



William Camilo Ariza Zambrano

# **Controle Ativo de Vibrações usando Redes Neurais Artificiais**

101/2013

CAMPINAS  
2013

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

William Camilo Ariza Zambrano

**Controle Ativo de Vibrações  
Usando Redes neurais Artificiais**

Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL  
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO William  
Camilo Ariza Zambrano, E ORIENTADO PELO PROF.  
DR. Alberto Luiz Serpa.

  
.....  
ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS  
2013

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

Ar47c Ariza Zambrano, William Camilo, 1989-  
Controle ativo de vibrações usando redes neurais artificiais / William Camilo  
Ariza Zambrano. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Alberto Luiz Serpa.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de  
Engenharia Mecânica.

1. Vibração - Controle. 2. Redes neurais artificiais. 3. Identificação de sistemas.  
I. Serpa, Alberto Luiz, 1967-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Active vibration control using artificial neural networks

**Palavras-chave em inglês:**

Vibration control

Artificial neural networks

Identification system

**Área de concentração:** Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

**Titulação:** Mestre em Engenharia Mecânica

**Banca examinadora:**

Alberto Luiz Serpa [Orientador]

Ely Carneiro de Paiva

Alexander Mattioli Pasqual

**Data de defesa:** 10-10-2013

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

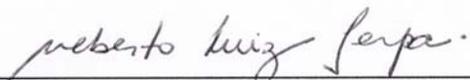
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO**

**Controle Ativo de Vibrações**  
**Usando Redes neurais Artificiais**

Autor: William Camilo Ariza Zambrano

Orientador: Alberto Luiz Serpa

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



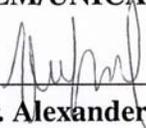
---

**Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, Presidente**  
**DMC/FEM/UNICAMP**



---

**Prof. Dr. Ely Carneiro de Paiva**  
**DPM/FEM/UNICAMP**



---

**Prof. Dr. Alexander Mattioli Pasqual**  
**DEM/UFMG**

Campinas, 10 de Outubro de 2013.

## **Dedicatória**

Aos meus pais, Ana Cecilia e William José, que são o motor da minha vida.

## Agradecimentos

Primeiramente, aos meus pais, meu maior orgulho, minha fonte de força e inspiração.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, pela oportunidade que me deu de viver essa experiência tão importante na minha vida. Pela confiança, seu apoio e incentivo constantes neste período.

Aos membros das bancas de qualificação e defesa, Prof. Dr. Niederauer Mastelari, Prof. Dr. Ely Carneiro de Paiva e Prof. Dr. Alexander Mattioli Pasqual, pelos questionamentos e contribuições à este trabalho.

À minha família, que mesmo estando longe, sempre estiveram do meu lado. Aos meus pais agradecimentos infinitos, às minhas irmãs, Andrea e Karem, que me apoiaram em cada momento desta etapa na minha vida. Aos meus sobrinhos, Daniela e Samuel, pois só pensar no sorriso deles é motivo suficiente para me acordar e dar o melhor de mim a cada dia.

Aos meus amigos todos. A Álvaro J. Uribe, Jenny Lombo e Manuel Arcila pelas orientações indispensáveis que me deram antes e quando cheguei neste maravilhoso país. A Beto, o meu primeiro amigo brasileiro, grande pessoa, muito obrigado pelo apoio e ensino constante. A Germán Gonzáles e Andrés Puerto, grandes amigos, grandes histórias. A Oscar Rojas, Paola Gonzales, Germán Castañeda e Diana Martinez, boas lembranças, viagens inesquecíveis. A Miguel Cárdenas, pelo apoio e amizade incondicionais. A Ana Luisa Soubhia pela sua valiosa amizade e pela sua importantíssima ajuda em vários momentos. E finalmente, a María Fernanda Rodríguez, pessoa maravilhosa, dando-me força a cada dia, ajudando-me a cada momento, sem a sua ajuda não teria alcançado esta conquista.

A todos os meus amigos e familiares de quem eu possa não ter lembrado de colocar o nome aqui. São muitas as grandes pessoas que eu conheci aqui e tiveram a ver com este processo. Muito obrigado a todos.

Ao Programa de Apoio ao Ensino e à Pesquisa Científica e Tecnológica em Engenharias (Pró-Engenharias/CAPES) pelo indispensável apoio financeiro.

*"Aquele que tem uma razão para viver  
pode suportar quase tudo"*

---

Friedrich Nietzsche

## Resumo

ARIZA ZAMBRANO, William Camilo. Controle ativo de vibrações usando redes neurais artificiais. 2013. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo de um método de controle baseado no uso de redes neurais artificiais aplicado ao problema de controle de vibrações em estruturas flexíveis. Este trabalho centra-se no estudo do esquema de controle inverso-direto, que consiste em identificar a dinâmica inversa da planta através de uma rede neural artificial para ser usada como controlador. Três exemplos de aplicação foram resolvidos utilizando-se controladores projetados com o método inverso-direto. A primeira aplicação é o controle de vibrações em uma estrutura mecânica de parâmetros concentrados. O segundo exemplo de aplicação é o controle de vibrações de uma placa engastada em uma de suas extremidades. Neste caso, a placa engastada foi modelada utilizando-se o método de elementos finitos. No seguinte exemplo, o modelo da placa usado no exemplo anterior foi reduzido, deixando apenas os primeiros modos de vibração. No último exemplo tratou-se o problema de controle não colocado das vibrações em uma placa engastada. Os resultados foram analisados a partir da resposta temporal e da resposta em frequência do sistema em malha fechada. Para comparar os resultados obtidos utilizando-se o método de controle baseado em redes neurais artificiais, os exemplos citados anteriormente foram também resolvidos utilizando-se o método de controle  $\mathcal{H}_\infty$ . Os resultados obtidos demonstram que o método de controle baseado em modelo inverso usando redes neurais foi eficaz na resolução deste tipo de problema.

*Palavras-chave:* Controle de vibrações, Redes neurais artificiais, Identificação de sistemas.

## Abstract

ARIZA ZAMBRANO, William Camilo. Active vibration control using artificial neural networks. 2013. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

The goal of this work is to study a control method based on artificial neural networks applied to the vibration control of flexible structures problem. This work focuses in the direct-inverse control scheme which consists of identifying the inverse dynamics of the plant through an artificial neural network to be used as the controller. Three application examples using the direct-inverse method were solved. The first application is the vibration control in a mechanical structure of concentrated parameters. The second application example is the vibration control of a cantilever plate. The cantilever plate was modeled using the finite elements method. In the third example, a reduction of the cantilever plate model was made. In the last example a non-collocated control problem of vibration in a cantilever plate was treated. The results of the scheme were evaluated according to the temporal response and the frequency response of the closed-loop system. In order to compare the results obtained using the control method based on artificial neural networks, the previous examples were also solved using the  $\mathcal{H}_\infty$  control method. The obtained results show that the control method based on inverse model using neural networks was effective in solving this kind of problem.

*Keywords:* Vibration control, Artificial neural networks, Identification system.

## Lista de Ilustrações

2.1	Diagrama do modelo de um neurônio . . . . .	9
2.2	Funções de ativação do neurônio . . . . .	10
2.3	Rede de perceptron multicamada . . . . .	11
2.4	Esquema de treinamento da RNA . . . . .	12
3.1	Esquema de controle utilizando o modelo inverso . . . . .	17
3.2	Esquema de identificação do modelo inverso . . . . .	18
3.3	Estrutura do neuro-controlador . . . . .	19
3.4	Visualização das predições - Caso 1 . . . . .	22
3.5	Visualização das predições - Caso 2 . . . . .	23
3.6	Esquema de controle inverso-direto . . . . .	24
4.1	Esquema de controle em malha fechada . . . . .	31
4.2	Sistema massa-mola-amortecedor . . . . .	32
4.3	Resposta em frequência do sistema massa-mola-amortecedor . . . . .	35
4.4	Respostas em frequência do sistema massa-mola-amortecedor contínuo e discretizado	36
4.5	Esquema placa engastada em uma das extremidades - Caso do esquema de controle colocado . . . . .	37
4.6	Malha de elementos finitos da placa engastada sem escala. . . . .	38
4.7	Resposta em frequência da placa engastada - Caso do esquema de controle colocado	40
4.8	Resposta em frequência do modelo da placa engastada discretizado - Caso do es- quema de controle colocado . . . . .	41
4.9	Resposta em frequência do modelo reduzido da placa engastada - Caso do esquema de controle colocado . . . . .	43
4.10	Resposta em frequência do modelo reduzido da placa engastada discretizado - Caso do esquema de controle colocado . . . . .	43
4.11	Esquema placa engastada em uma das extremidades - Caso do esquema de controle não colocado . . . . .	44
4.12	Malha de elementos finitos da placa engastada sem escala - Caso do esquema de controle não colocado . . . . .	45
4.13	Resposta em frequência da placa engastada - Caso do esquema de controle não colocado . . . . .	46

4.14	Comparação da resposta em frequência dos dois casos (colocado e não colocado) da placa engastada . . . . .	47
4.15	Resposta em frequência do modelo da placa engastada discretizado - Caso do esquema de controle não colocado . . . . .	47
4.16	Exemplo de mudança de nível em instâncias aleatórias ( $\alpha = 0.6$ ) . . . . .	49
4.17	Exemplo de mudança de nível em instâncias aleatórias ( $\alpha = 0.9$ ) . . . . .	50
5.1	Sinal de excitação do sistema na fase de treinamento . . . . .	52
5.2	Sinal de saída do sistema na fase de treinamento . . . . .	53
5.3	Evolução do erro quadrático médio na fase de treinamento . . . . .	53
5.4	Visualização das previsões . . . . .	54
5.5	Resposta em frequência sistema massa-mola-amortecedor, sistema controlado (RNA) e sistema controlado ( $\mathcal{H}_\infty$ ) . . . . .	55
5.6	Resposta temporal da estrutura massa-mola-amortecedor não controlada . . . . .	55
5.7	Resposta temporal da estrutura massa-mola-amortecedor controlada com $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	56
5.8	Resposta temporal da estrutura massa-mola-amortecedor controlada com RNA . . . . .	56
5.9	Sinal de controle gerado pelo controlador $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	57
5.10	Sinal de controle gerado pelo neuro-controlador . . . . .	57
5.11	Sinal de excitação do sistema na fase de treinamento . . . . .	58
5.12	Sinal de saída do sistema na fase de treinamento . . . . .	59
5.13	Evolução do erro quadrático médio na fase de treinamento . . . . .	59
5.14	Evolução do erro quadrático médio na fase de treinamento . . . . .	60
5.15	Resposta em frequência da placa engastada (caso colocado), sistema controlado (RNA) e sistema controlado ( $\mathcal{H}_\infty$ ) . . . . .	60
5.16	Resposta temporal da placa engastada (caso colocado) não controlada . . . . .	61
5.17	Resposta temporal da placa engastada (caso colocado) controlada com $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	62
5.18	Resposta temporal da placa engastada (caso colocado) controlada com RNA . . . . .	62
5.19	Sinal de controle gerado pelo controlador $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	63
5.20	Sinal de controle gerado pelo neuro-controlador . . . . .	63
5.21	Sinal de excitação do sistema na fase de treinamento . . . . .	64
5.22	Sinal de saída do sistema na fase de treinamento . . . . .	65
5.23	Evolução do erro quadrático médio na fase de treinamento . . . . .	65
5.24	Evolução do erro quadrático médio na fase de treinamento . . . . .	66
5.25	Resposta em frequência da placa engastada (modelo reduzido do caso colocado), sistema controlado (RNA) e sistema controlado ( $\mathcal{H}_\infty$ ) . . . . .	66

5.26	Resposta temporal da placa engastada (modelo reduzido do caso colocado) não controlada . . . . .	67
5.27	Sinal de controle gerado pelo controlador $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	68
5.28	Resposta temporal do da placa engastada (modelo reduzido do caso colocado) controlada com $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	68
5.29	Sinal de controle gerado pelo neuro-controlador . . . . .	69
5.30	Resposta temporal da placa engastada (modelo reduzido do caso colocado) controlada com RNA . . . . .	69
5.31	Sinal de excitação do sistema na fase de treinamento . . . . .	70
5.32	Sinal de saída do sistema na fase de treinamento . . . . .	71
5.33	Evolução do erro quadrático médio na fase de treinamento . . . . .	71
5.34	Visualização das previsões . . . . .	72
5.35	Resposta em frequência da placa engastada (caso não colocado), sistema controlado (RNA) e sistema controlado ( $\mathcal{H}_\infty$ ) . . . . .	73
5.36	Resposta temporal da placa engastada (caso não colocado) não controlada . . . . .	73
5.37	Resposta temporal da placa engastada (caso não colocado) controlada com $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	74
5.38	Resposta temporal da placa engastada (caso não colocado) controlada com RNA . . . . .	74
5.39	Sinal de controle gerado pelo controlador $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	75
5.40	Sinal de controle gerado pelo neuro-controlador . . . . .	75
5.41	Comparação dos resultados do sistema massa-mola-amortecedor controlado com $\mathcal{H}_\infty$ e controlado com RNA . . . . .	76
5.42	Comparação dos resultados da placa engastada (modelo de ordem completa) controlada com $\mathcal{H}_\infty$ e controlado com RNA . . . . .	77
A.1	Esquema do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	88
B.1	Elemento de placa retangular . . . . .	94
B.2	Placa discretizada em dos elementos . . . . .	99

## Lista de Algoritmos

2.1	Calculo da saída da rede MLP . . . . .	12
3.1	Simulação em malha fechada . . . . .	25
3.2	Passo 1 - Dados treinamento-validação . . . . .	27
3.3	Passo 2 - Estrutura da RNA . . . . .	27
3.4	Passo 3 -Treinamento da RNA . . . . .	27
3.5	Passo 4 - Validação da RNA . . . . .	28

## Lista de Tabelas

2.1	Principais características de alguns algoritmos de otimização (Yu e Wilamowski, 2011) . . . . .	14
4.1	Dados dos modos de vibração da estrutura massa-mola-amortecedor . . . . .	34
4.2	Dados dos primeiros modos de vibração da placa engastada - Caso 1 . . . . .	40
4.3	Dados dos modos de vibração da placa engastada (modelo reduzido) - Caso do esquema de controle colocado . . . . .	42
5.1	Comparação das normas $\mathcal{H}_\infty$ dos sistemas . . . . .	78

## Lista de Abreviaturas e Siglas

### Notação

No presente documento as letras maiúsculas em negrito denotam matrizes e letras minúsculas em negrito representam vetores. Letras em fonte normal são escalares.

<b>I</b>	- Matriz identidade
<b>A</b> <sup>T</sup>	- Matriz transposta de <b>A</b>
<b>M</b>	- Matriz de massas
<b>K</b>	- Matriz de rigidezes
<b>C</b>	- Matriz de amortecimento
$\sigma^2$	- Variância. Medida da dispersão estatística de uma variável
$\textcircled{i}$	- Nó <i>i</i>
<i>s</i>	- Variável do domínio da transformada de Laplace
<i>z</i>	- Variável do domínio da transformada $\mathbb{Z}$
<i>j</i>	- Unidade imaginária ( $j = \sqrt{-1}$ )
$\ G(s)\ _\infty$	- Norma $\mathcal{H}_\infty$ da função $G(s)$

### ***Siglas***

- LQG** - Linear Quadrático Gaussiano (*Linear Quadratic Gaussian*)
- LQR** - Regulador Linear Quadrático (*Linear Quadratic Regulator*)
- RNA** - Redes Neurais Artificiais
- MLP** - Perceptron Multi-Camada (*Multi-Layer Perceptron*)
- PRBS** - Sequência Binária Pseudo-Aleatória (*Pseudo-Random Binary Sequence*)
- SVD** - Decomposição em Valore Singulares (*Singular Value Decomposition*)
- zoh* - Segurador de ordem zero (*Zero-Order Holder*)
- MIMO** - Múltiplas Entradas Múltiplas Saídas (*Multiple-Input Multiple-output*)
- SISO** - Entrada Única Saída Única (*Single-Input Single-output*)

### ***Unidades de medição***

- [*m*] - Metro - Medida de comprimento
- [*N*] - Newton - Medida de força
- [ $\frac{N}{m}$ ] - Newton sobre metro - Medida de rigidez
- [*s*] - Segundo - Medida de tempo
- [*Hz*] - Hertz - Medida de frequência
- [*rad*] - Radiano - Medida angular
- [*dB*] - Decibel - Medida de energia ou intensidade

# SUMÁRIO

<b>Lista de Ilustrações</b>	<b>xvii</b>
<b>Lista de Algoritmos</b>	<b>xxi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xxiii</b>
<b>Lista de Abreviaturas e Siglas</b>	<b>xxv</b>
<b>SUMÁRIO</b>	<b>xxix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	2
1.2 Revisão bibliográfica . . . . .	3
1.2.1 Controle de vibrações . . . . .	3
1.2.2 Controle com redes neurais . . . . .	5
Métodos de projeto direto . . . . .	5
Métodos de projeto indireto . . . . .	6
1.2.3 Modelagem de estruturas flexíveis . . . . .	7
1.3 Objetivos . . . . .	7
1.4 Organização do trabalho . . . . .	8
<b>2 Redes neurais artificiais em sistemas de controle</b>	<b>9</b>
2.1 Noções gerais . . . . .	9
2.2 Fase de treinamento . . . . .	11
2.2.1 Problema de otimização . . . . .	12
2.2.2 Sinal de entrada . . . . .	14
<b>3 Projeto neuro-controlador inverso-direto</b>	<b>17</b>
3.1 Introdução . . . . .	17
3.2 Projeto do controlador . . . . .	18
3.2.1 Estrutura do neuro-controlador . . . . .	18
3.2.2 Conjuntos de treinamento-validação . . . . .	20

3.2.3	Fase de treinamento . . . . .	20
3.2.4	Fase de validação . . . . .	22
3.2.5	Fechamento da malha de controle . . . . .	23
3.2.6	Respostas em malha fechada . . . . .	24
3.3	Resumo do procedimento de projeto do controlador . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Controle de sistemas dinâmicos</b>	<b>29</b>
4.1	Descrição do modelo . . . . .	29
4.2	Definição do problema de controle . . . . .	31
4.3	Problemas de aplicação . . . . .	31
4.3.1	Sistema massa-mola-amortecedor . . . . .	32
	Modelo do sistema . . . . .	32
	Discretização do modelo . . . . .	35
4.3.2	Placa engastada 1 . . . . .	36
	Modelo do sistema . . . . .	37
	Discretização do modelo . . . . .	39
4.3.3	Placa engastada 1 com redução de modelo . . . . .	41
	Truncamento do modelo . . . . .	42
	Discretização do modelo . . . . .	42
4.3.4	Placa engastada 2 . . . . .	44
	Modelo do sistema . . . . .	45
	Discretização do modelo . . . . .	46
4.4	Projeto do neuro-controlador . . . . .	46
4.4.1	Estrutura do neuro-controlador . . . . .	48
4.4.2	Sinal de excitação . . . . .	48
4.4.3	Algoritmo de otimização . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>51</b>
5.1	Estrutura massa-mola-amortecedor . . . . .	52
5.2	Placa engastada 1 . . . . .	58
5.3	Placa engastada (modelo reduzido) . . . . .	64
5.4	Placa engastada 2 . . . . .	70
5.5	Análise de resultados . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>79</b>

<b>Referências</b>	<b>81</b>
<b>APÊNDICES</b>	<b>86</b>
<b>A Controladores <math>\mathcal{H}_\infty</math></b>	<b>87</b>
A.1 Introdução . . . . .	87
A.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	87
A.3 Formulação do problema $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	88
<b>B Método de elementos finitos</b>	<b>93</b>
B.1 Introdução ao método . . . . .	93
B.2 Placa retangular em flexão . . . . .	93
B.2.1 Matriz de rigidez do elemento . . . . .	94
B.2.2 Matriz de massa do elemento . . . . .	95
B.2.3 Montagem das matrizes globais . . . . .	99

# 1 Introdução

Os sistemas mecânicos compostos de massa, rigidez e amortecimento apresentam uma resposta vibratória quando estão sujeitos a distúrbios variantes no tempo. A previsão e o controle do comportamento na presença desses distúrbios é fundamental para o projeto e operação de equipamentos mecânicos e estruturas (Fuller *e outros*, 1996). O controle ativo de vibrações utiliza a sobreposição de ondas através da geração de um sinal secundário para atenuar a fonte indesejada, resultando assim em uma redução no nível de vibração no local desejado. Em geral, o controle ativo de vibrações é mais eficiente do que os métodos passivos de supressão de vibrações (Darus e Tokhi, 2005).

São inúmeras as áreas nas quais o problema de controle de vibrações tem uma especial importância. Por exemplo, existem aplicações de controle de vibrações na área de veículos terrestres (Hrovat, 1990; Ikbal Eski, 2009), veículos aéreos (Hirsch, 1992; Yong *e outros*, 2003), veículos marítimos (Lin *e outros*, 2009) e submarinos (Caresta, 2011); na área de engenharia civil (Soong, 1988; Yang e Soong, 1988); na área de acústica (Chen *e outros*, 2008), entre outras.

Na literatura, diferentes abordagens são encontradas para a solução do problema de controle de vibrações em estruturas flexíveis. Algumas das técnicas mais usadas são: o controle ótimo LQG (Lim *e outros*, 1991; Banavar e Dominic, 1995), controladores  $\mathcal{H}_2$  (Lublin e Athans, 1994) e controladores robustos  $\mathcal{H}_\infty$  (Sznaier e Rotstein, 1992; Moser, 1993; Smith *e outros*, 1994). Um crescente grupo de técnicas usadas na solução deste tipo de problemas são as técnicas de inteligência artificial, dentre as quais pode-se destacar o uso de redes neurais artificiais (Bittanti e Piroddi, 1993; Gates *e outros*, 1993; Fuli *e outros*, 1997; De Abreu *e outros*, 2000; Faouzi *e outros*, 2004; Lin e Lin, 2002; Tavakolpour *e outros*, 2010), controladores de lógica *fuzzy* (Forrai *e outros*, 2000) e algoritmos genéticos (Kundu *e outros*, 2002).

Recentemente, o uso de redes neurais artificiais em problemas de controle de vibrações tem atraído o interesse de pesquisadores. As redes neurais artificiais são modelos matemáticos que, no sentido genérico, podem aprender mapeamentos não lineares a partir de um conjunto de observações (Nørgaard *e outros*, 2004). A capacidade das redes neurais de modelar um vasto número de tipos de sistemas em diferentes aplicações pode reduzir o tempo gasto em desenvolvimento dos sistemas de controle, além de, em alguns casos, oferecer melhores desempenhos do que outras técnicas de controle.

Neste trabalho, o problema de controle de vibrações em estruturas flexíveis usando redes neurais artificiais é tratado usando uma técnica baseada no modelo inverso do sistema. O esquema de controle por modelo inverso trata da identificação da dinâmica inversa da planta para ser usada como controlador. Se o modelo inverso pode ser identificado por uma rede neural artificial, este, teoricamente, torna-se o controlador ideal. Esta técnica que pode ser considerada simples em termos de formulação e de generalização, pode ser aplicada a um amplo número de problemas de controle, por exemplo, esta técnica é útil em problemas onde não se possui um modelo do sistema ou a sua obtenção é muito difícil. Também podem ser tratados problemas com sistemas não lineares.

A fim de avaliar o desempenho deste tipo de controlador, neste trabalho foram tratados quatro exemplos de aplicação, onde, para os quatro casos, a rede neural artificial identifica o modelo inverso do sistema a partir de dados de simulações do modelo. Posteriormente, a rede neural artificial obtida é usada como controlador no fechamento da malha de controle. O primeiro exemplo de aplicação é o controle de vibrações em um sistema massa-mola-amortecedor. No segundo exemplo trata-se o controle de vibrações em uma placa engastada em uma das suas extremidades. No terceiro exemplo, uma redução do modelo da placa engastada obtido no exemplo anterior é feita. E por fim, no quarto exemplo, propõe-se um problema de controle não colocado afim de atenuar as vibrações causadas por um distúrbio em uma placa engastada.

## **1.1 Motivação**

A principal motivação do uso de redes neurais em sistemas de controle é que as redes neurais tem uma grande capacidade de aproximar mapeamentos de sistemas aplicados a problemas de identificação e controle de sistemas (Kather, 1998). As redes neurais artificiais oferecem uma alternativa à solução de problemas de engenharia onde não se possui um modelo do sistema ou a obtenção do modelo representa um trabalho considerado difícil.

Uma outra motivação é que existem modelos de redes neurais artificiais que são capazes de aprender com a experiência (Nørgaard *e outros*, 2004). Assim, trata-se a possibilidade de que a experiência possa ser interpretada como conhecimento de como o sistema é afetado quando são aplicadas certas entradas variantes no tempo ou a possibilidade de tratar problemas de controle com sistemas variantes no tempo.

Como dito anteriormente, neste trabalho é estudado o controle por modelo inverso baseado em redes neurais artificiais. Explora-se o desempenho destes tipos de controladores, que teoricamente são ideais, aplicados a problemas de controle de vibrações em estruturas mecânicas.

## 1.2 Revisão bibliográfica

Nesta sessão, três tópicos gerais serão introduzidos: controle de vibrações, controle neural e modelagem de estruturas flexíveis.

### 1.2.1 Controle de vibrações

Como mencionado no início deste capítulo, algumas das técnicas de frequente uso na solução do problema de controle de vibrações encontradas na literatura são: o controle  $\mathcal{H}_\infty$ , o controle  $\mathcal{H}_2$ , o controle  $\mathcal{H}_\infty$  combinado com outras técnicas tais como o controle LQG (Gawronski, 2004; Zhou, 1998). Além disso, pesquisas mais recentes estão abordando o uso de técnicas de inteligência artificial tais como: controle com redes neurais artificiais, o controle com lógica *fuzzy* e os algoritmos genéticos (Nørgaard *e outros*, 2004; Haykin, 2001).

No esquema de controle  $\mathcal{H}_\infty$ , onde se minimiza o distúrbio de pior caso, existem vários trabalhos. Por exemplo, em Smith *e outros* (1994) o problema de controle ativo de vibrações em uma treliça é descrito. A estrutura é composta por elementos piezelétricos que servem tanto como elementos estruturais como de atuadores. O problema considerado é um problema de múltiplas saídas e múltiplas entradas.

Sznaier e Rotstein (1992) propõem um procedimento de projeto para incorporar explicitamente especificações no domínio do tempo na estrutura de controle  $\mathcal{H}_\infty$ . Neste trabalho, o esquema de controle proposto é aplicado a uma estrutura flexível simples com o objetivo de minimizar o esforço de controle devido às perturbações, satisfazendo ao mesmo tempo a estabilidade do sistema.

Um tutorial de  $\mathcal{H}_\infty$ /Síntese  $-\mu$  é apresentado em Moser (1993). Esta abordagem é utilizada para o controle de uma estrutura flexível. Alguns dos problemas computacionais envolvidos na implementação do esquema  $\mathcal{H}_\infty$ /Síntese  $-\mu$  são apresentados, sendo ilustrados alguns exemplos.

Além disso, os tipos de modelos que podem ser resolvidos com este esquema são discutidos.

A técnica de controle  $\mathcal{H}_2$ , onde se tem como objetivo a minimização da energia do sinal de saída (Zhou, 1998), também é usada neste tipo de problema. Em Lublin e Athans (1994) uma comparação entre os esquemas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , voltados ao controle de uma estrutura levemente amortecida, é feita. Comparando-se os métodos de controle, mostra-se que os controladores  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  apresentam desempenhos similares.

Em muitas aplicações, a técnica de controle  $\mathcal{H}_\infty$  é usada conjuntamente com outras técnicas, aproveitando assim, as vantagens de cada uma das técnicas envolvidas. Por exemplo, é possível encontrar aplicações nesta área que combinam o controle  $\mathcal{H}_\infty$  com o controle linear quadrático gaussiano ou controle LQG (*Linear Quadratic Gaussian*). No controle ótimo LQG faz-se uso de um filtro de Kalman em conjunto com um Regulador Linear Quadrático (LQR). Algumas aplicações que combinam o controle  $\mathcal{H}_\infty$  com o controle LQG podem ser citadas. Por exemplo, no trabalho de Banavar e Dominic (1995) um controlador LQG para um manipulador flexível é apresentado. A síntese do controlador é feita apenas com a detecção da posição da ponta do atuador e um modelo do sistema de quarta ordem. Os resultados deste esquema apresentam tanto os requisitos de estabilidade como os de desempenho.

No trabalho de Lim *e outros* (1991) aborda-se o projeto de um sistema de controle para uma estrutura flexível experimental que apresenta as mesmas características de uma nave espacial típica. Este problema é resolvido usando as técnicas de controle  $\mathcal{H}_\infty$ , controladores dissipativos estáticos e dinâmicos e controle LQG. Segundo as simulações e testes de laboratório feitos, o controlador de dissipação dinâmica apresentou os melhores resultados em termos de supressão de vibrações e robustez.

As técnicas de controle com redes neurais artificiais são mais amplamente discutidas na Seção 1.2.2.

Outras técnicas, como o controle com lógica *fuzzy*, são também usadas. No trabalho de Forrai *e outros* (2000), o problema da supressão de vibrações em estruturas flexíveis aplicando um controlador *fuzzy* é tratado. Nesse trabalho, os resultados experimentais, utilizando um controlador *fuzzy*, são comparados com os resultados obtidos com técnicas de controle mais tradicionais.

Implementações com algoritmos genéticos, que são uma técnica onde se tem uma investi-

gação paralela de várias áreas em um espaço de busca através da manipulação da população de indivíduos, que são soluções codificadas do problema, têm sido feitas na área. No caso de Kundu *e outros* (2002), apresentam-se resultados experimentais do controle de estruturas flexíveis através de algoritmos genéticos.

## 1.2.2 Controle com redes neurais

Segundo Nørgaard *e outros* (2004) os métodos de controle baseados no uso de redes neurais artificiais podem-se classificar em: os métodos de projeto direto e os métodos de projeto indireto. O projeto direto refere-se à implementação direta do controlador e isso significa que a rede neural artificial deve ser treinada como um controlador conforme algum tipo de critério relevante. Por outro lado, os métodos indiretos baseiam-se no uso da rede neural artificial para a obtenção do modelo da planta a ser controlada.

### Métodos de projeto direto

A obtenção de controladores a partir dos métodos de projeto direto tem como objetivo o projeto de uma rede neural artificial que atue como controlador no sistema de malha fechada. A implementação de sistemas de controle direto é considerada simples, porém a sintonização dos parâmetros do controlador é considerada difícil, devido a que o controlador deve ser treinado a cada vez que um parâmetro de projeto mude. Essa abordagem inclui os seguintes esquemas: o controle inverso-direto, o controle por modelo interno, o método de linearização por realimentação, o método de *feedforward* com modelos inversos e o controle ótimo (Nørgaard *e outros*, 2004).

Implementações destes métodos são encontradas na literatura. Por exemplo, no trabalho feito por De Abreu *e outros* (2000), o uso de redes neurais artificiais para o controle de vibrações de um sistema mecânico de um grau de liberdade usando seu modelo inverso é descrito. O autor utiliza a rede neural artificial para identificar o modelo inverso da planta a partir de dados experimentais do sistema físico.

Uma implementação do controle por modelo interno de sistemas dinâmicos não lineares baseada em redes neurais artificiais é detalhada em Faouzi *e outros* (2004). Nesse trabalho o modelo

interno da planta é obtido usando dados de experimentos. Por fim, o desempenho desta técnica é comparado com o desempenho de controladores proporcional-integral.

Em Tavakolpour *e outros* (2010) um sistema de controle ativo de vibrações em uma placa flexível é apresentado. Neste trabalho, a placa é modelada utilizando-se o método de diferenças finitas e atuadores piezelétricos são usados. O controlador é obtido utilizando-se um método de autoaprendizagem com redes neurais artificiais.

Um método de controle adaptativo usando redes neurais artificiais para estabilizar grandes estruturas flexíveis é descrito em Gates *e outros* (1993). Neste trabalho, o controlador neural identifica a dinâmica da estrutura a ser controlada, atualizando os pesos sinápticos da rede continuamente, e constrói um sinal de controle para atenuar as vibrações estruturais.

### **Métodos de projeto indireto**

O método indireto utiliza a rede neural artificial para modelar a planta ou proceso a controlar. Este modelo é então utilizado em um projeto de controlador mais convencional. Geralmente, o modelo é treinado previamente e o controlador é treinado *on-line*. Neste tipo de projeto estão cobertos os seguintes métodos: a alocação aproximada dos polos, variância mínima, controle preditivo e controle preditivo não linear (Nørgaard *e outros*, 2004).

