



**JAKERSON RICARDO GEVINSKI**

# **Determinação da Deformação Dinâmica em Superfícies utilizando Parâmetros Vibracionais**

28/2014

**CAMPINAS  
2014**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

JAKERSON RICARDO GEVINSKI

# Determinação da Deformação Dinâmica em Superfícies utilizando Parâmetros Vibracionais

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutor(a) em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Robson Pederiva

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO  
FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO(A) ALUNO(A)  
JAKERSON RICARDO GEVINSKI

....., E ORIENTADA PELO(A)  
PROF(A). DR(A). ROBSON PEDERIVA

  
.....  
ASSINATURA DO(A) ORIENTADOR(A)

CAMPINAS  
2014

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva – CRB8/5974

G337d      Gevinski, Jakerson Ricardo, 1985-  
              Determinação da deformação dinâmica em superfícies utilizando parâmetros  
              vibracionais / Jakerson Ricardo Gevinski. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

              Orientador: Robson Pederiva.  
              Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de  
              Engenharia Mecânica.

              1. Deformações e tensões. 2. Análise modal. 3. Dinâmica estrutural. I.  
              Pederiva, Robson, 1957-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
              Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Dynamic strain determination on surface using vibrational parameters

**Palavras-chave em inglês:**

Strain and stress

Modal analysis

Structural dynamic

**Área de concentração:** Mecânica dos sólidos e Projeto Mecânico

**Titulação:** Doutor em Engenharia Mecânica

**Banca examinadora:**

Robson Pederiva [Orientador]

Milton Dias Junior

Loir Afonso Moreira

Vicente Lopes Junior

Rodrigo Nicoletti

**Data de defesa:** 24-02-2014

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

TESE DE DOUTORADO

**Determinação da Deformação Dinâmica em  
Superfícies utilizando Parâmetros Vibracionais**

Autor: Jakerson Ricardo Gevinski  
Orientador: Prof. Dr. Robson Pederiva

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:



**Prof. Dr. Robson Pederiva, Presidente**  
FEM/UNICAMP



**Prof. Dr. Milton Dias Junior**  
FEM/ UNICAMP



**Prof. Dr. Loir Afonso Moreira**  
PUC/ Campinas



**Prof. Dr. Vicente Lopes Junior**  
UNESP/ Ilha Solteira



**Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti**  
USP/ São Carlos

Campinas, 24 de fevereiro de 2014.

Dedico este trabalho a Deus e aos meus pais.

## Agradecimentos

Foram seis anos de estudos e de muito aprendizado durante a minha pós-graduação na Universidade Estadual de Campinas – Unicamp. Tive a oportunidade de conhecer muitas pessoas e fortalecer ainda mais os laços de amizade com aqueles que eu já conhecia. A todas essas pessoas, eu não poderia de deixar de agradecer, pois de certa forma, contribuíram para que este trabalho fosse realizado. Em particular:

Ao amigo e orientador Prof. Dr. Robson Pederiva, pela oportunidade, confiança, orientação, apoio e paciência.

A empresa SKF pela iniciativa do trabalho, parceria, confiança e pelo financiamento da pesquisa concedido em forma de bolsa de estudos. Gostaria de agradecer à diretoria da SKF e à equipe da engenharia, em especial, Me. Silas Santana dos Santos, Eng. Hilário Sinkoc, Eng. Mário Eduardo Correr, Dra. Danuza Santana, Eng. Henrique Severino e Dr. Edmilson Santos.

Ao Prof. Dr. Milton Dias Junior, Prof. Dr. Loir Afonso Moreira, Prof. Dr. Vicente Lopes Junior e o Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti pelas sugestões e correções que contribuíram ao trabalho. A professora Dra. Katia Dedini por todo o apoio.

A toda a minha família, pelo apoio incondicional e o incentivo. Aos meus pais, Valdir e Bernardete Gevinski, por nunca terem medido esforços para que eu pudesse chegar aqui e ao meu irmão Eng. Jeferson Gevinski, pelo companheirismo, amizade, e apoio. A minha namorada Jocemara Carvalho pelo carinho, compreensão e apoio.

Aos técnicos e amigos do Departamento de Projeto Mecânico da FEM - Unicamp, Maurício, Mauro, Ferreira e Eli, que auxiliaram na realização dos experimentos.

Aos amigos Dr. Jorge Biazussi, quem me convenceu a continuar os estudos depois da graduação na UNICAMP, e Dr. Alexandre Buenos, pela amizade, companheirismo, apoio e pelas conversas nas horas de mate.

Aos colegas e amigos do Laboratório de Vibrações da FEM, pela companhia, apoio, ajuda e amizade, os quais em especial: Eder Andreatta, Marcus Varanis, Fábio Sanches, Andre Suetti, Vinicius Silva, Diego Martins, Henrique Silveira e Clodoaldo Chagas. Aos amigos dos churrascos de domingo. Aos amigos dos laboratórios vizinhos e a todos que participaram da minha defesa de doutorado.

Aos professores e colegas das disciplinas realizadas, por toda a ajuda e amizade.

*A maravilhosa disposição e harmonia do universo  
só pode ter tido origem segundo o plano de um  
Ser que tudo sabe e tudo pode. Isso fica sendo  
a minha última e mais elevada descoberta.  
(Isaac Newton).*

## Resumo

Máquinas e equipamentos em condições operacionais estão susceptíveis à vibração e, conseqüentemente, deformações e tensões. Deformações em níveis excessivos podem ocasionar falhas por fadiga, muitas vezes catastróficas. Desta forma, o monitoramento e a caracterização da distribuição da deformação dinâmica em estruturas se tornam muito importantes. Em vista da determinação da deformação dinâmica, métodos de estimação de deformação que utilizam parâmetros vibracionais foram desenvolvidos. Por estes métodos, basicamente, estima-se a deformação dinâmica a partir da informação do deslocamento, não havendo, principalmente, a necessidade da colagem de extensômetros sobre a estrutura. Nesta tese, os métodos de estimação de deformação são aplicados utilizando funções respostas em frequência e de transmissibilidade. Os métodos de estimação da deformação são avaliados a partir de simulações numéricas e experimentos. A simulação numérica é realizada em uma viga engastada, e utilizam-se os métodos da matriz de transformação, análise modal híbrida e o método direto, baseado na análise da curvatura da viga. As avaliações experimentais são realizadas em placas de alumínio com diferentes geometrias e condições de contorno. O tensor de deformação e a distribuição da deformação dinâmica são determinados utilizando sinais de aceleração medidos em diferentes pontos da superfície das placas e os métodos de estimação. Os modos de deslocamento e de deformação, necessários para aplicação dos métodos, são obtidos por elementos finitos em ANSYS®. Na transformação deslocamento-deformação, são utilizados os métodos de diferenças finitas e de elementos finitos. Os tensores de deformação estimados são comparados com os tensores de deformação medidos por meio de extensômetros. Os modos operacionais de deformação estimados são comparados com modos simulados. As simulações e experimentos apresentam resultados relevantes e satisfatórios no campo da determinação da deformação dinâmica.

*Palavras Chaves:* Deformações e tensões; Análise modal; Dinâmica estrutural.

## **Abstract**

Machinery and equipment, under operating conditions, are susceptible to vibration and hence the levels of dynamic stress and strains. The consequence of excessive vibration can be catastrophic since, high levels of stress and strain, occurring in a certain period of time can cause fatigue failures. Thus, monitoring and characterization of the dynamic strain distribution in mechanical structures becomes increasingly important. In view of the dynamic strain determination, some methods have been developed to predict the dynamic strain from vibration measurements. These methods basically consist in the numerical differentiation of displacement and, in especially, to predict the strain without the use of strain gages. In this thesis, the strain predicting methods are applied using both functions frequency responses and transmissibility. The strain predicting methods are evaluated through numerical simulations and experiments. The numerical simulation is performed on a cantilever beam, and the hybrid modal analysis, transformation matrix and the direct method, based on the analysis of the curvature of the beam, are used. The experimental evaluations are performed on aluminum plates with different geometries and boundary conditions. The dynamic strain tensor and the distribution of operating strain are determined using acceleration, measured at different points on the surface of the plates, and the strain predicting methods. The strain and displacement modes, required for application of the methods, are obtained by finite element in ANSYS ®. In the displacement - strain transformation, both the finite difference methods and finite elements methods are used. The predicted strain tensors are compared with the strain measured using strain gauges. The predicted operating modes were compared with simulated strain modes. Simulations and experiments show significant and satisfactory results in the field of determining the dynamic strain.

*Key Words:* Strain and Stress; Modal Analysis; Structural Dynamic;

## Lista de Ilustrações

Figura 2.1- Deslocamentos tridimensionais $u$ , $v$ e $w$ na direções $x$ , $y$ e $z$ , respectivamente. ....	12
Figura 2.2 – Análise da curvatura de uma viga em flexão (a) Viga não deformada (b) Viga curvada (c) Detalhe do deslocamento de um ponto $P$ distanciado a $c$ da linha neutra.....	15
Figura 2.3 – Elemento quadrilateral linear (4 nós) em coordenadas global e locais .....	23
Figura 2.4 – Elemento quadrilateral quadrático (8 nós) em coordenadas global e locais .....	25
Figura 2.5 - Extensômetros orientados com ângulo $\theta$ em relação ao eixo $x$ .....	28
Figura 2.6 – Transmissibilidades de um mesmo ponto de resposta mas com condição de carregamento diferente interseccionando-se nas frequências naturais do sistema .....	58
Figura 2.7 – Posição da excitação e referência para caso 1 .....	60
Figura 2.8 – Picos no espectro de transmissibilidade coincidindo com as antirressonâncias “vale” da FRF da referência – Caso 1.....	61
Figura 2.9 – Posição da excitação e referência para o caso 2.....	61
Figura 2.10 - Picos no espectro de transmissibilidade coincidindo com as antirressonâncias “vale” da FRF da referência - Caso 2 .....	62
Figura 2.11 - Posição da excitação e referência para o caso 3 .....	63
Figura 2.12 - Picos no espectro de transmissibilidade coincidindo com as antirressonâncias da FRF da referência - Caso 3 .....	63
Figura 3.1 – Classificação dos métodos utilizados para estimação da deformação dinâmica a partir do deslocamento.....	70
Figura 4.1 – Modelo da viga em balanço utilizada para simulação numérica .....	84
Figura 4.2 – Modelo da viga gerado no ANSYS® com elementos quadrilaterais de 15 mm de comprimento na direção $x$ .....	87
Figura 4.3 – (a) Ortogonalidade ponderada pela massa dos 6 primeiros modos de flexão; (b) MAC entre os modos simulados.....	89
Figura 4.4 – (a) MAC entre os 10 modos de deslocamentos na direção $z$ simulados; (b) MAC entre os 10 primeiros modos de deformação $\varepsilon_x$ simulados.....	90
Figura 4.5 – Espectro de amplitude da FRF estimada e coerência para o <i>drive point</i> .....	91
Figura 4.6 – Espectro de amplitude de Transmissibilidade e coerência para o ponto 4 distanciado 60 mm do engaste .....	92
Figura 4.7 – Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados para os modos de flexão estimados utilizando FRF. Picos únicos para cada coeficiente correspondentes às frequências naturais da viga para os modos de flexão, representando modos desacoplados.....	93
Figura 4.8 - Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados estimados utilizando Transmissibilidade. Picos de cada coeficiente aparecendo em diversas frequências.....	94

Figura 4.9 – FRF de deformação estimada utilizando a matriz de transformação, método da curvatura e HMA. (a) ponto do engaste (b) ponto distante 45 mm do engaste (c) ponto distante 225 mm do engaste .....	97
Figura 4.10 – Transmissibilidade de deformação estimada utilizando a matriz de transformação, método da curvatura e HMA. (a) ponto do engaste (b) ponto distante 45 mm do engaste (c) ponto distante 225 mm do engaste.....	97
Figura 4.11 – Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados estimados para excitação harmônica em 70 Hz.....	98
Figura 4.12 – Maior participação do segundo modo dentre os 5 primeiros modos de flexão da viga na resposta em 70 Hz determinada pelos coeficientes generalizados.....	99
Figura 4.13 – Deformação $\varepsilon_x$ no ponto afastado 60 mm do engaste estimada pela DST, HMA e método da curvatura .....	100
Figura 5.1 – Foto (à direita) e ilustração esquemática (à esquerda) da bancada de testes utilizada para os experimentos .....	104
Figura 5.2 - Microlog® Analyzer AX SKF utilizado no experimento para estimativas de FRF e transmissibilidade .....	106
Figura 5.3 – Placa retangular de alumínio e malha de medição .....	107
Figura 5.4 – Espectro de amplitude de Acelerância e a coerência do drive point.....	108
Figura 5.5 – Espectro de amplitude de Acelerância e a coerência do ponto 22 da placa e excitação ponto 40.....	109
Figura 5.6 – Espectro de amplitude da receptância para o <i>drive point</i> .....	110
Figura 5.7 – Modelo em elementos finitos da placa retangular realizado no ANSYS®.....	111
Figura 5.8 – Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados dos 6 modos de corpo rígido e do primeiro modo elástico (7º modo linha cheia-azul).....	112
Figura 5.9 - Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados dos 5 primeiros modos elásticos. ....	113
Figura 5.10 – Comparação entre a receptância <i>drive point</i> medida, ajustada pela HMA e por superposição considerando os modos de corpo rígido .....	115
Figura 5.11 – Receptâncias ajustadas pela HMA e superposição sem modos de corpo rígido comparadas com a receptância medida do <i>drive point</i> .....	116
Figura 5.12 – Receptâncias tridimensionais para o <i>drive point</i> .....	117
Figura 5.13 – (a) malha de diferenças finitas; (b) malha de elementos finitos 4 nós; (c) malha de elementos finitos 8 nós. ....	119
Figura 5.14 – Frequências de 330 e 880 Hz selecionadas no espectro de amplitude da soma das FRF medidas nos 99 pontos. ....	120
Figura 5.15 – Modos operacionais de deformação ( $\varepsilon_x/N$ ) na frequência de 330 Hz utilizando MEF de 4 e 8 nós e MDF. ....	120
Figura 5.16 – Modos operacionais de deformação ( $\varepsilon_x/N$ ) na frequência de 330 Hz utilizando MEF de 4 e 8 nós e MDF.....	121

Figura 5.17 - Frequências de 200 e 580 Hz selecionadas no espectro de amplitude da soma das FRF medidas nos 99 pontos. ....	122
Figura 5.18 – Modos operacionais de deformação ( $\epsilon_y/N$ ) na frequência de 200 Hz utilizando MEF de 4 e 8 nós e MDF.....	122
Figura 5.19 – Modos operacionais de deformação ( $\epsilon_y/N$ ) na frequência de 580 Hz utilizando MEF de 4 e 8 nós e MDF.....	123
Figura 5.20 - Frequências de 370 e 720 Hz selecionadas no espectro de amplitude da soma das FRF medidas nos 99 pontos. ....	123
Figura 5.21 – Modos operacionais de deformação cisalhante ( $\gamma_{xy}/N$ ) na frequência de 370 Hz utilizando MEF de 4 e 8 nós e MDF. ....	123
Figura 5.22 – Modos operacionais de deformação cisalhante ( $\gamma_{xy}/N$ ) na frequência de 720 Hz utilizando MEF de 4 e 8 nós e MDF. ....	124
Figura 5.23 – Deformações $\epsilon_1$ e direções principais para os nove primeiros modos elásticos. ...	126
Figura 5.24 – Placa retangular com recorte e malha de medição .....	128
Figura 5.25 – Espectro de amplitude de Acelerância e a coerência do <i>drive point</i> .....	129
Figura 5.26 – Espectro de amplitude de Acelerância e a coerência do ponto 56 da placa e excitação ponto 41 .....	130
Figura 5.27 – Modelo em elementos finitos da placa retangular com recorte realizado no ANSYS® 11.0.....	131
Figura 5.28 – MAC para os 31 modos tridimensionais simulados.....	132
Figura 5.29 - Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados dos 5 primeiro modos elástico.....	133
Figura 5.30 – Comparação entre a receptância <i>drive point</i> medida, ajustada pela HMA e por superposição .....	134
Figura 5.31 – Pontos simetricamente dispostos ao redor do ponto de análise necessários para a estimação do tensor de deformação utilizando MDF .....	135
Figura 5.32 – FRF de deformação $\epsilon_x$ medida e função de coerência .....	137
Figura 5.33 – FRF de deformação $\epsilon_y$ medida e função de coerência .....	137
Figura 5.34 – FRF de deformação $\gamma_{xy}$ medida e função de coerência .....	138
Figura 5.35 – Comparação entre a FRF de deformação $\epsilon_x$ medida e estimada .....	139
Figura 5.36 - Comparação entre a FRF de deformação $\epsilon_y$ medida e estimada.....	139
Figura 5.37 - Comparação entre a FRF de deformação $\gamma_{xy}$ medida e estimada .....	140
Figura 5.38 – Erros na estimação da deformação em baixa frequência quando não são considerados os modos de corpo rígido na HMA .....	141
Figura 5.39 – Comparação entre as deformações determinadas por superposição e medidas ....	142
Figura 5.40 – Comparação entre as deformações medida e estimada por HMA considerando apenas 16 modos.....	144

Figura 5.41 – Melhora no ajuste na $\varepsilon_x$ em baixa frequência e perda de informação em altas frequências utilizando apenas $M = 10$ modos e $f_M = 393$ Hz .....	144
Figura 5.42 – Aproximação em termos de amplitude da deformação $\varepsilon_x$ estimada com a medida nas duas primeiras frequências naturais da placa. ....	145
Figura 5.43 – Aproximação entre a FRF de deformação equivalente estimada e medida. ....	146
Figura 5.44 – Comparação entre a deformação $\varepsilon_x$ medida e estimada utilizando diferentes distâncias $h$ no MDF.....	147
Figura 5.45 – Comparação entre a deformação $\varepsilon_{eq}$ medida e estimada utilizando diferentes distâncias $h$ no MDF.....	147
Figura 5.46 – (a) 40 pontos de medição (b) 22 pontos de medição selecionados aleatoriamente para estimação dos coeficientes generalizados.....	148
Figura 5.47 – MAC entre os modos tridimensionais referentes aos 40 pontos .....	148
Figura 5.48 – Comparação entre as FRF de deformação medida e estimada considerando 40 pontos e 31 modos .....	149
Figura 5.49 - MAC entre os modos tridimensionais referentes aos 22 pontos.....	150
Figura 5.50 - Comparação entre as FRF de deformação medida e estimada considerando 22 pontos e 16 modos .....	151
Figura 5.51 – Espectro de amplitude de Transmissibilidade e a coerência do ponto 40.....	152
Figura 5.52 - Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados dos 5 primeiro modos elástico utilizando transmissibilidade. ....	153
Figura 5.53 – Transmissibilidade de deformação $\varepsilon_x$ medida e estimada no ponto de validação e função de coerência da deformação medida.....	154
Figura 5.54 Transmissibilidade de deformação $\varepsilon_y$ medida e estimada no ponto de validação e função de coerência da deformação medida.....	154
Figura 5.55 - Transmissibilidade de deformação $\gamma_{xy}$ medida e estimada no ponto de validação e função de coerência .....	155
Figura 5.56 – FRF Deformação $\varepsilon_x$ estimada e medida utilizando matriz de transformação .....	156
Figura 5.57 – FRF Deformação $\varepsilon_y$ estimada e medida utilizando matriz de transformação .....	156
Figura 5.58 – FRF Deformação $\gamma_{xy}$ estimada e medida utilizando matriz de transformação .....	157
Figura 5.59 – Transmissibilidade de deformação $\varepsilon_x$ estimada utilizando a matriz de transformação .....	157
Figura 5.60 – Transmissibilidade de deformação $\varepsilon_y$ estimada utilizando a matriz de transformação e medida.....	158
Figura 5.61 – Transmissibilidade de deformação $\gamma_{xy}$ utilizando a matriz de transformação estimada e medida .....	158
Figura 5.62 – Malha de elementos finitos quadrilateral de 8 nós.....	160
Figura 5.63 – Frequências selecionadas para visualização dos modos operacionais próximas às frequências naturais da placa.....	160

Figura 5.64 – Modal Assurance Criterion (MAC) dos modos de deformação (a) Superposição modal e FRF (b) Superposição modal e Transmissibilidade.....	161
Figura 5.65 – Modos de deformação operacionais $\varepsilon_x$ na frequência de 150 Hz – excitação central e referência canto inferior.....	162
Figura 5.66 – Direção da máxima deformação principal e distribuição (mapa de cores) da deformação equivalente em 150 Hz .....	162
Figura 5.67 – Modos de deformação operacionais identificado pela FRF semelhante ao identificado pela transmissibilidade – excitação canto superior e referência central - $\varepsilon_x$ na frequência de 150 Hz.....	163
Figura 5.68 - Modos de deformação operacionais $\gamma_{xy}$ na frequência de 200 Hz – Excitação central e referência canto.....	163
Figura 5.69 – Modos de deformação operacionais $\gamma_{xy}$ na frequência de 200 Hz – Excitação e referência centrais.....	164
Figura 5.70 - Modos de deformação operacionais $\gamma_{xy}$ na frequência de 200 Hz – Excitação canto e referência central .....	164
Figura 5.71 – Modal Assurance Criterion (MAC) dos modos de deformação (a) Superposição modal e FRF (b) Superposição modal e Transmissibilidade – nova posição da excitação .....	165
Figura 5.72 - Direção da máxima deformação principal e distribuição (mapa de cores) da deformação equivalente.....	166
Figura 5.73 - Modos de deformação operacionais $\varepsilon_x$ .....	167
Figura 5.74 - Modos de deformação operacionais $\varepsilon_y$ .....	167
Figura 5.75 - Modos de deformação operacionais $\gamma_{xy}$ .....	168
Figura 5.76 – Distribuição da deformação $\varepsilon_x$ ao longo da espessura da placa na frequência de 870 Hz .....	168
Figura 5.77 – Placa com recorte engastada (a) placa e bloco (b) detalhe do rasgo e filete de solda .....	171
Figura 5.78 – Foto da placa engastada – indicações das posições de validação e excitação .....	172
Figura 5.79 – Espectro de amplitude de Acelerância e a coerência, resposta ponto 41 e excitação 2 .....	173
Figura 5.80 - Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados dos 5 primeiros modos ....	175
Figura 5.81 – Pontos simetricamente dispostos ao redor dos pontos de análise necessários para a estimação do tensor de deformação utilizando MDF .....	176
Figura 5.82 – FRF de deformação $\varepsilon_x$ medida e função de coerência – ponto de validação 1 .....	176
Figura 5.83 - FRF de deformação $\varepsilon_y$ medida e função de coerência – ponto de validação 1 .....	177
Figura 5.84 - FRF de deformação $\gamma_{xy}$ medida e função de coerência – ponto de validação 1.....	177
Figura 5.85 – Comparação entre a FRF de deformação $\varepsilon_x$ medida e estimada – ponto validação 1 .....	178
Figura 5.86 – Comparação entre a FRF de deformação $\varepsilon_y$ medida e estimada – ponto validação 1 .....	178

Figura 5.87 – Comparação entre a FRF de deformação $\gamma_{xy}$ medida e estimada – ponto validação 1 .....	178
Figura 5.88 – FRF de deformação $\varepsilon_x$ medida e função de coerência – ponto de validação 2 .....	179
Figura 5.89 - FRF de deformação $\varepsilon_y$ medida e função de coerência – ponto de validação 2 .....	180
Figura 5.90 - FRF de deformação $\gamma_{xy}$ medida e função de coerência – ponto de validação 2.....	180
Figura 5.91 – Comparação entre a FRF de deformação $\varepsilon_x$ medida e estimada – ponto validação 2 .....	181
Figura 5.92 – Comparação entre a FRF de deformação $\varepsilon_y$ medida e estimada – ponto validação 2 .....	181
Figura 5.93 – Comparação entre a FRF de deformação $\gamma_{xy}$ medida e estimada – ponto validação 2 .....	182
Figura 5.94 – Posição da excitação e referência para estimativa das transmissibilidades .....	183
Figura 5.95 – Espectro de amplitude de Transmissibilidade e coerência do ponto 14.....	183
Figura 5.96 - Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados dos 5 primeiros modos ....	184
Figura 5.97 - Transmissibilidade de deformação $\varepsilon_x$ medida e estimada no ponto de validação 1 .....	185
Figura 5.98 - Transmissibilidade de deformação $\varepsilon_y$ medida e estimada no ponto de validação 1 .....	185
Figura 5.99 - Transmissibilidade de deformação $\gamma_{xy}$ medida e estimada no ponto de validação 1 .....	185
Figura 5.100 – Transmissibilidade $\varepsilon_x$ medida e coerência no ponto de validação 2 .....	186
Figura 5.101 – Transmissibilidade $\varepsilon_y$ medida e coerência no ponto de validação 2 .....	187
Figura 5.102 – Transmissibilidade $\gamma_{xy}$ medida e coerência no ponto de validação 2 .....	187
Figura 5.103 - Transmissibilidade de deformação $\varepsilon_x$ medida e estimada no ponto de validação 2 .....	188
Figura 5.104 - Transmissibilidade de deformação $\varepsilon_y$ medida e estimada no ponto de validação 2 .....	188
Figura 5.105 - Transmissibilidade de deformação $\gamma_{xy}$ medida e estimada no ponto de validação 2 .....	188
Figura 5.106 – Modo de flexão em torno do eixo $z$ - 10° modo elástico – 1135,9 Hz – Simulado no ANSYS® .....	189
Figura 5.107 – FRF de deformação $\varepsilon_x$ estimada por: HMA e matriz de transformação; e FRF medida no ponto de validação 1 .....	190
Figura 5.108 – FRF de deformação $\varepsilon_y$ estimada por: HMA e matriz de transformação; e FRF medida - ponto de validação 1 .....	191
Figura 5.109 – FRF de deformação $\gamma_{xy}$ estimada por: HMA e matriz de transformação; e FRF medida - ponto de validação 1 .....	191

Figura 5.110 – Transmissibilidade de deformação $\varepsilon_x$ estimada por: HMA e matriz de transformação; e Transmissibilidade medida no ponto de validação 2 .....	192
Figura 5.111 – Transmissibilidade de deformação $\varepsilon_y$ estimada por: HMA e matriz de transformação; e Transmissibilidade medida no ponto de validação 2 .....	192
Figura 5.112 – Transmissibilidade de deformação $\gamma_{xy}$ estimada por: HMA e matriz de transformação; e Transmissibilidade medida no ponto de validação 2 .....	193
Figura 5.113 – FRF de deformação $\gamma_{xy}$ estimadas por HMA considerando matrizes modais simuladas para a condição livre – livre e engastada, e também a FRF medida.....	194
Figura 5.114 - FRF de deformação $\gamma_{xy}$ estimadas pela matriz de transformação considerando matrizes modais simuladas para a condição livre – livre, e engastada e também a FRF medida	194
Figura 5.115 – Posição da excitação harmônica e referência placa engastada.....	197
Figura 5.116 – Força de excitação de amplitude 10 N e frequência 32,47 Hz aplicada na placa	198
Figura 5.117 – Deslocamentos harmônicos de pontos da placa engastada .....	199
Figura 5.118 – Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados dos 5 primeiros modos da placa.....	200
Figura 5.119 – Participação maior do primeiro modo na resposta em 32 Hz .....	200
Figura 5.120 – Componentes de deformação $\varepsilon_x$ , $\varepsilon_y$ e $\gamma_{xy}$ no domínio do tempo – medidas e estimadas por HMA- ponto de validação 1 .....	202
Figura 5.121 – 24 pontos de medição selecionados para aplicação dos métodos em malha de medição reduzida.....	203
Figura 5.122 - Componentes de deformação $\varepsilon_x$ , $\varepsilon_y$ e $\gamma_{xy}$ no domínio do tempo – medidas e estimadas pela matriz de transformação - ponto de validação 1 .....	204
Figura 5.123 – Amplitude e coerência das acelerações triaxiais do <i>drive point</i> .....	207
Figura 5.124 – Amplitude e coerência das transmissibilidades do ponto 77 .....	207
Figura 5.125 – malha de elementos finitos 4 nós .....	208
Figura 5.126 – Modos de deformação $\varepsilon_x$ na frequência de 870 Hz .....	208
Figura 5.127 - Modos de deformação $\varepsilon_y$ na frequência de 570 Hz .....	209
Figura 5.128 - Modos de deformação $\gamma_{xy}$ na frequência de 660 Hz.....	209
Figura 5.129 – Deformação equivalente na frequência de 150 Hz.....	209
Figura 5.130 – Deformação equivalente na frequência de 570 Hz.....	210
Figura 5.131 – <i>Modal Assurance Criterion</i> entre os modos de deformação equivalente .....	210

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Posicionamento da Excitação e Referência para estimativas de FRF e transmissibilidade .....	59
Tabela 4.1 – Parâmetros utilizados na simulação por elementos finitos ANSYS .....	86
Tabela 4.2 – Parâmetros utilizados na extração da matriz de massa e rigidez no ANSYS .....	88
Tabela 4.3 – Parâmetros do processamento e estimativa de FRF e Transmissibilidade .....	91
Tabela 5.1 – Parâmetros do processamento e estimativa de FRF no experimento placa retangular .....	109
Tabela 5.2 – Parâmetros utilizados na simulação por elementos finitos ANSYS .....	111
Tabela 5.3 – Parâmetros utilizados na simulação por elementos finitos ANSYS placa com recorte .....	131
Tabela 5.4 – Especificação técnica do extensômetro tipo roseta utilizado .....	136
Tabela 5.5 – Parâmetros utilizados na simulação por elementos finitos ANSYS placa engastada .....	174

## Lista de Abreviaturas e Siglas

### *Letras Latinas*

$a_r$	massa modal	
${}_r\bar{A}_{jk}$	constante modal	
[A]	matriz da equação de estado	
$b$	largura	[m]
$b_r$	rigidez modal amortecimento viscoso	
[B]	matriz da equação de estado	
$c$	distância da linha neutra até a superfície de máxima tensão	
$c_r$	coeficiente generalizado de Fourier do modo $r$	
$C_{ijkl}$	tensor de quarta ordem de propriedades elásticas	
$\{\tilde{C}\}$	vetor dos coeficientes generalizados de Fourier na frequência	
$\{\tilde{C}_{est}\}$	vetor dos coeficientes estimados na frequência	
[C]	matriz de amortecimento viscoso	
$[\bar{C}]$	matriz de amortecimento viscoso proporcional	
$d$	variação	
$d_r, d_\lambda$ e $d_G$	função de amortecimento	
<b>D</b>	operador diferencial	
[D]	operador diferencial	
$[\bar{D}]$	matriz de amortecimento hysterético	
$e$	espessura	[m]
$\hat{e}$	versor tridimensional	
$E$	módulo de Elasticidade longitudinal	[GPa]
$f_{máx}$	frequência máxima	[Hz]
$f_M$	frequência referente ao modo $M$	
$f_s$	frequência de amostragem	[Hz]
$f(t)$	força excitadora	

$f(x)$	função de $x$	
$f'(x)$	primeira derivada de $f(x)$	
$f''(x)$	segunda derivada de $f(x)$	
$\{F\}$	vetor força	[N]
$F_k$	força modal	
$G$	módulo de elasticidade transversal	[GPa]
$G_{ff}(\omega)$	densidade espectral de potência positiva da entrada	
$G_{xx}(\omega)$	densidade espectral de potência positiva da saída	
$G_{xf}(\omega), G_{fx}(\omega)$	densidade espectral de potência cruzada positiva	
$h$	distância	[m]
$H_1(\omega)$	estimador de FRF	
$H_2(\omega)$	estimador de FRF	
$[H]$	matriz de relação tensão – deformação	
$[\hat{H}]$	matriz de relação tensão – deformação	
$[H(\omega)]$	matriz de FRF	
$[H_\varepsilon]$	matriz de FRF de deformação	
$[I]$	matriz identidade	
$k_r$	rigidez modal	
$[K]$	matriz de rigidez	
$L$	comprimento	[m]
$L_2^3(\Omega)$	Espaço completo de Hilbert	
$m_r$	massa modal	
$M$	número de modos	
$[M]$	matriz de massa	
$\mathbf{n}(x)$	vetor normal ao plano de corte	
$n_1, n_2, n_3$	cossenos diretores	
$N$	número de graus de liberdades	
$[N]$	matriz de cossenos diretores do vetor unitário	
$P$	ponto	

$[P]$	matriz de coordenadas locais do elemento finito	
$\{q(t)\}$	função de transformação de coordenadas modais	
$\{\dot{q}(t)\}$	derivada primeira da função de transformação de coordenadas modais	
$\{\ddot{q}(t)\}$	derivada segunda da função de transformação de coordenadas modais	
$r$	modo	
$s$	escalar complexo	
$S_{jk}(\omega)$	função de resposta em frequência de deformação	
$S_{ff}(\omega)$	densidade espectral de potência da entrada	
$S_{xx}(\omega)$	densidade espectral de potência da saída	
$S_{xf}(\omega), S_{fx}(\omega)$	densidade espectral de potência cruzada	
${}_r S_{jk}$	constante modal de deformação	
$t$	tempo	[s]
$\mathbf{t}_n$	vetor de tensão	
$T_{ij}(\omega)$	Transmissibilidade	
$[T]$	matriz de transformação	
$u, v, w$	componentes de deslocamento	
$u_i$	deslocamento tridimensional	
$\ddot{u}$	derivada de segunda ordem de $u$ - aceleração	
$u(x)$	deslocamento na direção $x$ em função de $x$	
$\tilde{u}(p, \omega)$	deslocamento de um ponto $p$ na frequência	
$\tilde{u}(x, s)$	deslocamento de um ponto $x$ na frequência	
$\tilde{u}_M(x, s)$	aproximação de $u$ sem considerar o resíduo	
$\tilde{u}(\xi, \eta)$	aproximação de $u$ em função das coordenadas locais	
$\{u(t)\}$	vetor de estado	
$\{\bar{u}\}$	solução da equação de estado	
$\{\tilde{U}\}$	vetor de resposta medida no domínio da frequência	

$v(x)$	deslocamento na direção $y$ em função de $x$
$\tilde{v}(\xi, \eta)$	aproximação de $u$ em função das coordenadas locais
$V_p$	Volume de um elemento finito
$x, y, z$	eixos coordenados
$x_0$	ponto
$\{x(t)\}$	vetor de deslocamento
$\{\dot{x}(t)\}$	vetor de velocidade
$\{\ddot{x}(t)\}$	vetor de aceleração
$\{X\}$	vetor de amplitudes

### ***Letras Gregas***

$\alpha(\omega)$	receptância
$\beta$	constante do amortecimento viscoso proporcional
$\beta_1, \beta_2, \dots$	constante do polinômio de aproximação do deslocamento
$\{\beta\}$	vetor das constantes do polinômio $\beta$
$\gamma, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \dots$	componentes de deformação de cisalhamento
$\gamma^2(\omega)$	função de coerência
$\Gamma$	região de contorno
$\Gamma_1$	região de contorno com condição essencial
$\Gamma_2$	região de contorno com condição natural
$\delta_{mr}$	Delta de Kronecher
$\Delta$	variação
$\varepsilon_{ij}$	tensor de deformação
$\varepsilon, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$	componentes de deformação normal
$\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23} \dots$	componentes de deformação de cisalhamento
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	deformação principal

$\varepsilon_{eq}$	deformação equivalente	
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	componentes de deformação normal	
$\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz} \dots$	componentes de deformação de cisalhamento	
$\varepsilon(t)$	resposta temporal de deformação	
$\{\varepsilon\}$	vetor de deformação	
$\{\tilde{\varepsilon}\}$	vetor de deformação na frequência	
$[\varepsilon]$	matriz modal de deformação	
$\zeta_r$	fator de amortecimento modal	
$\eta$	coordenada nodal referente ao eixo y	
$\eta_r$	fator de perda por amortecimento	
$\theta$	ângulo	
$\theta_p$	direção da deformação principal	
$g$	constante do amortecimento viscoso proporcional	
$\kappa_r^2$	auto-valor complexo do amortecimento hysterético	
$\lambda$	constante de Lamé	
$\nu$	coeficiente de Poisson	
$\xi$	transformação de coordenadas ,coordenada nodal	
$\rho$	densidade específica	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$	componentes de tensão normal	[MPa]
$\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$	componentes de tensão cisalhante	[MPa]
$\sigma_{ij}$	tensor de tensão	
$\{\sigma\}$	vetor de tensão	
$\{\tilde{\sigma}\}$	vetor de tensão na frequência	
$\upsilon$	constante do amortecimento hysterético	
$\varphi$	constante do amortecimento hysterético	
$\varphi_r$	parâmetros nodais	
$\phi_{jr}$	componente modal de deslocamento ponto $j$ e modo $r$	

$\phi_{kr}$	componente modal de deslocamento ponto $k$ e modo $r$	
$\phi_{pr}$	componente modal de deslocamento ponto $p$ e modo $r$	
$\{\phi_r\}$	modo $r$ próprio do sistema normalizado pela massa	
$[\Phi]$	matriz dos modos normalizados pela massa	
$\psi_{jr}$	componente modal de deslocamento ponto $j$ e modo $r$	
$\psi_{kr}$	componente modal de deslocamento ponto $k$ e modo $r$	
$\{\psi_r\}$	modo $r$ próprio do sistema	
$\{\psi_r^{\prime}\}$	auto vetor complexo da equação de estado	
$[\Psi]$	matriz modal	
$[\Psi^{\prime}]$	matriz modal complexa do vetor de estado	
$\omega$	frequência angular	[rad/s]
$\omega_r$	frequência natural angular	[rad/s]
$\text{diag}[\omega_r^2]$	matriz espectral diagonal	
$\Omega$	domínio	

### ***Superescritos***

-1	inversa da matriz
$T$	matriz transposta
-	matriz pseudo inversa
*	conjugado
'	transposição de coordenada

### ***Subscritos***

A,B,C	indicativo de direção
est	estimado
res	residual ou erro de truncamento
r	referente ao modo

### ***Siglas***

<b>AME</b>	Análise Modal Experimental
<b>AMO</b>	Análise Modal Operacional
<b>ARMA</b>	Autoregressive Moving-Average method
<b>DST</b>	Displacement to Strain Transformation ou matriz de Transformação Deslocamento – Deformação
<b>FDP</b>	Função Densidade de Probabilidade
<b>FFT</b>	Fast Fourier Transform ou transformada rápida de Fourier
<b>FRF</b>	Função Resposta em Frequência
<b>FRI</b>	Função Resposta ao Impulso
<b>GDL</b>	Grau de Liberdade
<b>HMA</b>	Hybrid Modal Analysis ou análise modal híbrida
<b>HSA</b>	Hybrid Strain Analysis ou Análise Modal Híbrida de deformação
<b>ITD</b>	Ibrahim Time Domain
<b>LSCE</b>	Least Squares Complex Exponential
<b>MAC</b>	Modal Assurance Criterion
<b>MDF</b>	Método de Diferenças Finitas
<b>MEF</b>	Método de Elementos Finitos
<b>MSCC</b>	Mode Shape Correlation Coefficient
<b>NExT</b>	Natural Excitation Technique
<b>ODS</b>	Operating Deflection Shapes
<b>POC</b>	Pseudo – Orthogonality Check

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução.....</b>	<b>1</b>
1.1	Revisão da Literatura .....	2
1.2	Motivação .....	5
1.3	Objetivo Geral.....	6
1.4	Objetivos Específicos .....	7
1.5	Apresentação do Trabalho .....	8
<b>2</b>	<b>Fundamentos Teóricos.....</b>	<b>10</b>
2.1	A Deformação e sua relação com o Deslocamento .....	10
2.1.1	Deformações de flexão em vigas.....	13
2.2	Deformações principais e deformação equivalente no plano .....	15
2.3	Métodos numéricos utilizados na relação deslocamento-deformação.....	18
2.3.1	Método de Diferenças Finitas.....	19
2.3.2	Erros na estimação da deformação pelo Método de Diferenças Finitas.....	20
2.3.1	Método de Elementos Finitos.....	22
2.4	Métodos Convencionais de Medição de Deformação em Superfícies.....	26
2.4.1	Extensometria Elétrica.....	27
2.5	Análise Modal.....	30
2.5.1	Análise Modal de Sistemas Contínuos .....	31
2.5.2	Análise Modal Teórica .....	35
2.5.3	Análise Modal Experimental .....	45
2.5.4	Análise Modal Operacional .....	48
2.5.5	Métodos de validação dos resultados estimados pela análise modal .....	51
2.6	Análise da Forma de Deflexão Operacional (ODS) .....	53
2.6.1	Transmissibilidade.....	55
2.7	Função Resposta em Frequência de Deformação .....	64
2.8	Resumo do Capítulo.....	67
<b>3</b>	<b>Métodos de Estimação de Deformação .....</b>	<b>69</b>
3.1	Introdução .....	69
3.2	Matriz de Transformação Deslocamento – Deformação .....	70
3.3	Análise Modal Híbrida.....	73

3.3.1	Modos Reais e a Aproximação do Deslocamento .....	75
3.3.2	Aplicação da Análise Modal Híbrida .....	76
3.3.3	Tamanho do Modelo Numérico e Experimental .....	79
3.3.4	Coefficientes Generalizados de Fourier .....	82
3.4	Resumo do Capítulo .....	83
<b>4</b>	<b>Simulação Numérica .....</b>	<b>84</b>
4.1	Introdução .....	84
4.2	Modelo utilizado na simulação .....	84
4.3	Modelo da viga em elementos finitos .....	85
4.4	Ortogonalidade dos modos .....	88
4.5	Simulação das FRF e Transmissibilidades .....	90
4.6	Análise Modal Híbrida .....	92
4.7	Matriz de Transformação .....	95
4.8	Cálculo da deformação utilizando método de diferenças finitas .....	95
4.9	Comparação entre o método da curvatura, matriz de transformação e HMA .....	96
4.1	Comparação no domínio do tempo .....	98
4.2	Resumo do Capítulo .....	100
<b>5</b>	<b>Procedimentos e Resultados Experimentais .....</b>	<b>102</b>
5.1	Introdução .....	102
5.2	Bancada experimental e equipamentos utilizados .....	103
5.3	Experimento placa retangular .....	107
5.3.1	Análise modal híbrida na placa retangular .....	110
5.3.2	Modos de deformação operacional .....	117
5.3.3	Considerações finais .....	126
5.4	Experimento placa retangular com recorte .....	128
5.4.1	Estimação das receptâncias tridimensionais pela HMA .....	129
5.4.2	Cálculo das FRF de deformação utilizando diferenças finitas .....	134
5.4.3	Medição da deformação utilizando extensômetro tipo roseta .....	136
5.4.4	Comparação entre a FRF de deformação medida e estimada .....	138
5.4.5	Comparação entre a FRF de deformação medida e calculada por superposição... ..	141
5.4.6	Estimação da deformação considerando menos modos na HMA .....	142
5.4.7	Estimação da deformação considerando diferentes distâncias $h$ .....	146
5.4.8	Estimação da deformação considerando menos pontos na HMA .....	148

5.4.9	Comparação entre a Transmissibilidade de deformação medida e estimada .....	151
5.4.10	Estimação da deformação utilizando matriz de transformação .....	155
5.4.11	Modos de deformação operacionais utilizando HMA .....	159
5.4.12	Considerações finais .....	169
5.5	Placa retangular com recorte engastada .....	170
5.5.1	Deformação utilizando a HMA e FRF .....	172
5.5.2	Deformação utilizando a HMA e Transmissibilidade .....	182
5.5.3	Deformação utilizando a matriz de transformação .....	189
5.5.4	Estimação da deformação utilizando matrizes modais da condição livre-livre.....	193
5.5.5	Considerações finais .....	195
5.6	Estimação da deformação no domínio do tempo .....	196
5.6.1	Deformação utilizando a análise modal híbrida .....	199
5.6.2	Deformação utilizando a matriz de transformação .....	203
5.6.3	Considerações finais .....	205
5.7	Estimação da deformação pelo método direto .....	206
5.7.1	Considerações finais .....	211
<b>6</b>	<b>Conclusão e Sugestões para Próximos Trabalhos .....</b>	<b>214</b>
	<b>Referências .....</b>	<b>216</b>
	<b>ANEXO A – Carta Acelerômetro Uniaxial .....</b>	<b>221</b>
	<b>ANEXO B – Carta Acelerômetro Triaxial.....</b>	<b>223</b>
	<b>APÊNDICE A – Modos Naturais da Viga .....</b>	<b>225</b>
	<b>APÊNDICE B – Modos Naturais da Placa Retangular.....</b>	<b>227</b>
	<b>APÊNDICE C – Modos Naturais da Placa Retangular com Recorte .....</b>	<b>229</b>
	<b>APÊNDICE C – Modos Naturais da Placa Engastada.....</b>	<b>231</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O conhecimento da deformação dinâmica em máquinas e equipamentos, principalmente em condições operacionais, torna-se cada vez mais importante. Certos níveis de deformações e tensões dinâmicas, presentes por um determinado período de tempo, podem causar falhas por fadiga, às vezes, catastróficas. Elevados níveis de deformação podem ser atingidos quando ocorrem alterações nas condições de funcionamento das máquinas, ou quando as mesmas estão sujeitas a inconvenientes operacionais, dentre eles: desgastes, desalinhamentos, desbalanceamentos e empenamentos. Além disso, as reais condições de operação podem não ter sido consideradas nos projetos das máquinas e equipamentos, os quais normalmente buscam máquinas com maior potência, maiores velocidades, entretanto, mais compactas, leves e às vezes, menos resistentes. Assim sendo, os problemas de projeto associado às condições operacionais fazem com que o monitoramento da deformação dinâmica seja considerado.

As deformações dinâmicas, convencionalmente, são obtidas experimentalmente utilizando extensômetros. Entretanto, essas medições nem sempre são possíveis. Adicionalmente, quando se trata da caracterização da distribuição da deformação ao longo da superfície de uma estrutura, ou seja, a medição da deformação de muitos pontos, a utilização de extensômetros se torna relativamente onerosa. Os extensômetros precisam ser colados e não podem ser reutilizados ou movidos de ponto a ponto.

Neste sentido, com o desenvolvimento das técnicas de análise modal, na qual geralmente são utilizados acelerômetros nas medições, e o conhecimento das relações entre os deslocamentos e as deformações da teoria da elasticidade, foram propostos métodos que utilizam os resultados da análise modal para se estimar as deformações dinâmicas em estruturas. Esses métodos consistem basicamente na diferenciação espacial do deslocamento obtido pela análise modal e utilizam, na sua maioria, o método de diferenças finitas para a solução das equações diferenciais do problema de elasticidade.

A próxima seção mostra uma revisão da literatura que trata deste assunto.

## 1.1 Revisão da Literatura

Alguns métodos de avaliação de deformação dinâmica a partir de parâmetros modais foram desenvolvidos, no domínio do tempo ou no domínio da frequência. No trabalho publicado em 1989, Bernasconi e Ewins mostraram de que maneira extensômetros e transdutores de deslocamentos podem ser utilizados para a determinação dos modos de deformação normalizados pela massa. Os modos de deformação são expressos pela derivação espacial dos modos de deslocamentos. A partir disso, uma expressão generalizada para a função resposta em frequência da deformação é abordada, a qual é semelhante à expressão conhecida para a receptância, ou seja, função resposta em frequência do deslocamento. Assim, os valores de deformação podem ser encontrados através da superposição modal, da mesma forma que é possível se encontrar a resposta de deslocamento. O estudo foi baseado em experimentos, onde foram avaliadas as deformações uniaxiais de flexão de uma viga e também a partir do tensor de deformação da superfície de uma placa engastada. O caso teórico apresentado é fundamental para o entendimento da análise de deformação dinâmica. No entanto, sua aplicação prática se restringe ao caso de amortecimento proporcional.

A partir do estudo realizado por Bernasconi e Ewins (1989), a revisão da literatura pode ser separada em dois grupos. No primeiro grupo, estão incluídas as pesquisas que se referem à análise de deformação unidirecional. Posteriormente, destacam-se as análises tridimensionais e do tensor de deformação.

Especificamente no estudo da deformação unidirecional, alguns trabalhos foram realizados. Koss e Karczub (1995) desenvolveram um procedimento para se estimar a deformação dinâmica em uma viga utilizando dois acelerômetros. Os dados experimentais ao longo da viga permitiram o cálculo dos termos da equação de onda a partir de um problema inverso. Essa solução foi utilizada para se estimar as respostas de deformação dinâmica a partir da derivada de segunda ordem da equação de onda, o qual definia o comportamento dinâmico em termos do deslocamento transversal e a flexão da viga. As deformações estimadas foram comparadas com as deformações medidas por meio de extensômetros. As comparações mostraram que o método

de estimativa de deformação é capaz de fornecer valores de deformações aproximados aos valores reais.

Okubo e Yamaguchi (1995) estimaram a distribuição dinâmica de deformação em uma placa e, posteriormente, em um garfo frontal de bicicleta sujeita as condições de operação, utilizando a análise modal experimental e a matriz de transformação do deslocamento para a deformação. Essa matriz é composta pelos modos de deformação e deslocamentos do corpo em estudo.

Em Karczub e Norton (1999), a flexão de uma viga é novamente estudada. A abordagem é baseada no método de diferenças finitas e na derivada de segunda ordem do deslocamento transversal da viga, ou seja, a análise da curvatura da viga. Os pontos de medição foram simetricamente distribuídos ao redor do ponto de análise e a deformação não pôde ser prevista nas regiões de engastes ou descontinuidades, pois o método de diferenças finitas baseou-se no método de diferenças finitas centrais. O principal objetivo do trabalho desenvolvido por Karczub e Norton foi o de utilizar acelerômetros ao invés de extensômetros para se estimar a deformação de flexão dinâmica de vigas sujeitas a qualquer tipo de excitação. O método de diferenciação empregado considera o uso de três ou quatro pontos de medição simultâneos.

Lee (2007) propôs a estimação das respostas de deformação através de medições de deslocamentos e utiliza a matriz de transformação do deslocamento para a deformação. Lee também investigou os efeitos do ruído e o truncamento da matriz modal e a possibilidade de se obter o valor de deformação em pontos onde o deslocamento não foi medido. As matrizes modais de deslocamento e de deformação foram encontradas analiticamente para o caso de uma viga de aço. Os modos de deformação foram calculados pela análise da curvatura da viga, ou derivada de segunda ordem do modo de deslocamento transversal. Foram considerados apenas os modos de flexão da viga, compreendidos em uma faixa de frequência de 0 a 500 Hz. Lee constatou, a partir dos dados simulados, que o método pode ser aplicado na estimação da deformação em pontos não medidos da estrutura. Entretanto, é bastante sensível ao ruído, prejudicando a precisão. O truncamento da matriz modal, com um número de modos dentro da faixa de frequência analisada, não afetou o cálculo da deformação.

Gevinski (2010) estudou a relação da deflexão e deformação em vigas e realizaram uma avaliação experimental da deformação de flexão de uma viga de alumínio, engastada em uma das extremidades, utilizando medidas de aceleração. O método é baseado na análise da curvatura e o método de diferenças finitas. A viga foi submetida a diversas excitações harmônicas de diferentes frequências. As comparações no domínio do tempo entre a deformação estimada e medida, utilizando extensômetros, mostraram bons resultados, apesar da contaminação dos sinais de aceleração por ruídos nas baixas frequências.

Os métodos acima, excetuando-se o estudo de Bernasconi e Ewins (1989), estão restritos aos casos unidirecionais de tensão, associados à flexão de vigas e a derivada de segunda ordem do deslocamento transversal da mesma, ou seja, análise da curvatura. Contudo, em situações práticas ou em peças sujeitas aos esforços combinados de flexão e torção, a análise de deformação é feita a partir do conhecimento do tensor de deformação. Para isto, as deformações devem ser conhecidas em, pelo menos, três direções distintas. Essas deformações podem ser determinadas a partir da derivada de primeira ordem do deslocamento nas direções paralelas do plano analisado. Entretanto, na prática, esses deslocamentos são muito pequenos e difíceis de serem medidos. Alternativamente às medições tridimensionais de deslocamento, pode ser utilizado o método de análise modal híbrida e análise de deformação híbrida, a qual é uma extensão da análise modal híbrida e proposta por Dovstam (1998).

Sehlstedt (1999 e 2001a) fez uma avaliação experimental da análise modal híbrida de deformação em uma placa composta por dois materiais diferentes. Nesta avaliação, o tensor de deformação dinâmica foi estimado em pontos específicos da placa utilizando funções respostas em frequências de velocidade e o método de diferenças finitas. As deformações estimadas foram validadas por medições de deformações utilizando extensômetros. O caso foi avaliado experimentalmente com o intuito da validação experimental da técnica na estimação de funções resposta em frequência de deformação para pontos específicos da placa.

Sehlstedt (2001b) fez uma avaliação numérica do método de análise híbrida de deformação considerando a análise restrita a uma região ou parte de uma estrutura, a qual chamou de, na tradução livre, análise modal híbrida de deformação local.

Podem-se mencionar ainda, trabalhos em que o deslocamento é obtido a partir da deformação, ou seja, uma relação inversa à proposta pelos métodos anteriores. Os extensômetros não causam alteração no comportamento dinâmico de peças, como causaria o acelerômetro pelo efeito da massa. Podem ser utilizados em casos de peças delgadas e apresentam boa sensibilidade para baixa frequência. Em 1995, Foss e Haugse realizaram um estudo onde foi possível utilizar os conceitos da análise modal para desenvolver a transformação da deformação para o deslocamento. Este estudo é importante para o controle ativo de estruturas inteligentes e na utilização de sensores de fibra ótica para o monitoramento e detecção de falha em grandes estruturas. Kang, Kim e Han (2007) utilizam sensores em redes de *Bragg* e fibras ópticas, as *Fiber Bragg Grating* (FBG), para medir deformação e estimar o deslocamento dinâmico estrutural. O deslocamento é obtido pela relação deformação – deslocamento.

## 1.2 Motivação

A análise modal vem sendo desenvolvida e melhorada por diversos autores há muito tempo. No que diz respeito às análises em condições operacionais, técnicas de análise da forma de deflexão operacional da estrutura ou, comumente conhecida como *Operating Deflection Shape* (ODS), e a Análise Modal Operacional (AMO) têm sido aplicadas com sucesso no monitoramento de máquinas e equipamentos. Pela ODS é possível a identificação dos modos operacionais de deslocamento da estrutura. Na análise modal operacional, os parâmetros modais, frequência natural, fator de amortecimento e modos naturais, são identificados apenas com medições das respostas operacionais das estruturas.

Assim sendo, é possível se utilizar os resultados das análises convencionais de vibração, sejam elas: análise modal experimental, operacional, ODS, ou medições de aceleração, velocidade e deslocamento, para a determinação da deformação dinâmica, a partir dos métodos de estimação. Isso realizado alternativamente à medição de deformação utilizando técnicas convencionais de extensometria, pois quando são necessárias medições em diversos pontos da estrutura, a extensometria torna-se muito onerosa, e às vezes, impraticável.

Conhecendo-se a deformação dinâmica, ter-se-á um parâmetro mais adequado, quando comparado à aceleração, velocidade ou deslocamento, para o diagnóstico e determinação do tempo até a falha do equipamento. Adicionalmente, embora a ODS forneça informações importantes, a distribuição da deformação ao longo da estrutura não é diretamente obtida. Regiões mais solicitadas em termos de deformação, ou seja, regiões de concentração de tensão, não são necessariamente as regiões de maior deflexão ou deslocamento. As regiões críticas de deformação podem ser identificadas pelos modos de deformação.

Os métodos de estimação, os quais utilizam as respostas dinâmicas, foram propostos e validados em diversos trabalhos. Entretanto, na sua maioria, as aplicações em condições operacionais não foram avaliadas. Em condições operacionais geralmente são utilizados apenas sinais de resposta da estrutura, pois nessas condições, a força excitadora é difícil de ser medida. Desta forma, quando se trata da análise da forma operacional de deflexão da estrutura, a transmissibilidade é largamente utilizada. A transmissibilidade é a relação entre dois sinais de resposta.

Haja vista a importância da estimação da deformação dinâmica, principalmente em condições operacionais, neste trabalho os métodos de estimação serão avaliados em termos de funções resposta em frequência e transmissibilidade. Isso remete ao estudo das técnicas de análise operacionais e dos métodos de estimação. De acordo com estas questões, seguem-se os objetivos gerais e específicos do presente trabalho.

### **1.3 Objetivo Geral**

Este trabalho tem como objetivo geral a estimativa da deformação dinâmica em superfícies utilizando parâmetros vibracionais e os métodos de estimação. Aspectos referentes à aplicação em condições reais dos métodos serão levados em consideração. Sendo eles: a utilização de funções resposta em frequência; funções de transmissibilidade, o método de elementos finitos utilizado para a derivação numérica, e medições com acelerômetros triaxiais.

## 1.4 Objetivos Específicos

Este trabalho tem como objetivos específicos:

- Abordar os fundamentos da teoria da elasticidade, enfatizando a relação entre o deslocamento e a deformação em corpos contínuos e, sobretudo, estabelecendo a diferença entre ambos.
- Abordar os métodos numéricos: método de diferenças finitas e método de elementos finitos, os quais serão utilizados na derivação numérica do deslocamento para transformação do mesmo em deformação;
- Abordar os conceitos da análise modal nas suas mais variadas formas de realização. Seja ela: teórica; analítica ou numérica; experimental ou operacional. Detalhar o método de Análise Modal Híbrida, ou em inglês, *Hybrid Modal Analysis* (HMA) e do método da matriz de transformação do deslocamento para a deformação conhecida como *Displacement to Strain Transformation* (DST).
- Realizar uma simulação numérica para comparação da deformação estimada pelo método da curvatura, análise modal híbrida e matriz de transformação.
- Validar as técnicas empregadas a partir de medidas de deformações, utilizando extensômetros, e dados simulados. Principalmente no que diz respeito à deformação cisalhante, a utilização da transmissibilidade e também acelerações medidas com acelerômetros tri-axiais.

Este trabalho visa à aplicação dos métodos em estruturas ou peças com materiais homogêneos, isotrópicos, que apresentem comportamento elástico linear e sofram pequenas deformações. Para as estruturas mecânicas de máquinas e equipamentos, do ponto de vista do monitoramento da integridade estrutural, essas hipóteses são aceitáveis. Além disso, estas estruturas geralmente apresentam baixo amortecimento, assim, o seu efeito será desprezado na aplicação dos métodos de estimação de deformação. É importante enfatizar que as deformações residuais, estáticas e térmicas não são consideradas na aplicação dos métodos.

Para se cumprir estes objetivos, o trabalho será apresentado da forma como está expressa na seção a seguir.

## **1.5 Apresentação do Trabalho**

O presente trabalho foi dividido em seis capítulos, onde são apresentadas as revisões bibliográficas, as metodologias abordadas, simulações, procedimentos experimentais realizados, resultados e a conclusão referente ao trabalho. A seguir, faz-se uma breve descrição do conteúdo de cada um desses capítulos:

Capítulo 2 – Apresenta os fundamentos teóricos, onde se abordam os conceitos da teoria da elasticidade e da análise dinâmica em estruturas, comentando-se a aplicação destes conceitos na estimação de deformação a partir de parâmetros modais.

Capítulo 3 – As formulações matemáticas do método de análise modal híbrida e da matriz de transformação do deslocamento para a deformação são mostradas neste Capítulo.

Capítulo 4 – Inclui a simulação numérica realizada para comparação dos métodos de análise modal híbrida, matriz de transformação e o método da curvatura, aplicados a uma viga.

Capítulo 5 – Contém os procedimentos realizados para avaliação experimental da deformação dinâmica. Os resultados e discussões referentes aos experimentos realizados também estão inclusos neste Capítulo. Algumas conclusões importantes são mencionadas nas subseções “Considerações finais”, apresentadas ao final de cada seção ou experimentos.

Capítulo 6 – É apresentada a conclusão e propostas para trabalhos futuros.

A padronização de algumas denominações utilizados nos textos será feita com base em:

- A deformação específica será tratada aqui apenas como *deformação*. As deformações, frequentemente nas análises das formas de vibração operacionais, são confundidas com os deslocamentos, os quais são comumente conhecidos como deflexão;

- Ao se referir aos deslocamentos medidos, está também se referindo a qualquer outra grandeza medida que possa ser transformada para deslocamento. Por exemplo, medições de aceleração harmônica são relacionadas com o deslocamento a partir da divisão pela frequência angular  $-\omega^2$ . Mesmo obtido indiretamente, este deslocamento será considerado *deslocamento medido*.
- As deformações estimadas em termos de Função Resposta em Frequência (FRF) e Transmissibilidades serão comparadas com as respectivas funções medidas. Essas funções são estimadas por estimadores de FRF a partir de medições. Desta forma, conceitualmente, essas funções são ditas estimadas. Para evitar problemas com a nomenclatura, as funções estimadas pelas técnicas propostas serão chamadas *FRF* ou *Transmissibilidades estimadas* e as estimadas utilizando os estimadores serão chamadas *FRF* ou *Transmissibilidades medidas*.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 A Deformação e sua relação com o Deslocamento

Os modos de vibração, mesmo quando identificados por meio de medidas de aceleração ou de velocidade, são formas que representam a vibração de deflexão ou de deslocamento da estrutura. Muitas vezes, essas formas são confundidas com formas de deformação. Assim sendo, é fundamental o conhecimento da relação entre deslocamento e deformação, para que a mesma possa ser estimada a partir do deslocamento e, sobretudo, estabelecer a diferença entre deslocamento e deformação.

A ação de forças causa movimentos e deformações em um corpo. Quando a distância entre quaisquer pares de pontos de um corpo, depois da aplicação da força, permanece a mesma, diz-se que este corpo sofreu um movimento de corpo rígido, que pode ser de translação, rotação ou uma composição dos dois. Se houver variação da distância entre quaisquer pares de pontos do corpo, então diz-se que o corpo sofreu uma deformação e esta pode ser linear, angular ou uma composição das duas.

Segundo Riley, Sturges e Morris (2003), a deformação é uma quantidade geométrica que está relacionada, não apenas às forças e às tensões, mas também ao movimento relativo entre dois ou três pontos de um corpo qualquer. Portanto, precisa-se de uma medida quantitativa que exprima a intensidade da deformação, da mesma forma que a tensão exprime uma medida da intensidade de uma força interna (força por unidade de área). Assim sendo, a Deformação Específica (deformação por unidade de comprimento) é uma quantidade usada para medir a intensidade de uma deformação e é classificada como:

- A Deformação Específica Normal: é definida como a variação do comprimento de um segmento de linha entre dois pontos dividida pelo comprimento original, antes da deformação, deste segmento.

- A Deformação Específica Cisalhante: é definida como a distorção angular entre duas linhas as quais eram originalmente perpendiculares.

Neste texto será tratada a “deformação específica” apenas como deformação.

Conhecidas as componentes de deformações, o tensor de deformação  $\varepsilon_{ij}$  pode ser escrito como (CHEN; SALEEB, 1994):

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde as componentes da diagonal principal,  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  e  $\varepsilon_{33}$ , ou,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ , são as componentes de deformação normal e as demais componentes,  $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \dots$ , são as deformações cisalhantes.

Na notação de von Karman, as componentes cisalhantes do tensor de deformação são as chamadas deformações de cisalhamento de engenharia, representadas por  $\gamma$  e definidas como a variação total do ângulo entre duas fibras ortogonais no estado indeformado. Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \gamma_{yx} = \gamma_{xy} &= \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = 2\varepsilon_{12} \\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz} &= \varepsilon_{13} + \varepsilon_{31} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{zy} = \gamma_{yz} &= \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32} = 2\varepsilon_{23} \end{aligned} \quad (2.2)$$

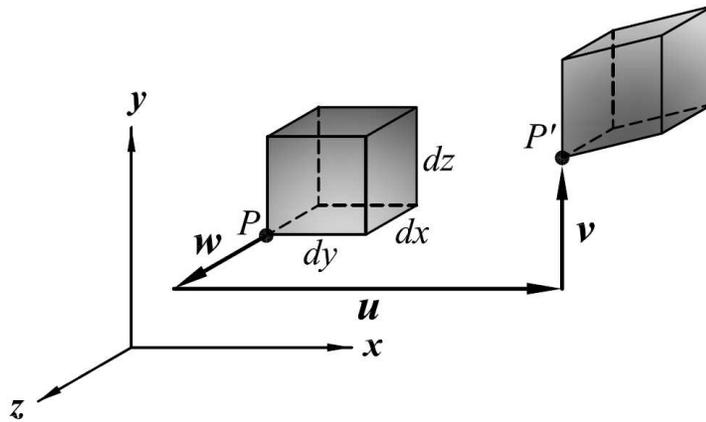
### ***Relação Deslocamento - Deformação***

Na clássica teoria da elasticidade e da mecânica do contínuo, usam-se duas formas para se descrever a relação entre deslocamento e deformação. Uma forma é a partir do tensor de deformação Lagrangiano e outra, a partir do tensor de deformação de Euler. No método Lagrangiano emprega-se coordenadas iniciais de cada partícula como sendo variáveis independentes. Enquanto no tensor de deformação de Euler, as variáveis independentes são as coordenadas de cada partícula no instante de tempo de interesse. Para o caso do tensor de deformação Lagrangiano tem-se: (CHEN; SALEEB, 1994 e REDDY, 2008);

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{r,i} u_{r,j}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_r}{\partial x_i} \frac{\partial u_r}{\partial x_j} \right) \quad (2.3)$$

Considerando  $u$ ,  $v$  e  $w$  as componentes de deslocamento ao longo dos eixos cartesianos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente e ilustradas na Figura 2.1, alguns dos termos do tensor da Equação (2.3) podem ser expressos como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (2.4)$$



**Figura 2.1- Deslocamentos tridimensionais  $u$ ,  $v$  e  $w$  na direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.**

Nas aplicações de engenharia, principalmente no que tange à vibração, as deformações são consideradas pequenas a tal ponto que os termos de segunda ordem do tensor da Equação (2.3) podem ser desprezados. Para pequenas deformações e deslocamentos, pode-se dizer que ambos os tensores (Lagrangiano e Euler) apresentam praticamente o mesmo resultado. Devido às simplificações tornam-se o mesmo tensor. Desta forma, o tensor de deformação pode ser representado matricialmente por:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}\quad (2.5)$$

O tensor de deformação da Equação (2.5) é composto por nove derivadas de primeira ordem. Geralmente, as deformações são medidas nas superfícies das peças. Assim, conhecendo-se as deformações na superfície, o tensor da Equação (2.5) pode ser expresso pelo tensor de deformação planar ou bidimensional mostrado a seguir:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

ou seja:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.9)$$

As análises usualmente realizadas posteriormente ao conhecimento do tensor de deformação no plano são feitas considerando-se estados planos de tensão ou deformação. Detalhes sobre estado plano de deformação e tensão podem ser vistos em: Timoshenko e Goodier (1980); Beer, Johnston e Dewolf (2006) e Gevinski (2010, p. 25-26).

### 2.1.1 Deformações de flexão em vigas

A maioria dos métodos já desenvolvidos para estimação da deformação a partir do deslocamento aplica-se ao caso de vigas em flexão. Da mesma forma que a deformação está relacionada com o deslocamento relativo a partir de derivadas de primeira ordem, a deformação longitudinal específica de uma viga pode ser relacionada com a deflexão transversal da viga, ou, como comumente conhecida, flecha. Esta relação está associada à curvatura da viga e se refere à derivada de segunda ordem da deflexão.

Sendo a viga com o eixo  $x$  coincidente com o eixo neutro da secção e o eixo  $y$  um eixo de simetria, conforme pode ser visto na Figura 2.2 (a). Ao sofrer uma deflexão  $v$  a viga curva-se com o ângulo  $\theta$  representado na Figura 2.2 (b). Devido à deformação que ocorre, um ponto  $P$ , distante de  $c$  da linha neutra, sofre um deslocamento  $u(x) = -\Delta x$  e  $v(x) = v + c - \Delta v$ . Assim passa a ocupar uma nova posição representada pelo ponto  $P'$ , conforme Figura 2.2 (c). Pelas relações trigonométricas chega-se á:

$$u(x) = -c \sin(\theta) \quad (2.10)$$

Para pequenas rotações e pequenos deslocamentos tem-se:

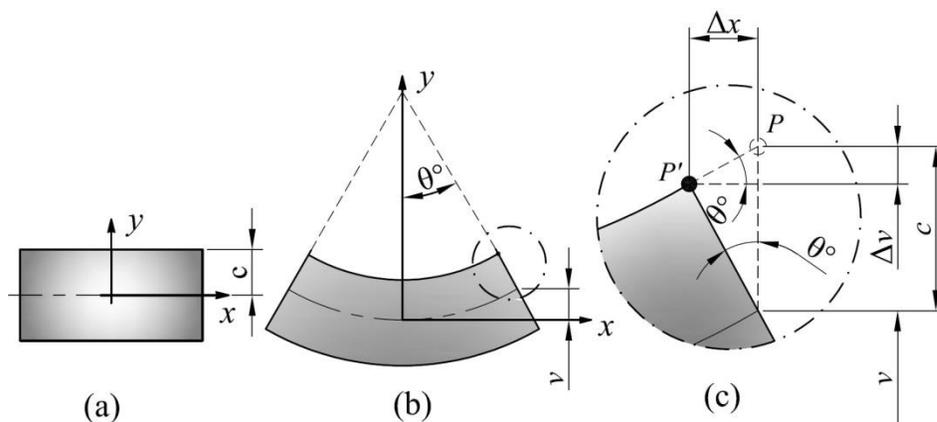
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx} \approx \theta \quad (2.11)$$

Assumindo  $\sin(\theta) \approx \theta$  e reescrevendo a Equação (2.10) utilizando a Equação (2.11), obtém-se:

$$u(x) = -c \frac{dv}{dx} \quad (2.12)$$

Desprezando-se qualquer distorção angular e considerando o deslocamento  $u(x)$  da Equação (2.12), a deformação específica longitudinal da viga, calculada a partir da Equação (2.7), pode ser relacionada com a deflexão transversal da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du(x)}{dx} \\ \varepsilon_x &= -c \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right) \\ \varepsilon_x &= -c \frac{d^2v}{dx^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$



**Figura 2.2 – Análise da curvatura de uma viga em flexão (a) Viga não deformada (b) Viga curvada (c) Detalhe do deslocamento de um ponto  $P$  distanciado a  $c$  da linha neutra**

Esta relação é válida pela hipótese que as vigas estão submetidas à flexão pura; são inicialmente retas, possuem secção transversal constante ao longo do comprimento e as secções planas da viga permanecem planas durante a flexão. Assim sendo, a deformação específica normal da viga pode ser determinada a partir da derivada de segunda ordem da deflexão transversal.

No caso de flexão pura, onde os esforços cisalhantes podem ser desprezados, o método direto baseado na análise da curvatura da viga pode ser aplicado para a estimativa da deformação dinâmica devido à flexão. Diversos casos foram avaliados com sucesso para estimar a deformação dinâmica em vigas em flexão. Podem ser citados os trabalhos de Koss e Karczub (1995), Karczub e Norton (1999), Lee (2007) e Gevinski e Pederiva (2010). A flexão pura em vigas pode ser vista com maiores detalhes em Timoshenko (1940); Shigley, Mischke e Budynas (2005) e Beer et. al. (2009).

## **2.2 Deformações principais e deformação equivalente no plano**

Sabe-se que as tensões estão relacionadas com a deformação. Conforme Timoshenko e Goodier (1980), as componentes de tensões e as componentes de deformações elásticas estão linearmente relacionadas a partir da lei de Hooke. Ou então, para materiais que apresentam comportamento elástico, a tensão depende somente da deformação, ou seja, a tensão é uma

função da deformação. As equações que relacionam tensões e deformações em um material são chamadas equações constitutivas (CHEN e SALLEB, 1994).

Considerando um estado livre de tensão residual, a relação entre tensão e deformação em um material elástico sobre condições isotérmicas é dada pela lei de Hooke generalizada expressa por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.14)$$

Os tensores  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{kl}$  são tensores de segunda ordem de tensão e de deformação, respectivamente, e  $C_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem com 81 elementos. Esses elementos são as constantes elásticas geralmente dadas em função das coordenadas espaciais. Para um material linear isotrópico e para que o tensor  $C_{ijkl}$  satisfaça a condição de simetria, há apenas duas constantes elásticas independentes, as quais são conhecidas como constantes de Lamé. Assim, convencionalmente, a relação entre tensão e deformação é expressa em engenharia pela seguinte notação matricial:

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} \quad (2.15)$$

onde o vetor de tensão  $\{\sigma\}$  é representado por:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}\}^T, \quad (2.16)$$

o vetor de deformação  $\{\varepsilon\}$  é:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{31}\}^T \quad (2.17)$$

e  $[H]$  é a matriz de rigidez simétrica  $6 \times 6$ , a qual está representada na Equação (2.18), (CHEN; SALLEB, 1994).

$$[H] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1-2\nu}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1-2\nu}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1-2\nu}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young e  $\nu$  a razão de Poisson.

Convencionalmente, o estado de tensão formado pelo tensor de tensão  $\sigma_{ij}$  é avaliado em termos das tensões equivalentes de von Mises (SHIGLEY; MISCHKE; BUDYNAS, 2005). Entretanto, tratando-se apenas de deformação, pode-se considerar uma deformação equivalente  $\varepsilon_{eq}$ , obtida análoga à tensão de von Mises e matematicamente expressa por, ANSYS® *Academic Research, Release 11.0, Help System, Results in the Mechanical Application, ANSYS, Inc.*:

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{1+\nu} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

onde  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  são as deformações principais.

Para um estado plano, a deformação equivalente resume-se a:

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{1+\nu} \left[ \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

As deformações principais  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  e a direção principal de  $\varepsilon_1$  são expressas pelas componentes cartesianas de deformação da seguinte forma (DALLY e RILEY, 1978, p. 318-327 e TIMOSHENKO e GOODIER, 1980, p. 23-27):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (2.21)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (2.22)$$

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right) \quad (2.23)$$

onde  $\theta_p$  é o ângulo entre a direção principal de  $\varepsilon_1$  e o eixo  $x$ .

### 2.3 Métodos numéricos utilizados na relação deslocamento-deformação

A relação entre o deslocamento e a deformação é estabelecida pelo tensor de deformação expresso na Equação (2.5). Este tensor consiste em nove derivadas de primeira ordem do deslocamento em função das coordenadas espaciais. No caso da elasticidade plana, o tensor se reduz a quatro derivadas, como mostrado na Equação (2.6). Na análise da deformação longitudinal de vigas sujeitas à flexão, a deformação pode ser calculada pela análise da curvatura e a derivada de segunda ordem do deslocamento transversal a partir da Equação (2.13). Essas relações são baseadas em funções contínuas do deslocamento em relação à posição espacial.

No entanto, na prática, os deslocamentos são medidos em pontos específicos da estrutura. Essas medições formam um conjunto de funções de deslocamento discretas. Para derivação dessas funções, é necessária a utilização de métodos numéricos. Karczub e Norton (1999) utilizaram o método de diferenças finitas para estimativa de deformação dinâmica de flexão. Além disso, uma avaliação da propagação do erro na estimativa da deformação utilizando derivação numérica e o método da curvatura também foi abordada. Sehlstedt (1999) fez uma comparação entre a derivada analítica e por diferenças finitas de uma função. O resultado numérico se aproximou ao valor analítico. Gevinski (2010) fez uma comparação entre a deformação analiticamente determinada para uma viga e a deformação calculada pelo método de diferenças finitas. Também realizou uma avaliação experimental para a estimativa da deformação dinâmica de flexão de uma viga engastada utilizando o método de diferenças finitas. As deformações estimadas se aproximaram aos valores das deformações medidas.

Embora o método de diferenças finitas apresente bons resultados na estimação da deformação pontual, depende da construção de malhas regulares para o cálculo das derivadas. Além do método de diferenças finitas, neste trabalho será utilizado o método de elementos finitos na solução numérica do tensor de deformação. Com este método, a análise da distribuição de deformação pode ser realizada para geometrias complexas, permitindo que a malha de medição seja irregular, desde que esta esteja adequada ao elemento finito escolhido. Uma breve descrição dos métodos de diferenças finitas e de elementos finitos será feita nos itens subsequentes.

### 2.3.1 Método de Diferenças Finitas

O Método de Diferenças Finitas (MDF) é um método numérico para solução de equações diferenciais, o qual aproxima as derivadas por expressões algébricas. Quando uma função  $f(x)$  pode ser avaliada em pontos posicionados à direita e à esquerda de  $x$ , a aproximação da derivada da função  $f(x)$  pode ser feita pelo método de diferenças finitas centrais. Quando há a necessidade de se avaliar a derivada da função em  $x$  e a função  $f(x)$  somente é conhecida em pontos anteriores ou posteriores a  $x$ , o método de diferenças finitas centrais não pode ser usado e sim, os métodos de diferenças finitas inferior (*backward*) e superior (*forward*) (MATHEWS; FINK, 1999).

O número de pontos no truncamento das séries utilizadas para determinar as fórmulas de diferenças finitas define a ordem da mesma. Posteriormente, na análise de erros dos métodos numéricos, serão comentadas as implicações na utilização de mais ou menos pontos na derivada numérica. Na literatura são comumente encontradas as fórmulas de MDF para três ou cinco pontos. Essas fórmulas também podem ser classificadas segundo o erro de truncamento  $O(h)$ , devido à escolha do número de pontos e a distância  $h$  entre eles. Sendo três pontos, a ordem das fórmulas é definida por  $O(h^2)$ , sendo cinco pontos a ordem é  $O(h^4)$ .

As Equações (2.24) e (2.25) mostram as fórmulas de diferenças finitas centrais de ordem  $O(h^4)$ , para primeira e segunda derivada, (MATHEWS; FINK, 1999).

$$f'(x_0) \approx \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} \quad (2.24)$$

$$f''(x_0) \approx \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} \quad (2.25)$$

As Equações (2.26) e (2.27) mostram as fórmulas de diferenças finitas *backward* de ordem  $O(h^4)$ , para a primeira e segunda derivada:

$$f'(x_0) \approx \frac{3f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{2h} \quad (2.26)$$

$$f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3}}{h^2} \quad (2.27)$$

As Equações (2.28) e (2.29) mostram as fórmulas de diferenças finitas *forward* de ordem  $O(h^4)$ , para a primeira e segunda derivada:

$$f'(x_0) \approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} \quad (2.28)$$

$$f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2} \quad (2.29)$$

### 2.3.2 Erros na estimação da deformação pelo Método de Diferenças Finitas

Diversas fontes de erro podem ser identificadas na estimação da deformação. Sejam elas específicas da medição e processamento dos sinais, ou associadas à utilização de métodos numéricos nas soluções das equações que regem o problema de elasticidade. Karczub e Norton (1999) destacam algumas fontes de erros na estimação de deformação utilizando o método de diferenças finitas, os quais são: (i) erro de resolução espacial; (ii) erros experimentais; (iii) erros estatísticos.

#### *Erro de resolução espacial*

O erro de resolução espacial está associado ao uso do método de diferenças finitas. Este erro é em função do espaçamento entre os transdutores utilizado para medição de vibração e o comprimento de onda. Basicamente, esse erro compara a deformação obtida pelo método de diferenças finitas com a deformação exata obtida analiticamente. O erro é desprezível para baixas frequências, entretanto, aumenta com a frequência de vibração. O erro de resolução é maior

quando se utiliza o método de diferenças finitas cinco pontos do que para o de três pontos. Para uma maior precisão na estimação da deformação em altas frequências, deve ser utilizado um espaçamento menor entre os transdutores. Karczub e Norton (1999) constataram que, nos casos gerais de vibração, o erro de resolução faz com que a deformação predita pelo método de diferenças finitas seja maior que a obtida analiticamente. Em casos específicos de ondas transientes, o erro de resolução faz com que a deformação estimada seja menor que a deformação exata.

