

ALMEIDA BARROS E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 9/01/97.  
Euclides de Mesquita Neto  
ORIENTADOR

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Mecânica

**Elastodinâmica de Meios Transversalmente  
Isotrópicos: Funções de Green e o Método  
dos Elementos de Contorno na Análise da  
Interação Solo-Estrutura**

Pérsio Leister de Almeida Barros

Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Mecânica  
Departamento de Mecânica Computacional

**Elastodinâmica de Meios Transversalmente  
Isotrópicos: Funções de Green e o Método  
dos Elementos de Contorno na Análise da  
Interação Solo-Estrutura**

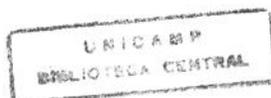
Pérsio Leister de Almeida Barros

Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

Curso: Engenharia Mecânica

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Mecânica  
da Universidade Estadual de Campinas para preen-  
chimento dos pré-requisitos necessários à obtenção do  
Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1996  
SP - Brasil



UNIDADE	78C
N.º C.º DE REG.º	TI UNICAMP
	B278e
V.	
T.	30015
PREÇO	281/97
C	<input type="checkbox"/>
D	<input type="checkbox"/>
K	<input type="checkbox"/>
PREÇO	9811,00
DATA	06/05/97
N.º CPD	

CM-00099471-3

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

B278e

Barros, Pêrsio Leister de Almeida

Elastodinâmica de meios transversalmente isotrópicos: funções de Green e o método dos elementos de contorno na análise da interação solo-estrutura / Pêrsio Leister de Almeida Barros.--Campinas, SP: [s.n.], 1997.

Orientador: Euclides de Mesquita Neto.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Interação solo-estrutura. 2. Anisotropia. 3. Green, Funções de. 4. Dinâmica dos solos. 5. Métodos de elementos de contorno. I. Mesquita Neto, Euclides de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Mecânica  
Departamento de Mecânica Computacional

**Tese de Doutorado**

**Elastodinâmica de Meios Transversalmente  
Isotrópicos: Funções de Green e o Método  
dos Elementos de Contorno na Análise da  
Interação Solo-Estrutura**

Pérsio Leister de Almeida Barros

Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto



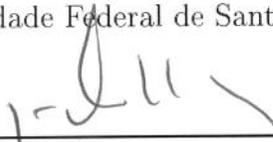
---

Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, Presidente  
Universidade Estadual de Campinas.



---

Prof. Dr. Clóvis Sperb de Barcellos  
Universidade Federal de Santa Catarina.



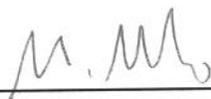
---

Prof. Dr. José Cláudio de Faria Telles  
Universidade Federal do Rio de Janeiro.



---

Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta  
Universidade de São Paulo.



---

Prof. Dr. Paulo Sollero  
Universidade Estadual de Campinas.

Campinas, 29 de janeiro de 1997.

## Agradecimentos

Este trabalho não poderia ter-se concluído sem o auxílio de diversas pessoas a quem sinceramente agradeço.

Ao Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto pela sua competente orientação e apoio.

Ao Prof. Dr. Caio Leister de Almeida Barros, da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, pela sugestão inicial do tema deste trabalho, pelos seus comentários e pelo incentivo.

Ao Prof. Dr. R.K.N.D. Rajapakse, da University of Manitoba, Canada, pelos seus comentários e pelas diversas sugestões apresentadas.

À Profa. Dra. Sueli Rodrigues Costa, do Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, da UNICAMP, pelo auxílio prestado na formalização matemática das demonstrações dos capítulos 3 e 5 e pelo encorajamento.

Aos amigos e colegas da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP.

E a todos os que de forma direta e indireta ajudaram na conclusão desta tese.

