

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Melhorias na Modelagem Matemática
e Simulação das Taxas de Circulação de
Sólidos Particulados em Leito Fluidizado
Borbulhante**

**Autor: Alexandre Marconi de Souza da Costa
Orientador: Márcio Luiz de Souza-Santos**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

**Melhorias na modelagem matemática
e simulação das taxas de circulação de sólidos
particulados em leito fluidizado borbulhante**

Autor: Alexandre Marconi de Souza da Costa

Orientador: Márcio Luiz de Souza-Santos

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Térmica e Fluidos

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1998

S.P. – Brasil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Melhorias na modelagem matemática
e simulação das taxas de circulação de sólidos
particulados em leito fluidizado borbulhante**

Autor: Alexandre Marconi de Souza da Costa

Orientador: Márcio Luiz de Souza-Santos

**Prof. Dr. Márcio Luiz de Souza-Santos, Presidente
UNICAMP**

**Prof^a. Dra. Sílvia Nebra Perez
UNICAMP**

**Prof. Dr. Marco Giuliatti
UFSCAR**

Campinas, 10 de janeiro de 1998

Dedicatória:

Aos meus pais, Bernadete e Elias.

Agradecimentos

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo fundamental suporte financeiro.

À Universidade Estadual de Campinas(UNICAMP), pelo fornecimento da infraestrutura necessárias ao projeto.

Ao meu orientador, pelas valiosas sugestões e apoio.

Dies posterior
Est discipulus prioris

Resumo

COSTA, Alexandre M. S., Melhorias na modelagem matemática e simulação das taxas de circulação de sólidos particulados em leito fluidizado borbulhante, Campinas,,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. 115p. Dissertação (Mestrado)

O presente trabalho desenvolve uma metodologia para a obtenção de perfis bidimensionais de velocidades e taxas de circulação de sólidos em leitos fluidizados monoparticulados borbulhantes.

O ponto de partida para o presente estudo foram os trabalhos de Soo (1986, 1989a, b) que são baseados em iterações entre duas fases – gasosa e sólida particulada. É efetuada uma revisão crítica no procedimento utilizado por aquele autor. Em adição, uma nova solução na qual se considera a presença de três fases – gás na emulsão, partículas sólidas e bolhas -- é proposta e seus resultados discutidos. Os resultados teóricos para as taxas de circulação de particulados são comparados com as correlações semi-empíricas propostas por Talmor e Benenati (1963) e de Geldart (1986). Razoável concordância com os as mesmas é obtida para leitos operando em faixas relativamente amplas. Possíveis pontos para melhorias futuras são indicados.

Além disso, uma possível solução para um leito contendo três tipos de partículas é esboçada.

Palavras Chave

- movimento de partículas, leito fluidizado borbulhante

Abstract

COSTA, Alexandre M. S., Melhorias na modelagem matemática e simulação das taxas de circulação de sólidos particulados em leito fluidizado borbulhante, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. 115p. Dissertação (Mestrado)

A methodology to obtain the two-dimensional profiles for the particle velocities and circulation rate of solid particles in bubbling fluidized-bed is developed.

The starting point is the work by Soo (1986, 1989) which are based on the interactions between two phases – gas and solid particles. A critical review of his treatment is made. In addition, a new solution considering the presence of three phases – emulsion gas, solid particles, and bubbles – is proposed and the results discussed. The theoretical results for the circulation rates of solid particles are compared with results generated by semi-empirical correlation from Talmor and Benenati (1963) and from Geldart (1986). Reasonable agreements are obtained for a relatively wide range of bed operational conditions. Possible improvements are indicated.

In addition, a new solution for beds with three kinds of particles is introduced.

Key Words

- particle circulation rates, bubbling fluidized beds

Índice

Introdução	1
1.1. Introdução	1
1.2. Justificativa para a presente abordagem	1
Revisão da Literatura	3
2.1. Observações experimentais	3
2.2. Técnicas de medida	6
2.3. Modelos semi-empíricos	8
2.3.1. Modelo Difusivo	8
2.3.2. Modelo Contra-Corrente	9
2.3.3. Índice de Mistura	9
2.4. Modelos matemáticos e computacionais	10
Revisão do Desenvolvimento de Soo	12
3.1. Introdução	12
3.2. Equacionamento	12
3.3. Condições de contorno	13
3.4. Solução proposta	15
3.5. Simplificações	15
3.6. Obtenção dos coeficientes (situação 1)	17
3.7. Obtenção dos coeficientes (situação 2)	20
3.8. Avaliação numérica dos coeficientes	21
Procedimento bifásico generalizado	25
4.1. Introdução	25
4.2. O deslizamento de partícula na parede	25
4.3. Taxa de circulação	28
4.3.1. Correlação de Talmor e Benenati	28
4.3.2. Correlação de Geldart	30
4.4. Viscosidade da fase particulada	31
4.5. O fator de relaxação “F”	33
4.6. Passos do procedimento generalizado	34
Procedimentos incluindo a Fase de Bolhas	36
5.1. Introdução	36
5.2. Primeiro procedimento	37
5.2.1. Equacionamento básico	37

5.2.2. Condições de contorno	37
5.2.3. Soluções propostas	39
5.2.4 Equacionamento para coeficientes	39
5.2.5. Obtenção dos coeficientes	41
5.3. Segundo procedimento	47
5.3.1. Soluções propostas	47
5.3.2. Equacionamento dos coeficientes	48
5.3.3. Obtenção dos coeficientes	49
5.4. Definição de novos parâmetros	50
5.4.1. O fator de relaxação gás da emulsão-bolha	50
5.4.2 Frações volumétricas	50
5.5. Passos para procedimento generalizado usando nova fase	51
Resultados	53
6.1. Resultados da revisão do procedimento de Soo	53
6.3. Comparação de resultados de correlações semi-empíricas	59
6.4. Resultados próprios, comparação com correlações semi-empíricas	60
6.4.1 Situação bifásica	60
6.4.2 Situação trifásica	64
6.5 Influência de parâmetros	66
Conclusões e Sugestões	69
7.1 Conclusões	69
7.2. Sugestões para trabalhos futuros	72
Bibliografia	73
Apêndice A - Desenvolvimento Para Três Tipos de Partículas	78
Anexo I – Listagem rotinas em Mathematica 2.2.3	84
Rotinas para plotagem de viscosidades aparentes e Fator de relaxação	84
Rotina para plotagem de campo vetorial de velocidades de partícula	86
Rotina para reprodução de gráficos de velocidades axiais- para as 5 situações investigadas por Lin(1985)	91
Rotina para geração de taxas de circulação considerando 2 fases no leito	94
Rotinas para obtenção das taxas de circulação considerando terceira fase, por procedimento 1	100
Rotinas para obtenção das taxas de circulação considerando terceira fase, por procedimento 2	109

Lista de Figuras

FIGURA 2.1. MOVIMENTO CIRCULATÓRIO MÉDIO DE PARTÍCULAS PARA VELOCIDADES PRÓXIMAS A MÍNIMA DE FLUIDIZAÇÃO	4
FIGURA 2.2. MOVIMENTO TÍPICO DAS PARTÍCULAS NA PRESENÇA DE DOIS VÓRTICES	4
FIGURA 2.3. MODELO ILUSTRATIVO PARA MOVIMENTO DE SÓLIDOS E BOLHAS (LIN, 1985)	5
FIGURA 2.4. MOVIMENTO DE SÓLIDOS E BOLHAS PARA DIFERENTES RELAÇÕES ALTURA/DIÂMETRO (GELDART, 1986)	6
FIGURA 4.1 VELOCIDADES DE PARTÍCULAS NA PAREDE (BAYENS E GELDART, 1973)	28
FIGURA 4.2. AJUSTE DE DADOS EXPERIMENTAIS E CORRELAÇÃO DE TALMOR E BENENATI (1963)	29
FIGURA 4.3. FRAÇÃO DE SÓLIDOS NA ESTEIRA DA BOLHA (GELDART, 1986)	30
FIGURA 4.4. FRAÇÃO DE SÓLIDOS NA BASE DA BOLHA (GELDART, 1986)	31
FIGURA 4.5. DESVIO DA TEORIA BIFÁSICA (GELDART, 1986)	31
FIGURA 4.6 VISCOSIDADE APARENTE NA FAIXA DOS EXPERIMENTOS DE LIN(1985)	33
FIGURA 4.7. FATOR DE RELAXAÇÃO PELA EQUAÇÃO DE ERGUN (1952)	34
FIGURA 4.8. FATOR DE RELAXAÇÃO USANDO-SE EQUAÇÕES 3.45 E 3.47	34
FIGURA 6.1. PERFIS DE VELOCIDADES AXIAIS DE PARTÍCULAS NAS CINCO SITUAÇÕES DE ESCOAMENTO TESTADAS POR LIN (1985) OBTIDOS NO PRESENTE TRABALHO	55
FIGURA 6.2. PERFIS DE VELOCIDADES AXIAIS DE PARTÍCULAS NAS CINCO SITUAÇÕES DE ESCOAMENTO TESTADAS POR LIN(1985), OBTIDOS POR SOO (1989A, B)	55
FIGURA 6.3. CAMPO DE VELOCIDADES DE PARTÍCULAS [ESCOAMENTO N ^o 5(LIN, 1985)]	56
FIGURA 6.4. CAMPO DE VELOCIDADES DE PARTÍCULAS [ESCOAMENTO N ^o 6(LIN, 1985)]	57
FIGURA 6.5. CAMPO DE VELOCIDADES DE PARTÍCULAS [ESCOAMENTO N ^o 7(LIN, 1985)]	57
FIGURA 6.6. CAMPO DE VELOCIDADES DE PARTÍCULAS [ESCOAMENTO N ^o 8(LIN, 1985)]	58
FIGURA 6.7. CAMPO DE VELOCIDADES DE PARTÍCULAS [ESCOAMENTO N ^o 9(LIN, 1985)]	58
FIGURA 6.8. MODELOS DE CIRCULAÇÃO PARA SITUAÇÕES DE ESCOAMENTO N ^{os} 5, 6, 7, 8 CONFORME ESBOÇADO POR LIN (1985)	59
FIGURA 6.9.TAXAS DE CIRCULAÇÃO SEGUNDO CORRELAÇÕES SEMI-EMPÍRICAS	60
FIGURA 6.10. AJUSTE TAXAS DE CIRCULAÇÃO SEGUNDO CORRELAÇÕES SEMI-EMPÍRICAS	60
FIGURA 6.11. VALORES DE CIRCULAÇÃO PARA SITUAÇÃO BIFÁSICA (UTILIZANDO VISCOSIDADE COMPUTADA SEGUNDO SAXTON, 1970)	62
FIGURA 6.12 AJUSTE DE CIRCULAÇÃO PARA SITUAÇÃO BIFÁSICA (UTILIZANDO VISCOSIDADE COMPUTADA SEGUNDO SAXTON, 1970) (LEGENDA CONFORME FIGURA ANTERIOR)	62
FIGURA 6.13. VALORES DE CIRCULAÇÃO PARA SITUAÇÃO BIFÁSICA (VISCOSIDADE COMPUTADA SEGUNDO KAI, 1991)	63

FIGURA 6.14. AJUSTE DE CIRCULAÇÃO PARA SITUAÇÃO BIFÁSICA(VISCOSIDADE COMPUTADA SEGUNDO KAI, 1991) (LEGENDA CONFORME FIGURA ANTERIOR)	63
FIGURA 6.15. VALORES DE CIRCULAÇÃO PARA SITUAÇÃO BIFÁSICA DESCONSIDERANDO CONDIÇÕES DE CONTORNO ADICIONAIS	64
FIGURA 6.16. AJUSTE DE CIRCULAÇÃO PARA SITUAÇÃO BIFÁSICA DESCONSIDERANDO CONDIÇÕES DE CONTORNO ADICIONAIS (LEGENDA DE SINAIS CONFORME FIGURA ANTERIOR)	64
FIGURA 6.17. VALORES DE CIRCULAÇÃO PARA SITUAÇÃO TRIFÁSICA (PROCEDIMENTO 1)	65
FIGURA 6.18. AJUSTE DE CIRCULAÇÃO PARA SITUAÇÃO TRIFÁSICA (PROCEDIMENTO 1) (LEGENDA DE SINAIS CONFORME FIGURA ANTERIOR)	65
FIGURA 6.19. VALORES DE CIRCULAÇÃO PARA SITUAÇÃO TRIFÁSICA (PROCEDIMENTO 2)	66
FIGURA 6.20. AJUSTE DE CIRCULAÇÃO PARA SITUAÇÃO TRIFÁSICA (PROCEDIMENTO 2) (LEGENDA DE SINAIS CONFORME FIGURA ANTERIOR)	66
FIGURA 6.21. EFEITO DA REDUÇÃO DE 20 % NO VALOR DO FATOR DE RELAXAÇÃO (LEGENDA CONFORME FIGURA 6.19)	67
FIGURA 6.22. EFEITO DO AUMENTO DE 20% NO VALOR DO FATOR DE RELAXAÇÃO (LEGENDA CONFORME FIGURA 6.19)	67
FIGURA 6.23. EFEITO DA REDUÇÃO DE 20% NO VALOR DA VELOCIDADE AXIAL DE PARTÍCULA NA PAREDE(LEGENDA CONFORME FIGURA 6.19)	68
FIGURA 6.24. EFEITO DO AUMENTO DE 20% NO VALOR DA VELOCIDADE AXIAL DE PARTÍCULA NA PAREDE(LEGENDA CONFORME FIGURA 6.19)	68

Lista de Tabelas

TABELA 3.1. EQUAÇÕES GERADAS APÓS APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO	18
TABELA 3.2. CONDIÇÕES EXPERIMENTAIS UTILIZADAS POR LIN (1985)	23
TABELA 3.3. VALORES EXPERIMENTAIS DE LIN (1985).	23
TABELA 3.4. FORMULAÇÕES PARA OBTENÇÃO DE “ γ ” E “ κ ”	24
TABELA 4.1. FAIXA EXPERIMENTAL DE TALMOR E BENENATI	29
TABELA 5.1. EQUAÇÕES GERADAS APÓS APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO	42
TABELA 6.1. VALORES PARÂMETROS OBTIDOS NO PRESENTE TRABALHO	53
TABELA 6.2. VALORES PARÂMETROS APRESENTADOS POR SOO (1989A, B).	54
TABELA 6.3. VALORES COEFICIENTES OBTIDOS NO PRESENTE TRABALHO.	54
TABELA 6.4. VALORES COEFICIENTES APRESENTADOS POR SOO (1989A, B).	54

Nomenclatura

Letras Latinas

a - raio de partícula	[m]
a _o - máxima velocidade axial de partícula	[m s ⁻¹]
a _p - área ocupada por cada partícula	[m ²]
c, a - constantes associadas aos perfis de velocidade do gás e partículas	[m s ⁻¹]
c _o - máxima velocidade axial do gás	[m s ⁻¹]
d - diâmetro médio molecular	[m]
d _p - diâmetro médio de partícula	[m]
d _t - diâmetro do leito	[m]
F - fator de relaxação	[s ⁻¹]
f _{mn} - fator de relaxação entre as fases m e n	[s ⁻¹]
g - aceleração da gravidade	[m s ⁻²]
G - vazão mássica do gás por unidade de área	[kg m ⁻² s ⁻¹]
h - altura dinâmica do leito	[m]
h _o - altura inicial do leito estático	[m]
h* - altura da célula primária de circulação	[m]
J _p - taxa de circulação média	[kg m ⁻² s ⁻¹]
l _p - espaço ocupado por cada partícula	[m]
N - número de moléculas por unidade de volume	
N _A - número médio de partículas por unidade de área projetada	
N _{Kn} - número de Knudsen	
N _{Ar} - número de Archimedes	
N _{Re} - número de Reynolds	
N _L - número médio de partículas no comprimento L	
r - coordenada radial com origem no centro do leito cilíndrico	[m]
r _i - raiz do perfil de velocidades V _p	
r _o - raio do leito	[m]

U - velocidade radial, velocidade radial do gás	$[m\ s^{-1}]$
u_o - componente de velocidade de um gás rarefeito normal à parede	$[m\ s^{-1}]$
\mathbf{u} - vetor velocidade para o gás	$[m\ s^{-1}]$
\mathbf{v} - vetor velocidade para as partículas	$[m\ s^{-1}]$
∇_i - volume unitário de partícula	$[m^3]$
∇_p - volume ocupado pelas partículas	$[m^3]$
∇_t - volume total do sistema	$[m^3]$
∇_W - volume de sólidos na base da bolha	$[m^3]$
∇_d - volume de sólidos na esteira da bolha	$[m^3]$
∇_B - volume da bolha	$[m^3]$
V - velocidade axial, velocidade axial do gás	$[m\ s^{-1}]$
Y - desvio da teoria bifásica	
z - coordenada axial com origem na base do leito cilíndrico	$[m]$
z^* - coordenada axial com origem na base da célula primária de circulação	$[m]$

Letras Gregas

α_p - fração volumétrica de partículas	
α_{p0} - fração volumétrica de partículas no leito estático	
β_d - fração de sólidos conduzida na esteira formada pela bolha	
β_w - fração de sólidos conduzida na parte inferior da bolha	
$\bar{\mu}$ - viscosidade da fase gasosa ou viscosidade da fase fluida	$[kg\ m^{-1}\ s^{-1}]$
μ_{ap}, μ^* - viscosidade efetiva (ou aparente) da fase particulada	$[kg\ m^{-1}\ s^{-1}]$
$\bar{\rho}_p$ - densidade do material particulado	$[kg\ m^{-3}]$
ρ_p - densidade da fase particulada $\left(\rho_p = \alpha_p \bar{\rho}_p\right)$	$[kg\ m^{-3}]$
λ_p - caminho livre médio de interação partícula-partícula	$[m]$
ε_{mf} - fração de vazios na mínima fluidização	
Φ, Ψ - parâmetros de Langmuir	
γ, κ - parâmetros adimensionais	

ε - fração volumétrica	
ξ - coeficiente de deslizamento	[m]
λ - caminho livre médio molecular	[m]
η - fração impactada	
\dot{m}_p - fluxo mássico	[kg s ⁻¹]
$\overline{\rho}_m$ - densidade do material particulado m	[kg m ⁻³]

Subscritos

B	referente a fase de bolhas
E	referente ao gás da emulsão
f	referente a todo o gás presente no leito
G	referente à fase gasosa
h	referente a altura h
m	referente à partícula “m” ou valor médio
n	referente ao n-ésimo coeficiente ou partícula “n”
p	referente à fase particulada
mn	valor referente às fases “m” e “n”
W	valor na parede
mf	referente à situação de mínima de fluidização
S	valor superficial
o	valor intersticial
0	referente a base do leito
1,2,3	referentes as fases 1, 2 e 3

Abreviações

ACDW - comportamento circulatório de partículas descendendo no centro e ascendendo na parede.

AWDC - comportamento circulatório de partículas ascendendo na parede e descendendo no centro

Siglas

DE - Departamento de Energia

Anexos

Anexo I – Listagem rotinas em Mathematica 2.2.3

84

Apêndices

Apêndice A - Desenvolvimento Para Três Tipos de Partículas

78

Capítulo 1

Introdução

1.1. Introdução

A compreensão da circulação de particulados revela-se importante no entendimento e na otimização do funcionamento de leitos fluidizados.

O transporte axial e radial de sólidos dentro do leito tem influência em:

- coeficientes de troca de massa entre as fases gasosas e sólidas;
- coeficientes de troca de calor entre as fases, superfícies submersas, paredes do leito;
- posicionamento e número de pontos de injeção e retirada de sólidos;
- localização de superfícies mais sujeitas à erosão.

Além de vários fatores, o comportamento circulatório de particulados é dependente dos tipos de partícula presentes no leito. Com relação à esta última influência, quatro situações possíveis podem ocorrer em um leito fluidizado:

- partículas de mesmo tamanho e densidade;
- partículas de mesmo tamanho e densidades diferentes;
- partículas de mesma densidade mas tamanhos diferentes;
- partículas com densidades e tamanhos diferentes.

Este trabalho concentrou-se, particularmente, na primeira das situações. Uma possível extensão do procedimento utilizado para as demais situações é também apresentado.

1.2. Justificativa para a presente abordagem

No presente trabalho, pretendeu-se efetuar melhorias na compreensão do fenômeno de circulação de particulados sem fazer-se uso de uma abordagem rigorosa da solução do

sistema de equações fundamentais, que conforme verificou-se pela literatura, introduz dificuldades matemáticas e uso de tempos computacionais excessivos.

O ponto de partida para o presente trabalho foram os trabalhos de Soo (1986, 1989a,b) que utiliza uma abordagem analítica aproximada para a obtenção dos perfis de velocidades de partículas e taxas de circulação em um leito fluidizado monoparticulado.

Ao início do presente programa de mestrado, foi desenvolvida uma breve revisão do procedimento adotado por Soo. Em seguida, pretendia-se a exploração da situação de um leito com três tipos de partículas. Entretanto, como o desenvolvimento de Soo revelou-se passível de algumas críticas tanto do presente autor quanto de outros (Gogolek, 1991), optou-se por um estudo mais detalhado para a situação monoparticulada.

Partindo-se das hipóteses iniciais sugeridas por Soo, três novas abordagens foram sugeridas. A primeira destas consistiu em obter novas soluções para a situação de leito monoparticulado usando-se uma fase gasosa e uma fase particulada. As outras duas são baseadas na inclusão adicional de uma fase de bolhas.

Os resultados obtidos em termos de taxa de circulação são comparados com as correlações propostas por Talmor e Benenati (1963) e Geldart (1986). Razoáveis concordâncias são obtidas dentro de certas faixas de operação de leitos fluidizados.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

2.1. Observações experimentais

Uma das primeiras constatações referentes à circulação de partículas em leitos fluidizados foi a sua relação com o movimento das bolhas (Rowe e Partridge, 1962).

Sólidos nas porções inferiores e imediatamente adjacentes às bolhas são transportados com o movimento ascendente das mesmas. Ao atingirem o topo, as bolhas rompem, promovendo o lançamento de sólidos para várias direções, inclusive ao “freeboard” (ou espaço livre acima do leito). Para um leito fluidizado borbulhante, a perda de sólidos para o “freeboard” é insignificante quando comparada às taxas de circulação desses sólidos no leito. Portanto, a continuidade de massa exige que em regiões onde não existam bolhas haja um fluxo descendente de sólidos.

Para uma distribuição uniforme de gás pela base do leito e em vazões não muito distantes da necessária para mínima fluidização, o movimento de sólidos é caracterizado por um vórtice toroidal no qual as partículas ascendem próximo à parede e descendem na região central do leito. Tal movimento é denominado AWDC e é ilustrado na Figura 2.1.

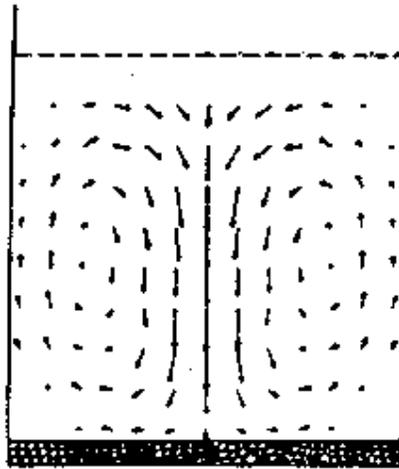


Figura 2.1. Movimento circulatorio médio de partículas para velocidades próximas a mínima de fluidização

Posteriores aumentos da velocidade do gás promovem o surgimento de um segundo vórtice na região imediatamente superior ao anterior. O novo vórtice apresenta o movimento de partículas ascendendo ao centro e descendendo próximas a parede. Tal movimento é denominado ACDW. A nova situação é ilustrada na Figura 2.2.

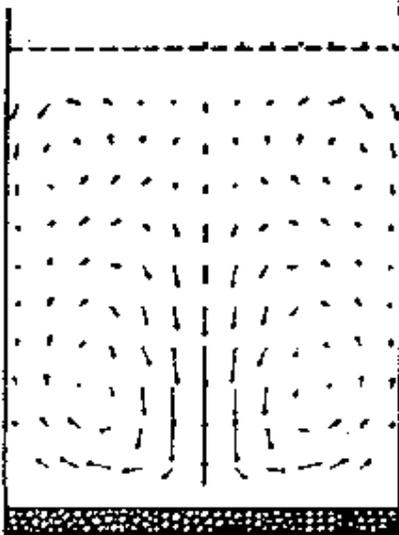


Figura 2.2. Movimento típico das partículas na presença de dois vórtices

Aumentos subsequentes de velocidade do gás promovem um crescimento do vórtice superior (ACDW) às custas da redução do tamanho do vórtice inferior. A velocidades suficientemente altas o vórtice inferior desaparece.

Conforme ilustrado na Figura 2.3, Lin (1985) fornece uma explicação razoável para relacionar o movimento das bolhas com os padrões de circulação de partícula AWDC e ACDW. No seu movimento ascendente, as bolhas tendem a coalescer. Este coalescimento se dá em regiões próximas ao eixo vertical central do leito, para onde as bolhas situadas na periferia do leito são atraídas. A velocidades superficiais de gás relativamente baixas, as bolhas tendem a se encontrar em porções superiores do leito, deixando assim a região central do leito livre de bolhas. Desse modo, o padrão de circulação é predominantemente AWDC com sólidos ascendendo juntamente com as bolhas nas paredes e descendendo na região central. Subsequentes aumentos da velocidade do gás deslocam o coalescimento de bolhas para porções inferiores do leito. Tal situação é caracterizada como sendo o início do surgimento do vórtice ACDW. Posteriores aumentos de velocidade do gás promoverão o coalescimento das bolhas em regiões mais próximas ao distribuidor, implicando em um aumento do vórtice ACDW.

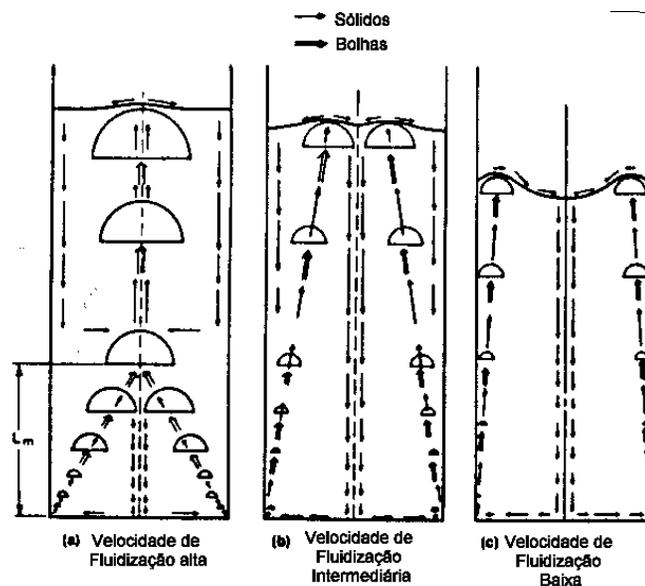


Figura 2.3. Modelo ilustrativo para movimento de sólidos e bolhas (Lin, 1985)

O comportamento circulatório com partículas ascendendo no centro e descendendo próximo à parede (ACDW) foi verificado em leitos profundos (Marsheck e Gomezplata, 1965). O modelo reverso, i.e., ascendendo próximo à parede e descendendo no centro

(AWDC) foi observado em leito raso (Okhi e Shirai, 1973) e para leitos largos por Whitehead e colaboradores (1976).

Baseados em medidas de movimento de bolhas, Werther e Molerus (1975) também concluem que dependendo da velocidade de fluidização e razão entre a altura e o diâmetro do leito (h/d_i), ambos modelos ACDW e AWDC podem coexistir em um leito fluidizado. A Figura 2.4 fornece uma ilustração para os padrões de circulação.

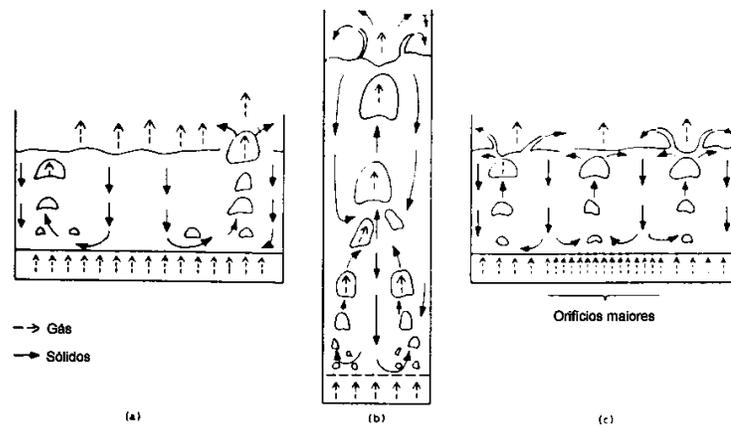


Figura 2.4. Movimento de sólidos e bolhas para diferentes relações altura/diâmetro (Geldart, 1986)

2.2. Técnicas de medida

Várias técnicas experimentais para estudo dos processos de mistura e segregação dos sólidos bem como do movimento individual de partículas vêm sendo utilizadas. Para tais medições as partículas devem possuir uma propriedade distintiva que permita medir seu movimento ou concentração no leito.

Dentre as técnicas mais comumente utilizadas, destacam-se:

- ◆ Traçamento por radioatividade (Lin et al., 1985)
- ◆ Traçamento por pósitrons (Simons et al., 1993)
- ◆ Fluorescência (Morooka et al., 1989)
- ◆ Medição mecânica (Heertjes et al., 1971, Yoshioka, 1987)
- ◆ Diferenciação química (May, 1959, Talmor e Benenati, 1963, Berruti, 1986)
- ◆ Coloração (Kozanoglu e Levy, 1992, Lim et al., 1993)

- ◆ Magnetismo (Avidan e Yerushalmi, 1985)
- ◆ Sublimação (Bellgardt e Werther, 1986)
- ◆ Transferência de calor (Marsheck e Gomezplata, 1965, Fan et al., 1986)

Os quatro primeiros métodos permitem medições do movimento individual de partículas e determinação de velocidades médias temporais. Os restantes fornecem resultados em termos de perfis de concentração espaciais, respostas transientes ou em termos de um índice de mistura.

Técnicas como as utilizadas por Talmor e Benenati (1963) e May (1959) utilizando o congelamento do leite (interrupção da passagem de gás) e posterior seccionamento, tendem a cair em desuso por serem excessivamente laboriosas. Além disso para taxas de circulação altas os resultados podem ser distorcidos durante o processo de congelamento.

