



C  
R-74

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

# Análise de Vibrações de Placas Finas em Médias e Altas Frequências usando Métodos de Energia

Autor: **Vilson Souza Pereira**

Orientador: **Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos**

Curso: Engenharia Mecânica

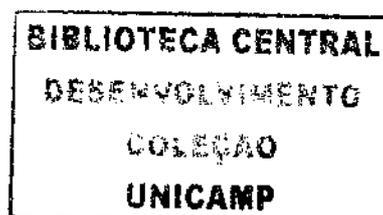
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2009

S.P. - Brasil

i



UNIVERSIDADE BC  
CAMPUS DA  
CAMPUS P414a  
NÚMERO BC/ 81533  
COC. 16-148-09  
D X  
PREÇO 11,00  
DATA 12/05/09  
D. TIT. 4410674

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

P414a Pereira, Vilson Souza  
Análise de vibrações de placas finas em médias e  
altas frequências usando métodos de energia / Vilson  
Souza Pereira. --Campinas, SP: [s.n.], 2009.

Orientador: José Maria Campos dos Santos.  
Tese de Doutorado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Propagação de ondas. 2. Metodo dos elementos  
finitos. 3. Análise espectral. 4. Localização de falhas  
(Engenharia). I. Santos, José Maria Campos dos. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Vibration analysis of thin plates at mid end high frequencies by  
energy methods

Palavras-chave em Inglês: Wave propagation, Finite element method, Spectrum  
analysis, System fault location

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Alberto Luiz Serpa, Arcanjo Lenzi, Domingos Alves Rade, Pablo  
Siqueira Meirelles

Data da defesa: 16/02/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

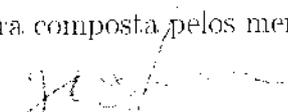
TESE DE DOUTORADO

# Análise de Vibrações de Placas Finas em Médias e Altas Frequências usando Métodos de Energia

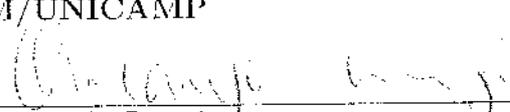
Autor: **Vilson Souza Pereira**

Orientador: **Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos**

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou essa Tese:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos, Presidente  
DMC/FEM/UNICAMP

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa  
DMC/FEM/UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Arcanjo Lenzi  
DEM/UFSC

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Domingos Alves Rade  
FEM/UFU

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles  
DMC/FEM/UNICAMP

Campinas, 16 de fevereiro de 2009.

200912402

# Resumo

PEREIRA, Vilson Souza, *Análise de Vibrações de Placas Finas em Médias e Altas Frequências usando Métodos de Energia*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009, 179 p. Tese (Doutorado).

Neste trabalho, estudam-se os fenômenos de propagação de ondas elásticas em placas simples e acopladas e se propõe uma metodologia para análise do comportamento vibracional médio em frequência-espaço com o objetivo de identificar como as vibrações se propagam através dessas estruturas em médias e altas frequências. Para isso utilizou-se de métodos de energia originados da Análise de Fluxo de Energia (EFA) e que têm como variáveis primárias a densidade de energia e fluxo de energia. Duas formulações foram usadas para resolver as equações diferenciais de energia aproximada derivada do EFA: o Método dos Elementos Finitos de Energia (EFEM) e o Método do Elemento Espectral de Energia (ESEM). O Método do Elemento Espectral (SEM) foi uma outra formulação estudada para resolver as equações diferenciais de propagação de onda em placa fina, bem como para validar a metodologia proposta. Diferentes tipos de acoplamentos foram investigados e implementados tais como: placa-placa, placa com reforço e placa com dano. Para isso, desenvolveram-se relações de acoplamentos que descrevem essas descontinuidades estruturais. Uma investigação experimental do comportamento vibracional de uma placa simples e com reforço foi realizada para verificar os resultados do ESEM. De forma geral, observou-se que os resultados obtidos pelos modelos simulados apresentaram um comportamento semelhante aos resultados encontrados experimentalmente.

*Palavras chave:* Fluxo de Energia, Propagação de Ondas, Elementos Finitos de Energia, Elemento Espectral de Energia, Placa, Detecção de Falhas, Reforçadores, Relações de Acoplamentos.

# Abstract

PEREIRA, Vilson Souza, *Vibration Analysis of Thin Plates at Mid end High Frequencies by Energy Methods*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009, 179 p. Tese (Doutorado).

In this research, propagation phenomena of elastic waves to simple and coupled plates are investigated and a methodology, based on energy methods, is proposed to predict the space- and frequency-averaged vibrational response of these structures, at mid and high frequencies. These methods, originated from Energy Flow Analysis, use as primary variables the energy density and the energy flow, which are parameters to vibrational analysis. Two methodologies are used to solve approximated energy differential equations derived from EFA: Energy Finite Element Method (EFEM) and Energy Spectral Element Method (ESEM). Another formulation the Spectral Element Method (SEM), is used to solve differential wave equation of thin plates in terms of displacement, based on classical mechanics; moreover this method is applied to validate the proposed methodology. Different discontinued structures were investigated, such as plate-plate, reinforced plate and damaged plate. To this purpose, coupled relationships that represent these discontinuities are developed. An experimental investigation of vibrational response of a simple and reinforced plate was performed to verify the results of ESEM. The experimental results, calculated in terms of energy variables, to both analyzed structures, showed a good agreement with the simulated models.

*Key words:* Energy Flow, Wave Propagation, Energy Finite Element, Energy Spectral Element, Plate, Damage Detection, Reinforced, Coupling Relationship

3.3.2	Elemento Espectral de Placa Plana Fina de Levy Reforçada . . . . .	48
3.3.3	Elemento Espectral de Placa Plana Fina de Levy Trincada . . . . .	52
3.3.4	Montagem da Matriz de Rigidez Global Espectral . . . . .	61
3.3.5	Análise de Energia pelo Elemento Espectral . . . . .	62
3.4	Método do Elemento Espectral de Energia . . . . .	63
3.4.1	Elemento Espectral de Energia para Placa Plana Fina de Levy . . . . .	63
3.4.2	Montagem da Matriz Global de Fluxo de Energia . . . . .	68
3.4.3	Modelagem de Placas com Descontinuidade . . . . .	69
3.4.4	Coefficientes de Transmissão e Reflexão de Potência . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Resultados Simulados</b>	<b>82</b>
4.1	Exemplos para Placa Simples . . . . .	83
4.1.1	Solução pelo Método “EXATO” . . . . .	84
4.1.2	Solução pelo Método SEM . . . . .	87
4.1.3	Solução pelo Método ESEM . . . . .	89
4.1.4	Solução pelo Método EFEM . . . . .	92
4.1.5	Comparação entre os Métodos “EXATO”, SEM, ESEM e EFEM . . . . .	95
4.2	Exemplos de Placas com Descontinuidade de Espessura . . . . .	101
4.3	Exemplos de Placa com Descontinuidade de Reforçador . . . . .	113
4.4	Exemplos de Placas com Descontinuidade de Trinca . . . . .	119
4.5	Exemplo de Aplicação do EFEM na Detecção de Falhas . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Resultados Experimentais</b>	<b>131</b>
5.1	Potência Injetada e Densidade de Energia Experimentais . . . . .	131
5.2	Comparação dos Resultados Experimentais com os Numéricos do ESEM . . . . .	134
5.2.1	Placa Simples . . . . .	135
5.2.2	Placa com Reforço . . . . .	140
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>143</b>
6.1	Propostas de Trabalhos Futuros . . . . .	146
6.2	Trabalhos Publicados e Submetidos . . . . .	146

<b>A Propagação de Ondas de Flexão em Placas Finas</b>	<b>154</b>
A.1 Solução Modal para Placas Retangulares . . . . .	154
A.2 Cálculo da energia vibracional para placas retangulares . . . . .	157

# Lista de Figuras

3.1	Fluxo de energia em um volume de controle. . . . .	19
3.2	Densidade de energia total, potencial e cinética sobre a diagonal em uma placa quadrada simplesmente apoiada com excitação no centro. . . . .	22
3.3	Equilíbrio de esforços em um elemento infinitesimal de placa fina. . . . .	24
3.4	Distribuição de tensões em um elemento infinitesimal de placa fina. . . . .	25
3.5	Acoplamento coplanar de placas: (a) finitas e (b) semi-infinitas. . . . .	31
3.6	Comportamento do fluxo de energia em um elemento de junta. . . . .	36
3.7	Placa plana fina retangulara tipo Levy. . . . .	43
3.8	Equilíbrio para um modelo de placa com uma borda rigidamente conectada a uma viga. . . . .	49
3.9	Elemento espectral de placa plana fina de Levy com reforço na borda. . . . .	50
3.10	Modelo espectral de placa com uma trinca . . . . .	53
3.11	Modelo da trinca:(a) tensão em um sólido; (b) deformação-plana em uma tira. 59	
3.12	Montagem de dois elementos espectrais de placa tipo Levy . . . . .	61
3.13	Condições de contorno naturais do elemento espectral de energia para placa tipo Levy. . . . .	66
3.14	Montagem de dois elementos espectrais de energia para placa tipo Levy. . . . .	68
3.15	Estruturas coplanares com três elementos espectrais de energia incluindo descontinuidades: (a) de espessura; (b) de reforçador; e (c) de trinca. . . . .	70
3.16	Acoplamento de placas semi-infinita com descontinuidades: (a) de espessura ou propriedade dos materiais; (b) de reforçador; (c) de trinca. . . . .	75

4.1	Estrutura de placa simples, simplesmente apoiada em todas as bordas: (a) Modelo estrutural e (b) Modelo de energia equivalente. . . . .	83
4.2	Densidades de energia pelo método “EXATO” para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 5,0$ kHz: (a) potencial; e (b) cinética. . . . .	84
4.3	Densidades de energia total pelo método “EXATO” para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 5,0$ kHz. . . . .	85
4.4	Fluxos de energia pelo método “EXATO” para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 5,0$ kHz: (a) componente na direção $x$ ; e (b) componente na direção $y$ . . . . .	85
4.5	Vetores de fluxos de energia pelo método “EXATO” para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 5,0$ kHz. . . . .	86
4.6	Densidade de energia pelo método SEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 5,0$ kHz: (a) potencial; e (b) cinética. . . . .	87
4.7	Densidades de energia total pelo método SEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 5,0$ kHz. . . . .	88
4.8	Fluxos de energia pelo método SEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 5,0$ kHz: (a) componente na direção $x$ ; e (b) componente na direção $y$ . . . . .	88
4.9	Vetores de fluxos de energia pelo método SEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 5,0$ kHz. . . . .	89
4.10	Densidade de energia pelo método ESEM para um modelo de placa simples, com banda de frequência de 1/3-oitava e $f_c = 5,0$ kHz. . . . .	90
4.11	Fluxos de energia pelo método ESEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 5,0$ kHz: (a) componente na direção $x$ ; e (b) componente na direção $y$ . . . . .	91
4.12	Vetores de fluxos de energia pelo método ESEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 5,0$ kHz. . . . .	91

4.13	Malha de elementos finitos . . . . .	93
4.14	Densidade de energia pelo método EFEM para um modelo de placa simples, com banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 5,0$ kHz. . . . .	93
4.15	Fluxos de energia pelo método EFEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 5,0$ kHz: (a) componente na direção $x$ ; e (b) componente na direção $y$ . . . . .	94
4.16	Vetores de fluxos de energia pelo método EFEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 5,0$ kHz. . .	94
4.17	Densidade de energia observados na diagonal de um modelo de placa simples em uma banda de frequência de 1/3-oitava com : (a) $f_c = 50,0$ Hz, (b) $f_c = 500,0$ Hz, (c) $f_c = 5,0$ kHz e (d) $f_c = 12,5$ kHz. . . . .	96
4.18	Densidade de energia para um modelo de placa simples em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: SEM versus ESEM (a) $f_c = 50,0$ Hz, (b) $f_c = 500,0$ Hz; e SEM versus EFEM (c) $f_c = 50,0$ Hz, (d) $f_c = 500,0$ Hz. . .	97
4.19	Densidade de energia para um modelo de placa simples em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: SEM versus ESEM (a) $f_c = 5,0$ kHz, (b) $f_c = 12,5$ kHz; e SEM versus EFEM (c) $f_c = 5,0$ kHz, (d) $f_c = 12,5$ kHz. .	98
4.20	Densidades de energia para um modelo de placa simples em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: SEMs versus ESEM (a) $f_c = 50$ Hz, (b) $f_c = 500$ Hz; e SEMs versus EFEM (c) $f_c = 50$ Hz, (d) $f_c = 500$ Hz. . . . .	99
4.21	Densidade de energia para um modelo de placa simples em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: SEMs versus ESEM (a) $f_c = 5$ kHz, (b) $f_c = 12,5$ kHz; e SEMs versus EFEM (c) $f_c = 5$ kHz, (d) $f_c = 12,5$ kHz. . . . .	100
4.22	Estrutura de placas coplanares com descontinuidade de espessura: (a) modelo estrutural; e (b) modelo de energia equivalente. . . . .	102
4.23	Densidade de energia pelo método SEM de um modelo de placa coplanar em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a) $f_c = 500,0$ Hz , (b) $f_c = 5,0$ kHz e (c) $f_c = 12,5$ kHz. . . . .	103

4.24	Densidade de energia pelo método ESEM de um modelo de placa coplanar em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a) $f_c = 500,0$ Hz , (b) $f_c = 5,0$ kHz e (c) $f_c = 12,5$ kHz. . . . .	104
4.25	Densidade de energia pelo método EFEM de um modelo de placa coplanar em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a) $f_c = 500$ Hz , (b) $f_c = 5,0$ kHz e (c) $f_c = 12,5$ kHz. . . . .	105
4.26	Fluxo de energia de uma placa simplesmente apoiada, para uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 500$ Hz, pelos métodos: (a) SEM , (b) ESEM e (c) EFEM. . . . .	106
4.27	Densidade de energia na direção $x$ passando no ponto de excitação de uma estrutura de placa coplanar, simplesmente apoiada, para uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a) $f_c = 500,0$ Hz; (b) $f_c = 5$ kHz; e (c) $f_c = 12,5$ kHz. . . . .	107
4.28	Densidade de energia de um placa coplanar para uma banda de frequência de 1/3-oitava: (a) $f_c = 500,0$ Hz, (c) $f_c = 5,0$ kHz, (e) $f_c = 12,5$ kHz por SEM $\times$ ESEM; e (b) $f_c = 500,0$ Hz, (d) $f_c = 5,0$ kHz, (f) $f_c = 12,5$ kHz SEM $\times$ EFEM. . . . .	109
4.29	Densidades de energia para um modelo de placa coplanar em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a) $f_c = 500,0$ Hz, (c) $f_c = 5,0$ kHz, (e) $f_c = 12,5$ kHz por SEMs $\times$ ESEM; e (b) $f_c = 500,0$ Hz, (d) $f_c = 5,0$ kHz, (f) $f_c = 12,5$ kHz SEMs $\times$ EFEM. . . . .	110
4.30	Estrutura de placa coplanar apoiado-livre com descontinuidade de espessura.	111
4.31	Densidade de energia na direção $x$ passando no ponto de excitação de uma estrutura de placa coplanar, apoiada-livre, para uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a) $f_c = 500$ Hz; (b) $f_c = 5$ kHz; e (c) $f_c = 12,5$ kHz. . . . .	112
4.32	Estrutura de placas coplanares com descontinuidade de reforçador: (a) modelo estrutural; (b) modelo de energia equivalente. . . . .	114

4.33	Densidade de energia pelo método SEM de um modelo de placa com reforço em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a) $f_c = 4,0$ kHz , (b) $f_c = 8,0$ kHz, (c) $f_c = 12,5$ kHz e (d) $f_c = 20,0$ kHz. . . . .	115
4.34	Densidade de energia pelo método ESEM de um modelo de placa com reforço em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a) $f_c = 4,0$ kHz , (b) $f_c = 8,0$ kHz, (c) $f_c = 12,5$ kHz e (d) $f_c = 20,0$ kHz. . . . .	116
4.35	Densidade de energia na linha de ação da força, de um modelo de placa com reforço, simplesmente apoiada, para uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a) $f_c = 4,0$ kHz, (b) $f_c = 8,0$ kHz, (c) $f_c = 12,5$ kHz e d) $f_c = 20,0$ kHz.	118
4.36	Densidade de energia de um modelo de placa com reforço e sem reforço, simplesmente apoiada, para uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a) $f_c = 8,0$ kHz e (b) $f_c = 20,0$ kHz. . . . .	119
4.37	Estrutura de placa plana fina com descontinuidade de trinca: (a) modelo estrutural; (b) modelo de energia equivalente. . . . .	120
4.38	Densidades de energia de uma placa com trinca pelo SEM em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 20,0$ kHz e $\zeta = 0,2h$ . . . . .	121
4.39	Densidades de energia de uma placa com trinca pelo ESEM em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 20,0$ kHz e $\zeta = 0,2h$ . . . . .	121
4.40	Densidade de energia para modelos de placa com trinca, na linha de ação da força, com banda de frequência de 1/3 de oitava, $f_c = 20,0$ kHz, e $\zeta = 0,2h$ .	123
4.41	Densidades de energia para um modelo de placa com trinca, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 8,0$ kHz $\zeta =$ : 1%, (a) SEM e (b) ESEM; 10% (c) SEM e (d) ESEM; e 40%, (e) SEM e (f) ESEM. . . . .	124
4.42	Densidades de energia para um modelo de placa com trinca, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_f = 12,5$ kHz e $\zeta =$ : 1%, (a) SEM e (b) ESEM; 10% (c) SEM e (d) ESEM; e 40%, (e) SEM e (f) ESEM. . . . .	125
4.43	Modelo de energia de uma placa plana fina: (a) saudável, (b) danificada. . . . .	126
4.44	Malha de elementos finitos com um elemento danificado. . . . .	127

4.45	Densidades de energia em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 8$ kHz para placa plana fina : (a) saudável, (b) danificada e (c) diferença. . .	128
4.46	Fluxos de energia na direção $x$ em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 8,0$ kHz para placa plana fina: (a) saudável, (b) danificada e (c) diferença. . . . .	129
4.47	Fluxos de energia na direção $y$ em uma banda de frequência de 1/3-oitava com $f_c = 8,0$ kHz para placa plana fina: (a) saudável, (b) danificada e (c) diferença. . . . .	130
5.1	Configuração experimental do teste da placa: (a) Vista geral da placa (b) Detalhe dos apoios com terminação anecóica. . . . .	134
5.2	Modelo de energia equivalente ao experimental da placa simples. . . . .	135
5.3	FRF medida típica próximo ao ponto excitação em $x = 0,325$ m e $y = 0.09$ m, para o modelo de placa simples experimental. . . . .	136
5.4	Densidade de energia na linha ao longo da direção $x$ que passa na aplicação da potência injetada, para um modelo de placa simples experimental e numérico por ESEM, na faixa de frequência $f_1 = 250,0$ Hz a $f_2 = 2,0$ kHz. .	137
5.5	Densidade de energia experimental de uma placa simples, na faixa de frequência $f_1 = 250,0$ Hz a $f_2 = 2,0$ kHz. . . . .	138
5.6	Densidade de energia experimental e numérica, na faixa de frequência $f_1 = 250,0$ Hz a $f_2 = 2,0$ kHz. . . . .	139
5.7	FRFs medidas típicas próximo ao ponto excitação em $x = 0,325$ m e $y = 0.09$ m, para o modelo de placa experimental com e sem reforço. . . . .	140
5.8	Densidade de energia na linha ao longo da direção $x$ que passa na aplicação da potência injetada, na faixa de frequência $f_1 = 250,0$ Hz a $f_2 = 2,0$ kHz. .	141
5.9	Densidade de energia obtida experimentalmente, para um modelo de placa reforçada, com uma faixa de frequência $f_1 = 250,0$ Hz a $f_2 = 2,0$ kHz. . .	142
A.1	Modelo de placa retangular simplesmente apoiada . . . . .	155
A.2	Placa simplesmente apoiada com uma carga concentrada . . . . .	156

# Lista de Tabelas

3.1	Dimensões das variáveis de energia . . . . .	19
-----	--	----

# Nomenclatura

## *Letras Latinas*

$2c$  - comprimento da trinca

$D$  - rigidez a flexão para uma placa homogênea

$E$  - módulo de elasticidade ou módulo de Young

$e$  - densidade de energia total

$f$  - força ou cargas

$k$  - número de onda

$h$  - espessura

$L$  - comprimento

$p$  - potência

$q$  - fluxo de energia

$\Re$  - parte real de um número complexo

$S$  - área da seção transversal

$T$  - período de tempo de oscilação

$t$  - tempo

$W$  - amplitude complexa da solução da onda plana

## *Letras Gregas*

$\eta$  - fator de perda por amortecimento

$\nu$  - coeficiente de Poisson

$\rho$  - densidade do material

$\theta$  - ângulo de incidência

$\xi$  - coeficiente de propagação do meio

$\omega$  - frequência circular

$\nabla$  - divergente

$\chi$  - indicador do dano

$\varsigma$  - profundidade da trinca

$\langle \rangle$  - média temporal

\* - significa o complexo conjugado

$\bar{\phantom{x}}$  - representa a média espacial

### *Termos com Subscritos*

$A_i, B_i, C_i, D_i$  - coeficientes complexos da solução para ondas planas ( $i = x, y$ )

$G_i, H_i$  - coeficientes da solução da equação de energia ( $i = x, y$ )

$c_f$  - velocidade de fase

$c_g$  - velocidade de grupo

$E_c$  - módulo de elasticidade complexo  $E(1 + i\eta)$

$\xi_c$  - coeficiente de condução de calor

$G_c$  - módulo de cisalhamento

$h_c$  - coeficiente de convecção

$I_b$  - momento de inércia de área

$I_p$  é o momento de inércia polar de massa.

$J_b$  - momento de inércia polar de área

$k_i$  - número de onda na direção ( $i = x, y$ )

$p_{diss}$  - potência interna dissipada

$p_{in}$  - potência externa injetada

$\langle \bar{q} \rangle_D$  - fluxo de energia da estrutura saudável

$\langle \bar{q} \rangle_S$  - fluxo de energia da estrutura danificada

$\lambda_i$  - comprimentos de onda nas direções ( $i = x, y$ )

$r_{ij}$  - coeficientes de reflexão

$\tau_{ij}$  - coeficientes de transmissão

$\Theta_j$  - funções de forma de Lagrange

### *Termos com Sobrescritos*

$\tilde{\epsilon}$  - máxima deformação no ponto

$\langle \vec{q} \rangle$  - média temporal do fluxo de energia

$\vec{q}_c$  - fluxo de calor

### *Notação indicial*

$L_i$  - comprimento na direção  $x, y$  e  $z$

$M_{ij}$  - momento de torção

$\sigma_{ij}$  - tensão normal ao plano

$\tau_{ij}$  - tensão de cisalhamento no plano

### *Representação Vetorial*

$\mathbf{a}$  - vetor dos coeficientes da solução de propagação de onda

$\mathbf{a}_E$  - vetor dos coeficientes da solução de propagação de onda

$\mathbf{e}_E^{(e1)}$  - vetor de densidade de energia nas bordas

$\mathbf{d}$  - vetor de deslocamento

$\mathbf{d}^{(e1)}$  - vetor de deslocamento espectral nas bordas

$\langle \bar{e}_i \rangle$  - valores nodais elementares da densidade de energia

$\mathbf{f}$  - vetores de esforço

$\mathbf{f}^{(e1)}$  - vetor dos esforços espectrais nas bordas

$\mathbf{G}$  - matriz dos termos de propagação da onda

$\mathbf{H}$  - matriz dos termos dos de propagação

$\mathbf{H}_E$  - matriz dos termos de propagação de onda

$\mathbf{K}^{(e1)}$  - matriz elementar do fluxo de energia,

$\mathbf{p}^{(e1)}$  - vetor das potências de entrada

$\mathbf{q}^{(e1)}$  - vetor dos fluxos de energia entre elementos

$\mathbf{S}^{(e1)}$  - matriz de rigidez dinâmica espectral do elemento

$\mathbf{S}_R^{(e1)}$  é a matriz de rigidez dinâmica espectral do elemento de placa com reforço

## *Siglas*

DMC - Departamento de Mecânica Computacional

EFA - Análise do Fluxo de Energia (Energy Flow Analysis)

EFEM - Método dos Elementos Finitos de Energia (Energy Finite Element Method)

ESEM - Método dos Elemento Espectral de Energia (Energy Spectral Element Method)

FEM - Método dos Elementos Finitos (Finite Element Method)

SEA - Análise Estatística de Energia (Statistical Energy Analysis)

SEM - Método dos Elemento Espectral (Spectral Element Method)

UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

# Capítulo 1

## Introdução

Estruturas tipo placas são amplamente usadas em muitas aplicações nas diversas áreas da Engenharia, tais como: automobilística, aeroespacial, naval, etc. As placas são corpos sólidos tridimensionais que apresentam uma particularidade de serem sólidos limitados por duas superfícies planas, sendo as distâncias entre elas designadas por uma espessura, e essa espessura considerada muito menor que as dimensões das superfícies. A modelagem desses tipos de estruturas não é realizada de forma trivial, para tal são usado conceitos da Mecânica do Contínuo, com os quais é possível considerar comportamentos elásticos e não elásticos do material.

Atualmente, no campo de desenvolvimento de projetos estruturais, principalmente os que utilizam placas, busca-se controlar níveis de ruído e vibração excessivos a fim de proporcionar um ambiente que ofereça segurança e conforto. Nesse sentido, conhecer e identificar os caminhos da transmissão da vibração é um ponto importante para ajudar na predição e controle de ruído e vibração. Alguns métodos determinísticos, tais como o Método dos Elementos Finitos (Finite Element Method - FEM), tornaram-se ferramentas numéricas bem estabelecidas na previsão de vibrações (Meirovitch, 1997; Cook et al., 2001). Esses métodos são razoavelmente efetivos na faixa das baixas frequências, especialmente quando técnicas de ajuste de modelos, baseadas em dados experimentais, são aplicadas. Para as análises nas faixas das médias e altas frequências, onde o comprimento de onda é pequeno, a previsão de vibração em estruturas usando FEM torna a solução computacionalmente mais cara devido ao grande número de elementos requeridos para a solução do problema. Assim, métodos

que expressam a vibração em termos de variáveis de energia como a Análise Estatística de Energia (Statistical Energy Analysis - SEA) têm sido aplicados com sucesso na solução de problemas na faixa das altas frequências. Proposto por Lyon (1962), o método consiste em dividir a estrutura em um conjunto de subsistemas, que trocam energia entre si, e prever o nível médio de energia vibracional em cada um deles. Contudo, as variações espaciais do nível de energia dentro de cada subsistema não podem ser obtidas, pois o método fornece apenas um nível de energia para cada subsistema. Uma outra abordagem nesta direção, desenvolvido por Wohlever and Bernhard (1992) é a Análise do Fluxo de Energia (Energy Flow Analysis - EFA). Esse é um método analítico de energia, que tem como variáveis a densidade e o fluxo de energia mecânica, os quais são modelados através de uma equação diferencial aproximada similar à de fluxo de calor em estruturas. Uma solução das equações do EFA obtida através de uma aproximação pelo FEM foi desenvolvida por Cho and Bernhard (1998), a qual é chamada de Método dos Elementos Finitos de Energia (Energy Finite Element Method - EFEM). O método do Elemento Espectral de Energia é um enfoque recente proposto por Santos et al (2008), que usa técnicas matriciais similares as de elementos finitos para a construção de um elemento no domínio da frequência, cuja função de interpolação é a solução exata ou aproximada da equação diferencial do EFA, que rege o tipo do modelo. Este enfoque foi desenvolvido originalmente para modelos unidimensionais tipo barra e viga e neste trabalho está sendo estendido a um modelo bidimensional de uma placa plana fina retangular tipo Levy. Um elemento espectral de energia para placas finas é desenvolvido, bem como as relações de acoplamento para descontinuidade de placas coplanares.

A indústria atual vem incessantemente pesquisando novas ferramentas de engenharia, com a finalidade de aumentar ainda mais a segurança e a qualidade da vida humana. Tal desafio tem levado a engenharia a enfrentar continuamente novos obstáculos. Recentes avanços na tecnologia de materiais inteligentes, principalmente no desenvolvimento de software, têm resultado em um renovado interesse no desenvolvimento de métodos avançados de auto-diagnóstico para quantificar a integridade e a confiabilidade de sistemas sem qualquer interação do ser humano. No campo da dinâmica de estruturas, o objetivo é reduzir

a interação humana quando se estiver monitorando a integridade de uma estrutura. Com este objetivo em mente, muitos pesquisadores têm feito significativos progressos no desenvolvimento de métodos que investigam o comportamento de estruturas, sejam elas barras, vigas, painéis reforçados, placas acopladas e etc.. Além disso, a detecção de danos em estruturas é uma área que vem sendo bastante investigada, visando melhores metodologias para diagnosticar e prever os danos estruturais (Dimarogonas, 1996; Arruda et al., 2007; Santos et al., 2008b).

No que diz respeito a análise dinâmica de estruturas com descontinuidades, como acoplamentos, reforçadores, trincas, etc., a avaliação do comportamento da vibração pode ser uma ferramenta para identificar essas descontinuidades. Sabe-se que a presença de uma descontinuidade em uma estrutura introduz uma variação da flexibilidade local que altera a sua resposta vibracional (Dimarogonas, 1996). Sendo assim, novas pesquisas abordando descontinuidades em estruturas, principalmente a detecção de danos, têm se concentrado em métodos que utilizam propagação de ondas em estruturas elásticas, nas faixas de médias e altas frequências (Krawczuk et al., 2004; Krawczuk et al., 2006).

Diante do exposto, fica claro que existe a necessidade de pesquisas direcionadas para o campo de identificação de irregularidades estruturais. É neste contexto que esse trabalho está situado. No presente trabalho, modelos estruturais de placas com diferentes configurações, são implementados, testados e comparados com modelos numéricos e com dados experimentais. Os modelos são resolvidos pelos métodos de energia (ESEM e EFEM) e comparados com soluções de referência como o Método dos Elemento Espectral (Spectral Element Method - SEM) e a solução clássica de placas (Superposição Modal), sendo essa última usada apenas para validar o modelo do SEM implementado. Todos os modelos são usados para determinar a propagação da energia vibracional nas estruturas avaliadas.

## 1.1 Motivação e Objetivos

A análise de estruturas através de métodos de energia é atualmente um tema de grande interesse na área de Vibroacústica, devido à necessidade de se avaliar estruturas com diferentes configurações quando em altas frequências, o que não é uma tarefa simples. A difi-

culdade de se representar o comportamento dinâmico de uma estrutura em alta frequência, está no fato de que com o aumento da frequência, aumentam também os modos de vibrar da estrutura. Esse fato leva a necessidade de um grande esforço computacional para representar o comportamento real da estrutura. Desta forma, os métodos de energia surgem como uma solução prática para resolução desse problema. Porém, os métodos de energia existentes ainda não foram suficientemente estudados de maneira a representar as diferentes configurações estruturais existentes. Assim, estudar e implementar métodos de energia para a representação de configurações variadas de estruturas, bem como adequar novos modelos de energia que sejam suficientemente representativos, de maneira a revelar o comportamento real das estruturas em altas frequências, são desafios atuais. Outro ponto a ser explorado, trata-se da confiabilidade desses novos modelos. Para isso, é necessário validar esses novos modelos de energia desenvolvidos com métodos já consagrados na literatura, de maneira a torná-los confiáveis de forma a despertar interesse comercial para implementação em programas comerciais, que trabalham com análise dinâmica de estruturas.

Neste contexto, esta pesquisa tem como proposta principal, estudar, desenvolver e aplicar métodos de análises de energia EFEM e ESEM, para a solução de problemas de vibração em estruturas tipo placa plana fina retangular com diferentes configurações. Sendo os objetivos citados abaixo:

- Implementar a metodologia do EFEM para aplicação de modelos de placa plana fina retangular.
- Desenvolver e implementar a metodologia do ESEM para estruturas tipo placa plana fina retangular tipo Levy.
- Desenvolver as relações de acoplamentos para análise de transmissão de potência entre estruturas tipo placa coplanares, incluindo descontinuidades - variação de espessura, reforço e trinca.
- Identificar a presença de defeitos através de propriedades dissipativas, usando os métodos propostos.

- Comparar as metodologias implementadas para placa simples, reforçada e trincada com resultados experimentais.

## 1.2 Principais Contribuições e Organização do Texto

O presente trabalho apresenta uma implementação já conhecida do EFEM para representação de placas planas finas (Cho, 1993), a qual permite uma solução aproximada da metodologia de Análise de Fluxo de Energia (EFA) utilizada como base no desenvolvimento do trabalho. A relação de acoplamento para placas colineares aplicada no EFEM, serviram de base para o desenvolvimento das novas relações de acoplamentos propostas no trabalho.

Também, como contribuição pode-se citar a implementação da metodologia do SEM para placas. Sendo que diferentes configurações estruturais foram investigadas e implementadas - placa simples, acoplamento placa-placa com descontinuidade de espessura, placa reforçada e placa com trinca. Essa metodologia serviu como modelo comparativo com os resultados dos métodos ESEM e EFEM.

Outra contribuição foi o desenvolvimento da formulação do elemento do ESEM para aplicação em estruturas bidimensionais (placa plana fina retangular tipo Levy), a qual caracteriza uma das contribuições originais da tese. Esse método teve como base a metodologia do SEM e a equação de energia aproximada do EFA na sua implementação. Com essa metodologia é possível observar o comportamento da densidade de energia e do fluxo de energia na estrutura da mesma forma que o EFEM, com a diferença de que no ESEM com apenas um elemento espectral de energia já é possível representar o comportamento da energia vibracional da estrutura desde que não haja descontinuidades na mesma.

Uma outra contribuição original, vem das formulações das relações de acoplamentos para análise de transmissão de potência para estruturas com descontinuidades tipo reforço e trinca. Através dessas relações é possível representar esses tipos de descontinuidades nos modelos de energia desenvolvidos e apresentados no trabalho. Essas relações são representadas por matrizes de junta, as quais são incorporadas nos modelos de energia.

Detecção de falhas em placas pelo EFEM usando o aumento do amortecimento interno da estrutura gerado por uma trinca é também uma contribuição original do trabalho.

Através das variações das propriedades dissipativas da estrutura, foi criado um modelo baseado no EFEM, que representa a presença de um dano estrutural localizado. Com isso, propõe-se uma forma de se identificar e localizar a presença da trinca através de uma análise do fluxo da energia mecânica.

É importante ressaltar, que todas as análises realizadas no trabalho representam o comportamento da densidade e fluxo de energia mecânica na direção  $xy$ , ou seja, é possível verificar e observar o comportamento em toda a superfície da estrutura.

O presente trabalho está organizado conforme descrito a seguir.

No Capítulo 2, apresenta-se uma breve revisão da literatura a respeito dos métodos de análise de placas planas finas baseados nas formulações em deslocamento e energia aplicados as bandas de médias e altas frequências. De uma forma geral, tentou-se dar um maior enfoque aos métodos utilizados no trabalho e as principais contribuições existentes atualmente.

O Capítulo 3 apresenta as formulações dos métodos utilizados e proposto no trabalho. A primeira formulação apresenta o EFA para placas planas finas e suas relações de acoplamento. Em seguida apresenta a formulação do EFEM incluindo as relações de acoplamento para este método. Como terceira formulação apresenta-se o SEM, o qual é descrito por uma abordagem simples e direta, pois já existem na literatura vários trabalhos publicados sobre o mesmo. Apresenta-se a construção da matriz rigidez de um elemento espectral de placa com reforço e trincado modelados pelo SEM. Essa formulação se faz necessária por ser essa a base da metodologia ESEM e quase todos os tipos dos modelos estruturais estudados são originados no SEM. Na seção seguinte, a formulação do ESEM para placas planas finas tipo Levy é apresentada, onde também são mostradas as relações de acoplamentos desenvolvidas para este método.

O Capítulo 4 contém os resultados encontrados pelos métodos implementados no trabalho. Primeiramente são apresentados todos os resultados encontrados para placa simples utilizando todos os métodos investigados neste trabalho, seguido de uma comparação entre eles. A seguir, modelos com descontinuidades foram testados para diferentes métodos. Modelos de placas com diferenças de espessura foram analisadas através do SEM, ESEM e

EFEM, já os modelos de placas reforçadas e placas com trinca foram analisados através do SEM e ESEM. Os modelos acima citados, foram todos comparados e analisados em várias faixas de frequências. Por último, os resultados de placa simples danificada são analisados através do EFEM, apresentados e discutidos. Todos os resultados foram analisados em faixas de altas frequências.

O Capítulo 5 traz resultados experimentais de uma placa simples e reforçada sendo que esses resultados são comparados aos resultados obtidos através do ESEM.

No Capítulo 6, apresentam-se as conclusões do presente trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros nesta área de pesquisa.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

Na engenharia, muitas aplicações, como vibrações em estruturas e modelos de cavidades acústicas fechadas, abrangem modos de altas ordens que têm como distinção um comprimento de onda muito pequeno quando comparados às dimensões do problema. Neste preâmbulo foram investigados alguns métodos que melhor se adaptam a essa característica para médias e altas frequências.

Sendo assim, neste capítulo, apresenta-se uma discussão sobre vários métodos para modelos vibracionais de sólidos elásticos em médias e altas frequências. Serão abordados alguns aspectos teóricos sobre métodos aproximados de energia, assim como as aplicações e descrições sobre acoplamentos utilizados nesse trabalho, de maneira a situá-lo dentro do contexto da pesquisa.

### 2.1 Análise Estatística de Energia - SEA

Análise Estatística de Energia (SEA) proposta nos anos 60 (Lyon and DeJong, 1975), é um dos principais métodos para análise em vibração e acústica em faixas de altas frequências. No SEA, a energia de vibração comporta-se da mesma forma que a energia térmica. Entretanto, para relacionar o modelo térmico com a vibração, a energia modal em cada subsistema é vista como uma medida de temperatura. Isso ocorre porque, quando muito subsistemas são excitados em uma faixa de frequência, os fluxos de energia entre os subsistemas são proporcionais à diferença do nível de energia modal nos subsistemas. No primeiro trabalho publicado sobre o SEA (Lyon and Maidanik, 1962) os autores mostram

que a média espacial da energia de modelos individuais em um subsistema é independente uma da outra. Desta forma a energia total do subsistema é a soma das energia de cada modelo. Devido ao fato do SEA abordar o modelo como sendo um conjunto de subsistemas e cada subsistema possuir um único grau de liberdade, a utilização do método demanda um baixo custo computacional, além de ter uma formulação simples e direta. Porém, uma das dificuldades do uso de tal ferramenta está na determinação dos fatores de perda por acoplamento, ou seja, o quanto de energia é transferida entre dois subsistemas acoplados sob vibração e também a deficiência nas faixas de baixas frequências, que resulta em modelos não muito precisos. Um outro ponto importante a ser ressaltado é que as respostas são valores médios aproximados obtidos estatisticamente. Entretanto, quando nos referimos a sistemas de ordem elevada, as variâncias são também calculadas.

Diferentes abordagens já foram feitas utilizando o SEA para predição da resposta dinâmica de estruturas, relacionadas a problemas de vibração e acústica (Kishimoto et al., 1995; Langley et al., 1997; Mace and Rosenberg, 1998; Hopkins, 2002; Mace, 2003; Ming, 2005). A aplicação do SEA tem sido investigada em estruturas bidimensionais, tendo como ponto fundamental a obtenção dos fatores de perda por acoplamento (Mace and Rosenberg, 1998; Ming, 2005).

## **2.2 Análise de Fluxo de Energia - EFA**

Analisar problemas em termos de energia e fluxo de energia tem como motivação o fato desses conceitos serem simples e facilmente interpretados fisicamente. Através da análise do fluxo de energia em estruturas, é possível identificar os caminhos da propagação de energia e assim fazer mudanças apropriadas nos projetos para minimizar o nível de energia vibracional (Noiseux, 1970). Em suas análises, Noiseux (1970) mostrou que, em altas frequências, desconsiderar a influência dos termos de campo próximo no campo distante não acarreta erros significativos.

Uns dos primeiros trabalhos que utilizou o fluxo de energia como variável primária foi aplicado em vigas (Nefske and Sung, 1989). A análise feita pelos autores simplificava os resultados obtidos pela análise modal clássica. Porém, esse trabalho possui algumas incon-

sistências com o modelo da mecânica clássica (Bouthier, 1992). Wohlever e Bernhard (1992) foram os primeiros a usar o método para derivar equações de energia que são consistentes com a mecânica clássica. Essa investigação foi feita para barras e vigas, tendo como resultado uma equação de segunda ordem que governa a distribuição de energia suavizada para essas estruturas. Também foram investigadas relações de acoplamentos entre barras e entre vigas, porém alguns parâmetros de densidade de energia no acoplamento não foram completamente resolvidos (Wohlever, 1988; Wohlever and Bernhard, 1992). Dando continuidade aos trabalhos iniciados por Wohlever e Bernhard (1992), as relações de acoplamento foram mais investigadas com o intuito de se entender melhor o comportamento da densidade de energia nos acoplamentos (Cho and Bernhard, 1998). O comportamento do fluxo de energia em problemas de vibração para estruturas bidimensionais foi primeiramente abordado por Bouthier (1992), que investigou estruturas tipo placas finitas e infinitas, membranas e cavidades acústicas. Para dedução da equação que governa a distribuição da energia nessas estruturas, foram utilizadas relações de balanço de energia, dissipação de energia e transmissão de energia (Bouthier, 1992; Bouthier and Bernhard, 1995a; Bouthier and Bernhard, 1995b). Porém, o estudo das relações de acoplamentos para essas estruturas só teve início com Cho (1993), que investigou o comportamento do fluxo de energia em placas coplanares. Para descrever o fluxo de energia no acoplamento, foi desenvolvido um modelo de junta, composto pelos coeficientes de transmissão e reflexão de potência, que são obtidos por uma análise de transmissão de ondas (Cho, 1993). Esse mesmo modelo de junta será usado na análise de reforçadores e trincas, descontinuidades que serão investigadas no presente trabalho.

A propagação de ondas longitudinais e de cisalhamento no plano em placas finas finitas através do EFA foi abordada por alguns autores (Park and Hong, 2001; Moens, 2001). Park e Hong (2001) investigaram o acoplamento dessas estruturas com angulações arbitrárias. Para placas finitas acopladas com uma força de excitação transversal, foi mostrado que os níveis de energia da onda no plano são maiores do que das ondas de flexão para altas frequências e alto amortecimento.

O EFA também foi aplicado para prever a resposta vibracional de estruturas acopla-

das do tipo placa-viga em médias e altas frequências (Seo and Hong, 2003). Os autores observaram que a densidade de energia decai suavemente no espaço e atenua nas junções, enquanto que a intensidade do fluxo de potência (fluxo de energia), se dispersa pela placa a partir da localização do carregamento.

Uma abordagem mais geral dos modelos de fluxo de energia para estruturas simples, como placas, membranas e campos acústicos, pode ser encontrada em Ichchou e Jezequel (1996). Nesse trabalho, os autores reuniram modelos de fluxo de energia para diferentes configurações estruturais e três formas de ondas foram estudadas: cilíndrica, esférica e plana. O modelo de energia proposto depende somente da velocidade de grupo, permitindo assim o estudo de classes diferentes de sistemas vibracionais concomitantemente (Ichchou and Jezequel, 1996).

Estudos fundamentais apresentados na literatura, (Carcatterra and Sestieri, 1995; Carcatterra and Adamo, 1999) e outros, demonstram que a equação exata do fluxo de energia em estruturas não pode ser modelada diretamente por meio de uma analogia térmica. Especialmente em problemas com mais de uma dimensão. Algumas críticas atingem as hipóteses que necessitam ser adotadas na derivação do EFEM e outras têm sido expressas sobre a validade deste enfoque. Entretanto, para todos os casos estudados neste trabalho, são verificados os efeitos das hipóteses e aproximações do EFEM e do ESEM sobre a região de validade dos métodos para os modelos de placas simples e placas com descontinuidades, através de comparações com o método SEM e em alguns casos com a solução clássica.

## **2.3 Método de Elementos Finitos de Energia - EFEM**

O Método de Elementos Finitos (FEM) é uma das ferramentas mais utilizadas na resolução de problemas de vibração, visto que o método não é limitado pela geometria ou variações nas propriedades do material, permitindo assim, análise de problemas mais complexos (Cook et al., 2001). Sendo assim, a utilização do FEM para resolver as equações que governam a distribuição de energia, formuladas pelo EFA, foi implementada para diferentes estruturas (Bouthier, 1992; Cho, 1993; Bitsie, 1996; Han, 1999; Wang, 2000). Essa metodologia foi denominada de EFEM, que tem como pontos principais: a derivação da

equação diferencial de energia para diferentes tipos de estruturas básicas (barras, vigas e placas) e as relações de acoplamentos entre tais estruturas.

Nessa linha de pesquisa, Bouthier (1992) desenvolveu e solucionou um conjunto de equações diferenciais que predizem a densidade de energia e a intensidade em uma média no espaço e tempo para placas e membranas. Para resolver essas equações deve-se considerar um problema de valor de contorno em termos de variáveis de energia, tendo como condições de contorno a energia e a intensidade da energia (fluxo de energia) (Bouthier and Bernhard, 1992).

Já em relação às estruturas acopladas, Cho (1993) desenvolveu uma formulação de elementos finitos que adiciona um elemento de junta no acoplamento de diferentes estruturas: vigas acopladas em três dimensões (Cho and Bernhard, 1998), chassi de caminhão e placas finas coplanares acopladas.

Para cavidades acústicas tridimensionais e interação acústico-estrutural para placas, o EFEM também já foi utilizado (Bitsie, 1996) e, da mesma forma que em estruturas bidimensionais, é assumido que o campo é dominado pela propagação de onda no plano. Tendo sua aplicação particularmente relacionada a cavidades fechadas reverberantes, que não sejam dominadas por campo direto de uma fonte pontual. Uma outra abordagem para interação acústico-estrutural de placas foi feita por Wang (2000), que buscou uma relação entre os métodos SEA e EFEM para desenvolver uma nova aproximação para modelar a energia em altas frequências de sistemas acústico-estruturais. Nesse trabalho o autor desenvolve uma técnica denominada EFEM<sup>0</sup> que reúne as melhores características de ambos os métodos, SEA e EFEM. Também é discutida a aplicação do EFEM para placas ortotrópicas e uma validação experimental é realizada com o EFEM para uma cabine de caminhão.

O EFEM foi aplicado na investigação do comportamento vibracional que ocorre na interação entre um escoamento turbulento e estruturas flexíveis, para prever a resposta estrutural e a potência sonora irradiada pelas estruturas excitadas por escoamento. Como exemplo o escoamento turbulento em superfícies de contorno de painéis (Han, 1999). O comportamento em altas frequências de estruturas tipo placas, quando em contato com

fluidos densos, também foi estudada, sendo que os efeitos do carregamento do fluido são incorporados na derivação da equação diferencial de energia formulada pelo EFA e nos cálculos dos coeficientes de transferência de potência entre os membros da placa (Zhang et al., 2003).

Moens (2001), em seus estudos, abordou dois aspectos do EFEM, um relacionado com o uso prático do método e outro que diz respeito à validação do mesmo. Para isso, acoplamentos de diferentes tipos de ondas entre estruturas compostas do tipo viga e a predição de ruído em cavidades fechadas de paredes finas foram estudadas e validadas experimentalmente. Os critérios de validação do EFEM são baseados nos critérios empregados na validação do SEA. Testes numéricos foram realizados para placas e placas acopladas de maneira a fundamentar esses critérios empregados na validação dos modelos.

Mais recentemente, a detecção de danos em estruturas utilizando métodos de fluxo de energia vem sendo estudado (Santos et al., 2008b). Nessas investigações, os autores levam em consideração que qualquer modificação estrutural local provoca alterações nas propriedades de dissipação. Assim, essas mudanças podem ser indicadas pelas diferenças entre o fluxo de energia padrão de uma estrutura saudável com uma danificada. Com essa metodologia os autores conseguem detectar e localizar o dano de forma eficiente em estruturas do tipo barras, vigas e placas finas.

## **2.4 Método do Elemento Espectral - SEM**

O Método do Elemento Espectral (SEM) é uma técnica relativamente nova, sendo inicialmente investigada por Doyle (1997). O SEM possui uma leve semelhança com o Método de Elementos Finitos devido a sua metodologia matricial, porém a grande diferença entre os métodos está na matriz de rigidez elementar, que para o SEM é escrita no domínio da frequência. A Matriz de rigidez é desenvolvida pela combinação das condições de contorno naturais dos deslocamentos nodais e das condições de contorno essenciais dos esforços nodais, aplicadas no elemento espectral (Lee, 2004). Um outro ponto importante a ser ressaltado é que, não há restrição no tamanho do elemento, isso significa que um único elemento espectral é equivalente a utilizar infinitos elementos finitos convencionais para

representá-lo (Doyle, 1997). O método tem como base a solução de propagação de onda que permite uma descrição exata do comportamento dinâmico das estruturas modeladas pelo método. Com relação às descontinuidades estruturais, para a aplicação do método, a estrutura é dividida em um número de elementos, quantos forem as descontinuidades existentes na estrutura.

Diferentes investigações utilizando o SEM em análise de estruturas podem ser encontradas na literatura (Lee and Lee, 1999; Krawczuk et al., 2003; Donadon et al., 2004; Krawczuk et al., 2006). Para análise de estruturas uni e bidimensionais um maior detalhamento pode ser encontrado em Doyle (1997) e Lee (2004). Lee e Lee (1999) propuseram um modelo espectral de placa finita simplesmente apoiada. Os autores utilizaram o SEM na resolução desse modelo de placa, tendo como base a solução da equação do movimento escrita como sendo uma combinação de duas funções que representam a propagação de onda nas duas direções ortogonais. Sendo uma das direções, resolvida através do SEM, isto é, impondo os conceitos do SEM na construção da matriz de rigidez dinâmica global, eliminando-se linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade, de forma a aplicar as condições de contorno consideradas no modelo. E na outra direção, a condição é imposta a partir de uma solução particular que satisfaz a condição de contorno considerada. Essa forma de lidar com essas condições de contorno pré-estabelecidas para modelos de placa, é conhecida na literatura com teoria de Levy (Ugural, 1981; Szilards, 1974).

A presença de descontinuidade em estruturas como reforçadores, trincas, diferenças geométricas e de materiais, etc, é um ponto importante no que diz respeito a representação das repostas dinâmicas das estruturas (Dimarogonas, 1996). Assim, algumas pesquisas utilizando o SEM vêm sendo desenvolvidas com o intuito de representar essas imperfeições estruturais (Palacz and Krawczuk, 2002; Krawczuk et al., 2004; Arruda et al., 2007; Santos et al., 2008b).

Donadon et al. (2004) aplicaram o SEM para placas reforçadas retangulares, nesse trabalho uma rigidez é introduzida no modelo como uma viga conectada à placa. Dessa forma os efeitos do cisalhamento efetivo e do momento na extremidade da placa são iguais aos da viga. Quando comparado com o FEM a abordagem utilizada mostrou-se satisfatória.

Os coeficientes de transmissão e reflexão também foram obtidos para esse tipo de estrutura, usando a formulação de matriz de transferência tanto para a placa como para flexibilidade da viga conectada (Arruda et al., 2007).

Palacz e Krawczuk (2002), para detecção de pequenas trincas em estruturas tipo barras, desenvolveram um elemento espectral de barra com uma trinca transversal aberta. Sendo a trinca representada por uma flexibilidade calculada através do teorema de Castigliano e as leis da mecânica da fratura. Como continuação, essa abordagem também foi aplicada para detecção de danos em vigas (Krawczuk, 2002; Krawczuk et al., 2003) e placas (Krawczuk et al., 2004). De forma geral, todos os trabalhos utilizaram as diferenças apresentadas na propagação de onda entre as estruturas com dano e saudável, para identificar e localizar a trinca.

O SEM, por ser pouco afetado por pequenos comprimentos de onda, tornou-se uma ferramenta muito importante para análises dinâmicas de estruturas em médias e altas frequências (Doyle, 1997). Dentro desse contexto, o método vem sendo investigado por um grupo pertencente ao DMC/FEM/UNICAMP que além do SEM, investiga outros métodos considerados semi-analíticos. Sendo assim, diferentes trabalhos já foram desenvolvidos nesta área e publicados na forma de dissertações e teses (Alves, 2001; Ahmida, 2001; Albuquerque, 2005; Nunes, 2005; Santos, 2006).

## **2.5 Método do Elemento Espectral de Energia - ESEM**

O Método do Elemento Espectral de Energia (ESEM) proposto por Santos (2006), tem como finalidade prever respostas dinâmicas de estruturas no domínio espectral em faixas de médias e altas frequências, tendo como variáveis primárias a densidade de energia e fluxo de energia. O ESEM utiliza-se das mesmas técnicas do SEM, isto é, a mesma forma de modelar uma estrutura na forma de elemento espectral usando uma formulação matricial. A metodologia do ESEM, que é similar ao SEM, parte da solução analítica da equação diferencial de energia obtida pelo EFA. Esse método tem como objetivo, desenvolver um elemento espectral de energia que permita a descrição aproximada da dinâmica de propagação de ondas nesse elemento, tendo como base a construção de uma matriz de rigidez

dinâmica de energia, que relacione os fluxos de energia aplicados a uma estrutura com as densidades de energia resultantes, sendo essa matriz dada no domínio da frequência. Santos (2006) investigou o comportamento do método para estruturas unidimensionais, com diferentes tipos de configurações, tais como: conexões entre barras, entre vigas com angulações arbitrárias (Santos et al., 2008a) e estruturas danificadas (Santos et al., 2008b), obtendo bons resultados quando confrontados com SEM e EFEM.

