto P, ao longo da espessura t_i , no nó i . Pode-se agora interpolar o deslocamento de qualquer ponto Q do elemento (figura 2.5), a partir dos deslocamentos $\bar{\Delta}_i$ e das funções de forma $N'_i(\xi, \eta)$ associadas a cada nó de sua superfície média [15]:

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N'_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\Delta}_i(\zeta) \quad (3.24)$$

onde n (número de nós da superfície média), tanto para o elemento da família Serendipity quanto para o da família Lagrangiana, é igual a 4 e as funções de forma $N'_i(\xi, \eta)$ são dadas por [15]:

$$\begin{aligned} N'_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi).(1-\eta) \\ N'_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi).(1-\eta) \\ N'_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi).(1+\eta) \\ N'_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi).(1+\eta) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Os respectivos gráficos dessas funções de forma (elemento quadrilateral linear) aparecem no apêndice A.

A equação (3.24) pode agora ser reescrita como a seguir:

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\Delta}_i(\zeta) \quad (3.26)$$

Substituindo-se $\bar{\Delta}_i$ pelo seu valor dado a partir da equação (3.23), tem-se:

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i \quad (3.27)$$

Se u, v e w são, respectivamente, as componentes do deslocamento $\bar{\Delta}$ nas direções X, Y e Z do sistema global de referência, a equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{11i} \\ v_{12i} \\ v_{13i} \end{Bmatrix} \cdot \alpha_i \\ &\quad - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{21i} \\ v_{22i} \\ v_{23i} \end{Bmatrix} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (3.28)$$

ou ainda

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \quad (3.29)$$

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \quad (3.30)$$

$$w(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \quad (3.31)$$

A expansão polinomial obtida a partir das funções de forma lineares de ambas as famílias é mostrada a seguir (figura 3.6):

$$\begin{matrix} & 1 & \cdots & \text{constante} \\ \xi & & \eta & \cdots & 1.^{\circ} \text{ grau} \\ & \xi\eta & & & \end{matrix}$$

Figura 3.6 Termos da expansão polinomial obtida a partir das funções de forma lineares das famílias Serendipity e Lagrangiana.

Verifica-se que essa expansão polinomial satisfaz os critérios de convergência exigidos pela metodologia dos elementos finitos, isto é, além de ter garantida a continuidade C^0 , ela apresenta um termo constante e contém um polinômio completo de primeiro grau [15].

Observa-se ainda que o campo de deslocamento do elemento, tendo sido interpolado linearmente (equações 3.25), e sua geometria, interpolada quadraticamente (equações 2.3 e 2.4), caracterizam o caso de um elemento finito superparamétrico.

As equações (3.29), (3.30) e (3.31) podem ainda ser escritas na forma que se apresenta a seguir:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 [N'_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \{a_i\} \tag{3.32}$$

onde $[N'_i(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (3x5), constituída das funções de forma $N'_i(\xi, \eta)$ e dos parâmetros referentes ao nó i (espessura t_i e componentes dos versores \bar{v}_{1i} e \bar{v}_{2i}):

$$[N'_i(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} N'_i(\xi, \eta) & 0 & 0 & \zeta \cdot N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -\zeta \cdot N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & N'_i(\xi, \eta) & 0 & \zeta \cdot N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -\zeta \cdot N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & N'_i(\xi, \eta) & \zeta \cdot N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -\zeta \cdot N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

e $\{a_i\}$ é uma matriz coluna (5x1), constituída dos deslocamentos e rotações relativos ao nó i :

$$\{a_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Dessa maneira, a equação (3.32) pode ser apresentada na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N'_1(\xi, \eta, \zeta)] & \dots & [N'_i(\xi, \eta, \zeta)] & \dots & [N'_4(\xi, \eta, \zeta)] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_4\} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Verifica-se, portanto, que a cada nó i da superfície média do elemento estão associados cinco graus de liberdade: três translações globais u_i, v_i e w_i e duas rotações locais α_i e β_i .

De uma maneira compacta, a equação anterior pode ainda ser dada por:

$$\{u\} = [N'] \cdot \{a\} \quad (3.36)$$

onde $\{u\}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída dos deslocamentos $u(\xi, \eta, \zeta), v(\xi, \eta, \zeta)$ e $w(\xi, \eta, \zeta)$, $[N']$ é uma matriz (3×20), tanto para o elemento da família Serendipity quanto para o elemento da família Lagrangiana, constituída das funções de forma $N'_i(\xi, \eta)$ e $\{a\}$ é uma matriz coluna (20×1), para ambas as famílias de funções, constituída dos deslocamentos nodais. Finalmente, a matriz $[N']$, que relaciona o campo de deslocamento aos deslocamentos nodais, é dada então por:

$$[N'(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} [N'_1(\xi, \eta, \zeta)] & \dots & [N'_i(\xi, \eta, \zeta)] & \dots & [N'_4(\xi, \eta, \zeta)] \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Capítulo 4

ESTADO DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA NO CASO DO ELEMENTO SUPERPARAMÉTRICO

4.1 Introdução

No caso mais geral de solicitação, um ponto genérico Q do elemento (figura 2.6) tem, com relação ao sistema global de referência (X, Y, Z), o seguinte estado de deformação específica [19]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} \quad (4.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} \quad (4.4)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} \quad (4.5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} \quad (4.6)$$

onde $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ e $w(x,y,z)$ são os deslocamentos apresentados pelo ponto Q, com relação ao mesmo sistema de referência. Por outro lado, como mostram as equações de (3.29) a (3.31), os deslocamentos u , v e w são funções das coordenadas ξ , η e ζ , assim como as coordenadas x , y e z do ponto Q também o são (equações 2.34 a 2.36). Portanto, as derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas globais x , y e z podem ser obtidas a partir de suas derivadas em relação às coordenadas ξ , η e ζ , através da seguinte equação matricial [20]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = [J] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

na qual $[J]$ é a *matriz Jacobiano da transformação* dada por [20]:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Como x , y e z são as componentes do vetor \vec{R} (figura 2.6) segundo o sistema global de referência e uma vez que esse vetor é dado pela equação (2.31), pode-se rescrever a matriz $[J]$ da seguinte forma:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\vec{r} + \vec{m})}{\partial \xi} \\ \frac{\partial(\vec{r} + \vec{m})}{\partial \eta} \\ \frac{\partial(\vec{r} + \vec{m})}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Com o propósito de se poupar esforço computacional futuro, em particular na obtenção da matriz de rigidez do elemento, admite-se neste ponto que os vetores $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta}$, tangentes à superfície média do elemento, aproximem de maneira adequada os vetores $\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial \bar{R}}{\partial \eta}$, tangentes à superfície de referência $\zeta = cte$ [6]. Levando-se em conta ainda o fato de que

$$\frac{\partial \bar{F}(\xi, \eta)}{\partial \zeta} = \vec{0} \quad (4.10)$$

a expressão da matriz $[J]$ torna-se:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \bar{m}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

ou ainda

$$[J] = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

onde \vec{r}_1 e \vec{r}_2 são os vetores tangentes à superfície média do elemento, obtidos através das equações (2.9) e (2.10), e \vec{V}_3 é um vetor normal a essa superfície, obtido a partir da derivação com relação a ζ da equação (2.30). Assim:

$$\vec{V}_3(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot \vec{v}_{3i} \quad (4.13)$$

Se V_{31} , V_{32} e V_{33} são as componentes do vetor \vec{V}_3 , segundo o sistema global de referência, é possível escrever:

$$\vec{V}_3(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} V_{31}(\xi, \eta) \\ V_{32}(\xi, \eta) \\ V_{33}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{31i} \\ v_{32i} \\ v_{33i} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Portanto:

$$V_{31}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{31i} \quad (4.15)$$

$$V_{32}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{32i} \quad (4.16)$$

$$V_{33}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \cdot v_{33i} \quad (4.17)$$

Tendo sido determinada a *matriz Jacobiano da transformação* $[J]$, pode-se agora obter as derivadas dos deslocamentos u , v e w a partir da seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Nessa equação, $[J]^{-1}$ é a inversa da matriz Jacobiano que pode ainda ser escrita como sendo [6,20]:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3 & \vec{r}_3 \wedge \vec{r}_1 & \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

onde $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiano, obtido como se segue:

$$|J| = \vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3) \quad (4.20)$$

Resolvendo-se essa última equação, tem-se:

$$\begin{aligned} |J(\xi, \eta)| &= r_{11}(\xi, \eta) \cdot [r_{22}(\xi, \eta)V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta)V_{32}(\xi, \eta)] \\ &\quad - r_{12}(\xi, \eta) \cdot [r_{21}(\xi, \eta)V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta)V_{31}(\xi, \eta)] \\ &\quad + r_{13}(\xi, \eta) \cdot [r_{21}(\xi, \eta)V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta)V_{31}(\xi, \eta)] \end{aligned} \quad (4.21)$$

sendo as componentes dos vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 dadas através das equações (2.12) e (2.13) e as do vetor \vec{r}_3 , pelas equações (4.15) a (4.17).

4.2 Estado de deformação específica com relação ao sistema local de referência

De acordo com o item 3.3, o estado de deformação específica no ponto Q, segundo o sistema local de referência (x', y', z') associado ao ponto O (figura 4.1), será dado por:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \tag{4.22}$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\partial v'}{\partial y'} \tag{4.23}$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \tag{4.24}$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \tag{4.25}$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \tag{4.26}$$

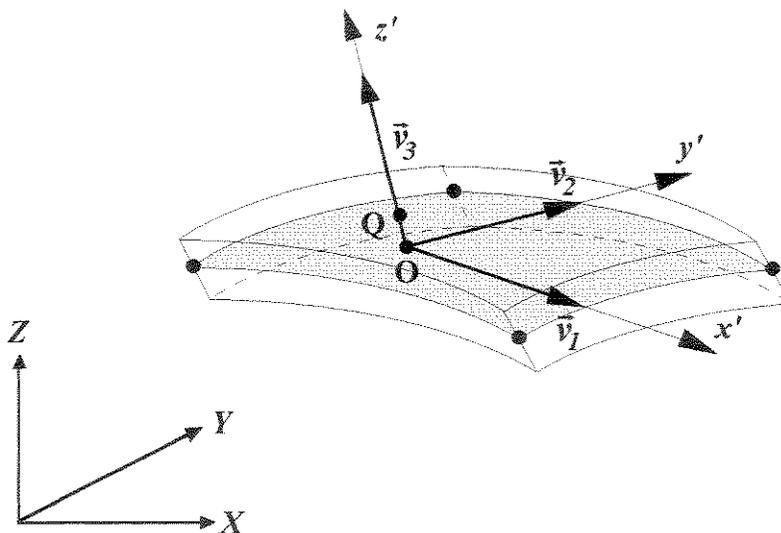


Figura 4.1 Sistema local de referência (x', y', z') associado ao ponto O.

sendo u' , v' e w' os deslocamentos apresentados pelo ponto Q, segundo o sistema local de referência.

Nota-se que para a determinação desse estado de deformação específica é necessário obter-se as derivadas dos deslocamentos locais u' , v' e w' com relação às coordenadas locais x' , y' e z' . Essas derivadas podem ser obtidas a partir das derivadas dos deslocamentos globais u , v e w com relação às coordenadas globais x , y e z , através da seguinte operação de transformação [21]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot [\theta] \quad (4.27)$$

onde $[\theta]$ é uma matriz quadrada constituída dos cossenos diretores do sistema local de referência em relação ao sistema global:

$$[\theta] = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3] \quad (4.28)$$

sendo que os versores \bar{v}_1 , \bar{v}_2 e \bar{v}_3 são dados respectivamente pelas equações (3.1), (3.2) e (2.18).

Substituindo-se na equação (4.27) a equação (4.18), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \cdot [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot [\theta] \quad (4.29)$$

De acordo com as equações (4.28) e (4.19), é possível escrever o seguinte:

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3 & \bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1 & \bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

ou ainda

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_1 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \\ \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_2 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \\ \bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) & \bar{v}_3 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) & \bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Uma vez que $(\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3)$ e $(\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1)$ são vetores tangentes à superfície média do elemento e $(\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2)$ é um vetor normal a ela, segue-se a seguinte simplificação:

$$\bar{v}_3 \cdot (\bar{r}_2 \wedge \bar{V}_3) = \bar{v}_3 \cdot (\bar{V}_3 \wedge \bar{r}_1) = \bar{v}_1 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) = \bar{v}_2 \cdot (\bar{r}_1 \wedge \bar{r}_2) = 0 \quad (4.32)$$

Portanto:

$$[\theta]^T \cdot [J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

onde

$$A_{11}(\xi, \eta) = \bar{v}_1(\xi, \eta) \cdot (\bar{r}_2(\xi, \eta) \wedge \bar{V}_3(\xi, \eta)) \quad (4.34)$$

$$A_{21}(\xi, \eta) = \bar{v}_2(\xi, \eta) \cdot (\bar{r}_2(\xi, \eta) \wedge \bar{V}_3(\xi, \eta)) \quad (4.35)$$

$$A_{12}(\xi, \eta) = \bar{v}_1(\xi, \eta) \cdot (\bar{V}_3(\xi, \eta) \wedge \bar{r}_1(\xi, \eta)) \quad (4.36)$$

$$A_{22}(\xi, \eta) = \bar{v}_2(\xi, \eta) \cdot (\bar{V}_3(\xi, \eta) \wedge \bar{r}_1(\xi, \eta)) \quad (4.37)$$

$$A_{33}(\xi, \eta) = \bar{v}_3(\xi, \eta) \cdot (\bar{r}_1(\xi, \eta) \wedge \bar{r}_2(\xi, \eta)) = \bar{v}_3(\xi, \eta) \cdot \bar{r}_3(\xi, \eta) \quad (4.38)$$

Efetuando-se os produtos especificados nas cinco últimas equações, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 A_{11}(\xi, \eta) = & v_{11}(\xi, \eta) \cdot (r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta)) - \\
 & v_{12}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) + \\
 & v_{13}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta))
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
 A_{21}(\xi, \eta) = & v_{21}(\xi, \eta) \cdot (r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta)) - \\
 & v_{22}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta) - r_{23}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta)) + \\
 & v_{23}(\xi, \eta) \cdot (r_{21}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{22}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta))
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
 A_{12}(\xi, \eta) = & v_{11}(\xi, \eta) \cdot (r_{13}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{12}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta)) - \\
 & v_{12}(\xi, \eta) \cdot (r_{13}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta) - r_{11}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta)) + \\
 & v_{13}(\xi, \eta) \cdot (r_{12}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta) - r_{11}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta))
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
 A_{22}(\xi, \eta) = & v_{21}(\xi, \eta) \cdot (r_{13}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta) - r_{12}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta)) - \\
 & v_{22}(\xi, \eta) \cdot (r_{13}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta) - r_{11}(\xi, \eta) \cdot V_{33}(\xi, \eta)) + \\
 & v_{23}(\xi, \eta) \cdot (r_{12}(\xi, \eta) \cdot V_{31}(\xi, \eta) - r_{11}(\xi, \eta) \cdot V_{32}(\xi, \eta))
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$A_{33}(\xi, \eta) = v_{31}(\xi, \eta) \cdot r_{31}(\xi, \eta) + v_{32}(\xi, \eta) \cdot r_{32}(\xi, \eta) + v_{33}(\xi, \eta) \cdot r_{33}(\xi, \eta) \tag{4.43}$$

sendo as componentes do versor \vec{v}_1 dadas pelas equações (3.5) a (3.7), do versor \vec{v}_2 , pelas equações (3.10) a (3.12), do versor \vec{v}_3 , pelas equações (2.21) a (2.23) e do vetor \vec{r}_3 , pelas equações (2.15) a (2.17).

Dessa forma, a partir das equações (4.33) e (4.29) e das componentes dos versores da matriz $[\theta]$, pode-se escrever a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

ou ainda, aproveitando o desacoplamento existente:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \cdot A_{33} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Essas duas últimas equações, escritas nessa forma, possuem a vantagem de eliminar multiplicações por zero reduzindo assim o número de operações computacionais [6].

Efetuando-se os produtos matriciais indicados anteriormente, pode-se determinar as derivadas necessárias à definição do estado de deformação específica no ponto Q, com relação ao sistema local de referência. Dessa maneira:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{11}v_{11} \quad A_{11}v_{12} \quad A_{11}v_{13} \quad A_{12}v_{11} \quad A_{12}v_{12} \quad A_{12}v_{13}] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{21}v_{11} \quad A_{21}v_{12} \quad A_{21}v_{13} \quad A_{22}v_{11} \quad A_{22}v_{12} \quad A_{22}v_{13}] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{33}v_{11} \quad A_{33}v_{12} \quad A_{33}v_{13}] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{11}v_{21} \quad A_{11}v_{22} \quad A_{11}v_{23} \quad A_{12}v_{21} \quad A_{12}v_{22} \quad A_{12}v_{23}] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21}v_{21} & A_{21}v_{22} & A_{21}v_{23} & A_{22}v_{21} & A_{22}v_{22} & A_{22}v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{33}v_{21} & A_{33}v_{22} & A_{33}v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{bmatrix}^T \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}v_{31} & A_{11}v_{32} & A_{11}v_{33} & A_{12}v_{31} & A_{12}v_{32} & A_{12}v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21}v_{31} & A_{21}v_{32} & A_{21}v_{33} & A_{22}v_{31} & A_{22}v_{32} & A_{22}v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (4.54)$$

Retomando-se as equações de (4.22) a (4.26), pode-se agora escrever:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}v_{11} & A_{11}v_{12} & A_{11}v_{13} & A_{12}v_{11} & A_{12}v_{12} & A_{12}v_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (4.55)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} A_{21}v_{21} & A_{21}v_{22} & A_{21}v_{23} & A_{22}v_{21} & A_{22}v_{22} & A_{22}v_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (4.56)$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} (A_{21}v_{11} + A_{11}v_{21}) & (A_{21}v_{12} + A_{11}v_{22}) & (A_{21}v_{13} + A_{11}v_{23}) \\ (A_{22}v_{11} + A_{12}v_{21}) & (A_{22}v_{12} + A_{12}v_{22}) & (A_{22}v_{13} + A_{12}v_{23}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{x'z'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{11}v_{31} \quad A_{11}v_{32} \quad A_{11}v_{33} \quad A_{12}v_{31} \quad A_{12}v_{32} \quad A_{12}v_{33}] \cdot \\ \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T + \frac{1}{|J|} \cdot [A_{33}v_{11} \quad A_{33}v_{12} \quad A_{33}v_{13}] \cdot \\ \left[\frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right]^T \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{y'z'} = \frac{1}{|J|} \cdot [A_{21}v_{31} \quad A_{21}v_{32} \quad A_{21}v_{33} \quad A_{22}v_{31} \quad A_{22}v_{32} \quad A_{22}v_{33}] \cdot \\ \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T + \frac{1}{|J|} \cdot [A_{33}v_{21} \quad A_{33}v_{22} \quad A_{33}v_{23}] \cdot \\ \left[\frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right]^T \end{aligned} \quad (4.59)$$

Essas equações podem ainda ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right]^T \quad (4.60)$$

onde

$$[d(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{47} & d_{48} & d_{49} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & d_{57} & d_{58} & d_{59} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

sendo os elementos da matriz $[d(\xi, \eta)]$ apresentados a seguir:

$$d_{11}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \quad (4.62)$$

$$d_{12}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \quad (4.63)$$

$$d_{13}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \quad (4.64)$$

$$d_{14}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \quad (4.65)$$

$$d_{15}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \quad (4.66)$$

$$d_{16}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \quad (4.67)$$

$$d_{21}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (4.68)$$

$$d_{22}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (4.69)$$

$$d_{23}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (4.70)$$

$$d_{24}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (4.71)$$

$$d_{25}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (4.72)$$

$$d_{26}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (4.73)$$

$$d_{31}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (4.74)$$

$$d_{32}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (4.75)$$

$$d_{33}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) + A_{11}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (4.76)$$

$$d_{34}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) v_{21}(\xi, \eta) \quad (4.77)$$

$$d_{35}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta) \quad (4.78)$$

$$d_{36}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) + A_{12}(\xi, \eta) v_{23}(\xi, \eta) \quad (4.79)$$

$$d_{41}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{31}(\xi, \eta) \quad (4.80)$$

$$d_{42}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{32}(\xi, \eta) \quad (4.81)$$

$$d_{43}(\xi, \eta) = A_{11}(\xi, \eta) v_{33}(\xi, \eta) \quad (4.82)$$

$$d_{44}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{31}(\xi, \eta) \quad (4.83)$$

$$d_{45}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{32}(\xi, \eta) \quad (4.84)$$

$$d_{46}(\xi, \eta) = A_{12}(\xi, \eta) v_{33}(\xi, \eta) \quad (4.85)$$

$$d_{47}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta) v_{11}(\xi, \eta) \quad (4.86)$$

$$d_{48}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta) v_{12}(\xi, \eta) \quad (4.87)$$

$$d_{49}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta) v_{13}(\xi, \eta) \quad (4.88)$$

$$d_{51}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta)v_{31}(\xi, \eta) \quad (4.89)$$

$$d_{52}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta)v_{32}(\xi, \eta) \quad (4.90)$$

$$d_{53}(\xi, \eta) = A_{21}(\xi, \eta)v_{33}(\xi, \eta) \quad (4.91)$$

$$d_{54}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta)v_{31}(\xi, \eta) \quad (4.92)$$

$$d_{55}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta)v_{32}(\xi, \eta) \quad (4.93)$$

$$d_{56}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta)v_{33}(\xi, \eta) \quad (4.94)$$

$$d_{57}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{21}(\xi, \eta) \quad (4.95)$$

$$d_{58}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{22}(\xi, \eta) \quad (4.96)$$

$$d_{59}(\xi, \eta) = A_{33}(\xi, \eta)v_{23}(\xi, \eta) \quad (4.97)$$

Para a determinação do estado de deformação específica no ponto Q, segundo o sistema local de referência, basta obter as derivadas dos deslocamentos globais u , v e w com relação as coordenadas ξ , η e ζ . Fazendo-se uso das equações de (3.29) a (3.31), pode-se então escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} = & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \quad (4.102)$$

$$\frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \quad (4.103)$$

$$\frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \quad (4.104)$$

$$\frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \quad (4.105)$$

$$\frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \quad (4.106)$$

As equações anteriores podem ser expressas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 [G_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (4.107)$$

sendo que $[G_i(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (9×5) dada por:

$$[G_i(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} & 0 & 0 & \zeta \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -\zeta \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} & 0 & \zeta \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -\zeta \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} & \zeta \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -\zeta \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \\ \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & \zeta \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -\zeta \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} & 0 & \zeta \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -\zeta \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} & \zeta \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -\zeta \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \\ 0 & 0 & 0 & N'_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & -N'_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \\ 0 & 0 & 0 & N'_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & -N'_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \\ 0 & 0 & 0 & N'_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} & -N'_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

Substituindo-se a equação (4.107) na equação (4.60), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot [G_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (4.109)$$

ou ainda

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 [B_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (4.110)$$

onde $[B_i(\xi, \eta, \zeta)]$ é uma matriz (5×5) dada por:

$$[B_i(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{12i} & B_{13i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{14i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{15i} \\ B_{21i} & B_{22i} & B_{23i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{24i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{25i} \\ B_{31i} & B_{32i} & B_{33i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{34i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{35i} \\ B_{41i} & B_{42i} & B_{43i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{44i} + \frac{t_i}{2} C_{44i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{45i} + \frac{t_i}{2} C_{45i} \\ B_{51i} & B_{52i} & B_{53i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{54i} + \frac{t_i}{2} C_{54i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{55i} + \frac{t_i}{2} C_{55i} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Os elementos da matriz $[B_i(\xi, \eta, \zeta)]$ são apresentados a seguir:

$$B_{11i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{11} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{14} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.112)$$

$$B_{21i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{21} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{24} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.113)$$

$$B_{31i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{31} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{34} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.114)$$

$$B_{41i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{41} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{44} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.115)$$

$$B_{51i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{51} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{54} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.116)$$

$$B_{12i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{12} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{15} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.117)$$

$$B_{22i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{22} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{25} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.118)$$

$$B_{32i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{32} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{35} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.119)$$

$$B_{42i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{42} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{45} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.120)$$

$$B_{52i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{52} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{55} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.121)$$

$$B_{13i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{13} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{16} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.122)$$

$$B_{23i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{23} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{26} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.123)$$

$$B_{33i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{33} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{36} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.124)$$

$$B_{43i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{43} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{46} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.125)$$

$$B_{53i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left(d_{53} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} + d_{56} \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} \right) \quad (4.126)$$

$$B_{14i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N'_i}{\partial \xi} (d_{11}v_{11i} + d_{12}v_{12i} + d_{13}v_{13i}) + \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} (d_{14}v_{11i} + d_{15}v_{12i} + d_{16}v_{13i}) \right] \quad (4.127)$$

$$B_{24i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N'_i}{\partial \xi} (d_{21}v_{11i} + d_{22}v_{12i} + d_{23}v_{13i}) + \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} (d_{24}v_{11i} + d_{25}v_{12i} + d_{26}v_{13i}) \right] \quad (4.128)$$

$$B_{34i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N'_i}{\partial \xi} (d_{31}v_{11i} + d_{32}v_{12i} + d_{33}v_{13i}) + \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} (d_{34}v_{11i} + d_{35}v_{12i} + d_{36}v_{13i}) \right] \quad (4.129)$$

$$B_{44i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N'_i}{\partial \xi} (d_{41}v_{11i} + d_{42}v_{12i} + d_{43}v_{13i}) + \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} (d_{44}v_{11i} + d_{45}v_{12i} + d_{46}v_{13i}) \right] \quad (4.130)$$

$$B_{54i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N'_i}{\partial \xi} (d_{51}v_{11i} + d_{52}v_{12i} + d_{53}v_{13i}) + \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} (d_{54}v_{11i} + d_{55}v_{12i} + d_{56}v_{13i}) \right] \quad (4.131)$$

$$B_{15i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N'_i}{\partial \xi} (d_{11}v_{21i} + d_{12}v_{22i} + d_{13}v_{23i}) + \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} (d_{14}v_{21i} + d_{15}v_{22i} + d_{16}v_{23i}) \right] \quad (4.132)$$

$$B_{25i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N'_i}{\partial \xi} (d_{21}v_{21i} + d_{22}v_{22i} + d_{23}v_{23i}) + \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} (d_{24}v_{21i} + d_{25}v_{22i} + d_{26}v_{23i}) \right] \quad (4.133)$$

$$B_{35i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N'_i}{\partial \xi} (d_{31}v_{21i} + d_{32}v_{22i} + d_{33}v_{23i}) + \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} (d_{34}v_{21i} + d_{35}v_{22i} + d_{36}v_{23i}) \right] \quad (4.134)$$

$$B_{45i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N'_i}{\partial \xi} (d_{41}v_{21i} + d_{42}v_{22i} + d_{43}v_{23i}) + \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} (d_{44}v_{21i} + d_{45}v_{22i} + d_{46}v_{23i}) \right] \quad (4.135)$$

$$B_{55i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial N'_i}{\partial \xi} (d_{51}v_{21i} + d_{52}v_{22i} + d_{53}v_{23i}) + \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} (d_{54}v_{21i} + d_{55}v_{22i} + d_{56}v_{23i}) \right] \quad (4.136)$$

$$C_{44i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[N'_i (d_{47}v_{11i} + d_{48}v_{12i} + d_{49}v_{13i}) \right] \quad (4.137)$$

$$C_{54i}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \left[N'_i (d_{57}v_{11i} + d_{58}v_{12i} + d_{59}v_{13i}) \right] \quad (4.138)$$

$$C_{45i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[N'_i (d_{47}v_{21i} + d_{48}v_{22i} + d_{49}v_{23i}) \right] \quad (4.139)$$

$$C_{55i}(\xi, \eta) = -\frac{1}{|J|} \left[N'_i (d_{57}v_{21i} + d_{58}v_{22i} + d_{59}v_{23i}) \right] \quad (4.140)$$

As expressões das derivadas das funções de forma presentes nos elementos da matriz $[B_i(\xi, \eta, \zeta)]$ aparecem no apêndice B.

Finalizando, a equação (4.110) pode ainda ser apresentada no seguinte formato:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \left[[B_1(\xi, \eta, \zeta)] \quad \dots \quad [B_i(\xi, \eta, \zeta)] \quad \dots \quad [B_4(\xi, \eta, \zeta)] \right] \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_4\} \end{Bmatrix} \quad (4.141)$$

ou de uma maneira compacta:

$$\{\varepsilon'\} = [B] \cdot \{a\} \quad (4.142)$$

onde $\{\varepsilon'\}$ é uma matriz coluna (5×1), constituída das deformações específicas e distorções no ponto Q, segundo o sistema local de referência, $[B]$ é uma matriz (5×20), constituída das derivadas das funções de forma, tanto para o elemento da família Serendipity quanto para o elemento da família Lagrangiana, e $\{a\}$ é uma matriz coluna (20×1), constituída dos deslocamentos nodais, tanto para o elemento da família Serendipity quanto para o elemento da família Lagrangiana. A matriz $[B]$, que relaciona o estado de deformação específica aos deslocamentos nodais, é dada por:

$$[B(\xi, \eta, \zeta)] = \left[[B_1(\xi, \eta, \zeta)] \quad \dots \quad [B_i(\xi, \eta, \zeta)] \quad \dots \quad [B_4(\xi, \eta, \zeta)] \right] \quad (4.143)$$

Capítulo 5

FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO SUPERPARAMÉTRICO

5.1 Introdução

De acordo com o sistema local de referência (x', y', z') associado ao ponto O (figura 4.1), o estado de tensão num ponto genérico Q do elemento superparamétrico é aquele representado pela figura 5.1.

Para esse estado de tensão, admitindo-se válidas as hipóteses básicas de KIRCHHOFF [3], desconsidera-se a tensão normal na direção perpendicular à superfície média do elemento, uma vez que esta é desprezível comparativamente às outras tensões. Assim:

$$\sigma_{z'z'} = 0 \quad (5.1)$$

Assumindo-se ainda que o material do elemento seja homogêneo, isotrópico e de comportamento elástico e linear [22], o estado de deformação específica no ponto Q, segundo o sistema local de referência (x', y', z') , é dado pela *Lei de Hooke Generalizada* [23]:

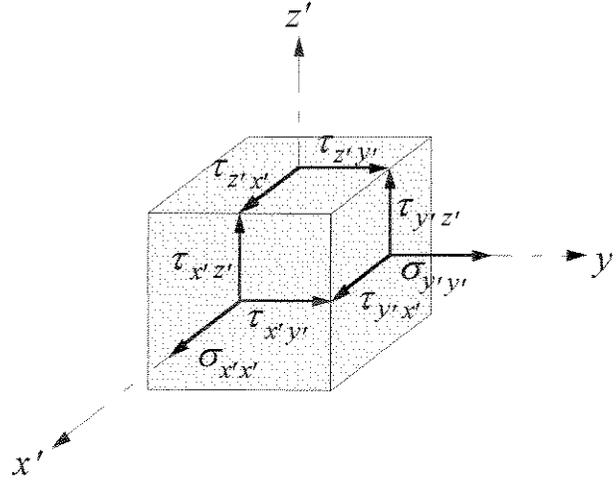


Figura 5.1 Estado de tensão no ponto Q segundo o sistema local de referência (x', y', z') associado ao ponto O.

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{x'x'} - \nu \cdot \sigma_{y'y'}) \tag{5.2}$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{y'y'} - \nu \cdot \sigma_{x'x'}) \tag{5.3}$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{x'y'} \tag{5.4}$$

$$\gamma_{x'z'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{x'z'} \tag{5.5}$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{y'z'} \tag{5.6}$$

sendo E o *Módulo de Elasticidade Longitudinal* e ν o *Coefficiente de Poisson* do material. As equações anteriores podem ainda ser dadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} \tag{5.7}$$

ou de uma maneira compacta:

$$\{\epsilon'\} = [\phi'] \cdot \{\sigma'\} \quad (5.8)$$

onde $[\phi']$ é uma matriz quadrada (5×5), simétrica, constituída das constantes elásticas do material e $\{\sigma'\}$ é uma matriz coluna (5×1), constituída das tensões atuantes no ponto Q, segundo o sistema local de referência (x', y', z'). Resolvendo-se a equação anterior para as tensões, tem-se:

$$\{\sigma'\} = [\phi']^{-1} \cdot \{\epsilon'\} \quad (5.9)$$

ou ainda

$$\{\sigma'\} = [D'] \cdot \{\epsilon'\} \quad (5.10)$$

sendo que $[D']$ é a inversa da matriz $[\phi']$ dada por:

$$[D'] = [\phi']^{-1} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Uma vez que a distribuição de tensão de cisalhamento ao longo da espessura do elemento não é uniforme, mas aproximadamente parabólica [24], introduz-se um fator k de valor igual a $6/5$ nos termos de $[D']$ relacionados às tensões de cisalhamento $\tau_{x'z'}$ e $\tau_{y'z'}$, com o intuito de se considerar o efeito dessa distribuição parabólica de tensões no cálculo da energia de deformação virtual. Portanto:

$$[D'] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Substituindo-se agora a equação (4.142) na equação (5.10), obtém-se:

$$\{\sigma'\} = [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \quad (5.13)$$

Essa equação fornece as tensões atuantes em um ponto genérico Q do elemento em função dos deslocamentos nodais.

5.2 Formulação das características do elemento superparamétrico

Considere-se um elemento finito superparamétrico submetido a forças de superfície \bar{q} e a forças de corpo \bar{b} cujas componentes com relação aos eixos x', y' e z' do sistema local de referência sejam respectivamente $q_{x'}, q_{y'}, q_{z'}$ e $b_{x'}, b_{y'}, b_{z'}$. Se os deslocamentos u', v' e w' , apresentados pelos pontos do elemento em consequência do carregamento atuante, sofrerem respectivamente os incrementos $\delta u', \delta v'$ e $\delta w'$, denominados *deslocamentos virtuais*, o estado de deformação específica nesses pontos, de acordo com as equações de (4.22) a (4.26), apresentará os seguintes incrementos:

$$\delta \epsilon_{x'} = \frac{\partial \delta u'}{\partial x'} \quad (5.14)$$

$$\delta \epsilon_{y'} = \frac{\partial \delta v'}{\partial y'} \quad (5.15)$$

$$\delta \gamma_{x'y'} = \frac{\partial \delta u'}{\partial y'} + \frac{\partial \delta v'}{\partial x'} \quad (5.16)$$

$$\delta \gamma_{x'z'} = \frac{\partial \delta u'}{\partial z'} + \frac{\partial \delta w'}{\partial x'} \quad (5.17)$$

$$\delta \gamma_{y'z'} = \frac{\partial \delta v'}{\partial z'} + \frac{\partial \delta w'}{\partial y'} \quad (5.18)$$

Esses incrementos são denominados *deformações específicas virtuais*. Desse modo, o *trabalho virtual* δW , executado pelo carregamento externo (forças de superfície e forças de corpo) como consequência dos deslocamentos virtuais, será dado por [19]:

$$\delta W = \int_A \{\delta u'\}^T \cdot \{q'\} \cdot dA + \int_V \{\delta u'\}^T \cdot \{b'\} \cdot dV \quad (5.19)$$

onde $\{\delta u'\}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída dos deslocamentos virtuais:

$$\{\delta u'\} = \begin{Bmatrix} \delta u' \\ \delta v' \\ \delta w' \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

$\{q'\}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída das componentes das forças de superfície:

$$\{q'\} = \begin{Bmatrix} q_{x'} \\ q_{y'} \\ q_{z'} \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

e $\{b'\}$ é uma matriz coluna (3×1), constituída das componentes das forças de corpo:

$$\{b'\} = \begin{Bmatrix} b_{x'} \\ b_{y'} \\ b_{z'} \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

A energia de deformação virtual δU , armazenada no elemento como consequência do estado de tensão em seus pontos e do estado de deformação específica virtual correspondente, será dada por [19]:

$$\delta U = \int_V \{\delta \epsilon'\}^T \cdot \{\sigma'\} \cdot dV \quad (5.23)$$

onde $\{\delta \epsilon'\}$ é uma matriz coluna (5×1), constituída das deformações específicas virtuais:

$$\{\delta\epsilon'\} = \begin{Bmatrix} \delta\epsilon_{x'x'} \\ \delta\epsilon_{y'y'} \\ \delta\gamma_{x'y'} \\ \delta\gamma_{x'z'} \\ \delta\gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

e $\{\sigma'\}$ é uma matriz coluna (5×1), constituída das tensões atuantes nos pontos do elemento, segundo o sistema local de referência:

$$\{\sigma'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

Aplicando-se agora o *princípio dos trabalhos virtuais* [19], é possível igualar os incrementos virtuais δW e δU :

$$\delta W = \delta U \quad (5.26)$$

ou ainda

$$\int_A \{\delta u'\}^T \cdot \{q'\} \cdot dA + \int_V \{\delta u'\}^T \cdot \{b'\} \cdot dV = \int_V \{\delta\epsilon'\}^T \cdot \{\sigma'\} \cdot dV \quad (5.27)$$

A equação (3.36) fornece os deslocamentos $\{u\}$ dos pontos do elemento, com relação ao sistema global de referência. Necessita-se entretanto dos deslocamentos $\{u'\}$, com relação ao sistema local de referência. Para tanto, emprega-se a seguinte transformação:

$$\{u'\} = [\theta]^T \cdot \{u\} = [\theta]^T \cdot [N'] \cdot \{a\} \quad (5.28)$$

onde $[\theta]$ já foi definida anteriormente através da equação (4.28). Da mesma forma, pode-se escrever:

$$\{q'\} = [\theta]^T \cdot \{q\} \quad (5.29)$$

e

$$\{b'\} = [\theta]^T \cdot \{b\} \quad (5.30)$$

sendo que $\{q\}$ e $\{b\}$ são, respectivamente, as forças de superfície e de corpo aplicadas no elemento, de acordo com o sistema global de referência. Assim:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

e

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

Considerando-se as equações (5.28) e (4.142), os deslocamentos virtuais $\{\delta u'\}$ e as deformações específicas virtuais $\{\delta \varepsilon'\}$ podem ser dados por [15]:

$$\{\delta u'\} = [\theta]^T \cdot [N'] \cdot \{\delta a\} \quad (5.33)$$

e

$$\{\delta \varepsilon'\} = [B] \cdot \{\delta a\} \quad (5.34)$$

onde $\{\delta a\}$ é a matriz coluna, constituída dos deslocamentos virtuais correspondentes aos deslocamentos nodais.

