ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA POR Rangel Ferreira do Nascimento E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA EM 27/02/2009

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Propagação de Ondas Usando Modelos de Elementos Finitos de Fatias de Guias de Ondas Estruturais

Autor: **Rangel Ferreira do Nascimento**
Orientador: **José Roberto de França Arruda**

49/2009

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Propagação de Ondas Usando Modelos de Elementos Finitos de Fatias de Guias de Ondas Estruturais

Autor: **Rangel Ferreira do Nascimento**
Orientador: **José Roberto de França Arruda**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2009
S.P. – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

N17p	Nascimento, Rangel Ferreira do Propagação de ondas usando modelos de elementos finitos de fatias de guias de ondas estruturais / Rangel Ferreira do Nascimento. --Campinas, SP: [s.n.], 2009. Orientador: José Roberto de França Arruda. Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica. 1. Método dos elementos finitos. 2. Sequências espectrais (Matematica). 3. Propagação de ondas. 4. Guias de ondas. 5. Análise espctral. I. Arruda, José Roberto de França. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Wave propagation using finite element models of structural waveguide slices
Palavras-chave em Inglês: Boundary elements methods, Spectral sequences (Mathematics), Wave propagations, Wave guides, Spectral analysis
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Vicente Lopes Junior, Domingos Alves Rade, Renato Pavanello, José Maria Campos dos Santos
Data da defesa: 27/02/2009
Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

Propagação de Ondas Usando Modelos de Elementos Finitos de Fatias de Guias de Ondas Estruturais

Autor: **Rangel Ferreira do Nascimento**
Orientador: **José Roberto de França Arruda**

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:

Prof. Dr. José Roberto de França Arruda, Presidente
Unicamp

Prof. Dr. Vicente Lopes Junior
Unesp

Prof. Dr. Domingos Alves Rade
UFU

RPavanello

Prof. Dr. Renato Pavanello
Unicamp

Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos
Unicamp

Campinas, 27 de fevereiro de 2009

Dedicatória:

Aos meus queridos pais, à minha querida e amável Kay e ao querido Eros (In Memorian) o ser mais doce que já conheci.

Agradecimentos

Eu Agradeço a Deus que sempre me deu saúde e coragem para enfrentar os obstáculos da vida.

Ao orientador Prof. Dr. José Roberto de França Arruda, pelo apoio, incentivo, amizade e experiência que contribuíram para que este trabalho fosse realizado com êxito.

Ao meu amigo Amarildo Tabone Paschoalini que sempre acreditou em mim.

Aos colegas de pós-graduação em Engenharia Mecânica pelo convívio profissional.

Aos docentes e funcionários do Departamento de Engenharia Mecânica pela contribuição na realização deste trabalho e pelo incentivo.

Bem aventurado o homem que acha sabedoria...

é árvore da vida para os que a seguram, e

bem aventurados são todos os que a retêm

Provébios 3:13,18

Resumo

NASCIMENTO, Rangel Ferreira, Propagação de Ondas Usando Modelos de Elementos Finitos de Fatias de Guias de Ondas Estruturais, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009, 167 p, tese de Doutorado.

Esta tese estuda e investiga o problema de propagação de ondas em estruturas periódicas usando o método de elemento espectral, a relação entre a matriz dinâmica e a matriz de transferência é mostrada para alguns casos, tais como, viga, barra, placa de Levy e modelo de Minddlin Hermman. A partir destas teorias, o método de propagação de ondas usando um modelo de elementos finitos de uma fatia do guia de ondas, WFEM é apresentado e o problema de prever os modos de propagação e os números de onda correspondentes. O objetivo deste trabalho é mostrar que usando o método WFEM e uma fatia do guia de onda modelado com elementos finitos sólido é possível construir elementos finitos espectrais para ser usado em guias de ondas homogêneos sem precisar de malha de refinamento. Tais elementos podem ser usados para modelar guias de ondas com seção transversal constante. A matriz de rigidez dinâmica para o elemento de barra elementar e para o elemento de viga de Euler Bernoulli são obtidos usando a formulação espectral padrão e obtidas usando uma fatia do guia de onda modelado pelo método FEM, são mostrados resultados do método proposto.

Palavras Chave

Método dos elementos finitos, método dos elementos espectrais, guias de ondas, propagação de onda em estruturas.

Abstract

NASCIMENTO, Rangel Ferreira, Wave Propagation Using Finite Element Models of Structural Waveguide Slices, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009, 167 p, tese de Doutorado.

This thesis, studies and investigates wave propagation problem in periodic structures using the spectral element method, the relation between the dynamic matrix and the transfer matrix is shown for some cases, such as, beam, bar, Levy plate and Mindlin-Herrmann's model. From these theories, the Wave Finite Element Method, WFEM is presented and the problem of predicting the wave propagation modes and the respective wavenumbers. The purpose of this work is to show that using the WFEM method and a slice of the waveguide modeled with solid finite elements, it is possible to develop spectral finite elements to be used in long homogeneous waveguides without the need of mesh refinement. Such elements can be used to model waveguides with constant cross section and long spans. The dynamic stiffness matrix of a simple rod and Bernoulli Euler beam element obtained using the standard spectral formulation and obtained via the FEM model of a slice are shown to be similar, thus validating the proposed method.

Key Words

Finite elements method, spectral elements method, waveguide, Structural wave propagation.

Índice

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Nomenclatura

Letras Latinas

P	Força vertical móvel
L	Comprimento da viga
A	Área de seção transversal
I_y	Momento de inércia
E	Módulo de elasticidade
T_1	Período do primeiro modo de vibração da viga
T	Período
$[M]$, $[C]$ e $[K]$	Matrizes de massa, amortecimento e rigidez global da estrutura
$\{u(t)\}$, $\{\dot{u}(t)\}$, $\{\ddot{u}(t)\}$	Vetores deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente,
$v_i(t)$	Deslocamento generalizado
$[M^e]$, $[K^e]$	Matrizes de massa e rigidez do elemento
$f(t)$	Pulso triangular
b	Amplitude do pulso triangular
$F_1(\omega)$	Transformada de Fourier da função pulso triangular
$g(t)$	Pulso das funções força
$F_2(\omega)$	transformada de Fourier das funções força
$m(t)$	Pulso da função momento

$F_3(\omega)$	Transformada de Fourier do pulso de momento
H_1, H_2, H_3	Transformadas de Fourier dos pulsos deslocados no tempo
a_k, b_k, c_k	Termos da série de Fourier dos pulsos triangular, força e momento
$[K_C]$	Matriz de rigidez dinâmica do elemento de viga circular
k	Número de onda
s	Comprimento do elemento de viga curva
$[T]$	Matriz de transferência
i	Número complexo $i = \sqrt{-1}$

Letras Gregas

ρ	Densidade linear de massa
δ	Função delta de Dirac
t	Tempo ajustado a zero quando a força móvel entra na viga
ω_n	Freqüências natural
$\overline{\omega}_n$	Freqüências do carregamento
β_n	Relação entre as freqüências
u_{zs}	Deslocamento estático do ponto ($L/2$) quando submetida à força P
τ	Tempo que a força móvel leva para atravessar a viga
α	Parâmetro de velocidade
Φ_{xr}	Modo de propagação da onda

Capítulo 1

Introdução

A abordagem modal se tornou dominante em análise dinâmica estrutural linear. Sintoma desta tendência é o fato que a maioria dos livros de ensino em vibrações lineares sequer menciona a propagação de ondas em estruturas ou o método das matrizes de transferência. Isto está principalmente ligado à abundância de capacidade computacional que permitiu o uso difundido de métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (FEM). Métodos analíticos foram um pouco esquecidos, embora o desenvolvimento deles tenha continuado na física teórica e aplicada e em alguns campos de engenharia avançados, principalmente os associados com acústica. Mais recentemente, o desenvolvimento de softwares de computação simbólica trouxe o interesse por métodos analíticos e semi-analíticos que podem ser implementados mais facilmente com essas novas ferramentas. Em muitas situações a aproximações semi-analíticas são computacionalmente muito mais econômicas que métodos puramente numéricos como FEM. Não obstante, elas ainda requerem um usuário mais qualificado, já que são tipicamente soluções *ad hoc*. Então, a possibilidade de combinar métodos semi-analíticos com métodos numéricos tradicionais é muito promissora por resolver problemas dinâmicos estruturais em situações onde análises de FEM puramente numéricas enfrentam dificuldades.

Muitas estruturas são feitas de painéis e vigas. Ondas que propagam em guias de onda formados por duas superfícies paralelas normalmente são chamado de ondas Lamb Graff (1991) e

Doyle (1997). Estas incluem ondas de flexão, de torção, ondas longitudinais e outros tipos de ondas simétricas e anti-simétricas. O comportamento elástico de flexão de baixa ordem pode ser modelado, em baixas freqüências, usando modelos como Euler-Bernoulli e Timoshenko para vigas e Kirchhoff e Mindlin-Reissner para placa. Em altas freqüências, teorias de ordem mais elevada, como Flügge e Donnell-Mushtari para cascas cilíndricas e Mindlin-Herrmann para barras, podem ser usadas para prever a solução de ondas analiticamente para geometrias simples. Porém, no caso de geometrias mais complexas, podem ser usados métodos numéricos como o FEM e o Método de Elementos de Contorno (BEM).

Quando as freqüências aumentam, o comprimento característico do elemento finito, que deve ser cerca de um sexto do comprimento de onda Petyt (1996), diminui, aumentando o tamanho do modelo numérico da estrutura. Os modelos tendem a ficar excessivamente grandes e, com isso, o custo computacional impõe, na prática, um limite superior de freqüências para os métodos numéricos.

Pretendendo superar estas limitações e tirando proveito da natureza periódica de muitas estruturas, nos últimos anos foram desenvolvidos métodos de guias de onda com modelos obtidos a partir de fatias do guia de onda modeladas por FEM. Nas Figura 1.1 apresenta exemplos de guia de onda na qual são estruturas que tem uma dimensão muito maior que as demais como é caso das figuras abaixo.

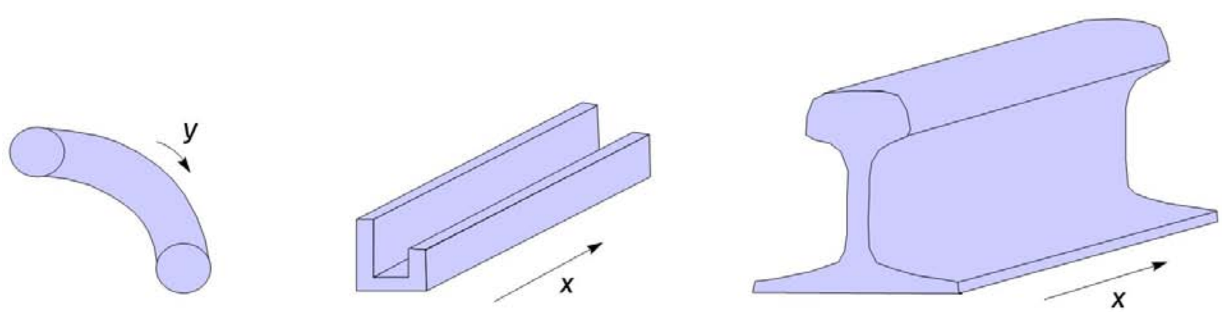


Figura 1.1: Exemplos de guia de onda.

Uma das primeiras propostas, feita há mais de uma década Gavric (1995); Finnveden, (1994), foi chamada de Elementos Finitos Espectrais (SFEM). Sua desvantagem tem origem na necessidade de desenvolver uma solução para cada caso estudado, isto é, uma solução *ad hoc*. recentemente, Ichchou e colaboradores Mencik e Ichchou (2005) desenvolveram uma aproximação onde um código comercial de FEM pode ser usado para modelar uma fatia do guia de ondas e, deste modelo, pode ser derivado um modelo de propagação de ondas baseado nas relações espectrais, modos de propagação e velocidades de grupo e fase. Mace e colaboradores Mace (2005) também desenvolveram este método com uma aproximação semelhante, e investigaram questões numéricas Wake (2006). Estes trabalhos são baseados no trabalho de Zhong e Williams (1995), que propuseram um método diferente para calcular a resposta forçada Duhamel (2006). Estas abordagens de ondas que utilizam um modelo de elementos finitos de uma fatia do guia de onda são baseadas em estruturas periódicas estudas por Brillouin (1953) e Mead (1973).

Neste trabalho, depois de uma breve revisão sobre o método de elemento espectral, a relação entre a matriz dinâmica e a matriz de transferência é mostrada para um caso simples de uma barra homogênea. A partir desta teoria básica, o método de Propagação de Ondas Usando um Modelo de Elementos Finitos de uma Fatia do Guia de Ondas (em inglês *Wave Finite Element Method*, WFEM) é apresentado e o problema de prever os modos de propagação e os números de onda correspondentes. O trabalho apresenta exemplos numéricos ilustrativos. Uma proposta original deste trabalho consistiu em formular uma metodologia para gerar elementos espectrais a partir da solução WFEM. Desta forma, o resultado do modelo é colocado de um modo mais facilmente utilizável para especialistas em dinâmica de estruturas, que é a matriz dinâmica do elemento. Isso permite acoplar os elementos construídos com o método WFEM com elementos espectrais e elementos finitos pelo método da mobilidade, ou método de construção de uma matriz global por rigidez direta, em inglês, *Direct Stiffness Method*, Craig (1981).

Este trabalho teve como motivação desenvolver modelos de propagação de ondas em estruturas cíclicas sujeitas a forças girantes. Inicialmente procurou-se investigar formas de se aplicar uma carga móvel a uma estrutura Chen e Huang (2000). É feita uma a introdução ao problema fundamental de força em movimento com a análise de uma viga simplesmente apoiada sujeita à aplicação de uma força vertical em movimento com velocidade constante. Olsson (1991) apresenta a solução analítica para tal problema e este trabalho é utilizado para a validação do modelo proposto.

A força que se move com velocidade constante e que passa periodicamente sobre a viga é simulada de duas formas: utilizando uma função pulso triangular e usando as funções de interpolação cúbicas do elemento finito de viga utilizado. Para cada nó, o pulso e as funções de interpolação são deslocados do tempo que as forças levam para se deslocarem entre dois nós consecutivos. Além disso, a periodização é introduzida usando a fórmula de Poisson, que relaciona a série e a transformada de Fourier. A metodologia apresentada para o problema da viga sujeita a força móvel será utilizada no problema de uma viga circular sujeita a uma força radial que se move em torno dela com velocidade angular constante.

Em seguida o problema de anel simples usando o método de elemento espectral Doyle (1997) e a implementação de uma força giratória em tal modelo é discutida. Primeiro, um elemento espectral de viga circular é obtido e validado comparando a resposta a uma força pontual com a solução analítica. Então, um elemento de viga circular com efeito de corda é formulado. Este elemento permite a simulação de pneus com pressão interna. É investigado o comportamento do anel para diferentes pressões internas usando a aproximação modal e a relação de dispersão (freqüência x número de ondas). Este comportamento é comparado qualitativamente com resultados experimentais obtidos para um pneu de caminhão. São discutidas semelhanças e diferenças do comportamento dinâmico do modelo espectral do anel e o do pneu.

Na seqüência o método WFEM é verificado usando elementos espectrais de uma fatia do guia de onda ao invés de elementos finitos e as curvas de dispersão são calculadas e comparadas aos valores teóricos para barra, vigas de Timoshenko e Euler Bernoulli, viga curva, modelo de Mindlin Herrmman ou dos dois modos e placa de Levy (simplesmente apoiada em dois lados paralelos). O método WFEM, com um modelo de elementos finitos de uma fatia de uma viga de seção retangular, é verificado pelas relações de dispersão calculadas. Segue uma discussão dos resultados e de como separar os números de onda com significado físico dos números de onda obtidos numericamente do problema de autovalor do método WFEM. Segue exemplos de como são apresentados os gráficos da relação de dispersão (freqüências x números de onda) apresentados nos capítulos 4, 5 e 6:

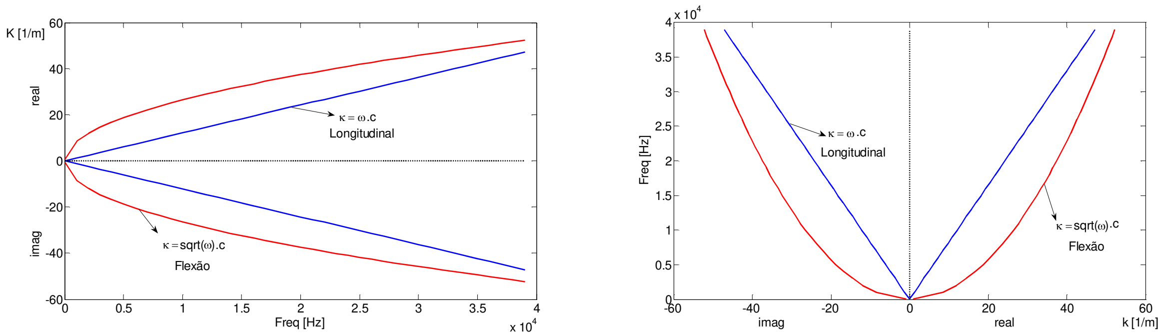


Figura 1.2: Análise do número de onda x freqüência – (Relação de dispersão).

Finalmente o método proposto para obter elementos espectrais a partir do método WFEM é formulado para barras e vigas. Os resultados são primeiramente validados para a matriz dinâmica obtida em função da freqüência com uma condensação dos graus de liberdade do modelo de elementos finitos gerando a matriz dinâmica de barra e viga de Euler Bernoulli com dimensões 2x2 e 4x4 respectivamente. Em seguida, o método é estendido para incluir todos os graus de liberdade longitudinais e transversais do modelo de elementos finitos da fatia em uma das faces. Retendo-se apenas os modos de onda plana, obtêm-se novamente os resultados da barra elementar. A resposta dinâmica da barra e da viga com dois elementos espectrais é usada para verificar a metodologia de acoplamento dos elementos espectrais gerados pelo método proposto. Finalmente, são analisados os modos de propagação correspondentes a teorias de barra de ordem mais elevada, primeiramente usando fatias modeladas como elementos espectrais e depois com a fatia modelada com elementos finitos sólidos. É discutida e formulada a metodologia para obter elementos espectrais de pórtico e de guias de onda de ordem mais elevada, com vários modos de propagação.

A metodologia proposta pode ser estendida para tratar estruturas que têm uma dimensão muito maior que as demais como trilhos, tubulações e pneumáticos. A abordagem de propagação de ondas é útil para estudos de métodos de detecção de defeitos nas estruturas Kessler (2002) e na análise dinâmica em altas freqüências Krawczuk e Palacz (2006) apresentam o desenvolvimento teórico do elemento espectral trincado para os modelos de barra elementar, de Love, de Mindlin-Herrmann e dos três modos. Uma comparação da propagação das ondas para os modelos analisados são apresentadas, comparadas e discutidas. Entretanto, suas analises se mantiveram em faixas de freqüências que contemplam apenas o primeiro modo de propagação.

1.1 Objetivo:

O objetivo deste trabalho:

Estudar, formular e solucionar o problema de cálculo da resposta de uma viga a uma força móvel usando o método dos elementos finitos (FEM).

Obter a resposta do anel sob pressão interna a uma força móvel usando o método do elemento espectral (SEM) e comparar com os resultados obtidos de um pneu de caminhão.

Superar as limitações do método de elemento espectral e buscar ferramentas mais adequada para investigar a resposta dinâmica de estruturas cíclicas.

Uma alternativa para superar as dificuldades mencionas anteriormente foi utilizar o método WFEM que parte de um modelo de elementos finitos de uma fatia do guia de ondas.

Mostrar que utilizando uma fatia obtida de um guia de onda, é possível, através dos números de onda e dos seus respectivos modos obtidos do método WFEM, obter novos elementos que terá comprimento e seção arbitrários.

1.2 Organização da tese:

Esta tese esta assim dividida:

Capítulo 1: Foi realizada uma introdução a respeito do tema a ser estudado e justificando a necessidade de desenvolver este trabalho.

Capítulo 2: Apresenta uma revisão bibliográfica dos trabalhos publicados sobre o assunto com os conceitos que são necessários para o entendimento do contexto e do tema abordado.

Capítulo 3: Procurou-se investigar formas de se aplicar uma carga móvel a uma viga simplesmente apoiada sujeita à aplicação de uma força vertical em movimento com velocidade constante

Capítulo 4: Apresentam modelos de propagação de ondas em estruturas cíclicas sujeitas a forças girantes, para isso foi apresentado um modelo de anel simples usando o método de elemento espectral e a implementação de uma força giratória em tal modelo é discutida

Capítulo 5: O método WFEM, com um modelo de elementos finitos de uma fatia de uma viga de seção retangular, é verificado pelas relações de dispersão calculadas. Segue uma discussão dos resultados e de como separar os números de onda com significado físico dos números de onda obtidos numericamente do problema de autovalor do método WFEM.

Capítulo 6: Com os conceitos do método WFEM validados, a proposta original do trabalho foi mostrar que, utilizando uma fatia de viga, é possível, através dos números de onda e dos seus respectivos modos obtidos do método WFEM, obter a matriz espectral (dinâmica) numérica para o elemento de barra e para o elemento de viga Euler Bernoulli.

Capítulo 7: são apresentadas as conclusões, as sugestões para trabalhos futuros e as publicações geradas no decorrer do desenvolvimento do trabalho.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Nesta seção apresenta-se uma revisão dos trabalhos encontrados na literatura, nos últimos anos, considerados mais relevantes para a área de pesquisa abordada e para o desenvolvimento do trabalho.

Muitas estruturas tem simetria em uma direção. Como mostra a Figura 1.1. Estruturas deste tipo podem ser consideradas como um guia de onda. Para prever seu comportamento dinâmico, por exemplo, o cálculo de uma função de resposta em freqüência (FRF), o clássico método de elementos finitos (FE) muitas vezes não oferece alternativa senão articular toda a estrutura. Exceção são rotacionais e simetrias cíclicas, que são resolvidos através de uma decomposição dos deslocamentos em funções de seno e cosseno. Uma revisão das atuais práticas para estas estruturas pode ser encontrada no trabalho de Wang e Zhou (2003). No entanto, uma melhor utilização da simetria poderia conduzir a cálculos mais eficientes. No que diz respeito ao cálculo do guia de onda, duas abordagens foram usadas no passado. Um primeiro grupo de autores consideram guias de onda uniforme, enquanto o outro grupo está interessado em estruturas periódicas. A vibração de guias de onda uniforme tem sido tema de estudo nos últimos anos. Von Flotow (1986) e Beale e Accorsi (1995) utilizaram a aproximação da onda para o estudo da vibração das redes estruturais composta de vigas uniforme. Mais recentemente, a análise de estruturas com secção transversal constante é feita pelos chamados elementos finitos espectral (SFE), que foi desenvolvido principalmente por Finnveden (2000) e Finnveden (2004). Nilsson (2002) utilizou o método SFE para estudar estruturas feitas de placas e cascas. Shorter (2004) desenvolveu (SFE) para laminados viscoelásticos utilizando equações de Lagrange, e encontrou a relação de dispersão. Birgersson (2003) e Birgersson e Finnveden (2005) utilizaram a SFE para resolver vários problemas, incluindo ondas planas e iterações fluido estrutura. Gry (1996) aplicada idéias similares para o cálculo da propagação das ondas em trilhos usando um modelos de elementos finitos da seção transversal de um trilho. Gavric (1995) apresentada um método para obter os números de onda e seus respectivos modos de propagação. O método, baseado na técnica dos elementos finitos, e bem adequado para o cálculo de ondas propagativas e evanescentes de um guia de onda reto com uma seção transversal arbitraria. A solução é obtida por fatorização, com a secção transversal do guia de onda sendo modelada por discretização numérica. A curva de dispersão das ondas propagativas em um trilho de trem são calculadas usando elemento finito triangular e quadrilateral. A evolução dos modos de propagação da seção transversal é avaliada e discutida conforme as freqüências aumentam.

Mencik e Ichchou (2005) desenvolveram uma aproximação onde um código comercial de FEM pode ser usado para modelar uma fatia do guia de ondas e, deste modelo, pode ser derivado um modelo de propagação de ondas baseado nas relações espectrais, modos de propagação e velocidades de grupo e fase.

Krawczuk e Palacz (2006) apresentaram quatro modelos de elementos espectrais para a análise de propagação de ondas longitudinal em estruturas. Os elementos desenvolvidos são baseados na teoria elementar de barra, Love ou de um modo, modelo Mindlin-Herrmann ou dos dois modos e modelo Mindlin McNiven ou dos três modos. São observadas certas diferenças em comportamento de propagação de onda para os modelos analisados. Para baixas freqüências os resultados obtidos para todos os modelos são semelhantes e de um ponto de vista prático o elemento espectral baseado na teoria de Love é adequado. Para altas freqüências as diferenças são consideráveis e só o Mindlin-Herrmann ou modelos de três - modos apresentam bons resultados.

Orrenius e Finnveden (1996) analisaram propagação de onda em sistemas de guia de ondas estruturais, na qual desenvolveram e adaptaram uma técnica de elementos finitos semi-analíticos. Com esta técnica, podem ser calculadas as propriedades de dispersão de estruturas de guias de onda.

Waki e Mace (2007) fizeram um estudo de vibração de um pneu usando o método WFEM. É considerado que as propriedades dos materiais são dependentes da freqüência. É obtida uma fatia de um pneu e modelada utilizando o método de elementos finitos (FEM) na qual é obtida a propagação de ondas da matriz dinâmica do modelo de elementos finitos. A resposta forçada é obtida usando a aproximação de onda. Uma aproximação para determinar as amplitudes das ondas excitadas é proposto para reduzir dificuldades numéricas. O método é aplicado a um pneu utilizando um modelo de FEM obtido ANSYS. A propagação de onda é mostrada. A resposta forçada é comparada com dados experimentais.

Mace e Duhamel (2005) apresentam um método onde os números de onda de uma fatia do guia de onda podem ser obtidos utilizando um modelo de elementos finitos. As matrizes de massa e rigidez do modelo estudado são obtidas usando o método de elementos finitos. Uma condição de periodicidade é aplicada, os números de onda são obtidos da matriz de transferência. O método é descrito, e os números de onda, energia e velocidade grupo são discutidos e são apresentados exemplos numéricos para viga e uma placa bi-apoiada, ambos os problemas são comparados com a solução analítica.

Krawczuk e Palacz (2006) apresentam o desenvolvimento teórico do elemento espectral trincado para os modelos de barra elementar, de Love, de Mindlin-Herrmann e dos três modos. Uma comparação da propagação das ondas para os modelos analisados são apresentadas, comparadas e discutidas. Entretanto, suas analises se mantiveram em faixas de freqüências que contemplam apenas o primeiro modo de propagação.

Gavric (1994) obteve os números de ondas e seus respectivos modos de propagação para uma seção transversal de um guia de onda de uma casca fina. O método também é baseado na técnica de elementos finitos. Uma seção transversal de uma casca fina utilizando elementos finitos é desenvolvida usando a formulação de trabalho virtual para a propagação em uma dimensão. Dois exemplos são analisados pelo método dos elementos finitos desenvolvidos: uma casca cilíndrica circular e uma viga de perfil I. Resultados obtidos pelo método dos elementos finitos, pela teoria de casca de Donnell e pela a teoria simples de viga de Euler Bernoulli são comparados.

Pany e Parthan (2003) mostram propagação de ondas ao longo do eixo de painéis curvos de comprimento infinito para determinar as freqüências naturais. São apresentados dois métodos para realizar esta análise. No primeiro, as deflexões curvas na forma de funções de viga e modos senoidais são usados para obter propagação de curvas constantes. No segundo método altas precisão de elementos finitos triangulares é usado combinado com uma aproximação para determinar as freqüências naturais. Isso mostra que esta aproximação a ordem das matrizes obtidas do FEM conduz consideravelmente a redução do esforço computacional. Curvas de propagação de ondas versus freqüências naturais são apresentadas.

Duhamel e Mace (2006) apresentam um método para calcular a resposta forçada usando uma combinação de ondas e elementos finitos. A principal vantagem da abordagem sobre o guia de ondas e elementos finitos e que muitas vezes chamado de método espectral FEM, é que é possível obter as matrizes de rigidez e massa de estruturas com geometrias complexas e com isso pode-se calculada a resposta forçada com relativa facilidade. Para demonstrar a eficácia do método exemplos de resposta forçada de uma viga finita e uma placa são apresentados.

Duhamel e Mace (2005) mostram um método eficiente para calcular a resposta da estrutura completa com excitação harmônica a partir da matriz de rigidez dinâmica de uma célula da estrutura obtida por elementos finitos. Assim, uma grande estrutura pode ser discretizada com software FEM e os cálculos não estão limitados para simples exemplos analíticos. O método consisti em utilizar ondas para descrever as vibrações da estrutura, em vez da tradicional forma modal. Essa onda é obtida a partir dos autovalores da matriz de transferência da célula periódica. Em seguida, a matriz de rigidez dinâmica pode ser construída a partir desses modos de onda. O custo computacional torna-se independente do número de células nas estruturas, o que é uma melhoria significativa ao longo dos clássicos elementos finitos para grandes estruturas.

Hinke e Mace (2004) apresentam um método para estimar o movimento das ondas em guias de ondas com seção transversal uniforme, na qual o software comercial Ansys é utilizado para criar um modelo de uma seção do guia de onda. A matriz de rigidez dinâmica é obtida, particionada e reorganizada para encontrar a matriz de transferência, que correlaciona os deslocamentos e as forças de ambos os lados da fatia do guia de onda. A propagação das ondas são descritas pelos autovalores obtidos da matriz de transferência. A relação de dispersão, tipos de ondas são calculados para exemplos de uma barra, viga, placa laminada.

Manconi e Mace (2007) tiveram como objetivo apresentar um método geral para a análise numérica da propagação de ondas em estruturas bidimensional através da utilização do método de elementos finitos (FEM). O método envolve tipicamente apenas um elemento finito para qual a condição de periodicidade é aplicada em vez de modelar toda a estrutura, reduzindo assim o custo de cálculos. As matrizes de massa e de rigidez são encontradas utilizando o software convencional FEM. São apresentados exemplos numéricos, estes incluem placas isotrópicos e ortotrópicos, casca cilíndrica isotrópicos e casos mais complexo de sanduíche de casca cilíndrica na qual a solução analítica não existe. Os dois últimos casos são estudados utilizando modelos obtidos do software comercial Ansys.

Lee e Kim (2004) Apresentam um modelo de elemento espectral formulado para viga de Timoshenko axialmente em movimento sob uma tensão axial uniforme. A alta precisão do elemento espectral é então verificada através da comparação de suas soluções com a solução por elementos finitos e soluções analíticas. Os efeitos da velocidade axial e tensão axial nas vibrações característica, a relação de dispersão, e a estabilidade do movimento de viga de Timoshenko são analiticamente e numericamente investigados.

Waki (2007) em sua tese de doutorado considera questões relativas à aplicação do método WFEM para vibrações livres e forçadas de um guia de onda unidimensional. São discutidos os problemas numéricos e são propostos métodos para reduzir os erros. Três métodos numéricos para a determinação da velocidade de grupo são comparados. As curvas de dispersão são mostrados incluindo números de onda puramente reais, puramente imaginários e complexos. A propagação das ondas em alguns modelos estudados são comparados com soluções analíticas ou numéricas. São analisadas como aplicação prática, vibrações livres e forçadas de um pneu.

Waki e Mace (2006) analisam erros numéricos que ocorrem nos resultados do WFEM e propõem uma abordagens para melhorar os erros em questão. Eles comentam que no método

WFEM, erros surgem devido, discretização, arredondamento devido o termo de inércia e mal-condicionamento, e fazem as seguintes conclusões: a discretização do FEM torna-se o erro maior quando comprimento do elemento se torna grande o suficiente em comparação com o comprimento de onda. Porém o erro de arredondamento devido o termo de inércia se torna grandes para elementos com pequenos comprimentos quando a matriz dinâmica é obtida. O mal-condicionamento ocorre quando o problema de autovalor é formado e resolvido e os erros podem se tornar grandes, especialmente para estruturas complexas. No trabalho Waki e Mace utilizaram o metodo de Zhong para melhorar o condicionamento do problema de autovalor, na qual erros relacionados com problema de autovalor são matematicamente discutidos e o método de Zhong é validado. Além disso, o método de decomposição de valores singular (singular value decomposition) é proposto para reduzir os erros na obtenção dos autovalores.

Igawa e Komatsu (2004) apresentam um novo método de elemento espectral. Neste método, a transformada de Laplace é aplicado ao em vez de transformada de Fourier, evitando assim o problema da periodicidade. Através deste método proposto, estruturas do tipo pórtico 3-D utilizando vigas de comprimento finito pode ser analisadas.

Duhamel (2008) apresenta um método recursivo para calcular a matriz dinâmica de rigidez global de uma estrutura periódica finita. Isso permite obter função de resposta em freqüência com uma quantia pequena de cálculos.

Os trabalhos apresentados nesta revisão bibliográfica contribuíram de uma forma geral para o desenvolvimento desta tese

Capítulo 3

Simulação Numérica de Cargas Móveis em Vigas Usando Modelos de Elementos Finitos

Neste capítulo procurou-se estudar e investigar a forma de aplicar uma carga móvel a uma estrutura. Será feita a introdução ao problema fundamental de força em movimento com a análise de uma viga simplesmente apoiada sujeita à aplicação de uma força vertical em movimento com velocidade constante. Por possuir solução analítica na literatura técnica Olsson (1991), esta análise é utilizada para a validação do modelo proposto neste capítulo para a representação de uma força móvel periódica em análises numéricas.

A força que se move com velocidade constante e que passa periodicamente sobre a viga é simulada de duas formas: utilizando uma função pulso triangular e usando as funções de interpolação cúbica do elemento finito de viga utilizado. Para cada nó o pulso e as funções de interpolação são deslocados do tempo que as forças levam para se deslocarem entre dois nós consecutivos. Além disso, a periodização é introduzida usando a fórmula de Poisson, que relaciona a série e a transformada de Fourier. A metodologia utilizada neste capítulo será utilizada no capítulo 4 para o problema de uma viga circular, sujeita a uma força radial que se move em torno dela com velocidade angular constante.

3.1 Definição do problema

Considera-se uma viga de Euler Bernoulli simplesmente apoiada sujeita a uma força vertical *P* que se move a uma velocidade constante. A viga possui comprimento *L*, área de seção transversal A, momento de inércia I_y, módulo de elasticidade E e densidade de massa ρ. A Figura 3.1 apresenta o problema da carga móvel de interesse.

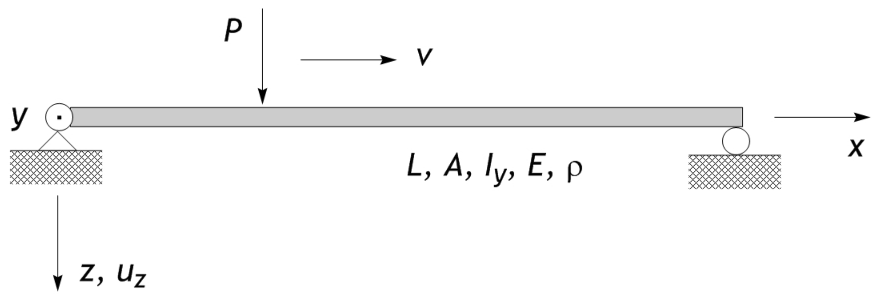


Figura 3.1: Viga de Euler Bernoulli simplesmente apoiada.

A equação do movimento transversal da viga com deslocamento $u_z = u_z(x,t)$ para $0 \leq x \leq L$ e $0 \leq t \leq L/v$, pode ser escrita como:

$$\rho A \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + EI_y \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} = \delta(x - vt)P \tag{3.1}$$

na qual δ é a função delta de Dirac e t é o tempo ajustado a zero quando a força móvel entra na viga. As condições de contorno do problema são dadas pelas equações abaixo:

$$u_z(0,t) = 0 \qquad \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}(0,t) = 0 \tag{3.2}$$

$$u_z(L,t) = 0 \qquad \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}(L,t) = 0 \tag{3.3}$$

e as condições iniciais são as seguintes:

$$u_z(x,0) = 0 \qquad \frac{\partial u_z}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{3.4}$$

Fazendo uso destas hipóteses será apresentada a seguir a solução analítica para esse problema.

3.2 Solução analítica

O problema apresentado pertence a um pequeno grupo de problemas de cargas móveis que podem ser resolvidos analiticamente, Olsson (1991). Existem diferentes métodos de solução e a maioria deles foram estudados por Frýba (1972). A solução analítica pode, por exemplo, ser encontrada introduzindo a técnica de separação de variáveis como segue abaixo.

$$u_z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Y}_n(t) sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.5}$$

na qual $\mathrm{Y}_n(t)$ e $sin(n\pi x / L)$ são os deslocamentos e as funções modais, respectivamente. Substituindo a Equação (3.5) em (3.1) tem-se:

$$\ddot{\mathrm{Y}}_n(t) + \omega_n^2 \mathrm{Y}_n(t) = \left(\frac{2P}{\rho AL}\right) sin\overline{\omega}_n t \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots, \infty \quad \text{e} \quad 0 \le t \le \frac{L}{v} \tag{3.6}$$

sendo,

$$\omega_n^2 = \frac{n^4 \pi^4 EI}{\rho AL^4}, \qquad \overline{\omega}_n = \frac{n\pi v}{L} \tag{3.7}$$

onde ω_n são as freqüências natural (*rad/s*) e $\overline{\omega}_n$ as freqüências do carregamento Frýba (1972) e Warburton (1976). Com as condições iniciais $\mathrm{Y}_n(0) = \dot{\mathrm{Y}}_n(0) = 0$, que representam a Equação (3.4), obtém-se uma solução para a Equação (3.6) como apresentada a seguir:

$$\mathrm{Y}_n(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{2P}{\rho AL\omega_n^2}\right)\left(\dfrac{1}{1-\beta_n^2}\right)\left(sin\overline{\omega}_n t - \beta_n sin\omega_n t\right) & \beta_n \ne 1 \\[2ex] \left(\dfrac{2P}{\rho AL\omega_n^2}\right)\dfrac{1}{2}\left(sin\overline{\omega}_n t - \omega_n t \cos\omega_n t\right) & \beta_n = 1 \end{cases} \tag{3.8}$$

na qual β_n é a relação entre as freqüências, definida por.

$$\beta_n = \frac{\overline{\omega}_n}{\omega_n} \tag{3.9}$$

A Equação (3.8) pode ser comparada com as expressões apresentadas por Clough e Penzien (1975). A solução analítica das Equações (3.1) e (3.4) pode agora ser obtida introduzindo a Equação (3.8) na Equação (3.5). Desta maneira obtém-se uma a solução da seguinte forma:

$$u_z(x,t) = u_{zs}(L/2)\frac{96}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2(n^2-\alpha^2)}\left(\sin(n\pi t/\tau) - \frac{\alpha}{n}\sin(\frac{n^2\pi}{\alpha}t/\tau)\right)\sin(n\pi x/L)\right],$$

$$\alpha \neq n \quad (3.10a)$$

$$u_z(x,t) = u_{zs}(L/2)\frac{96}{\pi^4}\sum_{\substack{n=1 \\ n\neq\alpha}}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2(n^2-\alpha^2)}\left(sin\left(\frac{n\pi t}{\tau}\right) - \frac{\alpha}{n}sin\left(\frac{n^2\pi}{\alpha}t/\tau\right)\right)sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

$$+u_{zs}(L/2)\frac{96}{\pi^4}\left[\frac{1}{2\alpha^4}sin\left(\frac{\alpha\pi t}{\tau}\right) - \frac{\alpha\pi t}{\tau}\cos\left(\frac{\alpha\pi t}{\tau}\right)sin\left(\frac{\alpha\pi x}{L}\right)\right], \qquad \alpha = n \tag{3.10b}$$

Nestas equações $u_{zs}(L/2) = PL^3/48EI$ é o deslocamento estático do ponto (*L/*2) quando submetida à força *P*, $\tau = L/v$ é o tempo que a força móvel leva para atravessar a viga, *P* é a força vertical que se move a uma velocidade constante, α é o parâmetro de velocidade definido por $\alpha = T_1/2\tau$ e T_1 é o período do primeiro modo de vibração da viga. Através das Equações (3.10a) e (2.10b) pode-se observar que a relação $u_z(x,t)/u_{zs}(L/2)$ da resposta depende somente de três parâmetros adimensionais: x/L, t/τ e α. Para obter apenas a resposta forçada periódica não ressonante basta desprezar o termo que depende da freqüência natural, ou seja,

$$u_z(x,t) = u_{zs}(L/2)\frac{96}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2(n^2-\alpha^2)}\sin(n\pi t/\tau)\sin(n\pi x/L)\right], \ \alpha \neq n \tag{3.11}$$

3.3 Modelagem da viga submetida a uma força móvel por elementos finitos

O problema foi resolvido analiticamente. Entretanto, os métodos analíticos podem ser aplicados somente a uma classe muito limitada de problemas envolvendo cargas móveis. Para problemas mais gerais de cargas móveis é necessária a utilização de métodos numéricos. O método dos elementos finitos é uma ferramenta numérica importante na análise estrutural e pode ser usado para a solução numérica do problema apresentado. Estas soluções são baseadas em discretizações por elementos finitos. Para a maioria dos problemas, a discretização por elementos finitos para o problema de carga móvel resulta numa equação do movimento do tipo.

$$[M]\{\ddot{u}(t)\}+[C]\{\dot{u}(t)\}+[K]\{u(t)\}=\{P(t)\} \tag{3.12}$$

na qual $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura respectivamente, $\{u(t)\}$, $\{\dot{u}(t)\}$ e $\{\ddot{u}(t)\}$ são os vetores deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente, e $\{P(t)\}$ é o vetor da carga dinâmica, móvel ou não. As soluções por elementos finitos para o problema de carga móvel são também apresentadas por Yoshida (1971) e Venâncio (1978).

3.4 Funções de forma cúbicas para o elemento de viga de Euler Bernoulli

Designa-se por Euler Bernoulli a teoria de vigas em que se considera que as seções se mantêm planas e perpendiculares ao eixo da viga após a deformação, não sendo considerada a deformação devido à força cortante, a inércia de rotação da seção é desprezada. Nesta seção será apresentada a formulação das funções de forma de elementos finitos de vigas retas no plano com a teoria de Euler-Bernoulli. Na Figura 3.2 encontra-se representado um elemento de viga com dois nós.

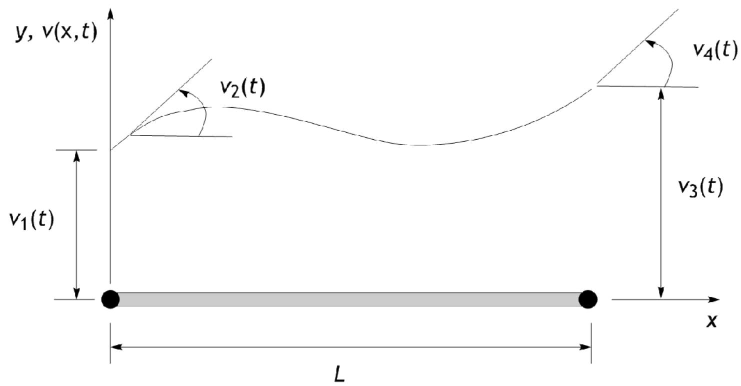


Figura 3.2: Elemento de viga com dois nós.

A aproximação do campo de deslocamentos $v(x,t)$ para a viga contínua é dada pela seguinte expressão:

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{4} \psi_i(x) v_i(t) \tag{3.13}$$

na qual $v_i(t)$ é o deslocamento generalizado, e as funções $\psi_i(x)$ descrevem o deslocamento de todo o elemento de viga e satisfazem as condições de contorno apresentadas nas Equações:

$$\psi_1(0) = 1, \qquad \psi_1'(0) = \psi_1(L) = \psi_1'(L) = 0 \tag{3.14}$$

$$\psi_2'(0) = 1, \qquad \psi_2(0) = \psi_2(L) = \psi_2'(L) = 0 \tag{3.15}$$

$$\psi_3(L) = 1, \qquad \psi_3(0) = \psi_3'(0) = \psi_3'(L) = 0 \tag{3.16}$$

$$\psi_4'(0) = 1, \qquad \psi_4(0) = \psi_4'(0) = \psi_4(L) = 0 \tag{3.17}$$

A aproximação da Equação (3.13) para uma viga uniforme é dada através de um polinômio cúbico:

$$v(x) = c_1 + c_2\left(\frac{x}{L}\right) + c_3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + c_4\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{3.18}$$

Substituindo as quatro condições de contorno na Equação (3.18) obtêm-se as seguintes funções de interpolação cúbicas, Craig (1981):

$$\psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{3.19}$$

$$\psi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{3.20}$$

$$\psi_2(x) = x - 2L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{3.21}$$

$$\psi_4(x) = -L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{3.22}$$

Essas funções são ilustradas na Figura 3.3.

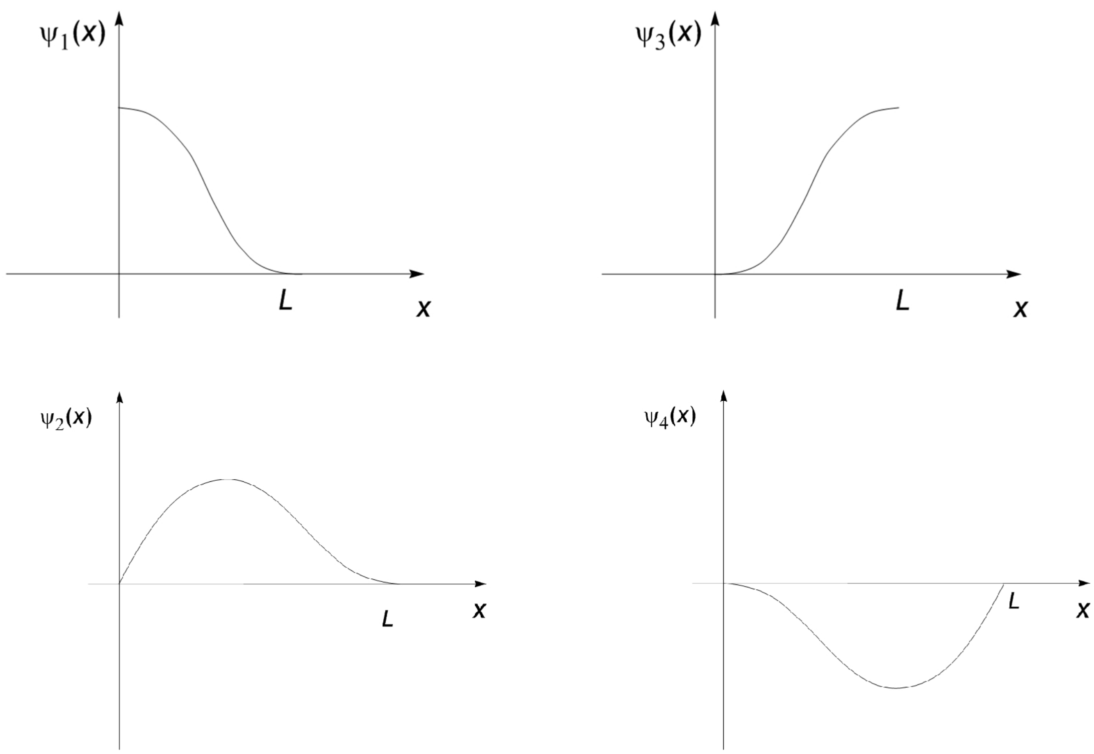


Figura 3.3: Funções de interpolação cúbicas de uma viga reta.

Para obter o vetor de forças generalizadas e as matrizes de rigidez e massa do elemento de viga de Euler Bernoulli, faz-se uso das equações:

$$k_{ij} = \int_0^L EI\psi_i''(x)\psi_j''(x)dx \tag{3.23}$$

$$m_{ij} = \int_0^L \rho A\psi_i(x)\psi_j(x)dx \tag{3.24}$$

$$p_i = \int_0^L p(x,t)\psi_i(x)dx \tag{3.25}$$

Substituindo as Equações (3.19) a (3.22) nas Equações (3.23) e (3.25) obtêm-se as seguintes matrizes de massa e rigidez do elemento, respectivamente:

$$\left[M^e\right] = \left(\frac{\rho AL}{420}\right)\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ sim. & & & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

$$\left[K^e\right] = \left(\frac{EI}{L^3}\right)\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ sim. & & & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

3.5 Formulação das características do sistema

Encontradas as matrizes de massa e rigidez do elemento, o próximo passo é combiná-las para formar um conjunto completo de equações que governe a reunião de todos os elementos.

$$\left[M\right]\left\{\ddot{u}(t)\right\} + \left[K\right]\left\{u(t)\right\} = \left\{P(t)\right\} \tag{3.28}$$

sendo, $\left[M\right]$ e $\left[K\right]$ as matrizes de massa e rigidez global do sistema.

3.6 Formas de representar a força móvel

Serão estudadas duas formas de representar a força móvel: por um pulso triangular aplicado em cada nó e por pulsos calculados a partir das funções de interpolação cúbicas de elementos finitos apresentadas anteriormente. Para validar a forma de aplicar essas forças no modelo de Elementos Finitos, será tratado o caso simples de uma viga bi-apoiada apresentada na Figura 3.1, para o qual já vimos a solução analítica, que permitirá validar o modo de simular a força móvel.

3.7 Pulso triangular e sua transformada

A viga bi-apoiada será excitada por uma força móvel que se desloca com velocidade constante sobre ela. Este efeito pode ser simulado utilizando uma função pulso triangular atuando em cada nó de um modelo de elementos finitos da viga.

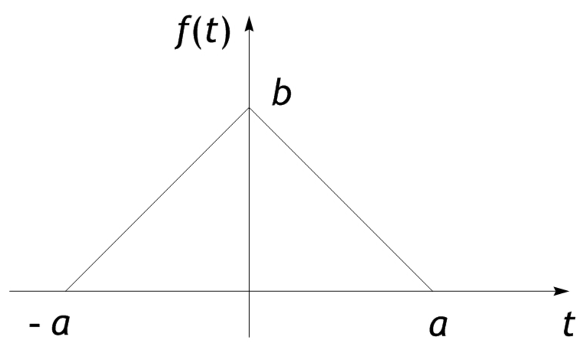


Figura 3.4: Função pulso triangular.

A função $f(t)$ que define o pulso triangular de amplitude b é dada pela Equação (3.29).

$$f(t) = \begin{cases} b\left(1 - \dfrac{t}{a}\right) & 0 \le t \le a \\[2ex] b\left(1 + \dfrac{t}{a}\right) & -a \le t \le 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

A transformada de Fourier da função pulso triangular é dada por:

$$F_1(\omega) = \int_{-a}^{0} b\left(1 + \frac{t}{a}\right)e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{a} b\left(1 - \frac{t}{a}\right)e^{-j\omega t}dt \tag{3.30}$$

que pode ser integrada, obtendo-se:

$$F_1(\omega) = -\frac{b}{a\omega^2}(e^{j\omega a} + e^{-j\omega a} - 2) \tag{3.31}$$

Para aplicar o pulso de modo a representar a força móvel resta ainda periodizar o pulso e calcular a expressão dos pulsos defasados do tempo que a força leva para atingir cada nó da viga, o que será visto a seguir.

3.8 Pulsos obtidos pelas funções de interpolação: força

Para obter a forma do pulso de força, é necessário utilizar as funções de forma do método de elementos finitos, representadas pelas equações abaixo:

$$\psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{3.32}$$

$$\psi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{3.33}$$

sendo necessário deslocar ψ_3 de x para $x + L$. Substituindo $x + L$ na Equação (3.33) tem-se:

$$\psi_3(x + L) = 3\left(\frac{x + L}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x + L}{L}\right)^3 \tag{3.34}$$

Manipulando a Equação (3.34) obtém-se:

$$\psi_3(x + L) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{3.35}$$

Fazendo uso das Equações (3.32) e (3.35) e combinando-as com a Equação (3.25), obtêm-se as componentes do vetor força generalizada:

$$p_1(t) = \int_0^L b\delta(x - vt)\psi_1(x)dx = \int_0^L b\delta(x - vt)\left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]dx \tag{3.36}$$

$$p_3(t) = \int_0^L b\delta(x - vt)\psi_3(x + L)dx = \int_0^L b\delta(x - vt)\left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]dx \tag{3.37}$$

Usando a propriedade da função delta de Dirac $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\varphi(t)dt = \varphi(t_0) \tag{3.38}$$

na Equação (3.38), obtêm-se as integrais das Equações (3.36) e (3.37):

$$p_1(t) = b\left[1 - 3\left(\frac{vt}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{vt}{L}\right)^3\right] \tag{3.39}$$

$$p_3(t) = b\left[1 - 3\left(\frac{vt}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{vt}{L}\right)^3\right] \tag{3.40}$$

nas quais a combinação das funções $p_1(t)$ e $p_3(t)$ mostrada na Figura 3.5 irão representar a forma da força que se deslocará com velocidade constante sobre a viga bi-apoiada.

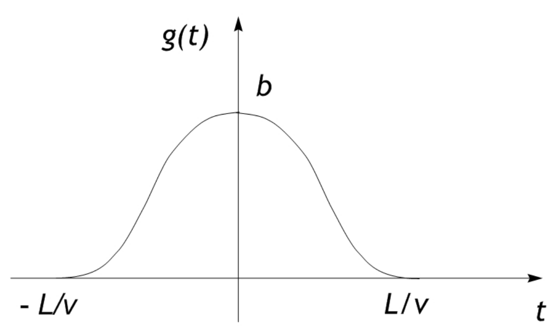


Figura 3.5: Pulso das funções força.

Então a função $g(t)$ que define o pulso das funções força é representada pelas equações abaixo:

$$g(t) = \begin{cases} b\left[1 - 3\left(\dfrac{vt}{L}\right)^2 + 2\left(\dfrac{vt}{L}\right)^3\right] & 0 \le t \le \dfrac{L}{v} \\ b\left[1 - 3\left(\dfrac{vt}{L}\right)^2 - 2\left(\dfrac{vt}{L}\right)^3\right] & -\dfrac{L}{v} \le t \le 0 \end{cases} \tag{3.41}$$

Seja $a = \dfrac{L}{v}$. Calculando a transformada de Fourier da função $g(t)$, tem-se:

$$F_2(\omega) = \int_{-a}^{0}\left[1 - 3\left(\frac{t}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{a}\right)^3\right] b e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{a}\left[1 - 3\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{t}{a}\right)^3\right] b e^{-j\omega t} dt \tag{3.42}$$

que pode ser integrada obtendo-se:

$$F_2(\omega) = \frac{6be^{-ja\omega}(-1 + e^{ja\omega})[2 + ja\omega + e^{ja\omega}(-2 + ja\omega)]}{a^3\omega^4} \tag{3.43}$$

3.9 Pulsos obtidos pelas funções de interpolação: momento

Para obter a forma do pulso de momento, é necessário utilizar as funções de forma do método de elementos finitos, representadas pelas Equações (3.44) e (3.45):

$$\psi_2(x) = x - 2L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{3.44}$$

$$\psi_4(x) = -L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{3.45}$$

sendo necessário deslocar ψ_4 para $x + L$, substituindo $x + L$ na Equação (3.45) :

$$\psi_4(x+L) = -L\left(\frac{x+L}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x+L}{L}\right)^3 \tag{3.46}$$

manipulando a Equação (3.46) obtém-se a seguinte equação:

$$\psi_4(x+L) = x + 2L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{3.47}$$

Fazendo uso das Equações (3.44) e (3.47), combinando-as com a Equação (3.25), obtém-se as componentes do vetor força generalizada:

$$p_2(t) = \int_0^L b\delta(x-vt)\psi_2(x)dx = \int_0^L b\delta(x-vt)\left[x - 2L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]dx \tag{3.48}$$

$$p_4(t) = \int_0^L b\delta(x-vt)\psi_4(x+L)dx = \int_0^L b\delta(x-vt)\left[x + 2L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]dx \tag{3.49}$$

Utilizando a Equação (3.38), obtêm-se as integrais das Equações (3.48) e (3.49):

$$p_2(t) = b\left[vt - 2L\left(\frac{vt}{L}\right)^2 + L\left(\frac{vt}{L}\right)^3\right] \tag{3.50}$$

$$p_4(t) = b\left[vt + 2L\left(\frac{vt}{L}\right)^2 + L\left(\frac{vt}{L}\right)^3\right] \tag{3.51}$$

na qual a combinação das funções $p_2(t)$ e $p_4(t)$, mostrada na Figura 3.6, irá representar a forma do momento que se deslocará com velocidade constante sobre a viga bi-apoiada.

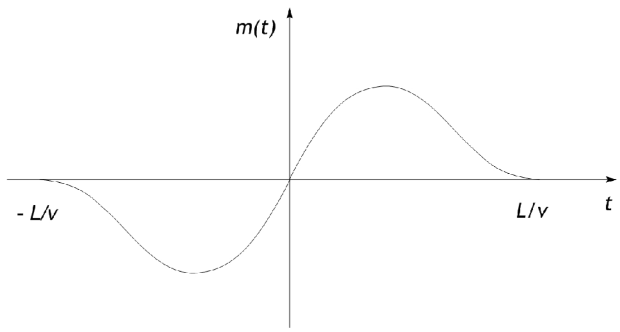


Figura 3.6: Pulso das funções momento.