## 2.6 Considerações

Dentro deste escopo, o presente trabalho apresenta uma metodologia para estruturas bidimensionais usando o ESEM com aplicações no campo das médias e altas frequências. O método utiliza-se de modelos acoplados como placa-placa, placa-viga e placa danificada, sendo que o modelo de placa-viga é usado para estruturas reforçadas

Aplicando o Método do Elemento Espectral de Energia, que tem como fundamento principal a equação diferencial de energia formulada pelo EFA para modelos de estruturas bidimensionais desenvolvido por Bouthier (1992), foi proposta uma implementação numérica no domínio da frequência. Com base nessa ferramenta numérica de análise, adaptou-se uma metodologia que busca melhor representar a distribuição e o comportamento da energia vibracional em estruturas que possuem descontinuidades em suas configurações. Tendo em vista que, a princípio o ESEM apenas foi aplicado em estruturas unidimensionais (Santos et al., 2008a).

Nesta tese, o ESEM é testado sobre três metodologias distintas: a desenvolvida por Cho (1993) para placas coplanares, onde foram desenvolvidas relações de acoplamentos nas juntas; a de placas reforçadas investigadas por Donadon et al. (2004) e Arruda et al. (2007), que tem como fundamento as condições de esforços da placa iguais aos aplicados na viga e por fim, em estruturas danificadas modeladas por Krawczuk et al. (2004), que insere no modelo uma trinca, representada por flexibilidade adimensional. As duas últimas metodologias para representar descontinuidades em estruturas, utilizaram o SEM como ferramenta de implementação.

Dentro deste panorama bibliográfico consultado, acredita-se que o conceito proposto

nesta tese seja original, permitindo-se a conjunção do conhecimento desenvolvido pelos pesquisadores referenciados ligados a área de Vibroacústica Computacional, em médias e altas frequências, com os conceitos abordados e discutidos neste trabalho para modelagens de estruturas bidimensionais simples e com descontinuidades, tendo como foco a densidade de energia e fluxo de energia como variáveis principais de análise.

# Capítulo 3

## Métodos de Energia em Placas

O presente capítulo mostra uma descrição do desenvolvimento das formulações dos métodos de energia e do método do elemento espectral provenientes da pesquisa bibliográfica. Uma revisão das teorias é apresentada e alguns conceitos físicos do comportamento da energia vibracional em placas são destacados. Uma nova formulação para placas tipo Levy do Método do Elemento Espectral de Energia é proposta e desenvolvida.

### 3.1 Análise do Fluxo de Energia

Análise do fluxo de energia (Energy Flow Analysis - EFA) é um método de energia que tem como variáveis a densidade e o fluxo de energia vibracional, os quais são modelados de forma similar ao fluxo de calor em estruturas. Nesta seção discutiremos conceitos fundamentais do fluxo de energia de uma forma geral e as equações que descrevem o campo de intensidade em qualquer meio contínuo.

O princípio da conservação de energia é a base para formulação da equação diferencial de energia. No SEA a vibração é expressa em termos de energias armazenadas, dissipadas e transmitidas em e entre subsistemas. Já o EFA utiliza-se do mesmo princípio para um volume de controle como o mostrado na Figura (3.1).

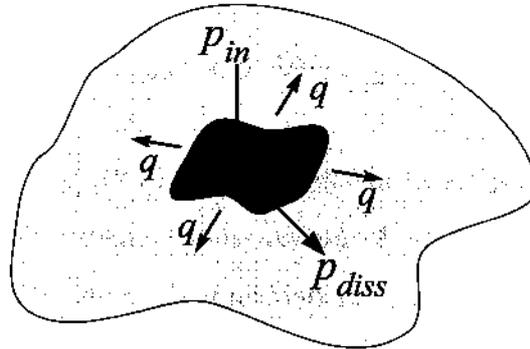


Figura 3.1: Fluxo de energia em um volume de controle.

O equilíbrio de energia para um volume diferencial representado na Figura (3.1), é:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = p_{in} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - p_{diss}, \quad (3.1)$$

onde  $e$  representa a densidade de energia total instantânea (soma das densidades de energia potencial e cinética por unidade de volume),  $p_{in}$  é a potência externa injetada ou aplicada, o produto escalar  $\vec{\nabla} \cdot \vec{q}$  é o divergente do fluxo de energia, que pode ser representado em uma, duas ou três dimensões, dependendo da natureza do sistema analisado e  $p_{diss}$  é a potência interna dissipada. As dimensões da densidade de energia, fluxo de energia e as potências injetada e dissipada dependem da natureza da estrutura, como resumido na Tabela (3.1). Essas dimensões serão utilizadas em todo o desenvolvimento do trabalho.

Tabela 3.1: Dimensões das variáveis de energia

Variáveis	Estruturas			
	Unidimensionais		Bidimensionais	
	Barra	Viga	Placa	Membrana
densidade de energia ( $e$ )	$J/m$		$J/m^2$	
fluxo de energia ( $\vec{q}$ )	$W$		$W/m$	
potência ( $p_{in}, p_{diss}$ )	$W/m$		$W/m^2$	

Para uma análise de estado estacionário da propagação de energia vibracional, a variação da energia no tempo, Equação (3.1) pode ser simplificada:

$$p_{in} = \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + p_{diss}. \quad (3.2)$$

A potência dissipada representada na Equação (3.2), pode ser expressa em termos da densidade de energia  $e$  e da perda devido ao amortecimento do meio. Como mostrado por Bouthier (1992), a deformação em um determinado ponto de um meio elástico vibrando harmonicamente no tempo, pode ser expressa como:

$$\epsilon(t) = \tilde{\epsilon} \cos(\omega t), \quad (3.3)$$

onde  $\tilde{\epsilon}$  representa a máxima deformação no ponto e  $\omega$  é a frequência circular.

A densidade de energia dissipada dentro de um período de tempo de oscilação  $T$ , mostrado por (Nefske and Sung, 1989) e (Cremer et al., 1988) é expressa da seguinte forma:

$$e_{diss} = \int_t^{t+T} p_{diss} dt = E \tilde{\epsilon}^2 \pi \eta, \quad (3.4)$$

onde  $E$  é a parte real do módulo de elasticidade complexo,  $E_c = E(1 + i\eta)$ .

Como resultado da Equação (3.4), a média temporal da densidade de energia (potência dissipada) é:

$$\langle p_{diss} \rangle = \frac{e_{diss}}{T} = \frac{E \tilde{\epsilon}^2 \pi \eta}{T} = \frac{E \tilde{\epsilon}^2}{2} \omega \eta, \quad (3.5)$$

onde  $\langle \rangle$  representa a média temporal. A densidade de energia potencial instantânea escrita em termos da deformação é dada por:

$$e_P(t) = \frac{1}{2} E \epsilon(t)^2 = \frac{1}{4} E \tilde{\epsilon}^2 [1 + \cos(2\omega t)], \quad (3.6)$$

sua média temporal pode ser escrita como:

$$\langle e_P \rangle = \frac{1}{4} E \tilde{\epsilon}^2. \quad (3.7)$$

Assim, quanto maior for o número de médias mais preciso será o resultado da densidade de energia.

Para uma análise de campo distante (*far field*), as médias temporais das densidades de energia potencial e cinética serão aproximadamente iguais, logo

$$\langle e_P \rangle \cong \langle e_C \rangle. \quad (3.8)$$

Assim, a média temporal da densidade de energia total é:

$$\langle e \rangle = \langle e_P \rangle + \langle e_C \rangle \cong 2 \langle e_P \rangle = \frac{1}{2} E \epsilon^2. \quad (3.9)$$

Combinando as Equações (3.5) e (3.9), obtemos a média temporal da potência dissipada em um elemento diferencial para uma densidade de energia local como:

$$\langle p_{diss} \rangle = \omega \eta \langle e \rangle. \quad (3.10)$$

A Equação (3.10) representa a relação da perda de energia em um elemento diferencial, no qual foi usado um modelo de amortecimento hysterético onde  $\eta \ll 1$ . A principal aproximação utilizada na Equação (3.10) é a aproximação de campo distante. A Figura (3.2) mostra os resultados de energia, calculados a partir da solução clássica do modelo de placa fina (Apêndice A), para um exemplo de uma placa retangular (aluminio,  $L_x = L_y = 1.0$  m,  $h = 0.002$  m) simplesmente apoiada em todas as bordas com uma excitação pontual no centro da placa. Estes resultados demonstram que as densidades de energia potencial e cinética convergem para o mesmos valores, logo que se afastam do ponto de excitação da placa, demonstrando a validade desta aproximação.

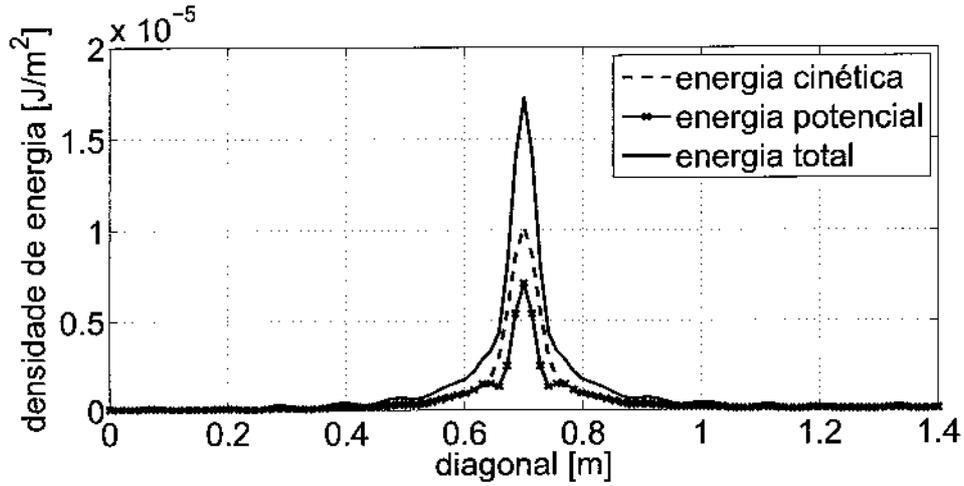


Figura 3.2: Densidade de energia total, potencial e cinética sobre a diagonal em uma placa quadrada simplesmente apoiada com excitação no centro.

Substituindo a Equação (3.10) na Equação (3.2) e considerando a média temporal em todos os termos, obtemos a equação básica de equilíbrio de energia:

$$\langle p_{in} \rangle = \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{q} \rangle + \omega \eta \langle e \rangle, \quad (3.11)$$

onde  $\langle \vec{q} \rangle$  é média temporal do fluxo de energia e  $\langle e \rangle$  é a média temporal da densidade de energia.

Problemas estacionários de condução de calor podem ser expressos pela lei de Fourier de fluxo de calor como:

$$\vec{q}_c = -\xi_c \vec{\nabla} Q, \quad (3.12)$$

onde  $\vec{q}_c$  é o fluxo de calor,  $\xi_c$  é o coeficiente de condução de calor,  $Q$  é a temperatura e o produto do  $\vec{\nabla}$  com um escalar é o operador gradiente expresso em uma, duas ou três dimensões, dependendo da natureza do problema. Fazendo uma analogia com este problema de condução de calor, a média temporal do fluxo de energia vibracional do EFA pode ser representada da seguinte forma:

$$\langle \vec{q} \rangle = -\xi \vec{\nabla} \langle e \rangle, \quad (3.13)$$

onde  $\xi$  é o coeficiente de propagação do meio. A Equação (3.13) mostra que o fluxo de energia é proporcional em termos absolutos ao gradiente de energia, fluindo das altas para baixas densidades de energias, similar ao que ocorre em problemas de condução de calor. Logo, a Equação (3.11), pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$\langle p_{in} \rangle = -\xi \nabla^2 \langle e \rangle + \omega \eta \langle e \rangle, \quad (3.14)$$

a qual é semelhante a equação de condução de calor dada por:

$$\langle p_{cin} \rangle = -\xi_c \nabla^2 Q + h_c (Q - Q_o), \quad (3.15)$$

onde  $p_{cin}$  representa a potência de calor externa aplicada,  $\xi_c$  é o coeficiente de condução de calor,  $h_c$  é o coeficiente de convecção e  $Q_o$  é a temperatura inicial do volume.

As relações encontradas nessa seção como na Equação (3.14), podem ser utilizadas para diferentes tipos de ondas em estruturas. Uma vez que o principal interesse desse trabalho é investigar o comportamento da energia vibracional em estruturas bidimensionais, na seção seguinte será discutido a teoria clássica de placas finas fazendo as devidas relações com o EFA.

### 3.1.1 Análise do Fluxo de Energia em Placas Planas Finas

A teoria clássica de placas planas finas, também chamada de teoria de placas de Kirchhoff, descreve o movimento fora do plano  $xy$  (*out-of-plane*) em relação à uma superfície média de uma placa plana fina (Ugural, 1981), (Szilards, 1974). Aqui não será mostrado o desenvolvimento completo da teoria clássica devido a existístência de vários trabalhos reportados na literatura, inclusive no próprio Departamento de Mecânica Computacional (DMC-FEM-UNICAMP) como os trabalhos de (Pereira, 1999), (Alves, 2001), (Nunes, 2005) e outros. Algumas hipótese para essa teoria são assumidas, tais como: (i) a placa é considerada isotrópica, homogênea com propriedade do material elástico linear; (ii) a espessura  $h$  é pequena em relação às dimensões da superfície média e o deslocamento  $w(x, y, t)$  é pequeno quando comparado à espessura  $h$  da placa; (iii) um segmento de reta normal à

superfície média antes da deformação permanece reto e com o mesmo comprimento após a deformação (não há variações da espessura da placa); (iv) a tensão normal perpendicular a superfície média é desprezada. Baseado nessas hipóteses, a equação de movimento pode ser obtida considerando um elemento infinitesimal no plano  $xy$  e adotando a formulação de Newton (Figura 3.3). Os somatórios de forças na direção  $z$  e dos momentos em relação aos eixos  $x$  e  $y$  são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + f(x, y, t) &= \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_{xz} &= 0 \\ \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + Q_{yz} &= 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

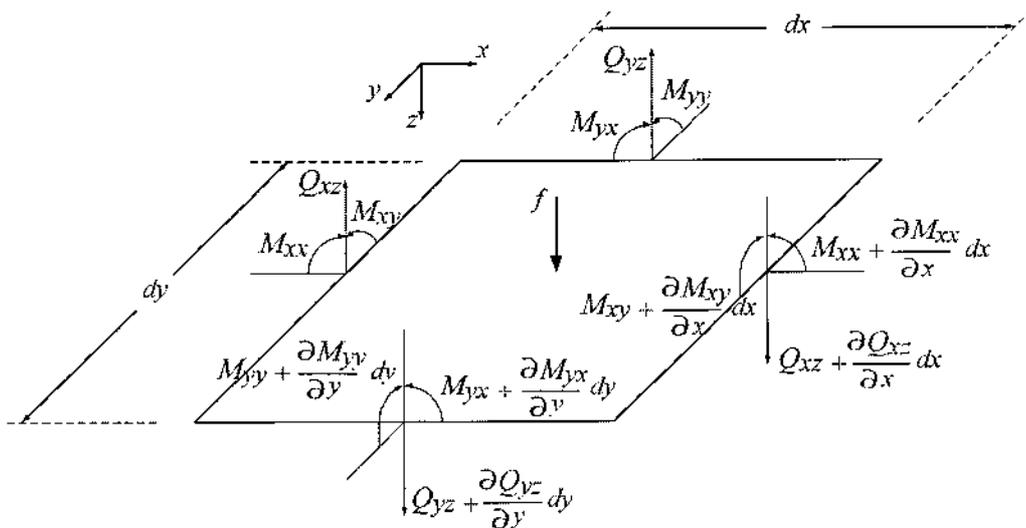


Figura 3.3: Equilíbrio de esforços em um elemento infinitesimal de placa fina.

onde  $f(x, y, t)$  é o carregamento externo,  $w(x, y, t)$  é o deslocamento na direção  $z$ ,  $\rho$  é a densidade do material,  $M_{ij}(i = j = x, y)$  é o momento fletor em torno do eixo perpendicular ao eixo  $i$  sobre uma seção normal ao eixo  $j$ ,  $M_{ij}(i \neq j = x, y)$  é o momento de torção em torno do eixo  $i$  sobre uma seção normal ao eixo perpendicular ao eixo  $j$  e  $Q_{iz}(i = x, y)$  é a força de cisalhamento no plano perpendicular ao eixo  $i$ . A partir da distribuição de tensões

no elemento infinitesimal mostrado na Figura (3.4) obtém-se as expressões dos momentos e das forças de cisalhamento como:

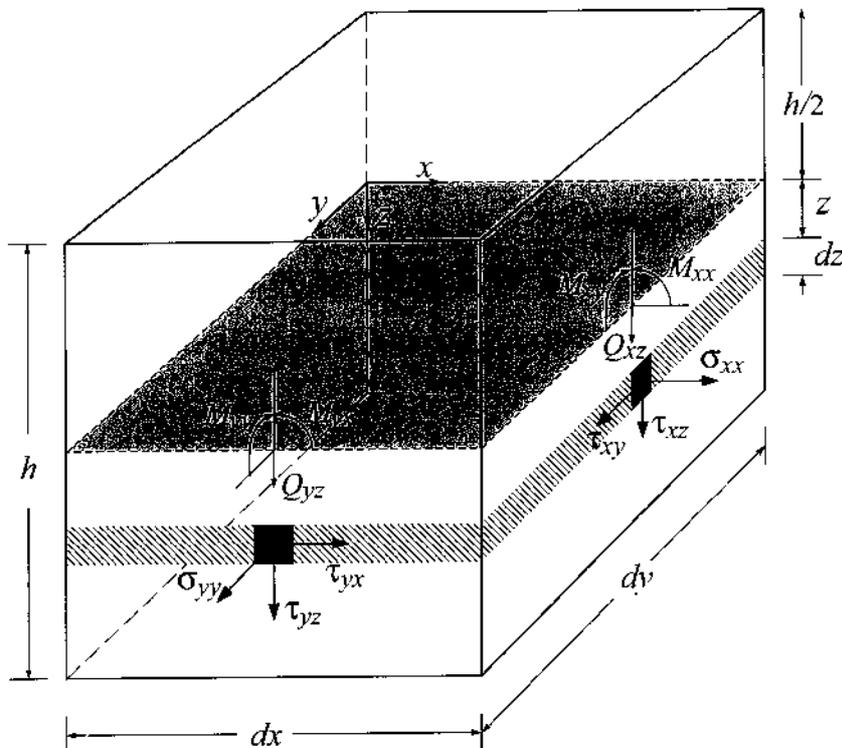


Figura 3.4: Distribuição de tensões em um elemento infinitesimal de placa fina.

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 M_{yy} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_{xy} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{xz} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\
 Q_{yz} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w), \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

onde  $\sigma_{ij}(i = j = x, y)$  é a tensão normal ao plano perpendicular ao eixo  $i$  na direção  $j$ ,  $\tau_{ij}(i, j = x, y, z)$  é a tensão de cisalhamento no plano perpendicular ao eixo  $i$  na direção  $j$  e  $D$  é a parte real da rigidez à flexão complexa dada por:

$$D_c = \frac{E_c h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (3.19)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Substituindo-se as Equações (3.17) e (3.18) em (3.16) e levando em consideração o amortecimento histerético da estrutura, obtemos a equação de movimento de placas finas como:

$$D_c \nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = f(x, y, t). \quad (3.20)$$

A solução da Equação (3.20), que descreve o deslocamento transversal da placa como sendo uma superposição de harmônicas, é dada por:

$$w(x, y, t) = \sum_n \hat{w}(x, y, \omega_n) e^{i\omega t}, \quad (3.21)$$

onde,

$$\hat{w}(x, y, \omega_n) = W e^{-i(k_x x + k_y y)}, \quad (3.22)$$

$W$  é a amplitude complexa da solução da onda plana e  $k_i(i = x, y)$  é o número de onda na direção  $i$ . Substituindo a Equação (3.21) na Equação (3.20) com ausência de carregamento, quatros valores do número de onda  $k$  podem ser obtidos através da solução de:

$$k^4 = (k_x^2 + k_y^2)^2 = \frac{\rho h \omega^2}{D_c}, \quad (3.23)$$

resolvendo para o número de onda  $k$  obtém-se:

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{D_c} \frac{1}{\sqrt{1 + i\eta}}}. \quad (3.24)$$

No caso de baixo amortecimento ( $\eta \ll 1$ ), a parte real e imaginária de  $k$  são dadas, respectivamente, por:

$$k_1 \cong \sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{D}}, \quad k_2 \cong -\frac{\eta}{4} \sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{D}} = -\frac{\eta}{4} k_1. \quad (3.25)$$

A velocidade de fase  $c_f$  é dada por:

$$c_f = \frac{\omega}{k_1} = \sqrt[4]{\omega^2 \frac{D}{\rho h}}. \quad (3.26)$$

Devido à velocidade de fase das ondas de flexão ser uma função da frequência circular  $\omega$ , implica dizer que as ondas são dispersivas. Logo, a velocidade de grupo não é igual a velocidade de fase, e pode ser obtida por:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk_1} = 2 \sqrt[4]{\omega^2 \frac{D}{\rho h}} = 2c_f. \quad (3.27)$$

A solução da Equação (3.21) homogênea, pode ser escrita como:

$$w(x, y, t) = (A_x e^{-ik_x x} + B_x e^{ik_x x} + C_x e^{-k_x x} + D_x e^{k_x x}) \\ (A_y e^{-ik_y y} + B_y e^{ik_y y} + C_y e^{-k_y y} + D_y e^{k_y y}) e^{i\omega t}, \quad (3.28)$$

onde  $A_x, B_x, C_x, D_x, A_y, B_y, C_y$  e  $D_y$  representam os coeficientes complexos da solução da equação para ondas planas, que dependem das condições de contornos e dos números de onda  $k_x$  e  $k_y$  da Equação (3.23). Em caso de baixo amortecimento,  $k_x$  e  $k_y$ , são expressos da forma:

$$k_x \cong k_{x1} \left(1 - i\frac{\eta}{4}\right), \quad k_y \cong k_{y1} \left(1 - i\frac{\eta}{4}\right), \quad (3.29)$$

onde

$$k_{x1}^2 + k_{y1}^2 \cong \sqrt{\frac{\rho h \omega^2}{D}}. \quad (3.30)$$

Os termos associados a  $A_x$ ,  $B_x$ ,  $A_y$  e  $B_y$  na Equação (3.28) representam as ondas propagantes nas direções de  $x$  e  $y$ , enquanto os termos associados a  $C_x$ ,  $D_x$ ,  $C_y$  e  $D_y$  representam as ondas evanescentes nas respectivas direções. Para essa análise considera-se apenas a solução em campo distante, logo a expressão do deslocamento transversal de placas finas torna-se:

$$w(x, y, t) = (A_x e^{-ik_x x} + B_x e^{ik_x x})(A_y e^{-ik_y y} + B_y e^{ik_y y})e^{i\omega t}. \quad (3.31)$$

Da Equação (3.9) a média temporal da densidade de energia é a soma das densidades de energia potencial e cinética, neste caso teremos (Moens, 2001) :

$$\begin{aligned} \langle e \rangle = & \frac{D}{4} \left( \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|^2 + 2\nu \Re \left\{ (1 + i\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right\} + 2(1 - \nu) \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right|^2 \right) \\ & + \frac{\rho h}{4} \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right|^2, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde \* significa o complexo conjugado. Considerando-se as rotações positivas no sentido anti-horário, pode-se definir as seguintes variáveis de rotação em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , como:

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3.33)$$

As expressões dos fluxos de potência nas direções  $x$  e  $y$  de uma placa fina podem ser expressas, respectivamente, por (Alves, 2001):

$$q_x = M_{xx} \dot{\phi}_x - M_{xy} \dot{\phi}_y - Q_{xz} \dot{w}, \quad (3.34)$$

$$q_y = -M_{yy} \dot{\phi}_y + M_{yx} \dot{\phi}_x - Q_{yz} \dot{w}. \quad (3.35)$$

A média temporal dos fluxos de energia ativa podem ser obtidas expandindo-se as Equações (3.34) e (3.35) em termos do deslocamento e tomando-se a sua parte real, como:

$$\langle q_x \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ D_c \left( \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \frac{\partial w^*}{\partial t} - \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial t} - (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y \partial t} \right) \right\}, \quad (3.36)$$

$$\langle q_y \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ D_c \left( \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \frac{\partial w^*}{\partial t} - \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 w^*}{\partial y \partial t} - (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial t} \right) \right\}, \quad (3.37)$$

onde  $\Re$  é parte real de um número complexo.

Substituindo a Equação (3.31) nas Equações (3.32), (3.36) e (3.37) e assumindo um baixo amortecimento ( $\eta \ll 1$ ) não se obtém facilmente uma relação direta entre o fluxo de energia e a densidade de energia. As expressões obtidas a partir dessas substituições são simplificadas, negligenciando todos os termos de  $\eta$  de segunda ordem e superiores (Bouthier, 1992). No entanto, uma outra simplificação é necessária para se chegar a uma relação mais evidente entre o fluxo de energia e a densidade de energia. Essa simplificação tem como finalidade eliminar os termos harmônicos espaciais da solução (suavização do resultado) através da média espacial da densidade e do fluxo de energia obtidas por:

$$\bar{\varsigma} = \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} \int_{x-\frac{\lambda_x}{2}}^{x+\frac{\lambda_x}{2}} \int_{y-\frac{\lambda_y}{2}}^{y+\frac{\lambda_y}{2}} \varsigma \, dx \, dy, \quad (3.38)$$

onde

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}, \quad \lambda_y = \frac{2\pi}{k_y}, \quad (3.39)$$

$\varsigma$  é a variável da qual se deseja obter a média espacial,  $\lambda_x$  e  $\lambda_y$  são os comprimentos de onda nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $\bar{\quad}$  representa a média espacial.

Aplicando-se a média espacial à média temporal da densidade e do fluxo de energia, e fazendo-se as devidas simplificações obtém-se:

$$\begin{aligned} \langle \bar{e} \rangle &= \left( |k_x|^2 + |k_y|^2 + 2\nu k_x^2 (k_y^2)^* + 2(1 - \nu) |k_x k_y|^* + \frac{\rho h \omega^2}{D} \right) \\ &\quad (|A_x|^2 |A_y|^2 e^{-\eta(k_{x1}x + k_{y1}y)} + |A_x|^2 |B_y|^2 e^{-\eta(k_{x1}x - k_{y1}y)} \\ &\quad + |B_x|^2 |A_y|^2 e^{\eta(k_{x1}x - k_{y1}y)} + |B_x|^2 |B_y|^2 e^{\eta(k_{x1}x + k_{y1}y)}), \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
\langle \bar{q}_x \rangle &= k_x \frac{\omega}{2} (k_x^2 + k_y^2 + |k_x|^2 + \nu k_y^2 + (1 - \nu) |k_y|^2) \\
&\quad (|A_x|^2 |A_y|^2 e^{-\eta(k_{x1}x + k_{y1}y)} + |A_x|^2 |B_y|^2 e^{-\eta(k_{x1}x - k_{y1}y)} \\
&\quad - |B_x|^2 |A_y|^2 e^{\eta(k_{x1}x - k_{y1}y)} - |B_x|^2 |B_y|^2 e^{\eta(k_{x1}x + k_{y1}y)}), \quad (3.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \bar{q}_y \rangle &= k_y \frac{\omega}{2} (k_y^2 + k_x^2 + |k_y|^2 + \nu k_x^2 + (1 - \nu) |k_x|^2) \\
&\quad (|A_x|^2 |A_y|^2 e^{-\eta(k_{x1}x + k_{y1}y)} - |A_x|^2 |B_y|^2 e^{-\eta(k_{x1}x - k_{y1}y)} \\
&\quad + |B_x|^2 |A_y|^2 e^{\eta(k_{x1}x - k_{y1}y)} - |B_x|^2 |B_y|^2 e^{\eta(k_{x1}x + k_{y1}y)}). \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Das Equações (3.40), (3.41) e (3.42) observa-se que as médias temporal e espacial do vetor de fluxo de energia podem ser expressas pela fração  $-c_g^2/\eta\omega$  multiplicada pelo divergente das médias temporal e espacial da densidade de energia (Bouthier, 1992), ou seja,

$$\langle \vec{q} \rangle = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \vec{\nabla} \langle \bar{e} \rangle. \quad (3.43)$$

Similarmente aos problemas de condução de calor, o termo  $-c_g^2/\eta\omega$  da Equação (3.43) é equivalente à constante de condutividade térmica.

Substituindo a Equação (3.43) na Equação (3.11), obtém-se a equação diferencial aproximada de energia para propagação de ondas de flexão em placas planas finas como:

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle \bar{e} \rangle + \omega\eta \langle \bar{e} \rangle = \langle p_{in} \rangle. \quad (3.44)$$

### 3.1.2 Acoplamento de Estruturas Simples

Estruturas complexas são constituídas através do acoplamento de diversos elementos estruturais simples, tais como barras, vigas, membranas, placas, etc. Na seção 3.1.1 discutiu-se a formulação de uma estrutura simples para placa plana fina, onde foi assumido que os diferentes tipos de onda presentes nessa estrutura estão completamente desacoplados entre si. Contudo, ao acoplarmos diferentes tipos de estruturas simples haverá troca

de energia entre os diferentes tipos de ondas presentes na estrutura complexa obtida. Assim, uma análise sobre a troca de energia nos acoplamentos de estruturas simples torna-se necessária.

Os parâmetros básicos que descrevem a troca de energia entre estruturas são os coeficientes de transmissão de potência, os quais são definidos como a relação entre a potência da onda deixando o acoplamento com a potência da onda incidente. Um procedimento de análise do comportamento do acoplamento em termos de densidade e fluxo de energia pode ser definido em função do tipo de junta gerado pelo acoplamento das estruturas simples, ou seja, um ponto, uma linha ou uma área. Neste trabalho, as análises restringem-se a juntas tipo linha geradas pelo acoplamento coplanar placa-placa, placa-viga, placa-trinca.

A forma da propagação da onda em estruturas complexas está diretamente ligada com as variações da geometria (espessura, momento de inércia, área da seção transversal), do material e da orientação (curva, L, T, Y, etc.) das estruturas simples que a compõem. Essas descontinuidades serão denominadas nesse trabalho como “junta”. Em uma junta a energia pode ser trocada entre diferentes tipos de ondas. Uma onda incidente em uma junta é geralmente refletida e transmitida em ondas de diferentes tipos.

Nesta seção apresenta-se um dos modelos de junta usado neste trabalho (Cho, 1993), o qual consiste do acoplamento entre duas placas planas coplanares com materiais ou espessuras diferentes (Figura 3.5). Estas descontinuidades geram a propagação de um único tipo de onda (transversal ou de flexão) na junta. Assume-se também um comportamento ideal do fluxo de energia na junta (sem dissipação).

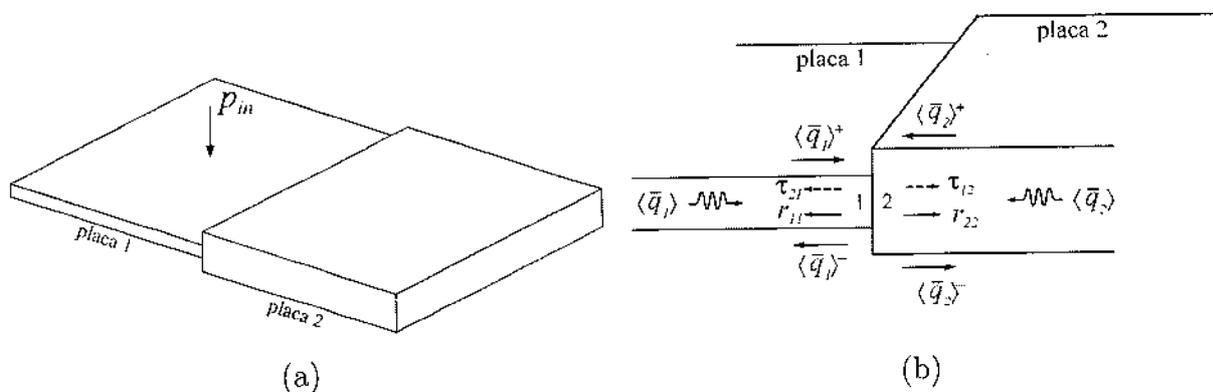


Figura 3.5: Acoplamento coplanar de placas: (a) finitas e (b) semi-infinitas.

Em uma estrutura finita, modelada pelos conceitos do EFA, como a mostrada na Figura (3.5)(a) para o caso de duas placas coplanares acopladas, as ondas da placa 1 incidentes na junta produzirão ondas parcialmente refletidas na placa 1 e ondas parcialmente transmitidas na placa 2. As ondas transmitidas atingirão o contorno da placa 2, tomando-se nulas. Este mesmo processo ocorrerá com a primeira onda refletida sobre a placa 1, e o processo como um todo se repetirá continuamente enquanto a fonte de excitação injetar potência na estrutura.

Para quantificar os efeitos superpostos de todas as ondas transmitidas e refletidas, o comportamento da junta de duas placas finitas é descrito localmente por um modelo de junta de duas placas semi-infinitas, onde a onda incidente em cada placa atua diretamente sobre a junta (Figura (3.5)(b)). A onda incidente na placa 1 será parcialmente transmitida e refletida na junta e vice-versa para onda incidente na placa 2. Portanto, a onda propagando para fora da junta na placa 1 pode ser representada como a soma das contribuições da onda parcialmente refletida na junta pela onda incidente na placa 1 com a onda parcialmente transmitida na junta pela onda incidente na placa 2. Comportamento similar ocorre com a onda propagando para fora da junta na placa 2.

O fluxo de energia está relacionado com a propagação das ondas na estrutura. Assim o fluxo de energia em cada placa pode ser representado em termos das suas componentes que atuam na junta como:

$$\langle \bar{q}_i \rangle = \langle \bar{q}_i \rangle^- - \langle \bar{q}_i \rangle^+, \quad (3.45)$$

onde  $\langle \bar{q}_i \rangle$ , ( $i = 1, 2$ ) é o fluxo de energia na placa  $i$  e  $^{+,-}$  indicam as componentes do fluxo de energia associados as ondas que chegam e que saem da junta, respectivamente. Na Figura (3.5)(b) é mostrado o direcionamento dos fluxos de energia em ambos os lados das placas semi-infinitas, devido aos fluxos de energia incidentes na junta. Extraindo as relações dos fluxos de energia do modelo, temos:

$$\langle \bar{q}_1 \rangle = \langle \bar{q}_1 \rangle^- - \langle \bar{q}_1 \rangle^+, \quad (3.46)$$

$$\langle \bar{q}_2 \rangle = \langle \bar{q}_2 \rangle^- - \langle \bar{q}_2 \rangle^+, \quad (3.47)$$

Devido a ondas incidentes nas placas 1 e 2, a relação do fluxo de energia e os coeficientes de reflexão ( $r_{ij}$ ) e transmissão ( $\tau_{ij}$ ), sendo  $i, j = 1, 2$  como mostrado na Figure 3.5(b), é dada da seguinte forma:

$$\langle \bar{q}_1 \rangle^- = r_{11} \langle \bar{q}_1 \rangle^+ + \tau_{21} \langle \bar{q}_2 \rangle^+, \quad (3.48)$$

$$\langle \bar{q}_2 \rangle^- = \tau_{12} \langle \bar{q}_1 \rangle^+ + r_{22} \langle \bar{q}_2 \rangle^+. \quad (3.49)$$

Substituindo-se as Equações (3.48) e (3.49) nas Equações (3.46) e (3.47), respectivamente, teremos:

$$\langle \bar{q}_1 \rangle = (r_{11} - 1) \langle \bar{q}_1 \rangle^+ + \tau_{21} \langle \bar{q}_2 \rangle^+, \quad (3.50)$$

$$\langle \bar{q}_2 \rangle = \tau_{12} \langle \bar{q}_1 \rangle^+ + (r_{22} - 1) \langle \bar{q}_2 \rangle^+. \quad (3.51)$$

## 3.2 Método dos Elementos Finitos de Energia

Nesta seção, falaremos a respeito do Método dos Elementos Finitos (Finite Element Method - FEM) aplicado à equação diferencial de energia aproximada (Equação (3.44)). O FEM, quando utilizado para resolver numericamente esse tipo de problema, é denominado de Método dos Elementos Finitos de Energia - EFEM (Cho and Bernhard, 1998; Bitsic, 1996). Uma vantagem do EFEM é que podemos tratar de forma mais direta as geometrias arbitrárias e as aplicações de efeitos localizados, tais como potências injetadas, trincas, reforços e etc.

### 3.2.1 Formulação do Elemento Finito de Energia para Placa Fina

A equação diferencial aproximada de energia para propagação de ondas de flexão em placas finas pode ser escrita como:

$$\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle \bar{e} \rangle - \omega\eta \langle \bar{e} \rangle + \langle p_{in} \rangle = 0. \quad (3.52)$$

A forma fraca variacional para um elemento de placa no domínio físico é calculada da seguinte forma: a Equação (3.52) é multiplicada por uma função teste  $\varphi$  e integrada no domínio do elemento  $\Omega^e$ . Aplicando o teorema do gradiente e do divergente, a forma fraca variacional pode ser escrita como (Bouthier and Bernhard, 1992).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{e1}} \varphi \left( \frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle \bar{e} \rangle - \omega\eta \langle \bar{e} \rangle + \langle p_{in} \rangle \right) d\Omega^{e1} &= \oint_{\Gamma^{e1}} \varphi \left( \vec{n} \cdot \frac{c_g^2}{\eta\omega} \vec{\nabla} \langle \bar{e} \rangle \right) d\Gamma^{e1} \\ &- \int_{\Omega^{e1}} \left( \frac{c_g^2}{\eta\omega} \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \langle \bar{e} \rangle \right) dx dy \\ &- \int_{\Omega^{e1}} (\eta\omega \varphi \langle \bar{e} \rangle) dx dy \\ &+ \int_{\Omega^{e1}} (\varphi \langle p_{in} \rangle) dx dy = 0, \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde  $\vec{n}$  é o vetor unitário normal ao contorno do elemento  $\Gamma^{e1}$ . A média espacial e temporal da densidade de energia para ondas de flexão em placas finas podem ser aproximadas por uma função básica expressa da seguinte forma:

$$\langle \bar{e} \rangle = \sum_{j=1}^9 \langle \bar{e}_j \rangle \Theta_j, \quad (3.54)$$

sendo que,  $\langle \bar{e}_j \rangle$  são os valores da densidade de energia a ser determinados e  $\Theta_j$  são as funções de forma de Lagrange. Nesta investigação, seram usados elementos quadrilaterais de nove nós para interpolação. Para essa aproximação de elementos finitos, a aproximação dos resíduos ponderados de Galerkin é usada e a função teste,  $\varphi$  é relacionada como (Cook et al., 2001):

$$\varphi = \Theta_i. \quad (3.55)$$

Substituindo as Equações (3.54), (3.55) em (3.53), na qual o balanço de energia é feito, os seguintes termos são definidos:

$$k_{ij}^{(e1)} = \int_{\Omega^{(e1)}} \left( \frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla\Theta_i \cdot \nabla\Theta_j + \eta\omega\Theta_i\Theta_j \right) dx dy, \quad (3.56)$$

$$\langle p_i \rangle^{(e1)} = \int_{\Omega^{(e1)}} (\langle p_{in} \rangle \Theta_i) dx dy, \quad (3.57)$$

$$\langle \bar{q}_i \rangle^{(e1)} = \oint_{\Gamma^{(e1)}} \frac{c_g^2}{\eta\omega} \Theta_i (n \cdot \nabla \langle \bar{e} \rangle) d\Gamma^{(e1)}. \quad (3.58)$$

Esses termos podem ser representados por uma equação matricial elementar, da seguinte forma:

$$\mathbf{K}^{(e1)} \mathbf{e}^{(e1)} = \mathbf{p}^{(e1)} + \mathbf{q}^{(e1)}, \quad (3.59)$$

onde,

$$\mathbf{e}^{(e1)} = \{ \langle \bar{e} \rangle \}^{(e1)} = \{ \langle \bar{e}_1 \rangle \quad \langle \bar{e}_2 \rangle \quad \langle \bar{e}_3 \rangle \quad \dots \quad \langle \bar{e}_9 \rangle \}^T, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots, 9. \quad (3.60)$$

Os termos das Equações (3.56), (3.57) e (3.58) são calculados usando técnica de integração numérica da quadratura de Gauss. Na Equação (3.59) o termo  $\mathbf{K}^{(e1)}$  é a matriz elementar do fluxo de energia,  $\mathbf{p}^{(e1)}$  é o vetor das potências de entrada,  $\mathbf{q}^{(e1)}$  é o vetor dos fluxos de energia entre elementos e  $\langle \bar{e}_i \rangle$  são os valores nodais elementares da densidade de energia.

### 3.2.2 Elemento de Junta para Placas Coplanares

Para problemas de fluxo de energia, as discontinuidades devido às propriedade físicas ou geométricas da estrutura fazem com que a densidade de energia seja descontínua. Entretanto, com descrito por Cho (1993), relações de fluxo de energia e densidade de energia na junta podem ser encontradas através de relações de transmissibilidade de potência (Seção

3.1.2). Essas relações são únicas para cada tipo de configuração estrutural e tipos de ondas que se propagam na estrutura. Considere-se um caso de duas placas semi-infinitas acopladas colinearmente como mostrado na Figura 3.6. Neste caso, pode-se pensar no acoplamento como um elemento finito de junta com dois nós coincidentes, ou seja, um nó 1 pertencente ao elemento de placa semi-infinito 1 coincidente com o nó 2 do elemento de placa semi-infinito 2.

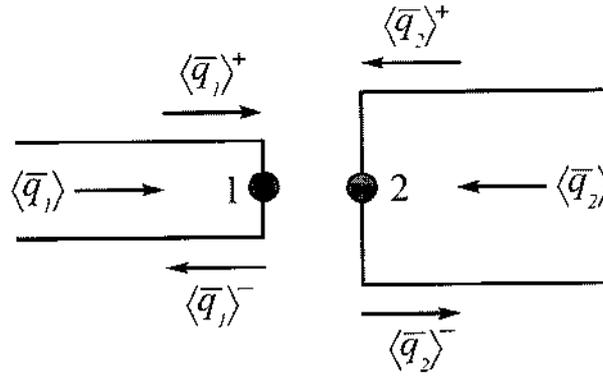


Figura 3.6: Comportamento do fluxo de energia em um elemento de junta.

Assim podemos interpretar a Equação (3.45) como o fluxo de energia na junta expressos em termos das componentes de fluxo que chegam (+) e saem (-) nos nós do elemento de junta.

Os fluxos de energia positivo e negativo em cada nó, estão relacionados com as densidades de energia por (Santos, 2006):

$$\langle \bar{q}_i \rangle^+ = c_{gi} \langle \bar{e}_i \rangle^+, \quad \langle \bar{q}_i \rangle^- = c_{gi} \langle \bar{e}_i \rangle^-. \quad (3.61)$$

Substituindo as Equações (3.61) em (3.50) e (3.51), teremos:

$$\langle \bar{q}_1 \rangle = (r_{11} - 1) c_{g1} \langle \bar{e}_1 \rangle^+ + \tau_{21} c_{g2} \langle \bar{e}_2 \rangle^+, \quad (3.62)$$

$$\langle \bar{q}_2 \rangle = \tau_{12} c_{g1} \langle \bar{e}_1 \rangle^+ + (r_{22} - 1) c_{g2} \langle \bar{e}_2 \rangle^+, \quad (3.63)$$

agrupando as Equações(3.62) e (3.63) e escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{Bmatrix} \langle \bar{q}_1 \rangle \\ \langle \bar{q}_2 \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_{11} - 1) c_{g1} & \tau_{21} c_{g2} \\ \tau_{12} c_{g1} & (r_{22} - 1) c_{g2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \bar{e}_1 \rangle^+ \\ \langle \bar{e}_2 \rangle^+ \end{Bmatrix}. \quad (3.64)$$

De forma análoga ao fluxo de energia (Equação (3.45)), teremos para a densidade de energia uma equação similar dada por:

$$\langle \bar{e}_i \rangle = \langle \bar{e}_i \rangle^- - \langle \bar{e}_i \rangle^+, \quad (3.65)$$

onde  $\langle \bar{e}_i \rangle$ ,  $(i = 1, 2)$  são os valores da densidade de energia nos nós  $i$  do elemento de junta. Na junta, as densidades de energia nos nós 1 e 2 podem ser representadas, como:

$$\langle \bar{e}_1 \rangle = \langle \bar{e}_1 \rangle^- - \langle \bar{e}_1 \rangle^+, \quad (3.66)$$

$$\langle \bar{e}_2 \rangle = \langle \bar{e}_2 \rangle^- - \langle \bar{e}_2 \rangle^+. \quad (3.67)$$

Substituindo-se as Equações (3.61), (3.48) e (3.49) nas Equações (3.66) e (3.67), respectivamente, teremos:

$$\langle \bar{e}_1 \rangle = (r_{11} - 1) \langle \bar{e}_1 \rangle^+ + \tau_{21} \frac{c_{g2}}{c_{g1}} \langle \bar{e}_2 \rangle^+, \quad (3.68)$$

$$\langle \bar{e}_2 \rangle = \tau_{12} \frac{c_{g1}}{c_{g2}} \langle \bar{e}_1 \rangle^+ + (r_{22} - 1) \langle \bar{e}_2 \rangle^+. \quad (3.69)$$

Agrupando as Equações (3.68) e (3.69) estas podem ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \langle \bar{e}_1 \rangle \\ \langle \bar{e}_2 \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_{11} - 1) & \tau_{21} \frac{c_{g2}}{c_{g1}} \\ \tau_{12} \frac{c_{g1}}{c_{g2}} & (r_{22} - 1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \bar{e}_1 \rangle^+ \\ \langle \bar{e}_2 \rangle^+ \end{Bmatrix}. \quad (3.70)$$

Escrevendo o vetor  $\langle \bar{e}_i \rangle^+$  em função de  $\langle \bar{e}_i \rangle$  na Equação (3.70), e substituindo na Equação (3.64) teremos,

$$\begin{Bmatrix} \langle \bar{q}_1 \rangle \\ \langle \bar{q}_2 \rangle \end{Bmatrix} = \frac{1}{(r_{11} + r_{22})} \underbrace{\begin{bmatrix} c_{g1}\tau_{12} & -c_{g2}\tau_{21} \\ -c_{g1}\tau_{12} & c_{g2}\tau_{21} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{Bmatrix} \langle \bar{e}_1 \rangle \\ \langle \bar{e}_2 \rangle \end{Bmatrix}, \quad (3.71)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz de junta para a propagação de ondas transversais entre dois elementos de placa colineares acoplados.

A Equação (3.71) pode ser adicionalmente simplificada, usando-se as relações de reciprocidade onde  $\tau_{12} = \tau_{21}$  e  $r_{11} = r_{22}$ , obtendo-se:

$$\begin{Bmatrix} \langle \bar{q}_1 \rangle \\ \langle \bar{q}_2 \rangle \end{Bmatrix} = \frac{\tau_{12}}{2r_{11}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_{g1} & -c_{g2} \\ -c_{g1} & c_{g2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{Bmatrix} \langle \bar{e}_1 \rangle \\ \langle \bar{e}_2 \rangle \end{Bmatrix}. \quad (3.72)$$

### 3.2.3 Montagem da Matriz Global de Fluxo de Energia

No EFEM a matriz global do sistema é feita através da compatibilidade das variáveis primárias (densidades de energia) e da continuidade das variáveis secundárias (fluxos de energia) nos nós entre os elementos. Dessa forma, se os nós entre os elementos estruturais bidimensionais acoplados não corresponderem a uma junta ou descontinuidade, as variáveis primárias e secundárias são contínuas nesses nós. No entanto, se os nós entre elementos corresponderem a uma junta, o fluxo permanece contínuo enquanto a densidade de energia apresenta uma descontinuidade. Assim, um procedimento especial deve ser adotado para adicionar esse efeito da descontinuidade na matriz global do sistema. Para incorporar esses efeitos da descontinuidade utiliza-se o elemento de junta (Seção 3.2.2).

Da Equação (3.59) podemos escrever a equação matricial do sistema global do EFEM como:

$$\mathbf{Ke} = \mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad (3.73)$$

expandindo o lado direito da Equação (3.73), temos:

$$\mathbf{K}\mathbf{e} = \mathbf{p} + \{ \dots, \mathbf{q}^{(m)}, \mathbf{q}^{(m+1)}, \dots \}^T, \quad (3.74)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(m)} &= \left\{ \langle \bar{q}_1 \rangle^{(m)}, \dots, \langle \bar{q}_n \rangle^{(m)} \right\}^T \\ &= \left\{ \oint_{\Gamma^{(m)}} \Theta_1^{(m)} \langle \bar{q} \rangle^{(m)} d\Gamma^{(m)}, \dots, \oint_{\Gamma^{(m)}} \Theta_n^{(m)} \langle \bar{q} \rangle^{(m)} d\Gamma^{(m)} \right\}^T, \end{aligned} \quad (3.75)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(m+1)} &= \left\{ \langle \bar{q}_1 \rangle^{(m+1)}, \dots, \langle \bar{q}_n \rangle^{(m+1)} \right\}^T \\ &= \left\{ \oint_{\Gamma^{(m+1)}} \Theta_1^{(m+1)} \langle \bar{q} \rangle^{(m+1)} d\Gamma^{(m+1)}, \dots, \oint_{\Gamma^{(m+1)}} \Theta_n^{(m+1)} \langle \bar{q} \rangle^{(m+1)} d\Gamma^{(m+1)} \right\}^T, \end{aligned} \quad (3.76)$$

são os vetores de fluxo de energia para dois elementos adjacentes,  $m$  e  $m+1$ , de duas placas acopladas. As funções de interpolação utilizadas são de ordem  $n$ , a qual é compatível com a ordem da interpolação do elemento de placa a ser utilizado.

Para o acoplamento de dois elementos de placa iguais, ou seja, sem descontinuidades, a compatibilidade das densidades de energia e a continuidade dos fluxos de energia nos nós inter elementos são mantidas por:

$$\mathbf{q}^{(m)} + \mathbf{q}^{(m+1)} = 0, \quad (3.77)$$

$$\mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{e}^{(m+1)}. \quad (3.78)$$

Para o acoplamento de dois elementos de placa com descontinuidades, os nós da junta inter elementos mantém a continuidade dos fluxos de energia, mas as densidade de energia não são mais compatíveis. Logo, a continuidade do fluxo de energia ao longo da junta é mantida pela Equação (3.77), onde da equação matricial do elemento de junta para

propagação de ondas de flexão em placas acopladas coplanares (Equação (3.72)) pode ser re-escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}^{(m)} \\ \mathbf{q}^{(m+1)} \end{Bmatrix} = \frac{\tau_{mm+1}}{2r_{mm+1}} \begin{bmatrix} c_g^{(m)} & -c_g^{(m+1)} \\ -c_g^{(m)} & c_g^{(m+1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}^{(m)} \\ \mathbf{e}^{(m+1)} \end{Bmatrix}, \quad (3.79)$$

onde  $\tau_{mm+1}$  e  $r_{mm+1}$  são os coeficientes de transmissão e reflexão de potência e  $c_g^{(m)}$  e  $c_g^{(m+1)}$  são as velocidade de grupo para os elementos  $m$  e  $m+1$ .