Trabalhos que fazem uso de redes neurais artificiais para modelar o sistema a ser controlado também são encontrados na literatura. Por exemplo, em Lin e Lin (2002) uma abordagem baseada em redes neurais para o projeto de um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas não lineares de tempo contínuo é apresentada. Nesta proposta, os modelos de sistemas não lineares são aproximados por redes neurais multicamada.

Fuli *e outros* (1997) apresentam uma técnica de controle adaptativa por alocação de polos usando redes neurais artificiais aplicada em plantas não lineares desconhecidas. Nesse esquema o modelo não linear é aproximado por uma rede neural *feedforward* multicamada.

Uma técnica de controle não linear usando redes neurais artificiais com base no conceito de controle de variância mínima é introduzida em Bittanti e Piroddi (1993). O trabalho é focado

em modelos de tempo discreto não lineares com entradas exógenas. Um controlador de variância mínima composto de redes neurais artificiais é projetado para esses modelos.

### **1.2.3 Modelagem de estruturas flexíveis**

A modelagem matemática de estruturas flexíveis pode ser feita utilizando-se várias técnicas. Dentre as técnicas mais comuns tem-se: o método de elementos finitos e a identificação experimental do sistema.

No método de elementos finitos, a estrutura é discretizada em elementos interconectados por nós. Cada elemento apresenta a sua matriz de massa e a sua matriz de rigidez, a partir das quais é possível obter as matrizes de massa e rigidez para a estrutura toda. Com isso, é possível aplicar as condições de contorno e os carregamentos existentes em uma dada estrutura para a obtenção do modelo matemático.

Os métodos de identificação experimental do sistema baseiam-se na aproximação, a partir de dados experimentais, do sistema a um modelo conhecido. Em Balas e Doyle (1990) é fornecido um método para a obtenção de funções de transferência de sistemas por interpolação de dados experimentais utilizando o polinômio de Chebyshev.

No presente trabalho a modelagem de alguns dos exemplos de aplicação tratados foi feita segundo o método de elementos finitos. Para isso, foi usada a formulação de elemento de placa em flexão apresentada em Przemieniecki (1985) (vide Apêndice B).

## **1.3 Objetivos**

O objetivo deste trabalho é o estudo de um método de controle baseado no uso de redes neurais artificiais aplicado ao problema de controle de vibrações em estruturas flexíveis. Especificamente, deseja-se estudar o método de controle por modelo inverso. A fim de avaliar o desempenho desta técnica, diferentes exemplos são resolvidos.

## 1.4 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, uma seção dedicada às referências bibliográficas e dois apêndices.

O Capítulo 1 faz uma introdução ao problema de controle de vibrações em estruturas flexíveis. A revisão da literatura é fornecida e o objetivo principal deste trabalho é apresentado.

No Capítulo 2, as noções básicas relacionadas com redes neurais artificiais são apresentadas. Alguns assuntos relacionados à fase de treinamento vista como um problema de otimização são comentados.

O Capítulo 3 introduz o esquema de controle inverso-direto baseado em redes neurais artificiais. Os passos do projeto inverso-direto são detalhados. Por fim, apresenta-se um resumo geral das fases do projeto.

Uma proposta para o controle de sistemas dinâmicos é apresentada no Capítulo 4. Nesse capítulo o modelo do sistema e o problema de controle de vibrações são detalhados. Por fim, quatro exemplos de aplicação baseados no problema de controle formulado são usados para a verificação das formulações usadas.

Finalmente, no Capítulo 5, os resultados obtidos dos quatro exemplos de aplicação propostos no Capítulo 4 são apresentados. No final desse capítulo alguns comentários e comparativas dos resultados obtidos são feitos.

As conclusões e os trabalhos futuros são comentados no Capítulo 6. Posteriormente, as referências citadas no texto são apresentadas.

O Apêndice A apresenta as noções básicas relacionadas ao projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$ .

O Apêndice B apresenta alguns conceitos relacionados ao método de elementos finitos. Além disso, as formulações utilizadas para a obtenção do modelo de alguns dos exemplos resolvidos neste trabalho são descritas.

## 2 Redes neurais artificiais em sistemas de controle

Este capítulo apresenta as noções referentes ao estudo de redes neurais artificiais. Primeiramente, definições básicas de redes neurais multicamada são apresentadas. Em seguida, a fase de treinamento da rede neural artificial é descrita. Por fim, os sistemas de controle baseados em redes neurais artificiais são apresentados.

### 2.1 Noções gerais

Uma rede neural artificial (RNA) é um conjunto de elementos simples de processamento chamados *neurônios*, que estão ligados em uma rede por meio de um conjunto de pesos sinápticos (Nørgaard e outros, 2004). Uma RNA pode ser descrita como o mapeamento de um espaço de entrada para um espaço de saída (Priddy e Keller, 2005). O *neurônio* é a unidade fundamental de uma RNA, seu modelo está descrito na Figura 2.1.

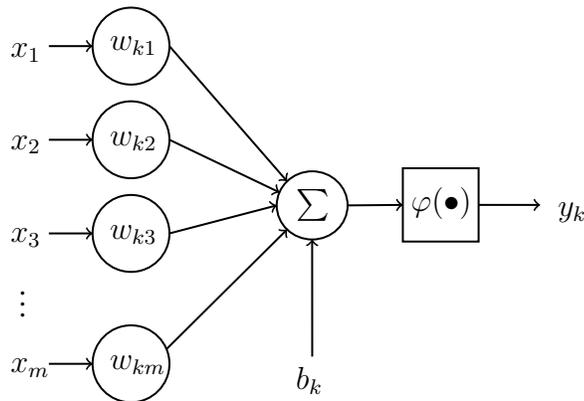


Figura 2.1: Diagrama do modelo de um neurônio

O cálculo da saída  $y_k$  é dado por

$$y_k = \varphi\left(\sum_{j=1}^m w_{kj}x_j + b_k\right), \quad (2.1)$$

onde os pesos sinápticos  $w_{kj}$  são multiplicados pelas entradas do neurônio  $x_j$ . Existe uma pseudo-entrada adicional para o neurônio chamada *bias*  $b_k$ , que permite à função de ativação  $\varphi(\bullet)$  assumir um valor, mesmo quando todas as entradas são zero (Haykin, 2001). O índice  $k$  refere-se ao número

do neurônio que está sendo processado.

Existem vários tipos de funções de ativação. As funções mais usadas são: a função linear (Figura 2.2a), a função tangente hiperbólica (Figura 2.2b), a função sigmoide (Figura 2.2c) e a função em degrau (Figura 2.2d).

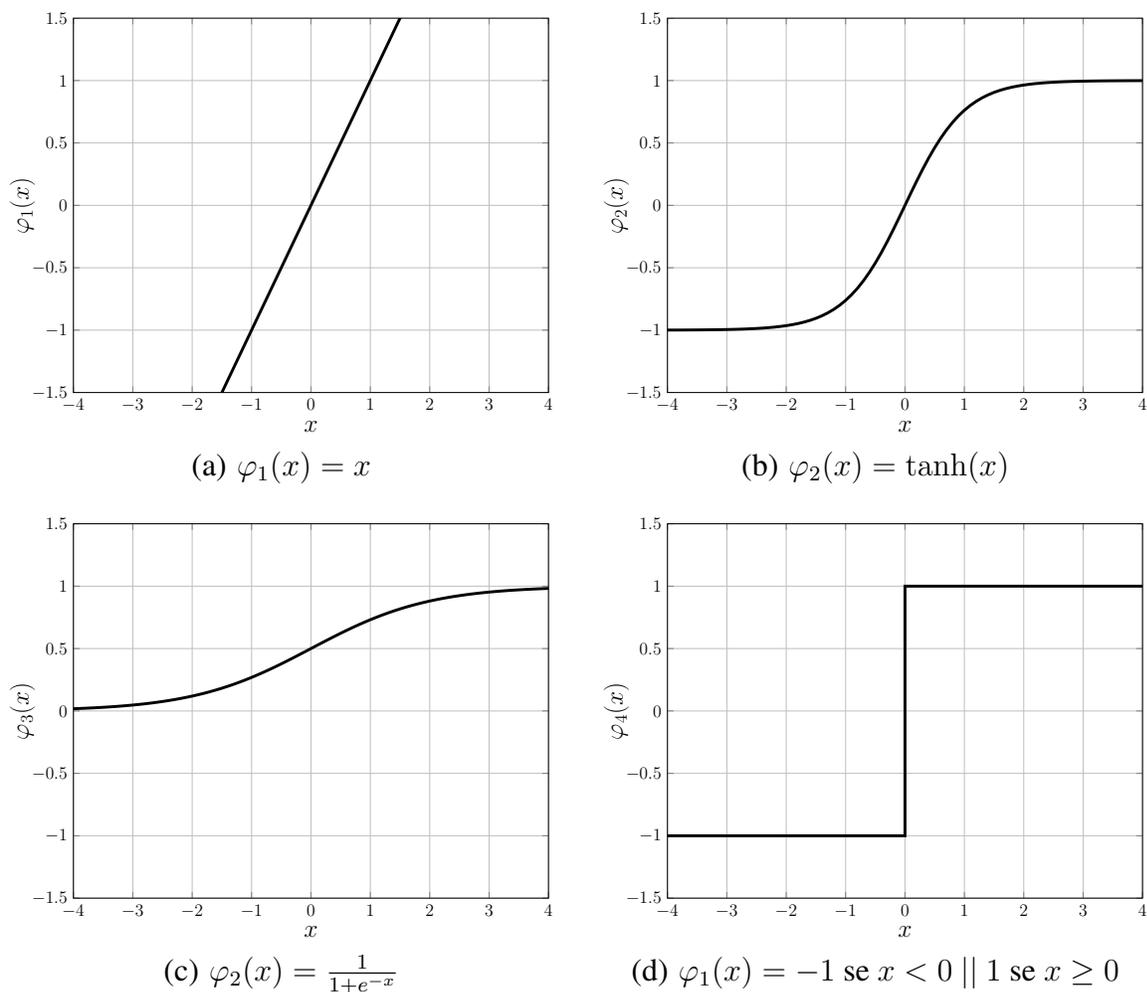


Figura 2.2: Funções de ativação do neurônio

Os neurônios podem ser combinados em uma rede de várias maneiras. Uma das arquiteturas de RNA mais comum é a rede *perceptron multicamada* ou rede MLP (*multilayer perceptron*) (Nørgaard e outros, 2004). A rede MLP básica é construída ordenando os neurônios em camadas. Este tipo de rede é conhecida geralmente como rede de alimentação para a frente ou rede *feed-forward*. A Figura 2.3 fornece o esquema de uma RNA com os neurônios dispostos em camadas referente às redes MLP, considerando-se  $\mathbf{x}_{net} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  o vetor de entradas da rede,

$\mathbf{y}_{net} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  o vetor de saída da rede,  $l$  o número de camadas da rede,  $k$  o número de neurônios em cada camada e  $m$  o número de entradas de cada neurônio, o vetor de saída da rede pode ser obtido segundo o Algoritmo 2.1.

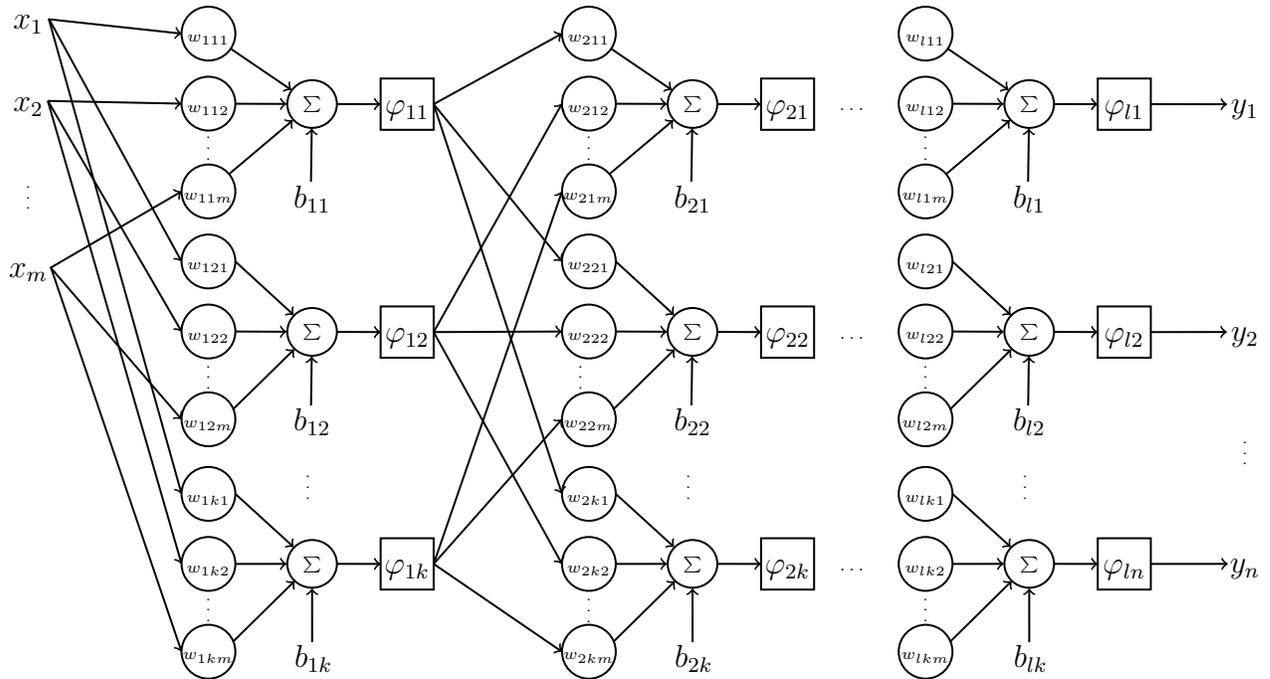


Figura 2.3: Rede de perceptron multicamada

É comum adotar a nomenclatura de chamar as camadas que estão entre a camada de entrada e a camada de saída de *camadas ocultas*.

## 2.2 Fase de treinamento

Refere-se como fase de treinamento ou fase de aprendizado ao problema de determinar os valores ótimos da matriz de pesos sinápticos  $\mathbf{W}$  (matriz dos elementos  $w_{ihj}$ ) de todas as conexões dos neurônios em uma RNA, a partir de um conjunto de dados de entrada e saída de um sistema, obtidos anteriormente por meio de um experimento ou uma simulação teórica (Nørgaard e outros, 2004). Os pesos são obtidos de tal forma que a rede, conforme uma função de desempenho ou função de custo, modele a relação entre as entradas e as saídas de um sistema.

O processo de treinamento da RNA para identificação de sistemas pode ser visto na Fi-

---

**Algoritmo 2.1:** Calculo da saída da rede MLP

---

$\mathbf{x}_{net}$ : Vetor de entrada da rede

$\mathbf{y}_{net}$ : Vetor de saída da rede

$l$ : Número de camadas da rede

$k$ : Vetor de número de neurônios em cada camada

$\mathbf{x}_i \leftarrow \mathbf{x}_{net}$

*Loop através de cada camada*

**for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $l$  **do**

*Loop para cada neurônio na camada*

**for**  $h \leftarrow 1$  **to**  $k_i$  **do**

$m \leftarrow$  comprimento de  $\mathbf{x}$

*Saída da rede (vide Equação (2.1)).*

$$y_{ih} = \varphi_{ih} \left( \sum_{j=1}^m w_{ihj} x_j + b_{ih} \right)$$

$\mathbf{x}_{i+1} \leftarrow \mathbf{y}_{ih}$

*Saída final da rede Y*

$\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{y}_{ih}$

---

gura 2.4, onde  $\mathbf{u}(k)$  é o sinal de entrada aplicado à planta a ser identificada,  $\mathbf{y}(k)$  a saída da planta e  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  é a estimativa feita pela RNA da saída da planta.  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  é comparado com  $\mathbf{y}(k)$  através de um critério de desempenho com o objetivo de ajustar os pesos sinápticos da rede através de um processo de otimização.

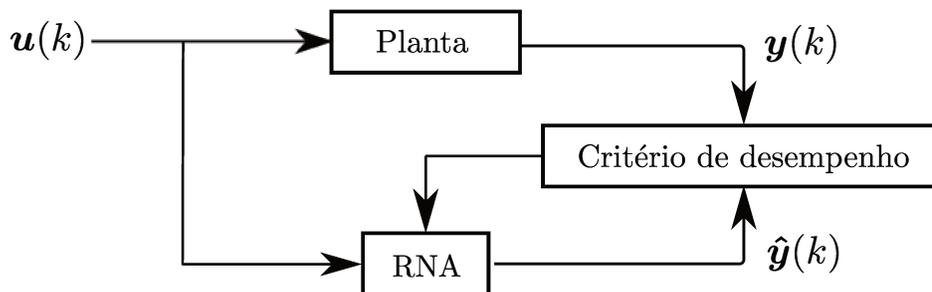


Figura 2.4: Esquema de treinamento da RNA

### 2.2.1 Problema de otimização

O processo de treinamento, visto como um problema de otimização, tem como objetivo a busca do valor mínimo de um critério ou função de custo. A medida mais comumente utilizada de

desempenho para este tipo de problemas é o erro quadrático médio ou MSE (*mean square error*), que é calculado da seguinte forma

$$\varepsilon(\mathbf{W}) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N [y_i - \hat{y}_i(\mathbf{u}, \mathbf{W})]^2, \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{W}$  é a matriz de pesos sinápticos da RNA,  $\mathbf{u}$  é o vetor de entrada tanto da RNA como do sistema,  $y_i$  e  $\hat{y}_i$  são os elementos dos vetores de comprimento  $N$  da saída do sistema  $\mathbf{y}$  e da estimativa da RNA  $\hat{\mathbf{y}}$  respectivamente.

Os valores ótimos dos pesos da matriz  $\mathbf{W}$ , que melhor se ajustam no mapeamento do conjunto de entrada  $\mathbf{u}$  para o conjunto de saída  $\mathbf{y}$ , podem ser obtidos solucionando o seguinte problema de otimização

$$\mathbf{W}^* = \min_{\mathbf{W}} \varepsilon(\mathbf{W}) \quad (2.3)$$

É comum adotar a notação da matriz dos pesos ótimos como  $\mathbf{W}^*$ . Em RNA o método mais comum de otimização de primeira ordem é o algoritmo retro-propagação (*back-propagation* em inglês), que é uma implementação específica do método do gradiente. Os métodos de segunda ordem usam a informação da matriz Hessiana, ou uma aproximação da mesma. Entre os métodos de segunda ordem mais usados estão: o método de *Newton*, o método *Quasi-Newton*, o método de *Gauss-Newton*, o método de *Pseudo-Newton* e o método de *Levenberg-Marquardt*. Outros métodos de minimização podem ser encontrados, por exemplo os métodos recursivos, utilizados no campo de RNA quando é necessário treinar a rede *on-line*. Em geral, esse tipo de algoritmo demanda mais recursos computacionais (Nørgaard e outros, 2004). A Tabela 2.1 resume as principais características, tais como a regra de atualização, a convergência e a complexidade computacional de alguns dos algoritmos de otimização mencionados.

Tabela 2.1: Principais características de alguns algoritmos de otimização (Yu e Wilamowski, 2011)

Método	Regra de atualização	Convergência	Complexidade computacional
Retro-propagação	$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - \alpha \mathbf{g}_k$	Estável, lento	Gradiente
Newton	$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{g}_k$	Instável, rápido	Gradiente e Hessiana
Gauss-Newton	$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - (\mathbf{J}'_k \mathbf{J}_k)^{-1} \mathbf{J}_k \mathbf{e}_k$	Instável, rápido	Jacobiano
Levenberg-Marquardt	$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - (\mathbf{J}'_k \mathbf{J}_k + \mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}_k \mathbf{e}_k$	Estável, rápido	Jacobiano

Na Tabela 2.1 tem-se que:

$\mathbf{W}_k$  : Matriz dos pesos sinápticos da rede neural artificial

$\alpha$  : Tamanho do passo (sempre positivo)

$\mathbf{g}_k$  : Vetor gradiente do critério na iteração  $k$

$\mathbf{H}_k$  : Matriz hessiana do critério na iteração  $k$

$\mathbf{J}_k$  : Matriz jacobiana do critério na iteração  $k$

$\mathbf{e}_k$  : Vetor de erro do critério na iteração  $k$

$\mu$  : Coeficiente de combinação (sempre positivo)

$\mathbf{I}$  : Matriz identidade

## 2.2.2 Sinal de entrada

Existem diversos parâmetros referentes à escolha do sinal de entrada. A seleção de um bom sinal de excitação é um passo importante na fase de treinamento de uma RNA. Alguns dos sinais de excitação que são apresentados em Pintelon e Schoukens (2005) são: a varredura de seno (também conhecido como *chirp* periódico), a multi-seno de *Schroeder*, a sequência binária pseudo-aleatória ou PRBS (*pseudo-random binary sequence*), o ruído aleatório, o *random burst*, e testes de impacto de pulso ou *pulse impact testing*.

Em Nørgaard e outros (2004) alguns dos sinais de entrada mais usados na área de identificação de sistemas com RNA são apresentados. Estes sinais são: o sinal constante em  $N$ -amostras ou *N-samples-constant*, o sinal de mudança de nível em instâncias aleatórias ou *level change at*

*random instances* e o sinal *chirp*.



### 3 Projeto neuro-controlador inverso-direto

Este capítulo introduz o esquema de controle inverso-direto baseado em RNA. A primeira parte fornece a ideia geral do esquema e as suas características principais. Em seguida, os passos do projeto do neuro-controlador são apresentados e, por fim, os processos para a obtenção da resposta temporal e a resposta em frequência do sistema em malha fechada são comentados.

#### 3.1 Introdução

Um dos métodos mais simples e comum no uso de RNA em um problema de controle é o esquema inverso-direto. O objetivo deste método é identificar o modelo inverso da planta e usá-lo como controlador como é indicado na Figura 3.1. Com relação à implementação deste método, é necessário aclarar que, devido a que este sistema de controle é implementado computacionalmente, é necessário usar modelos do sistema em tempo discreto ou sistemas em tempo contínuo amostrados.

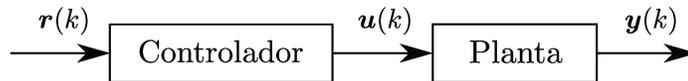


Figura 3.1: Esquema de controle utilizando o modelo inverso

Se o controlador, que representa a dinâmica inversa da planta, é conectado em série com a planta, o resultado da multiplicação dos dois blocos dá uma função identidade. Isso significa que o sinal de saída será idêntico ao sinal de referência,  $y(k) = r(k)$ . Assim, se o modelo inverso da planta existe e pode ser identificado por uma RNA, este se torna um controlador ideal.

O esquema de identificação do modelo inverso da planta é mostrado na Figura 3.2. Nesse esquema é possível ver que contrário ao esquema apresentado na Figura 2.4 os sinais de entrada e saída da RNA estão invertidos, ou seja, o sinal de saída da RNA é a estimativa do esforço de controle  $u(k)$  aplicado ao sistema e a entrada da RNA é o vetor das saídas de medição  $y(k)$  do sistema. Portanto, assume-se que se no caso da fase de treinamento levar a RNA a interpolar perfeitamente as suas entradas com as suas saídas, a RNA representaria exatamente o modelo inverso do sistema.

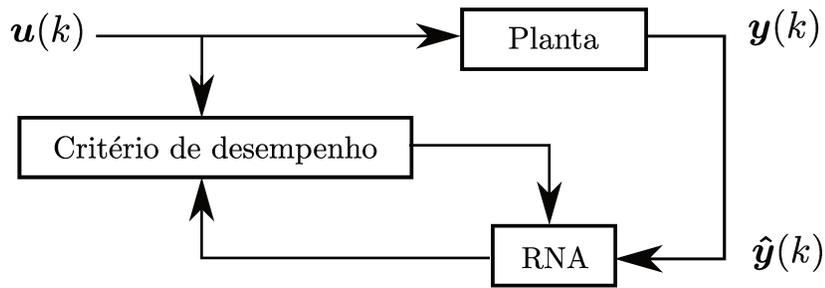


Figura 3.2: Esquema de identificação do modelo inverso

Este esquema de controle tem as seguintes vantagens: é intuitivamente simples, é simples de implementar e com o treinamento especializado o controlador pode ser otimizado para uma trajetória de referência específica. Como desvantagens, o projeto é carente de opções de ajuste dos parâmetros do controlador, tais como o tempo de resposta, percentual de *overshoot* e geralmente, apresenta uma elevada sensibilidade às perturbações e ao ruído (Nørgaard e outros, 2004).

## 3.2 Projeto do controlador

O procedimento para obter um neuro-controlador baseado no esquema do método inverso-direto está dividido nas seguintes fases principais. A primeira fase é a escolha da estrutura da RNA que atuará como controlador. Nessa fase serão escolhidos parâmetros tais como número de camadas ocultas, número de neurônios por camada e as suas funções de ativação. O segundo passo é obter os conjuntos de dados de entrada-saída através da simulação da planta ou experimentalmente. O conjunto de dados obtidos é utilizado na fase de treinamento e posteriormente na fase de validação. Em seguida, a RNA obtida será colocada como controlador para fechar a malha de controle e por fim o procedimento para obter as respostas do sistema em malha fechada é realizado, verificando-se os resultados através de simulações.

### 3.2.1 Estrutura do neuro-controlador

No projeto inverso-direto, o neuro-controlador é modelado por uma rede de perceptron multicamada. Como visto no Capítulo 2, os parâmetros da estrutura da rede são: o número de entradas,

o número de saídas, o número de camadas ocultas, número de neurônios por camada e as funções de ativação de cada neurônio.

Em Cybenko (1989) é demonstrado que qualquer função contínua pode ser aproximada, com qualquer precisão desejada, por uma RNA de uma camada oculta composta de neurônios com funções de ativação sigmoide ou tangente hiperbólico e funções de ativação lineares nos neurônios da camada de saída.

A fim de que a RNA identifique a dinâmica do modelo inverso da planta a ser controlada, é comum incluir como entrada da rede o conjunto de atrasos das entradas e saídas da planta (Nørgaard e outros, 2004). Isto significa que a RNA terá como entrada os  $n$  últimos valores da saída da planta  $\{y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n)\}$  e os  $m$  últimos valores do sinal de controle  $\{u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-m)\}$ . A escolha do número de atrasos dos sinais na camada de entrada de uma RNA é um tema discutido mais amplamente em Texeira (1991). Por sua vez, como visto na Figura 3.3, a saída da RNA será a estimativa do valor do sinal de controle atual  $\hat{u}(k)$ .

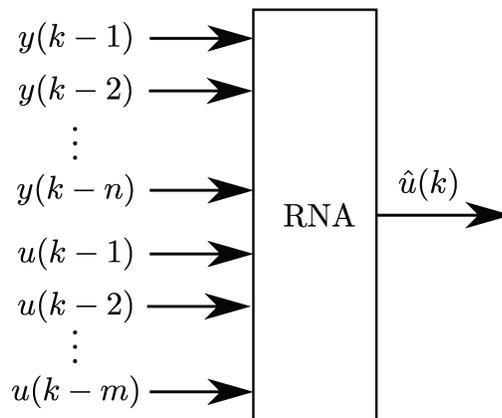


Figura 3.3: Estrutura do neuro-controlador

Existem vários trabalhos que tratam da escolha do número de neurônios em uma RNA. Em Teoh e outros (2006) um método baseado no uso de decomposição em valores singulares (SVD - *Singular Value Decomposition*) para achar o número adequado de neurônios em redes *feedforward* de uma camada oculta é apresentado.

### 3.2.2 Conjuntos de treinamento-validação

Para treinar e validar a RNA que será usada como controlador, é necessário dispor dos vetores da saída da planta  $\mathbf{y}$  obtidos quando a planta é excitada com um sinal  $\mathbf{u}$  conhecido. Estas informações podem ser adquiridas a partir de simulações do modelo que representa o sistema ou a partir de experimentos realizados com a planta física.

Uma vez os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{y}$  sejam obtidos, devem-se montar os conjuntos de treinamento-validação da rede  $\mathbf{x}_{net}$  e  $\mathbf{y}_{net}$ . O vetor de entrada da rede  $\mathbf{x}_{net}$  no instante  $k$  é formado pelos últimos  $n$  valores da saída da planta  $\mathbf{y}$  seguido dos últimos  $m$  valores do sinal de controle  $\mathbf{u}$ . As quantidades de atrasos  $n$  e  $m$  são parâmetros mencionados na Seção 3.2.1. Por sua vez, o vetor de saída da rede  $\mathbf{y}_{net}$  no instante  $k$  é o valor do sinal de controle  $\mathbf{u}$  no mesmo instante. Os vetores  $\mathbf{x}_{net}(k)$  e  $\mathbf{y}_{net}(k)$  são dados por

$$\mathbf{x}_{net}(k) = [y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n), u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-m)]' \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{y}_{net}(k) = [u(k)]. \quad (3.1b)$$

Com os conjuntos de dados de entrada-saída da rede definidos, o próximo passo é a fase de treinamento do controlador.

### 3.2.3 Fase de treinamento

A intensão da fase de treinamento é procurar os valores dos pesos sinápticos das conexões de cada neurônio que façam o melhor ajuste entre os conjuntos de entrada e saída  $\mathbf{x}_{net}$  e  $\mathbf{y}_{net}$ . Este processo é tratado como um problema de otimização. Na fase de treinamento, apenas uma parte dos conjuntos de dados de entrada-saída da rede é usada. A fração restante será utilizada na fase de validação.

O vetor de saída do neuro-controlador  $\hat{\mathbf{u}}$  no instante  $k$  é calculado em função da matriz dos pesos sinápticos  $\mathbf{W}$  e do conjunto de dados  $\mathbf{x}_{net}$  de comprimento  $m + n$  definido no instante  $k$ . A saída  $\hat{\mathbf{u}}$  no instante  $k$ , para uma RNA de uma camada oculta de  $n_h$  neurônios de função de ativação tangente hiperbólico e a camada de saída composta por um neurônio de função de ativação linear, é dada por

$$\hat{\mathbf{u}}(k, \mathbf{W}, \mathbf{x}_{net}) = \sum_{l=1}^{n_h} \mathbf{W}_l^{\text{saída}} \tanh\left(\sum_{j=1}^{m+n} \mathbf{W}_{lj}^{\text{oculta}} \mathbf{x}_{net_j}(k) + b_l^{\text{oculta}}\right) + b^{\text{saída}}, \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{W} = [\mathbf{W}^{\text{oculta}} \ \mathbf{W}^{\text{saída}}]$ , sendo  $\mathbf{W}^{\text{oculta}}$  e  $\mathbf{W}^{\text{saída}}$  os pesos sinápticos dos neurônios da camada oculta e da camada de saída respectivamente.

Para achar a matriz de pesos sinápticos ótima  $\mathbf{W}^*$  se formula o problema de otimização onde se procura minimizar o valor do erro quadrático médio entre a saída estimada  $\hat{\mathbf{u}}$  e o esforço de controle  $\mathbf{u}$ , ou seja, o conjunto de dados  $\mathbf{y}_{net}$ . Este problema de otimização é dado por

$$\mathbf{W}^* = \min_{\mathbf{W}} \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N [\mathbf{y}_{net}(k) - \hat{\mathbf{u}}(k, \mathbf{W}, \mathbf{x}_{net}(k))]^2 \quad (3.3)$$

Essa estratégia é conhecida como treinamento geral. Existem outros procedimentos como o treinamento especializado que é um treinamento *on-line* e tem como objetivo a minimização do erro quadrático médio entre o sinal de referência  $\mathbf{r}$  e a saída do sistema  $\mathbf{y}$ .

O problema proposto na Equação (3.3) pode ser resolvido usando algoritmos de otimização, como por exemplo, o algoritmo retro-propagação, o método de Newton, o método de Gauss-Newton, o método de Levenberg-Marquardt entre outros.

### 3.2.4 Fase de validação

Na fase de validação, o modelo estimado é avaliado para verificar se ele é uma representação apropriada do sistema. A fase de validação usa o conjunto de dados que não foi utilizado durante o treinamento. Uma forma de validação é a estimativa do erro médio nas predições. O erro médio pode ser estimado usando a Equação (2.2) de erro quadrático entre as saídas da rede  $y_{net}$  do conjunto de validação e as predições da rede  $\hat{u}$ . A estimativa média de erro pode ser útil para avaliar o modelo obtido, mas essa quantidade não pode ser diretamente usada para determinar se um modelo deve ser aceito ou não (Nørgaard *e outros*, 2004). Para isso, outra forma útil para avaliar o modelo obtido com a RNA é a comparação através da visualização das predições (Nørgaard *e outros*, 2004). A validação da RNA baseada na visualização das predições consiste na simples inspeção dos gráficos, comparando as saídas do conjunto de validação  $y_{net}$  com as saídas da rede  $\hat{u}$ . Este método é útil na detecção de sub-ajuste ou sobre-ajuste dos dados (Nørgaard *e outros*, 2004).