Então, a função $m(t)$ que define o pulso de momento é representada pelas equações abaixo:

$$m(t)=\begin{cases} b\left[vt-2L\left(\dfrac{vt}{L}\right)^2+L\left(\dfrac{vt}{L}\right)^3\right] & 0\le t\le \dfrac{L}{v} \\ b\left[vt+2L\left(\dfrac{vt}{L}\right)^2+L\left(\dfrac{vt}{L}\right)^3\right] & -\dfrac{L}{v}\le t\le 0 \end{cases} \tag{3.52}$$

Seja $a=\dfrac{L}{v}$. Calculando a transformada de Fourier da função $m(t)$, tem-se:

$$F_3(\omega)=\int_{-a}^{0}\left[vt+2L\left(\frac{t}{a}\right)^2+L\left(\frac{t}{a}\right)^3\right]be^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{a}\left[vt-2L\left(\frac{t}{a}\right)^2+L\left(\frac{t}{a}\right)^3\right]be^{-j\omega t}dt \tag{3.53}$$

que pode ser integrada obtendo-se:

$$F_3(\omega)=\frac{be^{-ja\omega}\{a^3v\omega^2[1+ja\omega+e^{2ja\omega}(-1+ja\omega)]\}}{a^3\omega^4}+$$

$$+\frac{bLe^{-ja\omega}\{[-6-2ja\omega-8ja\omega e^{ja\omega}-a^2\omega^2+j^3a^3\omega^3+e^{2ja\omega}(6-2ja\omega+a^2\omega^2j^3a^3\omega^3)]\}}{a^3\omega^4} \tag{3.54}$$

3.10 Deslocando no tempo os pulsos para cada nó

Admitamos que $f(t) = h(t - \Delta t)$ seja uma versão deslocada no tempo de $h(t)$. A meta é relacionar a Transformada de Fourier de $f(t)$ com Transformada de Fourier de $h(t)$. Temos:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \Delta t)e^{-j\omega t}dt \tag{3.55}$$

Executamos agora a mudança de variável $s = t - \Delta t$, obtendo.

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-j\omega(s+\Delta t)}ds = e^{-j\omega\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-j\omega s}ds \tag{3.56}$$

O resultado do deslocamento no tempo por Δt é, portanto, multiplicar a transformada de Fourier por $e^{-j\omega\Delta t}$.

As transformadas de Fourier dos pulsos, triangular, força e de momento deslocados no tempo podem ser expressas pelas seguintes equações:

$$H_1(\omega) = F_1(\omega)e^{-j\omega m\Delta t} \tag{3.57}$$

$$H_2(\omega) = F_2(\omega)e^{-j\omega m\Delta t} \tag{3.58}$$

$$H_3(\omega) = F_3(\omega)e^{-j\omega m\Delta t} \tag{3.59}$$

Para um deslocamento de $m\Delta t$ onde m varia em função do nó do modelo de elementos finitos.

3.11 Periodizando as forças: coeficientes da série de Fourier

Dividindo as Equações (3.57), (3.58) e (3.59) pelo período *T* obtêm-se os termos da série de Fourier dos pulsos triangular, função força e função momento deslocados de $m\Delta t$ periodizado com período *T*. Pode-se interpretar as equações citadas como a forma de transformar o sinal transitório em um sinal periódico (fórmula de Poisson).

$$a_k = F_1(\omega_k)\frac{e^{-j\omega_k m\Delta t}}{T} \tag{3.60}$$

$$b_k = F_2(\omega_k)\frac{e^{-\frac{j2\pi km\Delta t}{T}}}{T} \tag{3.61}$$

$$c_k = F_3(\omega_k)\frac{e^{-\frac{j2\pi km\Delta t}{T}}}{T} \tag{3.62}$$

na qual $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{T}$, $k = 1, 2, \ldots, M$.

3.12 Análise da resposta forçada da viga

Uma vez obtidas as matrizes de massa e rigidez global apresentadas pela Equação (3.28) e o vetor força apresentado pelas Equações (3.60), (3.61) e (3.62) no domínio da freqüência, o próximo passo é utilizar a equação para o caso geral de vibração forçada para sistemas não amortecidos.

$$\left[K - \omega_k^2 M\right] \cdot X(\omega_k) = P(\omega_k) \quad \Rightarrow \quad X(\omega_k) = \left[K - \omega_k^2 M\right]^{-1} P(\omega_k) \tag{3.63}$$

onde $P(\omega_k)$ é o vetor de forças generalizadas aplicadas nos nós é $X(\omega_k)$ o vetor de deslocamentos e rotações dos nós do modelo no domínio das freqüências.

Para a imposição das condições de contorno na viga basta eliminar linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade restringidos pelos apoios, no caso os deslocamentos transversais do primeiro e último nós.

Uma vez obtidas as respostas no domínio das freqüências, para obter a resposta temporal periódica basta usar a expressão da série de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{M} X(\omega_k) e^{\frac{j2\pi kt}{T}} \tag{3.64}$$

3.13 Simulação numérica da resposta da viga à força móvel

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos com a função pulso triangular e com as funções de interpolação cúbica do método de elementos finitos. A comparação entre os dois métodos e a solução analítica será feita para o deslocamento vertical do ponto central da viga num período. Além da comparação dos resultados, a diferença entre os mesmos é ressaltada nas curvas que mostram os resultados numéricos normalizados em relação ao resultado analítico. A análise é feita para diferentes valores de velocidade da força móvel. As propriedades da viga simulada são mostradas na Tabela 3.1.

Propriedades da viga	***Nomenclatura***	**Valores**
Comprimento	L	$2\ m$
Largura	B	$0{,}1\ m$
Altura	H	$0{,}4\ m$
Modulo de elasticidade	E	$0{,}000001\ N/m^2$
Densidade em massa	ρ	$1\ Kg/m^3$
Momento de inércia	I	$BH^3/12$
Área	A	BH

Tabela 3.1: Propriedades da viga.

As Figuras 3.7 - 3.26 mostram os deslocamentos no ponto ($L/2$) para diferentes velocidades da força aplicada sobre a viga. Na legenda apresentada em cada figura estão indicados os resultados analíticos, com o pulso triangular, "Pulso FT", e com os pulsos das funções de interpolação cúbica obtidas do método de elementos finitos, "Pulso FE'.

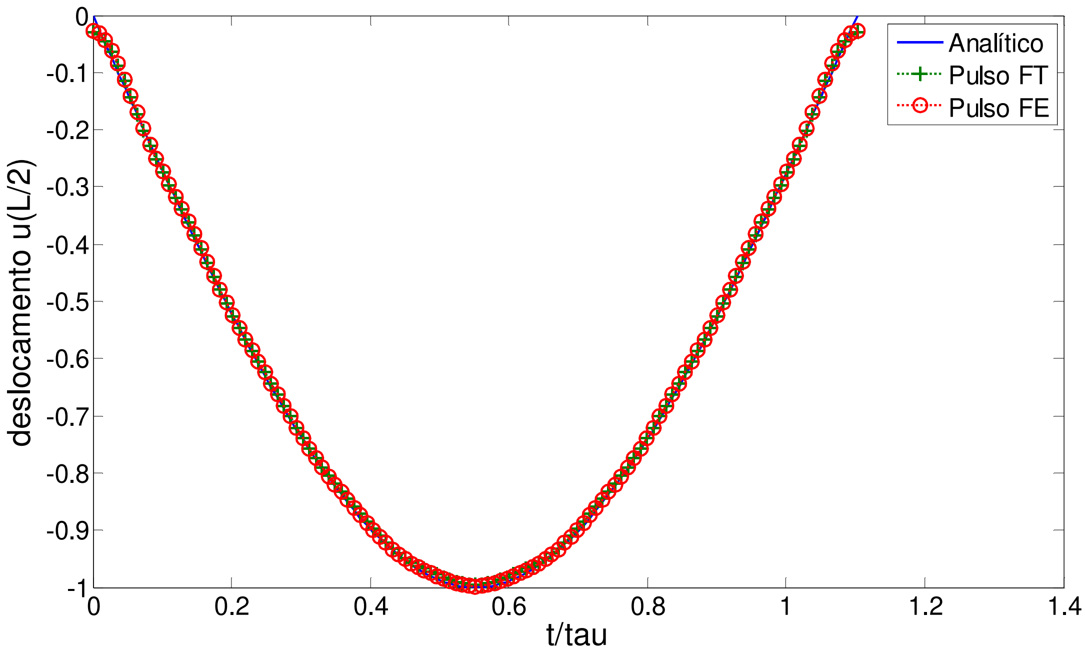


Figura 3.7: Deslocamento no meio da viga sem normalização para $\alpha = 0{,}01$ com 10 termos da série de Fourier**.**

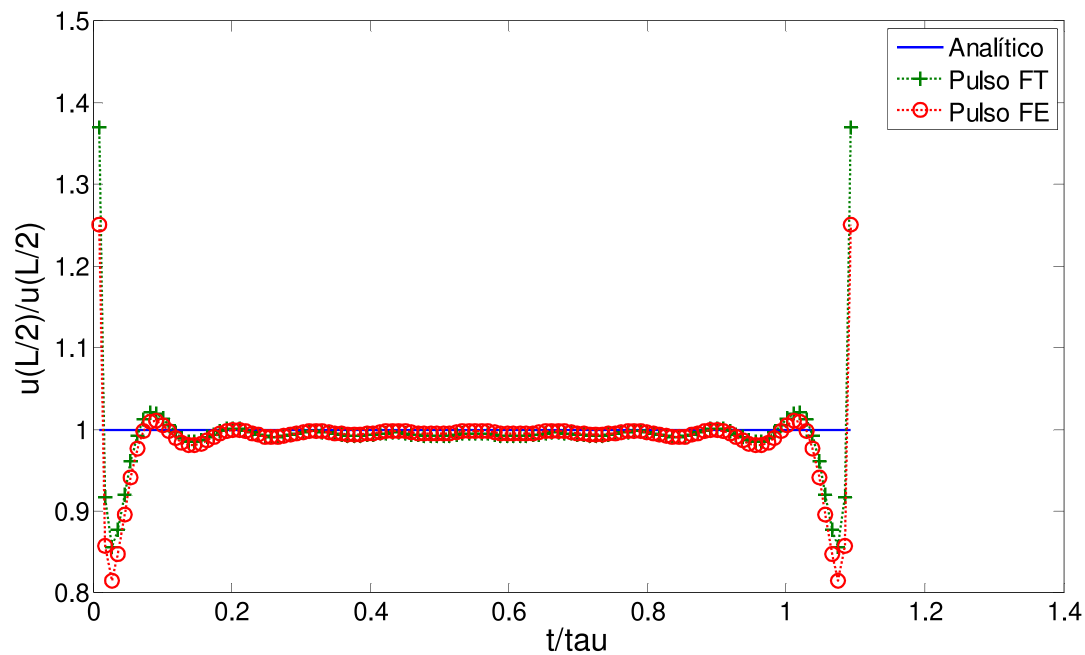


Figura 3.8: Deslocamento no meio da viga com normalização para $\alpha = 0{,}01$ com 10 termos da série de Fourier**.**

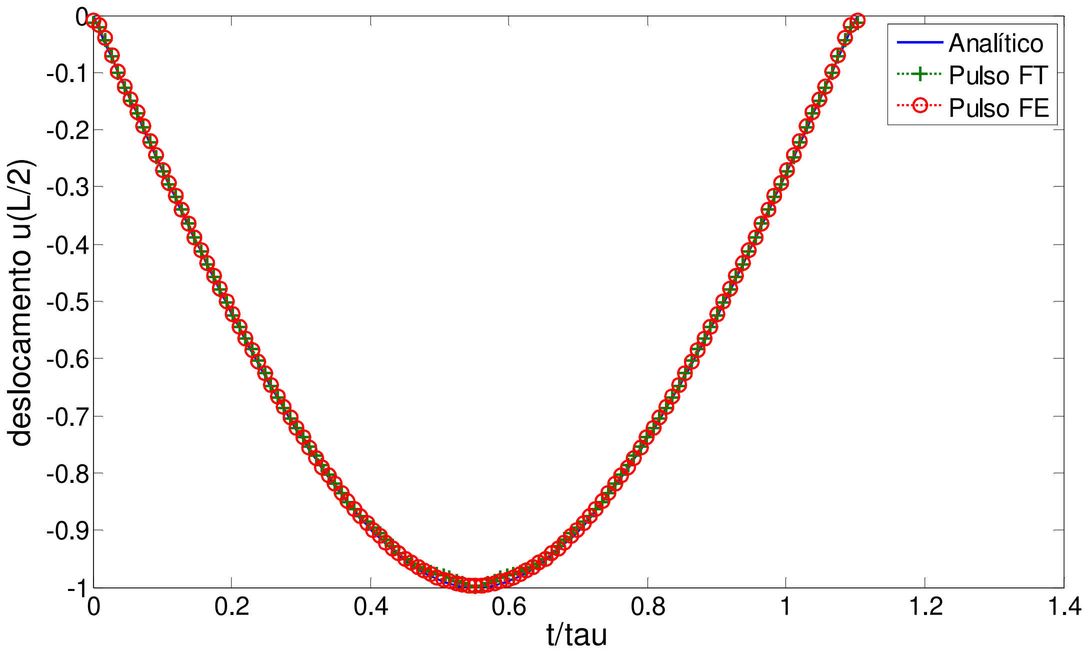


Figura 3.9: Deslocamento no meio da viga sem normalização para $\alpha = 0{,}01$ com 20 termos da série de Fourier**.**

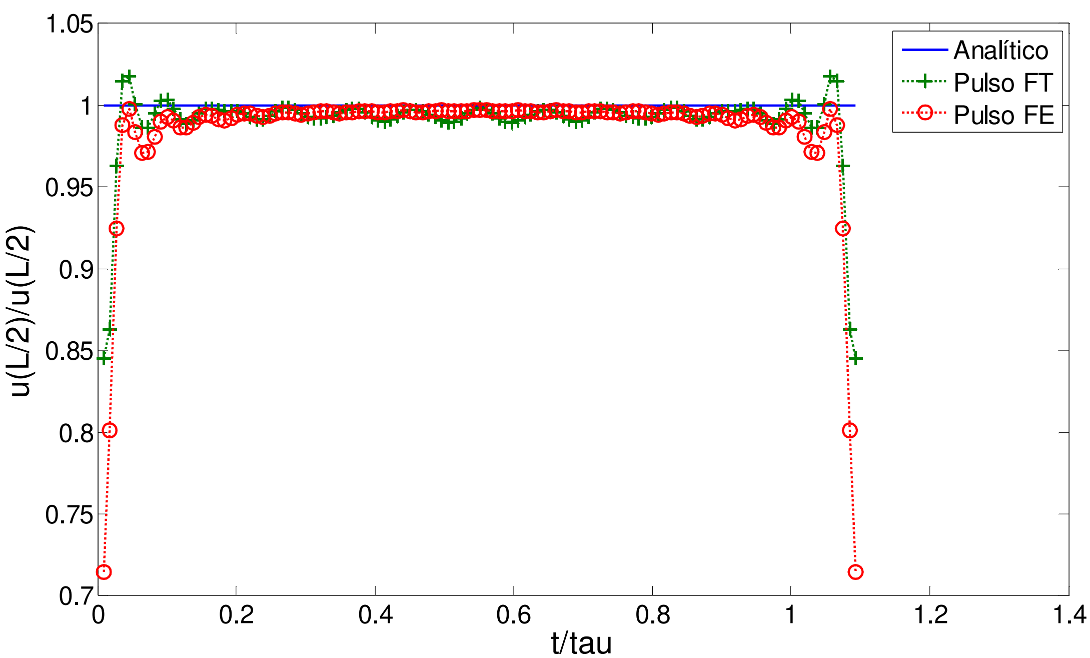


Figura 3.10: Deslocamento no meio da viga com normalização para $\alpha = 0{,}01$ com 20 termos da série de Fourier**.**

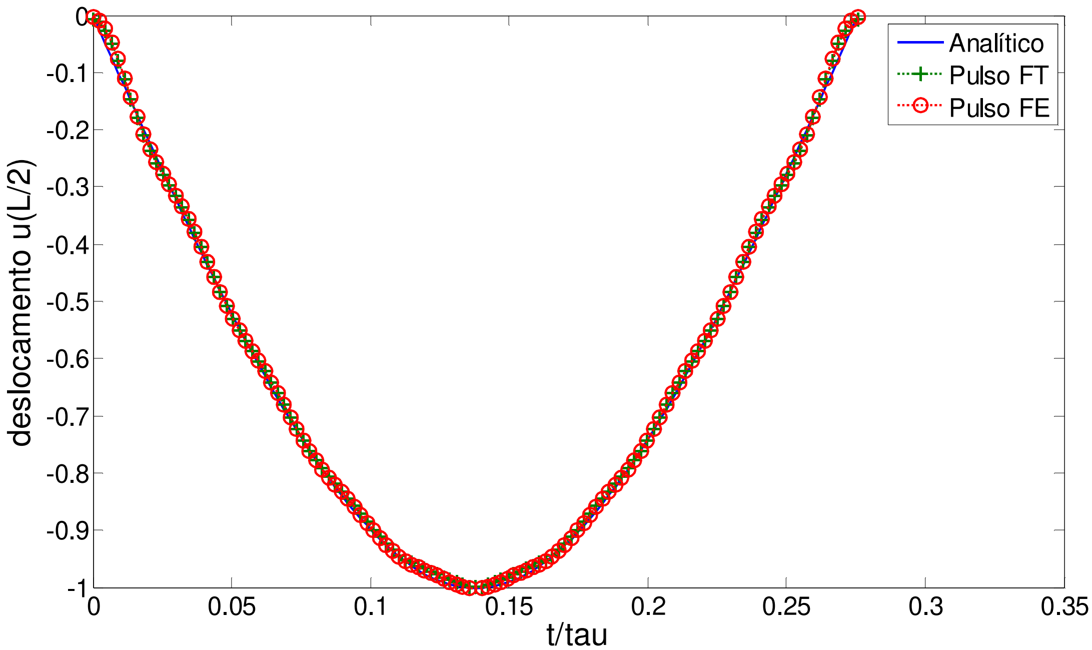


Figura 3.11: Deslocamento no meio da viga sem normalização para $\alpha = 0{,}04$ com 10 termos da série de Fourier.

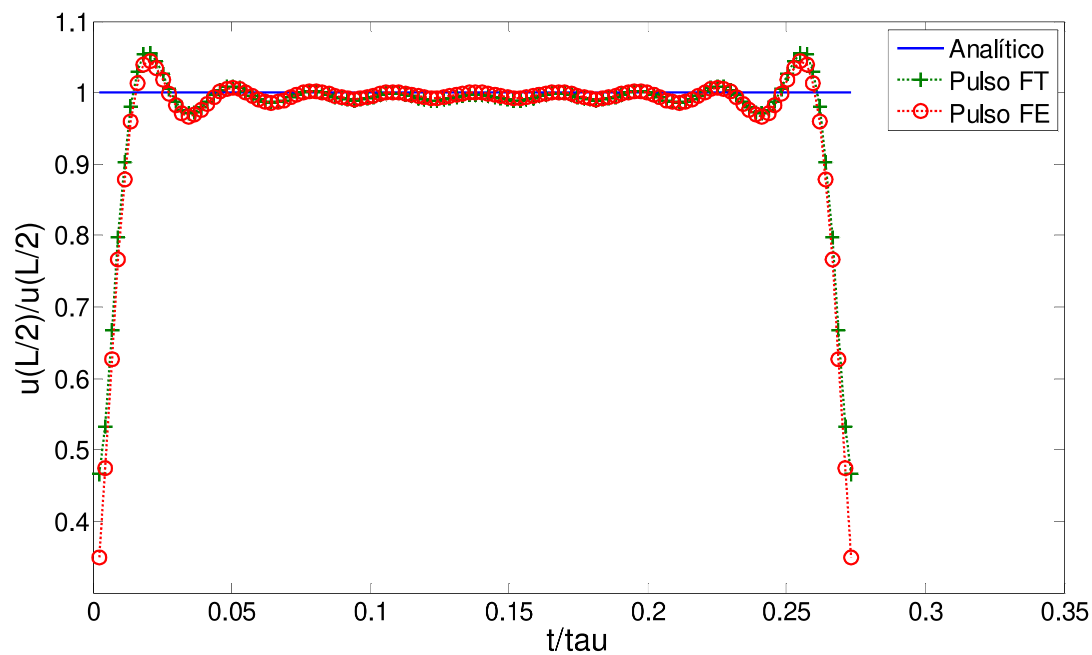


Figura 3.12: Deslocamento no meio da viga com normalização para $\alpha = 0{,}04$ com 10 termos da série de Fourier.

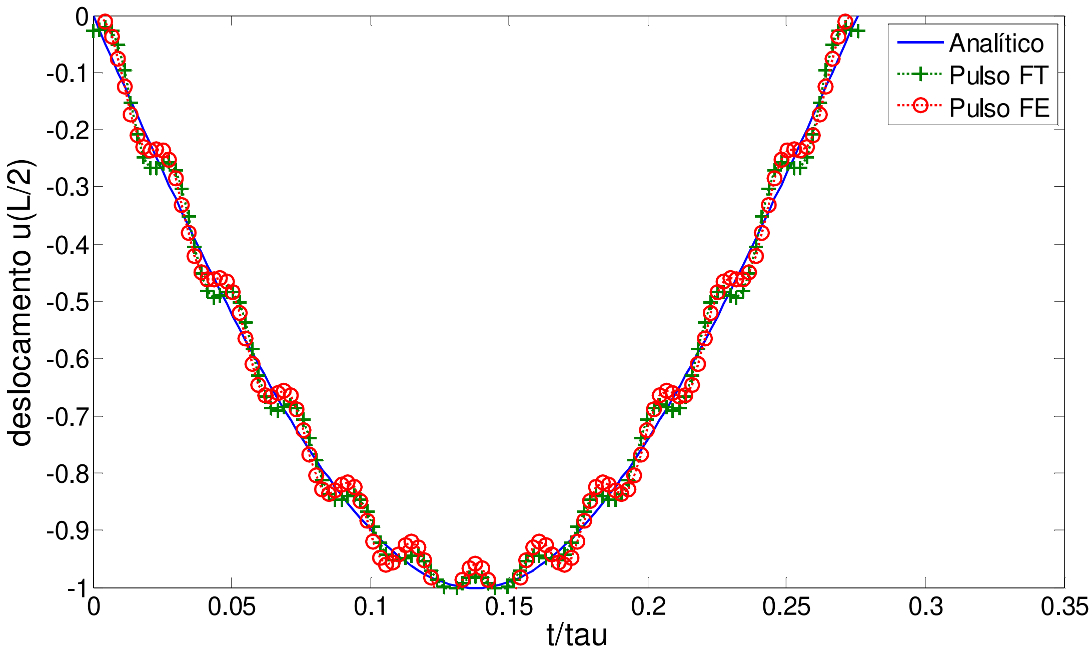


Figura 3.13: Deslocamento no meio da viga sem normalização para $\alpha = 0{,}04$ com 20 termos da série de Fourier.

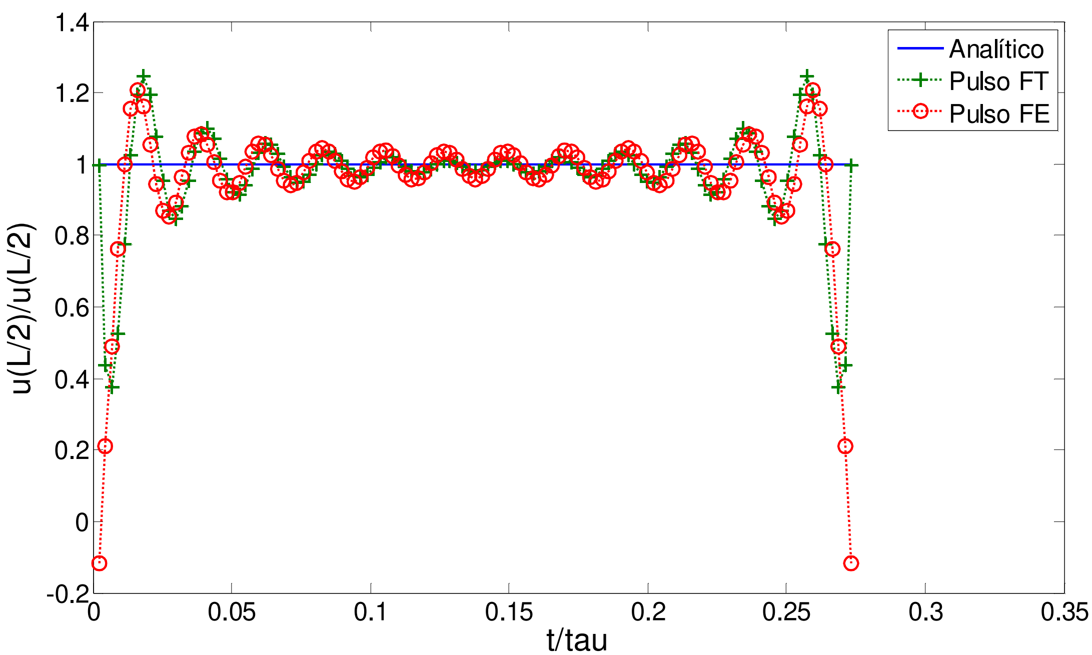


Figura 3.14: Deslocamento no meio da viga com normalização para $\alpha = 0{,}04$ com 20 termos da série de Fourier.

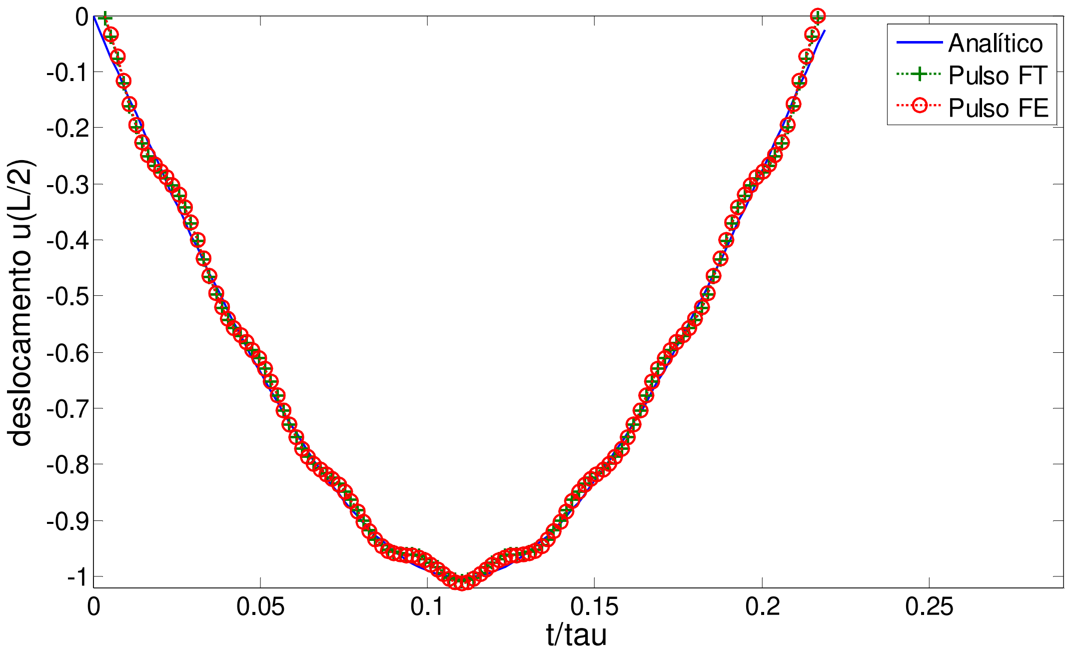


Figura 3.15: Deslocamento no meio da viga sem normalização para $\alpha = 0{,}05$ com 10 termos da série de Fourier.

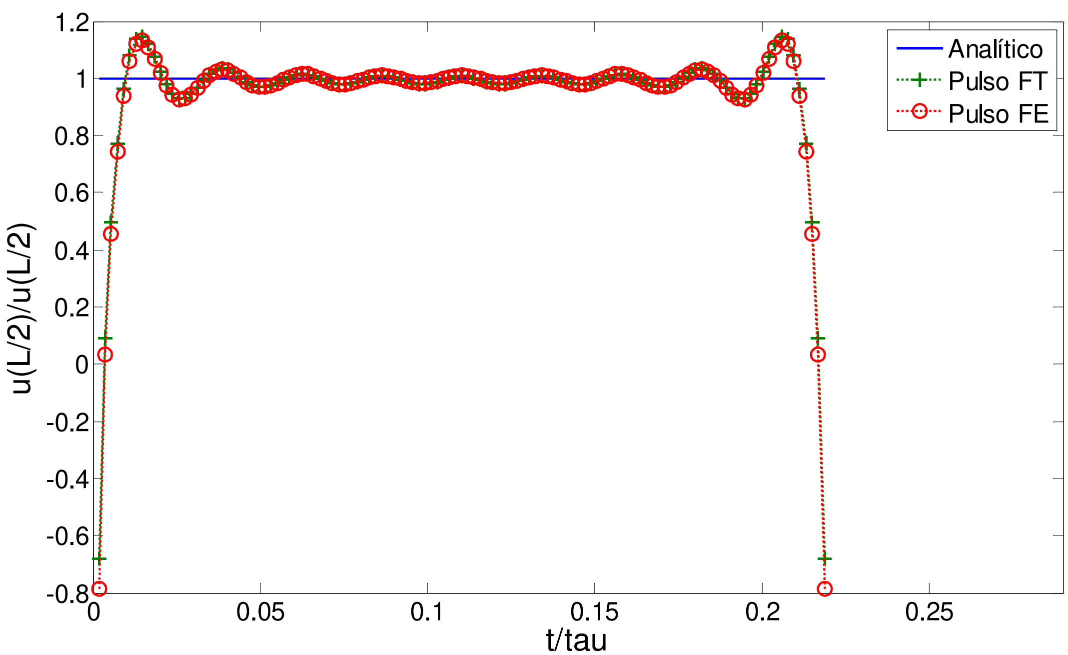


Figura 3.16: Deslocamento no meio da viga com normalização para $\alpha = 0{,}05$ com 10 termos da série de Fourier.

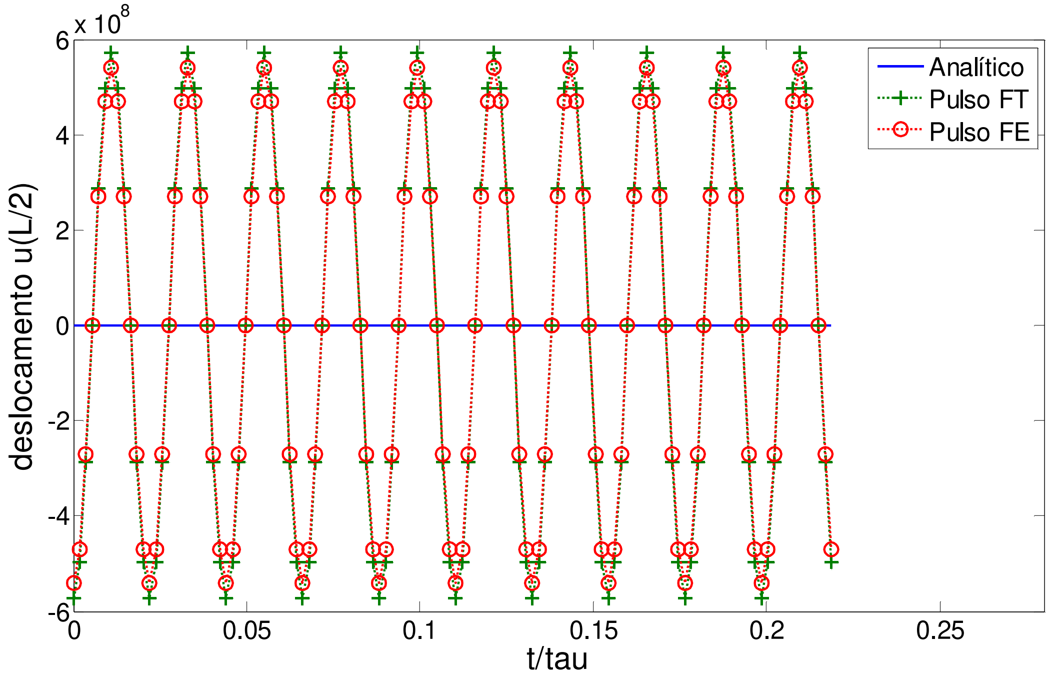


Figura 3.17: Deslocamento no meio da viga sem normalização para $\alpha = 0{,}05$ com 20 termos da série de Fourier.

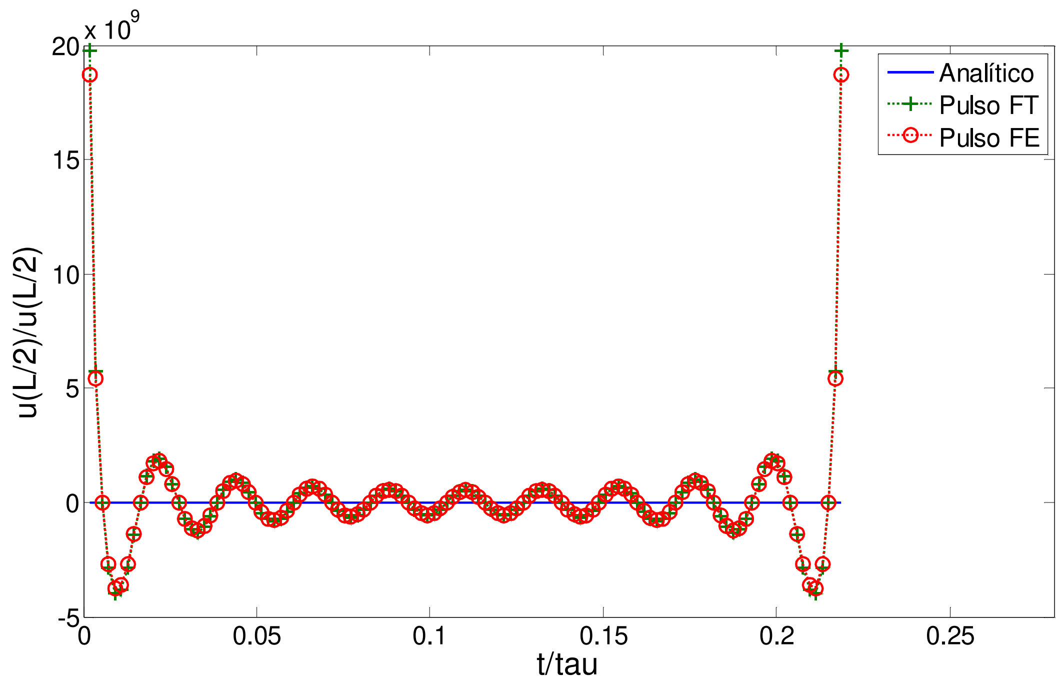


Figura 3.18: Deslocamento no meio da viga com normalização para $\alpha = 0{,}05$ com 20 termos da série de Fourier.

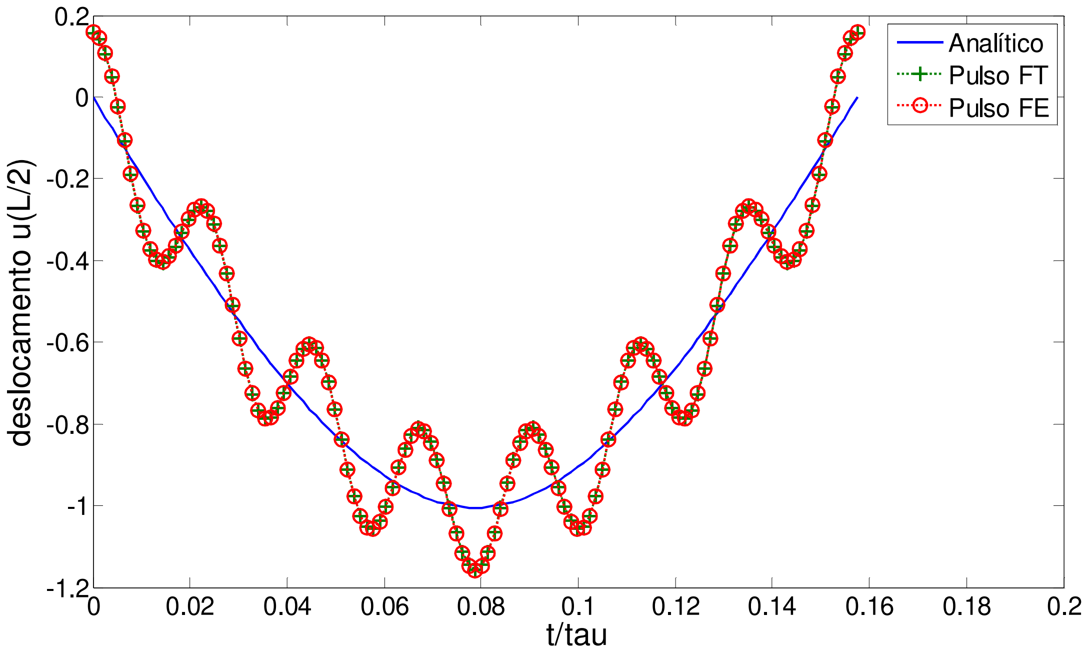


Figura 3.19: Deslocamento no meio da viga sem normalização para $\alpha = 0{,}07$ com 10 termos da série de Fourier.

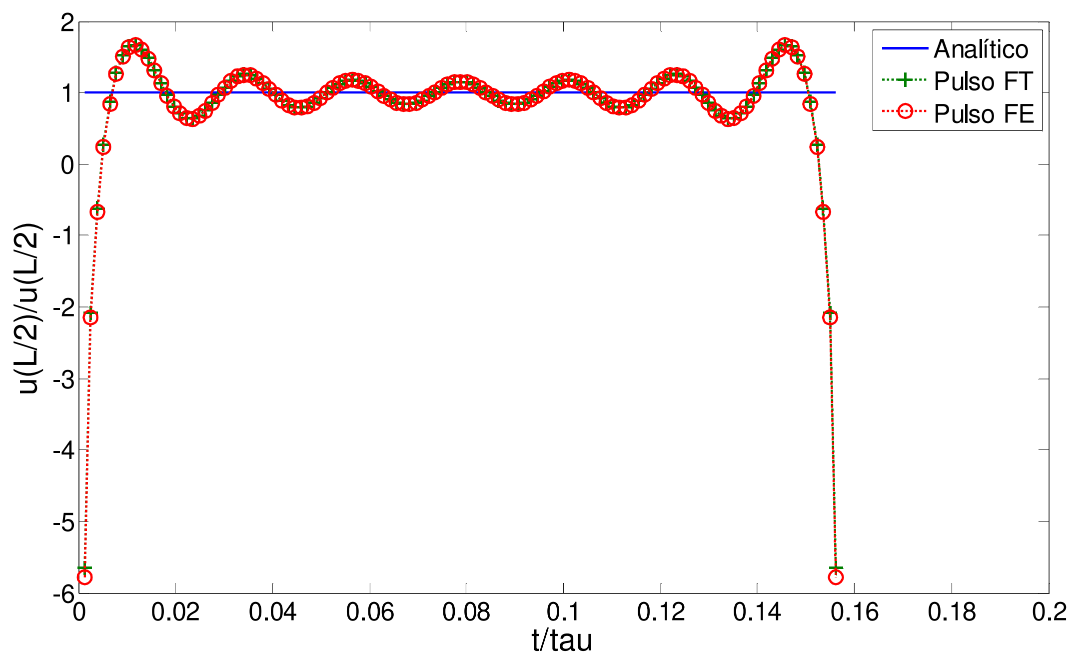


Figura 3.20: Deslocamento no meio da viga com normalização para $\alpha = 0{,}07$ com 10 termos da série de Fourier.

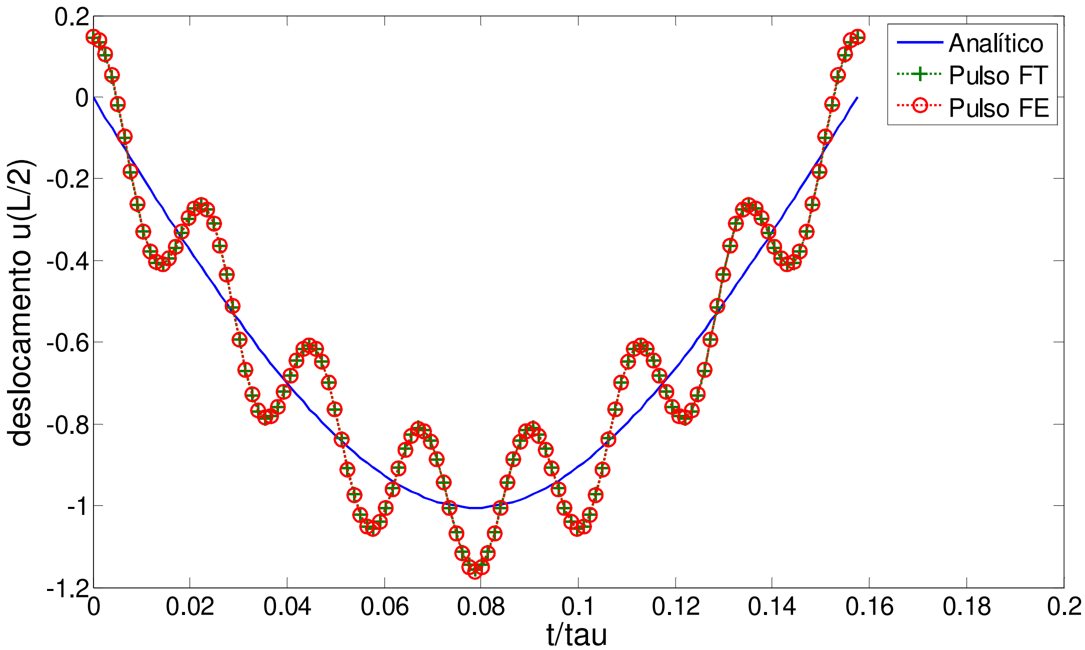


Figura 3.21: Deslocamento no meio da viga sem normalização para $\alpha = 0{,}07$ com 20 termos da série de Fourier.

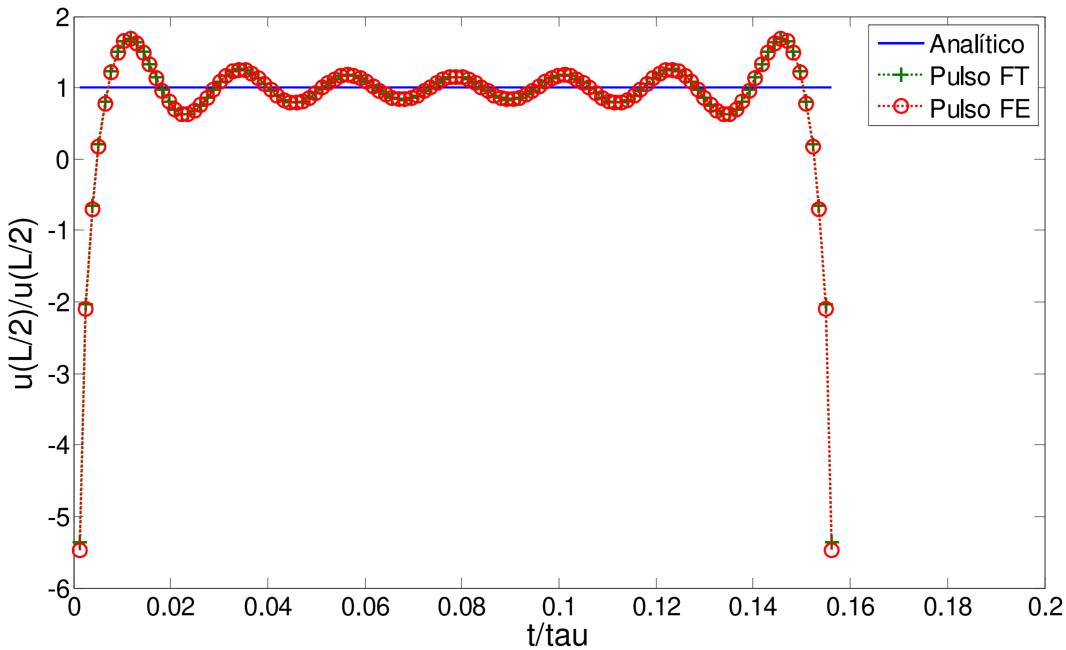


Figura 3.22: Deslocamento no meio da viga com normalização para $\alpha = 0{,}07$ com 20 termos da série de Fourier.

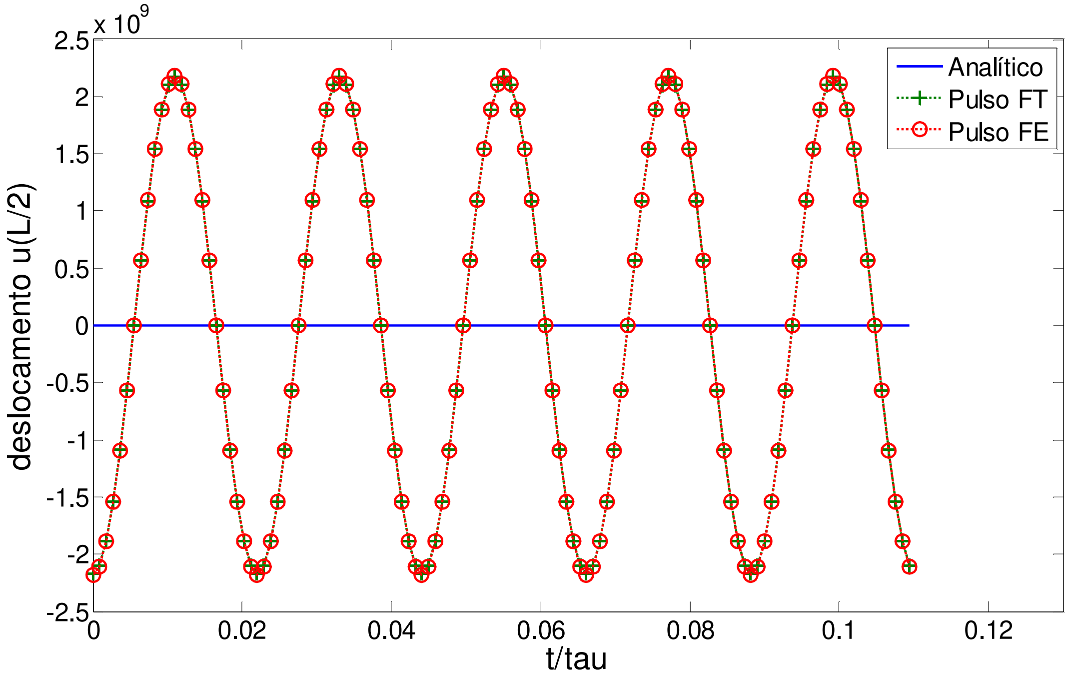


Figura 3.23: Deslocamento no meio da viga sem normalização para $\alpha = 0{,}1$ com 10 termos da série de Fourier.

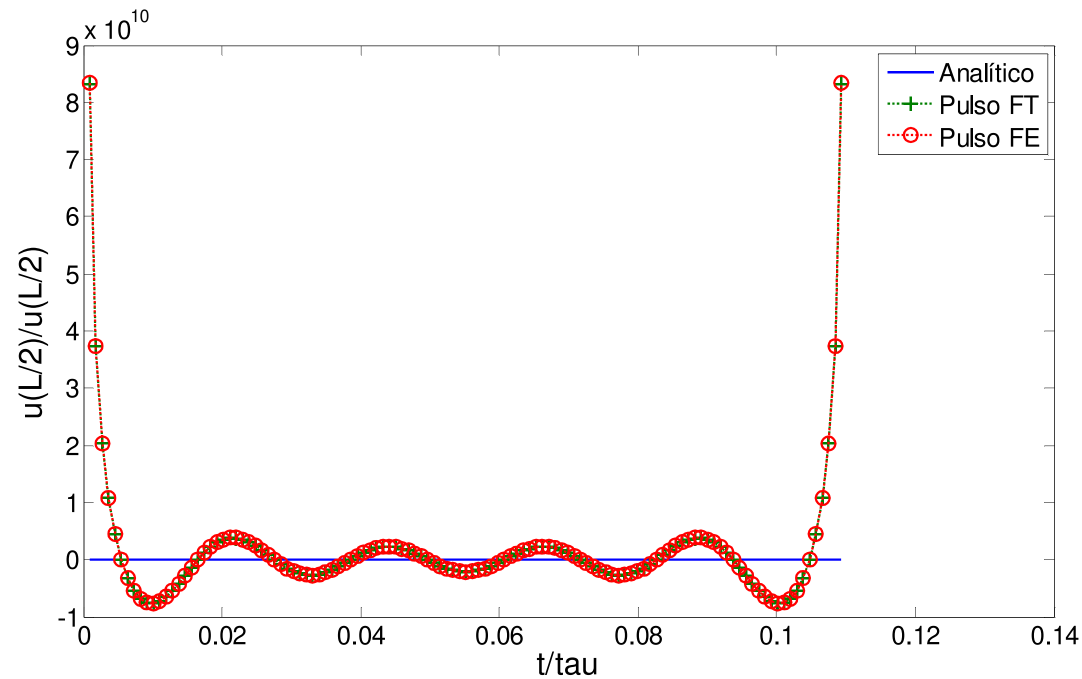


Figura 3.24: Deslocamento no meio da viga com normalização para $\alpha = 0{,}1$ com 10 termos da série de Fourier.

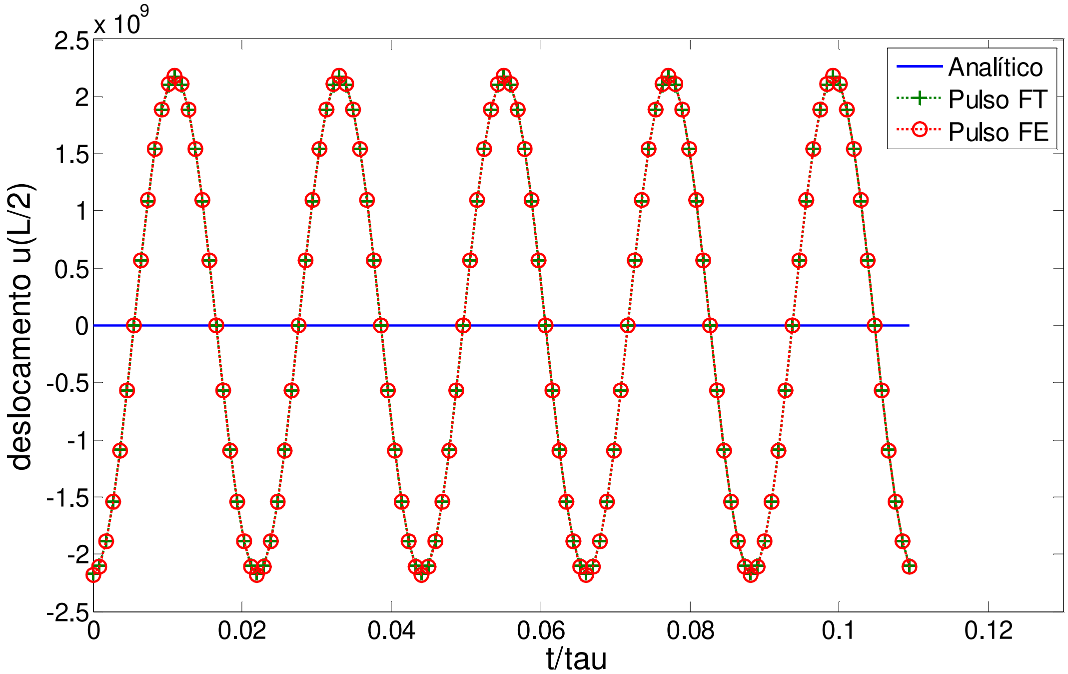


Figura 3.25: Deslocamento no meio da viga sem normalização para $\alpha = 0{,}1$ com 20 termos da série de Fourier.

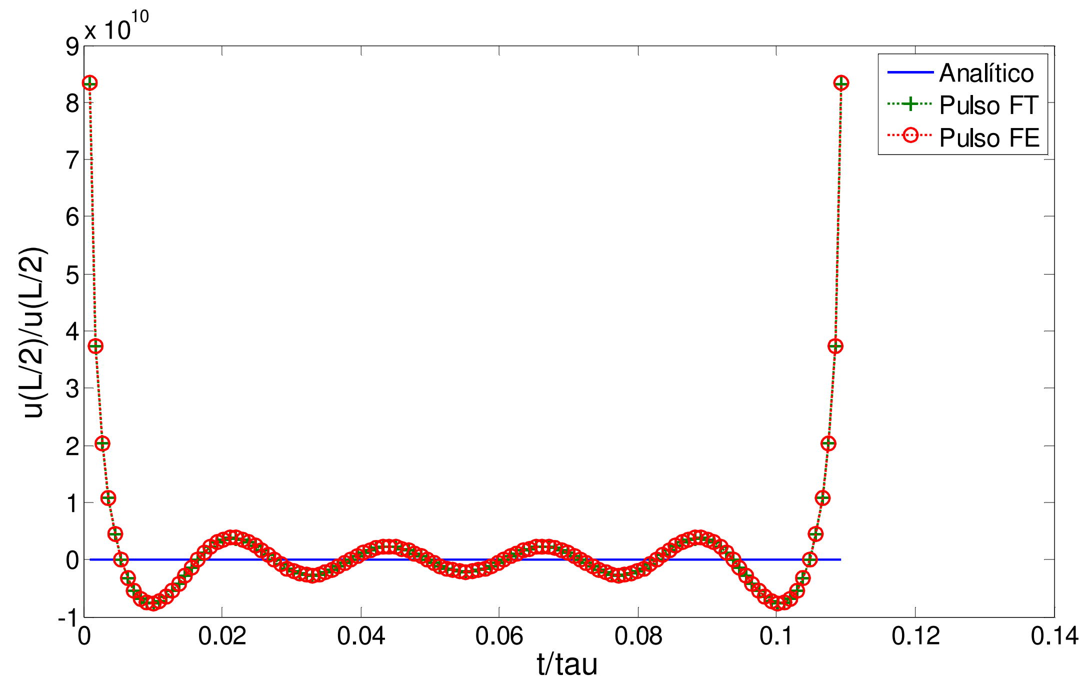


Figura 3.26: Deslocamento no meio da viga com normalização para $\alpha = 0{,}1$ com 20 termos da série de Fourier.

Pode-se observar que à medida que aumentamos o parâmetro de velocidade os resultados da aproximação usando pulso triangular e funções de forma de elementos finitos tendem a piorar. Teoricamente aumentando o número de termos da série de Fourier o resultado deveria melhorar, porém pode ocorrer que os harmônicos de ordem superior alcancem os valores de freqüências naturais da viga, fazendo divergirem os resultados. Este é o caso dos resultados com $\alpha = 0{,}05$ e $\alpha = 0{,}1$ quando um certo número de termos da série de Fourier é excedido. A divergência da solução por elementos finitos ocorre tanto para o pulso das funções de interpolação como para o pulso triangular. Pelo modelo analítico sabe-se que existe uma velocidade crítica quando ocorre a primeira ressonância e o denominador da Equação (3.11) se torna nulo. Com a representação por pulsos nos modelos numéricos, os termos da série de Fourier podem atingir a velocidade crítica, causando uma falsa ressonância, provocando a divergência dos resultados. Isto demonstra que o método usado para representar a força móvel no modelo de elementos finitos tem limitações para problemas dessa natureza. Para superar as dificuldades mencionadas pode-se introduzir um pequeno amortecimento artificial que minimiza o problema. Faremos isso para os casos $\alpha = 0{,}05$ com 20 termos da série de Fourier e para $\alpha = 0{,}1$ com 10 e 20 termos da Série de Fourier.

Introduzindo um pequeno fator de amortecimento artificial na Equação (3.63) tem-se

$$X(\omega_k) = \left[K + j\omega_k C - \omega_k^2 M\right]^{-1} P(\omega_k) \tag{3.65}$$

na qual a matriz $C = \eta_1 M + \eta_2 K$ é uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez. Adotando $\eta_1 = \eta_2 = 10^{-4}$, obtemos os resultados mostrados a seguir.