Substituindo as da Equações (3.54) e (3.79) nas Equações (3.75) e (3.76), encontramos a expressão matricial do fluxo de energia através da junta de dois elementos de placa como:

$$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \mathbf{q}^{(m)} \\ \mathbf{q}^{(m+1)} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \frac{\tau_{mm+1}}{2r_{mm}} \begin{Bmatrix} \vdots \\ c_g^{(m)} \sum_{j=1}^n \langle \bar{e}_j \rangle^{(m)} \oint_{\Gamma} \Theta_i \Theta_j d\Gamma - c_g^{(m+1)} \sum_{j=1}^n \langle \bar{e}_j \rangle^{(m+1)} \oint_{\Gamma} \Theta_i \Theta_j d\Gamma \\ -c_g^{(m)} \sum_{j=1}^n \langle \bar{e}_j \rangle^{(m)} \oint_{\Gamma} \Theta_i \Theta_j d\Gamma + c_g^{(m+1)} \sum_{j=1}^n \langle \bar{e}_j \rangle^{(m+1)} \oint_{\Gamma} \Theta_i \Theta_j d\Gamma \\ \vdots \end{Bmatrix}. \quad (3.80)$$

As equações matriciais do elemento de junta, dada pela Equação (3.80), podem ser substituídas no sistema de equações global (Equação (3.73)) resultando em:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{e} &= \mathbf{p} + \{ \dots, \mathbf{q}^{(m)}, \mathbf{q}^{(m+1)}, \dots \}^T \\ &= \mathbf{p} + \underbrace{\frac{\tau_{mm+1}}{2r_{mm}} \begin{bmatrix} \vdots \\ c_g^{(m)} \sum_{j=1}^n \oint_{\Gamma} \Theta_i \Theta_j d\Gamma & -c_g^{(m+1)} \sum_{j=1}^n \oint_{\Gamma} \Theta_i \Theta_j d\Gamma \\ -c_g^{(m)} \sum_{j=1}^n \oint_{\Gamma} \Theta_i \Theta_j d\Gamma & c_g^{(m+1)} \sum_{j=1}^n \oint_{\Gamma} \Theta_i \Theta_j d\Gamma \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \mathbf{e}^{(m)} \\ \mathbf{e}^{(m+1)} \\ \vdots \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Passando-se os termos em  $\mathbf{e}$  do lado direito da Equação (3.81) para o lado esquerdo, obtém-se a equação matricial do sistema como:

$$[\mathbf{K} - \mathbf{J}] \mathbf{e} = \mathbf{p}. \quad (3.82)$$

### 3.2.4 Detecção de Falha Utilizando EFEM

A metodologia do EFEM para detecção de dano, utilizada neste trabalho, consiste em uma proposta original e tem como base a variação dos parâmetros relacionados à propagação de ondas elásticas em estruturas (Santos et al., 2008b). A presença de uma trinca em uma estrutura modifica seu padrão de dissipação de energia. Como uma consequência, estruturas trincadas podem apresentar valores de amortecimento localizados bem altos. Testes experimentais têm mostrado que o crescimento e a nucleação da trinca aumentam o amortecimento estrutural, tornando este fenômeno útil na localização do dano. O fator de amortecimento aumenta com a profundidade da trinca e em alguns casos seu valor pode ser 100% maior do que o amortecimento da estrutura saudável. Nesta seção é apresentado um enfoque para detectar e localizar falhas, o qual usa o conceito de variação dos parâmetros relacionados à propagação de ondas em estruturas. Estas variações são indicadas pelas diferenças no padrão do fluxo de energia entre as estruturas saudável e trincada.

As alterações nas propriedades de dissipação de energia devido a modificações locais das características da estrutura, produzirão variações na sua densidade de energia (Equação (3.44)). Sendo o fluxo de energia (Equação (3.43)) linearmente relacionado com a variação espacial da densidade de energia, podemos usá-lo como um indicador e localizador de dano em estruturas. Assim, um indicador do dano pode ser definido como a diferença entre os fluxos de energia de uma placa saudável e danificada, o qual pode ser representado como:

$$\chi = |\langle \bar{q} \rangle_S - \langle \bar{q} \rangle_D| \quad (3.83)$$

onde,  $\langle \bar{q} \rangle_S$  e  $\langle \bar{q} \rangle_D$ , representam o fluxo de energia da estrutura saudável e danificada, respectivamente. O parâmetro  $\chi$  é denominado indicador do dano.

### 3.3 Método do Elemento Espectral

O Método do Elemento Espectral (Spectral Element Method - SEM), proposto por Doyle (1997), tem como base o cálculo dos deslocamentos da estrutura através da solução analítica das equações diferenciais de propagação de onda no domínio da frequência usando o mesmo conceito matricial do FEM. Para estruturas simples, por exemplo, uma placa plana fina com estrutura homogênea e espessura constante, apenas um único elemento pode ser utilizado para convergência da solução. Desta forma um elemento espectral é equivalente a um número infinito de elementos finitos. Para análises em médias e altas frequências o FEM requer modelos com grande discretização (cerca de 6 a 7 elementos/comprimento de onda) para que as respostas dinâmicas da estrutura sejam convergentes. À medida que ocorre o aumento da discretização, o custo computacional aumenta gradativamente, não podendo ser realizada de modo indefinido. Por isso, o uso de elementos finitos para esse tipo de análise muitas vezes torna-se inviável, sendo necessária a utilização de métodos mais apropriados como: SEA, EFA, EFEM, SEM, etc.

Em estruturas bidimensionais, tais como membranas e placas, a formulação de elemento espectral apresenta maior dificuldade, quando comparada àquelas das estruturas unidimensionais como barras e vigas (Doyle, 1997) e (Danial et al., 1996). Para facilitar a obtenção da matriz de rigidez dinâmica da estrutura e as derivadas espaciais necessárias para cálculo das densidades e fluxos de energia, utilizou-se o programa de manipulação simbólica Mathematica (Carmo et al., 2004).

Nesta seção é apresentada a formulação de elemento espectral de placa plana fina desenvolvida por Lee e Lee (1997). Neste trabalho, o SEM será usado como referência para a verificação dos métodos de energia implementados e proposto. Devido a sua solução dinâmica ser obtida em termos dos deslocamentos, as densidades e fluxos de energia necessários para as comparações com os métodos de energia, são calculadas em termos das densidades de energia potencial e cinética.

### 3.3.1 Elemento Espectral de Placa Plana Fina de Levy

O elemento espectral de placa desenvolvido por Danial *et al.* (1996) e Doyle (1997), está baseado na teoria clássica de placas planas finas (seção 3.1) aplicado à placas do tipo Levy. A placa tipo Levy é uma placa plana fina retangular com duas bordas opostas simplesmente apoiadas como mostrado na Figura 3.7.

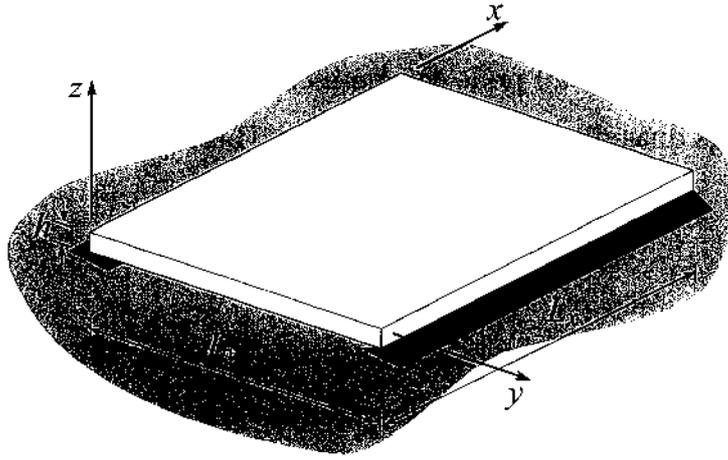


Figura 3.7: Placa plana fina retangulara tipo Levy.

Para facilidade de compreensão a Equação (3.20) é re-escrita aqui:

$$D_c \nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = f(x, y, t),$$

A resposta dinâmica pode ser obtida através de uma superposição de harmônicas como na Equação (3.21), que é re-escrita aqui na forma espectral como:

$$w(x, y, t) = \sum_n \hat{w}(x, y, \omega_n) e^{i\omega_n t},$$

onde  $\hat{w}(x, y, \omega_n)$  é o deslocamento transversal no domínio da frequência,  $\omega_n = n \frac{2\pi}{T}$  é a frequência circular e  $T$  o período, o índice  $n$  será omitido por facilidade de notação.

Substituindo a Equação (3.21) na Equação(3.20) com a ausência de carregamento, obtemos a equação homogênea do movimento para uma placa plana fina na forma espectral (Doyle, 1997), como:

$$\nabla^4 \hat{w} - k^4 \hat{w} = 0, \quad (3.84)$$

onde

$$k^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D_c}. \quad (3.85)$$

O termo espectral  $\hat{w}(x, y, \omega)$  pode ser representado pelo produto das soluções de propagação de onda nas duas direções ortogonais  $x$  e  $y$  (Lee, 2004) da seguinte forma:

$$\hat{w}(x, y, \omega) = \sum_n \hat{X}(x, \omega) \hat{Y}(y, \omega). \quad (3.86)$$

Para o elemento de placa retangular tipo Levy (Szilards, 1974; Lee and Lee, 1999) a função  $\hat{Y}(y, \omega)$  que satisfaz as condições de contorno simplesmente apoiada em duas bordas oposta de  $y = 0$  e  $y = L_y$  é uma soma de harmônicas senoidais expressa por:

$$\hat{Y}(y, \omega) = \sum_n \sin(k_y y), \quad (3.87)$$

onde

$$k_y = \frac{n\pi}{L_y}. \quad (3.88)$$

A solução na direção de  $x$  pode ser escrita como,

$$\hat{X}(x, \omega) = A_x e^{-ik_{x1}x} + B_x e^{ik_{x2}x} + C_x e^{-k_{x1}x} + D_x e^{k_{x2}x}. \quad (3.89)$$

Substituindo-se as Equações (3.87) e (3.89) na Equação (3.86), e em seguida na Equação (3.84), obtém-se uma equação característica em  $k$  cujas raízes são os números de onda  $k_{x1}$  e  $k_{x2}$  dados por:

$$k_{x1} = \sqrt{k^2 - k_y^2}, \quad k_{x2} = \sqrt{k^2 + k_y^2}. \quad (3.90)$$

Logo, a Equação (3.86) pode ser re-escrita como,

$$\hat{w}(x, y, \omega) = \sum_n [A_x e^{-ik_{x1}x} + B_x e^{ik_{x1}x} + C_x e^{-k_{x2}x} + D_x e^{k_{x2}x}] \sin(k_y y). \quad (3.91)$$

A solução de propagação de onda na direção  $x$ , Equação (3.89), pode ser representada como o produto de um vetor linha por um vetor coluna da forma:

$$\hat{X}(x, \omega) = \mathbf{g}\mathbf{a}, \quad (3.92)$$

no qual,

$$\mathbf{g} = \left\{ e^{-ik_{x1}x} \quad e^{ik_{x2}x} \quad e^{-k_{x1}x} \quad e^{k_{x2}x} \right\}, \quad (3.93)$$

$$\mathbf{a} = \left\{ A_x \quad B_x \quad C_x \quad D_x \right\}^T. \quad (3.94)$$

A representação espectral do grau de liberdade de rotação em uma das bordas na direção  $x$  é obtida por:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_x(x, y, \omega) &= \frac{\hat{w}(x, y, \omega)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \hat{X}(x, \omega)}{\partial x} \hat{Y}(y, \omega) \\ &= \hat{\phi}(x, \omega) \hat{Y}(y, \omega). \end{aligned} \quad (3.95)$$

As condições de contorno essenciais são dadas pelo deslocamento transversal e a rotação para uma borda em uma determinada posição  $x$ . Para um elemento tipo Levy nas posições  $x = 0$  e  $x = L_x$ , o deslocamento e rotação nas bordas 1 e 2 do elemento, respectivamente, são expressos como:

$$\hat{w}_1 = \hat{w}(x = 0), \quad \hat{\phi}_1 = \hat{\phi}_x(x = 0), \quad (3.96)$$

$$\hat{w}_2 = \hat{w}(x = L_x), \quad \hat{\phi}_2 = \hat{\phi}_x(x = L_x). \quad (3.97)$$

Substituindo as Equações (3.96) e (3.97) nas Equações (3.92) e (3.95), e escrevendo na forma matricial, obtém-se:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}^{(e1)}} = \hat{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik_1 & ik_1 & -k_2 & k_2 \\ e^{-ik_1 L_x} & e^{ik_1 L_x} & e^{-k_2 L_x} & e^{k_2 L_x} \\ -ik_1 e^{-ik_1 L_x} & ik_1 e^{ik_1 L_x} & -k_2 e^{-k_2 L_x} & k_2 e^{k_2 L_x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{Bmatrix} A_x \\ B_x \\ C_x \\ D_x \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} \quad (3.98)$$

ou,

$$\mathbf{d}^{(e1)} = \hat{Y} \mathbf{H} \mathbf{a}, \quad (3.99)$$

onde  $\mathbf{d}^{(e1)}$  é o vetor de deslocamento espectral nas bordas 1 e 2 do elemento ( $x = 0$  e  $x = L_x$ ),  $\mathbf{H}$  é a matriz dos termos de propagação de onda e  $\mathbf{a}$  é o vetor dos coeficientes da solução de propagação de onda.

As condições de contorno naturais, impostas para a solução da Equação (3.3.1), são dadas pelo momento  $\hat{M}_{xx}$  e pelo cisalhamento de Kirchhoff  $\hat{V}_{xz}$ , os quais, para o modelo de placa tipo Levy, em uma borda na posição  $x$ , podem ser expressos por:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{xx} &= D_c \left[ \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right] \\ &= D_c \left[ \hat{Y} \frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x^2} + \nu \hat{X} \frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial y^2} \right], \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_{xz} &= \hat{Q}_{xz} + \frac{\partial \hat{M}_{xy}}{\partial y} = -D_c \left[ \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial x \partial y^2} \right] \\ &= -D_c \left[ \hat{Y} \frac{\partial^3 \hat{X}}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 (\hat{X} \hat{Y})}{\partial x \partial y^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Nas posições  $x = 0$  e  $x = L_x$  os esforços nas bordas 1 e 2 do elemento, respectivamente, são expressos como:

$$\hat{V}_1 = -\hat{V}_{xz}(x = 0), \quad \hat{M}_1 = -\hat{M}_{xx}(x = 0), \quad (3.102)$$

$$\hat{V}_2 = \hat{V}_{xz}(x = L_x), \quad \hat{M}_2 = \hat{M}_{xx}(x = L_x). \quad (3.103)$$

Substituindo-se as Equações (3.102) e (3.103) nas Equações (3.100) e (3.101), e representando-as na forma matricial, tem-se:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{M}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \hat{M}_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{f}^{(e1)}} = \hat{Y} D_c \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 & -\beta_1 & \beta_2 & -\beta_1 \\ \zeta_1 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_2 \\ -\beta_1 e^{-ik_1 L_x} & \beta_1 e^{ik_1 L_x} & -\beta_2 e^{-k_2 L_x} & \beta_2 e^{k_2 L_x} \\ -\zeta_1 e^{-ik_1 L_x} & \zeta_1 e^{ik_1 L_x} & -\zeta_2 e^{-k_2 L_x} & \zeta_2 e^{k_2 L_x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{Bmatrix} A_x \\ B_x \\ C_x \\ D_x \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} \quad (3.104)$$

ou,

$$\mathbf{f}^{(e1)} = \hat{Y} \mathbf{G} \mathbf{a}, \quad (3.105)$$

onde  $\mathbf{f}^{(e1)}$  é o vetor dos esforços espectrais nas bordas 1 e 2 do elemento ( $x = 0$  e  $x = L_x$ ) e  $\mathbf{G}$  é a matriz dos termos de propagação da onda, onde os termos  $\beta$  e  $\zeta$  são expressos como,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= ik_1^3 + ik_y^2 (2 - \nu) k_1, \\ \beta_2 &= -ik_2^3 + ik_y^2 (2 - \nu) k_2, \\ \zeta_1 &= k_1^2 + \nu k_y^2, \\ \zeta_2 &= -k_2^2 + \nu k_y^2. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Combinando as Equações (3.99) e (3.105), obtemos a relação entre os esforços e os deslocamentos de um elemento espectral de placa plana fina, como:

$$\mathbf{f}^{(e1)} = \underbrace{\mathbf{G} \mathbf{H}^{-1}}_{\mathbf{S}^{(e1)}} \mathbf{d}^{(e1)}, \quad (3.107)$$

onde  $\mathbf{S}^{(e1)}$  é a matriz de rigidez dinâmica espectral do elemento.

A resposta dinâmica dos deslocamentos espectrais, nas bordas do elemento, são obtidas resolvendo o sistema de equações dado por:

$$\mathbf{d}^{(e1)} = [\mathbf{S}^{(e1)}]^{-1} \mathbf{f}^{(e1)}. \quad (3.108)$$

A variação da força de excitação pode ser representada por uma função seno em termos de  $k_y$  na direção  $y$  (Szilards, 1974; Ugural, 1981). Esta representação leva em conta uma força na direção  $z$  e distribuída na direção  $y$  como:

$$\hat{f}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L_y} \int_0^{L_y} f_o \sin(k_y y) dy. \quad (3.109)$$

Retornando a Equação (3.91), e combinando as Equações (3.92) e (3.99), obtemos a resposta dinâmica do elemento espectral interpolada nas direções  $x$  e  $y$ , como:

$$\hat{w}(x, y, \omega) = \sum_n \mathbf{g} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{d}^{(e1)} \sin(k_y y). \quad (3.110)$$

### 3.3.2 Elemento Espectral de Placa Plana Fina de Levy Reforçada

Muitas estruturas em engenharia, tais como as estruturas aeronáuticas, são projetadas utilizando placas finas que possuem vigas como reforçadores para fornecer maior rigidez e resistência sem aumentar muito o peso final da estrutura obtida. A placa reforçada considerada nesse trabalho, consiste em uma placa plana fina retangular, à qual é fixada uma viga em uma das bordas, que atuará como reforçador. Para estruturas dessa natureza, encontramos algumas dificuldades no que diz respeito ao acoplamento dos modelos teóricos da placa com a viga, uma vez que temos uma estrutura consideravelmente flexível conectada a outra relativamente rígida.

Para implementação de reforçadores em placas pode-se usar dois tipos de modelos de conexão. O primeiro modelo considera que o reforçador está elasticamente conectado à placa (Gautier et al., 2003), enquanto o segundo modelo considera que o reforçador é uma

viga que está rigidamente conectada à placa (Ungar, 1961). Neste trabalho utilizaremos a segunda abordagem, onde a força de cisalhamento de Kirchhoff e o momento fletor na borda da placa são iguais aos da força cortante e momento fletor da viga (Donadon et al., 2004; Arruda et al., 2007). A Figura 3.8 mostra o esforço de cisalhamento,  $Q_{xz}$ , e momentos fletores,  $M_{xx}$  e  $M_{xy}$  na borda de um elemento infinitesimal de placa, e os correspondentes esforços de cisalhamento e momentos fletores ao longo de um elemento infinitesimal de viga em duas posições na direção  $x$ . Na posição  $x = 0^-$ , antes da linha neutra da viga, os esforços e momentos da viga serão iguais aos da placa, enquanto na posição  $x = 0^+$ , após a linha neutra da viga, os esforços e momentos serão os da viga mais os da placa.

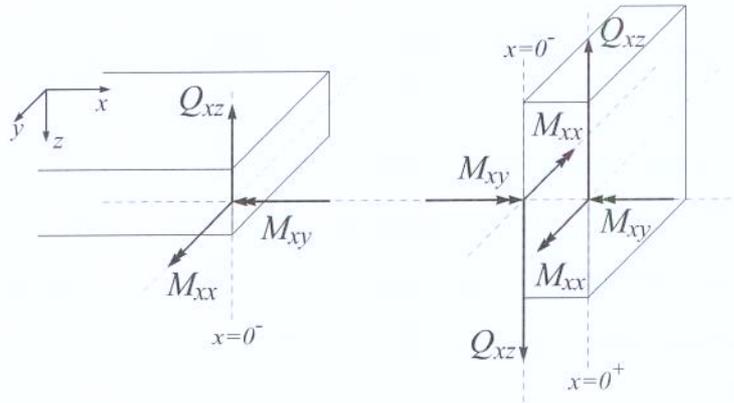


Figura 3.8: Equilíbrio para um modelo de placa com uma borda rigidamente conectada a uma viga.

Devido a uma força de excitação transversal, as ondas geradas na placa são de flexão, que quando chegam na viga geram ondas de flexão e torção ao longo do comprimento. Da Figura (3.8), podem ser escritas as equações do movimento da viga incluindo os esforços e momentos provocados pela flexão da placa, como:

$$E_c I_b \frac{\partial^4 w(y)}{\partial y^4} - \omega^2 \rho S w(y) = \left[ Q_{xz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right]_{x=0^-} - \left[ Q_{xz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right]_{x=0^+}, \quad (3.111)$$

$$G_c J_b \frac{\partial^2 \theta(y)}{\partial y^2} + \omega^2 \rho I_p \theta(y) = [M_{xx}]_{x=0^-} - [M_{xx}]_{x=0^+}, \quad (3.112)$$

onde  $w(y)$  é o deslocamento transversal da viga,  $\theta(y)$  é o ângulo de torção da viga,  $E_c$  é módulo de Young,  $I_b$  é momento de inércia de área,  $G_c$  é o módulo de cisalhamento,  $J_b$  momento de inércia polar de área,  $S$  é área da seção transversal,  $\rho$  é densidade e  $I_p$  é o momento de inércia polar de massa.

Devido às condições de contorno naturais terem sido modificadas, a influência da viga como reforçador pode ser introduzida na posição  $x = 0^+$ , obtendo-se o cisalhamento de Kirchhoff e o momento fletor da placa com reforço da seguinte forma:

$$\hat{V}_{xz}^{(R)} = -D_c \left[ \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial x^3} - (2 - \nu) \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial x \partial y^2} \right] + EI_b \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial y^4} - \omega^2 \rho S \hat{w}, \quad (3.113)$$

$$\hat{M}_{xx}^{(R)} = D_c \left[ \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right] - GJ_b \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial x \partial y^2} - \omega^2 \rho I_p \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}. \quad (3.114)$$

Observa-se que o elemento espectral de placa plana fina de Levy reforçada é na realidade o elemento espectral de placa plana fina de Levy (Seção 3.3.1) alterando-se as condições de contorno naturais na posição onde está localizado o reforçador. Assim, é possível implementar reforçadores em ambas as borda do elemento espectral de placa plana fina de Levy (Arruda et al., 2007).

Considere um elemento espectral de placa plana fina de Levy com um reforço situado na borda 2 do elemento ( $x = L_x$ ) como mostrado na Figure (3.9).

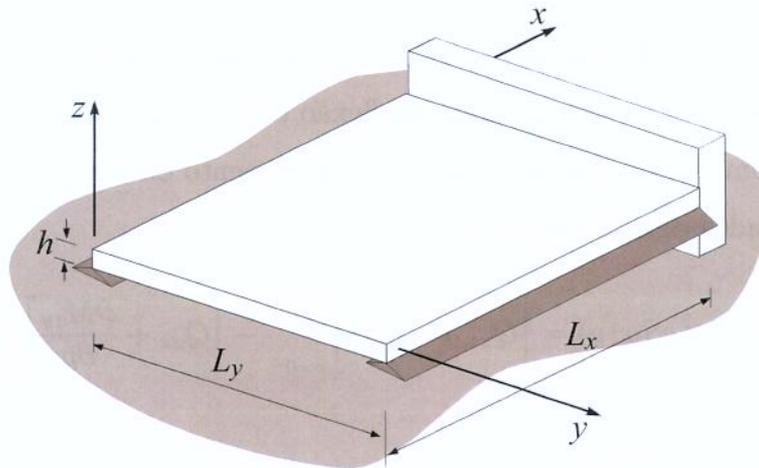


Figura 3.9: Elemento espectral de placa plana fina de Levy com reforço na borda.

A condições de contorno essenciais nas bordas 1 e 2 são as mesmas da placa sem reforço, pois os deslocamentos da viga e da placa mantêm as condições de compatibilidade. As condições de contorno naturais na borda 1 mantêm-se as mesmas da placa sem reforço, mas na borda 2 serão aquelas mostradas nas Equações (3.113) e (3.114).

Substituindo-se a Equação (3.86) nas Equações (3.113) e (3.114), obtém-se:

$$\hat{V}_{xz}^{(R)} = -D_c \left[ \hat{Y} \frac{\partial^3 \hat{X}}{\partial x^3} - (2 - \nu) \frac{\partial^3 (\hat{X} \hat{Y})}{\partial x \partial y^2} \right] + EI_b \hat{X} \frac{\partial^4 \hat{Y}}{\partial y^4} - \omega^2 \rho S \hat{X} \hat{Y}, \quad (3.115)$$

$$\hat{M}_{xx}^{(R)} = D_c \left[ \hat{Y} \frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x^2} + \hat{X} \frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial y^2} \right] - GJ_b \frac{\partial^3 (\hat{X} \hat{Y})}{\partial x \partial y^2} - \omega^2 \rho I_p \hat{Y} \frac{\partial \hat{X}}{\partial x}. \quad (3.116)$$

Nas posição  $x = 0$  as forças e momentos na borda 1 do elemento são expressos como mostrado na Equação (3.102), enquanto na posição  $x = L_x$  as forças e momentos na borda 2 do elemento são agora expressos como:

$$\hat{V}_2 = \hat{V}_{xz}^{(R)}(x = L_x), \quad \hat{M}_2 = \hat{M}_{xx}^{(R)}(x = L_x). \quad (3.117)$$

Substituindo-se as Equações (3.102) nas Equações (3.100) e (3.101), bem como as Equações (3.117) nas Equações (3.115) e (3.116), e representando-as na forma matricial, obtém-se:

$$\mathbf{f}^{(e1)} = \hat{Y} \mathbf{G}_R \mathbf{a}, \quad (3.118)$$

onde  $\mathbf{f}^{(e1)}$  e  $\mathbf{a}$  são os mesmos vetores mostrados na Equação (3.104) enquanto a matriz  $\mathbf{G}_R$  é a matriz dos termos de propagação da onda do elemento de placa com reforço dada por:

$$\mathbf{G}_R = D_c \begin{bmatrix} \beta_1 & -\beta_1 & \beta_2 & -\beta_1 \\ \zeta_1 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_2 \\ \left(-\beta_1 + \frac{\delta_1}{D_c}\right) e^{-ik_1 L_x} & \left(\beta_1 + \frac{\delta_1}{D_c}\right) e^{ik_1 L_x} & \left(-\beta_2 + \frac{\delta_1}{D_c}\right) e^{-k_2 L_x} & \left(\beta_2 + \frac{\delta_1}{D_c}\right) e^{k_2 L_x} \\ \left(-\zeta_1 - i \frac{\delta_2}{D_c} k_1\right) e^{-ik_1 L_x} & \left(-\zeta_1 + i \frac{\delta_2}{D_c} k_1\right) e^{ik_1 L_x} & \left(-\zeta_2 - i \frac{\delta_2}{D_c} k_2\right) e^{-k_2 L_x} & \left(-\zeta_2 + i \frac{\delta_2}{D_c} k_2\right) e^{k_2 L_x} \end{bmatrix}, \quad (3.119)$$

onde os termos  $\delta_1$  e  $\delta_2$  são expressos como,

$$\begin{aligned}\delta_1 &= EI_b k_y^4 - \omega^2 \rho S, \\ \delta_2 &= GI_b k_y^2 - \omega^2 \rho I_p.\end{aligned}\tag{3.120}$$

Combinando as Equações (3.99) e (3.118), obtemos a relação entre os esforços e os deslocamentos de um elemento espectral de placa plana fina com reforço, como:

$$\mathbf{f}^{(e1)} = \underbrace{\mathbf{G}_R \mathbf{H}^{-1}}_{\mathbf{S}_R^{(e1)}} \mathbf{d}^{(e1)},\tag{3.121}$$

onde  $\mathbf{S}_R^{(e1)}$  é a matriz de rigidez dinâmica espectral do elemento de placa com reforço.

A resposta dinâmica dos deslocamentos espectrais nas bordas do elemento, são obtidas resolvendo o sistema de equações dado por:

$$\mathbf{d}^{(e1)} = \left[ \mathbf{S}_R^{(e1)} \right]^{-1} \mathbf{f}^{(e1)}.\tag{3.122}$$

### 3.3.3 Elemento Espectral de Placa Plana Fina de Levy Trincada

Nesta seção, serão abordados conceitos relacionados ao problema de detecção de trinca em um elemento espectral de placa plana fina retangular de Levy. A presença de uma trinca (dano) em uma estrutura introduz uma variação da flexibilidade local, que altera a sua resposta vibracional (Dimarogonas, 1996). Por exemplo, o comportamento de uma estrutura que contém uma trinca está relacionado a sua rigidez, que varia em função das características da trinca, tais como, profundidade, modo de abertura, orientação dos esforços, etc. O método de detecção de trincas utilizando o SEM, apresentado por Krawczuk, Palacz e Ostachowicz (2002) tem como base a representação da trinca por uma flexibilidade introduzida no modelo espectral de placa. Essa flexibilidade é estabelecida pelo Teorema de Castigliano e pelas leis da Mecânica da Fratura. Assim, será apresentado de forma sucinta o elemento espectral de trinca, uma vez que sua formulação já se encontra na literatura.

Segundo os autores, para o desenvolvimento do elemento espectral de placa com uma trinca, algumas considerações devem ser feitas: a trinca fica aberta, é não-propagante e está

posicionada transversalmente à placa como apresentado na Figure (3.10). O comprimento da placa na direção  $x$  é  $L_x$  e na direção  $y$  é  $L_y$ , com espessura  $h$ . A localização da trinca é dada pela distância  $L_1$  tendo com referência a borda em  $x = 0$  e o comprimento da trinca é dado por  $2c$ . O efeito da trinca é introduzido no elemento espectral de placa trincado através das condições de continuidade da rotação na posição da trinca, de forma a introduzir a descontinuidade na rotação.

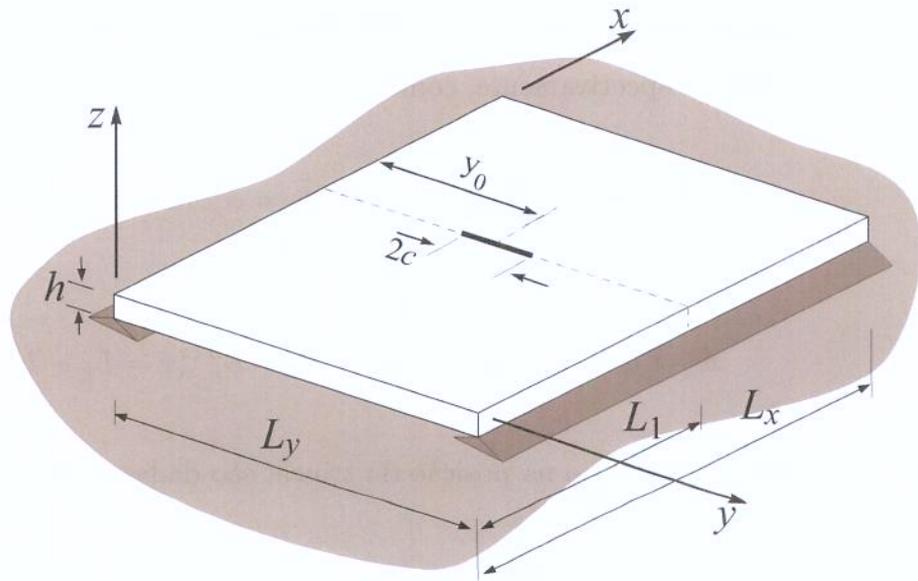


Figura 3.10: Modelo espectral de placa com uma trinca

Tendo como base o elemento espectral de placa plana fina, visto na Seção (3.3.1), os deslocamentos espectrais para a placa trincada mostrado na Figure (3.10), assumem as seguintes formas:

para lado esquerdo da placa,  $0 \leq x \leq L_1$  e  $0 \leq y \leq L_y$ , tem-se,

$$\hat{w}^{(l)}(x, y) = \sum_n [A_{x1} e^{-ik_{x1}x} + B_{x1} e^{ik_{x2}x} + C_{x1} e^{-k_{x1}x} + D_{x1} e^{k_{x2}x}] \sin(k_y y); \quad (3.123)$$

e para o lado direito da placa  $0 \leq x \leq (L_x - L_1)$  e  $0 \leq y \leq L_y$ , tem-se,

$$\hat{w}^{(r)}(x, y) = \sum_n [A_{x2} e^{-ik_{x1}(L_1+x)} + B_{x2} e^{ik_{x2}(L_1+x)} + C_{x2} e^{-k_{x1}(L_1+x)} + D_{x2} e^{k_{x2}(L_1+x)}] \sin(k_y y). \quad (3.124)$$

As constantes  $A_{x1}$ ,  $B_{x1}$ ,  $C_{x1}$ ,  $D_{x1}$ ,  $A_{x2}$ ,  $B_{x2}$ ,  $C_{x2}$  e  $D_{x2}$  podem ser calculados usando-se as condições de contorno essenciais dadas pelo deslocamento transversal e a rotação para uma borda da placa em uma determinada posição  $x$ . Para um elemento de placa tipo Levy trincado, os deslocamentos e rotações nas bordas esquerda ( $x = 0$ ) e direita ( $x = L_x - L_1$ ) podem ser escritos, respectivamente, como:

$$\hat{w}_1 = \hat{w}^{(l)}(x = 0), \quad \hat{\phi}_1 = \hat{\phi}_x^{(l)}(x = 0), \quad (3.125)$$

$$\hat{w}_2 = \hat{w}^{(r)}(x = L_x - L_1), \quad \hat{\phi}_2 = \hat{\phi}_x^{(r)}(x = L_x - L_1). \quad (3.126)$$

As condições de equilíbrio na posição da trinca, são dadas da seguinte forma:

$$\hat{w}^{(l)}(x = L_1) = \hat{w}^{(r)}(x = 0), \quad (3.127)$$

$$\hat{M}_{xx}^{(l)}(x = L_1) = \hat{M}_{xx}^{(r)}(x = 0), \quad (3.128)$$

$$\hat{V}_{xz}^{(l)}(x = L_1) = \hat{V}_{xz}^{(r)}(x = 0), \quad (3.129)$$

$$\hat{\phi}_x^{(l)} - \hat{\phi}_x^{(r)} = \vartheta \hat{M}_{xx}^{(l)}(x = L_1). \quad (3.130)$$

onde,  $\vartheta$  é a flexibilidade da placa ao longo da trinca, que será abordado mais adiante.

Substituindo as Equações (3.125) a (3.130) nas Equações (3.123) e (3.124) e representando na forma matricial, tem-se:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}^{(e1)}} = \hat{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_T} \underbrace{\begin{pmatrix} A_{x1} \\ B_{x1} \\ C_{x1} \\ D_{x1} \\ A_{x2} \\ B_{x2} \\ C_{x2} \\ D_{x2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}}, \quad (3.131)$$

ou seja,

$$\mathbf{d}^{(e1)} = \mathbf{H}_T \mathbf{a}, \quad (3.132)$$

onde  $\mathbf{d}^{(e1)}$  é o vetor de deslocamento espectral,  $\mathbf{a}$  é o vetor de coeficientes da solução de propagação de onda,  $\mathbf{H}_T$  é a matriz dos termos de propagação de onda do elemento espectral com trinca e as submatrizes  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{H}_3$  e  $\mathbf{H}_4$  são descritas como:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -k_{x1} & ik_{x2} & -k_{x1} & k_{x2} \end{bmatrix}, \quad (3.133)$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} e^{-ik_{x1}L_1} & e^{ik_{x2}L_1} \\ -e^{-ik_{x1}L_1} (D_c \vartheta k_{x1}^2 + ik_{x1} + D_c k_y^2 \vartheta \nu) & -e^{ik_{x2}L_1} (D_c \vartheta k_{x2}^2 - ik_{x2} + D_c k_y^2 \vartheta \nu) \\ -D_c e^{-ik_{x1}L_1} (k_{x1}^2 + k_y^2 \nu) & -D_c e^{ik_{x2}L_1} (k_{x2}^2 + k_y^2 \nu) \\ -iD_c e^{-ik_{x1}L_1} k_{x1} (k_{x1}^2 - k_y^2 (\nu - 2)) & iD_c e^{ik_{x2}L_1} k_{x2} (k_{x2}^2 - k_y^2 (\nu - 2)) \\ e^{-k_{x1}L_1} & e^{k_{x2}L_1} \\ e^{-k_{x1}L_1} (D_c \vartheta k_{x1}^2 - k_{x1} - D_c k_y^2 \vartheta \nu) & e^{k_{x2}L_1} (D_c \vartheta k_{x2}^2 + k_{x2} - D_c k_y^2 \vartheta \nu) \\ D_c e^{-k_{x1}L_1} (k_{x1}^2 - k_y^2 \nu) & D_c e^{k_{x2}L_1} (k_{x2}^2 - k_y^2 \nu) \\ D_c e^{-k_{x1}L_1} k_{x1} (k_{x1}^2 + k_y^2 (\nu - 2)) & -D_c e^{k_{x2}L_1} k_{x2} (k_{x2}^2 + k_y^2 (\nu - 2)) \end{bmatrix}, \quad (3.134)$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} -e^{-ik_{x1}L_1} & -e^{ik_{x2}L_1} \\ ie^{-ik_{x1}L_1}k_{x1} & -ie^{ik_{x2}L_1}k_{x2} \\ D_c e^{-ik_{x1}L_1}(k_{x1}^2 + k_y^2\nu) & D_c e^{ik_{x2}L_1}(k_{x2}^2 + k_y^2\nu) \\ iD_c e^{-ik_{x1}L_1}k_{x1}(k_{x1}^2 - k_y^2(\nu - 2)) & -iD_c e^{ik_{x2}L_1}k_{x2}(k_{x2}^2 - k_y^2(\nu - 2)) \\ -e^{-k_{x1}L_1} & -e^{k_{x2}L_1} \\ e^{-k_{x1}L_1}k_{x1} & -e^{k_{x2}L_1}k_{x2} \\ D_c e^{-k_{x1}L_1}(k_y^2\nu - k_{x1}^2) & -D_c e^{k_{x2}L_1}(k_{x2}^2 - k_y^2\nu) \\ -D_c e^{-k_{x1}L_1}k_{x1}(k_{x1}^2 + k_y^2(\nu - 2)) & D_c e^{k_{x2}L_1}k_{x2}(k_{x2}^2 + k_y^2(\nu - 2)) \end{bmatrix}, \quad (3.135)$$

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} e^{-ik_{x1}L_x} & e^{ik_{x2}L_x} & e^{-k_{x1}L_x} & e^{k_{x2}L_x} \\ -ie^{-ik_{x1}L_x}k_{x1} & ie^{ik_{x2}L_x}k_{x2} & -e^{-k_{x1}L_x}k_{x1} & e^{k_{x2}L_x}k_{x2} \end{bmatrix}. \quad (3.136)$$

As condições de contorno naturais são dadas pelas Equações (3.100) e (3.101) para uma borda da placa em uma determinada posição  $x$ . Para um elemento de placa tipo Levy trincado os momentos e esforços de cisalhamento nas bordas esquerda ( $x = 0$ ) e direita ( $x = L_x - L_1$ ) podem ser escritos, respectivamente, como:

$$\hat{V}_1 = -\hat{V}_{xz}^{(l)}(x = 0), \quad \hat{M}_1 = -\hat{M}_{xx}^{(l)}(x = 0), \quad (3.137)$$

$$\hat{V}_2 = \hat{V}_x^{(r)}(x = L_x - L_1), \quad \hat{M}_2 = \hat{M}_{xx}^{(r)}(x = L_x - L_1). \quad (3.138)$$

Substituindo as equações Equações (3.137) e (3.138) nas Equações (3.100) e (3.101) e escrevendo na forma matricial, obtém-se:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{M}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \hat{M}_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{f}^{(e1)}} = \hat{Y} D_c \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_T} \underbrace{\begin{Bmatrix} A_{x1} \\ B_{x1} \\ C_{x1} \\ D_{x1} \\ A_{x2} \\ B_{x2} \\ C_{x2} \\ D_{x2} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}}, \quad (3.139)$$

ou seja,

$$\mathbf{f}^{(e1)} = \mathbf{G}_T \mathbf{a}, \quad (3.140)$$

onde  $\mathbf{f}^{(e1)}$  é o vetor de esforços espectrais,  $\mathbf{G}_T$  é a matriz dos termos de propagação de onda do elemento spectral com trinca e as submatrizes  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$  descritas na Equação (3.139), são escritas como:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} -ik_{x1} (k_{x1}^2 - k_y^2(\nu - 2)) & ik_{x2} (k_{x2}^2 - k_y^2(\nu - 2)) \\ -k_{x1}^2 - k_y^2\nu & -k_{x2}^2 - k_y^2\nu \\ k_{x1} (k_{x1}^2 + k_y^2(\nu - 2)) & -k_{x2} (k_{x2}^2 + k_y^2(\nu - 2)) \\ k_{x1}^2 - k_y^2\nu & k_{x2}^2 - k_y^2\nu \end{bmatrix}, \quad (3.141)$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} ie^{-ik_{x1}Lx} k_{x1} (k_{x1}^2 - k_y^2(\nu - 2)) & -ie^{ik_{x2}Lx} k_{x2} (k_{x2}^2 - k_y^2(\nu - 2)) \\ e^{-ik_{x1}Lx} (k_{x1}^2 + k_y^2\nu) & e^{ik_{x2}Lx} (k_{x2}^2 + k_y^2\nu) \\ -e^{-k_{x1}Lx} k_{x1} (k_{x1}^2 + k_y^2(\nu - 2)) & e^{k_{x2}Lx} k_{x2} (k_{x2}^2 + k_y^2(\nu - 2)) \\ e^{-k_{x1}Lx} (k_y^2\nu - k_{x1}^2) & e^{k_{x2}Lx} (k_y^2\nu - k_{x2}^2) \end{bmatrix}. \quad (3.142)$$

Combinando as Equações (3.131) e (3.139), obtemos a relação entre os esforços nodais e os deslocamentos nodais do elemento spectral trincado, dada por:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{M}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \hat{M}_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{f}^{(e1)}} = D_c \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_T} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_4 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathbf{d}^{(e1)}} \begin{Bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.143)$$

Devido aos termos nulos do vetor  $\mathbf{d}^{(e1)}$ , as correspondentes colunas da matriz  $\mathbf{S}_T$  serão eliminadas, reduzindo a ordem de ambos. Assim, a Equação (3.143) pode ser re-escrita como:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{M}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \hat{M}_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{f}^{(e1)}} = \mathbf{S}_T^{(e1)} \underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}^{(e1)}}, \quad (3.144)$$

onde  $\mathbf{S}_T^{(e1)}$  é a matriz de rigidez dinâmica espectral do elemento de placa com uma trinca. Os deslocamentos espectrais em função dos esforços nas bordas do elemento podem ser obtidos por:

$$\mathbf{d}^{(e1)} = \left[ \mathbf{S}_T^{(e1)} \right]^{-1} \mathbf{f}^{(e1)}. \quad (3.145)$$

### Flexibilidade ao longo da trinca

Para análise de propagação de ondas em placas trincadas, o comportamento elástico da placa na localização da trinca pode ser considerado como uma flexibilidade local que provoca uma variação na rigidez ao longo da trinca (Krawczuk et al., 2004). A Figura (3.11)(a) mostra uma placa plana elástica de espessura  $h$  e comprimento infinito contendo uma trinca penetrando parte da sua espessura (Rice and Levy, 1971). A uma distância remota da posição da trinca, a placa está sujeita a carregamentos que geram flexão pura em torno do eixo  $y$ .

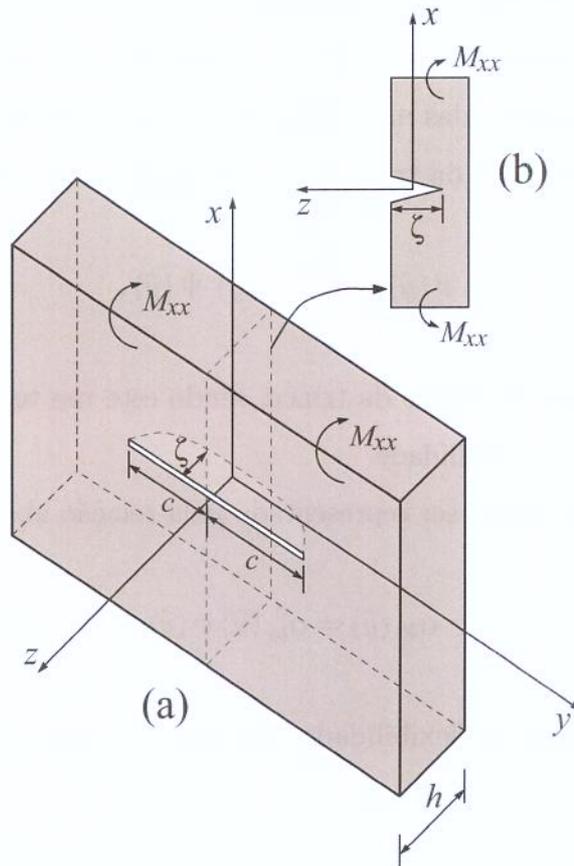


Figura 3.11: Modelo da trinca:(a) tensão em um sólido; (b) deformação-plana em uma tira.

Uma análise exata do fator de intensidade de tensão ao longo da trinca é dificultada pela natureza tridimensional do problema. Assim, uma análise aproximada foi desenvolvida por Rice and Levi (1972), a qual se aproxima da solução exata quando o comprimento da trinca,  $2c$ , é grande comparado com a espessura da placa. A aproximação baseia-se fortemente na conhecida solução de uma tira trincada na borda em deformação-plana como mostrado na Figura (3.11)(b), sujeita a um momento  $M_{xx}$  por unidade de comprimento na direção da restrição da deformação-plana. O aumento da flexibilidade devido a introdução da trinca, a partir da solução da tira trincada na borda, é usada como uma base para a análise aproximada da trinca. Observe que à configuração de deformação-plana na Figura (3.11)(b) corresponde a configuração da Figura (3.11)(a) no caso especial para o qual o comprimento da trinca  $2c$  é infinito e a profundidade da trinca  $\zeta$  é constante.

Neste trabalho, não foi explorada a formulação para obtenção destas relações de flexibilidade. Assim, utilizaremos aqui a forma final da equação de flexibilidade e suas funções de correção conforme apresentadas na referência (Krawczuk et al., 2004).

A flexão em ambos os lados da trinca pode ser expressa da seguinte forma:

$$\vartheta(\hat{y}) = \frac{6h}{L_y} \alpha_{bb}(\hat{y}) \Psi(\hat{y}), \quad (3.146)$$

onde  $\alpha_{bb}(\hat{y})$  é o coeficiente de flexão da trinca, sendo este um termo adimensional e  $\Psi(\hat{y})$  é a função de correção da flexibilidade.

O coeficiente de flexão pode ser representado pela relação abaixo:

$$\alpha_{bb}(\hat{y}) = \alpha_{bb}^0(\hat{y}) \psi(\hat{y}), \quad (3.147)$$

onde  $\alpha_{bb}^0(\hat{y})$  é o coeficiente de flexibilidade no centro da trinca e é expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \alpha_{bb}^0(\hat{y}) = \frac{1}{h} \int_0^\zeta \left[ \left( \frac{\zeta}{h} \right)^{1/2} \left( 1,99 - 2,47 \left( \frac{\zeta}{h} \right) + 12,97 \left( \frac{\zeta}{h} \right)^2 - 23,117 \left( \frac{\zeta}{h} \right)^3 \right. \right. \\ \left. \left. + 24,80 \left( \frac{\zeta}{h} \right)^4 \right) \right]^2 d\zeta, \end{aligned} \quad (3.148)$$

onde  $\zeta$  é a profundidade da trinca, sendo válida no intervalo de  $0 < \frac{\zeta}{h} < 0,7$  (Khadem and Rezaee, 2000) e  $\psi(\hat{y})$  é a função de forma da trinca dada por:

$$\psi(\hat{y}) = e^{-[(\hat{y}-\hat{y}_0)e]^2/2\hat{c}^2}, \quad (3.149)$$

onde  $\hat{y} = \frac{y}{L_y}$ ,  $\hat{y}_0 = \frac{y_0}{L_y}$  é a posição adimensional do centro da trinca e  $2\hat{c} = \frac{2c}{L_y}$  é o comprimento adimensional da trinca.

A função de correção é expressa da seguinte forma:

$$\Psi(\hat{y}) = \frac{2c/h + 3(\nu + 3)(1 - \nu)\alpha_{bb}^0[1 - \psi(\hat{y})]}{2c/h + 3(\nu + 3)(1 - \nu)\alpha_{bb}^0}. \quad (3.150)$$

### 3.3.4 Montagem da Matriz de Rigidez Global Espectral

A Figura (3.12) mostra a estrutura formada por dois elementos espectrais de placa simples, com uma força de excitação aplicada nas bordas de conexão dos elementos. Devido à condição particular do modelo de placa tipo Levy, a aplicação de forças de excitação e a conexão entre elementos só podem ser feitas nas bordas ao longo do eixo  $y$ , enquanto o incremento de novos elementos só pode ser na direção  $x$ .

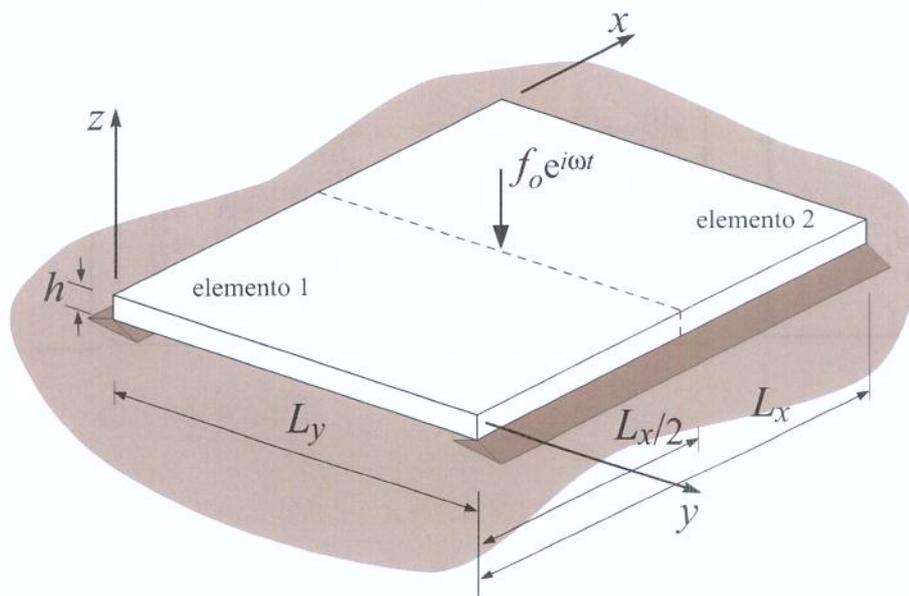


Figura 3.12: Montagem de dois elementos espectrais de placa tipo Levy

A matriz de rigidez global do modelo mostrado na Figure (3.12) sem aplicar as condições de contorno pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \hat{V}_0^{(1)} \\ \hat{M}_0^{(1)} \\ \hat{V}_{L_x/2}^{(1)} \\ \hat{M}_{L_x/2}^{(1)} \\ \hat{V}_{L_x/2}^{(2)} \\ \hat{M}_{L_x/2}^{(2)} \\ \hat{V}_{L_x}^{(2)} \\ \hat{M}_{L_x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{11}^{(1)} & \mathbf{s}_{12}^{(1)} & \mathbf{s}_{13}^{(1)} & \mathbf{s}_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{s}_{21}^{(1)} & \mathbf{s}_{22}^{(1)} & \mathbf{s}_{23}^{(1)} & \mathbf{s}_{24}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{s}_{31}^{(1)} & \mathbf{s}_{32}^{(1)} & \mathbf{s}_{33}^{(1)} & \mathbf{s}_{34}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{s}_{41}^{(1)} & \mathbf{s}_{42}^{(1)} & \mathbf{s}_{43}^{(1)} & \mathbf{s}_{44}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{s}_{11}^{(2)} & \mathbf{s}_{12}^{(2)} & \mathbf{s}_{13}^{(2)} & \mathbf{s}_{14}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{s}_{21}^{(2)} & \mathbf{s}_{22}^{(2)} & \mathbf{s}_{23}^{(2)} & \mathbf{s}_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{s}_{31}^{(2)} & \mathbf{s}_{32}^{(2)} & \mathbf{s}_{33}^{(2)} & \mathbf{s}_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{s}_{41}^{(2)} & \mathbf{s}_{42}^{(2)} & \mathbf{s}_{43}^{(2)} & \mathbf{s}_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{w}_0^{(1)} \\ \hat{\phi}_0^{(1)} \\ \hat{w}_{L_x/2}^{(1)} \\ \hat{\phi}_{L_x/2}^{(1)} \\ \hat{w}_{L_x/2}^{(2)} \\ \hat{\phi}_{L_x/2}^{(2)} \\ \hat{w}_{L_x}^{(2)} \\ \hat{\phi}_{L_x}^{(2)} \end{Bmatrix}, \quad (3.151)$$

onde  $\mathbf{s}_{ij}^{(e1)}$  indica o elemento da matriz  $\mathbf{S}$  na posição  $ij$  pertencente ao elemento espectral  $e1$ . Para os elementos dos vetores de esforço  $\mathbf{f}$  e deslocamento  $\mathbf{d}$ , o índice superior refere-se ao número do elemento enquanto o índice inferior refere-se à coordenada  $x$  da borda do elemento espectral.

