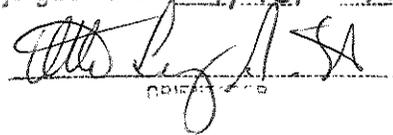


Este exemplar corresponde a redação final
da tese defendida por Carlos Cabral
Gravina e aprovada
pela comissão julgadora em 29/10/1997



OBRIGADO

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO

MECÂNICO DO SAL EM POÇOS DE PETRÓLEO

Autor : Carlos Cabral Gravina

Orientador : Otto Luiz Alcântara Santos

Co-orientador : Fernando Iguti

29 de Outubro de 1997

9812616
G789s

33993/BC

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

C.M.00112704-5

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
	G789s
V.	Ex.
TOMOS	BC: 33993
PROJ.	395/98
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	23/05/98
N.º CPD	

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

G789s Gravina, Carlos Cabral
Simulação numérica do comportamento mecânico do
sal em poços de petróleo / Carlos Cabral Gravina. –
Campinas, SP: [s.n.], 1997.

Orientador: Otto Luiz Alcântara Santos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Poços de petróleo - Perfuração. 2. Sal. 3.
Viscoelasticidade. I. Santos, Otto Luiz Alcântara.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação Apresentada à

Faculdade de Engenharia Mecânica,

como Requisito Parcial à Obtenção do

Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Simulação Numérica do Comportamento
Mecânico do Sal em Poços de Petróleo**

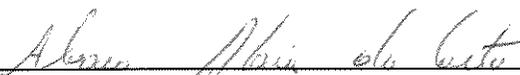
Autor: **Carlos Cabral Cravina**
Orientador: **Otto Luiz Alcântara**



**Prof. Dr. Otto Luiz Alcântara, Presidente
FEM/UNICAMP**



**Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Souza
FEM/UNICAMP**



**Prof. Dr. Alvaro Maia da Costa
PETROBRÁS/RJ**

Campinas, 29 de outubro de 1997.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, fonte de amor e incentivo, combustível para uma vida escolar tranqüila.

À Rosa mais linda e seus botões Fernanda, Renata e Paula; suas essências de amor e carinho, em altas doses de compreensão e abnegação, me ajudaram a transpor mais este desafio.

Ao amigo, colega e professor Dr. Otto Alcântara Santos, que me estendeu a mão no momento mais delicado do trajeto em busca deste novo título.

Ao professor Dr. Edgar Eric Maidla, idealizador e grande incentivador deste trabalho.

À Gerência de Recursos da Informação da E&P-Ba e toda sua equipe, pelo grande apoio recebido.

Àqueles gerentes da Petrobrás que estimulam efetivamente a valorização do corpo técnico da empresa, apoiando-o com decisão nos momentos necessários.

À Petrobrás, que proveio os recursos necessários e indispensáveis ao cumprimento desta jornada,

A todo o corpo docente da Unicamp, aos funcionários do Cepetro e do Departamento de Engenharia de Petróleo e aos colegas de curso, pelos ensinamentos e relação harmoniosa.

RESUMO

GRAVINA, Carlos Cabral. *Simulação Numérica do Comportamento Mecânico do Sal em Poços de Petróleo.*

Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. 154 p. Dissertação (Mestrado).

O problema do fechamento das paredes do poço, ocasionando a prisão da coluna de perfuração ou o colapso dos tubos de revestimento, tem ocorrido quando um poço de petróleo atravessa certos tipos de formações salinas, devido ao pronunciado comportamento plástico dessas e, principalmente, devido ao seu comportamento de fluência ao longo do tempo. O aumento da temperatura e/ou da tensão que agem sobre esses sais acelera e agrava o comportamento de fluência dos mesmos, de tal forma que, quanto mais profundo o sal for encontrado, mais rápido se manifestará e mais intenso será o problema a enfrentar.

Visando-se auxiliar o projetista do poço e o acompanhamento operacional da sua execução, foi elaborado um programa de computador com a finalidade de estimar o fechamento do poço ao longo do tempo em frente à zona de sal, simulando-se no programa as condições físicas relevantes que exercem influência sobre o comportamento mecânico do sal e que se esperam encontrar no poço.

O Método dos Elementos Finitos foi empregado no desenvolvimento do programa, sendo o comportamento estático do sal simulado através da aplicação da teoria elástica linear sobre modelo de elementos triangulares em estado plano de deformações. O comportamento quase-estático ou a fluência do material no tempo foi representada pela aplicação de uma equação empírica de

fluência do tipo potencial, utilizada por diversos pesquisadores em projetos de escavação de minas de sal e depósitos de lixo atômico. Essa equação é empregada para representar o comportamento da fluência primária ou transiente e se ajusta perfeitamente ao escopo deste trabalho. As equações diferenciais de equilíbrio quase-estático foram obtidas pelo princípio dos trabalhos virtuais e integradas no tempo utilizando-se do Algoritmo Explícito de Euler. Consideram-se as hipóteses da linearidade geométrica e isotropia do material.

Realizaram-se simulações visando-se abranger um bom número de situações possíveis de serem encontradas nos poços de petróleo, sendo os resultados apresentados na forma de gráficos, acompanhados de análises e comentários.

Palavras Chave:

- *Petróleo, Perfuração, Sal, Fluência, Viscoelasticidade.*

ABSTRACT

GRAVINA, Carlos Cabral. *Simulação Numérica do Comportamento Mecânico do Sal em Poços de Petróleo.*

Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. 154 p. Dissertação (Mestrado).

Drilling incidents such as stuck pipe and collapsed casing string take place when some type of salt formations are drilled because of the high pronounced plastic behavior of the salt and the creep behavior as a function of time of this type of rock. The creep behavior becomes faster and more severe if

temperature and/or pressure acting on the salt go up. The deeper the salt is found, the earlier and more intense the troubles caused by salt creep will be evident.

A computer program was written to estimate the borehole closure rate in front of a salt zone. It simulates the relevant physical conditions expected to be found in the well that influence the salt mechanical behavior. The program can assist the drilling personnel during the design and the execution phases of the well.

The computer program uses the finite element theory. The static behavior of the salt was approached by using the linear elastic laws over triangular elements in Plane Strain State. The quasi-static behavior, or the salt deformation with time (salt creep), was approached by a power law empirical equation of creep, used by most of the researchers in underground excavations projects of salt mines or atomic waste repositories. The equation mentioned above is used to represent the primary or transient creep and fits very good to the physical conditions considered in this work. The quasi-static equilibrium differential equations were derived from the virtual work principle and were integrated over the time by the use of Euler's Explicit Algorithm. The material isotropy and geometric linearity were assumed in this work.

Simulations were done covering most of the drilling situations found while drilling through moving salt formations. The results are showed through graphical outputs with some pertinent comments.

Key Words:

- Petroleum, Drilling, Salt, Creep, Viscoelasticity.

LISTA DE FIGURAS

- 3.1 Ensaio Típico de Fluência de um Material Viscoso (pag:10)

- 4.1 Sólido Elástico Linear (Modelo Básico) (pag:17)
- 4.2 Fluido Viscoso Newtoniano (Modelo Básico) (pag:18)
- 4.3 Modelo de Maxwell (pag:18)
- 4.4 Ensaio de Relaxação das Tensões - Modelo de Maxwell (pag:20)
- 4.5 Ensaio de Fluência - Modelo de Maxwell (pag:21)
- 4.6 Modelo de Kelvin-Voigt (pag:22)
- 4.7 Ensaio de Recuperação das Deformações - Modelo de Kelvin-Voigt (pag:23)
- 4.8 Ensaio de Fluência - Modelo de Kelvin-Voigt (pag:24)
- 4.9 Modelo de Três Parâmetros (pag:24)
- 4.10 Ensaio de Fluência - Modelo de Três Parâmetros (pag:25)
- 4.11 Modelo de Burgers (pag:26)
- 4.12 Ensaio de Fluência - Modelo de Burgers (pag:27)
- 4.13 Ensaio de Recuperação das Deformações - Modelo de Burgers (pag:29)
- 4.14 Curvas de Fluência em Dois Níveis de Tensão: σ_1 e σ_2 (pag:42)
- 4.15 Tensões Aplicadas em um Ensaio de Fluência (pag:42)
- 4.16 Carregamento Aplicado em Material Viscoelástico Linear (pag:43)
- 4.17 Deformação por Fluência - Método "Strain Hardening" (pag:46)
- 4.18 Deformação por Fluência - Método "Strain Hardening" (pag:47)
- 4.19 Deformação por Fluência - Método "Time Hardening" (pag:49)

- 5.1 Procedimento de Integração das Deformações por Fluência tipo "Strain-Hardening" (pag:60)
- 5.2 Procedimento de Integração das Deformações por Fluência: Passo de Ordem "n" (pag:61)

- 5.3 Subdivisão do Contínuo em Elementos Finitos (pag:63)
- 5.4 Ensaio de Compressão Uniaxial de Material Viscoelástico (pag:65)

- 6.1 Poço de Petróleo Cortando Corpo de Sal (pag:77)
- 6.2 Modelo Geométrico (Esquemático) do Sal no Poço de Petróleo (pag:78)
- 6.3 Decomposição da Carga Radial (pag:85)
- 6.4 Fluxograma do Programa de Computador (pag:88)
- 6.5 Estrutura Sob Tensões Constantes (pag:91)
- 6.6 Solução Analítica X Solução Numérica de Placa Finita Com Furo no Centro (pag:96)
- 6.7 Solução Analítica X Solução Numérica de Placa Finita Com Furo no Centro (pag:97)
- 6.8 Solução Analítica X Solução Numérica de Placa Infinita Com Furo no Centro Sob Tensões H_x e H_y (pag:99)
- 6.9 Solução Analítica X Solução Numérica de Placa Infinita Com Furo no Centro Sob Tensões H_x e H_y (pag:100)
- 6.10 Solução Analítica X Solução Numérica de Placa Infinita Com Furo no Centro Sob Tensões H_x e H_y (pag:101)
- 6.11 Solução Analítica X Solução Numérica de Placa Infinita Com Furo no Centro Sob Tensões H_x e H_y (pag:102)
- 6.12 Solução Analítica X Solução Numérica de Placa Infinita Com Furo no Centro Sob Tensões H_x e H_y (pag:103)
- 6.13 Solução Analítica X Solução Numérica de Placa Infinita Com Furo no Centro Sob Tensões H_x e H_y (pag:104)
- 6.14 Simulação do Comportamento Viscoelástico do Sal - Comparação com o Modelo ANVEC_EP (pag:106)

- 7.1 Redistribuição das Tensões Radiais Devido a Fluência do Sal (pag:110)
- 7.2 Redistribuição das Tensões Tangenciais Devido a Fluência do Sal (pag:111)
- 7.3 Deslocamento do Sal ao Redor de um Poço de Petróleo - Influência do Procedimento de Modelagem Adotado (pag:112)
- 7.4 Influência do Módulo de Elasticidade Sobre a Fluência do Sal em um Poço de Petróleo (pag:113)
- 7.5 Influência do Coeficiente de Poisson do Sal Sobre o Fechamento de um Poço de Petróleo (pag:115)

- 7.6 Influência da Temperatura do Sal (pag:116)
- 7.7 Influência do Gradiente Litostático (pag:117)
- 7.8 Influência do Peso Especifico do Fluido de Perfuração Sobre a Fluência do Sal em um Poço de Petróleo (pag:118)
- 7.9 Influência do Diâmetro do Poço Sobre a Fluência do Sal em um Poço de Petróleo (pag:119)
- 7.10 Relação Entre o Fechamento de um Poço de Petróleo e o Seu Diâmetro, Durante a Fluência do Sal (pag:120)
- 7.11 Relação Entre o Fechamento de um Poço de Petróleo e o Seu Diâmetro, Durante a Fluência do Sal (pag:121)
- 7.12 Influência da Lei de Fluência Empregada (pag:122)
- 7.13 Fechamento de um Poço de Petróleo na Presença do Sal de Halita (pag:125)

- A.1 Modelo de Maxwell Generalizado (pag:135)
- A.2 Modelo de Maxwell Generalizado com Unidades "Degeneradas" (pag:136)
- A.3 Modelo de Kelvin-Voigt Generalizado (pag:137)
- A.4 Modelo de Kelvin-Voigt Generalizado com Unidades "Degeneradas" (pag:137)
- A.5 Numeração Vetorial dos Elementos de Uma Matriz Simétrica de Banda (pag:145)
- A.6 Algoritmo de Montagem da Matriz Global (pag:147)
- A.7 Algoritmo de Decomposição Triangular de Gauss (pag:151)
- A.8 Algoritmo de Solução do Sistema Triangular Inferior (pag:153)
- A.9 Algoritmo de Solução do Sistema Triangular Superior (pag:154)

LISTA DE TABELAS

- I Solução Analítica X Solução Numérica de Estrutura Elástica Sob Tensões Constantes (pag:93)
- II Solução Analítica X Solução Numérica de Placa Finita Com Furo no Centro (pag:95)
- III Erro Relativo Entre Solução de Placa Finita e Solução de Placa Infinita (pag:143)

Conteúdo

1- INTRODUÇÃO	1
1.1- Objetivos	3
1.2- Aplicação	3
2- OS EVAPORITOS	4
2.1- Definição	4
2.2- Fontes dos Evaporitos	4
2.3- Tipos de Evaporitos	5
2.4- Propriedades Mecânicas dos Evaporitos	5
2.5- Ocorrências de Evaporitos no Brasil	7
2.6- Problemas na Perfuração (Alguns Registros)	7
3- O COMPORTAMENTO DE FLUÊNCIA DOS EVAPORITOS	9
3.1- Conceito de Fluência	9
3.2- Conceito de Comportamento Quase-Estático	12
3.3- Mecanismos de Deformação dos Evaporitos	12
3.4- Viscoelasticidade X Viscoplasticidade	13
4- OS MODELOS VISCOELÁSTICOS	15
4.1- Introdução	15
4.2- Modelos Reológicos Lineares	16
4.2.1- Modelos Básicos	16
4.2.2- Modelo de Maxwell	18
4.2.3- Modelo de Kelvin-Voigt	22
4.2.4- Modelo de Três Parâmetros	24
4.2.5- Modelo de Quatro Parâmetros	26
4.2.6- Inclusão do Efeito da Temperatura	29
4.3- Modelos Empíricos Unidimensionais	32
4.3.1- Equação Genérica	32

4.3.2-	Modelo de Potência	32
4.3.3-	Lei Logarítmica	33
4.3.4-	Lei da Temperatura Exponencial	34
4.3.5-	"Multiple Exponencial-Time Law"	34
4.3.6-	Lei de Norton (Fluência Secundária)	35
4.3.7-	Mais Leis para a Fluência Estacionária	36
4.4-	Critérios Utilizados na Seleção do Modelo	37
4.5-	Resposta Material X Resposta Estrutural	39
4.6-	Fluência sob Tensão Variável	41
4.6.1-	Método "Strain Hardening"	45
4.6.2-	Método "Time Hardening"	48
4.7-	Viscoelasticidade em Três Dimensões	50
5-	O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	55
5.1-	Uso do M.E.F. na Análise da Fluência de Materiais Viscoelásticos	55
5.2-	Formas de Solução de Problemas Viscoelásticos Através do M.E.F.	56
5.3-	Escolha do Algoritmo Adequado	57
5.4-	Integração da Equação Característica do Modelo de Potência - Introdução	59
5.4.1-	Procedimento de Integração das Deformações por Fluência	60
5.5-	Equação de Equilíbrio Quase-Estático	62
5.6-	Critério de Treharne para Determinação do Intervalo de Tempo Crítico	68
5.7-	Processo Incremental do Algoritmo Explícito de Euler	69
6-	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	
6.1-	O Modelo Geométrico	77
6.2-	Equações Particularizadas para o Projeto.	79

6.3-	Fluxograma Geral do Programa de Computador	88
6.4-	Testes de Validação	90
6.4.1-	Estrutura Sob Tensões Constantes	90
6.4.2-	Comparação com a Solução Analítica de Placa Finita com Furo no Centro	93
6.4.3-	Comparação com a Solução Analítica de Placa Infinita Sob Tensões Principais H_x e H_y	97
6.4.4-	Comparação de Resultados com Modelo Consagrado	104
7-	SIMULAÇÕES	108
7.1-	Evolução da Fluência do Sal Próximo ao Poço	109
7.2-	Influência das Constantes Elásticas Empregadas	113
7.3-	Influência dos Parâmetros Geológicos	115
7.4-	Influência dos Parâmetros de Perfuração	117
7.5-	Influência da Equação de Fluência Utilizada	122
7.5-	Fechamentos de Poços de Petróleo em Zonas de Sal em Diferentes Profundidades	124
8-	DISCUSSÃO E CONCLUSÕES	126
	BIBLIOGRAFIA	130
	APÊNDICE	135
A.1-	Modelos Reológicos Generalizados	135
A.2-	Avaliando o Diâmetro Externo do Modelo	138
A.3-	Armazenamento Vetorial de Matriz Simétrica de Banda	144
A.4-	Algoritmo para Montagem da Matriz Global	146
A.5-	Resolução do Sistema de Equações Lineares	147
A.5.1-	Método de Decomposição LU	148
A.5.2-	Decomposição Triangular de Gauss	149
A.5.3-	Solução do Sistema Triangular Inferior	152
A.5.4-	Solução do Sistema Triangular Superior	153

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A dependência da vida moderna pelo petróleo tem levado o homem a procurá-lo nos diversos cantos do planeta. Muito mais que um simples "commodity", como alguns tentam classificá-lo neste país, é um produto estratégico e de segurança nacional em todos os países do chamado Primeiro Mundo e também naqueles que lutam por uma verdadeira soberania. Bilhões de dólares foram gastos em recente guerra pela reintegração e posse dos campos gigantes de petróleo no Golfo Pérsico.

Em busca de novas jazidas, o homem tem se deparado com dificuldades crescentes na perfuração dos poços, procurando petróleo nas profundezas da terra e do mar, em regiões inóspitas e remotas. As adversidades encontradas, intransponíveis ao primeiro momento, são superadas através da perseverança, do estudo e de muito trabalho. Com o conhecimento adquirido, o homem desenvolve tecnologias que eliminam ou controlam os riscos inerentes aos desafios encontrados, que deixam de constituir barreiras ao processo de extração do petróleo.

Um problema ainda não completamente dominado na atividade de extração do petróleo é a perfuração de poços em áreas com presença de certos tipos de evaporitos nas suas seções estatigráficas.

A ocorrência de evaporitos nas formas de domos salinos ou outras estruturas de sal, por si só, aumenta a possibilidade do

descobrimto de novas acumulações de petróleo, pois trata-se de excelentes rochas capeadoras, de porosidade e permeabilidade praticamente nulas. Associada ao soerguimento das estruturas salinas, existe a possibilidade do aparecimento de diversos tipos de trapas nas vizinhanças dos corpos de sal. Ainda, a presença de ambientes marinhos rasos, onde é mais favorável a existência de matéria orgânica abundante, está relacionada com o processo de formação das bacias evaporíticas em geral.

Alguns evaporitos têm grande plasticidade, deformando-se com intensidade após a broca atravessá-lo. A esta deformação imediata, soma-se uma deformação ao longo do tempo, chamada de fluência ou "creep" do sal, que pode ser muito mais expressiva que a primeira, pois consegue, em certos casos, fechar rapidamente um poço em volta da coluna que o está perfurando e prendê-la. O "creep" de um corpo salino pode até colapsar os revestimentos a sua frente em um poço de petróleo revestido.

As propriedades mecânicas destes sais são enormemente influenciadas pelas condições de temperatura e pressão em que os mesmos se encontram. Formações salinas encontradas em grandes profundidades, sob condições de maiores temperatura e tensões de confinamento, têm suas deformações plásticas e taxas de deformação ao longo do tempo agravadas. Em profundidades ainda maiores, o comportamento do sal assemelha-se ao de um fluido bastante viscoso que, na presença de um diferencial de pressão, põe-se a fluir prontamente.

A própria gênese dos domos salinos está diretamente relacionada com a fluência do sal ao longo do tempo geológico, associada à baixa densidade do mesmo em relação à densidade dos sedimentos que o justapõem (Nettleton, 1934).

1.1 Objetivos

Estudar o comportamento estático (elastoplástico) e quase-estático (fluência) de um evaporito; desenvolver um programa de computador utilizando a teoria dos elementos finitos e um modelo matemático que represente satisfatoriamente o comportamento do sal. A finalidade do programa é estimar a taxa de fechamento do poço em frente a um corpo de sal.

1.2 Aplicação

O modelo servirá de suporte à perfuração, no estabelecimento de parâmetros de trabalho que minimizem os riscos de uma prisão de coluna e que possibilitem a execução de projetos mais seguros e econômicos. Entre outros, o modelo poderá balizar a atividade de perfuração em:

- Dimensionar o peso adequado dos fluidos de perfuração a serem utilizados em frente às formações salinas;
- Estabelecer, com critérios, intervalos de tempo para repassamentos em frente às zonas de sal;
- Padronizar os conjuntos de fundo de poço ("Bottom Hole Assembly" ou B.H.A.), bem como a utilização de brocas especiais e/ou alargadores ("undreamers") e otimizar o posicionamento de cada componente do B.H.A. em relação à broca, durante a perfuração de um corpo salino;
- Redefinir o número de fases do poço durante o seu projeto. Conhecendo-se, a priori, quanto o sal se deforma, pode-se questionar a necessidade da descida de um revestimento intermediário imediatamente antes e após a perfuração da formação salina.

Capítulo 2

OS EVAPORITOS

2.1 Definição

O termo evaporito é restrito às rochas oriundas de precipitações de uma solução aquosa concentrada, ou seja, precipitações hidroquímicas de solução concentrada pela evaporação e formada com ou sem influência biogênica.

A condição necessária para a formação de um evaporito é que a perda de água por evaporação deve exceder a soma total das águas devido as chuvas, mais as águas superficiais que incidam no local de evaporação. Tal desequilíbrio pode ser influenciado pela latitude, altitude, temperatura, ventos, correntes oceânicas, absorção do solo, etc, levando uma salmoura a atingir concentrações tais que alguns sais começam a se precipitar em estado sólido, formando o evaporito.

2.2 Fontes dos Evaporitos

Os oceanos são as fontes dos depósitos de evaporitos. Grande parte dos maiores depósitos surgiram de precipitações de águas concentradas do mar. Estes depósitos primários têm se dissolvido e redepositado em um segundo ciclo em depósitos bem menores e mais finos que os depósitos originais. Os depósitos do segundo ciclo estão presentes em todos os continentes.

Apesar de os depósitos de evaporitos se originarem da mesma fonte, a água do mar, eles exibem grande variabilidade em suas composições, por causa das diferentes solubilidades dos componentes originais da água do mar. Iniciada a evaporação, os componentes mais solúveis permanecem dissolvidos, enquanto que os menos solúveis se precipitam. Diferenças nas condições ambientais durante o processo de precipitação dos diversos componentes da água do mar ajudam a explicar as variações encontradas na composição dos evaporitos.

Os evaporitos são rochas de transição: continente para o mar ou vice-versa.

2.3 Tipos de Evaporitos

Os evaporitos incluem cloretos, sulfatos de sódio, de potássio, de cálcio, de magnésio, nitratos de sódio e de potássio. Dentre eles, o mais familiar é a halita (NaCl), ou o sal, consumido diariamente e utilizado pela indústria na fabricação da soda cáustica, conservantes, inseticidas e outros. Destaca-se também, a silvita (KCl), utilizada na fabricação de fertilizantes, vidros cerâmicos, sabão e explosivos. Dentre outros, pode-se ainda mencionar a carnalita ($\text{KMgCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$), a gipsita ($\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$), a taquidrita ($2\text{MgCl}_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$), a anidrita (CaSO_4) e a dolomita ($\text{CaMg} \cdot 2\text{CO}_4$).

2.4 Propriedades Mecânicas dos Evaporitos

O comportamento mecânico do sal de halita (NaCl) foi estudado por Serata e outros^[26]. Estes demonstraram através de testes de laboratório em amostras de halita natural o comportamento isotrópico do agregado salino e obtiveram

homogeneidade nas características tensão-deformação das amostras que envolviam um grande número de grãos (cristais) de halita. Segundo eles, a diversidade dos resultados publicados por vários pesquisadores é atribuída, principalmente, às irregularidades das condições de teste, tais como a geometria e dimensões da amostra, além das diferentes concentrações e tipos de impurezas encontradas nas amostras oriundas de fontes diversas.

A **ductilidade**, ou seja, a capacidade de produzir grandes deformações no sal sem que o mesmo se rompa ou diminua sua resistência compressiva, foi também observada pelos pesquisadores acima, em testes de compressão triaxial com grandes pressões de confinamento ou em testes de compressão uniaxial sob temperaturas elevadas.

Eles constataram ainda, que um corpo de prova de sal se rompe quando é submetido a um teste uniaxial ou a um teste triaxial com baixa pressão de confinamento. A elevação da pressão de confinamento exercida sobre o corpo de prova de sal faz aumentar sua ductilidade, e a amostra tende a se deformar de maneira bastante acentuada através do escorregamento entre os planos dos cristais, podendo haver grandes deformações sem ocorrência da ruptura da amostra.

O "*comportamento de fluência dos evaporitos*" não será abordado nesta seção, pois para ele foi reservado todo o capítulo 3. Cabe aqui ressaltar, entretanto, que nem todos os evaporitos possuem esse tipo de comportamento. **Baar** ^[6] sugere que se substitua o enunciado acima por "*comportamento de fluência das rochas salinas*", pois segundo ele, alguns evaporitos, tais como a dolomita e a anidrita, exibem um comportamento mecânico similar ao de uma rocha sedimentar normal. Por sua vez, **Delia** ^[2] descreve um comportamento acentuado de fluência nos sais de halita, silvinita (halita + silvita), carnalita e taquidrita; neste último, o comportamento de fluência é extremamente acentuado.

2.5 Ocorrências de Evaporitos no Brasil

No Brasil existem bacias evaporíticas geradas no Permiano: formação Nova Olinda (bacia do Amazonas), formação Pedra de Fogo (bacia do Parnaíba) e formação Aliança (bacia do Recôncavo). No Jurássico, temos a formação Juruá-Mirim (bacia do Acre).

Há cerca de 135 milhões de anos, o processo de separação continental deu origem a golfos anteriores à separação total (mar aberto), que se estenderam por toda a costa brasileira, propiciando condições de restrição ao fluxo do mar. Em decorrência deste processo de separação dos continentes, depósitos de evaporitos são encontrados por todo o nosso litoral. São os casos da formação Lagoa Feia (bacia de Campos), formação São Vicente (bacia de Santos), membro Itaúnas da formação Mariricu (bacia do Espírito Santo), membro Ibura da formação Muribeca (bacia de Sergipe-Alagoas) e a seção evaporítica encontrada na área do Ceará.

2.6 Problemas na Perfuração (Alguns Registros).

A seguir, foram relacionados alguns exemplos de poços que tiveram problemas durante a perfuração de seções salinas extensas. Em outros casos, os problemas apareceram durante a vida produtiva do poço. Esses registros constituem uma pequena amostragem retirada dos poucos artigos técnicos obtidos que tratam do assunto. O universo de poços com problemas causados

pelo sal, desconhecido por falta de publicações, seguramente é bem maior.

- O poço nº 1 do campo de Kerns, no Texas, perfurado com fluido de perfuração saturado em sal, de alta densidade, atravessou uma seção salina de 3567 a 3981 m. Nos registros constam várias prisões da coluna de perfuração e alterações freqüentes nas propriedades do fluido de perfuração, durante a perfuração do sal.

- O poço nº 1 do campo de Whelan, também no Texas, perfurado com fluido de emulsão inversa de alta densidade e fase interna salgada, encontrou o sal a partir de 3804 m de profundidade. Gastaram-se 4 meses entre pescarias e a perfuração no sal.

- Constam nos registros: 15 casos de ruptura de revestimentos em frente às camadas de sal na bacia de Williston, EUA, em 1954. Naquela bacia, o sal é encontrado entre 2286 e 2438 m de profundidade.

- O poço Durwara 1, no Sudão, encontrou sal entre 2121 e 2865 m, usando fluido de perfuração de peso específico igual a 13,75 kN/m³ (11,7 lb/gal). O arenito abaixo do sal encontrava-se com pressão anormal, havendo um influxo de água ("kick") para o poço, controlado somente quando se aumentou o peso específico do fluido de perfuração para 23,33 kN/m³ (19,85 lb/gal).

No Brasil, na área de Campos, em 26 poços perfurados que atravessaram os evaporitos da formação Lagoa Feia, foram registrados ^[5]:

- 11 poços com prisões de coluna ou ameaças de prisão em frente as zonas de sal;
- 2 poços encontraram pressões anormalmente altas abaixo do sal;
- 1 caso de revestimento colapsado;
- 3 poços desviados e 3 abandonados, devido a um dos motivos acima.

Capítulo 3

O COMPORTAMENTO DE FLUÊNCIA DOS EVAPORITOS

3.1 Conceito de Fluência

Os fenômenos de fluência e plasticidade são conhecidos desde o início do século através do estudo do comportamento dos metais.

Pode-se afirmar que os modelos físicos e matemáticos que tratam da fluência, desenvolvidos e utilizados até hoje, decorrem de pesquisas realizadas com os metais, embora diversos outros materiais apresentem o mesmo tipo de comportamento de deformação lenta dependente do tempo. Como exemplos, citam-se: o concreto, a madeira, o gelo, polímeros e diversas rochas, entre elas, a grande maioria dos evaporitos. Tais modelos têm sido adaptados aos diversos materiais em função dos resultados experimentais.

A conceituação física da fluência ou "creep" é dividida em duas áreas de pesquisa: no âmbito do micro e do macrocomportamento.

No campo do microcomportamento, diz-se que a ruptura da estrutura cristalina de um corpo sólido ocorre da evolução de deformações plásticas localizadas. Isto se aplica a todos os tipos de ruptura, seja ela dúctil, frágil ou do tipo fadiga. Qualquer que seja o tipo de fratura, ela é considerada conseqüência do desenvolvimento de deformações plásticas localizadas em uma pequena parte dos grãos cristalinos do material, que evoluem para toda a estrutura cristalina, precedentemente à formação da fratura no corpo sólido.

Taylor, em 1930, introduziu o modelo explicativo denominado "dislocations", que descreve o movimento de defeitos cristalinos localizado em um plano da estrutura cristalina onde haveria uma ausência de átomos em relação aos demais planos da estrutura. O deslocamento relativo entre as duas faces deste plano preferencial de deslizamento, na presença de tensões cisalhantes, dá origem a deformações plásticas locais, mesmo que essas tensões sejam inferiores ao limite de tensões elástico da estrutura baseado nas propriedades elásticas do material.

Existem, ainda, outros modelos que tentam explicar o fenômeno desses movimentos de defeitos cristalinos, não sendo objetivo deste trabalho abordá-los, historicamente, um a um.

A fluência é, portanto, a evolução com o tempo dessas deformações plásticas, e sua velocidade dependerá das características de viscosidade do material e das tensões e temperatura atuantes.

No campo do macrocomportamento, pode-se explicar o comportamento de fluência com base no gráfico da figura 3.1, relativo a um ensaio típico de fluência sobre um corpo de prova de um material com características viscosas:

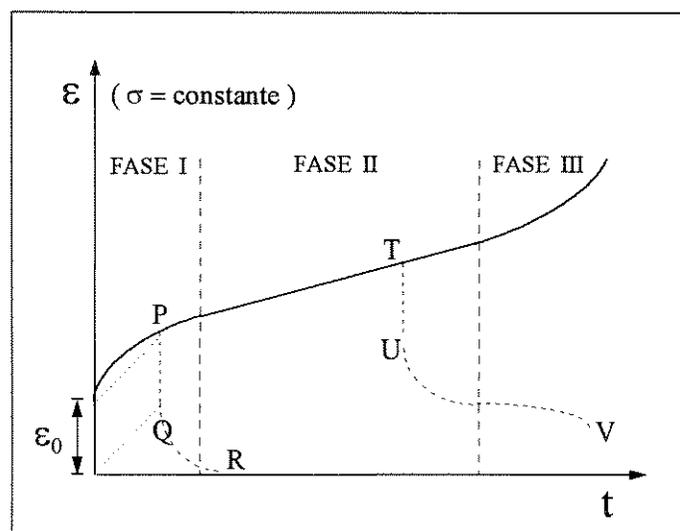


Fig. 3.1 : Ensaio Típico de Fluência de um Material Viscoso

Se uma tensão constante, a temperatura constante, for aplicada em um corpo de prova de um material com comportamento viscoso, a evolução das deformações que aparecerão no corpo de prova poderá ser dividida em três fases distintas:

- Primeiramente aparecerá uma deformação elástica instantânea $\epsilon^e = \epsilon_0$. Essa deformação evoluirá para a **FASE I** do gráfico. Tal fase, denominada de fluência primária ou transiente, tem como característica principal a desaceleração da velocidade de deformação. Se, no decorrer desta fase, a tensão for repentinamente reduzida a zero, ocorrerá uma restauração da configuração original do corpo de prova, seguindo a trajetória indicada como PQR. O trecho PQ trata da restauração devido à deformação elástica instantânea e o trecho QR representa uma recuperação lenta, tendendo assintoticamente a zero, podendo-se dizer que o material retornará ao regime elástico, não restando deformações permanentes.

- A **FASE II** ou fluência secundária (ou *estacionária* ou "steady-state") tem como característica principal a constância da velocidade de deformação. Nessa fase, se o nível de tensões for repentinamente reduzido a zero, ocorrerá inicialmente uma recuperação imediata da deformação elástica (trecho TU) e, em seguida, uma recuperação lenta (trecho UV), tendendo assintoticamente para uma deformação permanente.

- Na **FASE III** ou fluência terciária, tem-se uma aceleração da deformação do corpo sólido, conduzindo-o rapidamente à ruptura. Deve-se ressaltar, entretanto, que parte das medições das deformações devido à fluência terciária são feitas em condições de instabilidade plástica, onde não mais se consegue manter constante o estado de tensões atuante.

3.2 Conceito de Comportamento Quase-Estático

No contexto deste trabalho, classifica-se como comportamento quase-estático o comportamento das estruturas cujas deformações são dependentes da variável tempo, mas que, devido às pequenas acelerações envolvidas, se permite desprezar os efeitos da inércia nas equações de equilíbrio estrutural. Movimentos do tipo de fluência nas acomodações de estruturas metálicas ou de concreto, ou nos fechamentos de poços de petróleo em frente a zonas de sal, são exemplos desse comportamento descrito.

3.3 Mecanismos de Deformação dos Evaporitos.

Quanto maior for o nível de tensões e temperatura de um corpo de sal, maiores serão suas deformações e velocidades de deformação por fluência.

Três diferentes tipos de mecanismos de deformação termoativados ocorrem durante o processo de fluência dos evaporitos (Munson & Deuries^[41]). Dependendo da temperatura e do estado de tensões existentes, um dos mecanismos controlará o processo. São eles:

Deslocamento Uniforme ("*Dislocation Glide*") : quando domina a baixa temperatura e altas tensões;

Deslocamento Ascendente ("*Dislocation Climb*") : quando domina a temperatura e tensões intermediárias;

Difusão da Massa ("*Mass Difusion*") : quando domina a alta temperatura e baixas tensões.

Um quarto mecanismo de deformação não termoativado, chamado de **Solução e Precipitação**, poderá atuar, se houver a presença de um filme líquido nos contornos dos grãos cristalinos e pressão de confinamento adequada.

3.4 Viscoelasticidade X Viscoplasticidade

A fluência se caracteriza pela evolução das deformações ao longo do tempo, sejam elas *reversíveis* ou *irreversíveis*.

A teoria da viscoelasticidade estuda o fenômeno da fluência onde as *deformações permanentes* são funções da variável tempo. A teoria da plasticidade estuda o aparecimento das *deformações permanentes instantâneas no corpo sólido*. Existe, ainda, a teoria da viscoplasticidade, que procura representar o comportamento viscoso dos materiais através de leis de escoamento plástico desenvolvidas no âmbito da teoria da plasticidade.

Os modelos matemáticos, possíveis de serem utilizados na representação do comportamento de um corpo salino em frente a um poço, podem ser divididos em dois ramos de pesquisa: no campo da viscoelasticidade ou no campo da viscoplasticidade.

Na realidade, toda a literatura técnica pesquisada no estudo da fluência dos evaporitos destina-se à atividade de extração do sal através de minas subterrâneas ou a projetos de depósitos de lixo atômico em cavidades subterrâneas nos depósitos naturais de sal. A *representação do comportamento de fluência do sal foi sempre fundamentada em leis constitutivas baseadas na teoria da viscoelasticidade* em toda a literatura pesquisada. "A viscoelasticidade tem permitido uma simulação do comportamento quase-estático das estruturas de escavação e lavra da mina de Taquari-Vassouras com excelente aproximação"^[1] (Costa).

Nas minas de sal, a teoria da plasticidade tem sido utilizada, somente, na definição do projeto geométrico e cálculo das dimensões das aberturas das galerias por critério de ruptura, bem como, na definição das áreas das estruturas escavadas com potencialidade de desmoronamento através do isolamento dos pontos do maciço em regime de plasticidade.

No presente trabalho, pretende-se simular o comportamento quase-estático de um corpo salino em frente a um poço de petróleo. Não existe uma finalidade específica e nem se tem a pretensão de isolar os pontos materiais do sal em processo de ruptura. Muito provavelmente, tais pontos em processo de ruptura nem existirão, quando o sal é encontrado em profundidades maiores do que 1000 m, devido ao nível da pressão de confinamento atuante sobre o corpo de sal que, como foi visto na seção 2.6, inibe a ruptura. Ou seja, não existe a necessidade de utilização da teoria viscoplástica. Portanto, a escolha pela teoria viscoelástica no prosseguimento deste trabalho, apresenta-se como a mais adequada.

Capítulo 4

OS MODELOS VISCOELÁSTICOS

4.1 Introdução

Qualquer relação entre quantidades envolvendo o estado de tensões e o estado de deformações num corpo, incluindo ou não suas derivadas no tempo, é denominada uma equação constitutiva, sendo uma característica do material de que é feito o corpo.

Para o sucesso de um projeto ou análise estrutural qualquer, um dos aspectos mais importantes é a escolha dos modelos que possam melhor representar o comportamento mecânico dos materiais presentes na estrutura. Fundamental, então, é a obtenção do maior número possível de informações e dados experimentais sobre os materiais em questão. Assim é possível calibrar e ajustar os melhores modelos disponíveis que atendam às características do projeto.

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns dos modelos matemáticos mais utilizados na descrição do comportamento mecânico de materiais viscoelásticos. Tais modelos descrevem o *comportamento macroscópico de fluência* do material em estudo, sem se ater à *natureza microscópica* do fenômeno que representam. Como consequência, esses modelos podem ser usados para representar materiais como o aço, a madeira, um evaporito ou mesmo um elastômero. A escolha do melhor modelo para cada tipo de material irá depender do melhor ajuste de suas curvas aos dados experimentais do material para as condições de trabalho e escala de tempo definidas no projeto de utilização desse material.

Devido que a grande maioria dos estudos experimentais com materiais viscoelásticos terem sido realizados em condições *unidimensionais*, os modelos matemáticos mais difundidos foram desenvolvidos para essas condições, ou seja, *estado de tensões uniaxial*. Esses modelos podem ser subdivididos, didaticamente, em: *modelos reológicos* e *modelos empíricos*.

Os modelos reológicos utilizam conceitos e definições básicas da teoria elástica linear e da reologia na simulação do comportamento viscoelástico do material.

Nos modelos empíricos, ajusta-se uma equação matemática, deduzida empiricamente pela observação do comportamento típico do material, aos resultados experimentais obtidos nos ensaios de laboratório.

Uma característica que sobressai nos modelos reológicos em relação aos empíricos é que, enquanto os modelos empíricos simulam o comportamento dos materiais viscoelásticos apenas nos *ensaios de fluência*, os modelos reológicos conseguem representá-los, também, nos *ensaios de relaxação das tensões* e nos *ensaios de recuperação das deformações*. A descrição sucinta de cada um desses ensaios é efetuada durante a apresentação dos modelos.

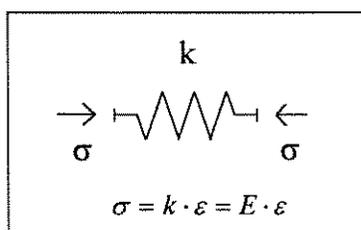
A característica que mais se destaca na grande maioria das formulações empíricas em relação aos modelos reológicos é a *dependência explícita da relação tensão-deformação com a temperatura*.

4.2 Modelos Reológicos Lineares

4.2.1 Modelos Básicos

Basicamente, são dois os modelos que simulam o comportamento mecânico *unidimensional* dos materiais de uma forma bastante simples: o sólido elástico linear e o líquido viscoso newtoniano.

O módulo de elasticidade E é a constante que relaciona a tensão unidimensional σ atuante num sólido elástico linear com a deformação ε correspondente. Esta relação característica pode ser representada por um elemento de mola, onde a tensão σ representa a força que atua na mola e a deformação ε corresponde ao deslocamento da mola. A constante de rigidez k da mola confunde-se com o módulo de elasticidade E do material no caso unidimensional, como é mostrado na figura 4.1:



**Fig. 4.1 : Sólido Elástico Linear
(Modelo Básico)**

A viscosidade aparente μ é a constante que relaciona a tensão cisalhante τ que atua em um fluido newtoniano com sua taxa de deformação $\dot{\gamma}$. Por semelhança, o comportamento mecânico do fluido newtoniano pode ser representado por um elemento de amortecedor, onde a tensão σ que atua no amortecedor representa a tensão cisalhante τ que age sobre o fluido newtoniano; a variação do deslocamento com o tempo ou a taxa de amortecimento $\partial\varepsilon/\partial t$ (ou $\dot{\varepsilon}$) do amortecedor corresponde à taxa de deformação $\dot{\gamma}$ do fluido newtoniano, e a viscosidade η do amortecedor é a constante equivalente à viscosidade aparente μ do fluido newtoniano. A relação pode ser vista na figura 4.2.