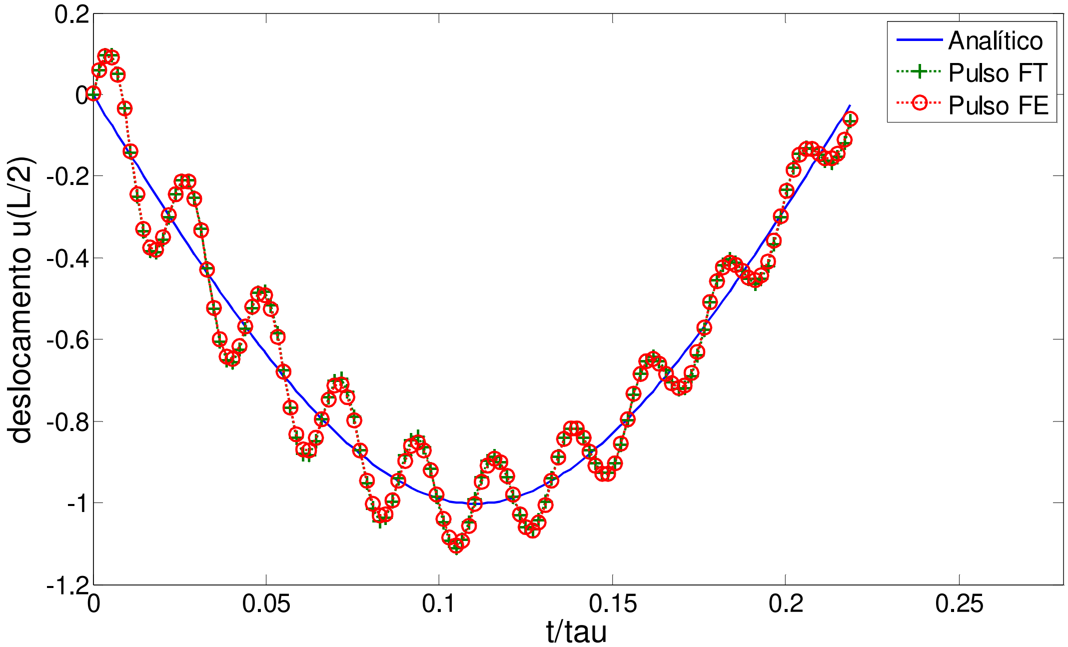


Figura 3.27: Deslocamento no meio da viga com amortecimento artificial para $\alpha = 0,05$ com 20 termos da série de Fourier.

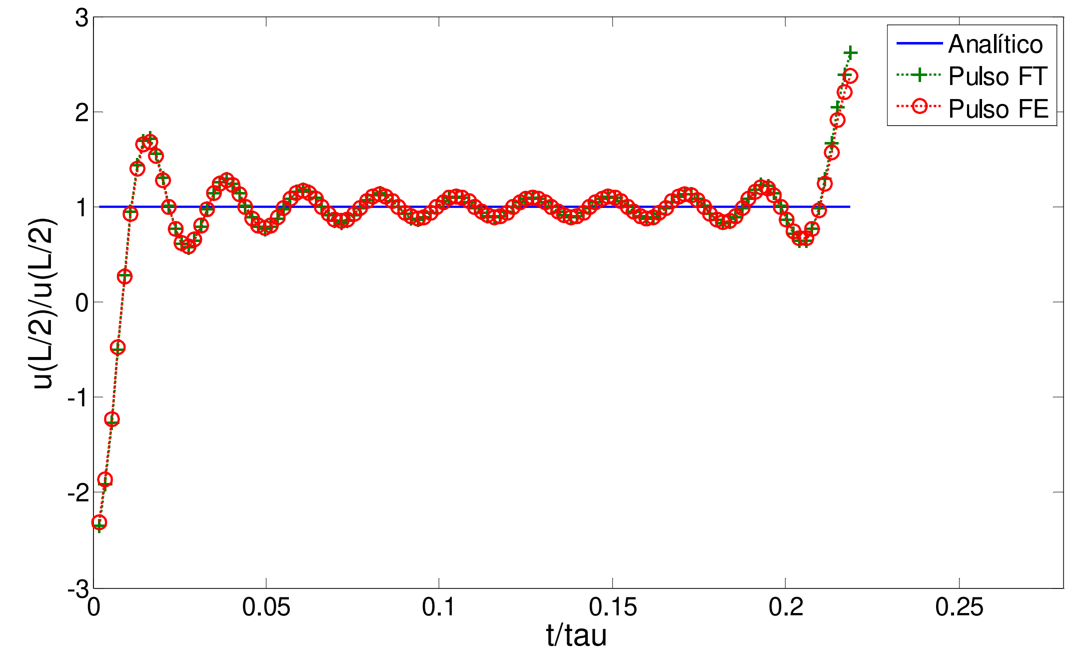


Figura 3.28: Deslocamento no meio da viga com normalização e amortecimento artificial para $\alpha = 0,05$ com 20 termos da série de Fourier.

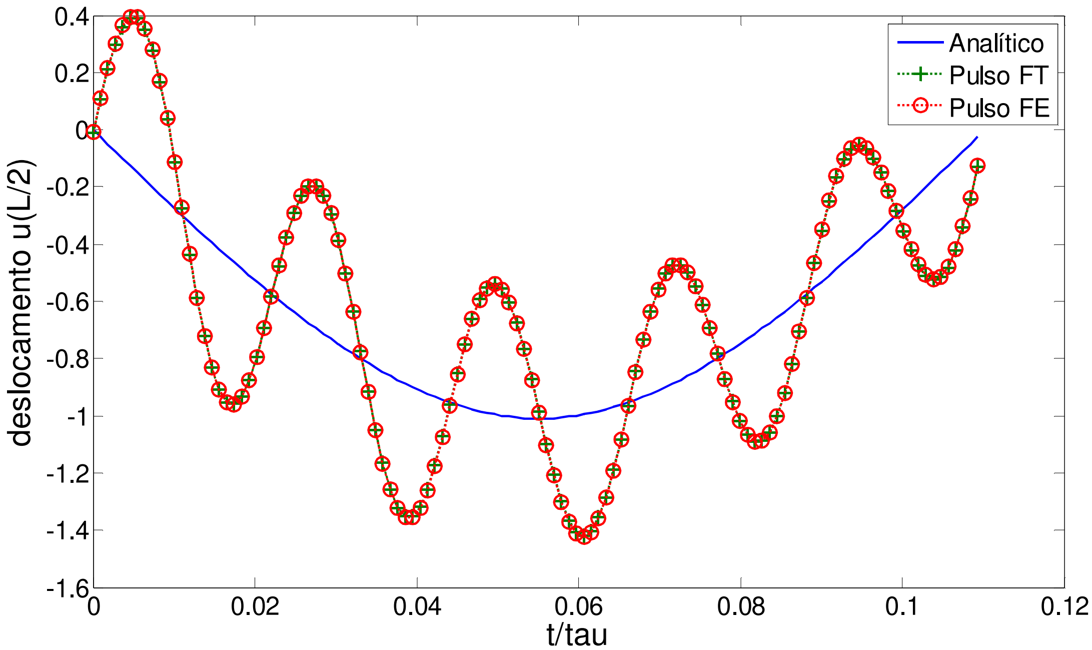


Figura 3.29: Deslocamento no meio da viga com amortecimento artificial para $\alpha = 0{,}1$ com 10 termos da série de Fourier.

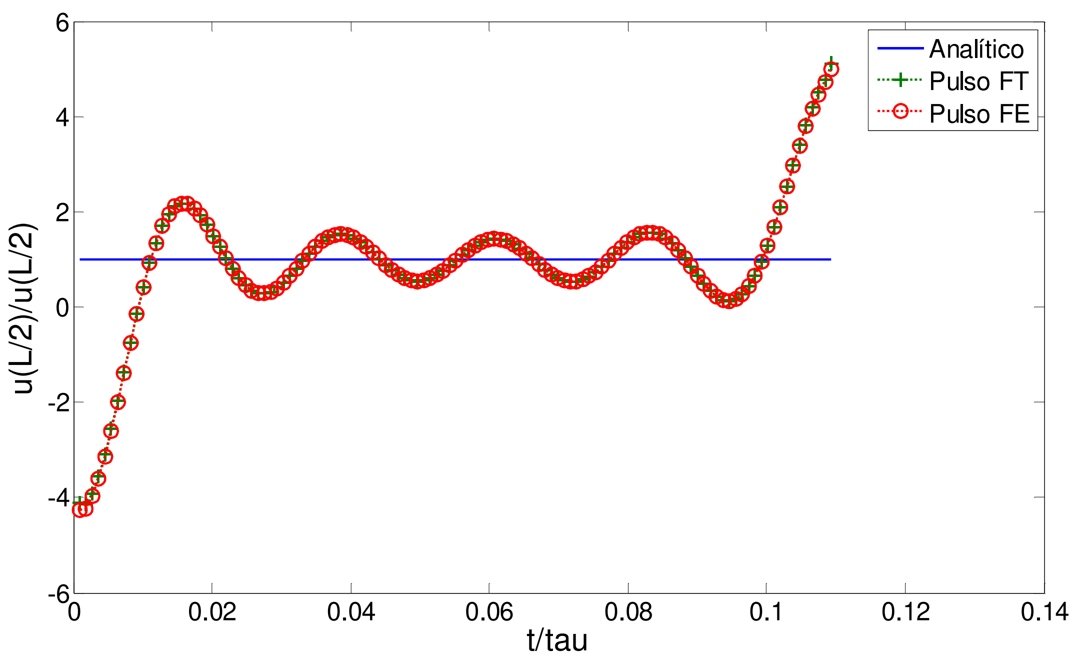


Figura 3.30: Deslocamento no meio da viga com normalização e amortecimento artificial para $\alpha = 0{,}1$ com 10 termos da série de Fourier.

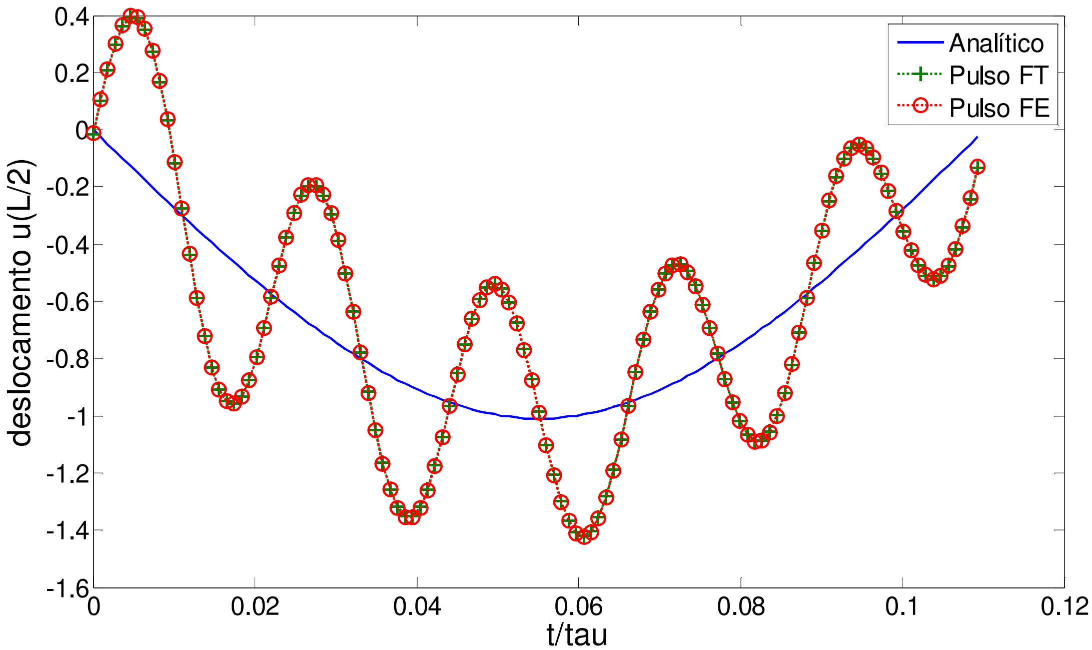


Figura 3.31: Deslocamento no meio da viga com amortecimento artificial para $\alpha = 0{,}1$ com 20 termos da série de Fourier.

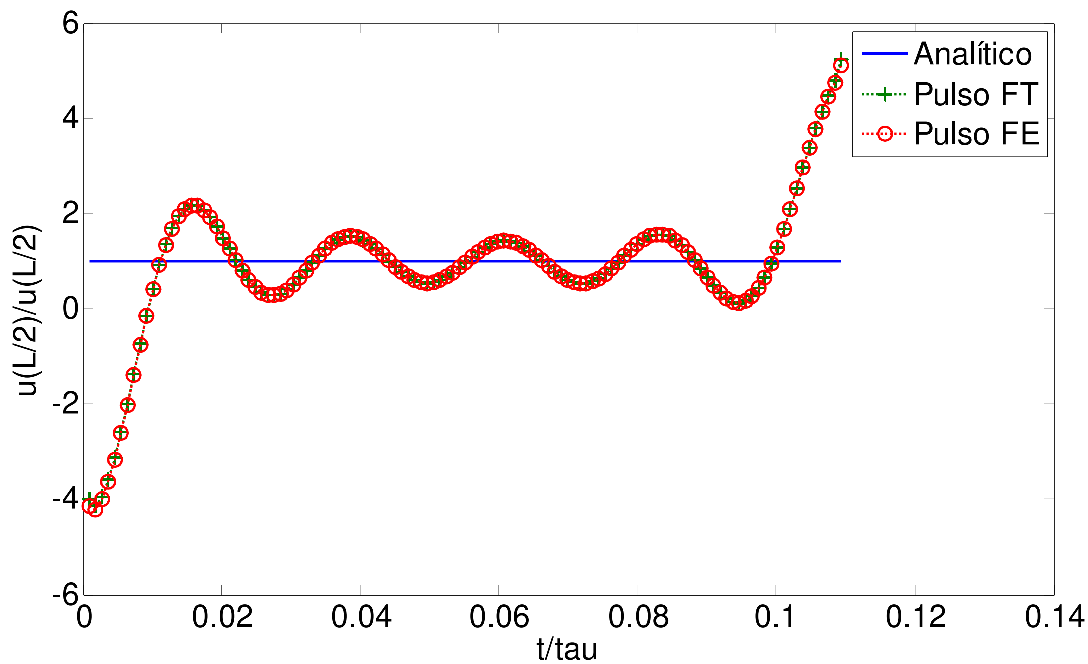


Figura 3.32: Deslocamento no meio da viga com normalização e amortecimento artificial para $\alpha = 0{,}1$ com 20 termos da série de Fourier.

Os resultados para $\alpha = 0.05$ com 20 termos da série de Fourier e para $\alpha = 0{,}1$ com 10 e 20 termos da Série de Fourier mostram as vantagens de incluir um amortecimento artificial, pois ele evita o fenômeno apresentado anteriormente e, com isso, a solução deixa de divergir, causando uma atenuação significativa nos resultados do deslocamento da força no meio da viga. Assim, podemos estudar e comparar melhor os resultados para α maiores com número maior de termos da série de Fourier. Na Figura 3.33 estão representados os coeficientes da série de Fourier para os pulsos triangular, força e momento com 40 termos.

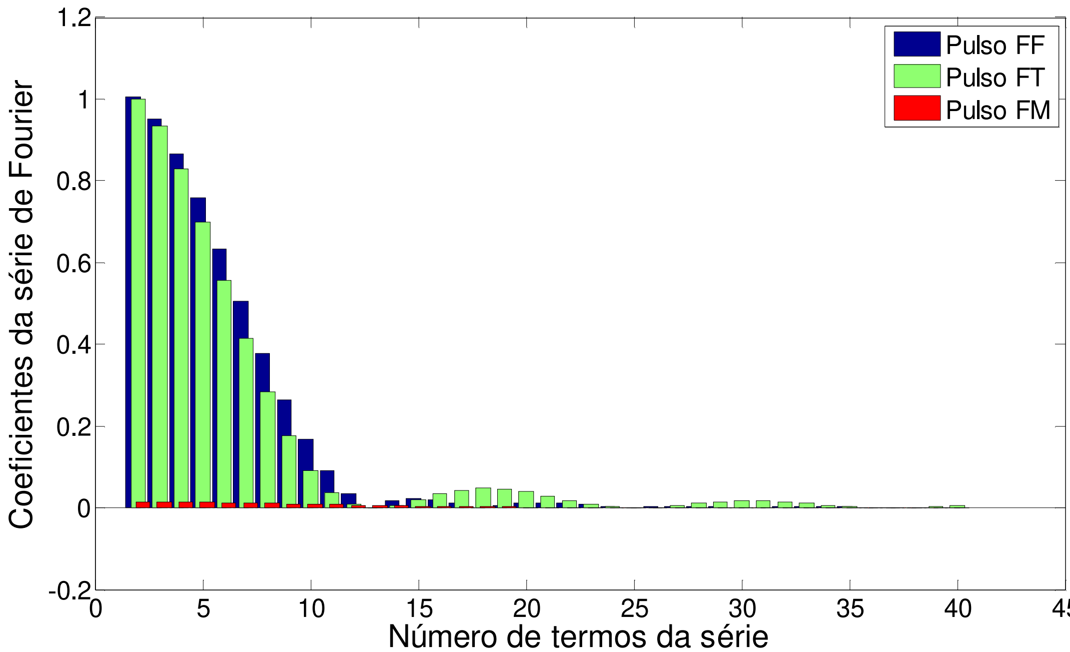


Figura 3.33: Coeficientes da série de Fourier dos pulsos triangular e das funções força e momento com 40 termos da série de Fourier:

No gráfico temos que até o décimo termo da série de Fourier os coeficientes do pulso triangular vão diminuindo mais rapidamente do que o da série da função força, entretanto do décimo quinto termo das séries podemos observar que os coeficientes da série da função força são menores que da série da função triangular, mostrando assim que a função força, junto com a função momento convergem mais rapidamente na série de Fourier se comparados com o pulso triangular. Portanto, para as funções de força e momento obtidas com as funções de interpolação, o resultado deve convergir melhor com um número menor de termos da série de Fourier. Entretanto, é interessante observar que os resultados obtidos com um simples pulso triangular são bastante razoáveis e esta forma de representar a força móvel é muito mais simples. Observa-se, na Figura 3.33, que coeficientes da série de Fourier do pulso da função momento são menores se comparados com os coeficientes do pulso da força cortante. Entretanto, o pulso de momento tem um papel importante na convergência dos resultados como mostram as Figura 3.34 e 3.35.

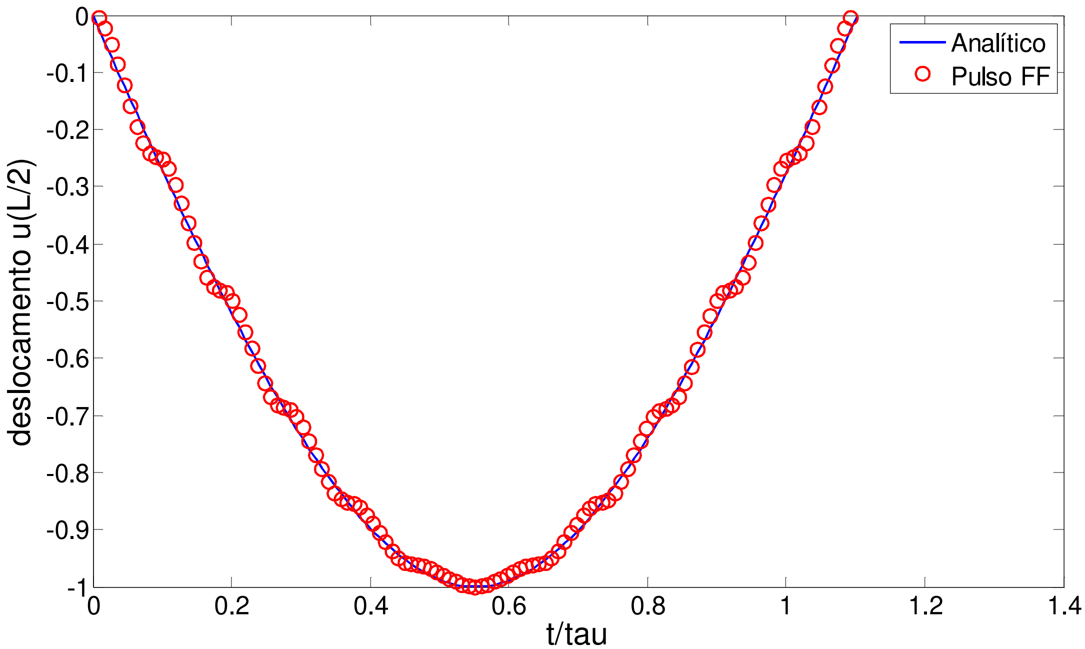


Figura 3.34: Deslocamento no meio da viga com o pulso da função força "Pulso FF" para $\alpha = 0{,}01$ com 30 termos.

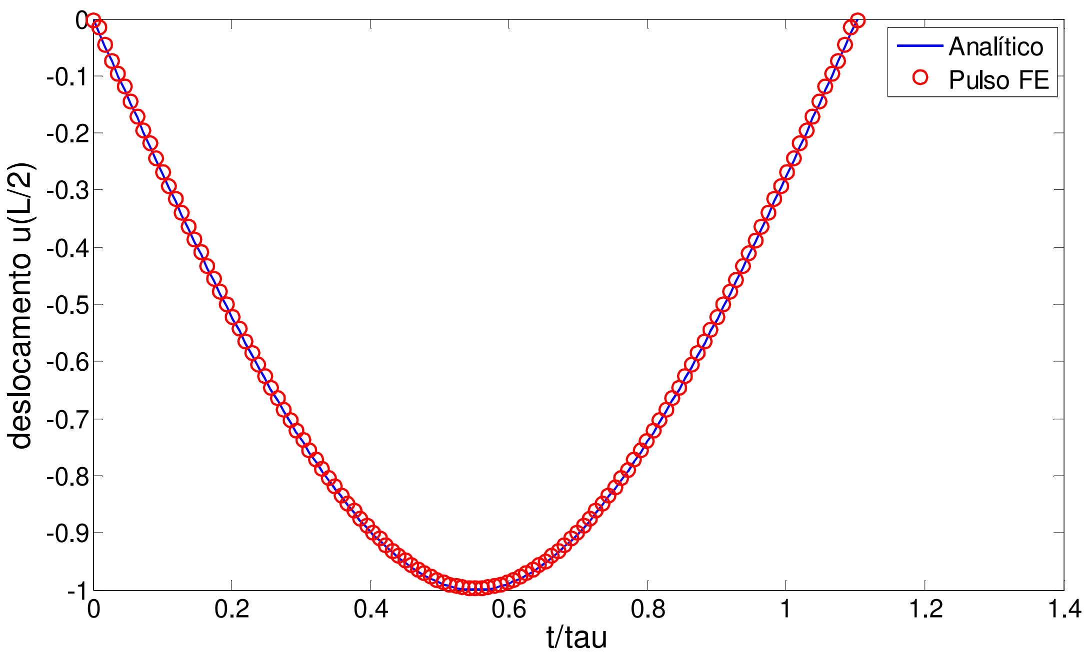


Figura 3.35: Deslocamento no meio da viga com o a união do pulso da função momento com o pulso da função força para $\alpha = 0{,}01$ com 30 termos.

3.14 Conclusão

Foram validadas duas formas de representar a força móvel num modelo de elementos finitos. A validação foi feita numa viga bi-apoiada que tem a solução analítica para uma força móvel com velocidade v. Foi constatado que para valores de α baixos os resultados por elementos finitos foram satisfatórios comparados com a solução analítica existente para o problema. Verificamos, entretanto, que, quando os valores de α aumentam, os termos da série de Fourier necessários para representar os pulsos temporais podem atingir a velocidade crítica e as soluções numéricas podem divergir. O parâmetro adimensional de velocidade α tem, portanto, um papel de grande importância na solução dinâmica deste problema, particularmente para a solução numérica.

Chapter 4

Simple Models for the Dynamic Modeling of Rotating Tires

Large Finite Element (FE) models of tires are currently used to predict low frequency behavior and to obtain dynamic model coefficients used in multi-body models for riding and comfort. However, to predict higher frequency behavior, which may explain irregular wear, critical rotating speeds and noise radiation, FE models are not practical. Detailed FE models are not adequate for optimization and uncertainty predictions either, as in such applications the dynamic solution must be computed a number of times. Therefore, there is a need for simpler models that can capture the physics of the tire and be used to compute the dynamic response with a low computational cost. In this chapter, the spectral (or continuous) element approach is used to derive such a model. A circular beam spectral element that takes into account the string effect is derived, and a method to simulate the response to a rotating force is implemented in the frequency domain. The behavior of a circular ring under different internal pressures is investigated using modal and frequency/wavenumber representations. Experimental results obtained with a real untreaded truck tire are presented and qualitatively compared with the simple model predictions with good agreement. No attempt is made to obtain equivalent parameters for the simple model from the real tire results. On the other hand, the simple model fails to represent the correct variation of the quotient of the natural frequency by the number of circumferential wavelengths with the mode count. Nevertheless, some important features of the real tire dynamic behavior, such as the generation of standing waves and part of the frequency/wavenumber behavior, can be investigated using the proposed simplified model.

4.1 Curved Beams and Rings

A curved Euler Bernoulli beam will be derived in this section. A scheme of a circular beam segment can be seen in Figure 4.1.

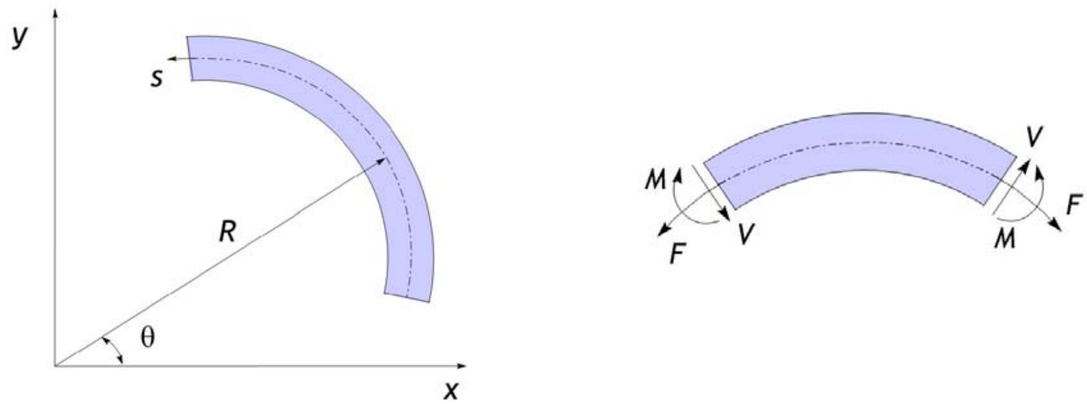


Figure 4.1: Scheme of a circular beam.

4.1.1 Deformation of curved beams

Curved beams equations will be obtained initially in cylindrical coordinates r, θ and z. The displacements will be u_r and u_θ. The strain are related to these displacements by, Doyle (1997).

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \tag{4.2}$$

$$2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \tag{4.3}$$

It is assumed that the dimension in the r direction is small. Considering a small segment of beam Figure 4.1 and expanding the displacement in a Taylor series and using the variable $\xi = r - R$,

$$u_r(r,\theta) \approx u_r(0,\theta) + \xi \frac{\partial u_r}{\partial \xi} = u_r(\theta) \tag{4.4}$$

$$u_\theta(r,\theta) \approx u_\theta(0,\theta) + \xi \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} = u_\theta(\theta) - \xi \psi_\theta \tag{4.5}$$

where ψ_θ is a rotation of the subscripted face in the direction of the curvature. The shear strain corresponding to the above deformation is

$$2\varepsilon_{r\theta} \approx \frac{1}{R}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \psi_\theta - \frac{u_\theta}{R} + \frac{\xi}{R}\psi_\theta \tag{4.6}$$

Considering a slender beam, the transverse shear strains are negligible on average.

$$\psi_\theta \approx \frac{1}{R}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R} \tag{4.7}$$

Assuming that $\dfrac{\xi}{R}$ is small compared to unity, the deformation are,

$$\bar{u}_r(r,\theta) \approx \bar{u}_r(\theta) \tag{4.8}$$

$$\bar{u}_\theta(r,\theta) \approx \bar{u}_\theta(\theta) - \xi\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R}\right) \tag{4.9}$$

These give the only nonzero strain component as

$$\bar{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{u_r}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\xi}{R^2}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) \tag{4.10}$$

It is typical in curved beam analysis to have a hoop coordinate s and a transverse coordinated y pointed toward the origin of the circle.

$$R\theta \to s\,, \qquad r \to -y \tag{4.11}$$

Giving for the corresponding displacements

$$u_\theta \to u\,, \qquad u_r \to -v \tag{4.12}$$

Our approximate deformation relation becomes

$$\bar{v}(s,y) \approx v(s) \tag{4.13}$$

$$\bar{u}(s,y) \approx u(s) - y\left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{R}\right) \tag{4.14}$$

Giving the nonzero strain as

$$\varepsilon_{ss} = \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{R} - y\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial s}\right) \tag{4.15}$$

4.1.2 Equation of motion

Under the assumptions as developed above, the beam is in a state of uniaxial stress. That is, the only nonzero stress is the axial stress given by

$$\sigma_{ss} = E\varepsilon_{ss} = E\left[\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{R}\right] - yE\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial s}\right) \tag{4.16}$$

This stress gives rise to two resultants, the normal force *F*, and the bending moment *M*,

$$F = \int \sigma_{ss} dA = EA\left[\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{R}\right] \tag{4.17}$$

$$M = -\int \sigma_{ss} y dA = EI \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{R}\right] \tag{4.18}$$

where the integration is over the cross section area *A*. To these we append the resultant shear force *V*. The equations of motion are established as

$$\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{V}{R} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{F}{R} = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial M}{\partial s} + V = 0 \tag{4.21}$$

These relations are valid for arbitrary plane curved beams; if *R* is constant they are restricted to circular geometries. If *R* becomes very large the straight beam results are recovered. The equilibrium equations for the circular beam can be written as, Doyle (1997) and Kang (2003):

$$\begin{gathered} EA \frac{\partial^2 u}{\partial^2 s} + \frac{1}{R^2}\left[EI \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - EAR \frac{\partial v}{\partial s} + EIR \frac{\partial^3 v}{\partial s^3}\right] = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ EI \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} + \frac{1}{R^2}\left[EAv - EAR \frac{\partial u}{\partial s} + EIR \frac{\partial^3 u}{\partial s^3}\right] = -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{gathered} \tag{4.22}$$

where *EA* is the longitudinal rigidity, *EI* is the bending rigidity, ρA in the mass per unit length, *R* is the beam radius, *u* and *v* are the displacements in the radial and longitudinal directions, respectively.

4.2 Circular beam spectral element

In this first derivation the internal pressure is not included. This will be done in the next section. Since the coefficients are constant, the spectral relation can be obtained by assuming solutions of the form:

$$u(\theta,t) = C_u e^{i(-\gamma s-\omega t)} \tag{4.23}$$

$$v(\theta,t) = C_v e^{i(-\gamma s-\omega t)} \tag{4.24}$$

where $\gamma = \pm k$ depending on the direction of wave propagation. Substituting Equations (4.23) and (4.24) into (4.22) and writing in matrix form, gives:

$$\begin{bmatrix} -\left(EA+\dfrac{EI}{R^2}\right)\gamma^2+\rho A\omega^2 & \dfrac{i\gamma}{R}\left(EA+EI\gamma^2\right) \\ \dfrac{i\gamma}{R}\left(EA+EI\gamma^2\right) & EI\gamma^4+\dfrac{EA}{R^2}-\rho A\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_u \\ C_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.25}$$

The characteristic equation to determine the wavenumbers *k* is then formed by setting the determinant of this system to zero. The resulting equation is:

$$\frac{1}{\omega}k^6 - \left(\frac{\rho\omega}{E}+\frac{2}{R^2\omega}\right)k^4 - \left(\frac{\rho A\omega}{EI}+\frac{\rho\omega}{ER^2}-\frac{1}{R^4\omega}\right)k^2 - \left(\frac{1}{R^2 EI}-\frac{\rho\omega^2}{EI\cdot E}\right)\rho A\omega = 0 \tag{4.26}$$

where the amplitude ratios for each mode are obtained from Equation (4.25) as either one of the following equations:

$$\beta = \frac{C_u}{C_v} = -\frac{\dfrac{i\gamma}{R}(EA+EI\gamma^2)}{-(EA+\dfrac{EI}{R^2})\gamma^2+\rho A\omega^2} \quad \text{or} \quad \beta = \frac{C_u}{C_v} = -\frac{EI\gamma^4+\dfrac{EA}{R^2}-\rho A\omega^2}{\dfrac{i\gamma}{R}(EA+EI\gamma^2)} \tag{4.27}$$

For $\gamma = \pm k$, Equation (4.27) can be written as:

$$\beta = \pm \frac{\frac{ik}{R}(EA + EIk^2)}{-(EA + \frac{EI}{R^2})k^2 + \rho A \omega^2} \tag{4.28}$$

The general solution of Equation (4.22) can be then obtained in the form:

$$v(s,t) = \left(C_{v1}e^{-ik_1 s} + C_{v2}e^{-ik_2 s} + C_{v3}e^{-ik_3 s} + C_{v4}e^{ik_1 s} + C_{v5}e^{ik_2 s} + C_{v6}e^{ik_3 s}\right) \cdot e^{-i\omega t} \tag{4.29}$$

$$u(s,t) = \left(C_{u1}e^{-ik_1 s} + C_{u2}e^{-ik_2 s} + C_{u3}e^{-ik_3 s} + C_{u4}e^{ik_1 s} + C_{u5}e^{ik_2 s} + C_{u6}e^{ik_3 s}\right) \cdot e^{-i\omega t} \tag{4.30}$$

where,

$$\frac{C_{u1}}{C_{v1}} = \frac{C_u}{C_v}(k_1) = \beta_1, \quad \frac{C_{u2}}{C_{v2}} = \beta_2, \quad \frac{C_{u3}}{C_{v3}} = \beta_3 \tag{4.31}$$

$$\frac{C_{u4}}{C_{v4}} = -\beta_1, \quad \frac{C_{u5}}{C_{v5}} = -\beta_2, \quad \frac{C_{u6}}{C_{v6}} = -\beta_3 \tag{4.32}$$

For a finite curved beam element of length *s*, the general solutions of Equations (4.22) can be then obtained in the form:

$$v(s) = C_1 e^{-ik_1 s} + C_2 e^{-ik_2 (s_0 - s)} + C_3 e^{-ik_3 s} + C_4 e^{ik_1 (s_0 - s)} + C_5 e^{ik_2 s} + C_6 e^{ik_3 (s_0 - s)} \tag{4.33}$$

$$u(s) = C_1 \beta_1 e^{-ik_1 s} + C_2 \beta_2 e^{-ik_2 (s_0 - s)} + C_3 \beta_3 e^{-ik_3 s} + C_4 \beta_1 e^{ik_1 (s_0 - s)} + C_5 \beta_2 e^{ik_2 s} + C_6 \beta_3 e^{ik_3 (s_0 - s)} \tag{4.34}$$

Equations (4.33) and (4.34) can be represented in the form:

$$v(s) = \{N(s)\}^T \{C\} \tag{4.35}$$

$$u(s) = [\Lambda]\{N(s)\}^T \{C\} \tag{4.36}$$

where u and v are the degrees of freedom of the displacements and

$$\{N(s)\} = \begin{Bmatrix} e^{-ik_1 s} \\ e^{-ik_1(s_0 - s)} \\ e^{-ik_2 s} \\ e^{ik_2(s_0 - s)} \\ e^{-ik_3 s} \\ e^{-ik_3(s_0 - s)} \end{Bmatrix}, \qquad \{C\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} \tag{4.37}$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

The rotation of the beam section, $v' = \partial v / \partial s$. It is represented in the equation below;

$$v'(s) = -ik_1 C_1 e^{-ik_1 s} + ik_1 C_2 e^{-ik_1(s_0 - s)} - ik_2 C_3 e^{-ik_2 s} + ik_2 C_4 e^{-ik_2(s_0 - s)} - ik_3 C_5 e^{-ik_3 s} + ik_3 C_6 e^{-ik_3(s_0 - s)} \tag{4.39}$$

where, $v'(s) = \left\{\frac{\partial N(s)}{\partial s}\right\}^T \{C\}$. For $s = 0$ and $s = s_0$, that is:

$$\begin{Bmatrix} v(0) \\ u(0) \\ v'(0) \\ v(s_0) \\ u(s_0) \\ v'(s_0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-ik_1 s_0} & 1 & e^{-ik_2 s_0} & 1 & e^{-ik_3 s_0} \\ \beta_1 & -\beta_1 e^{-ik_1 s_0} & \beta_2 & -\beta_2 e^{-ik_2 s_0} & \beta_3 & -\beta_3 e^{-ik_3 s_0} \\ -ik_1 & ik_1 e^{-ik_1 s_0} & -ik_2 & ik_2 e^{-ik_2 s_0} & -ik_3 & ik_3 e^{-ik_3 s_0} \\ e^{-ik_1 s_0} & 1 & e^{-ik_2 s_0} & 1 & e^{-ik_3 s_0} & 1 \\ \beta_1 e^{-ik_1 s_0} & -\beta_1 & \beta_2 e^{-ik_2 s_0} & -\beta_2 & \beta_3 e^{-ik_3 s_0} & -\beta_3 \\ -ik_1 e^{-ik_1 s_0} & ik_1 & -ik_2 e^{-ik_2 s_0} & ik_2 & -ik_3 e^{-ik_3 s_0} & ik_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} \tag{4.40}$$

Denoting this system of equations in matrix form, the solution can be written as:

$$\{U\} = [G]\{C\} \qquad \Rightarrow \qquad \{C\} = [G]^{-1}\{U\} \tag{4.41}$$

The spectral components of the axial force, bending moment and transverse shear force are given by Doyle (1997),

$$N = EA\left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{R}\right) \tag{4.42}$$

$$Q = -EI\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial s^3}\right) \tag{4.43}$$

$$M = EI\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) \tag{4.44}$$

The spectral nodal transverse shear force, bending moment and axial force defined in the finite curved beam element can be related to displacement field as:

$$\begin{bmatrix} -N(0) \\ -Q(0) \\ -M(0) \\ N(s_0) \\ Q(s_0) \\ M(s_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA\left(\dfrac{\partial[N(0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda] - \dfrac{1}{R}[N(0)]^T\right) \\ EI\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2[N(0)]^T}{\partial s^2}\cdot[\Lambda] + \dfrac{\partial^3[N(0)]^T}{\partial s^3}\right) \\ -EI\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial[N(0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda] + \dfrac{\partial^2[N(0)]^T}{\partial s^2}\right) \\ EA\left(\dfrac{\partial[N(s_0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda] - \dfrac{1}{R}[N(s_0)]^T\right) \\ -EI\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2[N(s_0)]^T}{\partial s^2}\cdot[\Lambda] + \dfrac{\partial^3[N(s_0)]^T}{\partial s^3}\right) \\ EI\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial[N(s_0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda] + \dfrac{\partial^2[N(s_0)]^T}{\partial s^2}\right) \end{bmatrix} [G]^{-1}\{U\} \tag{4.45}$$

where, $[K_C]$ is the spectral element matrix of the circular beam.

$$
\left[K_C\right]=\begin{bmatrix} -EA\left(\dfrac{\partial[N(0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda]-\dfrac{1}{R}[N(0)]^T\right) \\ EI\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2[N(0)]^T}{\partial s^2}\cdot[\Lambda]+\dfrac{\partial^3[N(0)]^T}{\partial s^3}\right) \\ -EI\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial[N(0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda]+\dfrac{\partial^2[N(0)]^T}{\partial s^2}\right) \\ EA\left(\dfrac{\partial[N(s_0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda]-\dfrac{1}{R}[N(s_0)]^T\right) \\ -EI\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2[N(s_0)]^T}{\partial s^2}\cdot[\Lambda]+\dfrac{\partial^3[N(s_0)]^T}{\partial s^3}\right) \\ EI\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial[N(s_0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda]+\dfrac{\partial^2[N(s_0)]^T}{\partial s^2}\right) \end{bmatrix}[G]^{-1} \tag{4.46}
$$

4.3 Circular beam with internal pressure

In matrix $\left[K_C\right]$ of Equation (4.46) the effect of the internal pressure is not included. It is known that the internal pressure has a strong influence in the tire dynamics. In order to take into account the internal pressure (string effect), tension T will be introduced in Equation (4.22).

$$
\mu\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \tag{4.47}
$$

To determine the value of the tension on the beam equivalent to the internal pressure of the tire, the static equilibrium of a section of the tire is illustrated in Figure 4.2:

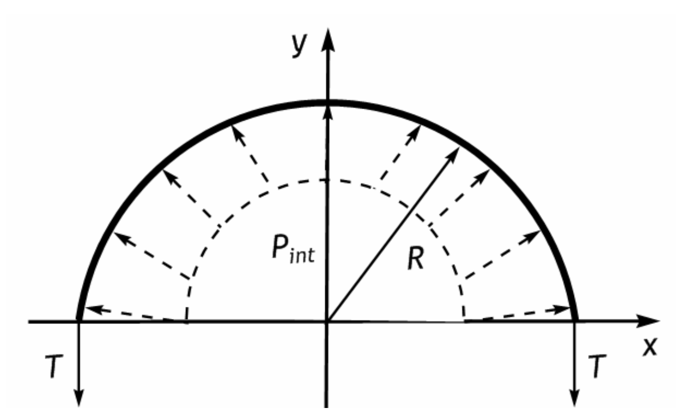


Figure 4.2: Free-body diagram of a half ring under internal pressure.

The static equilibrium of the half ring yields,

$$\int_0^{\pi} P_{\text{int}}.\sin(\theta).b.R.d\theta = 2T \tag{4.48}$$

where R is the radius of curvature and b is width of the tire, so that

$$T = P_{\text{int}}.b.R \tag{4.49}$$

The effect of the internal pressure can be introduced in Equation (4.22):

$$\begin{gathered} EA\frac{\partial^2 u}{\partial^2 s} + \frac{1}{R^2}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - EAR\frac{\partial v}{\partial s} + EIR\frac{\partial^3 v}{\partial s^3}\right) = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ EI\frac{\partial^4 v}{\partial s^4} + \frac{1}{R^2}\left(EAv - EAR\frac{\partial u}{\partial s} + EIR\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}\right) - \left(T\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) = -\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{gathered} \tag{4.50}$$

Since the coefficients are constant, the spectrum relation can be obtained by assuming solutions of the form:

$$u(\theta,t) = C_u e^{i(-\gamma s - \omega t)} \tag{4.51}$$

$$v(\theta,t) = C_v e^{i(-\gamma s - \omega t)} \tag{4.52}$$

where $\gamma = \pm k$ indicates the direction of the wave propagation along s. Substituting the Equations (4.51) and (4.52) into (4.50) gives:

$$\begin{bmatrix} -\left(EA + \frac{EI}{R^2}\right)y^2 + \rho A\omega^2 & \frac{iy}{R}\left(EA + EIy^2\right) \\ \frac{iy}{R}\left(EA + EIy^2\right) & EIy^4 + \frac{EA}{R^2} - \rho A\omega^2 + [Ty^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_u \\ C_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.53}$$

The characteristic equation to determine the wavenumber k is then formed by setting the determinant of this system to zero. The resulting equation is:

$$\frac{k^6}{\omega}-\left\{\frac{\rho\omega}{E}+\frac{2}{R^2\omega}-\left[T\left(\frac{1}{EI\omega}+\frac{1}{EAR^2\omega}\right)\right]\right\}k^4-\left[\frac{\rho A\omega}{EI}+\frac{\rho\omega}{ER^2}-\frac{1}{R^4\omega}+\left(\frac{T\rho\omega}{E^2I}\right)\right]k^2$$

$$-\left(\frac{1}{R^2EI}-\frac{\rho\omega^2}{EI\cdot E}\right)\rho A\omega=0 \tag{4.54}$$

where the amplitude ratios for each mode are obtained from Equation (4.53) as either one of the following equations:

$$\beta=\frac{C_u}{C_v}=-\frac{\frac{i\gamma}{R}(EA+EI\gamma^2)}{-(EA+\frac{EI}{R^2})\gamma^2+\rho A\omega^2} \quad \text{or} \quad \beta=\frac{C_u}{C_v}=-\frac{EI\gamma^4+\frac{EA}{R^2}-\rho A\omega^2+\left[T\gamma^4\right]}{\frac{i\gamma}{R}(EA+EI\gamma^2)} \tag{4.55}$$

For $\gamma=\pm k$, Equation (4.55) can be written as:

$$\beta=\pm\frac{\frac{ik}{R}(EA+EIk^2)}{-(EA+\frac{EI}{R^2})k^2+\rho A\omega^2} \tag{4.56}$$

The general solution of Equation (4.50) can be then obtained in the form:

$$v(s,t)=\left(C_{v1}e^{-ik_1s}+C_{v2}e^{-ik_2s}+C_{v3}e^{-ik_3s}+C_{v4}e^{ik_1s}+C_{v5}e^{ik_2s}+C_{v6}e^{ik_3s}\right)\cdot e^{-i\omega t} \tag{4.57}$$

$$u(s,t)=\left(C_{u1}e^{-ik_1s}+C_{u2}e^{-ik_2s}+C_{u3}e^{-ik_3s}+C_{u4}e^{ik_1s}+C_{u5}e^{ik_2s}+C_{u6}e^{ik_3s}\right)\cdot e^{-i\omega t} \tag{4.58}$$

where,

$$\frac{C_{u1}}{C_{v1}} = \frac{C_u}{C_v}(k_1) = \beta_1, \quad \frac{C_{u2}}{C_{v2}} = \beta_2, \quad \frac{C_{u3}}{C_{v3}} = \beta_3 \tag{4.59}$$

$$\frac{C_{u4}}{C_{v4}} = -\beta_1, \quad \frac{C_{u5}}{C_{v5}} = -\beta_2, \quad \frac{C_{u6}}{C_{v6}} = -\beta_3 \tag{4.60}$$

For a finite curved beam element of length *s*, the general solutions of Equations (4.50) can be then obtained in the form:

$$v(s) = C_1 e^{-ik_1 s} + C_2 e^{-ik_2(s_0 - s)} + C_3 e^{-ik_3 s} + C_4 e^{ik_1(s_0 - s)} + C_5 e^{ik_2 s} + C_6 e^{ik_3(s_0 - s)} \tag{4.61}$$

$$u(s) = C_1\beta_1 e^{-ik_1 s} + C_2\beta_2 e^{-ik_2(s_0 - s)} + C_3\beta_3 e^{-ik_3 s} + C_4\beta_1 e^{ik_1(s_0 - s)} + C_5\beta_2 e^{ik_2 s} + C_6\beta_3 e^{ik_3(s_0 - s)} \tag{4.62}$$

Equations (4.61) and (4.62) can be represented in the form:

$$v(s) = \{N(s)\}^T \{C\} \tag{4.63}$$

$$u(s) = [\Lambda]\{N(s)\}^T \{C\} \tag{4.64}$$

where *u* and *v* are the degrees of freedom of the displacements and

$$\{N(s)\} = \begin{Bmatrix} e^{-ik_1 s} \\ e^{-ik_1(s_0 - s)} \\ e^{-ik_2 s} \\ e^{ik_2(s_0 - s)} \\ e^{-ik_3 s} \\ e^{-ik_3(s_0 - s)} \end{Bmatrix}, \qquad \{C\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} \tag{4.65}$$

$$[\Lambda]=\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

The rotation of the beam section, $v' = \partial v/\partial s$. It is represented in the equation below:

$$v'(s) = -ik_1C_1e^{-ik_1 s} + ik_1C_2e^{-ik_1(s_0-s)} - ik_2C_3e^{-ik_2 s} + ik_2C_4e^{-ik_2(s_0-s)} - ik_3C_5e^{-ik_3 s} + ik_3C_6e^{-ik_3(s_0-s)} \tag{4.67}$$

where, $v'(s) = \left\{\dfrac{\partial N(s)}{\partial s}\right\}^T \{C\}$. For $s = 0$ and $s = s_0$, that is:

$$\begin{Bmatrix} v(0) \\ u(0) \\ v'(0) \\ v(s_0) \\ u(s_0) \\ v'(s_0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-ik_1s_0} & 1 & e^{-ik_2s_0} & 1 & e^{-ik_3s_0} \\ \beta_1 & -\beta_1e^{-ik_1s_0} & \beta_2 & -\beta_2e^{-ik_2s_0} & \beta_3 & -\beta_3e^{-ik_3s_0} \\ -ik_1 & ik_1e^{-ik_1s_0} & -ik_2 & ik_2e^{-ik_2s_0} & -ik_3 & ik_3e^{-ik_3s_0} \\ e^{-ik_1s_0} & 1 & e^{-ik_2s_0} & 1 & e^{-ik_3s_0} & 1 \\ \beta_1e^{-ik_1s_0} & -\beta_1 & \beta_2e^{-ik_2s_0} & -\beta_2 & \beta_3e^{-ik_3s_0} & -\beta_3 \\ -ik_1e^{-ik_1s_0} & ik_1 & -ik_2e^{-ik_2s_0} & ik_2 & -ik_3e^{-ik_3s_0} & ik_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} \tag{4.68}$$

Denoting this system of equations in matrix form, the solution can be written as:

$$\{U\}=[G]\{C\} \qquad \Rightarrow \qquad \{C\}=[G]^{-1}\{U\} \tag{4.69}$$

The spectral components of the axial force, bending moment and transverse shear force are given by Doyle (1997),

$$N = EA\left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{R}\right) \tag{4.70}$$

$$Q = -EI\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial s^3}\right) \tag{4.71}$$

$$M = EI\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) \tag{4.72}$$

The spectral nodal transverse shear force, bending moment and axial force defined in the finite curved beam element can be related to displacement field as:

$$\begin{bmatrix} -N(0) \\ -Q(0) \\ -M(0) \\ N(s_0) \\ Q(s_0) \\ M(s_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA\left(\frac{\partial[N(0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda]-\frac{1}{R}[N(0)]^T\right) \\ EI\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2[N(0)]^T}{\partial s^2}\cdot[\Lambda]+\frac{\partial^3[N(0)]^T}{\partial s^3}\right) \\ -EI\left(\frac{1}{R}\frac{\partial[N(0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda]+\frac{\partial^2[N(0)]^T}{\partial s^2}\right) \\ EA\left(\frac{\partial[N(s_0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda]-\frac{1}{R}[N(s_0)]^T\right) \\ -EI\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2[N(s_0)]^T}{\partial s^2}\cdot[\Lambda]+\frac{\partial^3[N(s_0)]^T}{\partial s^3}\right) \\ EI\left(\frac{1}{R}\frac{\partial[N(s_0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda]+\frac{\partial^2[N(s_0)]^T}{\partial s^2}\right) \end{bmatrix} [G]^{-1}\{U\} \tag{4.73}$$

where, $[K_I]$ is the spectral element matrix of the circular beam with internal pressure.

$$[K_I] = \begin{bmatrix} -EA\left(\frac{\partial[N(0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda]-\frac{1}{R}[N(0)]^T\right) \\ EI\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2[N(0)]^T}{\partial s^2}\cdot[\Lambda]+\frac{\partial^3[N(0)]^T}{\partial s^3}\right) \\ -EI\left(\frac{1}{R}\frac{\partial[N(0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda]+\frac{\partial^2[N(0)]^T}{\partial s^2}\right) \\ EA\left(\frac{\partial[N(s_0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda]-\frac{1}{R}[N(s_0)]^T\right) \\ -EI\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2[N(s_0)]^T}{\partial s^2}\cdot[\Lambda]+\frac{\partial^3[N(s_0)]^T}{\partial s^3}\right) \\ EI\left(\frac{1}{R}\frac{\partial[N(s_0)]^T}{\partial s}\cdot[\Lambda]+\frac{\partial^2[N(s_0)]^T}{\partial s^2}\right) \end{bmatrix} [G]^{-1} \tag{4.74}$$

4.4 Forced response of a complete ring with and without internal pressure

Figure 4.3 and 4.4 show the forced response of a complete ring with and without internal pressure (P_{int}= 0 and P_{int} = 3 bar). The dashed vertical lines indicate the analytical natural frequencies of a circular Euler-Bernoulli ring without string effect. These results have been obtained with a model consisting of 2 spectral elements. Table 4.1 shows the curved beam properties:

Properties of the ring		
length	s	0,7854 *m*
width	b	0,15 *m*
height	h	0,002 *m*
Young's modulus	E	220e9 N/m^2
Mass density	ρ	7200 Kg/m^3
inertia	I	$BH^3/12$
radius	R	0,25 *m*

Table 4.1: Properties of the ring.

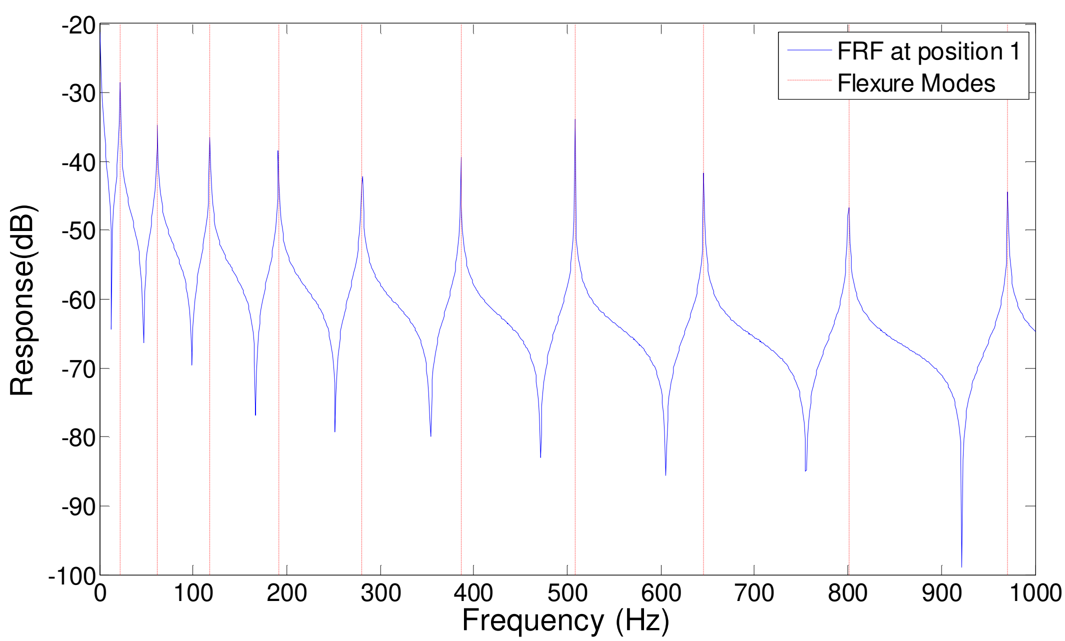


Figure 4.3: Circular ring with 2 elements and P_{int} = 0 bar.

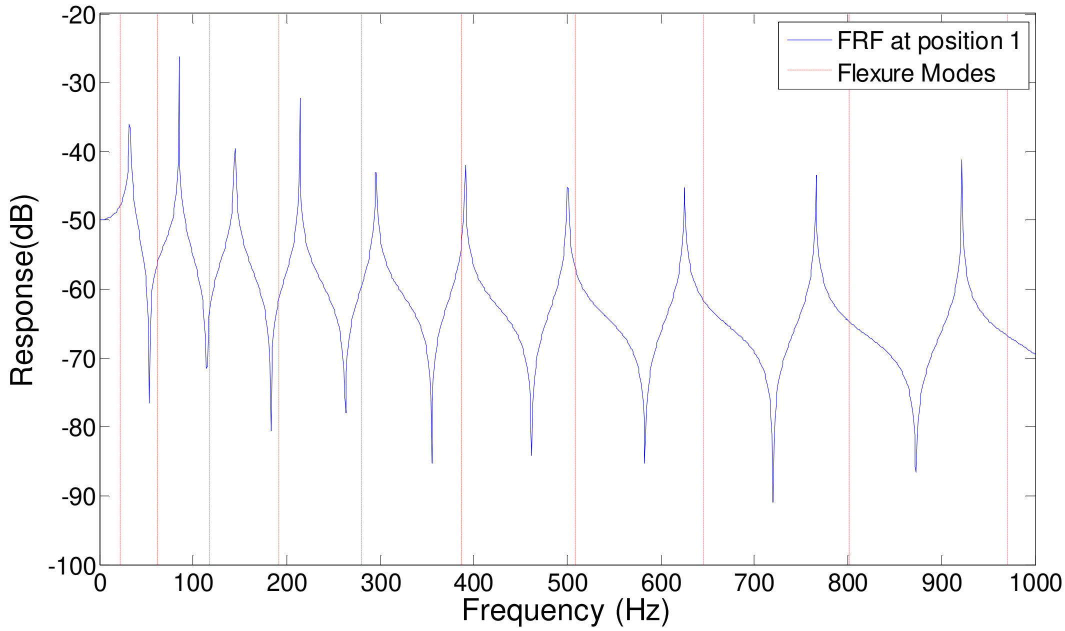


Figure 4.4: Circular ring with 2 elements and P_{int} = 3 bar.

4.5 Wavenumber - frequency analysis

Figure 4.5 was obtained calculating the wavenumbers at different frequencies. The wavenumber is represented in the *x* axis and the frequency in the *y* axis Bolton and Song (1998). Magnitudes of the spatial Fourier coefficients are represented by a color bar. The areas of larger values at a certain frequency correspond to the wavenumbers present at that frequency. These usually form lines, and these lines correspond to the spectrum relation $k(\omega)$ of the circular ring. The Fourier coefficients were obtained by applying the spatial Fourier transform to each operational mode. Figure 4.5 was obtained with P_{int} = 0 and radial excitation. The curved line corresponds to flexural wave propagation. The straight line corresponds to the compression wave propagation. Figure 4.6 shows the diagram obtained with tangential excitation.