# Sumário

Sumário	iii
Resumo	ix
Abstract	xi
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xxiii
Simbologia	xxv
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Apresentação . . . . .	1
1.2 Revisão bibliográfica . . . . .	3
1.3 Objetivos e organização do trabalho . . . . .	6
<b>2 Elasticidade Geral</b>	<b>9</b>
2.1 Apresentação . . . . .	9
2.2 Deformações e Tensões . . . . .	10
2.3 Lei de Hooke generalizada . . . . .	11
2.4 Simetria plana . . . . .	13
2.5 Material ortotrópico . . . . .	14
2.6 Isotropia transversal . . . . .	15
2.7 Material isotrópico . . . . .	17
2.8 Estados planos . . . . .	18
2.9 Materiais viscoelásticos . . . . .	19
2.10 Índices de anisotropia . . . . .	21
2.11 Rotação de coordenadas . . . . .	21
2.12 Solos e rochas . . . . .	24

<b>3</b>	<b>Funções de Green</b>	<b>27</b>
3.1	Apresentação . . . . .	27
3.2	Carga sobre semi-espaço . . . . .	28
3.2.1	Definição do problema e equações gerais . . . . .	28
3.2.2	Solução geral das equações diferenciais de movimento . . . . .	30
3.2.3	Solução para as tensões . . . . .	34
3.2.4	Funções de Green para carga na superfície do semi-espaço . . . . .	36
3.2.5	Determinação numérica das funções de Green . . . . .	41
3.3	Espaço completo . . . . .	45
3.3.1	Cargas no interior do meio infinito . . . . .	45
3.3.2	Funções de Green . . . . .	49
3.3.3	Formulação alternativa . . . . .	50
3.4	Comportamento na origem . . . . .	53
3.5	Camada sobre base rígida . . . . .	58
3.6	Carga aplicada no interior do semi-espaço . . . . .	63
3.7	Comentários finais . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Funções de Influência</b>	<b>71</b>
4.1	Apresentação . . . . .	71
4.2	Distribuição uniforme . . . . .	73
4.2.1	Carga aplicada sobre o semi-espaço. . . . .	73
4.2.2	Carga no interior do espaço completo. . . . .	75
4.2.3	Carga no interior do semi-espaço . . . . .	76
4.3	Resultados numéricos . . . . .	77
4.3.1	Carga aplicada na superfície do semi-espaço. . . . .	77
4.3.2	Carga aplicada no interior do espaço completo. . . . .	94
4.3.3	Carga aplicada no interior do semi-espaço. . . . .	99
4.4	Distribuição polinomial . . . . .	106
4.5	Cargas distribuídas no plano vertical . . . . .	112
4.6	Considerações finais . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Eixo de Simetria Inclinado</b>	<b>119</b>
5.1	Apresentação . . . . .	119
5.2	Equações gerais . . . . .	120
5.3	Tensões . . . . .	124
5.4	Funções de Green . . . . .	126
5.4.1	Carga aplicada sobre o semi-espaço . . . . .	126
5.4.2	Carga aplicada no interior do espaço completo . . . . .	129
5.5	Funções de influência . . . . .	135
5.5.1	Carga aplicada sobre a superfície do semi-espaço . . . . .	135
5.5.2	Carga aplicada no interior do espaço completo . . . . .	136

