

ESTUDO ANALÍTICO DE UM
VEÍCULO SOBRE TRILHOS

14/75

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

Departamento de Materiais e Mecânica dos Sólidos

ESTUDO ANALÍTICO DE UM
VEÍCULO SOBRE TRILHOS

Douglas Eduardo Zampieri

Trabalho apresentado para obtenção do
título de Mestre em Engenharia Mecâ-
nica, pela Comissão de Pós-Graduação
da Faculdade de Engenharia de Campinas

- CAMPINAS -

1975

UNICAMP
BIBLIOTECA

AGRADECIMENTOS

Ao amigo *Prof. Dr. HANS INGO WEBER*, orientador deste trabalho, agradeço não só o interesse demonstrado como o incentivo que recebi durante o desenvolvimento do mesmo.

Agradeço, também, à colaboração da *Srta. Yoshiko Hashimoto* pelos trabalhos de datilografia, ao desenhista *Marco Antonio Padula* e a todas as pessoas que colaboraram direta ou indiretamente para que este trabalho pudesse ser realizado.

A minha esposa
e aos meus pais

R E S U M O

Faz-se um estudo analítico de um modelo físico simplificado de um veículo ferroviário de suspensão convencional. As equações de movimento são obtidas para uma trajetória curvilínea e se discute a validade do modelo físico adotado para este caso. Demonstra-se o desacoplamento dos movimentos de deslocamento vertical, inclinação e balanço do vagão e trucks para uma trajetória retilínea. Faz-se uma análise detalhada do movimento vertical por uma metodologia que oferece as diversas características do comportamento dinâmico do sistema. A partir de parâmetros de projeto (fator de amortecimento, rigidez, relação de massas), determina-se o grau de estabilidade, resposta à excitação impulsiva e à excitação harmônica. Dos diagramas frequência-amplitude são obtidas uma série de conclusões interessantes. O mesmo procedimento é aplicado ao movimento de balanço.

A B S T R A C T

An analytical investigation of a simplified physical model of a railway vehicle with conventional suspension is presented. One obtains the equations of motion on a curved track and discusses the validity of the model for this case. One shows the uncoupling of the vertical motion, the roll motion and the pitch motion on a straight track. One makes a detailed analysis of the vertical motion following a procedure that gives the dynamical behavior of the system. The degree of stability, the response to an impulsive excitation and the response to an harmonic excitation is determined for different design data (damping ratio, stiffness, mass ratio). Interesting conclusions are obtained from the frequency-amplitude diagram. The same procedure is applied to the roll motion.

Í N D I C E

ESTUDO ANALÍTICO DE UM VEÍCULO SOBRE TRILHOS

	PÁGINA
CAPÍTULO I - <u>INTRODUÇÃO</u>	1
I.1 Desenvolvimento Atual no Mundo	1
I.2 Estudo Proposto	7
CAPÍTULO II - <u>DESENVOLVIMENTO DOS MODELOS FÍSICO E MATEMÁTICO</u>	12
II.1 Desenvolvimento do Modelo Físico	12
II.2 Desenvolvimento do Modelo Matemático	14
II.2.1 Sistema de Coordenadas	14
II.2.2 Equações do Movimento	18
II.3 Desenvolvimento do Modelo Matemático em uma Trajetória Curvilínea	35
II.4 Desenvolvimento do Modelo Matemático em uma Trajetória Retilínea	47
CAPÍTULO III - <u>ESTUDO DO MOVIMENTO VERTICAL DE UM VEÍCULO FERROVIÁRIO EM UMA TRAJETÓRIA RETILÍNEA</u>	49
III.1 Introdução	49
III.2 Análise de um Exemplo de Projeto	50
III.3 Análise Através do Grau de Estabilidade	57
III.3.1 Análise Modal	58
III.3.2 Influência dos Parâmetros de Projeto no Grau de Estabilidade	68
III.4 Análise Através da Solicitação por um Impulso	73
III.5 Determinação do Diagrama Frequência-Amplitude para uma Solicitação Senoidal	81
III.6 Conclusões	94

<i>CAPÍTULO</i> IV - <u>ALGUNS RESULTADOS PARA O MOVIMENTO DE BALANÇO</u>	100
IV.1 Diagramas Frequência-Amplitude	100
IV.2 Conclusões	101
 <u>BIBLIOGRAFIA</u>	 105

C A P Í T U L O I

I N T R O D U Ç Ã O

I.1 - Desenvolvimento Atual no Mundo

Hã duas dēcadas, uma pesquisa bibliogrãfica revelaria que pouco fora in-
vestigado sobre o comportamento dinãmico da suspensã de veĩculos. Segundo
Diboll e Bienicki, em [1], tanto a indũstria automobilĩstica como a ferroviã .
ria tinham suas razões para tal. A primeira, devido ao relativo baixo custo uni-
tãrio, baseou suas soluções dos problemas dinãmicos em tēcnicas empĩricas, as
quais nã eram publicadas devido, talvez, ã concorrēncia. Jã a indũstria ferro-
viãria tinha contra si o alto custo unitãrio e a baixa produçã, que nã permi-
tiam o uso das mesmas tēcnicas adotadas na indũstria de automõveis e, menos
ainda, tēcnicas analĩticas rigorosas. Deste modo, o progresso na ãrea de sus-
pensã de veĩculos ferroviãrios evoluiu, vagarosamente, baseando-se mais na li-
nha empĩrica do que na analĩtica.

Com o avanço da tēcnica, solicitando cada vez mais os materiais empre-
gados, procurando-se obter o mãmimo de um projeto e, principalmente, com uma no-
va metodologia de projeto, pela primeira vez explorado de forma consequente na
indũstria aeroespacial, onde os compromissos materiais são imensos, exigindo
uma grande certeza que o capital empregado irã render bons frutos, um grande im-
pulso foi dado ao estudo analĩtico de um modo geral. Aliado a isto, ocorreu
em paralelo o desenvolvimento dos computadores, que pela primeira vez, tornaram
viãvel o cãlculo de grandes sistemas de equações diferenciais, o que leva os
tēcnicos a tentarem criar modelos matemãticos dos sistemas analisados, visando
uma otimizaçã de projeto.

Além de se ter o ferramental necessário para uma análise analítica, já implantado e bem desenvolvido, outros fatores influenciaram para o atual desenvolvimento de trens, entre eles a constatação de que o automóvel individual não era a solução de transporte em massa e o desejo de se desenvolver um meio de transporte, que em distâncias médias pudesse fazer concorrência com o transporte aéreo. Neste sentido, existem várias novas concepções em análise como: trens com suspensão magnética e motor linear, trens com colchão de ar e, também, trens com suspensão e tração por turbina linear. Alguns estão em projeto, outros já possuem protótipo. Além disso, aperfeiçoa-se os sistemas tradicionais, procurando-se elevar as velocidades e melhorar o conforto nos sistemas metroviários e ferroviários.

Atualmente existe uma variada gama de trabalhos, tanto aperfeiçoando, como analisando analítica e experimentalmente os sistemas tradicionais de suspensões ferroviárias. Law e Cooperrider, em [2], definem os principais problemas existentes, além de resumirem o que se faz em termos de pesquisa ferroviária. Nesta área, pode-se citar como pontos comuns certos objetivos de performance da suspensão de veículos ferroviários, tais como:

- a) manobrabilidade com adequada estabilidade, tanto em linha reta como em trajetórias curvas, que é uma função a ser exercida pelos trucks, ou seja, sua resposta dinâmica ante a irregularidade e conicidade dos trilhos não deve permitir que haja uma guinagem muito acentuada das rodas, de modo a não haver contato entre a flange da mesma e os trilhos em linha reta. Sendo assim, introduziu-se as rodas cônicas com o intuito de tornar o veículo auto-centrante em relação a este movimento citado.

Nota-se que, se houver uma excitação que desloca o eixo em relação a sua posição central, este terá uma trajetória senoidal em relação aos trilhos. Tal movimento é denominado "modo cinemático" o qual não tem

influência para baixas velocidades. Porém, acima de uma determinada velocidade, conhecida como "velocidade crítica", este movimento é responsável pelo acoplamento entre o deslocamento lateral e a guinagem (movimento angular em torno do eixo vertical do veículo). Segundo Wickens, em [3], para uma boa manobrabilidade em linha reta, o truck deve ter um amortecimento tal que permita auto-centrar-se rapidamente.

Já em trajetórias curvas, os veículos ferroviários utilizavam o contato flange-trilho, para melhorar a manobrabilidade, o que, entretanto, resultava em um rápido desgaste de ambos, além de um alto nível de ruído. Mais recentemente, foi sugerido por Newland, [4,5] e Boocock [6,7], que um modo de se incrementar a manobrabilidade poderia ser através das forças de atrito de deslizamento sobre a superfície das rodas, em vez de se depender somente do contato flange-trilho, o que reduz o desgaste e o ruído.

Devido ao fato do contato roda-trilho ser de grande importância, Nayak, em [8], estuda o problema analiticamente, detalhando três importantes aspectos: as deformações plásticas, a perda de contato e a formação de corrugação no trilho. Neste mesmo trabalho, são determinadas as curvas de "ressonância de contato", fenômeno causado pelas deformações elásticas localizadas perto da região de contato.

- b) isolamento da vibração, de modo a não permitir que as irregularidades da linha sejam sentidas no veículo. Partindo-se do princípio que o passageiro espera ter a mesma sensação de conforto, esteja ele em seu automóvel em uma auto-estrada, ou em avião, ou em um trem, vê-se quão importante é esta função da suspensão. A pesquisa nesta área revelou que a sensação de conforto é melhor avaliada em termos de aceleração e níveis de "jerk" (taxa de variação da aceleração com o

tempo, também conhecida como derivada terceira do deslocamento em função do tempo). Sendo assim, Carstens, em [9], Cooperrider, em [10] e Batchelor, em [11], determinaram os níveis aceitáveis - de aceleração e "jerk" em diferentes situações de operação, tais como na partida, nas paradas e em curvas, de modo a determinar as curvas "isoconfortáveis" para a aceleração lateral e vertical em função da frequência. Tais curvas baseiam-se na sensibilidade humana obtida através da oscilação do corpo humano quando sujeito a determinadas frequências discretas. O mesmo estudo foi realizado em veículos ferroviários de carga, visando diminuir o perigo de dano. Como a fragilidade da carga depende de vários fatores, não é possível - ter-se um critério geral, porém, pode-se determinar limites toleráveis de vibrações para classes de carga a serem transportadas.

- c) suportar adequadamente o veículo, o que é função quase que exclusiva da suspensão vertical do truck, ao passo que, a manobrabilidade depende muito mais das características da suspensão lateral. Uma medida de performance de suporte da suspensão é a razão entre as cargas laterais e verticais em cada roda. O que se deseja é manter esta razão mais baixa quanto possível, pois ela também é conhecida como "quociente de descarrilhamento", por ser possível prever a tendência do veículo descarrilhar sob certas condições. Numerosos testes - destas razões foram feitos por Hurley, em [12], Koci, em [13], e Lind, em [14]. Convém salientar-se que o estudo das cargas dinâmicas entre os componentes e na interface roda-trilho, é uma das áreas a ser pesquisada mais a fundo, para ter-se resultados mais realísticos. A grande dificuldade está no conhecimento e desenvolvimento das características não lineares destas forças, e na criação de modelos que incluam as características dos apoios dos trilhos.

d) suficientes tração e frenagem em todas as condições de operação, o que induz a ter-se como objetivo a maximização da força útil no trilho. Assim, a performance de tração e frenagem é função das forças tangenciais exercidas pelo trilho sobre as rodas, que dependem da geometria, das condições de superfície e da carga normal na interface roda-trilho, bem como do comportamento dinâmico do trilho, roda e veículo. Como o sistema de suspensão influi predominantemente no comportamento dinâmico do veículo, ele permite determinar a variação dinâmica da carga normal na interface roda-trilho, bem como o nível de forças dinâmicas laterais necessário à manobrabilidade do veículo. Os problemas de tração e frenagem encontrados na operação com veículos sobre trilhos, incluem, ainda, a redução da adesão em altas velocidades, tanto em curvas como sobre trilhos que apresentem rugosidade superficial alta. Tais problemas e suas teorias foram discutidos na "Convention on Adhesion" realizada em Londres em 1963 pela "Institution of Mechanical Engineers", [15].

Salienta-se que, apesar destes quatro pontos comuns citados acima, os modelos matemáticos utilizados pelos pesquisadores para representar o atual veículo ferroviário, têm variado bastante em função dos objetivos individuais de cada investigação. Os esforços estão concentrados em três áreas principais: a) dinâmica lateral em trajetórias retilíneas, b) dinâmica da curva e c) dinâmica vertical.

Para cada área citada, o volume de trabalho é bastante grande, envolvendo estudos detalhados das partes do veículo ferroviário, bem como estudos do veículo completo.

Um enfoque de pesquisa bastante diferente dos já citados, foi desenvolvido pela "Japanese National Railways", retratado por Matsudaira, Matsui e Yokose, em [16]. Segundo estes autores, partindo-se do princípio de que é ne-

cessário comparar os resultados teóricos com os estudos experimentais, o "Railway Technical Research Institute" iniciou, a partir de 1950, a construção de modelos em escala de 1/5 e 1/10, testando-os em um estande de provas. Já em 1960, foi construído um novo estande com a finalidade de se testar os trucks em escala real. Tais estudos contribuíram sobremaneira para o sucesso do novo desenho de trucks da linha Tokaido, na qual tem-se velocidades de até 250 km/h. Nota-se ainda, que o banco de testes pode ser um substituto dos ensaios de campo, com o mérito de ser mais fácil o estudo e, muito mais seguro no caso de altas velocidades.

As diretrizes básicas da pesquisa ferroviária no futuro dependem quase que exclusivamente das três aproximações que se faz hoje em dia, como reportado por Wickens, em [3]. Segundo este autor, em primeira aproximação, as restrições do sistema são aceitas e os parâmetros básicos do veículo são fixados. Deste modo, necessita-se entender os problemas dinâmicos como surgem e refinar os projetos gradativamente, seguindo um processo de desenvolvimento evolutivo.

Em segunda aproximação, algumas restrições dos sistemas são aceitas, principalmente aquelas referentes às instalações das vias férreas. Neste caso, a dinâmica básica dos veículos sobre trilhos deve ser bem conhecida e, a partir deste conhecimento, otimiza-se os veículos já existentes, além de se criar projetos de futuros veículos. Exemplos desta aproximação são: o novo trem francês à turbina TGV-001, o "Turbo Train" da "United Aircraft" e os trens japoneses da linha Tokaido, exemplos estes já citados anteriormente.

Em terceira aproximação, todas as restrições do sistema são questionadas, o que resulta em novas configurações tanto de via férrea, como de veículos, fazendo com que se desenvolva a otimização das funções de manobrabilidade, suporte, tração e frenagem. Exemplos desta terceira aproximação são os vários monotrilhos implantados, os trens pendulares ingleses e os sistemas automáticos de direção relatados por Lin e Marsh, em [17] e Benigton, em [18].

Em suma, tentou-se apresentar acima, de modo bastante sucinto, uma visão do que se tem feito ultimamente na pesquisa dinâmica de veículos ferroviários, tanto do ponto de vista analítico, como do ponto de vista empírico, ressaltando as principais tendências.

I.2 - Estudo Proposto

O objetivo de uma investigação dinâmica é entender e prever o comportamento dinâmico de um dado sistema. Segundo Cannon, em [19], a investigação dinâmica se compõe de quatro estágios:

- a) Especificação do sistema a ser estudado e a criação de um modelo físico, que terá um comportamento suficientemente próximo do sistema proposto. Para isto é necessário determinar, em primeiro lugar, quanto preciso deverá ser o estudo. Após isto, parte-se para as simplificações de engenharia e para a identificação de parâmetros considerados importantes, ou seja, fatores que poderão influir no comportamento dinâmico do sistema em estudo.
- b) Criação do modelo matemático que represente o modelo físico, isto é, formulação das equações diferenciais do movimento do modelo físico. Isto é atingido através da aplicação das leis da Mecânica.
- c) Estudo do comportamento dinâmico do modelo matemático através da resolução das equações diferenciais do movimento. Tal resolução nos leva, invariavelmente, à adaptação de métodos numéricos já conhecidos.
- d) Tomada de decisão de projeto. Nesta etapa, deve-se submeter o modelo às solicitações típicas, de modo a ter-se seu comportamento dinâmico.

Através dele, tem-se um resultado que, por sua vez, deve ser otimizado. Esta otimização é que possibilita a alteração do projeto.

O exposto acima se refere quase que exclusivamente à investigação dinâmica teórica. Lembrando-se que, paralelamente, pode-se fazer uma análise experimental, representa-se na Fig. 1 o esquema de uma análise dinâmica sob os pontos de vista teórico e experimental.

Propõe-se fazer uma investigação dinâmica nos moldes acima citados, examinando a dinâmica vertical de um sistema constando de um veículo sobre trilhos de suspensão, dita convencional.

Entendemos por veículo ferroviário convencional, aquele que possui uma suspensão passiva constituída de molas que podem ser tomadas como lineares e amortecedores que podem ser assumidos como viscosos. De modo bastante genérico, pode-se tomar um vagão ferroviário como sendo constituído de um corpo principal que se une ao truck por um encaixe central denominado "booster". A ligação entre ambos é completada através da suspensão secundária, que é constituída de molas e amortecedores colocados lateralmente. Por sua vez, cada truck se liga ao conjunto de eixos através da suspensão primária, também constituída de molas e amortecedores. A Fig.2 representa o esquema de um truck moderno, podendo-se notar os detalhes tanto da suspensão primária como da secundária.

O escopo deste estudo é, basicamente, usar uma metodologia já existente, adequando-a às nuances do presente problema de modo a se familiarizar com determinados métodos de análise. Como já foi citado, dada a complexidade do assunto, os autores limitam a sua generalidade, propondo modelos que retratam os fenômenos mais característicos dentro da área que pretendem analisar. Deste modo, sempre se procura por uma lógica física eliminar os efeitos considerados secundários face ao que se pretende examinar. Todavia, considerando-se a complexidade global do problema, pode-se, também, delimitar uma situação, onde uma análise mais simplificada é razoável de ser executada. Isto corresponde, em ou-

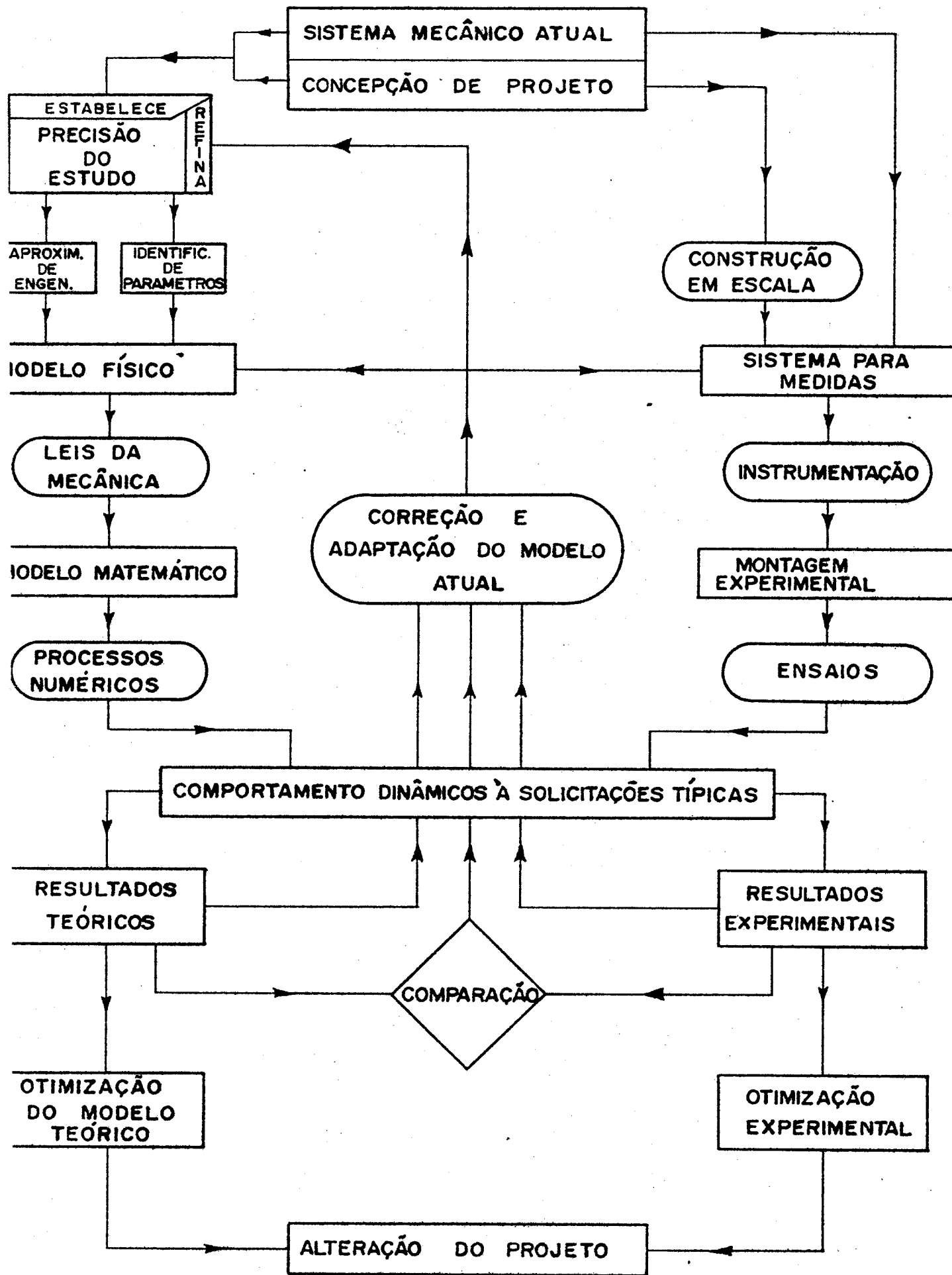
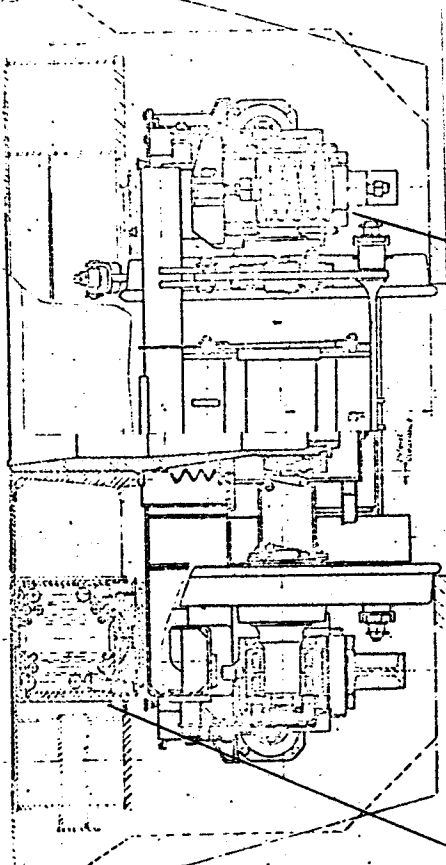
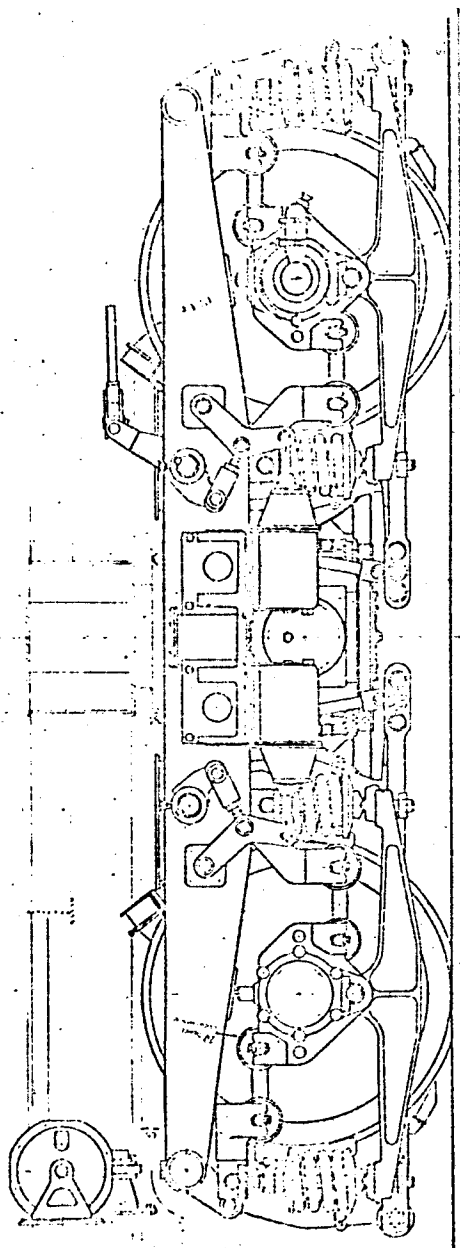
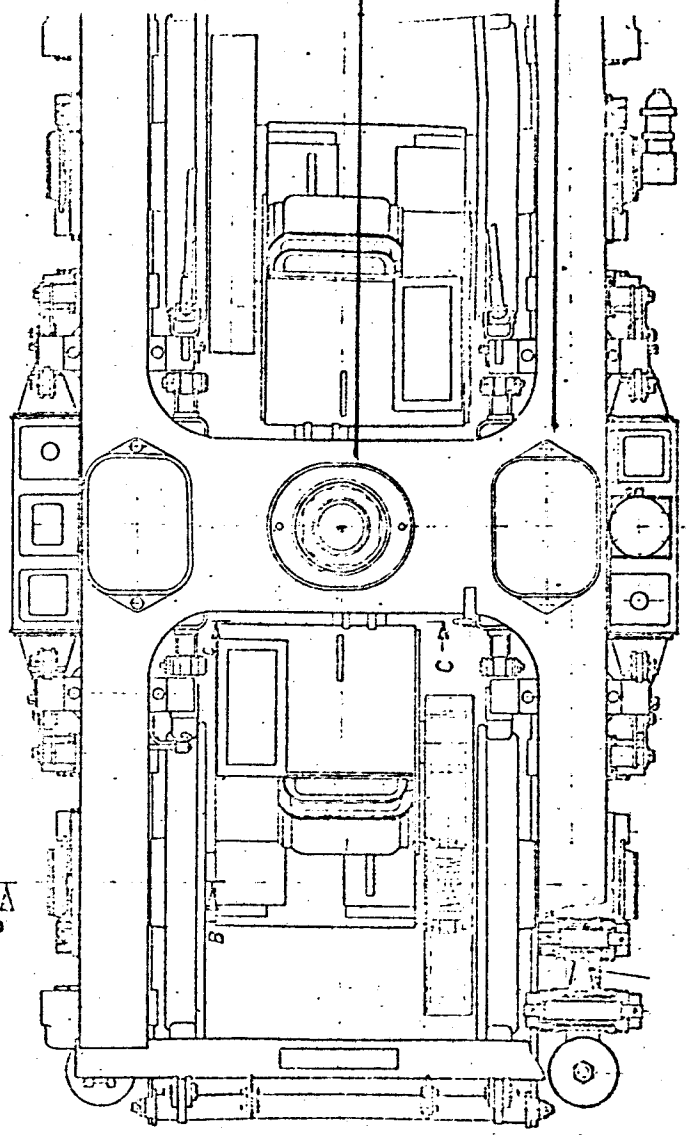


FIG. 1 - Diagrama de uma Investigação Dinâmica.



A-D

B-C



detalhe da suspensão secundária

suspensão primária

"booster"

assento da suspensão secundária

FIG. 2 - Esquema de um Truck de um Veículo Ferroviário.

tras palavras, a detalhar cada uma das três fases iniciais da investigação dinâmica e, de modo bastante sucinto, propor-se alguma análise referente ao último estágio. Um estudo completo deverá, portanto, ser necessariamente, o objeto de uma análise posterior, que irá aproveitar, como elementos de apoio, todas as etapas aqui apresentadas. Em outros termos, determinadas características encontradas no modelo complexo, derivam de situações que podem ser investigadas com muito mais cuidado no modelo mais simples que se vai analisar.

Assim sendo, considerar-se-á um veículo numa situação tal que sejam desprezíveis as oscilações laterais, isto é, a velocidade é bem abaixo da velocidade crítica para estabilidade lateral. Neste sentido, também se desconsiderará a guinagem ("yaw") tanto do veículo, como de seus trucks, para concentrar-se a atenção sobre a vibração vertical e os movimentos de inclinação ("roll") e balanço ("pitch") do veículo e dos trucks. Mais detalhadas serão estas hipóteses por ocasião da apresentação do modelo físico.

Após a confecção do modelo físico, faz-se a formulação do modelo matemático do mesmo e resolve-se as equações diferenciais de movimento, possibilitando dois estudos distintos.

O primeiro é o estudo do grau de estabilidade do sistema através de sua equação característica, na qual a influência de determinados fatores de projeto é testado. Nota-se que especial ênfase deve ser dada aos fatores que influem diretamente no comportamento dinâmico da suspensão, ou seja, fatores que dependem do amortecimento e da constante de mola.

O segundo estudo é feito com a finalidade de se determinar as características dinâmicas da suspensão, assumindo-se uma força de excitação gerada pela irregularidade dos trilhos. A resposta em frequência é analisada, tomando-se por base a influência da variação dos parâmetros já citados no primeiro estudo.

De posse destas conclusões, é possível identificar quais parâmetros de projeto elevam o grau de estabilidade, visando obter um sistema capaz de retornar rapidamente à posição de equilíbrio. A escolha final é feita comparando-se esta avaliação com a resposta em frequência.