### ***Erros experimentais***

Por se tratar de uma diferença entre amplitude relacionada com a distância entre os transdutores, erros na medição da amplitude podem ser amplificados na estimação da deformação utilizando o método de diferenças finitas. Segundo Karczub e Norton (1999), erros de amplitude estão associados aos: erros de calibração dos transdutores; erros de posicionamento dos transdutores (medir em posições diferentes do previsto para estimação da deformação); ruídos externos; e à diferença de fase ou defasagem entre os sinais medidos.

Uma importante consideração deve ser feita em relação à fase dos sinais medidos. Na aplicação dos métodos diretos a partir de medições simultâneas, defasagens entre os sinais podem ocorrer pela utilização de filtros e condicionares de sinais que não garantem simultaneidade nas aquisições.

Assumindo que o erro experimental seja constante devido à diferença entre os espaçamentos dos transdutores e independente da frequência, o método de diferenciação numérica é mais sensível aos erros experimentais em baixas frequências. Isto porque ao considerar o erro em termos de percentagem, este é maior em baixas frequências, devido à relativa proximidade das medições. Ou seja, em baixas frequências onde o comprimento de onda é maior, uma maior distância entre os transdutores poderia ser utilizada. O erro experimental pode então ser minimizado em baixas frequências utilizando um espaçamento maior entre os transdutores, desde que seja respeitada a resolução espacial (KARCZUB; NORTON, 1999).

### *Erros estatísticos*

Erros estatísticos estão presentes na estimação das funções resposta em frequência ou em casos específicos de tratamento de sinais aleatórios. Erros estatísticos produzem erros de amplitude da mesma forma que os erros experimentais.

#### **2.3.1 Método de Elementos Finitos**

Pelo Método de Elementos Finitos (MEF) o corpo contínuo é analisado por aproximações do tipo polinomial nodal em subdomínios, o que implica em processos de discretização dos domínios. Essa discretização é feita através de elementos que possuem um comprimento finito e não diferencial, interconectados através de nós. A divisão do corpo em diversos elementos resulta em uma malha de elementos finitos, que pode ter geometrias irregulares arbitrárias. Segundo Alves Filho (2003), a escolha de qual elemento empregar para construção da malha depende do conhecimento das propriedades do elemento escolhido para a representação do problema, que é a característica fundamental do método.

Dentre os tipos de elementos existentes, podem-se citar os elementos bidimensionais pertencentes à família Lagrange e Serendipity. Os elementos da família Lagrange possuem nós internos aos elementos. Os elementos da família Serendipity são elementos de formas semelhantes aos Lagrange, no entanto, com menor número de pontos ou nós (SORIANO, 2003). No que diz respeito à utilização do método de elementos finitos para estimação de deformação a partir dos deslocamentos medidos, elementos que exigem menor número de nós implicam em um menor número de medições.

Gevinski (2010) fez uma comparação numérica utilizando o método de diferenças finitas e o método de elementos finitos utilizando elementos bidimensionais Serendipity. Por estes métodos, realizou a derivação de funções contínuas de deslocamento nodal em uma superfície arbitrária. As derivadas obtidas pelo método de diferenças finitas se equivaleram aos valores da derivada analítica em todas as regiões da superfície. Utilizando o MEF, as derivadas foram iguais na região central, mas apresentaram pequenas diferenças nas regiões de borda da superfície. Para

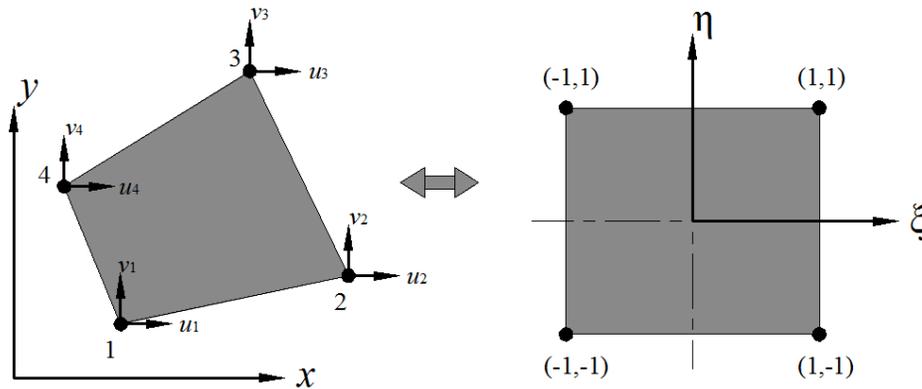
melhorar a aproximação nas regiões de borda, ou mesmo na prática, em regiões de concentração de tensão, elementos de mais alta ordem podem ser utilizados ou malhas mais refinadas.

Em vista disto, no problema de elasticidade plana e solução do tensor de deformação, propõe-se a utilização de elementos finitos da família Serendipity de quatro (4) nós e, em casos específicos, elementos de oito (8) nós.

Para o elemento quadrilateral de quatro (4) nós, conforme mostrado na Figura 2.3, os deslocamentos  $u$  e  $v$ , em termos das coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$ , são expressos por uma aproximação linear do tipo:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &\approx \tilde{u}(\xi, \eta) = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \xi \eta \\ v(\xi, \eta) &\approx \tilde{v}(\xi, \eta) = \beta_5 + \beta_6 \xi + \beta_7 \eta + \beta_8 \xi \eta \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde  $\tilde{u}(\xi, \eta)$  e  $\tilde{v}(\xi, \eta)$  são aproximações lineares de  $u(\xi, \eta)$  e  $v(\xi, \eta)$ , respectivamente.



**Figura 2.3 – Elemento quadrilateral linear (4 nós) em coordenadas global e locais**

Reescrevendo a Equação (2.30) matricialmente de tal forma que:

$$u \approx \begin{Bmatrix} \tilde{u}(\xi, \eta) \\ \tilde{v}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Então, tem-se:

$$\{u\} \approx \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \xi_1\eta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \eta_1 & \xi_1\eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \xi_2\eta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_2 & \eta_2 & \xi_2\eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \xi_3\eta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_3 & \eta_3 & \xi_3\eta_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \xi_4\eta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_4 & \eta_4 & \xi_4\eta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \end{Bmatrix} = [\mathbf{P}]\{\beta\} \quad (2.32)$$

As oito constantes  $\beta$  podem ser encontradas pela solução simultânea do sistema de Equações (2.32), desde que sejam conhecidas as coordenadas e deslocamentos nodais. Uma solução geral para esta situação é dada da seguinte forma:

$$\{\beta\} = [\mathbf{P}]^{-1}\{u\} \quad (2.33)$$

A deformação total no elemento analisado pode então ser determinada levando-se em consideração os polinômios da Equação (2.30) e as derivadas das Equações (2.7), (2.8) e (2.9). Assim, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial\xi & 0 \\ 0 & \partial/\partial\eta \\ \partial/\partial\eta & \partial/\partial\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

o que resulta em:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \beta_2 + \beta_4 \eta \\
\varepsilon_y &= \beta_7 + \beta_8 \xi \\
\gamma_{xy} &= (\beta_3 + \beta_6) + \beta_4 \xi + \beta_8 \eta
\end{aligned}
\tag{2.35}$$

As deformações encontradas pela Equação (2.35) são deformações que ocorrem em todo o elemento. A deformação em um nó do elemento, ou seja, pontual, pode ser calculada a partir da média dos valores de deformação que incidem no nó.

Para o caso do elemento de oito (8) nós da Figura 2.4, os deslocamentos  $u$  e  $v$  podem ser aproximados por polinômios de ordem quadrática do tipo:

$$\begin{aligned}
u(\xi, \eta) &= \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \xi^2 + \beta_5 \eta \xi + \beta_6 \eta^2 + \beta_7 \xi^2 \eta + \beta_8 \xi \eta^2 \\
v(\xi, \eta) &= \beta_9 + \beta_{10} \xi + \beta_{11} \eta + \beta_{12} \xi^2 + \beta_{13} \eta \xi + \beta_{14} \eta^2 + \beta_{15} \xi^2 \eta + \beta_{16} \xi \eta^2
\end{aligned}
\tag{2.36}$$

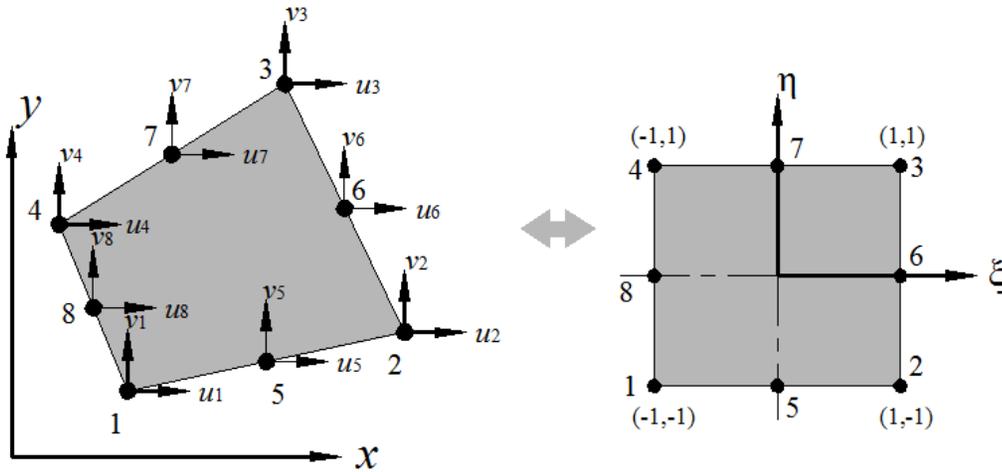


Figura 2.4 – Elemento quadrilateral quadrático (8 nós) em coordenadas global e locais

A determinação das constantes  $\beta$  é análoga à utilizada para o elemento quadrilateral linear de 4 nós. As deformações da Equação (2.34) considerando os polinômios da Equação (2.36) são expressas por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \beta_2 + 2\beta_4 \xi + \beta_5 \eta + 2\beta_7 \xi \eta + \beta_8 \eta^2 \\
\varepsilon_y &= \beta_{11} + \beta_{13} \xi + 2\beta_{14} \eta + \beta_{15} \eta^2 + 2\beta_{16} \xi \eta \\
\gamma_{xy} &= (\beta_3 + \beta_{10}) + (\beta_5 + 2\beta_{12}) \xi + (2\beta_6 + \beta_{13}) \eta + \beta_7 \xi^2 + 2(\beta_8 + \beta_{15}) \xi \eta + \beta_{16} \eta^2
\end{aligned}
\tag{2.37}$$

Maiores detalhes sobre o método de elementos finitos podem ser encontrados em Moaveni (1999), Zienkiewicz e Taylor (2000) e ANSYS® *Academic Research, Release 12.0, Help System, ANSYS, Inc.*

Os métodos numéricos tratados nesta seção serão utilizados para a estimativa da deformação dinâmica. No entanto, convencionalmente, a determinação da deformação é realizada medindo-a utilizando técnicas de extensometria. Neste trabalho, as deformações medidas a partir de extensômetros serão utilizadas para validação dos métodos de estimação e aproximação dos métodos numéricos. A próxima seção trata dos métodos convencionais de medição de deformação.

## **2.4 Métodos Convencionais de Medição de Deformação em Superfícies**

Em muitas aplicações práticas, apenas as superfícies das peças ou objetos estão acessíveis para medições de deformação. As técnicas geralmente aplicadas para medição de deformações superficiais são não destrutivas, embora exijam preparações das superfícies das peças para fixação dos extensômetros. Os extensômetros são os dispositivos utilizados para medir a deformação. São baseados em diferentes princípios e sua utilização específica depende: do tipo de estrutura a ser medida, do nível de deformação, do material e de outros fatores, que pode estar associado ao custo e as dificuldades de aplicações. Dentre os principais tipos de extensômetros destacam-se:

**Extensômetro mecânico:** Extensômetros mecânicos são geralmente empregados na engenharia civil estrutural. São dispositivos mecânicos de alavanca e engrenagens ligados à estrutura, onde se obtém uma ampliação dos deslocamentos relativos das extremidades da estrutura (DALLY; RILEY, 1978).

**Extensômetro ópticos:** A ampliação do deslocamento relativo da superfície da estrutura é conseguida por meios ópticos (espelhos e lentes). As análises de Franjas de Moiré, Holografia e Fotoelasticidade, são exemplos de técnicas ópticas. Maiores detalhes destas técnicas podem ser vistos em Hetényi (1966) e Dally, Riley e McConnell (1993).

**Extensômetro semicondutores:** O seu princípio de funcionamento é baseado no efeito piezoresistivo e é indicado para realizar medições de deformação muito pequenas, (IIZUKA, 2006 e HOLFFMANN, 2012).

**Extensômetro Piezoelétrico:** Similar aos transdutores que utilizam o quartzo como material ativo, os extensômetros piezoelétricos utilizam uma liga de bário e titânio para gerar uma mudança de potencial a qual é proporcional à deformação da estrutura analisada (HOLFFMANN, 2012).

**Extensômetros elétricos (*Strain Gages*):** Esses extensômetros estão baseados na variação da resistência elétrica de um condutor quando submetido a uma deformação. A técnica que utiliza os *extensômetros* para a determinação do estado de deformação em um ponto da estrutura é denominada extensometria elétrica. Esta técnica é convencionalmente utilizada em muitas aplicações práticas (DALLY; RILEY, 1978 e HOLFFMANN, 2012). Neste trabalho, extensômetros serão utilizados para medição da deformação, a qual será utilizada para validação das técnicas de estimação de deformação. A medição do estado de deformação a partir da extensometria elétrica será detalhada no item subsequente.

#### **2.4.1 Extensometria Elétrica**

Os extensômetros elétricos ou “*strain gages*” são formados por uma base, material eletricamente isolado, terminal de solda e principalmente por uma parte resistiva (filme). O material resistivo possui alguns micra de espessura e é depositado na base por técnicas de circuito impresso. Dependendo do tipo de solicitação, diferentes tipos de extensômetros devem ser utilizados. Extensômetros uniaxial ou biaxial são utilizados quando as direções principais são conhecidas. Quando as direções principais não são conhecidas, a análise do estado de deformação é realizada medindo-se a deformação no ponto de interesse em três diferentes direções. Os extensômetros utilizados neste caso são os extensômetros tipo roseta. Dally e Riley (1978 e 1993) e Hoffmann (2012) trazem diversas informações sobre utilização e aplicações da extensometria elétrica.

No caso da utilização dos extensômetros tipo rosetas, para obtenção das deformações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ , é utilizada uma transformação de coordenadas baseada nas relações trigonométricas e na hipótese de pequenas deformações. Considerando a deformação  $\varepsilon(\theta)$  na direção definida pelo ângulo  $\theta$  em relação ao eixo cartesiano  $x$  dada por (BEER et. al., 2009, p. 470-472):

$$\varepsilon(\theta) = \varepsilon_x \cos^2(\theta) + \varepsilon_y \sin^2(\theta) + \gamma_{xy} \sin(\theta)\cos(\theta) \quad (2.38)$$

onde  $\varepsilon(\theta)$  é a deformação medida pelo extensômetro uniaxial disposto na direção  $\theta$ . Conhecido o ângulo  $\theta$  em relação ao eixo cartesiano  $x$  arbitrário, a Equação (2.38) apresenta as três componentes de deformação como incógnitas. Neste caso, considerando mais dois extensômetros em posições angulares  $\theta$  diferentes, como mostrados na Figura 2.5, ter-se-á três (3) diferentes equações.

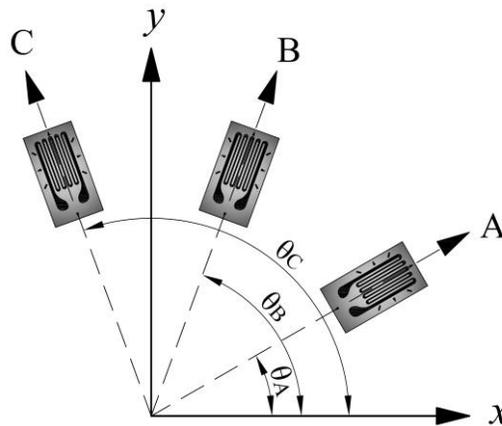


Figura 2.5 - Extensômetros orientados com ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $x$

Utilizando a Equação de transformação (2.38) para cada posição  $\theta$ , pode-se escrever (DALLY; RILEY, 1978):

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_A + \varepsilon_y \sin^2 \theta_A + \gamma_{xy} \sin \theta_A \cos \theta_A \\ \varepsilon_B &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_B + \varepsilon_y \sin^2 \theta_B + \gamma_{xy} \sin \theta_B \cos \theta_B \\ \varepsilon_C &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_C + \varepsilon_y \sin^2 \theta_C + \gamma_{xy} \sin \theta_C \cos \theta_C \end{aligned} \quad (2.39)$$

As componentes cartesianas da deformação  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  e  $\gamma_{xy}$ , são determinados resolvendo a Equação (2.39) se  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_B$  e  $\varepsilon_C$  são conhecidas. Assim sendo, três medidas de deformação em direções diferentes são suficientes para determinar o estado de tensão em um ponto. Os extensômetros tipo roseta são construídos de tal forma a possibilitar este tipo de medição. Nas rosetas os ângulos  $\theta_{A,B,C}$  podem ser de  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ , respectivamente, ou outra disposição.

Considerando a roseta de  $0^\circ/45^\circ/90^\circ$  e colocada de maneira que o ângulo  $\theta_A$  seja de  $-45^\circ$  em relação ao eixo  $x$ , então  $\theta_B = 0^\circ$  e  $\theta_C = 45^\circ$  na Figura 2.5. Neste caso, as deformações normais  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  e a deformação cisalhante  $\gamma_{xy}$  são determinadas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_B \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_A - \varepsilon_B + \varepsilon_C \\ \gamma_{xy} &= \varepsilon_C - \varepsilon_A\end{aligned}\tag{2.40}$$

Dally, Riley e McConnell (1993) citam diversas vantagens na utilização da extensometria elétrica. Dentre elas: à boa precisão, linearidade e baixo peso, apresentando muito pouca influência no comportamento dinâmico da peça a ser medida. No entanto, na análise da distribuição dinâmica de deformação ou na identificação dos modos de deformação operacionais, a utilização das técnicas convencionais de extensometria é, muitas vezes, impraticável. Os procedimentos para colagem dos extensômetros na estrutura necessitam ser realizados cautelosamente, onerando demasiadamente a técnica quando se trata da análise de deformação dinâmica em muitos pontos da estrutura. Alternativamente ao uso da extensometria convencional, métodos de estimação da deformação que utilizam parâmetros vibracionais são apresentados neste trabalho. Limitações também com aquisições simultâneas de muitos canais no uso da extensometria convencional atrelam-na ainda com as técnicas de análises de vibração e análise modal, onde em algumas aplicações podem ser utilizados apenas dois canais de aquisição simultânea. Desta forma, nas próximas seções os conceitos da análise modal e dos métodos de estimação de deformação serão apresentados.

## 2.5 Análise Modal

A análise modal é o processo de determinação das características inerentes da dinâmica de um sistema em forma de frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração. Consiste em avaliar, por meios analíticos, numéricos ou experimentais, ou uma combinação deles, um sistema contínuo idealizado em um finito número de modos e elementos (HE e FU, 2001).

Experimentalmente, segundo Ewins (1984), a análise modal é realizada para atender os seguintes objetivos: (i) determinação da natureza e os níveis de vibração e/ou (ii) verificação e obtenção de modelos teóricos. Para tal, dois tipos de testes podem ser empregados. Um quando as respostas são medidas em condições operacionais ou quando o teste é realizado conhecendo-se as forças de excitação, frequentemente em condições laboratoriais controladas, diferentes das condições operacionais.

Quando os parâmetros modais são identificados conhecendo-se a força de excitação, as técnicas empregadas para este fim são chamadas de Análise Modal Experimental (AME). As técnicas utilizadas para a determinação dos parâmetros modais em condições operacionais são conhecidas como Análise Modal Operacional (AMO). Segundo Ewins (1984) os parâmetros obtidos pela análise modal experimental são mais corretos em relação aos encontrados pela análise modal operacional. Atualmente, com o melhoramento das técnicas de medição e identificação dos parâmetros, bons resultados são alcançados com a análise modal operacional.

Geralmente, a análise modal experimental está atrelada à análise modal numérica por meio de elementos finitos. Pela modelagem computacional por si só, às vezes, não é possível se determinar totalmente o comportamento dinâmico das estruturas com precisão. Certas propriedades estruturais, tais como amortecimento e não linearidades não estão em conformidade com o tratamento da modelagem tradicional, além disso, as condições de contorno e incertezas necessitam ser ajustadas. Desta forma, as avaliações experimentais podem ser utilizadas ainda na fase de projeto para aprimorar o modelo dinâmico numérico, para que este possa representar de maneira confiável a realidade, ou mesmo no controle e monitoramento das condições de

máquinas e equipamentos. Quando o estudo dos parâmetros modais é realizado baseado apenas em um modelo teórico discreto, pode-se dizer que este compõe a análise modal teórica.

Aspectos referentes à estas técnicas serão abordados nesta seção. Além dessas, embora a propriedade de ortogonalidade ponderada dos modos, essencial para a derivação alguns métodos de estimação de deformação, seja bem conhecida e pode ser compreendida pela análise modal teórica, para ficar conveniente com as abordagens da mecânica do contínuo, o conceito da análise modal em sistema contínuos será abordado no item subsequente. Posteriormente, serão apresentados alguns aspectos teóricos e práticos pertinentes à análise modal considerando suas diversas formas de realização. Os conceitos da análise modal analítica, análise modal experimental, análise modal operacional e a técnica para a identificação dos modos de deflexão operacionais, *Operating Deflection Shape* (ODS), serão abordados.

### 2.5.1 Análise Modal de Sistemas Contínuos

Assumindo um corpo tridimensional sujeito à condição de forças de corpo nulas, as quais representam as forças distribuídas por unidade de volume, a equação de movimento para um sistema mecânico contínuo expresso em termos das coordenadas cartesianas  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  é dada por (FUNG, 1965):

$$-\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho \ddot{u}_i = 0 \quad i = 1, 2 \text{ e } 3. \quad (2.41)$$

onde  $\rho$  é a densidade e  $\ddot{u}_i$  é a aceleração definida como  $\partial^2 u / \partial t^2$ . Considerando nulas ambas as condições iniciais de deslocamento tridimensional  $u(x, t)$  e velocidade  $\dot{u}(x, t) = \partial u / \partial t$ , a transformada de Laplace da Equação (2.41) é matricialmente expressa por:

$$-[D]^T \{\tilde{\sigma}\} + s^2 \rho \tilde{u} = 0 \quad (2.42)$$

onde  $\tilde{u} = u(x, s)$  representa o deslocamento no domínio da frequência e o vetor  $\{\tilde{\sigma}\}$  é o vetor de tensão no domínio da frequência. O operador diferencial  $[D]$  é dado por:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}^T \quad (2.43)$$

É importante ressaltar que a Equação (2.42) é válida para pequenas deformações e com  $x \in \Omega$ , onde  $\Omega$  representa o volume de um espaço tridimensional. Relacionando o vetor de tensão  $\{\tilde{\sigma}\}$  com o vetor de deformação  $\{\tilde{\varepsilon}\}$  no domínio da frequência a partir da lei de Hooke generalizada tem-se:

$$\{\tilde{\sigma}\} = [\hat{\mathbf{H}}]\{\tilde{\varepsilon}\} \quad (2.44)$$

onde a matriz complexa  $[\hat{\mathbf{H}}] = [\hat{\mathbf{H}}(x, \omega)]$  é uma matriz  $6 \times 6$  simétrica, que contém propriedades constitutivas do material. Segundo Dovstam (1997), a matriz  $[\hat{\mathbf{H}}]$  é formada pela soma da matriz de propriedades elásticas na condição de frequência zero, propriedades elasto-estáticas, matriz  $[\mathbf{H}]$  da Equação (2.15), e uma matriz de propriedades dependentes da posição e da frequência. Para um material isotrópico, a correspondente matriz  $[\hat{\mathbf{H}}]$  pode ser expressa, respectivamente, como:

$$[\hat{\mathbf{H}}] = [\mathbf{H}] + \lambda d_{\lambda} [\mathbf{H}]_{\lambda} + G d_G [\mathbf{H}]_G \quad (2.45)$$

onde a constante de Lamé  $\lambda$  é dada por:

$$\lambda = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)} \quad (2.46)$$

e  $G$  é o módulo de elasticidade transversal:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.47)$$

Os elementos não nulos das matrizes  $[\mathbf{H}]_{\lambda}$  e  $[\mathbf{H}]_G$  são:

$$\begin{aligned} (H_\lambda)_{ik} &= 1 \quad ik \leq 3 \\ (H_G)_{ii} &= 2 \quad 1 \leq i \leq 3; \quad (H_G)_{ii} = 1 \quad 4 \leq i \leq 6 \end{aligned} \quad (2.48)$$

As funções  $d_\lambda$  e  $d_G$  são funções de amortecimento. Essas funções são complexas e dependem da frequência e da posição. São determinadas a partir de parâmetros de dissipação de energia mecânica do material. Maiores detalhes sobre essa matriz correspondente as propriedades elásticas do material em função da frequência são mostrados em Dovstam (1997).

Reescrevendo a Equação (2.42) a partir da relação da Equação (2.44) tem-se:

$$-[D]^T [\hat{H}] \{\tilde{\varepsilon}\} + s^2 \rho \tilde{u} = 0 \quad (2.49)$$

Com base no tensor de deformação da Equação (2.5), a relação de deformação  $\{\tilde{\varepsilon}\}$  com o deslocamento  $\{\tilde{u}\}$  pode ser escrita a partir do operador diferencial linear  $[D]$  mostrado na Equação (2.43). Assim sendo, reescrevendo a Equação (2.49) obtém-se:

$$-[D]^T [\hat{H}] [D] \{\tilde{u}\} + s^2 \rho \tilde{u} = 0 \quad (2.50)$$

com  $\{\tilde{u}\} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\}^T$ .

As condições de contorno mistas para o vetor  $\{\tilde{u}\}$  podem ser tanto a condição essencial (Dirichlet):

$$\{\tilde{u}\} = 0 \quad x \in \Gamma_1, \quad (2.51)$$

quanto à condição de contorno natural (Neumann):

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}(x, s) \quad x \in \Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1 \quad (2.52)$$

onde  $\Gamma$  corresponde ao contorno do domínio  $\Omega$ . Essas condições correspondem a um corpo fixo em toda a região de contorno  $\Gamma_1$ .

O vetor de tensão  $\mathbf{t}_n$  é expresso por:

$$\mathbf{t}_n = [N] \{\tilde{\sigma}\} \quad (2.53)$$

no qual a representação cartesiana de  $[N]$  é:

$$[N] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

onde  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  são os cossenos diretores que formam o vetor unitário  $\mathbf{n}(x) = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$  normal à superfície de contorno.

A Equação (2.50), solucionada a partir de um problema de autovalor e autovetor, pode ser escrita em termos dos modos de vibração substituindo o vetor  $\{\tilde{u}\}$  pelo vetor modal tridimensional  $\{\psi_r\}$ , assim sendo:

$$-[D]^T [\hat{H}] [D] \{\psi_r\} + \omega^2 \rho \{\psi_r\} = 0 \quad (2.55)$$

Os autovetores  $\{\psi_r\}$  satisfazem as condições de contorno abaixo:

$$\psi_r = 0 \quad x \in \Gamma_1 \quad (2.56)$$

$$\mathbf{t}_n^r = 0 \quad x \in \Gamma_2 \quad (2.57)$$

Essas condições de contorno são compatíveis com as condições das Equações (2.51) e (2.52). Adicionalmente, os vetores  $\psi_r$  são ortogonais entre si, assim como representa a Equação (2.58):

$$\langle \psi_r \cdot \rho \psi_r \rangle = m_r \delta_{mr} \quad \forall (m, r) \quad (2.58)$$

onde  $m_r$  é a massa generalizada,  $\delta_{mr}$  representa o Delta de Kronecher e  $\langle \cdot \rangle$  representa o produto interno entre os vetores. A propriedade de ortogonalidade será também detalhada posteriormente na análise de sistemas discretos.

Segundo Gurtin (1972), devido à compatibilidade entre as condições de contorno e a propriedade de ortogonalidade, os vetores  $\psi_r$  formam um espaço completo de Hilbert normalizado  $\mathbf{L}_2^3(\Omega)$ . Os vetores  $\psi_r$  neste caso são os vetores modais ou os modos naturais de vibração. Essas características de completude e ortogonalidade dos modos naturais são fundamentais para a utilização dos mesmos no desenvolvimento de algumas técnicas de

estimação de deformação. Detalhes sobre o espaço de Hilbert podem ser encontrados em Rectorys (1975).

As condições de contorno definidas nas Equações (2.56) e (2.57) podem ser interpretadas fisicamente da seguinte forma: a condição de contorno  $\Gamma_1$  refere-se a uma condição de engaste e a região de contorno  $\Gamma_2$  refere-se a uma região livre de tensão, a qual significa que nesta região, a estrutura está em uma condição sem restrição de movimento ou livre. Caso  $\Gamma = \Gamma_2$ , ou seja, região livre de tensão em todo o contorno, tem-se a condição conhecida como condição livre – livre.

Embora a solução da equação de movimento relacionada aos sistemas contínuos é importante para a compreensão de algumas propriedades, na prática, aplica-se a análise modal baseada em sistemas discretos. As funções contínuas que caracterizam a forma de vibração são aproximadas por meios numéricos, elementos finitos, ou a partir da análise de um modelo discreto. A determinação dos modos naturais, das frequências naturais e fatores de amortecimento modal, em modelos discretos, caracterizam essencialmente a análise modal. Assim sendo, os aspectos pertinentes da análise modal, nas suas várias formas de realização, serão abordados nas próximas seções.

### **2.5.2 Análise Modal Teórica**

Em muitos casos, os sistemas mecânicos contínuos são discretizados em um número finito  $N$  de graus de liberdade e podem ser analisados a partir do estudo de sistemas mecânicos que apresentam múltiplos graus de liberdade. A análise inicia-se com uma descrição das características físicas do sistema, usualmente em termos de suas propriedades de massa, rigidez e amortecimento, representadas pelas matrizes de massa  $[M]$ , de rigidez  $[K]$  e de amortecimento  $[C]$ . Este modelo se refere ao “Modelo Espacial” (EWINS, 1984). Análise dinâmica analítica deste modelo espacial conduz a uma descrição do comportamento da estrutura através de seus modos de vibrar, ou seja, a solução deste modelo sempre descreve as várias formas em que a estrutura é capaz de vibrar naturalmente. Sem qualquer excitação externas, estes modos são chamados de modos normais ou naturais. Esta fase de análise dos modos representa o “Modelo Modal”. Este modelo trata-se, portanto, da solução de um problema de autovalor e autovetor, que

fornece os parâmetros modais (frequências naturais, fator de amortecimento e vetores dos modos naturais). O terceiro estágio analisa como a estrutura vibra sob uma condição de excitação e, especialmente, em quais amplitudes. Esta etapa não depende somente das propriedades inerentes da estrutura, mas também da natureza e magnitude da excitação imposta. A este modelo dá-se o nome de “Modelo Resposta”, onde ocorre, portanto, um ajuste de funções respostas em frequências definidas para uma faixa de frequência.

O modelo matemático de sistemas com múltiplos graus de liberdade está relacionado com a teoria da análise modal. Para este estudo, a estrutura deve ser considerada um sistema linear que pode ser representado dinamicamente por uma equação diferencial de segunda ordem, apresente características invariantes no tempo e atenda ao princípio de reciprocidade de Maxwell, onde, segundo (MAIA; SILVA, 1997) a resposta em um ponto  $k$  devido à excitação em um ponto  $j$  da estrutura é a mesma que se a excitação ocorresse no ponto  $k$  e a resposta fosse medida no ponto  $j$ .

O modelo discreto de sistemas mecânicos pode ser representado na forma matricial como mostra a Equação (2.59):

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.59)$$

onde  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são matrizes de dimensões  $N \times N$  de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente,  $\{\ddot{x}(t)\}$ ,  $\{\dot{x}(t)\}$  e  $\{x(t)\}$  são vetores de dimensão  $N \times 1$  da aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente e  $\{f(t)\}$  é o vetor  $N \times 1$  da força externa excitadora. O número  $N$  se refere ao número de graus de liberdade do sistema.

Para obtenção dos modos próprios, frequência natural e a verificação da ortogonalidade ponderada dos vetores modais, o sistema em análise é considerado conservativo, sem amortecimento, e sujeito à vibração livre. Assim, a Equação (2.59) torna-se:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad (2.60)$$

O sistema de equações representado pela Equação anterior tem uma solução geral do tipo:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t} \quad (2.61)$$

sendo  $\{X\}$  um vetor  $N \times 1$  de amplitudes independentes do tempo,  $i = \sqrt{-1}$  e  $\omega$  a frequência angular.

Substituindo a solução proposta e sua derivada na Equação (2.60) obtém-se:

$$([\mathbf{M}]\omega^2 + [\mathbf{K}])\{X\}e^{i\omega t} = \{0\} \quad (2.62)$$

Para que a Equação (2.62) tenha outra solução além da trivial, ou seja,  $\{X\}$  não seja nulo, o determinante de  $([\mathbf{M}]\omega^2 + [\mathbf{K}])$  dever ser nulo, ou seja:

$$\det([\mathbf{M}]\omega^2 + [\mathbf{K}]) = 0 \quad (2.63)$$

Para um sistema estável, a solução do determinante acima resulta em um polinômio característico com  $N$  possíveis soluções positivas e reais  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$ , que são os autovalores da Equação (2.63). Os valores  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  são as frequências naturais não amortecidas do sistema.

Substituindo os autovalores na Equação abaixo:

$$([\mathbf{M}]\omega_r^2 + [\mathbf{K}])\{\psi_r\} = \{0\} \quad (2.64)$$

obtêm-se os autovetores associados  $\{\psi_r\}$ , com  $(r = 1, 2, \dots, N)$ , os quais são os modos próprios ou naturais do sistema. Esses vetores contém  $N$  elementos reais (positivos ou negativos) e representam os deslocamentos relativos de cada grau de liberdade associado à frequência natural referente ao modo  $r$ .

A solução completa para um problema de vibração livre é expresso em duas matrizes  $N \times N$  da seguinte forma:

$$diag[\omega_r^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

e

$$[\Psi] = [\{\psi_1\} \quad \{\psi_2\} \quad \dots \quad \{\psi_N\}] \quad (2.66)$$

onde  $[diag[\omega_r^2]]$  é uma matriz diagonal denominada matriz espectral e  $[\Psi]$  é a matriz modal, ambas constituem o modelo modal do sistema.

A propriedade de ortogonalidade ponderada dos vetores modais apresentada na Equação (2.58), no entanto, para o sistema discreto avaliado por ser expressa por:

$$\{\psi_s\}^T [\mathbf{M}] \{\psi_r\} = 0 \quad (r \neq s) \quad (2.67)$$

e

$$\{\psi_s\}^T [\mathbf{K}] \{\psi_r\} = 0 \quad (r \neq s) \quad (2.68)$$

Quando  $r = s$ , ou seja, o mesmo modo, tem-se:

$$\omega_r^2 = \frac{\{\psi_r\}^T [\mathbf{K}] \{\psi_r\}}{\{\psi_r\}^T [\mathbf{M}] \{\psi_r\}} = \frac{k_r}{m_r} \quad (2.69)$$

sendo  $k_r$  e  $m_r$  a rigidez e massa modal ou generalizada do modo  $r$ .

Os vetores modais apresentam o deslocamento relativo entre os graus de liberdade, como se viu anteriormente, entretanto eles podem ser normalizados. Convencionalmente na análise modal os vetores modais são normalizados pela matriz de massa utilizando o valor da massa modal da seguinte forma:

$$\{\phi\}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \{\psi_r\} \quad (2.70)$$

onde  $\{\phi\}_r$  representa o vetor modal normalizado pela massa. Substituindo os vetores modais  $\{\psi\}$  na matriz modal pelos vetores modais normalizados pela massa  $\{\phi\}$  na Equação (2.66), tem-se a matriz modal normalizada pela massa  $[\Phi]$ , onde as linhas desta matriz referem-se aos graus de liberdade do sistema e as colunas referem-se aos modos analisados.

Das propriedades da ortogonalidade ponderada dos vetores modais normalizados pela matriz de massa tem-se:

$$[\Phi]^T [\mathbf{M}] [\Phi] = [\mathbf{I}] \quad (2.71)$$

$$[\Phi]^T [\mathbf{K}] [\Phi] = [\omega_r^2] \quad (2.72)$$

A Equação (2.71) representa, para um modelo discreto, a Equação (2.58).

### ***Transformação de Coordenadas***

Na análise dinâmica de sistemas em coordenadas espaciais,  $\{x(t)\}$ , pode haver: o acoplamento dinâmico, que ocorre quando a matriz de massa não é diagonal, o acoplamento estático, que ocorre quando a matriz de rigidez não é diagonal, ou até mesmo o acoplamento de amortecimento, quando a matriz de amortecimento não é diagonal. Estes acoplamentos dificultam a obtenção do vetor de resposta temporal  $\{x(t)\}$ , desta forma, através das propriedades da matriz modal, tem-se a seguinte transformação de coordenadas para o desacoplamento do sistema:

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{q(t)\} \quad (2.73)$$

onde  $\{q(t)\}$  são chamadas *coordenadas modais ou principais*.

A partir da transformação de coordenadas é possível estudar os sistemas com  $N$  graus de liberdades sujeitos a forças externas excitadoras e processos de dissipação de energia que atenuam as amplitudes de vibração e são responsáveis pelo acoplamento dos modos. Esses processos de dissipação podem ser avaliados por alguns tipos de amortecimentos, dentre eles: o amortecimento hysterético, o amortecimento viscoso proporcional e o amortecimento viscoso geral (MAIA; SILVA 1997).

### **Sistemas com múltiplos graus de liberdade e amortecimento hysterético**

Segundo Maia e Silva (1997) considerando que uma estrutura está sujeita ao amortecimento hysterético, a equação de movimento para um sistema de  $N$  graus de liberdade pode ser escrita como:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + i[\overline{D}]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.74)$$

onde  $[\overline{D}]$  é uma matriz de amortecimento hysterético e escrita como:

$$[\overline{D}] = \varphi[K] + \nu[M] \quad (2.75)$$

e  $\varphi$  e  $\nu$  são constantes. Propondo uma solução do tipo:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t} \quad (2.76)$$

encontra-se um problema de autovalor complexo com  $N$  autovalores complexos  $\kappa_r^2$  e  $N$  autovetores reais  $\{\psi_r\}$ . Os autovalores contêm a informação da frequência natural do sistema e são escritos da seguinte forma:

$$\kappa_r^2 = \omega_r^2(1 + i\eta_r) \quad (2.77)$$

onde  $\eta_r$  é o fator de perda por amortecimento referente a cada modo definido por:

$$\eta_r = \varphi + \frac{\nu}{\omega_r^2} \quad (2.78)$$

A propriedade de ortogonalidade ponderada dos modos naturais é ainda mantida para o caso do amortecimento histerético. Assim, os autovalores complexos  $\kappa_r^2$  podem ser escritos da mesma forma da Equação (2.69) como:

$$\kappa_r^2 = \frac{\{\psi_r\}^T [\mathbf{K} + i\overline{\mathbf{D}}] \{\psi_r\}}{\{\psi_r\}^T [\mathbf{M}] \{\psi_r\}} = \frac{k_r}{m_r} \quad (2.79)$$

no entanto com  $k_r$  e  $m_r$  sendo valores complexos.

Considerando o caso de uma força de excitação harmônica  $\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t}$  e substituindo a solução proposta da Equação (2.61) na Equação (2.74) tem-se:

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + i\overline{\mathbf{D}} + [\mathbf{K}])\{X\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (2.80)$$

Assim sendo:

$$\{X\} = (-\omega^2[\mathbf{M}] + i\overline{\mathbf{D}} + [\mathbf{K}])^{-1} \{F\} \quad (2.81)$$

Como o vetor  $\{X\}$  pode ser expresso como uma combinação linear dos autovetores que satisfazem a condição homogênea associada da Equação (2.74) da seguinte forma:

$$\{X\} = \sum_{r=1}^N \gamma_r \{\psi_r\} \quad (2.82)$$

Então, substituindo Equação (2.82) na Equação (2.80) e pré-multiplicando por  $\{\psi_s\}^T$  tem-se:

$$\{\psi_s\}^T \left( [\mathbf{K}] + i[\bar{\mathbf{D}}] \right) \sum_{r=1}^N \gamma_r \{\psi_r\} - \omega^2 [\mathbf{M}] \sum_{r=1}^N \gamma_r \{\psi_r\} = \{\psi_s\}^T \{F\} \quad (2.83)$$

Considerando a propriedade de ortogonalidade dos autovetores, a Equação (2.83) torna-se:

$$\gamma_r \{\psi_r\}^T \left( [\mathbf{K}] + i[\bar{\mathbf{D}}] \right) \{\psi_r\} - \omega^2 \gamma_r [\mathbf{M}] \{\psi_r\} = \{\psi_r\}^T \{F\} \quad (2.84)$$

ou:

$$\gamma_r k_r - \omega^2 \gamma_r m_r = \{\psi_r\}^T \{F\} \quad (2.85)$$

onde  $m_r$  e  $k_r$  são a rigidez e massa modal, respectivamente, definidos na Equação (2.69), então:

$$\gamma_r = \frac{\{\psi_r\}^T \{F\}}{k_r - \omega^2 m_r} \quad (2.86)$$

Substituindo a Equação (2.86) na (2.82) tem-se a resposta para o amortecimento hysterético definida como:

$$\{x(t)\} = \{X\} e^{i\omega t} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\psi_r\}^T \{F\} \{\psi_r\}}{k_r - \omega^2 m_r} e^{i\omega t} \quad (2.87)$$

Utilizando as Equações (2.77) e (2.79) e substituindo na Equação (2.87) tem-se a receptância  $\alpha_{jk}$  de uma coordenada  $j$  em função de uma força harmônica de excitação aplicada na coordenada  $k$  do vetor de força modal  $\{F\}$ , sujeita a dissipação de energia por meio do amortecimento hysterético, escrita como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{\psi_{jr} \psi_{kr}}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2)} \quad (2.88)$$

onde  $\psi_{jr}$  e  $\psi_{kr}$  são elementos da matriz modal  $[\Psi]$ . Utilizando os modos normalizados pela massa tem-se:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2)} \quad (2.89)$$

onde  $\phi_{jr}$  é elemento da linha  $j$  da coluna  $r$  da matriz modal e  $\phi_{kr}$  é o elemento da linha  $k$  da coluna  $r$  da matriz modal. Através da constante modal, a Equação (2.89) é reescrita como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r\bar{A}_{jk}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2)} \quad (2.90)$$

onde  ${}_r\bar{A}_{jk}$  é definida por:

$${}_r\bar{A}_{jk} = \left| \frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{m_r} \right| = |\phi_{jr}\phi_{kr}| \quad (2.91)$$

### Sistemas com múltiplos graus de liberdade e amortecimento viscoso proporcional

No caso da consideração de amortecimento viscoso proporcional, a matriz de amortecimento  $[C]$  da Equação (2.59) é substituída por uma matriz de amortecimento proporcional  $[\bar{C}]$ , a qual é obtida pela combinação linear das matrizes de massa e rigidez da mesma forma que a matriz de amortecimento hysterético da Equação (2.75). No entanto, para ficar conveniente com a abordagem de amortecimento viscoso proporcional, a Equação (2.75) é reescrita utilizando a matriz  $[\bar{C}]$  e novas constantes, como:

$$[\bar{C}] = \beta[M] + \vartheta[K] \quad (2.92)$$

com  $\vartheta$  e  $\beta$  constantes.

Reescrevendo a Equação (2.59) considerando a matriz  $[\bar{C}]$ , a transformação de coordenadas da Equação (2.73),  $\{f(t)\} = 0$  e pré-multiplicando os termos por  $[\Phi]^T$ , tem-se:

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{q}(t)\} + [\Phi]^T [\bar{C}][\Phi]\{\dot{q}(t)\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{q(t)\} = \{0\} \quad (2.93)$$

Pela propriedade de ortogonalidade dos modos e a combinação linear da Equação (2.92), a Equação (2.93) torna-se:

$$\{\ddot{q}(t)\} + [\beta + \vartheta\omega_r^2]\{\dot{q}(t)\} + [\omega_r^2]\{q(t)\} = \{0\} \quad (2.94)$$

Analogamente a um sistema de um grau de liberdade, o fator de amortecimento modal  $\zeta_r$ , relação entre o coeficiente de amortecimento com o coeficiente de amortecimento crítico, para um sistema com amortecimento viscoso proporcional é dado como:

$$\zeta_r = \frac{\beta + 9\omega_r^2}{2\sqrt{\omega_r^2}} \quad (2.95)$$

ou:

$$\zeta_r = \frac{\beta}{2\omega_r} + \frac{9\omega_r}{2} \quad r=1,2,\dots,M \quad (2.96)$$

A receptância  $\alpha_{jk}$  sujeita a dissipação de energia por meio do amortecimento viscoso proporcional pode ser escrita como (BERNASCONI; EWINS, 1989):

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + i2\zeta_r\omega_r\omega)} \quad (2.97)$$

### Sistemas com múltiplos graus de liberdade e amortecimento viscoso geral

Na análise de sistemas com amortecimento viscoso, a matriz de amortecimento [C] não é diagonal. Mesmo utilizando a matriz modal do sistema conservativo associado e a transformação de coordenadas, o sistema estará acoplado. Para o desacoplamento do sistema, é sugerida a utilização da formulação de estado. Desta forma, define-se o vetor de estado da seguinte forma, (MAIA; SILVA, 1997):

$$u(t) = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix} \quad (2.98)$$

e substituindo o vetor de estado e sua primeira derivada na equação de movimento do sistema amortecido e vibração livre tem-se:

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \{\dot{u}(t)\} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \{u(t)\} = \{0\} \quad (2.99)$$

ou simplificando, tem-se a seguinte equação de movimento na forma de estado:

$$[A]\{\dot{u}(t)\} + [B]\{u(t)\} = \{0\} \quad (2.100)$$

Propondo a solução do tipo:

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{x}\} \\ s\{\bar{x}\} \end{Bmatrix} e^{st} = \{\bar{u}\} e^{st} \quad (2.101)$$

O problema de autovalor pode ser escrito na forma:

$$[s[A] + [B]]\{\bar{u}\} = \{0\} \quad (2.102)$$

A solução do problema de autovalor e autovetor da Equação acima resultam em  $s_r$  e  $s_r^*$  que são os  $r$ -ésimos autovalores e  $\{\psi_r\}$  e  $\{\psi_r^*\}$ , os autovetores complexos que apresentam as características de ortogonalidade como nos sistemas conservativos. Definindo a transformação de coordenada abaixo:

$$\{u(t)\} = [\Psi']\{q(t)\} \quad (2.103)$$

onde  $[\Psi']$  é uma matriz modal complexa de dimensão  $2N \times 2N$ .

Substituindo a Equação (2.103) e sua derivada na equação diferencial de movimento na forma de estado (2.100), e pré-multiplicando o resultado por  $[\Psi']^T$  tem-se:

$$[a_r]\{\dot{q}(t)\} + [b_r]\{q(t)\} = \{0\} \quad (2.104)$$

onde:

$$\begin{aligned} [a_r] &= [\Psi']^T [A] [\Psi'] \\ [b_r] &= [\Psi']^T [B] [\Psi'] \end{aligned} \quad (2.105)$$

Assim sendo, a receptância  $\alpha_{jk}$  sujeita a dissipação de energia por meio do amortecimento viscoso, pode ser escrita como :

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{i\omega - s_r} \quad (2.106)$$

sendo:

$$\{\phi_r\} = \frac{1}{\sqrt{a_r}} \{\psi_r\} \quad (2.107)$$

Quando os autovetores aparecem em pares complexos conjugados, pode-se utilizar a seguinte Equação para a receptância:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{i\omega - s_r} + \frac{\phi_{jr}^* \phi_{kr}^*}{i\omega - s_r^*} \right) \quad (2.108)$$

### 2.5.3 Análise Modal Experimental

Tradicionalmente, a Análise Modal Experimental (AME) é um conjunto de técnicas experimentais e modelos utilizados para a identificação de parâmetros modais em estruturas, máquinas e equipamentos.

A análise modal experimental segue uma rotina inversa da teórica, onde se inicia pelo Modelo Resposta, passa-se pelo Modelo Modal e chega-se no Modelo Estrutural (EWINS, 1984). Em outras palavras, a partir das medições, determinam-se as propriedades modais através de métodos de identificação, para só então, ajustar o modelo discreto em estudo. Esse modelo discreto é ajustado de tal forma a representar a estrutura real analisada, a qual é um modelo contínuo que apresenta um número infinito de graus de liberdade e, portanto, um número infinito de modos de vibração. Desta forma, é necessário estabelecer faixas de frequências de análise de acordo com os modos de vibração de interesse. A estrutura deve ser discretizada, onde cada grau de liberdade se refere a um ponto ou direção da excitação ou da resposta da estrutura. A discretização deve ser feita de tal modo que o sistema possa ser observável, ou seja, dependendo do comprimento de onda analisado, a discretização deve ser mais refinada ou não, para que o número de informações medidas seja suficiente para gerar um modelo adequado da estrutura. Essa discretização define o tamanho do modelo experimental.

Basicamente, a análise modal experimental é realizada medindo-se a força de excitação e as respostas da estrutura, estimando-se as Funções de Resposta em Frequência (FRF) ou sua representação temporal, as Funções de Resposta ao Impulso (FRI). Uma FRF é a resposta na frequência  $\omega$  de um ponto de uma estrutura devido a uma força de excitação unitária no domínio da frequência, aplicada no mesmo ou em outro ponto. Esta relação entre a resposta, no caso de deslocamento, e a excitação foi mencionada anteriormente como receptância. Segundo Ewins (1984), além de receptância, a função de resposta em frequência de deslocamento, é chamada de flexibilidade dinâmica ou admitância. A função de resposta em frequência da velocidade, ou seja,

a relação entre a velocidade e a força excitadora, é denominada mobilidade e a função de resposta em frequência da aceleração, ou seja, a relação entre a aceleração e a força excitadora, é denominada acelerância.

Considerando, por exemplo, a receptância  $\alpha_{jk}(\omega)$  expressa na Equação (2.90), Equação (2.97), ou na Equação (2.108), para um sistema de  $N$  graus de liberdade, a resposta e a excitação podem ser relacionadas pela matriz  $[H(\omega)]$  de FRF, ou no caso específico, de receptância, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ \vdots \\ X_N(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(\omega) & \alpha_{12}(\omega) & \cdots & \alpha_{1N}(\omega) \\ \alpha_{21}(\omega) & \alpha_{22}(\omega) & \cdots & \alpha_{2N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N1}(\omega) & \alpha_{N2}(\omega) & \cdots & \alpha_{NN}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ \vdots \\ F_N(\omega) \end{Bmatrix} \quad (2.109)$$

sendo  $X_j(\omega)$  a resposta do  $j$ -ésimo nó e  $F_k(\omega)$  é a força de excitação no  $k$ -ésimo nó. Desta maneira, nas colunas da matriz  $[H(\omega)]$  estão as FRF da excitação em um grau de liberdade específico para a resposta de diversos pontos ou graus de liberdade. Nas linhas da matriz  $[H(\omega)]$  estão as FRF para um ponto específico de resposta e diversos pontos de excitação.

Experimentalmente, as FRF ou FRI geralmente são estimadas em condições controladas, onde a estrutura é artificialmente excitada. O tipo de excitação que a estrutura necessita ser submetida está diretamente associado à faixa de frequência de interesse, tamanho da estrutura e também a presença ou não de não linearidades. Assim sendo, a excitação da estrutura pode ser feita através de impulso, excitação impulsiva (*Impact Testing*), onde é utilizado um martelo de impacto apropriado. A excitação impulsiva é feita em diversos pontos da estrutura e a resposta é medida apenas em um ponto, por exemplo, desde que a estrutura respeite o princípio de reciprocidade de Maxwell. A excitação impulsiva é capaz de excitar uma faixa de frequência da estrutura, pois analiticamente, a transformada de Fourier de um impulso unitário é um valor constante em todas as frequências.

Outra forma de se excitar a estrutura é utilizando “*shaker*”, (*Shaker Testing*), excitadores que podem ser mecânicos, eletromagnéticos ou hidráulicos. Neste caso, o ponto de excitação é

fixo e as medidas das respostas são feitas nos demais pontos da estrutura. O tipo de sinal geralmente utilizado para a excitação com *shaker* é o sinal aleatório ruído branco.

Quando as respostas são medidas em apenas um ponto (ponto fixo) e as FRF são obtidas a partir da excitação em diversos pontos, ou seja, no teste de impacto, isto corresponde a se estimar os elementos de uma linha da matriz  $[H(\omega)]$ . Quando a excitação é fixa em um ponto, ou seja, teste com um excitador, isto corresponde a se estimar os elementos de uma coluna da matriz  $[H(\omega)]$ . Nos itens subsequentes serão abordados alguns conceitos sobre processamento de sinais para a estimação das FRF na análise modal.

As FRF são estimadas a partir de estimadores. Geralmente são utilizados os estimadores  $H_1$  e  $H_2$ , os quais são definidos da seguinte forma (EWINS, 1984):

$$H_1(\omega) = \frac{G_{fx}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} \quad (2.110)$$

$$H_2(\omega) = \frac{G_{xx}(\omega)}{G_{xf}(\omega)} \quad (2.111)$$

sendo  $G(\omega)$  funções de correlação representadas apenas em frequências positivas e dadas por:

$$\begin{aligned} G_{ff}(\omega) &= 2S_{ff}(\omega) & G_{xx}(\omega) &= 2S_{xx}(\omega) \\ G_{fx}(\omega) &= 2S_{fx}(\omega) & G_{xf}(\omega) &= 2S_{xf}(\omega) \end{aligned} \quad (2.112)$$

onde  $S_{ff}(\omega)$  é a auto densidade espectral de potência da força de excitação,  $S_{xx}(\omega)$  é auto densidade espectral de potência da resposta e,  $S_{xf}(\omega)$  e  $S_{fx}(\omega)$  são as densidades espectrais de potência cruzada entre a força de excitação e a resposta. São calculadas a partir da transformada de Fourier das funções de correlação (BENDAT; PIERSOL, 2000) e (PROAKIS; MANOLAKIS, 1996).

Pode ser demonstrado matematicamente que as densidades espectrais cruzadas não são afetadas pelos ruídos de medição. Assim, nas situações em que o sinal de entrada está contaminado pelo ruído, pode ser utilizado o estimador  $H_2$  para melhor aproximação da FRF. Nas situações em que o sinal de resposta está contaminado com ruído pode ser utilizado o estimador  $H_1$ , (BENDAT; PIERSOL, 2000).

A relação entre os estimadores é dada pela função de coerência  $\gamma^2(\omega)$ :

$$\gamma^2(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} \quad \text{sendo } 0 \leq \gamma^2(\omega) \leq 1 \quad (2.113)$$

A função de coerência é uma função real que pode ser interpretada como um coeficiente de correlação no domínio da frequência que representa o quão bem a resposta está linearmente relacionada com a entrada no sistema analisado.

Os conjuntos de FRF são analisados através de métodos onde é possível se identificar os parâmetros modais. Uma abordagem mais completa desses métodos e da AME pode ser vista em Ewins, (1984) e Maia e Silva, (1997).

#### **2.5.4 Análise Modal Operacional**

Embora os parâmetros modais estimados pela análise modal experimental possam fornecer informações importantes do comportamento dinâmico, às vezes, não representam corretamente as condições reais de operação do equipamento. Muitas vezes os componentes são testados isoladamente em laboratório, sem que estejam montados nos equipamentos a que se destinam. As condições de contorno influenciam sensivelmente no comportamento dinâmico, e em algumas situações, pode ser muito complicado reproduzi-las em uma bancada experimental.

Outra questão envolvida, principalmente quando a análise modal experimental é realizada em condições reais de operação, é a dificuldade de excitação por meio artificial de grandes estruturas, principalmente por fonte única de excitação. Nestes casos, há a necessidade de um valor elevado de energia que seja capaz de excitar os modos de vibração de interesse no estudo. Em alguns casos, mesmo que as forças artificiais conhecidas consigam excitar a estrutura, outros efeitos podem alterar o comportamento dinâmico da estrutura, o qual não será previsto pela AME. Esses efeitos podem ser ambientais, de temperatura, lubrificação e de forças de excitações providas de fontes não conhecidas.

Para suprir estas limitações, foram desenvolvidas técnicas de determinação de parâmetros modais utilizando somente os dados de resposta do sistema, onde as excitações originam-se da

própria operação da máquina ou equipamento. Estas técnicas são conhecidas por Análise Modal Operacional (AMO), em inglês, *Operational Modal Analysis* ou *Output-only Modal Analysis* (ZHANG; BRINCKER; ANDERSEN, 2005).

Uma das vantagens da análise modal operacional em relação à análise modal experimental é o fato da não necessidade do conhecimento da força de excitação. Outros aspectos em relação à AMO também podem ser listados, tais quais: (i) a AMO é aplicada em condições operacionais de uma forma mais rápida e menos custosa, já que não são necessários equipamentos para excitação e não é necessária a reprodução de peças e estruturas de testes com condições de contorno específicas, já que a própria máquina por ser analisada; (ii) caracterização dinâmica da estrutura como um todo e não somente de componentes específicos; (iii) a AMO pode ser utilizada no monitoramento e diagnóstico de máquinas e equipamentos.

Considerando que na análise modal experimental a excitação é artificial, na análise modal operacional a excitação é natural ou da própria operação. Neste contexto, por exemplo, James III, Carne e Lauffer (1993) desenvolveram a Técnica de Excitação Natural (NExT). A NExT tem a característica principal de utilizar como excitação o carregamento operacional da estrutura, obtendo-se apenas os sinais de resposta para extração dos parâmetros modais, e considera a excitação como sendo unicamente ruído branco.

Entretanto, na prática as máquinas e equipamentos não estão somente sujeitas as excitações aleatórias ou ruído branco gaussiano. Geralmente em máquinas rotativas, ou que apresentam componentes rotativos, como em carros, turbinas, motores, turbinas eólicas, navios, as excitações harmônicas estão adicionadas as excitações aleatórias. Essas excitações harmônicas estão associadas ao desbalanceamento de massa, empenamento, flutuação de forças em atuadores elétricos ou a própria característica de funcionamento da máquina. Nestes casos, as respostas do sistema serão uma superposição das respostas harmônicas com as respostas devido às excitações aleatórias, e as técnicas convencionais de análise modal operacional, baseadas apenas na análise do sinal aleatório, falham na identificação dos parâmetros modais. Caso a frequência dos harmônicos coincida com uma frequência natural do sistema, a identificação dos parâmetros modais pela AMO fica ainda mais comprometida.

Os efeitos da presença de excitações harmônicas em adição com ruído branco na identificação dos parâmetros modais pela AMO dependem da natureza da excitação harmônica (quantidade, frequência e nível) e o método de identificação de parâmetros modais utilizado. Filtros especiais podem ser utilizados para filtrar os componentes harmônicos dos sinais de respostas. Entretanto, na prática, os filtros não são perfeitos e se a frequência do componente harmônico for próxima a uma frequência natural do sistema, o uso do filtro pode fazer com que haja perdas de informações importantes, prejudicando assim a identificação dos parâmetros modais.

Uma maneira simples de lidar com esses componentes harmônicos seria considerar as respostas harmônicas como um modo virtual não amortecido, ou seja, amortecimento igual à zero. Entretanto, esses “falsos” modos, geralmente não apresentam amortecimento exatamente nulo, o que dificultaria na diferenciação de modos naturais e os modos devido às excitações harmônicas.

Outra maneira de identificar se um pico corresponde a um modo operacional (resposta harmônica) ou a um modo natural, na função densidade espectral da resposta, é através da Função de Densidade de Probabilidade (FDP) do sinal. Se o formato da função de densidade de probabilidade deste sinal filtrado se aproximar do formato da densidade de probabilidade de ruído branco, ou seja, uma densidade de probabilidade gaussiana ou normal, então o modo sob análise corresponde a um modo natural. Por outro lado, se o formato da função de densidade de probabilidade deste sinal filtrado se aproximar do formato da densidade de probabilidade de uma função harmônica, então o modo sob análise corresponde a um modo operacional. (BRINCKER, ANDERSEN, E MOLLER, 2000).

Atualmente muitos métodos de identificação de parâmetros modais estão sendo desenvolvidos, estudados ou modificados para aplicação na AMO. Segundo Vu et. al. (2011), esses métodos de identificação de parâmetros na AMO podem ser classificados de acordo com o domínio do sinal utilizado, no domínio do tempo ou na frequência, da mesma forma que na análise modal experimental. Ainda segundo Vu et. al. (2011), os métodos no domínio do tempo são os mais adequados para a AMO, e podem ser divididos em: indireto, onde envolve o ajuste das funções de correlação das respostas, dentre eles: *Ibrahim Time Domain (ITD)* e o *Least*

*Squares Complex Exponential* (LSCE), e diretos, onde são baseados na escolha de um modelo matemático que descreva o comportamento dinâmico da estrutura, por exemplo, *Autoregressive Moving Average method* (ARMA). Alguns métodos ainda podem ser classificados de acordo com o número de referências simultâneas que utilizam no processamento do sinal.

### **2.5.5 Métodos de validação dos resultados estimados pela análise modal**

Como forma de validar os resultados obtidos em um teste modal, algumas funções e coeficientes podem ser utilizados. Primeiramente, pode-se utilizar a função coerência para validar as FRF medidas. As formas modais estimadas podem ser comparadas através de indicadores. O *Modal Assurance Criterion* (MAC) é um indicador convencionalmente utilizado para este fim.

#### **Modal Assurance Criterion (MAC)**

O *Modal Assurance Criterion* (MAC) também conhecido como “*Mode Shape Correlation Coefficient*”, (MSCC) é um coeficiente de correlação entre dois vetores modais (formas modais) quaisquer. O MAC é uma quantidade escalar (mesmo se os autovetores forem complexos). O valor do MAC sempre estará entre 0 e 1, pois, ao contrário do cálculo de ortogonalidade dos vetores, o MAC é normalizado pela magnitude dos vetores, portanto, é delimitada entre 0 e 1. Um valor do MAC entre 0.9 a 1.0 indica uma boa proximidade dos modos. Por outro lado, se o valor for perto de zero, conclui-se que os modos de vibrações são diferentes (RANDALL, 2003).

O *Modal Assurance Criterion* não pode ser o único indicativo de consistência ou de ortogonalidade entre os modos analisados, pois se as mesmas incertezas, como ruídos, erros de amostragem ou outros erros estiverem presentes nos modos analisados, o MAC poderá indicar valores próximos da unidade, entretanto os modos podem não ser semelhantes. A eficácia dos critérios depende muito da quantidade e da qualidade dos resultados experimentais disponíveis.

Sendo dois vetores modais, por exemplo, um obtido analiticamente e outro experimental, o MAC é definido pela seguinte equação (EWINS, 1984):

$$\text{MAC}(a, e) = \frac{\left| \sum_{j=1}^N \{\varphi_e\}_j \{\varphi_a\}_j^* \right|^2}{\left( \sum_{j=1}^N \{\varphi_e\}_j \{\varphi_e\}_j^* \right) \left( \sum_{j=1}^N \{\varphi_a\}_j \{\varphi_a\}_j^* \right)} \quad (2.114)$$

onde:

- $\{\varphi_a\}_j$  Modo analítico
- $\{\varphi_e\}_j$  Modo experimental
- $j$  Ponto em análise
- $N$  Número total de pontos medidos ou analisados
- $*$  Representa o complexo conjugado

Se o MAC tem um valor próximo de zero, há então uma indicação de que os vetores modais não são coerentes. Isto pode ser devido a uma das seguintes razões (EWINS, 1984):

- O sistema não é estacionário. Isso pode ocorrer se o sistema for não linear e dois conjuntos de dados forem adquiridos em diferentes situações ou níveis de excitação. Se o sistema for não linear o MAC não apresentará bons resultados;

- Há ruído no vetor modal de referência. Este caso é semelhante com o que acontece quando o sinal da FRF é contaminado por ruído na entrada;

- A estimativa de parâmetros pode conter erros. As medições das FRF podem estar certas, mas a estimativa de parâmetros modais pode não ser coerente com os dados;

Caso as quatro possibilidades anteriores não forem confirmadas, o MAC igual à zero pode indicar que há ortogonalidade entre os modos.

A verificação da ortogonalidade dos modos alternativamente pode ser feita a partir de outros métodos. A seguir será detalhado o *Pseudo-Orthogonality Check* (POC)

### **Pseudo-Orthogonality Check (POC)**

O *Pseudo-Orthogonality Check* determina a correlação existente entre dois vetores modais, a qual pode ser ponderada pela matriz de massa. O POC é praticamente uma aplicação da Equação

(2.67), entretanto os vetores modais envolvidos são de origens diferentes. O POC entre dois vetores, um obtido analiticamente  $\{U_a\}$  e outro experimentalmente  $\{U_e\}$ , é dado por:

$$POC = \{U_a\}^T [M_a] \{U_e\} \quad (2.115)$$

onde  $[M_a]$  é a matriz de massa analítica.

Avitabile e O'Callahan (1995) mostraram que o POC pode ser calculado desconsiderando a matriz de massa  $[M_a]$  como:

$$POC = \{U_a\}^- \{U_e\} \quad (2.116)$$

onde  $\{U_a\}^-$  é a inversa generalizada do vetor modal analítico. Semelhante ao MAC, valores de POC próximos a um (1) indicam uma boa correlação entre os modos e valores próximos à zero (0) indicam que não há correlação entre os modos.

## 2.6 Análise da Forma de Deflexão Operacional (ODS)

O comportamento dinâmico de estruturas pode ser avaliado a partir dos parâmetros modais do sistema, (modos próprios, frequência natural e fator de amortecimento), sejam eles estimados através da análise modal numérica, experimental ou operacional. Entretanto, em algumas situações, apenas o conhecimento da forma de vibrar, em um determinado instante de tempo ou frequência, pode ser suficiente para o entendimento e avaliação do comportamento dinâmico das máquinas, equipamentos ou estruturas. Para tal, as técnicas de Análise da Forma de Deflexão Operacional ou em inglês *Operating Deflection Shape* (ODS) podem ser utilizadas.

A forma como a estrutura vibra em um determinado instante de tempo ou frequência é conhecida tradicionalmente como modo operacional. Porém, numa definição mais generalizada, um modo operacional pode ser qualquer movimento forçado de dois ou mais corpos da estrutura que ao serem especificados definem uma forma, ou seja, são definidos como a deflexão de uma estrutura devido à ação de forças de excitação e indicam o movimento relativo entre dois ou mais graus de liberdade da estrutura em uma condição operacional (SCHWARZ e RICHARDSON, 1999). O modo operacional pode ser compreendido como uma forma de vibrar cuja frequência da

vibração não coincide necessariamente com uma das frequências naturais do sistema. Em uma frequência qualquer, o modo operacional será uma combinação linear dos modos próprios do sistema, contendo a contribuição de todos os modos.

Os modos operacionais dependem tanto das propriedades dinâmicas do sistema quanto das características da excitação. Desta forma, pode-se dizer que os modos operacionais contêm os modos naturais, pois dependem das propriedades dinâmicas, e a resposta total do sistema será uma combinação linear dos modos naturais ponderada pelas características da excitação. No entanto, considerando uma fonte de excitação única, próximos às frequências naturais, os modos operacionais tomam a forma do modo natural associada a cada frequência, desde que esses modos sejam ditos desacoplados. Nesta situação, a “forma” do modo operacional dependerá apenas das propriedades do sistema, independentemente da localização e amplitude da força de excitação. É importante ressaltar que ao se referir a forma do modo operacional, não está se levando em consideração a amplitude de vibração, já que a forma modal é representada pela amplitude relativa entre os graus de liberdade. Assim sendo, uma variação da amplitude de vibração global, ou seja, em toda a estrutura analisada, não implica na alteração da forma de vibração.

Como na análise modal teórica, a ODS pode ser baseada em soluções analíticas de equações diferenciais de movimento de estruturas ou pode ser feita experimentalmente, baseada diretamente na análise de sinais. Alguns métodos da ODS não dependem do conhecimento da força excitadora, desta maneira, sendo muito empregada em situações práticas onde os equipamentos apresentam vibração cujas fontes muitas vezes não são conhecidas. A ODS pode ser realizada em sistemas não lineares e não estacionários. Em sistemas não estacionários é preciso uma correção do sinal para análise dos modos operacionais.

Considerando a ODS baseada diretamente na análise de sinais, esta pode ser realizada a partir de um conjunto de dados medidos simultaneamente ou através de um conjunto de dados, tomando-se medidas de referências fixas e outras medidas móveis de pontos da estrutura. A técnica pode ser realizada no domínio do tempo, considerando um conjunto de dados temporais, e no domínio da frequência, através de algoritmos de FFT.

## **OSD no domínio do tempo**

O modo operacional pode ser obtido a partir de respostas no domínio do tempo de sistemas sujeitos a diversos tipos de excitação, dentre elas, aleatória, impulsiva ou senoidais (SCHWARZ; RICHARDSON, 1999). A ODS no domínio do tempo é realizada geralmente medindo-se simultaneamente um conjunto de respostas de interesse na estrutura. Desta forma, a amplitude e fase são implicitamente assumidas, ou seja, a amplitude e a fase relativa são corretamente garantidas. Em algumas situações, o comportamento de vibração da estrutura é repetitivo, e as aquisições dos sinais de resposta podem ser feitas uma a uma, desde que as aquisições ocorram no mesmo tempo do início da repetição.

## **OSD no domínio da Frequência**

Embora a ODS no domínio da frequência possa ser realizada utilizando FRF, em alguns sistemas, a mesma é mais comumente empregada quando não é possível o conhecimento da força de excitação e há limitações no número de canais de aquisição simultâneos, que podem ser utilizados durante os experimentos. Nestas situações a ODS é realizada a partir de um conjunto de funções de transmissibilidade e Densidades Espectrais de Potência e Densidade Espectral Cruzada. Segundo Schwarz e Richardson (1999) a ODS que utiliza as densidades espectrais é denominada ODS FRF.

A aplicação da ODS utilizando FRF necessita de, pelo menos, dois canais de medição simultânea e dos estimadores de FRF. As FRF possuem a informação de amplitude e fase de cada sinal analisado. Entretanto, as amplitudes referem-se às respostas ponderadas pela força excitadora, e a fase medida é entre a resposta e a força excitadora. As dificuldades de estimação das FRF encontradas na aplicação deste método o tornam impraticável, pois é necessário que todas as forças de excitação sejam conhecidas, o que pode ser impossível em algumas situações.

### **2.6.1 Transmissibilidade**

A transmissibilidade é tratada neste texto como a relação no domínio da frequência entre dois sinais de respostas. A função de transmissibilidade é representada matematicamente como:

$$T_{ij}(\omega) = \frac{X_i(\omega)}{X_j(\omega)} \quad (2.117)$$

onde  $T_{ij}$  é a função de transmissibilidade entre a resposta espectral  $X_i$  e a resposta espectral de referência  $X_j$ .

As transmissibilidades são obtidas experimentalmente através da medição das respostas em diferentes pontos e direções de interesse da estrutura dividida pela resposta de referência de um mesmo ponto mantido fixo em todas as medições. Esse procedimento é o mesmo utilizado na estimação da FRF. Sendo um sinal de resposta de um ponto  $i$  e um sinal de resposta de um ponto de referência  $j$ , a Transmissibilidade pode ser estimada a partir do estimador  $H_1$ :

$$T_{ij}(\omega) = \frac{S_{ij}(\omega)}{S_{jj}(\omega)} \quad (2.118)$$

onde  $S_{ij}$  é a densidade espectral cruzada entre o sinal da resposta e referência  $S_{jj}$  é a autodensidade espectral do sinal de referência. A fase é preservada pela densidade espectral cruzada dos dois sinais medidos.

A partir da Equação (2.118) é possível notar que a estimação da transmissibilidade não depende do conhecimento da força excitadora. Essa é uma das vantagens do uso da transmissibilidade na identificação dos modos operacionais. Pois em situações operacionais, nem sempre é possível a medição da força de excitação. Devriendt et. al. (2010) mostrou que as transmissibilidades podem ser utilizadas na estimação dos parâmetros modais, em particular, os modos naturais. Considerando a identificação dos modos operacionais, a transmissibilidade pode ser aplicada em sistemas onde a amplitude da força de excitação varie com o tempo. Nestes casos, se a amplitude da força de excitação variar de uma medida para outra, assume-se que o efeito dessa variação seja o mesmo em todas as respostas, e assim, esse efeito será cancelado no cálculo da transmissibilidade. No entanto, a transmissibilidade depende da localização da força de excitação e da resposta de referência. Para uma mesma referência  $j$  adotada, caso haja uma variação da localização da excitação, haverá uma diferença na transmissibilidade do ponto  $i$ .

Na comparação entre FRF e transmissibilidade uma particularidade é observada. Os polos da função de transmissibilidade não correspondem aos polos das FRF. Assim, os picos nos

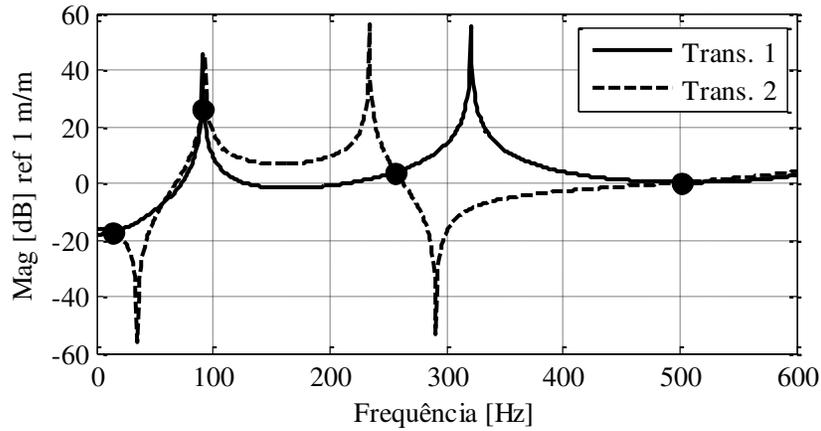
espectros de amplitude das transmissibilidades geralmente não estão associados às frequências naturais do sistema. Um inconveniente disso, quando se analisa apenas as funções de transmissibilidade, é a dificuldade da localização das frequências naturais do sistema.

Análises dos picos e características dos espectros de amplitude de transmissibilidade foram realizadas por alguns autores. Schwarz e Richardson (1999) mostram que a ressonância nos espectros de transmissibilidade é representada por uma região plana “*flat spot*” ao invés de um pico. Entretanto, isso não ocorre em todos os casos. Essa região plana será discutida posteriormente nas avaliações experimentais.

Devriendt et. al. (2010) ilustram que os espectros de duas transmissibilidades se cruzam entre si exatamente na frequência de ressonância, quando as transmissibilidades são das mesmas respostas, mas com condições de carregamentos diferentes. Isto porque a transmissibilidade apresenta uma característica importante: o limite do valor da transmissibilidade da Equação (2.117) com  $\omega$  tendendo ao valor de  $\omega_r$  converge para:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_r} T_{ij}(\omega) = \frac{\phi_{ir}}{\phi_{jr}} \quad (2.119)$$

onde  $\phi_{ir}$  e  $\phi_{jr}$  representam respectivamente as componentes modais da resposta e da referência para o modo  $r$ . A relação da Equação (2.119) é mantida independente da condição de carregamento da estrutura. Para que ocorra o cruzamento entre as transmissibilidades, a variação na condição de carregamento deve ser feita em termos da localização da excitação. Variação apenas de amplitude não implica na alteração na representação da transmissibilidade. A Figura 2.6 ilustra a intersecção das transmissibilidades de um mesmo ponto de resposta, mas com condição de carregamento diferente para uma simulação de um sistema mecânico. As frequências naturais simuladas para o sistema foram de 14; 91; 256 e 502 Hz.



**Figura 2.6 – Transmissibilidades de um mesmo ponto de resposta mas com condição de carregamento diferente interseccionando-se nas frequências naturais do sistema**

Em Brinker, Zhang e Andersen (2000) foi mostrado que os picos das transmissibilidades coincidem com as frequências naturais do sistema com o grau de liberdade referente à excitação restringido ou engastado. Entretanto, esse sistema não corresponde ao sistema real analisado. Schwarz e Richardson (2004) comentaram que os picos nas transmissibilidades são meramente o resultado da divisão do espectro de uma resposta pelo espectro da referência em frequências onde a resposta da referência é relativamente baixa.

A resposta de referência apresenta valores nulos ou próximos à zero nas frequências de antirressonância. Outro caso de resposta de referência nula é quando a referência é colocada em um nó modal do modo natural de frequência  $\omega_r$ . Assim sendo, o espectro de transmissibilidade apresentará um pico na frequência natural  $\omega_r$ .

Considerando a receptância para a resposta  $X_j$ , no grau de liberdade  $j$ , e sujeito à força de excitação  $F_k$ , no grau de liberdade  $k$ , e um sistema conservativo de  $m$  graus de liberdade, como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \frac{\phi_{j1}\phi_{k1}}{(\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{\phi_{j2}\phi_{k2}}{(\omega_2^2 - \omega^2)} + \dots + \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2)} + \dots + \frac{\phi_{jm}\phi_{km}}{(\omega_m^2 - \omega^2)} \quad (2.120)$$

então, utilizando a Equação (2.117), a transmissibilidade entre a resposta  $X_i$  e a resposta de referência  $X_j$  pode ser expressa por:

$$T_{ij}(\omega) = \frac{X_i(\omega)}{X_j(\omega)} = \frac{\left[ \frac{\phi_{i1}\phi_{k1}}{(\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{\phi_{i2}\phi_{k2}}{(\omega_2^2 - \omega^2)} + \dots + \frac{\phi_{ir}\phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2)} + \dots + \frac{\phi_{im}\phi_{km}}{(\omega_m^2 - \omega^2)} \right] F_k}{\left[ \frac{\phi_{j1}\phi_{k1}}{(\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{\phi_{j2}\phi_{k2}}{(\omega_2^2 - \omega^2)} + \dots + \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2)} + \dots + \frac{\phi_{jm}\phi_{km}}{(\omega_m^2 - \omega^2)} \right] F_k} \quad (2.121)$$

Assim, os polos da transmissibilidade  $T_{ij}(\omega)$  são determinados quando o denominador da Equação (2.121) tende a zero, por exemplo:

$$\frac{\phi_{j1}\phi_{k1}}{(\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{\phi_{j2}\phi_{k2}}{(\omega_2^2 - \omega^2)} + \dots + \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2)} + \dots + \frac{\phi_{jm}\phi_{km}}{(\omega_m^2 - \omega^2)} = \alpha_{jk}(\omega) \rightarrow 0 \quad (2.122)$$

Em Gevinski e Pederiva (2013c) foram avaliados casos experimentais relacionando as antirressonâncias da referência com os picos nas transmissibilidades. Os experimentos foram realizados em uma placa de alumínio de dimensões 400 X 500 X 9,5mm. A placa possui recorte retangular com dimensão de 150 X 200 X 9.5 mm. A placa foi submetida a uma única fonte de excitação aleatória ruído branco. Em cada experimento foram adotados diferentes locais de excitação e resposta. A Tabela 2.1 mostra as coordenadas da excitação e referência utilizadas para estimativas das FRF e transmissibilidades nos três casos avaliados.