As Figuras 3.4 e 3.5 apresentam, como exemplo, dois casos resultantes da fase de treinamento para um mesmo conjunto de dados.

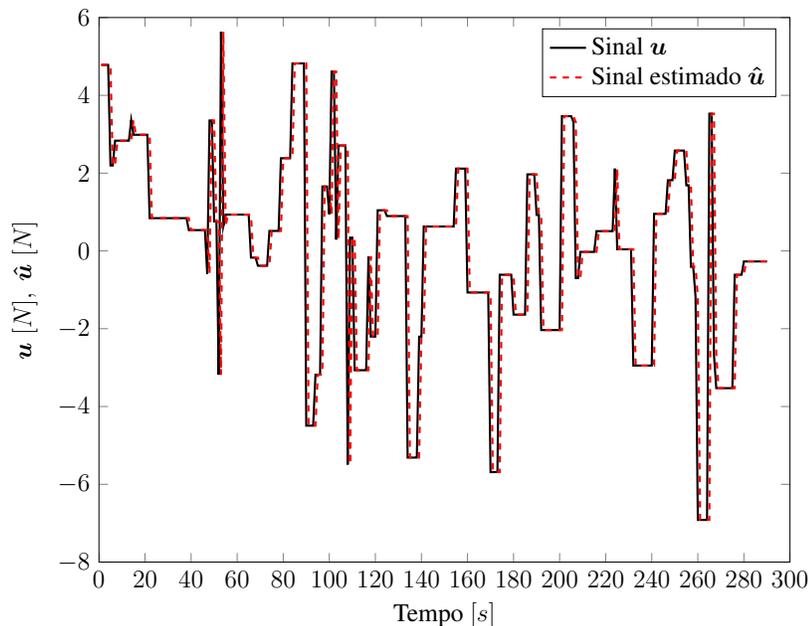


Figura 3.4: Visualização das predições - Caso 1

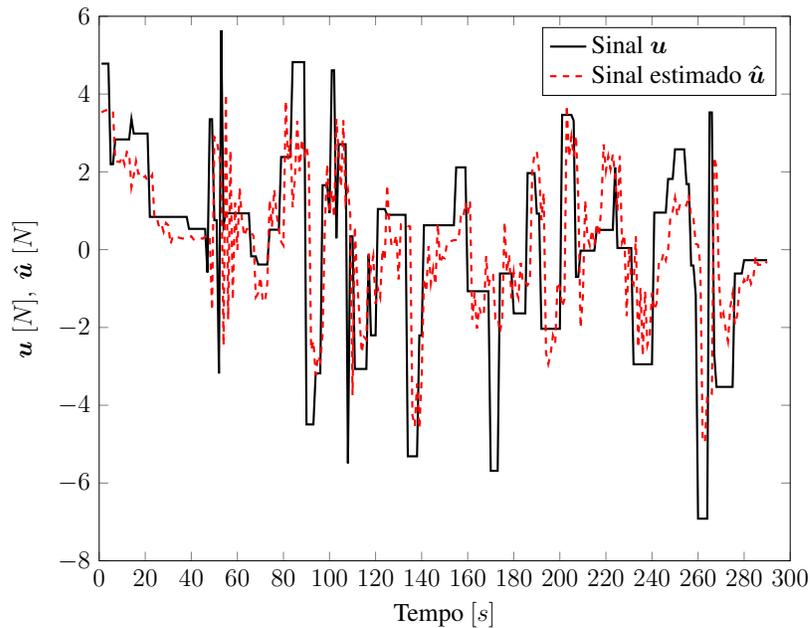


Figura 3.5: Visualização das previsões - Caso 2

No primeiro exemplo, Figura 3.4, o valor do erro quadrático médio foi de  $1.11 \times 10^{-6}$  e no segundo caso, Figura 3.5, o valor do erro quadrático médio foi de 1.53. Das observações das previsões é possível dizer que a RNA treinada no primeiro caso consegue fazer estimativas aceitáveis apresentando um erro quadrático médio baixo, ao contrário da RNA do segundo caso que apresenta um erro quadrático médio alto, além das estimativas feitas por esta RNA não se parecerem com os dados de validação.

No caso em que o modelo da rede obtido não é aceitável, é necessário reprojeter o neurocontrolador, isso é, treinar a RNA novamente. E no caso que o modelo ainda continue apresentando um desempenho não esperado será necessário redefinir os parâmetros da estrutura da RNA.

### 3.2.5 Fechamento da malha de controle

Uma vez que o modelo inverso identificado pela RNA for considerado adequado, o próximo passo é fechar o ciclo de controle. A rede obtida é usada como controlador, substituindo a entrada da rede  $u(k-1)$  pelo sinal de referência desejado  $r(k+1)$ , vide Figura 3.3. Se a RNA treinada

representa exatamente o modelo inverso do sistema, o sinal de controle estimado  $\hat{u}(k)$  conduzirá a saída do sistema  $y(k+1)$  a  $r(k+1)$ . Isto é ilustrado na Figura 3.6 <sup>1</sup>.

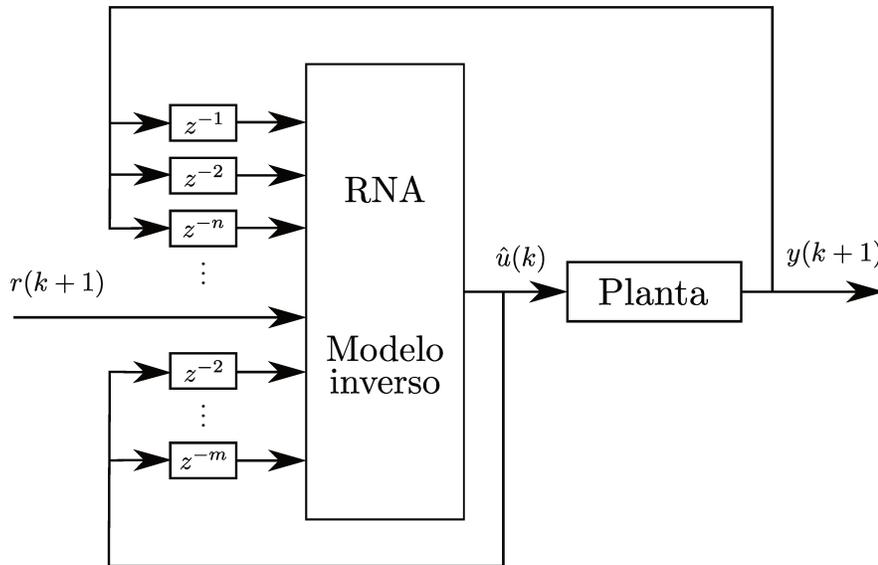


Figura 3.6: Esquema de controle inverso-direto

Com o esquema mostrado na Figura 3.6 é possível executar diferentes simulações para avaliar o sistema de controle em malha fechada. Se o desempenho resultante não for o esperado, será necessário redefinir os parâmetros de cada fase no projeto do controlador, até que o controlador apresente um desempenho aceitável.

### 3.2.6 Respostas em malha fechada

É possível executar algumas simulações a fim de verificar o comportamento do sistema em malha fechada. A análise da resposta temporal e da resposta de frequência são as formas mais utilizadas de verificação.

Para obter a resposta temporal do sistema, é necessário definir os sinais de entrada externos do sistema, tais como o sinal de referência e os distúrbios, caso existirem. Uma vez que os sinais são definidos, um processo iterativo de simulação do sistema deve ser feito. Em cada iteração  $k$  do

<sup>1</sup>Notação: Operador  $z^{-n}$ , no domínio da transformada  $\mathbb{Z}$ , mantém e atrasa a sua entrada por  $n$  períodos de amostragem.

loop de simulação, o esforço de controle deve ser calculado usando a rede treinada. Este processo está descrito no Algoritmo 3.1.

---

**Algoritmo 3.1:** Simulação em malha fechada

---

*Parâmetros de simulação*

$T_{sim}$  : Tempo de simulação

$T_s$  : Período de amostragem

*Entradas externas*

$\mathbf{r}$  : Sinais de referência

$\mathbf{v}$  : Sinais de distúrbio

*Estados iniciais*

$x_0$  : Estado inicial do sistema

**for**  $k \leftarrow 0$  **to**  $(T_{sim}/T_s) - 1$  **do**

$\mathbf{x}_{net} = \{y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n}, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_{k-m}\}$	$\left  \begin{array}{l} \text{No caso de } k - n < 0 \text{ então } y_{k-n} = 0 \\ \text{No caso de } k - m < 0 \text{ então } u_{k-m} = 0 \end{array} \right.$
$\hat{u}_k = net(\mathbf{W}^*, \mathbf{x}_{net})$	(Vide Equação (3.2))
Aplicar $\hat{u}_k$ ao sistema e capturar a saída de medição $y_k$ .	

*Resultados*

$\mathbf{y} \leftarrow y\{1 : k\}$

---

No Algoritmo 3.1 descreve-se a rotina usada para realizar uma simulação do sistema em malha fechada para obter a resposta temporal do sistema a fim de avaliar o desempenho do controlador projetado. Deve-se definir o sistema. Caso não se possua o modelo matemático do sistema, deve-se possuir um sistema de aquisição de dados para monitorar as variáveis do sistema físico. Em seguida, definem-se os parâmetros de simulação, ou seja, o tempo de simulação a taxa de amostragem do sistema, os sinais de distúrbio, os sinais de referência ou trajetórias desejadas. Logo depois, em cada instante de tempo, o vetor de entrada  $\mathbf{x}_{net}$  da RNA é montado segundo a Equação (3.1a). Quando o vetor  $\mathbf{x}_{net}$  é aplicado à RNA, esta gerará o sinal de controle  $\mathbf{u}$  que é aplicado ao sistema. O sinal de medição  $\mathbf{y}$  deve ser realimentado na entrada da RNA.

Devido ao tipo de modelo matemático que descreve a RNA, a obtenção de um modelo matemático que descreva a resposta em malha fechada do sistema de controle pressupõe um trabalho extenso. Por isso, para facilitar a obtenção da resposta em frequência em malha fechada do sistema, um método baseado na análise espectral de dados de simulações é utilizado. Para estimar a resposta em frequência de um sistema requer-se excitar o sistema em uma faixa de interesse com um sinal de entrada que possua um espectro de frequência adequado, e posteriormente, os dados gerados

devem ser tratados por um processo tal como a transformada de Fourier (Nichols e Dennis, 1971).

Os conjuntos de dados que são usados para obter a resposta em frequência do sistema, a partir da análise espectral, podem ser gerados da mesma maneira que a resposta temporal foi gerada. Deve-se considerar que o sinal de entrada deve cobrir a faixa de frequências de interesse. Geralmente, isto pode ser feito através da aplicação de um sinal impulso no sistema (resposta impulsiva), ou utilizando um sinal de varredura de frequência (sinal *chirp*) ou qualquer outro sinal, com um amplo espectro de frequência.

### 3.3 Resumo do procedimento de projeto do controlador

Esta seção faz um resumo do projeto do neuro-controlador descrito neste capítulo. As implementações das rotinas descritas nesta seção foram implementadas em ©MATLAB. O processo de otimização foi implementado usando os códigos apresentados em Nørgaard (2000). Segundo os procedimentos detalhados neste Capítulo é possível resumir o projeto inverso-direto através dos passos indicados a seguir.

O primeiro passo, descrito no Algoritmo 3.2, é obter os conjuntos de dados de treinamento-validação. Para isso, consideram-se duas alternativas: se o modelo do sistema a ser controlado está disponível ou não. No caso do modelo do sistema estar disponível é possível realizar simulações computacionais. Esta primeira alternativa oferece a possibilidade de aplicar ao sistema uma grande variedade de tipo de sinais de excitação, facilitando assim, a caracterização do sistema em diferentes pontos de operação. No caso onde o modelo do sistema não esteja disponível, deve-se optar pela captura de dados a partir de um experimento físico. Nesta segunda alternativa, deve-se levar em conta as limitações físicas do sistema. Deve-se tomar cuidado com que os sinais de excitação que vão ser aplicados não levem o sistema a pontos de operação que possam afetar a sua integridade física.

Tendo os conjuntos de treinamento validação, o passo seguinte, Algoritmo 3.3, é a escolha dos parâmetros da RNA. Dentre os principais parâmetros tem-se o número de camadas ocultas da rede, o número de neurônios por camada, as funções de ativação dos neurônios e os número de atrasos incluídos na camada de entrada. Na Seção 3.2.1 foram apresentados alguns trabalhos que apresentam métodos mais rigorosos para a escolha dos parâmetros da estrutura da RNA.

---

**Algoritmo 3.2:** Passo 1 - Dados treinamento-validação

---

Definir os sinais de excitação  $\mathbf{u}$  do sistema.

Medir os sinais  $\mathbf{y}$  do sistema quando é aplicado  $\mathbf{u}$  (computacional ou experimentalmente).

Organizar dados de treinamento-validação:

$\mathbf{x}_{net}$  : Entrada da RNA, Equação (3.1a).

$\mathbf{y}_{net}$  : Saída da RNA, Equação (3.1b).

---

---

**Algoritmo 3.3:** Passo 2 - Estrutura da RNA

---

Definir número de camadas ocultas da rede

Definir número de neurônios por camada

Definir função de ativação dos neurônios

Definir  $n$  : Número de atrasos de  $\mathbf{y}$

Definir  $m$  : Número de atrasos de  $\mathbf{u}$

---

Após a estrutura da RNA estar definida, a RNA deve ser treinada. Ou seja, devem ser calculados os valores da matriz  $\mathbf{W}$  de pesos sinápticos da rede. Isso é feito resolvendo o problema de otimização proposto na Equação (3.3). Nessa etapa devem ser usados métodos numéricos de otimização (Vide Tabela 2.1). Em Fletcher (1987) são apresentados alguns dos métodos mais usados na área.

---

**Algoritmo 3.4:** Passo 3 -Treinamento da RNA

---

$\mathbf{x}_{net-treinamento}$  : 50%  $\mathbf{x}_{net}$

$\mathbf{y}_{net-treinamento}$  : 50%  $\mathbf{y}_{net}$

Resolver o problema da Equação (3.3):

$$\mathbf{W}^* = \min_{\mathbf{W}} \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_{net-treinamento_i} - \hat{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}_{net-treinamento_i}, \mathbf{W}))^2$$

---

A etapa de validação é uma das mais importantes. Nesta etapa, a RNA é avaliada a fim de conhecer o seu desempenho. Nesta fase, devem ser avaliadas as estimativas feitas pela RNA após a fase de treinamento. Para isso, deve ser usado um sinal de excitação da mesma natureza do sinal usado na fase de treinamento. A avaliação das estimativas pode ser feita segundo um critério de comparação. Neste trabalho, adotou-se o critério de erro quadrático médio entre as estimativas feitas pela RNA e as medições dos vetores de entrada aplicados ao sistema. Outra forma de avaliação é

a inspeção das estimativas visualmente, comparando-se, igualmente, com as entradas previamente aplicadas ao sistema. No caso onde os resultados obtidos não sejam os esperados, deve-se retornar a etapas anteriores e redefinir os parâmetros de cada fase. Este passo é resumido no Algoritmo 3.5.

---

**Algoritmo 3.5:** Passo 4 - Validação da RNA

---

$x_{\text{net-validação}}$  : 50% restante de  $x_{\text{net}}$

$y_{\text{net-validação}}$  : 50% restante de  $y_{\text{net}}$

$\hat{u}$  : Aplicar  $x_{\text{net-validação}}$  à RNA

$mse$  : Calcular o erro quadrático médio entre  $y_{\text{net-validação}}$  e  $\hat{u}$

Visualização das predições: Plotar  $u$  versus tempo junto com  $\hat{u}$  versus Tempo

Caso onde o desempenho não é o esperado  $\rightarrow$  voltar nos Algoritmos 3.4, 3.3 e 3.2.

---

Se a RNA validada é aceita, a etapa seguinte é o fechamento da malha de controle. Nesta fase, tanto a saída  $u$  da RNA como a saída de medição  $y$  do sistema devem ser realimentadas como entradas na RNA. A camada de entrada de RNA está conformada por esses sinais e os seus atrasos. O número de atrasos que são entradas da rede são parâmetros definidos na fase descrita no Algoritmo 3.3. O diagrama que descreve este procedimento é apresentado na Figura 3.6 e uma descrição mais detalhada é feita no Algoritmo 3.1.

Por fim, a análise das respostas temporal e de frequência deve ser feita. Nesta fase a resposta temporal e a resposta em frequência do sistema são analisadas a fim de avaliar o comportamento do sistema em malha fechada. O objetivo é detectar comportamentos não esperados. Se os resultados obtidos não foram os esperados, deve-se regressar no procedimento e projetar novamente o controlador.

## 4 Controle de sistemas dinâmicos

A fim de avaliar o método inverso-direto de controle com RNA é proposto um problema de controle a ser resolvido com essa técnica. Este Capítulo apresenta o problema de controle de vibrações em estruturas. Inicialmente, tem-se a descrição do modelo de uma estrutura genérica. Em seguida, o problema de controle, detalhando as forças externas e os sinais de medição, é descrito. Por fim, são apresentados quatro problemas de aplicação. O primeiro exemplo é o controle de vibrações em uma estrutura massa-mola-amortecedor de três graus de liberdade. O segundo exemplo é o controle das vibrações em uma placa de alumínio engastada em uma das suas extremidades. Para esse exemplo, o modelo da planta é obtido usando-se o método de elementos finitos. No exemplo seguinte é usado um modelo reduzido da placa engastada usada anteriormente. Por fim, propõe-se um problema de controle não colocado para atenuar as vibrações em uma placa engastada.

### 4.1 Descrição do modelo

A planta é descrita pela equação diferencial de movimento de uma estrutura mecânica genérica dada por

$$\mathcal{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathcal{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathcal{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{B}_0\mathbf{f}(t) , \quad (4.1)$$

ou ainda

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}\mathbf{q}(t) + \mathcal{M}^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{f}(t) , \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{q}$  são os deslocamentos,  $\mathcal{M}$  é a matriz de massa,  $\mathcal{C}$  é a matriz de amortecimento,  $\mathcal{K}$  é a matriz de rigidez,  $\mathbf{f}(t)$  é o vetor de forças externas e  $\mathbf{B}_0$  é a matriz de localização de forças externas.

Para definir o modelo de estados da planta, o vetor de estados é tomado como

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

As equações no espaço de estados são

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{v}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{v}(t) + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}(t) \end{aligned}, \quad (4.4)$$

onde a matriz  $\mathbf{A}$  é definida como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} & -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

e as matrizes  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  são construídas com a estrutura  $[\mathbf{0} \quad \mathcal{M}^{-1}\mathbf{B}_0]^T$ <sup>1</sup>, com a matriz de posição  $\mathbf{B}_0$  construída adequadamente para cada uma das entradas  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  respectivamente. As matrizes  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{D}_{11}$  e  $\mathbf{D}_{12}$  são construídas para definir as saídas de desempenho em termos do vetor de estados e as forças externas. Da mesma forma são construídas as matrizes  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{D}_{21}$  e  $\mathbf{D}_{22}$  que definem as saídas medidas do sistema.

Para a avaliação numérica e implementação em computadores digitais do sistema modelado é necessário discretizar o modelo de tempo contínuo obtido. Este modelo pode ser discretizado a partir do método de segurador de ordem zero que assume que as entradas do sistema são constantes durante o intervalo de tempo  $T_s$  (Ogata, 1987). Assim tem-se que o sistema em tempo discreto é descrito pelas seguintes equações em diferenças

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_{d1}\mathbf{v}(k) + \mathbf{B}_{d2}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{C}_{d1}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{d11}\mathbf{v}(k) + \mathbf{D}_{d12}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_{d2}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{d21}\mathbf{v}(k) + \mathbf{D}_{d22}\mathbf{u}(k) \end{aligned}, \quad (4.6)$$

---

<sup>1</sup>Notação:  $\mathbf{A}^T$  é trasposto de  $\mathbf{A}$

sendo

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T_s} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}_{t=T_s}, \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{B}_d = \left( \int_{\tau=0}^{T_s} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \right) \mathbf{B}, \quad (4.7b)$$

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{C}, \quad (4.7c)$$

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{D}. \quad (4.7d)$$

## 4.2 Definição do problema de controle

Como apresentado no Capítulo 3, o módulo de controle consiste em um neuro-controlador que identifica o modelo inverso da planta. O objetivo de controle é diminuir o efeito do distúrbio  $\mathbf{v}$  sobre a saída de desempenho  $\mathbf{z}$ . O controlador recebe como entrada as saídas medidas  $\mathbf{y}$  da planta e gera o sinal de controle  $\mathbf{u}$ . Este esquema é mostrado na Figura 4.1.

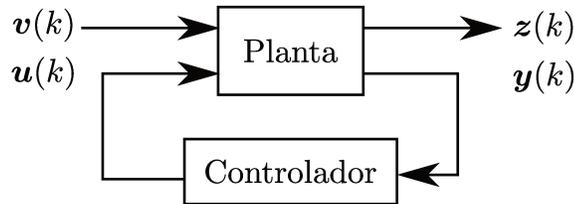


Figura 4.1: Esquema de controle em malha fechada

## 4.3 Problemas de aplicação

Baseado no problema de controle descrito na Seção 4.2 propõem-se quatro exemplos de aplicação a fim de avaliar o desempenho do esquema de controle tratado no Capítulo 3. O primeiro exemplo é um sistema massa-mola-amortecedor. O segundo e o terceiro exemplo estão baseados no modelo de elementos finitos de uma placa engastada em uma de suas extremidades. Para o segundo exemplo considera-se a planta de ordem completa e para o terceiro exemplo é feito um truncamento do modelo da placa usado no segundo exemplo. Por fim, um problema de controle de vibrações não colocado é proposto.

### 4.3.1 Sistema massa-mola-amortecedor

Considera-se o sistema mecânico de parâmetros concentrados de três graus de liberdade detalhado na Figura 4.2. Esta estrutura é baseada no exemplo de controle de um sistema mecânico simples descrito em Gawronski (2004).

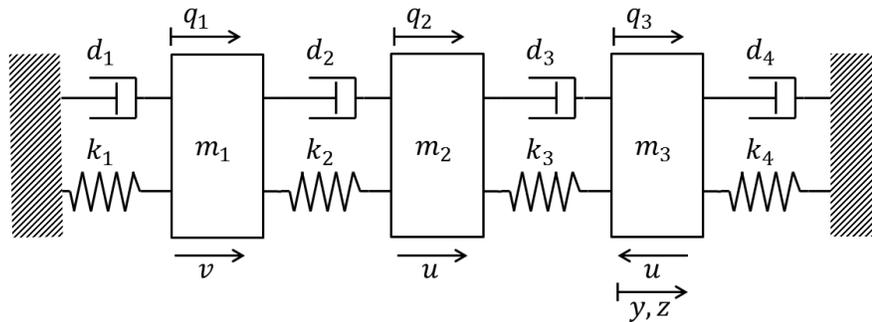


Figura 4.2: Sistema massa-mola-amortecedor

Os valores numéricos hipotéticos das massas são:  $m_1 = 3 [kg]$ ,  $m_2 = 1 [kg]$ ,  $m_3 = 2 [kg]$ . Os valores das rigidezes:  $k_1 = 30 [\frac{N}{m}]$ , e  $k_2 = k_3 = k_4 = 6 [\frac{N}{m}]$ .

Conforme Figura 4.2, o seguinte problema de controle é proposto:

- A massa  $m_1$  é afetada por um distúrbio  $v$ .
- O sistema é controlado por um esforço de controle  $u$  gerado por um atuador colocado entre as massas  $m_2$  e  $m_3$  (forças opostas de ação-reação).
- A saída de desempenho  $z$  é a posição da massa  $m_3$ .
- O sinal enviado ao controlador ( $y$ ) é a posição da massa  $m_3$ .

### Modelo do sistema

A matriz de rigidez  $\mathcal{K}$  é dada por

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

a matriz de massa  $\mathcal{M}$  é

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Para este problema o conceito de amortecimento proporcional é usado (M. Friswell, 1995). Por tanto, a matriz de amortecimento  $\mathcal{C}$  é dada pela Equação (4.10), sendo  $\alpha = 0.004$  e  $\beta = 0.001$  escolhidos como em Gawronski (2004).

$$\mathcal{C} = \alpha\mathcal{K} + \beta\mathcal{M}. \quad (4.10)$$

Considera-se o vetor de estados  $\mathbf{x} = [\mathbf{q} \ \dot{\mathbf{q}}]^T$  definido na Equação (4.3). Sendo  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$  os deslocamentos das massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  respectivamente, a matriz  $\mathbf{A}$  do sistema está dada pela Equação (4.5), a matriz de entrada  $\mathbf{B}_1$  associada ao sinal de distúrbio (força atuante sobre a massa  $m_1$ ) é definida como

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathcal{M}^{-1}\mathbf{B}_{0v} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{B}_{0v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

a matriz de entrada  $\mathbf{B}_2$  associada ao sinal de controle (atuador que gera forças opostas entre as massas  $m_2$  e  $m_3$ ) é dada como

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathcal{M}^{-1}\mathbf{B}_{0u} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{B}_{0u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

as matrizes de saída  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{D}_{11}$  e  $\mathbf{D}_{12}$  associadas à medida de desempenho  $z = q_3$  (posição da massa  $m_3$ ) são

$$\mathbf{C}_1 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad , \quad \mathbf{D}_{11} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_{12} = 0, \quad (4.13)$$

e da mesma maneira são definidas as matrizes de saída  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{D}_{21}$  e  $\mathbf{D}_{22}$  associadas ao sinal de medição do sistema  $y = q_3$  como

$$\mathbf{C}_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad , \quad \mathbf{D}_{21} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_{22} = 0. \quad (4.14)$$

Definidas as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{D}_{11}$ ,  $\mathbf{D}_{12}$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{D}_{21}$  e  $\mathbf{D}_{22}$ , o modelo de espaço de estados do sistema é definido segundo a Equação (4.4).

Na Figura 4.3 é apresentada a resposta em frequência da entrada  $v$  para a saída  $z$  do sistema modelado. Nesse diagrama de resposta em frequência é possível ver três picos correspondentes aos três modos de vibração existentes na estrutura.

A descrição dos modos de vibração do modelo da estrutura é fornecida na Tabela 4.1. Essa tabela foi obtida usando o comando (damp) do ©MATLAB.

Tabela 4.1: Dados dos modos de vibração da estrutura massa-mola-amortecedor

Modo	Autovalores	Amortecimento	Frequência natural [rad/s]
1	$-7.44 \times 10^{-3} \pm 1.86j$	$4.00 \times 10^{-3}$	1.86
2	$-2.07 \times 10^{-3} \pm 3.18j$	$6.51 \times 10^{-3}$	3.18
3	$-3.34 \times 10^{-3} \pm 4.05j$	$8.23 \times 10^{-3}$	4.05

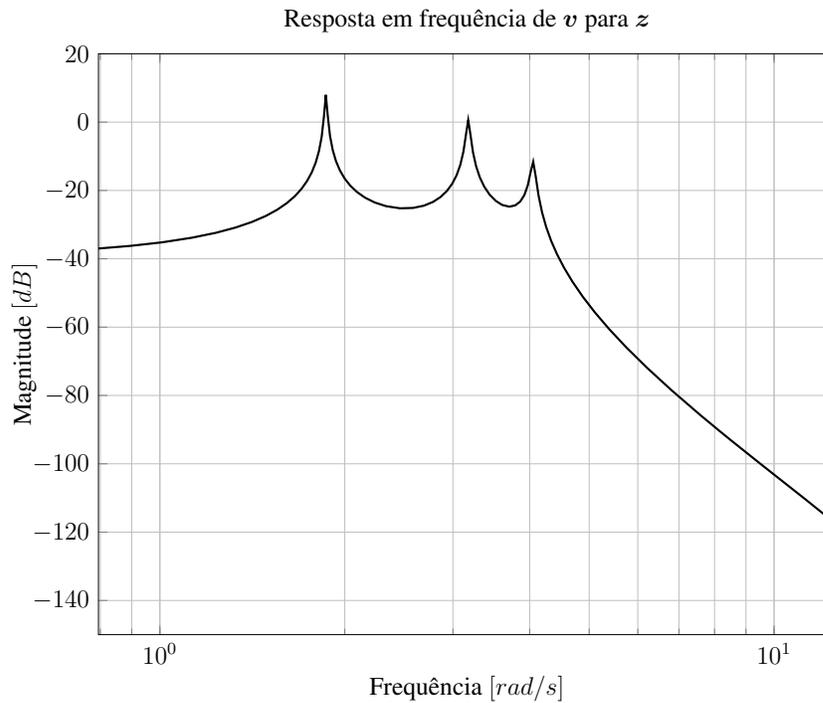


Figura 4.3: Resposta em frequência do sistema massa-mola-amortecedor

### Discretização do modelo

O modelo de espaço de estados que foi definido foi discretizado com o método de segurador de ordem zero (*zoh*) como descrito nas Equações (4.6).

A taxa de amostragem foi escolhida segundo o critério ou teorema de Nyquist (Nyquist, 1928) que diz que a frequência de amostragem  $F_s$  deve ser igual ou maior a duas vezes a maior frequência de interesse a ser amostrada.

Da Figura 4.3 é possível ver que para as frequências maiores do que 5  $[rad/s]$  o sistema atenua o efeito do distúrbio  $v$  em mais de  $-55 [dB]$ . Por tanto, propõe-se a frequência máxima de interesse  $F_{max}$  seja igual a 5  $[rad/s]$ , de modo que a frequência de amostragem seja

$$F_s > 10 [rad/s]$$

$$F_s > 1.6 [Hz].$$

É possível adotar  $F_s$  como qualquer valor maior do que  $1.6 [Hz]$ . Nesse caso  $F_s$  é tomado como  $5 [Hz]$ , ou seja, o intervalo de amostragem  $T_s = 0.2 [s]$ . Analisando-se o teorema de Nyquist, para a frequência de amostragem escolhida, a frequência máxima do sistema discretizado seria  $\frac{1}{2}5 [Hz]$  ou seja  $15.70 [rad/s]$ . A Figura 4.4 fornece o diagrama de resposta em frequência do sistema discretizado e do sistema em tempo contínuo, usando esta frequência de amostragem.

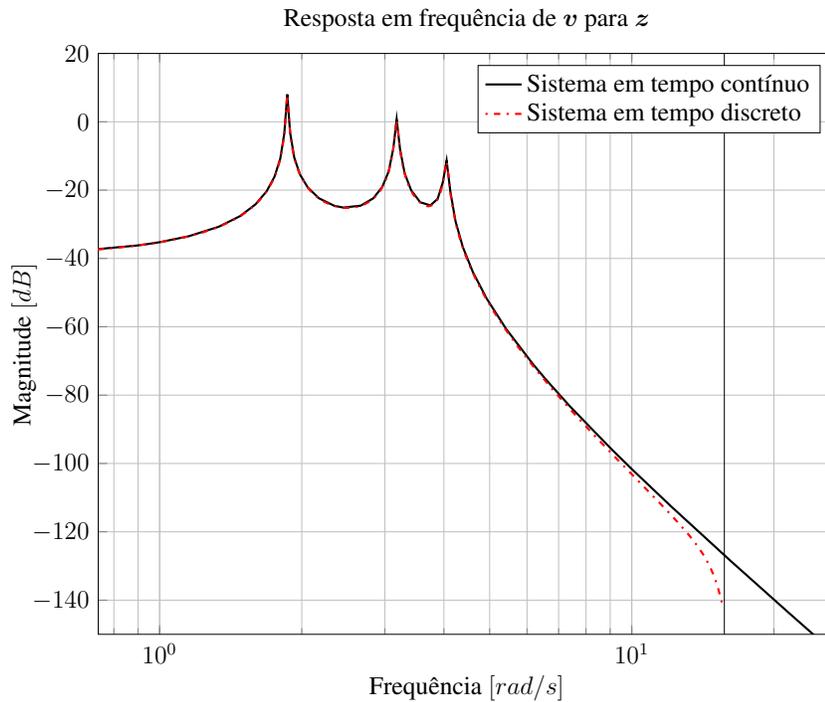


Figura 4.4: Respostas em frequência do sistema massa-mola-amortecedor contínuo e discretizado

### 4.3.2 Placa engastada 1

Seja uma placa de alumínio engastada em uma das suas extremidades, como indicado na Figura 4.5, com  $l_x = 1 [m]$ ,  $l_y = 0.05 [m]$ ,  $e = 0.01 [m]$ ,  $l_A = 0.35 [m]$  e  $l_{AB} = 0.6 [m]$ .

