

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL I
TESE DEFENDIDA POR Sérgio Adriani
David E APROVADA PEI
COMISSÃO JULGADORA EM 14/02/2003

João Maurício Rosário
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELAGEM DINÂMICA, SIMULAÇÃO E
VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DE
ESTRUTURAS FLEXÍVEIS**

Autor: **Sérgio Adriani David**

Orientador: **João Maurício Rosário**

2003

**UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

MODELAGEM DINÂMICA, SIMULAÇÃO E VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

Autor: Sérgio Adriani David

Orientador: João Maurício Rosário

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2003

S.P. – Brasil

UNIDADE	80
Nº CHAMADA	UNICAMP D28m
V	EX
TOMBO BCI	54199
PROC.	124103
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	12/06/03
Nº CPD	

CM001B5233-5

16 D 293078

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

D28m David, Sérgio Adriani
Modelagem dinâmica, simulação e validação
experimental de estruturas flexíveis / Sérgio Adriani
David. --Campinas, SP: [s.n.], 2003.

Orientador: João Maurício Rosário.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Teoria dos sistemas dinâmicos. 2. Oscilações não-
lineares. 3. Deformações (Mecânica). 4. Robótica. I.
Rosário, João Maurício. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III.
Título.

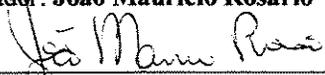
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

TESE DE DOUTORADO

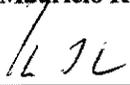
**Modelagem Dinâmica, Simulação e Validação
Experimental de Estruturas Flexíveis**

Autor: Sérgio Adriani David

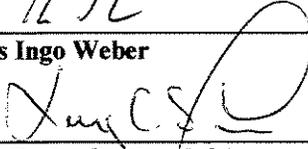
Orientador: João Maurício Rosário



Prof. Dr. João Maurício Rosário, Presidente
UNICAMP



Prof. Dr. Hans Ingo Weber
PUC-RJ



Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes
ITA



Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka
UNICAMP



Prof. Dr. José Manoel Balthazar
UNICAMP

Campinas, 14 de fevereiro de 2003

200300214

Dedicatória:

Dedico este trabalho ao meu querido pai Romeu David (in memoriam), à minha querida mãe Virgilina B. David e à minha querida esposa Patrícia Barbieri David.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha sincera homenagem:

Primeira e principalmente, a DEUS.

Especialmente aos meus pais, pelo permanente incentivo e suporte moral fornecido desde o início de minha educação.

À minha querida esposa , Patrícia Barbieri David, pelo incentivo e compreensão quando da minha ausência para a concretização desse trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Maurício Rosário por suas importantes e direcionadas sugestões cumprindo seu papel no decorrer deste trabalho.

Aos colegas Néelson F. D. Vanzetti, Marcos Cardozo e Juliano Machado pelas participações diretas e decisivas na construção do aparato experimental desenvolvido nessa tese e, sem os quais esse trabalho não poderia ter-se concretizado no tempo devido.

À Bosch Freios que gentilmente cedeu ao projeto equipamentos e instrumentos fundamentais para a construção e funcionamento da bancada experimental.

À Fapesp - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - que acreditou nesse projeto.

Resumo

DAVID, Sergio Adriani, **Modelagem Dinâmica, Simulação e Validação Experimental de Estruturas Flexíveis**, Campinas, : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003., 148 p. Tese (Doutorado)

Neste trabalho desenvolveu-se a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis, a investigação de seu comportamento não linear por meio de simulações numéricas e a validação experimental através da montagem de um protótipo. Ressalta-se que, em se tratando de sistemas não lineares, embora existam métodos de procedimento, não existe uma teoria única que possa atender às diferentes aplicações e necessidades de análise não linear. Dessa maneira, abordou-se formas específicas de se tratar duas aplicações distintas, uma envolvendo manipuladores robóticos flexíveis e a outra um oscilador mecânico flexível. Desenvolveu-se ferramentas de modelagem, simulação, análise e implementação. A aplicação envolvendo o oscilador mecânico flexível teve âmbitos experimentais e os resultados de alguns ensaios sugerem uma boa concordância com o modelo teórico. Os resultados obtidos desse trabalho e o aparato experimental montado, ambos, permitem que diversas investigações futuras ainda possam ser realizadas e podem agregar conhecimento sobretudo aos interessados em temas relacionados à estruturas flexíveis e análise não linear.

Palavras Chave

1. Estruturas Flexíveis. 2. Análise Não Linear. 3. Robôs Flexíveis. 4. Sistema Magneto-elástico

Abstract

DAVID, Sergio Adriani, *Dynamic Modeling, Simulation and Experimental Validation of Flexible Structures*, Campinas, : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003., 148 p. Tese (Doutorado)

This work describes the dynamic modeling of flexible structures, the investigation about its nonlinear behaviour through numerical simulations and the construction of an experimental apparatus in order to validate the model. I outline the fact that to deal with nonlinear systems, although there are conduct method, there isn't a unique theory that could to attend to different applications and necessities of nonlinear analysis. For this reason, specific approach had been presented to deal with two applications, flexible robot manipulators and flexible mechanical oscillator. Dynamic modeling, numerical simulation, analysis and implement are performed. The application which involves the flexible mechanical oscillator have experimental scope and the results have showed a good agreement with the theoretical model. The results obtained and the experimental apparatus constructed , both, allow sundry future investigations and can add knowledge specially to the interested in flexible structures and nonlinear analysis.

Keywords

1. Flexible Structures. 2. Nonlinear Analysis. 3. Flexible Robots. 4. Elastic Systems.

Índice:

Lista de Figuras	i
Lista de Tabelas	viii
Nomenclatura	ix
Capítulo 1: Introdução	
Introdução	1
1.1 Objetivos do trabalho	3
1.2 Breve revisão bibliográfica	4
1.3 Organização do trabalho	6
Capítulo 2: Sistemas Dinâmicos Lineares e Não Lineares – Uma Breve Discussão	
2.1 Introdução	9
2.2 O plano de fase: sistemas lineares	11
2.3 Sistemas autônomos e estado de equilíbrio	13
2.4 Estabilidade e instabilidade	16
2.5 Soluções periódicas e ciclos limites	17
2.6 Caos e atratores estranhos	19
2.7 Controle de sistemas não lineares	20
2.8 Comentários	23

Capítulo 3: Modelagem Dinâmica e Simulação Numérica de Manipuladores – Uma Ênfase em Robôs Flexíveis

3.1 Introdução	24
3.2 Manipulador Rígido	28
3.3 Manipulador Flexível	32
3.3.1 Modelo Físico	34
3.3.2 Descrição Cinemática	36
3.3.3 Energia Cinética	39
3.3.4 Energia Potencial	42
3.3.5 Equações de Movimento	43
3.4 Simulações e Resultados	59
3.4.1 Manipulador Rígido – Sistema Desacoplado	60
3.4.2 Manipulador Rígido – Sistema Acoplado	62
3.4.3 Manipulador Flexível – Sistema Acoplado	65
3.5 Análise Qualitativa de Fronteira Rígido e Flexível	68
3.6 Comentários	69

Capítulo 4: Modelagem Dinâmica, Simulação Numérica e Proposta de uma Plataforma Experimental de um Sistema Magneto-Elástico

4.1 Introdução	71
4.2 Modelagem Dinâmica	72
4.3 Resultados e Simulações	76
4.4 Comentários sobre os Resultados de Simulação	83
4.5 Implementação Experimental	84
4.6 Descrição dos Principais Elementos da Bancada	86
4.6.1 Controlador Lógico Programável	86
4.6.2 Driver do Motor de Passo	88

4.6.3 Sistema de Aquisição de Sinais	90
4.7 Modos de Funcionamento da Bancada	92
4.7.1 Modo Home	92
4.7.2 Modo Calibração	92
4.7.3 Modo Ensaiai	93
4.7.4 Interfaces Gráficas	93
4.8 Resultados Experimentais	95
4.9 Comentários Finais e Discussões	98
Capítulo 5: Conclusões Finais e Sugestões para Trabalhos Futuros	
5.1 Introdução	99
5.2 Conclusões sobre a Modelagem de Manipuladores Flexíveis	100
5.3 Conclusões sobre o Sistema Magneto-Elastico	101
5.4 Sugestões para Trabalhos Futuros	102
Referências Bibliográficas	103
Anexo A	112
Anexo B	122
Anexo C	128
Anexo D	133

Lista de Figuras

- 2.1 Modelagem de um Problema Real
- 2.2 Sistemas Lineares e Não Lineares
- 3.1 Links 2 e 3 (possível flexibilidade)
- 3.2 Estrutura de Controle
- 3.3 Sistema de Compensação de Efeitos Físicos
- 3.4 Manipulador Rígido com Dois Graus de Liberdade
- 3.5 Sistema desacoplado
- 3.6 Sistema acoplado e flexível
- 3.7 Modelo Físico Proposto
- 3.8 Vetor posição de um ponto sobre o link 1
- 3.9 Vetor posição de um ponto sobre o link 2
- 3.10 Quadro Resumo

- 3.11 Sistema desacoplado
- 3.12 Resultados de Simulação – Manipulador Rígido (Sistema Desacoplado)
- 3.13 Sistema Acoplado
- 3.14 Manipulador Rígido – Sistema Acoplado (Carga Nula)
- 3.15 Manipulador Rígido – Sistema Acoplado (Carga na Extremidade)
- 3.16 Sistema Flexível
- 3.17 Resultados de Simulação – Manipulador Flexível (Sistema Acoplado)
- 3.18 Resultados de Simulação – Sistemas Rígido e Flexível
- 4.1 Modelo Teórico do Sistema Magneto – Elástico
- 4.2 Duplo poço de potencial
- 4.3 Dispositivo Mecânico
- 4.4 Fluxograma do Projeto
- 4.5 Controlador Lógico Programável – C.L.P.

- 4.6 Driver do motor de passo
- 4.7 Otimização das ligações elétricas
- 4.8 Driver do motor de passo
- 4.9 Sistema de aquisição de sinais
- 4.10 Aparato experimental
- 4.11 Tela de interface da bancada
- 4.12 Indicador Posição x Tempo
- 4.13 Indicador Velocidade x Tempo
- 4.14 Indicador Velocidade x Posição

Gráficos

- 1 Posição Angular x Tempo (Sistema desacoplado e carga nula)
- 2 Posição Angular x Tempo (Sistema desacoplado e carga na extremidade)
- 3 Velocidade Angular x Tempo (Sistema desacoplado e carga nula)
- 4 Velocidade Angular x Tempo (Sistema desacoplado e carga na extremidade)
- 5 Aceleração Angular x Tempo (Sistema desacoplado e carga nula)
- 6 Aceleração Angular x Tempo (Sistema desacoplado e carga na extremidade)
- 7 Posição Angular Junta 1 x Tempo (Sistema acoplado e carga nula)
- 8 Posição Angular Junta 2 x Tempo (Sistema acoplado e carga nula)
- 9 Velocidade Angular Junta 1 x Tempo (Sistema acoplado e carga nula)
- 10 Velocidade Angular Junta 2 x Tempo (Sistema acoplado e carga nula)
- 11 Aceleração Angular Junta 1 x Tempo (Sistema acoplado e carga nula)

- 12 Aceleração Angular Junta 2 x Tempo (Sistema acoplado e carga nula)
- 13 Posição Angular Junta 1 x Tempo (Sistema acoplado e carga na extremidade)
- 14 Posição Angular Junta 2 x Tempo (Sistema acoplado e carga na extremidade)
- 15 Velocidade Angular Junta 1 x Tempo (Sistema acoplado e carga na extremidade)
- 16 Velocidade Angular Junta 2 x Tempo (Sistema acoplado e carga na extremidade)
- 17 Aceleração Angular Junta 1 x Tempo (Sistema acoplado e carga na extremidade)
- 18 Aceleração Angular Junta 2 x Tempo (Sistema acoplado e carga na extremidade)
- 19 Posição Angular Junta 1 x Tempo (Sistema Flexível)
- 20 Posição Angular Junta 2 x Tempo (Sistema Flexível)
- 21 Velocidade Angular Junta 1 x Tempo (Sistema Flexível)
- 22 Velocidade Angular Junta 2 x Tempo (Sistema Flexível)
- 23 Posição Angular Junta 1 x Tempo (Sistema Rígido e Flexível)
- 24 Posição Angular Junta 2 x Tempo (Sistema Rígido e Flexível)

- 25 Posição Angular Junta 1 x Tempo (Sistema Rígido e Flexível)
- 26 Posição Angular Junta 2 x Tempo (Sistema Rígido e Flexível)
- 27 Posição Angular Junta 1 x Tempo (Sistema Rígido e Flexível)
- 28 Posição Angular Junta 2 x Tempo (Sistema Rígido e Flexível)

- 4.1 Transiente caótico/Indicativo de caos
- 4.2 Indicativa de caos
- 4.3 Solução periódica
- 4.4 Solução periódica
- 4.5 Transiente caótico/Indicativo de caos
- 4.6 Transiente caótico
- 4.7 Transiente caótico/Indicativo de caos
- 4.8 Indicativa de caos
- 4.9 Solução periódica

4.10 Solução periódica

4.11 Transiente caótico

4.12 Indicativa de caos

4.13 1º Ensaio experimental

4.14 2º Ensaio experimental

4.15 3º Ensaio experimental

4.16 4º Ensaio experimental

Lista de Tabelas

- 3.1 Coeficientes das três primeiras equações diferenciais de movimento
- 3.2 Coeficientes das três últimas equações diferenciais de movimento
- 3.3 Análise Qualitativa

Nomenclatura

Letras Latinas

$\vec{A}, \vec{B}, \dots, \vec{a}, \vec{b}, \dots$	vetores geométricos
$[A], [B], \dots$	matrizes
${}^j A_i$	matriz transformação que relaciona o i-ésimo ao j-ésimo sistema de referência
E	módulo de Young
EI	rigidez
m	massa
m_p	massa da carga a ser movida pelo manipulador
m_j	massa da junta
g	aceleração da gravidade
L	comprimento
q_i	coordenada generalizada do manipulador
t	tempo
T	energia cinética
$u_{\bullet E}$	deslocamento flexível no fim do link (•)
V	energia potencial
\dot{A}, \dot{a}, \dots	primeira derivada no tempo de A, a, ...
$\ddot{A}, \ddot{a}, \dots$	segunda derivada no tempo de A, a, ...
B	campo magnético
M	magnetização por unidade de volume

k	rigidez
W	energia potencial magnética

Letras Gregas

ϕ_{ij}	funções admissíveis
θ_1, θ_2	ângulos
τ_1, τ_2	torques
μ	densidade por unidade de comprimento
χ	susceptibilidade magnética
μ_0	permeabilidade magnética do vácuo
δ	constante de amortecimento
ω	frequência forçante

Abreviações

\bullet^T	transposta da matriz (\bullet)
Tr	traço de uma matriz

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas, assuntos envolvendo fenômenos não lineares têm sido objeto de estudo de vários pesquisadores em muitos centros de pesquisa e universidades espalhadas pelo mundo.

Os especialistas nesse assunto têm notado que, ainda que os sistemas possam ser representados por modelos lineares, podem exibir comportamentos não lineares sob certas condições.

Ao mesmo tempo, estudos relacionados à estruturas flexíveis vêm apresentando-se como uma área de pesquisa emergente. O estudo do controle de uma viga simplesmente engastada, a modelagem de um braço robótico flexível com um grau de liberdade de corpo rígido e o estudo de satélites com grandes apêndices flexíveis, são exemplos dessas formas de abordagem.

Estruturas também podem exibir comportamento não linear. Tipicamente, a não linearidade é acentuada para grandes amplitudes de movimento e, quando essas amplitudes são mantidas pequenas, o comportamento não linear frequentemente é desprezado na modelagem da mesma.

A flexibilidade de uma estrutura está relacionada à sua inércia. Quanto menos inércia a estrutura possuir, mais flexível ela será e conseqüentemente mais leve também.

O emprego de estruturas flexíveis nas mais diversas necessidades ou aplicações muitas vezes está relacionado à otimização do sistema em estudo e também a minimização do custo do projeto.

A utilização de manipuladores robóticos em estações espaciais, por exemplo, depende diretamente do custo de envio do manipulador para o espaço e este custo está diretamente ligado ao peso do manipulador. Daí a importância do emprego de estruturas flexíveis na área aeroespacial.

Mesmo em aplicações industriais, o aumento da velocidade com a qual determinado manipulador robótico realiza uma tarefa – procedimento comum para aumentar a produtividade – pode instabilizar seu controlador se este não contiver em seu modelo informações à respeito da flexibilidade de sua estrutura.

Estruturas que podem apresentar flexibilidade quando submetidas à campos magnéticos também são usuais em muitos dispositivos técnicos tais como motores, geradores, transformadores, etc.

A modelagem de tais sistemas é também tópico de interesse junto à comunidade científica. Uma das formas de obter tais modelos passa pela utilização do princípio de Lagrange, no qual parte-se das equações das energias cinética e potencial do sistema e chega-se a um conjunto de equações integro-diferenciais que necessitam de uma discretização onde os métodos mais usados são o método dos modos assumidos e o método dos elementos finitos.

Neste trabalho é feita uma abordagem no sentido de modelar estruturas flexíveis com uma certa ênfase em suas características não lineares. Uma bancada experimental é construída com o intuito de validar os resultados.

1.1 Objetivos do Trabalho

Este trabalho têm como proposta a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis, a investigação do comportamento não linear por meio de simulações numéricas e a validação experimental através da montagem de um protótipo.

Vale ressaltar que, em se tratando de sistemas não lineares, embora existam métodos de procedimento – e alguns serão discutidos no capítulo seguinte - não existe uma teoria única que possa atender às diferentes aplicações e necessidades de análise não linear.

Dessa maneira, neste trabalho aborda-se formas específicas de se tratar duas aplicações distintas, uma envolvendo manipuladores robóticos e a outra um oscilador mecânico.

Desenvolve-se ferramentas de modelagem que permitem simulações numéricas do comportamento dinâmico de ambos os sistemas assim como uma implementação experimental.

Para a aplicação que envolve um oscilador mecânico, um esforço foi realizado no sentido de construir uma bancada experimental que pudesse ser tanto quanto possível fiel ao modelo teórico e às considerações analíticas adotadas.

1.2 Breve Revisão Bibliográfica

Neste trabalho, conjugam-se alguns assuntos que usualmente são tratados como áreas de pesquisas individuais.

O leitor interessado, por exemplo, em modelagem pode recorrer a Meirovitch (1967, 1986, 1990) e Inman (1989), bibliografias que trazem de forma clara temas como vibrações, discretização usando o método dos modos assumidos, escolha de funções de forma entre outros.

Artigos envolvendo mais especificamente manipuladores flexíveis podem ser Kalra e Sharan (1990) e Li e Sankar (1991) em que um método sistemático de obtenção das equações de movimento para manipuladores flexíveis é desenvolvido e simulações computacionais são apresentadas para um manipulador com um único link flexível.

Cannon e Schmitz (1984) abordam o problema de controlar a extremidade livre de uma estrutura flexível, simplesmente aplicando torques – com um motor DC – em sua extremidade engastada.

Barbieri e Ozguner (1988) em seu trabalho comparam dois modelos cuja diferença básica entre eles é a função de forma usada na discretização, que por sua vez depende das condições de contorno adotadas para o problema.

Tratando-se de fenômenos não lineares, alguns bons trabalhos podem ser selecionados, como por exemplo, Balthazar (2000), Nayfeh e Mook (1979) Guckenheimer e Holmes (1983) e Hagedorn (1984) que trazem em seus livros uma abordagem bastante completa sobre sistemas não lineares.

Holmes e Moon (1983) revisam vários exemplos de sistemas não lineares e introduzem um modelo matemático a fim de explicar e ilustrar os conceitos de dependência e sensibilidade às condições iniciais.

Moon (1980) desenvolve um aparato experimental simples onde apresenta o que talvez tenha sido a primeira evidência experimental de movimentos caóticos envolvendo estruturas flexíveis submetidas à campos magnéticos.

E, como parte dos primeiros resultados desse trabalho, e que depois tiveram contribuição significativa na sequência do mesmo, algumas publicações do autor têm-se efetivado, como por exemplo, David e Rosário (2001), David e Rosário (2000). Ao final da apresentação das referências bibliográficas, destacam-se as demais publicações do autor relacionadas ao tema desse trabalho.

1.3 Organização do Trabalho

O segundo capítulo deste trabalho preocupa-se em embasar o leitor com alguns conceitos básicos como por exemplo a idéia de modelagem de sistemas, procurando esclarecer que um modelo é uma representação idealizada da realidade.

Procura-se ainda, esclarecer alguns aspectos que envolvem os sistemas lineares e os não lineares. São tratados alguns temas, como por exemplo, o plano de fase, sistemas autônomos, estados de equilíbrio, estabilidade, instabilidade, soluções periódicas, soluções aperiódicas, ciclos limites, atratores estranhos, caos e controle de sistemas não lineares.

Alguns desses conceitos podem ser úteis ao entendimento de capítulos posteriores, especialmente o capítulo 4.

No terceiro capítulo desenvolve-se a modelagem dinâmica de manipuladores robóticos rígidos e flexíveis. Para modelar estes sistemas usa-se o método de Lagrange, através da obtenção das energias cinética e potencial dos sistemas. Desenvolve-se também uma conveniente parametrização dos termos nas equações de movimento obtidas tanto para o sistema rígido quanto para o sistema flexível.

Em ambos os casos trabalha-se com manipuladores com dois graus de liberdade de corpo rígido e no caso do manipulador flexível utiliza-se o método dos modos assumidos para a discretização do sistema obtendo-se outros quatro graus de liberdade relacionados à flexibilidade do sistema. Dessa forma, o sistema flexível é tratado com seis graus de liberdade.

Os sistemas são tratados sem que nenhum processo de linearização seja aplicado a priori, procurando-se respeitar todos os efeitos, inclusive aqueles de características não lineares. Somente após os resultados de simulações numéricas realizadas e com o auxílio da conveniente parametrização matemática desenvolvida neste trabalho é que efeitos que se

mostram pouco relevantes podem sugestivamente ser desprezados. Além disso, é possível estabelecer comparações entre os sistemas rígido e flexível.

No quarto capítulo, outro sistema envolvendo estrutura flexível é abordado. Nesse caso uma haste flexível é submetida à ação de campos magnéticos gerados por eletroímãs e também à excitações externas periódicas.

Um modelo teórico é desenvolvido novamente baseado no formalismo de Lagrange. O método de Galerkin e um conveniente conjunto de funções ortogonais que satisfazem as condições de contorno são escolhidas.

Obtêm-se a equação de movimento do sistema, simulações numéricas são realizadas e os resultados são apresentados e comentados.

Um experimento um tanto complexo é montado no Laboratório de Automação Integrada e Robótica da faculdade de engenharia mecânica da UNICAMP e têm como propósito ser fiel tanto quanto possível ao modelo teórico desenvolvido anteriormente.

O experimento em questão é composto de uma base resistente e fixa em perfil de alumínio sobre a qual fixa-se uma das extremidades de uma haste flexível ficando a outra extremidade livre. Ainda sobre a base fixa é montada uma outra base, agora móvel. Sobre essa base móvel fixam-se dois eletroímãs de modo que a extremidade livre da haste possa movimentar-se entre eles.

Compõem ainda o aparato experimental uma série de equipamentos e instrumentos dos quais destacam-se uma régua potenciométrica, um motor de passo e seu driver, um controlador lógico programável (C.L.P.), sensores, fonte de alimentação e um sistema de aquisição de sinais

São utilizados ainda os softwares XWARE (driver do motor de passo) e o Lab View (aquisição e tratamento de sinais).

Realiza-se ainda neste quarto capítulo uma descrição um pouco mais detalhada dos principais elementos que compõem a bancada experimental e alguns resultados experimentais obtidos são apresentados ao final do capítulo 4.

O quinto e último capítulo discute e comenta os resultados obtidos nos capítulos anteriores e sugere trabalhos futuros que asseguram a continuidade das investigações aqui iniciadas.

Capítulo 2

Sistemas Dinâmicos Lineares e Não Lineares - Uma Breve Discussão

2.1 Introdução

Um problema real não pode ser representado de maneira exata, em toda sua complexidade, por uma equação matemática ou um sistema de equações. No entanto, se trabalharmos com as variáveis essenciais do fenômeno observado, o modelo matemático que representa tal fenômeno poderá levar à soluções bastante próximas daquelas observadas na realidade.

A modelagem de um problema real pode ser simplificada visualizada pelo esquema ilustrado na figura (2.1).

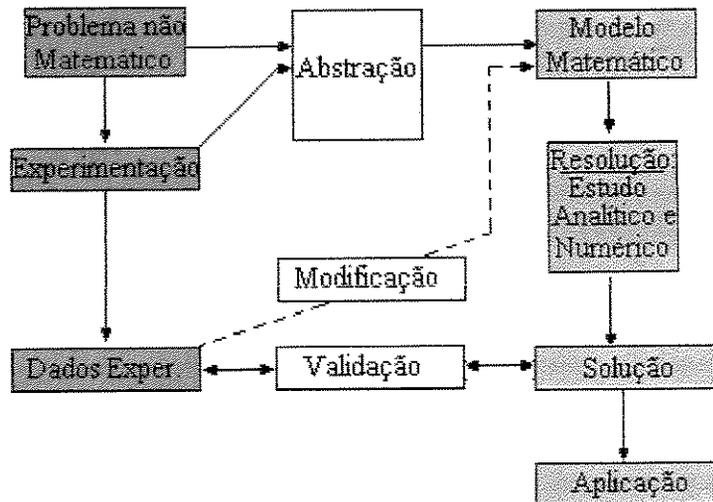


figura 2.1: Modelagem de um Problema Real

É muito frequente em se tratando de modelar um fenômeno ou um experimento qualquer, obtermos equações que envolvam as "variações" das quantidades (variáveis)

presentes e consideradas essenciais. Quando estas variações são instantâneas, o fenômeno se desenvolve continuamente e as equações matemáticas são denominadas equações diferenciais.

Essas equações podem ser lineares ou não lineares. Uma primeira ilustração da diferença entre ambas para sistemas com um único grau de liberdade é mostrada na figura 2.2 e será melhor discutida um pouco mais adiante.

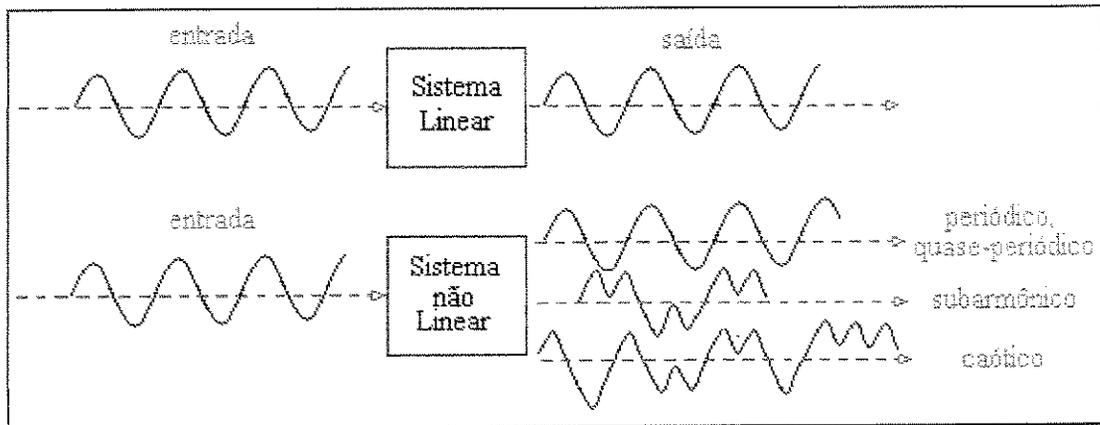


figura 2.2: Ilustração (Sistemas lineares e Não-Lineares)

As equações diferenciais que descrevem os sistemas físicos reais são lineares apenas como primeira aproximação. Sendo o tratamento das equações diferenciais não lineares mais complicado que o das lineares, procura-se sempre que possível, trabalhar com modelos lineares.

Observa-se que a linearização frequentemente resulta em uma boa representação das características do sistema, dando uma descrição que satisfaz a necessidade prática dos engenheiros. Entretanto, há casos em que o sistema linearizado não fornece uma representação suficientemente exata como, por exemplo, em vibrações de consideráveis amplitudes.

Também, sob certas condições, o tratamento não linear pode conduzir a novos fenômenos, inexistentes nos sistemas lineares. Este é o caso, por exemplo, das vibrações forçadas sub-harmônicas e ultra-harmônicas ou da existência de um ciclo-limite.

Na engenharia moderna, com o contínuo refinamento de instrumentação, aumento da capacidade de computadores e diminuição de tolerâncias, a teoria de sistemas não lineares ganha sempre mais significado prático. Aplicações da teoria de vibrações não lineares são encontradas não apenas na mecânica clássica, mas também na eletrotécnica, comunicações, mecânica quântica, biologia e em vários outros ramos da ciência.

A fim de tornar alguns conceitos mais familiares ao leitor, apresenta-se nas próximas seções uma breve discussão sobre os mesmos.

2.2 O Plano de Fase: Sistemas Lineares

Com muito poucas exceções, geralmente não é fácil e nem mesmo possível encontrar soluções analíticas para as equações diferenciais que ocorrem em sistemas não lineares. Assim sendo, uma outra abordagem que pode ser utilizada tem caráter geométrico e leva a uma compreensão qualitativa sobre o comportamento das soluções.

Inicia-se a discussão sobre um sistema linear homogêneo de segunda ordem com coeficientes constantes. Este sistema tem a forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (2.1)$$

onde A é uma matriz constante 2×2 e x é um vetor coluna 2×1 .

As soluções desse tipo de sistema devem ter a forma $x = \xi e^{rt}$. A substituição de x na equação (2.1) permite encontrar

$$(A - rI)\xi = 0 \quad (2.2)$$

Assim, r deve ser um autovalor e ξ um autovetor. Os autovalores são as raízes da equação algébrica ,

$$\det(A - rI) = 0 \quad (2.3)$$

e os autovetores determinam-se pela equação (2.2) a menos de uma constante multiplicativa arbitrária.

Sabe-se que os pontos críticos são os pontos para os quais $Ax = 0$. Uma vez que $\frac{dx}{dt} = 0$ nestes pontos, eles correspondem a soluções constantes, ou soluções de equilíbrio da equação diferencial (2.1). Se a matriz A é não singular, ou seja, se $\det A \neq 0$, então $x = 0$ é o único ponto crítico do sistema.

Vale lembrar que uma solução da equação (2.1) é uma função vetorial $x = \Phi(t)$ que a satisfaz. Esta função pode ser considerada como uma representação paramétrica de uma curva no plano $x_1 \ x_2$. Muitas vezes pode ser conveniente considerar esta curva como o caminho ou a trajetória percorrida por uma partícula móvel cuja velocidade $\frac{dx}{dt}$ é especificada pela equação diferencial. O plano $x_1 \ x_2$ é denominado plano de fase e o conjunto de trajetórias é a imagem de fase.

Uma análise cuidadosa da equação (2.1) mostra que muitos casos diferentes devem ser considerados, dependendo da natureza dos autovalores de A . Isso permite uma caracterização da equação diferencial de acordo com a configuração geométrica de suas trajetórias.

Pode-se pensar em cinco casos distintos e, cada um deles fornece diferentes características de comportamento ao plano de fase . O primeiro caso ocorre, por exemplo, para autovalores reais e desiguais com o mesmo sinal. O ponto crítico nesta situação é denominado nóduo impróprio. Um segundo caso pode ser aquele para o qual os

autovalores são reais e de sinais opostos. A origem é, neste caso, um ponto de sela. Quando os autovalores são iguais, num terceiro caso, dois subcasos podem existir, dependendo de o autovalor repetido ter dois autovetores independentes ou ter apenas um. Se os dois autovetores forem independentes, o ponto crítico é um nó próprio. Entretanto, se apenas um autovetor for independente, o ponto crítico também é denominado nó impróprio ou nó degenerado. Como quarto caso, tem-se os autovalores complexos. Aqui, o ponto crítico é denominado ponto espiral. Finalmente o quinto caso seria aquele em que os autovalores são imaginários puros. Para esta situação, o ponto crítico é denominado centro.

2.3 Sistemas Autônomos e Estado de Equilíbrio

Muitos problemas - principalmente na teoria de oscilações - levam ao estudo de uma equação diferencial da forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad (2.4)$$

em que $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ é uma função - que pode ser não linear - de x e de $\frac{dx}{dt}$.

Introduzindo uma nova variável $y = \frac{dx}{dt}$, pode-se reescrever a equação (2.4) na forma de duas equações de primeira ordem,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -f(x, y) \\ \frac{dx}{dt} &= y \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Pode-se ainda, considerar a equação (2.5) como um caso particular de um sistema cuja forma mais geral seja,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) \\ \frac{dx}{dt} &= P(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Quando as funções $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ não dependem explicitamente do tempo, o sistema é denominado autônomo. Caso contrário, o sistema é não-autônomo. A distinção entre os sistemas autônomos e não-autônomos é importante, pois a análise geométrica qualitativa pode ser eficientemente estendida aos sistemas autônomos bidimensionais em geral, mas não tem tanta utilidade nos sistemas não autônomos.

Uma propriedade básica dos sistemas autônomos é que todas as partículas que passam por um certo ponto seguem a mesma curva no plano de fase. Por isso, a imagem das trajetórias no plano de fase é relativamente simples. Por outro lado, num sistema não-autônomo, existe normalmente um número infinito de trajetórias distintas que passam por um certo ponto e o conjunto de trajetórias é irremediavelmente confuso.

É frequente a ocorrência de sistemas autônomos nas aplicações. Do ponto de vista físico, um sistema autônomo é um sistema cuja configuração, inclusive os parâmetros físicos e as forças ou efeitos externos, são independentes do tempo. A resposta destes sistemas às condições iniciais dadas é independente do instante em que estas condições são impostas.

Na análise de um sistema dinâmico não linear existe ainda um interesse especial no estado de equilíbrio do mesmo, que é aquele estado para o qual a velocidade $\frac{dx}{dt}$ e a aceleração $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ são simultaneamente iguais a zero.

É importante observar que a velocidade pode ser escrita como

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)} \quad (2.7)$$

Sendo assim, de acordo com a equação (2.7) a velocidade é nula quando as seguintes condições são satisfeitas,

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) &= 0 \\ Q(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Da equação (2.6) segue que a equação diferencial para a trajetória será

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (2.9)$$

Em geral, as soluções da equação diferencial (2.9) não podem ser expressas de uma tal maneira que y seja uma função explícita de x . Mas as soluções podem ser sempre expressas na forma $F(x, y) = \text{constante}$.

Como já discutido, a velocidade será nula quando as condições (2.8) forem satisfeitas e tem-se assim, os pontos que correspondem ao estado de equilíbrio. Para a equação diferencial (2.9) tais pontos são singulares e nesses pontos as condições de Cauchy para a unicidade da solução de uma equação diferencial não são satisfeitas.

Assim, os pontos singulares da equação (2.9) podem ser interpretados fisicamente como o estado de equilíbrio do sistema dinâmico de interesse. Observa-se que, para um movimento periódico do sistema dinâmico corresponde uma trajetória fechada que não passa pelo ponto singular. Isto segue do fato de que, o ponto representativo tendo começado seu movimento ao longo de uma trajetória fechada em um ponto arbitrário x e $y = \frac{dx}{dt}$, retornará ao mesmo ponto depois de transcorrido um período.

Dessa forma, o sistema físico retornará ao estado prévio e, conhecendo-se o comportamento das trajetórias em todo o plano de fase, deve-se conhecer em particular seu comportamento próximo ao ponto singular. Faz-se necessário, entretanto, examinar primeiro a natureza dos estados de equilíbrio de um sistema.

2.4 Estabilidade e Instabilidade

O conceito de estabilidade de uma posição de equilíbrio é familiar da mecânica elementar. Sabe-se, por exemplo, que em um sistema cuja energia mecânica se conserva, isto é, em um sistema conservativo, uma posição de equilíbrio correspondendo a um mínimo de energia potencial é uma posição de equilíbrio estável.

Como já discutido neste capítulo, os pontos críticos correspondem às soluções de equilíbrio, ou constantes, do sistema de equações diferenciais.

Um ponto crítico x^0 do sistema é estável se, dado um $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que toda solução $x = \Phi(t)$ do sistema que em $t = 0$ satisfizer a

$$\|\Phi(0) - x^0\| < \delta \quad (2.10)$$

existe e satisfaz a

$$\|\Phi(t) - x^0\| < \varepsilon \quad (2.11)$$

para todo $t \geq 0$.

O enunciado matemático afirma que todas as soluções que principiam "suficientemente próximas" (isto é, dentro do afastamento δ) de x^0 , permanecem "próximas" (isto é, dentro do afastamento ε) de x^0 . Observe que, a trajetória está dentro do círculo $\|x - x^0\| = \delta$ quando $t = 0$ e, embora ultrapasse este círculo, fica dentro do

círculo $\|x - x^0\| = \varepsilon$, para todo $t \geq 0$. No entanto, a trajetória da solução não tem que se aproximar do ponto crítico x^0 quando $t \rightarrow \infty$. Um ponto crítico que não for estável se diz instável.

Um ponto crítico x^0 é assintoticamente estável se for estável e se existir um δ_0 , com $0 < \delta_0 < \delta$, tal que se uma $x = \Phi(t)$ satisfizer a

$$\|\Phi(0) - x^0\| < \delta_0, \quad (2.12)$$

então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = x^0 \quad (2.13)$$

Assim, as trajetórias que principiam "suficientemente próximas" de x^0 não apenas permanecem "próximas" deste ponto mas terminam por se aproximar de x^0 quando $t \rightarrow \infty$.

Observe que a estabilidade assintótica é uma propriedade mais forte que a estabilidade, pois um ponto crítico deve ser estável antes de ser possível falar da sua estabilidade assintótica. Por outro lado, a condição limite (2.13), que é um traço essencial da estabilidade assintótica, não garante, por si mesma, nem a estabilidade ordinária.

2.5 Soluções Periódicas e Ciclos Limites

Os sistemas autônomos de segunda ordem $\dot{x} = f(x)$ podem apresentar soluções periódicas, ou seja, soluções que obedecem à relação $x(t + \Gamma) = x(t)$, para todo t e para uma certa constante não negativa Γ , denominada o período.