Substituindo-se agora as equações (5.13), (5.29), (5.30), (5.33) e (5.34) na equação (5.27), tem-se:

$$\int_A \{\delta a\}^T \cdot [N']^T \cdot [\theta] \cdot [\theta]^T \{q\} \cdot dA + \int_V \{\delta a\}^T \cdot [N']^T \cdot [\theta] \cdot [\theta]^T \{b\} \cdot dV = \int_V \{\delta a\}^T \cdot [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \cdot dV \quad (5.35)$$

Como $[\theta]$ é uma matriz quadrada ortogonal (os vetores que constituem suas colunas são ortonormais), pode-se escrever:

$$[\theta] \cdot [\theta]^T = [I] \quad (5.36)$$

sendo $[I]$ a matriz identidade. Assim, a equação (5.35) torna-se:

$$\int_A \{\delta a\}^T \cdot [N']^T \cdot \{q\} \cdot dA + \int_V \{\delta a\}^T \cdot [N']^T \cdot \{b\} \cdot dV = \int_V \{\delta a\}^T \cdot [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \cdot dV \quad (5.37)$$

ou ainda, uma vez que $\{\delta a\}^T$ e $\{a\}$ são constantes para as integrações na área e no volume:

$$\{\delta a\}^T \cdot \left(\int_A [N']^T \cdot \{q\} \cdot dA + \int_V [N']^T \cdot \{b\} \cdot dV \right) = \{\delta a\}^T \cdot \left(\int_V [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot dV \right) \cdot \{a\} \quad (5.38)$$

Como a equação anterior é válida quaisquer que sejam os deslocamentos virtuais $\{\delta a\}$, ainda é possível escrever:

$$\int_A [N']^T \cdot \{q\} \cdot dA + \int_V [N']^T \cdot \{b\} \cdot dV = \left(\int_V [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot dV \right) \cdot \{a\} \quad (5.39)$$

Nessa equação,

$$\int_A [N']^T \cdot \{q\} \cdot dA = \{f_q^e\} \quad (5.40)$$

é uma matriz coluna de ordem (20×1) , tanto para o elemento da família Serendipity quanto para o elemento da família Lagrangiana, correspondente às forças de superfície,

$$\int_V [N']^T \cdot \{b\} \cdot dV = \{f_b^e\} \quad (5.41)$$

é uma matriz coluna de ordem (20×1) , tanto para o elemento da família Serendipity quanto para o elemento da família Lagrangiana, correspondente às forças de corpo e finalmente

$$\int_V [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot dV = [K^e] \quad (5.42)$$

é uma matriz quadrada, simétrica, de ordem (20×20) , tanto para o elemento da família Serendipity quanto para o elemento da família Lagrangiana, denominada *matriz de rigidez* do elemento. Dessa forma, a equação (5.39) pode ser rescrita como se segue:

$$[K^e] \cdot \{a\} = \{f_a^e\} + \{f_b^e\} \quad (5.43)$$

5.3 Determinação da matriz de rigidez do elemento superparamétrico

O diferencial de volume da equação (5.42), a qual possibilita determinar a matriz de rigidez do elemento, é dado com relação ao sistema global de referência. Portanto:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \quad (5.44)$$

Como os termos de $[B]$ são funções das coordenadas ξ , η e ζ , o diferencial de volume deve ser dado segundo esse sistema de referência. Para efetuar tal transformação, utiliza-se o procedimento padrão que envolve o determinante $|J(\xi, \eta)|$ da matriz Jacobiano, dado através da equação (4.21). Assim [20]:

$$dV = |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.45)$$

e a equação (5.42) pode ser rescrita como se segue:

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D'] [B] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.46)$$

ou ainda, pela substituição da matriz $[B]$ dada a partir da equação (4.143):

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B_1(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_i(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_4(\xi, \eta, \zeta)]^T \end{bmatrix} \cdot [D'] \cdot \begin{bmatrix} [B_1(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & [B_j(\xi, \eta, \zeta)] \\ \cdots & [B_4(\xi, \eta, \zeta)] \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.47)$$

Essa equação, uma vez resolvida, levará à matriz de rigidez do elemento superparamétrico que será dada por:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & \cdots & [K_{1j}] & \cdots & [K_{14}] \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [K_{i1}] & \cdots & [K_{ij}] & \cdots & [K_{i4}] \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [K_{41}] & \cdots & [K_{4j}] & \cdots & [K_{44}] \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

5.3.1 Determinação da submatriz $[K_{ij}]$

De acordo com a equação (5.47), a submatriz $[K_{ij}]$ é dada pela seguinte expressão:

$$[K_{ij}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i(\xi, \eta, \zeta)]^T [D'] [B_j(\xi, \eta, \zeta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.49)$$

ou ainda, fazendo-se uso das equações (4.111) e (5.12):

$$[K_{ij}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{21i} & B_{31i} & B_{41i} & B_{51i} \\ B_{12i} & B_{22i} & B_{32i} & B_{42i} & B_{52i} \\ B_{13i} & B_{23i} & B_{33i} & B_{43i} & B_{53i} \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{14i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{24i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{34i} & (\zeta \frac{t_i}{2} B_{44i} + \frac{t_i}{2} C_{44i}) & (\zeta \frac{t_i}{2} B_{54i} + \frac{t_i}{2} C_{54i}) \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{15i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{25i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{35i} & (\zeta \frac{t_i}{2} B_{45i} + \frac{t_i}{2} C_{45i}) & (\zeta \frac{t_i}{2} B_{55i} + \frac{t_i}{2} C_{55i}) \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \quad (5.50)$$

$$\begin{bmatrix} B_{11j} & B_{12j} & B_{13j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{14j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{15j} \\ B_{21j} & B_{22j} & B_{23j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{24j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{25j} \\ B_{31j} & B_{32j} & B_{33j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{34j} & \zeta \frac{t_j}{2} B_{35j} \\ B_{41j} & B_{42j} & B_{43j} & (\zeta \frac{t_j}{2} B_{44j} + \frac{t_j}{2} C_{44j}) & (\zeta \frac{t_j}{2} B_{45j} + \frac{t_j}{2} C_{45j}) \\ B_{51j} & B_{52j} & B_{53j} & (\zeta \frac{t_j}{2} B_{54j} + \frac{t_j}{2} C_{54j}) & (\zeta \frac{t_j}{2} B_{55j} + \frac{t_j}{2} C_{55j}) \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se:

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

onde

$$k_{11} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{21j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{41j} + B_{51i} \cdot B_{51j}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.52)$$

$$k_{21} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{21j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{41j} + B_{52i} \cdot B_{51j}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.53)$$

$$k_{31} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{21j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{31j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{41j} + B_{53i} \cdot B_{51j}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.54)$$

$$k_{41} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{21j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{31j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{44i} \cdot B_{41j} + B_{54i} \cdot B_{51j}) + (C_{44i} \cdot B_{41j} + C_{54i} \cdot B_{51j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.55)$$

$$k_{51} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{11j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{21j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{31j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{45i} \cdot B_{41j} + B_{55i} \cdot B_{51j}) + (C_{45i} \cdot B_{41j} + C_{55i} \cdot B_{51j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.56)$$

$$k_{12} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{22j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{42j} + B_{51i} \cdot B_{52j}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.57)$$

$$k_{22} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{22j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{42j} + B_{52i} \cdot B_{52j}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.58)$$

$$k_{32} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{22j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{32j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{42j} + B_{53i} \cdot B_{52j}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.59)$$

$$k_{42} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \xi \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{22j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{32j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{44i} \cdot B_{42j} + B_{54i} \cdot B_{52j}) + (C_{44i} \cdot B_{42j} + C_{54i} \cdot B_{52j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.60)$$

$$k_{52} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{12j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{22j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{32j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{45i} \cdot B_{42j} + B_{55i} \cdot B_{52j}) + (C_{45i} \cdot B_{42j} + C_{55i} \cdot B_{52j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.61)$$

$$k_{13} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{23j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{33j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot B_{43j} + B_{51i} \cdot B_{53j}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.62)$$

$$k_{23} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{23j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{33j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot B_{43j} + B_{52i} \cdot B_{53j}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.63)$$

$$k_{33} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{23j} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{33j}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot B_{43j} + B_{53i} \cdot B_{53j}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned}
 k_{43} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{23j} + \right. \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{33j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{44i} \cdot B_{43j} + B_{54i} \cdot B_{53j}) + \right. \\
 \left. (C_{44i} \cdot B_{43j} + C_{54i} \cdot B_{53j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned}
 k_{53} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{13j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{23j} + \right. \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{33j}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{45i} \cdot B_{43j} + B_{55i} \cdot B_{53j}) + \right. \\
 \left. (C_{45i} \cdot B_{43j} + C_{55i} \cdot B_{53j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned}
 k_{14} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{24j} + \right. \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{41i} \cdot B_{44j} + B_{51i} \cdot B_{54j}) + \right. \\
 \left. (B_{41i} \cdot C_{44j} + B_{51i} \cdot C_{54j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned}
 k_{24} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{24j} + \right. \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{42i} \cdot B_{44j} + B_{52i} \cdot B_{54j}) + \right. \\
 \left. (B_{42i} \cdot C_{44j} + B_{52i} \cdot C_{54j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned}
 k_{34} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{24j} + \right. \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{43i} \cdot B_{44j} + B_{53i} \cdot B_{54j}) + \right. \\
 \left. (B_{43i} \cdot C_{44j} + B_{53i} \cdot C_{54j})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned}
 k_{44} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{24j} + \\
 & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{44i} \cdot B_{44j} + B_{54i} \cdot B_{54j}) + \\
 & \zeta (B_{44i} \cdot C_{44j} + B_{54i} \cdot C_{54j} + C_{44i} \cdot B_{44j} + C_{54i} \cdot B_{54j}) + \\
 & (C_{44i} \cdot C_{44j} + C_{54i} \cdot C_{54j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

$$\begin{aligned}
 k_{54} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{14j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{24j} + \\
 & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{34j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{45i} \cdot B_{44j} + B_{55i} \cdot B_{54j}) + \\
 & \zeta (B_{45i} \cdot C_{44j} + B_{55i} \cdot C_{54j} + C_{45i} \cdot B_{44j} + C_{55i} \cdot B_{54j}) + \\
 & (C_{45i} \cdot C_{44j} + C_{55i} \cdot C_{54j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

$$\begin{aligned}
 k_{15} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot B_{25j} + \\
 & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{41i} \cdot B_{45j} + B_{51i} \cdot B_{55j}) + \\
 & (B_{41i} \cdot C_{45j} + B_{51i} \cdot C_{55j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

$$\begin{aligned}
 k_{25} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot B_{25j} + \\
 & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{42i} \cdot B_{45j} + B_{52i} \cdot B_{55j}) + \\
 & (B_{42i} \cdot C_{45j} + B_{52i} \cdot C_{55j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

$$\begin{aligned}
 k_{35} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta \frac{t_j}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot B_{25j} + \\
 & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{43i} \cdot B_{45j} + B_{53i} \cdot B_{55j}) + \\
 & (B_{43i} \cdot C_{45j} + B_{53i} \cdot C_{55j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

$$\begin{aligned}
 k_{45} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot B_{25j} + \\
 & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{44i} \cdot B_{45j} + B_{54i} \cdot B_{55j}) + \\
 & \zeta (B_{44i} \cdot C_{45j} + B_{54i} \cdot C_{55j} + C_{44i} \cdot B_{45j} + C_{54i} \cdot B_{55j}) + \\
 & (C_{44i} \cdot C_{45j} + C_{54i} \cdot C_{55j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned}
 k_{55} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ & \zeta^2 \frac{t_i \cdot t_j}{4(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot B_{15j} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot B_{25j} + \\
 & \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot B_{35j}] + \frac{t_i \cdot t_j}{8k(1+\nu)} \cdot [\zeta^2 (B_{45i} \cdot B_{45j} + B_{55i} \cdot B_{55j}) + \\
 & \zeta (B_{45i} \cdot C_{45j} + B_{55i} \cdot C_{55j} + C_{45i} \cdot B_{45j} + C_{55i} \cdot B_{55j}) + \\
 & (C_{45i} \cdot C_{45j} + C_{55i} \cdot C_{55j})] \} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (5.76)$$

Para se obter efetivamente a matriz de rigidez, realiza-se a integração na direção ζ analiticamente enquanto que nas outras duas direções ξ e η , numericamente, utilizando-se o processo de *quadratura de Gauss* [15]. Portanto, observando-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 d\zeta &= 2 \\
 \int_{-1}^1 \zeta \cdot d\zeta &= 0 \\
 \int_{-1}^1 \zeta^2 \cdot d\zeta &= \frac{2}{3}
 \end{aligned} \quad (5.77)$$

e ainda, considerando-se que ξ_p e η_p sejam as coordenadas do ponto de integração p , W_p o fator de ponderação associado a esse ponto e m o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se [15]:

$$\begin{aligned}
k_{11} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21j}(\xi_p, \eta_p) + \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31j}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
\left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
\left. B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{5.78}$$

$$\begin{aligned}
k_{21} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21j}(\xi_p, \eta_p) + \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31j}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
\left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
\left. B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{5.79}$$

$$\begin{aligned}
k_{31} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{11j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
(\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{21j}(\xi_p, \eta_p) + \\
\left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{31j}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
\left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
\left. B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{5.80}$$

$$\begin{aligned}
k_{41} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
\end{aligned} \tag{5.81}$$

$$k_{51} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{41j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{51j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.82)$$

$$k_{12} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.83)$$

$$k_{22} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.84)$$

$$k_{32} = E \cdot \sum_{p=1}^m \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{12j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{22j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{32j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.85)$$

$$k_{42} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.86)$$

$$k_{52} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{42j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{52j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.87)$$

$$k_{13} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.88)$$

$$k_{23} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.89)$$

$$k_{33} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{13j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{23j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{33j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.90)$$

$$k_{43} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.91)$$

$$k_{33} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{43j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{53j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.92)$$

$$k_{14} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.93)$$

$$k_{24} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.94)$$

$$k_{34} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.95)$$

$$k_{44} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{14j}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{24j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{34j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{54j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.96)$$

$$\begin{aligned}
 k_{54} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{14j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{24j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 B_{35i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{34j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 B_{44j}(\xi_p, \eta_p) + B_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{54j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} \cdot \\
 \left. [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{44j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{54j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot \\
 |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{5.97}$$

$$\begin{aligned}
 k_{15} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{5.98}$$

$$\begin{aligned}
 k_{25} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{5.99}$$

$$\begin{aligned}
 k_{35} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^m t_j \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{5.100}$$

$$\begin{aligned}
 k_{45} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{15j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{14i}(\xi_p, \eta_p) + B_{24i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{25j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 B_{34i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{35j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 B_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{55j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} \cdot \\
 \left. [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot \\
 |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{5.101}$$

$$\begin{aligned}
 k_{55} = E \cdot \sum_{p=1}^m \left\{ \frac{t_i \cdot t_j}{6(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{15j}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{15i}(\xi_p, \eta_p) + B_{25i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot B_{25j}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 B_{35i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{35j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{12k(1+\nu)} \cdot [B_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 B_{45j}(\xi_p, \eta_p) + B_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot B_{55j}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{t_i \cdot t_j}{4k(1+\nu)} \cdot \\
 \left. [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{45j}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot C_{55j}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot \\
 |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{5.102}$$

5.4 Determinação do vetor de carga do elemento superparamétrico: $\{f^e\}$

Nas equações (5.40) e (5.41), que possibilitam determinar o vetor de carga do elemento, o diferencial de volume assim como o diferencial de área são dados com relação ao sistema global de referência. Contudo, uma vez que os elementos da matriz $[N']$ são funções das coordenadas ξ e η , os diferenciais de volume e de área devem ser dados segundo esse sistema de referência. O diferencial de volume já foi estabelecido anteriormente através da equação (5.45) e para a obtenção do diferencial de área, utiliza-se o procedimento padrão que envolve a norma do vetor $\vec{r}_3(\xi, \eta)$, normal à superfície média do elemento. Essa norma é obtida a partir da equação (2.19). Dessa maneira, tem-se [20]:

$$dA = \|\vec{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \tag{5.103}$$

5.4.1 Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento: $\{f_q^e\}$

Admitindo-se, por simplicidade, que a carga esteja distribuída na superfície média do elemento na qual $\zeta = 0$, os deslocamentos de interesse serão aqueles relacionados aos pontos dessa superfície. Assim, a submatriz $[N'_i(\xi, \eta, \zeta)]$ (equação 3.33) que compõe a matriz $[N']$ da equação (5.40) torna-se:

$$[N'_i(\xi, \eta, \zeta)] = [N'_i(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} N'_i(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_i(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N'_i(\xi, \eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.104)$$

Se, por outro lado, \bar{q}_i , de componentes q_{xi} , q_{yi} e q_{zi} segundo o sistema global de referência, for a carga distribuída associada ao nó i , a carga \bar{q} distribuída na superfície média do elemento pode ser interpolada a partir das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ das famílias Serendipity ou Lagrangiana, utilizadas na definição da geometria do mesmo (grupo de equações 2.3 ou 2.4 respectivamente). Portanto:

$$\bar{q}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{q}_i \quad (5.105)$$

Chamando-se de q_x , q_y e q_z as componentes de \bar{q} , segundo o sistema global de referência, essa última equação pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\bar{q}(\xi, \eta) = \{q(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} q_x(\xi, \eta) \\ q_y(\xi, \eta) \\ q_z(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{zi} \end{Bmatrix} \quad (5.106)$$

ou ainda

$$q_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot q_{xi} \quad (5.107)$$

$$q_y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot q_{yi} \quad (5.108)$$

$$q_z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot q_{zi} \quad (5.109)$$

As equações anteriores podem ser apresentadas na seguinte forma matricial:

$$\{q(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} q_x(\xi, \eta) \\ q_y(\xi, \eta) \\ q_z(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \left[[N_1(\xi, \eta)] \quad \dots \quad [N_i(\xi, \eta)] \quad \dots \quad [N_n(\xi, \eta)] \right] \cdot \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \vdots \\ \{q_i\} \\ \vdots \\ \{q_n\} \end{Bmatrix} \quad (5.110)$$

onde $[N_i(\xi, \eta)]$ é dada pela equação (5.104), sendo que as funções de forma lineares $N'_i(\xi, \eta)$, associadas ao campo de deslocamento, são substituídas pelas funções de forma quadráticas $N_i(\xi, \eta)$, associadas à geometria do elemento, e $\{q_i\}$ é uma matriz coluna (5x1), constituída das componentes da carga distribuída associada ao nó i , segundo o sistema global de referência. Assim:

$$\{q_i\} = \begin{Bmatrix} q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{zi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.111)$$

Levando-se em conta as equações (5.103), (5.104) e (5.110), a equação (5.40) pode agora ser escrita como sendo:

$$\{f_q^e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} [N'_1(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [N'_i(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [N'_4(\xi, \eta)]^T \end{Bmatrix} \cdot \left[[N_1(\xi, \eta)] \quad \dots \quad [N_j(\xi, \eta)] \quad \dots \right. \\ \left. [N_n(\xi, \eta)] \right] \cdot \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \vdots \\ \{q_j\} \\ \vdots \\ \{q_n\} \end{Bmatrix} \cdot \|\vec{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.112)$$

Essa equação, uma vez resolvida, levará ao vetor de carga do elemento correspondente à ação da carga distribuída sobre suas faces externas:

$$\{f_q^e\} = \begin{Bmatrix} \{f_{q_1}\} \\ \vdots \\ \{f_{q_i}\} \\ \vdots \\ \{f_{q_4}\} \end{Bmatrix} \quad (5.113)$$

5.4.1.1 Determinação da submatriz $\{f_{q_i}\}$

A submatriz $\{f_{q_i}\}$ está relacionada ao nó genérico i do elemento superparamétrico e é dada por:

$$\{f_{q_i}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N'_i(\xi, \eta)]^T \cdot \sum_{j=1}^n [N_j(\xi, \eta)] \cdot \{q_j\} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.114)$$

ou ainda, considerando-se as equações (5.104) e (5.111):

$$\{f_{q_i}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N'_i(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & N'_i(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N'_i(\xi, \eta) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} N_j(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_j(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_j(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_j(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_j(\xi, \eta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{xy} \\ q_{yx} \\ q_{zy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.115)$$

Resolvendo-se essa equação, obtém-se:

$$\{f_{q_i}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (5.116)$$

onde

$$f_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i'(\xi, \eta) \cdot \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta) \cdot q_{xj} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.117)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i'(\xi, \eta) \cdot \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta) \cdot q_{yj} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.118)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i'(\xi, \eta) \cdot \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta) \cdot q_{zj} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.119)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.120)$$

Fazendo-se agora a integração numérica nas direções ξ e η , com m sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = \sum_{p=1}^m N_i'(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{j=1}^n N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{xj} \cdot \|\bar{r}_3(\xi_p, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (5.121)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^m N_i'(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{j=1}^n N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{yj} \cdot \|\bar{r}_3(\xi_p, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (5.122)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^m N_i'(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{j=1}^n N_j(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{zj} \cdot \|\bar{r}_3(\xi_p, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (5.123)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.124)$$

5.4.2 Determinação do vetor de carga correspondente à ação das forças de corpo: $\{f_b^e\}$

Se b_x , b_y e b_z são as componentes da força de corpo \bar{b} , segundo o sistema global de referência, a equação (5.41) pode, fazendo-se uso das equações (3.37) e (5.45), ser escrita como se segue:

$$\{f_b^e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [N_1'(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_i'(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_4'(\xi, \eta, \zeta)]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.125)$$

Uma vez resolvida essa equação, será determinado o vetor de carga do elemento correspondente à ação das forças de corpo:

$$\{f_b^e\} = \begin{Bmatrix} \{f_{b_1}\} \\ \vdots \\ \{f_{b_i}\} \\ \vdots \\ \{f_{b_n}\} \end{Bmatrix} \quad (5.126)$$

5.4.2.1 Determinação da submatriz $\{f_{b_i}\}$

A submatriz $\{f_{b_i}\}$ está relacionada ao nó genérico i do elemento superparamétrico e é dada por:

$$\{f_{b_i}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_i'(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i'(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i'(\xi, \eta) \\ \zeta \cdot N_i'(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} & \zeta \cdot N_i'(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} & \zeta \cdot N_i'(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \\ -\zeta \cdot N_i'(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} & -\zeta \cdot N_i'(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} & -\zeta \cdot N_i'(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.127)$$

Resolvendo-se essa equação, obtém-se:

$$\{f_b\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (5.128)$$

onde

$$f_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N'_i(\xi, \eta) \cdot b_x \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.129)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N'_i(\xi, \eta) \cdot b_y \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.130)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N'_i(\xi, \eta) \cdot b_z \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.131)$$

$$f_4 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\zeta \cdot \frac{\zeta}{2} \cdot N'_i(\xi, \eta) \cdot (v_{11i} b_x + v_{12i} b_y + v_{13i} b_z)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.132)$$

$$f_5 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [-\zeta \cdot \frac{\zeta}{2} \cdot N'_i(\xi, \eta) \cdot (v_{21i} b_x + v_{22i} b_y + v_{23i} b_z)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.133)$$

Fazendo-se agora a integração analítica na direção ζ (equações 5.77) e a integração numérica nas direções ξ e η , com m sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = 2 \cdot \sum_{p=1}^m N'_i(\xi_p, \eta_p) \cdot b_x \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.134)$$

$$f_2 = 2 \cdot \sum_{p=1}^m N'_i(\xi_p, \eta_p) \cdot b_y \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.135)$$

$$f_3 = 2 \cdot \sum_{p=1}^m N'_i(\xi_p, \eta_p) \cdot b_z \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (5.136)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.137)$$

5.4.3 Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces laterais do elemento: $\{f_l^e\}$

Admitindo-se, por simplicidade, que a carga esteja distribuída ao longo dos lados da superfície média do elemento, os deslocamentos de interesse serão aqueles relacionados aos pontos desses lados. Assim, as submatrizes $[N'_i(\xi, \eta, \zeta)]$ (equação 3.33) que compõem a matriz $[N']$ da equação (5.40), para cada lado do elemento, tornam-se:

(a) para o lado 1, no qual $\zeta = 0$ e $\eta = -1$:

$$[N'_i(\xi, \eta, \zeta)] = [N'_i(\xi, -1)] = \begin{bmatrix} N'_i(\xi, -1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_i(\xi, -1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N'_i(\xi, -1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.138)$$

com i assumindo os valores 1 e 2, correspondentes aos nós desse lado.

(b) para o lado 2, no qual $\zeta = 0$ e $\xi = +1$:

$$[N'_i(\xi, \eta, \zeta)] = [N'_i(1, \eta)] = \begin{bmatrix} N'_i(1, \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_i(1, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N'_i(1, \eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.139)$$

com i assumindo os valores 2 e 3, correspondentes aos nós desse lado.

(c) para o lado 3, no qual $\zeta = 0$ e $\eta = +1$:

$$[N'_i(\xi, \eta, \zeta)] = [N'_i(\xi, 1)] = \begin{bmatrix} N'_i(\xi, 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_i(\xi, 1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N'_i(\xi, 1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.140)$$

com i assumindo os valores 3 e 4, correspondentes aos nós desse lado.

(d) para o lado 4, no qual $\zeta = 0$ e $\xi = -1$:

$$[N'_i(\xi, \eta, \zeta)] = [N'_i(-1, \eta)] = \begin{bmatrix} N'_i(-1, \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_i(-1, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N'_i(-1, \eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.141)$$

com i assumindo os valores 1 e 4, correspondentes aos nós desse lado.

Supondo agora $\{\bar{t}_j\}$ como sendo uma matriz coluna (3x1), constituída das componentes da carga distribuída associada a cada lado j do elemento, segundo o sistema global de referência, a equação (5.40) terá de ser resolvida para cada um desses lados, efetuando-se a integração ao longo de cada um deles. Portanto:

$$\{f t^e\} = \sum_{j=1}^4 \int_{S_j} [N'_j]^T \cdot \{\bar{t}_j\} \cdot dS_j \quad (5.142)$$

onde $[N'_j]$ é uma matriz constituída pelas submatrizes $[N'_i]$ que por sua vez contêm as funções de forma lineares (equações 3.25) associadas aos nós i , presentes em cada lado j do elemento.

Efetuando-se o somatório na equação anterior, chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \{f t^e\} = & \int_{S_1} [N'_1]^T \cdot \{\bar{t}_1\} \cdot dS_1 + \int_{S_2} [N'_2]^T \cdot \{\bar{t}_2\} \cdot dS_2 + \\ & \int_{S_3} [N'_3]^T \cdot \{\bar{t}_3\} \cdot dS_3 + \int_{S_4} [N'_4]^T \cdot \{\bar{t}_4\} \cdot dS_4 \end{aligned} \quad (5.143)$$

onde S_1, S_2, S_3 e S_4 são, respectivamente, os comprimentos dos lados 1, 2, 3 e 4, e dS_1, dS_2, dS_3 e dS_4 , os seus correspondentes diferenciais dados por [15]:

$$dS_1 = \|\bar{r}_1(\xi, -1)\| \cdot d\xi \quad (5.144)$$

$$dS_2 = \|\bar{r}_2(1, \eta)\| \cdot d\eta \quad (5.145)$$

$$dS_3 = \|\bar{r}_1(\xi, 1)\| \cdot d\xi \quad (5.146)$$

$$dS_4 = \|\bar{r}_2(-1, \eta)\| \cdot d\eta \quad (5.147)$$

sendo que $\|\bar{r}_1\|$ e $\|\bar{r}_2\|$ são as normas euclidianas dos vetores \bar{r}_1 e \bar{r}_2 (tangentes ao elemento), obtidas a partir das equações (2.9) e (2.10). Assim:

$$\|\bar{r}_1(\xi, -1)\| = \sqrt{r_{11}^2(\xi, -1) + r_{12}^2(\xi, -1) + r_{13}^2(\xi, -1)} \quad (5.148)$$

$$\|\bar{r}_2(1, \eta)\| = \sqrt{r_{21}^2(1, \eta) + r_{22}^2(1, \eta) + r_{23}^2(1, \eta)} \quad (5.149)$$

$$\|\vec{r}_1(\xi, 1)\| = \sqrt{r_{11}^2(\xi, 1) + r_{12}^2(\xi, 1) + r_{13}^2(\xi, 1)} \quad (5.150)$$

$$\|\vec{r}_2(-1, \eta)\| = \sqrt{r_{21}^2(-1, \eta) + r_{22}^2(-1, \eta) + r_{23}^2(-1, \eta)} \quad (5.151)$$

5.4.3.1 Determinação do vetor de carga associado ao lado 1

De acordo com a equação (5.143), o vetor de carga associado ao lado 1 é dado por:

$$\{f1\} = \int_{S_1} [N_1^T] \cdot \{\bar{t}1\} \cdot dS_1 \quad (5.152)$$

onde $\{\bar{t}1\}$ é uma matriz coluna (3x1), constituída das componentes da carga distribuída no lado 1, segundo o sistema global de referência. Essas componentes podem ser interpoladas a partir das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ das famílias Serendipity ou Lagrangiana, utilizadas na definição da geometria do elemento e associadas aos nós desse lado, levando à seguinte equação matricial:

$$\{\bar{t}1\} = \begin{bmatrix} [N_1(\xi, -1)] & [N_2(\xi, -1)] & [N_5(\xi, -1)] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\bar{t}1_1\} \\ \{\bar{t}1_2\} \\ \{\bar{t}1_3\} \end{Bmatrix} \quad (5.153)$$

sendo

$$\{\bar{t}1_1\} = \begin{Bmatrix} \bar{t}1_{1x} \\ \bar{t}1_{1y} \\ \bar{t}1_{1z} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.154)$$

$$\{\bar{t}1_2\} = \begin{Bmatrix} \bar{t}1_{2x} \\ \bar{t}1_{2y} \\ \bar{t}1_{2z} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.155)$$

$$\{\bar{t}1_5\} = \begin{Bmatrix} \bar{t}1_{5x} \\ \bar{t}1_{5y} \\ \bar{t}1_{5z} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.156)$$

com $\bar{t}1_{1x}$, $\bar{t}1_{1y}$, $\bar{t}1_{1z}$, $\bar{t}1_{2x}$, $\bar{t}1_{2y}$, $\bar{t}1_{2z}$, $\bar{t}1_{5x}$, $\bar{t}1_{5y}$ e $\bar{t}1_{5z}$ sendo as componentes, segundo o sistema global de referência, da carga distribuída no lado 1 associada aos nós 1, 2 e 5 respectivamente.

Substituindo-se as equações (5.144) e (5.153) na equação (5.152), obtém-se:

$$\{f1\} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [N'_1(\xi, -1)]^T \\ [N'_2(\xi, -1)]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [N_1(\xi, -1)] & [N_2(\xi, -1)] & [N_5(\xi, -1)] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\bar{t}1_1\} \\ \{\bar{t}1_2\} \\ \{\bar{t}1_5\} \end{Bmatrix} \cdot \|\bar{r}_1(\xi, -1)\| \cdot d\xi \quad (5.157)$$

Essa equação, uma vez resolvida, levará ao vetor de carga correspondente à ação da carga distribuída sobre o lado 1 do elemento:

$$\{f1\} = \begin{Bmatrix} \{f1_1\} \\ \{f1_i\} \end{Bmatrix} \quad (5.158)$$

5.4.3.1.1 Determinação da submatriz $\{f1_i\}$

A submatriz $\{f1_i\}$ está relacionada ao nó i , o qual assume os valores 1 e 2. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao lado 1 do elemento superparamétrico e é dada por:

$$\{f1_i\} = \int_{-1}^1 [N'_i(\xi, -1)]^T \cdot \left[[N_1(\xi, -1)] \cdot \{\bar{t}1_1\} + [N_2(\xi, -1)] \cdot \{\bar{t}1_2\} + [N_5(\xi, -1)] \cdot \{\bar{t}1_5\} \right] \cdot \|\bar{r}_1(\xi, -1)\| \cdot d\xi \quad (5.159)$$

ou ainda, utilizando-se as equações (5.138), (5.154), (5.155) e (5.156):

$$\{f_{1_i}\} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N'_i(\xi, -1) & 0 & 0 \\ 0 & N'_i(\xi, -1) & 0 \\ 0 & 0 & N'_i(\xi, -1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_1(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1x}} + N_2(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2x}} + N_5(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{5x}} \\ N_1(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1y}} + N_2(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2y}} + N_5(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{5y}} \\ N_1(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1z}} + N_2(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2z}} + N_5(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{5z}} \end{Bmatrix} \cdot \|\bar{r}_1(\xi, -1)\| \cdot d\xi \quad (5.160)$$

Resolvendo-se essa equação, obtém-se:

$$\{f_{1_i}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (5.161)$$

onde

$$f_1 = \int_{-1}^1 N'_i(\xi, -1) \cdot [N_1(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1x}} + N_2(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2x}} + N_5(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{5x}}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi, -1)\| \cdot d\xi \quad (5.162)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 N'_i(\xi, -1) \cdot [N_1(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1y}} + N_2(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2y}} + N_5(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{5y}}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi, -1)\| \cdot d\xi \quad (5.163)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 N'_i(\xi, -1) \cdot [N_1(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1z}} + N_2(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2z}} + N_5(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{5z}}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi, -1)\| \cdot d\xi \quad (5.164)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.165)$$

Fazendo-se agora a integração numérica na direção ξ , com lm sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = \sum_{p=1}^{lm} N'_i(\xi_p, -1) \cdot [N_1(\xi_p, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1x}} + N_2(\xi_p, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2x}} + N_5(\xi_p, -1) \cdot \bar{t}_{1_{5x}}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi_p, -1)\| \cdot W_p \quad (5.166)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{lm} N'_i(\xi_p, -1) \cdot [N_1(\xi_p, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1y}} + N_2(\xi_p, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2y}} + N_5(\xi_p, -1) \cdot \bar{t}_{1_{5y}}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi_p, -1)\| \cdot W_p \quad (5.167)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{lm} N'_i(\xi_p, -1) \cdot [N_1(\xi_p, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1z}} + N_2(\xi_p, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2z}} + N_5(\xi_p, -1) \cdot \bar{t}_{1_{5z}}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi_p, -1)\| \cdot W_p \quad (5.168)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.169)$$

5.4.3.2 Determinação do vetor de carga associado ao lado 2

Adotando-se, para a obtenção do vetor de carga $\{f_{t2}\}$ associado ao lado 2, um procedimento análogo àquele utilizado na determinação de $\{f_{t1}\}$, tem-se :

$$\{f_{t2}\} = \left\{ \begin{matrix} \{f_{t2_2}\} \\ \{f_{t2_i}\} \end{matrix} \right\} \quad (5.170)$$

5.4.3.2.1 Determinação da submatriz $\{f_{t2_i}\}$

A submatriz $\{f_{t2_i}\}$ está relacionada ao nó i , o qual assume os valores 2 e 3. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao lado 2 do elemento superparamétrico e é dada por:

$$\{f_{t2_i}\} = \left\{ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{matrix} \right\} \quad (5.171)$$

onde

$$f_1 = \sum_{p=1}^{lm} N'_i(1, \eta_p) \cdot [N_2(1, \eta_p) \cdot \bar{t}_{2_{2x}} + N_3(1, \eta_p) \cdot \bar{t}_{2_{3x}} + N_6(1, \eta_p) \cdot \bar{t}_{2_{6x}}] \cdot \|\bar{r}_2(1, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (5.172)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{lm} N'_i(1, \eta_p) \cdot [N_2(1, \eta_p) \cdot \bar{t}_{2_{2y}} + N_3(1, \eta_p) \cdot \bar{t}_{2_{3y}} + N_6(1, \eta_p) \cdot \bar{t}_{2_{6y}}] \cdot \|\bar{r}_2(1, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (5.173)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{lm} N'_i(1, \eta_p) \cdot [N_2(1, \eta_p) \cdot \bar{t}_{2_{2z}} + N_3(1, \eta_p) \cdot \bar{t}_{2_{3z}} + N_6(1, \eta_p) \cdot \bar{t}_{2_{6z}}] \cdot \|\bar{r}_2(1, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (5.174)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.175)$$

Nessas equações, $\bar{t}_{2_{2x}}$, $\bar{t}_{2_{2y}}$, $\bar{t}_{2_{2z}}$, $\bar{t}_{2_{3x}}$, $\bar{t}_{2_{3y}}$, $\bar{t}_{2_{3z}}$, $\bar{t}_{2_{6x}}$, $\bar{t}_{2_{6y}}$ e $\bar{t}_{2_{6z}}$ são as componentes da carga distribuída no lado 2 associada aos nós 2, 3 e 6 respectivamente, segundo o sistema global de referência.

5.4.3.3 Determinação do vetor de carga associado ao lado 3

Adotando-se, para a obtenção do vetor de carga $\{f_{t3}\}$ associado ao lado 3, um procedimento análogo àquele utilizado na determinação de $\{f_{t1}\}$, tem-se:

$$\{f_{t3}\} = \begin{Bmatrix} \{f_{t3_3}\} \\ \{f_{t3_i}\} \end{Bmatrix} \quad (5.176)$$

5.4.3.3.1 Determinação da submatriz $\{f_{t3_i}\}$

A submatriz $\{f_{t3_i}\}$ está relacionada ao nó i , o qual assume os valores 3 e 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao lado 3 do elemento superparamétrico e é dada por:

$$\{f_{t3_i}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (5.177)$$

onde

$$f_1 = \sum_{p=1}^{lm} N'_i(\xi_p, 1) \cdot [N_3(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{3x} + N_4(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{4x} + N_7(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{7x}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi_p, 1)\| \cdot W_p \quad (5.178)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{lm} N'_i(\xi_p, 1) \cdot [N_3(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{3y} + N_4(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{4y} + N_7(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{7y}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi_p, 1)\| \cdot W_p \quad (5.179)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{lm} N'_i(\xi_p, 1) \cdot [N_3(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{3z} + N_4(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{4z} + N_7(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{7z}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi_p, 1)\| \cdot W_p \quad (5.180)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.181)$$

Nessas equações, $\bar{t}3_{3x}$, $\bar{t}3_{3y}$, $\bar{t}3_{3z}$, $\bar{t}3_{4x}$, $\bar{t}3_{4y}$, $\bar{t}3_{4z}$, $\bar{t}3_{7x}$, $\bar{t}3_{7y}$ e $\bar{t}3_{7z}$ são as componentes da carga distribuída no lado 3 associada aos nós 3, 4 e 7 respectivamente, segundo o sistema global de referência.

5.4.3.4 Determinação do vetor de carga associado ao lado 4

Adotando-se, para a obtenção do vetor de carga $\{ft4\}$ associado ao lado 4, um procedimento análogo àquele utilizado na determinação de $\{ft1\}$, tem-se:

$$\{ft4\} = \left\{ \begin{matrix} \{ft4_1\} \\ \{ft4_i\} \end{matrix} \right\} \quad (5.182)$$

5.4.3.4.1 Determinação da submatriz $\{ft4_i\}$

A submatriz $\{ft4_i\}$ está relacionada ao nó i , o qual assume os valores 1 e 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao lado 4 do elemento superparamétrico e é dada por:

$$\{ft4_i\} = \left\{ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{matrix} \right\} \quad (5.183)$$

onde

$$f_1 = \sum_{p=1}^{lm} N'_i(-1, \eta_p) \cdot [N_1(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{1x} + N_4(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{4x} + N_8(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{8x}] \cdot \|\bar{r}_2(-1, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (5.184)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{lm} N'_i(-1, \eta_p) \cdot [N_1(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{1y} + N_4(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{4y} + N_8(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{8y}] \cdot \|\bar{r}_2(-1, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (5.185)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{lm} N'_i(-1, \eta_p) \cdot [N_1(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{1z} + N_4(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{4z} + N_8(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{8z}] \cdot \|\bar{r}_2(-1, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (5.186)$$

$$f_4 = f_5 = 0 \quad (5.187)$$

Nessas equações, $\bar{t}_{4_{1x}}$, $\bar{t}_{4_{1y}}$, $\bar{t}_{4_{1z}}$, $\bar{t}_{4_{4x}}$, $\bar{t}_{4_{4y}}$, $\bar{t}_{4_{4z}}$, $\bar{t}_{4_{8x}}$, $\bar{t}_{4_{8y}}$ e $\bar{t}_{4_{8z}}$ são as componentes da carga distribuída no lado 4 associada aos nós 1, 4 e 8 respectivamente, segundo o sistema global de referência.

5.4.4 Determinação do vetor de carga do elemento superparamétrico quando todos os carregamentos atuam simultaneamente

O vetor de carga correspondente às ações simultâneas de todos os carregamentos descritos anteriormente é dado por:

$$\{f^e\} = \{f_q^e\} + \{f_b^e\} + \{f_l^e\} \quad (5.188)$$

e a equação (5.43) pode ser rescrita como a seguir:

$$\{f^e\} = [K^e] \cdot \{a\} \quad (5.189)$$

Capítulo 6

DESENVOLVIMENTO DO ELEMENTO FINITO DO TIPO HIERÁRQUICO PARA ANÁLISE DE PLACAS E CASCAS

6.1 Introdução

De uma forma geral, quando se emprega o método de elementos finitos em problemas de valor de contorno, o refinamento da solução aproximada resultante pode se dar através da utilização de elementos de ordem fixa, para os quais o tamanho h do elemento é sucessivamente reduzido (refinamento tipo h), como também através da utilização de elementos de forma fixa, para os quais a ordem p do polinômio interpolador aumenta sucessivamente (refinamento tipo p) [25].

No desenvolvimento apresentado neste trabalho, considera-se o refinamento do tipo p , uma vez que se pretende o aprimoramento da solução obtida sem que haja necessidade de se alterar a malha de discretização do problema. Entretanto, ao se empregar funções de forma padrões, como as das famílias Serendipity ou Lagrangiana, a cada mudança de ordem polinomial corresponde um aumento do número de nós do elemento (figura 6.1), gerando conseqüentemente dados de entrada totalmente diferentes a cada nível de aproximação. Se esse fosse o procedimento adotado, todos os cálculos já efetuados quando da análise de ordem anterior deveriam ser repetidos, ocasionando um aumento no custo computacional da

formulação. Seria portanto vantajoso contornar essa dificuldade considerando a aproximação como uma *série* na qual as funções de forma não mais alterassem o número de nós do elemento. O aumento da ordem polinomial sem o conseqüente aumento do número de nós do elemento pode ser obtido a partir das *funções de forma hierárquicas*, que representam simplesmente um refinamento de ordem superior em relação à solução alcançada [26].

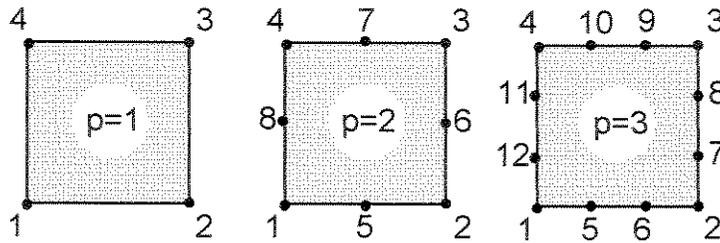


Figura 6.1 Elementos da família Serendipity de ordens $p = 1, p = 2$ e $p = 3$ (sendo p o grau do polinômio interpolador completo presente na expansão).

6.2 Determinação do campo de deslocamento do elemento paramétrico do tipo hierárquico

De acordo com o que foi exposto, o refinamento da expansão linear, especificada pela equação (3.27), pode ser conseguido adicionando-se a ela funções de forma hierárquicas $M_{kj}(\xi, \eta)$ e $M_k(\xi, \eta)$ de ordem superior a um. As funções $M_{kj}(\xi, \eta)$ são polinômios de grau k associados a cada um dos lados j do elemento, com k variando de 2 a 4 e j , de 1 a 4. As funções $M_k(\xi, \eta)$ são polinômios de grau k , do tipo bolha, associados ao interior do elemento, com k assumindo o valor 4. Dessa forma, o deslocamento $\bar{\Delta}$ (equação 3.27), para o caso do elemento do tipo hierárquico, torna-se:

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i + \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 M_{kj}(\xi, \eta) \cdot \bar{\delta}_{kj} + M_k(\xi, \eta) \cdot \bar{\delta}_k \tag{6.1}$$

Nessa expressão, $\bar{\delta}_{kj}$ é o vetor constituído dos parâmetros hierárquicos associados aos lados do elemento e $\bar{\delta}_k$, o vetor constituído dos parâmetros hierárquicos associados ao

interior do elemento. Convém ressaltar que os parâmetros hierárquicos não possuem qualquer significado físico o que, no entanto, não é algo absolutamente necessário [26].

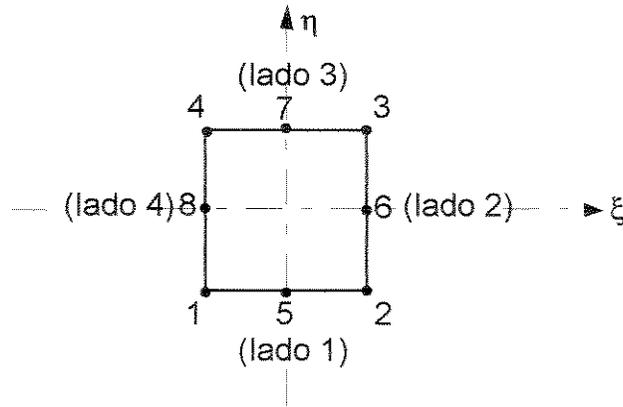


Figura 6.2 Definição dos lados do elemento hierárquico.

As funções de forma hierárquicas de segundo grau, associadas a cada um dos lados do elemento (figura 6.2), são tais que transformam a expansão linear mostrada na figura 3.6 em um polinômio de segundo grau. Assim:

$$M_{21} = -\frac{1}{2} \cdot (\xi^2 - 1) \cdot (1 - \eta) \tag{6.2}$$

$$M_{22} = -\frac{1}{2} \cdot (\eta^2 - 1) \cdot (1 + \xi) \tag{6.3}$$

$$M_{23} = -\frac{1}{2} \cdot (\xi^2 - 1) \cdot (1 + \eta) \tag{6.4}$$

$$M_{24} = -\frac{1}{2} \cdot (\eta^2 - 1) \cdot (1 - \xi) \tag{6.5}$$

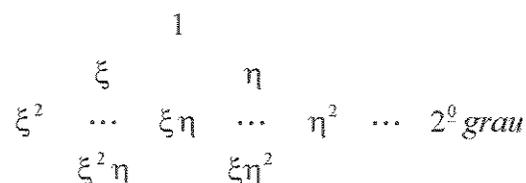


Figura 6.3 Termos da expansão quadrática obtida a partir do refinamento de ordem dois para os lados do elemento.