Pode-se enquadrar o comportamento dos materiais viscoelásticos como sendo parte de sólido elástico linear e parte de líquido viscoso newtoniano. Neste caso, a taxa de amortecimento $\dot{\varepsilon}$ do amortecedor corresponde a uma variação da deformação do material viscoelástico com o tempo devido ao

processo de fluência. A esta taxa de deformação ($\partial\epsilon/\partial t$ ou $\dot{\epsilon}$), dá-se o nome de **velocidade de fluência**.

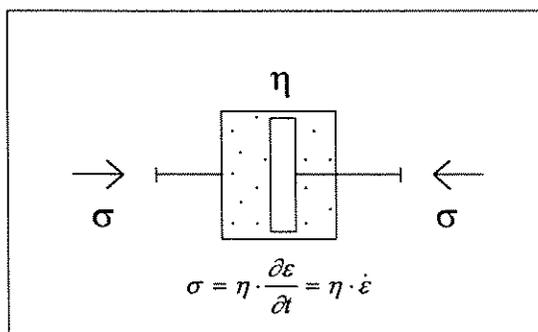


Fig. 4.2: Fluido Viscoso Newtoniano (Modelo Básico)

Da associação dos elementos simples de mola com os elementos de amortecedor, formam-se novos modelos que melhor representam e melhor se ajustam às curvas experimentais de fluência dos materiais ensaiados. Alguns desses modelos serão vistos em seguida.

4.2.2 Modelo de Maxwell

Consiste na **associação em série** de um elemento de mola com um elemento de amortecedor, conforme mostra a figura 4.3. Neste caso, a tensão σ é a mesma em ambos os elementos do modelo.

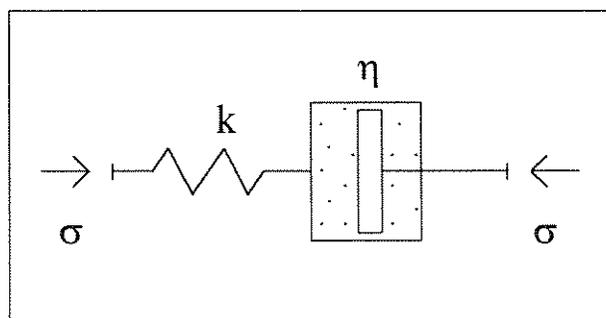


Fig. 4.3 : Modelo de Maxwell

Para cada elemento do modelo vale uma das relações:

$$\sigma^e = k \cdot \varepsilon^e \quad (\text{tensão na mola}) \quad (4.1),$$

$$\sigma^v = \eta \cdot \dot{\varepsilon}^v \quad (\text{tensão no amortecedor}) \quad (4.2),$$

onde σ^e e ε^e representam respectivamente a tensão e a deformação elásticas agindo na mola, enquanto σ^v e ε^v representam a tensão e a deformação viscosas agindo no amortecedor. As constantes k e η são características mecânicas do material. Para o modelo de Maxwell, a constante de rigidez k se confunde com o módulo de elasticidade E do material.

Convenciona-se neste contexto que um ponto sobrescrito a uma grandeza qualquer representa a derivada dessa grandeza em relação ao tempo. Portanto o termo $\dot{\varepsilon}$ representa a taxa ou velocidade de deformação ($\dot{\varepsilon} = \partial\varepsilon/\partial t$).

Na obtenção da equação constitutiva do modelo de Maxwell, deve-se relacionar a tensão aplicada σ à deformação total ε .

Percebe-se que:

$$\sigma = \sigma^e = \sigma^v \quad (4.3)$$

e

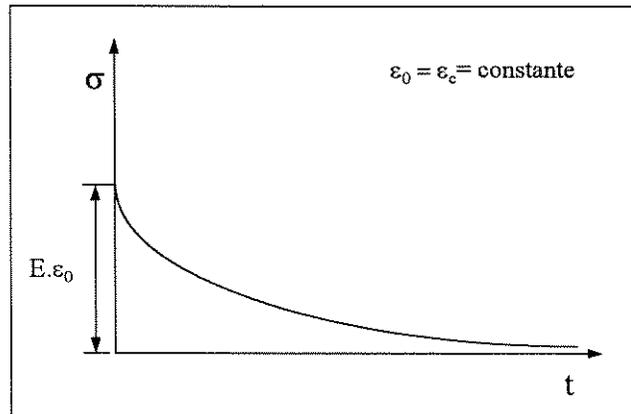
$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v \quad (4.4).$$

Derivando-se a equação 4.4:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{k} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (4.5),$$

que é a equação constitutiva procurada.

O modelo de Maxwell é de interesse particular na consideração dos **ensaios de relaxação das tensões**. Nestes ensaios, impõe-se uma deformação inicial ($\varepsilon_0 = \varepsilon_c = \text{constante}$) ao corpo de prova, fazendo-se com que o nível de tensões no sistema se eleve para σ_0 . Impedindo-se novas deformações no corpo de prova tem-se, como consequência, uma diminuição gradativa, ao longo do tempo, do nível de tensões atuante, caracterizando-se o fenômeno da relaxação de tensões. A figura 4.4 ilustra graficamente o exposto:



**Fig. 4.4: Ensaio de Relaxação das Tensões
- Modelo de Maxwell -**

Faz-se $\dot{\varepsilon}=0$ na equação 4.5, pois $\varepsilon=\varepsilon_c=\text{constante}$; \Rightarrow

$$\frac{\dot{\sigma}}{k} + \frac{\sigma}{\eta} = 0 \Rightarrow \frac{\eta}{k} \dot{\sigma} + \sigma = 0 \Rightarrow t_1 \dot{\sigma} + \sigma = 0 \quad (4.6),$$

sendo $t_1 = \frac{\eta}{k}$. A equação 4.6 é uma equação diferencial, ordinária, homogênea, de primeira ordem, cuja solução é do tipo:

$$\sigma = C_1 \cdot e^{-\frac{t}{t_1}} \quad (4.7).$$

Para determinar-se C_1 , faz-se $\sigma=k \cdot \varepsilon_c$ em $t=0$ em 4.7:

$$k \cdot \varepsilon_c = C_1 \cdot e^{-\frac{0}{t_1}} \Rightarrow C_1 = k \cdot \varepsilon_c \quad (4.8).$$

Substituindo-se a equação 4.8 na equação 4.7:

$$\sigma = k \cdot \varepsilon_c \cdot e^{-\frac{t}{t_1}} \Rightarrow \sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\left(\frac{t}{t_1}\right)} \quad (4.9),$$

onde σ_0 ($\sigma_0 = k \cdot \varepsilon_c = E \cdot \varepsilon_c$) representa a tensão no material no instante $t=0$, e $t_1=\eta/k$ é o tempo de relaxação do modelo ou o tempo necessário para que a tensão atinja $\frac{1}{e}$ vezes o seu valor inicial. Tal como η e k , as constantes do modelo, t_1 é função da temperatura de ensaio/trabalho do material.

Pela equação 4.9, o modelo de Maxwell mostra que, sob condições de deformação constante, a tensão cai exponencialmente

com o tempo, o que é verificado pelo gráfico da figura 4.4. Na realidade, a tensão agindo no material não cairá necessariamente a zero para um tempo infinito, como prevê o modelo.

Impondo-se uma condição de tensão constante σ_c ao modelo de Maxwell (equação 4.5) tem-se:

$$\dot{\sigma} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_c}{\eta} \quad (4.10).$$

Integrando-se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c}{\eta} \cdot t + C_2, \text{ onde (para } t=0) \varepsilon(0) = \sigma_c \cdot k \Rightarrow C_2 = \sigma_c \cdot k \Rightarrow$$

$$\varepsilon(t) = \sigma_c \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{t}{\eta} \right) \text{ ou } \varepsilon(t) = \sigma_c \cdot \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \quad (4.11).$$

Na equação 4.11, a deformação elástica inicial é dada por $\frac{\sigma_c}{E}$, sendo $\frac{\sigma_c}{\eta} \cdot t$ a evolução da deformação com o tempo devido à fluência, graficamente ilustrada na figura 4.5:

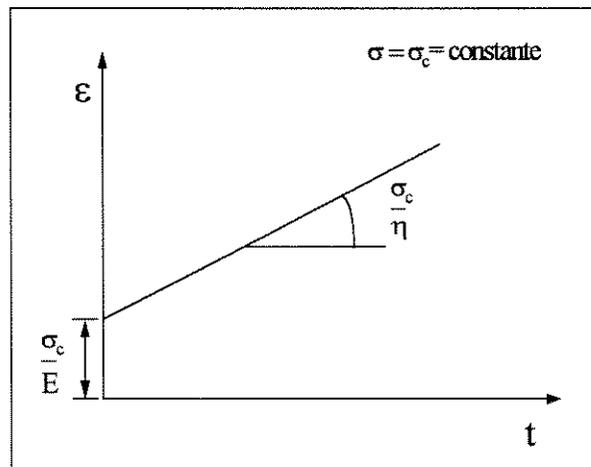


Fig. 4.5: Ensaio de Fluência - Modelo de Maxwell -

O modelo de Maxwell, num ensaio de fluência, mostra a deformação crescendo linearmente com o tempo a partir de uma deformação elástica inicial. A fluência *primária* (ou *transiente*) não é percebida pelo modelo, que representa apenas o "creep" estacionário.

4.2.3 Modelo de Kelvin-Voigt

Formado por uma única mola e um único amortecedor ligados em paralelo, como mostra a figura 4.6:

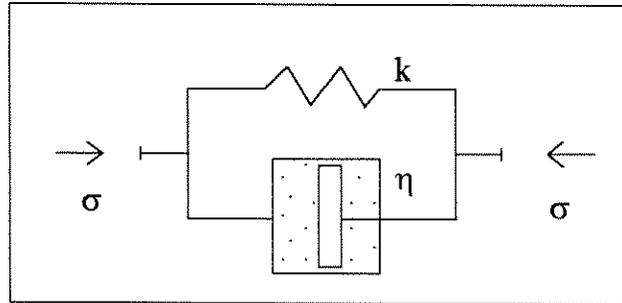


Fig. 4.6 : Modelo de Kelvin-Voigt

Para o modelo de Kelvin-Voigt, constata-se que:

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v \quad (4.12)$$

e

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^v \quad (4.13).$$

Com as equações 4.1, 4.2, 4.12 e 4.13, chega-se a

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v = k \cdot \varepsilon + \eta \cdot \dot{\varepsilon}^v \Rightarrow \sigma = k \cdot \varepsilon + \eta \cdot \dot{\varepsilon} \quad (4.14),$$

que é a equação constitutiva do modelo de Kelvin-Voigt.

O modelo acima representa com boa aproximação a **recuperação viscoelástica das deformações** de um material. Neste teste, descarrega-se a tensão, $\sigma=0$, que age sobre o corpo de prova, após uma tensão inicial σ_0 ter provocado uma deformação ε_0 no mesmo. A partir daí, $t=0$, monitora-se a recuperação das deformações no corpo de prova.

Partindo-se da equação 4.14, obtém-se:

$$\eta \cdot \dot{\varepsilon} + k \cdot \varepsilon = 0 \quad (4.15),$$

cuja solução é:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot e^{-t/\tau} \quad (4.16),$$

onde $t_1 = \eta/k$. O gráfico, mostrado na figura 4.7, é a representação do comportamento do modelo de Kelvin-Voigt num ensaio de recuperação viscoelástica das deformações.

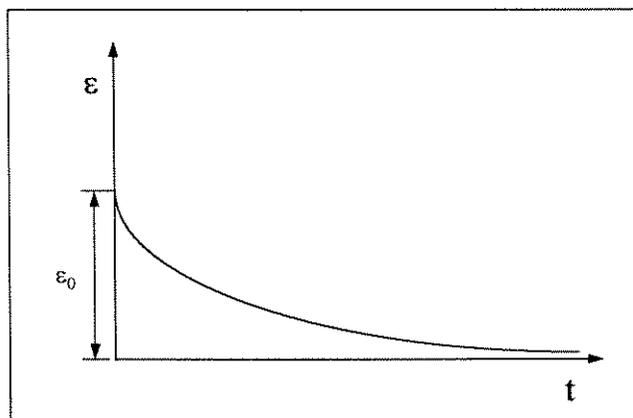


Fig. 4.7: Ensaio de Recuperação das Deformações
- Modelo de Kelvin-Voigt -

Para um ensaio de relaxação das tensões, onde a deformação ε é mantida constante ($\varepsilon = \varepsilon_c = \text{constante}$), faz-se $\dot{\varepsilon} = 0$ na equação 4.14, obtendo-se $\sigma = k \cdot \varepsilon_c$. Esta equação apresenta uma tensão σ constante, que difere do comportamento característico dos materiais viscosos reais, onde há um decaimento da tensão com o tempo. Portanto o modelo de Kelvin-Voigt não representa de forma adequada o comportamento dos materiais viscoelásticos em ensaios de relaxação das tensões.

Na representação da deformação viscoelástica sob tensão constante (ensaio de fluência), faz-se $\sigma = \sigma_c = \text{constante}$ na equação 4.14, obtendo-se:

$$k \cdot \varepsilon + \eta \cdot \dot{\varepsilon} = \sigma_c \quad (4.17).$$

A solução da equação diferencial 4.17 tem como resultado:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_c}{k} \cdot \left(1 - e^{-t/t_1}\right) \quad (4.18),$$

onde $t_1 = \frac{\eta}{k}$. A equação 4.18 representa satisfatoriamente a fluência primária nas rochas, onde a velocidade de deformação

tende a **zero** com o tempo, assíntota com a horizontal, como mostra o gráfico da figura 4.8.

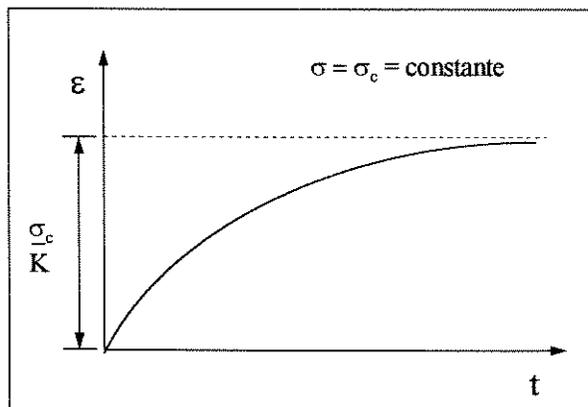


Fig. 4.8: Ensaio de Fluência - Modelo de Kelvin-Voigt

Entretanto, o modelo de Kelvin-Voigt não prevê a *deformação elástica inicial*. Tal ineficácia é contornada adicionando-se um elemento de mola, em série, ao modelo de Kelvin-Voigt.

4.2.4 Modelo de Três Parâmetros.

Para alguns pesquisadores ^[7], conhecido como *modelo de Ross*, para outros ^{[1], [8]}, como *modelo de Kelvin Generalizado*, este modelo encontra-se representado na figura 4.9:

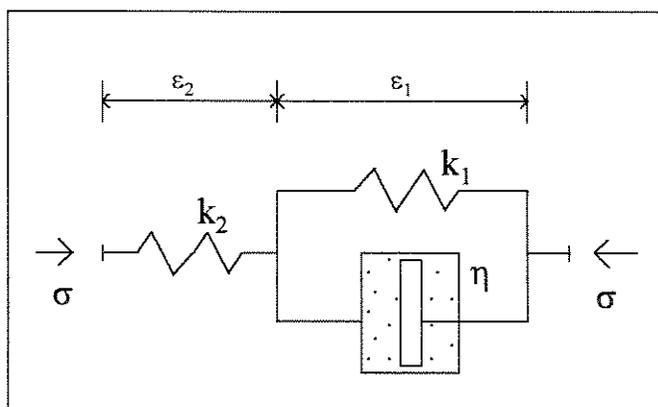


Fig. 4.9: Modelo de Três Parâmetros

A deformação total do modelo é dada por:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (4.19).$$

Para a tensão σ aplicada, valem as seguintes relações:

$$\sigma = k_1 \cdot \varepsilon_1 + \eta \cdot \dot{\varepsilon}_1 \quad \text{e} \quad \sigma = k_2 \cdot \varepsilon_2 \quad (4.20).$$

Eliminando-se ε_1 e ε_2 em 4.19 e 4.20, fica-se com:

$$\eta \cdot \dot{\sigma} + (k_1 + k_2) \cdot \sigma = k_2 \cdot (\eta \cdot \dot{\varepsilon} + k_1 \cdot \varepsilon) \quad (4.21),$$

que é a equação constitutiva do modelo.

Para uma condição de tensão σ_c constante (ensaio de fluência), tem-se a partir da equação 4.21:

$$\dot{\sigma} = 0 \Rightarrow \eta \cdot k_2 \cdot \dot{\varepsilon} + k_1 \cdot k_2 \cdot \varepsilon = (k_1 + k_2) \cdot \sigma_c \quad (4.22).$$

A solução da equação 4.22 tem como resultado:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_c}{k_2} + \frac{\sigma_c}{k_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{t_1}} \right) \quad (4.23),$$

onde $t_1 = \frac{\eta}{k_1}$. Percebe-se que o primeiro termo da equação 4.23

trata-se da deformação elástica inicial (para $t=0 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_c}{k_2}$),

ou seja, a mola k_2 não contribui para a deformação por fluência do modelo. O formato da curva representada pela equação 4.23 está ilustrado na figura 4.10:

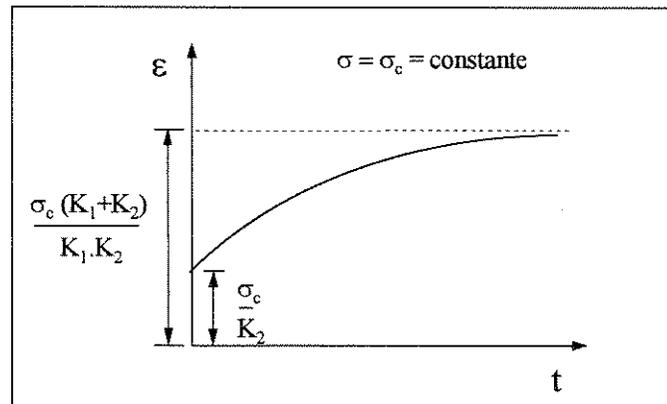


Fig. 4.10 : Ensaio de Fluência - Modelo de Três Parâmetros

A figura 4.10 mostra que o modelo de três parâmetros consegue representar, satisfatoriamente, a deformação elástica inicial e a fluência primária, mas não é capaz de representar a fase de fluência secundária de um material viscoelástico.

4.2.5 Modelo de Quatro Parâmetros.

O modelo de quatro parâmetros (ou *modelo de Burgers*) consiste na associação em série do modelo de Kelvin-Voigt com o modelo de Maxwell, conforme mostra a figura 4.11:

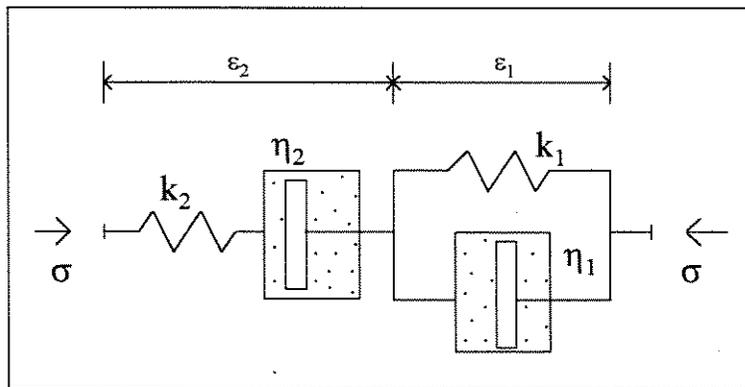


Fig. 4.11: Modelo de Burgers

A deformação total do sistema (modelo de Burgers) é dada pela soma das deformações dos modelos de Maxwell e de Kelvin-Voigt:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (4.24).$$

A tensão atuante na entrada de cada um dos dois modelos é a mesma:

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \quad (4.25).$$

Rescrevendo-se a equação constitutiva para o modelo de Maxwell:

$$\dot{\epsilon}_2 = \frac{\dot{\sigma}_2}{k_2} + \frac{\sigma_2}{\eta_2} \quad (4.5),$$

e a equação constitutiva para o modelo de Kelvin-Voigt:

$$\sigma_1 = k_1 \cdot \varepsilon_1 + \eta_1 \cdot \dot{\varepsilon}_1 \quad (4.14).$$

Substituindo-se 4.25 em 4.5 e em 4.14, e utilizando-se de 4.24 para eliminar ε_1 e ε_2 das equações resultantes, chega-se, após algum algebrismo e derivação, a:

$$\eta_1 \cdot \ddot{\varepsilon} + k_1 \cdot \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\eta_1}{k_2} \right) \cdot \ddot{\sigma} + \left[1 + \frac{k_1}{k_2} + \frac{\eta_1}{\eta_2} \right] \cdot \dot{\sigma} + \left(\frac{k_1}{\eta_2} \right) \cdot \sigma \quad (4.26),$$

que é a equação constitutiva do modelo de Burgers ^{[8], [1]}.

Para uma tensão constante σ_c aplicada, a equação 4.26 se reduz a:

$$\eta_1 \cdot \ddot{\varepsilon} + k_1 \cdot \dot{\varepsilon} = \left(\frac{k_1}{\eta_2} \right) \cdot \sigma_c \quad (4.27).$$

A solução da equação diferencial 4.27 tem como resultado:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c}{k_2} + \frac{\sigma_c}{k_1} \cdot [1 - e^{-t/t_1}] + \frac{\sigma_c}{\eta_2} \cdot t \quad (4.28), \quad [8], [1]$$

onde $t_1 = \eta_1/k_1$. A representação da equação 4.28, mostrada na figura 4.12, constitui o comportamento do modelo de Burgers em um ensaio de fluência.

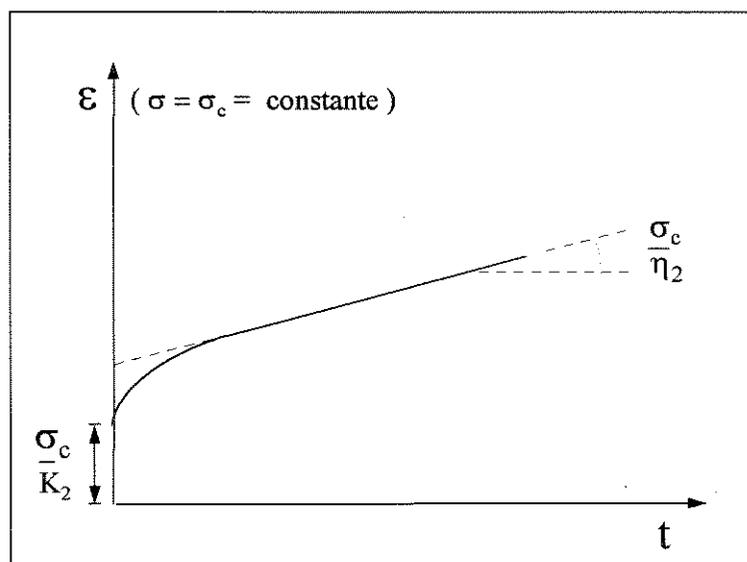


Fig. 4.12: Ensaio de Fluência - Modelo de Burgers -

O modelo de Burgers consegue reproduzir a deformação instantânea elástica inicial $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_c}{k_2}$, a deformação na fase de fluência transiente e a deformação na fase de fluência secundária ε^{f_2} , de velocidade de deformação constante $(\frac{\partial \varepsilon^{f_2}}{\partial t} = \frac{\sigma_c}{\eta_2})$.

Jaeger^[8], partindo da equação 4.28 e utilizando o Princípio de Boltzmann da Superposição das Deformações, descrito na seção 4.6, deduziu a equação comportamental do modelo de Burgers para um **ensaio de recuperação das deformações**. Neste ensaio, uma tensão constante σ_c é aplicada até o tempo t_x , quando é, então, repentinamente retirada. Para um instante de tempo $t > t_x$, pode-se escrever que:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c}{k_1} \cdot [e^{-(t-t_x)/t_1} - e^{-t/t_1}] + \frac{\sigma_c \cdot t_x}{\eta_2} \quad [8] \quad (4.29).$$

A representação da equação 4.29 é mostrada na figura 4.13. A diferença entre os resultados das equações 4.28 e 4.29, para $t = t_x$, é igual a $\frac{\sigma_c}{k_2}$. Ela representa a *recuperação elástica* do modelo, que por sua vez é igual a deformação elástica original ε_0 . Verifica-se, também, a ocorrência de deformações permanentes no modelo.

Entre os modelos reológicos vistos até o momento, o modelo de Burgers é aquele que reúne todas as características básicas encontradas, de maneira geral, nos ensaios de materiais viscosos. De fato, este modelo responde às condições de fluência, relaxação das tensões e recuperação das deformações de maneira razoavelmente próxima ao comportamento real geral dos materiais viscosos ensaiados.

Segundo Costa^[1], o modelo de Burgers foi o que melhor se adaptou às curvas experimentais obtidas em ensaios de

laboratório sobre corpos de prova de evaporitos, dentre os quatro modelos reológicos descritos até o momento e por ele pesquisados. Também, das soluções analíticas que **Sarkar**^[7] desenvolveu utilizando-se de diferentes modelos reológicos, foi com o modelo de Burgers que foram obtidos os melhores resultados, quando essas soluções foram comparadas aos resultados experimentais de testes com rochas salinas.

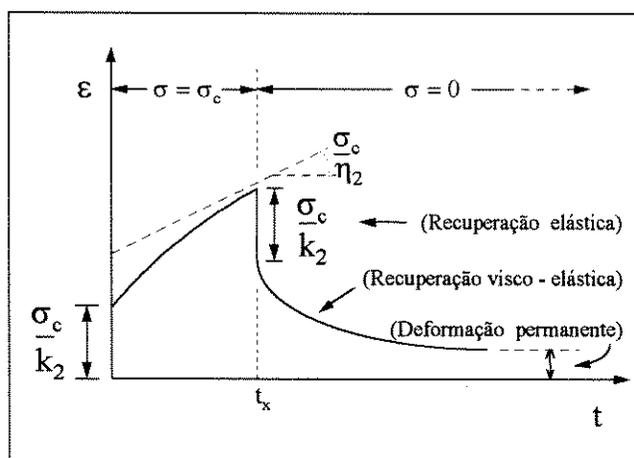


Fig. 4.13 : Ensaio de Recuperação das Deformações
- Modelo de Burgers -

4.2.6 Inclusão do Efeito da Temperatura

Um grande inconveniente dos modelos reológicos é que o efeito da temperatura não aparece explicitamente em suas equações constitutivas. Sabe-se, entretanto, que a fluência de um material viscoelástico é profundamente afetada pela temperatura a qual o mesmo está submetido.

Tomando-se, como exemplo, a equação 4.28, representativa de um ensaio de fluência do modelo de Burgers, pode-se rerepresentá-la aqui da forma:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^f \quad (4.30),$$

onde ε é a deformação total do modelo, $\varepsilon^e = \frac{\sigma_c}{k_2}$ é a deformação elástica instantânea e

$$\varepsilon^f = \frac{\sigma_c}{k_1} \cdot [1 - e^{-t/t_1}] + \frac{\sigma_c}{\eta_2} \cdot t \quad (4.31),$$

é a deformação por fluência. A influência da temperatura na fluência do material de Burgers é exercida, portanto, sobre os parâmetros k_1 , η_1 e η_2 , lembrando-se que $t_1 = \eta_1/k_1$. Pode-se, então, escrever que:

$$\begin{aligned} k_1 &= f_1(T) , \\ \eta_1 &= f_2(T) , \\ \eta_2 &= f_3(T) . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Costa^[1], em sua tese de doutorado, assumiu que a temperatura influiria igualmente na mola e nos pistões do modelo e que as funções de dependência teriam a seguinte forma:

$$\begin{aligned} k_1 &= k'_1 \cdot T^{-b} , \\ \eta_1 &= \eta'_1 \cdot T^{-b} , \\ \eta_2 &= \eta'_2 \cdot T^{-b} , \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde T é a temperatura a qual o material está submetido e b é uma constante a ser ajustada de acordo com os resultados obtidos nos testes de laboratório com o material ensaiado. O tipo de função escolhida fornece uma dependência da temperatura similar à encontrada na equação empírica do *Modelo de Potência*, que será vista na seção 4.3.2.

Tal dependência tem compatibilidade com o comportamento físico real dos materiais viscoelásticos. O aumento do movimento interno molecular devido a um aumento de temperatura causa um aumento da plasticidade do material, com conseqüente diminuição de suas características viscosas e constante elástica.

Substituindo as equações 4.33 na equação 4.31:

$$\varepsilon^f = \frac{\sigma_c}{k'_1} \cdot T^b \cdot \left[\frac{k_1}{\eta_2} \cdot t + (1 - e^{-t/t_1}) \right] \quad (4.34),$$

que é a Lei de Fluência de Burgers (incluindo o efeito da temperatura) adequada à fluência primária e secundária. Se, apenas, a fluência primária for considerada, tem-se:

$$\varepsilon^{f_1} = \frac{\sigma_e}{k_1} \cdot T^b \cdot (1 - e^{-t/t_1}) \quad (4.35).$$

Definindo-se:

$$A = \frac{1}{k_1} \quad \text{e} \quad c = -\frac{1}{t_1} \quad (4.36).$$

Substituindo-se as equações 4.36 em 4.35:

$$\varepsilon^{f_1} = A \cdot \sigma \cdot T^b \cdot (1 - e^{ct}) \quad (4.37),$$

sendo ε^{f_1} a deformação devido à fluência primária do modelo de Burgers. Percebe-se a semelhança existente entre a equação 4.37 e a lei semi-empírica do Modelo de Potência, a ser descrita na seção 4.3.2, ($\varepsilon^f = A \cdot \sigma^a \cdot T^b \cdot t^c$).

Para se acrescentar a influência da temperatura aos demais modelos reológicos, basta que se repita o procedimento descrito acima.

O modelo de Burgers é aquele que contém o maior número de elementos de mola e de amortecedor e o que melhor representa o comportamento viscoelástico dos materiais dentre os modelos reológicos vistos até o momento. Ele constitui-se da associação em série de 1 unidade de Maxwell com 1 unidade de Kelvin-Voigt.

Espera-se, intuitivamente, que a associação entre um maior número de unidades de Maxwell e de Kelvin-Voigt se traduzirá em um modelo com maior capacidade de ajuste ao comportamento mecânico do material que se deseja modelar. Isto se deve ao fato de que ao se aumentar o número de unidades do modelo conseqüentemente aumenta-se, também, o número de termos da equação diferencial que representa o seu comportamento e o número de parâmetros descritivos do modelo. Obtém-se, desta maneira, modelos que melhor se ajustam às características do comportamento mecânico do material viscoelástico qualquer. Evidentemente, a complexidade no tratamento matemático desses modelos também aumenta, tornando-os, na maioria das vezes, de pouca utilidade prática. No apêndice deste trabalho, faz-se uma abordagem sucinta de dois desses modelos: o *modelo generalizado de Maxwell* e o *modelo generalizado de Kelvin-Voigt*.

4.3 Modelos Empíricos Unidimensionais

4.3.1 Equação Genérica

Uma equação capaz de se ajustar a uma curva experimental onde ocorrem as três fases da fluência (transiente, secundária e terciária) seria do tipo:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon^{f_1}(t) + V.t + \varepsilon^{f_3}(t) \quad (4.38),$$

onde ε_0 é a deformação elástica instantânea, ε^{f_1} corresponde a fluência transiente ou primária, $V.t$ é a fluência secundária ou estacionária e ε^{f_3} é a deformação terciária ou acelerada.

A terceira fase da fluência ε^{f_3} só é atingida quando o material entra em processo de ruptura. Em termos de projeto, esta fase nunca deve ser alcançada, portanto seu estudo foge ao escopo do presente trabalho.

A seguir, comentam-se algumas das equações constitutivas mais utilizadas na descrição da fluência primária e secundária dos evaporitos^[12]. Deve-se ressaltar que praticamente todas as pesquisas realizadas sobre o comportamento do sal são devidas à questão do armazenamento de lixo atômico ou a projetos de escavação de minas de sal.

4.3.2 Modelo de Potência

Equação empírica desenvolvida por Lomenick^[27], que relaciona a deformação ocorrida durante a fluência primária com a tensão, temperatura e tempo.

$$\varepsilon^{f_1}(t) = A.\sigma^a.T^b.t^c \quad (4.39)$$

onde:

ε^{f_1} = deformação medida durante a fluência primária;

σ = diferencial de tensão axial;

T = temperatura absoluta;

a, b, c ($c > 1$) = parâmetros determinados experimentalmente;

A = parâmetro que depende das condições do ensaio e do sistema de unidades empregado.

Apesar de aparecerem explicitamente na equação 4.39, esta só suporta tensões e temperaturas constantes. Pode-se considerar, então, que $k = A \cdot \sigma^a \cdot T^b$, e a equação simplifica-se para:

$$\varepsilon^{f_1}(t) = k \cdot t^c \quad (4.40),$$

que é a Lei Potencial, utilizada para representar a fluência primária dos metais e também estendida na representação da fluência das rochas. No caso, k integra as condições particulares do ensaio, é dependente da temperatura, da tensão confinante e da tensão diferencial às quais é submetido o corpo de prova.

Além de ser puramente empírico, o Modelo de Potência traz dois inconvenientes em sua equação constitutiva:

- a velocidade de deformação torna-se infinita quando a variável "tempo" t tende a zero;

- quando t é muito grande, a velocidade de deformação tende a zero, ou seja, a curva de fluência é assíntota com a horizontal.

4.3.3 Lei Logarítmica

Oriunda, também, da representação da *fluência transiente* dos metais, sua utilização foi estendida na representação da *fluência primária* das rochas.

$$\varepsilon^{f_1}(t) = A \cdot \ln(t) \quad (4.41)$$

A lei logarítmica também sofre a desvantagem da velocidade de deformação tornar-se infinita quando a variável t tende a zero. Para evitar esta condição limite indesejável,

Lomenitz^[28] propôs:

$$\varepsilon^{f_1}(t) = A \cdot \ln[1 + \alpha \cdot t] \quad (4.42).$$

Jeffreys^[29] sugeriu uma modificação na equação de Lomenitz, e a equação logarítmica ficou assim:

$$\varepsilon^{f_1}(t) = A \cdot \ln[(1 + \alpha \cdot t)^c - 1] \quad (4.43),$$

onde **A**, **c** e **α** são constantes obtidas experimentalmente, que dependem das condições de ensaio e do sistema de unidades empregado.

As leis logarítmicas têm sido bastante empregadas em trabalhos geofísicos, em particular por Griggs, que conseguiu ótimos ajustes das equações acima aos resultados de experimentos com calcários em períodos de até um ano^[8].

4.3.4 Lei da Temperatura Exponencial

Tal qual a Lei Potencial, esta lei relaciona a fluência *transiente* à tensão, temperatura e tempo:

$$\varepsilon^{f_1}(t) = A \cdot \sigma^a \cdot t^c \cdot e^{(-b/T)} \quad (4.44),$$

onde **A**, **a**, **c** e **b** são constantes. Esta equação tem similaridade com a equação 4.39, do Modelo de Potência, exceto que a deformação varia exponencialmente com a temperatura e não como potência da mesma.

A Lei da Temperatura Exponencial geralmente é utilizada para modelar o comportamento de fluência de evaporitos em altas temperaturas, como por exemplo em depósitos de lixo atômico, onde o desprendimento de calor é muito elevado devido à radioatividade.

4.3.5 "Multiple Exponencial-Time Law"

Equação semi-empírica onde assume-se que vários mecanismos termoativados contribuem de maneira independente para a deformação *transiente* do evaporito.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^m \left\{ g_i \cdot \left[1 - e^{(-\xi_i \cdot t)} \right] \right\} + V \cdot t \quad (4.45),$$

sendo:

$\varepsilon(t)$ = deformação total;

ε_0 = deformação instantânea;

g_i = termo associado ao i -ésimo mecanismo termoativado no processo da fluência transiente;

ξ_i = parâmetro de *endurecimento* associado ao i -ésimo mecanismo termoativado;

V = taxa ou velocidade de deformação durante a fluência secundária;

m = número de mecanismos termoativados.

Para a equação acima, a velocidade de deformação durante a fluência estacionária é dada por:

$$V = A \cdot \sigma^a \cdot e^{(-Q/RT)} \quad (4.46),$$

onde:

A, a = constantes;

Q = energia de ativação;

R = constante universal dos gases;

T = temperatura absoluta.

Na equação 4.45 têm-se vários mecanismos termoativados atuando no processo da fluência transiente, enquanto apenas um mecanismo domina o processo de fluência no regime permanente.

Se apenas um mecanismo termoativado dominar o processo de fluência transiente, ou seja, $m=1$ na equação 4.45, obtém-se uma equação do tipo "Exponencial-Time Law"^[12].

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + g \cdot \left[1 - e^{(-\xi t)} \right] + V \cdot t \quad (4.47)$$

4.3.6 Lei de Norton (Fluência Secundária)

A dependência da velocidade de deformação, $V = \delta\varepsilon/\delta t$, em relação à tensão diferencial foi investigada por Norton^[30], que

apresentou a seguinte equação sob a forma de *Lei Potencial para a Fluência Secundária*:

$$V = V_f \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_c} \right)^n \quad (4.48).$$

O estudo de Norton foi realizado com os metais, sendo V_f a velocidade de deformação no regime permanente, obtida para uma tensão aplicada constante σ_c . **Odkvist**^[30] fornece os valores de V_f , σ_c e n para diversos tipos de metais em diferentes temperaturas.

Fazendo-se $A = \frac{V_f}{\sigma_c^n}$ na equação 4.48, ela se reduz a:

$$V = A \cdot \sigma^n \quad (4.49),$$

que é a Lei Potencial ou de Norton para a fluência secundária.

Na literatura técnica, o fenômeno da fluência em rochas é abordado principalmente no regime secundário, pois normalmente tem-se a pretensão de realizar previsões de deformações das rochas para longos períodos. A equação 4.49 tem sido bastante empregada em modelos analíticos ou numéricos utilizados na previsão comportamental dessas estruturas. Dentre outros autores, podemos citar **Prij & Mengelers**^[3], que utilizaram a equação acima em seus estudos com rochas salinas.

4.3.7 Mais Leis para a Fluência Estacionária

Oriundas do estudo dos metais, outras leis empíricas, que relacionam a taxa de deformação V no regime permanente com a tensão diferencial σ , foram definidas por diversos autores. Heis algumas delas:

Ludwik^[31], 1909, sugeriu a seguinte interdependência de V com σ :

$$V = V_0 \cdot e^{\frac{\sigma}{\sigma_0}} \quad (4.50).$$

Nadai^[32], 1938, propôs a relação abaixo:

$$V = V_0 \cdot \sinh\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) \quad (4.51).$$

Eyrich^[33] introduziu a influência da temperatura na equação de Nadai:

$$V = V_0 \cdot \sinh\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) \cdot e^{-\frac{E}{R \cdot T}} \quad (4.52),$$

onde:

E= energia de ativação;

R= constante do gás perfeito;

T= temperatura absoluta.

A equação 4.52 tem maior aplicabilidade no estudo da fluência em cavernas para armazenamento de lixo atômico em depósitos de sal, onde a liberação de partículas radioativas faz aumentar a temperatura no meio circunvizinho. Alguns pesquisadores, como Grigs, Handim (1960) e Stacey (1963) basearam-se nesta equação para sugerir que alguns tremores de terra são causados por instabilidades térmicas de processos de fluência no interior da Terra^[8].

4.4 Critérios Utilizados na Seleção do Modelo

Nas seções 4.2 e 4.3 foram descritos diversos modelos utilizados na representação do comportamento de materiais viscoelásticos com aplicação aos evaporitos. Dentre eles, a *lei empírica do Modelo de Potência* foi a escolhida (equação 4.39) e será utilizada no prosseguimento deste trabalho. Os motivos que levaram a esta escolha são:

- O presente projeto tem como finalidade prever o fechamento de um poço de petróleo em frente a uma zona de sal

até o instante em que o corpo de sal for isolado, através da descida e cimentação de uma tubulação de aço que irá revestir o poço. A escala de tempo exigida para o projeto situa-se na faixa de alguns poucos dias, nunca além de 1 mês. Para esse intervalo de tempo, é de se esperar um *processo de fluência primária* do sal em direção ao poço.

Procurou-se, então, por um modelo que se ajuste, somente, a essa fase da fluência. Tal modelo estará adequado às condições esperadas pelo projeto e terá melhores chances de representar satisfatoriamente o comportamento de fluência do sal no poço de petróleo;

- Desprezando-se a troca térmica entre sal e fluido de perfuração nas paredes do poço, assume-se, por simplificação, que a *fluência do sal é realizada a temperatura constante*. Mesmo assim, torna-se desejável ter, explicitamente, a grandeza "**temperatura**" na equação representativa do comportamento de fluência do sal, pois este pode aparecer em qualquer profundidade durante a perfuração de um poço de petróleo.