5.6	Resultados numéricos . . . . .	139
5.7	Considerações finais . . . . .	155
<b>6</b>	<b>Aplicação do MEC</b> . . . . .	<b>157</b>
6.1	Apresentação . . . . .	157
6.2	Método Indireto . . . . .	158
6.3	Método Direto . . . . .	166
6.4	Comparação entre os métodos . . . . .	170
6.5	MEC-D para condições de contorno gerais . . . . .	175
6.6	Exemplo de aplicação . . . . .	181
6.7	Observações finais . . . . .	184
<b>7</b>	<b>Análise de Estruturas Rígidas</b> . . . . .	<b>189</b>
7.1	Apresentação . . . . .	189
7.2	Método da superposição . . . . .	190
7.2.1	Colocação do problema . . . . .	190
7.2.2	Funções de influência . . . . .	191
7.2.3	Compatibilidade cinemática . . . . .	192
7.2.4	Equilíbrio . . . . .	193
7.2.5	Sistema de equações final . . . . .	194
7.2.6	Resultados numéricos . . . . .	195
7.3	Camada sobre base rígida . . . . .	213
7.4	Eixo de simetria inclinado . . . . .	223
7.5	Fundações semi-enterradas . . . . .	228
7.5.1	Definição do problema . . . . .	228
7.5.2	Aplicação da formulação indireta do MEC . . . . .	228
7.5.3	Matrizes de influência . . . . .	233
7.5.4	Compatibilidade cinemática . . . . .	236
7.5.5	Equilíbrio de forças . . . . .	237
7.5.6	Sistema de equações global . . . . .	237
7.5.7	Matriz de flexibilidade . . . . .	238
7.5.8	Resultados numéricos . . . . .	239
7.6	Estruturas rígidas enterradas . . . . .	252
7.7	Utilização do MEC-D com estruturas rígidas . . . . .	263
7.7.1	Definição do problema . . . . .	263
7.7.2	Discretização . . . . .	264
7.7.3	Matrizes de influência . . . . .	264
7.7.4	Compatibilidade cinemática . . . . .	265
7.7.5	Equilíbrio . . . . .	266
7.7.6	Sistema de equações global . . . . .	268
7.7.7	Exemplos de aplicação . . . . .	269

7.8 Observações finais . . . . .	283
<b>8 Conclusões e Perspectivas</b>	<b>289</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>293</b>

## Resumo

BARROS, Pêrsio Leister de Almeida, *Elastodinâmica de Meios Transversalmente Isotrópicos: Funções de Green e o Método dos Elementos de Contorno na Análise da Interação Solo-Estrutura*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. 300 p. Tese (Doutorado)

Este trabalho apresenta a dedução de funções de Green e de influência para cargas dinâmicas harmônicas no tempo, no estado plano de deformação, aplicadas sobre meios elásticos homogêneos transversalmente isotrópicos. São apresentadas e analisadas soluções para os casos de cargas aplicadas sobre a superfície e no interior de um meio elástico semi-infinito, sobre uma camada elástica apoiada sobre uma base rígida e para cargas aplicadas no interior do espaço infinito. Os resultados aqui obtidos demonstram que a anisotropia do material tem grande influência no seu comportamento. Para estas soluções é demonstrada a existência de uma singularidade do tipo logarítmico nos deslocamentos no ponto de aplicação da carga concentrada. São também desenvolvidas soluções para os casos em que o eixo de simetria elástica do material não coincide com qualquer dos eixos do sistema de coordenadas globais do problema. Analisa-se a influência que a inclinação do eixo de simetria elástica tem no comportamento do meio. Utilizando as funções de influência são desenvolvidas implementações não singulares do Método dos Elementos de Contorno segundo as formulações direta e indireta para a análise geral de problemas de valor de contorno da elastodinâmica de meios transversalmente isotrópicos. Estas implementações evitam a singularidade das funções de Green utilizando em seu lugar funções de influência deduzidas para cargas distribuídas. A análise da interação solo-estrutura é realizada através da aplicação dessas formulações direta e indireta do Método dos Elementos de Contorno. São implementados programas que fornecem a resposta dinâmica de fundações rígidas apoiadas na superfície do meio elástico, fundações rígidas parcialmente engastadas no meio elástico e estruturas rígidas enterradas. Os métodos de análise aqui desenvolvidos se constituem numa extensão para o caso de materiais transversalmente isotrópicos de métodos anteriormente disponíveis apenas para a análise do comportamento de materiais isotrópicos.

### *Palavras Chave*

- Meios Transversalmente Isotrópicos, Funções de Green, Método dos Elementos de Contorno, Interação Solo-Estrutura, Elastodinâmica.