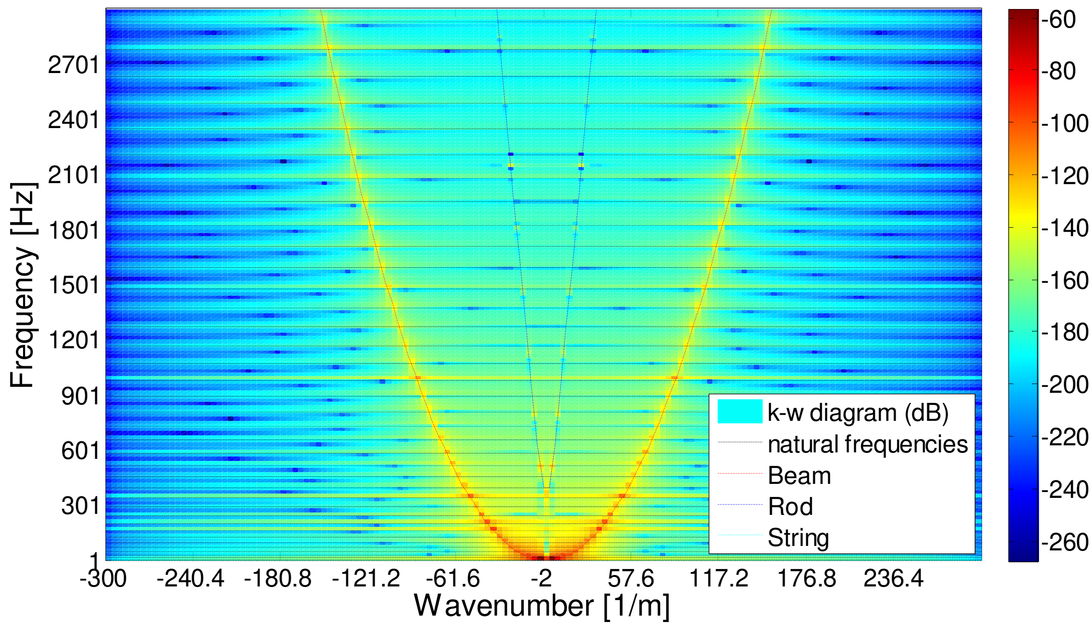


Figure 4.5: Diagram *k*-ω with radial excitation and P_{int} = 0 bar.

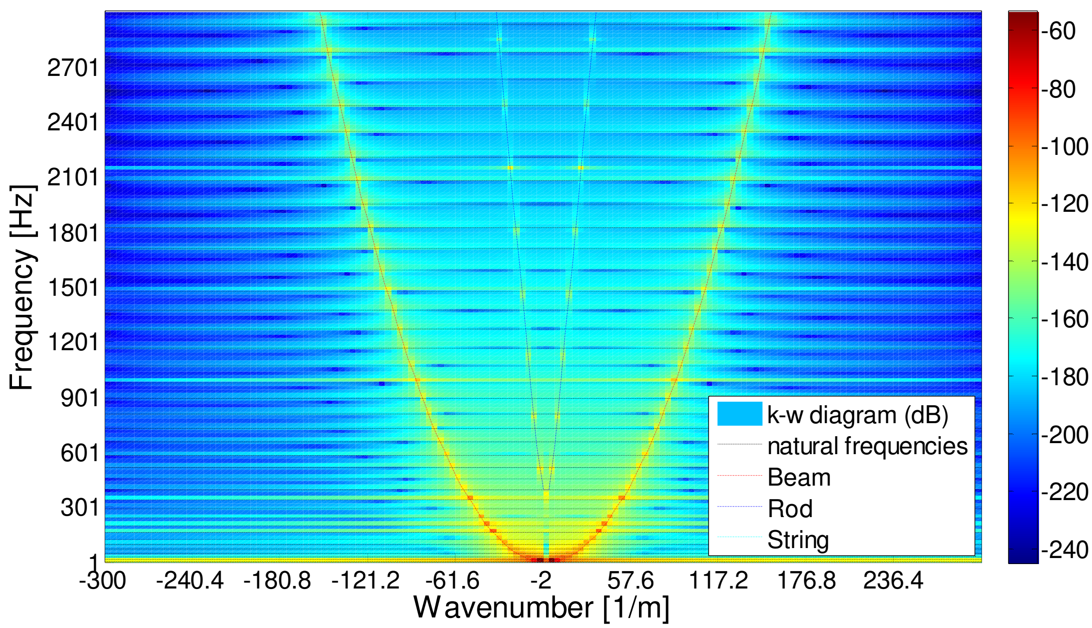


Figure 4.6: Diagram *k*-ω with tangential excitation and P_{int} = 0 bar.

Figures 4.7 and 4.8 show the diagrams obtained with radial excitation with P_{int} = 3 bar and P_{int} = 90 bar.

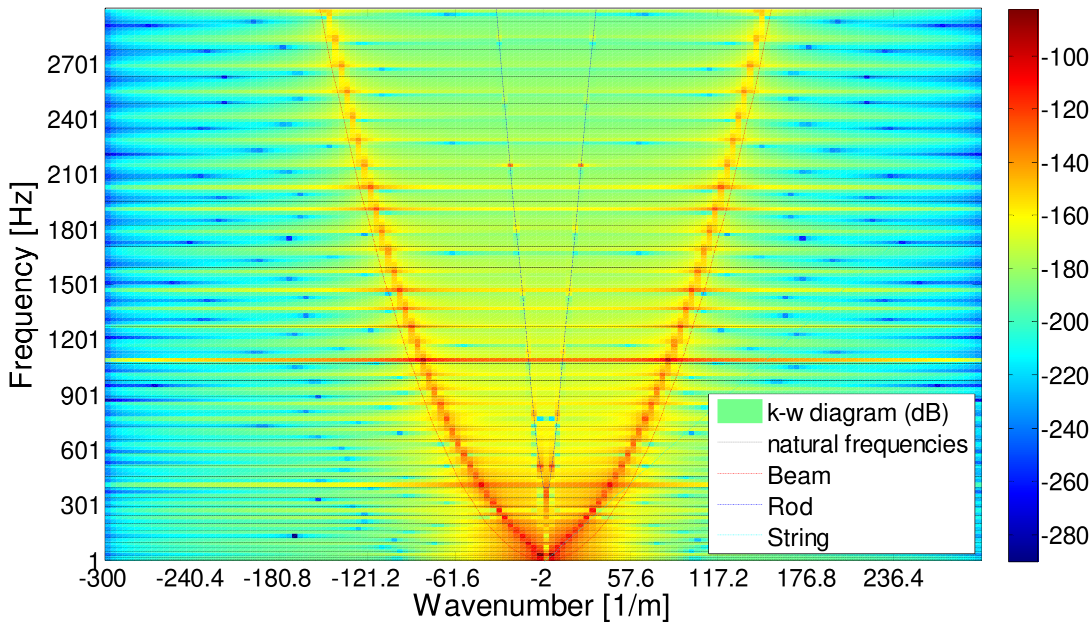


Figure 4.7: Diagram k-ω with radial excitation and P_{int} =3 bar.

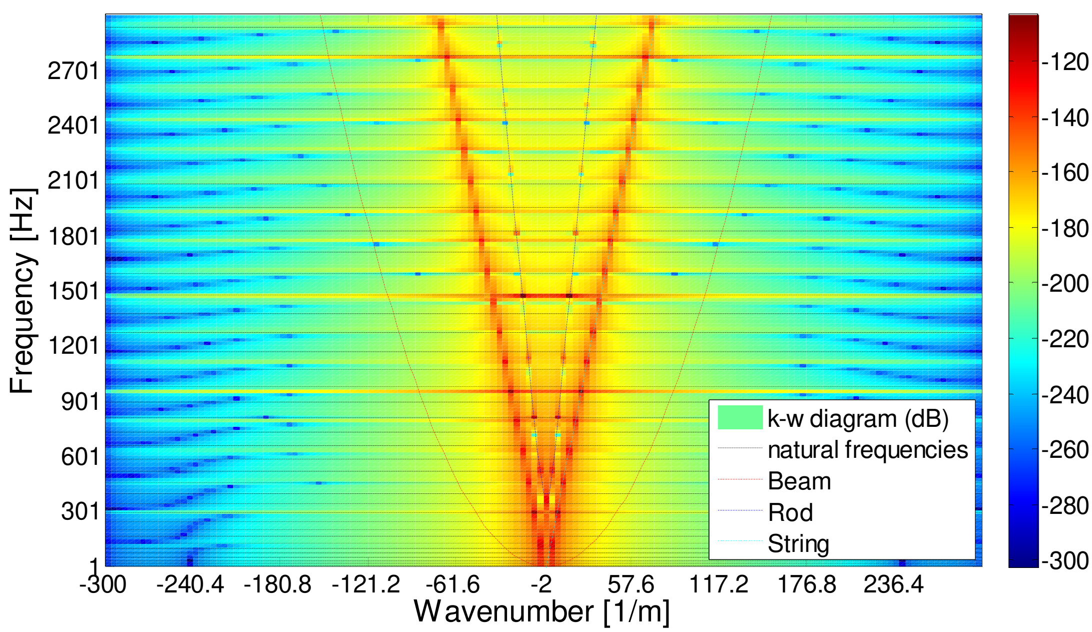


Figure 4.8: Diagram k-ω with radial excitation and P_{int} = 90 bar.

The curve of flexural wave propagation does not follow either the theoretical beam curve or the theoretical curve for the circular string. When the internal pressure is larger, the ring behaves more like a string than like a beam.

4.6 Moving load

The implementation of a rotating force in such a model was discussed in chapter 3. The radial force that moves around the ring with constant angular speed is simulated using a triangular pulse that is applied to each element node subsequently with a delay that corresponds to time that the force takes to move from one node to the next.

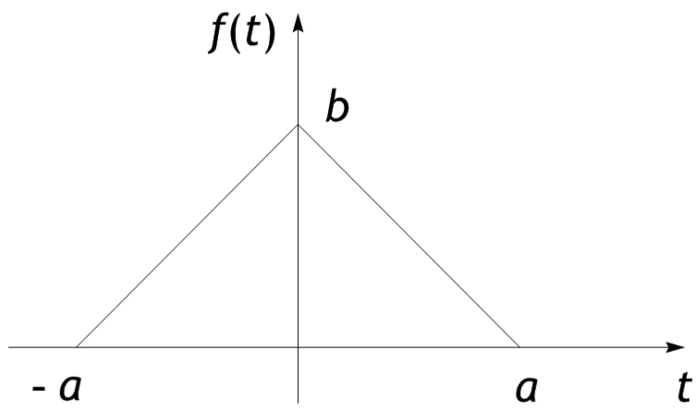


Figure 4.9: Triangular pulse.

Figures 4.10 - 4.15 show some forced responses to rotating forces at different speeds. The speeds have been chosen so that one of the radial modes of the ring is excited. Because of the moving force approximation 30 spectral elements were used to obtain these results.

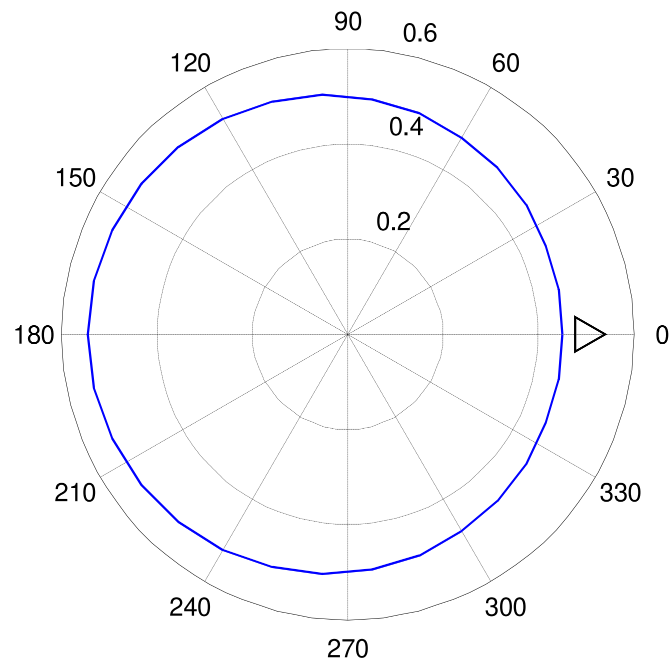


Figure 4.10: Mode 1 excited at velocity 31 m/s.

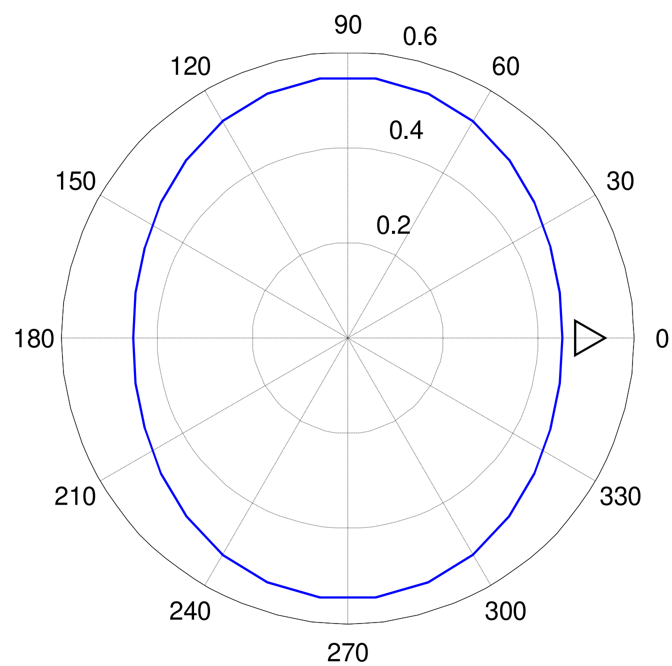


Figure 4.11: Mode 2 excited at velocity 39.2 m/s.

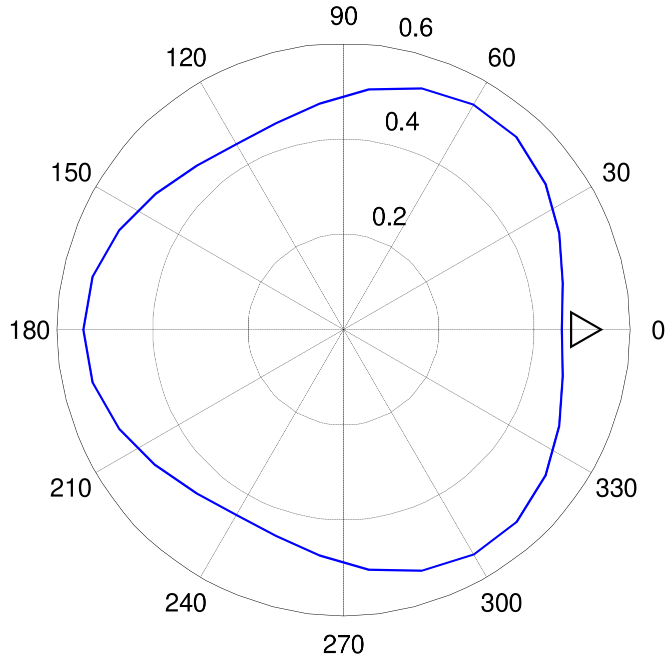


Figure 4.12: Mode 3 excited at velocity 41.8 m/s.

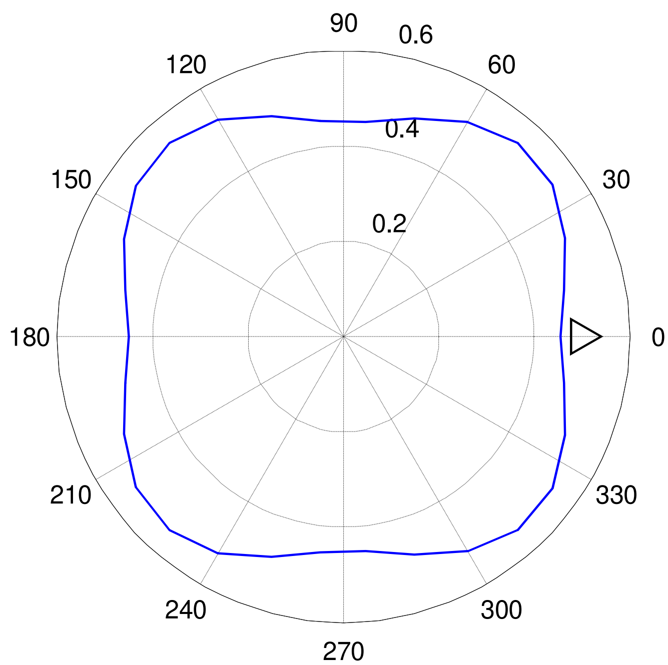


Figure 4.13: Mode 3 excited at velocity 42.9 m/s.

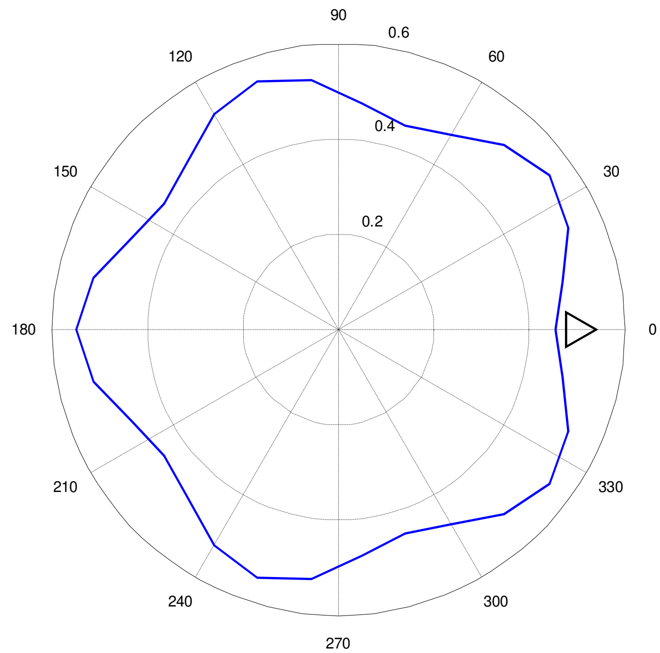


Figure 4.14: Mode 5 excited at velocity 43.6 m/s.

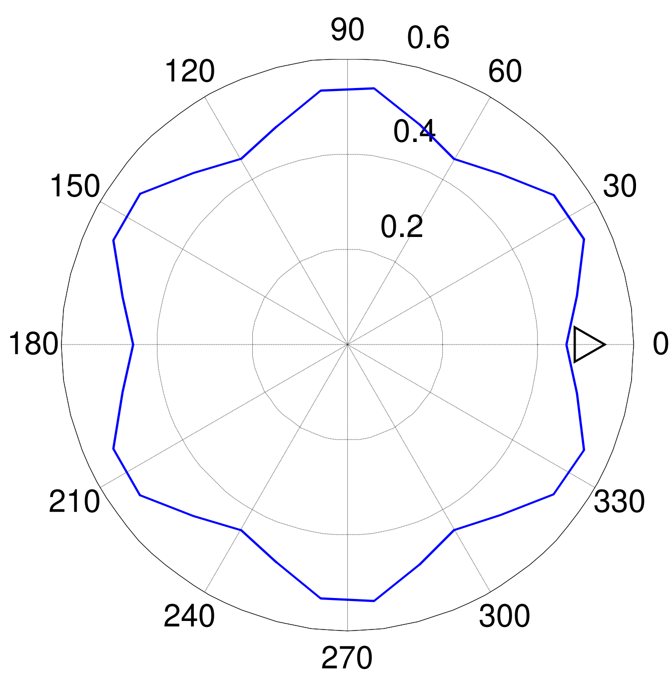


Figure 4.15: Mode 5 excited at velocity 44.2 m/s.

4.7 Experimental results

An experimental test was performed with an untreaded truck tire with a non-rotating radial force. The tire mounted on a wheel and the wheel was rigidly fixed. The tread-band was excited in the frequency range from 30 to 800 Hz using an electro-dynamical shaker attached to the tread-band through a stinger and a force transducer. A total of 203 points were measured around the tire circumference using a laser Doppler vibrometer. Furthermore, 60 points were measured along a vertical line on the tire tread-band to check for the cross-section propagation mode. The natural frequencies of the tire were obtained from the peaks of the measured Frequency Response Functions. For further details on the experiment see Delamotte (2008).

Using this information a critical speed analysis could be performed. Standing waves appear in the tire when the rotation speed reaches the critical values. These critical values for each mode are reached when the rotation speed coincides with one of the natural frequencies of the tire divided by the number of circumferential wavelengths of the mode n Soedel (1975),

$$\Omega = \omega_k / n \tag{4.75}$$

The first critical rotation speed of the tire is reached when the first standing waves are formed, i.e., $\Omega_c = (\omega_k / n)_{\min}$. Figure 4.17 shows the critical speed diagram for the tire investigated. This simplified analysis does not take into account the influence of the nonlinearities caused by the large deformations of the tire that are present under actual use nor the effect of the centripetal force.

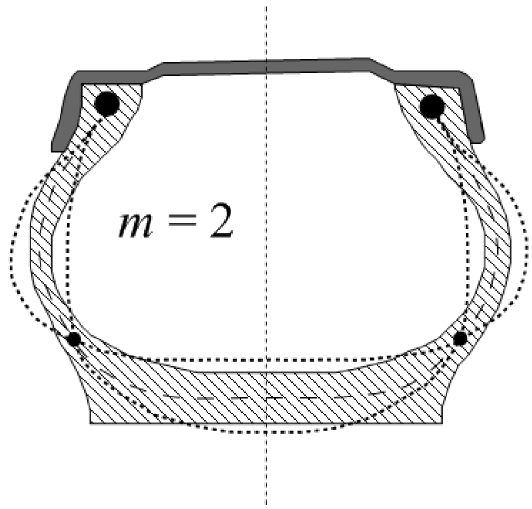


Figure 4.16: Cross-section propagation mode m = 2.

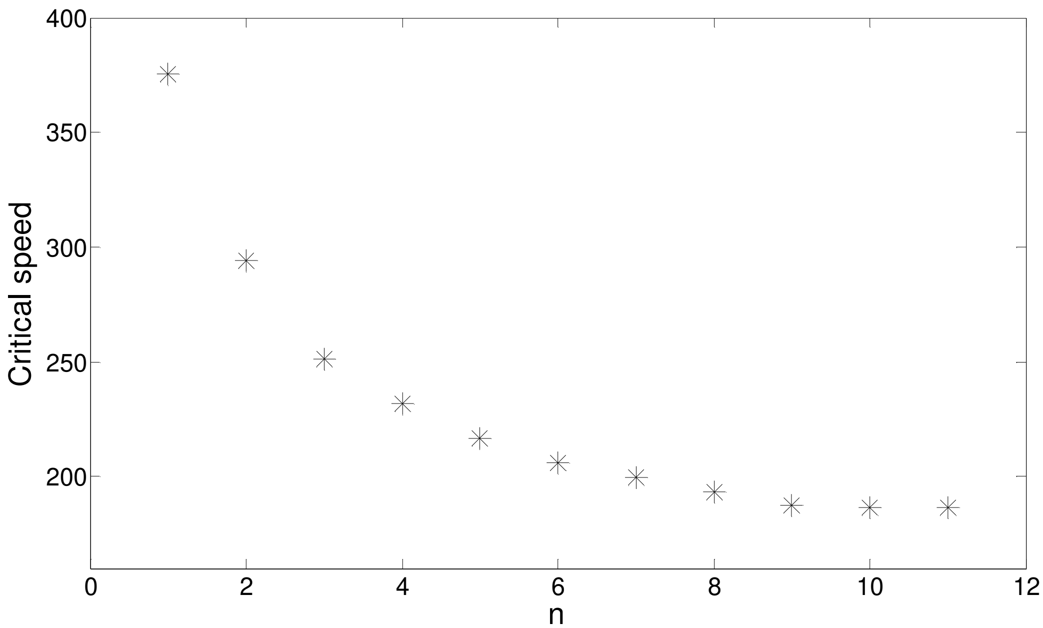


Figure 4.17: Critical speed diagram obtained using the first 11 natural frequencies that are associated with cross-section propagation mode m = 2.

Figure 4.18 was obtained from the circumferential measurements by calculating the wavenumber spectrum at different frequencies using a spatial Fourier transform. The spatial Fourier transform was applied to each operational mode as in Bolton and Song (1998). The wavenumber is represented on the x axis and the frequency of the operating mode in the y axis. The magnitudes of the Fourier coefficients are represented by a color bar.

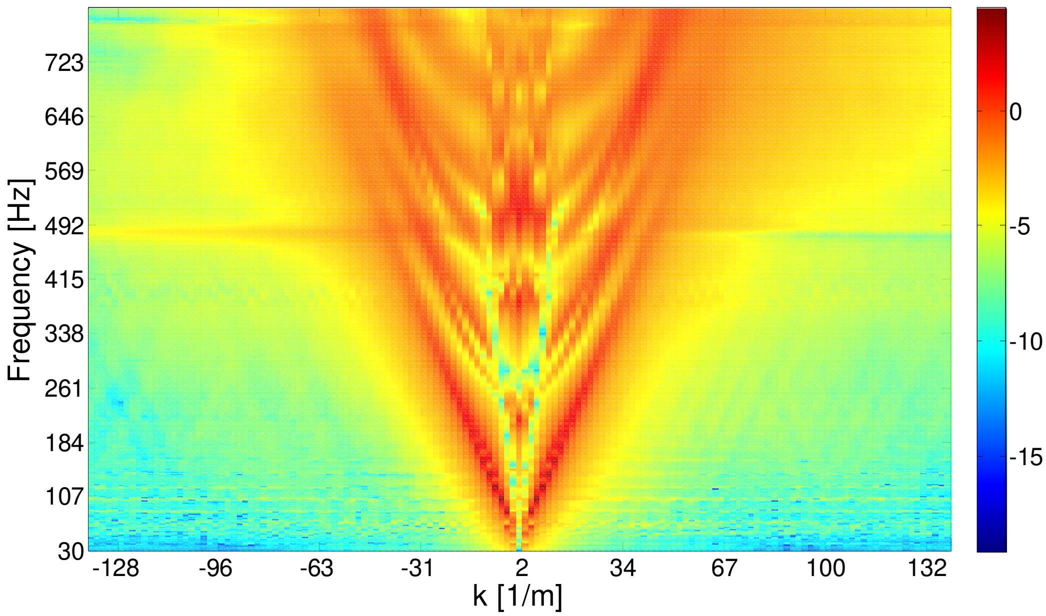


Figure 4.18: Diagram k-ω obtained with experimental data for an untreaded truck tire.

4.8 Critical speed of the circular beam

Figures 4.19 and 4.20 present the critical speed diagram for the circular beam with and without internal pressure.

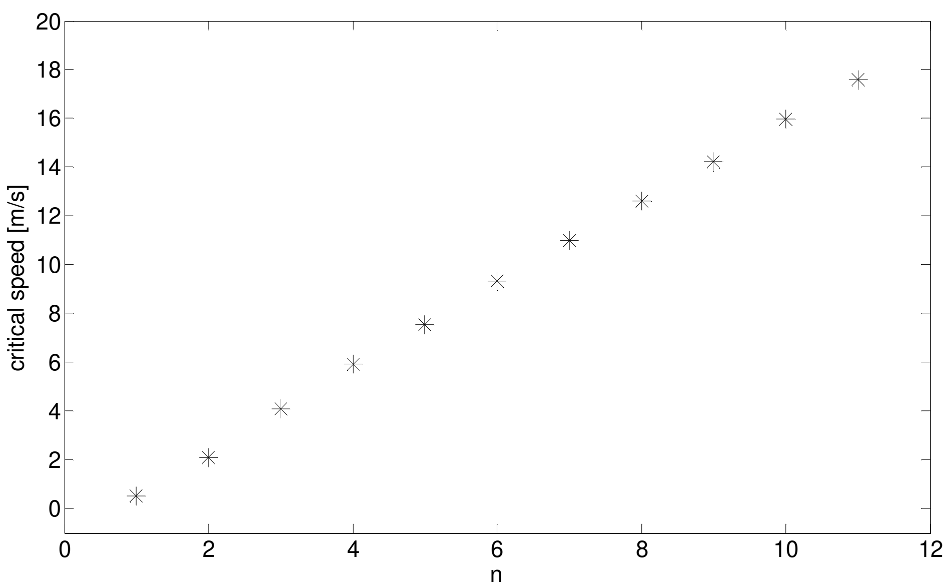


Figure 4.19: Critical speed with $P_{int} = 0$ bar.

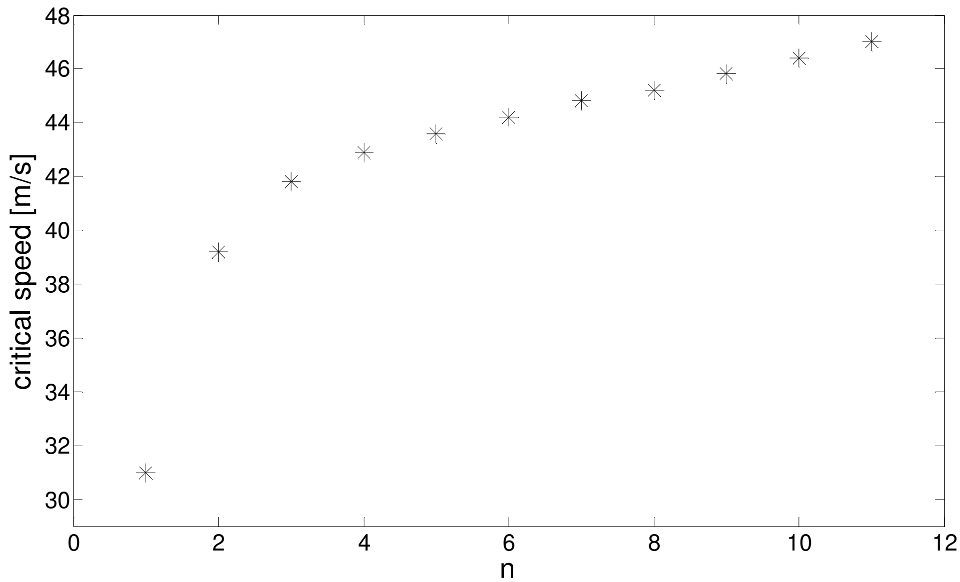


Figure 4.20: Critical speed with P_{int} = 120 bar.

Figure 4.21 shows the variation of the velocity in relation to the internal pressure (modes 1, 6 and 11). Figure 4.22 shows an amplitude plot of the radial response of the ring under rotating excitation force as a function of the rotating speed. From this kind of plot, the critical frequency for each mode can be obtained; the plot shown was obtained with an internal pressure P_{int} = 120 bar.

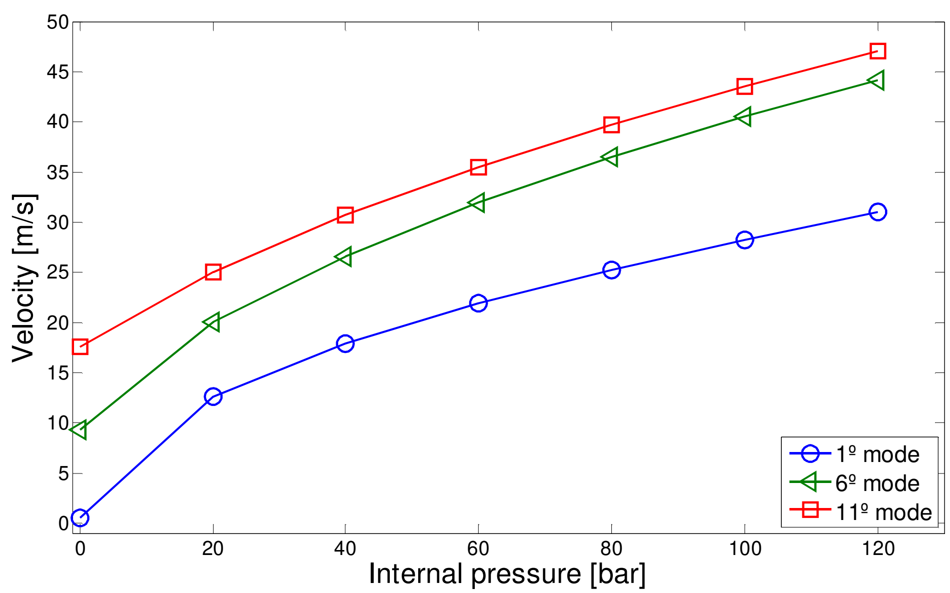


Figure 4.21: Influence of pressure on the critical velocities of modes 1, 6, and 11.

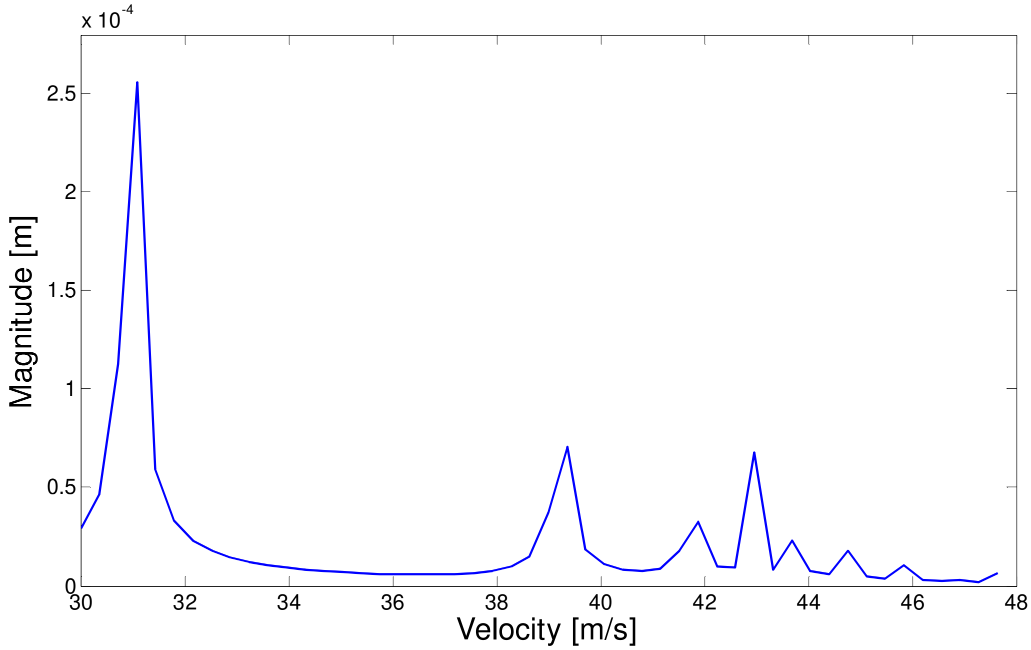


Figure 4.22: Magnitude of the response for different rotating force tangential velocities with P_{int} = 120 bar.

4.9 Conclusion

In this chapter, a simplified spectral element model of a circular ring was used to qualitatively model the automotive tire dynamics. A rotating force was implemented and the string effect due to the internal pressure was taken into account. The critical speeds for the excitation of each radial mode were obtained from the rotating force response. Results were compared with experimental results for a real truck tire. Critical speed plots and wavenumber-frequency plots of the simple model and the real tire were obtained. The comparison between simple model predictions and measurements is qualitative. The main purpose of this chapter is to derive the simplest mechanical model that can explain some of the main dynamical phenomena of an automotive tire regarding standing waves and natural frequencies under a rotating force. As the comparisons were only qualitative, the properties of the beam were not derived from the real tire. This can be easily done, however, by statically deforming the real tire or an FE detailed model of it and computing and equivalent bending rigidity.

Chapter 5

Investigating the Relations Between the Wave Finite Element and Spectral Element Methods Using Simple Waveguides

Low order flexural waves can be modeled, at low frequencies, using models such as Euler-Bernoulli and Timoshenko for beams and Kirchhoff and Mindlin for plates. At higher frequencies, higher order theories such as Flügge's and Donnell-Mushtari for cylindrical shells and Mindlin-Herrmann for rods can be used to predict analytically the wave solutions for simple geometries. However, in the case of more complex geometries, modeling can only be achieved practically using numerical methods such as the Finite Element Method (FEM). As frequency goes higher, the size of the numerical model of the complete structure becomes excessive and the computational cost sets a high frequency limit for numerical methods. Aiming at overcoming this limitation in the case of structures that have one dimension much larger than the others and can be treated as a waveguide, waveguide finite element methods (WFEM) have been developed in recent years. They are closely related with spectral element methods (SEM), as both approach the structure as a waveguide. In the WFEM, a slice of the waveguide is modeled by FE and, from this model, a waveguide model can be derived and used to compute the spectral relations, the group and energy velocities, and the forced response. This approach can be useful, for instance, when simulating structural health monitoring techniques based upon wave propagation. In this chapter, spectral elements are used to model waveguide slices of simple beam and plate structures in a WFEM approach. This allows us to investigate the relationships between both approaches and possible synergies to be explored. Numerical aspects of WFEM are also investigated using these simple problems where the SEM solution is exact. Simple WFEM models of a Timoshenko beam are also developed from FEM slices to illustrate similarities and differences of both approaches.

5.1 Modal formulation

When using FEM, constant parameter stiffness and mass matrices representing the linear dynamic behavior of the structure are obtained. With these two matrices, a generalized eigenvalue problem may be solved, and the system of equations can be de-coupled, yielding independent simple second order ordinary differential equations, which have known closed-form analytical solutions. This modal approach has been extensively developed, and efficient matrix methods that take into account the symmetry and sparsity of the large mass and stiffness matrices can be used to solve the dynamic problem at an affordable computational cost. Internal loss factors (damping) can be easily introduced in the modal approach with modal damping coefficients. However, as frequency goes higher, the size of the numerical model can becomes excessive and the computational cost prohibitive, mainly if the problem must be solved many times for different input parameters, as it is the case in optimization and robustness analyses.

In analytical and semi-analytical methods, the solution to the time-domain partial differential system of equations usually starts by transforming the problem to the frequency domain. Therefore, if a direct stiffness approach is used, a dynamic matrix is obtained. This matrix can be obtained with the FEM simply by making a Fourier transformation of the system of ordinary differential equations:

$$\left[K - \omega^2 M\right]\{U(\omega)\} = \{F(\omega)\} \tag{5.1}$$

In this formulation damping can be included by an internal loss factor that makes the stiffness matrix complex:

$$\left[K(1+i\eta) - \omega^2 M\right]U(\omega) = F(\omega) \quad \text{or} \quad \left[D(\omega)\right]U(\omega) = F(\omega) \tag{5.2}$$

A semi-analytical method that is formulated using a direct stiffness approach is the Spectral Element Method. The Spectral Element Method (SEM) was proposed by Doyle (1997), although its basic formulation was already widely known and currently used in the context of wave propagation solutions. In the SEM, the main idea is to combine all advantages of the spectral analysis with the efficiency and organization of the Finite Element Method (FEM). The major advantage of the SEM in comparison with the FEM is due to the fact that the spectral element dynamic stiffness matrix is computed in the frequency domain, which allows the inertia of the distributed mass to be described exactly. Thus, it is not necessary to refine the mesh as the wavelength becomes smaller. It may be shown that the SEM dynamic stiffness matrix corresponds to an infinite number of finite elements Doyle (1997).

5.2 Spectral element formulation

The SEM is formulated based on two types of elements, two-noded and throw-off. The latter are used when the member extends to infinity. The major drawback of SEM is that the elements may only be assembled in one dimension, the solution along the orthogonal dimensions having to be found analytically, which is only possible for simple geometries. Doyle (1997) also proposes a more general approach, which consists of using image sources to enforce arbitrary boundary conditions, but the approach still requires an *ad hoc* solution. Thus, the SEM can be combined with the superposition method proposed by Gorman (1999). In order to illustrate the use of SEM models, the simpler type of spectral element is shown here, namely the low-order rod. The most simple rod theory is described by the following partial differential equation of motion:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q \tag{5.3}$$

where EA is the axial stiffness and ρA is the mass density per unit length of the rod. The relation between the traction force and the displacement field may be shown to be:

$$F = EA\frac{\partial u}{\partial x} \tag{5.4}$$

Following that, spectral analysis can be applied with a solution of the form,

$$\hat{u}(x,\omega) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx} \tag{5.5}$$

where A and B are the forward and backward-propagating wave amplitudes at each frequency, respectively, and k is the wavenumber, given in this case by $k = \omega\sqrt{\rho/E}$. Now, defining a spectral element of length L and using the end displacements as boundary conditions, the following symmetric dynamic stiffness element matrix can be easily obtained Doyle (1997):

$$\left\{\hat{F}\right\} = \begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_1 \end{Bmatrix} = \frac{EAik}{1-e^{-i2kL}} \begin{bmatrix} 1+e^{-i2kL} & -2e^{-ikL} \\ -2e^{-ikL} & 1+e^{-i2kL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \left[\hat{D}_e\right]\left\{\hat{u}\right\} \tag{5.6}$$

where $[\hat{D}_e]$ is the complex dynamic stiffness matrix for the rod element, $\left\{\hat{F}\right\}$ is the vector of complex amplitudes of the nodal forces, and $\left\{\hat{u}\right\}$ is the vector of the complex nodal displacement amplitudes. In order to account for structural damping, an internal loss factor η can be applied by using a complex Young's modulus $E(1+i\eta)$.

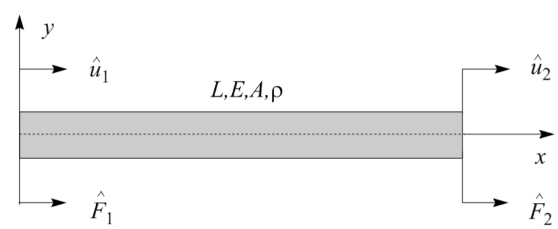


Figure 5.1 The elementary straight rod element.

With the dynamic stiffness matrix of the elements, it is straightforward to assemble a global stiffness matrix using the direct stiffness method Craig (1981). The structural responses can be found by solving, for each frequency, a linear system of equations of the type:

$$\left\{\hat{F}\right\} = \left[\hat{D}\right]\left\{\hat{U}\right\} \tag{5.7}$$

Boundary conditions can be applied in a standard way to the global system matrix. In the case of fixed degrees-of-freedom, the corresponding line and column of the global dynamic stiffness matrix are suppressed (they can be used to compute the reaction forces later on). Similar element matrices can be found for beams and shafts, and a three-dimensional frame spectral element can be formulated and used to solve any frame structure problem exactly within the framework of the rod, beam and shafts theories used in the element formulation Ahmida and Arruda (2001). Spectral elements have also been derived for plates and shells assembled along one dimension.

5.3 Transfer matrix formulation

The transfer matrix method has been extensively used to solve frame structures and rotor system dynamic problems Pilkey (2002). Instead of relating forces and displacements at the extremities of an element, the transfer matrix relates forces and displacements at a node with forces and displacements at a neighboring node. With transfer matrices, instead of using a direct stiffness assembling, the state vector (efforts and displacements) is propagated from one extremity of the assembled structure to the other and the boundary conditions are applied, thus generating the solution to the problem.

In the case of the rod treated in the previous section, the element transfer matrix is given by:

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_2 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = \left[T_{21}(\omega)\right]\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{F}_1 \end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

By rearranging the equations and changing the sign of $\left\{\hat{F}_2\right\}$, as now these are internal forces (traction is positive and compression is negative, or vice-versa depending on the sign convention used), whereas in the dynamic stiffness matrix they are external forces, one can write:

$$\left[T_{21}(\omega)\right] = \begin{bmatrix} -\hat{D}_{12}^{-1}\hat{D}_{11} & \hat{D}_{12}^{-1} \\ -\hat{D}_{21} + \hat{D}_{22}\hat{D}_{12}^{-1}\hat{D}_{11} & -\hat{D}_{22}\hat{D}_{12}^{-1} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

There exist alternative formulations for the transfer matrix approach, where some ill-conditioning problems can be overcome Zhong and Williams (1995). Assembling the global matrix is done by propagating the transfer matrices from element 1 to N:

$$\left[T(\omega)\right]=\left[T_{N(N-1)}\right]\cdots\left[T_{32}\right]\left[T_{21}\right] \tag{5.10}$$

5.4 Wave amplitude formulation and the scattering matrix

As discussed before, the displacement field of the rod may be represented by the sum of a forward and a backward propagating wave with amplitudes *A* and *B*, respectively. Using Equation (5.5), it is possible to express the relation between displacement at nodes and wave amplitudes by the matrix equation:

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{F}_1 \end{Bmatrix}=\left[C_{21}\right]\begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} \tag{5.11}$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_2 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix}=\left[C_{21}\right]\begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} \tag{5.12}$$

where, $\left[C_{21}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -iEAk & iEAk \end{bmatrix}$

where $A_2 = A_1 e^{-ikL}$ and $B_2 = B_1 e^{ikL}$. Substituting the elements of the dynamic stiffness matrix in Equation (5.9) we can write:

$$\left[T_{21}\right]=\begin{bmatrix} \cos(kL) & -\sin(kL)/EAk \\ EAk\sin(kL) & \cos(kL) \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

and it is easy to show that the eigenvectors of $\left[T(\omega)\right]$ are the columns of $\left[C\right]$ and the eigenvalues are:

$$\left[C_{21}\right]^{-1}\left[T_{21}\right]\left[C_{21}\right]=\begin{bmatrix} e^{ikL} & 0 \\ 0 & e^{-ikL} \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

It may be shown that the structure of this matrix is always of the form Moulet (2003):

$$\left[C\right]^{-1}\left[T\right]\left[C\right]=diag\left[\Lambda \quad \Lambda^{-1}\right] \tag{5.15}$$

In the general case, with l and r denoting the left and right side sections of the waveguide, the eigenvalue problem with the transfer matrix can be written as:

$$[T]\begin{Bmatrix} \hat{u}_l \\ \hat{F}_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_r \\ \hat{F}_r \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \hat{u}_l \\ \hat{F}_l \end{Bmatrix} \tag{5.16}$$

Given Equations (5.14), (5.11) and (5.12) we can write:

$$\begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ikL} & 0 \\ 0 & e^{-ikL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} \tag{5.17}$$

When two transfer matrices are associated, one can write:

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_3 \\ \hat{F}_3 \end{Bmatrix} = [T_{32}][T_{21}] \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{F}_1 \end{Bmatrix} \tag{5.18}$$

Transforming to the wave amplitude relation:

$$\begin{Bmatrix} A_3 \\ B_3 \end{Bmatrix} = [C_{32}]^{-1}[T_{32}][T_{21}][C_{21}] \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} \tag{5.19}$$

When two homogeneous elements are coupled, a discontinuity can be introduced, as the two rod elements may have different properties, causing waves to reflect and/or be transmitted at the discontinuous junction. A scattering matrix can be defined, which relates waves incoming at the junction to waves out coming from the junction (see Figure 5.2), by rearranging Equation (5.19):

$$\begin{Bmatrix} B_1 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{13} & T_{31} \\ T_{13} & R_{31} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_3 \end{Bmatrix} \tag{5.20}$$

where the following relations apply for the reflection and transmission coefficients:

$$R_{13} = -Q_{22}^{-1} Q_{21} \qquad T_{31} = Q_{22}^{-1} \tag{5.21}$$

$$T_{13} = Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{21} \quad R_{31} = Q_{21} Q_{22}^{-1} \tag{5.22}$$

Replacing the values for two-rod elements of the same material and of equal length L, but different cross-section areas (now denoted S not to mix with the wave components), one can obtain:

$$R_{13} = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} e^{i2kL} \qquad T_{31} = \frac{2S_1}{S_1 + S_2} e^{i2kL} \tag{5.23}$$

$$T_{13} = \frac{2S_2}{S_1 + S_2} e^{i2kL} \qquad R_{31} = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} e^{i2kL} \tag{5.24}$$

These values are equal to the theoretical values that can be obtained by standard wave equation solutions for the same discontinuity multiplied by e^{i2kL}, which is the phase delay caused by the crossing of the element twice for each wave component. Therefore, the scattering matrix for this area discontinuity in a rod is expressed as:

$$[S] = \begin{bmatrix} \dfrac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} & \dfrac{2S_1}{S_1 + S_2} \\ \dfrac{2S_2}{S_1 + S_2} & \dfrac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

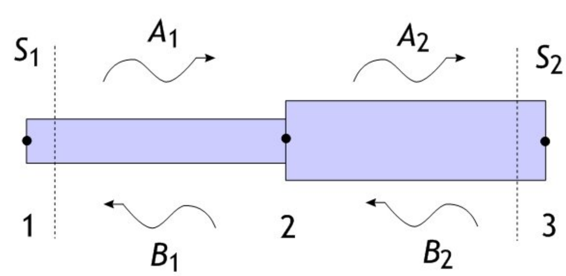


Figure 5.2. Incoming and out coming waves at a junction.

5.5 State wave formulation

The transfer matrix formulation is a discrete version of a more general formulation for waveguides known as state equation formulation. The idea is to transform the structural equilibrium equations, which are partial differential equations, into a set of ordinary, first order differential equations whose closed-form solution is known.

For the rod we can write, from Equations (5.3) and (5.4), in the homogeneous case (q = 0) transforming to the frequency domain (spectral solution):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{F}}{\partial x} = -\rho A \omega^2 \hat{u} \\ \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \dfrac{\hat{F}}{EA} \end{cases} \tag{5.26}$$

This is a linear system of first order differential equations and can be written in matrix form as:

$$\frac{\partial \{\hat{X}\}}{\partial x} = [N]\{\hat{X}\} \tag{5.27}$$

where

$$\{\hat{X}\} = \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{F} \end{Bmatrix} \text{ and } [N] = \begin{bmatrix} 0 & 1/EA \\ -\rho A \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

For this first order system, the homogeneous solution can be written in terms of a transition matrix:

$$\{\hat{X}(x)\} = [\Phi(x,0)]\{\hat{X}(0)\} \tag{5.29}$$

where,

$$[\Phi(x,0)] = e^{[N]x} \tag{5.30}$$

An eigenvalue decomposition of matrix $\left[\Phi(x,0)\right]$ can be made by using the property that the eigenvalues of $e^{[N]}$ are the exponentials of the eigenvalues of $\left[N\right]$ and the eigenvectors are the same. This is due to the Cayleigh-Hamilton theorem. The eigenvalues of $\left[N\right]$ can be easily shown to be $\pm ik$, so that:

$$\left[N\right]=\left[\Psi\right]\left[\Lambda\right]\left[\Psi\right]^{-1} \quad \text{where} \quad \left[\Psi\right]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -ikEA & ikEA \end{bmatrix} \text{ and } \left[\Lambda\right]=\begin{bmatrix} -ik & 0 \\ 0 & ik \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

Thus, the transition matrix, which in this case is the transfer matrix, can be written as:

$$e^{[N]L}=\left[\Psi\right]e^{[\Lambda]L}\left[\Psi\right]^{-1}=\begin{bmatrix} \cos(kL) & \dfrac{\sin(kL)}{kEA} \\ -kEA\sin(kL) & \cos(kL) \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

There is a sign change with respect to Equation (5.13). This is due to the sense of transition: $\left[\Phi(L,0)\right]$ or $\left[\Phi(0,L)\right]$, which causes a sign change in the eigenvalues. Finally, it should be noted that, usually, a matrix $\left[N\right]=i\left[\overline{N}\right]$ is used so that the eigenvalues of $\left[\overline{N}\right]$ become simply the wave-number $\pm k$, Moulet (2003).

5.6 Characteristic equations for wavenumber solutions

For the general waveguide case, denoting by subscripts l and r the left and right section displacements and forces, respectively, the dynamic matrix condensed (see next section) for the left and right section degrees-of-freedom can be written as:

$$\begin{bmatrix} \hat{D}_{ll} & \hat{D}_{lr} \\ \hat{D}_{rl} & \hat{D}_{rr} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \hat{u}_l \\ \hat{u}_r \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \hat{F}_l \\ \hat{F}_r \end{Bmatrix} \tag{5.33}$$

From the waveguide (periodic) assumption, we have:

$$u(x,y,z,\omega)=\sum \hat{u}_n(x,y,\omega)e^{k_n z} \tag{5.34}$$

from which comes the relations

$$\hat{u}_{rn} = e^{k_n \Delta} \hat{u}_{\ln} = \lambda_n \hat{u}_{\ln} \text{ and } \hat{F}_{rn} = e^{k_n \Delta} \hat{F}_{\ln} = \lambda_n \hat{F}_{\ln} \tag{5.35}$$

Now, using the first equation in Equation (5.15) and the above relations gives:

$$\left(\hat{D}_{ll} + \lambda \hat{D}_{lr}\right)\hat{u}_l = \hat{F}_l \tag{5.36}$$

and combing with the second equation in Equation (5.14) yields

$$\left(\hat{D}_{ll} + \hat{D}_{rr} + \lambda \hat{D}_{lr} + \frac{1}{\lambda}\hat{D}_{rl}\right)\hat{u}_l = 0 \tag{5.37}$$

which can be rearranged as:

$$\left(\hat{D}_{rl} + \lambda(\hat{D}_{rr} + \hat{D}_{ll}) + \lambda^2 \hat{D}_{lr}\right)\hat{u}_l = 0 \tag{5.38}$$

To this characteristic equation can be associated the following companion eigenvalue problem:

$$\begin{bmatrix} -\hat{D}_{rl} & 0 \\ 0 & \hat{D}_{lr}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_n \\ \lambda_n \hat{u}_n \end{Bmatrix} = \lambda_n \begin{bmatrix} (\hat{D}_{ll} + \hat{D}_{rr}) & \hat{D}_{lr} \\ \hat{D}_{lr}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_n \\ \lambda_n \hat{u}_n \end{Bmatrix} \tag{5.39}$$

Solving this eigenvalue problem yields the wavenumbers $k_n(\omega) = \ln(\lambda_n(\omega))/\Delta$ and the propagation modes, $\hat{u}_n(x, y, \omega)$. The dependence upon the frequency is shown to emphasize this feature of the wavenumbers and propagation modes. The eigenvalue problem must be solved for each frequency and the pairing of the wavenumbers can be done by the correlation between the corresponding eigenvectors.

5.7 Condensation of the internal dofs in wfem

When computing the transfer matrix for waveguides with arbitrary shape with a FEM model, the degrees-of-freedom (DOF) must be separated into left surface, right surface and internal DOF. Furthermore, they must be paired by finding at each surface the corresponding DOFs. The dynamic matrix can then be partitioned as Mace (2005):

$$\begin{bmatrix} \hat{D}_{ii} & \hat{D}_{il} & \hat{D}_{ir} \\ \hat{D}_{li} & \hat{D}_{ll} & \hat{D}_{lr} \\ \hat{D}_{ri} & \hat{D}_{rl} & \hat{D}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{u}_L \\ \hat{u}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \hat{F}_l \\ \hat{F}_r \end{Bmatrix} \tag{5.40}$$

The internal degrees-of freedom can be condensed with:

$$\hat{u}_i = -\hat{D}_{ii}^{-1}\left(\hat{D}_{il}\hat{u}_l + \hat{D}_{ir}\hat{u}_r\right) \tag{5.41}$$

Thus, it is possible to write the condensed dynamic matrix as:

$$\begin{bmatrix} \hat{D}_{ll} - \hat{D}_{li}\hat{D}_{ii}^{-1}\hat{D}_{il} & \hat{D}_{lr} - \hat{D}_{li}\hat{D}_{ii}^{-1}\hat{D}_{ir} \\ \hat{D}_{rl} - \hat{D}_{ri}\hat{D}_{ii}^{-1}\hat{D}_{il} & \hat{D}_{rr} - \hat{D}_{ri}\hat{D}_{ii}^{-1}\hat{D}_{ir} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_l \\ \hat{u}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{F}_l \\ \hat{F}_r \end{Bmatrix} \tag{5.42}$$

The transfer matrix $[T]$ can then be written as in Equation (5.9),

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

Where,

$$T_{11} = -\left[\hat{D}_{lr} - \hat{D}_{li}\hat{D}_{ii}^{-1}\hat{D}_{ir}\right]^{-1}\left[\hat{D}_{ll} - \hat{D}_{li}\hat{D}_{ii}^{-1}\hat{D}_{il}\right] \tag{5.44}$$

$$T_{12} = \left[\hat{D}_{lr} - \hat{D}_{li}\hat{D}_{ii}^{-1}\hat{D}_{ir}\right]^{-1} \tag{5.45}$$

$$T_{21} = -\left[\hat{D}_{rl} - \hat{D}_{ri}\hat{D}_{ii}^{-1}\hat{D}_{il}\right]^{-1}\left[\hat{D}_{rr} - \hat{D}_{ri}\hat{D}_{ii}^{-1}\hat{D}_{ir}\right]\left[\hat{D}_{lr} - \hat{D}_{li}\hat{D}_{ii}^{-1}\hat{D}_{ir}\right] \tag{5.46}$$

$$T_{22} = \left[\hat{D}_{rr} - \hat{D}_{ri}\hat{D}_{ii}^{-1}\hat{D}_{ir}\right]\left[\hat{D}_{lr} - \hat{D}_{li}\hat{D}_{ii}^{-1}\hat{D}_{ir}\right]^{-1} \tag{5.47}$$

This matrix depends only on the dynamic stiffness of one section of the waveguide. Its eigenvalues can be found by solving the companion matrix Equation (5.38) and then be processed to yield the wavenumbers. The spectrum relation obtained is shown for beams in the following sections.