**Tabela 2.1 – Posicionamento da Excitação e Referência para estimativas de FRF e transmissibilidade**

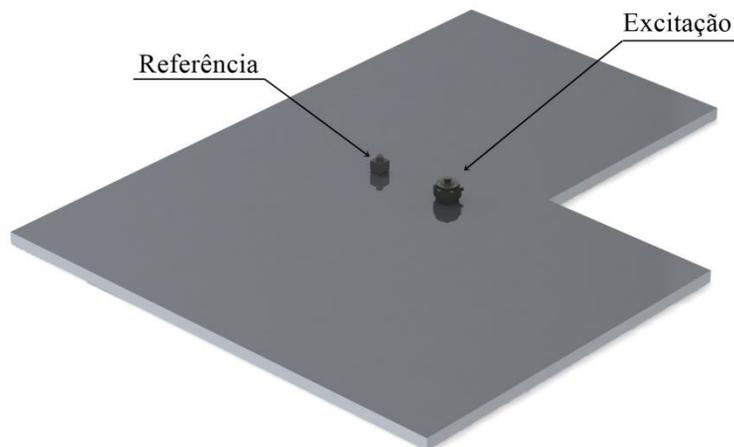
	<i>Coordenada</i>		<i>Coordenada</i>	
Caso 1	Excitação	0.200×0.200×0.000	Referência	0.150×0.200×0.0095
Caso 2	Excitação	0.050×0.450×0.000	Referência	0.150×0.200×0.0095
Caso 3	Excitação	0.200×0.200×0.000	Referência	0.025×0.025×0.0095

A Figura 2.7 ilustra a posição da referência e excitação utilizadas para o Caso 1. Na Figura 2.8 estão ilustradas: a transmissibilidade (linha cheia) considerando um ponto genérico da superfície da placa e a referência ilustrada na Figura 2.7; e também a FRF (linha tracejada) considerando a resposta como sendo a referência e a excitação posicionadas conforme mostra a Figura 2.7. Assim, nestas análises, as FRF são sempre da referência em relação à excitação, e as transmissibilidades podem ser a relação entre qualquer ponto de resposta da superfície da placa relacionada com a referência indicada. As transmissibilidades podem ser de qualquer ponto da superfície da placa, pois o objetivo de relacionar as mesmas com as FRF da referência é mostrar a relação entre os picos nas transmissibilidades e as antirressonâncias da FRF da referência. Os

picos nas transmissibilidades, nos casos analisados, ocorrem nas mesmas frequências para qualquer ponto de medição da superfície da placa.

Na Figura 2.8 os picos no espectro de transmissibilidade coincidem com os vales, antirressonância, da FRF de referência. O pico próximo a 200 Hz praticamente coincide em ambos os espectros, transmissibilidade e a FRF. A segunda frequência natural da placa analisada é de aproximadamente 196 Hz. Nesta situação, a referência foi posicionada na linha modal ou nó do segundo modo natural da placa.

Na Figura 2.9 estão ilustradas as posições da referência e da excitação para o caso 2. No caso 2, a referência foi mantida na mesma posição do caso 1, entretanto, a força de excitação foi aplicada no canto superior da placa. Como é o esperado, esta mudança implica na alteração das características espectrais da FRF e transmissibilidade. Mesmo com essa alteração, os picos nas transmissibilidades coincidem com as antirressonâncias apresentadas pela FRF, conforme pode ser visto na Figura 2.10.



**Figura 2.7 – Posição da excitação e referência para caso 1**

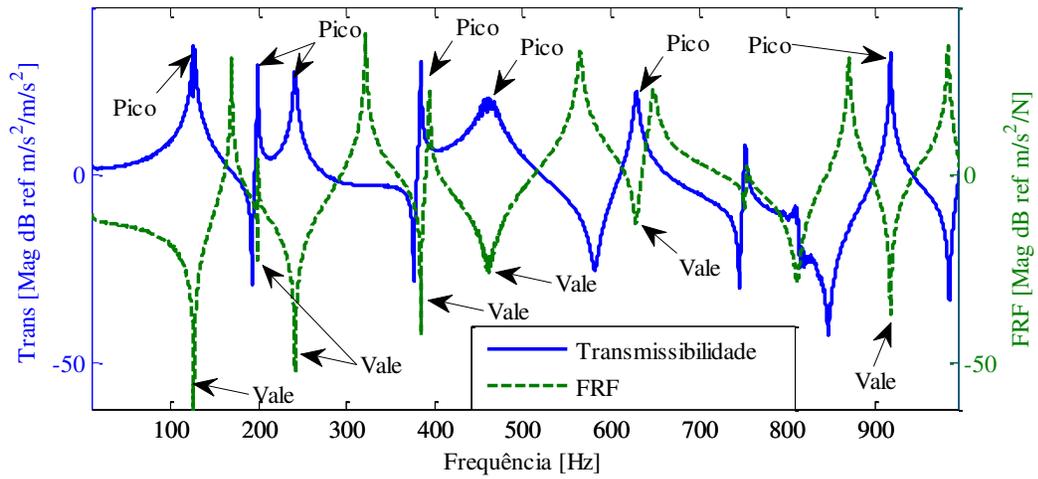


Figura 2.8 – Picos no espectro de transmissibilidade coincidindo com as antirressonâncias “vale” da FRF da referência – Caso 1

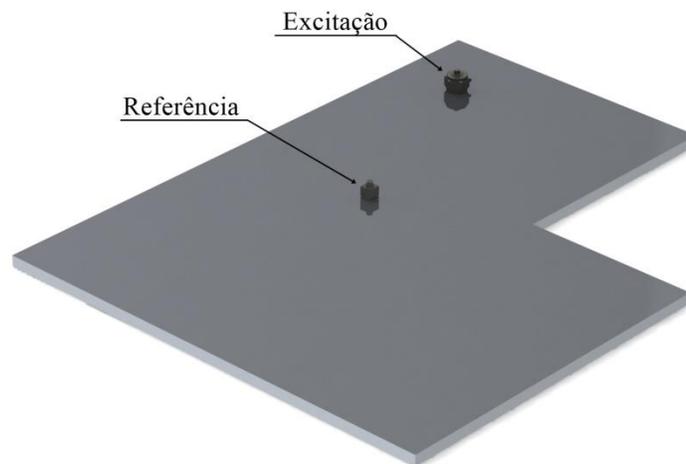
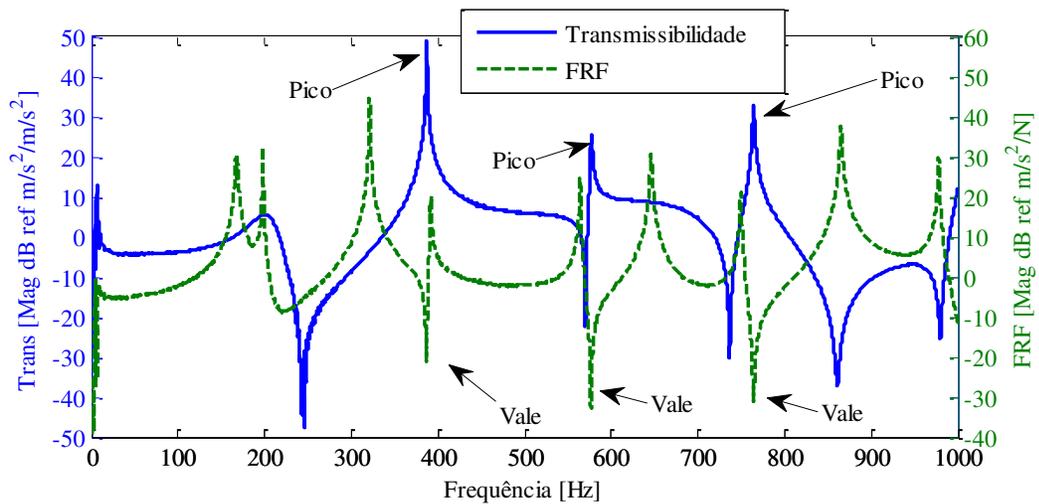


Figura 2.9 – Posição da excitação e referência para o caso 2



**Figura 2.10 - Picos no espectro de transmissibilidade coincidindo com as antirressonâncias “vale” da FRF da referência - Caso 2**

Na Figura 2.10 observa-se um pico atenuado ou plano no espectro de transmissibilidade próximo à frequência de 200 Hz. Sendo que a referência foi posicionada em uma região de baixa amplitude de vibração em 200 Hz, um pico na transmissibilidade na frequência próxima a esta frequência seria esperado. Este caso pode estar relacionado ao exposto por Schwarz e Richardson (1999), no que diz respeito às regiões planas nas ressonâncias apresentadas pelos espectros de transmissibilidades, já que nesta frequência a FRF da referência não apresenta a antirressonância.

No caso 3 a excitação foi mantida na região central e a referência foi colocada no canto inferior da placa, conforme ilustra a Figura 2.11. Os picos nos espectros de transmissibilidades também estão associados às antirressonâncias da FRF de referência, conforme pode ser visto na Figura 2.12. No entanto, no caso 3, o pico na transmissibilidade próximo a 200 Hz possui características semelhantes ao caso 1 e diferente do caso 2. Nota-se que a antirressonância nesta frequência para a FRF da referência é melhor definida. É possível se observar também que neste caso as frequências de pico na transmissibilidade estão muito próximas aos picos de ressonância da FRF, para as três primeiras frequências naturais. Isto porque estes picos estão seguidos de pico ou vales de antirressonância. Os picos nas transmissibilidades podem ser facilmente confundidos e relacionados com as frequências naturais.

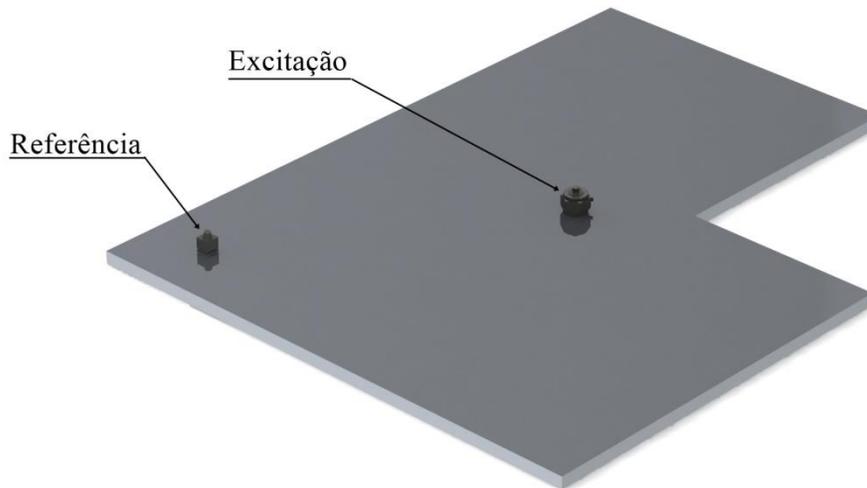


Figura 2.11 - Posição da excitação e referência para o caso 3

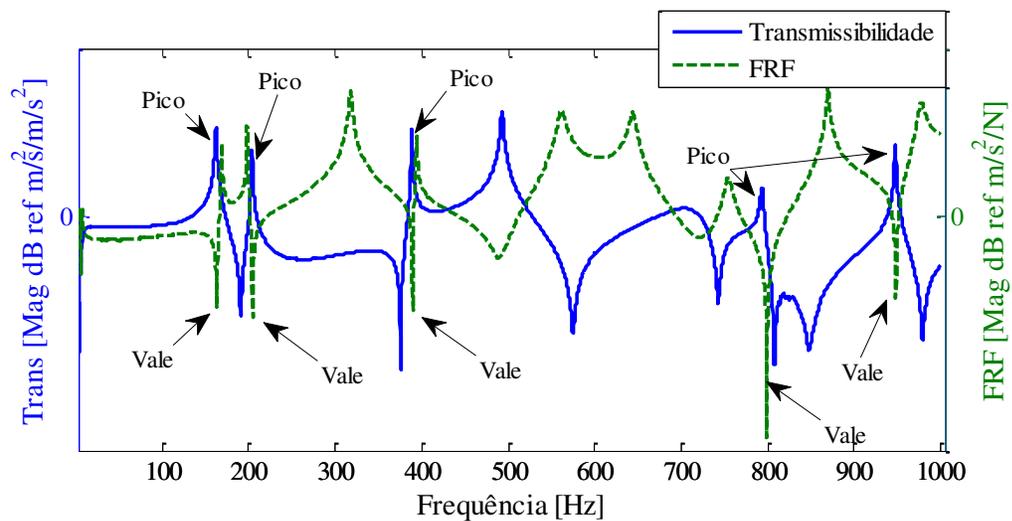


Figura 2.12 - Picos no espectro de transmissibilidade coincidindo com as antirressonâncias da FRF da referência - Caso 3

A localização da resposta de referência tem um papel importante na estimação da transmissibilidade. Geralmente um ponto de máxima resposta é escolhido como referência, no qual assegura uma boa relação sinal-ruído nas medições. Caso a resposta da referência apresente valores próximos à zero ou nulos em algumas frequências, a identificação de modos operacionais pelas transmissibilidades será comprometida. No exemplo analisado da Figura 2.8, embora seja interessante que apareça um pico próximo da frequência natural no espectro de

transmissibilidade, o segundo modo não será corretamente identificado, pois a referência foi colocada próximo ao nó ou linha modal deste modo de vibração.

A frequência de antirressonância é uma propriedade local da estrutura, pois depende da localização da excitação e da resposta. Diferentemente da frequência de ressonância, que é uma propriedade global da estrutura e não depende da localização da excitação ou da resposta. Desta forma, as transmissibilidades apresentarão características espectrais diferentes, principalmente em termos das frequências de picos, dependendo da localização da referência e da excitação.

## **2.7 Função Resposta em Frequência de Deformação**

Como visto anteriormente na seção que trata sobre a análise modal, a determinação de parâmetros modais, especialmente os modos naturais de deslocamento ou deflexão, são obtidos por métodos de identificação baseados, na sua maioria, na matriz de FRF [H]. Essa matriz apresenta características importantes, uma delas está associada à sua simetria, já que para a realização da análise modal experimental, a estrutura necessita respeitar o princípio de Maxwell. Assim sendo, conhecendo-se apenas uma linha ou uma coluna da matriz é possível a identificação dos parâmetros modais da estrutura. Dependendo do tipo de excitação utilizada, martelo de excitação ou excitador eletromagnético, por exemplo, determina-se a linha ou a coluna da matriz [H], respectivamente.

Na técnica de excitação utilizando o martelo de excitação, apenas um sensor de resposta é necessário, e a excitação é medida em todos os pontos de interesse da estrutura. Isso poderia ser uma alternativa interessante para a determinação dos modos de deformação da estrutura, pois apenas um extensômetro fixo à estrutura seria necessário para a determinação da matriz de FRF de deformação. Entretanto, para a determinação da matriz de FRF de deformação, pelo menos uma coluna da matriz necessita ser medida, se as componentes modais de deslocamento forem conhecidas. Isto significa que a resposta de deformação necessita ser medida nos  $N$  pontos da estrutura para um ponto fixo de excitação. Nesta seção tratar-se-á da obtenção e características das Funções Respostas em Frequências de deformação e, principalmente, a sua relação com as funções de resposta em frequência de deslocamento (receptância).

As deformações de pontos de uma estrutura estão relacionadas com os deslocamentos através do tensor de deformação que contém derivadas ordinárias de primeira ordem, conforme visto na seção 2.1, ou no caso da análise da deformação em vigas em flexão, pela derivada de segunda ordem do deslocamento transversal, conforme visto na seção 2.1.1. Estas relações podem ser aplicadas ao vetor da matriz modal de deslocamento para obtenção do vetor de deformação. Assim sendo, considerando a resposta de deslocamento da Equação (2.87) e reescrevendo-a na forma matricial, tem-se:

$$\{X\}e^{i\omega t} = [\Psi][\Lambda][\Psi]^T \{F\}e^{i\omega t} \quad (2.123)$$

onde  $[\Lambda]$  representa a matriz diagonal dada por:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_N \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

Sendo que  $\bar{\lambda}_r$ , por exemplo, considerando amortecimento histerético, é dado por:

$$\bar{\lambda}_r = \left( \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2} \right) \quad (2.125)$$

Desta forma, o vetor de resposta de deformação  $\{\varepsilon\}e^{i\omega t}$  é expresso pela Equação (2.123) e o operador diferencial linear  $\mathbf{D}$  da seguinte forma (YAM et.al., 1996):

$$\{\varepsilon\}e^{i\omega t} = \mathbf{D}[\Psi][\Lambda][\Psi]^T \{F\}e^{i\omega t} \quad (2.126)$$

onde  $\mathbf{D}$  representa o operador diferencial conforme o tensor de deformação, ou seja, representa as derivadas de primeira ordem, ou no caso da análise de deformação em vigas pelo deslocamento transversal, é um operador que representa a derivada de segunda ordem do vetor modal de deslocamento. Assim, a matriz modal de deformação pode ser representada pelo operador diferencial e a matriz modal de deslocamento, como:

$$[\varepsilon] = \mathbf{D}[\Psi] \quad (2.127)$$

onde  $[\varepsilon]$  é a matriz modal de deformações cujas colunas representam as formas modais de deformação. Sendo assim, a Equação (2.126) torna-se:

$$\{\varepsilon\}e^{i\omega t} = [\varepsilon][\Lambda][\Psi]^T \{F\}e^{i\omega t} \quad (2.128)$$

A Equação (2.128) pode ser escrita utilizando a matriz de funções resposta em frequência de deformação  $[H_\varepsilon]$  da seguinte forma:

$$\{\varepsilon\}e^{i\omega t} = [H_\varepsilon]\{F\}e^{i\omega t} \quad (2.129)$$

onde:

$$[H_\varepsilon] = [\varepsilon][\Lambda][\Psi]^T = \sum_{r=1}^N \bar{\lambda}_r \{\varepsilon_r\} \{\psi_r\}^T \quad (2.130)$$

Cada elemento da matriz  $[H_\varepsilon]$  denominado de função resposta em frequência de deformação  $S_{jk}$ , ou em inglês, *Strain Frequency Response Function* (SFRF), é expresso como:

$$S_{jk} = \sum_{r=1}^N \bar{\lambda}_r \{\varepsilon_{jr}\} \{\psi_{kr}\} \quad (2.131)$$

Estas SFRF caracterizam a amplitude de deformação em uma direção específica do ponto  $j$  de uma superfície devido a uma força de excitação harmônica aplicada em um ponto  $k$ . Para o caso do amortecimento histerético, as funções resposta em frequência de deformação podem ser expressas da seguinte forma (BERNASCONI e EWINS, 1989):

$$S_{jk}(\omega) = \sum_r \frac{\varepsilon_{jr} \phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r \omega)} \quad (2.132)$$

onde  $\varepsilon_{jr}$  é a componente de deformação do ponto  $j$  na direção considerada do modo  $r$ . Para o caso do amortecimento viscoso tem-se:

$$S_{jk}(\omega) = \sum_r \frac{\varepsilon_{jr} \phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + i2\zeta_r \omega_r \omega)} \quad (2.133)$$

Notavelmente, existem semelhanças entre a SFRF e a receptância da Equação (2.89). A única diferença é que a constante modal  ${}_r A_{jk} = (\phi_{jr} \phi_{kr})$ , utilizada no cálculo da receptância, contém apenas componentes modais de deslocamento. Na SFRF é substituída pela constante modal  ${}_r S_{jk}$ , composta pelas componentes modais de deformação e de deslocamento:

$${}_r S_{jk} = \varepsilon_{jr} \phi_{kr} \quad (2.134)$$

Estas constantes modais da Equação (2.134) são calculadas de forma que  $S_{jk} \neq S_{kj}$ , assim a matriz  $[H_\varepsilon]$  não é simétrica. Adicionalmente, a mesma não é necessariamente uma matriz quadrada. A Equação (2.131) pode ser mostrada de uma forma expandida como:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & S_{N2} & \cdots & S_{Nn} \end{bmatrix}_{N \times n} = \sum_{r=1}^M \bar{\lambda}_r \begin{bmatrix} \varepsilon_{1r} \psi_{1r} & \varepsilon_{1r} \psi_{2r} & \cdots & \varepsilon_{1r} \psi_{nr} \\ \varepsilon_{2r} \psi_{1r} & \varepsilon_{2r} \psi_{2r} & \cdots & \varepsilon_{2r} \psi_{nr} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{Nr} \psi_{1r} & \varepsilon_{Nr} \psi_{2r} & \cdots & \varepsilon_{Nr} \psi_{nr} \end{bmatrix}_{N \times n} \quad (2.135)$$

onde  $N$  se refere aos pontos de resposta de deformação e  $n$  os pontos referentes à excitação.

Na Equação (2.135) observa-se que para obtenção experimental da matriz  $[H_\varepsilon]$ , pelo menos uma coluna de SFRF necessita ser medida, se as componentes modais de deslocamento forem conhecidas.

## 2.8 Resumo do Capítulo

Neste capítulo os fundamentos da teoria da elasticidade foram abordados, principalmente no que diz respeito à relação entre o deslocamento e deformação. Esta relação consiste na derivação espacial do deslocamento para obtenção da deformação, e será utilizada nos métodos de determinação da deformação a partir de parâmetros vibracionais. Na prática, os parâmetros vibracionais, sejam eles: aceleração, velocidade ou deslocamento, são conhecidos em pontos discretos das estruturas e equipamentos. Por se tratar do conhecimento dos deslocamentos em pontos discretos, propõe-se a utilização dos métodos numéricos de derivação baseados no método de diferenças finitas e no método de elementos finitos, os quais foram brevemente mostrados neste capítulo.

Os conceitos da análise modal foram apresentados, principalmente no que diz respeito às diferentes formas de sua realização, seja análise modal teórica, experimental ou operacional. Na análise da forma de deflexão operacional, ou como conhecida, *Operating Deflection Shapes*

(ODS), foi focado o uso da transmissibilidade para identificação dos modos operacionais. As transmissibilidades e as Funções Resposta em Frequência (FRF) serão utilizadas na determinação do tensor de deformação e da distribuição da deformação dinâmica nas simulações e experimentos realizados neste trabalho.

No próximo capítulo, os métodos de estimação da deformação dinâmica serão apresentados, os quais são a matriz de transformação e a análise modal híbrida. Também é proposta uma classificação dos métodos de estimação da deformação.

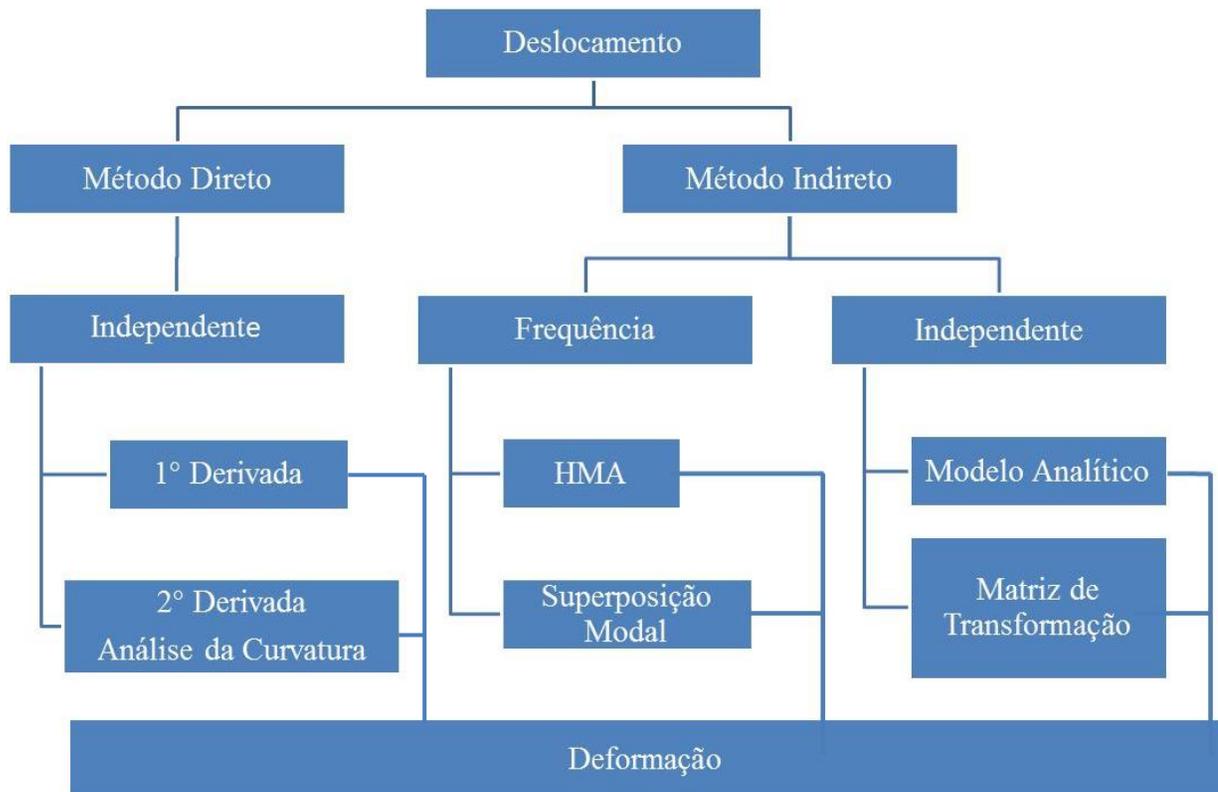
## 3 MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE DEFORMAÇÃO

### 3.1 Introdução

Diversos métodos foram desenvolvidos para a estimação da deformação dinâmica a partir de parâmetros modais, no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Estes métodos utilizam, na sua maioria, a derivação numérica do deslocamento obtido pela análise modal experimental ou pela análise modal operacional. Em alguns métodos, a propriedade de ortogonalidade das matrizes modais é utilizada para aproximação do deslocamento tridimensional, no caso da aplicação da Análise Modal Híbrida, *Hybrid Modal Analysis* (HMA), ou aproximação da deformação a partir das matrizes modais de deslocamento e deformação utilizando a matriz de transformação, *Displacement – to – Strain Transformation* (DST). Na Figura 3.1 é proposta uma classificação destes métodos de acordo com a forma de aplicação.

A deformação pode ser obtida a partir do conhecimento do deslocamento da estrutura utilizando um dos métodos apresentados na Figura 3.1. Os métodos diretos são os que usam os sinais no tempo e se aplicam as derivadas do deslocamento de primeira ou segunda ordem para obtenção da deformação. Estão relacionados unicamente ao tensor de deformação da Equação (2.5), derivada de primeira ordem do deslocamento, e no caso específico da deformação de flexão em vigas, utiliza-se a derivada de segunda ordem do deslocamento transversal e análise da curvatura da viga dada na Equação (2.13).

Os métodos indiretos dependem não só do deslocamento, mas também de outras informações, como por exemplo, a matriz modal. Alguns métodos dependem da frequência de análise, como no caso da análise modal híbrida. No caso da matriz de transformação (DST), a mesma é independente do tempo ou frequência. Esses métodos serão utilizados para a estimação da deformação, visto que os métodos baseados em modelos analíticos e de superposição modal têm aplicações práticas restritas ou limitadas. Nas próximas seções, os fundamentos da matriz de transformação e análise modal híbrida serão abordados.



**Figura 3.1 – Classificação dos métodos utilizados para estimação da deformação dinâmica a partir do deslocamento**

### 3.2 Matriz de Transformação Deslocamento – Deformação

A matriz de Transformação Deslocamento – Deformação ou conforme Okubo e Yamaguchi (1995), *Displacement – to – Strain – Transformation matrix* (DST), é utilizada para converter o deslocamento em deformação. Esta matriz de transformação pode ser obtida utilizando-se dos conceitos da transformação de coordenadas, apresentada na Equação (2.73), e os conceitos de FRF de deformação apresentados no capítulo anterior.

Sendo o vetor de deformação  $\varepsilon(t)$  representado pela diferenciação espacial da matriz modal de deslocamento da seguinte forma (LEE, 2007):

$$\begin{aligned}
 \{\varepsilon(t)\} &= \mathbf{D}([\Phi])\{q(t)\} \\
 &= [\varepsilon]\{q(t)\}
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

onde  $[\varepsilon]$  é a matriz de deformação da Equação (2.127). Rearranjando a Equação (3.1) as coordenadas modais  $q(t)$  são obtidas a partir de:

$$\{q(t)\} = [\Phi]^{-1}\{x(t)\} \quad (3.2)$$

Substituindo a Equação (3.2) na Equação (3.1) tem-se:

$$\{\varepsilon(t)\} = [\varepsilon][\Phi]^{-1}\{x(t)\} \quad (3.3)$$

Utilizando a seguinte notação:

$$[T] = [\varepsilon][\Phi]^{-1} \quad (3.4)$$

onde  $[T]$  é a matriz DST. A Equação (3.3) pode então ser reescrita como:

$$\{\varepsilon(t)\} = [T]\{x(t)\} \quad (3.5)$$

Matricialmente a Equação acima é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1M} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ T_{N1} & T_{N2} & \cdots & T_{NM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

onde  $N$  é o grau de liberdade associado e  $M$  refere-se ao número de modos de baixa ordem ou os  $M$  primeiros modos naturais de vibração.

A Equação (3.4) mostra que a matriz de transformação é composta da matriz modal de deformação e a matriz modal de deslocamento. Essas matrizes podem ser obtidas: analiticamente; numericamente, por elementos finitos, por exemplo; ou experimentalmente, utilizando as técnicas de análise modal.

Segundo Okubo e Yamaguchi (1995) a matriz  $[T]$  é independente do domínio do tempo ou da frequência. Ou seja, a Equação (3.5) é válida para  $x(\omega)$ , obtendo-se  $\varepsilon(\omega)$ . Além disso, fizeram uma verificação numérica da aplicação da matriz  $[T]$  em uma placa e uma verificação experimental na parte frontal de uma bicicleta, mostrando que a matriz de transformação é constante em relação às possíveis alterações nas condições de contorno e também na distribuição de massa. Sugeriram também que, caso houvesse limitações experimentais de aquisição

simultânea de muitas medições, então, uma matriz reduzida  $[\Phi]$ , quadrada e inversível, limitada ao número de medições  $N_1$  e por consequência  $N_1 = M$ , devia ser considerada. Para a obtenção da matriz  $[\Phi]$ , os graus de liberdade  $N_1$  devem ser selecionados considerando-se o valor do *Modal Assurance Criterion* (MAC) da Equação (2.114). Neste caso, a avaliação do MAC assegura que a matriz reduzida mantenha as propriedades de ortogonalidade.

As Equações abaixo mostram as dimensões das matrizes modais para aplicação em um caso geral:

$$[T]_{N_2 \times N_1} = [\varepsilon]_{N_2 \times M} [\Phi]_{M \times N_1}^- \quad (3.7)$$

$$\{\varepsilon\}_{N_2 \times 1} = [T]_{N_2 \times N_1} \{x\}_{N_1 \times 1} \quad (3.8)$$

onde  $N_1$  é determinado pelo número de graus de liberdade analisados na matriz modal de deslocamento.  $N_2$  é o número de dados de deformação e pode ser maior que  $N_1$ . Uma matriz modal reduzida  $[\Phi]$  dá origem a uma matriz  $[T]$  dita também reduzida. Caso a matriz modal de deformação  $[\varepsilon]$  seja construída com  $N_2$  pontos de deformação e  $N_2 > N_1$ , a matriz  $[T]$ , ainda dita reduzida, transforma os deslocamentos para deformação, sendo que os deslocamentos são medidos em  $N_1$  pontos e a deformação é conhecida em um número maior de pontos  $N_2$  (OKUBO e YAMAGUCHI 1995).

Em 2007, Gun-Myng Lee fez simulações utilizando a matriz de transformação. Sugeriu que a matriz modal de deslocamento  $[\Phi]$  não necessita ser quadrada, ou seja,  $N_1 \neq M$ . Neste caso, a matriz modal de deslocamento inversa da Equação (3.4) pode ser formalmente expressa pela matriz de deslocamento pseudo inversa expressa na Equação (3.9).

$$[\Phi]^- = ([\Phi]^T [\Phi])^{-1} [\Phi] \quad (3.9)$$

onde a matriz  $[\Phi]^-$  é a matriz pseudo inversa da matriz  $[\Phi]$ .

O problema da aquisição simultânea das respostas de deslocamentos pode ser resolvido utilizando a medição em par (resposta e referência) através das Transmissibilidades. Como viu-se anteriormente, a Transmissibilidade é calculada no domínio da frequência. Dados no domínio do tempo podem então ser obtidos pela transformada inversa de Fourier das respostas espectrais.

Lee (2007) Também avaliou a sensibilidade ao ruído na estimação da deformação utilizando a matriz de transformação. Nos casos de ruídos acima de 2%, o método mostrou-se bastante sensível ao ruído, e a deformação não foi corretamente estimada. Em relação ao número de modos necessários para compor as matrizes modais, Lee (2007) concluiu que o truncamento dos modos acima ou afastados da banda de frequência de excitação não afeta na precisão da estimação da deformação. Assim sendo, o número de modos  $M$  está associado à frequência de análise da mesma maneira que ocorre na análise modal híbrida, a qual será detalhada na seção seguinte.

Portanto, a matriz [T] é obtida pela matriz modal de deslocamento e de deformação. Uma vez obtida a relação entre deslocamento e deformação a partir das formas modais, uma solicitação na estrutura que altere uma específica distribuição de deslocamento, resultará em uma específica distribuição de deformação, prevista anteriormente na obtenção da matriz [T]. Pela matriz de transformação [T], a deformação pode ser estimada em outros pontos onde o deslocamento não foi medido. De certa forma, é uma extrapolação de valores medidos de deslocamento convertidos para deformação. Entretanto, é importante que a escolha dos pontos e dos modos das matrizes de deslocamento e deformação seja feita considerando, por exemplo, a avaliação do MAC, para que estas mantenham a propriedade de ortogonalidade. Assim sendo, a distribuição de deformação em estruturas pode ser obtida através das medidas de deslocamento em estruturas que apresentem vibração utilizando a matriz de transformação.

### **3.3 Análise Modal Híbrida**

As técnicas de análise modal atualmente utilizadas fornecem informações importantes do comportamento dinâmico de máquinas e equipamentos. No entanto, as informações obtidas através dos métodos de ajuste de curvas e de identificação de parâmetros podem não estar em conformidade com o sistema real analisado. Isso ocorre, principalmente, quando os dados ajustados são extrapolados no intuito de se obter novas informações não medidas. Algumas diferenças encontradas entre as informações reais e as simuladas estão associadas à identificação do amortecimento da estrutura. Geralmente, as propriedades dissipativas das máquinas ou

estruturas não são conhecidas, ou são tratadas em termos de fatores de amortecimento modal ou estrutural (EWINS, 1984), e não como uma propriedade do material. Segundo Dovstam (1998) os problemas que ocorrem no ajuste de curvas está associado ao fato de que o amortecimento e os modos, identificados pela análise modal convencional, dependem fortemente do modelo estudado, do método de ajuste utilizado e também, da ordem do modelo ou número de graus de liberdade estimado para o modelo avaliado.

Assim sendo, um método generalizado de extrapolação de informações com base em respostas medidas foi proposto por Dovstam (1998). Este método é denominado análise modal híbrida<sup>1</sup> ou, *Hybrid Modal Analysis* (HMA). A HMA é baseada na ortogonalidade dos modos naturais, aproximados para o sistema conservativo associado, portanto reais, e na convergência no sentido de mínimos quadrados da série generalizada de Fourier. A partir da HMA é possível se obter a caracterização da vibração espacial, tridimensional, baseada em um conjunto limitado ou reduzido de medidas de vibração. A técnica é aplicada para uma excitação específica, mas não necessariamente conhecida e independente das propriedades do material, inclusive de amortecimento, o qual, *a priori*, não necessita ser conhecido (Sehlsted, 2001).

A utilização da HMA na estimação de deformação dinâmica está essencialmente ligada á estimação de deslocamentos espaciais, os quais na prática podem ser difíceis de serem medidos. Geralmente os deslocamentos são medidos em alguns pontos da estrutura em uma direção preferencial, a qual apresenta níveis de vibração relativamente maiores. Nas outras direções, o deslocamento é pequeno a tal ponto que pode comprometer a relação sinal ruído e as medições. Os deslocamentos tridimensionais são necessários para o cálculo da deformação a partir do tensor de deformação da Equação (2.5). Sehlstedt (1999) e (2001) realizou a validação experimental da HMA na estimação do tensor de deformação.

Outras importantes áreas de pesquisa onde a HMA é empregada podem ser citadas. Em Dovstam (1995), o modelo constitutivo chamado *Augmented Hooke's Law* (AHL), em tradução livre, Lei de Hooke aumentada, é proposto baseado na HMA. Em Dovstam e Dalenbring (1997) e

---

<sup>1</sup> A palavra híbrida é utilizada, pois dados experimentais e simulados são combinados para obtenção da extrapolação das informações ( DOVSTAM , 1998).

Dalenbring (1999), é proposta a estimação das propriedades e funções de amortecimento baseadas nas propriedades elásticas dependentes da frequência e na HMA.

### 3.3.1 Modos Reais e a Aproximação do Deslocamento

Com os deslocamentos obtidos através das FRF de deslocamento ou através da ODS, pode-se determinar o deslocamento espacial de pontos da estrutura não medidos através da HMA. Neste caso, algumas hipóteses são assumidas, dentre elas: o corpo está submetido á uma condição isotérmica; sofre pequenas deformações, possui comportamento linear e o método é baseado nas propriedades elástica-estática, ou seja, as propriedades elásticas do material determinadas na frequência zero (DOVSTAM, 2008).

No entanto, independentemente das propriedades dinâmicas dos materiais, a resposta vibracional de um corpo de volume  $\Omega$  pode ser descrita pelo deslocamento tridimensional  $u = u(x,t)$ , onde  $x \in \Omega$  e  $t$  é a variável tempo. No domínio da frequência, a transformada de Laplace do vetor de deslocamento  $u$  pode ser representada pela série generalizada de Fourier (DOVSTAM, 1997):

$$\tilde{u}(x, s) = \sum_{r=1}^M c_r \psi_r + \tilde{u}_{\text{res}}(x, s) \quad (3.10)$$

onde  $\tilde{u}_{\text{res}}(x, s)$  é o erro do truncamento ou resíduo da série. Desprezando-se o resíduo, tem-se:

$$\tilde{u} \approx \tilde{u}_M(x, s) = \sum_{r=1}^M c_r \psi_r \quad (3.11)$$

$\psi_r$  é um vetor tridimensional que representa o modo de vibração, e  $c_r$  são os coeficientes generalizados de Fourier. Esses coeficientes dependem da resposta  $u(x,t)$  e também da frequência. São definidos pelo produto interno como:

$$c_r = \langle u, \rho \psi_r \rangle / m_r \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

onde  $m_r$  é massa modal da Equação (2.69), determinada para o corpo contínuo como:

$$m_r = \langle \psi_r, \rho \psi_r \rangle > 0 \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Os modos de vibração  $\psi_r$  da Equação (3.10) são os autovetores da Equação (2.55), determinados pelas propriedades de massa e constantes elásticas, combinadas com a geometria e as condições de contorno de deslocamento da peça ou da estrutura. Por se tratar da solução de um sistema conservativo, sem forças dissipativas, os autovetores são reais. Adicionalmente, a solução do problema de autovalor e autovetor da Equação (2.55) garante que a série truncada da Equação (3.11) seja convergente no sentido de mínimos quadrados e é válida para os casos anisotrópicos e não homogêneos (DOVSTAM, 1997).

Em aplicações práticas, uma solução exata para a Equação (2.55) raramente está disponível. Desta forma, os vetores modais podem ser aproximados numericamente, a partir do método de elementos finitos, para um número finito de modos e de graus de liberdade. A próxima seção trata da aplicação da Análise Modal Híbrida para sistemas discretos.

### 3.3.2 Aplicação da Análise Modal Híbrida

Os coeficientes  $c_r$  da Equação (3.12) podem ser estimados utilizando o vetor modal  $\{\psi_r\}$  e a correspondente matriz de massa  $[M]$  do modelo tridimensional avaliado. A Equação (3.12) para um modelo discreto torna-se então:

$$c_r \approx \frac{\{\tilde{U}\}^T [M] \{\psi_r\}}{m_r} \quad r \leq M \quad (3.14)$$

sendo  $m_r$  definida na Equação (2.69) e  $\{\tilde{U}\}$  o vetor de respostas medidas no domínio frequência correspondendo à condição real de operação. Caso o vetor  $\{\psi_r\}$  seja normalizado pela massa, dispensa-se à divisão pela massa generalizada  $m_r$  dos termos da Equação (3.14).

A Equação (3.14) tem limitações nas aplicações reais. É utilizada somente quando o vetor modal  $\{\psi\}$  e de respostas  $\{\tilde{U}\}$  são conhecidos para todo o corpo. A aproximação dos valores estimados com os valores medidos a partir da Equação (3.14) é influenciada pela discretização e pelas propriedades elásticas do material utilizadas na estimação do vetor modal.

A maneira de estimar os coeficientes  $c_r$ , que de certa forma, caracteriza a análise modal híbrida proposta por Dovstam (1998), é baseada na inversão da matriz modal. Sendo  $\{\tilde{U}\}$  o vetor finito de respostas medidas no domínio da frequência com dimensão  $N \times 1$ , e a partir de uma correspondente matriz modal  $[\Phi]$ , (real e constante) de dimensão  $N \times M$ , tem-se:

$$\{\tilde{U}\} = [\Phi] \{\tilde{C}\} + \{\tilde{U}_{res}\} \quad (3.15)$$

com:

$$\{\tilde{C}\} = \{c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_M\}^T \quad (3.16)$$

onde  $\{\tilde{C}\}$  é o vetor de coeficiente de Fourier e  $\{\tilde{U}_{res}\}$  representa o vetor resíduo.

Utilizando o método de elementos finitos, por exemplo, a partir de ferramentas computacionais, uma aproximação da matriz modal  $[\Phi]$  pode ser encontrada. De posse das medições  $\{\tilde{U}\}$ , da matriz  $[\Phi]$  os coeficientes  $\{\tilde{C}\}$  da Equação (3.15) podem ser estimados, alternativamente à Equação (3.14), pela Equação abaixo:

$$\{\mathbf{C}_{est}\} = [\Phi]^{-1} (\{\tilde{U}\} - \{\tilde{U}_{res}\}) \quad (3.17)$$

desde que o número  $N$  de medições seja igual ao número de modos  $M$ , ou seja, a matriz modal  $[\Phi]$  admite a sua inversa.

Assim sendo, os coeficientes generalizados ponderam a participação dos vetores modais na resposta real da estrutura em estudo. Ou seja, a estimação dos coeficientes é feita projetando-se as respostas de vibração medidas em um conjunto de modos de vibração (base ortogonal) calculados por elementos finitos. A menos do vetor resíduo, os coeficientes generalizados correspondem às coordenadas modais apresentadas na Equação (2.73).

No entanto, quando o número  $N$  é igual ao número de modos  $M$ , não há um bom ajuste entre a curva do deslocamento estimado pelos coeficientes generalizados de Fourier e os reais deslocamentos apresentados pela estrutura. Para um melhor ajuste, o número  $N$  deve ser maior que o número de modos  $M$ , ou seja,  $N > M$ . Diz-se então que o sistema é sobredeterminado, onde o número de equações é maior que o número de incógnitas. Uma aproximação no sentido de

mínimos quadrados dos coeficientes de Fourier, minimizando o erro quadrático  $\|[\Phi]\{C\} - (\{\tilde{U}\} - \{\tilde{U}_{res}\})\|^2$ , pode ser formalmente obtida por:

$$\{C_{est}\} = [\Phi]^{-1} (\{\tilde{U}\} - \{\tilde{U}_{res}\}) \quad (3.18)$$

onde  $[\Phi]^{-1}$  é a matriz pseudo inversa definida na Equação (3.9).

Com os coeficientes estimados considerando as medições que correspondem à situação real, outros deslocamentos não medidos em direções ou pontos específicos podem ser previstos a partir de uma nova matriz  $[\Phi]$ , correspondente a esses pontos e direções de interesse, conforme Equação abaixo:

$$\{\tilde{U}_{prev}\} = [\Phi]\{\tilde{C}_{est}\} + \{\tilde{U}_{res}\} \quad (3.19)$$

O vetor resíduo  $\{\tilde{U}_{res}\}$  pode ser desprezado em situações específicas. Diferentes coeficientes generalizados  $c_r$  na expansão modal da Equação (3.10), podem não ser independentes devido ao acoplamento dos modos. Para um material com características lineares este acoplamento é devido ao amortecimento. Quando não é possível desprezar o acoplamento modal, é necessária uma avaliação do resíduo  $\{\tilde{U}_{res}\}$ .

O resíduo pode ser aproximado pela receptância definida pela Equação (3.20). Assume-se que as propriedades elásticas são as propriedades elásticas-estáticas do material para todo o corpo (DOVSTAM, 1998).

$$\tilde{u}_i(p, \omega)_{res} \approx \alpha_{pk} \approx \sum_{r=1}^M c_r \phi_{pr} + \sum_{r>M} \frac{\phi_{pr} \phi_{kr}}{[\omega_r^2 (1 + d_r(\omega) + s^2)]} \quad (3.20)$$

Pela Equação (3.20) é obtida uma resposta de deslocamento considerando que a força  $\tilde{F}_k$ , aplicada no ponto  $k$ , é unitária. A função  $d_r(\omega)$  é uma função complexa chamada de função de amortecimento modal. Devido à propriedade de ortogonalidade dos modos, os termos residuais de  $r > M$  da Equação (3.20) são, no sentido de mínimos quadrados, completamente independentes (DOVSTAM, 1998).

Considerando que a função de amortecimento modal  $d_r(\omega)$  é o fator de perda de amortecimento  $\eta_r$ , definido na análise de sistemas com múltiplos graus de liberdade e amortecimento hysterético Equação (2.88), a receptância medida pode ser dada pela soma da aproximação pelos coeficientes generalizados de Fourier dos  $M$  primeiros modos analisados com a receptância para amortecimento hysterético, definida pela Equação (3.21), analisada para um número maior de modos, ou seja:

$$\tilde{u}_i(p, \omega)_{res} \approx \alpha_{pk} \approx \sum_{r=1}^M c_r \phi_{pr} + \sum_{r=M+1}^{r_{max}} \frac{\psi_{pr} \psi_{kr}}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2)} \quad (3.21)$$

Os fatores de amortecimento podem ser extraídos experimentalmente pelos identificadores de parâmetros da análise modal. Entretanto, as funções de amortecimento podem ser estimadas baseadas nas funções resposta em frequência e nas formas modais, conforme Dovstam (1997) e Dalenbring (1999, 2002). A receptância pode ser encontrada baseada nas funções de amortecimento de materiais isotrópicos e nas formas modais de deslocamento. Segundo Dovstam (1995), a formulação tridimensional das propriedades de amortecimento do material pode ser feita a partir da lei de Hooke no domínio da frequência.

Em alguns casos a aproximação da receptância pela Equação (3.21) não será boa, assim o resíduo deverá ser aproximado por outras maneiras ou ser completamente desconsiderado. Quando o resíduo é desconsiderado, um número maior de pontos e de modos deve ser analisado para uma melhor aproximação dos resultados (DOVSTAM, 1998). Isto está relacionado ao tamanho do modelo numérico e experimental, os quais serão abordados na próxima seção.

### 3.3.3 Tamanho do Modelo Numérico e Experimental

Mesmo que na prática um número  $M$  muito grande de modos possa ser simulado numericamente, esse será um número finito. Assim sendo, uma questão que primeiramente surge está relacionada ao número mínimo de modos necessários para um resultado aceitável da análise modal híbrida, obtido pela convergência da Equação (3.11).

O número mínimo  $M$  em questão está associado à faixa de frequência analisada. Nas aplicações práticas,  $M$  é escolhido de tal forma que a frequência angular  $\omega_M$ , referente a este

modo, seja maior que a frequência angular máxima  $\omega_{\max}$  escolhida para o processamento do sinal. Considerando a frequência a ser analisada  $\omega$ , a definição acima pode ser entendida como  $\omega_M > \omega_{\max} > \omega$ . A partir da escolha do número de modos, um número de medições  $N$  maior que  $M$  deve ser realizada, visto que, o sistema sobredeterminado da Equação (3.18) apresentará um melhor ajuste das curvas.

A escolha do número de modos e o número de medições determina o tamanho do modelo numérico e experimental, respectivamente. O tamanho do modelo numérico é referido aqui como sendo especificamente a discretização da malha utilizada na simulação em elementos finitos. Em outras palavras, o refinamento da malha. Certamente, para que sejam simulados  $M$  modos de vibrar, a malha necessita ter pelo menos  $M$  graus de liberdade.

O número de graus de liberdade de uma malha em elementos finitos está associado ao tamanho do elemento finito utilizado, ou seja, o refinamento da malha. Para que os modos de vibração, aproximados pelo modelo numérico, assegurem uma boa convergência, Dovstam (1998) especificou, de certa forma, o tamanho do modelo numérico que deve ser utilizado. Para tal, baseou-se na desigualdade de Cauchy-Schwarz, a qual compõe o teorema de espaços normalizados e especialmente de Hilbert (REKTORYS, 1975).

Sendo a componente modal de deslocamento  $\varphi_r$ , definida por:

$$\varphi_r = \langle \phi_r \cdot \hat{e} \rangle \quad (3.22)$$

onde  $\phi_r$  é o vetor modal tridimensional do modo  $r$  normalizado pela massa e  $\hat{e}$  é um versor tridimensional. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (KREYSZIG, 1978) tem-se:

$$|\langle \phi_r \cdot \hat{e} \rangle| \leq \|\phi_r\| \|\hat{e}\| \quad (3.23)$$

Assumindo um valor médio para o vetor modal  $\phi_r$  em torno de um ponto  $p$  pertencente a um elemento finito de volume  $V_p$  da seguinte forma (DOVSTAM,1998):

$$\phi_r^e \equiv \frac{1}{V_p} \int_{\Omega} \phi_r^e d\Omega \quad (3.24)$$

Substituindo a Equação (3.24) na (3.23) tem-se:

$$\begin{aligned}
|\phi_r^e| &\leq \sqrt{\frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p} |\phi_r^e|^2 d\Omega} \cdot \|\hat{e}\| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{V_p}} \sqrt{\int_{\Omega_p} |\phi_r^e|^2 d\Omega}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Acrescentando o termo de densidade  $\rho$  ao termo do vetor modal na Equação (3.25) para posterior simplificação e rearranjando os termos tem-se:

$$|\phi_r^e| \leq \frac{1}{\sqrt{\rho V_p}} \sqrt{\int_{\Omega_p} \rho |\phi_r^e|^2 d\Omega} \tag{3.26}$$

Pela definição de norma e produto interno, o termo da integral da Equação acima torna-se:

$$\int_{\Omega_p} \rho |\phi_r^e|^2 d\Omega = \langle \rho \phi_r \cdot \phi_r \rangle \tag{3.27}$$

Substituindo a Equação (3.27) na (3.26) obtém-se:

$$|\phi_r^e| \leq \sqrt{\frac{\langle \rho \phi_r \cdot \phi_r \rangle}{\rho V_p}} \tag{3.28}$$

De acordo com a definição de massa modal com  $\langle \rho \phi_r \cdot \phi_r \rangle = m_r$ , tem-se:

$$|\phi_r^e| \leq \sqrt{\frac{m_r}{\rho V_p}} \tag{3.29}$$

Para modos já normalizados pela massa  $m_r = 1$ , e assim:

$$|\phi_r^e| \leq \sqrt{\frac{1}{\rho V_p}} \tag{3.30}$$

Assim, o valor médio absoluto da componente modal de deslocamento está limitado a um valor máximo dependente da densidade e da malha em elemento finitos. Pode-se pensar que utilizando malhas mais refinadas, o limite máximo para a componente  $\phi_r$  será maior e, portanto, assegura-se uma melhor aproximação dos resultados.

### 3.3.4 Coeficientes Generalizados de Fourier

Os coeficientes generalizados de Fourier podem ser considerados como sendo as coordenadas generalizadas da Equação (2.73), calculadas por uma aproximação no sentido de mínimos quadrados e representadas no domínio da frequência. Segundo Dovstam (1998), os coeficientes generalizados de Fourier são dependentes da frequência e da força de excitação, ou seja, são diferentes para diferentes excitações. No entanto, isso não implica que a força de excitação deva ser conhecida (DOVSTAM, 1998).

A representação espectral de coeficientes de Fourier pode apresentar diferentes características. Coeficientes de Fourier ditos independentes, devido á modos desacoplados, conforme mencionado anteriormente, apresentam um único pico na representação espectral. Este pico é na frequência referente ao modo  $r$  do coeficiente  $c_r$ . Coeficientes ditos dependentes pelo acoplamento modal apresentarão mais que um pico na representação do coeficiente.

No entanto, possíveis causas adicionais podem influenciar a característica espectral dos coeficientes de Fourier. Sehlstedt (2001b) constatou que além do acoplamento modal, os coeficientes de Fourier podem apresentar mais que um pico devido às diferenças entre as: condições de contorno utilizadas na aproximação dos autovalores, e as condições de contorno reais ou físicas da parte da peça em estudo. Segundo Dalenbring (1999), múltiplos picos podem correr nos espectros dos coeficientes de Fourier dependendo da escolha do número de modos, incluídos na estimação dos mesmos, e erros de medições. Conforme Gevinski e Pederiva (2013), os coeficientes de Fourier podem apresentar múltiplos picos quando funções de transmissibilidade são utilizadas na estimação dos coeficientes. Picos não associados às frequências naturais nos espectros de transmissibilidade influenciam também nos picos dos coeficientes. Convenientemente, neste texto, os coeficientes generalizados de Fourier serão denominados apenas coeficientes generalizados.

### 3.4 Resumo do Capítulo

Neste capítulo foi proposta uma classificação dos métodos de estimação e os fundamentos dos métodos da matriz de transformação e análise modal híbrida foram apresentados. Na classificação, também foi mencionado o método da curvatura, o qual consiste em se determinar a deformação longitudinal em vigas a partir da análise da curvatura da mesma, ou seja, pela derivada de segunda ordem do deslocamento transversal, conforme visto no Capítulo anterior na seção 2.1.1. O método da curvatura é um método direto de estimação, pois depende apenas das medições realizadas.

O método da análise modal híbrida, ou conhecida pela sigla HMA, *Hybrid Modal Analysis*, é um método indireto, pois depende do conhecimento dos modos naturais da estrutura ou do sistema sob análise. A HMA consiste na projeção das respostas medidas em bases ortogonais formadas pelos modos naturais de vibração. Assim sendo, a HMA é baseada na ortogonalidade dos autovetores (modos) e na convergência no sentido de mínimos quadrados da série generalizada de Fourier. Pela análise modal híbrida é possível se estimar os deslocamentos tridimensionais da estrutura não medidos, os quais são essenciais para a determinação da deformação a partir do tensor de deformação apresentado na Equação (2.5). As derivadas deste tensor são calculadas utilizando métodos numéricos.

A matriz de transformação, a qual é formada pela matriz modal de deformação e a matriz modal de deslocamento, também é um método indireto, pois necessita do conhecimento das matrizes modais. No entanto, dispensa a necessidade da utilização de métodos numéricos para a derivação, pois o deslocamento é transformado para deformação apenas utilizando a matriz de transformação.

No próximo capítulo, esses métodos serão utilizados para a estimação da deformação dinâmica em uma simulação de uma viga engastada.

## 4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

### 4.1 Introdução

Neste capítulo será feita uma simulação numérica para se estimar a deformação em diversos pontos superficiais de uma viga em balanço. Esta condição permite que a deformação normal longitudinal da viga possa ser estimada pelos métodos estudados. Sendo eles, o método da matriz de transformação e a análise modal híbrida. As deformações obtidas a partir destes métodos serão comparadas com os resultados encontrados pela análise da curvatura da viga.

Diversos autores avaliaram a determinação da deformação em vigas utilizando um método específico de estimação. No presente trabalho, é possível comparar os resultados obtidos pelos diferentes métodos aplicados na mesma análise. A aplicação destes métodos em uma simulação possibilita a avaliação dos mesmos sem influência de possíveis erros experimentais.

### 4.2 Modelo utilizado na simulação

O modelo utilizado para simulação numérica é de uma viga em balanço como ilustrada na Figura 4.1. A viga de comprimento  $L$ , largura  $b$  e espessura  $e$  apresenta uma extremidade engastada e outra extremidade livre. Na extremidade livre é adicionada uma força de excitação  $F$ .

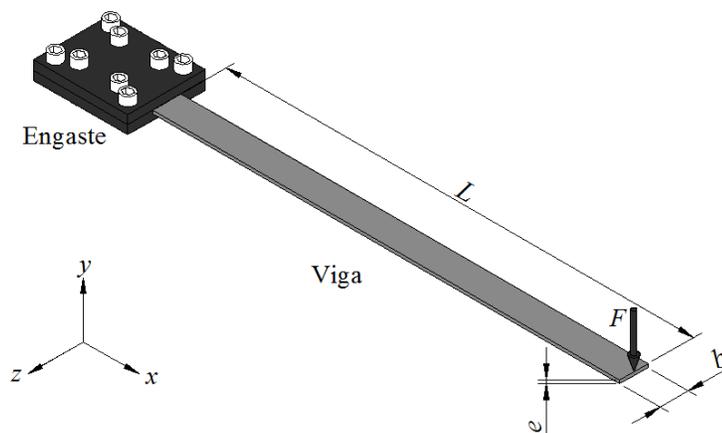


Figura 4.1 – Modelo da viga em balanço utilizada para simulação numérica

Os modos naturais de deslocamento e deformação foram obtidos utilizando métodos de elementos finitos a partir do modelo realizado em ANSYS®. No próximo item, a simulação em elementos finitos será detalhada.

### **4.3 Modelo da viga em elementos finitos**

Os modos tridimensionais de deslocamento, referentes aos modos de flexão e torção, e os modos de deformação longitudinal na direção  $x$  da viga foram obtidos a partir do método de elementos finitos no ANSYS®. Esses modos são utilizados na análise modal híbrida e na obtenção da matriz de transformação. A partir destes modos também foi possível simular a resposta temporal de pontos da viga, quando a mesma foi submetida a uma excitação aleatória ou harmônica. As respostas temporais foram utilizadas para estimar as funções resposta em frequência (receptância) e as transmissibilidades, as quais foram utilizadas para a determinação da deformação dinâmica.

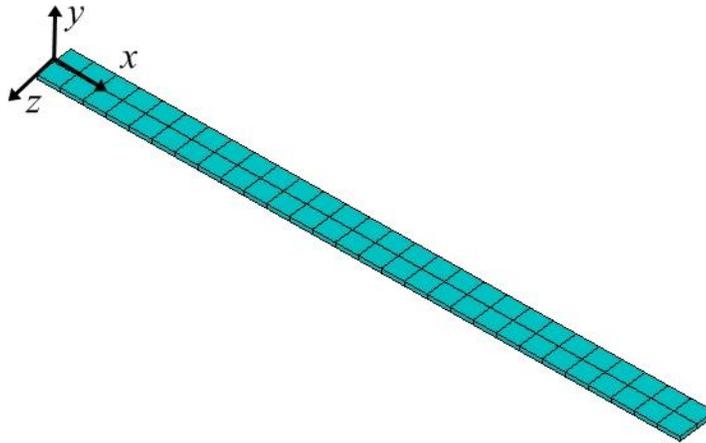
Os parâmetros utilizados na simulação em elementos finitos no ANSYS® para extração dos modos tridimensionais estão descritos na Tabela 4.1. A Figura 4.2 ilustra o modelo gerado no ANSYS®. Os dez primeiros modos naturais da viga simulados, de flexão e torção, podem ser observados no Apêndice A.

**Tabela 4.1 – Parâmetros utilizados na simulação por elementos finitos ANSYS**

<b>Pré-processamento</b>
<i>Tipo do elemento:</i> SOLID186 20 nós; 3 GDL por nó – translação $x$ , $y$ e $z$
<i>Propriedades do Material:</i> Linear elástico Isotrópico; $E = 74$ GPa; $\nu = 0,33$ ; $\rho = 2680$ kg/m <sup>3</sup> .
<i>Modelo geométrico:</i> $L = 420$ mm ; $b = 25,4$ mm; $e = 3$ mm.
<i>Definição da Malha:</i> 1120 nós, 56 elementos; 15 mm de comprimento na direção $x$
<b>Solução</b>
<i>Tipo de análise:</i> Análise dos 10 primeiros modos; Modos normalizados pela massa; Algoritmo de extração dos modos: Block Lanczos.
<i>Restrições:</i> Viga engastada em uma das extremidades.
<b>Pós-processamento</b>
<i>Resultados:</i> Frequências naturais, modos de deslocamentos e de deformação.

As frequências naturais e os dez primeiros modos para o caso da viga analisada poderiam ser simulados com elementos finitos mais simples, por exemplo, com elementos de viga. Entretanto, o elemento SOLID186 foi escolhido, pois apresenta boa aproximação devido ao grande número de nós por elemento e também possibilita a identificação dos modos de deslocamentos tridimensionais, principal objetivo desta simulação. A malha com elementos de 15 mm foi adotada para estar de acordo com distância entre os pontos utilizada no cálculo da deformação por diferenças finitas. Esta distância foi utilizada na avaliação experimental do método da curvatura em Gevinski (2010) e também está associada às limitações do tamanho do acelerômetro. Essas avaliações apresentaram bons resultados na comparação entre a deformação estimada e medida em um ponto distanciado 30 mm do engaste. Em relação ao tamanho do modelo, como exposto na Equação (3.30), considerando o volume do elemento dado por  $V_p = 15 \cdot 10^{-3} \times 12,7 \cdot 10^{-3} \times 3 \cdot 10^{-3} = 0,5711 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$  e sabendo da simulação que  $\max |\varphi_r^e| = 6,7856$ , pela Equação (3.30), tem-se que:  $6,7856 \leq 25,66$ , que representa uma discretização do elemento suficiente em 3,78 vezes.

Como a avaliação da deformação longitudinal será feita ao longo do eixo  $x$  (linha de simetria longitudinal), os modos de torção de baixa ordem não implicam no deslocamento e deformação dos pontos sobre esta linha e, os mesmos poderiam ser desprezados. No entanto, serão utilizados na simulação.



**Figura 4.2 – Modelo da viga gerado no ANSYS® com elementos quadriláteros de 15 mm de comprimento na direção  $x$**

As matrizes de massa e de rigidez, utilizadas posteriormente para a simulação das respostas temporais, foram obtidas para um modelo reduzido de 29 graus de liberdade. Esses graus de liberdade referem-se aos nós distanciados uniformemente ao longo do eixo  $x$  em 15 mm na superfície da viga e direção  $y$ . Os deslocamentos nesta direção representam os modos de flexão em relação ao eixo  $z$ , os quais são principalmente considerados nesta análise. Nas situações práticas, estes modos são os que mais têm contribuição nas deformações longitudinais das vigas como a ilustrada na Figura 4.1. Os deslocamentos na direção  $y$  correspondem também à flecha ou deflexão da viga e comumente são medidos na prática. A extração das matrizes de massa e rigidez no ANSYS foi realizada utilizando o mesmo pré-processamento da Tabela 4.1 e os parâmetros de solução indicados na Tabela 4.2.

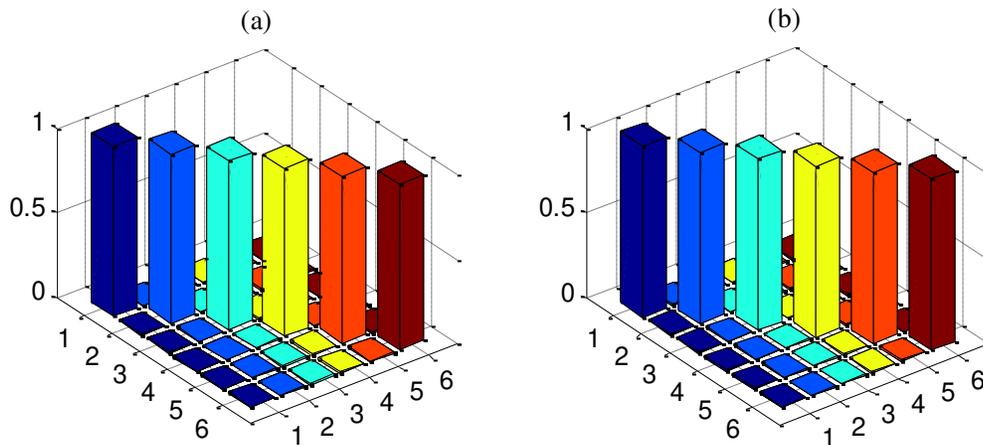
**Tabela 4.2 – Parâmetros utilizados na extração da matriz de massa e rigidez no ANSYS**

<b>Solução</b>
<i>Tipo de análise:</i> Substrutura
<i>Nós mestres:</i> 29 graus de liberdade ao longo do eixo $x$ e direção $y$
<i>Restrição:</i> Viga engastada em uma das extremidades.
<b>Pós-processamento</b>
<i>Dados:</i> Matriz de massa e rigidez

As frequências naturais encontradas na simulação para os seis primeiros modos de flexão em torno do eixo  $z$  foram 14,62; 91,64; 256,58; 502,80; 831,17 e 1247,9 Hz. Modos de torção com frequência de 120,72; 452,55 e 1360,3 Hz e um modo de flexão em torno do eixo  $y$  com frequência de 744,44 Hz também compõem a análise dos 10 primeiros modos. No entanto, como os pontos analisados estão localizados na linha modal dos modos de torção, apresentam deslocamento nulo na direção  $y$  nestes modos. Da mesma forma, não contribuem na resposta de deformação na direção longitudinal. As implicações da utilização destes modos na estimativa dos coeficientes generalizados e também para obtenção da matriz de transformação serão discutidas posteriormente.

#### **4.4 Ortogonalidade dos modos**

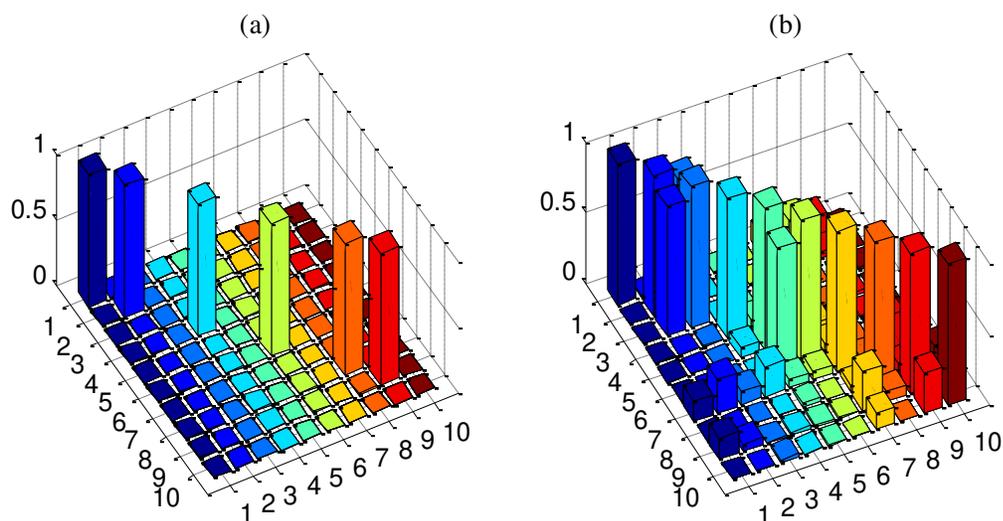
A ortogonalidade dos modos foi verificada a partir da Equação (2.71). A Figura 4.3 (a) mostra graficamente a ortogonalidade ponderada dos seis primeiros modos de flexão para os pontos selecionados do modelo reduzido. O resultado é o esperado, o qual apresenta valores unitários na diagonal principal e nulos na triangular superior e inferior. Na Figura 4.3 (b) o MAC entre os modos de flexão simulados é representado graficamente. O MAC foi calculado pela Equação (2.114) considerando os modos simulados com eles próprios.



**Figura 4.3 – (a) Ortogonalidade ponderada pela massa dos 6 primeiros modos de flexão; (b) MAC entre os modos simulados**

É aceitável a avaliação do MAC entre os modos simulados com eles mesmos. Embora o MAC seja geralmente utilizado para comparação quantitativa entre os modos estimados experimentalmente e numericamente, neste caso, é um bom indicador das propriedades modais, no que diz respeito à utilização dos modos na HMA e matriz de transformação. Como tratam-se de modos simulados, erros experimentais não estão envolvidos. Assim, O MAC poderia ser utilizado para a verificação da ortogonalidade dos modos, quando estes estão associados a específicos ou reduzidos graus de liberdade selecionados a partir de uma aproximação em elementos finitos, onde foi utilizado um número maior de graus de liberdade.

A Figura 4.4 (a) ilustra o MAC entre os 10 primeiros modos simulados dos deslocamentos na direção  $z$ . A Figura 4.4 (b) ilustra o MAC entre os 10 primeiros modos de deformação  $\epsilon_x$  também simulados. O MAC para os 10 modos analisados tem características diferentes das apresentadas na Figura 4.3 (b). O 3º, 5º, 7º e 10º modos apresentam valores praticamente nulo para os deslocamentos na direção  $y$  nos pontos localizados na linha de simetria longitudinal da viga. Desta forma, o MAC dos modos de deslocamento apresentou valor nulo para estes modos. O MAC dos modos de deformação  $\epsilon_x$ , sendo que destes, os relacionados à torção também têm valores aproximadamente nulos na linha de simetria da viga, apresentou valores próximos à unidade em toda a diagonal principal e também, para os modos de torção, valores próximos à unidade nas correlações fora da diagonal principal.



**Figura 4.4 – (a) MAC entre os 10 modos de deslocamentos na direção  $z$  simulados; (b) MAC entre os 10 primeiros modos de deformação  $\epsilon_x$  simulados**

Assim sendo, o MAC dos modos de deformação mostrou-se mais sensível aos modos que não participam na deformação  $\epsilon_x$  nos pontos selecionados quando comparado ao MAC dos modos de deslocamento. Isso pode ser causado pelos valores muito próximos a zero, mas não zero nos modos de deformação simulados por elementos finitos.

#### 4.5 Simulação das FRF e Transmissibilidades

Os métodos de estimação de deformação foram comparados levando-se em consideração a deformação estimada em termos da função resposta em frequência e transmissibilidades. As FRF e transmissibilidades dos pontos da viga foram estimadas considerando uma excitação aleatória ruído branco na extremidade livre da viga e na direção  $y$ .

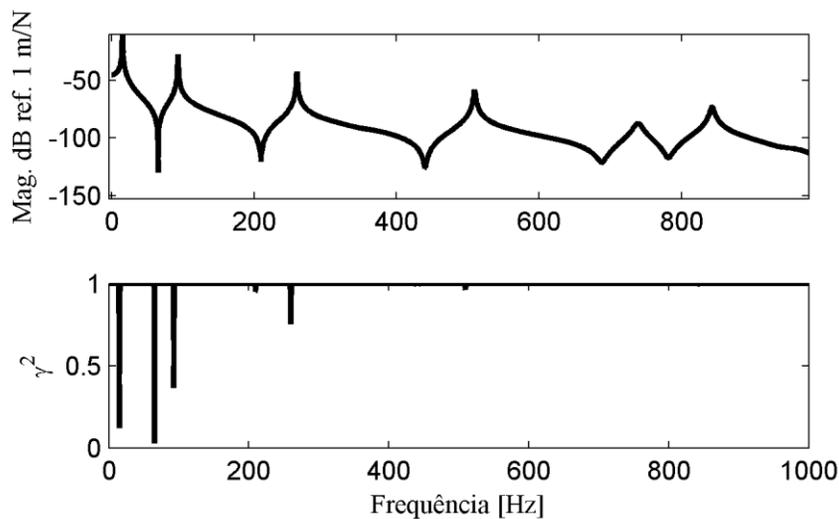
Um sistema linear invariante no tempo foi obtido considerando as matrizes de massa e rigidez determinadas anteriormente na simulação em elementos finitos do modelo reduzido e uma matriz de amortecimento viscoso proporcional  $[\bar{C}]$ . Segundo a Equação (2.92) a matriz  $[\bar{C}]$  foi determinada considerando-se  $\beta = 0$  e  $\mathcal{G} = 0.000001$ . Estes valores estão relacionados com um fator de amortecimento modal  $\zeta_r$ , médio de 0.0015, conforme Equação (2.96) e encontrados

experimentalmente. A partir da formulação de estado e da simulação da resposta temporal de sistemas dinâmicos sujeitos a uma excitação arbitrária (lsim) do MATLAB® 7.14, foi possível obter as respostas para os 29 pontos da superfície da viga. Na simulação foi considerada uma excitação aleatória ruído branco adicionada na extremidade livre da viga na direção  $y$ . Posteriormente, as FRF e transmissibilidades foram estimadas a partir das Equações (2.110) e (2.118), respectivamente, e também pelos parâmetros indicados na Tabela 4.3.

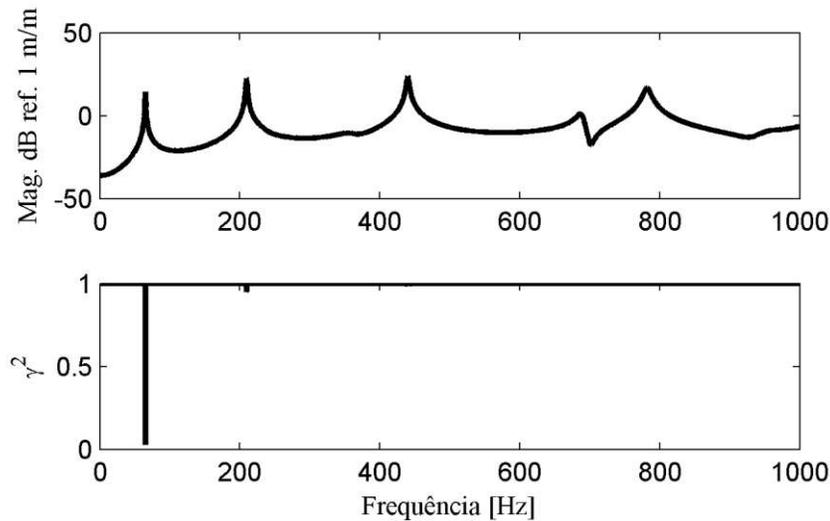
**Tabela 4.3 – Parâmetros do processamento e estimativa de FRF e Transmissibilidade**

Descrição	
<b>Janelamento</b>	Hanning
<b>Overlap</b>	75%
<b>Número de pontos</b>	8192
<b>Número de média</b>	2
<b>Frequência de amostragem <math>f_s</math></b>	2000 Hz
<b>Referência e excitação</b>	Extremidade livre

A janela Hanning utilizada no processamento é uma janela recomendada para sinais aleatórios. A frequência de amostragem  $f_s$  determina a frequência máxima do sinal  $f_{\text{máx}} = 1000$  Hz. A Figura 4.5 mostra o espectro de amplitude de FRF e coerência para o *drive point* (excitação e resposta). A Figura 4.6 mostra o espectro de amplitude da Transmissibilidade de um ponto distanciado a 60 mm do engaste com a referência considerada na extremidade livre da viga.



**Figura 4.5 – Espectro de amplitude da FRF estimada e coerência para o *drive point***



**Figura 4.6 – Espectro de amplitude de Transmissibilidade e coerência para o ponto 4 distanciado 60 mm do engaste**

O pico que aparece na FRF da Figura 4.5 próximo a 740 Hz refere-se a um modo de flexão, mas em torno do eixo  $y$ . Com as FRF e transmissibilidades estimadas para os 29 pontos da superfície, foi possível estimar a deformação longitudinal para estes pontos utilizando o método da curvatura, a análise modal híbrida e a matriz de transformação. Na seção seguinte serão mostrados os procedimentos adotados e resultados obtidos na simulação.

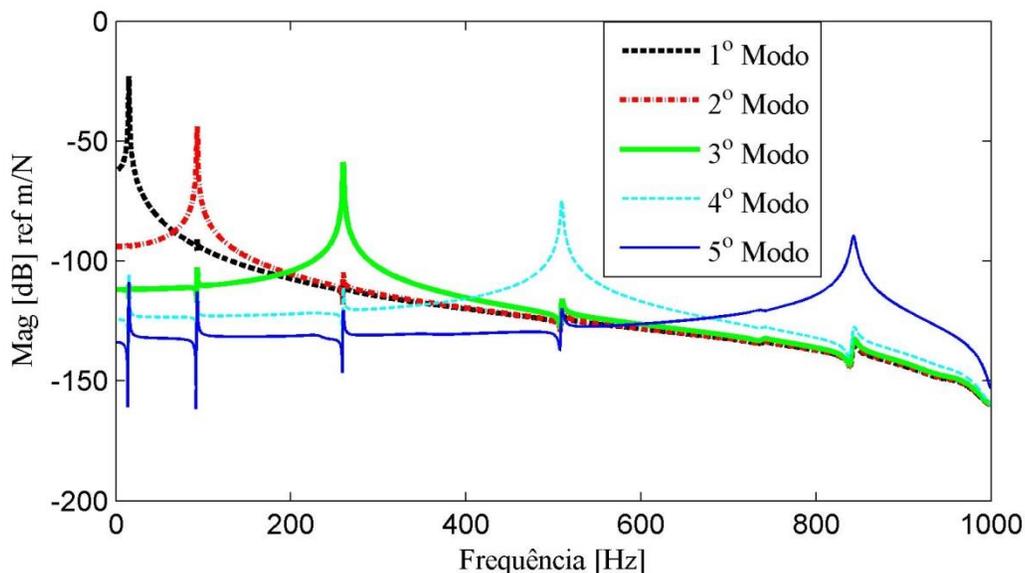
#### 4.6 Análise Modal Híbrida

A análise modal híbrida foi realizada para a estimativa dos deslocamentos na direção  $x$  da viga, visto que os deslocamentos na direção  $y$  já são conhecidos. Os deslocamentos na direção  $x$  serão utilizados para o cálculo da deformação nesta direção. Para a realização da HMA, considerou-se a matriz modal  $[\Phi]$  constituída das componentes modais  $\phi_{jr}$  na direção  $y$ , com  $j = 1, 2, \dots, N$  e para os modos  $r = 1, 2, \dots, M$ . Sendo  $M$  o truncamento da série da Equação (3.10). No caso avaliado,  $N = 29$  e  $M = 10$ . O número  $N$  escolhido garante que os modos avaliados possam ser observados. Mas, além disso, permitem o cálculo da deformação dinâmica em diversos pontos da superfície da viga pelo método de diferenças finitas, considerando uma distância entre os

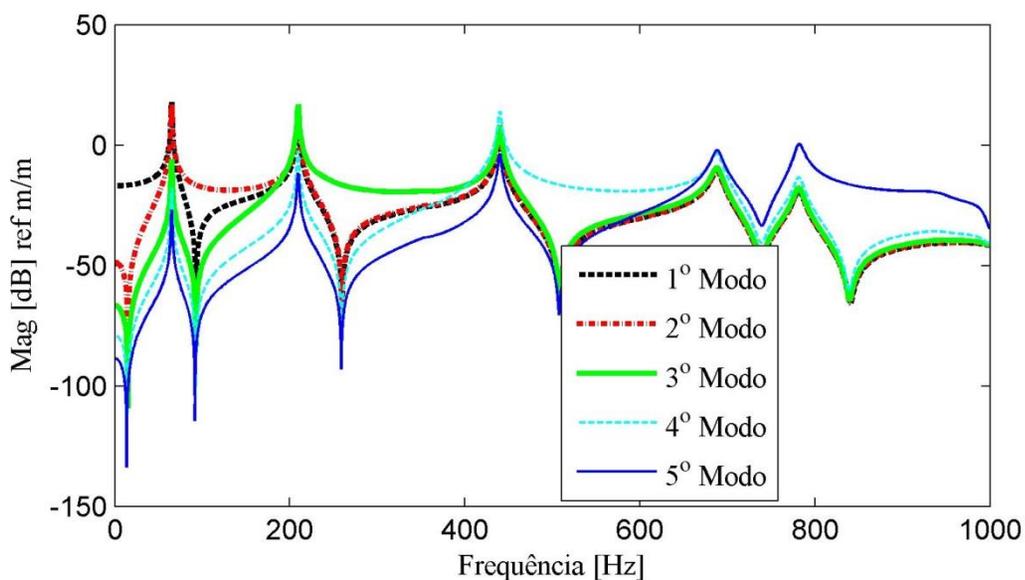
mesmos de 15 mm. Este número de pontos poderia ser reduzido, desde que, a matriz modal respeite as condições de ortogonalidade e os modos possam ser observados. Os deslocamentos de pontos adicionais da superfície poderiam então ser extrapolados pela HMA.