Os chamados métodos mecânicos baseiam-se na conversão da energia cinética das partículas em deformação ou rotação da haste de um transdutor. O equipamento gera um sinal que pode ser relacionado à velocidade de partículas desde que parâmetros tais como a massa das partículas ou porosidade do leite sejam conhecidos. Entretanto, o método somente traz resultados satisfatórios para uma distribuição granulométrica razoavelmente uniforme.

Técnicas que permitem um monitoramento mais contínuo de dados, tais como sublimação, transferência de calor e magnetismo, requerem que hipóteses adicionais sejam assumidas para relacionar as grandezas medidas (taxa de sublimação, temperatura, indutância) com as concentrações do traçador.

Usualmente, as medições têm sido concernentes à fase densa do leite, ou emulsão. O delineamento de dados para a fase de bolhas tem sido difícil, em alguns casos levando a resultados distorcidos. Lim (1993), usando um técnica de análise de imagem digital, amenizou tais distorções, conseguindo um monitoramento contínuo para ambas as fases.

Em suma, uma técnica de medição ideal para taxas de circulação de sólidos em leite fluidizado deveria possuir as seguintes características:

- ◆ resposta rápida;
- ◆ habilidade para medir a concentração do traçador enquanto o leite estiver em estado fluidizado, sem a necessidade de congelamento;
- ◆ habilidade para medir simultaneamente o comportamento de mistura em diferentes posições do leite para uma determinação sem ambigüidades dos parâmetros do modelo.

2.3. Modelos semi-empíricos

Um certo número de modelos semi-empíricos tem sido propostos para prever a taxa de mistura de partículas em leitos fluidizados. Dentre eles destacam-se:

- ◆ Modelo Difusivo;
- ◆ Modelo Contra-Corrente;

2.3.1. Modelo Difusivo

O modelo difusivo é um dos mais amplamente apresentados na literatura. Consiste em expressar os dados de taxas de mistura de sólidos particulados em termos de coeficientes difusivos axiais e radiais. Tais coeficientes são obtidos através da substituição de dados de concentração na equação diferencial da difusão sob condições de contorno específicas.

Um dos primeiros a utilizar tal modelo foi May (1959). Boa concordância do modelo com os resultados foi obtida para leitos profundos. Entretanto, desvios significativos foram observados para leitos rasos.

Avidan e Yerushalmi (1985) relataram uma boa concordância do modelo difusivo para fluidização turbulenta. Entretanto para leitos no regime borbulhante, houve considerável discordância.

Embora sob certas condições, o modelo difusivo não represente bem o movimento de sólidos, os resultados dos experimentos são invariavelmente relatados em termos de um coeficiente de difusão.

Vários trabalhos buscam relacionar a dependência do coeficiente difusivo com parâmetros tais como: velocidade do gás, diâmetro do leito e granulometria de partículas.

Miyauchi (1981) estudou o processo de mistura na direção vertical para leitos fluidizados com partículas acima de 500 μm . O coeficiente difusivo obtido pelo mesmo foi relacionado ao diâmetro do leito e à velocidade do gás.

Esin (1989) relacionou a dependência do coeficiente difusivo com a velocidade do gás.

Para o movimento horizontal de partículas é possível também definir-se um coeficiente difusivo lateral. Alguns trabalhos (Brotz, 1956, Heertjes, 1967) apresentaram a dependência deste coeficiente em relação à velocidade.

Potter e Thiel (1978) observaram que a maioria dos primeiros trabalhos usando o modelo difusivo foram conduzidos em leitos em estado de “slug-flow”, caracterizado por uma única bolha de diâmetro próximo ao do leito ascendendo ao longo do mesmo. Tal

situação é de mais fácil caracterização por modelos que um regime borbulhante livre no qual múltiplas bolhas ascendem através do leito.

Um dos pontos desfavoráveis do modelo difusivo é sua independência do fenômeno de borbulhamento, notoriamente um dos responsáveis pelo processo de mistura.

2.3.2. Modelo Contra-Corrente

O modelo contra-corrente consiste na divisão do leito em três fases:

- ◆ uma fase gasosa ascendente livre de partículas;
- ◆ uma fase ascendente consistindo de gás e partículas;
- ◆ uma fase descendente constituída de gás e partículas.

A solução das equações diferenciais de troca de massa para as fases com partículas sólidas ascendentes e descendentes conduz ao perfil de distribuição de sólidos ao longo do leito (Sitnai, 1981). De forma análoga à teoria difusiva é possível obter um coeficiente difusivo efetivo a partir do perfil de distribuição.

Demter (1985) obteve uma expressão para o valor do coeficiente efetivo em leitos profundos.

O modelo contra-corrente mostra-se conveniente para situações nas quais, o modelo difusivo não conduz a resultados satisfatórios. Este modelo fornece uma abordagem mais realística do mecanismo de mistura já que seus parâmetros estão relacionados às bolhas.

2.3.3. Índice de Mistura

Outro parâmetro também usado para representar a taxa de mistura de partículas em um leito fluidizado é o chamado Índice de Mistura.

Para um leito perfeitamente misturado esse índice assume o valor unitário. Na situação oposta seu valor é nulo.

Nienow et al. (1978) propõe uma formulação para o índice de mistura baseado nas velocidades do gás e velocidade mínima de fluidização.

Geldart (1981) insere também a dependência dos diâmetros de partícula em uma nova correlação para a predição do índice de mistura.

Chiba (1982) define o índice de mistura em termos de frações de partículas que permanecem na região superior do leito.

Embora de simples obtenção, o uso do índice de mistura somente fornece uma indicação qualitativa da intensidade da circulação de particulados no leito.

2.4. Modelos matemáticos e computacionais

Vários trabalhos buscam obter uma descrição do fenômeno de circulação de sólidos em leito fluidizado através de modelagem matemática e simulação computacional.

A maior parte dos modelos matemáticos e computacionais baseiam-se na formulação das equações de conservação médias para escoamentos multifásicos. Relações constitutivas retiradas de correlações empíricas são empregadas para reduzir o número de variáveis do problema.

Dentre os códigos computacionais diretamente aplicados a leitos fluidizados destacam-se: CHEMFLUB (Pritchett, 1978, Schneyer, 1981), FLAG (Klein e Scharff, 1982, Scharff, 1982), K-FIX/FLUFIX (Gidaspow e Ettehadieh, 1983, Syamlal e Gidaspow, 1985).

Essencialmente, tais códigos diferem entre si nas relações constitutivas e variáveis básicas adotadas, supressão de termos no equacionamento básico e no algoritmo de solução para o conjunto de equações.

Gidaspow e colaboradores aplicaram os códigos computacionais K-FIX/FLUFIX na investigação de diversas situações de escoamento em leitos fluidizados, erosão em tubulações internas (1990b), leitos fluidizados circulantes (1990a) e leito de jorro (1991).

Usando a simulação computacional, Gidaspow (1991) investigou o comportamento de formação de bolha após a injeção de gás por orifício único em um leito em estado de mínima fluidização. Boa concordância com os resultados previstos foi obtida.

Para leito em escala comercial, Gidaspow (1990a) aplicou seu código computacional para o estudo do movimento de partículas em um leito fluidizado circulante.

Kuipers (1993) e Hong (1996), usando códigos computacionais próprios, também investigaram o fenômeno de injeção de gás através de orifício único em leito fluidizado. O comportamento global de bolha coincidiu satisfatoriamente com montagem experimental à parte.

Ressalta-se que o emprego de códigos computacionais em leitos fluidizados borbulhantes ainda não foi reportado. É de se esperar grandes dificuldades na descrição do comportamento de várias bolhas (Gidaspow, 1991).

Em suma, o uso de códigos computacionais podem propiciar técnicas sofisticadas para análise de circulação de sólidos em leitos fluidizados, sem a necessidade de recorrer-se a métodos experimentais. Entretanto, no estado atual do conhecimento e de técnicas

numéricas, o esforço computacional requerido é de tal ordem que a solução ou convergência nem sempre é garantida.

Capítulo 3

Revisão do Desenvolvimento de Soo

3.1. Introdução

Neste capítulo será apresentada uma revisão crítica do procedimento utilizado por Soo (1989a, b) para a obtenção dos perfis de velocidade de sólidos particulados em leito fluidizado.

3.2. Equacionamento

O ponto de partida dos trabalhos de Soo (1989a, b) é a formulação das equações de conservação para duas fases presentes em um leito fluidizado. A primeira fase consiste somente de sólidos particulados e a segunda de todo o gás que escoia através do leito. Nesta situação, assumindo-se geometria cilíndrica e simetria para o leito, tem-se:

- Equação da continuidade para a fase gasosa:

$$\left(\frac{1}{r}\right)\left[\frac{\partial(rU_G)}{\partial r}\right] + \left(\frac{\partial V_G}{\partial z}\right) = 0 \quad (3.1);$$

- Equação da continuidade para a fase sólida:

$$\left(\frac{1}{r}\right)\left[\frac{\partial(rU_p)}{\partial r}\right] + \left(\frac{\partial V_p}{\partial z}\right) = 0 \quad (3.2);$$

- Equação do movimento na direção axial do leito para fase sólida:

$$0 = \rho_p F(V_G - V_p) + \mu_{ap} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_p}{\partial z^2} \right] - \rho_p g \quad (3.3);$$

- Equação do movimento para a mistura gás-sólido:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_p F V_o - (\rho_p + \rho)g \quad (3.4).$$

As hipóteses implícitas nas equações anteriores são as de regime permanente e densidades constantes para ambas as fases.

Como a taxa de troca de quantidade de movimento na direção axial é muito mais intensa do que na radial é desprezada a equação da troca de quantidade de movimento nesta última direção.

A Equação 3.4 que descreve a troca de quantidade de movimento para a mistura na direção axial é similar às utilizadas para escoamento do gás através de um meio poroso quando sujeito à forças de campo e gradientes de pressão. Para uma queda de pressão constante a mesma reduz-se à equação de Ergun (1959). Conhecidos os demais parâmetros, a Equação 3.4 pode ser usada na determinação do fator de relaxação “F”. Entretanto, para o desenvolvimento seguido por Soo (1989a,b) tal equação é desnecessária uma vez que o fator de relaxação é obtido por outra forma, como será descrito à frente.

Os equacionamentos anteriores podem ser comparados com o sistema genérico para escoamento multifásico, apresentados por Kuipers (1993) e Gidaspow (1986, 1989).

$$\frac{\partial \rho_G}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho_G \mathbf{u}) = 0 \quad (3.5);$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho_s \mathbf{v}) = 0 \quad (3.6);$$

$$\frac{\partial \rho_s \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho_s \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + F(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho_s \mathbf{g} \quad (3.7).$$

Verifica-se ser possível a exclusão de alguns termos na Equação 3.7, ou seja do movimento para a fase sólida. Assim, para regime permanente o primeiro membro da equação é nulo. O termo correspondente ao gradiente de pressão para a fase sólida é nulo. Tal consideração é a mesma adotada por Gidaspow (1986, 1989), que assume toda a variação de pressão descrita apenas pela equação de movimento para a fase fluida.

3.3 Condições de contorno

Conforme Gogolek (1991), um dos pontos criticáveis no procedimento de solução usado por Soo (1986, 1989a,b) reside nas condições de contorno. De fato, para que o conjunto de equações diferenciais parciais (Eqs. 3.1, 3.2 e 3.3) seja caracterizado como um problema bem colocado de valor de contorno, um número correto de condições de contorno

adequadas necessita ser estabelecido. Analisando as Equações 3.1 a 3.3 observa-se que as seguintes condições de contorno são necessárias:

- Uma condição de contorno para “ U_G ” na direção radial;
- Uma condição de contorno para “ V_G ” na direção axial;
- Uma condição de contorno para “ U_P ” na direção radial;
- Duas condições de contorno para “ V_P ” na direção radial;
- Duas condições de contorno para “ V_P ” na direção axial.

Em seu desenvolvimento, Soo (1989a, b) acrescenta mais duas condições de contorno ao conjunto anterior. Contrariamente a Gogolek (1991), tal acréscimo não super-determina a solução, uma vez que algumas condições de contorno são satisfeitas identicamente. Isto será demonstrado a seguir.

As condições de contorno necessárias são:

- a) Uma para “ U_G ” na direção radial:

$$U_G(r_o, z) = 0 \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (3.8);$$

estabelecendo que a velocidade radial do gás é nula na parede externa do leito.

- b) Uma para “ V_G ” na direção axial:

$$V_G(r, 0) = V_0 \quad , \quad 0 \leq r \leq r_o \quad (3.9);$$

estabelecendo a velocidade axial do gás na base do leito.

- c) Uma para “ U_P ” na direção radial:

$$U_P(r_o, z) = 0 \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (3.10);$$

estabelecendo que a velocidade radial das partículas é nula na parede externa do leito.

- d) Duas para “ V_P ” na direção radial:

$$V_P(r_o, z) = V_{PW} \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (3.11),$$

estabelecendo uma velocidade de deslizamento axial da partícula na parede externa do leito, e

$$\left. \frac{\partial V_P}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (3.12);$$

estabelecendo a simetria dos perfis de velocidades axiais para as partículas.

- e) Duas para “ V_P ” na direção axial:

$$V_P(r, 0) = 0 \quad , \quad 0 \leq r \leq r_o \quad (3.13),$$

estabelecendo como nulo o deslocamento vertical na base do leito, e

$$V_p(r, h) = 0 \quad , \quad 0 \leq r \leq r_o \quad (3.14).$$

estabelecendo como desprezível o arraste de partículas para o “freeboard”.

As condições de contorno adicionais, extraordinariamente colocadas por Soo (1989a,b) foram:

f) Duas para “ V_G ” na direção radial:

$$V_G(r_o, z) = V_W \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (3.15),$$

estabelecendo uma velocidade axial de deslizamento do gás na parede, e

$$\left. \frac{\partial V_G}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (3.16),$$

estabelecendo a simetria dos perfis de velocidades axiais para o gás.

3.4. Solução proposta

Sem perda de generalidade, Soo (1989a, b) usa o procedimento de resolução por séries onde as soluções podem ser escritas como produtos de funções senoidais da variável axial por funções polinomiais da variável radial:

$$V_G = V_0 + \text{sen}\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \quad (3.17),$$

$$U_G = -\left(\frac{\pi r_o}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{c_n}{n+2} \right] \left(\frac{r}{r_o}\right)^{n+1} \quad (3.18),$$

$$V_p = \text{sen}\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \quad (3.19),$$

$$U_p = -\left(\frac{\pi r_o}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n+2} \right] \left(\frac{r}{r_o}\right)^{n+1} \quad (3.20).$$

A escolha de tal conjunto é conveniente pois satisfaz as equações de continuidade 3.1 e 3.2.

3.5. Simplificações

A introdução das Equações 3.17, 3.19 e 3.20 na equação da conservação da quantidade de movimento (Equação 3.3) resulta:

$$\begin{aligned} & \rho_p F \left[V_o + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \right] \\ & + \mu_{ap} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{a_n}{r_o^2} \left(\frac{r}{r_o}\right)^{n-2} - \frac{\pi^2}{h^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \right] - \rho_p g = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Numa primeira aproximação, Soo(1989a,b) considera nulos os termos viscosos no centro do leito. Desta forma, a Equação 3.21, avaliada no centro do leito leva a:

$$V_o + c_o - a_o = \frac{g}{F} \quad (3.22)$$

Uma segunda simplificação apresentada por Soo (1989a,b) é considerar:

$$c_o - a_o \ll V_o \quad (3.23)$$

Isto é, a máxima velocidade axial de partícula (a_o) e a máxima velocidade axial do gás (c_o) não diferindo muito. Da Equação 3.22, resulta portanto:

$$V_o = \frac{g}{F} \quad (3.24)$$

Quando a igualdade anterior é introduzida na equação de quantidade de movimento (Equação 3.21), tem-se:

$$\begin{aligned} & \rho_p F \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \right] \\ & + \mu_{ap} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{a_n}{r_o^2} \left(\frac{r}{r_o}\right)^{n-2} - \frac{\pi^2}{h^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Analisando-se a equação anterior, verifica-se ser possível eliminar os termos contendo a coordenada axial “z” para permitir determinar as constantes das séries, como se verá adiante.

Desse modo a Equação 3.25 torna-se:

$$-\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n + \kappa \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^{n-2} = 0 \quad (3.26)$$

onde

$$\gamma = 1 + \frac{\pi^2 \mu_{ap}}{h^2 \rho_p F} \quad (3.27)$$

$$\kappa = \frac{\mu_{ap}}{r_o^2 \rho_p F} \quad (3.28)$$

Outra forma de eliminar-se a variável axial da Equação 3.21, sem fazer-se uso das duas simplificações adotadas por Soo (1989a,b), seria tomando-se a média ao longo de toda a altura do leito. Obviamente, isto também seria uma simplificação. Como se nota neste ponto, a solução proposta por Soo (1989a,b) requer necessariamente que considerações sejam feitas para permitir a obtenção de valores para as constantes “ a_n ” e “ c_n ”. Este tipo de procedimento fica no campo conhecido como das soluções aproximadas. É aceitável dentro de certos níveis de precisão para as soluções.

3.6 Obtenção dos coeficientes (situação 1)

A tabela a seguir mostra o conjunto de equações obtido ao se aplicar as Equações 3.17 a 3.20 nas condições de contorno 3.8 a 3.16.

Tabela 3.1. Equações geradas após aplicação de condições de contorno

condição de contorno	condição a ser satisfeita
(3.8)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+2} = 0$ (3.29)
(3.9)	nenhuma
(3.10)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+2} = 0$ (3.30)
(3.11)	$a_1 = 0$ (3.31)
(3.12)	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = V_{PW}$ (3.32)
(3.13)	nenhuma
(3.14)	nenhuma
(3.15)	$c_1 = 0$ (3.33)
(3.16)	$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = V_w$ (3.34)

Utilizando-se a Equação 3.26 para correlacionar as constantes “ c_n ” às “ a_n ”, por meio de identidades de polinômios em “ r ”:

- Para r^0 :

$$-\gamma a_0 + c_0 + 4\kappa a_2 = 0 \quad (3.35)$$

- Para r^1 :

$$c_1 - \gamma a_1 + 9\kappa a_3 = 0 \quad (3.36)$$

- Para r^2 :

$$c_2 - \gamma a_2 + 16\kappa a_4 = 0 \quad (3.37)$$

- Para r^3 :

$$c_3 - \gamma a_3 + 25\kappa a_5 = 0 \quad (3.38)$$

- Para r^4 :

$$c_4 - \gamma a_4 = 0 \quad (3.39)$$

- Para r^5 :

$$c_5 - \gamma a_5 = 0 \quad (3.40)$$

O equacionamento anterior até a quinta potência é necessário e suficiente para que todos os coeficientes sejam determinados. Neste ponto, algumas observações acerca dessa característica de solução são necessárias.

Deve-se notar, que a equação de recorrência 3.26, não impõe limites para o número de coeficientes dos polinômios de solução (Eqs. 3.17 a 3.20). Entretanto, a aplicação das condições de contorno mostradas na Tabela 3.1, levam a limitar o desenvolvimento das séries à quinta potência. Obviamente, este tratamento dado por Soo (1989a,b) representa uma perda de generalidade das soluções propostas. Por outro lado, como já comentado, tais soluções, embora aproximadas, são muito convenientes e levarão a resultados que representam, com aceitável grau de aproximação, os fenômenos que se pretende estudar.

Usando-se as Equações 3.31 e 3.33, nas Equações 3.35 a 3.40, obtém-se:

$$\begin{aligned} c_0 &= \gamma a_0 - 4\kappa a_2 \\ c_2 &= \gamma a_2 - 16\kappa a_4 \\ c_3 &= -25\kappa a_5 \\ c_4 &= \gamma a_4 \\ c_5 &= \gamma a_5 \\ a_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Das Equações 3.29, 3.30, 3.32 e 3.34 obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^5 \frac{c_n}{n+2} &= 0 \\ \sum_{n=0}^5 \frac{a_n}{n+2} &= 0 \\ \sum_{n=0}^5 a_n &= V_{PW} \\ \sum_{n=0}^5 c_n &= V_W \end{aligned} \quad (3.42a,b,c,d)$$

Introduzindo-se as Equações 3.31, 3.33 e 3.41 no sistema anterior e solucionando-o, tem-se:

$$\begin{aligned}
a_0 &= -V_{PW} \left(\frac{1}{20} \frac{\gamma}{\kappa} + \frac{16}{5} \right) + \frac{V_W}{20\kappa} \\
a_2 &= V_{PW} \left(\frac{1}{3} \frac{\gamma}{\kappa} + 14 \right) - \frac{V_W}{3\kappa} \\
a_4 &= -V_{PW} \left(\frac{3}{4} \frac{\gamma}{\kappa} + 21 \right) + \frac{3V_W}{4\kappa} \\
a_5 &= V_{PW} \left(\frac{7}{15} \frac{\gamma}{\kappa} + \frac{56}{5} \right) - \frac{7V_W}{15\kappa}
\end{aligned} \tag{3.43a,b,c,d}$$

Por outro lado, Soo (1989a, b) obtém as seguintes constantes:

$$\begin{aligned}
a_0 &= -V_{PW} \left(\frac{1}{20} \frac{\gamma}{\kappa} + \frac{16}{5} \right) + \frac{13V_W}{140\kappa} \\
a_2 &= V_{PW} \left(\frac{1}{3} \frac{\gamma}{\kappa} + 14 \right) - \frac{26V_W}{63\kappa} \\
a_4 &= -V_{PW} \left(\frac{3}{4} \frac{\gamma}{\kappa} + 21 \right) + \frac{13V_W}{28\kappa} \\
a_5 &= V_{PW} \left(\frac{7}{15} \frac{\gamma}{\kappa} + \frac{56}{5} \right) - \frac{13V_W}{90\kappa}
\end{aligned} \tag{3.44a,b,c,d}$$

Como a Equação 3.43 é a única que satisfaz o sistema de condições imposto (Equações 3.42a, b, c, d), é possível concluir que Soo (1989a, b) cometeu erros durante a obtenção dos coeficientes “ a_n ” e “ c_n ”. Como será visto, tais erros inviabilizarão o método adotado pelo mesmo para avaliação numérica dos coeficientes.

3.7 Obtenção dos coeficientes (situação 2)

Com o propósito de se verificar a influência da retirada das condições de contorno adicionais (Equações. 3.15 e 3.16) sobre os perfis de velocidade de partícula, obteram-se os coeficientes desconsiderando-as.

Nesta nova situação, o número de constantes passíveis de serem determinadas é reduzido. Um equacionamento até a terceira potência é suficiente para que todas as constantes sejam determinadas:

- Para r^0 :

$$-\gamma a_0 + c_0 + 4\kappa a_2 = 0 \tag{3.45}$$

- Para r^1 :

$$c_1 - \gamma a_1 + 9\kappa a_3 = 0 \tag{3.46}$$

- Para r^2 :

$$c_2 - \gamma a_2 = 0 \quad (3.47)$$

- Para r^3 :

$$c_3 - \gamma a_3 = 0 \quad (3.38)$$

Usando-se a Equação 3.31, das Equações 3.45 e 3.48, resulta:

$$\begin{aligned} c_0 &= \gamma a_0 - 4\kappa a_2 \\ c_1 &= -9\kappa a_3 \\ c_2 &= \gamma a_2 \\ c_3 &= \gamma a_3 \end{aligned} \quad (3.49a,b,c,d)$$

O sistema resultante das Equações 3.29, 3.30 e 3.32 é dado por:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^3 \frac{c_n}{n+2} &= 0 \\ \sum_{n=0}^3 \frac{a_n}{n+2} &= 0 \\ \sum_{n=0}^3 a_n &= V_{PW} \end{aligned} \quad (3.50a,b,c)$$

Introduzindo-se as Equações 3.31 e 3.49 no sistema anterior, e solucionando-o, tem-se:

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{7}{3} V_{PW} \\ a_2 &= 10V_{PW} \\ a_3 &= -\frac{20}{3} V_{PW} \end{aligned} \quad (3.51a,b,c)$$

3.8. Avaliação numérica dos coeficientes

O próximo passo apresentado por Soo (1989a, b) é a avaliação numérica dos coeficientes através da determinação dos parâmetros “ V_{PW} ”, “ V_W ”, e “ F ”.

Em seu procedimento, Soo sugere o seguinte sistema para a determinação dos valores de “ V_{PW} ”, “ V_W ” e “ F ”:

$$c_o - a_o = \frac{g}{F} - V_o \quad (3.22)$$

$$-\lambda_p \left(\frac{\partial V_p}{\partial r} \right)_w = V_{PW} \quad (3.52)$$

$$a_o = V_{po} \quad (3.53)$$

Onde “ V_{po} ” e “ V_o ” são obtidos experimentalmente. A Equação 3.22 é proveniente da simplificação adotada na seção 3.5. A Equação 3.52 é proveniente da analogia do deslizamento de partícula na parede com o de um gás rarefeito e será examinada em detalhes no capítulo seguinte. A Equação 3.53 resulta da Equação 3.19 ao se obter a máxima velocidade de partícula “ V_{p0} ” no centro do leito.

Entretanto, se os coeficientes obtidos na Equação 3.43 forem introduzidos na Equação 3.52, a solução trivial é obtida. Desse modo, a hipótese representada pela Equação 3.52 não é passível de aplicação no presente tratamento. Cabe notar que dado o engano cometido por Soo (1989a,b), a solução trivial não é obtida quando os coeficientes descritos pelas Equações 3.44 são utilizados. Isto demonstra a inviabilidade do particular caminho utilizado por Soo na determinação dos coeficientes das séries.

Optou-se, então, por utilizar as Equações 3.22 e 3.53 para a determinação dos valores de “ F ” e “ V_{PW} ” admitindo-se, porém, “ V_w ” nulo. Tal hipótese é justificável uma vez que a hipótese de deslizamento de um gás real sobre uma superfície não é razoável e tampouco utilizada por qualquer outro autor, conforme indicado pela pesquisa bibliográfica realizada.

Da mesma forma que o parâmetro “ F ”, os demais parâmetros “ μ_{ap} ”, “ ρ_p ” e “ h ”, usados na determinação das constantes “ γ ” e “ κ ” (vide Equações 3.27 e 3.28), são obtidos através de dados experimentais. Para tanto, Soo (1989a, b) vale-se dos experimentos de Lin (1985). Na Tabela 3.2 são apresentadas as condições experimentais empregadas no trabalho de Lin. Os valores medidos são apresentados na Tabela 3.3.

Tabela 3.2. Condições experimentais utilizadas por Lin (1985)

$$d_p = 500 \mu\text{m}$$

$$V_{mf} = 0.194 \text{ m/s}$$

$$\bar{\rho}_p = 2500 \text{ kg/m}^3$$

$$r_o = 0.069 \text{ m}$$

$$h_o = 0.113 \text{ m}$$

$$\varepsilon_{p0} = 0.52$$

Tabela 3.3. Valores experimentais de Lin (1985).

Situação de Escoamento n ^o	Velocidade superficial do ar V_s [m/s]	Altura expandida do leito h [m]	Velocidade máxima de partícula V_{p0} [m/s]	Modelo de circulação
5	0.320	0.138	-0.085	AWDC
6	0.458	0.170	-0.120	AWDC
7	0.641	0.231	0.226	ACDW
8	0.754	0.245	0.291	ACDW
9	0.892	0.246	0.438	ACDW

A partir dos dados das Tabelas 3.2 e 3.3 é possível determinar os parâmetros restantes usados na determinação de “ γ ” e “ κ ”. As fórmulas para obtenção encontram-se mostradas na Tabela 3.4.

Tabela 3.4. Formulações para obtenção de “ γ ” e “ κ ”

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{po} \frac{h_0}{h} \quad (3.54)$$

$$V_0 = \frac{V_s}{\varepsilon_p} \quad (3.55)$$

$$\rho_p = \varepsilon_p \overline{\rho_p} \quad (3.56)$$

μ_{ap} (Schuergel, 1971)

Capítulo 4

Procedimento bifásico generalizado

4.1. Introdução

Os perfis de velocidade apresentados por Soo (1989a, b) foram obtidos pela combinação dos seguintes passos:

1. Obtenção de coeficientes das séries de potências que satisfariam as equações de continuidade de massa e quantidade de movimento;
2. Utilização de dados experimentais (Lin, 1985) para obtenção de alguns parâmetros-chaves.

Desse modo a solução exigiu dados experimentais de uma situação de escoamento em particular.

Para a generalização do procedimento de Soo (1989a, b), ou seja, para a obtenção dos coeficientes de velocidade em qualquer situação de escoamento em um leito fluidizado, faz-se necessário o uso de correlações mais abrangentes. Nesse sentido, no presente capítulo serão discutidas correlações passíveis de serem usadas para a velocidade de deslizamento de partícula na parede, viscosidade aparente do leito e fator de relaxação.

A formulação para a taxa de circulação bem como as correlações de Talmor e Benenati (1963) e Geldart (1986) serão discutidas. Finalizando, será apresentada uma proposta de generalização usando as correlações discutidas.

4.2. O deslizamento de partícula na parede

Conforme a Equação 3.43, uma das principais variáveis envolvidas na obtenção dos coeficientes de velocidade é a velocidade axial de deslizamento de partícula na parede “ V_{PW} ”.

Para estimar a velocidade de deslizamento de partícula na parede, Soo (1989a, b) e Gidaspow (1990) propõem uma analogia com a teoria de gás rarefeito. Essa analogia assume que a velocidade da partícula (V_{PW}) junto à parede de um leito fluidizado possa ser equacionada do mesmo modo que no método utilizado para calcular a velocidade de deslizamento de molécula junto à parede de um reservatório contendo um gás rarefeito.

Segundo a teoria cinética dos gases a velocidade de deslizamento relaciona-se com o gradiente de velocidade nas proximidades da parede (Kennard, 1938):

$$u = \zeta \frac{du_o}{dz} \quad (4.1)$$

onde “ ζ ” é denominado de coeficiente de deslizamento, representando um comprimento. A velocidade de um gás rarefeito na parede será a mesma do gás aderente à parede à distância “ ζ ” da mesma. Para leito fluidizado, as analogias presentes na literatura admitem que “ ζ ” seja igual ao livre caminho médio de interação entre partículas.

O livre caminho médio de interação entre partículas é definido por analogia ao dado através da teoria cinética. Para um gás maxwelliano, o livre caminho de partícula é dado por:

$$\lambda = \frac{1}{\pi N d^2 \sqrt{2}} \quad (4.2)$$

A extensão para um sistema particulado é feita, observando que:

$$N = \left(\frac{V_s}{V_t} \right) \frac{1}{V_i} = \alpha_p \frac{1}{V_i} \quad (4.3)$$

A introdução da expressão acima, resulta:

$$\lambda_p = \frac{a}{3\pi\alpha_p\sqrt{2}} \quad (4.4)$$

O valor de “ λ_p ” dado pela expressão anterior é o apresentado por Soo (1989a, b).