As trajetórias correspondentes, no plano de fase, são curvas fechadas. As soluções periódicas têm, muitas vezes, papel importante nos problemas físicos, pois representam fenômenos que ocorrem repetidamente. Em muitas situações, uma solução periódica

representa um "estado final" para o qual tendem todas as soluções "vizinhas", à medida que desaparecem os transientes provocados pelas condições iniciais.

Um caso especial de solução periódica é a solução constante $x = x^0$, que corresponde a um ponto crítico do sistema autônomo. Esta solução é, evidentemente, periódica em qualquer período. Assim sendo, vale ressaltar que ao se falar de uma solução periódica, refere-se à uma solução periódica não constante. Nesse caso, o período Γ é positivo e usualmente escolhido como o menor número positivo para o qual a equação $x(t + \Gamma) = x(t)$ é válida.

As soluções do sistema autônomo linear $\dot{x} = Ax$ são periódicas se, e somente se, os autovalores de A forem imaginários puros. Neste caso, o ponto crítico na origem é um centro. Ressalta-se que se os autovalores de A forem imaginários puros, então toda solução do sistema linear $\dot{x} = Ax$ é periódica, enquanto que se os autovalores não forem imaginários puros, então não existem soluções periódicas (não constante).

Em geral, uma trajetória fechada no plano de fase, tal que outras trajetórias não fechadas espiralam para ela, sejam vindas de dentro, sejam vindas de fora, quando $t \rightarrow \infty$, é um ciclo limite.

Se todas as trajetórias que principiam junto de uma trajetória fechada (do lado de dentro, ou também do lado de fora) espiralam para a trajetória fechada quando $t \rightarrow \infty$, o ciclo limite é estável. Em virtude da trajetória limite ser uma órbita periódica, e não um ponto de equilíbrio, este tipo de estabilidade é denominado, muitas vezes, estabilidade orbital.

Se as trajetórias de um lado da trajetória fechada espiralam para ela, enquanto do outro espiralam para longe dela, quando $t \rightarrow \infty$, então o ciclo limite diz-se semi-estável.

Se as trajetórias dos dois lados da trajetória fechada espiralam para longe dela, quando $t \rightarrow \infty$, a trajetória fechada é instável.

É também possível ter trajetórias fechadas das quais não se aproximam, nem se afastam, outras trajetórias. Neste caso a trajetória fechada é neutralmente estável.

2.6 Caos e Atratores Estranhos

Alguém já definiu o caos como a terceira revolução do século XX na física, em seguida à relatividade e à mecânica quântica. Observam-se exemplos de caos em inúmeros sistemas e situações.

Vale ressaltar que um sistema linear não apresenta caos. Para que o caos e suas implicações se façam presentes, é necessário que o sistema seja não linear. Entretanto, como já discutido neste capítulo, a maioria dos sistemas encontrados no mundo real são não lineares e, sob condições convenientes, esses podem apresentar caos.

Exemplos incluem as oscilações mecânicas e elétricas, o fluxo de fluidos, cinemática de populações, etc.

A história da dinâmica caótica revela importantes contribuições conduzidas por cientistas como J. H. Poincaré, G. D. Birkhoff, A. M. Lipounov, G. Duffing, B. Van der Pol, E.N. Lorenz, S. Smale, entre outros.

Pode-se dizer que existem algumas razões pelas quais alguns sistemas são denominados caóticos.

Ainda que o movimento seja completamente determinístico do ponto de vista matemático, ele pode se mostrar imprevisível do ponto de vista experimental. Além disso, os sistemas caóticos exibem uma sensível dependência das condições iniciais. Ao mesmo tempo que as trajetórias convergem em direção a um atrator, divergem dele. Também, o espectro de potência de um atrator caótico é contínuo.

A natureza caótica de um atrator pode ser estabelecida examinando a divergência das trajetórias, quantificada pelo expoente de Lyapounov.

O expoente de Lyapounov, σ_i , de uma trajetória pode ser escrito como

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \right) \ln \left[\frac{\text{separação em } t}{\text{separação em } 0} \right] \quad (2.14)$$

Se o expoente máximo, σ_i , é positivo então algumas trajetórias adjacentes divergir-se-ão da fundamental e poderá existir uma sensível dependência das condições iniciais. Um expoente de Lyapounov positivo é sinal de movimento caótico.

Na dinâmica computacional e experimental, o termo atrator estranho é frequentemente utilizado e, muitas vezes substitui o termo atrator caótico.

2.7 Controle de Sistemas Não-Lineares

Em muitos processos físicos descritos por equações diferenciais, pode-se, de alguma forma, influenciar a evolução do processo com o tempo. Neste caso, geralmente fala-se do controle do processo, o qual resulta da função de controle.

Pode-se pensar, por exemplo, num sistema do tipo

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.15)$$

com $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^m$

Com uma função $u(t)$ do lado direito da equação (2.15), obtém-se uma equação diferencial ordinária, geralmente não linear. A função $u(t)$ é a função de controle. A variável x é chamada de variável de estado.

Querendo-se transferir um sistema de um dado estado x_0 para um outro estado x_1 , frequentemente há numerosas funções de controle com as quais a transferência pode ser realizada. No entanto, nem todas são convenientes, levando-se então a pergunta de como se determinar a função de controle mais conveniente.

Uma interrogativa típica da teoria de controle é a seguinte: existe uma função de controle $u(t)$ tal que o sistema possa ser transferido de $x = x_0$ para $x = x_1$? Se a resposta a esta interrogação for afirmativa, diz-se que o sistema (2.15) é controlável de x_0 para x_1 .

Considerando-se ainda o sistema (2.15) e assumindo-se que é desejada a transferência do sistema do estado dado x_0 para o estado final x_1 . Aqui, a função de controle $u(t)$ só deve assumir valores da chamada "região de controle" U . Por solução do problema de controle entende-se um par de funções $u(t)$, $x(t)$ que satisfaça a equação (2.15), com $u(t) \in U$ $t_0 \leq t \leq t_1$; $x(t_0) = x_0$ e $x(t_1) = x_1$. A função correspondente $u(t)$ é chamada função de controle admissível. Em geral, o instante t_0 e possivelmente também o instante t_1 não são especificados a priori.

A região de controle U é, geralmente, um domínio fechado como, por exemplo, uma esfera $\|u\| \leq 1$ ou uma superfície esférica $\|u\| = 1$. A região de controle pode também ser especificada por meio de várias equações ou inequações do tipo $g(u, x, t) \leq 0$. Em aplicações, essas limitações se originam de restrições físicas simples impostas, por exemplo, à aceleração, velocidade ou força.

Assumindo-se que a função $u(t)$ seja contínua por partes e que exista a solução do problema de controle, sendo dadas as condições necessárias para a solução ótima, essa solução é aquela para a qual o funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt \quad (2.16)$$

é mínimo.

Aqui, f_0 é uma função dada de x , u e t . Vale observar que t_1 não é especificado, mas depende da função de controle $u(t)$ escolhida. Em particular, f_0 pode ser identicamente igual à unidade, de forma que a solução ótima do problema de controle seja aquela com a qual a transferência do sistema de x_0 para x_1 ocorra no menor tempo possível (neste caso, fala-se então do controle ótimo temporal).

As condições necessárias para que a solução de um problema de um problema de controle seja ótima são fornecidas pelo princípio de máximo de Pontryagin (Hagedorn 1984).

Ressalta-se que o problema de controle ótimo mencionado - minimização do funcional (2.16) sujeito às condições de contorno dadas através da equação diferencial (2.15) com $u \in U$ - é uma generalização do problema de Lagrange do cálculo variacional. Enquanto no cálculo variacional clássico a região de controle é um conjunto aberto, na teoria do controle ótimo U pode ser um conjunto fechado. No caso do controle "bang bang", por exemplo, as equações de Euler-Lagrange do cálculo variacional certamente não são suficientes para a determinação dos controles ótimos. Nesse caso, os controles ótimos assumem apenas valores sobre a fronteira de U (U é fechado).

Se os métodos do cálculo variacional clássico fossem aplicados em problemas semelhantes, chegar-se-ia à conclusão falsa de que não existe controle ótimo, pois o cálculo variacional fornece condições necessárias para se obter funções de controle ótimas que assumem valores apenas no interior de U . Para o caso de uma região de controle aberta U , o princípio de máximo fornece as equações de Euler-Lagrange se $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ for usada como condição necessária para a minimização de H .

Um problema importante da mecânica, que muito impulsionou a teoria do controle ótimo, foi o problema da determinação de trajetórias ótimas (consumo mínimo) de naves espaciais sujeitas a um campo central de forças. (Lawden, 1963).

2.8 Comentários

Procurou-se com este capítulo fornecer ao leitor alguns conceitos básicos, como por exemplo, a idéia de modelagem de sistemas. Além disso, procurou-se esclarecer alguns aspectos que envolvem sistemas lineares e os não lineares e alguns dos tópicos tratados nesse capítulo podem ser úteis ao entendimento de capítulos posteriores, particularmente o capítulo 4.

Como já comentado no capítulo anterior, em se tratando de sistemas não lineares, embora existam métodos de procedimento – dos quais pelo menos parte deles foram discutidas nesse capítulo – não existe uma teoria única que possa atender às diferentes aplicações e necessidades de análise não linear.

Motiva-se, assim, que neste trabalho aborde-se formas específicas de se tratar duas aplicações distintas envolvendo sistemas não lineares, uma primeira referindo-se à manipuladores robóticos rígidos e flexíveis e uma segunda envolvendo um oscilador mecânico flexível. O desenvolvimento e análise de cada uma das aplicações serão tratados nos próximos dois capítulos.

Capítulo 3

Modelagem Dinâmica e Simulação Numérica de Manipuladores – Uma Ênfase em Robôs Flexíveis

3.1 Introdução

Esse capítulo tem o propósito de apresentar a modelagem dinâmica de manipuladores, enfatizando-se estruturas flexíveis. Esses estudos geralmente partem das equações de energia cinética e potencial do sistema, passam pela utilização do método de Lagrange [Goldstein (1981)] e, as equações obtidas são usualmente escritas na forma matricial [Fu, Gonzales e Lee (1987), Paul (1986)] compondo-se das seguintes matrizes: matriz de inércia, matriz de amortecimento, matriz rigidez e, no caso de manipuladores flexíveis uma matriz adicional que leva em conta os componentes flexíveis do modelo. [Nathan e Singh (1991), Centinkunt e Book (1990), Book, Maizza-Neto e Withney (1975)].

Uma grande parte dos trabalhos disponíveis na literatura utilizam-se de computação simbólica e automatização da modelagem dinâmica como forma de minimizar o trabalho de obtenção das equações de movimento.[Li e Sankar (1992), Centinkunt e Book (1989) e Kalra e Sharan (1990)].

Ressalta-se entretanto que, embora muitos sejam os trabalhos já desenvolvidos nessa área, este propõe-se a uma prevenção sobre as limitações de análises lineares e, sendo assim, as equações de movimento são tratadas com todas as suas não-linearidades levadas em conta. Por essa razão, uma nova maneira – não matricial - de escrever as equações de movimento é desenvolvida auxiliando-se de uma ferramenta algébrica que as parametriza e permite um maior monitoramento sobre a contribuição de cada termo da equação à dinâmica do sistema.

É bem sabido que o conhecimento das características dinâmicas de sistemas mecânicos e de estruturas é essencial tanto no projeto dos mesmos quanto no desenvolvimento de sistemas de controle eficientes.

Muitas dessas importantes características podem ser modeladas por equações diferenciais. Quando essas equações diferenciais de movimento são não-lineares, o sistema e as características das soluções que surgem também são denominadas não-lineares.

Existe uma tendência natural em engenharia pela utilização de elementos estruturais mais leves. Entretanto, elementos mais leves favorecem a flexibilidade das estruturas e, a influência das não-linearidades no comportamento dinâmico desses elementos tem se tornado cada vez mais uma importante área de pesquisa.

Além disso, a necessidade no meio industrial de robôs rápidos e precisos que atendam a demanda por produtividade e qualidade, a possibilidade de atuação em grandes volumes de trabalho e situações que envolvam a necessidade de utilização de links longos e delgados - como as aplicações aeroespaciais - reforçam a atenção aos manipuladores flexíveis.

Sendo assim, o principal objetivo dessa aplicação é a modelagem dinâmica de manipuladores flexíveis executando movimento planar e vertical e um estudo comparativo com manipuladores rígidos, possibilitando a utilização do modelo para simulações computacionais do comportamento dinâmico, assim como contribuir para facilitar o processo de desenvolvimento de controladores eficientes para robôs flexíveis.

Aqui vale ressaltar também que, um manipulador robótico é um dispositivo que tem por função posicionar e orientar um mecanismo existente na sua extremidade. Esse mecanismo tem como objetivo fazer a fixação adequada de ferramentas definidas pelo tipo de tarefa a executar. Assim, duas partes principais podem ser consideradas na estrutura de um manipulador. A primeira parte é o braço (link) constituído, no mínimo por três graus de liberdade utilizados para posicionamento do ponto de concentração dos referenciais de orientação. A segunda parte é o punho, normalmente constituído por outros três graus de liberdade rotacionais, com a função de orientação do referencial terminal.

Não levando-se em consideração a deformação nas juntas, o grau de liberdade relacionado ao movimento da base do robô pode ser considerado rígido, assim como os três graus de liberdade relacionados à orientação. Dessa forma, nota-se que a flexibilidade do sistema está relacionada aos dois graus de liberdade relacionados ao movimento dos dois links

do manipulador, e por isso, os sistemas robóticos aqui tratados (rígido e flexível) possuem dois links.

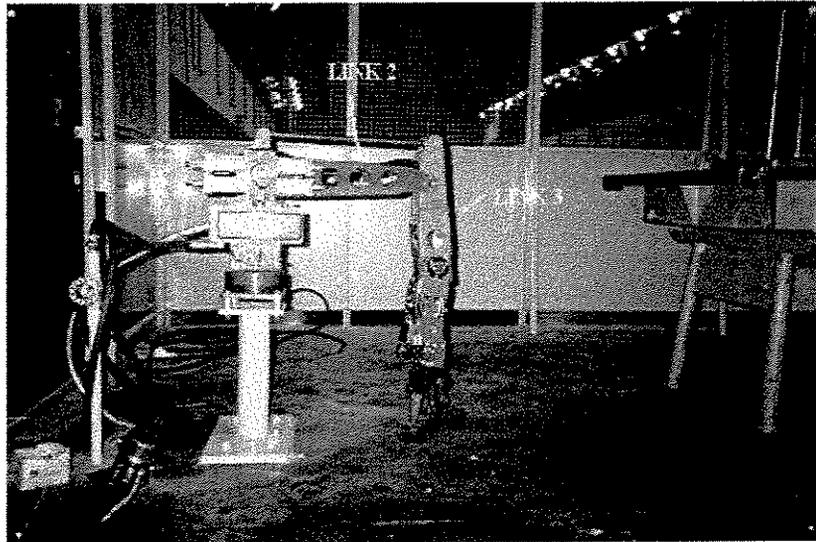


Figura 3.1: Movimento planar e vertical (links 2 e 3, possível flexibilidade)

A flexibilidade do manipulador pode, como já comentado, instabilizar seu controlador se este não contiver em seu modelo informações à respeito dessa flexibilidade em sua estrutura. Daí a importância do conhecimento do modelo dinâmico de manipuladores flexíveis.

A figura 3.2 mostra um diagrama esquemático de uma estrutura de controle destacando a importância do modelo dinâmico

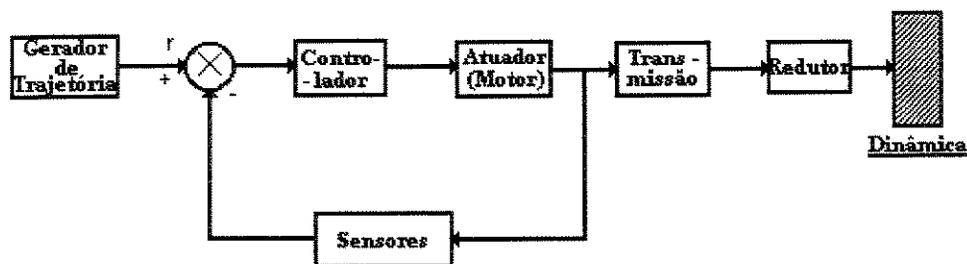


figura 3.2: Estrutura de controle de uma junta robótica

Os sensores de posição são colocados, geralmente, antes do redutor, entre o eixo do motor e o eixo de transmissão de cada junta. Conseqüentemente, eles não são capazes de medir possíveis deformações da estrutura.

O comportamento desejado para o sistema é fornecido pelo gerador de trajetórias, que envia sinais de referência (entrada) relacionados a cada grau de liberdade do manipulador. Esses sinais podem representar, por exemplo, a dependência no tempo da variável posição angular.

Os sensores de posição fazem a leitura da posição angular real (saída) em que o sistema se encontra. Ambos os sinais são comparados e o erro - que é a diferença entre o sinal de referência e o sinal lido pelo sensor- é enviado ao controlador que tem o papel de minimizá-lo a fim de tornar a saída do sistema mais próxima possível da entrada de referência.

No caso de um manipulador flexível, a estrutura do sistema de controle deverá levar em consideração pelo menos alguns aspectos dinâmicos devido à essa flexibilidade.

Conhecendo-se a dinâmica do sistema flexível, pode-se pensar na possibilidade de realizar compensações de efeitos físicos, subtraindo termos das equações de movimento na malha de controle, que através de simulações revelaram-se relevantes para a flexibilidade do sistema.

A fim de que esse objetivo possa ser mais facilmente atingido, desenvolve-se neste capítulo uma conveniente parametrização das equações de movimento para um sistema flexível, tratando-o da maneira mais geral possível, sem linearizações.

Aplica-se também essa parametrização na modelagem dinâmica de uma estrutura rígida com dois links e duas juntas rotacionais, para efeito de comparação com o sistema flexível.

Essa maneira de tratar as equações de movimento permite um monitoramento sobre cada parcela de contribuição para a flexibilidade do sistema, possibilitando sua eventual compensação numa malha de controle. Ilustra-se na figura 3.3 um sistema de compensação de efeitos físicos.

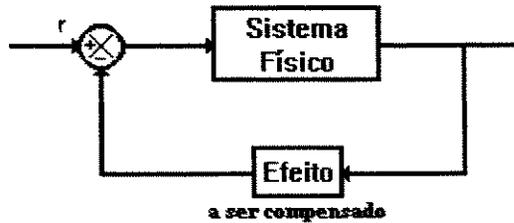


figura 3.3: Sistema de compensação de efeitos físicos

Pode-se, assim, pensar na possibilidade de compensar um efeito físico qualquer representado por uma dessas parcelas nas equações de movimento, subtraindo-o na malha de controle, ou seja, cancelando a alteração que ele poderia causar no comportamento do sistema.

Também pode-se matematicamente reduzir o sistema flexível aqui tratado ao sistema rígido com a anulação dos termos relacionados à flexibilidade. Isso caracteriza uma possibilidade de se encontrar uma fronteira entre os sistemas rígido e flexível

3.2 Manipulador Rígido

Apresenta-se nesta seção uma conveniente parametrização dos termos que envolvem as equações de movimento para um sistema robótico rígido com dois links constituído de duas juntas rotacionais, caracterizando assim dois graus de liberdade.

Essa parametrização tem também por objetivo facilitar o estabelecimento de comparações entre o comportamento dinâmico do manipulador rígido e do manipulador flexível (este último será desenvolvido na próxima seção).

O comportamento dinâmico de um manipulador pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais chamadas equações dinâmicas de movimento. Paul (1986)

Essas equações de movimento podem convenientemente ser expressas através da aplicação direta do formalismo de Euler-Lagrange. Goldstein (1981)

A fim de obter informação cinemática do link, pode-se utilizar a representação de Denavit-Hartenberg, que descreve os deslocamentos espaciais entre sistemas de referência de dois links vizinhos. Craig (1988)

A aplicação direta do formalismo Lagrangeano juntamente com a representação de Denavit-Hartenberg, resulta na descrição das equações de movimento do manipulador de forma compacta e sistemática. Fu (1987).

A obtenção dessas equações dinâmicas para um manipulador rígido com n graus de liberdade [Anexo A] é baseada no conhecimento da:

1- Matriz de transformação homogênea 4×4 , ${}^{i-1}A_i$, que descreve a relação espacial entre o i -ésimo e o $(i-1)$ -ésimo sistema de referência. Ela relaciona um ponto fixo expresso no i -ésimo com o mesmo expresso no $(i-1)$ -ésimo sistema de referência.

2- Equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1(1)n \quad (3.1)$$

onde:

$L = T - V$ é a função Lagrangeano do sistema;

T é a energia cinética total do sistema;

V é a energia potencial total do sistema;

q_i é a coordenada generalizada do link do robô;

\dot{q}_i é a primeira derivada no tempo da coordenada generalizada, e

τ_i é o torque aplicado na junta i para mover o respectivo link i .

Além disso, a utilização do formalismo de Lagrange implica na necessidade de se encontrar as energias cinética e potencial do sistema.

A sistemática de parametrização aqui desenvolvida apoia-se no fato de que essas equações de movimento podem ser escritas baseadas em três termos gerais aqui representados pelas letras J , F e Γ_{perturb} .

Um sistema robótico rígido com dois links e duas juntas rotacionais é ilustrado pela figura 3.4.

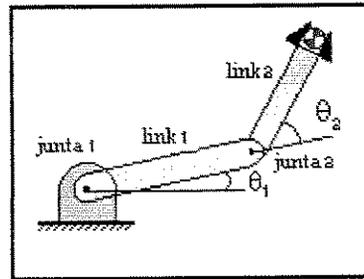


Figura 3.4 : Manipulador rígido com movimento planar e vertical (2 g.d.l.)

De fato, cada junta individualmente, como por exemplo a junta 1 da figura 3.4 pode ser interpretada com o auxílio do diagrama esquemático mostrado na figura 3.5. Suas equações dinâmicas podem ser escritas em termos da parametrização sugerida acima e nesse caso os termos J , F e $\Gamma_{\text{perturb.}}$ são bastante simples podendo até mesmo ser constantes.

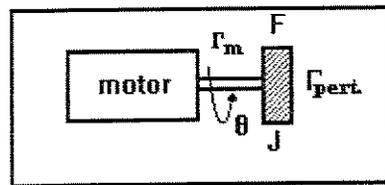


fig. 3.5: sistema desacoplado

$$J\ddot{\theta} + F\dot{\theta} + \Gamma_{\text{pert.}} = \tau_m$$

$$J, F, \Gamma_{\text{pert.}} \approx \text{lineares}$$

Como esse diagrama representa uma única junta, então pode-se dizer também que ele é representativo de um manipulador com um único link (desacoplado e rígido)

Dessa forma, o manipulador rígido com dois graus de liberdade ilustrado na figura 3.4 é, na verdade, o acoplamento entre dois sistemas do tipo da figura 3.5 e, esse acoplamento traz consigo influências significativas na dinâmica do problema. Embora o sistema com dois graus de liberdade continue podendo ter suas equações dinâmicas escritas baseadas nos termos J , F e $\Gamma_{\text{perturb.}}$, estes agora exibem características não lineares.

Mostra-se que nesse caso, as equações dinâmicas são dadas por:

$$J_1^* \ddot{\theta}_1 + F_1^* \dot{\theta}_1 + \Gamma^*_{perturb1} = \tau_1 \quad (3.2)$$

$$J_2^* \ddot{\theta}_2 + F_2^* \dot{\theta}_2 + \Gamma^*_{perturb2} = \tau_2 \quad (3.3)$$

onde os coeficientes são dados por:

$$J_1^* = A_1^* + B_1 + A_2^* c \theta_2, \quad \text{com} \quad B_1 = m_j L_1^2 \quad (3.4)$$

$$F_1^* = -A_2^* \dot{\theta}_2 s \theta_2 \quad (3.5)$$

$$\Gamma^*_{perturb1} = \left(A_3^* + \frac{1}{2} A_2^* c \theta_2 \right) \ddot{\theta}_2 + \left(-\frac{1}{2} A_2^* \dot{\theta}_2^2 s \theta_2 \right) + A_4^* c \theta_1 + A_5^* c (\theta_1 + \theta_2) \quad (3.6)$$

$$J_2^* = A_3^* \quad (3.7)$$

$$F_2^* = 0 \quad (3.8)$$

$$\Gamma^*_{perturb2} = \left(A_3^* + \frac{1}{2} A_2^* c \theta_2 \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} A_2^* \dot{\theta}_1^2 s \theta_2 + A_5^* c (\theta_1 + \theta_2) \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned} A_1^* &= \alpha_1 + \alpha_1^{\dot{}} & A_4^* &= \alpha_4 + \alpha_4^{\dot{}} \\ A_2^* &= \alpha_2 + \alpha_2^{\dot{}} & A_5^* &= \alpha_5 + \alpha_5^{\dot{}} \\ A_3^* &= \alpha_3 + \alpha_3^{\dot{}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

com

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} m_1 L_1^2 + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 + m_2 L_1^2 \quad \alpha_1^{\dot{}} = m_p L_1^2 + m_p L_2^2 \quad (3.11)$$

$$\alpha_2 = m_2 L_1 L_2 \quad \alpha_2^{\dot{}} = 2 m_p L_1 L_2 \quad (3.12)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \quad \alpha_3^{\dot{}} = m_p L_2^2 \quad (3.13)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} m_1 L_1 g + m_2 L_1 g \qquad \alpha_4^{\ddagger} = m_p L_1 g \qquad (3.14)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2} m_2 L_2 g \qquad \alpha_5^{\ddagger} = m_p L_2 g \qquad (3.15)$$

No final da próxima seção, quando as equações de movimento para o sistema flexível já tiverem sido obtidas, apresentar-se-á um diagrama esquemático procurando elucidar ainda mais essa sistemática de parametrização utilizada, mostrando a maneira pela qual as equações são escritas desde o caso mais simples (desacoplado e rígido) até o mais complexo (acoplado e flexível).

O comportamento dinâmico desse manipulador rígido com dois graus de liberdade pode ser estudado por meio de simulações dessas equações de movimento. Realiza-se essas simulações e os resultados são apresentados na seção 3.4.

3.3 Manipulador Flexível

O objetivo principal desta seção é a obtenção das equações dinâmicas de movimento representativas de um manipulador robótico possuindo dois links flexíveis e duas juntas rotacionais, sem atrito.

Apresenta-se a metodologia proposta neste trabalho considerando-se que o sistema flexível descrito realizará um movimento planar. Mesmo assim, a complexidade das equações dinâmicas obtidas para esse sistema é grande quando comparada àquelas obtidas na elaboração de modelos de manipuladores rígidos. O problema poderá ser facilmente estendido na descrição de outros movimentos.

As equações de Lagrange e o método dos modos assumidos são aplicados neste modelo. Ele é obtido basicamente pela superposição do movimento flexível sobre um movimento de corpo rígido hipotético. Para isso torna-se extremamente necessário o desenvolvimento de um conveniente modelo matemático.

As equações de movimento são apresentadas da maneira mais genérica possível, considerando-se todos os termos não lineares intrínsecos no modelo do robô. Realiza-se também uma parametrização dessas equações de forma análoga àquela realizada na seção anterior para o sistema rígido, ou seja, pretende-se mais uma vez escrever as equações dinâmicas baseadas nos termos J , F e Γ_{perturb} .

Nesse caso, espera-se obter um conjunto de seis equações diferenciais não lineares e acopladas cuja complexidade dos termos sejam significativas.

Embora essa discussão seja feita em detalhes a partir da próxima seção, a figura 3.6 procura esclarecer em que sentido deverão ser conduzidas as manipulações algébricas que virão após a obtenção das equações de movimento a fim de que as mesmas possam tomar forma semelhante àsquelas desenvolvidas para o manipulador rígido. O símbolo \mathbf{q} que aparece com vários sub-índices na próxima figura estão relacionados às deformações elásticas dos links e terão sua definição mais formal apresentada em momento oportuno no texto.

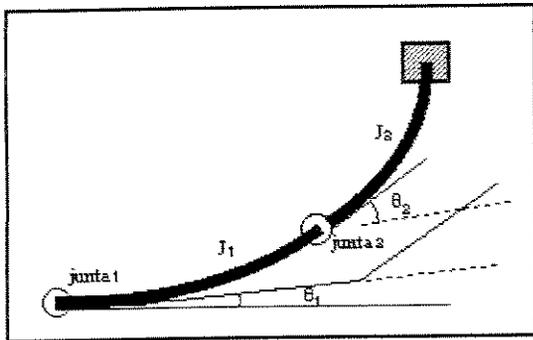


fig. 3.6: sistema acoplado e flexível

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + F_1 \dot{\theta}_1 + \Gamma_{\text{perturb},1} = \tau_1$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + F_2 \dot{\theta}_2 + \Gamma_{\text{perturb},2} = \tau_2$$

$$J_3 \ddot{q}_{11} + F_3 \dot{q}_{11} + \Gamma_{\text{perturb},3} = 0$$

$$J_4 \ddot{q}_{12} + F_4 \dot{q}_{12} + \Gamma_{\text{perturb},4} = 0$$

$$J_5 \ddot{q}_{21} + F_5 \dot{q}_{21} + \Gamma_{\text{perturb},5} = 0$$

$$J_6 \ddot{q}_{22} + F_6 \dot{q}_{22} + \Gamma_{\text{perturb},6} = 0$$

$J, F, \Gamma_{\text{perturb}}$ (não-lineares);
maior complexidade

A partir dessas considerações, as equações de movimento para um manipulador que possui seus links flexíveis deverão ser escritas como uma extensão daquelas obtidas para manipuladores com links rígidos, onde os termos matemáticos acrescidos neste modelo estariam diretamente relacionados à flexibilidade do sistema.

Dessa forma, caracteriza-se a possibilidade matemática de uma transição de um modelo para outro, ou seja, pode-se com a anulação dos termos relacionados à flexibilidade no modelo flexível reduzi-lo ao modelo rígido, assim como o acréscimo de termos relacionados a flexibilidade no modelo rígido pode torná-lo flexível.

Isso permitirá possíveis comparações entre os sistemas rígido e flexível nas simulações que serão realizadas, abrindo perspectivas para a compensação de efeitos físicos como sugestão de uma estratégia de controle.

3.3.1 Modelo Físico

O sistema físico em estudo é composto de dois links flexíveis constituído por duas juntas rotacionais sem atrito, como mostra a figura 3.7. Ele está fixo a um sistema de referência. O movimento relativo dos dois links é resultante dos torques aplicados em cada junta do sistema.

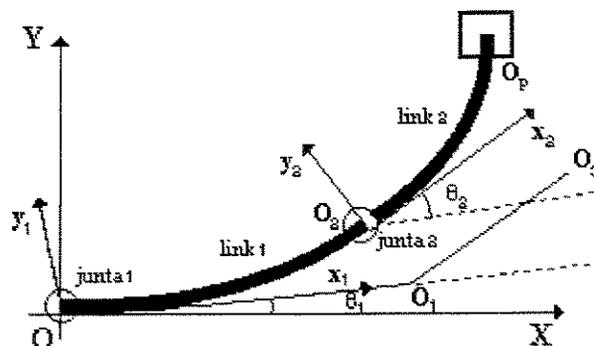


Figura 3.7 : Modelo Físico Proposto

No final do link 1, uma massa concentrada representa o servo motor e a própria massa da junta. No final do link 2, uma massa discreta pode aparecer, representando a carga a ser movida entre dois pontos do plano.

Para a descrição completa do movimento, três sistemas de referência podem ser definidos:

[O, X, Y] - sistema referencial inercial com origem na junta 1;

[O, x_1 , y_1] - sistema referencial com origem em O e o eixo x_1 tangente ao link 1 no ponto O;

[O_2 , x_2 , y_2] - sistema referencial com origem na junta 2 e com o eixo x_2 tangente ao link 2 no ponto O_2 .

Também dois ângulos podem ser definidos:

$\theta_1(t)$ é o ângulo entre os eixos x_1 e x ;

$\theta_2(t)$ é o ângulo entre os eixos x_1 e x_2 .

Define-se também um novo sistema como sendo formado por dois segmentos OO_1 e O_1O_3 , tendo ângulo θ_2 em O_1 , e o movimento global (total) pode ser entendido como um movimento de um sistema hipotético rígido OO_1O_3 e um movimento flexível dos links 1 e 2 com relação a esse sistema móvel.

A fim de simplificar as notações, introduz-se uma representação na forma de matrizes:

$\{\bar{U}\} = \begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \end{bmatrix}$, é o vetor unitário do sistema de referência OXY;

$\{\bar{U}_1\} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{x1} \\ \bar{u}_{y1} \end{bmatrix}$, é o vetor unitário do sistema de referência Ox_1y_1 ;

$\{\bar{U}_2\} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{x2} \\ \bar{u}_{y2} \end{bmatrix}$, é o vetor unitário do sistema de referência $O_2x_2y_2$.

Assim,

$$\{\bar{U}_1\} = [C_1] \{\bar{U}\} \quad (3.16)$$

$$\{\bar{U}_2\} = [C_2] \{\bar{U}\} \quad (3.17)$$

onde $[C_1]$ e $[C_2]$ são as matrizes de transformação rotacionais, expressas como:

$$[C_1] = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 \end{bmatrix}$$

e

$$[C_2] = \begin{bmatrix} c(\theta_1 + \theta_2) & s(\theta_1 + \theta_2) \\ -s(\theta_1 + \theta_2) & c(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

onde:

$$c\theta_1 = \cos\theta_1$$

$$s\theta_1 = \text{sen}\theta_1$$

$$c(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$s(\theta_1 + \theta_2) = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$$

3.3.2 Descrição Cinemática

A posição de qualquer ponto no sistema pode ser descrita por uma definição conveniente de um conjunto de coordenadas. Como indicado na figura 3.8, qualquer ponto P_i pode ser especificado se uma nova variável $u_i(x_i, t)$ for definida como sendo a coordenada do movimento flexível com relação ao sistema de referência $[O x_i y_i]$.

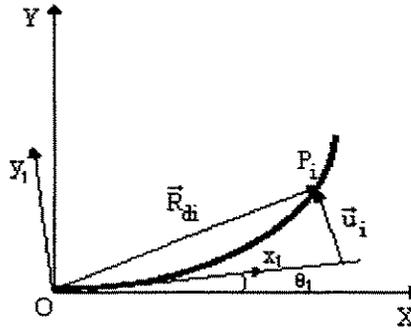


Figura 3.8 : Vetor posição de um ponto sobre o link 1

O vetor posição do ponto P_i será:

$$\bar{R}_{di} = \{\bar{U}_i\}^T \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} = x_i \bar{u}_{xi} + y_i \bar{u}_{yi} \quad (3.18)$$

Link 1

O vetor posição de qualquer ponto no link 1, pode agora ser escrito utilizando a definição introduzida. Sua expressão é a seguinte:

$$\bar{R}_{d1} = \{\bar{U}_1\}^T \begin{Bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \{\bar{U}\}^T [C_1]^T \begin{Bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{Bmatrix} = (x_1 c \theta_1 - u_1 s \theta_1) \bar{u}_x + (x_1 s \theta_1 + u_1 c \theta_1) \bar{u}_y \quad (3.19)$$

Link 2

A fim de definir o vetor posição de qualquer ponto no link 2, será necessário assumir que os deslocamentos dos links flexíveis com relação aos sistemas de referência $[O \ x_1 \ y_1]$ e $[O_2 \ x_2 \ y_2]$ sejam pequenos o suficiente tal que podemos considerar o deslocamento dos

pontos O_2 e O_p como uma linha reta. A figura 3.9 mostra o vetor posição de qualquer ponto P_2 no link 2.

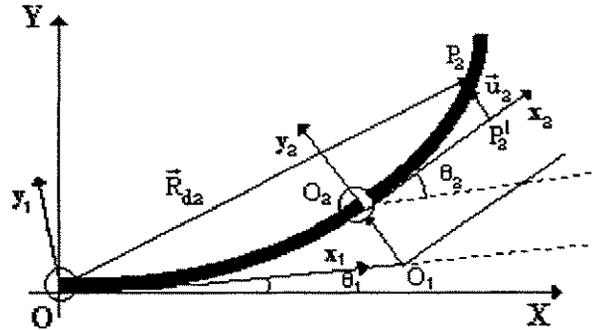


Figura 3.9 : Vetor posição de um ponto sobre o link 2

Observando a figura 3.9, fica fácil notar que o vetor posição de qualquer ponto P_2 sobre o link 2 será:

$$\vec{R}_{p2} = \vec{OO}_1 + \vec{O}_1\vec{O}_2 + \vec{O}_2\vec{P}_2' + \vec{P}_2'\vec{P}_2 \quad (3.20)$$

Se,

u_{1E} = deslocamento linear flexível no final do link 1

L_1 = comprimento do link 1

L_2 = comprimento do link 2

então:

$$\vec{OO}_1 = \{\vec{U}\}^T \begin{Bmatrix} L_1 c\theta_1 \\ L_1 s\theta_1 \end{Bmatrix} = [\vec{u}_x \quad \vec{u}_y] \begin{Bmatrix} L_1 c\theta_1 \\ L_1 s\theta_1 \end{Bmatrix} = L_1 c\theta_1 \vec{u}_x + L_1 s\theta_1 \vec{u}_y \quad (3.21)$$

$$\vec{O}_1\vec{O}_2 = \{\vec{U}\}^T \begin{Bmatrix} -u_{1E} s\theta_1 \\ u_{1E} c\theta_1 \end{Bmatrix} = -u_{1E} s\theta_1 \vec{u}_x + u_{1E} c\theta_1 \vec{u}_y \quad (3.22)$$

$$O_2 \vec{P}_2 = \{\vec{U}_2\} \begin{Bmatrix} x_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{\vec{U}\}^T [C_2]^T \begin{Bmatrix} x_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = x_2 c(\theta_1 + \theta_2) \vec{u}_x + x_2 s(\theta_1 + \theta_2) \vec{u}_y \quad (3.23)$$

$$P_2 \vec{P}_2^i = \{\vec{U}_2\}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \{\vec{U}\}^T [C_2]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -u_2 s(\theta_1 + \theta_2) \vec{u}_x + u_2 c(\theta_1 + \theta_2) \vec{u}_y \quad (3.24)$$

e assim,

$$\vec{R}_{d2} = \{\vec{U}\}^T \left[\begin{Bmatrix} L_1 c\theta_1 \\ L_1 s\theta_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -u_{1E} s\theta_1 \\ u_{1E} c\theta_1 \end{Bmatrix} + [C_2]^T \begin{Bmatrix} x_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + [C_2]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} \right] \quad (3.25)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \vec{R}_{d2} = & [L_1 c\theta_1 - u_{1E} s\theta_1 + x_2 c(\theta_1 + \theta_2) - u_2 s(\theta_1 + \theta_2)] \vec{u}_x + \\ & + [L_1 s\theta_1 + u_{1E} c\theta_1 + x_2 s(\theta_1 + \theta_2) + u_2 c(\theta_1 + \theta_2)] \vec{u}_y \end{aligned} \quad (3.26)$$

Uma vez obtidos os vetores posição, pode-se agora, obter os vetores velocidade através de derivação no tempo desses vetores posição. Obtêm-se assim, $\dot{\vec{R}}_{d1}$ e $\dot{\vec{R}}_{d2}$. Da expressão (3.19), nota-se que:

$$\dot{\vec{R}}_{d1} = [-\dot{\theta}_1 x_1 s\theta_1 - \dot{u}_1 s\theta_1 - u_1 \dot{\theta}_1 c\theta_1] \vec{u}_x + [\dot{\theta}_1 x_1 c\theta_1 - \dot{\theta}_1 u_1 s\theta_1 + \dot{u}_1 c\theta_1] \vec{u}_y \quad (3.27)$$

De forma análoga, obtém-se da expressão (3.26)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}}_{d2} = & [-L_1 \dot{\theta}_1 s\theta_1 - \dot{u}_{1E} s\theta_1 - u_{1E} \dot{\theta}_1 c\theta_1 - x_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2) \\ & - \dot{u}_2 s(\theta_1 + \theta_2) - u_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c(\theta_1 + \theta_2)] \vec{u}_x + \\ & + [L_1 \dot{\theta}_1 c\theta_1 + \dot{u}_{1E} c\theta_1 - u_{1E} \dot{\theta}_1 s\theta_1 + x_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c(\theta_1 + \theta_2) + \\ & + \dot{u}_2 c(\theta_1 + \theta_2) - u_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2)] \vec{u}_y \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.3.3 Energia Cinética

Encontradas as velocidades sobre um ponto qualquer nos links 1 e 2, respectivamente $\dot{\vec{R}}_{d1}$ e $\dot{\vec{R}}_{d2}$, pode-se obter a energia cinética, que é expressa como:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \int_{m_1} \dot{\vec{R}}_{d1} \cdot \dot{\vec{R}}_{d1} dm + \frac{1}{2} \int_{m_2} \dot{\vec{R}}_{d2} \cdot \dot{\vec{R}}_{d2} dm \quad (3.29)$$

onde:

dm é o elemento de massa no ponto P_i ($i = 1,2$)

e

m_1 e m_2 são as massas dos links 1 e 2 respectivamente.