O número de modos  $M$  corresponde aos modos de baixa ordem até a frequência de  $f_M = 1360$  Hz. Assim, a faixa de frequência analisada se ajusta à  $f < f_{\max} < f_M$ . A frequência máxima foi definida pelos parâmetros adotados no processamento de sinais sendo  $f_{\max} = 1000$  Hz. A banda de frequência de análise se estenderá de 0 à  $f = 850$  Hz, a qual permite a avaliação espectral até a contribuição do 5º modo de flexão em torno de  $z$ . É importante enfatizar que  $N > M$ , o qual resulta na aproximação no sentido de mínimos quadrados dos coeficientes generalizados. Desta forma, os coeficientes  $\{C_{\text{est}}\}$  foram estimados utilizando a Equação (3.18) e desprezando-se os resíduos. No caso avaliado, o vetor de resposta  $\{U\}$  foi considerado como sendo as funções respostas em frequência e as transmissibilidades estimadas na simulação anterior para os 29 pontos da superfície da viga.

A Figura 4.7 ilustra o espectro de amplitude dos coeficientes generalizados estimados utilizando as FRF. Na Figura 4.8 estão os estimados utilizando as Transmissibilidades.



**Figura 4.7 – Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados para os modos de flexão estimados utilizando FRF. Picos únicos para cada coeficiente correspondentes às frequências naturais da viga para os modos de flexão, representando modos desacoplados.**



**Figura 4.8 - Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados estimados utilizando Transmissibilidade. Picos de cada coeficiente aparecendo em diversas frequências.**

Na Figura 4.7 os coeficientes generalizados apresentam picos relacionados à frequência natural do modo de flexão associado. O coeficiente generalizado do 1º modo possui um pico na frequência de aproximadamente 14 Hz, a qual é a primeira frequência natural da viga. Este modo tem grande contribuição do comportamento dinâmico da viga próximo à primeira frequência natural e nas demais, não tem participação. Desta forma, diz-se que os coeficientes são independentes. Essa é uma consequência dos modos da viga serem desacoplados, baixo amortecimento e pelo fato também de se estar utilizando FRF para a sua estimação. Coeficientes independentes justificam a desconsideração do resíduo na estimação dos coeficientes. As mesmas características espectrais não acontecem para os coeficientes estimados a partir das transmissibilidades, conforme Figura 4.8. Por ser característica da transmissibilidade, os picos não estão relacionados com as frequências naturais e sobretudo, os coeficientes apresentam picos em mais de uma frequência. Assim, não se pode dizer que os coeficientes são dependentes analisando-se os espectros obtidos pelas transmissibilidades. Pois, se verifica uma independência dos coeficientes (único pico dominante) nos espectros utilizando FRF, conforme mostra a Figura 4.7.

Considerando a matriz modal  $[\Phi]$  constituída das componentes modais  $\phi_{jr}$  na direção  $x$  e os coeficientes generalizados  $\{C_{est}\}$  estimados, as respostas na direção  $x$  podem ser estimadas pela Equação (3.19).

#### 4.7 Matriz de Transformação

Com a matriz modal de deformação  $[\varepsilon]_{29 \times 10}$  constituída de componentes modais de deformação na direção  $x$  dos 29 pontos e os 10 primeiros modos, e a matriz modal de deslocamento  $[\Phi]_{29 \times 10}$  constituída de componentes modais de deslocamento na direção  $y$  dos 29 pontos e os 10 primeiros modos, simuladas anteriormente, foi possível se determinar a matriz de transformação  $[T]_{29 \times 29}$  pela Equação (3.4). A matriz de transformação será utilizada posteriormente para transformar o deslocamento na direção  $y$  para deformação na direção  $x$  da viga.

#### 4.8 Cálculo da deformação utilizando método de diferenças finitas

A deformação normal na direção longitudinal ou  $x$  foi calculada a partir dos métodos da curvatura da viga, análise modal híbrida e a matriz de transformação. Utilizando os deslocamentos na direção  $x$ , obtidos pela análise modal híbrida, as deformações foram estimadas pela derivada de primeira ordem. No caso do deslocamento na direção transversal, ou seja, na direção  $y$ , a deformação foi obtida pela análise da curvatura ou derivada de segunda ordem. A deformação foi obtida também a partir da matriz de transformação.

Como os deslocamentos são conhecidos em pontos da superfície da viga, o método de diferenças finitas foi utilizado para a derivação das funções discretas de deslocamento. Para os três primeiros pontos da viga (próximo ao engaste), foi utilizado o método de diferenças *forward*. Para os pontos centrais foi utilizado o método de diferenças centrais e para os três últimos pontos, foi utilizado o método de diferenças *backward*. Pelo método da curvatura, a deformação  $\varepsilon_x$  foi estimada pelas Equações (2.25), (2.27) e (2.29). A distância  $c$  considerada foi a metade da

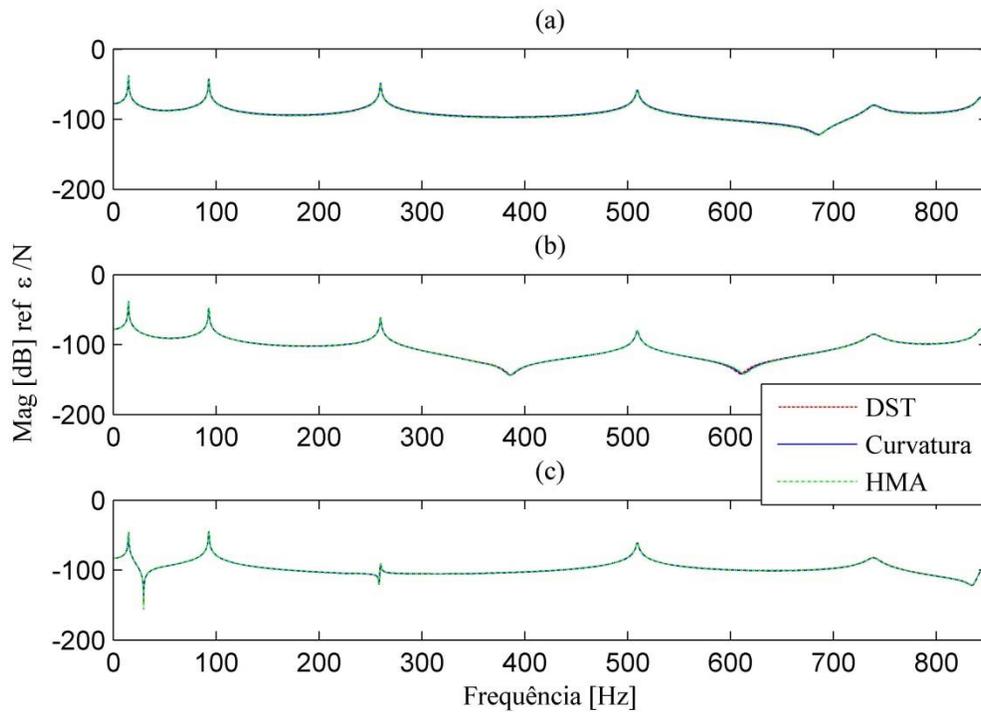
espessura da viga sendo  $c = 1,5$  mm. Utilizando o método da HMA, a deformação foi estimada pelas Equações (2.24), (2.26) e (2.28).

Pelo método da matriz de transformação, a deformação foi estimada transformando o deslocamento na direção  $y$  em deformação  $\varepsilon_x$ , pela Equação (3.5).

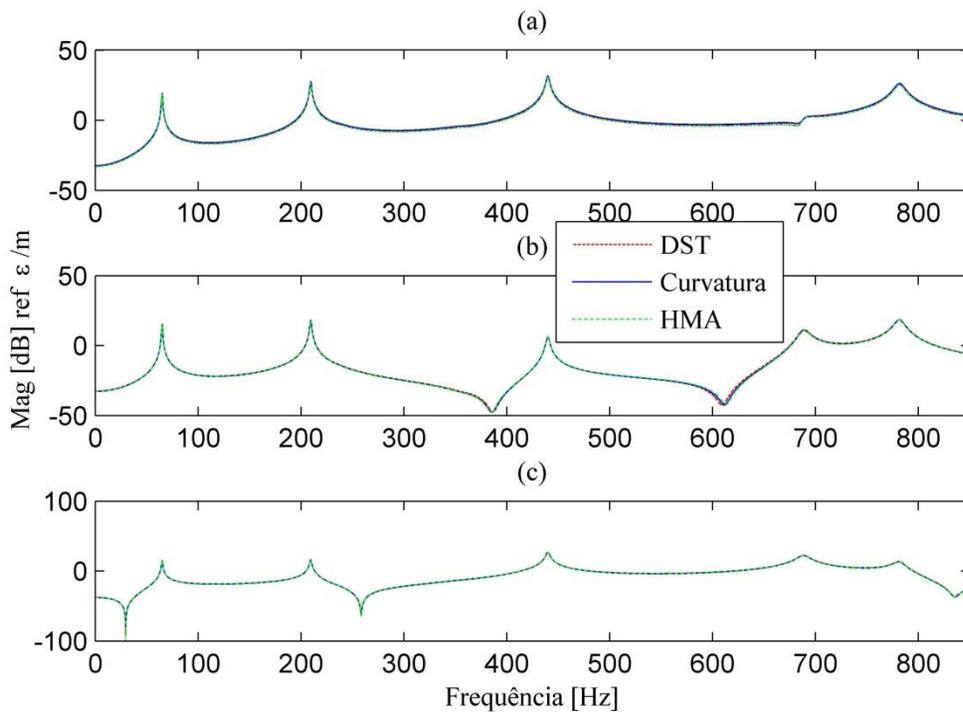
#### **4.9 Comparação entre o método da curvatura, matriz de transformação e HMA**

As deformações dinâmicas em termos de funções resposta em frequência e transmissibilidade estimadas pelo método da curvatura, matriz de transformação e pela HMA foram comparadas. A Figura 4.9 mostra as FRF de deformação e a Figura 4.10 mostra as transmissibilidades de deformação para alguns pontos da superfície da viga.

As comparações mostraram bons resultados para todos os pontos analisados. Especificamente, para o ponto de engaste (ponto 1), região crítica de deformação, a correlação dos resultados obtidos pelos três métodos foi boa, mesmo que para este ponto foi utilizada o método de diferenças finitas *forward*, menos precisa que o método de diferença finitas central. Na simulação numérica, a análise, principalmente da deformação, na região de engaste necessita de uma malha mais refinada do que a utilizada. Na prática, nas regiões de descontinuidades e de engaste pode haver problemas na identificação da deformação. Sejam eles associados aos erros dos métodos numéricos, ao comportamento não linear, medição pontual da deformação real e até mesmo, na comparação analítica e experimental, alguns princípios, por exemplo, de *Saint-Venant* devem ser considerados (TIMOSHENKO e GOODIER, 1980).



**Figura 4.9 – FRF de deformação estimada utilizando a matriz de transformação, método da curvatura e HMA. (a) ponto do engaste (b) ponto distante 45 mm do engaste (c) ponto distante 225 mm do engaste**



**Figura 4.10 – Transmissibilidade de deformação estimada utilizando a matriz de transformação, método da curvatura e HMA. (a) ponto do engaste (b) ponto distante 45 mm do engaste (c) ponto distante 225 mm do engaste**

## 4.1 Comparação no domínio do tempo

A viga foi simulada considerando uma força excitadora harmônica senoidal na extremidade livre. A amplitude da força adicionada foi de 10 N e frequência inicialmente utilizada de 70 Hz. Para a aplicação da análise modal híbrida, os sinais no domínio do tempo foram transformados para o domínio da frequência utilizando o algoritmo de FFT no MATLAB® 7.14. Foram utilizados os 29 pontos da superfície da viga e os 10 primeiros modos simulados em elementos finitos para a estimação dos coeficientes generalizados. Na Figura 4.11 estão os coeficientes generalizados estimados utilizando os sinais no domínio da frequência, considerando somente os 5 primeiros modos de flexão. Todos os modos participam exatamente na frequência de 70 Hz. Nas demais frequências de 0 a 1000 Hz, a participação é praticamente nula. Embora a Figura 4.11 mostre uma legenda das diferentes linhas utilizadas para cada coeficiente, é difícil se fazer uma distinção. Na Figura 4.12 é possível se observar a participação dos modos de flexão na resposta em 70 Hz.

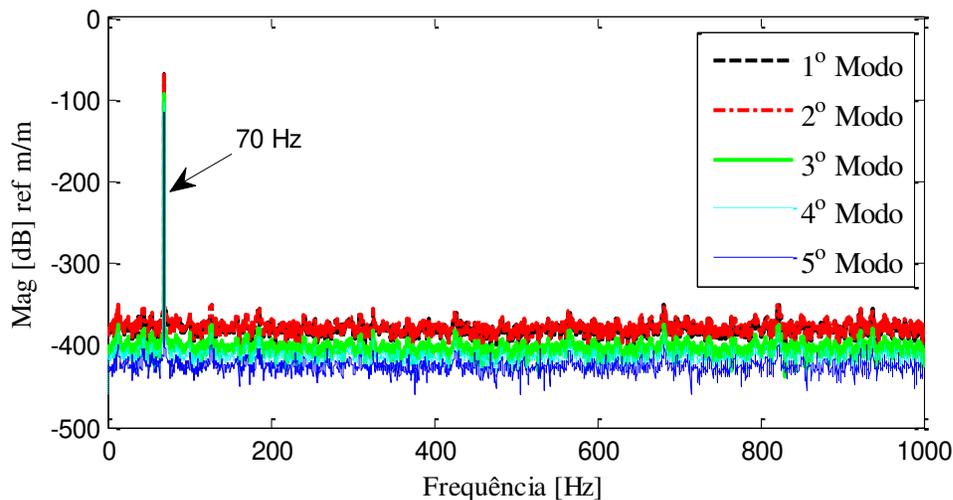
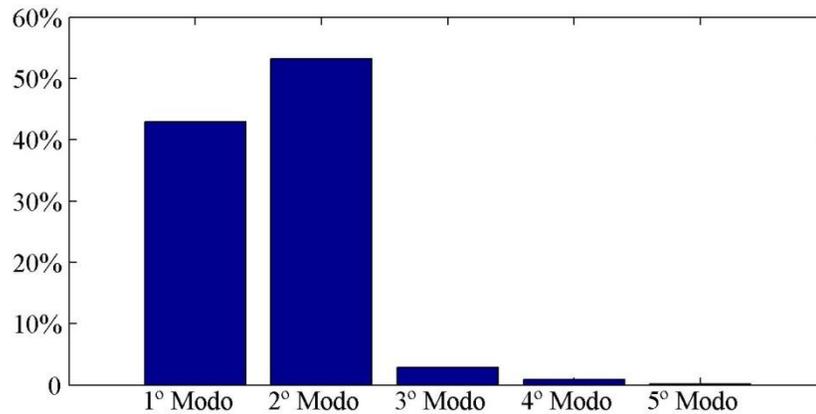


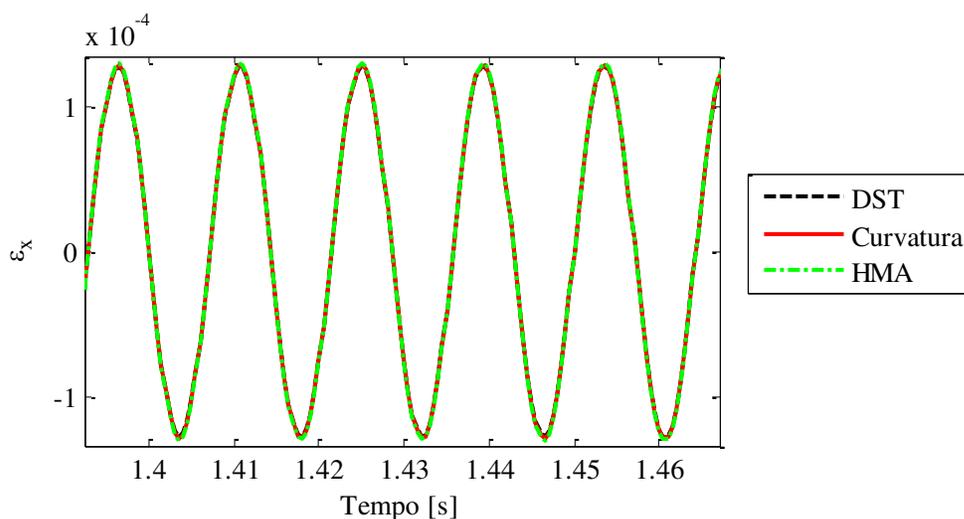
Figura 4.11 – Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados estimados para excitação harmônica em 70 Hz



**Figura 4.12 – Maior participação do segundo modo dentre os 5 primeiros modos de flexão da viga na resposta em 70 Hz determinada pelos coeficientes generalizados**

O segundo modo tem uma participação maior na resposta em 70 Hz seguida do primeiro modo, conforme ilustra a Figura 4.12. A viga simulada tem as duas primeiras frequências naturais de 14 e 90 Hz. É esperado que o segundo modo tivesse uma grande participação na resposta em 70 Hz, pois esta frequência é próxima da segunda frequência natural. Observa-se também uma participação do primeiro modo e pequena participação dos demais.

Os coeficientes generalizados foram utilizados para a estimativa dos deslocamentos longitudinais e estes para o cálculo da deformação da mesma forma que anteriormente descrito. A matriz de transformação encontrada anteriormente também foi utilizada para a estimação da deformação. As deformações determinadas por estes dois métodos foram comparadas com as deformações estimadas a partir da análise da curvatura. Na Figura 4.13 está a comparação da deformação longitudinal  $\varepsilon_x$  estimada em um ponto afastado a 60 mm do engaste.



**Figura 4.13 – Deformação  $\epsilon_x$  no ponto afastado 60 mm do engaste estimada pela DST, HMA e método da curvatura**

Observa-se na Figura 4.13 que a deformação estimada pelos diversos métodos apresentou praticamente os mesmos valores.

## 4.2 Resumo do Capítulo

Neste capítulo a deformação dinâmica foi estimada em uma viga engastada utilizando três métodos de estimação. O primeiro método foi o método da curvatura, onde a deformação longitudinal foi determinada pela derivada de segunda ordem do deslocamento transversal. Para a derivação utilizou-se o método de diferenças finitas. O segundo método foi o método da análise modal híbrida. Os deslocamentos foram medidos na direção perpendicular à superfície da viga, e, a partir da HMA, foi possível se estimar os deslocamentos na direção longitudinal. A deformação nesta direção foi determinada pela derivada de primeira ordem dos deslocamentos utilizando o método de diferenças finitas. O terceiro método foi a matriz de transformação.

Em relação à utilização dos métodos indiretos no domínio do tempo, a utilização da matriz de transformação dispensa a transformação dos sinais para o domínio da frequência, sendo que na análise modal híbrida, essa transformação é necessária.

As figuras apresentadas permitem a comparação entre os métodos. Além disso, a estimativa da deformação por estes métodos não necessita do conhecimento da força de excitação. Visto que

as transmissibilidades mostraram tão bons resultados quanto as FRF. Foi possível também comparar os resultados no domínio do tempo utilizando a transformada inversa de Fourier. Simulações com outras excitações harmônicas de frequências específicas também foram realizadas. As comparações no domínio do tempo mostram resultados satisfatórios.

A simulação numérica foi importante, pois foi possível se aplicar os três métodos e compará-los, sem, por exemplo, a presença de erros experimentais que pudessem comprometer as comparações. As deformações estimadas, tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo, apresentaram valores semelhantes nos três métodos.

No próximo capítulo serão mostrados os resultados experimentais no que diz respeito à determinação do tensor de deformação na superfície de placas e a caracterização da distribuição da deformação dinâmica ao longo da superfície, caracterizando os modos de deformação operacionais.

## 5 PROCEDIMENTOS E RESULTADOS EXPERIMENTAIS

### 5.1 Introdução

A maioria dos métodos de estimação de deformação foi aplicada no estudo unidimensional de deformação. Alguns autores, no entanto, estudaram a aplicação dos métodos na determinação do tensor de deformação em placas. O estudo em placas permite avaliar os métodos em relação à determinação do estado ou tensor de deformação. No tensor de deformação estão envolvidas, não somente as deformações normais, mas também as deformações cisalhantes. Mesmo que essas deformações estejam associadas pelas derivadas dos deslocamentos, como visto no tensor da Equação (2.5), uma questão pertinente é se estas deformações cisalhantes, ou distorções angulares, são estimadas com precisão a partir dos métodos de estimação.

Assim sendo, neste capítulo serão mostrados primeiramente os materiais, equipamentos e procedimentos gerais utilizados. Posteriormente, os resultados experimentais obtidos para diversos casos serão abordados. As avaliações experimentais iniciam-se em uma placa de geometria retangular em uma condição livre - livre. Posteriormente uma placa com um recorte retangular foi avaliada. Esta alteração da geometria da placa foi realizada pela hipótese de aumentar a concentração de tensão em regiões específicas da placa. Neste segundo caso, as deformações estimadas puderam ser comparadas com as deformações medidas utilizando extensômetro tipo roseta. As comparações realizadas mostraram muito boa aproximação entre as deformações estimadas e medidas. A placa retangular foi avaliada experimentalmente na condição livre – livre e engastada.

Por se tratar de diversos experimentos, este capítulo está dividido em seções e subseções associadas a cada experimento. Ao final de cada seção na subseção denominada “Considerações Finais” são apresentados um resumo e algumas considerações adicionais. Na seção 5.2 estão descritos os equipamentos utilizados e as características gerais dos experimentos. Na seção 5.3 estão os experimentos realizados na placa retangular na condição livre – livre. Nestes experimentos são mostrados os modos de deformação, os quais são a distribuição da deformação ao longo da superfície da placa em frequências específicas. Na estimação da deformação é

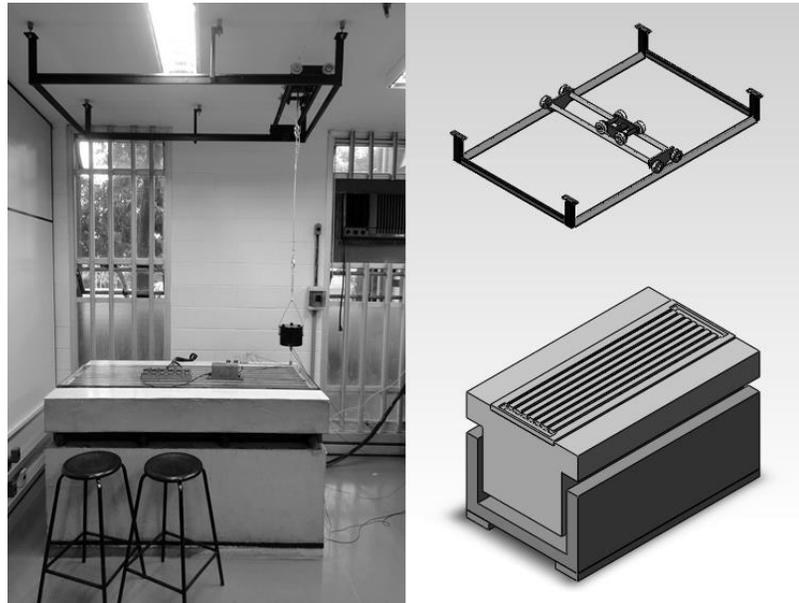
utilizado o método de análise modal híbrida e os métodos numéricos de diferenças finitas e elementos finitos. Na seção 5.4 estão os experimentos na placa retangular com recorte na condição livre - livre. Nesta placa foi possível a validação da deformação estimada com a medida a partir de um extensômetro, posicionado próximo ao recorte da placa. Neste experimento foram utilizadas as funções respostas em frequências e as transmissibilidades medidas, o método de análise modal híbrida, a matriz de transformação e o método de diferenças finitas para a estimação do tensor de deformação. Também são mostrados os modos de deformação operacionais obtidos pela análise modal híbrida e o método de elementos finitos, utilizado na derivação numérica. Na seção 5.5 estão os experimentos na placa retangular com recorte engastada. Neste experimento, a deformação estimada, em termos de função resposta em frequência e transmissibilidade, também foi comparada com a deformação medida em dois pontos da placa. Na seção 5.6 a deformação é estimada no domínio do tempo, utilizando a análise modal híbrida e a matriz de transformação. Na seção 5.7 é mostrada a aplicação do método direto baseado em medidas de aceleração triaxial.

## **5.2 Bancada experimental e equipamentos utilizados**

A bancada experimental utilizada para os experimentos consiste em um bloco de concreto apoiado por molas. Pode-se dizer que a bancada é isolada de fontes de vibrações externas, de tal forma que, essas vibrações não influenciaram diretamente nos resultados experimentais. A frequência de oscilação da bancada é em torno de 2,5 Hz. O efeito dessa oscilação pode ser desprezado nos casos avaliados. Essas considerações são importantes quando se tratará da estimação das funções resposta em frequência. No entanto, serão abordadas discussões pertinentes à aplicação dos métodos em situações operacionais, onde o comportamento dinâmico é influenciado por diversas fontes de excitações não conhecidas. É o caso da utilização das funções de transmissibilidade.

Na montagem experimental escolhida para a condição livre – livre, onde as placas estão sujeitas às tensões nulas nas regiões de contorno, as placas foram mantidas na posição horizontal e suspensas. E no caso dos excitadores, apoiados na bancada. Esse arranjo experimental é

recomendado por diversos autores, por exemplo, Ewins (1984). Também é o que apresentou melhores resultados nos testes realizados. A suspensão foi feita por fios de nylon presos a uma estrutura fixa ao teto. A Figura 5.1 mostra a foto da bancada experimental e também uma ilustração do sistema utilizado para suspensão das peças ou excitadores envolvidos no experimento.



**Figura 5.1 – Foto (à direita) e ilustração esquemática (à esquerda) da bancada de testes utilizada para os experimentos**

Em praticamente todos os experimentos os mesmos equipamentos foram utilizados. Equipamentos para geração de sinais de excitação, excitadores, transdutores de carga, condicionadores de sinais, placa de aquisição e sistemas de aquisição serão descritos á seguir:

### ***Gerador de Sinal Aleatório***

Foi utilizado um gerador de sinal aleatório para alimentar o excitador eletromagnético e estimar as funções em frequências de deformação e de aceleração. O gerador foi o Random – Noise Generator da General Radio Company, tipo 1381.

### ***Gerador de Sinal Harmônico***

Foi utilizado um gerador de função analógico para as excitações senoidais. O gerador de sinal utilizado foi da marca TEKTRONIX® modelo TM 503. A banda de frequência dos sinais gerados pode variar de 1 Hz a 3000 kHz.

### ***Amplificador de Potência***

Para a amplificação de potência do sinal gerado foi utilizado um amplificador de potência da marca Brüel & Kjaer, modelo 2706.

### ***Excitador eletromagnético e Stinger***

A excitação foi transmitida às peças por um excitador eletromagnético (*shaker*) e um *stinger* delgado. O *shaker* utilizado foi da marca Brüel & Kjaer, modelo 4809, com capacidade de carga dinâmica de 45 N, banda de frequência de 10 Hz a 20 kHz e aceleração máxima de 736 m/s<sup>2</sup>.

### ***Transdutor de Força***

O transdutor de Força utilizado foi da marca Brüel & Kjaer, tipo 8200 e sensibilidade de 3,84 pC/N.

### ***Condicionador do sinal dos acelerômetros***

Foi utilizado o condicionador e amplificador de quatro canais NEXUS® da marca Brüel & Kjaer. Este condicionador é utilizado para acelerômetros DeltaTron®, transdutores de força e microfones. É possível aplicar filtro passa-baixa no sinal adquirido com este equipamento.

### ***Sistema para medição de deformação com extensômetro***

Os Extensômetros foram conectados através de fios até a KYOWA® Bridge Box DB-120, acessório do sistema de aquisição. A Bridge Box DB-P é usada para compor a ponte de Wheastone e conectar os extensômetro com o amplificador. Esse modelo de ponte possui três resistores, que pelos quais é possível compor a ponte de Wheastone e é aplicável para um (1) extensômetro (dois e três fios), dois (2) ou quatro (4) extensômetros. (KYOWA, 1987).

Foi utilizado o amplificador modelo KYOWA DPM-6H para amplificação do sinal de deformação medido. É um amplificador portátil de deformação dinâmica de seis canais simultâneos. A sensibilidade de saída do amplificador pode ser ajustada em 1V/100 $\mu\epsilon$ , 1V/200 $\mu\epsilon$ , 1V/500 $\mu\epsilon$ , 1V/1000 $\mu\epsilon$  ou 1V/2000 $\mu\epsilon$ . Este equipamento apresenta filtro passa baixa com frequências de corte de 10, 30, 100, 300 e 1000 Hz.

### ***Placa de Aquisição***

O conversor analógico digital utilizado no experimento foi a placa de aquisição NI USB-6251 da National Instruments. A placa possui 16 entradas analógicas com 16 bits de resolução, além de duas saídas analógicas e duas entradas e saídas digitais. A placa opera com frequência de amostragem máxima de 1,25 MHz/s.

### ***Processamento dos sinais***

O processamento de sinais foi realizado por rotinas desenvolvidas em MATLAB® 7.14. As FRF e transmissibilidades estimadas foram comparadas com as estimadas utilizando o equipamento da SKF Microlog® Analyzer AX. A Figura 5.2 ilustra este equipamento.



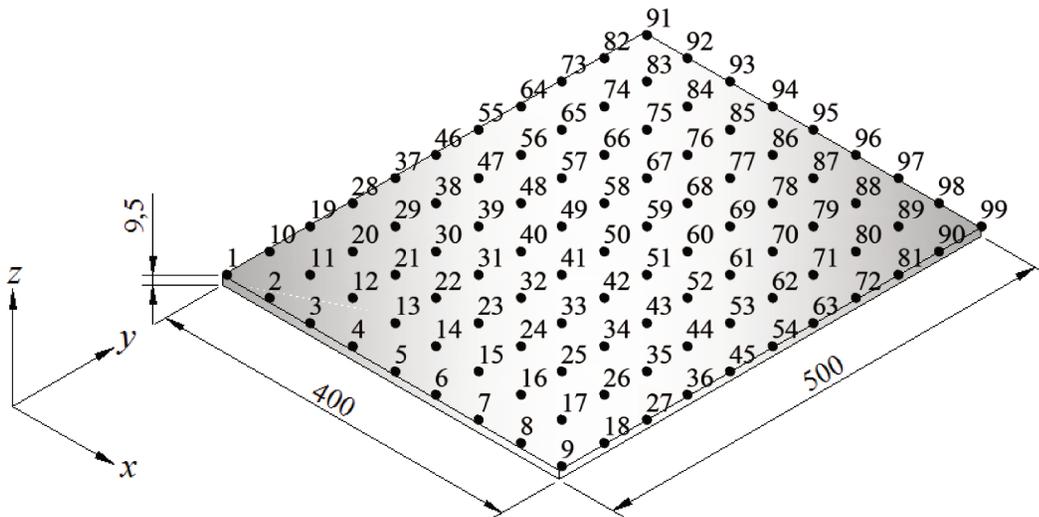
**Figura 5.2 - Microlog® Analyzer AX SKF utilizado no experimento para estimativas de FRF e transmissibilidade**

### *Materiais e geometrias das peças ensaiadas*

Uma maneira simples para verificar a precisão na estimativa do tensor de deformação pelos métodos é utilizando placas. Desta forma, nos experimentos foram utilizadas peças em formato de placas. A espessura das placas utilizadas nos experimentos foi de 9,5 mm. Espessura nominal ou comercial de 3/8". Uma espessura razoável, no entanto, pelas dimensões de largura e comprimento utilizadas, as placas são consideradas finas pela teoria clássica de placas finas. O material escolhido para as análises foi o alumínio. O alumínio é material muito utilizado em aplicações de engenharia. Placas de geometrias retangulares foram adotadas para evitar a presença de modos simétricos.

### **5.3 Experimento placa retangular**

Uma placa retangular de alumínio de dimensões  $0,400 \times 0,500 \times 0,0095$  m ( $x,y,z$ ) foi utilizada neste experimento. Na Figura 5.3 a placa utilizada no experimento é ilustrada com a malha de medição.



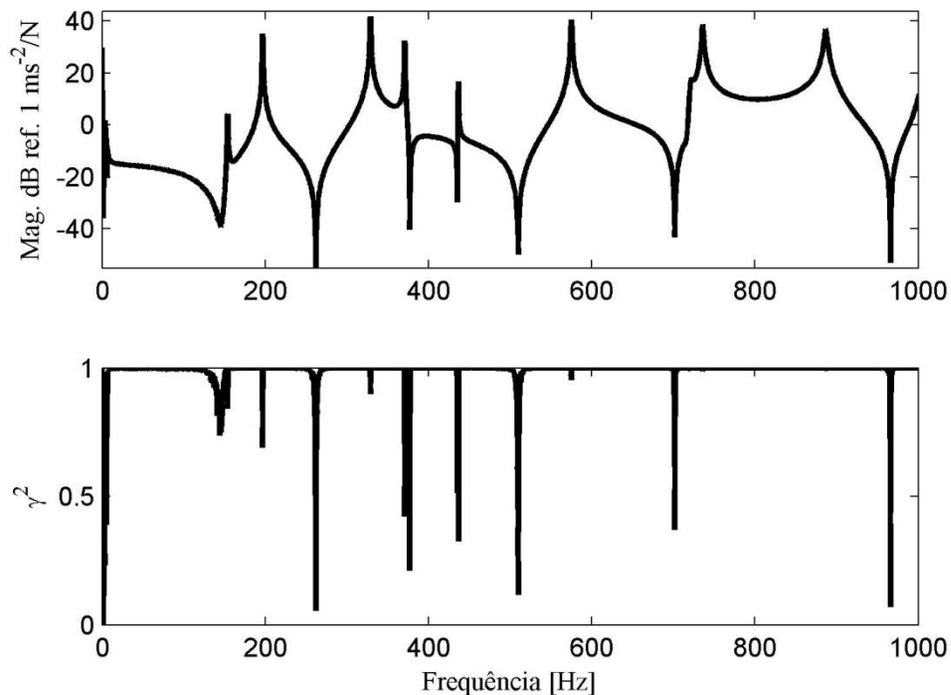
**Figura 5.3 – Placa retangular de alumínio e malha de medição**

A placa foi suspensa por fios de nylon, condição livre – livre. Foi submetida a uma excitação aleatória ruído branco com faixa de frequência de 0 á 2000 Hz. O excitador utilizado

foi apoiado sobre a bancada experimental. A placa foi excitada inicialmente em uma região próxima ao centro de gravidade da mesma. O local de excitação refere-se ao ponto 40 da malha de medição ilustrado na Figura 5.3. A escolha do ponto de excitação inicialmente é pelo fato de uma melhor distribuição da força de excitação ao longo da peça.

Acelerações foram medidas na superfície da placa na direção  $z$ , perpendicular à superfície da placa não deformada, em 99 pontos igualmente espaçados. Foi utilizado um acelerômetro DeltaTron® tipo 4508 piezoelétrico de sensibilidade  $10,06 \text{ mV/ms}^{-2}$  e massa de 4,8 gramas.

As Acelerâncias foram estimadas utilizando o estimador  $H_1$  da Equação (2.110). Os parâmetros do processamento dos sinais estão descritos na Tabela 5.1. A Figura 5.4 mostra o espectro de amplitude de FRF e coerência para o *drive point* (excitação e resposta). A Tabela 5.1 mostra os parâmetros utilizados no processamento de sinais.



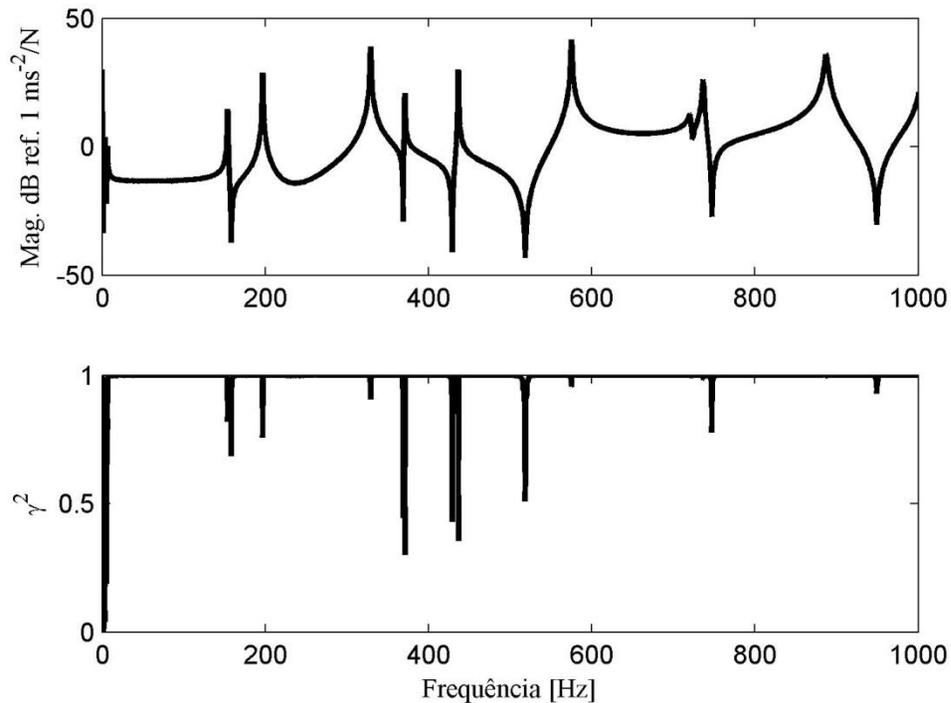
**Figura 5.4 – Espectro de amplitude de Acelerância e a coerência do drive point**

A função de coerência tem valores diferentes da unidade somente nas regiões de ressonância e antirressonância.

**Tabela 5.1 – Parâmetros do processamento e estimativa de FRF no experimento placa retangular**

Descrição	
Janelamento	Hanning
Overlap	75%
Número de pontos	65536
Número de média	15
Frequência de amostragem $f_s$	10000 Hz

A Figura 5.5 representa a aceleração do ponto 22 (ponto genérico) da placa e a função de coerência.



**Figura 5.5 – Espectro de amplitude de Aceleração e a coerência do ponto 22 da placa e excitação ponto 40**

As acelerações estimadas foram convertidas para receptância pela divisão por  $-\omega^2$ , onde  $\omega$  é a frequência angular da excitação. A Figura 5.6 mostra o espectro de amplitude da receptância para o *drive point*.

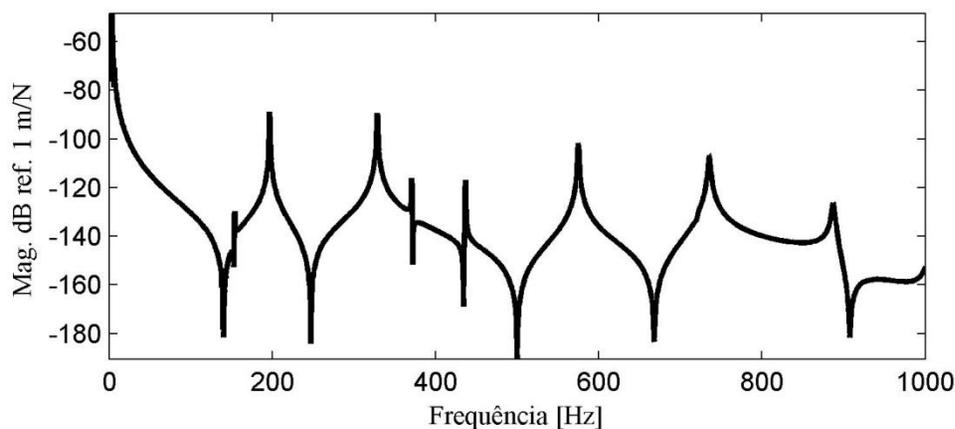


Figura 5.6 – Espectro de amplitude da receptância para o *drive point*

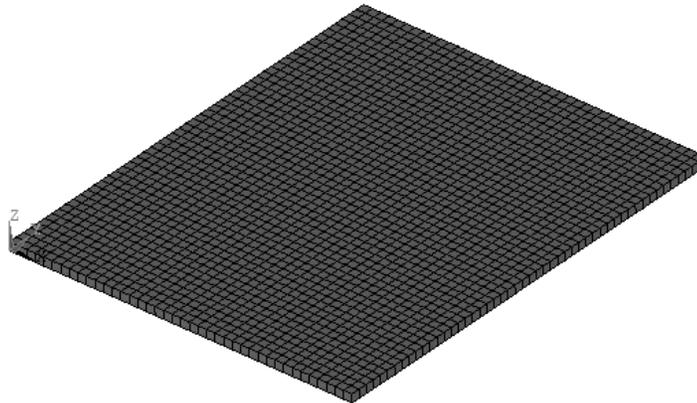
A divisão por valores de frequência muito pequenos faz com que o espectro de receptância apresente elevadas amplitudes em baixas frequências. A divisão pela frequência zero foi desconsiderada. Além disso, os acelerômetros utilizados são adequados para a faixa de frequência de 0,3 Hz a 8 kHz, mantendo um erro de amplitude de  $\pm 10\%$ , conforme pode ser visto no Anexo A.

### 5.3.1 Análise modal híbrida na placa retangular

A análise modal híbrida foi realizada para a estimativa das receptâncias na direção  $x$  e  $y$  da placa, visto que as receptâncias foram medidas na direção  $z$ . Os parâmetros utilizados na simulação em elementos finitos no ANSYS® 11.0 para extração dos modos tridimensionais estão descritos na Tabela 5.2. A Figura 5.7 ilustra o modelo gerado no ANSYS®. Os 9 primeiros modos elásticos naturais simulados para a placa e suas respectivas frequências naturais podem ser observados no Apêndice B.

**Tabela 5.2 – Parâmetros utilizados na simulação por elementos finitos ANSYS**

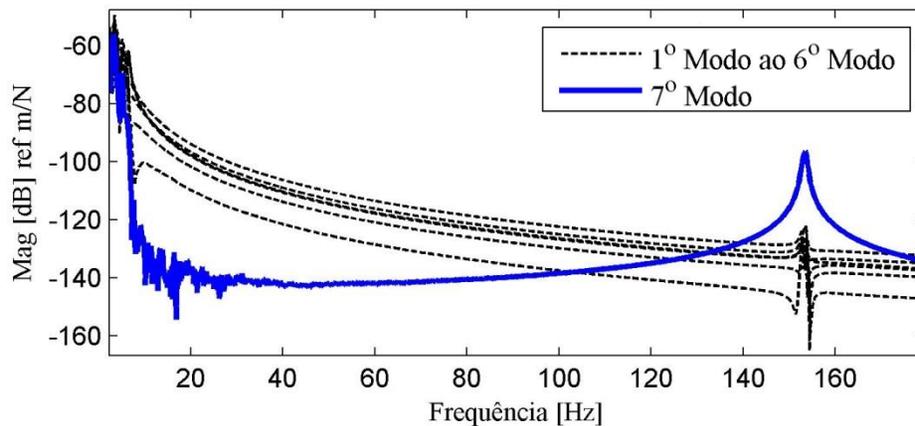
<b>Pré-processamento</b>	
<i>Tipo do elemento:</i>	SOLID186 20 nós; 3 GDL por nó – translação $x$ , $y$ e $z$
<i>Propriedades do Material:</i>	Linear elástico Isotrópico; módulo de elasticidade $E = 74$ GPa; $\nu = 0,33$ ; $\rho = 2700$ kg/m <sup>3</sup> .
<i>Modelo geométrico:</i>	Volume com dimensões $0,400 \times 0,500 \times 0,0095$
<i>Definição da Malha:</i>	14453 nós, 2000 elementos; 1 elemento na espessura
<b>Solução</b>	
<i>Tipo de análise:</i>	Análise Modal; Análise dos 26 primeiros modos; Modos normalizados pela massa; Algoritmo de extração dos modos: Block Lanczos.
<i>Restrições:</i>	Condição livre - livre.
<b>Pós-processamento</b>	
<i>Resultados:</i>	Frequências naturais, modos de deslocamentos tridimensionais.



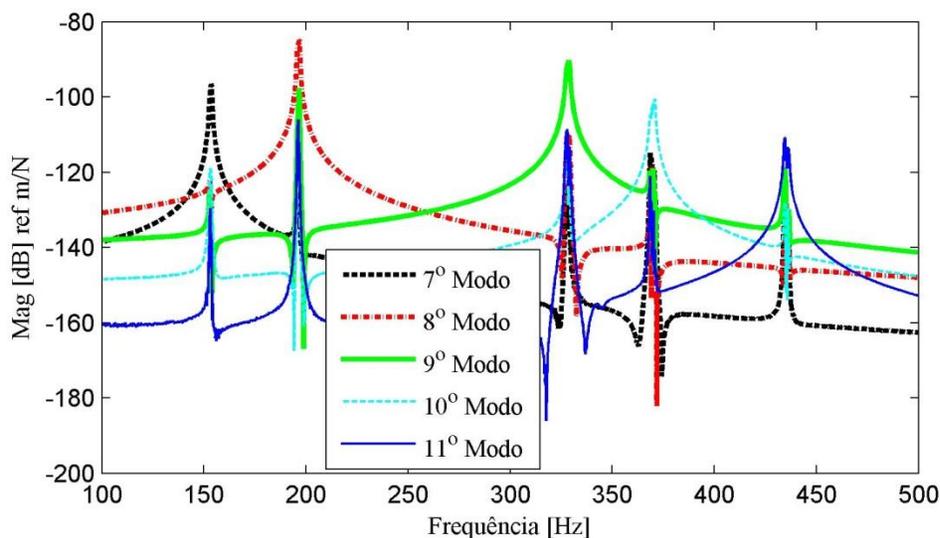
**Figura 5.7 – Modelo em elementos finitos da placa retangular realizado no ANSYS®**

As propriedades do material adotadas não foram medidas e foram considerados os valores médios encontrados na literatura para o alumínio. O elemento SOLID186 foi o mesmo utilizado anteriormente na simulação da viga. Este elemento permite a obtenção dos modos tridimensionais de deslocamento nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Por se tratar de uma placa fina, elementos finitos de casca

poderiam ser utilizados, desde que os deslocamentos possam ser conhecidos na superfície da placa. Posteriormente nos próximos experimentos, serão comentadas as simulações feitas com diferentes malhas e condições de contorno da placa. Ainda em relação à malha inicialmente utilizada, a avaliação do tamanho do elemento e refinamento da malha pela Equação (3.30), assegura uma relação de aproximadamente 20 vezes. Foi escolhido  $M = 26$  modos. Este número corresponde aos modos de baixa ordem até a frequência de  $f_M = 1382$  Hz, incluindo os seis (6) primeiros modos de corpo rígido. Assim, a faixa de frequência analisada se ajusta à  $f < f_{\max} < f_M$ . A frequência máxima foi definida sendo  $f_{\max} = 1000$  Hz. Os coeficientes  $\{C_{\text{est}}\}$  foram estimados utilizando a Equação (3.18) e desprezando-se os resíduos. O vetor de resposta  $\{U_{\text{med}}\}$  foi considerando como sendo as receptâncias medidas para os 99 pontos da superfície da placa. A Figura 5.8 ilustra o espectro de amplitude dos coeficientes generalizados estimados para os 7 primeiros modos. A Figura 5.9 mostra os espectros dos coeficientes generalizados estimados referentes aos cinco (5) primeiros modos elásticos.



**Figura 5.8 – Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados dos 6 modos de corpo rígido e do primeiro modo elástico (7º modo linha cheia-azul).**



**Figura 5.9 - Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados dos 5 primeiros modos elásticos.**

Os modos de corpo rígido participam fortemente em praticamente todas as frequências abaixo do primeiro modo de vibração, conforme pode ser observado na Figura 5.8. Próximo a 153 Hz, frequência natural do primeiro modo elástico, o coeficiente do 7º modo apresenta um pico, conforme o esperado. Os coeficientes estimados para os demais modos mostram um comportamento de independência, ou seja, cada coeficiente tem uma maior amplitude próxima à frequência do modo correspondente. Alguns picos estreitos acontecem em outras frequências, mas isso pode ser atribuído a erros numéricos e erros de medição e processamento na frequência de ressonância.

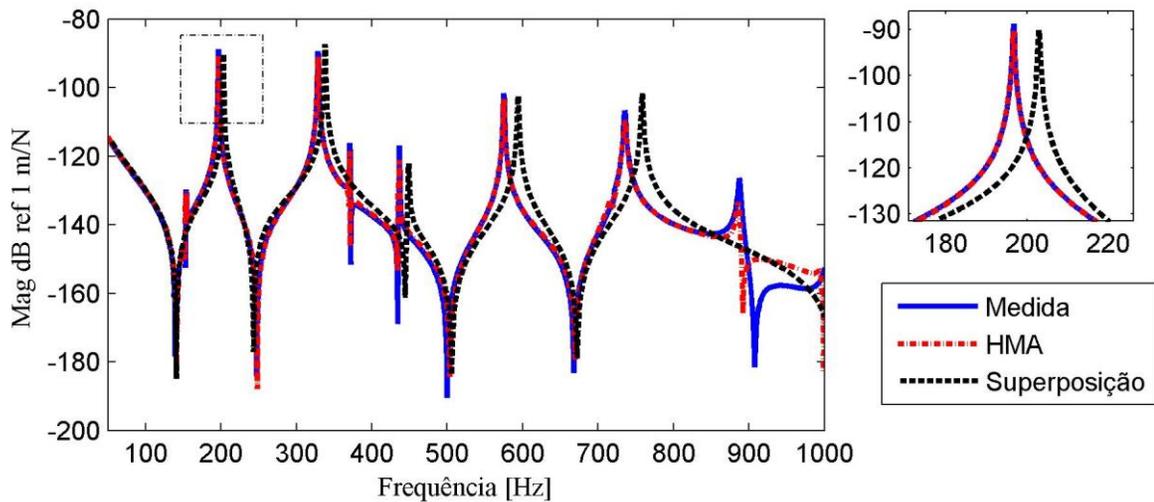
Uma discussão importante pode ser feita em relação aos modos de corpo rígido. Na solução do problema de autovalor e autovetor de um problema de condição de contorno livre de tensão, ou seja, livre – livre, esses modos referem-se à frequência zero. No entanto, esses modos participam da resposta em frequências maiores que zero como visto na Figura 5.8. Uma desconsideração dos modos de corpo rígido pode comprometer o ajuste das curvas em regiões diferentes das ressonâncias associadas aos modos elásticos.

Uma avaliação do ajuste de curvas de deslocamento foi realizada no intuito de verificar a influência dos modos de corpo rígido no ajuste de curvas e também, a utilização de propriedades

dos materiais aproximadas às reais. As receptâncias estimadas pela HMA foram comparadas com receptâncias medidas e simuladas.

As receptâncias simuladas foram determinadas pela superposição modal da Equação (2.97). Os parâmetros desta Equação foram os simulados no ANSYS®. As frequências naturais  $\omega_r$  encontradas na simulação para uma faixa de frequência de 0 a 1000 Hz foram: 158,06 - 202,98 - 337,82 - 381,80 - 448,62 - 593,83 - 743,41 - 758,31 e 913,27 Hz. Estas frequências são maiores do que as encontradas pela identificação de parâmetros modais. Foi utilizado o método da Exponencial Complexa nesta identificação (MAIA, 1997). Ajustes desses valores poderiam ser feitos alterando-se as propriedades do material utilizado na simulação. Entretanto, o objetivo não é ajustar esses parâmetros no método de elementos finitos, e sim, verificar o ajuste das curvas utilizando apenas as formas modais, mesmo com diferenças entre as frequências naturais simuladas e experimentais. Isto está associado ao fato da utilização de parâmetros do material, elásticos e de massa, aproximados na simulação. O fator de amortecimento modal  $\zeta_r$  utilizado para todos os modos na Equação (2.97) foi de 0,001. Este valor é um valor médio dos fatores encontrados experimentalmente.

Considerando a matriz modal  $[\Phi]$  constituída das componentes modais  $\phi_{jr}$  na direção  $z$  e os coeficientes generalizados  $\{C_{est}\}$  estimados, as respostas na direção  $z$  puderam ser estimadas pela Equação (3.19), desprezando-se o resíduo. A Figura 5.10 mostra as receptâncias medidas, ajustada pela HMA e obtida por superposição para o *drive point*. Neste caso, os modos de corpo rígido foram considerados na superposição e HMA.



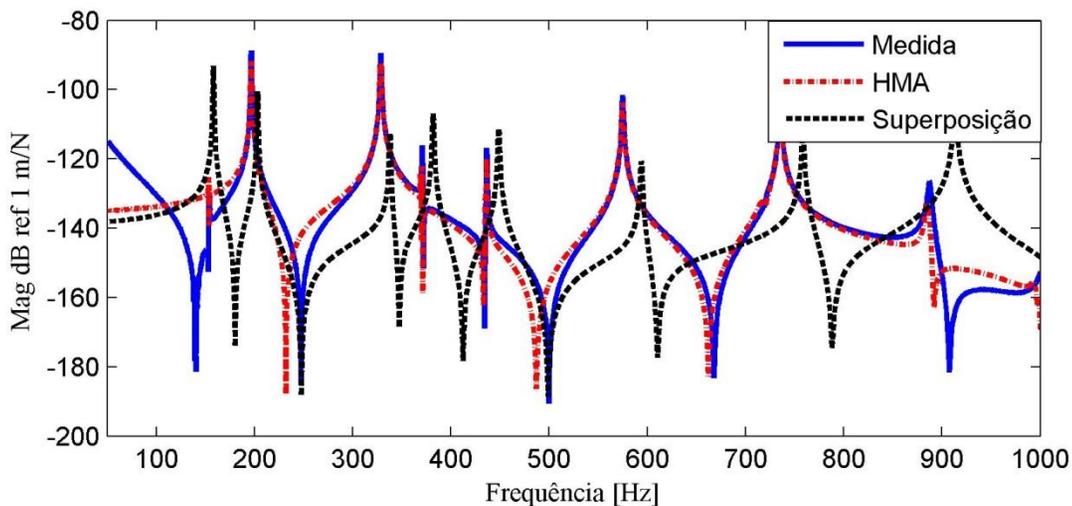
**Figura 5.10 – Comparação entre a receptância *drive point* medida, ajustada pela HMA e por superposição considerando os modos de corpo rígido**

No geral, as curvas obtidas pela HMA e superposição se aproximaram bem à medida. A receptância por superposição pode ser melhorada considerando as frequências naturais identificadas experimentalmente. Também considerando diferentes fatores de amortecimento modal. No entanto, esse gráfico é utilizado para enfatizar que, utilizando a HMA, as curvas podem ser ajustadas mesmo não se conhecendo os fatores de amortecimento e frequências naturais. Na região ampliada entre 180 e 220 Hz, ilustrada na Figura 5.10, verifica-se uma diferença em termos de amplitude e frequência entre o pico da curva por superposição, enquanto a curva por HMA se ajusta bem ao valor medido. As frequências de antirressonância também são bem ajustadas nos casos avaliados. Diferenças maiores vão sendo encontradas quando se analisam frequências maiores que 800 Hz.

Na comparação entre as curvas ajustadas pela HMA e medida na Figura 5.10, são observadas mínimas diferenças. As curvas ajustadas pela HMA foram obtidas após a multiplicação da inversa da matriz modal pelo vetor de medições, conforme a Equação (3.18), para se determinar os coeficientes generalizados. Posteriormente, fez-se a multiplicação da matriz modal por estes coeficientes, conforme Equação (3.19), desprezando-se os resíduos, para obtenção do vetor de medição. Teoricamente, espera-se o mesmo resultado, pois trata-se da solução de um sistema equações, ou em outras palavras, um caminho de ida e volta. Esse ajuste é uma aproximação baseado na convergência no sentido de mínimos quadrados. Erros associados à

inversão da matriz podem estar presentes. No entanto, diversos métodos de inversão de matrizes foram utilizados, constatando-se que se esses erros ocorreram, não influenciaram significativamente nos resultados. Outros erros nessa aproximação podem estar associados aos ruídos de medição, de posição do acelerômetro em relação à coordenada do nó na malha de elementos finitos, ou mesmo, associado ao vetor resíduo não considerado na convergência. Outras questões envolvem diretamente os conceitos relacionados à convergência de séries, onde é necessário que as funções bases, modos de vibrar, formem um espaço completo de Hilbert, conforme descrito na teoria da análise modal híbrida.

A Figura 5.11 mostra as receptâncias ajustadas sem os modos de corpo rígido comparadas com a receptância medida para o *drive point*.

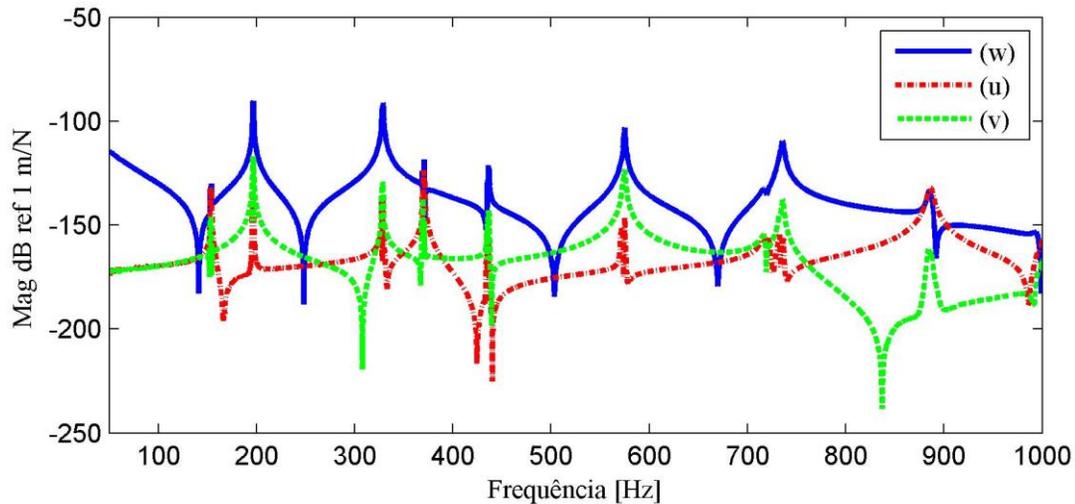


**Figura 5.11 – Receptâncias ajustadas pela HMA e superposição sem modos de corpo rígido comparadas com a receptância medida do *drive point*.**

O ajuste das curvas de receptância fica comprometido em quase toda a faixa de frequência quando não são considerados os modos de corpo rígido. Apenas nas regiões de ressonância há um bom ajuste entre a HMA e a medida. Desta forma, a desconsideração dos modos de corpo rígido influencia no ajuste de curvas, principalmente nas regiões de antirressonância.

Da mesma maneira que as receptâncias podem ser ajustadas na direção  $z$ , utilizando os coeficientes generalizados estimados e as matrizes modais com componentes modais na direção  $x$

e  $y$ , é possível estimar as receptâncias nessas direções pela Equação (3.19). A Figura 5.12 mostra um comparativo entre as receptâncias tridimensionais estimadas pela HMA para o *drive point*.



**Figura 5.12 – Receptâncias tridimensionais para o *drive point*.**

As receptâncias nas direções  $x$  e  $y$  apresentam amplitudes muito menores do que na direção  $z$ . Em alguns casos na prática, são difíceis de serem medidas. Assim, essas receptâncias podem ser estimadas pela análise modal híbrida. Essas receptâncias na direção planar são essenciais para a determinação do tensor de deformação, caso seja utilizado esses parâmetros vibracionais e o tensor da Equação (2.6). Na próxima seção, essas receptâncias serão utilizadas para a determinação da deformação na superfície da placa. O conhecimento da distribuição da deformação em frequências específicas ao longo da superfície da placa determinam os modos de deformação operacional nessas frequências.

### 5.3.2 Modos de deformação operacional

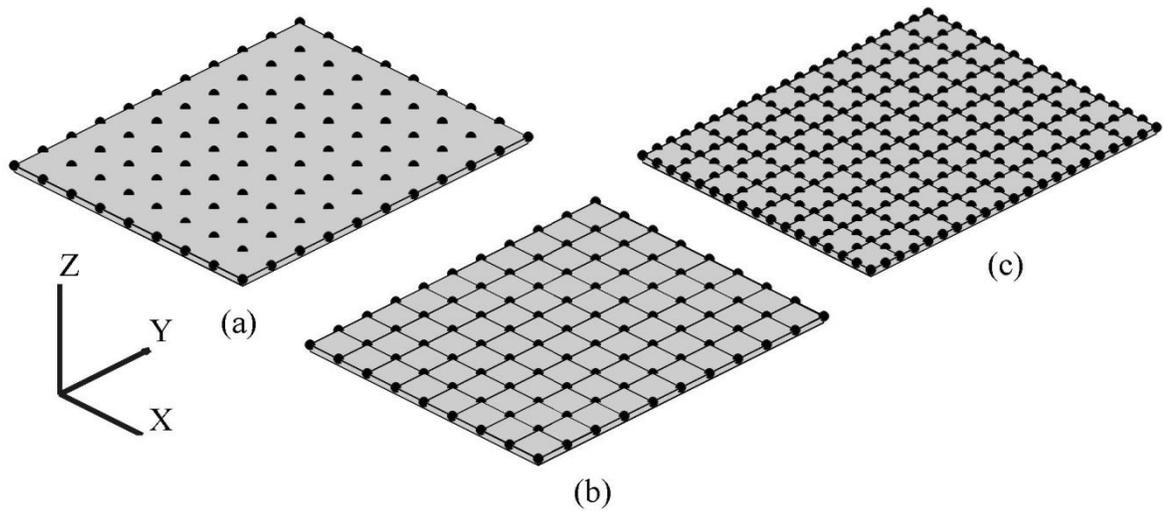
Nesta seção os modos de deformação ou a distribuição da deformação na superfície da placa em frequências específicas são identificados. Foram escolhidas frequências próximas às frequências naturais da placa. Na prática, muitos problemas estão associados às excitações com frequências próximas às frequências naturais dos sistemas mecânicos. Além disso, as formas modais próximas às frequências naturais são muito semelhantes aos modos naturais, assim é

possível comparar os modos estimados com os modos naturais, para uma possível validação. Por não serem exatamente as frequências naturais, as frequências são ditas frequências operacionais e os modos são ditos modos de deformação operacional.

São utilizados os métodos de diferenças finitas e elementos finitos para a transformação deslocamento – deformação. Desta forma será possível a avaliação destes métodos, comparando-os com as deformações obtidas por superposição modal.

Os modos de deformação operacionais da placa foram determinados a partir das receptâncias na direção planar obtidas da análise modal híbrida. No método de diferenças finitas, aplicaram-se as equações de diferenças finitas de primeira ordem. Para os pontos localizados nas bordas da placa, foram utilizadas as fórmulas de diferenças finitas *backward*, Equação (2.26), e *forward*, Equação (2.28). Na região central da placa foi utilizada a fórmula de diferenças finitas centrais, Equação (2.24). No método de elementos finitos foram utilizados os elementos: quadrilateral de quatro (4) nós; e elemento quadrilateral de oito (8) nós. As deformações foram calculadas a partir das seguintes Equações: (2.35) no elemento de 4 nós; e (2.37) no elemento de 8 nós. Foi considerada a média dos valores de deformação em cada nó dos elementos finitos a fim de permitir a comparação dessas deformações com as deformações obtidas pelo MDF.

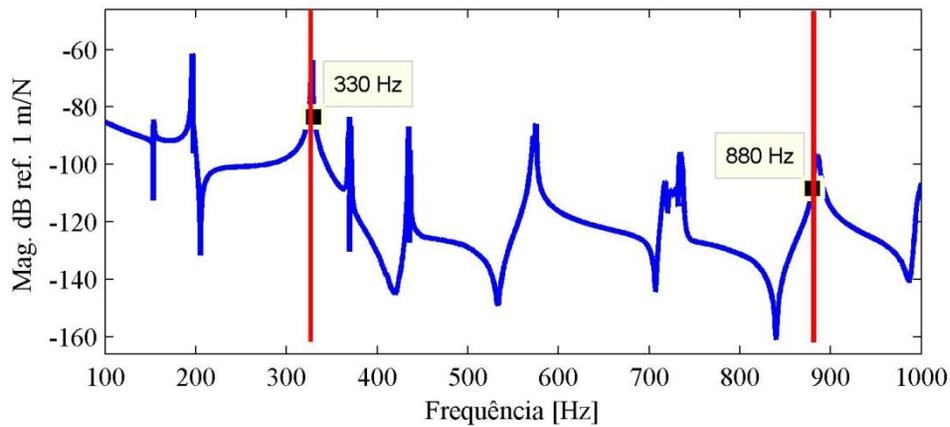
A malha de diferenças finitas é composta dos 99 pontos de medição igualmente espaçados na superfície da placa (Figura 5.13a). A distância entre os pontos é de  $h = 50$  mm. Esses mesmos pontos formam a malha de elementos finitos quadrilateral de quatro (4) nós, com 80 elementos (Figura 5.13b). Adição de novos pontos centrais em cada elemento forma a malha de elementos finitos quadrilateral de oito (8) nós (Figura 5.13c).



**Figura 5.13 – (a) malha de diferenças finitas; (b) malha de elementos finitos 4 nós; (c) malha de elementos finitos 8 nós.**

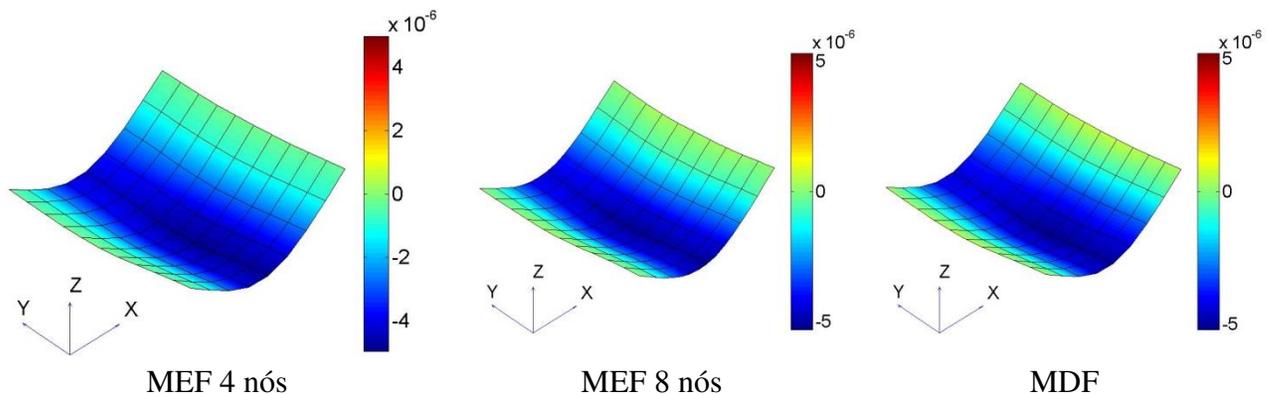
Nos dois primeiros casos, Figura 5.13 (a) e (b), os nós são os próprios pontos de medição. No caso da Figura 5.13 (c), nós adicionais são necessários para formar os elementos de (8) nós. As informações desses nós adicionais foram estimadas a partir da HMA.

A partir das FRF de deformação calculadas para todos os pontos envolvidos é possível se visualizar os modos operacionais de deformação em frequências específicas. Algumas frequências foram selecionadas para visualização dos modos de deformação. Essas frequências são próximas às frequências naturais. Os modos de deformação  $\epsilon_x$  operacional foram ilustrados nas frequências de 330 e 880 Hz, próximas ao terceiro e nono modo elástico. Esses modos apresentam deformações preferencialmente na direção  $x$  da placa, motivo pelo qual foram ilustrados. Na Figura 5.14 essas frequências estão indicadas por linhas verticais no espectro de amplitude da soma de todas as FRF medidas.



**Figura 5.14 – Frequências de 330 e 880 Hz selecionadas no espectro de amplitude da soma das FRF medidas nos 99 pontos.**

Os modos de deformação operacional na frequência de 330 Hz estão demonstrados na Figura 5.15 através de mapa de cores. Foram determinados utilizando o método de diferenças finitas (MDF) e o método de elementos finitos (MEF) com elementos quadrilateral de 4 e 8 nós. Nesta mesma Figura é possível comparar os modos obtidos pelos diferentes métodos numéricos. Verifica-se que, qualitativamente, a distribuição de deformação é a mesma para todos os casos. Quantitativamente, maiores valores para deformações críticas são encontrados pelo MDF e MEF 8 nós.

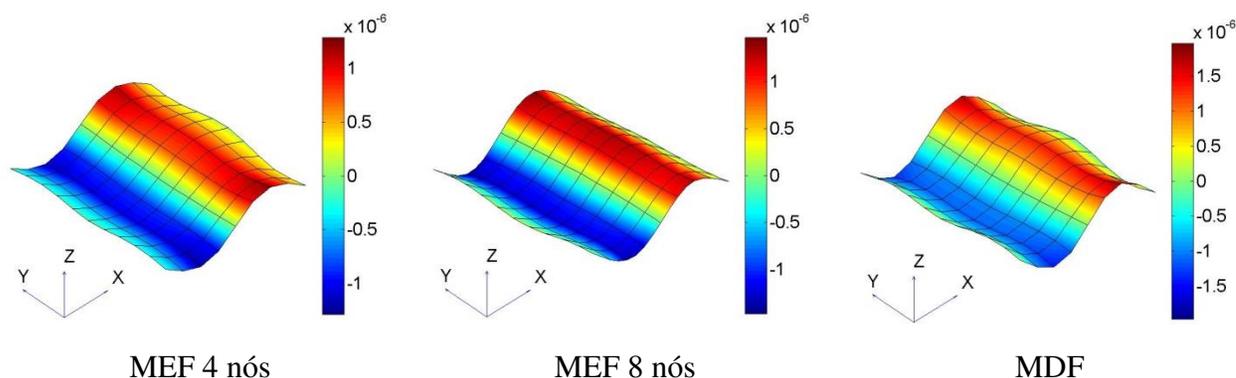


**Figura 5.15 – Modos operacionais de deformação ( $\epsilon_x/N$ ) na frequência de 330 Hz utilizando MEF de 4 e 8 nós e MDF.**

Os valores máximos de deformação são semelhantes para todos os casos. Entretanto, pelo MEF de 4 nós esse valor é um pouco menor quando comparado com os outros dois métodos.

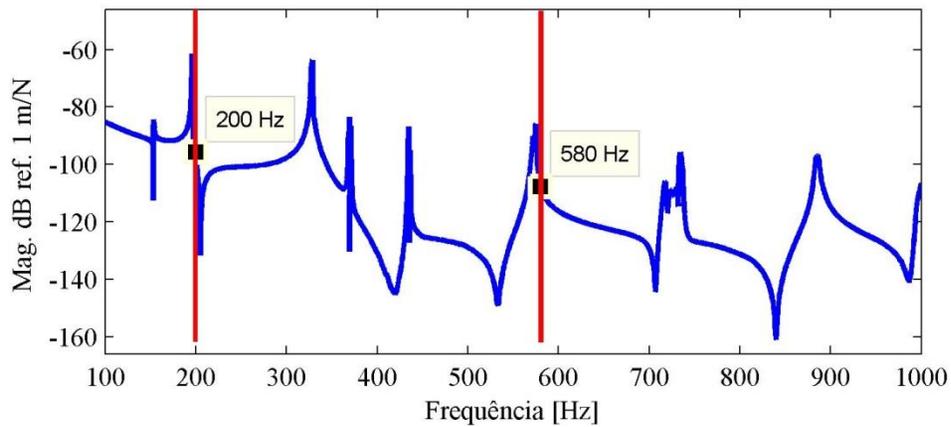
É importante ressaltar que essas amplitudes são normalizadas pela força excitadora, pois os modos operacionais foram determinados a partir das FRF de deformação estimadas. São baseadas também nos valores máximos e mínimos mostrados no mapa de cores. Além disso, em relação ao modo operacional, como as frequências escolhidas são próximas às frequências naturais da placa, pode se dizer que a forma modal visualizada é semelhante à forma do modo natural referente às essas frequências.

A Figura 5.16 mostra os modos operacionais de deformação  $\varepsilon_x$  na frequência de 880 Hz calculados pelos três métodos.



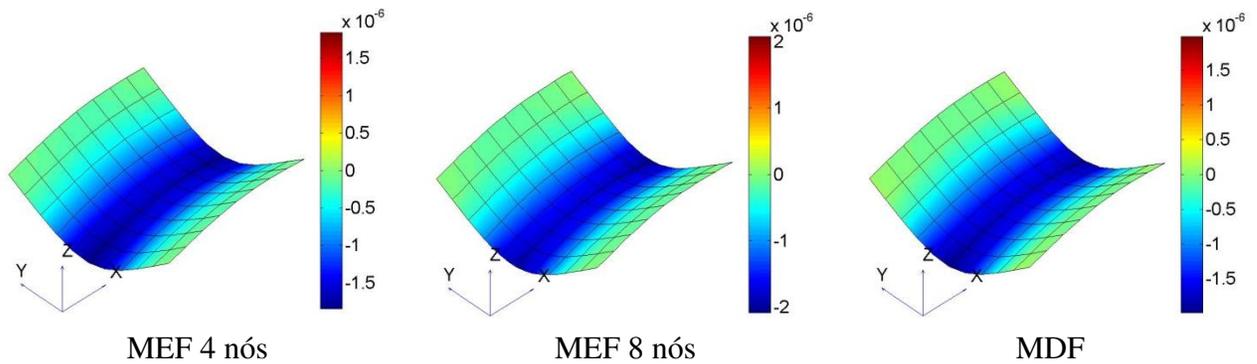
**Figura 5.16 – Modos operacionais de deformação ( $\varepsilon_x/N$ ) na frequência de 330 Hz utilizando MEF de 4 e 8 nós e MDF.**

Qualitativamente, a distribuição de deformação é praticamente a mesma para todos os casos. Quantitativamente, o MDF mostrou valores maiores. Os modos de deformação  $\varepsilon_y$  na direção y foram ilustrados nas frequências de 200 e 580 Hz, próximas ao segundo e sexto modo elástico. Essas frequências estão indicadas Na Figura 5.17.



**Figura 5.17 -** Frequências de 200 e 580 Hz selecionadas no espectro de amplitude da soma das FRF medidas nos 99 pontos.

Os modos de deformação na frequência de 200 Hz estão demonstrados na Figura 5.18.



**Figura 5.18 –** Modos operacionais de deformação ( $\epsilon_y/N$ ) na frequência de 200 Hz utilizando MEF de 4 e 8 nós e MDF.

Qualitativamente tem-se praticamente a mesma distribuição de deformação definindo o mesmo modo operacional de deformação nos três casos. Quantitativamente, o MEF de 8 nós mostrou valores maiores para deformação, enquanto o MEF de 4 nós e MDF mostraram praticamente os mesmos valores. Na Figura 5.19 os modos de deformação na frequência de 580 Hz estão demonstrados.

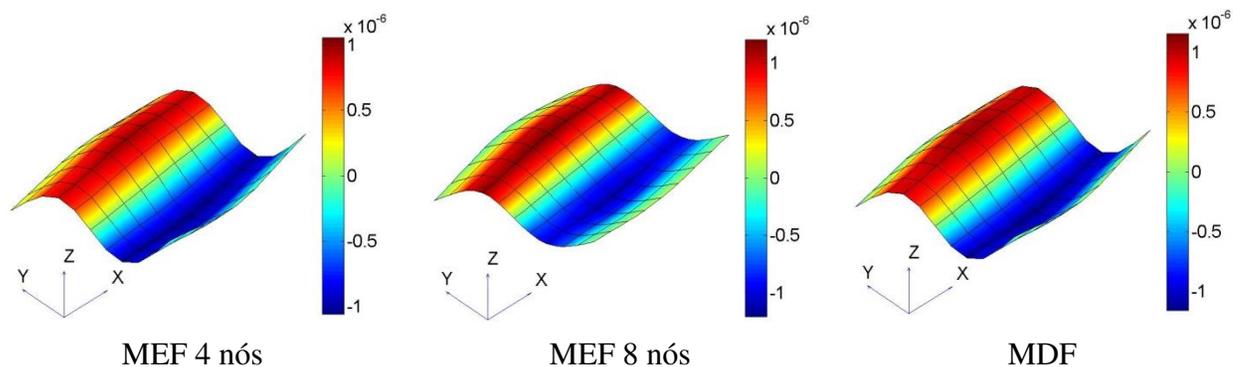


Figura 5.19 – Modos operacionais de deformação ( $\epsilon_y/N$ ) na frequência de 580 Hz utilizando MEF de 4 e 8 nós e MDF.

Os modos de deformação  $\gamma_{xy}$  foram ilustrados nas frequências de 370 e 720 Hz, próximas ao quarta e sétimo modo elástico. Essas frequências estão indicadas na Figura 5.20. Os modos de deformação na frequência de 370 Hz estão demonstrados na Figura 5.21.

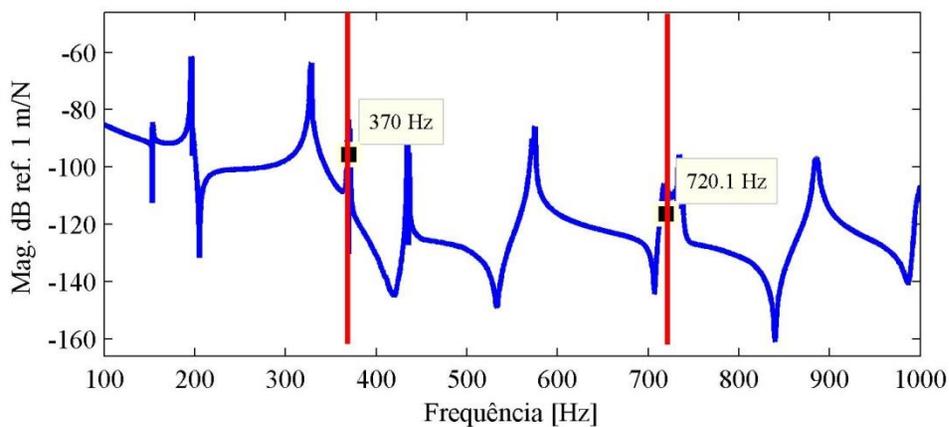


Figura 5.20 - Frequências de 370 e 720 Hz selecionadas no espectro de amplitude da soma das FRF medidas nos 99 pontos.