C A P Í T U L O I I

OBTENÇÃO DOS MODELOS FÍSICO E MATEMÁTICO

II.1 - Desenvolvimento do Modelo Físico

Fisicamente, representar-se-á o veículo ferroviário convencional, já mencionado no Ítem I-2, como sendo uma caixa retangular (fazendo às vezes de corpo principal ou vagão), conforme Fig. 3, apoiada através de duas molas e dois amortecedores (suspensão secundária) sobre duas outras caixas menores e idênticas entre si (trucks) que, por sua vez, ligam-se, cada uma delas, em dois eixos através de quatro molas e quatro amortecedores (suspensão primária). Estes dois eixos entram diretamente em contato com os trilhos através das rodas. Este modelo é justificado pela construção real de um truck, indicado na Fig. 2, onde se notam as mencionadas suspensões primária e secundária e o "booster" (estrutura de encaixe do vagão para apoio sobre o truck). Nota-se que a liberdade de movimento permitida pelo "booster", nas 3 direções dos eixos principais é mantida no modelo físico assumido.

A hipótese que se faz neste trabalho, dentro das premissas já expostas na Introdução, é atribuir para cada um dos três elementos acima, exatamente três graus de liberdade, respectivamente:

- deslocamento vertical
- inclinação ("pitch")
- balanço ("roll")

Considera-se, portanto, o sistema vinculado de tal maneira que não haja influência dos outros três graus de liberdade de cada elemento. Estes são, res-

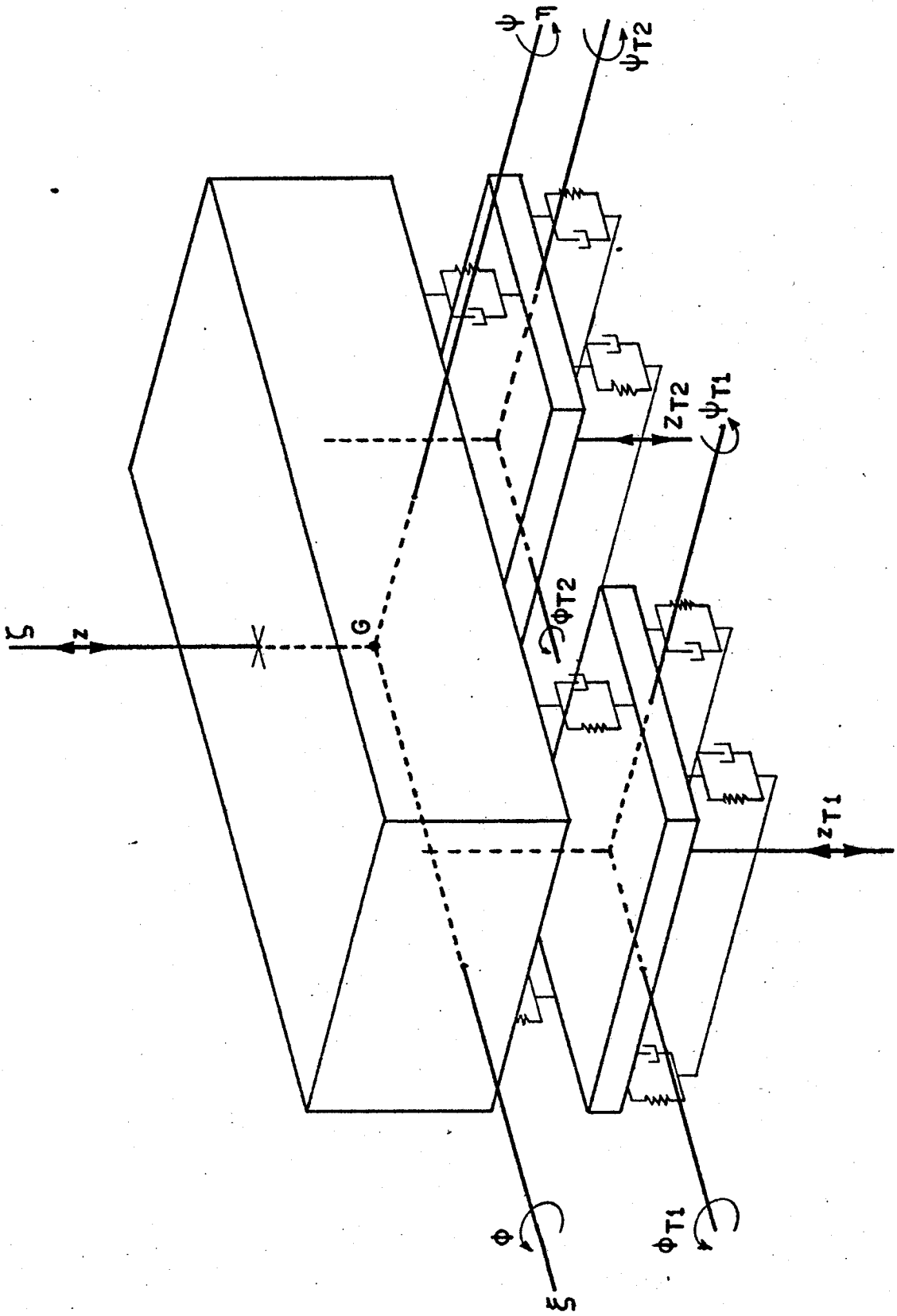


FIG. 3 - Modelo Físico.

pectivamente, o movimento longitudinal, onde ao movimento do sistema pode-se superpor uma vibração do conjunto total do trem, o movimento transversal e correspondente guinagem ("yaw"), que são determinados pelo efeito da conicidade do contato roda-trilho.

Desprezar o primeiro, corresponde considerar um sô veículo, enquanto que desprezar o segundo, significa considerar-se baixas velocidades. Evidentemente estas afirmativas são aproximadas, porém coerentes com o contexto que procuramos dar ao presente desenvolvimento.

A razão de tais restrições reside no fato de se estar interessado em testar um modelo físico para uma análise do mesmo em trajetórias retilíneas e curvas, se para tal ele for adequado. Após isto, decidir-se-á pelo estudo em uma das áreas de grande interesse, que já foram discutidas anteriormente.

Na Fig. 3 estão representados os eixos principais dos três elementos e seus nove deslocamentos possíveis: três translações e seis rotações. As dimensões do modelo são definidas pelos parâmetros representados nas Figs. 4-a e 4-b, onde estão representadas também, as constantes de mola e amortecimento de ambas suspensões. Nota-se que, na vista frontal, as molas e amortecedores foram rebatidos para melhor visualização.

II.2 - Desenvolvimento do Modelo Matemático

II.2.1 - Sistemas de Coordenadas

Como já foi descrito, o veículo considerado se compõe de: vagão e dois trucks. Inicialmente, como o interesse científico está mais voltado ao comportamento do vagão, desenvolver-se-á o modelo matemático do vagão, não se considerando, ainda, as possíveis excitações, nem sua interação com os trucks. Sendo assim, inicialmente, definem-se os sistemas de coordenadas convenientes. Portanto, tomar-se-á um sistema inercial I, de coordenadas x, y, z , com origem 0 no centro de massa G do vagão, supondo-se o mesmo em sua posição de equilíbrio.

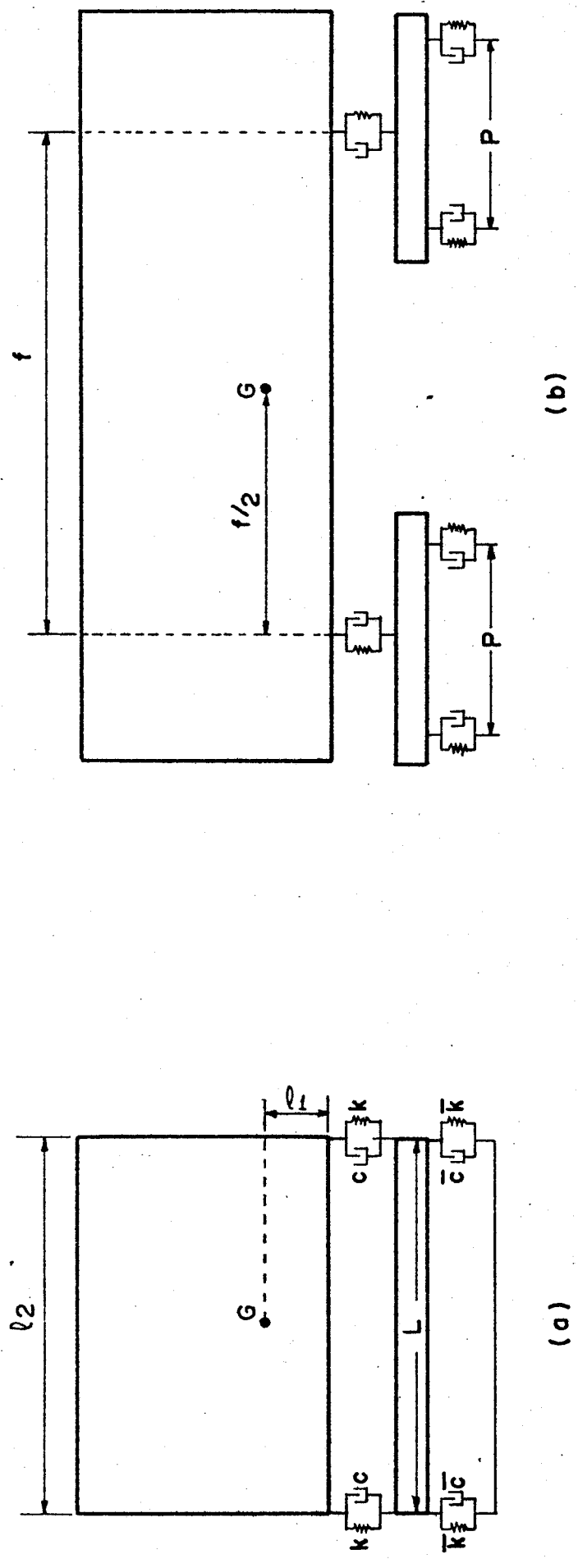


FIG. 4 - Dimensões do Modelo Físico.
a) Vista frontal b) Vista lateral

Define-se, ainda, o sistema móvel S , de origem G e coordenadas ξ , η , ζ , na direção dos eixos principais de inércia. Observa-se, portanto, que, para a posição de equilíbrio, ambos os sistemas são coincidentes. Propõe-se calcular a matriz de transformação de I para S , bem como as respectivas expressões das velocidades angulares nos dois sistemas, quando o vagão for sujeito a uma translação vertical $Z(t)$, uma rotação em relação ao eixo longitudinal $\phi(t)$ e uma rotação em relação ao eixo transversal $\psi(t)$. Pela Fig. 5 pode-se visualizar a posição final dos sistemas I e S .

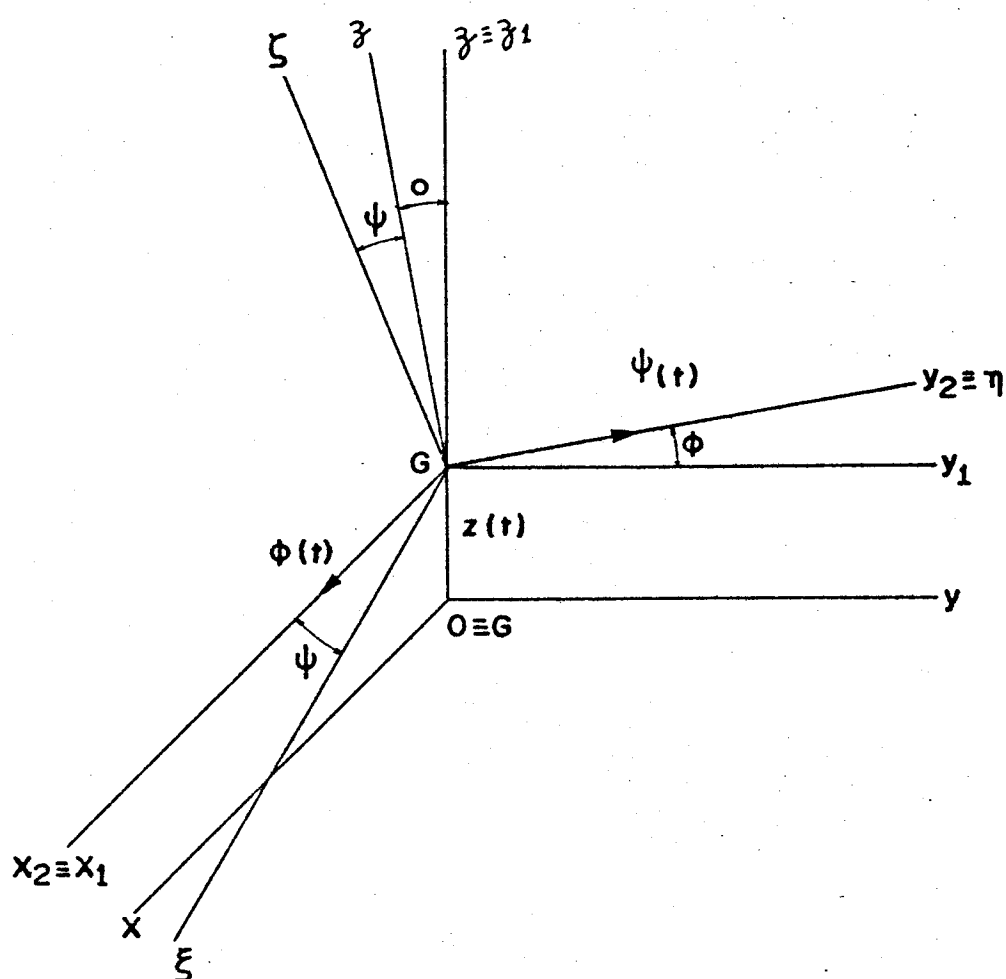


FIG. 5 - Translação e rotações do vagão.

Deste modo, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = S [T]^I \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z - Z \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$S [T]^I = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \cos\phi & -\sin\psi \cos\phi \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\psi & -\cos\phi \sin\phi & \cos\psi \cos\phi \end{bmatrix} \quad (4)$$

Observa-se que, como a matriz de transformação é ortogonal, vale a seguinte propriedade:

$$I [T]^S = (S [T]^I)^{-1} = (S [T]^I)^T \quad (5)$$

ou seja:

$$I [T]^S = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ \sin\psi \cos\phi & \cos\phi & -\cos\psi \sin\phi \\ -\sin\psi \cos\phi & \sin\phi & \cos\psi \cos\phi \end{bmatrix} \quad (6)$$

Para a velocidade angular tem-se devido aos dois graus de liberdade de rotação:

$$\underline{\omega} = \underline{\dot{\phi}} + \underline{\dot{\psi}} \quad (7)$$

ou, ainda:

$$I_{\omega} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \cos \phi \\ \dot{\psi} \sin \phi \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$S_{\omega} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \cos \psi \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \sin \psi \end{Bmatrix} \quad (9)$$

II.2.2 - Equações do Movimento

Para se equacionar o movimento, é necessário estabelecer as simplificações físicas assumidas. Para realçar os efeitos que se pretende analisar considera-se:

- todos os elementos são perfeitamente rígidos e toda elasticidade do sistema está concentrada nas molas das suspensões.
- todos os deslocamentos são pequenos.
- todas as molas possuem características lineares.
- todos os amortecedores são tomados como viscosos.

A aplicação da lei de Newton exige o conhecimento dos diversos deslocamentos relativos e suas derivadas, a fim de se obter a expressão dos esforços - nas molas e nos amortecedores.

A Fig. 6 representa o vagão em sua posição de equilíbrio e a posição final após a translação Z e rotações ϕ e ψ , dada em duas vistas: frontal e lateral.

Os pontos de contato das molas e amortecedores com o vagão são representados pelas letras A, B, C, D. Após a translação, eles assumem a posição com o sub-índice 1, após a rotação ϕ a posição 2 e, após a rotação ψ , a posição final 3.

A Fig. 7 representa a simbologia da posição de cada conjunto mola-amortecedor e detalha, também, os vetores a serem considerados para um dos pares mola-amortecedor, notando-se que para os outros o procedimento é análogo.

O deslocamento de cada mola será dado por:

$$\begin{aligned}\overline{AA}_3 &= \overline{GA}_3 + \overline{OG} - \overline{OA} \\ \overline{BB}_3 &= \overline{GB}_3 + \overline{OG} - \overline{OB} \\ \overline{CC}_3 &= \overline{GC}_3 + \overline{OG} - \overline{OC} \\ \overline{DD}_3 &= \overline{GD}_3 + \overline{OG} - \overline{OD}\end{aligned}\tag{10}$$

Para a primeira das equações (10) tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \overline{AA}_3 \xi \\ \overline{AA}_3 \eta \\ \overline{AA}_3 \zeta \end{Bmatrix} = \begin{matrix} S \\ \\ \end{matrix} \begin{Bmatrix} f/2 \\ -\ell_2/2 \\ -\ell_1 \end{Bmatrix} + \begin{matrix} S \\ [T] \\ \end{matrix} \begin{matrix} I \\ \\ \end{matrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \end{Bmatrix} - \begin{matrix} S \\ [T] \\ \end{matrix} \begin{matrix} I \\ \\ \end{matrix} \begin{Bmatrix} f/2 \\ -\ell_2/2 \\ -\ell_1 \end{Bmatrix}\tag{11}$$

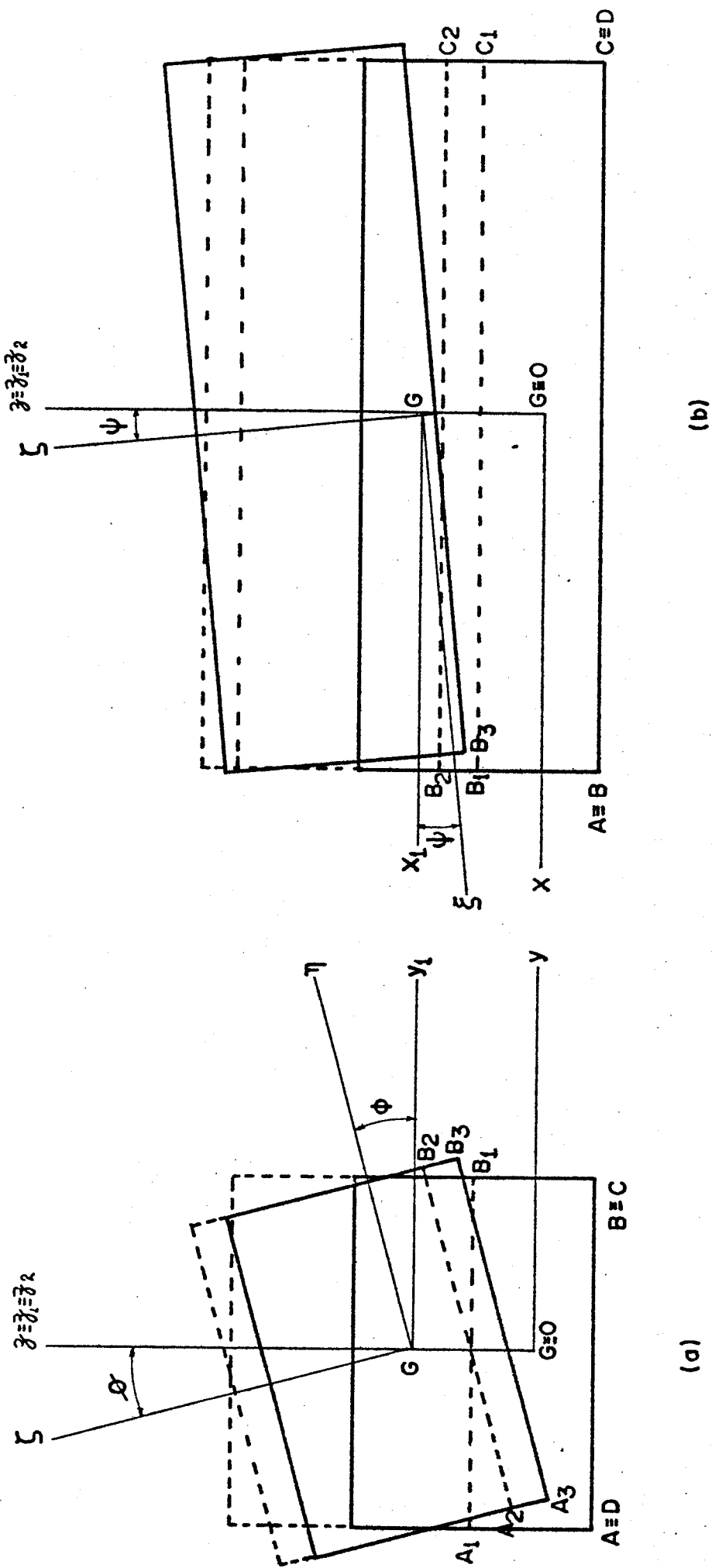


FIG. 6 - Deslocamento do Vagão devido a Translação Z e Rotações ϕ e ψ .
a) Vista frontal b) Vista lateral

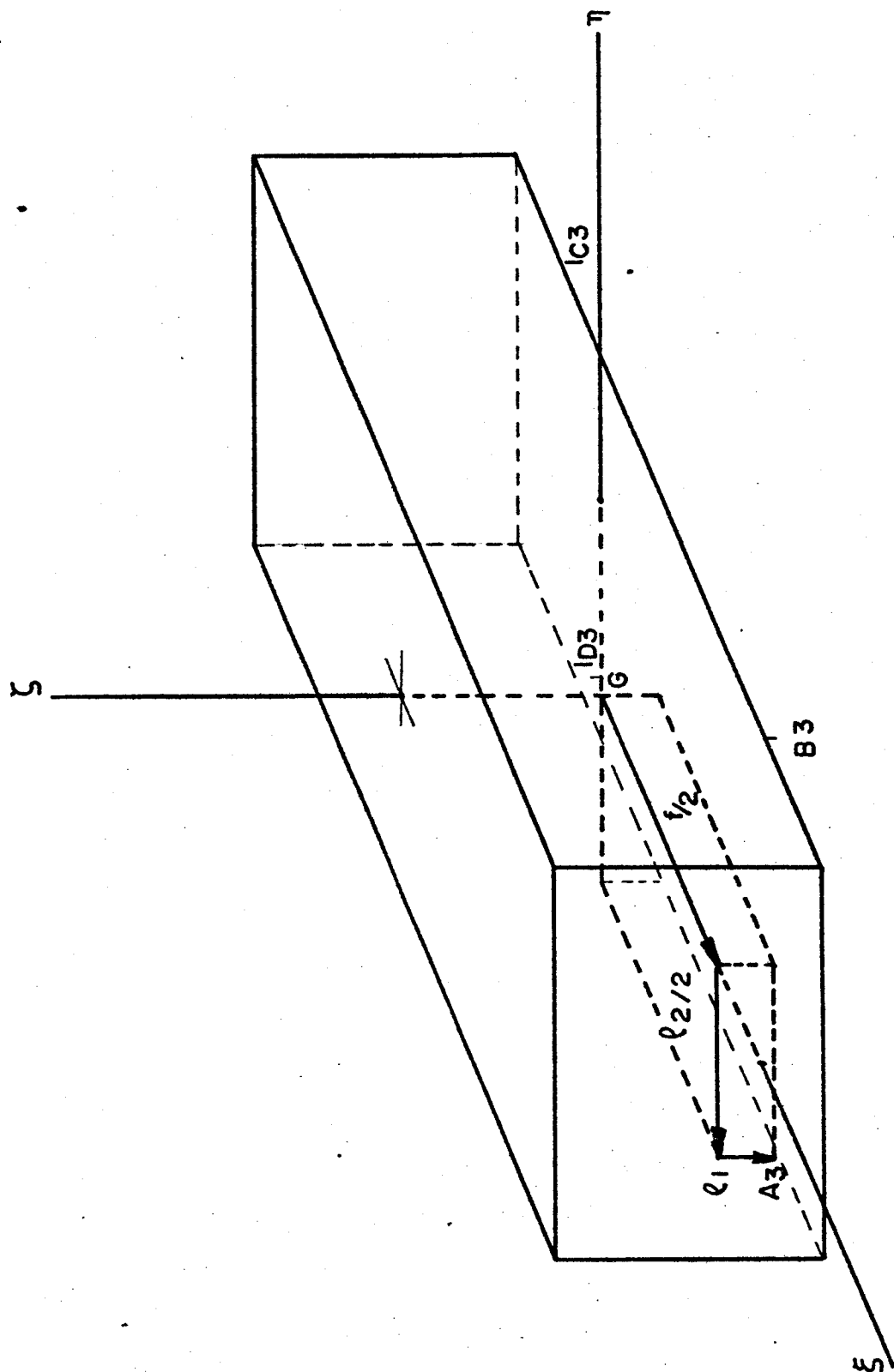


FIG. 7 - Posição Final do Vagão, incluindo os Vetores Posição em relação ao Sistema Móvel de Referência.

$$^S \begin{Bmatrix} \overline{AA}_3 \xi \\ \overline{AA}_3 \eta \\ \overline{AA}_3 \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f/2 - f/2 \cos \Psi + \ell_2/2 \sin \Psi \sin \Phi - Z \sin \Psi \cos \Phi - \ell_1 \sin \Psi \cos \Phi \\ - \ell_2/2 + \ell_2/2 \cos \Phi + Z \sin \Phi + \ell_1 \sin \Phi \\ - \ell_1 - f/2 \sin \Psi - \ell_2/2 \cos \Psi \sin \Phi + Z \cos \Psi \cos \Phi + \ell_1 \cos \Psi \cos \Phi \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Derivando-se a equação (12) chega-se a:

$$^S \begin{Bmatrix} \dot{\overline{AA}}_3 \xi \\ \dot{\overline{AA}}_3 \eta \\ \dot{\overline{AA}}_3 \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f/2 \dot{\Psi} \sin \Psi + \ell_2/2 (\dot{\Phi} \sin \Psi \cos \Phi + \dot{\Psi} \cos \Psi \sin \Phi) \\ - \dot{Z} \sin \Psi \cos \Phi - Z (\dot{\Psi} \cos \Psi \cos \Phi - \dot{\Phi} \sin \Phi \sin \Psi) \\ - \ell_1 (\dot{\Psi} \cos \Psi \cos \Phi - \dot{\Phi} \sin \Phi \sin \Psi) \\ - \ell_2/2 \dot{\Phi} \sin \Phi + Z \dot{\Phi} \cos \Phi + \ell_1 \dot{\Phi} \cos \Phi + \dot{Z} \sin \Phi \\ - f/2 \dot{\Psi} \cos \Psi - \ell_2/2 (\dot{\Phi} \cos \Psi \cos \Phi - \dot{\Psi} \sin \Psi \sin \Phi) \\ + \dot{Z} \cos \Psi \cos \Phi + Z (-\dot{\Psi} \sin \Psi \cos \Phi - \dot{\Phi} \cos \Psi \sin \Phi) \\ + \ell_1 (-\dot{\Psi} \sin \Psi \cos \Phi - \dot{\Phi} \cos \Psi \sin \Phi) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Fazendo-se a primeira linearização:

$$^S \begin{Bmatrix} \overline{AA}_3 \xi \\ \overline{AA}_3 \eta \\ \overline{AA}_3 \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Z\Psi - \ell_1 \Psi \\ Z\Phi + \ell_1 \Phi \\ -f/2 \Psi - \ell_2\Phi + Z \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$^S \begin{Bmatrix} \dot{\overline{AA}}_3 \xi \\ \dot{\overline{AA}}_3 \eta \\ \dot{\overline{AA}}_3 \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{Z} \Psi - Z \dot{\Psi} - \ell_1 \dot{\Psi} \\ \dot{Z} \Phi + Z \dot{\Phi} + \ell_1 \dot{\Phi} \\ -f/2 \dot{\Psi} - \ell_2/2 \dot{\Phi} + \dot{Z} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Por este mesmo raciocínio, tem-se para os demais vetores deslocamento:

$$S \begin{Bmatrix} \overline{BB}_3 \xi \\ \overline{BB}_3 \eta \\ \overline{BB}_3 \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Z \Psi - \ell_1 \Psi \\ Z \Phi + \ell_1 \Phi \\ -f/2 \Psi + \ell_2/2 \Phi + Z \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$S \begin{Bmatrix} \dot{\overline{BB}}_3 \xi \\ \dot{\overline{BB}}_3 \eta \\ \dot{\overline{BB}}_3 \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{Z} \Psi - Z \dot{\Psi} - \ell_1 \dot{\Psi} \\ \dot{Z} \Phi + Z \dot{\Phi} + \ell_1 \dot{\Phi} \\ -f/2 \dot{\Psi} + \ell_2/2 \dot{\Phi} + \dot{Z} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$S \begin{Bmatrix} \overline{CC}_3 \xi \\ \overline{CC}_3 \eta \\ \overline{CC}_3 \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Z \Psi - \ell_1 \Psi \\ Z \Phi + \ell_1 \Phi \\ f/2 \Psi + \ell_2/2 \Phi + Z \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$S \begin{Bmatrix} \dot{\overline{CC}}_3 \xi \\ \dot{\overline{CC}}_3 \eta \\ \dot{\overline{CC}}_3 \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{Z} \Psi - Z \dot{\Psi} - \ell_1 \dot{\Psi} \\ \dot{Z} \Phi + Z \dot{\Phi} + \ell_1 \dot{\Phi} \\ f/2 \dot{\Psi} + \ell_2/2 \dot{\Phi} + \dot{Z} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$S \begin{Bmatrix} \overline{DD}_3 \xi \\ \overline{DD}_3 \eta \\ \overline{DD}_3 \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Z \Psi - \ell_1 \Psi \\ Z \Phi + \ell_1 \Phi \\ f/2 \Psi - \ell_2/2 \Phi + Z \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$S \begin{Bmatrix} \dot{\overline{DD}}_3 \xi \\ \dot{\overline{DD}}_3 \eta \\ \dot{\overline{DD}}_3 \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{Z} \Psi - Z \dot{\Psi} - \ell_1 \dot{\Psi} \\ Z \dot{\Phi} + \ell_1 \dot{\Phi} \\ f/2 \dot{\Psi} - \ell_2/2 \dot{\Phi} + \dot{Z} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Aplicando-se as Leis de Newton, tem-se:

a) Para a translação do centro de massa G,

$$\Sigma \underline{F} = M \underline{a}_G, \quad (22)$$

onde $\Sigma \underline{F}$ são as forças externas ao sistema (no caso somente devido às molas e aos amortecedores) e $\underline{a}_G$ é a aceleração do centro de massa.