A figura 6.3 apresenta os termos adicionados pela expansão quadrática à expansão linear anterior. Verifica-se aí a obtenção de um polinômio completo de segundo grau, assim como a presença de dois termos parasíticos: $\xi^2\eta$ e $\xi\eta^2$.

As figuras de 6.4 a 6.7 mostram a representação da variação das funções de forma hierárquicas de grau 2 associadas aos lados do elemento.

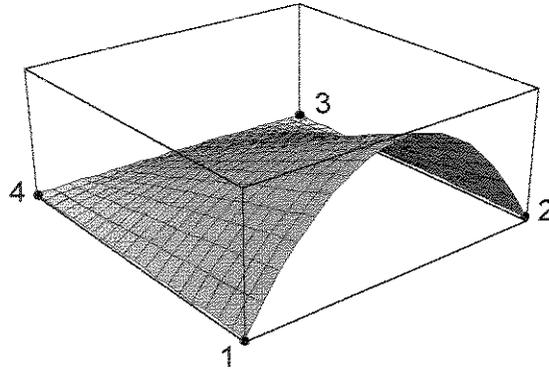


Figura 6.4 Função de forma hierárquica de grau dois associada ao lado 1 (M_{21}).

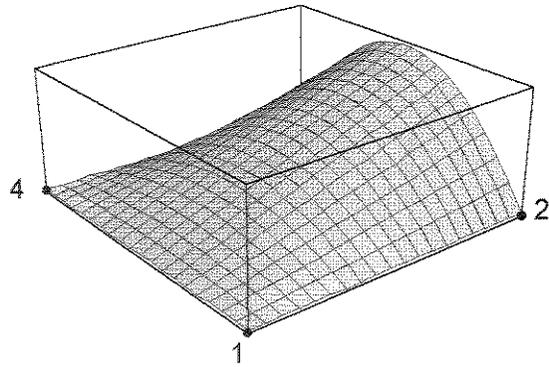


Figura 6.5 Função de forma hierárquica de grau dois associada ao lado 2 (M_{22}).

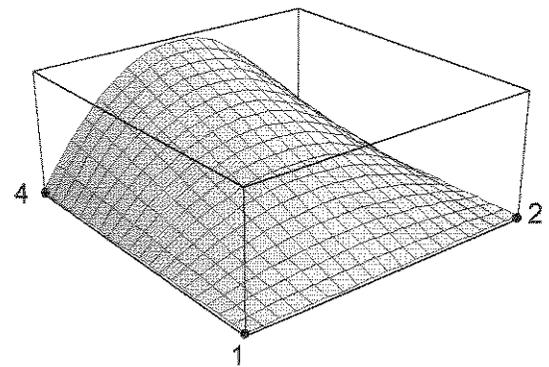


Figura 6.6 Função de forma hierárquica de grau dois associada ao lado 3 (M_{23}).

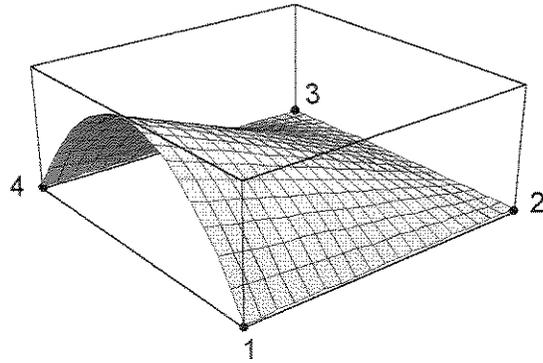


Figura 6.7 Função de forma hierárquica de grau dois associada ao lado 4 (M_{24}).

As funções de forma hierárquicas de terceiro grau, associadas a cada um dos lados do elemento, são tais que transformam a expansão quadrática mostrada na figura 6.3 em um polinômio de terceiro grau. Assim:

$$M_{31} = 2 \cdot (1 - \eta) \cdot (\xi^3 - \xi) \tag{6.6}$$

$$M_{32} = 2 \cdot (1 + \xi) \cdot (\eta^3 - \eta) \tag{6.7}$$

$$M_{33} = 2 \cdot (1 + \eta) \cdot (\xi^3 - \xi) \tag{6.8}$$

$$M_{34} = 2 \cdot (1 - \xi) \cdot (\eta^3 - \eta) \tag{6.9}$$

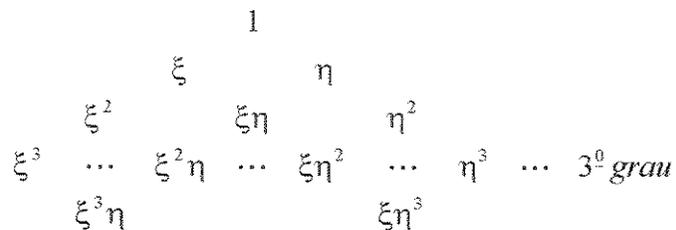


Figura 6.8 Termos da expansão cúbica obtida a partir do refinamento de ordem três para os lados do elemento.

A figura 6.8 apresenta os termos adicionados pela expansão cúbica à expansão quadrática anterior. Verifica-se aí a obtenção de um polinômio completo do terceiro grau, assim como a presença de dois termos parasíticos: $\xi^3 \eta$ e $\xi \eta^3$.

As figuras de 6.9 a 6.12 mostram a representação da variação das funções de forma hierárquicas de grau 3 associadas aos lados do elemento.

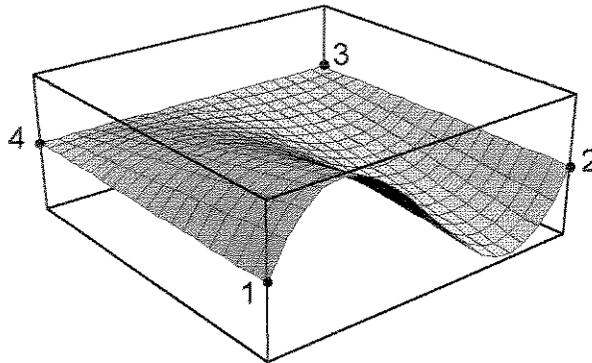


Figura 6.9 Função de forma hierárquica de grau três associada ao lado 1 (M_{31}).

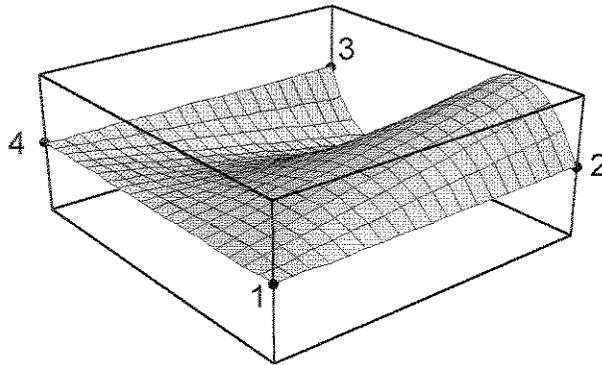


Figura 6.10 Função de forma hierárquica de grau três associada ao lado 2 (M_{32}).

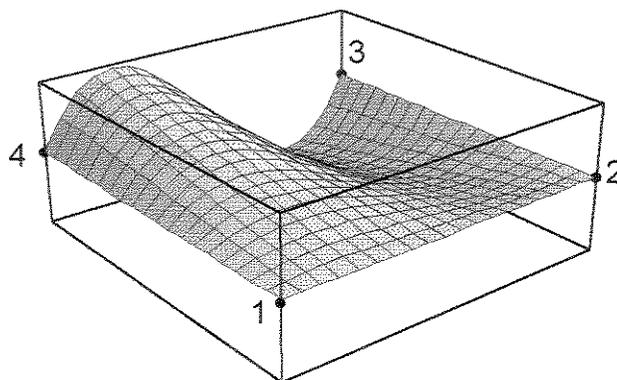


Figura 6.11 Função de forma hierárquica de grau três associada ao lado 3 (M_{33}).

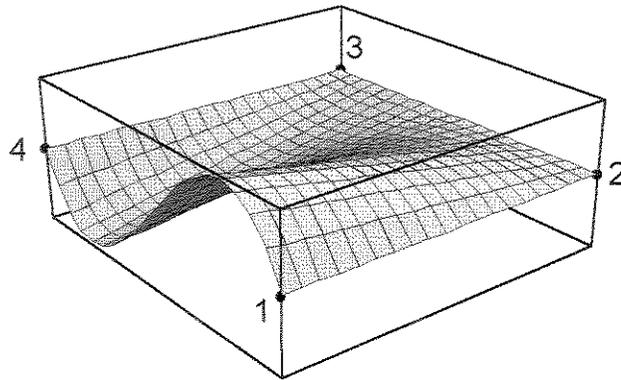


Figura 6.12 Função de forma hierárquica de grau três associada ao lado 4 (M_{34}).

As funções de forma hierárquicas de quarto grau, associadas a cada um dos lados do elemento, são tais que transformam a expansão cúbica mostrada na figura 6.8 em um polinômio de quarto grau. Assim:

$$M_{41} = (\xi^2 - \xi^4) \cdot (1 - \eta) \tag{6.10}$$

$$M_{42} = (\eta^2 - \eta^4) \cdot (1 + \xi) \tag{6.11}$$

$$M_{43} = (\xi^2 - \xi^4) \cdot (1 + \eta) \tag{6.12}$$

$$M_{44} = (\eta^2 - \eta^4) \cdot (1 - \xi) \tag{6.13}$$

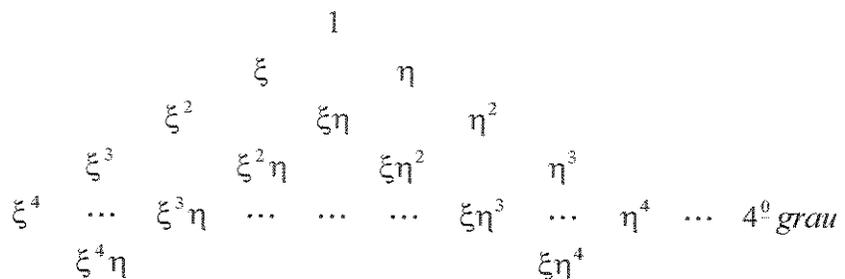


Figura 6.13 Termos da expansão de quarto grau obtida a partir do refinamento de ordem quatro para os lados do elemento.

A figura 6.13 apresenta os termos adicionados pela expansão de quarto grau à expansão cúbica anterior. Verifica-se aí a obtenção de um polinômio incompleto de quarto grau, assim como a presença de dois termos parasíticos: $\xi^4 \eta$ e $\xi \eta^4$.

As figuras de 6.14 a 6.17 mostram a representação da variação das funções de forma hierárquicas de grau 4 associadas aos lados do elemento.

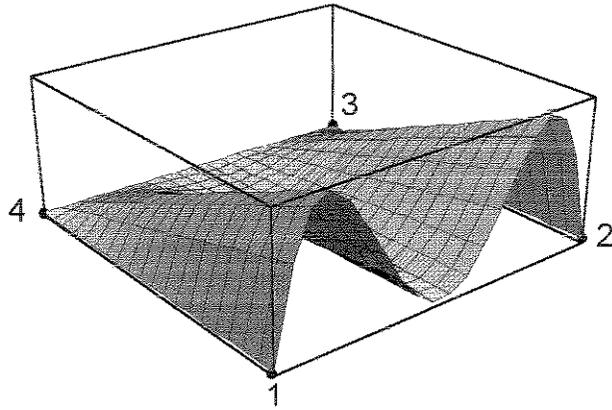


Figura 6.14 Função de forma hierárquica de grau quatro associada ao lado 1 (M_{41}).

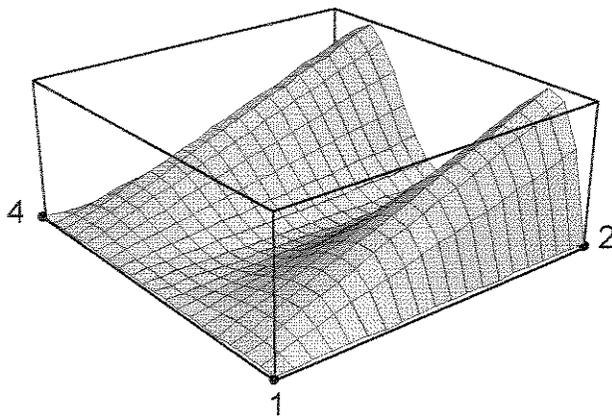


Figura 6.15 Função de forma hierárquica de grau quatro associada ao lado 2 (M_{42}).

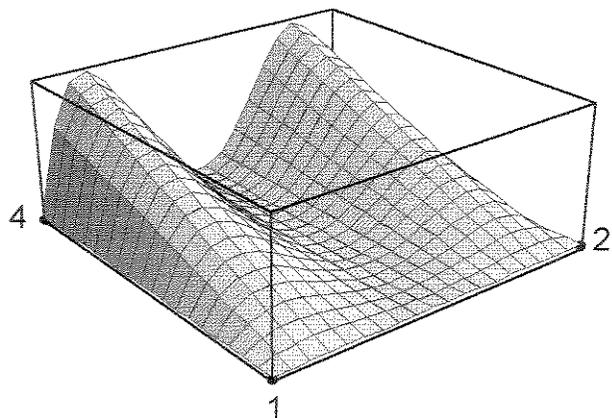


Figura 6.16 Função de forma hierárquica de grau quatro associada ao lado 3 (M_{43}).

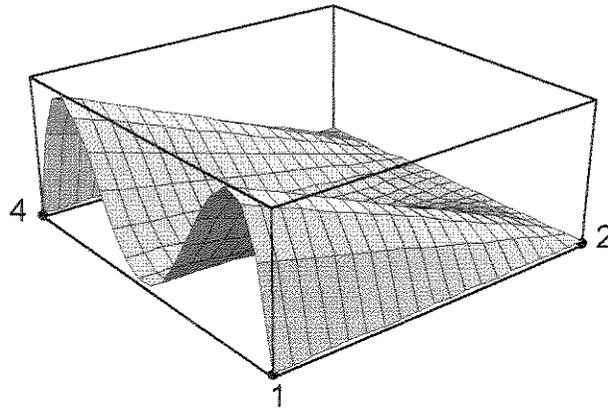


Figura 6.17 Função de forma hierárquica de grau quatro associada ao lado 4 (M_{44}).

De acordo com o triângulo de Pascal, a expansão mostrada na figura 6.13 não constitui um polinômio completo de quarto grau devido à ausência do termo $\xi^2\eta^2$. Com a finalidade de adicionar esse termo àquela expansão, considera-se uma função de forma hierárquica de quarto grau, do tipo bolha, associada ao interior do elemento:

$$M_4 = (1 - \xi^2) \cdot (1 - \eta^2) \tag{6.14}$$

A figura 6.18 apresenta os termos da expansão polinomial após a inclusão dessa última função de forma hierárquica.

A figura 6.19 mostra a representação da variação da função de forma hierárquica de quarto grau associada ao interior do elemento.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & \xi & & \eta & \\
 & & & \xi^2 & & \xi\eta & & \eta^2 \\
 & \xi^3 & & \xi^2\eta & & \xi\eta^2 & & \eta^3 \\
 \xi^4 & \dots & \xi^3\eta & \dots & \xi^2\eta^2 & \dots & \xi\eta^3 & \dots & \eta^4 & \dots & 4^0 \text{ grau} \\
 & \xi^4\eta & & & & & & & \xi\eta^4 & &
 \end{array}$$

Figura 6.18 Termos da expansão de quarto grau obtida a partir do refinamento de ordem quatro para o interior do elemento.

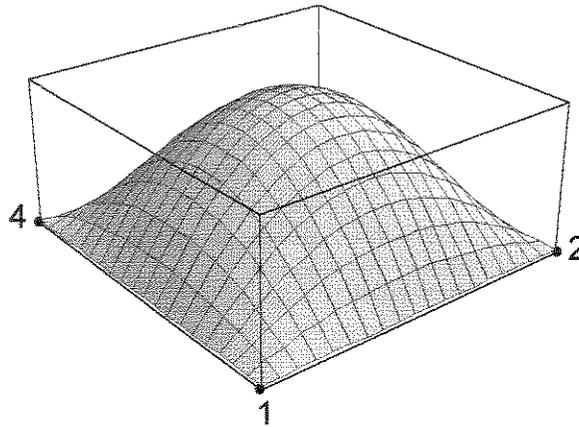


Figura 6.19 Função de forma hierárquica de grau quatro associada ao interior do elemento (M_4).

A partir da análise das figuras 6.3, 6.8 e 6.18, verifica-se que qualquer que seja a ordem do refinamento introduzido (segundo, terceiro ou quarto grau), estarão sempre presentes nas expansões polinomiais correspondentes, o termo constante e o polinômio completo de primeiro grau, satisfazendo portanto os critérios de convergência mencionados no capítulo 3 [15]. O critério relativo à continuidade C^0 também estará satisfeito se os parâmetros hierárquicos associados a qualquer um dos lados do elemento forem identificados com o mesmo valor no elemento adjacente, o que garantirá automaticamente a unicidade da aproximação ao longo daquele lado [26].

Uma das vantagens da utilização da formulação hierárquica está no fato das funções de forma de ordens mais baixas permanecerem inalteradas quando se executam os refinamentos de ordens subsequentes, de modo que as matrizes produzidas nos estágios anteriores àquele da aproximação pretendida reocorrerem, não precisando ser recalculadas. Isso se mostra, em geral, ser computacionalmente bastante eficiente além de possibilitar o emprego de expansões polinomiais diferentes ao longo de lados e elementos diferentes. Essa característica, essencial dos elementos hierárquicos, é explorada no refinamento adaptativo, de tal sorte que novos graus de liberdade hierárquicos são criados somente quando requeridos pela magnitude do erro envolvido na análise, o qual é identificado pela rapidez de variação da função incógnita [15].

Se a_{kj} , b_{kj} e c_{kj} são, respectivamente, as componentes do vetor $\bar{\delta}_{kj}$ segundo os eixos X , Y e Z do sistema global de referência e da mesma maneira a_k , b_k e c_k são as componentes do vetor $\bar{\delta}_k$, a equação (6.1) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{11i} \\ v_{12i} \\ v_{13i} \end{Bmatrix} \cdot \alpha_i \\
 &- \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} v_{21i} \\ v_{22i} \\ v_{23i} \end{Bmatrix} \cdot \beta_i + \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 M_{kj}(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} a_{kj} \\ b_{kj} \\ c_{kj} \end{Bmatrix} \\
 &+ M_k(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \\
 &+ \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 M_{kj}(\xi, \eta) \cdot a_{kj} + M_k(\xi, \eta) \cdot a_k
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}
 v(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \\
 &+ \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 M_{kj}(\xi, \eta) \cdot b_{kj} + M_k(\xi, \eta) \cdot b_k
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \\
 &+ \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 M_{kj}(\xi, \eta) \cdot c_{kj} + M_k(\xi, \eta) \cdot c_k
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Essas equações também podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 [N'_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} + \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 [M_{kj}(\xi, \eta)] \cdot \begin{Bmatrix} a_{kj} \\ b_{kj} \\ c_{kj} \end{Bmatrix} + [M_k(\xi, \eta)] \cdot \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix} \tag{6.19}$$

onde $[M_{kj}(\xi, \eta)]$ é uma matriz (3x3), constituída das funções de forma hierárquicas $M_{kj}(\xi, \eta)$ de grau k , associadas a cada um dos lados j do elemento:

$$[M_{kj}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} M_{kj}(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_{kj}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_{kj}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

$[M_k(\xi, \eta)]$ é uma matriz (3x3), constituída das funções de forma hierárquicas $M_k(\xi, \eta)$ de grau k , associadas ao interior do elemento:

$$[M_k(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} M_k(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_k(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_k(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

e $[N'_i(\xi, \eta, \zeta)]$ é a matriz já definida anteriormente pela equação (3.33). Sendo ainda $\{a_i\}$, a matriz coluna (5x1), definida a partir da equação (3.34), $\{a_{kj}\}$, uma matriz coluna (3x1), constituída dos parâmetros hierárquicos associados aos lados do elemento:

$$\{a_{kj}\} = \begin{Bmatrix} a_{kj} \\ b_{kj} \\ c_{kj} \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

e $\{a_k\}$, uma matriz coluna (3x1), constituída dos parâmetros hierárquicos associados ao interior do elemento:

$$\{a_k\} = \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

A equação (6.19) pode ser apresentada na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \left[[N'_1(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [N'_i(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [N'_4(\xi, \eta, \zeta)], [M_{21}(\xi, \eta)], [M_{22}(\xi, \eta)], \dots \right. \\
 \left. \dots, [M_{kj}(\xi, \eta)], \dots, [M_{44}(\xi, \eta)], [M_k(\xi, \eta)] \right] \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_4\} \\ \{a_{21}\} \\ \vdots \\ \{a_{kj}\} \\ \vdots \\ \{a_{44}\} \\ \{a_k\} \end{Bmatrix} \quad (6.24)$$

De uma maneira compacta, essa última equação pode ser dada por:

$$\{u\} = [N'] \cdot \{a\} \quad (6.25)$$

onde $\{u\}$ é uma matriz coluna (3x1), constituída dos deslocamentos $u(\xi, \eta, \zeta)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$ e $w(\xi, \eta, \zeta)$, $[N']$ é uma matriz de no máximo (3x59), constituída das funções de forma $N'_i(\xi, \eta)$, $M_{kj}(\xi, \eta)$ e $M_k(\xi, \eta)$, e $\{a\}$ é uma matriz coluna de no máximo (59x1), constituída dos deslocamentos nodais u_i , v_i , w_i , α_i e β_i e dos parâmetros hierárquicos a_{kj} , b_{kj} , c_{kj} , a_k , b_k e c_k .

A matriz $[N']$, que relaciona o campo de deslocamento aos deslocamentos nodais e aos parâmetros hierárquicos, é dada então por:

$$[N'(\xi, \eta, \zeta)] = \left[[N'_1(\xi, \eta, \zeta)] \quad \dots \quad [N'_i(\xi, \eta, \zeta)] \quad \dots \quad [N'_4(\xi, \eta, \zeta)] \right. \\
 \left. [M_{21}(\xi, \eta)] \quad \dots \quad [M_{kj}(\xi, \eta)] \quad \dots \quad [M_{44}(\xi, \eta)] \quad [M_k(\xi, \eta)] \right] \quad (6.26)$$

Finalmente, pode-se verificar a partir da equação (6.24) que, se não ocorre refinamento na solução do problema ($[M_{kj}(\xi, \eta)] = [M_k(\xi, \eta)] = [0]$), o elemento permanece superparamétrico, quando ocorre o refinamento de segundo grau, o elemento torna-se isoparamétrico e a partir do instante em que se introduz qualquer outro refinamento, o

elemento torna-se subparamétrico, ou seja, a expansão adotada para interpolar o campo de deslocamento é de ordem superior àquela adotada para interpolar a geometria.

6.3 Determinação do estado de deformação específica do elemento paramétrico do tipo hierárquico

De acordo com o que foi visto anteriormente, o estado de deformação específica do elemento superparamétrico é dado pela equação (4.60). Quando se considera o elemento do tipo hierárquico, com o campo de deslocamento descrito através das equações (6.16) a (6.18), as derivadas dos deslocamentos globais u , v e w , com relação às coordenadas ξ , η e ζ , serão dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \\ & \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i + \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial M_{kj}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot a_{kj} + \frac{\partial M_k(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot a_k \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \\ & \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i + \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial M_{kj}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot b_{kj} + \frac{\partial M_k(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot b_k \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \\ & \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i + \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial M_{kj}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot c_{kj} + \frac{\partial M_k(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot c_k \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} = & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} u_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \\ & \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i + \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial M_{kj}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot a_{kj} + \frac{\partial M_k(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot a_k \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} v_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i + \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial M_{kj}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot b_{kj} + \frac{\partial M_k(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot b_k \quad (6.31)$$

$$\frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} w_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N'_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i + \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial M_{kj}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot c_{kj} + \frac{\partial M_k(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot c_k \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{11i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{21i} \cdot \beta_i \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{12i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{22i} \cdot \beta_i \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{13i} \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^4 N'_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot v_{23i} \cdot \beta_i \quad (6.35)$$

Essas equações podem ainda ser expressas na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 [G_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 [Gl_{kj}(\xi, \eta)] \cdot \begin{pmatrix} a_{kj} \\ b_{kj} \\ c_{kj} \end{pmatrix} + [Ge_k(\xi, \eta)] \cdot \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

onde $[G_i(\xi, \eta, \zeta)]$ já foi obtida anteriormente através da equação (4.108), $[Gl_{ij}(\xi, \eta)]$ é uma matriz (9x3) dada por:

$$[Gl_{ij}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_{ij}}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_{ij}}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_{ij}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial M_{ij}}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_{ij}}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_{ij}}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

e $[Ge_k(\xi, \eta)]$ é uma matriz (9x3) dada por:

$$[Ge_k(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_k}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_k}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_k}{\partial \xi} \\ \frac{\partial M_k}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_k}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

Substituindo-se a equação (6.36) na equação (4.60), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot [G_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} + \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot [Gl_{kj}(\xi, \eta)] \cdot \begin{Bmatrix} a_{kj} \\ b_{kj} \\ c_{kj} \end{Bmatrix} \quad (6.39)$$

$$+ \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot [Ge_k(\xi, \eta)] \cdot \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix}$$

Definindo-se agora as seguintes relações:

$$[B_i(\xi, \eta, \zeta)] = \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot [G_i(\xi, \eta, \zeta)] \quad (6.40)$$

$$[Bl_{kj}(\xi, \eta)] = \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot [Gl_{kj}(\xi, \eta)] \quad (6.41)$$

$$[Be_k(\xi, \eta)] = \frac{1}{|J|} \cdot [d(\xi, \eta)] \cdot [Ge_k(\xi, \eta)] \quad (6.42)$$

é possível rescrever a equação (6.39) da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 [B_i(\xi, \eta, \zeta)] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} + \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^4 [Bl_{kj}(\xi, \eta)] \cdot \begin{Bmatrix} a_{kj} \\ b_{kj} \\ c_{kj} \end{Bmatrix} + [Be_k(\xi, \eta)] \cdot \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix} \quad (6.43)$$

onde $[B_i(\xi, \eta, \zeta)]$ já foi determinada anteriormente através da equação (4.111), $[Bl_{kj}(\xi, \eta)]$ é uma matriz (5x3) dada por:

$$[Bl_{kj}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} Bl_{11kj} & Bl_{12kj} & Bl_{13kj} \\ Bl_{21kj} & Bl_{22kj} & Bl_{23kj} \\ Bl_{31kj} & Bl_{32kj} & Bl_{33kj} \\ Bl_{41kj} & Bl_{42kj} & Bl_{43kj} \\ Bl_{51kj} & Bl_{52kj} & Bl_{53kj} \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

e $[Be_k(\xi, \eta)]$ é uma matriz (5x3) dada por:

$$[Be_k(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} Be_{11k} & Be_{12k} & Be_{13k} \\ Be_{21k} & Be_{22k} & Be_{23k} \\ Be_{31k} & Be_{32k} & Be_{33k} \\ Be_{41k} & Be_{42k} & Be_{43k} \\ Be_{51k} & Be_{52k} & Be_{53k} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Efetuando-se o produto matricial indicado na equação (6.41), os elementos da matriz $[BL_{kj}(\xi, \eta)]$ resultam em:

$$Bl_{11kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{11} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{14} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.46)$$

$$Bl_{21kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{21} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{24} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.47)$$

$$Bl_{31kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{31} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{34} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.48)$$

$$Bl_{41kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{41} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{44} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.49)$$

$$Bl_{51kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{51} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{54} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.50)$$

$$Bl_{12kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{12} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{15} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.51)$$

$$Bl_{22kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{22} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{25} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.52)$$

$$Bl_{32kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{32} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{35} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.53)$$

$$Bl_{42kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{42} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{45} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.54)$$

$$Bl_{52kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{52} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{55} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.55)$$

$$Bl_{13kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{13} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{16} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.56)$$

$$Bl_{23kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{23} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{26} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.57)$$

$$Bl_{33kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{33} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{36} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.58)$$

$$Bl_{43kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{43} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{46} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.59)$$

$$Bl_{53kj}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{53} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \xi} + d_{56} \cdot \frac{\partial M_{kj}}{\partial \eta} \right) \quad (6.60)$$

Efetuada-se o produto matricial indicado na equação (6.42), os elementos da matriz $[Be_k(\xi, \eta)]$ resultam em:

$$Be_{11k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{11} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{14} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.61)$$

$$Be_{21k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{21} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{24} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.62)$$

$$Be_{31k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{31} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{34} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.63)$$

$$Be_{41k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{41} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{44} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.64)$$

$$Be_{51k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{51} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{54} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.65)$$

$$Be_{12k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{12} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{15} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.66)$$

$$Be_{22k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{22} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{25} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.67)$$

$$Be_{32k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{32} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{35} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.68)$$

$$Be_{42k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{42} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{45} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.69)$$

$$Be_{52k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{52} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{55} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.70)$$

$$Be_{13k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{13} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{16} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.71)$$

$$Be_{23k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{23} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{26} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.72)$$

$$Be_{33k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{33} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{36} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.73)$$

$$Be_{43k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{43} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{46} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.74)$$

$$Be_{53k}(\xi, \eta) = \frac{1}{|J|} \cdot \left(d_{53} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi} + d_{56} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \eta} \right) \quad (6.75)$$

As expressões das derivadas das funções hierárquicas são apresentadas no apêndice B.

Finalizando, a equação (6.43) pode ainda ser apresentada na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \left[[B_1(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [B_i(\xi, \eta, \zeta)], \dots, [B_4(\xi, \eta, \zeta)], [Bl_{21}(\xi, \eta)], \dots, [Bl_{kj}(\xi, \eta)], \dots, [Bl_{44}(\xi, \eta)], [Be_k(\xi, \eta)] \right] \cdot \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \vdots \\ \{a_i\} \\ \vdots \\ \{a_4\} \\ \{a_{21}\} \\ \vdots \\ \{a_{kj}\} \\ \vdots \\ \{a_{44}\} \\ \{a_k\} \end{Bmatrix} \quad (6.76)$$

ou de uma maneira compacta:

$$\{\varepsilon'\} = [B] \cdot \{a\} \quad (6.77)$$

onde $\{\varepsilon'\}$ é uma matriz coluna (5x1), constituída das deformações específicas $\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$, $\gamma_{x'y'}$, $\gamma_{x'z'}$ e $\gamma_{y'z'}$ no ponto Q, segundo o sistema local de referência, $[B]$ é uma matriz de no máximo (5x59), constituída das derivadas das funções de forma $N'_i(\xi, \eta)$, $M_{kj}(\xi, \eta)$ e

$M_k(\xi, \eta)$, e $\{a\}$ é uma matriz coluna de no máximo (59×1) , constituída dos deslocamentos nodais $u_i, v_i, w_i, \alpha_i, \beta_i$ e dos parâmetros hierárquicos $a_{kj}, b_{kj}, c_{kj}, a_k, b_k, c_k$. Verifica-se, a partir da equação (6.76), que a matriz $[B]$ é dada por:

$$[B(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} [B_1(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & [B_i(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & [B_d(\xi, \eta, \zeta)] & [Bl_{21}(\xi, \eta)] & \cdots \\ \cdots & [Bl_{kj}(\xi, \eta)] & \cdots & [Bl_{4d}(\xi, \eta)] & [Be_k(\xi, \eta)] \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

Esta matriz relaciona o estado de deformação específica aos deslocamentos nodais e parâmetros hierárquicos associados aos lados e interior do elemento.

6.4 Determinação da matriz de rigidez do elemento paramétrico do tipo hierárquico

A expressão que possibilita determinar a matriz de rigidez do elemento aparece na equação (5.46), sendo dada por:

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D'] [B] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$$

onde agora, para o elemento do tipo hierárquico, a matriz $[B]$ é dada através da equação (6.78). Assim, substituindo-se essa equação na equação anterior, tem-se:

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B_1(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_i(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [B_d(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ [Bl_{21}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [Bl_{kj}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [Bl_{4d}(\xi, \eta)]^T \\ [Be_k(\xi, \eta)]^T \end{bmatrix} \cdot [D'] \cdot \begin{bmatrix} [B_1(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & [B_j(\xi, \eta, \zeta)] & \cdots & [B_d(\xi, \eta, \zeta)] & [Bl_{21}(\xi, \eta)] \\ \cdots & [Bl_{mn}(\xi, \eta)] & \cdots & [Bl_{4d}(\xi, \eta)] & [Be_m(\xi, \eta)] \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.79)$$

Essa equação, uma vez resolvida, levará à matriz de rigidez do elemento:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & \cdots & [K_{1l}] & \cdots & [K_{14}] & [K_{1,21}] & \cdots & [K_{1,mn}] & \cdots & [K_{1,44}] & [K_{1,m}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ [K_{l1}] & \cdots & [K_{ll}] & \cdots & [K_{l4}] & [K_{l,21}] & \cdots & [K_{l,mn}] & \cdots & [K_{l,44}] & [K_{l,m}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ [K_{41}] & \cdots & [K_{4l}] & \cdots & [K_{44}] & [K_{4,21}] & \cdots & [K_{4,mn}] & \cdots & [K_{4,44}] & [K_{4,m}] \\ [K_{21,1}] & \cdots & [K_{21,l}] & \cdots & [K_{21,4}] & [K_{21,21}] & \cdots & [K_{21,mn}] & \cdots & [K_{21,44}] & [K_{21,m}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ [K_{kj,1}] & \cdots & [K_{kj,l}] & \cdots & [K_{kj,4}] & [K_{kj,21}] & \cdots & [K_{kj,mn}] & \cdots & [K_{kj,44}] & [K_{kj,m}] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ [K_{44,1}] & \cdots & [K_{44,l}] & \cdots & [K_{44,4}] & [K_{44,21}] & \cdots & [K_{44,mn}] & \cdots & [K_{44,44}] & [K_{44,m}] \\ [K_{k1}] & \cdots & [K_{kl}] & \cdots & [K_{k4}] & [K_{k,21}] & \cdots & [K_{k,mn}] & \cdots & [K_{k,44}] & [K_{km}] \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

6.4.1 Determinação da submatriz $[K_{il}]$

A submatriz $[K_{il}]$ está relacionada aos nós i e l , sendo que tanto i quanto l variam de 1 a 4. Essa submatriz caracteriza o elemento superparamétrico e foi obtida no item 5.3.1. Os elementos dessa submatriz são dados através das equações de (5.78) a (5.102), já considerada a integração numérica.

6.4.2 Determinação da submatriz $[K_{i,mn}]$

A submatriz $[K_{i,mn}]$ está relacionada ao nó i , ao grau m e ao lado n , sendo que i varia de 1 a 4, m , de 2 a 4 e n , de 1 a 4. Essa submatriz caracteriza o acoplamento entre o elemento superparamétrico e a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seus lados:

$$[K_{i,mn}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i(\xi, \eta, \zeta)]^T [D^i] [Bl_{mn}(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.81)$$

ou ainda, levando-se em conta as equações (4.111), (5.12) e (6.44):

$$\begin{aligned}
 [K_{i, mn}] = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{21i} & B_{31i} & B_{41i} & B_{51i} \\ B_{12i} & B_{22i} & B_{32i} & B_{42i} & B_{52i} \\ B_{13i} & B_{23i} & B_{33i} & B_{43i} & B_{53i} \\ \zeta \frac{\xi}{2} B_{14i} & \zeta \frac{\xi}{2} B_{24i} & \zeta \frac{\xi}{2} B_{34i} & (\zeta \frac{\xi}{2} B_{44i} + \frac{\xi}{2} C_{44i}) & (\zeta \frac{\xi}{2} B_{54i} + \frac{\xi}{2} C_{54i}) \\ \zeta \frac{\xi}{2} B_{15i} & \zeta \frac{\xi}{2} B_{25i} & \zeta \frac{\xi}{2} B_{35i} & (\zeta \frac{\xi}{2} B_{45i} + \frac{\xi}{2} C_{45i}) & (\zeta \frac{\xi}{2} B_{55i} + \frac{\xi}{2} C_{55i}) \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \\
 & \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Bl_{11mn} & Bl_{12mn} & Bl_{13mn} \\ Bl_{21mn} & Bl_{22mn} & Bl_{23mn} \\ Bl_{31mn} & Bl_{32mn} & Bl_{33mn} \\ Bl_{41mn} & Bl_{42mn} & Bl_{43mn} \\ Bl_{51mn} & Bl_{52mn} & Bl_{53mn} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta
 \end{aligned} \tag{6.82}$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se:

$$[K_{i, mn}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} \end{bmatrix} \tag{6.83}$$

onde

$$\begin{aligned}
 k_{11} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot Bl_{11mn} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot Bl_{21mn} + \right. \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot Bl_{31mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot Bl_{41mn} + B_{51i} \cdot Bl_{51mn}) \right\} \cdot \\
 |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \tag{6.84}$$

$$\begin{aligned}
 k_{21} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot Bl_{11mn} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot Bl_{21mn} + \right. \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot Bl_{31mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot Bl_{41mn} + B_{52i} \cdot Bl_{51mn}) \right\} \cdot \\
 |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \tag{6.85}$$

$$k_{31} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot Bl_{11mn} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot Bl_{21mn} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot Bl_{31mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot Bl_{41mn} + B_{53i} \cdot Bl_{51mn}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.86)$$

$$k_{41} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot Bl_{11mn} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot Bl_{21mn} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot Bl_{31mn}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{44i} \cdot Bl_{41mn} + B_{54i} \cdot Bl_{51mn}) + (C_{44i} \cdot Bl_{41mn} + C_{54i} \cdot Bl_{51mn})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.87)$$

$$k_{51} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot Bl_{11mn} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot Bl_{21mn} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot Bl_{31mn}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{45i} \cdot Bl_{41mn} + B_{55i} \cdot Bl_{51mn}) + (C_{45i} \cdot Bl_{41mn} + C_{55i} \cdot Bl_{51mn})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.88)$$

$$k_{12} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot Bl_{12mn} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot Bl_{22mn} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot Bl_{32mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot Bl_{42mn} + B_{51i} \cdot Bl_{52mn}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.89)$$

$$k_{22} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot Bl_{12mn} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot Bl_{22mn} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot Bl_{32mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot Bl_{42mn} + B_{52i} \cdot Bl_{52mn}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.90)$$

$$k_{32} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot Bl_{12mn} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot Bl_{22mn} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot Bl_{32mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot Bl_{42mn} + B_{53i} \cdot Bl_{52mn}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.91)$$

$$\begin{aligned}
 k_{42} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot Bl_{12mn} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot Bl_{22mn} + \right. \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot Bl_{32mn}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{44i} \cdot Bl_{42mn} + B_{54i} \cdot Bl_{52mn}) + \right. \\
 \left. (C_{44i} \cdot Bl_{42mn} + C_{54i} \cdot Bl_{52mn})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (6.92)$$

$$\begin{aligned}
 k_{52} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot Bl_{12mn} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot Bl_{22mn} + \right. \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot Bl_{32mn}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{45i} \cdot Bl_{42mn} + B_{55i} \cdot Bl_{52mn}) + \right. \\
 \left. (C_{45i} \cdot Bl_{42mn} + C_{55i} \cdot Bl_{52mn})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (6.93)$$

$$\begin{aligned}
 k_{13} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot Bl_{13mn} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot Bl_{23mn} + \right. \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot Bl_{33mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot Bl_{43mn} + B_{51i} \cdot Bl_{53mn}) \right\} \cdot \\
 |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (6.94)$$

$$\begin{aligned}
 k_{23} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot Bl_{13mn} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot Bl_{23mn} + \right. \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot Bl_{33mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot Bl_{43mn} + B_{52i} \cdot Bl_{53mn}) \right\} \cdot \\
 |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (6.95)$$

$$\begin{aligned}
 k_{33} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot Bl_{13mn} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot Bl_{23mn} + \right. \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot Bl_{33mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot Bl_{43mn} + B_{53i} \cdot Bl_{53mn}) \right\} \cdot \\
 |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (6.96)$$

$$\begin{aligned}
 k_{43} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot Bl_{13mn} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot Bl_{23mn} + \right. \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot Bl_{33mn}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{44i} \cdot Bl_{43mn} + B_{54i} \cdot Bl_{53mn}) + \right. \\
 \left. (C_{44i} \cdot Bl_{43mn} + C_{54i} \cdot Bl_{53mn})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta
 \end{aligned} \quad (6.97)$$

$$\begin{aligned}
 k_{53} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot Bl_{13mn} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot Bl_{23mn} + \right. \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot Bl_{33mn}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{45i} \cdot Bl_{43mn} + B_{55i} \cdot Bl_{53mn}) + \right. \\
 \left. (C_{45i} \cdot Bl_{43mn} + C_{55i} \cdot Bl_{53mn})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.98)
 \end{aligned}$$