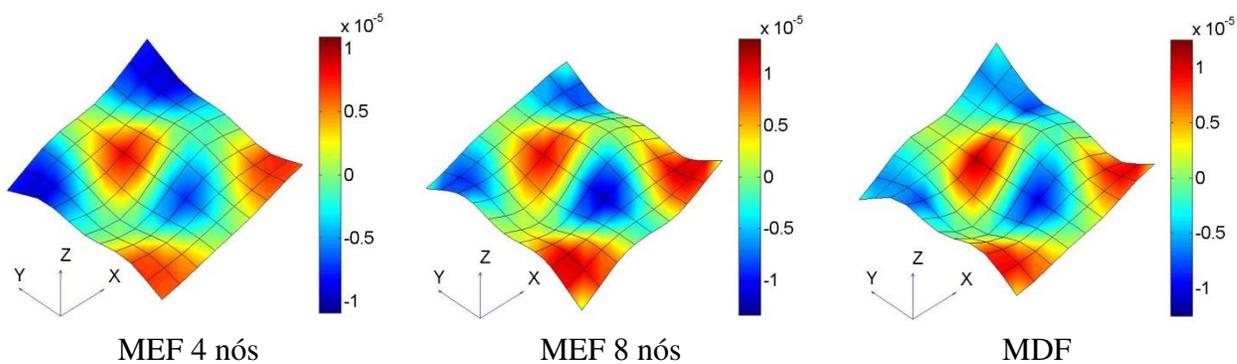
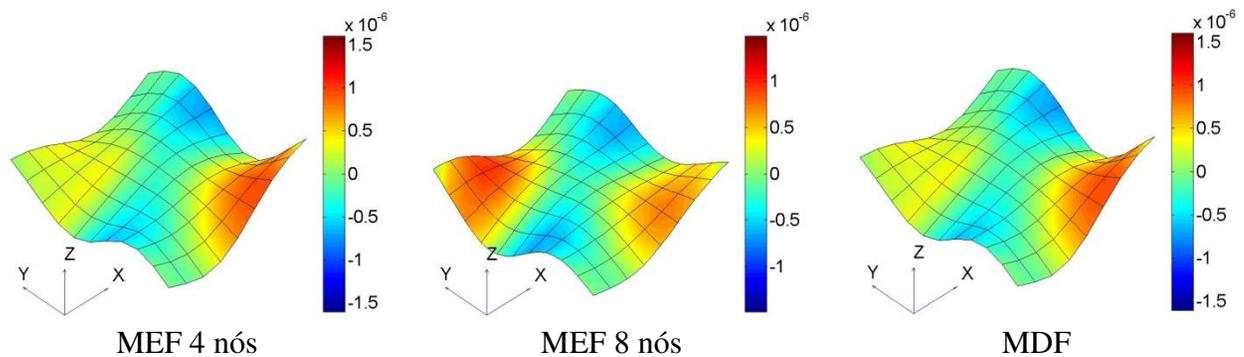


Figura 5.21 – Modos operacionais de deformação cisalhante ( $\gamma_{xy}/N$ ) na frequência de 370 Hz utilizando MEF de 4 e 8 nós e MDF.

Os modos de deformação  $\gamma_{xy}$  na frequência de 720 Hz estão demonstrados na Figura 5.22.



**Figura 5.22 – Modos operacionais de deformação cisalhante ( $\gamma_{xy}/N$ ) na frequência de 720 Hz utilizando MEF de 4 e 8 nós e MDF.**

O MEF de 8 nós mostrou valores menores para deformação, enquanto o MEF de 4 nós e MDF mostraram praticamente os mesmos valores na Figura 5.22. No geral, a distribuição de deformação, a qual define o modo de deformação, foi bem estimada em todos os casos avaliados. Os modos operacionais de deformação foram ainda comparados com os modos naturais encontrados no ANSYS®. A comparação mostrou bons resultados. Embora as formas modais representadas nas Figuras acima tenham sido obtidas de medições, as mesmas foram ajustadas pelas formas modais simuladas. Isso ocorre porque se utilizou a análise modal híbrida. A HMA utiliza dados experimentais e as formas modais nos ajustes das curvas. Desta forma, os modos operacionais poderiam ser “forçados” a terem a forma modal simulada. Entretanto, a comparação entre três métodos diferentes, e inclusive, considerando no método de elementos finitos uma malha menos refinada que a utilizada na simulação em ANSYS®, assegura que os modos operacionais de deformação podem ser identificados de maneira a representarem o sistema real.

Uma maneira de confirmar a real distribuição de deformação seria a medição de deformação em todos os pontos envolvidos, ou uma alternativa seria a medição e comparação entre a deformação medida e estimada em apenas alguns pontos. Para tal, foram escolhidos dois pontos de medição de deformação. No entanto, não foi possível medir a deformação com os extensômetros utilizados. Isso porque as deformações envolvidas, mesmo com grandes níveis de excitação, foram muito pequenas nos pontos escolhidos da placa. Extensômetros com maior sensibilidade, como os extensômetros semicondutores, poderiam ser utilizados.

Optou-se por fazer as comparações entre a deformação medida e estimada em peças com concentradores de tensão, onde as deformações puderam ser medidas utilizando extensômetros convencionais. Essas comparações podem ser vistas nos experimentos com a placa retangular com recorte na próxima seção. Por não ter um valor de deformação medida de referência, também não é possível, para o caso avaliado, concluir qual dos três métodos é mais preciso na identificação da deformação crítica. Há situações em que o MDF se equivale com o MEF de 8 nós e há situações que se equivale com o MEF de 4 nós.

Conhecido o estado de deformação formado pelas componentes  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ , foram possíveis calcular a deformação principal  $\varepsilon_1$  da Equação (2.21) e sua direção principal Equação (2.22). Na Figura 5.23 estão ilustradas as deformações principais  $\varepsilon_1$  e suas direções para os nove primeiros modos elásticos. Observa-se que a direção da deformação máxima principal está associada ao modo de vibração. Para os modos de flexão, a mesma segue uma orientação associada aos eixos cartesianos, se a flexão ocorre em relação ao eixo  $x$ , a deformação tem direção  $y$  e vice-versa. Para os modos de torção, a direção da deformação máxima principal tem inclinação de aproximadamente  $45^\circ$ .

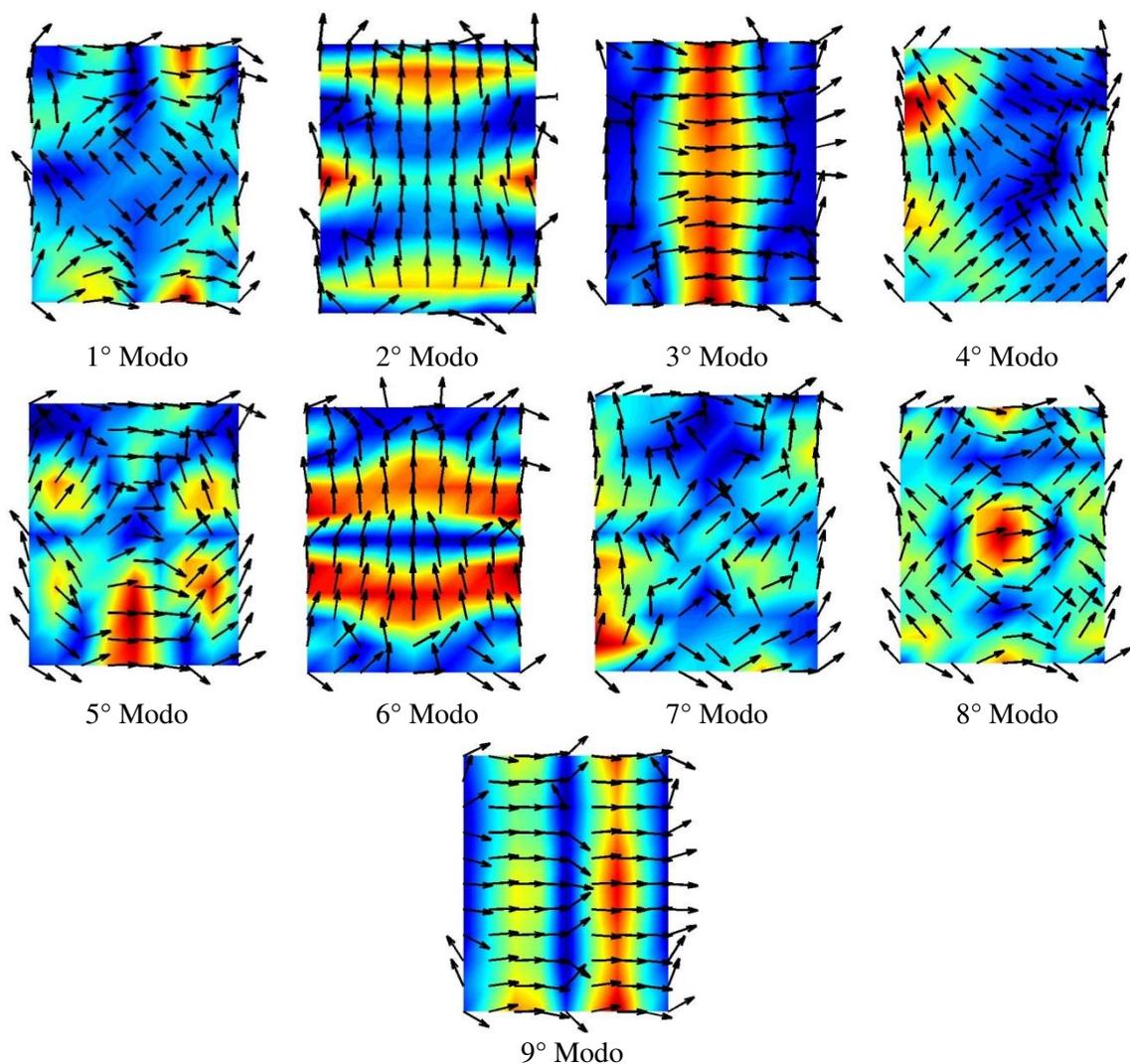


Figura 5.23 – Deformações  $\varepsilon_1$  e direções principais para os nove primeiros modos elásticos.

### 5.3.3 Considerações finais

Nesta seção foi tratada a análise modal híbrida em uma placa retangular na condição livre - livre. Nesta análise é observado que os modos de corpo rígido modificam os ajustes de curvas não só em regiões de baixas frequências, mas também em frequências maiores. Também se constatou que, independentemente dos objetivos da realização da HMA, a mesma pode ser utilizada para extrapolação e ajuste de curvas. Os modos de vibração simulados podem ser ajustados nas frequências naturais conforme as medições, sem a necessidade do conhecimento

das propriedades elásticas ou de massa exatas do material e também, não necessitando do conhecimento do amortecimento.

Os modos de deformação operacionais da placa retangular foram identificados em frequências específicas utilizando o método de diferenças finitas e o método de elementos finitos de 4 e 8 nós. Estes modos de deformação mostram a distribuição de deformação ao longo da peça. Comparando-se qualitativamente os modos operacionais, encontraram-se as mesmas distribuições de deformação ao longo da superfície utilizando os três métodos. Quantitativamente não foi possível afirmar qual dos métodos tem maior ou menor precisão na estimação, pois as conclusões dependem do modo analisado. Os valores máximos e mínimos apontados pelo mapa de cores se aproximaram em praticamente todos os casos avaliados. Pequenas diferenças ocorreram. Os modos de deformação cisalhante foram identificados pelos métodos, e foram os que apresentaram melhor semelhança nos valores nos mapas de cores entre os métodos numéricos utilizados.

De modo geral, em relação à utilização dos métodos numéricos para derivação, o método de diferenças finitas é mais preciso nas deformações pontuais. Quando é necessária a identificação da distribuição da deformação em superfícies de geometrias complexas, aconselha-se a utilização do método de elementos finitos. A precisão da aproximação está associada ao refinamento da malha e a disponibilidade de informação de deslocamentos.

Uma importante questão pode ser levada em conta em relação à influência da massa do acelerômetro. Não somente o pequeno valor de massa, mas também, a variação da distribuição da mesma na superfície da placa durante as diferentes posições de medições. Uma pequena variação da frequência de ressonância em partes da placa pode fazer com que, regiões da placa já tenham invertido a fase entre a resposta e a força e outras não. Numa determinada frequência próxima à ressonância, isso pode acarretar problemas na identificação dos modos operacionais e estimação dos coeficientes.

## 5.4 Experimento placa retangular com recorte

O objetivo principal deste experimento é verificar se os métodos são capazes de estimar a deformação em peças com geometrias favoráveis à concentração de tensão. As deformações estimadas são comparadas com deformações medidas utilizando extensômetros. Neste experimento, os métodos também são avaliados em termos de estimação da deformação a partir das FRF e transmissibilidades medidas em diversos pontos da placa.

Uma placa retangular de alumínio de dimensões  $0,400 \times 0,500 \times 0,0095$  m ( $x,y,z$ ) e com um recorte retangular de  $0,150 \times 0,200 \times 0,0095$  m foi utilizada neste experimento. A placa utilizada no experimento é ilustrada na Figura 5.24, juntamente com a malha de medição.

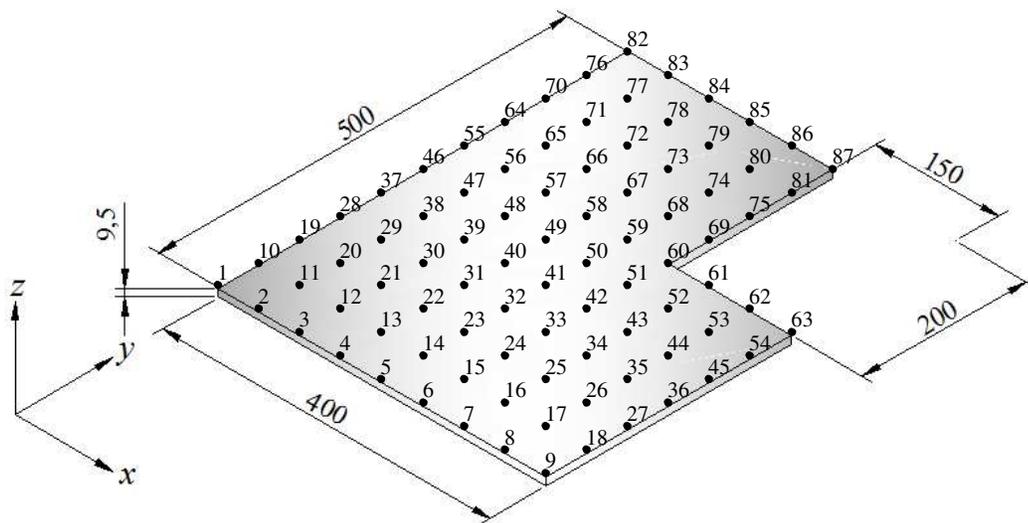


Figura 5.24 – Placa retangular com recorte e malha de medição

A placa foi suspensa por fios de nylon, condição livre – livre. Foi submetida a uma excitação aleatória ruído branco com faixa de frequência de 0 a 2000 Hz. O excitador utilizado foi apoiado sobre a bancada experimental. A placa foi excitada inicialmente em uma região próxima ao centro de gravidade da mesma. Outros locais de excitação foram utilizados para verificação da estimação da deformação pelos métodos utilizados.

Acelerações foram medidas na superfície da placa na direção  $z$ , perpendicular à superfície da placa não deformada. Foi utilizado um acelerômetro DeltaTron® tipo 4508 piezoelétrico de

sensibilidade  $10,06 \text{ mV/ms}^{-2}$  e massa de 16 gramas. Para o cálculo das transmissibilidades, outro acelerômetro, de mesmo modelo e sensibilidade de  $9,90 \text{ mV/ms}^{-2}$ , foi utilizado como referência e mantido fixo em pontos escolhidos. A escolha destes pontos está associada aos locais de máxima amplitude de vibração na maioria dos modos compreendidos na faixa de frequência de 0 a 1000 Hz.

#### 5.4.1 Estimação das receptâncias tridimensionais pela HMA

As Acelerâncias foram estimadas utilizando o estimador  $H_1$  da Equação (2.110). Os parâmetros do processamento dos sinais são os mesmos descritos na Tabela 5.1. Considerando o ponto de excitação localizado nas coordenadas  $0,200 \times 0,200 \times 0,000$ ,  $x, y$  e  $z$ , respectivamente, e referente ao ponto 41 da malha de medição, o espectro de amplitude de FRF e coerência para o *drive point* (excitação e resposta) pode ser visto na Figura 5.25.

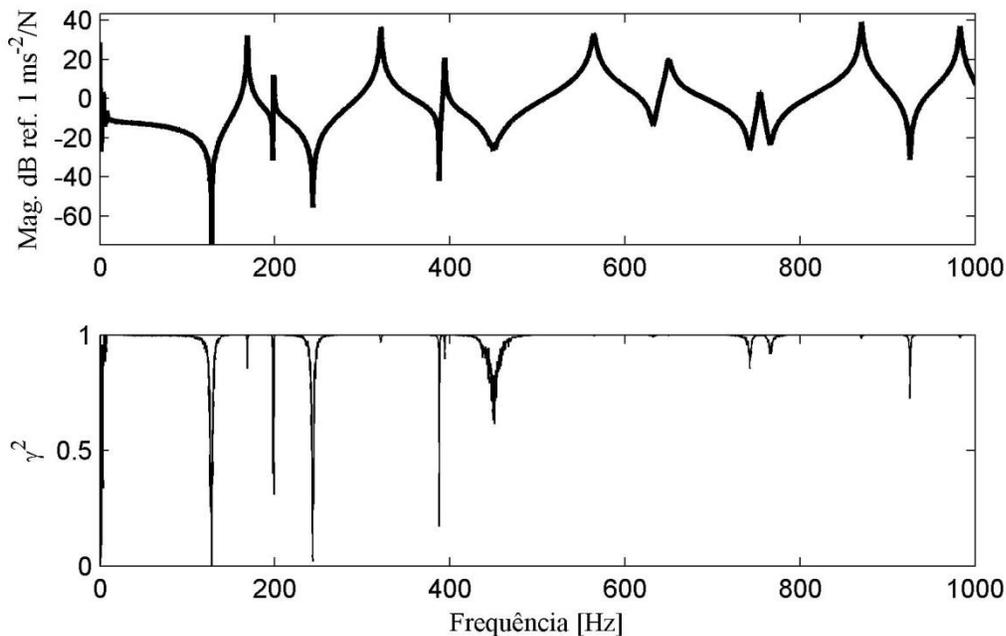
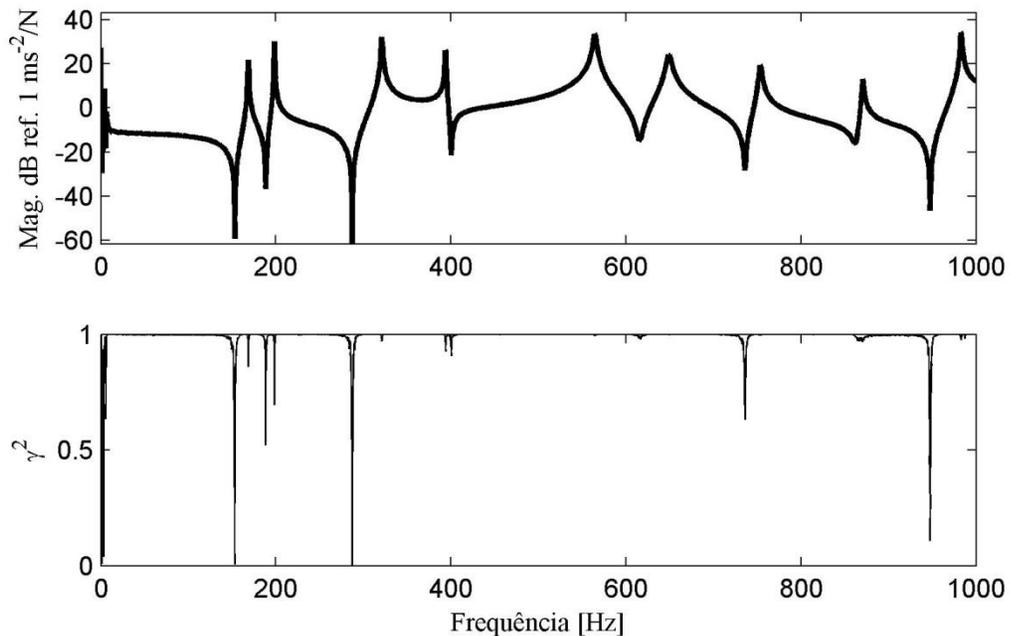


Figura 5.25 – Espectro de amplitude de Acelerância e a coerência do *drive point*.

A função de coerência tem valores diferentes da unidade somente nas regiões de ressonância e antirressonância na faixa de frequência de interesse de 0 a 1000 Hz. A Figura 5.5 representa a aceleração do ponto 56 (ponto genérico) da placa e a função de coerência.



**Figura 5.26 – Espectro de amplitude de Aceleração e a coerência do ponto 56 da placa e excitação ponto 41**

As acelerações estimadas foram convertidas para receptâncias pela divisão por  $-\omega^2$ , onde  $\omega$  é a frequência angular da excitação.

A análise modal híbrida foi realizada para a estimativa das receptâncias na direção  $x$  e  $y$  da placa, visto que as receptâncias foram medidas na direção  $z$ . Os parâmetros utilizados na simulação em elementos finitos no ANSYS® para extração dos modos tridimensionais estão descritos na Tabela 5.3. A Figura 5.27 ilustra o modelo gerado no ANSYS®. Os nove primeiros modos elásticos da placa com recorte podem ser observados no Apêndice C.

**Tabela 5.3 – Parâmetros utilizados na simulação por elementos finitos ANSYS placa com recorte**

---

**Pré-processamento**

---

*Tipo do elemento:*

SOLID186 20 nós; 3 GDL por nó – translação  $x$ ,  $y$  e  $z$

*Propriedades do Material:*

Linear elástico Isotrópico;  $E = 73$  GPa;  $\nu = 0,33$ ;  $\rho = 2700$  kg/m<sup>3</sup>.

*Modelo geométrico:*

Volume com dimensões  $0,400 \times 0,500 \times 0,0095$

*Definição da Malha:*

12353 nós, 1700 elementos; 1 elemento na espessura

---

**Solução**

---

*Tipo de análise:*

Análise Modal; Análise dos 31 primeiros modos; Modos normalizados pela massa;

Algoritmo de extração dos modos: Block Lanczos.

*Restrições:*

Condição livre - livre.

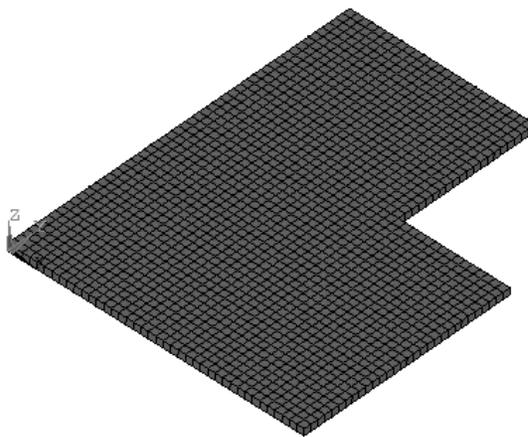
---

**Pós-processamento**

---

*Resultados:*

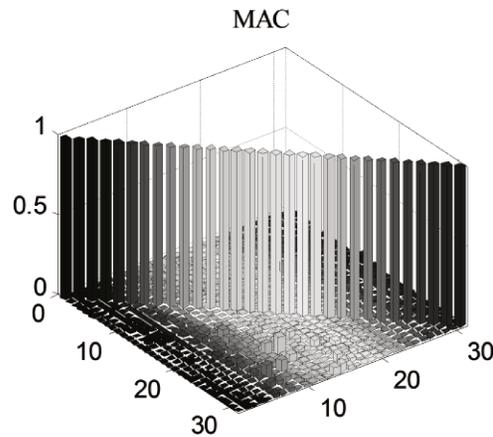
Frequências naturais, modos de tridimensionais de deslocamento e modos de deformação.



**Figura 5.27 – Modelo em elementos finitos da placa retangular com recorte realizado no ANSYS® 11.0**

As propriedades do material foram semelhantes às adotadas anteriormente para a placa retangular e mostradas na Tabela 5.2. Entretanto, o módulo de elasticidade foi adotado um pouco menor, para que as frequências naturais encontradas na simulação se aproximassem melhor as frequências naturais da placa. Foi escolhido inicialmente  $M = 31$  modos. Este número corresponde aos modos de baixa ordem até á frequência de  $f_M = 2873$  Hz, incluindo os seis (6)

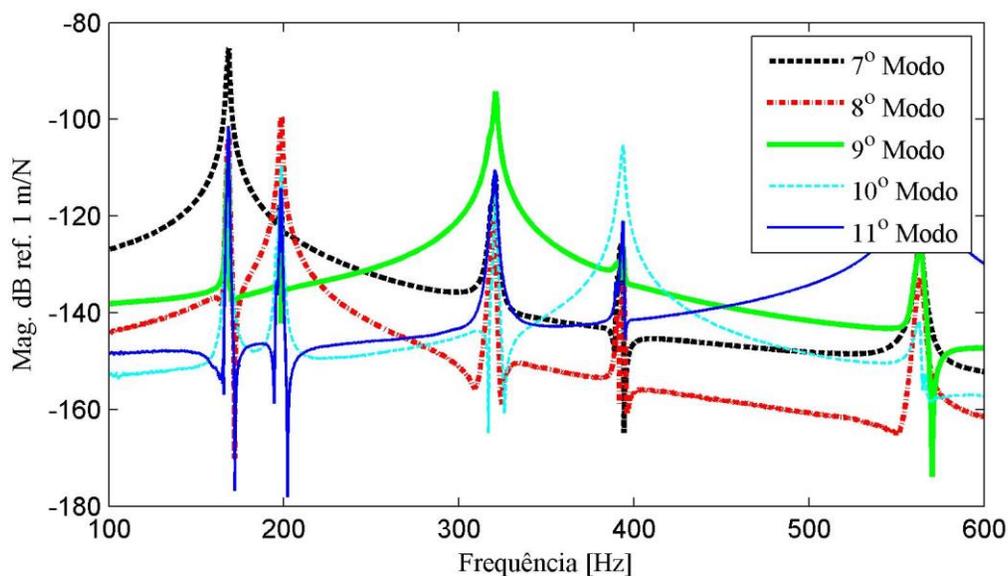
primeiros modos de corpo rígido. Assim, a faixa de frequência analisada se ajusta à  $f < f_{\max} < f_M$ . A frequência máxima foi definida como sendo  $f_{\max} = 1000$  Hz. A Figura 5.28 mostra a o MAC determinado analisando-se os 31 modos simulados.



**Figura 5.28 – MAC para os 31 modos tridimensionais simulados**

Os valores do MAC apresentados mostram que os modos formados pelos graus de liberdade, selecionados da simulação em elementos finitos, podem ser considerados como uma base ortogonal.

Os coeficientes  $\{C_{\text{est}}\}$  foram estimados utilizando a Equação (3.18) e desprezando-se os resíduos. Inicialmente, o vetor de resposta  $\{U_{\text{med}}\}$  foi considerado como sendo as receptâncias dos 87 pontos da superfície da placa. A Figura 5.29 mostra os espectros dos coeficientes generalizados estimados referentes aos cinco (5) primeiros modos elásticos. Os coeficientes para os modos de corpo rígido mostraram comportamento semelhante aos encontrados no caso anterior da Figura 5.8.



**Figura 5.29 - Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados dos 5 primeiros modos elástico.**

Os coeficientes estimados são independentes, ou seja, cada coeficiente tem um único pico dominante próximo à frequência do modo correspondente. Considerando a matriz modal  $[\Phi]$  constituída das componentes modais  $\phi_{jr}$  na direção  $z$  e os coeficientes generalizados  $\{C_{est}\}$  estimados, as respostas na direção  $z$  puderam ser estimadas pela Equação (3.19).

A comparação entre: as receptâncias simuladas pela superposição modal da Equação (2.97); as medidas; e as ajustadas pela HMA, também foi realizada para o caso da placa com recorte. Os parâmetros necessários na Equação (2.97) foram os simulados no ANSYS® 11.0. As frequências naturais  $\omega_r$  encontradas na simulação para uma faixa de frequência de 0 a 1000 Hz foram: 168,87 - 198,73 - 321,82 - 393,55 - 565,80 - 647,59 - 750,93 - 871,60 e 983,11 Hz. As frequências maiores até o 31º também foram utilizadas na superposição. O fator de amortecimento modal  $\zeta_r$  utilizado para todos os modos foi de 0,001. Este valor é um valor médio dos fatores encontrados experimentalmente. A Figura 5.30 mostra as receptâncias medidas, ajustada pela HMA e obtida por superposição para o *drive point*. Neste caso, os modos de corpo rígido foram considerados na superposição e HMA. Houve um bom ajuste das curvas obtidas pela HMA e superposição com a medida.

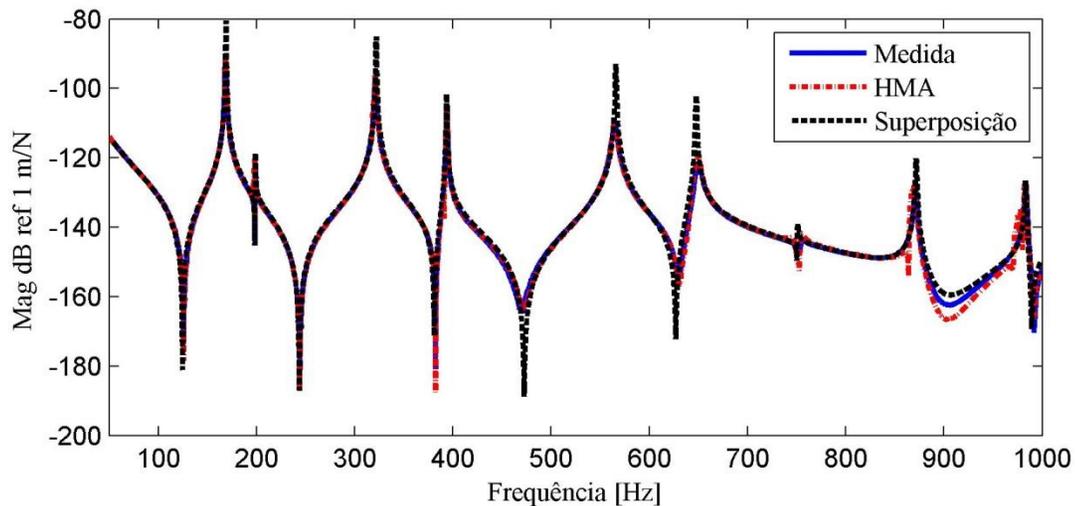


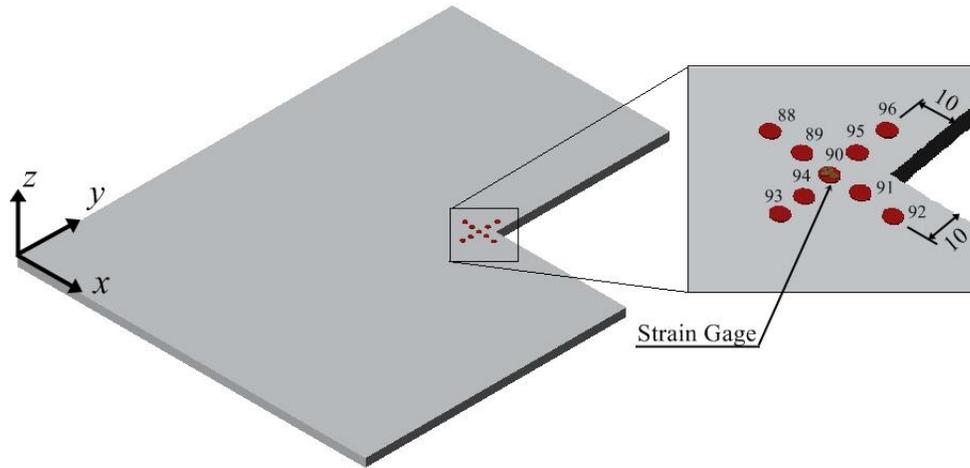
Figura 5.30 – Comparação entre a receptância *drive point* medida, ajustada pela HMA e por superposição

Na Figura 5.30 pode se observar pequenas diferenças nos valores de pico na superposição. Essa diferença é causada pelo fato da utilização de um fator de amortecimento constante para todos os modos e um pouco menor do que o necessário.

As receptâncias nas direções  $x$  e  $y$  foram estimadas a partir das matrizes modais de deslocamento nessas direções, também utilizando a Equação (3.19). Essas receptâncias foram utilizadas para estimação do tensor de deformação em um ponto próximo ao recorte da placa.

#### 5.4.2 Cálculo das FRF de deformação utilizando diferenças finitas

O tensor de deformação em termos de FRF foi calculado em ponto escolhido próximo ao recorte da placa. Esta região da placa apresenta maior concentração de tensão e altos níveis de deformação. Desta forma, a mesma pôde ser medida com os extensômetros convencionais utilizados. O ponto onde a deformação foi medida é denominado ponto de validação. Para o cálculo do tensor de deformação pelo método de diferenças finitas é necessário considerar pontos distribuídos ao redor do ponto de validação. A disposição desses pontos é ilustrada na Figura 5.31. Inicialmente, foi considerada uma distância uniforme entre esses pontos de  $h = 10$  mm.



**Figura 5.31 – Pontos simetricamente dispostos ao redor do ponto de análise necessários para a estimação do tensor de deformação utilizando MDF**

Os pontos de 88 ao 96, ilustrados na Figura 5.31, não fazem parte da malha de medição. As receptâncias tridimensionais destes pontos foram estimadas pela HMA, a partir do conhecimento das componentes modais destes pontos. A disposição destes pontos permite o uso do método de diferenças finitas centrais. Sendo o tensor de deformação definido pela Equação (2.6), as Equações de diferenças finitas, rearranjadas a partir da Equação (2.24), utilizadas para o cálculo da deformação estão descritas abaixo:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &\approx \frac{-u_{92} + 8u_{91} - 8u_{89} + u_{88}}{12h_x} \\
 \varepsilon_y &\approx \frac{-v_{96} + 8v_{95} - 8v_{94} + v_{93}}{12h_y} \\
 \gamma_{xy} &\approx \frac{-v_{92} + vu_{91} - vu_{89} + v_{88}}{12h_x} + \frac{-u_{96} + 8u_{95} - 8u_{94} + u_{93}}{12h_y}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

sendo  $u$  e  $v$  considerados neste caso como as receptâncias na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $h_x$  e  $h_y = h = 10$  mm.

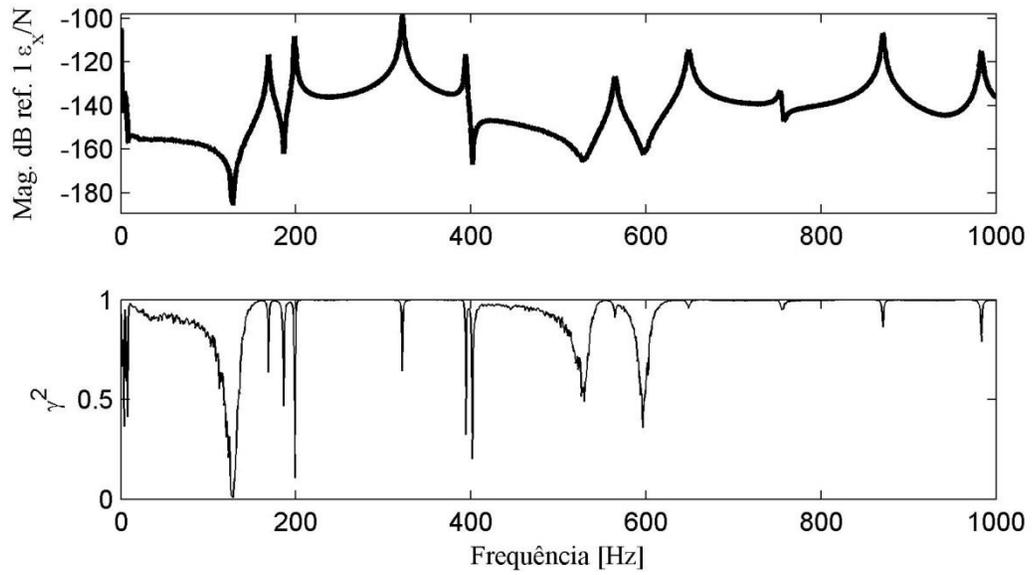
### 5.4.3 Medição da deformação utilizando extensômetro tipo roseta

As deformações foram medidas através de um extensômetro tipo roseta com intuito de validar os métodos utilizados para estimação da mesma. A validação foi feita em um ponto escolhido próximo à região de concentração de tensão da placa. Níveis relativamente altos de deformação são esperados nessa região. Isso permitiu que a FRF de deformação medida pudesse ser estimada com uma função de coerência aceitável na faixa de frequência analisada. O extensômetro, cujas especificações técnicas estão descritas na Tabela 5.4, foi colado no ponto 90, indicado na Figura 5.31, seguindo os procedimentos padrões de colagem.

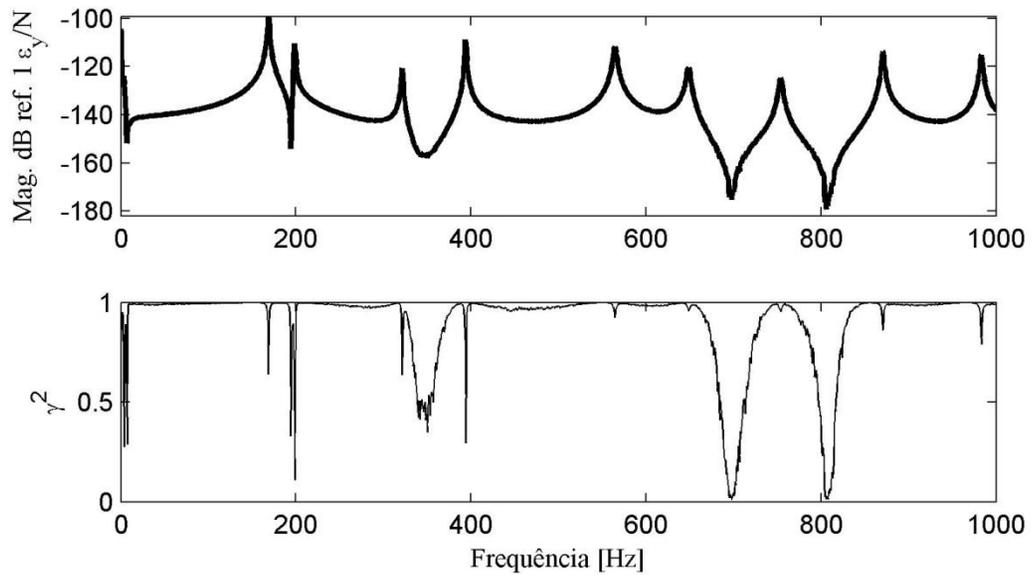
**Tabela 5.4 – Especificação técnica do extensômetro tipo roseta utilizado**

<b>Modelo:</b>	KFG-1-120-D17-11
<b>Marca:</b>	KYOWA®
<b>Configuração tridirecional</b>	0°/90°/45°
<b>Comprimento:</b>	1 mm
<b>Resistência elétrica:</b>	120 Ω
<b>Fator do extensômetro:</b>	2,10

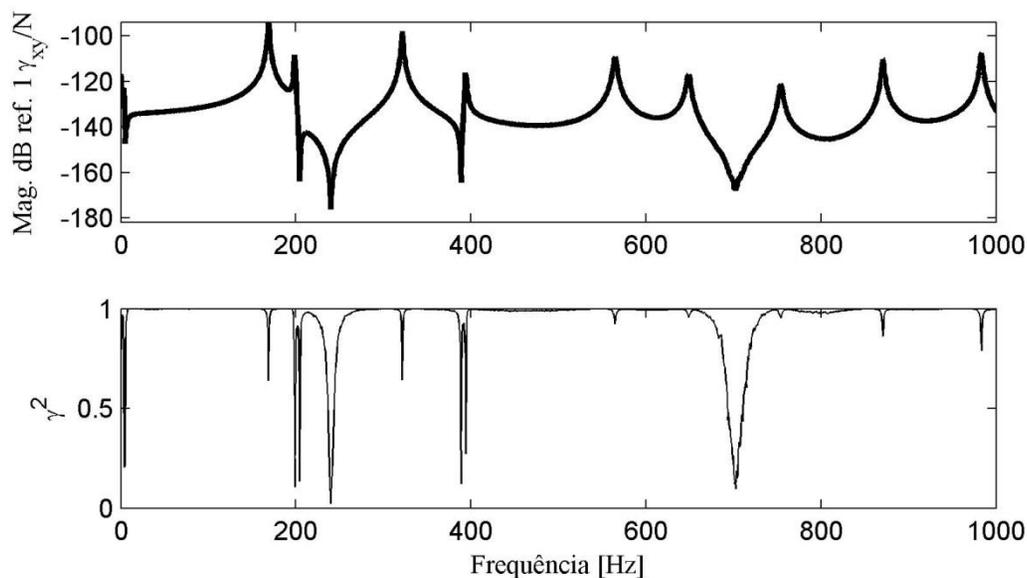
A transformação de coordenadas da Equação (2.40) foi utilizada para a determinação das deformações  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ . A FRF de deformação  $\epsilon_x$  medida pode ser vista na Figura 5.32. Na Figura 5.33 está a FRF de deformação  $\epsilon_y$  e na Figura 5.34 está a FRF de deformação  $\gamma_{xy}$ .



**Figura 5.32 – FRF de deformação  $\epsilon_x$  medida e função de coerência**



**Figura 5.33 – FRF de deformação  $\epsilon_y$  medida e função de coerência**



**Figura 5.34 – FRF de deformação  $\gamma_{xy}$  medida e função de coerência**

Na análise das funções de coerências das FRF de deformação medidas, estas apresentam valores menores que a unidade não somente nas ressonâncias e antirressonâncias, mas também em faixas de frequências maiores. Nota-se isso principalmente na Figura 5.32, em frequências menores que 150 Hz, e na Figura 5.33, na faixa de frequência entre 700 e 800 Hz. A melhor coerência é encontrada para a deformação cisalhante da Figura 5.34. Baixos valores na função de coerência estão associados aos pequenos valores de deformações e baixa sensibilidade de medição do extensômetro utilizado. Nestas regiões onde a função de coerência tem baixos valores, a comparação entre a deformação medida e estimada será comprometida, como será visto posteriormente. A questão de uma melhor função de coerência para a deformação cisalhante será discutida juntamente com a análise dos modos de deformação.

#### **5.4.4 Comparação entre a FRF de deformação medida e estimada**

Na Figura 5.35 estão as FRF medida e estimada da deformação na direção  $x$ . Há uma boa aproximação entre a deformação medida e estimada. Entretanto, a deformação estimada é um pouco maior do que a medida em praticamente toda a faixa espectral.

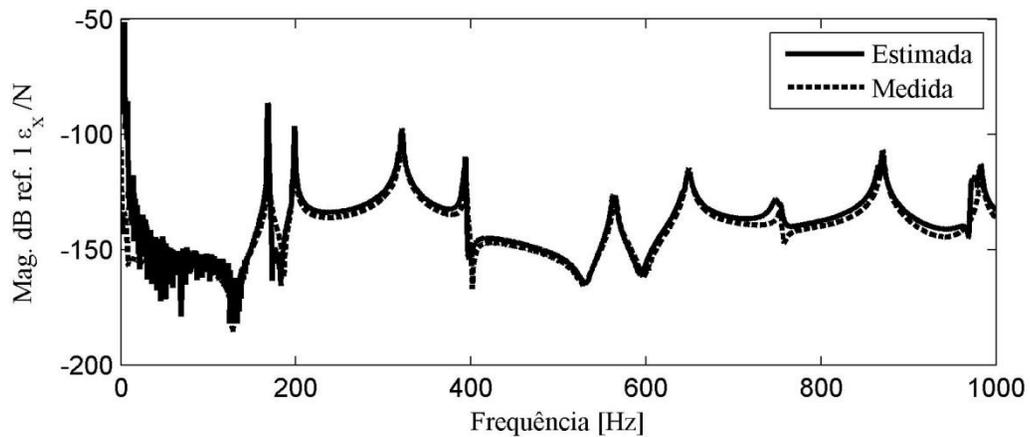


Figura 5.35 – Comparação entre a FRF de deformação  $\varepsilon_x$  medida e estimada

Nas frequências menores que 150 Hz a deformação estimada é afetada por uma oscilação, a qual pode estar associada a erros numéricos na estimação dos coeficientes generalizados de baixa ordem. Em relação à deformação medida, a mesma apresenta baixa coerência exatamente nessa faixa de frequência, de 0 a 150 Hz, como visto na Figura 5.32. As FRF medida e estimada para a deformação na direção  $y$  estão indicadas na Figura 5.36.

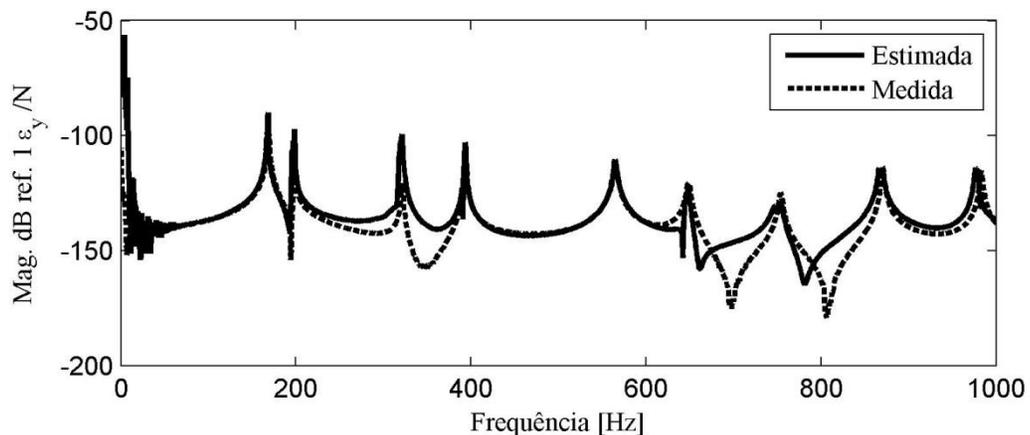
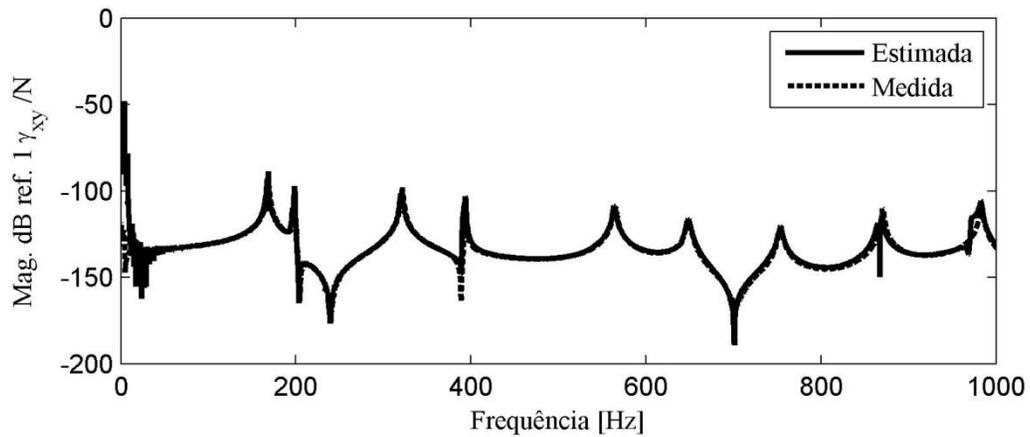


Figura 5.36 - Comparação entre a FRF de deformação  $\varepsilon_y$  medida e estimada

Não há uma boa aproximação nas regiões de antirressonância nos espectros apresentados na Figura 5.36. Nessas regiões também não houve uma boa coerência da deformação medida, conforme mostrado na Figura 5.33. Na Figura 5.37 são ilustradas as FRF de deformação de cisalhamento medida e estimada.



**Figura 5.37 - Comparação entre a FRF de deformação  $\gamma_{xy}$  medida e estimada**

A FRF de deformação cisalhante medida foi que apresentou melhor função de coerência quando comparada com as deformações normais. Na comparação entre a deformação estimada e medida da Figura 5.37 houve uma boa aproximação das curvas em praticamente toda a faixa espectral.

Caso os modos de corpo rígido sejam desconsiderados na análise modal híbrida, a deformação terá um comportamento diferente em frequências menores que a primeira frequência natural. Na Figura 5.38 é possível se observar erros de aproximação entre a deformação estimada e medida em baixas frequências.

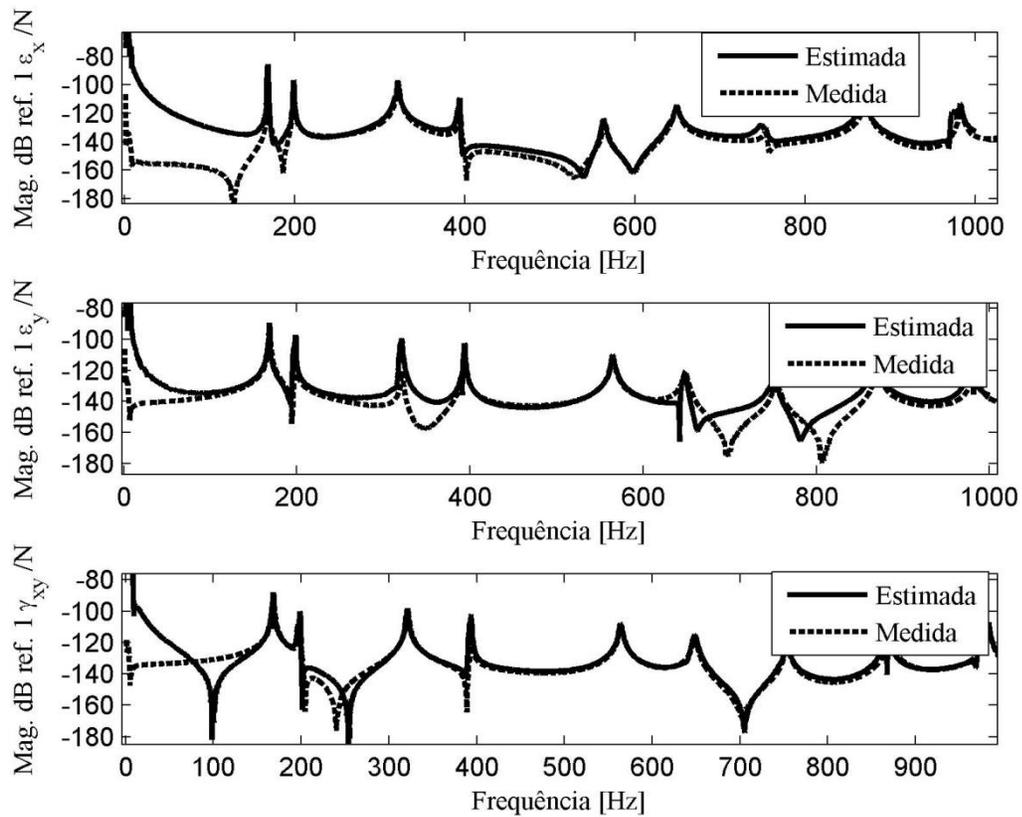


Figura 5.38 – Erros na estimação da deformação em baixa frequência quando não são considerados os modos de corpo rígido na HMA

#### 5.4.5 Comparação entre a FRF de deformação medida e calculada por superposição

Da mesma forma que a superposição modal foi utilizada para determinação das FRF de deslocamento, a Equação (2.133) pode ser utilizada para a determinação das FRF de deformação. Utilizando os parâmetros simulados para as frequências naturais, componentes modais de deformação e deslocamento, fator de amortecimento modal  $\zeta_r = 0.001$ , e considerando a excitação no ponto 40, foi possível determinar as FRF de deformação  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ . A Figura 5.39 mostra a comparação entre as FRF determinadas por superposição e medidas.

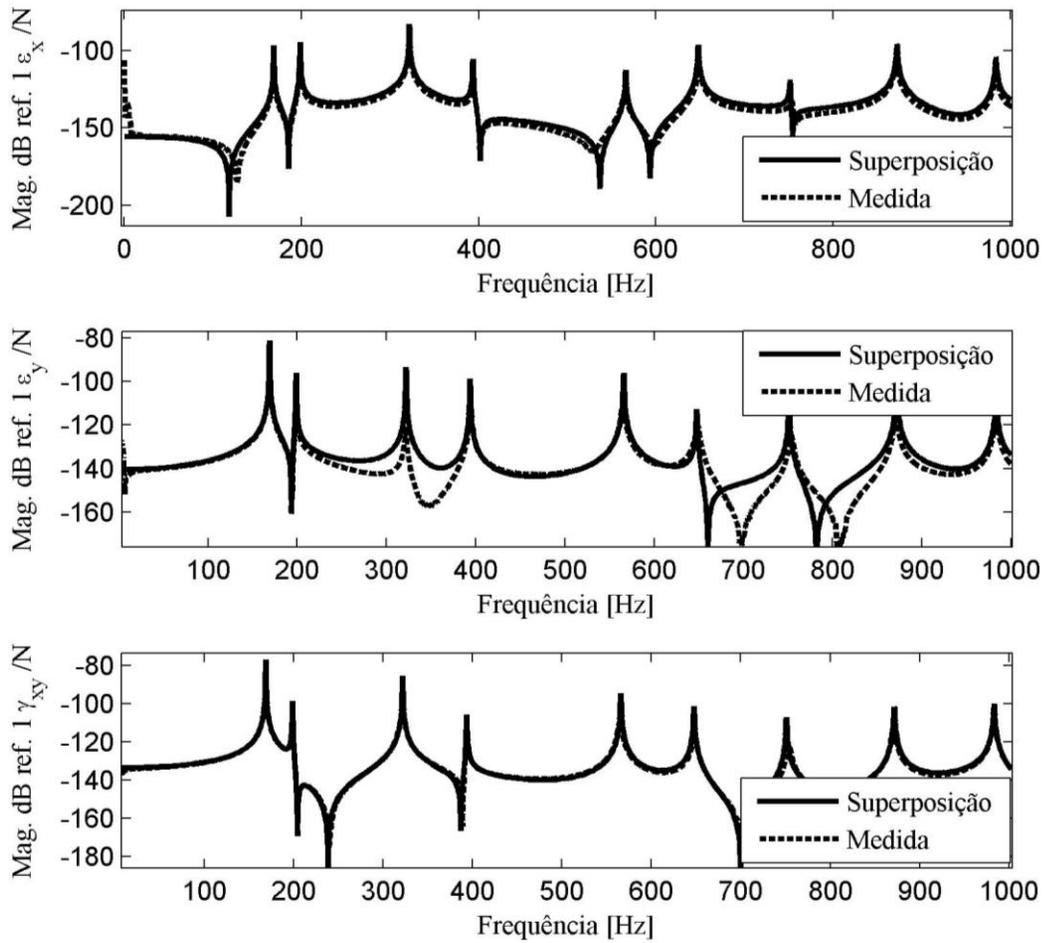


Figura 5.39 – Comparação entre as deformações determinadas por superposição e medidas

O ajuste entre as curvas da Figura 5.39 é semelhante aos ajustes encontrados para as deformações estimadas por HMA, ilustrados nas Figura 5.35, Figura 5.36 e Figura 5.37. O que ocorre principalmente nas deformações  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ , principalmente nas antirressonâncias, pode então estar associado aos erros de medição da deformação nessas frequências.

#### 5.4.6 Estimação da deformação considerando menos modos na HMA

Os resultados obtidos na seção anterior foram encontrados utilizando um número de modos  $M = 31$ . Como a faixa de frequência escolhida para análise de deformação foi de 0 a 1000 Hz, uma comparação entre a deformação estimada e medida com  $M = 16$ , incluindo os modos de corpo rígido, e  $f_M = 1060$  Hz foi considerada. Seguindo os procedimentos anteriores para a

estimação dos coeficientes generalizados, das receptâncias tridimensionais e as deformações, a comparação entre as deformações estimadas e medidas com  $M = 16$  estão ilustradas na Figura 5.40. A comparação mostra resultados semelhantes aos encontrados nos casos anteriores. Isso significa que a escolha de um número de modos  $M$  que se adeque à faixa de frequência avaliada pode ser suficiente para estimação da deformação.

Um número menor de  $M$  implica em perda de informações nas altas frequências compreendidas na faixa de interesse. No entanto, caso haja necessidade de melhorar o ajuste em baixas frequências, um número  $M$  menor pode ser utilizado, conforme Sehlsted (2001). No caso da deformação estimada  $\varepsilon_x$ , a qual apresentou erros de aproximação abaixo da frequência de 150 Hz, conforme pode ser visto na Figura 5.35, considerando  $M = 16$ , há uma pequena melhora no ajuste. Considerando  $M = 10$  e  $f_M = 393$  Hz, a deformação estimada pela HMA se aproxima melhor à medida, conforme pode ser visto na Figura 5.41. O erro de aproximação apresentado é menor do que o visto na Figura 5.35. No entanto, ocorrem perdas de informação em frequências maiores que 400 Hz, visto que apenas modos abaixo dessa frequência participam da aproximação.

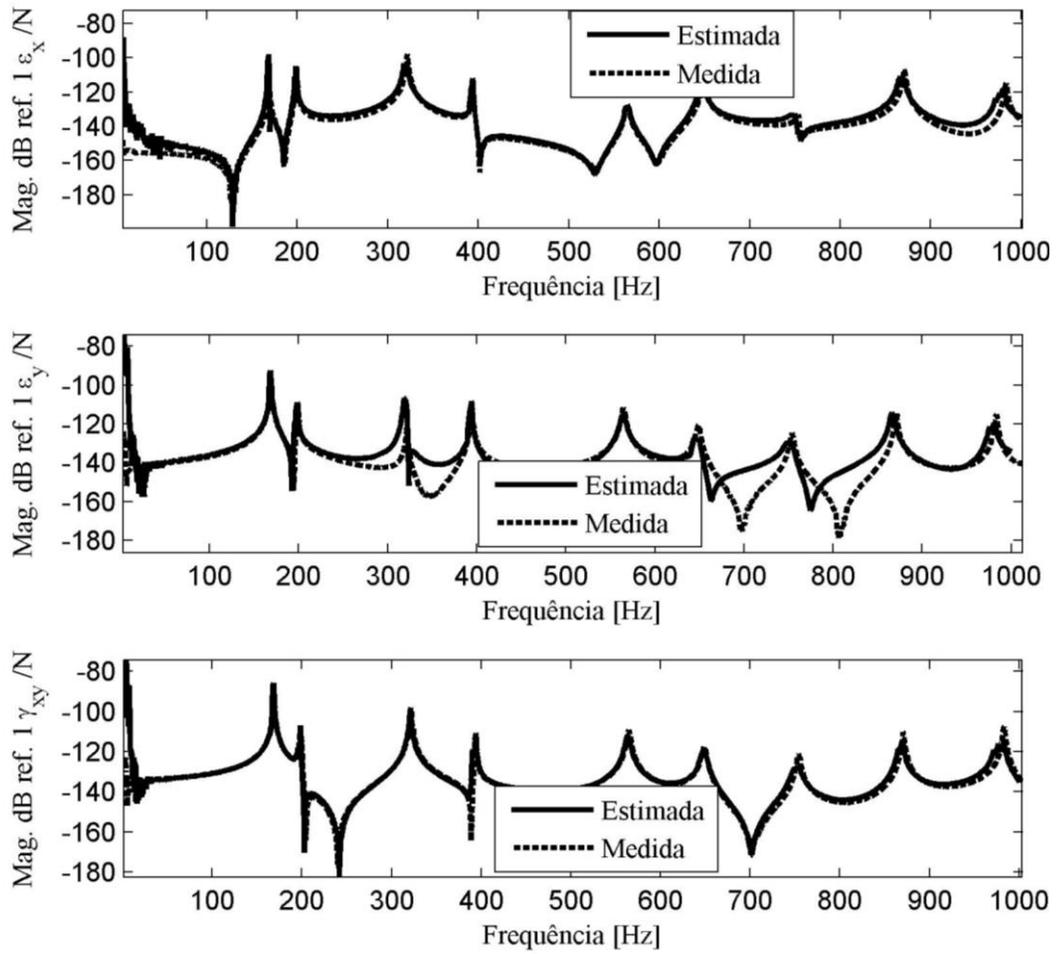


Figura 5.40 – Comparação entre as deformações medida e estimada por HMA considerando apenas 16 modos

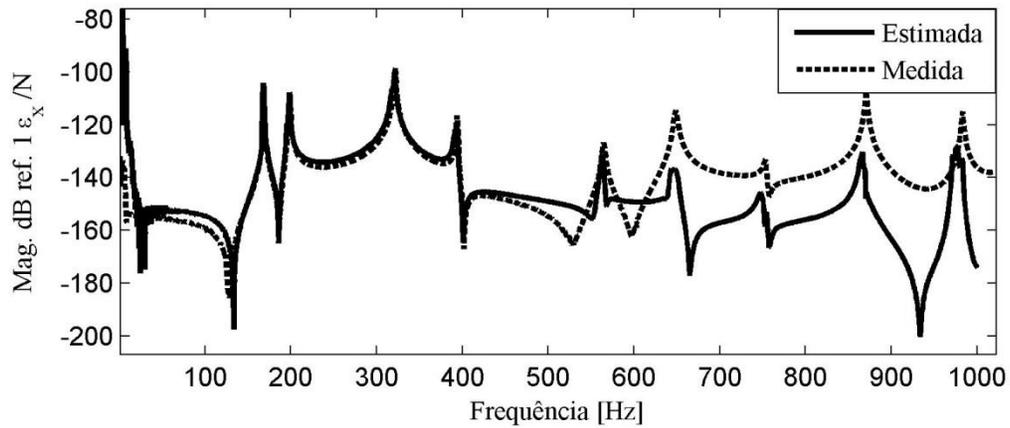
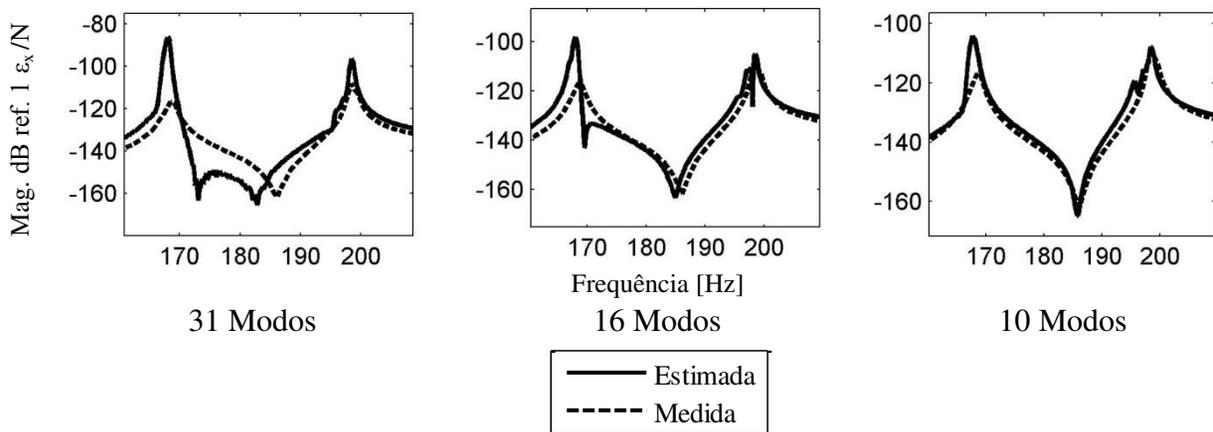


Figura 5.41 – Melhora no ajuste na  $\epsilon_x$  em baixa frequência e perda de informação em altas frequências utilizando apenas  $M = 10$  modos e  $f_M = 393$  Hz

Em termos de amplitude, há uma melhora significativa na aproximação da FRF de deformação estimada com a medida nos modos de baixa ordem quando é considerado um número  $M$  menor na HMA. No geral, o que apresentou maiores problemas na estimação da deformação em baixas frequências foi a deformação  $\varepsilon_x$ . Desta forma, as aproximações das deformações  $\varepsilon_x$  estão ilustradas na Figura 5.42 para os três números de modos  $M$  avaliados. Quanto menor o número  $M$ , melhor a aproximação em baixa frequência da deformação estimada com a medida. Nas deformações  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  também houve melhora na aproximação.



**Figura 5.42 – Aproximação em termos de amplitude da deformação  $\varepsilon_x$  estimada com a medida nas duas primeiras frequências naturais da placa.**

Como o número de pontos permanece o mesmo enquanto o número de modos diminui, a aproximação no sentido de mínimos quadrados também melhora o ajuste das curvas, atenuando as curvas e eliminando as instabilidades. Isso pode ser observado na Figura 5.42, no comportamento da FRF estimada (linha cheia) onde para 31 modos verifica-se um ajuste ruim na região entre 170 e 180 Hz, o qual não é observado nos casos onde foram utilizados 16 e 10 modos. Há ainda uma diferença em termos de amplitude na primeira frequência natural estimada e medida para o caso de  $M = 10$  modos. É importante salientar que a FRF de deformação medida na direção  $x$  apresentou coerência ruim nesta faixa de frequência, como observado na Figura 5.32. As receptâncias e as FRF medidas foram estimadas utilizando o estimador  $H_1$ , o qual pode apresentar problemas nas amplitudes dos picos de ressonância, mas mesmo utilizando o estimador  $H_2$ , não houve melhora nessas aproximações.

Na Figura 5.43 está a comparação entre as FRF de deformações equivalentes calculadas pela Equação (2.22) e para diferentes números de modos  $M$ . No geral, há um bom ajuste das deformações equivalentes estimadas com a medida e estão de acordo com as limitações dos casos já avaliados. Em termos de amplitude, considerando  $M= 10$  modos, houve uma boa aproximação tanto no primeiro quanto no segundo pico de ressonância.

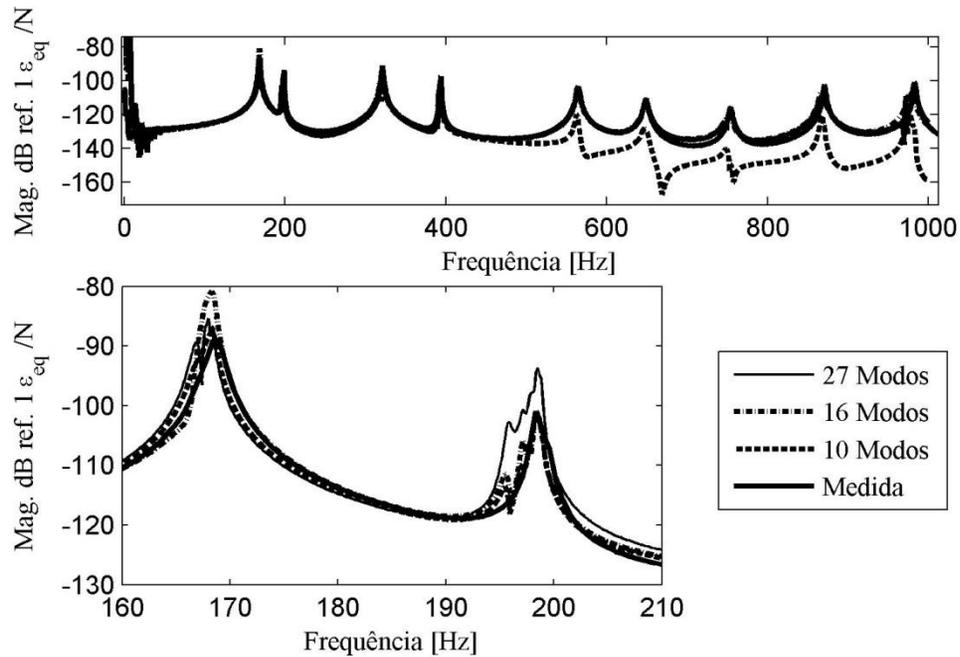


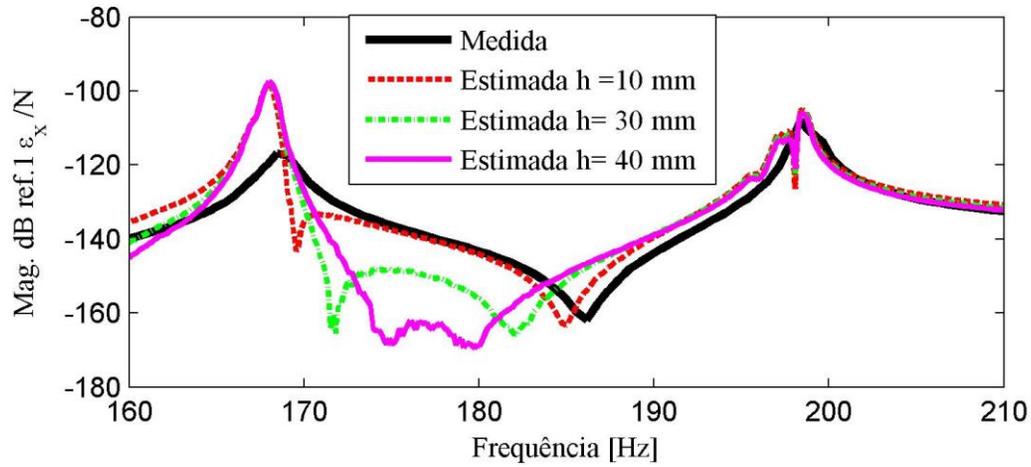
Figura 5.43 – Aproximação entre a FRF de deformação equivalente estimada e medida.

Uma melhor aproximação da deformação, estimada pelo método de diferenças finitas, em baixas frequências pode também ser obtida considerando uma maior distância  $h$  entre os pontos. Na próxima seção será feita uma avaliação da aproximação utilizando três diferentes distâncias  $h$ .

#### 5.4.7 Estimação da deformação considerando diferentes distâncias $h$

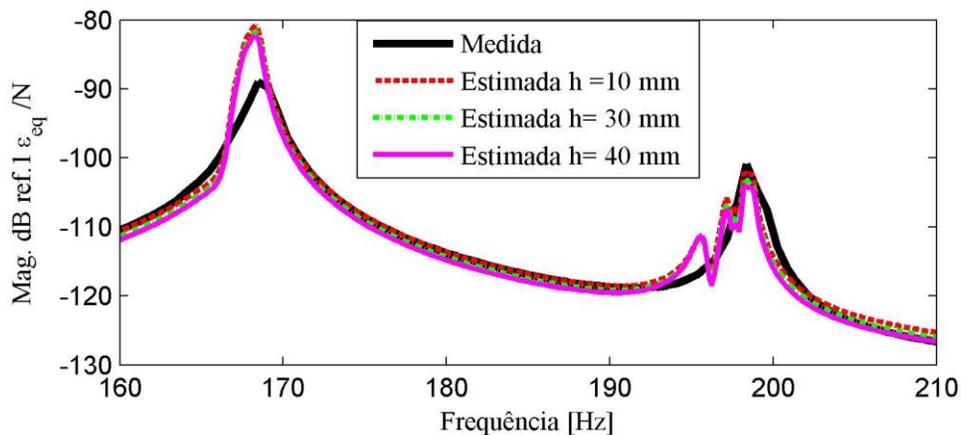
Nos casos anteriores, a deformação foi calculada considerando a distância entre os pontos  $h = 10$  mm. Nesta seção serão vistas as implicações da utilização de distâncias maiores. Serão utilizadas as distâncias de 30 e 40 mm entre os pontos. Foi utilizado o caso intermediário de  $M =$

16 modos para estimação das receptâncias e os 87 pontos de medição. Na Figura 5.44 está a comparação para a deformação  $\varepsilon_x$ .



**Figura 5.44 – Comparação entre a deformação  $\varepsilon_x$  medida e estimada utilizando diferentes distâncias  $h$  no MDF**

No caso avaliado não houve mudança no pico de amplitude de ressonância para as três diferentes distâncias  $h$ . Com a distância  $h = 10$  mm, houve uma melhor aproximação entre a deformação  $\varepsilon_x$  estimada e medida nas regiões diferentes das ressonâncias. Para o caso da deformação equivalente  $\varepsilon_{eq}$ , a comparação está mostrada na Figura 5.45.



**Figura 5.45 – Comparação entre a deformação  $\varepsilon_{eq}$  medida e estimada utilizando diferentes distâncias  $h$  no MDF**

### 5.4.8 Estimação da deformação considerando menos pontos na HMA

A estimativa de deformação foi avaliada utilizando um menor número de pontos de medição. Anteriormente foram utilizados 87 pontos de medição para a estimativa dos coeficientes generalizados. Serão utilizados apenas 40 e 22 pontos de medição aleatoriamente escolhidos para se estimar a deformação. No primeiro caso avaliou-se a aproximação utilizando  $M = 31$  e no último  $M = 16$ . A Figura 5.46 mostra os 40 e 22 pontos de medições selecionados aleatoriamente sobre a superfície da placa.

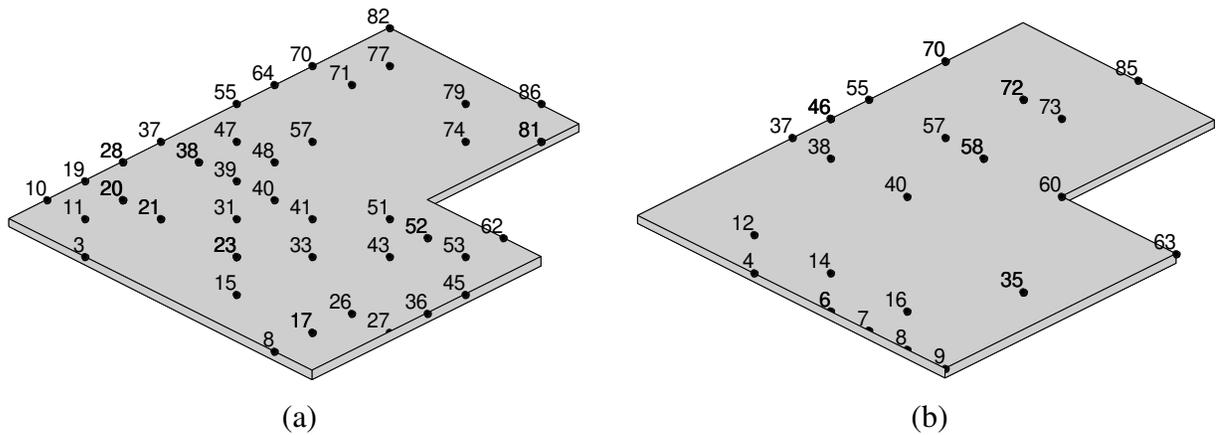


Figura 5.46 – (a) 40 pontos de medição (b) 22 pontos de medição selecionados aleatoriamente para estimação dos coeficientes generalizados

Na Figura 5.47 está o MAC calculado para os modos utilizando apenas os 40 pontos selecionados.

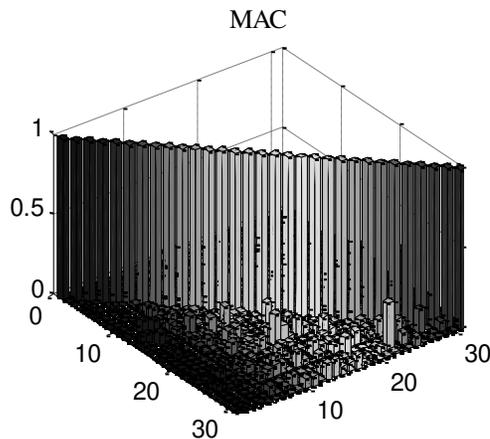
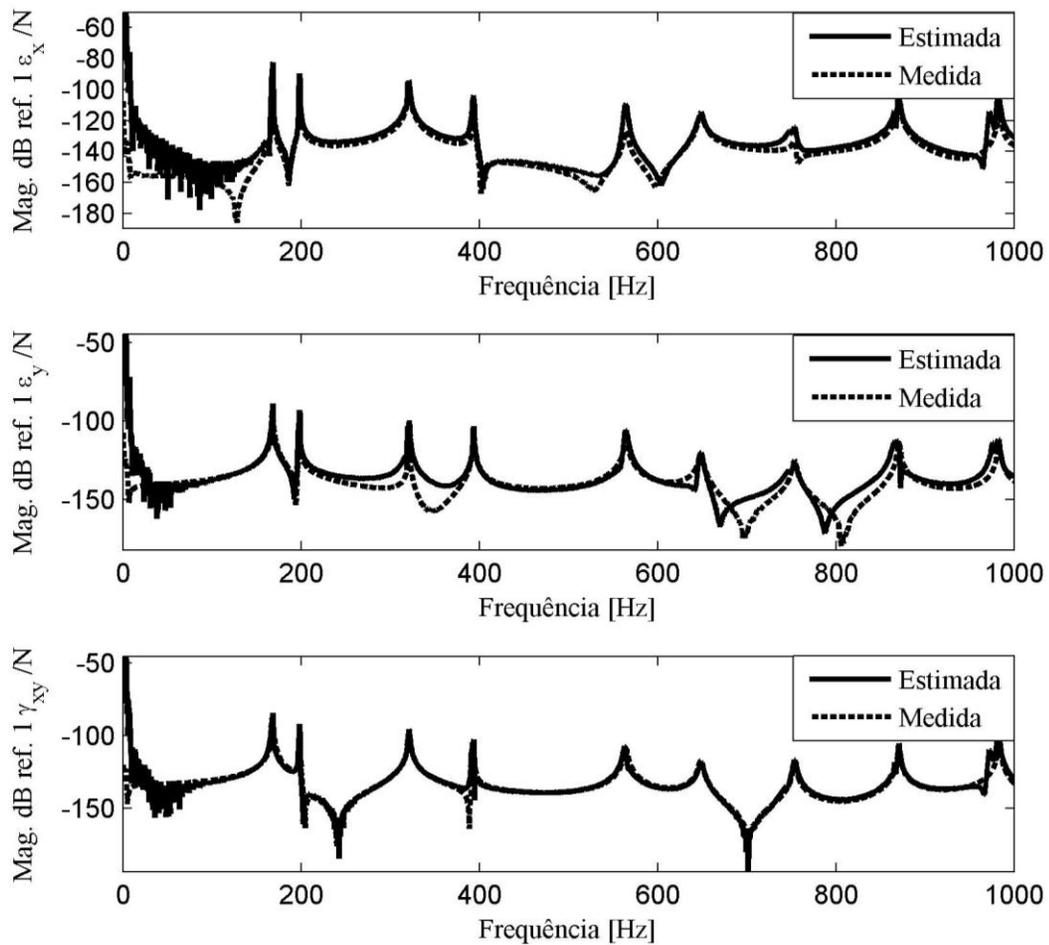


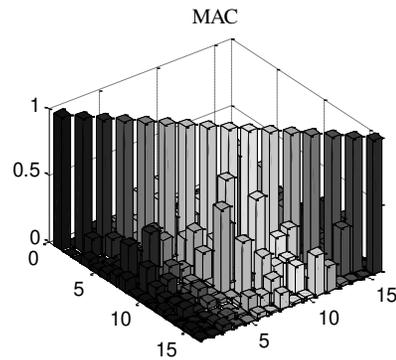
Figura 5.47 – MAC entre os modos tridimensionais referentes aos 40 pontos

O MAC da Figura 5.47 apresenta valores diferentes de zero em grande parte das comparações. Os coeficientes generalizados mostraram a mesma característica espectral ilustrada na Figura 5.29. Pode-se dizer que a aproximação da deformação medida com a estimada mostrou os mesmos resultados dos encontrados anteriormente, conforme mostra a Figura 5.48.



**Figura 5.48 – Comparação entre as FRF de deformação medida e estimada considerando 40 pontos e 31 modos**

A Figura 5.49 apresenta o MAC entre os modos avaliados para os 22 pontos selecionados. O MAC começa apresentar valores muito diferentes de zero fora da diagonal principal.