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^I [T]^S \left\{ \begin{array}{l} \dot{\overline{AA}}_3 \xi + \dot{\overline{BB}}_3 \xi + \dot{\overline{CC}}_3 \xi + \dot{\overline{DD}}_3 \xi \\ \dot{\overline{AA}}_3 \eta + \dot{\overline{BB}}_3 \eta + \dot{\overline{CC}}_3 \eta + \dot{\overline{DD}}_3 \eta \\ \dot{\overline{AA}}_3 \zeta + \dot{\overline{BB}}_3 \zeta + \dot{\overline{CC}}_3 \zeta + \dot{\overline{DD}}_3 \zeta \end{array} \right\} - \\
& - \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}^I [T]^S \left\{ \begin{array}{l} \overline{AA}_3 \xi + \overline{BB}_3 \xi + \overline{CC}_3 \xi + \overline{DD}_3 \xi \\ \overline{AA}_3 \eta + \overline{BB}_3 \eta + \overline{CC}_3 \eta + \overline{DD}_3 \eta \\ \overline{AA}_3 \zeta + \overline{BB}_3 \zeta + \overline{CC}_3 \zeta + \overline{DD}_3 \zeta \end{array} \right\} = \\
& = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}^I \left\{ \begin{array}{l} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{array} \right\} \quad (23)
\end{aligned}$$

onde M é a massa do vagão, c_x, c_y são as constantes de amortecimento nas direções x e y e k_x, k_y são as constantes de mola nas direções x e y . Os valores de c e k representam as constantes na direção z como já descrito pela Fig. 4.

Observa-se que, como se partiu da premissa de se ter deslocamentos pequenos, supõe-se que cada deslocamento se dê na mesma vertical, ou seja, o vetor deslocamento de cada conjunto só possui uma componente na direção z e, portanto, só irá existir força de retorno e de amortecimento nesta direção. Sendo assim, toma-se por hipótese que, da maneira como foi considerado, tanto a rigidez como o amortecimento nas direções x e y são nulos, e que a força transversal e longitudinal são absorvidas no pino do "booster". Isto faz com que a equação (23) seja:

$$M \ddot{Z} + 4 c \dot{Z} + 4 k Z = 0 \quad (24)$$

b) Para a rotação do vagão, no sistema inercial I ,

$$\Sigma \underline{M}_G = \dot{\underline{H}}_G, \quad (25)$$

onde $\underline{M}_G$ é o momento das forças externas em relação ao centro de massa G e $\dot{\underline{H}}_G$ é a quantidade de movimento angular de G derivada no sistema inercial.

Para o sistema móvel S, a expressão (25) se torna em:

$$\Sigma \underline{M}_G^S = \underline{H}_G^{*S} + \underline{\omega} \times \underline{H}_G^S, \quad (26)$$

onde $\underline{H}_G^{*S}$ é a derivada do momento angular no sistema S, $\underline{\omega}^S$ a velocidade angular do corpo no sistema S. Mais ainda, $\underline{H}_G^S$ é dado por:

$$\underline{H}_G^S = \underline{S} [\underline{I}]^S \underline{\omega}^S \quad (27)$$

onde $\underline{S} [\underline{I}]$ é a matriz que representa o tensor de inércia dado por:

$$\underline{S} [\underline{I}] = \begin{bmatrix} I_\xi & 0 & 0 \\ 0 & I_\eta & 0 \\ 0 & 0 & I_\zeta \end{bmatrix} \quad (28)$$

Os produtos de inércia são nulos devidos a simetria do vagão e I_ξ , I_η e I_ζ são os momentos de inércia principais do vagão em relação aos eixos ξ , η , ζ .

Nota-se que $\underline{\omega}^S$ já foi deduzido na equação (9).

Sendo assim, pode-se escrever a equação (27) como:

$$\underline{H}_G^S = \begin{bmatrix} I_\xi \dot{\phi} \cos \psi \\ I_\eta \dot{\psi} \\ I_\zeta \dot{\phi} \sin \psi \end{bmatrix} \quad (29)$$

As duas parcelas do membro da direita da equação (26), após derivar-se (29) e resolver-se (27) com o auxílio de (28) e (9), serão:

$$S_{HG}^* = \left\{ \begin{array}{l} I_{\xi} \ddot{\phi} \cos \Psi - I_{\xi} \dot{\phi} \dot{\Psi} \sin \Psi \\ I_{\eta} \ddot{\Psi} \\ I_{\zeta} \ddot{\phi} \sin \Psi + I_{\zeta} \dot{\phi} \dot{\Psi} \cos \Psi \end{array} \right\} \quad (30)$$

$$S_{\omega} \times S_{HG} = \left\{ \begin{array}{l} -I_{\eta} \dot{\Psi} \dot{\phi} \sin \Psi + I_{\zeta} \dot{\Psi} \dot{\phi} \sin \Psi \\ I_{\xi} \dot{\phi}^2 \cos \Psi \sin \Psi - I_{\zeta} \dot{\phi}^2 \sin \Psi \cos \Psi \\ -I_{\xi} \dot{\Psi} \dot{\phi} \cos \Psi + I_{\eta} \dot{\Psi} \dot{\phi} \cos \Psi \end{array} \right\} \quad (31)$$

Lembrando-se que:

$$S_{MG} = \sum_{i=1}^4 S_{r_i} \times S_{F \text{ mola } i} + \sum_{i=1}^4 S_{r_i} \times S_{F \text{ amortecedor } i} \quad (32)$$

onde S_{r_i} é o vetor posição do i -ésimo par mola-amortecedor em relação a G, tem-se, por exemplo, para a mola da posição A, de acordo com a expressão (14):

$$S_{F \text{ mola } A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k(-f/2 \Psi - l_2/2 \phi + Z) \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$S_{r_A} \times S_{F \text{ mola } A} = \begin{vmatrix} e_{\xi} & e_{\eta} & e_{\zeta} \\ f/2 & -l_2/2 & -l_1 \\ 0 & 0 & -k(-f/2 \Psi - l_2/2 \phi + Z) \end{vmatrix} \quad (34)$$

Com o auxílio das expressões de (15) a (21), procedendo-se analogamente, substitui-se o resultado na equação (32), de modo a resolver-se a equação (26). Desta maneira tem-se:

$$I_{\xi} \ddot{\phi} + 4 c (\ell_2/2)^2 \dot{\phi} + 4 k (\ell_2/2)^2 \phi = 0 \quad (35)$$

$$I_{\eta} \ddot{\psi} + 4 c (f/2)^2 \dot{\psi} + 4 k (f/2)^2 \psi = 0 \quad (36)$$

As equações (35) e (36) resultam na forma linear, devido ao fato de se ter tomado os deslocamentos já linearizados de acordo com as expressões de (14) a (21).

Em outras palavras, o modelo matemático, uma vez linearizado, constitui-se de três equações desacopladas do segundo grau, representadas por (24), (35) e (36), o que permite estudar cada um dos movimentos, independentemente. Conclusões como frequência natural e movimento podem ser obtidas de imediato.

Pelo encaminhamento do problema, pode-se, também, notar que irá existir - acoplamento dos movimentos dados pelas equações acima citadas quando houver uma distribuição não uniforme de massa, já que a expressão do tensor de inércia dada em (28) irá se alterar, pois aparecerão produtos de inércia não nulos, de primeira ordem. Mais ainda, a influência dos termos não lineares irá acarretar um acoplamento das três equações deste modelo matemático. Estas seriam duas propostas de investigação quando se quiser realizar um estudo mais detalhado.

Pelo que se acabou de descrever, apesar do interesse científico estar mais voltado ao comportamento dinâmico do vagão, como, aliás, já foi observado no item II.2.1, a interação vagão-truck é um fenômeno importante a ser descrito com cuidado. Assim serão obtidas as características próprias do sistema total e, também, examinado o que ocorre devido à excitação pelos trilhos.

Deste modo, deduzir-se-ão as novas equações do movimento, supondo-se uma excitação genérica através das rodas. Seja assim, o deslocamento da i-ésima roda dado por ϵ_i ($i = 1, \dots, 8$) onde:

$$\epsilon_i = \bar{\epsilon}_k \sin(\alpha t + \beta_i) \quad , \quad k = 1, 2 \quad (37)$$

é função de um deslocamento $\bar{\epsilon}_k$ genérico, da frequência com que ocorre α , e da defasagem em relação a outras rodas β_i . Salienta-se que tais deslocamentos serão funções da velocidade de translação do trem, pois pode-se associar o trilho como sendo constituído de uma onda senoidal. Nota-se, ainda, que a defasagem da excitação varia, também, com a relação entre a distância dos trucks e o comprimento da onda.

A Fig. 8 representa os diagramas de corpo livre para cada truck do veículo, incluindo as ações e reações existentes, sendo que não se representou o diagrama do vagão por ser desnecessário. Denota-se um dos trucks por 1 e o outro por 2, iniciando-se a contagem das defasagens β na primeira roda do truck 1.

Aplicando-se as Leis de Newton, tem-se:

a) Truck 1

a.1 - Para a translação do centro de massa G_T ,

$$E_I + F_1 + F_2 + \sum_{i=1}^4 F_{R1}^i = m_{T1} \ddot{Z}_{T1} \quad (38)$$

onde, de acordo com a Fig. 8(a), F_1 e F_2 são reações de apoio entre o vagão e o truck, F_{R1}^i a reação da i -ésima roda do truck 1, devido a excitação ϵ_i e E_I é a força gerada pelos deslocamentos ϵ_i ($i = 1, \dots, 4$) e vale:

$$E_I = \bar{c} (\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 + \dot{\epsilon}_4) + \bar{k} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4) \quad (39)$$

onde $\bar{c}$ e $\bar{k}$ são constantes de amortecedor e mola da suspensão primária, conforme já indicado na Fig. 4.

A massa do truck 1 está representado por m_{T1} e sua aceleração do centro de massa G_T por $\ddot{Z}_{T1}$.

ϵ_i = excitação pela roda i
 $i = 1, \dots, 4$

$F_{R_1}^i$ = força de reação do truck 1,
 devido a excitação na roda i

F_k = reação de apoio com o vagão
 $k = 1, 2$

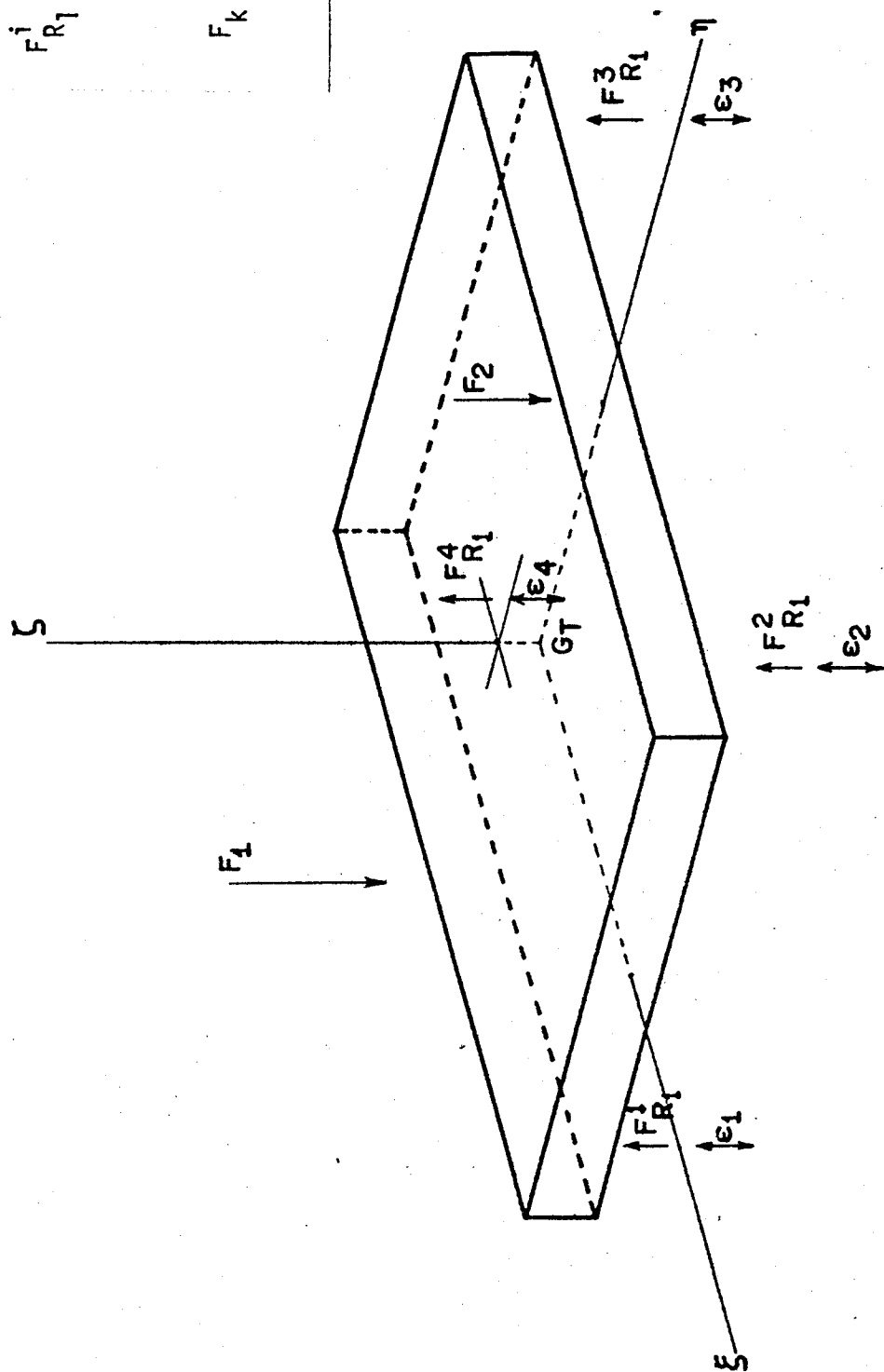


FIG. 8-(a) - Esquema de forças no truck 1.

ϵ_i = excitação pela roda i

$i = 5, \dots, 8$

F_{R2}^i = força de reação do truck 2 ,
devido a excitação na roda i

F_k = reação de apoio com o vagão

$k = 3, 4$

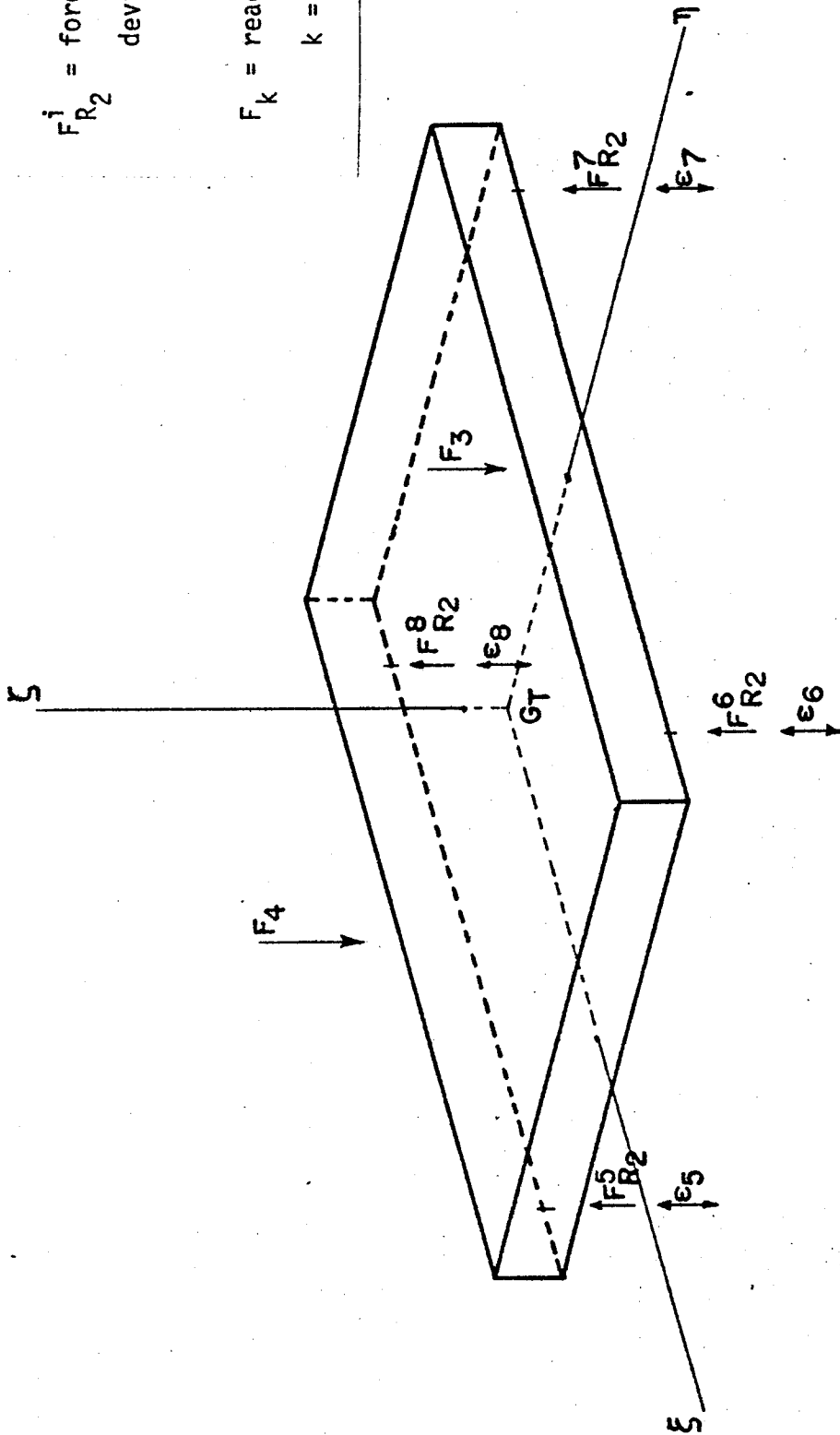


FIG. 8-(b) - Esquema de forças no truck 2.

De acordo com a Fig. 8(a), com os graus de liberdade assumidos e com os parâmetros estabelecidos através da Fig. 4, tem-se que as forças F_1 e F_2 - que agem sobre a suspensão secundária são funções:

- i) dos deslocamentos Z e Z_{T1} e suas derivadas, onde Z_{T1} é o deslocamento vertical do truck 1.
- ii) dos deslocamentos ϕ e ϕ_{T1} e suas derivadas, onde ϕ_{T1} é a inclinação do truck 1.
- iii) dos deslocamentos ψ e ψ_{T1} e suas derivadas, onde ψ_{T1} é o balanço do truck 1.

Sobre a suspensão primária agem F_{R1}^i , que são funções dos mesmos parâmetros e deslocamentos acima citados.

Sendo assim, aplicando-se (38) tem-se:

$$m_{T1} \ddot{Z}_{T1} + 4 \bar{c} \dot{Z}_{T1} + 4 \bar{k} Z_{T1} + 2 c (\dot{Z}_{T1} - \dot{Z} + f/2 \dot{\psi}) + 2 k (Z_{T1} - Z + f/2 \psi) = E_I \quad (40)$$

a.2 - Para a rotação do truck 1,

$$\sum \underline{M}_{G_T} = \dot{\underline{H}}_{G_T}, \quad (41)$$

onde $\underline{M}_{G_T}$ é o momento das forças externas em relação ao centro de massa G_T e $\underline{H}_{G_T}$ é a quantidade de movimento angular de G_T .

Pela análise das Figs. 4 e 8(a), nota-se que as forças F_1 , F_2 e F_{R1}^i produzirão momento em relação aos eixos ξ e η . Deste modo, procedendo analogamente ao já exposto anteriormente para o vagão, tem-se:

$$1) \Sigma M_{G_T \xi} = \dot{H}_{G_T \xi}, \quad (42)$$

onde $H_{G_T \xi}$ representa a quantidade de movimento angular em relação ao centro de massa G_T projetado no eixo ξ .

A equação (42) toma o seguinte aspecto:

$$I_{\xi T1} \ddot{\phi}_{T1} + L^2 (\bar{c} + c/2) \dot{\phi}_{T1} + L^2 (\bar{k} + k/2) \phi_{T1} - c/2 \lambda_2 L \dot{\phi} - k/2 \lambda_2 L \phi = (M_{E_I})_{\xi} \quad (43)$$

onde $I_{\xi T1}$ é o momento de inércia do truck 1 em relação ao eixo ξ e $(M_{E_I})_{\xi}$ é o momento das forças E_I em relação ao mesmo eixo e dado por:

$$(M_{E_I})_{\xi} = L/2 \bar{c} (-\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3 + \dot{\epsilon}_4) + L/2 \bar{k} (-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4) \quad (44)$$

$$2) \Sigma M_{G_T \eta} = \dot{H}_{G_T \eta}, \quad (45)$$

onde $H_{G_T \eta}$ representa a quantidade de movimento angular em relação ao centro de massa G_T projetado no eixo η .

Desta forma, a equação (45) será:

$$I_{\eta T1} \ddot{\psi}_{T1} + 2 p \bar{c} \dot{\psi}_{T1} + 2 p \bar{k} \psi_{T1} = (M_{E_I})_{\eta} \quad (46)$$

onde $I_{\eta T1}$ é o momento de inércia do truck 1 em relação ao eixo η e $(M_{E_I})_{\eta}$ é o momento das forças E_I em relação ao mesmo eixo e dado por:

$$(M_{E_I})_{\eta} = p/2 \bar{c} (-\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 + \dot{\epsilon}_4) + p/2 \bar{k} (-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4) \quad (47)$$

b) Truck 2

Fazendo-se o mesmo processo descrito em a), de acordo com as Figs. 8(b) e 4, chega-se às seguintes expressões:

b.1 - Para a translação do centro de massa G_T

$$m_{T2} \ddot{Z}_{T2} + 4 \bar{c} \dot{Z}_{T2} + 4 \bar{k} Z_{T2} + 2 c (\dot{Z}_{T2} - \dot{Z} - f/2 \dot{\Psi}) + 2 k (Z_{T2} - Z - f/2 \Psi) = E_{II} \quad (48)$$

onde m_{T2} é a massa do truck 2, $\ddot{Z}_{T2}$ a aceleração de seu centro de massa G_T e E_{II} é dado pela seguinte expressão:

$$E_{II} = \bar{c} (\dot{\epsilon}_5 + \dot{\epsilon}_6 + \dot{\epsilon}_7 + \dot{\epsilon}_8) + \bar{k} (\epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7 + \epsilon_8) \quad (49)$$

b.2 - Para a rotação do truck 2,

$$\begin{aligned} 1) I_{\xi T2} \ddot{\phi}_{T2} + L^2 (\bar{c} + c/2) \dot{\phi}_{T2} + L^2 (\bar{k} + k/2) \phi_{T2} - c/2 \lambda_2 L \dot{\phi} - k/2 \lambda_2 L \phi = \\ = (M_{E_{II}})_{\xi} \end{aligned} \quad (50)$$

onde $I_{\xi T2}$ é o momento de inércia do truck 2 em relação ao eixo ξ e $(M_{E_{II}})_{\xi}$ é o momento das forças E_{II} em relação ao mesmo eixo e dado por:

$$(M_{E_{II}})_{\xi} = L/2 \bar{c} (-\dot{\epsilon}_5 + \dot{\epsilon}_6 - \dot{\epsilon}_7 + \dot{\epsilon}_8) + L/2 \bar{k} (-\epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8) \quad (51)$$

$$2) I_{nT2} \ddot{\psi}_{T2} + 2 p \bar{c} \dot{\psi}_{T2} + 2 p \bar{k} \psi_{T2} = (M_{E_{II}})_n \quad (52)$$

onde I_{nT2} é o momento de inércia do truck 2 em relação ao eixo n e $(M_{E_{II}})_n$ é o momento das forças E_{II} em relação ao mesmo eixo e dado por:

$$(M_{E_{II}})_n = p/2 \bar{c} (-\dot{\epsilon}_5 - \dot{\epsilon}_6 + \dot{\epsilon}_7 + \dot{\epsilon}_8) + p/2 \bar{k} (-\epsilon_5 - \epsilon_6 + \epsilon_7 + \epsilon_8) \quad (53)$$

c) Vagão

Para o vagão, no item II.2.2 tinha-se desenvolvido as equações de movimento, não considerando a interação com os trucks que trouxe como resultado as equações (24), (35), (36). Levando-se em conta estas três equações, acrescentando a elas os deslocamentos dos trucks 1 e 2, tem-se como resultado:

c.1 - Para a translação do centro de massa G do vagão,

$$M \ddot{Z} + 2 c (2 \dot{Z} - \dot{Z}_{T1} - \dot{Z}_{T2}) + 2 k (2 Z - Z_{T1} - Z_{T2}) = 0 \quad (54)$$

c.2 - Para a rotação do vagão,

$$1) I_{\xi} \ddot{\phi} + c \ell_2 (\ell_2 \dot{\phi} - L/2 \dot{\phi}_{T1} - L/2 \dot{\phi}_{T2}) + k \ell_2 (\ell_2 \phi - L/2 \phi_{T1} - L/2 \phi_{T2}) = 0 \quad (55)$$

$$2) I_n \ddot{\psi} + c f (f \dot{\psi} + \dot{Z}_{T1} - \dot{Z}_{T2}) + k f (f \psi + Z_{T1} - Z_{T2}) = 0 \quad (56)$$

As equações (40), (43), (46), (48), (50), (52), (54), (55) e (56) representam, matematicamente, um veículo sobre trucks, deslocando-se em trajetória - retilínea com nove graus de liberdade. Em outras palavras, cada elemento básico possui uma translação vertical e duas rotações: uma em relação ao eixo longitudinal, outra em relação ao seu eixo transversal.

II.3 - Desenvolvimento do Modelo Matemático em uma Trajetória Curvilínea

Tomando-se o veículo sobre trucks em uma curva de raio R , pretende-se estudá-lo como possuindo uma velocidade angular $\dot{\theta}$ constante em relação ao seu eixo vertical no sistema inercial I e, deste modo, obter-se as conclusões a respeito dos possíveis acoplamentos entre os diversos movimentos impostos.

Observe-se que se propõe, essencialmente, uma análise acadêmica de primeira aproximação, tentando verificar até que ponto o modelo considerado é adequado. Não se objetiva maiores detalhes, nem uma análise completa do problema da curva.

Deve-se lembrar que estando em uma curva, o veículo estará sujeito a ação da força centrífuga, que se supõe transmitir, integralmente, pelo pino do "booster" aos trilhos, mantendo-se, desta forma, a hipótese que desconsidera - os efeitos laterais e de guinagem.

Dentro , ainda, da hipótese de uma primeira análise, também, não considerar-se-á a sobrelevação da curva ou que a mesma possa ter seus efeitos linearizados. Assim sendo, a força centrífuga altera no máximo a posição de equilíbrio do sistema e as forças de deslocamento são obtidas da mesma maneira como - em (40), (48) e (54).

Deste modo, o vetor velocidade angular, expresso através de (7), toma a seguinte forma:

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\phi}} + \dot{\bar{\psi}} + \dot{\bar{\theta}} \quad (57)$$

onde $\dot{\bar{\theta}}$ representa a taxa de variação do ângulo percorrido pelo veículo em relação ao tempo.

Como o vetor velocidade angular foi alterado e, sabendo-se que ele influi na quantidade de movimento angular, conclui-se que as seis restantes expressões que representam o movimento serão alteradas devido a presença de $\dot{\bar{\theta}}$.

Através do mesmo encaminhamento já detalhado, chega-se às seguintes expressões lineares:

a) Para o vagão:

a.1 - Em relação ao eixo ξ

$$I_{\xi} \ddot{\bar{\phi}} + c \ell_2 (\ell_2 \dot{\bar{\phi}} - L/2 \dot{\bar{\phi}}_{T1} - L/2 \dot{\bar{\phi}}_{T2}) + k \ell_2 (\ell_2 \bar{\phi} - L/2 \bar{\phi}_{T1} - L/2 \bar{\phi}_{T2}) + \dot{\bar{\psi}} \dot{\bar{\theta}} (I_{\xi} - I_{\eta}) = 0 \quad (58)$$

onde I_{ξ} representa o momento de inércia principal do vagão em relação ao eixo ξ .

a.2 - Em relação ao eixo η

$$I_{\eta} \ddot{\bar{\psi}} + c f (f \dot{\bar{\psi}} + \dot{\bar{z}}_{T1} - \dot{\bar{z}}_{T2}) + k f (f \bar{\psi} + \bar{z}_{T1} - \bar{z}_{T2}) + \dot{\bar{\phi}} \dot{\bar{\theta}} (I_{\xi} - I_{\zeta}) = 0 \quad (59)$$

b) Para o truck 1 :

b.1 - Em relação ao eixo ξ

$$I_{\xi T1} \ddot{\phi}_{T1} + L^2 (\bar{c} + c/2) \dot{\phi}_{T1} + L^2 (\bar{k} + k/2) \phi_{T1} - c/2 \lambda_2 L \dot{\phi} - k/2 \lambda_2 L \phi + \\ + \dot{\psi}_{T1} \dot{\theta} (I_{\xi T1} - I_{nT1}) = (M_{E_I})_{\xi} \quad (60)$$

onde $I_{\xi T1}$ representa o momento de inércia principal do truck 1 em relação ao eixo ξ .

b.2 - Em relação ao eixo η

$$I_{\eta T2} \ddot{\psi}_{T2} + 2 p \bar{c} \dot{\psi}_{T2} + 2 p \bar{k} \psi_{T2} + \dot{\phi}_{T1} \dot{\theta} (I_{\xi T1} - I_{\xi T1}) = (M_{E_I})_{\eta} \quad (61)$$

c) Para o truck 2 :

c.1 - Em relação ao eixo ξ

$$I_{\xi T2} \ddot{\phi}_{T2} + L^2 (\bar{c} + c/2) \dot{\phi}_{T2} + L^2 (\bar{k} + k/2) \phi_{T2} - c/2 \lambda_2 L \dot{\phi} - k/2 \lambda_2 L \phi + \\ + \dot{\psi}_{T2} \dot{\theta} (I_{\xi T2} - I_{nT2}) = (M_{E_{II}})_{\xi} \quad (62)$$

onde $I_{\xi T2}$ representa o momento de inércia principal do truck 2 em relação ao eixo ξ .

c.2 - Em relação ao eixo η

$$I_{\eta T2} \ddot{\Psi}_{T2} + 2 p \bar{c} \dot{\Psi}_{T2} + 2 p \bar{k} \Psi_{T2} + \dot{\Phi}_{T2} \dot{\Theta} (I_{\xi T2} - I_{\zeta T2}) = (M_{E_{II}})_{\eta} \quad (63)$$

As equações de (58) a (63) substituem as equações (43), (46), (50), (52), (55) e (56) respectivamente, quando o veículo estiver em uma curva em vez de uma trajetória retilínea.