Propõe-se o seguinte problema de controle:

- O distúrbio  $v$  é uma força concentrada na direção do eixo  $z$  localizada no ponto  $A$ .
- O esforço de controle  $u$  é uma força concentrada na direção do eixo  $z$  localizada em  $B$ .

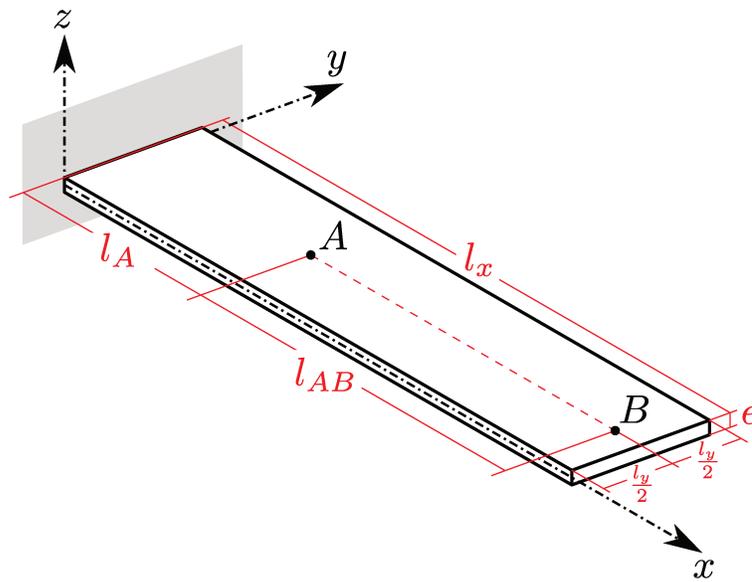


Figura 4.5: Esquema placa engastada em uma das extremidades - Caso do esquema de controle colocado

- Tanto a saída de desempenho  $z$  como a medida de controle  $y$  são o deslocamento do ponto  $B$  na direção do eixo  $z$ .

Pode-se ressaltar que este é um problema de controle colocado pois a localização do sensor coincide com a localização do atuador.

### Modelo do sistema

O modelo da planta foi obtido neste trabalho usando o método de elementos finitos. A placa foi discretizada em 80 elementos de placa retangular, sendo 20 o número de elementos dispostos horizontalmente sobre o eixo  $x$  e 4 o número de elementos dispostos verticalmente sobre o eixo  $y$ . A Figura 4.6 fornece o esquema da malha usada e a numeração dos nós. Neste trabalho são usadas as formulações de placa retangular em flexão dadas em Przemieniecki (1985). Este tipo de elemento possui quatro nós posicionados em cada um de seus vértices e considera três graus de liberdade por nó que são o deslocamento axial em  $z$ , a rotação no eixo  $x$  e a rotação no eixo  $y$  (vide Apêndice B).

O modelo de espaço de estados do sistema é definido segundo a Equação (4.4). Para isso é

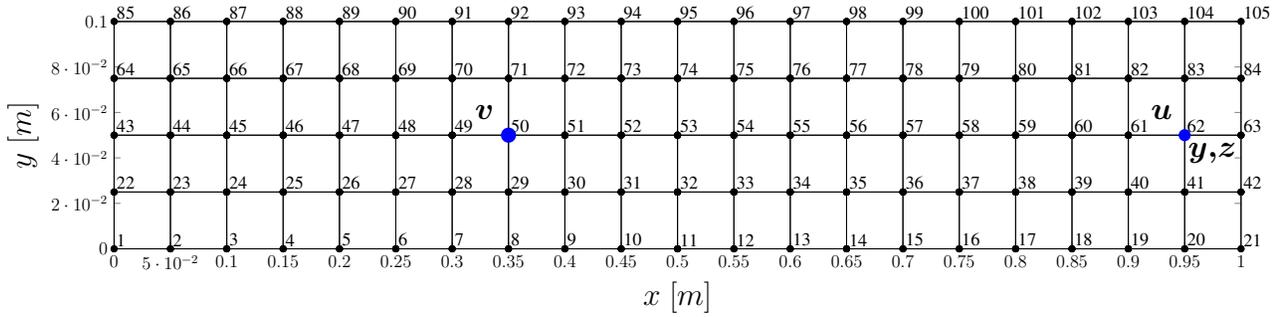


Figura 4.6: Malha de elementos finitos da placa engastada sem escala.

necessário definir as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{D}_{11}$ ,  $\mathbf{D}_{12}$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{D}_{21}$  e  $\mathbf{D}_{22}$ .

A matriz  $\mathbf{A}$  (matriz do sistema) do modelo em espaço de estados é definida segundo a Equação (4.5), onde a matriz de massa  $\mathcal{M}$  e a matriz de rigidez  $\mathcal{K}$  são obtidas usando formulações descritas no Apêndice B. A matriz de amortecimento  $\mathcal{C}$  é obtida usando amortecimento proporcional segundo a Equação (4.10) (M. Friswell, 1995), com  $\alpha = 0.0005$  e  $\beta = 0.0500$ .

A matriz de entrada  $\mathbf{B}_1$  associada ao sinal de distúrbio  $v$  (força na direção do eixo  $z$  sobre o nó 50) é definida como

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathcal{M}^{-1}\mathbf{B}_{0v} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{B}_{0v} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \vdots \\ u_{139} \\ \vdots \end{matrix} \quad (4.15)$$

sendo  $u_{139}$  o grau de liberdade relacionado ao deslocamento no eixo  $z$  do nó 50 (vide Seção B.2). A matriz de entrada  $\mathbf{B}_2$  associada ao sinal de controle  $u$  (força na direção do eixo  $z$  sobre o nó 62) é dada segundo a Equação (4.16), sendo  $u_{175}$  o grau de liberdade relacionado ao deslocamento no eixo  $z$  do nó 62 (Seção B.2),

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathcal{M}^{-1}\mathbf{B}_{0u} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{B}_{0u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \vdots \\ u_{175} \\ \vdots \end{matrix} \quad (4.16)$$

e as matrizes de saída  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{D}_{11}$  e  $\mathbf{D}_{12}$  associadas à medida de desempenho  $z$ , que é o deslocamento no eixo  $z$  do nó 62, são

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \dots & \dots & u_{175} & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{11} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_{12} = 0. \quad (4.17)$$

Igualmente são definidas as matrizes de saída  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{D}_{21}$  e  $\mathbf{D}_{22}$  associadas ao sinal de medição  $y$ , que é igual à medida de desempenho  $z$ , como

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \dots & \dots & u_{175} & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{21} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_{22} = 0. \quad (4.18)$$

A Figura 4.7 fornece o diagrama de resposta em frequência do modelo obtido da placa engastada. O modelo da estrutura possui 300 modos de vibração (ver Seção 4.3.3). Os primeiros 10 polos do modelo da placa engastada são detalhados na Tabela 4.2 (comando (damp) do ©MATLAB).

## Discretização do modelo

O modelo de estados obtido foi discretizado utilizando-se o método de segurador de ordem zero como descrito nas Equações (4.6). O tempo de amostragem foi escolhido segundo o critério de Nyquist (Nyquist, 1928). Neste caso a faixa de frequência de interesse é até a frequência que produz o terceiro pico no diagrama de resposta em frequência do sistema (Figura 4.7) que corresponde a  $F_{max} = 375.3 \text{ [rad/s]}$  onde se apresenta uma atenuação do distúrbio de  $-73 \text{ [dB]}$ . Então, tem-se

Tabela 4.2: Dados dos primeiros modos de vibração da placa engastada - Caso 1

Modo	Autovalores	Amortecimento	Frequência natural [rad/s]
1	$-0.138 \pm 21.3j$	$6.50 \times 10^{-3}$	21.3
2	$-3.00 \pm 109j$	$2.75 \times 10^{-2}$	109
3	$-4.46 \pm 133j$	$3.35 \times 10^{-2}$	133
4	$-30.5 \pm 348j$	$8.73 \times 10^{-2}$	349
5	$-35.4 \pm 374j$	$9.41 \times 10^{-2}$	376
6	$-106 \pm 641j$	$1.62 \times 10^{-1}$	650
7	$-137 \pm 727j$	$1.85 \times 10^{-1}$	740
8	$-202 \pm 877j$	$2.25 \times 10^{-1}$	900
9	$-270 \pm 1000j$	$2.60 \times 10^{-1}$	1040
10	$-297 \pm 1050j$	$2.72 \times 10^{-1}$	1090

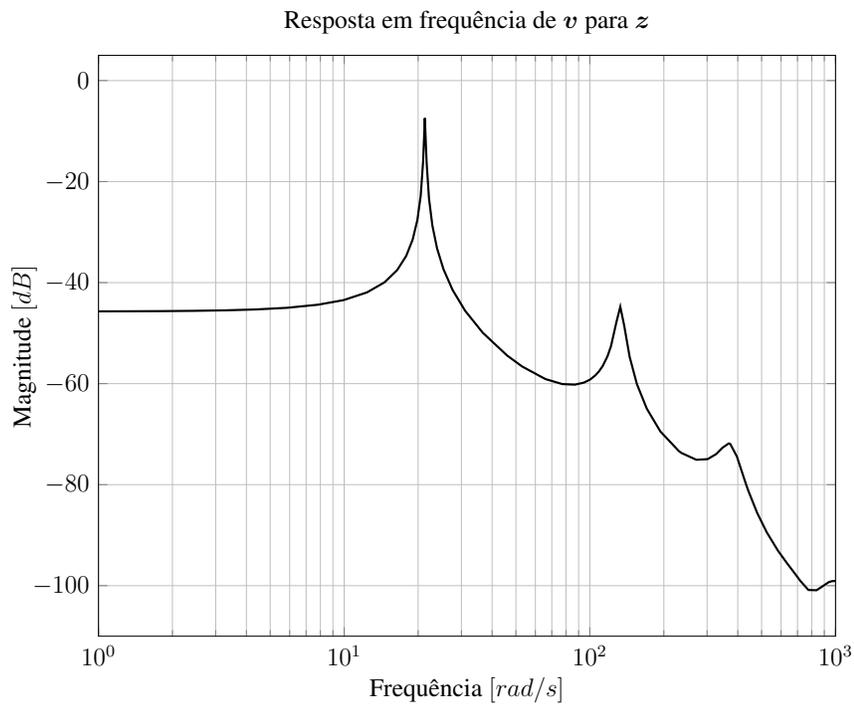


Figura 4.7: Resposta em frequência da placa engastada - Caso do esquema de controle colocado

que

$$\begin{aligned} F_s &> 750.60 \text{ [rad/s]} \\ F_s &> 119.46 \text{ [Hz]} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Segundo a Equação (4.19) é possível tomar  $F_s = 200 \text{ [Hz]}$ , o que corresponde ao tempo de amostragem  $T_s = 0.005 \text{ [s]}$ . Ao aplicar o teorema de Nyquist, a frequência máxima do sistema discretizado seria  $\frac{1}{2}200 \text{ [Hz]}$  ou seja  $628.31 \text{ [rad/s]}$ . A Figura 4.8 apresenta o diagrama de resposta em frequência do sistema discretizado e do sistema em tempo contínuo.

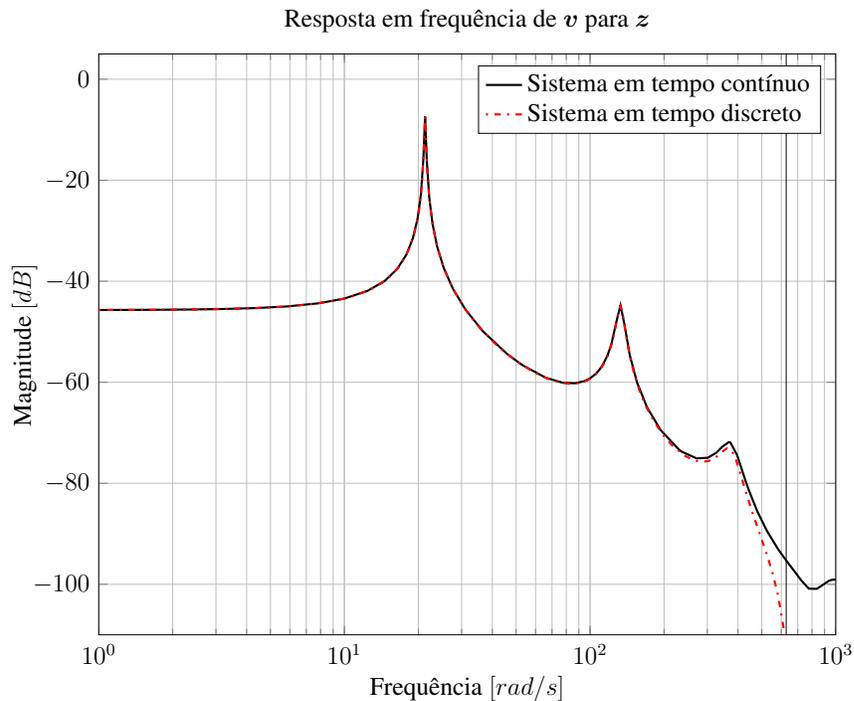


Figura 4.8: Resposta em frequência do modelo da placa engastada discretizado - Caso do esquema de controle colocado

### 4.3.3 Placa engastada 1 com redução de modelo

O modelo de elementos finitos da placa obtido na Seção 4.3.2 tem 105 nós com três graus de liberdade por nó (Seção B.2) e está engastado nos nós (1), (22), (43), (64) e (85). Por consequência o modelo tem 100 nós livres ou seja 300 graus de liberdade e portanto o modelo de espaço de

estados obtido tem 600 estados. Este modelo pode ser considerado grande neste tipo de aplicação de controle de sistemas. A fim de ter um tratamento numérico viável para o projeto do controlador, é necessário dispor de um modelo de ordem reduzida.

É importante salientar que a redução do modelo é feita com o objetivo de ter um tratamento mais viável na fase do projeto do controlador. Mas, o sistema em malha fechada é obtido realimentando o **sistema de ordem completa** com o módulo de controle projetado com o modelo reduzido da planta.

### Truncamento do modelo

Para a redução do modelo, a técnica mais comum e simples é o truncamento do modelo, onde os modos de vibração superiores a um valor crítico de frequência de interesse são descartados. No presente caso, a redução do modelo é realizada através da função *modreal* do ©MATLAB, deixando apenas os 3 primeiros modos de vibração (Tabela 4.3). A Figura 4.9 fornece os diagramas de resposta em frequência do modelo de ordem completa e o modelo reduzido.

Tabela 4.3: Dados dos modos de vibração da placa engastada (modelo reduzido) - Caso do esquema de controle colocado

Modo	Autovalores	Amortecimento	Frequência natural [ <i>rad/s</i> ]
1	$-0.138 \pm 21.3j$	$6.50 \times 10^{-3}$	21.3
2	$-3.00 \pm 109j$	$2.75 \times 10^{-2}$	109
3	$-4.46 \pm 133j$	$3.35 \times 10^{-2}$	133

### Discretização do modelo

O modelo reduzido obtido foi discretizado utilizando-se o segurador de ordem zero. A taxa de amostragem é escolhida seguindo o mesmo procedimento e valores de frequências usados na Equação (4.19), obtendo, por fim, um intervalo de amostragem  $T_s = 0.005$  [s]. A Figura 4.10 apresenta o diagrama de resposta em frequência do sistema discretizado e do sistema em tempo contínuo.

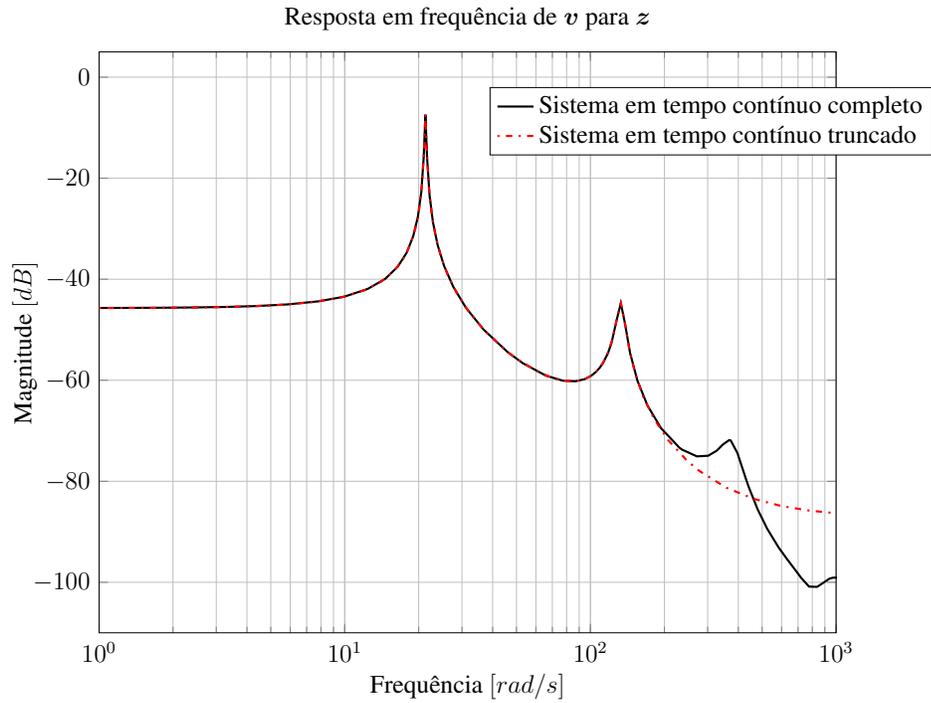


Figura 4.9: Resposta em frequência do modelo reduzido da placa engastada - Caso do esquema de controle colocado

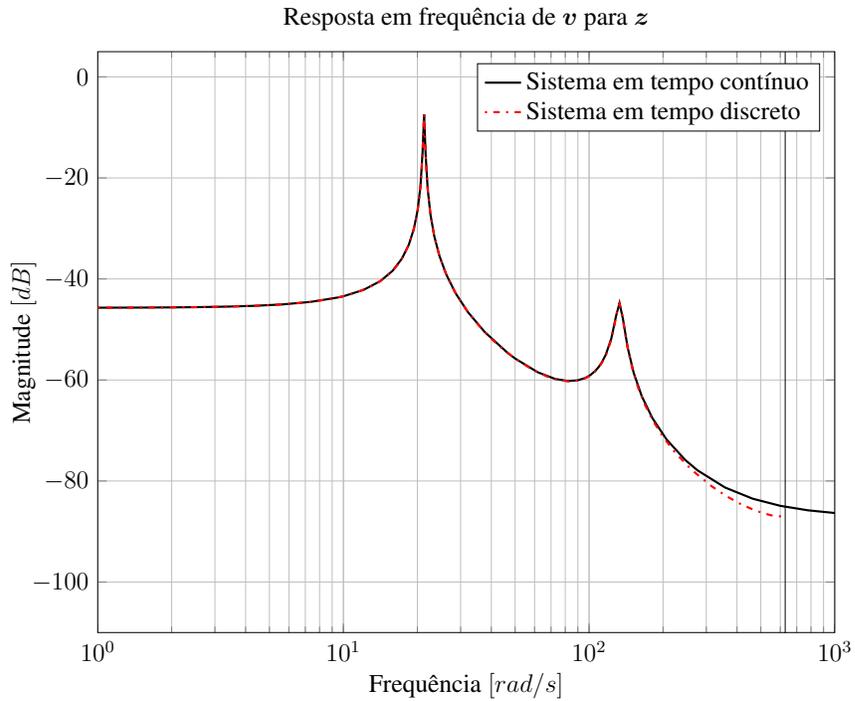


Figura 4.10: Resposta em frequência do modelo reduzido da placa engastada discretizado - Caso do esquema de controle colocado

#### 4.3.4 Placa engastada 2

Seja uma placa de alumínio engastada em uma das suas extremidades como se indica na Figura 4.11, com  $l_x = 1$  [m],  $l_y = 0.05$  [m],  $e = 0.01$  [m],  $l_A = 0.35$  [m],  $l_{AB} = 0.3$  [m] e  $l_{AB} = 0.3$  [m]. O problema de controle é descrito assim:

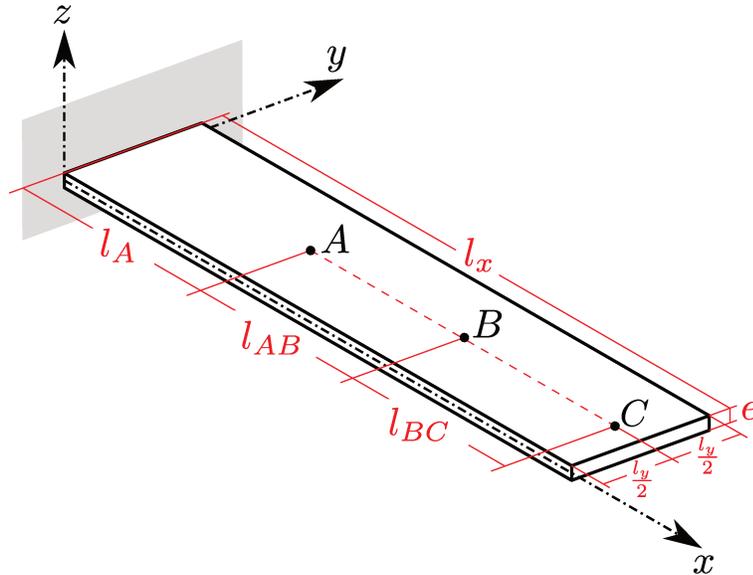


Figura 4.11: Esquema placa engastada em uma das extremidades - Caso do esquema de controle não colocado

- O distúrbio  $v$  é uma força concentrada na direção do eixo  $z$  localizada no ponto  $A$ .
- O esforço de controle  $u$  é uma força concentrada na direção do eixo  $z$  localizada em  $B$ .
- Tanto a saída de desempenho  $z$  como a medida de controle  $y$  são o deslocamento do ponto  $C$  na direção do eixo  $z$ .

Ao contrário do primeiro caso da viga engastada, descrito na Seção 4.3.2, o problema de controle proposto é um problema de controle não colocado, pois o sinal de medição está localizado em um ponto diferente ao lugar onde está localizado o sinal de controle.

## Modelo do sistema

O modelo do sistema foi obtido usando o método de elementos finitos. A placa foi modelada utilizando a formulação de placa em flexão dada em Przemieniecki (1985) (Apêndice B), sendo a placa discretizada em 80 elementos, 20 elementos dispostos horizontalmente (sobre o eixo  $x$ ) e 4 elementos dispostos verticalmente (sobre o eixo  $y$ ). A malha proposta para a modelagem da viga é apresentada na Figura 4.12.

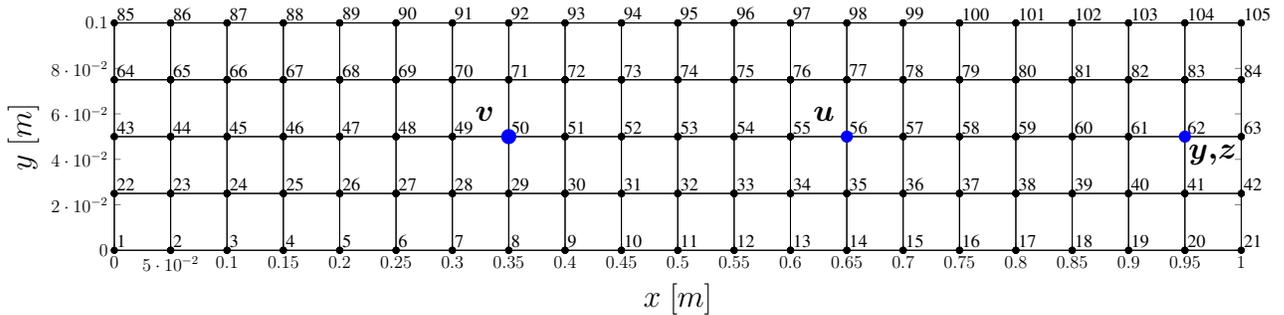


Figura 4.12: Malha de elementos finitos da placa engastada sem escala - Caso do esquema de controle não colocado

Para construir o modelo de espaço de estados do sistema segundo a Equação (4.4), a matriz  $\mathbf{A}$  foi definida na Equação (4.5), onde as matrizes  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{K}$  são obtidas usando as formulações descritas no Apêndice B. A matriz  $\mathbf{C}$  é obtida segundo a Equação (4.10), com  $\alpha = 0.0005$  e  $\beta = 0.0500$ .

A matriz de entrada  $\mathbf{B}_1$  associada à entrada  $v$  (força na direção do eixo  $z$  sobre o nó 50) é definida como na Equação 4.15. A matriz de entrada  $\mathbf{B}_2$  associada ao sinal de controle  $u$  que é uma força aplicada no nó 56 na direção do eixo  $z$  é dada por a Equação 4.16. E as matrizes de saída  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{D}_{11}$  e  $\mathbf{D}_{12}$  associadas à medida de desempenho  $z$  (deslocamento no eixo  $z$  do nó 62) são definidas pelas Equações 4.17 e 4.17 respectivamente.

Da mesma forma que o modelo da placa descrito na Seção 4.3.2, este modelo possui 300 modos de vibração. Vale a pena salientar que esta planta apresenta polos idênticos aos detalhados na Tabela 4.1 da Seção 4.3.2 devido a que os modos de vibração são características próprias da estrutura e tanto no caso da primeira placa como desta usam-se a mesma estrutura sob as mesmas condições de contorno.

Dado que os lugares onde é aplicado o sinal de distúrbio  $v$  e o lugar onde é tomada a medição

$y$  são os mesmos do da placa da Seção 4.3.2 o diagrama de resposta em frequência de  $v$  para  $y$  (Figura 4.13) não muda. Só muda o diagrama de resposta em frequência de  $u$  para  $y$ , devido a que o esforço de controle é aplicado em um lugar diferente. Isso pode ser evidenciado na Figura 4.14.

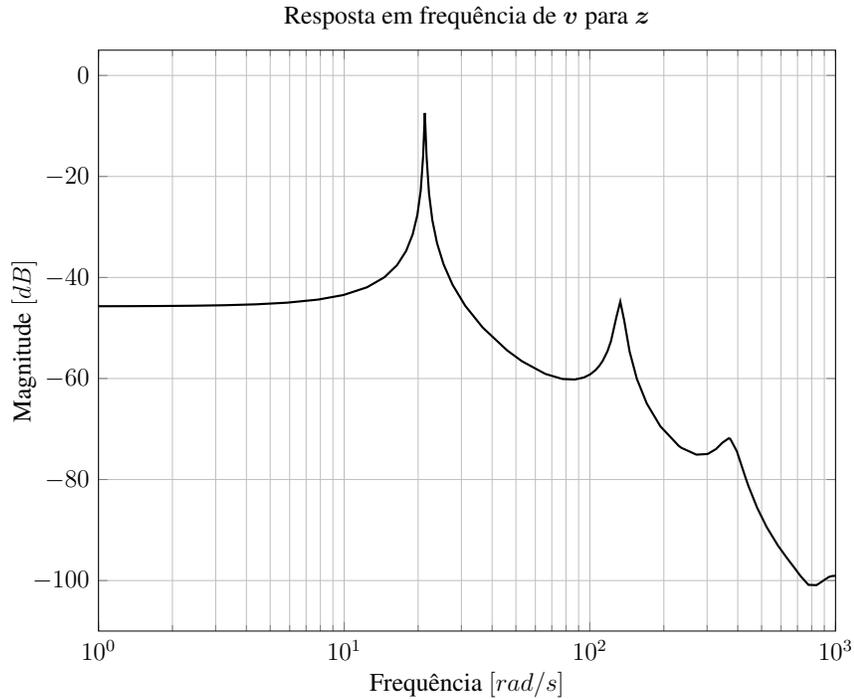


Figura 4.13: Resposta em frequência da placa engastada - Caso do esquema de controle não colocado

### Discretização do modelo

A taxa de amostragem é escolhida segundo o mesmo procedimento descrito na Seção 4.3.2, adotam-se os mesmos parâmetros e faixa de frequência de interesse. Portanto, toma-se  $F_s = 200 [Hz]$ , ou seja  $T_s = 0.005 [s]$ . A Figura 4.15 apresenta o diagrama de resposta em frequência do sistema discretizado e do sistema em tempo contínuo.

## 4.4 Projeto do neuro-controlador

Essa Seção detalha o projeto do neuro-controlador implementado no intuito de resolver os exemplos de aplicação propostos na Seção 4.3. A primeira parte detalha os parâmetros considerados

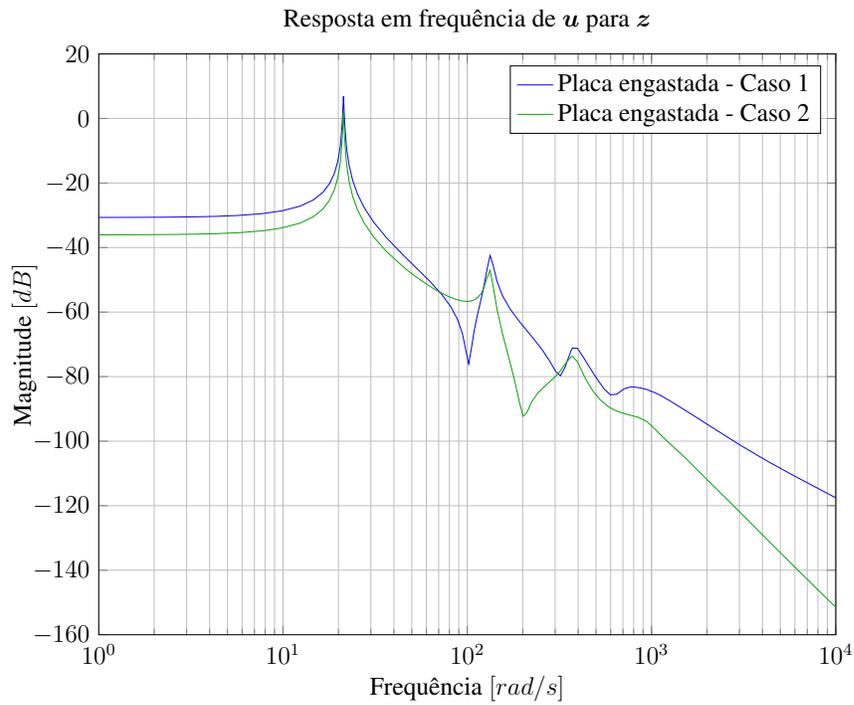


Figura 4.14: Comparação da resposta em frequência dos dois casos (colocado e não colocado) da placa engastada

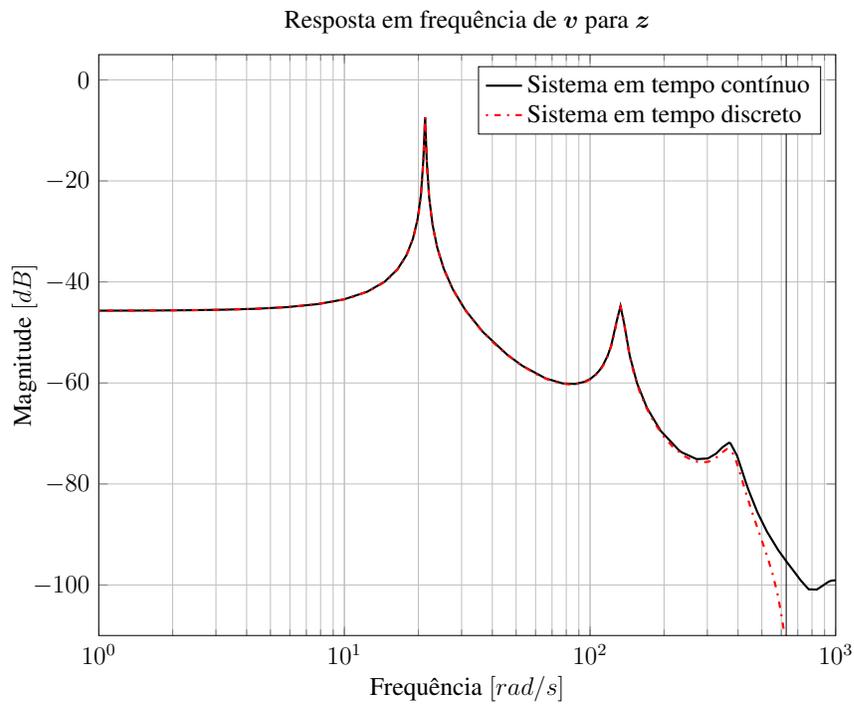


Figura 4.15: Resposta em frequência do modelo da placa engastada discretizado - Caso do esquema de controle não colocado

em relação da estrutura do controlador. A segunda parte apresenta algumas considerações a respeito do sinal de excitação usado para simular os sistemas. Por fim, são descritos os parâmetros do método de otimização usado para resolver o problema de fase de treinamento da rede.