O *Modelo de Potência* atende aos dois requisitos acima: é um modelo representativo da fluência transiente e traz explicitamente a grandeza "**temperatura**" em sua equação constitutiva;

- Finalmente, em pesquisa realizada na literatura técnica internacional, constatou-se que o *Modelo de Potência* tem larga utilização na representação do comportamento mecânico de fluência dos evaporitos, a saber: foi o modelo escolhido por **Costa**^[1] para representar o comportamento de fluência do maciço evaporítico da mina de sal de Taquari-Vassouras em Sergipe, alcançando excelentes concordâncias entre as simulações e medições realizadas em períodos de até 1 ano; **Paul Le Comte**^[13] realizou diversos ensaios com cristais artificiais de halita com temperaturas de até 300 °C (572 °F), pressões de confinamento ($\sigma_2 = \sigma_3$) de até 1 kbar (14500 psi) e tensões diferenciais ($\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$) de até 138 bars (2000 psi), obtendo, com a equação 4.39,

ótimos ajustes às curvas experimentais para períodos extrapolados de vários meses; foi o modelo utilizado em "Project Salt Vault"^[14]; foi o modelo utilizado por Hansen & Mellegard^[15] no ajuste à fluência transiente de corpos de prova de agregados salinos naturais de diversas origens em diversos testes realizados; Lomenick & Bradshaw^[27] encontraram velocidades de fluência decrescentes (fluência transiente) mesmo após 3 anos de testes de laboratório com rochas salinas em baixas ou altas temperaturas;

- Encontram-se, também, na literatura pesquisada, ref. [3], [34], etc, vários trabalhos analíticos e numéricos que utilizam leis de fluência secundária para representar o comportamento de fluência do sal. Morgan et al^[35], Preece^[36] e Borm & Haupt^[37], porém, relatam a disparidade dos valores de deformações e tensões medidos "in situ", comparados aos obtidos em simulações que se utilizaram de equações de fluência secundária, principalmente quando as análises foram realizadas em curtos períodos.

4.5 Resposta Material X Resposta Estrutural

Uma atenção especial deve ser dada à análise comportamental quase-estática das estruturas em um projeto que se utiliza de materiais com características viscosas.

Para que uma estrutura viscoelástica mantenha a sua condição de equilíbrio ao longo do tempo diante de uma evolução das deformações por fluência em seu interior, deverá ocorrer uma redistribuição interna das tensões que agem sobre a estrutura, mesmo que o carregamento externo seja constante.

Doravante, na análise de um comportamento de fluência, deve-se distinguir, claramente, a diferença entre os conceitos de uma resposta material e uma resposta estrutural.

Uma *resposta material* pode ser obtida através de ensaios de laboratório com uma amostra do material, onde se consegue aplicar um *estado de tensões homogêneo* (constante ao longo do corpo de prova e ao longo do tempo). Uma curva com o formato daquela apresentada pela figura 3.1 é o resultado da *resposta material* a um ensaio de fluência de um material viscoelástico qualquer.

A *resposta material* é descrita através das "**leis da fluência**", podendo ser qualquer uma das leis vistas nas seções 4.2 e 4.3, onde a taxa de deformação por fluência $\dot{\epsilon}^f$ é função das várias variáveis de estado, por exemplo:

$$\dot{\epsilon}^f = f(\sigma, \epsilon^f, t, T) \quad (4.53).$$

A *resposta estrutural* é a resposta de uma estrutura onde, em geral, existe um *estado de tensões tridimensional e não-homogêneo* devido a um *complexo histórico de carregamento*. Obviamente, a *resposta estrutural* é dependente da *resposta material*, mas também depende de uma *redistribuição de tensões no interior da estrutura*.

Uma *resposta estrutural* típica também consiste nos três estágios de fluência, vistos na seção 3.1.

Pode-se ter uma estrutura deformando-se em fluência primária se: o material se deforma em fluência primária; o material se deforma em fluência secundária, porém o processo de redistribuição das tensões na estrutura não se completou. Mesmo nos casos onde a *resposta material* é somente de fluência secundária, a *resposta estrutural* tem uma fase de fluência primária devido à redistribuição das tensões.

O tempo necessário para que se complete uma redistribuição de tensões em uma dada estrutura depende da própria estrutura e da "lei de fluência" empregada.

A fluência *estrutural* estacionária é alcançada quando a fluência *material* é secundária e a distribuição de tensões na estrutura é estacionária.

Não se projeta uma estrutura para que a mesma trabalhe na fase de fluência terciária, porém a ocorrência deste estágio, detectado por uma variação crescente na velocidade de deformação da estrutura, indica que um processo de falha encontra-se em andamento.

A literatura técnica específica, que trata da análise da fluência, costuma estimar uma resposta estrutural (**desconhecida**) com base numa resposta material **conhecida** ("lei da fluência"). Nesta passagem, de *resposta material*, de uso limitado pelas condições do ensaio, para uma utilização bem mais ampla na representação de uma *resposta estrutural*, encontrar-se-ão três tipos básicos de dificuldades:

I - A tensão na estrutura varia no tempo (devido à redistribuição de tensões e a um possível carregamento externo variável qualquer), enquanto que a "lei de fluência" é formulada para uma condição de tensão constante.

II - O estado de tensões na estrutura é tridimensional, enquanto que a "lei de fluência" é baseada em um estado uniaxial de tensões.

III - A temperatura na estrutura pode variar no tempo, enquanto que na "lei de fluência" ela é mantida constante.

As próximas seções abordarão a maneira como foi tratada e contornada cada uma das dificuldades enumeradas acima.

4.6 Fluência Sob Tensão Variável

Quando um estado de tensões varia com o tempo, tal como na redistribuição das tensões de uma estrutura sujeita ao fenômeno de fluência, o procedimento para simular a evolução, no tempo, das deformações da estrutura pode tornar-se um tanto quanto complicado. Esta condição pode ser ilustrada por um caso simples, onde dois níveis de tensão σ_1 e σ_2 são aplicados em um único ensaio de compressão uniaxial.

A figura 4.14 ilustra duas curvas típicas de dois ensaios distintos em diferentes níveis de tensão, σ_1 e σ_2 :

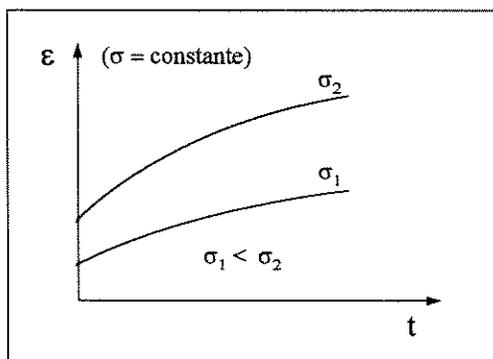


Fig. 4.14 : Curvas de Fluência em Dois Níveis de Tensão: σ_1 e σ_2

Observando-se as duas curvas, pode-se questionar como as mesmas poderiam ser utilizadas para representar a condição de um corpo de prova que é inicialmente submetido à tensão σ_1 durante um intervalo de tempo t_1 e depois, à tensão σ_2 , como mostra a figura 4.15:

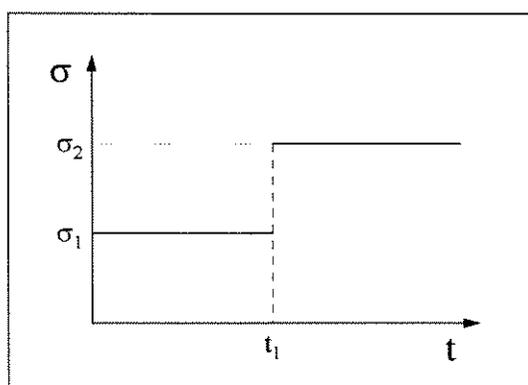


Fig. 4.15 : Tensões Aplicadas em um Ensaio de Fluência

A resposta a esta questão pode não ser simples, desde que o comportamento do material quando submetido à tensão σ_2 dependerá das mudanças estruturais que nele ocorreram devido à aplicação de σ_1 durante o intervalo de tempo t_1 . Em outras

palavras, o comportamento do material a partir de um instante t qualquer dependerá das condições atuais de carregamento e, também, da *história das deformações precedentes*.

Se a hipótese da viscoelasticidade linear fosse viável para os evaporitos, poder-se-ia utilizar o *Princípio da Superposição de Boltzmann*^[8], que diz:

I- A fluência é uma função de toda a história do carregamento;

II- Cada incremento de carga é responsável por uma contribuição independente a deformação final, sendo esta obtida pela simples soma de cada contribuição.

Se a viscoelasticidade fosse linear e a temperatura se mantivesse constante, a deformação por fluência seria função do tempo t e da tensão σ , isto é, $\varepsilon^f = f(t, \sigma)$. Aplicando-se o Princípio da Superposição de Boltzmann ao caso simples da figura 4.15 para um tempo $t > t_1$, tem-se:

$$\varepsilon^f(t, \sigma_2) = \varepsilon^f(t, \sigma_1) + \varepsilon^f(t-t_1, \sigma_2 - \sigma_1) \quad (4.54).$$

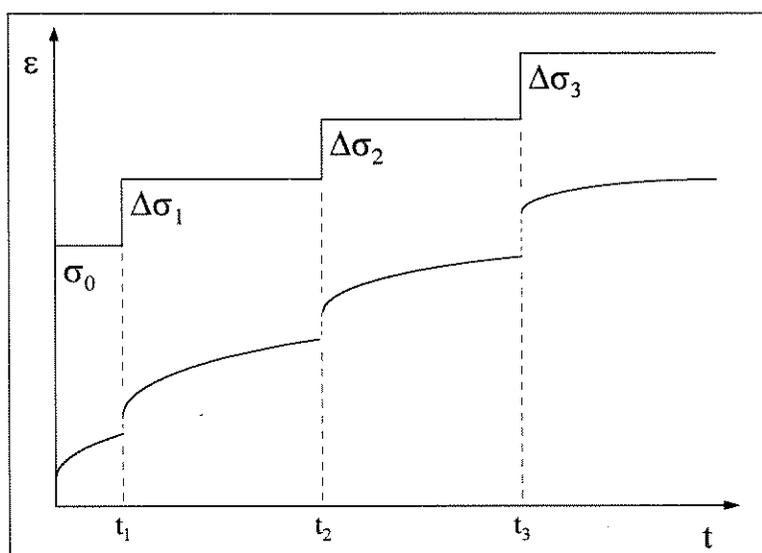


Fig.4.16 : Carregamento Aplicado em Material Viscoelástico Linear

No caso onde vários incrementos de tensões $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_3, \dots$ são aplicados, respectivamente, nos instantes t_1 , t_2 ,

$t_3 \dots$, como mostra a figura 4.16, a parcela da deformação devido a fluência é dada por:

$$\varepsilon^f(t) = \varepsilon^f(t, \sigma_0) + \varepsilon^f(t-t_1, \Delta\sigma_1) + \varepsilon^f(t-t_2, \Delta\sigma_2) + \dots + \varepsilon^f(t-t_n, \Delta\sigma_n) \quad (4.55),$$

onde, $\Delta\sigma_1 = \sigma_1 - \sigma_0$, $\Delta\sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_1$, $\Delta\sigma_3 = \sigma_3 - \sigma_2$, ... e $\Delta\sigma_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$. Jaeger^[8] usou a equação 4.55 no desenvolvimento da equação 4.29, que descreve o comportamento do Modelo de Burgers em um ensaio de recuperação das deformações, seção 4.2.5.

A resposta de um corpo de prova com comportamento não-linear a um carregamento similar ao da figura 4.16, em condições isotérmicas, pode ser dada por:

$$\varepsilon^f(t) = \varepsilon^l(t) + \varepsilon^n(t) \quad (4.56),$$

onde ε^l seria a resposta linear do sistema, dada pela equação 4.55, e ε^n seria a parcela não linear da resposta, que inclui os termos devidos às contribuições conjuntas dos diversos incrementos $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_3$, ... e $\Delta\sigma_n$.

$$\varepsilon^n(t) = \varepsilon^f(t_2-t_1, \sigma_0, \Delta\sigma_1) + \varepsilon^f(t_3-t_2, \sigma_0, \Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2) + \dots + \varepsilon^f(t-t_n, \sigma_0, \dots, \Delta\sigma_n) \quad (4.57).$$

O comportamento dos evaporitos, onde diferentes níveis de tensão aplicada conferem diferentes contornos às curvas de fluência, e para um mesmo nível de tensão tem-se curvas distintas para o ensaio de fluência e para o ensaio de recuperação das deformações, é nitidamente não linear, invalidando a utilização da superposição de Boltzmann, por conseguinte, a equação 4.55. Até mesmo a equação 4.56 perde sua utilidade prática na previsão do comportamento dos evaporitos.

A compreensão acerca das mudanças estruturais que ocorrem num evaporito no âmbito do microcomportamento tem recebido atenção especial por parte de muitos pesquisadores, referências [6], [12], [13], [15], [16] e outros. Entretanto ainda não se extraiu desses estudos leis determinísticas que possibilitem estabelecer leis constitutivas para o âmbito do macrocomportamento, capazes de prever a evolução real da deformação por fluência de um corpo de sal sujeito a variação contínua, no tempo, das variáveis tensão e temperatura.

Os problemas de engenharia carecem, porém, de métodos que possam estimar, com razoável precisão, a fluência dos materiais sob condições diversas.

Dentro da literatura pesquisada aparecem dois artifícios habitualmente empregados na previsão do comportamento estrutural dos metais e rochas sob condição de tensão variável. Tais métodos, chamados de "*time-hardening*" e "*strain-hardening*", também têm sido aplicados aos evaporitos e serão mostrados na seqüência.

Ambos os métodos são obtidos a partir da integração no tempo da velocidade de deformação por fluência, obtida de qualquer uma das equações constitutivas dos modelos vistos nas seções 4.2 e 4.3.

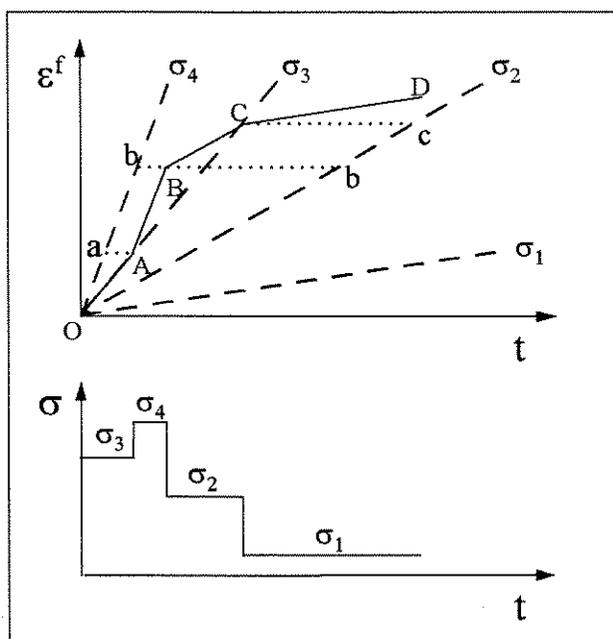
$$\varepsilon^f(t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}^f(t) \quad (4.58).$$

A diferença na função de $\varepsilon^f(t)$, encontrada por cada método, reside em como as suas velocidades de deformação por fluência ($\dot{\varepsilon}^f(t)$) são definidas.

4.6.1 Método "Strain-Hardening"

No método "*strain-hardening*", a deformação por fluência acumulada é o único parâmetro que caracteriza as mudanças estruturais ocorridas em um material devido a um histórico anterior de tensões e deformações.

A trajetória da deformação por fluência com aplicação do método "*strain-hardening*" ao caso da figura 4.17, onde quatro níveis de tensão são aplicados em um corpo de prova durante um hipotético ensaio, é mostrada pela linha cheia que aparece no gráfico superior dessa figura.

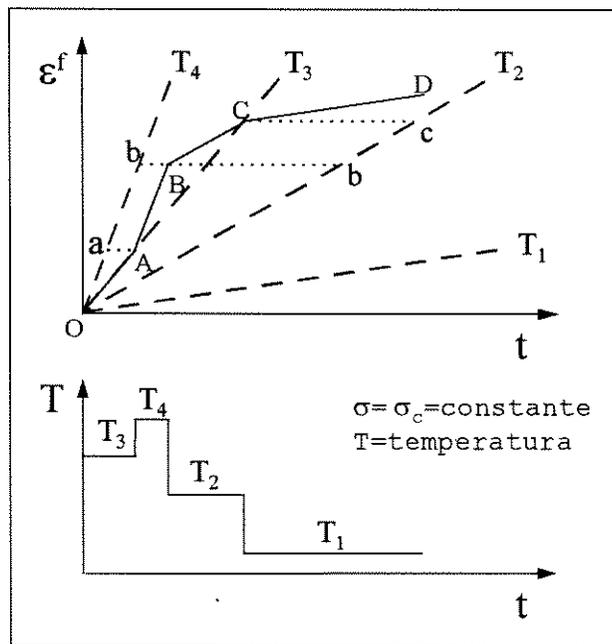


**Fig. 4.17: Deformação por Fluência
- Método "Strain-Hardening" -**

Vê-se que o modelo "strain-hardening" "grava" a deformação por fluência acumulada anteriormente em cada mudança da tensão aplicada. A curva da deformação por fluência prossegue seu percurso numa trajetória paralela à curva típica do novo nível de tensão a partir de uma abcissa comum igual a quantidade de deformação acumulada. Em outras palavras, pode-se imaginar que, a cada mudança do nível de tensão do ensaio, há uma *translação horizontal* da curva de fluência do novo nível de tensão, até que ela intercepte a curva de fluência acumulada (linha cheia do gráfico) no ponto de mudança do nível de tensão. A partir daí a curva de fluência acumulada prossegue percorrendo a mesma trajetória da curva de fluência do novo nível de tensão, até que um novo nível de tensão seja aplicado.

Admite-se que, se o intervalo de tempo entre variações significativas no estado de tensões de uma estrutura é relativamente curto, a *deformação por fluência acumulada* seja o parâmetro que melhor caracterize as mudanças ocorridas nessa estrutura durante sua história de carregamento.

O método "strain-hardening" é usado, também, para representar estruturas onde a temperatura varia com o tempo. Na figura 4.18, as quatro curvas de fluência (linhas tracejadas) representam ensaios individuais, onde uma mesma tensão σ_c foi aplicada sob quatro diferentes temperaturas.



**Fig. 4.18: Deformação por Fluência.
- Método "Strain-Hardening" -**

Pode-se imaginar um ensaio de fluência hipotético, onde se aplica a mesma tensão σ_c dos ensaios individuais e onde se consegue variar instantaneamente a temperatura do corpo de prova para valores iguais aos encontrados nos ensaios individuais nos intervalos de tempo correspondentes aos da figura 4.18. A curva do método "strain-hardening", para este ensaio hipotético, está representada pela linha cheia do gráfico superior da figura 4.18. Também aqui, o modelo "strain-hardening" "grava" somente a deformação por fluência acumulada.

No método de integração "strain-hardening", a velocidade de deformação por fluência é função da deformação por

fluência acumulada até o instante considerado. Partindo-se da lei de fluência adotada neste trabalho, equação 4.39, tem-se:

$$\varepsilon_f = A.\sigma^a.T^b.t^c \Rightarrow t = \left(\frac{\varepsilon_f}{A.\sigma^a.T^b} \right)^{\frac{1}{c}} \quad (4.59).$$

Diferenciando-se no tempo a equação 4.39:

$$\dot{\varepsilon}_f = c.A.\sigma^a.T^b.t^{c-1} \quad (4.60).$$

Substituindo-se 4.59 em 4.60, após algum algebrismo chega-se a

$$\dot{\varepsilon}_f = c.\left[A.\sigma^a.T^b.\left(\varepsilon_f\right)^{c-1} \right]^{\frac{1}{c}} \quad (4.61),$$

que é a equação da velocidade de fluência derivada do Modelo de Potência, característica do método "strain-hardening".

4.6.2 Método "Time-Hardening"

Tal qual o método anterior, o método "time-hardening" também se aplica às estruturas onde há variações de tensão e/ou temperatura.

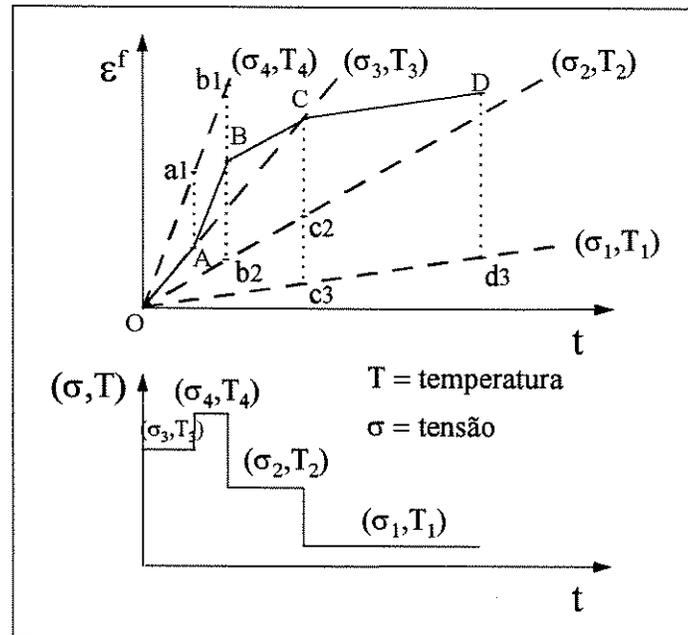
Neste método, a equação para a velocidade de fluência é obtida diretamente pela diferenciação da equação 4.39 em relação ao tempo:

$$\dot{\varepsilon}_f = c.A.\sigma^a.T^b.t^{c-1} \quad (4.62).$$

A velocidade de deformação em um instante t qualquer depende dos valores atualizados das variáveis de estado σ e T no instante considerado.

A trajetória da curva de fluência para um hipotético ensaio de um corpo de prova, onde quatro níveis de tensão são aplicados em quatro níveis de temperatura distintos nos

intervalos de tempo mostrados pela figura 4.19, é representada pela linha cheia do gráfico superior dessa figura.



**Fig. 4.19 : Deformação por Fluência
- Método "Time-Hardening" -**

Vê-se que o método "time-hardening" "grava" apenas o tempo decorrido, isto é, a curva de fluência do ensaio hipotético prossegue numa paralela à curva típica das novas condições de tensão e temperatura, a partir do instante t em que ocorreu essa mudança. Em outras palavras, pode-se imaginar que, para cada mudança das condições de tensão e temperatura do ensaio, há uma *translação vertical* (um "rebaixamento" ou uma "elevação") da curva de fluência característica dessa nova condição (de tensão e temperatura) até que ela intercepte a curva de fluência acumulada (linha cheia do gráfico) no ponto de mudança das condições do ensaio. A partir daí, a curva de fluência acumulada prossegue trilhando a mesma trajetória da curva de fluência característica da nova condição (de tensão e temperatura), até que, novamente, sejam alteradas as condições do ensaio.

Os casos de estruturas que envolvem deformações por fluência sobre longos períodos, sob estado de tensões que não varia rapidamente, são os mais apropriados para se utilizarem do método "time-hardening", pois acredita-se que, para essas condições, o parâmetro "tempo" forneça a melhor base para caracterizar as mudanças estruturais ocorridas durante a história de carregamento.

Na escolha entre os dois métodos descritos ("strain-hardening" e "time-hardening") de previsão comportamental de estruturas sob condição de tensões variáveis, o método "strain-hardening" foi aquele que melhor se adequou às características deste projeto. A justificativa pode ser encontrada nos gráficos das figuras 7.1 e 7.2, mostrados na seção 7.1, que apresentam a redistribuição de tensões em um sal de halita nas proximidades de um poço de petróleo para uma simulação de fluência do referido sal, encontrado a 3000 m de profundidade. Percebe-se uma grande redistribuição das tensões no sal nas proximidades do poço, principalmente, nos momentos seguintes à perfuração do mesmo. "Variações significativas no estado de tensões em pequenos intervalos de tempo" são condições onde a utilização do método "strain-hardening" se torna a mais adequada, tal como foi mencionado na seção 4.6.1.

4.7 Viscoelasticidade em Três Dimensões

No desenvolvimento de uma formulação tridimensional consistente, baseada nos modelos matemáticos unidimensionais vistos nas seções 4.2 e 4.3, dois aspectos fundamentais devem ser considerados: o princípio da objetividade e a representação adequada dos *casos particulares*.

O princípio da objetividade é a exigência imposta às equações constitutivas para que elas traduzam propriedades intrínsecas dos materiais que representam, ou seja, propriedades que independam do referencial adotado para observá-las. No exemplo de uma mola que sofre um alongamento δ , qualquer

observador poderá afirmar que a mola reagirá com uma força de intensidade $F=K.\delta$, onde K é a mesma constante para todos os observadores. A formulação tridimensional das equações constitutivas unidimensionais se faz, portanto, sob a forma de *invariantes de tensões e de deformações*.

A formulação tridimensional deve ainda representar adequadamente o *caso particular unidimensional*. Neste caso, tal formulação simplifica-se para a equação constitutiva unidimensional original, que é a condição existente nos testes de laboratório durante a calibração dos modelos unidimensionais.

Na expansão da teoria viscoelástica unidimensional para a *multiaxial*, algumas hipóteses sobre o comportamento do material (evaporito) devem ser assumidas:

1 - *Isotropia*. Esta propriedade dos evaporitos foi demonstrada na prática através de resultados obtidos em testes de laboratório, comentados na seção 2.4.

2 - *Existência de coaxialidade entre o tensor de velocidade de deformação $\dot{\epsilon}_{ij}^f$ e o tensor de tensões desviatórias s_{ij}* , ou seja, para um instante t qualquer, é válida a relação:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^f = k.s_{ij} \quad (4.63).$$

A notação indicial para a equação 4.63 indica que ela é válida para todos os componentes dos tensores envolvidos. A grandeza k é um *invariante escalar*, portanto.

A terceira e a quarta hipóteses estão diretamente relacionadas à segunda hipótese, complementando-a. Sabe-se da Teoria da Elasticidade^[38], que o tensor de tensões desviatórias s_{ij} é responsável pelas deformações que *alteram a forma, mas não o volume do corpo*. Se a segunda hipótese, equação 4.63, indica que a fluência é causada apenas pelas tensões desviatórias s_{ij} , então pode-se dizer que: a deformação por fluência ϵ_{ij}^f altera a forma, mas não o volume do corpo; a velocidade de fluência $\dot{\epsilon}_{ij}^f$ independe da pressão hidrostática.



3 - A fluência não altera o volume do corpo deformado, ou seja, a deformação volumétrica de fluência Δ^f é igual a zero.

$$\Delta^f = \varepsilon_x^f + \varepsilon_y^f + \varepsilon_z^f = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_x^f + \dot{\varepsilon}_y^f + \dot{\varepsilon}_z^f = 0 \quad (4.64)$$

4 - A fluência independe da pressão hidrostática.

A partir da equação 4.63 pode-se tirar as seguintes relações de proporcionalidade:

$$\begin{aligned} (\dot{\varepsilon}_x^f - \dot{\varepsilon}_y^f) &= k \cdot (s_x - s_y) \\ (\dot{\varepsilon}_y^f - \dot{\varepsilon}_z^f) &= k \cdot (s_y - s_z) \\ (\dot{\varepsilon}_z^f - \dot{\varepsilon}_x^f) &= k \cdot (s_z - s_x) \end{aligned} \quad (4.65),$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{xy}^f &= k \cdot \tau_{xy} \\ \dot{\varepsilon}_{xz}^f &= k \cdot \tau_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yz}^f &= k \cdot \tau_{yz} \end{aligned} \quad (4.66).$$

Levando-se ao quadrado as equações 4.65 e 4.66, multiplicando-se os membros das equações 4.66 por 6 e somando-se todas as equações, resulta:

$$\begin{aligned} 2\dot{\varepsilon}_x^{f2} + 2\dot{\varepsilon}_y^{f2} + 2\dot{\varepsilon}_z^{f2} - 2\dot{\varepsilon}_x^f \cdot \dot{\varepsilon}_y^f - 2\dot{\varepsilon}_y^f \cdot \dot{\varepsilon}_z^f - 2\dot{\varepsilon}_z^f \cdot \dot{\varepsilon}_x^f + 6\dot{\varepsilon}_{xy}^{f2} + 6\dot{\varepsilon}_{yz}^{f2} + 6\dot{\varepsilon}_{xz}^{f2} = \\ k^2 \cdot [2s_x^2 + 2s_y^2 + 2s_z^2 - 2s_x s_y - 2s_y s_z - 2s_x s_z + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{xz}^2 + 6\tau_{yz}^2] \end{aligned} \quad (4.67).$$

Substituindo-se a equação 4.63 em 4.64 e elevando-se o resultado ao quadrado, obtém-se:

$$(\dot{\varepsilon}_x^f + \dot{\varepsilon}_y^f + \dot{\varepsilon}_z^f)^2 = k^2 \cdot (s_x + s_y + s_z)^2 = 0 \Rightarrow (s_x + s_y + s_z)^2 = 0 \quad (4.68).$$

Desenvolvendo-se o quadrado das somas acima:

$$\left. \begin{aligned} (\dot{\varepsilon}_x^f + \dot{\varepsilon}_y^f + \dot{\varepsilon}_z^f)^2 &= \dot{\varepsilon}_x^{f2} + \dot{\varepsilon}_y^{f2} + \dot{\varepsilon}_z^{f2} + 2\dot{\varepsilon}_x^f \cdot \dot{\varepsilon}_y^f + 2\dot{\varepsilon}_x^f \cdot \dot{\varepsilon}_z^f + 2\dot{\varepsilon}_y^f \cdot \dot{\varepsilon}_z^f = 0 \\ (s_x + s_y + s_z)^2 &= s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2s_x \cdot s_y + 2s_x \cdot s_z + 2s_y \cdot s_z = 0 \end{aligned} \right\} (4.69).$$

Substituindo-se 4.69 em 4.67 e dividindo-se por 3:

$$(\dot{\varepsilon}_x^{f2} + \dot{\varepsilon}_y^{f2} + \dot{\varepsilon}_z^{f2} + 2\dot{\varepsilon}_{xy}^{f2} + 2\dot{\varepsilon}_{xz}^{f2} + 2\dot{\varepsilon}_{yz}^{f2}) = k^2 (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2) \quad (4.70).$$

Definindo-se a tensão efetiva σ_e e a velocidade de deformação efetiva de fluência $\dot{\epsilon}_e^f$:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2)^{1/2} \quad (4.71),$$

$$\dot{\epsilon}_e^f = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\dot{\epsilon}_x^{f2} + \dot{\epsilon}_y^{f2} + \dot{\epsilon}_z^{f2} + 2\dot{\epsilon}_{xy}^{f2} + 2\dot{\epsilon}_{xz}^{f2} + 2\dot{\epsilon}_{yz}^{f2})^{1/2} \quad (4.72).$$

A introdução do termo $\sqrt{\frac{3}{2}}$ na definição da tensão efetiva σ_e e do termo $\sqrt{\frac{2}{3}}$ na definição da velocidade de deformação efetiva de fluência $\dot{\epsilon}_e^f$, faz com que elas correspondam, respectivamente, à tensão σ_x e à velocidade de deformação $\dot{\epsilon}_x^f$ dos ensaios de calibração uniaxiais, satisfazendo o princípio da representação adequada dos casos particulares.

Substituindo-se as equações 4.71 e 4.72 em 4.70:

$$\dot{\epsilon}_e^f = \frac{2}{3} \cdot k \cdot \sigma_e \quad (4.73)$$

ou,

$$k = \frac{3}{2} \cdot \frac{\dot{\epsilon}_e^f}{\sigma_e} \quad (4.74).$$

Substituindo-se 4.74 em 4.63:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^f = \frac{3}{2} \cdot \frac{\dot{\epsilon}_e^f}{\sigma_e} \cdot s_{ij} \quad (4.75).$$

Sabe-se que:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xy}^f &= \frac{\dot{\gamma}_{xy}^f}{2} \\ \dot{\epsilon}_{xz}^f &= \frac{\dot{\gamma}_{xz}^f}{2} \\ \dot{\epsilon}_{yz}^f &= \frac{\dot{\gamma}_{yz}^f}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.76),$$

onde $\dot{\gamma}_{xy}^f$, $\dot{\gamma}_{xz}^f$, $\dot{\gamma}_{yz}^f$, representam as velocidades de deformação cisalhante por fluência da engenharia. Por fim, substituindo-se 4.76 em 4.75, resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_x^f \\ \dot{\epsilon}_y^f \\ \dot{\epsilon}_z^f \\ \dot{\gamma}_{xy}^f \\ \dot{\gamma}_{xz}^f \\ \dot{\gamma}_{yz}^f \end{array} \right\} &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_e^f}{\sigma_e} \left\{ \begin{array}{l} s_x \\ s_y \\ s_z \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{yz} \end{array} \right\} \end{aligned}} \quad (4.77)$$

Considerando-se um processo de deformação a temperatura constante, verifica-se pela equação 4.75 que, ao se atingir a fase de fluência secundária com constância da velocidade de deformação por fluência $\dot{\epsilon}_{ij}^f$, ter-se-á, também, a constância do tensor de tensões desviatórias s_{ij} . A redistribuição de tensões, em decorrência do reequilíbrio estrutural devido à evolução das deformações por fluência, ocorre, portanto, durante a fase de fluência primária (enquanto $\dot{\epsilon}_{ij}^f$ não é constante). A evolução da fase de fluência primária para a fluência secundária ocorre com a estacionaridade da redistribuição de tensões.

A relação entre $\dot{\epsilon}_e^f$ e σ_e pode seguir a equação constitutiva de qualquer um dos modelos viscoelásticos vistos nas seções 4.2 e 4.3, seja empírico ou reológico, adotando-se os

Capítulo 5

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

5.1 Uso do M.E.F. na Análise da Fluência de Materiais Viscoelásticos.

Na solução de problemas estruturais complexos, os quais podem envolver complicadas geometrias, condições de contorno variáveis no tempo e materiais cujo comportamento mecânico é função de diversos parâmetros (tais como tempo, temperatura, taxas de tensão ou deformação, etc), os métodos numéricos são geralmente considerados como a única maneira possível para sua abordagem, uma vez que soluções analíticas fechadas existem apenas para uma classe restrita de problemas, envolvendo várias simplificações (de geometria, de material e outras).

No tocante a análise da fluência, o método numérico que tem sido utilizado com predominância é o Método dos Elementos Finitos (**MEF**), conforme atestam vários autores que trataram sobre o tema, como Kraus^[17], Chen & Hsu^[18], ou Benallal^[19], entre outros. Segundo Kraus, isto se deve ao fato de que na época em que os analistas se voltaram para os problemas de fluência (início dos anos 70), o **MEF** já havia aparecido como uma potente e bem desenvolvida ferramenta para a análise das tensões, sendo, portanto, imediatamente utilizado na resolução de problemas dessa natureza.

Existem vários algoritmos que podem ser utilizados com o **MEF** para a resolução de problemas viscoelásticos. Tais algoritmos diferem, sobretudo, quanto ao tipo de equação constitutiva a ser utilizada na descrição do material, quanto ao

tipo de análise a ser efetuada (domínio do tempo ou da frequência) e quanto aos esquemas de integração utilizados na resolução das equações diferenciais viscoelásticas.

5.2 Formas de Solução de Problemas Viscoelásticos Através do MEF.

Existem duas maneiras distintas de se abordar uma análise estrutural de material viscoelástico em relação ao domínio em que esta é realizada: frequência ou tempo.

As análises feitas no domínio da frequência consistem basicamente em remover-se a variável tempo das equações viscoelásticas pela aplicação de transformadas integrais, como a de Laplace^[17]. Obtém-se, assim, um "problema elástico associado", que pode ser resolvido no domínio da frequência pelo **MEF** para valores discretos do parâmetro transformado. Finalmente, faz-se a inversão das tensões, deformações e deslocamentos transformados para o plano real do tempo, empregando-se um processo numérico adequado^[20].

A principal vantagem desta abordagem é poder determinar os deslocamentos, as tensões e as deformações do corpo em qualquer instante desejado, sem a necessidade de calculá-los nos instantes anteriores (como numa análise incremental). Contudo, tal análise só pode ser feita para o caso de corpos viscoelásticos lineares (o que nem sempre se verifica na prática, e não é o caso do problema aqui estudado). Além disso, para a aplicação da transformada de Laplace, é preciso que as condições de contorno sejam mantidas fixas durante o período em que a análise é realizada.

Um outro aspecto, que vem limitar o campo de aplicação desse método, é a hipótese das condições iniciais nulas (para $t \rightarrow 0^+$, as tensões, deformações e todas suas derivadas devem ser iguais a zero), feita para simplificar a transformada de Laplace. Finalmente, uma última desvantagem a ser considerada

seriam as dificuldades e os erros numéricos decorrentes da inversão para o domínio do tempo.

As análises feitas no domínio do tempo constituem a maior parte das abordagens que usam o **MEF** como ferramenta na determinação do campo de tensões e deformações em corpos viscoelásticos. Neste caso, o problema é resolvido através de uma análise passo-a-passo, na qual procura-se o estado de equilíbrio da estrutura no instante t^{j+1} a partir do seu estado de equilíbrio no instante anterior t^j para cada incremento de tempo.

A resolução do problema no domínio do tempo não traz os mesmos inconvenientes daqueles devidos à aplicação da transformada de Laplace. Desta forma, é possível analisar-se problemas de viscoelasticidade não-linear envolvendo ainda grandes deformações e grandes deslocamentos (não linearidade geométrica) com condições de contorno variáveis no tempo e condições iniciais não necessariamente nulas. A única desvantagem da análise no domínio do tempo é seu custo, pois essa precisa ser efetuada passo-a-passo até que se atinja o instante desejado para o cálculo das tensões, deformações e deslocamentos da estrutura. Conclui-se, então, que a análise no domínio do tempo é a mais adequada, pois permite a resolução de problemas gerais sem a necessidade de simplificações muitas vezes não condizentes com a prática.

5.3 Escolha do Algoritmo Adequado.

Foi observada, na seção 5.1, a existência de vários algoritmos, utilizados na resolução de problemas de viscoelasticidade através do **MEF**. A escolha do algoritmo apropriado dependerá do tipo de equação constitutiva a ser utilizada na representação do comportamento do material, do tipo de análise a ser efetuada (domínio do tempo ou da frequência), do esquema de integração escolhido na resolução da equação constitutiva, do modelo estrutural utilizado na discretização do

contínuo e do intervalo de tempo necessário ao reequilíbrio quase-estático na redistribuição de tensões da estrutura.

Ficou definida, na seção 4.4, a utilização do Modelo de Potência, equação 4.39, na continuação deste trabalho. Optou-se, na seção 5.2, por uma análise estrutural no domínio do tempo, ou seja, uma análise incremental passo-a-passo. Para estas condições, **Costa**^[1] analisou três diferentes algoritmos:

1- *Algoritmo Explícito de Euler*: é o mais simples dentre eles, essencialmente incremental, porém *condicionalmente* estável, exigindo o emprego de pequenos intervalos de tempo para integração no tempo das deformações não-lineares. Tal característica restringe sua utilização à análise de intervalos de tempo não muito longos. Por não ser um método iterativo, dependendo dos intervalos de tempo poderá não ocorrer o rigor necessário na integração no tempo das deformações não-lineares, ou seja, a satisfação da lei constitutiva do material.

2- *Algoritmo Implícito Incremental Iterativo* (Método "α" de integração das deformações por fluência): é o mais complexo em sua formulação matemática e lógica computacional, contudo é o algoritmo que fornece maior rigor quanto ao tratamento da lei constitutiva do material e equilíbrio estrutural. Este algoritmo fornece uma solução *incondicionalmente* estável, permitindo o emprego de grandes intervalos de tempo na integração no tempo das deformações por fluência. Tem aplicação, principalmente, onde são necessários longos períodos de análise até que se atinja a condição de regime estacionário (fluência secundária) e onde a utilização do Algoritmo Explícito de Euler, de maior simplicidade, se torna não recomendada.

3- *Algoritmo Implícito Incremental*: semelhante ao algoritmo anterior, este algoritmo fornece uma solução *incondicionalmente* estável, porém com menor rigor matemático quanto ao tratamento da equação constitutiva do material.

O presente projeto prevê uma escala de tempo para análise das deformações de no máximo 1 mês, como foi comentado na seção 4.4. O Algoritmo Explícito de Euler atende às

expectativas do projeto em relação ao período de análise das deformações e, por ser o mais simples, foi implementado neste trabalho.

5.4 Integração da Equação Característica do Modelo de Potência - Introdução

A deformação por fluência de um corpo salino ou outro qualquer, cujo comportamento possa ser representado pelo Modelo de Potência, mantidas constantes a temperatura e tensão aplicada, é dada pela equação característica do modelo:

$$\varepsilon_e^f(t) = A \cdot \sigma_e^a \cdot T^b \cdot t^c \quad (5.1),$$

onde:

ε_e^f - é a deformação efetiva de fluência, definida na seção 4.7;

σ_e - é a tensão efetiva aplicada, também definida na mesma seção;

T - é a temperatura absoluta;

t - é o tempo;

A , a , b e c são constantes obtidas a partir dos ensaios de laboratório.

Num caso genérico, tanto a tensão como a temperatura podem variar com o tempo. Para essa condição, **Costa**^[1] desenvolveu um "código" (seqüência metódica e sistemática de disposições), utilizado no Algoritmo Explícito de Euler, para a solução do problema viscoelástico pelo **MEF**. A integração das deformações por fluência foi conduzida adotando-se o mesmo procedimento desenvolvido pela "Science Applications Incorporation" (**SAI**) na solução de problemas viscoelásticos pelo método das diferenças finitas^[39]. Este procedimento está descrito na próxima seção.

5.4.1 Procedimento de Integração das Deformações por Fluência

Neste procedimento^[1] passo-a-passo do tipo "strain-hardening", a continuidade da curva de fluência é garantida pela determinação de um parâmetro λ correspondente ao translado da variável tempo, responsável pela geração de uma nova curva de fluência com os valores de temperatura e tensão correspondentes ao novo passo. Admite-se que a evolução no tempo da temperatura e tensão se faz num processo passo-a-passo, sendo ambas constantes em cada passo de intervalo de tempo finito. A representação esquemática deste procedimento está mostrada na figura 5.1.