Fazendo-se agora a integração analítica na direção ζ (equações 5.77) e a integração numérica nas direções ξ e η , com mh sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$\begin{aligned}
 k_{11} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{11mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{21mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{31mn}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.99)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{21} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{11mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{21mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{31mn}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.100)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{31} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{11mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{21mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{31mn}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.101)
 \end{aligned}$$

$$k_{41} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} t_i \{ [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \} \quad (6.102)$$

$$k_{51} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} t_i \{ [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \} \quad (6.103)$$

$$k_{12} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{12mn}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{22mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{32mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.104)$$

$$k_{22} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{12mn}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{22mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{32mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.105)$$

$$k_{32} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{2}{(1-\nu^2)} \{ [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{12mn}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{22mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{32mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.106)$$

$$k_{42} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.107)$$

$$k_{52} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.108)$$

$$k_{13} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{13mn}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{23mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{33mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.109)$$

$$k_{23} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{13mn}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{23mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{33mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.110)$$

$$k_{33} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{13mn}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{23mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{33mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.111)$$

$$k_{43} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.112)$$

$$k_{33} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.113)$$

6.4.3 Determinação da submatriz $[K_{im}]$

A submatriz $[K_{im}]$ está relacionada ao nó i e ao grau m , sendo que i varia de 1 a 4 e m é igual a 4. Essa submatriz caracteriza o acoplamento entre o elemento superparamétrico e a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seu interior:

$$[K_{im}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i(\xi, \eta, \zeta)]^T [D'] [Be_m(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.114)$$

ou ainda, levando-se em conta as equações (4.111), (5.12) e (6.45):

$$[K_{im}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{21i} & B_{31i} & B_{41i} & B_{51i} \\ B_{12i} & B_{22i} & B_{32i} & B_{42i} & B_{52i} \\ B_{13i} & B_{23i} & B_{33i} & B_{43i} & B_{53i} \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{14i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{24i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{34i} & (\zeta \frac{t_i}{2} B_{44i} + \frac{t_i}{2} C_{44i}) & (\zeta \frac{t_i}{2} B_{54i} + \frac{t_i}{2} C_{54i}) \\ \zeta \frac{t_i}{2} B_{15i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{25i} & \zeta \frac{t_i}{2} B_{35i} & (\zeta \frac{t_i}{2} B_{45i} + \frac{t_i}{2} C_{45i}) & (\zeta \frac{t_i}{2} B_{55i} + \frac{t_i}{2} C_{55i}) \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Be_{11k} & Be_{12k} & Be_{13k} \\ Be_{21k} & Be_{22k} & Be_{23k} \\ Be_{31k} & Be_{32k} & Be_{33k} \\ Be_{41k} & Be_{42k} & Be_{43k} \\ Be_{51k} & Be_{52k} & Be_{53k} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.115)$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se:

$$[K_{im}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} \end{bmatrix} \quad (6.116)$$

onde

$$k_{11} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot Be_{11k} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot Be_{21k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot Be_{31k}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot Be_{41k} + B_{51i} \cdot Be_{51k}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.117)$$

$$k_{21} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot Be_{11k} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot Be_{21k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot Be_{31k}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot Be_{41k} + B_{52i} \cdot Be_{51k}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.118)$$

$$k_{31} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot Be_{11k} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot Be_{21k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot Be_{31k}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot Be_{41k} + B_{53i} \cdot Be_{51k}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.119)$$

$$k_{41} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot Be_{11k} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot Be_{21k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot Be_{31k}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{44i} \cdot Be_{41k} + B_{54i} \cdot Be_{51k}) + (C_{44i} \cdot Be_{41k} + C_{54i} \cdot Be_{51k})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.120)$$

$$k_{51} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot Be_{11k} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot Be_{21k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot Be_{31k}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta (B_{45i} \cdot Be_{41k} + B_{55i} \cdot Be_{51k}) + (C_{45i} \cdot Be_{41k} + C_{55i} \cdot Be_{51k})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.121)$$

$$k_{12} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot Be_{12k} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot Be_{22k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot Be_{32k}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot Be_{42k} + B_{51i} \cdot Be_{52k}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.122)$$

$$k_{22} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot Be_{12k} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot Be_{22k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot Be_{32k}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot Be_{42k} + B_{52i} \cdot Be_{52k}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.123)$$

$$k_{32} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot Be_{12k} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot Be_{22k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot Be_{32k}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot Be_{42k} + B_{53i} \cdot Be_{52k}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.124)$$

$$k_{42} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot Be_{12k} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot Be_{22k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot Be_{32k}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{44i} \cdot Be_{42k} + B_{54i} \cdot Be_{52k}) + (C_{44i} \cdot Be_{42k} + C_{54i} \cdot Be_{52k})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.125)$$

$$k_{52} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot Be_{12k} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot Be_{22k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot Be_{32k}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{45i} \cdot Be_{42k} + B_{55i} \cdot Be_{52k}) + (C_{45i} \cdot Be_{42k} + C_{55i} \cdot Be_{52k})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.126)$$

$$k_{13} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{11i} + \nu B_{21i}) \cdot Be_{13k} + (\nu B_{11i} + B_{21i}) \cdot Be_{23k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i} \cdot Be_{33k}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{41i} \cdot Be_{43k} + B_{51i} \cdot Be_{53k}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.127)$$

$$k_{23} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i} + \nu B_{22i}) \cdot Be_{13k} + (\nu B_{12i} + B_{22i}) \cdot Be_{23k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i} \cdot Be_{33k}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{42i} \cdot Be_{43k} + B_{52i} \cdot Be_{53k}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.128)$$

$$k_{33} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i} + \nu B_{23i}) \cdot Be_{13k} + (\nu B_{13i} + B_{23i}) \cdot Be_{23k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i} \cdot Be_{33k}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (B_{43i} \cdot Be_{43k} + B_{53i} \cdot Be_{53k}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.129)$$

$$k_{43} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{14i} + \nu B_{24i}) \cdot Be_{13k} + (\nu B_{14i} + B_{24i}) \cdot Be_{23k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{34i} \cdot Be_{33k}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{44i} \cdot Be_{43k} + B_{54i} \cdot Be_{53k}) + (C_{44i} \cdot Be_{43k} + C_{54i} \cdot Be_{53k})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.130)$$

$$k_{53} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \zeta \frac{t_i}{2(1-\nu^2)} \cdot [(B_{15i} + \nu B_{25i}) \cdot Be_{13k} + (\nu B_{15i} + B_{25i}) \cdot Be_{23k} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{35i} \cdot Be_{33k}] + \frac{t_i}{4k(1+\nu)} \cdot [\zeta(B_{45i} \cdot Be_{43k} + B_{55i} \cdot Be_{53k}) + (C_{45i} \cdot Be_{43k} + C_{55i} \cdot Be_{53k})] \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.131)$$

Fazendo-se agora a integração analítica na direção ζ (equações 5.77) e a integração numérica nas direções ξ e η , com mh sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$k_{11} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{11k}(\xi_p, \eta_p) + (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{21k}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{31k}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{41k}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{51k}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.132)$$

$$\begin{aligned}
 k_{21} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{11k}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{21k}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{31k}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{41k}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{51k}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.133}$$

$$\begin{aligned}
 k_{31} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{2}{(1-\nu^2)} \{ (B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{11k}(\xi_p, \eta_p) + \\
 (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{21k}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{31k}(\xi_p, \eta_p) \} + \\
 \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{41k}(\xi_p, \eta_p) + \\
 B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{51k}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.134}$$

$$\begin{aligned}
 k_{41} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{41k}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{51k}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.135}$$

$$\begin{aligned}
 k_{51} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{41k}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{51k}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.136}$$

$$\begin{aligned}
 k_{12} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{12k}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{22k}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{32k}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{42k}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{52k}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.137}$$

$$\begin{aligned}
 k_{22} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{12k}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{22k}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{32k}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{42k}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{52k}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.138}$$

$$\begin{aligned}
 k_{32} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{12k}(\xi_p, \eta_p) + \\
 (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{22k}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \frac{(1-\nu)}{2} \cdot B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{32k}(\xi_p, \eta_p)] + \\
 \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{42k}(\xi_p, \eta_p) + \\
 B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{52k}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.139}$$

$$\begin{aligned}
 k_{42} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} t_i \{ C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{42k}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{52k}(\xi_p, \eta_p) \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.140}$$

$$\begin{aligned}
 k_{52} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} t_i \{ C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{42k}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{52k}(\xi_p, \eta_p) \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.141}$$

$$\begin{aligned}
 k_{13} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{13k}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{11i}(\xi_p, \eta_p) + B_{21i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{23k}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 B_{31i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{33k}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{41i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{43k}(\xi_p, \eta_p) + B_{51i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{53k}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.142}$$

$$\begin{aligned}
 k_{23} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{13k}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{12i}(\xi_p, \eta_p) + B_{22i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{23k}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 \left. B_{32i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{33k}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{42i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \right. \\
 \left. Be_{43k}(\xi_p, \eta_p) + B_{52i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{53k}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.143}$$

$$\begin{aligned}
 k_{33} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + \nu B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{13k}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu B_{13i}(\xi_p, \eta_p) + B_{23i}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{23k}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 \left. B_{33i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{33k}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [B_{43i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \right. \\
 \left. Be_{43k}(\xi_p, \eta_p) + B_{53i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{53k}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.144}$$

$$\begin{aligned}
 k_{43} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} t_i \cdot [C_{44i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{43k}(\xi_p, \eta_p) + C_{54i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{53k}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.145}$$

$$\begin{aligned}
 k_{53} = \frac{E}{2k(1+\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{mh} t_i \cdot [C_{45i}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{43k}(\xi_p, \eta_p) + C_{55i}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{53k}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.146}$$

6.4.4 Determinação da submatriz $[K_{kj,mm}]$

A submatriz $[K_{kj,mm}]$ está relacionada ao grau k , ao lado j , ao grau m e ao lado n , sendo que k varia de 2 a 4, j , de 1 a 4, m , de 2 a 4 e n , de 1 a 4. Essa submatriz caracteriza o elemento hierárquico no que se refere ao refinamento de seus lados:

$$[K_{kj,mm}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Bl_{kj}(\xi, \eta)]^T [D'] [Bl_{mn}(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \tag{6.147}$$

ou ainda, levando-se em conta as equações (5.12) e (6.44):

$$\begin{aligned}
 [K_{kj,mn}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} Bl_{11kj} & Bl_{21kj} & Bl_{31kj} & Bl_{41kj} & Bl_{51kj} \\ Bl_{12kj} & Bl_{22kj} & Bl_{32kj} & Bl_{42kj} & Bl_{52kj} \\ Bl_{13kj} & Bl_{23kj} & Bl_{33kj} & Bl_{43kj} & Bl_{53kj} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \\
 \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} &\cdot \begin{bmatrix} Bl_{11mn} & Bl_{12mn} & Bl_{13mn} \\ Bl_{21mn} & Bl_{22mn} & Bl_{23mn} \\ Bl_{31mn} & Bl_{32mn} & Bl_{33mn} \\ Bl_{41mn} & Bl_{42mn} & Bl_{43mn} \\ Bl_{51mn} & Bl_{52mn} & Bl_{53mn} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.148)
 \end{aligned}$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se:

$$[K_{kj,mn}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (6.149)$$

onde

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(Bl_{11kj} + \nu Bl_{21kj}) \cdot Bl_{11mn} + (\nu Bl_{11kj} + Bl_{21kj}) \cdot Bl_{21mn} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{31kj} \cdot Bl_{31mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{41kj} \cdot Bl_{41mn} + Bl_{51kj} \cdot Bl_{51mn}) \right\} \cdot \\
 &\quad |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.150)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{21} &= E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(Bl_{12kj} + \nu Bl_{22kj}) \cdot Bl_{11mn} + (\nu Bl_{12kj} + Bl_{22kj}) \cdot Bl_{21mn} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{32kj} \cdot Bl_{31mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{42kj} \cdot Bl_{41mn} + Bl_{52kj} \cdot Bl_{51mn}) \right\} \cdot \\
 &\quad |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.151)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{31} &= E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(Bl_{13kj} + \nu Bl_{23kj}) \cdot Bl_{11mn} + (\nu Bl_{13kj} + Bl_{23kj}) \cdot Bl_{21mn} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{33kj} \cdot Bl_{31mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{43kj} \cdot Bl_{41mn} + Bl_{53kj} \cdot Bl_{51mn}) \right\} \cdot \\
 &\quad |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.152)
 \end{aligned}$$

$$k_{12} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Bl_{11kj} + \nu Bl_{21kj}) \cdot Bl_{12mn} + (\nu Bl_{11kj} + Bl_{21kj}) \cdot Bl_{22mn} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{31kj} \cdot Bl_{32mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{41kj} \cdot Bl_{42mn} + Bl_{51kj} \cdot Bl_{52mn}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.153)$$

$$k_{22} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Bl_{12kj} + \nu Bl_{22kj}) \cdot Bl_{12mn} + (\nu Bl_{12kj} + Bl_{22kj}) \cdot Bl_{22mn} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{32kj} \cdot Bl_{32mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{42kj} \cdot Bl_{42mn} + Bl_{52kj} \cdot Bl_{52mn}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.154)$$

$$k_{32} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Bl_{13kj} + \nu Bl_{23kj}) \cdot Bl_{12mn} + (\nu Bl_{13kj} + Bl_{23kj}) \cdot Bl_{22mn} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{33kj} \cdot Bl_{32mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{43kj} \cdot Bl_{42mn} + Bl_{53kj} \cdot Bl_{52mn}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.155)$$

$$k_{13} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Bl_{11kj} + \nu Bl_{21kj}) \cdot Bl_{13mn} + (\nu Bl_{11kj} + Bl_{21kj}) \cdot Bl_{23mn} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{31kj} \cdot Bl_{33mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{41kj} \cdot Bl_{43mn} + Bl_{51kj} \cdot Bl_{53mn}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.156)$$

$$k_{23} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Bl_{12kj} + \nu Bl_{22kj}) \cdot Bl_{13mn} + (\nu Bl_{12kj} + Bl_{22kj}) \cdot Bl_{23mn} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{32kj} \cdot Bl_{33mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{42kj} \cdot Bl_{43mn} + Bl_{52kj} \cdot Bl_{53mn}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.157)$$

$$k_{33} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Bl_{13kj} + \nu Bl_{23kj}) \cdot Bl_{13mn} + (\nu Bl_{13kj} + Bl_{23kj}) \cdot Bl_{23mn} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{33kj} \cdot Bl_{33mn}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{43kj} \cdot Bl_{43mn} + Bl_{53kj} \cdot Bl_{53mn}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.158)$$

Fazendo-se agora a integração analítica na direção ζ (equações 5.77) e a integração numérica nas direções ξ e η , com mh sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$\begin{aligned}
 k_{11} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Bl_{11kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{21kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{11mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Bl_{11kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{21kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{21mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{31kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{31mn}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} [Bl_{41kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. Bl_{51kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.159}$$

$$\begin{aligned}
 k_{21} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Bl_{12kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{22kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{11mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Bl_{12kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{22kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{21mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{32kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{31mn}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} [Bl_{42kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. Bl_{52kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.160}$$

$$\begin{aligned}
 k_{31} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Bl_{13kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{23kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{11mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 (\nu Bl_{13kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{23kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{21mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{33kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{31mn}(\xi_p, \eta_p)] + \\
 \frac{1}{k(1+\nu)} [Bl_{43kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{41mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 Bl_{53kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{51mn}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.161}$$

$$\begin{aligned}
 k_{12} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Bl_{11kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{21kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{12mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Bl_{11kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{21kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{22mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 Bl_{31kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{32mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{41kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Bl_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{51kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.162}$$

$$\begin{aligned}
 k_{22} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Bl_{12kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{22kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{12mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Bl_{12kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{22kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{22mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 Bl_{32kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{32mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{42kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Bl_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{52kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.163}$$

$$\begin{aligned}
 k_{32} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Bl_{13kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{23kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{12mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Bl_{13kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{23kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{22mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{33kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{32mn}(\xi_p, \eta_p)] + \\
 \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{43kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{42mn}(\xi_p, \eta_p) + \\
 Bl_{53kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{52mn}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.164}$$

$$\begin{aligned}
 k_{13} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Bl_{11kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{21kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{13mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Bl_{11kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{21kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{23mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 Bl_{31kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{33mn}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{41kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Bl_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{51kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.165}$$

$$\begin{aligned}
 k_{23} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \left[(Bl_{12kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{22kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{13mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \right. \\
 \left. \left. (\nu Bl_{12kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{22kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{23mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \right. \right. \\
 \left. \left. Bl_{32kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{33mn}(\xi_p, \eta_p) \right] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{42kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot \right. \\
 \left. Bl_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{52kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \quad (6.166)$$

$$\begin{aligned}
 k_{33} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \left[(Bl_{13kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{23kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{13mn}(\xi_p, \eta_p) + \right. \right. \\
 \left. \left. (\nu Bl_{13kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{23kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Bl_{23mn}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \right. \right. \\
 \left. \left. Bl_{33kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{33mn}(\xi_p, \eta_p) \right] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{43kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot \right. \\
 \left. Bl_{43mn}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{53kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Bl_{53mn}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \quad (6.167)$$

6.4.5 Determinação da submatriz $[K_{kj,m}]$

A submatriz $[K_{kj,m}]$ está relacionada ao grau k , ao lado j e ao grau m , sendo que k varia de 2 a 4, j , de 1 a 4 e m é igual a 4. Essa submatriz caracteriza o acoplamento entre o elemento hierárquico, no que se refere ao refinamento de seus lados, e o mesmo elemento hierárquico, no que concerne ao refinamento de seu interior:

$$[K_{kj,m}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Bl_{kj}(\xi, \eta)]^T [D'] [Be_m(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.168)$$

ou ainda, levando-se em conta as equações (5.12), (6.44) e (6.45):

$$\begin{aligned}
 [K_{kj,m}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} Bl_{11kj} & Bl_{21kj} & Bl_{31kj} & Bl_{41kj} & Bl_{51kj} \\ Bl_{12kj} & Bl_{22kj} & Bl_{32kj} & Bl_{42kj} & Bl_{52kj} \\ Bl_{13kj} & Bl_{23kj} & Bl_{33kj} & Bl_{43kj} & Bl_{53kj} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \\
 &\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Be_{11m} & Be_{12m} & Be_{13m} \\ Be_{21m} & Be_{22m} & Be_{23m} \\ Be_{31m} & Be_{32m} & Be_{33m} \\ Be_{41m} & Be_{42m} & Be_{43m} \\ Be_{51m} & Be_{52m} & Be_{53m} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.169)
 \end{aligned}$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se:

$$[K_{kj,m}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (6.170)$$

onde

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(Bl_{11kj} + \nu Bl_{21kj}) \cdot Be_{11m} + (\nu Bl_{11kj} + Bl_{21kj}) \cdot Be_{21m} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{31kj} \cdot Be_{31m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{41kj} \cdot Be_{41m} + Bl_{51kj} \cdot Be_{51m}) \right\} \cdot \\
 &\quad |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.171)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{21} &= E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(Bl_{12kj} + \nu Bl_{22kj}) \cdot Be_{11m} + (\nu Bl_{12kj} + Bl_{22kj}) \cdot Be_{21m} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{32kj} \cdot Be_{31m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{42kj} \cdot Be_{41m} + Bl_{52kj} \cdot Be_{51m}) \right\} \cdot \\
 &\quad |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.172)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{31} &= E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(Bl_{13kj} + \nu Bl_{23kj}) \cdot Be_{11m} + (\nu Bl_{13kj} + Bl_{23kj}) \cdot Be_{21m} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{33kj} \cdot Be_{31m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{43kj} \cdot Be_{41m} + Bl_{53kj} \cdot Be_{51m}) \right\} \cdot \\
 &\quad |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.173)
 \end{aligned}$$

$$k_{12} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Bl_{11kj} + \nu Bl_{21kj}) \cdot Be_{12m} + (\nu Bl_{11kj} + Bl_{21kj}) \cdot Be_{22m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{31kj} \cdot Be_{32m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{41kj} \cdot Be_{42m} + Bl_{51kj} \cdot Be_{52m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.174)$$

$$k_{22} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Bl_{12kj} + \nu Bl_{22kj}) \cdot Be_{12m} + (\nu Bl_{12kj} + Bl_{22kj}) \cdot Be_{22m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{32kj} \cdot Be_{32m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{42kj} \cdot Be_{42m} + Bl_{52kj} \cdot Be_{52m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.175)$$

$$k_{32} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Bl_{13kj} + \nu Bl_{23kj}) \cdot Be_{12m} + (\nu Bl_{13kj} + Bl_{23kj}) \cdot Be_{22m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{33kj} \cdot Be_{32m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{43kj} \cdot Be_{42m} + Bl_{53kj} \cdot Be_{52m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.176)$$

$$k_{13} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Bl_{11kj} + \nu Bl_{21kj}) \cdot Be_{13m} + (\nu Bl_{11kj} + Bl_{21kj}) \cdot Be_{23m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{31kj} \cdot Be_{33m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{41kj} \cdot Be_{43m} + Bl_{51kj} \cdot Be_{53m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.177)$$

$$k_{23} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Bl_{12kj} + \nu Bl_{22kj}) \cdot Be_{13m} + (\nu Bl_{12kj} + Bl_{22kj}) \cdot Be_{23m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{32kj} \cdot Be_{33m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{42kj} \cdot Be_{43m} + Bl_{52kj} \cdot Be_{53m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.178)$$

$$k_{33} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Bl_{13kj} + \nu Bl_{23kj}) \cdot Be_{13m} + (\nu Bl_{13kj} + Bl_{23kj}) \cdot Be_{23m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{33kj} \cdot Be_{33m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Bl_{43kj} \cdot Be_{43m} + Bl_{53kj} \cdot Be_{53m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.179)$$

Fazendo-se agora a integração analítica na direção ζ (equações 5.77) e a integração numérica nas direções ξ e η , com mh sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$\begin{aligned}
 k_{11} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Bl_{11kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{21kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{11m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Bl_{11kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{21kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{21m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{31kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{31m}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{41kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{41m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. Bl_{51kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{51m}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.180}$$

$$\begin{aligned}
 k_{21} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Bl_{12kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{22kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{11m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Bl_{12kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{22kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{21m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{32kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{31m}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{42kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{41m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. Bl_{52kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{51m}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.181}$$

$$\begin{aligned}
 k_{31} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(Bl_{13kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{23kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{11m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 (\nu Bl_{13kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{23kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{21m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{33kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{31m}(\xi_p, \eta_p)] + \\
 \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{43kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{41m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 Bl_{53kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{51m}(\xi_p, \eta_p)] \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.182}$$

$$\begin{aligned}
 k_{12} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Bl_{11kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{21kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{12m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Bl_{11kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{21kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{22m}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 Bl_{31kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{32m}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{41kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{42m}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{51kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{52m}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.183}$$

$$\begin{aligned}
 k_{22} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Bl_{12kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{22kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{12m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Bl_{12kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{22kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{22m}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 Bl_{32kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{32m}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{42kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{42m}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{52kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{52m}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.184}$$

$$\begin{aligned}
 k_{32} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Bl_{13kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{23kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{12m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 (\nu Bl_{13kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{23kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{22m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Bl_{33kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{32m}(\xi_p, \eta_p)] + \\
 \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{43kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{42m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 Bl_{53kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{52m}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.185}$$

$$\begin{aligned}
 k_{13} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Bl_{11kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{21kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{13m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Bl_{11kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{21kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{23m}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 Bl_{31kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{33m}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{41kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{43m}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{51kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{53m}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.186}$$

$$\begin{aligned}
 k_{23} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \right. & [(Bl_{12kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{22kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{13m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 & (\nu Bl_{12kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{22kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{23m}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 & Bl_{32kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{33m}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{42kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 & Be_{43m}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{52kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{53m}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.187}$$

$$\begin{aligned}
 k_{33} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \right. & [(Bl_{13kj}(\xi_p, \eta_p) + \nu Bl_{23kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{13m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 & (\nu Bl_{13kj}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{23kj}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{23m}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 & Bl_{33kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{33m}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Bl_{43kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 & Be_{43m}(\xi_p, \eta_p) + Bl_{53kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{53m}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.188}$$

6.4.6 Determinação da submatriz $[K_{km}]$

A submatriz $[K_{km}]$ está relacionada ao grau k e ao grau m , sendo que tanto k quanto m são iguais a 4. Essa submatriz caracteriza o elemento hierárquico no que concerne ao refinamento de seu interior:

$$[K_{km}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Be_k(\xi, \eta)]^T [D'] [Be_m(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \tag{6.189}$$

ou ainda, levando-se em conta as equações (5.12) e (6.45):

$$\begin{aligned}
 [K_{km}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \begin{bmatrix} Be_{11k} & Be_{21k} & Be_{31k} & Be_{41k} & Be_{51k} \\ Be_{12k} & Be_{22k} & Be_{32k} & Be_{42k} & Be_{52k} \\ Be_{13k} & Be_{23k} & Be_{33k} & Be_{43k} & Be_{53k} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \\
 \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2k} \end{bmatrix} & \cdot \begin{bmatrix} Be_{11m} & Be_{12m} & Be_{13m} \\ Be_{21m} & Be_{22m} & Be_{23m} \\ Be_{31m} & Be_{32m} & Be_{33m} \\ Be_{41m} & Be_{42m} & Be_{43m} \\ Be_{51m} & Be_{52m} & Be_{53m} \end{bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta
 \end{aligned} \tag{6.190}$$

Resolvendo-se a equação anterior, obtém-se:

$$[K_{km}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (6.191)$$

onde

$$k_{11} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(Be_{11k} + \nu Be_{21k}) \cdot Be_{11m} + (\nu Be_{11k} + Be_{21k}) \cdot Be_{21m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{31k} \cdot Be_{31m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Be_{41k} \cdot Be_{41m} + Be_{51k} \cdot Be_{51m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.192)$$

$$k_{21} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(Be_{12k} + \nu Be_{22k}) \cdot Be_{11m} + (\nu Be_{12k} + Be_{22k}) \cdot Be_{21m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{32k} \cdot Be_{31m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Be_{42k} \cdot Be_{41m} + Be_{52k} \cdot Be_{51m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.193)$$

$$k_{31} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(Be_{13k} + \nu Be_{23k}) \cdot Be_{11m} + (\nu Be_{13k} + Be_{23k}) \cdot Be_{21m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{33k} \cdot Be_{31m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Be_{43k} \cdot Be_{41m} + Be_{53k} \cdot Be_{51m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.194)$$

$$k_{12} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} [(Be_{11k} + \nu Be_{21k}) \cdot Be_{12m} + (\nu Be_{11k} + Be_{21k}) \cdot Be_{22m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{31k} \cdot Be_{32m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Be_{41k} \cdot Be_{42m} + Be_{51k} \cdot Be_{52m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.195)$$

$$k_{22} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Be_{12k} + \nu Be_{22k}) \cdot Be_{12m} + (\nu Be_{12k} + Be_{22k}) \cdot Be_{22m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{32k} \cdot Be_{32m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Be_{42k} \cdot Be_{42m} + Be_{52k} \cdot Be_{52m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.196)$$

$$k_{32} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Be_{13k} + \nu Be_{23k}) \cdot Be_{12m} + (\nu Be_{13k} + Be_{23k}) \cdot Be_{22m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{33k} \cdot Be_{32m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Be_{43k} \cdot Be_{42m} + Be_{53k} \cdot Be_{52m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.197)$$

$$k_{13} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Be_{11k} + \nu Be_{21k}) \cdot Be_{13m} + (\nu Be_{11k} + Be_{21k}) \cdot Be_{23m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{31k} \cdot Be_{33m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Be_{41k} \cdot Be_{43m} + Be_{51k} \cdot Be_{53m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.198)$$

$$k_{23} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Be_{12k} + \nu Be_{22k}) \cdot Be_{13m} + (\nu Be_{12k} + Be_{22k}) \cdot Be_{23m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{32k} \cdot Be_{33m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Be_{42k} \cdot Be_{43m} + Be_{52k} \cdot Be_{53m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.199)$$

$$k_{33} = E \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \cdot [(Be_{13k} + \nu Be_{23k}) \cdot Be_{13m} + (\nu Be_{13k} + Be_{23k}) \cdot Be_{23m} + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{33k} \cdot Be_{33m}] + \frac{1}{2k(1+\nu)} \cdot (Be_{43k} \cdot Be_{43m} + Be_{53k} \cdot Be_{53m}) \right\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (6.200)$$

Fazendo-se agora a integração analítica na direção ζ (equações 5.77) e a integração numérica nas direções ξ e η , com mh sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$\begin{aligned}
 k_{11} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Be_{11k}(\xi_p, \eta_p) + \nu Be_{21k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{11m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Be_{11k}(\xi_p, \eta_p) + Be_{21k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{21m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{31k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{31m}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Be_{41k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{41m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. Be_{51k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{51m}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.201}$$

$$\begin{aligned}
 k_{21} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Be_{12k}(\xi_p, \eta_p) + \nu Be_{22k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{11m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Be_{12k}(\xi_p, \eta_p) + Be_{22k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{21m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{32k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{31m}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Be_{42k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{41m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. Be_{52k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{51m}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.202}$$

$$\begin{aligned}
 k_{31} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Be_{13k}(\xi_p, \eta_p) + \nu Be_{23k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{11m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Be_{13k}(\xi_p, \eta_p) + Be_{23k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{21m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \left. \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{33k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{31m}(\xi_p, \eta_p)] + \right. \\
 \left. \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Be_{43k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{41m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 \left. Be_{53k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{51m}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.203}$$

$$\begin{aligned}
 k_{12} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} [(Be_{11k}(\xi_p, \eta_p) + \nu Be_{21k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{12m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Be_{11k}(\xi_p, \eta_p) + Be_{21k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{22m}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 Be_{31k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{32m}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Be_{41k}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{42m}(\xi_p, \eta_p) + Be_{51k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{52m}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.204}$$

$$\begin{aligned}
 k_{22} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(Be_{12k}(\xi_p, \eta_p) + \nu Be_{22k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{12m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Be_{12k}(\xi_p, \eta_p) + Be_{22k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{22m}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 Be_{32k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{32m}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Be_{42k}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{42m}(\xi_p, \eta_p) + Be_{52k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{52m}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.205}$$

$$\begin{aligned}
 k_{32} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(Be_{13k}(\xi_p, \eta_p) + \nu Be_{23k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{12m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 (\nu Be_{13k}(\xi_p, \eta_p) + Be_{23k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{22m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 \frac{(1-\nu)}{2} \cdot Be_{33k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{32m}(\xi_p, \eta_p)] + \\
 \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Be_{43k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{42m}(\xi_p, \eta_p) + \\
 Be_{53k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{52m}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.206}$$

$$\begin{aligned}
 k_{13} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(Be_{11k}(\xi_p, \eta_p) + \nu Be_{21k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{13m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Be_{11k}(\xi_p, \eta_p) + Be_{21k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{23m}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 Be_{31k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{33m}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Be_{41k}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{43m}(\xi_p, \eta_p) + Be_{51k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{53m}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.207}$$

$$\begin{aligned}
 k_{23} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(Be_{12k}(\xi_p, \eta_p) + \nu Be_{22k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{13m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Be_{12k}(\xi_p, \eta_p) + Be_{22k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{23m}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 Be_{32k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{33m}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Be_{42k}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 Be_{43m}(\xi_p, \eta_p) + Be_{52k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{53m}(\xi_p, \eta_p)] \left. \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.208}$$

$$\begin{aligned}
 k_{33} = E \cdot \sum_{p=1}^{mh} \left\{ \frac{2}{(1-\nu^2)} \cdot [(Be_{13k}(\xi_p, \eta_p) + \nu Be_{23k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{13m}(\xi_p, \eta_p) + \right. \\
 (\nu Be_{13k}(\xi_p, \eta_p) + Be_{23k}(\xi_p, \eta_p)) \cdot Be_{23m}(\xi_p, \eta_p) + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \\
 Be_{33k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{33m}(\xi_p, \eta_p)] + \frac{1}{k(1+\nu)} \cdot [Be_{43k}(\xi_p, \eta_p) \cdot \\
 \left. Be_{43m}(\xi_p, \eta_p) + Be_{53k}(\xi_p, \eta_p) \cdot Be_{53m}(\xi_p, \eta_p)] \right\} \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p
 \end{aligned} \tag{6.209}$$

6.4.7 Determinação da submatriz $[K_{kj,l}]$

A submatriz $[K_{kj,l}]$ está relacionada ao grau k , ao lado j e ao nó l , sendo que k varia de 2 a 4, j , de 1 a 4 e l , de 1 a 4. Essa submatriz caracteriza o acoplamento entre a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seus lados e o elemento superparamétrico:

$$[K_{kj,l}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Bl_{kj}(\xi, \eta)]^T [D'] [B_l(\xi, \eta, \zeta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta = [K_{i,mn}]^T \tag{6.210}$$

sendo que a submatriz $[K_{i,mn}]$ já foi obtida anteriormente no item 6.4.2 .

6.4.8 Determinação da submatriz $[K_{kl}]$

A submatriz $[K_{kl}]$ está relacionada ao grau k e ao nó l , sendo que k é igual a 4 e l varia de 1 a 4. Essa submatriz caracteriza o acoplamento entre a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seu interior e o elemento superparamétrico:

$$[K_{kl}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Be_k(\xi, \eta)]^T [D'] [B_l(\xi, \eta, \zeta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta = [K_{im}]^T \tag{6.211}$$

sendo que a submatriz $[K_{im}]$ já foi obtida anteriormente no item 6.4.3 .

6.4.9 Determinação da submatriz $[K_{k,mn}]$

A submatriz $[K_{k,mn}]$ está relacionada ao grau k , ao grau m e ao lado n , sendo que k e m são iguais a 4 e n varia de 1 a 4. Essa submatriz caracteriza o acoplamento entre a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seu interior e a parte referente ao refinamento de seus lados:

$$[K_{k,mn}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Be_k(\xi, \eta)]^T [D'] [Bl_m(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta = [K_{kj,m}]^T \quad (6.212)$$

sendo que a submatriz $[K_{kj,m}]$ já foi obtida anteriormente no item 6.4.5.

6.5 Determinação do vetor de carga do elemento paramétrico do tipo hierárquico

As expressões que possibilitam determinar o vetor de carga do elemento superparamétrico foram apresentadas nas equações (5.40) e (5.41). Analogamente, utilizam-se as mesmas equações para o elemento do tipo hierárquico, com a ressalva de se empregar a expressão (6.26) para a matriz $[N']$:

$$\{f_q^e\} = \int_A [N']^T \{q\} dA \quad (6.213)$$

$$\{f_b^e\} = \int_V [N']^T \{b\} dV \quad (6.214)$$

6.5.1 Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento hierárquico: $\{f_q^e\}$

Substituindo-se as equações (6.26) e (5.110) na equação (6.213), tem-se:

$$\{f_q^e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [N_1(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [N_i(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [N_4(\xi, \eta)]^T \\ [M_{21}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [M_{ij}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [M_{44}(\xi, \eta)]^T \\ [M_k(\xi, \eta)]^T \end{bmatrix} \cdot [[N_1(\xi, \eta)] \cdots [N_i(\xi, \eta)] \cdots [N_n(\xi, \eta)]] \cdot \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \vdots \\ \{q_i\} \\ \vdots \\ \{q_n\} \end{Bmatrix} \cdot \|\vec{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (6.215)$$

Essa equação, uma vez resolvida, levará ao vetor de carga do elemento do tipo hierárquico correspondente à ação da carga distribuída sobre suas faces externas:

$$\{f_q^e\} = \begin{Bmatrix} \{f_{q_1}\} \\ \vdots \\ \{f_{q_i}\} \\ \vdots \\ \{f_{q_4}\} \\ \{f_{q_{21}}\} \\ \vdots \\ \{f_{q_{ij}}\} \\ \vdots \\ \{f_{q_{44}}\} \\ \{f_{q_k}\} \end{Bmatrix} \quad (6.216)$$

6.5.1.1 Determinação da submatriz $\{f_{q_i}\}$

A submatriz $\{f_{q_i}\}$ está relacionada ao nó i , sendo que i varia de 1 a 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao elemento superparamétrico e já foi obtida no item 5.4.1.1. Os elementos dessa submatriz são dados pelas equações (5.121) a (5.124), já considerada a integração numérica.

6.5.1.2 Determinação da submatriz $\{f_{q_{kj}}\}$

A submatriz $\{f_{q_{kj}}\}$ está relacionada ao grau k e ao lado j , sendo que k varia de 2 a 4 e j , de 1 a 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado à parte do elemento hierárquico relacionada ao refinamento de seus lados e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{f_{q_{kj}}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [M_{kj}(\xi, \eta)]^T \cdot \sum_{l=1}^n [N_l(\xi, \eta)] \cdot \{q_l\} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (6.217)$$

ou ainda, levando em conta as equações (5.104), com $N_l(\xi, \eta)$ no lugar de $N_l'(\xi, \eta)$, (5.111) e (6.20):

$$\{f_{q_{kj}}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} M_{kj}(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_{kj}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_{kj}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \cdot \sum_{l=1}^n \begin{bmatrix} N_l(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_l(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_l(\xi, \eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{xl} \\ q_{yl} \\ q_{zl} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (6.218)$$

Resolvendo-se essa equação, obtém-se:

$$\{f_{q_{kj}}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (6.219)$$

onde

$$f_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_{kj}(\xi, \eta) \cdot \sum_{l=1}^n N_l(\xi, \eta) \cdot q_{xl} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (6.220)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_{kj}(\xi, \eta) \cdot \sum_{l=1}^n N_l(\xi, \eta) \cdot q_{yl} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (6.221)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_{kj}(\xi, \eta) \cdot \sum_{l=1}^n N_l(\xi, \eta) \cdot q_{xl} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (6.222)$$

Fazendo-se agora a integração numérica nas direções ξ e η , com hm sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = \sum_{p=1}^{hm} M_{kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{l=1}^n N_l(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{xl} \cdot \|\bar{r}_3(\xi_p, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (6.223)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{hm} M_{kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{l=1}^n N_l(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{yl} \cdot \|\bar{r}_3(\xi_p, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (6.224)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{hm} M_{kj}(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{l=1}^n N_l(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{xl} \cdot \|\bar{r}_3(\xi_p, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (6.225)$$

6.5.1.3 Determinação da submatriz $\{f_{q_k}\}$

A submatriz $\{f_{q_k}\}$ está relacionada ao grau k , sendo k igual a 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado à parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento do seu interior e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{f_{q_k}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [M_k(\xi, \eta)]^T \cdot \sum_{l=1}^n [N_l(\xi, \eta)] \cdot \{q_l\} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (6.226)$$

ou, analogamente à equação (6.218), com $M_k(\xi, \eta)$ (equação 6.21) no lugar de $M_{kj}(\xi, \eta)$:

$$\{f_{q_k}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} M_k(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_k(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_k(\xi, \eta) \end{bmatrix} \cdot \sum_{l=1}^n \begin{bmatrix} N_l(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_l(\xi, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_l(\xi, \eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{xl} \\ q_{yl} \\ q_{zl} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \|\bar{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (6.227)$$

Resolvendo-se essa equação, obtém-se:

$$\{f_{q_k}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (6.228)$$

onde

$$f_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_k(\xi, \eta) \cdot \sum_{l=1}^n N_l(\xi, \eta) \cdot q_{xl} \cdot \|\vec{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (6.229)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_k(\xi, \eta) \cdot \sum_{l=1}^n N_l(\xi, \eta) \cdot q_{yl} \cdot \|\vec{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (6.230)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_k(\xi, \eta) \cdot \sum_{l=1}^n N_l(\xi, \eta) \cdot q_{zl} \cdot \|\vec{r}_3(\xi, \eta)\| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (6.231)$$

Fazendo-se agora a integração numérica nas direções ξ e η , com hm sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = \sum_{p=1}^{hm} M_k(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{l=1}^n N_l(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{xl} \cdot \|\vec{r}_3(\xi_p, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (6.232)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{hm} M_k(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{l=1}^n N_l(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{yl} \cdot \|\vec{r}_3(\xi_p, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (6.233)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{hm} M_k(\xi_p, \eta_p) \cdot \sum_{l=1}^n N_l(\xi_p, \eta_p) \cdot q_{zl} \cdot \|\vec{r}_3(\xi_p, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (6.234)$$

6.5.2 Determinação do vetor de carga correspondente à ação das forças de corpo: $\{f_b^e\}$

Substituindo-se a equação (6.26) na equação (6.214), tem-se:

$$\{f_b^e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [N_1'(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_i'(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ \vdots \\ [N_4'(\xi, \eta, \zeta)]^T \\ [M_{21}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [M_{ij}(\xi, \eta)]^T \\ \vdots \\ [M_{44}(\xi, \eta)]^T \\ [M_4(\xi, \eta)]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.235)$$

Essa equação, uma vez resolvida, levará ao vetor de carga do elemento correspondente à ação das forças de corpo:

$$\{f_b^e\} = \begin{Bmatrix} \{f_{b_1}\} \\ \vdots \\ \{f_{b_i}\} \\ \vdots \\ \{f_{b_4}\} \\ \{f_{b_{21}}\} \\ \vdots \\ \{f_{b_{ij}}\} \\ \vdots \\ \{f_{b_{44}}\} \\ \{f_{b_k}\} \end{Bmatrix} \quad (6.236)$$

6.5.2.1 Determinação da submatriz $\{f_{b_i}\}$

A submatriz $\{f_{b_i}\}$ está relacionada ao nó i do elemento que varia de 1 a 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao elemento superparamétrico e foi obtida no item 5.4.2.1. Os elementos dessa submatriz aparecem nas equações (5.134) a (5.137), já considerada a integração numérica.

6.5.2.2 Determinação da submatriz $\{f_{b_{kj}}\}$

A submatriz $\{f_{b_{kj}}\}$ está relacionada ao grau k e ao lado j , sendo que k varia de 2 a 4 e j , de 1 a 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado à parte do elemento hierárquico relacionada ao refinamento de seus lados e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{f_{b_{kj}}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [M_{kj}(\xi, \eta)]^T \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.237)$$

ou ainda, fazendo-se uso da equação (6.20):

$$\{f_{b_{kj}}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} M_{kj}(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_{kj}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_{kj}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.238)$$

Resolvendo-se essa equação, obtém-se:

$$\{f_{b_{kj}}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (6.239)$$

onde

$$f_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_{kj}(\xi, \eta) \cdot b_x \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.240)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_{kj}(\xi, \eta) \cdot b_y \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.241)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_{kj}(\xi, \eta) \cdot b_z \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.242)$$

Fazendo-se agora a integração analítica na direção ζ (equações 5.77) e a integração numérica nas direções ξ e η , com hm sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = 2 \cdot \sum_{p=1}^{hm} M_{ij}(\xi_p, \eta_p) \cdot b_x \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.243)$$

$$f_2 = 2 \cdot \sum_{p=1}^{hm} M_{ij}(\xi_p, \eta_p) \cdot b_y \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.244)$$

$$f_3 = 2 \cdot \sum_{p=1}^{hm} M_{ij}(\xi_p, \eta_p) \cdot b_z \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.245)$$

6.5.2.3 Determinação da submatriz $\{f_{b_k}\}$

A submatriz $\{f_{b_k}\}$ está relacionada ao grau k , com k igual a 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado à parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seu interior e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{f_{b_k}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [M_k(\xi, \eta)]^T \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.246)$$

ou ainda, fazendo-se uso da equação (6.21):

$$\{f_{b_k}\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} M_k(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_k(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_k(\xi, \eta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.247)$$

Resolvendo-se essa equação, obtém-se:

$$\{f_{b_k}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (6.248)$$

onde

$$f_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_k(\xi, \eta) \cdot b_x \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.249)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_k(\xi, \eta) \cdot b_y \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.250)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_k(\xi, \eta) \cdot b_z \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6.251)$$

Fazendo-se agora a integração analítica na direção ζ (equações 5.77) e a integração numérica nas direções ξ e η , com hm sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = 2 \cdot \sum_{p=1}^{hm} M_k(\xi_p, \eta_p) \cdot b_x \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.252)$$

$$f_2 = 2 \cdot \sum_{p=1}^{hm} M_k(\xi_p, \eta_p) \cdot b_y \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.253)$$

$$f_3 = 2 \cdot \sum_{p=1}^{hm} M_k(\xi_p, \eta_p) \cdot b_z \cdot |J(\xi_p, \eta_p)| \cdot W_p \quad (6.254)$$

6.5.3 Determinação do vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces laterais do elemento hierárquico: $\{f_l^e\}$

Admitindo-se que a carga esteja distribuída ao longo dos lados da superfície média do elemento hierárquico, os deslocamentos de interesse serão aqueles relacionados aos pontos desses lados. Assim, as submatrizes $[M_{kj}(\xi, \eta)]$ e $[M_k(\xi, \eta)]$ que compõem a matriz $[N']$ da equação (6.213), para cada lado do elemento, tornam-se:

- (a) para o lado 1 (figura 6.2), no qual $\zeta = 0$ e $\eta = -1$:

$$[M_{kj}(\xi, \eta)] = [M_{kj}(\xi, -1)] = \begin{bmatrix} M_{kj}(\xi, -1) & 0 & 0 \\ 0 & M_{kj}(\xi, -1) & 0 \\ 0 & 0 & M_{kj}(\xi, -1) \end{bmatrix} \quad (6.255)$$

com j assumindo o valor 1, correspondente a este lado e

$$[M_k(\xi, \eta)] = [M_k(\xi, -1)] = \begin{bmatrix} M_k(\xi, -1) & 0 & 0 \\ 0 & M_k(\xi, -1) & 0 \\ 0 & 0 & M_k(\xi, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.256)$$

sendo que $[M_k(\xi, \eta)]$ será sempre nula no contorno do elemento.