Aplicando as condições de contorno, de compatibilidade e de continuidade na borda de conexão entre os dois elementos ( $x = L_x/2$ ), obtemos a matriz de rigidez global para dois elementos espectrais de placa tipo Levy, de dimensões  $x = L_x/2$  e  $y = L_y$  com uma força de excitação em  $x = L_x/2$ , como:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hat{V}_{L_x/2}^{(1)} - \hat{V}_{L_x/2}^{(2)} = \hat{f} \\ \hat{M}_{L_x/2}^{(1)} - \hat{M}_{L_x/2}^{(2)} = 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}}_{\mathbf{f}} = \underbrace{\left[ \begin{array}{cccccc} \mathbf{s}_{11}^{(1)} & \mathbf{s}_{12}^{(1)} & \mathbf{s}_{13}^{(1)} & \mathbf{s}_{14}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{s}_{21}^{(1)} & \mathbf{s}_{22}^{(1)} & \mathbf{s}_{23}^{(1)} & \mathbf{s}_{24}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{s}_{31}^{(1)} & \mathbf{s}_{32}^{(1)} & \mathbf{s}_{33}^{(1)} + \mathbf{s}_{11}^{(2)} & \mathbf{s}_{34}^{(1)} + \mathbf{s}_{12}^{(2)} & \mathbf{s}_{13}^{(2)} & \mathbf{s}_{14}^{(2)} \\ \mathbf{s}_{41}^{(1)} & \mathbf{s}_{42}^{(1)} & \mathbf{s}_{43}^{(1)} + \mathbf{s}_{21}^{(2)} & \mathbf{s}_{44}^{(1)} + \mathbf{s}_{22}^{(2)} & \mathbf{s}_{23}^{(2)} & \mathbf{s}_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_{31}^{(2)} & \mathbf{s}_{32}^{(2)} & \mathbf{s}_{33}^{(2)} & \mathbf{s}_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_{41}^{(2)} & \mathbf{s}_{42}^{(2)} & \mathbf{s}_{43}^{(2)} & \mathbf{s}_{44}^{(2)} \end{array} \right]}_{\mathbf{S}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \hat{w}_0^{(1)} \\ \hat{\phi}_0^{(1)} \\ \hat{w}_{L_x/2}^{(1)} = \hat{w}_{L_x/2}^{(2)} \\ \hat{\phi}_{L_x/2}^{(1)} = \hat{\phi}_{L_x/2}^{(2)} \\ \hat{w}_{L_x}^{(2)} \\ \hat{\phi}_{L_x}^{(2)} \end{array} \right\}}_{\mathbf{d}}, \quad (3.152)$$

ou seja,

$$\mathbf{f} = \mathbf{Sd}. \quad (3.153)$$

### 3.3.5 Análise de Energia pelo Elemento Espectral

Tendo em vista que a proposta do trabalho é observar o comportamento da energia vibracional em placas planas finas retangulares, faz-se necessário o cálculo da densidade e do fluxo de energia a partir das variáveis de deslocamento e esforços espectrais. Para tal, basta transformar as equações de densidade e fluxo de energia, apresentadas na seção (3.1) no domínio do tempo para o domínio da frequência obtendo-se, respectivamente,

$$\langle e \rangle = \frac{1}{4} D \left[ \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \hat{w}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \hat{w}^*}{\partial y^2} + 2\nu \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \hat{w}^*}{\partial y^2} + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \hat{w}^*}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1}{4} \rho h \omega^2 [\hat{w} \hat{w}^*], \quad (3.154)$$

$$\langle q_x \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ i\omega D_c \left( -\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \hat{w} \hat{w}^* + \left[ \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right] \frac{\partial \hat{w}^*}{\partial x} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x \partial y} \frac{\partial \hat{w}^*}{\partial y} \right) \right\}, \quad (3.155)$$

$$\langle q_y \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ i\omega D_c \left( -\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \hat{w} \hat{w}^* + \left[ \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \right] \frac{\partial \hat{w}^*}{\partial y} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y \partial x} \frac{\partial \hat{w}^*}{\partial x} \right) \right\}. \quad (3.156)$$

O método espectral, apresentado nessa seção, servirá de base na resolução da equação diferencial de energia aproximada Equação (3.44). Tal método também será aplicado nos modelos de placas reforçadas e danificadas com o intuito de validar modelos que utilizam o EFA como ferramenta na análise estrutural.

### 3.4 Método do Elemento Espectral de Energia

Método do Elemento Espectral de Energia (Energy Spectral Element Method - ESEM) foi proposto inicialmente por Santos (2006) para estruturas unidimensionais tipo barra e viga. O ESEM tem como base a metodologia matricial do SEM, aplicada na equação diferencial aproximada de energia (EFA), sendo sua solução ainda uma aproximação quando comparada à solução exata do SEM. Um das propostas desse trabalho é aplicar este conceito para uma estrutura bidimensional (placa plana fina) expandindo os estudos sobre o ESEM a outros tipos de estruturas.

#### 3.4.1 Elemento Espectral de Energia para Placa Plana Fina de Levy

A equação diferencial de energia aproximada, para propagação de ondas de flexão em uma placa plana fina retangular (Equação (3.32)), pode ser escrita na forma homogênea como:

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle \bar{e} \rangle (x, y, \omega) + \omega\eta \langle \bar{e} \rangle (x, y, \omega) = 0. \quad (3.157)$$

Simplificando a Equação (3.157), temos:

$$\nabla^2 \langle \bar{e} \rangle - \psi^2 \langle \bar{e} \rangle = 0, \quad (3.158)$$

onde

$$\psi^2 = \left( \frac{\eta\omega}{c_g} \right)^2. \quad (3.159)$$

A solução da Equação (3.158) pode ser escrita como o produto das soluções de propagação de onda nas duas direções  $x$  e  $y$  como:

$$\langle \bar{e} \rangle (x, y, \omega) = \sum_n X_E(x, \omega) Y_E(x, \omega). \quad (3.160)$$

Para um elemento de placa tipo Levy (Szilards, 1974; Ugural, 1981), a função  $Y_E(x, \omega)$  que satisfaz as condições de contorno de fluxo de energia nulo na direção  $y$  é uma soma de harmônicas do tipo cosseno, expressa por:

$$Y_E(y, \omega) = \sum_n \cos(k_y y). \quad (3.161)$$

A solução de propagação de onda da densidade de energia vibracional na direção  $x$  pode ser escrita como:

$$X_E(x, \omega) = G_x e^{k_E x} + H_x e^{-k_E x}, \quad (3.162)$$

onde o número de onda  $k_E$  é a raiz da equação característica obtida através da substituição das Equações (3.161) e (3.162) nas Equações (3.160) e (3.159), obtendo-se:

$$k_E = \sqrt{\psi^2 + k_y^2}. \quad (3.163)$$

Logo, a Equação (3.160) pode ser re-escrita como,

$$\langle \bar{e} \rangle (x, y, \omega) = \sum_n [G_x e^{k_E x} + H_x e^{-k_E x}] \cos(k_y y). \quad (3.164)$$

A solução de propagação de onda na direção  $x$  (Equação (3.162)), pode ser representada como o produto de um vetor linha por um vetor coluna da forma:

$$X_E(x, \omega) = \mathbf{g}_E \mathbf{a}_E \quad (3.165)$$

no qual,

$$\mathbf{g}_E = \left\{ e^{k_E x} \quad e^{-k_E x} \right\}, \quad (3.166)$$

$$\mathbf{a}_E = \left\{ G_x \quad H_x \right\}^T. \quad (3.167)$$

A condição de contorno essencial é dada pela densidade de energia da borda da placa em uma determinada posição  $x$ . Para um elemento tipo Levy nas posições  $x = 0$  e  $x = L_x$  as densidades de energia nas bordas 1 e 2 do elemento, respectivamente, são expressos como:

$$\langle \bar{e}_1 \rangle = \langle \bar{e} \rangle (x = 0), \quad \langle \bar{e}_2 \rangle = \langle \bar{e} \rangle (x = L_x). \quad (3.168)$$

Substituindo as Equações (3.168) nas Equações (3.165) e (3.160), e escrevendo na forma matricial obtém-se:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \langle \bar{e}_1 \rangle \\ \langle \bar{e}_2 \rangle \end{array} \right\}}_{\mathbf{e}_E^{(e1)}} = Y_E \underbrace{\left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ e^{k_E L_x} & e^{-k_E L_x} \end{array} \right]}_{\mathbf{H}_E} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} G_x \\ H_x \end{array} \right\}}_{\mathbf{a}_E} \quad (3.169)$$

ou,

$$\mathbf{e}_E^{(e1)} = Y_E \mathbf{H}_E \mathbf{a}_E, \quad (3.170)$$

onde  $\mathbf{e}_E^{(e1)}$  é o vetor de densidade de energia nas bordas 1 e 2 do elemento,  $\mathbf{H}_E$  é a matriz dos termos de propagação de onda e  $\mathbf{a}_E$  é o vetor dos coeficientes da solução de propagação de onda.

As condições de contorno naturais impostas para a solução da Equação (3.157), são dadas pelos fluxos de energia presentes no modelo de placa, os quais podem ser representados para uma borda em uma determinada posição  $x$ , da seguinte forma:

$$\langle \bar{q}_x \rangle = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \frac{\partial \langle \bar{e} \rangle (x, y, \omega)}{\partial x}. \quad (3.171)$$

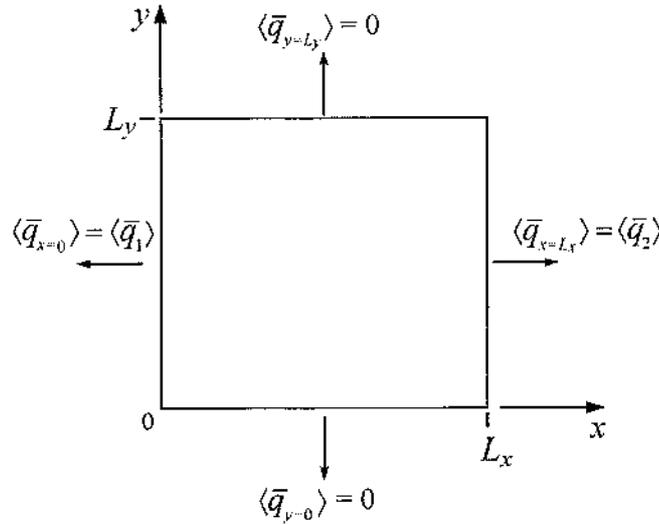


Figura 3.13: Condições de contorno naturais do elemento espectral de energia para placa tipo Levy.

Assim, da Figura (3.13), observa-se que as condições de contorno naturais para uma placa tipo Levy, nas posições  $x = 0$  e  $x = L_x$ , são dadas pelos fluxos de energia nas bordas 1 e 2 do elemento como:

$$\langle \bar{q}_1 \rangle = \langle \bar{q}_x \rangle (x = 0), \quad \langle \bar{q}_2 \rangle = \langle \bar{q}_x \rangle (x = L_x). \quad (3.172)$$

Substituindo-se as Equações (3.172) na Equação (3.171), e representando na forma matricial, obtém-se:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \langle \bar{q}_1 \rangle \\ \langle \bar{q}_2 \rangle \end{Bmatrix}}_{\mathbf{q}_E^{(e1)}} = Y_E \frac{c_g^2 k_E}{\eta\omega} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -e^{k_E L_x} & e^{-k_E L_x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_E} \underbrace{\begin{Bmatrix} G_x \\ H_x \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}_E} \quad (3.173)$$

ou,

$$\mathbf{q}_E^{(e1)} = Y_E \mathbf{G}_E \mathbf{a}_E, \quad (3.174)$$

onde  $\mathbf{q}_E^{(e1)}$  é o vetor de fluxo de energia nas bordas 1 e 2 do elemento e  $\mathbf{G}_E$  é a matriz dos termos de propagação de ondas.

Combinando as Equações (3.170) e (3.174), obtemos a relação entre o fluxo de energia e a densidade de energia para um elemento espectral de energia como:

$$\mathbf{q}_E^{(e1)} = \underbrace{\mathbf{G}_E \mathbf{H}_E^{-1}}_{\mathbf{K}_E^{(e1)}} \mathbf{e}_E^{(e1)}, \quad (3.175)$$

onde,  $\mathbf{K}_E^{(e1)}$  é a matriz de fluxo de energia do elemento.

A resposta dinâmica das densidades de energia nas bordas do elemento são obtidas resolvendo o sistema de equações dado por:

$$\mathbf{e}_E^{(e1)} = [\mathbf{K}_E^{(e1)}]^{-1} \mathbf{q}_E^{(e1)}. \quad (3.176)$$

A variação da potência injetada pode ser representada por uma função cosseno (Wang, 2000; Cho, 1993) em termos de  $k_y$  na direção  $y$ . Esta representação leva em conta uma potência injetada na direção  $z$  distribuída na borda sobre o eixo  $y$ , como:

$$p_{in}(y) = \sum_n \frac{2}{L_y} \int_0^{L_y} p_o \cos(k_y y) dy. \quad (3.177)$$

Retornando na Equação (3.164), e combinando as Equações (3.162), (3.170) e (3.176) obtém-se a resposta dinâmica da energia vibracional do elemento espectral de energia interpolada nas direções  $x$  e  $y$ , com:

$$\langle \bar{e} \rangle(x, y, \omega) = \sum_n \mathbf{g}_E \mathbf{H}_E^{-1} \mathbf{e}_E^{(e1)} \cos(k_y y). \quad (3.178)$$

### 3.4.2 Montagem da Matriz Global de Fluxo de Energia

A Figura (3.14) mostra a estrutura livre-livre, formada por dois elementos espectrais de energia simples, com uma potência injetada nas bordas de conexão dos elementos. Placas tipo Levy só permitem injeção de potência e incremento de elementos nas bordas do elemento na direção  $x$ . Para representar a potência injetada no modelo, se faz necessário dois elementos espectrais de energia na direção  $x$ .

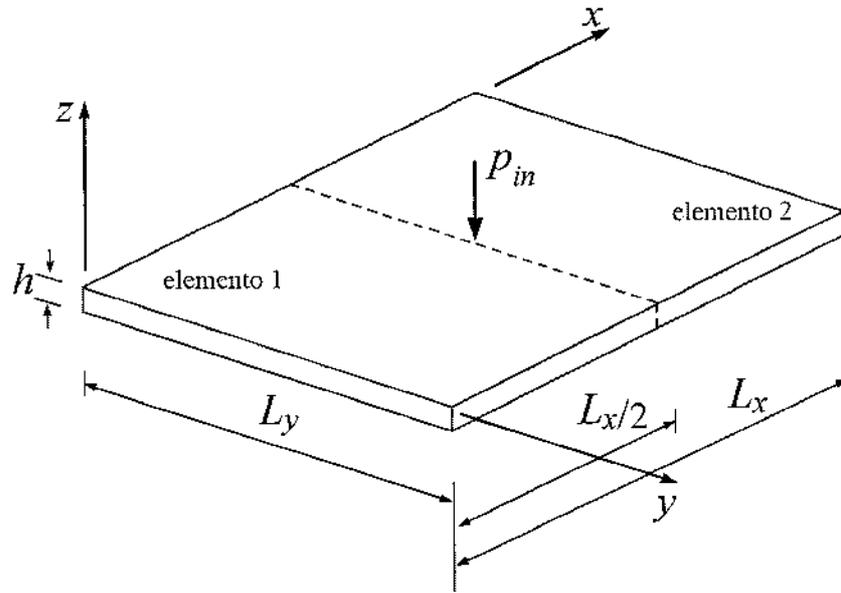


Figura 3.14: Montagem de dois elementos espectrais de energia para placa tipo Levy.

A matriz do fluxo de energia global do modelo da Figure (3.14), sem aplicar as condições de contorno, pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \langle \bar{q}_1 \rangle_0^{(1)} \\ \langle \bar{q}_2 \rangle_{L_x/2}^{(1)} \\ \langle \bar{q}_1 \rangle_{L_x/2}^{(2)} \\ \langle \bar{q}_2 \rangle_{L_x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \bar{e}_1 \rangle_0^{(1)} \\ \langle \bar{e}_2 \rangle_{L_x/2}^{(1)} \\ \langle \bar{e}_1 \rangle_{L_x/2}^{(2)} \\ \langle \bar{e}_2 \rangle_{L_x}^{(2)} \end{Bmatrix}, \quad (3.179)$$

onde  $k_{ij}^{(e1)}$  indica o elemento da matriz  $\mathbf{K}_E$  na posição  $ij$  pertencente ao elemento espectral e1. Para os elementos dos vetores de fluxo de energia  $\mathbf{q}_E$  e densidade de energia  $\mathbf{e}_E$ , o índice superior refere-se ao número do elemento enquanto o índice inferior refere-se à coordenada  $x$  da borda do elemento espectral de energia.

Aplicando as condições de contorno de compatibilidade e continuidade na borda de conexão entre os dois elementos ( $x = L_x/2$ ), obtemos a matriz de fluxo de energia global para duas placas tipo Levy, de dimensões  $x = L_x/2$  e  $y = L_y$ , com uma potência injetada em  $x = L_x/2$ , como:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \langle \bar{q}_1 \rangle_0^{(1)} \\ \langle \bar{q}_2 \rangle_{L_x/2}^{(1)} + \langle \bar{q}_1 \rangle_{L_x/2}^{(2)} = \langle p_{in} \rangle \\ \langle \bar{q}_2 \rangle_{L_x}^{(2)} \end{array} \right\}}_{\mathbf{q}_E} = \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{k}_{11}^{(1)} & \mathbf{k}_{12}^{(1)} & 0 \\ \mathbf{k}_{21}^{(1)} & \mathbf{k}_{22}^{(1)} + \mathbf{k}_{11}^{(2)} & \mathbf{k}_{12}^{(2)} \\ 0 & \mathbf{k}_{21}^{(2)} & \mathbf{k}_{22}^{(2)} \end{array} \right]}_{\mathbf{K}_E} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \langle \bar{e}_1 \rangle_0^{(1)} \\ \langle \bar{e}_2 \rangle_{L_x/2}^{(1)} = \langle \bar{e}_1 \rangle_{L_x/2}^{(2)} \\ \langle \bar{e}_2 \rangle_{L_x}^{(2)} \end{array} \right\}}_{\mathbf{e}_E}, \quad (3.180)$$

ou seja,

$$\mathbf{q}_E = \mathbf{K}_E \mathbf{e}_E. \quad (3.181)$$

### 3.4.3 Modelagem de Placas com Descontinuidade

Para a aplicação dos elementos de energia em placas que possuem descontinuidades ou juntas, faz-se necessário algo que descreva o comportamento da energia vibracional nas juntas. Os efeitos das descontinuidades da estrutura são introduzidos através de um elemento de junta que acopla a propagação das ondas entre os elementos que compõem a estrutura na descontinuidade. As relações de acoplamentos em uma junta placa-placa são dadas pela matriz de junta apresentada na Seção 3.2.2.

Considere os exemplos mostrados na Figura (3.15) de uma estrutura livre-livre composta de três elementos de placa tipo Levy coplanares acopladas. Os três elementos têm as mesmas propriedades do material e a mesma dimensão na direção  $y$ ,  $L_y$ , enquanto a dimensão na direção  $x$  são diferentes,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , respectivamente. Na estrutura da Figura (3.15)(a) os elementos 1 e 2 têm a mesma espessura,  $h_1$ , enquanto o elemento 3 tem espessura  $h_2$ . Nas estruturas das Figuras (3.15)(b) e (c) os elementos 1, 2 e 3 têm a mesma espessura,  $h_1$ , enquanto na conexão entre os elementos 2 e 3 está incluído o reforço e a trinca, respectivamente. As estruturas são excitadas por uma potência injetada na conexão dos elementos 1 e 2.

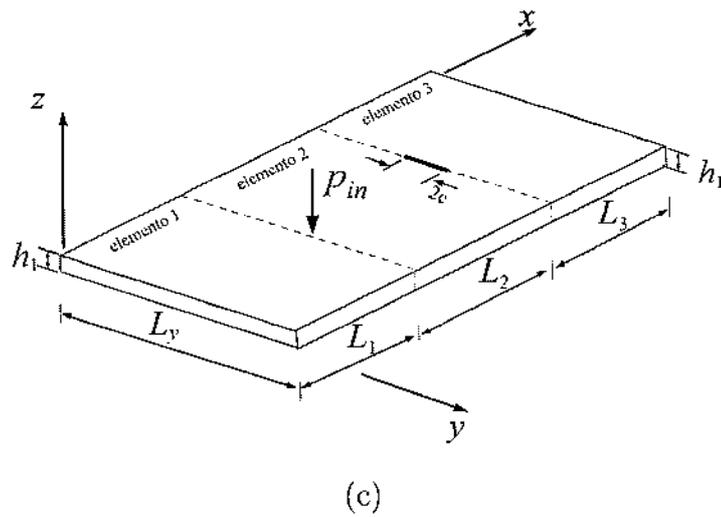
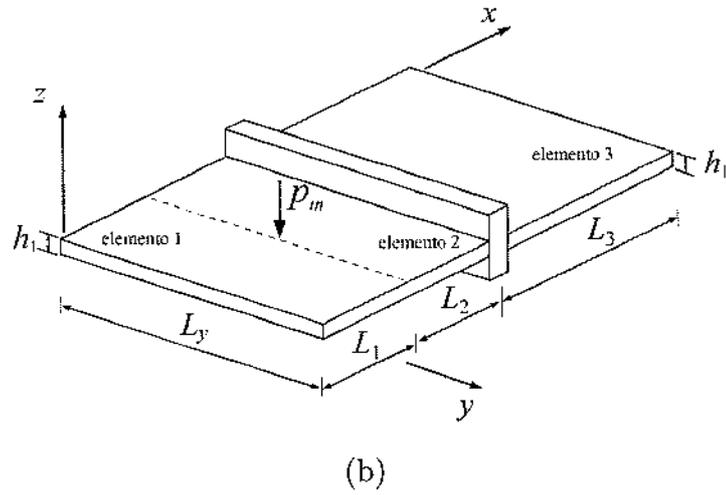
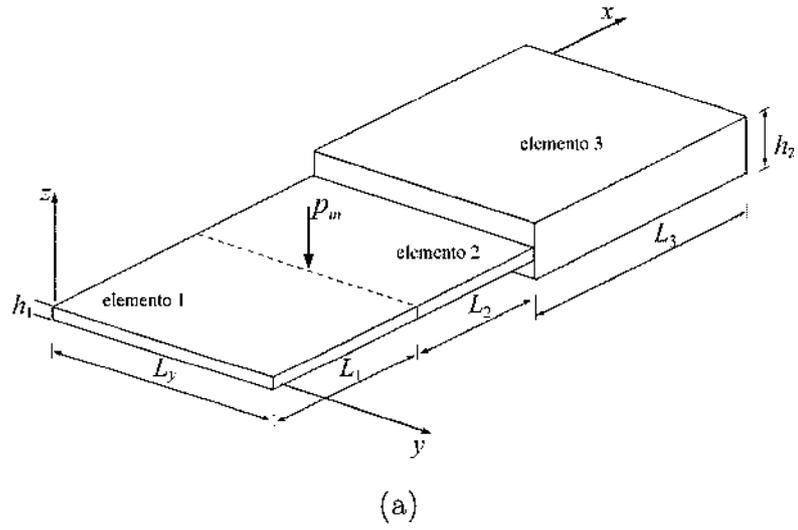


Figura 3.15: Estruturas coplanares com três elementos espectrais de energia incluindo descontinuidades: (a) de espessura; (b) de reforçador; e (c) de trinca.

O sistema matricial global do fluxo de energia que representa as estruturas da Figura (3.15), sem incluir as condições de contorno, pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} \langle \bar{q}_1 \rangle_0^{(1)} \\ \langle \bar{q}_2 \rangle_{L_1}^{(1)} \\ \langle \bar{q}_1 \rangle_{L_1}^{(2)} \\ \langle \bar{q}_2 \rangle_{L_2}^{(2)} \\ \langle \bar{q}_1 \rangle_{L_2}^{(3)} \\ \langle \bar{q}_2 \rangle_{L_3}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^{(1)} & \mathbf{k}_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{k}_{21}^{(1)} & \mathbf{k}_{22}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{k}_{11}^{(2)} & \mathbf{k}_{12}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{k}_{21}^{(2)} & \mathbf{k}_{22}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{k}_{11}^{(3)} & \mathbf{k}_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{k}_{21}^{(3)} & \mathbf{k}_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \bar{e}_1 \rangle_0^{(1)} \\ \langle \bar{e}_2 \rangle_{L_1}^{(1)} \\ \langle \bar{e}_1 \rangle_{L_1}^{(2)} \\ \langle \bar{e}_2 \rangle_{L_2}^{(2)} \\ \langle \bar{e}_1 \rangle_{L_2}^{(3)} \\ \langle \bar{e}_2 \rangle_{L_3}^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (3.182)$$

Nas bordas livres das estruturas não existem elementos conectados. Portanto, não ocorre a transferência de fluxos de energia nas bordas. Logo, os fluxos de energia nos elementos 1 e 3 na posição  $x = 0$  e  $x = L_3$  são iguais a zero, enquanto nas outras bordas do contorno esta condição já está implícita na formulação do elemento, assim temos;

$$\langle \bar{q}_1 \rangle_0^{(1)} = \langle \bar{q}_2 \rangle_{L_3}^{(3)} = 0. \quad (3.183)$$

As conexões entre os elementos 1 e 2 não apresentam nenhum tipo de descontinuidade, logo não correspondem a uma junta. Desta forma, aplicamos as relações de continuidade do fluxo de energia e de compatibilidade da densidade de energia nas bordas de conexão dos elementos 1 e 2 na posição  $x = L_1$ , como;

$$\langle \bar{q}_2 \rangle_{L_1}^{(1)} - \langle \bar{q}_1 \rangle_{L_1}^{(2)} = \langle p_{in} \rangle, \quad \langle \bar{e}_2 \rangle_{L_1}^{(1)} = \langle \bar{e}_1 \rangle_{L_1}^{(2)}. \quad (3.184)$$

As conexões entre os elementos 2 e 3 apresentam uma descontinuidade (ou espessura, ou reforçador, ou trinca) correspondendo a uma junta. Assim, uma matriz de junta deve ser adicionada à matriz global na posição desta conexão (Seção 3.2.2). Neste caso, a equação matricial de junta para ondas de flexão em estruturas coplanares (Equação (3.71)) pode ser usada, a qual é re-escrita aqui da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \langle \bar{q}_2 \rangle_{L_2}^{(2)} \\ \langle \bar{q}_1 \rangle_{L_2}^{(3)} \end{Bmatrix} = \frac{\tau_{23}}{2r_{22}} \begin{bmatrix} c_{g2} & -c_{g3} \\ -c_{g2} & c_{g3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \bar{e}_2 \rangle_{L_2}^{(2)} \\ \langle \bar{e}_1 \rangle_{L_2}^{(3)} \end{Bmatrix}, \quad (3.185)$$

onde  $\tau_{23}$  e  $r_{23}$  são os coeficientes de transmissão e reflexão de potência e  $c_{g2}$  e  $c_{g3}$  são as velocidades de grupo nos elemento 2 e 3, respectivamente.

Substituindo-se as Equações (3.183), (3.184) e (3.185), no sistema matricial dado pela Equação (3.182), e re-arranjando as equações, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \langle p_{in} \rangle \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} - \frac{\tau_{23}c_{g2}}{2r_{22}} & \frac{\tau_{23}c_{g3}}{2r_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau_{23}c_{g2}}{2r_{22}} & k_{11}^{(3)} - \frac{\tau_{23}c_{g3}}{2r_{22}} & k_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \bar{e}_1 \rangle_0^{(1)} \\ \langle \bar{e}_2 \rangle_{L_1}^{(1)} = \langle \bar{e}_1 \rangle_{L_1}^{(2)} \\ \langle \bar{e}_2 \rangle_{L_3}^{(2)} \\ \langle \bar{e}_1 \rangle_{L_2}^{(3)} \\ \langle \bar{e}_2 \rangle_{L_3}^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (3.186)$$

O sistema matricial da Equação(3.186) é resolvido para as densidades de energia em cada borda do modelo. É importante ressaltar que o procedimento para montagem do sistema matricial é simples quando comparado ao EFEM, devido à necessidade de utilização de poucos elementos para modelar estruturas razoavelmente grandes em médias e altas frequências.

Na formulação do ESEM para estruturas que possuam juntas, é necessária a presença de relações de acoplamentos que são representadas pela matriz de junta. Cada tipo de acoplamento apresenta uma condição de contorno característica; sendo assim, o que diferencia um acoplamento de outro são os coeficientes de transmissão e reflexão que estão ligados diretamente às condições de contorno da junta.

### 3.4.4 Coeficientes de Transmissão e Reflexão de Potência

Nesta seção, serão apresentadas as formulações para o cálculo dos coeficientes de transmissão e reflexão de potência para três tipos de configurações estruturais de placas com descontinuidades: de espessura ou de propriedades dos materiais; de reforço; e de trinca. Para esse cálculo dos coeficientes são utilizados estruturas semi-infinita coplanares conectadas, sendo na conexão entre as placas introduzidas as descontinuidades. Considera-se na descontinuidade um único tipo de onda (transversal ou de flexão) de propagação. Assume-se também um comportamento ideal (sem dissipação) nas descontinuidades das estruturas.

Para facilitar a compreensão, a equação clássica para placas finas homogêneas (Equação (3.84)) é re-escrita:

$$(\nabla^4 - k^4) \hat{w} = 0,$$

onde  $w$  é o deslocamento transversal da placa e  $\nabla^4$  é o Laplaciano Bi-harmônico, representado da seguinte forma

$$\nabla^4 = \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right), \quad (3.187)$$

e  $k$  é o número de ondas de flexão, dado por

$$k = \left( \frac{\omega^2 \rho h}{D} \right)^{1/4}, \quad (3.188)$$

no qual,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (3.189)$$

onde  $\omega$  é a frequência circular,  $\rho$  é densidade do material,  $h$  é a espessura da placa e  $D$  é a rigidez a flexão para uma placa homogênea.

O deslocamento transversal em uma placa com reflexões de ondas nas bordas, ocasionadas por uma onda de incidência oblíqua nas bordas, pode ser representada como:

$$\hat{w}(x, y) = \sum_n \hat{W}(x) e^{-iky \sin(\theta_1)}. \quad (3.190)$$

A equação clássica de onda para um placa fina e homogênea, pode ser separada em duas equações diferenciais de segunda ordem, como:

$$(\nabla^2 + k^2) \hat{w}_1 = 0, \quad (3.191)$$

e

$$(\nabla^2 - k^2) \hat{w}_2 = 0. \quad (3.192)$$

De modo geral, as ondas de flexão incidentes na descontinuidade resultarão nas ondas propagantes que satisfazem a Equação (3.191), enquanto as ondas com decaimento no campo próximo (ondas evanescentes) satisfazem a Equação (3.192).

Substituindo a Equação (3.190) nas Equações (3.191) e (3.192), obtemos duas equações diferenciais de segunda ordem da seguinte forma:

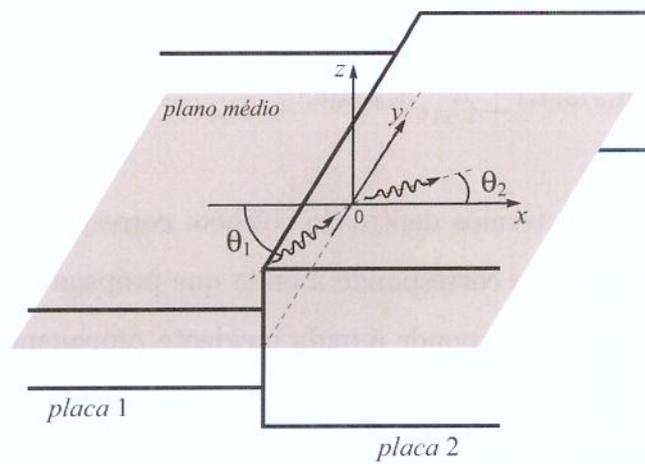
$$\frac{d^2 \hat{W}_1(x)}{dx^2} + k^2(1 - \sin^2(\theta_1)) \hat{W}_1(x) = 0, \quad (3.193)$$

$$\frac{d^2 \hat{W}_2(x)}{dx^2} - k^2(1 + \sin^2(\theta_1)) \hat{W}_2(x) = 0. \quad (3.194)$$

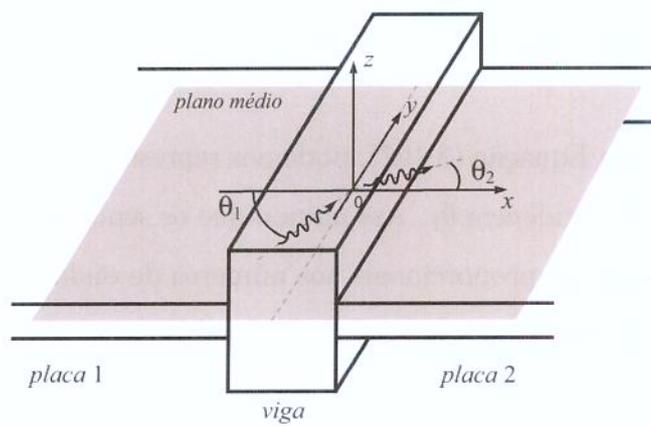
A solução de propagação de ondas planas para uma placa plana fina retangular, devida a uma onda incidente oblíqua, é a soma das soluções das Equações (3.193) e (3.194), a qual pode ser escrita como:

$$\hat{w}(x, y) = \sum_n \left[ A_{x1} e^{-ikx \cos(\theta_1)} + B_{x1} e^{-kx \cos(\theta_1)} + C_{x1} e^{ikx \cos(\theta_1)} + D_{x1} e^{kx \sqrt{1 + \sin^2(\theta_1)}} \right] e^{-iky \sin(\theta_1)}. \quad (3.195)$$

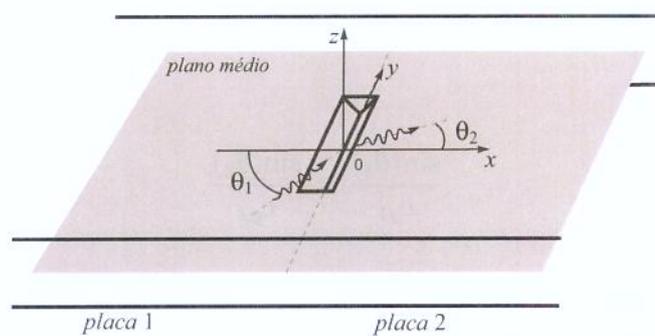
A Figura (3.16) mostra uma estrutura composta por duas placas planas finas de Levy, coplanares e semi-infinitas. As placas estão conectadas ao longo do eixo  $y$ , em  $x = 0$ , sobre o plano médio  $xy$ . As Figuras (3.16)(a), (b) e (c) mostram conexões caracterizadas por descontinuidades de espessura ou propriedade dos materiais, de reforçador e de trinca, respectivamente. À esquerda das estruturas (placa 1) propaga-se uma onda incidente de flexão com amplitude  $A_{x1}$ , a qual incide sobre a descontinuidade ou junta com um ângulo de incidência  $\theta_1$ . Essa onda é parcialmente transmitida na placa 2 e parcialmente refletida na placa 1.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.16: Acoplamento de placas semi-infinita com discontinuidades: (a) de espessura ou propriedade dos materiais; (b) de reforçador; (c) de trinca.

Para  $x \leq 0$ , o deslocamento transversal pode ser representado como:

$$\hat{w}_1(x, y) = \left[ A_{x1} e^{-ik_1 x \cos(\theta_1)} + C_{x1} e^{ik_1 x \cos(\theta_1)} + D_{x1} e^{k_1 x \sqrt{1 + \sin^2(\theta_1)}} \right] e^{-ik_y y \sin(\theta_1)}. \quad (3.196)$$

Na Equação (3.196), os termos dentro do colchete correspondem às ondas na direção  $x$ , enquanto o fora do colchete corresponde à onda que propaga na direção  $y$ . O primeiro termo, dentro do colchete, corresponde à onda incidente propagante, o segundo termo é a onda refletida propagante e o terceiro representa a onda refletida evanescente. Para  $x \geq 0$ , a equação do deslocamento possuirá duas componentes, uma transmitida propagante e a outra transmitida evanescente, dessa forma

$$\hat{w}_2(x, y) = \left[ A_{x2} e^{-ik_2 x \cos(\theta_2)} + B_{x2} e^{-k_2 x \sqrt{1 + \sin^2(\theta_2)}} \right] e^{-ik_y y \sin(\theta_2)}. \quad (3.197)$$

Para simplificarmos a Equação (3.197), podemos representar o ângulo de transmissão  $\theta_2$  em função do ângulo de incidência  $\theta_1$ . Assumindo que os senos dos ângulos de incidência e transmissão são diretamente proporcionais aos números de ondas ou velocidade de grupos em ambos os lados da descontinuidade (Lei de Snell-Descartes), as seguintes expressões podem ser escritas:

$$k_1 \sin(\theta_1) = k_2 \sin(\theta_2), \quad (3.198)$$

ou

$$\frac{\sin(\theta_1)}{c_{g1}} = \frac{\sin(\theta_2)}{c_{g2}}. \quad (3.199)$$

Substituindo a Equação (3.198) na Equação (3.197) que representa o deslocamento transversal para  $x \geq 0$ , obtemos a seguinte expressão:

$$\hat{w}_2(x, y) = \left[ A_{x2} e^{-ik_1 x \sqrt{\alpha^2 - \sin^2(\theta_1)}} + B_{x2} e^{-k_1 x \sqrt{\alpha^2 + \sin^2(\theta_1)}} \right] e^{-ik_y y \sin(\theta_1)}, \quad (3.200)$$

onde

$$\alpha = \frac{k_2}{k_1}, \quad (3.201)$$

A amplitude complexa da onda incidente  $A_{x1}$  é calculada a partir da expressão da média temporal da potência injetada, dada por:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ -i\omega \hat{V}_{xz} \hat{w}^* + i\omega \hat{M}_{xx} \frac{d\hat{w}^*}{dx} \right\}. \quad (3.202)$$

Fazendo  $D_c$  real nas Equações (3.100) e (3.101) e substituindo juntamente com a componente da onda incidente da Equação (3.196), na Equação (3.202) teremos:

$$\langle P \rangle = D_1 \omega k_1^3 |A_{x1}|^2 \cos^3(\theta_1). \quad (3.203)$$

Aplicando o princípio de conservação de energia na junta das duas placas semi-infinitas, temos:

$$\langle P \rangle_{inc} = \langle P \rangle_{ref} + \langle P \rangle_{trans}, \quad (3.204)$$

onde a potência incidente é a soma das potências refletida e transmitida. Dividindo ambos os lados da Equação (3.204) por  $\langle P \rangle_{inc}$  obtém-se:

$$1 = \frac{\langle P \rangle_{ref}}{\langle P \rangle_{inc}} + \frac{\langle P \rangle_{trans}}{\langle P \rangle_{inc}} = r_{11} + \tau_{12}. \quad (3.205)$$

O coeficiente de transmissão de potência é a relação da potência transmitida sobre a incidente. Dessa forma, o coeficiente de transmissão na placa 2 devido à onda incidente na placa 1 será:

$$\tau_{12} = \frac{D_2 k_2^3 |A_{x2}|^2 \cos^3(\theta_2)}{D_1 k_1^3 |A_{x1}|^2 \cos^3(\theta_1)}, \quad (3.206)$$

de forma análoga o coeficiente de reflexão de potência é a relação da potência refletida sobre a incidente. Assim, o coeficiente de reflexão na placa 1 devido a onda de incidente na placa 1 será:

$$r_{11} = \frac{|C_{x1}|^2}{|A_{x1}|^2}. \quad (3.207)$$

As amplitudes complexas  $C_{x1}$ ,  $D_{x1}$ ,  $A_{x2}$  e  $B_{x2}$ , são determinadas aplicando-se as condições de equilíbrio na junta das estruturas de placas semi-infinitas.

Na junta da estrutura mostrada na Figura (3.4.4)(a), com descontinuidade de espessura ou de propriedade dos materiais, devem ser impostas as seguintes condições: de compatibilidade do deslocamento transversal,

$$\hat{w}_1 = \hat{w}_2; \quad (3.208)$$

de continuidade da rotação,

$$\frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x} = \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial x}; \quad (3.209)$$

no momento fletor,

$$\hat{M}_{xx1} - \hat{M}_{xx2} = 0; \quad (3.210)$$

e no esforço cortante de Kirchoff,

$$\hat{V}_{xz1} - \hat{V}_{xz2} = 0. \quad (3.211)$$

Substituindo-se as Equações (3.208) a (3.211) nas Equações (3.196) e (3.200), e escrevendo na forma matricial, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{H}_h \cdot \mathbf{x}_h = \mathbf{b}, \quad (3.212)$$

onde

$$\mathbf{H}_h = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -i \cos(\theta_1) & -\sqrt{\sin^2(\theta_1) + 1} \\ D_1 (\cos^2(\theta_1) + \nu_1 \sin^2(\theta_1)) & D_1 (\nu_1 \sin^2(\theta_1) - \sin^2(\theta_1) - 1) \\ iD_1 (\cos^3(\theta_1) + \sin^2(\theta_1) (2 - \nu_1) \cos(\theta_1)) & D_1 \sqrt{\sin^2(\theta_1) + 1} (\sin^2(\theta_1) (1 - \nu_1) - 1) \\ 1 & 1 \\ -i\sqrt{\alpha^2 - \sin^2(\theta_1)} & -\sqrt{\alpha^2 + \sin^2(\theta_1)} \\ -D_2 (\alpha^2 + \sin^2(\theta_1) + \nu_2 \sin^2(\theta_1)) & D_2 (\alpha^2 + \sin^2(\theta_1) - \nu_2 \sin^2(\theta_1)) \\ iD_2 \sqrt{\alpha^2 - \sin^2(\theta_1)} (\alpha^2 + (1 - \nu_2) \sin^2(\theta_1)) & D_2 \sqrt{\alpha^2 + \sin^2(\theta_1)} ((1 - \nu_2) \sin^2(\theta_1) - \alpha^2) \end{bmatrix}, \quad (3.213)$$

$$\mathbf{x}_h = \begin{Bmatrix} A_{x1} \\ -iA_{x1} \cos(\theta_1) \\ A_{x1} D_1 (-\cos^2(\theta_1) - \nu_1 \sin^2(\theta_1)) \\ iA_{x1} D_1 (\cos^3(\theta_1) + (2 - \nu_1) \sin^2(\theta_1) \cos(\theta_1)) \end{Bmatrix}, \quad (3.214)$$

e

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} C_{x1} \\ D_{x1} \\ A_{x2} \\ B_{x2} \end{Bmatrix}. \quad (3.215)$$

Na junta da estrutura mostrada na Figura (3.4.4)(a), com descontinuidade de reforçador, as condições de compatibilidade e de continuidade mantêm-se as mesmas das Equações (3.208) e (3.209), enquanto as condições de equilíbrio de momento e de forças são, respectivamente:

$$\hat{M}_{xx1} - \hat{M}_{xx2} = 0, \quad (3.216)$$

onde  $\hat{M}_{xx1} = \hat{M}_{xx}^{(R)}$  dado pela Equação (3.114), e

$$\hat{V}_{xz1} - \hat{V}_{xz2} = 0, \quad (3.217)$$

onde  $\hat{V}_{xz1} = \hat{V}_{xz}^{(R)}$  dado pela Equação (3.113).

Substituindo-se as Equações (3.208), (3.209), (3.216) e (3.217) nas Equações (3.196) e (3.200), e escrevendo na forma matricial, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{H}_r \cdot \mathbf{x}_r = \mathbf{b}, \quad (3.218)$$

onde

$$\mathbf{H}_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik \cos(\theta_1) & k\sqrt{\sin^2(\theta_1) + 1} \\ Dk^2 (\cos^2(\theta_1) + \nu \sin^2(\theta_1)) & Dk^2 ((\nu - 1) \sin^2(\theta_1) - 1) \\ 0.5iDk^3 \cos(\theta_1)(-\nu + (\nu - 1) \cos(2\theta_1) + 3) & -0.707107Dk^3(\nu - (\nu - 1) \cos(2\theta_1) + 1)\sqrt{3 - \cos(2\theta_1)} \\ -1 & \\ ik \cos(\theta_1) & \\ k(-i\omega^2 I_p \rho \cos(\theta_1) + G i J_b k^2 \cos(\theta_1) \sin^2(\theta_1) + Dk(-(\nu - 1) \sin^2(\theta_1) - 1)) & \\ -EI_b k^4 \sin^4(\theta_1) + I_p \rho \omega^2 + i0.5Dk^3 \cos(\theta_1)(-\nu + (\nu - 1) \cos(2\theta_1) + 3) & \\ -1 & \\ k\sqrt{\sin^2(\theta_1) + 1} & \\ k(-I_p \rho \omega^2 \sqrt{\sin^2(\theta_1) + 1} + Dk(1 - (\nu - 1) \sin^2(\theta_1)) + G J_b k^2 \sin^2(\theta_1) \sqrt{\sin^2(\theta_1) + 1}) & \\ -EI_b k^4 \sin^4(\theta_1) + I_p \rho \omega^2 - 0.707107Dk^3(\nu - (\nu - 1) \cos(2\theta_1) + 1)\sqrt{3 - \cos(2\theta_1)} & \end{bmatrix}, \quad (3.219)$$

e

$$\mathbf{x}_r = \left\{ \begin{array}{c} A_{x1} \\ -iA_{x1}k \cos(\theta_1) \\ Dk^2 A_{x1} (\cos^2(\theta_1) + \nu \sin^2(\theta_1)) \\ -0.5iDk^3 A_{x1} \cos(\theta_1)(3 - \nu + (\nu - 1) \cos(2\theta_1)) \end{array} \right\}. \quad (3.220)$$

Na junta da estrutura mostrada na Figura (3.4.4)(c), com descontinuidade de trinca, as condições de equilíbrio de compatibilidade (Equação (3.208)), do momento (Equação (3.210)) e do cisalhamento (Equação (3.211)) mantêm-se as mesmas da descontinuidade de espessura, enquanto a condição de continuidade é dada pela Equação (3.130) re-escrita aqui como:

$$\frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x} - \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial x} = \vartheta \hat{M}_{x1}. \quad (3.221)$$

Substituindo-se as Equações (3.208), (3.221), (3.210) e (3.211) nas Equações (3.196) e (3.200), e escrevendo na forma matricial, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{H}_t \cdot \mathbf{x}_t = \mathbf{b}, \quad (3.222)$$

onde

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik \cos(\theta_1) + D\vartheta (k^2 \cos^2(\theta_1) + k_y^2 \nu \sin^2(\theta_1)) & k\sqrt{\sin^2(\theta_1) + 1} - D\vartheta (k^2 + (k^2 - k_y^2 \nu) \sin^2(\theta_1)) \\ -D (k^2 \cos^2(\theta_1) + k_y^2 \nu \sin^2(\theta_1)) & D (k^2 + (k^2 - k_y^2 \nu) \sin^2(\theta_1)) \\ iDk \cos(\theta_1) (k^2 \cos^2(\theta_1) - k_y^2 (\nu - 2) \sin^2(\theta_1)) & -Dk\sqrt{\sin^2(\theta_1) + 1} (k^2 + (k^2 + k_y^2 (\nu - 2)) \sin^2(\theta_1)) \\ 1 & 1 \\ -ik \cos^2(\theta_1) & -k\sqrt{\sin^2(\theta_1) + 1} \\ -D (k^2 + (k_y^2 \nu - k^2) \sin^2(\theta_1)) & D (k^2 + (k^2 - k_y^2 \nu) \sin^2(\theta_1)) \\ -iDk\sqrt{\cos^2(\theta_1)} (k^2 \cos^2(\theta_1) - k_y^2 (\nu - 2) \sin^2(\theta_1)) & -Dk\sqrt{\sin^2(\theta_1) + 1} (-k^2 - (k^2 + k_y^2 (\nu - 2)) \sin^2(\theta_1)) \end{bmatrix}, \quad (3.223)$$

e

$$\mathbf{x}_t = \left\{ \begin{array}{l} A_{x1} \\ -A_{x1} (ik \cos(\theta_1) - D\vartheta (k^2 \cos^2(\theta_1) + k_y^2 \nu \sin^2(\theta_1))) \\ -A_{x1} D (k^2 \cos^2(\theta_1) + k_y^2 \nu \sin^2(\theta_1)) \\ -iA_{x1} Dk \cos(\theta_1) (k^2 \cos^2(\theta_1) - k_y^2 (\nu - 2) \sin^2(\theta_1)) \end{array} \right\}. \quad (3.224)$$

# Capítulo 4

## Resultados Simulados

Neste capítulo, os principais resultados obtidos com os métodos de energia são apresentados e discutidos. Tais resultados são provenientes de problemas de distribuição de energias em estruturas bidimensionais em médias e altas frequências, baseando-se na evolução dos modelos de energia apresentados nesta tese, a partir de modificações em diferentes configurações estruturais (placa simples, acoplamento placa-placa, placa reforçada e placa danificada). O objetivo destas simulações é mostrar como ocorre a distribuição de energia nessas estruturas, ou seja, identificar como a vibração está se propagando pela estrutura através da variação da energia. Os casos simulados nesse trabalho dizem respeito aos modelos de placa simples, placa com diferenças de espessura ou de propriedade dos materiais, placa reforçada e placa danificada. Os modelos são excitados por forças harmônicas transversais, levando-se em consideração dois tipos de condições de contorno: de uma placa simplesmente apoiada em todas as bordas e de uma placa apoiada-livre. A solução modal clássica em deslocamento de uma placa simplesmente apoiada (Apêndice A) aqui denominada de método “EXATO”, e a solução pelo Método do Elemento Espectral serão utilizadas como referências para os modelos de energia discutidos nessa tese. Na primeira seção, é avaliada uma estrutura de placa simples utilizando os métodos SEM, ESEM e EFEM, cujos resultados de densidade de energia e fluxo de energia são comparados com o método “EXATO”. Na segunda seção, as estruturas de placa com diferenças de espessura ou de propriedade dos materiais, são analisadas em termos de densidade e fluxo de energia através do ESEM e EFEM, e confrontados com aqueles resultados obtidos por SEM. Também, são

discutidas as relações de acoplamento na junta. Na terceira e quarta seções, são apresentados os resultados de densidade e fluxos de energia de placas reforçadas e danificadas utilizando ESEM e comparando com SEM, respectivamente.

Os programas computacionais utilizados para obtenção dos resultados dos exemplos modelados pelo elemento espectral, elementos finitos e a solução modal clássica de placa foram implementados em ambiente Matlab<sup>®</sup>.

## 4.1 Exemplos para Placa Simples

Nesta seção serão apresentados os resultados para densidade e fluxo de energia para uma estrutura de placa plana fina simples, obtidos a partir dos métodos “EXATO”, SEM, ESEM e EFEM. A estrutura analisada está mostrada na Figura (4.1)(a) para o modelo estrutural e na Figura (4.1)(b) para o modelo equivalente de energia.

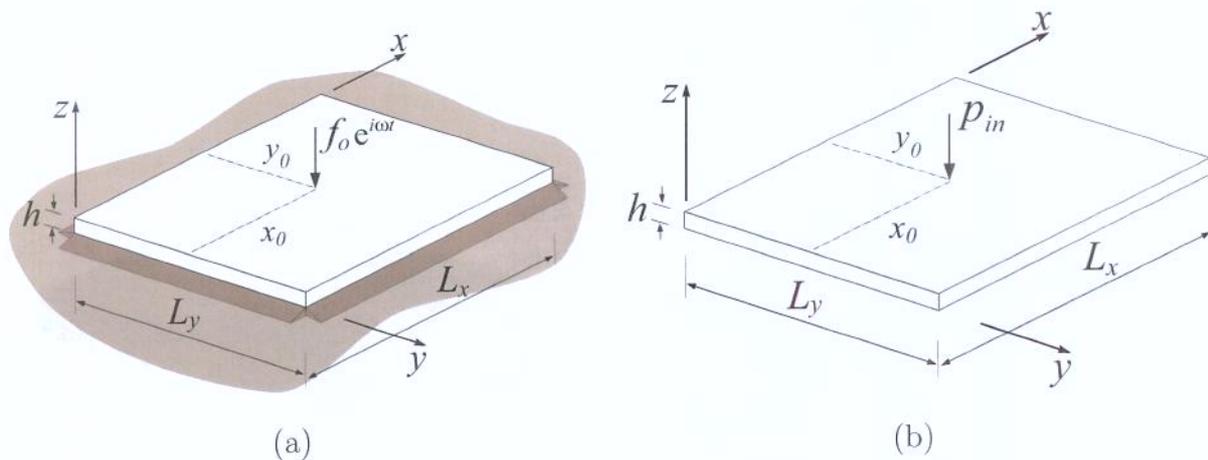


Figura 4.1: Estrutura de placa simples, simplesmente apoiada em todas as bordas: (a) Modelo estrutural e (b) Modelo de energia equivalente.

As estruturas consiste de uma placa plana fina de alumínio com as seguintes propriedades geométricas e mecânicas: dimensões  $L_x = L_y = 1,0$  m, módulo de elasticidade  $E = 71$  GPa, densidade  $\rho = 2700$  kg/m<sup>3</sup>, espessura  $h = 0,002$  m e fator de perda  $\eta = 0,05$ . O modelo estrutural da placa tem condições de contorno simplesmente apoiada em todas as bordas, com uma força de excitação harmônica pontual no centro da placa, com amplitude unitária. Para o modelo de energia essa condição equivalerá a um fluxo de energia nulo

em todas as bordas com uma potência injetada harmônica pontual no centro da placa. Os resultados das densidade e fluxo de energia são calculados para uma banda de frequência de 1/3 de oitava com frequência central  $f_c = 5,0$  kHz.