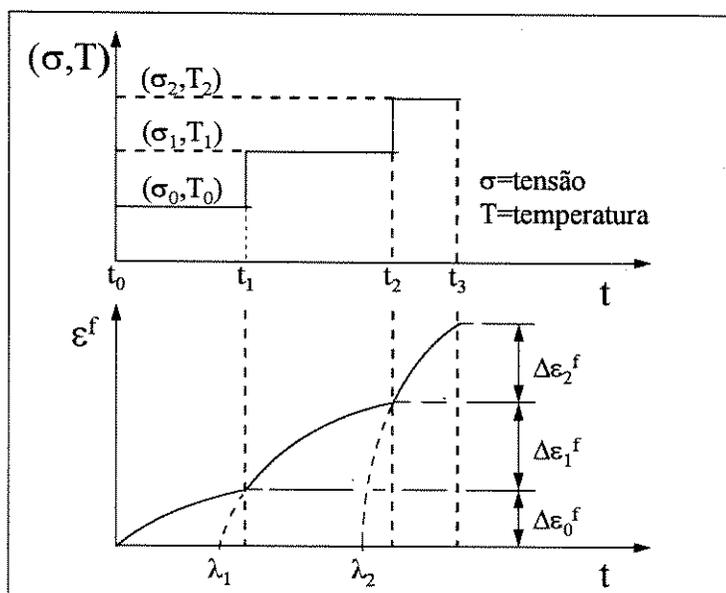


Fig. 5.1: Procedimento de Integração das Deformações por Fluência tipo "Strain-Hardening"

Tem-se que:

$$\text{para } (t_0 \leq t \leq t_1) \Rightarrow \varepsilon^f = A \cdot \sigma_0^a \cdot T_0^b \cdot (t - t_0)^c \quad (5.2);$$

$$\text{para } (t_1 \leq t \leq t_2) \Rightarrow \varepsilon^f = A \cdot \sigma_1^a \cdot T_1^b \cdot [t - \lambda(t_1)]^c \quad (5.3).$$

O parâmetro $\lambda(t_1)$ é obtido por intermédio da exigência de continuidade de deformação por fluência em $t=t_1$, sendo λ função do tempo:

$$A \cdot \sigma_0^a \cdot T_0^b \cdot (t_1 - t_0)^c = A \cdot \sigma_1^a \cdot T_1^b \cdot [t_1 - \lambda(t_1)]^c$$

$$\Rightarrow$$

$$\lambda(t_1) = t_1 - \left[(t_1 - t_0)^c \cdot \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^b \cdot \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right)^a \right]^{1/c} \quad (5.4).$$

Para o cálculo de $\lambda(t_2)$, exige-se a continuidade da curva de deformação por fluência em $t=t_2$:

$$A \cdot \sigma_1^a \cdot T_1^b \cdot [t_2 - \lambda(t_1)]^c = A \cdot \sigma_2^a \cdot T_2^b \cdot [t_2 - \lambda(t_2)]^c$$

$$\Rightarrow$$

$$\lambda(t_2) = t_2 - \left\{ [t_2 - \lambda(t_1)]^c \cdot \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^b \cdot \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^a \right\}^{1/c} \quad (5.5).$$

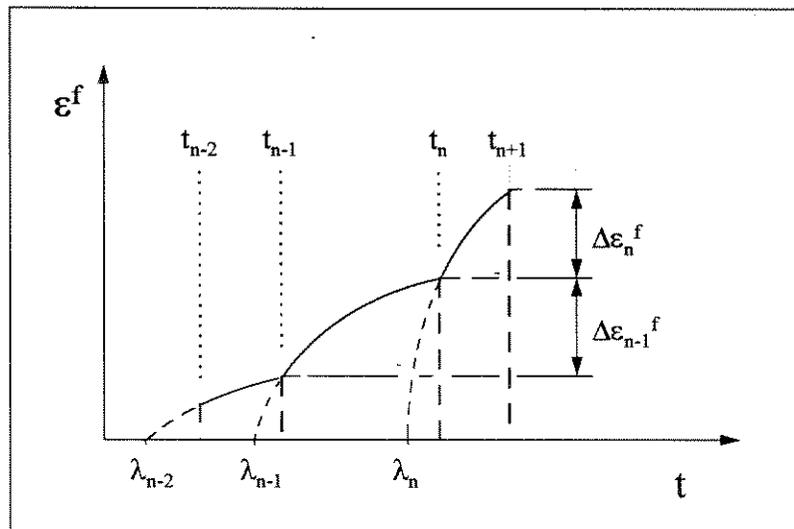


Fig. 5.2 : Procedimento de Integração das Deformações por Fluência: Passo de Ordem "n"

Para um passo de ordem n , qualquer:

$$\lambda(t_n) = t_n - \left\{ [t_n - \lambda(t_{n-1})]^c \cdot \left(\frac{T_{n-1}}{T_n} \right)^b \cdot \left(\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} \right)^a \right\}^{1/c} \quad (5.6).$$

A deformação por fluência no passo inicial é:

$$\Delta \varepsilon_0^f = A \cdot \sigma_0^a \cdot T_0^b \cdot (t_1 - t_0)^c \quad (5.7).$$

No passo 1, o incremento de deformação é:

$$\Delta \varepsilon_1^f = \{ A \cdot \sigma_1^a \cdot T_1^b \cdot [t_2 - \lambda(t_1)]^c \} - \{ A \cdot \sigma_0^a \cdot T_0^b \cdot [t_1 - t_0]^c \} \quad (5.8).$$

No passo 2, o incremento de deformação é:

$$\Delta \varepsilon_2^f = \{ A \cdot \sigma_2^a \cdot T_2^b \cdot [t_3 - \lambda(t_2)]^c \} - \{ A \cdot \sigma_1^a \cdot T_1^b \cdot [t_2 - \lambda(t_1)]^c \} \quad (5.9).$$

No passo n, o incremento de deformação é:

$$\Delta \varepsilon_n^f = \{ A \cdot \sigma_n^a \cdot T_n^b \cdot [t_{n+1} - \lambda(t_n)]^c \} - \{ A \cdot \sigma_{n-1}^a \cdot T_{n-1}^b \cdot [t_n - \lambda(t_{n-1})]^c \} \quad (5.10).$$

A deformação por fluência ao final do intervalo de tempo $\Delta t = t_f - t_0$, onde o último passo é o de ordem n é:

$$\Delta \varepsilon^f = \Delta \varepsilon_0^f + \Delta \varepsilon_1^f + \Delta \varepsilon_2^f + \dots + \Delta \varepsilon_n^f \quad (5.11)$$

⇒

$$\Delta \varepsilon^f = A \cdot \sigma_n^a \cdot T_n^b \cdot [t_f - \lambda(t_n)]^c \quad (5.12).$$

Cada iteração do Algoritmo Explícito de Euler corresponde a um novo patamar de tensão e temperatura, e um incremento de deformação por fluência é acrescentado à deformação acumulada de fluência. A deformação (total) por fluência ao final do intervalo de tempo $\Delta t = t_f - t_0$ corresponde ao somatório dos incrementos de deformação por fluência de todas as iterações do algoritmo, até que este atinja o tempo t_f .

5.5 Equação de Equilíbrio Quase-Estático.

A dedução da equação de equilíbrio quase-estático utilizada em cada iteração do Algoritmo Explícito de Euler é

conduzida considerando-se a não-linearidade física da equação constitutiva adotada (Modelo de Potência) e a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações (linearidade geométrica).

As forças de aceleração devido à fluência não são computadas neste equilíbrio, pois são desprezíveis em relação às demais. Daí vem a denominação de comportamento "quase-estático", aplicado aos materiais viscoelásticos.

Não se pretende aqui, fazer uma apresentação completa do Método dos Elementos Finitos ou da formulação utilizada para a resolução do problema: Princípio dos Deslocamentos Virtuais. Isto pode ser encontrado em ótimas referências que tratam do assunto, como **Zienkiewicz**^[21], **Bathe**^[22] e **Gallagher**^[23], entre outros. Deseja-se apenas mostrar, de uma maneira bastante simples, como foi obtida a equação de equilíbrio da estrutura viscoelástica utilizada por este projeto.

Considere-se, então, o sólido contínuo esquematizado na figura 5.3 e sua subdivisão em "elementos finitos" arbitrários.

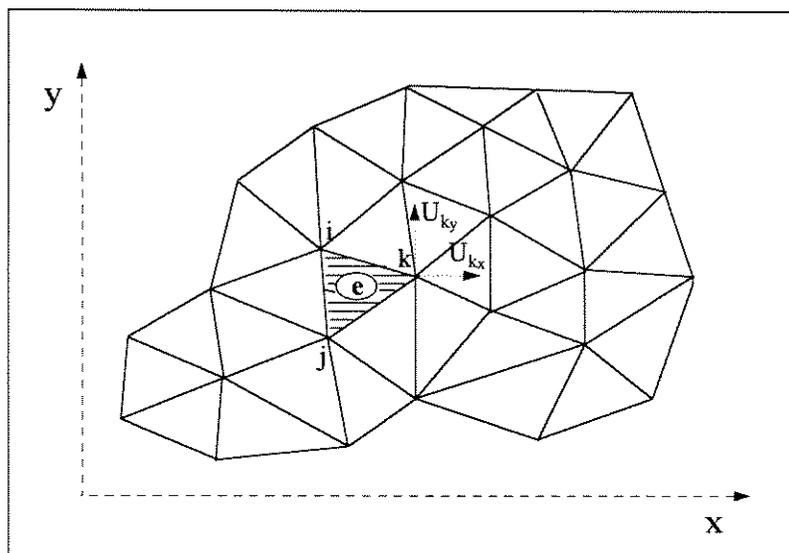


Fig. 5.3: Subdivisão do Contínuo em Elementos Finitos.

Um elemento típico "e" é definido pelos seus nós i , j , k , ..., e suas linhas de contorno.

Doravante, fica convencionado que uma grandeza \underline{x} qualquer sobre 2 barras, \underline{x} , representa uma matriz de $(\mathbf{N} \times \mathbf{M})$ elementos; e sobre 1 barra, \underline{x} , representa um vetor ou matriz de $(\mathbf{1} \times \mathbf{N})$ elementos. A grandeza \underline{x}^T é a matriz $(\mathbf{N} \times \mathbf{1})$, transposta do vetor \underline{x} .

Os deslocamentos de qualquer ponto do elemento "e" da figura 5.3 podem ser descritos por um vetor \underline{u} , dado por:

$$\underline{u} = \underline{N}^T \cdot \underline{U} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (5.13),$$

onde \underline{U} é o vetor dos deslocamentos nodais do elemento "e", e as componentes de \underline{N}^T : N_i , N_j , N_k , ..., são funções de posição, que se relacionam com as coordenadas de seus pontos nodais. Tais funções são conhecidas como "funções de interpolação".

Conhecendo-se os deslocamentos \underline{u} dos pontos do elemento "e", pode-se, também, determinar as deformações $\underline{\varepsilon}$ em qualquer desses pontos. Tais deformações podem ser expressas por uma relação matricial do tipo:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{U} \quad (5.14),$$

onde \underline{B} é uma matriz de compatibilidade, que relaciona as deformações com os deslocamentos nodais do corpo rígido "e", assumindo-se pequenas deformações e pequenos deslocamentos.

Admite-se que a deformação total $\underline{\varepsilon}$ seja definida pela soma de uma parcela elástica $\underline{\varepsilon}^e$ e uma parcela não-linear viscoelástica $\underline{\varepsilon}^f$.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^f \quad (5.15).$$

É possível, então, estabelecer-se uma relação entre os campos de tensão e de deformação no interior do elemento, da forma:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^f) \quad (5.16),$$

onde $\underline{\underline{C}}$, pela teoria viscoelástica linear, é uma matriz de elementos constantes que contém as propriedades elásticas do material, é função do modelo estrutural adotado (*estado plano de deformações*, por exemplo) e da característica do material, se isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico.

A equação 5.16 é equivalente, para a condição multiaxial, à equação apresentada na figura 5.4, que mostra um ensaio de compressão uniaxial de um material viscoelástico não-linear, onde o nível de tensão aplicada é progressivamente aumentado até σ_c e mantido constante, a partir daí.

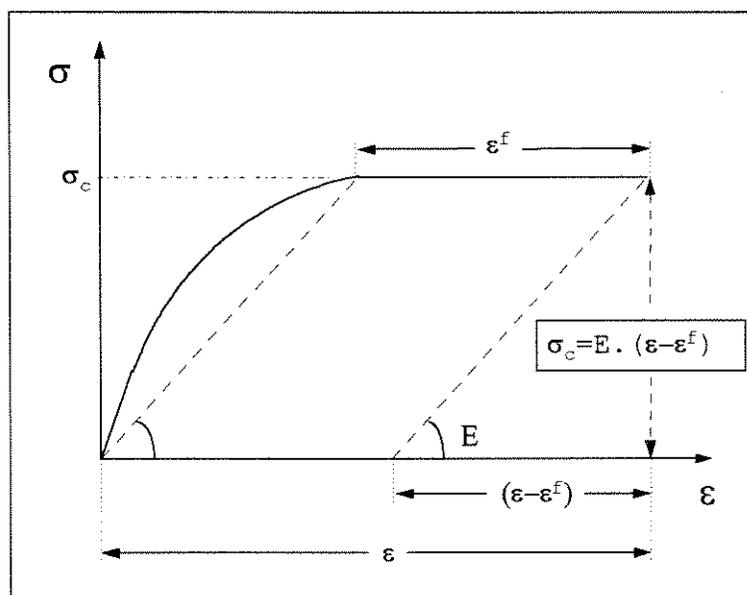


Fig. 5.4 : Ensaio de Compressão Uniaxial de Material Viscoelástico

Para se obter as equações de equilíbrio do elemento "e" em cada incremento de tempo, considera-se, finalmente, o vetor \underline{F}_{ext}^e das forças externas aplicadas aos nós de "e", que é

estaticamente equivalente às tensões de fronteira e cargas distribuídas no elemento.

$$\underline{F}_{ext}^e = \begin{Bmatrix} F_{ext i} \\ F_{ext j} \\ F_{ext k} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Impõe-se, neste momento, um conjunto de deslocamentos nodais arbitrários (virtuais), $\underline{d\dot{U}}^e$, ao elemento "e". A condição de equilíbrio desse elemento será alcançada se os trabalhos externos e internos realizados pelos vários esforços, forças e tensões que atuam em "e" durante a incidência do conjunto de deslocamentos nodais virtuais, forem igualados.

$$T_{ext} = T_{int} \quad (5.18)$$

Os deslocamentos e as deformações correspondentes ao conjunto de deslocamentos nodais virtuais $\underline{d\dot{U}}^e$, para qualquer ponto do interior do elemento "e", são dados por:

$$\underline{du} = \underline{N}^T \cdot \underline{d\dot{U}}^e \quad (5.19),$$

$$\underline{d\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{d\dot{U}}^e \quad (5.20).$$

O trabalho externo é aquele efetuado pelas forças externas que atuam nos nós de "e", dado pela soma dos produtos de cada componente de força pelo seu correspondente deslocamento:

$$T_{ext} = \underline{d\dot{U}}^e{}^T \cdot \underline{F}_{ext}^e \quad (5.21).$$

O trabalho interno é aquele efetuado pelas tensões e cargas distribuídas:

$$T_{int} = \int_V (\underline{d\varepsilon}^T \cdot \underline{\sigma} - \underline{du}^T \cdot \underline{f}_v - \underline{du}^T \cdot \underline{f}_s) dV \quad (5.22),$$

onde \underline{f}_v é o vetor das forças de volume e \underline{f}_s é o vetor das forças de superfície que agem sobre o elemento "e", sendo a integral estendida por todo o volume do elemento.

Utilizando-se as relações 5.19 e 5.20 em 5.22, tem-se:

$$T_{\text{int}} = d\overset{e}{U} \cdot \left[\int_V (\underline{B}^T \cdot \underline{\sigma}) dV - \int_V (\underline{N}^T \cdot \underline{f}_v) dV - \int_S (\underline{N}^T \cdot \underline{f}_s) dS \right] \quad (5.23).$$

Igualando-se o trabalho externo \mathbf{T}_{ext} ao trabalho interno \mathbf{T}_{int} , equações 5.21 e 5.23, e lembrando que a relação é válida para qualquer deslocamento virtual, obtém-se:

$$\underline{F}_{\text{ext}}^e = \int_V (\underline{B}^T \cdot \underline{\sigma}) dV - \int_V (\underline{N}^T \cdot \underline{f}_v) dV - \int_S (\underline{N}^T \cdot \underline{f}_s) dS \quad (5.24).$$

Substituindo-se a equação 5.16 na equação 5.24:

$$\underline{F}_{\text{ext}}^e = \int_V (\underline{B}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}) dV - \int_V (\underline{B}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}^f) dV - \int_V (\underline{N}^T \cdot \underline{f}_v) dV - \int_S (\underline{N}^T \cdot \underline{f}_s) dS \quad (5.25).$$

Substituindo-se 5.14 em 5.25:

$$\underline{F}_{\text{ext}}^e = \left[\int_V (\underline{B}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{B}) dV \right] \cdot \overset{e}{U} - \int_V (\underline{B}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}^f) dV - \int_V (\underline{N}^T \cdot \underline{f}_v) dV - \int_S (\underline{N}^T \cdot \underline{f}_s) dS \quad (5.26)$$

Observa-se, em 5.26, que a expressão que multiplica o vetor de deslocamentos nodais $\overset{e}{U}$, nada mais é que a matriz de rigidez do elemento:

$$\underline{K}^e = \int_V (\underline{B}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{B}) dV \quad (5.27)$$

Define-se, agora, o vetor \underline{F}^e dos esforços nodais equivalentes, aplicados aos nós do elemento "e", devido às forças externas e às cargas distribuídas sobre o elemento:

$$\underline{F}^e = \underline{F}_{\text{ext}}^e + \int_V (\underline{N}^T \cdot \underline{f}_v) dV + \int_S (\underline{N}^T \cdot \underline{f}_s) dS \quad (5.28)$$

Define-se, também, o vetor de cargas residuais \underline{F}_r^e :

$$\underline{F}_r^e = \int_V (\underline{B}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}^f) dV \quad (5.29)$$

Substituindo-se 5.27, 5.28 e 5.29 em 5.26:

$$\underline{K}^e \cdot \overset{e}{U} = \underline{F}^e + \underline{F}_r^e \quad (5.30)$$

Através da equação 5.30, estabelece-se a condição de equilíbrio estático do elemento "e" arbitrário. A mesma condição de equilíbrio vale para qualquer outro elemento da estrutura. Estendendo-se a aplicação da equação 5.30 para todos os elementos que compõem a estrutura, chega-se, finalmente, a:

$$\underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{F} + \underline{F}_r \quad (5.31),$$

onde \underline{K} é a matriz de rigidez global da estrutura, \underline{U} é o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura, \underline{F} representa o vetor dos esforços nodais equivalentes aplicados aos nós da estrutura devido aos carregamentos externos e às cargas distribuídas pelo corpo, e \underline{F}_r é um vetor de cargas residuais, que considera a história do carregamento, ou seja, o comportamento viscoelástico do material.

A equação 5.31, do equilíbrio quase-estático, deve ser satisfeita em todas as iterações do Algoritmo Explícito de Euler.

5.6 Critério de Treharne para Determinação do Intervalo de Tempo Crítico.

O Algoritmo Explícito de Euler fornece uma solução *condicionalmente* estável, exigindo a aplicação de pequenos intervalos de tempo na fase de fluência primária, correspondente a fase de redistribuição de tensões, antes da solução de regime permanente (fluência secundária).

Devido a extensiva aplicação deste algoritmo por pesquisadores envolvidos no estudo da fluência de estruturas metálicas, alguns critérios foram desenvolvidos para a determinação do intervalo de tempo crítico, acima do qual a solução se tornaria instável. Dentre aqueles pesquisados por Costa^[1], que se utilizaram da equação de fluência 5.1, Modelo de

Potência, o critério desenvolvido por **Treharne**^[40] conduziu aos melhores resultados. Por este critério o intervalo crítico é dado por:

$$\Delta t \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{(1+\nu)}{E} \cdot \frac{1}{A \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sigma_e^{a-1} \cdot T^{b-1} \cdot t^{c-1}} \quad (5.32),$$

onde:

Δt - é o intervalo de tempo entre dois incrementos do Algoritmo Explícito de Euler;

ν e E - são, respectivamente, o coeficiente de Poisson e o módulo de elasticidade do material;

Os demais parâmetros foram definidos na seção 5.4.

O Critério de Treharne foi testado durante o desenrolar deste projeto, mostrando-se *instável* sempre que encontrou uma condição de altas tensões associada a uma rápida redistribuição dessas tensões devido à fluência; como, por exemplo, na simulação do fechamento de um poço por um corpo salino encontrado em profundidades iguais ou superiores a 4000 m. Por causa disso, adotou-se um fator redutor do intervalo de tempo calculado pelo Critério de Treharne, que conferiu maior estabilidade ao algoritmo para as faixas usuais de aplicação do modelo (corpos salinos encontrados entre 1000 e 5000 metros). Por este novo critério, o intervalo crítico é dado por:

$$\Delta t \leq \frac{(1+\nu)}{500 \cdot E} \cdot \frac{1}{A \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sigma_e^{a-1} \cdot T^{b-1} \cdot t^{c-1}} \quad (5.33)$$

5.7 Processo Incremental do Algoritmo Explícito de Euler.

Desenvolvido por **Costa**^[1], a seqüência do processo incremental de integração do tensor de deformações por fluência foi adaptada para o caso particular simplificado deste projeto. Ela é conduzida utilizando-se da equação característica do

Modelo de Potência, abordada na Seção 4.3.2, do procedimento de integração das deformações por fluência da "Science Applications Incorporation", visto na seção 5.4.1 e da equação do equilíbrio quase-estático, descrita na seção 5.5. A determinação do intervalo de tempo entre cada incremento do algoritmo é baseada no critério de **Treharne modificado**, mostrado na seção 5.6:

Algoritmo:

1- **Geração do Estado Inicial de Tensões nos Pontos de Integração dos Elementos e Cálculo das Forças Nodais Equivalentes, se Aplicável ao Problema:**

$$\underline{F}_{\sigma_0} = \int_V (\underline{B}^T \cdot \underline{\sigma}_0) dV \quad (5.34)$$

Considerou-se aqui, para efeito de simplificação, que o modelo está **isento de tensões no instante t=0** (Veja discussão sobre o tema no início do capítulo 6). Portanto, o vetor de forças nodais equivalentes ao estado inicial de tensões é **nulo**.

$$\underline{F}_{\sigma_0} = \underline{0} \quad (5.35)$$

O peso da coluna litostática agindo sobre o sal, ou mesmo a presença de um possível tectonismo, serão computados como forças externas atuando sobre o modelo a partir do instante t=0.

2- **Cálculo do Estado de Tensões Para t=0:**

Partindo-se da equação 5.31, de equilíbrio quase-estático:

$$\underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{F} + \underline{F}_r \quad (5.36)$$

No instante t=0, o vetor \underline{F}_r , das cargas residuais devido à fluência, é **nulo**.

$$\underline{F}_r = \underline{0} \quad (5.37)$$

O vetor \underline{F} é dado pela equação 5.28:

$$\underline{F} = \underline{F}_{ext} + \int_V (\underline{N}^T \cdot \underline{f}_v) dV + \int_S (\underline{N}^T \cdot \underline{f}_s) dV \quad (5.38).$$

Desprezando-se o peso próprio do sal; admitindo-se o estado inicial de tensões nulo e a temperatura constante, \underline{F} reduz-se a:

$$\underline{F} = \underline{F}_{ext} \quad (5.39).$$

Utilizando-se as equações 5.37 e 5.39 em 5.36:

$$\underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{F}_{ext} \quad (5.40),$$

que é a equação de equilíbrio para $t=0$. Resolvendo-se o sistema de equações 5.40 obtém-se o vetor \underline{U} dos deslocamentos nodais da estrutura. As deformações e tensões nos elementos da estrutura são calculadas, então, através das equações:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{U} \quad (5.41)$$

e

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_0 + \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon} \quad (5.42),$$

sendo

$$\underline{\sigma}_0 = \underline{0} \quad (5.43).$$

3- Determinação do Intervalo de Tempo Entre Dois Instantes, t_n e t_{n+1} , do Processo Incremental:

$$\Delta t \leq \frac{(1+\nu)}{500 \cdot E} \cdot \frac{1}{A \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sigma_e(t_n)^{a-1} \cdot T^{b-1} \cdot t_n^{c-1}} \quad (5.44).$$

A equação 5.44 deve ser aplicada em todos os elementos do modelo, prevalecendo o menor resultado. Quem determina Δt , portanto, é o elemento do modelo no qual atua a maior tensão efetiva σ_e . A tensão efetiva no instante t_n , $\sigma_e(t_n)$, é dada pela equação 4.75:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2)} \quad (5.45)$$

A equação 5.44 utiliza o tempo atual t_n para determinar o intervalo de tempo Δt a ser usado na iteração

seguinte. O tempo t_{n+1} é calculado acrescentando-se Δt ao tempo atual t_n :

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad (5.46).$$

A equação 5.44 não é válida para o cálculo do intervalo de tempo inicial, referente à transição da condição elástica (*instantânea*) para a condição viscoelástica. Para este caso, arbitra-se um intervalo de tempo inicial, Δt_1 , muito pequeno. Um valor de Δt_1 arbitrado para maior poderá desestabilizar o algoritmo.

4- Cálculo dos Incrementos de Deformação Devido à Fluência Entre Dois Instantes, t_n e t_{n+1} , para Cada Elemento:

A discretização da equação 4.75, entre dois instantes, t_n e t_{n+1} , produz:

$$\underline{\Delta \varepsilon}^f = \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta \varepsilon_e^f}{\sigma_e(t_n)} \cdot \underline{s}(t_n) \quad (5.47),$$

onde:

$\underline{\Delta \varepsilon}^f$ - é o tensor dos incrementos de deformação por fluência, entre t_n e t_{n+1} ;

$\underline{s}(t_n)$ - é o tensor das tensões desviatórias no instante t_n ;

$\sigma_e(t_n)$ - é a tensão efetiva no instante t_n ;

$\Delta \varepsilon_e^f$ - é o incremento de deformação efetiva por fluência entre t_n e t_{n+1} .

O tensor das tensões desviatórias, em notação indicial, é dado por:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3} \cdot \delta_{ij} \quad (5.48),$$

onde:

δ_{ij} - Delta de Kroneker $\Rightarrow (\delta_{ij}=1 \text{ se } i=j; \delta_{ij}=0 \text{ se } i \neq j)$

ou,

$$\underline{s} = \underline{D} \cdot \underline{\sigma} \quad (5.49),$$

onde \underline{D} é função do modelo estrutural adotado. Para o estado plano de deformações, por exemplo:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

O incremento de deformação efetiva por fluência entre dois instantes, t_n e t_{n+1} , para cada elemento, é dado pela equação 5.10, aqui transcrita:

$$\Delta \varepsilon_e^f = A \cdot T^b \cdot \left\{ \sigma_e^a(t_n) \cdot [t_{n+1} - \lambda(t_n)]^c - \sigma_e^a(t_{n-1}) \cdot [t_n - \lambda(t_{n-1})]^c \right\} \quad (5.51),$$

onde $\lambda(t_n)$ é dado pela equação 5.6, rescrita abaixo para a condição de temperatura constante:

$$\lambda(t_n) = t_n - \left\{ [t_n - \lambda(t_{n-1})]^c \cdot \left[\frac{\sigma_e(t_{n-1})}{\sigma_e(t_n)} \right]^a \right\}^{1/c} \quad (5.52),$$

sendo:

$$\lambda(t_0) = t_0 = 0 \quad (5.53).$$

5- Cálculo do Tensor Acumulado de Deformação por Fluência, no Instante t_{n+1} :

$$\underline{\varepsilon}^f(t_{n+1}) = \underline{\varepsilon}^f(t_n) + \underline{\Delta \varepsilon}^f \quad (5.54)$$

6- Cálculo do Campo de Deslocamentos $\underline{U}(t_{n+1})$ de Modo a se Alcançar o Equilíbrio Estrutural, para uma Deformação por Fluência Igual a $\underline{\varepsilon}(t_{n+1})$:

$$\underline{K} \cdot \underline{U}(t_{n+1}) = \underline{F} + \underline{F}_r \quad (5.55),$$

onde o vetor \underline{F} é dado pela equação 5.39:

$$\underline{F} = \underline{F}_{ext} \quad (5.39),$$

e o vetor \underline{F}_r é calculado pela equação 5.29:

$$\underline{F}_r^e = \int_V (\underline{B}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}^f) dV \quad (5.29).$$

As contribuições das forças residuais \underline{F}_r^e de cada elemento da estrutura devem ser computadas na formação do vetor \underline{F}_r global.

7- Cálculo das Deformações e Tensões no Instante t_{n+1} :

$$\underline{\varepsilon}(t_{n+1}) = \underline{B} \cdot \underline{U}(t_{n+1}) \quad (5.56)$$

e

$$\underline{\sigma}(t_{n+1}) = \underline{C} \cdot [\underline{\varepsilon}(t_{n+1}) - \underline{\varepsilon}^f(t_{n+1})] \quad (5.57).$$

8- Cálculo do Parâmetro $\lambda(t_{n+1})$, para a Condição de Temperatura Constante:

$$\lambda(t_{n+1}) = t_{n+1} - \left\{ [t_{n+1} - \lambda(t_n)]^c \cdot \left[\frac{\sigma_e(t_n)}{\sigma_e(t_{n+1})} \right]^a \right\}^{1/c} \quad (5.58),$$

9- Retorno ao Item "3" e Reinício do Processo até que se Alcance o Tempo Solicitado para a Análise.

Capítulo 6

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

"Existe uma tendência normal em Mecânica das Rochas, ao se realizar uma modelagem física ou com elementos finitos, em primeiro se construir o modelo e somente depois se aplicar as cargas, tais como as devido ao peso próprio e das camadas sobrepostas, ou aquelas devido aos esforços tectônicos.", Coates^[24].

Tal procedimento simplificado também é aplicado neste trabalho. O modelo geométrico deve representar um corpo salino após o mesmo ter sido atravessado por uma broca. O modelo tem sua conformação interna com o mesmo diâmetro da broca e parte de um estado de tensões inicial **nulo**. No instante $t=0$ são impostas as cargas que representam o peso das camadas sobrepostas, as cargas que representam os esforços tectônicos atuantes na área (quando for o caso) e as cargas devido à pressão exercida pela coluna hidrostática do fluido utilizado na perfuração do poço. As tensões induzidas pelo processo de perfuração do poço são desconsideradas.

O procedimento descrito produz deformações no modelo de natureza elastoplástica, que **não** são exclusivamente provenientes da perfuração do poço. No cômputo das deformações produzidas pelo modelo, este acrescenta, indevidamente, as deformações originais resultantes da atuação das forças de gravidade e tectônicas existentes antes da perfuração do poço. Não se incluem as deformações de natureza viscosa (fluência), que somente se iniciam a partir da perfuração do poço.

A alteração na seqüência dos eventos ocorridos no processo de modelagem: perfura-se o poço e em seguida aplicam-se as forças que atuam sobre o mesmo; em relação aos eventos

ocorridos de fato: existência das forças de gravidade e tectônicas antes da perfuração do poço; não altera o estado final das tensões, ou a tensão total atuante no corpo elástico indeformado no instante $t=0$, momento em que se iniciam as deformações por fluência. Sendo o processo de fluência função do estado de tensões atuante, pode-se dizer que as deformações por fluência não sofrerão influência da diferença entre a seqüência de eventos do processo de modelagem em relação à seqüência real de eventos ocorridos.

As deformações por fluência de um sal em um poço de petróleo são de magnitude muito superior às suas deformações de natureza elastoplástica (instantânea). É de se esperar que, empregando-se uma equação constitutiva de fluência bem ajustada aos resultados obtidos nos ensaios de laboratório e sendo estes ensaios representativos das condições encontradas no poço real, as deformações por fluência calculadas via modelagem correspondam com boa veracidade àquelas encontradas nos poços reais. No cômputo das deformações totais, o erro cometido no cálculo das deformações instantâneas ou não-viscosas devido ao procedimento de modelagem adotado, se torna pouco significativo, em face da maior ordem de grandeza das deformações por fluência.

O procedimento simplificado adotado de considerar as forças de gravidade e tectônicas atuando no perímetro externo do modelo bem distante do poço; ao invés de considerá-las como tensões iniciais atuando em cada elemento do modelo, não altera significativamente os resultados das tensões e deslocamentos próximos ao poço, porém, para maiores distâncias em relação ao poço, os resultados estarão influenciados pelas condições de contorno assumidas. Cuidados devem ser tomados, portanto, na análise desses resultados.

Os procedimentos de modelagem aqui descritos também têm sido aplicados em diversos trabalhos técnicos publicados, como por exemplo, na versão "1" do programa de computador COVES, para simulação do comportamento quase-estático de escavações subterrâneas, desenvolvido por Costa^[1]. Em sua primeira versão,

o programa COVES parte de um modelo com o estado de tensões em repouso. Apesar da versão "2" ter evoluído, com a introdução de recursos numéricos mais sofisticados e poderosos, a versão "1" conseguiu ótimos resultados na simulação do comportamento quase-estático de uma galeria experimental da mina de Rocanville, no Canadá, conforme descrito por Costa^[1].

6.1 O Modelo Geométrico

No estudo das tensões em corpos soterrados profundos, tal como no cilindro esquemático de sal isolado pela figura 6.1, considera-se que a tensão vertical ϵ_z , atuante no cilindro, é função apenas das cargas sobrepostas a ele, sendo constante ao longo da seção transversal do cilindro em cada profundidade. Assume-se, ainda, que a perfuração do poço de petróleo não altera essa condição.

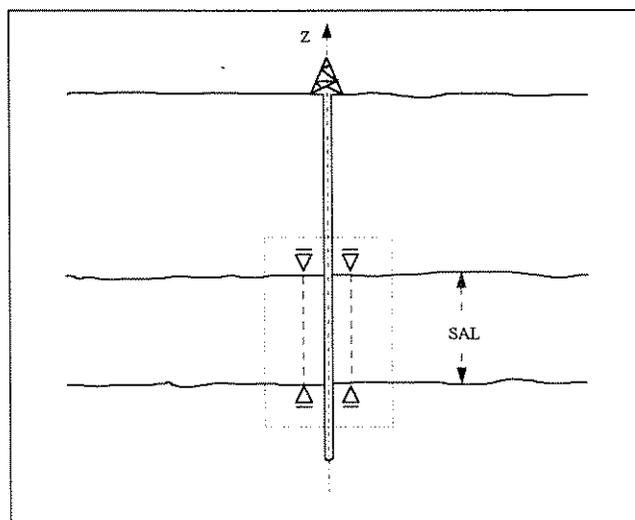


Fig. 6.1 : Poço de Petróleo Cortando Corpo de Sal.

As hipóteses assumidas permitem considerar que as variações das tensões horizontais atuantes sobre o cilindro, devido a perfuração do poço, são *independentes do eixo z*.

Essas condições são as necessárias e suficientes para que se possa tratar do problema estrutural abordado, cujo estado de tensões real é tridimensional, como um caso de **estado plano de deformações**. Assim sendo, o modelo geométrico apresentado na figura 6.2 mostra a seção transversal de um cilindro de sal de espessura unitária. Devido à simetria do cilindro, apenas um de seus quadrantes é representado.

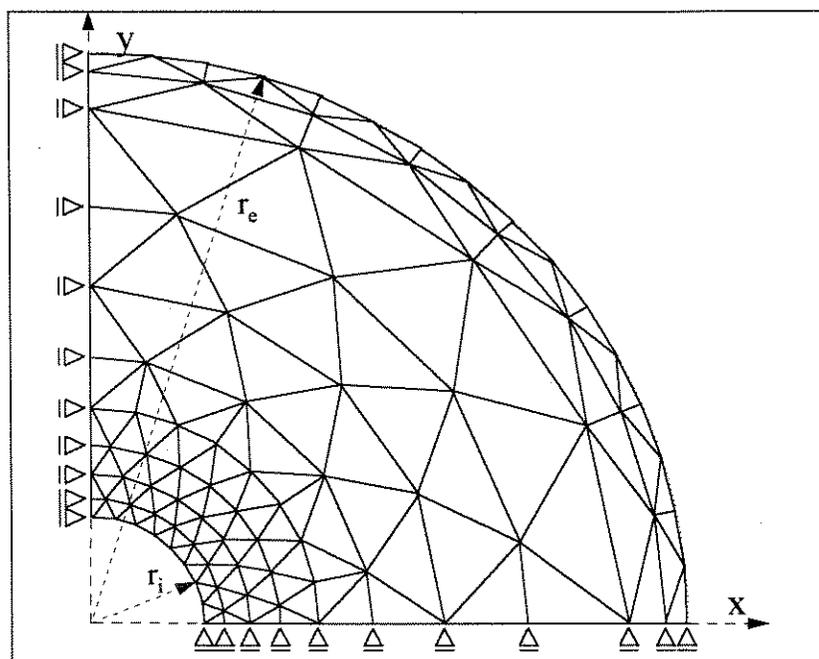


Fig. 6.2 : Modelo Geométrico (Esquemático) do Sal no Poço de Petróleo

O modelo foi discretizado utilizando-se uma malha de elementos triangulares simples. O elemento triangular de função de interpolação linear, também chamado de *triângulo de deformação constante* ou elemento triangular "simplex", tem, na versatilidade do seu emprego no ajuste às geometrias mais complexas e na simplicidade de sua formulação, não necessitando de integrações numéricas para o cálculo de sua matriz de rigidez, suas características principais. O surgimento de computadores cada vez mais velozes e com maior capacidade de armazenamento de dados dá nova vida a esses elementos, que passam a substituir os elementos mais complexos de ordem

superior através de um maior refinamento da malha a ser utilizada.

Procurou-se conferir um maior refinamento na malha junto ao diâmetro interno do modelo (diâmetro do poço), onde se esperam encontrar as maiores variações de tensão. O grau de refinamento diminui a medida que se distancia do poço, onde pequenas variações nas tensões são esperadas.

A malha tem uma geometria isotrópica, dotada de elementos triangulares com formas sempre próximas às equiláteras, havendo a preocupação de procurar manter-se a razão entre as maiores e menores dimensões dos triângulos abaixo de 2,0.

A restrição ao movimento na direção do eixo "Y" para os nós dos elementos situados na linha do eixo "X" e vice-versa, deve-se ao fato de que a simetria do modelo e das cargas aplicadas limita os movimentos de tais nós à direção dos eixos onde eles se encontram.

O sal tem comportamento *isotrópico* (visto na seção 2.4). Portanto, as propriedades elásticas dos elementos do modelo são definidas por um único módulo de elasticidade E e por um único coeficiente de Poisson ν , válidos para todos os elementos do modelo e para qualquer direção.

O modelo permite a simulação de esforços tectônicos horizontais, alinhando-se a direção da maior tensão tectônica horizontal com a direção do eixo "X" do modelo.

O diâmetro externo do modelo, estabelecido como sendo igual a 50 vezes o diâmetro interno (diâmetro do poço), foi avaliado e definido com critérios, no apêndice deste trabalho.

6.2 Equações Particularizadas Para o Projeto.

Por questões didáticas, as equações apresentadas durante os capítulos precedentes tiveram um caráter geral, não

se atendo às condições específicas do trabalho em curso. Nesta seção serão rerepresentadas várias daquelas equações, porém "prontas para uso", isto é, particularizadas para as condições específicas deste projeto. Outras formulações empregadas, que ainda não tiveram oportunidade de serem apresentadas por não se encaixarem na seqüência expositiva, serão vistas agora.

O elemento finito empregado no modelo da figura 6.2 é o triângulo "simplex" em estado plano de deformações. Particularizando a equação genérica 5.19, os deslocamentos de qualquer ponto desse elemento podem ser descritos pelo vetor

$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$, onde u é o deslocamento na direção do eixo cartesiano "X" e

v é o deslocamento na direção "Y". Assim,

$$u(x,y) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

e

$$v(x,y) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \cdot \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (6.2),$$

onde:

U_1 , U_2 e U_3 - são os deslocamentos dos nós "1", "2" e "3", respectivamente, do elemento triangular "simplex" na direção do eixo "X" cartesiano de um sistema de coordenadas arbitrário situado no mesmo plano do modelo;

V_1 , V_2 e V_3 - são os deslocamentos na direção do eixo "Y" dos nós "1", "2" e "3" do mesmo triângulo;

$$N_1 = \frac{1}{2A} \cdot (a_1 + b_1 \cdot x + c_1 \cdot y) \quad (6.3),$$

$$N_2 = \frac{1}{2A} \cdot (a_2 + b_2 \cdot x + c_2 \cdot y) \quad (6.4)$$

e

$$N_3 = \frac{1}{2A} \cdot (a_3 + b_3 \cdot x + c_3 \cdot y) \quad (6.5);$$

N_1 , N_2 e N_3 - são as funções de forma do polinômio interpolador linear, sendo:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= x_3 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_3 \\ a_2 &= x_1 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1 \\ a_3 &= x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 \\ b_1 &= y_2 - y_3 \\ b_2 &= y_3 - y_1 \\ b_3 &= y_1 - y_2 \\ c_1 &= x_3 - x_2 \\ c_2 &= x_1 - x_3 \\ c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

e

$$A = \frac{(a_1 + a_2 + a_3)}{2} \quad (6.7),$$

onde:

A - é a área do elemento triangular;

(x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) - são as coordenadas dos nós "1", "2" e "3", respectivamente, do elemento triangular em relação ao sistema de coordenadas arbitrado, situado no mesmo plano do modelo.