Gidaspow(1990) admite a analogia com o gás rarefeito considerando:

$$\lambda_p = \frac{d_p}{\alpha_p^{1/3}} \quad (4.5)$$

O parâmetro “ λ_p ” permite definir um número de Knudsen particulado, dado por:

$$N_{Kn} = \frac{\lambda_p}{L} \quad (4.6)$$

onde L é uma dimensão característica do leito, como por exemplo, o diâmetro.

A análise do valor de N_{Kn} permite situar o desvio do comportamento de meio contínuo para a fase particulada em um leito fluidizado. Os critérios são:

- $N_{Kn} < 0.01$ comportamento de meio contínuo;
- $0.1 < N_{Kn} < 3$ regime de transição;
- $3 < N_{Kn}$ comportamento de gás rarefeito.

Para o presente trabalho, três possíveis sugestões, todas dependentes de dados experimentais, podem ser usadas para a obtenção de V_{PW} :

- a) Obtenção da derivada da velocidade axial das partículas na direção radial experimentalmente. Desse modo, a velocidade de deslizamento da partícula na parede é obtida por:

$$-\lambda_p \left(\frac{\partial V_p}{\partial r} \right)_w = V_{PW} \quad (3.52)$$

- b) Obtenção da velocidade de escorregamento da partícula por $V_{PW} = f(V_{p0})$, conforme as Equações 3.43a e 3.47, onde “ V_{p0} ” é a máxima velocidade de partícula, igual ao coeficiente “ a_0 ”, sendo obtida experimentalmente.
- c) Obtenção da velocidade de escorregamento da partícula por $V_{PW} = f(V - V_{mf})$.

A limitação das três sugestões acima resume-se à dependência de dados experimentais e correlações empíricas disponíveis bem como à viabilidade de tais medições experimentais. Em princípio a solução somente seria válida dentro da faixa de validade da correlação.

O uso da primeira sugestão depende em grande parte da disponibilidade de aparato de medição confiável. Tal dificuldade também pode ser encontrada no uso da segunda sugestão.

Uma correlação conveniente foi encontrada na literatura para o uso da terceira sugestão. Para uma série de diâmetros de partícula, Bayens (1973) reportou a velocidade de partícula na parede como função do excesso de gás. Tal correlação encontra-se ilustrada na Figura 4.1:

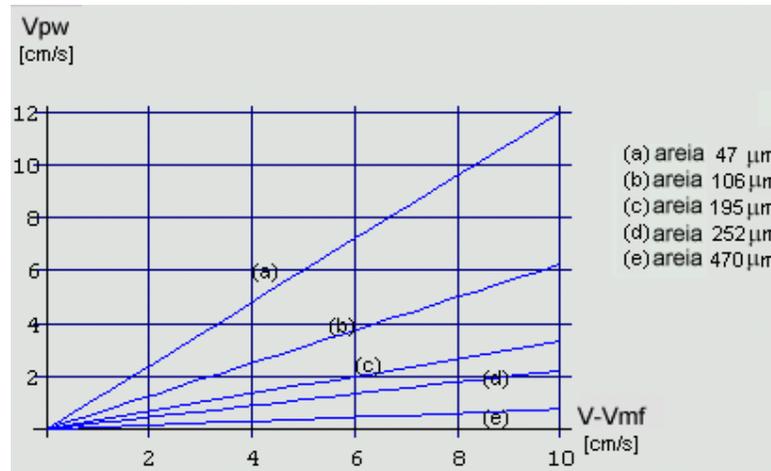


Figura 4.1 Velocidades de partículas na parede (Bayens e Geldart, 1973)

4.3. Taxa de circulação

A taxa de circulação média é relacionada ao perfil de velocidade axial obtido através de:

$$J_p = 2\varepsilon_p \rho_p \left(\frac{r_o}{r_i}\right)^2 \left(\frac{1}{h}\right) \int_0^h \int_0^{r_o} V_p \frac{r}{r_o} d\left(\frac{r}{r_o}\right) dh \quad (4.7)$$

Na literatura, duas correlações para a taxa de circulação foram encontradas: Talmor e Benenati (1963) e Geldart (1986).

4.3.1. Correlação de Talmor e Benenati

Talmor e Benenati (1963) utilizaram traçadores quimicamente diferenciados que foram depositados juntamente com partículas de mesma densidade e tamanho, sobre uma região inicialmente sem traçador de um leito fluidizado. Tais autores usaram a técnica de congelamento e seccionamento do leito em sucessivos instantes de tempo após a fluidização para análise do material em cada seção. Nesta situação a taxa de circulação relacionou-se com o fluxo mássico de gás e o diâmetro de partícula através de:

$$J_p = 654\rho_G (V - V_{mf}) e^{-6634d_p} \quad (4.8)$$

Dentro da faixa de experimentação, descrita na Tabela 4.1, tal correlação concorda com os dados experimentais dentro de uma margem de erro de vinte por cento.

Na Figura 4.2 são apresentados os resultados obtidos pelos mesmos autores e o ajuste obtido pelo uso da Equação 4.8.

Tabela 4.1. Faixa experimental de Talmor e Benenati

d_p	67-650 μm
$\bar{\rho}_p$	1260-2772 kg/m^3
d_t	3.35-10.16 cm
h	5.5 d_t
$V-V_{mf}$	0-0.29m/s

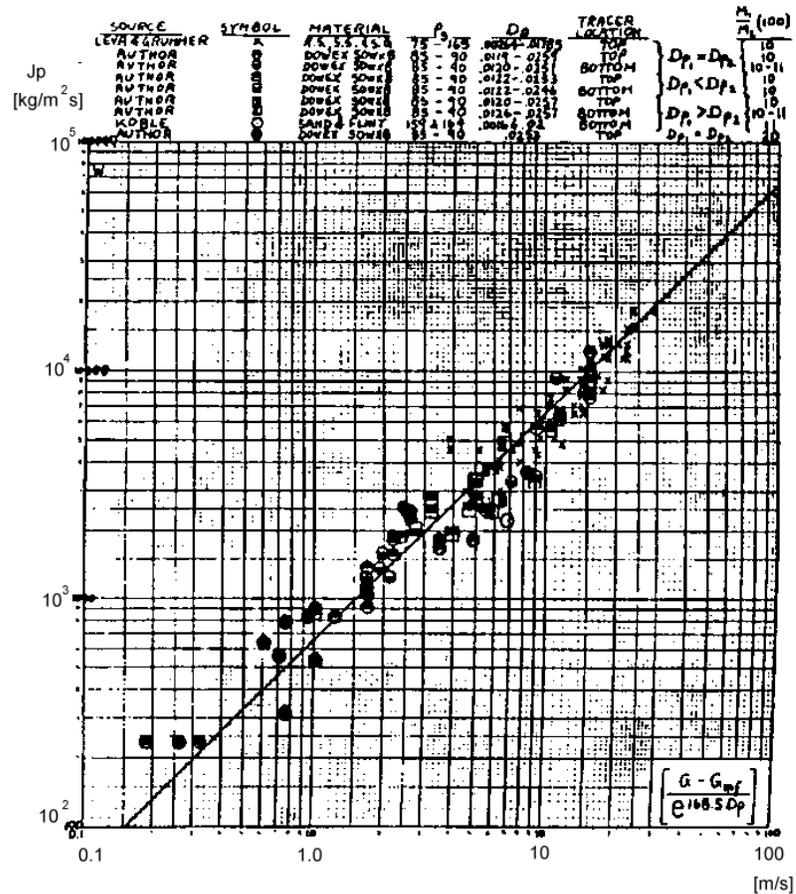


Figura 4.2. Ajuste de dados experimentais e correlação de Talmor e Benenati (1963)

4.3.2. Correlação de Geldart

Geldart(1986) relaciona parâmetros de bolhas e velocidade superficial do gás com a taxa de circulação de partículas através de:

$$J_p = \rho_p (1 - \epsilon_{mf}) (V - V_{mf}) Y (\beta_w + \beta_d) \quad (4.9)$$

onde “Y” é o desvio da teoria bifásica. O valor “Y” prediz uma vazão de gás menor do que a de excesso além da mínima fluidização para o escoamento do gás através das bolhas.

$$\beta_w = \frac{v_w}{v_B} \quad (4.10)$$

$$\beta_d = \frac{v_d}{v_B} \quad (4.11)$$

As Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 ilustram a dependência de “ β_w ”, “ β_d ” e “Y” com o número de Archimedes, definido por:

$$N_{Ar} = \frac{\rho_G (\rho_p - \rho_G) g d_p^3}{\mu_G^2} \quad (4.12)$$

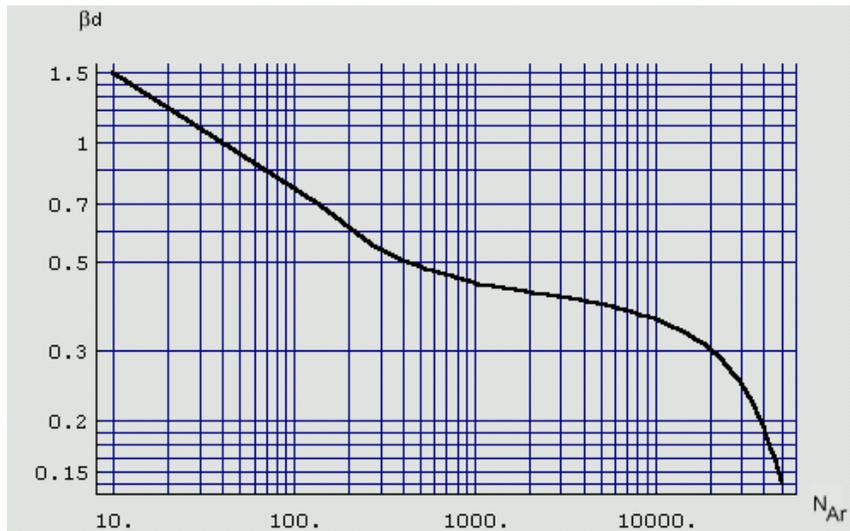


Figura 4.3. Fração de sólidos na esteira da bolha (Geldart, 1986)

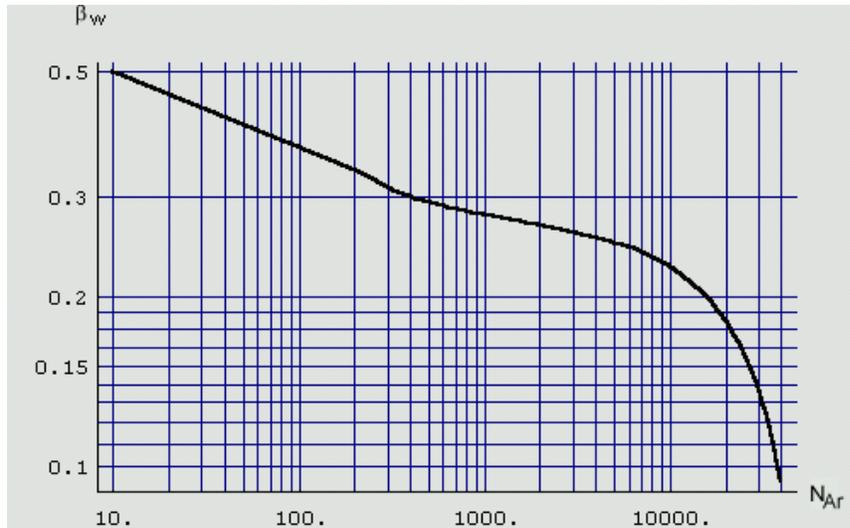


Figura 4.4. Fração de sólidos na base da bolha (Geldart, 1986)

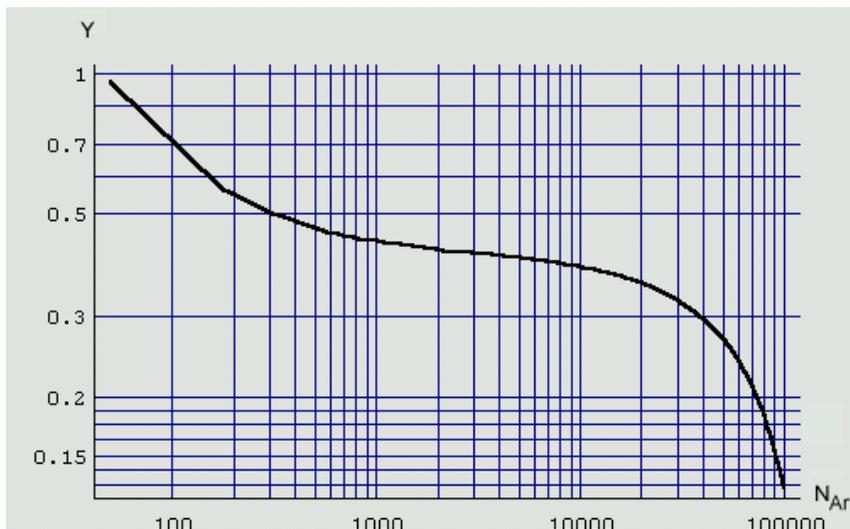


Figura 4.5. Desvio da teoria bifásica (Geldart, 1986)

Entre as limitações das fórmulas de Geldart e de Talmor e Benenati estão as faixas de aplicações destas, reduzidas às dos experimentos que as originaram.

4.4 Viscosidade da fase particulada

A viscosidade da fase particulada, também denominada viscosidade aparente ou efetiva, é proveniente da analogia do leito fluidizado com um fluido real.

Conforme observado em vários trabalhos, o comportamento da viscosidade efetiva é diretamente proporcional ao tamanho de partícula e inversamente proporcional à velocidade superficial do gás (Damia e Caprari, 1989). Inicialmente para velocidades baixas do gás a

viscosidade aparente é extremamente alta. Aumentos subsequentes na velocidade do gás provocam sensível decréscimo da mesma. Para velocidades suficientemente elevadas a viscosidade aparente varia relativamente pouco.

Do mesmo modo que em fluidos reais, diversos instrumentos e técnicas diretas de medição foram empregadas na sua determinação: viscosímetro de pás, esfera girante, esfera em queda, viscosímetro de Couette e pêndulo torsional. Devido aos métodos diretos provocarem aceleração das partículas produzindo uma certa variação na fração de vazios do leito, os dados de viscosidade aparente obtidos desta forma necessitam serem cuidadosamente examinados.

Dos métodos diretos um dos experimentos mais conhecidos é o de Schuergel (1971) que utilizou um viscosímetro de pás na determinação da viscosidade aparente.

Métodos indiretos de determinação da viscosidade também foram usados, dentre eles pode-se citar o de Grace (1970) que usou a analogia com a viscosidade de um líquido no qual bolhas ascendem em seu interior. Segundo tal analogia a viscosidade aparente de um leito fluidizado pode ser determinada através da observação visual de parâmetros referentes às bolhas.

Uma das limitações ao uso dos resultados de Grace e de Schuergel está relacionada à faixa de valores discretizados obtidos pelos mesmos.

Saxton et al. (1970) propôs uma correlação mais abrangente para a viscosidade aparente em um leito contendo areia, através da extensão de resultados obtidos em sistemas líquido-gás:

$$\mu_{ap} = \frac{2 \times 10^{5.5} (1 - \varepsilon_G) d_p^{1.5}}{(1 + 3.04 \times 10^5 d_p^{1.5}) V_s^{0.25}} \quad (4.13a)$$

Mais recentemente, Kai et al. (1990) usou o método de queda de esfera para obtenção da viscosidade aparente do leito fluidizado. A correlação em termos da fração de vazios, diâmetro de partícula e densidade é mostrada na Equação 4.13b:

$$\mu_{ap} = 5.58 \times 10^{-5} d_p^{0.634} \rho_p^{1.39} \frac{(1 - \varepsilon_G)}{(\varepsilon_G - 0.98 \varepsilon_{mf})^{0.494}} \quad (4.13b)$$

Na Figura 4.6 são apresentadas os gráficos de viscosidade contra a fração de vazios, segundo os resultados de Schuergel, Kai e Saxton, na faixa de velocidades e condições experimentais de Lin.

Da análise dos gráficos é possível verificar que a correlação de Kai prediz os menores valores de viscosidade aparente. Embora a Correlação 4.13a tente exprimir a dependência da densidade de partícula, os valores não apresentam boa concordância com os resultados experimentais de outros autores para faixas de diâmetro e densidades de partículas maiores.

Os resultados segundo Schuergel, apresentados na Figura 4.6, correspondem aos valores médios de viscosidade aparente tomados para partículas de densidades diferentes.

Conforme gráfico, a correlação de Saxton, prediz valores maiores para a viscosidade aparente que os previstos por Schuergel. Uma justificativa para tal comportamento seria considerar tais valores de viscosidade como os correspondentes a uma faixa de densidades de partícula maiores que as de densidade média prevista por Schuergel.

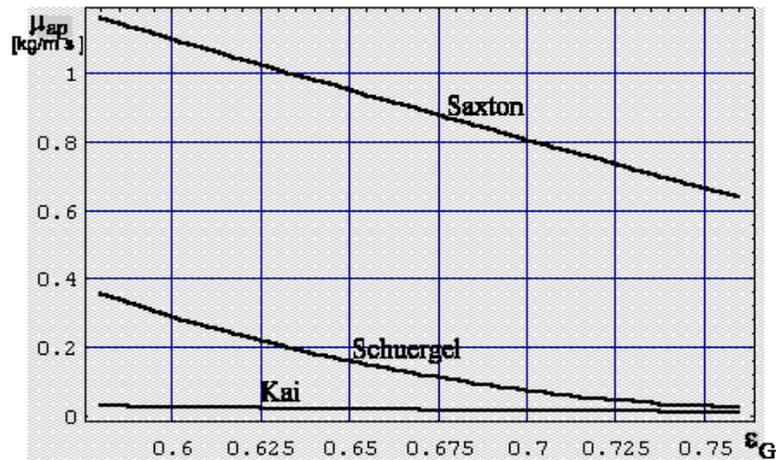


Figura 4.6 Viscosidade aparente na faixa dos experimentos de Lin(1985)

4.5. O fator de relaxação “F”

Comumente a literatura apresenta o fator de relaxação “F” derivado da clássica equação de Ergun (1952) para escoamento de um gás através de leito poroso:

$$\frac{\Delta P}{L} = 150 \frac{(1 - \epsilon_G)^2}{\epsilon_G^3} \frac{\bar{\mu} V_s}{d_p^2} + 1.75 \frac{(1 - \epsilon_G)}{\epsilon_G^3} \frac{G V_s}{d_p} \quad (4.14)$$

onde a primeira parcela da direita representa uma perda de energia por dissipação viscosa e a segunda parcela da direita representa um perda de energia cinética.

Expressando a queda de pressão por comprimento através de:

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{m_p F u_\epsilon N_A N_L}{l_p N_L a_p N_A} = F u_\epsilon (1 - \epsilon_G) \bar{\rho}_p \quad (4.15)$$

e introduzindo a Equação 4.15 na Equação 4.14, obtém-se:

$$F = \frac{150 \bar{\mu}(1 - \epsilon_G)}{\rho_p \epsilon_G^2 d_p^2} + \frac{1.75 \rho V_s}{\epsilon_G^2 \rho_p d_p} \quad (4.16)$$

Para a faixa experimental utilizada por Lin (1985), foi calculado o fator de relaxação usando a Equação 4.16. Na Figura 4.7 estão representados os valores obtidos. Na Figura 4.8 está representado o fator “F” obtido usando-se as Equações 3.22 e 3.53.

Da análise das Figuras 4.7 e 4.8 verifica-se que os valores de “F”, obtidos usando-se as Equações 3.22 e 3.53, são uma ordem de grandeza maiores que os obtidos usando-se a Equação 4.16.

No procedimento generalizado adotou-se o uso da Equação 4.16 devido a ausência de dados experimentais disponíveis para o cálculo de “F” através das Equações 3.45 e 3.47. O efeito do fator de relaxação “F” sobre a taxa de circulação será mostrado no Capítulo 6.



Figura 4.7. Fator de relaxação pela equação de Ergun (1952)

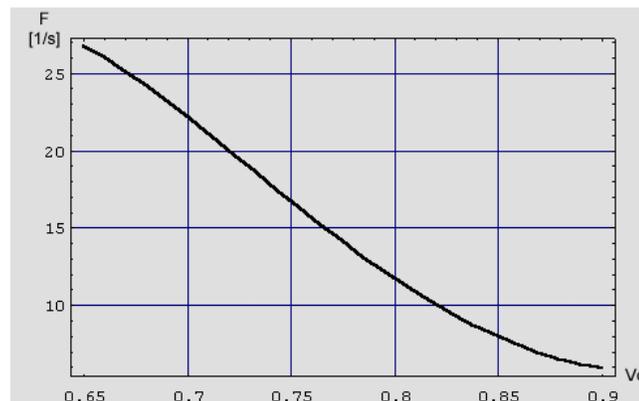


Figura 4.8. Fator de relaxação usando-se Equações 3.45 e 3.47

4.6. Passos do procedimento generalizado

Baseado nas correlações de “ V_{PW} ”, “ F ” e “ μ_{ap} ” anteriores, o procedimento generalizado aqui proposto consta dos seguintes passos:

- I. definição da geometria do leito (r_o e h).
- II. definição das densidades e diâmetro médio de partícula.
- III. cálculo da velocidade mínima de fluidização por:

$$V_{mf} = \frac{\mu_g N_{Re_{mf}}}{d_p \rho_g} \quad (4.17)$$

onde, de Wen e Yun (1966):

$$N_{Re_{mf}} = \sqrt{27.2^2 + 0.0408 N_{Ar}} - 27.2 \quad (4.18)$$

- IV. seleção da velocidade do gás.
- V. cálculo da fração de vazios (Staub e Canada, 1978).

$$\varepsilon_G = \frac{V_s \varepsilon_{mf}}{(1.05 V_s \varepsilon_{mf} + (1 - \varepsilon_{mf}) V_{mf})} \quad (4.19)$$

- VI. cálculo da viscosidade aparente (Eqs. 4.13a, b).
- VII. cálculo do fator de relaxação (Eq. 4.16).
- VIII. Obtenção da velocidade de partícula na parede (Figura 4.1).
- IX. Obtenção dos valores de “ γ ” e “ κ ” (Eqs. 3.27 e 3.28).
- X. Obtenção das constantes dos perfis (Eq. 3.43).
- XI. Obtenção da taxa de circulação média “ J_p ” (Eq. 4.7).

Capítulo 5

Procedimentos incluindo a Fase de Bolhas

5.1. Introdução

Em seu desenvolvimento para duas fases, Soo (1986, 1989a, b) considera que o movimento das bolhas é induzido pelo padrão circulatório de sólidos. Desse modo, as bolhas não seriam a causa do movimento das partículas e tampouco sua existência afetaria a troca de quantidade de movimento entre o gás na emulsão e partículas. Em função disso, Soo desconsidera uma terceira fase constituída das bolhas em seu equacionamento. Tal hipótese não nos parece realista.

Para testar a hipótese de Soo (1989a, b), foram desenvolvidos dois procedimentos considerando a inclusão de uma fase de bolhas aos equacionamentos básicos apresentados no Capítulo 3. No primeiro procedimento, foram usadas funções de velocidade para a fase de bolha similares às usadas para as outras duas fases. No segundo procedimento as funções de velocidade foram retiradas de correlações da literatura. Finalizando serão apresentadas as novas correlações para o fator de relaxação e frações volumétricas necessárias após a introdução da nova fase. Por último são apresentados os passos de um procedimento generalizado abrangendo uma nova fase de bolhas.

O teste final poderá ser feito por cálculos das taxas de circulação calculadas com e sem a inclusão da fase de bolhas e comparadas com valores calculados a partir de correlações semi-empíricas.

5.2 Primeiro procedimento

5.2.1. Equacionamento básico

As equações usadas após a inclusão de um nova fase de bolhas, são listadas a seguir:

- Continuidade do gás na emulsão:

$$\left(\frac{1}{r}\right)\left[\frac{\partial(rU_E)}{\partial r}\right] + \left(\frac{\partial V_E}{\partial z}\right) = 0 \quad (5.1)$$

- Continuidade para a fase de partículas:

$$\left(\frac{1}{r}\right)\left[\frac{\partial(rU_P)}{\partial r}\right] + \left(\frac{\partial V_P}{\partial z}\right) = 0 \quad (5.2)$$

- Continuidade para a fase de bolhas:

$$\left(\frac{1}{r}\right)\left[\frac{\partial(rU_B)}{\partial r}\right] + \left(\frac{\partial V_B}{\partial z}\right) = 0 \quad (5.3)$$

- Conservação da quantidade de movimento axial para a fase de partículas:

$$\rho_P F_{EP}(V_E - V_P) + \mu_{ap} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_P}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_P}{\partial z^2} \right] - (\rho_P - \rho_E)g = 0 \quad (5.4)$$

- Conservação da quantidade de movimento axial para a fase de bolhas:

$$\rho_B F_{EB}(V_E - V_B) + \mu_{ap} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_B}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_B}{\partial z^2} \right] - (\rho_B - \rho_E)g = 0 \quad (5.5)$$

5.2.2. Condições de contorno

Na situação de duas fases do Capítulo 2, as condições de contorno necessárias eram:

- Uma condição de contorno para “ U_E ” na direção radial;
- Uma condição de contorno para “ V_E ” na direção axial;
- Uma condição de contorno para “ U_P ” na direção radial;
- Duas condições de contorno para “ V_P ” na direção radial;
- Duas condições de contorno para “ V_P ” na direção axial.

A inclusão da fase de bolhas acrescenta as seguintes condições de contorno, necessárias:

- Uma condição de contorno para “ U_B ” na direção radial;

- g) Duas condições de contorno para “ V_B ” na direção radial;
 h) Duas condições de contorno para “ V_B ” na direção axial.

Logo, as condições de contorno necessárias para o conjunto de Equações 5.1 a 5.5 são:

- a) Uma para “ U_E ” na direção radial:

$$U_E(r_0, z) = 0 \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (5.6)$$

- b) Uma para “ V_E ” na direção axial:

$$V_E(r, 0) = V_0 \quad , \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (5.7)$$

- c) Uma para “ U_P ” na direção radial:

$$U_P(r_0, z) = 0 \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (5.8)$$

- d) Duas para “ V_P ” na direção radial:

$$V_P(r_0, z) = V_{PW} \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (5.9)$$

$$\left. \frac{\partial V_P}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (5.10)$$

- e) Duas para “ V_P ” na direção axial:

$$V_P(r, 0) = 0 \quad , \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (5.11)$$

$$V_P(r, h) = 0 \quad , \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (5.12)$$

- f) Uma para “ U_B ” na direção radial:

$$U_B(r_0, z) = 0 \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (5.13)$$

- g) Duas para “ V_B ” na direção radial:

$$V_B(r_0, z) = V_{BW} \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (5.14)$$

$$\left. \frac{\partial V_B}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (5.15)$$

- h) Duas para “ V_B ” na direção axial:

$$V_B(r, 0) = V_{B0} \quad , \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (5.16)$$

$$V_B(r, h) = V_{Bh} \quad , \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (5.17)$$

As condições de contorno adicionais são:

i) Duas para “ V_E ” na direção radial:

$$V_E(r_o, z) = 0 \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (5.18)$$

$$\left. \frac{\partial V_E}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad , \quad 0 \leq z \leq h \quad (5.19)$$

5.2.3. Soluções propostas

$$V_E = V_{mf} + \text{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \quad (5.20)$$

$$U_E = -\left(\frac{\pi r_o}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{c_n}{n+2}\right] \left(\frac{r}{r_o}\right)^{n+1} \quad (5.21)$$

$$V_p = \text{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \quad (5.22)$$

$$U_p = -\left(\frac{\pi r_o}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n+2}\right] \left(\frac{r}{r_o}\right)^{n+1} \quad (5.23)$$

$$V_B = V_{B0} + (V_{Bh} - V_{B0})\left(\frac{z}{h}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \quad (5.24)$$

$$U_B = -(V_{Bh} - V_{B0})\left(\frac{r}{2h}\right) - \left(\frac{\pi r_o}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b_n}{n+2}\right) \left(\frac{r}{r_o}\right)^{n+1} \quad (5.25)$$

A escolha das Equações 5.24 e 5.25 para a fase de bolhas é conveniente pois satisfaz a continuidade (Equação 5.3).