#### 4.1.1 Solução pelo Método “EXATO”

Conforme apresentado na Seção 3.1.1 a solução para a média temporal da densidade de energia dos métodos formulados em deslocamento, como o método “EXATO”, é a soma das densidades de energia potencial e cinética. Assim, a distribuição da densidade de energia potencial e cinética na placa são obtidas através da Equação (3.154), as quais foram calculadas com  $m = n = 1, \dots, 150$  termos da expansão da série. Os resultados do deslocamento são posteriormente interpolados com uma discretização de  $\Delta x = \Delta y = 0,01$  m, nas direções  $x$  e  $y$ . Os resultados das densidades de energia potencial e cinética estão apresentados na Figura (4.2). A Figura (4.3) mostra o resultado da densidade de energia total (potencial + cinética).

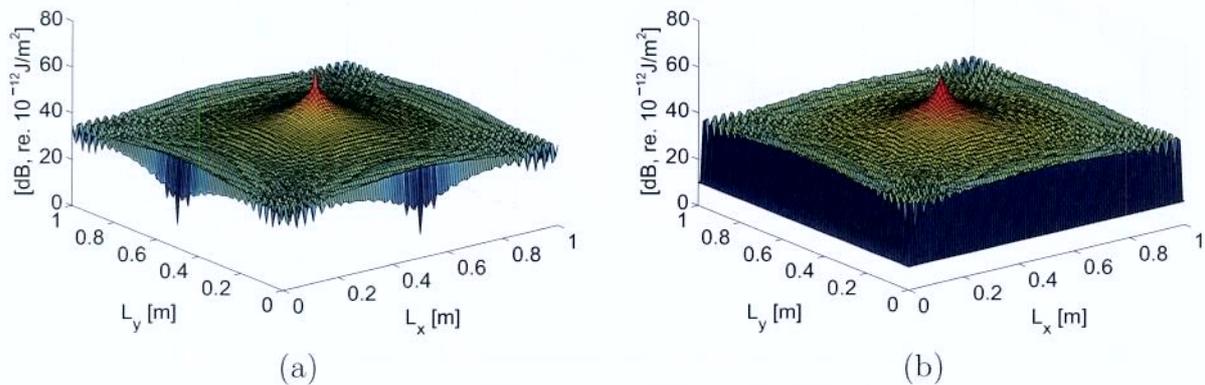


Figura 4.2: Densidades de energia pelo método “EXATO” para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 5,0$  kHz: (a) potencial; e (b) cinética.

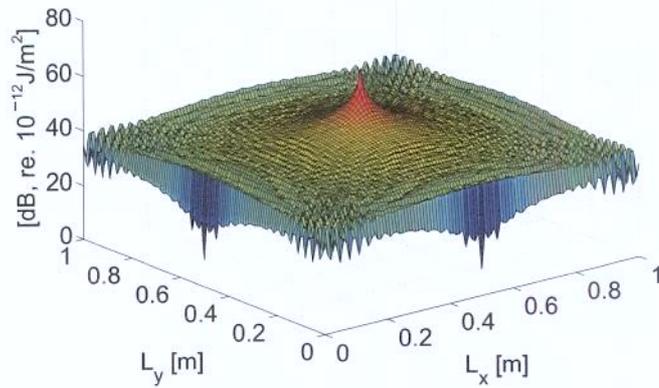


Figura 4.3: Densidades de energia total pelo método “EXATO” para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 5,0$  kHz.

Os fluxos de energia são calculados a partir das Equações (3.155) e (3.156). Os resultados dos fluxos de energia estão mostrados na forma das componentes  $x$  e  $y$  nas Figuras (4.4)(a) e (b), respectivamente. Um diagrama da direção e sentido dos vetores de fluxo de energia está mostrado na Figura (4.5), tendo em vista a grande diferença entre os valores máximos e mínimos do módulo dos vetores, não é possível construir um gráfico vetorial cujo o resultado seja reconhecível.

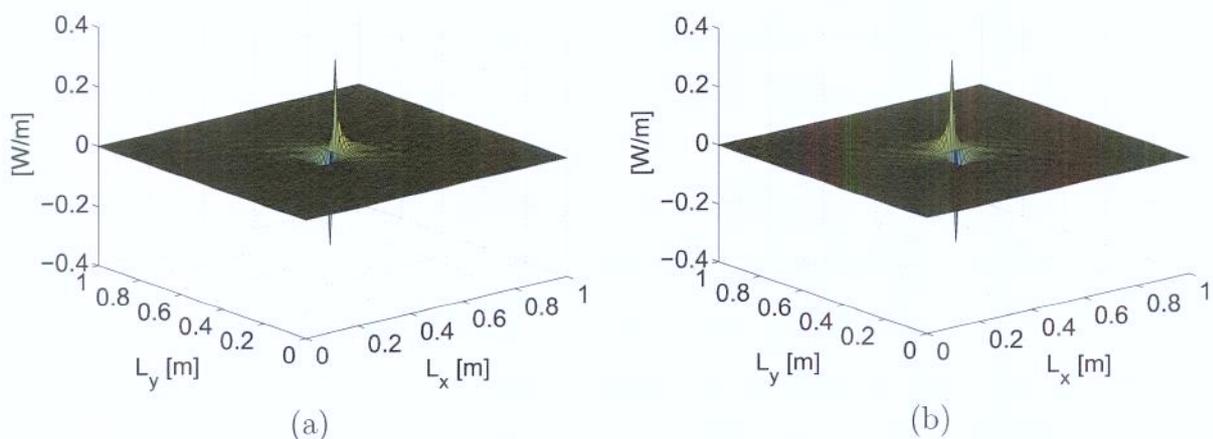


Figura 4.4: Fluxos de energia pelo método “EXATO” para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 5,0$  kHz: (a) componente na direção  $x$ ; e (b) componente na direção  $y$ .

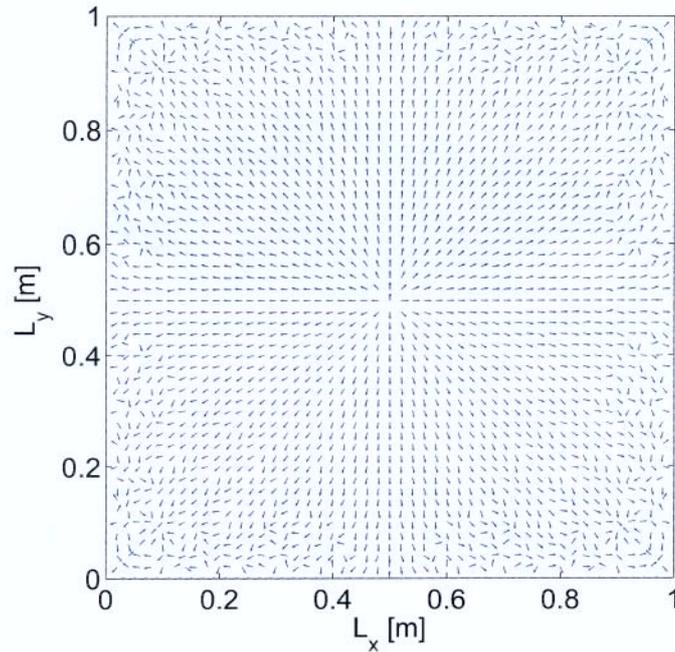


Figura 4.5: Vetores de fluxos de energia pelo método “EXATO” para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 5,0$  kHz.

Das Figuras (4.2) e (4.3) observa-se que a densidade de energia apresenta um pico na posição da força de excitação decaindo exponencialmente com um comportamento oscilatório para as bordas da placa. As componentes do fluxo de energia (Figuras (4.4)) apresentam dois picos simétricos em relação à densidade de energia na posição da força de excitação decaindo assintoticamente para zero nas bordas da placa. Da Figura (4.5)) observa-se que os vetores de fluxo de energia indicam uma direção e sentido regulares da posição da força de excitação para as bordas da placa, com o embaralhamento dos sentidos dos vetores nas regiões próximas das bordas. Estes resultados de densidade e fluxo de energia mostram um comportamento similar àqueles obtidos por Bouthier (1991) e Cho (1993), validando a implementação do programa computacional. É importante ressaltar que o modelo “EXATO” por utilizar superposição modal, requer a inclusão das frequências naturais desde zero até um certo valor acima da frequência central da banda analisada (Bouthier, 1992). Este requisito torna estas soluções computacionalmente caras, pois em altas frequências, necessitam de um número de termos da série bem mais alto do que aqueles

normalmente usados em baixa frequência.

### 4.1.2 Solução pelo Método SEM

Nesta seção serão apresentados resultados simulados com o método SEM. Embora este método já venha sendo estudado em outros trabalhos do DMC/FEM/UNICAMP (Alves, 2001; Nunes, 2005; Albuquerque, 2005; Santos, 2006), esses não investigaram a densidade de energia como variável primária e a sua propagação no espaço em média e altas frequências. As equações utilizadas para o cálculo da densidade de energia e do fluxo de energia são encontradas e comentadas no capítulo 3 na seção 3.3 deste trabalho.

Para esse exemplo a estrutura da placa utiliza na direção  $x$  dois elementos espectrais de placa de largura  $L_y$  e comprimento  $L_x/2$ , a fim de permitir a aplicação da força de excitação localizada no meio da estrutura. Na direção  $y$  foram utilizados  $n = 100$  termos na expansão da série. Os resultados das bordas do elemento espectral são posteriormente interpolados com uma discretização de  $\Delta x = \Delta y = 0,01$  m nas direções  $x$  e  $y$ . A Figura (4.6) mostra o comportamento das densidades de energia potencial, cinética e total da estrutura de placa simples mostrada na Figura (4.1)(a).

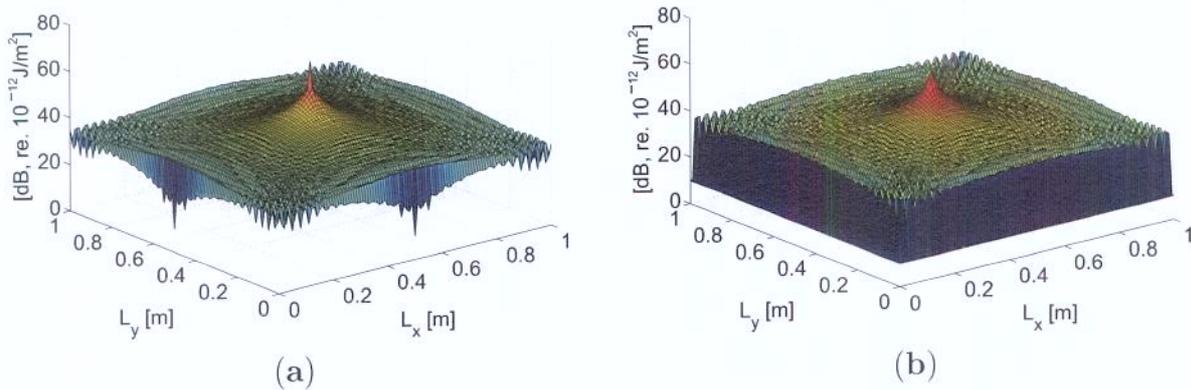


Figura 4.6: Densidade de energia pelo método SEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 5,0$  kHz: (a) potencial; e (b) cinética.

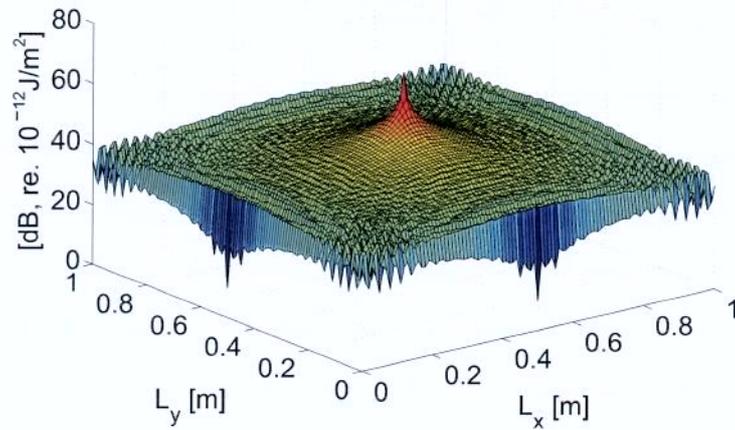


Figura 4.7: Densidades de energia total pelo método SEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 5,0$  kHz.

Os fluxos de energia são calculados usando as mesmas equações (Equações (3.155) e (3.156)) e os resultados na forma das componentes  $x$  e  $y$  estão mostrados nas Figuras (4.8)(a) e (b), respectivamente. A Figura (4.9) mostra o diagrama da direção e sentido dos vetores de fluxo de energia.

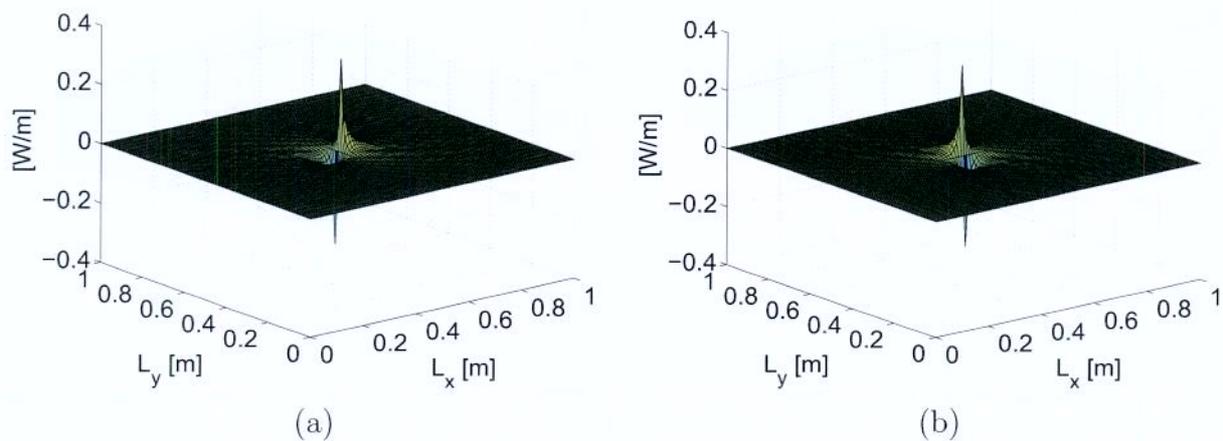


Figura 4.8: Fluxos de energia pelo método SEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 5,0$  kHz: (a) componente na direção  $x$ ; e (b) componente na direção  $y$ .

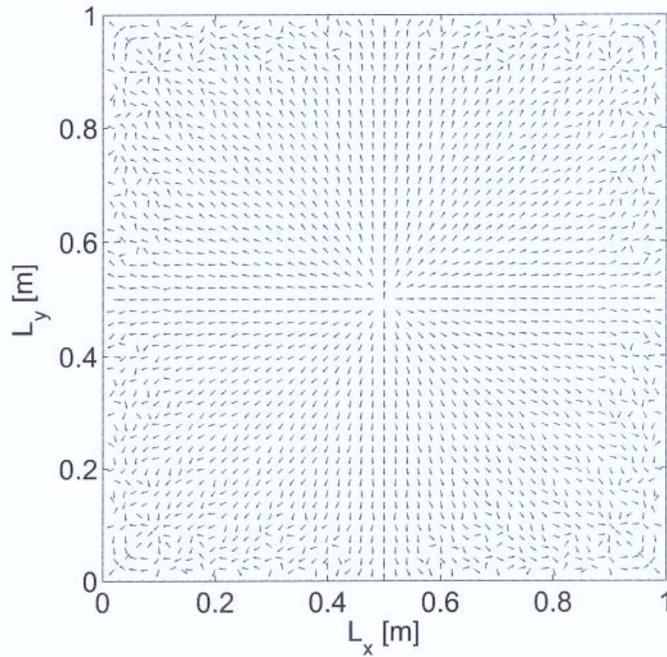


Figura 4.9: Vetores de fluxos de energia pelo método SEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 5,0$  kHz.

Observa-se que a densidade de energia (Figuras (4.6) e (4.7)) e o fluxo de energia (Figuras (4.4) e (4.5)) apresentam os mesmos comportamentos obtidos pelo método “EXATO”. Esses resultados serão confrontados posteriormente com o método “EXATO” para validar o código computacional do SEM, que é base para comparação com os modelos espectrais de energia desenvolvidos neste trabalho. Deve ser observado que em termos computacionais, o SEM é inerentemente mais barato que o “EXATO”, pois o SEM utiliza o modelo da placa de Levy (Lee and Lee, 1999) cuja solução em série é aplicada apenas na direção  $y$ , enquanto no “EXATO” essa solução é aplicada em ambas direções ( $x$  e  $y$ ).

### 4.1.3 Solução pelo Método ESEM

Nesta seção, serão apresentados os resultados simulados com o Método do Elemento Espectral de Energia (ESEM) aplicado ao modelo equivalente de energia da Figura (4.1)(b). As densidade de energia e os fluxos de energia são calculados tendo como base a formulação desenvolvida no Capítulo 3 na Seção 3.4. O ESEM, como já comentado em capítulos

anteriores, utiliza-se da mesma metodologia matricial do SEM para placas, sendo aplicado na equação diferencial aproximada de energia, Equação (3.44). O ESEM, diferentemente do SEM, tem como variável primária a média temporal e espacial da densidade de energia. Sendo assim, as densidades de energia potencial e cinética não são explicitamente mostradas pelo método. Esse fato ocorre devido às aproximações feitas para a obtenção da equação diferencial aproximada de energia, como apresentada no Capítulo 3 na Seção 3.1.

Da mesma maneira que no SEM, dois elementos espectrais de energia foram utilizados na direção  $x$ , e  $n = 100$  termos da série foram incluídos na solução da direção  $y$ . Também, neste caso, os resultados são posteriormente interpolados com  $\Delta x = \Delta y = 0,01$  m nas direções  $x$  e  $y$ . A média temporal da amplitude da potência injetada do modelo de energia equivalente à força de excitação do modelo estrutural pode ser escrita como (Cho, 1993):

$$p_0 = \frac{1}{2} \Re \{ f_0 i \omega \hat{w}^* (x_0, y_0) \},$$

onde a força  $f_0$  é a amplitude da força de excitação usada nos métodos “EXATO” e SEM.

A Figura (4.10), mostra a distribuição da densidade de energia do modelo de placa simples representado pela Figura (4.1)(b).

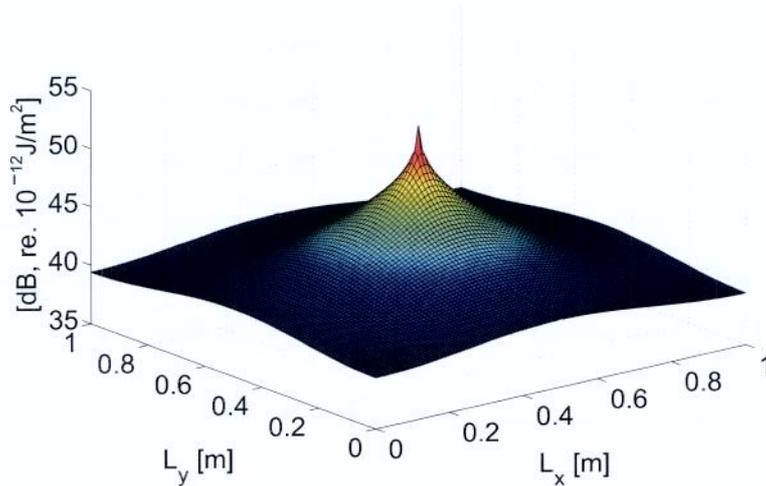


Figura 4.10: Densidade de energia pelo método ESEM para um modelo de placa simples, com banda de frequência de 1/3-oitava e  $f_c = 5,0$  kHz.

Os resultados do fluxo de energia são mostrados na forma das componentes  $x$  e  $y$  nas

Figuras (4.11)(a) e (b), respectivamente. A Figura (4.12) mostra o diagrama da direção e sentido dos vetores de fluxo de energia.

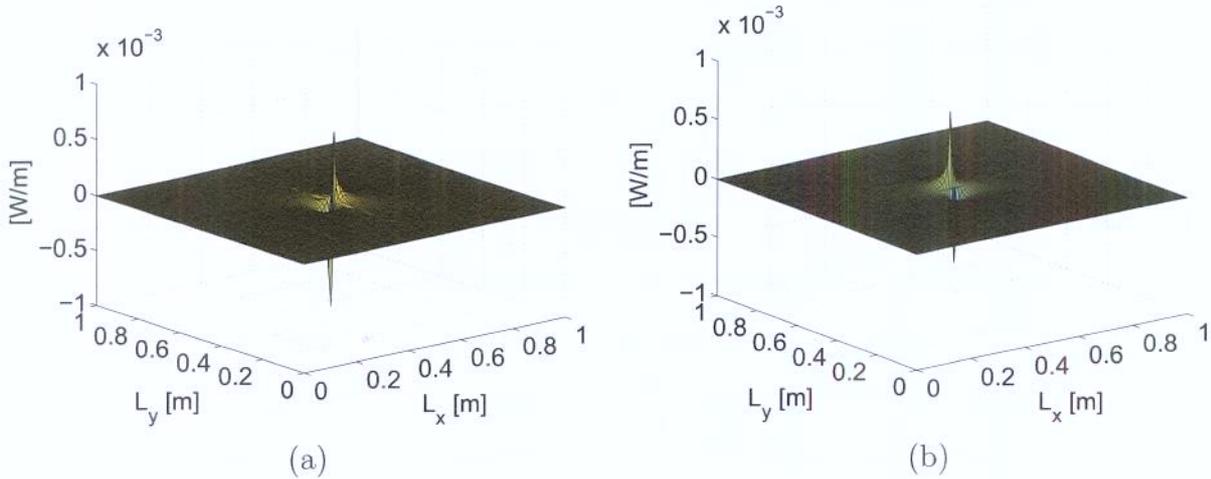


Figura 4.11: Fluxos de energia pelo método ESEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 5,0$  kHz: (a) componente na direção  $x$ ; e (b) componente na direção  $y$ .

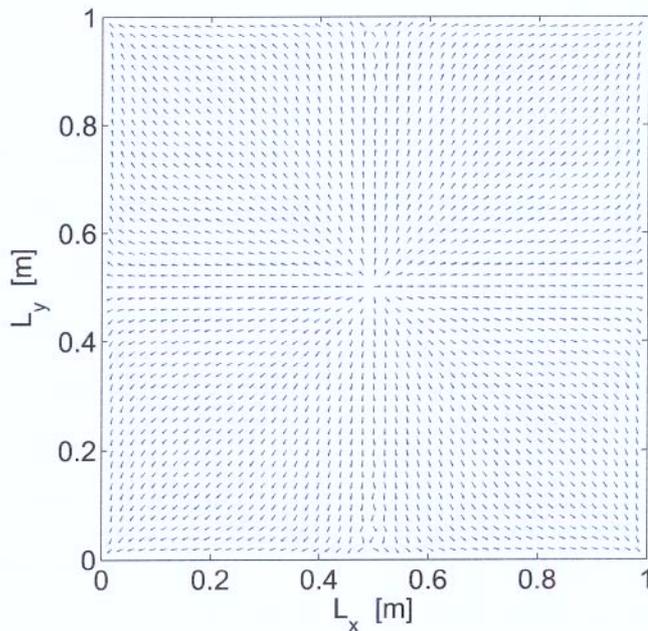


Figura 4.12: Vetores de fluxos de energia pelo método ESEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 5,0$  kHz.

Da Figura (4.10) observa-se que a densidade de energia apresenta um pico na posição

da potência injetada decaindo exponencialmente de forma suave para as bordas da placa. As componentes do fluxo de energia (Figuras (4.11)) apresentam dois picos simétricos em relação à densidade de energia na posição da potência injetada decaindo assintoticamente para zero nas bordas da placa. Da Figura (4.12)) observa-se que os vetores de fluxo de energia indicam uma direção e sentido regulares da posição da potência injetada até as bordas da placa. Estes resultados de densidade e fluxo de energia mostram um comportamento similar àqueles obtidos pelos métodos “EXATO” e SEM, mas sem incluir as oscilações da densidade nem o embaralhamento dos vetores do fluxo próximo das bordas da placa. Esse resultado do ESEM confirma a idéia inicial de que o método proporciona alterações na representação da densidade de energia e fluxo de energia quando comparados com o SEM e o “EXATO”. Outro ponto a ser comentado diz respeito à eficiência computacional, pois o método ESEM utiliza uma equação diferencial de segunda ordem, enquanto os outros métodos (SEM e “EXATO”) utilizam uma equação diferencial de quarta ordem. Como esperado, a densidade de energia apresenta-se de forma suavizada, o que é resultante da eliminação dos termos harmônicos espaciais como comentado na Seção 3.1.

#### **4.1.4 Solução pelo Método EFEM**

Os resultados numéricos apresentados nessa seção foram obtidos através do Método dos Elementos Finitos de Energia (EFEM). O método EFEM é utilizado para resolver numericamente a equação diferencial aproximada de energia (Equação (3.44)), metodologia já apresenta na Seção 3.2. Para construção da malha, foram utilizados elementos quadriláterais de nove nós, com funções de interpolação de quarto grau (Dhatt and Touzot, 1984). A fim de obter uma representação mais precisa da densidade de energia na região da força de excitação, utilizou-se uma malha com 225 elementos, sendo 15 elementos em cada direção ortogonal conforme mostrado na Figura (4.1.4). A potência é injetada no nó central do elemento 113, localizado no centro geométrico da placa.

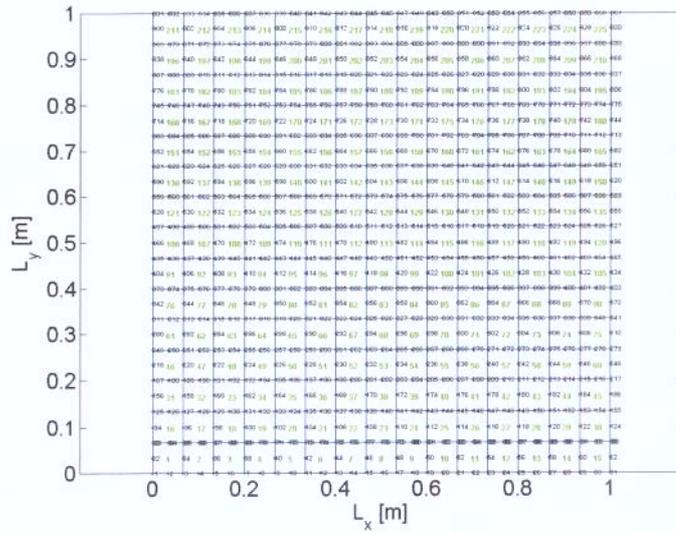


Figura 4.13: Malha de elementos finitos

A Figura (4.14) mostra a distribuição de densidade de energia devido a uma potência injetada como exemplificado na Figura (4.1)(b).

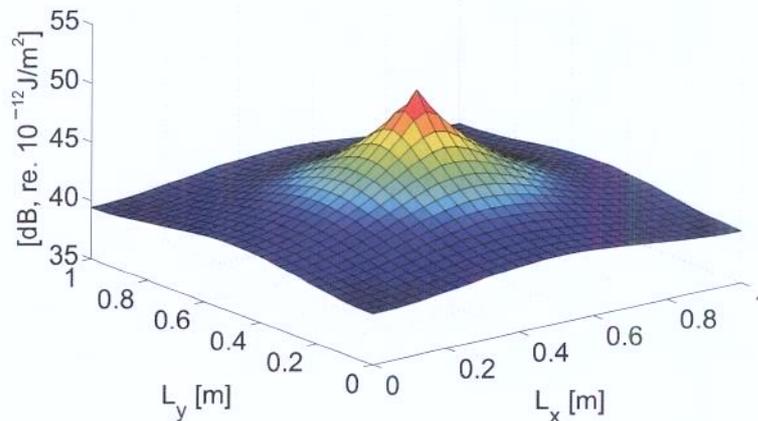


Figura 4.14: Densidade de energia pelo método EFEM para um modelo de placa simples, com banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 5,0$  kHz.

Os resultados do fluxo de energia são mostrados na forma das componentes  $x$  e  $y$  nas Figuras (4.15)(a) e (b), respectivamente. A Figura (4.16) mostra o diagrama da direção e sentido dos vetores de fluxo de energia.

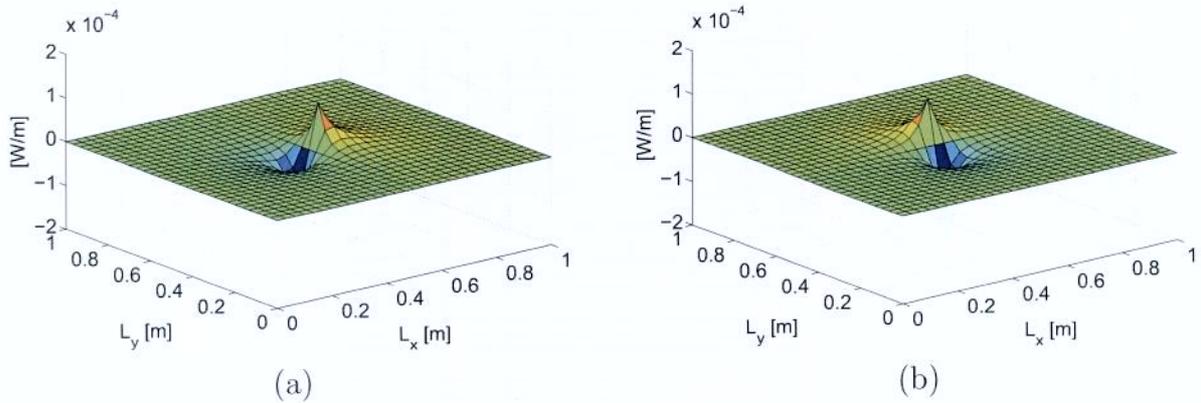


Figura 4.15: Fluxos de energia pelo método EFEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 5,0$  kHz: (a) componente na direção  $x$ ; e (b) componente na direção  $y$ .

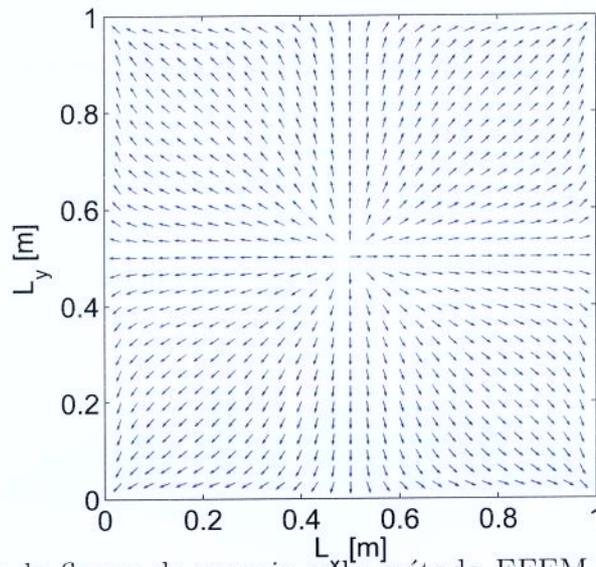


Figura 4.16: Vetores de fluxos de energia pelo método EFEM para um modelo de placa simples, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 5,0$  kHz.

Das Figuras (4.14), (4.15) e (4.12) observa-se que a densidade, as componentes e os vetores de fluxo de energia apresentam um comportamento similar àqueles do ESEM, mas com uma resolução mais grosseira, que pode ser atribuído à baixa quantidade de elementos utilizados na malha do EFEM. Desta forma é possível supor que o EFEM quando comparado com o ESEM requererá uma quantidade significativamente maior de elementos para

obter uma solução com a mesma precisão, o que acarretaria um custo computacional maior. Contudo, para que esta hipótese se verifique é necessária uma maior investigação sobre o assunto.

#### 4.1.5 Comparação entre os Métodos “EXATO”, SEM, ESEM e EFEM

Neste seção, apresentam-se testes do mesmo problema de placas simples simplesmente apoiada analisado nas seções anteriores, com interesse de comparar os resultados da distribuição de energia em várias faixas de frequências diferentes usando os métodos “EXATO”, SEM, ESEM e EFEM. Os valores médios em frequência da densidade de energia ao longo das dimensões da placa foram calculados pelos métodos “EXATO”, SEM, ESEM e EFEM para uma banda de frequência de 1/3 de oitava com diferentes frequências centrais:  $f_c = 50$  Hz,  $f_c = 500$  Hz,  $f_c = 5$  kHz,  $f_c = 12,5$  kHz. Considerando que os resultados dos valores de fluxo de energia, apresentados nas seções anteriores, não apresentaram outras diferenças além daquelas referentes ao embaralhamento dos vetores de fluxo próximos das bordas das placas, estes não serão analisados nesta seção.

Na Figura (4.17) são mostrados os resultados dos valores de densidade de energia observados na diagonal da placa. Esse tipo de gráfico é feito para facilitar a comparação do comportamento da distribuição da densidade de energia entre os diferentes métodos. Os resultados apresentam uma boa convergência entre os métodos de deslocamento (“EXATO” e SEM) e entre os métodos de energia (ESEM e EFEM) para todas as faixas de frequências avaliadas, com exceção no ponto de aplicação da força. Entretanto, para as faixas de frequências mais baixas (Figuras (4.17)(a) e (b)) vê-se claramente que a densidade de energia calculada pelos métodos ESEM e EFEM tendem aos valores médios daqueles obtidos pelo métodos “EXATO” e SEM. Nas faixas de frequências mais altas essa tendência, para valores próximos da média, é ainda observada (Figuras (4.17)(c) e (d)). A convergência dos resultados de densidade de energia obtida entre os métodos “EXATO” e SEM, validam a implementação computacional do elemento spectral de placa plana fina aqui apresentado. Assim, deste ponto em diante neste trabalho utilizaremos apenas o método SEM como referência para verificação dos outros métodos a serem analisados (ESEM e EFEM).

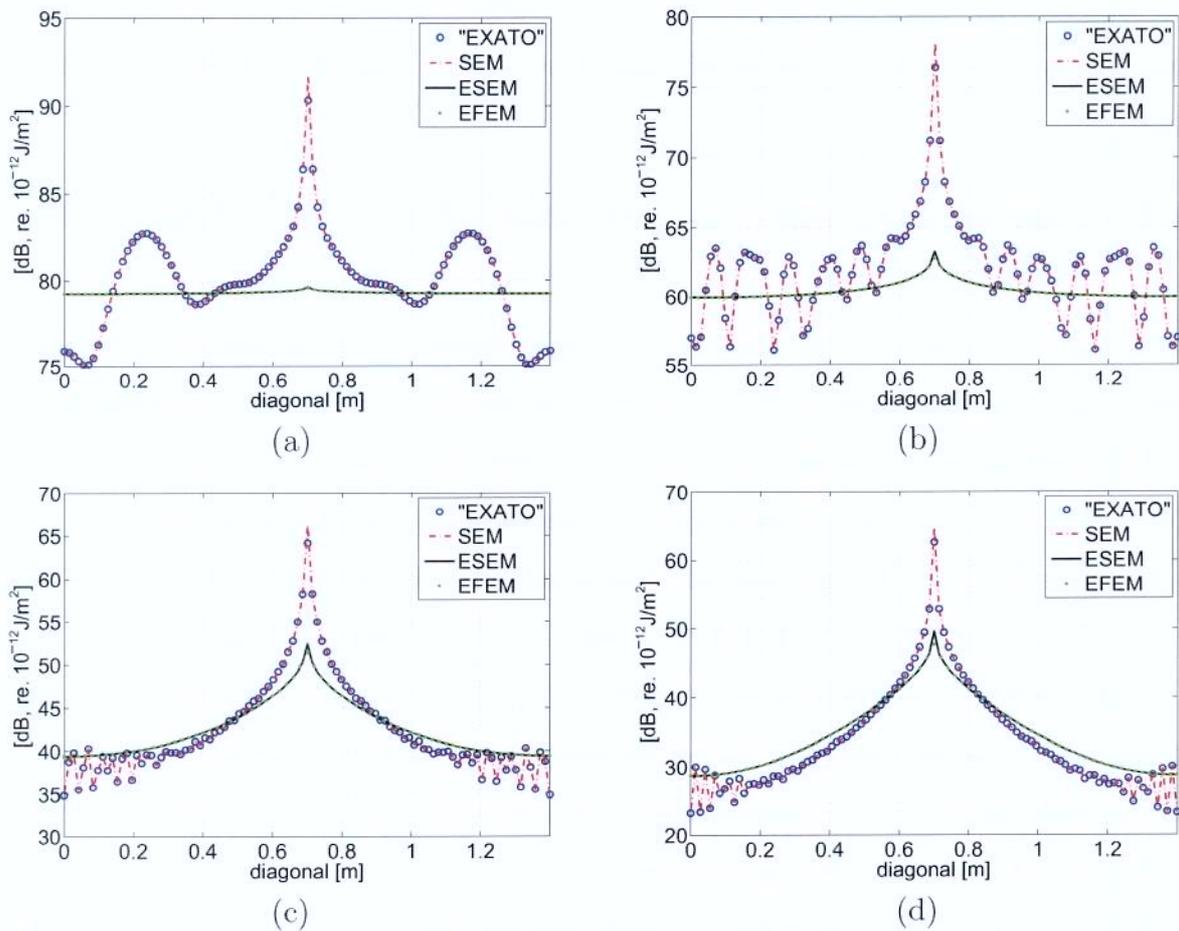


Figura 4.17: Densidade de energia observados na diagonal de um modelo de placa simples em uma banda de frequência de 1/3-oitava com : (a)  $f_c = 50,0$ Hz, (b)  $f_c = 500,0$ Hz, (c)  $f_c = 5,0$ kHz e (d)  $f_c = 12,5$ kHz.

Uma outra forma de confrontar os resultados pode ser feita através de uma representação espacial do comportamento da densidade de energia em toda extensão da placa. Nas Figuras (4.18) e (4.19) são comparados os resultados do SEM com ESEM e do SEM com EFEM, nas mesmas bandas de frequências anteriormente aplicadas. Na Figura (4.18), onde as bandas de frequências são mais baixas é possível observar uma tendência clara de convergência do ESEM e do EFEM para os valores médios do SEM. Contudo, nas bandas de frequências mais altas (Figura (4.19)), essa tendência não fica mais tão clara de perceber nestes gráficos espaciais.

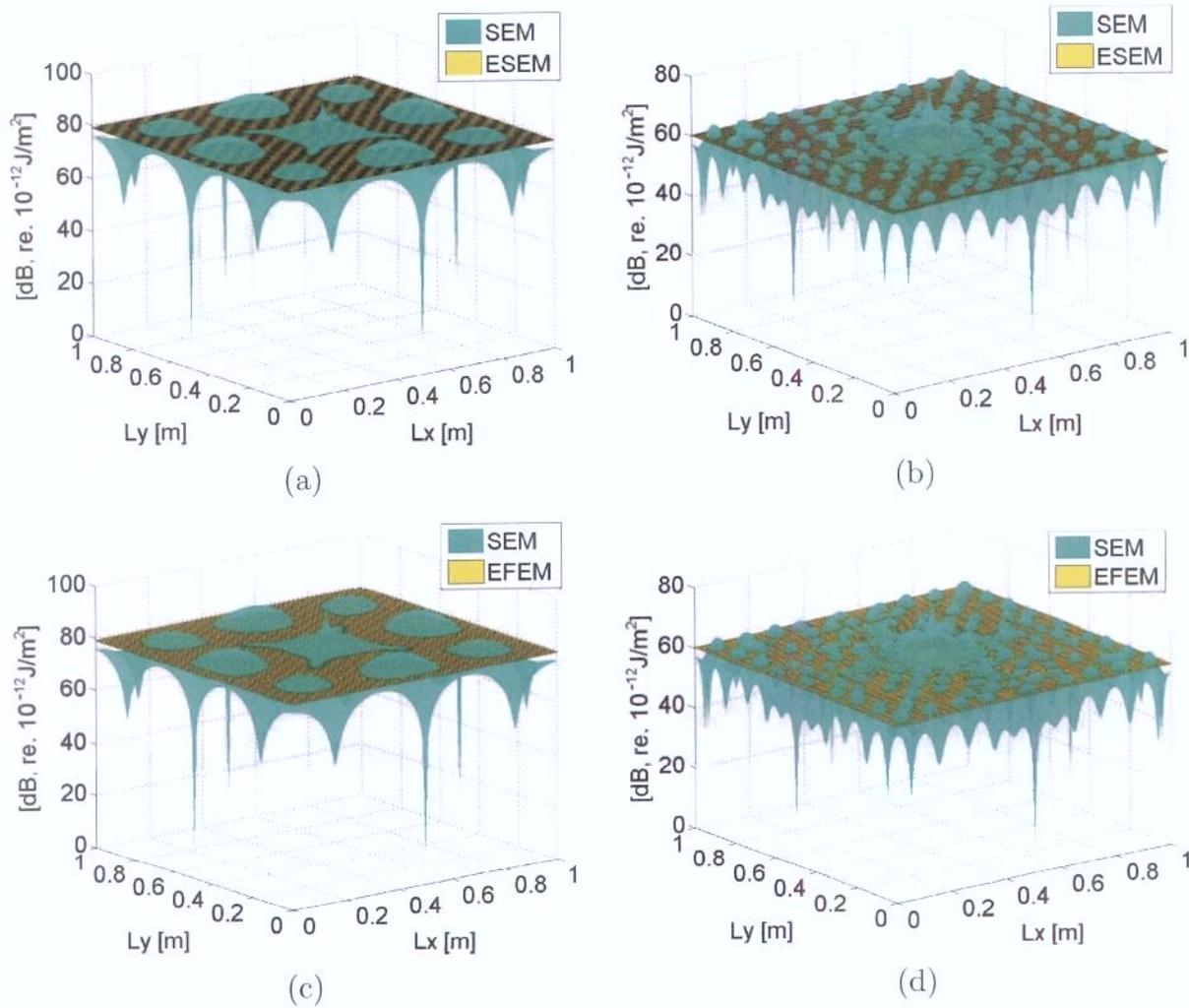


Figura 4.18: Densidade de energia para um modelo de placa simples em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: SEM versus ESEM (a)  $f_c = 50,0\text{Hz}$ , (b)  $f_c = 500,0\text{Hz}$ ; e SEM versus EFEM (c)  $f_c = 50,0\text{Hz}$ , (d)  $f_c = 500,0\text{Hz}$ .

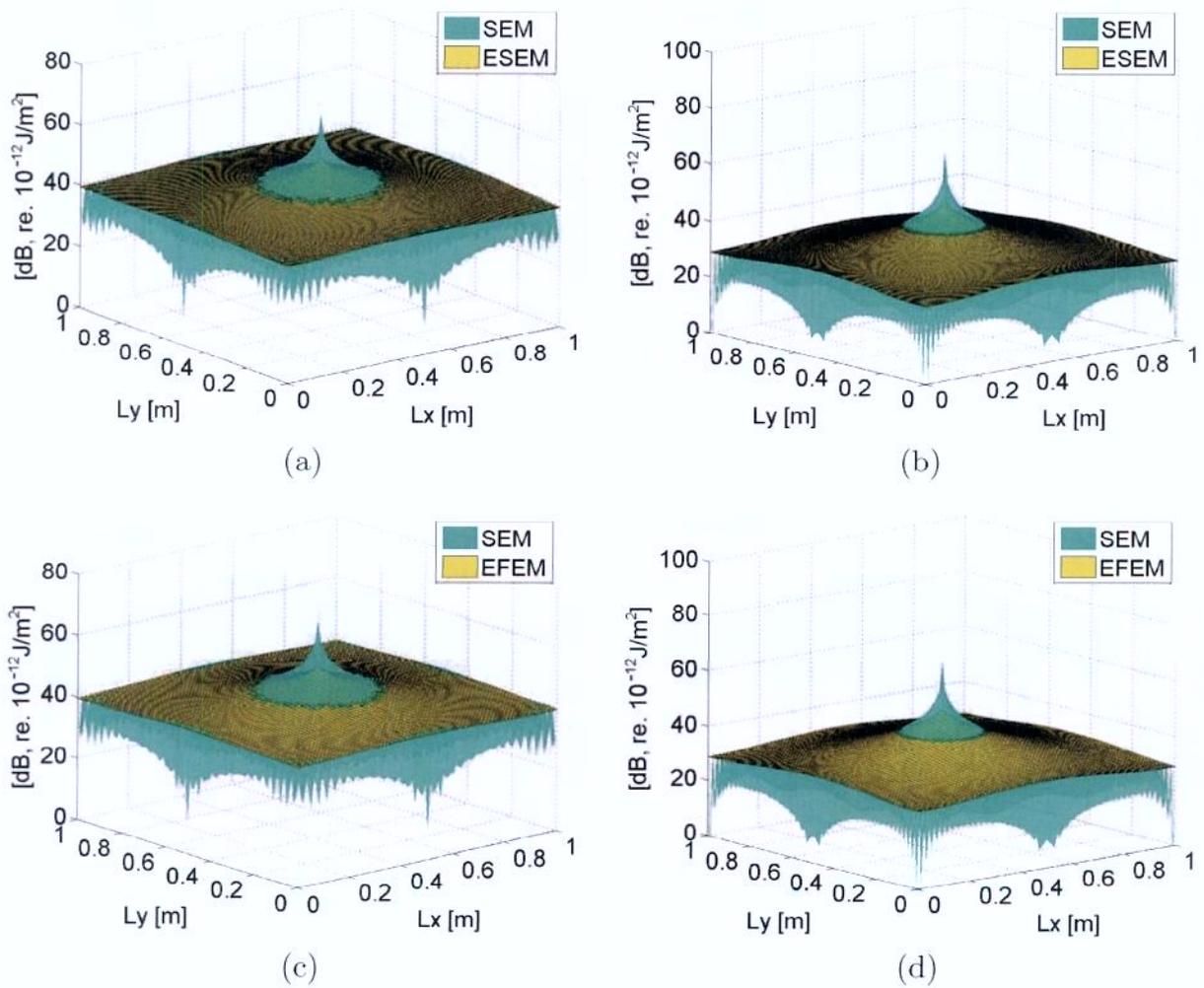


Figura 4.19: Densidade de energia para um modelo de placa simples em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: SEM versus ESEM (a)  $f_c = 5,0$  kHz, (b)  $f_c = 12,5$  kHz; e SEM versus EFEM (c)  $f_c = 5,0$  kHz, (d)  $f_c = 12,5$  kHz.

A fim de esclarecer este ponto, utilizou-se um procedimento de suavização dos valores numéricos de densidade de energia do SEM. Essa suavização é obtida gerando-se uma matriz dos valores médios da densidade de energia, a qual é obtida fazendo-se a média dos elementos da matriz de densidades de energia nas direções  $x$  e  $y$ . Este procedimento pode ser repetido várias vezes até obtermos uma superfície da densidade de energia suavizada.

Este procedimento foi aplicado aos resultados de densidade de energia do SEM, em todas as bandas de frequências analisadas, obtendo-se a média espacial aqui denominada nos gráficos de SEMs. Essas densidades médias são comparadas com aquelas obtidas pelo

ESEM e EFEM e mostradas nos gráficos das Figuras (4.20) e (4.21).

Na Figura (4.20) percebe-se claramente a tendência do ESEM e EFEM de convergirem para os valores médios dos SEMs, confirmando os resultados observados anteriormente para bandas de baixas frequências. Para faixas de frequências mais altas (Figura (4.21)) observa-se de forma mais clara a tendência do ESEM e EFEM, aproximar-se para um valor senão a média bem próxima dela. Este comportamento sugere que se for realizada uma suavização espacial no SEM nos mesmos padrões do EFA, talvez faça com que o método represente melhor as densidades de energia em altas frequências.

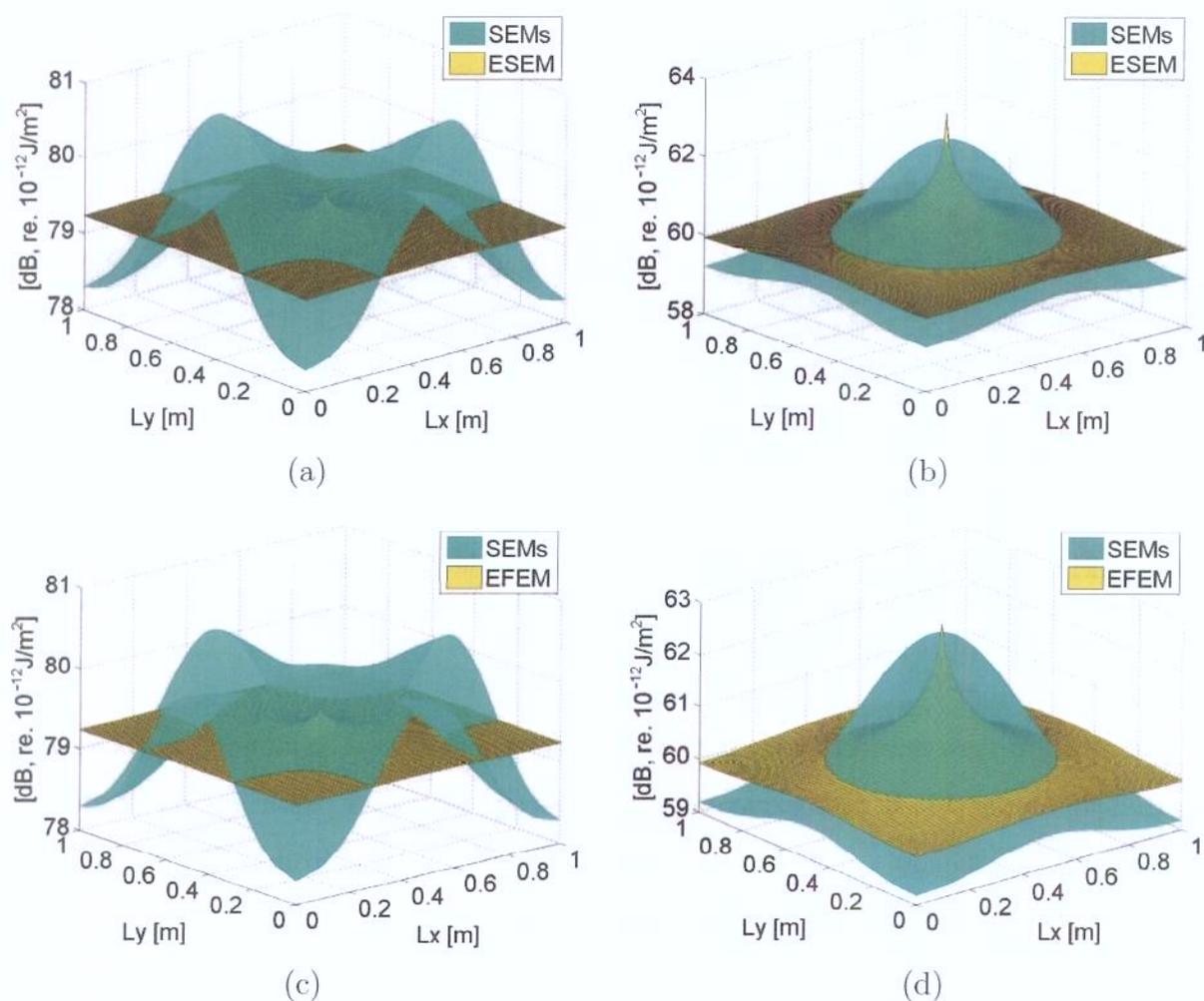


Figura 4.20: Densidades de energia para um modelo de placa simples em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: SEMs versus ESEM (a)  $f_c = 50\text{Hz}$ , (b)  $f_c = 500\text{Hz}$ ; e SEMs versus EFEM (c)  $f_c = 50\text{Hz}$ , (d)  $f_c = 500\text{Hz}$ .