(b) para o lado 2 (figura 6.2), no qual $\zeta = 0$ e $\xi = +1$:

$$[M_{kj}(\xi, \eta)] = [M_{kj}(1, \eta)] = \begin{bmatrix} M_{kj}(1, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_{kj}(1, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_{kj}(1, \eta) \end{bmatrix} \quad (6.257)$$

com j assumindo o valor 2, correspondente a este lado e

$$[M_k(\xi, \eta)] = [M_k(1, \eta)] = [0] \quad (6.258)$$

(c) para o lado 3 (figura 6.2), no qual $\zeta = 0$ e $\eta = +1$:

$$[M_{kj}(\xi, \eta)] = [M_{kj}(\xi, 1)] = \begin{bmatrix} M_{kj}(\xi, 1) & 0 & 0 \\ 0 & M_{kj}(\xi, 1) & 0 \\ 0 & 0 & M_{kj}(\xi, 1) \end{bmatrix} \quad (6.259)$$

com j assumindo o valor 3, correspondente a este lado e

$$[M_k(\xi, \eta)] = [M_k(\xi, 1)] = [0] \quad (6.260)$$

(d) para o lado 4 (figura 6.2), no qual $\zeta = 0$ e $\xi = -1$:

$$[M_{kj}(\xi, \eta)] = [M_{kj}(-1, \eta)] = \begin{bmatrix} M_{kj}(-1, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & M_{kj}(-1, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & M_{kj}(-1, \eta) \end{bmatrix} \quad (6.261)$$

com j assumindo o valor 4, correspondente a este lado e

$$[M_k(\xi, \eta)] = [M_k(-1, \eta)] = [0] \quad (6.262)$$

As submatrizes $[N'_i(\xi, \eta, \zeta)]$, que também fazem parte da matriz $[N']$ na equação (6.213), já foram obtidas, para cada um dos lados do elemento, no item 5.4.3, através das equações (5.138) a (5.141).

Analogamente ao item 5.4.3, tendo partido da equação (6.213), chega-se à seguinte equação, que fornece o vetor de carga correspondente às cargas distribuídas em cada lado j do elemento hierárquico:

$$\{f_{T^e}\} = \sum_{j=1}^4 \int_{S_j} [N'_j]^T \cdot \{\bar{t}_j\} \cdot dS_j \quad (6.263)$$

onde agora, $[N'_j]$ é uma matriz constituída pelas submatrizes $[M_{kj}]$, associadas aos lados j do elemento, $[M_k]$, associada ao interior do elemento, além das submatrizes $[N'_i]$, associadas aos nós i de cada lado j do elemento e já obtidas no item 5.4.3 .

Efetuando-se o somatório na equação (6.263), obtém-se:

$$\begin{aligned} \{f_{T^e}\} = & \int_{S_1} [N'_1]^T \cdot \{\bar{t}_1\} \cdot dS_1 + \int_{S_2} [N'_2]^T \cdot \{\bar{t}_2\} \cdot dS_2 + \\ & \int_{S_3} [N'_3]^T \cdot \{\bar{t}_3\} \cdot dS_3 + \int_{S_4} [N'_4]^T \cdot \{\bar{t}_4\} \cdot dS_4 \end{aligned} \quad (6.264)$$

onde dS_1 , dS_2 , dS_3 e dS_4 são fornecidos pelas equações (5.144) a (5.147).

6.5.3.1 Determinação do vetor de carga associado ao lado 1

De acordo com a equação (6.264), o vetor de carga associado ao lado 1 será dado por:

$$\{f_{l1}\} = \int_{S_1} [N'_1]^T \cdot \{\bar{t}1\} \cdot dS_1 \tag{6.265}$$

onde $\{\bar{t}1\}$ é uma matriz coluna (3x1), constituída das componentes da carga distribuída no lado 1, segundo o sistema global de referência. Substituindo-se as equações (5.144) e (5.153) em (6.265), vem:

$$\{f_{l1}\} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [N'_1(\xi,-1)]^T \\ [N'_i(\xi,-1)]^T \\ [M'_{kj}(\xi,-1)]^T \\ [M'_k(\xi,-1)]^T \end{bmatrix} \cdot [[N_1(\xi,-1)] \quad [N_2(\xi,-1)] \quad [N_3(\xi,-1)]] \cdot \begin{Bmatrix} \{\bar{t}1_1\} \\ \{\bar{t}1_2\} \\ \{\bar{t}1_3\} \end{Bmatrix} \cdot \|\bar{r}_1(\xi,-1)\| \cdot d\xi \tag{6.266}$$

Essa equação, uma vez resolvida, levará ao vetor de carga correspondente à ação da carga distribuída sobre o lado 1 do elemento hierárquico:

$$\{f_{l1}\} = \begin{Bmatrix} \{f_{l1_1}\} \\ \{f_{l1_i}\} \\ \{f_{l1_{kj}}\} \\ \{f_{l1_k}\} \end{Bmatrix} \tag{6.267}$$

6.5.3.1.1 Determinação da submatriz $\{f_{l1_i}\}$

A submatriz $\{f_{l1_i}\}$ está relacionada ao nó i , o qual assume os valores 1 e 2. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao lado 1 do elemento superparamétrico e foi obtida no item 5.4.3.1.1. Os elementos dessa submatriz aparecem nas equações (5.166) a (5.169), já considerada a integração numérica.

6.5.3.1.2 Determinação da submatriz $\{f_{1j}\}$

A submatriz $\{f_{1j}\}$ está relacionada ao grau k e ao lado j , sendo que k varia de 2 a 4 e j assume o valor 1. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado à parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seus lados e é dada por:

$$\{f_{1j}\} = \int_{-1}^1 [M_{kj}(\xi, -1)]^T \cdot \left[[N_1(\xi, -1)] \cdot \{\bar{t}_{1_1}\} + [N_2(\xi, -1)] \cdot \{\bar{t}_{1_2}\} + [N_3(\xi, -1)] \cdot \{\bar{t}_{1_3}\} \right] \cdot \|\bar{r}_1(\xi, -1)\| \cdot d\xi \quad (6.268)$$

ou ainda, utilizando-se as equações (6.255), (5.154), (5.155) e (5.156):

$$\{f_{1j}\} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} M_{kj}(\xi, -1) & 0 & 0 \\ 0 & M_{kj}(\xi, -1) & 0 \\ 0 & 0 & M_{kj}(\xi, -1) \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} N_1(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1x}} + N_2(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2x}} + N_3(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{3x}} \\ N_1(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1y}} + N_2(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2y}} + N_3(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{3y}} \\ N_1(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1z}} + N_2(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2z}} + N_3(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{3z}} \end{cases} \cdot \|\bar{r}_1(\xi, -1)\| \cdot d\xi \quad (6.269)$$

Resolvendo-se essa equação, obtém-se:

$$\{f_{1j}\} = \begin{cases} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{cases} \quad (6.270)$$

onde

$$f_1 = \int_{-1}^1 M_{kj}(\xi, -1) \cdot [N_1(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1x}} + N_2(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2x}} + N_3(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{3x}}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi, -1)\| \cdot d\xi \quad (6.271)$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 M_{kj}(\xi, -1) \cdot [N_1(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1y}} + N_2(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2y}} + N_3(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{3y}}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi, -1)\| \cdot d\xi \quad (6.272)$$

$$f_3 = \int_{-1}^1 M_{kj}(\xi, -1) \cdot [N_1(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{1z}} + N_2(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{2z}} + N_3(\xi, -1) \cdot \bar{t}_{1_{3z}}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi, -1)\| \cdot d\xi \quad (6.273)$$

Fazendo-se agora a integração numérica na direção ξ , com lh sendo o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$f_1 = \sum_{p=1}^{h_k} M_{kj}(\xi_{p,-1}) \cdot [N_1(\xi_{p,-1}) \cdot \bar{t}1_{1x} + N_2(\xi_{p,-1}) \cdot \bar{t}1_{2x} + N_5(\xi_{p,-1}) \cdot \bar{t}1_{5x}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi_{p,-1})\| \cdot W_p \quad (6.274)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{h_k} M_{kj}(\xi_{p,-1}) \cdot [N_1(\xi_{p,-1}) \cdot \bar{t}1_{1y} + N_2(\xi_{p,-1}) \cdot \bar{t}1_{2y} + N_5(\xi_{p,-1}) \cdot \bar{t}1_{5y}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi_{p,-1})\| \cdot W_p \quad (6.275)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{h_k} M_{kj}(\xi_{p,-1}) \cdot [N_1(\xi_{p,-1}) \cdot \bar{t}1_{1z} + N_2(\xi_{p,-1}) \cdot \bar{t}1_{2z} + N_5(\xi_{p,-1}) \cdot \bar{t}1_{5z}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi_{p,-1})\| \cdot W_p \quad (6.276)$$

6.5.3.1.3 Determinação da submatriz $\{ft1_k\}$

A submatriz $\{ft1_k\}$ está relacionada ao grau k , sendo k igual a 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado à parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seu interior e é dada por:

$$\{ft1_k\} = \int_{-1}^1 [M_k(\xi,-1)]^T \cdot \left[[N_1(\xi,-1)] \cdot \{\bar{t}1_1\} + [N_2(\xi,-1)] \cdot \{\bar{t}1_2\} + [N_5(\xi,-1)] \cdot \{\bar{t}1_5\} \right] \cdot \|\bar{r}_1(\xi,-1)\| \cdot d\xi \quad (6.277)$$

ou ainda, utilizando-se as equações (6.256), (5.154), (5.155) e (5.156):

$$\{ft1_k\} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{l} N_1(\xi,-1) \cdot \bar{t}1_{1x} + N_2(\xi,-1) \cdot \bar{t}1_{2x} + N_5(\xi,-1) \cdot \bar{t}1_{5x} \\ N_1(\xi,-1) \cdot \bar{t}1_{1y} + N_2(\xi,-1) \cdot \bar{t}1_{2y} + N_5(\xi,-1) \cdot \bar{t}1_{5y} \\ N_1(\xi,-1) \cdot \bar{t}1_{1z} + N_2(\xi,-1) \cdot \bar{t}1_{2z} + N_5(\xi,-1) \cdot \bar{t}1_{5z} \end{array} \right\} \cdot \|\bar{r}_1(\xi,-1)\| \cdot d\xi \quad (6.278)$$

Resolvendo-se essa equação, obtém-se:

$$\{ft1_k\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (6.279)$$

onde

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0 \quad (6.280)$$

6.5.3.2 Determinação do vetor de carga associado ao lado 2

Adotando-se, para a obtenção do vetor de carga $\{f_{t2}\}$ associado ao lado 2, um procedimento análogo àquele utilizado na determinação de $\{f_{t1}\}$, tem-se :

$$\{f_{t2}\} = \begin{Bmatrix} \{f_{t2_2}\} \\ \{f_{t2_i}\} \\ \{f_{t2_{kj}}\} \\ \{f_{t2_k}\} \end{Bmatrix} \quad (6.281)$$

6.5.3.2.1 Determinação da submatriz $\{f_{t2_i}\}$

A submatriz $\{f_{t2_i}\}$ está relacionada ao nó i , o qual assume os valores 2 e 3. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao lado 2 do elemento superparamétrico e foi obtida no item 5.4.3.2.1. Os elementos dessa submatriz aparecem nas equações (5.172) a (5.175), já considerada a integração numérica.

6.5.3.2.2 Determinação da submatriz $\{f_{t2_{kj}}\}$

A submatriz $\{f_{t2_{kj}}\}$ está relacionada ao grau k e ao lado j , sendo que k varia de 2 a 4 e j assume o valor 2. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado à parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seus lados e é dada por:

$$\{f_{t2_{kj}}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (6.282)$$

onde

$$f_1 = \sum_{p=1}^{l_k} M_{kj}(1, \eta_p) \cdot [N_2(1, \eta_p) \cdot \bar{t}_{2_{2x}} + N_3(1, \eta_p) \cdot \bar{t}_{2_{3x}} + N_6(1, \eta_p) \cdot \bar{t}_{2_{6x}}] \cdot \|\bar{F}_2(1, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (6.283)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{lh} M_{kj}(1, \eta_p) \cdot [N_2(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{2y} + N_3(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{3y} + N_6(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{6y}] \cdot \|\bar{f}_2(1, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (6.284)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{lh} M_{kj}(1, \eta_p) \cdot [N_2(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{2z} + N_3(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{3z} + N_6(1, \eta_p) \cdot \bar{t}2_{6z}] \cdot \|\bar{f}_2(1, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (6.285)$$

6.5.3.2.3 Determinação da submatriz $\{f t2_k\}$

A submatriz $\{f t2_k\}$ está relacionada ao grau k , sendo k igual a 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado à parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seu interior e é dada por:

$$\{f t2_k\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (6.286)$$

onde

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0 \quad (6.287)$$

6.5.3.3 Determinação do vetor de carga associado ao lado 3

Adotando-se, para a obtenção do vetor de carga $\{f t3\}$ associado ao lado 3, um procedimento análogo àquele utilizado na determinação de $\{f t1\}$, tem-se:

$$\{f t3\} = \begin{Bmatrix} \{f t3_3\} \\ \{f t3_i\} \\ \{f t3_{kj}\} \\ \{f t3_k\} \end{Bmatrix} \quad (6.288)$$

6.5.3.3.1 Determinação da submatriz $\{f t3_i\}$

A submatriz $\{f t3_i\}$ está relacionada ao nó i , o qual assume os valores 3 e 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao lado 3 do elemento superparamétrico e foi

obtida no item 5.4.3.3.1. Os elementos dessa submatriz aparecem nas equações (5.178) a (5.181), já considerada a integração numérica.

6.5.3.3.2 Determinação da submatriz $\{f t 3_{kj}\}$

A submatriz $\{f t 3_{kj}\}$ está relacionada ao grau k e ao lado j , sendo que k varia de 2 a 4 e j assume o valor 3. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado à parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seus lados e é dada por:

$$\{f t 3_{kj}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (6.289)$$

onde

$$f_1 = \sum_{p=1}^{lh} M_{kj}(\xi_p, 1) \cdot [N_3(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{3x} + N_4(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{4x} + N_7(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{7x}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi_p, 1)\| \cdot W_p \quad (6.290)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^{lh} M_{kj}(\xi_p, 1) \cdot [N_3(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{3y} + N_4(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{4y} + N_7(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{7y}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi_p, 1)\| \cdot W_p \quad (6.291)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^{lh} M_{kj}(\xi_p, 1) \cdot [N_3(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{3z} + N_4(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{4z} + N_7(\xi_p, 1) \cdot \bar{t}3_{7z}] \cdot \|\bar{r}_1(\xi_p, 1)\| \cdot W_p \quad (6.292)$$

6.5.3.3.3 Determinação da submatriz $\{f t 3_k\}$

A submatriz $\{f t 3_k\}$ está relacionada ao grau k , sendo k igual a 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado à parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seu interior e é dada por:

$$\{f t 3_k\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (6.293)$$

onde

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0 \quad (6.294)$$

6.5.3.4 Determinação do vetor de carga associado ao lado 4

Adotando-se, para a obtenção do vetor de carga $\{f_{t4}\}$ associado ao lado 4, um procedimento análogo àquele utilizado na determinação de $\{f_{t1}\}$, tem-se:

$$\{f_{t4}\} = \begin{Bmatrix} \{f_{t4_1}\} \\ \{f_{t4_j}\} \\ \{f_{t4_{kj}}\} \\ \{f_{t4_k}\} \end{Bmatrix} \quad (6.295)$$

6.5.3.4.1 Determinação da submatriz $\{f_{t4_i}\}$

A submatriz $\{f_{t4_i}\}$ está relacionada ao nó i , o qual assume os valores 1 e 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado ao lado 4 do elemento superparamétrico e foi obtida no item 5.4.3.4.1. Os elementos dessa submatriz aparecem nas equações (5.184) a (5.187), já considerada a integração numérica.

6.5.3.4.2 Determinação da submatriz $\{f_{t4_{kj}}\}$

A submatriz $\{f_{t4_{kj}}\}$ está relacionada ao grau k e ao lado j , sendo que k varia de 2 a 4 e j assume o valor 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado à parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seus lados e é dada por:

$$\{f_{t4_{kj}}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (6.296)$$

onde

$$f_1 = \sum_{p=1}^h M_{kj}(-1, \eta_p) \cdot [N_1(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{1x} + N_4(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{4x} + N_8(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{8x}] \cdot \|\bar{r}_2(-1, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (6.297)$$

$$f_2 = \sum_{p=1}^h M_{kj}(-1, \eta_p) \cdot [N_1(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{1y} + N_4(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{4y} + N_8(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{8y}] \cdot \|\bar{r}_2(-1, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (6.298)$$

$$f_3 = \sum_{p=1}^h M_{kj}(-1, \eta_p) \cdot [N_1(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{1z} + N_4(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{4z} + N_8(-1, \eta_p) \cdot \bar{t}4_{8z}] \cdot \|\bar{r}_2(-1, \eta_p)\| \cdot W_p \quad (6.299)$$

6.5.3.4.3 Determinação da submatriz $\{ft4_k\}$

A submatriz $\{ft4_k\}$ está relacionada ao grau k , sendo k igual a 4. Essa submatriz caracteriza o vetor de carga associado à parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seu interior e é dada por:

$$\{ft4_k\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (6.300)$$

onde

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0 \quad (6.301)$$

6.5.4 Determinação do vetor de carga do elemento hierárquico quando todos os carregamentos atuam simultaneamente

O vetor de carga do elemento hierárquico correspondente às ações simultâneas de todos os carregamentos descritos anteriormente, será dado por:

$$\{f^e\} = \{f_a^e\} + \{f_b^e\} + \{f_t^e\} \quad (6.302)$$

Capítulo 7

FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA

7.1 Introdução

Tendo sido encontradas as equações algébricas que descrevem as características de cada elemento do sistema estrutural, o passo seguinte foi combiná-las para formar um conjunto completo de equações que governasse a reunião de todos os elementos. O procedimento de montagem desse conjunto de equações está baseado na necessidade de que o equilíbrio se verifique por todo o sistema. Como as condições de equilíbrio já foram impostas dentro de cada elemento (princípio dos trabalhos virtuais - item 5.1), necessita-se agora, estabelecer essas condições para cada nó do sistema discretizado. Nesse sentido, cada componente das forças $\{f_i\}$, atuantes em um nó genérico i do sistema, deve ser igualada à soma das respectivas componentes das forças $\{f_i^e\}$ de cada elemento que concorre para o nó i . Portanto:

$$\{f_i\} = \sum_{e=1}^m \{f_i^e\} \quad (7.1)$$

onde m é o número total de elementos que compõem o sistema estrutural discretizado e $\{f_i^e\}$ é o vetor de carga correspondente ao elemento superparamétrico associado ao nó i do sistema.

O mesmo procedimento é admitido para as componentes das forças $\{f_{kj}\}$ e $\{f_k\}$ relacionadas ao elemento hierárquico:

$$\{f_{kj}\} = \sum_{e=1}^m \{f_{kj}^e\} \quad (7.2)$$

$$\{f_k\} = \sum_{e=1}^m \{f_k^e\} \quad (7.3)$$

onde $\{f_{kj}^e\}$ e $\{f_k^e\}$ são, respectivamente, os vetores de carga correspondentes ao refinamento dos lados e do interior do elemento hierárquico.

Observando-se a equação (5.189), é possível escrever para cada elemento e do sistema:

$$\{f_i^e\} = [K_{i1}^e] \cdot \{a_1\} + \dots + [K_{in}^e] \cdot \{a_n\} + [K_{i,21}^e] \cdot \{a_{21}\} + \dots + [K_{i,4l}^e] \cdot \{a_{4l}\} + [\bar{K}_{i1}^e] \cdot \{\bar{a}_1\} + \dots + [\bar{K}_{im}^e] \cdot \{\bar{a}_m\} \quad (7.4)$$

$$\{f_{kj}^e\} = [K_{kj,1}^e] \cdot \{a_1\} + \dots + [K_{kj,n}^e] \cdot \{a_n\} + [K_{kj,21}^e] \cdot \{a_{21}\} + \dots + [K_{kj,4l}^e] \cdot \{a_{4l}\} + [\bar{K}_{kj,1}^e] \cdot \{\bar{a}_1\} + \dots + [\bar{K}_{kj,m}^e] \cdot \{\bar{a}_m\} \quad (7.5)$$

$$\{f_k^e\} = [K_{k1}^e] \cdot \{a_1\} + \dots + [K_{kn}^e] \cdot \{a_n\} + [K_{k,21}^e] \cdot \{a_{21}\} + \dots + [K_{k,4l}^e] \cdot \{a_{4l}\} + [\bar{K}_{k1}^e] \cdot \{\bar{a}_1\} + \dots + [\bar{K}_{km}^e] \cdot \{\bar{a}_m\} \quad (7.6)$$

onde

n = número total de nós do sistema;

l = número total de lados de elementos do sistema;

$\{a_1\}, \dots, \{a_n\}$ = deslocamentos nodais correspondentes aos nós do sistema;

$\{a_{21}\}, \dots, \{a_{4l}\}$ = parâmetros hierárquicos correspondentes ao refinamento dos lados dos elementos do sistema;

$\{\bar{a}_1\}, \dots, \{\bar{a}_m\}$ = parâmetros hierárquicos correspondentes ao refinamento do interior dos elementos do sistema;

$[K_{i1}^e], \dots, [K_{in}^e]$ = submatrizes correspondentes ao elemento superparamétrico;

$[K_{i,21}^e], \dots, [K_{i,4l}^e]$ = submatrizes que caracterizam o acoplamento entre o elemento superparamétrico e a parte do elemento hierárquico relacionada ao refinamento dos lados dos elementos do sistema;

$[\bar{K}_{i1}^e], \dots, [\bar{K}_{im}^e]$ = submatrizes que caracterizam o acoplamento entre o elemento superparamétrico e a parte do elemento hierárquico relacionada ao refinamento do interior dos elementos do sistema;

$[K_{kj,1}^e], \dots, [K_{kj,n}^e]$ = submatrizes que caracterizam o acoplamento entre a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento dos lados dos elementos do sistema e o elemento superparamétrico;

$[K_{kj,21}^e], \dots, [K_{kj,4l}^e]$ = submatrizes correspondentes ao elemento hierárquico no que se refere ao refinamento dos lados dos elementos do sistema;

$[\bar{K}_{kj,1}^e], \dots, [\bar{K}_{kj,m}^e]$ = submatrizes que caracterizam o acoplamento entre a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento dos lados dos elementos do sistema e a parte do elemento hierárquico que concerne ao refinamento do interior dos elementos do sistema;

$[\bar{K}_{k1}^e], \dots, [\bar{K}_{kn}^e]$ = submatrizes que caracterizam o acoplamento entre a parte do elemento hierárquico relacionada ao refinamento do interior dos elementos do sistema e o elemento superparamétrico;

$[\bar{K}_{k,21}^e], \dots, [\bar{K}_{k,4l}^e]$ = submatrizes que caracterizam o acoplamento entre a parte do elemento hierárquico relacionada ao refinamento do interior dos elementos do sistema e aquela que concerne ao refinamento dos lados dos elementos do sistema;

$[\bar{K}_{k1}^e], \dots, [\bar{K}_{km}^e]$ = submatrizes correspondentes ao elemento hierárquico no que se refere ao refinamento do interior dos elementos do sistema;

7.2 Determinação da matriz de rigidez global e do vetor de carga global

Substituindo-se, respectivamente, as equações (7.4), (7.5) e (7.6) nas equações (7.1), (7.2) e (7.3) e considerando todos os nós, lados e elementos do sistema discretizado, vem:

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^m \{f_1^e\} &= \left(\sum_{e=1}^m [K_{11}^e]\right) \cdot \{a_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^m [K_{1n}^e]\right) \cdot \{a_n\} + \left(\sum_{e=1}^m [K_{1,21}^e]\right) \cdot \{a_{21}\} + \cdots + \\
 &\quad \left(\sum_{e=1}^m [K_{1,4l}^e]\right) \cdot \{a_{4l}\} + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{11}^e]\right) \cdot \{\bar{a}_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1m}^e]\right) \cdot \{\bar{a}_m\} \\
 &\quad \vdots \\
 \sum_{e=1}^m \{f_i^e\} &= \left(\sum_{e=1}^m [K_{i1}^e]\right) \cdot \{a_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^m [K_{in}^e]\right) \cdot \{a_n\} + \left(\sum_{e=1}^m [K_{i,21}^e]\right) \cdot \{a_{21}\} + \cdots + \\
 &\quad \left(\sum_{e=1}^m [K_{i,4l}^e]\right) \cdot \{a_{4l}\} + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{i1}^e]\right) \cdot \{\bar{a}_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{im}^e]\right) \cdot \{\bar{a}_m\} \\
 &\quad \vdots \\
 \sum_{e=1}^m \{f_n^e\} &= \left(\sum_{e=1}^m [K_{n1}^e]\right) \cdot \{a_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^m [K_{nn}^e]\right) \cdot \{a_n\} + \left(\sum_{e=1}^m [K_{n,21}^e]\right) \cdot \{a_{21}\} + \cdots + \\
 &\quad \left(\sum_{e=1}^m [K_{n,4l}^e]\right) \cdot \{a_{4l}\} + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{n1}^e]\right) \cdot \{\bar{a}_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{nm}^e]\right) \cdot \{\bar{a}_m\} \\
 \sum_{e=1}^m \{f_{21}^e\} &= \left(\sum_{e=1}^m [K_{21,1}^e]\right) \cdot \{a_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^m [K_{21,n}^e]\right) \cdot \{a_n\} + \left(\sum_{e=1}^m [K_{21,21}^e]\right) \cdot \{a_{21}\} + \cdots + \\
 &\quad \left(\sum_{e=1}^m [K_{21,4l}^e]\right) \cdot \{a_{4l}\} + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{21,1}^e]\right) \cdot \{\bar{a}_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{21,m}^e]\right) \cdot \{\bar{a}_m\} \\
 &\quad \vdots \\
 \sum_{e=1}^m \{f_{kj}^e\} &= \left(\sum_{e=1}^m [K_{kj,1}^e]\right) \cdot \{a_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^m [K_{kj,n}^e]\right) \cdot \{a_n\} + \left(\sum_{e=1}^m [K_{kj,21}^e]\right) \cdot \{a_{21}\} + \cdots + \\
 &\quad \left(\sum_{e=1}^m [K_{kj,4l}^e]\right) \cdot \{a_{4l}\} + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{kj,1}^e]\right) \cdot \{\bar{a}_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{kj,m}^e]\right) \cdot \{\bar{a}_m\} \\
 &\quad \vdots \\
 \sum_{e=1}^m \{f_{4l}^e\} &= \left(\sum_{e=1}^m [K_{4l,1}^e]\right) \cdot \{a_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^m [K_{4l,n}^e]\right) \cdot \{a_n\} + \left(\sum_{e=1}^m [K_{4l,21}^e]\right) \cdot \{a_{21}\} + \cdots + \\
 &\quad \left(\sum_{e=1}^m [K_{4l,4l}^e]\right) \cdot \{a_{4l}\} + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{4l,1}^e]\right) \cdot \{\bar{a}_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{4l,m}^e]\right) \cdot \{\bar{a}_m\} \\
 \sum_{e=1}^m \{\tilde{f}_1^e\} &= \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{11}^e]\right) \cdot \{a_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1n}^e]\right) \cdot \{a_n\} + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1,21}^e]\right) \cdot \{a_{21}\} + \cdots + \\
 &\quad \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1,4l}^e]\right) \cdot \{a_{4l}\} + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{11}^e]\right) \cdot \{\bar{a}_1\} + \cdots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1m}^e]\right) \cdot \{\bar{a}_m\} \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^m \{ \bar{f}_k^e \} &= \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k1}^e] \right) \cdot \{ a_1 \} + \dots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{kn}^e] \right) \cdot \{ a_n \} + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k,21}^e] \right) \cdot \{ a_{21} \} + \dots + \\
 &\quad \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k,4l}^e] \right) \cdot \{ a_{4l} \} + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k1}^e] \right) \cdot \{ \bar{a}_1 \} + \dots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{km}^e] \right) \cdot \{ \bar{a}_m \} \\
 &\quad \vdots \\
 \sum_{e=1}^m \{ \bar{f}_m^e \} &= \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m1}^e] \right) \cdot \{ a_1 \} + \dots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{mn}^e] \right) \cdot \{ a_n \} + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m,21}^e] \right) \cdot \{ a_{21} \} + \dots + \\
 &\quad \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m,4l}^e] \right) \cdot \{ a_{4l} \} + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m1}^e] \right) \cdot \{ \bar{a}_1 \} + \dots + \left(\sum_{e=1}^m [\bar{K}_{mm}^e] \right) \cdot \{ \bar{a}_m \}
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Esse conjunto de equações pode ser representado na seguinte forma matricial:

$$[K] \cdot \{a\} = \{f\} \tag{7.8}$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez global do sistema:

$$[K] = \begin{bmatrix}
 \sum_{e=1}^m [K_{11}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [K_{1n}^e] & \sum_{e=1}^m [K_{1,21}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [K_{1,4l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{11}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1m}^e] \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \sum_{e=1}^m [K_{i1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [K_{in}^e] & \sum_{e=1}^m [K_{i,21}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [K_{i,4l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{i1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{im}^e] \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \sum_{e=1}^m [K_{n1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [K_{nn}^e] & \sum_{e=1}^m [K_{n,21}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [K_{n,4l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{n1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{nm}^e] \\
 \sum_{e=1}^m [K_{21,1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [K_{21,n}^e] & \sum_{e=1}^m [K_{21,21}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [K_{21,4l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{21,1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{21,m}^e] \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \sum_{e=1}^m [K_{kj,1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [K_{kj,n}^e] & \sum_{e=1}^m [K_{kj,21}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [K_{kj,4l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{kj,1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{kj,m}^e] \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \sum_{e=1}^m [K_{4l,1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [K_{4l,n}^e] & \sum_{e=1}^m [K_{4l,21}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [K_{4l,4l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{4l,1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{4l,m}^e] \\
 \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{11}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1n}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1,21}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1,4l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{11}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{1m}^e] \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{kn}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k,21}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k,4l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{k1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{km}^e] \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{mn}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m,21}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m,4l}^e] & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{m1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [\bar{K}_{mm}^e]
 \end{bmatrix} \tag{7.9}$$

$\{a\}$, o vetor relacionado aos deslocamentos nodais e parâmetros hierárquicos do sistema:

$$\{a\} = [\{a_1\} \dots \{a_i\} \dots \{a_n\} \{a_{21}\} \dots \{a_{kj}\} \dots \{a_{4l}\} \{\bar{a}_1\} \dots \{\bar{a}_k\} \dots \{\bar{a}_m\}]^T \tag{7.10}$$

e $\{f\}$, o vetor de carga global do sistema:

$$\{f\} = \left[\sum_{e=1}^m \{f_1^e\} \dots \sum_{e=1}^m \{f_i^e\} \dots \sum_{e=1}^m \{f_n^e\} \sum_{e=1}^m \{f_{21}^e\} \dots \sum_{e=1}^m \{f_{kj}^e\} \dots \sum_{e=1}^m \{f_{4l}^e\} \sum_{e=1}^m \{\bar{f}_1^e\} \dots \sum_{e=1}^m \{\bar{f}_k^e\} \dots \sum_{e=1}^m \{\bar{f}_m^e\} \right]^T \quad (7.11)$$

O algoritmo desenvolvido para a determinação da matriz de rigidez global $[K]$ e do vetor de carga global $\{f\}$ possibilita que, tão logo seja encontrado um coeficiente de rigidez ou de carga, ele possa ser colocado imediatamente na posição apropriada dentro das respectivas matrizes. Para tanto, é estabelecido um esquema de numeração global para identificar os nós, lados e elementos do sistema discretizado; em seguida é criada uma *topologia* que especifica quais nós e lados do sistema pertencem a quais elementos, ou seja, estabelece a correspondência entre os nós e lados do sistema discretizado e os nós e lados dos elementos. Essa topologia, dada como entrada do programa computacional, serve para definir a *conectividade* da malha de elementos.

7.3 Resolução do sistema estrutural em análise

7.3.1 Determinação do sistema de equações lineares

O processo de resolução do sistema estrutural examinado consiste na obtenção do vetor $\{a\}$, constituído de seus deslocamentos nodais (translações e rotações) e, se desejado, de seus parâmetros hierárquicos. Com esse intuito, define-se primeiramente o sistema de equações superparamétrico:

$$[K_{super}] \cdot \{a_{super}\} = \{f_{super}\} \quad (7.12)$$

no qual

$$[K_{super}] = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^m [K_{11}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [K_{1n}^e] \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{e=1}^m [K_{n1}^e] & \dots & \sum_{e=1}^m [K_{nn}^e] \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

$$\{a_{super}\} = \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \{a_n\} \end{Bmatrix} \quad (7.14)$$

$$\{f_{super}\} = \begin{Bmatrix} \sum_{e=1}^m \{f_1^e\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^m \{f_n^e\} \end{Bmatrix} \quad (7.15)$$

sendo n o número total de nós do sistema. Admitindo-se n^2 , como sendo o número total de variáveis superparamétricas (deslocamentos nodais), as matrizes anteriores serão, respectivamente, das seguintes ordens: $(n' \times n')$, $(n' \times 1)$ e $(n' \times 1)$.

Se se pretender aprimorar a solução do sistema superparamétrico, pode-se a seguir executar a primeira reanálise sobre ele, refinando-se os lados dos elementos pela introdução de funções de forma hierárquicas de segundo grau, ou seja:

$$\begin{bmatrix} [K_{super}] & [K_{super,hier1}] \\ [K_{hier1,super}] & [K_{hier1}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_{nod1}\} \\ \{a_{hier1}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{super}\} \\ \{f_{hier1}\} \end{Bmatrix} \quad (7.16)$$

onde as submatrizes $[K_{super}]$ e $\{f_{super}\}$ já terão sido obtidas pela análise inicial. Se n_1 for o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na primeira reanálise, $[K_{super,hier1}]$ será uma matriz $(n' \times n_1)$, correspondente ao acoplamento entre o sistema superparamétrico e o sistema hierárquico relacionado à primeira reanálise, $[K_{hier1}]$, uma matriz quadrada $(n_1 \times n_1)$, correspondente ao sistema hierárquico para a primeira reanálise, $\{f_{hier1}\}$, o vetor de carga $(n_1 \times 1)$, associado ao sistema hierárquico e $\{a_{hier1}\}$, as variáveis hierárquicas introduzidas na primeira reanálise.

Se se desejar ainda aprimorar a solução do sistema anterior, pode-se executar uma segunda reanálise sobre este último, refinando-se os lados dos elementos pela introdução de funções de forma hierárquicas de terceiro grau, ou seja:

$$\begin{bmatrix} [K_{super}] & [K_{super,hier1}] & [K_{super,hier2}] \\ [K_{hier1,super}] & [K_{hier1}] & [K_{hier1,hier2}] \\ [K_{hier2,super}] & [K_{hier2,hier1}] & [K_{hier2}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_{nod2}\} \\ \{a_{hier1}\} \\ \{a_{hier2}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{super}\} \\ \{f_{hier1}\} \\ \{f_{hier2}\} \end{Bmatrix} \quad (7.17)$$

onde as submatrizes $[K_{super}]$, $[K_{super,hier1}]$, $[K_{hier1,super}]$, $[K_{hier1}]$, $\{f_{super}\}$ e $\{f_{hier1}\}$ já terão sido obtidas pelas análises anteriores. Se n_2 for o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na segunda reanálise, $[K_{super,hier2}]$ será uma matriz ($n' \times n_2$), correspondente ao acoplamento entre o sistema superparamétrico e o sistema hierárquico relacionado à segunda reanálise, $[K_{hier2}]$, uma matriz quadrada ($n_2 \times n_2$), correspondente ao sistema hierárquico para a segunda reanálise, $\{f_{hier2}\}$, o vetor de carga ($n_2 \times 1$), associado ao sistema hierárquico e $\{a_{hier2}\}$, as variáveis hierárquicas introduzidas na segunda reanálise.

Se, finalmente, se desejar um último aprimoramento na solução do sistema anterior, pode-se executar uma terceira reanálise sobre este último, refinando-se os lados dos elementos pela introdução de funções de forma hierárquicas de quarto grau, ou seja:

$$\begin{bmatrix} [K_{super}] & [K_{super,hier1}] & [K_{super,hier2}] & [K_{super,hier3}] \\ [K_{hier1,super}] & [K_{hier1}] & [K_{hier1,hier2}] & [K_{hier1,hier3}] \\ [K_{hier2,super}] & [K_{hier2,hier1}] & [K_{hier2}] & [K_{hier2,hier3}] \\ [K_{hier3,super}] & [K_{hier3,hier1}] & [K_{hier3,hier2}] & [K_{hier3}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_{nod3}\} \\ \{a_{hier1}\} \\ \{a_{hier2}\} \\ \{a_{hier3}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{super}\} \\ \{f_{hier1}\} \\ \{f_{hier2}\} \\ \{f_{hier3}\} \end{Bmatrix} \quad (7.18)$$

onde as submatrizes $[K_{super}]$, $[K_{super,hier1}]$, $[K_{hier1,super}]$, $[K_{hier1}]$, $[K_{super,hier2}]$, $[K_{hier2,super}]$, $[K_{hier1,hier2}]$, $[K_{hier2,hier1}]$, $[K_{hier2}]$, $\{f_{super}\}$, $\{f_{hier1}\}$ e $\{f_{hier2}\}$ já terão sido obtidas pelas análises anteriores. Se n_3 for o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na terceira reanálise, $[K_{super,hier3}]$ será uma matriz ($n' \times n_3$), correspondente ao acoplamento entre o sistema superparamétrico e o sistema hierárquico relacionado à terceira reanálise; $[K_{hier1,hier3}]$ será uma matriz ($n_1 \times n_3$), correspondente ao acoplamento entre o sistema hierárquico para a primeira reanálise e aquele relacionado à terceira; $[K_{hier2,hier3}]$ será uma matriz ($n_2 \times n_3$), correspondente ao acoplamento entre o sistema hierárquico para a segunda reanálise e aquele relacionado à terceira, $[K_{hier3}]$ será uma matriz quadrada ($n_3 \times n_3$), correspondente ao sistema hierárquico para a terceira reanálise, $\{f_{hier3}\}$, o vetor de carga ($n_3 \times 1$), associado ao sistema hierárquico e $\{a_{hier3}\}$, as variáveis hierárquicas introduzidas na terceira reanálise.

$$[D_{super}] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & d_2 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & d_j & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \vdots & & \vdots \\ & 0 & & & & d_k & \dots & 0 \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & d_n \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

e $[K_{super}]$, a matriz de rigidez global (já alterada pela aplicação das condições de contorno):

$$[K_{super}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1k} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2k} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{jj} & \dots & k_{jk} & \dots & k_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{k1} & k_{k2} & \dots & k_{kj} & \dots & k_{kk} & \dots & k_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nk} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

com n sendo o número total de variáveis superparamétricas livres (deslocamentos nodais livres). Dessa maneira, a partir da equação (7.12), é possível escrever:

$$[L_{super}] \cdot [D_{super}] \cdot [L_{super}]^T \cdot \{a_{super}\} = \{f_{super}\} \quad (7.23)$$

onde $\{f_{super}\}$ é o vetor de carga global (já alterado pela aplicação das condições de contorno):

$$\{f_{super}\} = \left\{ \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} \right\} \quad (7.24)$$

e $\{a_{super}\}$, a matriz coluna constituída dos deslocamentos nodais livres:

$$\{a_{super}\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad (7.25)$$

Os termos oriundos da decomposição $[L][D][L]^T$, em (7.23), são dados pelas seguintes expressões [5]:

$$d_1 = k_{11} \quad (7.26)$$

$$m_{j1} = \frac{k_{j1}}{d_1} \quad \text{com } j = 2, 3, \dots, n \quad (7.27)$$

$$d_j = k_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} m_{jk}^2 \cdot d_k \quad \text{com } j = 2, 3, \dots, n \quad (7.28)$$

$$m_{jk} = \frac{1}{d_k} \cdot (k_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} m_{ki} \cdot m_{ji} \cdot d_i) \quad \text{com } j = (k+1), \dots, n ; \quad k \leq (n-1) \quad (7.29)$$

Uma vez realizada a decomposição anterior, efetua-se a redução do vetor de carga $\{f_{super}\}$, de acordo com o seguinte procedimento [5]:

$$f'_1 = f_1 \quad (7.30)$$

$$f'_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} m_{ik} \cdot f'_i \quad \text{com } k = 2, 3, \dots, n \quad (7.31)$$

Finalmente, para se obter a matriz coluna $\{a_{super}\}$, constituída dos deslocamentos nodais livres, procede-se ao que se convencionou chamar de substituição reversa, calculando-se primeiramente $\{\bar{f}'_{super}\}$ [5]:

$$\{\bar{f}'_{super}\} = [D_{super}]^{-1} \cdot \{f'_{super}\} \quad (7.32)$$

de forma que é possível se chegar aos valores a_k através das seguintes expressões:

$$\bar{f}'_i = \bar{f}'^{(k)}_i = a_k \quad \text{com } k = 1, \dots, n \quad (7.33)$$

$$\bar{f}'^{(k-1)}_i = \bar{f}'^{(k)}_i - m_{ik} \cdot a_k \quad \text{com } i = 1, \dots, (k-1) \text{ e } k = n, \dots, 2 \quad (7.34)$$

$$a_{k-1} = \bar{f}'^{(k-1)}_{k-1} = \quad \text{com } k = n, \dots, 2 \quad (7.35)$$

sendo \bar{f}'_i um elemento do vetor $\{\bar{f}'_{super}\}$ que agora, ocupa a mesma posição de $\{f'_{super}\}$.