**Figura 5.49 - MAC entre os modos tridimensionais referentes aos 22 pontos**

Na Figura 5.50 estão as FRF de deformação estimadas utilizando os 22 pontos e 16 modos. Na deformação  $\varepsilon_x$  não houve o ajuste na faixa de frequência anterior à primeira frequência natural, como visto na Figura 5.40, onde fora também utilizado  $M = 16$ . No caso da deformação  $\varepsilon_y$ , não houve um bom ajuste das curvas para frequência acima de 300 Hz. Problemas no ajuste das curvas podem ser relacionados com os problemas encontrados no MAC da Figura 5.49 e também, os pontos escolhidos podem não ser suficientes para amostragem e ajustes de alguns modos compreendidos dentro da faixa de análise.

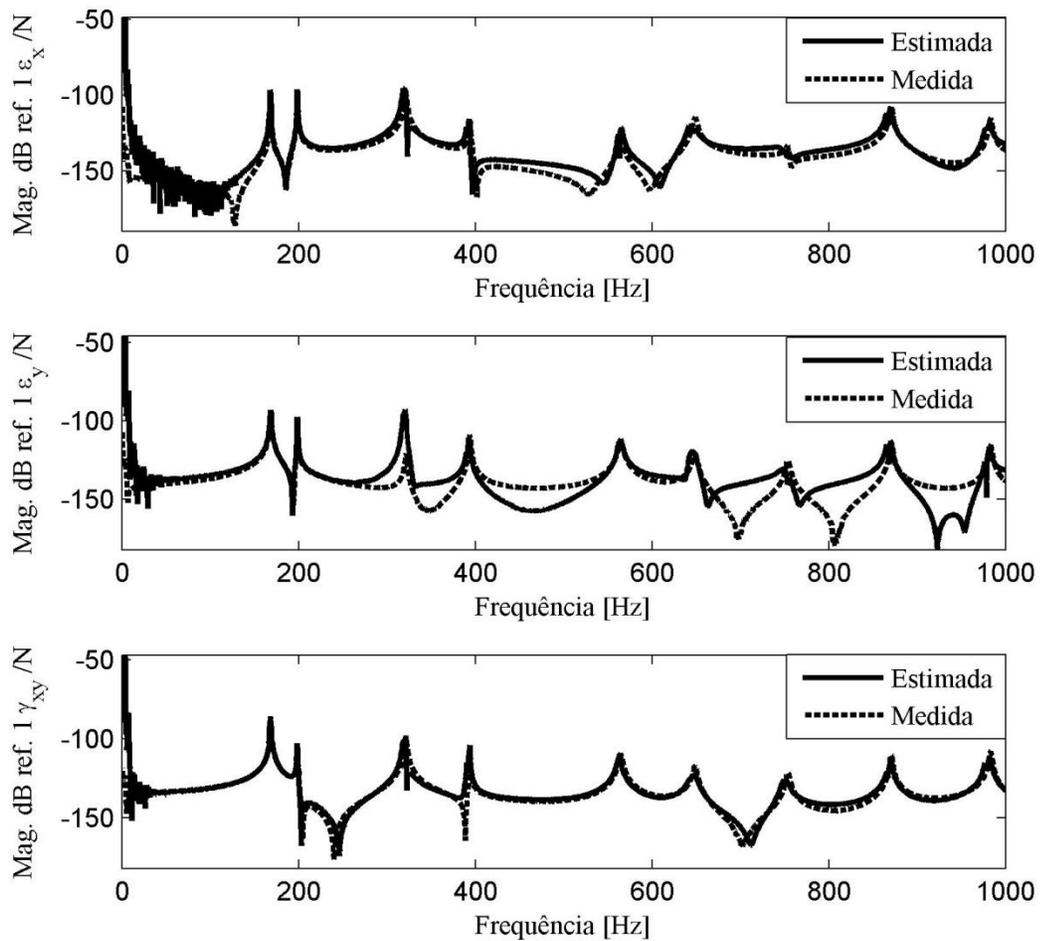
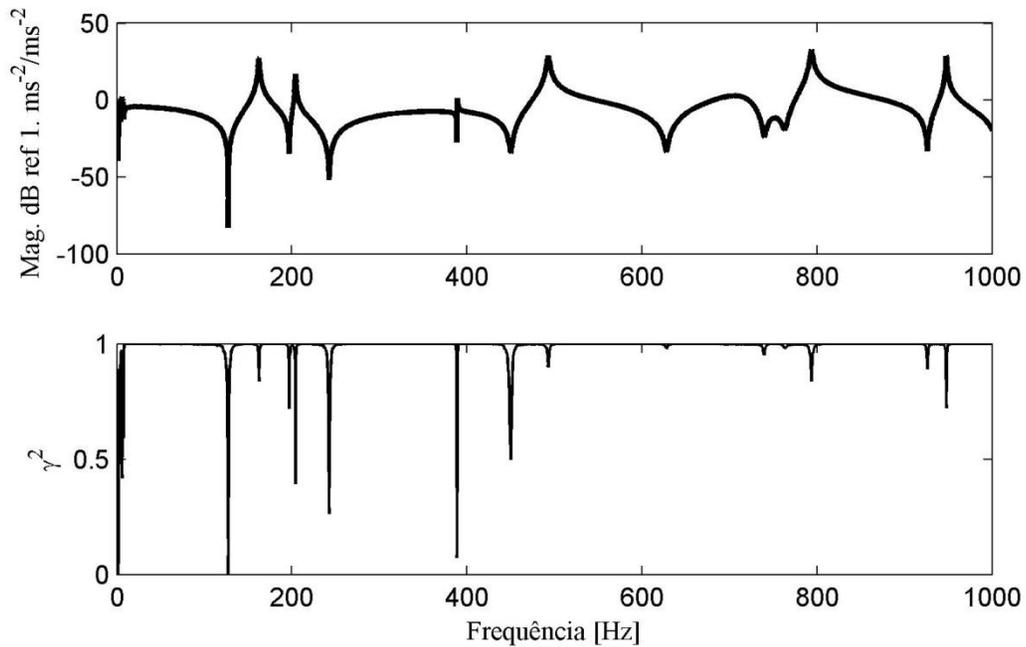


Figura 5.50 - Comparação entre as FRF de deformação medida e estimada considerando 22 pontos e 16 modos

#### 5.4.9 Comparação entre a Transmissibilidade de deformação medida e estimada

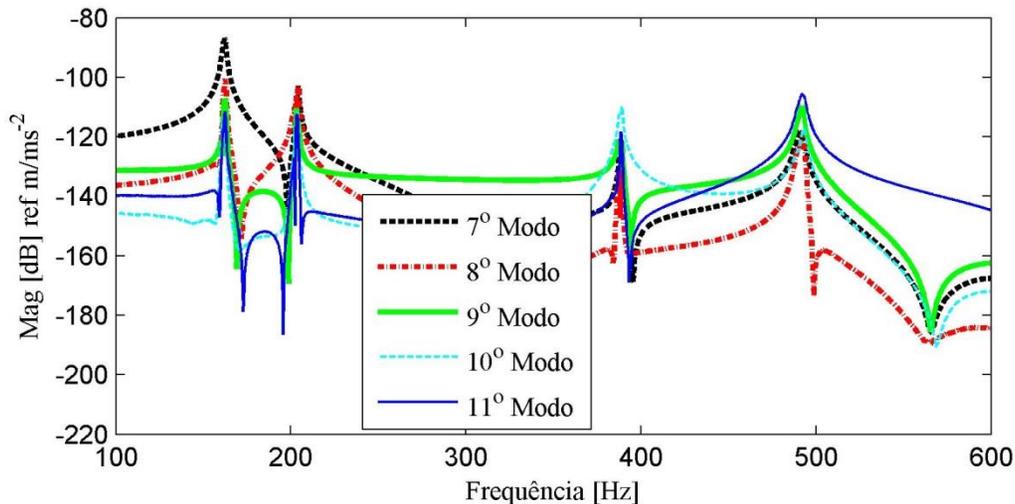
As transmissibilidades foram estimadas utilizando o estimador da Equação (2.118). Os parâmetros do processamento dos sinais são os mesmos utilizados anteriormente na estimação das FRF e descritos na Tabela 5.1. O ponto de referência  $j$  escolhido inicialmente para as comparações foi um ponto localizado nas coordenadas  $0,025 \times 0,025 \times 0,0095$  mm ( $x,y,z$ ). Este ponto é um ponto de amplitudes relativamente altas em praticamente todo o conteúdo espectral avaliado. A Figura 5.51 mostra o espectro de amplitude de transmissibilidade e coerência para o ponto 40 da malha de medição representada na Figura 5.24.



**Figura 5.51 – Espectro de amplitude de Transmissibilidade e a coerência do ponto 40.**

As Transmissibilidades de aceleração foram transformadas para transmissibilidades de deslocamento pela divisão por  $-\omega^2$ , onde  $\omega$  é a frequência angular da excitação. A análise modal híbrida foi realizada para a estimativa das transmissibilidades na direção  $x$  e  $y$  da placa, visto que as transmissibilidades foram medidas na direção  $z$ . Os modos naturais utilizados na HMA foram os simulados anteriormente.

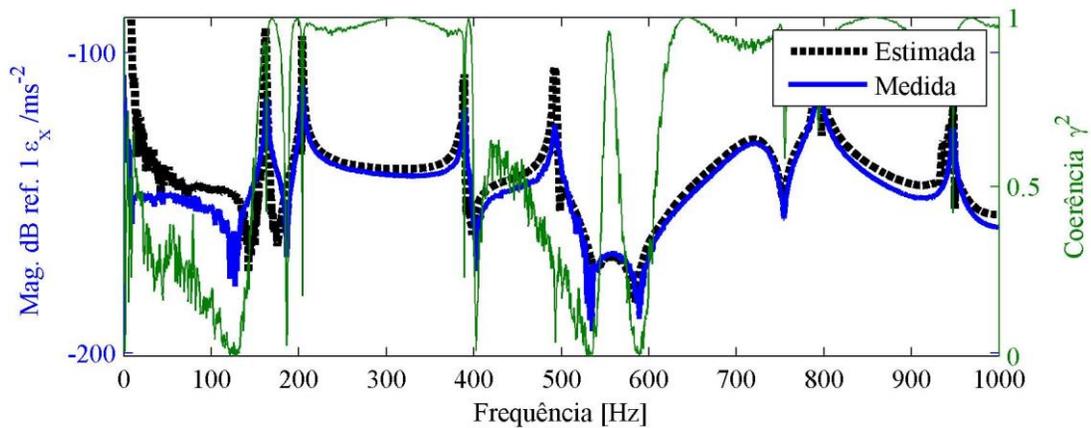
Os coeficientes  $\{C_{est}\}$  foram estimados utilizando a Equação (3.18) e desprezando-se os resíduos. O vetor de resposta  $\{U_{med}\}$  foi considerado como sendo as transmissibilidades estimadas para os 87 pontos da superfície da placa. A Figura 5.52 mostra os espectros dos coeficientes generalizados estimados referentes aos cinco (5) primeiros modos elásticos.



**Figura 5.52 - Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados dos 5 primeiro modos elástico utilizando transmissibilidade.**

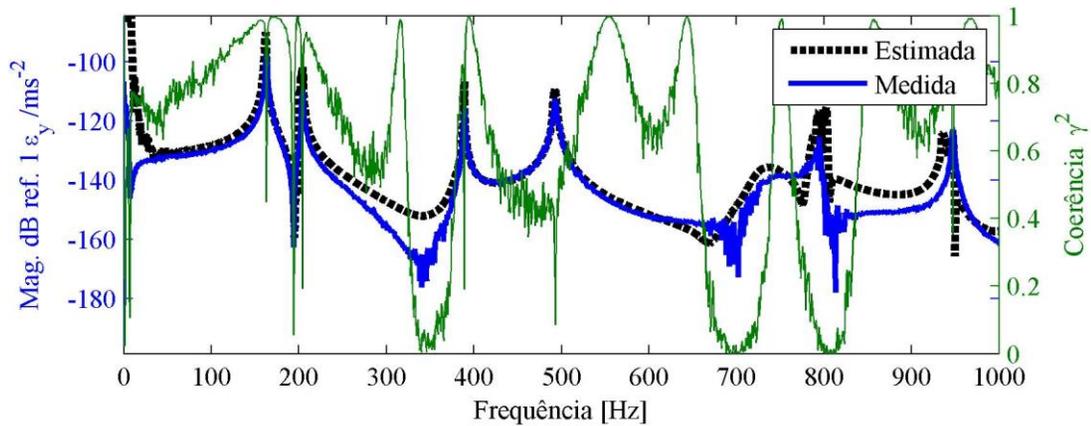
As deformações no ponto de validação foram calculadas pela Equação (5.1) considerando  $u$  e  $v$  as transmissibilidades de deslocamentos medidas. Inicialmente foi considerando as distâncias  $h_x$  e  $h_y = h = 10$  mm.

A Figura 5.53 permite a comparação entre a transmissibilidade de deformação medida e estimada na direção  $x$  do ponto de validação. A função de coerência da deformação medida também pode ser observada nesta Figura. A deformação estimada em termos de transmissibilidade se aproxima bem da deformação medida em praticamente todo o conteúdo espectral. Problemas na comparação são encontrados onde a função de coerência também não apresenta valores próximos a um (1). Embora a função de coerência seja comumente utilizada para relacionar os sinais de entrada e saída de sistemas, aqui pode ser um indicativo da baixa relação sinal-ruído nos sinais de resposta e de referência utilizados. Nas frequências menores que a primeira frequência natural, tanto a função de coerência quanto a comparação entre a deformação medida e estimada são ruins. Esta situação é a mesma encontrada na Figura 5.35. Nessa região a deformação é muito pequena e devido à baixa sensibilidade do extensômetro utilizado, a baixa relação sinal ruído pode estar prejudicando a análise da deformação nesta faixa de frequência.



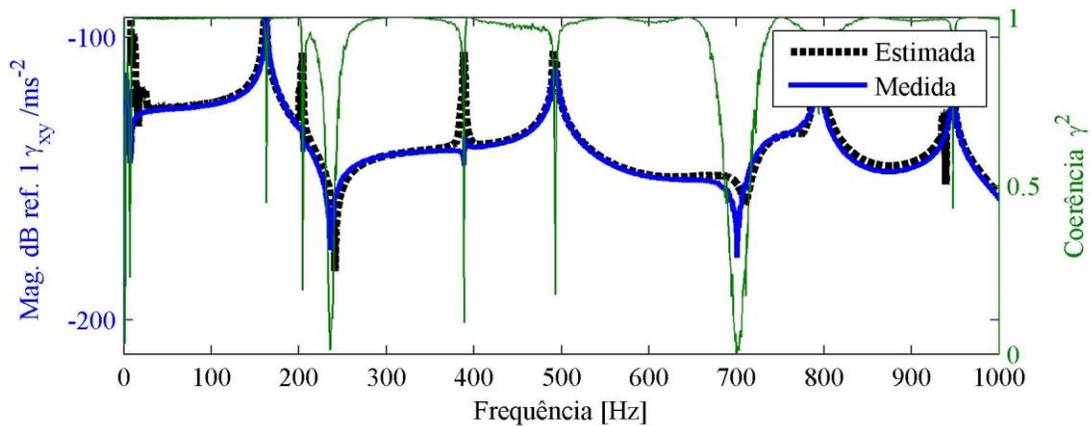
**Figura 5.53 – Transmissibilidade de deformação  $\varepsilon_x$  medida e estimada no ponto de validação e função de coerência da deformação medida**

Na Figura 5.54 estão ambas as deformações na direção  $y$ , medida e estimada. A função de coerência da deformação medida também está representada nesta Figura.



**Figura 5.54 Transmissibilidade de deformação  $\varepsilon_y$  medida e estimada no ponto de validação e função de coerência da deformação medida**

A comparação novamente fica comprometida quando a função de coerência apresenta valores diferentes de um na faixa de frequência analisada. Entretanto, pode-se dizer que houve uma aceitável aproximação da transmissibilidade de deformação  $\varepsilon_y$  estimada e a medida. Na Figura 5.55 encontram-se as transmissibilidades de deformação  $\gamma_{xy}$ , medida e estimada, e a função de coerência medida.



**Figura 5.55 - Transmissibilidade de deformação  $\gamma_{xy}$  medida e estimada no ponto de validação e função de coerência**

A comparação entre a deformação medida e estimada na Figura 5.55 mostra bons resultados em praticamente toda a faixa de frequência analisada. Resultados semelhantes foram encontrados na análise de FRF de deformação da Figura 5.37. Foram utilizados diferentes números de modos  $M$  no truncamento da HMA, diferentes números de pontos  $N$  e diferentes distâncias  $h$ , tal como realizado na análise de FRF de deformação das seções anteriores, e os resultados foram semelhantes aos obtidos anteriormente.

#### 5.4.10 Estimação da deformação utilizando matriz de transformação

A deformação dinâmica foi estimada utilizando o método da matriz de transformação. Considerando que a resposta foi medida nos 87 pontos da malha de medição, a matriz modal  $[\Phi]_{N_1 \times M}$  foi construída levando-se em conta somente as componentes de deslocamento modal  $\phi_{jr}$ , obtidas na aproximação numérica em ANSYS®, na direção perpendicular à superfície da placa não deformada, direção  $z$ , com  $j = 1, 2, \dots, N_1$  e  $r = 1, 2, \dots, M$ . Sendo  $N_1 = 87$  correspondente aos pontos de medição e  $M = 20$  o número de modos do truncamento da matriz modal. O número  $M$  escolhido incluiu os modos de corpo rígido da placa e se refere à frequência simulada para a placa de  $f_M = 1705,4$  Hz.

As matrizes de deformação  $[\varepsilon_x]_{N_2 \times M}$ ,  $[\varepsilon_y]_{N_2 \times M}$  e  $[\varepsilon_{xy}]_{N_2 \times M}$  foram construídas convenientemente com as componentes de deformação modal  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ , respectivamente, e também obtidas na aproximação numérica em ANSYS®, para os 87 pontos de medição de aceleração e adicionalmente, o ponto de validação 90, indicado na Figura 5.31. Assim  $N_2 = 88$ . Com isso, as matrizes de transformação para cada componente de deformação foram determinadas pela Equação (3.7).

Sendo o vetor  $\{x\}_{N_1 \times N_f}$  constituído pelas FRF de receptâncias medidas, com  $N_f$  o número de pontos do vetor de frequência, as FRF de deformação foram estimadas para os  $N_2$  pontos pela Equação (3.8). A Figura 5.56 mostra as FRF de deformação  $\varepsilon_x$ . A Figura 5.57 mostra as FRF de deformação  $\varepsilon_y$  e a Figura 5.58 mostra as FRF de deformação  $\gamma_{xy}$ .

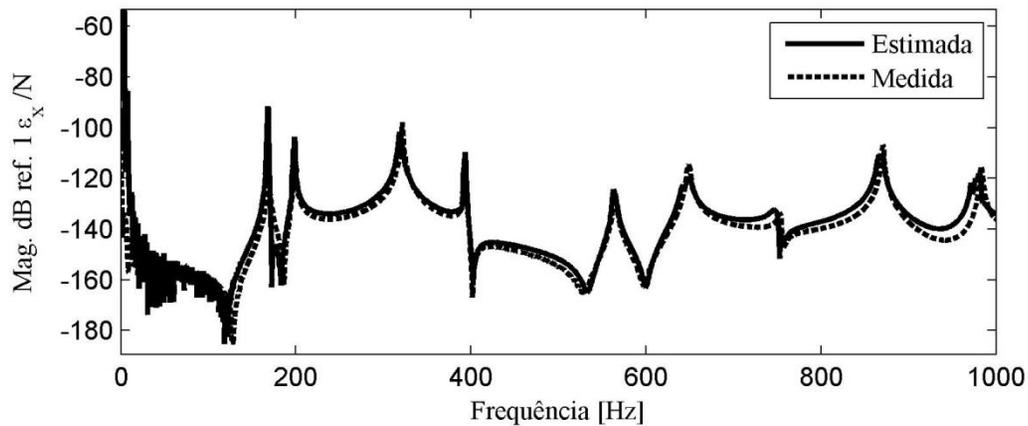


Figura 5.56 – FRF Deformação  $\varepsilon_x$  estimada e medida utilizando matriz de transformação

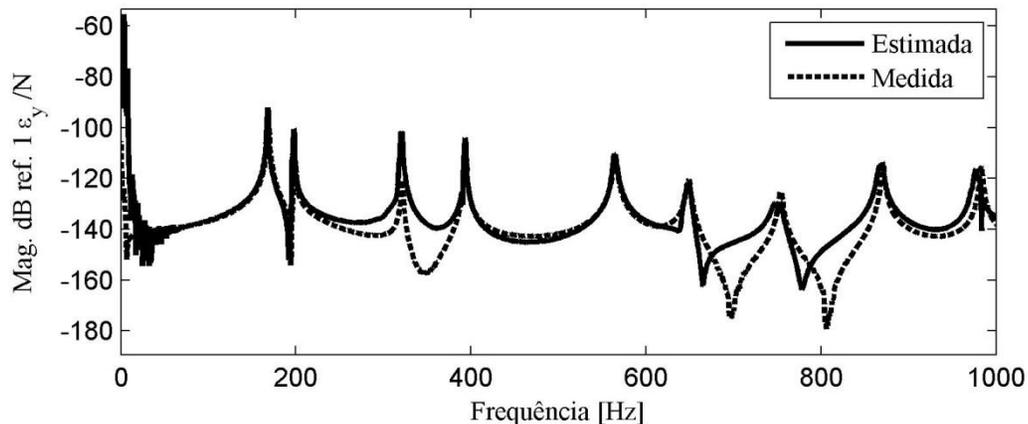


Figura 5.57 – FRF Deformação  $\varepsilon_y$  estimada e medida utilizando matriz de transformação

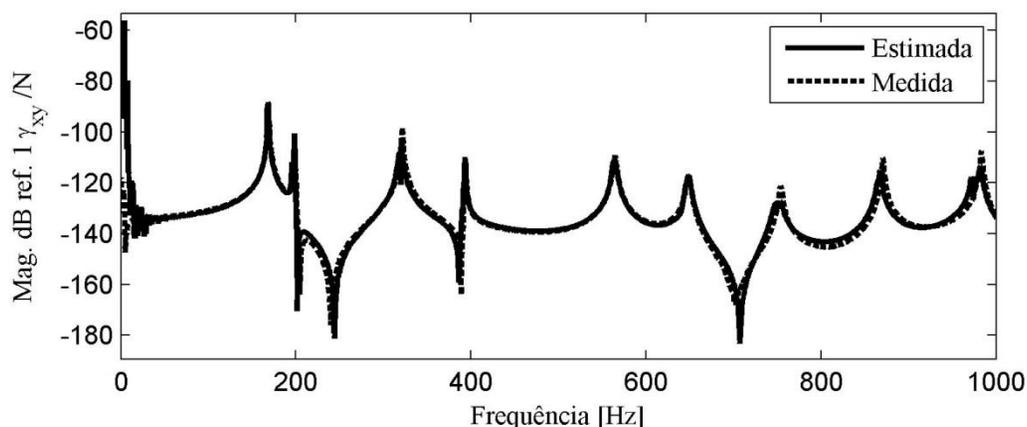


Figura 5.58 – FRF Deformação  $\gamma_{xy}$  estimada e medida utilizando matriz de transformação

Os resultados encontrados nas comparações realizadas utilizando a matriz de transformação são muito semelhantes aos encontrados utilizando a HMA. Além disso, quando os modos de corpo rígido não são considerados, não há um bom ajuste das curvas em baixas frequências.

Utilizando as transmissibilidades de deslocamento estimadas no item anterior 5.4.9 e a matriz de transformação de cada componente de deformação, foi possível estimar as transmissibilidades de deformação normais na direção  $x$  e  $y$ , e também a transmissibilidade de deformação cisalhante. A Figura 5.59 mostra a comparação entre a transmissibilidade medida e estimada para a deformação normal  $\epsilon_x$ .

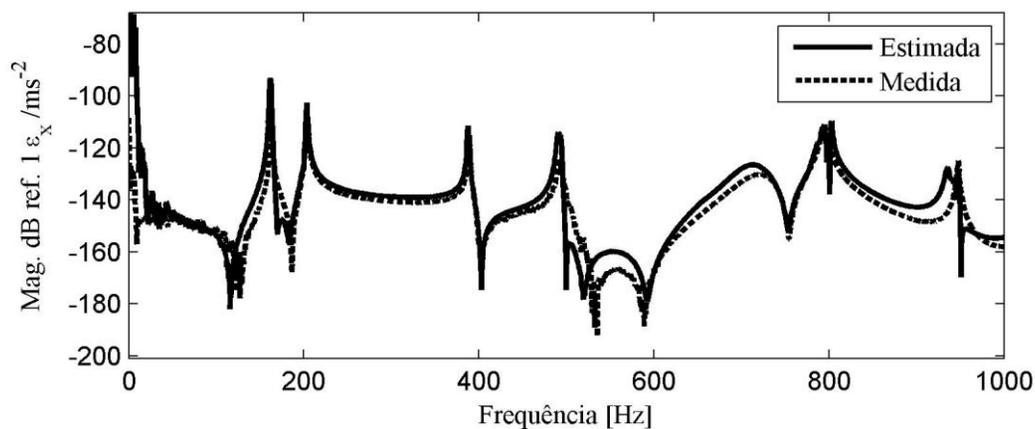


Figura 5.59 – Transmissibilidade de deformação  $\epsilon_x$  estimada utilizando a matriz de transformação e medida

Há um ajuste entre as curvas medida e estimada. As regiões onde a comparação não é boa estão associadas à baixa coerência de medição da deformação, o mesmo ocorrido nas análises anteriores utilizando HMA. A comparação entre a transmissibilidade de deformação  $\varepsilon_y$  medida e estimada está na Figura 5.60.

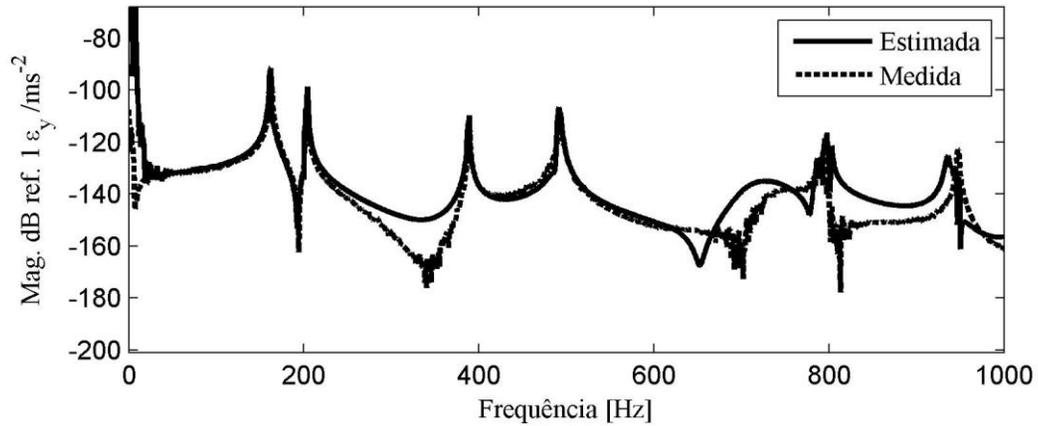


Figura 5.60 – Transmissibilidade de deformação  $\varepsilon_y$  estimada utilizando a matriz de transformação e medida

A Figura 5.61 mostra a transmissibilidade de deformação cisalhante medida e estimada pela matriz de transformação.

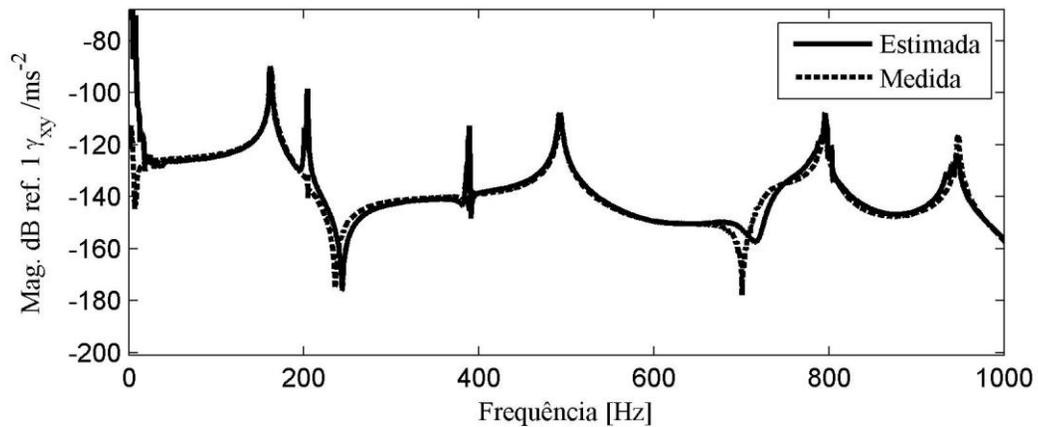


Figura 5.61 – Transmissibilidade de deformação  $\gamma_{xy}$  utilizando a matriz de transformação estimada e medida

A transmissibilidade de deformação cisalhante estimada se aproximou à transmissibilidade medida, conforme pode ser observado na Figura 5.61. Dois picos aparecem na transmissibilidade estimada, um em 204 Hz e outro em 388 Hz, diferentemente da transmissibilidade medida. Esses

dois picos também aparecem na transmissibilidade cisalhante estimada por HMA, como pode ser observado na Figura 5.55.

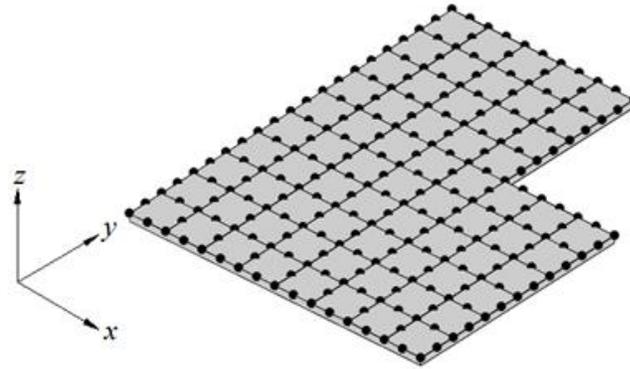
Nas transmissibilidades de deformação normal, Figura 5.59 e Figura 5.60, esses picos também aparecem. Entretanto, esses picos possuem características diferentes dos picos da deformação cisalhante. Nas deformações normais os picos são mais alargados, enquanto na deformação cisalhante são estreitos. A referência, para o cálculo da transmissibilidade, foi colocada na posição indicada no caso 3, estudado no item 2.6.1. A FRF da referência possui antirressonâncias nessas frequências, conforme pode ser observado na Figura 2.12. Assim, são esperados picos nas transmissibilidades. No entanto, as transmissibilidades medidas apresentam picos mais atenuados quando comparados com os picos das transmissibilidades estimadas. As frequências de aproximadamente 204 e 388 Hz são frequências de antirressonância da FRF de deformação cisalhante, conforme pode ser visto na Figura 5.37. Nestas frequências, valores muito baixos de deformação relacionados com valores baixos da referência resultam em valores pequenos na transmissibilidade medida. Em relação à transmissibilidade estimada, valores muito pequenos podem ocasionar erros numéricos e afetar a estimação pelos métodos aplicados. Portanto, a característica estreita dos picos pode estar associada a erros numéricos.

#### **5.4.11 Modos de deformação operacionais utilizando HMA**

Nesta seção, a identificação dos modos de deformação operacionais é realizada na placa com recorte. São utilizadas as funções resposta em frequência e as transmissibilidades determinadas no item 5.4.1 e no item 5.4.9, respectivamente. A transformação deslocamento – deformação é realizada por meio do método de elementos finitos. Os modos experimentais são comparados com os modos simulados, os quais são obtidos pela superposição modal, também tratada no item 5.4.1.

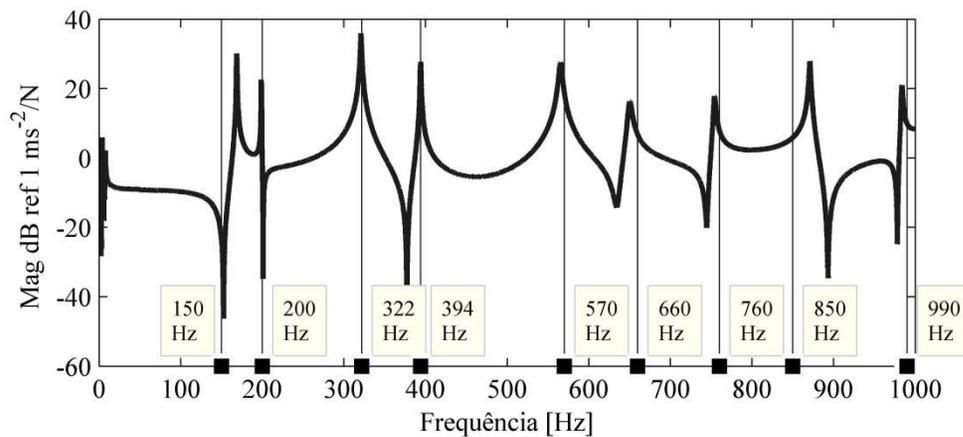
As receptâncias e transmissibilidades dos 87 pontos (Figura 5.24) medidas na direção  $z$ , perpendicular à superfície não deformada da placa, foram extrapoladas para 241 pontos e nas direções  $x$  e  $y$ , utilizando a análise modal híbrida. Esses pontos formam a malha de elementos finitos quadrilateral de (8) nós ilustrada na Figura 5.62. Inicialmente, as posições adotadas para a

referência e excitação foram as ilustradas na Figura 2.11, onde a excitação é colocada próxima ao centro de gravidade da placa e a referência no canto inferior.



**Figura 5.62 – Malha de elementos finitos quadrilateral de 8 nós**

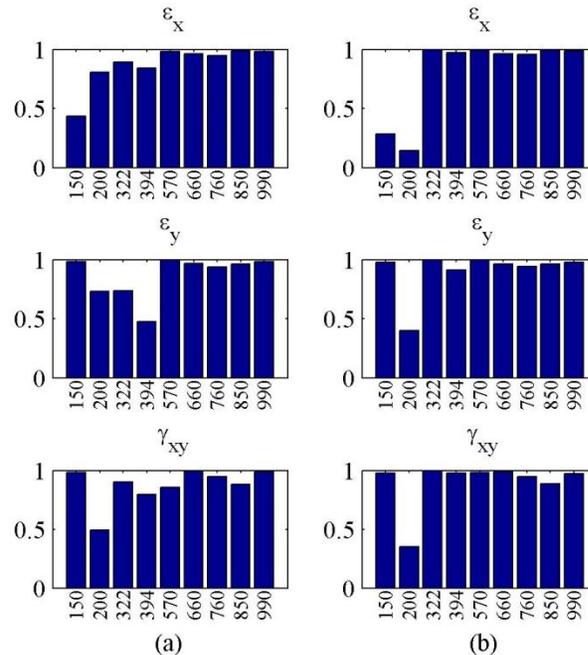
As deformações de cada elemento foram calculadas a partir da Equação (2.37). Foi considerada a média dos valores de deformação em cada nó dos elementos finitos. Os modos de deformação operacionais foram identificados em frequências próximas às frequências naturais da placa. As frequências selecionadas foram: 150; 200; 322; 394; 570; 660; 760; 850 e 990 Hz, conforme pode ser visto na Figura 5.63.



**Figura 5.63 – Frequências selecionadas para visualização dos modos operacionais próximas às frequências naturais da placa**

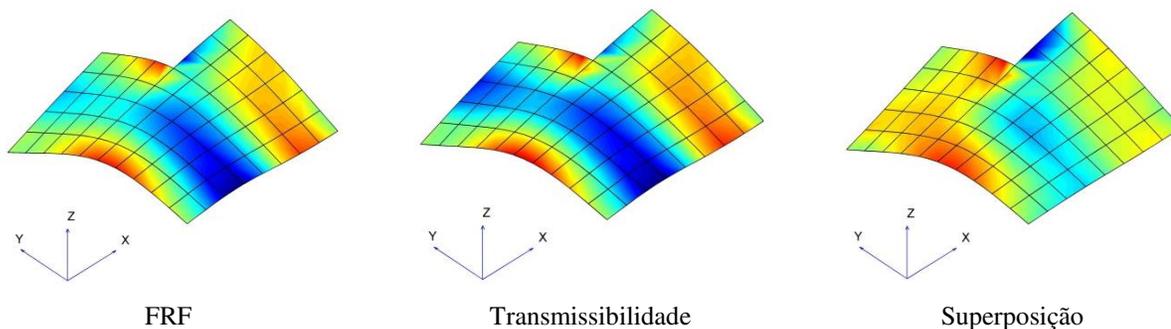
Na Figura 5.64(a) estão as comparações por meio do *Modal Assurance Criterion* (MAC) entre os modos de deformação simulados, por superposição modal, e utilizando FRF. Na Figura

5.64(b) estão as comparações entre os modos simulados e utilizando transmissibilidades. Nas figuras, apenas a diagonal principal da matriz MAC está representada. Valores próximos a um indicam boa correlação e valores próximos a zero indicam problemas com a identificação.



**Figura 5.64 – Modal Assurance Criterion (MAC) dos modos de deformação (a) Superposição modal e FRF (b) Superposição modal e Transmissibilidade**

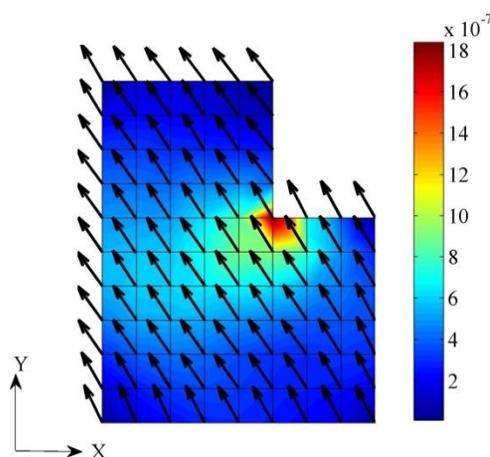
Praticamente todos os modos analisados apresentaram valor do MAC entre 0,8 e 1. Entretanto, os modos determinados pelas FRF:  $\epsilon_x$  na frequência de 150 Hz;  $\epsilon_y$  em 394 Hz e o modo  $\gamma_{xy}$  em 200 Hz, apresentaram valores de MAC inferior que 0,5. No modo operacional  $\epsilon_x$ , regiões de grande deformação são encontradas tanto na região de concentração quanto na borda inferior. Isso não é observado no modo simulado e pode ser a causa do baixo valor do MAC. A Figura 5.65 mostra os modos de deformação  $\epsilon_x$  na frequência de 150 Hz, determinados a partir da FRF, transmissibilidade e superposição.



**Figura 5.65 – Modos de deformação operacionais  $\varepsilon_x$  na frequência de 150 Hz – excitação central e referência canto inferior**

O modo de deformação  $\varepsilon_x$  identificado pela FRF é praticamente o mesmo determinado pela transmissibilidade, conforme pode ser observado na Figura 5.65. Alterando a localização da referência, colocando-a próxima à excitação, posição indicada na Figura 2.7, é encontrada a mesma distribuição de deformação.

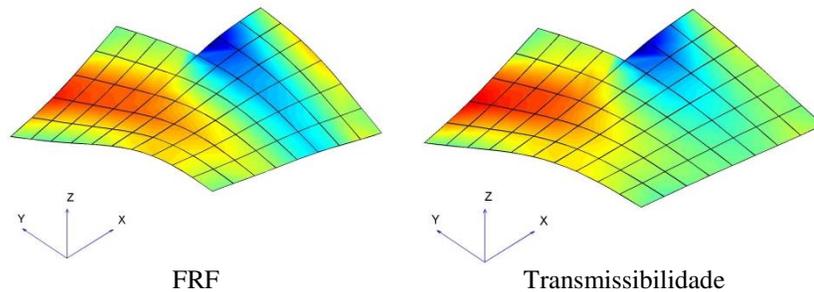
A deformação máxima principal em 150 Hz assume a direção indicada na Figura 5.66. A direção principal está a  $135^\circ$  do eixo  $x$ .



**Figura 5.66 – Direção da máxima deformação principal e distribuição (mapa de cores) da deformação equivalente em 150 Hz**

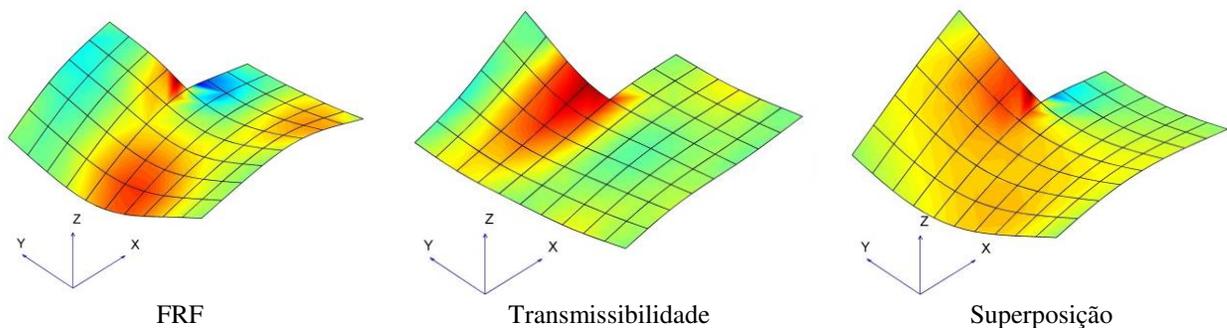
Assim sendo, as deformações na direção  $x$  podem ser pequenas o suficiente, de tal modo que: erros de medição; relação sinal-ruído; erros numéricos no cálculo da deformação e a massa do acelerômetro e excitador, sejam significantes para distorção do modo operacional de deformação  $\varepsilon_x$  na frequência de 150 Hz.

Alterando a posição da excitação e referência, sendo as mesmas representadas na Figura 2.9, as regiões de maior deformação passam ser na parte superior da placa. Ainda assim, o modo operacional identificado pela transmissibilidade continua semelhante ao modo identificado pela FRF, conforme pode ser observado na Figura 5.67.



**Figura 5.67 – Modos de deformação operacionais identificados pela FRF semelhante ao identificado pela transmissibilidade – excitação canto superior e referência central -  $\epsilon_x$  na frequência de 150 Hz**

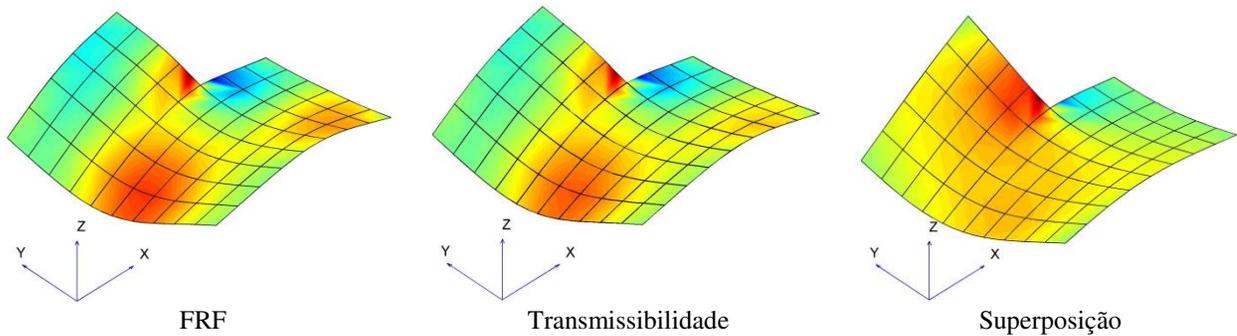
Ao comparar o modo  $\gamma_{xy}$  em 200 Hz identificado pela FRF com o modo simulado na Figura 5.68, verifica-se que na região próxima ao recorte, há uma concentração de tensão determinada nos três casos avaliados. Uma região de grande deformação na borda esquerda inferior da placa é identificada no modo obtido pela FRF. No modo simulado, as deformações se concentram próximas ao recorte. Os modos obtidos pela transmissibilidade não foram corretamente identificados.



**Figura 5.68 - Modos de deformação operacionais  $\gamma_{xy}$  na frequência de 200 Hz – Excitação central e referência canto**

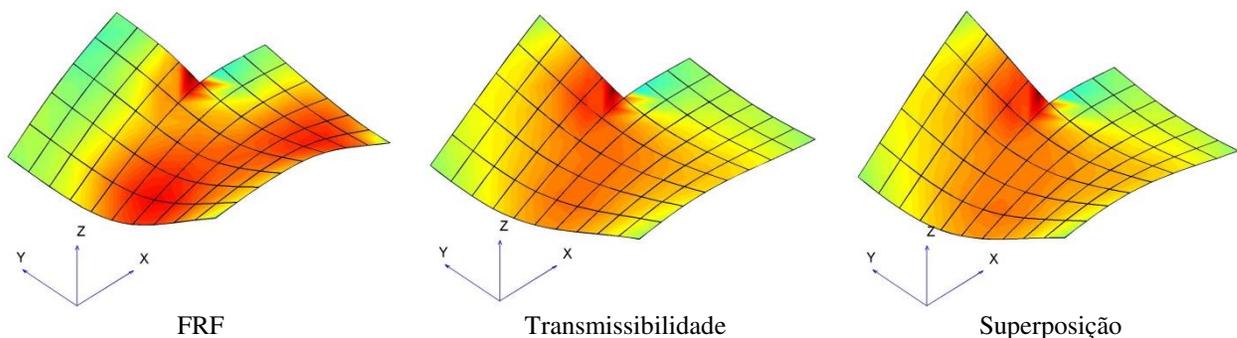
Posicionando a referência próxima à excitação conforme indicada na Figura 2.7, o modo  $\gamma_{xy}$  identificado pela transmissibilidade é praticamente o mesmo que o obtido pela FRF, conforme

pode ser visto na Figura 5.69. Correlacionando o modo obtido pela transmissibilidade com o modo simulado a partir do MAC, o valor encontrado ainda é inferior a 0,5.

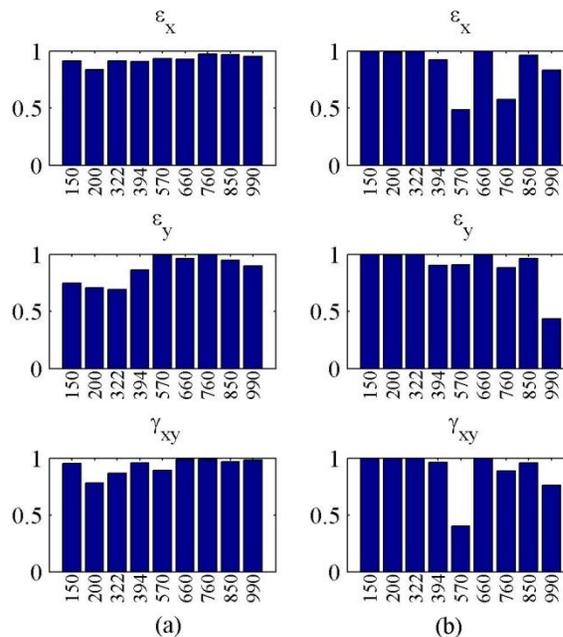


**Figura 5.69 – Modos de deformação operacionais  $\gamma_{xy}$  na frequência de 200 Hz – Excitação e referência centrais**

Alterando a posição da referência houve mudanças qualitativas no modo obtido pela transmissibilidade. No entanto, não houve mudanças significativas no valor do MAC. Alterando a posição da excitação, colocando-a no canto superior e mantendo a referência na parte central da placa, conforme ilustrado na Figura 2.9, há uma melhor correlação entre os modos operacionais e simulados, tanto qualitativamente quanto quantitativamente, a partir da análise do MAC. A Figura 5.70 ilustra os modos operacionais e o simulado da deformação cisalhante  $\gamma_{xy}$  na frequência de 200 Hz considerando a nova posição da excitação. A Figura 5.71 mostra a diagonal principal do MAC entre os modos operacionais e o simulado.



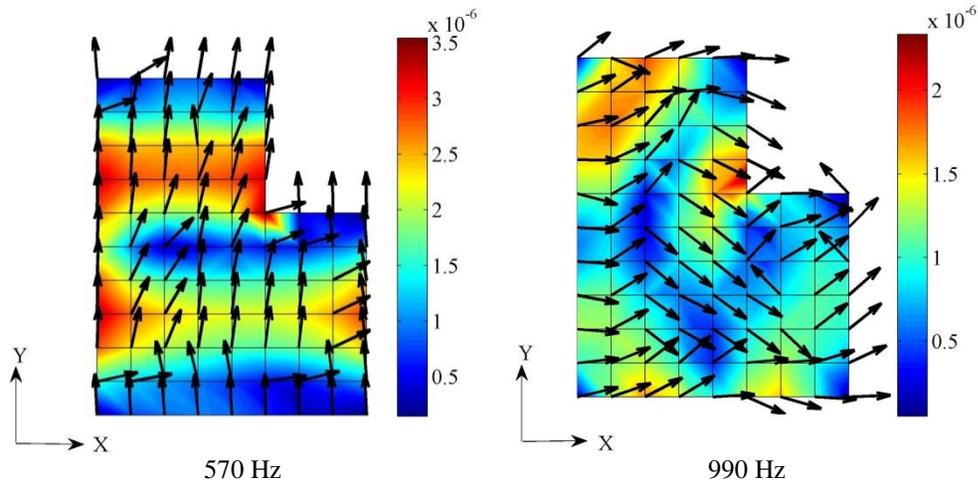
**Figura 5.70 - Modos de deformação operacionais  $\gamma_{xy}$  na frequência de 200 Hz – Excitação canto e referência central**



**Figura 5.71 – Modal Assurance Criterion (MAC) dos modos de deformação (a) Superposição modal e FRF (b) Superposição modal e Transmissibilidade – nova posição da excitação**

Embora as frequências operacionais escolhidas sejam próximas às frequências naturais do sistema, a mudança na posição da excitação ocasiona alterações nos modos operacionais. Isso não ocorre nos modos naturais, os quais são independentes da excitação. Nos casos analisados, a alteração na posição da excitação fez com que os modos operacionais se aproximassem melhor do modo simulado. Na prática, modos podem não ser excitados devido à força excitadora estar posicionada em um nó modal. Nos casos analisados, os menores valores de MAC estão associados às frequências e direções onde estas não são as direções principais de deformação. Esses níveis de deformação são relativamente baixos e as estimativas de deformação tornam-se susceptíveis a diversas fontes de erros. Além disso, os modos de deformação são mais sensíveis às alterações no sistema do que os modos de deslocamento. Isso verificou-se, pois não houve alteração nos modos de deslocamento. Como os modos de deformação obtidos pelas FRF ou transmissibilidades apresentaram praticamente a mesma distribuição de deformação, diferenças entre os modos operacionais e simulados podem estar associadas à massa do excitador e a alteração na região de excitação, pois o excitador muda a condição de contorno da placa nesta região.

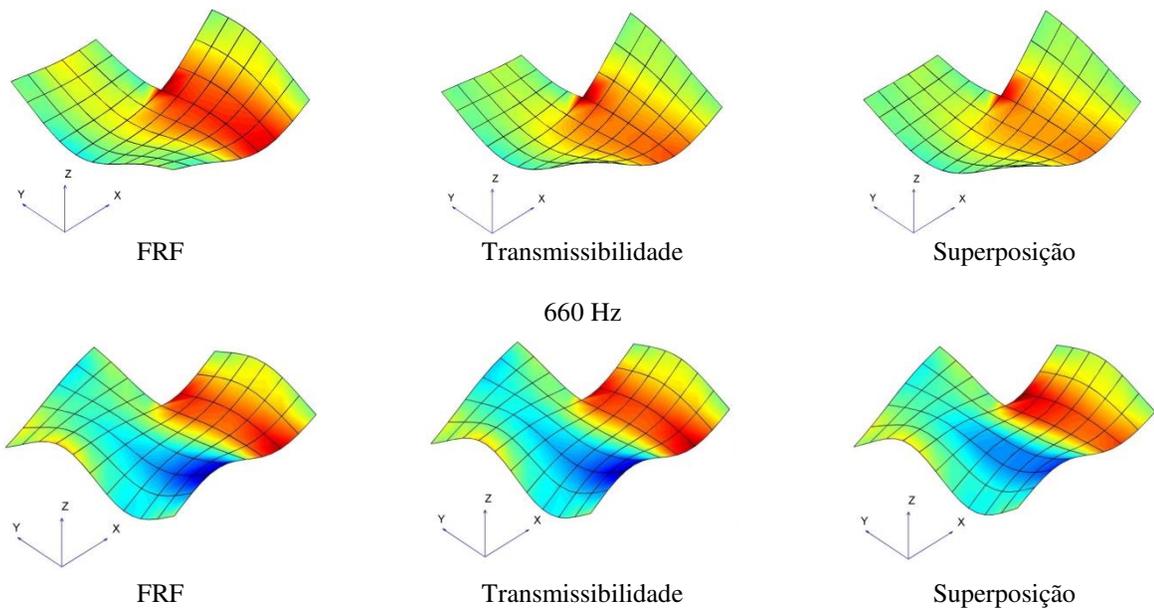
Observando a Figura 5.71, os modos  $\varepsilon_x$  e  $\gamma_{xy}$  em 570 Hz, identificados pela transmissibilidade, apresentam baixos valores do MAC. A referência nesse caso está localizada em um nó modal referente ao modo próximo a esta frequência. Por este motivo, podem ocorrer problemas na identificação deste modo utilizando transmissibilidade. Além disso, a direção principal de deformação neste modo é paralela ao eixo  $y$ , significando pequenos valores de deformação cisalhante e normal na direção  $x$ . O modo  $\varepsilon_y$  apresentou MAC acima de 0,9. O mesmo pode estar ocorrendo com os modos em 990 Hz, onde a direção principal em partes da placa é paralela ao eixo  $x$  e em outras está orientada a  $-45^\circ$  em relação ao eixo  $x$ . Neste caso, o modo  $\varepsilon_y$  apresentou MAC abaixo de 0,5. A Figura 5.72 ilustra a deformação equivalente e a direção da máxima deformação principal nas frequências de 570 e 990 Hz.



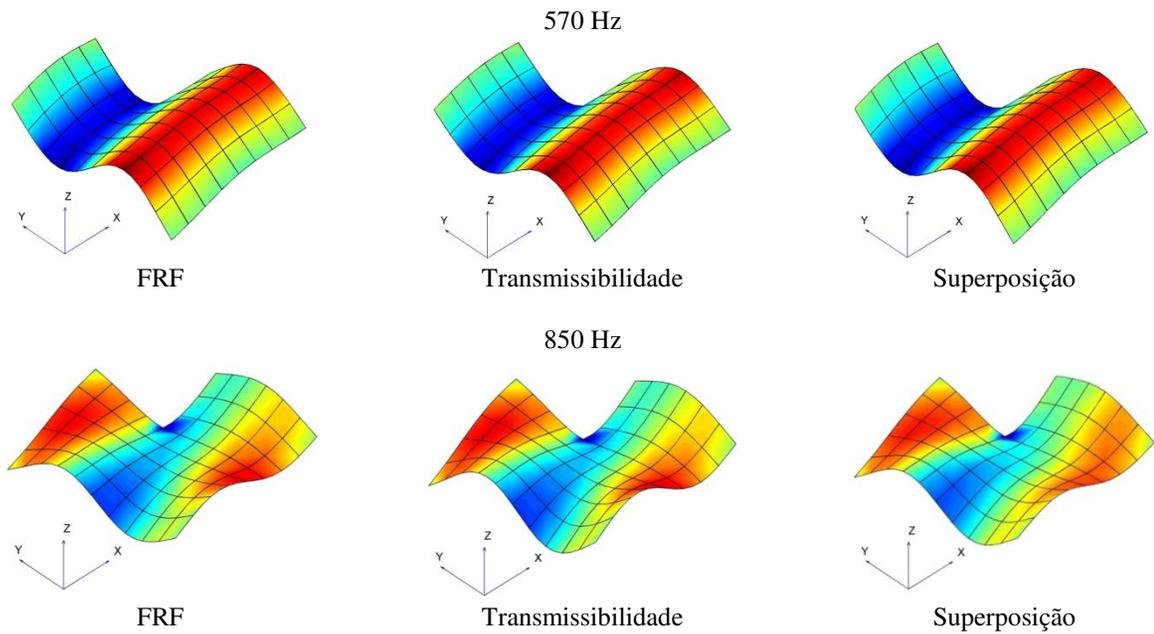
**Figura 5.72 - Direção da máxima deformação principal e distribuição (mapa de cores) da deformação equivalente**

Considerando os modos identificados onde a referência foi posicionada no canto inferior e a excitação na parte central da placa, Figura 2.11, seguem as comparações de alguns modos operacionais que apresentaram valores de MAC superior a 0,9. Na Figura 5.73 estão os modos operacionais  $\varepsilon_x$ . A Figura 5.74 mostra os modos operacionais  $\varepsilon_y$ . A Figura 5.75 mostra os modos operacionais  $\gamma_{xy}$ .

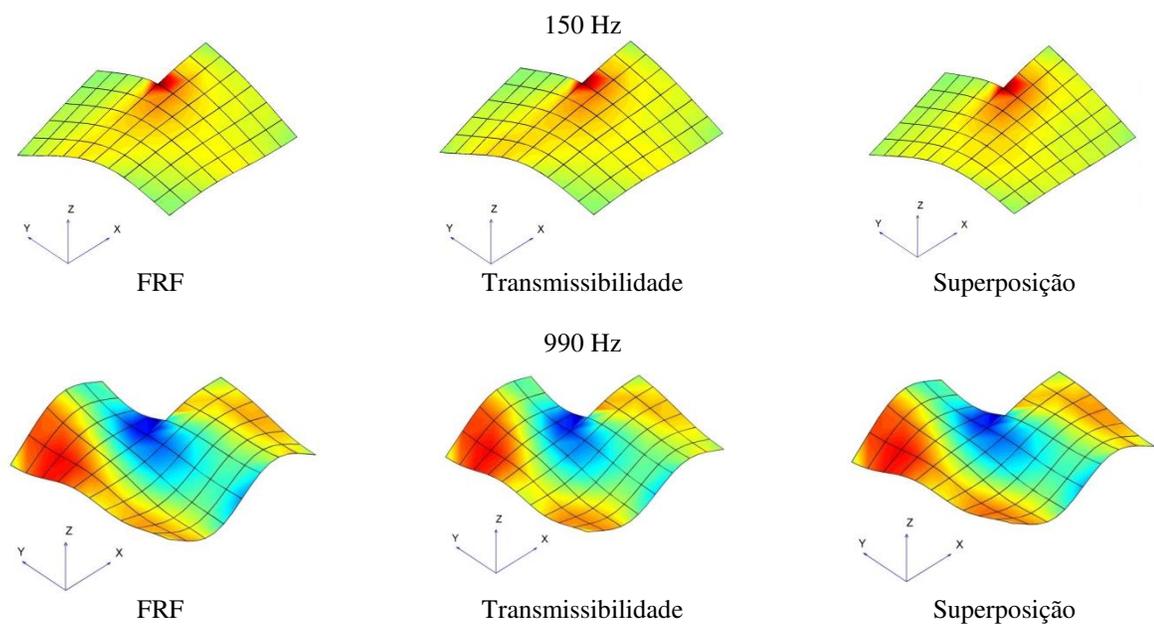
322 Hz



**Figura 5.73 - Modos de deformação operacionais  $\epsilon_x$**

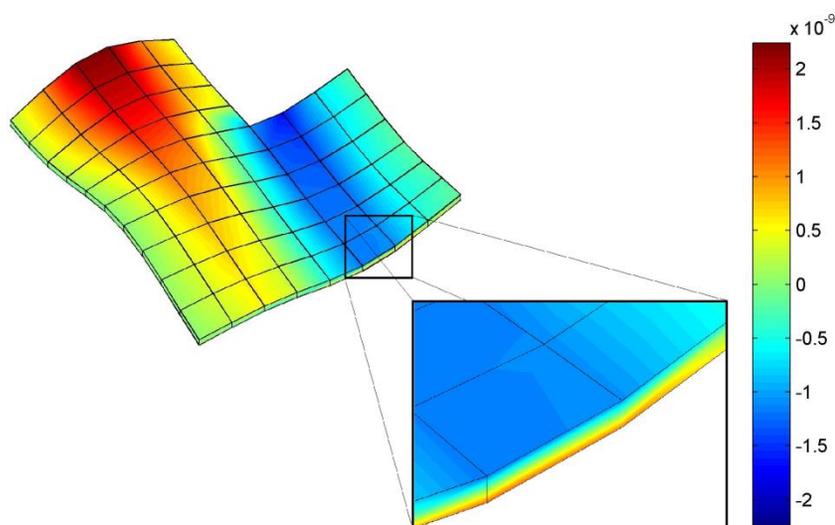


**Figura 5.74 - Modos de deformação operacionais  $\epsilon_y$**



**Figura 5.75 - Modos de deformação operacionais  $\gamma_{xy}$**

A distribuição da deformação operacional foi determinada na superfície da placa. Com a informação das componentes modais de mais pontos e a análise modal híbrida, é possível determinar a deformação em outras regiões e planos diferentes da placa. Na Figura 5.76 é possível se visualizar a distribuição de deformação normal  $\epsilon_x$  ao longo da espessura da placa no modo operacional de flexão em 870 Hz, por exemplo.



**Figura 5.76 – Distribuição da deformação  $\epsilon_x$  ao longo da espessura da placa na frequência de 870 Hz**

No quadro inferior da Figura 5.76 é possível se observar a variação da deformação  $\epsilon_x$ , onde a mesma é de compressão na parte superior da placa, nula na metade da espessura, a qual se refere à linha neutra, e de tração na parte inferior da placa.

#### 5.4.12 Considerações finais

A seção 5.4 mostrou os experimentos realizados na placa retangular com recorte na condição livre – livre. Na placa com recorte, foi possível a medição do estado de deformação em um ponto, próximo ao recorte da placa, utilizando extensômetro tipo roseta. As deformações estimadas neste ponto, utilizando a análise modal híbrida e o método de diferenças finitas, foram comparadas com as deformações medidas. A aproximação entre a deformação estimada com a medida foi boa em praticamente todos os casos e frequências analisadas, exceto em regiões onde a medição da deformação foi comprometida pela baixa sensibilidade do extensômetro e baixa relação sinal-ruído, indicados pela baixa função de coerência. A deformação também foi estimada utilizando a matriz de transformação e as comparações mostraram bons resultados. A deformação estimada não se aproximou bem à deformação medida em baixas frequências, principalmente abaixo do primeiro modo de vibração, quando não foram considerados os modos de corpo rígidos, tanto pela análise modal híbrida quanto pela matriz de transformação. Nas avaliações das FRF e transmissibilidades de deformação estimadas, constatou-se que a escolha do número de pontos de medições e suas localizações devem ser feita cuidadosamente, pois estes pontos são associados às linhas das matrizes modais de deslocamentos, as quais necessitam formar uma base ortogonal. A seleção dos pontos pode ser feita com a verificação do *Modal Assurance Criterion* (MAC). Os modos de deformação operacionais foram determinados a partir de FRF e transmissibilidades, e os mesmos foram comparados com os modos encontrados por superposição. Regiões críticas de deformação puderam ser identificadas.

Adicionalmente, duas importantes considerações podem ser feitas. A primeira em relação à estimação da deformação cisalhante e a outra em relação ao uso das funções de transmissibilidade. Sobre a primeira consideração, a questão envolvida estava relacionada ao fato de quão boa seria a estimação da deformação cisalhante ou distorção angular utilizando valores de deslocamentos e os métodos numéricos para derivação. Os resultados da Figura 5.40, por

exemplo, mostram uma boa aproximação da deformação cisalhante estimada com a medida. Esse resultado é importante para validação dos métodos de estimação de deformação, visto que a deformação cisalhante medida também apresentou boa função de coerência. Em relação ao uso das funções de transmissibilidades, os resultados encontrados apresentaram resultados semelhantes ou até melhores aos encontrados utilizando FRF.

A boa coerência em ampla faixa espectral da deformação cisalhante pode ser devido à combinação em praticamente todas as frequências de, não só modos de flexão, mas também, modos de torção. Deformações cisalhantes ocorrem preferencialmente nos modos de torção. Dalenbring (1999) comenta que, para um caso semelhante avaliado, a contribuição dominante para energia de deformação modal elástica origina do módulo de elasticidade transversal e foi representado por um fator de ponderação, cujo valor médio foi de aproximadamente 90%.

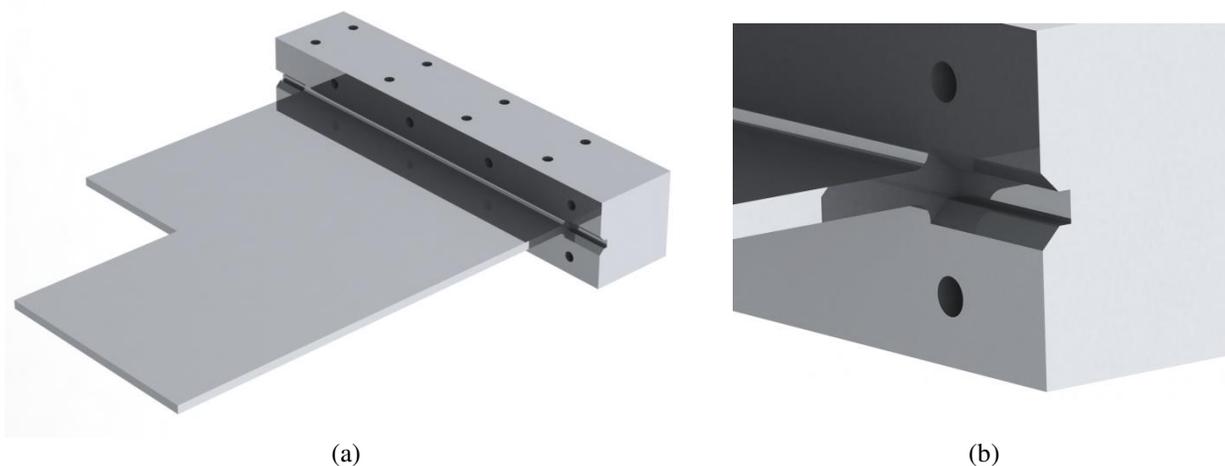
Outras questões estão associadas ao tamanho do modelo numérico e experimental. O número de medição  $N$  precisa ser escolhido de tal forma que o sistema torne-se observável. Esses pontos de medição estão relacionados aos graus de liberdade da malha utilizada no modelo numérico. Assim, a escolha destes pontos, de certa forma, influencia na obtenção de matrizes modais que formem uma base modal ortogonal. Sendo assim, a escolha desses pontos pode ser feita a partir da avaliação MAC. No caso de superfícies planas, onde as medições são comumente realizadas na direção perpendicular à superfície, e estas são utilizadas para estimação dos coeficientes, a presença de valores diferentes de zero no MAC pode não influenciar no ajuste de curvas, como nos casos avaliados no item 5.4.8. Nos casos tridimensionais, pequenos erros de aproximações modais, os quais podem estar sendo representados no MAC, podem afetar sensivelmente os ajustes de curvas principalmente em direções não consideradas nas medições.

### **5.5 Placa retangular com recorte engastada**

Os experimentos anteriores foram realizados em placas na condição livre – livre. Em situações operacionais, as peças que compõem as máquinas, estruturas e equipamentos são fixas a outros elementos ou estão sujeitas a uma condição de contorno diferente da livre – livre. Por este motivo, nesta seção tratar-se-á de experimentos realizados em uma placa retangular engastada.

Nesses experimentos as deformações estimadas são comparadas com as deformações medidas em dois pontos diferentes da placa. As deformações são estimadas no domínio da frequência utilizando as funções resposta em frequência e transmissibilidades pelos métodos de análise modal híbrida e matriz de transformação. Além da análise no domínio da frequência, é feito uma comparação da deformação estimada e medida no domínio do tempo.

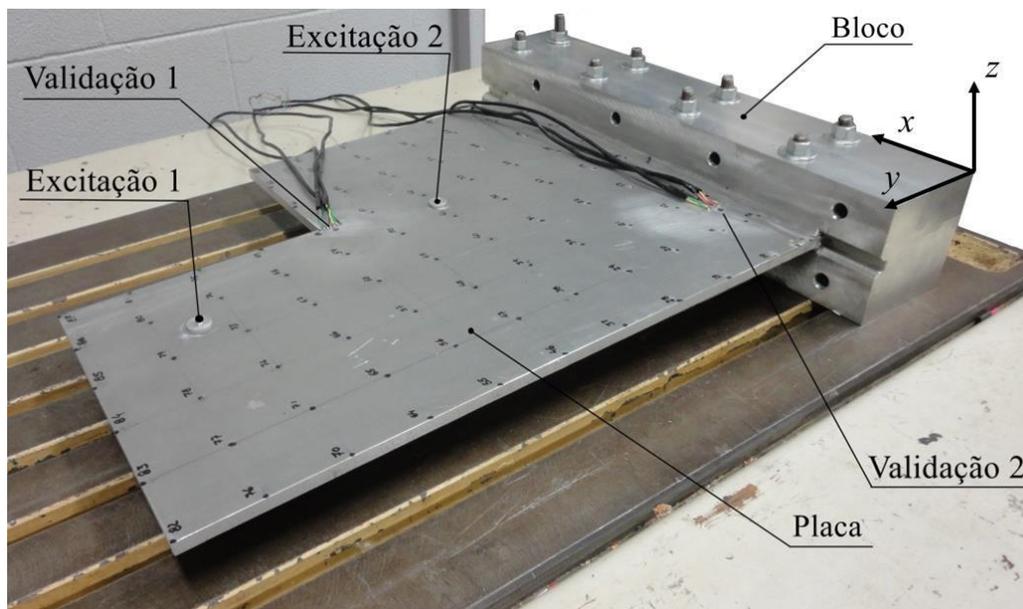
Para a montagem do experimento e adequação à nova condição de contorno, uma placa retangular foi soldada em um bloco de alumínio de  $0,500 \times 0,100 \times 0,100$  (x,y,z). A Figura 5.77 ilustra a placa com recorte soldada ao bloco de alumínio. No bloco de alumínio foi feito uma ranhura para encaixe da placa. A solda foi realizada com adição de material formando um filete de raio aproximadamente 5 mm. A placa utilizada é de alumínio e de formato retangular, cujas dimensões finais são  $0,400 \times 0,500 \times 0,0095$  m (x,y,z) e com um recorte retangular de  $0,150 \times 0,200 \times 0,0095$  m. Essas dimensões são iguais à placa utilizada anteriormente e representada na Figura 5.24. A malha de medição também tem a mesma distribuição e está indicada na Figura 5.24



**Figura 5.77 – Placa com recorte engastada (a) placa e bloco (b) detalhe do rasgo e filete de solda**

A peça ilustrada na Figura 5.77 foi fixada à bancada experimental por meio de parafusos. Dois pontos de validação foram escolhidos, um próximo ao recorte, ponto de validação 1 de coordenadas  $0,240 \times 0,290 \times 0,0095$  m, e outro próximo ao engaste, ponto de validação 2 de coordenadas  $0,075 \times 0,025 \times 0,0095$  m. Foram considerados inicialmente duas posições para a excitação, uma mais afastada do engaste, Excitação 1, e outra mais próxima do engaste,

Excitação 2. Na Figura 5.78 está a foto da placa fixa à bancada com as indicações das localizações dos pontos de excitação e validação.

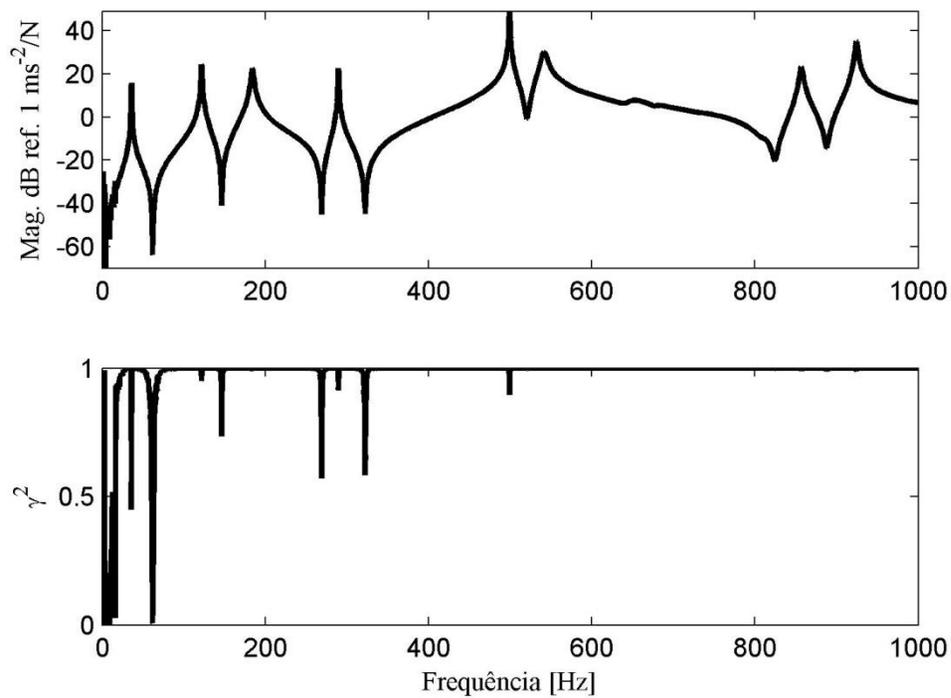


**Figura 5.78 – Foto da placa engastada – indicações das posições de validação e excitação**

Acelerações foram medidas na superfície da placa na direção  $z$ , perpendicular à superfície da placa não deformada. Foi utilizado um acelerômetro DeltaTron® tipo 4508 piezoelétrico de sensibilidade  $10,06 \text{ mV/ms}^{-2}$  e massa de 16 gramas. Para o cálculo das transmissibilidades, outro acelerômetro, de mesmo modelo e sensibilidade de  $9,90 \text{ mV/ms}^{-2}$ , foi utilizado como referência e mantido fixo em pontos escolhidos.

### 5.5.1 Deformação utilizando a HMA e FRF

As Acelerâncias foram estimadas utilizando o estimador  $H_1$  da Equação (2.110). Os parâmetros do processamento dos sinais são os mesmos descritos na Tabela 5.1. Considerando o ponto de excitação 2 localizado nas coordenadas  $0,200 \times 0,275 \times 0,095$ ,  $x, y$  e  $z$ , respectivamente, o espectro de amplitude de FRF e coerência do ponto 41, próximo à excitação, pode ser visto na Figura 5.79. As acelerações foram convertidas para receptâncias pela divisão por  $-\omega^2$ .



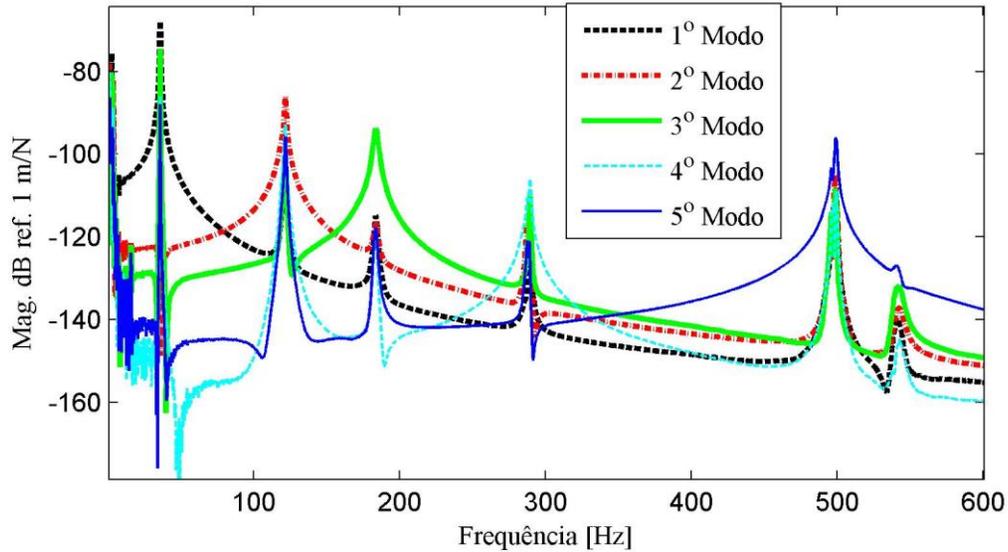
**Figura 5.79 – Espectro de amplitude de Aceleração e a coerência, resposta ponto 41 e excitação 2**

Os parâmetros utilizados na simulação em elementos finitos no ANSYS® para extração dos modos tridimensionais estão descritos na Tabela 5.5. Inicialmente, o mesmo modelo representado na Figura 5.27 foi utilizado nas simulações. Entretanto, alterou-se a condição de engaste restringindo-se os deslocamentos tridimensionais na face inferior da placa. Os nove primeiros modos de deslocamento simulados podem ser observados no Apêndice D.

**Tabela 5.5 – Parâmetros utilizados na simulação por elementos finitos ANSYS placa engastada**

<b>Pré-processamento</b>
<i>Tipo do elemento:</i> SOLID186 20 nós.
<i>Propriedades do Material:</i> Linear elástico Isotrópico; $E = 73 \text{ GPa}$ ; $\nu = 0,33$ ; $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ .
<i>Modelo geométrico:</i> Volume com dimensões $0,400 \times 0,500 \times 0,0095$
<i>Definição da Malha:</i> 12353 nós, 1700 elementos; 1 elemento na espessura
<b>Solução</b>
<i>Tipo de análise:</i> Análise Modal; Análise dos 25 primeiros modos; Modos normalizados pela massa; Algoritmo de extração dos modos: Block Lanczos.
<i>Restrições:</i> Deslocamento tridimensional nulo na face inferior da placa.
<b>Pós-processamento</b>
<i>Resultados:</i> Frequências naturais, modos de tridimensionais de deslocamento e modos de deformação.

Os coeficientes  $\{C_{est}\}$  foram estimados utilizando a Equação (3.18) e desprezando-se os resíduos. Foi escolhido inicialmente  $M = 25$  modos. Este número corresponde aos modos de baixa ordem até a frequência de  $f_M = 3108,5 \text{ Hz}$ . Assim, a faixa de frequência analisada se ajusta à  $f < f_{max} < f_M$ . A frequência máxima foi definida como sendo  $f_{max} = 1000 \text{ Hz}$ . O vetor de resposta  $\{U_{med}\}$  foi considerado como sendo as receptâncias estimadas para os 87 pontos da superfície da placa. A Figura 5.80 mostra os espectros dos coeficientes generalizados estimados referentes aos cinco (5) primeiros modos.