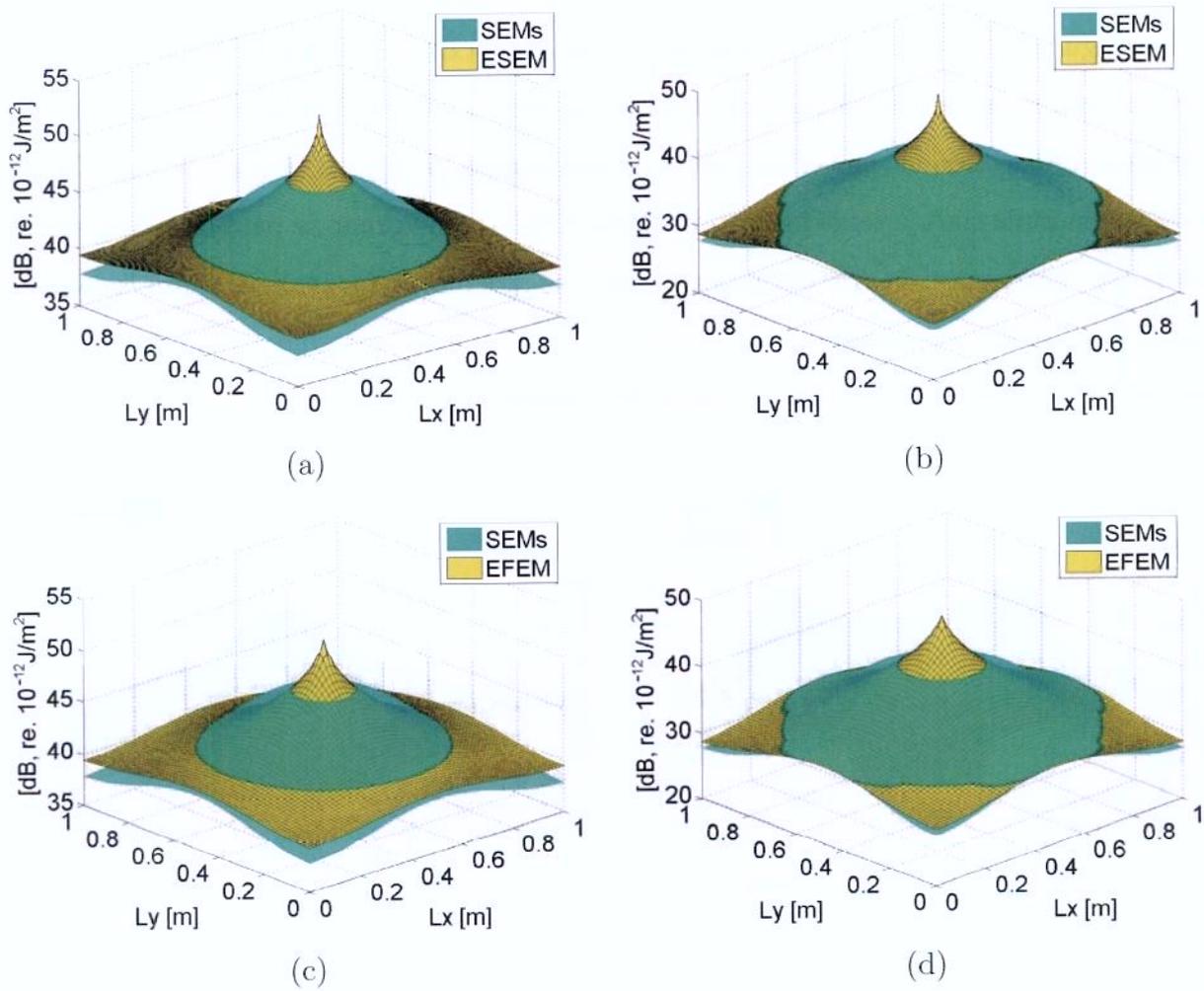


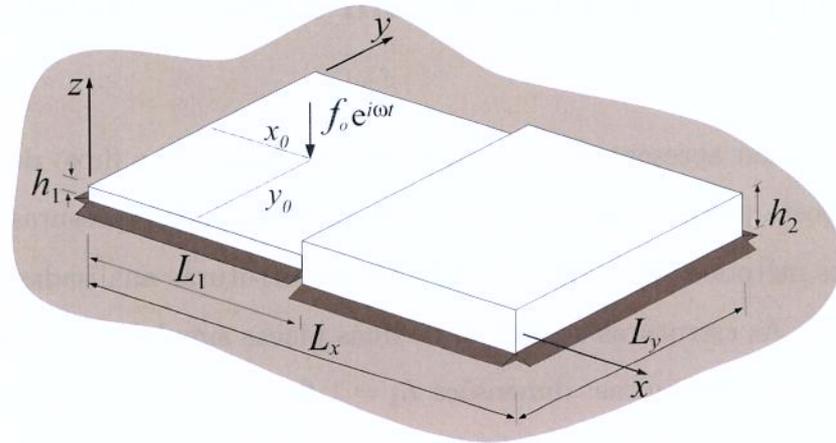
Figura 4.21: Densidade de energia para um modelo de placa simples em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: SEMs versus ESEM (a)  $f_c = 5\text{kHz}$ , (b)  $f_c = 12,5\text{kHz}$ ; e SEMs versus EFEM (c)  $f_c = 5\text{kHz}$ , (d)  $f_c = 12,5\text{kHz}$ .

A seção aqui apresentada serviu para fortalecer os conceitos relacionados a propagação e distribuição da densidade de energia em estruturas tipo placa. A partir dos resultados aqui apresentados, ficou clara a convergência entre os resultados dos métodos SEM e “EXATO”. Para o ESEM e EFEM também foram observadas convergência entre os resultados dos métodos.

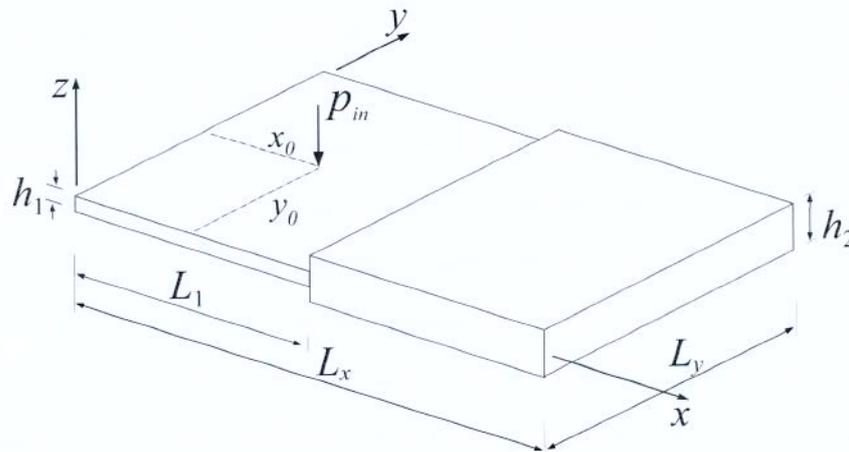
## 4.2 Exemplos de Placas com Descontinuidade de Espessura

Nesta seção serão apresentados os resultados de densidade e fluxo de energia de uma estrutura composta por duas placas planas finas coplanares de espessuras diferentes, obtidos a partir dos métodos SEM, ESEM e EFEM. As estruturas analisadas estão mostradas na Figura (4.22). As estruturas consistem de duas placas simples com as seguintes propriedades geométricas e mecânicas: dimensões  $L_1 = 1,2$  m,  $L_x = 2$  m e  $L_y = 1$  m, espessuras  $h_1 = 0,001$  m e  $h_2 = 0,004$  m, módulo de elasticidade  $E = 71$  GPa, densidade  $\rho = 2700$  kg/m<sup>3</sup> e fator de perda  $\eta = 0,05$ . Para os métodos espectrais (SEM e ESEM) foram utilizados  $n = 1, \dots, 150$  termos na expansão da série na direção  $y$ . Os resultados das bordas dos elementos espectrais são posteriormente interpolados com uma discretização de  $\Delta x = \Delta y = 0,02$  m nas direções  $x$  e  $y$ . Para o método EFEM utilizou-se uma malha de  $35 \times 35$  elementos/placa. O modelo estrutural tem condições de contorno de placa simplesmente apoiada (Figuras (4.22)(a)), com uma força de excitação harmônica unitária pontual na posição  $x_0 = 0,4$  m e  $y_0 = 0,5$  m. O modelo de energia equivalente (Figura (4.22)(b)) terá fluxo de energia nulo em todas as bordas com uma potência injetada harmônica pontual na mesma posição da força. Os resultados das densidade e fluxo de energia são calculados para bandas de frequência de 1/3 de oitava com frequências centrais  $f_c = 0,5; 5,0$  e  $12,5$  kHz.

Os resultados aqui obtidos pelo SEM são usados como referência. Dessa forma, os resultados do método SEM serão confrontados com a densidade de energia e do fluxo de energia obtidos a partir dos métodos ESEM e EFEM para o modelo estrutural de placas coplanares com diferenças de espessura.



(a)



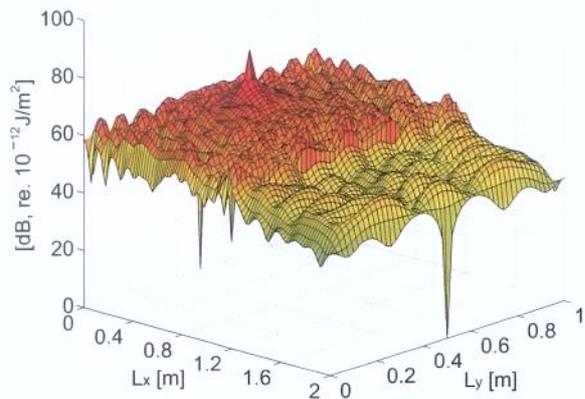
(b)

Figura 4.22: Estrutura de placas coplanares com descontinuidade de espessura: (a) modelo estrutural; e (b) modelo de energia equivalente.

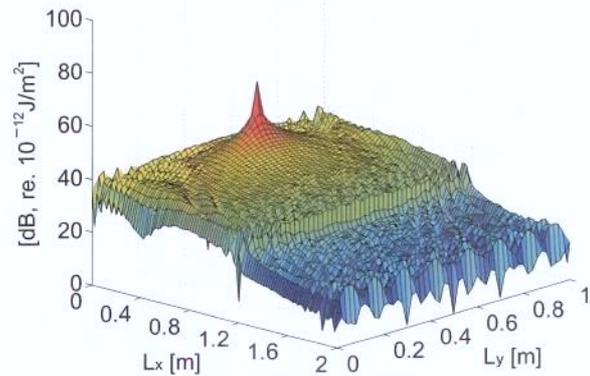
As Figuras (4.23), (4.24) e (4.25) mostram uma representação espacial das densidades de energia da estrutura mostrada na Figura (4.22), para bandas de frequência de 1/3 de oitava com frequências centrais  $f_c = 0,5; 5,0$  e  $12,5$  kHz, calculadas pelos métodos SEM, ESEM e EFEM, respectivamente.

Da Figura (4.23) observa-se que, para o método do SEM, em todas as bandas de frequências analisadas a densidade de energia apresenta um pico na posição da força de excitação decaindo exponencialmente com um comportamento oscilatório para as bordas da primeira placa. Na junta das placas, onde encontra-se a descontinuidade de espessura,

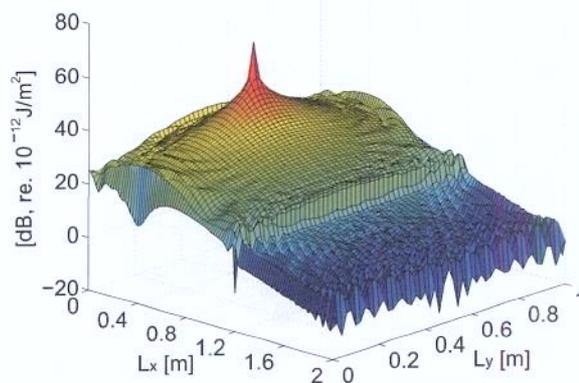
ocorre uma queda brusca da amplitude da densidade, que continua a decair exponencialmente também de forma oscilatória na segunda placa até as bordas da mesma.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.23: Densidade de energia pelo método SEM de um modelo de placa coplanar em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a)  $f_c = 500,0$  Hz , (b)  $f_c = 5,0$  kHz e (c)  $f_c = 12,5$  kHz.

Das Figuras (4.24) e (4.25) observa-se que os métodos de energia (ESEM e EFEM) tem comportamentos similares, onde a densidade de energia apresenta um pico na posição da potência injetada decaindo exponencialmente de forma suave para as bordas da primeira placa. Na junta das placas, ocorre uma queda brusca da amplitude da densidade, que

continua a decair exponencialmente de forma suave na segunda placa até as bordas da mesma. Como era esperado, as oscilações são atenuadas com o aumento da frequência central da banda.

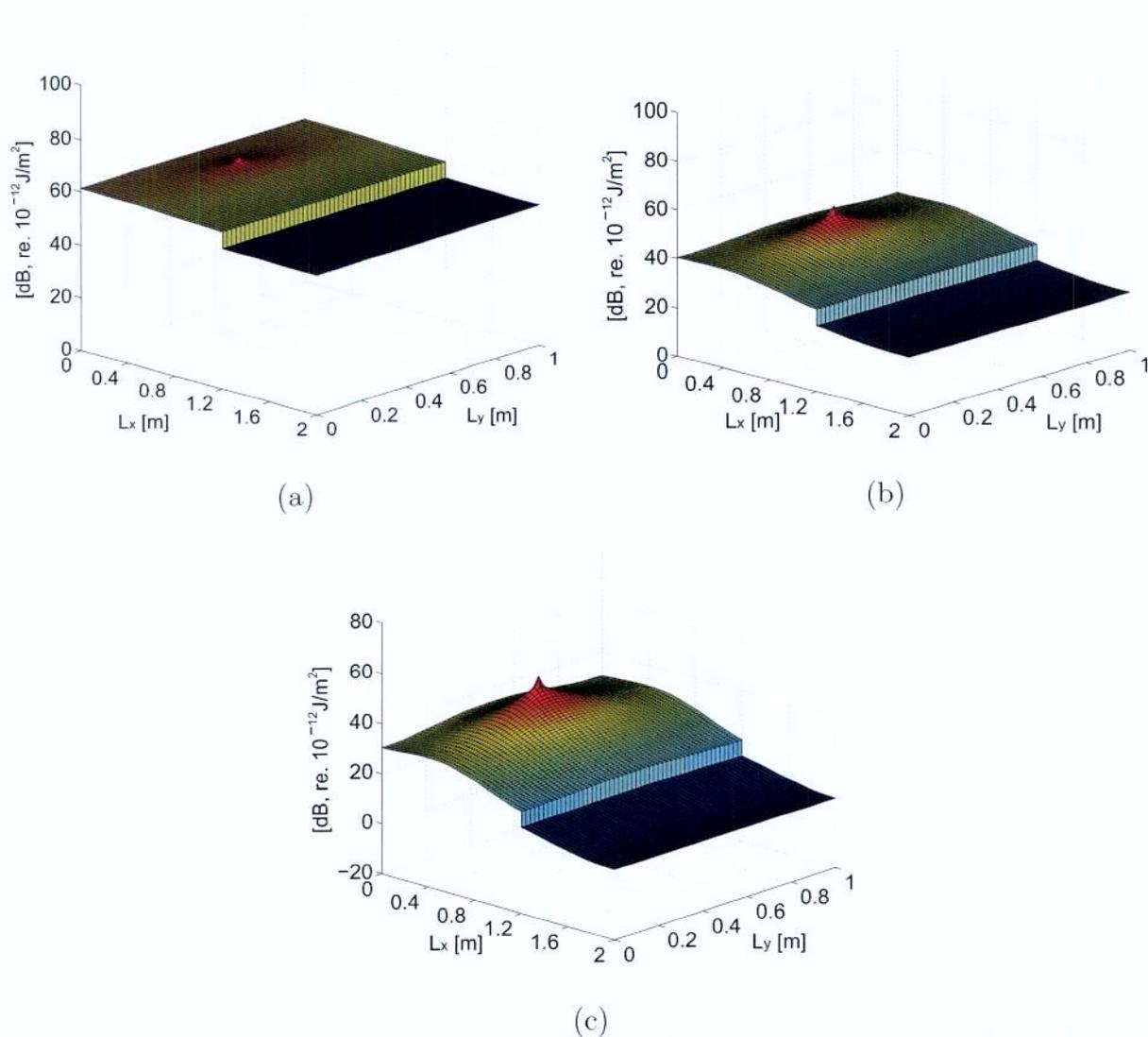


Figura 4.24: Densidade de energia pelo método ESEM de um modelo de placa coplanar em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a)  $f_c = 500,0$  Hz , (b)  $f_c = 5,0$  kHz e (c)  $f_c = 12,5$  kHz.

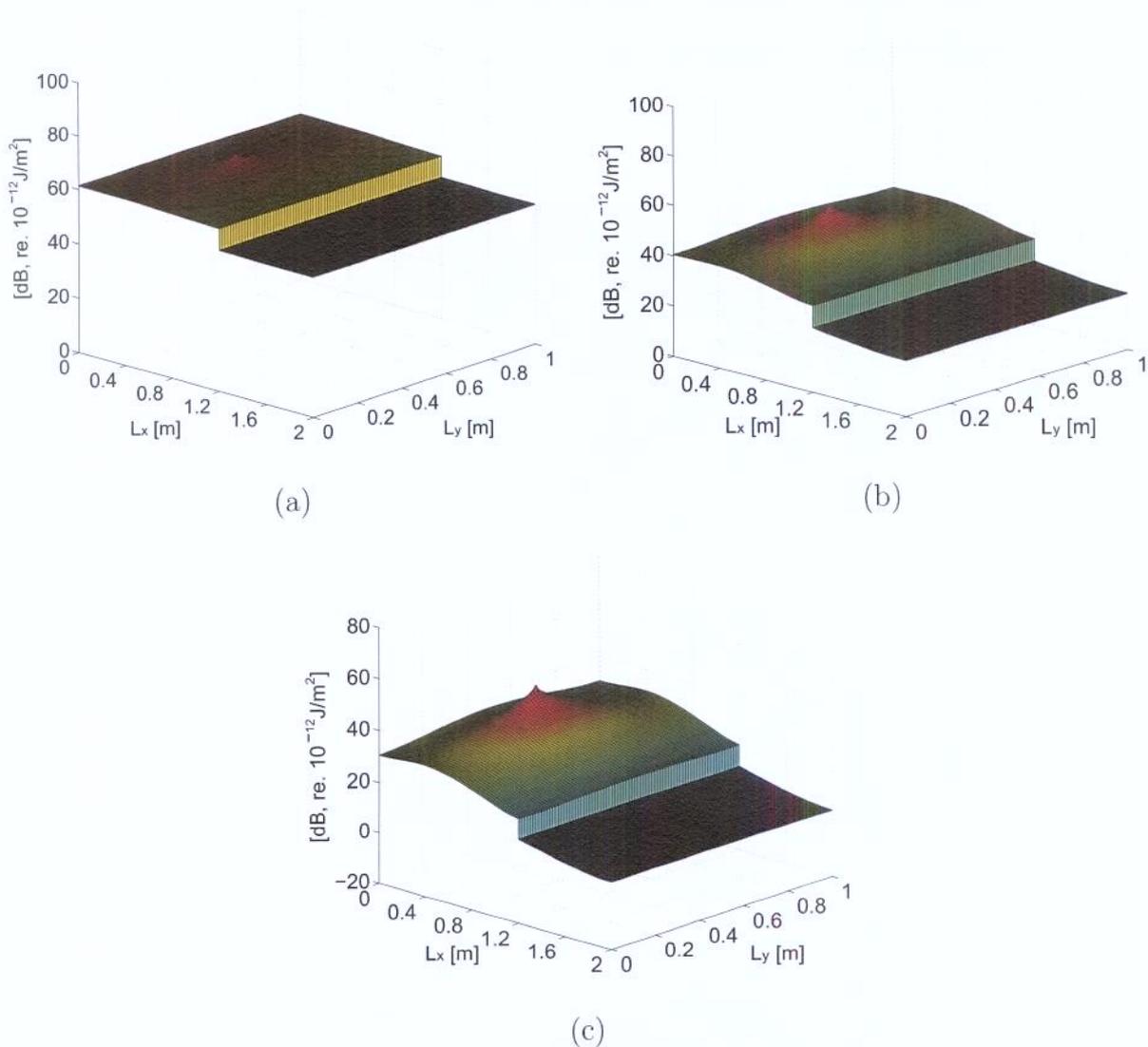
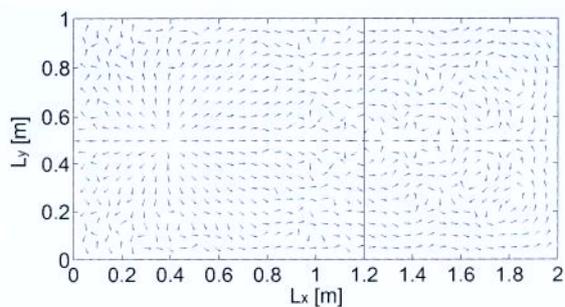


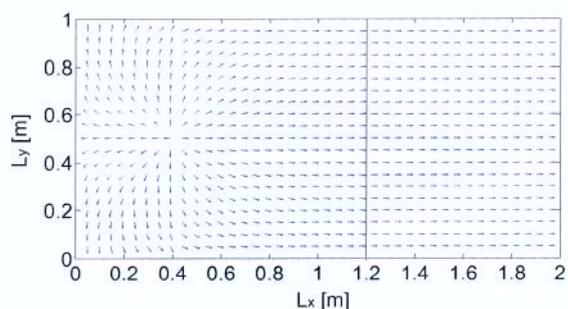
Figura 4.25: Densidade de energia pelo método EFEM de um modelo de placa coplanar em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a)  $f_c = 500$  Hz , (b)  $f_c = 5,0$  kHz e (c)  $f_c = 12,5$  kHz.

A Figura (4.26) mostra o comportamento dos fluxos de energia na estrutura calculados em uma faixa de frequência como frequência central  $f_c = 500,0$  Hz, pelos métodos SEM, ESEM e EFEM. Os resultados obtidos mostram de forma clara a questão da propagação da energia vibracional relacionada a cada método. No ESEM e EFEM observa-se um fluxo de energia regular (Figuras (4.26)(b) e (c)) em toda área da placa desde o ponto de excitação até as bordas, já no SEM a regularidade do fluxo só é mantida até próximo das bordas da primeira placa a partir de onde torna-se irregular e mantém-se assim também em toda área

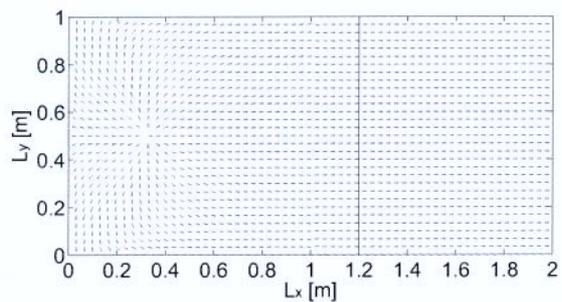
da segunda placa (Figura (4.26)(a)). Resultados para as outras bandas de frequências não são apresentados tendo em vista que apresentam o mesmo comportamento sem diferenças significativas.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.26: Fluxo de energia de uma placa simplesmente apoiada, para uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 500$  Hz, pelos métodos: (a) SEM , (b) ESEM e (c) EFEM.

Na Figura (4.27) são apresentados os resultados obtidos da densidade de energia so-

bre uma linha na direção  $x$  da placa, a qual passa pelo ponto de aplicação da força de excitação/potência injetada.

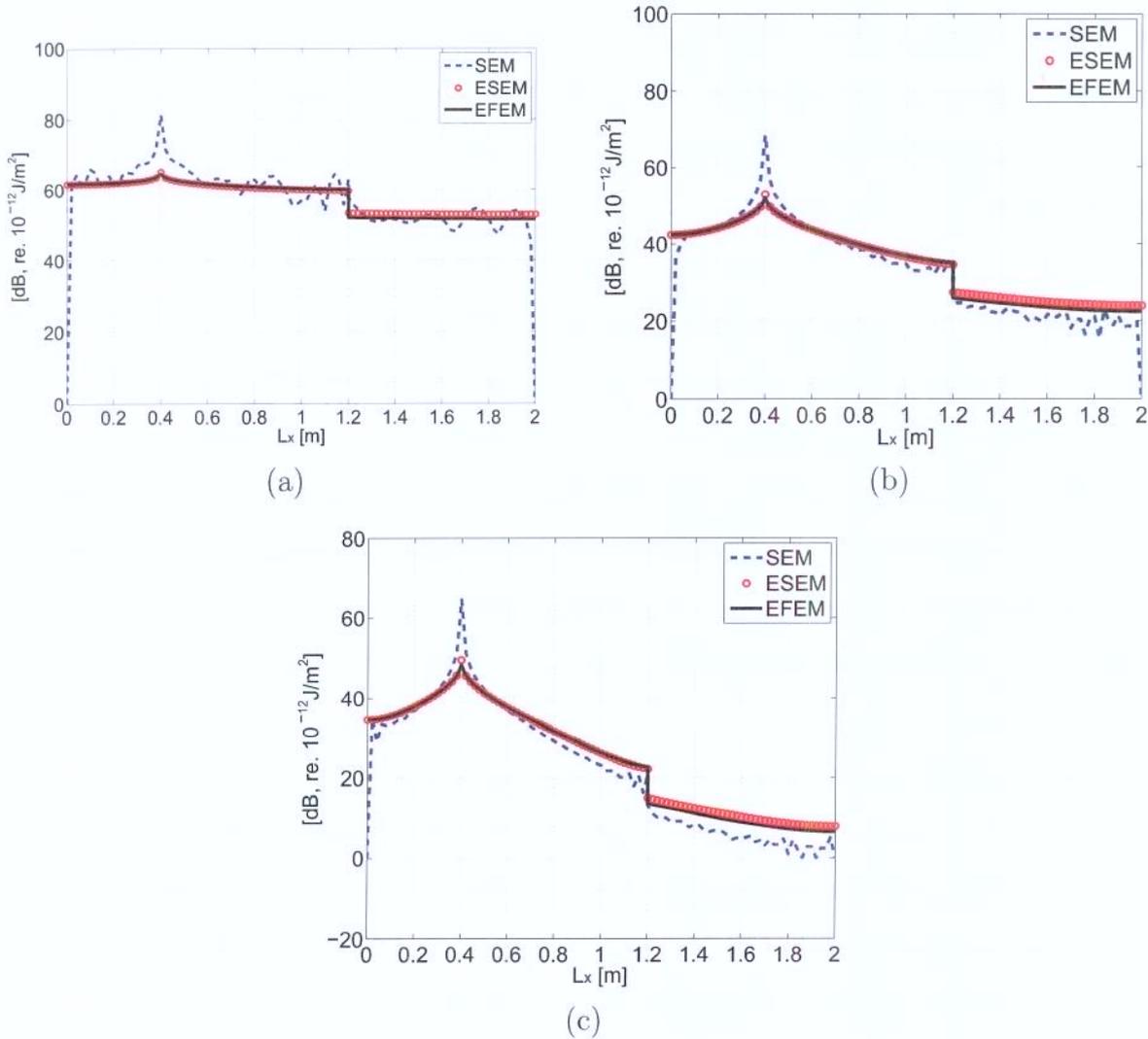


Figura 4.27: Densidade de energia na direção  $x$  passando no ponto de excitação de uma estrutura de placa coplanar, simplesmente apoiada, para uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a)  $f_c = 500,0\text{Hz}$ ; (b)  $f_c = 5\text{kHz}$ ; e (c)  $f_c = 12,5\text{kHz}$ .

Essa forma de gráfico foi utilizada para facilitar a comparação do comportamento da distribuição da densidade de energia entre os diferentes métodos. Os resultados obtidos pelo ESEM e EFEM apresentam boa concordância à exceção da região próxima à aplicação da força e na região após a descontinuidade. Essas regiões de discordância entre os métodos podem ser devido as diferenças nas funções de forma utilizadas pelos métodos ESEM e

EFEM. No caso do ESEM a própria solução da equação diferencial de energia é utilizada como função de forma, enquanto o EFEM utiliza funções polinomiais estabelecidas pelo elemento escolhido em sua implementação. Com relação à comparação do SEM com os métodos de energia (ESEM e EFEM), observa-se uma maior evidência de que os métodos de energia convergem para os valores médios do SEM. Contudo, para bandas de frequências mais altas (Figuras (4.27)(b) e (c)), esse comportamento não se mantém, havendo um desvio dos métodos de energia em relação aos resultados do SEM, os quais se acentuam à proporção que se aproxima das bordas da estrutura. Deve ser observado que esta variação entre o SEM e os métodos de energia pode ser aumentada ou diminuída neste tipo de gráfico dependendo se na posição da linha ao longo de eixo  $x$  que passa pela força de excitação existe um vale ou um pico da densidade de energia variando na direção  $y$ . Uma outra diferença entre o SEM e os métodos de energia (ESEM e EFEM) ocorre na região das borda onde a densidade de energia por SEM cai para valores bem próximos de zero (Figuras (4.27)). Isso acontece porque as densidades são calculadas a partir dos deslocamentos e rotações, que para uma condição de contorno simplesmente apoiada nas bordas, terão valores nulos e não-nulos, respectivamente.

A Figura (4.28) mostra a representação espacial das densidades de energia mostradas na Figura (4.27). Essa representação é apenas uma outra forma de visualizar os mesmos resultados. Como pode ser observado, nas frequências mais altas, novamente não é possível perceber que os resultados do ESEM e EFEM convergem para os valores médios do SEM. Sendo assim, foi realizado o mesmo procedimento de suavização através do cálculo dos valores médios no espaço da densidade energia do SEM aplicado no modelo de placa simples discutido no item anterior. Estes resultados das densidades de energia do SEM suavizadas (SEMs) são comparados com aqueles dos modelos de ESEM e EFEM na Figura (4.29). Com essa suavização, observa-se que os resultados do ESEM e EFEM tendem a se aproximar dos resultados obtidos pelo SEM, mas ainda apresentam diferenças próximo das bordas.

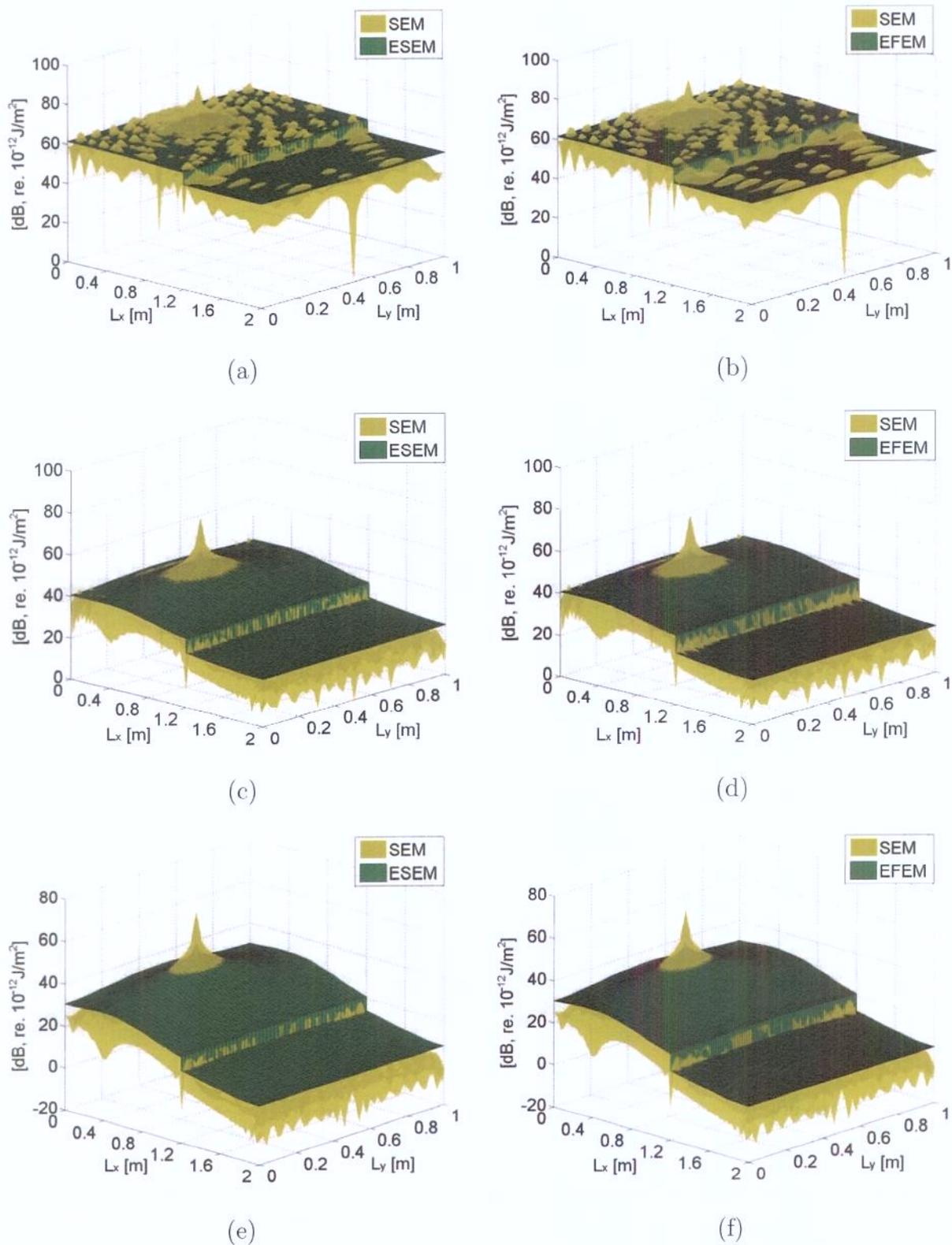


Figura 4.28: Densidade de energia de um placa coplanar para uma banda de frequência de 1/3-oitava: (a)  $f_c = 500,0$  Hz, (c)  $f_c = 5,0$  kHz, (e)  $f_c = 12,5$  kHz por SEM  $\times$  ESEM; e (b)  $f_c = 500,0$  Hz, (d)  $f_c = 5,0$  kHz, (f)  $f_c = 12,5$  kHz SEM  $\times$  EFEM.

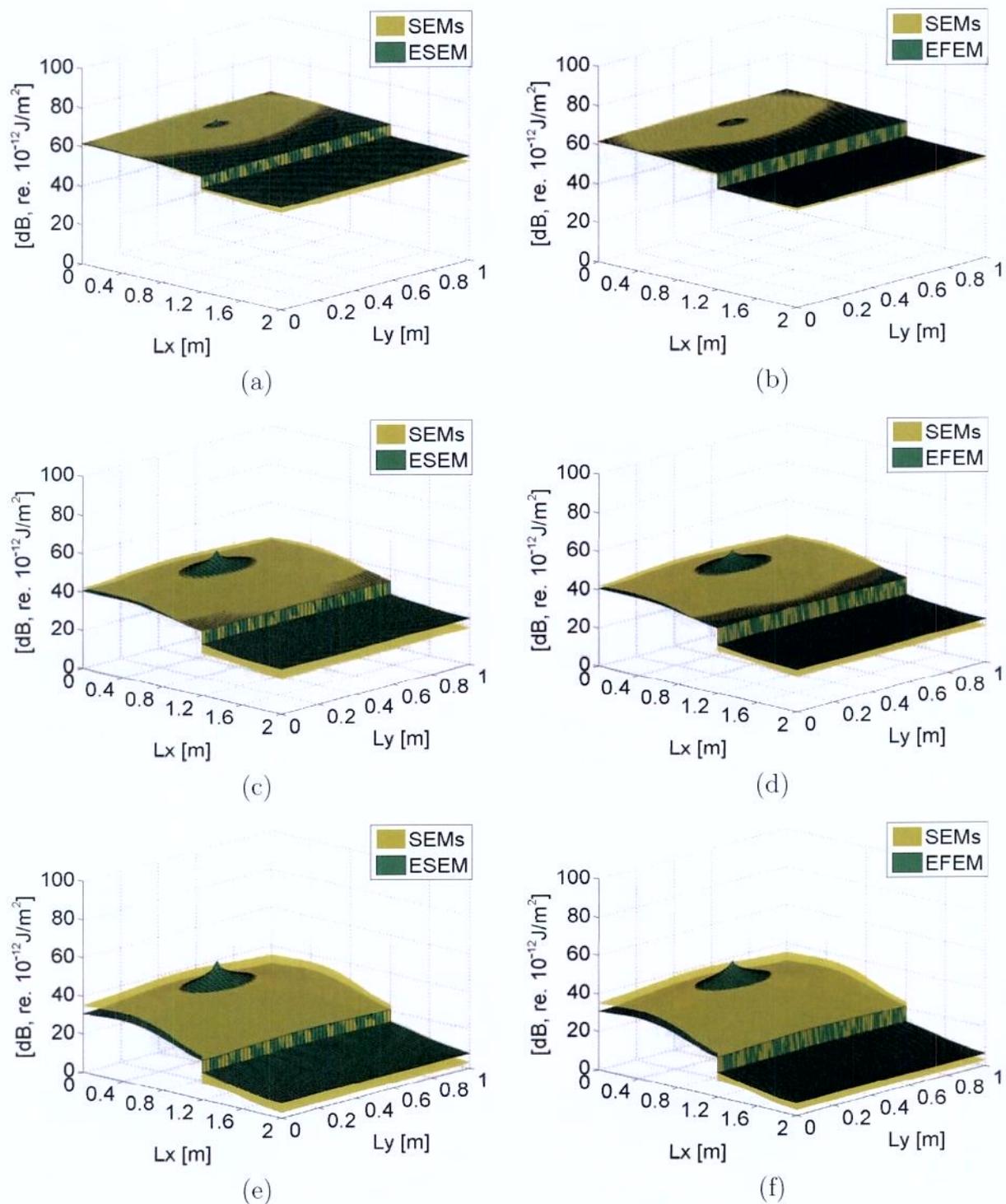


Figura 4.29: Densidades de energia para um modelo de placa coplanar em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a)  $f_c = 500,0$  Hz, (c)  $f_c = 5,0$  kHz, (e)  $f_c = 12,5$  kHz por SEMs  $\times$  ESEM; e (b)  $f_c = 500,0$  Hz, (d)  $f_c = 5,0$  kHz, (f)  $f_c = 12,5$  kHz SEMs  $\times$  EFEM.

Mantendo-se as mesmas propriedades geométricas e mecânicas do modelo estrutural

da Figura (4.22)(a), mas aplicando-se a condição de contorno apoiada-livre obtém-se o modelo estrutura mostrado na Figura (4.30), cujo modelo de energia equivalente é o mesmo já mostrado na Figura (4.22)(b). Para análise deste problema também são mantidos, os mesmos pontos de excitação, número de termos das séries dos modelos espectrais, e a ordem da malha do modelo de elementos finitos. Os resultados das densidade e fluxo de energia são calculados nas mesmas bandas de frequência pelos métodos SEM, ESEM e EFEM.

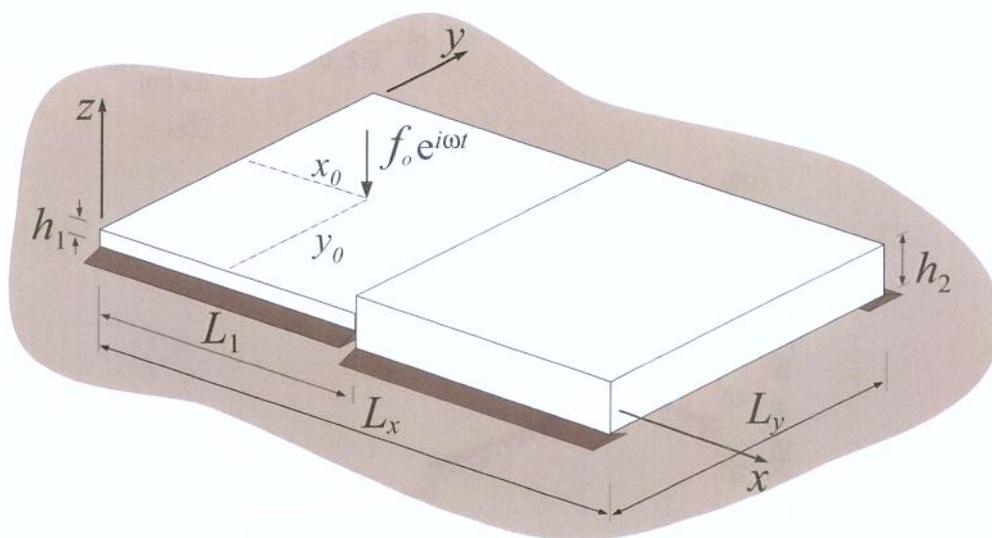


Figura 4.30: Estrutura de placa coplanar apoiada-livre com descontinuidade de espessura.

Na Figura (4.31) são apresentados os resultados obtidos da densidade de energia sobre uma linha na direção  $x$  da placa, para um modelo estrutural com condições de contorno apoiada-livre (Figura (4.30)). Os resultados obtidos pelos métodos de energia (ESEM e EFEM) são os mesmos, pois não há nenhuma alteração do modelo de energia equivalente. Enquanto, para os resultados do SEM as densidade de energia apresentam um comportamento similar aos resultados obtidos para um modelo estrutural simplesmente apoiado, discutido na Figura (4.27). A principal diferença é que, devido à condição de contorno na borda livre deste caso, as densidades de energia não apresentam valores próximos de zero nestas bordas da placa. Desta forma, não se justificam outras investigações sobre o seu comportamento para esta condição de contorno.

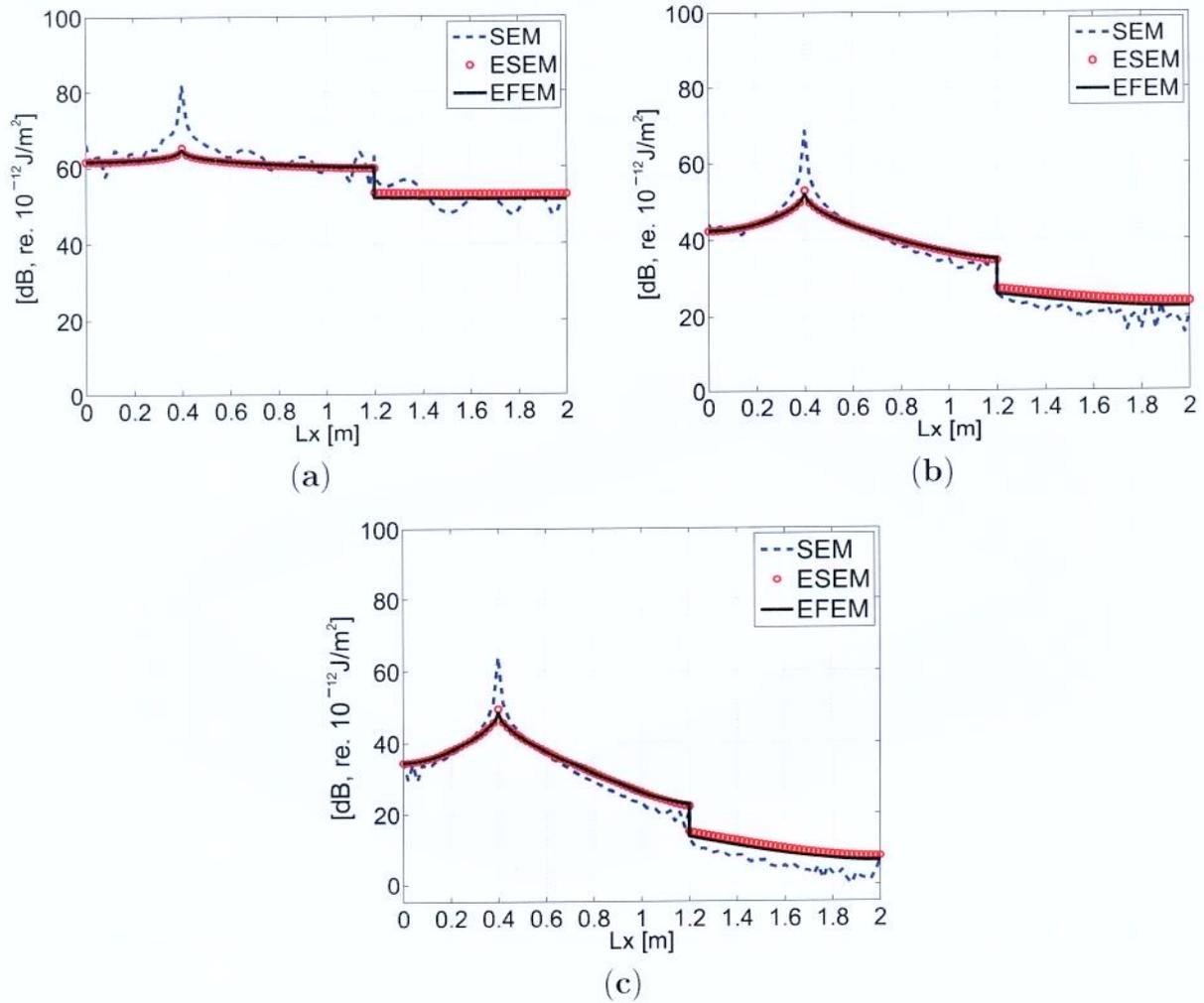


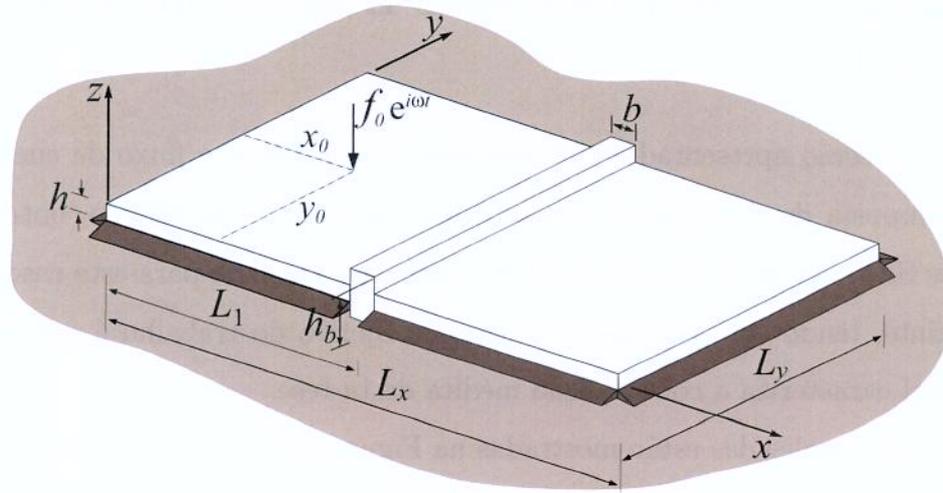
Figura 4.31: Densidade de energia na direção  $x$  passando no ponto de excitação de uma estrutura de placa coplanar, apoiada-livre, para uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a)  $f_c = 500\text{Hz}$ ; (b)  $f_c = 5\text{kHz}$ ; e (c)  $f_c = 12,5\text{kHz}$ .

Os resultados aqui apresentados para modelos de placas coplanares modelados através do SEM, ESEM e EFEM se mostraram satisfatórios, uma vez que representaram a descontinuidade de forma coerente. Na comparação entre o ESEM e EFEM foi observada uma boa convergência dos métodos; contudo, na comparação entre o SEM e os métodos de energia (ESEM e EFEM) algumas pequenas discordâncias são observadas em relação a convergência destes últimos aos valores médios do SEM.

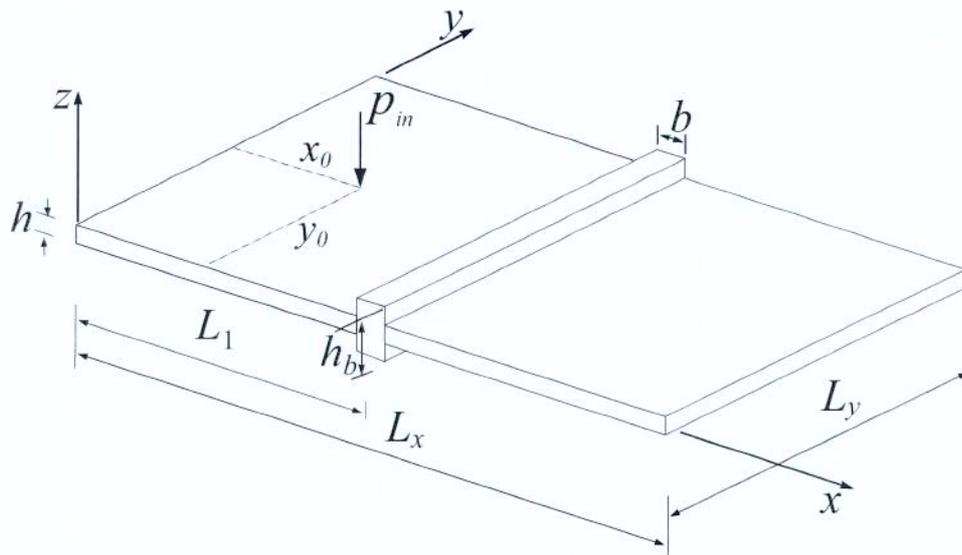
### 4.3 Exemplos de Placa com Descontinuidade de Reforçador

Nesta seção serão apresentados os resultados de densidade e fluxo de energia de uma estrutura composta de duas placas planas finas coplanares com reforço, obtidos a partir dos métodos SEM e ESEM. O método EFEM não será avaliado para este caso, bem como o caso seguinte, tendo em vista que o principal objetivo do trabalho é avaliar o método ESEM, o qual caracteriza a contribuição inédita desta tese.

As estruturas analisadas estão mostradas na Figura (4.32). As estruturas consistem de duas placas: uma placa na qual é fixada uma viga em uma das bordas que atuará como reforçador; e uma placa simples. Para a estrutura as seguintes propriedades geométricas e mecânicas são consideradas: dimensões da estrutura  $L_x = 1,0$  m e  $L_y = 1,0$  m, espessura das placas  $h = 0,004$  m, posição do reforço  $L_1 = 0,54$  m, base da viga de reforço  $b = 0,008$  m, altura da viga de reforço  $h_b = 0,016$  m, módulo de elasticidade  $E = 71$  GPa, densidade  $\rho = 2700$  kg/m<sup>3</sup> e fator de perda  $\eta = 0,05$ . Para os métodos espectrais (SEM e ESEM) foram utilizados  $n = 200$  termos na expansão da série na direção  $y$ . Os resultados das bordas dos elementos espectrais são posteriormente interpolados com uma discretização de  $\Delta x = \Delta y = 0,01$  m nas direções  $x$  e  $y$ . O modelo estrutural tem condições de contorno de placa simplesmente apoiada (Figuras (4.32)(a)), com uma força de excitação harmônica unitária pontual na posição  $x_0 = 0,3$  m e  $y_0 = 0,5$  m. O modelo de energia equivalente (Figura (4.32)(b)) terá fluxo de energia nulo em todas as bordas com uma potência injetada harmônica pontual na mesma posição da força. Os resultados das densidade e fluxo de energia são calculados para bandas de frequência de 1/3 de oitava com frequências centrais  $f_c = 0,4; 8,0; 12,5$  e  $20,0$  kHz.



(a)



(b)

Figura 4.32: Estrutura de placas coplanares com descontinuidade de reforçador: (a) modelo estrutural; (b) modelo de energia equivalente.

As Figuras (4.33) e (4.34) mostram uma representação espacial das densidades de energia da estrutura mostrada na Figura (4.32), para bandas de frequência de 1/3 de oitava com frequências centrais  $f_c = 0, 4; 8, 0; 12, 5$  e  $20, 0$  kHz, calculadas pelos métodos SEM e ESEM, respectivamente.

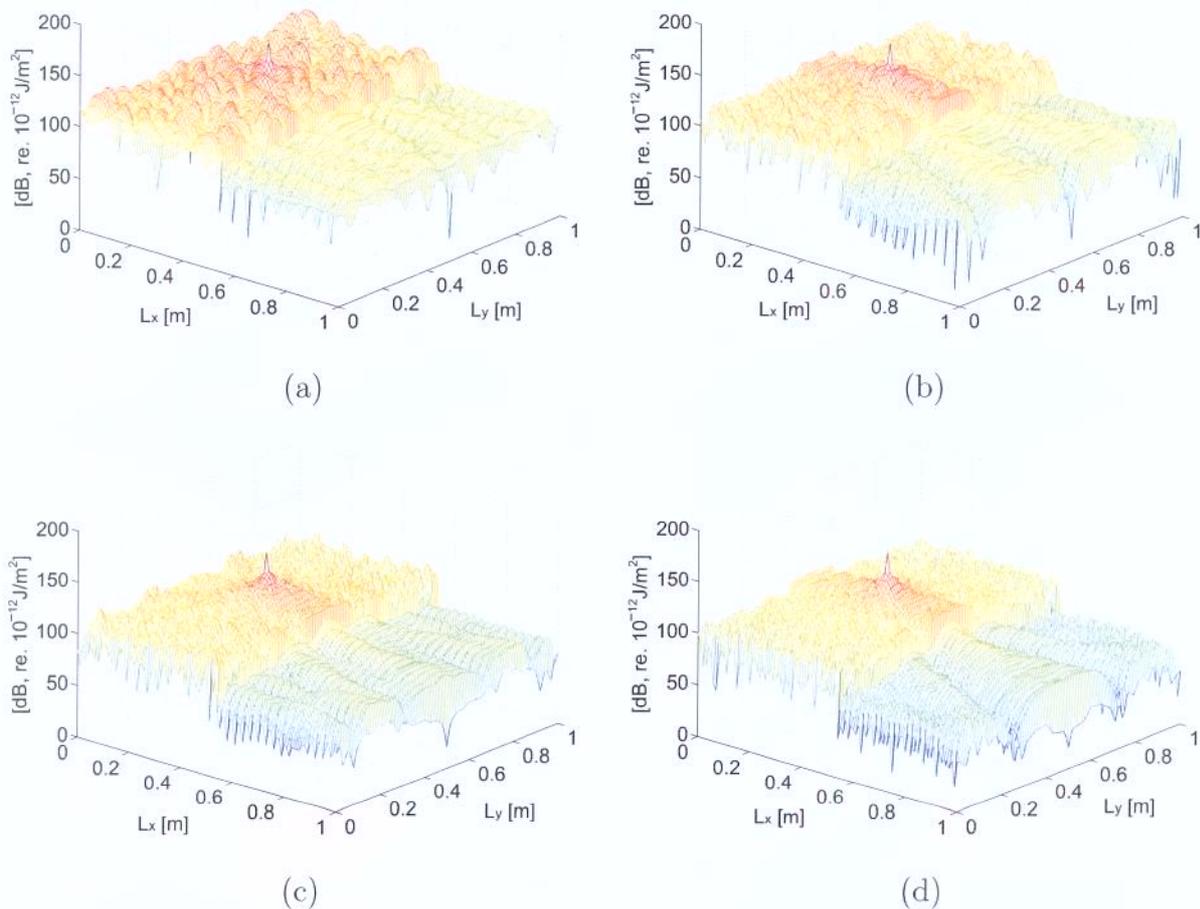


Figura 4.33: Densidade de energia pelo método SEM de um modelo de placa com reforço em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a)  $f_c = 4,0$  kHz , (b)  $f_c = 8,0$  kHz, (c)  $f_c = 12,5$  kHz e (d)  $f_c = 20,0$  kHz.