Se o produto escalar $\dot{\vec{R}}_{d1} \cdot \dot{\vec{R}}_{d1}$ for calculado, uma expressão para a energia cinética T_1 é obtida diretamente, e

$$T_1 = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \int_{m_1} x_1^2 dm + \frac{1}{2} \int_{m_1} \dot{u}_1^2 dm + \dot{\theta}_1 \int_{m_1} x_1 \dot{u}_1 dm + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \int_{m_1} u_1^2 dm \quad (3.30)$$

De maneira análoga, ou seja, calculando o produto escalar $\dot{\vec{R}}_{d2} \cdot \dot{\vec{R}}_{d2}$, obtêm-se a energia cinética T_2 , que tem a forma

$$\begin{aligned} T_2 = & \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{u}_{1E}^2 + \frac{1}{2} m_2 u_{1E}^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 L_1 \dot{\theta}_1 \dot{u}_{1E} + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \int_{m_2} x_2^2 dm \\ & + \frac{1}{2} \int_{m_2} \dot{u}_2^2 dm + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \int_{m_2} u_2^2 dm + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \int_{m_2} x_2 \dot{u}_2 dm \\ & + L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c\theta_2 \int_{m_2} x_2 dm + L_1 \dot{\theta}_1 c\theta_2 \int_{m_2} u_2 dm + \dot{u}_{1E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c\theta_2 \int_{m_2} x_2 dm \\ & + \dot{u}_{1E} c\theta_2 \int_{m_2} \dot{u}_2 dm + \dot{u}_{1E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(-\theta_2) \int_{m_2} u_2 dm + u_{1E} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s\theta_2 \int_{m_2} x_2 dm \\ & + L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(-\theta_2) \int_{m_2} u_2 dm + u_{1E} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c\theta_2 \int_{m_2} u_2 dm + u_{1E} \dot{\theta}_1 s\theta_2 \int_{m_2} \dot{u}_2 dm \end{aligned} \quad (3.31)$$

É importante observar que até o presente momento foram obtidas as energias cinéticas T_1 para o link 1 e T_2 para o link 2. Entretanto, o mesmo procedimento pode ser aplicado para uma massa concentrada na junta 2, e para uma carga com momento de inércia J_{xp} com relação a um eixo normal ao plano de movimento e através do centro de gravidade. Fazendo-se isto para uma massa na junta 2, a expressão (3.27) pode ser modificada para

$$\ddot{\vec{R}}_j = [-\dot{\theta}_1 L_1 s\theta_1 - \dot{u}_{1E} s\theta_1 - \dot{\theta}_1 u_{1E} c\theta_1] \vec{u}_x + [\dot{\theta}_1 L_1 c\theta_1 + \dot{u}_{1E} c\theta_1 - u_{1E} \dot{\theta}_1 s\theta_1] \vec{u}_y \quad (3.32)$$

Deve-se, contudo observar que:

i) na modificação x_1 foi substituído por L_1 , pois nesse caso não estamos num ponto qualquer sobre o link 1, mas sim em sua extremidade, onde se situa a junta 2.

ii) u_1 foi substituído por u_{1E} , pois u_{1E} é o deslocamento linear flexível no final do link 1. Consequentemente \dot{u}_1 também foi substituído por \dot{u}_{1E} .

De forma análoga pode-se estender o raciocínio também para a carga a ser movida. Neste caso, a expressão escreve-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}}_p = & [-L_1 \dot{\theta}_1 s\theta_1 - \dot{u}_{1E} s\theta_1 - u_{1E} \dot{\theta}_1 c\theta_1 - L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2) \\ & - \dot{u}_{2E} s(\theta_1 + \theta_2) - u_{2E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c(\theta_1 + \theta_2)] \vec{u}_x + \\ & [L_1 \dot{\theta}_1 c\theta_1 + \dot{u}_{1E} c\theta_1 - u_{1E} \dot{\theta}_1 s\theta_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c(\theta_1 + \theta_2) \\ & + \dot{u}_{2E} c(\theta_1 + \theta_2) - u_{2E} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2)] \vec{u}_y \end{aligned} \quad (3.33)$$

Aqui, também cabem as seguintes observações:

i) a carga situa-se na extremidade do link 2, e portanto, x_2 foi substituído por L_2 .

ii) u_{2E} e \dot{u}_{2E} substituem respectivamente u_2 e \dot{u}_2 , enfatizando que o deslocamento considerado é devido a flexibilidade no final do link 2.

Se o momento de inércia da carga com relação a um eixo através do ponto O_2 é definido por J_p , e considerando que

$$\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right]_{x_2=L_2} = u_{2E}' \quad (3.34)$$

é o deslocamento angular, a energia cinética total do sistema pode finalmente ser expressa como:

$$T = \frac{1}{2} \int_{m_1} \dot{\vec{R}}_{d1} \cdot \dot{\vec{R}}_{d1} dm + \frac{1}{2} \int_{m_2} \dot{\vec{R}}_{d2} \cdot \dot{\vec{R}}_{d2} dm + \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{R}}_j \cdot \dot{\vec{R}}_j + \frac{1}{2} m_p \dot{\vec{R}}_p \cdot \dot{\vec{R}}_p + \frac{1}{2} J_p \dot{u}_{2E}^2 \quad (3.35)$$

onde:

$\frac{1}{2} \int_{m_1} \dot{\vec{R}}_{d1} \cdot \dot{\vec{R}}_{d1} dm$ é a energia cinética do link 1;

$\frac{1}{2} \int_{m_2} \dot{\vec{R}}_{d2} \cdot \dot{\vec{R}}_{d2} dm$ é a energia cinética do link 2;

$\frac{1}{2} m_j \dot{\vec{R}}_j \cdot \dot{\vec{R}}_j$ é a energia cinética relacionada à massa concentrada representando o servo-motor e a própria junta. Essa massa situa-se no ponto O_2 , na junta 2;

$\frac{1}{2} m_p \dot{\vec{R}}_p \cdot \dot{\vec{R}}_p$ é a energia cinética relacionada à massa da carga a ser movida. Essa massa situa-se no fim do link 2; e

$\frac{1}{2} J_p \dot{u}_{2E}^2$ é a energia cinética rotacional da carga devido ao seu movimento em torno do eixo que passa pelo ponto O_2 e que é perpendicular ao plano da figura.

3.3.4 Energia Potencial

Para calcular a energia potencial do sistema assume-se uma energia associada ao movimento rígido (energia potencial gravitacional), mais a energia potencial elástica dos links.

Então, tomando-se Ox como a posição de referência, a energia potencial do sistema (assumindo u_1 e u_2 suficientemente pequenos) será

$$V = V_g + V_{\text{elástica}} \quad (3.36)$$

e, portanto

$$\begin{aligned} V = & m_1 g \frac{L_1}{2} s\theta_1 + m_j g L_1 s\theta_1 + \\ & + m_2 g \left[L_1 s\theta_1 + \frac{L_2}{2} s(\theta_1 + \theta_2) \right] + \\ & + m_p g \left[L_1 s\theta_1 + L_2 s(\theta_1 + \theta_2) \right] \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{L_1} E I_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 - \frac{1}{2} \int_0^{L_2} E I_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde:

g é a aceleração da gravidade;

$E I_1$, $E I_2$ são rigidez dos links 1 e 2 respectivamente, assumidas constantes neste modelo.

3.3.5 Equações de Movimento

A fim de escrever as equações de movimento do sistema, utiliza-se o método dos modos assumidos. Esse método consiste em assumir uma solução dos movimentos flexíveis na forma de uma série composta de uma combinação linear de funções admissíveis, que são funções das coordenadas espaciais, multiplicadas pelas coordenadas generalizadas dependentes do tempo $q_i(t)$.

No caso dos deslocamentos flexíveis dos links 1 e 2, é possível assumir

$$u_1 = \sum_{i=1}^n \phi_{1i}(x_1) q_{1i}(t) \tag{3.38}$$

e

$$u_2 = \sum_{i=1}^n \phi_{2i}(x_2) q_{2i}(t) \tag{3.39}$$

onde as funções admissíveis $\phi_{ji}(x)$ devem satisfazer as condições de contorno geométricas com relação a representação dos links nos sistemas de referência $[Ox_1y_1]$ e $[O_2x_2y_2]$.

Assim, o sistema fica representado por $(2n + 2)$ graus de liberdade, com $[\theta_1(t), \theta_2(t)]$ e $[q_{1i}(t), q_{2i}(t)]$, $i = 1(1)n$ sendo as coordenadas generalizadas.

Assumindo que as amplitudes de todos os outros modos de vibrar são muito menores quando comparadas ao primeiro modo Book (1975), o sistema pode ser truncado com n igual a 2, resultando num problema de seis graus de liberdade.

Com isso, as equações (3.38) e (3.39) assumem a forma:

$$u_1 = \phi_{11}(x_1) q_{11}(t) + \phi_{12}(x_1) q_{12}(t) \tag{3.40}$$

$$u_2 = \phi_{21}(x_2) q_{21}(t) + \phi_{22}(x_2) q_{22}(t) \tag{3.41}$$

Assumindo-se também que $\phi_{ji}(x)$ são as autofunções do problema de uma viga engastada-livre, isto é, engastada numa extremidade e livre na outra, as condições de contorno geométricas serão satisfeitas [Book (1975)]e devido a ortogonalidade dessas funções

$$\int_0^{l_r} \phi_r(x) \phi_s(x) dx = \int_0^{l_r} \phi_r(x) \phi_s(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s \\ 1 & \text{se } r = s \end{cases} \tag{3.42}$$

onde

$$\phi_r(x) = (\cosh \lambda_r x - \cos \lambda_r x) - \sigma_r (\sinh \lambda_r x - \sin \lambda_r x);$$

r é o modo de vibração; e

λ_r e σ_r são constantes que possuem valores característicos para viga engastada-livre.

Pode-se agora avaliar as integrais nas expressões para as energias cinética e potencial.

Esse será o próximo passo, a começar pelas integrais relacionadas com a expressão para a energia cinética.

$$\int_{m_1} \dot{x}_1^2 dm = J_0 \tag{3.43}$$

$$\int_{m_1} \dot{u}_1^2 dm = m_1 (\dot{q}_{11}^2(t) + \dot{q}_{12}^2(t)) \tag{3.44}$$

$$\int_{m_1} \dot{u}_1 x_1 dm = n w_{11} \dot{q}_{11} + n w_{12} \dot{q}_{12} \tag{3.45}$$

onde

$$n w_{11} = \int_0^{L_1} \mu_1 x \phi_{11}(x) dx$$

com $\mu =$ densidade por unidade de comprimento

$$n w_{12} = \int_0^{L_1} \mu_1 x \phi_{12}(x) dx$$

$\int_{m_1} u_1^2 dm$ - desprezada no modelo, pois assumimos u_1 suficientemente pequeno

$$\int_{m_2} x_2^2 dm = J_{01} \tag{3.46}$$

$$\int_{m_2} \dot{u}_2^2 dm = m_2 (\dot{q}_{21}^2 + \dot{q}_{22}^2) \tag{3.47}$$

$\int_{m_2} u_2^2 dm$ - desprezada no modelo, pois assumimos u_2 suficientemente pequeno

$$\int_{m_2} x_2 \dot{u}_2 dm = n w_{21} \dot{q}_{21} + n w_{22} \dot{q}_{22} \quad (3.48)$$

onde

$$n w_{21} = \int_0^{L_2} \mu_2 x \phi_{21}(x) dx$$

$$n w_{22} = \int_0^{L_2} \mu_2 x \phi_{22}(x) dx$$

$$\int_{m_2} x_2 dm = m_2 \frac{L_2}{2} \quad (3.49)$$

$$\int_{m_2} \dot{u}_2 dm = n q_{21} \dot{q}_{21} + n q_{22} \dot{q}_{22} \quad (3.50)$$

onde

$$n q_{21} = \int_0^{L_2} \mu_2 \phi_{21}(x) dx$$

$$n q_{22} = \int_0^{L_2} \mu_2 \phi_{22}(x) dx$$

$$\int_{m_2} u_2 dm = n q_{21} q_{21} + n q_{22} q_{22} \quad (3.51)$$

Agora, serão avaliadas as integrais relacionadas à energia potencial.

$$\int_0^{L_2} E I_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 = k w_{111} q_{11}^2 + k w_{122} q_{12}^2 \quad (3.52)$$

onde

$$k w_{111} = E I_1 \int_0^{L_1} \phi_{11}^{\parallel} \phi_{11}^{\parallel} dx_1$$

$$k w_{122} = E I_1 \int_0^{L_1} \phi_{12}^{\parallel} \phi_{12}^{\parallel} dx_1$$

$$\int_0^{L_2} E I_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2 = k w_{211} q_{21}^2 + k w_{222} q_{22}^2 \quad (3.53)$$

onde

$$k w_{211} = E I_2 \int_0^{L_2} \phi_{21}^{\parallel} \phi_{21}^{\parallel} dx_2$$

$$k w_{222} = E I_2 \int_0^{L_2} \phi_{22}^{\parallel} \phi_{22}^{\parallel} dx_2$$

Uma vez que todas as integrais foram avaliadas, pode-se agora escrever as expressões finais tanto para a energia cinética quanto para a energia potencial. Utilizando, então a expressão da energia cinética total (3.35) e fazendo as substituições

$$u_{1E} = \phi_{11E}(x_1) q_{11}(t) + \phi_{12E}(x_1) q_{12}(t) \quad (3.54)$$

$$\dot{u}_{1E} = \phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12} \quad (3.55)$$

$$u_{1E}^2 = \left(\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12} \right)^2 \quad (3.56)$$

$$\dot{u}_{1E}^2 = \left(\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12} \right)^2 \quad (3.57)$$

e também

$$u_{2E} = \phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22} \quad (3.58)$$

$$\dot{u}_{2E} = \phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22} \quad (3.59)$$

$$u_{2E}^2 = \left(\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22} \right)^2 \quad (3.60)$$

$$\dot{u}_{2E}^2 = \left(\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22} \right)^2 \quad (3.61)$$

$$\dot{u}_{2E}^2 = \left(\phi_{21E}^{\dot{}} \dot{q}_{21} + \phi_{22E}^{\dot{}} \dot{q}_{22} \right)^2 \quad (3.62)$$

obtêm-se a seguinte expressão final para a energia cinética total do sistema:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{q}_{11}^2 + \dot{q}_{12}^2) + \dot{\theta}_1 (nw_{11} \dot{q}_{11} + nw_{12} \dot{q}_{12}) + \frac{1}{2} m_2 L_1 \dot{\theta}_1^2 \\ & + \frac{1}{2} m_2 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12})^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_1^2 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12})^2 + \\ & + m_2 L_1 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 J_{01} + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_{21}^2 + \dot{q}_{22}^2) \\ & + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (nw_{21} \dot{q}_{21} + nw_{22} \dot{q}_{22}) + \frac{1}{2} m_2 L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c\theta_2 + \\ & + L_1 \dot{\theta}_1 (nq_{21} q_{21} + nq_{22} q_{22}) c\theta_2 + \frac{1}{2} m_2 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) c\theta_2 \\ & + (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (nq_{21} \dot{q}_{21} + nq_{22} \dot{q}_{22}) c\theta_2 + \\ & + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (nq_{21} q_{21} + nq_{22} q_{22}) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) s(-\theta_2) + \\ & + \frac{1}{2} m_2 L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) s\theta_2 + \\ & + L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (nq_{21} q_{21} + nq_{22} q_{22}) s(-\theta_2) + \\ & + \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (nq_{21} q_{21} + nq_{22} q_{22}) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) c\theta_2 \\ & + \dot{\theta}_1 (nq_{21} \dot{q}_{21} + nq_{22} \dot{q}_{22}) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) s\theta_2 \\ & + \frac{1}{2} m_j \dot{\theta}_1^2 L_1^2 + m_j L_1 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) + \frac{1}{2} m_j (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12})^2 \\ & + \frac{1}{2} m_j \dot{\theta}_1^2 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12})^2 + \frac{1}{2} m_p L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} m_p \dot{\theta}_1^2 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12})^2 + m_p L_1 \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) \\
 & + \frac{1}{2} m_p L_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} m_p (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22})^2 \\
 & + \frac{1}{2} m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) + m_p L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{21E} \dot{q}_{21E} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) \\
 & + m_p L_1 L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c \theta_2 + m_p L_1 \dot{\theta}_1 (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) c \theta_2 \\
 & + m_p L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) c \theta_2 \\
 & + m_p (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) c \theta_2 \\
 & + m_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12}) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) s(-\theta_2) \\
 & + m_p L_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) s \theta_2 \\
 & + m_p L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) s(-\theta_2) \\
 & + m_p \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) (\phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22}) c \theta_2 \\
 & + \frac{1}{2} m_p \dot{\theta}_1 (\phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12}) (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22}) s \theta_2 \\
 & + \frac{1}{2} J_p (\phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22})^2
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

De maneira análoga, ou seja, substituindo agora as integrais avaliadas relacionadas à energia potencial do sistema dada pela expressão (3.42) obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 V = & \left\{ (m_1 + 2m_j + 2m_2 + 2m_p) \frac{1}{2} L_1 s \theta_1 + (m_2 + 2m_p) \frac{1}{2} L_2 s(\theta_1 + \theta_2) \right\} g \\
 & - k w_{111} q_{11}^2 - k w_{122} q_{12}^2 - k w_{211} q_{21}^2 - k w_{222} q_{22}^2 + C
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

onde a constante C representa a energia potencial referencial para as componentes flexíveis.

Considerando $\theta_1, \theta_2, q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}$ as coordenadas generalizadas, e Γ_1 e Γ_2 os torques não conservativos agindo na junta do sistema, é possível escrever as equações de movimento usando as equações de Lagrange para sistemas não conservativos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = Q_r \quad r = 1(1)6 \quad (3.65)$$

onde Q_r são as forças (ou torques) generalizados dependentes do tempo.

Obtêm-se assim, um sistema de seis equações diferenciais fortemente não lineares e acopladas. A proposta de apresentar as equações do modelo flexível como uma extensão do modelo rígido, exigiu-se um tratamento dedicado na manipulação algébrica das mesmas. Esse tratamento inclui a parametrização dos termos nas equações de movimento.

Com a parametrização realizada, pode-se escrever as equações de movimento e seus respectivos coeficientes da seguinte maneira:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + F_1 \dot{\theta}_1 + \Gamma_{\text{perturb } 1} = \tau_1 \quad (3.66)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + F_2 \dot{\theta}_2 + \Gamma_{\text{perturb } 2} = \tau_2 \quad (3.67)$$

$$J_3 \ddot{q}_{11} + F_3 \dot{q}_{11} + \Gamma_{\text{perturb } 3} = 0 \quad (3.68)$$

$$J_4 \ddot{q}_{12} + F_4 \dot{q}_{12} + \Gamma_{\text{perturb } 4} = 0 \quad (3.69)$$

$$J_5 \ddot{q}_{21} + F_5 \dot{q}_{21} + \Gamma_{\text{perturb } 5} = 0 \quad (3.70)$$

$$J_6 \ddot{q}_{22} + F_6 \dot{q}_{22} + \Gamma_{\text{perturb } 6} = 0 \quad (3.71)$$

onde

$$J_1 = A_1 + B_1 + C_1 s \theta_2 + D_1 c \theta_2 + E_1 \quad (3.72)$$

$$F_1 = H_1 + I_1 s \theta_2 + M_1 c \theta_2 \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{perturb.1} = & P_1 \ddot{\theta}_2 + R_{111} \ddot{q}_{11} + R_{112} \ddot{q}_{12} + R_{121} \ddot{q}_{21} + R_{122} \ddot{q}_{22} + S_1 \dot{\theta}_2 - T_1 \dot{\theta}_2^2 \\
 & + U_1 c \theta_1 + V_1 c (\theta_1 + \theta_2) - Y_1 + [a_1 \ddot{\theta}_2 - b_1 \dot{\theta}_2 - c_1 \dot{\theta}_2^2 + e_1] s \theta_2 \\
 & + [p_1 \ddot{\theta}_2 + r_1 \dot{\theta}_2^2 + s_1 \dot{\theta}_2 + v_1] c \theta_2
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$J_2 = A_2 + B_2 \tag{3.75}$$

$$F_2 = H_2 \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{perturb.2} = & P_2 \ddot{\theta}_1 + R_{21} \ddot{q}_{21} + R_{222} \ddot{q}_{22} + S_2 \dot{\theta}_1 + V_2 c (\theta_1 + \theta_2) + Y_2 \\
 & [a_2 \ddot{\theta}_1 + b_2 \dot{\theta}_1 + c_2 \dot{\theta}_1^2 - e_2] s \theta_2 + [p_2 \ddot{\theta}_1 - r_2 \dot{\theta}_1^2 + s_2 \dot{\theta}_1 + v_2] c \theta_2
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

$$J_3 = A_{311} \tag{3.78}$$

$$F_3 = 0 \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{perturb.3} = & P_{311} \ddot{\theta}_1 + R_{312} \ddot{q}_{12} - T_{312} \dot{\theta}_1^2 - 2 K w_{311} \\
 & - \phi_{11E} [a_3 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + b_3 \dot{\theta}_1 + c_3 \dot{\theta}_2 + e_3] s \theta_2 \\
 & + \phi_{11E} [p_3 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + 2a_3 (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2) + v_3] c \theta_2
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

$$J_4 = A_{412} \tag{3.81}$$

$$F_4 = 0 \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{perturb.4} = & P_{412} \ddot{\theta}_1 + R_{411} \ddot{q}_{11} - T_{411} \dot{\theta}_1^2 - 2 K w_{412} \\
 & - \phi_{12E} [a_4 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + b_4 \dot{\theta}_1 + c_4 \dot{\theta}_2 + e_4] s \theta_2 \\
 & + \phi_{12E} [p_4 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - 2a_4 (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2) + v_4] c \theta_2
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

$$J_5 = A_{521} \quad (3.84)$$

$$F_5 = 0 \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{perturb.5} = & P_{521} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + R_{522} \ddot{q}_{22} - Z_{521} - 2 Kw_{521} \\ & + [a_{521} \ddot{\theta}_1 + b_{521} \dot{\theta}_1 - c_{521} \dot{\theta}_2 + d_{521} (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2)] s \theta_2 \\ & - [p_{521} \ddot{\theta}_1 + r_{521} \dot{\theta}_1^2 + s_{521} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - v_{521}] c \theta_2 \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$J_6 = A_{622} \quad (3.87)$$

$$F_6 = 0 \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{perturb.6} = & P_{622} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + R_{621} \ddot{q}_{21} - Z_{622} - 2 Kw_{622} \\ & + [a_{622} \ddot{\theta}_1 + b_{622} \dot{\theta}_1 - c_{622} \dot{\theta}_2 + d_{622} (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2)] s \theta_2 \\ & - [p_{622} \ddot{\theta}_1 + r_{622} \dot{\theta}_1^2 + s_{622} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - v_{622}] c \theta_2 \end{aligned} \quad (3.89)$$

Os coeficientes dessas equações são apresentados abaixo da seguinte forma: apresenta-se como **coeficientes gerais** aqueles que aparecem nas equações de forma geral e que também apareceram nas equações do manipulador rígido tratado anteriormente. Em seguida, apresentam-se tabelas com os coeficientes relacionados a cada uma das seis equações de movimento especificando à qual pertence. Tem-se, então:

Coeficientes Gerais:

$$\begin{aligned} A_1^* &= \alpha_1 + \alpha_1^{\downarrow} & A_4^* &= \alpha_4 + \alpha_4^{\downarrow} \\ A_2^* &= \alpha_2 + \alpha_2^{\downarrow} & A_5^* &= \alpha_5 + \alpha_5^{\downarrow} \\ A_3^* &= \alpha_3 + \alpha_3^{\downarrow} \end{aligned} \quad (3.90)$$

com

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}m_1 L_1^2 + \frac{1}{3}m_2 L_2^2 + m_2 L_1^2 \quad \alpha_1^{\dot{}} = m_p L_1^2 + m_p L_2^2 \quad (3.91)$$

$$\alpha_2 = m_2 L_1 L_2 \quad \alpha_2^{\dot{}} = 2m_p L_1 L_2 \quad (3.92)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3}m_2 L_2^2 \quad \alpha_3^{\dot{}} = m_p L_2^2 \quad (3.93)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}m_1 L_1 g + m_2 L_1 g \quad \alpha_4^{\dot{}} = m_p L_1 g \quad (3.94)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}m_2 L_2 g \quad \alpha_5^{\dot{}} = m_p L_2 g \quad (3.95)$$

e,

$$\begin{aligned} \beta &= m_p L_1 & \psi &= m_2 L_2 \\ \gamma &= 2L_1 & \delta &= m_p \\ \eta &= m_p L_2 & \alpha &= \psi + 2\eta \\ \varepsilon &= m_2 + m_j + m_p \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_1 &= \phi_{11E} q_{11} + \phi_{12E} q_{12} & \mathfrak{T}_4 &= \phi_{21E} \dot{q}_{21} + \phi_{22E} \dot{q}_{22} \\ \mathfrak{T}_2 &= \phi_{21E} q_{21} + \phi_{22E} q_{22} & \mathfrak{T}_5 &= nq_{21} q_{21} + nq_{22} q_{22} \\ \mathfrak{T}_3 &= \phi_{11E} \dot{q}_{11} + \phi_{12E} \dot{q}_{12} & \mathfrak{T}_6 &= nq_{21} \dot{q}_{21} + nq_{22} \dot{q}_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_7 &= \phi_{11E} \bar{q}_{11} + \phi_{12E} \bar{q}_{12} \\ \mathfrak{T}_8 &= \phi_{21E} \bar{q}_{21} + \phi_{22E} \bar{q}_{22} \\ \mathfrak{T}_9 &= nq_{21} \bar{q}_{21} + nq_{22} \bar{q}_{22} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Nas tabelas que seguem, os demais coeficientes são apresentados de forma ordenada para cada uma das seis equações diferenciais de movimento obtidas para o manipulador flexível.

Coefficientes das equações de movimento		
1ª equação	2ª equação	3ª equação
$A_1 = A_1^*$	$A_2 = A_3^*$	$A_{311} = (m_1 + \varepsilon) \phi_{11E}^2$
$B_1 = m_j L_1^2$	$B_2 = \delta \mathfrak{I}_2^2$	$P_{311} = (m w_{11} + \frac{1}{2} \varepsilon \gamma \phi_{11E})$
$C_1 = \alpha \mathfrak{I}_1 - 2\beta \mathfrak{I}_2 - \gamma \mathfrak{I}_5$	$H_2 = \eta \mathfrak{I}_4$	$R_{312} = \varepsilon \phi_{11E} \phi_{12E}$
$D_1 = A_2^* + 2(\delta \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_5)$	$P_2 = A_3^* + \eta \mathfrak{I}_2$	$T_{312} = \varepsilon(\phi_{11E}^2 + \phi_{11E} \phi_{12E} q_{12})$
$E_1 = \varepsilon \mathfrak{I}_1^2$	$R_{221} = R_{121}$	$Kw_{311} = Kw_{111}$
$H_1 = \eta \mathfrak{I}_4 + 2\varepsilon \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_3$	$R_{222} = R_{122}$	$a_3 = \mathfrak{I}_5 + \delta \mathfrak{I}_2$
$I_1 = \left[\begin{array}{l} 3\eta \mathfrak{I}_3 - 2\beta \mathfrak{I}_4 - \gamma \mathfrak{I}_6 \\ -(A_2^* + 2(\delta \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_5)) \dot{\theta}_2 \end{array} \right]$	$S_2 = S_1$	$b_3 = 2\mathfrak{I}_6 + \frac{3}{2} \delta \mathfrak{I}_4$
$M_1 = \left[\begin{array}{l} (3\eta \mathfrak{I}_1 - 2\beta \mathfrak{I}_2 - \gamma \mathfrak{I}_5) \dot{\theta}_2 + \\ 2\delta(\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_4 + \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_3) + \\ 2(\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_6 + \mathfrak{I}_3 \mathfrak{I}_5) \end{array} \right]$	$V_2 = V_1$	$c_3 = 2\mathfrak{I}_6 + 2\delta \mathfrak{I}_4$
$P_1 = A_3^* + \eta \mathfrak{I}_2$	$Y_2 = \eta \mathfrak{I}_8$	$e_3 = \frac{1}{2} \alpha (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$
$R_{111} = m w_{11}$	$a_2 = a_1$	$p_3 = \frac{1}{2} \alpha$
$R_{112} = m w_{12}$	$b_2 = \alpha \mathfrak{I}_3 - \beta \mathfrak{I}_4$	$v_3 = \delta \mathfrak{I}_8 + \mathfrak{I}_9$
$R_{121} = m w_{21}$		
$R_{122} = m w_{22}$	$c_2 = \frac{1}{2}(A_2^* + 2\delta \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 + 2\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_5)$	
$S_1 = \eta \mathfrak{I}_4$		

$T_1 = \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_5$	$e_2 = \delta \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_7 + \mathfrak{I}_5 \mathfrak{I}_7$	
$U_1 = A_4^*$	$p_2 = c_2$	
$V_1 = A_5^*$	$r_2 = a_2$	
$Y_1 = \varepsilon \gamma \mathfrak{I}_7$	$s_2 = \frac{1}{2}(\delta \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_4$	
$a_1 = \frac{1}{2} C_1$	$+ 4\delta \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_3 + 4\mathfrak{I}_3 \mathfrak{I}_5)$	
$b_1 = \beta \mathfrak{I}_4 + \gamma \mathfrak{I}_6$	$v_2 = \frac{1}{2} \alpha \mathfrak{I}_7$	
$c_1 = \frac{1}{2}(A_2^* + 2\delta \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2)$		
$e_1 = \frac{1}{2}\delta(\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_8 - \mathfrak{I}_3 \mathfrak{I}_4 - 2\mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_7)$		
$- \mathfrak{I}_5 \mathfrak{I}_7$		
$p_1 = c_1$		
$r_1 = a_1$		
$s_1 = \frac{1}{2}(\gamma \mathfrak{I}_6 + 3\delta \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_4 + 4\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_6)$		
$v_1 = \frac{1}{2} \alpha \mathfrak{I}_7 + \eta \mathfrak{I}_8 + \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_9$		

Tabela 3.1: Coeficientes das três primeiras equações diferenciais de movimento

Coeficientes das equações de movimento		
4ª equação	5ª equação	6ª equação
$A_{412} = (m_1 + \varepsilon) \phi_{12E}^2$	$A_{521} = (m_2 + \delta) \phi_{21E}^2 + J_p \phi_{22E}^{12}$	$A_{622} = (m_2 + \delta) \phi_{22E}^2 + J_p \phi_{22E}^{12}$
$P_{412} = m w_{12} + \frac{1}{2} \varepsilon \gamma \phi_{12E}$	$P_{521} = (m w_{21} + \eta \phi_{21E})$	$P_{622} = (m w_{22} + \eta \phi_{22E})$
$R_{411} = R_{312}$	$R_{522} = (J_p \phi_{21E}^1 \phi_{22E}^1 + \delta \phi_{21E} \phi_{22E})$	$R_{621} = (J_p \phi_{21E}^1 \phi_{22E}^1 + \delta \phi_{21E} \phi_{22E})$
$T_{411} = \varepsilon (\phi_{12E}^2 + \phi_{11E} \phi_{12E} q_{11})$	$Z_{521} = \frac{1}{2} \beta \phi_{21E} (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$	$Z_{622} = \frac{1}{2} \beta \phi_{22E} (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$
$Kw_{412} = Kw_{122}$	$Kw_{521} = Kw_{211}$	$Kw_{622} = Kw_{222}$
$a_4 = a_3$	$a_{521} = (nq_{21} + \frac{1}{2} \delta \phi_{21E}) \mathfrak{I}_1$	$a_{622} = (nq_{22} + \frac{1}{2} \delta \phi_{22E}) \mathfrak{I}_1$
$b_4 = b_3$	$b_{521} = (2 nq_{21} + \frac{3}{2} \delta \phi_{21E}) \mathfrak{I}_3$	$b_{622} = (2 nq_{22} + \frac{3}{2} \delta \phi_{22E}) \mathfrak{I}_3$
$c_4 = c_3$	$c_{521} = (2 nq_{21} - 2\delta \phi_{21E}) \mathfrak{I}_3$	$c_{622} = (2 nq_{22} - 2\delta \phi_{22E}) \mathfrak{I}_3$
$e_4 = e_3$	$d_{521} = (\beta \phi_{21E} + \frac{1}{2} \gamma nq_{21})$	$d_{622} = (\beta \phi_{22E} + \frac{1}{2} \gamma nq_{22})$
$p_4 = p_3$	$p_{521} = \frac{1}{2} \gamma nq_{21}$	$p_{622} = \frac{1}{2} \gamma nq_{22}$
$v_4 = v_3$	$r_{521} = (nq_{21} + \delta \phi_{21E}) \mathfrak{I}_1$	$r_{622} = (nq_{22} + \delta \phi_{22E}) \mathfrak{I}_1$
	$s_{521} = \frac{1}{2} \delta \phi_{21E} \mathfrak{I}_1$	$s_{622} = \frac{1}{2} \delta \phi_{22E} \mathfrak{I}_1$
	$v_{521} = (nq_{21} + \delta \phi_{21E}) \mathfrak{I}_7$	$v_{622} = (nq_{22} + \delta \phi_{22E}) \mathfrak{I}_7$

Tabela 3.2: Coeficientes das três últimas equações diferenciais de movimento

Apresenta-se, na figura 3.10, um quadro resumo explicativo.

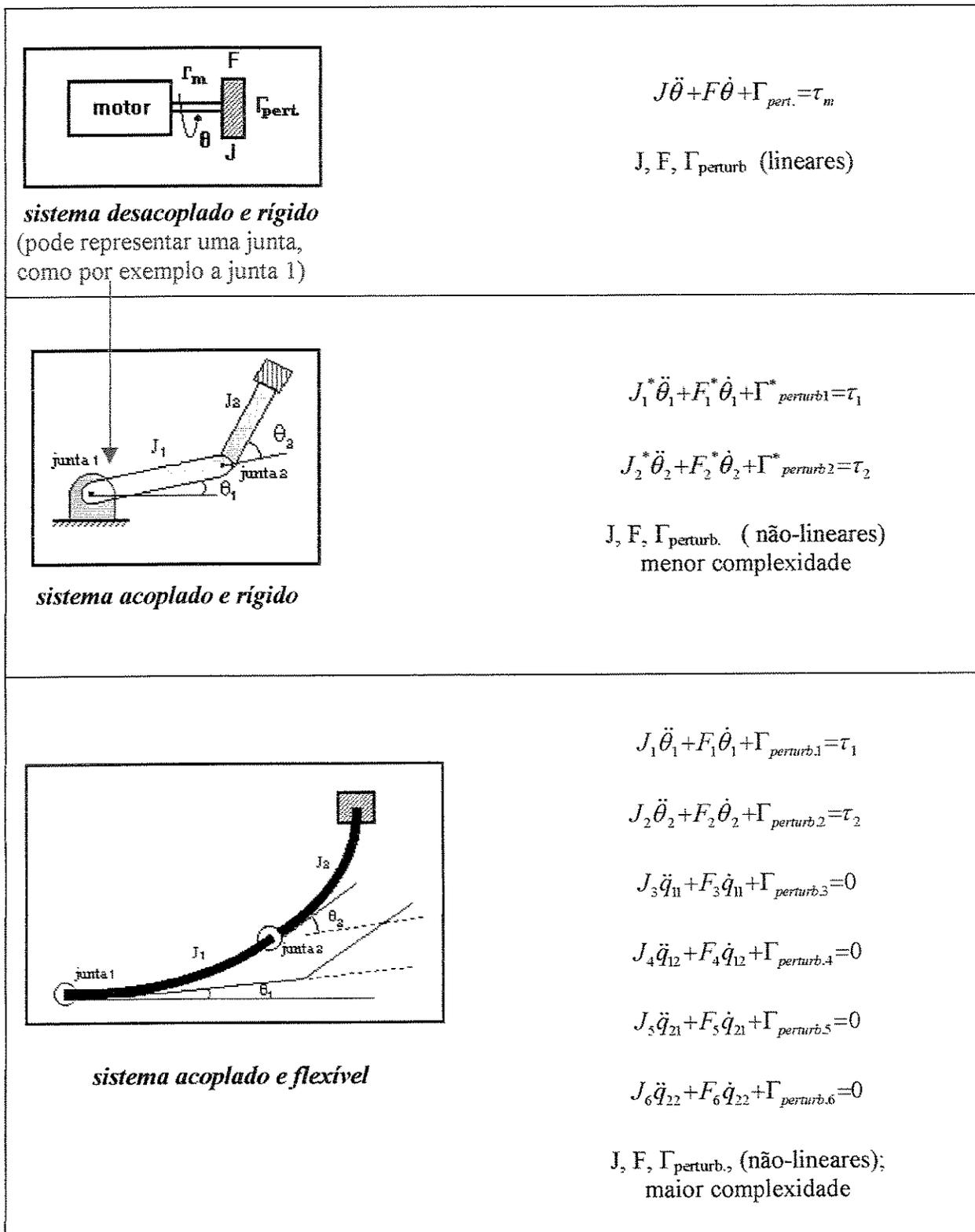


fig.3.10: Quadro resumo

O diagrama esquemático da figura 3.10 procura esclarecer ainda mais a proposta de escrever as equações de movimento desde o caso mais simples (sistema descoplado e rígido), passando pelo caso do manipulador rígido com dois graus de liberdade (sistema acoplado e rígido) até o caso mais abrangente considerado que é o manipulador flexível com dois links (sistema acoplado e flexível), com as mesmas características, aumentando – como era de se esperar – a complexidade dos coeficientes dessas equações à medida que se aumenta a complexidade do sistema.