7.3.3 Reanálise do sistema estrutural

Verifica-se que após a resolução do sistema superparamétrico, quando se efetua a primeira reanálise e se pretende resolver o sistema de equações obtido a partir da expressão (7.16), só há a necessidade de se calcular os termos m_{kj} que estão relacionados às n_i novas variáveis hierárquicas introduzidas. Portanto:

$$d_i = k_{ii} \quad \text{com } i = (n+1) \quad (7.36)$$

$$m_{j1} = \frac{k_{j1}}{d_1} \quad \text{com } j = (n+2), \dots, (n+n_1) \quad (7.37)$$

$$d_j = k_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} m_{jk}^2 \cdot d_k \quad \text{com } j = (n+2), \dots, (n+n_1) \quad (7.38)$$

$$m_{jk} = \frac{1}{d_k} \cdot (k_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} m_{ki} \cdot m_{ji} \cdot d_i) \quad \text{com } j = (k+1), \dots, (n+n_1) ; \quad k \leq (n+n_1) - 1 \quad (7.39)$$

Reaproveitam-se assim todos os coeficientes já calculados anteriormente, quando da resolução do sistema superparamétrico. Do mesmo modo, tem-se para o caso do vetor reduzido $\{f'_{super}\}$:

$$f'_i = f_i \quad \text{com } i = (n+1) \quad (7.40)$$

$$f'_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} m_{ik} \cdot f_i \quad \text{com } k = (n+2), \dots, (n+n_1) \quad (7.41)$$

e também para $\{\bar{f}'_{super}\}$:

$$\bar{f}'_i = \bar{f}'^{(k)}_i = a_k \quad \text{com } k = (n+1), \dots, (n+n_1) \quad (7.42)$$

$$\bar{f}'^{(k-1)}_i = \bar{f}'^{(k)}_i - m_{ik} \cdot a_k \quad \text{com } i = (n+1), \dots, (k-1) \text{ e } k = (n+n_1), \dots, (n+2) \quad (7.43)$$

$$a_{k-1} = \bar{f}'^{(k-1)}_{k-1} = \quad \text{com } k = (n+n_1), \dots, (n+2) \quad (7.44)$$

De uma forma geral, quando se está na i -ésima reanálise, tem-se que calcular apenas os coeficientes relacionados às n_i novas variáveis hierárquicas introduzidas:

$$d_j = k_{jj} \quad \text{com } j = (n+n_1+\dots+n_{i-1})+1 \quad (7.45)$$

$$m_{j1} = \frac{k_{j1}}{d_1} \quad \text{com } j = (n+n_1+\dots+n_{i-1})+2, \dots, (n+n_1+\dots+n_{i-1}+n_i) \quad (7.46)$$

$$d_j = k_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} m_{jk}^2 \cdot d_k \quad \text{com } j = (n+n_1+\dots+n_{i-1})+2, \dots, (n+n_1+\dots+n_{i-1}+n_i) \quad (7.47)$$

$$m_{jk} = \frac{1}{d_k} \cdot (k_{jk} - \sum_{k=1}^{j-1} m_{kj} \cdot m_{ji} \cdot d_i) \quad \text{com } j = (k+1), \dots, (n+n_1+\dots+n_{i-1}+n_i) ; \quad (7.48)$$

$$k \leq (n+n_1+\dots+n_{i-1}+n_i) - 1$$

$$f'_j = f_j \quad \text{com } j = (n+n_1+\dots+n_{i-1})+1 \quad (7.49)$$

$$f'_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} m_{ik} \cdot f_i \quad \text{com } k = (n+n_1+\dots+n_{i-1})+2, \dots, (n+n_1+\dots+n_{i-1}+n_i) \quad (7.50)$$

$$\bar{f}'_i = \bar{f}'^{(k)}_i = a_k \quad \text{com } k = (n+n_1+\dots+n_{i-1})+1, \dots, (n+n_1+\dots+n_{i-1}+n_i) \quad (7.51)$$

$$\bar{f}'^{(k-1)}_i = \bar{f}'^{(k)}_i - m_{ik} \cdot a_k \quad \text{com } i = (n+n_1+\dots+n_{i-1})+1, \dots, (k-1) \text{ e} \quad (7.52)$$

$$k = (n+n_1+\dots+n_{i-1}+n_i), \dots, (n+n_1+\dots+n_{i-1})+2$$

$$a_{k-1} = \bar{f}'^{(k-1)}_{k-1} = \quad \text{com } k = (n+n_1+\dots+n_{i-1}+n_i), \dots, (n+n_1+\dots+n_{i-1})+2 \quad (7.53)$$

Todos os coeficientes calculados nas análises anteriores permanecem inalterados.

Capítulo 8

RESULTADOS E DISCUSSÕES

8.1 Introdução

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos a partir do elemento paramétrico do tipo hierárquico proposto. Esses resultados se referem à análise estática de placas quadradas e retangulares, vigas, além de cascas, tendo o elemento quadrilateral quadrático de 9 nós da família Lagrangiana sido padronizado para interpolar a geometria do mesmo.

Num primeiro momento foi analisado e discutido o emprego do elemento proposto quando submetido a várias configurações de condições de contorno e carregamentos em placas quadradas, placas retangulares, vigas e cascas, com malha de discretização regular. Nas duas primeiras situações, partindo-se do elemento superparamétrico linear ($p=1$) com integração consistente (2x2 pontos de integração na superfície média do elemento), verificou-se que o seu melhor desempenho ocorria quando eram usados 2x2 pontos de integração para o refinamento hierárquico de 2^o grau (acoplamentos linear-quadrático e quadrático-quadrático; $p=2$), 3x3 pontos para o refinamento hierárquico de 3^o grau (acoplamentos linear-cúbico, quadrático-cúbico e cúbico-cúbico; $p=3$), 3x3 pontos para o acoplamento linear-quártico do refinamento hierárquico de 4^o grau e 4x4 pontos para os demais acoplamentos desse último refinamento (acoplamentos quadrático-quártico, cúbico-quártico e quártico-quártico; $p=4$).

De forma análoga, para os casos restantes de vigas e cascas, partindo-se do elemento superparamétrico linear com integração consistente, foram adotados os seguintes arranjos:

1. vigas: 2x2 pontos de integração para o acoplamento linear-quadrático do refinamento hierárquico de 2^o grau, 3x3 pontos para o acoplamento quadrático-quadrático do mesmo

refino bem como para os acoplamentos linear-cúbico e quadrático-cúbico do refinamento hierárquico de 3^o grau e 4x4 pontos para o acoplamento cúbico-cúbico e para os demais refinamentos hierárquicos de 4^o grau.

2. cascas: 3x3 pontos de integração em todos os acoplamentos do refinamento hierárquico de 2^o grau, 4x4 pontos em todos os acoplamentos do refinamento hierárquico de 3^o grau e finalmente, 5x5 pontos em todos os acoplamentos do refinamento hierárquico de 4^o grau.

Num segundo momento foi analisado e discutido o comportamento do elemento proposto quando sujeito a problemas envolvendo malha distorcida. Nessa abordagem foi realizado um total de quatro análises subdivididas em duas situações: uma de placa, outra de casca, tendo sido mantidas as configurações de condições de contorno, de carregamento e arranjo de pontos de integração do estudo inicial mas utilizando-se para a interpolação da geometria do elemento, além das funções de forma da família Lagrangiana, as da família Serendipity de 8 nós.

As soluções obtidas foram comparadas àquelas provenientes de outras formulações disponíveis na literatura (elemento isoparamétrico quadrilateral quadrático com integração consistente de AHMAD [4], elemento isoparamétrico quadrilateral quadrático com integração reduzida de ZIENKIEWICZ [6]) e de programas computacionais de uso comercial (ANSYS 5.2), bem como a resultados obtidos a partir de soluções analíticas [1, 27, 28].

8.2 Placa submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída, perpendicular a seu plano

8.2.1 Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se malha de discretização regular de 4x4 elementos (figura 8.1). Obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico ($p=1$) com integração numérica consistente (2x2 pontos de integração) e a partir daí procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, sendo que são apresentadas, como resultado, as deflexões w_c no centro da placa, normalizadas com relação

ao fator qa^4/D , no qual q é o valor da carga distribuída, a , o lado da placa e D , sua rigidez dada por [1]:

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \tag{8.1}$$

com E sendo o módulo de elasticidade longitudinal do material da placa, ν seu coeficiente de Poisson e t , a espessura da placa.

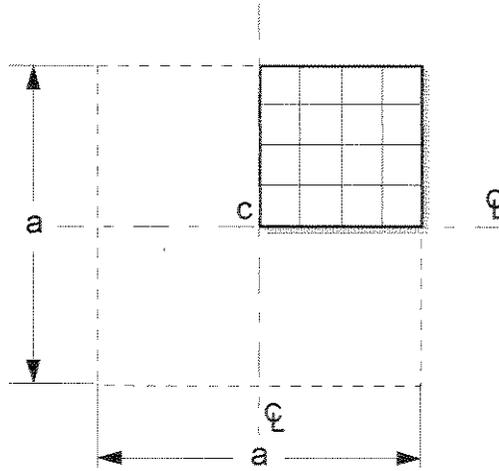


Figura 8.1 Malha de discretização sobre um quarto da placa quadrada.

Esses resultados são comparados àqueles da *Teoria de Elasticidade Tridimensional* [27], para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa quadrada (tabela 8.1). Neste caso, a *Teoria de Elasticidade Tridimensional* apresenta os resultados analíticos tanto para placas finas ($t/a < 0.050$) como para placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$).

Tabela 8.1 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

$\frac{t}{a}$	Solução analítica [27] α	Elemento proposto							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		α	Erro	α	Erro	α	Erro	α	Erro
0.005	0.004060	0.000045	-98.9%	0.003903	-3.9%	0.003904	-3.8%	0.003906	-3.8%
0.010	0.004061	0.000173	-95.7%	0.003935	-3.1%	0.003935	-3.1%	0.003937	-3.0%
0.050	0.004111	0.002180	-47.0%	0.004023	-2.1%	0.004024	-2.1%	0.004033	-1.9%
0.100	0.004263	0.003544	-16.9%	0.004234	-0.7%	0.004236	-0.6%	0.004266	0.1%

$$w_c = \frac{\alpha q a^4}{D}$$

O gráfico 8.1 exibe as curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação ($p=1$, $p=2$, $p=3$ e $p=4$), para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa.

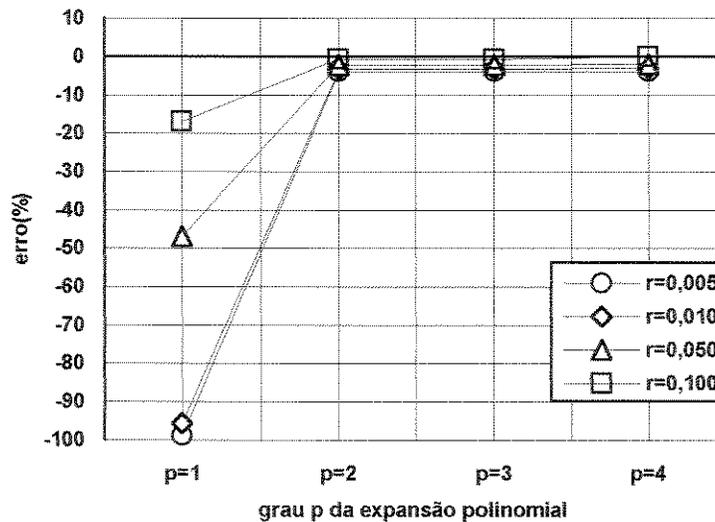


Gráfico 8.1 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

A tabela 8.2 apresenta a comparação entre o elemento proposto com refinamento de grau $p=2$, o elemento isoparamétrico com integração consistente de AHMAD [4], o elemento isoparamétrico com integração reduzida de ZIENKIEWICZ [6] e aquele utilizado pelo programa ANSYS - versão 5.2 (elemento STIF93). Em cada uma dessas situações, é fornecido o número de graus de liberdade (NGL) envolvido na análise.

Tabela 8.2 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , para diversos elementos e diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

$\frac{t}{a}$	Solução analítica [27] α	Elemento proposto ⁽²⁾ p=2		Elemento Ahmad ⁽¹⁾ [6]		Elemento Zienkiewicz ⁽¹⁾ [6]		ANSYS ⁽²⁾	
		α	Erro	α	Erro	α	Erro	α	Erro
0.005	0.004060	0.003903	-3.9%	0.003128	-22.9%	0.004062	0.0%	0.004067	0.2%
0.010	0.004061	0.003935	-3.1%	0.003737	-8.0%	0.004143	2.0%	0.004068	0.2%
0.050	0.004111	0.004023	-2.1%	0.004224	2.8%	0.004346	5.7%	0.004121	0.2%
0.100	0.004263	0.004234	-0.7%	0.004468	4.8%	0.004590	7.7%	0.004281	0.4%
NGL		89		38		38		146	
(1) Elemento isoparamétrico quadrilateral quadrático, malha de 2x2 elementos.									
(2) Malha de 4x4 elementos.									
NGL = número de graus de liberdade.									
$w_c = \alpha qa^4/D$									

Verifica-se, a partir das duas últimas tabelas (8.1 e 8.2) e do gráfico 8.1, que o elemento proposto, quando submetido ao refinamento hierárquico (p=2, p=3 e p=4), efetivamente reduziu a característica de rigidez excessiva do elemento de AHMAD [4] nos casos de placas finas, como se pretendia inicialmente. Além disso, de acordo com o que foi apresentado na introdução deste trabalho (capítulo 1) e tendo, esse novo elemento, sido concebido nos moldes do elemento de AHMAD [4], constata-se o seu adequado funcionamento no que se refere ao efeito das tensões de cisalhamento na direção de sua espessura, ou seja, a correta tendência de diminuição dos erros cometidos quando se aumenta a espessura da placa. Observa-se também, ao se fixar a atenção nos resultados fornecidos pela tabela 8.2, que, ainda nas situações de placas finas, o desempenho do elemento proposto não foi superior ao dos elementos que se utilizam da técnica de integração reduzida (elemento de ZIENKIEWICZ [6], elemento STIF93 do programa ANSYS). No entanto, ao se examinar novamente as tabelas 8.1 e 8.2 simultaneamente, é possível notar que, para a situação da placa de maior espessura, esse desempenho se demonstrou extremamente satisfatório, chegando mesmo a superar o do elemento STIF93, quando do refino de grau p=4 (NGL = 185).

8.2.2 Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se malha de discretização regular de 4x4 elementos (figura 8.2). Obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico ($p=1$) com integração numérica consistente (2x2 pontos de integração) e a partir daí procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, sendo que são apresentadas, como resultado, as deflexões w_c no centro da placa, normalizadas com relação ao fator qb^4/D , no qual q é o valor da carga distribuída, b , o lado menor da placa e D , sua rigidez dada pela equação (8.1). Esses resultados são comparados com os da teoria clássica de *Kirchhoff* exibida em TIMOSHENKO et al. [1], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$), e com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se malha de discretização de 4x4 elementos, para o caso de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$). Nesse último caso, a confrontação com o modelo numérico se dá em razão dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura (tabela 8.3).

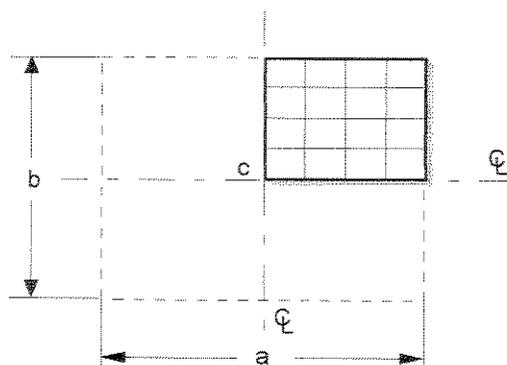


Figura 8.2 Malha de discretização sobre um quarto da placa retangular.

Tabela 8.3 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qb^4/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

$\frac{t}{a}$	Valores comparativos α	Elemento proposto							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		α	Erro	α	Erro	α	Erro	α	Erro
0.005	0.010130 ⁽¹⁾	0.000279	-97.2%	0.009906	-2.2%	0.009904	-2.2%	0.009908	-2.2%
0.010	0.010130 ⁽¹⁾	0.001032	-89.8%	0.009885	-2.4%	0.009884	-2.4%	0.009887	-2.4%
0.050	0.010470 ⁽²⁾	0.007833	-25.2%	0.010392	-0.7%	0.010396	-0.7%	0.010470	0.0%
0.100	0.011451 ⁽²⁾	0.010695	-7.1%	0.011921	4.1%	0.011931	4.2%	0.012219	6.7%

(1) Solução analítica para placas finas [1] ($a/b = 2$; $\nu = 0.3$).
 (2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF93). $w_c = \alpha qb^4/D$

O gráfico 8.2 exibe as curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação (p=1, p=2, p=3 e p=4), para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa.

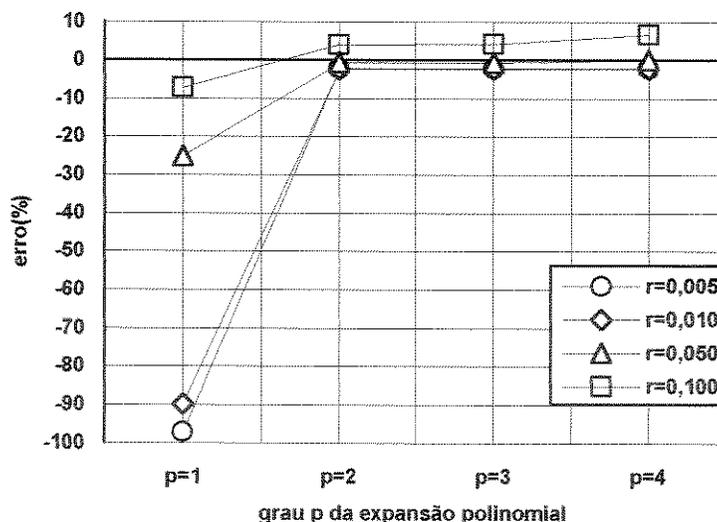


Gráfico 8.2 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

Verifica-se, a partir da tabela 8.3 e do gráfico 8.2, que o elemento proposto, ao sofrer os refinamentos hierárquicos de grau p=2, p=3 e p=4, trouxe efetivamente resultados confiáveis para as situações de placas finas, tendo, portanto, restringido de forma significativa a

característica de rigidez excessiva inerente ao emprego da integração consistente nesses casos, tal como se pretendia inicialmente. Para as situações de placas moderadamente grossas (tabela 8.3), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS, com malha de discretização 4x4, aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um bom desempenho, com destaque para os casos em que $t/a = 0.050$. Nota-se ainda que, no caso em que $t/a = 0.100$, a convergência imposta pelo elemento proposto se dá num valor acima daquele apresentado pelo elemento STIF93 o que, no entanto, não garante a performance superior deste último, uma vez que não se dispõe do resultado analítico nessa situação. Deve-se lembrar que, para caso tratado no item 8.2.1 no qual a solução analítica está disponível, o elemento proposto, sob condições semelhantes, apresentou o melhor resultado.

8.2.3 Placa quadrada engastada em seus lados

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se malha de discretização regular de 6x6 elementos. Obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico ($p=1$) com integração numérica consistente (2x2 pontos de integração) e a partir daí procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, sendo que são apresentadas, como resultado, as deflexões w_c no centro da placa, normalizadas com relação ao fator qa^4/D , no qual q é o valor da carga distribuída, a , o lado da placa e D , sua rigidez dada pela equação (8.1). Esses resultados são comparados com os da teoria clássica de *Kirchhoff* exibida em TIMOSHENKO et al. [1], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$), e com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se malha de discretização de 6x6 elementos, para o caso de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$). Nesse último caso, a confrontação com o modelo numérico se dá em razão dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura (tabela 8.4).

Tabela 8.4 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada engastada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

$\frac{t}{a}$	Valores comparativos α	Elemento proposto							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		α	Erro	α	Erro	α	Erro	α	Erro
0.005	0.001260 ⁽¹⁾	0.000021	-98.3%	0.001147	-9.0%	0.001148	-8.9%	0.001150	-8.7%
0.010	0.001260 ⁽¹⁾	0.000078	-93.8%	0.001211	-3.9%	0.001211	-3.9%	0.001213	-3.7%
0.050	0.001327 ⁽²⁾	0.000833	-37.2%	0.001302	-1.9%	0.001302	-1.9%	0.001309	-1.4%
0.100	0.001504 ⁽²⁾	0.001322	-12.1%	0.001500	-0.3%	0.001500	-0.3%	0.001523	1.3%

(1) Solução analítica para placas finas [1] ($\nu = 0.3$) .
 (2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF93). $w_c = \alpha qa^4 / D$

O gráfico 8.3 exibe as curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação ($p=1, p=2, p=3$ e $p=4$), para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa.

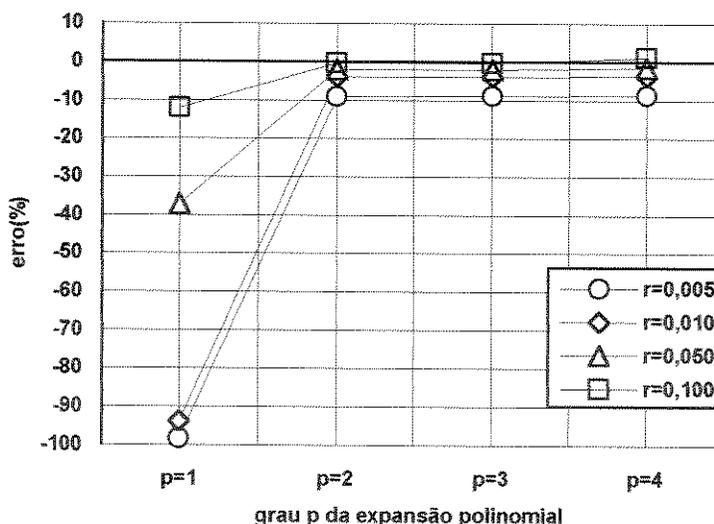


Gráfico 8.3 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada engastada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

Verifica-se, a partir da tabela 8.4 e do gráfico 8.3, que o elemento proposto, ao sofrer os refinamentos hierárquicos de grau $p=2, p=3$ e $p=4$, trouxe resultados satisfatórios para as situações de placas finas, tendo, portanto, restringido de forma apreciável a característica de

rigidez excessiva inerente ao emprego da integração consistente nesses casos, tal como se pretendia inicialmente. Para as situações de placas moderadamente grossas (tabela 8.4), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS, com malha de discretização 6x6, aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um ótimo desempenho demonstrando perfeita compatibilidade com os resultados teoricamente esperados (capítulo 1). Nota-se ainda que, no caso em que $t/a = 0.100$, a convergência imposta pelo elemento proposto se dá num valor acima daquele apresentado pelo elemento STIF93 do programa ANSYS.

8.2.4 Placa retangular engastada em seus lados

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se malha de discretização regular de 6x6 elementos. Obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico ($p=1$) com integração numérica consistente (2x2 pontos de integração) e a partir daí procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, sendo que são apresentadas, como resultado, as deflexões w_c no centro da placa, normalizadas com relação ao fator qb^4/D , no qual q é o valor da carga distribuída, b , o lado menor da placa e D , sua rigidez dada pela equação (8.1). Esses resultados são comparados com os da teoria clássica de *Kirchhoff* exibida em TIMOSHENKO et al. [1], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$), e com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se malha de discretização de 6x6 elementos, para o caso de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$). Nesse último caso, a confrontação com o modelo numérico se dá em razão dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura (tabela 8.5).

Tabela 8.5 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qb^4/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular engastada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

$\frac{t}{a}$	Valores comparativos α	Elemento proposto							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		α	Erro	α	Erro	α	Erro	α	Erro
0.005	0.002540 ⁽¹⁾	0.000124	-95.1%	0.002449	-3.6%	0.002449	-3.6%	0.002451	-3.5%
0.010	0.002540 ⁽¹⁾	0.000438	-82.8%	0.002482	-2.3%	0.002482	-2.3%	0.002485	-2.2%
0.050	0.002892 ⁽²⁾	0.002459	-15.0%	0.002970	2.7%	0.002971	2.7%	0.003031	4.8%
0.100	0.003947 ⁽²⁾	0.003806	-3.6%	0.004419	12.0%	0.004422	12.0%	0.004645	17.7%

(1) Solução analítica para placas finas [1] ($a/b = 2$; $\nu = 0.3$).
 (2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF93).

$w_c = \alpha qb^4/D$

O gráfico 8.4 exibe as curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação (p=1, p=2, p=3 e p=4), para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa.

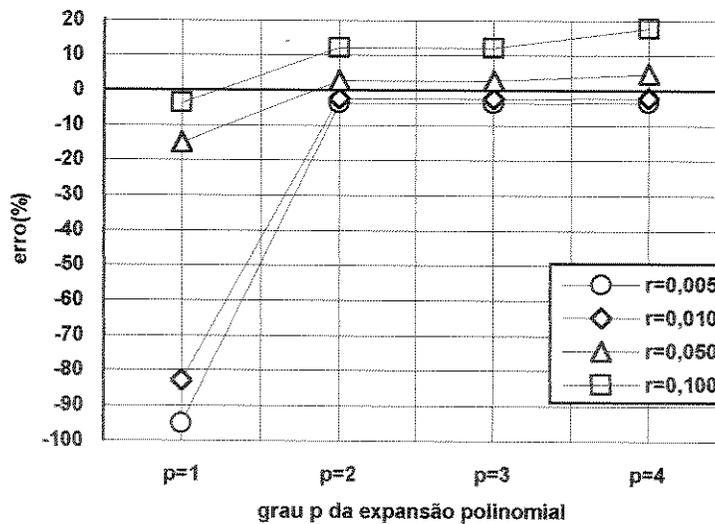


Gráfico 8.4 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular engastada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

Verifica-se, a partir da tabela 8.5 e do gráfico 8.4, que o elemento proposto, ao sofrer os refinamentos hierárquicos de grau p=2, p=3 e p=4, trouxe efetivamente resultados confiáveis para as situações de placas finas, tendo, portanto, restringido de forma significativa a

característica de rigidez excessiva inerente ao emprego da integração consistente nesses casos, tal como se pretendia inicialmente. Para as situações de placas moderadamente grossas (tabela 8.5), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS, com malha de discretização 6x6, aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um desempenho razoável, porém ainda dentro do esperado, uma vez que não se pode garantir a absoluta eficácia dos resultados numéricos tomados como padrão de comparação. Nota-se, neste exemplo, que, em ambas as situações de placa moderadamente grossa ($t/a \geq 0.050$), a convergência dos resultados apresentados pelo elemento proposto se dá num valor acima daquele obtido pelo elemento STIF93 do programa ANSYS.

8.2.5 Placa quadrada simplesmente apoiada em seus cantos

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se malha de discretização regular de 6x6 elementos. Obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico ($p=1$) com integração numérica consistente (2x2 pontos de integração) e a partir daí procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, sendo que são apresentadas, como resultado, as deflexões w_c no centro da placa, normalizadas com relação ao fator qa^4/D , no qual q é o valor da carga distribuída, a , o lado da placa e D , sua rigidez dada pela equação (8.1). Esses resultados são comparados com os da teoria clássica de *Kirchhoff* exibida em TIMOSHENKO et al. [1], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$), e com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se malha de discretização de 6x6 elementos, para o caso de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$). Nesse último caso, a confrontação com o modelo numérico se dá em razão dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura (tabela 8.6).

Tabela 8.6 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus cantos, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

$\frac{t}{a}$	Valores comparativos α	Elemento proposto							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		α	Erro	α	Erro	α	Erro	α	Erro
0.005	0.026500 ⁽¹⁾	0.000478	-98.2%	0.025250	-4.7%	0.025250	-4.7%	0.025252	-4.7%
0.010	0.026500 ⁽¹⁾	0.001770	-93.3%	0.025275	-4.6%	0.025276	-4.6%	0.025278	-4.6%
0.050	0.026587 ⁽²⁾	0.016063	-39.6%	0.025924	-2.5%	0.025934	-2.5%	0.025987	-2.3%
0.100	0.028474 ⁽²⁾	0.023719	-16.7%	0.027715	-2.7%	0.027753	-2.5%	0.027967	-1.8%

(1) Solução analítica para placas finas [29,30] ($\nu = 0.3$).
 (2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF93).

$w_c = \alpha qa^4 / D$

O gráfico 8.5 exibe as curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação ($p=1, p=2, p=3$ e $p=4$), para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa.

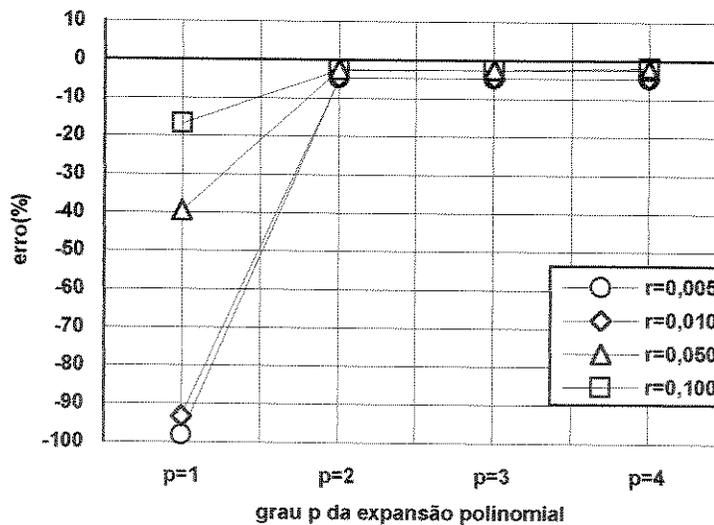


Gráfico 8.5 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus cantos, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

Verifica-se, a partir da tabela 8.6 e do gráfico 8.5, que o elemento proposto, ao sofrer os refinamentos hierárquicos de grau $p=2$, $p=3$ e $p=4$, trouxe efetivamente resultados confiáveis para as situações de placas finas, tendo, portanto, restringido de forma significativa a característica de rigidez excessiva inerente ao emprego da integração consistente nesses casos, tal como se pretendia inicialmente. Para as situações de placas moderadamente grossas (tabela 8.6), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS, com malha de discretização 6×6 , aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um ótimo desempenho demonstrando grande compatibilidade com os resultados teoricamente esperados (capítulo 1).

8.3 Placa submetida à ação de uma carga concentrada central, perpendicular a seu plano

8.3.1 Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se malha de discretização regular de 6×6 elementos. Obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico ($p=1$) com integração numérica consistente (2×2 pontos de integração) e a partir daí procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, sendo que são apresentadas, como resultado, as deflexões w_c no centro da placa, normalizadas com relação ao fator Pa^2/D , no qual P é o valor da carga concentrada, a , o lado da placa e D , sua rigidez dada pela equação (8.1). Esses resultados são comparados com os da teoria clássica de *Kirchhoff* exibida em TIMOSHENKO et al. [1], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$), e com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se malha de discretização de 6×6 elementos, para o caso de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$). Nesse último caso, a confrontação com o modelo numérico se dá em razão dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura (tabela 8.7).

Tabela 8.7 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pa^2/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).

$\frac{t}{a}$	Valores comparativos β	Elemento proposto							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		β	Erro	β	Erro	β	Erro	β	Erro
0.005	0.011600 ⁽¹⁾	0.000273	-97.6%	0.011275	-2.8%	0.011276	-2.8%	0.011279	-2.8%
0.010	0.011600 ⁽¹⁾	0.001021	-91.2%	0.011362	-2.1%	0.011363	-2.0%	0.011368	-2.0%
0.050	0.012135 ⁽²⁾	0.008591	-29.2%	0.011956	-1.5%	0.011965	-1.4%	0.012029	-0.9%
0.100	0.013751 ⁽²⁾	0.012345	-10.2%	0.013621	-0.9%	0.013657	-0.7%	0.013897	1.1%

(1) Solução analítica para placas finas [1] ($\nu = 0.3$).
 (2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF93).

$w_c = \beta Pa^2 / D$

O gráfico 8.6 exibe as curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação ($p=1, p=2, p=3$ e $p=4$), para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa.

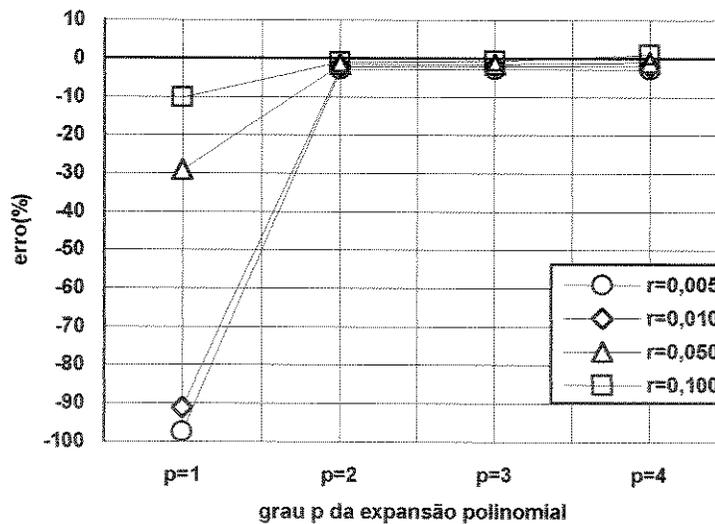


Gráfico 8.6 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).

Verifica-se, a partir da tabela 8.7 e do gráfico 8.6, que o elemento proposto, ao sofrer os refinamentos hierárquicos de grau $p=2, p=3$ e $p=4$, trouxe resultados muito confiáveis para as situações de placas finas, tendo, portanto, restringido de forma considerável a característica de

rigidez excessiva inerente ao emprego da integração consistente nesses casos, tal como se pretendia inicialmente. Para as situações de placas moderadamente grossas (tabela 8.7), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS, com malha de discretização 6x6, aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um excelente desempenho demonstrando grande compatibilidade com os resultados teoricamente esperados (capítulo 1). Nota-se ainda que, no caso em que $t/a = 0.100$, a convergência imposta pelo elemento proposto se dá num valor acima daquele apresentado pelo elemento STIF93 do programa ANSYS.

8.3.2 Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se malha de discretização regular de 6x6 elementos. Obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico ($p=1$) com integração numérica consistente (2x2 pontos de integração) e a partir daí procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, sendo que são apresentadas, como resultado, as deflexões w_c no centro da placa, normalizadas com relação ao fator Pb^2/D , no qual P é o valor da carga concentrada, b , o lado menor da placa e D , sua rigidez dada pela equação (8.1). Esses resultados são comparados com os da teoria clássica de *Kirchhoff* exibida em TIMOSHENKO et al. [1], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$), e com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se malha de discretização de 6x6 elementos, para o caso de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$). Nesse último caso, a confrontação com o modelo numérico se dá em razão dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura (tabela 8.8).

Tabela 8.8 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pb^2/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).

$\frac{t}{a}$	Valores comparativos β	Elemento proposto							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		β	Erro	β	Erro	β	Erro	β	Erro
0.005	0.016510 ⁽¹⁾	0.000873	-94.7%	0.015750	-4.6%	0.015756	-4.6%	0.015765	-4.5%
0.010	0.016510 ⁽¹⁾	0.003005	-81.8%	0.016012	-3.0%	0.016016	-3.0%	0.016031	-2.9%
0.050	0.018631 ⁽²⁾	0.015386	-17.4%	0.018269	-1.9%	0.018369	-1.4%	0.018589	-0.2%
0.100	0.024985 ⁽²⁾	0.022447	-10.2%	0.024902	-0.3%	0.025318	1.3%	0.026173	4.8%

(1) Solução analítica para placas finas [1] ($a/b = 2$; $\nu = 0.3$). $w_c = \beta Pb^2/D$
 (2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF93).

O gráfico 8.7 exibe as curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação ($p=1, p=2, p=3$ e $p=4$), para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa.

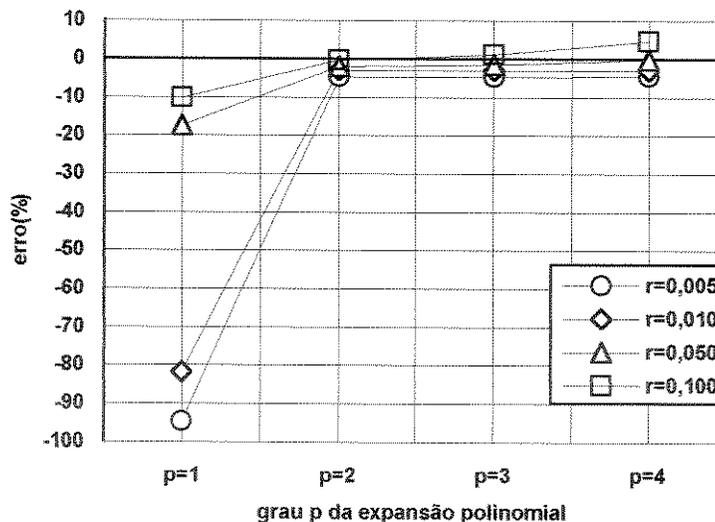


Gráfico 8.7 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).

Verifica-se, a partir da tabela 8.8 e do gráfico 8.7, que o elemento proposto, ao sofrer os refinamentos hierárquicos de grau $p=2, p=3$ e $p=4$, trouxe resultados bastante confiáveis para as situações de placas finas, tendo, portanto, restringido de forma considerável a característica

de rigidez excessiva inerente ao emprego da integração consistente nesses casos, tal como se pretendia inicialmente. Para as situações de placas moderadamente grossas (tabela 8.8), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS, com malha de discretização 6x6, aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um desempenho deveras satisfatório, com destaque para os casos em que $t/a = 0.050$; $p = 4$ e $t/a = 0.100$; $p = 2$, demonstrando ainda boa adequação em relação aos resultados teoricamente esperados (capítulo 1). Nota-se ainda que, no caso em que $t/a = 0.100$, a convergência imposta pelo elemento proposto se dá num valor acima daquele apresentado pelo elemento STIF93 do programa ANSYS.

8.3.3 Placa quadrada engastada em seus lados

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se malha de discretização regular de 6x6 elementos. Obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico ($p=1$) com integração numérica consistente (2x2 pontos de integração) e a partir daí procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, sendo que são apresentadas, como resultado, as deflexões w_c no centro da placa, normalizadas com relação ao fator $P a^2/D$, no qual P é o valor da carga concentrada, a , o lado da placa e D , sua rigidez dada pela equação (8.1). Esses resultados são comparados com os da teoria clássica de *Kirchhoff* exibida em TIMOSHENKO et al. [1], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$), e com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se malha de discretização de 6x6 elementos, para o caso de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$). Nesse último caso, a confrontação com o modelo numérico se dá em razão dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura (tabela 8.9).

Tabela 8.9 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pa^2/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada engastada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).

$\frac{t}{a}$	Valores comparativos β	Elemento proposto							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		β	Erro	β	Erro	β	Erro	β	Erro
0.005	0.005600 ⁽¹⁾	0.000094	-98.3%	0.005031	-10.2%	0.005032	-10.1%	0.005041	-10.0%
0.010	0.005600 ⁽¹⁾	0.000360	-93.6%	0.005272	-5.9%	0.005272	-5.9%	0.005281	-5.7%
0.050	0.006166 ⁽²⁾	0.003898	-36.8%	0.005925	-3.9%	0.005933	-3.8%	0.006000	-2.7%
0.100	0.007835 ⁽²⁾	0.006680	-14.7%	0.007625	-2.7%	0.007660	-2.2%	0.007909	0.9%

(1) Solução analítica para placas finas [1] ($\nu = 0.3$).
 (2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF93).

$$w_c = \beta Pa^2 / D$$

O gráfico 8.8 exibe as curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação ($p=1, p=2, p=3$ e $p=4$), para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa.

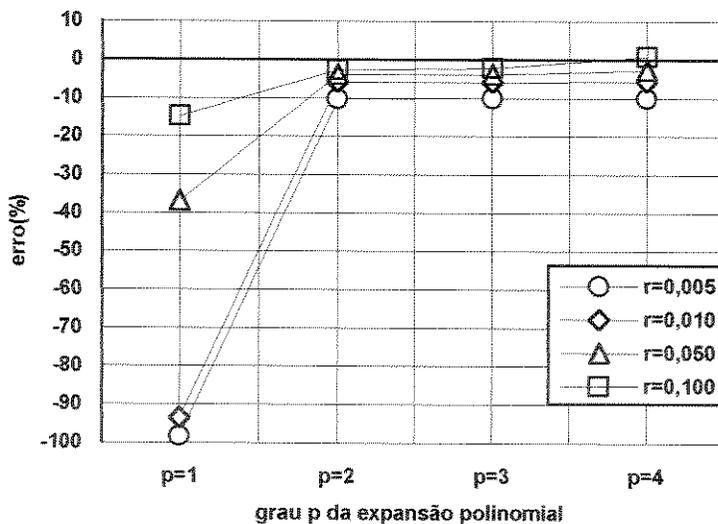


Gráfico 8.8 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada engastada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).

Verifica-se, a partir da tabela 8.9 e do gráfico 8.8, que o elemento proposto, ao sofrer os refinamentos hierárquicos de grau $p=2, p=3$ e $p=4$, trouxe resultados satisfatórios para as situações de placas finas, tendo, portanto, restringido de forma apreciável a característica de

rigidez excessiva inerente ao emprego da integração consistente nesses casos, tal como se pretendia inicialmente. Para as situações de placas moderadamente grossas (tabela 8.9), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS, com malha de discretização 6x6, aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um desempenho bastante satisfatório demonstrando perfeita compatibilidade com os resultados teoricamente esperados (capítulo 1). Nota-se ainda que, no caso em que $t/a = 0.100$, a convergência imposta pelo elemento proposto se dá num valor acima daquele apresentado pelo elemento STIF93 do programa ANSYS.