Da Figura (4.33) observa-se que para o método do SEM em todas as bandas de frequências analisadas a densidade de energia apresenta o mesmo comportamento característico já observado nas análises anteriores (placa simples e com descontinuidade de espessura), como um pico na posição da força de excitação decaindo exponencialmente com um comportamento oscilatório até as bordas. Na junta das placas, onde encontra-se a descontinuidade de reforçador, ocorre uma queda brusca da amplitude da densidade, que continua a decair exponencialmente também de forma oscilatória até as bordas da estrutura. Contudo, neste caso observa-se um comportamento oscilatório predominante na direção  $y$  da estrutura, após a descontinuidade de reforçador. Isso se dá devido ao reforçador ser representado

por uma viga que tem como movimento predominante o de flexão na direção  $y$  da placa. Assim, após o reforçador, esse movimento de flexão imposto pela viga é transmitido para o restante da placa, tornando-se mais acentuado com o aumento da frequência central da banda analisada.

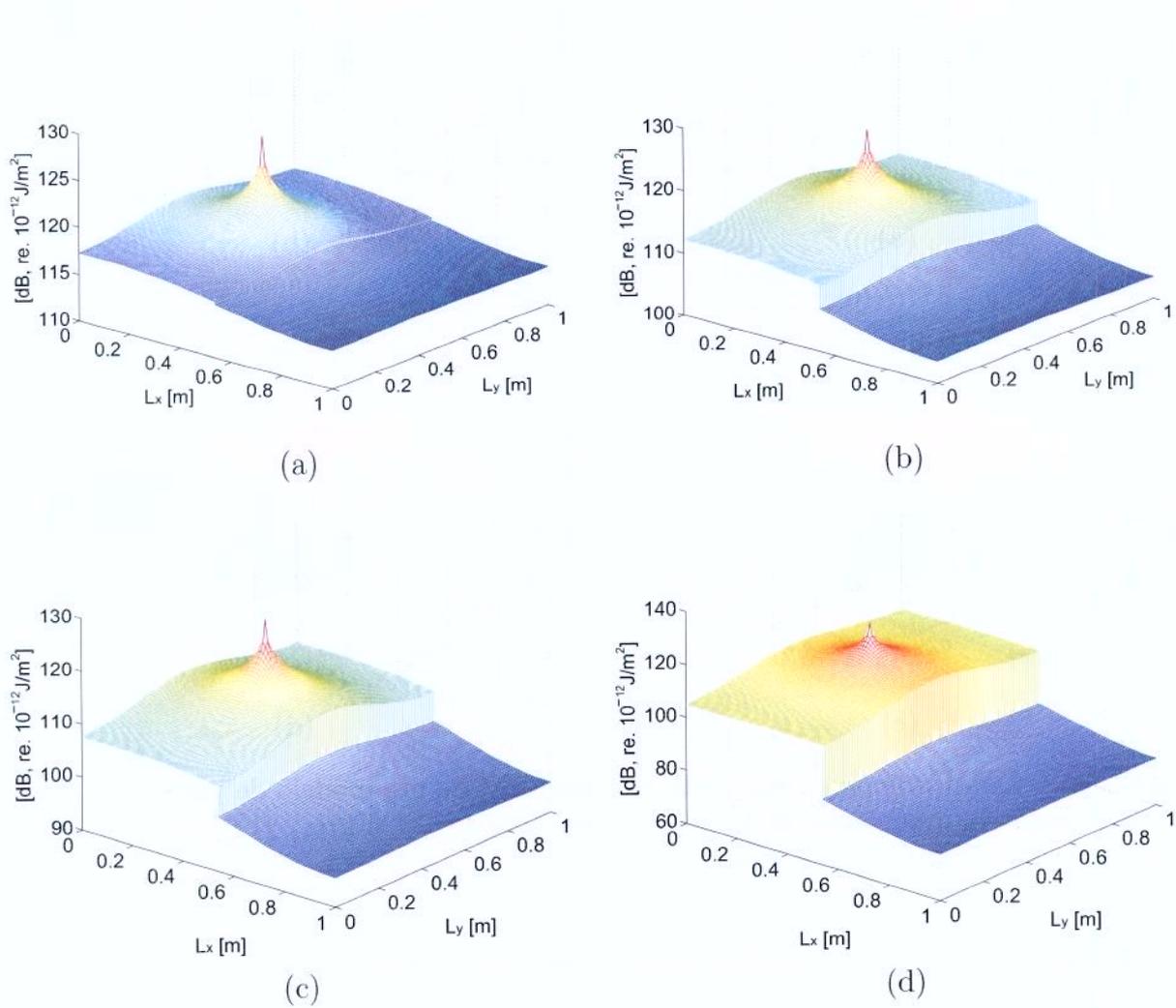


Figura 4.34: Densidade de energia pelo método ESEM de um modelo de placa com reforço em uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a)  $f_c = 4,0$  kHz , (b)  $f_c = 8,0$  kHz, (c)  $f_c = 12,5$  kHz e (d)  $f_c = 20,0$  kHz.

Da Figura (4.34) observa-se que o método de energia ESEM, também possui o mesmo comportamento característico já observado em análises anteriores (placa simples e com descontinuidade de espessura), onde a densidade de energia apresenta um pico na posição da potência injetada decaindo exponencialmente de forma suave para as bordas da placa.

Na junta das placas, ocorre uma queda brusca da amplitude da densidade, que continua a decair exponencialmente de forma suave até as bordas da estrutura. Contudo, neste caso também observa-se uma modificação do comportamento da densidade na direção  $y$  da estrutura, exatamente sobre a descontinuidade de reforçador. No caso da descontinuidade de espessura (Figura (4.24)) a densidade na direção  $y$  é constante, enquanto neste caso existe uma variação clara da densidade nesta direção, a qual apresenta um máximo na direção da aplicação da potencia injetada. Como era esperado, o aumento da frequência central da banda, gera uma maior queda na densidade da energia na descontinuidade.

Na Figura (4.35) são apresentados os resultados obtidos da densidade de energia sobre uma linha na direção  $x$  da placa, a qual passa no ponto de aplicação da força de excitação/potência injetada. Da comparação do SEM com o ESEM, em todas as bandas de frequências e na placa a esquerda do reforçador observa-se uma boa convergência do ESEM para os valores médios do SEM. Contudo, na placa do lado direito do reforçador esse comportamento não se mantém havendo um desvio do ESEM em relação ao SEM o qual se acentua a proporção que se aproxima das bordas da estrutura, com a exceção da banda de frequência com  $f_c = 20,0$  kHz. Deve ser observado que esta variação entre o SEM e o ESEM pode ser aumentada ou diminuída neste tipo de gráfico dependendo se, na posição da linha ao longo de eixo  $x$  que passa pela força de excitação, existir um vale ou um pico da densidade de energia na direção  $y$ . Uma outra diferença entre o SEM e o ESEM ocorre na região da descontinuidade devido à discretização do espaço no cálculo da interpolação. Ou seja, dependendo do valor escolhido para o incremento ( $\Delta x$  e  $\Delta y$ ) da discretização, devido ao seu comportamento oscilatório, a descontinuidade da curva de densidade de energia pode deslocar para cima ou para baixo os valores da densidade de energia na região à direita do reforçador.

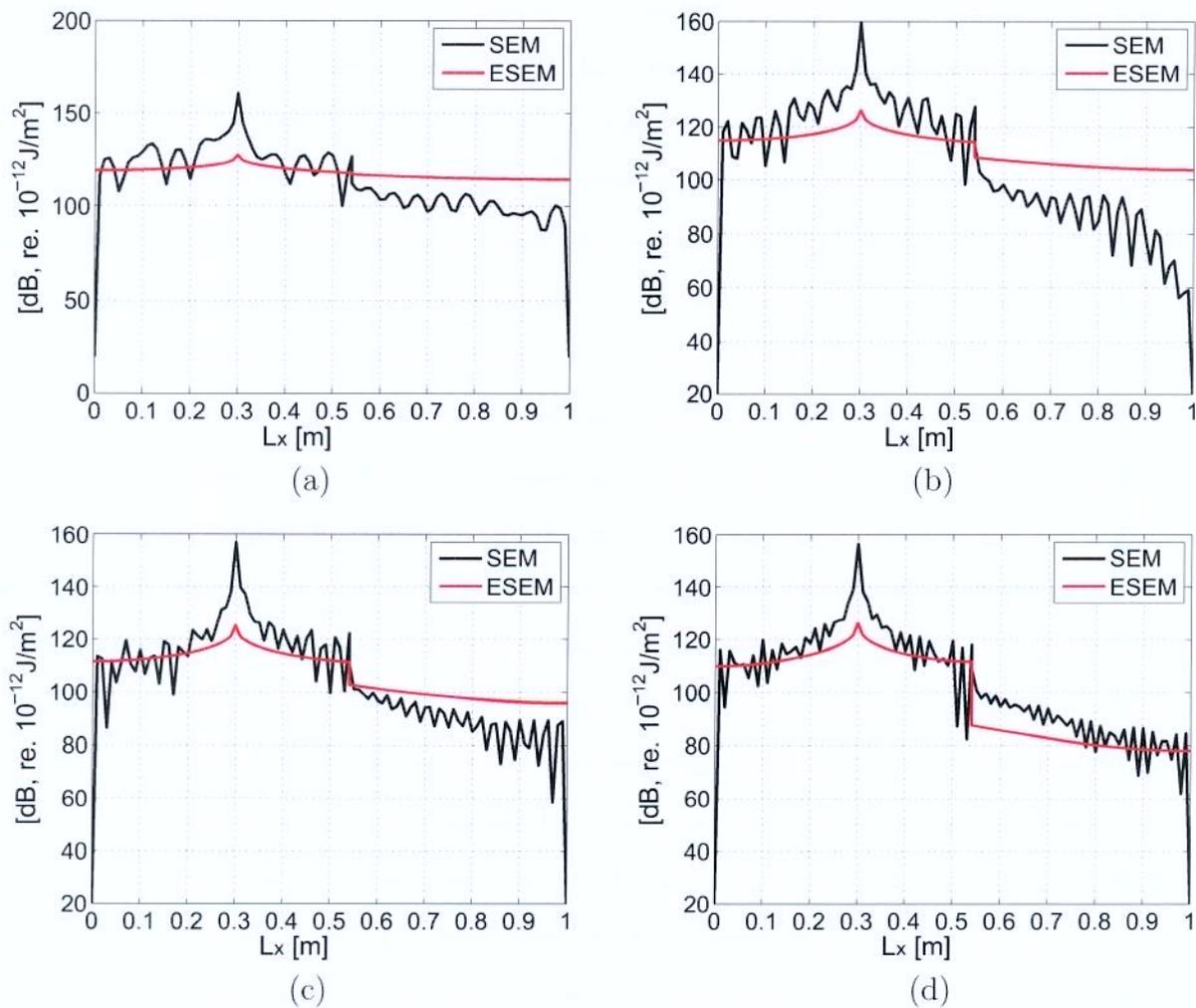


Figura 4.35: Densidade de energia na linha de ação da força, de um modelo de placa com reforço, simplesmente apoiada, para uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a)  $f_c = 4,0 \text{ kHz}$ , (b)  $f_c = 8,0 \text{ kHz}$ , (c)  $f_c = 12,5 \text{ kHz}$  e d)  $f_c = 20,0 \text{ kHz}$ .

A Figura (4.36) mostra a representação espacial das densidades de energia mostradas na Figura (4.35). Essa representação é apenas uma outra forma de visualizar os mesmos resultados.

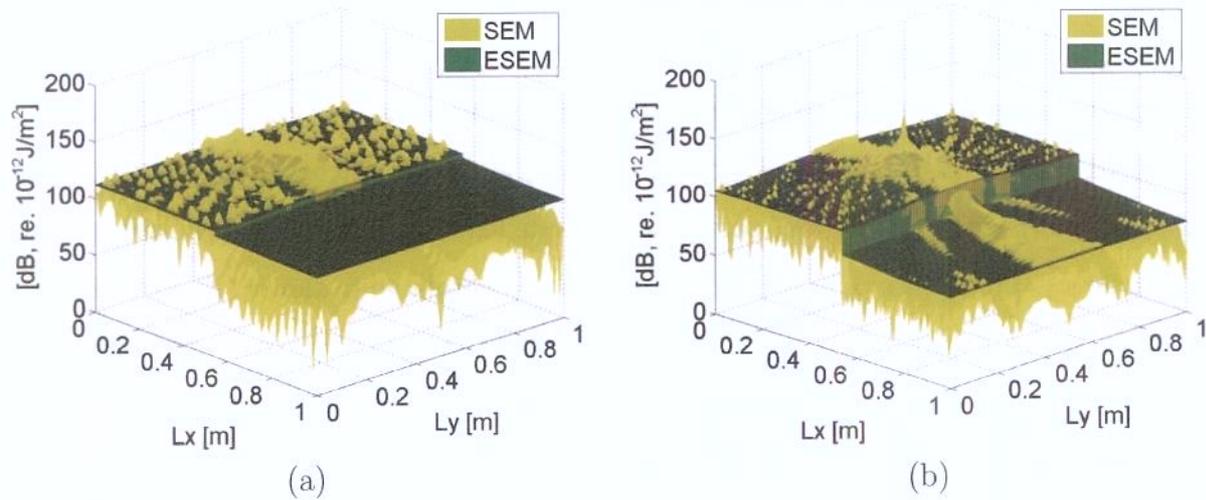


Figura 4.36: Densidade de energia de um modelo de placa com reforço e sem reforço, simplesmente apoiada, para uma banda de frequência de 1/3-oitava com: (a)  $f_c = 8,0\text{kHz}$  e (b)  $f_c = 20,0\text{kHz}$ .

Os resultados dos modelos de placa reforçada apresentados nessa seção, modelados pelo SEM e ESEM, mostram-se consistentes quando imposto a uma descontinuidade dessa natureza, pois foi possível perceber que a descontinuidade representada por uma viga leva a um aumento da rigidez da estrutura, observado através da distribuição da densidade de energia. Os modelos também foram coerentes, visto que a distribuição da densidade de energia se comporta de forma semelhante a outros modelos com descontinuidade analisados anteriormente, apresentando uma queda na descontinuidade.

## 4.4 Exemplos de Placas com Descontinuidade de Trinca

Nesta seção serão apresentados os resultados de densidade e fluxo de energia de uma estrutura composta por uma placa plana fina coplanar com uma trinca, obtidos a partir dos métodos SEM e ESEM.

A estrutura analisada está mostrada na Figura (4.37). A estrutura consiste de uma placa com uma trinca de profundidade  $\zeta$  e largura  $2c$  paralela a borda na direção  $x$ . Para a estrutura de placa, as seguintes propriedades geométricas e mecânicas são consideradas: dimensões  $L_x = 1,0\text{ m}$  e  $L_y = 1,0\text{ m}$ , espessura  $h = 0,004\text{ m}$ , posição da trinca  $L_1 = 0,55\text{ m}$ , comprimento da trinca  $2c = 0,05\text{ m}$ , módulo de elasticidade  $E = 71\text{ GPa}$ , densidade

$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$  e fator de perda  $\eta = 0,05$ . Para ambos métodos (SEM e ESEM) foram utilizados  $n = 200$  termos na expansão da série na direção  $y$ . Os resultados das bordas dos elementos espectrais são posteriormente interpolados com uma discretização de  $\Delta x = \Delta y = 0,01 \text{ m}$  nas direções  $x$  e  $y$ . O modelo estrutural tem condições de contorno de placa apoiada-livre (Figuras (4.37)(a)), com uma força de excitação harmônica unitária pontual na posição  $x_0 = 0,25 \text{ m}$  e  $y_0 = 0,5 \text{ m}$ . O modelo de energia equivalente (Figura (4.37)(b)) terá fluxo de energia nulo em todas as bordas com uma potência injetada harmônica pontual na mesma posição da força. Os resultados da densidade e fluxo de energia são calculados para bandas de frequência de 1/3 de oitava com frequências centrais  $f_c = 8,0$  e  $12,5 \text{ kHz}$ .

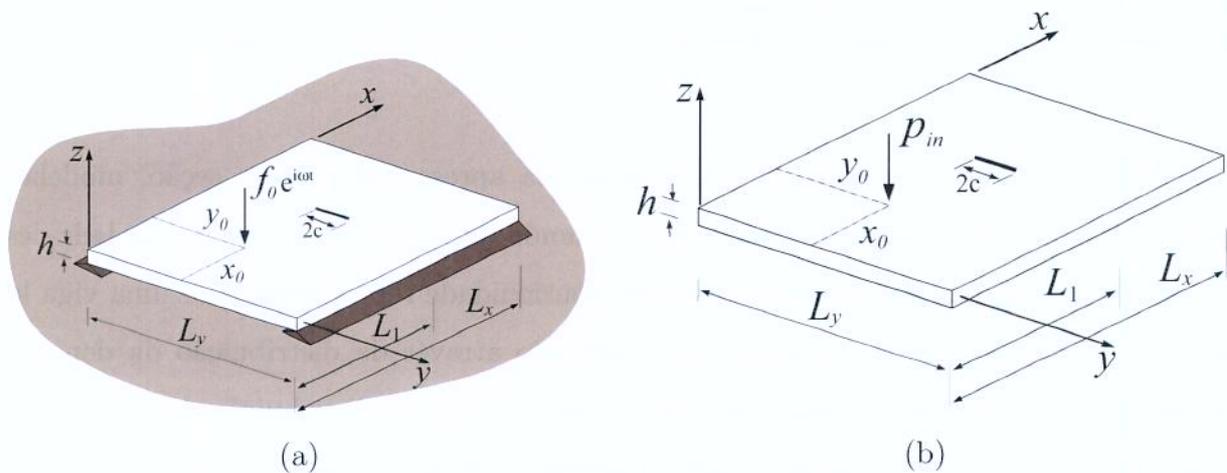


Figura 4.37: Estrutura de placa plana fina com descontinuidade de trinca: (a) modelo estrutural; (b) modelo de energia equivalente.

As Figuras (4.38) e (4.39) mostram uma representação espacial das densidades de energia da estrutura mostrada na Figura (4.37), para uma profundidade da trinca de 20% da espessura da placa, em uma banda de frequência de 1/3 de oitava com frequências central  $f_c = 20,0 \text{ kHz}$ , calculada pelos métodos SEM e ESEM, respectivamente.

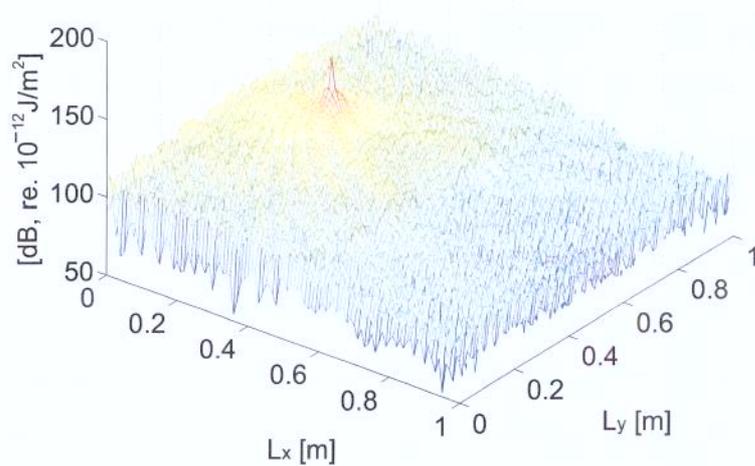


Figura 4.38: Densidades de energia de uma placa com trinca pelo SEM em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 20,0$  kHz e  $\zeta = 0,2h$ .

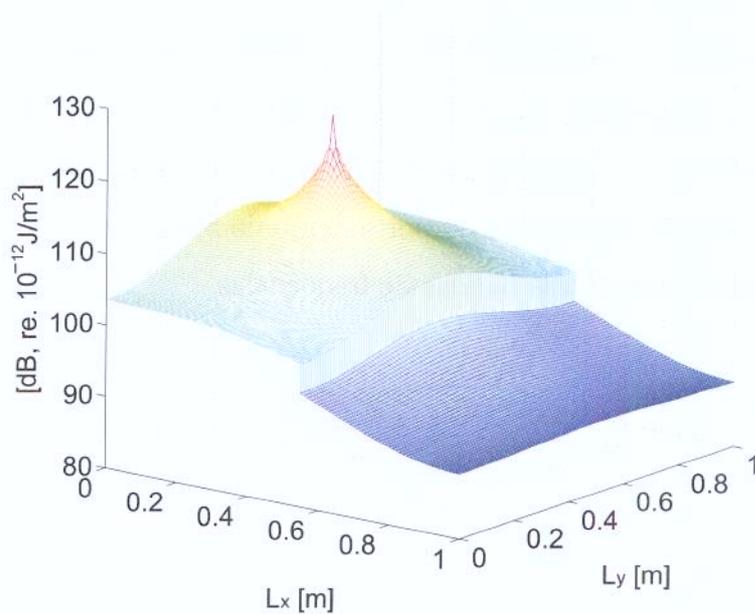


Figura 4.39: Densidades de energia de uma placa com trinca pelo ESEM em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 20,0$  kHz e  $\zeta = 0,2h$ .

Da Figura (4.38) observa-se que para o SEM não é possível observar de forma clara a região da presença da trinca. Este fato pode estar relacionado à formulação do elemento espectral com trinca cujo efeito é incluído de forma localizada na região da trinca. Já na Figura (4.39) calculada pelo ESEM, percebe-se claramente a presença da trinca, caracterizada pela queda nos valores de densidade de energia, devido o método ser uma representação suavizada da densidade de energia. Este efeito fica bem claro neste caso devido ao fato da trinca ser introduzida no acoplamento de dois elementos espectrais de energia, o que faz com que o efeito localizado da trinca se espalhe ao longo da direção  $y$  com um valor máximo na região da posição da trinca.

A Figura (4.40) apresenta os resultados obtidos da densidade de energia sobre uma linha na direção  $x$  da placa, a qual passa no ponto de aplicação da força de excitação/potência injetada. Nesse exemplo, a frequência central utilizada foi de 20kHz para caracterizar uma alta frequência e a trinca possui uma profundidade de 20% da espessura da placa. Neste caso, estão incluídos nos gráficos os resultados para a estrutura sem trinca (SEM e ESEM) e com trinca (SEMct e ESEMct). Uma comparação dos resultados do SEM e SEMct revela que não é possível reconhecer uma diferença clara entre esses da mesma forma que se reconhece nos resultados do ESEM e ESEMct. No ESEM a presença da trinca leva a uma queda descontínua na densidade de energia, enquanto no SEM não há indicação perceptível. Estes resultados confirmam aqueles já comentados nas análises anteriores apresentadas nas Figuras (4.38) e (4.39). Devido a esse comportamento do SEM considerou-se desnecessário investigar este problema em outras bandas de frequências.

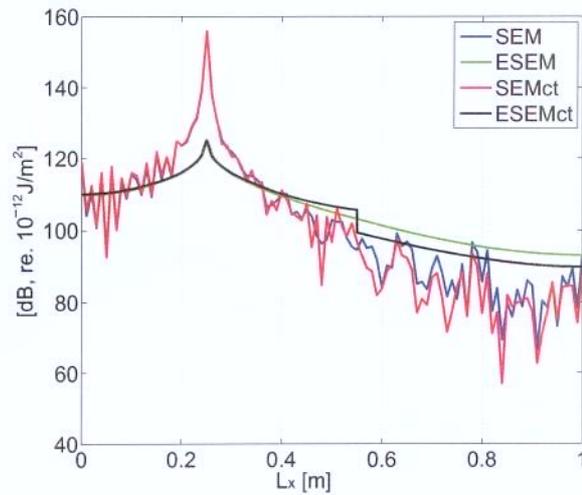


Figura 4.40: Densidade de energia para modelos de placa com trinca, na linha de ação da força, com banda de frequência de 1/3 de oitava,  $f_c = 20,0$  kHz, e  $\zeta = 0,2h$ .

Diferentes profundidades de trinca foram avaliadas a fim de verificar sua influência no comportamento da densidade de energia. Nas Figuras (4.41) e (4.42) são mostradas as densidades de energia para as bandas de frequências com  $f_c = 8,0$  kHz e  $f_c = 12,5$  kHz, respectivamente. Sendo as profundidades da trinca de: 1%, 10% e 40% da espessura da placa. Observa-se nos resultados do SEM que, mesmo aumentando a profundidade da trinca e a frequência central da banda, a distribuição da densidade de energia não evidencia claramente a presença da trinca. Por outro lado, o ESEM mostra de forma bastante perceptível a presença da trinca no modelo, e sua dependência com relação à profundidade da trinca e à frequência central da banda, ou seja, quanto maiores são os valores desses parâmetros maior o salto de descontinuidade da densidade de energia.

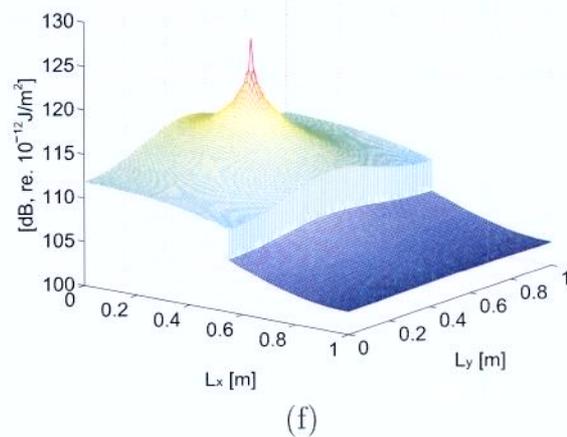
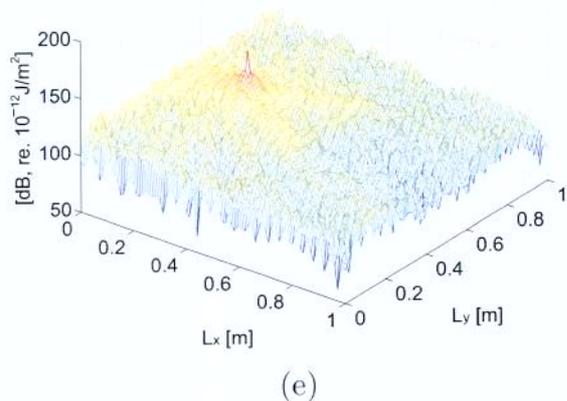
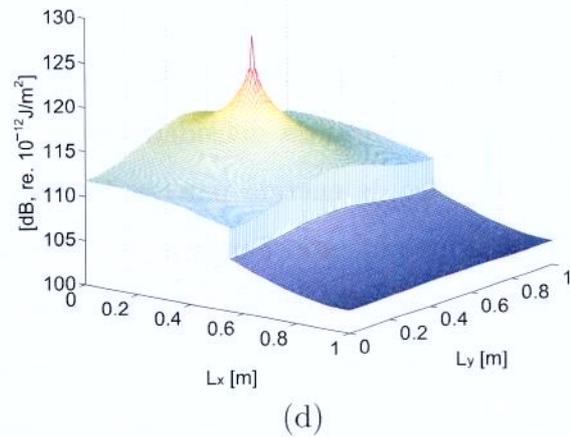
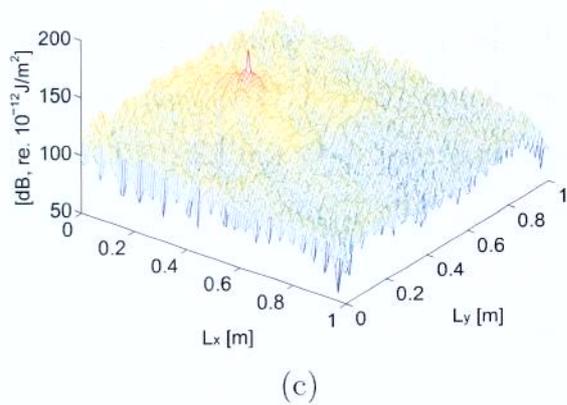
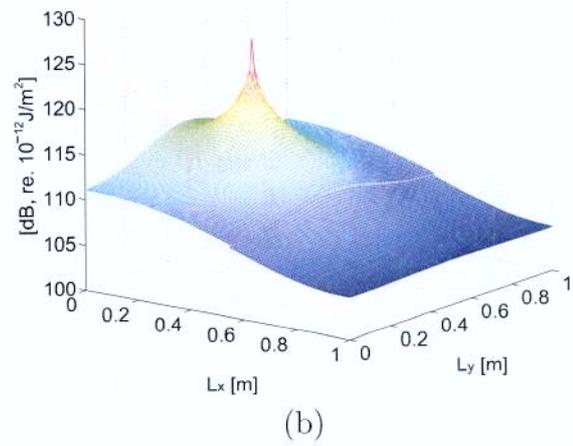
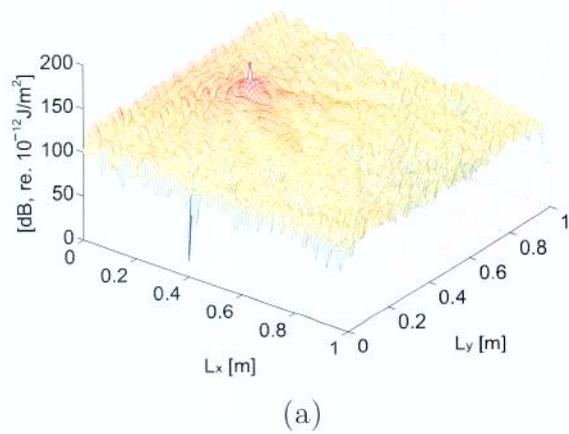


Figura 4.41: Densidades de energia para um modelo de placa com trinca, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 8,0$  kHz  $\zeta = 1\%$ , (a) SEM e (b) ESEM; 10% (c) SEM e (d) ESEM; e 40%, (e) SEM e (f) ESEM.

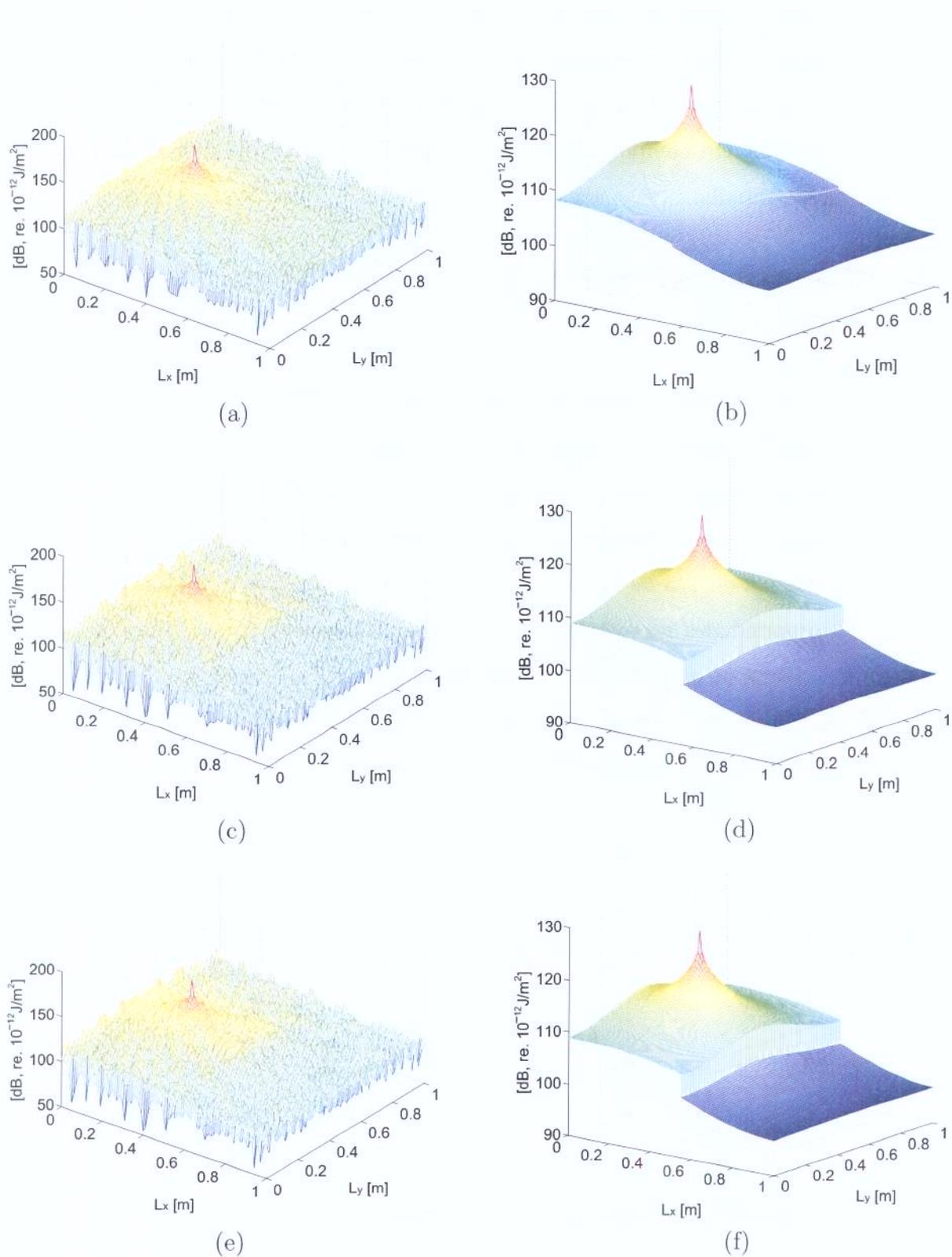


Figura 4.42: Densidades de energia para um modelo de placa com trinca, em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_f = 12,5$  kHz e  $\zeta =$ : 1%, (a) SEM e (b) ESEM; 10% (c) SEM e (d) ESEM; e 40%, (e) SEM e (f) ESEM.

Os resultados apresentados nessa seção para placas com uma trinca, calculados através dos métodos SEM e ESEM, mostraram que o primeiro método não indica de forma clara a presença da trinca em todos os seus resultados de densidade de energia. Enquanto o segundo apresenta um comportamento semelhante aos outros tipos de descontinuidade analisadas nesse trabalho.

## 4.5 Exemplo de Aplicação do EFEM na Detecção de Falhas

Nesta seção apresenta-se um exemplo de aplicação do EFEM de detecção de dano em uma placa plana fina usando o conceito mostrado na Seção 3.2.4.

As análises numéricas apresentadas, são provenientes de simulações com um modelo de placa de energia como mostrada na Figura (4.43). Para essa análise foi utilizado uma banda de frequência de 1/3 de oitava com frequência central  $f_c = 8,0$  kHz. A placa tem as seguintes propriedades geométricas e mecânicas: dimensões  $L_x = 1$  m e  $L_y = 1$  m, espessura  $h = 0.002$  m, módulo de elasticidade  $E = 71$  GPa, densidade  $\rho = 2700$  kg/m<sup>3</sup> e fator de perda  $\eta = 0.05$ . Os modelos de placa com dano e saudável, são excitados com uma potência injetada unitária harmônica pontual na posição  $(x_0 = 0,5, y_0 = 0,5)$ .

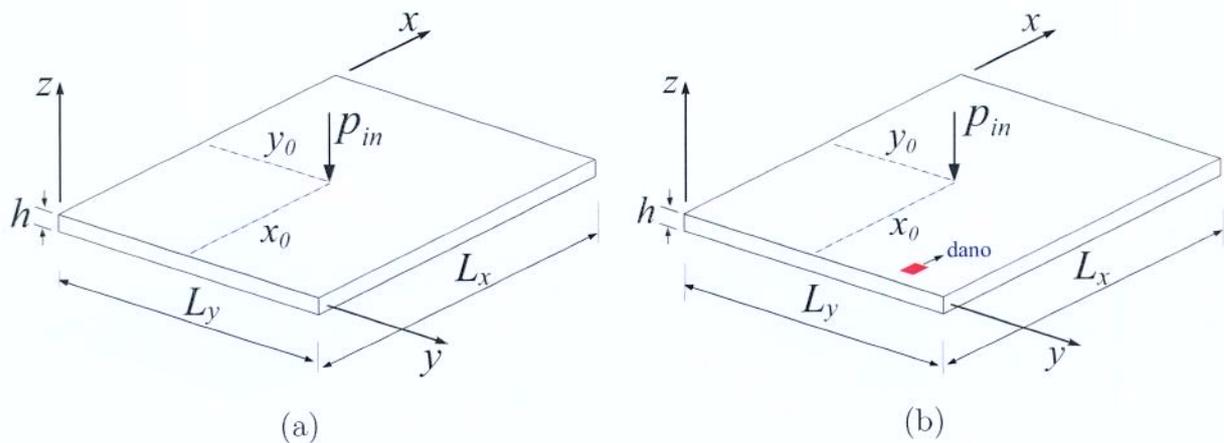


Figura 4.43: Modelo de energia de uma placa plana fina: (a) saudável, (b) danificada.

A malha de elementos finitos utilizada para a simulação, é mostrada na Figura (4.1.5), onde é apenas indicado a posição da excitação, ou seja, a potência injetada localizada no

nó 841, e o elemento onde é considerado o dano, elemento 34. Nesse exemplo, o dano é considerado como uma variação do amortecimento estrutural, nesse caso é imposto um acréscimo de 50% em relação ao saudável. A malha é composta de 400 elementos, sendo 20 elementos em cada direção ortogonal.

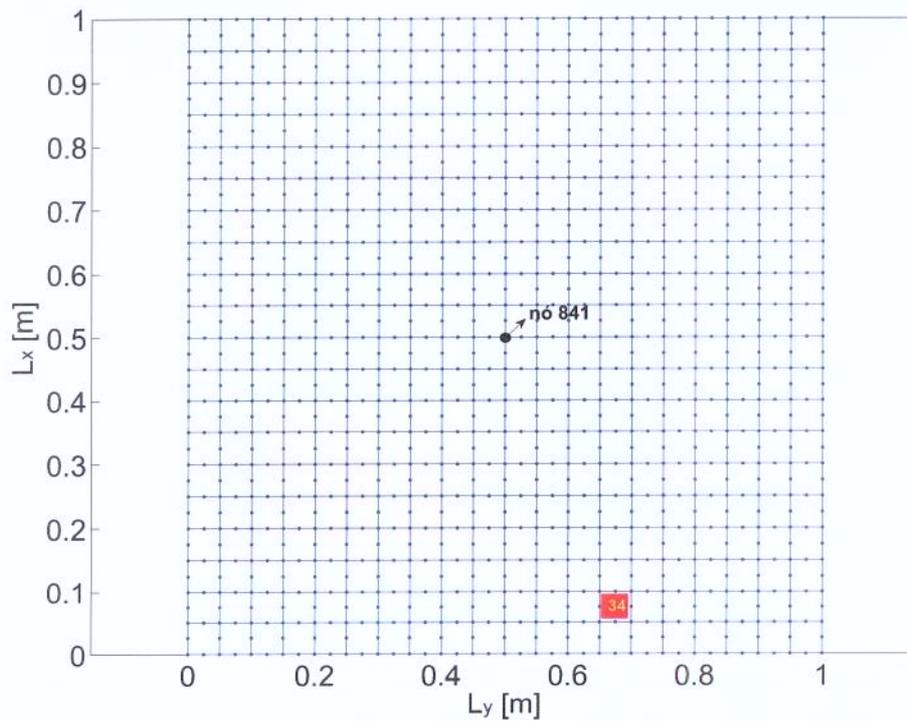


Figura 4.44: Malha de elementos finitos com um elemento danificado.

As Figuras (4.45)(a) e (b) apresentam a distribuição das densidades de energia de uma placa saudável e danificada, enquanto a Figura (4.45)(c) mostra a diferença entre elas. O gráfico de cores é utilizado para uma melhor visualização. A presença do dano não é percebida na Figura (4.45)(b), o que torna necessário fazer a diferença entre os valores de densidade de energia dos modelos saudável e danificado, para detectar e localizar. Essa diferença (Figura (4.45)(c)), detecta o dano, porém a localização não é claramente mostrada, e sim, uma região onde possivelmente está concentrado o defeito.

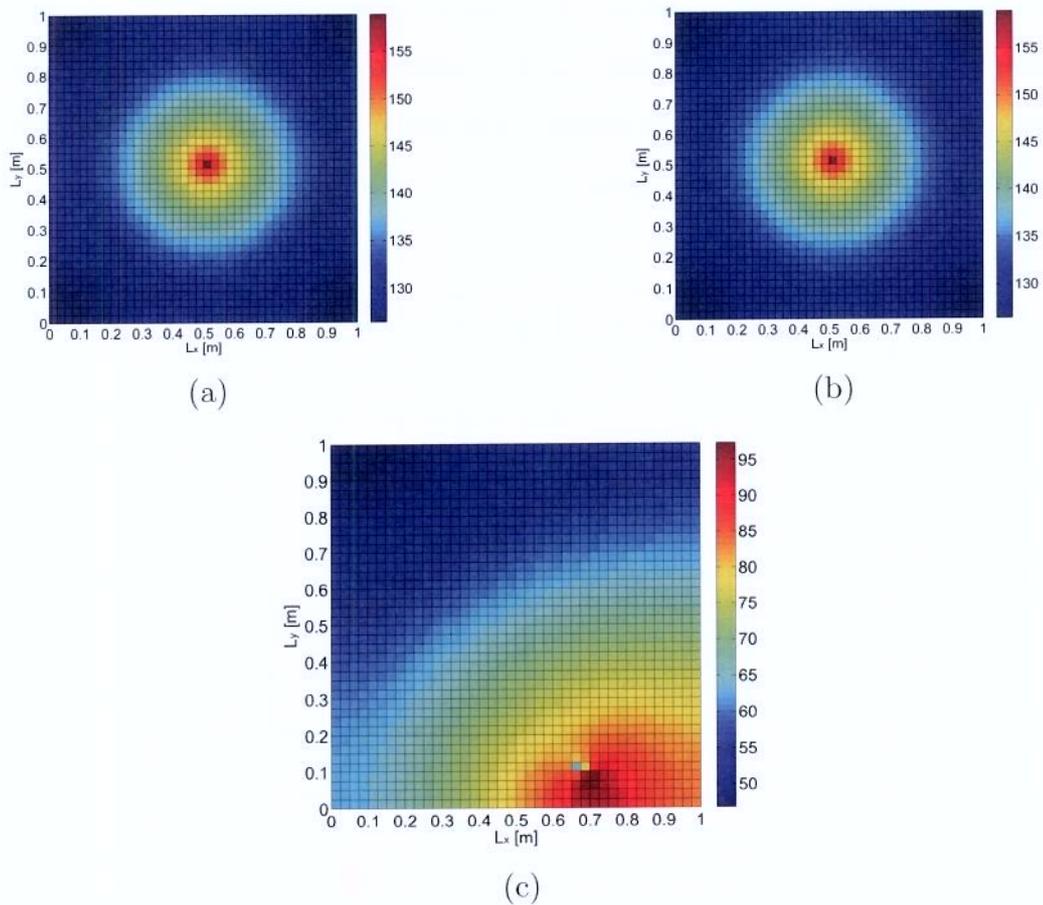


Figura 4.45: Densidades de energia em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 8$  kHz para placa plana fina : (a) saudável, (b) danificada e (c) diferença.

As Figuras (4.46)(a) e (b) apresentam a distribuição dos fluxos de energia na direção  $x$  de uma placa saudável e danificada, respectivamente, enquanto a Figura (4.46)(c) mostra a diferença entre elas. Ambos os resultados aparentam ser idênticos, iguais aos observados quando analisados através da densidade de energia. Porém, observa-se na Figura(4.46)(c), que representa as diferenças entre os fluxos de energia calculados pelo EFEM, a presença do dano aparece de forma mais clara. A análise feita através do fluxo de energia, mostrou ser mais eficiente quando comparada com a feita pela densidade de energia. O fluxo representa de forma mais concentrada a presença do dano, podendo mostrar a sua localização.

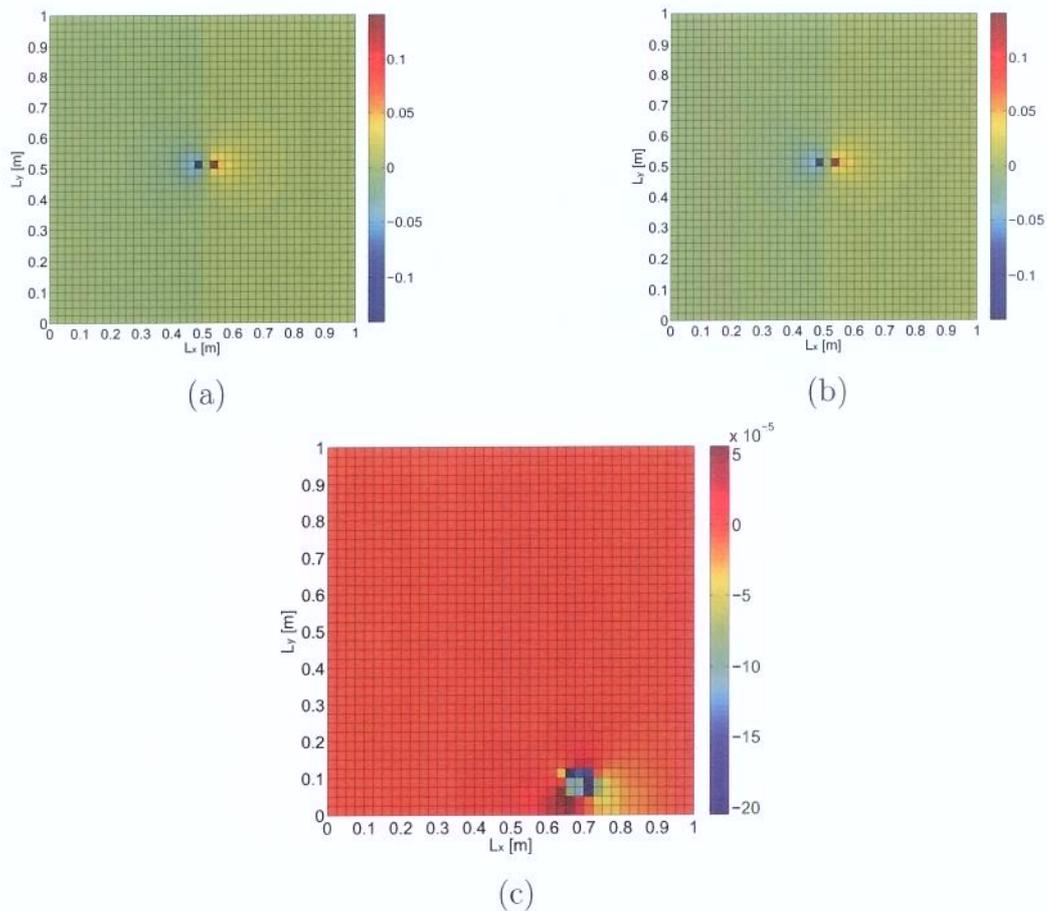


Figura 4.46: Fluxos de energia na direção  $x$  em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 8,0$  kHz para placa plana fina: (a) saudável, (b) danificada e (c) diferença.

Na Figura (4.47) também são mostrados os fluxos de energia dos modelos de placa saudável e danificada, mas nesse caso na direção  $y$ . Nessa análise, novamente a diferença entre os valores dos fluxos de energia (Figura(4.47)(c)) representa de forma precisa a presença do dano. Observa-se no gráfico, que a diferença dos fluxos de energia, indica com mais ênfase a localização do dano.

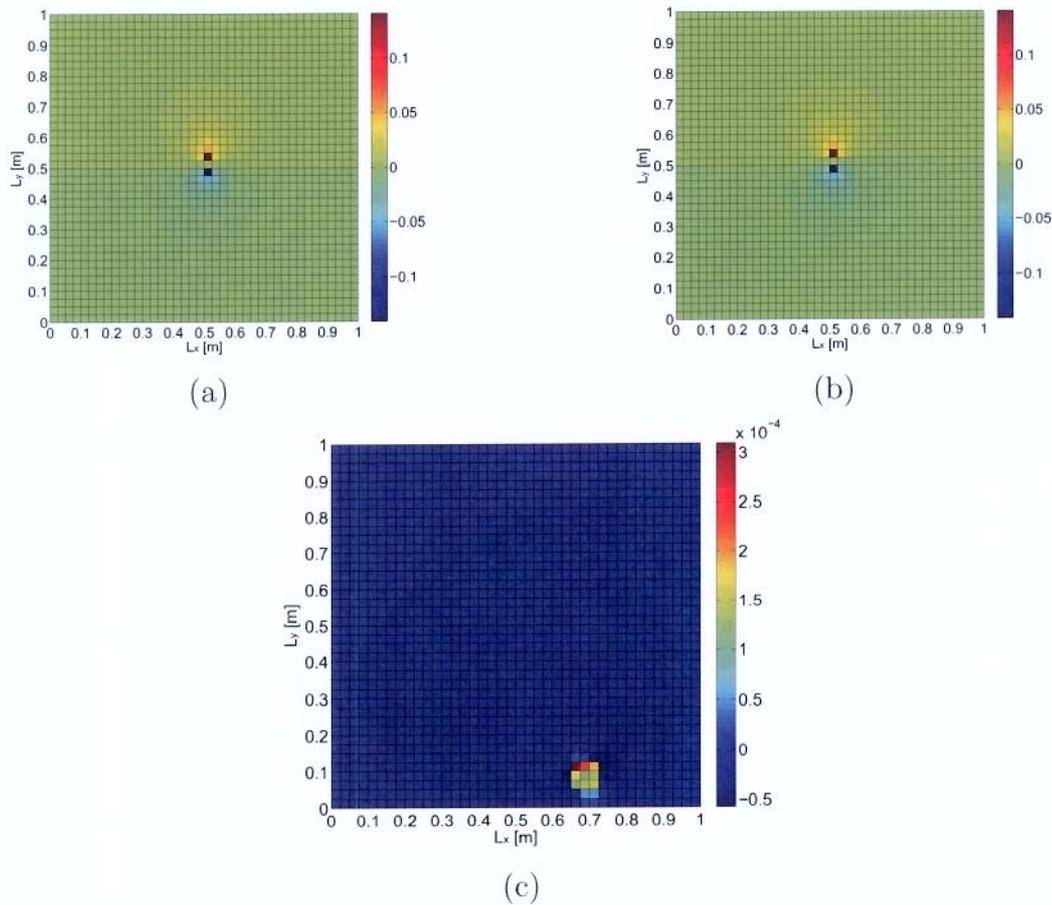


Figura 4.47: Fluxos de energia na direção  $y$  em uma banda de frequência de 1/3-oitava com  $f_c = 8,0$  kHz para placa plana fina: (a) saudável, (b) danificada e (c) diferença.

Para o caso analisado, os resultados aqui apresentados para um modelo de placa danificada, sendo esse defeito imposto por uma variação em sua propriedade dissipativa, mostram que a análise através do EFEM só permite detectar o dano através de uma diferença entre os resultados da placa saudável e danificada. O uso do fluxo de energia torna possível localizar o dano de forma mais precisa em comparação com a densidade de energia. Outro ponto que pode ser levantado é a questão da implementação do EFEM para esse tipo de dano, pois com apenas uma variação em um dos elementos da malha é possível inserir uma perturbação ou defeito no modelo.

No trabalho (Santos et al., 2008b) é apresentado um outro exemplo usando esta mesma metodologia de detecção de dano com o EFEM, o qual inclui dois danos na mesma placa com variações de fator de perda de 1% e 50%, e os resultados são similares.

# Capítulo 5

## Resultados Experimentais

Neste capítulo serão apresentados os resultados experimentais de duas placas de alumínio, sendo a primeira uma placa plana simples e a segunda uma placa plana reforçada por uma viga. Esses resultados experimentais foram gentilmente cedidos pelo Prof. F. Gautier do Laboratório de Transferts Vibratoires, ENSIM-Université du Maine - França. Os dados medidos são as Funções de Resposta em Frequência - FRFs em velocidade/força a partir das quais foi possível determinar as densidades e fluxos de energia experimentais nas placas. Esses resultados são comparados com aqueles obtidos pelo ESEM.

### 5.1 Potência Injetada e Densidade de Energia Experimentais

Para a realização de um procedimento experimental em uma estrutura dinâmica estacionária, uma força de excitação é aplicada e medida em um ponto da estrutura a ser analisada e a resposta em velocidade é medida em outro (ou no mesmo) ponto, produzindo-se desta forma uma FRF, que relaciona resposta velocidade com a força aplicada. A comparação com os dados numéricos do ESEM precisa ser realizada em termos de densidade de energia; dessa forma é necessário transformar os dados experimentais medidos em termos de variáveis de energia. Seguindo o procedimento apresentado por Moens (2001) podemos realizar esta transformação.

Sabe-se que potência real instantânea injetada em uma estrutura é dada por:

$$P_{in}(t) = f(t) \cdot v(t) \quad (5.1)$$

onde  $f(t)$  é força medida no ponto de excitação da estrutura e  $v(t)$  é a velocidade no ponto de excitação.