É importante notar que o objetivo de escrever as equações dinâmicas do manipulador flexível de forma análoga às equações do sistema rígido foi alcançado, ressaltando-se que foi utilizada uma mesma sistemática de parametrização e que nenhum processo de linearização das equações foi utilizado.

Além disso, vale lembrar que, com a proposta de apresentar as equações do modelo flexível como uma extensão do modelo rígido, exigiu-se um tratamento dedicado na manipulação algébrica das mesmas.

Uma vez que as equações de movimento foram obtidas e escritas convenientemente, pode-se através de simulações das mesmas estudar o comportamento dinâmico dos sistemas rígido e flexível.

Com uma metodologia a ser descrita na próxima seção, as equações obtidas para os sistemas são simuladas procurando sempre que possível estabelecer comparações entre os resultados dos mesmos.

3.4 Simulações e Resultados

Apresenta-se nesta seção os resultados das simulações realizadas para as equações de movimento dos manipuladores rígido e flexível. Essas simulações dinâmicas foram realizadas utilizando-se o software Matlab-Simulink , baseando-se na seguinte metodologia:

- simula-se primeiro o sistema rígido modelado individualmente; inicialmente considera-se o sistema desacoplado e sem nenhuma carga a ser movida por ele e estende-se a análise até a situação de acoplamento com uma carga na extremidade do manipulador.
- a seguir, simula-se o sistema flexível com todos os termos matemáticos de sua equação de movimento levados em conta, ou seja envolvendo todas as possíveis contribuições dadas por esses termos à flexibilidade do sistema;
- a partir daí, subtraem-se efeitos desse sistema flexível isoladamente e também de maneira cumulativa e estuda-se o comportamento dinâmico do manipulador flexível;
- os efeitos relacionados à flexibilidade são subtraídos até o caso limite em que o sistema flexível reduz-se ao rígido e a resposta do sistema converge - como era de se esperar - para o caso do sistema rígido modelado individualmente.

Nas simulações, as entradas ou forças de excitação utilizadas foram as funções degrau ou funções seno.

3.4.1 Manipulador Rígido - Sistema Desacoplado

O sistema desacoplado é simulado primeiro sem nenhuma carga a ser movida pelo manipulador e depois com uma carga em sua extremidade. São observados as evoluções temporais de posição, velocidade e aceleração angulares.

A figura 3.11 ilustra a situação a simulada, ou seja, o manipulador com um único link, podendo ou não ter carga a ser movida em sua extremidade.

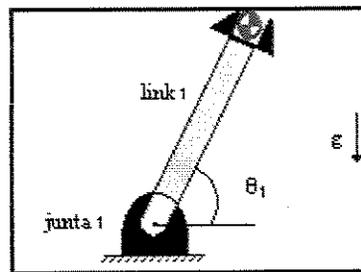


Figura 3.11 : Sistema desacoplado

3.4.2 Manipulador Rígido - Sistema Acoplado

O sistema é agora simulado com os dois links do manipulador acoplados. Nesta condição também considera-se duas situações como foi considerado para o sistema desacoplado, ou seja, as equações de movimento são simuladas sem nenhuma carga a ser movida pelo manipulador e depois com uma carga na extremidade de seu link 2. Apresenta-se os resultados da dependência no tempo das variáveis posição, velocidade e aceleração angulares.

A figura 3.13 ilustra a situação de simulação para o sistema acoplado

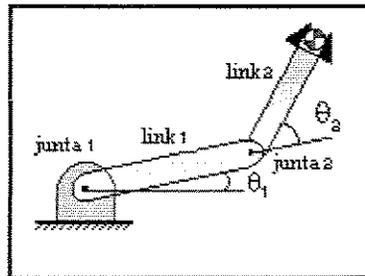


Figura 3.13: Sistema acoplado

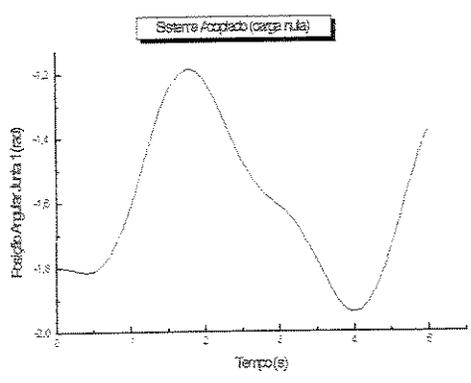


Gráfico 7: Posição Angular x Tempo

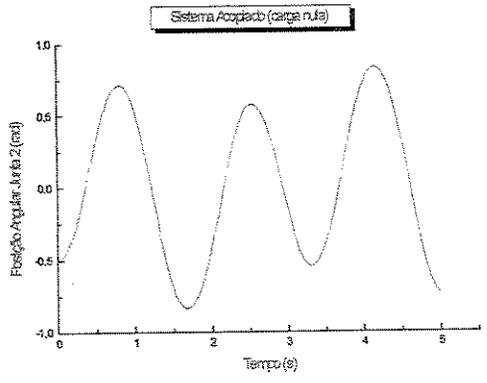


Gráfico 8: Posição Angular x Tempo

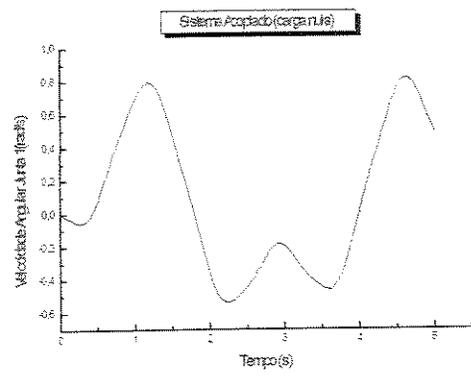


Gráfico 9: Velocidade Angular x Tempo

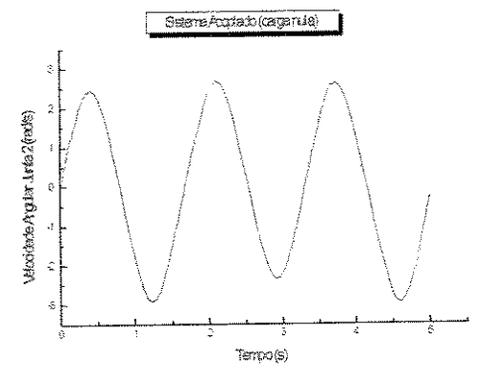


Gráfico 10: Velocidade Angular x Tempo

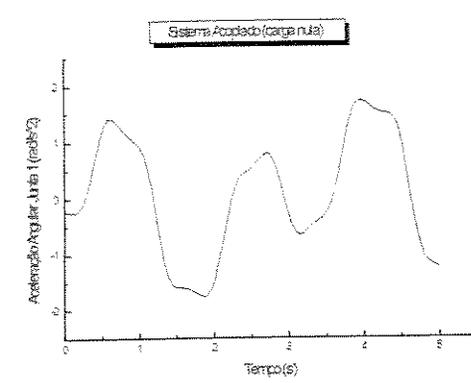


Gráfico 11: Aceleração Angular x Tempo

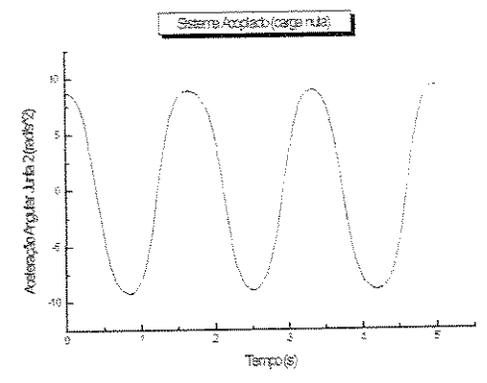


Gráfico 12: Aceleração Angular x Tempo

(a) junta 1

(b) junta 2

Figura 3.14: Manipulador Rígido - Sistema Acoplado (carga nula)

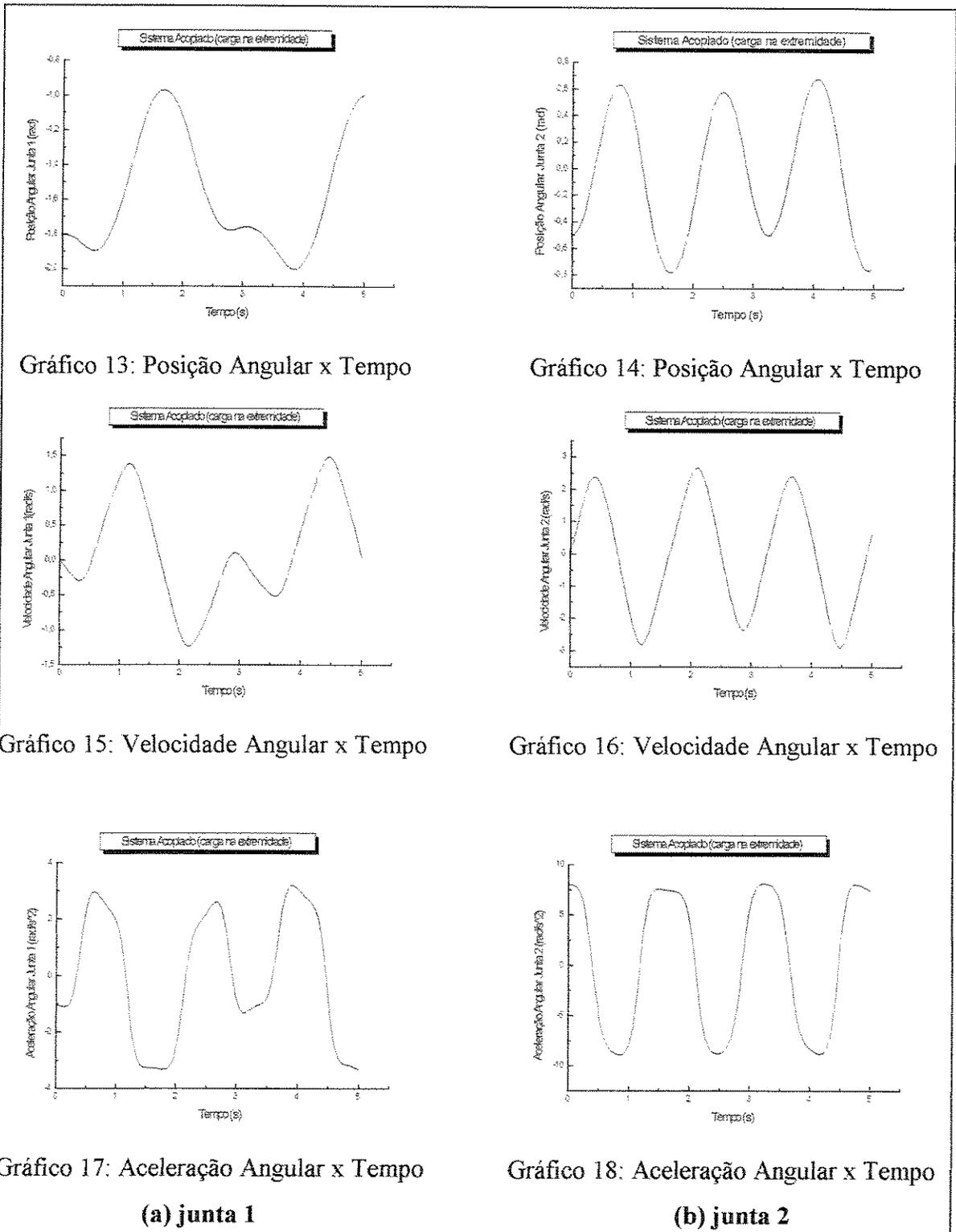


Figura 3.15: Manipulador Rígido – Sistema Acoplado (carga na extremidade)

Os resultados de simulações apresentados até aqui para os sistemas rígido desacoplado e acoplado estão em concordância com resultados similares já obtidos pela literatura pertinente. A discussão dos mesmos isoladamente é assunto conhecido entre especialistas da área e não é o foco deste trabalho.

Entretanto, faz-se útil a obtenção desses resultados pois, além de permitir que simulações mais complexas (para o sistema flexível) possam ser realizadas a partir delas, permitirá também que comparações entre os sistemas rígido e flexível sejam estabelecidas.

3.4.3 Manipulador Flexível – Sistema Acoplado

A figura 3.16 ilustra a situação de simulação para o sistema flexível acoplado com uma carga na extremidade, cujas equações de movimento foram obtidas no capítulo anterior. Apresenta-se as evoluções temporais de posição e velocidade angulares para as juntas 1 e 2.

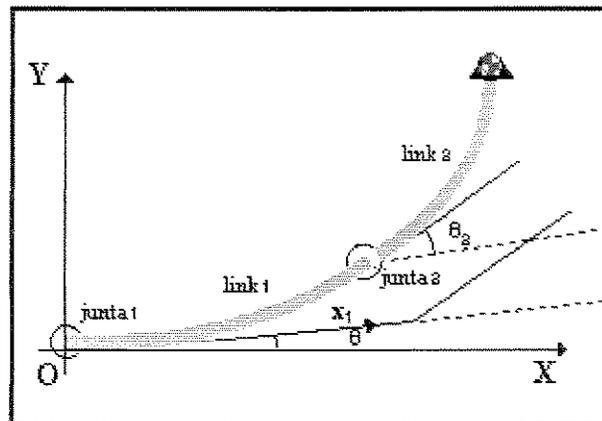


Figura 3.16: Sistema flexível

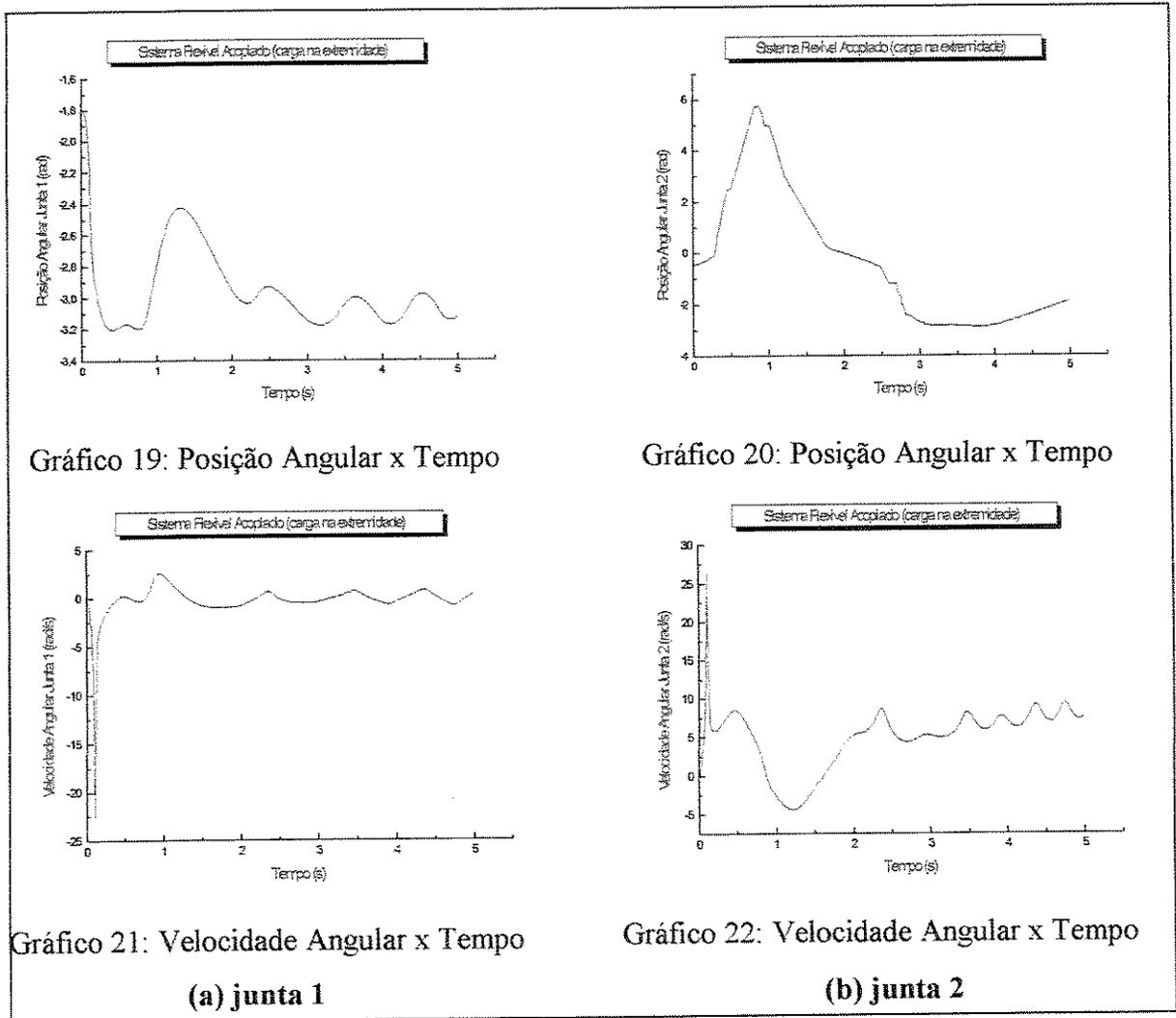


Figura 3.17: Resultados de Simulação - Manipulador Flexível (Sistema Acoplado)

Mostra-se a seguir comparações entre as evoluções temporais de posições angulares para as juntas 1 e 2 de ambos os sistemas, rígido e flexível, representados respectivamente pelas figuras 3.13 e 3.16.

A atenção principal às posições angulares se justificam pelo fato de que, num problema de controle robótico são utilizados, na maioria das vezes, sensores de posição incrementais a fim de corrigir a resposta do elemento terminal.

Ambos os sistemas são considerados acoplados e com carga na extremidade.

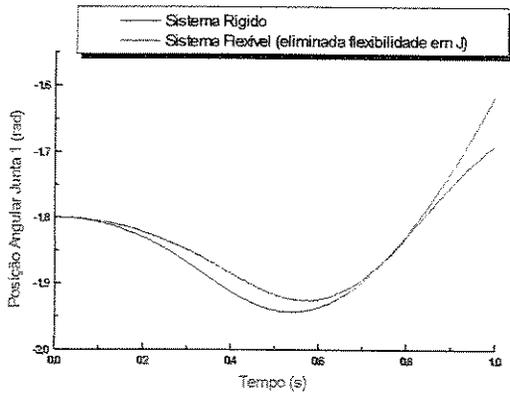


Gráfico 23: Posição Angular x Tempo

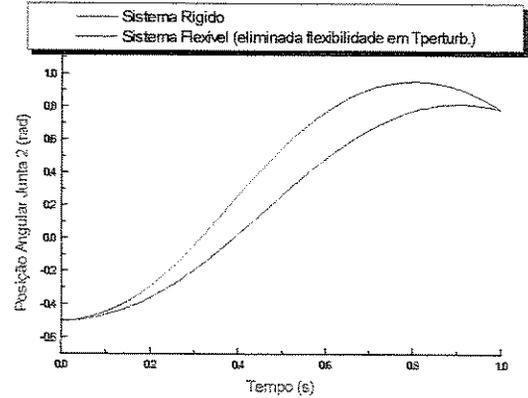


Gráfico 26: Posição Angular x Tempo

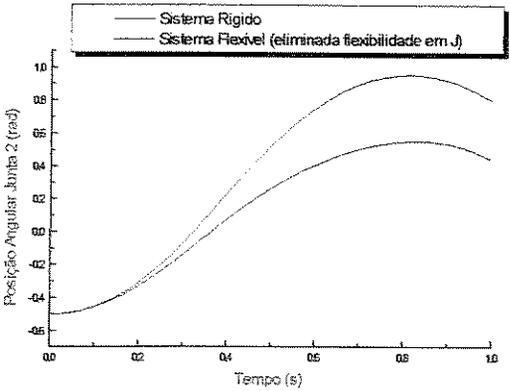


Gráfico 24: Posição Angular x Tempo

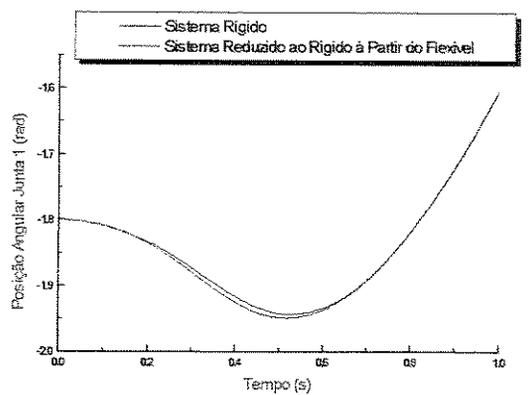


Gráfico 27: Posição Angular x Tempo

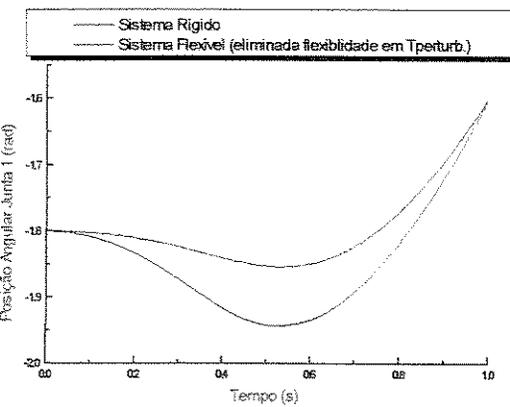


Gráfico 25: Posição Angular x Tempo

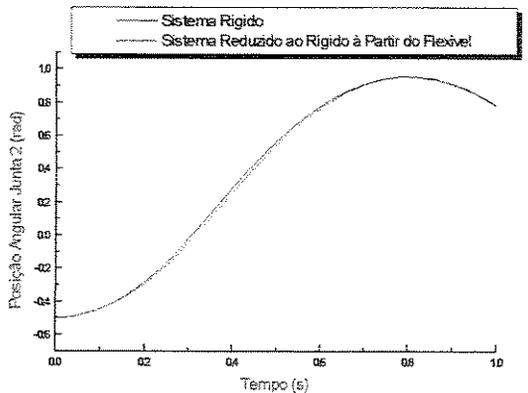


Gráfico 28: Posição Angular x Tempo

Figura 3.18: Resultados de Simulação: Sistemas Rígido e Flexível

3.5 Análise Qualitativa de Fronteira Rígido e Flexível

Alguns dos resultados de simulação apresentados na figura 3.18 procuram fornecer subsídios para que se possa traçar um comparativo entre os sistemas rígido e flexível.

O manipulador flexível é simulado inicialmente com todas as suas contribuições matemáticas que representam flexibilidade para o sistema. A partir daí, esses efeitos são eliminados gradativamente pela anulação dos termos matemáticos que os representam. Novas simulações são realizadas e os efeitos devido a flexibilidade são subtraídos até o caso limite em que o sistema flexível reduz-se ao rígido. Esse procedimento é uma extensão daquele elaborado na obtenção e parametrização das equações de movimento.

Pode-se notar observando-se os gráficos de 23 a 26 que as contribuições de flexibilidade para o sistema representadas tanto pelos coeficientes em J , como pelos coeficientes em $\Gamma_{\text{perturb.}}$, quando eliminadas fazem com que o sistema tenha uma resposta que vai se aproximando daquela dada pelo manipulador rígido.

É importante que se observe, entretanto, que os coeficientes em J não possuem tantos termos matemáticos quando comparados com coeficientes em $\Gamma_{\text{perturb.}}$, mas ainda assim apresentam uma influência relativamente significativa na resposta do sistema.

Esses coeficientes estão relacionados com a inércia efetiva de cada link e também com o acoplamentos de inércia entre os links.

Os gráficos 27 e 28 mostram que, uma vez eliminadas as contribuições de flexibilidade relacionadas aos três coeficientes (J , F e $\Gamma_{\text{perturb.}}$), a resposta do sistema converge para àquela dada pelo manipulador rígido, como era de se esperar.

Procura-se, com o auxílio da tabela 3, compor um quadro que se propõe a fornecer uma análise qualitativa da influência dos termos no comportamento dinâmico dos sistemas, considerando-se as seguintes atribuições: Muito Relevante, Menos Relevante, Relevante e Irrelevante.

Sistemas	Rígido		Flexível
Influência dos termos	Desacoplado	Acoplado	Acoplado
J	Muito relevante	Muito relevante	Muito relevante
F	Irrelevante	Irrelevante	Menos relevante
$\Gamma_{\text{perturb.}}$	Relevante	Relevante	Relevante

Tabela 3.3: Análise Qualitativa

Vale ressaltar que, esse estudo não tem o propósito de quantificar a parcela de contribuição relacionada à cada termo das equações de movimento. É fato que o porte e a complexidade das equações de movimento aqui tratadas é considerável. Entretanto, a continuação e o aprofundamento de um estudo sistemático como o desenvolvido nesse trabalho pode permitir que, em investigações futuras, seja possível uma análise quantitativa que fornecesse, por exemplo, uma contribuição percentual de cada um dos três termos das equações de movimento ou, até mesmo, a contribuição individual de cada um dos coeficientes relacionados à esses termos.

3.6 Comentários

Nesse capítulo apresentou-se o estudo de um modelo de manipulador flexível formado por dois links e duas juntas rotacionais, sem atrito, cujo movimento global pode ser entendido como um movimento de um sistema hipotético rígido e um movimento flexível dos links com relação a esse sistema rígido móvel.

Mostrou-se que é possível trabalhar com as equações dinâmicas de movimento da maneira mais genérica possível, sem linearizações. Trabalhou-se também com um sistema rígido nas mesmas condições do flexível a fim de que comparações entre ambos pudessem ser estabelecidas.

Além disso, o trabalho mostra através de uma conveniente parametrização das equações de movimento que o sistema flexível pode ser escrito matematicamente como uma extensão do modelo rígido, e conseqüentemente o comportamento dinâmico do manipulador

flexível pode ser reduzido ao do manipulador rígido com a anulação dos termos relacionados à flexibilidade.

Esse procedimento foi estendido às simulações e eliminando as contribuições de flexibilidade devido ao coeficiente F , o sistema continua respondendo de modo que sua relevância para a flexibilidade parece ser menos relevante.

Notou-se que as contribuições de flexibilidade para o sistema representadas tanto pelos coeficientes em J , como pelos coeficientes em $\Gamma_{\text{perturb.}}$, quando eliminadas fazem com que o sistema tenha uma resposta que vai se aproximando daquela dada pelo manipulador rígido.

A análise das equações de movimento tal como foi feita nesse trabalho permite um monitoramento sobre cada parcela de contribuição para a flexibilidade do sistema. Pode-se assim, pensar na possibilidade de se encontrar uma fronteira entre ambos os sistemas, rígido e flexível.

Pode-se também pensar em construir controladores que façam compensações de efeitos físicos- que através das simulações foram considerados relevantes para a flexibilidade do sistema- a fim de corrigir a resposta do elemento terminal do manipulador aos sinais de entrada do sistema de controle.

No próximo capítulo apresenta-se uma outra aplicação envolvendo estruturas flexíveis. Nessa segunda aplicação, um oscilador mecânico é caracterizado por uma haste flexível sujeita à excitação externa e defletida por campos magnéticos.

Novamente um modelo teórico é desenvolvido e simulações numéricas são realizadas. Entretanto essa segunda aplicação procura ter um aspecto experimental e uma bancada envolvendo a integração de vários dispositivos é construída a fim de permitir uma validação de resultados.

Capítulo 4

Modelagem Dinâmica, Simulação Numérica e Proposta de uma Plataforma Experimental de um Sistema Magneto - Elástico

4.1 Introdução

Um grande número de pesquisadores têm estudado equações diferenciais não-lineares exibindo soluções não periódicas relacionadas à diversas áreas do conhecimento, como por exemplo em circuitos elétricos, dinâmica atmosférica, estruturas elásticas, etc.

Muitos dispositivos técnicos tais como motores, geradores, transformadores, empregam estruturas elásticas em campos magnéticos. Isso têm motivado a análise por meio de uma modelagem dinâmica, simulações numéricas e construção de uma bancada experimental de um sistema oscilatório denominado oscilador magneto – elástico.

Resultados das simulações numéricas e a observação de dados experimentais – que serão apropriadamente apresentados no fim deste capítulo – têm mostrado que o oscilador magneto-elástico pode ter tanto aplicações técnicas quanto servir como um conveniente modelo de laboratório para o estudo de movimentos periódicos e não periódicos, fenômenos não-lineares e aqueles indicativos de comportamento caótico.

Desenvolve-se, assim, um modelo baseado em deformação linear e forças magnéticas não-lineares que pode ser reduzido a um oscilador com um único grau de liberdade, utilizando o formalismo de Lagrange e o método de Galerkin. Esse desenvolvimento será apresentado na próxima seção.

4.2 Modelagem Dinâmica

O modelo teórico do sistema dinâmico magneto - elástico é mostrado na figura 4.1

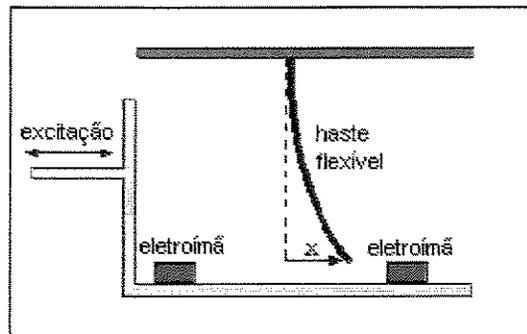


Figura 4.1: Modelo Teórico do Sistema Magneto-Elástico

Uma haste flexível é fixa à uma base rígida, também fixa. Eletroímãs atraem a haste em direções opostas e, a intensidade do campo é forte o suficiente para defletir a haste de um lado para outro.

As condições de deflexão são separadas por uma barreira de energia, correspondendo ao equilíbrio instável no qual a haste está em linha reta - sem deflexão - equilibrada entre os eletroímãs. A base que suporta os eletroímãs fica sujeita a uma excitação externa.

A fim de facilitar a visualização e o entendimento físico estabelece-se uma analogia desse problema com o problema de um duplo poço de potencial, mostrado na figura 4.2.

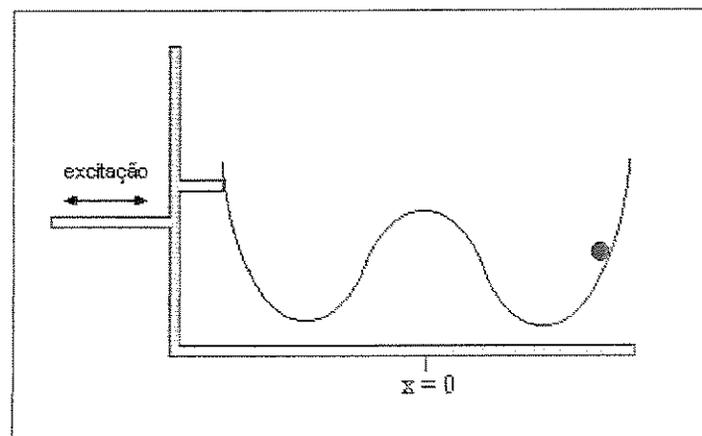


Figura 4.2: Duplo poço de potencial

Os dois poços correspondem aos dois estados defletidos da haste, separados pela rampa em $x = 0$. Sob considerações físicas, podemos esperar as seguintes condições: se a excitação é fraca, a partícula deve permanecer no fundo de um poço, oscilando com amplitude muito pequena. À medida que cresce a intensidade da excitação externa, a amplitude da oscilação também cresce. Sendo assim, pode-se imaginar que existe (pelo menos) dois tipos de oscilações estáveis: a de baixa energia com pequena amplitude em torno do fundo de um único poço de potencial e a de alta energia, na qual a partícula pode passar sobre a rampa experimentando oscilação em torno do fundo de um poço e do outro.

A escolha entre essas oscilações, depende das condições iniciais. Quando a excitação é suficientemente grande a partícula permanece atravessando entre os dois lados da rampa para quaisquer condições iniciais.

Se a partícula tiver uma energia necessária e suficiente apenas para alcançar o topo da rampa e se o sistema puder se manter nesse estado, então a partícula pode cair tanto de um lado quanto do outro.

Com essa analogia em mente, busca-se um modelo que seja capaz de descrever o comportamento dinâmico desse oscilador magneto-elástico.

Sabe-se que, forças magnéticas em sólidos resultam da interação de correntes elétricas ou da magnetização com campos magnéticos externos.

Os eletroímãs geram um campo magnético que induz uma magnetização \mathbf{M} por unidade de volume no sólido. A haste pode ser modelada como um material magnético onde a magnetização \mathbf{M} é proporcional ao campo magnético local no sólido, ou seja,

$$\vec{M} = \left[\frac{\chi}{(\chi + 1)} \right] \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (4.1)$$

onde:

μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo;

χ é a susceptibilidade magnética.

O campo \mathbf{B} pode ser escrito em termos do campo externo \mathbf{B}^0 produzido pelos eletroímãs e um campo produzido pela própria magnetização, \mathbf{B}^1 . Se as forças internas na haste são desprezadas, então a haste experimenta força e momento devido aos eletroímãs dado por:

$$\vec{F} = \vec{M} \cdot \nabla B^0 \quad (4.2)$$

$$\vec{C} = \vec{M} \times \vec{B}^0 \quad (4.3)$$

Essas forças podem ser derivadas de um potencial magnético e portanto são conservativas. Assim,

$$W = -\frac{1}{2} \int \vec{M} \cdot \vec{B}^0 dv \quad (4.4)$$

A existência deste potencial - expresso como uma integral de volume sobre a haste - é importante para a dinâmica e a estabilidade da haste.

As não linearidades incluídas na análise refletem a natureza não homogênea do campo magnético \mathbf{B}^0 . A forma do campo \mathbf{B}^0 pode ser avaliada em termos das coordenadas locais x e y . Se as componentes x e y de \mathbf{B}^0 são introduzidas, definidas por $B_{0x} = B^0 \cos \alpha$ e $B_{0y} = B^0 \sin \alpha$ e a inclinação da haste por θ , então podemos reescrever a equação e a energia potencial magnética toma a forma,

$$W = -\frac{\chi}{4\mu_0\mu_r} \int_0^L (B_1 + B_2 \sin 2\theta + B_3 \cos 2\theta) ds, \quad (4.5)$$

onde:

$$B_1 = (\mu_r + 1)(B_{0x}^2 + B_{0y}^2); \quad (4.6)$$

$$B_2 = 2(\mu_r - 1)B_{0x} B_{0y}; \quad (4.7)$$

$$B_3 = (\mu_r - 1)(B_{0x}^2 - B_{0y}^2). \quad (4.8)$$

A integração é realizada sobre o comprimento original da haste e B_1 , B_2 e B_3 são funções do deslocamento da haste.

As forças elásticas não lineares são pequenas mesmo para grandes deslocamentos da extremidade da haste. Além disso, se a aproximação por um único modo é feita para a deformação da haste, a energia elástica pode ser escrita na forma

$$P = \frac{1}{2}k y^2 + (\text{termos de ordem superior}) \quad (4.9)$$

Com isso, a energia potencial para as forças elástica e magnética será

$$V = W + P \quad (4.10)$$

Utilizando o formalismo de Lagrange, podemos escrever que

$$L = T - (W + P) \quad (4.11)$$

onde T , W , e P representam respectivamente as energias cinética, magnética e elástica.

Além disso, no método de Galerkin, um conveniente conjunto de funções ortogonais $\phi_j(x)$ que satisfazem as condições de contorno, é escolhido e o deslocamento pode ser expresso como

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) \phi_j(x) \quad (4.12)$$

Uma típica escolha para as funções ϕ_j em problemas de vibração são os modos normais do problema linear associado [Moon e Holmes (1979)]. Substituindo essa última expressão nas equações de movimento podemos escrevê-la na forma conhecida

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = F \cos \omega t \quad (4.13)$$

onde:

$\delta > 0$ é a constante de amortecimento;

F é a força de excitação

ω é a frequência forçante

4.3 Simulações e Resultados

Mostra-se, a seguir, resultados das simulações numéricas realizadas para o sistema magneto-elástico. Utilizou-se a linguagem de programação VB (Visual Basic) e o integrador numérico Runge-Kutta. Algumas considerações são encontradas em anexo [Anexo B]. Resultados obtidos são resumidos em três tipos de solução (Solução Periódica, Transiente Caótico e Indicativa de Caos) e comentados na próxima seção.