Com a finalidade de se reduzir o número total de parâmetros e adimensionalizar-se alguns, define-se:

$$\delta = \frac{c}{M}, \quad \gamma = \frac{k}{M}, \quad \rho_1^2 = \frac{I_{\xi}}{M}, \quad \rho_2^2 = \frac{I_{\eta}}{M}, \quad \rho_3^2 = \frac{I_{\zeta}}{M}$$

$$\bar{\delta} = \frac{\bar{c}}{m_T}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\bar{k}}{m_T}, \quad \rho_{1T}^2 = \frac{I_{\xi T}}{m_T}, \quad \rho_{2T}^2 = \frac{I_{\eta T}}{m_T}, \quad \rho_{3T}^2 = \frac{I_{\zeta T}}{m_T}$$

$$\mu = \frac{M}{m_T}$$

Devido ao fato dos dois trucks terem características idênticas, adotou-se a mesma simbologia para parâmetros pertencentes a ambos.

Usando-se os parâmetros acima definidos, as equações (40), (48), (54) e (58) a (63), representantes do movimento do veículo na curva, podem ser escritas na forma matricial do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \ddot{Z} \\
 \ddot{\phi} \\
 \ddot{\psi} \\
 \ddot{Z}_{T1} \\
 \ddot{\phi}_{T1} \\
 \ddot{\psi}_{T1} \\
 \ddot{Z}_{T2} \\
 \ddot{\phi}_{T2} \\
 \ddot{\psi}_{T2}
 \end{Bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 a_1 & 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 \\
 0 & c_1 & r & 0 & j_1 & 0 & 0 & j_1 & 0 \\
 0 & q & e_1 & h_1 & 0 & 0 & -h_1 & 0 & 0 \\
 b_1 & 0 & f_1 & i_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & d_1 & 0 & 0 & o_1 & u & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & s & m_1 & 0 & 0 & 0 \\
 b_1 & 0 & -f_1 & 0 & 0 & 0 & i_1 & 0 & 0 \\
 0 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & o_1 & u \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & m_1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \dot{Z} \\
 \dot{\phi} \\
 \dot{\psi} \\
 \dot{Z}_{T1} \\
 \dot{\phi}_{T1} \\
 \dot{\psi}_{T1} \\
 \dot{Z}_{T2} \\
 \dot{\phi}_{T2} \\
 \dot{\psi}_{T2}
 \end{Bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 a_2 & 0 & 0 & g_2 & 0 & 0 & g_2 & 0 & 0 \\
 0 & c_2 & 0 & 0 & j_2 & 0 & 0 & j_2 & 0 \\
 0 & 0 & e_2 & h_2 & 0 & 0 & -h_2 & 0 & 0 \\
 b_2 & 0 & f_2 & i_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & d_2 & 0 & 0 & o_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\
 b_2 & 0 & -f_2 & 0 & 0 & 0 & i_2 & 0 & 0 \\
 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & o_2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 Z \\
 \phi \\
 \psi \\
 Z_{T1} \\
 \phi_{T1} \\
 \psi_{T1} \\
 Z_{T2} \\
 \phi_{T2} \\
 \psi_{T2}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \bar{E}_I \\
 (\bar{M}_{E_I})_\xi \\
 (\bar{M}_{E_I})_\eta \\
 \bar{E}_{II} \\
 (\bar{M}_{E_{II}})_\xi \\
 (\bar{M}_{E_{II}})_\eta
 \end{Bmatrix}
 \quad (64)$$

onde:

$$a_1 = 4 \delta ; \quad b_1 = -2 \delta \mu ; \quad c_1 = \frac{\delta}{\rho_1^2} \ell_2^2 ; \quad d_1 = -\frac{\delta \mu}{2 \rho_{1T}^2} \ell_2 L$$

$$e_1 = \frac{\delta}{\rho_2^2} f^2 ; \quad f_1 = \delta \mu f ; \quad g_1 = -2 \delta ; \quad h_1 = \frac{\delta}{\rho_2^2} f$$

$$i_1 = 4 \bar{\delta} + 2 \delta \mu ; \quad j_1 = -\frac{\delta}{2 \rho_1} \ell_2 L ; \quad m_1 = 2 p \frac{\bar{\delta}}{\rho_{2T}^2} ; \quad o_1 = \frac{L^2}{\rho_{1T}^2} \left(\bar{\delta} + \frac{\delta \mu}{2} \right)$$

$$a_2 = 4 \gamma ; \quad b_2 = -2 \gamma \mu ; \quad c_2 = \frac{\gamma}{\rho_1^2} \ell_2^2 ; \quad d_2 = -\frac{\gamma \mu}{2 \rho_{1T}^2} \ell_2 L$$

$$e_2 = \frac{\gamma}{\rho_2^2} f^2 ; \quad f_2 = \gamma \mu f ; \quad g_2 = -2 \gamma ; \quad h_2 = \frac{\gamma}{\rho_2^2} f$$

$$i_2 = 4 \bar{\gamma} + 2 \gamma \mu ; \quad j_2 = -\frac{\gamma}{2 \rho_1} \ell_2 L ; \quad m_2 = 2 p \frac{\bar{\gamma}}{\rho_{2T}^2} ; \quad o_2 = \frac{L^2}{\rho_{1T}^2} \left(\bar{\gamma} + \frac{\gamma \mu}{2} \right)$$

$$q = \dot{\theta} \left(\frac{\rho_1^2 - \rho_3^2}{\rho_2^2} \right) ; \quad r = \dot{\theta} \left(\frac{\rho_3^2 - \rho_2^2}{\rho_1^2} \right)$$

$$s = \dot{\theta} \left(\frac{\rho_{1T}^2 - \rho_{3T}^2}{\rho_{2T}^2} \right) ; \quad u = \dot{\theta} \left(\frac{\rho_{3T}^2 - \rho_{2T}^2}{\rho_{1T}^2} \right)$$

$$\bar{E}_I = \frac{E_I}{m_T} ; (\bar{M}_{E_I})_\xi = \frac{(M_{E_I})_\xi}{m_T \rho_{1T}^2} ; (\bar{M}_{E_I})_\eta = \frac{(M_{E_I})_\eta}{m_T \rho_{1T}^2}$$

$$\bar{E}_{II} = \frac{E_{II}}{m_T} ; (\bar{M}_{E_{II}})_\xi = \frac{(M_{E_{II}})_\xi}{m_T \rho_{1T}^2} ; (\bar{M}_{E_{II}})_\eta = \frac{(M_{E_{II}})_\eta}{m_T \rho_{2T}^2}$$

Já no início do item II.3 , afirmava-se que para o modelo adotado no presente desenvolvimento, o fato do veículo se deslocar sobre uma curva não afetava os movimentos representados pelas equações (40), (48), e (54). Tal fato não é facilmente identificável na expressão (64). Assim sendo, propõe-se uma transformação de coordenadas, dada por:

$$\begin{Bmatrix} Z \\ \phi \\ \psi \\ Z_{T1} \\ \phi_{T1} \\ \psi_{T1} \\ Z_{T2} \\ \phi_{T2} \\ \psi_{T2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ Z_{T1} + Z_{T2} \\ \psi \\ Z_{T1} - Z_{T2} \\ \phi \\ \phi_{T1} + \phi_{T2} \\ \psi_{T1} + \psi_{T2} \\ \psi_{T1} - \psi_{T2} \\ \phi_{T1} - \phi_{T2} \end{Bmatrix} \quad (65)$$

Tomando-se a matriz de transformação $[T]$, expressa por (65), calcula-se sua inversa $[T]^{-1}$. Prê-multiplicando-se as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da expressão (64) por $[T]^{-1}$ e pós-multiplicando-se por $[T]$, chega-se a :

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\ddot{Z} \\
\ddot{Z}_{T1} + \ddot{Z}_{T2} \\
\ddot{\Psi} \\
\ddot{Z}_{T1} - \ddot{Z}_{T2} \\
\ddot{\Phi} \\
\ddot{\Phi}_{T1} + \ddot{\Phi}_{T2} \\
\ddot{\Psi}_{T1} + \ddot{\Psi}_{T2} \\
\ddot{\Psi}_{T1} - \ddot{\Psi}_{T2} \\
\ddot{\Phi}_{T1} + \ddot{\Phi}_{T2}
\end{Bmatrix}
+$$

$$+
\begin{bmatrix}
a_1 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2b_1 & i_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & e_1 & h_1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2f_1 & i_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & r & 0 & c_1 & j_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2d_1 & o_1 & u & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & m_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & s \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & o_1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\dot{Z} \\
\dot{Z}_{T1} + \dot{Z}_{T2} \\
\dot{\Psi} \\
\dot{Z}_{T1} - \dot{Z}_{T2} \\
\dot{\Phi} \\
\dot{\Phi}_{T1} + \dot{\Phi}_{T2} \\
\dot{\Psi}_{T1} + \dot{\Psi}_{T2} \\
\dot{\Psi}_{T1} - \dot{\Psi}_{T2} \\
\dot{\Phi}_{T1} - \dot{\Phi}_{T2}
\end{Bmatrix}
+$$

$$+
\begin{bmatrix}
a_2 & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2b_2 & i_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & e_2 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2f_2 & i_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & j_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2d_2 & o_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & o_2
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
Z \\
Z_{T1} + Z_{T2} \\
\Psi \\
Z_{T1} - Z_{T2} \\
\Phi \\
\Phi_{T1} + \Phi_{T2} \\
\Psi_{T1} + \Psi_{T2} \\
\Psi_{T1} - \Psi_{T2} \\
\Phi_{T1} - \Phi_{T2}
\end{Bmatrix}
=$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \bar{E}_I + \bar{E}_{II} \\ 0 \\ \bar{E}_I - \bar{E}_{II} \\ 0 \\ (\bar{M}_{E_I})_{\xi} + (\bar{M}_{E_{II}})_{\xi} \\ (\bar{M}_{E_I})_{\eta} \\ (\bar{M}_{E_{II}})_{\eta} \\ (\bar{M}_{E_I})_{\xi} - (\bar{M}_{E_{II}})_{\xi} \end{array} \right\} \quad (66)$$

Chega-se, assim, a equação (66), resultado de uma análise bastante detalhada pois, inicialmente, tentava-se desacoplar as equações (40), (48) e (54) conforme citado anteriormente, e, na equação final, pode-se visualizar três sistemas de equações desacoplados entre si, a saber:

- a) Z e $Z_{T1} + Z_{T2}$
- b) ψ e $Z_{T1} - Z_{T2}$, ϕ e $\phi_{T1} + \phi_{T2}$, $\psi_{T1} + \psi_{T2}$
- c) $\psi_{T1} - \psi_{T2}$, $\phi_{T1} - \phi_{T2}$

Nota-se que o desacoplamento foi possível, devido ao fato de se ter agrupado dois a dois os deslocamentos dos trucks. Este fato faz com que se elimine na equação o deslocamento relativo entre os trucks e, provavelmente, esta é a razão pela qual se tem tais desacoplamentos.

A equação (66) possibilita ainda, determinar-se a influência da velocidade angular oriunda de uma curva sobre os diversos movimentos. Estando interessado apenas nas características próprias do sistema, pode-se estudá-lo sem excitação, pois tal procedimento corresponde a analisar-se a solução homogênea, parcela da solução geral.

O objetivo principal é determinar a influência da velocidade angular $\dot{\theta}$ sobre os auto-valores do sistema. Nota-se que para um estudo completo, dever-se-ia estudar a influência de $\dot{\theta}$ sobre os auto-vetores, também. Justifica-se a não inclusão deste estudo pois, como já foi citado anteriormente, está-se testando o modelo desenvolvido para as condições de trajetória curvilínea. Se tal modelo não for adequado, só este estudo inicial já é suficiente para se ter tal conclusão.

Assume-se que a solução do sistema dado em (66) seja do tipo:

$$x = X e^{\lambda t} \quad (67)$$

Substituindo-se (67) em (66), chega-se a três polinômios característicos, independentes entre si, correspondentes aos três sistemas desacoplados, já citados:

- a) um polinômio de quarta ordem, independente de $\dot{\theta}$, correspondente aos movimentos $Z, Z_{T1} + Z_{T2}$. Tal resultado era esperado pois, em toda a bibliografia sobre dinâmica de veículos, o movimento vertical é analisado de forma desacoplada, independente dos demais movimentos.
- b) um polinômio de quarta ordem, dependente de $\dot{\theta}$, correspondente aos movimentos $\psi_{T1} - \psi_{T2}$ e $\phi_{T1} - \phi_{T2}$.

c) um polinômio de décima ordem, dependente de $\dot{\theta}$, correspondente aos demais movimentos.

O polinômio mencionado em (a), será descrito posteriormente com maiores detalhes.

Para o polinômio descrito em (b), a solução foi obtida numericamente, através da subrotina POLRT da biblioteca de subrotinas SSP/IBM. Obviamente, para a solução, necessitou-se dos valores numéricos dos parâmetros definidos em (66).

Tais valores foram obtidos, retirando-se alguns dados físicos de exemplos da bibliografia já citada e correspondentes a um problema real. Sendo assim, atribui-se:

$$M = 2,30 \times 10^4 \text{ Kg}, \quad k = 1,472 \times 10^6 \text{ N/m}, \quad c = 4,56 \times 10^4 \text{ N.s/m}$$

$$I_{\xi} = 3,56 \times 10^4 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2, \quad I_{\eta} = 4,62 \times 10^5 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2, \quad I_{\zeta} = 4,36 \times 10^5 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$m_T = 4,00 \times 10^3 \text{ Kg}, \quad \bar{k} = 2,06 \times 10^6 \text{ N/m}, \quad \bar{c} = 6,38 \times 10^4 \text{ N.s/m}$$

$$I_{\xi T} = 9,36 \times 10^2 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2, \quad I_{\eta T} = 2,165 \times 10^3 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2, \quad I_{\zeta T} = 3,00 \times 10^3 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\ell_2 = 1,60 \text{ m}, \quad f = 15 \text{ m}, \quad \ell_1 = 1,80 \text{ m}, \quad L = 1,60 \text{ m}, \quad p = 2,5 \text{ m}$$

Com estes valores, cuja simbologia já foi explicada anteriormente, o polinômio de quarta ordem, dependente de $\dot{\theta}$, assume a seguinte forma:

$$\lambda^4 + 388,58 \lambda^3 + (48125,73 + 0,87 \dot{\theta}^2) \lambda^2 + 2297742,09 \lambda + 37099896,25 = 0 \quad (68)$$

Pela análise de (68), nota-se que a influência de $\dot{\theta}$ neste polinômio é desprezível, pois mesmo considerando-se altas velocidades de translação do veículo e em curvas fechadas, isto é, correspondente ao caso em que $\dot{\theta}$ assume seus maiores valores, seu valor é bem inferior a unidade. Conclui-se, facilmente, que se pode considerar este polinômio independente de $\dot{\theta}$.

Partindo-se desta premissa, encontrou-se os seguintes auto-valores, correspondentes à equação expressa em (68):

$$\lambda_1 = - 38,43 \ , \ \lambda_2 = - 47,68 \ , \ \lambda_3 = - 100,00 \ , \ \lambda_4 = - 202,46$$

que correspondem ao caso no qual o amortecimento é super-crítico, já que possuem valores reais.

Para o polinômio de décima ordem, descrito em (c), tem-se como dificuldade a identificação algébrica da influência de $\dot{\theta}$, pois tal problema já se havia manifestado no polinômio de quarta ordem que acabou de se descrever. Para os mesmos valores usados no polinômio anterior, tem-se que, mesmo numericamente, é bastante trabalhoso ter-se o valor final de cada coeficiente. Sendo assim, calculou-se tais coeficientes através do computador. Após isto, resolveu-se o polinômio pela mesma subrotina POLRT, obtendo-se os seguintes autovalores para $\dot{\theta} = 0$:

$$\lambda_{1,2} = - 7,55 \pm 20,76 \ i, \ \lambda_{3,4} = - 46,82 \pm 28,85 \ i$$

$$\lambda_{5,6} = - 1,20 \pm 8,73 \ i \ , \ \lambda_7 = - 38,39 \ , \ \lambda_8 = - 203,37$$

$$\lambda_9 = - 47,68 \ , \ \lambda_{10} = - 100,00$$

Variando-se $\dot{\theta}$ de 0 a 0.12 rd/s, o que corresponderia a uma velocidade de translação do veículo de 216 Km/h em uma curva de raio de 500 metros, os valores de λ acima citados sofreram uma variação que não chegou a 0,5%. Como tal valor de velocidade é extremamente alto para uma curva com este raio, conclui-se que o acoplamento entre os diversos movimentos não se verifica. Em outras palavras, o modelo físico adotado não é conveniente para a análise de movimento na curva, ou seja, a curva, representada por $\dot{\theta}$, pouco influi sobre os graus de liberdade do modelo físico adotado.

Mencionara-se, anteriormente, que se propunha testar o modelo em uma curva, para se concluir sobre sua adequação a este tipo de estudo. Como se determinou que não é adequado, retornar-se-á ao estudo do veículo, deslocando-se em uma trajetória retilínea.

II.4 - Desenvolvimento do Modelo Matemático em uma Trajetória Retilínea

Para se estudar o modelo em trajetória retilínea, basta tomar-se r , q , s , u nulos na equação (66), pois estes eram os termos que dependiam de $\dot{\theta}$.

Procedendo-se desta forma, notar-se-á, claramente, naquela expressão, a existência de seis sistemas de equações totalmente desacoplados entre si, a saber:

a) Z , $Z_{T1} + Z_{T2}$

b) Ψ , $Z_{T1} - Z_{T2}$

c) Φ , $\Phi_{T1} + \Phi_{T2}$

d) $\Psi_{T1} + \Psi_{T2}$

e) $\psi_{T1} - \psi_{T2}$

f) $\phi_{T1} - \phi_{T2}$

Dentre estes, somente os três primeiros são de dois graus de liberdade, o que implica que o estudo deverá se desenvolver, principalmente, em torno dos mesmos.

Como se está interessado em testar uma metodologia de análise, basta aplicá-la a um deles. Agindo desta maneira deve-se tomar o cuidado de que qualquer alteração sugerida em um deles deve ser testada nos outros, de modo a não melhorar um em particular, deteriorando o comportamento dos restantes.

Sabendo-se, conforme citado na introdução, que os autores concentram seus esforços em três estudos básicos, detalhar-se-á um deles: o movimento vertical, representado pelas equações do movimento de Z e $Z_{T1} + Z_{T2}$.

C A P Í T U L O I I I

ESTUDO DO MOVIMENTO VERTICAL DE UM VEÍCULO FERROVIÁRIO EM UMA TRAJETÓRIA RETILÍNEA

III.1 - Introdução

No presente capítulo será desenvolvido o estudo do comportamento dinâmico do movimento vertical do veículo sobre trucks, representado pelo sistema Z e $Z_{T1} + Z_{T2}$, nos moldes propostos pelo diagrama apresentado na Fig. 1. Tratando-se de um estudo detalhado, além de se solicitar o sistema a excitações dinâmicas típicas, uma análise de sua estabilidade será feita, tomando-se por base a variação dos auto valores, quando se altera o valor de alguns parâmetros de projeto, tais como: relação de massa vagão-trucks, fator de amortecimento e outros. De modo esquemático sub-divide-se o estudo em quatro etapas:

- a) análise de um exemplo de projeto
- b) análise através do grau de estabilidade
- c) análise através da solicitação por um impulso
- d) determinação do diagrama frequência-amplitude para uma solicitação senoidal.

Saliente-se que para cada etapa será descrito o método e obter-se-ão os resultados e, também, serão traçadas as principais conclusões.

Seguindo-se tal metodologia, faz-se necessário posteriormente coletar todas as informações fornecidas em cada etapa e concluir sobre o todo.

III.2 - Análise de um Exemplo de Projeto

Considere-se a equação geral de um sistema linear de n graus de liberdade:

$$[m_1] \{ \ddot{x} \} + [c_1] \{ \dot{x} \} + [k_1] \{ x \} = \{ f(t) \} \quad (69)$$

onde $[m_1]$, $[c_1]$ e $[k_1]$ são as matrizes simétricas de inércia, amortecimento viscoso e rigidez, respectivamente. Tais matrizes são de ordem $n \times n$ e os vetores correspondentemente $n \times 1$. O vetor $\{ f(t) \}$ representa a excitação do sistema, isto é, as forças externas atuantes.

Pré-multiplicando-se (69) por $[m_1]^{-1}$, tem-se:

$$[U] \{ \ddot{x} \} + [\bar{c}] \{ \dot{x} \} + [\bar{k}] \{ x \} = \{ \bar{f}(t) \} \quad (70)$$

Para analisar esta equação é conveniente se passar a um sistema de primeira ordem e usar os resultados da teoria de sistemas. Sendo assim, seja:

$$\{ \dot{y}(t) \} = [A] \{ y(t) \} + \{ \bar{F}(t) \} \quad (71)$$

onde:

$$\{ y(t) \} = \left\{ \begin{array}{c} \{ \dot{x}(t) \} \\ \{ x(t) \} \end{array} \right\} \quad (72)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -[\bar{c}] & -[\bar{k}] \\ [U] & [0] \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\{\bar{F}(t)\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{F}(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (74)$$

Para o presente desenvolvimento, a equação (70) pode ser reescrita como sendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Z} \\ \ddot{Z}_{T1} + \ddot{Z}_{T2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\delta & -2\delta \\ -4\delta\mu & 4\bar{\delta} + 2\delta\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{Z}_{T1} + \dot{Z}_{T2} \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 4 & -2\gamma \\ -4\gamma\mu & 4\bar{\gamma} + 2\gamma\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ Z_{T1} + Z_{T2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{E}_I + \bar{E}_{II} \end{Bmatrix} \quad (75)$$

onde os parâmetros δ , $\bar{\delta}$, γ , $\bar{\gamma}$, μ , $\bar{E}_I$ e $\bar{E}_{II}$ foram definidos por ocasião da dedução de (64).

Nota-se que as matrizes de amortecimento viscoso e de rigidez são, aparentemente, não simétricas. Isto sugere que no sistema existem forças não conservativas e forças giroscópicas que, na realidade, não é verdade. Prê-multiplicando-se (75) por uma matriz $[T_1]$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Z} \\ \ddot{Z}_{T1} + \ddot{Z}_{T2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 8\delta\mu & -4\delta\mu \\ -4\delta\mu & 4\bar{\delta} + 2\delta\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{Z}_{T1} + \dot{Z}_{T2} \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 8\gamma\mu & -4\gamma\mu \\ -4\gamma\mu & 4\bar{\gamma} + 2\gamma\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ Z_{T1} + Z_{T2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{E}_I + \bar{E}_{II} \end{Bmatrix} \quad (76)$$

onde:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

Por simplificação de simbologia referir-se-á a equação (76) como sendo:

$$[m] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{z} \\ \ddot{z}_{T1} + \ddot{z}_{T2} \end{array} \right\} + [c] \left\{ \begin{array}{c} \dot{z} \\ \dot{z}_{T1} + \dot{z}_{T2} \end{array} \right\} + [k] \left\{ \begin{array}{c} z \\ z_{T1} + z_{T2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \bar{f}(t) \end{array} \right\} \quad (76a)$$

Para se ter uma idéia geral do comportamento dinâmico de (76) resolver-se-á inicialmente um exemplo de projeto usando os mesmos valores numéricos de (68).

Desta maneira, numericamente, (76) é reescrita como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 11,50 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \ddot{z} \\ \ddot{z}_{T1} + \ddot{z}_{T2} \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} 91,08 & -45,54 \\ -45,54 & 86,57 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \dot{z} \\ \dot{z}_{T1} + \dot{z}_{T2} \end{array} \right\} + \\ & + \begin{bmatrix} 294,40 & -1472,00 \\ -1472,00 & 2796,00 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} z \\ z_{T1} + z_{T2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \bar{E}_I + \bar{E}_{II} \end{array} \right\} \quad (78) \end{aligned}$$

Com os valores acima e utilizando-se a mudança de variável proposta pelas expressões de (71) a (74), determinou-se a resposta do sistema através da subrotina HPCL da biblioteca de subrotinas SSP/IBM. Faz-se necessário esclarecer que tais respostas foram obtidas tomando-se três casos diferentes:

- a) condição inicial de deslocamento vertical unitário do vagão.
- b) condição inicial de deslocamento vertical unitário dos trucks 1 e 2.
- c) uma amplitude de aceleração unitária como sendo a excitação dos trilhos sobre os trucks 1 e 2.

A resposta do sistema nos casos (a), (b) e (c), encontram-se nas Figs. 9, 10 e 11, respectivamente. Obviamente, para as duas condições iniciais, o vetor aceleração das forças externas, dado pelo membro direito da equação (78), foi tomado como nulo e, para a terceira, assumiu o seguinte valor:

$$\{ \bar{F}(t) \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (79)$$

Tal análise, partindo-se de condições iniciais ou excitação unitária, é válida pois, em se tratando de um modelo linear, os resultados podem ser extrapolados linearmente para qualquer valor das condições iniciais ou excitação impostas.

Pela análise das Figs. 9, 10 e 11 pode-se concluir que:

- a finalidade das suspensões primária e secundária é absorver as amplitudes dos trucks 1 e 2, de modo que os efeitos de uma perturbação sobre a carga e passageiros sejam minimizados. Isto é facilmente constatado através da análise das Figs. 10 e 11.
- a amplitude de um deslocamento no vagão é transmitida pela suspensão secundária aos trucks 1 e 2, de modo que a mesma é rapidamente absorvida. Tal afirmativa baseia-se na Fig. 9.