O *Estado Plano de Deformações* é um caso especial da Teoria Elástica Linear, onde todas as deformações de um corpo estão contidas no plano em questão, ou seja, as deformações fora desse plano são nulas. Sendo o plano o mesmo dos eixos "X" e "Y" do sistema de coordenadas arbitrado, tem-se que:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (6.8).$$

Da relação entre a deformação e o deslocamento para pequenos deslocamentos e pequenas deformações, obtém-se

(Jaeger^[8]):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.9),$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6.10)$$

e

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.11).$$

Substituindo-se as equações 6.3 a 6.5 nas equações 6.1 e 6.2, substituindo-se as equações resultantes nas equações 6.9 a 6.11, derivando-se e colocando-se na forma de matriz:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (6.12).$$

A equação 6.12 é a versão particularizada da equação 5.14, $\underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{U}$, para o elemento triangular "simplex" em estado plano de deformações.

A matriz constitutiva que relaciona o tensor de tensões em um ponto qualquer de um meio com o correspondente tensor de deformações, $\underline{\sigma} = \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}$, para um corpo elástico em estado plano de deformações é (Gallagher^[23]):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.13),$$

E - módulo de elasticidade do material elástico isotrópico;

ν - coeficiente de Poisson do material elástico isotrópico.

A matriz de rigidez de um elemento genérico, dada pela equação 5.27, $\underline{K} = \int_V (\underline{B}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{B}) dV$, onde \underline{B} e \underline{C} são identificados, respectivamente, nas equações 6.12 e 6.13 para um

elemento triangular "simplex" em estado plano de deformações, tem como solução da integral a seguinte equação:

$$\underline{\underline{K}}^e = L \cdot \left[\begin{array}{cccccc} \left(\begin{array}{c} mb_1^2 \\ + \\ nc_1^2 \end{array} \right) & \frac{b_1c_1}{2} & \left(\begin{array}{c} mb_1b_2 \\ + \\ nc_1c_2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} b_1c_2\nu \\ + \\ nc_1b_2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} mb_1b_3 \\ + \\ nc_1c_3 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} b_1c_3\nu \\ + \\ nc_1b_3 \end{array} \right) \\ & \left(\begin{array}{c} mc_1^2 \\ + \\ nb_1^2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} c_1b_2\nu \\ + \\ nb_1c_2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} mc_1c_2 \\ + \\ nb_1b_2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} c_1b_3\nu \\ + \\ nb_1c_3 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} mc_1c_3 \\ + \\ nb_1b_3 \end{array} \right) \\ & & \left(\begin{array}{c} mb_2^2 \\ + \\ nc_2^2 \end{array} \right) & \frac{b_2c_2}{2} & \left(\begin{array}{c} mb_2b_3 \\ + \\ nc_2c_3 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} b_2c_3\nu \\ + \\ nc_2b_3 \end{array} \right) \\ & & & \left(\begin{array}{c} mc_2^2 \\ + \\ nb_2^2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} c_2b_3\nu \\ + \\ nb_2c_3 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} mc_2c_3 \\ + \\ nb_2b_3 \end{array} \right) \\ & & & & \left(\begin{array}{c} mb_3^2 \\ + \\ nc_3^2 \end{array} \right) & \frac{b_3c_3}{2} \\ & & & & & \left(\begin{array}{c} mc_3^2 \\ + \\ nb_3^2 \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (6.14),$$

SIMÉTRICA

onde:

$$L = \frac{E \cdot h}{4 \cdot A \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \quad (6.15),$$

$h=1$ - espessura unitária do elemento triangular;

$$m = (1 - \nu) \quad (6.16),$$

e

$$n = \frac{(1 - 2\nu)}{2} \quad (6.17).$$

A equação constitutiva de fluência, que relaciona o tensor de velocidades de deformação por fluência com o tensor de

tensões desviatórias, $\dot{\epsilon}_{ij}^f = \frac{3}{2} \cdot \frac{\dot{\epsilon}_e^f}{\sigma_e} \cdot s_{ij}$, para o estado plano de

deformações, assume a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x^f \\ \dot{\varepsilon}_y^f \\ \dot{\gamma}_{xy}^f \\ \dot{\varepsilon}_z^f \end{Bmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\dot{\varepsilon}_e^f}{\sigma_e} \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ 2s_{xy} \\ s_z \end{Bmatrix} \quad (6.18),$$

onde:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot (s_x^2 + s_y^2 + 2s_{xy}^2 + s_z^2)^{1/2} \quad (6.19)$$

e

$$\dot{\varepsilon}_e^f = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\dot{\varepsilon}_x^{f2} + \dot{\varepsilon}_y^{f2} + \frac{\dot{\gamma}_{xy}^{f2}}{2} + \dot{\varepsilon}_z^{f2})^{1/2} \quad (6.20);$$

sendo:

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_{xy} \\ s_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

e

$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) - E \cdot \varepsilon_z^f \quad (6.22).$$

Observa-se que a deformação por fluência na direção do eixo "Z" não é nula, $\varepsilon_z^f \neq 0$. O tensor total de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ no estado plano de deformações contém uma componente normal a esse plano, $\underline{\underline{\sigma}}_z$. Em conseqüência, a componente $s_z = \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3}$ do tensor de tensões desviatórias $\underline{\underline{s}}$ também é normal ao referido plano, pois possui a mesma direção de $\underline{\underline{\sigma}}_z$. É através da equação 6.18, que a componente s_z do tensor de tensões desviatórias produz a deformação por fluência ε_z^f na direção "Z". Entretanto, a deformação total na direção "Z" permanece nula, $\varepsilon_z = 0$, pois para isso a tensão $\underline{\underline{\sigma}}_z$ é reajustada através da equação 6.22.

A integração da equação 5.29, $\underline{\underline{F}}_r^e = \int_V (\underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^f) dV$,

fornece a força residual que age sobre o elemento viscoelástico triangular "simplex" em estado plano de deformações:

$$\underline{\underline{F}}_r^e = \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ F_{x_3} \\ F_{y_3} \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot h}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{Bmatrix} mb_1 \varepsilon_x^f + vb_1 \varepsilon_y^f + nc_1 \gamma_{xy}^f \\ vc_1 \varepsilon_x^f + mc_1 \varepsilon_y^f + nb_1 \gamma_{xy}^f \\ mb_2 \varepsilon_x^f + vb_2 \varepsilon_y^f + nc_2 \gamma_{xy}^f \\ vc_2 \varepsilon_x^f + mc_2 \varepsilon_y^f + nb_2 \gamma_{xy}^f \\ mb_3 \varepsilon_x^f + vb_3 \varepsilon_y^f + nc_3 \gamma_{xy}^f \\ vc_3 \varepsilon_x^f + mc_3 \varepsilon_y^f + nb_3 \gamma_{xy}^f \end{Bmatrix} \quad (6.23),$$

$h=1$ - espessura unitária do elemento triangular;

\mathbf{m} e \mathbf{n} - definidos pelas equações 6.16 e 6.17, respectivamente.

A figura 6.3 mostra como foi montado o vetor de forças nodais, $\underline{\underline{F}}_{eq}^e$, equivalentes às cargas radiais distribuídas, aplicado nos elementos que delimitam o raio interno e raio externo do modelo geométrico.

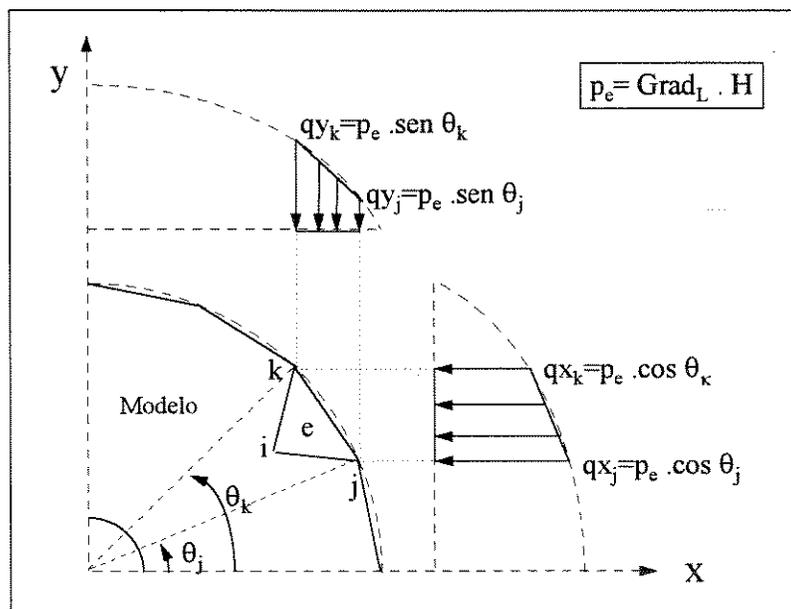


Fig. 6.3 : Decomposição da Carga Radial

A carga radial externa p_e é devida ao peso das camadas de rochas sobrepostas ao sal. Ao ser decomposta nas direções "X"

e "Y", ela assume o perfil mostrado na figura 6.3. Para os nós "j" e "k" do lado " l_{jk} " do elemento "e" que delimita o raio externo do modelo, os valores pontuais da carga p_e na direção "X" são qx_j e qx_k , respectivamente; na direção "Y" os valores pontuais de p_e são, respectivamente, qy_j e qy_k .

Assume-se uma variação linear da carga que age sobre o lado " l_{jk} " do elemento "e" nas direções "X" e "Y". Em conseqüência, o vetor \underline{F}_{eq}^e , das forças nodais equivalentes de um elemento triangular "e" da fronteira externa do modelo, assume a seguinte forma:

$$\underline{F}_{eq}^e = \begin{Bmatrix} Fx_i \\ Fy_i \\ Fx_j \\ Fy_j \\ Fx_k \\ Fy_k \end{Bmatrix} = \frac{l_{jk}}{6} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2qx_j + qx_k \\ 2qy_j + qy_k \\ 2qx_k + qx_j \\ 2qy_k + qy_j \end{Bmatrix} \quad (6.24),$$

sendo l_{jk} igual ao comprimento do lado formado pelos nós "j" e "k" do elemento "e";

qx_j , qx_k , qy_j e qy_k - são cargas pontuais, conforme aparecem na figura 6.3.

O mesmo procedimento é aplicado aos elementos que fazem a fronteira do modelo com o poço de petróleo (diâmetro interno do modelo). Neste caso, a carga radial p_i é devida ao peso da coluna de fluidos contidos no poço:

$$p_e = G_L \cdot H \quad (6.25)$$

e

$$p_i = G_H \cdot H \quad (6.26),$$

onde,

H - é a profundidade do corpo de sal;

G_L - é o gradiente litostático das camadas de rochas sobrepostas ao sal;

G_H - é o gradiente hidrostático dos fluidos contidos no poço.

O tensor total $\underline{\sigma}$, das tensões que atuam em cada elemento do modelo (as tensões e deformações são constantes ao longo do elemento triangular "simplex"), é calculado no sistema de coordenadas cartesiano e transformado para o sistema de coordenadas cilíndricas através da relação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \\ \tau_{rt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sin \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cdot \cos \theta \\ -\sin \theta \cdot \cos \theta & \sin \theta \cdot \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.27),$$

onde:

σ_x - é a tensão radial;

σ_t - é a tensão tangencial ou circunferencial;

τ_{rt} - é a tensão cisalhante;

θ - é o ângulo entre o centróide do elemento e o eixo "X";

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (6.28).$$

As coordenadas do centróide de um elemento triangular, (\bar{x}, \bar{y}) , são calculadas pelas equações:

$$\bar{x} = (x_i + x_j + x_k) / 3 \quad (6.29)$$

e

$$\bar{y} = (y_i + y_j + y_k) / 3 \quad (6.30);$$

(x_i, y_i) , (x_j, y_j) e (x_k, y_k) - são as coordenadas cartesianas dos nós "i", "j" e "k", desse elemento.

Os deslocamentos de um nó qualquer, U_i na direção "X" e V_i na direção "Y", foram calculados no sistema cartesiano de coordenadas e transformados para o sistema de coordenadas cilíndricas, utilizando-se a relação:

$$\begin{Bmatrix} U_{r_i} \\ U_{t_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ \cos \theta_i & -\sin \theta_i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} \quad (6.31),$$

U_{r_i} - é o deslocamento do nó "i" na direção radial;

U_{t_i} - é o deslocamento do nó "i" na direção circunferencial ou tangencial;

$$\theta_i = \arctg\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \quad (6.32),$$

θ_i - é o ângulo entre o nó "i" e o eixo "X";

(x_i, y_i) - são as coordenadas cartesianas do nó "i".

6.3 Fluxograma Geral do Programa de Computador

A figura 6.4 mostra em 11 passos o funcionamento do programa de computador.

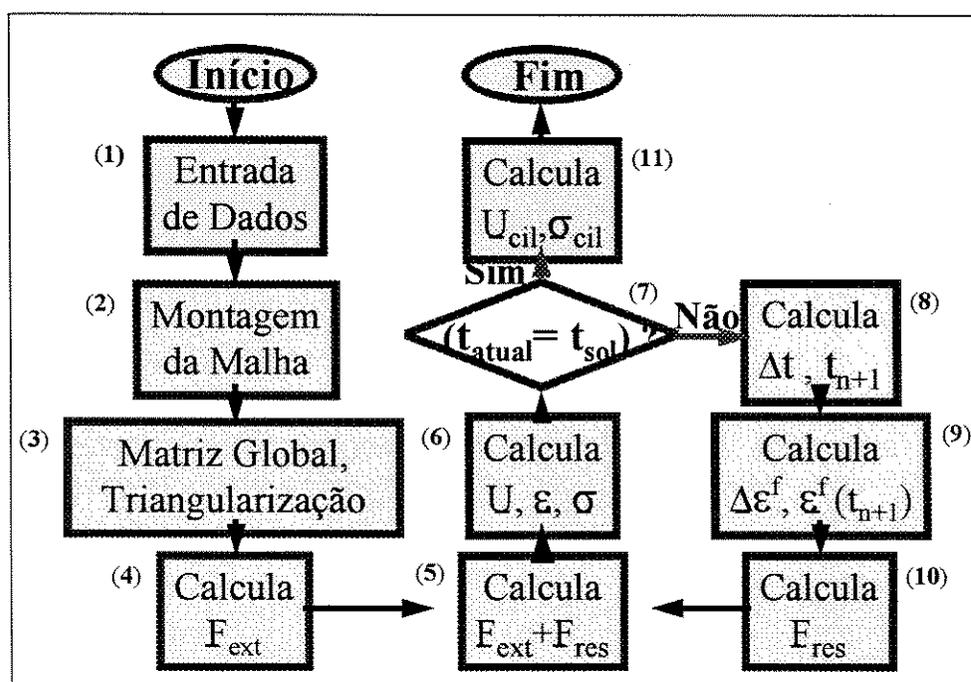


Fig. 6.4 : Fluxograma do Programa de Computador

Passo (1): Uma função denominada "EntraDados" controla um conjunto de funções menores que servem de interface com o usuário, sendo a porta de entrada dos dados necessários para o funcionamento do programa. Por aqui alimentam-se os dados

tais como o diâmetro do poço, a profundidade do corpo salino, os gradientes geotérmico e litostático da região, as cargas tectônicas atuantes (quando for o caso), o peso específico do fluido de perfuração, os intervalos de tempo solicitados para a análise das deformações e as propriedades elásticas do sal.

Passo (2): Processa-se a montagem automática da malha de elementos triangulares "simplex". O diâmetro externo do modelo é calculado em função do diâmetro do poço. O número de elementos da malha é prefixado, porém pode ser alterado no cabeçalho do programa sem necessitar-se alterar a programação. Montam-se as matrizes de identificação e correspondência entre as coordenadas nodais, composição nodal de cada elemento e variáveis nodais.

Passo (3): Os componentes da matriz de rigidez de cada elemento que contribuem com a montagem da matriz global da estrutura são calculados e incorporados a ela. Em seguida, triangulariza-se a matriz global pelo método de decomposição LU.

Passo (4): Calcula-se o vetor de forças equivalentes às forças externas aplicadas sobre o modelo. Sobre o perímetro do poço age a força devido ao peso da coluna hidrostática do fluido de perfuração. Sobre o perímetro externo do modelo age a força devido ao peso da coluna litostática das camadas de rochas que se sobrepõem ao sal, ou esforços tectônicos horizontais conhecidos, onde a direção da maior tensão principal (compressiva) é paralela ao eixo "X" do modelo.

Passo (5): Às forças externas, somam-se as forças residuais devido à fluência.

Passo (6): O sistema de equações lineares é resolvido, obtendo-se os deslocamentos, \underline{U} , dos nós da malha em coordenadas cartesianas. As deformações totais em cada elemento, $\underline{\varepsilon}$, são calculadas. Subtraem-se as deformações não-lineares, $\underline{\varepsilon}^f$, das deformações totais e calculam-se as tensões, $\underline{\sigma}$, em cada elemento.

Passo (7): O processo é iterativo e a cada iteração é acrescentado um incremento de tempo ao t_{atual} . Neste passo, compara-se o t_{atual} com o período de tempo solicitado para a análise. As iterações se prosseguem enquanto o t_{atual} for menor que t_{sol} (tempo solicitado para a análise). Caso contrário, o fluxo do programa é desviado para o passo 11.

Passo (8): Um novo incremento de tempo, Δt , é calculado e acrescentado ao t_{atual} .

Passo (9): Um novo incremento de deformações por fluência, $\Delta \varepsilon^f$, é calculado e acrescentado à deformação por fluência acumulada ε^f .

Passo (10): A variação na fluência acumulada, ε^f , gera um reajuste nas forças residuais F_{res} . As forças residuais são recalculadas.

Passo (11): Transformam-se deslocamentos e tensões para o sistema de coordenadas cilíndricas, U_{cil} e σ_{cil} .

6.4 Testes de Validação

O programa de computador foi testado em diferentes etapas de seu desenvolvimento contra erros de programação, sejam de digitação, de lógica ou de conceituação. Os testes foram separados em 4 níveis, onde cada teste validou uma etapa de desenvolvimento do programa. Para cada teste é descrito qual subconjunto do programa está sendo validado.

6.4.1 Estrutura Sob Tensões Constantes.

Uma estrutura elástica sofre o efeito de um carregamento, conforme mostra a figura 6.5.

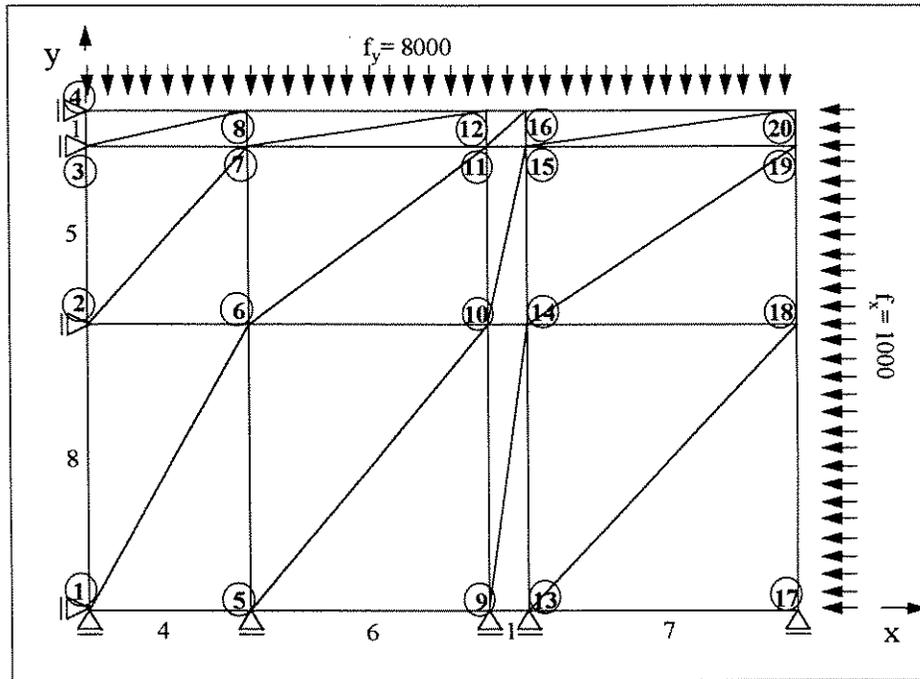


Fig. 6.5 : Estrutura Sob Tensões Constantes

Os deslocamentos resultantes de cada ponto da estrutura possuem uma variação linear no interior de cada elemento da malha e solução de continuidade entre os nós comuns dos elementos adjacentes. Tais deslocamentos, calculados pelo método dos elementos finitos, terão *solução exata* a menos de erros de arredondamento, isto é, coincidirão com a solução por diferenças finitas de corpo contínuo elástico linear similar, se as tensões atuantes ao longo do modelo forem constantes, como é o caso do exemplo.

A solução por diferenças finitas pode ser obtida a partir das equações 6.10, 6.11 e 6.13, colocando-se as deformações em evidência:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \cdot \sigma_x - \frac{\nu \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sigma_y \quad (6.33)$$

e

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \cdot \sigma_y - \frac{\nu \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sigma_x \quad (6.34).$$

Discretizando-se 6.33 e 6.34 e colocando-se os deslocamentos em evidência:

$$\Delta u = \left[\frac{(1-\nu^2)}{E} \cdot \sigma_x - \frac{\nu \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \sigma_y \right] \cdot \Delta x \quad (6.35)$$

e

$$\Delta v = \left[\frac{(1-\nu^2)}{E} \cdot \sigma_y - \frac{\nu \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \sigma_x \right] \cdot \Delta y \quad (6.36).$$

Os valores das cargas distribuídas da figura 6.5 são usados como tensões nas equações 6.35 e 6.36. As cargas distribuídas (Pa), as dimensões do modelo (m), o módulo de elasticidade ($E=10^6$ Pa) e o coeficiente de Poisson ($\nu= 0,36$) estão no mesmo sistema de unidades.

A tabela I compara os deslocamentos encontrados pela solução analítica (diferenças finitas) com os deslocamentos calculados pelo programa de computador. Os resultados estão apresentados em cm.

O programa de computador obteve as mesmas respostas da solução analítica, reproduzindo para as tensões os valores originais das cargas distribuídas com sinal positivo, pois são tensões compressivas.

O teste validou a matriz de rigidez implantada (elemento triangular "simplex" em estado plano de deformações), o algoritmo de montagem da matriz global, a utilização do armazenamento vetorial para matrizes simétricas de banda, a triangularização e solução dos sistemas triangular inferior e triangular superior de matriz simétrica de banda com armazenamento vetorial e o cálculo das tensões e deformações em cada elemento.

Nó	Sol. Analítica		Sol. Numérica	
	ΔU	ΔV	ΔU	ΔV
1	0	0	0	0
2	0	-5,178880	0	-5,178880
3	0	-8,415680	0	-8,415680
4	0	-9,063040	0	-9,063040
5	1,218560	0	1,218560	0
6	1,218560	-5,178880	1,218560	-5,178880
7	1,218560	-8,415680	1,218560	-8,415680
8	1,218560	-9,063040	1,218560	-9,063040
9	-3,046400	0	-3,046400	0
10	-3,046400	-5,178880	-3,046400	-5,178880
11	-3,046400	-8,415680	-3,046400	-8,415680
12	-3,046400	-9,063040	-3,046400	-9,063040
13	-3,351040	0	-3,351040	0
14	-3,351040	-5,178880	-3,351040	-5,178880
15	-3,351040	-8,415680	-3,351040	-8,415680
16	-3,351040	-9,063040	-3,351040	-9,063040
17	-5,483520	0	-5,483520	0
18	-5,483520	-5,178880	-5,483520	-5,178880
19	-5,483520	-8,415680	-5,483520	-8,415680
20	-5,483520	-9,063040	-5,483520	-9,063040

Tab. I : Solução Analítica X Solução Numérica de Estrutura Elástica Sob Tensões Constantes

6.4.2 Comparação Com a Solução Analítica de Placa Finita com Furo no Centro

A solução analítica elástica linear, para os deslocamentos de um ponto qualquer de uma placa de raio interno r_i , raio externo $r_e = b \cdot r_i$, em estado plano de deformações, com uma

carga distribuída p_e agindo sobre o raio externo e uma carga p_i agindo sobre o raio interno, é dada pela pôr:

$$\frac{E}{r_i} \cdot u(n) = (1+\nu) \cdot \left[\frac{b^2 \cdot (p_i - p_e)}{b^2 - 1} \cdot \frac{1}{n} + (1-2\nu) \cdot \frac{(p_i - b^2 \cdot p_e)}{b^2 - 1} \cdot n \right] \quad (6.37),$$

onde:

$r = n \cdot r_i$ - é a distância do referido ponto da placa ao eixo do furo;

E - é o módulo de elasticidade;

ν - é o coeficiente de Poisson.

As tensões que atuam sobre esta placa são (Jaeger^[8]):

$$\sigma_r = \frac{b^2 \cdot (p_i - p_e)}{b^2 - 1} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{(p_i - b^2 \cdot p_e)}{b^2 - 1} \quad (6.38)$$

e

$$\sigma_t = -\frac{b^2 \cdot (p_i - p_e)}{b^2 - 1} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{(p_i - b^2 \cdot p_e)}{b - 1} \quad (6.39).$$

Para o exemplo onde $r_i=10\text{m}$, $r_e=505,89\text{m}$ ($\Rightarrow b=50,589$), $p_e=8000\text{ Pa}$, $p_i=5000\text{ Pa}$, $E=10^6\text{ Pa}$ e $\nu=0,35$; a equação 6.37 toma a seguinte forma:

$$u(n) = -\left(3,240792 \cdot n + \frac{4,051583}{n} \right) \cdot 10^{-2} \quad (\text{m}) \quad (6.40).$$

A tabela II compara os resultados calculados pela solução analítica com os encontrados pelo programa de computador, para o deslocamento radial de vários pontos da placa do exemplo referido.

Para o mesmo exemplo, as equações 6.38 e 6.39 tomam a forma ($1 \leq n \leq 50,589$):

$$\sigma_r = 8001,17 - \frac{3001,17}{n^2} \quad (\text{Pa}) \quad (6.41)$$

e

$$\sigma_t = 8001,17 + \frac{3001,17}{n^2} \quad (\text{Pa}) \quad (6.42).$$

Raio (m)	Sol. Anal. u (m)	Sol. Num. Ur (m)	Erro (x 100%)
10,000	-0,07292	-0,07288	0,055
10,346	-0,07269	-0,07265	0,055
11,970	-0,07264	-0,07260	0,055
15,171	-0,07587	-0,07584	0,040
29,382	-0,10901	-0,10898	0,028
50,817	-0,17266	-0,17263	0,017
76,640	-0,25366	-0,25363	0,012
95,067	-0,31235	-0,31232	0,010
148,462	-0,48386	-0,48381	0,010
235,178	-0,76389	-0,76381	0,010
466,427	-1,51246	-1,51231	0,010
505,890	-1,64029	-1,64012	0,010

**Tab.II: Sol.Analítica X Sol.Numérica
de Placa Finita com Furo no Centro**

Os gráficos das figuras 6.6 e 6.7 comparam as tensões radiais e tangenciais calculadas pelas soluções analíticas com as respectivas tensões encontradas pelo programa de computador. Os pontos destacados com o símbolo "★" foram calculados pelo programa de computador e plotados no mesmo gráfico da função $\sigma=f(n)$, dada pela equação 6.41 para o gráfico 6.6, ou pela equação 6.42, para o gráfico 6.7.

Em todos os pontos pesquisados, o erro relativo entre a solução analítica e a solução numérica ficou sempre abaixo de 0,05%.

O teste validou o algoritmo de montagem da malha de elementos finitos triangulares ao redor do poço, os vetores de forças nodais equivalentes às cargas devido ao peso da coluna litostática agindo sobre a superfície externa da malha e devido ao peso da coluna de fluido de perfuração agindo sobre a superfície da malha que delimita o poço e os algoritmos de transformação das tensões e deslocamentos do sistema de coordenadas cartesiano para o sistema de coordenadas cilíndricas, além de revalidar os subconjuntos do programa de computador validados no teste anterior.

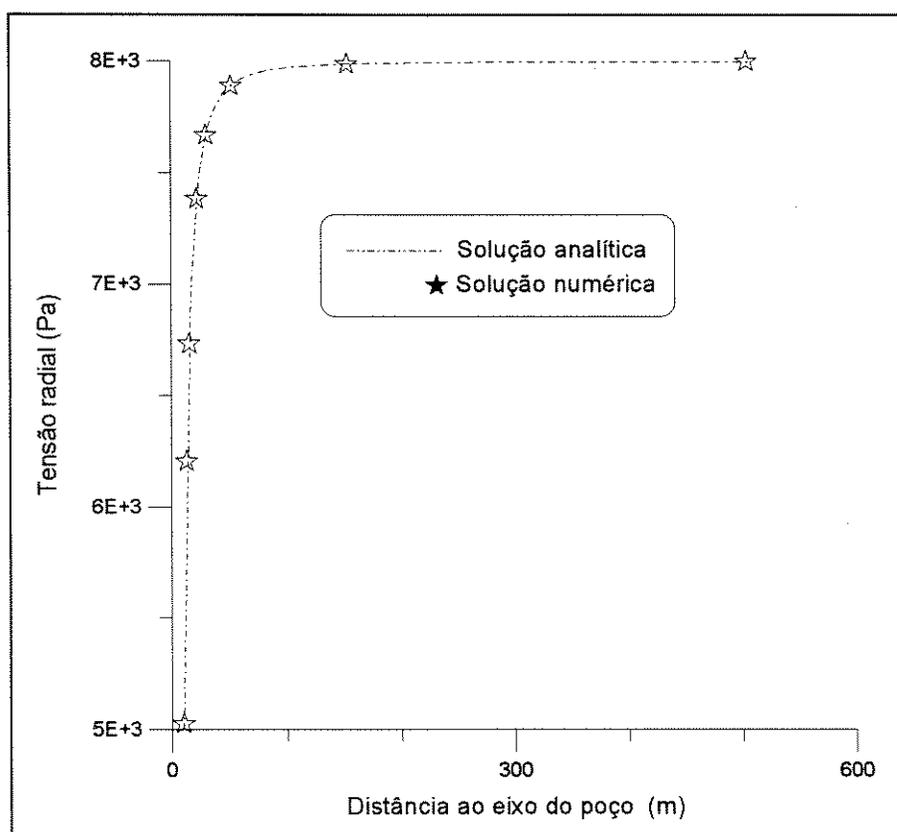


Fig. 6.6: Solução Analítica X Solução Numérica de Placa Finita Com Furo no Centro

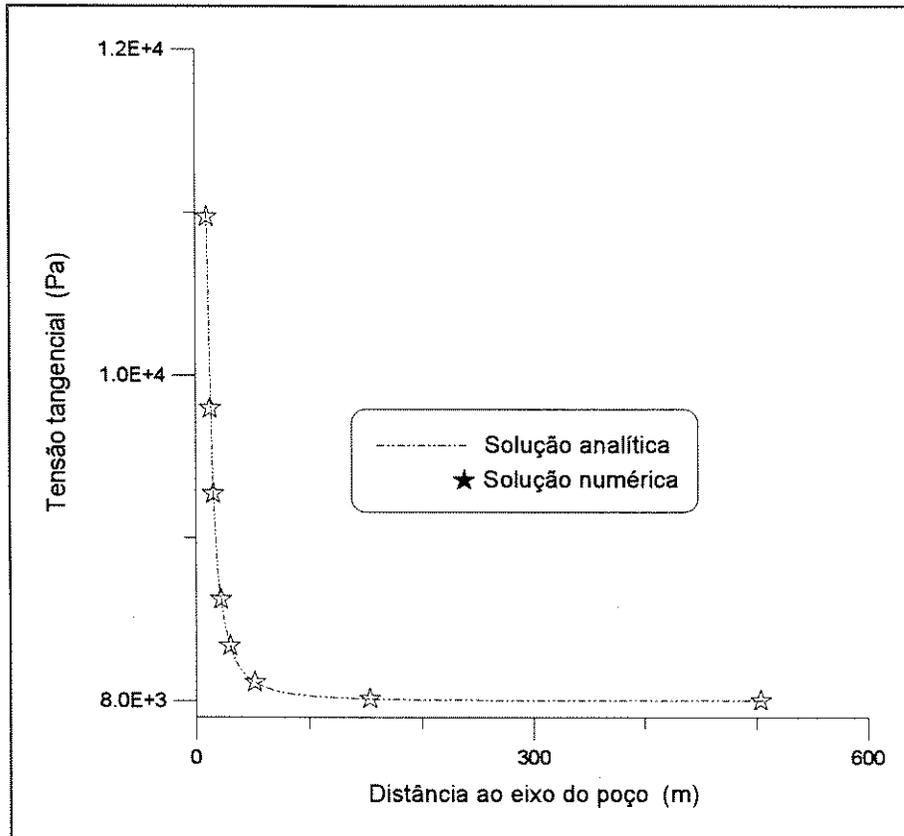


Fig. 6.7 : Solução Analítica X Solução Numérica de Placa Finita Com Furo no Centro

6.4.3 Comparação Com a Solução Analítica de Placa Infinita Sob Tensões Principais H_x e H_y

A solução analítica para o estado de tensões de um ponto qualquer de uma placa infinita com furo de raio r_i , carga distribuída p_i agindo internamente ao furo e tensões principais H_x e H_y atuando no infinito, $H_x > H_y$, é dada por (Jaeger^[8]):

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(H_x + H_y) \cdot \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right) + p_i \cdot \frac{r_i^2}{r^2} + \frac{1}{2}(H_x - H_y) \cdot \left(1 - 4\frac{r_i^2}{r^2} + 3\frac{r_i^4}{r^4}\right) \cdot \cos 2\theta \quad (6.43),$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(H_x + H_y) \cdot \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right) - p_i \cdot \frac{r_i^2}{r^2} - \frac{1}{2}(H_x - H_y) \cdot \left(1 + 3\frac{r_i^4}{r^4}\right) \cdot \cos 2\theta \quad (6.44),$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2}(H_x - H_y) \cdot \left(1 + 2\frac{r_i^2}{r^2} - 3\frac{r_i^4}{r^4}\right) \cdot \sin 2\theta \quad (6.45);$$

onde:

θ - é o ângulo entre a direção da maior tensão principal, H_x , com a direção do ponto analisado;

r - é a distância do ponto analisado ao eixo do furo.

O programa de computador foi rodado para o exemplo onde $r_i=10\text{m}$, $r_e=505,89\text{m}$, $p_i=5000\text{ Pa}$, $H_x=10000\text{ Pa}$, $H_y=3000\text{ Pa}$, $E=10^6\text{ Pa}$ e $\nu=0,35$. Os deslocamentos encontrados foram convertidos em deformações, que foram transformadas em tensões. As tensões calculadas pelo programa foram comparadas às soluções analíticas, para as distâncias $r = 10,04\text{m}$ e $r = 121,94\text{m}$, através dos gráficos das figuras 6.8 a 6.13.

O erro relativo entre as soluções analíticas de placa infinita e as soluções numéricas obtidas pelo programa de computador, para as tensões radiais e tangenciais dos pontos pesquisados e para as tensões cisalhantes dos pontos da figura 6.13, ficou sempre abaixo de 0,4%. Devido ao valor das tensões cisalhantes, para os pontos de distância $r=10,04\text{m}$, serem muito pequenas em relação às demais tensões envolvidas, figura 6.9, o erro relativo cresceu, mas ainda permaneceu abaixo de 1,4%; excetuando-se os pontos extremos de cada lado da curva, cujas tensões, próximas a **zero**, produziram um erro relativo em torno de 10%.

O teste validou o diâmetro externo empregado no modelo na representação de um meio elástico de diâmetro infinito e o vetor de forças nodais equivalente às cargas tectônicas horizontais atuando sobre a superfície externa do modelo; além de revalidar os demais subconjuntos do programa de computador referidos nos testes anteriores.