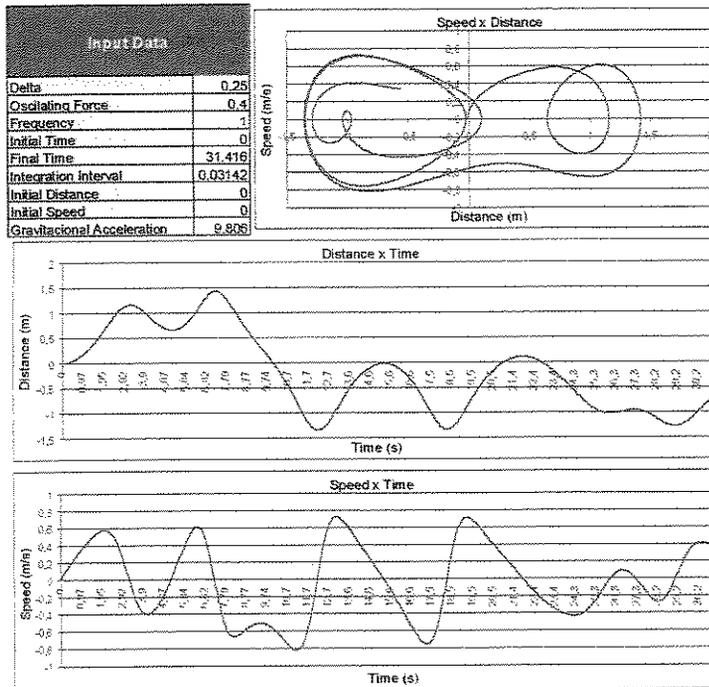


Gráfico 4.1: Transiente caótico/Indicativa de caos

O gráfico 4.1 mostra uma solução que possui indicativa de um transiente ou de um comportamento caótico.

O sistema rompe a referência em $x = 0$ e oscila alternadamente em ambos os lados.

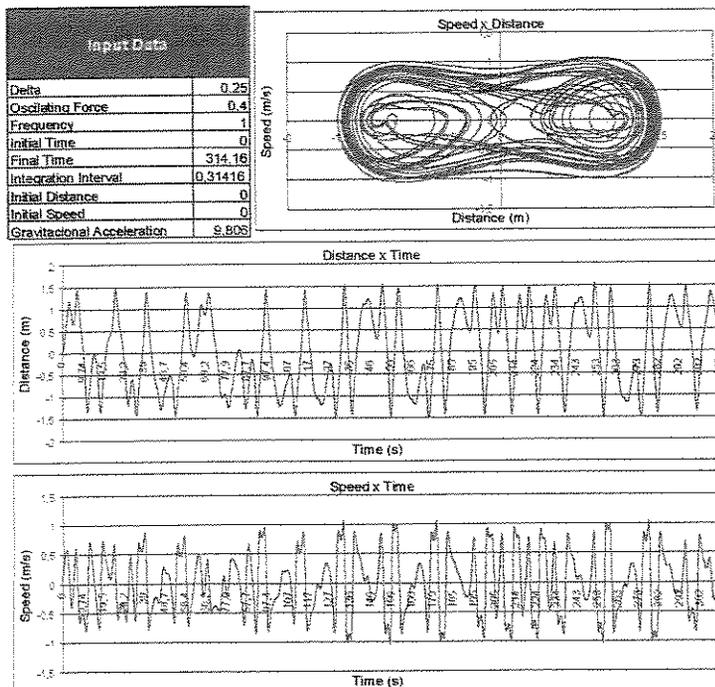


Gráfico 4.2: Indicativa de caos

O gráfico 4.2 mostra que, com um maior intervalo de simulação, a solução apresenta um comportamento indicativo de caos, sugerindo que possa ser caótico para essas condições iniciais.

O sistema permanece oscilando entre os dois lados de seu equilíbrio instável.

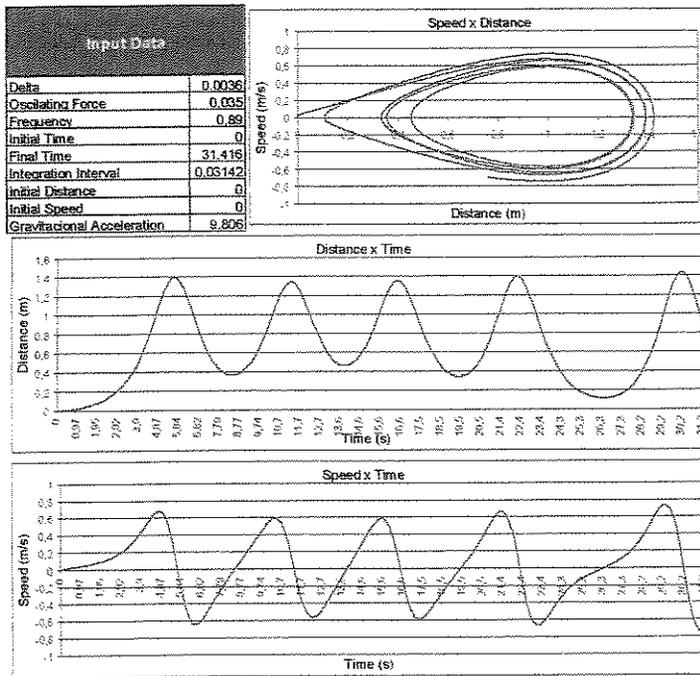


Gráfico 4.3: Solução periódica

O gráfico 4.3 mostra que o resultado converge direto para uma solução do tipo periódica.

O sistema permanece, desde o início do movimento, oscilando à direita da referência em $x = 0$

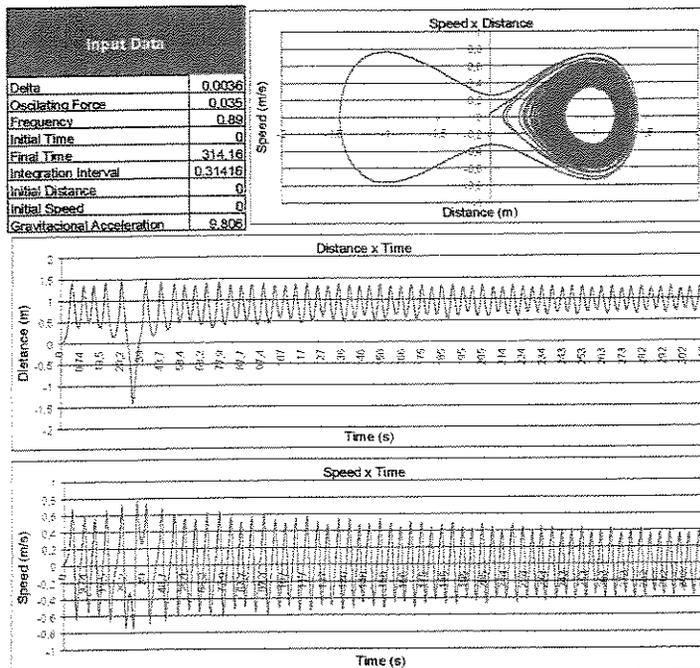


Gráfico 4.4: Solução periódica

O gráfico 4.4 mostra um fenômeno que não pôde ser observado no gráfico 4.3. O ponto de equilíbrio instável é transposto e, em seguida, o sistema volta a oscilar do mesmo lado em que estava inicialmente, permanecendo, assim, com uma oscilação do tipo periódica.

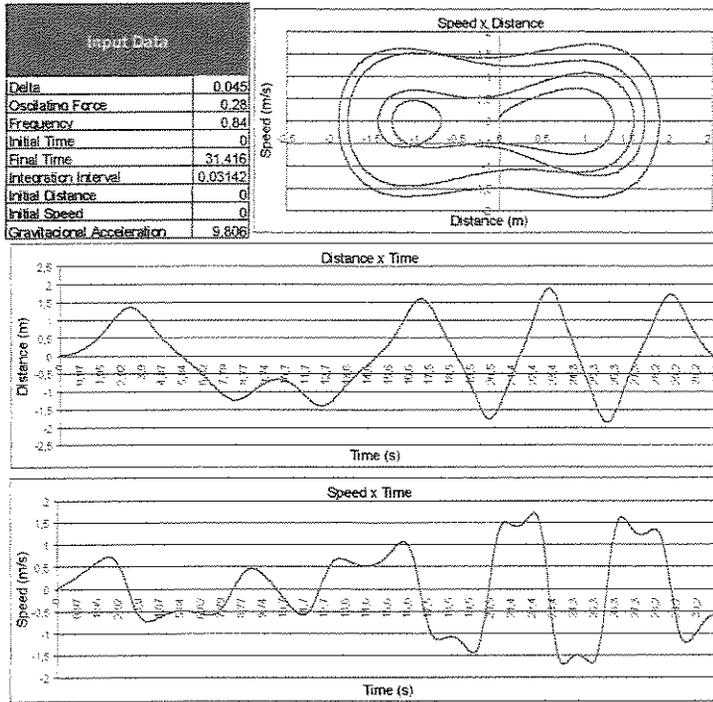


Gráfico 4.5: Transiente caótico/Indicativa de caos

O gráfico 4.5 é análogo ao gráfico 4.1, mostrando uma solução que possui indicativa de um transiente ou de um comportamento caótico.

O sistema rompe a referência em $x = 0$ e oscila alternadamente em ambos os lados.

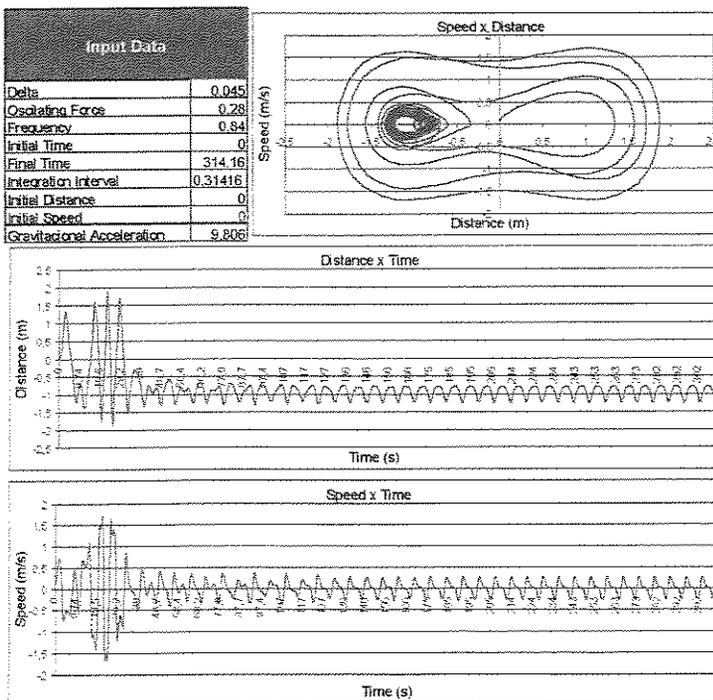


Gráfico 4.6: Transiente caótico

O gráfico 4.6 mostra que, depois de uma transiente que parece ser caótico, a solução comporta-se de modo periódico executando uma oscilação de pequena amplitude à esquerda do ponto de equilíbrio instável em $x = 0$

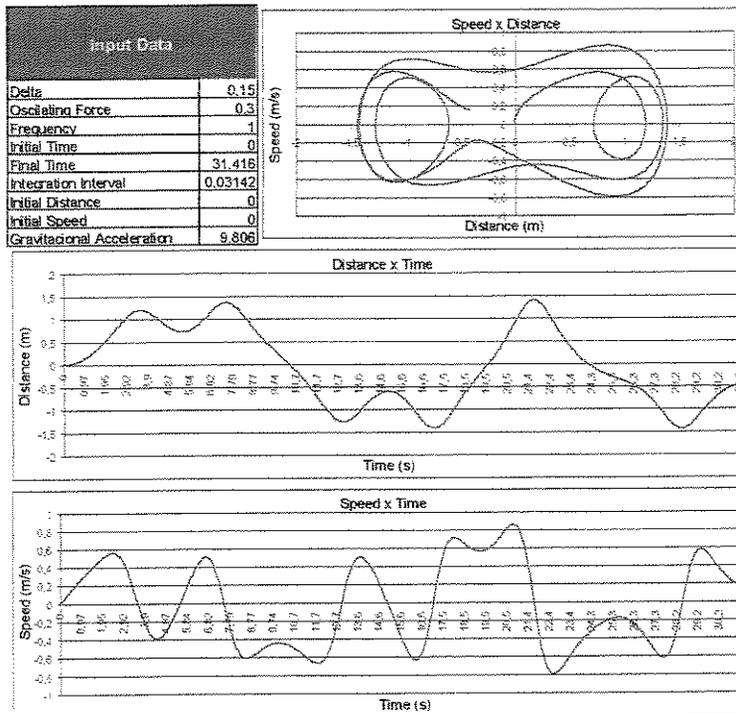


Gráfico 4.7: Transiente caótico/Indicativa de caos

O gráfico 4.7 também mostra uma solução que possui indicativa de um transiente ou de um comportamento caótico.

O sistema oscila em ambos os lados da referência.

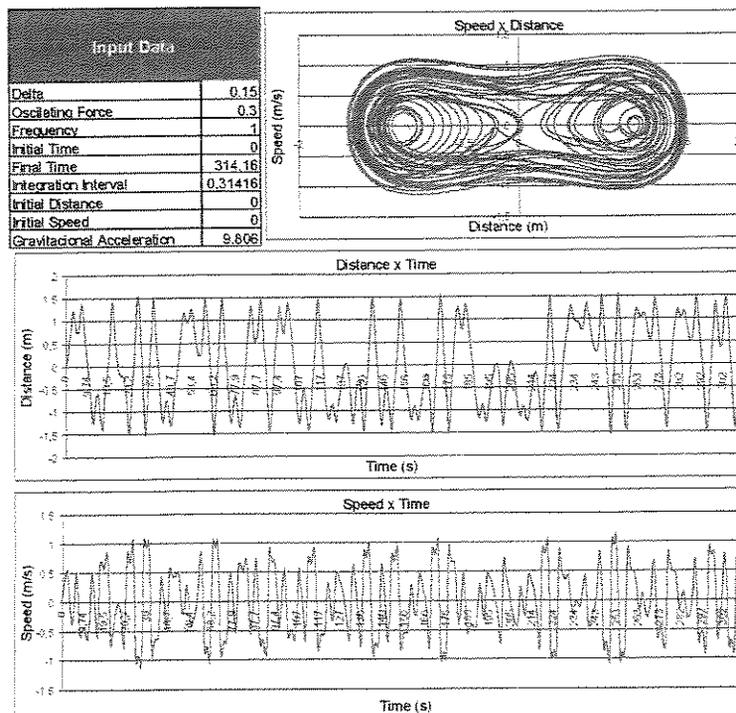


Gráfico 4.8: Indicativa de caos

Analogamente ao que já ocorreu com o gráfico 4.2, o gráfico 4.8 mostra que, com um maior intervalo de tempo de simulação, a solução apresenta um comportamento indicativo de caos, sugerindo que possa ser caótico para essas condições iniciais.

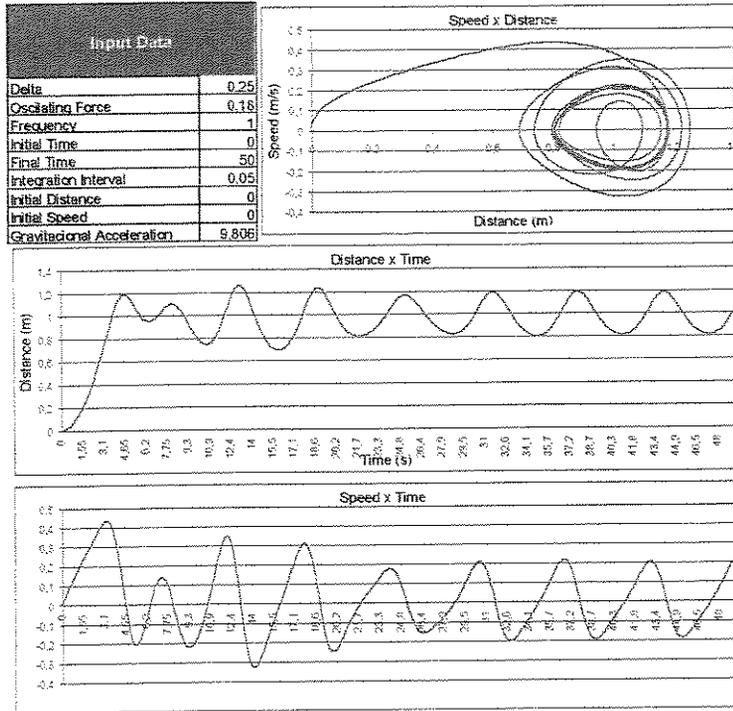


Gráfico 4.9: Solução periódica

O gráfico 4.9 mostra, como o gráfico 4.3, uma solução do tipo periódica.

O sistema permanece, desde o início do movimento, oscilando à direita da referência em $x = 0$

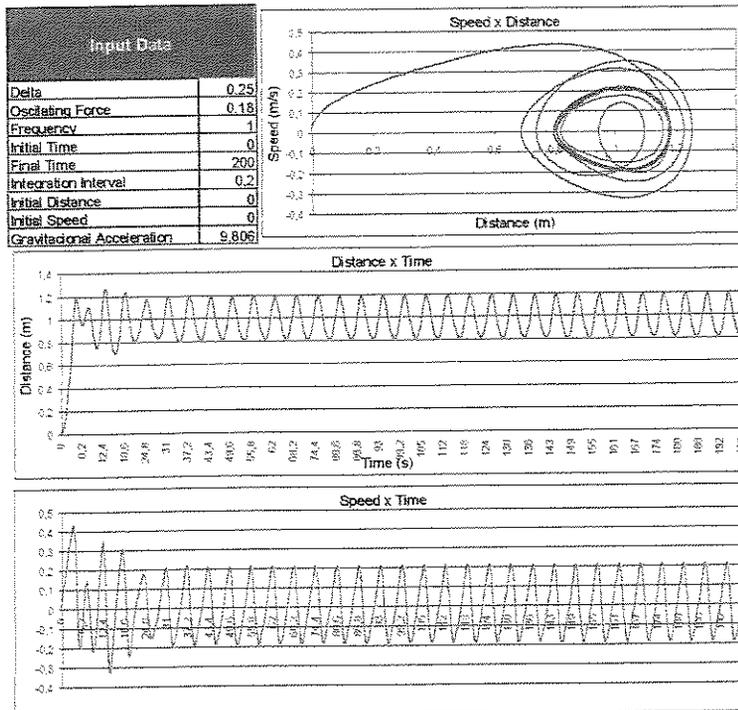


Gráfico 4.10: Solução periódica

O gráfico 4.10 continua mostrando que o resultado converge direto para uma solução do tipo periódica.

Aqui, o sistema também permanece, desde o início do movimento, oscilando à direita da referência em $x = 0$

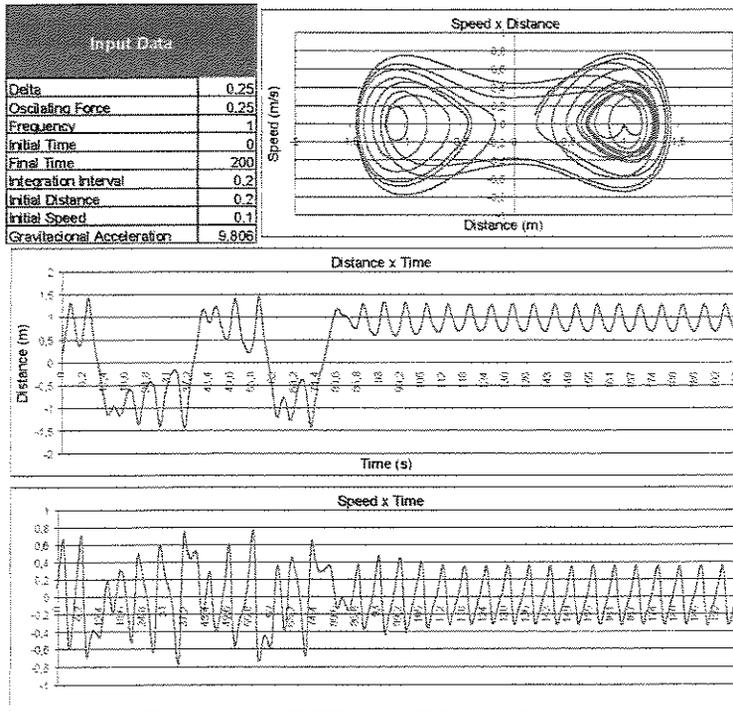


Gráfico 4.11: Transiente caótico

O gráfico 4.11 é o análogo do gráfico 4.6, pois nota-se nesse caso também que, depois de um transiente que parece ser caótico, a solução comporta-se de modo periódico executando uma oscilação de pequena amplitude à direita do ponto de equilíbrio instável.

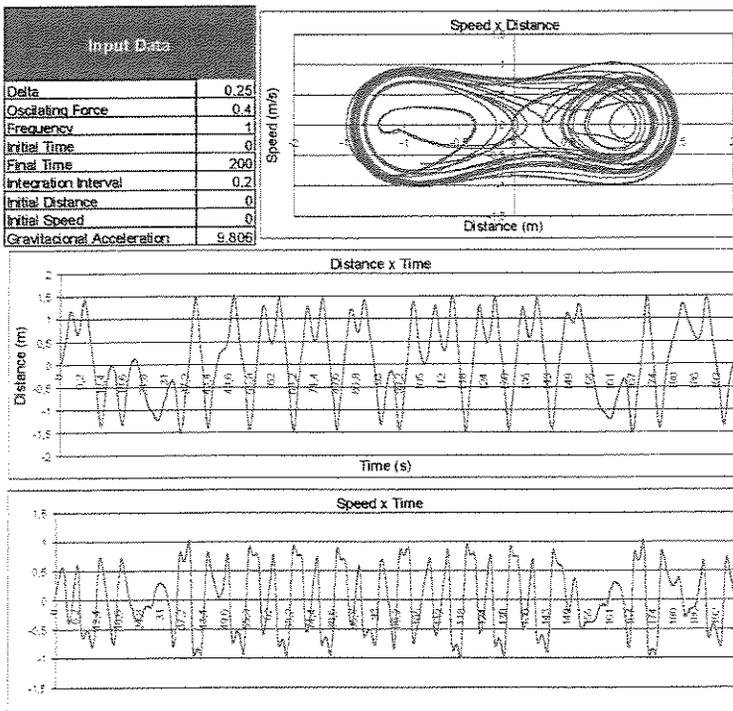


Gráfico 4.12: Indicativa de caos

O gráfico 4.12 também mostra indícios de um comportamento caótico. O sistema, repetidas vezes apresenta oscilações em ambos os lados, tanto à esquerda quanto à direita do ponto de equilíbrio instável em $x = 0$

4.4 Comentários Sobre os Resultados de Simulação

Pode-se observar, por exemplo que, nos gráficos 4.3, 4.9 e 4.10 a solução converge direto para uma solução do tipo periódica e, corresponde à oscilação confinada a um único poço de potencial. Na verdade, esse poço seria aquele que fica à direita do ponto de equilíbrio instável onde foi escolhida a referência ($x = 0$).

O gráfico 4.4 mostra um fenômeno que não pôde ser observado nos gráficos 4.3, 4.9 e 4.10. O ponto de equilíbrio instável é transposto e, em seguida, o sistema volta a oscilar do mesmo lado em que estava inicialmente, ou seja, à direita da referência permanecendo com uma oscilação do tipo periódica.

Os gráficos 4.1, 4.5 e 4.7 mostram soluções que possuem indicativos de um comportamento caótico ou, pelo menos, indicativos de que existe um transiente da solução em que o sistema apresenta um comportamento caótico. Nesses casos, o sistema foi simulado num intervalo de tempo maior a fim de que pudesse ser decidido entre apenas um possível transiente caótico ou uma situação indicativa de caos.

A aparência aperiódica dos gráficos 4.2, 4.8 e 4.12 sugere que o sistema pode ser caótico, pelo menos para essas condições iniciais. Observa-se que o comportamento é análogo ao de uma partícula que, na figura 4.2, cruzaria a rampa repetidamente.

Uma análise cuidadosa dos gráficos 4.6 e 4.11 mostra que, depois de um transiente que parece ser caótico, a solução comporta-se de modo periódico. Fisicamente, uma solução como essa seria o análogo de uma partícula que, na figura 4.2, cruzaria a rampa de um lado para o outro algumas poucas vezes antes de permanecer com oscilação de pequena amplitude no fundo do poço à esquerda (gráfico 4.6) ou à direita (gráfico 4.11) da rampa em $x = 0$.

Vale ressaltar que, por prudência, limita-se constantemente em afirmar que o sistema é indicativo de comportamento caótico e não afirmar necessariamente que é caótico. Especialistas nessa área de estudo como Hagedorn (1984) afirmam que cálculos mais específicos como o expoente de Liapounov seriam necessários a fim de decidir com mais critério se o fenômeno do caos faz-se ou não presente numa determinada situação.

4.5 Implementação Experimental

O experimento, implementado no laboratório de Automação Integrada e Robótica da UNICAMP e com o apoio da BOSCH FREIOS, relativo ao modelo descrito anteriormente neste capítulo, consiste num sistema em que uma haste flexível tem uma de suas extremidades fixa a uma base rígida enquanto a outra extremidade permanece livre. Próximo à extremidade livre, existe uma base móvel que é acionada por um motor de passo.

Sobre a base móvel - que desloca-se horizontalmente para esquerda e para direita - fixam-se dois eletroímãs capazes de gerar forças eletromagnéticas que defletem a haste, uma régua potenciométrica variando o sinal de 4 a 20 mA e um sensor de fibra óptica capaz de detectar o posicionamento da haste durante os ensaios.

Sensores que indicam posição central e posições de final de curso da base móvel também são utilizados.

Um driver é utilizado para o motor de passo, permitindo um controle sobre diversos posicionamentos da base móvel assim como um controle de velocidade.

Utiliza-se um sistema de aquisição de dados da National Instruments e , dessa forma conta-se com uma altíssima sensibilidade para monitorar os sinais dos diversos sensores, permitindo confiabilidade dos resultados obtidos.

Utiliza-se também um controlador lógico programável (CLP) que gerencia o driver do motor de passo, gerencia o software Lab View, recebe os sinais dos sensores em suas entradas digitais e, em função da programação efetuada pelo usuário pode “chavear” as entradas digitais do motor de passo. Em seguida, o driver reconhece o programa e efetua os devidos movimentos relacionados à seqüência programada.

A seguir, mostram-se duas figuras, uma que ilustra o dispositivo mecânico montado e uma segunda representando um fluxograma que procura esclarecer a inter-relação entre os dispositivos utilizados na bancada experimental.

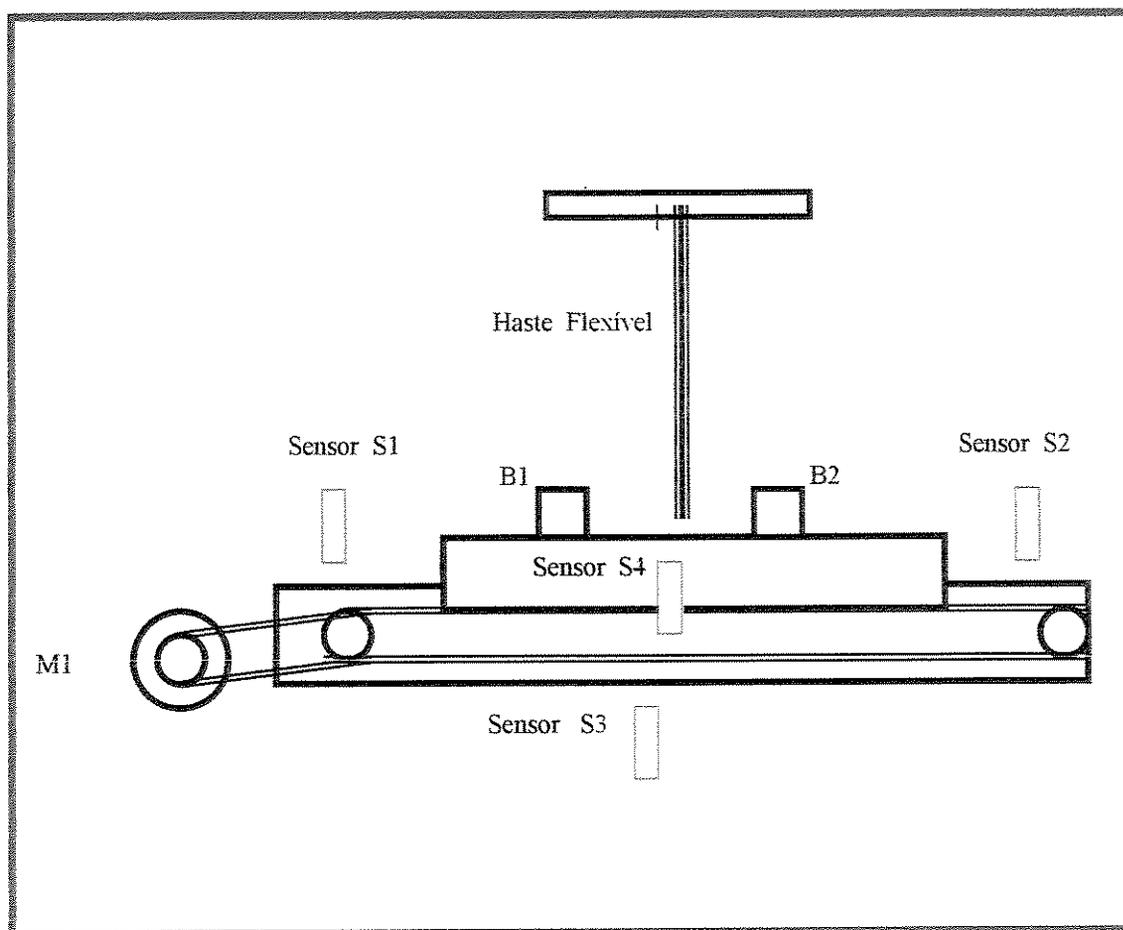


Figura 4.3: Dispositivo Mecânico

O motor de passo M1 ilustrado na figura 4.3 é capaz de atingir 4 N.m de torque e resolução de 25000 pulsos por volta. Isso confere uma precisão ao movimento da base móvel de 0,014 graus a cada passo efetuado. Este motor está conectado a uma polia através de uma correia dentada e, em função deste acoplamento, o mesmo pode movimentar a base móvel.

Pode-se observar também na figura 4.3 ilustrações dos sensores S1, S2, S3 e S4 e dos indutores B1 e B2. As funções desses elementos estão descritas abaixo:

- S1 - sensor de final de curso da base móvel pelo lado esquerdo;
- S2 - sensor de final de curso da base móvel pelo lado direito;
- S3 - sensor que indica a posição central da base móvel;
- S4 - sensor que monitora a posição da haste flexível ;
- B1 - Indutor lado esquerdo, gerador de campo eletromagnético;
- B2 - Indutor lado direito, gerador de campo eletromagnético

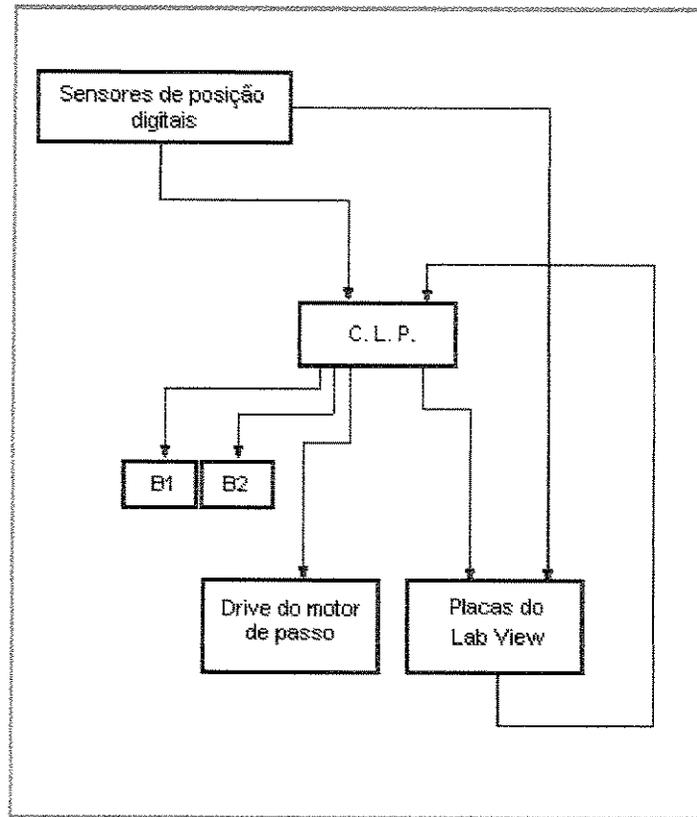


figura 4.4: Fluxograma do projeto

4.6 Descrição dos Principais Elementos da Bancada

Nesta seção, procura-se descrever os principais elementos constituintes da bancada experimental individualmente, ilustrando-os sempre que possível com fotos digitalizadas. Não serão abordados detalhes técnicos sobre os equipamentos, pois esse não é o foco do presente trabalho. Entretanto, em alguns casos em que o autor julga necessário, informações adicionais são disponibilizadas em anexos.

4.6.1 Controlador Lógico Programável (C.L.P.)

Utiliza-se nesta aplicação um CLP com 16 entradas e 11 saídas digitais do fabricante Rochweel Automation. O software do CLP consiste em uma linguagem de programação dedicada e estipulada pelo próprio fabricante do equipamento. Basicamente é conceituada numa linguagem conhecida como Ladder e, os eventos acontecem de modo sequencial, ou seja, para que um evento ocorra é necessário que o evento anterior tenha acontecido.

Abaixo, uma foto ilustra o C.L.P. utilizado

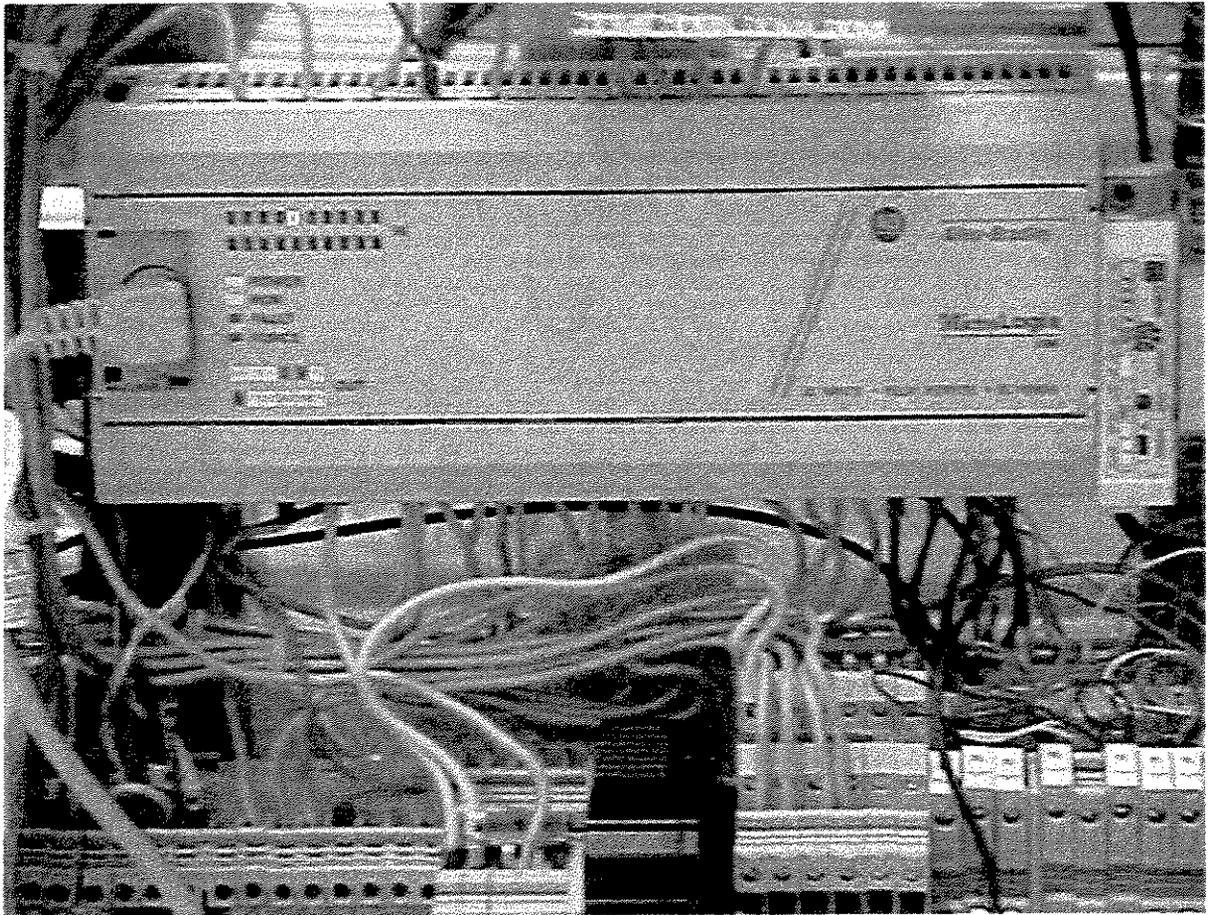


figura 4.5: Controlador Lógico Programável - C.L.P.

O CLP tem por função o chaveamento dos diversos tipos de programas existentes no driver do motor de passo a fim de efetuar os diversos movimentos e também receber sinais de entradas dos sensores do LabView que permitem, por exemplo, encerrar o ensaio .

Vale ressaltar que, este dispositivo só reconhece os sinais digitais a partir do nível de tensão de 24 Volts. Neste experimento as placas do LabView e o driver do motor de passo trabalham com nível de reconhecimento de sinais de entrada de 5volts. Por esta razão, a fim de que os elementos se comuniquem, utiliza-se dos recursos dos bornes relês óptico-acopladores - que são dispositivos eletrônicos compactos – com níveis de tensão variando de 24 Volts para 5 Volts e vice-versa.

4.6.2 Driver do Motor de Passo

Esse dispositivo eletrônico é fundamental para o perfeito funcionamento desta bancada pois, com seu auxílio pode-se controlar a posição, a velocidade e as acelerações da base móvel. Além disso, permite flexibilidade de alteração das variáveis nos ensaios, se houver necessidade.