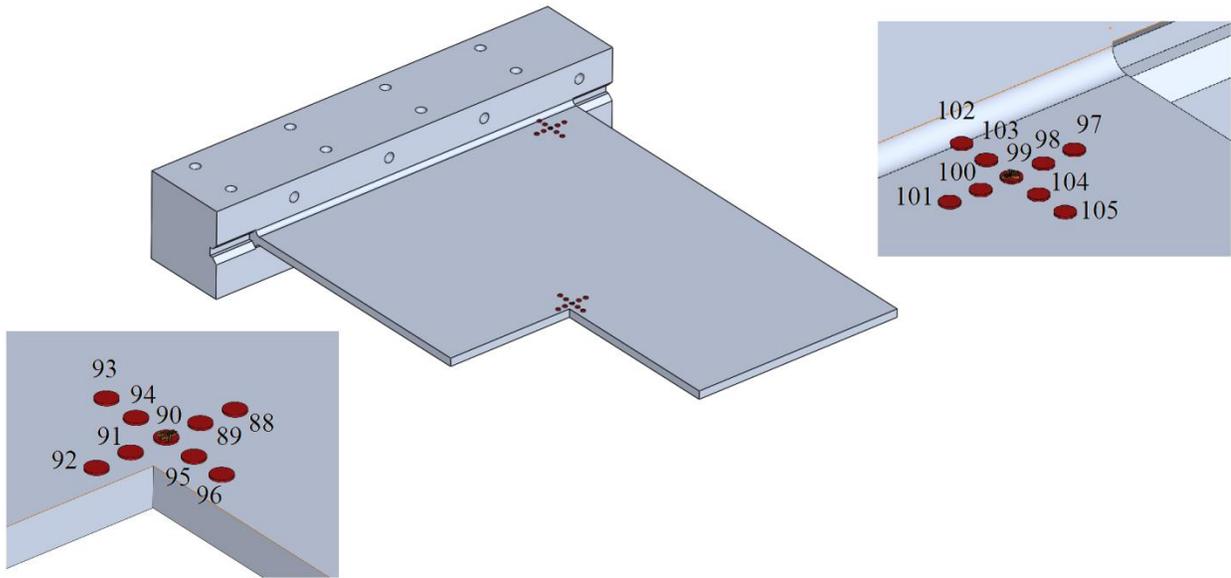


**Figura 5.80 - Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados dos 5 primeiros modos**

Os coeficientes generalizados estimados são independentes, pois apresentam um único pico dominante próximo à frequência do modo correspondente.

O método de diferenças finitas centrais foi utilizado para o cálculo do tensor de deformação nos pontos de validação. Foram considerados pontos uniformemente espaçados em 10 mm. Esses pontos estão ilustrados na Figura 5.81 e não fazem parte da malha de medição. As receptâncias tridimensionais destes pontos foram estimadas pela HMA, a partir do conhecimento das componentes modais e utilizando a Equação (3.19).

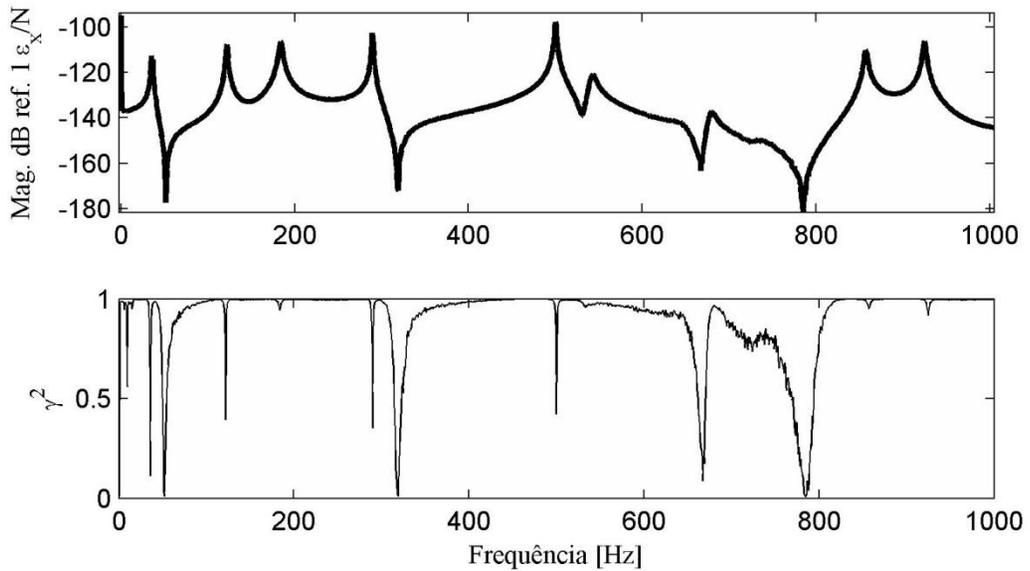
Os pontos 90 e 99 referem-se aos pontos de validação 1 e 2, respectivamente. Nesses pontos foram colados extensômetros elétricos tipo roseta. As especificações dos extensômetros são as mesmas mostradas na Tabela 5.4. A orientação de colagem dos extensômetros não foram as direções de interesse. Assim, as deformações  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  foram determinadas a partir da transformação de coordenadas da Equação (2.40).



**Figura 5.81 – Pontos simetricamente dispostos ao redor dos pontos de análise necessários para a estimação do tensor de deformação utilizando MDF**

***Deformação no ponto de validação 1***

O espectro de amplitude da FRF de deformação  $\epsilon_x$  medida e a função de coerência do ponto de validação 1, próximo ao recorte da placa, podem ser vistos na Figura 5.82.



**Figura 5.82 – FRF de deformação  $\epsilon_x$  medida e função de coerência – ponto de validação 1**

A função de coerência diminui após a frequência de 550 Hz, nas antirressonâncias e ressonâncias. Na Figura 5.83 está a FRF de deformação  $\varepsilon_y$ . A FRF de deformação cisalhante  $\gamma_{xy}$  pode ser vista na Figura 5.84.

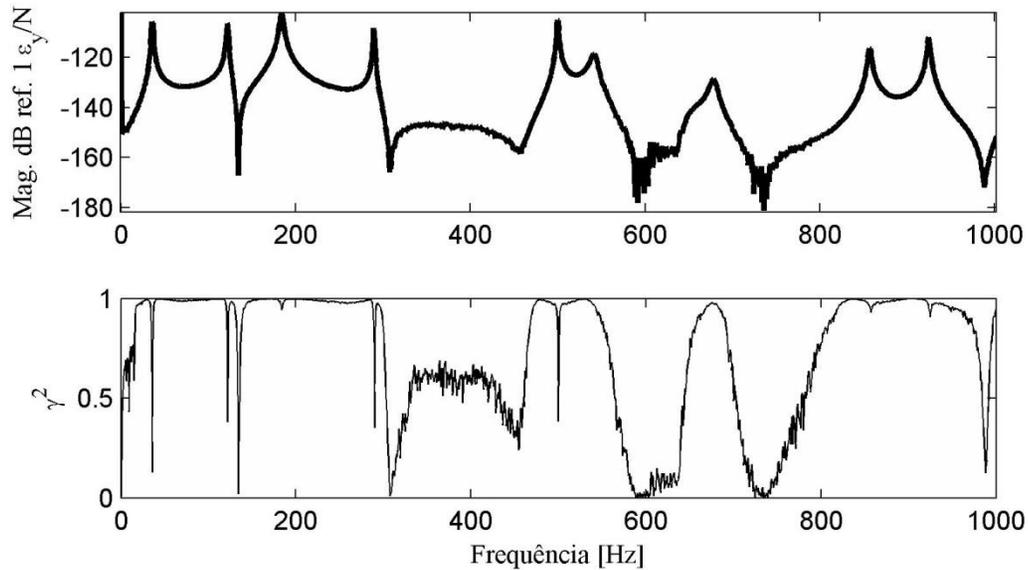


Figura 5.83 - FRF de deformação  $\varepsilon_y$  medida e função de coerência – ponto de validação 1

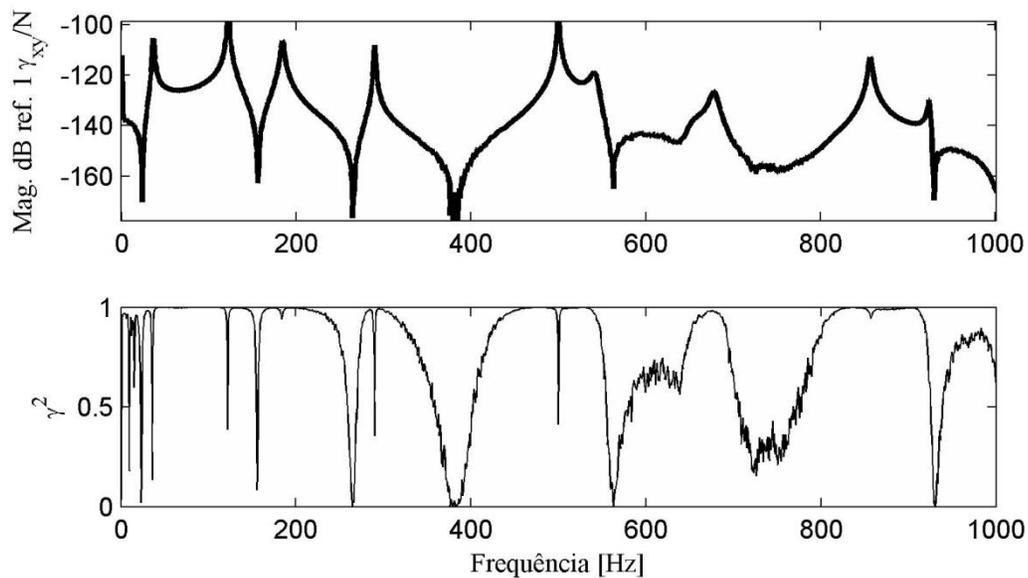


Figura 5.84 - FRF de deformação  $\gamma_{xy}$  medida e função de coerência – ponto de validação 1

Em ambas as FRF de deformação  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  a função de coerência diminui nas frequências acima de 300 Hz.

Nas Figura 5.85, Figura 5.86, Figura 5.87 estão as comparações entre as FRF de deformação medida e estimada para as deformações  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ , respectivamente.

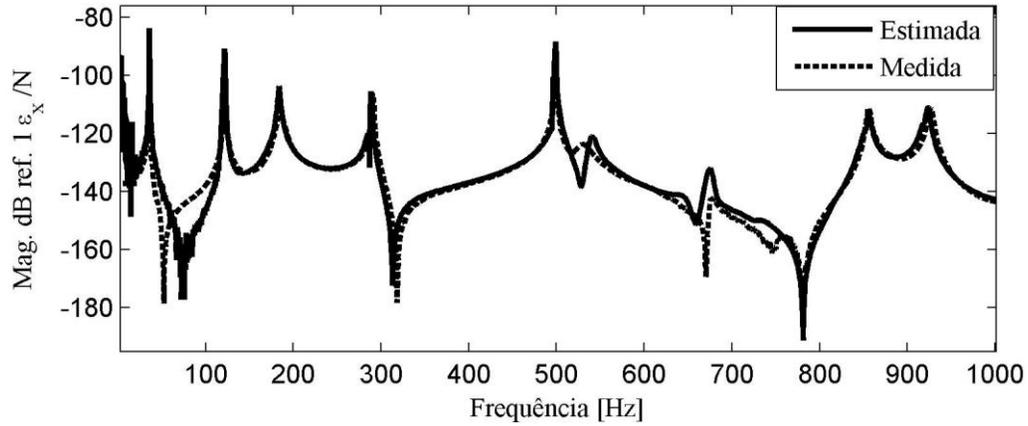


Figura 5.85 – Comparação entre a FRF de deformação  $\varepsilon_x$  medida e estimada – ponto validação 1

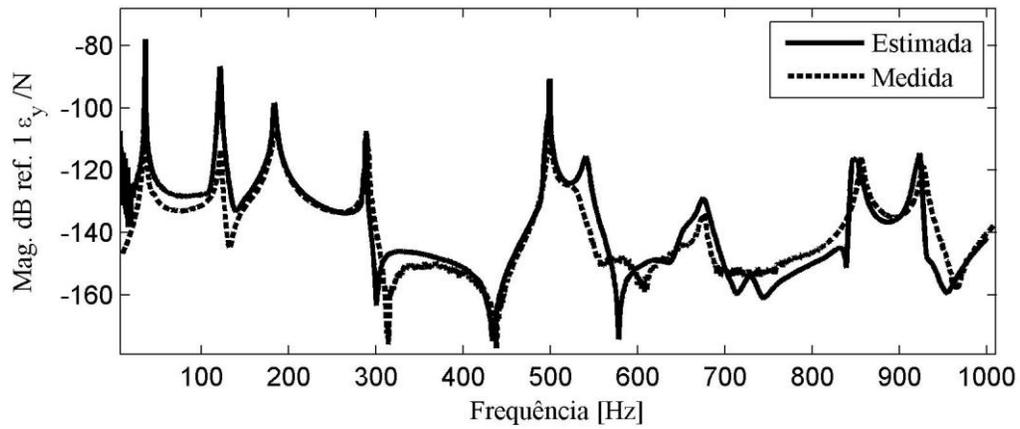


Figura 5.86 – Comparação entre a FRF de deformação  $\varepsilon_y$  medida e estimada – ponto validação 1

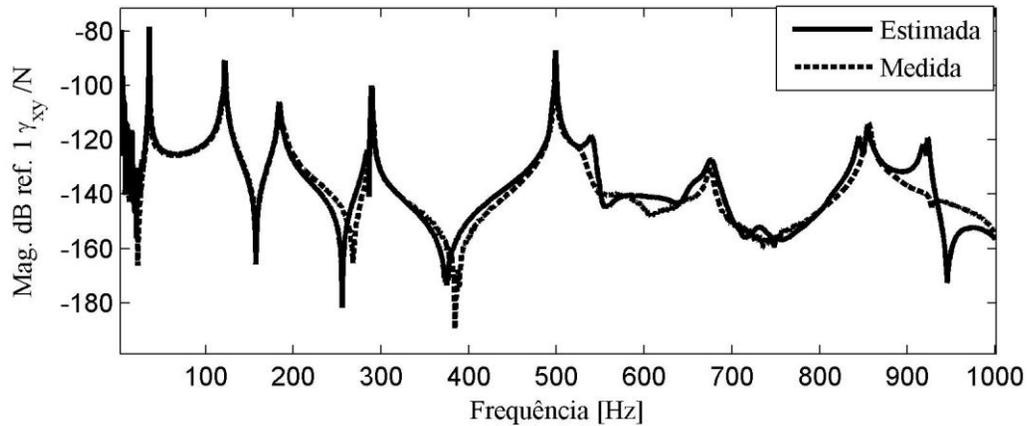
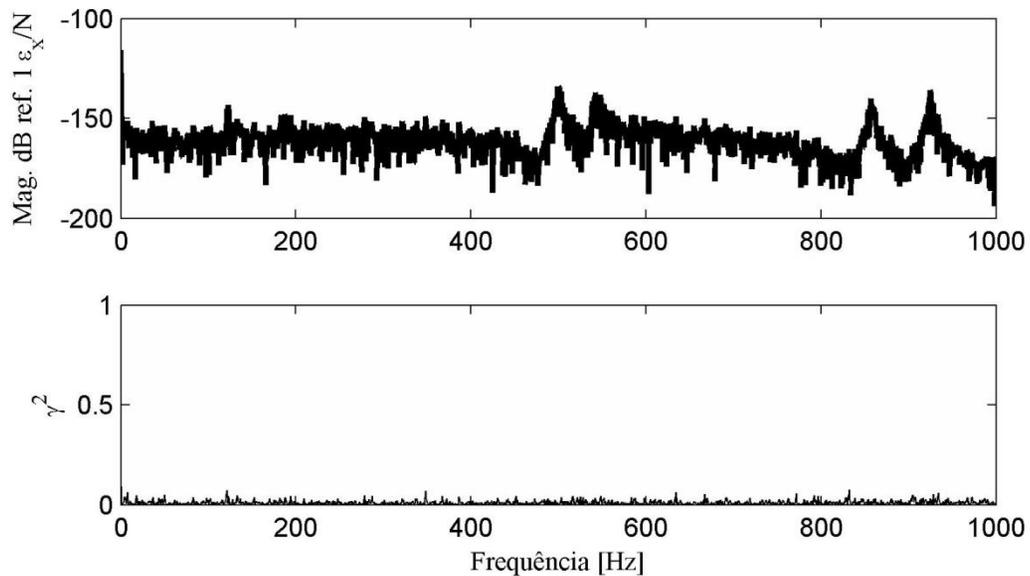


Figura 5.87 – Comparação entre a FRF de deformação  $\gamma_{xy}$  medida e estimada – ponto validação 1

Há praticamente uma boa correlação entre as deformações medidas e estimadas. Regiões onde não há uma boa correlação são regiões onde a coerência da deformação medida não é unitária. Isto pode ser observado principalmente nas Figura 5.86 e Figura 5.87 em frequências acima de 300 Hz.

### ***Deformação no ponto de validação 2***

O espectro de amplitude da FRF de deformação  $\varepsilon_x$  medida e a função de coerência do ponto de validação 2, próximo ao engaste, podem ser vistos na Figura 5.88.



**Figura 5.88 – FRF de deformação  $\varepsilon_x$  medida e função de coerência – ponto de validação 2**

A FRF de deformação  $\varepsilon_x$  apresentou coerência praticamente nula em todo o conteúdo espectral. A baixa coerência pode estar associada a problemas com o extensômetro, ou a componente de deformação na direção  $x$  no ponto de validação é nula ou muito pequena. Foram feitas diversas medições e todas apresentaram problemas. Portanto, a deformação medida na direção  $x$  não pode ser considerada nas comparações. Na Figura 5.89 está a FRF de deformação  $\varepsilon_y$  para o ponto de validação 2. A FRF de deformação cisalhante  $\gamma_{xy}$  e a função de coerência podem ser vistas na Figura 5.90.

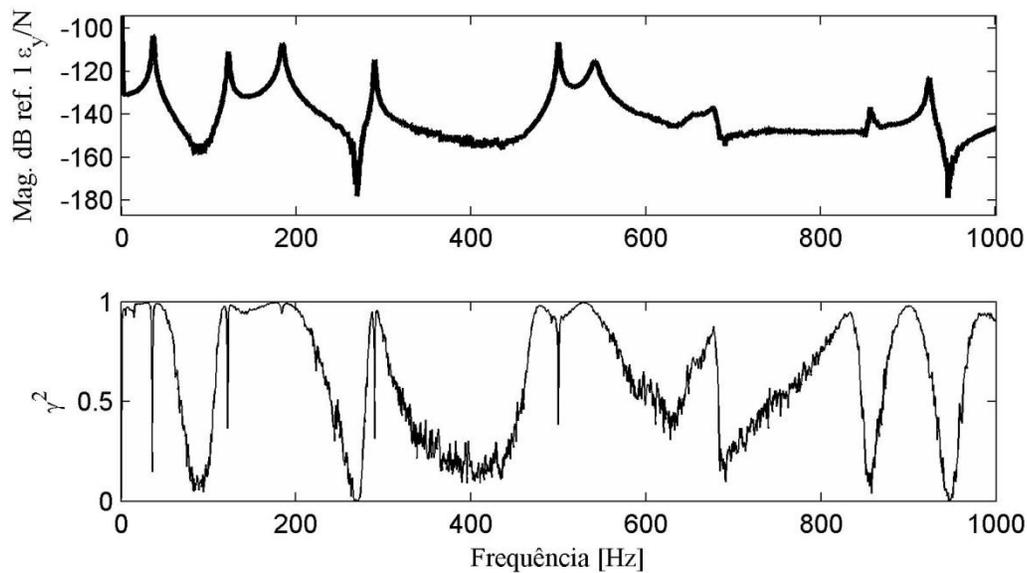


Figura 5.89 - FRF de deformação  $\varepsilon_y$  medida e função de coerência – ponto de validação 2

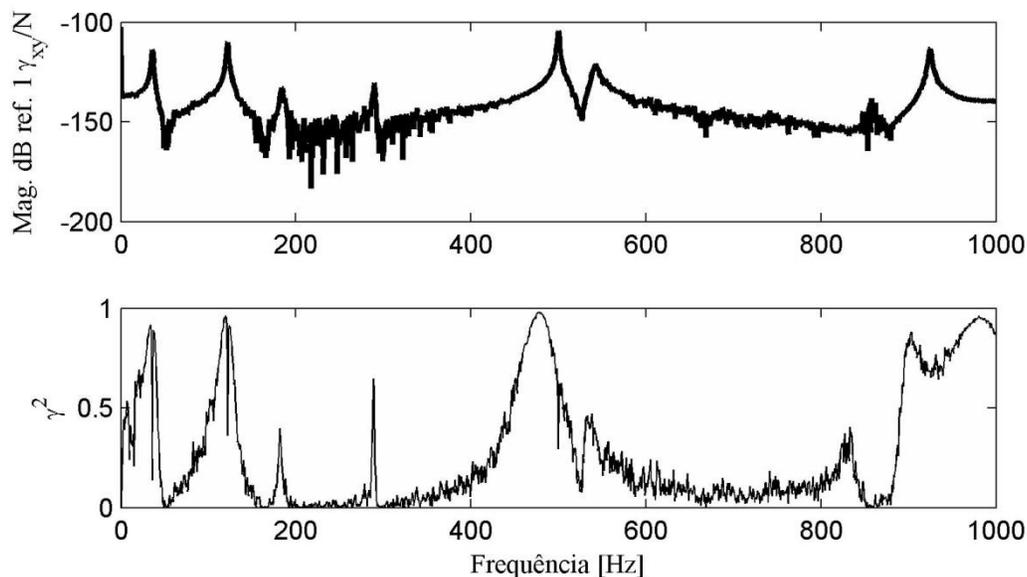


Figura 5.90 - FRF de deformação  $\gamma_{xy}$  medida e função de coerência – ponto de validação 2

O ponto de validação 2 está localizado em uma região rígida da placa, pois é próxima ao engaste. Nessa região é esperado maiores deformações nos modos de flexão da placa. Isso é observado, pois a componente de deformação  $\varepsilon_y$  apresentou melhor coerência, conforme Figura 5.89. Esta componente de deformação está associada aos modos de flexão em torno do eixo  $x$  da

placa. Ao contrário dos resultados anteriormente obtidos, a componente de deformação cisalhante apresentou baixa coerência em ampla faixa de frequência. Na região de engaste, as distorções angulares são restringidas, afetando a coerência na FRF de deformação  $\gamma_{xy}$  da Figura 5.90.

Nas Figura 5.91, Figura 5.92 e Figura 5.93, estão as comparações entre as FRF de deformação medida e estimada para as deformações  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ , respectivamente.

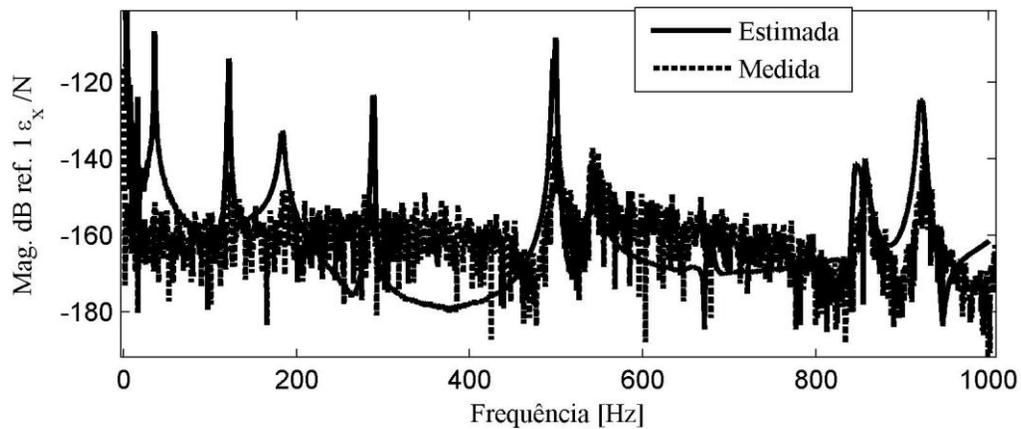


Figura 5.91 – Comparação entre a FRF de deformação  $\epsilon_x$  medida e estimada – ponto validação 2

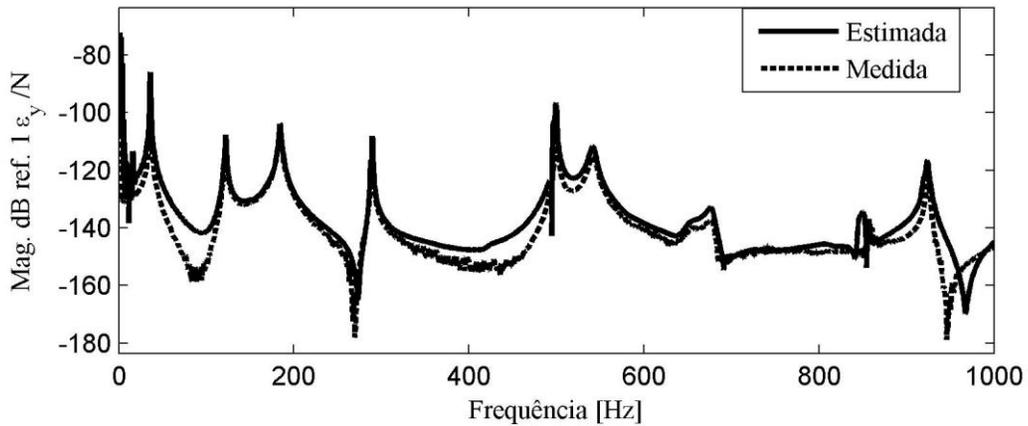


Figura 5.92 – Comparação entre a FRF de deformação  $\epsilon_y$  medida e estimada – ponto validação 2

A comparação entre a componente de deformação  $\epsilon_y$  medida e estimada mostrou melhores resultados dos observados quando são analisadas as componentes  $\epsilon_x$  e  $\gamma_{xy}$ . A baixa coerência nos

sinais de deformações medidas comprometeu as comparações dessas componentes, principalmente as deformações  $\varepsilon_x$  e  $\gamma_{xy}$ .

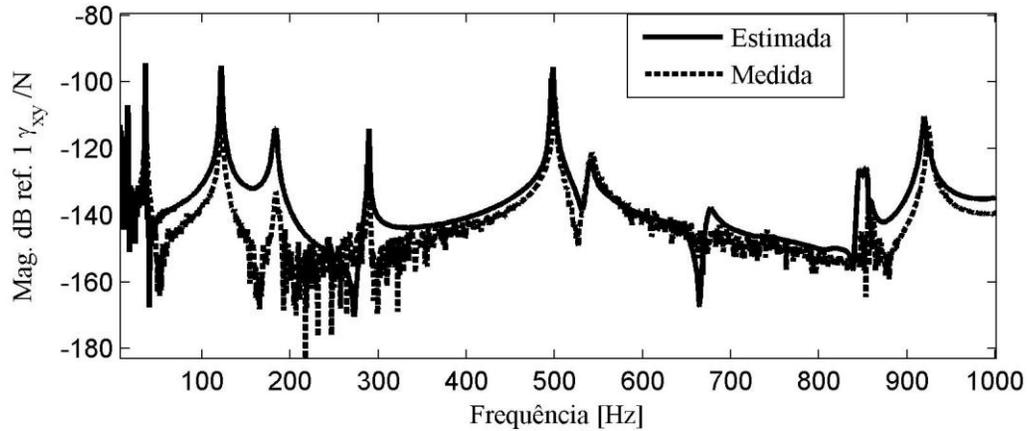
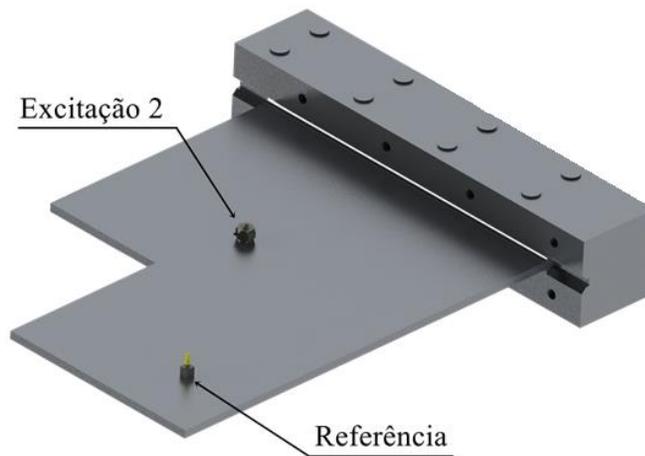


Figura 5.93 – Comparação entre a FRF de deformação  $\gamma_{xy}$  medida e estimada – ponto validação 2

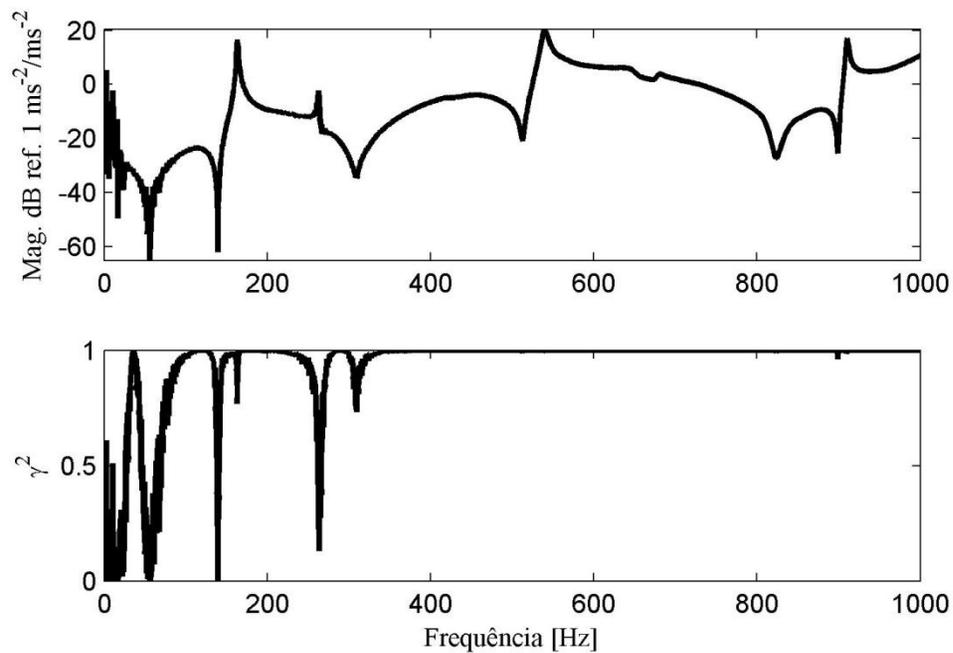
### 5.5.2 Deformação utilizando a HMA e Transmissibilidade

As transmissibilidades foram estimadas utilizando o estimador da Equação (2.118). Os parâmetros do processamento dos sinais são os mesmos utilizados anteriormente na estimação das FRF e descritos na Tabela 5.1. A localização do ponto de referência  $j$  é nas coordenadas  $0,075 \times 0,425 \times 0,0095$  m ( $x,y,z$ ). A Figura 5.94 ilustra a posição da excitação e referência adotadas para o processamento das transmissibilidades.



**Figura 5.94 – Posição da excitação e referência para estimativa das transmissibilidades**

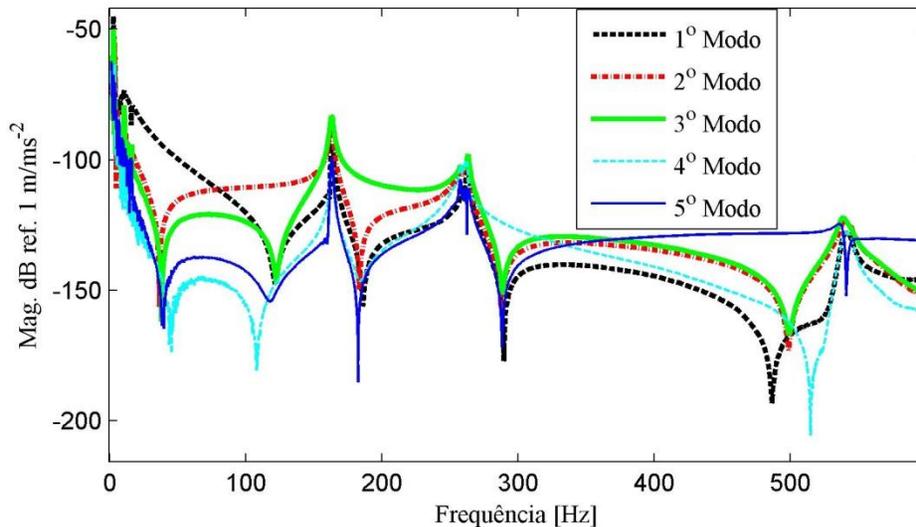
A Figura 5.95 mostra o espectro de amplitude de transmissibilidade e coerência para o ponto 14 da malha de medição representada na Figura 5.24.



**Figura 5.95 – Espectro de amplitude de Transmissibilidade e coerência do ponto 14**

Observa-se que a coerência é baixa em frequências menores que 300 Hz. Isto também acontece nas demais transmissibilidades.

As transmissibilidades de aceleração foram transformadas para transmissibilidades de deslocamento pela divisão por  $-\omega^2$ . Os coeficientes  $\{C_{est}\}$  foram estimados utilizando a Equação (3.18) e desprezando-se os resíduos. O vetor de resposta  $\{U_{med}\}$  foi considerado como sendo as transmissibilidades estimadas para os 87 pontos da superfície da placa. A Figura 5.96 mostra os espectros dos coeficientes generalizados estimados referentes aos cinco (5) primeiros modos.



**Figura 5.96 - Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados dos 5 primeiros modos**

### ***Deformação no ponto de validação 1***

As deformações no ponto de validação 1 foram calculadas pela Equação (5.1). Consideraram-se  $u$  e  $v$  as transmissibilidades de deslocamentos estimadas pela HMA nos pontos que formam a cruz de diferenças finitas ao redor do ponto 90, a qual é ilustrada na Figura 5.81. As Figura 5.97, Figura 5.98 e Figura 5.99 mostram a comparação entre a transmissibilidade de deformação medida e estimada das deformações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ , respectivamente.

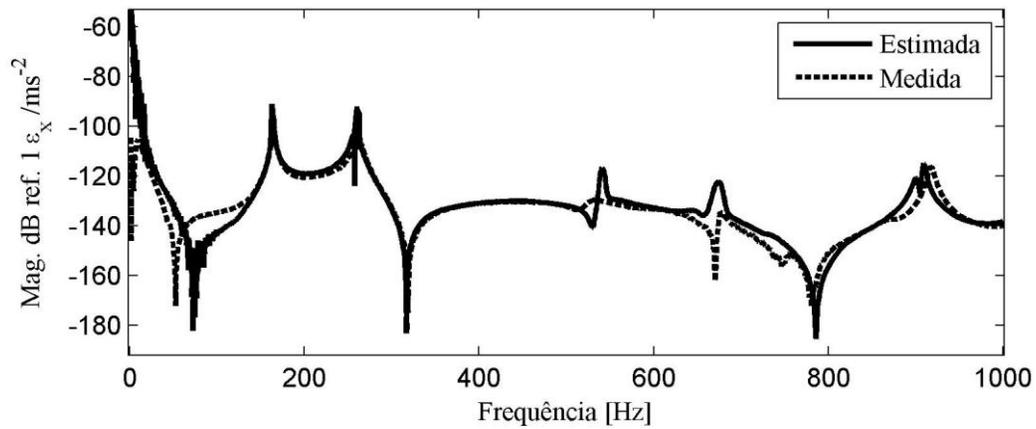


Figura 5.97 - Transmissibilidade de deformação  $\varepsilon_x$  medida e estimada no ponto de validação 1

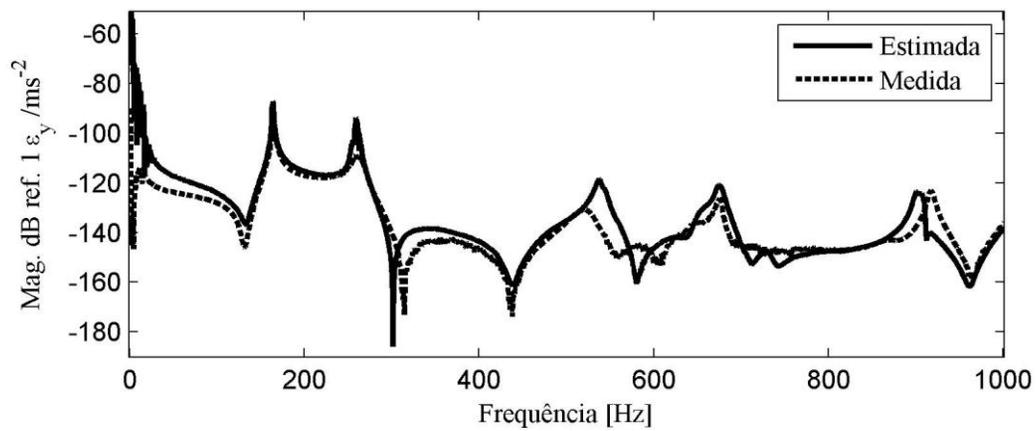


Figura 5.98 - Transmissibilidade de deformação  $\varepsilon_y$  medida e estimada no ponto de validação 1

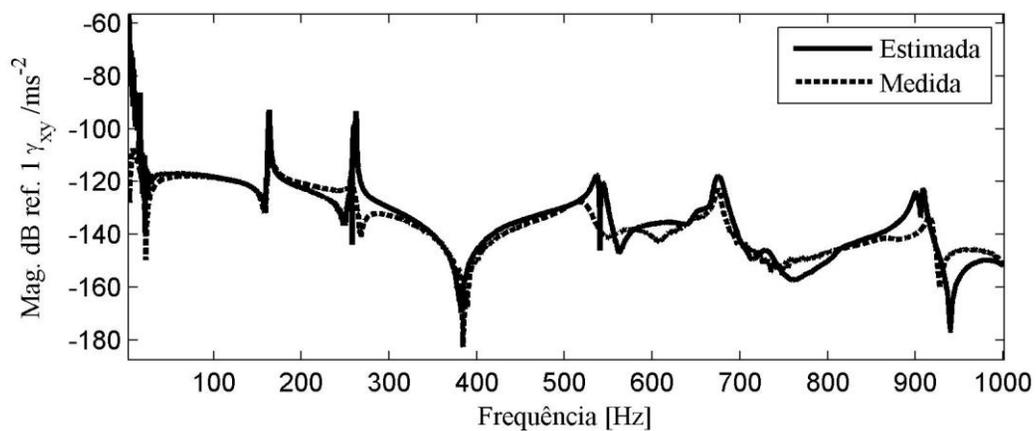


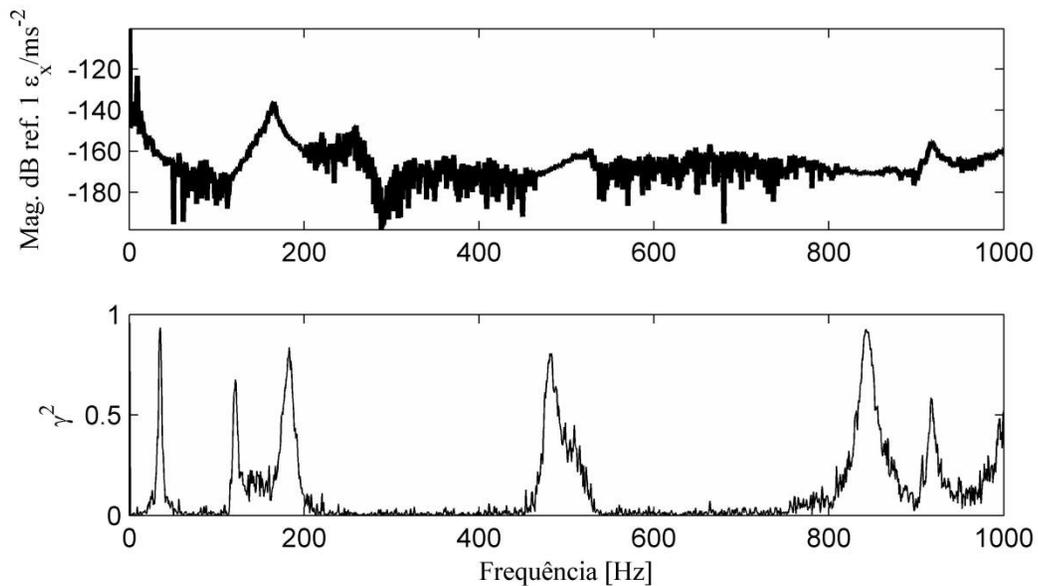
Figura 5.99 - Transmissibilidade de deformação  $\gamma_{xy}$  medida e estimada no ponto de validação 1

As diferenças entre a transmissibilidade medida e estimada em baixas frequências pode estar sendo causadas pela baixa coerência, nestas frequências, das transmissibilidades medidas.

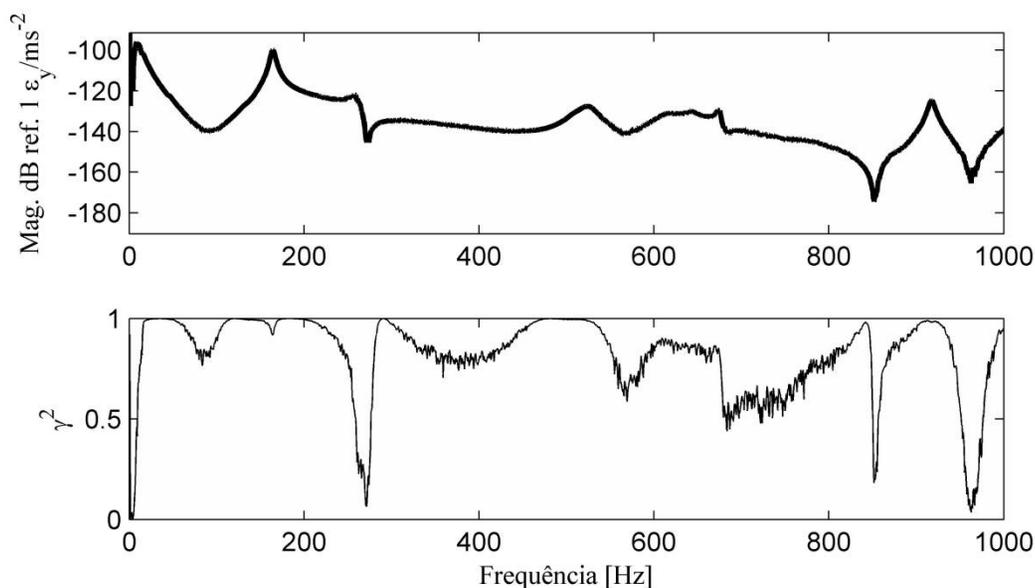
Nas frequências acima de 300 Hz as comparações podem estar sendo prejudicadas pelas baixas coerências das deformações medidas.

### ***Deformação no ponto de validação 2***

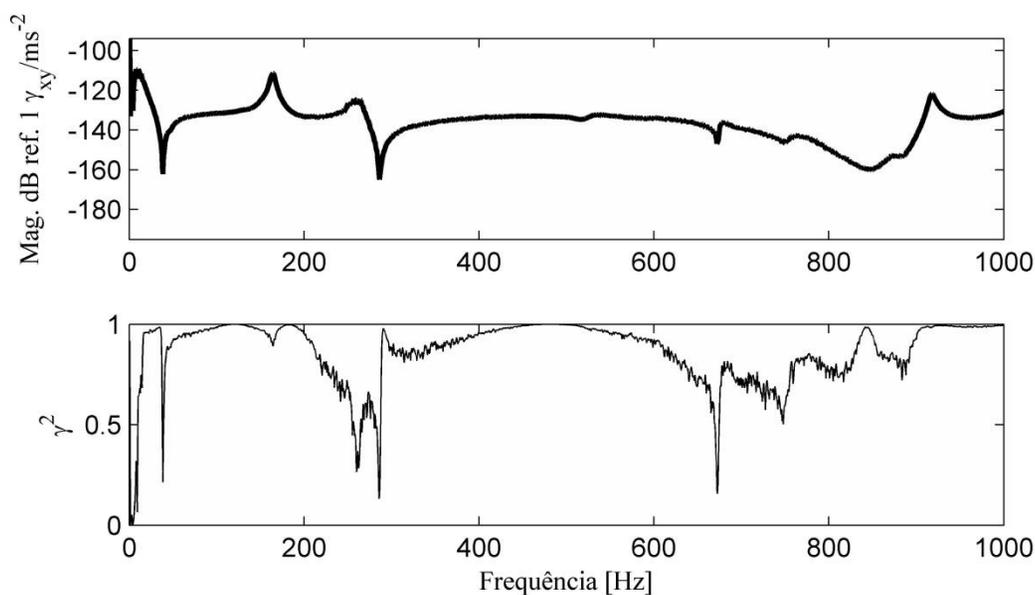
O espectro de amplitude da transmissibilidade de deformação  $\varepsilon_x$  medida e a função de coerência do ponto de validação 2, próximo ao engaste, podem ser vistos na Figura 5.100. A transmissibilidade  $\varepsilon_y$  medida pode ser vista na Figura 5.101 e transmissibilidade  $\gamma_{xy}$  pode ser vista na Figura 5.102.



**Figura 5.100 – Transmissibilidade  $\varepsilon_x$  medida e coerência no ponto de validação 2**



**Figura 5.101 – Transmissibilidade  $\epsilon_y$  medida e coerência no ponto de validação 2**



**Figura 5.102 – Transmissibilidade  $\gamma_{xy}$  medida e coerência no ponto de validação 2**

A coerência na transmissibilidade  $\epsilon_x$ , Figura 5.100, é nula igualmente à apresentada na FRF de deformação  $\epsilon_x$ .

As deformações no ponto de validação 2 foram calculadas pela Equação (5.1). Consideraram-se  $u$  e  $v$  as transmissibilidades de deslocamentos estimadas pela HMA nos pontos que formam a cruz de diferenças finitas ao redor do ponto 99, a qual é ilustrada na Figura 5.81.

As Figura 5.103, Figura 5.104 e Figura 5.105 mostram a comparação entre a transmissibilidade de deformação medida e estimada das deformações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ , respectivamente.

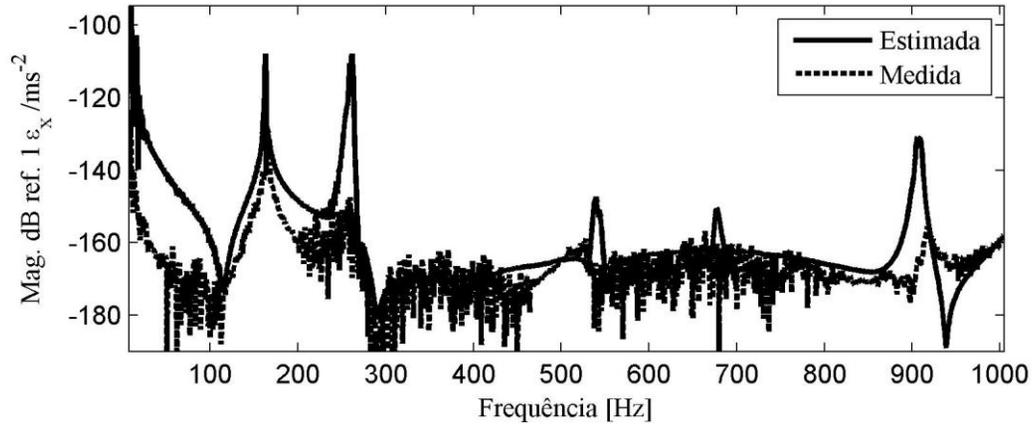


Figura 5.103 - Transmissibilidade de deformação  $\varepsilon_x$  medida e estimada no ponto de validação 2

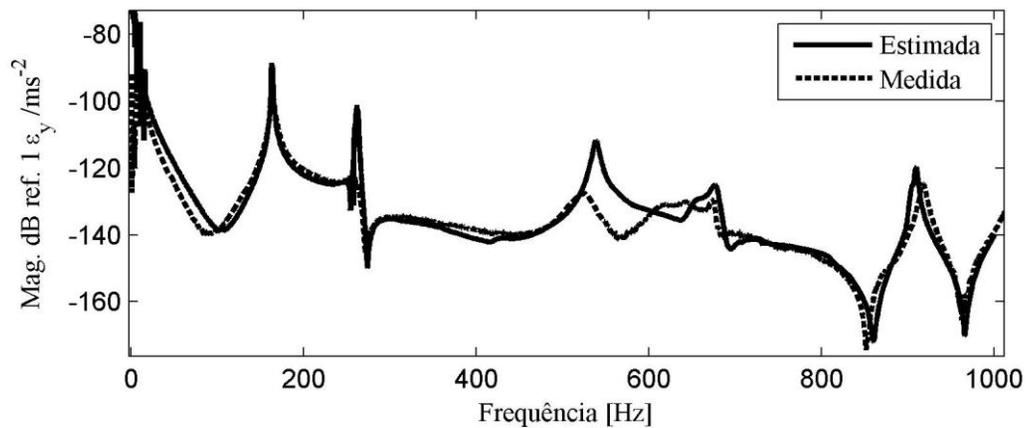


Figura 5.104 - Transmissibilidade de deformação  $\varepsilon_y$  medida e estimada no ponto de validação 2

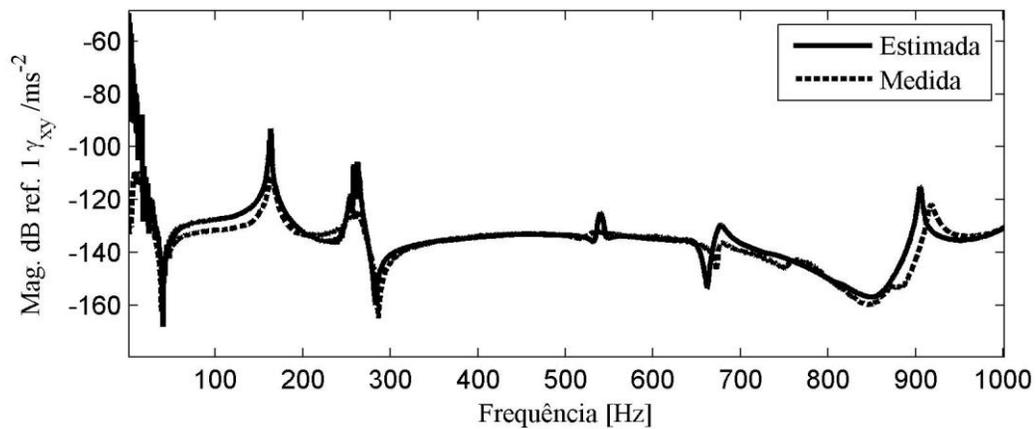


Figura 5.105 - Transmissibilidade de deformação  $\gamma_{xy}$  medida e estimada no ponto de validação 2

### 5.5.3 Deformação utilizando a matriz de transformação

Nas seções anteriores, a deformação foi estimada pela análise modal híbrida. No entanto, a deformação nos pontos de validação também foi estimada utilizando o método da matriz de transformação. Considerando a resposta medida nos 87 pontos da malha de medição, a matriz modal  $[\Phi]_{N_1 \times M}$  foi construída levando-se em conta somente as componentes de deslocamento modal  $\phi_{jr}$ , obtidas na aproximação numérica em ANSYS®, na direção perpendicular à superfície da placa não deformada, direção  $z$ , com  $j = 1, 2, \dots, N_1$  e  $r = 1, 2, \dots, M$ . Sendo  $N_1 = 87$  correspondente aos pontos de medição e  $M = 9$  o número de modos do truncamento da matriz modal. O número  $M$  escolhido se refere à frequência simulada para a placa de  $f_M = 1034,6$  Hz. Essa frequência é maior que a faixa de interesse, a qual foi escolhida como sendo 1000 Hz. Além disso, o 10º modo natural de frequência 1135,9 Hz é um modo planar de flexão em torno do eixo  $z$ . Neste modo os deslocamentos na direção  $z$  são nulos. Como é necessária a inversão da matriz modal de deslocamento para a determinação da matriz de transformação, resíduos numéricos deste modo simulado causam distorções nas deformações estimadas, quando o mesmo é considerado na matriz modal. A Figura 5.106 ilustra o 10º modo simulado em ANSYS®.

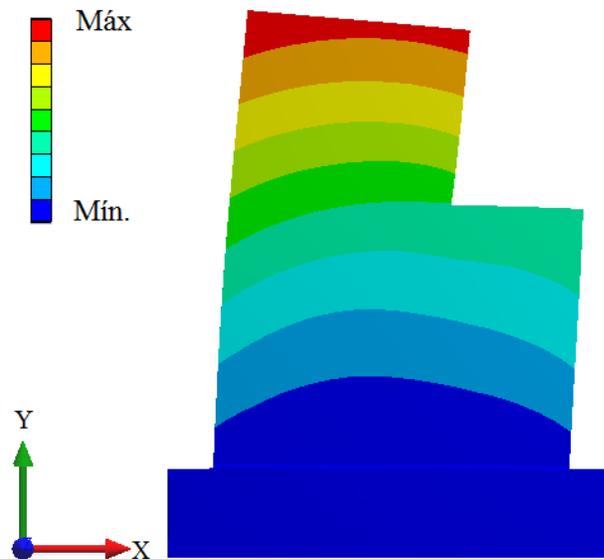
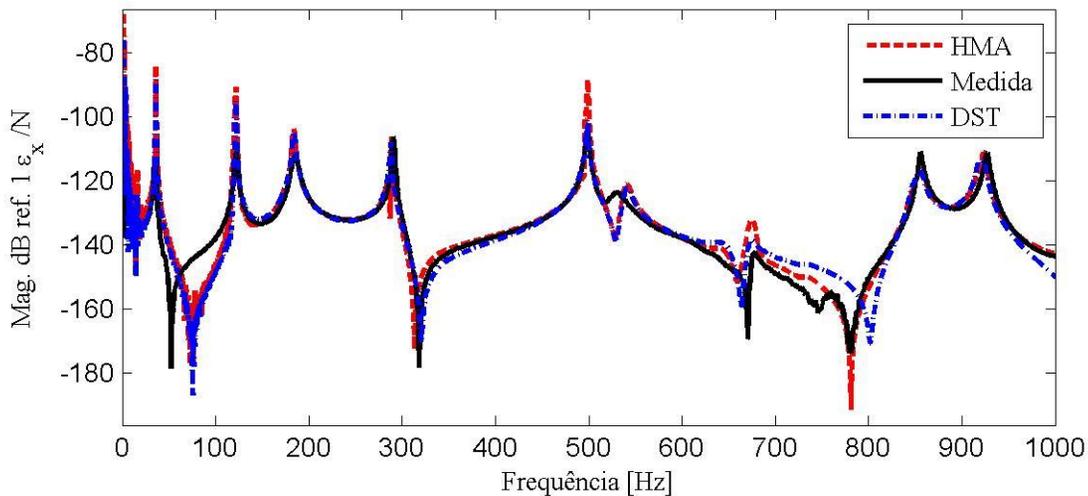


Figura 5.106 – Modo de flexão em torno do eixo  $z$  - 10º modo elástico - 1135,9 Hz - Simulado no ANSYS®

As matrizes de deformação  $[\varepsilon_x]_{N_2 \times M}$ ,  $[\varepsilon_y]_{N_2 \times M}$  e  $[\varepsilon_{xy}]_{N_2 \times M}$  foram construídas convenientemente com as componentes de deformação modal  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ , respectivamente, e também obtidas na aproximação numérica em ANSYS®, para os 87 pontos de medição de aceleração e adicionalmente, para os pontos de validação, indicado na Figura 5.81. Assim  $N_2 = 89$ . Com isso, as matrizes de transformação para cada componente de deformação foram determinadas pela Equação (3.7).

Sendo o vetor  $\{x\}_{N_1 \times N_f}$  constituído pelas FRF de receptâncias medidas, com  $N_f$  o número de pontos do vetor de frequência, as FRF de deformação foram estimadas para os  $N_2$  pontos pela Equação (3.8). Na Figura 5.107 é possível se comparar as FRF de deformação  $\varepsilon_x$  estimadas pela matriz de transformação e análise modal híbrida com a deformação medida. A Figura 5.108 mostra as FRF de deformação  $\varepsilon_y$  e a Figura 5.109 mostra as FRF de deformação  $\gamma_{xy}$ .



**Figura 5.107 – FRF de deformação  $\varepsilon_x$  estimada por: HMA e matriz de transformação; e FRF medida no ponto de validação 1**

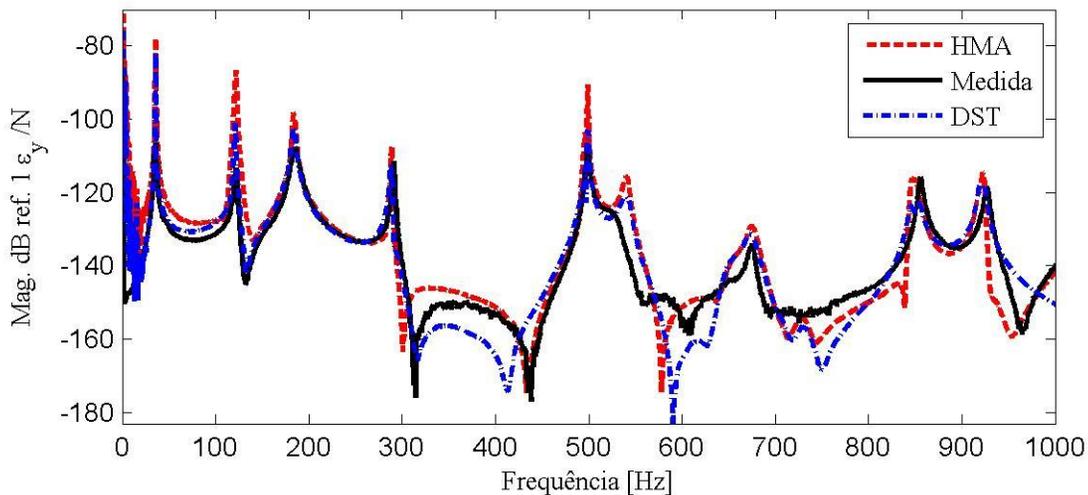


Figura 5.108 – FRF de deformação  $\varepsilon_y$  estimada por: HMA e matriz de transformação; e FRF medida - ponto de validação 1

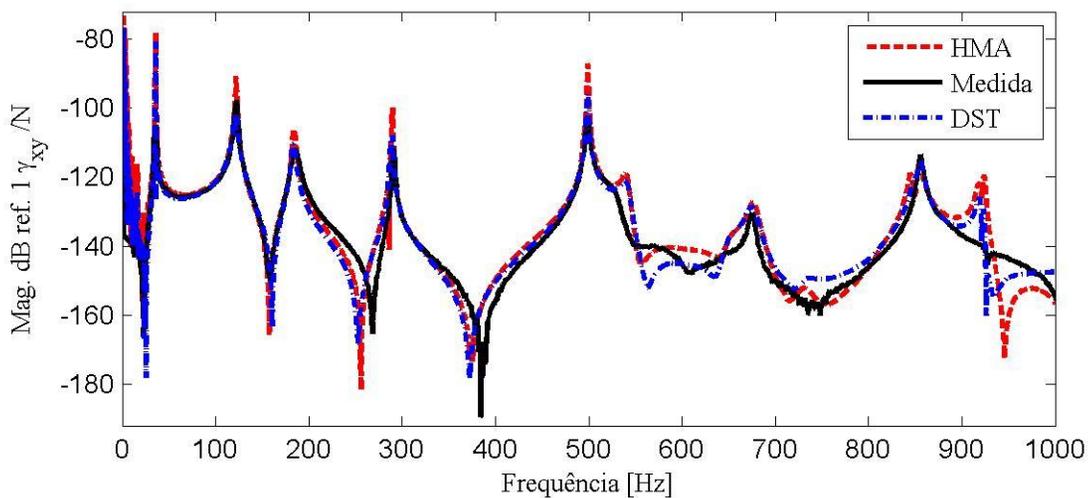
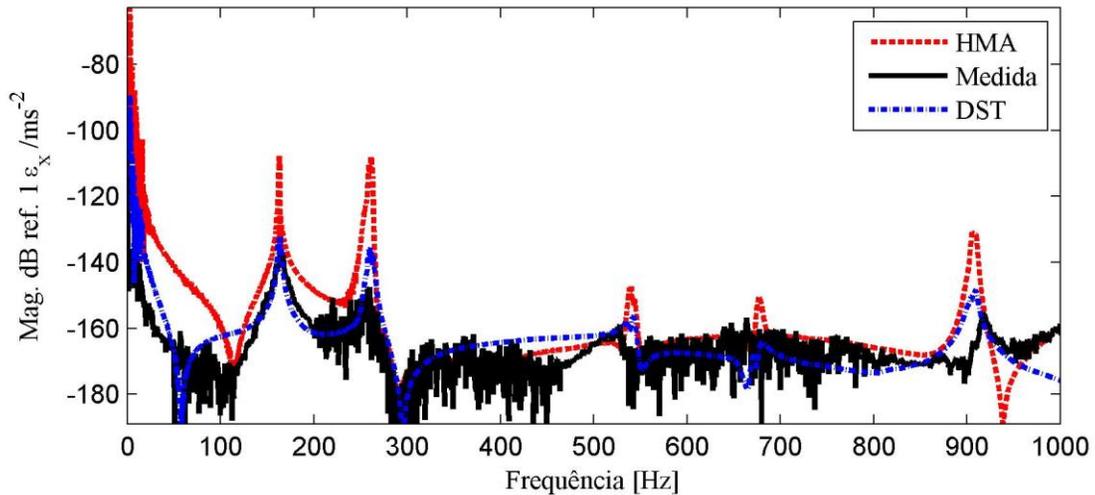


Figura 5.109 – FRF de deformação  $\gamma_{xy}$  estimada por: HMA e matriz de transformação; e FRF medida - ponto de validação 1

As deformações estimadas pela matriz de transformação se aproximam às deformações estimadas pela análise modal híbrida. Em algumas frequências as deformações estimadas pela matriz de transformação se aproximam melhor às deformações medidas, quando comparadas com as estimadas pela HMA.

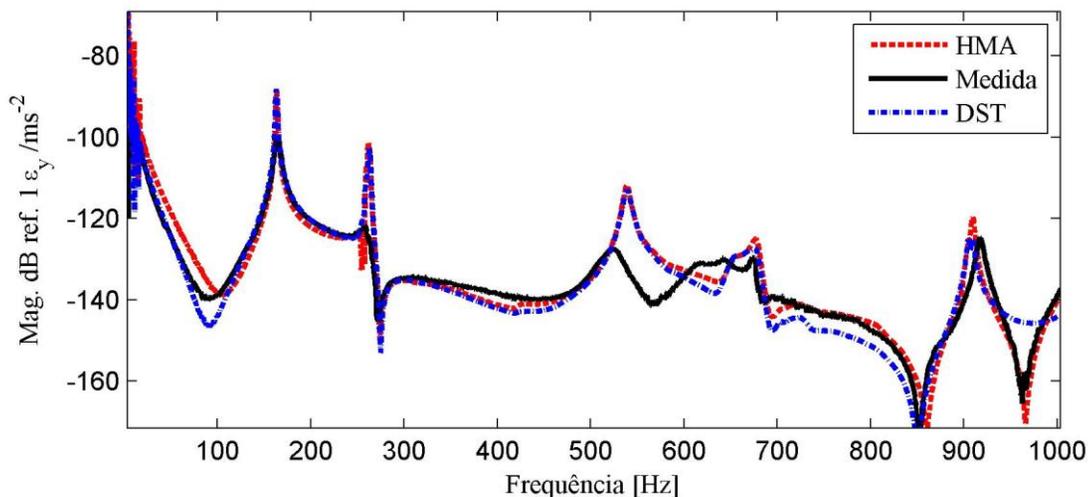
Sendo o vetor  $\{x\}_{N_1 \times N_f}$  constituído pelas transmissibilidades de deslocamento medidas na direção  $z$ , com  $N_f$  o número de pontos do vetor de frequência, as transmissibilidades de

deformação foram estimadas para os  $N_2$  pontos pela Equação (3.8). A Figura 5.110 mostra as transmissibilidades de deformação  $\varepsilon_x$  para o ponto de validação 2.



**Figura 5.110 – Transmissibilidade de deformação  $\varepsilon_x$  estimada por: HMA e matriz de transformação; e Transmissibilidade medida no ponto de validação 2**

A deformação  $\varepsilon_x$  estimada pela matriz de transformação se aproximou melhor da deformação medida, embora a transmissibilidade  $\varepsilon_x$  medida não poderia ser considerada nas comparações, devido à baixa coerência nas medições. A Figura 5.111 mostra as transmissibilidades de deformação  $\varepsilon_y$  para o ponto de validação 2.



**Figura 5.111 – Transmissibilidade de deformação  $\varepsilon_y$  estimada por: HMA e matriz de transformação; e Transmissibilidade medida no ponto de validação 2**

A Figura 5.112 mostra as transmissibilidades de deformação  $\gamma_{xy}$  para o ponto de validação 2.

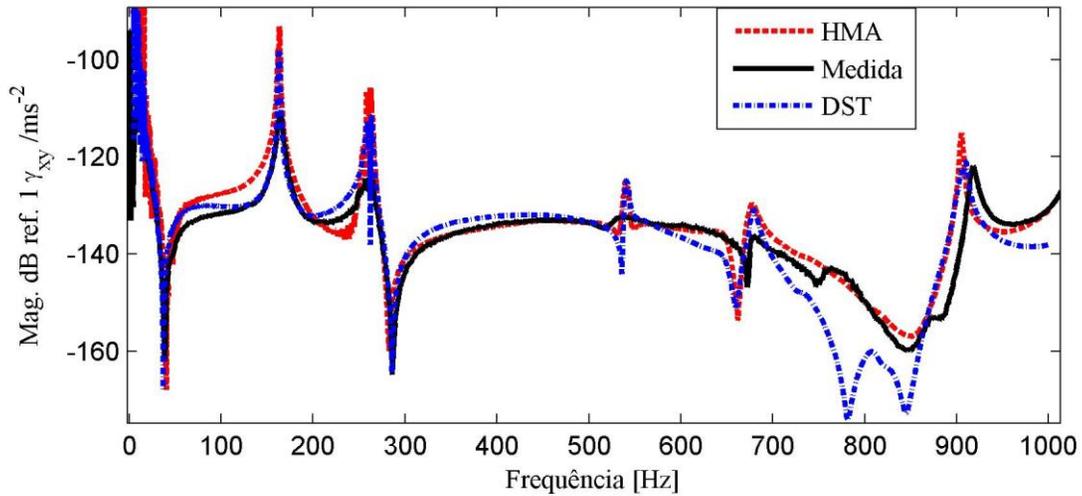


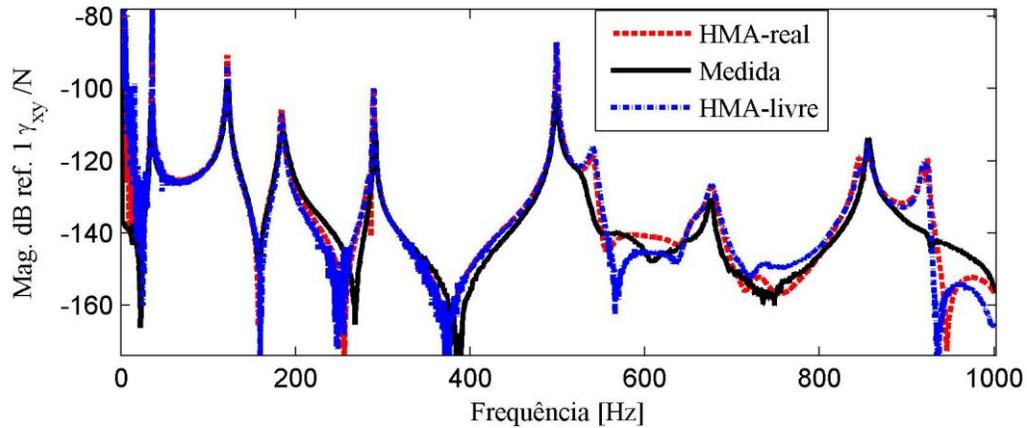
Figura 5.112 – Transmissibilidade de deformação  $\gamma_{xy}$  estimada por: HMA e matriz de transformação; e Transmissibilidade medida no ponto de validação 2

#### 5.5.4 Estimação da deformação utilizando matrizes modais da condição livre-livre

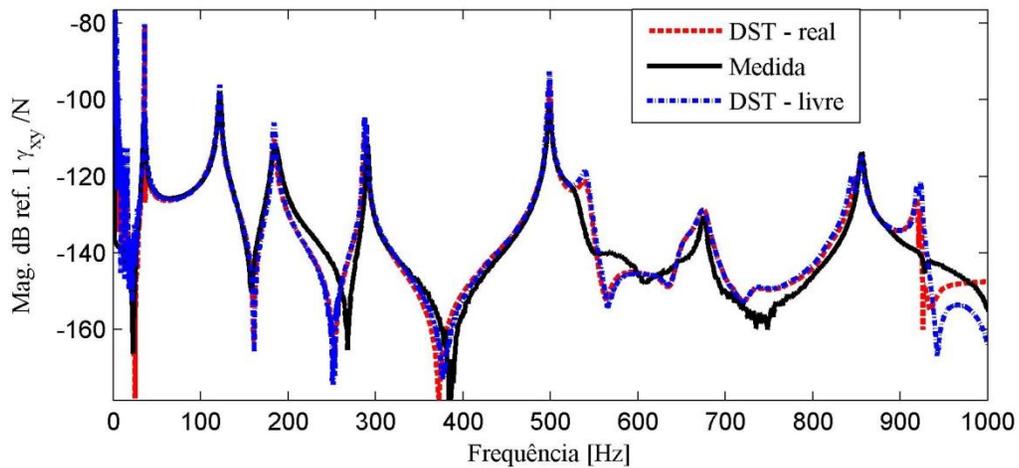
As deformações no ponto de validação 1, ilustrado na Figura 5.78, também foram estimadas considerando as matrizes modais simuladas para a condição livre – livre da placa. Os procedimentos para se estimar a deformação foram os mesmos realizados anteriormente nesta seção. No entanto, em vez de se utilizar as matrizes modais simuladas com a condição de engaste, foi utilizado as matrizes simuladas nas seções anteriores para a placa na condição livre – livre. As matrizes de deslocamento tridimensionais, simuladas em elementos finitos considerando os parâmetros da Tabela 5.3, foram utilizadas para se estimar a deformação pelo método da análise modal híbrida. A matriz de transformação determinada na seção 5.4.10, também para a condição livre – livre da placa, foi utilizada para se estimar a deformação pelo método da matriz de transformação.

A Figura 5.113 mostra: a FRF de deformação  $\gamma_{xy}$  estimada utilizando as matrizes modais simuladas para a condição de engaste, a qual é dita como a condição real da placa analisada; a FRF de deformação  $\gamma_{xy}$  estimadas utilizando as matrizes modais simuladas para a condição livre –

livre e também a FRF de deformação  $\gamma_{xy}$  medida. A Figura 5.114 mostra as mesmas FRF, entretanto, estimadas pela matriz de transformação.



**Figura 5.113 – FRF de deformação  $\gamma_{xy}$  estimadas por HMA considerando matrizes modais simuladas para a condição livre – livre e engastada, e também a FRF medida**



**Figura 5.114 - FRF de deformação  $\gamma_{xy}$  estimadas pela matriz de transformação considerando matrizes modais simuladas para a condição livre – livre, e engastada e também a FRF medida**

Há um ajuste semelhante nos casos analisados. Em frequências acima de 550 Hz, não há uma boa aproximação da deformação estimada com a medida em todos os casos. A análise modal híbrida mostrou-se mais sensível nas regiões de antirressonâncias quando é considerado matrizes modais simuladas com condições de contorno não condizente com as que a peça está submetida, conforme pode ser observado na Figura 5.113 nas frequências próximas a 250 e 400 Hz. Entretanto, de modo geral, pode-se dizer que não houve alteração significativas na aproximação

da deformação estimada com a medida, quando são utilizadas diferentes condições de contorno nas simulações das matrizes modais.

### **5.5.5 Considerações finais**

Os métodos de estimação, matriz de transformação e análise modal híbrida, foram avaliados em dois pontos na placa engastada. Um ponto próximo ao recorte da placa, ponto de validação 1, e outro próximo ao engaste, ponto de validação 2. As deformações estimadas foram comparadas com as deformações medidas. No ponto de validação 1, houve uma boa aproximação da deformação estimada com a medida, utilizando as transmissibilidades ou as FRF. No ponto de validação 2, a comparação foi prejudicada pela baixa coerência nas medições de deformação, a qual pode estar associada às pequenas amplitudes de deformação e a baixa sensibilidade do extensômetro.

O modelo inicial em elementos finitos da placa engastada foi o mesmo utilizado anteriormente na placa livre – livre, alterando-se a condição de contorno. Um modelo, o qual considera o bloco do engaste da placa e o filete de solda, também foi utilizado. Com este modelo não houve alteração na aproximação da deformação estimada com a medida. Este resultado é importante, pois no caso avaliado, foi possível se obter bons resultados utilizando um modelo simplificado da placa.

Este resultado também está de acordo com o que foi mencionado por Okubo e Yamaguchi (1995) em relação à matriz de transformação. Segundo os autores, a matriz de transformação é independente do domínio, tempo ou frequência, e alterações nas condições de contorno e de distribuição de massa. No item seguinte, a deformação será estimada no domínio do tempo, onde será possível se verificar a utilização da matriz de transformação em diferentes domínios, tempo e frequência. No que diz respeito à estimação da deformação utilizando a matriz de transformação, nos casos analisados, mesmo que ocorreram alterações nas condições de contorno da peça analisada, pode-se dizer que a matriz de transformação é constante às alterações nas condições de contorno.

Entretanto, foram simulados casos onde foi estimada a deformação próxima às extremidades engastadas, por exemplo, de uma viga. Neste caso, na região de engaste, onde espera-se uma maior deformação devido à flexão, a deformação estimada pela matriz de transformação, determinada considerando a viga em condição livre – livre, apresentou valores nulos. O que ocorre é o seguinte: a matriz de transformação é determinada pela matriz modal de deformação e a inversa da matriz modal de deslocamento, conforme Equação (3.4). Na condição livre – livre da viga, para os modos de flexão, as extremidades apresentam deformação nula. Isto faz com que a linha da matriz de deformação, referente ao grau de liberdade da extremidade, tenha valores nulos, resultando também em uma linha de valores nulos na matriz de transformação. Assim, qualquer valor de deslocamento será transformado para deformação nula quando é utilizado esta matriz de transformação, não sendo condizente com o esperado, onde na região de engaste tem-se grandes deformações.

Em relação à análise modal híbrida, a mesma está relacionada com a convergência da série generalizada de Fourier, a qual considera que os vetores utilizados formem uma base ortogonal em um espaço de Hilbert. Sehlstedt (2001b) fez uma simulação da análise modal híbrida local, a qual é uma extensão da análise modal híbrida. Nesta simulação, Sehlstedt utilizou os modos tridimensionais aproximados por elementos finitos de apenas uma parte de uma placa retangular, a qual considerou livre – livre. Após estimou os coeficientes generalizados utilizando esses modos e as respostas simuladas para a placa, como um todo, engastada em dois de seus lados. Os deslocamentos estimados pela HMA foram utilizados para prever a deformação em pontos na região da placa engastada, correspondente à parte utilizada na aproximação dos modos.

## **5.6 Estimação da deformação no domínio do tempo**

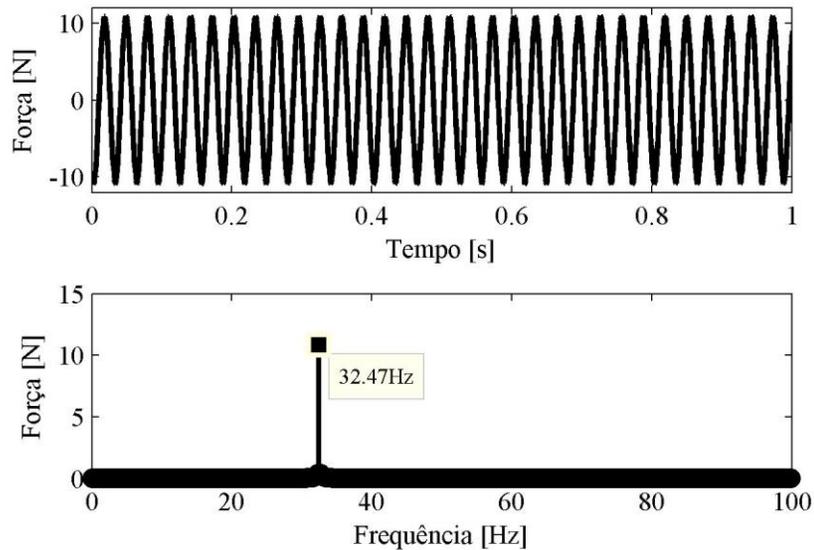
Diversos problemas em situações operacionais estão relacionados às rotações das máquinas e suas frequências naturais. Assim sendo, o conhecimento da amplitude de deformação, em frequências específicas ou no domínio do tempo, é muito importante para o diagnóstico e monitoramento da integridade estrutural do equipamento. Por este motivo, os métodos de estimação da deformação no domínio do tempo são avaliados experimentalmente nesta seção.

As componentes de deformação no ponto de validação 1, Figura 5.78 da placa engastada, foram estimadas seguindo os mesmos passos realizados na simulação da deformação na viga item 4.1. A placa engastada foi considerada nesta avaliação, pois a condição de engaste se adequa às condições reais.

A placa foi submetida à excitação harmônica de amplitude de aproximadamente 10 N e frequência de 32 Hz. Esta frequência é próxima à primeira frequência natural da placa, a qual é aproximadamente 35,8 Hz, e também está relacionada à rotação da maioria dos motores elétricos, empregados em máquinas e equipamentos. A força de excitação foi aplicada à placa a partir do excitador e gerada a partir do gerador de sinal harmônico. A Figura 5.115 ilustra as posições da excitação e referência. Também mostra a foto do excitador suspenso conectado à placa por meio de uma haste delgada (*stinger*). As posições da excitação e referência são as mesmas dos experimentos relatados anteriormente. A Figura 5.116 mostra a representação da força no domínio do tempo e da frequência.

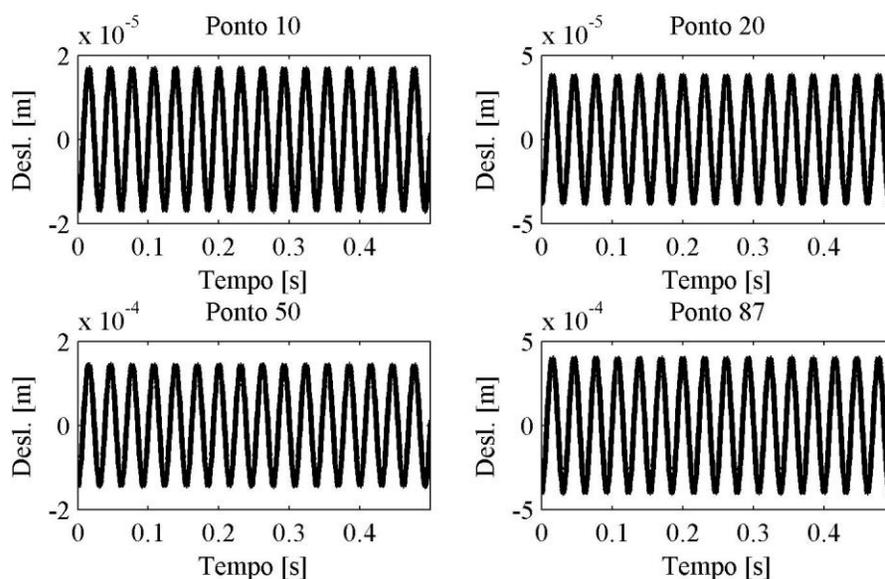


**Figura 5.115 – Posição da excitação harmônica e referência placa engastada**



**Figura 5.116 – Força de excitação de amplitude 10 N e frequência 32,47 Hz aplicada na placa**

As acelerações foram medidas nos 87 pontos de medição, conforme a malha de medição da Figura 5.24, na direção perpendicular à superfície da placa, direção  $z$ . Utilizou-se um acelerômetro DeltaTron® tipo 4508 piezoelétrico de sensibilidade  $10,06 \text{ mV/ms}^{-2}$ , para as medições. Para o sinal de referência foi utilizado um acelerômetro de mesmo tipo e sensibilidade  $9,96 \text{ mV/ms}^{-2}$ . As medições foram realizadas ponto a ponto. As fases dos sinais foram corrigidas conhecendo-as a partir da densidade espectral cruzada, Equação (2.112), entre os sinais medidos e o sinal de referência. Os sinais foram adquiridos com frequência de amostragem de 2000 Hz. As acelerações medidas foram convertidas para deslocamentos pela divisão por  $-\omega^2$ . Os deslocamentos medidos, com a fase já corrigida, dos pontos de medição 10; 20; 50 e 87 estão representados na Figura 5.117.