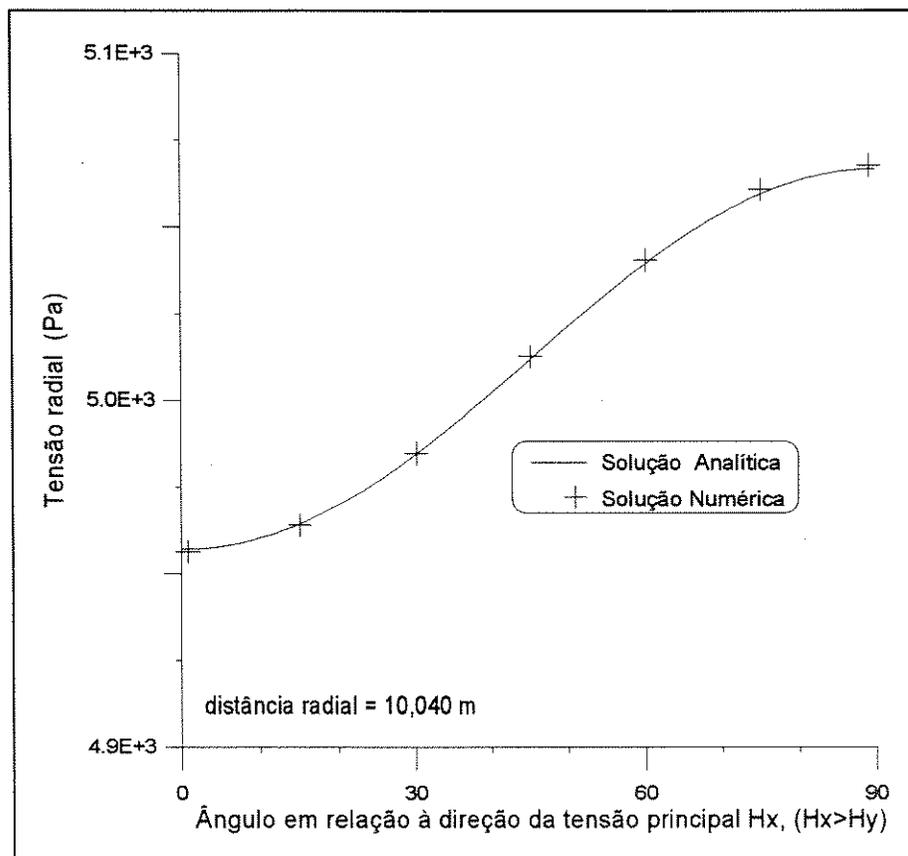


Fig. 6.8 : Solução Analítica X Solução Numérica , de Placa Infinita Com Furo no Centro , Sob Tensões H_x e H_y

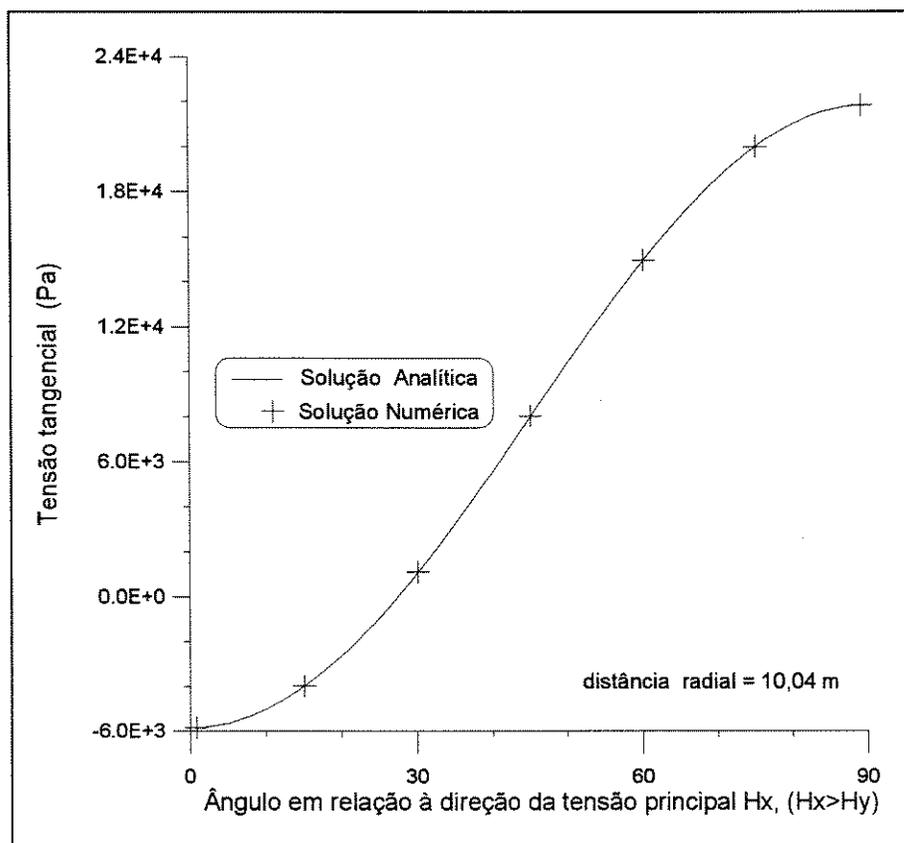


Fig. 6.9 : Solução Analítica X Solução Numérica, de Placa Infinita Com Furo no Centro, Sob Tensões H_x e H_y

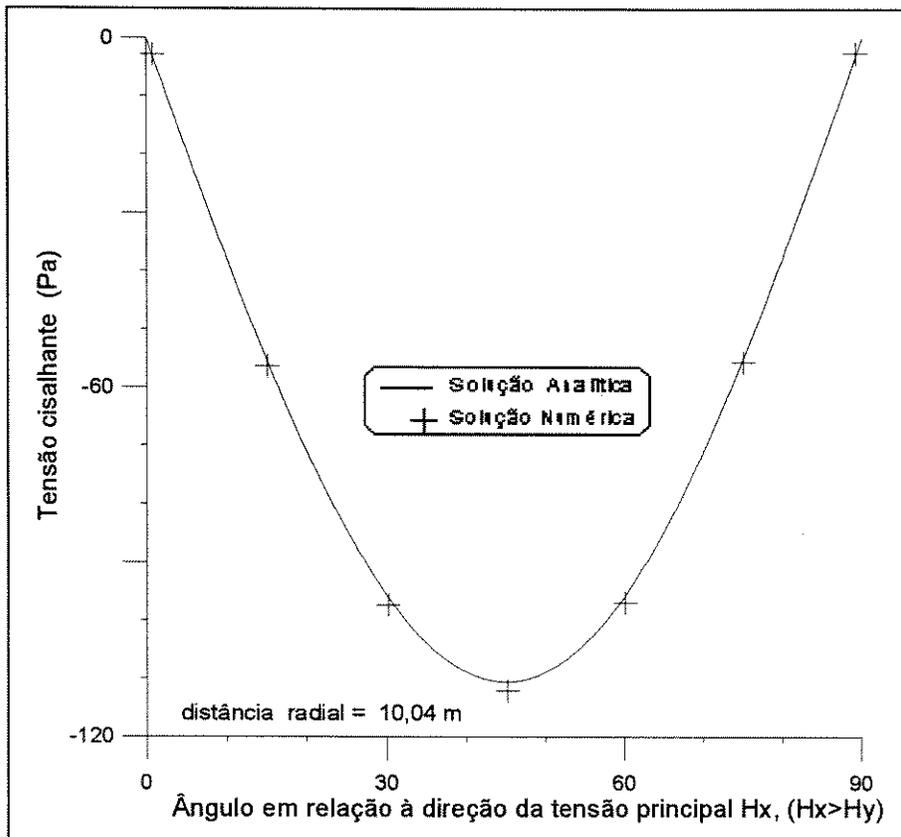


Fig. 6.10 : Solução Analítica X Solução Numérica, de Placa Infinita Com Furo no Centro, Sob Tensões H_x e H_y

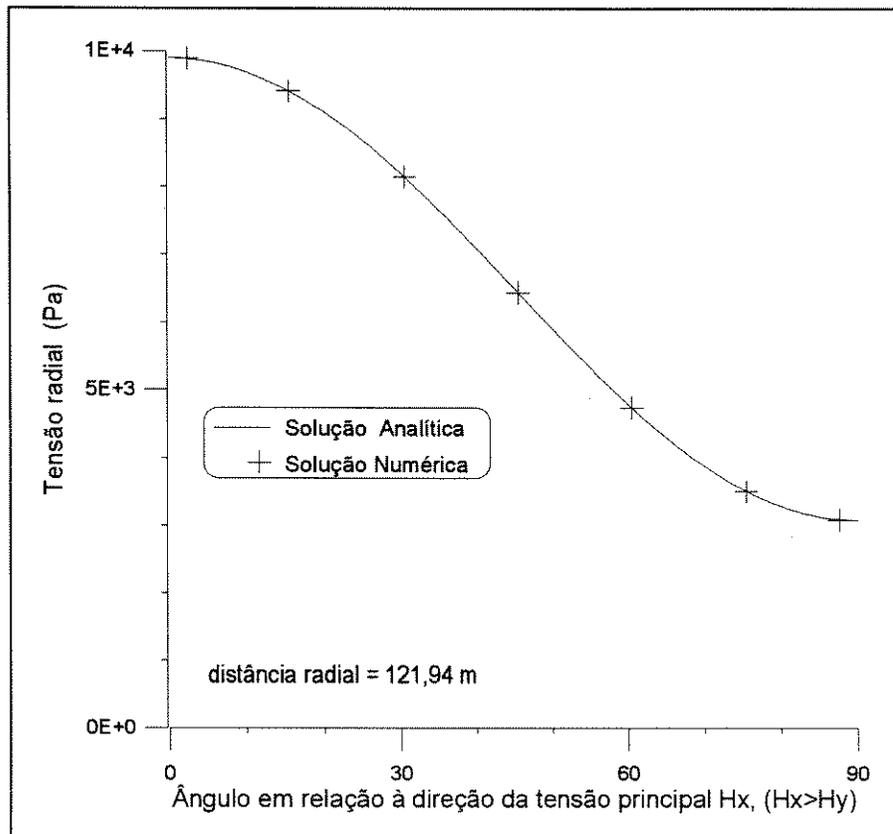


Fig. 6.11 : Solução Analítica X Solução Numérica , de Placa Infinita Com Furo no Centro , Sob Tensões H_x e H_y

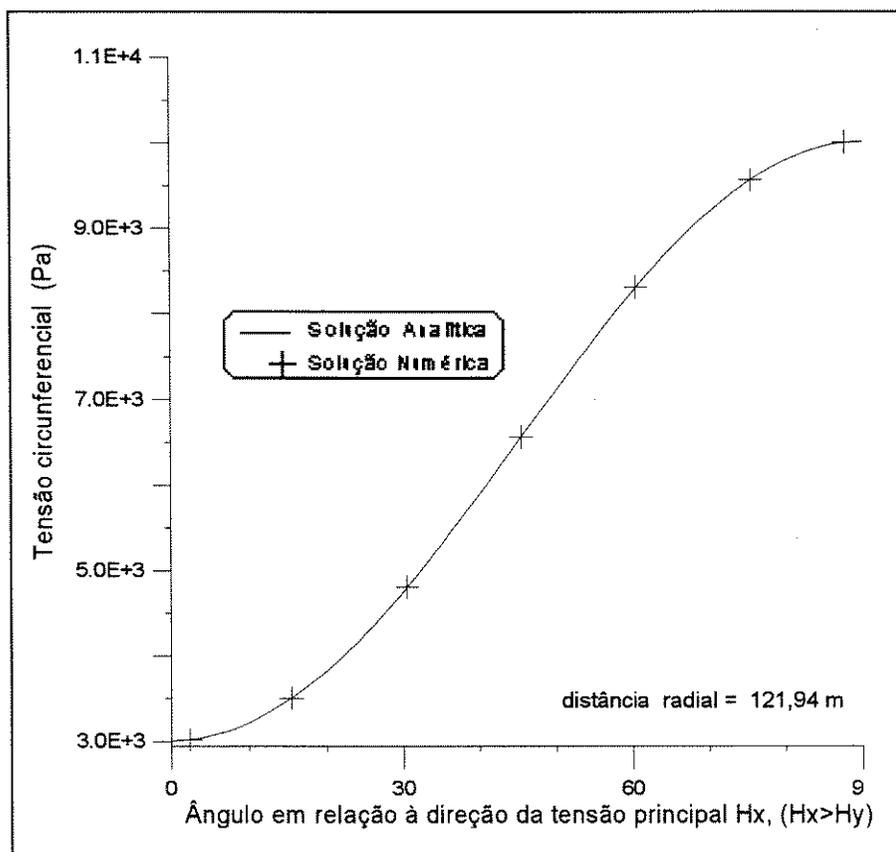


Fig. 6.12 : Solução Analítica X Solução Numérica, de Placa Infinita Com Furo no Centro, Sob Tensões H_x e H_y

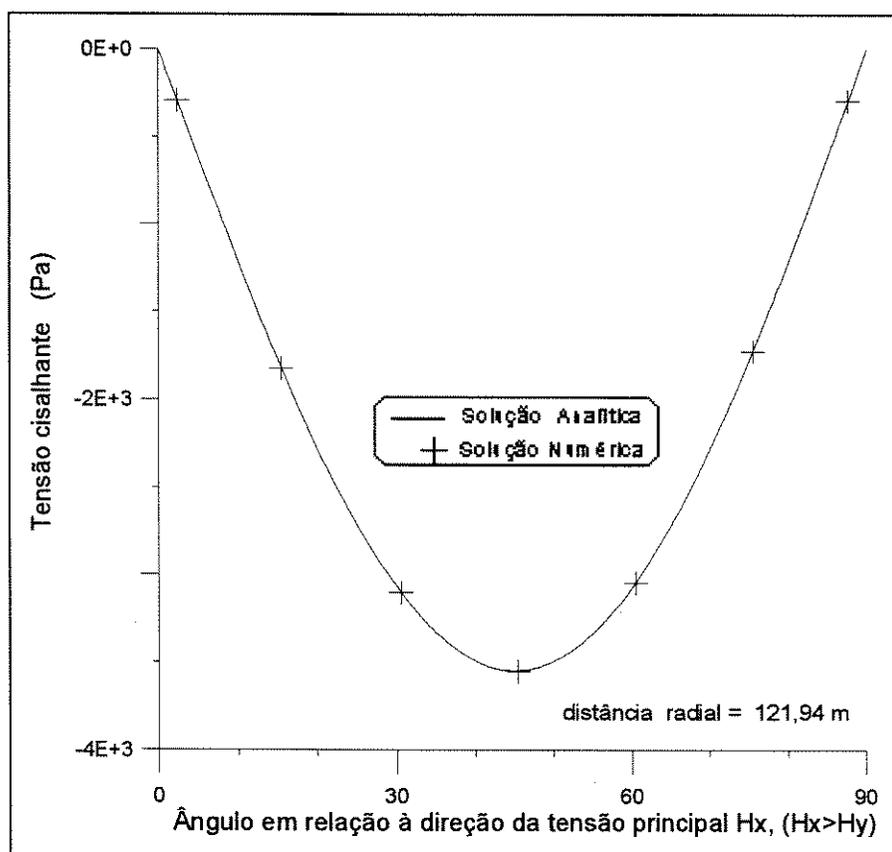


Fig. 6.13: Solução Analítica X Solução Numérica, de Placa Infinita Com Furo no Centro, Sob Tensões H_x e H_y

6.4.4 Comparação de Resultados com Modelo Consagrado

Os testes anteriores validaram a parte elástica do programa de computador. Resta verificar o funcionamento da parte não-linear, dependente do tempo.

Costa e outros^[34] publicaram os resultados obtidos de uma simulação numérica do comportamento do poço 6-RJS-457, no Brasil, no trecho perfurado em zona de sal. Destaca-se no artigo, entre outros, uma análise viscoelástica do comportamento do sal no referido poço, simulada através do programa de computador ANVEC_EP, desenvolvido por **Costa**^[1]. O programa tem as seguintes características principais: gera um *Estado Inicial* de

Tensões, equação 5.34, ao invés de aplicar as tensões devido ao peso das camadas sobrepostas no perímetro externo do modelo; emprega uma malha com elementos finitos isoparamétricos quadriláteros de 8 nós; discretiza o contorno do modelo com elementos infinitos^[1]; utiliza o Algoritmo Implícito Incremental Iterativo^[1], referido na seção 5.3, para a integração no tempo das deformações por fluência.

A lei de fluência empregada no programa ANVEC_EP é do tipo potencial para fluência secundária, com duplo mecanismo de deformação:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{\sigma_{ef}}{\sigma_0} \right)^n \cdot e^{(Q/R \cdot T_0 - Q/R \cdot T)} \quad (6.46),$$

onde:

ε - é a taxa de deformação por fluência na condição de regime permanente ou fluência secundária;

ε_0 - é a taxa de deformação por fluência de referência;

σ_{ef} - é a tensão efetiva de fluência;

σ_0 - é a tensão efetiva de referência;

Q - é a energia de ativação;

R - é a Constante Universal dos Gases;

T_0 - é a temperatura de referência;

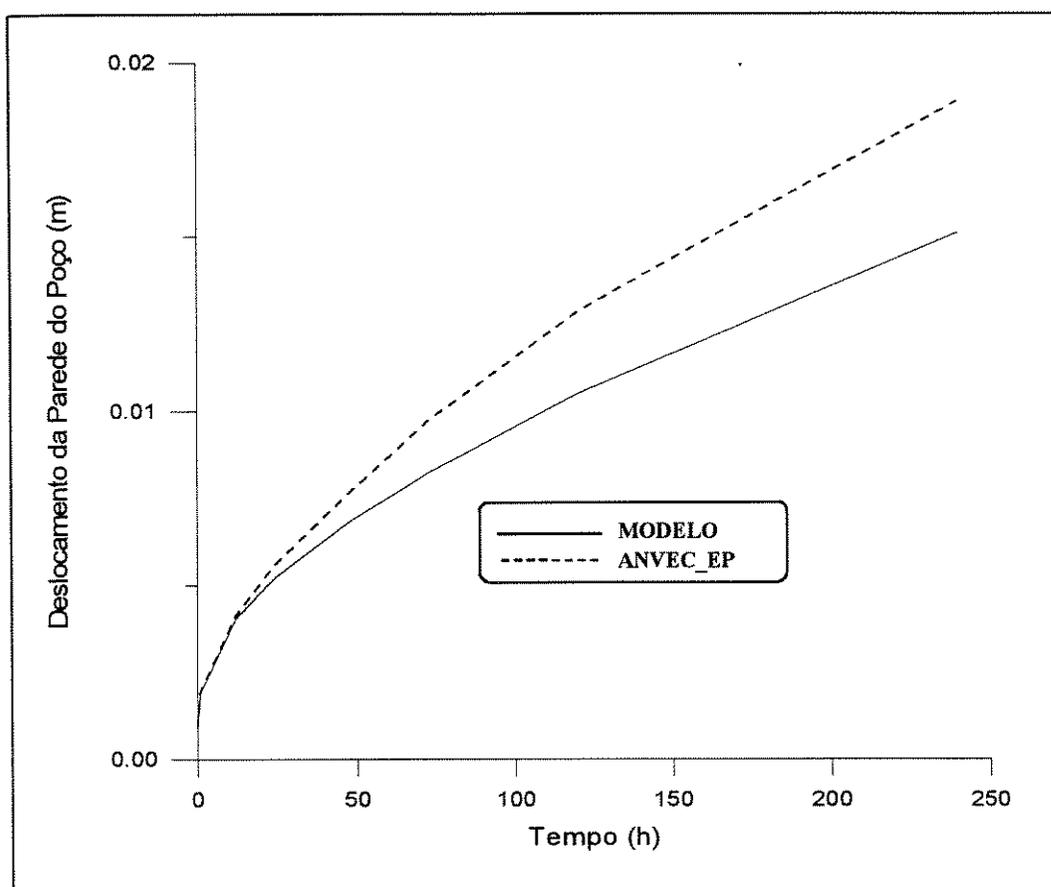
T - é a temperatura do sal.

Os parâmetros da equação 6.46 utilizados na simulação foram: $\varepsilon_0=4,1E-07(\text{hora})^{-1}$; $\sigma_0=12,0$ MPa; $n=5,8$ para $\sigma_{ef}>\sigma_0$; $n=3,0$ para $\sigma_{ef}\leq\sigma_0$; $Q=12,0$ Kcal/mol; $R=1,9858E-03$ Kcal/mol. $^{\circ}$ K e $T_0=316^{\circ}$ K.

Simulou-se o fechamento do poço 6-RJS-457 nas seguintes condições: diâmetro do poço, $D=0,375$ m (14 $\frac{3}{4}$ pol); profundidade do sal, $H=4528$ m; constantes elásticas do sal de halita, $E=2,0E+07$ KPa e $\nu=0,36$; gradiente litostático, $G_L=22,56$ KN/m³; gradiente do fluido de perfuração, $G_H=13,19$ KN/m³; temperatura do sal, $T=377^{\circ}$ K.

A equação de fluência 6.46 foi também implementada no programa de computador daqui, que foi rodado nas mesmas condições do programa ANVEC_EP, para permitir uma comparação de resultados entre os programas.

Os deslocamentos das paredes do poço 6-RJS-457 simulados pelos dois programas podem ser visualizados no gráfico da figura 6.14.



**Fig. 6.14 : Simulação do Comportamento Viscoelástico do Sal
Comparação com o Modelo ANVEC_EP**

A diferença encontrada pelos modelos nos deslocamentos das paredes do poço, 240 horas (10 dias) após o poço ter sido perfurado, é de menos de 0,5cm. O resultado é bastante satisfatório, principalmente se forem levadas em conta

as condições severas da simulação: poço de grande diâmetro, em presença de altas tensões, devido à grande profundidade do sal.

O gráfico da figura 6.14 mostra uma tendência de afastamento ao longo do tempo entre as curvas dos modelos. Tal fato provavelmente se deve à diferença no procedimento entre gerar um *Estado Inicial de Tensões*, feita pelo programa ANVEC_EP, ou aplicar o peso das camadas sobrepostas no perímetro externo do modelo, procedimento simplificado adotado aqui. As tensões calculadas por ambos os modelos nas proximidades do poço têm, inicialmente, valores muito próximos. Porém a redistribuição das tensões, com o passar do tempo, distancia esses valores, pois ela é afetada cada vez mais pelas tensões atuantes longe do poço. As tensões longe do poço são diferentes em cada modelo, resultando numa taxa de redistribuição de tensões diferente para cada modelo. Em consequência, as tensões e deslocamentos nas proximidades do poço, calculados por cada modelo, tendem a se distanciar com o passar do tempo. Para a escala de tempo usual deste projeto, definida na seção 4.4, o procedimento simplificado de modelagem adotado aqui não compromete os resultados encontrados.

O teste validou o algoritmo de integração das deformações por fluência e revalidou o restante do programa.

Capítulo 7

SIMULAÇÕES

As simulações deste capítulo foram realizadas com o sal de halita. Os valores adotados para as constantes elásticas, módulo de Young e coeficiente de Poisson, são os mesmos praticados por Costa^[1] e Delia^[2] em seus respectivos trabalhos, a saber:

$$E = 2,0E+07 \text{ KPa};$$

$$\nu = 0,36 .$$

As constantes da equação 4.39 empregadas nas simulações foram as encontradas por Hansen & Mellegard^[25], que representam a curva ajustada por regressão linear aos valores obtidos de diversos ensaios de compressão triaxial de corpos de prova de halita extraídos de um domo salino de "Avery Island". O intervalo de temperaturas dos ensaios variou entre 24°C e 200°C; a pressão de confinamento, $\sigma_2 = \sigma_3$, variou entre 0 e 20,7 MPa (0 e 3000psi); a diferença de tensão axial, $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, variou entre 6,9 e 31,0 MPa (1000 e 4500 psi).

O intervalo das temperaturas ensaiadas cobriu a faixa usual de temperaturas encontradas nos poços de petróleo para profundidades de até 6000 m. O intervalo das pressões ensaiadas porém, cobriu somente as tensões encontradas nos poços de petróleo em profundidades de até aproximadamente 2000 m. A ausência, dentre as publicações pesquisadas, de resultados de ensaios de fluência de sal que contemplem a faixa usual de tensões encontradas nos poços mais profundos, levou à adoção das constantes referidas. Para efeito de comparação, as simulações realizadas e apresentadas nos próximos itens se estenderam para profundidades do sal de até 4000 m. Nesses casos, os resultados encontrados devem ser vistos com cautela.

A equação 4.39, utilizada com as constantes de Hansen & Mellegard^[25], adquire a seguinte forma:

$$\varepsilon^f(t) = 2,21 \times 10^{-40} \cdot \sigma^{3,28} \cdot T^{11,45} \cdot t^{0,45} \quad (7.1),$$

sendo σ_e em KPa, T em grau °Kelvin, t em hora, e ε^f é adimensional.

7.1 Evolução da Fluência do Sal Próximo ao Poço.

Nesta primeira simulação, um poço de petróleo de diâmetro igual a 0,216 m (8,5 pol) e fluido de perfuração de peso específico igual a 13,6 KN/m³ (11,6 lb/gal) encontra uma seção de halita a 3000 m de profundidade. Considera-se o gradiente litostático da região igual a 22,6 KN/m³ (1psi/pé) e o gradiente geotérmico igual a 2,73 °C/100m (1,5 °F/100pé). A figura 7.1 apresenta a evolução das tensões radiais que atuam no sal nas vizinhanças do poço nos intervalos de tempo de 0,5 hora, 1 dia e 15 dias após a perfuração do sal.

Percebe-se pela figura 7.1, que a alteração na curva de tensões radiais entre t=0 e t= 0,5 hora é bem mais acentuada do que a ocorrida entre o 1° e o 15° dia. Significa dizer que a redistribuição de tensões é muito mais acentuada no início do processo de fluência, porém a taxa de redistribuição de tensões diminui rapidamente.

Uma outra observação, que se pode concluir, diz respeito às condições de contorno empregadas no modelo numérico viscoelástico com cargas aplicadas no contorno: "O diâmetro externo do modelo viscoelástico **requer ser bem maior** que o diâmetro externo de um modelo puramente elástico" ou, em pouco tempo, a redistribuição de tensões devido à fluência será afetada pela condição de contorno do modelo.

Um modelo com o diâmetro externo igual a 10 vezes o diâmetro do poço, por exemplo, certamente apresentará uma redistribuição de tensões bem diferente daquela mostrada pela figura 7.1, para as mesmas condições simuladas. Sendo a fluência função do estado de tensões, o resultado do fechamento de poço para esse modelo estará distorcido, afetado pelas condições de contorno do modelo próximas ao poço.

Portanto, a discussão sobre o diâmetro externo do modelo apresentada no apêndice, baseada num comportamento elástico do material, perde em parte sua validade quando o material apresenta, também, um comportamento de fluência.

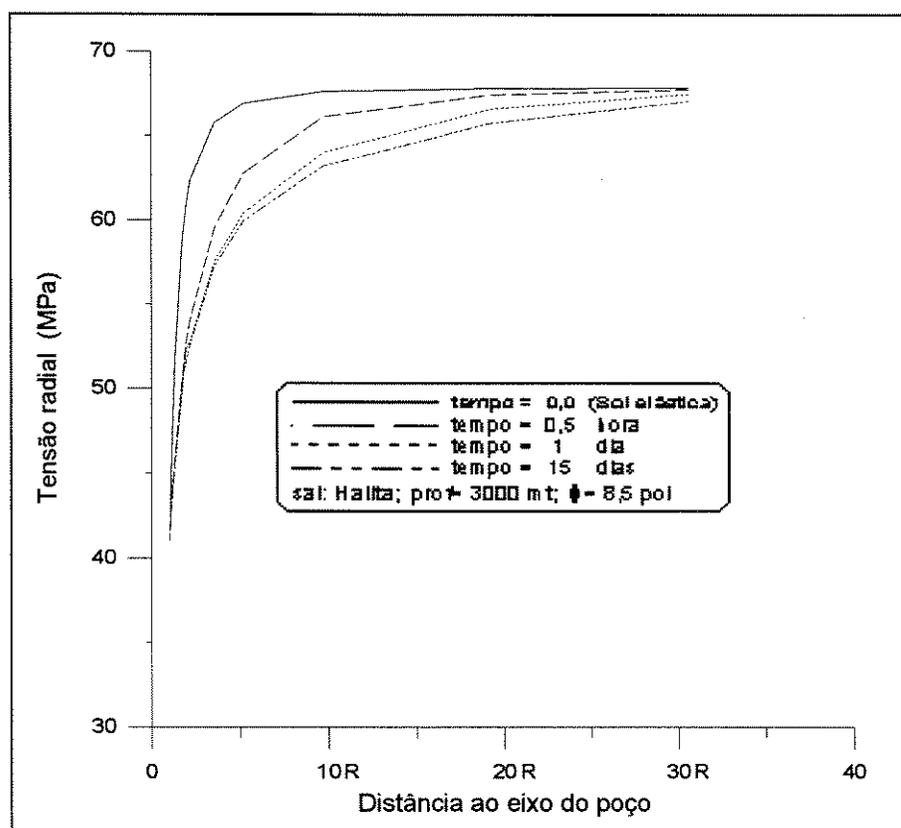


Fig. 7.1: Redistribuição das Tensões Radiais Devido à Fluência do Sal

A figura 7.2 mostra a evolução das tensões tangenciais que atuam no sal nas vizinhanças do poço para as mesmas condições simuladas pela figura anterior.

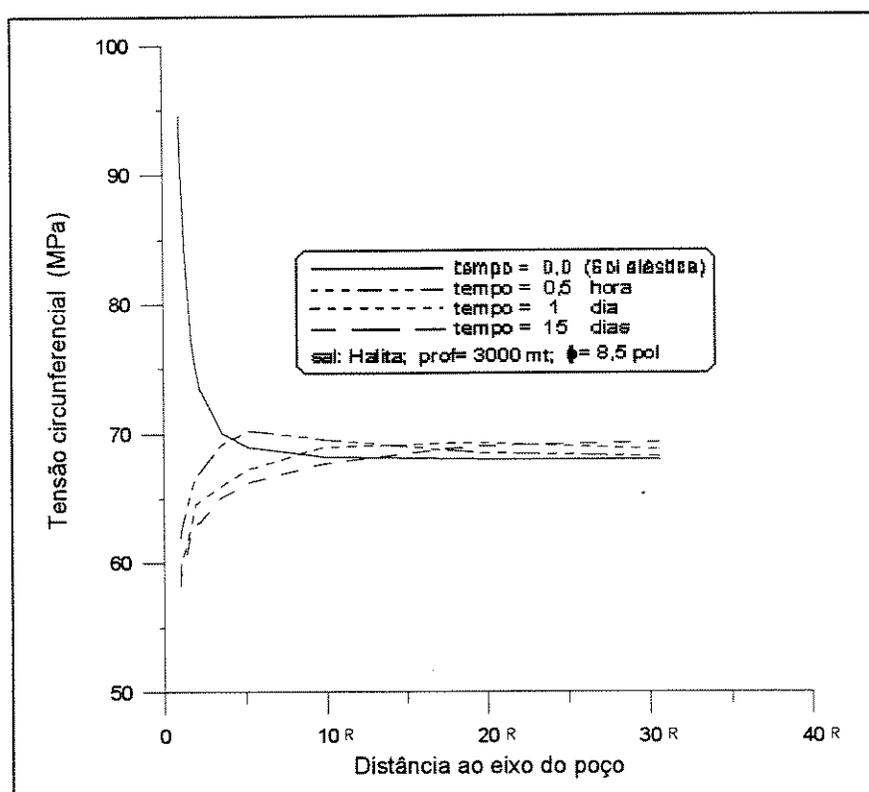


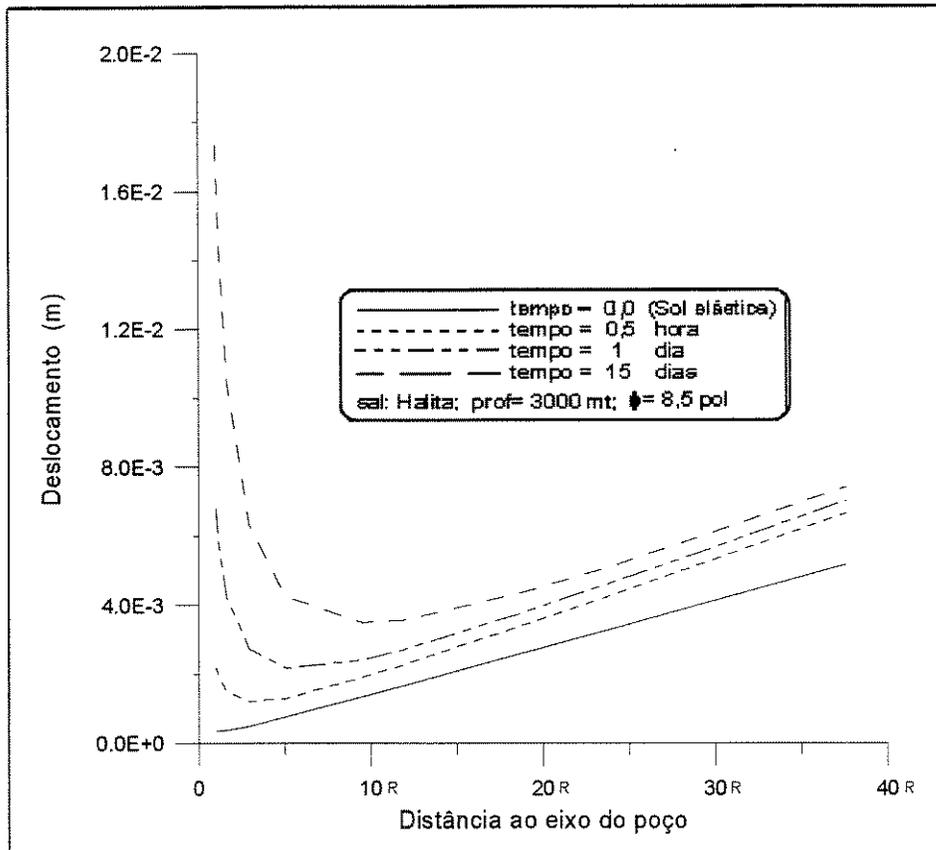
Fig. 7.2: Redistribuição das Tensões Tangenciais Devido à Fluência do Sal

Percebe-se, pela figura 7.2, uma queda abrupta de mais de 30 MPa (4350 psi) no valor da tensão tangencial instantes após a perfuração do sal. Esta variação tão brusca da tensão explica a necessidade do emprego de intervalos de tempo iniciais extremamente pequenos para se conseguir a estabilidade do Algoritmo Explícito de Euler. O intervalo de tempo empregado na iteração inicial foi de 10^{-8} horas. Os intervalos de tempo subsequentes foram calculados pelo Critério de Treharne divididos por 500. Com isso o número de iterações necessárias para se atingir a escala de tempo definida para este projeto foi elevado, causando maiores custos de processamento e maior propagação de erros de arredondamento.

A figura 7.3 mostra a evolução dos deslocamentos do sal nas vizinhanças do poço para as mesmas condições anteriores.

Focalizando-se a curva de deslocamentos do sal em direção ao poço no tempo $t=0$, figura 7.3, nota-se um aumento gradativo nos deslocamentos para os pontos do modelo mais

distantes do poço. Tal fato **não condiz com a realidade**, sendo a distorção provocada pelo procedimento simplificado de se aplicar no perímetro externo do modelo as cargas que representam as tensões iniciais preexistentes devido ao peso das rochas sobrepostas ao sal. Esta influência também é percebida nas demais curvas da figura 7.3.



**Fig. 7.3 : Deslocamento do Sal ao Redor de Um Poço de Petróleo
- Influência do Procedimento de Modelagem Adotado -**

Aproveita-se, da figura 7.3, os deslocamentos dos pontos na parede do poço, pois os mesmos não sofrem grande influência do procedimento de modelagem adotado aqui, conforme analisado na seção 6.4.4. Matematicamente, o aumento dos deslocamentos nos pontos próximos ao poço são provocados pelo aumento das forças residuais durante o processo de reequilíbrio da estrutura em fluência, equação 5.31.

7.2 Influência das Constantes Elásticas Empregadas.

Os parâmetros utilizados nesta simulação foram os seguintes: diâmetro do poço, $\phi=0,216$ m (8,5 pol); peso do fluido de perfuração, $\gamma=13,6$ KN/m³ (11,6 lb/gal); profundidade do sal, $H=3000$ m; Gradiente litostático, $G_L=22,6$ KN/m³ (1psi/pé); Gradiente geotérmico, $G_T=2,73$ °C/100m (1,5 °F/100pé); e coeficiente de Poisson, $\nu=0,36$. A figura 7.4 mostra a influência do *módulo de elasticidade E* do sal sobre o fechamento do poço devido ao processo de fluência.

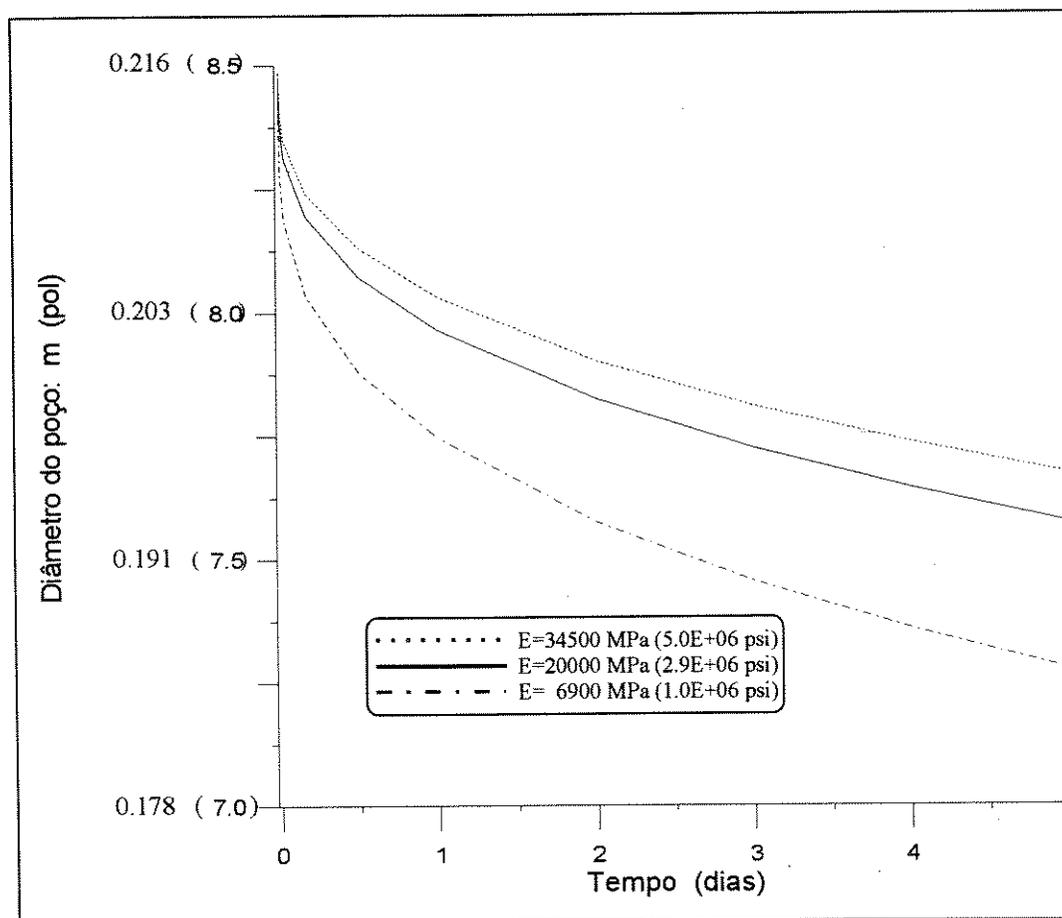


Fig. 7.4 : Influência do Módulo de Elasticidade Sobre a Fluência do Sal em Um Poço de Petróleo

Um corpo elástico linear submetido à uma tensão uniaxial σ deforma-se segundo a relação $\sigma = E \cdot \varepsilon$, onde E é o módulo de elasticidade do corpo^[9]. Em outras palavras, quanto maior for E , menor será a deformação do corpo elástico, para uma mesma tensão aplicada. Intuitivamente este axioma pode ser estendido para as deformações por fluência.

As curvas de menores fechamentos de poço ao longo do tempo, mostradas pela figura 7.4, são aquelas cujos módulos de elasticidade E são maiores. A explicação matemática é encontrada nas equações 6.14 e 5.30. Quanto maior for o módulo de elasticidade E do material, maior será sua matriz de rigidez $\underline{\underline{K}}^e$, de acordo com a equação 6.14. Pela equação 5.30 e para um mesmo vetor de cargas aplicadas, quanto maior for $\underline{\underline{K}}^e$, menor será o vetor de deslocamentos $\underline{\underline{U}}^e$.

A figura 7.5 mostra a influência do coeficiente de Poisson ν do sal sobre o fechamento de um poço de petróleo. Utilizou-se $E=20000$ MPa (2900000 psi) para o módulo de elasticidade do sal, os demais parâmetros foram os mesmos da simulação anterior.

A justificativa matemática para o comportamento das curvas apresentadas na figura 7.5 é a mesma do exemplo anterior, ou seja, um maior coeficiente de Poisson ν acarreta num maior valor para a matriz de rigidez $\underline{\underline{K}}^e$, o que implica em menores deslocamentos $\underline{\underline{U}}^e$ para os nós de um elemento da estrutura, a fim de manter a condição de equilíbrio $\underline{\underline{K}}^e \cdot \underline{\underline{U}}^e = \sum \underline{\underline{F}}^e$.

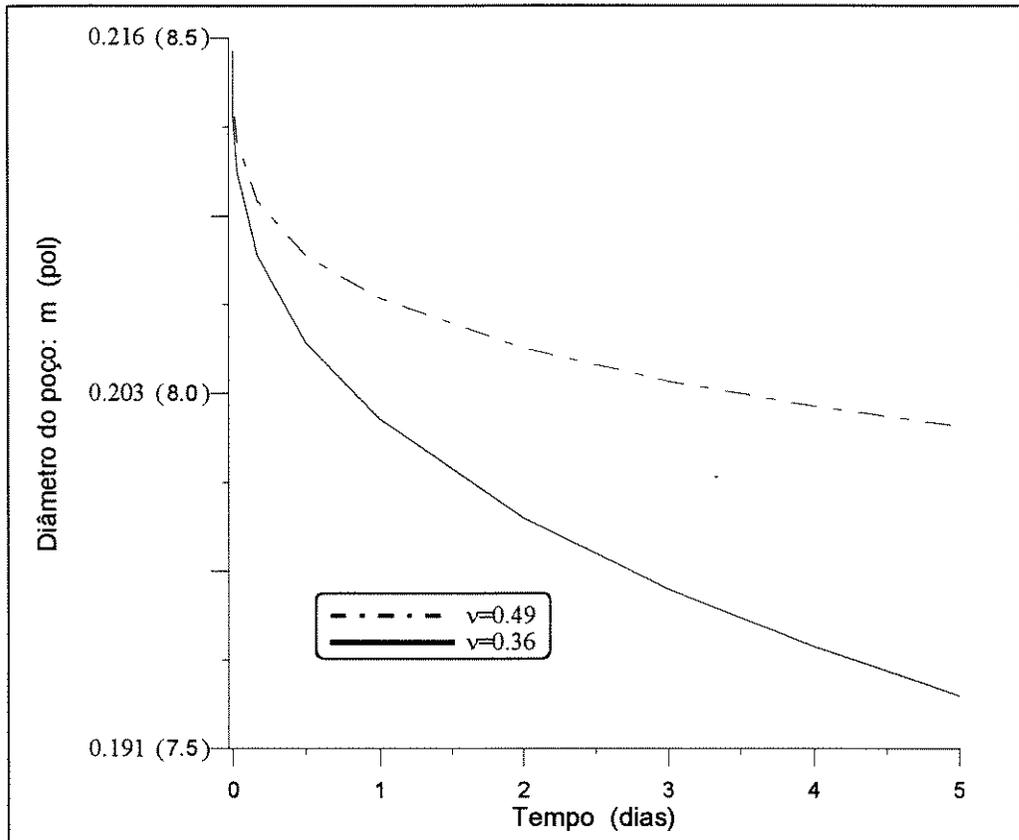


Fig. 7.5: Influência do Coeficiente de Poisson do Sal Sobre o Fechamento de um Poço de Petróleo

7.3 Influência dos Parâmetros Geológicos.

A influência do gradiente geotérmico da área onde se localiza o poço é estudada através da figura 7.6.

Nesta simulação, um poço perfurado com broca de diâmetro igual a 0,216 m (8,5 pol) e fluido de perfuração de peso específico igual a 14,7 KN/m³ (12,5 lb/gal), encontra halita a 4000 m de profundidade. O fechamento do poço devido a influência do sal é apresentado em três diferentes gradientes geotérmicos.

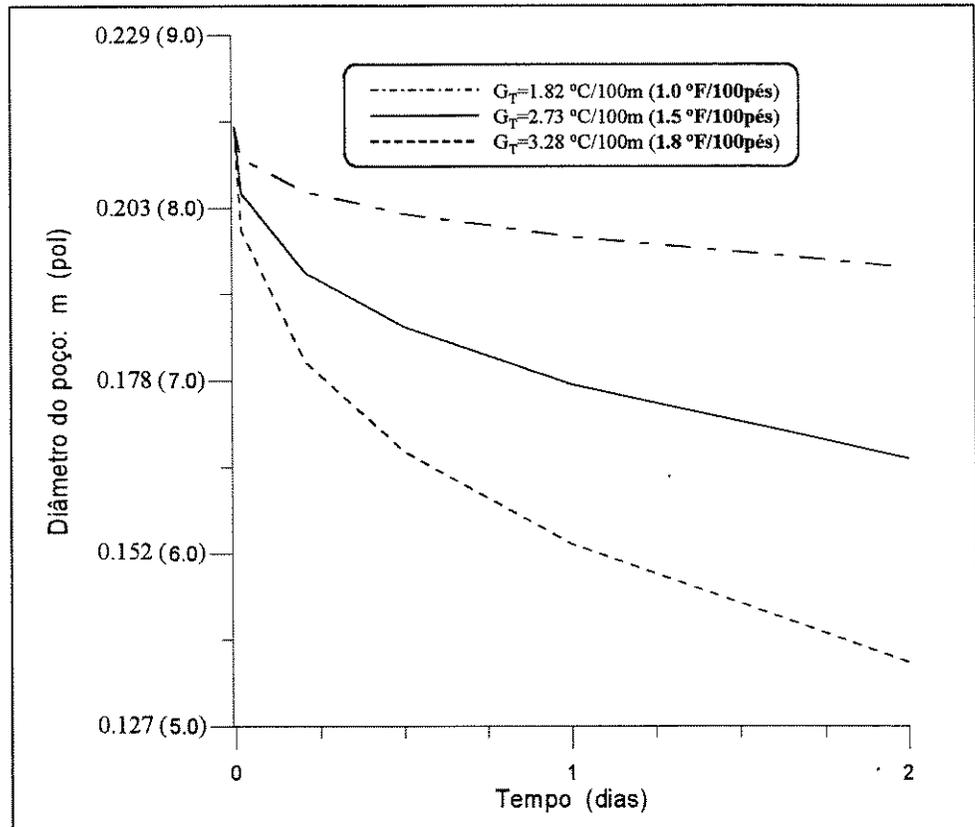


Fig. 7.6 : Influência da Temperatura do Sal

Percebe-se a forte influência da temperatura no processo de fluência do sal. É de suma importância, portanto, que a lei de fluência do sal, empregada na análise do fechamento de poços de petróleo, tenha explicitamente a temperatura como uma de suas variáveis, para que a mesma lei possa ser empregada em diversas regiões e profundidades.