5.2.4 Equacionamento para coeficientes

Substituindo as Equações. 5.20 e 5.22 na equação do movimento para partículas (Eq. 5.4), tem-se:

$$\begin{aligned} & \rho_p F_{EP} \left[V_{mf} + \text{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n - \text{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \right] + \\ & \mu_{ap} \left[\frac{1}{r_o^2} \text{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^{n-2} - \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 \text{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \right] - (\rho_p - \rho_E)g = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Utilizando a técnica de solução aproximada, é possível eliminar a variável de coordenada axial por integração da equação anterior ao longo da altura do leito:

$$k_1 - \gamma_E \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n + \kappa_E \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-2} = 0 \quad (5.27)$$

onde:

$$\gamma_E = 1 + \frac{\pi^2 \mu_{ap}}{h^2 \rho_p F_{EP}} \quad (5.28)$$

$$\kappa_E = \frac{\mu_{ap}}{r_0^2 \rho_p F_{EP}} \quad (5.29)$$

$$k_1 = \frac{\pi}{2} \left(V_{mf} - \left(\frac{\rho_p - \rho_E}{\rho_p} \right) \frac{g}{F_{EP}} \right) \quad (5.30)$$

Substituindo as Equações 5.20 e 5.24 na equação de quantidade de movimento para bolhas (Equação 5.5):

$$\begin{aligned} & \rho_B F_{EB} \left[V_{mf} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n - \left[V_{B0} + (V_{Bh} - V_{B0}) \left(\frac{z}{h}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \right] \right] + \\ & \mu_{ap} \left[\frac{1}{r_0^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-2} - \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \right] - (\rho_B - \rho_E) g = 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Utilizando o mesmo procedimento de solução aproximada, integra-se a equação anterior ao longo da altura para fornecer:

$$k_2 - \gamma_B \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n + \kappa_B \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-2} = 0 \quad (5.32)$$

onde:

$$\gamma_B = 1 + \frac{\pi^2 \mu_{ap}}{h^2 \rho_B F_{EB}} \quad (5.33)$$

$$\kappa_B = \frac{\mu_{ap}}{r_0^2 \rho_B F_{EB}} \quad (5.34)$$

$$k_2 = \frac{\pi}{2} \left(V_{mf} - \left(\frac{\rho_B - \rho_E}{\rho_B} \right) \frac{g}{F_{EB}} - \overline{f(z)} \right) \quad (5.35)$$

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{h} \int_0^h \left(V_{B0} + (V_{Bh} - V_{B0}) \left(\frac{z}{h} \right) \right) dz = \left(\frac{V_{B0} + V_{BH}}{2} \right) \quad (5.36)$$

5.2.5. Obtenção dos coeficientes

A Tabela 5.1 mostra o equacionamento obtido ao se aplicar as Equações 5.20 a 5.25 às condições de contorno 5.9 a 5.19:

Tabela 5.1. Equações geradas após aplicação de condições de contorno

condição de contorno	condição a ser satisfeita
(5.6)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+2} = 0$ (5.37)
(5.7)	nenhuma
(5.8)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+2} = 0$ (5.38)
(5.9)	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = V_{PW}$ (5.39)
(5.10)	$a_1 = 0$ (5.40)
(5.11)	nenhuma
(5.12)	nenhuma
(5.13)	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+2} = 0$ (5.41)
(5.14)	$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = V_{BW}$ (5.42)
(5.15)	$b_1 = 0$ (5.43)
(5.16)	nenhuma
(5.17)	nenhuma
(5.18)	$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = V_{EW}$ (5.44)
(5.19)	$c_1 = 0$ (5.45)

Da Equação 5.32, explicitando-se os coeficientes “ c_n ”, tem-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n = -k_2 + \gamma_B \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n - \kappa_B \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-2} \quad (5.46)$$

Substituindo-se a equação anterior na Equação 5.27, resulta:

$$(k_1 - k_2) + \gamma_B \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n - \gamma_E \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n + \kappa_E \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-2} - \kappa_B \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-2} = 0 \quad (5.47)$$

Equacionando os coeficientes de mesma potência da equação anterior:

- Para r^0 :

$$(k_1 - k_2) + \gamma_B b_0 - \gamma_E a_0 + 4\kappa_E a_2 - 4\kappa_B a_2 = 0 \quad (5.48)$$

- Para r^1 :

$$\gamma_B b_1 - \gamma_E a_1 + 9\kappa_E a_3 - 9\kappa_B b_3 = 0 \quad (5.49)$$

- Para r^2 :

$$\gamma_B b_2 - \gamma_E a_2 + 16\kappa_E a_4 - 16\kappa_B b_4 = 0 \quad (5.50)$$

- Para r^3 :

$$\gamma_B b_3 - \gamma_E a_3 + 25\kappa_E a_5 - 25\kappa_B b_5 = 0 \quad (5.51)$$

- Para r^4 :

$$\gamma_B b_4 - \gamma_E a_4 + 36\kappa_E a_6 - 36\kappa_B b_6 = 0 \quad (5.52)$$

- Para r^5 :

$$\gamma_B b_5 - \gamma_E a_5 + 49\kappa_E a_7 - 49\kappa_B b_7 = 0 \quad (5.53)$$

- Para r^6 :

$$\gamma_B b_6 - \gamma_E a_6 = 0 \quad (5.54)$$

- Para r^7 :

$$\gamma_B b_7 - \gamma_E a_7 = 0 \quad (5.55)$$

No presente caso os equacionamentos até a sétima potência são suficientes para que todos os coeficientes sejam determinados

As constantes "b_n" podem ser então expressas como:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \left(\frac{1}{\gamma_B}\right) \left[(k_2 - k_1) + \gamma_E a_0 - 4\kappa_E a_2 + 4\kappa_B b_2 \right] \\
 b_1 &= \left(\frac{1}{\gamma_B}\right) \left[\gamma_E a_1 - 9\kappa_E a_3 + 9\kappa_B b_3 \right] \\
 b_2 &= \left(\frac{1}{\gamma_B}\right) \left[\gamma_E a_2 - 16\kappa_E a_4 + 16\kappa_B b_4 \right] \\
 b_3 &= \left(\frac{1}{\gamma_B}\right) \left[\gamma_E a_3 - 25\kappa_E a_5 + 25\kappa_B b_5 \right] \\
 b_4 &= \left(\frac{1}{\gamma_B}\right) \left[\gamma_E a_4 - 36\kappa_E a_6 + 36\kappa_B b_6 \right] \\
 b_5 &= \left(\frac{1}{\gamma_B}\right) \left[\gamma_E a_5 - 49\kappa_E a_7 + 49\kappa_B b_7 \right] \\
 b_6 &= \frac{\gamma_E}{\gamma_B} a_6 \\
 b_7 &= \frac{\gamma_E}{\gamma_B} a_7
 \end{aligned}
 \tag{5.56a,b,c,d,e,f,g,h}$$

De forma análoga, equacionando os coeficientes de mesma potência da equação de quantidade de movimento axial das partículas (Equação 5.27):

- Para r^0 :

$$k_1 - \gamma_E a_0 + c_0 + 4\kappa_E a_2 = 0 \tag{5.57}$$

- Para r^1 :

$$c_1 - \gamma_E a_1 + 9\kappa_E a_3 = 0 \tag{5.58}$$

- Para r^2 :

$$c_2 - \gamma_E a_2 + 16\kappa_E a_4 = 0 \tag{5.59}$$

- Para r^3 :

$$c_3 - \gamma_E a_3 + 25\kappa_E a_5 = 0 \tag{5.60}$$

- Para r^4 :

$$c_4 - \gamma_E a_4 + 36\kappa_E a_6 = 0 \tag{5.61}$$

- Para r^5 :

$$c_5 - \gamma_E a_5 + 49\kappa_E a_7 = 0 \quad (5.62)$$

- Para r^6 :

$$c_6 - \gamma_E a_6 = 0 \quad (5.63)$$

- Para r^7 :

$$c_7 - \gamma_E a_7 = 0 \quad (5.64)$$

Usando as Equações 5.40 e 5.45 nas Equações 5.57 a 5.64 anteriores, as constantes " c_n " podem ser então expressas como:

$$\begin{aligned} c_0 &= \gamma_E a_0 - 4\kappa_E a_2 - k_1 \\ c_2 &= \gamma_E a_2 - 16\kappa_E a_4 \\ c_3 &= -25\kappa_E a_5 \\ c_4 &= \gamma_E a_4 - 36\kappa_E a_6 \\ c_5 &= \gamma_E a_5 - 49\kappa_E a_7 \\ c_6 &= \gamma_E a_6 \\ c_7 &= \gamma_E a_7 \end{aligned} \quad (5.65a,b,c,d,e)$$

O sistema final obtido usando as Equações 5.37, 5.38, 5.39, 5.41, 5.42 e 5.44, é dado por:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^7 a_n &= V_{pw} \\ \sum_{n=0}^7 c_n &= 0 \\ \sum_{n=0}^7 b_n &= 0 \\ \sum_{n=0}^7 \frac{a_n}{n+2} &= 0 \\ \sum_{n=0}^7 \frac{c_n}{n+2} &= 0 \\ \sum_{n=0}^7 \frac{b_n}{n+2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.66a,b,c,d,e,f)$$

Introduzindo as Equações 5.40, 5.43, 5.45, 5.56 e 5.65 no sistema anterior, a solução é dada por :

$$a_0 = \left(\begin{aligned} & -105ct1 \cdot \gamma_B^2 \gamma_E \kappa_B - 42048ct1 \cdot \gamma_B \gamma_E \kappa_B^2 - 798336ct1 \gamma_E \kappa_B^3 + 105ct2 \gamma_B^3 \kappa_E + 40320ct1 \gamma_B^2 \kappa_B \kappa_E \\ & + 1728ct2 \gamma_B^2 \kappa_B \kappa_E + 798336ct1 \gamma_B \kappa_B^2 \kappa_E - 70 \gamma_B^2 \gamma_E^2 \kappa_B V_{PW} - 8640 \gamma_B \gamma_E^2 \kappa_B^2 V_{PW} - \\ & 145152 \gamma_E^2 \kappa_B^3 V_{PW} + 6720 \gamma_B^2 \gamma_E \kappa_B \kappa_E V_{PW} - 332352 \gamma_B \gamma_E \kappa_B^2 \kappa_E V_{PW} - 9289728 \gamma_E \kappa_B^3 \kappa_E V_{PW} \\ & + 463680 \gamma_B^2 \kappa_B \kappa_E^2 V_{PW} + 9289728 \gamma_B \kappa_B^2 \kappa_E^2 V_{PW} \end{aligned} \right) \\ \times \left(\frac{1}{20160 \kappa_B (7 \gamma_B + 144 \kappa_B) \kappa_E (\gamma_E \kappa_B - \gamma_B \kappa_E)} \right) \quad (5.67a)$$

$$a_2 = \left(\begin{aligned} & 21ct1 \cdot \gamma_B^2 \gamma_E \kappa_B + 5592ct1 \cdot \gamma_B \gamma_E \kappa_B^2 + 103680ct1 \gamma_E \kappa_B^3 - 21ct2 \gamma_B^3 \kappa_E - 5208ct1 \gamma_B^2 \kappa_B \kappa_E \\ & - 384ct2 \gamma_B^2 \kappa_B \kappa_E + 103680ct1 \gamma_B \kappa_B^2 \kappa_E + 14 \gamma_B^2 \gamma_E^2 \kappa_B V_{PW} + 1424 \gamma_B \gamma_E^2 \kappa_B^2 V_{PW} + \\ & 23040 \gamma_E^2 \kappa_B^3 V_{PW} - 1008 \gamma_B^2 \gamma_E \kappa_B \kappa_E V_{PW} + 28416 \gamma_B \gamma_E \kappa_B^2 \kappa_E V_{PW} + 967680 \gamma_E \kappa_B^3 \kappa_E V_{PW} \\ & - 48384 \gamma_B^2 \kappa_B \kappa_E^2 V_{PW} - 967680 \gamma_B \kappa_B^2 \kappa_E^2 V_{PW} \end{aligned} \right) \\ \times \left(\frac{1}{480 \kappa_B (7 \gamma_B + 144 \kappa_B) \kappa_E (\gamma_E \kappa_B - \gamma_B \kappa_E)} \right) \quad (5.67b)$$

$$a_4 = \left(\begin{aligned} & 21ct1 \cdot \gamma_B^2 \gamma_E \kappa_B + 3600ct1 \cdot \gamma_B \gamma_E \kappa_B^2 + 72576ct1 \gamma_E \kappa_B^3 - 21ct2 \gamma_B^3 \kappa_E - 3024ct1 \gamma_B^2 \kappa_B \kappa_E \\ & - 576ct2 \gamma_B^2 \kappa_B \kappa_E - 72576ct1 \gamma_B \kappa_B^2 \kappa_E V_{PW} + 14 \gamma_B^2 \gamma_E^2 \kappa_B V_{PW} + 1248 \gamma_B^2 \gamma_E \kappa_B^2 V_{PW} + \\ & 20736 \gamma_E^2 \kappa_B^3 V_{PW} - 672 \gamma_B^2 \gamma_E \kappa_B \kappa_E V_{PW} + 8064 \gamma_B \gamma_E \kappa_B^2 \kappa_E V_{PW} + 580608 \gamma_E \kappa_B^3 \kappa_E V_{PW} \\ & - 580608 \gamma_B \kappa_B^2 \kappa_E^2 V_{PW} \end{aligned} \right) \\ \times \left(\frac{1}{192 \kappa_B (7 \gamma_B + 144 \kappa_B) \kappa_E (-\gamma_E \kappa_B + \gamma_B \kappa_E)} \right) \quad (5.67c)$$

$$a_5 = \left(\begin{aligned} & 42ct1 \cdot \gamma_B \gamma_E \kappa_B + 3024ct1 \cdot \gamma_E \kappa_B^2 - 42ct2 \gamma_B^2 \kappa_E - 3024ct1 \gamma_B \kappa_B \kappa_E + 35 \gamma_B \gamma_E^2 \kappa_B V_{PW} \\ & + 1008 \gamma_E^2 \kappa_B^2 V_{PW} - 672 \gamma_B \gamma_E \kappa_B \kappa_E V_{PW} + 24192 \gamma_E \kappa_B^2 \kappa_E V_{PW} - 24192 \gamma_B \kappa_B \kappa_E^2 V_{PW} \end{aligned} \right) \\ \times \left(\frac{1}{15 (7 \gamma_B + 144 \kappa_B) \kappa_E (\gamma_E \kappa_B - \gamma_B \kappa_E)} \right) \quad (5.67d)$$

$$a_6 = \left(\begin{aligned} & 21ct1 \cdot \gamma_B^2 \gamma_E \kappa_B + 1512ct1 \cdot \gamma_B \gamma_E \kappa_B^2 - 21ct2 \gamma_B^3 \kappa_E - 1512ct1 \gamma_B^2 \kappa_B \kappa_E + 14 \gamma_B \gamma_E^2 \kappa_B V_{PW} \\ & + 432 \gamma_E^2 \gamma_B \kappa_B^2 V_{PW} - 336 \gamma_B \gamma_E \kappa_B \kappa_E V_{PW} + 12096 \gamma_B \gamma_E \kappa_B^2 \kappa_E V_{PW} - 12096 \gamma_B^2 \kappa_B \kappa_E^2 V_{PW} \end{aligned} \right) \\ \times \left(\frac{1}{144 \kappa_B (7 \gamma_B + 144 \kappa_B) \kappa_E (\gamma_E \kappa_B - \gamma_B \kappa_E)} \right) \quad (5.67e)$$

$$a_7 = \left(\begin{array}{l} 21ct1 \cdot \gamma B^2 \gamma_E \kappa_B + 1152ct1 \cdot \gamma B \gamma_E \kappa_B^2 - 21ct2 \gamma B^3 \kappa_E - 1008ct1 \gamma B^2 \kappa_B \kappa_E - 144ct2 \gamma B^2 \kappa_B \kappa_E \\ + 14 \gamma B^2 \gamma_E^2 \kappa_B V_{PW} + 384 \gamma B \gamma_E^2 \kappa_B^2 V_{PW} - 168 \gamma B^2 \gamma_E \kappa_B \kappa_E V_{PW} + 9216 \gamma_E \kappa_B^2 \kappa_E V_{PW} \\ - 8064 \gamma B^2 \kappa_B \kappa_E^2 V_{PW} \end{array} \right) \times \left(\frac{1}{280 \kappa_B (7 \gamma_B + 144 \kappa_B) \kappa_E (-\gamma_E \kappa_B + \gamma_B \kappa_E)} \right) \quad (5.67f)$$

5.3. Segundo procedimento

5.3.1. Soluções propostas

As soluções propostas são listadas abaixo:

$$V_E = V_{mf} + \text{sen} \left(\frac{\pi z}{h} \right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \quad (5.72)$$

$$U_E = - \left(\frac{\pi r_0}{h} \right) \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{c_n}{n+2} \right] \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n+1} \quad (5.73)$$

$$V_p = \text{sen} \left(\frac{\pi z}{h} \right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \quad (5.74)$$

$$U_p = - \left(\frac{\pi r_0}{h} \right) \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n+2} \right] \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n+1} \quad (5.75)$$

$$V_B = f(z) \quad (5.76)$$

$$U_B = g(z) \cdot h(r) \quad (5.77)$$

A seguir, serão determinadas a forma das funções para a componente axial “V_B” e para a componente radial “U_B”, para a fase de bolhas.

- Determinando V_B

No presente procedimento a velocidade axial da fase de bolhas será dada pela correlação apresentada por Kunii e Levenspiel(1991) :

$$V_B(z) = f(z) = (V_s - V_{mf}) + 0.711 \left\{ g \cdot \left[d_{Bm} - \left(d_{Bm} - d_{Bo} e^{-\frac{0.3z}{d_i}} \right) \right] \right\}^{1/2} \quad (5.78)$$

onde:

$$d_{Bo} = \frac{0.278}{g} (V_s - V_{mf})^2 \quad (5.79)$$

$$d_{Bm} = 0.65 \left[\frac{\pi}{4} d_t^2 (V_0 - V_{mf}) \right]^{0.4} \quad (5.80)$$

Da Equação 5.78 torna-se possível definir-se dois novos parâmetros:

$$V_{Bm} = \frac{1}{h} \int_0^h V_B(z) dz \quad (5.81)$$

$$V_{Bh} = V_B(h) \quad (5.82)$$

Fato a ser observado é a satisfação das condições de contorno dadas pelas Equações 5.14 a 5.17 pela velocidade axial da fase de bolhas (Equação 5.78).

- Determinando U_B :

A Equação 5.78 para a velocidade axial da fase de bolhas pode ser usada na determinação da componente radial de velocidade. Desta forma, usando a equação da continuidade para a fase de bolhas (Equação 5.3), obtém:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU_B) = - \frac{\partial V_B}{\partial z} \quad (5.83)$$

Aplicando (5.79) resulta:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU_B) = -f'(z) \quad (5.84)$$

integrando chega-se à :

$$U_B = - \frac{f'(z)}{2} r + \frac{C_1}{r} \quad (5.85)$$

Aplicando a condição de contorno para " U_B " (Equação 5.13) tem-se $C_1=0$, portanto:

$$U_B(r, z) = g(z) \cdot h(r) \quad (5.86)$$

5.3.2. Equacionamento dos coeficientes

O equacionamento para os coeficientes segue forma análoga à do procedimento 1, descritas nas Seções 5.2.3 e 5.2.4. Deste modo a aplicação das Equações 5.72 e 5.74 na Equação 5.4 resulta na Equação 5.27 obtida anteriormente.

No presente procedimento o equacionamento da Equação 5.27 até a quinta potência é necessário e suficiente para que todos os coeficientes possam ser determinados. Os coeficientes " c_n " podem então, serem expressos por:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \gamma_E a_0 - 4\kappa_E a_2 - k_1 \\
 c_2 &= \gamma_E a_2 - 16\kappa_E a_4 \\
 c_3 &= -25\kappa_E a_5 \\
 c_4 &= \gamma_E a_4 \\
 c_5 &= \gamma_E a_5
 \end{aligned}
 \tag{5.68}$$

A substituição das Equações 5.70, 5.74 e 5.75 na equação de quantidade de movimento para a fase de partículas (Equação 5.5) resulta:

$$\rho_p F_{EB} \left[V_{mf} + \text{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^5 c_n \left(\frac{r}{r_0}\right) - f(z) \right] + \mu_{ap} f''(z) - (\rho_B - \rho_E)g = 0
 \tag{5.87}$$

efetuando-se a média ao longo do leito, da equação anterior, em $r=r_0$, tem-se:

$$\sum_{n=0}^5 c_n = k
 \tag{5.88}$$

A equação anterior será usada em substituição à Equação 5.44.

5.3.3. Obtenção dos coeficientes

A utilização das Equações 5.37 a 5.39 e da Equação 5.84 resulta no seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^5 a_n &= V_{pw} \\
 \sum_{n=0}^5 c_n &= k \\
 \sum_{n=0}^5 \frac{a_n}{n+2} &= 0 \\
 \sum_{n=0}^5 \frac{c_n}{n+2} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.89 a,b,c,d}$$

A substituição das Equações 5.68, 5.40 e 5.45 no sistema anterior, conduz à seguinte solução:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= V_{PW} \left(-\frac{1}{20} \frac{\gamma_E}{\kappa_E} - \frac{16}{5} \right) + \frac{k}{20\kappa_E} \\
 a_2 &= V_{PW} \left(\frac{1}{3} \frac{\gamma_E}{\kappa_E} + \frac{42}{3} \right) - \frac{k}{3\kappa_E} \\
 a_4 &= V_{PW} \left(-\frac{3}{4} \frac{\gamma_E}{\kappa_E} - 21 \right) + \frac{3k}{4\kappa_E} \\
 a_5 &= V_{PW} \left(\frac{7}{15} \frac{\gamma_E}{\kappa_E} + \frac{56}{5} \right) - \frac{7k}{15\kappa_E}
 \end{aligned} \tag{5.90}$$

5.4. Definição de novos parâmetros

Da mesma forma que no procedimento generalizado desenvolvido no Capítulo 4, para que a solução seja adaptável às várias situações de escoamento, todos os parâmetros necessários são determinados por correlações à parte.

Para a situação de escoamento considerando as três fases, faz-se necessário definir novos parâmetros para:

- Fator de relaxação gás da emulsão-bolha
- Frações volumétricas associadas ao gás, bolhas e partículas

5.4.1. O fator de relaxação gás da emulsão-bolha

Usou-se uma analogia direta com a expressão usada para calcular o fator de relaxação gás da emulsão-partícula.

$$F_{EP} = 150 \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_f^2} \frac{\mu_G}{\rho_P d_p^2} \right) + \frac{1.75}{\varepsilon_f^2} \frac{\rho_G V_s}{\rho_P d_p} \tag{4.16}$$

Admitindo-se que tal analogia seja possível, o fator de relaxação gás da emulsão-bolha é dado por:

$$F_{EB} = 150 \left(\frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_f^2} \frac{\mu_G}{\rho_B d_{Bm}^2} \right) + \frac{1.75}{\varepsilon_f^2} \frac{\rho_G V_s}{\rho_B d_{Bm}} \tag{5.91}$$

5.4.2 Frações volumétricas

As frações volumétricas usadas são:

$$\varepsilon_{mf} = 0.4 \tag{5.92}$$

O valor anterior para “ ε_{mf} ”, situa-se dentro da faixa comumente apresentada na literatura para a maioria das partículas usadas em fluidização.

$$\varepsilon_f = \frac{V_s \varepsilon_{mf}}{(1.05 V_s \varepsilon_{mf} + (1 - \varepsilon_{mf}) V_{mf})} \quad (5.93)$$

A fórmula anterior é a fração volumétrica de todo o gás presente no leito, ou seja, na emulsão e na fase de bolhas.

As demais frações volumétrica são dadas por:

$$\varepsilon_G = \varepsilon_f - \varepsilon_B \quad (5.94)$$

$$\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_{mf}}{1 - \varepsilon_{mf}} \quad (5.95)$$

$$\varepsilon_p = 1 - \varepsilon_f \quad (5.96)$$

5.5. Passos para procedimento generalizado usando nova fase

Os passos para a obtenção dos coeficientes de velocidade são:

- I. Definição valores de propriedades físicas
- II. Definição diâmetro e densidade de partícula
- III. Cálculo de V_{mf} (Eq. 4.17)
- IV. Determinação de V_s
- V. Cálculo d_{Bo} , d_{Bm} , V_{Bm} (Eqs 5.79, 5.80, 5.81)
- VI. Definição de ε_{mf} (Eq. 5.92)
- VII. Cálculo de ε_B (Eq. 5.95)
- VIII. Cálculo de ρ_{ef} :
 - $\rho_{ef} = (1 - \varepsilon_f)$ (Eq. 5.97)
- IX. Cálculo de μ_{ap} (Eqs. 4.13a,b)
- X. Cálculo de F_{EP} , F_{EB} (Eqs. 4.16, 5.91)
- XI. Cálculo de γ_E , κ_E , γ_B , κ_B (Eqs 5.28, 5.29, 5.33, 5.34)
- XII. Cálculo V_{Bh} (procedimento 2) (Eq. 5.82)
- XIII. Cálculo k_1 , k_2 (procedimento 1) e k (procedimento 2) (Eqs. 5.30, 5.35)
- XIV. Cálculo V_{PW} (Figura 4.1)

- XV.**Determinação dos coeficientes dos perfis (Eqs. 5.67(procedimento 1))
(Eqs 5.87(procedimento 2))
- XVI.**Determinação das taxas de circulação (Eq. 4.7)

Capítulo 6

Resultados

6.1. Resultados da revisão do procedimento de Soo

Na Tabela 6.1 são apresentados os valores dos parâmetros “ γ ”, “ κ ” e “ V_{PW} ”, obtidos usando as modificações no procedimento de Soo (1989a, b) sugeridas no Capítulo 3. Na Tabela 6.2 são apresentados os valores dos parâmetros obtidos por Soo (1989a, b).

Na Tabela 6.3 são apresentados os valores dos coeficientes de velocidade de partícula obtidos no presente trabalho. Os valores apresentados no trabalho de Soo encontram-se apresentados na Tabela 6.4. Da análise desta duas últimas tabelas verifica-se que o erro cometido por Soo (1989a, b) na resolução do sistema dado pelas Equações 3.42, não afetou significativamente os valores dos coeficientes.

Tabela 6.1. Valores parâmetros obtidos no presente trabalho

Situação de Escoamento n ^o	$\gamma - 1$	κ	V_{PW}
5	0.00974	0.00394815	0.00531665
6	0.00446	0.00274501	0.00558238
7	0.00074	0.000844693	-0.00361964
8	0.00065	0.000835707	-0.00461401
9	0.00077	0.000990939	-0.00815703

Tabela 6.2. Valores parâmetros apresentados por Soo (1989a, b).

Situação de Escoamento n ^o	$\gamma - 1$	κ	V_{PW}
5	0.009904	0.004014	0.005197
6	0.004514	0.002776	0.0008319
7	0.0007438	0.0008446	-0.001505
8	0.0006540	0.0008356	-0.001975
9	0.0007687	0.0009900	-0.003174

Tabela 6.3. Valores coeficientes obtidos no presente trabalho.

Situação de Escoamento n ^o	a_0	a_2	a_4	a_5
5	-0.085	0.527678	-1.13145	0.694089
6	-0.12	0.759063	-1.64928	1.0158
7	0.2260	-1.48012	3.29227	-2.04177
8	0.2910	-1.90616	4.24042	-2.62987
9	0.4380	-2.86018	6.34976	-3.93574

Tabela 6.4. Valores coeficientes apresentados por Soo (1989a, b).

Situação de Escoamento n ^o	a_0	a_2	a_4	a_5
5	-0.085	0.3922	-0.4930	0.18631
6	-0.12	0.56657	-0.75466	0.30891
7	0.2260	-1.20222	2.82812	-1.5440
8	0.2910	-1.5557	2.6475	-1.3847
9	0.4380	-2.3027	3.8104	-1.9489

Na Figura 6.1 são apresentados os perfis de velocidades axiais de partícula obtidos no presente trabalho para as cinco situações de escoamento estudadas por Lin (1985). Os perfis obtidos por Soo (1989a, b) encontram-se mostrados na Figura 6.2. Comparando os gráficos verifica-se um ligeiro decréscimo dos valores de velocidade em relação aos perfis reportados

por Soo (1989a, b). O ponto na qual ocorre a mudança de sinal da velocidade axial de partícula foi também ligeiramente deslocado em direção ao centro. Outro fato passível de ser observado através das figuras é o relativo aumento do valor da velocidade de deslizamento de partícula na parede “ V_{PW} ” em relação aos valores obtidos por Soo.

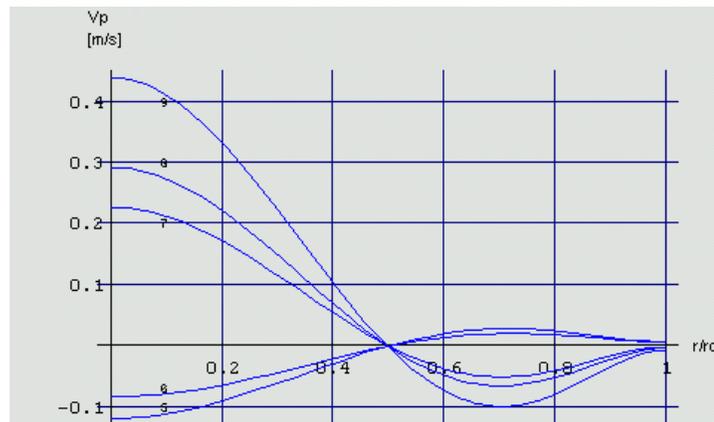


Figura 6.1. Perfis de velocidades axiais de partículas nas cinco situações de escoamento testadas por Lin (1985) obtidos no presente trabalho

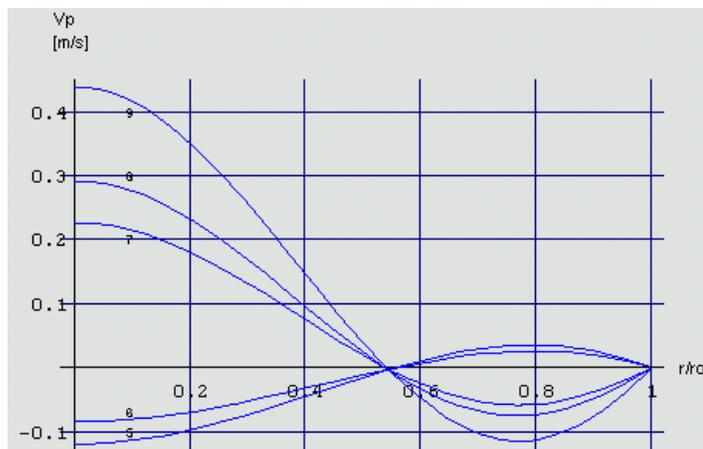


Figura 6.2. Perfis de velocidades axiais de partículas nas cinco situações de escoamento testadas por Lin(1985), obtidos por Soo (1989a, b)

Para as cinco situações de escoamento estudadas por Lin (1985), são mostrados os campos de velocidade de partícula obtidos no presente trabalho.

Nas situações de escoamento n° 5 e n° 6 (Figuras 6.3 e 6.4) verifica-se claramente um aumento de velocidades na célula AWDC. Nas situações de escoamento n° 7, 8 e 9 (Figuras 6.5, 6.6, 6.7) é constatado o crescimento da célula ACDW. Da comparação das Figuras 6.3 a 6.7 com a Figura 6.8, na qual encontra-se esboçado o padrão circulatório descrito por Lin,

verifica-se uma boa concordância com as situações de escoamento n^{os} 7, 8 e 9. Verifica-se contudo, que a solução obtida não prediz o ponto de transição da célula AWDC para a célula ACDW, pois observa-se uma tendência de aumento de intensidade da célula n^o 5 para a n^o 6. O tamanho relativo da célula primária também não é predito pelo presente modelo.