8.3.4 Placa retangular engastada em seus lados

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se malha de discretização regular de 6x6 elementos. Obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico ($p=1$) com integração numérica consistente (2x2 pontos de integração) e a partir daí procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, sendo que são apresentadas, como resultado, as deflexões w_c no centro da placa, normalizadas com relação ao fator Pb^2/D , no qual P é o valor da carga concentrada, b , o lado menor da placa e D , sua rigidez dada pela equação (8.1). Esses resultados são comparados com os da teoria clássica de *Kirchhoff* exibida em TIMOSHENKO et al. [1], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$), e com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se malha de discretização de 6x6 elementos, para o caso de placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$). Nesse último caso, a confrontação com o modelo numérico se dá em razão dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura (tabela 8.10).

Tabela 8.10 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator Pb^2/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular engastada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).

$\frac{t}{a}$	Valores comparativos β	Elemento proposto							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		β	Erro	β	Erro	β	Erro	β	Erro
0.005	0.007220 ⁽¹⁾	0.000311	-95.7%	0.006432	-10.9%	0.006436	-10.9%	0.006445	-10.7%
0.010	0.007220 ⁽¹⁾	0.001108	-84.7%	0.006708	-7.1%	0.006712	-7.0%	0.006728	-6.8%
0.050	0.009438 ⁽²⁾	0.007399	-21.6%	0.009102	-3.6%	0.009205	-2.5%	0.009450	0.1%
0.100	0.016017 ⁽²⁾	0.013690	-14.5%	0.016066	0.3%	0.016487	2.9%	0.017414	8.7%

(1) Solução analítica para placas finas [1] ($a/b = 2$; $\nu = 0.3$).
 (2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF93).

$$w_c = \beta P b^2 / D$$

O gráfico 8.9 exhibe as curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação ($p=1, p=2, p=3$ e $p=4$), para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa.

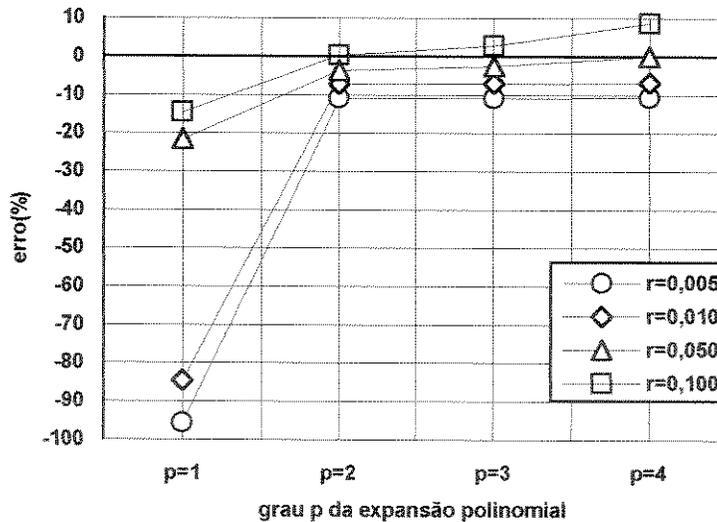


Gráfico 8.9 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular engastada em seus lados, submetida a uma carga concentrada central).

Verifica-se, a partir da tabela 8.10 e do gráfico 8.9, que o elemento proposto, ao sofrer os refinamentos hierárquicos de grau $p=2, p=3$ e $p=4$, trouxe resultados satisfatórios para as situações de placas finas, tendo, portanto, restringido de forma apreciável a característica de

rigidez excessiva inerente ao emprego da integração consistente nesses casos, tal como se pretendia inicialmente. Para as situações de placas moderadamente grossas (tabela 8.10), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS, com malha de discretização 6x6, aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um desempenho satisfatório com destaque para os casos em que $t/a = 0.050$; $p = 4$ e $t/a = 0.100$; $p = 2$, demonstrando ainda boa adequação em relação aos resultados teoricamente esperados (capítulo 1). Nota-se ainda que, no caso em que $t/a = 0.100$, a convergência imposta pelo elemento proposto se dá num valor acima daquele apresentado pelo elemento STIF93 do programa ANSYS.

8.4 Placa submetida à ação de uma carga distribuída de perfil senoidal, perpendicular a seu plano

De acordo com TIMOSHENKO et al. [1], para se descrever o perfil senoidal da carga distribuída perpendicularmente ao plano da placa, propõe-se a seguinte expressão:

$$q = q_0 \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{a} \cdot \text{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (8.2)$$

sendo q_0 o valor da carga distribuída no centro da placa, a o comprimento desta e b a sua largura (figura 8.3).

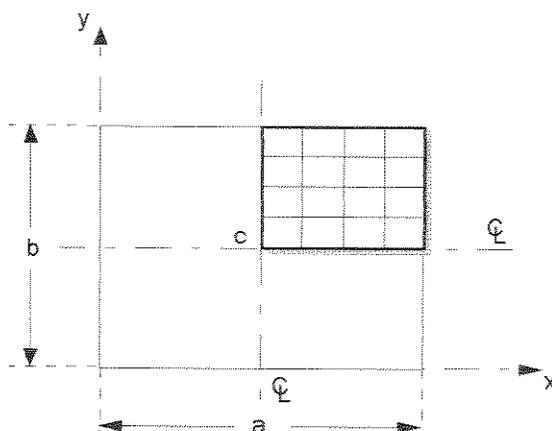


Figura 8.3 Placa de dimensões a e b submetida a um perfil senoidal de carregamento.

8.4.1 Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se malha de discretização regular de 4x4 elementos (figura 8.1). Obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico (p=1) com integração numérica consistente (2x2 pontos de integração) e a partir daí procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo (p=2), terceiro (p=3) e quarto (p=4) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, sendo que são apresentadas, como resultado, as deflexões w_c no centro da placa, normalizadas com relação ao fator $q_0 a^4/D$, no qual q_0 é o valor da carga distribuída no centro da placa, a , o lado da placa e D , sua rigidez dada pela equação (8.1). Esses resultados são comparados àqueles da *Teoria de Elasticidade Tridimensional* [27], para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa quadrada (tabela 8.11). Neste caso, a *Teoria de Elasticidade Tridimensional* apresenta os resultados analíticos tanto para placas finas ($t/a < 0.050$) como para placas moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$).

Tabela 8.11 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator $q_0 a^4/D$, para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga distribuída de perfil senoidal).

$\frac{t}{a}$	Solução analítica [27] α	Elemento proposto							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		α	Erro	α	Erro	α	Erro	α	Erro
0.010	0.002566	0.000108	-95.8%	0.002473	-3.6%	0.002473	-3.6%	0.002474	-3.6%
0.020	0.002566	0.000384	-85.0%	0.002486	-3.1%	0.002487	-3.1%	0.002488	-3.0%
0.050	0.002598	0.001368	-47.3%	0.002532	-2.5%	0.002533	-2.5%	0.002539	-2.3%
0.100	0.002695	0.002237	-17.0%	0.002667	-1.0%	0.002672	-0.9%	0.002693	-0.1%
$w_c = \frac{\alpha q_0 a^4}{D}$									

O gráfico 8.10 exibe as curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação (p=1, p=2, p=3 e p=4), para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa.

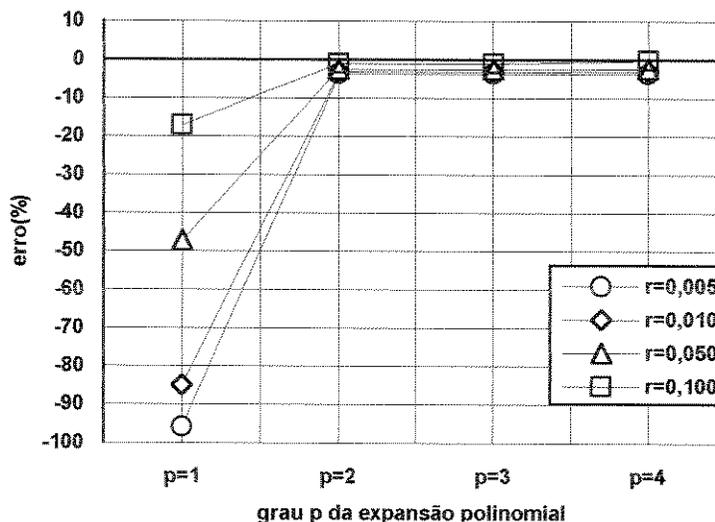


Gráfico 8.10 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga distribuída de perfil senoidal).

A tabela 8.12 apresenta a comparação entre o elemento proposto com refinamento de grau $p=2$ e aquele utilizado pelo programa ANSYS - versão 5.2 (elemento STIF93). Em cada caso, é fornecido o número de graus de liberdade (NGL) envolvido na análise.

Tabela 8.12 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator $q_0 a^4/D$, para dois tipos de elementos e diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga distribuída de perfil senoidal).

t/a	Solução analítica [27] α	Elemento proposto $p=2$		ANSYS ⁽¹⁾	
		α	Erro	α	Erro
0.010	0.002566	0.002473	-3.6%	0.002574	0.3%
0.020	0.002566	0.002486	-3.1%	0.002570	0.2%
0.050	0.002598	0.002532	-2.5%	0.002605	0.3%
0.100	0.002695	0.002667	-1.0%	0.002714	0.7%
NGL		89		146	

(1) Malha de 4x4 elementos.
 NGL = número de graus de liberdade.
 $w_c = \alpha q_0 a^4 / D$

Verifica-se, a partir da tabela 8.11 e do gráfico 8.10, que o elemento proposto, ao sofrer os refinamentos hierárquicos de grau $p=2$, $p=3$ e $p=4$, trouxe efetivamente resultados confiáveis para as situações de placas finas, tendo, portanto, restringido de forma significativa a característica de rigidez excessiva inerente ao emprego da integração consistente nesses casos, tal como se pretendia inicialmente. Além disso, de acordo com o que foi apresentado na introdução deste trabalho (capítulo 1) e tendo, esse novo elemento, sido concebido nos moldes do elemento de AHMAD [4], constata-se o seu adequado funcionamento no que se refere ao efeito das tensões de cisalhamento na direção de sua espessura, ou seja, a correta tendência de diminuição dos erros cometidos quando se aumenta a espessura da placa. Observa-se também, ao se fixar a atenção nos resultados fornecidos pela tabela 8.12, que, tanto nas situações de placas finas como nas de placas moderadamente grossas, o desempenho do elemento proposto não foi superior ao do elemento STIF93 do programa ANSYS. No entanto, ao se examinar ambas as tabelas (8.11 e 8.12) simultaneamente, é possível notar que, para a situação da placa de maior espessura, esse desempenho se demonstrou extremamente satisfatório, chegando mesmo a superar o do elemento STIF93, quando do refino de grau $p=4$ ($NGL = 185$). Esse mesmo comportamento foi verificado quando da análise referente ao item 8.2.1, para a qual as soluções analíticas estão disponíveis na literatura.

8.4.2 Placa retangular simplesmente apoiada em seus lados

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se malha de discretização regular de 4×4 elementos (figura 8.2). Obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico ($p=1$) com integração numérica consistente (2×2 pontos de integração) e a partir daí procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, sendo que são apresentadas, como resultado, as deflexões w_c no centro da placa, normalizadas com relação ao fator $q_0 b^4 / D$, no qual q_0 é o valor da carga distribuída no centro da placa, b , o lado menor da placa e D , sua rigidez dada pela equação (8.1). Esses resultados são comparados com os da teoria clássica de *Kirchhoff* exibida em TIMOSHENKO et al. [1], para o caso de placas finas ($t/a < 0.050$), e com a solução numérica apresentada pelo elemento STIF93 do programa ANSYS, utilizando-se malha de discretização de 4×4 elementos, para o caso de placas

moderadamente grossas ($t/a \geq 0.050$). Nesse último caso, a confrontação com o modelo numérico se dá em razão dos resultados analíticos não estarem disponíveis na literatura (tabela 8.13).

Tabela 8.13 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator $q_0 b^4/D$, para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga distribuída de perfil senoidal).

$\frac{t}{a}$	Valores comparativos α	Elemento proposto							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		α	Erro	α	Erro	α	Erro	α	Erro
0.005	0.006750 ⁽¹⁾	0.000175	-97.4%	0.006298	-4.1%	0.006300	-4.1%	0.006305	-4.0%
0.010	0.006750 ⁽¹⁾	0.000651	-90.3%	0.006341	-3.5%	0.006341	-3.5%	0.006344	-3.4%
0.050	0.006808 ⁽²⁾	0.005015	-26.3%	0.006694	-1.7%	0.006696	-1.6%	0.006744	-0.9%
0.100	0.007505 ⁽²⁾	0.006954	-7.3%	0.007701	2.6%	0.007706	2.7%	0.007892	5.2%

(1) Solução analítica para placas finas [1] ($a/b = 2$; $\nu = 0.3$).
 (2) Solução numérica obtida a partir do programa ANSYS (elemento STIF93).

$w_c = \alpha q_0 b^4 / D$

O gráfico 8.11 exibe as curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação ($p=1, p=2, p=3$ e $p=4$), para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa.

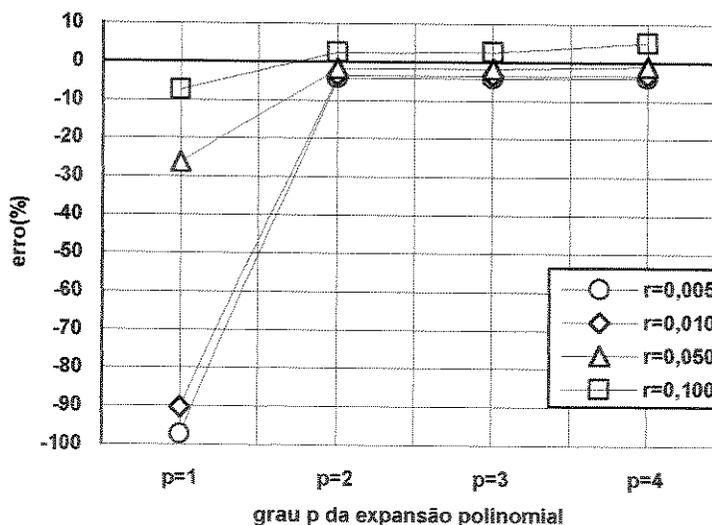


Gráfico 8.11 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado maior a da placa (placa retangular simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga distribuída de perfil senoidal).

Verifica-se, a partir da tabela 8.13 e do gráfico 8.11, que o elemento proposto, ao sofrer os refinamentos hierárquicos de grau $p=2$, $p=3$ e $p=4$, trouxe efetivamente resultados confiáveis para as situações de placas finas, tendo, portanto, restringido de forma significativa a característica de rigidez excessiva inerente ao emprego da integração consistente nesses casos, tal como se pretendia inicialmente. Para as situações de placas moderadamente grossas (tabela 8.13), admitindo-se que o elemento STIF93 do programa ANSYS, com malha de discretização 4×4 , aproxime de maneira adequada a solução do problema, observa-se que o elemento proposto apresenta um desempenho satisfatório, com destaque para os casos em que $t/a = 0.050$. Nota-se ainda que, no caso em que $t/a = 0.100$, a convergência imposta pelo elemento proposto se dá num valor acima daquele apresentado pelo elemento STIF93 o que, no entanto, não garante a performance superior deste último, uma vez que não se dispõe do resultado analítico nessa situação. Deve-se lembrar que, para caso tratado no item 8.4.1 no qual a solução analítica está disponível, o elemento proposto, sob condições semelhantes, apresentou o melhor resultado.

8.5 Vigas retas em balanço

Na presente análise foram consideradas vigas em balanço com malha de discretização regular de 6×2 elementos, submetidas a três diferentes condições de carregamento: flexão pura (no plano xy), flexão no plano (carregamento na direção do eixo y do plano xy) e flexão fora do plano (carregamento na direção do eixo z , perpendicular ao plano xy). Esses tipos de carregamento estão representados na figura 8.4.

As dimensões das vigas, bem como as constantes elásticas empregadas em cada situação, foram atribuídas sem se levar em conta suas unidades de medida, tal como em MACNEAL et al. [28]. Dessa forma, são admitidos para todos os casos de viga, os seguintes valores: comprimento = 6.0, largura = 0.2, espessura = 0.1, módulo de elasticidade $E = 1.0 \times 10^7$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Os carregamentos utilizados foram de 5.0 para o caso de flexão pura e de 0.5 para os casos de flexão no plano e fora dele.

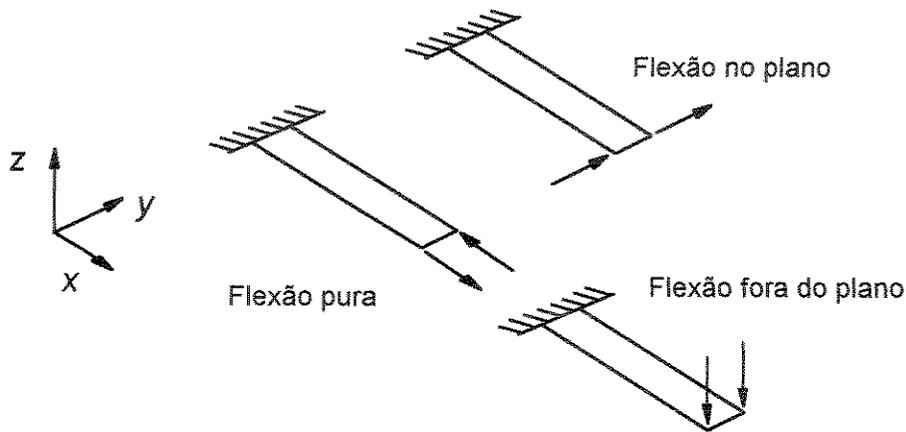


Figura 8.4 Carregamentos atuantes nos vários exemplos de viga reta.

8.5.1 Viga submetida à flexão pura

Ao se avaliar este exemplo, obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico ($p=1$) com integração numérica consistente (2x2 pontos de integração) e a seguir procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, apresentado-se, como resultado, o valor (em módulo) da flecha na extremidade livre da viga. Esse resultado é comparado à solução analítica do problema, fornecida por MACNEAL et al. [28] (tabela 8.14).

Tabela 8.14 Valores das flechas na extremidade livre da viga e seus respectivos erros, comparativamente ao valor teórico dado por MACNEAL et al. [28] (viga reta submetida à flexão pura).

Solução analítica [28] flecha	Elemento proposto							
	p=1		p=2		p=3		p=4	
	flecha	Erro	flecha	Erro	flecha	Erro	flecha	Erro
0.02703	0.00254	-90.6%	0.02705	0.1%	0.02706	0.1%	0.02715	0.4%

O gráfico 8.12 exibe a curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação ($p=1$, $p=2$, $p=3$ e $p=4$).

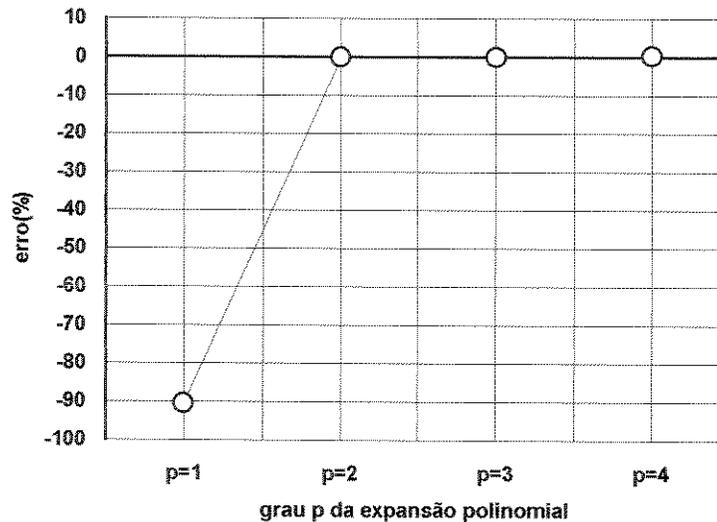


Gráfico 8.12 Curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação (viga reta submetida à flexão pura).

Verifica-se, a partir da tabela 8.14 e do gráfico 8.12, que o elemento proposto, após sofrer os refinamentos hierárquicos de grau $p=2$, $p=3$ e $p=4$, apresentou resultados extremamente satisfatórios em relação à solução analítica, demonstrando uma excepcional convergência.

8.5.2 Viga submetida à flexão no plano

Ao se avaliar este exemplo, obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico ($p=1$) com integração numérica consistente (2×2 pontos de integração) e a seguir procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, apresentado-se, como resultado, o valor (em módulo) da flecha na extremidade livre da viga. Esse resultado é comparado à solução analítica do problema, fornecida por MACNEAL et al. [28] (tabela 8.15).

Tabela 8.15 Valores das flechas na extremidade livre da viga e seus respectivos erros, comparativamente ao valor teórico dado por MACNEAL et al. [28] (viga reta submetida à flexão no plano).

Solução analítica [28] flecha	Elemento proposto							
	p=1		p=2		p=3		p=4	
	flecha	Erro	flecha	Erro	flecha	Erro	flecha	Erro
0.10810	0.01016	-90.6%	0.10786	-0.2%	0.10840	0.3%	0.10894	0.8%

O gráfico 8.13 exibe a curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação (p=1, p=2, p=3 e p=4).

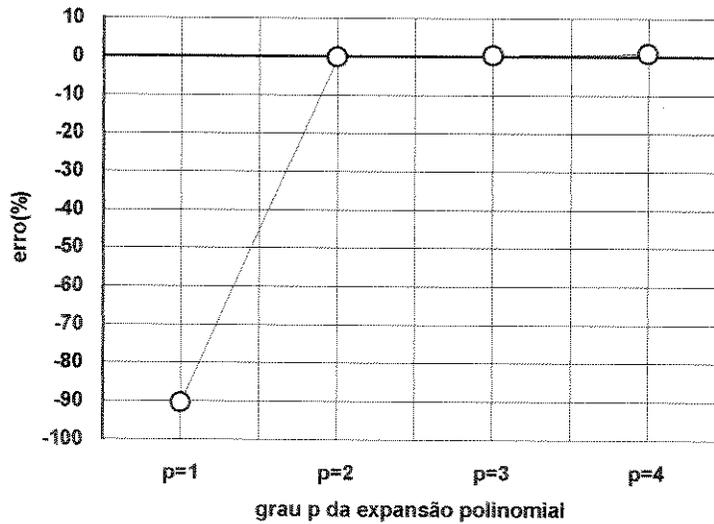


Gráfico 8.13 Curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação (viga reta submetida à flexão no plano).

Verifica-se, a partir da tabela 8.15 e do gráfico 8.13, que o elemento proposto, após sofrer os refinamentos hierárquicos de grau p=2, p=3 e p=4, apresentou resultados extremamente satisfatórios em relação à solução analítica, demonstrando uma excepcional convergência.

8.5.3 Viga submetida à flexão fora do plano

Ao se avaliar este exemplo, obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico (p=1) com integração numérica consistente (2x2 pontos de integração) e a seguir procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios

de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, apresentado-se, como resultado, o valor (em módulo) da flecha na extremidade livre da viga. Esse resultado é comparado à solução analítica do problema, fornecida por MACNEAL et al. [28] (tabela 8.16).

Tabela 8.16 Valores das flechas na extremidade livre da viga e seus respectivos erros, comparativamente ao valor teórico dado por MACNEAL et al. [28] (viga reta submetida à flexão fora do plano).

Solução analítica [28] flecha	Elemento proposto							
	p=1		p=2		p=3		p=4	
	flecha	Erro	flecha	Erro	flecha	Erro	flecha	Erro
0.43210	0.01306	-98.0%	0.42350	-2.0%	0.42350	-2.0%	0.42350	-2.0%

O gráfico 8.14 exibe a curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação ($p=1, p=2, p=3$ e $p=4$).

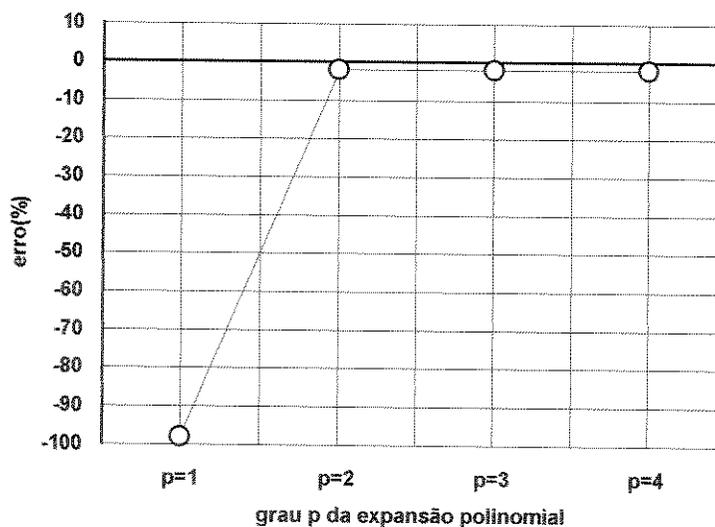


Gráfico 8.14 Curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação (viga reta submetida à flexão fora do plano).

Verifica-se, a partir da tabela 8.16 e do gráfico 8.14, que o elemento proposto, após sofrer os refinamentos hierárquicos de grau $p=2, p=3$ e $p=4$, apresentou resultados bastante satisfatórios em relação à solução analítica, demonstrando excelente convergência após o

primeiro refinamento hierárquico ($p=2$), mas uma precoce estabilização desta nos demais refinamentos.

8.6 Cascas

8.6.1 Casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da casca cilíndrica, utilizando-se malha de discretização regular de 8×8 elementos (figura 8.5). Obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico ($p=1$) com integração numérica consistente (2×2 pontos de integração) e a partir daí procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento. Foram empregados, como condição de contorno do problema, diafragmas rígidos em duas das extremidades da casca.

A casca cilíndrica possui as seguintes características:

comprimento = 50 ft

coeficiente de Poisson = 0.0

raio = 25 ft

módulo de elasticidade = 4.32×10^5 k/ft²

espessura = 0.25 ft

peso próprio = -0.3599 k/ft³

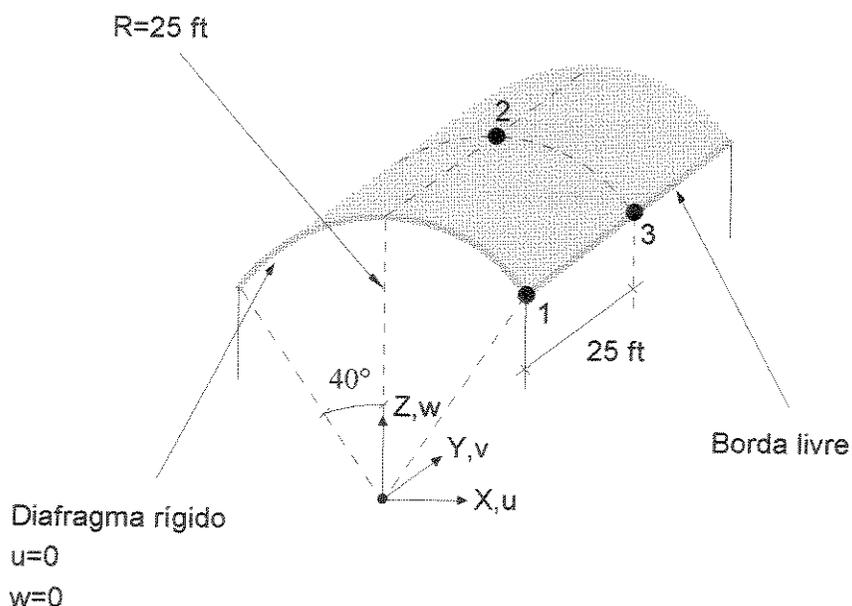


Figura 8.5 Casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio.

Como resultado, são apresentadas, de acordo com o sistema global de referência, as deflexões: v_1 , w_2 e w_3 , nos nós 1, 2 e 3 respectivamente (tabela 8.17). Esses resultados são comparados às soluções analíticas obtidas por MACNEAL et al. [28].

Tabela 8.17 Deflexões v_1 , w_2 e w_3 nos nós 1, 2 e 3 respectivamente, utilizando-se malha de 8x8 elementos (casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio).

Deflexão	Solução analítica (ft)	Elemento proposto							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		Deflexão	Erro	Deflexão	Erro	Deflexão	Erro	Deflexão	Erro
v_1	-0.01250	-0.00510	-59.2%	-0.01251	0.1%	-0.01263	1.0%	-0.01296	3.7%
w_2	+0,04510	-0,01940	-143.0%	+0,04316	-4.3%	+0,04434	-1.7%	+0,04397	-2.5%
w_3	-0.30080	-0.03520	-88.3%	-0.29610	-1.6%	-0.30082	0.0%	-0.30652	1.9%

O gráfico 8.15 exibe, para cada uma das três deflexões examinadas (v_1 , w_2 e w_3), a curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação ($p=1$, $p=2$, $p=3$ e $p=4$).

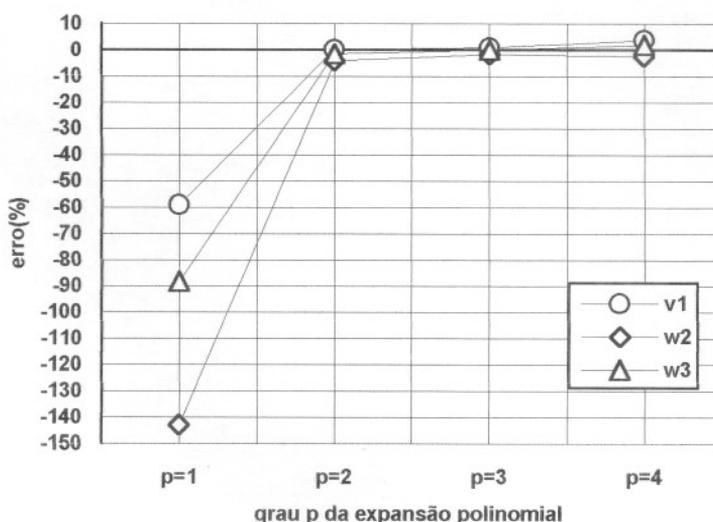


Gráfico 8.15 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para as diferentes deflexões examinadas (casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio).

Verifica-se, a partir da tabela 8.17 e do gráfico 8.15, que o elemento proposto, após sofrer os refinamentos hierárquicos de grau $p=2$, $p=3$ e $p=4$, apresentou resultados

extremamente satisfatórios em relação à solução analítica, demonstrando uma excepcional convergência, sobretudo para o refinamento hierárquico de grau $p=3$.

8.6.2 Casca cilíndrica com extremidades livres, submetida a duas cargas concentradas de sentidos opostos (“Pinched cylinder”)

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um oitavo da casca cilíndrica (figura 8.6), utilizando-se várias malhas de discretização regular (2x2, 4x4, 6x6, 8x8 e 10x10 elementos). As duas extremidades livres da casca cilíndrica apresentam-se como condição de contorno do problema.

A casca cilíndrica tem as seguintes características:

comprimento = 10.35 in

coeficiente de Poisson = 0.3125

raio = 4.953 in

módulo de elasticidade = 10.5×10^6 psi

espessura = 0.094 in

carga = 100 lb

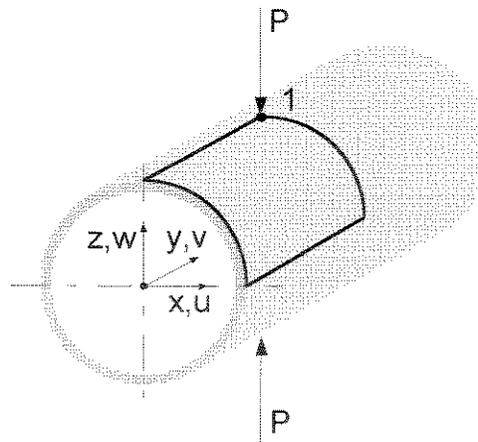


Figura 8.6 Casca cilíndrica com extremidades livres, submetida a duas cargas concentradas de sentidos opostos (“Pinched cylinder”).

Como resultado, é apresentada, de acordo com o sistema global de referência e para várias malhas de discretização, a deflexão w_c no nó 1 (figura 8.6), sobre o qual uma das cargas é aplicada (tabela 8.18). O resultado obtido, para cada uma das malhas de discretização, é comparado à solução analítica fornecida por TIMOSHENKO et al. [1].

Tabela 8.18 Deflexão w_c sofrida pelo nó 1 (figura 8.6), para várias malhas de discretização situadas sobre a oitava parte da casca cilíndrica (“Pinched cylinder”).

Nº elementos	Elemento proposto							
	p=1		p=2		p=3		p=4	
	$w_c^{(1)}$	Erro	$w_c^{(1)}$	Erro	$w_c^{(1)}$	Erro	$w_c^{(1)}$	Erro
2x2	-0.00048	-99.6%	-0.00325	-97.0%	-0.00632	-94.2%	-0.00659	-93.9%
4x4	-0.00120	-98.9%	-0.01841	-83.0%	-0.04444	-59.0%	-0.04472	-58.7%
6x6	-0.00214	-98.0%	-0.05247	-51.6%	-0.08380	-22.7%	-0.08405	-22.5%
8x8	-0.00327	-97.0%	-0.08071	-25.6%	-0.09932	-8.4%	-0.09954	-8.2%
10x10	-0.00459	-95.8%	-0.09513	-12.2%	-0.10480	-3.3%	(2)	

Solução analítica [1]: $w_c = -0.10840$.

(1) Deslocamento w_c sofrido pelo carregamento P , dado em polegadas.

(2) Valor não disponível devido ao esgotamento da memória do programa utilizado.

O gráfico 8.16 exibe, para o caso da malha de 10x10 elementos, a curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação ($p=1$, $p=2$ e $p=3$).

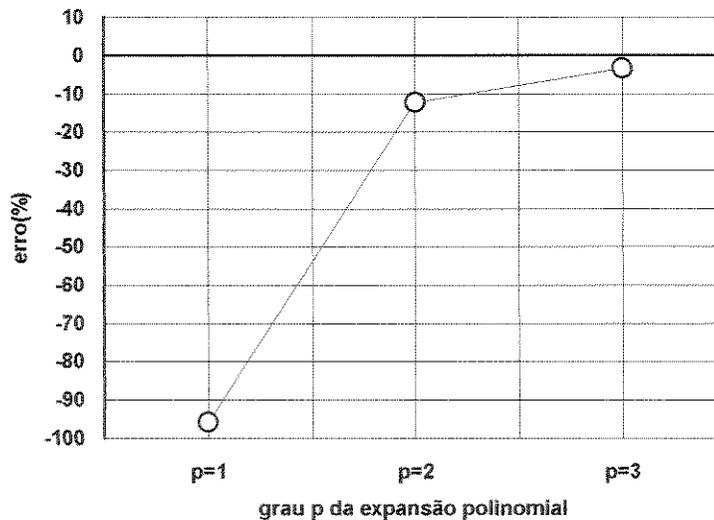


Gráfico 8.16 Curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para o caso da malha de 10x10 elementos (casca cilíndrica com extremidades livres, submetida a duas cargas concentradas de sentidos opostos).

A tabela 8.19 apresenta, para cada malha de discretização adotada, a comparação entre o resultado obtido pelo elemento proposto, com refinamento de grau $p=3$, e aqueles oriundos das formulações de ALTMAN & IGUTI [31], CANTIN [32] e ASHWELL & SABIR [33].

Tabela 8.19 Deflexão w_c sofrida pelo nó 1 (figura 8.6), para diversos elementos (casca cilíndrica com extremidades livres, submetida a duas cargas concentradas de sentidos opostos).

Nº elementos	Elemento proposto $p=3$		Elemento Altman & Iguti [31]		Elemento Cantin [32]		Elemento Ashwell & Sabir [33]	
	$w_c^{(1)}$	Erro	$w_c^{(1)}$	Erro	$w_c^{(1)}$	Erro	$w_c^{(1)}$	Erro
2x2	-0.00632	-94.2%	-0.09576	-11.7%	-0.09310	-14.1%	-0.11030	1.8%
4x4	-0.04444	-59.0%	-0.10974	1.2%	-0.11260	3.9%	-0.11290	4.2%
6x6	-0.08380	-22.7%	(2)		-0.11370	4.9%	-0.11350	4.7%
8x8	-0.09932	-8.4%	(2)		-0.11390	5.1%	-0.11370	4.9%
10x10	-0.10480	-3.3%	(2)		-0.11390	5.1%	-0.11370	4.9%

Solução analítica [1]: $w_c = -0.10840$.

(1) Deslocamento w_c sofrido pelo carregamento P , dado em polegadas.

(2) Valores não disponíveis em [31].

Verifica-se, a partir da tabela 8.18, que os resultados obtidos pelo elemento proposto, ao se combinar os refinamentos do tipo p (hierárquico) e do tipo h , foram bastante satisfatórios comparativamente à solução analítica dada por TIMOSHENKO et al. [1], demonstrando uma excelente convergência desse modelo, sobretudo para o refinamento hierárquico de grau $p=3$ e malha de 10×10 elementos (gráfico 8.16). Quando se comparam os resultados fornecidos pelo elemento proposto, com refinamento de grau $p=3$, àqueles provenientes de outras formulações (tabela 8.19), observa-se que estes últimos nem sempre apresentaram uma nítida tendência de convergência em relação à solução analítica (CANTIN [32] e ASHWELL & SABIR [33]), diferentemente do que pode ser constatado para aquele primeiro. Isso sugere a verificação de um adequado e confiável comportamento do elemento proposto, relativamente às expectativas teóricas do modelo de elementos finitos. É possível se notar ainda, através da tabela 8.19, que, para os casos em que se utilizou malha de discretização 8×8 e 10×10 , o elemento em questão apresentou resultados perfeitamente compatíveis àqueles procedentes das demais formulações.

8.7 Estudo de casos com malha distorcida

De acordo com o que foi exposto na introdução deste capítulo, pretende-se, nesta seção, observar o comportamento do elemento proposto quando sujeito a problemas envolvendo malha distorcida, tal como proposta em MACNEAL et al. [28] (figura 8.7). Para tanto, foram analisadas duas situações distintas, uma abrangendo o caso de placas (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída

perpendicular a seu plano) e outra, o caso de cascas (casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio). Em ambas as situações foram conservadas as características do estudo original (itens 8.2.1 e 8.6.1), acrescentando-se todavia, a cada uma delas, uma análise para se testar a influência da interpolação da geometria do elemento sobre o desempenho do mesmo.

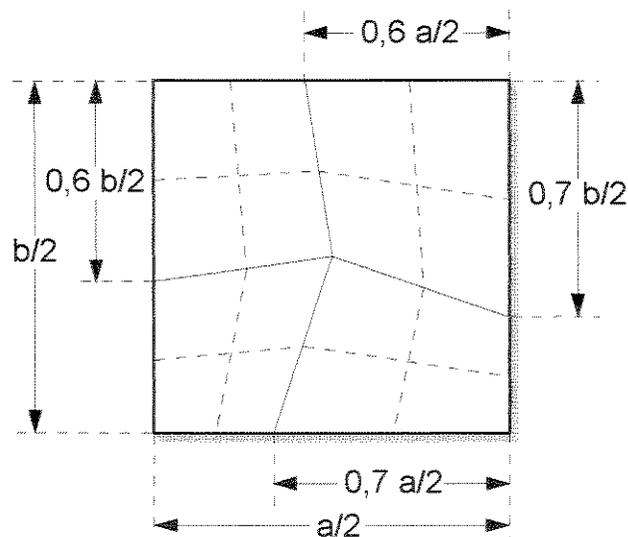


Figura 8.7 Malha de discretização distorcida adaptada a partir de MACNEAL et al. [28].

8.7.1 Placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a ação de uma carga uniformemente distribuída perpendicular a seu plano

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da placa, utilizando-se malha de discretização distorcida de 4×4 elementos (figura 8.7). Obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico ($p=1$) com integração numérica consistente (2×2 pontos de integração) e a partir daí procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo ($p=2$), terceiro ($p=3$) e quarto ($p=4$) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, sendo que são apresentadas, como resultado, as deflexões w_c no centro da placa, normalizadas com relação ao fator qa^4/D , no qual q é o valor da carga distribuída, a , o lado da placa e D , sua rigidez dada pela equação (8.1). Esses resultados são comparados àqueles da *Teoria de Elasticidade Tridimensional* [27], para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa quadrada (tabela 8.20).

8.7.1.1 Interpolação da geometria do elemento proposto a partir das funções de forma das famílias Lagrangiana e Serendipity

A tabela 8.20 apresenta, para ambos os casos de interpolação da geometria do elemento proposto (utilizando-se tanto as funções de forma da família Lagrangiana quanto as da família Serendipity), as soluções obtidas para a deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , no centro da placa.

Tabela 8.20 Deflexão w_c , normalizada com relação ao fator qa^4/D , para diferentes relações t/a entre a espessura t e o lado a da placa, utilizando-se malha de discretização distorcida e duas famílias de funções de forma para se interpolar a geometria do elemento (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

$\frac{t}{a}$	Solução analítica [27] α	Elemento proposto (*)							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		α	Erro	α	Erro	α	Erro	α	Erro
0.005	0.004060	0.000039	-99.0%	0.000508	-87.5%	0.000526	-87.0%	0.000575	-85.8%
0.010	0.004061	0.000152	-96.3%	0.001034	-74.5%	0.001051	-74.1%	0.001105	-72.8%
0.050	0.004111	0.001910	-53.5%	0.003050	-25.8%	0.003062	-25.5%	0.003102	-24.5%
0.100	0.004263	0.003257	-23.6%	0.003850	-9.5%	0.003858	-9.5%	0.003899	-8.5%
$w_c = \frac{\alpha q a^4}{D}$									

(*) Geometria interpolada tanto com as funções da família Lagrangiana como com as da família Serendipity.

O gráfico 8.17 exhibe, para ambos os casos de interpolação da geometria do elemento proposto (utilizando-se tanto as funções de forma da família Lagrangiana quanto as da família Serendipity), as curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação (p=1, p=2, p=3 e p=4), para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa, ao se empregar malha de discretização distorcida.