No gráfico da figura 7.7 o gradiente térmico é igual a $2,73 \text{ }^\circ\text{C}/100\text{m}$ ($1,5 \text{ }^\circ\text{F}/100\text{pé}$) e o gradiente litostático varia entre $21,5$ e $24,9 \text{ KN/m}^3$ ($0,95$ e $1,1 \text{ psi/pé}$). As demais condições são as mesmas apresentadas na simulação anterior.

A variação do gradiente litostático representa um aumento ou diminuição das tensões "in-situ". Pelo gráfico, vê-se a importância do conhecimento do correto valor desse gradiente.

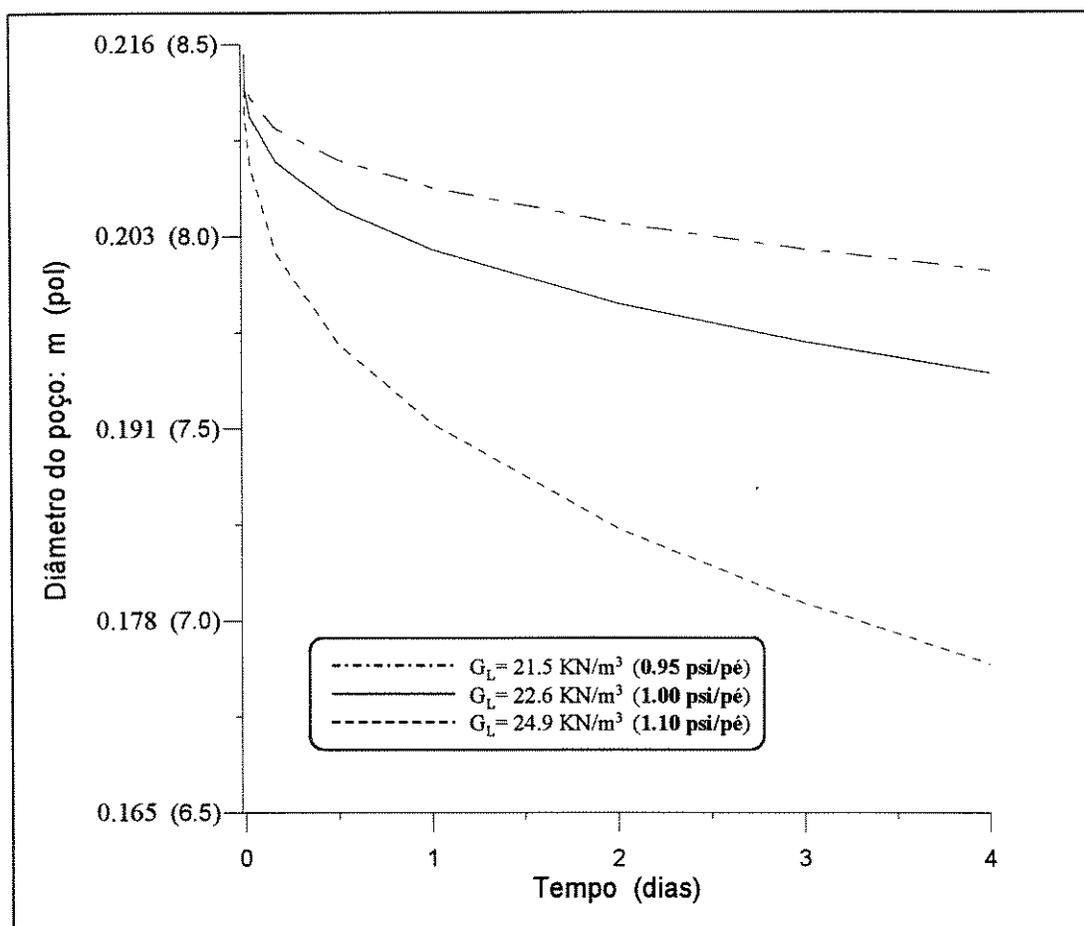


Fig. 7.7 : Influência do Gradiente Litostático

7.4 Influência dos Parâmetros de Perfuração

Nesta seqüência, mostra-se a influência do único recurso disponível para interferir no processo de fluência do sal em poços de petróleo, que é a utilização de um fluido de perfuração com peso específico adequado. Na simulação da figura 7.8 o sal encontra-se a 4000 m de profundidade em uma região onde o gradiente térmico é igual a $2,73 \text{ }^\circ\text{C}/100\text{m}$ ($1,5 \text{ }^\circ\text{F}/100\text{pé}$) e o gradiente litostático é de $22,6 \text{ KN/m}^3$ (1psi/pé); valores médios encontrados nos campos de petróleo do Estado da Bahia. Para esta profundidade, o peso específico médio utilizado nas

perfurações "offshore" no Estado da Bahia é de $14,7 \text{ KN/m}^3$ ($12,5 \text{ lb/gal}$).

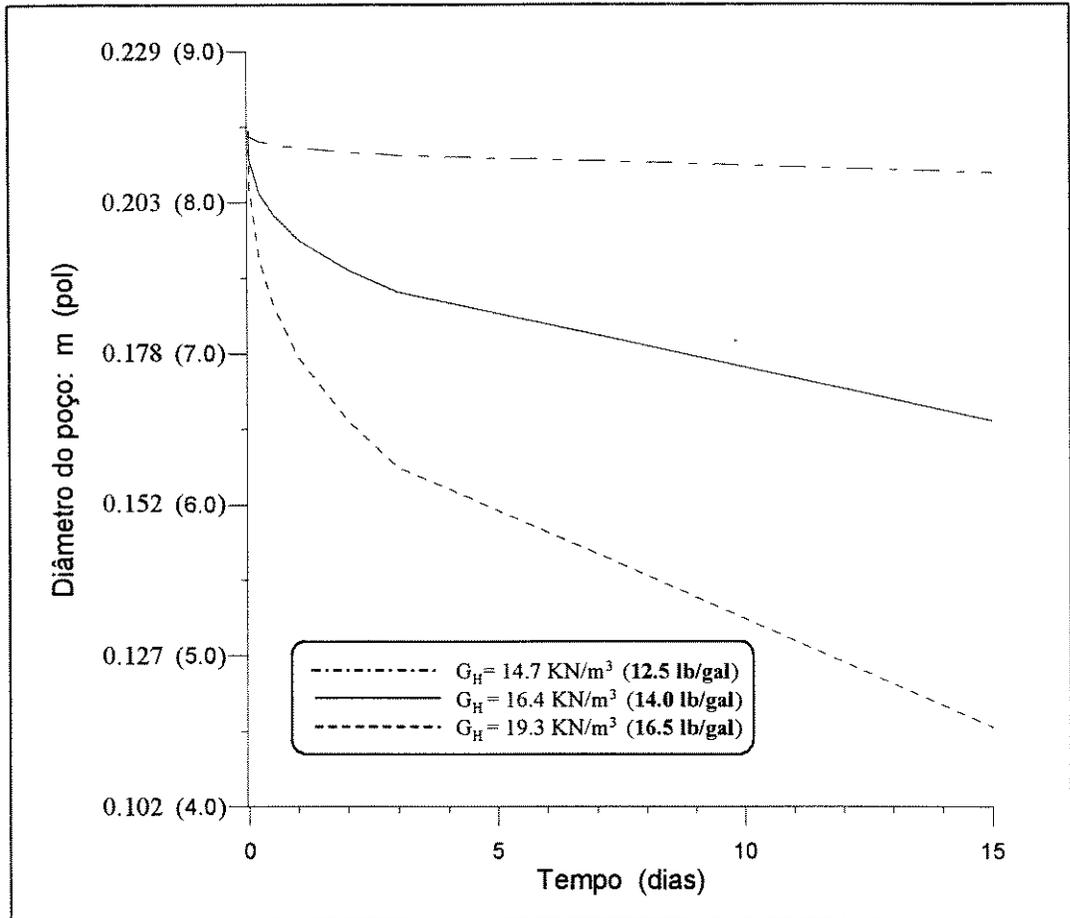


Fig. 7.8 : Influência do Peso Específico do Fluido de Perfuração Sobre a Fluência do Sal em um Poço de Petróleo

Não fosse a limitação existente ao aumento do peso do fluido de perfuração devido à possibilidade de se fraturar as demais formações próximas ao sal, a fluência do sal não seria um problema para a perfuração dos poços de petróleo, como se verifica na figura 7.8.

A figura 7.9 mostra os resultados da simulação do fechamento de dois poços de petróleo, de diâmetros 0,216 e 0,311 m (8,5 e 12,25 pol), respectivamente, perfurados com fluido de perfuração de peso específico igual a $14,7 \text{ KN/m}^3$ ($12,5 \text{ lb/gal}$), que atravessam uma seção de halita a 4000m de profundidade.

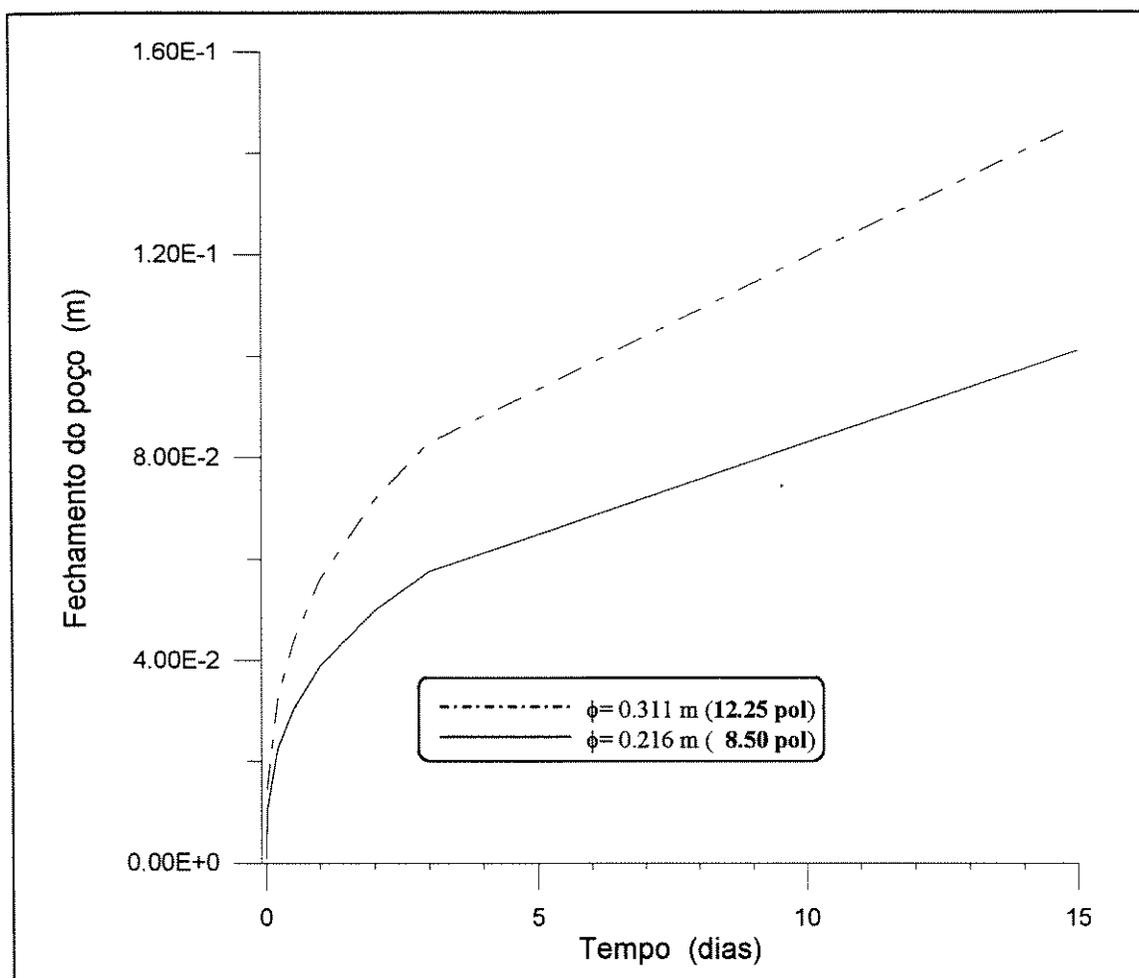


Fig. 7.9 : Influência do Diâmetro do Poço Sobre a Fluência do Sal em um Poço de Petróleo

Dividindo-se os resultados dos fechamentos dos poços da figura 7.9 pelos respectivos diâmetros dos poços, constrói-se o gráfico da figura 7.10.

A relação entre o fechamento de um poço devido à fluência do sal e o seu diâmetro é a mesma para os diâmetros dos poços simulados, quando os demais parâmetros que exercem influência sobre a fluência do sal são iguais, conforme mostra a figura 7.10. Generalizando-se, pode-se facilmente calcular o fechamento de um poço de qualquer diâmetro para as mesmas condições simuladas em um outro diâmetro. Para condições iguais as da figura 7.10, por exemplo, o fechamento de um poço de petróleo de diâmetro igual a 0,165 m (6,5 pol), após 5 dias de

perfuração do sal, é igual a $0,165 \times 0,3 = 0,05$ m ($6,5 \times 0,3 = 1,95$ pol), sendo a relação $\frac{\Delta\phi}{\phi} = 0,3$ retirada da figura 7.10.

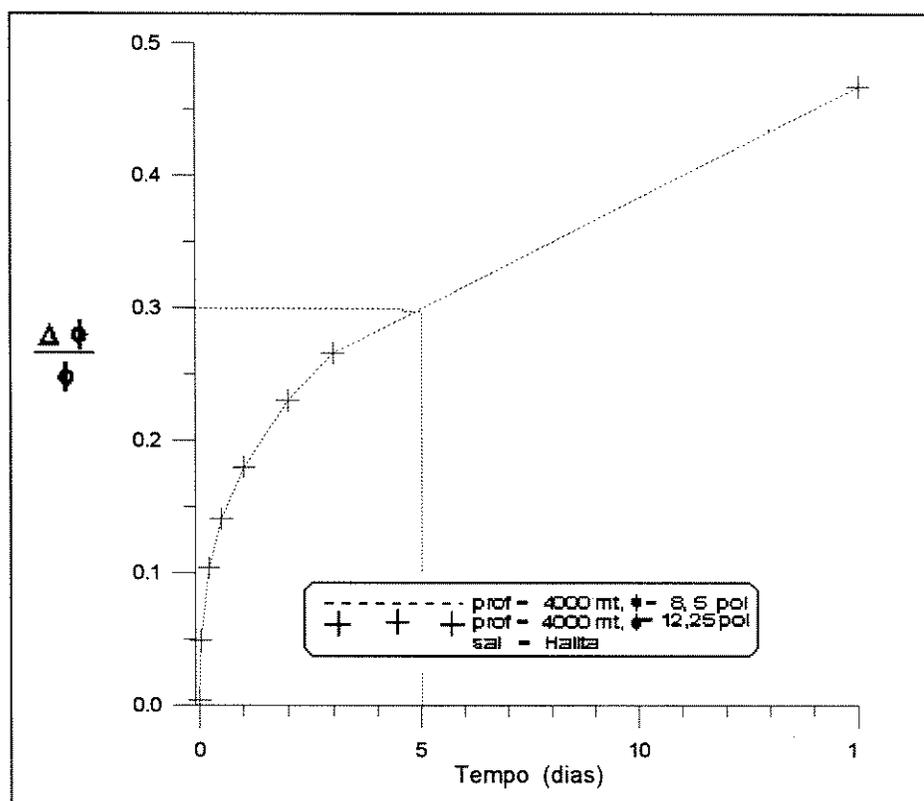


Fig. 7.10 : Relação Entre o Fechamento de um Poço de Petróleo e o Seu Diâmetro, Durante a Fluência do Sal

O gráfico da figura 7.11 é semelhante ao anterior, porém as simulações foram realizadas para uma profundidade de 2000 m.

A solução elástica linear de corpo contínuo de uma placa finita em estado plano de deformações com furo no centro, dada pela equação 6.37 e rerepresentada abaixo, mostra que a relação entre o deslocamento da parede do furo e o seu diâmetro, $\frac{u(1)}{r_i}$, independe do diâmetro do furo.

$$\frac{E}{r_i} \cdot u(1) = (1 + \nu) \cdot \left[\frac{b^2 \cdot (p_i - p_e)}{b^2 - 1} + (1 - 2\nu) \cdot \frac{(p_i - b^2 \cdot p_e)}{b^2 - 1} \right] \quad (7.2).$$

A mesma consideração vale para o modelo similar de elementos finitos, que na seção 6.4.2 reproduziu os deslocamentos da solução elástica de corpo contínuo com erros menores que 0,1%, de acordo com a tabela II. Para esse modelo vale a equação de equilíbrio $\underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{F}_{ext}$, onde as deformações do modelo são calculadas pela equação 5.14, $\underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{U}^e$.

É de se esperar que a consideração acima tenha validade também para o modelo viscoelástico de elementos finitos, pois as deformações totais, $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^f$, impostas a este modelo estão relacionadas aos deslocamentos \underline{U}^e pela mesma matriz \underline{B} da equação 5.14.

Os resultados encontrados pelas duas simulações realizadas confirmam o que foi dito.

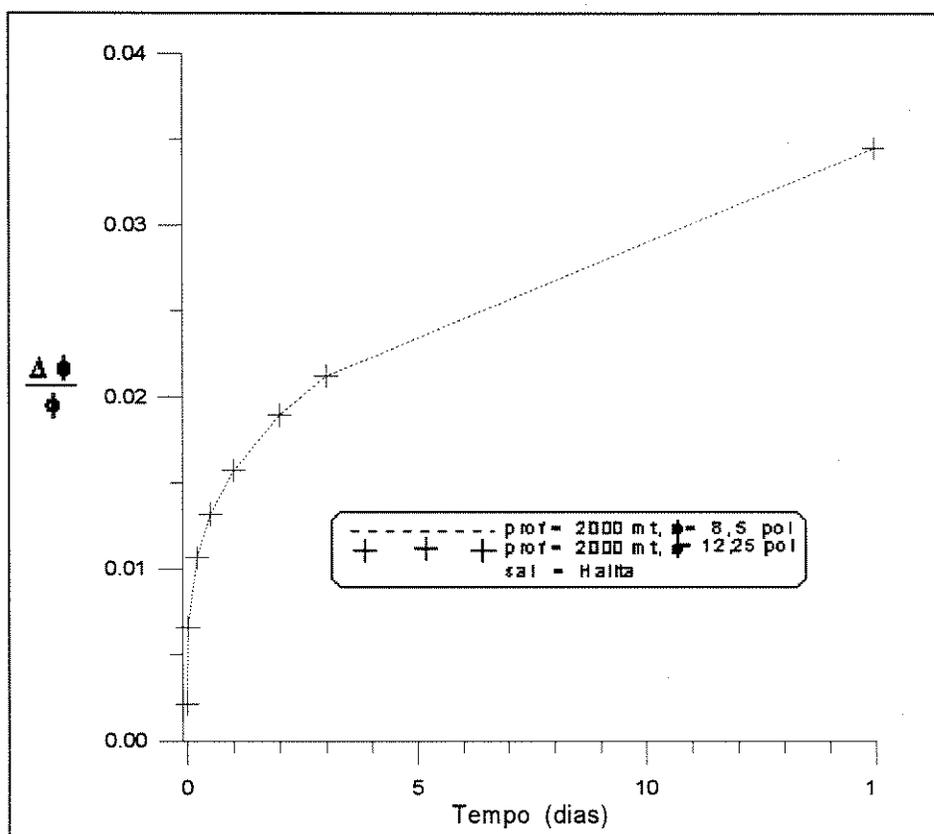


Fig. 7.11: Relação Entre o Fechamento de um Poço de Petróleo e o Seu Diâmetro, Durante a Fluência do Sal

7.5 Influência da Equação de Fluência Utilizada.

A influência da equação utilizada para representar o comportamento de fluência do sal pode ser observada na figura 7.12.

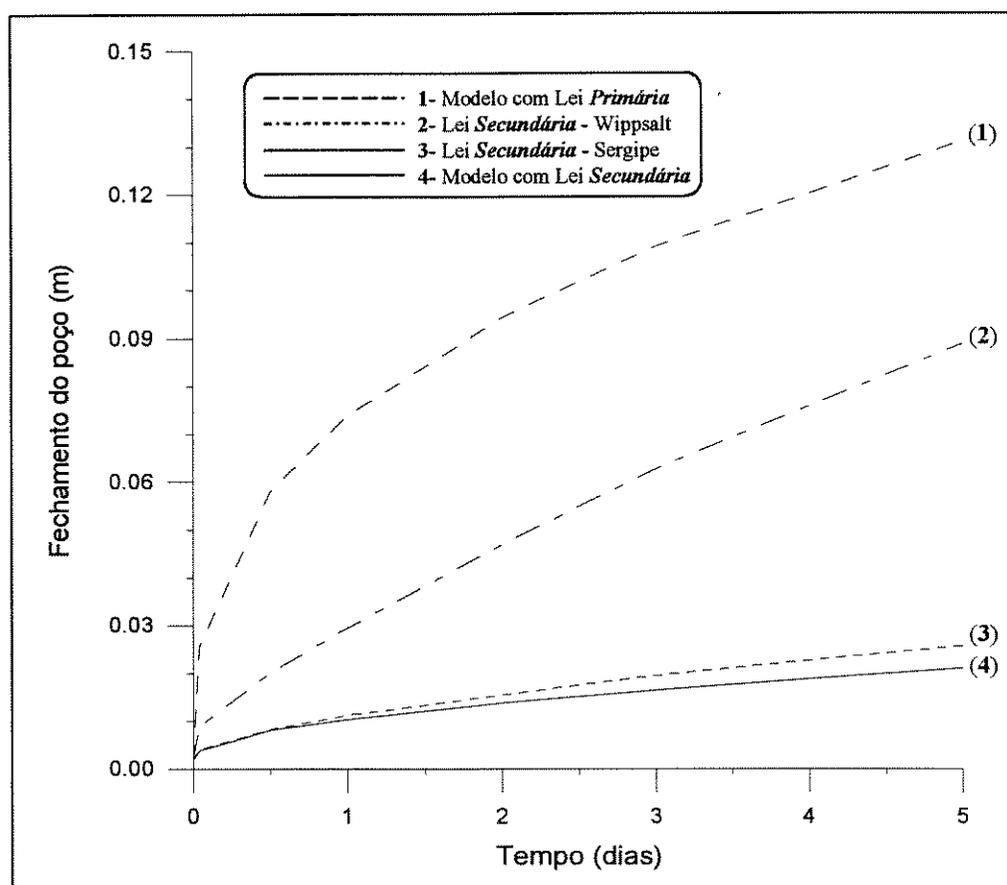


Fig. 7.12: Influência da Lei de Fluência Empregada

Nesta simulação, o programa foi rodado com a equação de fluência 7.1, ou Lei Potencial para a fluência **primária**, com os parâmetros da equação fornecidos por Hansen & Mellegard^[25], gerando a curva (1) da figura 7.12. As condições gerais simuladas foram as mesmas do poço 6-RJS-457 descritas na seção 6.4.4, transcritas do trabalho publicado por Costa e outros^[34]:

diâmetro do poço, $\phi=0,375\text{m}$ (14¾ pol); profundidade do sal, $H=4528\text{m}$; constantes elásticas do sal de halita, $E=2,0\text{E}+07$ KPa e $\nu=0,36$; gradiente litostático, $G_L= 22,56$ KN/m³; gradiente do fluido de perfuração, $G_H= 13,19$ KN/m³; temperatura do sal, $T=377^\circ\text{K}$.

A curva (4), da figura 7.12, representa os resultados do programa rodado com a equação de fluência 6.46, do tipo potencial para fluência **secundária**, nas mesmas condições anteriores.

A curva (3) foi obtida com o programa ANVEC_EP, desenvolvido por Costa^[1], rodado com a equação 6.46 nas mesmas condições. A curva (3) foi plotada no gráfico 7.12 apenas com o intuito de mostrar que a diferença de resultados encontrados pelo programa daqui e pelo programa ANVEC_EP não é significativa, no intervalo de tempo da simulação.

A curva (2) foi obtida com o programa ANVEC_EP rodado com a equação 6.46 para um sal de halita, denominado "Wippsalt", cujas propriedades são as seguintes^[34]: $E=3,1$ KPa; $\nu=0,25$; $\sigma_0=1,0$ MPa; $\epsilon_0=1,2\text{E}-24$; $n=3,0$ se $\sigma_{ef}\leq\sigma_0$; $n=4,9$ se $\sigma_{ef}>\sigma_0$. A descrição de cada parâmetro da equação 6.46 encontra-se na seção 6.4.4.

O ideal para se comparar a influência da lei de fluência empregada seria dispor-se de um conjunto de dados de testes de fluência de uma mesma amostra de sal. Assim, os parâmetros das equações de fluência originar-se-iam do ajuste ao mesmo conjunto de dados. Na indisponibilidade desses dados, plotaram-se as curvas (1), (2) e (4), onde os parâmetros das equações de fluência têm fontes distintas, porém as condições simuladas são as mesmas.

A curva (1), gerada pela equação de fluência **primária**, produziu um fechamento de poço ao longo do tempo bem maior do que as curvas geradas pela equação de fluência do tipo potencial **secundária**.

Borm & Haupt^[37] compararam os resultados de medições "in-situ" do fechamento de poço em zona de sal com resultados de

simulação numérica feita com elementos finitos, utilizando equação de fluência do tipo potencial **secundária** ajustada em laboratório com o próprio sal do poço. Os resultados da simulação mostraram-se bem inferiores às medições de campo, para períodos pesquisados não longos.

Resultados semelhantes foram observados por **Preece**^[36], que descreveu as medições "in-situ" como sendo 4 vezes superior, em média, aos resultados simulados com equação de fluência do tipo potencial **secundária**.

Morgan^[35] reportou um fator de 3, aproximadamente, entre os valores medidos e os calculados via equação tipo potencial para fluência secundária.

Borm & Haupt^[37] concluem que às equações de fluência secundária não são adequadas para representar o comportamento mecânico do sal durante o intervalo de tempo em que o processo de fluência mantém-se preponderantemente transiente.

De acordo com o exposto por **Borm & Haupt**^[37], **Preece**^[36] e **Morgan**^[35], a curva (1) da figura 7.12 apresenta-se como a curva mais próxima das condições "in-situ".

7.6 Fechamento de Poços de Petróleo em Zonas de Sal em Diferentes Profundidades.

Na figura 7.13, apresentam-se os resultados do fechamento de poços de petróleo de simulações onde a halita é encontrada em diferentes profundidades. Os parâmetros geológicos, gradiente térmico igual a 2,73 °C/100m (1,5 °F/100pé) e gradiente litológico igual a 22,6 KN/m³ (1psi/pé), correspondem aos valores médios encontrados nos campos de petróleo do Estado da Bahia. Em cada profundidade foi utilizado um fluido de perfuração de peso específico, γ , igual ao valor

médio praticado na perfuração dos poços de petróleo "offshore" do Estado da Bahia para a profundidade correspondente. Assim, para a profundidade de 1000 m, o valor de γ foi igual a 12,3 KN/m³ (10,5 lb/gal); para H=2000 m, $\gamma=12,9$ KN/m³ (11,0 lb/gal); para H=3000 m, $\gamma=13,6$ KN/m³ (11,6 lb/gal); e para H=4000 m, $\gamma=14,7$ KN/m³ (12,5 lb/gal).

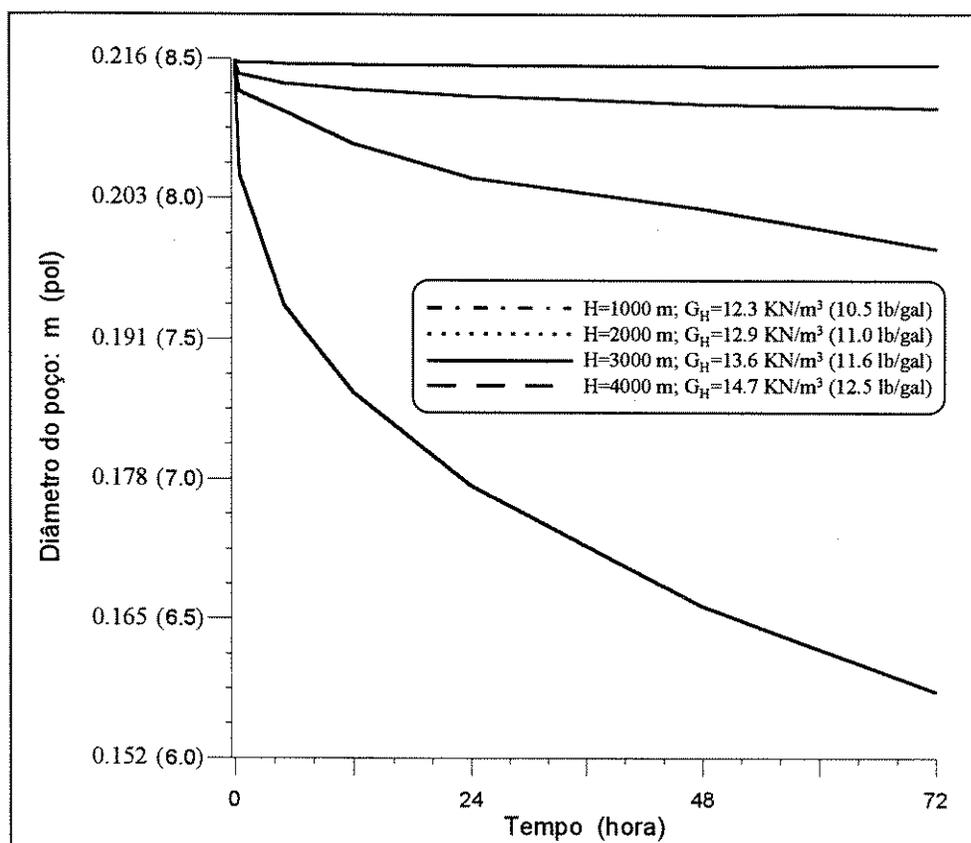


Fig. 7.13: Fechamento de um Poço de Petróleo na Presença do Sal de Halita

Verifica-se pela figura 7.13, que o comportamento de fluência do sal de **halita** em poços de petróleo torna-se um problema para a perfuração do poço a partir dos 2000 m de profundidade, aproximadamente.

A existência de esforços tectônicos na região geográfica do poço poderá antecipar o problema.

Capítulo 8

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

A intensidade do comportamento de fluência de um sal em um poço de petróleo está diretamente relacionada com o estado de tensões atuante, figura 7.7, e, principalmente, com a temperatura, figura 7.6. Dependendo dessa temperatura e do estado de tensões existente, um mecanismo de deformação termo-ativado, ref. [41], controlará o processo de fluência.

Os depósitos de sal, apesar de terem a água do mar como fonte única de origem, exibem grande variabilidade em suas composições mineralógicas, grau de impurezas, tamanho dos grãos de cristais, presença de vazios, etc, influenciados, principalmente, pelas condições ambientais presentes no período geológico e local de ocorrência do processo de precipitação de seus componentes. Dependendo da sua procedência, um mesmo tipo de sal pode apresentar comportamentos de fluência tão díspares como os apresentados pela halita de Sergipe e a halita "Wippsalt", curvas (2) e (3), respectivamente, da figura 7.12. A influência das propriedades mecânicas do sal podem ser avaliadas pelas figuras 7.4, 7.5 e curvas (2) e (3) da figura 7.12.

Nem todos os evaporitos, a dolomita e a anidrita por exemplo, exibem um comportamento de fluência. Por outro lado, alguns sais, tais como a carnalita e a taquidrita, apresentam esse comportamento extremamente acentuado. O sal de halita, presente em todas as bacias salinas, responde por mais de 90% do sal encontrado no Planeta.

O comportamento de fluência da halita em poços de petróleo se torna problemático a partir dos 2000 m de profundidade aproximadamente (ver registros de casos problemáticos na seção 2.6 e figura 7.13), para bacias salinas relaxadas onde as tensões atuantes são devidas somente ao peso

da camada litológica. Em regiões geográficas com atuação de esforços tectônicos, ou na presença de outros sais de maior mobilidade, tais como a taquidrita, o problema de fechamento de poços pode surgir em profundidades menores. De qualquer forma, as pressões de confinamento suportadas pelo sal ainda serão suficientemente grandes para que ele apresente o comportamento de fluência sem entrar em processo de ruptura. O modelo numérico utilizado para representar o comportamento do sal em poços de petróleo pode, então, se preocupar apenas com suas propriedades viscoelásticas, sem se ater ao acompanhamento de sua estabilidade através de critérios de ruptura. O sal natural é considerado impermeável e isotrópico.

Odkivist^[30] deu o suporte matemático à teoria viscoelástica tridimensional, permitindo o emprego de qualquer lei constitutiva, seja de fluência primária ou secundária, na representação do comportamento viscoelástico do material.

A lei que regula o comportamento de fluência do sal utilizada neste trabalho, equação 7.1, é semi-empírica do tipo potencial, baseada na observação do comportamento macroscópico do sal de halita, e representa a curva que melhor se ajusta aos resultados experimentais de uma série de testes de laboratório realizados dentro de intervalos de pressões e temperaturas definidos no capítulo 7. Apesar de não estar fundamentada em nenhum comportamento físico microscópico observado, esta lei tem sido usada com sucesso por diversos pesquisadores envolvidos com projetos de minas de sal ou depósitos de lixo atômico, na representação do comportamento de fluência dos evaporitos. Entretanto, o motivo maior, que justificou o emprego da lei do tipo potencial no presente trabalho, foi o fato dela dispor da **temperatura** como uma de suas variáveis explícitas, o que possibilitou a sua utilização em poços de petróleo, onde a temperatura varia continuamente com a profundidade do poço. Os modelos reológicos teriam pouca utilidade, por não considerarem as diferentes temperaturas encontradas. A temperatura é o parâmetro mais preponderante sobre a fluência do sal; fato

percebido pelo valor do expoente de T na equação 7.1, que é mais de três vezes superior ao valor do expoente de σ .

Baseado nos artigos de **Borm & Haupt**^[37], **Preece**^[36] e **Morgan**^[35], e nos resultados da simulação numérica apresentados pela figura 7.12, na seção 7.5, conclui-se que as leis de fluência transientes, quando comparadas às leis para fluência secundária, são as mais adequadas para representar as condições encontradas em um poço de petróleo, no período estabelecido para este projeto.

O processo simplificado de modelagem, de considerar as tensões preexistentes devido ao peso das rochas sobrepostas como cargas aplicadas no perímetro externo do modelo, constitui um fator limitador do projeto. Porém, para o período de análises viscoelásticas estabelecido para este projeto, tal procedimento não altera significativamente os resultados encontrados, conforme pode ser visto pela figura 6.14, seção 6.4.4. A implementação do *Estado Inicial de Tensões*, equação 5.34, no programa de computador, permitirá análises para maiores intervalos de tempo.

O Algoritmo Explícito de Euler também constituiu-se em outro fator limitador do projeto. As simulações apresentadas na seção 7.1 mostraram a ocorrência de grandes variações nas tensões próximas às paredes do poço, imediatamente após a perfuração do sal. Tal fato exigiu o emprego de intervalos de tempo muito pequenos nas iterações iniciais para se conseguir a estabilidade do algoritmo, resultando num número final de iterações muito grande até se atingir os intervalos de tempo solicitados para análise. A utilização deste programa em análises viscoelásticas para domínios de tempo maiores exigirá a substituição do referido algoritmo por um outro que seja incondicionalmente estável e permita uma quantidade menor de iterações. O Algoritmo Implícito Incremental Iterativo^[1], por exemplo.

O diâmetro externo de um modelo numérico que representa a fluência do sal em um poço de petróleo deve ser bem

maior do que o diâmetro externo de um modelo destinado a representar somente suas deformações elásticas. As condições de contorno do modelo precisam estar bem distantes, para que não perturbem o campo de tensões alterado pela redistribuição das tensões devido à fluência.

O modelo construído pode ser utilizado com qualquer tipo de sal, desde que suas leis de fluência e propriedades elásticas sejam conhecidas.

O modelo permite a simulação de condições tectônicas, onde duas tensões principais conhecidas, que por hipótese situam-se no plano horizontal, podem ser alimentadas no programa. Neste caso, poderão surgir tensões de tração no modelo, cujo comportamento de fluência é representado por lei constitutiva ajustada à testes de compressão do material.

O intervalo de pressões dos testes de laboratório que definiram os parâmetros da equação 7.1 cobre as tensões encontradas nos poço de petróleo para profundidades de até aproximadamente 2000 m; justamente a partir daí começam os problemas de poço relacionados com a fluência do sal. Na falta de melhores parâmetros que representem as condições encontradas nos poços mais profundos, as simulações realizadas no capítulo 7 utilizaram-se dos parâmetros encontrados por Hansen & Mellegard^[25].

Para que o programa desenvolvido possa prever o fechamento de poços profundos com razoáveis chances de sucesso, torna-se imperioso que a lei de fluência esteja calibrada para essas condições. Necessário se faz, então, a realização de testes de laboratório, ou procurar na literatura técnica especializada novos parâmetros para a lei de fluência do sal, baseados em testes onde as pressões variem no intervalo de 48,3 a 124,0 MPa (7000 a 18000 psi), e as temperaturas variem entre 60 e 200 °C. A medição criteriosa do fechamento de um poço real por um determinado período, traria uma contribuição incalculável à calibração e ganho de confiabilidade no modelo.

Bibliografia

- [1] - **Costa, A.M.:** "Uma Aplicação de Métodos Computacionais e Princípios de Mecânica das Rochas no Projeto e Análise de Escavações Destinadas à Mineração Subterrânea", Tese de Doutorado, COPPE / U.F.R.J., 1984.
- [2] - **Delia, P.C.:** "Análise e Retroanálise do Comportamento de Fluência em Escavações Subterrâneas pelo Método dos Elementos Finitos", Tese de Mestrado, COPPE / U.F.R.J., 1991 .
- [3] - **Prij, J. & Mengelers, J.H.J.:** "On the Derivation of a Creep Law from Isothermal Bore Hole Convergence", Netherlands Energy Research Foundation (ECN), ECN-89, 1981.
- [4] - **Júnior, R.R.:** "O Efeito da Deformação Lenta Sobre o Comportamento Estrutural de Materiais Poliméricos", Tese de Mestrado, U.S.P., 1994.
- [5] - **Oliveira, J.E., Idagawa, L.S., Nogueira, E.C.:** "Evaporitos na Bacia de Campos, Aspectos Geológicos e Problemas de Perfuração", Petrobrás / Cenpes, Cenpes - 475, 1985.
- [6] - **Baar, C.A.:** "Applied Salt-Rock Mechanics I. The In-Situ Behavior of Salt Rocks", Elsevier Developments in Geotech. Eng., Elsevier Scientific Publishers, New York City, 1977, nº 16A, 301.
- [7] - **Sarkar, D.K.:** "Viscoelastic Behavior of Rock-Like Materials", Tese de mestrado, University of Tulsa, 1970.
- [8] - **Jaeger, J.C., Cook, N.G.K.:** "Fundamentals of Rock Mechanics", Chapman and Hall, London, 1979, ISBN 0-412-22010-5.

- [9] - **Gross, B.** : "Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity", Paris, Hermann & Cie Editeurs, 1953.
- [10] - **Gittus, J.** : "Creep, Viscoelasticity and Creep Fracture in Solids.", London, Applied Science Publishers Ltd, 1975.
- [11] - **Calcote, L.R.** : "Introduction to Continuum Mechanics", Princeton, D. Van Nostrand Company, Inc., s.d.
- [12] - **Paul E. Senseny** : "Review of Constitutive Laws Used to Describe The Creep of Salt" - Technical Report, April 1983, RE SPEC Inc.
- [13] - **Le Compte P.** : "Creep in Rock Salt", J. Geol.(1965) 73, 469.
- [14] - **Bradshaw, R. L. and McClain, W. C.:** "Project Salt Vault: A demonstration of disposal of high activity solidified wastes in underground salt mines", Oak Ridge National Laboratory, ORNL-4555.
- [15] - **Carter, N.L. and Hansen, F.D.:** "Creep of Rock Salt" RE/SPEC Inc. October,1982.
- [16] - **Wawersik, W.R. and Zeuch, D.H.:** "Modeling and Mechanistic Interpretation of Creep of Rock Salt Below 200°C", Tectonophysics, 121(1986) 125-152 Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam.
- [17] - **Kraus, H.:** "Creep analysis", John Wiley & sons, Inc.,1988.
- [18] - **Chen, G.G. and Hsu, T.R.:** "A mixed explicit-implicit algorithm for creep stress analysis.", International Journal for

Numerical Methods in Engineering, v.26, n.2, p.511-24, Feb. 1988.

[19] - **Benallal, A. et al.:** "Validation of structural computation codes in elastoviscoplasticity.", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.29, n.5, p.1109-30, Apr. 1990.

[20] - **Nakaguma, R.K.:** "Análise viscoelástica linear utilizando a transformada de Laplace e o método dos elementos finitos." Tese de Mestrado, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 1975.

[21] - **Zienkiewicz, O.C.:** "The Finite Element Method.", 3.ed., London, McGraw-Hill, 1977.

[22] - **Bathe, K.J.:** "Finite Element Procedures in Engineering Analysis.", New Jersey, Prentice-Hall, 1982.

[23] - **Gallagher, R.H.:** "Finite Element Analysis Fundamentals.", New Jersey, Prentice-Hall, 1975.

[24] - **Coates, D.F.:** "Rock Mechanics Principles.", Quebec, Canadian Government Publishing Centre, Canada K1A0G1, ISBN: 0-660-10545-4, 1970, Reprinted 1980.