5.8 Dispersion relations

The methodology presented in this chapter will be validated for some theories like, Timoshenko beam, Mindlin Herrmann or (two mode), curved beam and Levy plate, where it will be compared the theoretical wavenumbers with the wavenumbers computed from the eigenvalues obtained from the spectral element dynamic matrix. The same methodology will be applied to FEM slice of the beam and plate modeled with software commercial ansys and theoretical wavenumbers are compared with the numerical wavenumbers from eigenvalues obtained from ansys stiffness and mass matrices. The results obtained are shown in Figures (5.11) and (5.12).

5.8.1 Timoshenko beam - WSEM

The wsem is first shown for a straight homogeneous beam example. First the Timoshenko spectral element matrix is used Arruda and Ahmida (2001) and results are compared with Timoshenko spectral relations Doyle (1997).

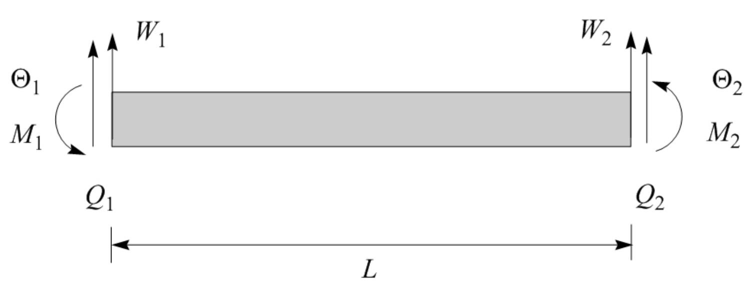


Figure 5.3: Sign convention for the Timoshenko beam element.

The free vibration of a uniform Timoshenko beam is represented by

$$GAK\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]-\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

$$EI\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+GAK\left[\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\right]-\rho I\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0 \tag{5.48}$$

where w and θ are the transverse displacement and the slope due to bending, respectively. E is the Young's modulus, G is the shear modulus, K is the numerical factor depending on the shape of the cross section, A is the cross-section area, I is the moment of inertia about the neutral axis. The internal bending moment and transverse shear force are given by:

$$Q(x)=GAK\left[\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\right] \tag{5.49}$$

$$M(x)=EI\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{5.50}$$

For a finite Timoshenko beam element of length L, the general solution can be then obtained in the form

$$W(x)=A_1e^{-ik_1x}+A_2e^{ik_1x}+A_3e^{-ik_2x}+A_4e^{ik_2x} \tag{5.51}$$

$$\Theta(x)=r_1A_1e^{-ik_1x}+r_1A_2e^{ik_1x}+r_2A_3e^{-ik_2x}+r_2A_4e^{ik_2x} \tag{5.52}$$

Where A_1, A_2, A_3 and A_4 are coefficients determined from the boundary conditions on the element and r_i are the amplitude ratios given by

$$r_i=\frac{ik_iGAK}{GAKk_i^2-\rho A\omega^2} \tag{5.53}$$

And k is the wavenumber, given in this case by

$$k_1 = -k_3 = \frac{k_F}{\sqrt{2}}\sqrt{\eta k_F^2 + \sqrt{\eta^2 k_F^4 + 4(1-\eta_1 k_G^2)}} \tag{5.54}$$

$$k_2 = -k_4 = \frac{k_F}{\sqrt{2}}\sqrt{\eta k_F^2 - \sqrt{\eta^2 k_F^4 + 4(1-\eta_1 k_G^2)}} \tag{5.55}$$

Where,

$$k_F = \sqrt{\omega}\left(\frac{\rho A}{EI}\right)^{1/4}, \quad k_G = \sqrt{\omega}\left(\frac{\rho A}{KGA}\right)^{1/4}, \ \eta_1 = \frac{\rho I}{\rho A}, \ \eta_2 = \frac{EI}{KGA} \text{ and } \eta = \eta_1 + \eta_2 \tag{5.56}$$

Now, defining a spectral element of length L and using the end displacement as boundary conditions, the following symmetric dynamic stiffness element matrix can be obtained Lee (2004).

$$S_T(\omega) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \tag{5.57}$$

Where,

$$k_{11} = k_{33} = z_1 EI\left(\frac{ik_F^4}{k_1 k_2}\right)\left[\left(e_1^2-1\right)\left(e_2^2+1\right)r_1 - \left(e_1^2+1\right)\left(e_2^2-1\right)r_2\right]\left(k_1 r_1 - k_2 r_2\right) \tag{5.58}$$

$$k_{22} = k_{44} = z_1 EI\left(k_1^2 - k_2^2\right)\left[\left(e_1^2+1\right)\left(e_2^2-1\right)r_1 - \left(e_1^2-1\right)\left(e_2^2+1\right)r_2\right] \tag{5.59}$$

$$k_{12} = -k_{34} = z_1 EI\left(\frac{ik_F^4}{k_1 k_2}\right)\left\{\left(e_1^2-1\right)\left(e_2^2-1\right)\left(k_1 r_2 + k_2 r_1\right) - \left[\left(e_1^2+1\right)\left(e_2^2+1\right) - 4e_1 e_2\right]\left(k_1 r_1 + k_2 r_2\right)\right\} \tag{5.60}$$

$$k_{13} = 2 z_1 EI\left(\frac{ik_F^4}{k_1 k_2}\right)\left[-\left(e_1^2-1\right)e_2 r_1 + \left(e_2^2-1\right)e_1 r_2\right]\left(k_1 r_1 - k_2 r_2\right) \tag{5.61}$$

$$k_{14} = -k_{23} = 2 z_1 EI\left(\frac{ik_F^4}{k_1 k_2}\right)\left[\left(e_1 - e_2\right)\left(1 - e_1 e_2\right)e_1 r_2\right]\left(k_1 r_1 - k_2 r_2\right) \tag{5.62}$$

$$k_{24} = 2 z_1 EI\left(k_1^2 - k_2^2\right)\left[-\left(e_1^2-1\right)e_1 r_1 + \left(e_1^2-1\right)e_1 r_2\right] \tag{5.63}$$

$$z_1 = \left\{\left(r_1^2 + r_2^2\right)\left(e_1^2-1\right)\left(e_2^2-1\right) - 2r_1 r_2\left[\left(e_1^2+1\right)\left(e_2^2+1\right) - 4e_1 e_2\right]\right\}^{-1}, \ e_1 = e^{-ik_1 L} \text{ and } e_2 = e^{-ik_2 L} \tag{5.64}$$

Results obtained with a MATLAB® implementation are shown in Figure 5.4 for a steel beam with the following properties: b = 5 mm, h = 5 mm and a slice length Ls = 0.5 mm. The figure shows in solid lines the theoretical spectral relations and in lines with circles and plus signs the wavenumbers extracted from the eigenvalues of the transfer matrix.

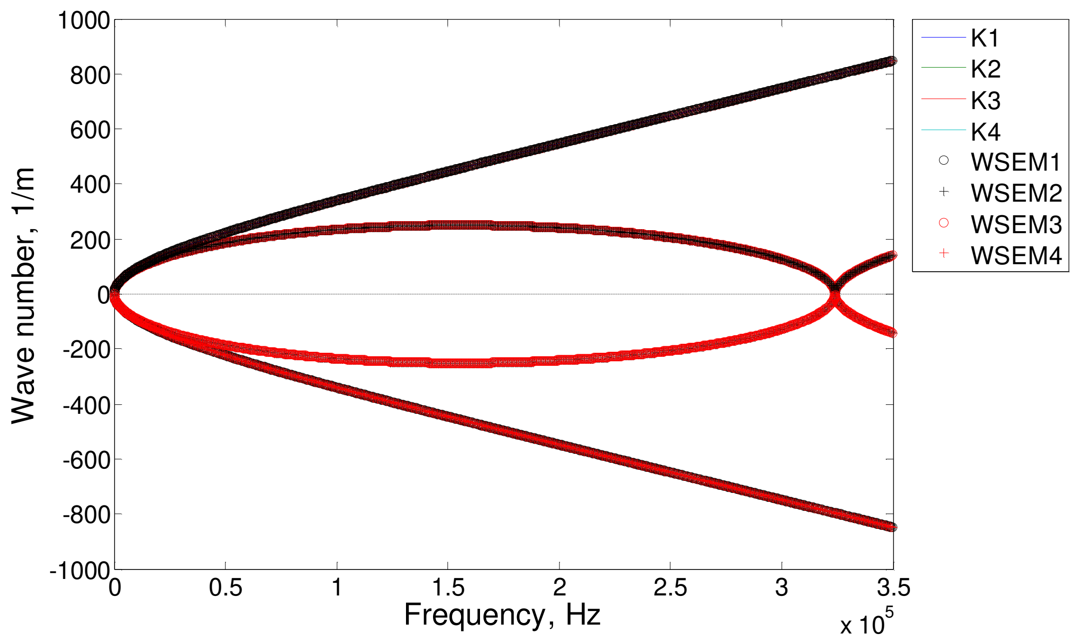


Figure 5.4 Spectrum relation for a Timoshenko beam; solid lines show the theoretical values and circles and plus signs the wavenumbers computed from the eigenvalues obtained from the spectral element dynamic matrix.

5.8.2 Mindlin Herrmann theory (two mode) - WSEM

A spectral element model of rod based on the Mindlin Herrmann theory is presented in Figure 5.5. It has two nodes with two degrees of freedom per node (longitudinal and rotation).

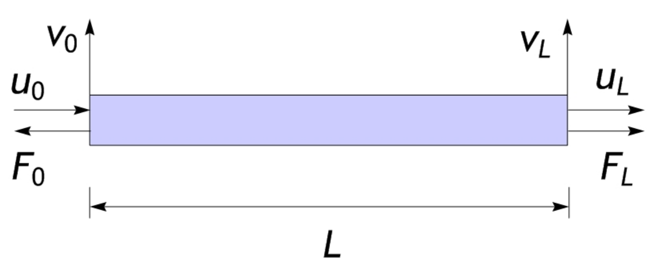


Figure 5.5: The spectral element models for the Mindlin Herrmann.

The Mindlin Herrmann theory can be developed taking into account independent shearing deformation due to transverse displacement. The displacement in Mindlin Herrmann theory of rod are assumed as follow, Doyle (1997):

$$u(x, y) = u_0(x) \tag{5.65}$$

$$v(x, y) = \psi_0(x) y \tag{5.66}$$

The differential equation for the Mindlin Herrmann theory, governing the rod vibration are:

$$\begin{gathered}
(2\mu + \lambda) A \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \lambda A \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - q \\
\mu I K_1 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - (2\mu + \lambda) A \psi - \lambda A \frac{\partial u_0}{\partial x} = \rho I K_2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2}
\end{gathered} \tag{5.67}$$

With the associated boundary conditions

$$Q_u = (2\mu + \lambda) A \frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda A \psi_0 \tag{5.68}$$

$$Q_\psi = \mu I K_1 \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) \tag{5.69}$$

Where,

$$\mu = \frac{E}{2(1+\upsilon)}, \ \lambda = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \tag{5.70}$$

and I is the geometrical moment of the rod cross section. Parameters K_1 and K_2 are calculate from the formulas:

$$K_1 = \frac{12}{\pi^2}, \; K_2 = K_1\left(\frac{1+\upsilon}{0.87+1.12\upsilon}\right)^2 \tag{5.71}$$

Following that, spectral analysis can be applied with a solution of the form,

$$u_0(x) = A_0 d_1 e^{-ik_1 x} + B_0 d_2 e^{-ik_2 x} - C_0 d_1 e^{-ik_1(L-x)} - D_0 d_2 e^{-ik_2(L-x)} \tag{5.72}$$

$$\psi_0(x) = A_0 e^{-ik_1 x} + B_0 e^{-ik_2 x} - C_0 e^{-ik_1(L-x)} - D_0 e^{-ik_2(L-x)} \tag{5.73}$$

Where d_i are the amplitude ratios given by

$$d_i = \frac{ik_i \lambda A}{-(2\mu+\lambda)Ak_i^2 + \rho A\omega^2} \tag{5.74}$$

And k is the wavenumber, given in this case by

$$k_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2} \text{ and } k_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2} \tag{5.75}$$

where,

$$a_2 = \mu AIK_1(2\mu+\lambda) \tag{5.76}$$

$$a_1 = \left[4\mu(\mu+\lambda)A^2 - \rho IK_2\omega^2(2\mu+\lambda)A - \rho A\omega^2\mu IK_1\right] \tag{5.77}$$

$$a_0 = -\rho A\omega^2\left[(2\mu+\lambda)A - \rho IK_2\omega^2\right] \tag{5.78}$$

Now, defining a spectral element of length L and using the end displacement as boundary conditions, the following symmetric dynamic stiffness element matrix can be obtained Krawczuk (2006).

$$[K_M] = [\Phi_M][\Phi_M]^{-1} \tag{5.79}$$

Where,

$$[\Phi_M]=\begin{bmatrix} -N_1+M_2 & -N_2+M_2 & p_1(M_2-N_1) & p_2(M_2-N_2) \\ -ik_1M_3 & -ik_2M_3 & ik_1M_3p_1 & ik_2M_3p_2 \\ p_1(M_2-N_1) & p_2(M_2-N_2) & -N_1+M_2 & -N_2+M_2 \\ -ik_1M_3p_1 & -ik_2M_3p_2 & ik_1M_3 & ik_2M_3 \end{bmatrix} \tag{5.80}$$

$M_1=(2\mu+\lambda)A$, $M_2=\lambda A$, $M_3=\mu IK_1$, $N_1=ik_1M_1d_1$, $N_2=ik_2M_1d_2$, $p_1=e^{-ik_1L}$ and $p_2=e^{-ik_2L}$

Figure 5.6 shows Mindlin Herrmann spectral relations for a steel rod with the following properties: b = 5 *mm*, h = 5 *mm* and a slice length Ls = 0.5 *mm*. The figure shows in solid lines the theoretical spectral relations and in lines with circles and plus signs the wavenumbers extracted from the eigenvalues of the transfer matrix.

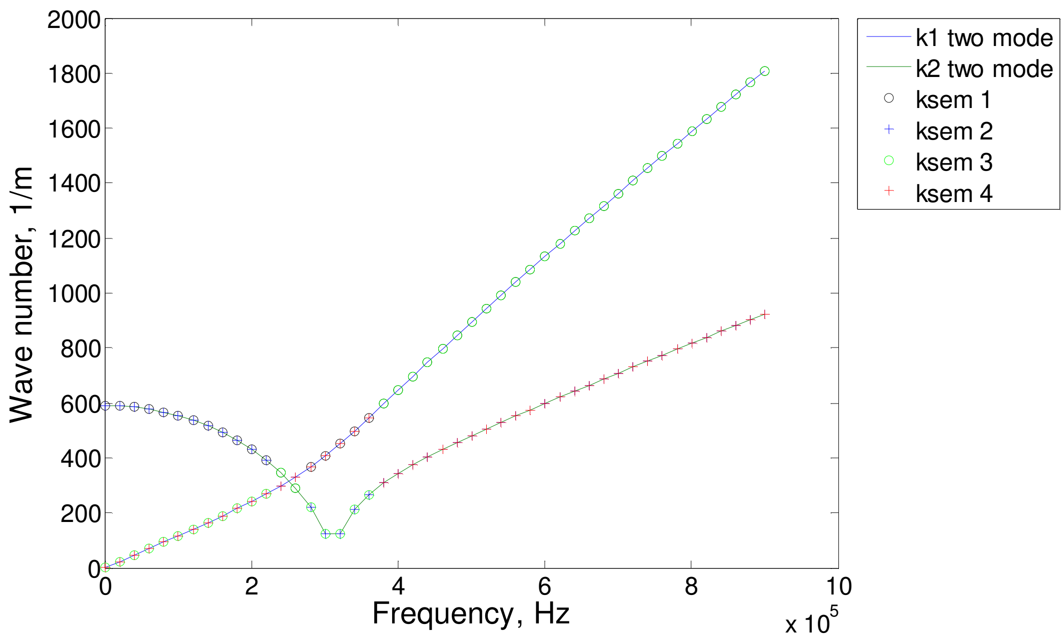


Figure 5.6 Absolute values of the wavenumber obtained from two mode theory and eigenvalues of the transfer matrix.

5.8.3 Curved beam - WSEM

Spectral element matrix and wavenumber for the curved beam problem was obtained in the chapter 4. Now will show in Figure 5.7 the spectrum relation (wavenumber versus frequency) for a curved beam with the following properties: b = 10 mm, h = 7 mm, R = 3 mm, $\theta = 5°$ and a slice length Ls = 0.5 mm. Solid lines show the theoretical values and circles signs the wavenumbers computed from the eigenvalues obtained from transfer matrix.

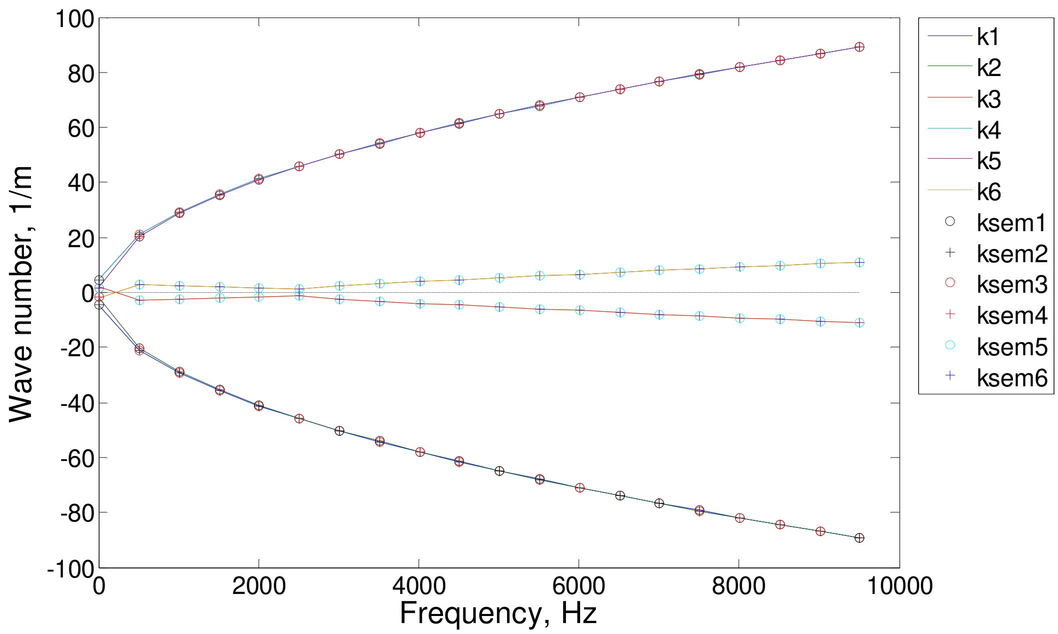


Figure 5.7: Spectrum relation for curved beam.

5.8.4 Levy plate - WSEM

The methodology is now applied to a homogeneous Levy plate example (simply supported along two parallel sides), Szilards (1974). The Kirchhoff spectral element matrix is used and the results obtained with a MATLAB® implementation are shown in Figure 5.9 for a steel Levy plate with the following properties: thickness = 1.8 mm, width = 180 mm and a slice length of 2 mm.

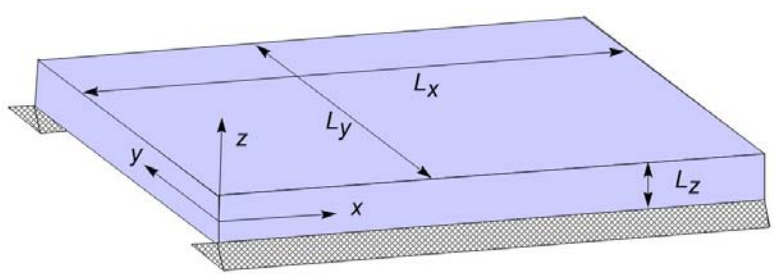


Figure 5.8: A Levy type rectangular plate element simply supported.

The Figure 5.9 shows in lines with circles and plus signs the flexural wavenumbers extracted from the eigenvalues of the transfer matrix.

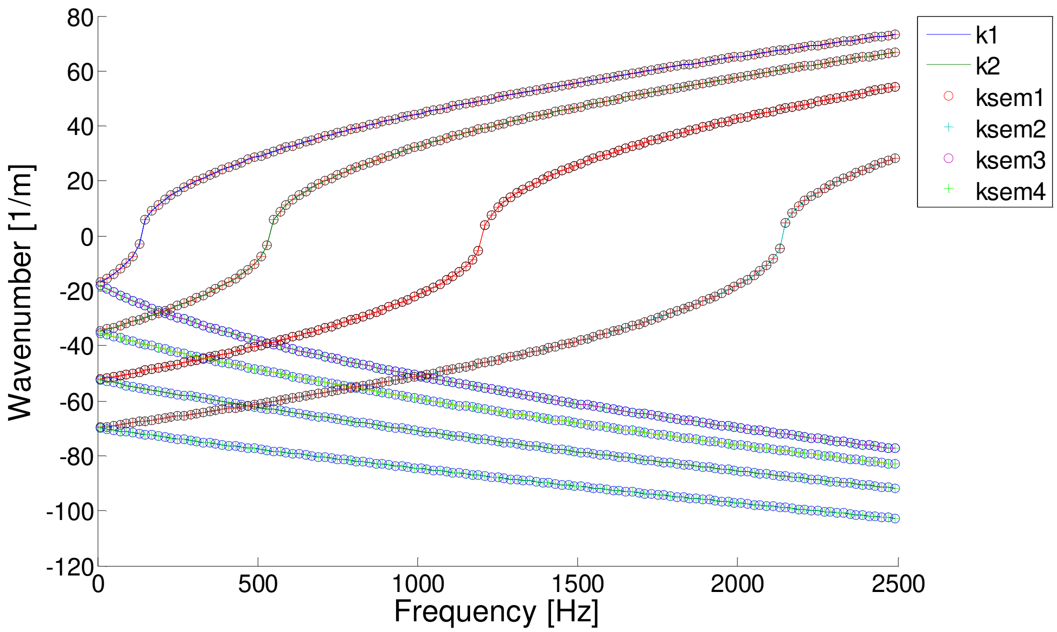


Figure 5.9: Spectrum relation for a Levy plate. Solid lines show the theoretical values and circles and plus signs show the wavenumbers computed from the eigenvalues of the transfer matrix obtained from the SEM dynamic matrix.

5.8.5 Beam slice - WFEM

Now a slice of the beam is modeled with solid finite elements (brick) Figure 5.10 with the following properties: thickness = 5 *mm*, width = 5 *mm* and a slice length of 0.5 *mm*. and the results obtained are shown in Figure 5.11. Observe the validity of Bernoulli-Euler theory for beams for very low frequency ranges. The Timoshenko beam theory is valid for higher frequencies and the waveguide finite element approach is validated. Nevertheless, the WFEM presented frequency limits due to alias problems. The limit of the analyzed wavelength is determined by $\lambda \geq 2D_{slice}$, where D_{slice} is the maximum section dimension of the beam slice. In this example, the limit for flexural wavenumbers is at $k_{\lim it} = \pi / D_{slice} = 628m^{-1}$. This limit is indicated by a horizontal dashed line in Figure 5.11.

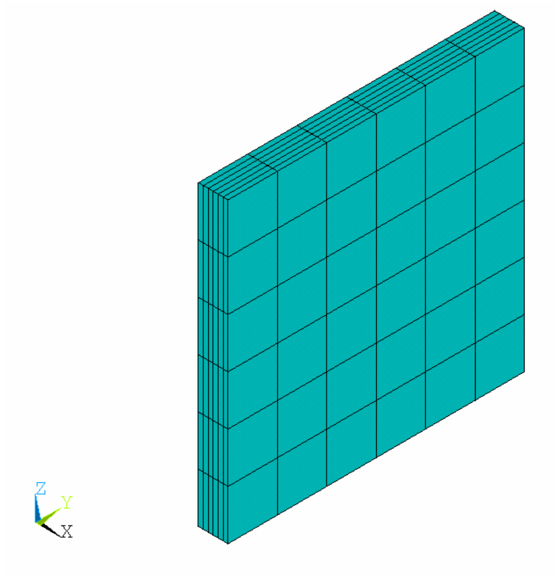


Figure 5.10: FE mesh of the beam slice.

Figure 5.11 solid lines show the theoretical values and circles and plus signs the wavenumbers computed from the eigenvalues obtained from Ansys stiffness and mass matrices.

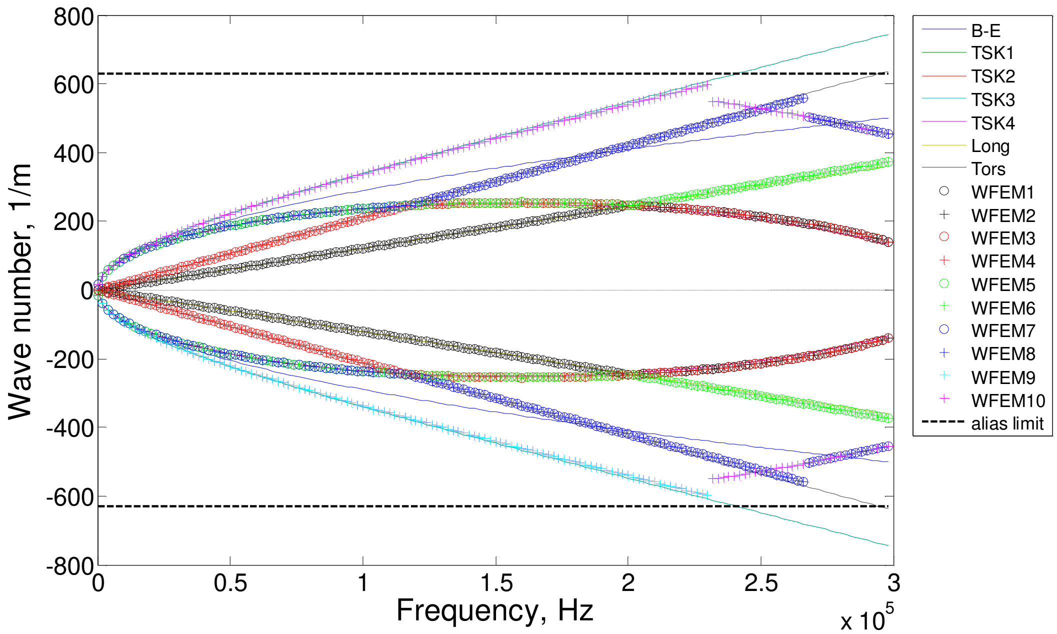


Figure 5.11: Spectrum relation for a Timoshenko beam.

.

5.8.6 Plate slice - WFEM

A FEM model of a slice of the Levy plate was also modeled. The plate is assumed to be steel with the following properties: thickness = 1.8 *mm*, width = 180 *mm* and a slice length of 2 *mm*. A general procedure for extracting paired DOFs for left and right surfaces of FEM slices of arbitrary sections in currently being implemented in commercial FEM software. The Figure 5.12 shows in lines with circles and plus signs the flexural wavenumbers extracted from the eigenvalues of the transfer matrix.

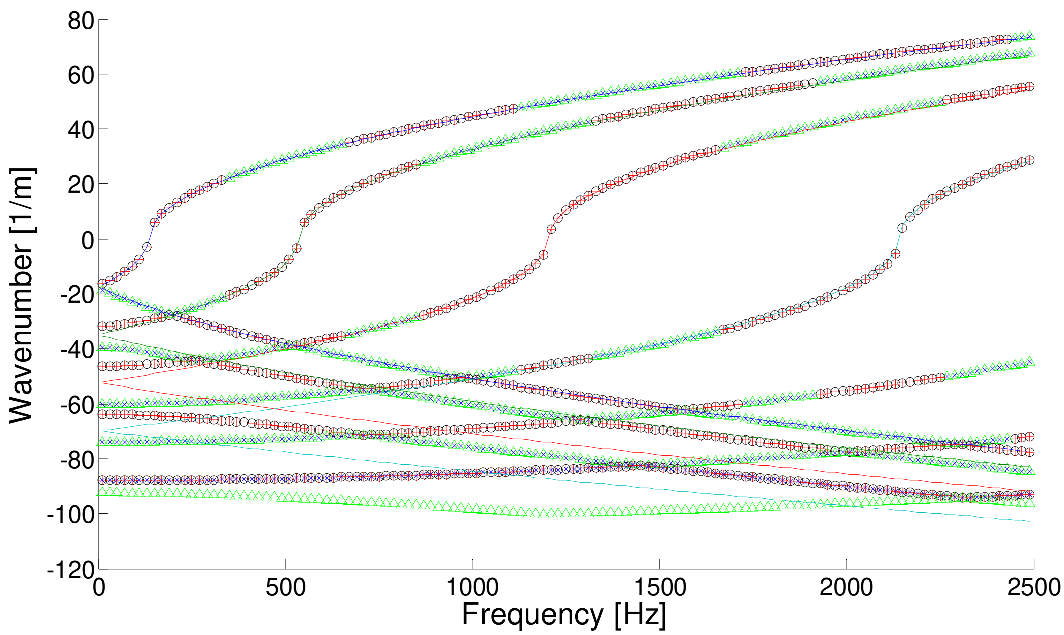


Figure 5.12: Spectrum relation for Levy plate. Solid lines show the theoretical values and circles and plus signs the wavenumbers computed from the eigenvalues obtained from ansys stiffness and mass matrices.

5.9 Conclusion

In this chapter the basic concepts of the Waveguide Finite Element Method were reviewed and results for simple Timoshenko beams, Mindlin Herrmann theory or two mode, curved beam and Kirchhoff Levy plates were presented to illustrate the technique. Exact spectral elements of the Timoshenko beam, Mindlin Herrmann theory or two mode, curved beam and Kirchhoff plate were first used to validate the implementation and then some preliminary WFEM results for the beam and plate were presented and discussed. In the FEM implementation, the high wavenumber limit determined by the length of the slice Mace (2005) of π/L was clearly observed. In the case of the FEM slice the other dimensions of the cross section of the beam also determine high wavenumber limits for the eigenvalues which an alias phenomenon can be observed. Once the waveguide modes and spectrum relations (wavenumber versus frequency) have been computed, wave propagation solutions for the forced waveguide response can be predicted. These methods can be useful for the simulation of wave propagation damage detection techniques in structures such as pipes, frames, and reinforced plates and shells.

Chapter 6

Building Spectral Elements from Finite Element Models of Waveguide Slices

In this chapter it is shown that from a slice of the waveguide modeled with solid finite elements it is possible to develop spectral finite elements to be used in long homogeneous waveguides without the need of mesh refinement. Such elements can be used to model waveguides with constant cross section and long spans. The dynamic stiffness matrix of a simple rod element and Bernoulli Euler beam obtained using the standard spectral formulation and obtained via the FE model of a slice are shown to be similar, thus validating the proposed method. This approach may be used to generate spectral elements of waveguides of arbitrary cross section.

6.1 Slice beam example

Figure 6.1 shows the slice of the beam which was modelled with solid finite elements Arruda and Ahmida (2007). The results for the eigenvalues obtained with a MATLAB® implementation of the previous formulation are shown in Figure 6.2. For a steel beam with the following properties: h = 9 *mm*, b = 6 *mm* and a slice L = 1 *mm* thick results are compared with the theoretical Euler-Bernoulli and Timoshenko spectral relations Doyle (1997) and Lee (2004).

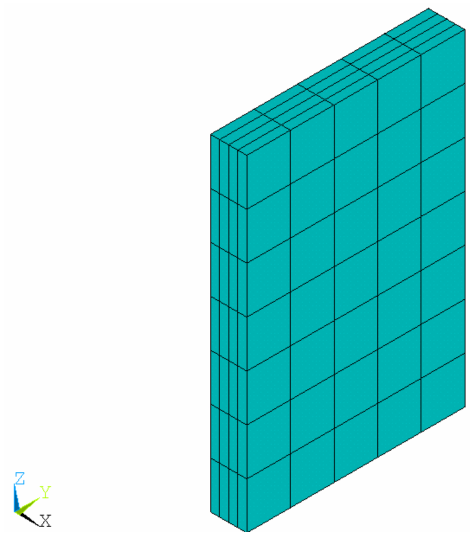


Figure 6.1: FE mesh of the beam slice.

Figure 6.2 solid lines show the theoretical values and circles and plus signs the wavenumbers computed from the eigenvalues obtained from the spectral element dynamic matrix.

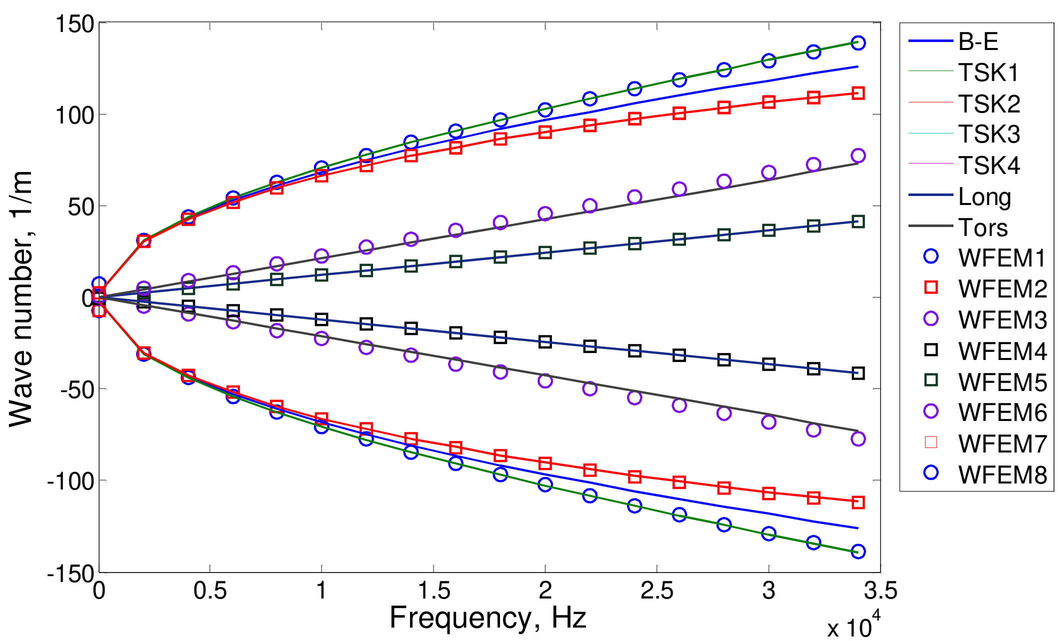


Figure 6.2: Spectrum relation for a Timoshenko beam.

6.2 Numerical spectral element matrix of a rod

Figures 6.3 and 6.4 show the longitudinal wave modes of the right (r) and left (l) sides obtained from the slice of the rod was modeled with solid finite elements using the commercial software ANSYS®.

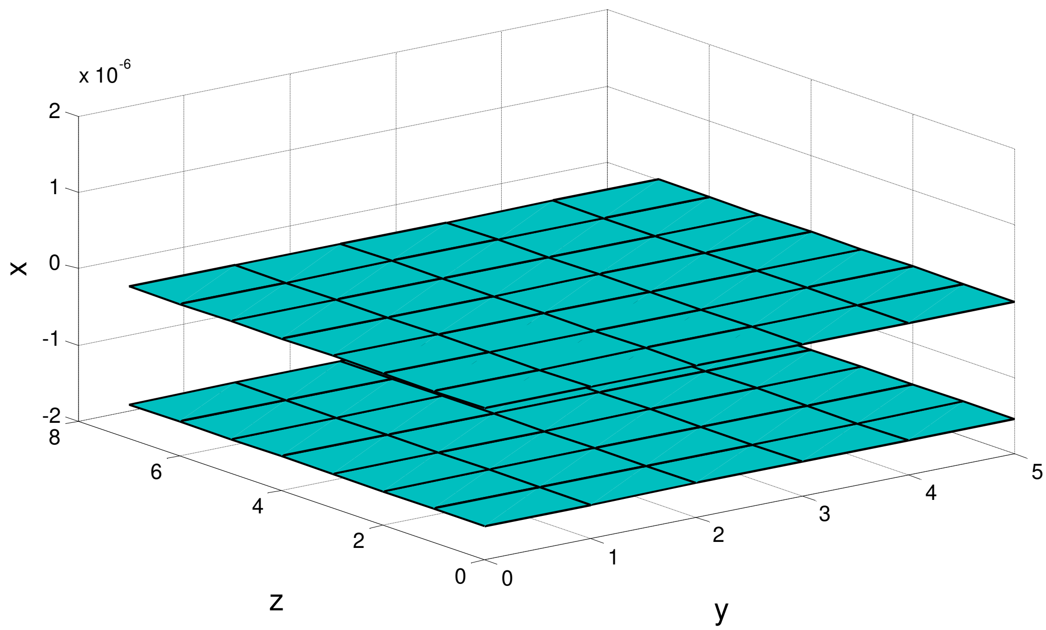


Figure 6.3: Longitudinal wave mode of the beam slice.

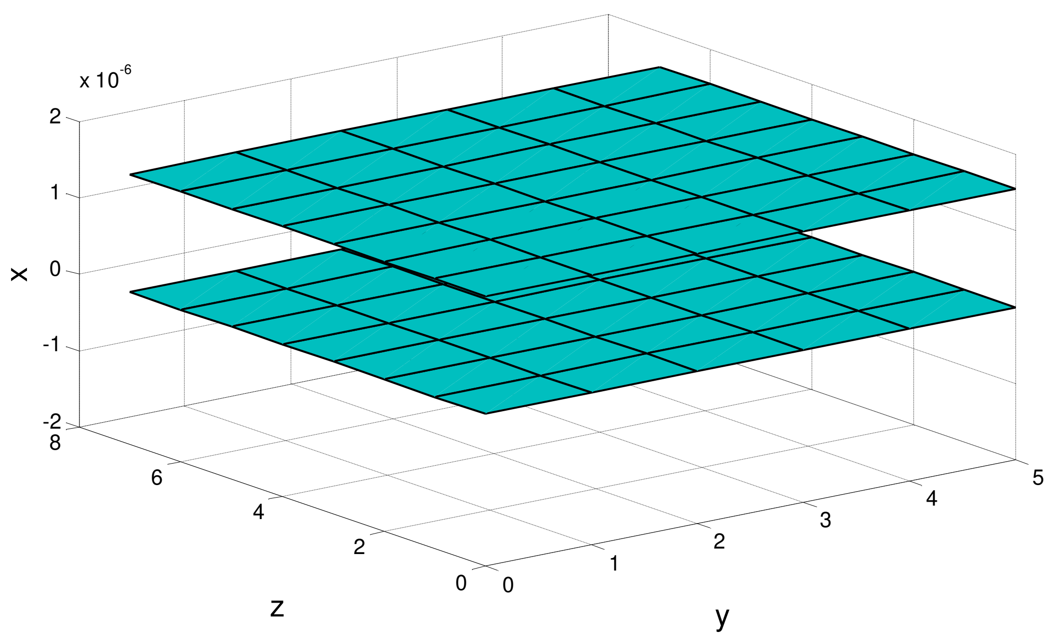


Figure 6.4: Longitudinal wave mode of the beam slice.

From the wavenumbers and propagation modes of the longitudinal modes obtained for the slice of the rod modelled with solid finite elements it is possible to obtain a spectral element matrix for the rod element. The hypotheses and formulation to obtain the spectral element dynamic stiffness matrix are presented in the next section.

6.3 Elementary rod theory

The elementary theory considers the rod to be long and slender, and assumes it supports only 1-D axial stress. It further assumes that lateral contraction (or the Poisson's ratio effect) can be neglected.

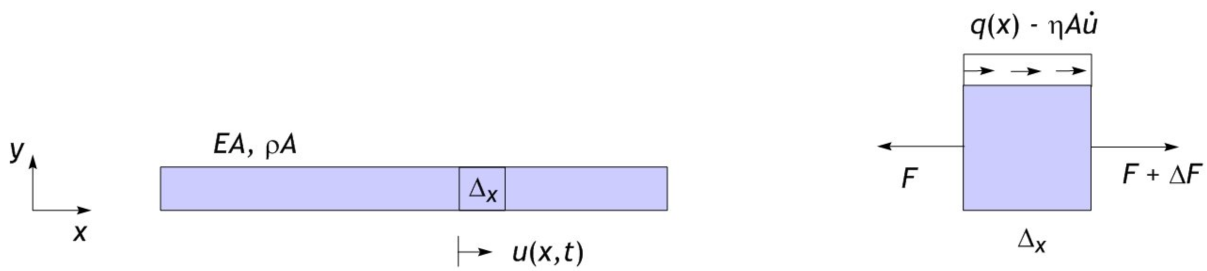


Figure 6.5: Segment of rod with loads.

Following the assumption of only one displacement $u(x)$, the axial strain is given by

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{6.1}$$

Let the material behavior be linear elastic, then the 1-D form of Hooke's law gives the stress as

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E\frac{\partial u}{\partial x} \tag{6.2}$$

This stress gives rise to resultant axial force of

$$F = \int \sigma_{xx} dA = EA \frac{\partial u}{\partial x} \tag{6.3}$$

where, E is the Young's modulus and A the cross-section area.

6.4 Formulation to obtain the numerical spectral element matrix of a rod

The wavenumbers and respective longitudinal wave modes obtained for the slice can be written in the following form,

$$u_x = \sum_r A_r \Phi_{xr} e^{-ik_r x} \tag{6.4}$$

where k_r and Φ_{xr} are wavenumber and propagation mode for the longitudinal wave mode, respectively, obtained for the slice of the beam modeled with solid finite elements and A_r is coefficient determined from the boundary conditions on the element. Then the axial strain is given by

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -ik_r A_r \Phi_{xr} e^{-ik_r x} \tag{6.5}$$

Equation (6.3) can be written as

$$F_x = \sigma_{xx} S_i \quad \Rightarrow \quad F_x = E\varepsilon_{xx}\Delta_s \tag{6.6}$$

where Δ_S is area of each element surface of the beam slice. The wavenumbers and respective longitudinal propagation modes can be written in the following form

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{01} & \Phi_{02} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-ik_1 x} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2 x} \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} \Phi_{01} & \Phi_{02} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-ik_1 x} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2 x} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \tag{6.7}$$

where, k_1, k_2 are wavenumbers, and Φ_{01} and Φ_{02} are the longitudinal wave propagation modes of the right (*r*) and left (*l*) sides, respectively. For $x = 0$ and $x = L$, Equation (6.7) can be written as

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{01} & \Phi_{02} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} \Phi_{01} & \Phi_{02} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-ik_1 L} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2 L} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \tag{6.8}$$

Where,

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_L \end{Bmatrix}, \qquad \{A\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}, \qquad [\Psi] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_L & \Phi_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} \Phi_L & \Phi_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-ik_1 L} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2 L} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Substituting wavenumber and longitudinal wave mode into Equation (6.6) gives,

$$\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_L \end{Bmatrix} = E\Delta_s \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{01} & \Phi_{02} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -ik_1 & 0 \\ 0 & -ik_2 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} \Phi_{01} & \Phi_{02} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -ik_1 e^{-ik_1 L} & 0 \\ 0 & -ik_2 e^{-ik_2 L} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \tag{6.9}$$

where,

$$\{F\}=\begin{Bmatrix}F_0\\F_L\end{Bmatrix} \text{ and } \left[\overline{\Psi}\right]=E\Delta_s\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_L & \Phi_R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-ik_L & 0\\0 & -ik_R\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\Phi_L & \Phi_R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-ik_Le^{-ik_1L} & 0\\0 & -ik_Re^{-ik_2L}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

Assuming a displacement field of the rod such that,

$$\begin{Bmatrix}u_0\\u_L\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\overline{u}_0\\\overline{u}_L\end{Bmatrix} \tag{6.10}$$

Equation (6.10) can be written as

$$\begin{Bmatrix}u_0\\u_L\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\\vdots & \vdots\\1 & 0\\0 & 1\\\vdots & \vdots\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{u}_0\\\overline{u}_L\end{Bmatrix} \tag{6.11}$$

where $\overline{u}_0$ and $\overline{u}_L$ are the displacements of the right and left surfaces of the slice and

$$[P]=\begin{bmatrix}1 & 0\\\vdots & \vdots\\1 & 0\\0 & 1\\\vdots & \vdots\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Equations (6.8) and (6.11) can be written as

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_L \end{Bmatrix} = [P] \begin{Bmatrix} \overline{u}_0 \\ \overline{u}_L \end{Bmatrix} \tag{6.12}$$

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_L \end{Bmatrix} = [\Psi] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \tag{6.13}$$

Substituting Equation (6.12) into Equation (6.13) gives

$$[P] \begin{Bmatrix} \overline{u}_0 \\ \overline{u}_L \end{Bmatrix} = [\Psi] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \tag{6.14}$$

Equation (6.9) can be written as

$$\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_L \end{Bmatrix} = [\overline{\Psi}] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \tag{6.15}$$

The average forces on the two surfaces can be obtained as

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_0 \\ \overline{F}_L \end{Bmatrix} = [P]^T \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_L \end{Bmatrix} \tag{6.16}$$

Substituting Equation (6.15) into Equation (6.16):

$$\{\overline{F}\} = [P]^T [\overline{\Psi}] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \tag{6.17}$$

Multiplying Equation (6.14) by $[P]^T$ gives:

$$[P]^T [P] \begin{Bmatrix} \overline{u}_0 \\ \overline{u}_L \end{Bmatrix} = [P]^T [\Psi] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \tag{6.18}$$

Multiplying Equation (6.18) by $\left([P]^T[\Psi]\right)^{-1}$ gives:

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \left([P]^T[\Psi]\right)^{-1}[P]^T[P]\begin{Bmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u}_L \end{Bmatrix} \tag{6.19}$$

Substituting Equation (6.19) into Equation (6.15) obtain

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_0 \\ \bar{F}_L \end{Bmatrix} = \left([P]^T[\bar{\Psi}]\right)\left([P]^T[\Psi]\right)^{-1}[P]^T[P]\begin{Bmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u}_L \end{Bmatrix} \tag{6.20}$$

Equation (6.20) can be written as

$$\{\bar{F}\} = [K_{rod}(\omega)]\{\bar{u}\} \tag{6.21}$$

where $[K_{rod}(\omega)]$ is spectral dynamic stiffness element matrix,

$$[K_{rod}(\omega)] = \left([P]^T[\bar{\Psi}]\right)\left([P]^T[\Psi]\right)^{-1}[P]^T[P] \tag{6.22}$$

6.5 Numerical results of a rod

Figures 6.6 – 6.9 show results for matrix elements k_{11}, k_{12}, k_{21} and k_{22} from the numerical spectral element matrix and the theoretical spectral matrix Doyle (1997) and Lee (2004). The *x* axis represents frequency in *Hz* and the *y* axis represents k_{11}, k_{12}, k_{21} and k_{22} values obtained from numerical and theoretical matrices in *N/m*. The figures show in solid lines the theoretical values and in circles the numerical values computed from the numerical spectral element matrix of the rod.

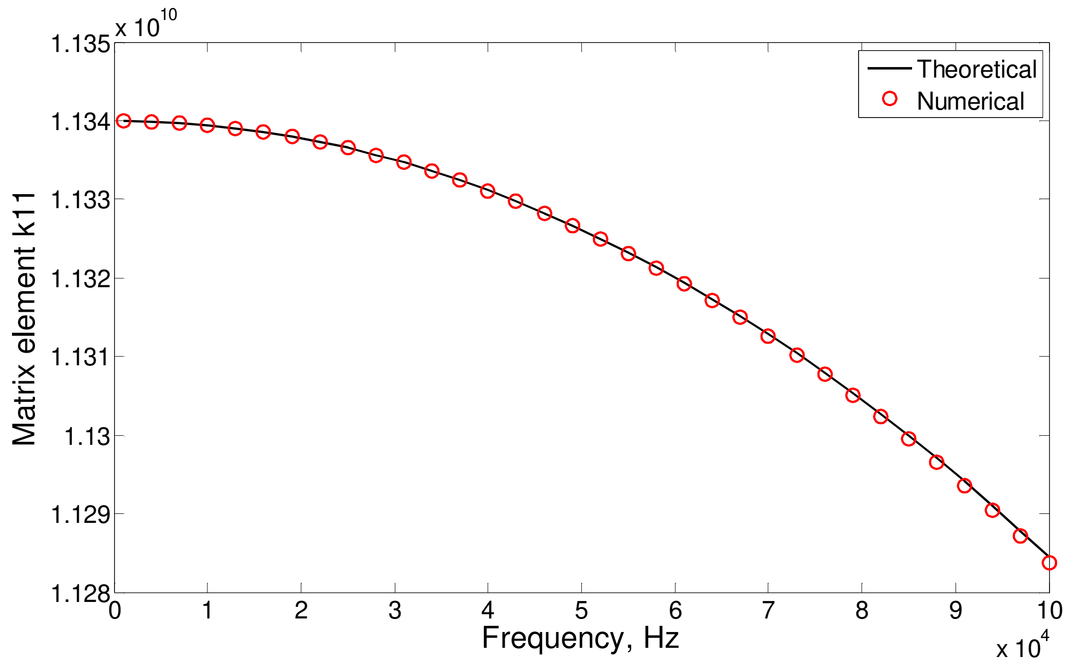


Figure 6.6: Elements k_{11} from the numerical and theoretical spectral matrix.

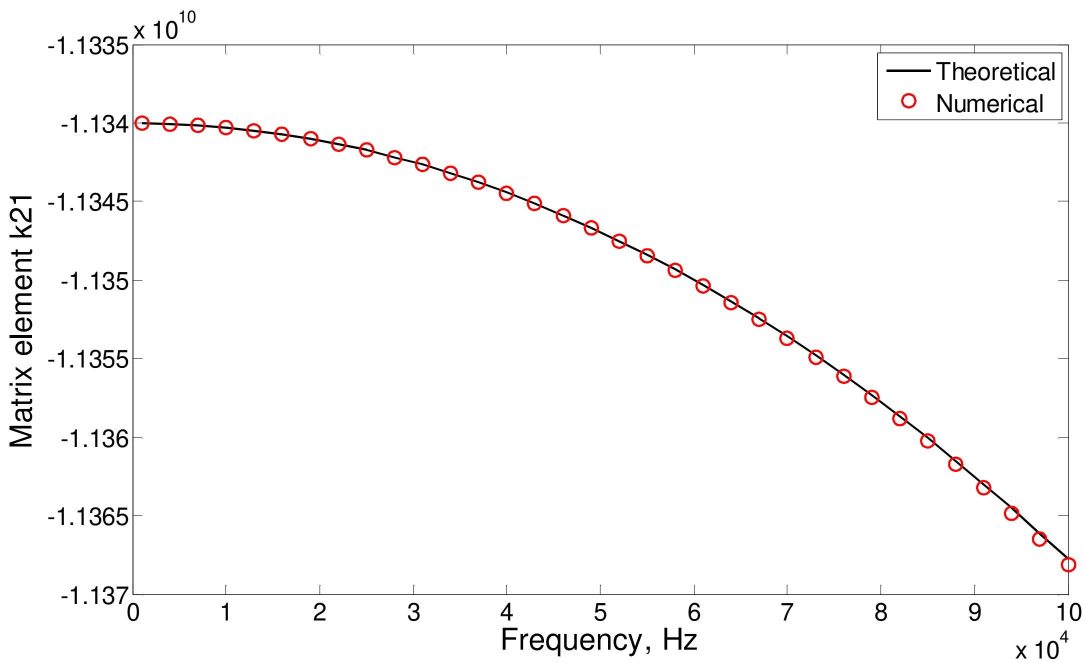


Figure 6.7: Elements k_{21} from the numerical and theoretical spectral matrix.

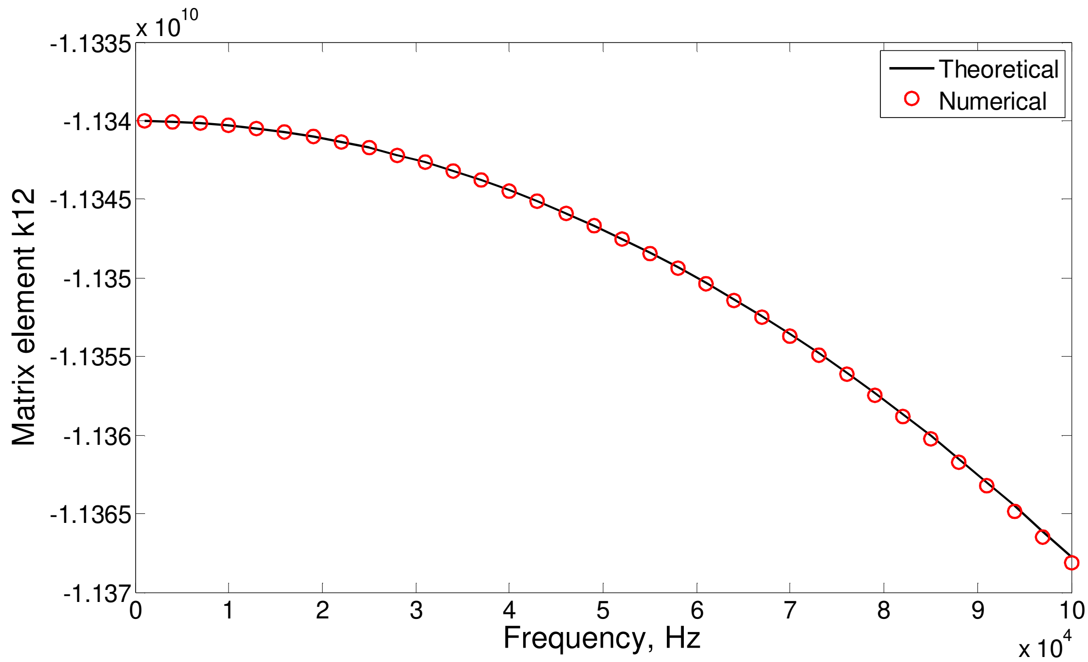


Figure 6.8: Elements k_{12} from the numerical and theoretical spectral matrix.

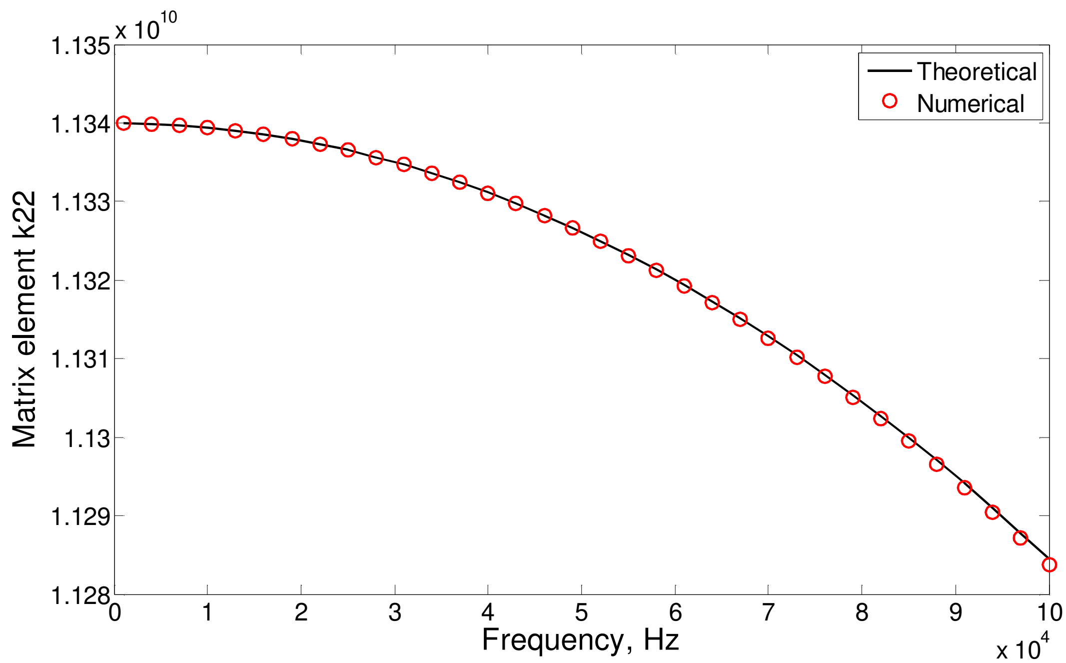


Figure 6.9: Elements k_{22} from the numerical and theoretical spectral matrix.

In this example we will show that it is possible, through the slice model, to build new spectral elements for rod with different lengths and cross sections. Figure 6.10 shows the new element of rod with properties h = 90 *mm*, b = 60 *mm* and L = 100 *mm* obtained from the FE slice. It is fixed at one end and free at the other. At the free end it has a force F.

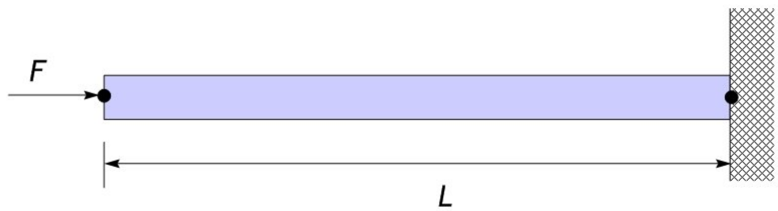


Figure 6.10: Cantilever uniform rod with axial force.