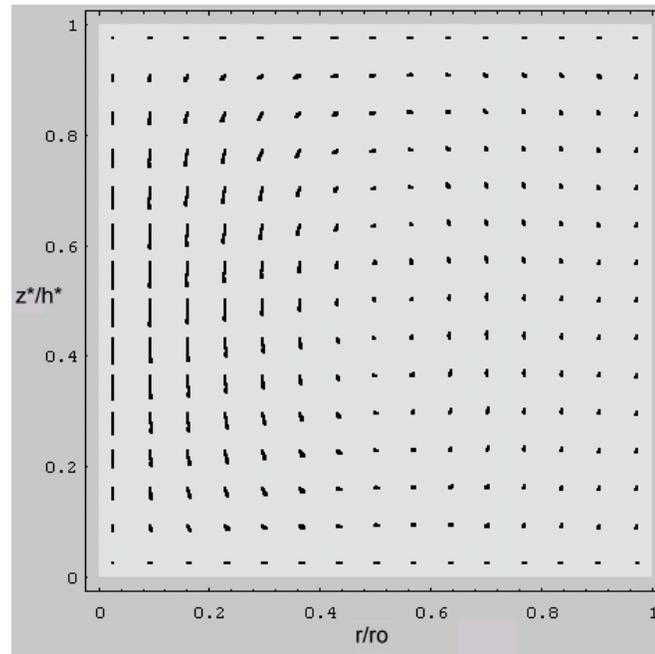


Figura 6.3. Campo de velocidades de partículas [escoamento n^o 5(Lin, 1985)]

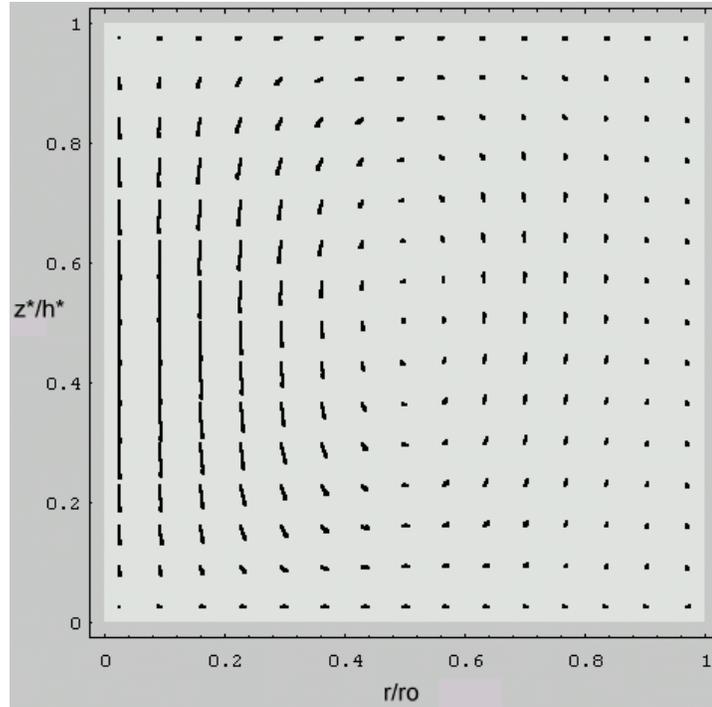


Figura 6.4. Campo de velocidades de partículas [escoamento n° 6(Lin, 1985)]

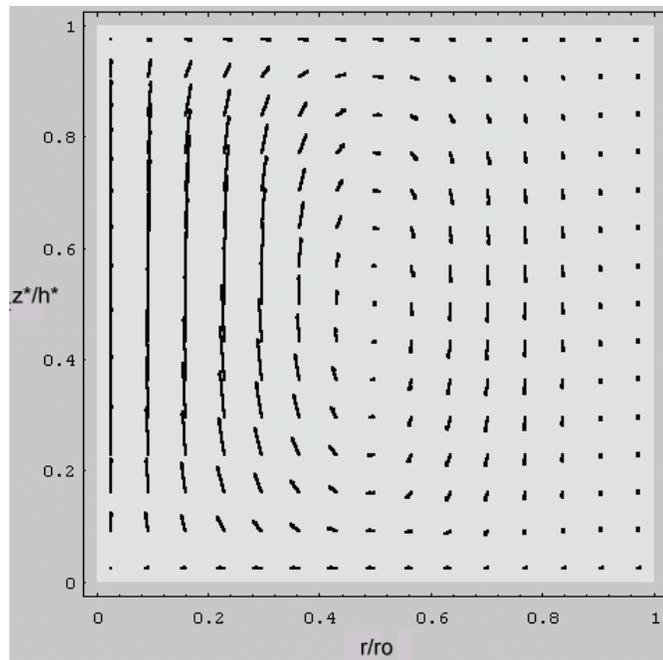


Figura 6.5. Campo de velocidades de partículas [escoamento n° 7(Lin, 1985)]

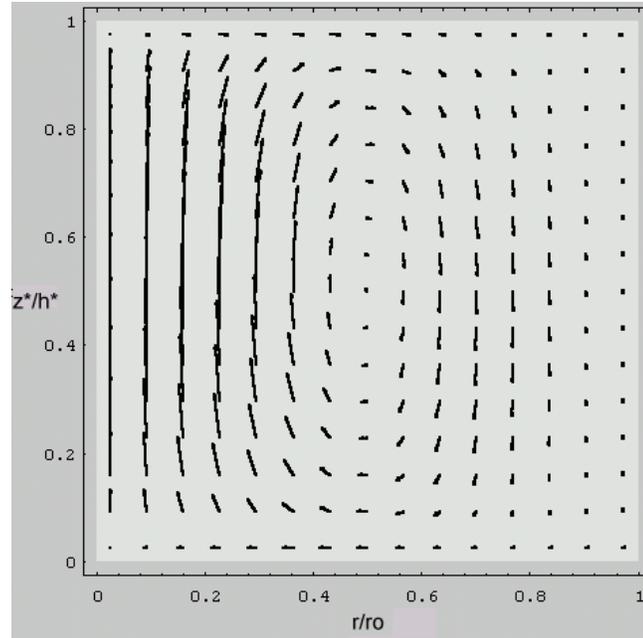


Figura 6.6. Campo de velocidades de partículas [escoamento nº 8(Lin, 1985)]

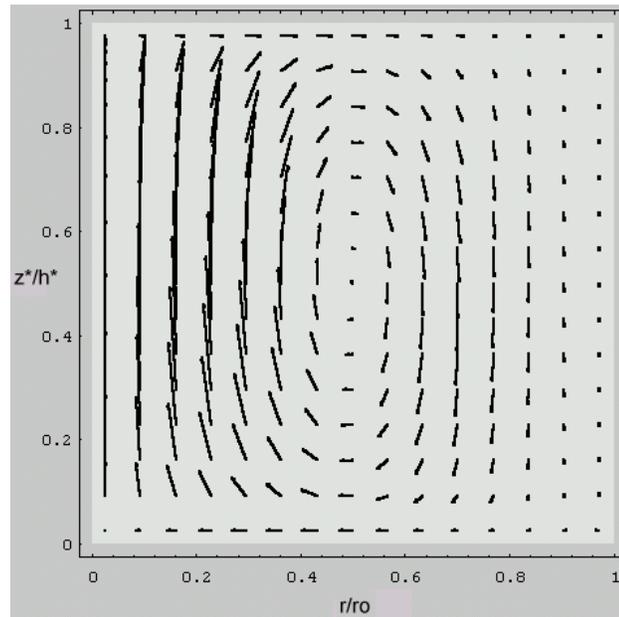


Figura 6.7. Campo de velocidades de partículas [escoamento nº 9(Lin, 1985)]

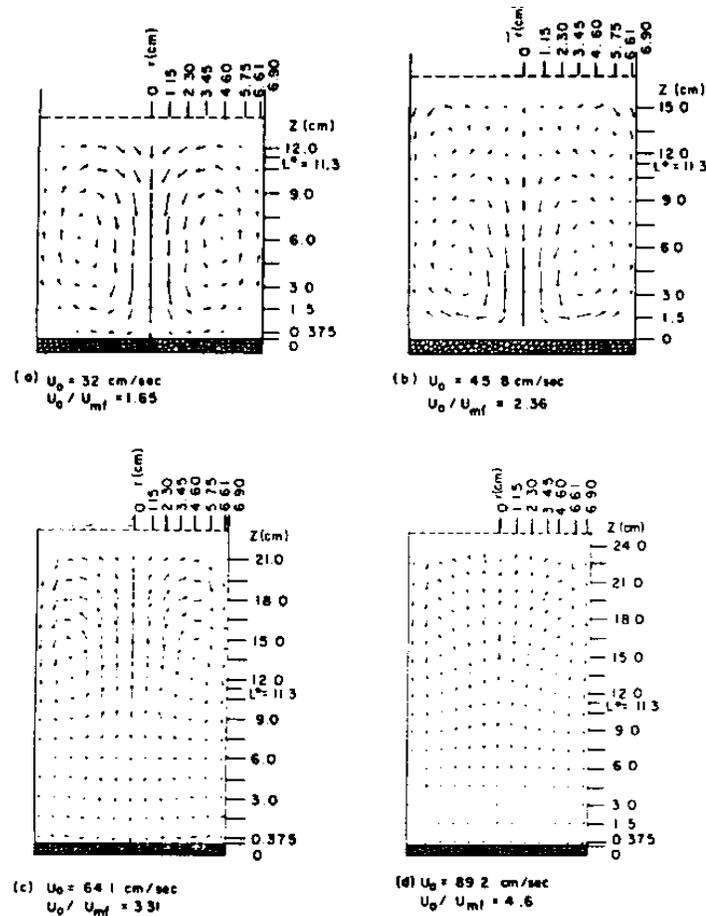


Figura 6.8. Modelos de circulação para situações de escoamento n^{os} 5, 6, 7, 8 conforme esboçado por Lin (1985)

6.3. Comparação de resultados de correlações semi-empíricas

Os valores da taxa de circulação por Talmor e Benenati (1963) e por Geldart (1985), dentro da faixa de valores experimentais levantados por Talmor e Benenati, são apresentados na Figura 6.9. É observável uma proximidade maior entre os valores preditos pelas duas correlações em uma faixa intermediária de diâmetros de partícula e velocidade do gás.

Na Figura 6.10 é mostrado um ajuste linear feito para as duas correlações. Verifica-se que os valores de Geldart são em média duas a cinco vezes maiores que os de Talmor e Benenati.

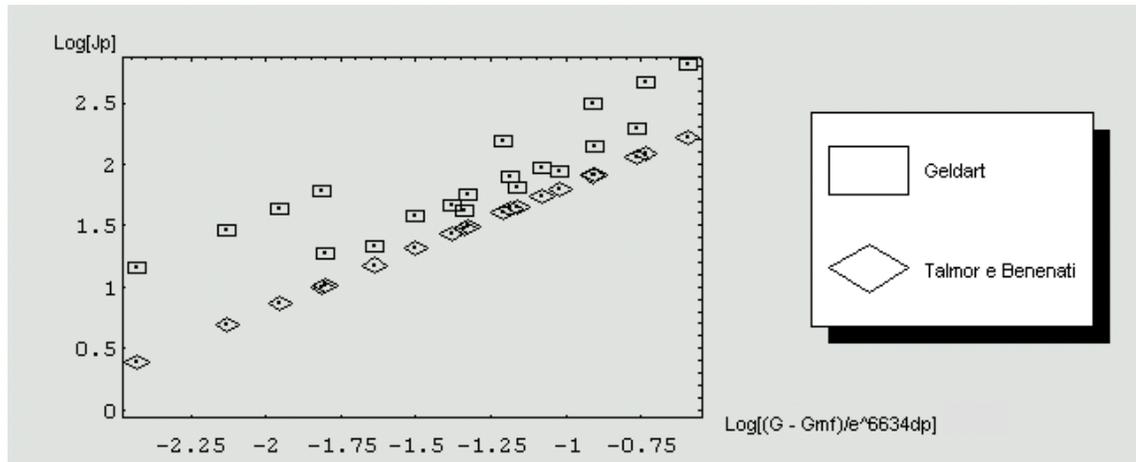


Figura 6.9. Taxas de circulação segundo correlações semi-empíricas

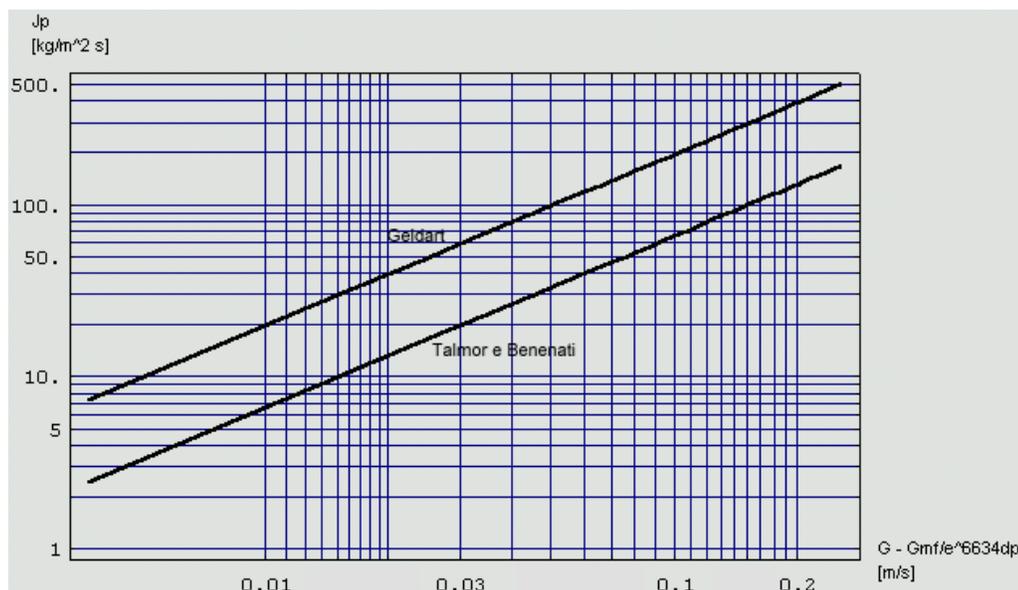


Figura 6.10. Ajuste taxas de circulação segundo correlações semi-empíricas

6.4. Resultados próprios, comparação com correlações semi-empíricas

6.4.1 Situação bifásica

Usando-se o fluxograma da Seção 4.6 foram obtidas as taxas de circulação na faixa dos experimentos de Talmor e Benenati. Os resultados obtidos e ajuste encontram-se apresentados nas Figuras 6.11 e 6.12.

Da figura 6.11 verifica-se que os resultados obtidos situaram-se em uma faixa intermediária as correlações de Talmor e Benenati e de Geldart para valores de “ $\frac{G - G_{mf}}{e^{6634d_p}}$ ”

relativamente baixos. Em uma faixa de “ $\frac{G - G_{mf}}{e \cdot 6634d_p}$ ” maior, os valores mostraram-se inferiores aos de ambas as correlações.

Na Figura 6.12, foram efetuados ajustes para os resultados obtidos por Geldart e pelo presente trabalho. Para um fator de correlação de aproximadamente 0,9, verifica-se que ambos resultados predizem uma variação similar de taxa de circulação. Os valores por Talmor e Benenati estão em conformidade com o ajuste efetuado pelos próprios autores.

Os gráficos das Figuras 6.11 e 6.12 basearam-se no uso da correlação de viscosidade segundo Saxton (Equação 4.13a). O efeito do uso da correlação de viscosidade segundo Kai para a viscosidade aparente é mostrado nas Figuras 6.13 e 6.14.

Da análise das Figuras 6.13 e 6.14 é observável um relativo aumento dos valores da taxa de circulação em relação aos apresentados nas Figuras 6.11 e 6.12. Dadas as divergências dos resultados previstos pela correlação de Kai em relação aos obtidos pelas outras correlações para faixas de velocidades do gás e diâmetros de partículas maiores, nos pareceu razoável usar a equação de Saxton para descrever a viscosidade aparente nas demais situações estudadas.

Para a situação bifásica também estudou-se o efeito da retirada das condições de contorno adicionais, conforme seção 3.6.2. As Figuras 6.15 e 6.16 mostram os resultados obtidos nesta situação. Além da queda dos valores em relação à situação esboçada nas Figuras 6.11 e 6.12, verifica-se um relativo desvio da variação da taxa de circulação em relação à variação prevista pelas duas correlações semi-empíricas.

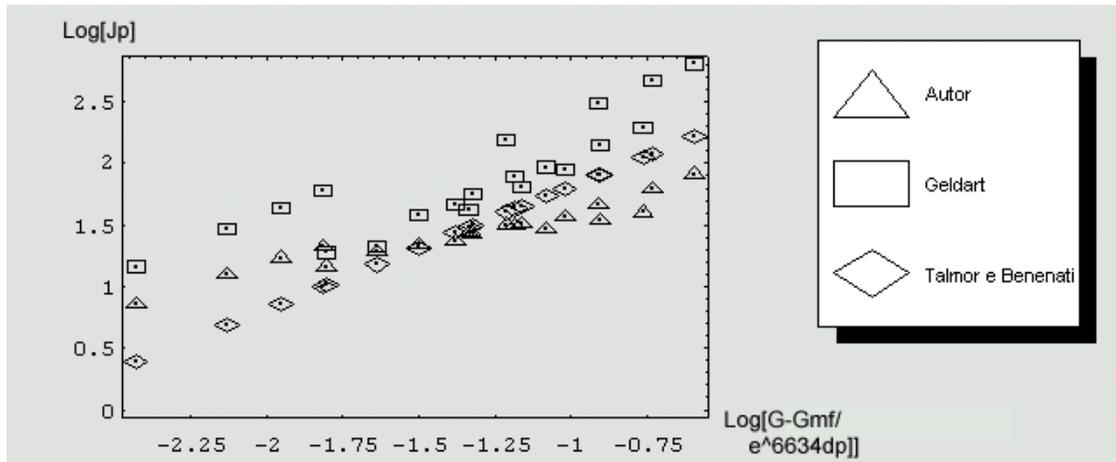


Figura 6.11. Valores de circulação para situação bifásica (utilizando viscosidade computada segundo Saxton, 1970)

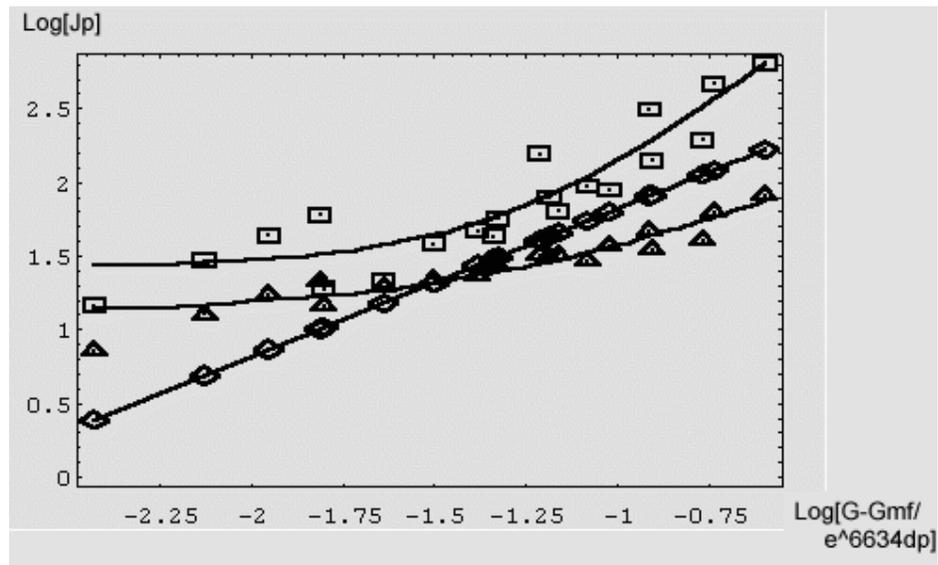


Figura 6.12 Ajuste de circulação para situação bifásica (utilizando viscosidade computada segundo Saxton, 1970) (Legenda conforme figura anterior)

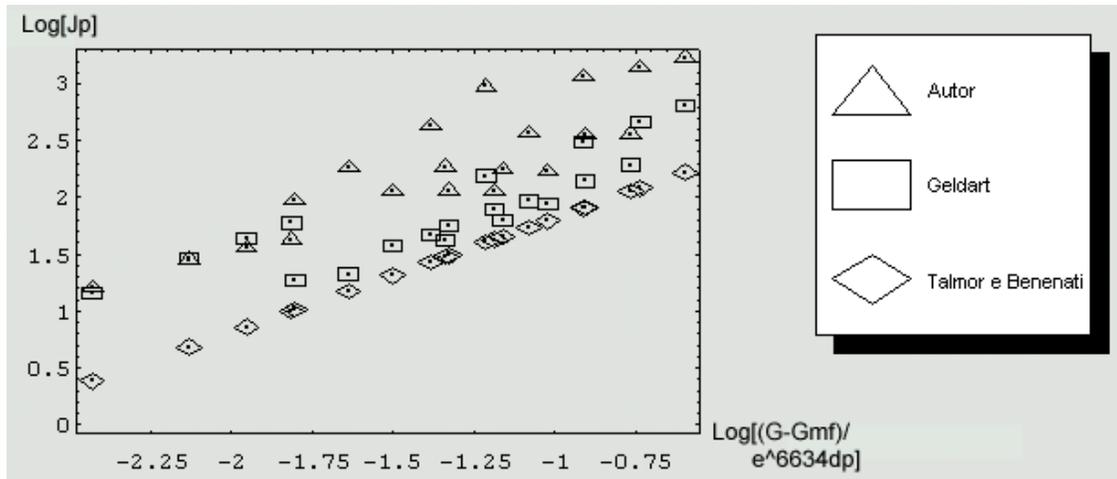


Figura 6.13. Valores de circulação para situação bifásica (viscosidade computada segundo Kai, 1991)

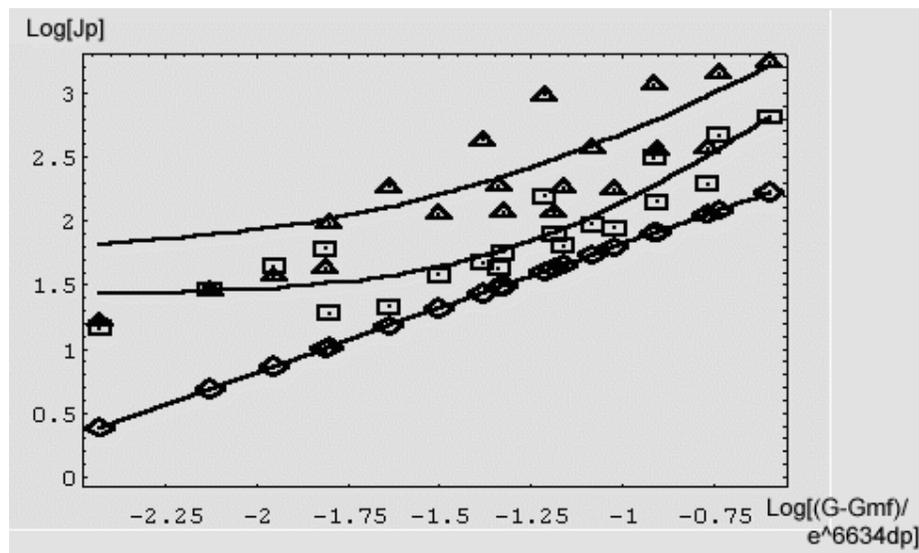


Figura 6.14. Ajuste de circulação para situação bifásica (viscosidade computada segundo Kai, 1991) (Legenda conforme figura anterior)

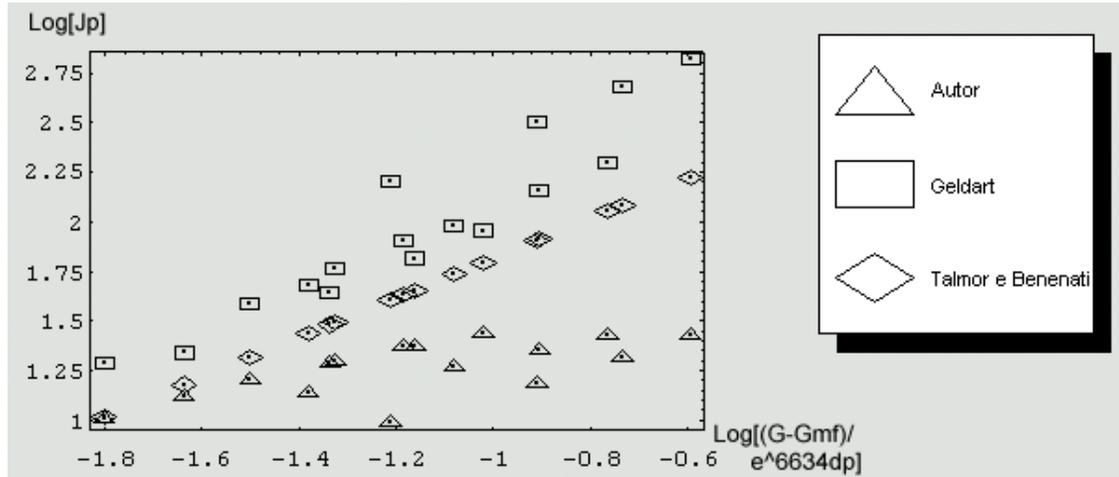


Figura 6.15. Valores de circulação para situação bifásica desconsiderando condições de contorno adicionais

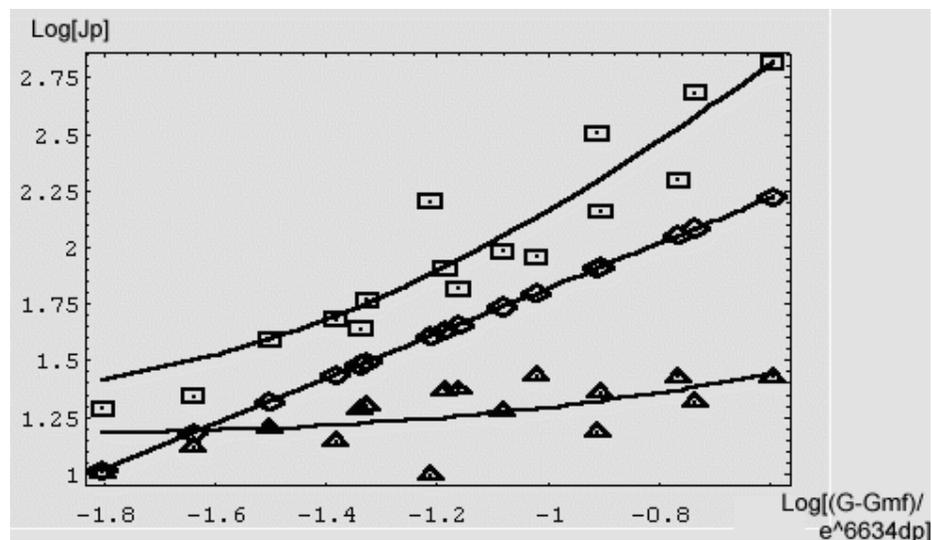


Figura 6.16. Ajuste de circulação para situação bifásica desconsiderando condições de contorno adicionais (Legenda de sinais conforme figura anterior)

6.4.2 Situação trifásica

A influência da inclusão da fase de bolhas aos equacionamentos básicos é mostrada nas Figuras 6.17 e 6.18.

Pela Figura 6.17 verifica-se que os valores de taxa de circulação aumentaram em relação aos observados na situação bifásica.

Da análise da Figura 6.18, verifica-se um desvio de comportamento de variação em relação ao ajuste feito para os resultados previstos pela correlação de Geldart.

O efeito, sobre as taxas de circulação, do uso das correlações de velocidade para a fase de bolhas é mostrado nas Figuras 6.19 e 6.20. Da análise das figuras conclui-se que os valores obtidos são extremamente elevados e apresentam uma variação extremamente divergente dos resultados de Talmor e Benenati e de Geldart. Possivelmente uma revisão do procedimento é requerida para esta situação.