[25] - **Hansen, F.D. and Mellegard, K.D.:** "Creep of 50-mm-Diameter Specimens of Dome Salt from Avery Island, Louisiana.", ONWI-104 (Office of Nuclear Waste Isolation, U.S. Department of Energy), August, 1980.

[26] - **Serata S., Sakurai S. and Adachi T.:** "Theory of Aggregate Rock Behavior Based on Absolute Three-Dimensional Testing (ATT) of Rock Salt", National Science Foundation Grants G-19791 and GP-2646, 1966.

- [27] - **Lomenick, T.F. and Bradshaw, R.L.:** "Deformation of Rock Salt in Openings Mined for the Disposal of Radioactive Wastes.", *Rock Mechanics* 1,5-30, 1969.
- [28] - **Lomenitz, C.:** "Creep Measurements in Igneous Rocks.", *J. Geol.* 64, 473-479, 1909.
- [29] - **Jeffreys, H.:** "A Modification of Lomenitz's Law of Creep in Rocks.", *Geophys. J.*, 1, 92-95, 1958.
- [30] - **Odqvist, F.K.:** "Mathematical Theory of Creep and Rupture", s.1., Oxford University Press, 1966.
- [31] - **Ludwik, P.:** "Elemente der Technologischen Mechanik", Berlin, Springer, 1909.
- [32] - **Nadai, A.:** "The Influence of Time upon Creep, the Hyperbolic Sine Creep Law", *Timoshenko Anniversary Volume*, N. York, MacMillan, 155-170, 1938.
- [33] - **Eirich, F.:** "Rheology, Theory and Applications", York, Academic Press, 1956.
- [34] - **Costa, A.M., Amaral C.S. e Gonçalves J.C.:** "Simulação do Comportamento do Poço 6-RJS-457 no Trecho Perfurado em Zona de Sal", Cenpes: Comunicação Técnica 42/97 , Serviço Técnico 086/97.
- [35] - **Morgan, H.S., Stone, C.M., Krieg, R.D.:** "An Evaluation of WIPP Structural Modeling Capabilities Based on Comparisons with South Drift Data", SAND85-0323, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM.
- [36] - **Preece, D.S.:** "Borehole Creep Measurements and Numerical Calculations at The Big Hill, Texas SPR Storage Site", *Proc. 6th*

Int. Congr. Rock Mech. ISRM, Montreal 219-224, Balkema, Rotterdam, 1987.

[37] - **Borm, G. & Haupt M.:** "Constitutive Behavior of Rock Salt: Power Law or Hyperbolic Sine Creep", Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, 1988, Swoboda ed.; 1988, Balkema, Rotterdam, ISBN 90 6191 809X.

[38] - **Chen, W. & Saleeb, A.F.:** "Constitutive Equations for Engineering Materials", vol 1, Elasticity and Modeling, Wiley, 1982.

[39] - **Hofmann, R.:** "Stealth a Lagrange Explicit Finite-Difference Code for Solids Structural and Thermohydraulic Analysis", Oakland, Science Applications Inc., 1976, 72p.

[40] - **Greenbaum, G.A. & Rubinstein, M.F.:** "Creep Analysis of Axisymmetric Bodies Using Finite Elements", Nuclear Engineering and Design, 7: 379-397, 1968.

[41] - **Munson, D.E. & Deuries, K.L.:** "Development and Validation of Predictive Technology for Creep Closure of Underground Rooms in Salt", Seventh International Congress on Rock Mechanics, vol. I, pp. 127-134, Aachen/Deutschland, 1991.

[42] - **Bettess, P.:** "Infinite Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11: 53-64, 1977.

[43] - **Smith, I.M. & Chow, Y.K.:** "Static and Periodic Infinite Solid-Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17: 503-526, 1981.

[44] - **Lynn, P.P. & Hadid, H.A.:** "Infinite Element with...Type Decay", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17: 347-355, 1981.

Apêndice

A.1 Modelos Reológicos Generalizados

Dentre as combinações encontradas com maior frequência na literatura, destacam-se o modelo generalizado de Maxwell e o modelo generalizado de Kelvin-Voigt. Gross^[9], Gittus^[10] e outros autores trazem referências acerca desses dois modelos.

O modelo generalizado de Maxwell consiste num sistema de m unidades de Maxwell dispostas em paralelo, mostrado pela figura A.1.

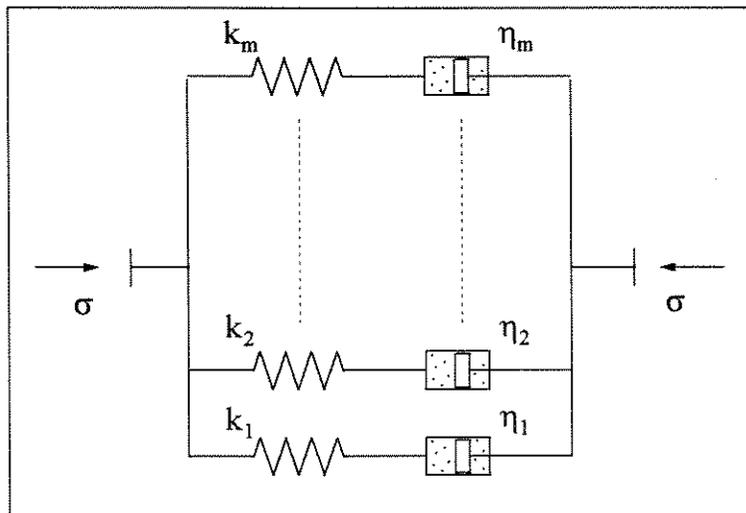


Fig. A.1: Modelo de Maxwell Generalizado

No modelo, poderá haver algumas unidades "degeneradas", nas quais atua apenas um elemento de mola ou um elemento de amortecedor, conforme mostra a figura A.2.

Para o modelo generalizado de Maxwell, verifica-se que uma tensão σ aplicada ao modelo é igual a soma das tensões σ que agem em cada um dos ramos do modelo, isto é:

$$\sigma = \sum_{i=1}^m \sigma_i \quad (\text{A.1}).$$

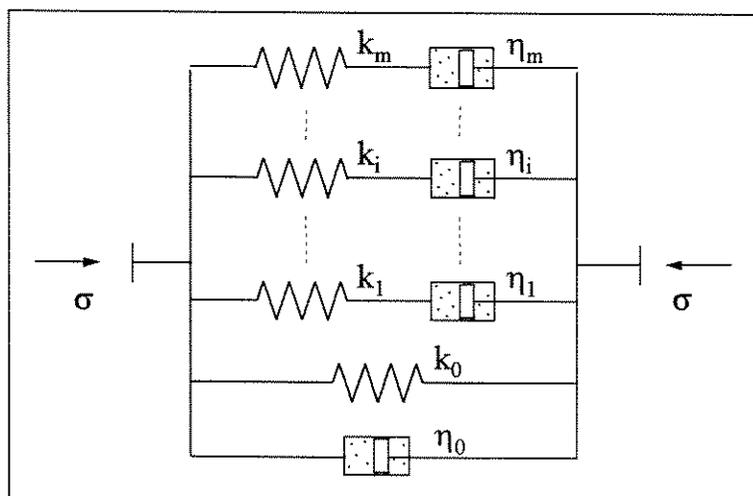


Fig. A.2: Modelo de Maxwell Generalizado com Unidades "Degeneradas"

Observa-se, também, que a deformação total ε é a mesma em cada um dos ramos do modelo. A relação constitutiva do modelo de Maxwell, vista na seção 4.2.2 e rerepresentada abaixo, é válida em cada unidade do modelo:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_i}{k_i} + \frac{\sigma_i}{\eta_i} \quad (\text{A.2}).$$

Através das equações A.1 e A.2, chega-se a equação constitutiva do modelo generalizado de Maxwell, que para um ensaio de relaxação ($\dot{\varepsilon}=0$) de um modelo generalizado de Maxwell sem unidades "degeneradas", simplifica-se para:

$$\sigma(t) = \left(\sum_{i=1}^m k_i \cdot e^{-t/\tau_i} \right) \cdot \varepsilon_c \quad (\text{A.3}),$$

sendo ε_c a deformação constante imposta ao modelo e $\tau_i = \eta_i/k_i$. Se for admitida a presença de uma unidade "degenerada" no modelo, correspondendo a um elemento de mola, de constante de rigidez k_0 , a equação acima altera-se para:

$$\sigma(t) = (k_0 + \sum_{i=1}^m k_i \cdot e^{-t/\tau_i}) \cdot \varepsilon_e \quad (\text{A.4}).$$

O segundo modelo generalizado a ser visto é o *modelo generalizado de Kelvin-Voigt*. Este modelo é representado por várias unidades de Kelvin-Voigt dispostas em série, como mostra a figura A.3.

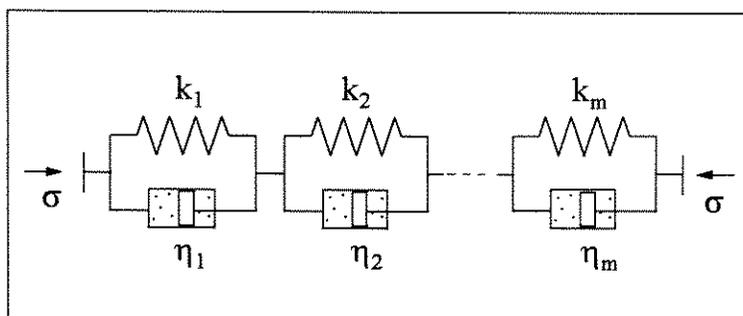


Fig. A.3 Modelo de Kelvin-Voigt Generalizado

De forma análoga ao que foi visto para o modelo generalizado de Maxwell, pode-se incluir, também, algumas unidades "degeneradas" no modelo generalizado de Kelvin-Voigt, mostradas na figura A.4, de forma que o mesmo possa prever uma resposta elástica instantânea ou um fluxo viscoso.

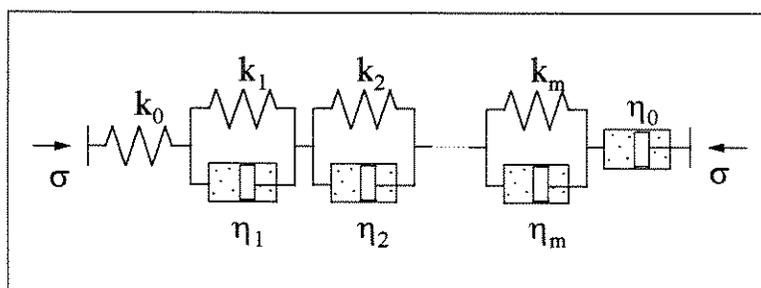


Fig. A.4: Modelo de Kelvin-Voigt Generalizado com Unidades "Degeneradas"

Verifica-se que uma tensão σ aplicada ao modelo é exercida em todas as suas unidades, pois estas estão dispostas em série. A equação constitutiva do modelo de Kelvin-Voigt,

vista na seção 4.2.3, é válida para cada unidade do modelo generalizado:

$$\sigma = k_i \cdot \varepsilon_i + \eta_i \cdot \dot{\varepsilon}_i \quad (\text{A.5}).$$

A deformação total do modelo é dada pela soma das deformações individuais de cada unidade:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \quad (\text{A.6}).$$

Com as equações A.5 e A.6, chega-se à equação constitutiva do modelo generalizado de Kelvin-Voigt. Se desejar-se, por exemplo, conhecer a resposta do modelo a um ensaio de fluência ($\sigma = \sigma_c = \text{constante}$), pelas equações A.5, A.6 e 4.18, obtém-se:

$$\varepsilon(t) = \left[\sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i} \cdot (1 - e^{-t/t_i}) \right] \cdot \sigma_c \quad (\text{A.7}),$$

sendo $t_i = \eta_i / k_i$. Havendo uma unidade "degenerada" no modelo, do tipo elemento de mola, com constante de rigidez k_0 , a equação anterior altera-se para:

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{1}{k_0} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i} \cdot (1 - e^{-t/t_i}) \right] \cdot \sigma_c \quad (\text{A.8}).$$

A.2 Avaliando o Diâmetro Externo do Modelo.

O modelo deve representar a situação de um meio semi-infinito (de diâmetro externo infinito) submetido às solicitações externas devidas ao peso das camadas superiores e\ou aos esforços tectônicos horizontais, para que as tensões resultantes possam ser consideradas semelhantes às originais preexistentes no problema real. Tradicionalmente exige-se do modelo numérico de *dimensões finitas* o emprego de um bom número de elementos e pontos nodais, de tal modo que seja possível representar uma grande parte do contínuo afetado pelas solicitações que incidem sobre o modelo e permita, ainda, manter o contorno (diâmetro externo do modelo) afastado da zona de

interesse (diâmetro interno do modelo). Entretanto, qual é esse número ótimo de elementos e o tamanho da malha adequados? Qual é o diâmetro externo mínimo do modelo que não perturba significativamente a solução do problema que o modelo se destina a representar?

Uma das soluções plausíveis seria lançar-se mão do emprego no *contorno* do modelo de elementos especiais denominados de "elementos infinitos". Tais elementos, tal qual o *elemento infinito lagrangiano*, desenvolvido por **Peter Bettess**^[42], ou o elemento infinito implementado por Chow e Smith, ou aquele implementado por Paul P. Lynn, todos descritos com detalhes por **Costa**^[1], mantém as características próprias dos elementos finitos, como por exemplo, a simetria de suas matrizes de rigidez.

A solução escolhida para este contexto foi a de se calcular um diâmetro externo para o modelo que não perturbe a solução para o deslocamento das paredes do poço, que é o objetivo fim deste trabalho. Para isso, felizmente, é possível calcular-se as soluções analíticas para os deslocamentos dos pontos de uma placa infinita, equação A.9, e de uma placa finita, equação A.10, com furo no centro, em estado plano de deformações e sob a influência de uma pressão p_i , interna ao furo e pressão p_e , externa à placa:

$$\frac{E}{r_i} \cdot u_\infty(n) = (1 + \nu) \cdot \left[(p_i - p_e) \cdot \frac{1}{n} - (1 - 2\nu) \cdot p_e \cdot n \right] \quad (\text{A.9}),$$

onde:

u_∞ - é o deslocamento de um ponto da placa infinita situado a uma distância igual a $n \cdot r_i$ do eixo do furo, ($n \geq 1$);

E - é o módulo de elasticidade do material;

ν - é o coeficiente de Poisson do material;

r_i - é o raio do furo;

p_e - é a pressão aplicada no infinito;

p_i - é a pressão no interior do furo.

$$\frac{E}{r_i} \cdot u(n) = (1+\nu) \cdot \left[\frac{b^2 \cdot (p_i - p_e)}{b^2 - 1} \cdot \frac{1}{n} + (1-2\nu) \cdot \frac{(p_i - b^2 \cdot p_e)}{b^2 - 1} \cdot n \right] \quad (\text{A.10}),$$

$$r_e = b \cdot r_i \text{ ou } b = \frac{r_e}{r_i} \quad (\text{A.11}),$$

onde:

u - é o deslocamento de um ponto da placa finita de raio externo $b \cdot r_i$ situado à uma distância $n \cdot r_i$ do eixo do furo, ($b \geq n \geq 1$);

r_i - é o raio do furo;

r_e - é o raio externo da placa finita;

p_e - é a pressão aplicada no raio externo da placa;

p_i - é a pressão no interior do furo.

Fazendo-se $n=1$ nessas equações, obtém-se o deslocamento dos pontos da parede do furo:

$$\frac{E}{r_i} \cdot u_\infty(1) = (1+\nu) \cdot [p_i - 2 \cdot (1-\nu) \cdot p_e] \quad (\text{A.12}),$$

e

$$\frac{E}{r_i} \cdot u(1) = (1+\nu) \cdot \left[\frac{b^2 \cdot (p_i - p_e)}{b^2 - 1} + (1-2\nu) \cdot \frac{(p_i - b^2 \cdot p_e)}{b^2 - 1} \right] \quad (\text{A.13}).$$

Pode-se calcular o erro relativo assumido ao se substituir a solução para o deslocamento de um ponto da parede de um furo de uma placa infinita em estado plano de deformações, equação A.12, pela solução correspondente para um placa finita de raio externo $r_e = b \cdot r_i$, equação A.13, através de:

$$\text{erro}(\%) = \left| \frac{u_\infty(1) - u(1)}{u_\infty(1)} \right| \cdot 100 \quad (\text{A.14}).$$

Substituindo-se as equações A.12 e A.13 na equação A.14, após algum algebrismo chega-se a:

$$\text{erro}(\%) = \frac{\left| \frac{(1-2\nu) \cdot p_i}{[2 \cdot (1-\nu) \cdot p_e - p_i]} - 1 \right|}{b^2 - 1} \cdot 100 \quad (\text{A.15}).$$

De imediato, percebe-se que o erro é inversamente proporcional ao quadrado do raio externo da placa finita, ou

seja, quanto maior é **b** menor será o erro em se substituir a solução de placa infinita por uma solução de placa finita.

Nota-se também que o erro é infinito para valores de $p_i = 2(1-\nu)p_e$. Quando isto ocorre, o deslocamento da parede do furo é nulo na solução de placa infinita, $u_o(1) = 0$. Para valores de p_i próximos a esse ponto de inflexão citado, o erro pode ser significativo.

Atribuindo-se aos valores:

$$\text{erro}(\%) \leq i \quad (\text{A.16}),$$

onde *i* é um valor arbitrário do erro relativo;

$$p_e = 3,2808 \cdot h \cdot \text{Grad}_L \quad (\text{A.17}),$$

onde:

p_e - é a pressão exercida pelas camadas de rochas sobrepostas ao corpo de sal em psi;

h - é a profundidade do corpo de sal em m;

G_L - é o gradiente litostático exercido pelas rochas que se sobrepõem ao sal e que constituem a litografia da região, em psi/pé;

e

$$p_i = 0,1705 \cdot h \cdot \gamma \quad (\text{A.18}),$$

onde:

p_i - é a pressão exercida pelo fluido de perfuração em psi;

h - é a profundidade do corpo de sal em m;

γ - é o peso específico do fluido de perfuração em lb/gal.

Substituindo-se as equações A.16 a A.18 em A.15:

$$\left| \frac{0,1705 \cdot h \cdot \gamma \cdot (1-2\nu)}{h \cdot \left[6,5616 \cdot \text{Grad}_L \cdot (1-\nu) - 0,1705 \cdot \gamma \right]} - 1 \right| \cdot 100 \leq i \quad \Rightarrow$$

$$\left| \frac{0,1705 \cdot (1-2\nu)}{\left[6,5616 \cdot \frac{\text{Grad}_L}{\gamma} \cdot (1-\nu) - 0,1705 \right]} - 1 \right| \leq \frac{i \cdot (b^2 - 1)}{100} \quad (\text{A.19})$$

A solução matemática da inequação A.19 para valores de $\gamma > 0$, será apresentada na seqüência. Antes porém, para facilitar a apresentação da solução, três grandezas, Ψ , Ω e ξ , serão definidas:

$$\psi = 38,48 \cdot (1-\nu) \cdot Grad_L \cdot \left[\frac{100 - i \cdot (b^2 - 1)}{200 \cdot (1-\nu) - i \cdot (b^2 - 1)} \right] \quad (A.20),$$

$$\Omega = 38,48 \cdot (1-\nu) \cdot Grad_L \cdot \left[\frac{100 + i \cdot (b^2 - 1)}{200 \cdot (1-\nu) - i \cdot (b^2 - 1)} \right] \quad (A.21),$$

$$\xi = 38,48 \cdot (1-\nu) \cdot Grad_L \cdot \left[\frac{100 + i \cdot (b^2 - 1)}{200 \cdot (1-\nu) + i \cdot (b^2 - 1)} \right] \quad (A.22).$$

A inequação A.19 tem a seguinte solução para γ :

1- para $(b \leq \sqrt{\frac{100}{i} + 1})$:

$$\psi \leq \gamma \leq \Omega \quad (A.23);$$

2- para $(b \geq \sqrt{\frac{100}{i} + 1})$:

$$\gamma \leq \xi \quad (A.24);$$

3- para $(b > \sqrt{\frac{200 \cdot (1-\nu)}{i} + 1})$:

$$\gamma \leq \xi \text{ ou } \gamma \geq \psi \quad (A.25).$$

As soluções apresentadas indicam a faixa de peso do fluido de perfuração no qual a solução para o deslocamento das paredes de um poço de um modelo de placa finita de raio b em estado plano de deformações tem um erro $\leq i\%$ em relação à

solução para placa infinita nas mesmas condições. A tabela III a seguir, construída com valores de $\nu=0,36$ e $G_L=22,6 \text{ KN/m}^3$ (1psi/pé), ajuda a entender o exposto:

Erro \leq (%)	b	$\gamma \leq$ (lb/gal)	$\gamma \geq$ (lb/gal)
0,5	10	20,74	15,84
0,5	20	22,52	34,27
0,5	50	24,12	25,24
1,0	10	21,60	0,85
1,0	20	23,32	27,17
1,0	50	24,36	24,92
2,0	10	22,51	34,48
2,0	20	23,88	25,66
2,0	50	24,49	24,77

Tab. (III): Erro Relativo Entre Solução de Placa Finita e Solução de Placa Infinita

Os resultados apresentados mostram, por exemplo, que um modelo de diâmetro externo igual a 10 vezes o diâmetro interno do poço, $b=10$, produz um erro $i \leq 0,5\%$ em relação à solução para o deslocamento da parede do poço de um modelo de placa infinita, somente quando o peso específico do fluido contido no poço situar-se dentro da faixa $18,6 \leq \gamma \leq 24,3 \text{ KN/m}^3$ ($15,84 \leq \gamma \leq 20,74 \text{ lb/gal}$). Para o modelo cujo $b=50$, qualquer fluido de peso específico cujo $\gamma \leq 28,3$ ou $\gamma \geq 29,6 \text{ KN/m}^3$ ($\gamma \leq 24,12$ ou $\gamma \geq 25,24 \text{ lb/gal}$) produz um erro $i \leq 0,5\%$ em relação à solução de placa infinita.

Neste trabalho adotou-se o modelo de placa finita com diâmetro externo igual a 50 vezes o diâmetro interno do poço.

A.3 Armazenamento Vetorial de Matriz Simétrica de Banda.

Uma matriz $\underline{\underline{A}}(N,N)$ é simétrica se $\mathbf{a}(i,j)=\mathbf{a}(j,i)$. Se ainda, para todo $j \geq i+p \Rightarrow \mathbf{a}(i,j)=0$, a matriz também é de banda, com largura da banda igual a p .

A matriz global $\underline{\underline{K}}$, definida pela equação 5.31 e que representa o modelo apresentado na figura 6.2, é simétrica e de banda. Devido a montagem sistemática dos elementos que compõem o modelo em "fileiras" de elementos triangulares de mesma altura e com mesma distância de seus centros até o eixo do poço, tornou-se simples a verificação da largura da banda da matriz, que depende da maneira como foi montada a malha do modelo e identificadas as suas variáveis. Isolando-se a "fileira" que contém o maior número de elementos tem-se que a largura da banda é dada pela diferença entre o maior e o menor valor das variáveis nodais dessa "fileira", mais 1. A triangularização da matriz global, para posterior solução do sistema de equações lineares, não altera a largura da banda.

Pode-se diminuir o esforço computacional e o espaço de armazenamento requerido no computador se, em vez de se manipular com a matriz completa, trabalhar-se com a parte superior da matriz (pois ela é simétrica) e somente com a largura p da banda (os elementos fora da banda são iguais a zero).

Através de uma numeração consistente dos componentes $\mathbf{a}(i,j)$ da matriz triangular superior integrantes da banda p , conforme é mostrado no exemplo da figura A.5, onde $p=5$, armazena-se uma matriz $\underline{\underline{A}}(i,j)$ de uma forma vetorial $\underline{\underline{A}}(ij)$.

$$ij = \frac{i \cdot (i-1)}{2} + j \quad (\text{A.27});$$

- e para $i > j \wedge j > p$, isto é, para a parte inferior da matriz $A(N,N)$ fora do triângulo:

$$ij = i \cdot (p-1) - \frac{p \cdot (p-1)}{2} + j \quad (\text{A.27}).$$

A.4 Algoritmo para Montagem da Matriz Global.

Dados:

Nel \Rightarrow número de elementos da malha;

Nvar \Rightarrow número de variáveis ou incógnitas da malha;

$\overset{e}{K}(6,6)$ \Rightarrow matriz de rigidez do elemento triangular simplex;

Ivel(Nel,6) \Rightarrow matriz que relaciona ordenadamente as variáveis contidas em cada elemento.

As variáveis são os deslocamentos desconhecidos de cada nó para cada direção "**X**" e "**Y**" do plano do modelo. Numeram-se ordenadamente e consistentemente cada uma dessas variáveis, ao longo de toda a malha. Se não houver qualquer restrição ao movimento, cada nó do triângulo possuirá 2 graus de liberdade, ou seja, serão 6 variáveis associadas a cada elemento triangular. Entra-se com o numeral **Zero** nas posições da matriz Ivel correspondentes aos *movimentos restritos*, visto que os mesmos não são variáveis.

Saída:

$K(Nvar, Nvar)$ \Rightarrow matriz de rigidez global do modelo.

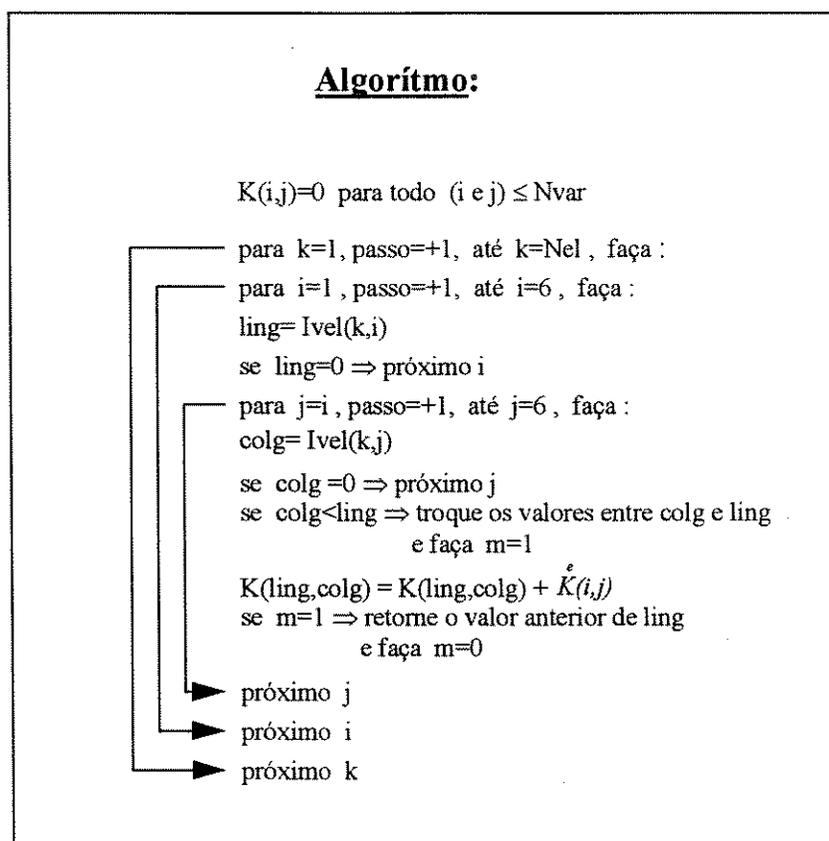


Fig. A.6 : Algoritmo de Montagem da Matriz Global

A.5 Resolução do Sistema de Equações Lineares

Os métodos de solução de sistemas de equações lineares podem ser classificados em: *métodos diretos* e *métodos iterativos*.

Os métodos diretos conduzem à solução exata do sistema, a menos de erros de arredondamento introduzidos pelo computador. Estes têm também como vantagem a não dependência de condições de convergência, porém, quando o sistema é mal condicionado e/ou muito grande, podem tornar-se inviáveis.

Os métodos iterativos se baseiam na construção de uma seqüência de aproximações, tornando-se muito úteis quando a seqüência converge e o número de passos se torna grande.

Dentre os métodos diretos pode-se destacar o *Método de Eliminação de Gauss* e o *Método de Decomposição LU*. Não é intenção deste trabalho se adentrar em cada método; aqueles que o desejarem poderão consegui-lo nas boas publicações disponíveis na praça. Neste contexto optou-se pela utilização do método direto de Decomposição LU, devido às vantagens já mencionadas dos métodos diretos e ao menor esforço computacional exigido, se comparado àquele necessário caso se utilizasse o *Método de Eliminação de Gauss*.

A.5.1 Método de Decomposição LU

Uma matriz $\underline{A}(N,N)$ qualquer pode sempre ser decomposta em duas matrizes triangulares $\underline{L}(N,N)$ e $\underline{U}(N,N)$ do tipo:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_{N1} & l_{N2} & \dots & l_{NN} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1N} \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & u_{(N-1)N} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

Se a matriz $\underline{A}(N,N)$ é simétrica, ou seja, $a(i,j) = a(j,i), \forall (i \wedge j) \leq N$, então a matriz triangularizada inferior correspondente, $\underline{L}(N,N)$, tem a seguinte propriedade:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_{N1} & l_{N2} & \dots & l_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 0 \\ u_{1N} & \dots & u_{(N-1)N} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{NN} \end{bmatrix} \quad (\text{A.29}).$$

Substituindo-se a equação A.29 na A.28:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 0 \\ u_{1N} & \dots & u_{(N-1)N} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{NN} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1N} \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & u_{(N-1)N} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

ou seja,

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{U}} \quad (\text{A.31}).$$

O sistema de equações a ser resolvido tem a forma:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad (\text{A.32}).$$

Substituindo-se a equação A.31 na A.32:

$$\underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad (\text{A.33}).$$

Definindo-se:

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{x} = \underline{y} \quad (\text{A.34})$$

\Rightarrow

$$\underline{\underline{U}} \cdot \underline{x} = \underline{y} \cdot \underline{\underline{D}}^{-1} \quad (\text{A.35}),$$

ou,

$$\underline{\underline{U}} \cdot \underline{x} = \underline{\bar{y}} \quad (\text{A.36}),$$

sendo:

$$\underline{\bar{y}} = \left\{ \begin{array}{c} y_1/d_1 \\ \dots \\ y_N/d_N \end{array} \right\} \Leftrightarrow \bar{y}_i = \frac{y_i}{d_i} \quad (\text{A.37}).$$

Substituindo-se A.34 na equação A.33:

$$\underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{y} = \underline{b} \quad (\text{A.38}).$$

O sistema de equações lineares inicial, equação A.32, foi decomposto em 2 sistemas de matrizes triangulares, equações A.36 e A.38, necessitando-se apenas da triangularização da matriz $\underline{\underline{U}}$. Resolvendo-se o sistema triangular $\underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{y} = \underline{b}$, obtém-se \underline{y} , que usado em $\underline{\underline{U}} \cdot \underline{x} = \underline{\bar{y}}$ fornecerá a solução do sistema original.

A.5.2 Decomposição Triangular de Gauss

Transcrevendo-se a equação A.28:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_{N1} & l_{N2} & \dots & l_{NN} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1N} \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & u_{(N-1)N} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para a 1ª linha de $\underline{\underline{A}}(N,N)$ tem-se que:

$$a_{11}=l_{11} \Rightarrow d_1=a_{11} \quad (\text{A.39});$$

$$a_{12}=d_1 \cdot u_{12} \Rightarrow u_{12} = \frac{a_{12}}{d_1} ;$$

$$a_{13}=d_1 \cdot u_{13} \Rightarrow u_{13} = \frac{a_{13}}{d_1} ;$$

$$\Rightarrow \text{regra para a } \underline{\underline{1ª}} \text{ linha: } u_{1j} = \frac{a_{1j}}{d_1} \quad (\text{A.40}).$$

Para a 2ª linha de $\underline{\underline{A}}(N,N)$ tem-se:

$$a_{21}=l_{21}=a_{12} \Rightarrow l_{21}=u_{12} \cdot d_1 ;$$

$$a_{22}=l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \Rightarrow d_2 = a_{22} - u_{12}^2 \cdot d_1 ;$$

$$a_{23}=l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \Rightarrow u_{23} = (a_{23} - u_{12} \cdot d_1 \cdot u_{13}) / d_2 ;$$

$$a_{24}=l_{21} \cdot u_{14} + l_{22} \cdot u_{24} \Rightarrow u_{24} = (a_{24} - u_{12} \cdot d_1 \cdot u_{14}) / d_2 ;$$

$$\Rightarrow u_{2j} = \frac{(a_{2j} - u_{12} \cdot d_1 \cdot u_{1j})}{d_2} , \quad j=3, 4, 5 \dots N$$

Para a 3ª linha de $\underline{\underline{A}}(N,N)$ tem-se:

$$a_{31}=l_{31}=a_{13} \Rightarrow l_{31}=u_{13} \cdot d_1 ;$$

$$a_{32}=l_{31} \cdot u_{12} + l_{32}=a_{23}=u_{12} \cdot d_1 \cdot u_{13} + d_2 \cdot u_{23} \Rightarrow l_{32}=u_{23} \cdot d_2 ;$$

$$a_{33}=l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \Rightarrow d_3 = a_{33} - u_{13}^2 \cdot d_1 - u_{23}^2 \cdot d_2 ;$$

$$a_{34}=l_{31} \cdot u_{14} + l_{32} \cdot u_{24} + l_{33} \cdot u_{34} \Rightarrow$$

$$u_{34} = (a_{34} - u_{13} \cdot d_1 \cdot u_{14} - u_{23} \cdot d_2 \cdot u_{24}) / d_3 ;$$

$$a_{35}=l_{31} \cdot u_{15} + l_{32} \cdot u_{25} + l_{33} \cdot u_{35} \Rightarrow$$

$$u_{35} = (a_{35} - u_{13} \cdot d_1 \cdot u_{15} - u_{23} \cdot d_2 \cdot u_{25}) / d_3 ;$$

$$\Rightarrow u_{3j} = \frac{(a_{3j} - u_{13} \cdot d_1 \cdot u_{1j} - u_{23} \cdot d_2 \cdot u_{2j})}{d_3} , \quad j=4, 5, 6 \dots N$$

e para qualquer linha de $\underline{A}(N,N)$, excetuando-se a $\underline{1}^a$:

$$d_i = a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} (u_{ji}^2 \cdot d_j) \quad , \quad i=2,3,4..N \quad (A.41),$$

e

$$u_{ij} = \frac{\left[a_{ij} - \sum_{m=1}^{i-1} (u_{mi} \cdot d_m \cdot u_{mj}) \right]}{d_i} \quad , \quad j=(i+1), (i+2), (i+3), \dots N \quad (A.42).$$

Com as equações A.40 a A.42 pode-se escrever o algoritmo:

Dados:

$\underline{A}(N,N) \Rightarrow$ matriz simétrica.

Saída:

$\underline{U}(N,N) \Rightarrow$ matriz triangular superior;

$\underline{D}(N,N) \Rightarrow$ matriz diagonal.

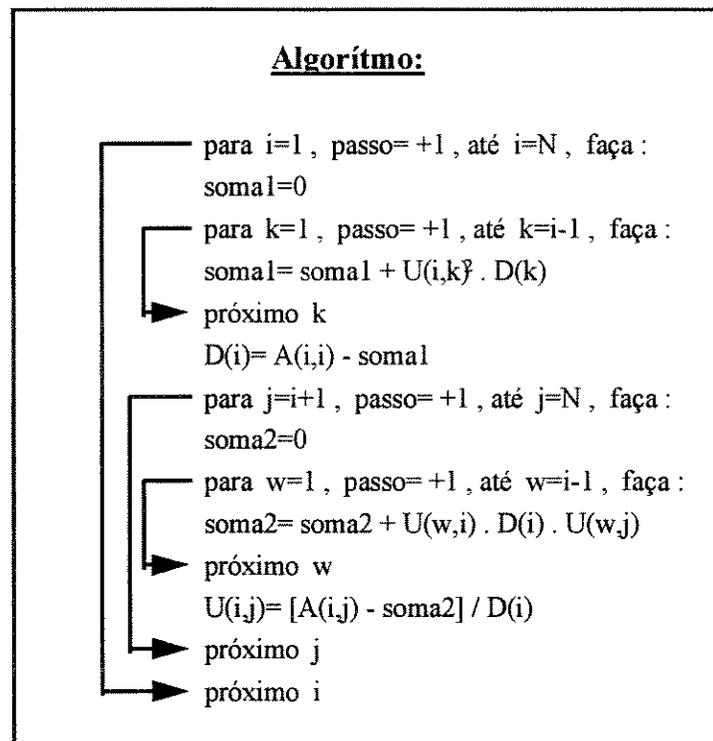


Fig. A.7 : Algoritmo da Decomposição Triangular de Gauss

A.5.3 Solução do Sistema Triangular Inferior

Partindo-se da equação A.38:

$$\underline{U}^T \cdot \underline{y} = \underline{b}$$

ou,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ u_{1N} & \dots & u_{(N-1)N} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{Bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

Resolvendo-se:

$$y_1 = b_1 ;$$

$$u_{12} \cdot y_1 + y_2 = b_2 \Rightarrow y_2 = b_2 - u_{12} \cdot y_1 ;$$

$$u_{13} \cdot y_1 + u_{23} \cdot y_2 + y_3 = b_3 \Rightarrow y_3 = b_3 - u_{13} \cdot y_1 - u_{23} \cdot y_2 ;$$

$$u_{14} \cdot y_1 + u_{24} \cdot y_2 + u_{34} \cdot y_3 + y_4 = b_4 \Rightarrow$$

$$y_4 = b_4 - u_{14} \cdot y_1 - u_{24} \cdot y_2 - u_{34} \cdot y_3 ;$$

$$\Rightarrow y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ji} \cdot y_j, \quad i=1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{A.44}).$$

Com a equação A.44 escreve-se o algoritmo:

Dados:

$\underline{U}^T(N,N) \Rightarrow$ matriz transposta da matriz triangular superior;

$\underline{b}(N) \Rightarrow$ vetor;

Saída:

$\underline{y}(N) \Rightarrow$ vetor solução parcial do sistema de equações original;

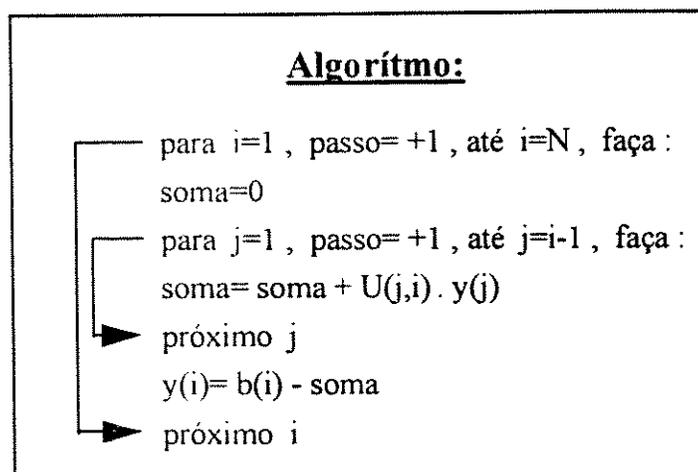


Fig. A.8 : Algoritmo de Solução do Sistema Triangular Inferior

A.5.4 Solução do Sistema Triangular Superior

Rescrevendo-se as equações A.36 e A.37:

$$\underline{U} \cdot \underline{x} = \underline{\bar{y}}$$

onde,

$$\bar{y}_i = \frac{y_i}{d_i} ,$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1N} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & u_{(N-1)N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_{N-1} \\ \bar{y}_N \end{Bmatrix} \quad (\text{A.45}).$$

Resolvendo-se:

$$x_N = \bar{y}_N ;$$

$$x_{N-1} + u_{(N-1)N} \cdot x_N = \bar{y}_{N-1} \Rightarrow x_{N-1} = \bar{y}_{N-1} - u_{(N-1)N} \cdot x_N ;$$

$$x_{(N-2)} + u_{(N-2)(N-1)} \cdot x_{N-1} + u_{(N-2)N} \cdot x_N = \bar{y}_{N-2} \Rightarrow$$

$$x_{N-2} = \bar{y}_{N-2} - u_{(N-2)(N-1)} \cdot x_{N-1} - u_{(N-2)N} \cdot x_N ;$$

$$\Rightarrow x_i = \bar{y}_i - \sum_{j=i+1}^N u_{ij} \cdot x_j, \quad i=(N-1), (N-2), \dots, 2, 1 \quad (\text{A.46}).$$

Com a equação A.46 monta-se o seguinte algoritmo:

Dados:

$\underline{U}(N,N) \Rightarrow$ matriz triangular superior;

$\underline{\bar{y}}(N) \Rightarrow$ vetor solução parcial do sistema de equações original;

Saída:

$\underline{x}(N) \Rightarrow$ vetor solução do sistema de equações original.

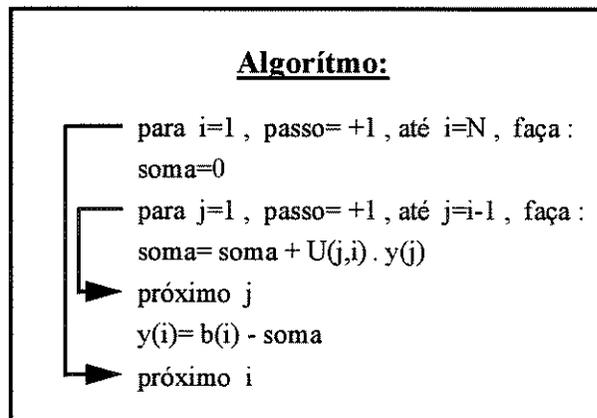


Fig. A.9 : Algoritmo de Solução do Sistema Triangular Superior