## Abstract

BARROS, Pécisio Leister de Almeida, *Elastodynamics of Transversely Isotropic Media: Green's Functions and Boundary Element Method Analysis of the Soil-Structure Interaction*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. 300 p. Tese (Doutorado)

This work presents the deduction of Green's and influence functions for time-harmonic dynamic loads applied to transversely isotropic elastic media for the two-dimensional case. Solutions for loads applied on the surface and in the interior of an elastic half-space, as well as for loads applied to the surface of an elastic layer resting over a rigid stratum and for loads applied in the interior of an elastic full-space are presented and analyzed. The results obtained herein show that the material anisotropy has a significant influence on the medium response. The existence of a logarithmic singularity for the displacement kernels of the stationary anisotropic fundamental solution is demonstrated. Solutions are also developed for the case in which the axes of symmetry of the transversely isotropic medium do possess an inclination with respect to the axes of the global coordinate system. The influence of this inclination on the medium response is analysed. Non-singular implementations of the Boundary Element Method by the direct and the indirect approaches are developed using these influence functions. These implementations are suited to analyse general elastodynamic boundary value problems of transversely isotropic media. These formulations avoid the Green's functions singularity by using the influence functions developed for distributed loads. The dynamic soil-structure interaction is analyzed by the application of the BEM formulations and imposing rigid body displacement constraints and equilibrium conditions to the structure. Various programs for computing these responses are developed for rigid strip foundations resting on the soil surface, for rigid strip foundations partially embedded in the soil and for completely buried rigid structures. The analysis methods developed represent an extension to the transversely isotropic case of several existing methods that can deal only with completely isotropic material.

### *Key Words*

- Transversely Isotropic Media, Green's Functions, Boundary Element Method, Soil-Structure Interaction, Elastodynamics.

# Lista de Figuras

2.1	Rotação do sistema de coordenadas . . . . .	22
3.1	Carga sobre o semi-espaço elástico. . . . .	28
3.2	Decomposição da carga sobre o semi-espaço. . . . .	36
3.3	Convenção de sinais (positivos) para o estado de tensão. . . . .	37
3.4	Variação função de Green transformada e normalizada $\bar{G}_{zz}^*$ com o número de onda normalizado $\zeta$ . . . . .	44
3.5	Carga aplicada no interior do espaço elástico infinito. . . . .	45
3.6	Variação de $\bar{G}_{x_0}^{-1}$ e $\bar{G}_{z_0}^{-1}$ em função de $\zeta$ . . . . .	55
3.7	Carga sobre camada elástica apoiada sobre base rígida. . . . .	59
3.8	Carga no interior do semi-espaço elástico. . . . .	64
4.1	Integração da função de Green para a determinação do efeito de $p(x)$ . . . . .	71
4.2	Componentes $p_x$ e $p_z$ da carga uniforme . . . . .	73
4.3	Deslocamento horizontal normalizado $u_{cx}^*$ ao longo da superfície do semi-espaço para $n_3 = 1,00$ . . . . .	80
4.4	Deslocamentos normalizados $w_{cz}^* = -u_{cz}^*$ ao longo da superfície do semi-espaço para $n_3 = 1,00$ . . . . .	81
4.5	Deslocamento vertical normalizado $w_{cz}^*$ ao longo da superfície do semi-espaço para $n_3 = 1,00$ . . . . .	82
4.6	Deslocamento horizontal normalizado $u_{cx}^*$ ao longo da superfície do semi-espaço para $n_1 = 1,00$ . . . . .	84
4.7	Deslocamentos normalizados $w_{cx}^* = -u_{cx}^*$ ao longo da superfície do semi-espaço para $n_1 = 1,00$ . . . . .	85
4.8	Deslocamento vertical normalizado $w_{cz}^*$ ao longo da superfície do semi-espaço para $n_1 = 1,00$ . . . . .	86
4.9	Tensões normalizadas $\sigma_{cxzx}^*$ e $\sigma_{czzz}^*$ ao longo do eixo $z$ do semi- espaço para $n_3 = 1,00$ . . . . .	88
4.10	Tensões normalizadas $\sigma_{cxzx}^*$ e $\sigma_{czzz}^*$ ao longo do eixo $z$ do semi- espaço para $n_1 = 1,00$ . . . . .	89