#### 4.4.1 Estrutura do neuro-controlador

O projeto do neuro-controlador é feito segundo o procedimento indicado no Capítulo 3. Neste caso, adota-se uma RNA do tipo MLP como neuro-controlador a fim de resolver os três exemplos propostos.

Para definir o tamanho da camada de entrada da RNA, a primeira consideração é a escolha do número de atrasos do sinal de saída  $y$  e o número de atrasos do sinal de controle  $u$  utilizados como entradas da RNA. Neste caso, para o controlador são escolhidos como parâmetros de entrada da RNA os 10 últimos valores (10 atrasos) tanto do sinal de saída  $y$  do sistema como do sinal de entrada  $u$  do sistema. Neste caso, o neuro-controlador teria 20 entradas.

Como foi dito na Seção 3.2.1 as RNA de somente uma camada oculta com funções *tangente hiperbólico* conseguem interpolar uma grande variedade de funções. Para o presente caso, se usará uma RNA de uma camada oculta com 5 neurônios com função de ativação *tangente hiperbólico*.

A camada de saída da RNA possui um neurônio com função de ativação linear. A função linear na camada de saída é tipicamente usada em problemas de interpolação o mapeamento com RNA.

#### 4.4.2 Sinal de excitação

O sinal de excitação escolhido para as fases de treinamento e validação foi o sinal de *mudança de nível em instâncias aleatórias* descrito em Nørgaard e outros (2004). O sinal *mudança de nível em instâncias aleatórias* é uma extensão do tipo de sinal de ruído aleatório. Em Nørgaard e outros (2004) são apresentados múltiplos casos onde é mostrada a efetividade desse tipo de sinal.

Para criar um sinal de *mudança de nível em instâncias aleatórias* define-se

$$u(k) = e \left( \text{int} \left[ \frac{k-1}{N} \right] + 1 \right) \quad (4.20)$$

onde  $e(k)$  é um sinal de ruído branco de variância  $\sigma_e^2$ . A função  $\text{int}$  toma a parte inteira e  $N$  é o número total de amostras. Além disso, existe um parâmetro adicional  $\alpha$  para decidir quando a função muda de nível. O sinal é definido como

$$u(k) = \begin{cases} u(k-1) & \text{com probabilidade } \alpha \\ e(k) & \text{com probabilidade } 1 - \alpha \end{cases} \quad (4.21)$$

As Figuras 4.16 e 4.17 fornecem dois exemplos deste tipo de sinal. Para o sinal representado na Figura 4.16 o valor de  $\alpha$  é igual a 0.6 e para o sinal da Figura 4.17 o valor de  $\alpha$  é 0.9. Para os dois sinais (Figuras 4.16 e 4.17) o valor de  $\sigma_e^2$  foi igual a 1.

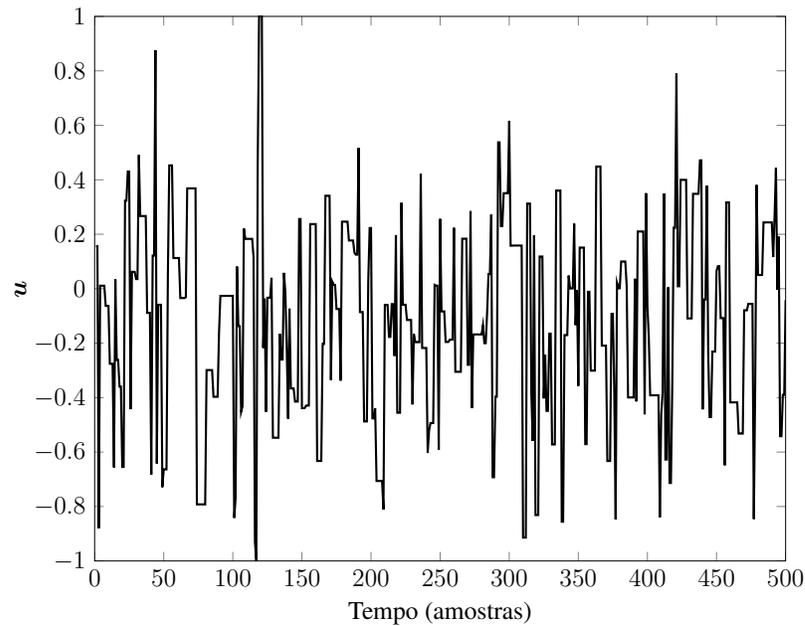


Figura 4.16: Exemplo de mudança de nível em instâncias aleatórias ( $\alpha = 0.6$ )

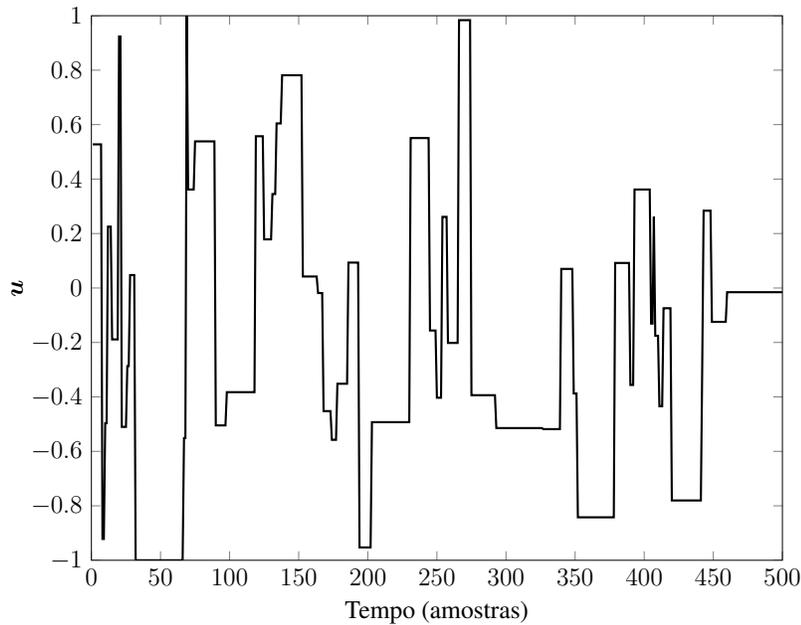


Figura 4.17: Exemplo de mudança de nível em instâncias aleatórias ( $\alpha = 0.9$ )

### 4.4.3 Algoritmo de otimização

Em Fletcher (1987) são apresentados diferentes métodos de otimização. Entre esses é apresentado o método de *Levenberg-Marquardt*. Como visto na Tabela 2.1 este método apresenta algumas vantagens comparando-se com outros métodos usados na área. Este algoritmo é estável e converge rapidamente, portanto o método de *Levenberg-Marquardt* foi o algoritmo escolhido para ser usado na solução do problema de otimização da fase de treinamento do presente trabalho. Para isso os códigos das implementações apresentados em Nørgaard (2000) foram usados neste trabalho.

Com relação aos critérios de parada usados neste algoritmo, tem-se que: o algoritmo termina se o valor da função a ser minimizada é igual a zero, ou se a variação do valor da função respeito à iteração anterior é menor do que  $1 \times 10^{-7}$  e se o maior valor do vetor gradiente é menor do que  $1 \times 10^{-4}$ .

## 5 Resultados

A fim de avaliar o desempenho da técnica estudada nesta dissertação, no Capítulo 4 foram propostos quatro exemplos de aplicação: o primeiro trata-se do controle de vibrações em uma estrutura mecânica de parâmetros concentrados massa-mola-amortecedor. O segundo exemplo é o controle de vibrações numa placa engastada numa das suas extremidades. No exemplo seguinte, uma redução do modelo obtido da placa do exemplo anterior, é feita. O quarto exemplo trata uma modificação do sistema do segundo exemplo tratado, considerando um problema de controle diferente, neste caso trata-se de um problema de controle não colocado. Este capítulo apresenta os resultados obtidos com o controle ativo dos quatro exemplos detalhados no Capítulo 4 usando o esquema de controle inverso-direto baseado em redes neurais artificiais.

Os exemplos de aplicação são tratados usando também a técnica de controle  $\mathcal{H}_\infty$ . O controle  $\mathcal{H}_\infty$  é uma técnica de controle amplamente usada atualmente (Lim *e outros*, 1991; Sznaier e Rotstein, 1992; Moser, 1993; Smith *e outros*, 1994; Banavar e Dominic, 1995). A solução do  $\mathcal{H}_\infty$  foi obtida através da função *dhinf* incluída no conjunto de ferramentas de controle robusto do ©MATLAB (vide Apêndice A).

No Capítulo 4, na Seção 4.4, uma estrutura do neuro-controlador foi proposta. Os parâmetros dessa estrutura serão utilizados para projetar o controlador nos quatro exemplos. Para isso, a RNA proposta é treinada em cada caso. Além disso, um sinal de excitação para a fase de treinamento dos controladores é proposto (Seção 4.4.2).

Em cada um dos quatro exemplos, realizou-se uma série de simulações com diferentes valores dos parâmetros do sinal de excitação. Apenas os parâmetros do sinal de excitação que obtiveram melhor desempenho em cada um dos exemplos, entre os parâmetros testados, são reportados nesta seção. Os resultados serão apresentados da seguinte forma: primeiramente, a fase de treinamento do neuro controlador é detalhada. Nessa fase, os sinais de entrada e saída do sistema e a evolução do critério de treinamento são apresentados. Logo depois, as respostas temporais e de frequência dos sistemas sem controle, e controlados com  $\mathcal{H}_\infty$  e RNA, são apresentadas. Nessa seção, os esforços de controle em cada um dos casos do sistema controlado são apresentados. Por fim, uma análise e comparação dos resultados obtidos nos quatro exemplos de aplicação é feita.

## 5.1 Estrutura massa-mola-amortecedor

Os resultados obtidos no problema de controle proposto na Seção 4.3.1 são apresentados nesta Seção.

Na fase de treinamento é usado o sinal de excitação *mudança de nível em instâncias aleatórias* definido na Seção 4.4.2. O sinal foi construído segundo a Equação (4.21) com  $\alpha = 0.9$  e  $\sigma_e^2 = 8$ . A Figura 5.1 ilustra o sinal de excitação que será aplicado ao sistema.

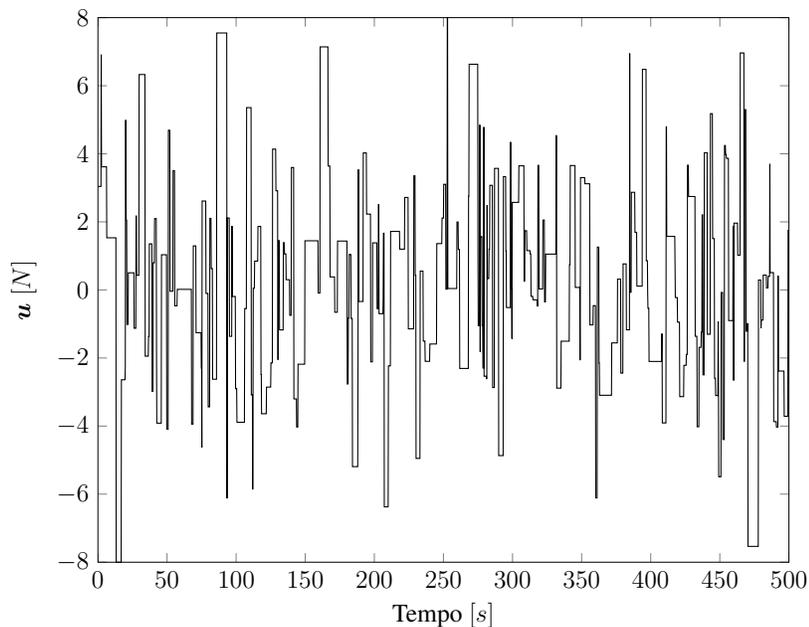


Figura 5.1: Sinal de excitação do sistema na fase de treinamento

O sinal de medição produzido pelo sistema quando é aplicado o sinal da Figura 5.1 é fornecido na Figura 5.2.

Segundo os sinais de entrada e saída apresentados nas Figuras 5.1 e 5.2 respectivamente, criam-se os conjuntos de treinamento segundo as Equações (3.1a) e (3.1b). Para isso, os sinais são divididos em duas partes de igual tamanho, sendo a primeira parte dos sinais utilizada na fase de treinamento e a parte restante utilizada na fase de validação. O valor de desempenho que é o erro quadrático médio, definido na Equação (2.2), da RNA convergiu a  $1.2 \times 10^{-10}$  em 311 iterações. A Figura 5.3 apresenta a evolução a cada iteração do erro quadrático médio na fase de treinamento. O valor de desempenho da RNA na fase de validação foi de  $2.8 \times 10^{-10}$ . Na Figura 5.4 é apresentada

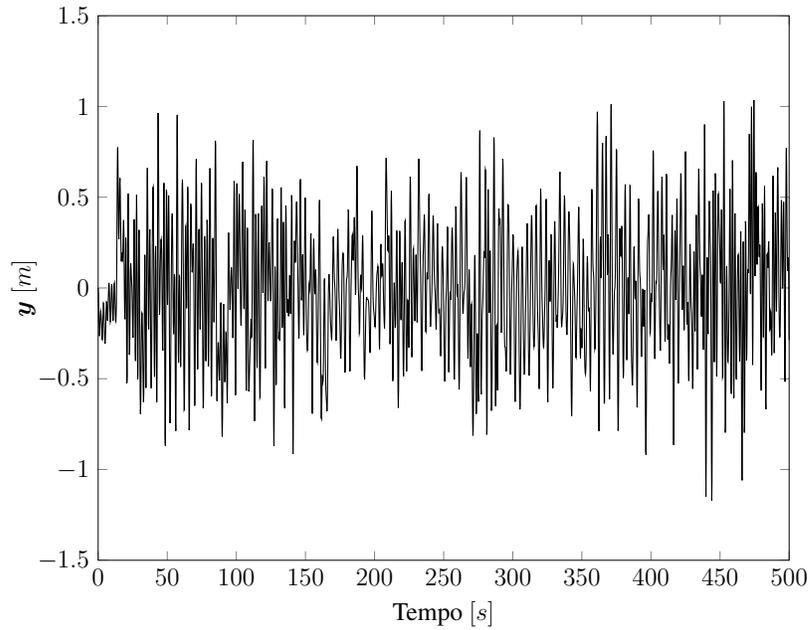


Figura 5.2: Sinal de saída do sistema na fase de treinamento

a comparação visual das primeiras 200 amostras do sinal  $u$  e do sinal estimado pela RNA  $\hat{u}$ .

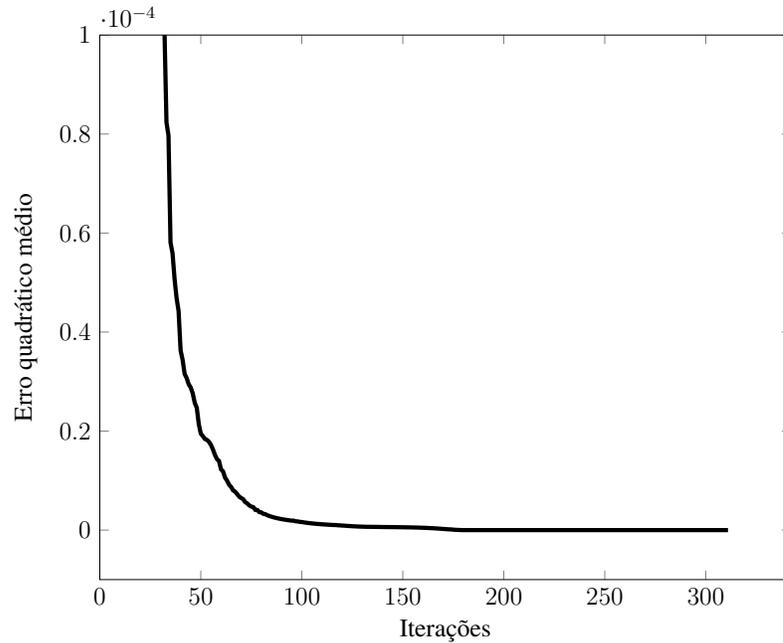


Figura 5.3: Evolução do erro quadrático médio na fase de treinamento

A Figura 5.5 apresenta a resposta em frequência da planta sem controle, a resposta em frequência da planta controlada com  $\mathcal{H}_\infty$  e a planta controlada usando RNA. Na resposta do sis-

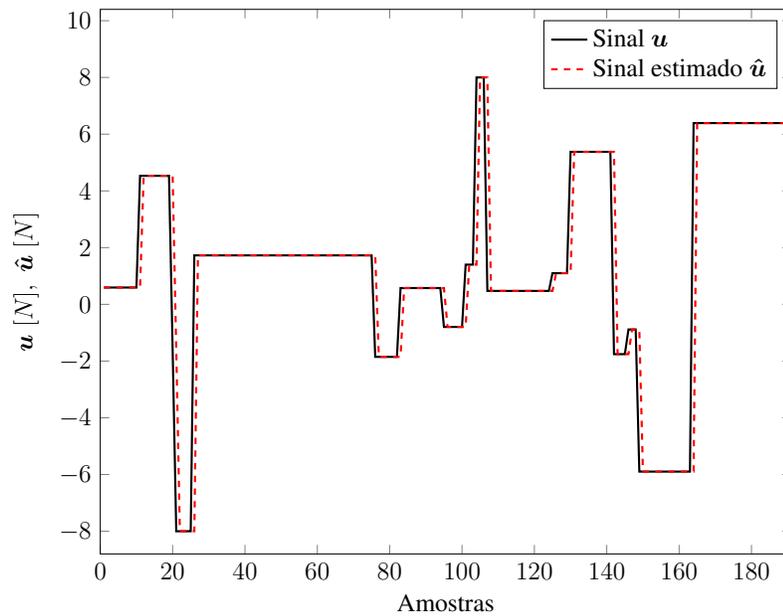


Figura 5.4: Visualização das previsões

tema sem controle, vê-se claramente os três picos correspondentes aos três modos de vibração da estrutura. No caso da solução por  $\mathcal{H}_\infty$ , tem-se inicialmente uma atenuação em torno dos  $-70[dB]$  que aumenta até  $-80[dB]$  perto de  $10[rad/s]$ . No esquema de controle com RNA observa-se uma atenuação de  $-50[dB]$  em  $1[rad/s]$  que chega aos  $-100[dB]$  de atenuação perto de  $10[rad/s]$ .

A Figura 5.6 fornece a resposta temporal do sistema sem controle a um distúrbio de varredura de frequências com  $f_{\min} = 1 [rad/s]$ ,  $f_{\max} = 7 [rad/s]$  e amplitude unitária. Para os dois casos, sistema controlado com  $\mathcal{H}_\infty$  (Figura 5.7) e sistema controlado com RNA (Figura 5.8), é possível verificar a atenuação do efeito do distúrbio na saída de desempenho.

O sinal de controle aplicado à planta do sistema controlado com  $\mathcal{H}_\infty$  e do sistema controlado com RNA são fornecidos nas Figuras 5.9 e 5.10 respectivamente.

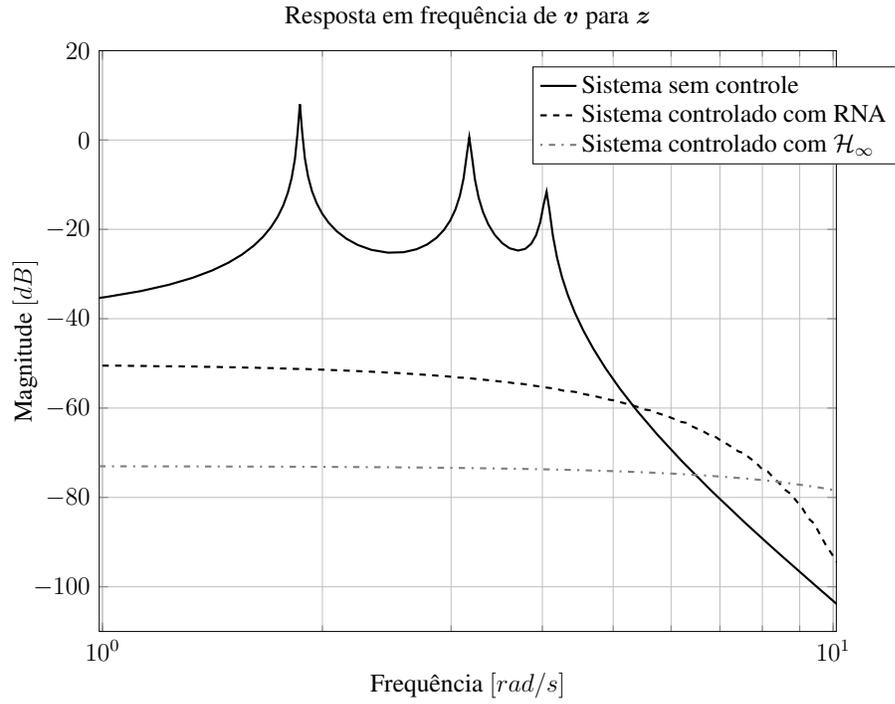


Figura 5.5: Resposta em frequência sistema massa-mola-amortecedor, sistema controlado (RNA) e sistema controlado ( $\mathcal{H}_\infty$ )

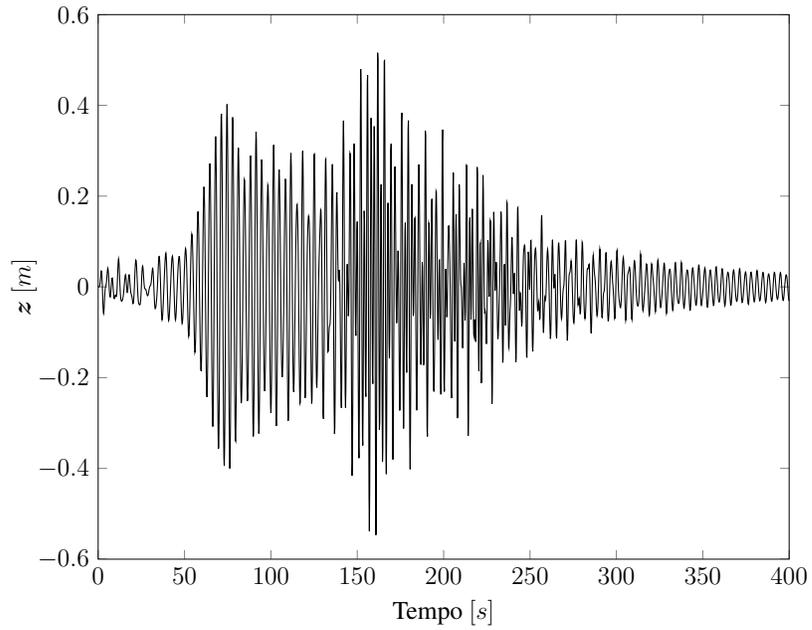


Figura 5.6: Resposta temporal da estrutura massa-mola-amortecedor não controlada

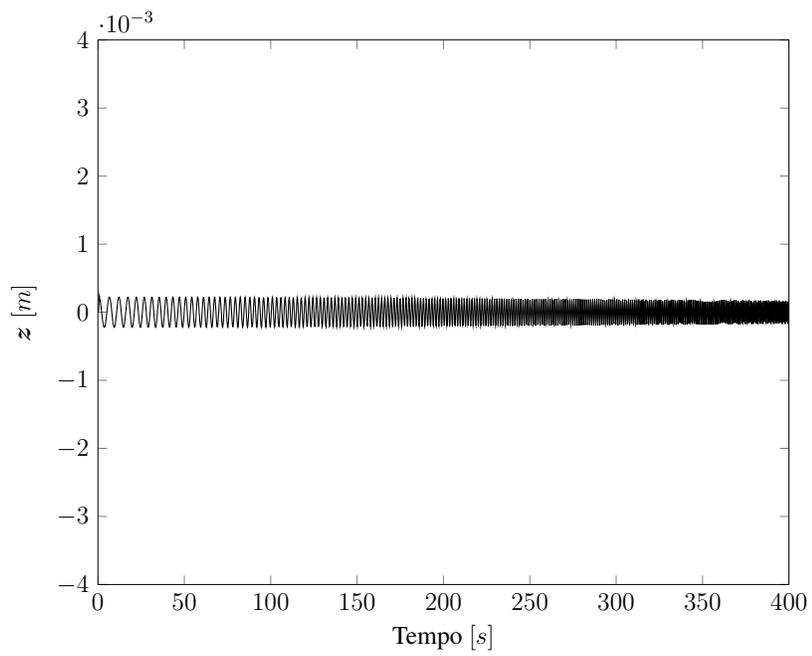


Figura 5.7: Resposta temporal da estrutura massa-mola-amortecedor controlada com  $\mathcal{H}_\infty$

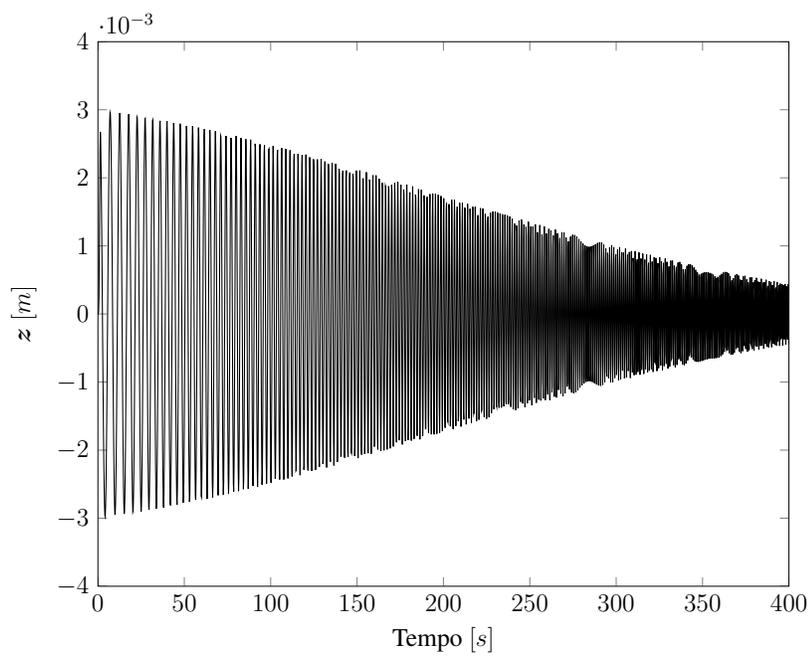


Figura 5.8: Resposta temporal da estrutura massa-mola-amortecedor controlada com RNA

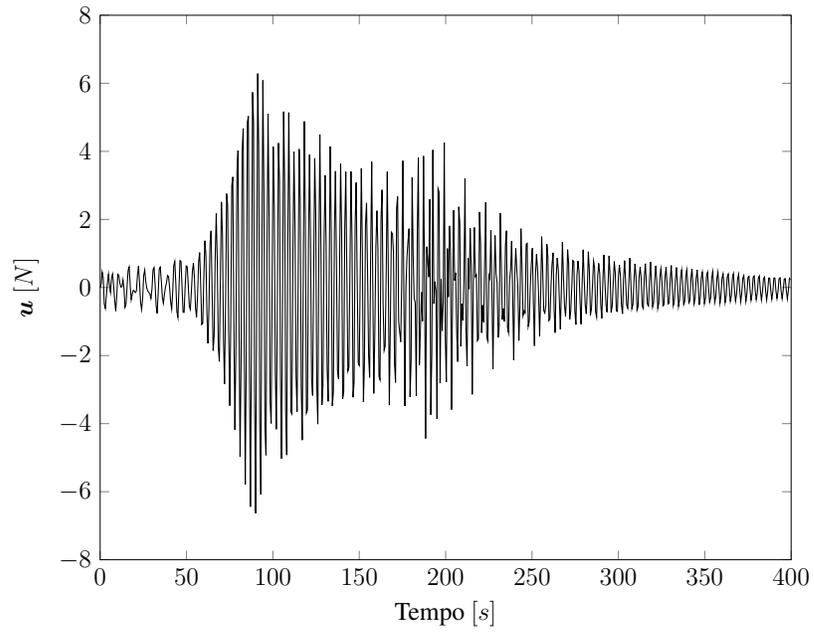


Figura 5.9: Sinal de controle gerado pelo controlador  $\mathcal{H}_\infty$

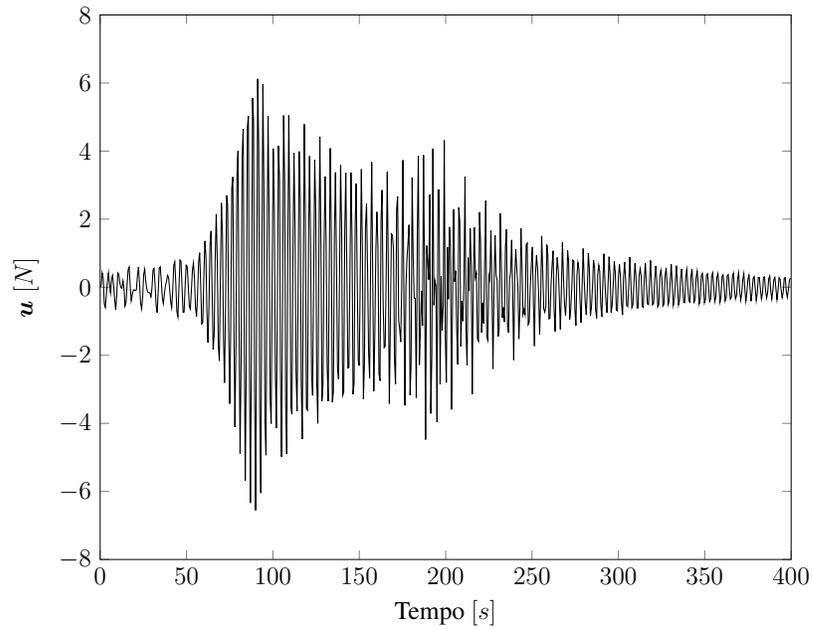


Figura 5.10: Sinal de controle gerado pelo neuro-controlador

## 5.2 Placa engastada 1

Para o problema proposto na Seção 4.3.2 de uma placa engastada em uma das suas extremidades, o sinal de excitação usado na fase de treinamento foi o sinal *mudança de nível em instâncias aleatórias* definido na Equação (4.21) com  $\alpha = 0.9$  e  $\sigma_e^2 = 2$ . A Figura 5.11 fornece o sinal de excitação do sistema aplicado.

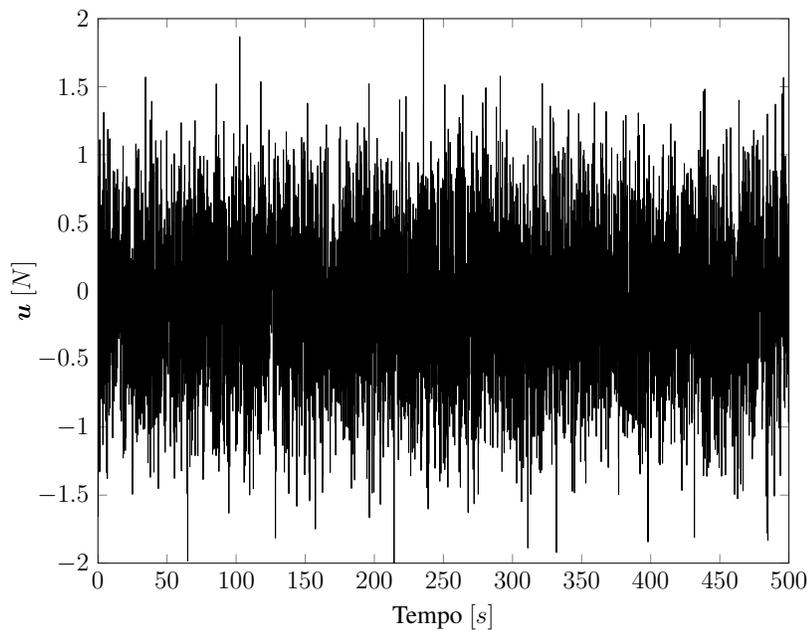


Figura 5.11: Sinal de excitação do sistema na fase de treinamento

A saída do sistema é mostrada na Figura 5.12.

Os conjuntos de treinamento são definidos segundo as Equações (3.1a) e (3.1b) tomando a primeira metade dos conjuntos. O valor de desempenho dado na Equação (2.2) convergiu a  $1.9 \times 10^{-8}$  em 384 iterações e foi de  $9.9 \times 10^{-9}$  na fase de validação. A Figura 5.13 apresenta a evolução do critério de treinamento a cada iteração. A predições feitas pela RNA na fase de validação podem ser vistas na Figura 5.14.