A média temporal da potência injeta é dada por:

$$\langle P_{in} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot v(t) dt \quad (5.2)$$

Re-escrevendo a Equação (5.2) em termos espectrais, temos:

$$\langle P_{in} \rangle = \Re \left\{ \int_0^{+\infty} V(\omega) \cdot F^*(\omega) d\omega \right\} = \Re \left\{ \int_0^{+\infty} S_{vf}(\omega) d\omega \right\} \quad (5.3)$$

onde  $S_{vf}$  é a densidade espectral de potência cruzada da força e velocidade no ponto de excitação. Para uma determinada banda de frequência a Equação (5.3) é escrita da seguinte forma:

$$\langle P_{in} \rangle = \Re \left\{ \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{vf}(\omega) d\omega \right\} \quad (5.4)$$

A potência injetada é ponderada dividindo-se a potência real injetada, a qual é a densidade espectral de potência cruzada da força com a velocidade no ponto de excitação, pela densidade auto-espectral de potência da força, o que leva a uma relação direta com a FRF medida, como:

$$\begin{aligned} \langle P_{in} \rangle_{ponderado} &= \Re \left\{ \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{S_{vf}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} d\omega \right\} \\ &= \Re \left\{ \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{V(\omega) \cdot F^*(\omega)}{F(\omega) \cdot F^*(\omega)} d\omega \right\} \\ &= \Re \left\{ \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{V(\omega)}{F(\omega)} d\omega \right\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

No caso de medidas com o Vibrômetro Laser Doppler Scanner, a potência de entrada pode ser diretamente obtida como a parte real da FRF entre a velocidade e força no ponto de excitação.

Para análises em campo distante a densidade de energia total pode ser aproximada como duas vezes a energia cinética (Bouthier, 1992), desta forma podemos escrever:

$$e(t) = \rho v^2(t) \quad (5.6)$$

onde  $v(t)$  é a velocidade no ponto medido e  $\rho$  é a densidade de massa volumétrica.

A média temporal da densidade de energia é:

$$\langle e \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \rho v^2(t) dt. \quad (5.7)$$

Re-escrevendo a Equação (5.8) em termos espectrais, temos:

$$\langle e \rangle = \Re \left\{ \int_0^{+\infty} \rho V(\omega) \cdot V^*(\omega) d\omega \right\} = \rho \int_0^{+\infty} S_{vv}(\omega) d\omega \quad (5.8)$$

onde  $S_{vv}$  é a densidade auto-espectral de potência da velocidade no ponto medido. Para uma dada banda de frequência a Equação (5.8) é escrita da seguinte forma:

$$\langle e \rangle = \rho \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{vv}(\omega) d\omega \quad (5.9)$$

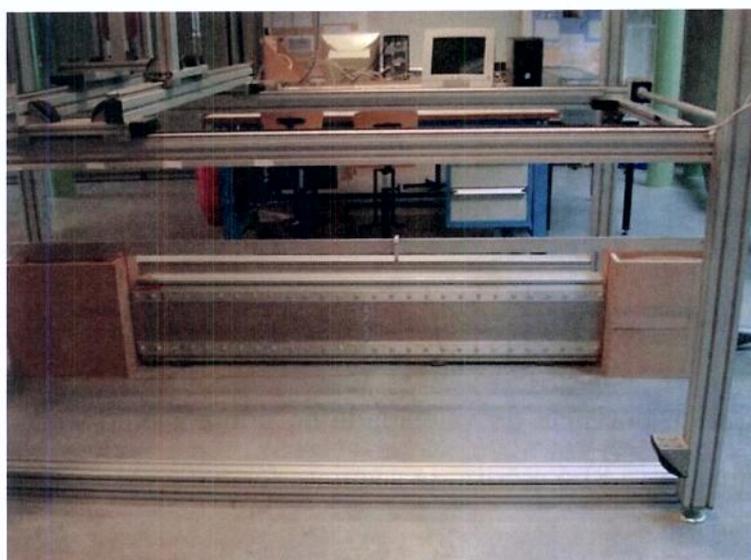
Fazendo a ponderação da densidade de energia pela densidade auto-espectral de potência da força, uma relação direta entre a densidade de energia e a FRF medida é obtida como:

$$\begin{aligned} \langle e \rangle_{ponderado} &= \rho \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{S_{vv}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} d\omega \\ &= \rho \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{V(\omega) \cdot V^*(\omega)}{F(\omega) \cdot F^*(\omega)} d\omega \\ &= \rho \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \frac{V(\omega)}{F(\omega)} \right|^2 d\omega \end{aligned} \quad (5.10)$$

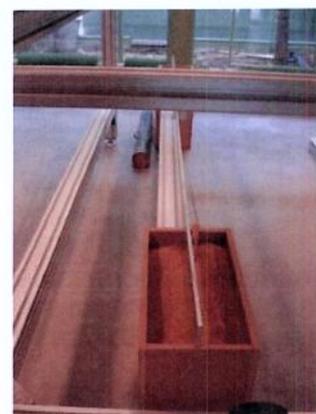
A ponderação é válida, pois essa é feita tanto no parâmetro de entrada (potência injetada) quanto no de saída (densidade de energia), que é a resposta do sistema.

## 5.2 Comparação dos Resultados Experimentais com os Numéricos do ESEM

Os dados experimentais apresentados nessa seção são provenientes de medições em uma placa de alumínio com seguintes propriedades geométricas: dimensões  $L_x = 2,5\text{m}$  e  $L_y = 0,5\text{m}$  e espessura  $h = 0,002\text{ m}$ , posicionada na vertical, fixada por parafusos nas bordas superiores e inferiores em vigas (perfil de alumínio extrudado com seção transversal  $0,12 \times 0,06\text{ m}$ ), e apoiada dos lados esquerdo e direito em caixas de areia (terminações anecóicas). A Figura 5.1 mostra as fotos da configuração da placa no experimento.



(a)



(b)

Figura 5.1: Configuração experimental do teste da placa: (a) Vista geral da placa (b) Detalhe dos apoios com terminação anecóica.

A excitação foi realizada através de um excitador eletrodinâmico, com força excitação aleatória medida através de um sensor de força e a resposta em velocidade medida através de Vibrômetro Laser com Scanner. Tendo como condição de contorno a de uma placa apoiada-livre, sendo o apoio realizado por caixas de areia introduzidas nas bordas em lados opostos da placa. Um total de 1.001 FRFs foram medidas sobre uma grade de  $77 \times 13$  pontos de medição em uma faixa de frequências de 250-2.000 Hz. Os dados da placa com reforçador foram obtidos nas mesmas condições e com a mesma placa aparafusando-se uma

viga de alumínio de comprimento igual a largura da placa ( $L_y$ ) com seção transversal de altura  $h_b = 0,05$  m e base  $b = 0,01$ m, localizada no meio da placa ( $L_1 = 1,25$  m).

Na Figura (5.2) é mostrado o modelo de energia equivalente ao experimental, no qual assumiu-se: condição de contorno de fluxo zero em todas as bordas da placa, banda de frequência como frequência inicial  $f_1 = 250,0$  Hz e final  $f_2 = 2,0$  kHz, módulo de elasticidade  $E = 71$  GPa, densidade  $\rho = 2700$  kg/m<sup>3</sup> e fator de perda por amortecimento  $\eta = 0,026$  (valor obtido através de ajustes do modelo numérico por tentativa e erro). A excitação utilizada para os modelos de placa, foi um carregamento harmônico pontual unitário na posição ( $x_0 = 0,0325$  m, $y_0 = 0,3465$  m).

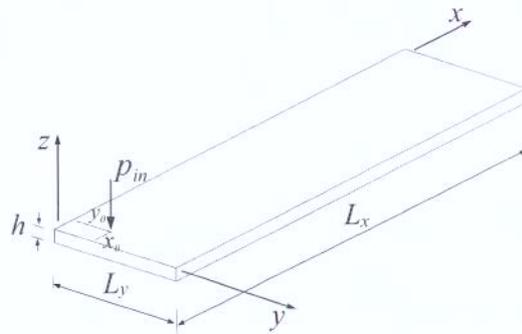


Figura 5.2: Modelo de energia equivalente ao experimental da placa simples.

Os resultados experimentais são calculados em termos das variáveis de energia de entrada e saída, usando o procedimento de cálculo descrito na seção anterior, e aqueles do modelo experimental de placa simples são comparados com as densidades de energia calculadas pelo ESEM.

### 5.2.1 Placa Simples

Neste experimento mediram-se as respostas vibracionais transversais (FRFs) ao longo da extensão da placa. Primeiro, os dados foram usados para a determinação das densidades de energias experimentais, através da Equação (5.10). Em seguida calculou-se a potência injetada experimental no ponto de maior densidade de energia, através da Equação (5.5), para a aplicação no modelo numérico do ESEM. Posteriormente os resultados experimentais foram comparados como os resultados do modelo numérico. A Figura 5.3 mostra uma

FRF medida típica em um ponto próximo da excitação ( $x = 0,325$  m,  $y = 0.09$  m) e a coerência correspondente. As outras FRFs medidas apresentam comportamento similar à apresentada na Figura 5.3.

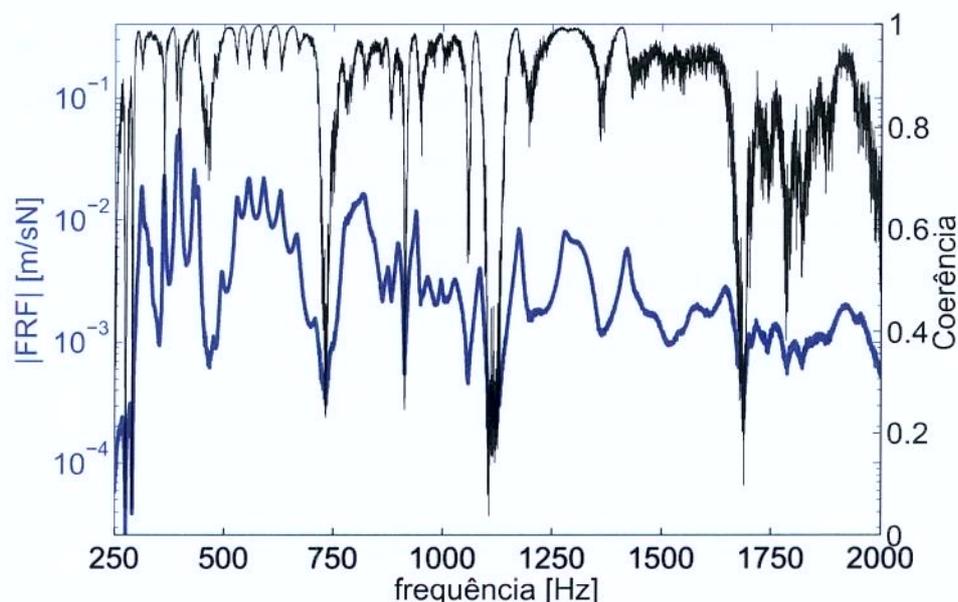


Figura 5.3: FRF medida típica próximo ao ponto excitação em  $x = 0,325$  m e  $y = 0.09$  m, para o modelo de placa simples experimental.

Na Figura (5.4) são comparados os resultados das densidade de energia experimentais e numéricas, na linha ao longo da placa na direção  $x$  que passa sobre o ponto da potência injetada. Essa forma de apresentação foi utilizada para facilitar a observação do comportamento da distribuição das densidades de energia experimental e numérica. No comportamento observado com relação à densidade experimental, percebe-se uma oscilação inerente à densidade de energia obtida a partir do deslocamento por flexão da placa. Um outro ponto importante a ser observado, é em relação à densidade de energia numérica, onde fica evidenciada uma tendência clara de convergência para os valores médios de densidade de energia experimental (Figura (5.4)).

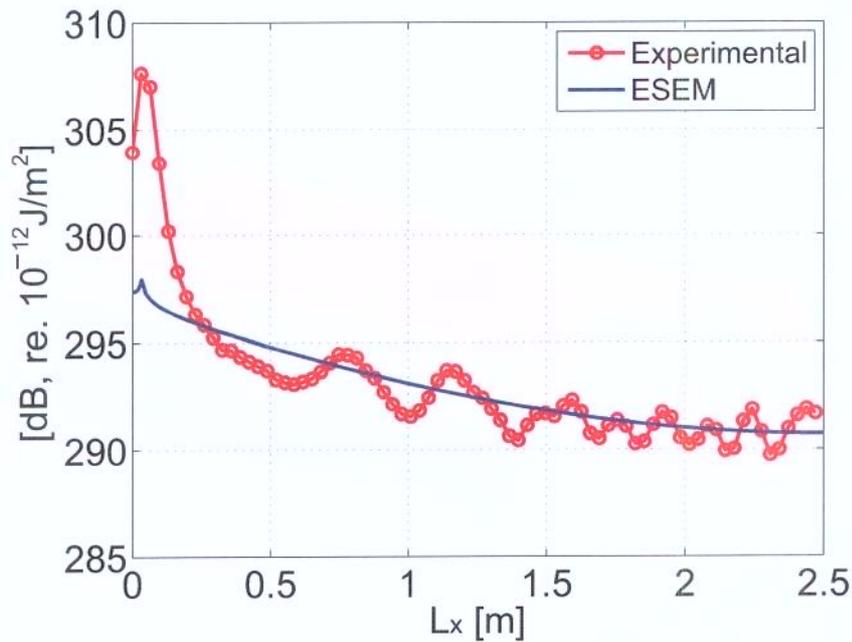


Figura 5.4: Densidade de energia na linha ao longo da direção  $x$  que passa na aplicação da potência injetada, para um modelo de placa simples experimental e numérico por ESEM, na faixa de frequência  $f_1 = 250,0\text{Hz}$  a  $f_2 = 2,0\text{kHz}$ .

A Figura (5.5) mostra a distribuição da densidade de energia experimental sobre a superfície da placa ( $xy$ ), onde pode ser observado o efeito do apoio das bordas da placa sobre as vigas (direção  $x$ ), gerando uma queda significativa das densidades de energia nestas posições. Entretanto, nas outras bordas da placa inseridas nas caixas de areia (direção  $y$ ) não se verifica o efeito esperado da queda do valores da densidade de energia. Apenas uma atenuação do comportamento oscilatório da densidade de energia na direção  $y$  é observado.

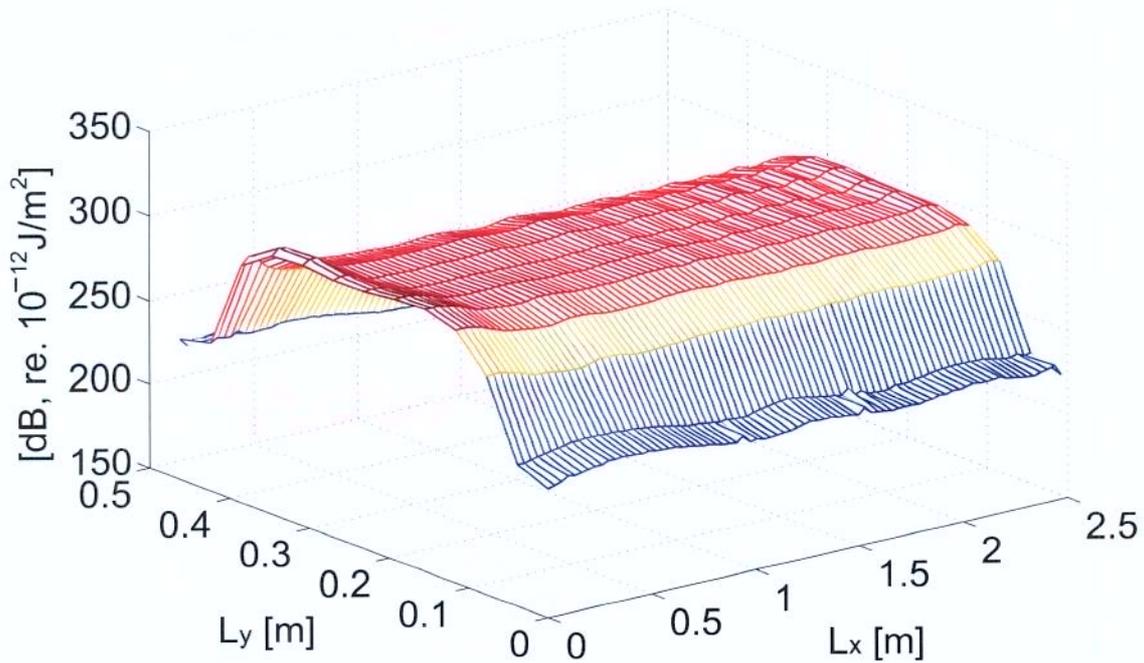


Figura 5.5: Densidade de energia experimental de uma placa simples, na faixa de frequência  $f_1 = 250,0$  Hz a  $f_2 = 2,0$  kHz.

A Figura (5.6) mostra uma comparação da distribuição das densidades de energia experimental e numérica na superfície da placa. A fim de observar melhor o comportamento oscilatório da densidade de energia nesta comparação, foram retirados do gráfico os valores mais baixos da densidade próximos e sobre as bordas na direção  $x$ . Observa-se que o ponto de maior concentração de energia experimental e numérico coincidem com o ponto de aplicação da força e potência injetada, respectivamente. Da mesma forma que nos exemplos simulados, o resultado experimental na faixa de frequência estudada apresenta um comportamento oscilatório característico e o resultado numérico converge para valores próximos dos valores médios dos resultados experimentais. Sem dúvida, este é um teste experimental preliminar, que apresenta bons resultados em termos de relação sinal/ruído gerando resultados bem razoáveis em termos das variáveis de energia (medidas indiretas). Porém, a realização de um número maior de testes experimentais é necessário para uma confirmação dos resultados.

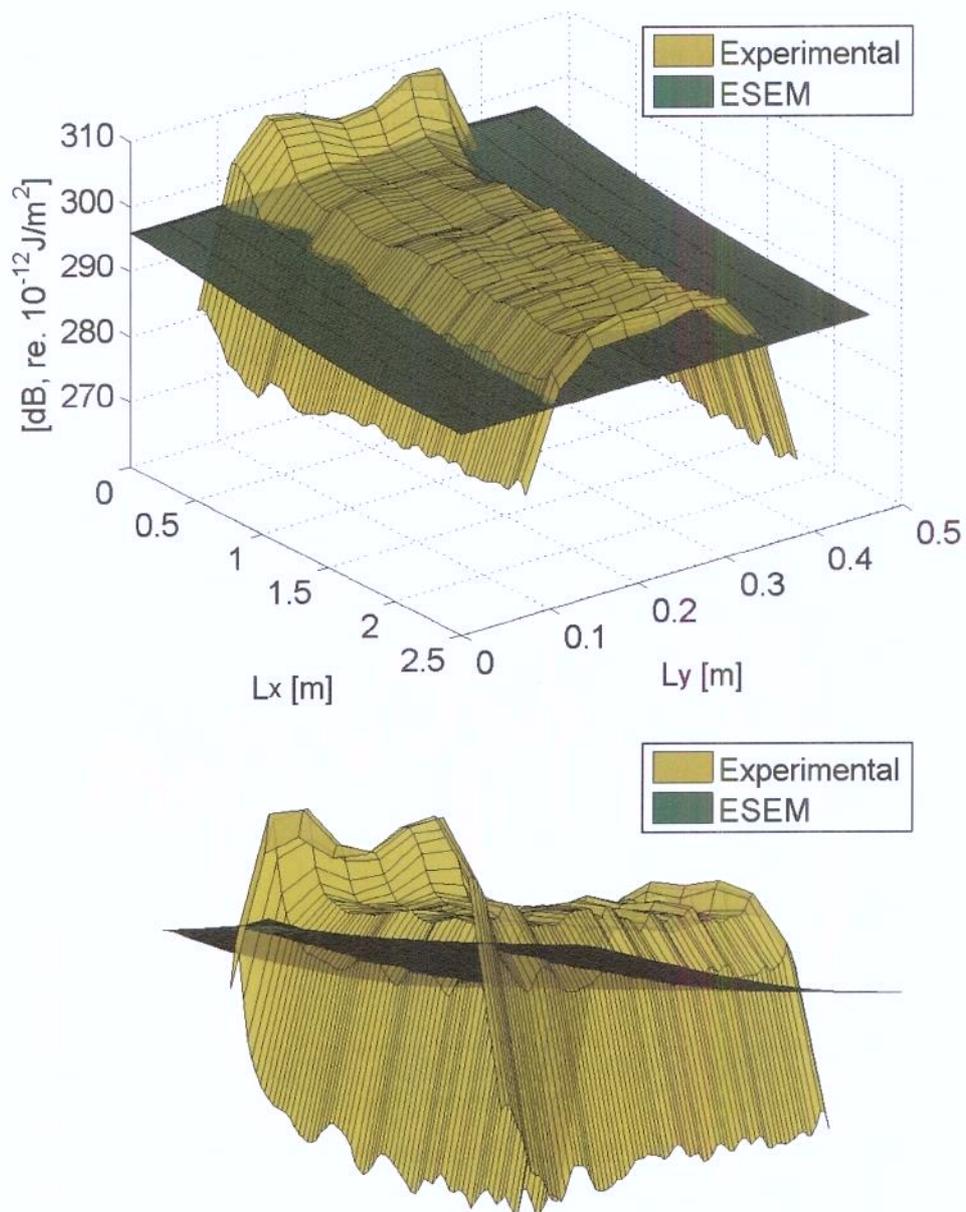


Figura 5.6: Densidade de energia experimental e numérica, na faixa de frequência  $f_1 = 250,0$  Hz a  $f_2 = 2,0$  kHz.

## 5.2.2 Placa com Reforço

Neste experimento foram utilizados os mesmos procedimentos para o modelo experimental da placa simples, onde foram medidas as respostas vibracionais transversais (FRFs) de velocidade ao longo da extensão da placa. A potência injetada experimental foi calculada, de acordo com a Equação (5.5), para a implementação do ESEM. Em seguida, foram calculados as densidades de energias (Equação (5.10)). A Figura 5.7 mostra FRFs medidas típicas para o modelo experimental de placa sem e com reforço, em um ponto próximo da excitação ( $x = 0,325$  m,  $y = 0.09$  m).

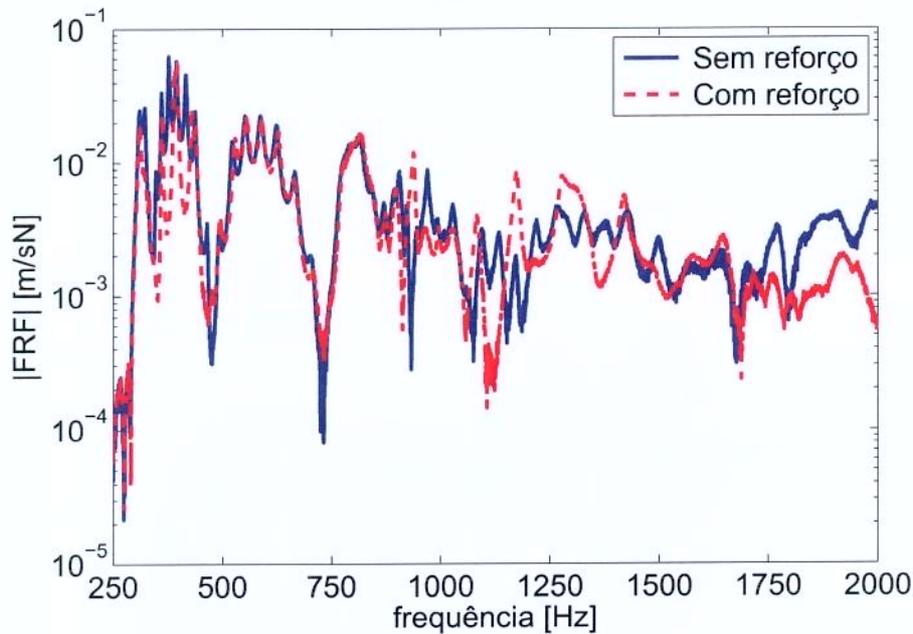


Figura 5.7: FRFs medidas típicas próximo ao ponto excitação em  $x = 0,325$  m e  $y = 0.09$  m, para o modelo de placa experimental com e sem reforço.

Na Figura (5.8) são observados os resultados calculados das densidade de energia experimentais da placa com e sem reforço, na linha ao longo da direção  $x$  que passa na aplicação da potência injetada.

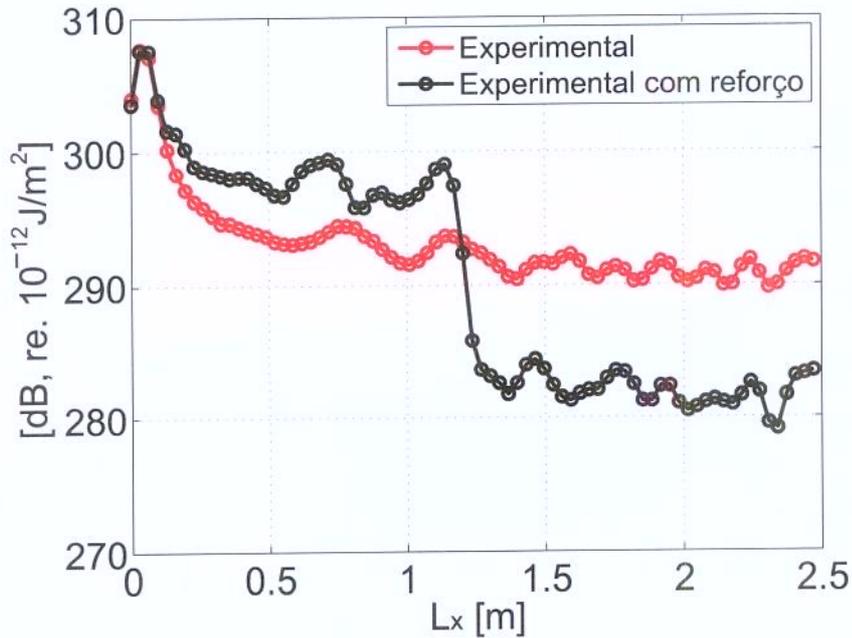


Figura 5.8: Densidade de energia na linha ao longo da direção  $x$  que passa na aplicação da potência injetada, na faixa de frequência  $f_1 = 250,0$  Hz a  $f_2 = 2,0$  kHz.

Nesse gráfico, o que é importante ressaltar é a questão da descontinuidade apresentada no modelo experimental. Observa-se que na posição do reforço há uma queda descontínua dos valores da densidade de energia, com um comportamento semelhante ao que foi demonstrado nos exemplos simulados do SEM. Devido o modelo do ESEM com reforço ter sido obtido para uma viga com linha neutra no mesmo plano médio da placa, enquanto no modelo experimental a linha neutra da viga de reforço está deslocada em um outro plano paralelo ao médio, não foi possível realizar a comparação dos resultados numéricos com os dados experimentais para este caso.

Na Figura (5.9) observa-se a distribuição da densidade de energia experimental sobre a superfície da placa com reforço ( $xy$ ). Essa forma de representar a densidade de energia, permite uma melhor visualização do que acontece na posição do reforço. Observa-se no gráfico uma região com valores maiores de densidade de energia antes do reforço, e após o reforço uma queda em sua distribuição, levando a valores menores de densidade de energia. Esse resultado corrobora aqueles que já foram discutidos nas análises simuladas.

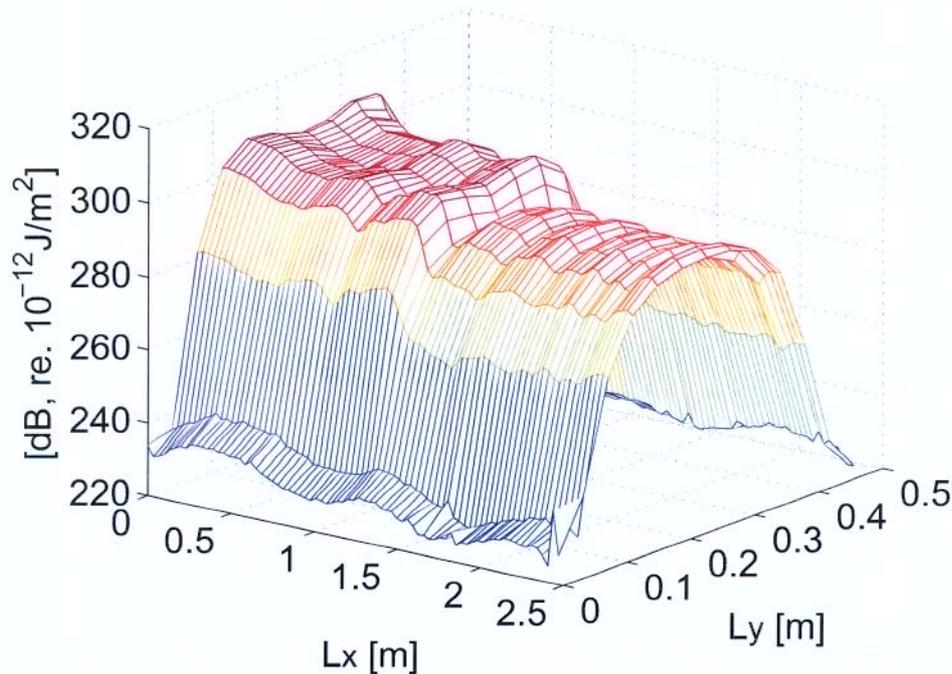


Figura 5.9: Densidade de energia obtida experimentalmente, para um modelo de placa reforçada, com uma faixa de frequência  $f_1 = 250,0$  Hz a  $f_2 = 2,0$  kHz.

Os resultados experimentais apresentados se mostraram satisfatórios, validando os resultados de densidade de energia simulados pelo ESEM para uma placa simples, bem como apresenta os mesmos comportamentos dos modelos simulados (EFEM, ESEM e SEM) para uma placa com reforço.

Com relação ao que foi apresentado nessa seção, pode-se dizer que a tendência de convergência entre os resultados experimentais e numéricos, em particular para o modelo de placa simples, e em geral para a placa com reforço, servem para mostrar que os métodos implementados estão bem próximos de prever o comportamento destas estruturas. O comportamento da densidade de energia calculada a partir do procedimento experimental, representa de forma coerente o que foi simulado. Desta forma, fica mostrado que a utilização da metodologia ESEM pode ser uma importante ferramenta na análise de dinâmica de estruturas tipo placas, em médias e altas frequências.

# Capítulo 6

## Conclusões

Neste capítulo são apresentadas as conclusões pertinentes ao desenvolvimento desta tese. Algumas considerações sobre a implementação dos métodos utilizados nesse trabalho são delineadas ao longo deste capítulo. Os resultados obtidos com as metodologias aplicadas, para diferentes configurações estruturais empregadas, também são discutidos. Ao final do capítulo, sugestões de trabalhos futuros envolvendo o tema estudado com um maior aprofundamento em alguns tópicos são apresentadas.

O enfoque desse trabalho, está direcionado à avaliação do comportamento vibracional em médias e altas frequências de estruturas tipo placa plana fina retangular com diferentes configurações estruturais (placa simples, acoplamento placa-placa, placa com reforço, placa com dano). De forma geral, nas bandas de médias e altas frequências, pode-se concluir que os métodos propostos, implementados e analisados, ESEM e EFEM tendem a convergir para os valores médios obtidos pelas referências “EXATO” e SEM, no que diz respeito ao comportamento da propagação de energia vibracional nas estruturas analisadas.

A implementação do SEM serviu como referência para o desenvolvimento dos outros métodos investigados e desenvolvidos neste trabalho. Isso foi possível devido ao fato desse método ter apresentado uma correspondência com a solução clássica (“EXATO”), ou seja, um método de superposição modal. Além disso, os conceitos utilizados pelo SEM, para implementação de estruturas descontínuas, auxiliaram no desenvolvimento das condições para implementação dos coeficientes de transmissão e reflexão utilizados na matriz de junta. Sendo essa matriz de junta, utilizada nos métodos aproximados ESEM e EFEM.

Os métodos de energia considerados aproximados, ESEM e EFEM, que têm como base a equação diferencial de energia aproximada formulada pelo EFA, foram implementados, testados e comparados com o SEM. A investigação realizada com o EFEM serviu para fortalecer os conceitos que utilizam energia como variáveis dinâmicas. Principalmente em termos das relações de acoplamento, já que o método EFEM propiciou um maior entendimento sobre o comportamento do fluxo de energia nas juntas ou descontinuidades.

O ESEM, para estruturas bidimensionais de placa plana fina retangular tipo Levy representa a contribuição inédita do trabalho através do desenvolvimento da sua formulação, implementação computacional e verificação com exemplos simulados e experimentais. Os resultados obtidos a partir dessa formulação apresentaram uma boa convergência em comparação com o método EFEM. A implementação do método, em termos computacionais, mostrou ser mais simples quando comparada aos outros métodos. Porém, o método apresenta algumas restrições no que diz respeito à aplicação de esforços quando na construção dos modelos. Essa aplicação de esforços só pode ser realizada nas bordas dos elementos, o que, dependendo da posição torna necessário a inserção de um elemento adicional. Esse fato ocorre devido à equação diferencial de uma placa plana fina retangular não possuir uma solução de propagação de onda exata de forma fechada. Essa observação leva a concluir que a inserção de descontinuidades em modelos que utilizam o conceito de elemento espectral não é uma tarefa trivial. Neste trabalho três tipos de descontinuidades foram investigadas - placa-placa, placa reforçada e placa trincada, o que vem contribuir nos estudos relacionados à análise dinâmica de estruturas descontínuas, com enfoque em variáveis de energia.

Na parte de detecção de dano, que é um ponto a ser ressaltado no trabalho, devido ao grande interesse que existe na predição de danos estruturais em diversos campos da engenharia, os resultados obtidos foram de uma forma geral relevantes. Dois enfoques foram abordados. O primeiro enfoque considera o dano como sendo uma trinca (descontinuidade), sendo implementado tanto no SEM quanto no ESEM. Na literatura já se encontravam trabalhos relacionados com este tipo de dano (Krawczuk et al., 2004; Krawczuk et al., 2006), mas não em termos de variáveis de energia. Sendo assim, foram desenvolvidas

novas relações de acoplamento, uma outra contribuição original do trabalho, que descreve as relações de transmissão e reflexão de ondas nesse tipo de dano. Os resultados obtidos através dessas relações foram satisfatórios quando comparado ao SEM. O outro enfoque diz respeito à identificação e localização do dano através de uma variação das propriedade dissipativa da estrutura (Santos et al., 2008b), ou seja, o dano é simulado como uma variação do amortecimento interno localizado no modelo. Essa forma de identificação foi desenvolvida para o método EFEM, devido à facilidade que o método oferece para a modificação das propriedades de cada elemento da malha. Os resultados podem ser obtidos em termos de densidade de energia e fluxo de energia, sendo que a identificação e localização do dano só são evidenciadas quando se faz a diferença entre os fluxos de energia entre a estrutura saudável e a danificada. Os métodos aqui utilizados para a investigação de placas danificadas foram verificados apenas numericamente, sendo ainda necessárias investigações experimentais para uma confirmação dos resultados obtidos.

Os dados experimentais medidos em uma placa plana simples e com reforço são usados neste trabalho como ferramenta de validação para o modelo de energia equivalente obtido pelo método ESEM. Esses dados foram gentilmente cedidos pelo Prof. F. Gautier do Laboratório de Transferts Vibratoires, ENSIM-Université du Maine - França. As FRFs medidas em mobilidade com vibrômetro laser scanner, foram calculados em termos das variáveis de energia (densidade e potência injetada) e comparados com os resultados numéricos do ESEM. De forma geral observou-se que os resultados experimentais calculados em termos das variáveis de energia, tanto para placa simples como para a placa com reforço, apresentaram um comportamento semelhante àqueles obtidos nos modelos simulados. Em particular, para a placa simples os resultados numéricos do ESEM demonstram uma boa convergência da densidade de energia para o valor médio das densidades de energia experimentais. Embora esta avaliação esteja baseada em dados experimentais ainda preliminares, pode-se concluir que o modelo de energia implementado (ESEM) responde de forma satisfatória ao comportamento experimental da estrutura. Um outro aspecto desta avaliação mostra que medições intensivas sem contato de estruturas bi-dimensionais (vibrometria laser scanner com grande número de pontos de medição) podem oferecer dados experimentais mais con-

sistentes do que aqueles normalmente obtidos em medições mais restritas e com sensores de contato.

## 6.1 Propostas de Trabalhos Futuros

A partir do que foi desenvolvido e investigado durante o desenvolvimento deste trabalho alguns sugestões de continuidade deste trabalho podem ser feitas.

Uma primeira sugestão é a de implementar o método ESEM para outros tipos de configurações de acoplamento de placas planas finas, tais como, angulações arbitrárias, as quais requerem o acoplamento de tipos de ondas diferentes (longitudinais, transversais, etc).

Implementação de um elemento espectral de energia de placa plana fina para outros tipos de teoria de placas, como a teoria de placas de Mindlin.

Desenvolvimento de um elemento espectral de energia tipo casca.

Outra proposta é a de expandir o uso do ESEM na investigação de cavidades acústicas, visando encontrar as relações que representem a interação fluido-estrutura.

## 6.2 Trabalhos Publicados e Submetidos

Durante a realização desta tese, foram publicados e submetidos os trabalhos listados a seguir.

Santos, E.R.O., Pereira, V.S., and Dos Santos, J.M.C. (2008). Structural damage detection using energy flow models. *Shock and Vibration*, 15:217-230.

Pereira, V.S., and Dos Santos, J.M.C. (2008). Models of Space Energetics of Coupled Plates at High Frequency Vibrations. *Computer & Structures (submetido)*

Pereira, V.S., and Dos Santos, J.M.C. (2009). Wave propagation in a cracked rod energy spectral element. *Computer & Structures (submetido)*

Pereira, V.S., and Dos Santos, J.M.C. (2008). Models of space energetics of coupled plates at high frequency vibrations. *Ninth International Conference on Computational Structures Technology (CST)*, Athens, Greece.

Pereira, F.N., Pereira, V.S., and Dos Santos, J.M.C. (2008). Análise energética em uma barra trincada usando o método elemento espectral. *XXIX Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia (CILAMCE)*, Maceió, Brasil. (*submetido*)

Santos, E.R.O., Pereira, V.S., and Dos Santos, J.M.C. (2007). Structural damage detection using energy flow models. *Internacional Conference on Engineering Dynamics - ICED*, Algarve, Portugal.

Pereira, V.S., and Dos Santos, J.M.C. (2009). Energy spectral element method for vibrating membranes. *Internacional Conference on Engineering Dynamics - ICEDyn*, Algarve, Portugal. (*aceito*)

# Referências

- Ahmida, K. M. (2001). *Análise Dinâmica de Pórticos em Médias e Altas Frequências*. PhD thesis, Unicamp.
- Albuquerque, E. L. (2005). Investigação sobre a variabilidade da resposta dinâmica de painéis reforçados. Master's thesis, Unicamp.
- Alves, P. S. L. (2001). *Análise Numérica e Experimental do Fluxo de Energia em Estruturas*. PhD thesis, Unicamp.
- Arruda, J., Gautier, F., and Donadon, L. (2007). Computing reflection and transmission coefficients for plate reinforcement beams. *Journal of Sound and Vibration*, 307:564–577.
- Bitsie, F. (1996). *The Structural-Acoustic Energy Finite Element Method and Energy Boundary Element Method*. PhD thesis, Purdue University.
- Bouthier, O. and Bernhard, R. (1995a). Simple models of energy flow in vibrating membranes. *Journal of Sound and Vibration*, 182(1):129–147.
- Bouthier, O. and Bernhard, R. (1995b). Simple models of the energetics of transversely vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 182(1):149–166.
- Bouthier, O. M. (1992). *Energetics of Vibrating Systems*. PhD thesis, Purdue University.
- Bouthier, O. M. and Bernhard, R. J. (1992). Models of space-averaged energetics of plates. *AIAA Journal*, 30(3):616–623.

- Carcattera, A. and Adamo, L. (1999). Thermal analogy in wave energy transfer: theoretical and experimental analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 226(2):253–284.
- Carcattera, A. and Sestieri, A. (1995). Energy density equations and power flow in structures. *Journal of Sound and Vibration*, 188(2):269–282.
- Carmo, J., Sernadas, A., Sernadas, C., Dionísio, F. M., and Caleiro, C. (2004). *Introdução à Programação em Mathematica*. IST Press, Lisboa.
- Cho, P. and Bernhard, R. (1998). Energy flow analysis of coupled beams. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4):593–605.
- Cho, P. E.-H. (1993). *Energy Flow Analysis of Coupled Structures*. PhD thesis, Purdue University.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., and Witt, R. J. (2001). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley Sons, New York.
- Cremer, L., Heckl, M., and Ungar, E. E. (1988). *Structure-Borne Sound*. Springer-Verlag, New York.
- Danial, A. N., Doyle, J. F., and Rizzi, S. A. (1996). Dynamics analysis of folded plate structures. *Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the ASME*, 118:591–598.
- Dhatt, G. and Touzot, G. (1984). *The Finite Element Method Displayed*. Jhon Wiley & Sons, New York.
- Dimarogonas, A. (1996). Vibartion of cracked structures: A state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, 55(5):831–857.
- Donadon, L., Albuquerque, E., and Arruda, J. (2004). Modeling reinforced plates using the spectral element method. In *Proceedings of the Internatonal conference and Exposition on Noise Control Engineering (INTERNOISE), Praga, Repíbilca Tcheca*.

- Doyle, J. F. (1997). *Wave Propagation in Structures: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*. Springer-Verlag, New York.
- Gautier, F., Moulet, M., and Pascal, J. (2003). Scattering matrix of a stiffener elastically connected to a plate. In *Proceedings of the International conference on Recent Advances in Structural Dynamics, Southampton, UK*.
- Han, F. (1999). *Prediction of Flow-Induced Sound and Vibration using the Energy Flow Analysis Method*. PhD thesis, Purdue University.
- Hopkins, C. (2002). Statistical energy analysis of coupled plate systems with low modal density and low modal overlap. *Journal of Sound and Vibration*, 251(2):193–214.
- Ichchou, M. and Jezequel, L. (1996). Comments on simple models of the energy flow in vibrating membranes and on simple models of the energetics of transversely vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 195(4):679–685.
- Khadem, S. and Rezaee, M. (2000). Introduction of modified comparison functions for vibration analysis of a rectangular cracked plate. *Journal of Sound and Vibration*, 236(2):245–258.
- Kishimoto, Y., Bernstein, D. S., and Hall, S. R. (1995). Energy flow modelling of interconnected structures: A deterministic foundation for statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 186(3):407–445.
- Krawczuk, M. (2002). Application of spectral beam finite element with a crack and iterative search technique for damage detection. *Finite Elements in Analysis and Design*, 38:537–548.
- Krawczuk, M., Grabowska, J., and Palacz, M. (2006). Longitudinal wave propagation. part ii - analysis of crack influence. *Journal of Sound and Vibration*, 295:479–490.
- Krawczuk, M., Palacz, M., and Ostachowicz, W. (2003). The dynamic analysis of a cracked timoshenko beam by spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, 264:1139–1153.

- Krawczuk, M., Palacz, M., and Ostachowicz, W. (2004). Wave propagation in plate structures for crack detection. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:991–1004.
- Langley, R., Smith, J., and Fahy, F. (1997). Statistical energy analysis of periodically stiffened damped plate structures. *Journal of Sound and Vibration*, 208(3):407–426.
- Lee, U. (2004). *Spectral Element Method in Structural Dynamics*. Springer-Verlag, New York.
- Lee, U. and Lee, J. (1999). Spectral element method for levy-type plates subject to dynamic loads. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(2):243–247.
- Lyon, R. and Maidanik, G. (1962). Power flow between linearly coupled oscillators. *Journal of Acoustical Society of America*, 34(5):623–639.
- Lyon, R. H. and DeJong, R. G. (1975). *Theory and Application of Dynamics Systems, Second edition*. Butterworth-Heinemann, Boston.
- Mace, B. (2003). Statistical energy analysis, energy distribution models and system modes. *Journal of Sound and Vibration*, 264:391–409.
- Mace, B. and Rosenberg, J. (1998). The sea of two coupled plates: An investigation into the effects of subsystem irregularity. *Journal of Sound and Vibration*, 212(3):395–415.
- Meirovitch, L. (1997). *Principles and Techniques of Vibrations*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Ming, R. (2005). An experimental comparison of the sea power injection method and the power coefficient method. *Journal of Sound and Vibration*, 282:1009–1023.
- Moens, I. (2001). *On the Use and the Validity of the Energy Finite Element Method for High Frequency Vibrations*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven.
- Nefske, D. and Sung, S. H. (1989). Power flow finite element analysis of dynamic systems: basic theory and application to beams. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 11:94–100.

- Noiseux, D. (1970). Measurement of power flow in uniform beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, pages 238–247.
- Nunes, R. F. (2005). *Análise Dinâmica de Problemas não Determinísticos usando Métodos Baseados em Conjuntos Nebulosos*. PhD thesis, Unicamp.
- Palacz, M. and Krawczuk, M. (2002). Analysis of longitudinal wave propagation in a cracked rod by spectral element method. *Computers and Structures*, 80:1809–1816.
- Park, D.-H. and Hong, S.-Y. (2001). Power flow models and analysis of in-plane in finite coupled thin plates. *Journal of Sound and Vibration*, 244(4):651–668.
- Pereira, A. K. A. (1999). *Controle Ativo de Vibração em Vigas e Placas Usando uma Abordagem de Intensidade Estrutural*. PhD thesis, Unicamp.
- Rice, J. and Levy, N. (1971). The part-through surface crack in an elastic plate. *Journal of Applied Mechanics*, 3:183–194.
- Santos, E., Arruda, J., and Santos, J. D. (2008a). Modeling of coupled structural systems by an energy spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, 316:1–24.
- Santos, E., Pereira, V., and Santos, J. D. (2008b). Structural damage detection using energy flow models. *Shock and Vibration*, 15:217–230.
- Santos, E. R. O. (2006). *Análise de Vibrações em Altas Frequências por Métodos de Energia*. PhD thesis, Unicamp.
- Seo, S.-H. and Hong, S.-Y. (2003). Power flow analysis of reinforced beam-plate coupled structures. *Journal of Sound and Vibration*, 259(5):1109–1129.
- Szilards, R. (1974). *Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Ugural, A. C. (1981). *Stresses in Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York.
- Ungar, E. (1961). Transmission of plate flexural waves through reinforcing beams: Dynamic stress concentrations. *Journal of the Acoustical Society of America*, 33:633–639.

- Wang, S. (2000). *High Frequency Energy Flow Analysis Methods: Numerical Implementation, Applications and Verification*. PhD thesis, Purdue University.
- Wohlever, J. and Bernhard, R. (1992). Mechanical energy flow models of rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, 153(1):1–19.
- Wohlever, J. C. (1988). *Vibrational Power Flow Analysis of Rods and Beams*. PhD thesis, Purdue University.
- Zhang, W., Wang, A., Vlahopoulos, N., and Wu, K. (2003). High-frequency vibration analysis of thin elastic plates under heavy fluid loading by an energy finite element formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 263:21–46.

# Apêndice A

## Propagação de Ondas de Flexão em Placas Finas

Nesse Apêndice, é mostrada de forma sucinta o cálculo das energias vibracionais de uma placa fina retangular isotrópica, com condições de contorno simplesmente apoiadas, sendo aplicado um carregamento pontual para se obter a resposta dinâmica.

### A.1 Solução Modal para Placas Retangulares

A equação do movimento para o deslocamento transversal de uma placa isotrópica é dada por:

$$D_c \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, y) e^{i\omega t} \quad (\text{A.1})$$

onde  $w$  é o deslocamento transversal complexo,  $D_c$  é a rigidez complexa,  $h$  é a espessura da placa e  $f(x, y)$  é a distribuição do carregamento aplicado na placa. A rigidez complexa da placa é expressa como:

$$D_c = \frac{E_c h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (\text{A.2})$$

$$E_c = E(1 + i\eta) \quad (\text{A.3})$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de poisson,  $E_c$  é o módulo de elasticidade complexo e  $\eta$  é o fator de perda por amortecimento que está relacionado às propriedades do material.

A solução geral da Equação (A.1) pode ser representada como uma série infinita da seguinte forma:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn}(t) \tilde{w}_{mn}(x, y) \quad (\text{A.4})$$

onde  $Z_{mn}(t)$  é o fator de participação modal e  $\tilde{w}_{mn}(x, y)$  são os modos naturais da placa. O fator de participação modal é determinado de forma particular, no qual participa da resposta dinâmica total da placa e é dependente do tipo de excitação. Os modos naturais da placa são determinados pela condições de contorno estabelecidas nas quatro bordas da placa. Somente poucos tipos de condições de contorno permitem que os modos naturais sejam obtidos analiticamente. Um tipo geralmente usado de condição de contorno que permite que os modos naturais sejam obtidos analiticamente é do apoio simples ou simplesmente apoiada (Figura (A.1)). Isso resulta em considerar, que ao longo de cada borda da placa o deslocamento transversal e o momento na direção normal à borda da placa são nulos, ou seja:

$$\begin{aligned} w(0, y, t) = w(L_x, y, t) = w(x, 0, t) = w(x, L_y, t) &= 0 \\ M_{xx}(0, y, t) = M_{xx}(L_x, y, t) &= 0 \\ M_{yy}(x, 0, t) = M_{yy}(x, L_y, t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

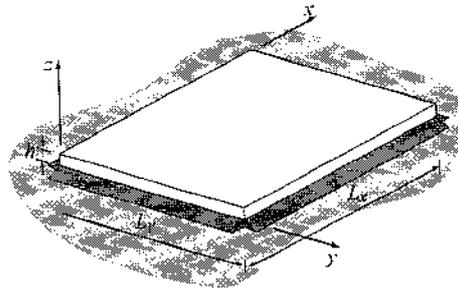


Figura A.1: Modelo de placa retangular simplesmente apoiada

A expressão para os modos naturais da placa com um apoio simples em todas as bordas é dada por:

$$\tilde{w}_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (\text{A.6})$$

onde  $L_x$  e  $L_y$  são os comprimentos da placa nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Substituindo as Equações (A.4) e (A.6) na Equação (A.1), obtemos a expressão para o fator de participação modal, dado por:

$$Z_{mn}(t) = \frac{f_{mn} e^{i\omega t}}{\omega_{mn}^2 - \omega^2 + i\eta\omega_{mn}^2} \quad (\text{A.7})$$

onde

$$f_{mn} = \frac{4}{\rho h L_x L_y} \int \int_S p(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy \quad (\text{A.8})$$

e

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left[ \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \right]} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.9})$$

sendo que,  $f_{mn}$  é a força modal e  $\omega_{mn}$  é a frequência natural da placa. A integral dupla da Equação (A.8) é resolvida em relação a superfície ou área onde atua o carregamento.

Para um carregamento pontual atuando em  $(x, y) = (x_0, y_0)$  como mostrado na Figura (A.2), a força modal é dada da seguinte forma:

$$f_{mn} = \frac{4}{\rho h L_x L_y} p(x_0, y_0) \sin\left(\frac{m\pi x_0}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{L_y}\right) \quad (\text{A.10})$$

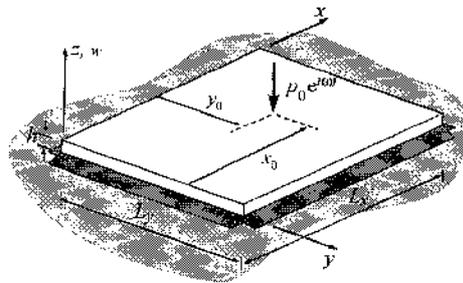


Figura A.2: Placa simplesmente apoiada com uma carga concentrada

Logo, a solução geral para o deslocamento transversal de uma placa fina retangular com condições de contorno simplesmente apoiada, é expressa como:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)}{\omega_{mn}^2 - \omega^2 + i\eta\omega_{mn}^2} e^{i\omega t} \quad (\text{A.11})$$

## A.2 Cálculo da energia vibracional para placas retangulares

A média temporal da densidade de energia total, para ondas de flexão em uma placa retangular fina, devidas a uma excitação harmônica, pode ser representada da seguinte forma (Cho, 1993):

$$\langle e \rangle = \frac{1}{4} D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1}{4} \rho h \left[ \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w^*}{\partial t} \right] \quad (\text{A.12})$$

sendo que, o primeiro e segundo termos da Equação (A.12), representam as médias temporais da densidade de energia potencial e cinética, respectivamente. Sabe-se, que o fluxo de energia ou intensidade é uma grandeza vetorial e possui duas componentes. A média temporal do fluxo de energia na direção de  $x$  e  $y$  para ondas de flexão em placas finas é dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle q_x \rangle &= -\frac{1}{2} \Re \left\{ M_{xx} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial t} - M_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y \partial t} - Q_{xz} \frac{\partial w^*}{\partial t} \right\} \\ \langle q_y \rangle &= -\frac{1}{2} \Re \left\{ -M_{yy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y \partial t} + M_{yx} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial t} - Q_{yz} \frac{\partial w^*}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

onde  $M_{xx}$  e  $M_{yy}$  são os momentos fletores na direção  $x$  e  $y$ ,  $Q_{xz}$  e  $Q_{yz}$  são as forças de cisalhamento.