**Figura 5.117 – Deslocamentos harmônicos de pontos da placa engastada**

Os deslocamentos na extremidade livre da placa, pontos 50 e 87, são da ordem de 10 vezes maior que nas regiões próximas ao engaste, conforme pode ser observado na Figura 5.117. O primeiro modo natural da placa é um modo de flexão com maior deflexão na extremidade livre.

### 5.6.1 Deformação utilizando a análise modal híbrida

Os deslocamentos no domínio do tempo foram transformados para o domínio da frequência utilizando o algoritmo de FFT no MATLAB® 7.14. Os coeficientes  $\{C_{est}\}$  foram estimados utilizando a Equação (3.18) e desprezando-se os resíduos. O vetor de resposta  $\{U_{med}\}$  foi considerado como sendo os deslocamentos no domínio da frequência. Foram utilizadas 78 medições. Eliminaram-se as medições dos 9 primeiros pontos da placa devido à baixa relação sinal – ruído. Consideraram-se os 5 primeiros modos simulados em elementos finitos para a estimação dos coeficientes generalizados. Na Figura 5.118 estão os coeficientes generalizados estimados utilizando os sinais no domínio da frequência. Na Figura 5.119 é possível observar a participação dos modos na resposta. O coeficiente generalizado do primeiro modo apresenta maior amplitude, pois a frequência de excitação é próxima à primeira frequência natural.

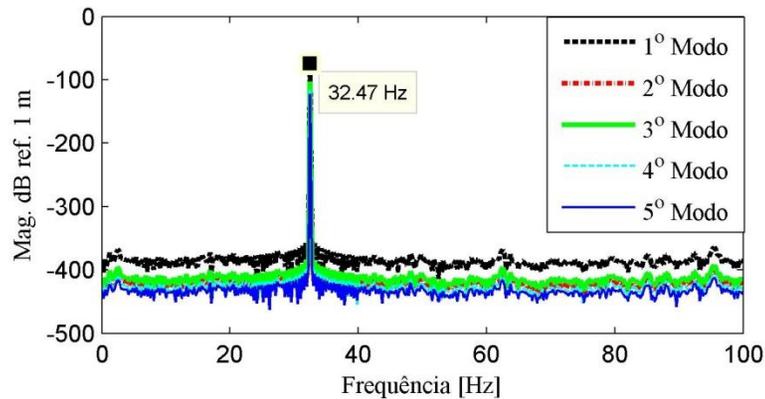


Figura 5.118 – Espectro de amplitude dos coeficientes generalizados dos 5 primeiros modos da placa

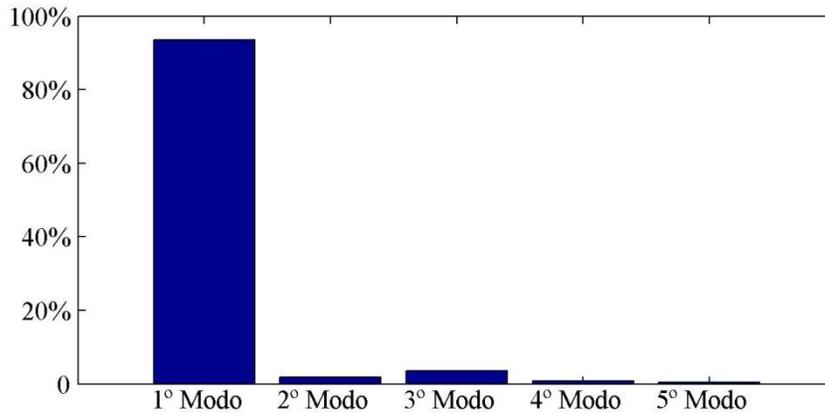


Figura 5.119 – Participação maior do primeiro modo na resposta em 32 Hz

Os deslocamentos  $u$  e  $v$  foram estimados pela Equação (3.19) nos pontos que formam a cruz de diferenças finitas ao redor do ponto 90, a qual é ilustrada na Figura 5.81. Esses deslocamentos foram transformados novamente para o domínio do tempo a partir da transformada inversa de Fourier. Para tal, foi utilizado o algoritmo de IFFT no MATLAB® 7.14.

Os deslocamentos temporais foram utilizados no cálculo das componentes de deformação pela Equação (5.1). As deformações estimadas pela HMA foram comparadas com as deformações medidas. As deformações foram medidas nas mesmas condições de excitação e processamento das acelerações. A informação da fase entre as deformações medidas e o sinal de referência também foi utilizado para correção do sinal temporal das deformações medidas. A Figura 5.120 mostra as componentes de deformação  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  no domínio do tempo, na qual é possível comparar as deformações estimadas com as medidas.

As deformações estimadas praticamente se igualaram às deformações medidas. A deformação  $\varepsilon_x$  estimada apresentou menor amplitude do que a medida. O erro de aproximação para a deformação  $\varepsilon_x$  foi de 20%. Este erro é representativo. No entanto, a deformação  $\varepsilon_x$  apresenta o menor valor de amplitude em relação às outras componentes. Em termos da deformação equivalente, calculada pela Equação (2.20), o erro diminui para 5%. Sendo o módulo de elasticidade para o alumínio de 77 GPa e a relação tensão-deformação, a deformação  $\varepsilon_x$  representa uma tensão de 0,4 MPa, e o erro representa 0,096 MPa.

No caso da placa analisada, a deformação normal  $\varepsilon_y$  e a deformação cisalhante  $\gamma_{xy}$  apresentam praticamente a mesma amplitude na frequência de 32,4 Hz, conforme pode ser observado na Figura 5.120.

Inicialmente utilizou-se 79 pontos de medição na estimação da deformação. Considerando um número reduzido de medições necessárias para aplicação da análise modal híbrida, selecionou-se 24 pontos da malha de medição. Os pontos selecionados estão ilustrados na Figura 5.121. As deformações  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  estimadas para um número reduzido de medições se aproximaram às deformações medidas. Entretanto, o erro percentual na estimação da deformação  $\varepsilon_x$  aumentou para 30%.

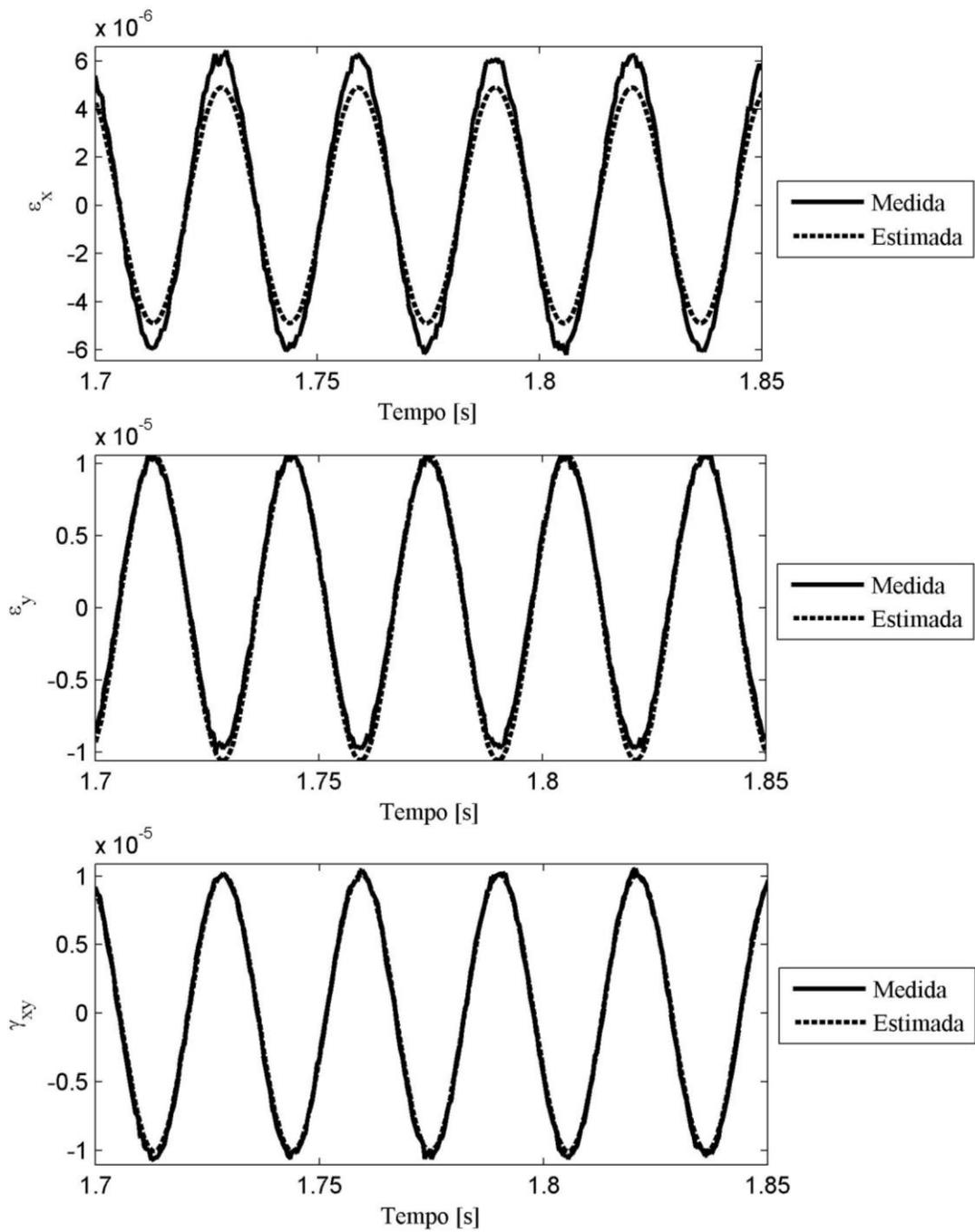


Figura 5.120 – Componentes de deformação  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  no domínio do tempo – medidas e estimadas por HMA-ponto de validação 1

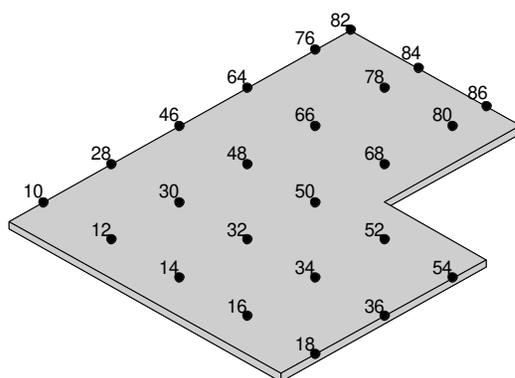
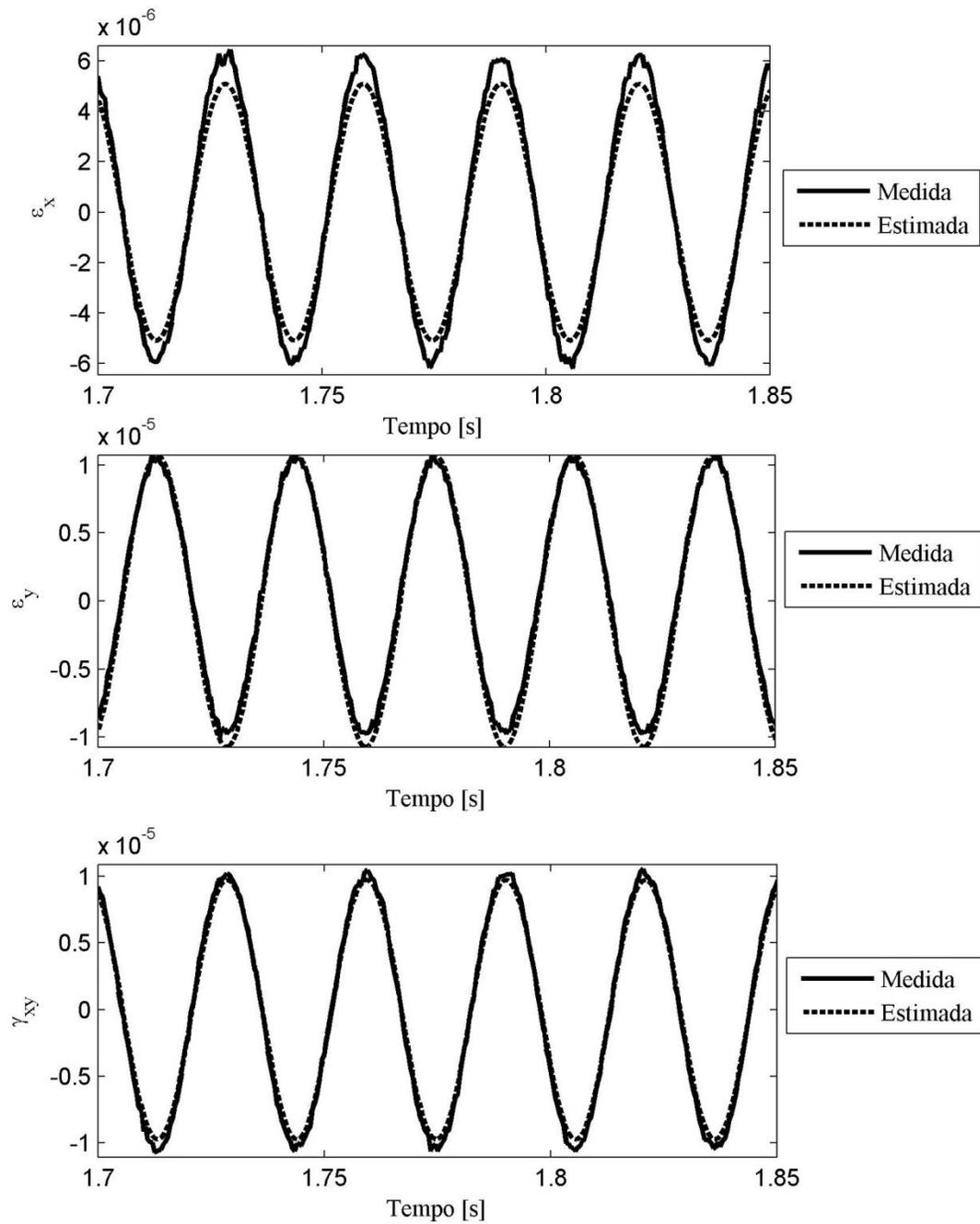


Figura 5.121 – 24 pontos de medição selecionados para aplicação dos métodos em malha de medição reduzida

### 5.6.2 Deformação utilizando a matriz de transformação

As componentes de deformação no domínio do tempo foram estimadas também pela matriz de transformação. Foi utilizada a mesma matriz de transformação determinada no item 5.5.3. Entretanto o vetor  $\{x\}_{N_1 \times N_f}$  foi considerado como sendo os deslocamentos medidos no domínio do tempo, com  $N_1 = 87$  e  $N_f$  o número de pontos do vetor de tempo. As componentes de deformação foram estimadas para o ponto de validação 1 pela Equação (3.8). A Figura 5.122 mostra as componentes de deformação  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  no domínio do tempo, estimadas pela matriz de transformação e medidas.

As deformações estimadas se aproximaram às deformações medidas. Utilizando a matriz de transformação, o erro na estimação da deformação  $\epsilon_x$  foi de 19%. Considerando apenas 24 medições nos pontos ilustrados anteriormente na Figura 5.121, os resultados foram os mesmos que considerando 87 medições. O erro na aproximação da amplitude de deformação  $\epsilon_x$  se manteve em 19%.



**Figura 5.122 - Componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  no domínio do tempo – medidas e estimadas pela matriz de transformação - ponto de validação 1**

### 5.6.3 Considerações finais

Nesta seção foi avaliada experimentalmente a estimação da deformação no domínio do tempo. No caso avaliado foi considerada uma fonte de excitação única e harmônica na placa engastada com recorte. A frequência da força excitadora foi uma frequência próxima à primeira frequência natural da placa e próxima à frequência de rotação de motores elétricos comumente empregados em máquinas e equipamentos. As deformações foram estimadas utilizando a análise modal híbrida e a matriz de transformação. As deformações estimadas foram comparadas com as deformações medidas em um ponto próximo ao recorte da placa.

As deformações estimadas se aproximaram às deformações medidas. No entanto, as deformações  $\epsilon_x$  estimadas, tanto pela análise modal híbrida quanto pela matriz de transformação, apresentaram amplitude menor que a deformação medida. Esse erro de aproximação pode estar associado a diversos fatores. Pode haver problemas na aproximação dos modos de deslocamento na direção  $x$  em elementos finitos ou erros de medição da deformação. Os erros de medição da deformação podem ser: fator de sensibilidade do extensômetro incorreto e problemas na colagem. Erros associados ao método de diferenças finitas podem ser descartados, pois os erros na estimação da amplitude foram praticamente os mesmos para a estimação via análise modal híbrida ou matriz de transformação. No método da matriz de transformação não se utiliza o método de diferenças finitas.

A vantagem da utilização da matriz de transformação em relação à análise modal híbrida, na estimação da deformação no domínio do tempo, é a não necessidade de conversão tempo – frequência dos sinais de deslocamento. A análise modal híbrida é um método no domínio da frequência enquanto a matriz de transformação é independente. A mesma matriz de transformação pode ser utilizada para converter o deslocamento em deformação, sendo que o deslocamento pode estar no domínio do tempo ou da frequência.

Na utilização da malha de medições reduzida, a matriz de transformação mostrou-se menos sensível a alteração do número de medições. Na análise modal híbrida, o erro de aproximação aumentou quando foi utilizado um número reduzido de medições.

## 5.7 Estimação da deformação pelo método direto

Na presente seção é proposta a identificação dos modos de deformação operacionais utilizando um acelerômetro triaxial e o método de elementos finitos. A identificação dos modos de deformação é baseada na *Operating Deflection Shapes* (ODS) convencional.

Inicialmente, a avaliação experimental foi realizada na placa de alumínio com recorte, ilustrada na Figura 5.24, na condição livre – livre. A placa foi mantida suspensa por fios de nylon. Foi submetida à excitação aleatória ruído branco com componente de frequência de 0 a 2000 Hz e perpendicular à superfície. As acelerações foram medidas nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  nos 87 pontos de medição. Foi utilizado um acelerômetro triaxial DeltaTron® tipo 4506 Brüel & Kjaer com sensibilidade: 10,26; 10,00 e 9,98  $\text{mV/ms}^{-2}$  nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. A sensibilidade transversal do acelerômetro é menor que 5% e sua massa é igual a 15 gramas. A carta do acelerômetro pode ser observada no Anexo B. Um acelerômetro uniaxial DeltaTron® tipo 4508 com sensibilidade 9,86  $\text{mV/ms}^{-2}$  foi mantido fixo durante as medições como sinal de referência. As posições da excitação e referência adotadas foram as ilustradas na Figura 2.9.

As FRF foram obtidas utilizando o estimador  $H_1$  da Equação (2.110). Os dados do processamento são os mesmos mostrados na Tabela 5.1. Na Figura 5.123 estão as amplitudes das acelerâncias (linha cheia) e coerência (linha tracejada) do *drive point* nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Essas direções são as direções cartesianas ilustradas na Figura 5.24. As amplitudes de vibração na direção planar da placa,  $x$  e  $y$ , são da ordem de 5 a 7 vezes menor que a amplitude de vibração na direção  $z$ , perpendicular à superfície da placa. Mesmo assim, há uma boa coerência nas FRF estimadas para as três direções. Exceto em frequências abaixo de 150 Hz na direção  $x$ .

As transmissibilidades dos 87 pontos foram estimadas pela Equação (2.118). Os dados do processamento são os mesmos mostrados na Tabela 5.1. Na Figura 5.124 estão as amplitudes das transmissibilidades (linha cheia) e coerência (linha tracejada) do ponto 77 e considerando a referência localizada na Figura 2.9.

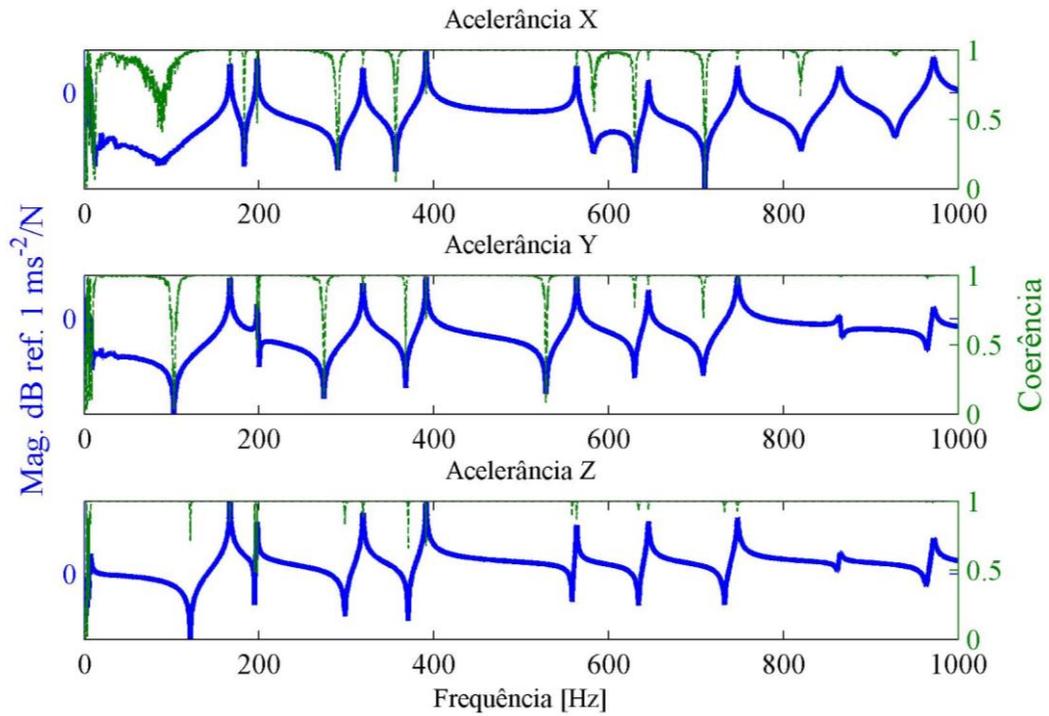


Figura 5.123 – Amplitude e coerência das acelerações triaxiais do *drive point*

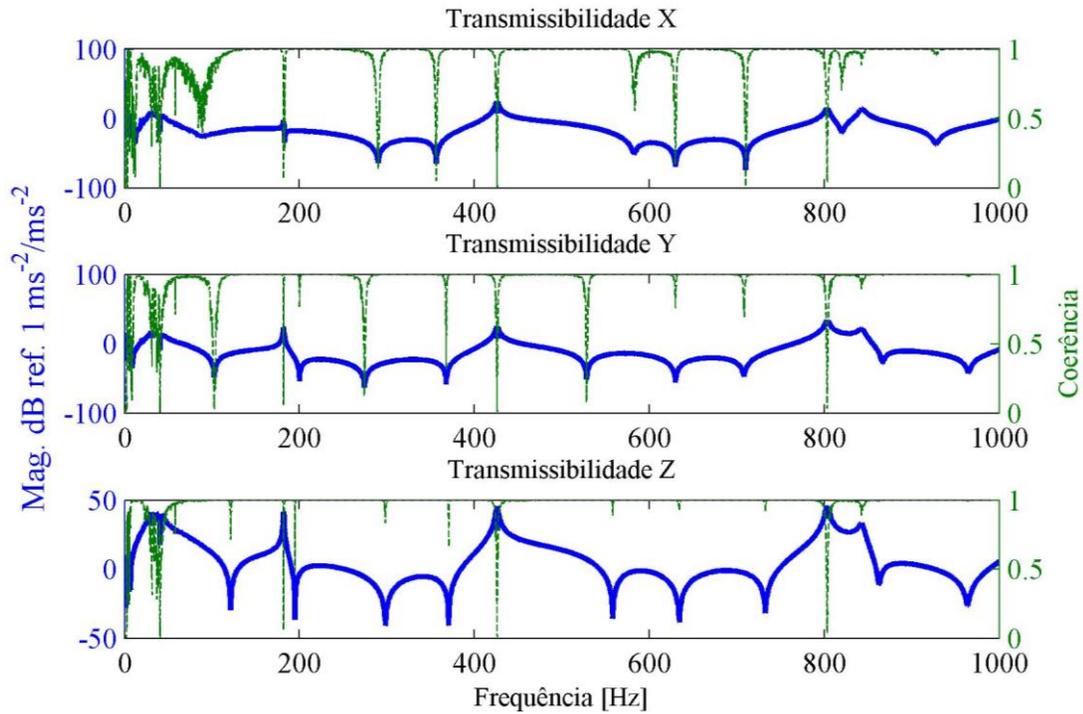
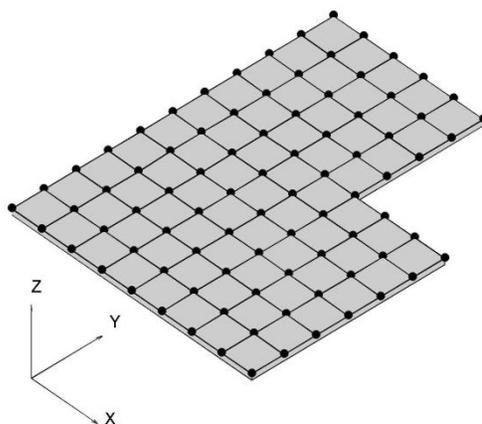


Figura 5.124 – Amplitude e coerência das transmissibilidades do ponto 77

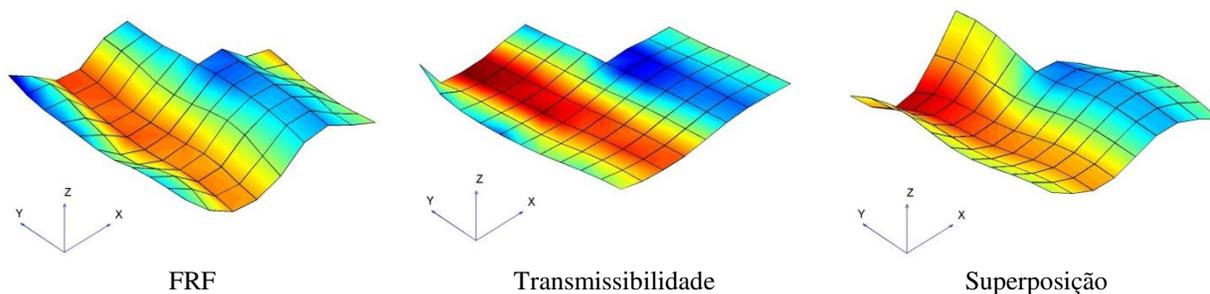
As acelerações e transmissibilidades de aceleração foram transformadas para receptância e transmissibilidade de deslocamento pela divisão por  $-\omega^2$ . Modos operacionais de deslocamentos foram determinados baseados na ODS e nas receptâncias e transmissibilidades. Os modos de deslocamentos foram convertidos para modos de deformação utilizando o método de elementos finitos. Foi utilizado o elemento quadrilateral de 4 nós, ilustrado na Figura 2.3. A Figura 5.125 mostra a malha de elementos finitos utilizada. As deformações em cada elemento foram calculadas pela Equação (2.35). As deformações em cada nó foram determinadas pela média das deformações incidentes em cada nó.

Os modos operacionais de deformação são comparados com os modos obtidos a partir das receptâncias simuladas por superposição modal e tratadas no item 5.4.1. Foram escolhidas algumas frequências para identificação dos modos operacionais de deformação.



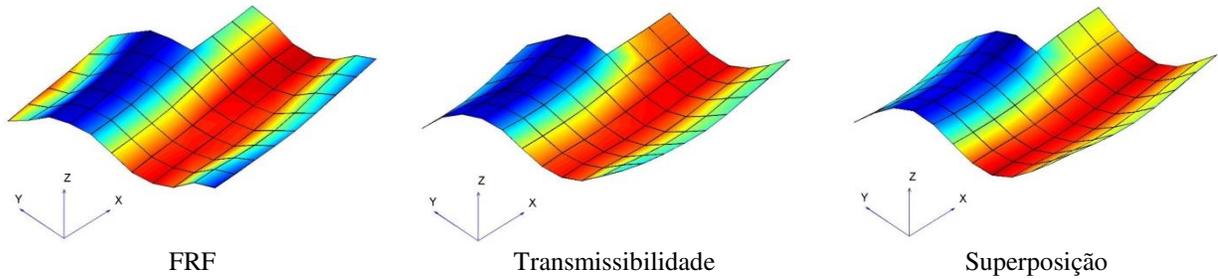
**Figura 5.125 – malha de elementos finitos 4 nós**

Na Figura 5.126 estão os modos de deformação  $\epsilon_x$  na frequência de 870 Hz identificados pelas FRF, transmissibilidade e superposição.

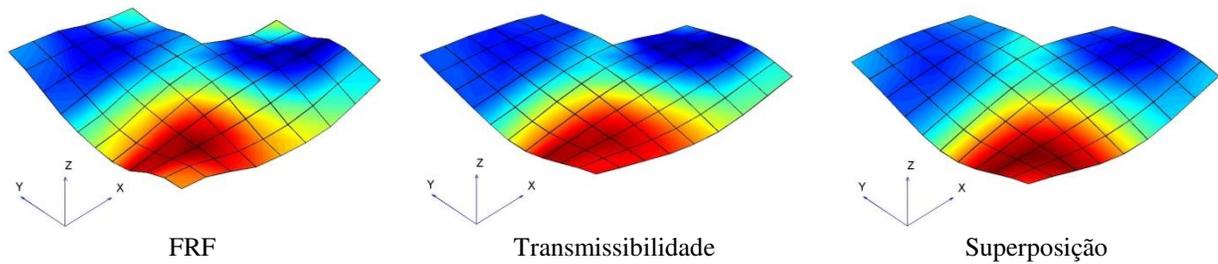


**Figura 5.126 – Modos de deformação  $\epsilon_x$  na frequência de 870 Hz**

O modo de deslocamento identificado pela transmissibilidade não é corretamente representado. No entanto, é possível se identificar praticamente a mesma distribuição de deformação  $\epsilon_x$ , seja pela FRF, transmissibilidade ou superposição. Na Figura 5.127 é possível se observar os modos de deformação  $\epsilon_y$  na frequência de 570 Hz. Na Figura 5.128 estão os modos de deformação operacionais  $\gamma_{xy}$  na frequência de 660 Hz.

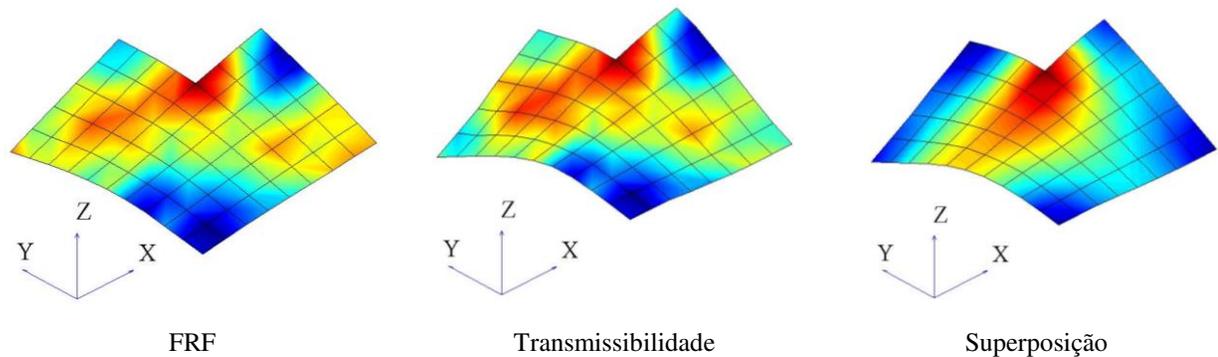


**Figura 5.127 - Modos de deformação  $\epsilon_y$  na frequência de 570 Hz**



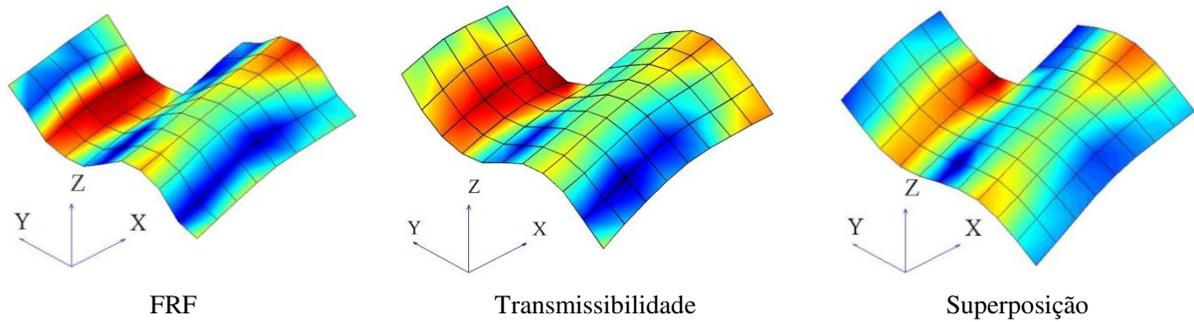
**Figura 5.128 - Modos de deformação  $\gamma_{xy}$  na frequência de 660 Hz**

A Figura 5.129 mostra a distribuição da deformação equivalente calculada pela Equação (2.20) e utilizando as FRF, transmissibilidades e superposição modal.



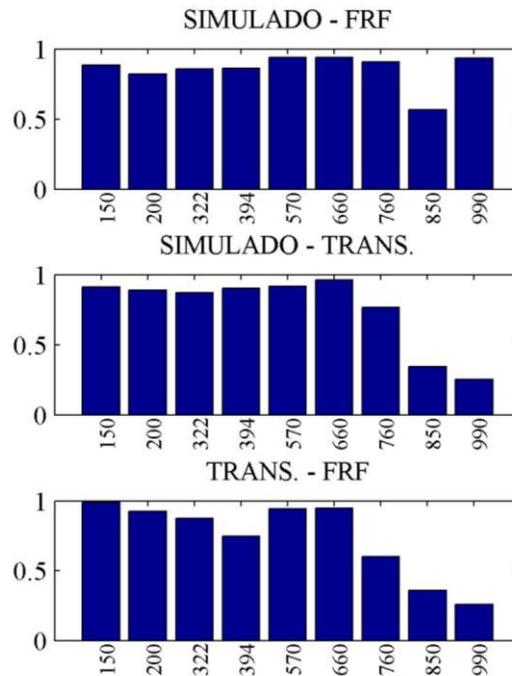
**Figura 5.129 – Deformação equivalente na frequência de 150 Hz**

Todas as distribuições de deformações equivalente na superfície da placa indicam a região de concentração de tensão no recorte da placa na Figura 5.129. Na Figura 5.130 estão os modos operacionais de deformação equivalente na frequência de 570 Hz.



**Figura 5.130 – Deformação equivalente na frequência de 570 Hz**

Considerando as frequências selecionadas na Figura 5.63, os modos de deformação equivalente foram correlacionados utilizando o *Modal Assurance Criterion* (MAC). Na Figura 5.131 estão representados os valores da diagonal principal do MAC por meio de gráficos de barras.



**Figura 5.131 – Modal Assurance Criterion entre os modos de deformação equivalente**

Para as frequências abaixo de 760 Hz os modos apresentaram bons valores do MAC. O MAC do modo de deformação equivalente em 990 Hz pode estar sendo prejudicado pela incorreta identificação da deformação na direção  $y$ . Este problema também foi verificado nos modos determinados pela análise modal híbrida na Figura 5.71. Os modos de deslocamento e deformação em 850 Hz não foram corretamente identificados. Houve grande alteração nas frequências dos picos de ressonância próxima a 850 Hz. Essa diferença pode estar associada às diferentes posições do acelerômetro triaxial na placa, o que pode ter ocasionado alteração no sistema. Em algumas FRF, a frequência de 850 Hz está acima da 8ª frequência de ressonância, e em outras está abaixo. Assim, em alguns pontos há a inversão da fase entre o deslocamento e a força e em outros não, ocorrendo a distorção na identificação dos modos.

### 5.7.1 Considerações finais

Nesta seção o método direto foi avaliado experimentalmente. A distribuição da deformação ao longo da superfície de uma placa retangular com recorte foi obtida pela medida de aceleração triaxial e o método de elementos finitos. Modos de deformação operacionais obtidos por transmissibilidade e FRF foram comparados qualitativamente com os modos simulados. Mesmas regiões críticas de deformação foram encontradas nessas três formas de obtenção dos modos. Os modos de deformação equivalente em frequências operacionais foram comparadas quantitativamente pelo *Modal Assurance Criterion* (MAC), entre os modos simulados e identificados por transmissibilidade e FRF. O MAC apresentou valores acima de 0,8 em praticamente todos os modos comparados. Em algumas frequências, os modos não foram corretamente identificados. A massa do acelerômetro triaxial pode ter influenciado na identificação dos modos.

Na aplicação do método direto não é necessária aproximação dos modos naturais e de deslocamento por elementos finitos. Os modos naturais são utilizados nos métodos indiretos, os quais são: a análise modal híbrida e matriz de transformação. No entanto, para uma adequada análise da distribuição da deformação pelo método direto são indispensáveis:

- Alta qualidade das medidas de aceleração triaxiais. A qualidade das medições está relacionada à: boa coerência nas funções resposta em frequência e nas transmissibilidades; boa relação sinal-ruído e baixa sensibilidade transversal dos transdutores utilizados.
- Um número mínimo de medições, o qual possibilite a identificação do modo de vibração. Na análise modal um número mínimo de pontos de medição é escolhido de tal forma que o sistema possa ser observável, ou seja, dependendo da frequência e do comprimento de onda, o número de informações medidas deve ser o suficiente para gerar um modelo adequado da estrutura. Além disso, os pontos de medição formam a malha de elementos finitos. Um número maior de pontos forma uma malha mais refinada, a qual permite melhor precisão na identificação da deformação, desde que, erros de medição não estejam envolvidos.

Nos estudos realizados foi utilizado o elemento finito de 4 nós. A aproximação neste elemento é linear, a qual compromete a precisão na estimação da deformação, principalmente em altas frequências, nas bordas e regiões de transição entre compressão e tração. O elemento de 8 nós, aproximação quadrática, pode ser utilizado. No entanto, para um mesmo número de elementos, um número maior de medições é necessário. Em peças com geometrias menos complexas, o método de diferenças finitas também pode ser aplicado para melhorar a precisão na determinação da deformação pontual.

Dentre os métodos estudados, o método direto é a forma mais rápida de obtenção da deformação dinâmica, dispensando a aproximação dos modos naturais. Entretanto, depende fortemente da qualidade e da malha de medições. Como não há o ajuste das medições pelas bases modais, erros de medição podem ser amplificados pelos métodos numéricos de derivação utilizados. Pelos casos analisados, pode-se dizer que o método direto é um método qualitativo de estimação da distribuição da deformação dinâmica. Quantitativamente, as deformações estimadas utilizando o método direto não se aproximaram às deformações medidas tão bem quanto às estimadas pelos métodos indiretos.

A distribuição da deformação dinâmica também foi estimada pelo método direto na placa engastada. A baixa coerência das FRF e transmissibilidade nos pontos próximos ao engaste comprometeram a identificação dos modos operacionais de deslocamento e deformação.

## 6 CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS

Neste trabalho, os métodos de estimação, sendo eles: análise modal híbrida, matriz de transformação, método da curvatura e o método utilizando acelerômetros triaxiais, foram aplicados para a determinação da deformação dinâmica. De modo geral, foi possível se determinar a deformação a partir dos parâmetros vibracionais. Assim, é possível utilizar os resultados das análises convencionais de vibração para aprimorar o monitoramento de estruturas, haja vista que pela transformação do deslocamento medido em deformação, ter-se-á um parâmetro mais adequado para o diagnóstico e monitoramento da integridade estrutural dos sistemas mecânicos.

No que diz respeito à utilização de sinais apenas de resposta da estrutura na determinação da deformação, os resultados obtidos utilizando a transmissibilidade foram satisfatórios e, praticamente em todos os casos, melhores do que os obtidos utilizando Funções Resposta em Frequência (FRF). Isto pode estar associado ao fato de que os sinais utilizados na transmissibilidade se referem à mesma grandeza, ou seja, medidos com transdutores de mesmo princípio de funcionamento, com praticamente a mesma sensibilidade. Foram utilizados o mesmo condicionador de sinal e mesma amplificação. Nas situações críticas, por exemplo, ressonância, a estrutura responde com altos valores de acelerações em ambos os transdutores, caso seja considerado dois acelerômetros e tomando-se o cuidado do posicionamento dos mesmos. Isso não ocorre em relação à FRF, pois a força tende a ter valores relativamente pequenos comparados com as altas acelerações na condição de ressonância. Mesmo que possam ser utilizados diferentes estimadores para diferentes condições, problemas nas ressonâncias podem afetar as estimações. Ainda em relação à transmissibilidade, mostraram-se resultados experimentais onde os picos nos espectros das transmissibilidades estão relacionados com os vales ou antirressonâncias das funções de resposta em frequência da referência, a qual considera o sinal da referência, utilizada no cálculo da transmissibilidade, como o sinal de resposta relacionado com a força de excitação.

As deformações cisalhantes estimadas foram as que se aproximaram melhor às deformações medidas, em relação às deformações normais. Este resultado é importante para validação dos métodos de estimação de deformação, visto que a deformação cisalhante está

relacionada à distorção angular e não diretamente ao deslocamento, o qual foi considerado na estimação da deformação. A deformação cisalhante medida também apresentou melhor função de coerência na faixa espectral analisada, quando comparada com as deformações normais. Isto está relacionado à maior participação dos modos torcionais das placas nas frequências analisadas.

Dentre os métodos indiretos de estimação utilizados, verificou-se que na utilização de uma malha reduzida de pontos de medição, a matriz de transformação mostrou-se menos sensível a alteração do número de medições quando comparada à análise modal híbrida. A vantagem da utilização da matriz de transformação, para a estimação da deformação no domínio do tempo, em relação à análise modal híbrida é a não necessidade de conversão tempo – frequência dos sinais de deslocamento. Em relação à análise modal híbrida, além da possibilidade da determinação dos deslocamentos tridimensionais não medidos na estrutura, a mesma pode ser utilizada como extrapolação e ajustes de curvas, mesmo quando não são conhecidas as verdadeiras propriedades dos materiais envolvidos. Em ambos os métodos, matriz de transformação e análise modal híbrida, foi necessária a consideração dos modos de corpo rígidos, simulados para as placas na condição livre-livre, para ajuste das curvas, mesmo estas sendo de deformação.

Em relação à identificação da distribuição da deformação ou, do modo de deformação operacional, a mesma apresentou bons resultados, principalmente na utilização de acelerômetros triaxiais, o qual faz parte dos métodos diretos de estimação da deformação.

Nos casos avaliados da análise modal híbrida e matriz de transformação, onde foram utilizadas matrizes modais simuladas com condições de contorno muito diferentes das quais realmente a peça foi submetida, não houve alteração significativas na aproximação da deformação estimada com a medida.

Dentre as diversas questões que merecem aprofundamento estão as questões associadas à utilização dos acelerômetros triaxiais. Nos estudos realizados com os acelerômetros triaxiais, constatou-se que o método é sensível à baixa relação sinal-ruído e pequenas deformações. Outra questão é a utilização dos métodos indiretos considerando os modos naturais, necessários nos métodos indiretos, simulados para partes locais ou restritas de grandes estruturas e máquinas. Do ponto de vista prático, essas aplicações são promissoras, pois nem sempre é possível simular corretamente as reais condições de contorno.

## Referências

- ANSYS®. *Academic Research, Release 12.0, Help System*. ANSYS, INC.
- AVELINO FILHO, A. **Elementos Finitos**: A base da Tecnologia. São Paulo: Érica LTDA, 2000.
- AVITABILE, P. Modal Space - *In Our Own Little World: What is the difference between all the mode indicator functions? What do they all do?*. SEM Experimental Techniques. 2007. Disponível em: <http://macl.caeds.eng.uml.edu/umlspace/Feb07.pdf>. Acesso em: 06 ago. 2013.
- AVITABILE, P.; O'CALLAHAN, J. Mass and stiffness orthogonality checks without a Mass or Stiffness Matrix. In: Thirteenth International Modal Analysis Conference IMAC XIII, 1995, Nashville. **Anais... Society for Experimental Mechanics**, p. 1515-1519.
- BEER, F.; et. al. **Mechanics of Materials**. 5. ed. New York: McGraw-Hill, 2009.
- BEER, F.; JOHNSTON, E. R.; DEWOLF, J. T. **Resistência dos Materiais**. 4. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.
- BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. **Random data**: analysis and measurement procedures. 3. ed. . New York: Wiley, 2000.
- BERNASCONI, O.; EWINS, D. J. Application of strain modal testing to real structures. In: International Modal Analysis Conference, 1989, Las Vegas. **Anais... Society for Experimental Mechanics**, v.2, p. 1453-1464.
- BRINCKER, R.; ANDERSEN, P.; MOLLER, N. An Indicator for Separation of Structural and Harmonic Modes in Output - Only Modal Testing. SVS Structural Vibration Solutions, 2000. Disponível em: [http://www.svibs.de/solutions/literature/2000\\_5.pdf](http://www.svibs.de/solutions/literature/2000_5.pdf). Acesso em: 06 ago. 2013.
- CHEN, W. F.; SALLEB, A. F. **Constitutive Equations for Engineering Materials**: Elasticity and Modeling. Amsterdam: Elsevier, 1994.
- DALENBRING, M. Damping function estimation based on measured vibration frequency responses and finite-element displacement modes. **Mechanical Systems and Signal Processing**. v. 13, n. 4, p. 547-569, 1999.
- DALENBRING, M. Experimental material damping estimation for planar isotropic laminate structures. **International Journal of Solids and Structures**. v. 39, p. 5053-5079, 2002.
- DALLY, J. W.; RILEY, W. F. **Experimental Stress Analysis**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1978.

- DALLY, J. W.; RILEY, W. F. **Instrumentation for Engineering Measurements**. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- DEVRIENDT, C.; et. al. From operating deflection shapes towards mode shapes using transmissibility measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 24, p. 665-667, 2010.
- DOVSTAM, K. Augmented Hooke's Law in frequency domain. A three dimensional, material damping formulation. **Journal Solids Structures**, v. 32, n. 19, p. 2835 – 2852, 1995.
- DOVSTAM, K. Receptance model based on isotropic damping functions and elastic displacement modes. **Journal of Solids Structures**, v. 34, p. 2733-2754, 1997.
- DOVSTAM, K. Real modes of vibration and hybrid modal analysis. **Computational Mechanics**. v. 21, p. 493-511, 1998.
- DOVSTAM, K.; DALENBRING, M. Damping function estimation based on modal receptance models and neural nets. **Computational Mechanics**, v. 19, p. 271-286, 1997.
- EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory and Practice**. London: Research Studies Press, 1984.
- FIGUEIREDO e ALMEIDA, L. D. **Análise de tensões e deformações em um corpo de prova "Compact Tension" experimentalmente por extensometria e teoricamente por MFEL**. 2002. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. cap. 2, p. 4-30.
- FOSS, G. C.; HAUGSE, E. D. Using modal test results to develop strain to displacement transformations. In: Thirteenth International Modal Analysis Conference IMAC XIII, 1995, Nashville. **Anais... Society for Experimental Mechanics**.
- FUNG, Y. C. **Foundation of Solid Mechanics**. London: Prentice-Hall, 1965.
- GEVINSKI, J. R. **Análise de Tensões Dinâmicas em Superfícies Planas a partir de Parâmetros Modais**. 2010. 197p. Dissertação (Mestrado) Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- GEVINSKI, J. R.; PEDERIVA, R. Análise de deformação dinâmica de flexão de uma viga de alumínio a partir de medidas de aceleração. In: VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica VI CONEM. 2010, Campina Grande.
- GEVINSKI, J. R.; PEDERIVA, R. Estimation of bending strain of beam using hybrid modal analysis. In: 21<sup>st</sup> Brazilian Congress Mechanical Engineering COBEM. 2011, Natal.
- GEVINSKI, J. R.; PEDERIVA, R. Análise da Deformação de uma viga através da Análise Modal Híbrida. In: VII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica VII CONEM. 2012, São Luiz.

- GEVINSKI, J. R.; PEDERIVA, R. Operating strain mode identification using hybrid modal analysis. In: Thirteenth Pan-American Congress of Applied Mechanics PACAM XIII. 2013a, Houston.
- GEVINSKI, J. R.; PEDERIVA, R. Influence of reference response placement on the operating deflection shapes and transmissibility spectrum. In: 11th International Conference on Vibration Problems ICOVP, 2013b, Lisboa.
- GEVINSKI, J. R.; PEDERIVA, R. Operating strain mode identification using acceleration measurements. In: International Mechanical engineering Congress and Exposition ASME, 2013c, San Diego.
- GURTIN, M. E. The linear theory of elasticity. In: Flugge, S and Truesdell, C (Ed.). **Encyclopedia of Physics: Mechanics of Solids II**. v. Via/2. New York: Springer, 1972.
- HE, J.; FU, Z. F. **Modal Analysis**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001.
- HETÉNYI, M. **Handbook of Experimental Stress Analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1996.
- HOLFFMANN, K. An Introduction to stress Analysis and Transducer Design using Strain Gauges. Disponível em: [http://www.hbm.com/fileadmin/mediapool/Applications/stressanalysis/refbook/Strain\\_Gauge\\_Measurements\\_Book\\_2012\\_01.pdf](http://www.hbm.com/fileadmin/mediapool/Applications/stressanalysis/refbook/Strain_Gauge_Measurements_Book_2012_01.pdf). Acesso em: 15 set. 2013.
- IBRAHIM, S. R. Random Decrement technique for modal identification of structures. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 14, p. 696-700, 1977.
- IIZUKA, E. K. **Análise de tensões em Pneiras Vibratórias através de modelagem numérica utilizando o Método de Elementos Finitos e Experimentalmente por Extensometria**. 2006. Dissertação (Mestrado) Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. cap. 4, p. 79 - 104.
- JAMES III, G. H.; CARNE, T.; LAUFFER, J. P. *The natural excitation technique (Next) for modal parameter extraction from operating wind turbines*. Sandia Report, printed February 1993.
- KANG, L. H.; KIM, D. K.; HAN, J. H.. Estimation of dynamic displacement using fiber bragg grating strain sensors. **Journal of Sound and Vibration**. v. 226, p. 534-542, 2007.
- KARCZUB, D. G.; NORTON, M. P. Finite differencing methods for the measurements of dynamic bending strain. **Journal of Sound and Vibration**. v. 226, n. 4, p. 675-700, 1999.
- KOSS, L. L.; KARCZUB, D. Euler beam bending wave solution predictions of Dynamic strain using Frequency Response Functions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 184, n. 2, 229-244, 1995.

- KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley & Sons, 1978.
- KYOWA. Operation Manual: Portable Dynamic Strain Amplifiers DPM-6H/8H. Tokyo: Kyowa Eletronic Instruments co., LTD. 1987.
- LEE, G. M. Prediction of strain responses from the measurements of displacement responses. **Mechanical Systems and Signal Processing**. v. 21, p. 1143-1152, 2007.
- MAIA, N. M. **Theoretical and Experimental Modal Analysis**. New York: Research Studies Press, 1997.
- MATHEWS, J. H.; FINK, K. D. **Numerical Methods using Matlab**. 3.ed. Upper Saddle River: Printice Hall. cap. 6, p. 311-328, 1999.
- MOAVENI, S. **Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1999.
- OKUBO, N.; YAMAGUCHI, K. Predicton of dynamic strain distribution under operating condition by use of modal analysis. In: International Modal Analysis Conference, Nashville. **Anais...** Bethel: Society for Experimental Mechanics, 1995. v.2, p. 91-95.
- PROAKIS, J. G.; MANOLAKIS, D. G. **Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications**. 3.ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.
- RANDALL, A. J. The Modal Assurance Criterion - Twenty Years of Use and Abuse. **Sound and Vibration**. p. 14-20, 2003.
- REDDY, J. N. **An Introduction to Continuum Mechanics with Application**. New York: Cambridge University Press, 2008.
- REKTORYS, K. **Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering**. 2. ed. Praga: SNTL, 1975.
- RILEY, W. F.; STURGES, L. D.; MORRIS, D. H. **Mecânica dos Materiais**. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.
- SCHWARZ, B.; RICHARDSON, M. Measurements requiered for displaying operating deflection shapes. In: International Modal Analysis Conference IMAC XVIII, 2004, Jamestown.
- SCHWARZ, B.; RICHARDSON, M. Introduction to operating deflection shapes. CSI Reliability Week, 1999, Orlando. **Anais...** Jamestown: Vibrant Technology, 1999
- SEHLSTEDT, N. **Hybrid strain analysis based on numerical differentiation**. 1999. Dissertação (Mestrado) Departament of Solid Mechanics, Chalmers University of Technology, Goteborg.

- SEHLSTED, N. Calculating the dynamic strain tensor field using modal analysis and numerical differentiation. **Journal of Sound and Vibration**. v. 244(3) p. 407-430, 2001a.
- SEHLSTEDT, N. Displacement and strain predictions in a vibrating structure using local modal methods. In: Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, 2001b, Seattle.
- SHIGLEY, J. E.; MISCHKE, C. R.; BUDYNAS, R. G.. **Projeto de Engenharia Mecânica**. 7. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.
- SORIANO, H. L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. São Paulo: Editora da USP, 2003.
- TIMOSHENKO, S. **Strength of Materials: Theory and Problems**. New York: Lancaster Press, 1940
- TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**. 3. ed. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1980
- VOLD, H.; SCHWARZ, B.; RICHARDSON, M. Measuring operating deflection shapes under non-stationary conditions. In: International Modal Analysis Conference IMAC XVIII, 2000, San Antônio.
- VU, V. H.; et. al. Operational modal analysis by updating autoregressive model. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 25, n. 6, p. 1028-1044, 2011.
- YAM, L. H.; et.al. Theoretical and experimental study of modal strain analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 191, n. 2, p. 251-260, 1996.
- ZHANG, L.; BRINCKER, R., ANDERSEN, P. An Overview of Operational Modal Analysis: Major Development and Issues. Disponível em: [http://www.svibs.com/solutions/literature/2005\\_10.pdf](http://www.svibs.com/solutions/literature/2005_10.pdf). Acesso em: 24 jul. 2013.
- ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method: The Basis**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.

# ANEXO A – Carta Acelerômetro Uniaxial

## Calibration Chart for DeltaTron® Accelerometer Type 4508

Serial No.: 2178734



Reference Sensitivity <sup>1)</sup> at 159.2 Hz ( $\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$ ), 20 ms<sup>-2</sup> RMS,  
4 mA supply current and 22 °C: 10.26 mV/ms<sup>2</sup> (100.6 mV/g)

Frequency Range: Amplitude (±10%): 0.3 Hz to 8 kHz  
Phase (± 5°): 2 Hz to 5 kHz

Mounted Resonance Frequency: 25 kHz

Transverse Sensitivity <sup>2)</sup>:  
Maximum (at 30 Hz, 100 ms<sup>-2</sup>): < 5% re Reference Sensitivity

Transverse Resonance Frequency: > 18 kHz

Calculated values for TEDS <sup>3)</sup>: Resonance frequency: 28.1 kHz  
Quality factor @ f<sub>res</sub>: 7.6  
Amplitude slope: -2.3%/decade  
High pass cut-off frequency: 0.191 Hz  
Low pass cut-off frequency: 183.4 kHz

Measuring Range: ± 700 ms<sup>-2</sup> peak (± 71 g peak)

Polarity of the electrical signal is positive for an acceleration in the direction of the arrow on the drawing.

## Electrical:

Bias Voltage: at full temperature and current range: + 12 V ± 1 V

Power Supply requirements: Constant Current: + 2 to + 20 mA  
Unloaded Supply Voltage: + 24 V to + 30 V

Output Impedance: < 2 Ω

Start-up time (to final bias ± 10%): 5 s

Inherent Noise (RMS):

Broadband (1 Hz to 8 kHz): < 35 μV  
corresponding to < 0.0035 ms<sup>-2</sup> (< 350 μg)

Spectral: 10 Hz: 1.5x10<sup>-4</sup> ms<sup>-2</sup>/√Hz (15 μg/√Hz)  
100 Hz: 3.5x10<sup>-5</sup> ms<sup>-2</sup>/√Hz (3.5 μg/√Hz)  
1000 Hz: 2x10<sup>-5</sup> ms<sup>-2</sup>/√Hz (2 μg/√Hz)

Ground Loops can introduce error signals. These can be avoided by insulating the accelerometer from the mounting surface (see Mounting Technique).

Recommended cables: AO 1382  
AO 0531  
AO 0463  
and other cables see Product Data Sheet

<sup>1)</sup> This calibration is obtained on a modified Brüel & Kjær Calibration System Type 9610 System No.: 150117.2 and is traceable to the National Institute of Standards and Technology, USA and Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Germany.  
The expanded uncertainty is 1.0% determined in accordance with EAL-R2. A coverage factor  $k=2$  is used. This corresponds to a coverage probability of 95% for a normal distribution.

<sup>2)</sup> The uncertainty is 0.3% of Reference Sensitivity.

<sup>3)</sup> Transducer Electronic Data Sheet according to IEEE P1451.4. Built-in ID-information not included.

<sup>4)</sup> Deviation from Reference Sensitivity.

Patents involved: US 08387851, JP 50952694 and DK 169653.

For further information, please see <http://www.bk.dk> and Product Data Sheet BP 1841.

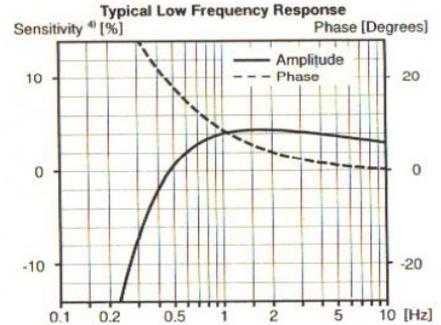
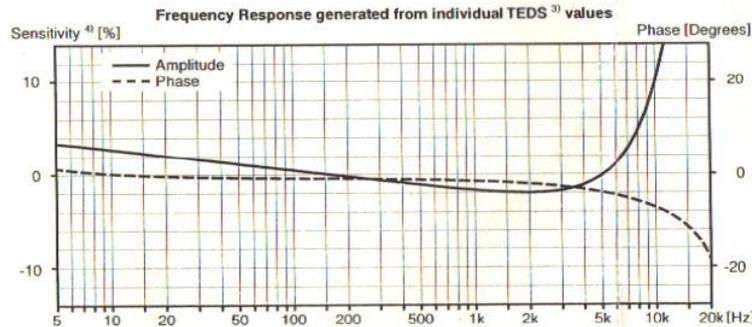


## Mounting Technique:

The accelerometer can be fastened directly to the measuring object by glue e.g., hot glue. However, if a reduced frequency range can be accepted, it is recommended to use one of the special mounting clips (see below) which is glued to the measuring object. In any case the mounting surface must be clean and smooth.

Three types of mounting clips are available: UA 1407 (set of 100) is a low profile clip recommended for mounting on plane surfaces. UA 1475 (set of 100) is a clip with a thick base which can be filed to fit a curved mounting surface. UA 1478 (set of 100) is a swivel base clip for use where the accelerometer is to be aligned according to a given co-ordinate system (see Product Data Sheet BP 1841).

Applying a little grease to the mounting surface of the accelerometer as well as the clip will improve the frequency response.  
See also ISO 5348.

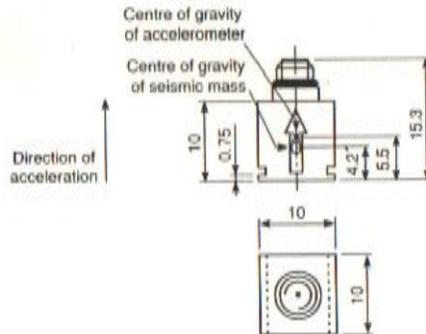


**Environmental:**

Temperature Range:	- 54 to + 121°C (- 65 to + 250°F)
Temperature Coefficient of Sensitivity:	+ 0.06%/°C
Temp. Transient Sensitivity (3 Hz Low. Lim. Freq. (-3 dB, 6 dB/oct)):	0.3 ms <sup>-2</sup> /°C
Magnetic Sensitivity (50 Hz, 0.038 T):	3 ms <sup>-2</sup> /T
Base Strain Sensitivity (at 250 µε in base plane):	0.005 ms <sup>-2</sup> /µε
Mounted on adhesive tape 0.09 mm thick:	
Max. Non-destructive Shock:	50 kms <sup>-2</sup> peak (5000 g peak)
Humidity:	90 % RH non-condensing

**Mechanical:**

Case Material:	Titanium ASTM Grade 2
Sensing Element:	Piezoelectric, Type PZ 23
Construction:	Theta Shear®
Sealing:	Welded
Weight:	4.8 gram (0.17 oz)
Electrical Connector:	10 - 32 UNF-2A
Mounting Surface Flatness:	< 3 µm



All dimensions in millimetres

Date 24 Feb 2000 Operator DN

Specifications obtained in accordance with ANSI S2.11-1969 and parts of ISO 6347.

All values are typical at 25°C (77°F) unless measurement uncertainty is specified.

BC 0294-12

Serial No.: 2178734

# ANEXO B – Carta Acelerômetro Triaxial

## Calibration Chart for Triaxial DeltaTron<sup>®</sup> Accelerometer Type 4506



Serial No.: 2109909

	X-	Y-	Z-	axis
<b>Reference Sensitivity</b> <sup>1)</sup> at 159.2 Hz ( $\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$ ), 20 $\text{ms}^{-2}$ RMS, 4 mA supply current and 23 °C:	10.23	10.02	10.21	mV/ $\text{ms}^{-2}$
	100.3	98.2	100.1	mV/g
<b>Frequency Range:</b> Amplitude ( $\pm 10\%$ ):	1 - 6k	1 - 3.5k	1 - 3.5k	Hz
Phase ( $\pm 5^\circ$ ):	3 - 3k	3 - 3k	3 - 3k	Hz
<b>Mounted Resonance Frequency:</b>	19	10	10	kHz
<b>Transverse Sensitivity</b> re Ref. Sensitivity: Maximum (at 30 Hz, 100 $\text{ms}^{-2}$ ):	< 5	< 5	< 5	%
<b>Calculated values for TEDS</b> <sup>2)</sup> :				
Resonance frequency:	17.0	9.9	9.0	kHz
Quality factor $Q$ factor:	178.5	307.5	337.0	
Amplitude slope:	-2.0	-2.4	-2.4	%/dec
High pass cut-off frequency:	0.093	0.183	0.180	Hz
Low pass cut-off frequency:	149.5	149.5	209.9	kHz

**Measuring Range:**  $\pm 700 \text{ ms}^{-2}$  peak ( $\pm 70 \text{ g}$  peak)

**Polarity** of the electrical signals are positive for an acceleration in the direction of the arrows on the drawing.

<sup>1)</sup> This calibration is obtained on a reverified Brüel & Kjær Calibration System Type 5610 (system No. 150117.2, and is traceable to the National Institute of Standards and Technology, USA and Physikalisch Technische Bundesanstalt, Germany.  
The expanded uncertainty is 1.0% determined in accordance with EAL-P2. A coverage factor  $k=2$  is used. This corresponds to a coverage probability of 95% for a normal distribution.

<sup>2)</sup> Transducer Electronic Data Sheet according to IEEE P1451.4. Built-in ID-information not included.

<sup>3)</sup> Deviation from Reference Sensitivity.

Transducer principle patented US 005677487A, US 08387851, JP 50952694, DK 169653.

For further information, please see <http://www.bk.dk> and Product Data Sheet BP 1838.



### Electrical:

**Bias Voltage:** at full temperature and current range: +12 V  $\pm$  1 V

**Power Supply requirements:** Constant Current: +2 to +10 mA  
Unloaded Supply Voltage: +24 V to +30 V

### Note: The Y and Z axes must be powered!

If you only need two powered axes, then you must choose the Y and Z axes. Single axial supply is not possible.

**Output Impedance:** < 2  $\Omega$

**Start-up time** (to final bias  $\pm 10\%$ ): < 10 s

**Inherent Noise, X-axis (RMS):**  
Broadband (1 Hz to 6 kHz): < 40  $\mu\text{V}$   
corresponding to < 0.004  $\text{ms}^{-2}$  (< 400  $\mu\text{g}$ )

**Spectral:**  
10 Hz:  $2 \times 10^{-4} \text{ ms}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$  (20  $\mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$ )  
100 Hz:  $4 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$  (4  $\mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$ )  
1000 Hz:  $2 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$  (2  $\mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$ )

**Inherent Noise, Y- and Z-axes (RMS):**  
Broadband (1 Hz to 6 kHz): < 20  $\mu\text{V}$   
corresponding to < 0.002  $\text{ms}^{-2}$  (< 200  $\mu\text{g}$ )

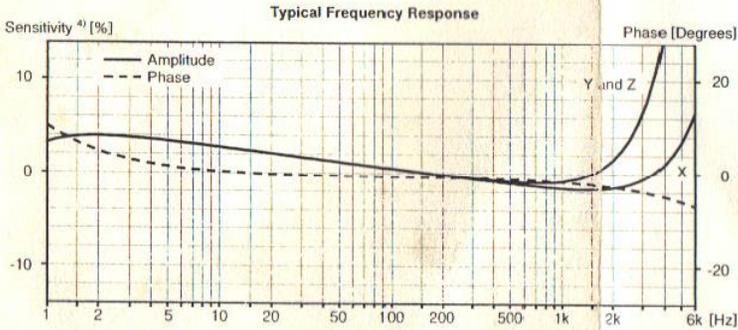
**Spectral:**  
10 Hz:  $1 \times 10^{-4} \text{ ms}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$  (10  $\mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$ )  
100 Hz:  $2 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$  (2  $\mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$ )  
1000 Hz:  $1 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$  (1  $\mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$ )

**Insulation Resistance** (signal ground to case): > 1 G $\Omega$

**Recommended cables:**  
AO 0526  
AO 0527  
AO 0528  
AO 0534

### Mounting Technique:

The accelerometer can be fastened directly to the measuring object by glue e.g., hot glue. However, if a reduced frequency range can be accepted, it is recommended to use one of the special mounting clips (see below) which is glued to the measuring object. In any case the mounting surface must be clean and smooth.  
Three types of mounting clips are available: UA 1408 (set of 100) is a low profile clip recommended for mounting on plane surfaces. UA 1474 (set of 100) is a clip with a thick base which can be filed to fit a curved mounting surface. UA 1473 (set of 100) is a swivel base clip for use where the accelerometer is to be aligned according to a given co-ordinate system (see Product Data Sheet BP 1838).  
Applying a little grease to the mounting surface of the accelerometer as well as the clip will improve the frequency response.  
The Mounting Clips facilitates fastening of the cable to the structure.  
See also ISO 5348.

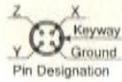


**Environmental:**

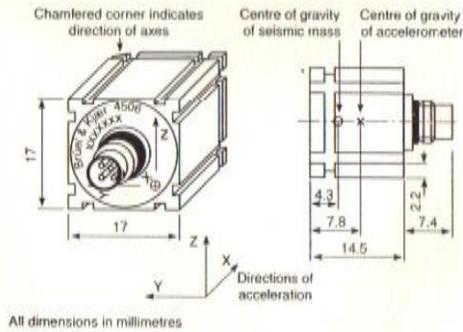
**Temperature Range:** - 54 to + 100°C (- 65 to + 212°F)  
**Temperature Coefficient of Sensitivity:** X axis: +0.05%/°C  
 Y and Z axes: +0.1%/°C  
**Temp. Transient Sensitivity** (3 Hz Low Lim. Freq. -3 dB, 6 dB/oct): 3 ms<sup>-2</sup>/°C  
**Magnetic Sensitivity** (50 Hz, 0.038 T): 6 ms<sup>-2</sup>/T  
**Base Strain Sensitivity** (at 250 μm in base plane):  
 Mounted in Mounting Clip or on adhesive tape 0.09 mm thick: 0.03 ms<sup>-2</sup>/μm  
**Max. Non-destructive Shock:** 20 kms<sup>-2</sup> peak (2000 g peak)  
**Humidity:** 90 % RH non-condensing

**Mechanical:**

**Case Material:** Titanium ASTM Grade 2  
**Sensing Element:** Piezoelectric, Type PZ 23  
**Construction:** OrthoShear®  
**Sealing:** Welded  
**Weight:** 15 gram (0.54 oz)  
**Electrical Connector:** 4 pin, 1/4" - 28 UNF (Microtech compatible)  
 All pins insulated from case



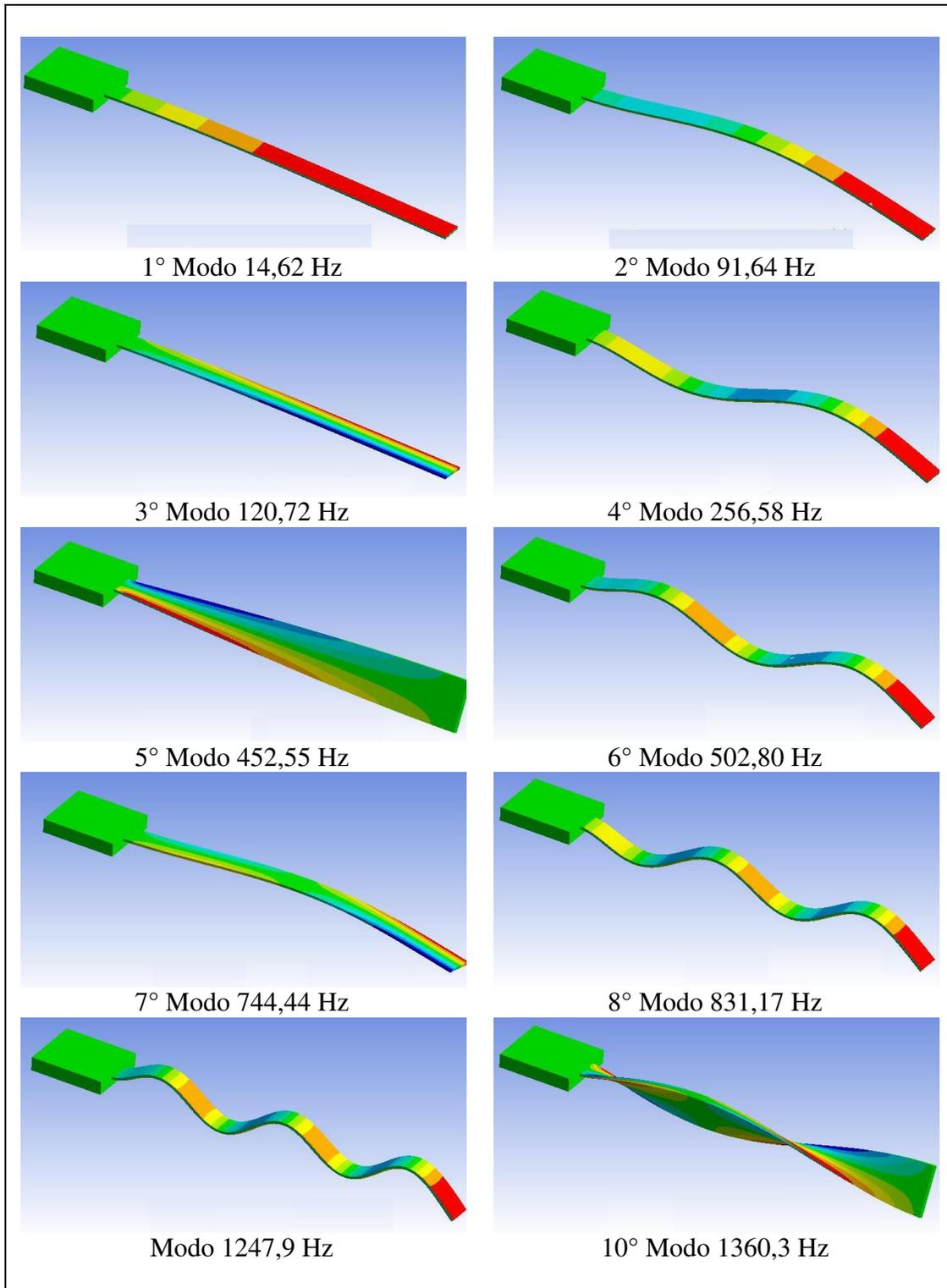
**Mounting Surface Flatness:** <math>\le 3 \mu\text{m}</math>



Date 11 Apr 2000 Operator UC

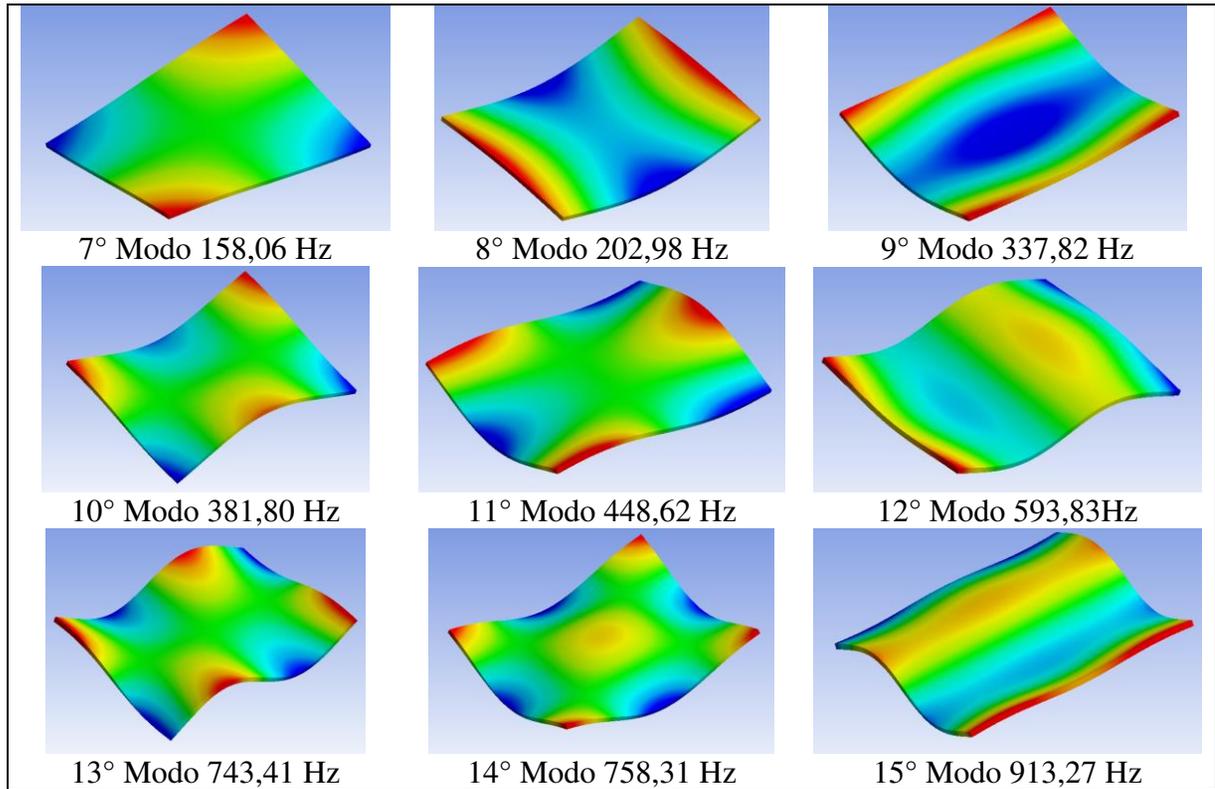
Specifications obtained in accordance with ANSI S2.11-1969 and parts of ISO 5347.  
 All values are typical at 25°C (77°F) unless measurement uncertainty is specified.  
 Serial No.: 2109909  
 BC 0257-13

## APÊNDICE A – Modos Naturais da Viga



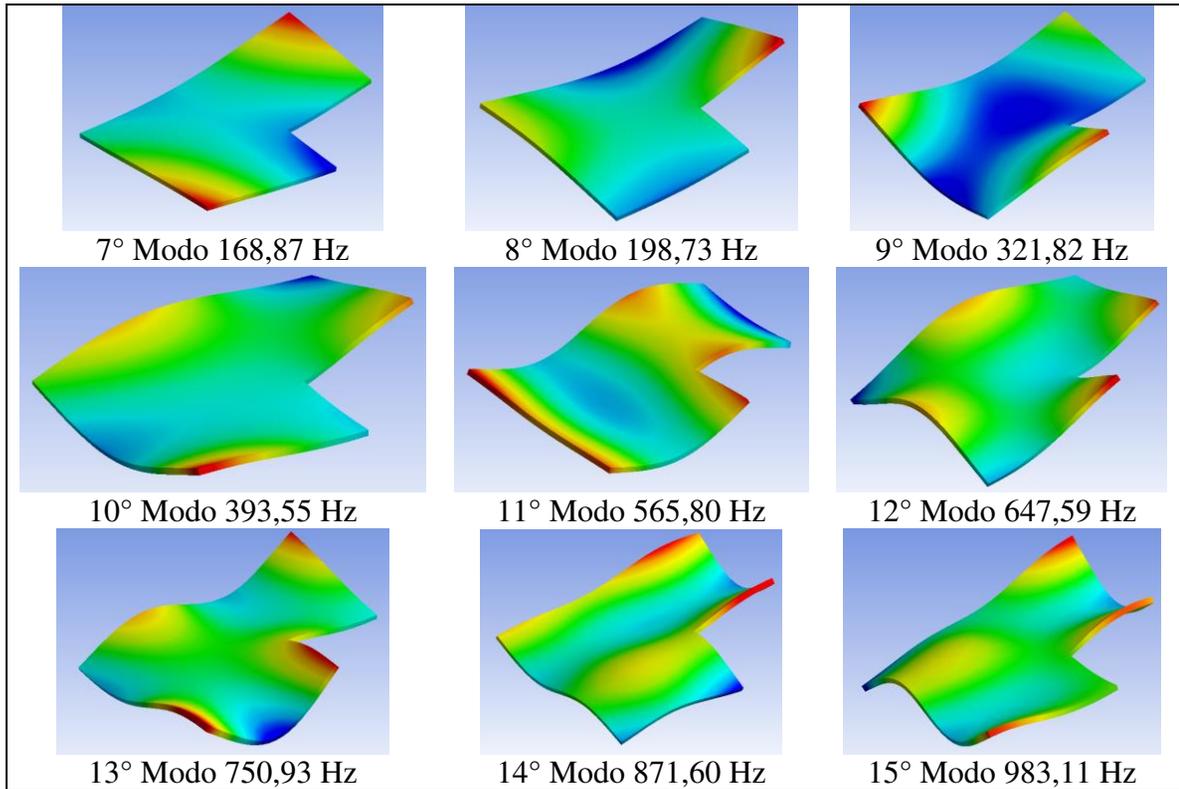


## APÊNDICE B – Modos Naturais da Placa Retangular





## APÊNDICE C – Modos Naturais da Placa Retangular com Recorte





## APÊNDICE C – Modos Naturais da Placa Engastada