Figures 6.11 and 6.12 show results for the axial displacement and the difference between numerical and analytical matrix values for different frequencies.

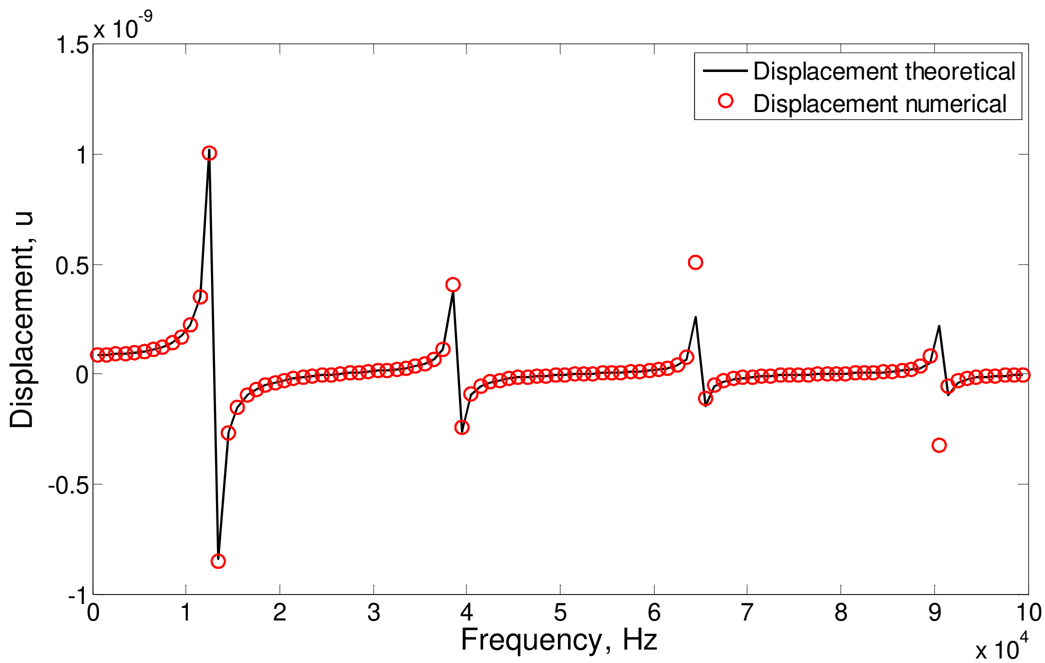


Figure 6.11: Axial displacement for a cantilever uniform rod with axial force.

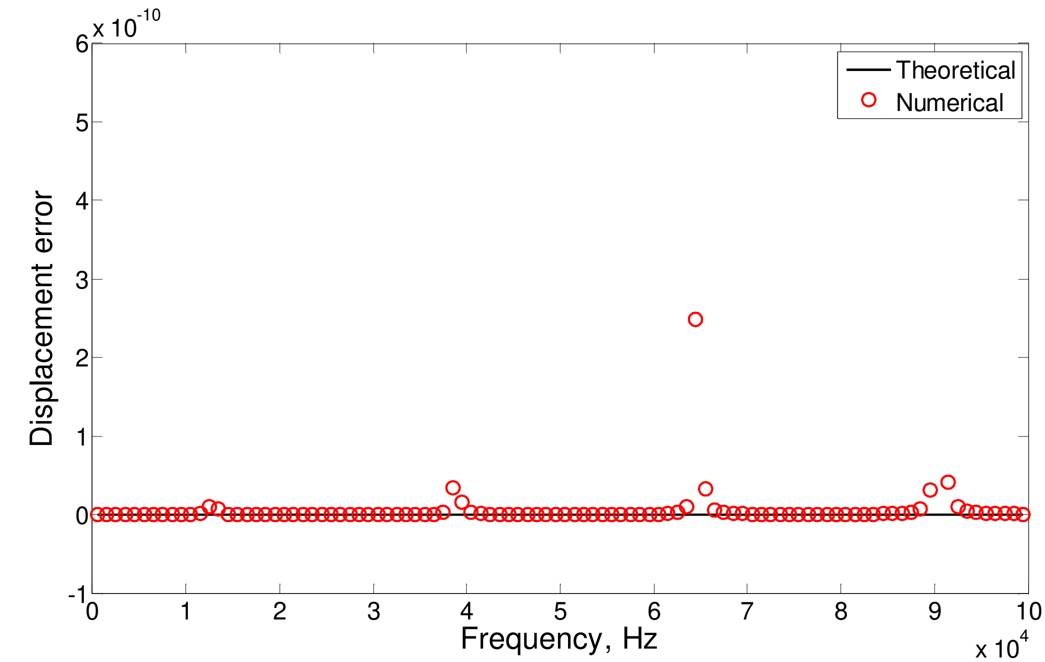


Figure 6.12: Difference between analytical and numerical displacement values for a cantilever uniform rod with axial force.

Results in Figures 6.13 and 6.14 show the behavior of the same plots when the analytical wavenumber is used in Equations (6.8) and (6.9) instead of the numerical wavenumber obtained from the eigenvalue problem in Equation (5.39).

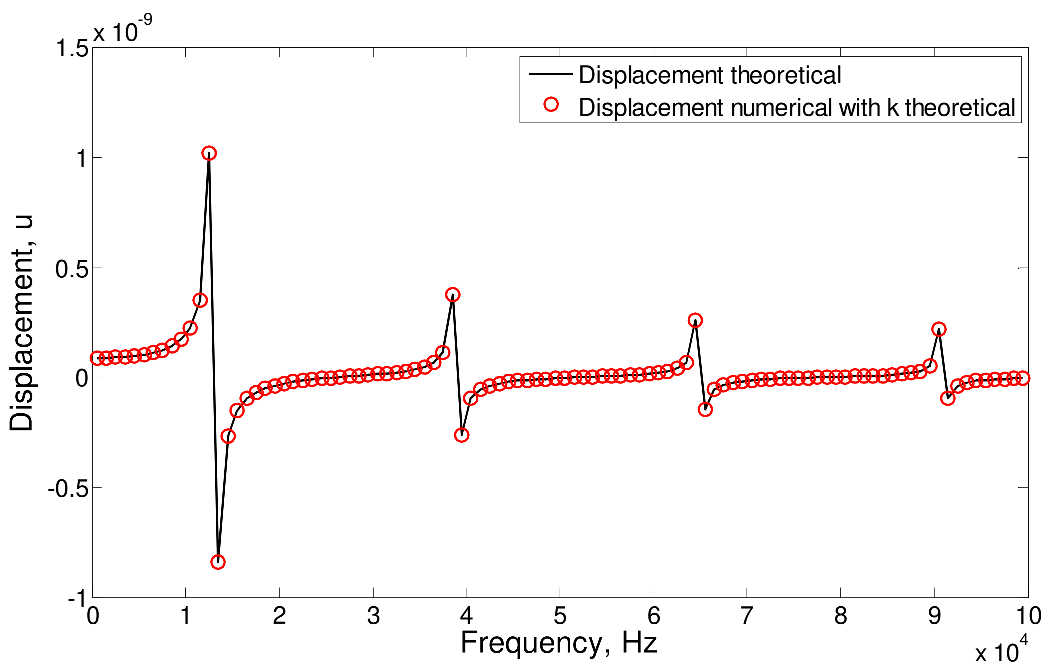


Figure 6.13: Axial displacement using the analytical wavenumbers for a cantilever uniform rod with axial force.

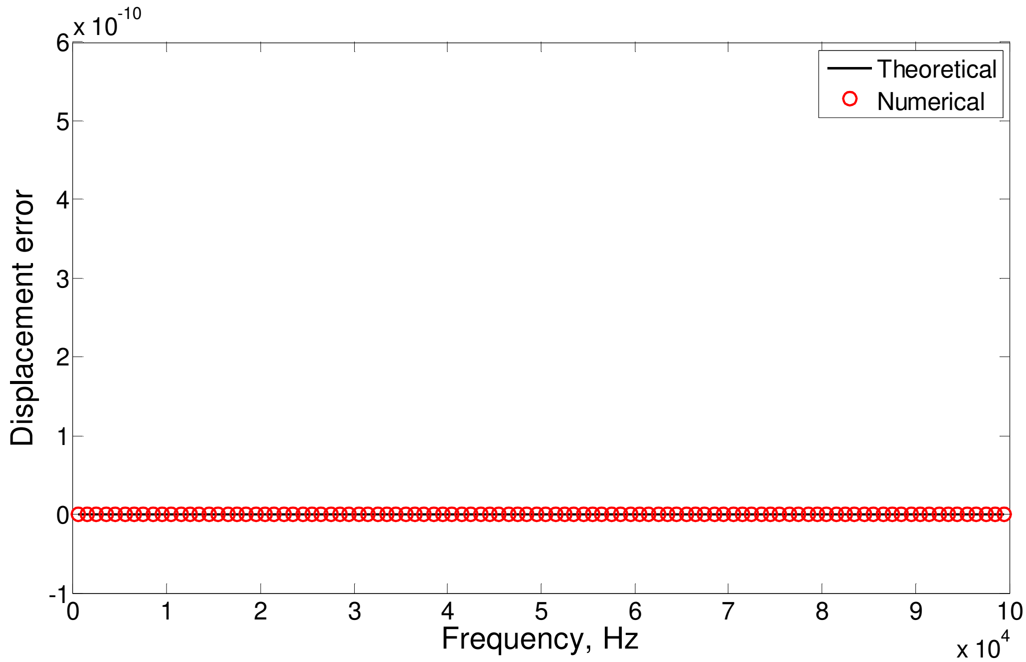


Figure 6.14: Difference between analytical and numerical displacement values using the analytical wavenumbers for a cantilever uniform rod with axial force.

Next, the assembling of two spectral elements built up from a FE slice of the bar is presented. Figure 6.15 shows the two rod elements with the same cross section connected, rod (1) with properties h = 90 mm, b = 60mm and L = 100 mm and rod (2) with properties h = 90 mm, b = 60 mm and L = 100 mm, both obtained from the FE slice. One end is fixed and the other is free. At the free end a constant axial force F.

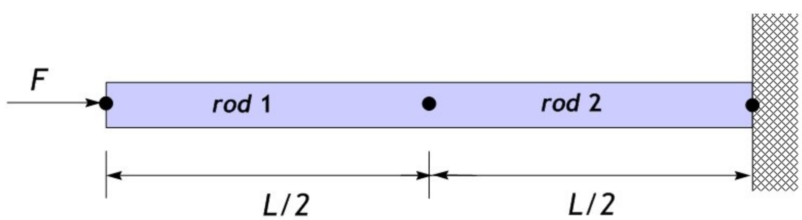


Figure 6.15: Two elements cantilever rod with axial force.

Figures 6.66 - 6.19 show results for the axial displacement and the difference between numerical and analytical matrix values for different frequencies.

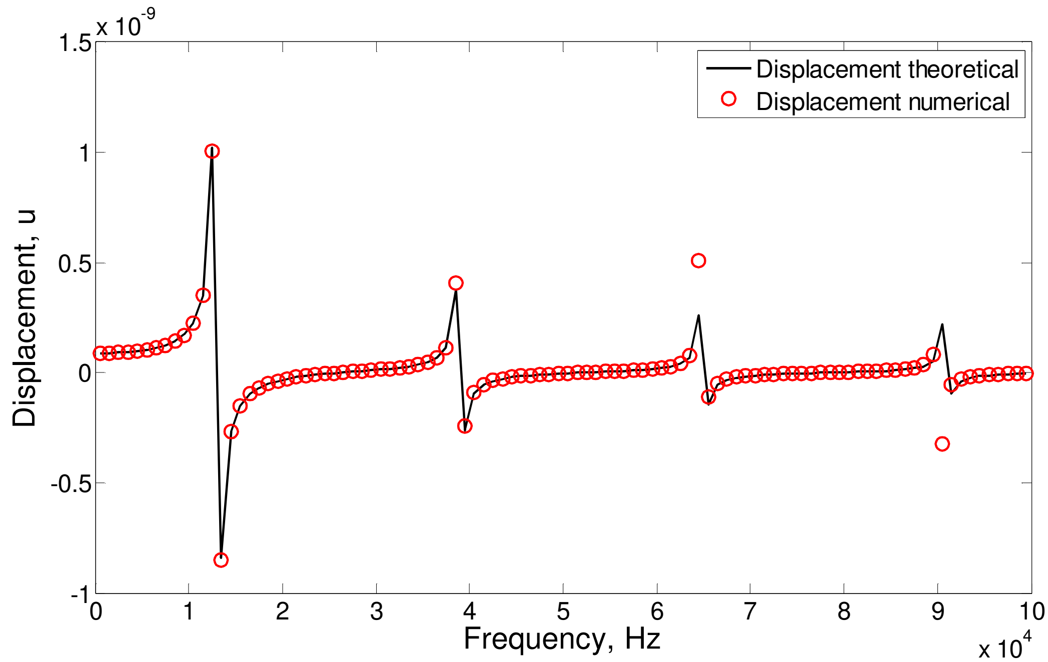


Figure 6.16: Axial displacement for two elements cantilever rod with axial force.

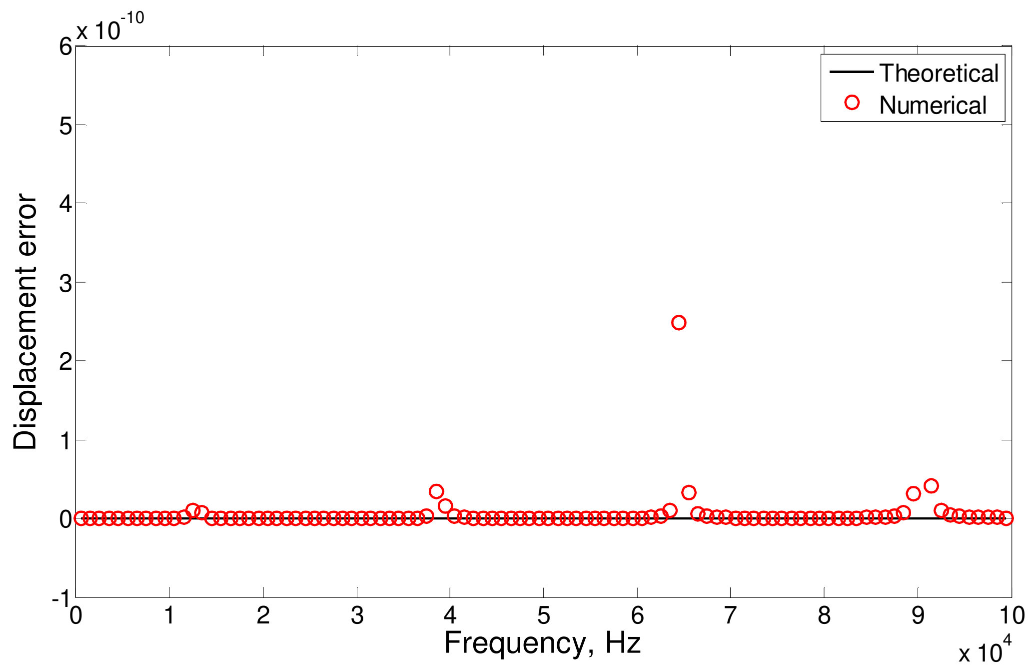


Figure 6.17: Difference between analytical and numerical displacement values for two elements cantilever rod with axial force.

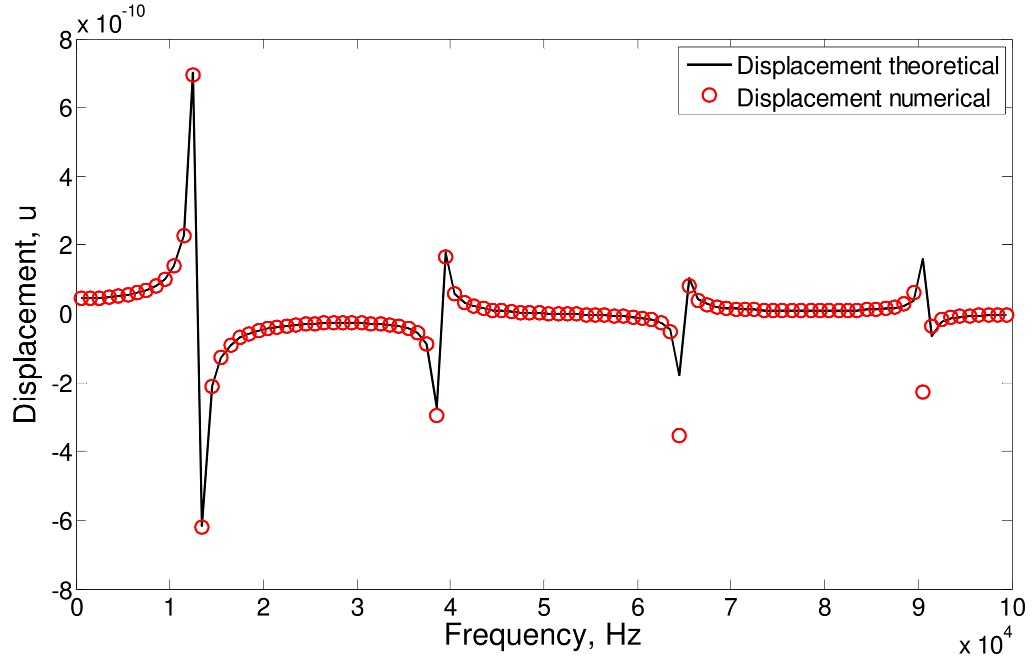


Figure 6.18: Axial displacement for two elements cantilever rod with axial force.

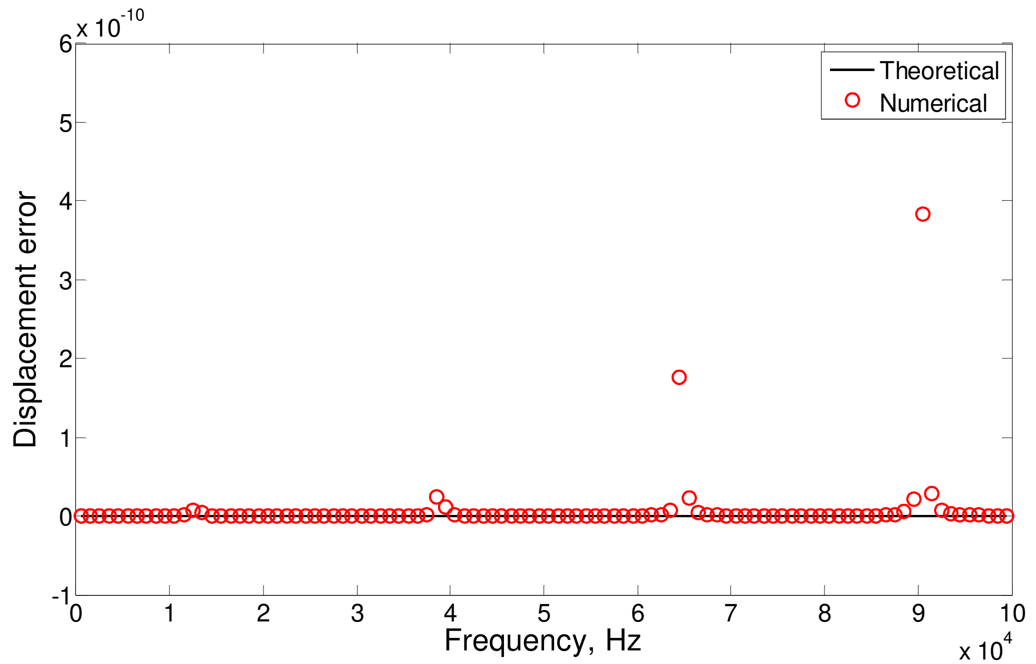


Figure 6.19: Difference between analytical and numerical displacement values for two elements cantilever rod with axial force.

Results in Figures 6.20 - 6.23 show the behavior of the same plots when the analytical wavenumber is used in Equations (6.8) and (6.9) instead of the numerical wavenumber obtained from the eigenvalue problem in Equation (5.39).

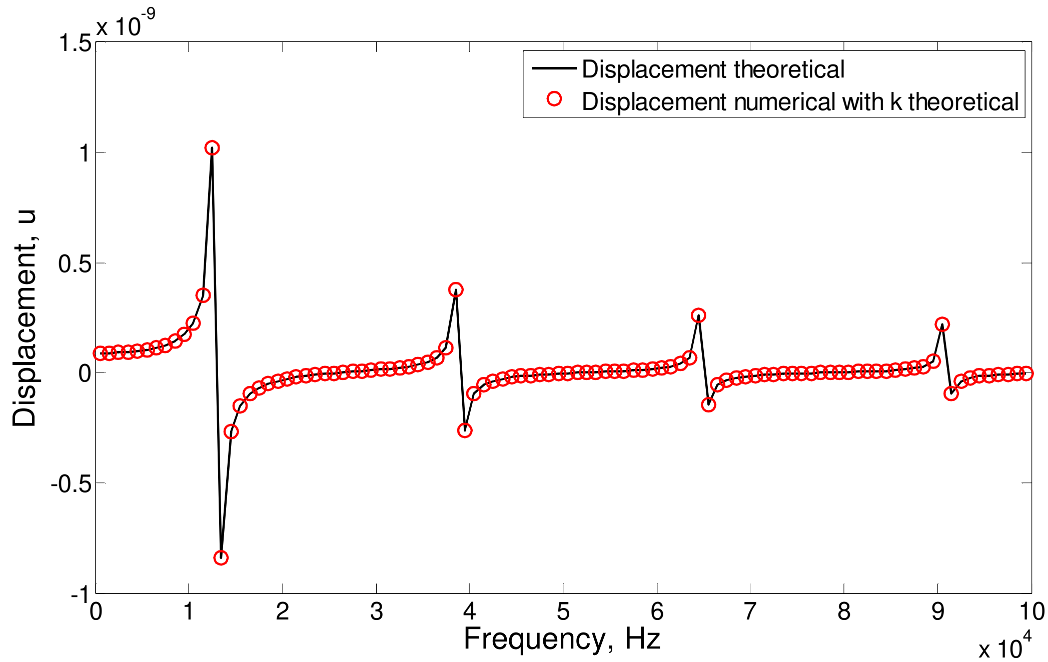


Figure 6.20: Axial displacement using the analytical wavenumbers for two elements cantilever rod with axial force.

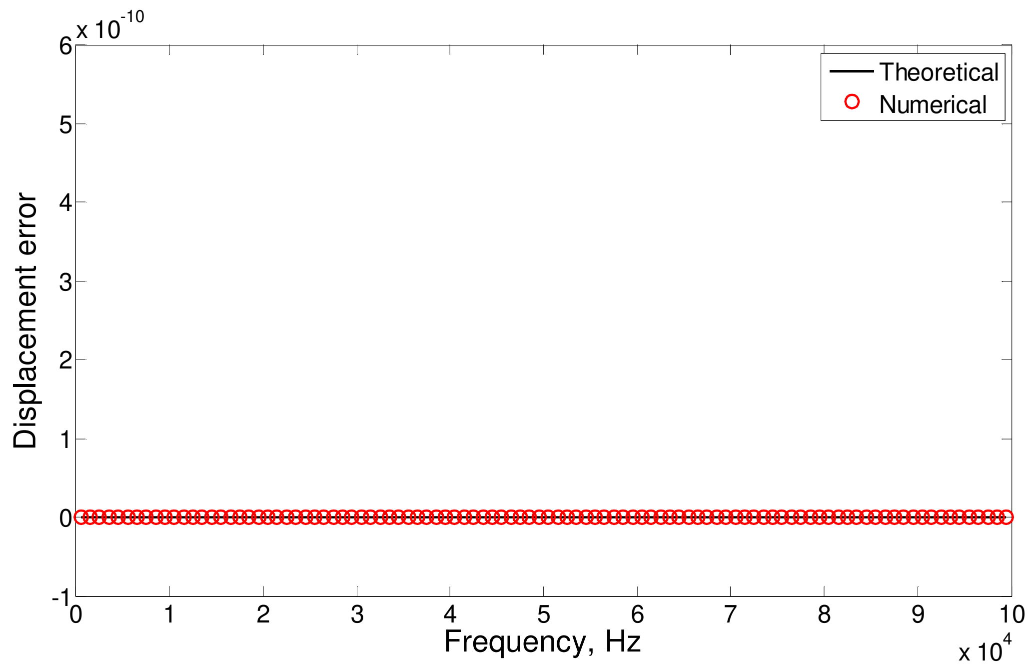


Figure 6.21: Difference between analytical and numerical displacement values using the analytical wavenumber for two elements cantilever rod with axial force.

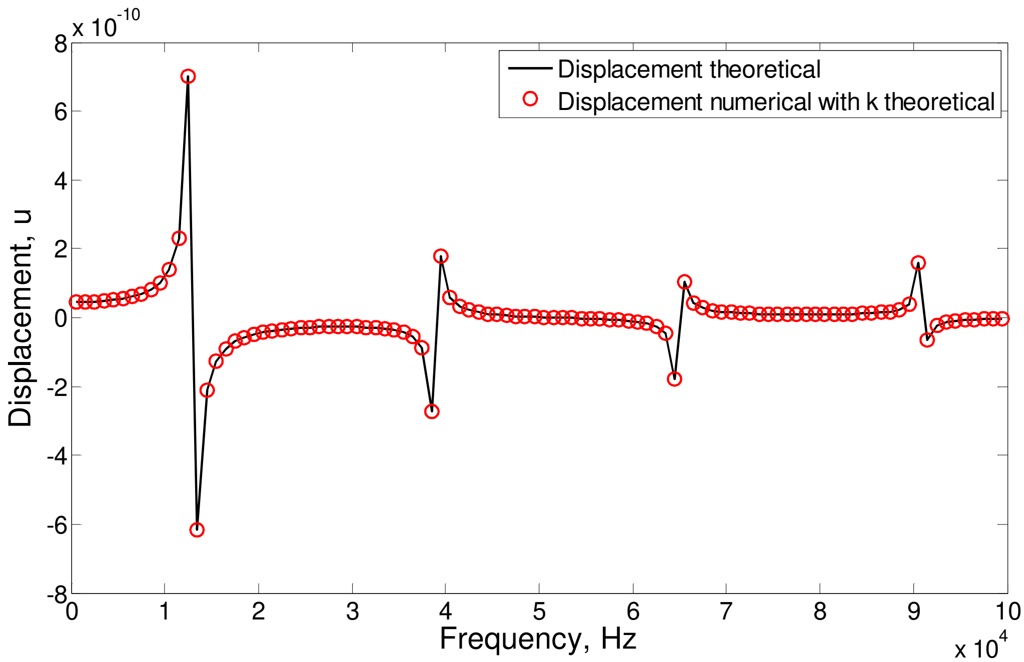


Figure 6.22: Axial displacement using the analytical wavenumbers for two elements cantilever rod with axial force.

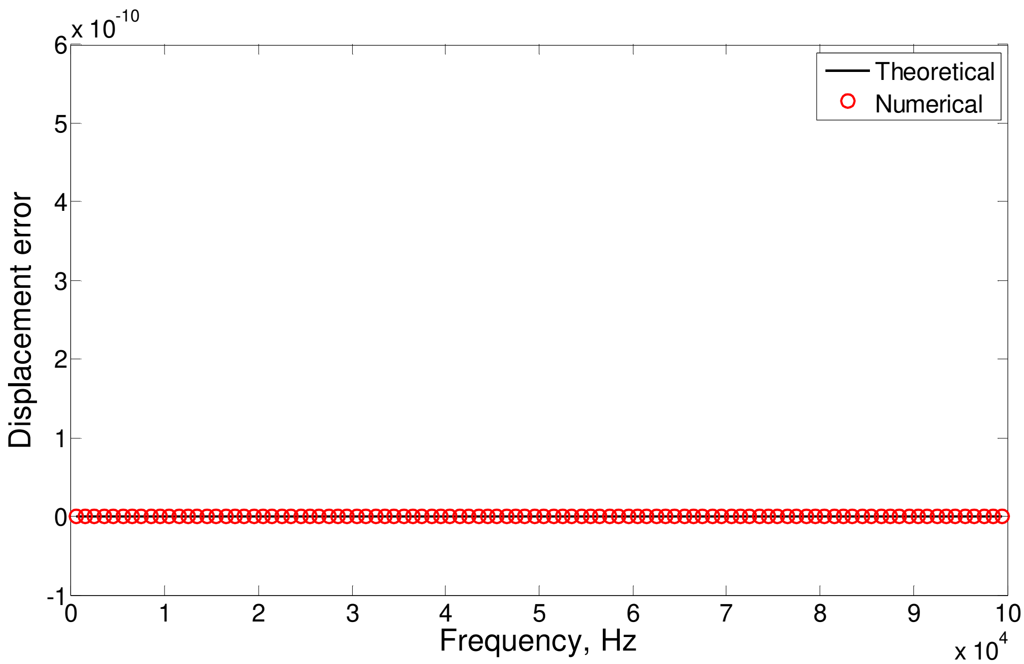


Figure 6.23: Difference between analytical and numerical displacement values using the analytical wavenumber for two elements cantilever rod with axial force.

Previous examples have shown that it is possible to reduce the displacement field to obtain numerical matrix of a rod with the same number of row and columns of the theoretical spectral matrix. Now we will show that it is possible to work with all of the nodal displacements obtained for the slice and build new elements of rod with arbitrary cross section and length. Consider the Equations (6.8) and (6.9) of displacement and axial force studied in the previous section,

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{01} & \Phi_{02} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-ik_1 x} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2 x} \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} \Phi_{01} & \Phi_{02} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-ik_1 x} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2 x} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \tag{6.23}$$

$$\begin{Bmatrix} F_0 \\ F_L \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{01} & \Phi_{02} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -ik_1 & 0 \\ 0 & -ik_2 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} \Phi_{01} & \Phi_{02} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -ik_1 e^{-ik_1 L} & 0 \\ 0 & -ik_2 e^{-ik_2 L} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \tag{6.24}$$

Multiplying Equation (6.23) by $[\Psi]^T$ gives:

$$[\Psi]^T \{u\} = [\Psi]^T [\Psi] \{A\} \tag{6.25}$$

Multiplying Equation (6.25) by $\left([\Psi]^T [\Psi]\right)^{-1}$ gives:

$$\left([\Psi]^T [\Psi]\right)^{-1} [\Psi]^T \{u\} = \{A\} \tag{6.26}$$

Substituting Equation (6.26) into Equation (6.24) obtain

$$\{F\} = [\overline{\Psi}] \left([\Psi]^T [\Psi]\right)^{-1} [\Psi]^T \{u\} \tag{6.27}$$

where $K_{rod}(\omega) = [\overline{\Psi}]([\Psi]^T[\Psi])^{-1}[\Psi]^T$ is the numerical spectral element matrix of a rod with all the nodal displacements. $K_{rod}(\omega)$ is square and if only a few propagation modes are kept, it is close to singular. Therefore the solution of Equation (6.27) cannot be obtained using the dynamic stiffness matrix inverse. In these cases, the solution can be obtained by a pseudo inversion using the singular value decomposition Kim (1992), Datta (1994) and Golub (1996). The solution using pseudo inverse for Equation (6.27) is denoted as.

$$\{u\} = [K_{rod}(\omega)]^{+}\{F\} \tag{6.28}$$

Where $[K_{rod}(\omega)]^{+}$ is the pseudo inverse of $K_{rod}(\omega)$.

Using preceding formulation, we will show that it is possible to work with all of the nodal displacements obtained for the slice. Figure 6.24 shows the new element of rod with properties *h* = 90 *mm*, *b* = 60 *mm* and *L* = 100 *mm* obtained from the FE slice. It is fixed at one end and free at the other. At the free end it has a constant axial force *F* applied at all nodes of the element surface.

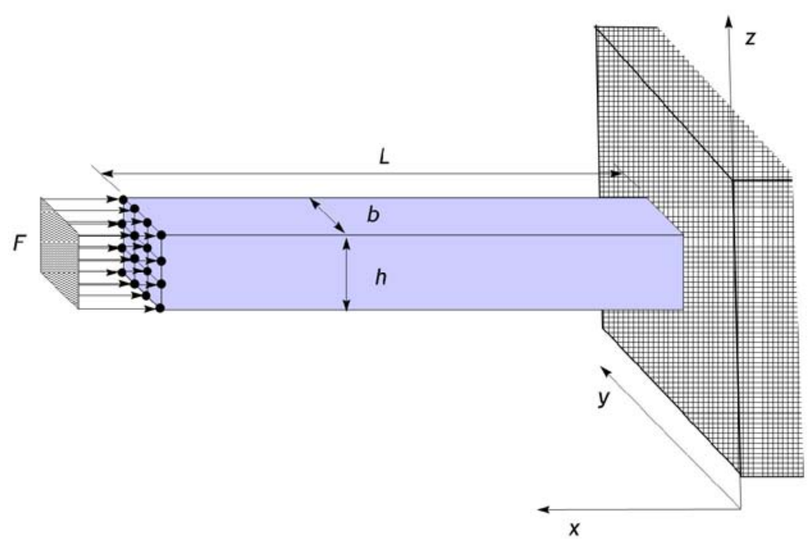


Figure 6.24: A clamped-free rod subjected constant axial force.

Figures 6.25 and 6.26 show results for the axial displacement and the difference between numerical and analytical matrix values for different frequencies.

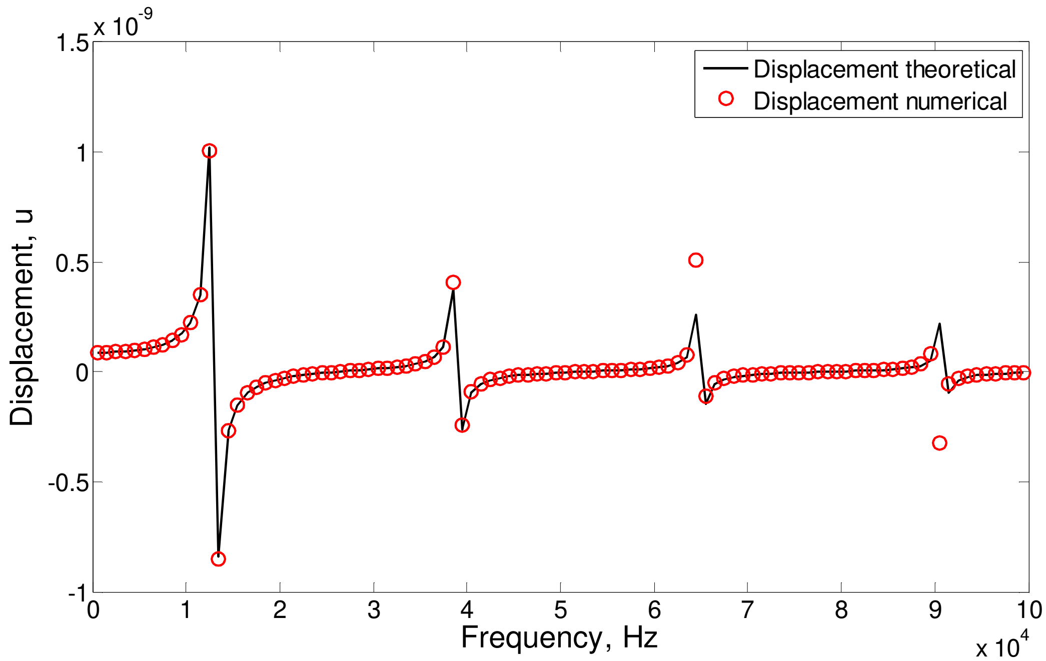


Figure 6.25: Axial displacement for a clamped-free rod subjected constant axial force.

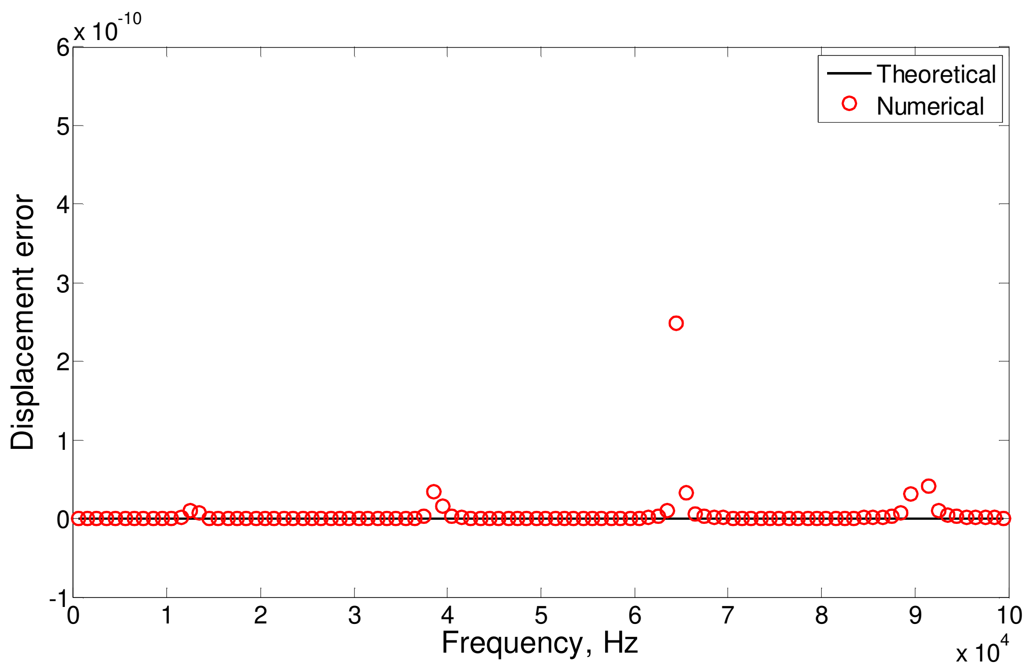


Figure 6.26: Difference between analytical and numerical displacement values for a clamped-free rod subjected constant axial force.

Results in Figures 6.27 and 6.28 show the behavior of the same plots when the analytical wavenumber is used in Equations (6.23) and (6.24) instead of the numerical wavenumber obtained from the eigenvalue problem in Equation (5.39).

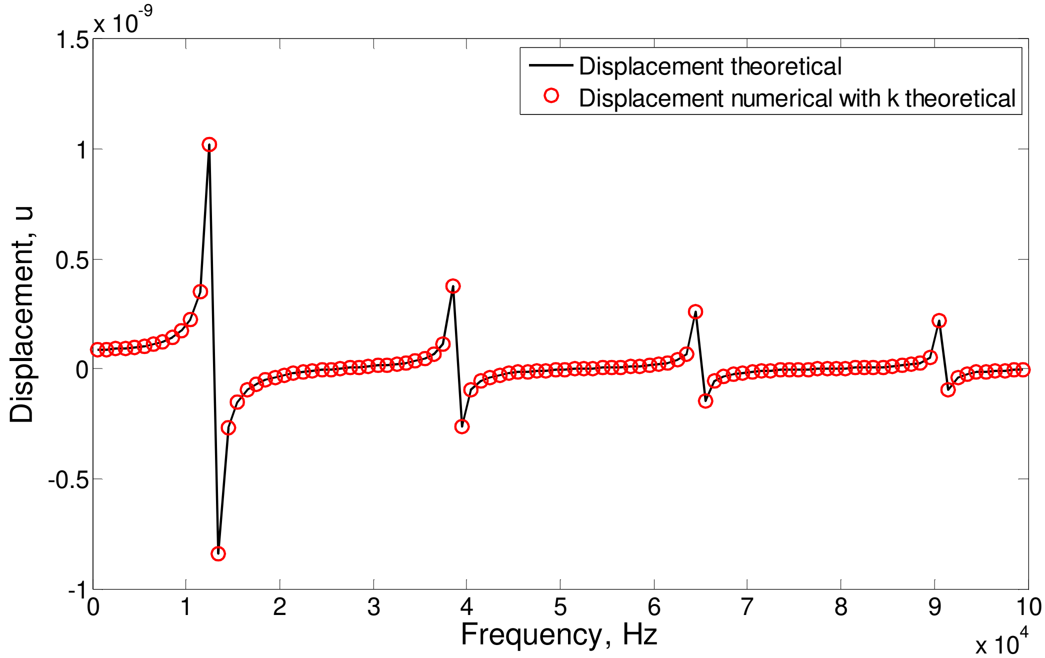


Figure 6.27: Axial displacement using the analytical wavenumbers for a clamped-free rod subjected constant axial force.

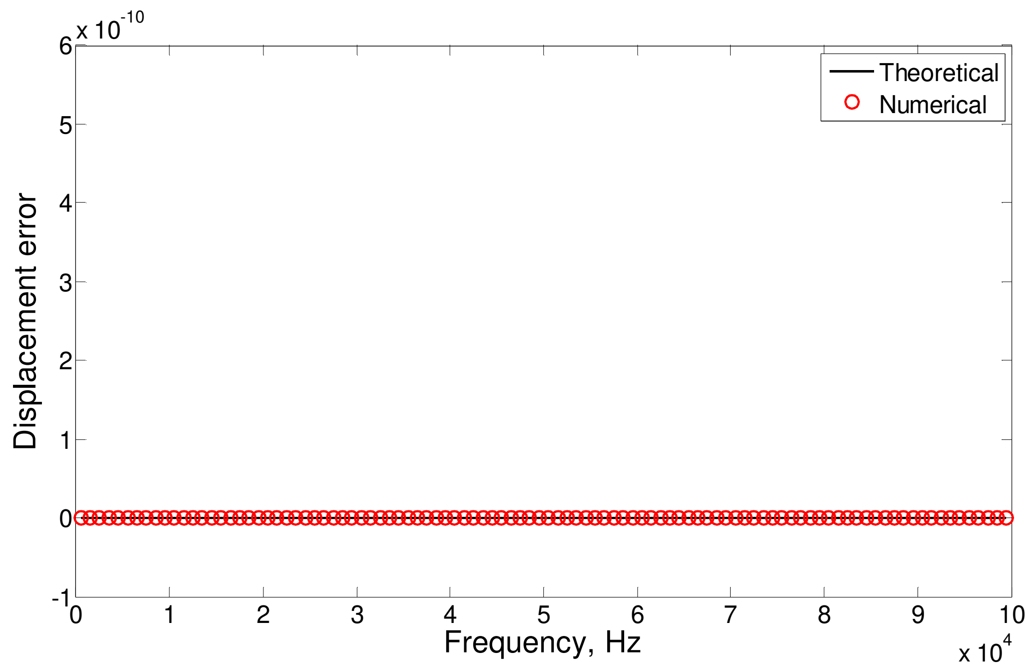


Figure 6.28: Difference between analytical and numerical displacement values using the analytical wavenumber for a clamped-free rod subjected constant axial force.

Consider the rod shown in Figure 6.29 which one end is fixed and the other is free. At the free end a constant axial force F applied to all nodes of the element surface. Rod (1) with properties h = 90 *mm*, b = 60*mm* and L = 100 *mm* and rod (2) with properties h = 90 *mm*, b = 60 *mm* and L = 100 *mm*, both obtained from the FE slice.

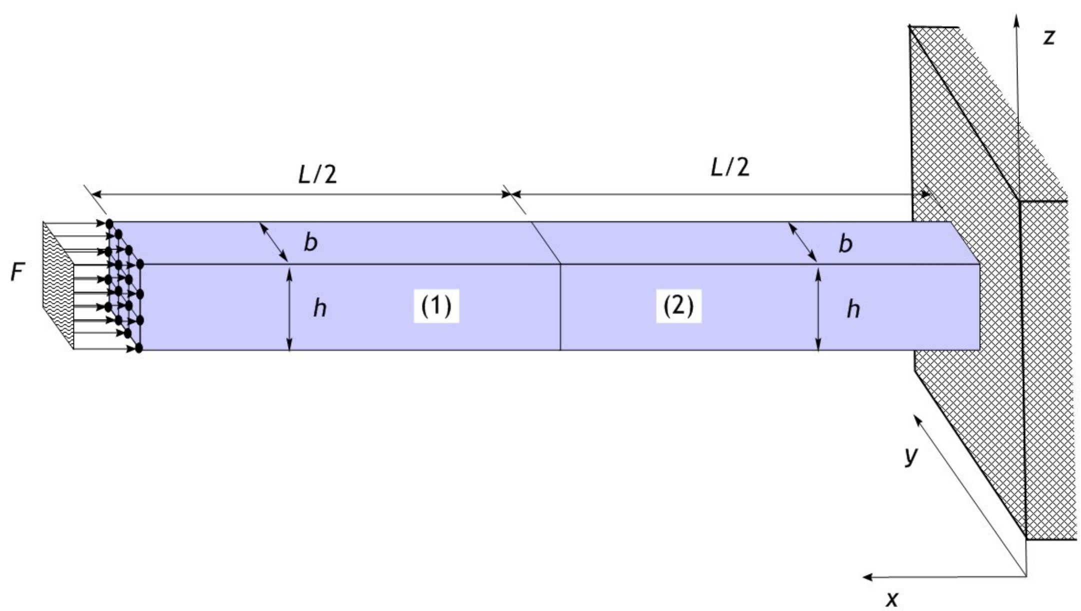


Figure 6.29: A clamped-free bar with two elements of rod subjected to homogeneous axial dynamic force.

Figures 6.30 - 6.33 show results for the axial displacements and the error for different frequencies from numerical and analytical spectral matrices.

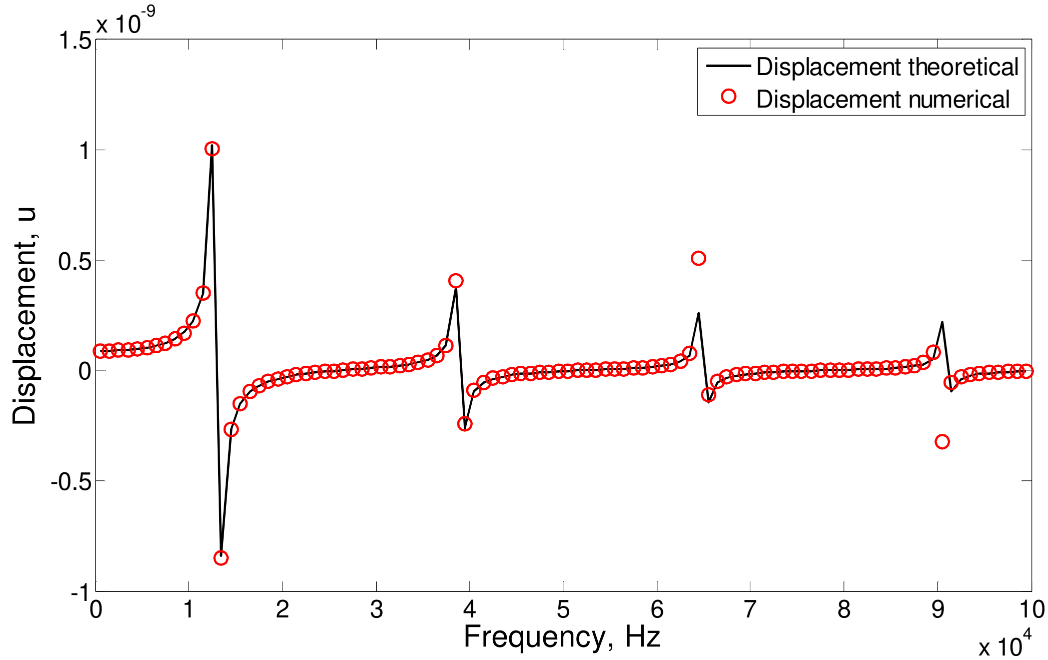


Figure 6.30: Axial displacement for a clamped-free bar with two elements of rod subjected to homogeneous axial dynamic force.

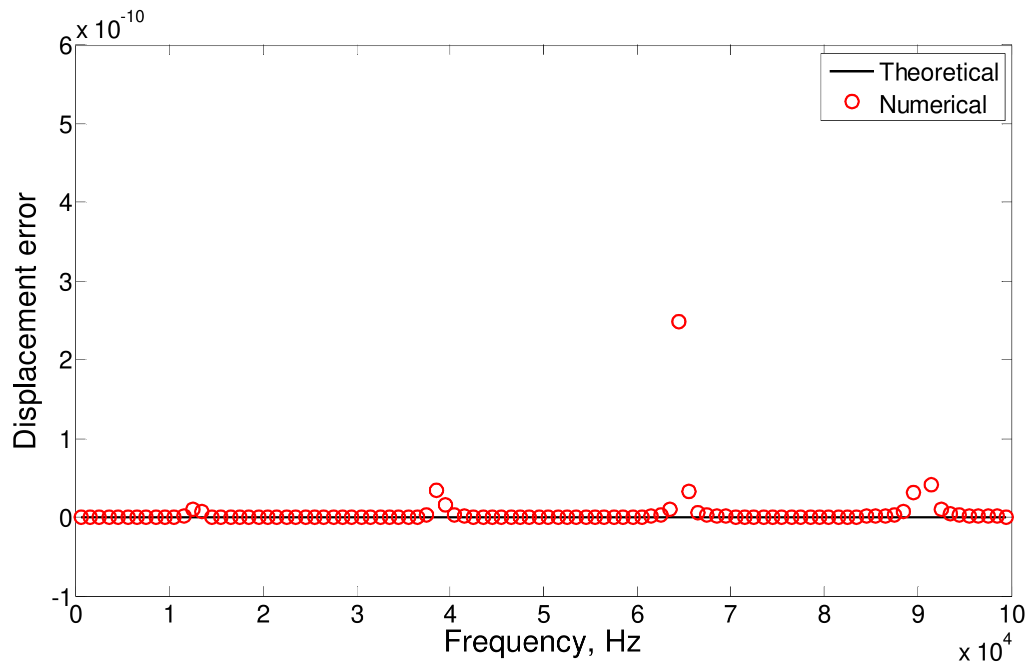


Figure 6.31: Difference between analytical and numerical displacement values for a clamped-free bar with two elements of rod subjected to homogeneous axial dynamic force.

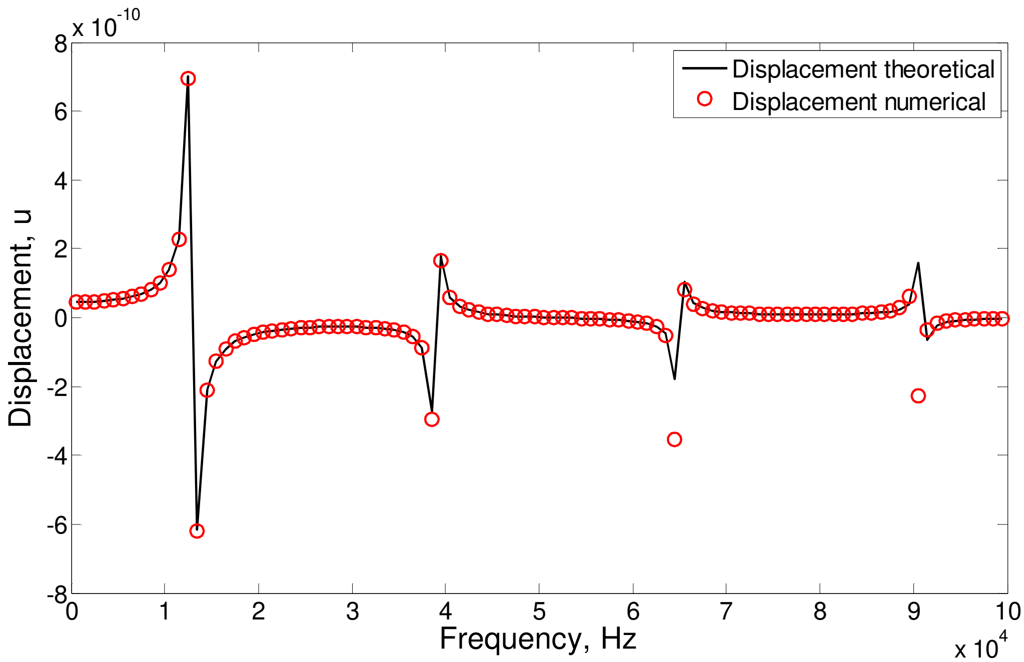


Figure 6.32: Axial displacement for a clamped-free bar with two elements of rod subjected to homogeneous axial dynamic force.

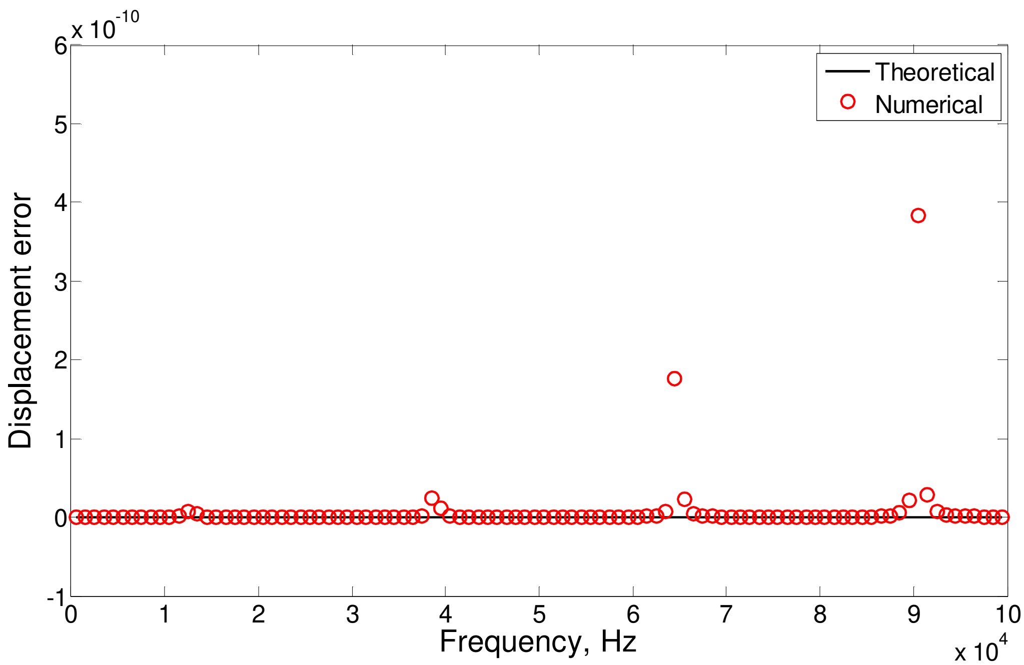


Figure 6.33: Difference between analytical and numerical displacement values for a clamped-free bar with two elements of rod subjected to homogeneous axial dynamic force.

Results in Figures 6.34 - 6.37 show the behavior of the displacements obtained with the constructed spectral element built using the Equations (6.23) and (6.24).

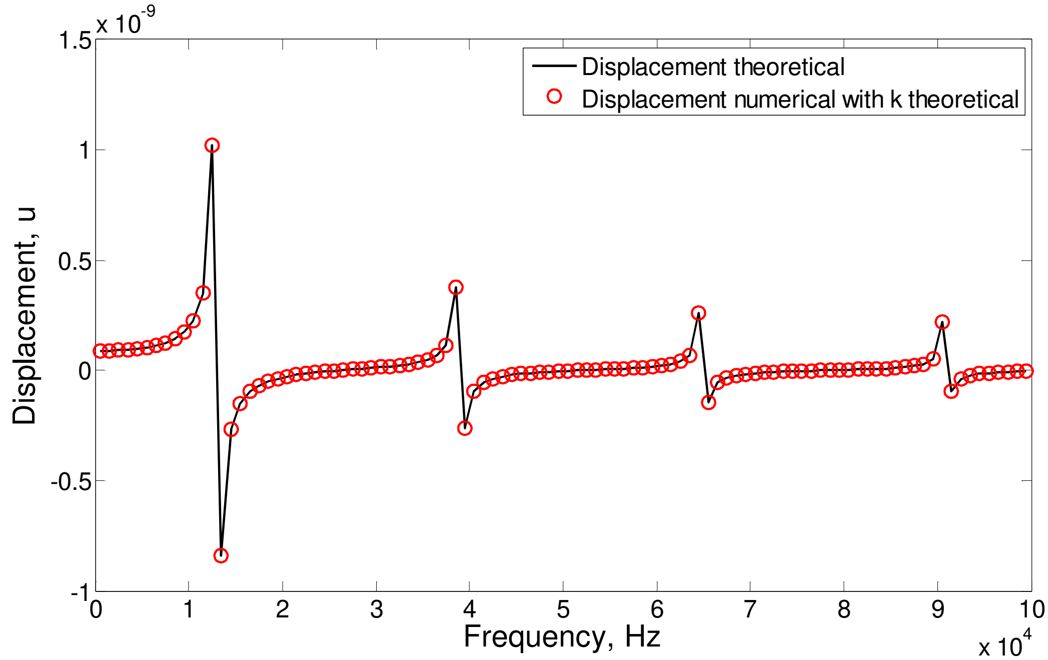


Figure 6.34: Axial displacement using the analytical wavenumbers for a clamped-free bar with two elements of rod subjected to homogeneous axial dynamic force.