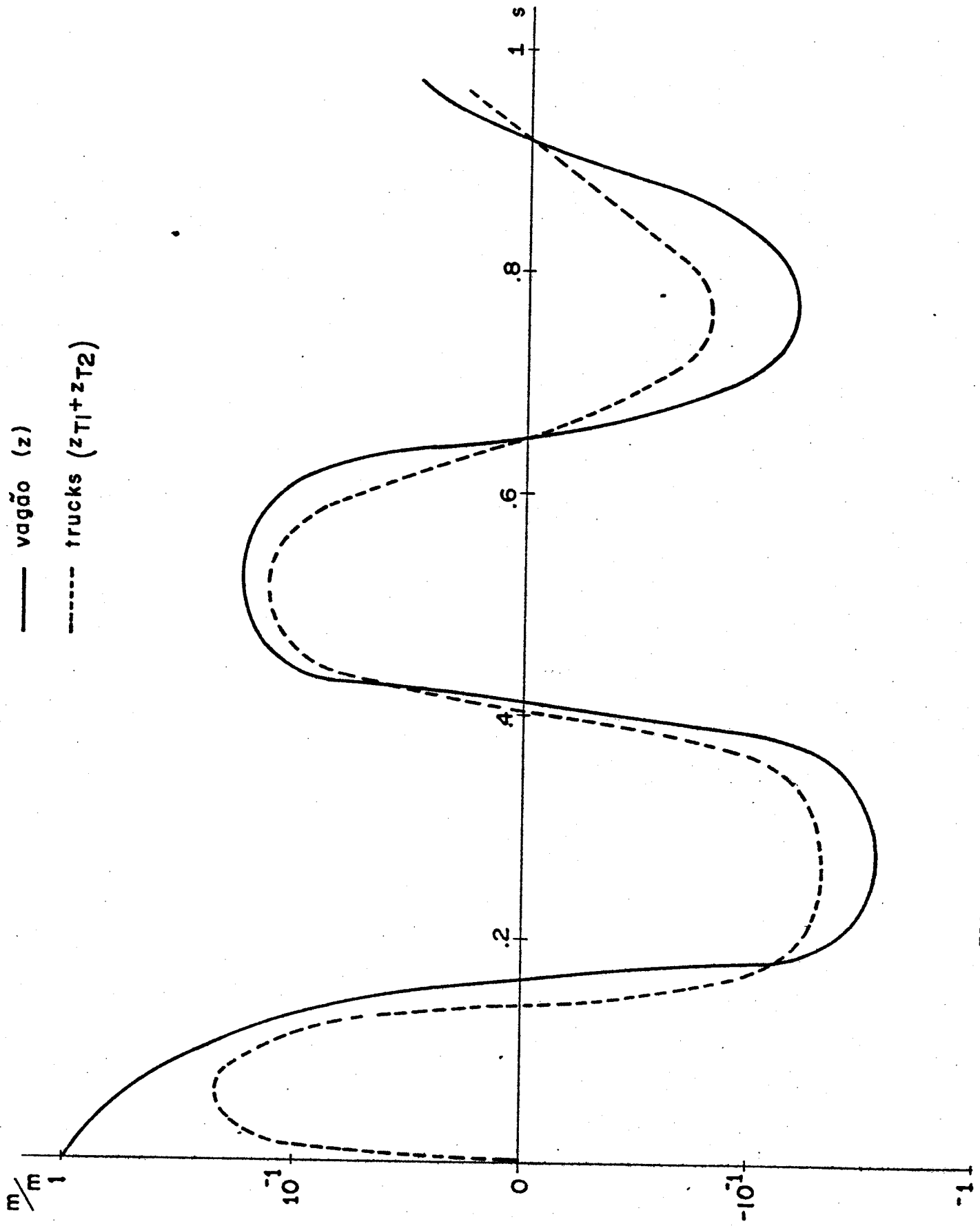


FIG. 9 - Resposta do sistema $Z, Z_{T1} + Z_{T2}$ para $Z(t=0) = 1 \text{ m}$

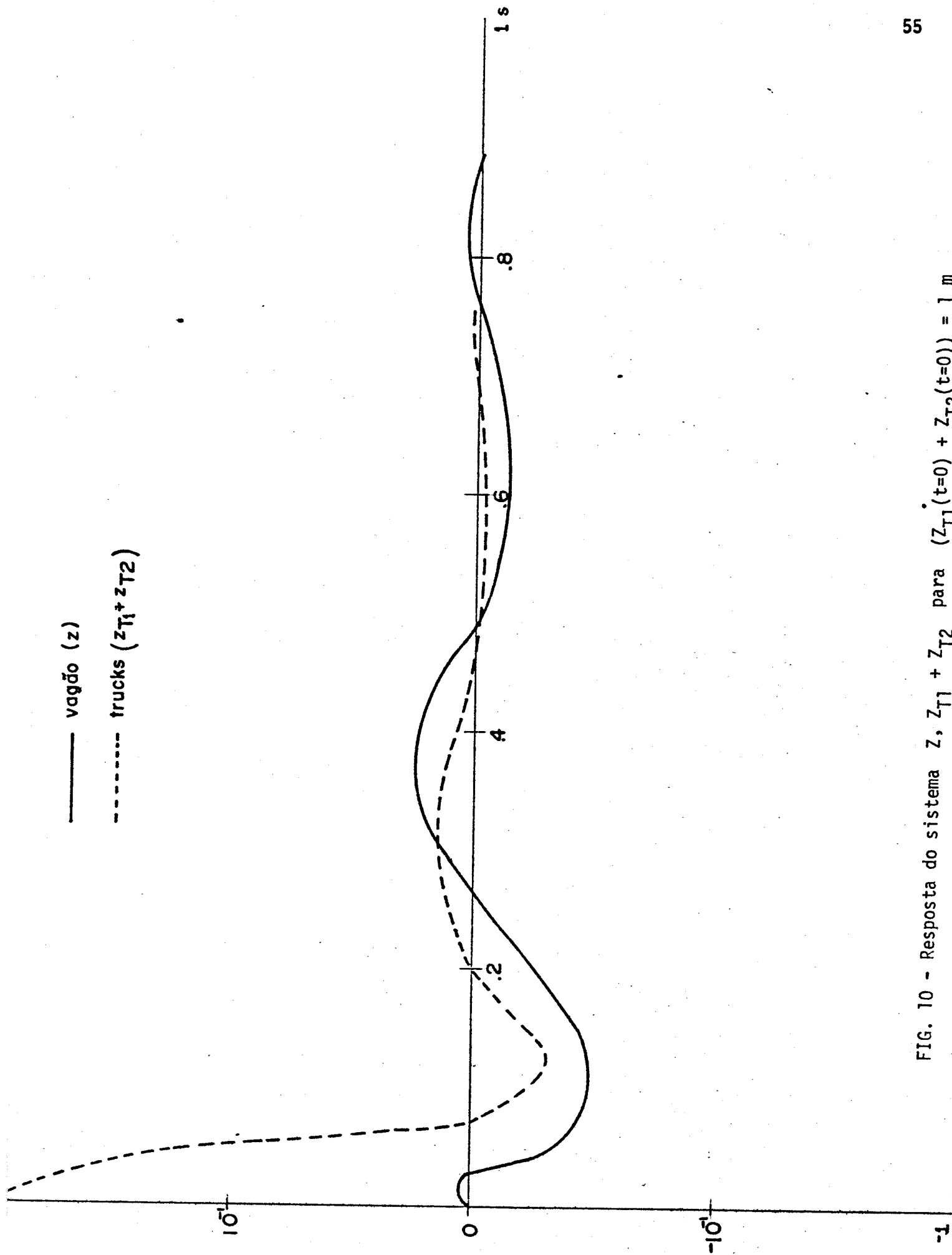


FIG. 10 - Resposta do sistema Z , Z_{T1} + Z_{T2} para $(Z_{T1}(t=0) + Z_{T2}(t=0)) = 1\text{ m}$

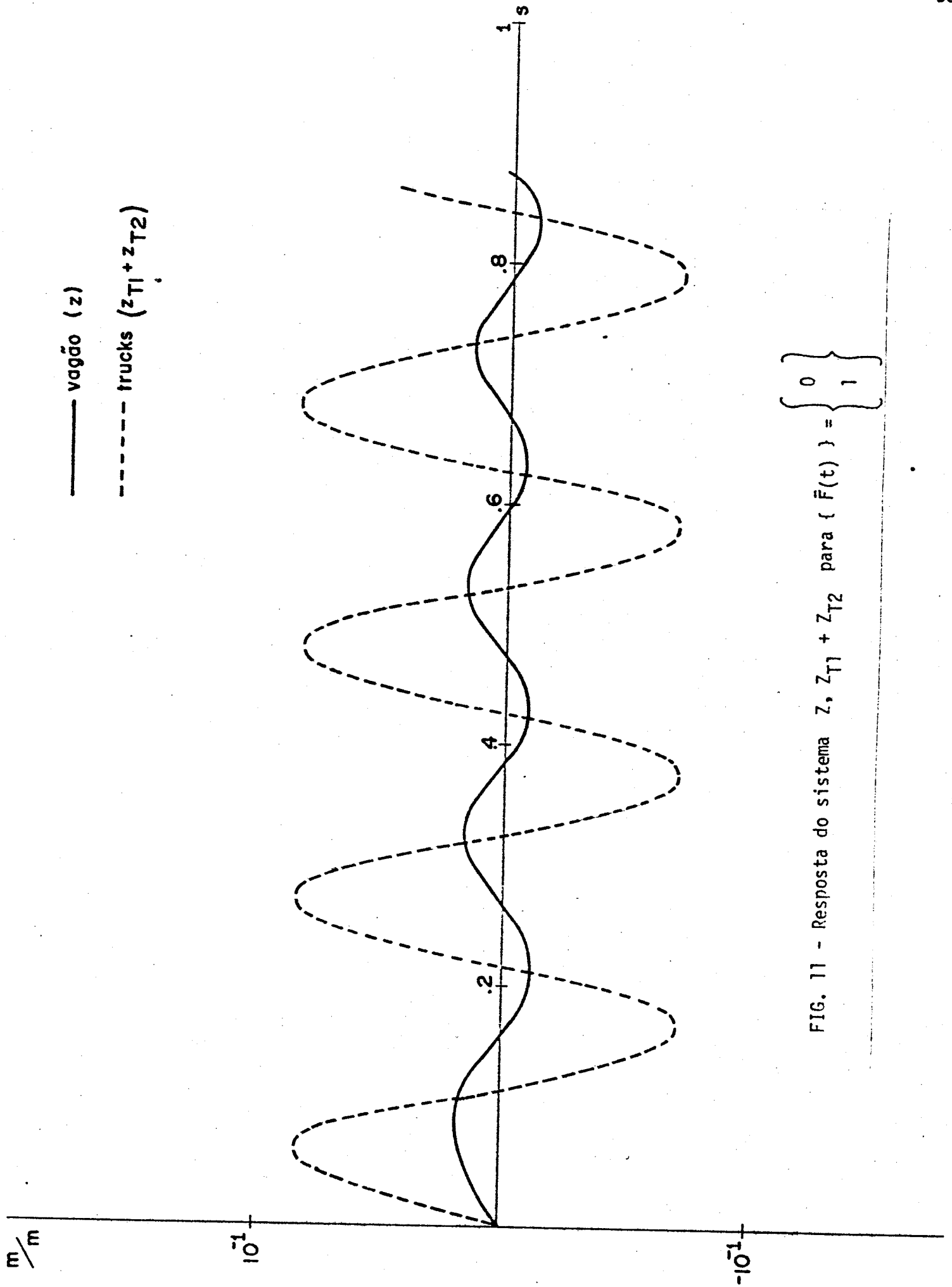


FIG. 11 - Resposta do sistema $Z, Z_{T1} + Z_{T2}$ para $\{\bar{F}(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

- para o sistema inicialmente em repouso, qualquer excitação através dos trilhos sobre os trucks, reflete muito mais em seu deslocamento vertical do que no deslocamento vertical do vagão. Pela análise da Fig. 11, nota-se que a razão de amplitudes trucks/vagão é de, aproximadamente, 3 para 1, ou em outras palavras, reflete um comportamento dinâmico bastante satisfatório.

Deve-se notar, porém, que tal resultado representa a resposta em uma dada frequência da força de excitação, no caso, aproximadamente, 5 rd/s.

Como o interesse é determinar o comportamento dinâmico para diferentes excitações, um dos caminhos seria seguir esta metodologia variando-se as frequências da força perturbadora, de modo a obter a resposta em função do tempo. Isto seria um tanto trabalhoso e de pouco interesse, pois seria de se comparar resultado por resultado e, assim mesmo, ficar-se-ia sujeito aos erros visuais cometidos.

Um outro caminho, muito mais conveniente, é de se ter amplitude em função de frequência, no qual a visualização é imediata. O grande problema é que, tratando-se de um sistema amortecido, tem-se que trabalhar com matrizes complexas, que acarreta problemas, principalmente computacionais. Sendo assim, será necessário introduzir-se uma metodologia de análise através deste caminho, que será visto no item III.5.

III.3 - Análise através do Grau de Estabilidade

Sabe-se que a posição das raízes da equação característica de um sistema mecânico no plano complexo, determina se o sistema é estável ou instável. Se todas as raízes estão à esquerda do eixo imaginário, o sistema é assintoticamente estável.

No caso de sistemas amortecidos, o grau de estabilidade é determinado pela distância do eixo imaginário à raiz complexa mais próxima. Em outras palavras, quanto mais longe estiver a raiz do eixo imaginário, mais estável este será. Entende-se por um sistema ser mais estável que outro, quando sujeitos a uma perturbação, o tempo de retorno à posição de equilíbrio é menor no sistema mais estável. Segundo Leipholz, [20], é de grande importância conhecer-se como os parâmetros de um sistema influem no grau de estabilidade. Estes parâmetros aparecem em última análise na equação característica e nos levam à otimização de sistemas mecânicos.

Encarando-se o grau de estabilidade como resultado de uma análise mais detalhada, denominada análise modal, pretende-se desenvolvê-la com detalhes e, somente após isto, discorrer sobre a estabilidade do sistema.

A análise modal será desenvolvida baseando-se no estudo apresentado por Meirovitch, em [21].

Apesar de já se ter usado um polinômio característico em (68), será apresentado aqui o desenvolvimento completo, pois a análise modal parte da equação do sistema.

III.3.1 - Análise Modal

Seja a equação (70). Para o caso de vibração livre, onde a excitação é nula, pode-se assumir como solução da parte homogênea as equações da forma:

$$\{ x(t) \} = \{ r \} e^{\lambda t} \quad (89)$$

onde:

$$\{ x(t) \} = \left\{ \begin{array}{l} Z(t) \\ Z_{T1}(t) + Z_{T2}(t) \end{array} \right\}$$

O problema dos autovalores é representado por um sistema homogêneo de equações algébricas de ordem igual aos graus de liberdade do sistema, o que em forma matricial, levando-se em conta os parâmetros usados na dedução de (64) e a transformação da equação (70) em (76), expressar-se-á como:

$$\left[\lambda^2 \begin{bmatrix} 2\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 8\delta\mu & -4\delta\mu \\ -4\delta\mu & 4\delta + 2\delta\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8\gamma\mu & -4\gamma\mu \\ -4\gamma\mu & 4\gamma + 2\gamma\mu \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} T \end{Bmatrix} =$$

$$= [f(\lambda)] \{T\} = \{0\} \quad (81)$$

onde $[f(\lambda)]$ é uma matriz quadrada dependente somente de λ . A equação (81), neste caso, possuirá solução não trivial somente quando:

$$\Delta(\lambda) = |f(\lambda)| = 0$$

Substituindo-se os valores numéricos já adotados quando da dedução de (68), tem-se:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 7,92 \lambda + 256,00 & -3,96 \lambda - 128,00 \\ -45,54 \lambda - 1472,00 & \lambda^2 + 86,57 \lambda + 2796,00 \end{vmatrix} = 0 \quad (82)$$

ou seja:

$$\lambda^4 + 94,49 \lambda^3 + 3557,29 \lambda^2 + 32648,00 \lambda + 527360,00 = 0 \quad (83)$$

Resolvendo-se a equação acima, tem-se para auto valores:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -2,86 \mp 13,26 i \\ \lambda_{3,4} &= -44,40 \mp 29,95 i\end{aligned}\tag{84}$$

Como para a obtenção de uma solução do sistema é mais conveniente alterar-se o conjunto de equações de segunda ordem, dado em (70), para um de primeira ordem recorre-se a transformação já feita em (71) e tomando-se:

$$\{ \bar{f}(t) \} = \{ 0 \}\tag{85}$$

Tem-se como resposta de (71):

$$\{ y \} = e^{\lambda t} \{ \bar{T} \}\tag{86}$$

e obtêm-se:

$$(\lambda [U] - [A]) \{ \bar{T} \} = \{ 0 \}\tag{87}$$

onde, de acordo com (76a):

$$[A] = \begin{bmatrix} -[m]^{-1} [c] & -[m]^{-1} [k] \\ [U] & [0] \end{bmatrix}\tag{88}$$

onde $[U]$ é a matriz unitária e $\{ \bar{T} \}$ é um vetor de quarta ordem, assim constituído:

$$\{ \bar{T} \} = \begin{Bmatrix} \lambda T \\ T \end{Bmatrix}\tag{89}$$

Na realidade cada uma das equações (86), (87) e (88) representam quatro equações diferentes, já que são válidas para cada um dos valores de λ expressos em (84).

A resolução da equação (87) para os quatro auto-valores permite a construção da matriz modal. Claro está que, se os auto-valores são complexos, obtêm-se auto-vetores complexos.

A título de exemplo, efetua-se (87) para o primeiro auto-valor, substituindo-se na expressão os parâmetros já usados na dedução de (64) e considerando-se a equação na forma escrita em (76):

$$(\lambda_1 [U] - [A]) \{\bar{T}\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + 8\delta\mu & -4\delta\mu & 8\gamma\mu & -4\gamma\mu \\ -4\delta\mu & \lambda_1 + 4\bar{\delta} + 2\delta\mu & -4\gamma\mu & 4\bar{\gamma} + 2\gamma\mu \\ -1 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 & T_1 \\ \lambda_1 & T_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (90)$$

Resolvendo-se (90) chega-se a:

$$\frac{T_1}{T_2} = - \frac{-4\gamma\mu + (-4\delta\mu) \lambda_1}{8\gamma\mu + \lambda_1 (\lambda_1 + 8\delta\mu)} \quad (91)$$

Neste ponto há necessidade de se normalizar o vetor, isto é, os auto-vetores são determinados a menos de duas constantes. Em outras palavras, tanto a amplitude como a fase são arbitrárias e são determinadas a menos de constantes multiplicativas. Desta maneira, toma-se arbitrariamente:

$$T_1 = - \left(4\gamma\mu + \lambda_1 (-4\delta\mu) \right)$$

e

$$T_2 = \left(8\gamma\mu + \lambda_1 (\lambda_1 + 8\delta\mu) \right) \quad (92)$$

Substituindo-se os valores numéricos já adotados em (68):

$$T_1 = 116,73 - 52,50 i$$

$$T_2 = 65,79 - 29,56 i$$

(93)

Com o auxílio de (84) e (88), constrói-se a matriz modal $[\bar{T}]$:

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} -1028,10 & -1398,10 i & -1028,10 & +1398,10 i \\ -579,05 & -788,02 i & -579,05 & +788,02 i \\ 116,73 & -52,50 i & 116,73 & +52,50 i \\ 65,79 & -29,56 i & 65,79 & +29,56 i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1427,70 & +6696,90 i & -1427,70 & 6696,90 i \\ 29066,00 & -136840,00 i & 29066,00 & +136840,00 i \\ -47,82 & -118,57 i & -47,82 & +118,57 i \\ 978,91 & +2422,00 i & 978,91 & -2422,00 i \end{bmatrix}$$

(94)

Cada coluna da matriz, expressa em (94), representa o vetor dado em - (89) para cada auto-valor.

Para melhor visualização, representa-se os elementos de $[\bar{T}]$ em termos de vetores complexos, dados por seu módulo e seu ângulo de fase:

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} 1735,42 \underline{-126^{\circ}19'18''} & 1735,42 \underline{126^{\circ}19'18''} \\ 977,89 \underline{-126^{\circ}18'36''} & 977,89 \underline{126^{\circ}18'36''} \\ 127,99 \underline{-24^{\circ}13'12''} & 127,99 \underline{24^{\circ}13'12''} \\ 72,13 \underline{-24^{\circ}11'24''} & 72,13 \underline{24^{\circ}11'24''} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6847,39 \underline{102^{\circ}01'48''} & 6847,39 \underline{-102^{\circ}01'48''} \\ 139892,88 \underline{-78^{\circ}00'36''} & 139892,88 \underline{78^{\circ}00'36''} \\ 127,85 \underline{-111^{\circ}58'12''} & 127,85 \underline{111^{\circ}58'12''} \\ 2612,35 \underline{67^{\circ}59'24''} & 2612,35 \underline{67^{\circ}59'24''} \end{bmatrix} \quad (95)$$

A Fig. 12 representa os elementos da matriz $[\bar{T}]$, colocados no plano complexo.

Com os auto-vetores obtidos pode-se escrever a solução do problema para qualquer condição inicial, lembrando que estes vetores formam uma base que representa o movimento desejado, isto é:

$$\{y(t)\} = \{\bar{T}^{(1)}\} e^{\lambda_1 t} + \dots \{\bar{T}^{(4)}\} e^{\lambda_4 t}$$

A formulação do sistema pela análise modal possui a vantagem de que os modos obtidos da solução das equações homogêneas são ortogonais. Sendo assim, desenvolver-se-á com mais detalhe a relação de ortogonalidade.

Tomando-se (70), (85) e (87), pode-se escrever para o r -ésimo autovalor λ_r , onde $r = 1, 2, 3, 4$:

$$\lambda_r \{\bar{T}^r\} = [A] \{\bar{T}^r\} \quad (96)$$

Pré-multiplicando (96) pela matriz $[M]$, dada por:

$$[M] = \begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix} \quad (97)$$

onde $[m]$ e $[c]$ são matrizes simétricas de segunda ordem e expressas em (76) e (76a). Sendo assim:

$$\lambda_r [M] \{\bar{T}^r\} = [M] [A] \{\bar{T}^r\} \quad (98)$$

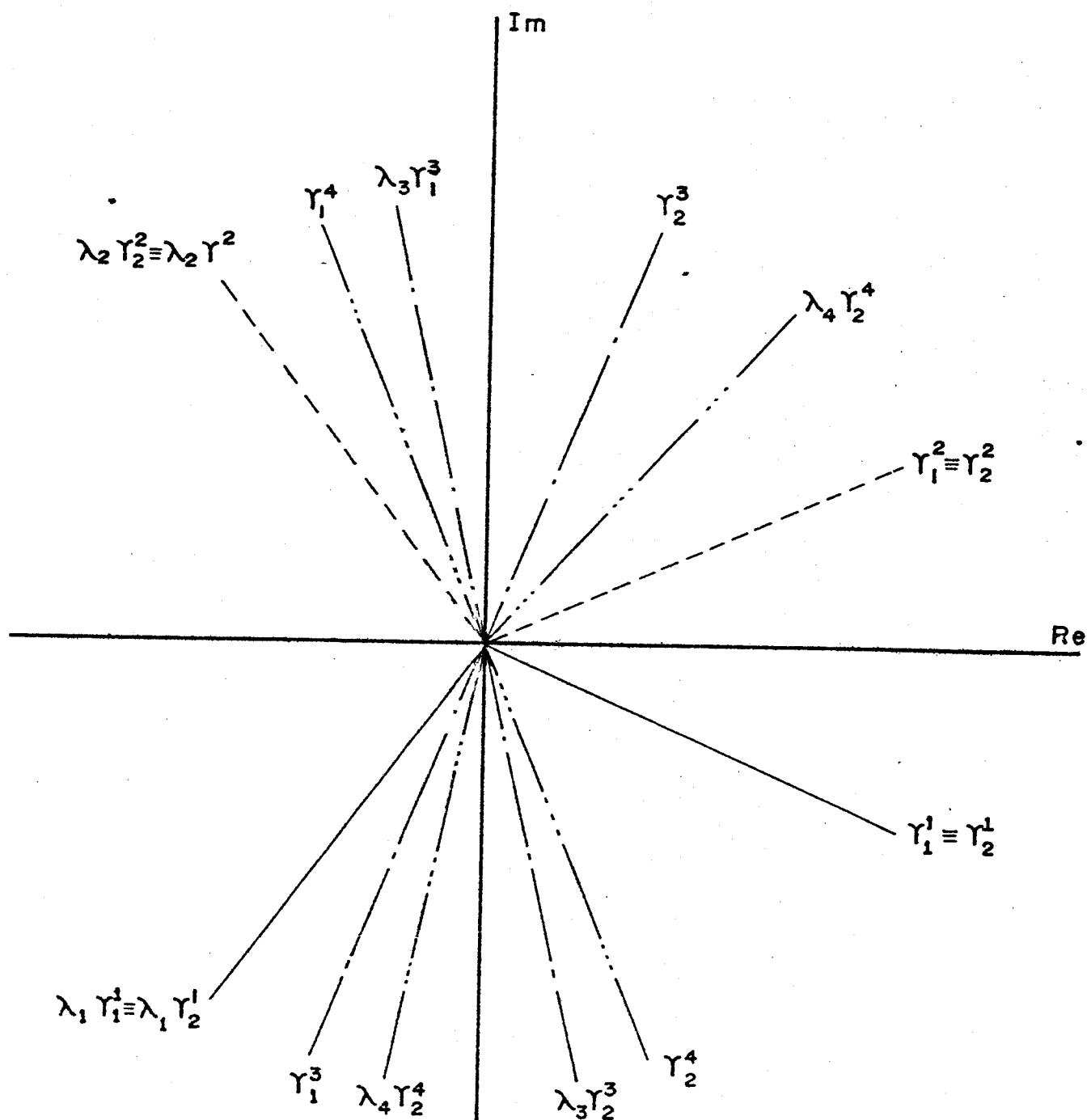


FIG. 12 - Representação dos auto-vetores do sistema $Z, Z_{T1} + Z_{T2}$ no plano complexo.

onde:

$$[M] [A] = - [K] = \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & -[k] \end{bmatrix} \quad (99)$$

e $[k]$ é uma matriz simétrica de segunda ordem, também expressa em (76) e (76a), e $[K]$ é uma matriz de quarta ordem, simétrica. Deste modo, (98) é reescrita como:

$$\lambda_r [M] \{ \bar{Tr} \} = - [K] \{ \bar{Tr} \} \quad (100)$$

ou seja:

$$\lambda_r [M] \{ \bar{Tr} \} + [K] \{ \bar{Tr} \} = \{ 0 \} \quad (101)$$

Considerando-se o s -ésimo auto-valor λ_s , onde $s = 1, 2, 3, 4$, pelas transformações mostradas acima pode-se escrever a solução do problema do auto-vetor na forma transposta como sendo:

$$\lambda_s \{ \bar{Ts} \}^T [M] + \{ \bar{Ts} \}^T [K] = \{ 0 \}^T \quad (102)$$

Pré-multiplicando-se (101) por $\{ \bar{Ts} \}^T$ e pós-multiplicando-se (102) por $\{ \bar{Tr} \}$ tem-se:

$$\lambda_r \{ \bar{Ts} \}^T [M] \{ \bar{Tr} \} + \{ \bar{Ts} \}^T [K] \{ \bar{Tr} \} = 0 \quad (103)$$

$$\lambda_s \{ \bar{t}s \}^T [M] \{ \bar{t}r \} + \{ \bar{t}s \}^T [K] \{ \bar{t}r \} = 0 \quad (104)$$

Subtraindo (104) de (103), chega-se a:

$$(\lambda_r - \lambda_s) \{ \bar{t}s \}^T [M] \{ \bar{t}r \} = 0 \quad (105)$$

Se os auto-valores são distintos, $\lambda_r \neq \lambda_s$, obtêm-se a relação de ortogonalidade:

$$\{ \bar{t}s \}^T [M] \{ \bar{t}r \} = 0, \quad \lambda_r \neq \lambda_s \quad (106)$$

As equações (103) e (104) indicam que a relação de ortogonalidade, também, pode ser escrita como sendo:

$$\{ \bar{t}s \}^T [K] \{ \bar{t}r \} = 0 \quad (107)$$

Nota-se que pelas transformações aqui desenvolvidas, a equação (76) pode ser reescrita como em [21]:

$$[M] \{ \dot{y}(t) \} + [K] \{ y(t) \} = \{ Y(t) \} \quad (108)$$

onde $[M]$ e $[K]$ são as matrizes dadas em (97) e (99), o vetor $\{ y(t) \}$ dado em (72) e

$$\{ Y(t) \} = \begin{Bmatrix} \{ 0 \} \\ \{ \bar{g}(t) \} \end{Bmatrix}, \quad \text{onde } \{ \bar{g}(t) \} = [m] \{ \bar{f}(t) \} \quad (109)$$

III.3.2 - Influência dos Parâmetros de Projeto no Grau de Estabilidade

Pretende-se no presente item avaliar a interação que existe entre os parâmetros de projetos e os valores dos auto-valores expressos em (84).

Os parâmetros tomados foram:

μ = razão das massas vagão/truck

$\bar{\gamma}$ = fator de rigidez da suspensão primária

γ = fator de rigidez da suspensão secundária

$\bar{\delta}$ = fator de amortecimento da suspensão primária

δ = fator de amortecimento da suspensão secundária

Como estes cinco parâmetros influem no polinômio característico expresso em (81), faz-se necessário determinar quais dentre eles melhoram o comportamento dinâmico do movimento vertical, expresso em termos de grau de estabilidade.

Deve-se notar, porém, que tais parâmetros influem, ou melhor, devem influir também nos movimentos expressos por ψ , $Z_{T1} - Z_{T2}$ e ϕ , $\phi_{T1} + \phi_{T2}$. Sendo assim, determinou-se os polinômios característicos destes dois outros sistemas e se analisou a influência dos mesmos parâmetros sobre eles.

O método empregado foi variar cada valor dentro de um intervalo de -50% a + 50% do valor de projeto adotado.

Desta forma, a faixa de cada parâmetro foi:

$$\mu = 2,87 \text{ a } 8,62$$

$$\bar{\gamma} = 257,59 \text{ a } 772,79 \text{ N/m}$$

$$\gamma = 32,00 \text{ a } 96,00 \text{ N/m}$$

$$\bar{\delta} = \text{de } 7,96 \text{ a } 23,90 \text{ N.s/m}$$

$$\delta = \text{de } 0,99 \text{ a } 2,97 \text{ N.s/m}$$

Os resultados de tais variações sobre os três sistemas estão representados nas Figs. 13, 14 e 15.

A análise das três figuras possibilita a afirmação de que a influência sobre os três sistemas se dá no mesmo sentido, isto é, os parâmetros que melhoram o grau de estabilidade de um deles, melhorarão dos outros, também.

A conclusão mais importante que se pode tirar é que o único fator a alterar mais sensivelmente o grau de estabilidade é o fator de amortecimento de ambas as suspensões, predominando o fator de amortecimento da suspensão primária para uma mesma faixa percentual de variação. Em outras palavras, quanto maiores forem os amortecimentos, mais estável será o veículo, deslocando-se em uma trajetória retilínea.

Os fatores de rigidez pouco alteram a posição das raízes em relação ao eixo imaginário. Sua influência se restringe a frequência do movimento, isto é, quanto maior forem os fatores de rigidez, mais alta será a frequência de oscilação do sistema.

O único fator a diminuir o grau de estabilidade é a razão de massas vagão/truck, à medida que esta aumenta, isto é, quanto maior for a massa do vagão em relação à massa do truck menos estável será o veículo.