Abaixo uma foto digitalizada ilustra o driver do motor de passo

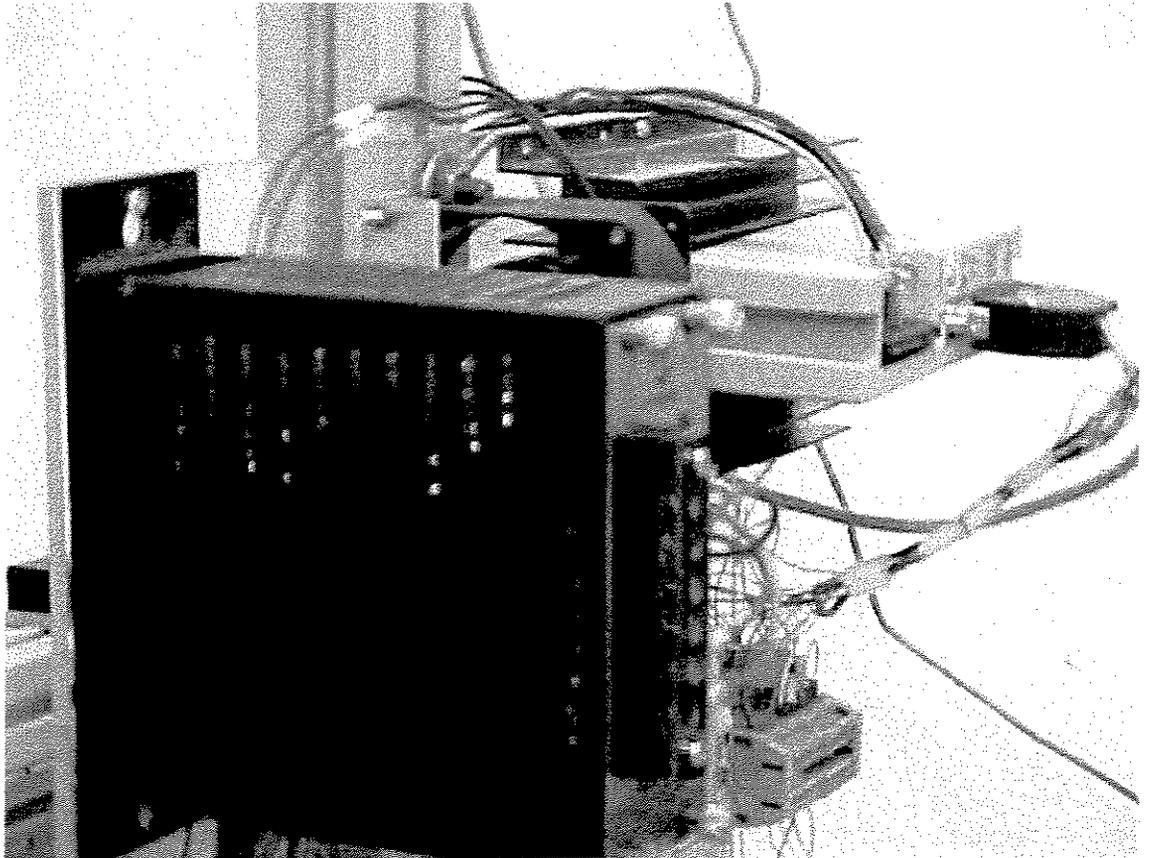


Figura 4.6: Driver do motor de passo

O software de programação para este driver é chamado XWARE, foi construído na linguagem ASCII e sua programação é relativamente simples.

Neste programa existem vários comandos, sendo que um deles permite - caso haja necessidade - efetuar a comunicação entre os diferentes dispositivos através da porta serial

232 ou DH-485. Isso evita, por exemplo, acúmulos de fios nas ligações otimizando o projeto.

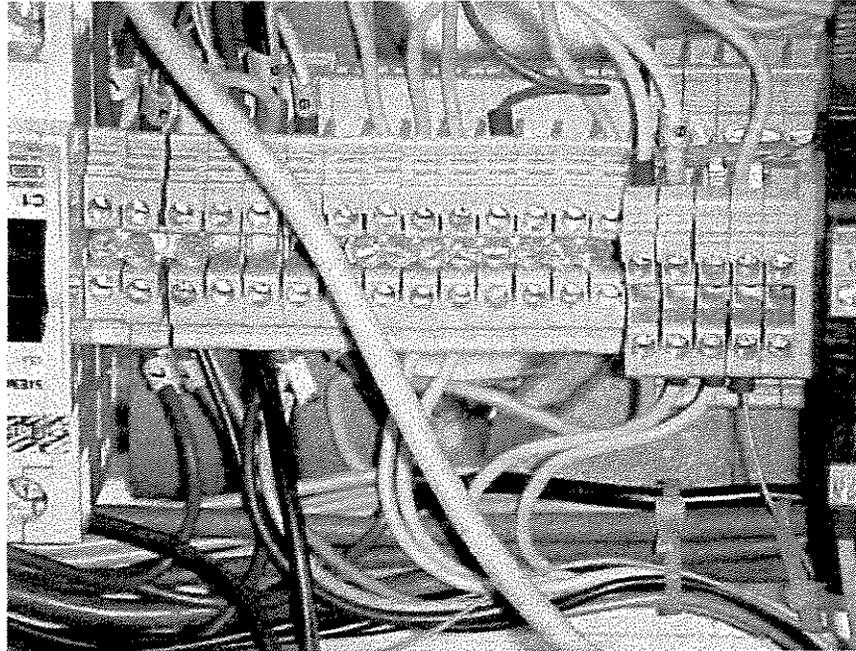


figura 4.7: Otimização das ligações elétricas

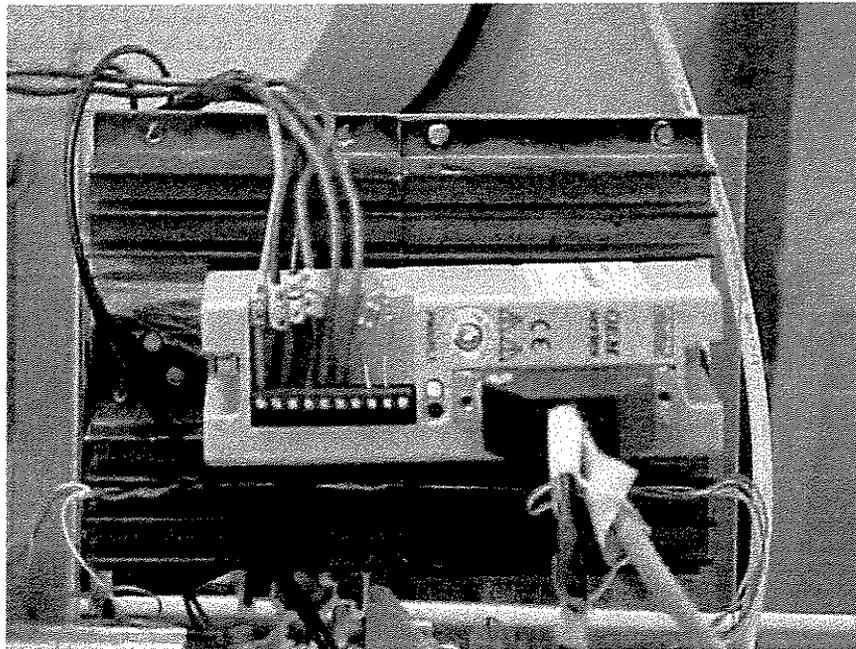


figura 4.8: Driver do motor de passo

Este driver permite ainda que se trabalhe com uma malha de retro- alimentação de sinal. Através de uma porta no mesmo torna-se possível a ligação de um encoder - sensores que fazem a leitura de diferentes velocidades e posições angulares.

4.6.3 Sistema de Aquisição de Sinais

Utiliza-se neste experimento uma placa eletrônica de aquisição de sinais SCXI 1200 da National Instruments. Esta placa foi projetada para receber 08 entradas de sinais digitais e 08 entradas ou saídas analógicas, variando o “range” entre -10 Volts e +10 Volts.

Abaixo uma foto ilustra o sistema de aquisição utilizado

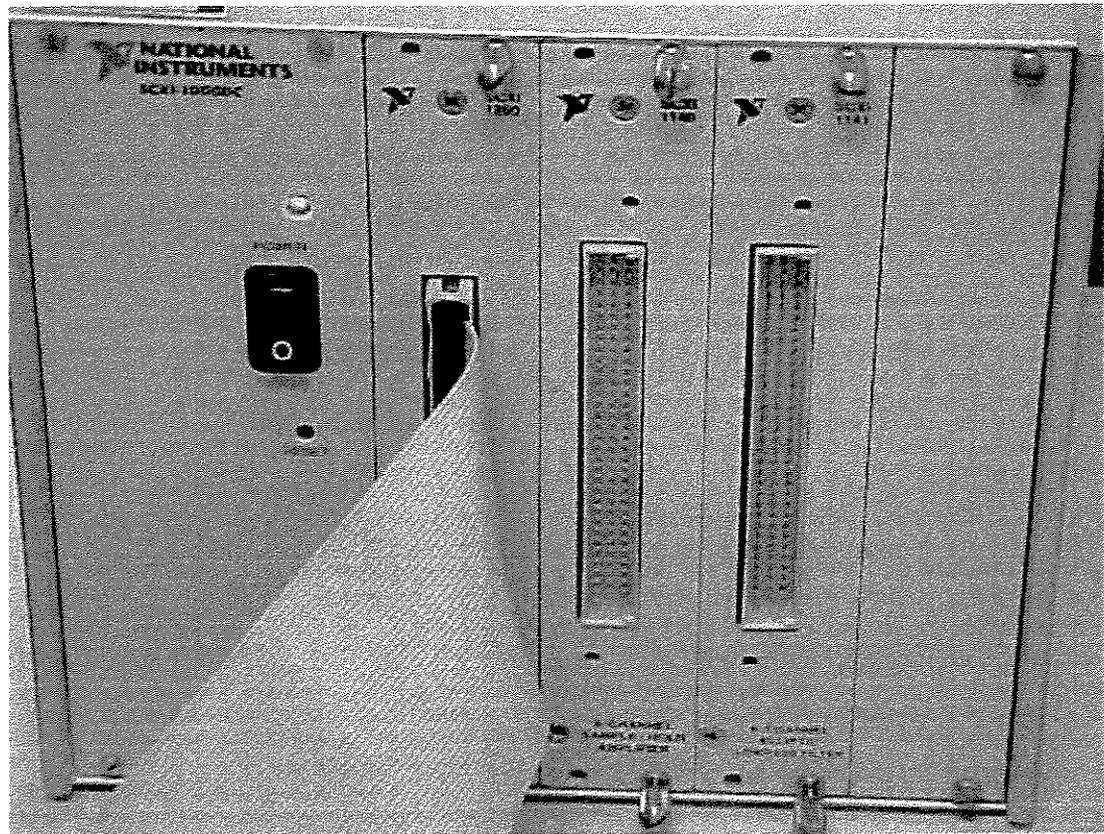


figura 4.9: Sistema de aquisição de dados

Os sinais dos sensores e/ou régua potenciométrica são enviados para uma entrada endereçada da placa. Esses sinais são tratados por um filtro antes de serem enviados para o canal e o objetivo desse filtro é absorver ruídos vindos de outros equipamentos que não fazem parte da bancada experimental..

A placa possui 32 bits e tem uma capacidade de coletar 300.000 pontos por segundo. Sendo assim, a leitura registrada é extremamente representativa da grandeza física do fenômeno analisado

Os sinais são recebidos pelo software Lab View em um equipamento PC pentium 4 e com o auxílio desse software efetuam-se as conversões de sinais eletrônicos em valores dimensionais como posição, velocidade, aceleração, tempo, etc.

A foto abaixo ilustra a bancada experimental montada sobre uma plataforma resistente de perfil de alumínio, o sistema de aquisição de sinais e o PC pentium 4 que dá suporte aos ensaios experimentais.

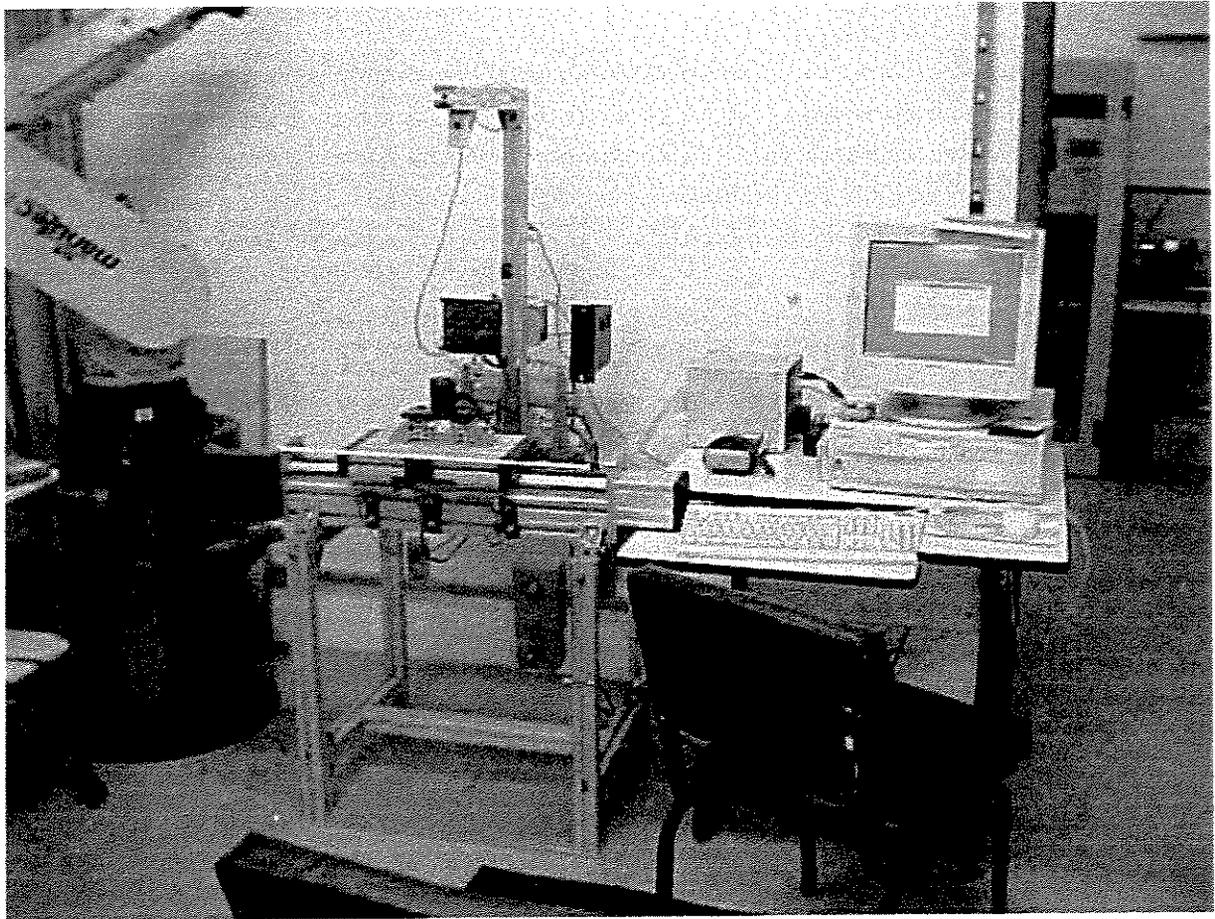


figura 4.10: Aparato experimental

4.7 Modos de Funcionamento da Bancada

4.7.1 Modo Home

Quando acionado o botão relacionado a este modo, a base móvel é enviada para o centro do dispositivo. Ao final de cada ensaio, a base móvel pode efetuar sua parada numa posição qualquer. Assim o modo home permite que cada novo ensaio possa ter seu início a partir de um ponto pré-determinado, ou seja, a partir de uma referência.

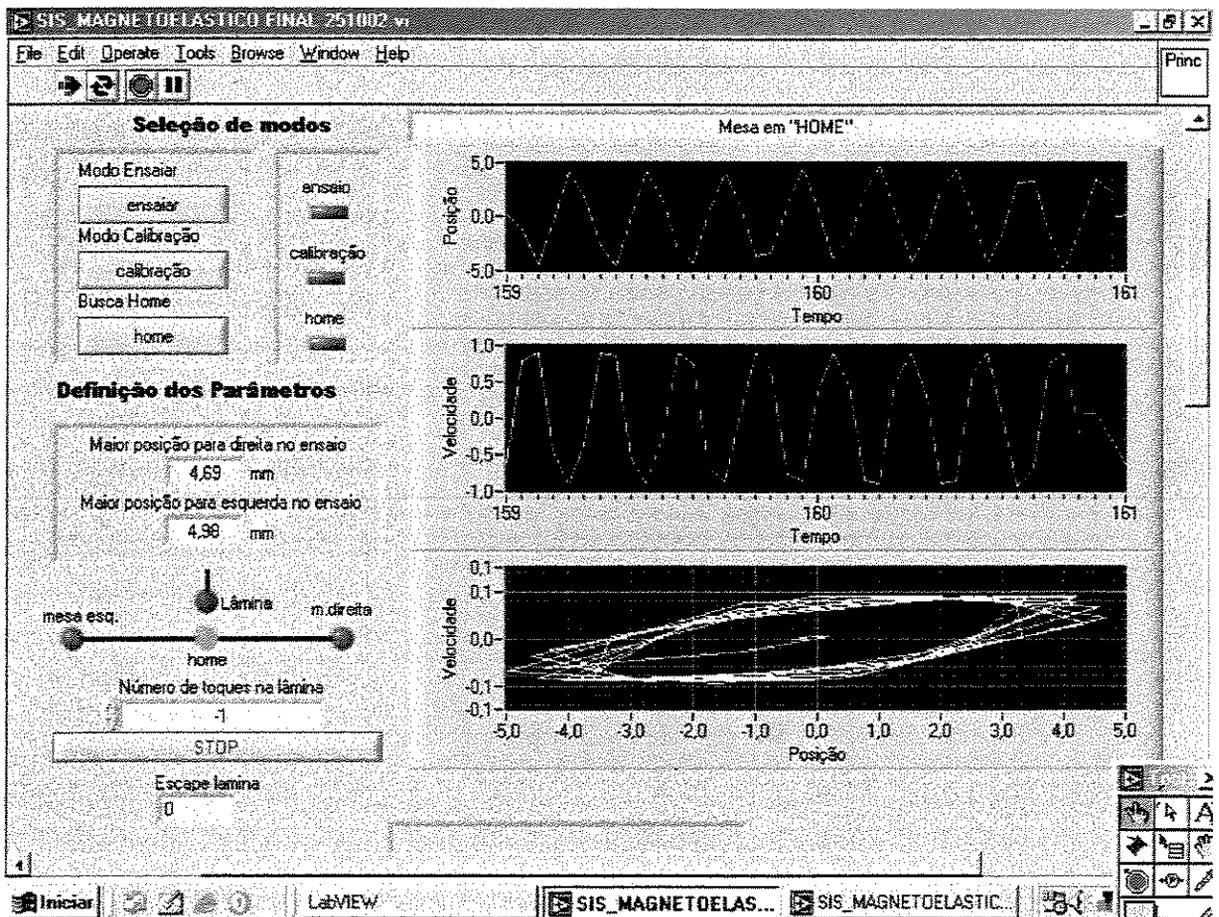


Figura 4.11: Tela de interface da bancada

4.7.2 Modo Calibração

Neste modo de funcionamento permite-se que se conheça as amplitudes máximas em que o sistema provoca o desprendimento da haste de cada eletroímã. A base móvel desloca-se com velocidade constante para a direita da região central até que a haste se solte do eletroímã em que está presa devido à interação eletromagnética. Neste instante, coleta-se a dimensão da

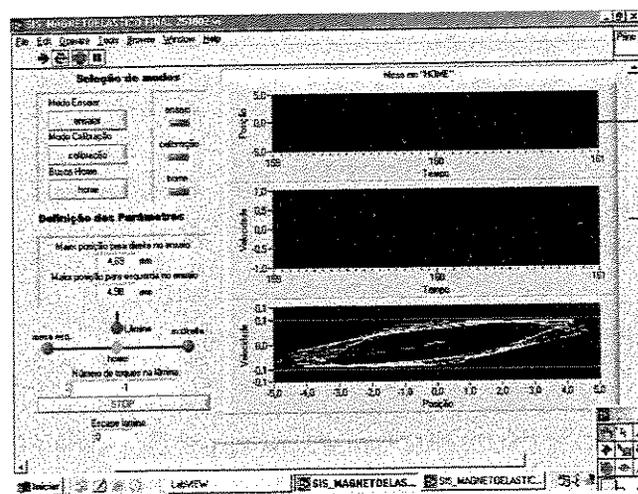
amplitude no momento do desprendimento da haste e, esta pode servir como referência para novos ensaios ou permitir observações adicionais a respeito do que ocorre (ou pode ocorrer) exatamente neste instante. Procedimento análogo pode ser feito pelo lado oposto, ou seja, pelo lado esquerdo.

4.7.3 Modo Ensaiar

Quando o botão ensaiar é acionado, a bancada inicia o ensaio mantendo ou aumentando a frequência e amplitude de deslocamento da base móvel , aciona as bobinas gerando o campo eletromagnético que interage com a haste flexível. O sensor óptico monitora a posição da haste e os dados são enviados para o Lab View que pode plotar os gráficos registrando os fenômenos.

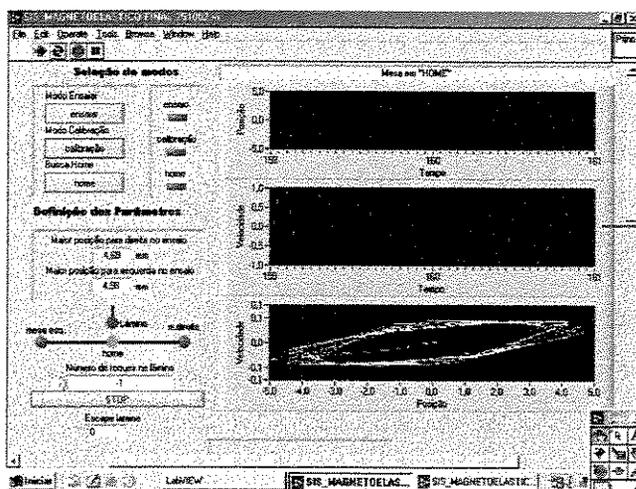
4.7.4 Interfaces Gráficas

Nesta seção procura-se ilustrar as interfaces gráficas que foram implementadas por meio do software de aquisição e tratamento de sinais Lab View.



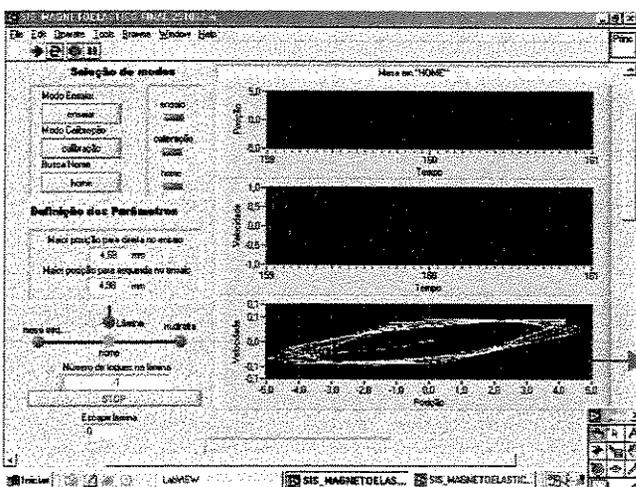
Indicador
Posição x Tempo
Fornece a evolução da posição da extremidade da haste com o tempo.

Figura 4.12: Indicador Posição x Tempo



Indicador
Velocidade x Tempo
Fornece a evolução da velocidade da haste com o tempo.

Figura 4.13: Indicador Velocidade x Tempo



Indicador
Velocidade x Posição
Fornece a velocidade como função da posição

Figura 4.14: Indicador Velocidade x Posição

4.8 Resultados Experimentais

Nesta seção apresenta-se alguns resultados experimentais obtidos em laboratório com o intuito de validar o modelo teórico previamente desenvolvido nesse capítulo nas seções 4.2 e 4.3 . A obtenção desses resultados garantem também a funcionalidade da bancada experimental.

As telas mostram indicadores da evolução no tempo da velocidade e posição da extremidade da haste. Mostram ainda o plano de fase caracterizado pelo indicador da velocidade como função da posição

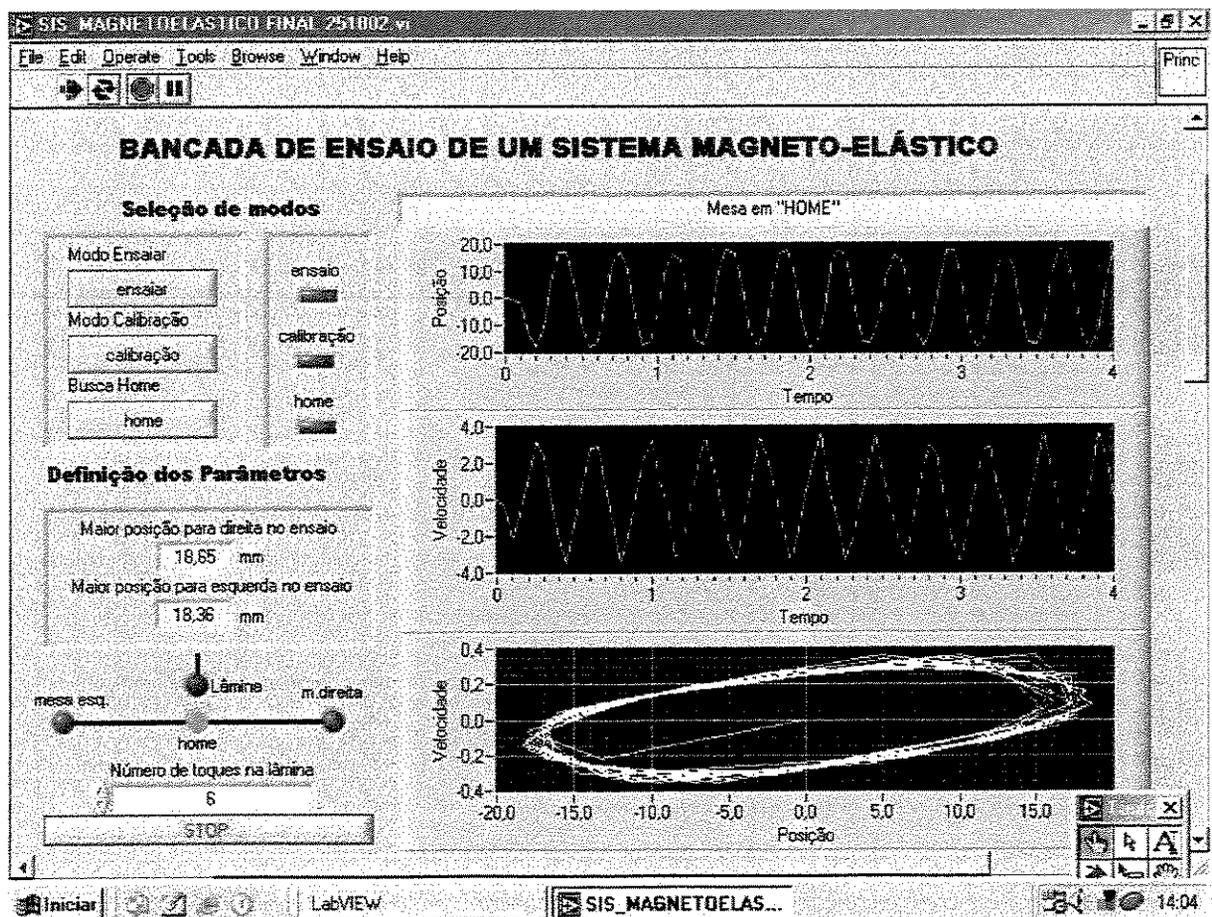


Gráfico 4.13: 1^o Ensaio experimental

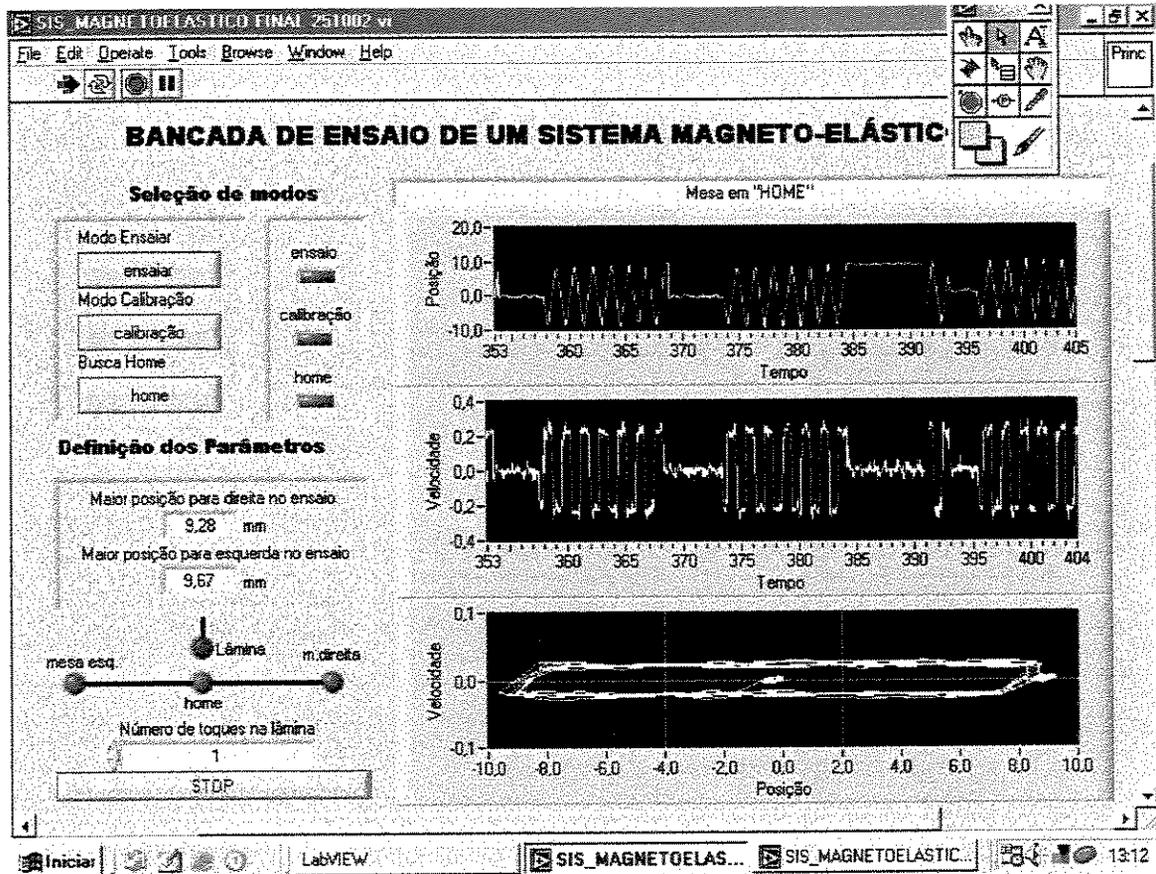


Gráfico 4.14: 2º Ensaio experimental

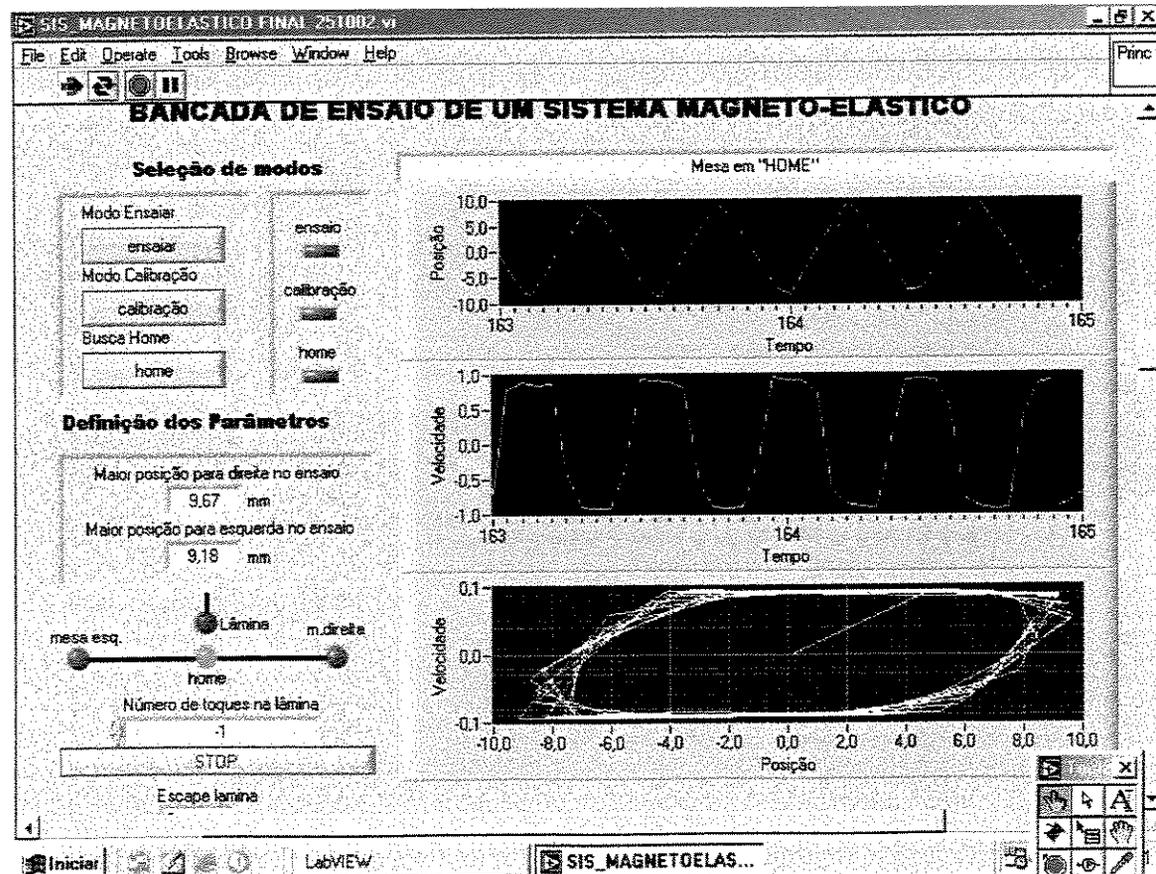


Gráfico 4.15: 3º Ensaio experimental

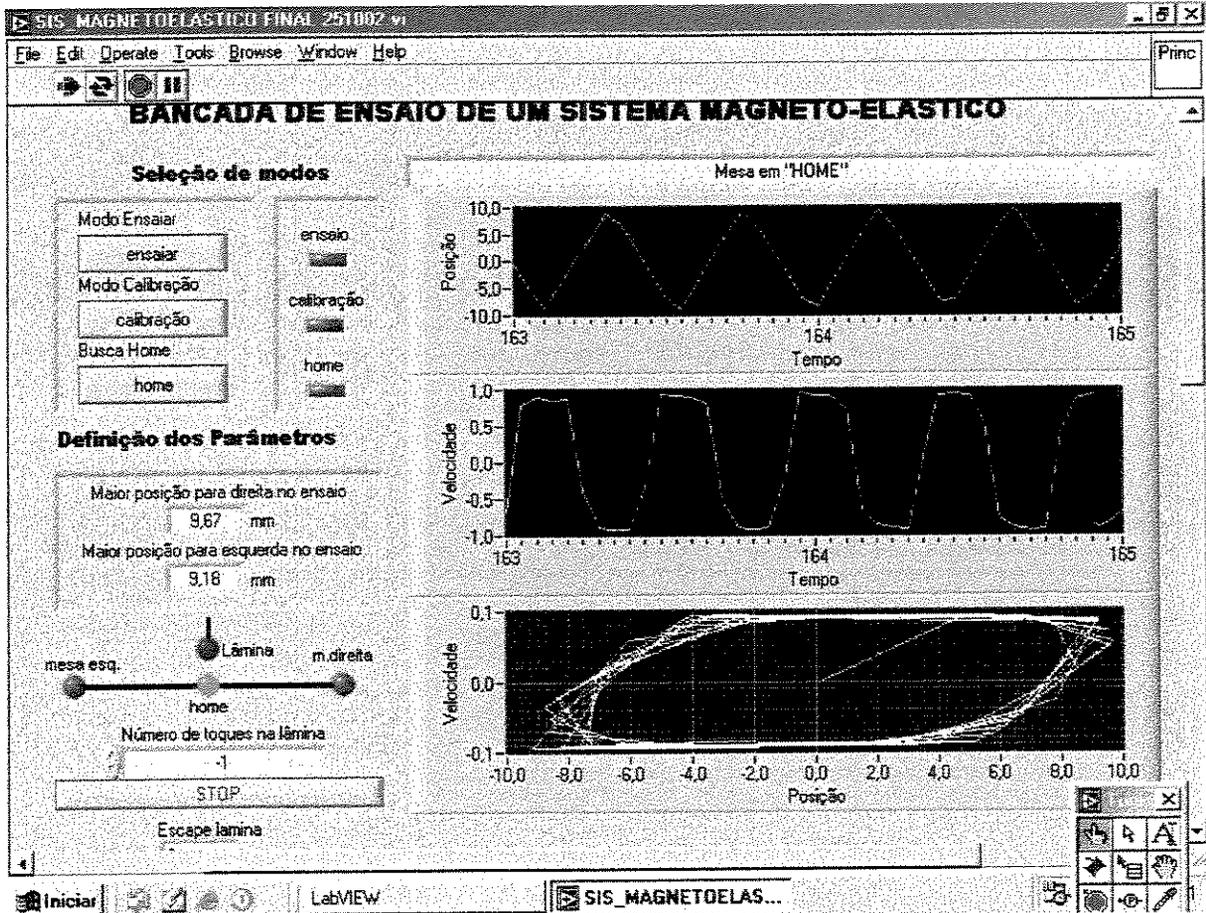


Gráfico 4.16: 4º Ensaio experimental

4.9 Comentários Finais e Discussões

Na seção 4.3 deste capítulo apresentou-se resultados de simulações numéricas que mostraram que o comportamento do sistema dinâmico não-linear magneto-elástico sujeito à excitação externa periódica apresenta soluções que podem ser do tipo periódicas, soluções indicativas de um transiente caótico e soluções indicativas de movimento caótico.