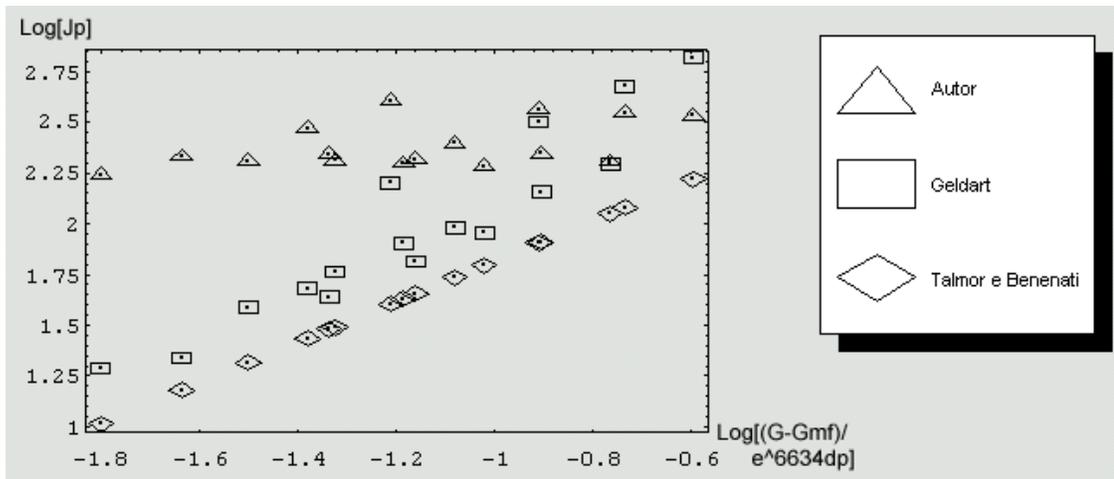


Figura 6.17. Valores de circulação para situação trifásica (procedimento 1)

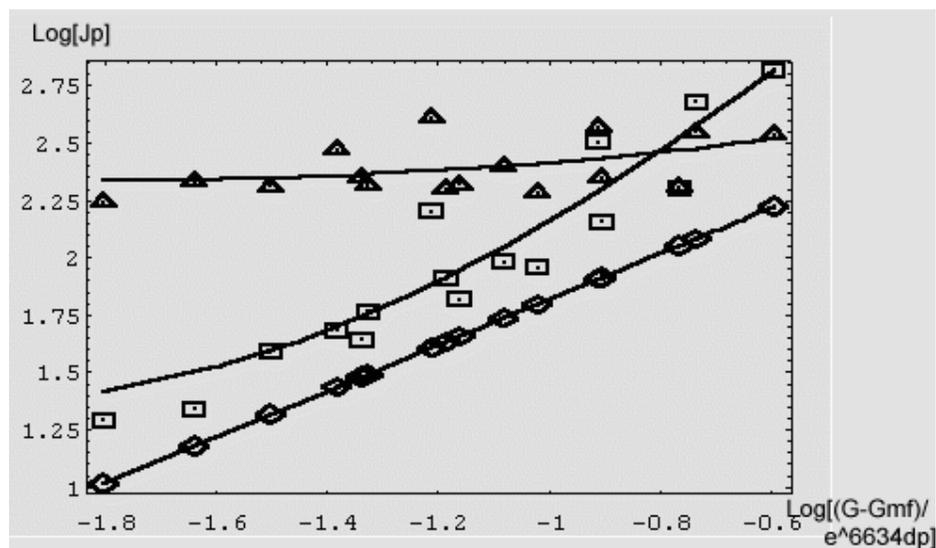


Figura 6.18. Ajuste de circulação para situação trifásica (procedimento 1) (Legenda de sinais conforme figura anterior)

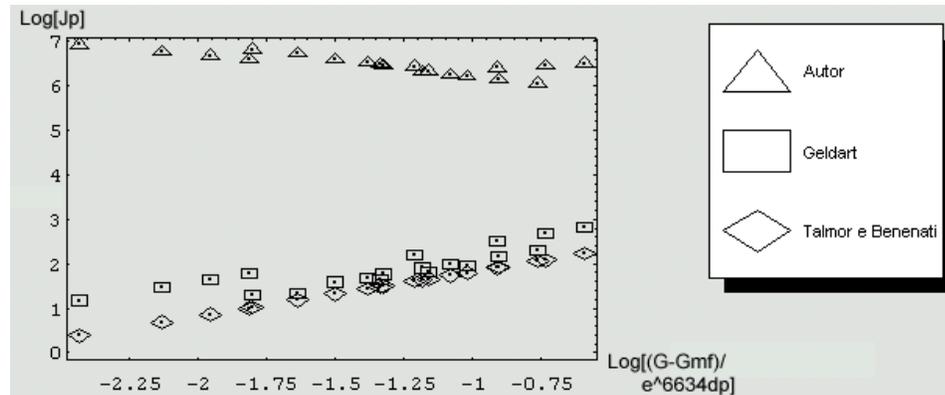


Figura 6.19. Valores de circulação para situação trifásica (procedimento 2)

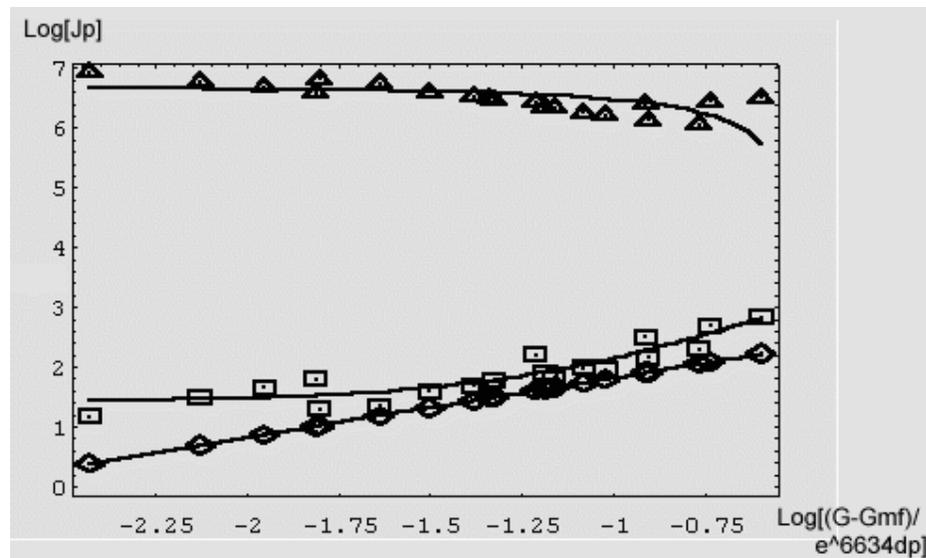


Figura 6.20. Ajuste de circulação para situação trifásica (procedimento 2) (Legenda de sinais conforme figura anterior)

6.5 Influência de parâmetros

A influência dos parâmetros “ μ_{ap} ”, “F” e “ V_{PW} ” na taxa de circulação foi estudada.

O efeito da variação da viscosidade aparente sobre a taxa de circulação foi reportado nas Figuras 6.11 a 6.14.

Da análise destes resultados é possível verificar-se que a taxa de circulação é relativamente sensível à variação de viscosidade.

As Figuras 6.21 e 6.22 mostram a influência da variação do fator de relaxação “F” sobre a taxa de circulação. Verifica-se que um aumento do fator de relaxação torna os resultados obtidos mais próximos dos de Geldart.

O efeito da variação da velocidade axial de partícula na parede é mostrada nas Figuras 6.23 e 6.24. Notadamente menores valores de velocidade axial de partícula na parede conduzem à uma diminuição da taxa de circulação.

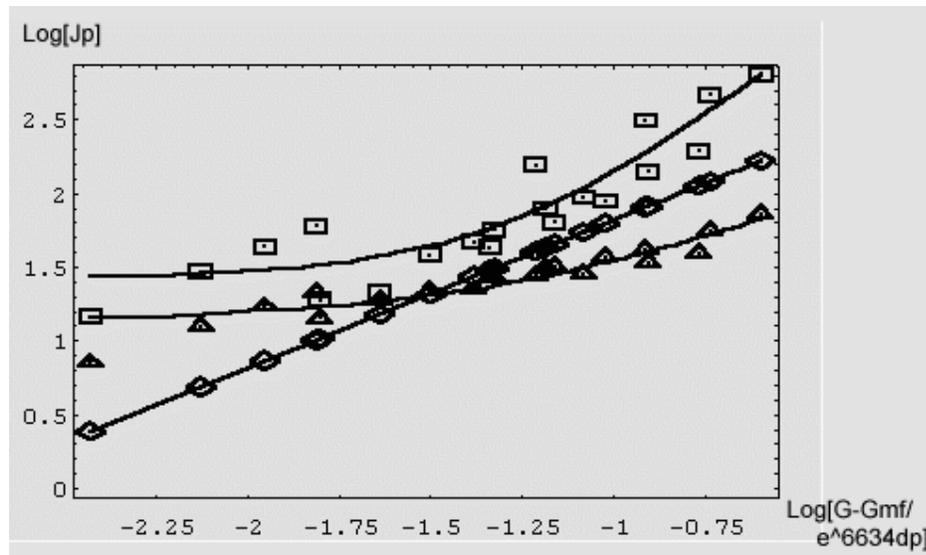


Figura 6.21. Efeito da redução de 20 % no valor do fator de relaxação (Legenda conforme Figura 6.19)

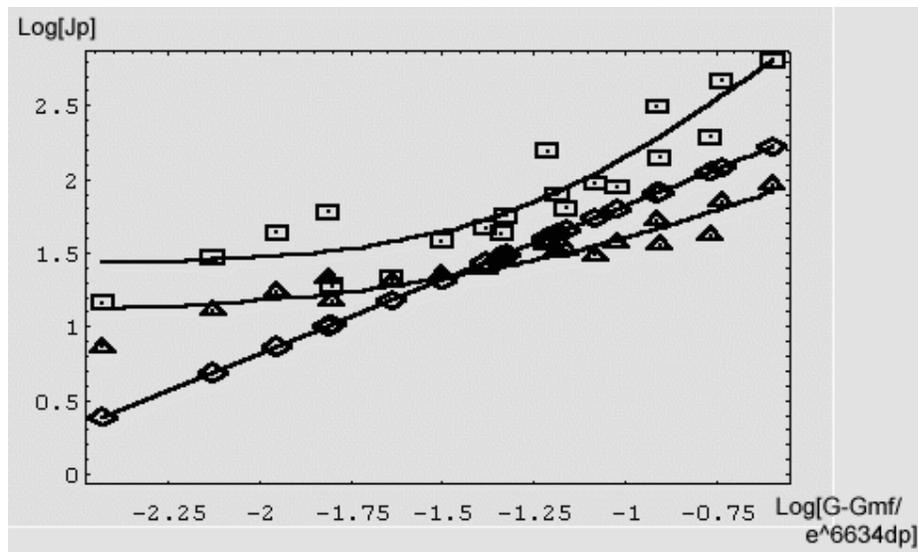


Figura 6.22. Efeito do aumento de 20% no valor do fator de relaxação (Legenda conforme Figura 6.19)

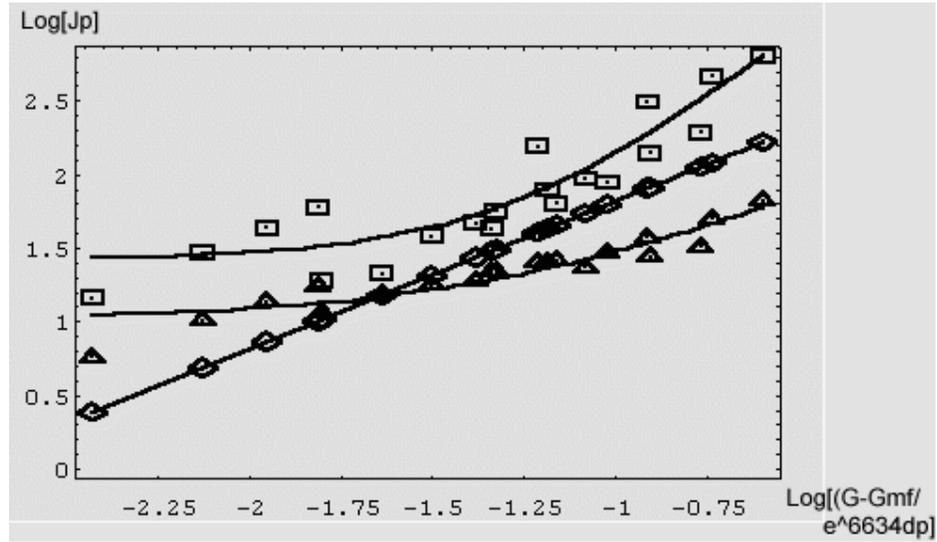


Figura 6.23. Efeito da redução de 20% no valor da velocidade axial de partícula na parede(Legenda conforme Figura 6.19)

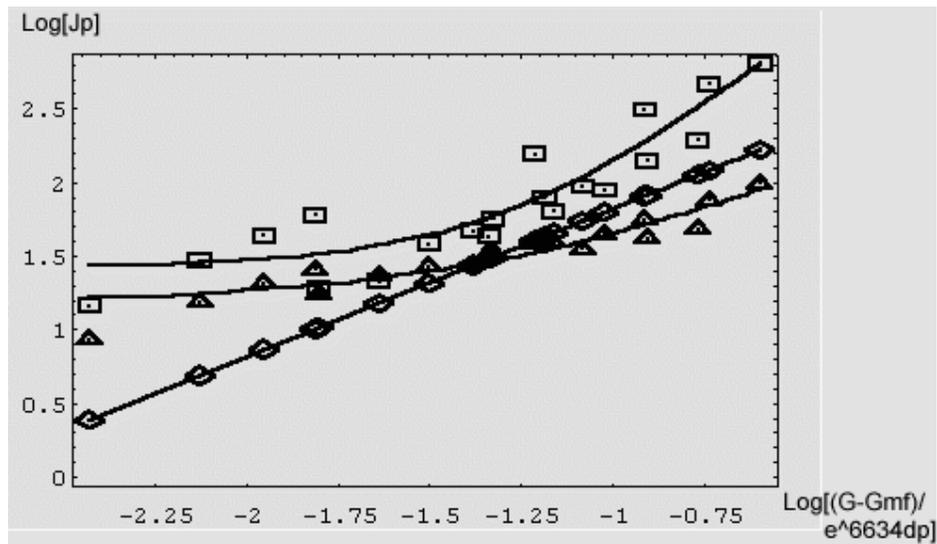


Figura 6.24. Efeito do aumento de 20% no valor da velocidade axial de partícula na parede(Legenda conforme Figura 6.19)

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões

7.1 Conclusões

No presente trabalho, os principais pontos cobertos foram:

1. Uma revisão crítica dos trabalhos de Soo(1989a, b) foi efetuada. As simplificações adotadas por tal autor, bem como seus resultados foram analisados.
2. Efetuou-se um estudo dos principais parâmetros que influenciam a taxa de circulação obtida no presente trabalho. A sensibilidade da taxa de circulação à variação de tais parâmetros também foi verificada.
3. Um novo equacionamento, no qual a fase de bolhas é incluída é sugerido. O cálculo da taxa de circulação para esta nova situação foi efetuado.
4. Uma possível extensão do desenvolvimento para um leito fluidizado com partículas de densidades e/ou tamanhos diferentes é sugerida.(Apêndice A)

Apesar das simplificações adotadas, o equacionamento e procedimento de solução descrito neste trabalho para a obtenção de perfis de velocidade de sólidos em leito fluidizado borbulhante conduziu a resultados que:

1. São muito mais simples de aplicação em computações quando comparados com os que incluem o conjunto completo das equações de conservação de quantidade de movimento em várias direções;
2. Permitem uma descrição fenomenológica dos processos envolvidos;
3. Levam a resultados quantitativos aceitáveis para as taxas de circulação de sólidos quando comparados com os computados utilizando correlações empíricas ou semi-empíricas encontradas na literatura;
4. Poderá ser de utilidade para a melhoria da qualidade de resultados gerados a partir de modelos matemáticos e programas de simulação para reatores de leito-fluidizado.

Na comparação com o padrão circulatório esboçado por Lin (1985), razoável concordância foi obtida. Entretanto, o modelo sugerido por Soo (1989a, b) e utilizado aqui, não prediz a transição do comportamento AWDC para AWDC. Outra limitação do presente modelo está relacionada à impossibilidade de predizer o aumento de tamanho da célula primária de circulação.

O parâmetro usado para comparação dos resultados do procedimento com dados da literatura foi a taxa de circulação. Ressalta-se contudo, que não existe abundância de resultados experimentais para as taxas de mistura de sólidos particulados em leitos fluidizados.

Embora os valores computados para as taxas de circulação gerados segundo as correlações de Talmor e Benenati (1963) e de Geldart (1986) concordem em algumas faixas de diâmetro de partícula e velocidade do gás, discrepâncias importantes foram observadas em outras regiões. Vários fatores podem ter levado a isto, entre os quais estão os métodos de determinação experimental utilizado por tais autores. A técnica empregada por Talmor e Benenati, de congelamento e seccionamento do leito pode conduzir a resultados distorcidos a velocidades altas do gás. Por outro lado a técnica empregada por Geldart baseou-se em medições de parâmetros referentes às bolhas, sendo limitada portanto à acurácia das medições e ao equipamento utilizado.

No presente trabalho as taxas de circulação diferiram das obtidas através das correlações de Talmor e Benenati e de Geldart na mesma ordem de grandeza que os desvios encontrados entre valores calculados por essas duas correlações semi-empíricas. Alguns fatores responsáveis por estas diferenças podem ser listados: viscosidade aparente do leito, velocidade axial de partícula na parede " V_{PW} " e supressão de termos no equacionamento básico usado.

Como pôde ser observado dos resultados apresentados no Capítulo 6, a taxa de circulação é sensivelmente dependente dos valores de viscosidade aparente do leito usadas. A pesquisa bibliográfica mostrou existir uma multiplicidade de técnicas e situações empregadas nos experimentos de medição de viscosidade, com relativa diferença de resultados previstos pelas mesmas. Para o presente trabalho, a correlação de viscosidade aparente mais adequada foi a de Saxton (1971).

A correlação para velocidade na parede segundo Geldart conduziu a resultados satisfatórios para os procedimentos adotados no presentes trabalho.

A inclusão da fase de bolhas no equacionamento conduziu a maiores afastamentos dos valores de taxa de circulação em relação aos previstos pelas correlações de Talmor e Benenati e de Geldart. De fato, parece que alguns termos necessitam ser reavaliados em seu uso no equacionamento básico para eventualmente se chegar a melhores resultados. Outra possível razão para os resultados bifásicos estarem mais próximos dos previstos pelas correlações utilizadas, caberia a dependência dos resultados da velocidade axial de partícula na parede (a qual é obtida de dados experimentais) e de parâmetros macroscópicos, dependentes de propriedades globais do leito não associadas somente à fase de bolhas.

A proximidade de dados obtidos em algumas faixas de velocidade e diâmetros leva a concluir que existe uma melhor adequação do procedimento aqui adotado para faixas intermediárias de diâmetros de partícula e velocidades.

7.2. Sugestões para trabalhos futuros

Como tópicos passíveis de serem explorados em desenvolvimentos posteriores para melhorias do presente trabalho, cita-se:

- Reformulação da solução para predição dos fenômenos de crescimento da célula primária de circulação e transição do regime AWDC para ACDW.
- Comparação dos resultados com outras correlações presentes na literatura, tais como as de coeficiente difusivo
- Determinações experimentais da velocidade de deslizamento de partícula na parede, para partículas de granulometria e densidade diferentes.
- Determinações experimentais da viscosidade aparente do leito visando obtenção de correlação mais abrangente.
- Estudo da inclusão dos termos de troca de quantidade de movimento entre bolhas e partículas, visando melhorar solução tri-fásica do Capítulo 5.
- Avaliação dos parâmetros necessários para a obtenção dos perfis de velocidade para três tipos de partícula conforme desenvolvimento do Apêndice A.

Bibliografia

- AVIDAN, A.A., YERUSHALMI, J. Solids mixing in expanded top fluid bed. **AIChE Journal**, v.31, p.835-841, 1985.
- BAYENS, J., GELDART, D. Predictive calculations of flow parameters in gas fluidized bed and fluidization behavior of various powders. In: **Proceedings International Symposium on Fluidization and its applications**, Toulouse, 1973, p. 263-273.
- BELLEGARDT, M. A novel method for the investigation of particle mixing in gas-solid systems. **Powder Technology**, v.48, p.173-180, 1987.
- BERRUTI, F. Measuring and modelling lateral solids mixing in a three dimensional batch gas fluidized bed reactor. **Canadian Journal of Chemical Engineering**, v.64, p. 48-55, 1986.
- BOUILLARD, J.X., et al. Hydrodynamics of erosion of heat exchange tubes in fluidized bed combustors. **Canadian Journal of Chemical Engineering**, v.67, p.218-229, 1989.
- BOUILLARD, J.X., et al. Hydrodynamics of fluidization: fast-bubble simulation in a two dimensional fluidized bed. **Powder Technology**, v.66, p.107-118, 1991.
- BROTZ, W. **Chemical Engineering Technology**, 28, p.165, 1956.
- CHIBA, T., **Journal of Chemical Engineering of Japan**, v.10, p.206, 1977.
- CHIBA, T., et al. In: KWAK, M., KUNII, D., **Fluidization science and technology**. Beijing: Science Press. p.69-79, 1982.
- CRANFIELD, R. R. Solids mixing in fluidized beds of large particles. **AIChE Symposium Series**, v.74, n.176, p.54-59, 1978.
- DAMIA, A. J., CAPRARI, J. Application of powder coatings: viscosity and density measurements in a conventional fluidized bed. **Journal of Chemical Technology and Biotechnology**, v.44, p.261-274, 1989.
- DEEMTER, J. J. In: DAVIDSON, J.F., et al. **Fluidization**. Academic Press: New York, p.331. 1985.
- ERGUN, S. Fluid flow through packed columns. **Chemical Engineering Progress**, v.48, p.91-94, 1952.

- ESIN, A., ALTUN, M. Correlation of axial mixing of solids in fluidized beds by a dispersion coefficient. **Powder Technology**, v.39, p.241-244, 1989.
- ETTEHADIEH, B. et al. Motion of solids, jetting and bubbling dynamics in a large jetting fluidized bed. **Powder Technology**, v.54, p.243-254, 1988.
- FAN, L. T., et. al. Radial particle mixing in gas-solids fluidized beds. **Chemical Engineering Science**, v.41, p.117-122, 1986.
- GELDART, D., BAYENS, J., Solids Mixing. In: GELDART, D., **Gas Fluidization Technology**. GB: John Wiley & Sons, 1986.
- GELDART, D., et al. **Powder Technology**, v.30, p.195, 1981.
- GIDASPOW, D.,BOUILLARD, J.X., Hydrodynamics of fluidization: fast-bubble simulation in a two dimensional fluidized bed. **Powder Technology**, v.66, p.107-118, 1991.
- GIDASPOW, D., DING, J., A bubbling fluidization model using kinetic theory of granular flow, **AIChE Journal**, v.36, n.4, p.523-538, 1990b.
- GIDASPOW, D., ETTEHADIEH, B. **Industrial Engineering Chemical Fundamentals**, 22, p.193, 1983.
- GIDASPOW, D., TSUO, Y.P. Computation of flow patterns in circulating fluidized beds. **AIChE Journal**, v.36, n.6, p.885-896, 1990a.
- GOGOLEK, P. E., Comment on two papers by S. L. Soo on particle motion in fluidized beds. **Powder Technology**, v.64, p.285-286, 1991.
- GRACE, J. R. Fluidized bed hydrodynamics In: HETSORONI, G. **Handbook of Multiphase systems**. New York: McGraw-Hill, 1982, p.8.65-8.64.
- GRACE, J. R., The viscosity of fluidized beds. **Canadian Journal of Chemical Engineering**, v.48, p.30-33, 1970.
- HEERTJES, P.M., et al. In: DRINKENBURG, A.A.H. **Proceedings International Symposium on fluidization**, Netherlands: University Press, p.476, 1967.
- HEERTJES, P.M., et al. The measurement of local mass flow rates and particle velocities in fluid-solid flow, **Powder Technology**, 4, p.38, 1971.
- HONG, R. et al. Numerical simulation and verification of a gas-solid jet fluidized bed. **Powder Technology**, v.87, p. 73-81, 1996.
- ISHI, M., **Thermo-fluid Dynamic Theory of Two-phase flow**. Paris: Eyrolles, 1975, 248p.
- ISHI, M., Two-fluid model for two-phase flow In: HEWITT, G. F., et. al. **Multiphase Science and Technology**. New York: Hemisphere, 1990, v.5, p.1-63.

- KAI, T. et al. Relationship between apparent bed viscosity and fluidization quality in a fluidized bed with fine particles. **Journal of Chemical Engineering of Japan**, v.24, n.4, p.494-500, 1990.
- KENNARD, E. H. **Kinetic Theory of Gases**. New York: McGraw-Hill, 1938.
- KLEIN, H.H., SCHARFF, M.F. ASME PAPER 82-FE-6, 1982.
- KOZANOGLU, B., LEVY, E.K. Mixing dynamics in a bubbling fluidized bed with binary solids. In: POTTER, O.E., NICKILIN, D.J. **Fluidization VII**: New York, Engineering Foundations, p.141-147, 1992.
- KUIPERS, J. A. M. Computer simulation of the hydrodynamics of a two-dimensional gas-fluidized bed, **Computers and Chemical Engineering**, v.17, n.8, p.839-858, 1993.
- KUNII, D., LEVENSPIEL, O. **Fluidization Engineering**. Washington: Butterworth-Heinemann, 1991, p.146-147.
- LIM, K. S. AGARVAL, P.K. Mixing of homogeneous solids in bubbling fluidized beds: theoretical modelling and experimental investigation using digital image analysis. **Chemical Engineering Science**, v.48, p.2251-2265, 1993.
- LIM, K. S., et. al. Hydrodynamics of gas-solid fluidization. **International Journal of Multiphase Flow**, v.21, p.141-193, 1995.
- LIN, J. S., et al. A novel radioactive particle tracking facility for measurement of solids motion in gas fluidized beds. **AIChE Journal**, v.31, n.3, p.465-473, 1985.
- LUK, S. Experimental observations of wall slip: tube and packed bed flow. **Industrial Engineering Chemical Research**, v.26, p.1609-1616, 1987.
- LYCZKOWSKY, R. Validation of computed solids hydrodynamics and pressure in a bubbling atmospheric fluidized bed. **Powder Technology**, v.76, p.65-77, 1993.
- MARSHECK, R. M., GOMEZPLATA, A. Particle flow patterns in a fluidized bed, **AIChE Journal**, 11, p.167, 1965.
- MAY, W. G. **Chemical Engineering Progress**, v.55, p.49, 1959
- MIYAUCHI, T. et al. **Advances in Chemical Engineering**, 11, p.275, 1981.
- MOROOKA, S. et al. Measurement of local fines movement in a fluidized bed of coarse particles by a fluorescent tracer technique. **Powder Technology**, v.58, p.271-277, 1989.
- NIENOW, A.W., et al. In: DAVIDSON, J.F., KEAIRNS, D.L. **Fluidization**. New York: Cambridge University Press, p.146, 1978.
- OKHI, K., SHIRAI, T. In: KEAIRNS, D.L. **Fluidization Technology**. New York: Hemisphere, p.95, 1973.

- POTTER, O.E., THIEL, W.J. **AIChE Journal**, 24, p.561, 1978.
- PRITCHETT, J.W., et al. **AIChE Symposium series**, 74, p.134, 1978.
- ROWE, P. N., PARTRIDGE, B. A. **Proceedings of Symposium in Interaction between Fluids and Particles**, Institute of Chemical Engineers. p.135. 1962.
- SCHARFF, M.F. Computer modelling of mixing and agglomeration in coal conversion reactors, v.I-II, DOE/ET/10329-1211, JAYCON, 1982.
- SCHNEYER, G.P. et al. Computer modelling of coal gasification reactors: Final report for june 1975-1980, DOE/ET/10247, Systems science and software, 1981.
- SCHUERGERL, K., In: DAVIDSON, J. F., HARRISON, D. **Fluidization**. New York: Academic Press, 1971, p.261-292.
- SAXTON, J. A., et al. **AIChE Journal**, v.16, p.120, 1970.
- SIMONS, S.J.R. et al. The study of particle motion in fluidized bed using positron emission tomography. **Proceedings of ECAPT**. Karlsruhe, Germany. 1993.
- SITNAI, O. **Industrial Engineering Chemical Process Design and Development**, 20, p.533, 1981.
- SOO, S. L. **Fluid Dynamics of Multiphase Systems**, Blaisdell, 1967, p.185-186.
- SOO, S. L. In: HETSRONI, G. **Handbook of Multiphase Systems**, New York: Hemisphere, 1983, p.3-16/3-17.
- SOO, S. L. Note on motions of phases in a fluidized bed. **Powder Technology**, v.45, p.169-172, 1986.
- SOO, S. L. Circulatory motion of fine particles in a fluidized bed. **Aerosol Science and Technology**, 9, 153-160, 1988.
- SOO, S. L. Average circulatory motion of particles in fluidized bed. **Powder Technology**, v.57, p.107-117, 1989a.
- SOO, S. L. **Particulates and Continuum**, New York: Hemisphere, 1989b, p.342-367.
- SYAMLAL, M., GIDASPOW, D. **AIChE Journal**, 31, p.127, 1985.
- STAUB, F. W., CANADA, G. S., In: DAVIDSON, J. F., KEAIRNS, D. L. **Fluidization**. New York: Cambridge University Press, p.339, 1978 p.339.
- TALMOR, E., BENENATI, R. F. **AIChE Journal**, v.9, p.536, 1963.
- TSUJI, Y. et al. Discrete particle simulation of two dimensional fluidized bed. **Powder Technology**, v.77, p.79-87, 1993.
- WEN, C.Y., YUN, Y. H. Generalized method for predicting the minimum fluidization velocity. **AIChE Journal**, v.12, p.610-612, 1966.

WERTHER, J., MOLERUS, O. **International Journal of Multiphase Flow**. v.1, p.103, 1975.

WHITEHEAD, A. B. et al. **Powder Technology**, v.15, p.77, 1976.

YOSHIOKA, S. et al. Circulation flow of particles in a 0.96 m diameter fluidized bed. **International Chemical Engineering**, v.27, p.281-287, 1987.

APÊNDICE A

Desenvolvimento Para Três Tipos de Partículas

O presente desenvolvimento é uma tentativa de extensão do procedimento de Soo (1989a, b) para um leito fluidizado com três tipos de partículas de densidades diferentes visando a obtenção dos perfis de velocidade e respectivas taxas de circulação. A tentativa de solução aqui apresentada parte do equacionamento inicialmente sugerido pelo Prof. Dr. M. L. de Souza-Santos em proposta apresentada em 1996 à Fundação de Amparo à Ciência do Estado de São Paulo.

Nesta situação as funções de velocidade são:

$$U = -\left(\frac{\pi r_0}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n+1} \quad (\text{A.1})$$

$$V - V_0 = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \quad (\text{A.2})$$

$$V_m = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \quad (\text{A.3})$$

$$U_m = -\left(\frac{\pi r_0}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_{mn}}{n+2} \right] \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n+1} \quad (\text{A.4})$$

Ponto a ser observado é a satisfação da conservação da massa pelas equações anteriores.

A equações de quantidade de movimento na direção axial para as fases particuladas são:

$$\alpha_m (V - V_m) + \frac{\mu_{ap}}{\rho_m} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} \right] + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^N f_{ml} (V_l - V_m) - g = 0 \quad (\text{A.5})$$

A substituição das funções de velocidade na equação anterior, resulta:

$$\begin{aligned}
& \alpha_m \left[V_o + \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n - \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \right] \\
& + \frac{\mu_{ap}}{\rho_m} \left[\frac{1}{r_o^2} \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_{mn} \left(\frac{r}{r_o}\right)^{n-2} - \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \right] \\
& + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^N f_{ml} \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_{ln} \left(\frac{r}{r_o}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \right] - g = 0
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Particularizando esses resultados para três tipos de partículas ($m = 3$) e exemplificando para o sólido “ $m = 1$ ”, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) - \gamma_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_{1n} \left(\frac{r}{r_o}\right)^n + \kappa_1 \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_{1n} \left(\frac{r}{r_o}\right)^{n-2} \\
& + f_{12} \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \left(\frac{r}{r_o}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{1n} \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \right] \\
& + f_{13} \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_{3n} \left(\frac{r}{r_o}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{1n} \left(\frac{r}{r_o}\right)^n \right] - \frac{g}{\alpha_1} + V_o = 0
\end{aligned} \tag{A.7}$$

onde:

$$\gamma_1 = 1 + \frac{\pi^2 \mu_{ap}}{h^2 \rho_m \alpha_1} \tag{A.8}$$

$$\kappa_1 = \frac{\mu_{ap}}{r_o^2 \rho_m \alpha_1} \tag{A.9}$$

Reunindo os termos de mesma potência da equação anterior, tem-se:

Para r^0 :

$$c_0 - \gamma_1 a_{10} + \kappa_1 4a_{12} + f_{12}[a_{20} - a_{10}] + f_{13}[a_{30} - a_{10}] + \left(V_o - \frac{g}{\alpha_1} \right) = 0 \tag{A.10}$$

Para r^1 :

$$c_1 - \gamma_1 a_{11} + \kappa_1 9a_{13} + f_{12}[a_{21} - a_{11}] + f_{13}[a_{31} - a_{11}] = 0 \tag{A.11}$$

Para r^2 :

$$c_2 - \gamma_1 a_{12} + \kappa_1 16a_{14} + f_{12}[a_{22} - a_{12}] + f_{13}[a_{32} - a_{12}] = 0 \tag{A.12}$$

Para r^3 :

$$c_3 - \gamma_1 a_{13} + \kappa_1 25a_{15} + f_{12}[a_{23} - a_{13}] + f_{13}[a_{33} - a_{13}] = 0 \quad (\text{A.13})$$

Para r^4 :

$$c_4 - \gamma_1 a_{14} + f_{12}[a_{24} - a_{14}] + f_{13}[a_{34} - a_{14}] = 0 \quad (\text{A.14})$$

Para r^5 :

$$c_5 - \gamma_1 a_{15} + f_{12}[a_{25} - a_{15}] + f_{13}[a_{35} - a_{15}] = 0 \quad (\text{A.15})$$

O equacionamento anterior até a quinta potência é necessário e suficiente para que todas os coeficientes possam ser determinados.