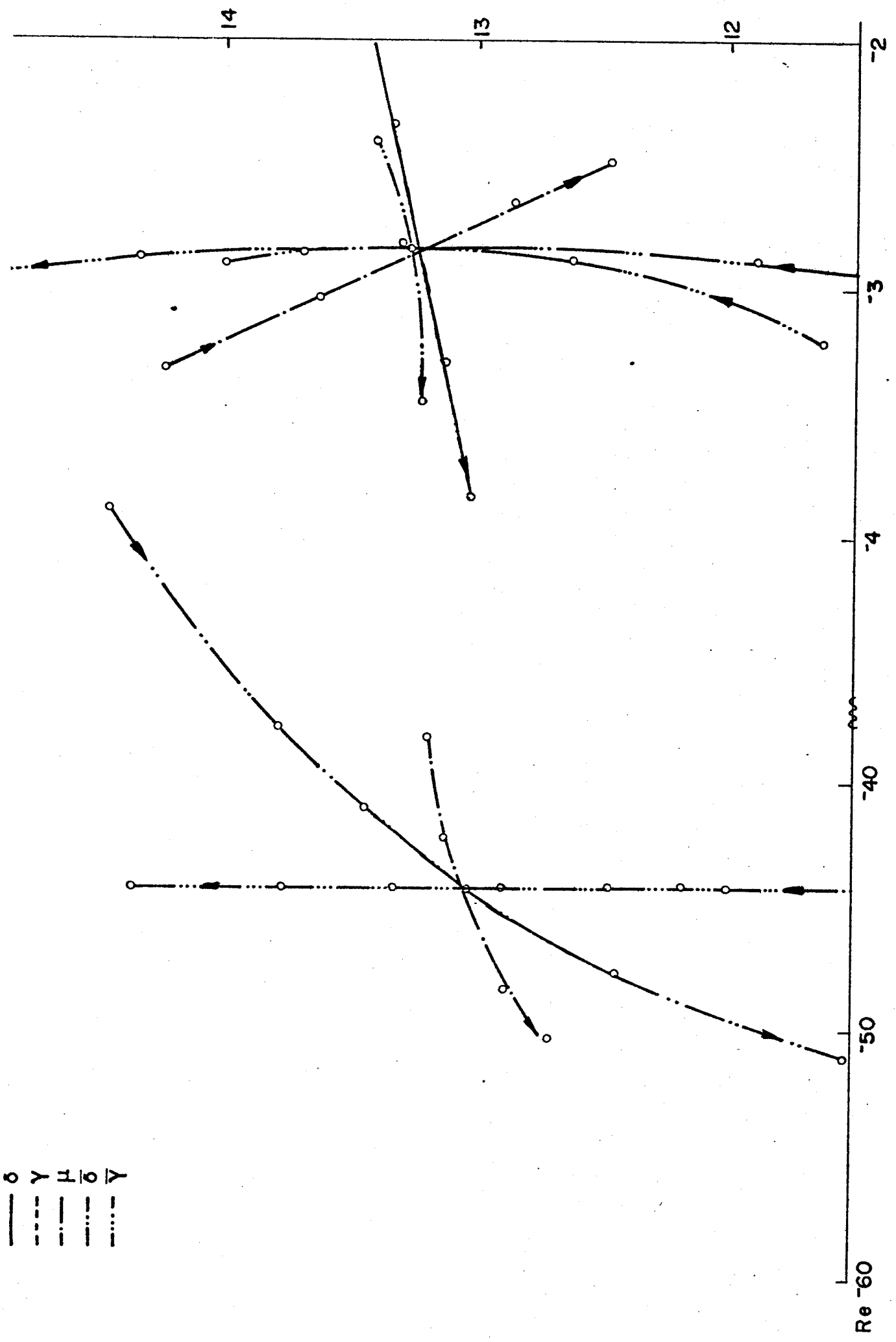


FIG. 13 - Influência dos parâmetros de projeto sobre os auto-valores do sistema
 $Z, Z_{T1} + Z_{T2}$

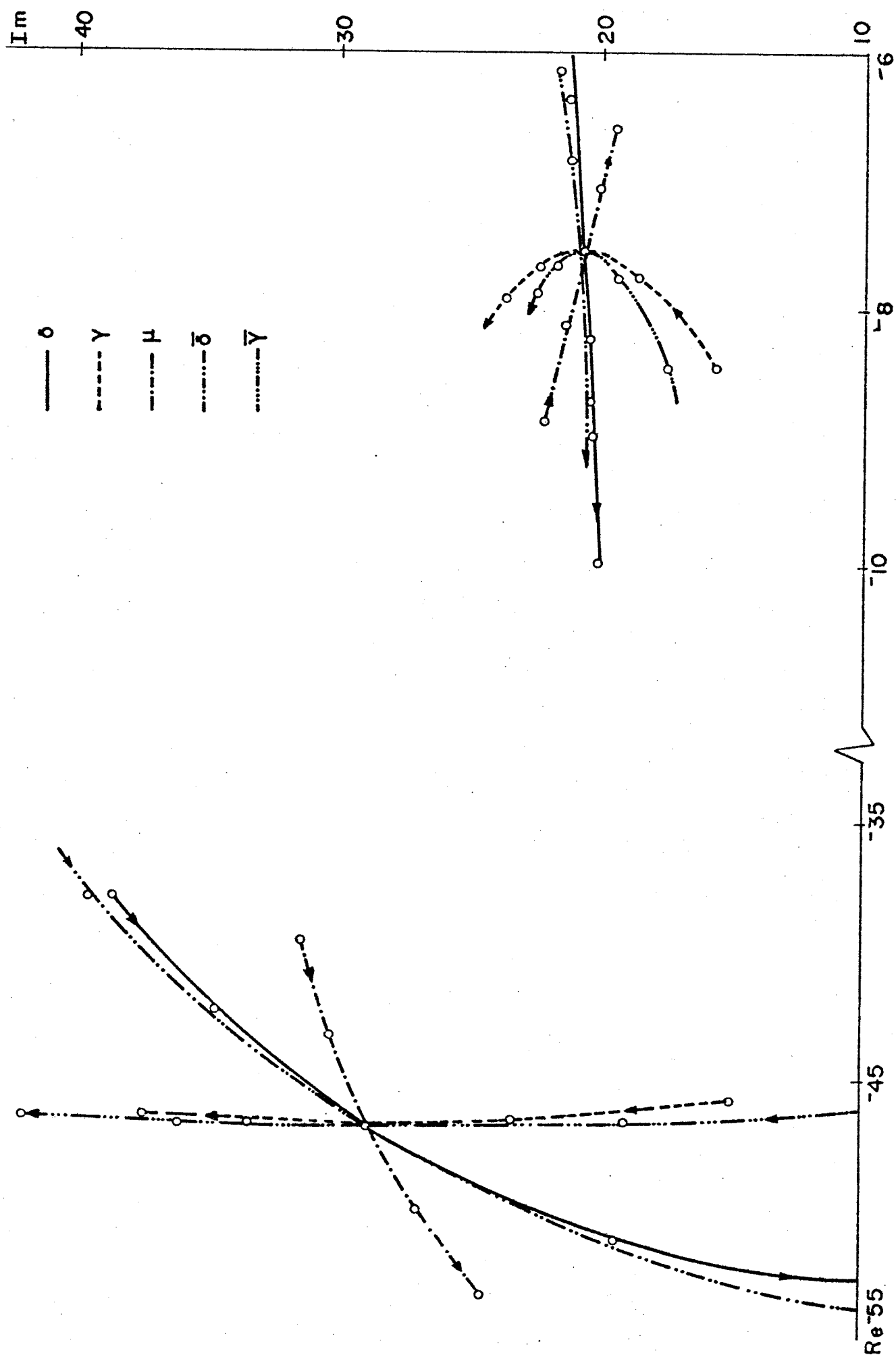


FIG. 14 - Influência dos parâmetros de projeto sobre os auto-valores do sis-

tema ψ , Z_{T1} - Z_{T2} .

Obs: Todos auto-valores restantes
são reais, variando na faixa
de -30 a -240.

δ —————
 γ - - - - -
 μ - · - · - ·
 $\bar{\delta}$ —····—
 $\bar{\gamma}$ - · - · - ·

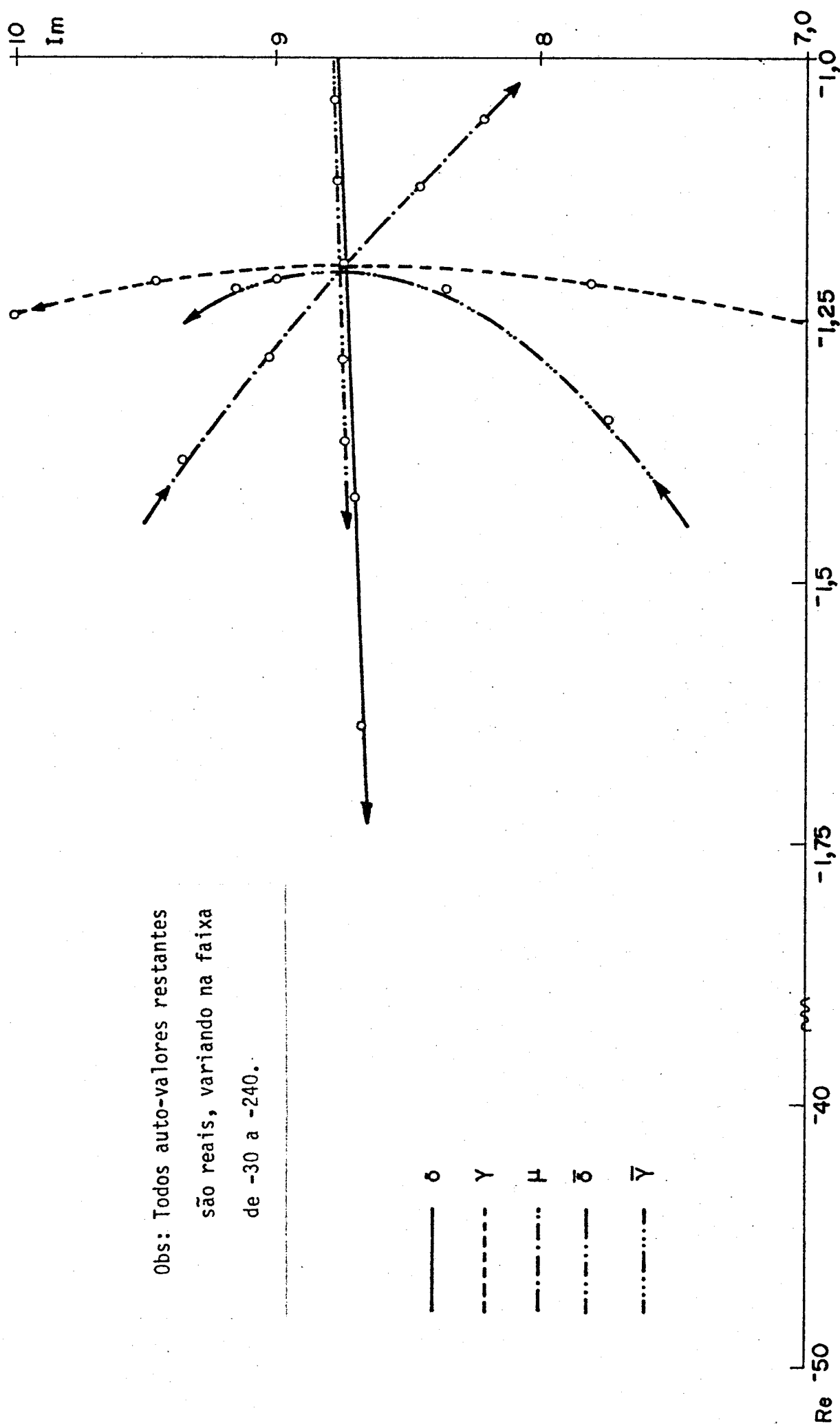


FIG. 15 - Influência dos parâmetros de projeto sobre os auto-valores do sistema ϕ , $\phi_{T1} + \phi_{T2}$.

A conclusão final é que o amortecimento é o fator de projeto a ser otimizado. Mas como o presente intuito é desenvolver uma metodologia já conhecida e não otimizar o sistema, não tecer-se-ã maiores comentários sobre tal otimização.

Salienta-se, porém, que em um segundo estágio de estudo isto pode ser feito, mas com bastante cuidado e através de um modelo mais sofisticado, já que as alterações aqui reportadas influirã em outros problemas de grande importância, tais como as forças de contato roda-trilho que são responsáveis pela capacidade de tracão e frenagem do veículo, além de limitadas pelo projeto da via em si.

Tal comentário resulta do fato de que, invariavelmente, sempre se melhora algo em detrimento de alguma coisa. Sendo assim, faz-se uma ou mais alterações, visando melhorar o comportamento do veículo em relação a um fenômeno físico específico, porém, tomando-se o cuidado de que tal melhoria se restrinja dentro de uma faixa, de modo que este comportamento, face a outras interações físicas, não seja comprometido.

III.4 - Análise através da Solicitação por um Impulso

Esta análise será feita através da resolução de uma integral de convolução, também conhecida como integral de Duhamel.

Como já foi deduzido, a equação do movimento vertical, dada por (76) e (76a), pode ser transformada, convenientemente, na equação (108), dada por:

$$[M] \{ \dot{y}(t) \} + [K] \{ y(t) \} = \{ Y(t) \} \quad (108)$$

onde $[M]$, $[K]$ e $\{ Y(t) \}$ são definidos através das expressões (97), (99) e (109), respectivamente.

Pode-se desacoplar as componentes da equação (108), assumindo-se para so lução:

$$\{ y(t) \} = [\bar{T}] \{ v(t) \} \quad (110)$$

onde $[\bar{T}]$ é a matriz modal de quarta ordem, tendo em suas colunas os auto-vetores $\{ \bar{T}_r \}$ já obtidos pela resolução do problema homogêneo, conforme a ex-
pressão (94). Os elementos da matriz coluna $\{ v(t) \}$ consistem nas quatro -
coordenadas generalizadas a serem determinadas.

Introduzindo-se (110) em (108) e pré-multiplicando o resultado por $[\bar{T}]^T$, obtêm-se:

$$[\bar{T}]^T [M] [\bar{T}] \{ \dot{v} \} + [\bar{T}]^T [K] [\bar{T}] \{ v \} = [\bar{T}]^T \{ Y \} \quad (111)$$

Lembrando-se das relações de ortogonalidade (106) e (107), define-se as matrizes diagonais $[M^*]$ e $[K^*]$ dadas por:

$$[M^*] = [\bar{T}]^T [M] [\bar{T}] \quad (112)$$

$$[K^*] = [\bar{T}]^T [K] [\bar{T}] \quad (113)$$

Mais ainda, seja o vetor $\{ V(t) \}$ dado por:

$$\{ V(t) \} = [\bar{T}]^T \{ Y(t) \} \quad (114)$$

Sendo assim, a equação (111) pode ser escrita como:

$$[M^*] \{ \dot{v} \} + [K^*] \{ v \} = \{ V \} \quad (115)$$

que na realidade representa um conjunto de equações desacopladas do seguinte tipo:

$$M_r^* \dot{v}_r + K_r^* v_r = V_r, \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad (116)$$

Tomando-se $s = r$ em (103), conclui-se que:

$$K_r^* = -\lambda_r M_r^* \quad (117)$$

onde λ_r é o r -ésimo auto-valor do sistema. Sendo assim, (116) pode ser reescrita como:

$$\dot{v}_r - \lambda_r v_r = \frac{1}{M_r^*} V_r, \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad (118)$$

A grande dificuldade que aqui se apresentou foi a resolução da matriz $[M^*]$ para se obter os diversos valores de M_r^* . Utilizando-se os valores numéricos já estabelecidos quando da dedução de (68), resolveu-se (112), numericamente, através da subrotina GMPRD da biblioteca de subrotinas SSP/IBM, adaptada para matrizes complexas, obtendo-se os seguintes valores:

$$M_1^* = -38,403 \cdot 10^5 - (34,058 \cdot 10^5) i$$

$$M_2^* = -38,403 \cdot 10^5 + (34,058 \cdot 10^5) i$$

$$M_3^* = 29,180 \cdot 10^6 + (30,205 \cdot 10^6) i$$

$$M_4^* = 29,180 \cdot 10^6 - (30,205 \cdot 10^6) i$$

Assumindo-se que as condições iniciais são zero, a solução de (118) pode ser escrita em termos de uma integral de convolução, dada por:

$$v_r(t) = \frac{1}{M_r^*} \int_0^t v_r(\tau) e^{\lambda_r(t-\tau)} d\tau \quad (119)$$

Introduzindo-se (114) em (119) e tomando-se para valor de $\{ Y(t) \}$ um impulso agindo sobre o deslocamento das rodas, tem-se:

$$\{ Y(t) \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{g}(\tau) \end{Bmatrix} e, \quad (120)$$

$$v_r(t) = \frac{1}{M_r^*} \int_0^t \bar{T}_{r4}^T \bar{g}(\tau) e^{\lambda(t-\tau)} d\tau, \quad (121)$$

onde

$$\bar{g}(\tau) = 1 \cdot \delta(\tau), \text{ de unidade } N \cdot s^2/m \text{ e } \delta \text{ é o delta de Dirac } (122)$$

Pela propriedade da função impulso:

$$\int \delta(\tau) F(t-\tau) d\tau = F(t) \quad (123)$$

Sendo assim, (121) se reduz a:

$$v_r(t) = \frac{1}{M_r^*} \bar{T}_{r4}^T e^{\lambda_r t}, \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad (124)$$

Tomando-se os valores de M_r^* já expostos anteriormente, a transposta da matriz $[\bar{T}]$, dada por (94), e os auto-valores expressos em (84), chega-se a:

$$v_1(t) = \frac{(65,785 - 29,560 i)}{(-38,403 \cdot 10^5 - 34,058 \cdot 10^5 i)} e^{(-2,8451 - 13,257 i)t} \quad (125)$$

$$v_2(t) = \frac{(65,785 + 29,560 i)}{(-38,403 \cdot 10^5 + 34,058 \cdot 10^5 i)} e^{(-2,8451 + 13,257 i)t} \quad (126)$$

$$v_3(t) = \frac{(978,92 + 2422,0 i)}{(29,180 \cdot 10^6 + 30,205 \cdot 10^6 i)} e^{(-44,399 - 29,946 i)t} \quad (127)$$

$$v_4(t) = \frac{(978,92 - 2422,0 i)}{(29,180 \cdot 10^6 - 30,205 \cdot 10^6 i)} e^{(-44,399 + 29,946 i)t} \quad (128)$$

Como se está interessado no deslocamento do vagão e dos trucks, por (110), (80) e (72), tem-se:

$$Z(t) = y_3(t) = \bar{T}_{3j} v_j(t), \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (129)$$

$$Z_{T1}(t) + Z_{T2}(t) = y_4(t) = \bar{T}_{4j} v_j(t), \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (130)$$

Substituindo-se os valores numéricos já deduzidos:

$$\begin{aligned}
 Z(t) = & (116,73 - 52,501 i) v_1(t) + (116,73 + 52,501 i) v_2(t) + \\
 & + (-47,822 - 118,57 i) v_3(t) + (-47,822 + 118,57 i) v_4(t)
 \end{aligned} \quad (131)$$

$$\begin{aligned}
 Z_{T1}(t) + Z_{T2}(t) = & (65,785 - 29,56 i) v_1(t) + (65,785 + 29,56 i) v_2(t) + \\
 & + (978,92 + 2422,0 i) v_3(t) + (978,92 - 2422,0 i) v_4(t)
 \end{aligned} \quad (132)$$

Tanto (131) como (132) podem ser escritas como:

$$u(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A_3 e^{\lambda_3 t} + A_4 e^{\lambda_4 t} \quad (133)$$

que, por sua vez, é reescrita, usando-se as seguintes transformações:

$$A_{1,2} = \frac{1}{2} (B \pm i C) \quad \lambda_{1,2} = -\sigma_1 \pm w_1 i \quad (134)$$

$$A_{3,4} = \frac{1}{2} (D \pm i E) \quad \lambda_{3,4} = -\sigma_2 \pm w_2 i \quad (135)$$

$$u(t) = F_1 e^{-\sigma_1 t} \sin(w_1 t + \alpha_1) + F_2 e^{-\sigma_2 t} \sin(w_2 t + \alpha_2) \quad (136)$$

onde

$$F_1 = \sqrt{B^2 + C^2}, \quad F_2 = \sqrt{D^2 + E^2} \quad (137)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B}{-C}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D}{-E}$$

Deste modo, pode-se reescrever (131) e (132) como:

$$Z(t) = 7,5250 \cdot 10^{-3} e^{-2,8451t} \sin(13,257 t + 3,2001 \cdot 10^{-4}) + \\ + 1,1522 \cdot 10^{-1} e^{-44,399t} \sin(29,946 t + 6,7766 \cdot 10^{-4}) \quad (138)$$

$$Z_{T1}(t) + Z_{T2}(t) = 4,2401 \cdot 10^{-3} e^{-2,8451t} \sin(13,257 t + 6,7095 \cdot 10^{-4}) + \\ + 2,3543 e^{-44,399t} \sin(29,946 t + 5,7851 \cdot 10^{-5}) \quad (139)$$

Como se partiu da premissa que as condições iniciais eram zero e sabendo-se que o impulso, quando aplicado sobre um sistema, somente atua na velocidade, deve-se ter para $t = 0$ os valores de (138) e (139) nulos, porém, com derivadas não nulas.

Fazendo-se $t = 0$ nas duas expressões, chegou-se a resultados que podem ser considerados zeros aproximados ou seja, o modelo matemático corresponde a situação de se ter um impulso aplicado.

A Fig. 16 representa os deslocamentos verticais sofridos pelo vagão e pelos trucks. Nota-se, claramente, que o deslocamento do vagão é bastante inferior ao dos trucks, significando que uma excitação deste tipo possui um efeito praticamente nulo sobre o vagão. Este resultado foi o que nos levou a não calcular as curvas correspondentes para outros parâmetros de projeto.

Este comportamento caracteriza o vagão como sendo bastante insensível a excitações súbitas sofridas pelos trucks.

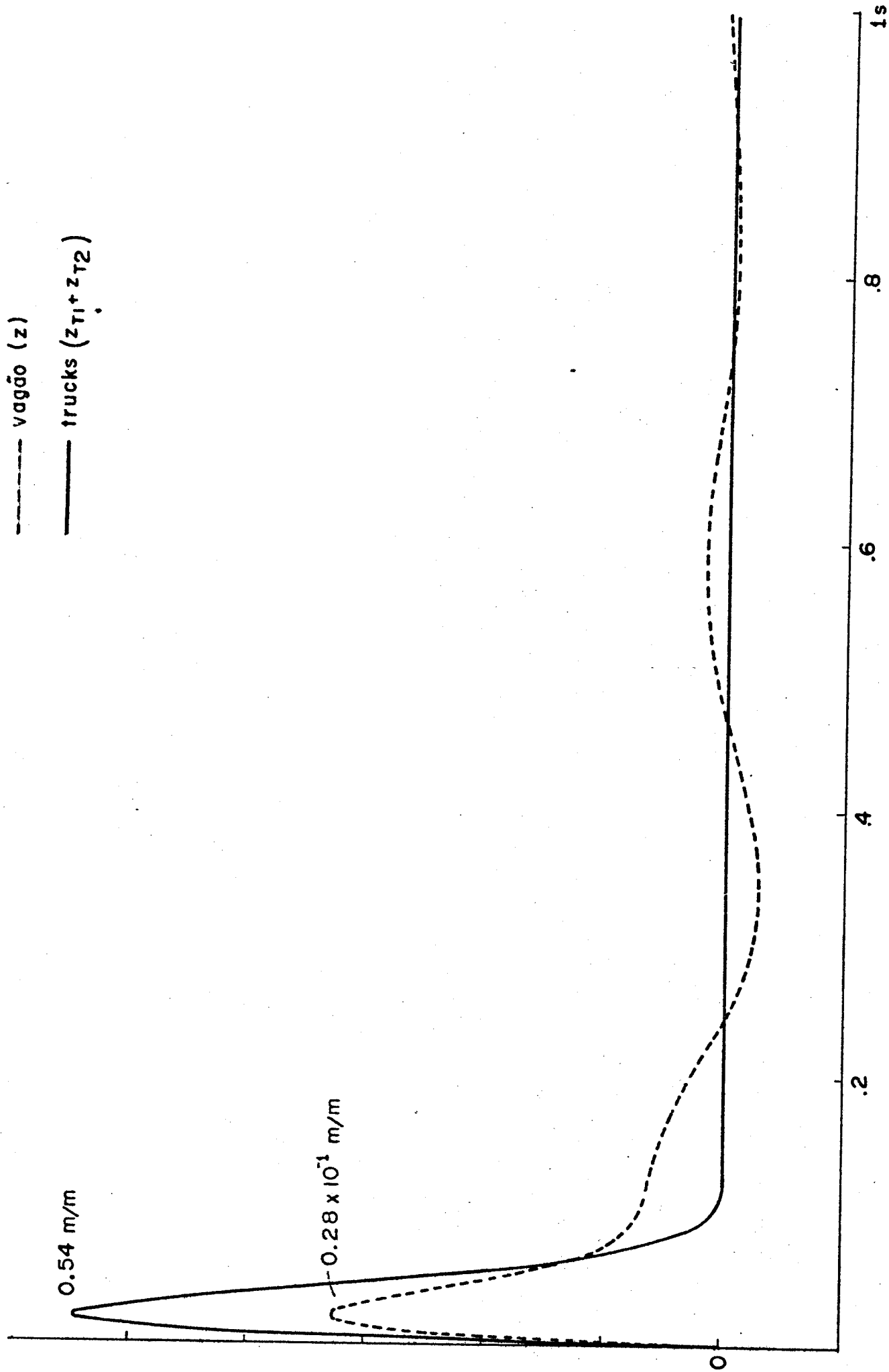


FIG. 16 - Deslocamento vertical do vagão e trucks devido a um impulso.

III.5 - Determinação do Diagrama Frequência-Amplitude para uma Solicitação Senoidal

A análise da resposta de um dado sistema a uma excitação periódica é um dos estudos de maior importância para se determinar o comportamento dinâmico - do mesmo.

Propõe-se desenvolver tal estudo e se ter como resultado os diagramas de frequência-amplitude tanto para o deslocamento como para a aceleração.

O presente estudo se relaciona com o deslocamento vertical do vagão e trucks, dado pela equação (76), que pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Z} \\ \ddot{Z}_{T1} + \ddot{Z}_{T2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 8\delta\mu & -4\delta\mu \\ -4\delta\mu & 4\bar{\delta} + 2\delta\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{Z}_{T1} + \dot{Z}_{T2} \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 8\gamma\mu & -4\gamma\mu \\ -4\gamma\mu & -4\bar{\gamma} + 2\gamma\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ Z_{T1} + Z_{T2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{f}(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (140)$$

onde a excitação ($\bar{E}_I + \bar{E}_{II}$) foi substituída por $\bar{f}(t)$, pois, se todas equações são lineares, pode-se calcular os resultados normalizados em função da amplitude da excitação.

A equação (140) pode ser representada por:

$$[m] \{ \ddot{x} \} + [c] \{ \dot{x} \} + [k] \{ x \} = \{ F^{(1)} \} \cos \Omega t + \{ F^{(2)} \} \sin \Omega t$$

(141)

que pode ser reescrita como sendo:

$$[m] \{ \ddot{x} \} + [c] \{ \dot{x} \} + [k] \{ x \} = \{ F \} e^{i\Omega t} + \{ \bar{F} \} e^{-i\Omega t} \quad (142)$$

onde:

$$\{ F \} = \frac{1}{2} \left(\{ F^{(1)} \} - i \{ F^{(2)} \} \right) \quad e \quad \{ \bar{F} \} = \frac{1}{2} \left(\{ F^{(1)} \} + i \{ F^{(2)} \} \right) \quad (143)$$

Adotando-se para solução particular:

$$\{ x_p(t) \} = \{ X \} e^{i\Omega t} + \{ \bar{X} \} e^{-i\Omega t} \quad (144)$$

Chega-se, como indicado por Müller e Schiehlen em [22]:

$$\begin{aligned} \{ x_p(t) \} = & \left(-\Omega^2 [m] + i\Omega [c] + [k] \right)^{-1} \{ F \} e^{i\Omega t} + \\ & + \left(-\Omega^2 [m] - i\Omega [c] + [k] \right)^{-1} \{ \bar{F} \} e^{-i\Omega t} \end{aligned} \quad (145)$$

Por transformações algébricas, a equação (145) pode ser reescrita como sendo:

$$\begin{aligned} \{ x_p(t) \} = & \begin{bmatrix} \cos \Omega t [U] & \sin \Omega t [U] \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} -\Omega^2 [m] + [k] & \Omega [c] \\ -\Omega [c] & -\Omega^2 [m] + [k] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{ F^{(1)} \} \\ \{ F^{(2)} \} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (146)$$

onde a matriz $[U]$ é a matriz identidade de ordem $n \times n$, sendo n o número

de graus de liberdade do sistema.

Aplicando-se o resultado de (146) em (140) tem-se:

$$\begin{Bmatrix} Z(t) \\ Z_{T1}(t) + Z_{T2}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & 0 & \sin \Omega t & 0 \\ 0 & \cos \Omega t & 0 & \sin \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega^2 [m] + [k] & \Omega [c] \\ -\Omega [c] & -\Omega^2 [m] + [k] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{ F^{(1)} \} \\ \{ F^{(2)} \} \end{Bmatrix} \quad (147)$$

onde:

$$-\Omega^2 [m] + [k] = \begin{bmatrix} -2\Omega^2 \mu + 8\gamma\mu & -4\gamma\mu \\ -4\gamma\mu & -\Omega^2 + 4\gamma + 2\gamma\mu \end{bmatrix} \quad (148)$$

$$\Omega [c] = \begin{bmatrix} 8\Omega\delta\mu & -4\Omega\delta\mu \\ -4\Omega\delta\mu & 4\Omega\delta + 2\Omega\delta\mu \end{bmatrix} \quad (149)$$

$$\{ F^{(1)} \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{ F^{(2)} \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (150)$$

Tais valores de $\{ F^{(1)} \}$ e $\{ F^{(2)} \}$ foram adotados, baseando-se no fato de que a excitação atua sobre os trucks e não sobre o vagão.

Para se solucionar (147), deve-se resolver o problema da inversão da matriz, composta pelas matrizes expressas em (148) e (149).

De acordo com Westlake, em [23], pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} -\Omega^2 [m] + [k] & \Omega [c] \\ -\Omega [c] & -\Omega^2 [m] + [k] \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} [W_1] & [W_2] \\ [W_3] & [W_1] \end{bmatrix} \quad (151)$$

onde:

$$[W_1] = [\Delta]^{-1}$$

$$[W_2] = -[W_3]$$

(152)

$$[W_3] = [\Delta]^{-1} [\Omega [c]] [-\Omega^2 [m] + [k]]^{-1}$$

$$[\Delta]^{-1} = [-\Omega^2 [m] + [k]] + [\Omega [c]] [-\Omega^2 [m] + [k]]^{-1} [\Omega [c]]$$

Substituindo-se (152) em (147), tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Z(t) \\ Z_{T1}(t) + Z_{T2}(t) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} [W_1] \{ F^{(1)} \} + [W_2] \{ F^{(2)} \} \\ [W_3] \{ F^{(1)} \} + [W_1] \{ F^{(2)} \} \end{Bmatrix} \cos \Omega t + \\ &+ \begin{Bmatrix} [W_3] \{ F^{(1)} \} + [W_1] \{ F^{(2)} \} \end{Bmatrix} \sin \Omega t \end{aligned} \quad (153)$$

ou ainda:

$$Z(t) = A_1 \cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t \quad (154)$$

$$Z_{T1}(t) + Z_{T2}(t) = A_2 \cos \Omega t + B_2 \sin \Omega t \quad (155)$$

Por transformações trigonométricas, chega-se a:

$$Z(t) = R_1 \operatorname{sen}(\Omega t + \alpha_1) \quad (156)$$

$$Z_{T1}(t) + Z_{T2}(t) = R_2 \operatorname{sen}(\Omega t + \alpha_2) \quad (157)$$

onde:

$$R_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \alpha_i = \frac{A_i}{B_i}, \quad i = 1, 2 \quad (158)$$

Ressalta-se que para se concluir a respeito da influência da frequência de excitação sobre a resposta do sistema, faz-se necessário varrer uma faixa de frequências e não se restringir a uma só. Baseado na bibliografia sobre dinâmica de veículos ferroviários escolheu-se a faixa varrida entre 0 a 60 rd/s.