Resultados de alguns ensaios experimentais apresentados na seção 4.8 deste capítulo sugerem uma boa concordância com o modelo teórico, principalmente no âmbito das soluções de comportamento periódico. Isso pode ser encarado como um bom indicativo da fidelidade da bancada experimental para com o modelo teórico.

É bem sabido que, montagens experimentais são envolvidas por incertezas, ainda que essas possam ser mínimas. Ao mesmo tempo, sabe-se também que a manifestação de movimentos caóticos apresentam muita sensibilidade relativa às condições iniciais.

Essa grande sensibilidade às condições iniciais dificulta a possibilidade de que sejam escolhidos um conjunto de parâmetros adequados que permitam facilmente a reprodução experimental das situações que envolvam soluções que exibem comportamento indicativo de movimento caótico.

Entretanto, considero que um grande passo foi dado por meio da construção da bancada e a mesma está preparada para futuras investigações que aqui foram iniciadas, permitindo assim a obtenção e análise de outros resultados.

A seguir, no capítulo 5, que trata das conclusões finais e trabalhos futuros, serão abordados outras sugestões envolvendo o aproveitamento do estudo aqui iniciado.

Capítulo 5

Conclusões Finais e Sugestões para Trabalhos Futuros

5.1 Introdução

O trabalho aqui apresentado é de cunho multidisciplinar e propõe-se a ter um âmbito experimental.

Chamou-se a atenção para o fato de que não existe uma teoria única que possa atender às diferentes aplicações e necessidades de análise não linear.

Por esta razão, abordou-se neste trabalho formas específicas de se tratar duas aplicações distintas envolvendo sistemas não lineares: uma primeira referindo-se à manipuladores robóticos e uma segunda envolvendo um oscilador mecânico flexível.

Dentro dessa abordagem desenvolveu-se ferramentas de modelagem, de simulação, de análise e de implementação que podem agregar conhecimento sobretudo aos interessados em temas relacionados à estruturas flexíveis e até mesmo em análise não linear

Além disso, uma contribuição relevante é o experimento montado no quarto capítulo que permite, uma vez montado, que diversas investigações futuras ainda possam ser realizadas..

Na verdade, ao final da leitura desse trabalho pode ser percebida uma inter – relação entre as duas aplicações aqui desenvolvidas. Entretanto, como foram tratadas separadamente, as próximas seções procuram manter essa condição expondo algumas conclusões sobre os modelos propostos. Sugestões para trabalhos futuros são dadas na última seção deste capítulo.

5.2 Comentários sobre a modelagem de manipuladores flexíveis

Esse estudo apresentou um modelo de manipulador flexível formado por dois links e duas juntas rotacionais, sem atrito, cujo movimento global pode ser entendido como um movimento de um sistema hipotético rígido e um movimento flexível dos links com relação a esse sistema rígido móvel.

Mostrou-se que é possível trabalhar com as equações dinâmicas de movimento da maneira mais genérica possível, sem linearizações. Trabalhou-se também com um sistema rígido nas mesmas condições do flexível a fim de que comparações entre ambos pudessem ser estabelecidas.

Além disso, o trabalho mostrou através de uma conveniente parametrização das equações de movimento, que o sistema flexível pode ser escrito matematicamente como uma extensão do modelo rígido, e conseqüentemente o manipulador flexível pode ser reduzido ao rígido com a anulação dos termos matemáticos relacionados à flexibilidade.

Esse procedimento foi estendido às simulações, e os resultados mostraram a resposta do comportamento do sistema.

A análise das equações de movimento tal como foi feita nesse trabalho permite um monitoramento sobre cada parcela de contribuição para a flexibilidade do sistema. Pode-se assim, pensar na possibilidade de se encontrar uma fronteira entre ambos os sistemas, rígido e flexível.

Pode-se também pensar em construir controladores que façam compensações de efeitos físicos- que através das simulações foram considerados relevantes para a flexibilidade do sistema- a fim de corrigir a resposta do elemento terminal do manipulador aos sinais de entrada do sistema de controle.

Se a lei de controle requer mais do que a medida das posições angulares para efetuar as correções de movimento, faz-se necessário uma análise um pouco mais sofisticada para medir as componentes flexíveis. Pode-se, entretanto, utilizar deste modelo para tal análise.

5.3 Conclusões sobre o sistema magneto-elástico

Apresentou-se um modelo no qual uma haste flexível teve uma de suas extremidades fixa à uma base rígida. À outra extremidade, livre, permitia-se um movimento entre dois eletroímãs capazes de defletir a haste. Esses eletroímãs foram fixos à uma segunda base móvel que era submetida à uma excitação externa.

Um modelo teórico foi desenvolvido com o auxílio do formalismo de Lagrange e o método de Galerkin. Os resultados de simulações mostraram que o sistema, muitas vezes, tem comportamento periódico. Entretanto, em algumas situações as soluções apresentaram indicativos de um transiente caótico e em outras não apenas um transiente mas um movimento que permanecia com essa característica.

Com o intuito de validar o modelo teórico previamente desenvolvido, montou-se também um aparato experimental. Este aparato, relativamente complexo, atingiu o objetivo de mostrar-se eficiente na reprodução de movimentos experimentais análogos àqueles previstos pelo modelo teórico.

É bem sabido que, montagens experimentais são envolvidas por incertezas, ainda que essas possam ser mínimas. Ao mesmo tempo, sabe-se também que a manifestação de movimentos caóticos apresentam muita sensibilidade relativa às condições iniciais. De fato, as simulações têm mostrado uma significativa dependência ou sensibilidade relativa às condições iniciais.

Essa grande sensibilidade dificulta a possibilidade de que sejam escolhidos um conjunto de parâmetros adequados que permitam facilmente a reprodução experimental das situações que envolvam soluções que exibem comportamento indicativo de movimento caótico.

Entretanto, vale ressaltar que, o oscilador magneto – elástico tratado nesse trabalho pode além de ter aplicações técnicas, servir como um conveniente modelo de laboratório para o estudo de dinâmica não linear e possivelmente caótica.

5.4 Sugestões para Trabalhos Futuros

As duas aplicações desenvolvidas neste trabalho, embora distintas, apresentaram em comum estudos que envolvem a dinâmica de estruturas flexíveis assim como os seus aspectos não lineares.

Interessados em sistemas não lineares podem desenvolver em ambas as aplicações investigações futuras com o auxílio de ferramentas como a FFT (Transformada Rápida de Fourier) e o expoente de Liapounov que permitem, por exemplo, maior evidência sobre movimentos de comportamento caótico.

A bancada experimental desenvolvida no capítulo 4 envolvendo uma haste flexível pode ser considerada como um “background” para o desenvolvimento de um protótipo experimental que represente um manipulador com um único link flexível. A partir daí, pode-se evoluir para uma validação experimental do modelo desenvolvido no capítulo 3 que trata de um manipulador com dois links flexíveis.

Além dessas já citadas outras investigações podem ser sugeridas, como por exemplo:

Na aplicação envolvendo manipuladores flexíveis, o desenvolvimento de uma estratégia de controle baseada em compensações de efeitos físicos considerados relevantes para a flexibilidade do sistema.

Extensão do modelo proposto para representações de movimentos espaciais considerando também deformações torcionais.

Incrementação na modelagem considerando que o modelo flexível aqui proposto possa estar suportado sobre uma base também flexível.

Desenvolvimento de estratégias de controles de sistemas não lineares que possam ser aplicáveis à bancada do sistema magneto elástico.

Referências Bibliográficas:

Asada, H., Slotine, J.J.E.: Robot Analysis and Control, John Wiley and Sons, 1986.

Balthazar, J. M. , Introdução à Modelagem Matemática e Teoria de Vibrações Não Lineares. In: XXIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, setembro 2000.

Balthazar, J.M., Mucheroni, M.F., Tsunaki, R. H., David, S. A. , Sá, C. E. A. On some criteria for chaotic vibrations: how to identify them?, In: Proceedings of International Conference on Nonlinearities, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences, 1993, pp 81 - 83.

Barbieri, E., Ozguner, U. : Unconstrained and Constrained Mode Expansions for a Flexible Slewing Link, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control.. Vol. 110, pp.416-421. december 1988

Book, W.J., Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms. The International Journal of Robotics Research, v.3, No. 3, p. 87-101, 1984.

Book, W.J., Maizza-Neto, O., Whitney, D.E., Feedback Control of Two Beam, Two Joint Systems With Distributed Flexibility, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, v.97, No. 4, p. 424-431, december 1975.

Book, W.J., Majette, M. Controller Design for Flexible, Distributed Parameter Mechanical Arms Via Combined State Space and Frequency Domain Techniques, Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, v.105, p. 245-254, december 1983.

Bremer, H., "On The Dynamics of Flexible Manipulators", IEEE Conf. Robotics Automat., p. 1556-1560, in Proc. 1987.

Butkov, E., Física Matemática, Editora Guanabara S.A., 1988, 725 p.

Cannoon, R.H.Jr., Schimtz, E., Initial Experiments on End-Point Control of a Flexible One-Link Robot, *The International Journal of Robotic Research*, v.3, No.3, p. 62-75,1984.

Cetinkunt, S., Book, W.J., Performance Limitations of Joint Variable-Feedback Controllers Due to Manipulator Structural Flexibility, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v.6, No.2, p. 219-230, april 1990.

Cetinkunt, S., Book, W.J., Symbolic Modeling and Dynamic Simulation of Robotic Manipulators With Compliant Links and Joints, *Robotics & Computer Integrated Manufacturing*, v.5, No.4, p. 301-310, 1989.

Chang, L.W., Hamilton, J.F., Dynamics of Robotic Manipulators With Flexible Links, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v.113, p. 54-59, march 1991.

Choura,S., Jayasuriya,S., Medick,M.A., On the Modeling, and Open-Loop Control of a Rotating Thin Flexible Beam, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, v.113, p. 26-33, march 1991.

Craig, J.J., *Adaptative Control of Mechanical Manipulators*. Addison-Wesley Publishing Company,1988.

Craig, J.J., *Introduction to Robotics: Mechanics & Control*. Addison-Weslwy Publishing Company, 1986.

David, S.A., Rosário, J.M. Investigation about Nolinearities in a Robot with Elastic Members, *Computational Fluid and Solid Mechanics, Solids and Structures*, vol.1, K.J.Bathe editor, pp. 137-139, Elsevier Science Ltd., England, 2001 ISBN 0-08-043944-6.

David, S.A., Rosário, J.M., Machado, J. Investigation about Chaos in a Magneto-elastic Dynamical System”, *Computational Fluid and Solid Mechanics, Multi-Physics*, vol.2, K.J.Bathe editor, pp. 1120-1123, Elsevier Science Ltd., England, 2001 ISBN 0-08-043944-6.

David, S.A, Rosário, J. M., Machado, J.: “On Numerical Simulations of a Magnetoelastic Dynamical System”, *Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences*, Chapter 2: Nonlinear Dynamics, Vol 5. Chaos Control and Times Series, Published by ABCM, AAM, SBMAC and SIMAI, pp. 157-166, ISBN: 85-900351-5-8, 2002.

David, S.A.; Rosário, J.M. Modeling, Simulation and Control of Flexible Robots *Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences*, Chapter 3: Control, Robotics, Neural Networks and Optimization Engineering, vol. 1, Published by ABCM and AAM, pp. 353-358, ISBN: 85-900351-2-3, 1999.

David, S.A. , Rosário, J.M. Dynamic Modeling, Simulation and Nonlinear Analysis of Rigid and Flexible Robot Manipulators. In: *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*. Barcelona ,september 2000.

Feliu, V., Rattan, K.S., Brown, B.Jr., *Adaptative Control of a Single-Link Flexible Manipulator* , *IEEE Control Systems Magazine*, p. 29-33, february 1990.

Fu, K.S., Gonzales, R.C., Lee, C.S.G., *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence.*, Mc Graw-Hill Company 1987.

Garcia, E., *On The Modeling and Control of Slewing Flexible Structures.*, State University of New York, august 1989, Ph.D. (Tese)

Goldstein, H., *Classical Mechanics* , Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Company, Second Edition, 1981.

Guckenheimer, J, Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer Verlag 1983.

Hagedorn, P. *Oscilações Não Lineares*. São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA, 1984.

Hastings, G.G., Book, W.J., A linear Dynamic Model for Flexible Robotic Manipulators., IEEE Control Systems Mag. 7, p. 61-64, 1987.

Hollerbach, J.M. A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity , IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. smc-10, No.11, november 1980.

Holmes, P. J., Moon, F. C. , Strange Attractors and Chaos in Nonlinear Mechanics, Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 1021-1032, 1983.

Kalra, P., Sharan, A. M. , On the Automated Generation of Dynamic Equations for Flexible Robotic Manipulators, Journal of Robotics and Automation, Vol. 5, 1990.

Koivo, A. J. Fundamentals for Control of Robotic Manipulators , John Wiley & Sons, Inc. 1989.

Li, C.J., Sankar, T.S., A systematic Method of Dynamics for Flexible Robot Manipulators., Journal of Robotic Systems 9 (7), pp. 861-891, 1992.

Meirovitch, L., Analytical Methods in Vibrations, The MacMillan Company, 1971.

Moon, F. C. , Shaw, S. W. , Chaotic Vibrations of a Beam with Nonlinear Boundary Conditions, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 18, Nº 6, pp 465-477, 1983.

Moon, F. C. , Experiments on Chaotic Motions of a Forced Nonlinear Oscillator: Strange Attractors. Transactions of the ASME Vol. 4 pp. 638 –644, 1980.

Moon, F. C., Holmes, P. J. , A Magnetoelastic Strange Attractor, Journal of Sound and Vibration, 65(2), pp. 275-296, 1979.

Nathan, P.J.;Singh, S.N. Nonlinear Ultimate Boundedness Control and Stabilization of a Flexible Robotic Arm , Journal of Robotic Systems 9(3), 301-326, 1992.

Nathan, P.J., Singh, S.N., Sliding Mode Control and Elastic Mode Stabilization of a Robotic Arm With Flexible Links, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v.113, p. 669-676, december 1991.

Nayfeh, A.H., Mook, D.J., *Nonlinear Oscillations*. New York: John Wiley & Sons, 1979.

Paul, R.P., *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control*, The M.I.T. Press, 1986.

PC- Matlab with Simulink user's guide, The MathWorks, Inc., march 1992.

Reitz, J.R., Milford, F. J., Christy, R. W., *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1980.

Rosário, J.M. *Modelisation Dynamique D'un Robot Industriel*. Ministère de l'Education Nationale. Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique., scp, France, september 1987.

Schielen, I.W. *Technische Dynamik*. s.l.p.; s.c.p., s.d.p. 106 pp.

Seeger, G., *Selbsteinstellende, Modellgestutzte Regelung Eines Industrieroboters*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig / Wiesbaden, 1992.

Soares, A. M. S., *Modelagem e Identificação Experimental de Estruturas Flexíveis*. São José dos Campos, 1997, 182 p. Tese (Doutorado).

Spong, M.W., *Modeling and Control of Elastic Joint Robots*, ASME *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v.109, p. 310-319, 1987.

Steidel, R. F., *An Introduction to Mechanical Vibrations*. John Wiley & Sons, 1989.

Symon, K.R., *Mecânica*. Editora Campus LTDA, 1982, 685 p.

Thomson, W.T., *Theory of Vibrations with Applications*, Second Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.

Timoshenko, S.P., *Resistência dos Materiais*, Ao Livro Técnico S.A., v.1, 1969.

Wang, D., Vidyasagar, M., *Control of a Class of Manipulators With a Single Flexible Link - Part I: Feedback Linearization*, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v.113, p. 655-661, december 1991.

Publicações do autor relacionadas ao tema desse trabalho:

Capítulos de Livros Publicados:

Internacionais:

David, S.A., Rosário, J.M. (2001): "Investigation about Nonlinearities in a Robot with Elastic Members", *Computational Fluid and Solid Mechanics, Solids and Structures*, vol.1, K.J.Bathe editor, pp. 137-139, Elsevier Science Ltd., England, ISBN 0-08-043944-6.

David, S.A., Rosário, J.M., Machado, J. (2001): "Investigation about Chaos in a Magneto-elastic Dynamical System", *Computational Fluid and Solid Mechanics, Multi-Physics*, vol.2, K.J.Bathe editor, pp. 1120-1123, Elsevier Science Ltd., England, ISBN 0-08-043944-6.

Estrangeiros:

David, S.A, Rosário, J. M., Machado, J. (2002): “On Numerical Simulations of a Magnetoelastic Dynamical System”, Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences, Chapter 2: Nonlinear Dynamics, Vol 5. Chaos Control and Times Series, Published by ABCM, AAM, SBMAC and SIMAI, pp. 157-166, ISBN: 85-900351-5-8, 2002.

David, S.A.; Rosário, J.M. (1999): “Modeling, Simulation and Control of Flexible Robots” Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences, Chapter 3: Control, Robotics, Neural Networks and Optimization Engineering, vol. 1, Published by ABCM and AAM, pp. 353-358, ISBN: 85-900351-2-3, 1999.

Brazilian Society of Mechanical Sciences (ABCM)

American Academy of Mechanics (AAM)

Brazilian Society of Applied and Computacional Mathematics (SBMAC)

Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale (SIMAI)

Publicações em Congressos e Conferências

Internacionais:

MPSVA 2003 – 5th International Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis, University of Glasgow, Scotland, UK (09/09/2003 a 11/09/2003)

Título: Nonlinear vibrations of an elastic wide plate induced by two electromagnets.

(submetido e aceito)

COMPLAS 2003 – VII International Conference on Computational Plasticity – Barcelona – Espanha (07/04/2003 a 10/04/2003).

Título: Vibrations of a beam induced by magnetoelastic interactions. (submetido e aceito).

CMMSE'2002 - International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering - Alicante - Espanha - (20/09/2002 a 25/09/2002)

Título : Optimal Dynamic Investment Path of the Firm: Planned Rate of Return, Prices (Tariffs) and Impairments due to Technological Obsolescence .

First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics - Massachusetts Institute of Technology - Cambridge - M A 02139 - USA - ISBN - 008043944-6 (12/06/2001 a 15/06/2001)

Título1: Investigation About Chaos in a Magnetoelastic Dynamical System

Título2: Investigation About Nonlinearities in a Robot with Elastic Members

ECCOMAS'2000 – European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. Barcelona – Espanha (11/09/2000 a 14/09/2000).

Título: Dynamic Modeling, Simulation and Nonlinear Analysis of Rigid and Flexible Robot Manipulators.

CONTROLO'98 – Third Portuguese Conference on Automatic Control, ISBN 972-97025-1-9

Universidade de Coimbra - Coimbra – Portugal (09/09/1998 a 11/09/1998), pps. 532-539

Título : “ Dynamic Modeling, Simulation and Control of Manipulators: A Comparative Study Between Flexible and Rigid Robots”.

Estrangeiros:

ICONE'2000 - Third International Conference on Non-Linear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications in Engineering Sciences - Campos do Jordão. (31/07/2000 a 04/08/2000).

Título : On Numerical Simulations of a Magnetoelastic Dynamical System

VI PACAM – Sixth Pan American Congress of Applied Mechanics. PUC-RJ (04/01/99 a 09/01/99).

Titulo: “Dynamic Modeling and Simulation of Robot Manipulator with two Flexible Links”, Rev. Applied Mechanics in the Americas, VI PACAM, Vol VIII, January 1999, Rio de Janeiro, Brazil, pp. 1549-1552, ISBN 85-900726-2-2.

ICONE’96 - Second International Conference on Non-Linear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications in Engineering Sciences. São Pedro-SP (04/08/96 a 09/08/96).

Titulo: Modeling, Simulation and Control of Flexible Robots

Nacionais:

V CEM-NNE 98 -Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste Universidade Federal do Ceará- Fortaleza- CE/Brasil.(27/10/1998 a 30/10/1998). PP. 532-539

Titulo: “Dynamic Modeling and Simulation of Flexible Manipulators: A Comparative Study with Rigid Robots”.

COBEM ' 97 - XIV Brazilian Congress of Mechanical Engineering Obeid Plaza Convention Center-Bauru- SP/Brasil.(08/12/1997 a 12/12/1997). Anais do XIII COBEM, CD Rom, 8p.

Titulo: “Symbolic Modeling and Dynamic Simulation of Robotic Manipulators with Flexible Links”.

I Workshop Brasileiro em Fenômenos Não Lineares, Caóticos e Estocásticos. Rio Claro –SP (16/11/93 a 18/11/93).

Titulo: On Some Criteria for Chaotic Vibrations: How to Identify them ?

Titulo: Simulação de Sistemas Dinâmicos Vibratórios Caóticos ou Robóticos via Simulink

XII Congresso de Iniciação Científica e Tecnológica em Engenharia.

Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo (USP)-São Carlos- S.P/ (13/12/1993 a 16/12/1993).

Titulo: Simulações de um Robô Manipulador Plano Formado por Dois Elos

Anexo A: Modelagem Dinâmica de Robô Rígido com n Graus de Liberdade.

Introdução

Nesse anexo procura-se esclarecer os detalhes da sistemática de obtenção das equações dinâmicas de movimento de um manipulador rígido com n graus de liberdade. Utiliza-se o formalismo Lagrangeano, o que implica na necessidade de se encontrar as energias cinética e potencial do sistema.

Dessa forma, faz-se necessário o conhecimento dos vetores posição e velocidade de um ponto no manipulador, e esse é o primeiro procedimento a ser realizado. A partir desses vetores pode-se escrever as energias cinéticas e potencial, e conseqüentemente o Lagrangeano. Finalmente, são encontradas as equações de movimento a partir das equações de Euler-Lagrange.

A-1 Velocidade de um ponto no manipulador

Seja ${}^i r_i$ um ponto fixo e em repouso em um link i. Pode-se expressá-lo com relação ao i-ésimo sistema de referência - que é fixo ao link i - da seguinte maneira:

$${}^i r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = (x_i, y_i, z_i, 1)^T \quad (\text{A.1})$$

Seja, também, ${}^0 r_i$ o mesmo ponto que foi descrito acima, mas agora escrito com relação ao sistema de referência da base. Se ${}^0 A_i$ representa a matriz transformação que relaciona o i-ésimo sistema de referência ao sistema de referência da base, então ${}^0 r_i$ está relacionado ao ponto ${}^i r_i$ por:

$${}^0 r_i = {}^0 A_i {}^i r_i \quad (\text{A.2})$$

onde:

$${}^0A_i = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \dots \dots \dots {}^{i-1}A_i \quad (A.3)$$

Desde que o ponto ${}^i r_i$ está em repouso no link i , e assumindo movimento de corpo rígido, outros pontos (tão bem como o ponto ${}^i r_i$) que estão fixos no link i e expressos com relação ao i -ésimo sistema de referência, terão velocidade zero com relação ao i -ésimo sistema de referência, que não é um referencial inercial.

A velocidade de ${}^0 r_i$ expressa no sistema de referência da base - que é um referencial inercial - pode ser expressa como:

$${}^0 v_i = v_i = \frac{d}{dt}({}^0 r_i) = \frac{d}{dt}({}^0 A_i \cdot {}^i r_i) \quad (A.4)$$

Mas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}({}^0 A_i \cdot {}^i r_i) &= \frac{d}{dt}[({}^0 A_1 \cdot {}^1 A_2 \dots \dots \dots {}^{i-1} A_i) \cdot {}^i r_i] = \\ & \frac{d}{dt}({}^0 A_1 \cdot {}^1 A_2 \dots \dots \dots {}^{i-1} A_i) \cdot {}^i r_i + ({}^0 A_1 \cdot {}^1 A_2 \dots \dots \dots {}^{i-1} A_i) \cdot \frac{d}{dt}({}^i r_i) = \end{aligned} \quad (A.5)$$

$$\frac{d}{dt}({}^0 A_1 \cdot {}^1 A_2 \dots \dots \dots {}^{i-1} A_i) \cdot {}^i r_i + {}^0 A_i \cdot {}^i \dot{r}_i$$

Portanto,

$$\begin{aligned} v_i = \frac{d}{dt}({}^0 A_i \cdot {}^i r_i) &= {}^0 \dot{A}_1 \cdot {}^1 A_2 \cdot {}^2 A_3 \dots \dots \dots {}^{i-1} A_i \cdot {}^i r_i + {}^0 A_1 \cdot {}^1 \dot{A}_2 \cdot {}^2 A_3 \dots \dots \dots {}^{i-1} A_i \cdot {}^i r_i + \\ & \dots \dots \dots {}^0 A_1 \cdot {}^1 A_2 \cdot {}^2 \dot{A}_3 \dots \dots \dots {}^{i-1} A_i \cdot {}^i r_i + {}^0 A_1 \cdot {}^1 A_2 \cdot {}^2 A_3 \dots \dots \dots {}^{i-1} \dot{A}_i \cdot {}^i r_i + {}^0 A_i \cdot {}^i \dot{r}_i \end{aligned} \quad (A.6)$$

Como já justificou-se, ${}^i \dot{r}_i = 0$. Dessa forma,

$$v_i = \left[\sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] {}^i r_i \quad (A.7)$$

A fim de simplificar a notação, vamos definir $U_{ij} \equiv \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j}$. (A.8)

Usando esta notação, pode-se expressar a velocidade da seguinte maneira:

$$v_i = \left[\sum_{j=1}^i U_{ij} \dot{q}_j \right] {}^i r_i \quad (A.9)$$

A-2 Energia Cinética

Uma vez que a velocidade foi obtida, pode-se agora encontrar a energia cinética. Seja T_i a energia cinética do link i , $i = 1(1)n$, expressa no referencial da base, e seja também dT_i a energia cinética de uma partícula com um diferencial de massa dm no link i . Assim,

$$dT_i = \frac{1}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) dm \quad (A.10)$$

ou ainda,

$$dT_i = \frac{1}{2} Tr(v_i v_i^T) dm \quad (A.11)$$

Mas viu-se que:

$$v_i = \left[\sum_{j=1}^i U_{ij} \dot{q}_j \right] {}^i r_i \quad (A.12)$$

Substituindo, então na expressão para dT_i , tem-se :

$$dT_i = \frac{1}{2} Tr \left[\sum_{p=1}^i U_{ip} \dot{q}_p {}^i r_i \left(\sum_{r=1}^i U_{ir} \dot{q}_r {}^i r_i \right)^T \right] dm \quad (A.13)$$

Portanto,

$$dT_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} ({}^i r_i \, dm \, {}^i r_i^T) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (\text{A.14})$$

Nota-se que, \dot{q}_i é independente da distribuição de massa do link i , e então, ao somar todas as energias cinéticas de todos os links pode-se colocar a integral dentro dos parênteses, como mostra-se abaixo:

$$T_i = \int dT_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \left(\int {}^i r_i \, {}^i r_i^T \, dm \right) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (\text{A.15})$$

Sabe-se entretanto que:

$${}^i r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = (x_i, y_i, z_i, 1)^T \quad (\text{A.16})$$

Dessa forma,

$${}^i r_i \, {}^i r_i^T = \begin{bmatrix} x_i^2 & x_i y_i & x_i z_i & x_i \\ x_i y_i & y_i^2 & y_i z_i & y_i \\ x_i z_i & y_i z_i & z_i^2 & z_i \\ x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Portanto, a inércia de todos os pontos sobre o link i , denotada J_i , poderá ser escrita:

$$J_i = \int {}^i r_i \, {}^i r_i^T \, dm = \begin{bmatrix} \int dm x_i^2 & \int dm x_i y_i & \int dm x_i z_i & \int dm x_i \\ \int dm x_i y_i & \int dm y_i^2 & \int dm y_i z_i & \int dm y_i \\ \int dm x_i z_i & \int dm y_i z_i & \int dm z_i^2 & \int dm z_i \\ \int dm x_i & \int dm y_i & \int dm z_i & \int dm \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Lembrando-se que:

i) os momentos de inércia sobre os eixos x y z são dados respectivamente por:

$$I_{xx} = \int_m (r^2 - x^2) dm ; \quad I_{yy} = \int_m (r^2 - y^2) dm ; \quad I_{zz} = \int_m (r^2 - z^2) dm \quad (\text{A.19})$$

ii) os produtos de inércia sobre os mesmos eixos, dados respectivamente por:

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_m xy dm ; \quad I_{xz} = I_{zx} = \int_m xz dm ; \quad I_{yz} = I_{zy} = \int_m yz dm \quad (\text{A.20})$$

iii) e que as coordenadas do centro de massa são dadas por:

$$m\tilde{x} = \int_m x dm ; \quad m\tilde{y} = \int_m y dm ; \quad m\tilde{z} = \int_m z dm \quad (\text{A.21})$$

fica fácil notar que:

$$\int_m x^2 dm = \frac{1}{2}(-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) \quad (\text{A.22})$$

$$\int_m y^2 dm = \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) \quad (\text{A.23})$$

$$\int_m z^2 dm = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}) \quad (\text{A.24})$$

Pode-se, portanto, expressar J_i da seguinte maneira:

$$J_i = \begin{bmatrix} (-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})/2 & I_{xy} & I_{xz} & m_i \tilde{x}_i \\ I_{xy} & (I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})/2 & I_{yz} & m_i \tilde{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})/2 & m_i \tilde{z}_i \\ m_i \tilde{x}_i & m_i \tilde{y}_i & m_i \tilde{z}_i & m_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Conseqüentemente, a energia cinética total será dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \left[\text{Tr} \left(U_{i,p} J_i U_{i,r}^T \right) \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (\text{A.26})$$

A-3 Energia Potencial

Se V_i denotar a energia potencial do link i de um robô manipulador, então:

$$V_i = -m_i g \cdot {}^0\tilde{r}_i = -m_i g \left({}^0A_i \cdot {}^i\tilde{r}_i \right) \quad (\text{A.27})$$

Portanto, pode-se obter a energia potencial total somando para todas as energias em cada link. Dessa forma, a energia potencial total V , é dada por:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n -m_i g \left({}^0A_i \cdot {}^i\tilde{r}_i \right) \quad (\text{A.28})$$

onde:

$g = (g_x, g_y, g_z, 0)$ é um vetor linha expresso no sistema de referência da base.

e

${}^i\tilde{r}_i = \begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \\ \tilde{z}_i \\ 1 \end{bmatrix}$ é o vetor centro de massa do link i expresso no i -ésimo sist. de referência

A-4 O Lagrangeano

Tendo sido obtidas as energias cinética e potencial, pode-se agora facilmente escrever a função Lagrangeano, que é simplesmente a diferença entre essas duas quantidades, ou seja, $L = T - V$.

Portanto,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \left[\text{Tr} \left(U_{ip} J_i U_{ir}^T \right) \dot{q}_p \dot{q}_r \right] + \sum_{i=1}^n m_i g \left({}^0A_i \tilde{r}_i \right) \quad (\text{A.29})$$

A-5 Equações de Movimento

A aplicação da formulação de Euler-Lagrange à função Lagrangeana encontrada, fornece diretamente os torques generalizados τ_i , necessários para que os atuadores posicionados nas respectivas juntas possam mover os respectivos links.

A equação de Euler-Lagrange a ser utilizada - como um reforço à menção já feita na seção 2.2.1 - tem a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_p} = \tau_p \quad p = 1(1)n \quad (\text{A.30})$$

Deve-se portanto, calcular cada uma das derivadas que compõem essa equação. Para que não se perca de vista o objetivo principal com tantos cálculos a serem feitos, as derivadas serão calculadas individualmente.

Já foi definido que:

$$U_{ij} = \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j}$$

Com essa definição pode-se notar que o Lagrangeano escreve-se também como:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} \right)^T \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \right] + \sum_{i=1}^n m_i g \left({}^0A_i \tilde{r}_i \right) \quad (\text{A.31})$$

Calcula-se, então, primeiro a derivada $\frac{\partial L}{\partial q_p}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial q_p} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial^2 {}^0 A_i}{\partial q_j \partial q_p} J_i \left(\frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_k} \right)^T \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j} J_i \left(\frac{\partial^2 {}^0 A_i}{\partial q_p \partial q_k} \right)^T \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \right] + \\
 & + \sum_{i=1}^n m_i g \left(\frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_p} {}^i \bar{r}_i \right)
 \end{aligned} \tag{A.32}$$

Lembrando-se que:

$$\text{Tr}(A \cdot B^T) = \text{Tr}(B \cdot A^T) \tag{A.33}$$

E, lembrando-se também que podemos trocar as letras que representam os índices de soma (pois são somente índices), a expressão para $\frac{\partial L}{\partial q_p}$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial L}{\partial q_p} = \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^i \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial^2 {}^0 A_i}{\partial q_p \partial q_m} J_i \left(\frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_k} \right)^T \right) \dot{q}_m \dot{q}_k \right] + \sum_{i=p}^n m_i g \left(\frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_p} {}^i \bar{r}_i \right) \tag{A.35}$$

Calcula-se agora, a derivada parcial $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p}$.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_p} J_i \left(\frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_k} \right)^T \right) \dot{q}_k \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j} J_i \left(\frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_p} \right)^T \right) \dot{q}_j \right] \tag{A.36}$$

Trocando-se, na expressão acima, os índices de soma convenientemente e fazendo valer a relação (A-33), obtêm-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_k} J_i \left(\frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_p} \right)^T \right) \dot{q}_k \right] \tag{A.37}$$

Como $\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} = 0$ para $p > i$, então:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} \right)^T \right) \dot{q}_k \right] \quad (\text{A.38})$$

Resta, agora, calcular $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right]$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right] = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} \right)^T \right) \dot{q}_k \right] \right] \quad (\text{A.39})$$

Utilizando mais uma vez a relação (A-33), e também a regra do produto para derivação, pode-se escrever $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right]$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right] &= \sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} \right)^T \right) \ddot{q}_k \right] + \\ &\quad \sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial^2 {}^0A_i}{\partial q_k \partial q_m} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_p} \right)^T \right) \dot{q}_k \dot{q}_m \right] + \\ &\quad \sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^i \left[\text{Tr} \left(\frac{\partial^2 {}^0A_i}{\partial q_p \partial q_m} J_i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_k} \right)^T \right) \dot{q}_k \dot{q}_m \right] \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Uma vez que todas as derivadas foram calculadas, pode-se finalmente escrever as equações de movimento. Faz-se isso, e as equações são escritas com as seguintes substituições já realizadas:

i-) volta-se à notação para $U_{ij} = \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j}$;

ii-) também, baseando-se na definição mostrada pelo item i, fica fácil notar que:

$$\frac{\partial^2 {}^0A_i}{\partial q_k \partial q_m} = \frac{\partial U_{jm}}{\partial q_k} = U_{jmk}$$

iii-) e, os índices de soma serão reescritos como i, j, k simplesmente por serem mais usuais.

Dessa forma, as equações de movimento escrevem-se como:

$$\begin{aligned} \tau_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = & \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \left[\text{Tr} \left(U_{jk} J_j U_{ji}^T \right) \ddot{q}_k \right] + \\ & + \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \left[\text{Tr} \left(U_{jkm} J_j U_{ji}^T \right) \dot{q}_k \dot{q}_m \right] \\ & - \sum_{j=i}^n m_j g U_{ji} {}^j\tilde{r}_j \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

para $i = 1(1)n$.

A partir da apresentação da sistemática de obtenção dessas equações de movimento para um manipulador rígido com n graus de liberdade, fica fácil tratar o problema de um manipulador com dois links rígidos constituído de duas juntas rotacionais, caracterizando assim dois graus de liberdade.. Essas equações são apresentadas com seus termos parametrizados de forma conveniente visando a realização de simulações e comparações com o manipulador flexível no capítulo 3.

Anexo B:Apresentação da forma de trabalho com o software Visual Basic

Introdução

Este anexo mostra as rotinas utilizadas nas simulações desenvolvidas no capítulo 4 com o auxílio do software Visual Basic.

Apresenta-se a Macro principal, Macro Tabdados, Função Runge Kutta e a Tela Entrada de Dados.