Das condições de contorno no centro do leito (similares às apresentadas no Capítulo 3) obtêm-se:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ a_{m1} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.16a, b})$$

Usando as equações anteriores nas Equações A.10 a A.15, as “ c_s ” podem ser obtidas, resultando:

$$\begin{aligned} c_5 &= (\gamma_1 + f_{12} + f_{13})a_{15} - f_{12}a_{25} - f_{13}a_{35} \\ c_4 &= (\gamma_1 + f_{12} + f_{13})a_{14} - f_{12}a_{24} - f_{13}a_{34} \\ c_3 &= \gamma_1 a_{13} - \kappa_1 25a_{15} + f_{12}(a_{13} - a_{23}) + f_{13}(a_{13} - a_{33}) \\ c_2 &= \gamma_1 a_{12} - \kappa_1 16a_{14} + f_{12}(a_{12} - a_{22}) + f_{13}(a_{12} - a_{32}) \\ c_0 &= \gamma_1 a_{10} - 4\kappa_1 a_{12} + f_{12}(a_{10} - a_{20}) + f_{13}(a_{10} - a_{30}) - \left(V_0 - \frac{g}{\alpha_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Além disso da Equação A.11 é possível escrever:

$$a_{13} = \frac{f_{12}(a_{11} - a_{21}) + f_{13}(a_{11} - a_{31})}{9\kappa_1} \quad (\text{A.18})$$

As constantes “ c_s ” podem ser expressas como função de “ a_{2n} ” e “ a_{3n} ”. O procedimento é análogo ao anteriormente descrito.

Exprimindo as constantes “ c_s ” como função de “ a_{2n} ” e “ a_{3n} ”, o sistema genérico para três tipos de partícula usado na obtenção das constantes “ a_s ” é dado por:

$$\sum_{n=0}^5 a_{1n} = V_{PW_1}$$

$$\sum_{n=0}^5 \frac{a_{1n}}{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^5 c_{1n} = V_W$$

$$\sum_{n=0}^5 \frac{c_{1n}}{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^5 a_{2n} = V_{PW_2}$$

$$\sum_{n=0}^5 \frac{a_{2n}}{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^5 c_{2n} = V_W$$

$$\sum_{n=0}^5 \frac{c_{2n}}{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^5 a_{3n} = V_{PW_3}$$

$$\sum_{n=0}^5 \frac{a_{3n}}{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^5 c_{3n} = V_W$$

$$\sum_{n=0}^5 \frac{c_{3n}}{n+2} = 0$$

(A.19a,...,l)

A solução do sistema anterior é dado por:

$$\begin{aligned}
a_{10} &= \frac{-f_{12}V_{pw1} - f_{13}V_{pw1} - \gamma_1V_{pw1} - 64\kappa_1V_{pw1} + f_{12}V_{pw2} + f_{13}V_{pw3} + V_w}{20\kappa_1} \\
a_{20} &= \frac{f_{21}V_{pw1} - f_{21}V_{pw2} - \gamma_2V_{pw2} - 64\kappa_2V_{pw2} - f_{23}V_{pw2} + f_{23}V_{pw3} + V_w}{20\kappa_2} \\
a_{30} &= \frac{f_{31}V_{pw1} + f_{32}V_{pw2} - \gamma_3V_{pw3} - 64\kappa_3V_{pw3} - f_{31}V_{pw3} - f_{32}V_{pw3} + V_w}{20\kappa_3} \\
a_{12} &= \frac{f_{12}V_{pw1} + f_{13}V_{pw1} + \gamma_1V_{pw1} + 42\kappa_1V_{pw1} - f_{12}V_{pw2} - f_{13}V_{pw3} - V_w}{20\kappa_3} \\
a_{14} &= \frac{3(-f_{12}V_{pw1} - f_{13}V_{pw1} - \gamma_1V_{pw1} - 28\kappa_1V_{pw1} + f_{12}V_{pw2} + f_{13}V_{pw3} + V_w)}{4\kappa_1} \\
a_{15} &= \frac{7(f_{12}V_{pw1} + f_{13}V_{pw1} + \gamma_1V_{pw1} + 24\kappa_1V_{pw1} - f_{12}V_{pw2} - f_{13}V_{pw3} - V_w)}{15\kappa_1} \\
a_{22} &= \frac{-f_{21}V_{pw1} + f_{21}V_{pw2} + \gamma_2V_{pw2} + 42\kappa_2V_{pw2} + f_{23}V_{pw2} - f_{23}V_{pw3} - V_w}{3\kappa_2} \\
a_{24} &= \frac{3(f_{21}V_{pw1} - f_{21}V_{pw2} - \gamma_2V_{pw2} - 28\kappa_2V_{pw2} - f_{23}V_{pw2} + f_{23}V_{pw3} + V_w)}{4\kappa_2} \\
a_{25} &= \frac{7(-f_{21}V_{pw1} + f_{21}V_{pw2} + \gamma_2V_{pw2} + 24\kappa_2V_{pw2} + f_{23}V_{pw2} - f_{23}V_{pw3} - V_w)}{15\kappa_2} \\
a_{32} &= \frac{-f_{31}V_{pw1} - f_{32}V_{pw2} + \gamma_3V_{pw3} + 42\kappa_3V_{pw3} + f_{31}V_{pw3} + f_{32}V_{pw3} - V_w}{3\kappa_3} \\
a_{34} &= \frac{3(f_{31}V_{pw1} + f_{32}V_{pw2} - \gamma_3V_{pw3} - 28\kappa_3V_{pw3} - f_{31}V_{pw3} + f_{32}V_{pw3} + V_w)}{4\kappa_3} \\
a_{35} &= \frac{7(-f_{31}V_{pw1} - f_{32}V_{pw2} + \gamma_3V_{pw3} + 24\kappa_3V_{pw3} + f_{31}V_{pw3} + f_{32}V_{pw3} - V_w)}{15\kappa_3}
\end{aligned} \tag{A20a,...,l}$$

Uma correlação passível de ser usada para avaliação do fator “ f_{mn} ” de interação entre as partículas m e n é encontrada em Soo (1983):

$$f_{12}^{-1} = \frac{3}{4}\eta_{12} \frac{(a_1 + a_2)^2 |(U_1 - U_2)| \bar{\rho}_2}{a_1^3 \bar{\rho}_1} \left(1 + \frac{a_2^3 \bar{\rho}_2}{a_1^3 \bar{\rho}_1} \right)^{-1} \tag{A.21}$$

onde η_{12} é dado por:

$$-\ln \eta_{12} = \frac{3.243 \times 10^5}{\phi_{12} + 1.617 \times 10^5} \ln \left[1 + \frac{7.5 \ln(\phi_{12} + 1.617 \times 10^5) - 89.16}{\psi_{12}^{1/2}} \right] \tag{A.22}$$

e os parâmetros η e ψ são dados por:

$$\psi_{12} = \left(1 + \frac{a_2^3 \rho_2}{a_1^3 \rho_1}\right)^{-1} \frac{\rho_2 (U_1 - U_2)}{2(a_1 + a_2) 18 \mu} (2a)^2 \quad (\text{A.23})$$

$$\phi_{12} = \left(1 + \frac{a_2^3 \rho_2}{a_1^3 \rho_1}\right) \frac{9 \rho_2^{-2}}{\mu \rho_2} (U_1 - U_2) 2(a_1 + a_2) \quad (\text{A.24})$$

Anexo I – Listagem rotinas em Mathematica 2.2.3

Rotinas para plotagem de viscosidades aparentes e Fator de relaxação

(* Plotagem fórmula de KAI para viscosidade *)

(* comparação com viscosidade usada por Soo *)

Clear [Mi] ;

Mik[dp_,Rop_,f_,fmf_] := 5.58*(10^-5)*(dp^0.634)*(Rop^1.39)*(1-f) /
((f - 0.98*fmf)^0.494) ;

GraphMi = Mik[5*10^(-4),2500,f,0.48] ;

g1 = Plot[GraphMi, {f,0.58,0.76},GridLines->Automatic,AxesOrigin->{0.58,0.01}
,PlotRange->All, DisplayFunction -> Identity, Axes-> False, Frame->True,
PlotLabel -> FontForm["", {"Helvetica-Bold",8}],
Background->GrayLevel[0.9]] ;

Mip = { {0.58,0.358}, {0.65,0.16}, {0.75,0.0285}, {0.76,0.0235} } ;

CurvaMip = InterpolatingPolynomial[Mip,f] ;

g2 = Plot[CurvaMip, {f,0.58,0.76},GridLines->Automatic,AxesOrigin->{0.58,0.04},
PlotRange->All, DisplayFunction->Identity,
PlotLabel -> FontForm["", {"Helvetica-Bold",10}],
Background->GrayLevel[0.9]] ;

(*Viscosidade aparente segundo Saxton*)

dp = 5*10^-4 ;

Rog = 1.2 ; Rop = 2500 ; g = 9.81 ;

Mig = 1.8*10^-5 ;

Ar = Rog*(Rop - Rog)*g*(dp^3)/(Mig^2) ;

C1 = 27.2 ;

C2 = 0.0408 ;

Remf = (C1^2 + C2*Ar)^0.5 - C1 ;

Vmf = (Mig*Remf)/(dp*Rog) ;

emf = 0.415 ;

```
Mis[f_] := (2*10^5.5)*(1 - f)*(dp^1.5)/( (1 + 3.04*(10^5)*dp^1.5)*  
      ( (1 - emf)*Vmf*f/(emf + 1.05*emf*f) )^0.25 );
```

```
GraphMis = Mis[f];
```

```
g3 = Plot[GraphMis, {f, 0.58, 0.76}, GridLines->Automatic, AxesOrigin->{0.58, 0.01}  
      , PlotRange->All, DisplayFunction -> Identity,  
      Background->GrayLevel[0.9] ];
```

```
ambas=Show[g1,g2,g3];
```

```
Show[GraphicsArray[{ambas}]];
```

Rotina para plotagem de campo vetorial de velocidades de partícula

(* esvaziamento de variáveis *)

```
Unprotect[C,Gamma] ;
```

```
ClearAll[A5,A6,A7,A8,A9,h5,h6,h7,h8,h9] ;
```

(* definição dos coeficientes de velocidade *)

```
A5[1,0] = -0.085 ;
```

```
A5[1,1] = 0 ;
```

```
A5[1,2] = 0.527678 ;
```

```
A5[1,3] = 0 ;
```

```
A5[1,4] = -1.13145 ;
```

```
A5[1,5] = 0.694089 ;
```

```
A6[1,0] = -0.12 ;
```

```
A6[1,1] = 0 ;
```

```
A6[1,2] = 0.759063 ;
```

```
A6[1,3] = 0 ;
```

```
A6[1,4] = -1.64928 ;
```

```
A6[1,5] = 1.0158 ;
```

```
A7[1,0] = 0.226 ;
```

```
A7[1,1] = 0 ;
```

```
A7[1,2] = -1.48012 ;
```

```
A7[1,3] = 0 ;
```

```
A7[1,4] = 3.29227 ;
```

```
A7[1,5] = -2.04177 ;
```

```
A8[1,0] = 0.291 ;
```

```
A8[1,1] = 0 ;
```

```
A8[1,2] = -1.90616 ;
```

```
A8[1,3] = 0 ;
```

```
A8[1,4] = 4.24042 ;
```

$$A8[1,5] = -2.62987 ;$$

$$A9[1,0] = 0.438 ;$$

$$A9[1,1] = 0 ;$$

$$A9[1,2] = -2.86018 ;$$

$$A9[1,3] = 0 ;$$

$$A9[1,4] = 6.34976 ;$$

$$A9[1,5] = -3.93574 ;$$

(* plotagem campo de velocidades caso 5 *)

```
ClearAll[Up5,Vp5,g] ;
```

```
ro = 0.069 ;
```

```
h5 = 0.138 ;
```

```
Up5 = -(Pi*ro/h5)*Cos[Pi*y]*Sum[(A5[1,n]/(n+2))*(x)^(n+1),{n,0,5}] ;
```

```
Vp5 = Sin[Pi*y]*Sum[A5[1,n]*(x)^n,{n,0,5}] ;
```

```
Print[" Campo vetorial caso 5 de Lin "];
```

```
Needs["Graphics`PlotField`"] ;
```

```
g = {Up5,Vp5} ;
```

```
field5 = PlotVectorField[g,{x,0,1},{y,0,1},
```

```
  PlotLabel -> FontForm["",{"Helvetica-Bold",10}],
```

```
  Background->GrayLevel[0.9],
```

```
  ScaleFunction->(2#&),AspectRatio->1,DisplayFunction->Identity] ;
```

```
Show[ Graphics[ {Rectangle[{0,0},{1,1},field5]} ], Frame->True,
```

```
  FrameLabel->{ FontForm["r/ro",{"Arial",8}],
```

```
  FontForm["z*/h*","Arial",8]} , RotateLabel->False,
```

```
  Background->GrayLevel[0.6], AspectRatio -> 1 ] ;
```

(* plotagem campo de velocidades caso 6 *)

```

ClearAll[Up6,Vp6,g];
ro = 0.069;

h6 = 0.170;
Up6 = -(Pi*ro/h6)*Cos[Pi*y]*Sum[(A6[1,n]/(n+2))*(x)^(n+1),{n,0,5}];
Vp6 = Sin[Pi*y]*Sum[A6[1,n]*(x)^n,{n,0,5}];

Print[" Campo vetorial caso 6 de Lin "];
Needs["Graphics`PlotField`"];
g = {Up6,Vp6};

field6 = PlotVectorField[g,{x,0,1},{y,0,1},
  PlotLabel -> FontForm["",{"Helvetica-Bold",10}],
  Background->GrayLevel[0.9],
  ScaleFunction->(2#&),AspectRatio->1,DisplayFunction->Identity];

Show[ Graphics[ {Rectangle[{0,0},{1,1},field6]} ], Frame->True,
  FrameLabel->{ FontForm["r/ro",{"Arial",8}],
  FontForm["z*/h*",{"Arial",8}] }, RotateLabel->False,
  Background->GrayLevel[0.6], AspectRatio -> 1 ];

(* plotagem campo de velocidades caso 7 *)
ClearAll[Up7,Vp7,g];
ro = 0.069;

h7 = 0.231;
Up7 = -(Pi*ro/h7)*Cos[Pi*y]*Sum[(A7[1,n]/(n+2))*(x)^(n+1),{n,0,5}];
Vp7 = Sin[Pi*y]*Sum[A7[1,n]*(x)^n,{n,0,5}];

Print[" Campo vetorial caso 7 de Lin "];
Needs["Graphics`PlotField`"];
g = {Up7,Vp7};

```

```
field7 = PlotVectorField[g, {x,0,1}, {y,0,1},
  PlotLabel -> FontForm["", {"Helvetica-Bold", 10}],
  Background->GrayLevel[0.9],
  ScaleFunction->(2#&), AspectRatio->1, DisplayFunction->Identity] ;
```

```
Show[ Graphics[ {Rectangle[{0,0}, {1,1}, field7]} ], Frame->True,
  FrameLabel->{ FontForm["r/ro", {"Arial", 8}],
  FontForm["z*/h*", {"Arial", 8}] }, RotateLabel->False,
  Background->GrayLevel[0.6], AspectRatio -> 1 ] ;
```

(* plotagem campo de velocidades caso 8 *)

```
ClearAll[Up8, Vp8, g] ;
```

```
ro = 0.069 ;
```

```
h8 = 0.245 ;
```

```
Up8 = -(Pi*ro/h8)*Cos[Pi*y]*Sum[(A8[1,n]/(n+2))*(x)^(n+1), {n,0,5}] ;
```

```
Vp8 = Sin[Pi*y]*Sum[A8[1,n]*(x)^n, {n,0,5}] ;
```

```
Print[" Campo vetorial caso 8 de Lin "] ;
```

```
Needs["Graphics`PlotField`"] ;
```

```
g = {Up8, Vp8} ;
```

```
field8 = PlotVectorField[g, {x,0,1}, {y,0,1},
  PlotLabel -> FontForm["", {"Helvetica-Bold", 10}],
  Background->GrayLevel[0.9],
  ScaleFunction->(2#&), AspectRatio->1, DisplayFunction->Identity] ;
```

```
Show[ Graphics[ {Rectangle[{0,0}, {1,1}, field8]} ], Frame->True,
  FrameLabel->{ FontForm["r/ro", {"Arial", 8}],
  FontForm["z*/h*", {"Arial", 8}] }, RotateLabel->False,
  Background->GrayLevel[0.6], AspectRatio -> 1 ] ;
```

(* plotagem campo de velocidades caso 9 *)

```
ClearAll[Up9,Vp9,g];
ro = 0.069;

h9 = 0.246;
Up9 = -(Pi*ro/h9)*Cos[Pi*y]*Sum[(A9[1,n]/(n+2))*(x)^(n+1),{n,0,5}];
Vp9 = Sin[Pi*y]*Sum[A9[1,n]*(x)^n,{n,0,5}];

Print[" Campo vatorial caso 9 de Lin "];
Needs["Graphics`PlotField`"];
g = {Up9,Vp9};

field9 = PlotVectorField[g,{x,0,1},{y,0,1},
  PlotLabel -> FontForm["",{"Helvetica-Bold",10}],
  Background->GrayLevel[0.9],
  ScaleFunction->(2#&),AspectRatio->1,DisplayFunction->Identity];

Show[ Graphics[ {Rectangle[ {0,0},{1,1},field9} ] , Frame->True,
  FrameLabel->{ FontForm["r/ro",{"Arial",8}],
    FontForm["z*/h*",{"Arial",8}] }, RotateLabel->False,
  Background->GrayLevel[0.6], AspectRatio -> 1 ]];
```

Rotina para reprodução de gráficos de velocidades axiais- para as 5 situações investigadas por Lin(1985)

```
ClearAll[A5,A6,A7,A8,A9];
```

```
(*
```

```
Print [" Perfis de Velocidade "];
```

```
(* definição dos coeficientes dos perfis de velocidade axial *)
```

```
A5[1,0] = -0.085 ;
```

```
A5[1,1] = 0 ;
```

```
A5[1,2] = 0.3922 ;
```

```
A5[1,3] = 0 ;
```

```
A5[1,4] = -0.493 ;
```

```
A5[1,5] = 0.18631 ;
```

```
A6[1,0] = -0.12 ;
```

```
A6[1,1] = 0 ;
```

```
A6[1,2] = 0.56657 ;
```

```
A6[1,3] = 0 ;
```

```
A6[1,4] = -0.75466 ;
```

```
A6[1,5] = 0.30891 ;
```

```
A7[1,0] = 0.226 ;
```

```
A7[1,1] = 0 ;
```

```
A7[1,2] = -1.20222 ;
```

```
A7[1,3] = 0 ;
```

```
A7[1,4] = 2.02923 ;
```

```
A7[1,5] = -1.0544 ;
```

```
A8[1,0] = 0.291 ;
```

```
A8[1,1] = 0 ;
```

```
A8[1,2] = -1.5557 ;
```

```
A8[1,3] = 0 ;
```

A8[1,4] = 2.6475 ;
 A8[1,5] = -1.3847 ;

A9[1,0] = 0.438 ;
 A9[1,1] = 0 ;
 A9[1,2] = -2.3027 ;
 A9[1,3] = 0 ;
 A9[1,4] = 3.8104 ;
 A9[1,5] = -1.9489 ;

Vp[5] = Simplify[Sum[A5[1,n]*(xx)^n, {n,0,5}]]];
 Vp[6] = Simplify[Sum[A6[1,n]*(xx)^n, {n,0,5}]]];
 Vp[7] = Simplify[Sum[A7[1,n]*(xx)^n, {n,0,5}]]];
 Vp[8] = Simplify[Sum[A8[1,n]*(xx)^n, {n,0,5}]]];
 Vp[9] = Simplify[Sum[A9[1,n]*(xx)^n, {n,0,5}]]];

Needs["Graphics`Legend`"] ;
 Plot[{Vp[5],Vp[6],Vp[7],Vp[8],Vp[9]}, {xx,0,1}, PlotRange->All,
 PlotLabel -> FontForm["Velocidades axiais de Partícula", {"Helvetica-Bold",6}],
 Ticks -> Automatic,
 PlotStyle -> {
 {AbsoluteThickness[1], RGBColor[0,0,1]},
 {AbsoluteThickness[1], RGBColor[0,0,1]},
 {AbsoluteThickness[1], RGBColor[0,0,1]},
 {AbsoluteThickness[1], RGBColor[0,0,1]},
 {AbsoluteThickness[1], RGBColor[0,0,1]}
 },
 Epilog->{
 Text[FontForm["5", {"Arial",6}], {0.1,-0.1}, {1,0}],
 Text[FontForm["6", {"Arial",6}], {0.1,-0.07}, {1,0}],
 Text[FontForm["7", {"Arial",6}], {0.1,0.2}, {1,0}],
 Text[FontForm["8", {"Arial",6}], {0.1,0.3}, {1,0}],

```
Text[FontForm["9",{"Arial",6}],{0.1,0.4},{1,0}]
},
AxesLabel->{ FontForm["r/ro",{"Arial",8}],
FontForm["m/s",{"Arial",8}] },
GridLines->Automatic,
Background->GrayLevel[0.9] ] ;
```

Rotina para geração de taxas de circulação considerando 2 fases no leito

(* faixas de valores *)

bancodt = {3.35*10⁻²,10.16*10⁻²} ; (* maior e menor diâmetro *)

bancodp = {47*10⁻⁶,106*10⁻⁶,195*10⁻⁶,252*10⁻⁶,470*10⁻⁶} ;

bancoudif = {0.07,0.14,0.21,0.29} ;

bancocf = {1.6,2.6,2.5,2.2,1.5} ;

(* esvaziamento de variáveis *)

Unprotect[i,C,Gamma] ;

ClearAll[A,C,gama,kapa,wpw,ww,ro,h,Rog,Rop,g,dp,Mig,Ar,C1,C2,Remf,Umf,

Us,LJp,Jt,Jtb,LJtb,emf,eg,Mi,Mip,F,Fsp,cf] ;

(* valores de propriedades *)

Rog = 1.2 ;

Rop = 2500 ;

g = 9.81 ;

Mig = 1.8*10⁻⁵ ;

(* banco de dados para correlação para circulação por Geldart *)

bancoBd = { {10,1.5}, {10²,0.8}, {10³,0.5}, {10⁴,0.3}, {5*10⁴,0.15} } ;

bancoBw = { {10,0.5}, {10²,0.4}, {10³,0.3}, {10⁴,0.2}, {4*10⁴,0.1} } ;

bancoY = { {5*10,0.9}, {10²,0.8}, {10³,0.5}, {10⁴,0.25}, {10⁵,0.14} } ;

bancodp = {47*10⁻⁶,106*10⁻⁶,195*10⁻⁶,252*10⁻⁶,470*10⁻⁶} ;

bancoudif = {0.07,0.14,0.21,0.29} ; (* faixas de velocidades experimento Talmor-Benenati *)

curvaBd = Fit[bancoBd, {1,x,1/x,Exp[-x]},x];

curvaBw = Fit[bancoBw, {1,x,1/x,Exp[-x]},x];

curvaY = Fit[bancoY, {1,x,1/x,Exp[-x]},x];

(* definição correlações para viscosidade aparente e fator de relaxação *)

Mi[dp_,Rop_,eg_,emf_] :=

$$5.58 \cdot (10^{-5}) \cdot (dp^{0.634}) \cdot (Rop^{1.39}) \cdot (1-eg) / \\ ((eg - 0.98 \cdot emf)^{0.494}) ;$$

Mimf[dp_,eg_,Vs_] := ((2*(10^5.5))*(1 - eg)*dp^(1.5))/

$$((1 + 3.04 \cdot (10^5) \cdot (dp^{1.5})) \cdot Vs^{0.25}) ;$$

F[eg_,Mig_,Vs_] := 150*((1 - eg)/eg^2)*(Mig/(Rop*dp^2))

$$+ (1.75/(eg^2)) \cdot (Rog \cdot Vs) / (Rop \cdot dp) ;$$

(* definição de velocidades para fluxo descendente próximo à parede *)

percent = 1 ;

data = { {47*10^-6,1}, {106*10^-6,3/5}, {195*10^-6,0.32}, {252*10^-6,0.21},
{470*10^-6,0.0875} } ;

m = InterpolatingPolynomial[data,x] ;

(***** geração dos resultados *****)

Do [

ro = bancodt[[k]]/2 ;

LJtb[j] = {} ;

h = 5.5*2*ro ;

Do [

dp = bancodp[[j]] ;

Ar = Rog*(Rop - Rog)*g*(dp^3)/(Mig^2) ;

Bw = curvaBw /. x-> Ar ;

Bd = curvaBd /. x-> Ar ;

Y = curvaY /. x-> Ar ;

C1 = 27.2 ;

C2 = 0.0408 ;

Remf = (C1^2 + C2*Ar)^0.5 - C1 ;

Vmf = (Mig*Remf)/(dp*Rog) ;

LJg[j] = {} ;

LJtb[j] = {} ;

LJp[k,j] = {} ;

Do [

Vdif = bancoudif[[1]] ;

Vs = Vmf + Vdif ;

emf = 0.415 ;

eg = Vs*emf/(1.05*Vs*emf + (1-emf)*Vmf) ;

ep = (1 - eg);

(*Mip = Mi[dp,Rop,eg,emf] ;*)

Mip = Mimf[dp,eg,Vs] ;

Fsp = F[eg,Mig,Vs] ;

gama = 1 + ((Pi^2)*Mip)/((h^2)*Rop*ep*Fsp) ;

kapa = (Mip)/((ro^2)*Rop*ep*Fsp) ;

wpw = (m /. x->dp)*(Vdif)*percent ;

A[1,0] = wpw*(-(1/20)*(gama/kapa) - (16/5));

A[1,1] = 0 ;

A[1,2] = wpw*((1/3)*(gama/kapa) + (42/3)) ;

A[1,3] = 0 ;

A[1,4] = wpw*(-(3/4)*(gama/kapa) - 21) ;

A[1,5] = wpw*((7/15)*(gama/kapa) + (56/5)) ;

Vp = Simplify[Sum[A[1,n]*(xx)^n, {n,0,5}]];

raiz = xx /. Solve[Vp == 0,xx][[3]] ;

J = 2*ep*Rop*((1/raiz)^2)*(1/h)*

Integrate[Vp*xx*Sin[Pi*z/h], {xx,0,raiz}, {z,0,h}] ;

LJp[k,j] = Append[LJp[k,j], {Rog*Vdif/Exp[6634*dp], Abs[J]}];

Jg = Rop*(1 - emf)*(Vs - Vmf)*Y*(Bw + 0.38*Bd) ;

```

LJg[j] = Append[LJg[j],{Rog*Vdif/Exp[6634*dp],Abs[Jg]}] ;
Jt[Vdif_dp_] := 654*Rog*(Vdif)*Exp[-6634*dp] ;
Jtb = Jt[Vdif,dp] ;
LJtb[j] = Append[LJtb[j],{Rog*Vdif/Exp[6634*dp],Jtb}];
    ,{1,1,4} ]
    ,{j,1,5} ]
    ,{k,1,1} ]

```

(* k referente ao diâmetro do leito *)

(* j referente ao diâmetro de partícula *)

(* l referente a velocidade superficial *)

(* preparação de dados para plotagem *)

(* procedimento para geração de gráficos únicos *)

(* Modificação de figura de plotagem *)

```
Needs["Graphics`Graphics`"] ;
```

```
Needs["Graphics`Legend`"] ;
```

```
Needs["Graphics`MultipleListPlot`"] ;
```

(* funções e variáveis auxiliares para plotagem *)

```
diamond = RegularPolygon[4,0.02] ;
```

```
star = RegularPolygon[5,0.02,{0,0},0,2] ; Unprotect[Trig] ;
```

```
trig = RegularPolygon[3,0.02] ;
```

```
square = Line [ { {-0.015,-0.015},{0.015,-0.015},{0.015,0.015},{-0.015,0.015},
    {-0.015,-0.015} } ] ;
```

(* geração das listas para plotagem *)

```
ClearAll[c,parc];
```

```
parc = {} ;
```

```
Do[
```

```

c = LJtb[j];
parc = Join[c,parc];
      ,{j,1,5} ] ;

ClearAll[gc,parg];
parg = {} ;
Do[
gc = LJg[j];
parg = Join[gc,parg];
      ,{j,1,5} ] ;

ClearAll[a,para];
para = {} ;
Do[
a = LJp[1,j];
para = Join[a,para];
      ,{j,1,5} ] ;

graf = MultipleListPlot[Log[10,para],Log[10,parg],Log[10,parc],
  DotShapes-> {MakeSymbol[trig],MakeSymbol[square],MakeSymbol[diamond]},
  Epilog->{ Text[FontForm["Log[(G - Gmf)/e^6634dp]",{"Arial",8}],{0.1,0},{0,1}],
    Text[FontForm["Log[Jp]",{"Arial",8}],{-2.5,3.5},{1,0}]
    },
  PlotLabel -> FontForm[" ",{"Helvetica",10}],
  Ticks-> Automatic, AxesOrigin -> {-2.5,0} , Frame -> True, Axes -> False,
  DisplayFunction -> Identity,Background-> GrayLevel[0.9] ] ;

ShowLegend[graf,{ {{Graphics[trig],FontForm[" Autor ",{"Helvetica",8}]},
  {Graphics[square],FontForm[" Geldart ",{"Helvetica",8}]},
  {Graphics[diamond],FontForm[" Talmor e Benenati ",{"Helvetica",8}]}}
  },