Utilizando os valores numéricos já apresentados quando da dedução de (68), formulou-se um programa computacional para efetuar a inversão de matrizes dadas em (152) e fornecer as respostas dos deslocamentos verticais do vagão e trucks, dados em (156) e (157), para a faixa de variação de Ω adotada.

Além disso, como o interesse maior está na determinação da influência de alguns parâmetros de projeto sobre o comportamento dinâmico e como já se determinou que a influência mais marcante é a do amortecimento, são apresentadas algumas curvas para diferentes valores do fator de amortecimento da suspensão primária $\bar{\delta}$ e do fator de amortecimento da suspensão secundária δ .

Com o intuito de se estabelecer todas as variações possíveis, as Figs. 17, 18, 19, 20, 21 e 22, apresentam as seguintes características, respectivamente:

- a) resposta do sistema para os valores pré-estabelecidos (vide dedução de (68))
- b) resposta para $\delta = 0$
- c) resposta para $\bar{\delta} = 0$
- d) resposta para $\delta = \bar{\delta} = 0$
- c) resposta do sistema, variando-se δ e $\bar{\delta}$, simult neamente, de modo a se manter a relação $\bar{\delta} / \delta$ constante.

A análise das Figs. 17 a 22 permite uma série de conclusões interessantes. Estas figuras representam as respostas amplitude-freq ncia para a variável Z (deslocamento do vagão) e a mesma resposta para a variável $(Z_{T1} + Z_{T2})$ dos trucks. Estas respostas foram obtidas para diversos conjuntos de parâmetros.

Para os parâmetros de projeto (fig. 17), nota-se que o vagão possui uma só freq ncia de ressonância, enquanto que na curva correspondente aos trucks, a segunda amplitude de ressonância é bem maior que a primeira. Para se ter uma idéia do que ocorre variando certos parâmetros, analisa-se as Figs. 18 e 19, onde, em cada uma, os amortecimentos das suspensões secundária ou da primária foram tomados nulos, respectivamente. Porém, ainda assim, a segunda amplitude de ressonância do vagão continuou a não existir e alguns efeitos interessantes sobre os trucks se fizeram notar. Tais efeitos serão comentados mais adiante. Para a Fig. 20, tem-se ambas as suspensões consideradas simult neamente sem amortecimento e, a , tem-se as duas freq ncias de ressonância do vagão. Isto nos leva a concluir que para qualquer valor de amortecimento diferente de zero em ambas suspensões, o vagão possuirá somente uma freq ncia de ressonância ao re

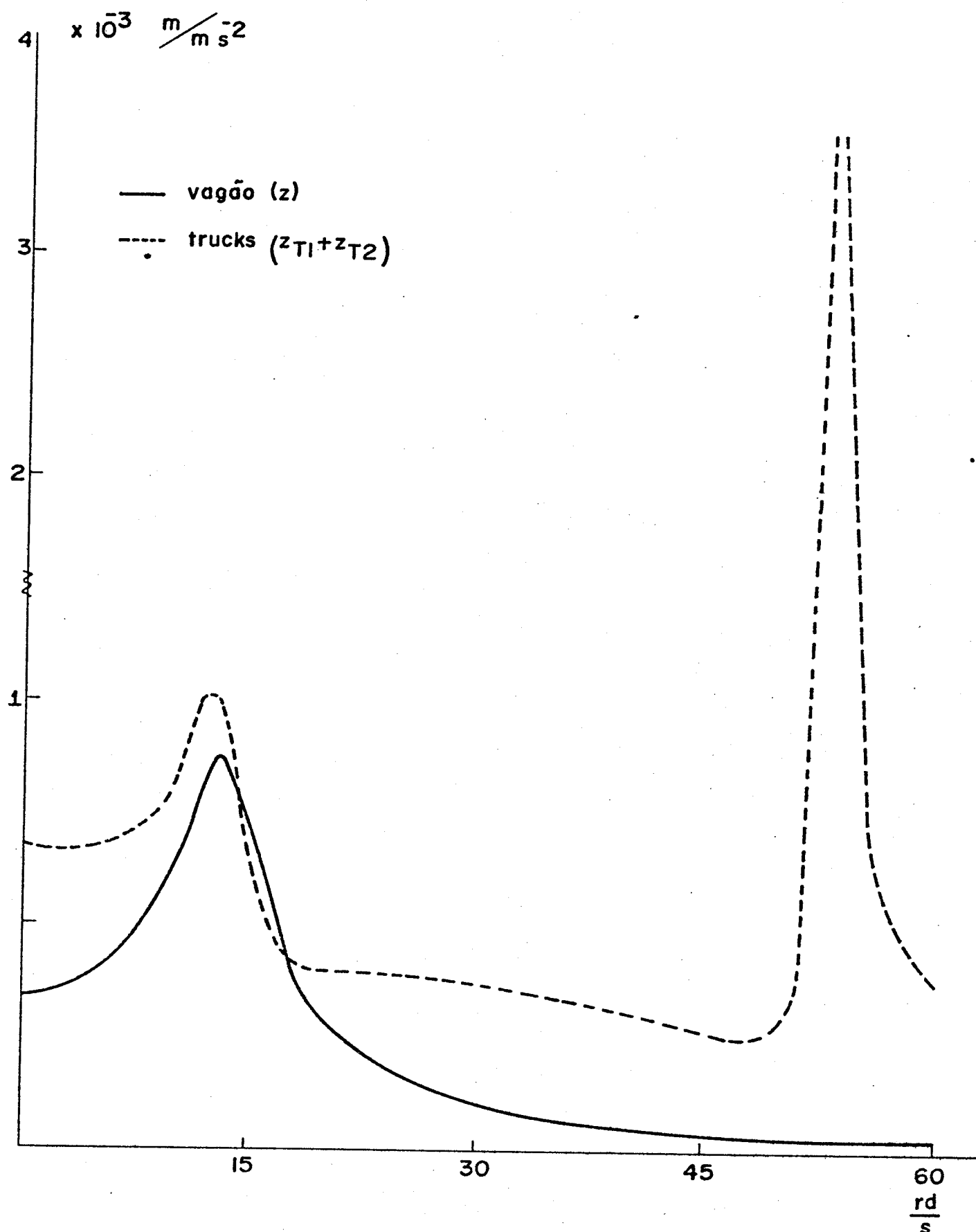


FIG. 17 - Resposta em deslocamento do sistema Z , $Z_{T1} + Z_{T2}$ com parâmetros de projeto.

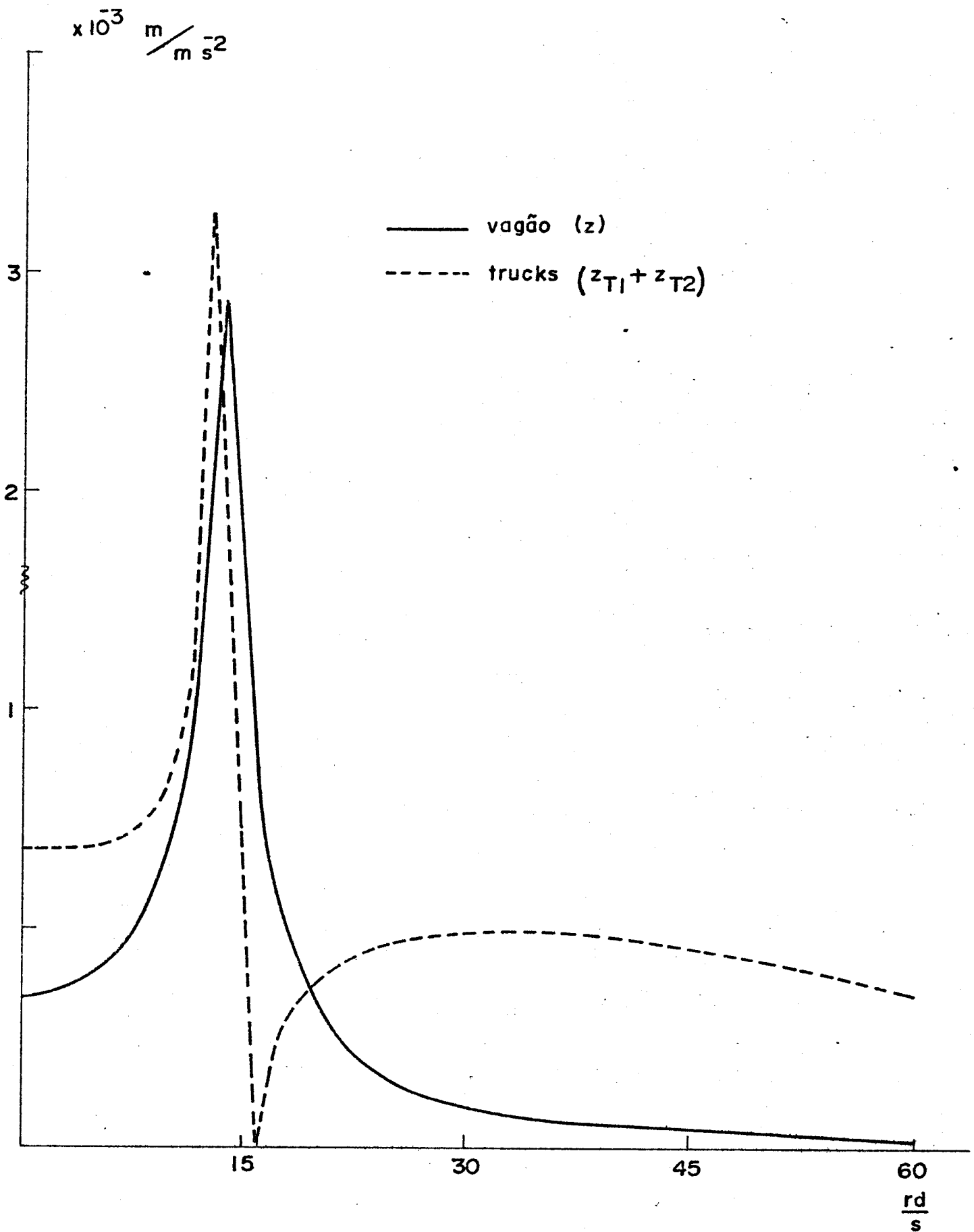


FIG. 18 - Resposta em deslocamento do sistema Z , $Z_{T1} + Z_{T2}$ com amortecimento da suspensão secundária suposto nulo.

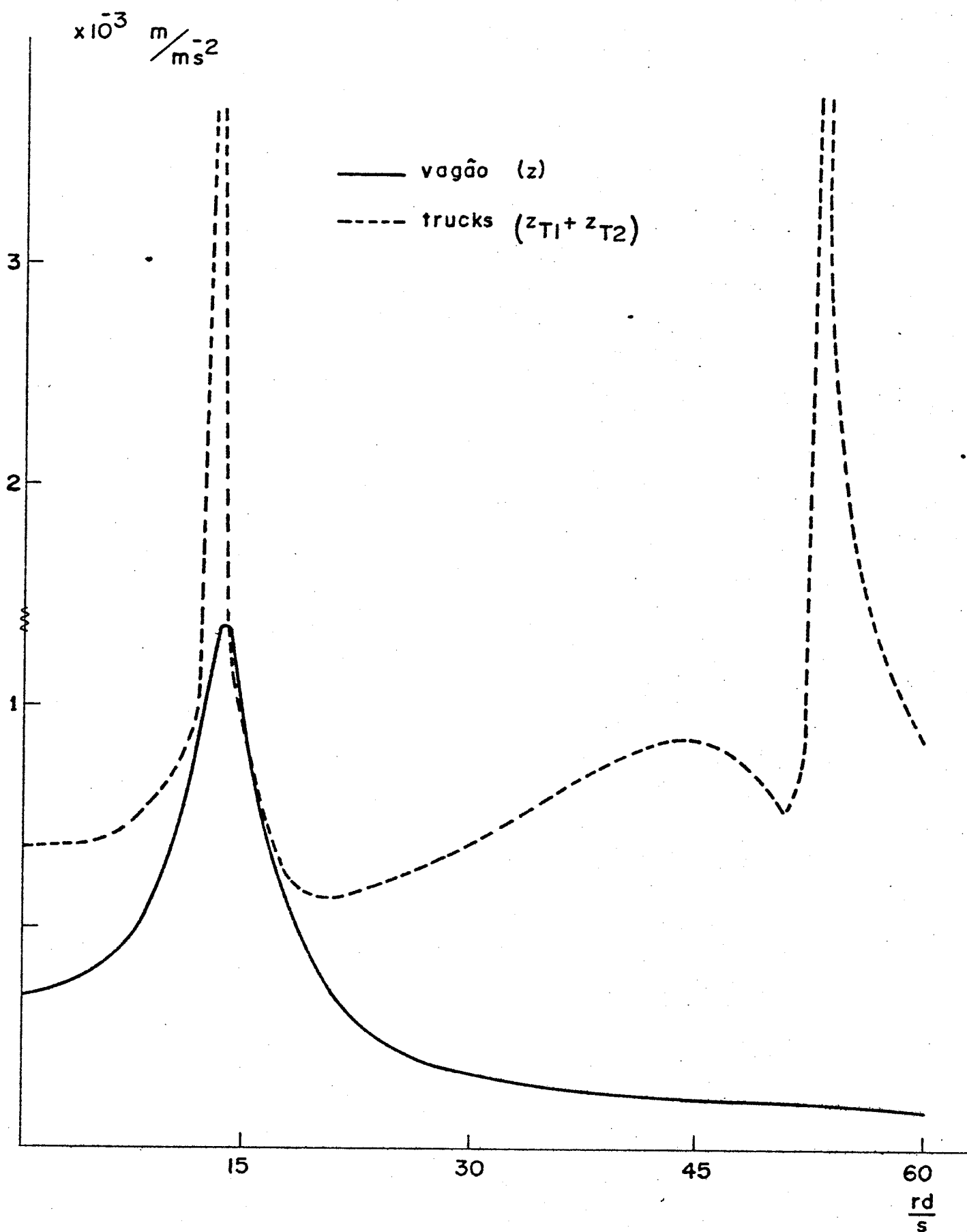


FIG. 19 - Resposta em deslocamento do sistema Z , $Z_{T1} + Z_{T2}$ com amortecimento da suspensão primária suposto nulo.

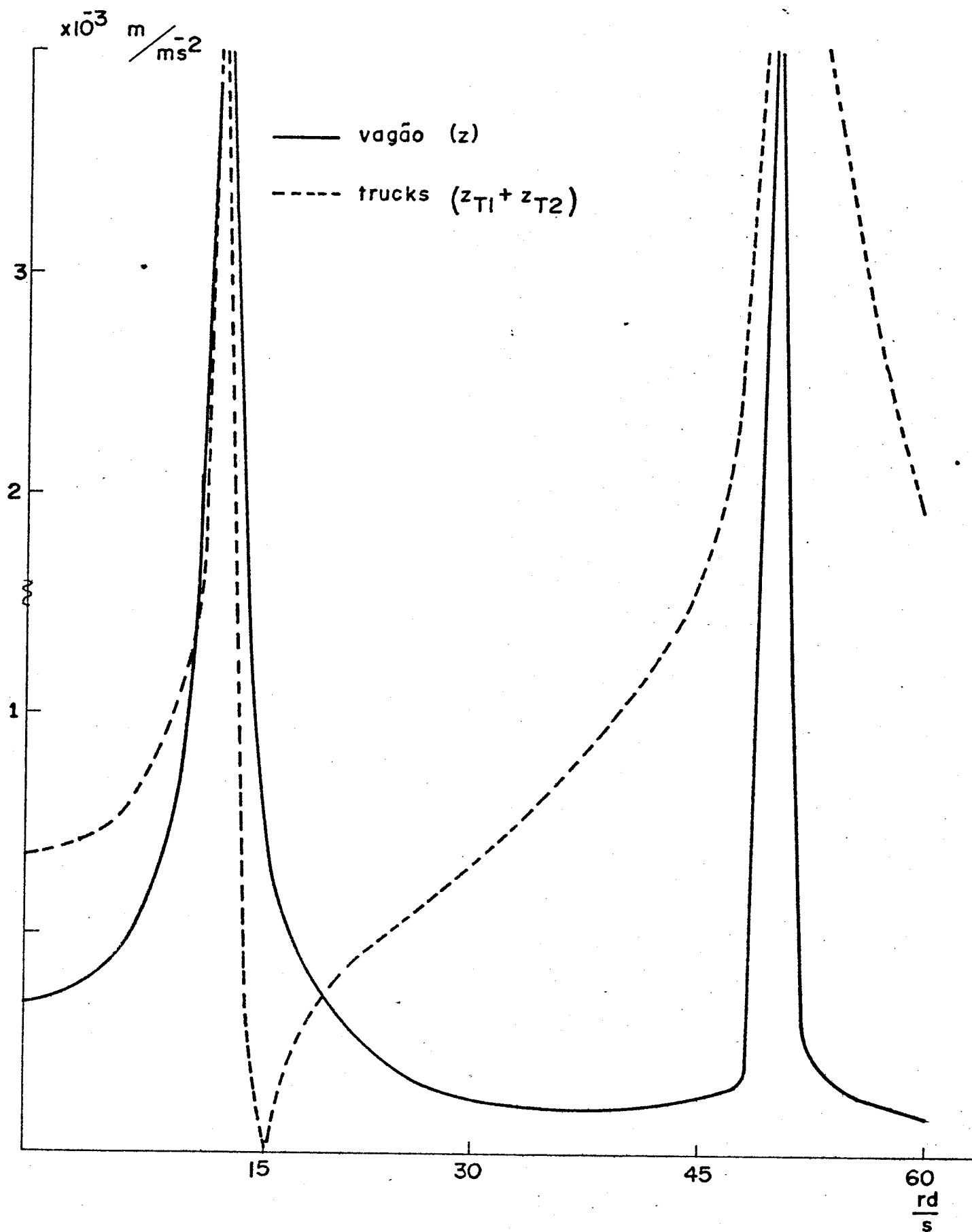


FIG. 20 - Resposta em deslocamento do sistema Z , $Z_{T1} + Z_{T2}$ com amortecimentos de ambas suspensões supostos nulos.

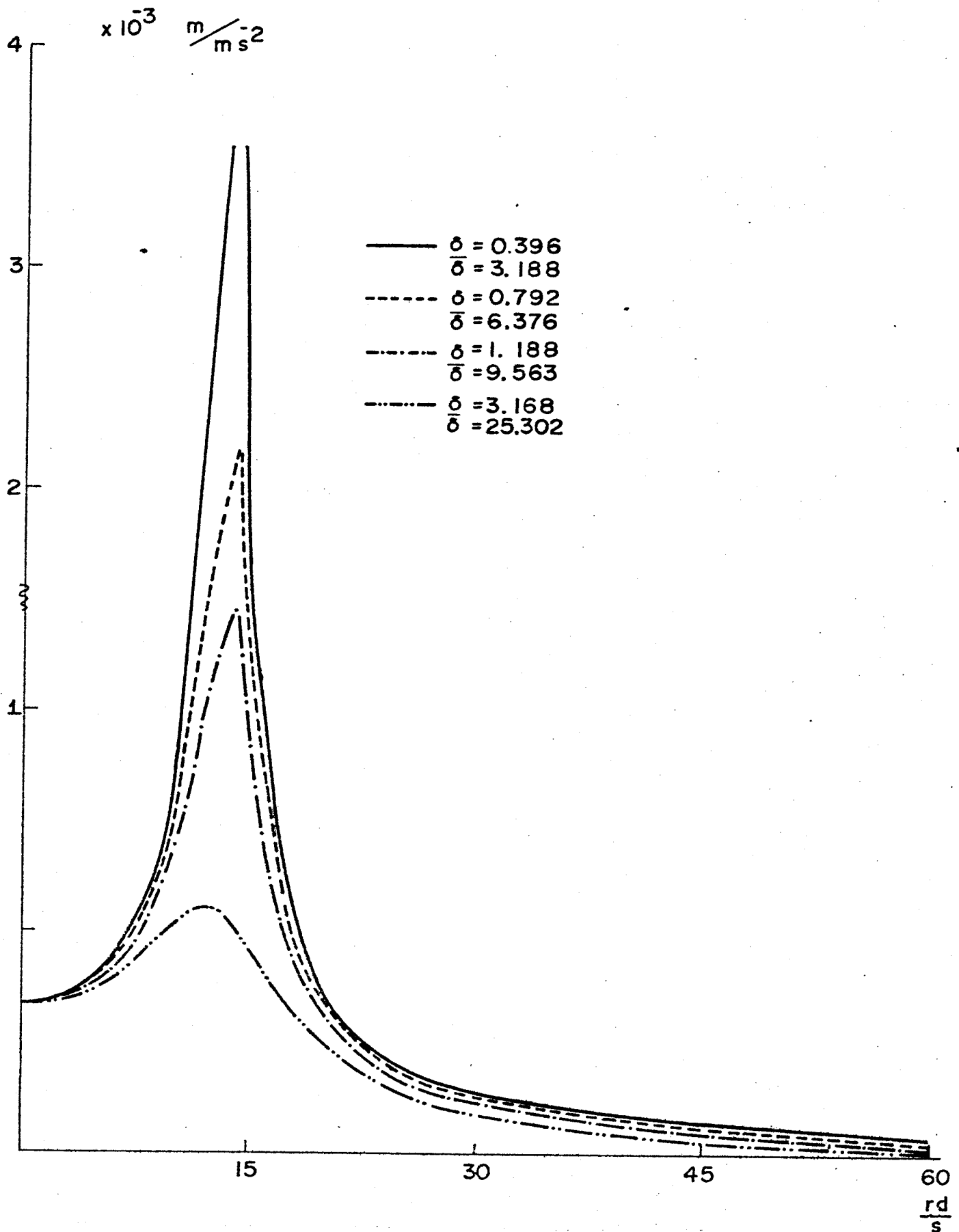


FIG. 21 - Resposta em deslocamento do vagão para diversos valores dos fatores de amortecimento de ambas suspensões, supondo a relação $\bar{\delta} / \delta$ - constante.

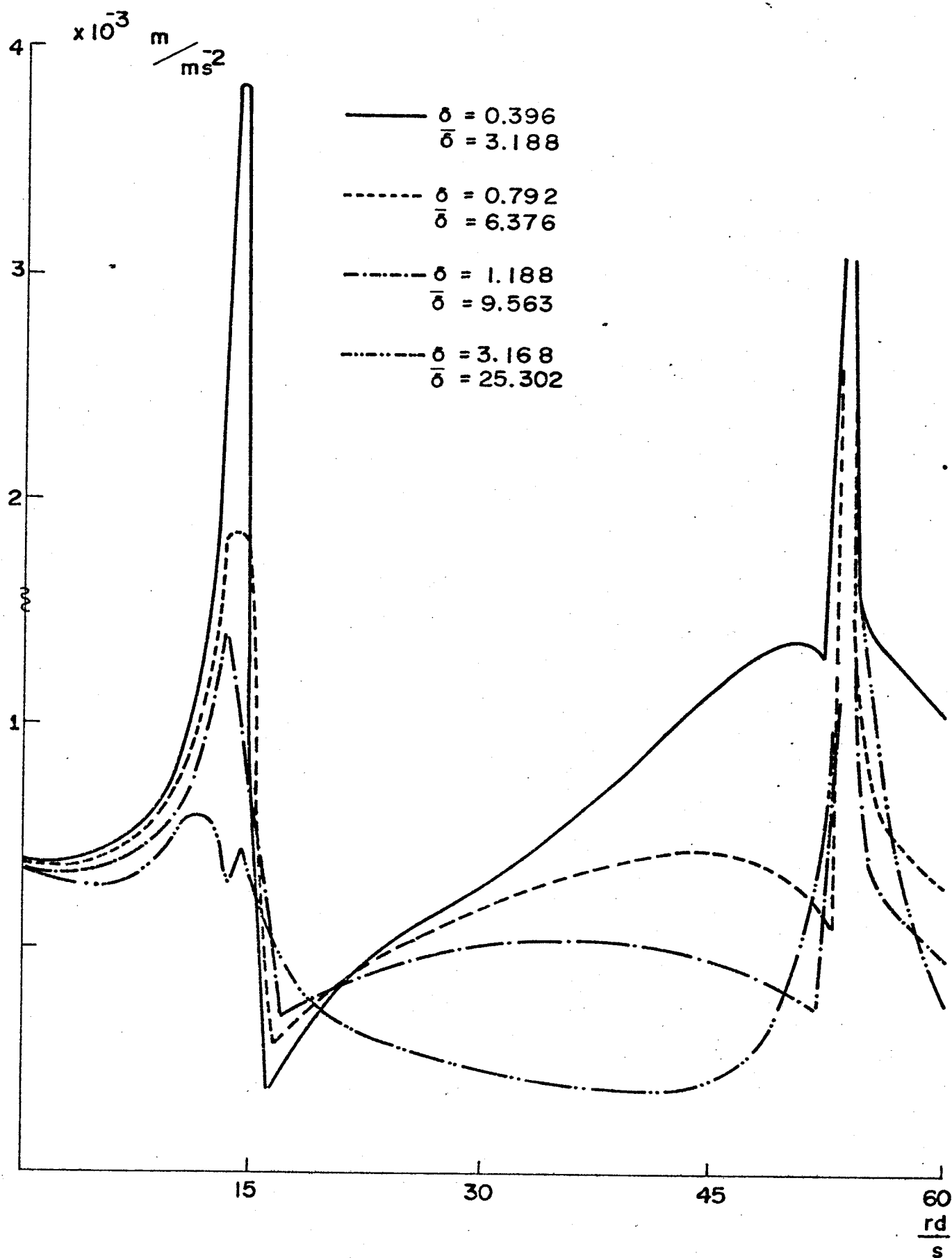


FIG. 22 - Resposta em deslocamento dos trucks para diversos valores dos fatores de amortecimento de ambas suspensões, supondo a relação $\bar{\delta} / \delta$ constante.

dor de 13,5 rd/s.

Através da Fig. 21, na qual foram tomados três valores de amortecimentos menores que os de projeto e um maior que estes valores, pode-se notar que o comportamento do vagão melhora à medida que os fatores de amortecimento de ambas as suspensões aumentam, mantendo a relação entre si constante, sendo que para frequências acima de 30 rd/s. suas amplitudes podem ser consideradas praticamente nulas. Note-se, mais ainda, que à medida que os amortecimentos crescem, o pico de frequência de ressonância desloca-se para a esquerda, isto é, para frequências menores.

O comportamento dos trucks, ante a variação dos amortecimentos de ambas as suspensões, apresenta características bastante diferentes daquelas aqui apresentadas para o vagão.

O primeiro fato a reportar é que para o fator de amortecimento nulo da suspensão secundária (Fig. 18), sua segunda amplitude de ressonância deixa de existir. Isto nos leva a concluir que para esta situação, o sistema se comporta como fosse uma só massa, isto é, não há solicitação sobre a suspensão secundária. Mais ainda, para a frequência de aproximadamente 16 rd/s, tem-se, neste caso, um valor nulo da amplitude dos trucks, significando que para esta frequência o vagão atua como um absorvedor de vibrações dos trucks. Este mesmo fenômeno surge no caso de ambos os amortecimentos nulos (Fig. 20). Para fatores de amortecimento de baixo valor numérico, ocorre, ainda, um fenômeno denominado frequência de ressonância aparente, que só desaparece para altos amortecimentos ou para o amortecimento da suspensão secundária nulo. Este fenômeno é bem visualizado nas Figs. 19 e 22. Caracteriza-se o fenômeno da ressonância aparente, quando na expressão da dedução da amplitude, tem-se um denominador tendendo a zero, porém com numerador de baixo valor também, resultando em valores finitos. A tendência de se ter valores quase nulos da amplitude dos trucks e uma frequência de ressonância aparente para baixos fatores de amortecimento estão bem caracterizados na Fig. 22.

Conclui-se, deste modo, que o fator de amortecimento $\tilde{a}$ medida que aumenta, melhora o comportamento dinâmico do vagão, porém, devido aos trucks, deve-se definir faixas de frequência de utilização em virtude da possibilidade de se ter, por exemplo, um deslocamento quase nulo do vagão em uma frequência de ressonância dos trucks.

Mais ainda, deve-se lembrar que não é possível aumentar indefinidamente o amortecimento, pois isto deve melhorar o comportamento do vagão, piorando outros fatores. Por exemplo, a força de contato roda-trilho deve aumentar com o amortecimento, podendo, inclusive, acarretar danos tanto na roda como nos trilhos.

Para um completo estudo necessita-se, ainda, verificar a resposta em aceleração do vagão e trucks, o que é feito através das Figs. 23, 24 e 25.

A análise destas figuras nos mostra que $\tilde{a}$ medida que os fatores de amortecimentos vão crescendo, as acelerações do vagão diminuem com o aumento das acelerações dos trucks.

Isto mostra que em um projeto deve-se determinar com bastante rigor a lei de compromisso entre as faixas de frequência de utilização e os fatores de amortecimento escolhido. Em outras palavras, o amortecimento escolhido será função da frequência de utilização, tanto em função do comportamento dos trucks quanto do próprio vagão.

III.6 - Conclusões

Empregou-se no presente trabalho uma metodologia de análise já conhecida, porém enfocada por um aspecto diferente, visando a resolução de um modelo representativo de um veículo sobre trilhos.