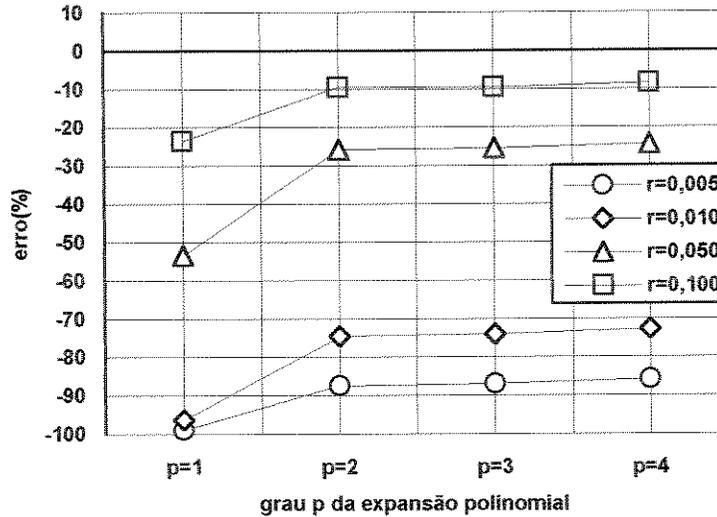


Gráfico 8.17 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para diversas relações $r = t/a$ entre a espessura t e o lado a da placa, utilizando-se malha de discretização distorcida (placa quadrada simplesmente apoiada em seus lados, submetida a uma carga uniformemente distribuída).

A partir da tabela 8.20 e do gráfico 8.17, é possível verificar, a priori, que a escolha do tipo de funções de forma que interpolam a geometria do elemento não exerce qualquer influência sobre o comportamento deste, uma vez que ambas as famílias de funções adotadas descrevem identicamente quaisquer dos contornos lineares que delimitam a geometria dos elementos. Observa-se ainda que, relativamente ao exemplo original com malha de discretização regular (tabela 8.1 e gráfico 8.1), houve, em todas as situações analisadas, um decaimento expressivo da taxa de convergência apresentada pelo refinamento hierárquico.

8.7.2 Casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio

Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da casca cilíndrica, utilizando-se malha de discretização distorcida de 8x8 elementos, tomada segundo a projeção da malha apresentada na figura 8.7 sobre a quarta parte da casca cilíndrica. Obteve-se inicialmente a solução para o elemento superparamétrico (p=1) com integração numérica consistente (2x2 pontos de integração) e a partir daí procedeu-se ao refinamento hierárquico dessa solução através da inserção de polinômios de segundo (p=2), terceiro (p=3) e quarto (p=4) graus. Optou-se por refinar todos os lados e interior de cada elemento, tendo

sido apresentadas, como resultado, as deflexões: v_1 , w_2 e w_3 , nos nós 1, 2 e 3 respectivamente, de acordo com o sistema global de referência (figura 8.5). Esses resultados são comparados àqueles obtidos a partir das soluções analíticas fornecidas por MACNEAL et al. [28].

8.7.2.1 Interpolação da geometria do elemento proposto a partir das funções de forma da família Lagrangiana

A tabela 8.21 apresenta, para o caso da interpolação da geometria do elemento proposto a partir das funções de forma da família Lagrangiana, as soluções obtidas para as deflexões v_1 , w_2 e w_3 nos nós 1, 2 e 3 respectivamente (figura 8.5).

Tabela 8.21 Deflexões v_1 , w_2 e w_3 nos nós 1, 2 e 3 respectivamente (figura 8.5), utilizando-se malha de discretização distorcida de 8x8 elementos e as funções de forma da família Lagrangiana para interpolar a geometria do elemento (casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio).

Deflexão	Solução analítica (ft)	Elemento proposto							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		Deflexão	Erro	Deflexão	Erro	Deflexão	Erro	Deflexão	Erro
v_1	-0.01250	-0.00455	-63.6%	-0.00844	-32.5%	-0.00858	-31.4%	-0.00898	-28.2%
w_2	+0.04510	-0.01940	-143.0%	-0.00951	-121.1%	-0.00930	-120.6%	-0.01081	-124.0%
w_3	-0.30080	-0.02719	-91.0%	-0.14023	-53.4%	-0.14450	-52.0%	-0.14813	-50.8%

O gráfico 8.18 exibe, para cada uma das três deflexões examinadas (v_1 , w_2 e w_3), a curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação (p=1, p=2, p=3 e p=4), empregando-se malha de discretização distorcida e as funções de forma da família Lagrangiana para interpolar a geometria do elemento.

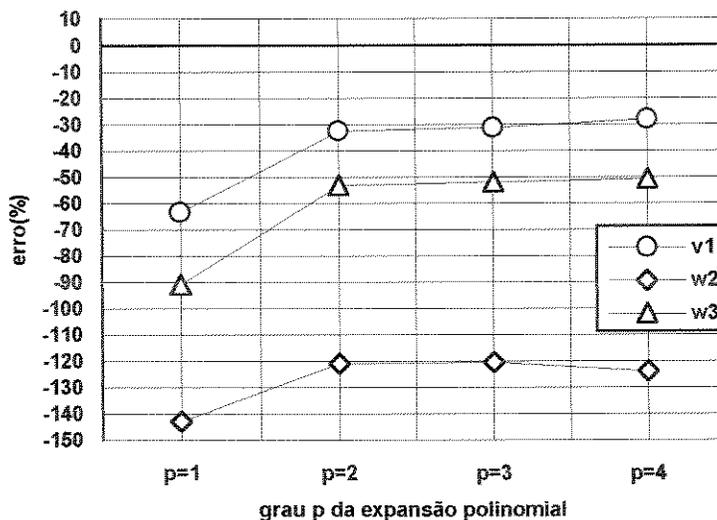


Gráfico 8.18 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para as diferentes deflexões examinadas, utilizando-se malha de discretização distorcida e as funções de forma da família Lagrangiana para interpolar a geometria do elemento (casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio).

Verifica-se, a partir da tabela 8.21 e do gráfico 8.18, que as soluções fornecidas pelo refinamento hierárquico, neste caso, tiveram sua taxa de convergência reduzida de forma significativa ao se distorcer a malha de discretização do problema ilustrado no item 8.6.1.

8.7.2.2 Interpolação da geometria do elemento proposto a partir das funções de forma da família Serendipity

A tabela 8.22 apresenta, para o caso da interpolação da geometria do elemento proposto a partir das funções de forma da família Serendipity, as soluções obtidas para as deflexões v_1 , w_2 e w_3 nos nós 1, 2 e 3 respectivamente (figura 8.5).

Tabela 8.22 Deflexões v_1 , w_2 e w_3 nos nós 1, 2 e 3 respectivamente (figura 8.5), utilizando-se malha de discretização distorcida de 8x8 elementos e as funções de forma da família Serendipity para interpolar a geometria do elemento (casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio).

Deflexão	Solução analítica (ft)	Elemento proposto							
		p=1		p=2		p=3		p=4	
		Deflexão	Erro	Deflexão	Erro	Deflexão	Erro	Deflexão	Erro
v_1	-0.01250	-0.02852	128%	-0.11977	858%	-0.15512	1141%	-0.16358	1209%
w_2	+0.04510	-0.12097	-368%	+0.46210	925%	+0.46019	920%	+0.49180	990%
w_3	-0.30080	-0.17123	-43%	-5.12900	1605%	-8.13830	2606%	-8.52430	2734%

O gráfico 8.19 exibe, para cada uma das três deflexões examinadas (v_1 , w_2 e w_3), a curva de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação ($p=1$, $p=2$, $p=3$ e $p=4$), empregando-se malha de discretização distorcida e as funções de forma da família Serendipity para interpolar a geometria do elemento.

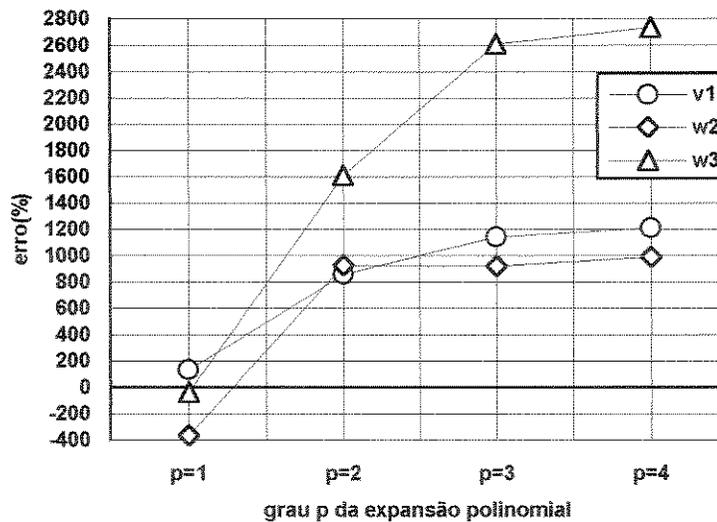


Gráfico 8.19 Curvas de convergência do erro envolvido na análise em função do refinamento hierárquico introduzido em cada nível de aproximação, para as diferentes deflexões examinadas, utilizando-se malha de discretização distorcida e as funções de forma da família Serendipity para interpolar a geometria do elemento (casca cilíndrica de cobertura submetida à ação do seu peso próprio).

Verifica-se, a partir da tabela 8.22 e do gráfico 8.19, que as soluções fornecidas pelo refinamento hierárquico, neste caso, não demonstraram convergência ao se distorcer a malha de discretização do problema ilustrado no item 8.6.1.

Capítulo 9

CONCLUSÕES

Com base no que foi apresentado até aqui e tendo em vista os objetivos deste trabalho, é possível afirmar, de maneira geral, que a formulação hierárquica proposta na idealização desse novo elemento finito, mesmo tendo considerado a integração consistente em primeira aproximação, demonstrou-se verdadeiramente capaz de reduzir a característica de rigidez excessiva presente no elemento de AHMAD [4], particularmente no que se refere à análise de placas e cascas finas.

Do ponto de vista da eficiência computacional, pode-se dizer que a introdução do elemento superparamétrico linear na aproximação de partida revelou-se atraente pela sua simplicidade de cálculo e agilidade de processamento.

No que concerne à arquitetura do modelo proposto baseada no mapeamento da superfície média do elemento, pôde-se comprovar a sua eficiência pela performance dos resultados apresentados diante da análise de diferentes exemplos e, sobretudo, pela possibilidade de se considerar o efeito das tensões de cisalhamento ao longo da espessura do elemento.

Relativamente ao que foi apresentado no item 8.1, em particular no tocante aos pontos de integração numérica utilizados na obtenção dos termos da matriz de rigidez do elemento, verificou-se a necessidade do uso de diferentes configurações nos acoplamentos entre o elemento superparamétrico e os diversos níveis de refinamento ($p=2$, $p=3$ e $p=4$), bem como nos acoplamentos relacionados a estes níveis entre si. Esse fato, por si só, remeteria à idéia de um estudo detalhado do papel da integração numérica no desempenho do elemento finito do tipo hierárquico. Contudo, seria interessante imaginar, antes de qualquer empreendimento, a

possibilidade de se desacoplar os refinamentos hierárquicos sucessivos de modo a simplificar um tal estudo. Para tanto, seriam utilizadas as funções de forma hierárquicas obtidas a partir dos polinômios de Legendre os quais possuem a propriedade de ortogonalidade no domínio $[-1,1] \times [-1,1]$ do elemento padrão, segundo o produto interno proveniente da utilização do princípio dos trabalhos virtuais.

Ainda com relação aos resultados obtidos, verificou-se nitidamente que, em qualquer situação envolvendo malha de discretização regular, a mais acentuada taxa de convergência se deu para o refinamento de grau $p=2$, correspondente à expansão polinomial quadrática ilustrada pela figura 6.3. Dentre as possíveis especulações resultantes dessa constatação poder-se-ia dizer, eventualmente, que uma expansão polinomial gerada por uma única função do tipo bolha (figura 6.19) fosse suficiente para garantir o desempenho alcançado pela combinação de todas as funções hierárquicas quadráticas associadas aos lados do elemento, uma vez que ainda estaria assegurada nessa etapa de aproximação, a existência de um polinômio completo de 2º grau [15]. Nesse sentido, a expansão polinomial linear inicial (figura 3.6) seria complementada de modo a adquirir o seguinte aspecto:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \xi & & \eta \\
 \xi^2 & \cdots & \xi\eta & \cdots & \eta^2 & \cdots & 2^0 \text{ grau} \\
 & & \vdots & & & & \\
 & & \xi^2 \eta^2 & & & &
 \end{array}$$

Outro ponto a se ressaltar face a mesma constatação seria o da preferência pelo elemento isoparamétrico quadrático em lugar do elemento superparamétrico linear, como aproximação de partida, pois é possível esperar através dessa escolha, que os resultados obtidos nessa etapa sejam menos grosseiros.

Em se tratando de problemas envolvendo malha distorcida, mesmo não tendo sido realizado um estudo exaustivo sobre o assunto, foi possível observar ao final do capítulo anterior que, em qualquer dos casos, a distorção nas malhas de discretização provocou uma redução apreciável nas taxas de convergência das soluções alcançadas, mas apenas nos casos de casca a descrição da geometria do elemento foi decisiva na obtenção de resultados confiáveis. Nesse sentido, ao lidar com o estudo de cascas, preconiza-se o emprego do elemento de 9 nós da família Lagrangiana para a descrição da geometria do problema, já que o

elemento de 8 nós da família Serendipity demonstrou-se inadequado para essa função ao impedir que a seqüência de soluções obtidas pelo refinamento hierárquico aproximasse o valor teórico esperado, i.e., que esta seqüência efetivamente convergisse.

Como sugestão para próximos trabalhos dentro dessa mesma linha de pesquisa, propõem-se os seguintes temas:

1. Estudo do papel da integração numérica no desempenho de elementos finitos do tipo hierárquico através da utilização dos polinômios de Legendre como funções de forma hierárquicas.

2. Elaboração e implementação de um novo elemento superparamétrico linear com refinamento de 2^o grau gerado por uma única função bolha (e.g. figura 6.19), comparando-o ao deste trabalho e verificando seu desempenho diante da substancial redução no número de graus de liberdade hierárquicos (3 graus associados ao interior do elemento contra 12 associados a seus lados).

3. Estudo exaustivo do comportamento desse e de outros tipos de elemento ao se empregar diferentes perfis de malha de discretização distorcida, com o propósito de se desenvolver novas formulações que possibilitem alcançar melhores taxas de convergência em tais situações.

Referências Bibliográficas

- [1] TIMOSHENKO, S.P., WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. 2^a. ed., McGraw-Hill Kogakusha, 1959.
- [2] UGURAL, A.C. **Stresses in plates and shells**. New York: McGraw-Hill Book , 1981.
- [3] KIRCHHOFF, G. **Vorlesungen über mathematische Physik**. Bd. 1, Mechanik, 1876.
- [4] AHMAD, S., IRONS, B.M., ZIENKIEWICZ, O.C. Analysis of thick and thin shell structures by curved elements. **Int. J. Numer. Methods Eng.** n. 3, p. 419-451, 1970.
- [5] BATHE, K.J. **Finite element procedures in engineering analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, 1982.
- [6] ZIENKIEWICZ, O.C., TOO, J., TAYLOR, R.L. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. **Int. J. Numer. Methods Eng.** n. 3, p. 375-390, 1971.
- [7] PARISCH H. A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration. **Computer Meths. in Applied Mech. and Eng.** n. 20, p.323-350, North-Holland Publ., 1979.

- [8] PARISCH, H. Thick shell elements applied to thin-walled structures-Numerical considerations. In: 3RD. POST CONFERENCE ON COMPUTING ASPECTS OF THE FINITE ELEMENT METHOD, 1975, London, Imperial College.
- [9] IRONS, B.M. The semiloof shell element. In: Ashwell, D.G., Gallagher, R.H. (eds.). **Finite elements for thin shells and curved members**. London: J. Wiley & Sons, 1975, p. 197-222.
- [10] HUGHES, T.J.R., TAYLOR, R.L., KANOKNUKULCHAI, W. A simple and efficient finite element for plate bending. **Int. J. Numer. Methods Eng.** n. 11, p. 1529-1543, 1977.
- [11] HUGHES, T.J.R., COHEN, M., HARONN, M. Reduced and selective integration technique in the finite element analysis of plates. **Nucl. Eng. Design.** n. 46, p. 203-222, 1978.
- [12] PUGH, E.D.L., HINTON, E., ZIENKIEWICZ, O.C. A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration. **Int. J. Numer. Methods, Eng.** n. 12, p. 1059-1079, 1978.
- [13] COONS, S.A. **Surfaces for computer aided design of space form**. M.I.T. Project MAC., MAC-TR-41, 1967.
- [14] FOREST, A.R. **Curves and surfaces for computer aided design**. Computer Aided Design Group. Cambridge: 1968.
- [15] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. **The finite element method**. 4^a. ed., London: McGraw-Hill, 1989.
- [16] STRANG, G., FIX, G.J. **An analysis of the finite element method**. Prentice-Hall, 1973, p.156-163.

- [17] JORDAN, W.B. **The plane isoparametric structural element**. General Electric Co. Repat KAPL-M-7112, Schenectady, New York, 1970.
- [18] APOSTOL, T.M. **Calculus**. v.2, 2^a. ed., Singapore: J. Wiley & Sons, 1969.
- [19] PRZEMIENIECKI, J.S. **Theory of matrix structural analysis**. London: McGraw-Hill, 1968.
- [20] KAPLAN, W. **Advanced calculus**. Massachusetts: Addison-Wesley Publ. Co., 1971.
- [21] SOKOLNIKOFF, I.S. **Tensor analysis: theory and applications to geometry and mechanics of continua**. 2^a. ed., New York: J. Wiley & Sons, 1964.
- [22] LEIPHOLZ, H. **Theory of elasticity**. Leyden: Noordhoof International, 1974.
- [23] TIMOSHENKO, S.P., **Resistência dos materiais**. v.1, 3^a. ed., Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1969.
- [24] VOLTERRA, E., GAINES, J. H. **Advanced strength of materials**. New Jersey: Prentice-Hall, 1971.
- [25] ZIENKIEWICZ, O.C. et al. The hierarchical concept in finite element analysis. **Computers & Structures**. n. 16, p. 53-65, 1983.
- [26] ZIENKIEWICZ, O.C., MORGAN, K. **Finite elements and approximation**. New York: J. Wiley & Sons, 1983.
- [27] PAGANO, N.J. Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates. **J. Comp. Mater.** n. 4, p. 20-34, 1970.

- [28] MACNEAL, R.H., HARDER, R.L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. **Finite Elements in Analysis and Design**. n. 1, p. 3-20, 1985.
- [29] BALLESTEROS, P. The application of Maclaurin's series to the analysis of plates in bending. Univ. of Michigan, Ann Arbor, Mich., 59.169, 1958.
- [30] BALLESTEROS, P., LEE, S.L. Uniformly loaded rectangular plate supported at the corners. **Int. J. Mech. Sci.** n. 3, p. 206-211, 1960.
- [31] ALTMAN, W., IGUTI, F. A thin cylindrical shell finite element based on a mixed formulation. **Computers & Structures**. n. 6, p. 149-155, 1976.
- [32] CANTIN, G. Rigid body motions in curved finite elements. **AIAA J.** v.8, n.7, 1970.
- [33] ASHWELL, D.G., SABIR, A.B. **A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain function**. Dept. Civil Engrg., Rep., University of Wales, Cardiff: 1971.

Apêndice A

GRÁFICOS DAS FUNÇÕES DE FORMA

A.1 Gráficos das funções de forma da família Serendipity que interpolam a geometria do elemento

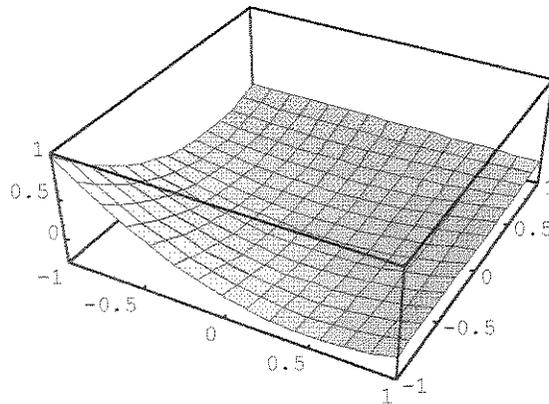


Gráfico A.1 Função de forma $N_1(\xi, \eta)$ associada ao nó 1 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.

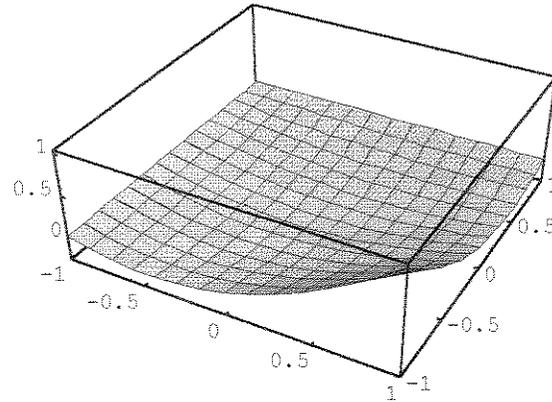


Gráfico A.2 Função de forma $N_2(\xi, \eta)$ associada ao nó 2 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.

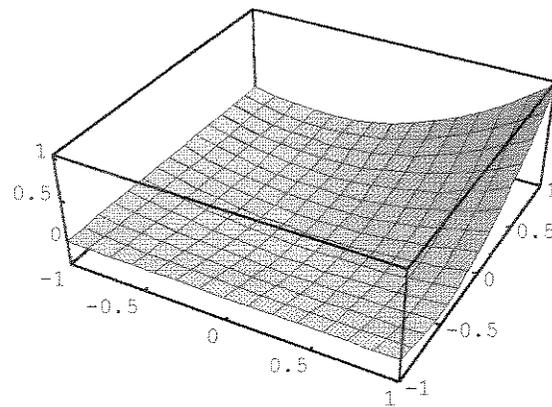


Gráfico A.3 Função de forma $N_3(\xi, \eta)$ associada ao nó 3 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.

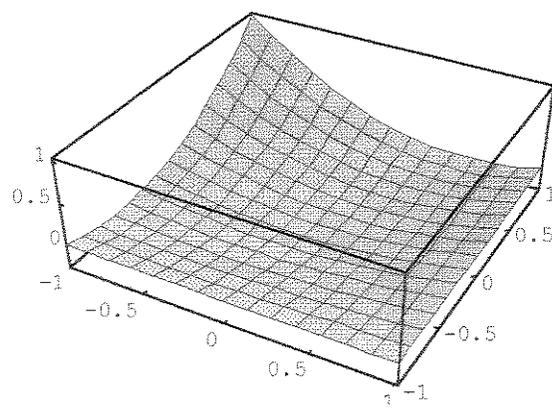


Gráfico A.4 Função de forma $N_4(\xi, \eta)$ associada ao nó 4 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.

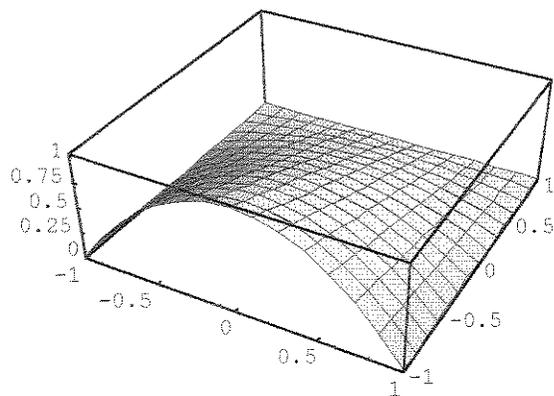


Gráfico A.5 Função de forma $N_5(\xi, \eta)$ associada ao nó 5 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.

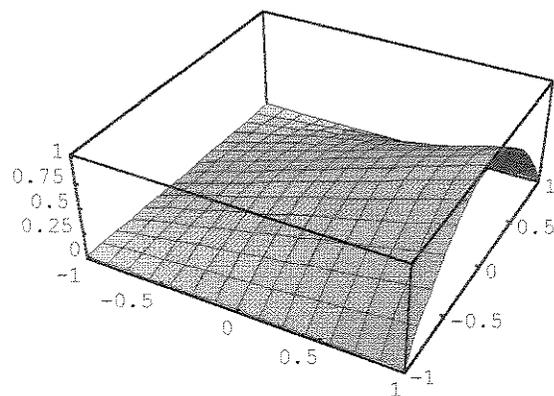


Gráfico A.6 Função de forma $N_6(\xi, \eta)$ associada ao nó 6 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.

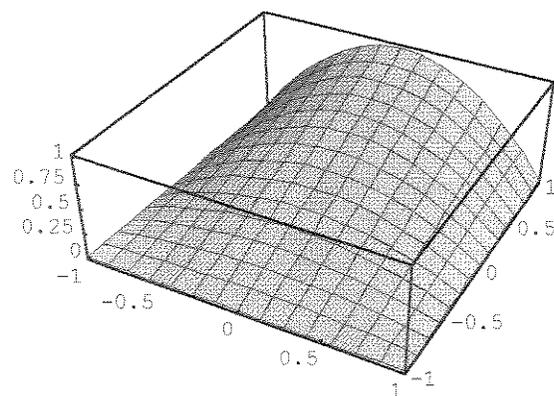


Gráfico A.7 Função de forma $N_7(\xi, \eta)$ associada ao nó 7 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.

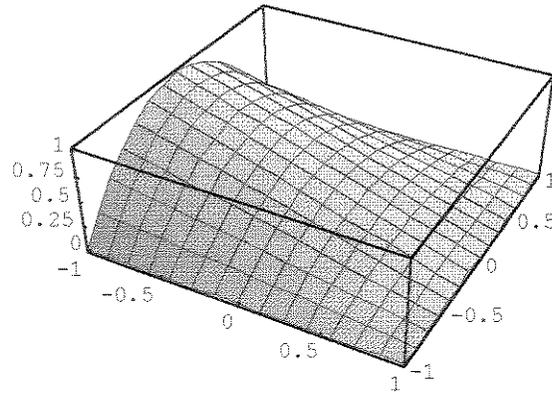


Gráfico A.8 Função de forma $N_8(\xi, \eta)$ associada ao nó 8 do elemento quadrilateral quadrático da família Serendipity.

A.2 Gráficos das funções de forma da família Lagrangiana que interpolam a geometria do elemento

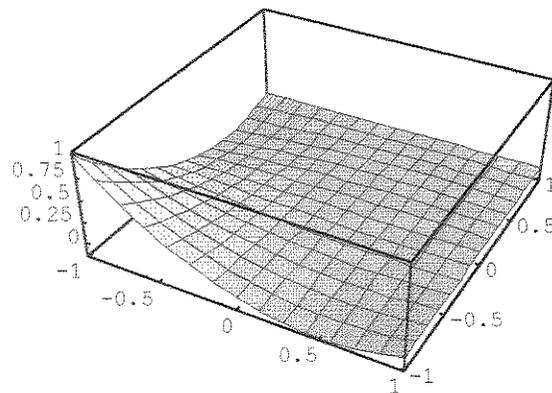


Gráfico A.9 Função de forma $N_1(\xi, \eta)$ associada ao nó 1 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.

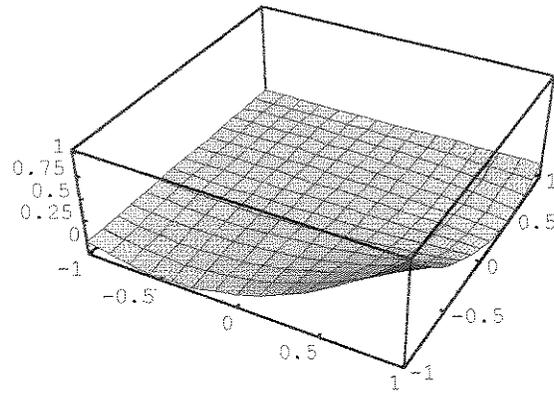


Gráfico A.10 Função de forma $N_2(\xi, \eta)$ associada ao nó 2 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.

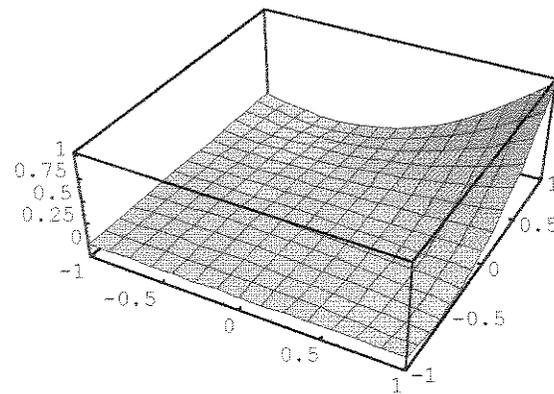


Gráfico A.11 Função de forma $N_3(\xi, \eta)$ associada ao nó 3 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.

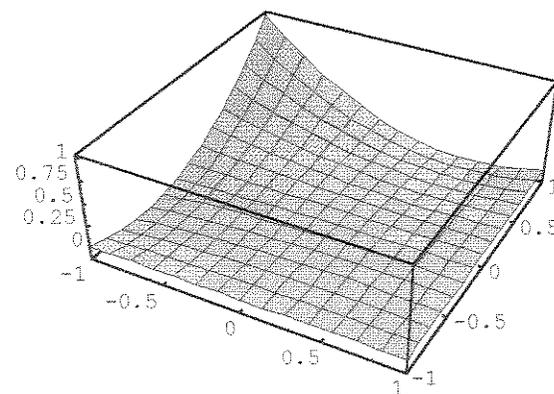


Gráfico A.12 Função de forma $N_4(\xi, \eta)$ associada ao nó 4 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.

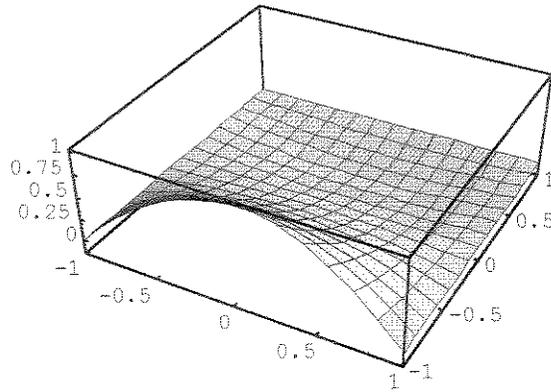


Gráfico A.13 Função de forma $N_5(\xi, \eta)$ associada ao nó 5 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.

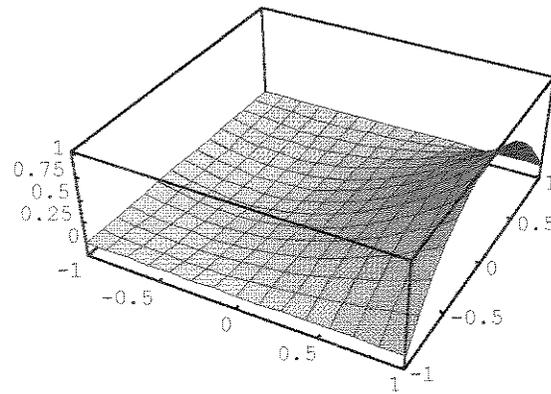


Gráfico A.14 Função de forma $N_6(\xi, \eta)$ associada ao nó 6 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.

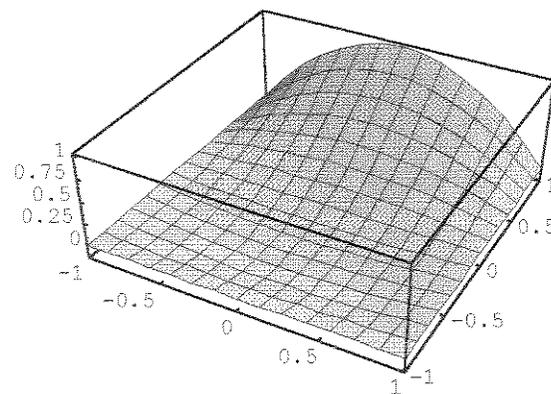


Gráfico A.15 Função de forma $N_7(\xi, \eta)$ associada ao nó 7 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.

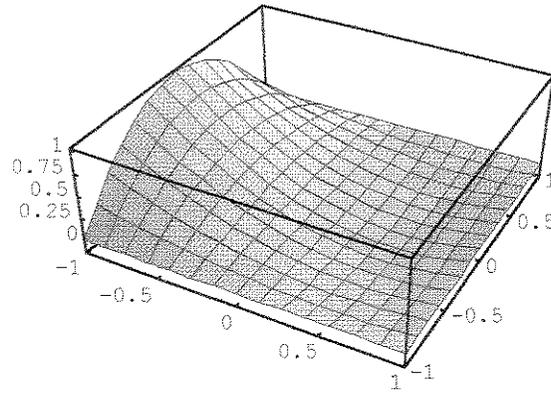


Gráfico A.16 Função de forma $N_8(\xi, \eta)$ associada ao nó 8 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.

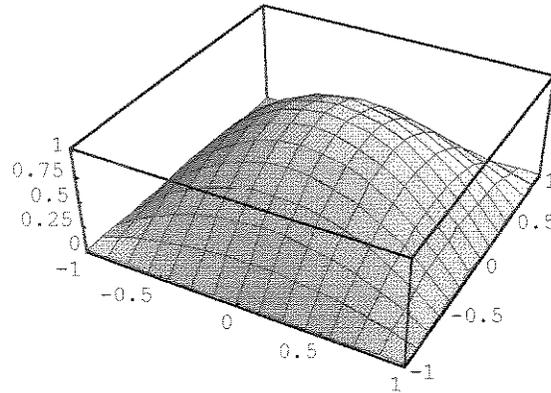


Gráfico A.17 Função de forma $N_9(\xi, \eta)$ associada ao nó 9 do elemento quadrilateral quadrático da família Lagrangiana.

A.3 Gráficos das funções de forma das famílias Serendipity e Lagrangiana que interpolam o campo de deslocamento do elemento superparamétrico

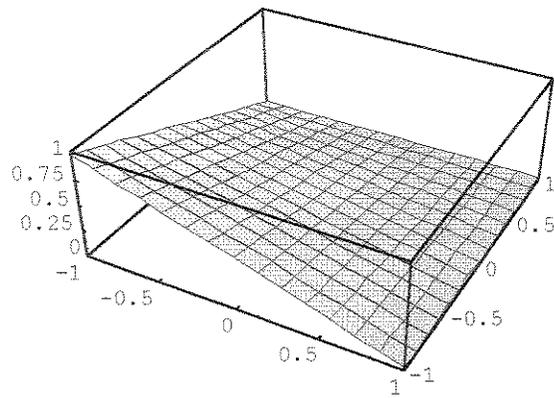


Gráfico A.18 Função de forma $N'_1(\xi, \eta)$ associada ao nó 1 do elemento quadrilateral linear das famílias Serendipity e Lagrangiana.

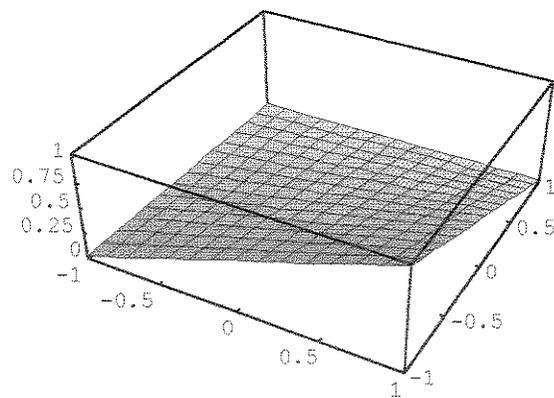


Gráfico A.19 Função de forma $N'_2(\xi, \eta)$ associada ao nó 2 do elemento quadrilateral linear das famílias Serendipity e Lagrangiana.

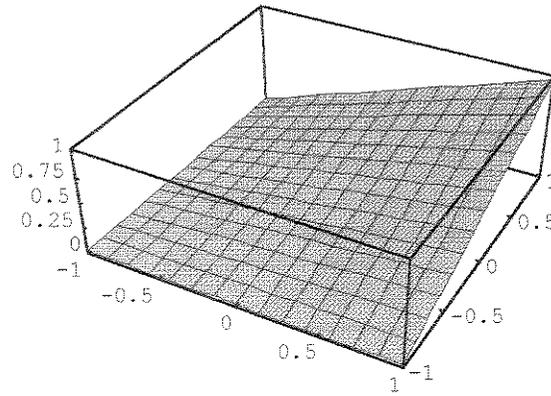


Gráfico A.20 Função de forma $N_3(\xi, \eta)$ associada ao nó 3 do elemento quadrilateral linear das famílias Serendipity e Lagrangiana.

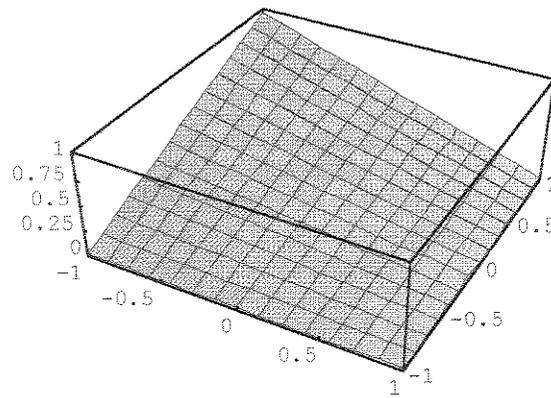


Gráfico A.21 Função de forma $N_4(\xi, \eta)$ associada ao nó 4 do elemento quadrilateral linear das famílias Serendipity e Lagrangiana.

Apêndice B

DERIVADAS DAS FUNÇÕES DE FORMA

B.1 Derivadas das funções de forma da família Serendipity que interpolam a geometria do elemento

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta)(-2\xi-\eta) \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi-\eta) \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta) \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta)(-2\xi+\eta) \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = -\xi(1-\eta) \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(1-\eta^2) \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = -\xi(1+\eta) \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(1-\eta^2) \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi)(-\xi-2\eta) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi)(\xi-2\eta) \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta) \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)(-\xi+2\eta) \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(1-\xi^2) \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = -\eta(1+\xi) \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(1-\xi^2) \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \eta} = -\eta(1-\xi) \quad (\text{B.16})$$

B.2 Derivadas das funções de forma da família Lagrangiana que interpolam a geometria do elemento

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi-1)(\eta^2-\eta) \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi+1)(\eta^2-\eta) \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi+1)(\eta^2+\eta) \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(2\xi-1)(\eta^2+\eta) \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = -\xi(\eta^2-\eta) \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(2\xi+1)(\eta^2-1) \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = -\xi(\eta^2 + \eta) \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(2\xi - 1)(\eta^2 - 1) \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial \xi} = 2\xi(\eta^2 - 1) \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(2\eta - 1)(\xi^2 - \xi) \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(2\eta - 1)(\xi^2 + \xi) \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(2\eta + 1)(\xi^2 + \xi) \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(2\eta + 1)(\xi^2 - \xi) \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(2\eta - 1)(\xi^2 - 1) \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = -\eta(\xi^2 + \xi) \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(2\eta + 1)(\xi^2 - 1) \quad (\text{B.32})$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \eta} = -\eta(\xi^2 - \xi) \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial \eta} = 2\eta(\xi^2 - 1) \quad (\text{B.34})$$

B.3 Derivadas das Funções de forma das famílias Serendipity e Lagrangiana que interpolam o campo de deslocamento do elemento

$$\frac{\partial N'_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 - \eta) \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{\partial N'_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta) \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{\partial N'_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta) \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{\partial N'_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 + \eta) \quad (\text{B.38})$$

$$\frac{\partial N'_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 - \xi) \quad (\text{B.39})$$

$$\frac{\partial N'_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 + \xi) \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{\partial N'_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi) \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{\partial N'_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi) \quad (\text{B.42})$$

B.4 Derivadas das funções de forma hierárquicas

$$\frac{\partial M_{21}}{\partial \xi} = -\xi(1 - \eta) \quad (\text{B.43})$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(\eta^2 - 1) \quad (\text{B.44})$$

$$\frac{\partial M_{23}}{\partial \xi} = -\xi(1 + \eta) \quad (\text{B.45})$$

$$\frac{\partial M_{24}}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(\eta^2 - 1) \quad (\text{B.46})$$

$$\frac{\partial M_{31}}{\partial \xi} = 2(1 - \eta)(3\xi^2 - 1) \quad (\text{B.47})$$

$$\frac{\partial M_{32}}{\partial \xi} = 2\eta(\eta^2 - 1) \quad (\text{B.48})$$

$$\frac{\partial M_{33}}{\partial \xi} = 2(1 + \eta)(3\xi^2 - 1) \quad (\text{B.49})$$

$$\frac{\partial M_{34}}{\partial \xi} = -2\eta(\eta^2 - 1) \quad (\text{B.50})$$

$$\frac{\partial M_{41}}{\partial \xi} = 2\xi(1 - 2\xi^2)(1 - \eta) \quad (\text{B.51})$$

$$\frac{\partial M_{42}}{\partial \xi} = \eta^2 (1 - \eta^2) \quad (\text{B.52})$$

$$\frac{\partial M_{43}}{\partial \xi} = 2\xi(1 - 2\xi^2)(1 + \eta) \quad (\text{B.53})$$

$$\frac{\partial M_{44}}{\partial \xi} = -\eta^2 (1 - \eta^2) \quad (\text{B.54})$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial \xi} = -2\xi(1 - \eta^2) \quad (\text{B.55})$$

$$\frac{\partial M_{21}}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \quad (\text{B.56})$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial \eta} = -\eta(1 + \xi) \quad (\text{B.57})$$

$$\frac{\partial M_{23}}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \quad (\text{B.58})$$

$$\frac{\partial M_{24}}{\partial \eta} = -\eta(1 - \xi) \quad (\text{B.59})$$

$$\frac{\partial M_{31}}{\partial \eta} = -2\xi(\xi^2 - 1) \quad (\text{B.60})$$

$$\frac{\partial M_{32}}{\partial \eta} = 2(1 + \xi)(3\eta^2 - 1) \quad (\text{B.61})$$

$$\frac{\partial M_{33}}{\partial \eta} = 2\xi(\xi^2 - 1) \quad (\text{B.62})$$

$$\frac{\partial M_{34}}{\partial \eta} = 2(1 - \xi)(3\eta^2 - 1) \quad (\text{B.63})$$

$$\frac{\partial M_{41}}{\partial \eta} = -\xi^2 (1 - \xi^2) \quad (\text{B.64})$$

$$\frac{\partial M_{42}}{\partial \eta} = 2\eta(1 - 2\eta^2)(1 + \xi) \quad (\text{B.65})$$

$$\frac{\partial M_{43}}{\partial \eta} = \xi^2 (1 - \xi^2) \quad (\text{B.66})$$

$$\frac{\partial M_{44}}{\partial \eta} = 2\eta(1 - 2\eta^2)(1 - \xi) \quad (\text{B.67})$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial \eta} = -2\eta(1 - \xi^2) \quad (\text{B.68})$$

Apêndice C

FLUXOGRAMA DO PROGRAMA COMPUTACIONAL IMPLEMENTADO EM LINGUAGEM C