A Figura 5.15 apresenta os diagramas da resposta em frequência do sistema sem controle, do sistema controlado com RNA e do sistema controlado com o método  $\mathcal{H}_\infty$ . A atenuação inicial obtida com RNA foi de 68 [dB] e a atenuação inicial obtida com  $\mathcal{H}_\infty$  foi de 72 [dB].

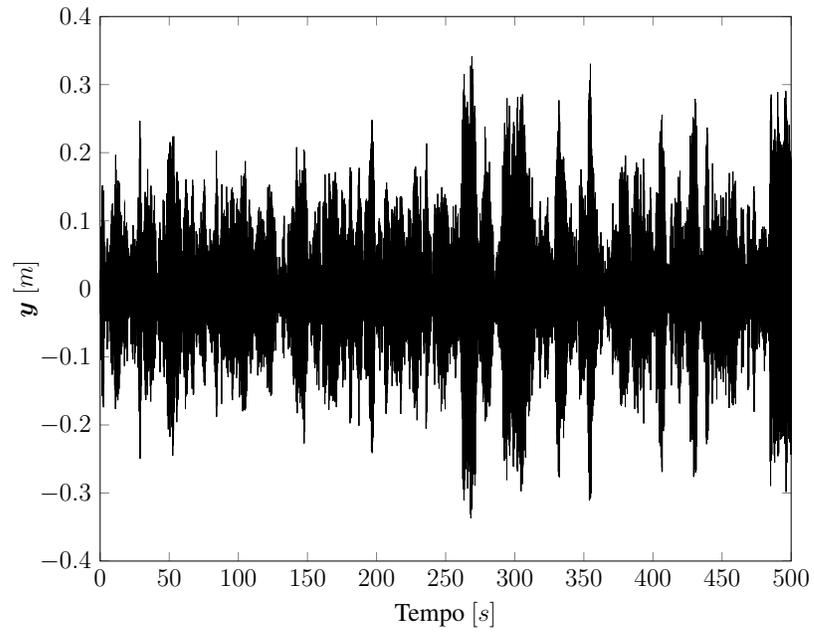


Figura 5.12: Sinal de saída do sistema na fase de treinamento

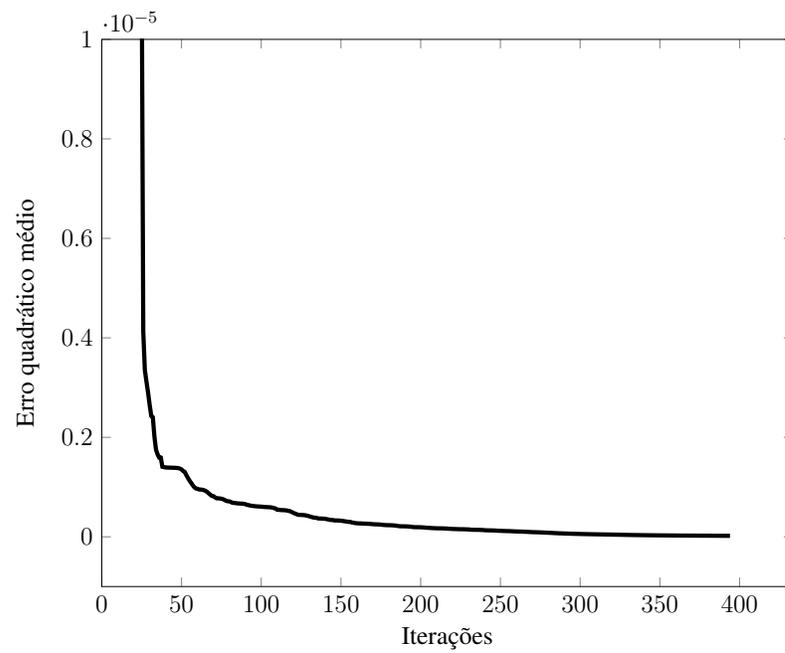


Figura 5.13: Evolução do erro quadrático médio na fase de treinamento

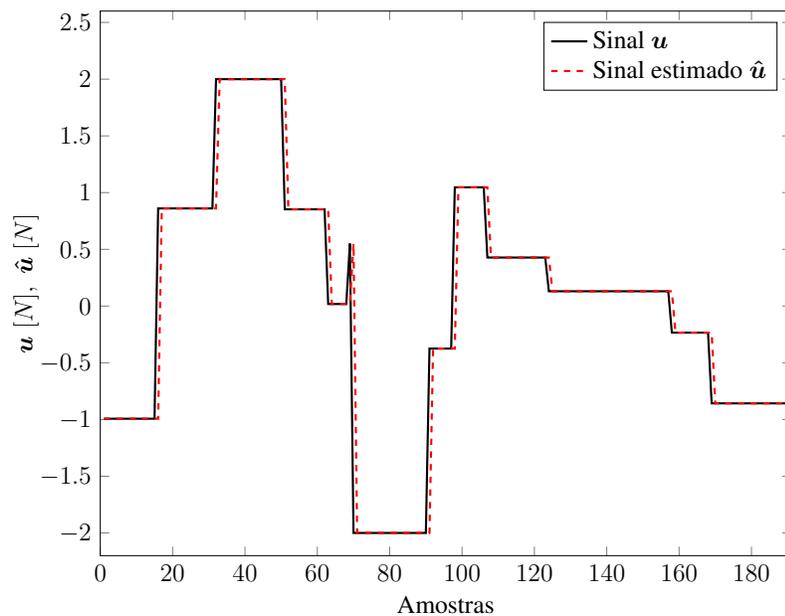


Figura 5.14: Evolução do erro quadrático médio na fase de treinamento

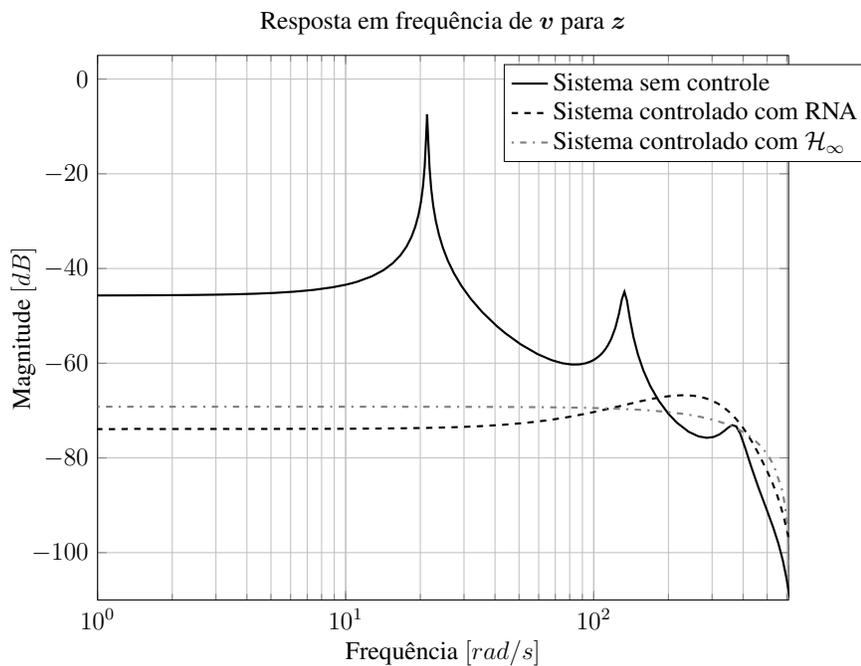


Figura 5.15: Resposta em frequência da placa engastada (caso colocado), sistema controlado (RNA) e sistema controlado ( $\mathcal{H}_\infty$ )

A Figura 5.16 apresenta a resposta temporal do sistema a um sinal de distúrbio de varredura de frequências de amplitude unitária com  $f_{\min} = 1 [rad/s]$  e  $f_{\max} = 300 [rad/s]$ . Tanto o sistema controlado com  $\mathcal{H}_{\infty}$  (Figura 5.7) como o sistema controlado com RNA (Figura 5.8) reduziram o efeito do distúrbio sobre a saída desempenho.

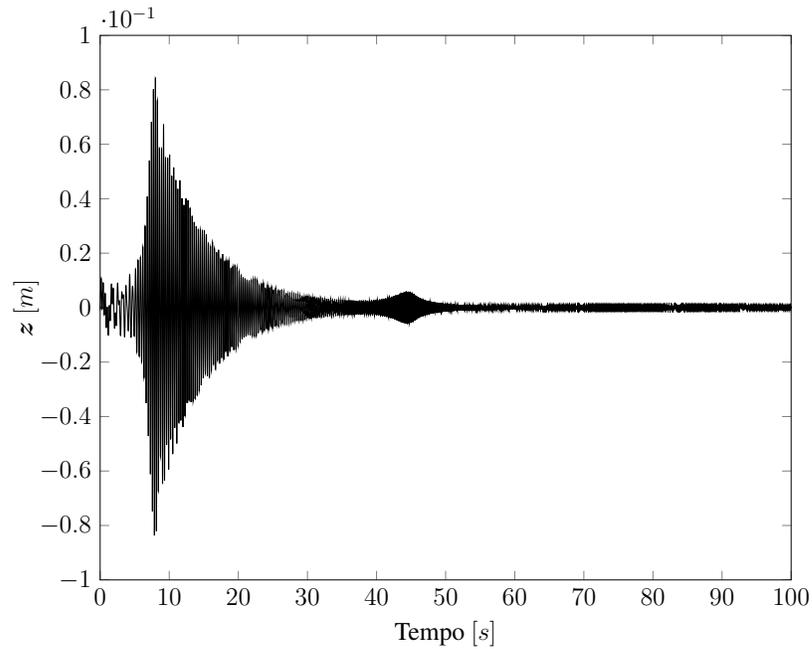


Figura 5.16: Resposta temporal da placa engastada (caso colocado) não controlada

Os sinais de controle aplicados à planta controlada com  $\mathcal{H}_{\infty}$  e à planta controlada com RNA são fornecidos nas Figuras 5.19 e 5.20 respectivamente.

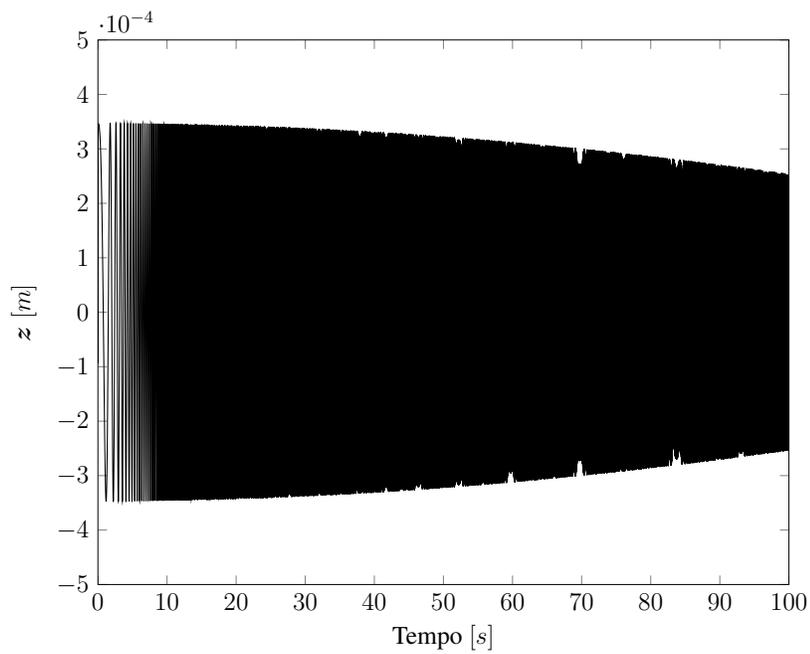


Figura 5.17: Resposta temporal da placa engastada (caso colocado) controlada com  $\mathcal{H}_\infty$

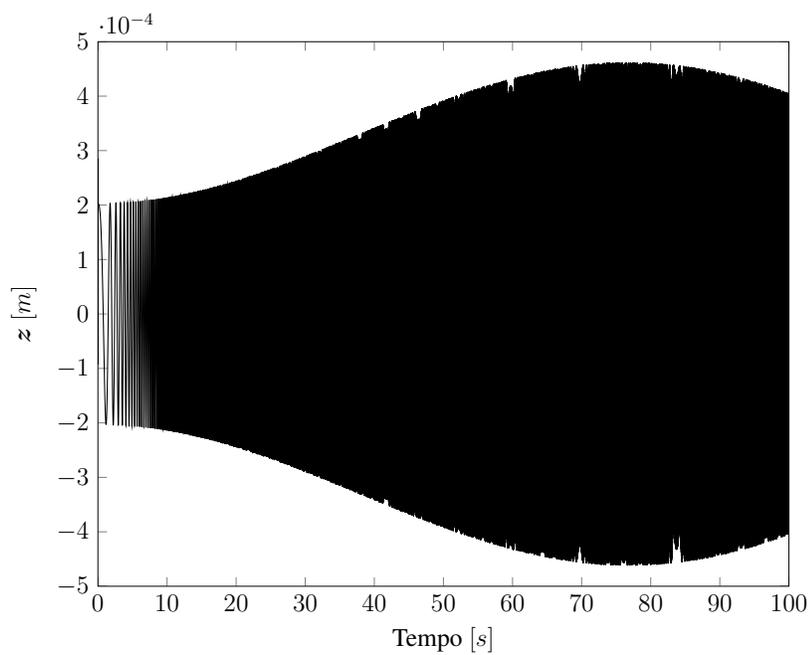


Figura 5.18: Resposta temporal da placa engastada (caso colocado) controlada com RNA

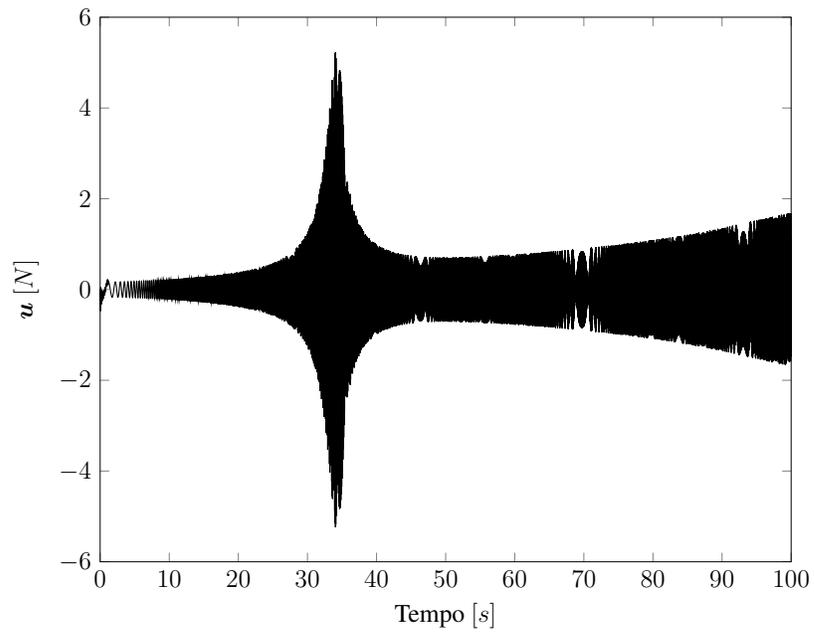


Figura 5.19: Sinal de controle gerado pelo controlador  $\mathcal{H}_\infty$

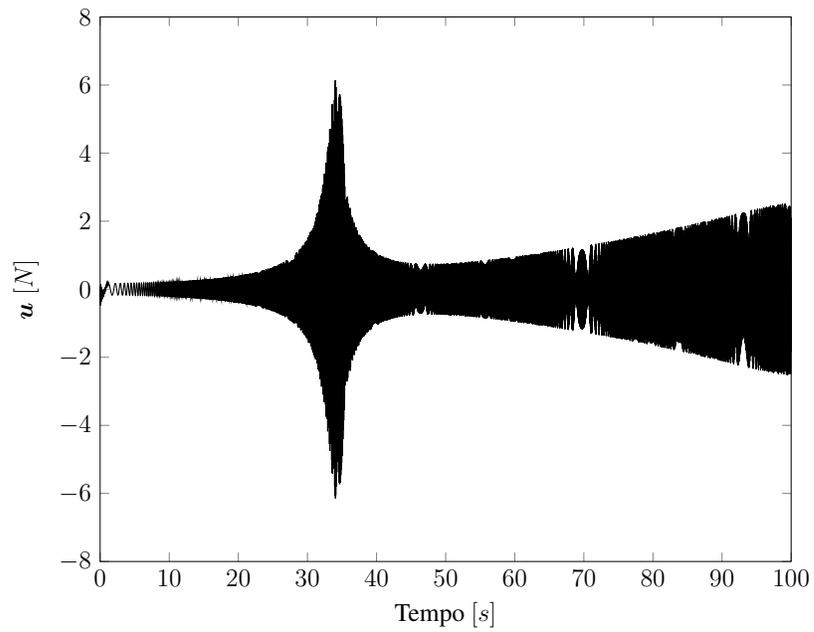


Figura 5.20: Sinal de controle gerado pelo neuro-controlador

### 5.3 Placa engastada (modelo reduzido)

No problema proposto na Seção 4.3.3, onde se faz uma redução do modelo a fim de dar um tratamento mais viável ao projeto do controlador, o sinal usado na fase de treinamento foi o *mudança de nível em instâncias aleatórias* (Equação (4.21)) com  $\alpha = 0.9$  e  $\sigma_e^2 = 2$ . Os sinais de entrada e saída utilizados na fase de treinamento do neuro-controlador são apresentados nas Figuras 5.21 e 5.22 respectivamente.

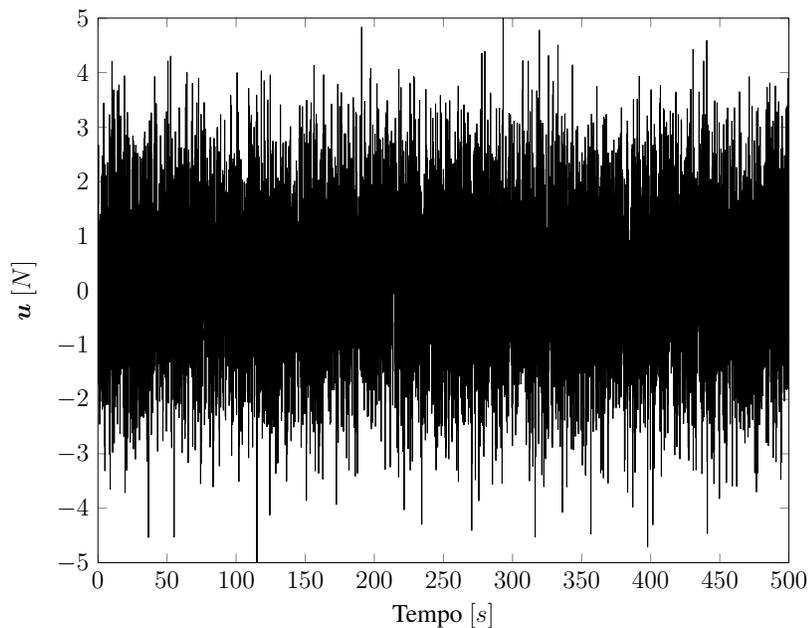


Figura 5.21: Sinal de excitação do sistema na fase de treinamento

O valor do erro quadrático médio em 41 iterações foi de  $3.4 \times 10^{-11}$  (Figura 5.23). Na fase de validação o erro quadrático médio foi de  $6.7 \times 10^{-12}$ . As previsões feitas pela RNA na fase de validação podem ser vistas na Figura 5.24.

O sistema de malha fechada é obtido usando o modelo de espaço de estados de ordem completa. A resposta em frequência tanto do modelo sem controle como do modelo controlado com RNA e  $\mathcal{H}_\infty$  é fornecida na Figura 5.25.

As respostas temporais a um sinal de distúrbio de varredura de frequências de amplitude unitária com  $f_{\min} = 1$  [rad/s] e  $f_{\max} = 300$  [rad/s], do sistema sem controle, do sistema controlado com  $\mathcal{H}_\infty$  e do sistema controlado com RNA são apresentadas nas figuras 5.26, 5.28 e 5.30 respecti-

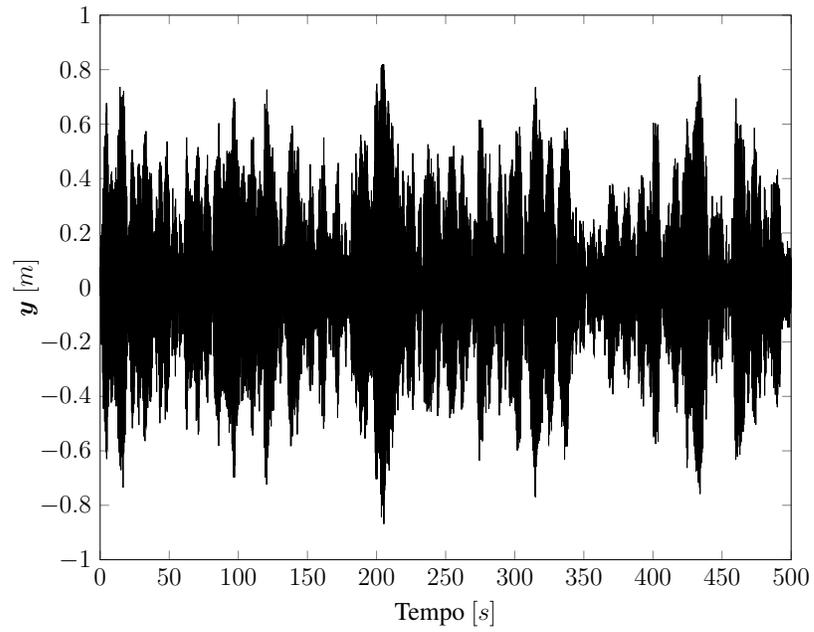


Figura 5.22: Sinal de saída do sistema na fase de treinamento

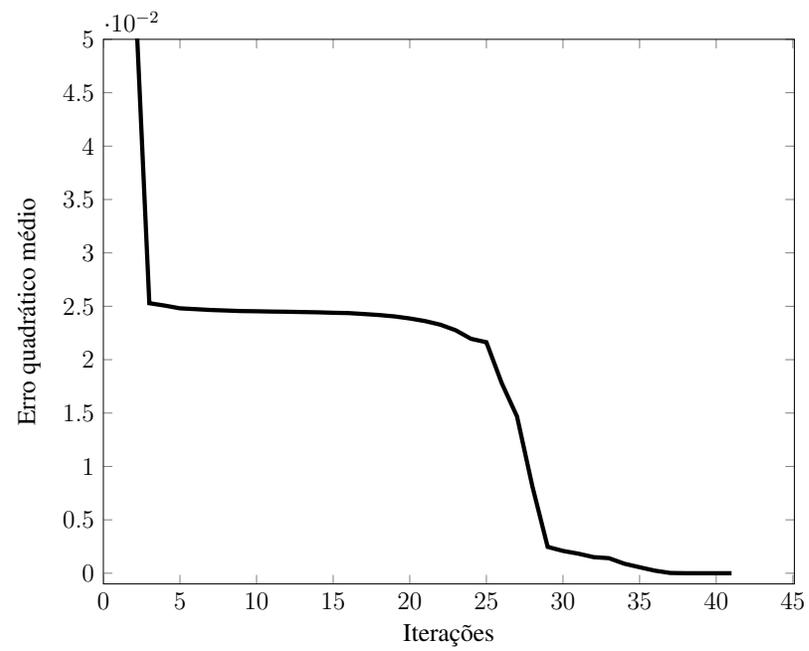


Figura 5.23: Evolução do erro quadrático médio na fase de treinamento

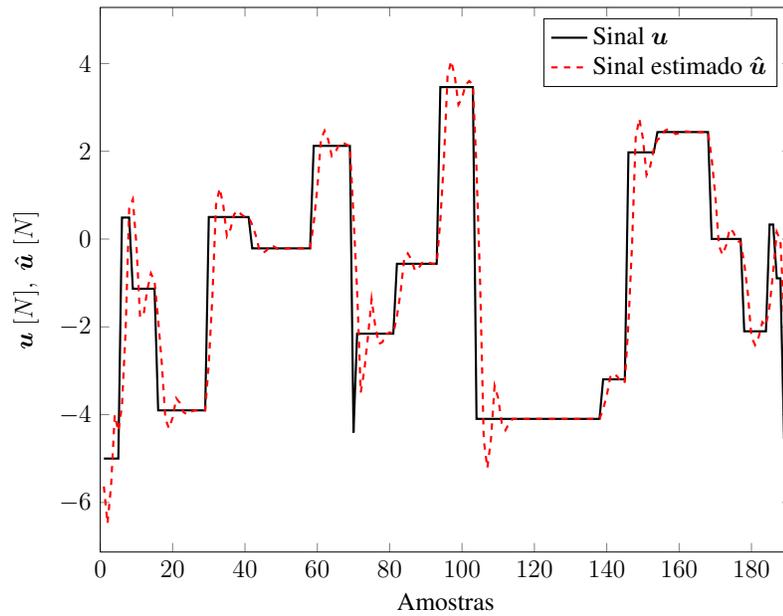


Figura 5.24: Evolução do erro quadrático médio na fase de treinamento

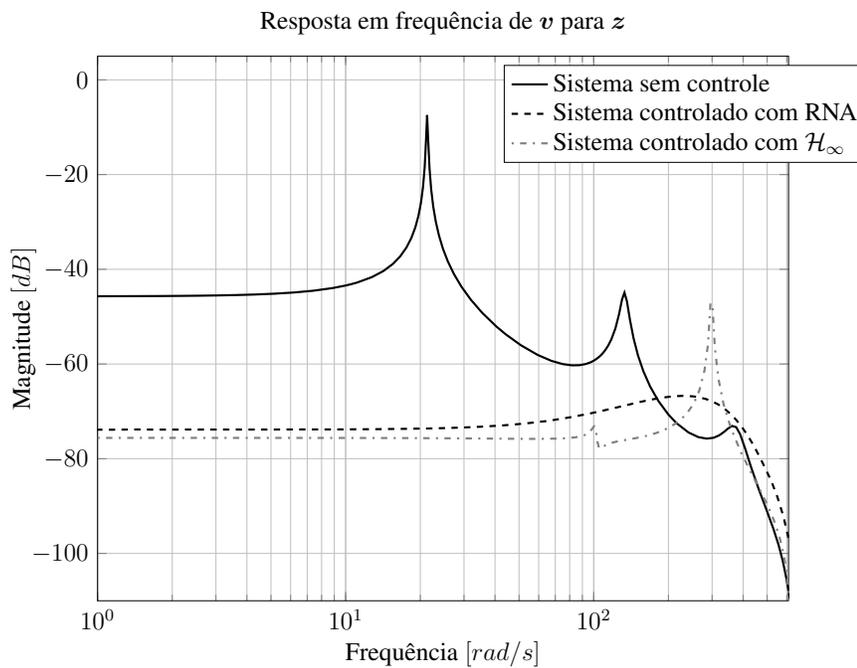


Figura 5.25: Resposta em frequência da placa engastada (modelo reduzido do caso colocado), sistema controlado (RNA) e sistema controlado ( $\mathcal{H}_\infty$ )

vamente. A Figura 5.27 fornece o sinal de controle aplicado à planta que foi gerado pelo controlador  $\mathcal{H}_\infty$  e a Figura 5.29 fornece o sinal de controle aplicado à planta gerado pelo neuro-controlador. No caso do sistema controlado com RNA, apresenta-se uma redução do efeito do distúrbio, ao contrário do caso do sistema controlado com  $\mathcal{H}_\infty$  que tornou o sistema instável, levando a resposta temporal à saturação.

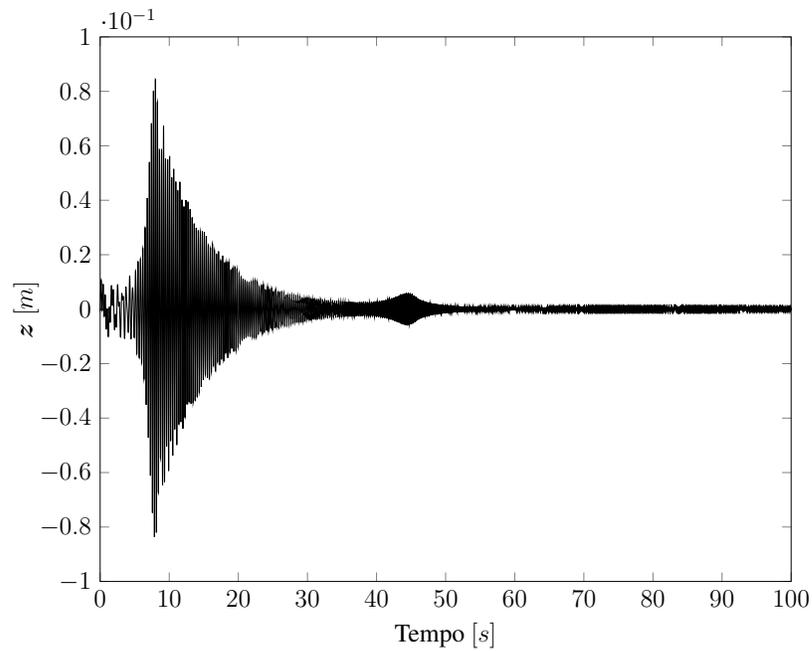


Figura 5.26: Resposta temporal da placa engastada (modelo reduzido do caso colocado) não controlada

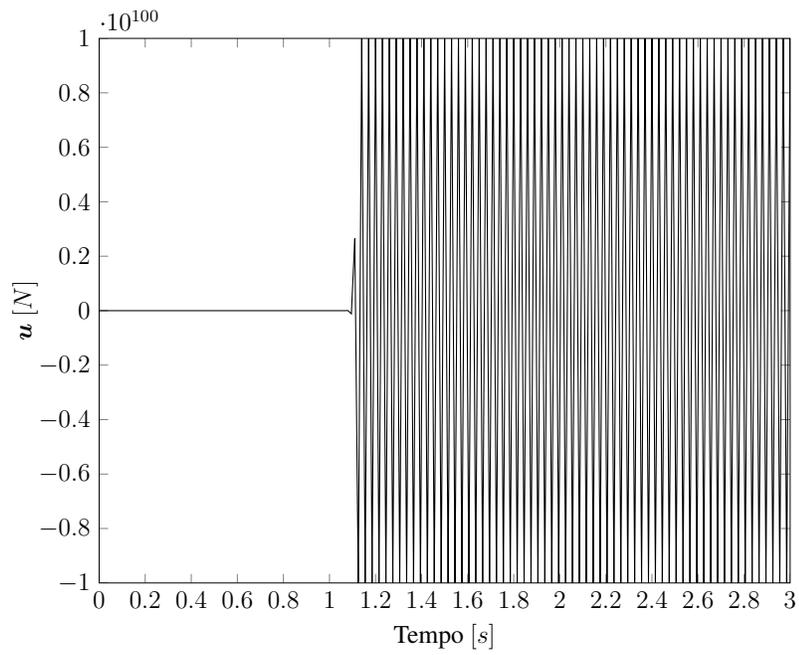


Figura 5.27: Sinal de controle gerado pelo controlador  $\mathcal{H}_\infty$

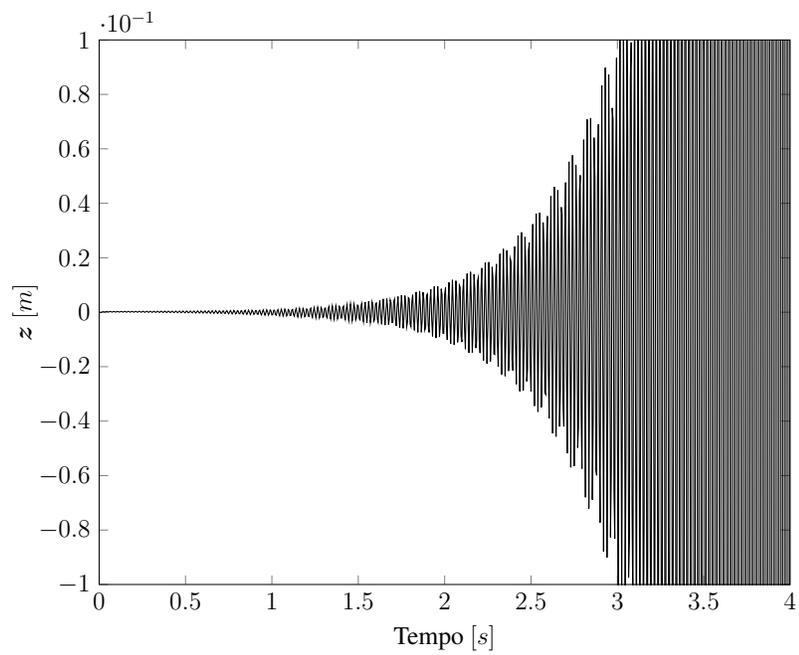


Figura 5.28: Resposta temporal do da placa engastada (modelo reduzido do caso colocado) controlada com  $\mathcal{H}_\infty$

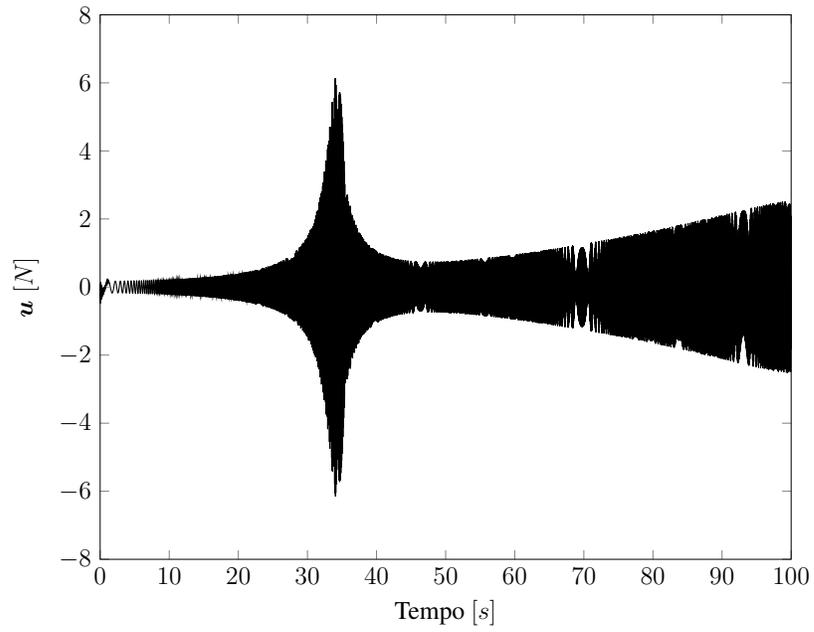


Figura 5.29: Sinal de controle gerado pelo neuro-controlador

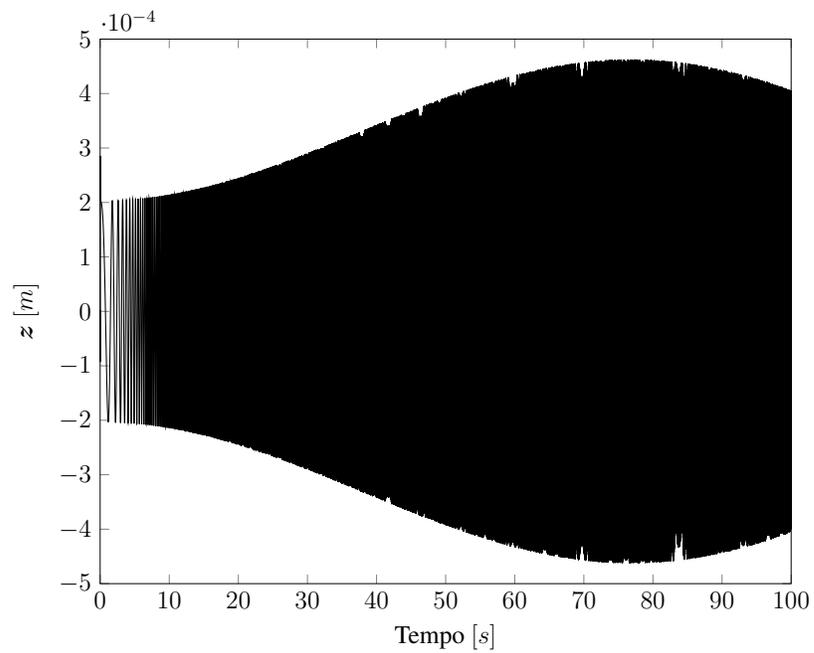


Figura 5.30: Resposta temporal da placa engastada (modelo reduzido do caso colocado) controlada com RNA

## 5.4 Placa engastada 2

Para o problema de controle não colocado proposto na Seção 4.3.4 o sinal de excitação usado na fase de treinamento escolhido foi o sinal *mudança de nível em instâncias aleatórias* com  $\alpha = 0.9$  e  $\sigma_e^2 = 2$ . A Figura 5.31 fornece o sinal de excitação aplicado ao sistema.