Macro Principal

```

Public Sub rk()
Windows("dsv1.xls").Activate
Worksheets("TabDados").Select

' Abre o formulário para a coleta de informações
Dados.Show
d = Dados.d.Value
po = Dados.po.Value
wf = Dados.wf.Value
t = Dados.ti.Value
tf = Dados.tf.Value
h = Dados.h.Value
x = Dados.xo.Value
v = Dados.vo.Value
gr = Dados.gr.Value

' Aqui começa o processo de localização de informações lançadas
' no formulário e adota valores padrão, quando não houver valores
If d = "" Then d = 0.25
If po = "" Then po = 0.18
If wf = "" Then wf = 1
If t = "" Then t = 0
If tf = "" Then tf = 2
If h = "" Then h = 0.001
If x = "" Then x = 0.07
If v = "" Then v = 0
If gr = "" Then gr = 9.806

j = (tf - t) / h
titulo = "Valores altos, isto irá demandar muito tempo..."
mensagem = "A diferença entre os intervalos de tempo é muito alta" & Chr(10) & Chr(13)
& "ou o passo é muito pequeno. Por restrições em tempo de execução," & Chr(10) &
Chr(13) & "este programa foi limitado para no máximo 8000 dados. Favor corrigir suas
informações"
botao = vbCritical + vbOKOnly
If j > 8000 Then
resposta = MsgBox(mensagem, botao, titulo)
GoTo Exit1
Else
    Tabdados.Tabdados
    funcoes.rungekutta
End If
Exit1:
End Sub

```

Macro Tabdados

Public Sub Tabdados()

```
Range("J1").Select
ActiveCell.Value = "Dados de Entrada"
ActiveCell.Offset(1, 0).Value = "Constante Delta (d)"
ActiveCell.Offset(2, 0).Value = "Força de Entrada (Po)"
ActiveCell.Offset(3, 0).Value = "Frequência (w)"
ActiveCell.Offset(4, 0).Value = "Instante de Tempo Inicial (to)"
ActiveCell.Offset(5, 0).Value = "Instante de Tempo Final (tf)"
ActiveCell.Offset(6, 0).Value = "Intervalo de Integração (h)"
ActiveCell.Offset(7, 0).Value = "Deslocamento Inicial (xo)"
ActiveCell.Offset(8, 0).Value = "Velocidade Inicial (vo)"
ActiveCell.Offset(9, 0).Value = "Aceleração Gravitacional (g)"
```

```
ActiveCell.Offset(1, 1).Value = d
ActiveCell.Offset(2, 1).Value = po
ActiveCell.Offset(3, 1).Value = wf
ActiveCell.Offset(4, 1).Value = t
ActiveCell.Offset(5, 1).Value = tf
ActiveCell.Offset(6, 1).Value = h
ActiveCell.Offset(7, 1).Value = x
ActiveCell.Offset(8, 1).Value = v
ActiveCell.Offset(9, 1).Value = gr
```

```
ActiveCell.Offset(1, 2).Value = "N/m"
ActiveCell.Offset(2, 2).Value = "Kg/s"
ActiveCell.Offset(3, 2).Value = "Kg"
ActiveCell.Offset(4, 2).Value = "N/m"
ActiveCell.Offset(5, 2).Value = "rad/s"
ActiveCell.Offset(6, 2).Value = "s"
ActiveCell.Offset(7, 2).Value = "s"
ActiveCell.Offset(8, 2).Value = "s"
ActiveCell.Offset(9, 2).Value = "m"
ActiveCell.Offset(10, 2).Value = "m/s"
ActiveCell.Offset(11, 2).Value = "m/s²"
Columns("J:L").EntireColumn.AutoFit
```

```
Range("J1:L1").Select
Selection.HorizontalAlignment = xlCenter
Selection.Interior.ColorIndex = 11
Selection.Font.Name = "Arial"
Selection.Font.Bold = True
Selection.Font.Size = 12
```

```
Selection.Font.ColorIndex = 36
' Selection.Merge
Range("J2:J12").Select
Selection.Interior.ColorIndex = 36
Range("J2:L12").Select
Selection.Borders(xlInsideHorizontal).LineStyle = xlContinuous
Selection.Borders(xlInsideHorizontal).Weight = xlThin
Selection.Borders(xlInsideHorizontal).ColorIndex = xlAutomatic
Selection.Borders(xlInsideVertical).LineStyle = xlContinuous
Selection.Borders(xlInsideVertical).Weight = xlThin
Selection.Borders(xlInsideVertical).ColorIndex = xlAutomatic
Range("A1").Select
ActiveCell.Value = "#"
ActiveCell.Offset(0, 1).Value = "Intervalo de Tempo (t)"
ActiveCell.Offset(0, 2).Value = "Deslocamento (x)"
ActiveCell.Offset(0, 3).Value = "Velocidade (v)"
ActiveCell.Offset(0, 4).Value = "Força de Entrada Pulsante (P)"
Range("A1:I1").Select
With Selection
    .HorizontalAlignment = xlCenter
    .VerticalAlignment = xlCenter
    .WrapText = True
End With
With Selection.Font
    .Name = "Arial"
    .FontStyle = "Negrito"
    .Size = 10
End With
Columns("A:A").Select
Selection.ColumnWidth = 4
Columns("B:I").Select
Selection.ColumnWidth = 10
Range("A1:I1").Select
With Selection.Borders(xlEdgeBottom)
    .LineStyle = xlContinuous
    .Weight = xlThin
    .ColorIndex = xlAutomatic
End With
fea = fe(t)
Range("A2").Select
ActiveCell.Value = i
ActiveCell.Offset(0, 1).Value = t
ActiveCell.Offset(0, 2).Value = x
ActiveCell.Offset(0, 3).Value = v
ActiveCell.Offset(0, 4).Value = fe(t)
ActiveCell.Offset(1, 0).Select
End Sub
```

Função Runge Kutta

```

' funções auxiliares
Public j, k1, k2, k3, k4, l1, l2, l3, l4, fea As Double
' variáveis do sistema
Public gr, v, t, x, d, po, wf, tf, h, i As Double

Public Sub rungekutta()

For i = 1 To j
  k1 = h * f(v)
  l1 = h * g(t, x, v)
  k2 = h * f(v + (l1 / 2))
  l2 = h * g(t + (h / 2), x + (k1 / 2), v + (l1 / 2))
  k3 = h * f(v + (l2 / 2))
  l3 = h * g(t + (h / 2), x + (k2 / 2), v + (l2 / 2))
  k4 = h * f(v + l3)
  l4 = h * g(t + h, x + k3, v + l3)
  t = t + h
  x = x + (1 / 6) * (k1 + 2 * (k2 + k3) + k4)
  v = v + (1 / 6) * (l1 + 2 * (l2 + l3) + l4)
  fea = fe(t)
  ActiveCell.Value = i
  ActiveCell.Offset(0, 1).Value = t
  ActiveCell.Offset(0, 2).Value = x
  ActiveCell.Offset(0, 3).Value = v
  ActiveCell.Offset(0, 4).Value = fea
  ActiveCell.Offset(1, 0).Select
Next i
End Sub

Public Function f(v)
' Função da derivação de Runge-Kutta
f = v
End Function

Public Function g(t, x, v)
' Função complementar da derivação de Runge-Kutta
g = -d * v + x - (x ^ 3) + po * Cos(wf * t)
End Function

Public Function fe(t)
' Força de entrada pulsante
fe = po * Sin(wf * t)
End Function

```

Entrada de dados

Entrada de Dados ✕

Abaixo segue todos os itens que podem servir como dados de entrada, caso você não digite algum valor, o próprio sistema se incumbirá de colocar o valor padrão adotado. Como você pode observar, o valor padrão está afixado ao lado da caixa de entrada. Abaixo segue a fórmula genérica utilizada:

Constante delta (d)	<input type="text"/>	$d = 0,25$
Força de entrada (P_0)	<input type="text"/>	$P_0 = 0,18$
Frequência (ω)	<input type="text"/>	$\omega = 1 \text{ rad/s}$
Instante de Tempo Inicial (t_0)	<input type="text"/>	$t_0 = 0 \text{ s}$
Instante de Tempo Final (t_f)	<input type="text"/>	$t_f = 2 \text{ s}$
Intervalo de Integração (h)	<input type="text"/>	$h = 0,001 \text{ s}$
Deslocamento Inicial (x_0)	<input type="text"/>	$x_0 = 0,070 \text{ m}$
Velocidade Inicial (\dot{x}_0)	<input type="text"/>	$\dot{x}_0 = 0 \text{ m/s}$
Aceleração gravitacional (g)	<input type="text"/>	$g = 9,806 \text{ m}$

Anexo C : Apresentação da forma de trabalho com o software Simulink

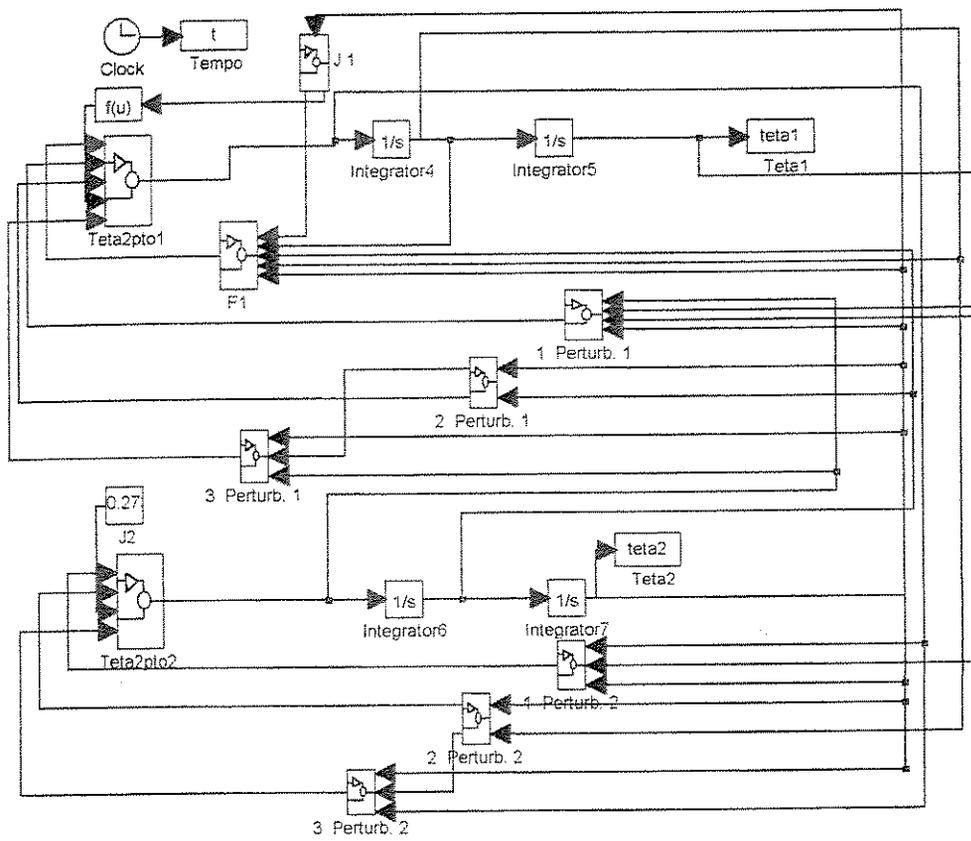
Introdução

O objetivo deste anexo é apresentar a maneira com a qual se trabalhou com software SIMULINK durante as simulações que forneceram os resultados mostrados no capítulo 3.

É apresentado uma única situação de simulação, pois todas as outras têm características similares, sendo apenas acrescentado ou retirado alguns blocos, dependendo da situação a ser simulada pois os blocos representam termos matemáticos das equações de movimento.

A situação que foi escolhida para ser mostrada é aquela em que o sistema está acoplado com carga na extremidade e o manipulador considerado rígido. É importante notar que como as equações do sistema flexível foram escritas como uma extensão do modelo rígido, o seu diagrama de blocos deve ter acrescentados os termos devido as contribuições de flexibilidade.

Assim sendo, a folha seguinte mostra o diagrama de blocos compactado responsável pela simulação das equações de movimento da situação escolhida para ser mostrada. As demais folhas trazem o que se encontra dentro de cada bloco compactado.



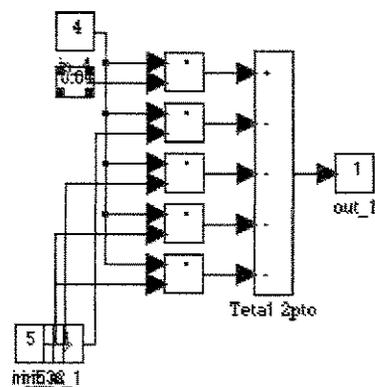


Figura C-1: Teta2pto1

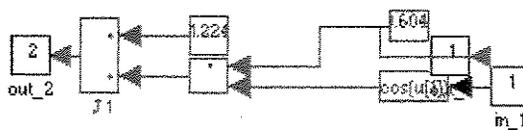


Figura C-2: Coeficiente J_1

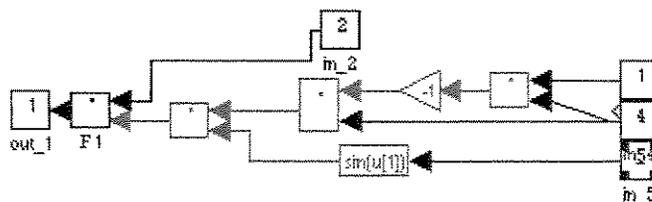


Figura C-3: Coeficiente F_1

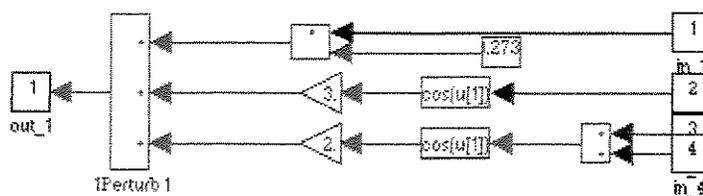


Figura C-4: Termo 1Perturb.1

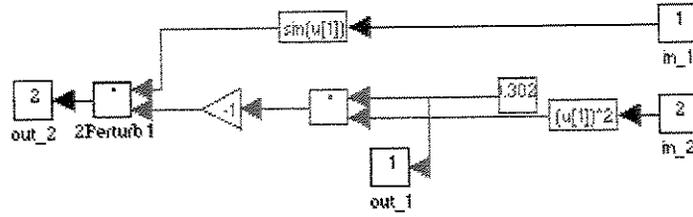


Figura C-5: Termo 2Perturb.1

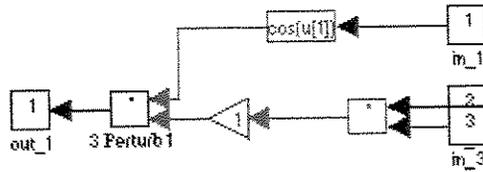


Figura C-6: Termo 3Perturb.1

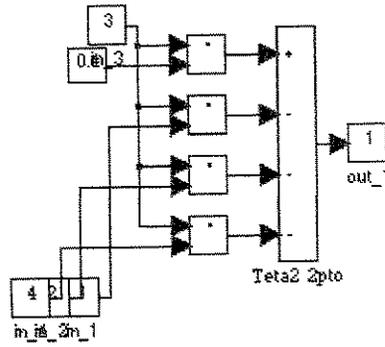


Figura C-7: Teta2pto2

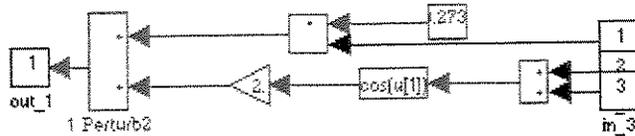


Figura C-8: Termo 1Perturb.2

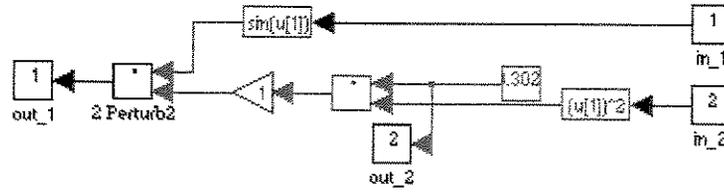


Figura C-9: Termo 2Perturb.2

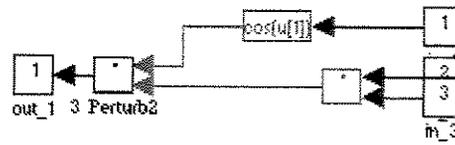


Figura C-10: Termo 3Perturb.2

Anexo D : Publicações do autor relacionadas ao tema desse trabalho

Introdução

Este anexo apresenta cópias de dois dos principais trabalhos publicados pelo autor relacionados ao tema dessa tese.

O leitor pode, por meio da consulta desses trabalhos, ter uma explicação objetiva e sucinta dos temas abordados , uma vez que os artigos requerem essa objetividade. Espera-se, com isso, fornecer um subsídio a mais ao entendimento desse trabalho, assim como facilitar a busca por algumas referências do autor.

Investigation About Nonlinearities in a Robot with Elastic Members

Sérgio A. David^a, João M. Rosário^a

^aFaculty of Mechanical Engineering
State University of Campinas (UNICAMP)
Cidade Universitária Zeferino Vaz, Campinas - Brasil
email: sergiodavid@scientist.com
email: rosario@dpm.fem.unicamp.br

Abstract

The need for fast and precise robots in the industrial environment, capable of attending the productivity and quality demands and that allow a high volume of work, needs the usage of manipulators with flexible links. Besides this, aeronautic applications demand the usage of long and thin arms, which leads to remarkable structural changes. Therefore, the development of manipulators with structural flexibility and its automatic control has become an important research area.^(1;4;6;9) The main goal of this work is to model the dynamic behavior of flexible manipulators. It is also presented a comparative study with rigid robots. It is possible to use the model for computer simulations to aid the development of efficient control.

Key Words: Robotics, Dynamic Modeling, Nonlinear Dynamics, Industrial Robots

1. Introduction

Most of the industrial applications that involve a manipulator robot use rigid links. The increase in the rigidity of the links has the main objective of avoiding structural vibration. For this reason the manipulators are designed with over-dimensioned cross-sections in order not to degrade the control accuracy.

When flexible link manipulators are compared to rigid link ones, they need less material for their fabrication, are lighter, faster, can handle larger loads, show less power consumption, need smaller drivers and usually are easier to be transported.

Because of those reasons, the usage of manipulators with flexible links is directly related to the optimization of the elements that comprise a robotics system.

1.1 Problem Description

A robotics manipulator is a mechanical device that has the function of positioning and orienting its terminal element. This terminal element has the function of handling tools suitable to the work to be performed. Two main parts are to be considered in the design of a manipulator structure. The first part is the arm that comprises at least three degrees of freedom and is used for the positioning of the concentration point and also for the orientation of the referential. The second part is the wrist. It is normally constituted of three rotational degrees of freedom and has the function of orienting the terminal referential.

Not considering the deformation of the joints, the degree of freedom related to the movement of the base of the robot can be treated as rigid, as well as the three degrees of freedom related to the orientation. By this way, one note that the flexibility of the system is related to the two degrees of freedom related to the movement of the two links of the manipulator, as shown in figure 1.

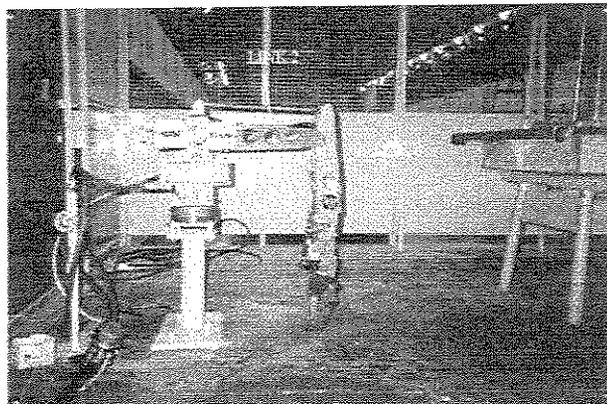


figure 1: links 2 and 3 (possible flexibility).

For a flexible manipulator the structure presents a considerable flexibility and therefore an efficient control system must be developed. It is well known that in general a control problem consists of the manipulator dynamic model formulation.[1] This model is further used to establish the control laws that provide the desired performance.

In this work the dynamic modeling is performed for a system that contains two flexible links and two rotational joints. For the sake of comparison a rigid structure with two links and two rotational joints is also analyzed. In this case two degrees of freedom are defined.

A convenient parametrization of the terms of the motion equations, which makes it easier to compare the simulation results for the rigid and for the flexible system is also developed.

We outline the fact that the motion equations are treated with all non-linearities taken into account, without the usage of any simplifying linearization procedure, as found in most of the works present in the literature. This linearization procedure may not to consider small contributions of physical effects that are summed or superimposed and that may significantly influence the system behavior.

For this reason, one of the tasks of this work is to treat the motion equations according to a general approach, without simplifying linearizations, and to assess the system behavior through controlled simulations.

2. Simulation and Results

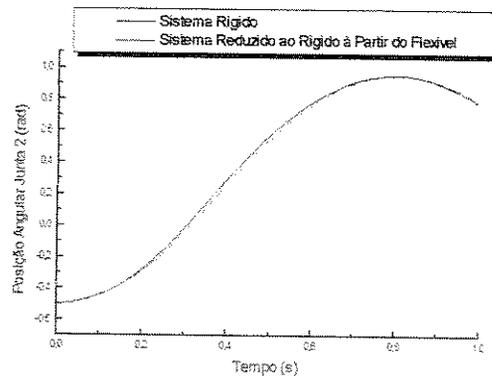
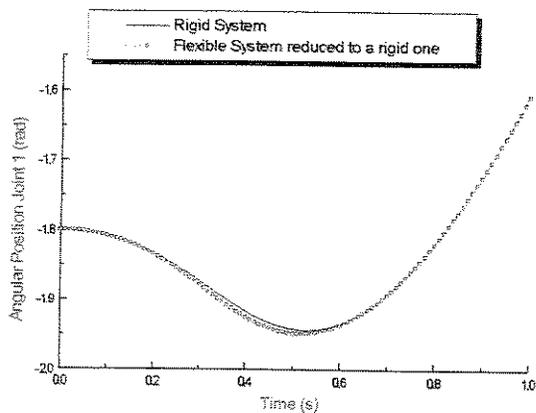
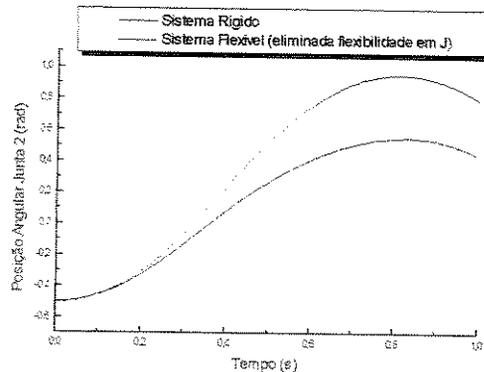
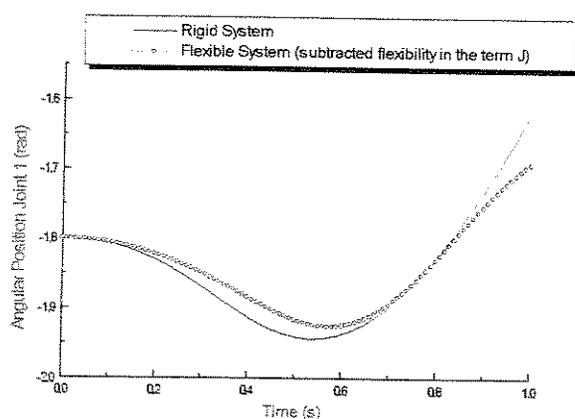
This flexible system may be mathematically reduced to the rigid one by vanishing the terms related to system flexibility, which characterizes the possibility of finding a frontier between both systems.

With this fact in mind, mathematical simulations are performed according to the following methodology:

* initially the rigid system is simulated in a separate manner;

- * following, the flexible system is simulated with all its contributions taken into account;
- * after that, the effects are individually and cumulatively subtracted and the system behavior is analyzed;
- * the effects are subtracted until the limit condition in which the flexible system is reduced to a rigid one and the system response converges - as expected - for the case of the rigid system modeled separately.

Some results are presented in this article correspond to simulations realized for the angular position θ_1 and θ_2 :



The other simulations may be found in [4].

3. Conclusion

The way in which the motion equations are treated in this paper may allow the monitoring of each contributing factor for the system flexibility. The flexible manipulator may be mathematically reduced to a rigid one by means of vanishing the flexibility related terms. The same procedure may be extended to the simulations, which makes it possible to find a frontier between both systems. It is also possible to consider the development of controllers that compensate the physical effects - which in accordance to dynamic simulations results is relevant for the system flexibility - in order to correct the response of the terminal element of the manipulator with respect to the signals from the control system.

References

- [1] **Book, W.J.**, "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms", The International Journal of Robotics Research, Vol. 3, No. 3, pp. 87-101, 1984.
- [2] **Craig, J.J.** , "Introduction to Robotics: Mechanics and Control". Addison Wesley P. Company, 1986.
- [3] **David, S.A., Rosário, J.M.** , "Dynamic Modeling and Simulation of Robot Manipulator With Two Flexible Links", Proceedings of Sixth Pan American Congress of Applied Mechanics, 1999.
- [4] **David, S.A.** , "Modelagem, Simulação e Controle de Robôs Flexíveis", MSc Thesis, State University of Campinas (in portuguese), 1996.
- [5] **Farid, M., Lukasiewicz, S.A** , "Dynamic Modeling of Spatial Flexible Manipulators", Computational Methods and Experimental Measurements, Vol. 3, pp. 255-264, 1997.
- [6] **Li, C. J. , Sankar, T. S.**, "A systematic Method of Dynamics for Flexible Robot Manipulators", Journal of Robotic Systems, 9 (7), p. 861-891, 1992.
- [7] **Nathan, P.J.; Singh, S.N.** "Nonlinear Ultimate Boundedness Control and Stabilization of a Flexible Robotic Arm", Journal of Robotic Systems 9(3), pp.301-326, 1992.
- [8] **Nayfeh, A. H., Mook, D. J.**, "Nonlinear Oscillations", John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [9] **Rosário, J.M.** "Modelisation Dynamique D'un Robot Industriel". Ministère de l'Education Nationale. Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique., France, 1987.
- [10] **Schielen, I.W.** "Technische Dynamik". s.l.p. ; s.c.p., s.d.p. 106 pp.

Investigation About Chaos in a Magnetoelastic Dynamical System

S. A. David ^a, J. M. Rosário ^a, J. Machado ^b

^a State University of Campinas - Mechanical Engineering Faculty - Brazil
e-mail: sadavid@scientist.com

^b Bosch - Brazil
email: Juliano.Machado@br.bosch.com

Abstract

Many technical devices such a motors, generators, transformers, fusion reactors employ elastic structures in magnetic fields. It has also been shown that flexible structures either ferromagnetic material or carrying large currents can buckle in magnetic fields.

The buckled magnetoelastic oscillator might have technical applications in addition to serving as a convenient laboratory model for the study of potentially chaotic motions.

A great number of researchers have studied non-linear differential equations exhibiting non-periodic and bounded solutions. (see ref. [1;2;8-11])

In this paper we have examined the dynamical behaviour of a magnetoelastic system.

A continuum model based on linear elastic and non-linear magnetic forces is developed and it can be reduced to a single degree of freedom oscillator, with the usage Lagrangian's formalism and Galerkin's method.

We have investigated different situations. Some important and curios results have been obtained.

An experimental apparatus is design in order to represent and to validate our theoretical model.

Keywords: Non-linear dynamics, Chaos, Magnetoelastic Systems, Elastic Systems

1. Introduction

1.1 Magneto-Elastic Mechanical System

The magneto-elastic mechanical system is shown below in figures 1 and 2.

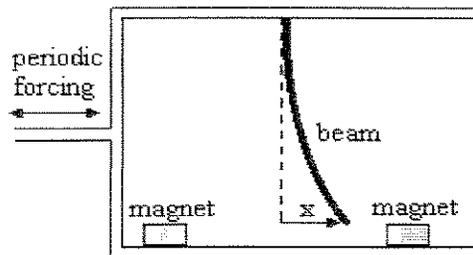


Figure 1: Theoretical system

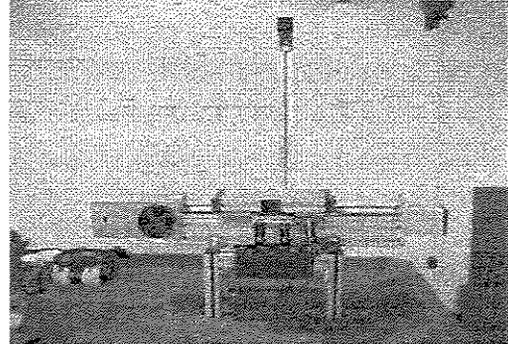


Figure 2 : Experimental System

A slender steel beam is clamped in a rigid framework. Two permanent magnets at the base pull the beam in opposite directions. The magnets are so strong that the beam buckles to one side or the other. Either configuration is locally stable. These buckled states are separated by a energy barrier, corresponding to the unstable equilibrium in which the beam is straight and poised halfway between the magnets.

To drive the system out of its stable equilibrium, the whole apparatus is shaken from side to side with an electromagnetic vibration generator.

For weak forcing, the beam is observed to vibrate slightly while staying near one or the other magnet, but as the forcing is slowly increased, there is a sudden point at which the beam begins whipping back and forth erratically. The irregular motion is sustained and can be observed for a long time.

2. Theoretical Models

2.1 Magnetic and Elastic Energy

Magnetic forces in solid results from either interaction of electric currents or magnetization with external magnetic fields. In the present problem no electric currents are present and permanent magnets external to the beam create a static, inhomogeneous magnetic field. This field induces a magnetization \mathbf{M} per unit volume in solid. The steel beam can be modelled as a soft magnetic material where \mathbf{M} is proportional to the local magnetic field in the solid; i.e.,

$$\vec{M} = \left[\frac{\chi}{(\chi + 1)} \right] \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (1)$$

where:

μ_0 is the magnetic permeability of a vacuum;

χ is the magnetic susceptibility

The field \mathbf{B} can be written in terms of the field \mathbf{B}^0 produced by external magnets, and a field produced by the magnetization itself, \mathbf{B}^1 . If self-forces on the beam are neglected then the external magnets produce both a force and moment distribution on the beam (see ref. [10]

)given by

$$\vec{F} = \vec{M} \cdot \nabla B^0 \quad (2)$$

$$\vec{C} = \vec{M} \times \vec{B}^0 \quad (3)$$

These forces can be derived from a magnetic potential and therefore they are conservative.

Thus,

$$W = -\frac{1}{2} \int \vec{M} \cdot \vec{B}^0 dv \quad (4)$$

The existence of this potential - expressed as a volume integral over the beam - is important for the dynamics and stability of the beam.

The non-linearities included in the analysis reflect the inhomogeneous nature of the magnetic field \mathbf{B}^0 and the magnetic force and couple.

The field shape \mathbf{B}^0 is to be evaluated in terms of the local x,y coordinates of the plate neutral surface.

If the x, y components of \mathbf{B}_0 are introduced, defined by $B_{0x}=B_0\cos\alpha$ and $B_{0y}=B_0\sin\alpha$ and the local slope of the beam with the x axis by θ , then one can rewrite equation and the magnetic energy potential then takes the form

$$W = -\frac{\chi}{4\mu_0\mu_r} \int_0^L (B_1 + B_2 \sin 2\theta + B_3 \cos 2\theta) ds, \quad (5)$$

where:

$$B_1 = (\mu_r + 1)(B_{0x}^2 + B_{0y}^2); \quad (6)$$

$$B_2 = 2(\mu_r - 1)B_{0x} B_{0y}; \quad (7)$$

$$B_3 = (\mu_r - 1)(B_{0x}^2 - B_{0y}^2). \quad (8)$$

Here the integration is carried out over the original length of the beam and B_1 , B_2 and B_3 are functions of the beam displacement.

The non-linear elastic forces are small even for the large displacements of the beam tip (see ref. [10]). Moreover, if a single mode approximation is made for the beam deformation, the elastic energy can be write in the form

$$P = \frac{1}{2} k y^2 + (\text{higher order terms}) \quad (9)$$

Thus, the potential for the elastic and magnetic forces will be

$$V = W + P \quad (10)$$

2.2 Representative ordinary differential equations

With the usage Lagrangian's formalism we can write

$$L = T - (W + P) \quad (11)$$

where T , W and P are kinetic, magnetic and elastic energies respectively.

Beside this, in Galerkin's method a suitable set of (orthogonal) basis function $\phi_j(x)$, which satisfy the boundary conditions, is chosen and the unknown displacement, expressed as

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) \phi_j(x) \quad (12)$$

A typical choice for the ϕ_j in vibration problems are the normal modes of the associated linear problem.

One then substitutes expression (12) into the equation of motion we can write the equation of motion this system in the known and with the dimensionless form

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = F \cos \omega t \quad (13)$$

where

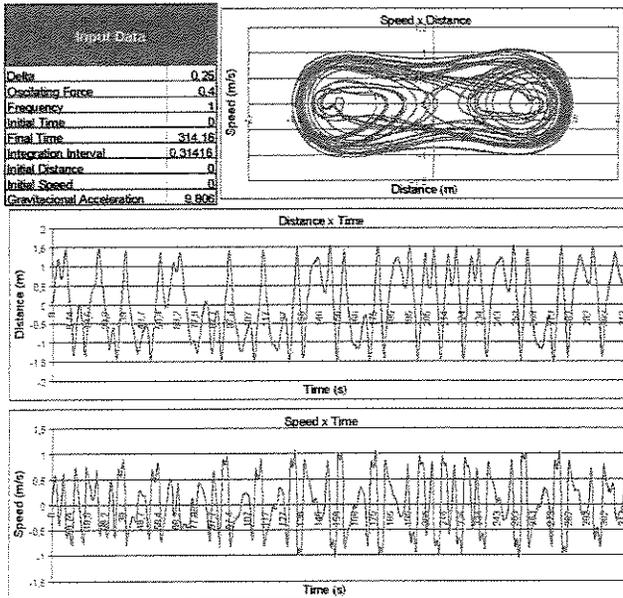
$\delta > 0$ is the damping constant;

F is the forcing strength

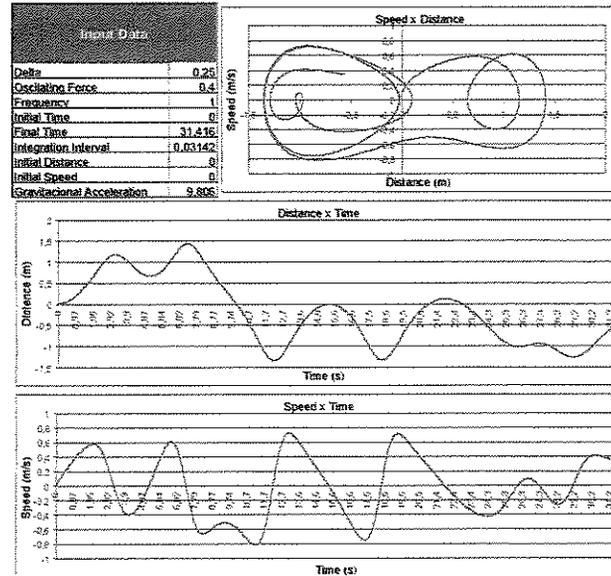
ω is the forcing frequency

3 Results

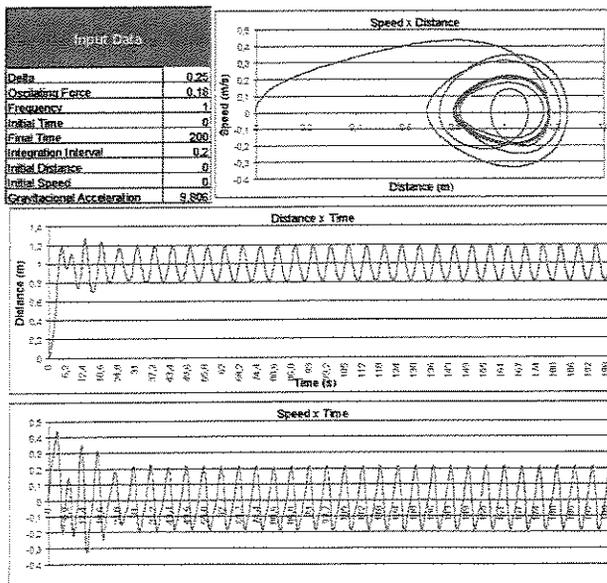
We have investigated important results considering some situations involving different parameters. Below, we have shown some results with their respective parameters.



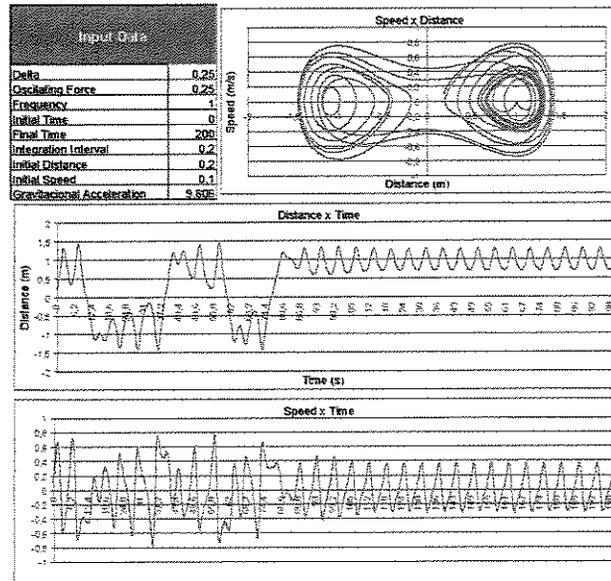
Picture 1



Picture 2



Picture 3



Picture 4

4. Conclusions

In the picture 3, we can note that the solutions converge straightforward to periodic solutions. There are two other limit cycles in addition to the shown here. There might be others, but they are harder to detect. Physically, all the solutions correspond to oscillations confined to a single well.

The aperiodic appearance in the picture 1, suggests that the system is chaotic, at least for these initial conditions. Note that $x(t)$ (distance) changes repeatedly and the particle crosses the hump repeatedly, as expected for strong forcing. This example shows that at much larger forcing, the dynamics become complicated.

The plot of (speed x distance) is messy and hard to interpret. This graphic is not a true phase portrait, because the system is nonautonomous. It should be regarded as a two dimensional projection of a three dimensional trajectory.

A careful analysis of the picture 4 show that after a chaotic transient, the solution approaches a periodic state. Physically, this solution describes a particle that goes back and forth over the hump a few times before settling into small oscillations at the bottom of the well on the right.

In this paper, we have explored numerical simulations of forced vibrations of non-linear structures in non-uniform magnetic fields, taking as a specific example the case of a cantilever, inertially excited and buckled between two magnets. We have used the Lagrangian formulation and beside this, the equation has been further simplified by taking a single degree of freedom Galerkin approximation. However, this simplification can be expected to yield reasonable results.

We have observed some curious results and also that sometimes the system seems potentially chaotic.

References

- 1- Arrowsmith, D. K., Place, C. M. "An introduction to dynamical systems", Cambridge University Press. (1990).
- 2- Balthazar, J.M., Mucheroni, M.F., Tsunaki, R. H., David, S. A. , Sá, C. E. A. "On some criteria for chaotic vibrations: how to identify them?", Proceedings of International Conference on Nonlinearities, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences, (1993), pp 81 - 83.
- 3- Cox, A. "Magnetostratigraphic time scale", Cambridge University Press (1982).
- 4- David, S. A., Rosário, J. M., "Modeling, Simulation and Control of Flexible Robots". *AAM - American Academic of Mechanics - NonLinear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences.* pp - 353-358 ; Vol. 1 ; (1997).
- 5- David, S. A., Rosário, J. M., " Dynamic Modeling, Simulation and Control of Manipulators: A Comparative Study Between Elastic and Rigid Robots", In Proceedings Controlo'98 - Special Session on Robotics and Automation. (1998).
- 6- Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M. "The Feynman Lectures on Physics", Addison-Wesley, Reading, M.A. (1965).
- 7- Goldstein, H. "Classical Mechanics", Reading Mass., Addison Wesley Publishing Company, Second Edition (1981).
- 8- Guckenheimer, J., Holmes, P. "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields ", Springer - New York (1983).
- 9- Moon, F. C. "Chaotic and Fractal Dynamics: An Introduction for Applied Scientists and Engineers", Wiley - New York (1992).
- 10- Moon, F. C. "Problems in Magneto-Solid Mechanics", chapter V in Mechanics Today - S. Nemat-Nasser Editor. (1978).
- 11- Nayfeh, A. H. , Mook, D. T., "Nonlinear Oscillations", Wiley & Sons - New York (1979).
- 12- Reitz, J.R., Milford, F. J., Christy, R. W., "Fundamentos da Teoria Eletromagnética", Editora Campus, (1980).

13- Steidel, R. F., "An Introduction to Mechanical Vibrations" John Wiley & Sons, (1989).