Como era de se esperar, dentro da variada gama de aspectos diferentes que a dinâmica de veículos ferroviários nos oferece, tem-se que optar por um es

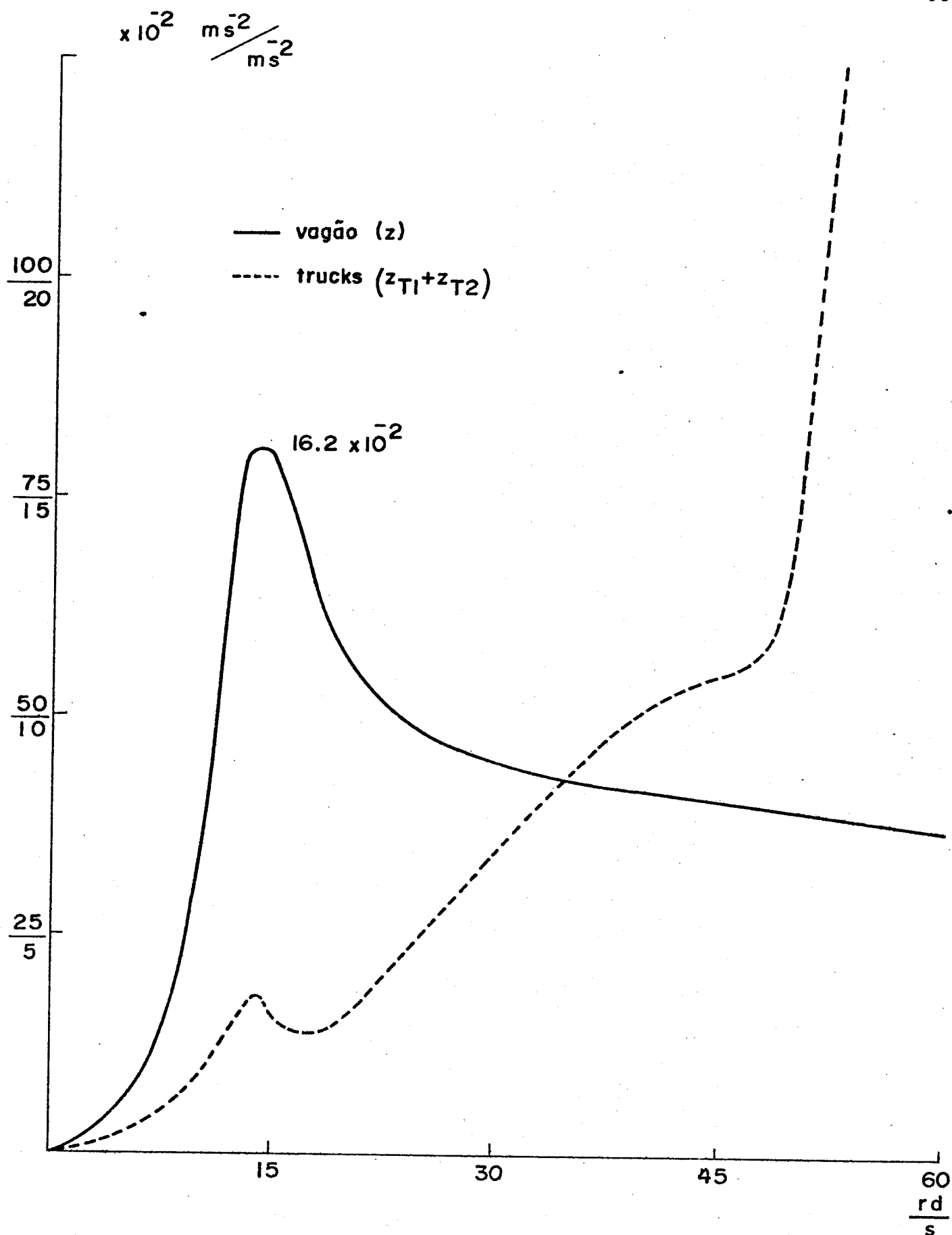


FIG. 23 - Resposta em aceleração do sistema Z , $Z_{T1} + Z_{T2}$ com parâmetros de projeto.

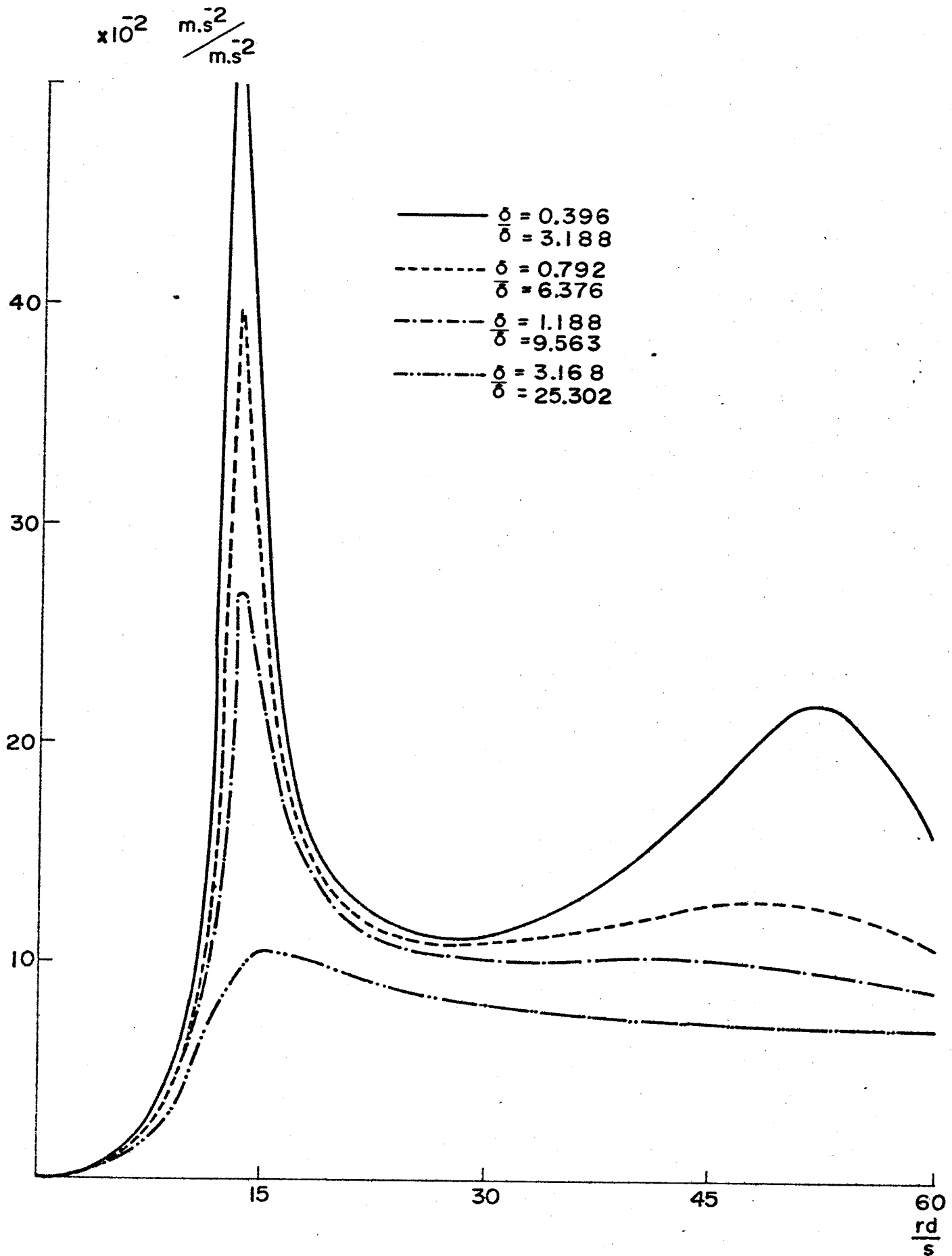


FIG. 24 - Resposta em aceleração do vagão para diversos valores dos fatores de amortecimento de ambas suspensões, supondo a relação $\bar{\delta} / \delta$ constante.

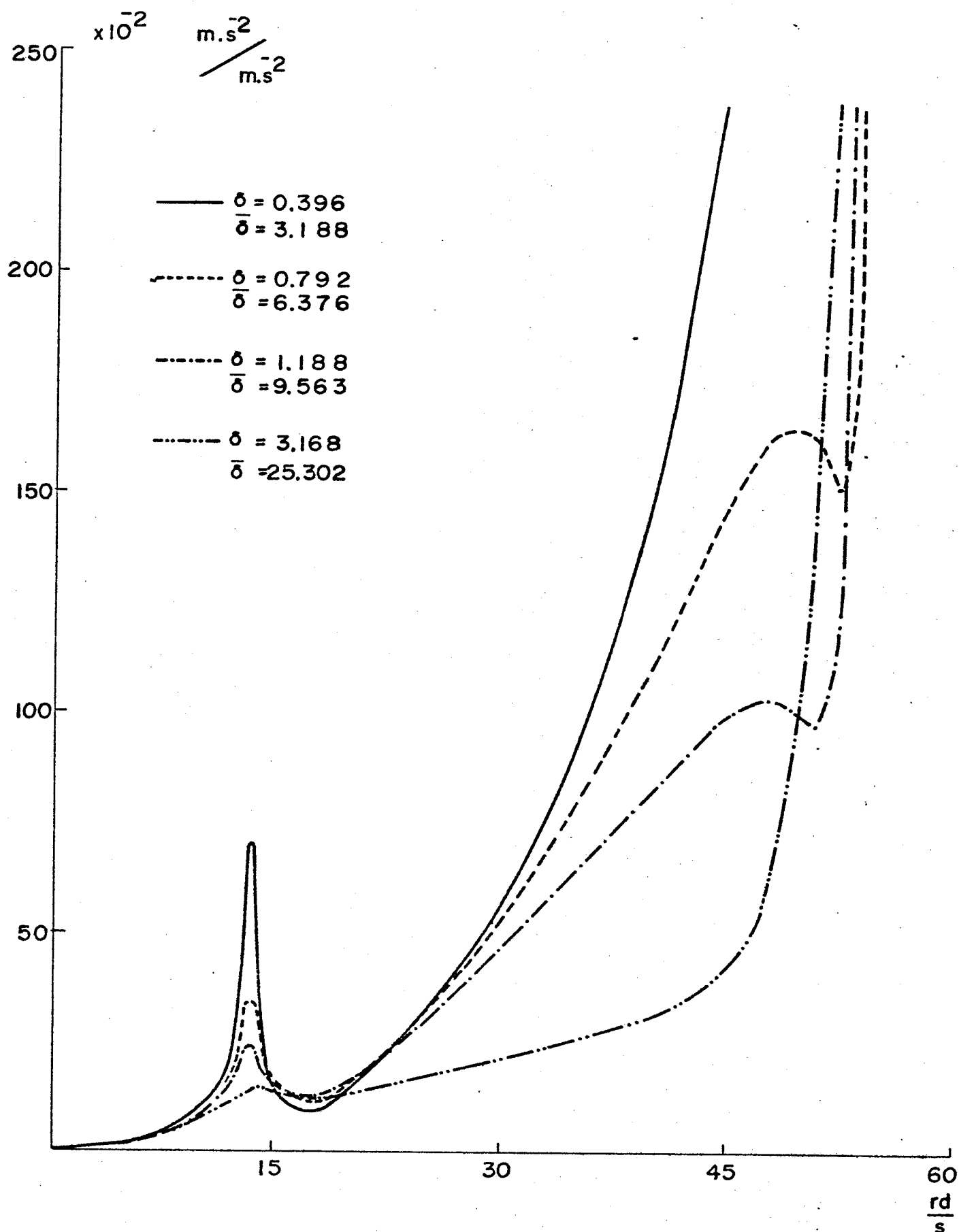


FIG. 25 - Resposta em aceleração dos trucks para diversos valores dos fatores de amortecimento de ambas suspensões, supondo a relação $\bar{\delta}/\delta$ constante.

tudo em particular, e dentro deste estudo tentou-se abordar o problema do modo mais completo possível.

As conclusões obtidas no desenvolvimento do atual capítulo, em um estágio posterior devem ser reanalisados. Isto visa, principalmente, as interações possíveis com outros movimentos, à medida que se for redimensionando o modelo desenvolvido no capítulo II, para que ele reflita o real dentro das mais variadas condições de operação.

As conclusões mais importantes são aqui resumidas e elas se referem, quase que exclusivamente, ao caso da solicitação senoidal, já que ele proporcionou os resultados mais importantes:

- a) Graficamente, através do estudo do grau de estabilidade, verificou-se que os fatores de projeto que mais acentuadamente influíram no comportamento dinâmico do veículo, foram os fatores de amortecimento de ambas as suspensões.
- b) À medida que maiores fatores de amortecimento são usados, a primeira frequência de ressonância do vagão e trucks assumem valores menores.
- c) À medida que maiores fatores de amortecimento são usados, as primeiras amplitudes de ressonância, tanto do vagão como dos trucks, tendem a diminuir, porém, ressalte-se que a segunda amplitude de ressonância dos trucks tende a aumentar.
- d) Para qualquer valor dos fatores de amortecimento, de ambas as suspensões diferentes de zero, observa-se a existência de uma só frequência de ressonância do vagão.

- e) Considerando-se o fator de amortecimento da suspensão secundária nulo, desaparece a segunda frequência de ressonância dos trucks, surgindo um valor nulo de amplitude para a frequência de 16 rd/s.
- f) Para valores pequenos, porém não nulos dos fatores de amortecimento, surge uma frequência de ressonância aparente nos trucks bem próxima da segunda frequência de ressonância.
- g) Um fato bastante curioso obtém-se comparando as Figs. 17 e 18 que representam os diagramas frequência amplitude com parâmetros de projeto e com o fator de amortecimento da suspensão secundária tomado como nulo. Pela análise destas figuras, a menos do valor das amplitudes na frequência em torno de 13 rd/s, o comportamento dinâmico dos trucks é melhor para o caso sem amortecimento. Em outras palavras, isto quer dizer que o uso da suspensão secundária só se justifica por duas razões: diminuição das amplitudes do vagão para frequências de excitação dentro da faixa já citada e pelas amplitudes de aceleração, conforme a Fig. 25, na qual se nota que as amplitudes de aceleração aumentam consideravelmente, à medida que se diminui o amortecimento.
- h) Pelo exposto até aqui, deve-se em um projeto analisar com bastante cuidado não só o comportamento dinâmico do vagão, como também o dos trucks.

Tudo isto que se afirmou, referiu-se ao deslocamento vertical do veículo ferroviário. Com a finalidade de se conhecer mais de perto o comportamento global do veículo, propõe-se um estudo sucinto do movimento de balanço do mesmo.

C A P Í T U L O I V

ALGUNS RESULTADOS PARA O MOVIMENTO DE BALANÇO

Um primeiro resultado sobre o movimento de balanço do veículo sobre trilhos, representado pelo sistema $\phi, \phi_{T1} + \phi_{T2}$, foi relatado através da Fig. 13, onde mostrava-se a influência dos parâmetros de projeto sobre os auto-valores do sistema e se concluiu que a variação sofrida era análoga à ocorrida com o movimento vertical.

Sendo assim, neste capítulo deter-se-á ao estudo dos diagramas frequência-amplitude.

IV.1 - Diagramas Frequência-Amplitude

Analogamente, à dedução de (75) que representava o movimento vertical do vagão, chega-se à:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi}_{T1} + \ddot{\phi}_{T2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\delta \ell_2^2}{\rho_1^2} & \frac{-\delta \ell_2 L}{2 \rho_1^2} \\ \frac{-\delta \mu \ell_2 L}{\rho_{1T}^2} & \frac{L^2}{\rho_{1T}^2} \left(\bar{\delta} + \frac{\delta \mu}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi}_{T1} + \ddot{\phi}_{T2} \end{Bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} \frac{\gamma \ell_2^2}{\rho_1^2} & \frac{-\gamma \ell_2 L}{2 \rho_1^2} \\ \frac{-\gamma \mu \ell_2 L}{\rho_{1T}^2} & \frac{L^2}{\rho_{1T}^2} \left(\bar{\gamma} + \frac{\gamma \mu}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \phi_{T1} + \phi_{T2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (M_{E_I}^-)_\xi + (M_{E_{II}}^-)_\xi \end{Bmatrix} \quad (159)$$

Pelo desenvolvimento já mostrado através das equações (141) a (157), chega-se a uma expressão análoga a (158), que depende dos valores numéricos estabelecidos quando da dedução de (68).

Procedendo-se do mesmo modo, obteve-se como resultado as Figs. 26 e 27, que representam, respectivamente:

- a) resposta do sistema para os valores pré-estabelecidos (vide dedução de (68))
- b) resposta para $\delta = \bar{\delta} = 0$

Pela análise das Figs. 26 e 27, pode-se notar que o comportamento dinâmico do sistema $\phi, \phi_{T1} + \phi_{T2}$ é bastante semelhante ao apresentado pelo sistema $Z, Z_{T1} + Z_{T2}$, de modo que se chega, praticamente, às mesmas conclusões já citadas. Ressalta-se aqui, mais uma vez, que o vagão possuirá uma só frequência de ressonância para quaisquer valores de amortecimento de ambas as suspensões, não nulos, frequência esta ao redor de 8,5 rd/s.

Nota-se aqui, também, a tendência de se anular a amplitude dos trucks para uma frequência logo adiante da frequência de ressonância, ou seja, na faixa de 10 rd/s.

IV.2 - Conclusões

A não inclusão de um maior número de curvas características do movimento de balanço do veículo, representado pelo sistema $\phi, \phi_{T1} + \phi_{T2}$, deve-se ao fato de que, se o comportamento é semelhante ao do deslocamento vertical, ter-se-ia que repetir aqui todas as conclusões já citadas. Sendo assim, deve-se salientar somente o seguinte:

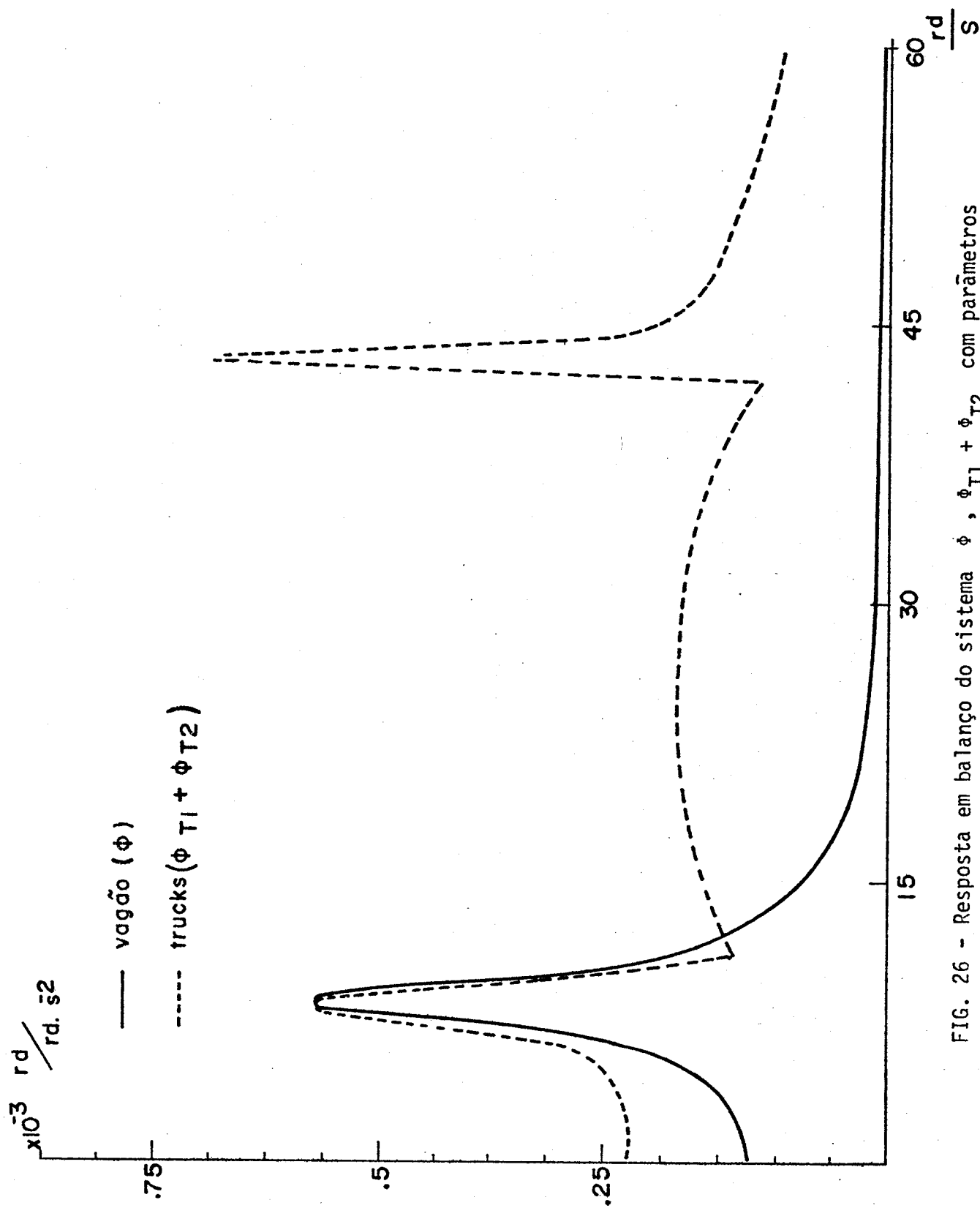


FIG. 26 - Resposta em balanço do sistema ϕ , $\phi T_1 + \phi T_2$ com parâmetros de projeto.

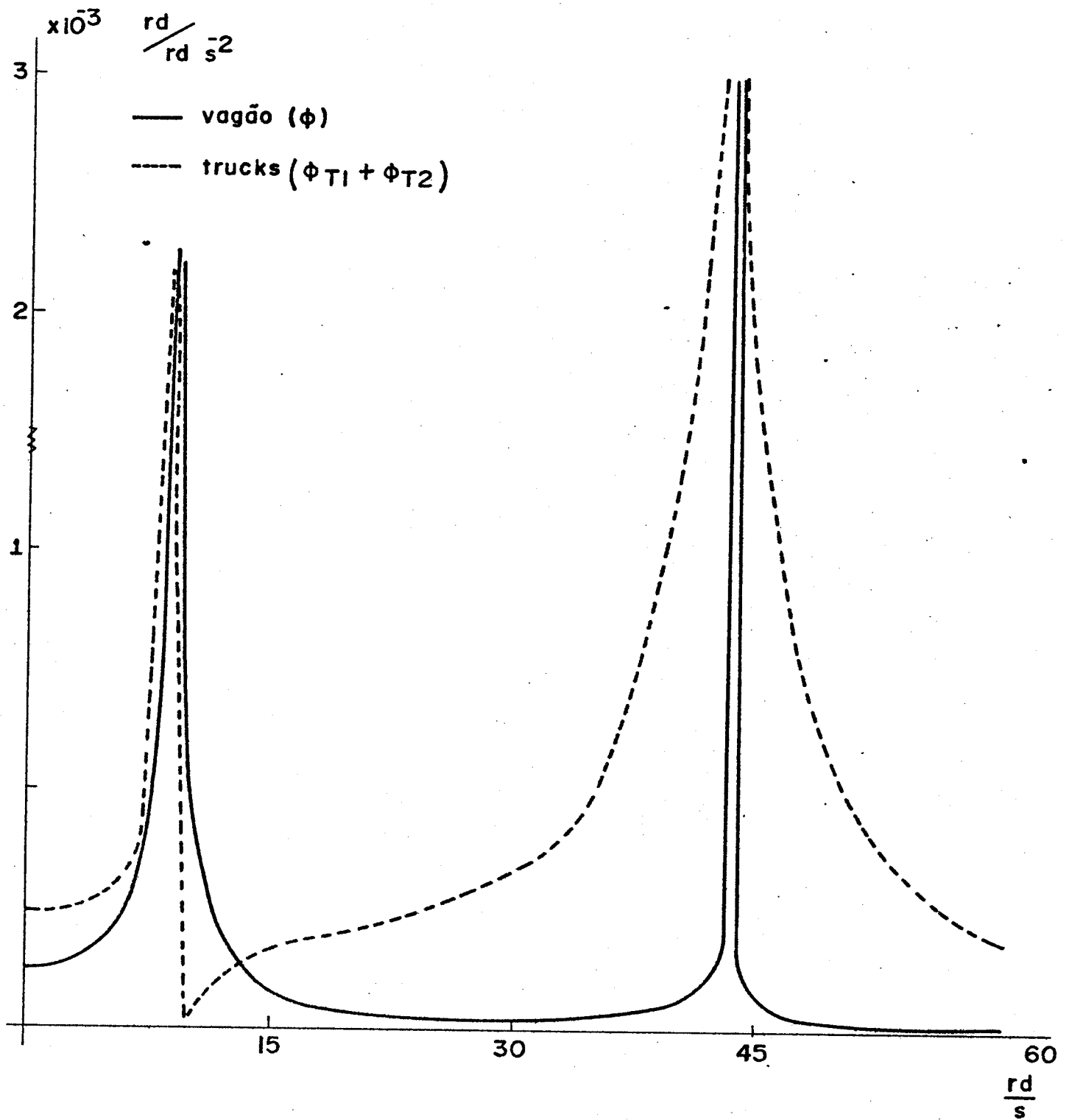


FIG. 27 - Resposta em balanço do sistema ϕ , $\phi_{T1} + \phi_{T2}$ com amortecimento de ambas suspensões supostos nulos.

- a) São válidas, sem restrições, as conclusões (a), (b), (c) e (d), citadas no item III.6.
- b) Considerando-se os fatores de amortecimento das duas suspensões nulos, tem-se a segunda frequência de ressonância do vagão e um valor quase nulo da amplitude dos trucks para a frequência de 10 rd/s.
- c) Para valores não nulos dos fatores de amortecimento de ambas as suspensões, surge uma frequência de ressonância aparente nos trucks próxima da segunda frequência de ressonância, e que se afasta para valores mais baixos à medida que os amortecimentos crescem.

B I B L I O G R A F I A

- | 1 | Diboll, W.B. e Bieniecki, H. S. - "Suspension Dynamics by Computer Simulation" , Proceedings of ASME-IEEE Railroad Conference, Chicago, March 27-28, 1968, pp. 205 - 214.

- | 2 | Law, E. H. e Cooperrider, N. K. - "A Survey of Railway Vehicle Dynamic Research", Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, June 1974, pp. 132 - 146.

- | 3 | Wickens, A. H. - "Vehicle Dynamics and Wheel-Rail Interface Problems" , Proceedings of the Carnegie-Mellon Conference on High-Speed Ground Transportation, Pittsburgh, Pa., 1969, pp. 157 - 171.

- | 4 | Newland, D. E. - "Steering Characteristics of Bogies", The Railway Gazette, Oct. 4, 1958, pp. 745 - 750.

- | 5 | Newland, D. E. - "Steering a Flexible Railway Truck on Curved Track", Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Series B, Vol. 91, n° 3 , Aug. 1969, pp. 908 - 918.

- | 6 | Boocock, D. - "The Equations of Motion of an Elastically Restrained - Wheelset on Curved Track and Preliminary Study of Steady State-Motion" , DYN/35, Aug. 1966, British Railways Research Dept., Derby, England.

- | 7 | Boocock, D. - "The Steady State Performance of Experimental Four-Wheeled Vehicle HSFV 1 on Curved Track", DYN/51, Feb. 1967, British Railways Research Department, Derby, England.

- | 8 | Nayak, P. R. - "Contact Vibrations of a Wheel on a Rail", Journal of Sound and Vibration, 1973, Vol. 28, pp. 277 - 293.

- | 9 | Carstens, J. P. and Kresge, D. - "Literature Survey of Passenger Comfort Limitations of High Speed Ground Transports", D-910353-1, July 1965, United Aircraft Research Laboratories, East Hartford, Conn.

- | 10 | Cooperrider, N. K. - "Secondary Suspension Requirements for Tracked Vehicles", High Speed Ground Transportation Journal, Vol. 3, n° 2, May 1969 , pp. 255 - 267

- | 11 | Batchelor, G. H. - "Determination of Vehicle Riding Properties", The Railway Gazette, July 28, 1962, pp. 97 - 100.

- | 12 | Hurley, F. J.; Goesser, J. N.; Koch, B. R. e McConnell, P. J. - "Railroad Research Field Testing, Progress Report 1", Melpar, Inc. Dec. 1968.

- | 13 | Koci, L. F. - "Wheel and Rail Loading from Diesel Locomotives", Proceedings of Conference on Track-Train Dynamics Interaction Association of American Railroads, Chicago, Ill., Dec. 1971, pp. 11 - 61.

- | 14 | Lind, E. F.; Ten Broeck, H. e Nations, H. - "Application of Rail-Vehicle Dynamic Analyses to Train Operation", Proceedings on Conference on Track-Train Dynamics Interaction, Association of American Railroads, Chicago , Ill., Dec. 1971, pp. 683 - 713.

- | 15 | "Proceedings of Conference on Adhesion" , Institution of Mechanical Engineers, London, 1963.

- | 16 | Matsudaira, T.; Matsui, N.; Arai, S.; Yokose, K. - "Problems on Huting - of Railway Vehicle on Test Stand", Anthology of Rail Vehicle Dynamics , ASME, 1972, pp. 227 - 239.

- | 17 | Lin, H. S. e Marsh. E. L. - "Analysis of Morgantown Vehicle Steering Control", Jet Propulsion Laboratory Quartely Technical Review, Vol. 2, nº1, Apr. 1972, pp. 58 - 71.

- | 18 | Benington, C. K. - "The Railway Wheelset and Suspension Unit as a Closed Loop Guidance Control System: A Method for Performance Improvement", - Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 10, nº 2, 1968.

- | 19 | Cannon, R. H. - "Dynamics of Phisical Systems", McGraw-Hill, Inc., Tokyo, 1967, pp. 4 - 8.

- | 20 | Leipholz, H. - "Stability Theory", Academic Press, New York, 1970, pp. 35 - 36.

- | 21 | Meirovitch, L. - "Analytical Methods in Vibrations", The MacMillan Company, New York, 1967, pp. 410 - 429.

- | 22 | Müller, P. C. e Schiehlen, W. - "Lineare Schwingungen", Akaden-Verlag, Frankfurt, 1975, pp. 69 - 71.

- | 23 | Westlake, J. R. - "A Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations", John Wiley of Sons, Inc., New York , 1968, pp. 30-31.