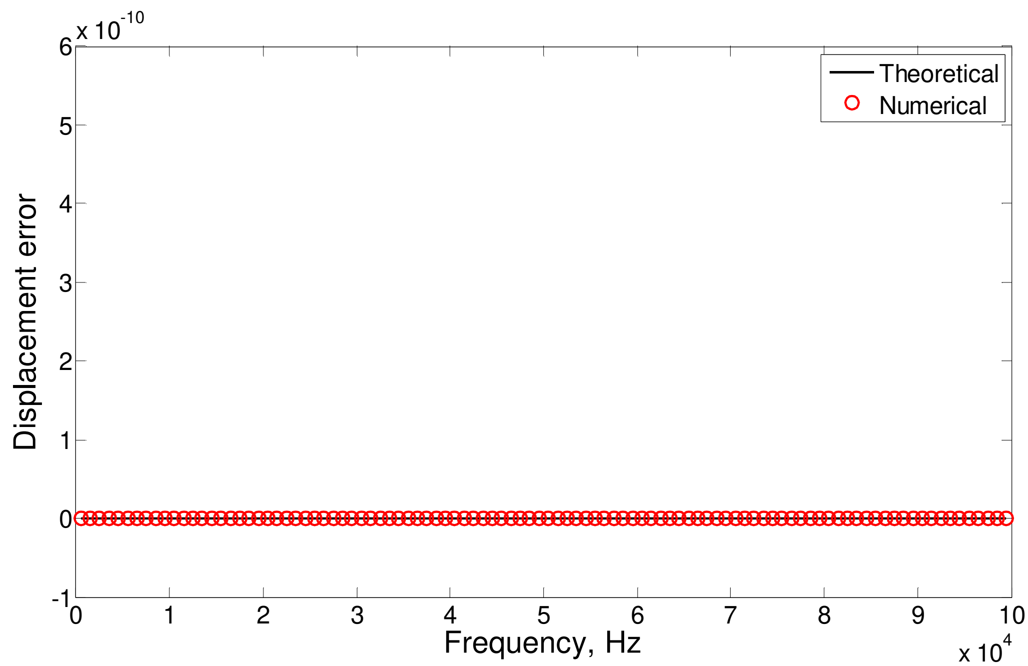


Figure 6.35: Difference between analytical and numerical displacement values using the analytical wavenumber for a clamped-free bar with two elements of rod subjected to homogeneous axial dynamic force.

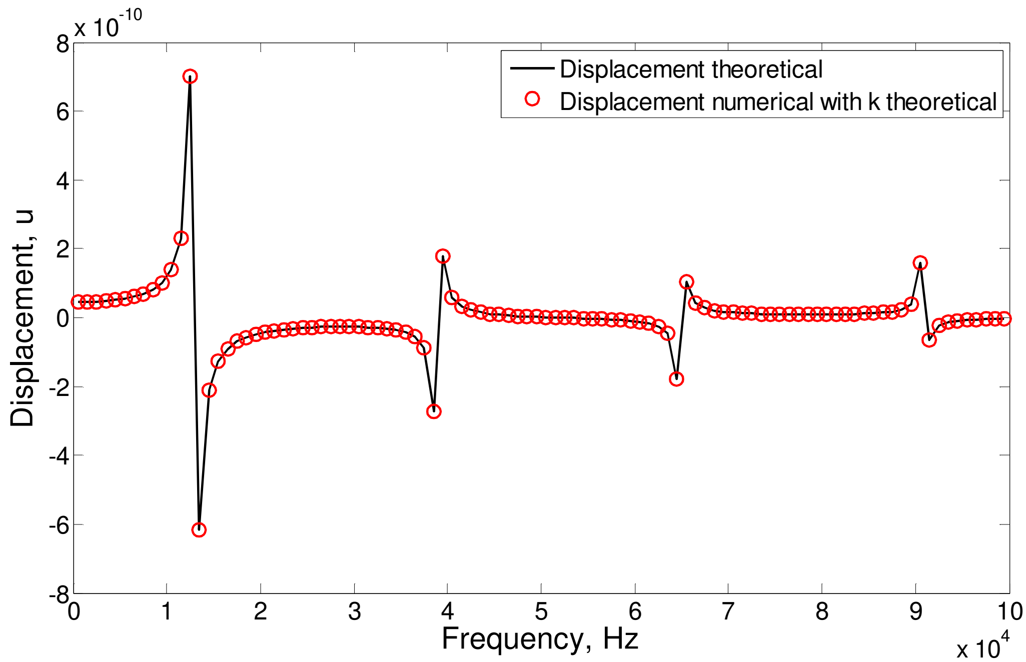


Figure 6.36: Axial displacement using the analytical wavenumbers for a clamped-free bar with two elements of rod subjected to homogeneous axial dynamic force.

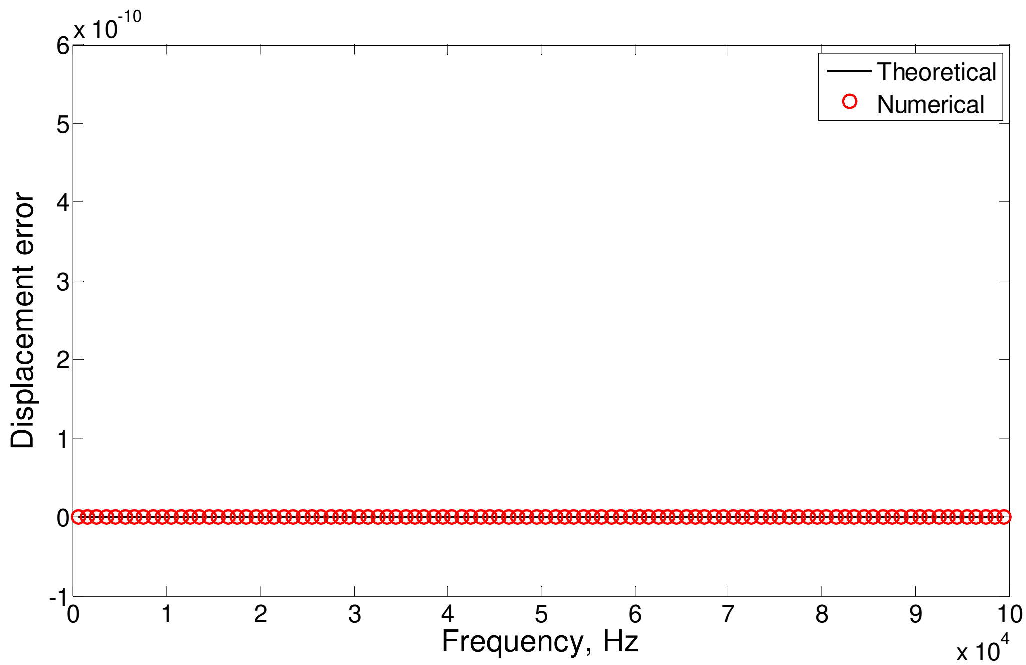
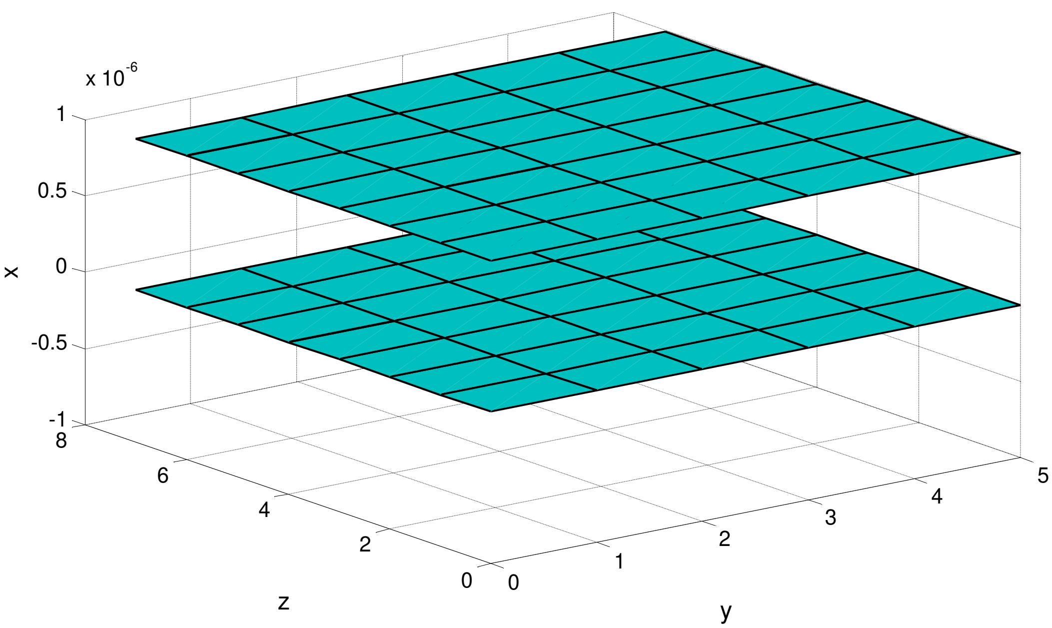


Figure 6.37: Difference between analytical and numerical displacement values using the analytical wavenumber for a clamped-free bar with two elements of rod subjected to homogeneous axial dynamic force.

6.6 Numerical spectral element matrix of Bernoulli-Euler beam

The main purpose of the preceding section is to show that using the wavenumber and the longitudinal wave mode obtained from the slice of a rod, it is possible to obtain the numerical spectral element matrix of the rod. The validation of the results for the rod element shows it is possible to use the same methodology to obtain the numerical spectral element matrix of the Bernoulli Euler beam. Figures 6.38 – 6.41 show the flexural wave modes in the direction *z* obtained from the slice of the beam.



.

Figure 6.38: Mode FE mesh of the beam slice in the direction z.

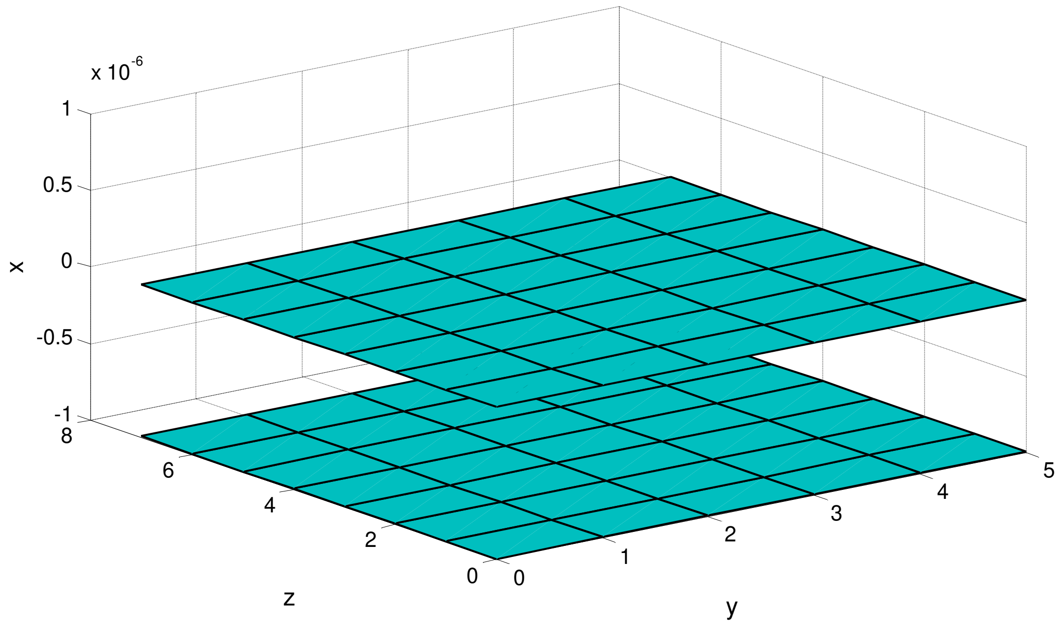


Figure 6.39: Mode FE mesh of the beam slice in the direction z.

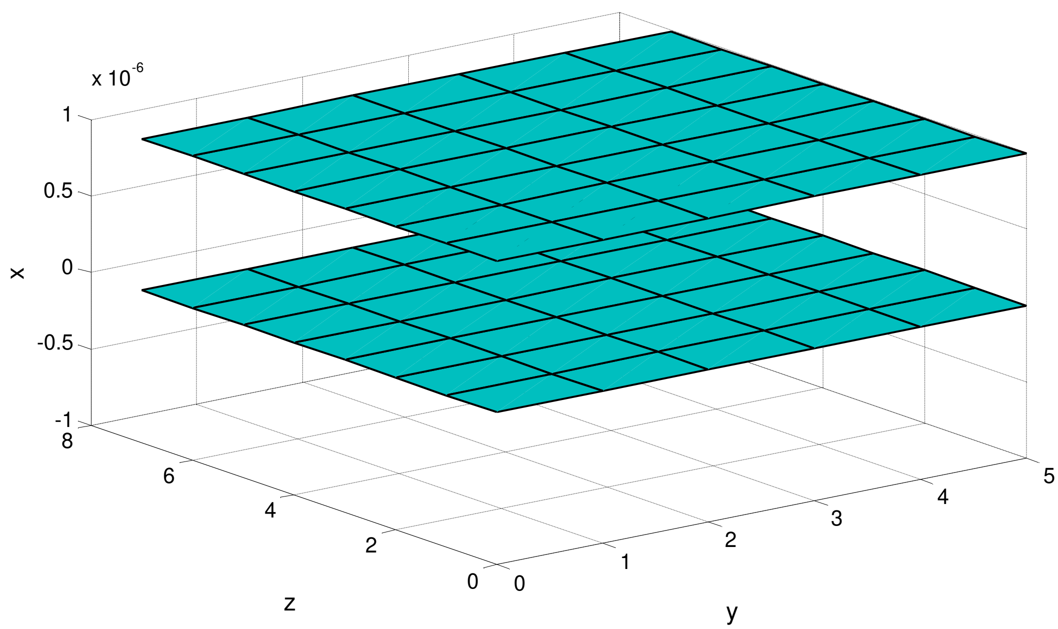


Figure 6.40: Mode FE mesh of the beam slice in the direction z.

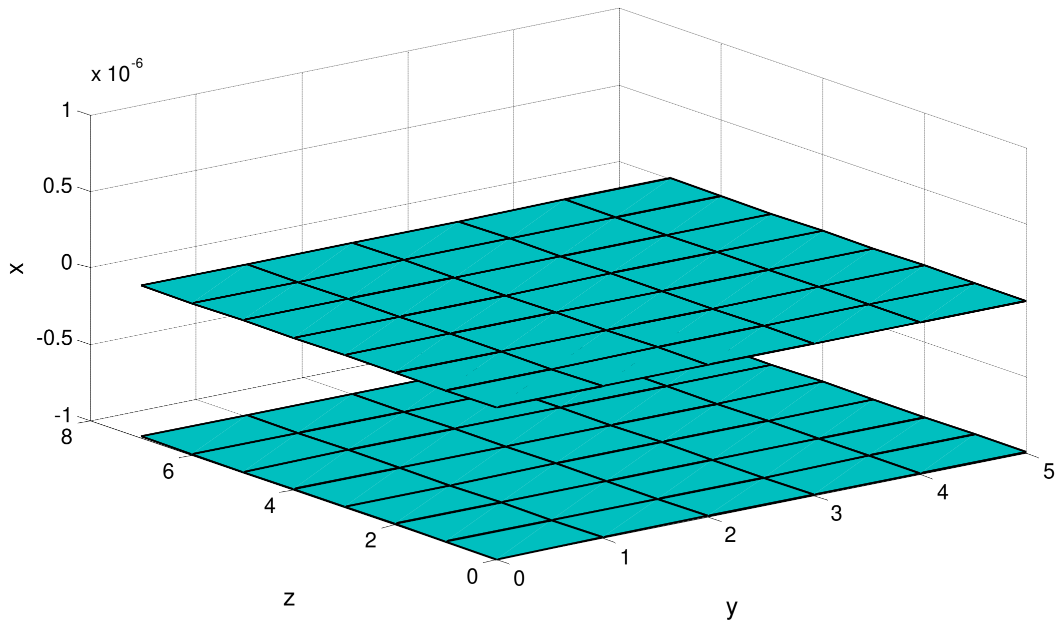


Figure 6.41: Mode FE mesh of the beam slice in the direction z.

From the wavenumbers and propagation modes of the flexural it is possible to obtain a spectral element matrix for the beam element. The hypotheses and formulation to obtain the spectral element dynamic stiffness matrix are presented in the next section.

6.7 Elementary Bernoulli Euler beam theory

In order to derive the equations governing flexural waves in beams we'll first review the basic equations in linear elasticity. The treatment will be schematic and superficial, as a detailed description of the linear elasticity theory is out of the scope of this text, and is largely available in the literature Gould (1983). The basic equations of the elementary linear elasticity theory using tensor notation are:

6.7.1 Equilibrium equations

$$\sigma_{ij,i} + f_j = \rho \ddot{u}_i \tag{6.29}$$

where $\boldsymbol{\sigma}$ is the stress tensor representing the state of stress at a point of an elastic solid and f is the external volume force. At any point, the force per unit area on a surface normal to the unit vector $\vec{n}$ is given by $F_i = \sigma_{ij} n_j$.

6.7.2 Kinematic relations

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{6.30}$$

where $\boldsymbol{\varepsilon}$ is the infinitesimal strain tensor (valid for small displacement gradients) representing the state of strain (deformation) in a point of the elastic solid and u is the displacement field, where $\{u_1 \quad u_2 \quad u_3\}^T$ is the displacement vector at each point.

6.7.3 Compatibility constraints

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} \tag{6.31}$$

which ensure that the strain tensor derive from a continuous, unique displacement field.

6.7.4 Constitutive law

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \tag{6.32}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\upsilon)\sigma_{ij} - \upsilon\delta_{ij}\sigma_{kk}\right] \tag{6.33}$$

where the two Lamé constants, μ and λ, represent the isotropic linear elastic material behavior. The three material property constants commonly used in engineering, E, υ and G, can be obtained from the Lamé constants and vice versa:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}; \quad \upsilon = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}; \quad G = \mu \tag{6.34}$$

Using the above equations it is possible to characterize the elastic behavior of different structural parts which have particular characteristics, such as rod, beams, plates, etc. Consider a long, narrow beam with the loads applied as in Figure 6.42. The Bernoulli Euler beam model assumes that the deflection of the centerline $v(x,t)$ is small and only transverse. While this theory assumes the presence of a transverse shear force, it neglects any shear deformation due to it.

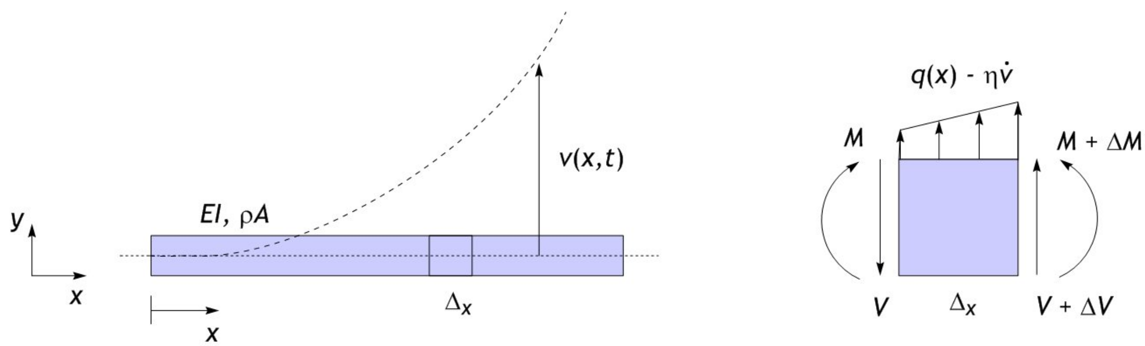


Figure 6.42: Slender beam in flexure and typical loaded element.

Expanding the displacements in a Taylor series about the mid-plane of the beam and keeping only the linear terms yield:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x,y) &\cong \bar{u}(x,0) + y\left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|_{y=0} = u(x) - y\phi(x) \\ \bar{v}(x,y) &\cong \bar{v}(x,0) + y\left.\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right|_{y=0} = v(x) + y\psi(x) \end{aligned} \tag{6.35}$$

The Bernoulli assumptions imply:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x,y) &\cong -y\phi(x) \\ \bar{v}(x,y) &\cong v(x) \end{aligned} \tag{6.36}$$

The axial and the transverse shear strain at a given cross section of the beam are:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = -y\frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(-\phi + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{6.37}$$

But we've said we neglect the shear deformation (although not the shear force!). Therefore the second expression in Equation (6.37) must vanish, and:

$$\phi = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{6.38}$$

Thus, the only non-zero strain is:

$$\varepsilon_{xx} = -y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{6.39}$$

Neglecting all stresses except for the predominant axial stresses σ_{xx}, we can write:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -yE\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{6.40}$$

The bending moment can be computed with:

$$M = \iint_A -\sigma_{xx} y dA = EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad , \text{ where } \quad I = \iint_A y^2 dA \tag{6.41}$$

The cross section property *I* is called the second moment of area, and the term *EI* is usually called the bending stiffness. The internal transverse shear force and bending moment are given by

$$V = -EI\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad , \quad M = EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{6.42}$$

6.8 Formulation to obtain the numerical spectral element matrix of a Bernoulli Euler beam

Now we will show that it is possible to obtain the numerical spectral element matrix of a Bernoulli Euler beam through the slice and to reduce the displacement field and build new elements of beam with arbitrary cross section and length. The wavenumbers and respective flexural propagation modes can be written in the following form

$$u_z = \sum_r A_r \Phi_{zr} e^{-ik_r x} \tag{6.43}$$

$$\theta_z = \sum_r A_r \Phi_{zr} \frac{\partial e^{-ik_r x}}{\partial x} \tag{6.44}$$

Equations (6.43) and (6.44) can be written as

$$\begin{Bmatrix} u_{z0} \\ \theta_{z0} \\ u_{zL} \\ \theta_{zL} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_z]\cdot[e_1] \\ [\Phi_z]\cdot[e_2] \\ \hline [\Phi_z]\cdot[e_1] \\ [\Phi_z]\cdot[e_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \tag{6.45}$$

where,

$$[\Phi_z] = [\Phi_{01} \quad \Phi_{02} \quad \Phi_{03} \quad \Phi_{04}], \ [e_1] = \begin{bmatrix} e^{-ik_1 x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_2 x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_3 x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_4 x} \end{bmatrix}$$

$$[e_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial e^{-ik_1 x}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial e^{-ik_2 x}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial e^{-ik_3 x}}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial e^{-ik_4 x}}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad [\Psi] = \begin{bmatrix} [\Phi_z]\cdot[e_1] \\ [\Phi_z]\cdot[e_2] \\ \hdashline [\Phi_z]\cdot[e_1] \\ [\Phi_z]\cdot[e_2] \end{bmatrix}$$

where k_i for $i = 1 \ldots 4$ are wavenumbers, and Φ_{0i} for $i = 1 \ldots 4$ are the flexural wave propagation modes in the direction z obtained for the slice of the beam. The internal transverse shear force and bending moment are given by,

$$V = \sum_r A_r \Phi_{zr} \frac{\partial^3 e^{-ik_r x}}{\partial x^3} \tag{6.46}$$

$$M = \sum_r A_r \Phi_{zr} \frac{\partial^2 e^{-ik_r x}}{\partial x^2} \tag{6.47}$$

Equations (6.46) and (6.47) can be written as

$$\begin{Bmatrix} V_0 \\ M_0 \\ \hdashline V_L \\ M_L \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} [\Phi]\cdot[e_3] \\ [\Phi]\cdot[e_4] \\ \hdashline [\Phi]\cdot[e_3] \\ [\Phi]\cdot[e_4] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \hdashline A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \tag{6.48}$$

where,

$$[\overline{\Psi}] = EI \begin{bmatrix} [\Phi]\cdot[e_3] \\ [\Phi]\cdot[e_4] \\ \hdashline [\Phi]\cdot[e_3] \\ [\Phi]\cdot[e_4] \end{bmatrix}, \qquad [e_3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 e^{-ik_1 x}}{\partial x^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 e^{-ik_2 x}}{\partial x^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^3 e^{-ik_3 x}}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^3 e^{-ik_4 x}}{\partial x^3} \end{bmatrix} \text{ and}$$

$$[e_4]=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 e^{-ik_1 x}}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 e^{-ik_2 x}}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 e^{-ik_3 x}}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 e^{-ik_4 x}}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

Assuming a displacement field of the Bernoulli-Euler beam such that,

$$\begin{Bmatrix} u_{z0} \\ \theta_{z0} \\ u_{zL} \\ \theta_{zL} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{z0} \\ \bar{\theta}_{z0} \\ \bar{u}_{zL} \\ \bar{\theta}_{zL} \end{Bmatrix} \tag{6.49}$$

Equation (6.49) can be written as,

$$\begin{Bmatrix} u_{z0} \\ \theta_{z0} \\ u_{zL} \\ \theta_{zL} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \bar{u}_{z0} \\ \bar{\theta}_{z0} \\ \bar{u}_{zL} \\ \bar{\theta}_{zL} \end{Bmatrix} \tag{6.50}$$

where $\begin{Bmatrix} u_{z0} \\ \theta_{z0} \\ u_{zL} \\ \theta_{zL} \end{Bmatrix}$ are the displacements of the right and left surfaces of the slice and

$$[P]=\left[\begin{array}{c:c:c:c}1 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Equations (6.45) and (6.50) can be written as

$$\begin{Bmatrix} u_{z0} \\ \theta_{z0} \\ u_{zL} \\ \theta_{zL} \end{Bmatrix} = [P] \begin{Bmatrix} \bar{u}_{z0} \\ \bar{\theta}_{z0} \\ \bar{u}_{zL} \\ \bar{\theta}_{zL} \end{Bmatrix} \tag{6.51}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{z0} \\ \theta_{z0} \\ u_{zL} \\ \theta_{zL} \end{Bmatrix} = [\Psi] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_2 \\ A_4 \end{Bmatrix} \tag{6.52}$$

Substituting Equation (6.51) into Equation (6.52) gives

$$[P] \begin{Bmatrix} \bar{u}_{z0} \\ \bar{\theta}_{z0} \\ \bar{u}_{zL} \\ \bar{\theta}_{zL} \end{Bmatrix} = [\Psi] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \tag{6.53}$$

Equation (6.48) can be written as

$$\begin{Bmatrix} V_0 \\ M_0 \\ \hdashline V_L \\ M_L \end{Bmatrix} = \left[\overline{\Psi}\right] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \tag{6.54}$$

The average forces on the two surfaces can be obtained as

$$\begin{Bmatrix} \overline{V}_0 \\ \overline{M}_0 \\ \overline{V}_L \\ \overline{M}_L \end{Bmatrix} = [P]^T \begin{Bmatrix} V_0 \\ M_0 \\ V_L \\ M_L \end{Bmatrix} \tag{6.55}$$

Substituting Equation (6.54) into Equation (6.55):

$$\begin{Bmatrix} \overline{V}_0 \\ \overline{M}_0 \\ \overline{V}_L \\ \overline{M}_L \end{Bmatrix} = [P]^T \left[\overline{\Psi}\right] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \tag{6.56}$$

Multiplying Equation (6.53) by $[P]^T$ gives:

$$[P]^T [P] \begin{Bmatrix} \overline{u}_{z0} \\ \overline{\theta}_{z0} \\ \overline{u}_{zL} \\ \overline{\theta}_{zL} \end{Bmatrix} = [P]^T [\Psi] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \tag{6.57}$$

Multiplying Equation (6.57) by $\left([P]^T [\Psi]\right)^{-1}$ gives:

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \left([P]^T[\Psi]\right)^{-1}[P]^T[P]\begin{Bmatrix} \overline{u}_{z0} \\ \overline{\theta}_{z0} \\ \overline{u}_{zL} \\ \overline{\theta}_{zL} \end{Bmatrix} \tag{6.58}$$

Substituting Equation (6.58) into Equation (6.56) obtain

$$\begin{Bmatrix} \overline{V}_0 \\ \overline{M}_0 \\ \overline{V}_L \\ \overline{M}_L \end{Bmatrix} = \left([P]^T[\overline{\Psi}]\right)\left([P]^T[\Psi]\right)^{-1}[P]^T[P]\begin{Bmatrix} \overline{u}_{z0} \\ \overline{\theta}_{z0} \\ \overline{u}_{zL} \\ \overline{\theta}_{zL} \end{Bmatrix} \tag{6.59}$$

Equation (6.59) can be written as

$$\{\overline{F}\} = [K_B(\omega)]\{\overline{u}\} \tag{6.60}$$

where $[K_B(\omega)]$ is spectral dynamic stiffness element matrix,

$$[K_B(\omega)] = \left([P]^T[\overline{\Psi}]\right)\left([P]^T[\Psi]\right)^{-1}\left([P]^T[P]\right) \tag{6.61}$$

6.9 Numerical results of a beam

Figures 6.43 – 6.47 show some results for matrix elements from the numerical spectral element matrix and the theoretical spectral matrix. The *x* axis represents frequency in *Hz* and the *y* axis represents matrix elements values obtained from numerical and theoretical matrices in *N/m*. The figures show in solid lines the theoretical values and in circles the numerical values computed from the numerical spectral element matrix of the beam.

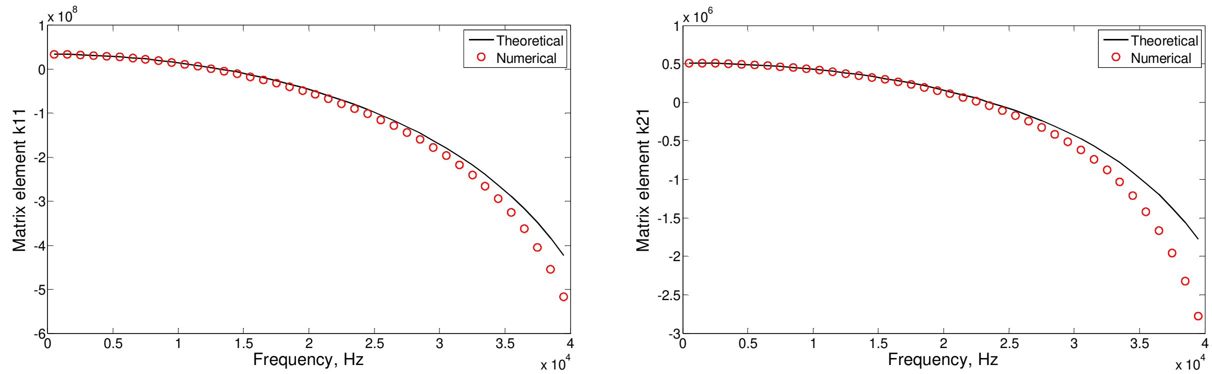


Figure 6.43: Elements k_{11} and k_{12} from the numerical and theoretical spectral matrix.

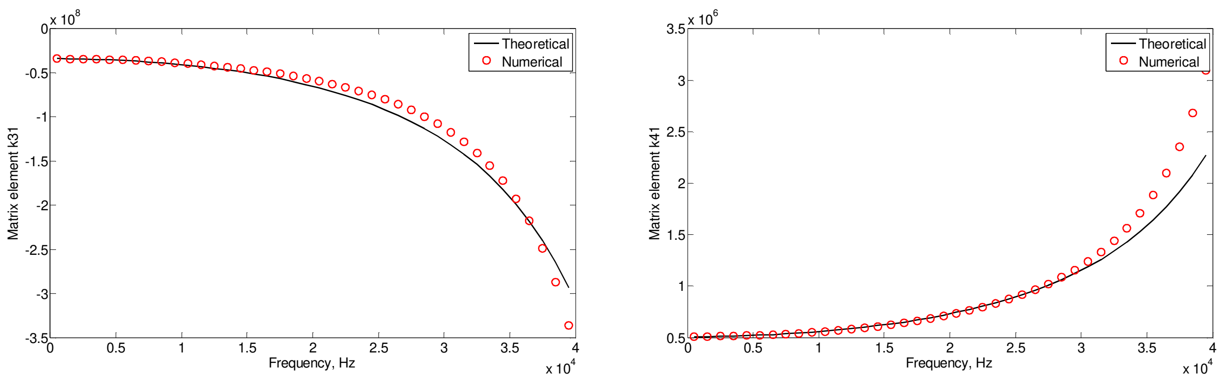


Figure 6.44: Elements k_{31} and k_{41} from the numerical and theoretical spectral matrix.

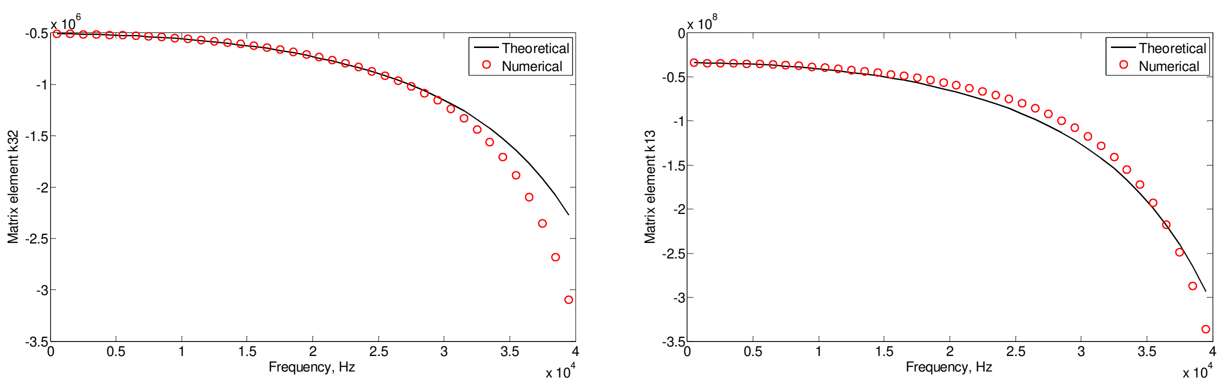


Figure 6.45: Elements k_{32} and k_{13} from the numerical and theoretical spectral matrix.

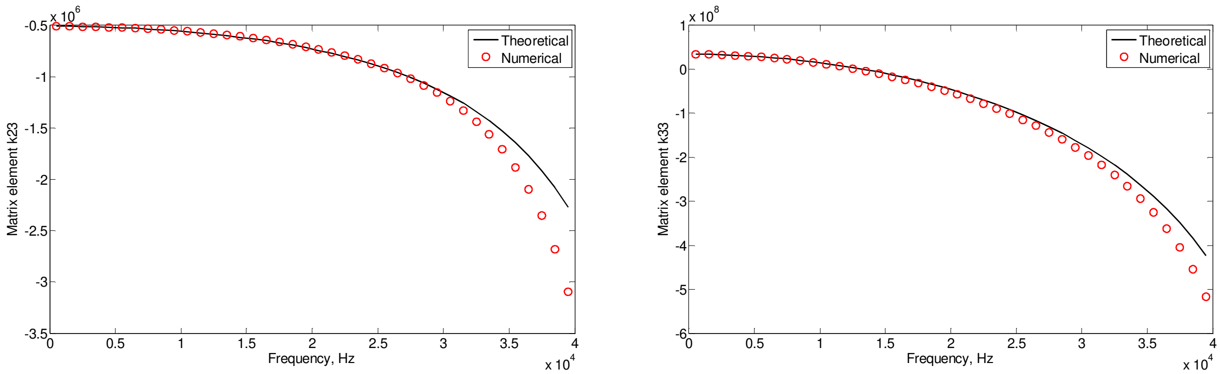


Figure 6.46: Elements k_{23} and k_{33} from the numerical and theoretical spectral matrix.

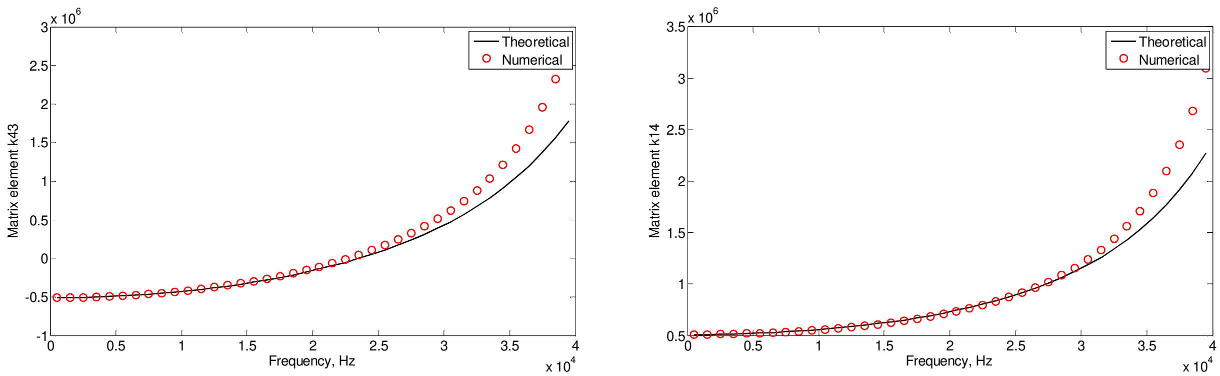


Figure 6.47: Elements k_{43} and k_{14} from the numerical and theoretical spectral matrix.

In this example we will show that it is possible, through the slice model, to build new spectral elements for Bernoulli Euler beam with different lengths and cross sections. Figure 6.48 shows the new element of beam with properties h = 9 mm, b = 6 mm and L = 45 mm obtained from the FE slice. It is fixed at one end and free at the other. At the free end it has a force F.

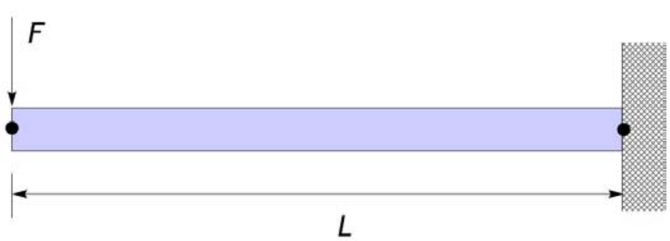


Figure 6.48: Cantilever beam with transversal force.

Figures 6.49 - 6.52 show results for the transversal displacements and the error for different frequencies from numerical and analytical spectral matrices.

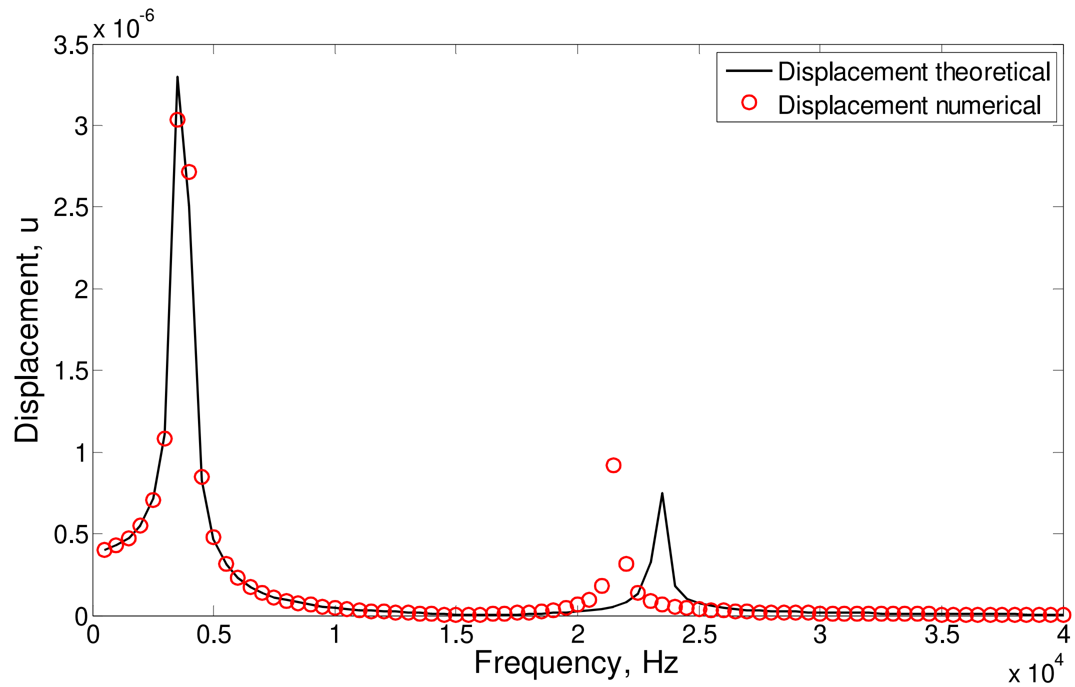


Figure 6.49: Transversal displacement for a cantilever beam with transversal force.

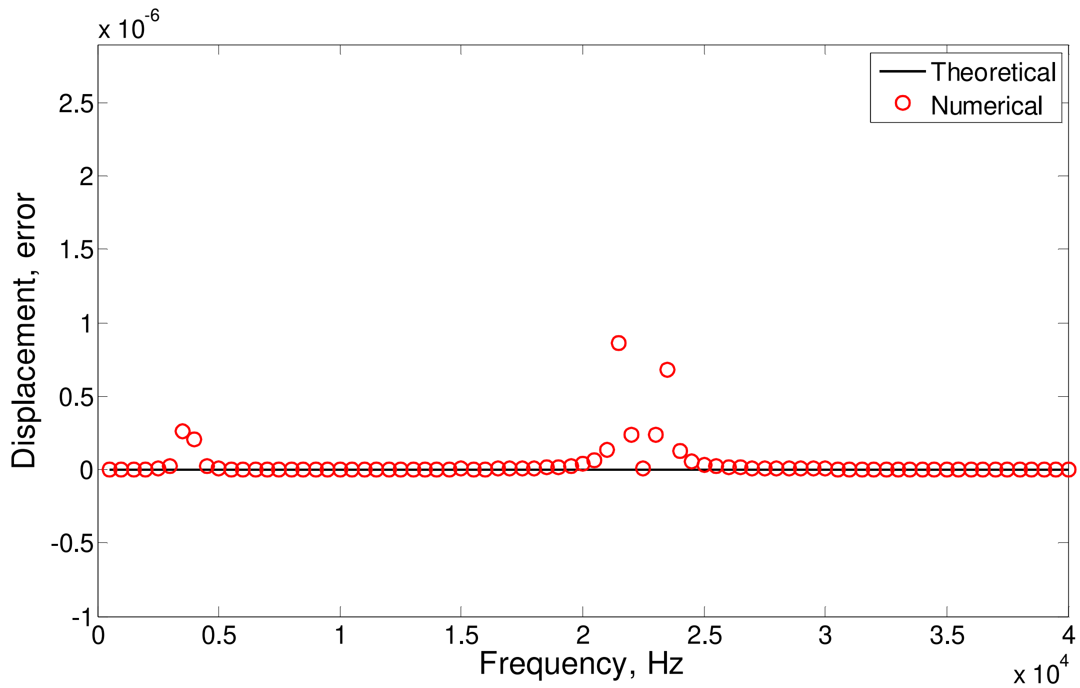


Figure 6.50: Difference between analytical and numerical displacement values for a cantilever beam with transversal force.

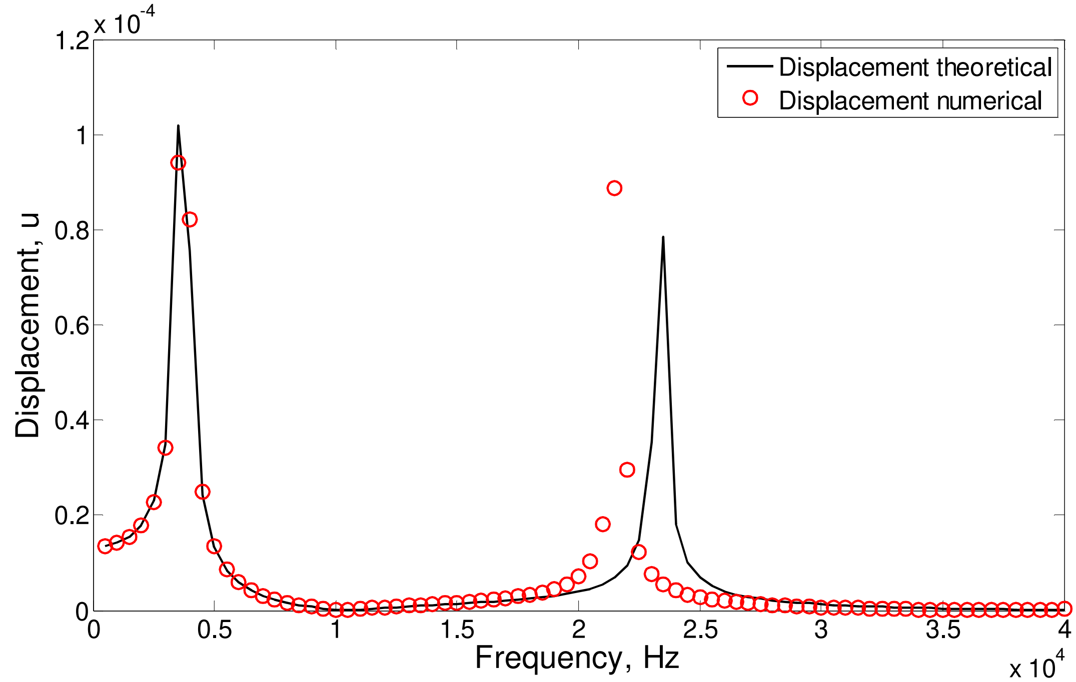


Figure 6.51: Transversal displacement for a cantilever beam with transversal force.

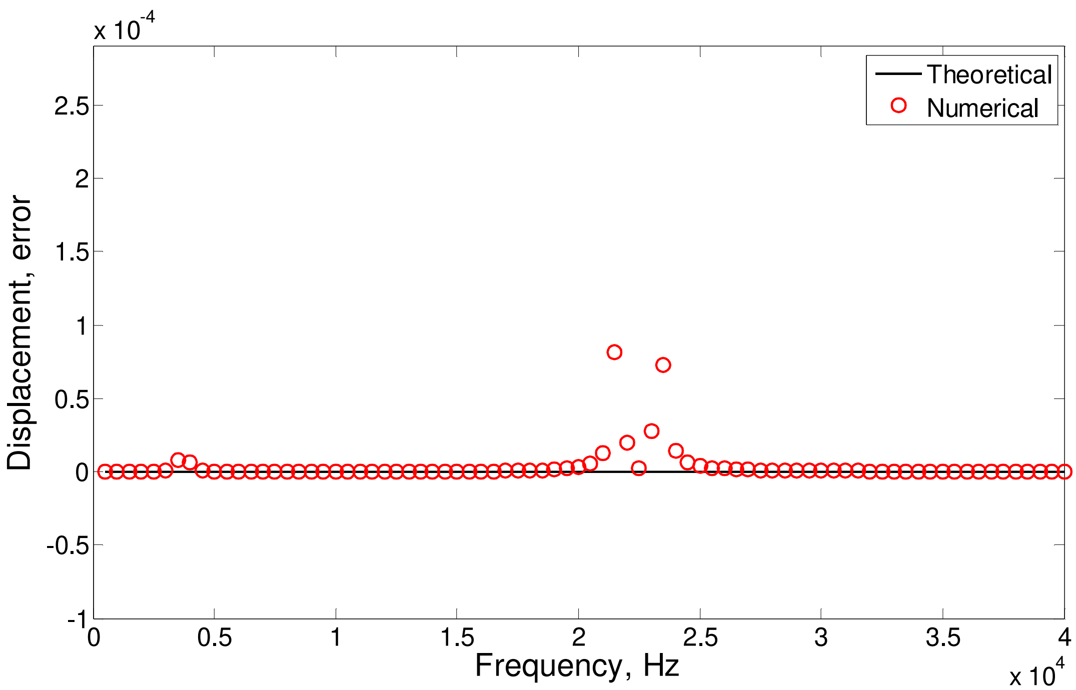


Figure 6.52: Difference between analytical and numerical displacement values for a cantilever beam with transversal force.

Results in Figures 6.53 – 6.56 show the behavior of the same plots when the analytical wavenumber is used in Equations (6.48) and (6.45) instead of the numerical wavenumber obtained from the eigenvalue problem in Equation (5.39).

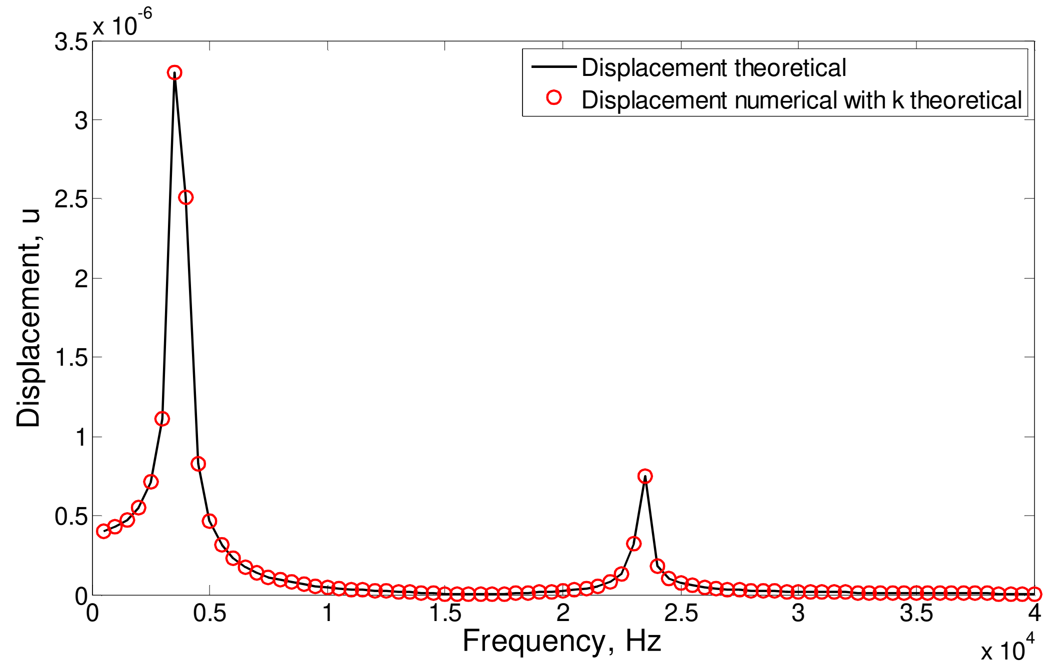


Figure 6.53: Transversal displacement using the analytical wavenumbers for a cantilever beam with transversal force.

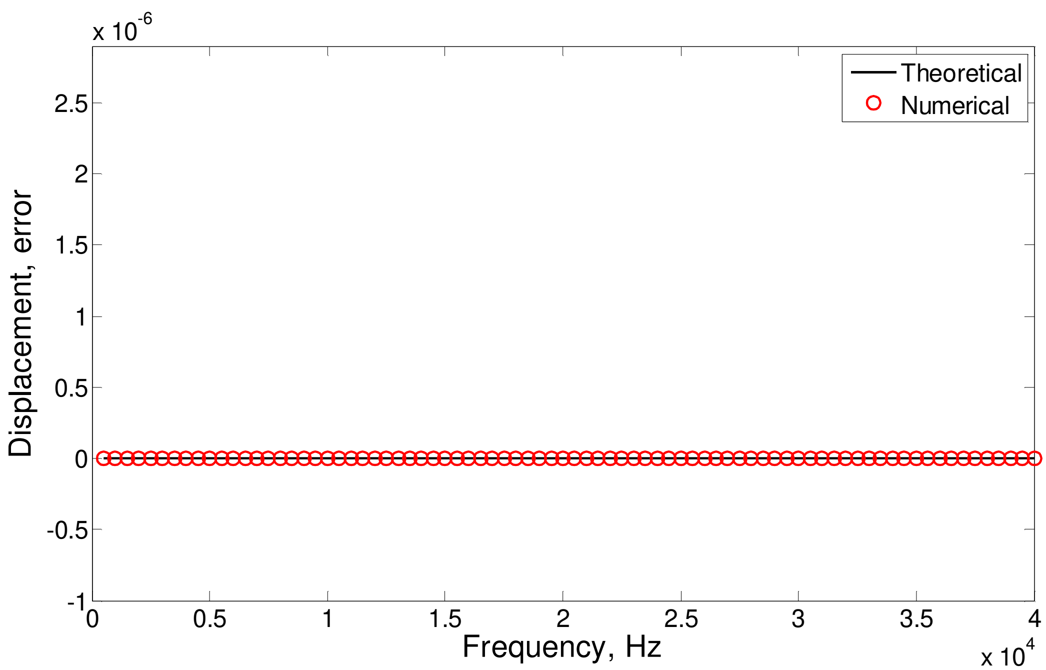


Figure 6.54: Difference between analytical and numerical displacement values using the analytical wavenumbers for a cantilever beam with transversal force.

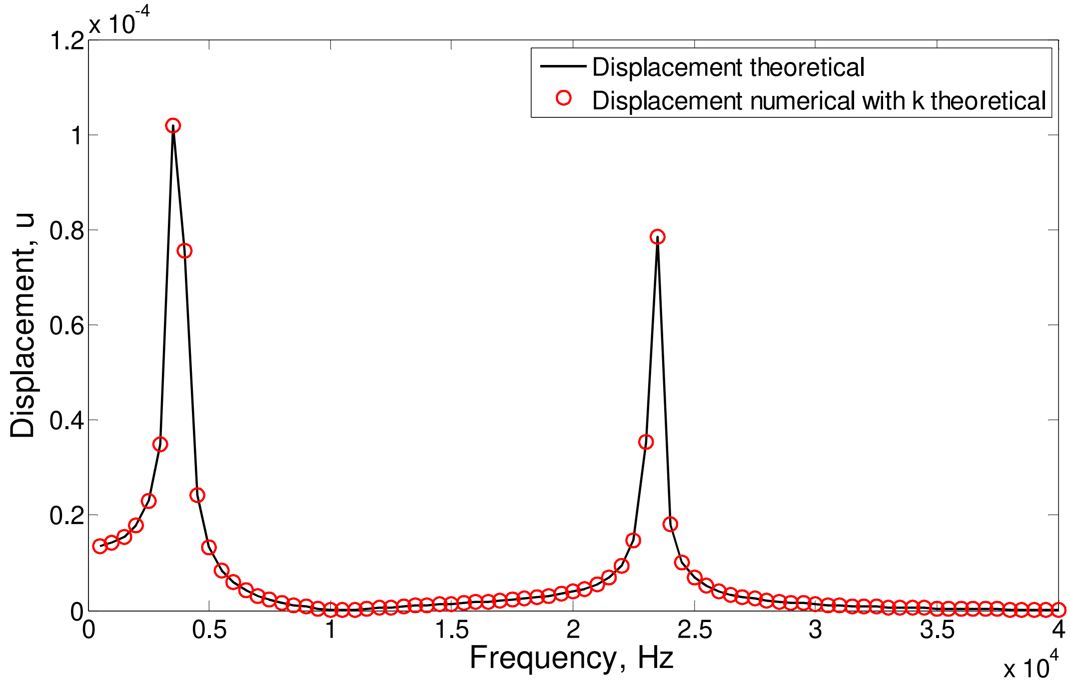


Figure 6.55: Transversal displacement using the analytical wavenumbers for a cantilever beam with transversal force.

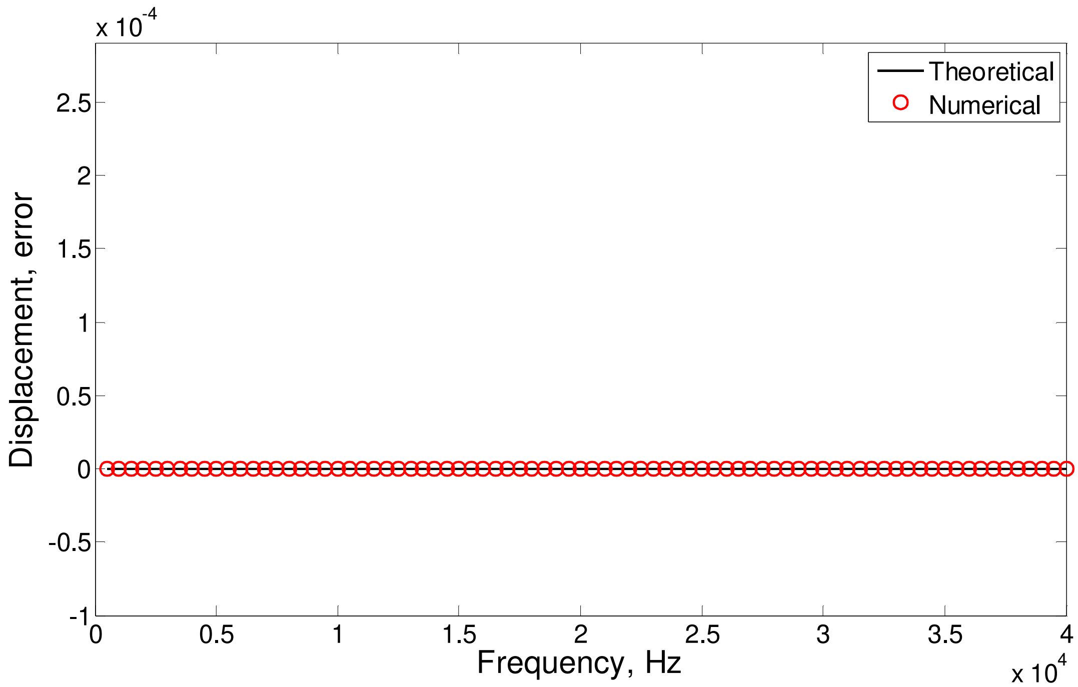


Figure 6.56: Difference between analytical and numerical displacement values using the analytical wavenumbers for a cantilever beam with transversal force.