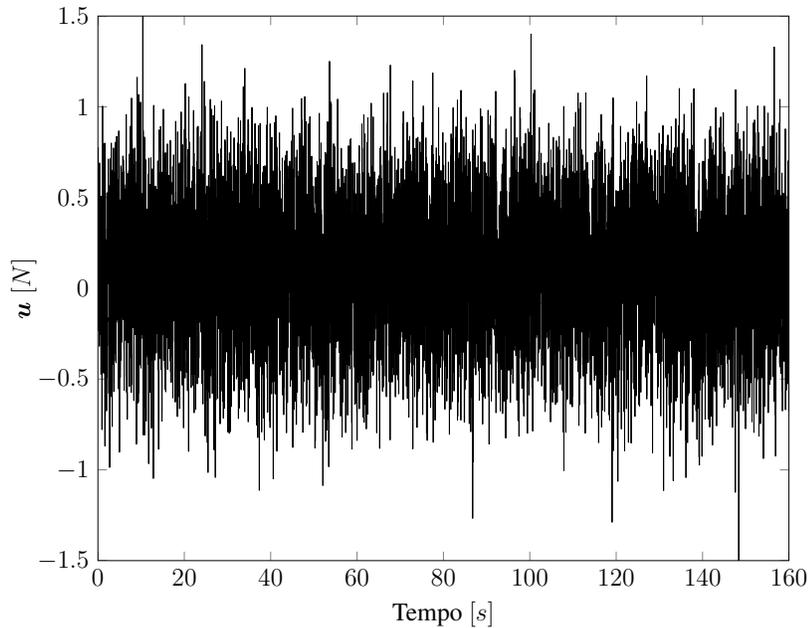


Figura 5.31: Sinal de excitação do sistema na fase de treinamento

A saída do sistema é mostrada na Figura 5.32.

No melhor caso das simulações feitas, na fase de treinamento o valor do erro quadrático médio convergiu a  $2.77 \times 10^{-3}$  em 392 iterações e na fase de validação foi de  $1.4 \times 10^{-3}$ . Comparando-se o erro quadrático médio obtido em problemas semelhantes apresentados anteriormente, este valor de desempenho pode ser considerado alto. A Figura 5.33 apresenta a evolução do critério de treinamento a cada iteração.

A Figura 5.34 apresenta a comparação visual entre o sinal esforço de controle  $u$  utilizado na fase de validação e as previsões feitas pela RNA treinada. Nesse gráfico são apresentados apenas as primeiras 200 amostras. Além disso, é possível ver que as estimativas feitas pela RNA não são exatamente iguais ao vetor de treinamento.

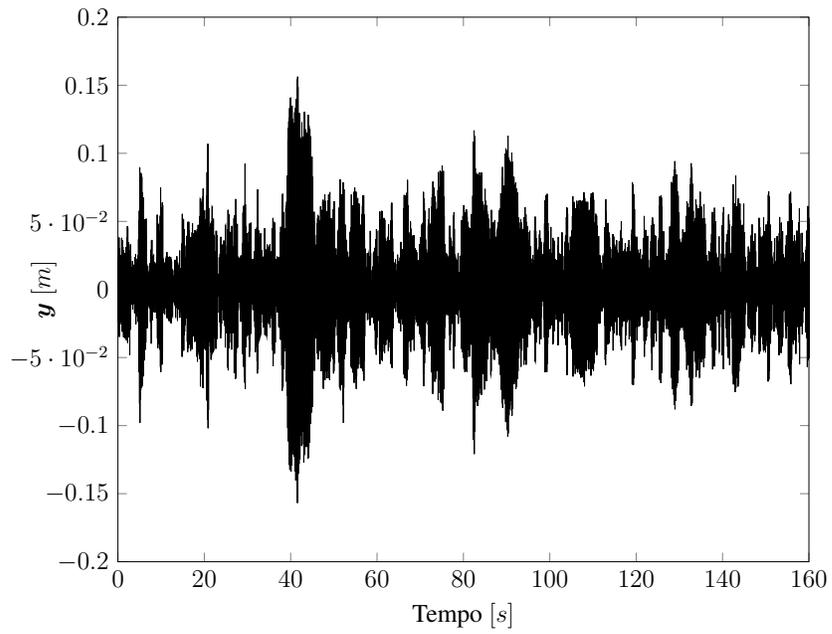


Figura 5.32: Sinal de saída do sistema na fase de treinamento

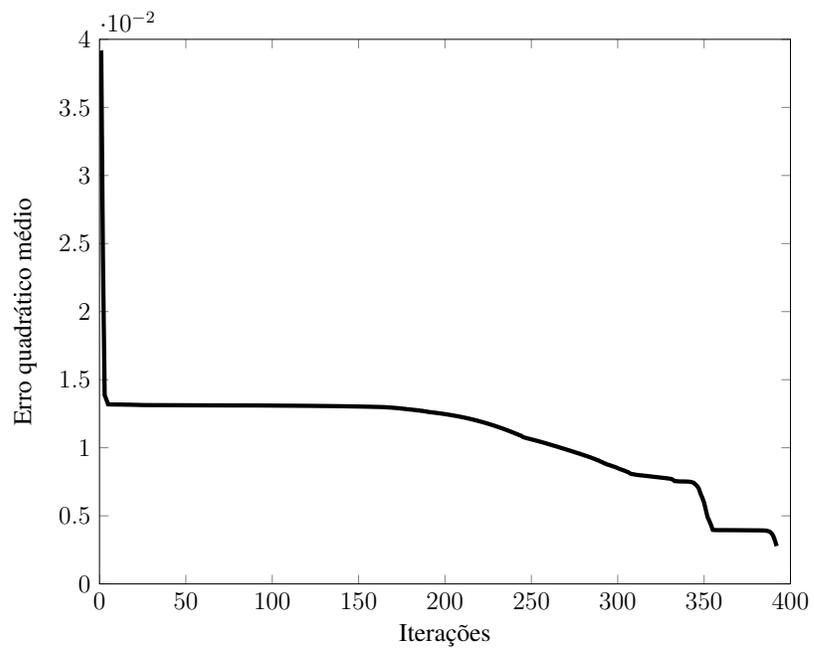


Figura 5.33: Evolução do erro quadrático médio na fase de treinamento

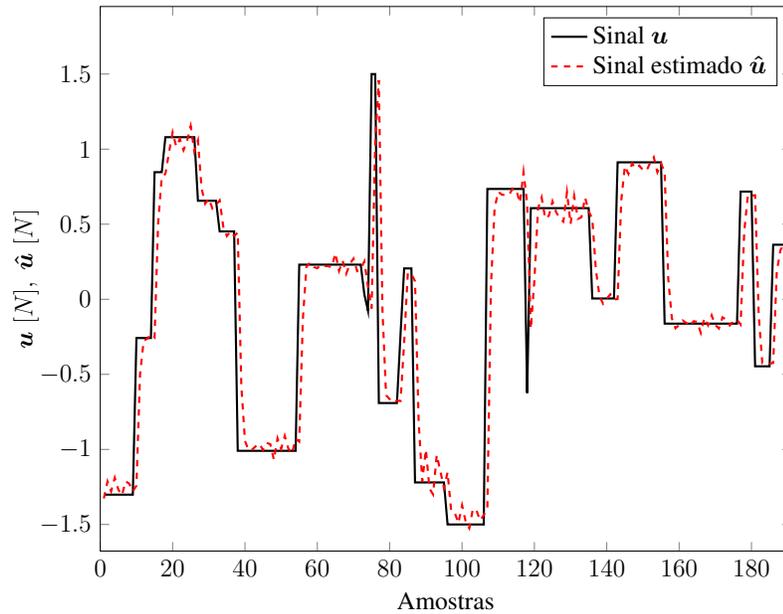


Figura 5.34: Visualização das previsões

A Figura 5.35 apresenta os diagramas da resposta em frequência do sistema sem controle, do sistema controlado com RNA e do sistema controlado com o método  $\mathcal{H}_\infty$ . A atenuação inicial obtida com  $\mathcal{H}_\infty$  foi de  $72 [dB]$ . Por outro lado, a resposta em frequência do sistema controlado com RNA é muito irregular além de apresentar valores maiores do que a resposta do sistema sem controle.

A Figura 5.36 apresenta a resposta temporal do sistema a um sinal de distúrbio de varredura de frequências de amplitude unitária com  $f_{\min} = 1 [rad/s]$  e  $f_{\max} = 300 [rad/s]$ . No caso do sistema controlado com  $\mathcal{H}_\infty$ , Figura 5.37, é possível evidenciar uma atenuação significativa do distúrbio na medida de desempenho. E no caso do sistema controlado com RNA, Figura 5.38, os valores da resposta temporal foram muito altos, além de adicionar ao sistema um erro estático de  $-13.34 [m]$ .

O sinal de controle aplicado à planta do sistema controlado com  $\mathcal{H}_\infty$  e do sistema controlado com RNA são fornecidos nas Figuras 5.39 e 5.40 respectivamente.

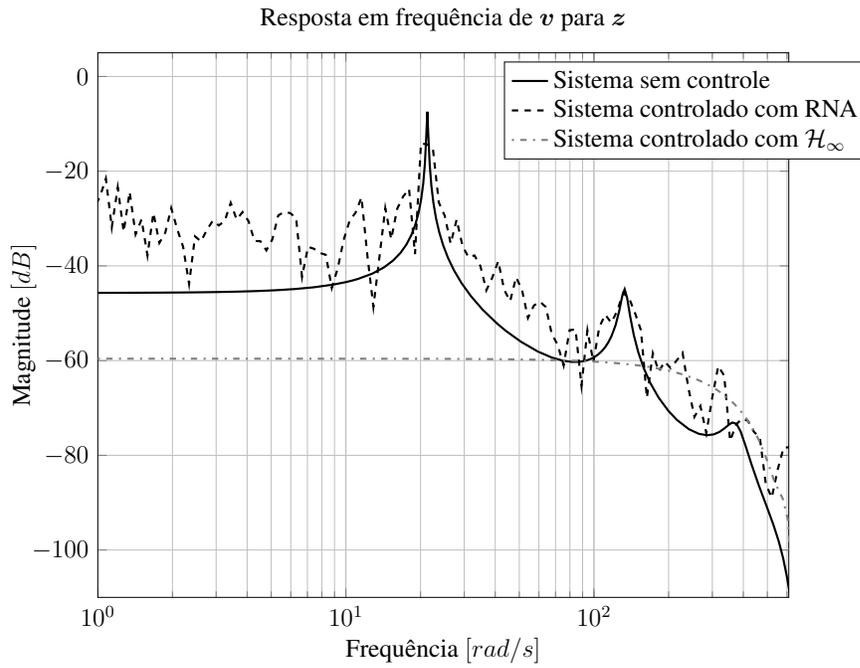


Figura 5.35: Resposta em frequência da placa engastada (caso não colocado), sistema controlado (RNA) e sistema controlado ( $\mathcal{H}_\infty$ )

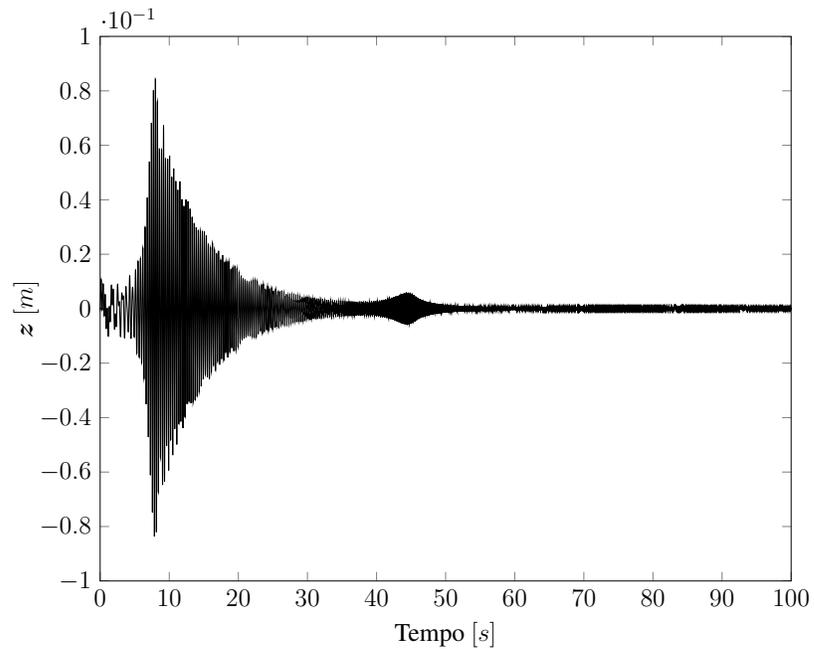


Figura 5.36: Resposta temporal da placa engastada (caso não colocado) não controlada

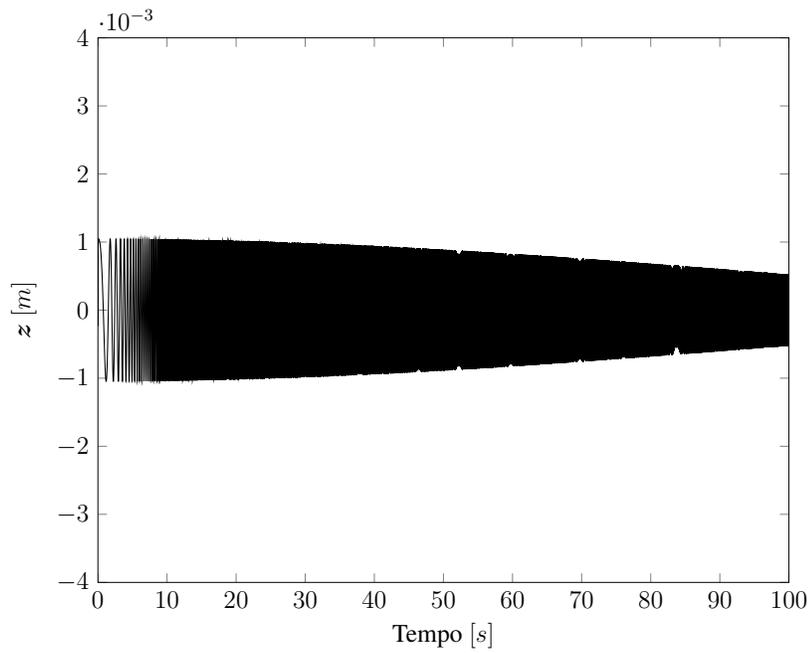


Figura 5.37: Resposta temporal da placa engastada (caso não colocado) controlada com  $\mathcal{H}_\infty$

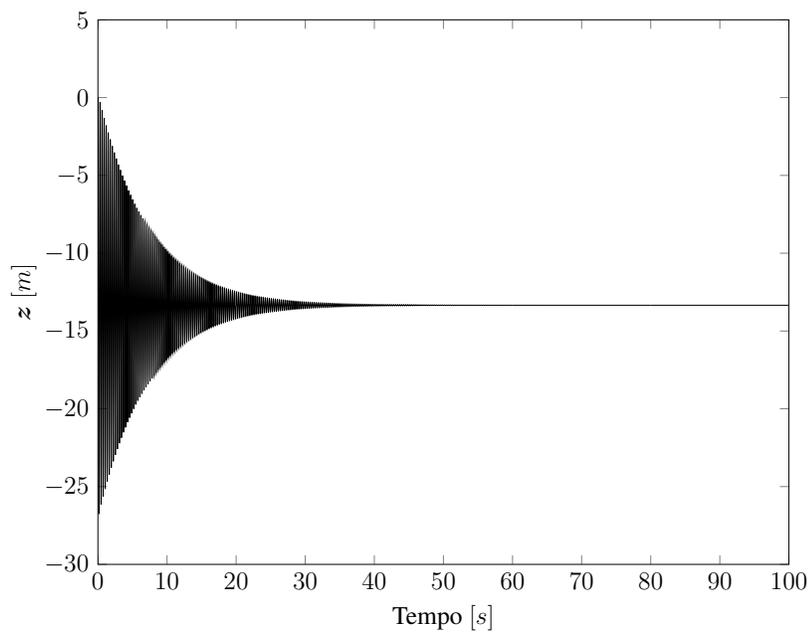


Figura 5.38: Resposta temporal da placa engastada (caso não colocado) controlada com RNA

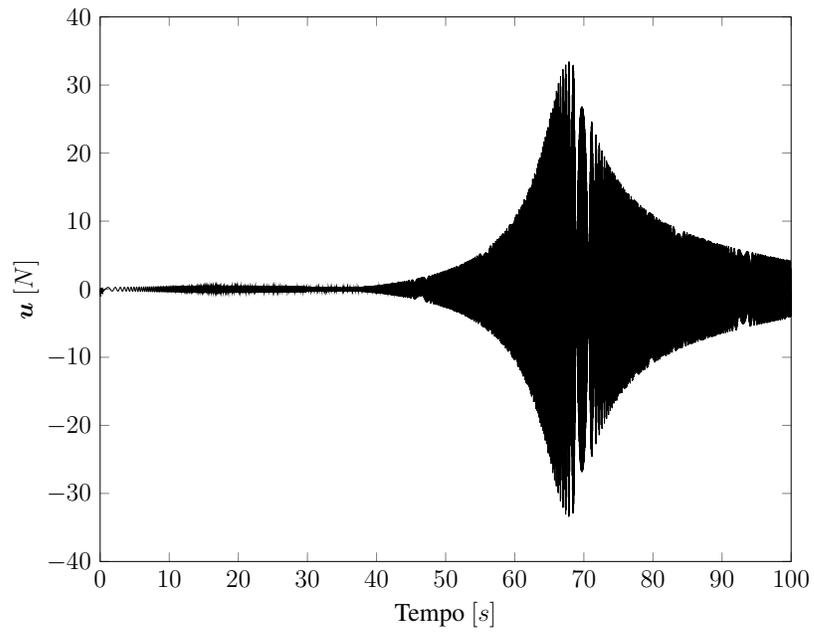


Figura 5.39: Sinal de controle gerado pelo controlador  $\mathcal{H}_\infty$

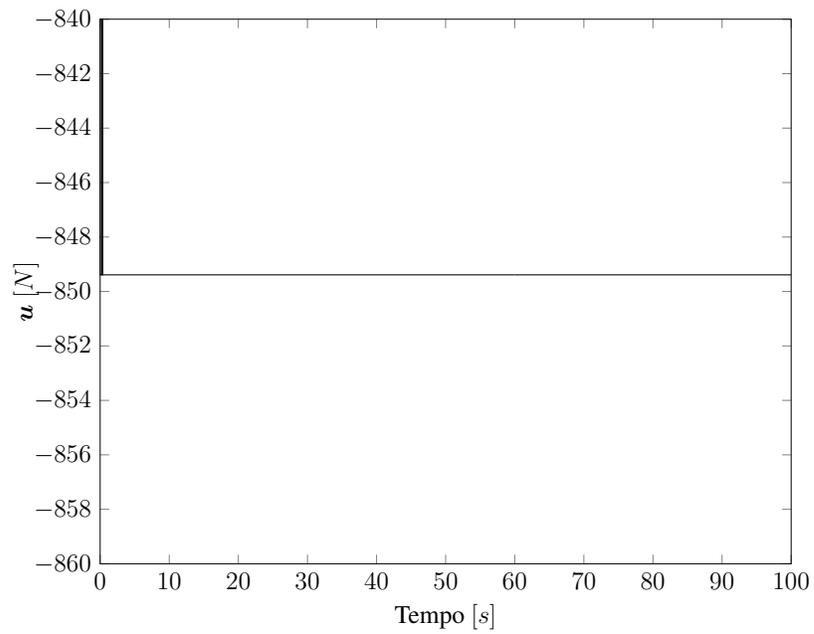


Figura 5.40: Sinal de controle gerado pelo neuro-controlador

## 5.5 Análise de resultados

Nessa seção uma comparação dos resultados, a partir do cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , tanto dos quatro exemplos de aplicação sem controle como dos três exemplos de aplicação controlados pelos dois métodos é feita.

Segundo os resultados do exemplo da estrutura de parâmetros concentrados massa-mola-amortecedor detalhados na seção anterior é possível ver que tanto o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  como o controlador projetado com o esquema inverso-direto conseguiram atenuar significativamente as vibrações causadas por o distúrbio aplicado. A norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema sem controle, que é de  $7.9754 [dB]$ , foi reduzida a  $-72.9862 [dB]$  no caso do controle  $\mathcal{H}_\infty$ . E no caso da estrutura controlada com o neuro-controlador a norma  $\mathcal{H}_\infty$  foi reduzida a  $-50.4948 [dB]$ . Na Figura 5.41 uma comparação das respostas temporais do sistema controlado com  $\mathcal{H}_\infty$  e controlado com RNA é apresentada.

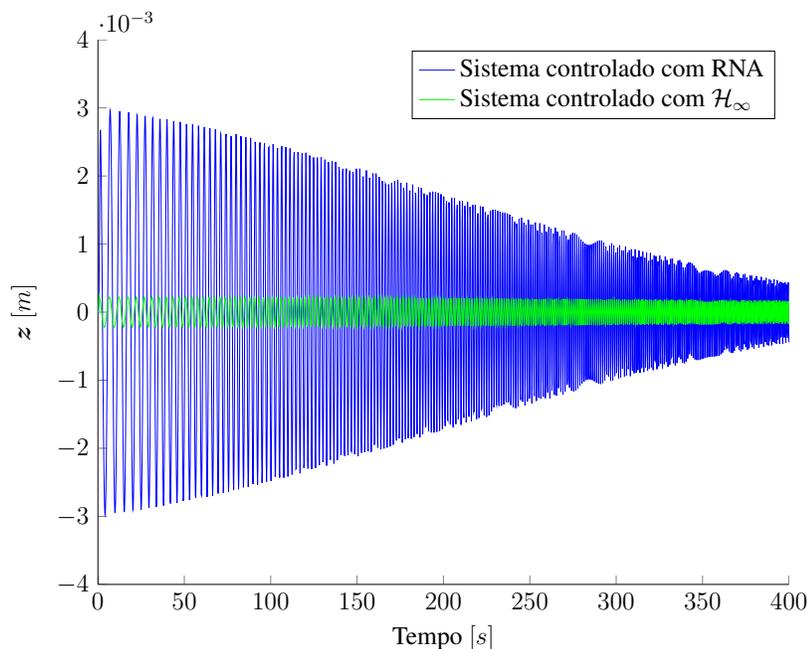


Figura 5.41: Comparação dos resultados do sistema massa-mola-amortecedor controlado com  $\mathcal{H}_\infty$  e controlado com RNA

Para o segundo exemplo, onde uma placa de alumínio foi considerada, o sistema sem controlar passou de uma norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $-7.4356 [dB]$ , para uma norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema controlado com  $\mathcal{H}_\infty$  de  $-69.1902 [dB]$ , e uma norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema controlado com RNA de  $-50.4948 [dB]$ . Isso pode ser visto na Figura 5.42. Nesse mesmo caso, quando o controle é projetado a partir de uma

redução do modelo, a norma do sistema controlado com RNA foi de  $-66.7377 [dB]$ . Nesse último caso, vale a pena destacar que o esquema controlado com  $\mathcal{H}_\infty$  tornou-se instável.

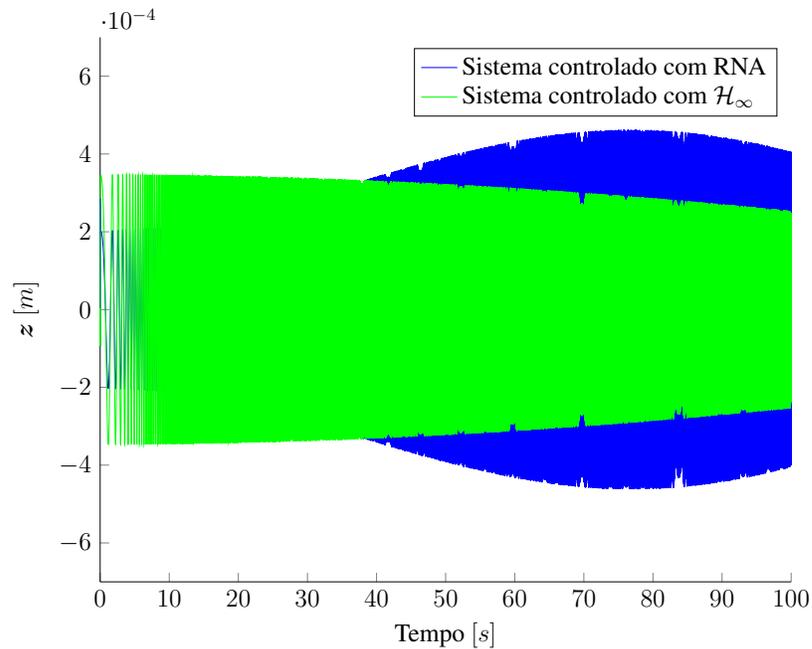


Figura 5.42: Comparação dos resultados da placa engastada (modelo de ordem completa) controlada com  $\mathcal{H}_\infty$  e controlado com RNA

No último exemplo, igual com o exemplo anterior, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema sem controle foi de  $-7.4356 [dB]$ . A norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema controlado com  $\mathcal{H}_\infty$  de  $-59.59 [dB]$ . Mas o neurocontrolador projetado não conseguiu controlar o sistema, levando a resposta temporal a níveis muito altos, que se fossem implementados em um sistema físico veria-se comprometida a integridade física do sistema.

A maneira de síntese, as normas  $\mathcal{H}_\infty$  resultantes dos diferentes esquemas são apresentadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Comparação das normas  $\mathcal{H}_\infty$  dos sistemas

Sistema	Norma $\mathcal{H}_\infty$		
	Sem controle [dB]	Controlado com $\mathcal{H}_\infty$ [dB]	Controlado com RNA [dB]
Massa-mola-amortecedor	7.9754	-72.9862	-50.4948
Placa engastada 1	-7.4356	-69.1902	-66.7692
Placa engastada 1 (modelo reduzido)	-7.4356	Instável	-66.7377
Placa engastada 2	-7.4356	-59.5961	5.2774

## 6 Conclusões e trabalhos futuros

Inicialmente, algumas noções dos tópicos mais relevantes no estudo de RNA foram apresentadas. Os conceitos básicos das redes neurais multicamada foram explanados e uma descrição da fase de treinamento da rede vista como um problema de otimização foi realizada. Além disso, uma breve introdução ao uso de RNA em sistemas de controle foi feita.

Como principal objetivo, neste trabalho o método de controle inverso-direto baseado em RNA foi estudado. Essa técnica de controle foi aplicada ao problema de controle ativo de vibrações em estruturas flexíveis. Foi documentado o processo para obter a inversão do sistema diretamente de dados de entrada-saída da planta, para assim, treinar a RNA que posteriormente é usada para obter malha de controle.

A fim de avaliar o esquema estudado, quatro problemas de controle foram propostos e resolvidos utilizando-se essa técnica. No Capítulo 5, apresentam-se os resultados deste esquema de controle. No primeiro exemplo, referente ao controle de vibrações em uma estrutura mecânica de parâmetros concentrados, é possível ver que tanto o problema resolvido com  $\mathcal{H}_\infty$  como o problema resolvido com RNA apresentaram uma atenuação significativa do efeito do distúrbio no local onde é tomada a medida de desempenho.

O segundo exemplo, tratou do controle de vibrações em uma placa engastada. O modelo da placa foi obtido utilizando-se o método de elementos finitos. Essa planta foi controlada com sucesso ao conseguir um desempenho aceitável do método comparando-se com a solução obtida com o método de controle  $\mathcal{H}_\infty$ . Para os dois casos, apresentou-se uma redução da norma  $\mathcal{H}_\infty$  (vide Seção 5.5).

Para o terceiro exemplo, fez-se um truncamento do modelo obtido no exemplo anterior deixando o modelo com apenas seis estados. Neste caso, o controlador projetado por  $\mathcal{H}_\infty$  não atingiu um desempenho adequado, tornando a resposta temporal do sistema instável e levando-a rapidamente à saturação. Por sua vez, o neuro-controlador obtido controlou aceitavelmente o sistema, atenuando significativamente o efeito do distúrbio na medida de desempenho, reduzindo a norma  $\mathcal{H}_\infty$  significativamente, mostrando boa capacidade para lidar com as incertezas dinâmicas geradas pelo truncamento do modelo.

No quarto exemplo, onde tratou-se um problema não colocado de controle de vibrações, foi possível evidenciar que ainda é preciso refinar a técnica baseada no modelo inverso. No caso do sistema controlado com RNA, a resposta temporal apresentou níveis muito altos.