```

```
LegendPosition -> {1.2,-0.25} }, LegendSize->Automatic ] ;
```

```
grafa = MultipleListPlot[Log[10,para],Log[10,parg],Log[10,parc],
  DotShapes-> {MakeSymbol[trig],MakeSymbol[square],MakeSymbol[diamond]},
  Epilog->{ Text[FontForm["Log[(G - Gmf)/e^6634dp]",{"Arial",8}],{0.1,0},{0,1}],
    Text[FontForm["Log[Jp]",{"Arial",8}],{-2.5,3.5},{1,0}]
  },
  PlotLabel -> FontForm[" ",{"Helvetica",10}],
  Ticks-> Automatic, AxesOrigin -> {-2.5,0} , Frame -> True, Axes -> False,
  DisplayFunction -> $DisplayFunction ,Background-> GrayLevel[0.9] ] ;
```

```
curvaut = Fit[parg,{x},x]; (* geldart *)
curva2 = Fit[parc,{x},x]; (* tb *)
curva3 = Fit[para,{1,x},x]; (* autor *)
```

```
num = Table[i,{i,1,Length[parg]}] ;
```

```
grafb = LogLogPlot[{curvaut,curva2,curva3},{x,N[Min[ parg[[num,1]] ]],N[Max[
  parg[[num,1]] ]]},
  GridLines->Automatic,AxesOrigin->Automatic, Background->GrayLevel[0.9],
  Frame -> True, Axes -> True,GridLines->Automatic,
  Ticks->{{0.01,0.03,0.1,0.2},Automatic} ,
  PlotLabel -> FontForm[" ",{"Helvetica",10}], DisplayFunction->$DisplayFunction,
  AxesLabel->{ FontForm["G - Gmf/e^6634dp\n[m/s]",{"Arial",8}],
    FontForm["Jp\n[kg/m^2 s]",{"Arial",8}] } ] ;
```

```
Show[grafa,grafb] ;
```

Rotinas para obtenção das taxas de circulação considerando terceira fase, por procedimento 1

(* esvaziamento de variáveis *)

Unprotect[C,Gamma] ;

ClearAll[A,C,gama,kapa,wpw,ww,ro,h,Rog,Rop,g,dp,Mig,Ar,C1,C2,Remf,Vmf,som,
dt,dbo,dbm,Vbm,Vbo,Vbh,data,percent,Rob,inc,Vs,LJp,Jt,Jp,Jtb,LJtb,emf,eg,Mi,Mip,F1,F2]

;

ClearAll[Roef,Miap,Fep,Feb,Vpw] ;

ClearAll[l,AA,sistema,J,graf,ge,gp,ke,kp] ;

ClearAll[ao,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,co,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,bo,b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7] ;

ClearAll[cte,ct1,ct2] ;

(* faixas de valores *)

bancodp = {47*10⁻⁶,106*10⁻⁶,195*10⁻⁶,252*10⁻⁶,470*10⁻⁶} ;

bancodt = {3.35*10⁻²,10.16*10⁻²} ;

bancovdif = {0.07,0.14,0.21,0.29} ;

bancodens = {1300,1900,2500} ;

(* banco de dados para correlação para circulação por Geldart *)

bancoBd = { {10,1.5}, {10²,0.8}, {10³,0.5}, {10⁴,0.3}, {5*10⁴,0.15} } ;

bancoBw = { {10,0.5}, {10²,0.4}, {10³,0.3}, {10⁴,0.2}, {4*10⁴,0.1} } ;

bancoY = { {5*10,0.9}, {10²,0.8}, {10³,0.5}, {10⁴,0.25}, {10⁵,0.14} } ;

bancodp = {47*10⁻⁶,106*10⁻⁶,195*10⁻⁶,252*10⁻⁶,470*10⁻⁶} ;

curvaBd = Fit[bancoBd,{1,x,1/x,Exp[-x]},x];

curvaBw = Fit[bancoBw,{1,x,1/x,Exp[-x]},x];

curvaY = Fit[bancoY,{1,x,1/x,Exp[-x]},x];

(* solução sistema *)

ClearAll[ao,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7] ;

ClearAll[bo,b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7] ;

ClearAll[co,c1,c2,c3,c4,c5,sistema,gp,gb,kp,kb] ;

(***** Caso I *****)

a1 = 0 ;

c1 = 0 ; a3 = 0 ;

co = gp*ao - 4*kp*a2 - ct1 ;

c2 = gp*a2 - 16*kp*a4 ;

c3 = -25*kp*a5 ;

c4 = gp*a4 - 36*kp*a6 ;

c5 = gp*a5 - 49*kp*a7 ;

c6 = gp*a6 ;

c7 = gp*a7 ;

bo = (1/gb)*(ct1 - ct2 - gp*ao + 4*kp*a2 - 4*kb*b2)*(-1) ;

b1 = 0 ;

b2 = (1/gb)*(-gp*a2 + 16*kp*a4 - 16*kb*b4)*(-1) ;

b3 = (1/gb)*(-gp*a3 + 25*kp*a5 - 25*kb*b5)*(-1) ;

b4 = (1/gb)*(-gp*a4 + 36*kp*a6 - 36*kb*b6)*(-1) ;

b5 = (1/gb)*(-gp*a5 + 49*kp*a7 - 49*kb*b7)*(-1) ;

b6 = -(gp/gb)*a6*(-1) ;

b7 = -(gp/gb)*a7*(-1) ;

sistema = { ao + a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 + a7 == Vpw,

ao/2 + a1/3 + a2/4 + a3/5 + a4/6 + a5/7 + a6/8 + a7/9 == 0,

bo + b1 + b2 + b3 + b4 + b5 + b6 + b7 == 0,

bo/2 + b1/3 + b2/4 + b3/5 + b4/6 + b5/7 + b6/8 + b7/9 == 0,

co + c1 + c2 + c3 + c4 + c5 + c6 + c7 == 0,

co/2 + c1/3 + c2/4 + c3/5 + c4/6 + c5/7 + c6/8 + c7/9 == 0} ;

AA = Simplify[Solve[sistema, {ao,a2,a4,a5,a6,a7}]] ;

ao = ao /. AA ;

a1 = a1 ;

a2 = a2 /. AA ;

a3 = a3 ;

a4 = a4 /. AA ;

a5 = a5 /. AA ;

a6 = a6 /. AA ;

a7 = a7 /. AA ;

(* valores propriedades *)

Rog = 1.2 ;

Rob = 1.2 ; (* Rob = Rog *)

Rop = 2500 ;

g = 9.81 ;

Mig = 1.8*10⁻⁵ ;

(* definição de correlações *)

Jt[Vdif_dp_] := 654*Rog*(Vdif)*Exp[-6634*dp] ;

Mi[dp_,Rop_,ef_,emf_] :=

$$5.58*(10^{-5})*(dp^{0.634})*(Rop^{1.39})*(1-ef) /$$

$$((ef - 0.98*emf)^{0.494}) ;$$

Mimf[dp_,ef_,Vs_] := ((2*(10^{5.5}))*(1 - ef)*dp^(1.5))/

$$((1 + 3.04*(10^5)*(dp^{1.5}))*Vs^{0.25}) ;$$

F1[ef_,Mig_,Vs_,Rop_,dp_] := 150*(ep/ef²)*(Mig/(Rop*dp²))

$$+ (1.75/(ef^2))*(Rog*Vs)/(Rop*dp) ;$$

F2[ef_,Mig_,Vs_,Rob_,dbm_] := 150*(eb/ef²)*(Mig/(Rob*dbm²))

$$+ (1.75/(ef^2))*(Rob*Vs)/(Rob*dbm) ;$$

percent = 1 ;

data = { {47*10⁻⁶,1}, {106*10⁻⁶,3/5}, {195*10⁻⁶,0.32}, {252*10⁻⁶,0.21},
{470*10⁻⁶,0.0875} } ;

```
inc = InterpolatingPolynomial[data,x] ;
```

```
Print[" Solução 3 fases caso 1"];
```

```

Do [
ro = bancodt[[k]]/2 ;
dt = 2*ro ;
LJtb[j] = {} ;
h = 5.5*2*ro ;
Do [
dp = bancodp[[j]] ;
Ar = Rog*(Rop - Rog)*g*(dp^3)/(Mig^2) ;
Bw = curvaBw /. x-> Ar ;
Bd = curvaBd /. x-> Ar ;
Y = curvaY /. x-> Ar ;
C1 = 27.2 ;
C2 = 0.0408 ;
Remf = (C1^2 + C2*Ar)^0.5 - C1 ;
Vmf = (Mig*Remf)/(dp*Rog) ;
LJg[j] = {} ;
LJtb[j] = {} ;
LJp[k,j] = {} ;

Do [

Vdif = bancovdif[[m]] ;
Vs = Vmf + Vdif ;
dbo = (0.278/g)*(Vs - Vmf)^2 ;
dbm = 1.63*( (Pi/4)*(dt^2)*(Vs - Vmf) )^0.4 ;

Vbm = (1/h)*Integrate[Vs - Vmf + 0.711*(g*(dbm - (dbm - dbo*Exp[-0.3z/dt])) )^0.5,
{z,0,h}] ;

```

$$\text{emf} = 0.4 ;$$

$$\text{ef} = \text{Vs} * \text{emf} / (1.05 * \text{Vs} * \text{emf} + (1 - \text{emf}) * \text{Vmf}) ;$$

$$\text{ep} = 1 - \text{ef} ;$$

$$\text{eb} = (\text{ef} - \text{emf}) / (1 - \text{emf}) ;$$

$$\text{eg} = \text{ef} - \text{eb} ;$$

$$\text{Roef} = \text{ep} * \text{Rop} ;$$

$$(*\text{Miap} = \text{Mi}[\text{dp}, \text{Rop}, \text{ef}, \text{emf}] ; *)$$

$$\text{Miap} = \text{Mimf}[\text{dp}, \text{ef}, \text{Vs}] ;$$

$$\text{Fep} = \text{F1}[\text{ef}, \text{Mig}, \text{Vs}, \text{Rop}, \text{dp}] ;$$

$$\text{Feb} = \text{F2}[\text{ef}, \text{Mig}, \text{Vs}, \text{Rob}, \text{dbm}] ;$$

$$\text{gp} = 1 + ((\text{Pi}^2) * \text{Miap}) / ((\text{h}^2) * \text{Rop} * \text{ep} * \text{Fep}) ;$$

$$\text{kp} = (\text{Miap}) / ((\text{ro}^2) * \text{Rop} * \text{ep} * \text{Fep}) ;$$

$$\text{gb} = 1 + ((\text{Pi}^2) * \text{Miap}) / ((\text{h}^2) * \text{Rob} * \text{eb} * \text{Feb}) ;$$

$$\text{kb} = (\text{Miap}) / ((\text{ro}^2) * \text{eb} * \text{Rob} * \text{Feb}) ;$$

$$\text{Vb} = (\text{Vs} - \text{Vmf}) + 0.711 * (g * (\text{dbm} - (\text{dbm} - \text{dbo} * \text{Exp}[-0.3z/\text{dt}])))^{0.5} ;$$

$$\text{Vbh} = \text{Vb} / .z \rightarrow \text{h} ;$$

$$\text{Vbo} = \text{Vb} / .z \rightarrow 0 ;$$

$$\text{ct1} = \text{N}[(\text{Pi}/2) * (\text{Vmf} - (\text{Rop} - \text{Roef}) * g / (\text{Fep} * \text{Rop}))] ;$$

$$(*\text{ct1} = 0 ; *)$$

$$\text{ct2} = \text{N}[(\text{Pi}/2) * (\text{Vmf} - ((\text{Vbh} + \text{Vbo})/2) - (\text{Rob} - \text{Roef}) * g / (\text{Rob} * \text{Feb}))] ;$$

$$(*\text{ct2} = 0 ; *)$$

$$\text{Vpw} = (\text{inc} / .x \rightarrow \text{dp}) * (\text{Vs} - \text{Vmf}) * \text{percent} ;$$

$$\text{A}[1,1] = \text{N}[\text{a1}] ;$$

A[1,3] = N[a3] ;

A[1,0] = N[ao] ;

A[1,2] = N[a2] ;

A[1,3] = N[a3] ;

A[1,4] = N[a4] ;

A[1,5] = N[a5] ;

A[1,6] = N[a6] ;

A[1,7] = N[a7] ;

ClearAll[gp,gb,kp,kb,Vpw] ;

Vp = Simplify[Sum[A[1,n]*(xx)^n, {n,0,7}]];

raiz = xx /. Solve[Vp == 0,xx][[4]] ;

Jp = Abs[2*ep*Rop*((1/raiz)^2)*(1/h)*

Integrate[Vp*xx*Sin[Pi*z/h], {xx,0,raiz}, {z,0,h}]];

LJp[k,j] = Append[LJp[k,j], {Rog*Vdif/Exp[6634*dp],Jp[[1]]}];

Jg = Rop*(1 - emf)*(Vs - Vmf)*Y*(Bw + 0.38*Bd) ;

LJg[j] = Append[LJg[j], {Rog*Vdif/Exp[6634*dp],Abs[Jg]}] ;

Jtb = Jt[Vdif,dp] ;

LJtb[j] = Append[LJtb[j], {Rog*Vdif/Exp[6634*dp],Jtb}];

, {m,1,4}] ;

, {j,1,5}] ;

, {k,1,1}] ;

(*4 5 2*)

(* k referente ao diâmetro do leito *)

(* j referente ao diâmetro de partícula *)

(* m referente a velocidade superficial *)

(* preparação de dados para plotagem *)

(* PROCEDIMENTO PARA GERAÇÃO DE GRÁFICOS ÚNICOS *)

```
np = 4 ;  
Needs["Graphics`Graphics`"] ;  
(* Modificação de figura de plotagem *)  
Needs["Graphics`Graphics`"] ;  
Needs["Graphics`Legend`"] ;  
Needs["Graphics`MultipleListPlot`"] ;
```

(* funções e variáveis auxiliares para plotagem *)

```
diamond = RegularPolygon[4,0.02] ;  
star = RegularPolygon[5,0.02,{0,0},0,2] ; Unprotect[Trig] ;  
trig = RegularPolygon[3,0.02] ;  
square = Line [ { {-0.015,-0.015},{0.015,-0.015},{0.015,0.015},{-0.015,0.015},  
                {-0.015,-0.015} } ] ;
```

```
ClearAll[c,parc];  
parc = {} ;  
Do[  
c = LJtb[j];  
parc = Join[c,parc];  
    ,{j,1,np} ] ;
```

```
ClearAll[gc,parg];  
parg = {} ;  
Do[  
gc = LJg[j];  
parg = Join[gc,parg];  
    ,{j,1,np} ] ;
```

```
ClearAll[a,para];
```

```

para = {} ;
Do[
a = LJP[1,j];
para = Join[a,para];
  ,{j,1,np} ] ;

graf = MultipleListPlot[Log[10,para],Log[10,parg],Log[10,parc],
  DotShapes-> {MakeSymbol[trig],MakeSymbol[square],MakeSymbol[diamond]},
  Epilog->{ Text[FontForm["Log[(G - Gmf)/e^6634dp]",{"Arial",8}],{0.1,0},{0,1}],
    Text[FontForm["Log[Jp]",{"Arial",8}],{-2.5,3.5},{1,0}]
    },
  PlotLabel -> FontForm[" ",{"Helvetica",10}],
  Ticks-> Automatic, AxesOrigin -> {-2.5,0} , Frame -> True, Axes -> False,
  DisplayFunction -> Identity,Background-> GrayLevel[0.9] ] ;

ShowLegend[graf,{ {Graphics[trig],FontForm[" Autor ",{"Helvetica",8}]},
  {Graphics[square],FontForm[" Geldart ",{"Helvetica",8}]},
  {Graphics[diamond],FontForm[" Talmor e Benenati ",{"Helvetica",8}]}
  },
  LegendPosition -> {1.2,-0.25} }, LegendSize->Automatic ] ;

grafa = MultipleListPlot[Log[10,para],Log[10,parg],Log[10,parc],
  DotShapes-> {MakeSymbol[trig],MakeSymbol[square],MakeSymbol[diamond]},
  Epilog->{ Text[FontForm["Log[(G - Gmf)/e^6634dp]",{"Arial",8}],{0.1,0},{0,1}],
    Text[FontForm["Log[Jp]",{"Arial",8}],{-2.5,3.5},{1,0}]
    },
  PlotLabel -> FontForm[" ",{"Helvetica",10}],
  Ticks-> Automatic, AxesOrigin -> {-2.5,0} , Frame -> True, Axes -> False,
  DisplayFunction -> $DisplayFunction,Background-> GrayLevel[0.9] ] ;

```

```
curvaut = Fit[parg,{1,x,x^2},x]; (* geldart *)
```

```
curva2 = Fit[parc,{x},x]; (* tb *)
```

```
curva3 = Fit[para,{1,x,x^2},x]; (* autor *)
```

```
num = Table[i,{i,1,Length[parg]}];
```

```
grafb = LogLogPlot[{curvaut,curva2,curva3},{x,N[Min[ parg[[num,1]] ]],N[Max[  
parg[[num,1]] ]]}],
```

```
GridLines->Automatic,AxesOrigin->Automatic, Background->GrayLevel[0.9],
```

```
Frame -> True, Axes -> True,GridLines->Automatic,
```

```
Ticks->{{0.01,0.03,0.1,0.2},Automatic} ,
```

```
PlotLabel -> FontForm[" ",{"Helvetica",10}], DisplayFunction->$DisplayFunction,
```

```
AxesLabel->{ FontForm["G - Gmf/e^6634dp\n[m/s]",{"Arial",8}],
```

```
FontForm["Jp\n[kg/m^2 s]",{"Arial",8}] } ] ;
```

```
Show[grafa,grafb];
```

Rotinas para obtenção das taxas de circulação considerando terceira fase, por procedimento 2

(* esvaziamento de variáveis *)

Unprotect[C,Gamma] ;

ClearAll[A,C,gama,kapa,wpw,ww,ro,h,Rog,Rop,g,dp,Mig,Ar,C1,C2,Remf,Vmf,som,
dt,dbm,dbm,Vbm,Vbo,data,percent,Rob,inc,Vs,

LJp,Jt,Jtb,LJtb,emf,eg,Mi,Miap,F1,F2,Fsp] ;

ClearAll[Roef,Mie,Fep,Feb,Vpw,Vp,cte,ct1] ;

ClearAll[l,AA,sistema,expr,res,res2,J,graf] ;

ClearAll[ao,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7] ;

ClearAll[bo,b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7] ;

ClearAll[co,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,sistema,kp,ge,gb,kp,kb] ;

(***** Caso III *****)

a1 = 0 ;

c1 = 0 ; a3 = 0 ;

co = gp*ao - 4*kp*a2 - ct1 ;

c2 = gp*a2 - 16*kp*a4 ;

c3 = -25*kp*a5 ;

c4 = gp*a4 ;

c5 = gp*a5 ;

sistema = { ao + a1 + a2 + a3 + a4 + a5 == Vpw,

ao/2 + a1/3 + a2/4 + a3/5 + a4/6 + a5/7 == 0,

co + c1 + c2 + c3 + c4 + c5 == cte,

co/2 + c1/3 + c2/4 + c3/5 + c4/6 + c5/7 == 0} ;

AA = Simplify[Solve[sistema, {ao,a2,a4,a5}]] ;

$ao = ao / . AA ;$
 $a2 = a2 / . AA ;$
 $a4 = a4 / . AA ;$
 $a5 = a5 / . AA ;$

(* faixas de valores *)

$bancodp = \{47*10^{-6}, 106*10^{-6}, 195*10^{-6}, 252*10^{-6}, 470*10^{-6}\} ;$
 $bancodt = \{3.35*10^{-2}, 10.16*10^{-2}\} ;$
 $bancovdif = \{0.07, 0.14, 0.21, 0.29\} ;$

(* valores propriedades *)

$Rog = 1.2 ;$
 $Rob = 1.2 ; (* Rob = Rog *)$
 $Rop = 2500 ;$
 $g = 9.81 ;$
 $Mig = 1.8*10^{-5} ;$

(* banco de dados para correlação para circulação por Geldart *)

$bancoBd = \{ \{10, 1.5\}, \{10^2, 0.8\}, \{10^3, 0.5\}, \{10^4, 0.3\}, \{5*10^4, 0.15\} \} ;$
 $bancoBw = \{ \{10, 0.5\}, \{10^2, 0.4\}, \{10^3, 0.3\}, \{10^4, 0.2\}, \{4*10^4, 0.1\} \} ;$
 $bancoY = \{ \{5*10, 0.9\}, \{10^2, 0.8\}, \{10^3, 0.5\}, \{10^4, 0.25\}, \{10^5, 0.14\} \} ;$
 $bancodp = \{47*10^{-6}, 106*10^{-6}, 195*10^{-6}, 252*10^{-6}, 470*10^{-6}\} ;$

$curvaBd = \text{Fit}[\text{bancoBd}, \{1, x, 1/x, \text{Exp}[-x]\}, x];$
 $curvaBw = \text{Fit}[\text{bancoBw}, \{1, x, 1/x, \text{Exp}[-x]\}, x];$
 $curvaY = \text{Fit}[\text{bancoY}, \{1, x, 1/x, \text{Exp}[-x]\}, x];$

(* definição de correlações *)

$Jt[Vdif_dp_] := 654*Rog*(Vdif)*\text{Exp}[-6634*dp] ;$
 $Mi[dp_Rop_eg_emf_] :=$
 $5.58*(10^{-5})*(dp^{0.634})*(Rop^{1.39})*(1-ef) /$

```

((ef - 0.98*emf)^0.494) ;
Mimf[dp_,ef_,Vs_] := ((2*(10^5.5))*(1 - ef)*dp^(1.5))/
    ((1 + 3.04*(10^5)*(dp^1.5))*Vs^0.25) ;
F1[eg_,Mig_,Vs_,Rop_,dp_] := 150*(ep/ef^2)*(Mig/(Rop*dp^2))
    + (1.75/(ef^2))*(Rog*Vs)/(Rop*dp) ;
F2[eg_,Mig_,Vs_,Rob_,dbm_] := 150*(eb/ef^2)*(Mig/(Rob*dbm^2))
    + (1.75/(eg^2))*(Rob*Vs)/(Rob*dbm) ;
percent = 1 ;
data = { {47*10^-6,1}, {106*10^-6,3/5}, {195*10^-6,0.32}, {252*10^-6,0.21},
    {470*10^-6,0.0875} } ;
inc = InterpolatingPolynomial[data,x] ;

Print[" Solução 3 fases caso 3"];

Do [
ro = bancodt[[k]]/2 ;
dt = 2*ro ;
LJtb[j] = {} ;
h = 5.5*2*ro ;
    Do[
dp = bancodp[[j]] ;
Ar = Rog*(Rop - Rog)*g*(dp^3)/(Mig^2) ;
Bw = curvaBw /. x-> Ar ;
Bd = curvaBd /. x-> Ar ;
Y = curvaY /. x-> Ar ;
C1 = 27.2 ;
C2 = 0.0408 ;
Remf = (C1^2 + C2*Ar)^0.5 - C1 ;
Vmf = (Mig*Remf)/(dp*Rog) ;
LJg[j] = {} ;
LJtb[j] = {} ;
LJp[k,j] = {} ;

```

```

Do[
Vdif = bancovdif[[m]] ;
Vs = Vmf + Vdif ;
dbo = (0.278/g)*(Vs - Vmf)^2 ;
dbm = 1.63*( (Pi/4)*(dt^2)*(Vs - Vmf) )^0.4 ;

Vbm = (1/h)*Integrate[
    Vs - Vmf + 0.711*(g*(dbm - (dbm - dbo*Exp[-0.3z/dt]) ) )^0.5,
    {z,0,h}];

emf = 0.4 ;
ef = Vs*emf/(1.05*Vs*emf + (1-emf)*Vmf) ;
ep = 1 - ef ;
eb = (ef - emf)/(1 - emf) ;
eg = ef - eb ;
Roef = ep*Rop ;

(*Miap = Mi[dp,Rop,ef,emf] ;*)
Miap = Mimf[dp,ef,Vs] ;
Fep = F1[eg,Mig,Vs,Rop,dp] ;
Feb = F2[eg,Mig,Vs,Rob,dbm] ;

gp = 1 + ((Pi^2)*Miap)/((h^2)*ep*Rop*Fep) ;
kp = (Miap)/((ro^2)*ep*Rop*Fep) ;

gb = 1 + ((Pi^2)*Miap)/((h^2)*eb*Rob*Feb) ;
kb = (Miap)/((ro^2)*eb*Rob*Feb) ;

Vb = (Vs - Vmf) + 0.711*( g *(dbm - (dbm - dbo*Exp[-0.3z/dt])) )^0.5 ;
Vbh = Vb /. z -> h ;

ct1 = N[(Pi/2)*(Vmf + Vbh - (Rob - Roef)*g/(Rob*Feb))] ;
(*ct1 = 0 ;*)

```

```

expr = - Miap*D[Vb,{z,2}] + (Rob - Roef)*g + Rob*Feb*Vb - Rob*Feb*Vmf ;
res = Simplify[ (1/h)*Integrate[expr,{z,0,h} ] ] ;
res2 = Simplify[ (Pi/(2*Rob*Feb))*res ] ;
cte = N[res2] ;
(*cte = 0 ;*)

```

```
Vpw = (inc /. x->dp)*(Vs - Vmf)*percent ;
```

```

A[1,1] = N[a1] ;
A[1,3] = N[a3] ;
A[1,0] = N[ao] ;
A[1,2] = N[a2] ;
A[1,3] = N[a3] ;
A[1,4] = N[a4] ;
A[1,5] = N[a5] ;

```

```

Vp = Simplify[Sum[A[1,n]*(xx)^n,{n,0,5}]];
raiz = xx /. Solve[Vp == 0,xx][[3]] ;

```

```

J = Abs[ 2*ep*Rop*((1/raiz)^2)*(1/h)*
      Integrate[ Vp*xx*Sin[Pi*z/h],{xx,0,raiz},{z,0,h} ] ] ;
LJp[k,j] = Append[LJp[k,j],{Rog*Vdif/Exp[6634*dp],J[[1]]}];
Jg = Rop*(1 - emf)*(Vs - Vmf)*Y*(Bw + 0.38*Bd) ;
LJg[j] = Append[LJg[j],{Rog*Vdif/Exp[6634*dp],Abs[Jg]}] ;
Jtb = Jt[Vdif,dp] ;
LJtb[j] = Append[LJtb[j],{Rog*Vdif/Exp[6634*dp],Jtb}];
  ,{m,1,4} ] ;
  ,{j,1,5} ] ;
  ,{k,1,1} ] ;

```

(*4 5 2*)

(* k referente ao diâmetro do leito *)

(* j referente ao diâmetro de partícula *)

(* l referente a velocidade superficial *)

(* preparação de dados para plotagem *)

(* procedimento para geração de gráficos únicos *)

(* Modificação de figura de plotagem *)

```
Needs["Graphics`Graphics`"] ;
```

```
Needs["Graphics`Legend`"] ;
```

```
Needs["Graphics`MultipleListPlot`"] ;
```

(* funções e variáveis auxiliares para plotagem *)

```
diamond = RegularPolygon[4,0.02] ;
```

```
star = RegularPolygon[5,0.02,{0,0},0,2] ; Unprotect[Trig] ;
```

```
trig = RegularPolygon[3,0.02] ;
```

```
square = Line [ { {-0.015,-0.015},{0.015,-0.015},{0.015,0.015},{-0.015,0.015},  
                {-0.015,-0.015} } ] ;
```

(* geração das listas para plotagem *)

```
ClearAll[c,parc];
```

```
parc = {} ;
```

```
Do[
```

```
c = LJtb[j];
```

```
parc = Join[c,parc];
```

```
,{j,1,5} ] ;
```

```
ClearAll[gc,parg];
```

```
parg = {} ;
```

```

Do[
gc = LJg[j];
parg = Join[gc,parg];
  ,{j,1,5} ] ;

ClearAll[a,para];
para = {} ;
Do[
a = LJp[1,j];
para = Join[a,para];
  ,{j,1,5} ] ;

graf = MultipleListPlot[Log[10,para],Log[10,parg],Log[10,parc],
  DotShapes-> {MakeSymbol[trig],MakeSymbol[square],MakeSymbol[diamond]},
  Epilog->{ Text[FontForm["Log[(G - Gmf)/e^6634dp]",{"Arial",8}],{0.1,0},{0,1}],
    Text[FontForm["Log[Jp]",{"Arial",8}],{-2.5,3.5},{1,0}]
  },
  PlotLabel -> FontForm[" ",{"Helvetica",10}],
  Ticks-> Automatic, AxesOrigin -> {-2.5,0} , Frame -> True, Axes -> False,
  DisplayFunction -> Identity,Background-> GrayLevel[0.9] ] ;

ShowLegend[graf,{ {{Graphics[trig],FontForm[" Autor ",{"Helvetica",8}]},
  {Graphics[square],FontForm[" Geldart ",{"Helvetica",8}]},
  {Graphics[diamond],FontForm[" Talmor e Benenati ",{"Helvetica",8}]}}
  },
  LegendPosition -> {1.2,-0.25} }, LegendSize->Automatic ] ;

grafa = MultipleListPlot[Log[10,para],Log[10,parg],Log[10,parc],
  DotShapes-> {MakeSymbol[trig],MakeSymbol[square],MakeSymbol[diamond]},
  Epilog->{ Text[FontForm["Log[(G - Gmf)/e^6634dp]",{"Arial",8}],{0.1,0},{0,1}],

```

```

Text[FontForm["Log[Jp]",{"Arial",8}],{-2.5,3.5},{1,0}]
},
PlotLabel -> FontForm[" ",{"Helvetica",10}],
Ticks-> Automatic, AxesOrigin -> {-2.5,0} , Frame -> True, Axes -> False,
DisplayFunction -> $DisplayFunction,Background-> GrayLevel[0.9] ];

curvaut = Fit[parg,{1,x,x^2},x]; (* geldart *)
curva2 = Fit[parc,{x},x]; (* tb *)
curva3 = Fit[para,{1,x,x^2},x]; (* autor *)

num = Table[i,{i,1,Length[parg]}];

grafb = LogLogPlot[{curvaut,curva2,curva3},{x,N[Min[ parg[[num,1]] ]],N[Max[
parg[[num,1]] ]]}],
GridLines->Automatic,AxesOrigin->Automatic, Background->GrayLevel[0.9],
Frame -> True, Axes -> True,GridLines->Automatic,
Ticks->{{0.01,0.03,0.1,0.2},Automatic} ,
PlotLabel -> FontForm[" ",{"Helvetica",10}], DisplayFunction->$DisplayFunction,
AxesLabel->{ FontForm["G - Gmf/e^6634dp\n[m/s]",{"Arial",8}],
FontForm["Jp\n[kg/m^2 s]",{"Arial",8}] } ];

Show[grafa,grafb];

```