Next, the assembling of two spectral elements built up from a FE slice of the beam is presented. Figure 6.57 shows the two beam elements with the same cross section connected, beam (1) with properties h = 9 mm, b = 6 mm and L = 45 mm and beam (2) with properties h = 9 mm, b = 6 mm and L = 45 mm, both obtained from the FE slice. One end is fixed and the other is free. At the free end a force F.

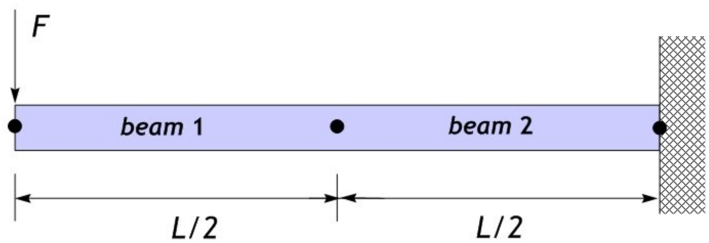


Figure 6.57: Two elements cantilever beam with transversal force.

Figures 6.58 - 6.65 show results for the transversal displacements and the error for different frequencies from numerical and analytical spectral matrices.

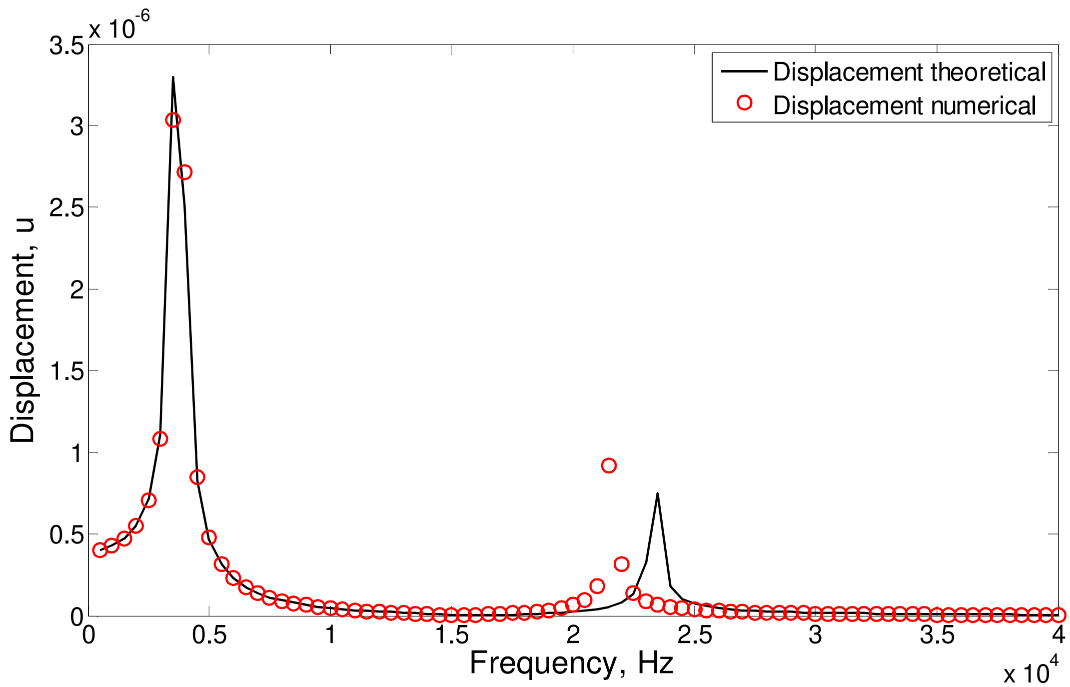


Figure 6.58: Transversal displacement for two elements cantilever beam with transversal force.

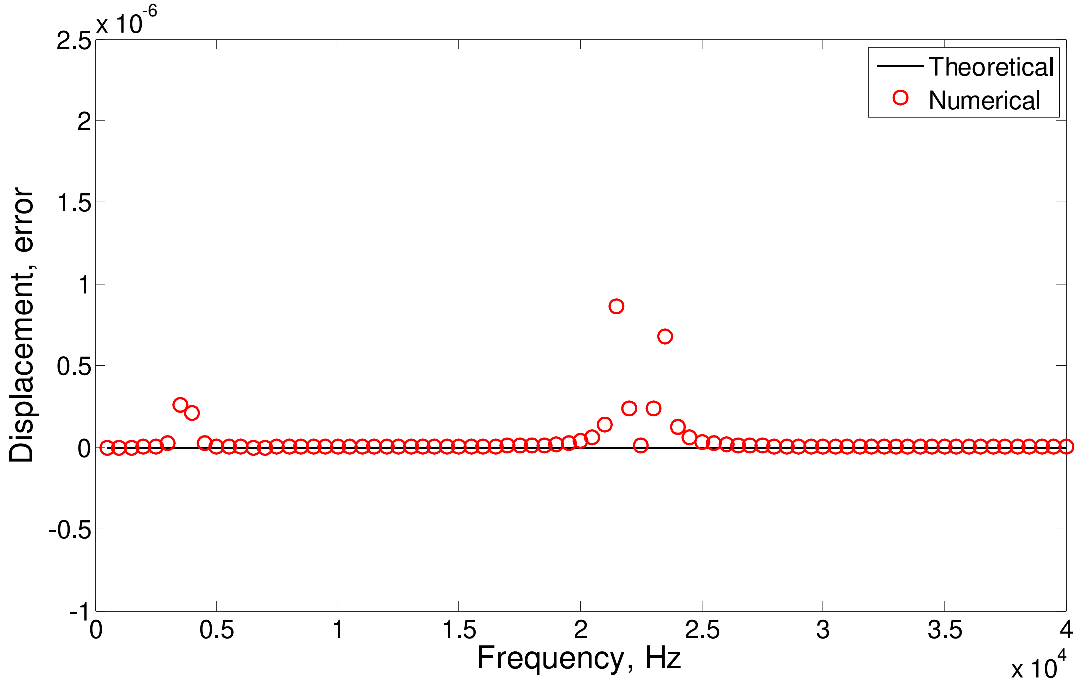


Figure 6.59: Difference between analytical and numerical displacement values for two cantilever beam with transversal force.

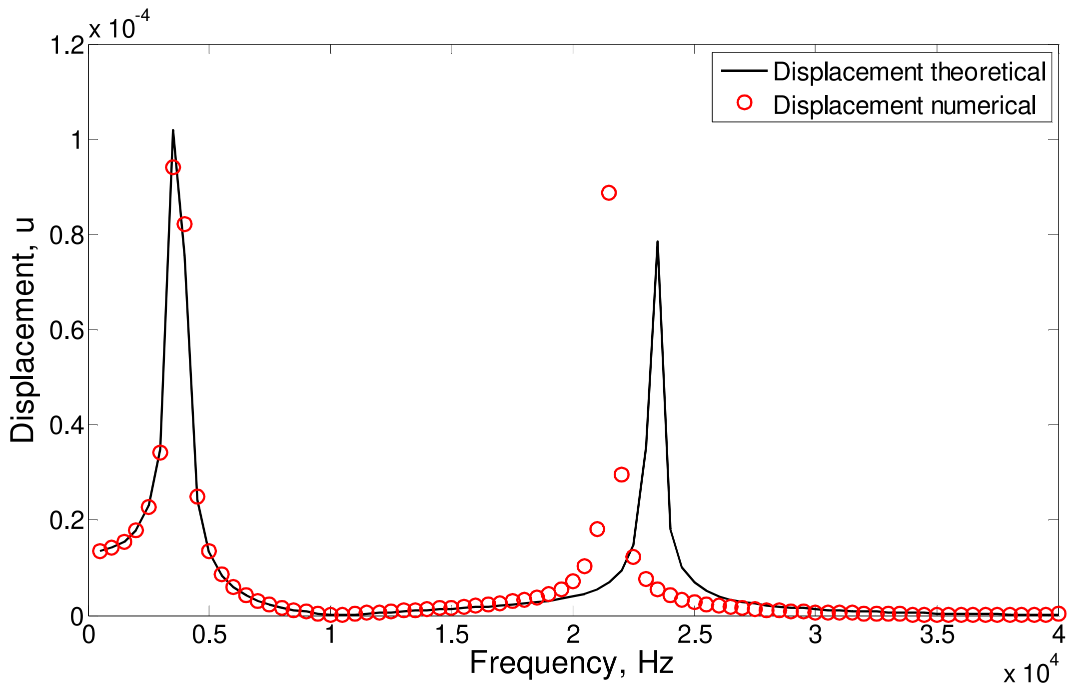


Figure 6.60: Transversal displacement for two elements cantilever beam with transversal force.

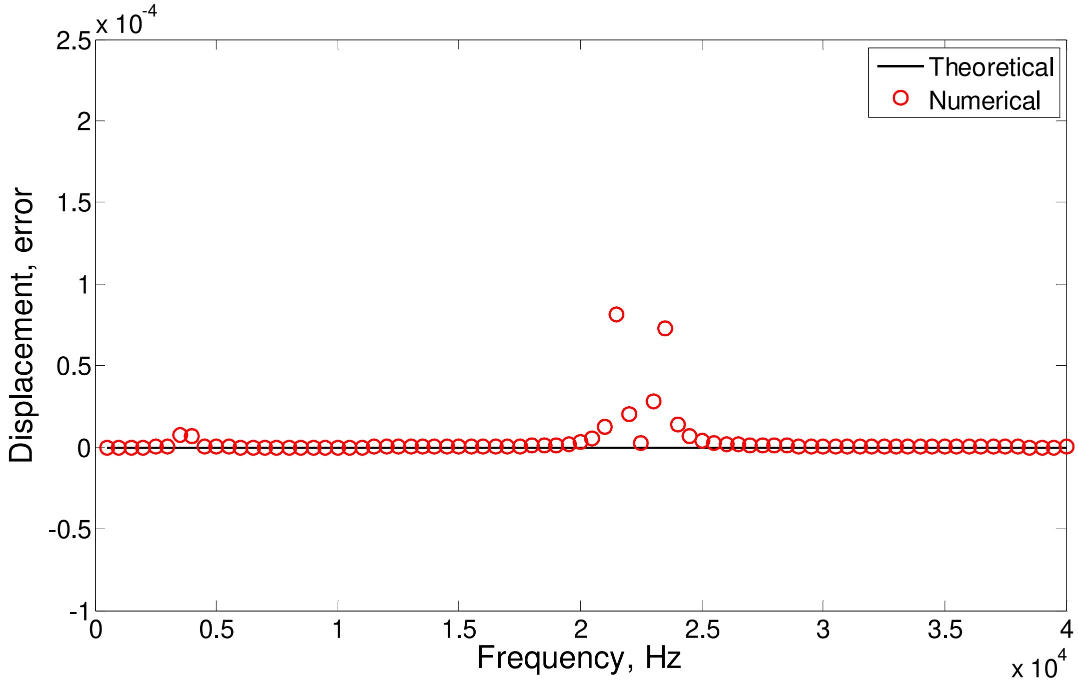


Figure 6.61: Difference between analytical and numerical displacement values for two cantilever beam with transversal force.

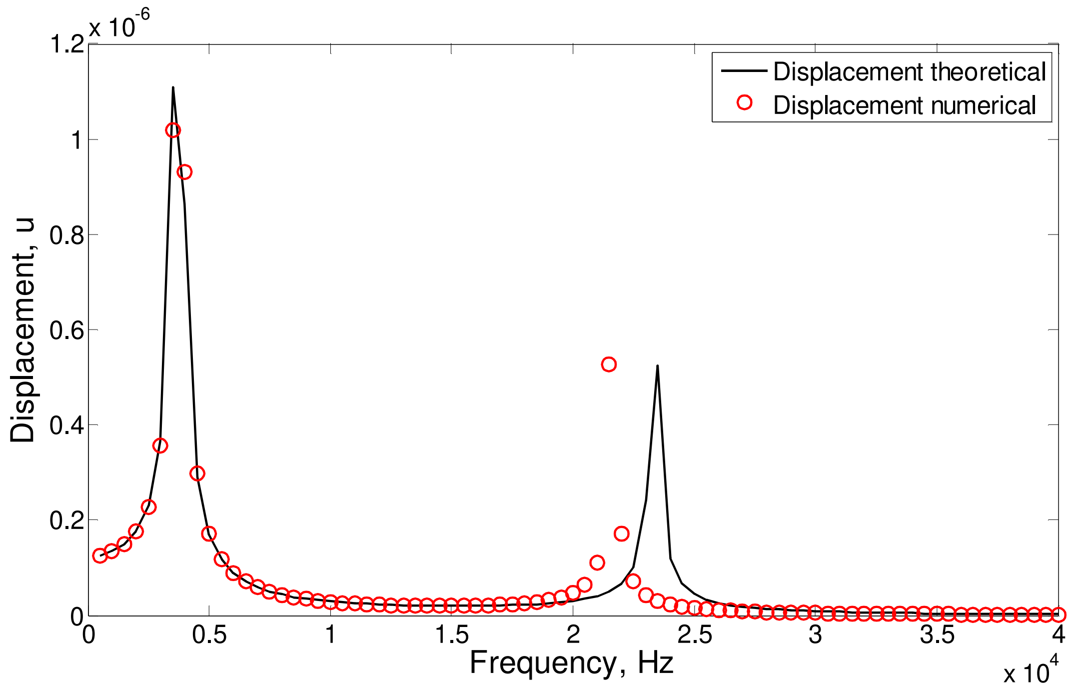


Figure 6.62: Transversal displacement for two elements cantilever beam with transversal force.

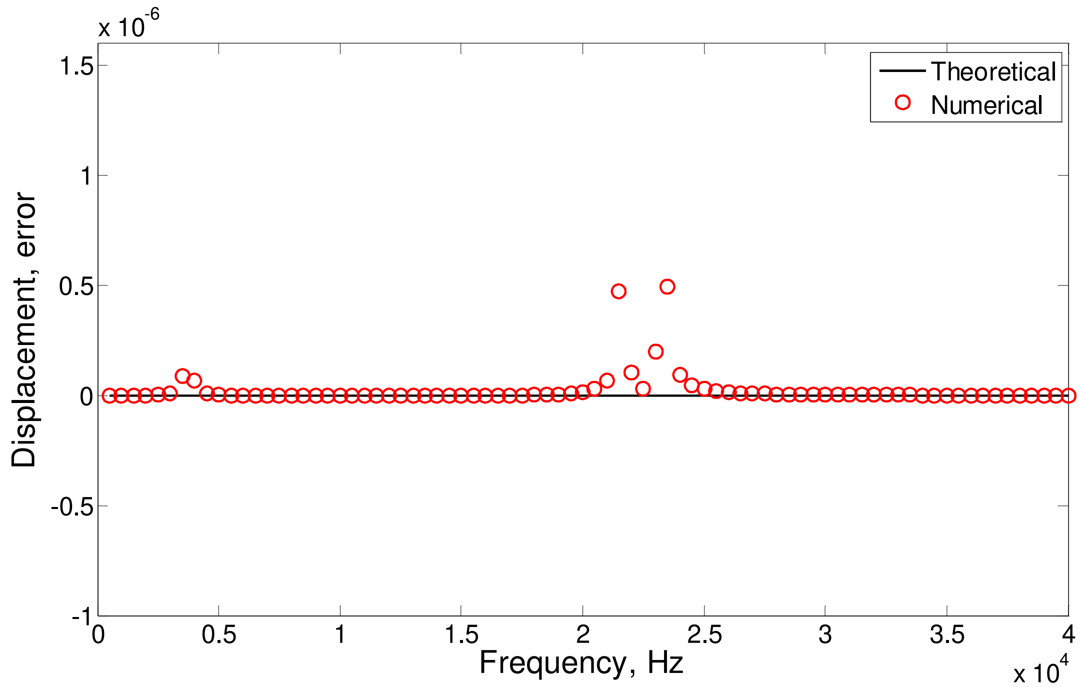


Figure 6.63: Difference between analytical and numerical displacement values for two cantilever beam with transversal force.

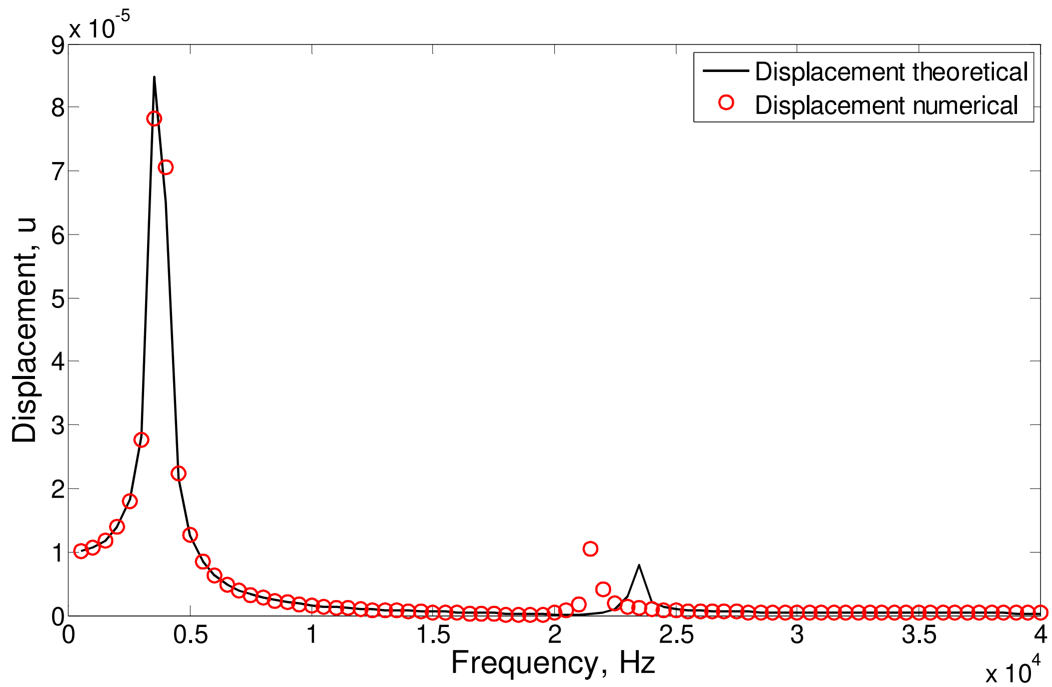


Figure 6.64: Transversal displacement for two elements cantilever beam with transversal force.

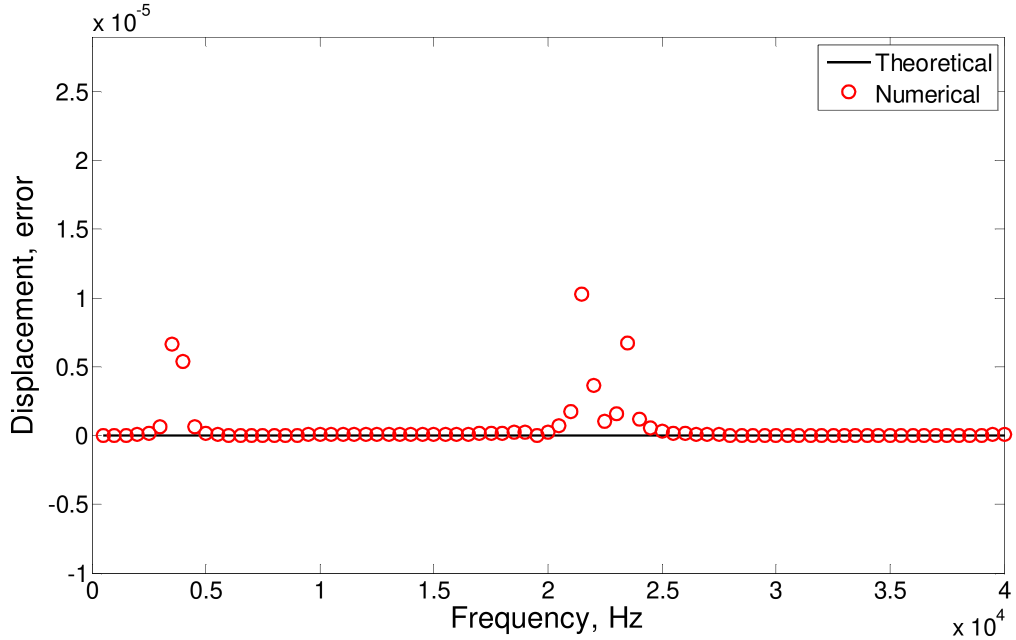


Figure 6.65: Difference between analytical and numerical displacement values for two cantilever beam with transversal force.

Results in Figures 6.66 – 6.73 show the behavior of the same plots when the analytical wavenumber is used in Equations (6.48) and (6.45) instead of the numerical wavenumber obtained from the eigenvalue problem in Equation (5.39).

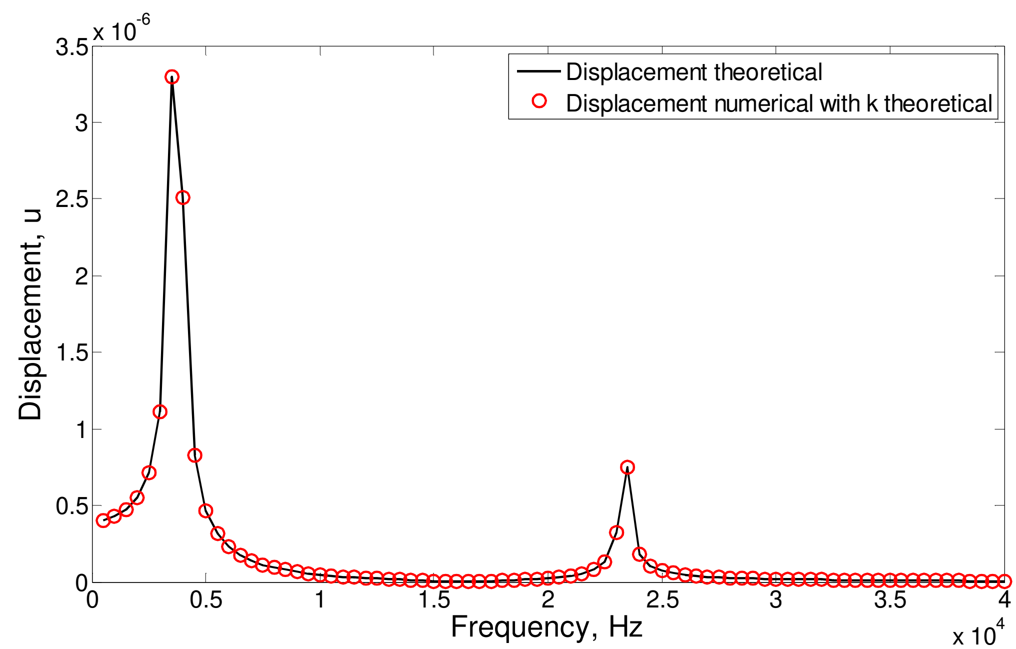


Figure 6.66: Transversal displacement using the analytical wavenumbers for two cantilever beam with transversal force.

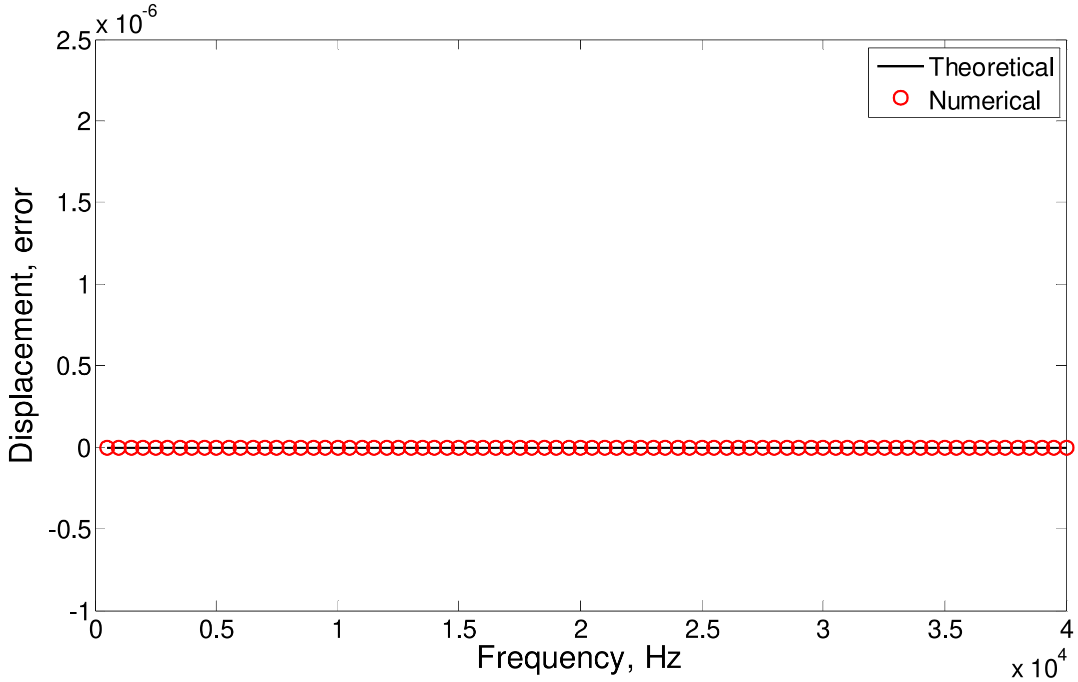


Figure 6.67: Difference between analytical and numerical displacement values using the analytical wavenumbers for two cantilever beam with transversal force.

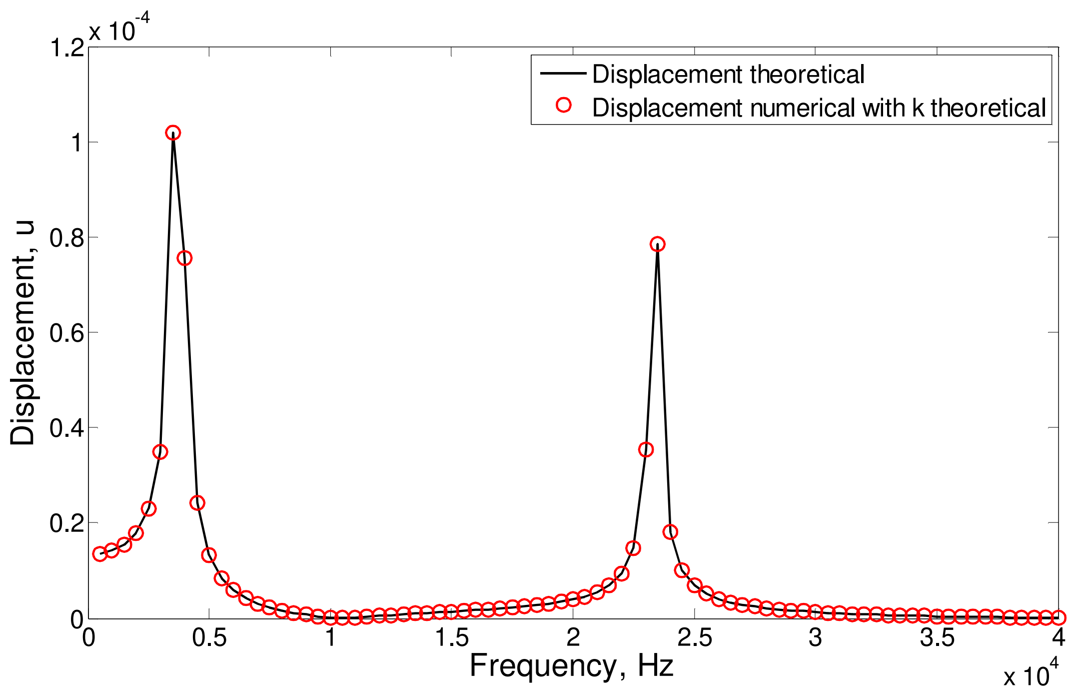


Figure 6.68: Transversal displacement using the analytical wavenumbers for two cantilever beam with transversal force.

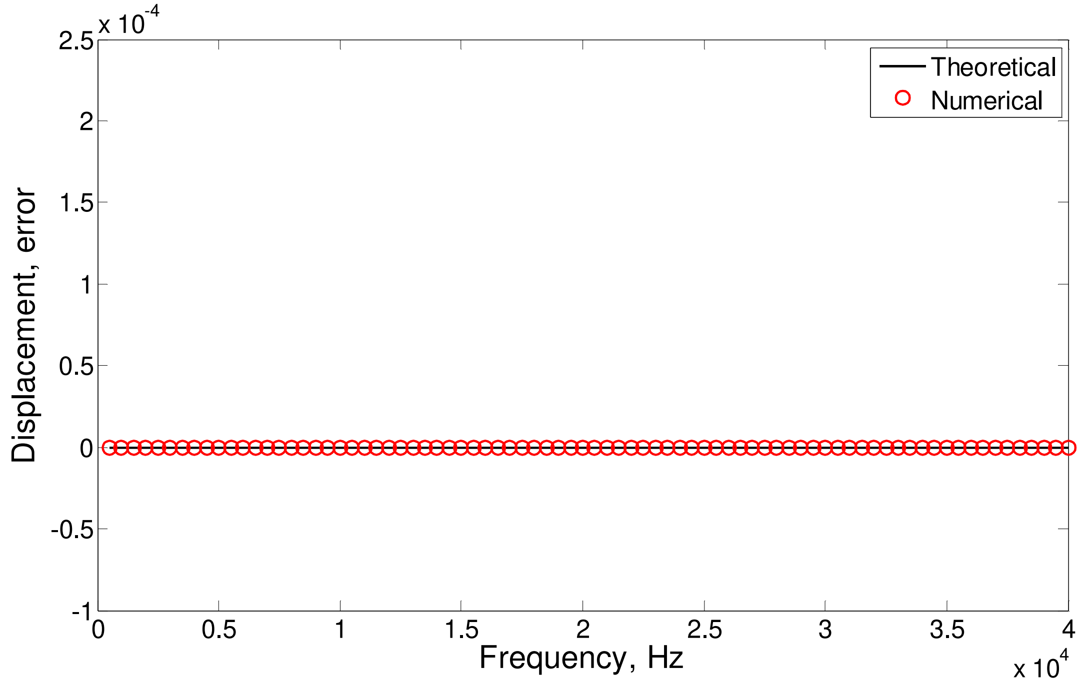


Figure 6.69: Difference between analytical and numerical displacement values using the analytical wavenumbers for two cantilever beam with transversal force.

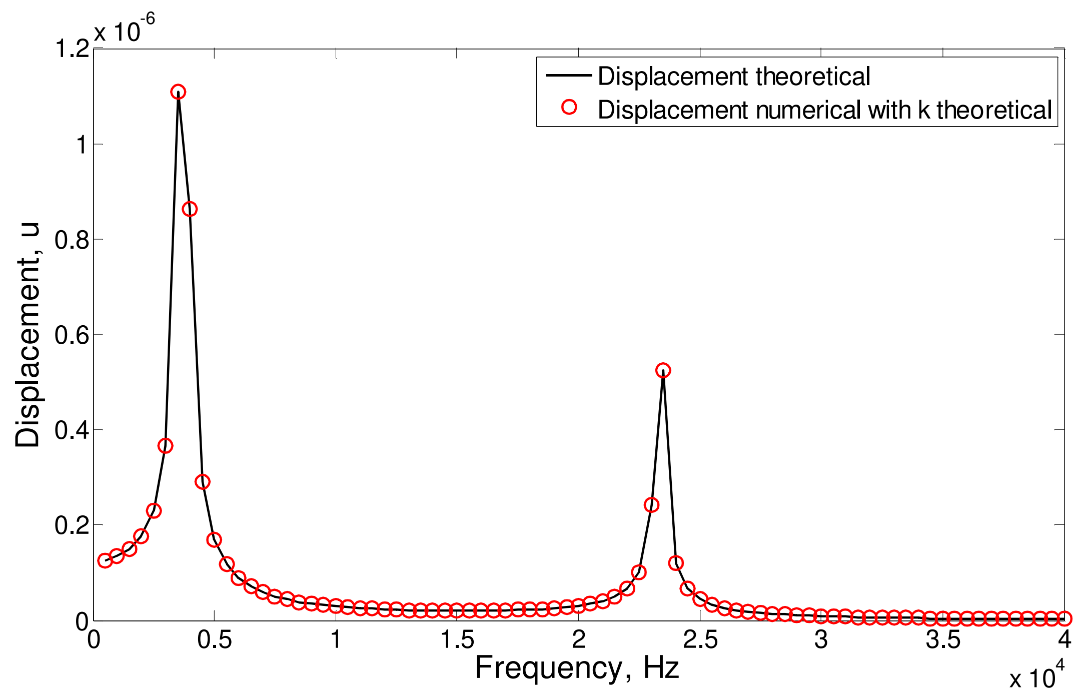


Figure 6.70: Transversal displacement using the analytical wavenumbers for two cantilever beam with transversal force.

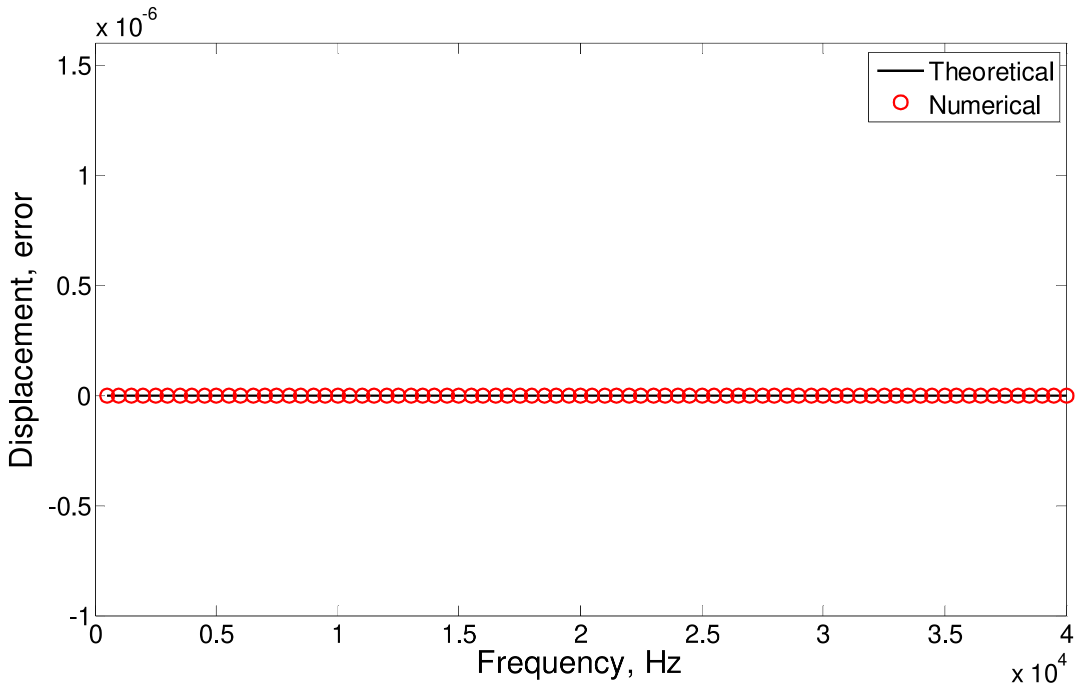


Figure 6.71: Difference between analytical and numerical displacement values using the analytical wavenumbers for two cantilever beam with transversal force.

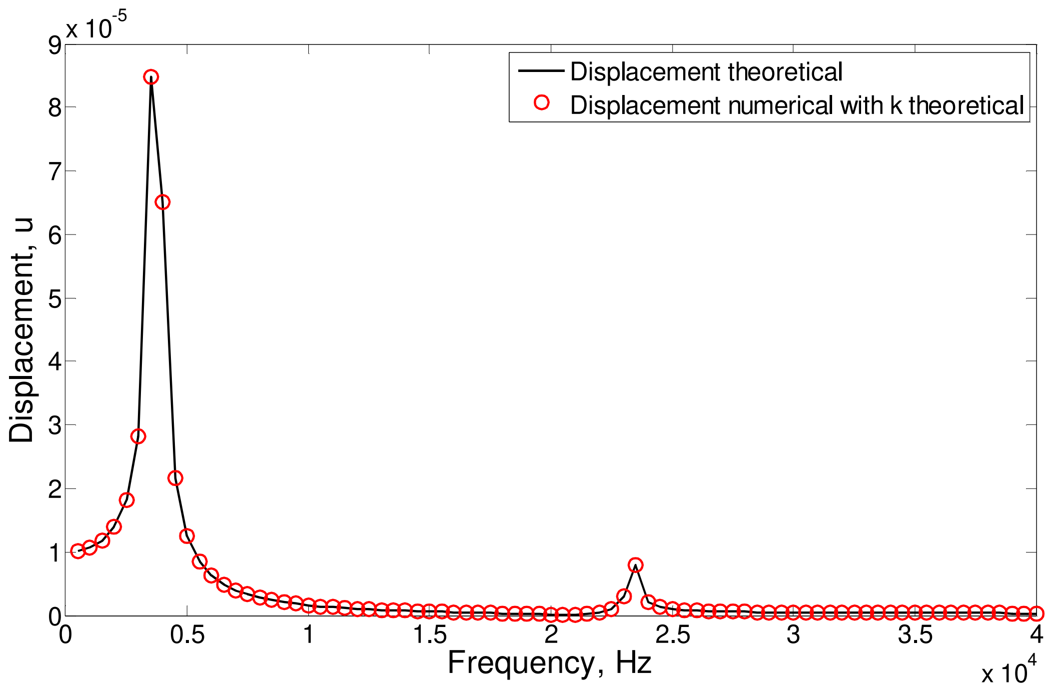


Figure 6.72: Transversal displacement using the analytical wavenumbers for two cantilever beam with transversal force.

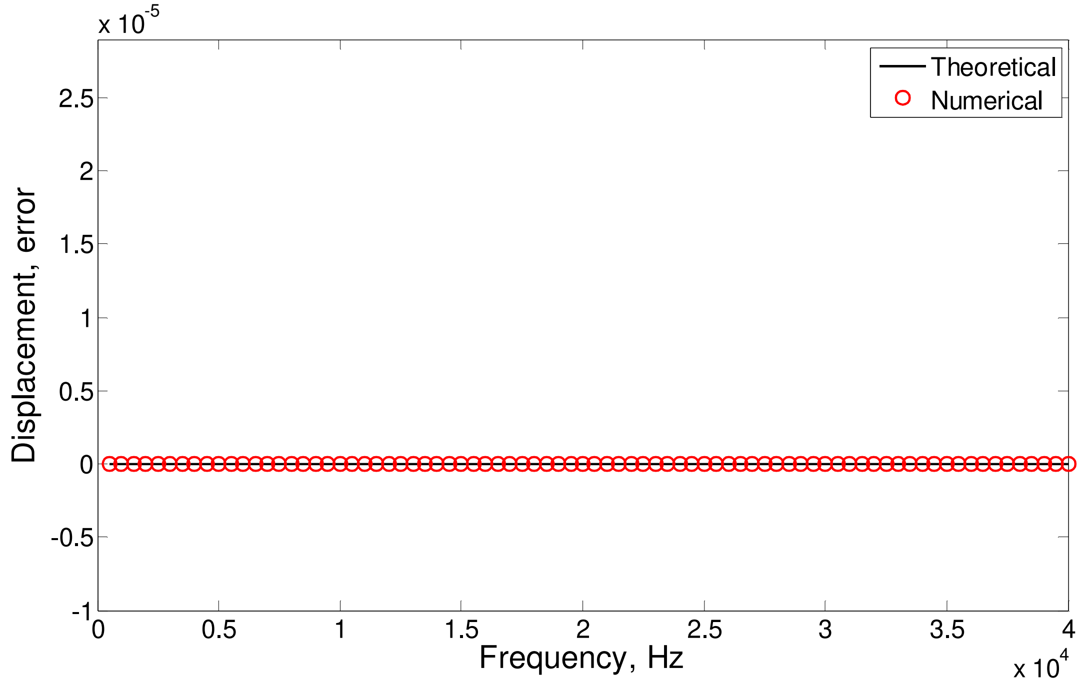


Figure 6.73: Difference between analytical and numerical displacement values using the analytical wavenumbers for two cantilever beam with transversal force.

6.10 Conclusion

The main purpose of this chapter is to show that using the wavenumber and the longitudinal and flexural wave modes obtained from the slice it is possible to obtain the numerical spectral element matrix of the rod and Bernoulli Euler beam. The validation of the results shows it is possible to use this method to obtain the numerical spectral element matrices from more complex waveguides such as frame elements with arbitrary cross section including bending, torsion and axial behavior.

From the results in this chapter it can be observed that the spectral element obtained from the FE slice of the waveguide provide a good prediction of the dynamical response of the rod and beam. This simple examples validates the proposed methodology, which allows the modeling of complex shaped cross sections and higher order rod models. In order to extend the proposed method to frame or higher order rod elements, Equations such as (6.1) and (6.3), which start from assumptions on the displacement field and use linear elasticity equations, must be formulated and Equations such as (6.8) and (6.9) can be used to derive the spectral element.

Capítulo 7

Conclusão

O trabalho teve início tratando o problema de viga submetida a uma força móvel. Foram validadas duas formas de representar a força móvel num modelo de elementos finitos. A validação foi feita no problema de uma viga bi-apoiada, que tem solução analítica para uma força móvel com velocidade constante. Foi constato que, para valores de α (parâmetro de velocidade) baixos, os resultados por elementos finitos foram satisfatórios comparados com a solução analítica existente para o problema. Verificamos, entretanto, que, quando os valores de α aumentam, os termos da série de Fourier necessários para representar os pulsos temporais podem atingir a velocidade crítica do anel e as soluções numéricas podem então divergir. O parâmetro adimensional de velocidade α tem, portanto, um papel de grande importância na solução dinâmica deste problema, particularmente para a solução numérica. Conscientes das limitações da metodologia de análise numérica para a caracterização dinâmica de estruturas flexíveis submetidas à aplicação de forças móveis, foi dada continuidade ao trabalho usando um modelo de elemento espectral simplificado de um anel circular para modelar a dinâmica de um pneu. Uma força giratória foi implementada e o "efeito de corda" devido à pressão interna (enrijecimento devido à pré-tensão) foi levado em conta. Foram obtidas as velocidades críticas para a excitação de cada modo radial da resposta de força giratória. Foram comparados resultados com resultados experimentais para um pneu de caminhão. A velocidade crítica e o número de ondas foram obtidos para o modelo simples e para pneu. O propósito principal deste trabalho foi de obter o modelo mais simples possível que pudesse explicar alguns dos fenômenos dinâmicos exibidos por pneus, particularmente quanto à ondas estacionárias formadas e às freqüências de ressonância sob uma força giratória.

Dando seqüência ao trabalho buscou-se uma ferramenta para superar as dificuldades com o modelo de anel e investigar com maior representatividade o problema dinâmico de estruturas cíclicas. Para isso fez-se uso do método de propagação de ondas a partir de um modelo de elementos finitos de uma fatia do guia de ondas (WFEM do inglês, *Wave Finite Element Method*).

Os conceitos básicos do método WFEM foram revisados e resultados para uma viga de Timoshenko foram apresentados para ilustrar a técnica. Foram usados elementos espectrais de viga de Timoshenko, viga curva, placa de Levy e modelo de Mindlin Herrmann ou dois modos para validar a implementação do método, no que poderia ser chamado de WSEM (*Wave Spectral Element Method*).

Usando o software comercial ANSYS®, uma fatia de viga foi modelada com elementos finitos sólidos (Solid45) e os resultados utilizando o WFEM são mostrados e comparados com os resultados obtidos na literatura.

Com o método implementado observaram-se bons resultados para a teoria de viga de Euler Bernoulli para baixas freqüências. A teoria de viga Timoshenko foi validada para altas freqüências e a implementação do método WFEM foi validada.

Nos resultados apresentados mostrou-se que o limite para o comprimento de onda que pode ser obtido no problema de autovalor é dado por $\lambda \geq 2D_{slice}$, onde D_{slice} é o valor máximo entre as dimensões da seção transversal da viga.

Com os conceitos do método WFEM validados, a proposta original do trabalho foi mostrar que, utilizando uma fatia de viga, é possível, através dos números de onda e dos seus respectivos modos obtidos do método WFEM, obter a matriz espectral (dinâmica) numérica para o elemento de barra e para o elemento de Euler Bernoulli. Estes elementos podem ter comprimento arbitrário.

Os resultados obtidos com a matriz espectral numérica de barra e de viga Euler Bernoulli são primeiramente validados para a matriz dinâmica de barra de dimensão 2x2 e para a matriz dinâmica de viga de Euler Bernoulli de dimensão 4x4, ambas as matrizes obtidas por condensação dos graus de liberdade da seção para um grau de liberdade por nó, em função da freqüência. O método foi estendido para incluir todos os graus de liberdade longitudinais e transversais do modelo de elementos finitos da fatia em uma das faces. Retendo-se apenas os modos de onda plana, mostrou-se que se obtêm novamente os resultados da barra elementar. Dois elementos foram usados para verificar a metodologia de acoplamento dos elementos. Isso mostrou que é possível construir novos elementos com diferentes seções e comprimentos de forma numérica a partia do modelo de elementos finitos de uma fatia do guia de ondas.

Uma das principais dificuldades encontradas foi a de como separar e organizar os números de ondas com significado físico obtidos do problema de autovalor e seus respectivos modos de propagação e assumir um determinado campo de deslocamentos que possa representar adequadamente o problema estudado.

Com os bons resultados apresentados nos exemplos e cientes das dificuldades no uso do método para obter matrizes espectrais através do método WFEM, o método proposto pode se tornar uma ferramenta útil para resolver diversos problemas onde soluções numéricas ou analíticas eficientes ainda não existem.

Exemplos de aplicações para o método proposto são tubulações, trilhos, pneumáticos automotivos e outras estruturas que têm uma dimensão muito maior que as outras duas, caracterizando uma seção transversal pela qual se propagam as ondas de tração-compressão e de cisalhamento no sólido. A difusão do método WFEM e do método proposto necessita ainda de estudos sobre os problemas numéricos envolvidos, tanto na solução do problema de autovalor como na obtenção da matriz espectral dinâmica de elementos de comprimento arbitrário para diferentes freqüências.

7.1 Sugestões para trabalhos futuros

1. Obter a matriz espectral numérica de barra para os modelos: Mindlin Herrmman ou modelo dos dois modos e Mindlin McNiven ou modelo dos três modos

2. Obter a matriz espectral numérica de viga curva e comparar com os resultados apresentados no capitulo 3.

3. A modelagem de elementos com falhas para a simulação de métodos de detecção de falhas por propagação de ondas.

4. A inclusão de propriedades não isotrópicas de materiais,

5. A modelagem de materiais compósitos

7.2 Trabalhos publicados

Durante a realização desta tese, foram publicados os seguintes artigos em anais de congressos e em periódico.

7.2.1 Artigo completo publicado em periódico

Delamotte, J. C., Nascimento, R. F., Arruda, J. R. F., Simple models for the dynamic modeling of rotating tires. Shock and Vibration, v. 15, p. 383-393, 2008.

7.2.2 Trabalhos completos publicados em anais de congressos

Delamotte, J. C., Nascimento, R. F., Arruda, J. R. F., Simple Models the Dynamic Modeling of Rotating Tires. In: Int. Conf. on Engineering Dynamics, 2007, Carvoeiro. Proc. Int. Conf. on Engineering Dynamics. Lisboa : IST, 2007. v. 1. p. 1-10.

Arruda, J. R. F., Nascimento, R. F., Building Spectral Elements from Finite Element Models of Waveguide Slices. In: Ninth International Conference on Computational Structures Technology, 2008, Atenas. Proc. IX CST. Stirlingshire: Civil-Comp Press, 2008. v. 1. p. 1-12.

Arruda, J. R. F., Nascimento, R. F., Building Spectral Element Dynamic Matrices Using Finite Element Models of Waveguide Slices. Noise and Vibration: Emerging Methods, NOVEM, 2009.

Referências Bibliográficas

Ahmida, K.M., Arruda, J.R.F., Spectral element-based prediction of active power flow in Timoshenko beams. International Journal of Solids and Structures, 38(1), 1669-1679, 2001.

Arruda, J. R. F., Ahmida, K. M., Ichchou, M. N., Mencik, J. M., Investigating the relations between the wave finite element and spectral element methods using simple waveguides, 19th International Congress of Mechanical Engineering-COBEM, 2007.

Beale, L. S., Accorsi, M. L., Power flow in two- and three-dimensional frame structures. Journal of Sound and Vibration, 185, 685–702, 1995.

Birgersson, F., Prediction of Random Vibration Using Spectral Methods, PhD Thesis, KTH, TRITA-AVE, Stockholm, 2003, p. 30.

Birgersson, F., Finnveden, S., A spectral super element for modelling o f plate vibration. Part 2: turbulence excitation. Journal of Sound and Vibration, 287, 315–328, 2005.

Bolton, J. S., Song, H. J, Kim, Y. K., Newland, D. E., The wave number decomposition approach to the analysis of tire vibration. Proceedings of NOISE-CON, 97-102, 1998.

Brillouin, L., Wave propagation in Periodic Structures, Dover, New York, 1953.

Chen, Y. H., Huang, Y., H., Dynamic stiffness of infinite Timoshenko beam on viscoelastic foundation in moving co-ordinate. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 48, 1-18, 2000.

Clough, R. W., Penzien, J., Dynamical of Structures. Oxford: Pergamon Press, 1975.

Craig, R.R. "Structural Dynamics : An Introduction to Computer Methods", New York: John Wiley, 1981.

Datta, B. N., Numerical linear algebra and applications. Brooks/Cole Publishing Company, 1994.

Delamotte, J. C., Nascimento, R. F., Arruda, J. R. F., Simple models for the dynamic modeling of rotating tires, Shock and Vibration, 15, 2008.

Douville, H., Masson, P., Berry, A., On-resonance transmissibility methodology for quantifying the structure-borne road noise of an automotive suspension assembly, Applied Acoustics, 67, 358–382, 2006.

Doyle, J. F., Wave propagation in structures: a spectral analysis approach, 2nd edition, Springer-Verlag New York, 1997.

Duhamel, D., Mace, B., Brennan, M., Finite element analysis of the vibrations of waveguide and periodic structures. Journal of Sound and Vibration, 294, 205-220, 2006.

Duhamel, D., Mace, B. Brennan, M., Finite element analysis of the vibration of waveguides and periodic structures. In, Proceedings of the 6th European Conference on Structural Dynamics. Rotterdam, the Netherlands, MilPress, 1741-1746, 2005.

Duhamel, D., A recursive approach for the finite element computation of waveguides. Jounal of Sound and Vibration, 2008.

Finnveden, S., Finite element techniques for the evaluation of energy flow parameters. Proceedings of the Novem, Lyon (keynote paper), 2000.

Finnveden, S., Evaluation of modal density and group velocity by a finite element method. Journal of Sound and Vibration, 273, 51–75, 2004.

Finnveden, S., Exact spectral finite element analysis of stationary vibrations in a railway car structure. Acta Acustica, 2, 433–449, 1994.

Flotow, H., Disturbance propagation in structural networks. Journal of Sound and Vibration, 106 433–450, 1986.

Frýba, L., Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. Groningen: Noodhoff International publishing, 1972.

Gavric, L., Finite element computation of dispersion properties of a thin walled waveguide. Journal of Sound and Vibration, 173(1), 113-124, 1994.

Gavric, L., Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique. Journal of Sound and Vibration, 185, 531-543, 1995.

Gorman, D.J., Vibration analysis of plates by the superposition method. New York: World Scientific Publishing Co, 1999.

Golub, G. H., Loan, C. F. V., Matrix Computations. The Johns Hopkins University Press, 1996.

Gould, P. L., Introduction to Linear Elasticity. New York: Springer-Verlag, 1983.

Graff, K. G., Wave motion in elastic solids. London: Oxford University Press 1991.

Gry, L., Dynamic modelling of railway track based on wave propagation. Journal of Sound and Vibration, 195, 477–505, 1996.

Hinke, L., Mace, B., Brennan, M., Finite element analysis of waveguide. Southampton, University of Southampton, Institute of Sound and Vibration Research, 40p, 2004. (ISVR Technical Memorandum, 932).

Igawa, H., Komatsu, K., Yamaguchi, I., Kasai, T., Wave propagation analysis of frame structures using the spectral element method. Journal of Sound and Vibration, 277, 1071-1081, 2004.

Kang, B., Riedel, C. H., Tang, C.A., Free vibration analysis of planar curved beams by wave propagation. Journal of Sound and Vibration, 260, 19–44, 2003.

Kessler, S. S., Spearing, S. M., Soutis, C., Damage detection in composite materials using lamb wave methods. Smart Mater. Struct., 11, 269–278, 2002.

Kim, J. Y., Introduction to dynamics and control of flexible structures. Education Series, 1992.

Krawczuk, M., Grabowskaa, J., e Palacz, M., Longitudinal wave propagation. Part I - comparison of rod theories. Journal of Sound and Vibration, 295, 461-478, 2006.

Krawczuk, M., Grabowskaa, J., Palacz, M., Longitudinal wave propagation. Part II - comparison of rod theories. Journal of Sound and Vibration , 295, 479-490, 2006.

Lee, U., Spectral element method in structural dynamics. Inha University Press, 2004.

Lee, U., Kim, J., Oh, H., Spectral analysis for the transverse vibration of an axially moving Timoshenko beam. Journal of Sound and Vibration 271, 685-703, 2004.

Mead, D. J., A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. Journal of Sound and Vibration, 27(2), pp. 235–260, 1973.

Mead, D. J., Wave propagation and natural modes in periodic systems: multi-coupled systems, with and without damping. Journal of Sound and Vibration, 40(1), pp. 19-39, 1975.

Mace, B., Duhamel, D., Brennan, M., Hinke, L., Finite element prediction of wave motion in structural waveguides. J. Acoust. Soc. Am., 117(5), 2835-2843, 2005.

Manconi, E., Mace, B., Modelling wave propagation in two-dimensional structures using a wave/finite element technique. In, COMPDYN: Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Crete, Greece. Southamptom, UK, University of Southampton, 47p, 2007.

Mencik, J. M., Ichchou M. N., Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements. European Journal of Mechanics A/Solids, 24, 877–898, 2005.

Moulet, M. H., Junctions in mechanical vibrations: representation by a diffusion matrix and experimental characterization for assembled beams (in French). Doctor dissertation, University of Maine, 155 pp, 2003.

Nilsson, C. M., Waveguide Finite Elements for Thin-Walled Structures, Licentiate Thesis, KTH, Stockholm, 2002.

Olsson, M., On the fundamental moving load problem. Journal of Sound and Vibration **145**(2), 299-307, 1991.

Orrenius, U., Finnveden, S., Calculation of wave propagation in rib-stiffened plate structures. Journal of Sound and Vibration, 198(2), 203-224, 1996.

Pany, C., Parthan, S., Axial wave propagation in infinitely long periodic curved panels. Journal of Vibration and Acoustics, 125, 24-30, 2003.

Pilkey, W. D., Analysis and design of elastic beams: computational methods. New York, John Wiley, 2002.

Petyt, M., Introduction to finite element vibration analysis. Cambridge University Press, 1996.

Szilards, R., Theory and analysis of plate, Prentice Hall, New Jersey, USA, 28-42, 1974.

Santos, J.M.C., Costa, A. L. A., Arruda, J.R.F., Truck tire finite element model validation by experimental modal analysis. Proc. of the Int. Conf. on Structural Dynamics Modeling, Funchal, Madeira, Portugal, Jun. CD-ROM, 11p, 2002.

Shorter, P. J., Wave propagation and damping in linear viscoelastic laminates. Journal of the Acoustical Society of America, 115, 1917–1925, 2004.

Soedel, W., On the dynamic response of tires according to thin shell approximations. Journal of Sound and Vibration, 41, 233-246, 1975.

Venâncio, F. V., Finite Element Analysis of Structures under moving loads. Shock and Vibration Digest, **10**(8), 27-35, 1978.

Waki, Y., Mace, B., Brennan, M., Vibration analysis of a tyre model using the wave finite element method. 19th International Congress on Acoustics Madrid, 2007.

Waki, Y., On the application of finite element analysis to wave motion in one-dimensional waveguide. Faculty of Engineering, Science and Mathematics Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton, 2007, 205p. PhD thesis.

Waki, Y., Mace, B.R., Brennan, M. J., Waveguide finite element modeling: numerical issues and application to simple waveguides. Proceedings of ISMA, Leuven, Belgium, pp. 2435-2449, 2006.

Wang, D., Zhoud, C., Rong, J., Free and forced vibration of repetitive structures. International Journal of Solids and Structures, 40, 5477-5494, 2003.

Warburton, G. B., The dynamical behaviour of structures. Oxford: Pergamon Press, 1976.

Yoshida, D. M., Weaver, W., Finite Element Analysis of beam and plates with moving loads. Publication of International Association for Bridge and Structural Engineering, **31**(1), 179-195, 1971.

Zhong, W.X., Williams, F.W., On the direct solution of wave propagation for repetitive structures. Journal of Sound and Vibration, 181, pp. 485–501, 1995.