A partir dos resultados obtidos, pode-se dizer que o método estudado é eficaz na resolução de alguns tipos de problemas de controle. No caso de problemas de controle que são colocados, o método apresentou-se suficientemente robusto nos exemplos testados, apresentando, em alguns casos, vantagens frente ao método  $\mathcal{H}_\infty$ . Mas, em problemas de controle não colocados, os quais são problemas de controle também usuais, este método não conseguiu atingir resultados esperados.

O uso de RNA em sistemas de controle visa um potencial grande na área de controle ativo de vibrações. Por exemplo, devido a sua estrutura, pode-se abordar o uso de RNA em sistemas de controle em aplicações onde não se possui um modelo matemático que descreva o problema ou a sua dedução implica um trabalho muito difícil.

Como trabalhos futuros, propõe-se aprofundar no estudo de técnicas que facilitem a escolha dos parâmetros que definem a estrutura da RNA. Então, propõe-se o uso de técnicas de *pruning* (poda da RNA) a fim de encontrar uma estrutura da RNA ótima. Dentre de esse métodos, propõe-se o estudo do método *optimal brain surgeon* e do método *optimal brain damage* encontrados em Nørgaard e outros (2004).

Além disso, como trabalho futuro, propõe-se o estudo e avaliação de outras arquiteturas de controle baseadas em RNA e o aprofundamento do estudo em técnicas de aprendizagem ou treinamento, a serem implementadas na solução deste tipo de problemas. Por exemplo, propõe-se o uso de técnicas como o controle por modelo interno, controle ótimo, controle preditivo e adaptativo, todas essas técnicas baseadas no uso de redes neurais artificiais. Além disso, propõe-se o estudo de técnicas para ser aplicadas em problemas de controle não colocados e/ou problemas de controle de vibrações que considerem não linearidades (Watkins e Yurkovich, 1992; Tliba e outros, 2010).

## Referências

BALAS, G. e DOYLE, J. Identification of flexible structures for robust control. **Control Systems Magazine, IEEE**, v. 10, n. 4, 51–58, 1990.

BANAVAR, R. e DOMINIC, P. An  $l_{qg}/\mathcal{H}_\infty$  controller for a flexible manipulator. **Control Systems Technology, IEEE Transactions**, v. 3, n. 4, 409–416, 1995.

BITTANTI, S. e PIRODDI, L. Minimum variance control of a class of nonlinear plants with neural networks. In **Artificial Neural Networks, 1993., Third International Conference**, pp. 168–171. 1993.

CARESTA, M. Active control of sound radiated by a submarine in bending vibration. **Journal of Sound and Vibration**, v. 330, n. 4, 615 – 624, 2011.

CHEN, K.; CHOU, C.; CHANG, S. e LIU, Y. Intelligent active vibration control in an isolation platform. **Applied Acoustics**, v. 69, n. 11, 1063 – 1084, 2008.

CYBENKO, G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. **Mathematics of Control, Signals and Systems**, v. 2, n. 4, 303–314, 1989.

DARUS, I.M. e TOKHI, M. Soft computing-based active vibration control of a flexible structure. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 18, 93 – 114, 2005.

DE ABREU, G.; TEIXEIRA, R. e RIBEIRO, J. A neural network-based direct inverse control for active control of vibrations of mechanical systems. In **Neural Networks, 2000. Proceedings. Sixth Brazilian Symposium**, pp. 107–112. 2000.

FAOUZI, B.; ABDERRAZAK, C. e TAREK, G. Internal model control using neural networks. In **Industrial Technology, 2004. IEEE ICIT '04. 2004 IEEE International Conference**, v. 2, pp. 1121–1126 Vol. 2. 2004.

FERREIRA, A.J.M. **Matlab codes for finite element analysis**. Springer, 2007.

FLETCHER, R. **Practical Methods of Optimization**. John Wiley & Sons Ltd, 1987.

FORRAI, A.; HASHIMOTO, S.; FUNATO, H. e KAMIYAMA, K. Fuzzy logic based vibration suppression control of flexible structures. In **Advanced Motion Control, 2000. Proceedings. 6th International Workshop**, pp. 378–383. 2000.

FULI, W.; MINGZHONG, L. e YINGHUA, Y. Neural network pole placement controller for nonlinear systems through linearisation. In **American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997**, v. 3, pp. 1984–1988 vol.3. 1997.

FULLER, C.; ELLIOTT, S. e NELSON, P. Introduction to mechanical vibrations. In **Active Control of Vibration**, pp. 1 – 24. Academic Press, London, 1996.

GATES, R.; CHOI, M.; BISWAS, S. e HELFERTY, J.J. Stabilization of flexible structures using artificial neural networks. In **Neural Networks, 1993. IJCNN '93-Nagoya. Proceedings of 1993 International Joint Conference**, v. 2, pp. 1817–1820 vol.2. 1993.

GAWRONSKI, W.K. **Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures**. Springer, 2004.

HAYKIN, S. **Redes neurais: Princípios e prática**. Bookman, 2 ed., 2001.

HIRSCH, G. Recent advances in control of wind-induced vibrations of guyed masts. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 43, 2113 – 2123, 1992.

HROVAT, D. Optimal active suspension structures for quarter-car vehicle models. **Automatica**, v. 26, n. 5, 845 – 860, 1990.

IKBAL ESKI, S. Vibration control of vehicle active suspension system using a new robust neural network control system. **Simulation Modelling Practice and Theory**, v. 17, n. 5, 778 – 793, 2009.

KATHER, Evaldo. **Controle de vibração torcional em sistemas rotativos usando redes neurais multicamada**. 1998. Tese (Doutorado). Universidade estadual de Campinas.

KUNDU, S.; SETO, K. e SUGINO, S. Genetic algorithm application to vibration control of tall flexible structures. In **Electronic Design, Test and Applications, 2002. Proceedings. The First IEEE International Workshop**, pp. 333–337. 2002.

KWON, Y.W. e BANG, H. **The finite element method using MATLAB**. CRC Press, 1996.

LEISSA, A.W. **Vibration of plates**. National aeronautics and space administration (NASA). Office of technology utilization, 1969.

LIM, K.B.; MAGHAMI, P. e JOSHI, S.M. A comparison of controller designs for an experimental flexible structure. In **American Control Conference, 1991**, pp. 1343–1352. 1991.

LIN, C.L. e LIN, T.Y. Neural net-based  $\mathcal{H}_\infty$  control for a class of nonlinear systems. **Neural Processing Letters**, v. 15, n. 2, 157–177, 2002.

LIN, T.R.; PAN, J.; O'SHEA, P.J. e MECHEFSKE, C.K. A study of vibration and vibration control of ship structures. **Marine Structures**, v. 22, n. 4, 730 – 743, 2009.

LUBLIN, L. e ATHANS, M. Experimental comparison of  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$ ; designs for a flexible structure. In **Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference**, v. 3, pp. 2910–2915 vol.3. 1994.

M. FRISWELL, J.M. **Finite Element Model Updating in Structural Dynamics**. Kluwer Academic Publishers, 1995.

MOSER, A.N. Designing controllers for flexible structures with  $\mathcal{H}$ -infinity /  $\mu$ -synthesis. **Control Systems, IEEE**, v. 13, n. 2, 79–89, 1993.

NICHOLS, S. e DENNIS, L. Estimating frequency-response function using periodic signals and the f.f.t. **Electronics Letters**, v. 7, n. 22, 662–663, 1971.

NØRGAARD, M. Neural network based control system design toolkit, ver 2. Relatório técnico, Department of Automation, Technical University of Denmark, 2000.

NØRGAARD, M.; RAVN, O.; POULSEN, N. e HANSEN, L. **Neural Networks for Modelling and Control of Dynamic Systems: A Practitioner's Handbook**. Springer, 2004.

NYQUIST, H. Certain topics in telegraph transmission theory. **American Institute of Electrical Engineers, Transactions of the**, v. 47, n. 2, 617–644, 1928.

OGATA, K. **Discrete-Time Control Systems**. Prentice-Hall, 1987.

PINTELON, R. e SCHOUKENS, J. capítulo Design of Excitation Signals, **System Identification: A Frequency Domain Approach**. John Wiley & Sons, Inc., 2005.

PRIDDY, K.L. e KELLER, P.E. **Artificial neural networks: An introduction**. SPIE - The International Society for Optical Engineering, 2005.

PRZEMIENIECKI, J.S. **Theory of Matrix Structural Analysis**. Dover Publications, INC., 1985.

SMITH, R.; CHU, C.C. e FANSON, J. The design of  $\mathcal{H}_\infty$  controllers for an experimental non-collocated flexible structure problem. **Control Systems Technology, IEEE Transactions**, v. 2, n. 2, 101–109, 1994.

SOONG, T. State-of-the-art review: Active structural control in civil engineering. **Engineering Structures**, v. 10, n. 2, 74 – 84, 1988.

SZNAIER, M. e ROTSTEIN, H. Robust controller design for a constrained flexible structure via mixed  $l_\infty/\mathcal{H}_\infty$ ; optimization. In **Control Applications, 1992., First IEEE Conference**, pp. 271–276 vol.1. 1992.

TAVAKOLPOUR, A.R.; MAILAH, M.; DARUS, I.Z.M. e TOKHI, O. Self-learning active vibration control of a flexible plate structure with piezoelectric actuator. **Simulation Modelling Practice and Theory**, v. 18, n. 5, 516 – 532, 2010.

TEOH, E.; TAN, K. e XIANG, C. Estimating the number of hidden neurons in a feedforward network using the singular value decomposition. **Neural Networks, IEEE Transactions**, v. 17, n. 6, 1623–1629, 2006.

TEXEIRA, Edilberto Pereira. **Controle de sistemas não lineares através de redes neurais**. 1991. Tese (Doutorado). Universidade estadual de Campinas.

TLIBA, S.; VARNIER, M. e DUC, G. Anti-windup augmented controller for active vibration control in a smart flexible structure. In **Control Automation (MED), 2010 18th Mediterranean Conference**, pp. 17–22. 2010.

WATKINS, J. e YURKOVICH, S. Vibration control for slewing flexible structures. In **American Control Conference, 1992**, pp. 2525–2529. 1992.

YANG, J. e SOONG, T. Recent advances in active control of civil engineering structures. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 3, n. 4, 179 – 188, 1988.

YONG, C.; ZIMCIK, D.G.; WICKRAMASINGHE, V.K. e NITZSCHE, F. Research of an active tunable vibration absorber for helicopter vibration control. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 16, n. 4, 203 – 211, 2003.

YU, H. e WILAMOWSKI, B.M. capítulo Levenberg–Marquardt Training, pp. 12–1:12–15, **Industrial Electronics Handbook: Intelligent Systems**. CRC Press, 2011.

ZHOU, K. **Essentials of robust control**. Tom Robbins, 1998.

## APÊNDICE A Controladores $\mathcal{H}_\infty$

Este apêndice apresenta as noções básicas relacionadas ao projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$ . Uma introdução ao projeto  $\mathcal{H}_\infty$  é feita, seguida da introdução ao cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Por fim, a formulação do problema de otimização associado ao projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  é descrita.

### A.1 Introdução

O projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser empregado quando se deseja manter certos níveis de desempenho e estabilidade frente a distúrbios externos. Os controladores  $\mathcal{H}_\infty$  têm como objetivo reduzir os efeitos de entradas exógenas (distúrbios externos e ruídos de medições) nas medições de desempenho do sistema ou nos sinais que se desejam controlar, minimizando o maior pico da resposta em frequência do sistema. O projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser tratado como problemas de otimização no domínio da frequência. Em termos gerais, deseja-se através de um método de otimização no domínio da frequência reduzir o valor de pico da função de resposta em frequência (Zhou, 1998).

### A.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

O projeto  $\mathcal{H}_\infty$  tem como alvo minimizar o pico da resposta em frequência do sistema em malha fechada. Vale especificar que no caso de sistemas multivariáveis (MIMO - *Multiple Input Multiple Output*) o diagrama da resposta em frequência é o diagrama de valores singulares, e no caso de sistemas de entrada única - saída única (SISO - *Simple Input Simple Output*) o diagrama de resposta em frequência é o diagrama de Bode da amplitude.

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  é definida como:

- Seja  $G(s)$  uma função de transferência SISO. Define-se  $\|G(s)\|_\infty$  como o valor supremo da função  $|G(j\omega)|$ , ou seja,

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_w |G(j\omega)|. \quad (\text{A.1})$$

- Seja  $\mathbf{G}(s)$  uma matriz de transferência MIMO.  $\|\mathbf{G}(s)\|_\infty$  é definida como

$$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty = \sup_w \sigma_{max}(\mathbf{G}(j\omega)) , \quad (\text{A.2})$$

onde  $\sigma_{max}(\mathbf{G}(j\omega))$  representa o máximo valor singular da matriz de transferência  $\mathbf{G}(s)$ , e é definido como

$$\sigma_{max}(\mathbf{G}(j\omega)) = \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega))} \quad (\text{A.3})$$

sendo  $\lambda_{max}(\mathcal{F}(s))$  o maior autovalor de  $\mathcal{F}(s)$ .

### A.3 Formulação do problema $\mathcal{H}_\infty$

Para a formulação do problema  $\mathcal{H}_\infty$  considera-se o diagrama da Figura A.1, onde:  $\mathbf{v}$  é o vetor de entradas exógenas,  $\mathbf{u}$  é o vetor de controle,  $\mathbf{z}$  é o vetor dos sinais que se desejam controlar que é utilizado para medir o desempenho do sistema, e  $\mathbf{y}$  que é o vetor dos sinais enviados ao controlador.

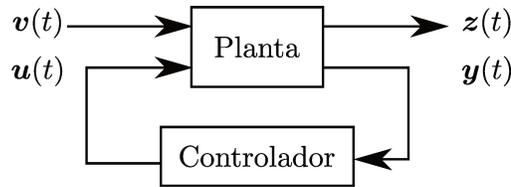


Figura A.1: Esquema do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$

O sistema representado na Figura A.1 pode ser representado na forma padrão como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{v}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{v}(t) + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}(t) \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

que por sua vez pode ser representado também na forma compacta de acordo com

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

A matriz de transferência do sistema no domínio da variável de *Laplace*  $s$ , que relaciona cada uma das entradas com cada uma das saídas, pode ser escrita como:

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} , \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} . \quad (\text{A.7})$$

Com isso, a matriz de transferência do sistema  $\mathbf{P}(s)$  pode ser representada como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{P}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{zv} & \mathbf{P}_{zu} \\ \mathbf{P}_{yv} & \mathbf{P}_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} , \quad (\text{A.8})$$

onde  $\mathbf{P}_{zv}$  é a função de transferência entre a entrada  $\mathbf{v}$  e a saída  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{P}_{zu}$  é a função de transferência entre a entrada  $\mathbf{u}$  e a saída  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{P}_{yv}$  é a função de transferência entre a entrada  $\mathbf{v}$  e a saída  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{P}_{yu}$  é a função de transferência entre a entrada  $\mathbf{u}$  e a saída  $\mathbf{y}$ .

Para o esforço de controle vale:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y} , \quad (\text{A.9})$$

onde o controlador dinâmico  $\mathbf{K}$  é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{y} , \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c\mathbf{y} . \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Da Equação (A.8) tem-se que:

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}_{yv}\mathbf{v} + \mathbf{P}_{yu}\mathbf{u} . \quad (\text{A.11})$$

Substituindo a Equação (A.9) na Equação (A.11) tem-se

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}_{yv}\mathbf{v} + \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K}\mathbf{y} , \quad (\text{A.12})$$

e isolando  $\mathbf{y}$ , tem-se

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yv}\mathbf{v} . \quad (\text{A.13})$$

Segundo a Equação (A.13) e substituindo a Equação (A.9), o esforço de controle pode ser escrito como

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yv}\mathbf{v} , \quad (\text{A.14})$$

ou ainda,

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}_{uv}\mathbf{v} , \quad (\text{A.15})$$

sendo  $\mathbf{T}_{uv}$  a matriz de transferência de  $\mathbf{u}$  para  $\mathbf{v}$  dada por:

$$\mathbf{T}_{uv} = \mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{yv} . \quad (\text{A.16})$$

Da mesma forma, com relação a  $\mathbf{z}$ , da Equação (A.8) pode-se escrever

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}_{zv}\mathbf{v} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{u} . \quad (\text{A.17})$$

Substituindo a Equação (A.15) na Equação (A.17) tem-se que

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}_{zv}\mathbf{v} + \mathbf{P}_{zu}\mathbf{T}_{uv}\mathbf{v} , \quad (\text{A.18})$$

ou,

$$z = (P_{zv} + P_{zu}T_{uv})v, \quad (\text{A.19})$$

ou ainda,

$$z = T_{zv}v, \quad (\text{A.20})$$

sendo a matriz de transferência  $T_{zv}$  de  $z$  para  $v$  dada por

$$T_{zv} = P_{zv} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yv}. \quad (\text{A.21})$$

O objetivo do projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  consiste em encontrar o controlador  $\mathbf{K}$  que garanta a estabilidade do sistema e que minimize a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da matriz de transferência  $T_{zv}$ , ou seja, da função de transferência da entrada de distúrbios para a saída de desempenho. O controlador  $\mathcal{H}_\infty$  procura minimizar o pico máximo da resposta em frequência entre a entrada exógena e a saída de desempenho. O problema de otimização associado ao projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  é descrito na Equação (A.22).

$$\mathbf{K}^* = \min_{\mathbf{K}} \|T_{zv}\|_\infty. \quad (\text{A.22})$$

Para facilitar a solução computacional do problema do projeto  $\mathcal{H}_\infty$  utiliza-se o projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$  sub-ótimo, que é uma outra forma de tratar este problema considerando um limite  $\gamma$ , que seria um limite factível, um valor real maior do que zero. De modo que o problema torna-se

$$\|T_{zv}\|_\infty < \gamma. \quad (\text{A.23})$$

Diz-se que o controlador  $\mathbf{K}$  é ótimo quando o  $\gamma > 0$  é minimizado até que a condição dada na Equação (A.23) deixe de ser satisfeita (Zhou, 1998). O problema de otimização associado à busca do controlador  $\mathbf{K}$  ótimo é dado por

$$\begin{aligned} & \min \quad \gamma \\ \text{sujeito a} \quad & \|\mathbf{T}_{zv}\|_{\infty} < \gamma. \end{aligned} \tag{A.24}$$

## APÊNDICE B Método de elementos finitos

Este apêndice apresenta alguns conceitos relacionados ao método de elementos finitos. No início, uma introdução ao método é feita. Por fim, uma solução por elementos finitos para achar as matrizes de rigidez e de massa do elemento de placa retangular em flexão é dada.

### B.1 Introdução ao método

Para analisar um determinado problema físico deve-se formular um modelo matemático, a partir de leis físicas, que descreva o comportamento de um determinado sistema. Geralmente, a expressão matemática que modela o comportamento de um sistema consiste em equações diferenciais sujeitas a condições de contorno. A solução exata dessas equações diferenciais satisfazendo todas as condições impostas é possível apenas para um número muito limitado de modelos matemáticos. Além disso, esse tipo de solução representa um trabalho extenso e as vezes considerado difícil (Kwon e Bang, 1996; Ferreira, 2007).

O método de elementos finitos permite encontrar uma solução para um determinado problema de engenharia. No caso de análise de estruturas flexíveis, procura-se obter um modelo do comportamento dinâmico de uma estrutura, geralmente complexa, através da divisão do problema original em vários subdomínios chamados de elementos finitos. A união entre os elementos ou subdomínios representa toda a estrutura e os seus pontos em comum são chamados nós (Kwon e Bang, 1996).

### B.2 Placa retangular em flexão

Uma formulação para o elemento de placa retangular em flexão é apresentada em Przemieniecki (1985). O elemento retangular considerado é composto por 4 nós localizados em cada um dos vértices do elemento. Cada nó possui três graus de liberdade: o deslocamento no eixo  $z$ , a rotação no eixo  $x$  e a rotação no eixo  $y$ . O esquema do elemento de placa retangular é apresentado na Figura B.1.

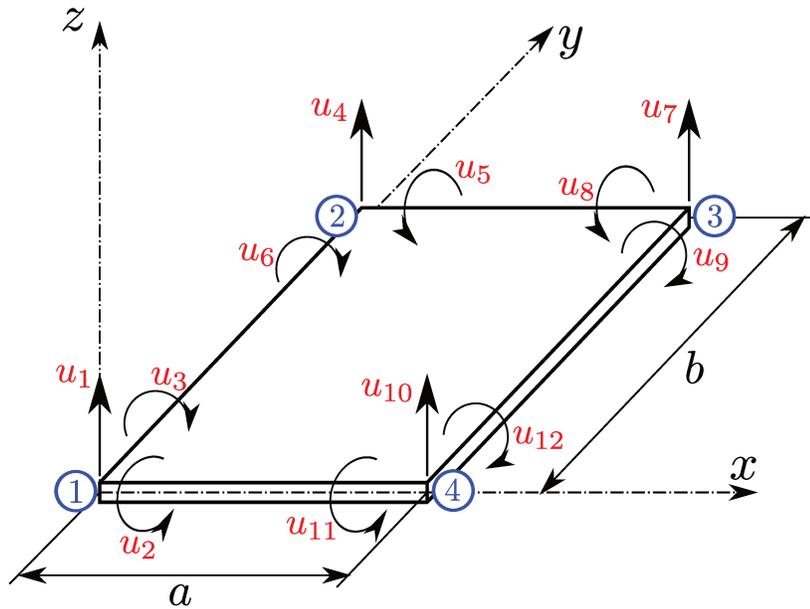


Figura B.1: Elemento de placa retangular

### B.2.1 Matriz de rigidez do elemento

Para o elemento descrito na Figura B.1 e segundo a solução dada em Przemieniecki (1985) a matriz de rigidez é dada na Equação (B.1).

$$\mathbf{K} = \frac{D}{ab} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{11} & \text{Simétrica} \\ \bar{\mathbf{K}}_{12} & \bar{\mathbf{K}}_{12} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

onde  $a$  e  $b$  são os comprimentos de cada um dos lados do elemento placa (vide Figura B.1).  $D$  é o coeficiente de rigidez à flexão (Leissa, 1969) dado por

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (\text{B.2})$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade ou módulo de Young,  $t$  a espessura da placa e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. As matrizes  $\bar{\mathbf{K}}_{11}$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_{21}$  e  $\bar{\mathbf{K}}_{22}$  são dadas pelas Equações (B.4), (B.5) e (B.6) respectivamente, sendo  $\beta = b/a$ .

## B.2.2 Matriz de massa do elemento

Analogamente, a matriz de massa para o elemento da Figura B.1 é dada na Equação (B.3) (Przemieniecki, 1985).

$$\mathbf{M} = \frac{\rho abt}{176400} \bar{\mathbf{M}} \quad (\text{B.3})$$

sendo  $\rho$  a densidade do material da placa,  $a$  e  $b$  são os comprimentos de cada um dos lados do elemento,  $t$  é a espessura do elemento e a matriz  $\bar{\mathbf{M}}$  é dada na Equação (B.7).

$$\bar{\mathbf{K}}_{11} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\nu) & & & & & \\ \hline [2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]b & [\frac{4}{3}\beta^{-2} + \frac{4}{15}(1 - \nu)]b^2 & & & & \\ \hline -[2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]a & -\nu ab & [\frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1 - \nu)]a^2 & & & \\ \hline 2(\beta^2 - 2\beta^{-2}) - \frac{1}{5}(14 - 4\nu) & -[2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1 - \nu)]b & [-\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]a & 4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\nu) & & \\ \hline [2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1 - \nu)]b & [\frac{2}{3}\beta^{-2} - \frac{1}{15}(1 - \nu)]b^2 & 0 & -[2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]b & [\frac{4}{3}\beta^{-2} + \frac{4}{15}(1 - \nu)]b^2 & \\ \hline [-\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]a & 0 & [\frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1 - \nu)]a^2 & -[2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]a & \nu ab & [\frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1 - \nu)]a^2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Simétrica} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad (\text{B.4})$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{21} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -2(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\nu) & [-\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1 - \nu)]b & [\beta^2 - \frac{1}{5}(1 - \nu)]a & -2(2\beta^2 - \beta^{-2}) - \frac{1}{5}(14 - 4\nu) & [-\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]b & [2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu)]a \\ \hline [\beta^{-2} - \frac{1}{5}(1 - \nu)]b & [\frac{1}{3}\beta^{-2} + \frac{1}{15}(1 - \nu)]b^2 & 0 & [-\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]b & [\frac{2}{3}\beta^{-2} - \frac{4}{15}(1 - \nu)]b^2 & 0 \\ \hline [-\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu)]a & 0 & [\frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1 - \nu)]a^2 & -[2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu)]a & 0 & [\frac{2}{3}\beta^2 - \frac{1}{15}(1 - \nu)]a^2 \\ \hline -2(2\beta^2 - \beta^{-2}) - \frac{1}{5}(14 - 4\nu) & [\beta^{-2} - \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]b & [2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu)]a & -2(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\nu) & [\beta^{-2} - \frac{1}{5}(1 - \nu)]b & [\beta^2 - \frac{1}{5}(1 - \nu)]a \\ \hline [\beta^{-2} - \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]b & [\frac{2}{3}\beta^{-2} - \frac{4}{15}(1 - \nu)]b^2 & 0 & [-\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1 - \nu)]b & [\frac{1}{3}\beta^{-2} + \frac{1}{15}(1 - \nu)]b^2 & 0 \\ \hline -[2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu)]a & 0 & [\frac{2}{3}\beta^2 - \frac{1}{15}(1 - \nu)]a^2 & [-\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu)]a & 0 & [\frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1 - \nu)]a^2 \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.5})$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{22} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\nu) & & & & & \\ \hline -[2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]b & [\frac{4}{3}\beta^{-2} + \frac{4}{15}(1 - \nu)]b^2 & & & & \\ \hline [2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]a & -\nu ab & [\frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1 - \nu)]a^2 & & & \\ \hline 2(\beta^2 - 2\beta^{-2}) - \frac{1}{5}(14 - 4\nu) & [2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1 - \nu)]b & [\beta^2 - \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]a & 4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\nu) & & \\ \hline -[2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1 - \nu)]b & [\frac{2}{3}\beta^{-2} - \frac{1}{15}(1 - \nu)]b^2 & 0 & [2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]b & [\frac{4}{3}\beta^{-2} + \frac{4}{15}(1 - \nu)]b^2 & \\ \hline [\beta^2 - \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]a & 0 & [\frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1 - \nu)]a^2 & [2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)]a & \nu ab & [\frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1 - \nu)]a^2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Simétrica} \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \text{(B.6)}$$

$$\bar{M} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 24178 & & & & & & & & & & & & \\ \hline 3227b & 560b^2 & & & & & & & & & & & \\ \hline -3227a & -441ab & 560a^2 & & & & & & & & & & \\ \hline 8582 & 1918b & -1393a & 24178 & & & & & & & & & \\ \hline -1918b & -420b^2 & 294ab & -3227b & 560b^2 & & & & & & & & \\ \hline -1393a & -294ab & 280a^2 & -3227a & 441ab & 560a^2 & & & & & & & \\ \hline 2758 & 812b & -812a & 8582 & -1393b & -1918a & 24178 & & & & & & \\ \hline -812b & -210b^2 & 196ab & -1393b & 280b^2 & 294ab & -3227b & 560b^2 & & & & & \\ \hline 812a & 196ab & -210a^2 & 1918a & -294ab & -420a^2 & 3227a & -441ab & 560a^2 & & & & \\ \hline 8582 & 1393b & -1918a & 2758 & -812b & -812a & 8582 & -1918b & 1393a & 24178 & & & \\ \hline 1393b & 280b^2 & -294ab & 812b & -210b^2 & -196ab & 1918b & -420b^2 & 294ab & 3227b & 560b^2 & & \\ \hline 1918a & 294ab & -420a^2 & 812a & -196ab & -210a^2 & 1393a & -294ab & 280a^2 & 3227a & 441ab & 560a^2 & \\ \hline \end{array}$$

Simétrica

(B.7)

### B.2.3 Montagem das matrizes globais

Uma vez que as matrizes elementares de massa e rigidez são calculadas, elas podem ser agrupadas para gerar as matrizes globais de massa e rigidez do sistema respectivamente. Este processo é geralmente conhecido como *assembly* e consiste na superposição ou soma algébrica das componentes que influenciam cada grau de liberdade associado a cada nó.

Para representar o processo de montagem das matrizes globais propõe-se, a maneira de exemplo, a estrutura de dois elementos apresentada na Figura B.2.

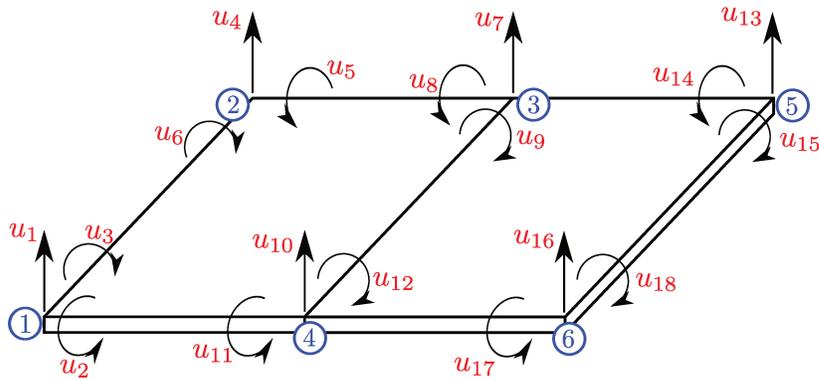


Figura B.2: Placa discretizada em dois elementos

sendo o elemento  $A$  formado pelos nós ①, ②, ③ e ④ e o elemento  $B$  formado pelos nós ④, ③, ⑤ e ⑥. As matrizes de rigidez para cada elemento são representadas esquematicamente pelas Equações (B.8) e (B.9). Tem-se que a matriz de rigidez do elemento  $A$  é

$$\mathbf{K}_A = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \\ \textcircled{1} & \odot_{11} & \odot_{12} & \odot_{13} & \odot_{14} \\ \textcircled{2} & \odot_{21} & \odot_{22} & \odot_{23} & \odot_{24} \\ \textcircled{3} & \odot_{31} & \odot_{32} & \odot_{33} & \odot_{34} \\ \textcircled{4} & \odot_{41} & \odot_{42} & \odot_{43} & \odot_{44} \end{matrix} \quad (\text{B.8})$$

sendo  $\odot^{ij}$  a submatriz da matriz de rigidez do elemento  $A$  resultante da influência dos nós  $i$  e  $j$ . A matriz  $\odot^{ij}$  é uma matriz quadrada que tem por tamanho a quantidade de graus de liberdade modelados em cada nó. Por sua vez, a matriz de rigidez do elemento  $B$  é

$$\mathbf{K}_B = \begin{matrix} & \textcircled{4} & \textcircled{3} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \\ \textcircled{4} & +_{44} & +_{43} & +_{45} & +_{46} \\ \textcircled{3} & +_{34} & +_{33} & +_{35} & +_{36} \\ \textcircled{5} & +_{54} & +_{53} & +_{55} & +_{56} \\ \textcircled{6} & +_{64} & +_{63} & +_{65} & +_{66} \end{matrix} \quad (\text{B.9})$$

sendo  $+_{ij}$  a submatriz da matriz de rigidez do elemento  $B$  resultante da influência dos nós  $i$  e  $j$ .

A matriz de rigidez global é montada pela soma algébrica das submatrizes  $\odot^{ij}$  e  $+_{ij}$  resultando na submatriz  $\oplus_{ij}^{ij}$  da matriz de rigidez global. Os espaços vazios na Equação (B.10) representam o valor nulo.

$$\mathbf{K}_{global} = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \\ \textcircled{1} & \odot_{11} & \odot_{12} & \odot_{13} & \odot_{14} & & \\ \textcircled{2} & \odot_{21} & \odot_{22} & \odot_{23} & \odot_{24} & & \\ \textcircled{3} & \odot_{31} & \odot_{32} & \oplus_{33}^{33} & \oplus_{34}^{34} & +_{35} & +_{36} \\ \textcircled{4} & \odot_{41} & \odot_{42} & \oplus_{43}^{43} & \oplus_{44}^{44} & +_{45} & +_{46} \\ \textcircled{5} & & & +_{53} & +_{54} & +_{55} & +_{56} \\ \textcircled{6} & & & +_{63} & +_{64} & +_{65} & +_{66} \end{matrix} \quad (\text{B.10})$$

Esse tipo de montagem pode ser usado de forma análoga para  $n$  elementos, resultando assim em uma matriz global com forma de bloco diagonal. Além disso, este processo é válido para a montagem da matriz de massa global.