4.11	Tensões normalizadas $\sigma_{cxzz}^*$ no interior do semi-espaço para $n_1 = 1,5$ e $n_3 = 0,8$ . . . . .	90
4.12	Tensões normalizadas $\sigma_{czzz}^*$ no interior do semi-espaço para $n_1 = 1,5$ e $n_3 = 0,8$ . . . . .	91
4.13	Deslocamento horizontal normalizado $u_{cx}^*$ ao longo da superfície do semi-espaço para $-0,6 \leq \gamma \leq 0,6$ . . . . .	93
4.14	Deslocamento horizontal normalizado $u_{cx}^*$ ao longo de $z = 0$ (espaço completo) para $n_3 = 1,00$ . . . . .	95
4.15	Deslocamento vertical normalizado $w_{cz}^*$ ao longo de $z = 0$ (espaço completo) para $n_3 = 1,00$ . . . . .	96
4.16	Deslocamento horizontal normalizado $u_{cx}^*$ ao longo de $z = 0$ (espaço completo) para $n_1 = 1,00$ . . . . .	97
4.17	Deslocamento vertical normalizado $w_{cz}^*$ ao longo de $z = 0$ (espaço completo) para $n_1 = 1,00$ . . . . .	98
4.18	Deslocamento horizontal normalizado $u_{cx}^*$ ao longo de $z/a = 1$ para carga aplicada no interior do semi-espaço. . . . .	101
4.19	Deslocamento vertical normalizado $w_{cx}^*$ ao longo de $z/a = 1$ para carga aplicada no interior do semi-espaço. . . . .	102
4.20	Deslocamento horizontal normalizado $u_{cz}^*$ ao longo de $z/a = 1$ para carga aplicada no interior do semi-espaço. . . . .	103
4.21	Deslocamento horizontal normalizado $w_{cz}^*$ ao longo de $z/a = 1$ para carga aplicada no interior do semi-espaço. . . . .	104
4.22	Tensões normalizadas $\sigma_{cxxx}^*$ e $\sigma_{czzz}^*$ ao longo do eixo $z$ do semi-espaço para carga aplicada em $z/a = 1$ . . . . .	105
4.23	Distribuições unitárias $q_i(x)$ . . . . .	106
4.24	Exemplo de carga com distribuição quadrática . . . . .	107
4.25	Deslocamento normalizado $u_x^*$ ao longo de $z = 0$ obtido pelas funções de influência (— e - -) e por integração das funções de Green ( $\diamond$ e +) . . . . .	109
4.26	Deslocamento normalizado $w_x^*$ ao longo de $z = 0$ obtido pelas funções de influência (— e - -) e por integração das funções de Green ( $\diamond$ e +) . . . . .	110
4.27	Deslocamento normalizado $u_z^*$ ao longo de $z = 0$ obtido pelas funções de influência (— e - -) e por integração das funções de Green ( $\diamond$ e +) . . . . .	110
4.28	Deslocamento normalizado $w_z^*$ ao longo de $z = 0$ obtido pelas funções de influência (— e - -) e por integração das funções de Green ( $\diamond$ e +) . . . . .	111
4.29	Carga uniforme distribuída na direção vertical no interior do semi-espaço . . . . .	113

4.30	Tensões normalizadas $\sigma_{cxxx}^*$ e $\sigma_{czzz}^*$ ao longo de $z = a$ para faixa de carga uniforme distribuída verticalmente no interior de um meio semi-infinito. . . . .	117
5.1	Rotação do sistema de coordenadas . . . . .	121
5.2	Carga aplicada sobre o semi-espaço com eixo de simetria inclinado . . . . .	126
5.3	Integração das funções de Green $G_{ij}$ ao longo de $x'$ . . . . .	139
5.4	Componente normalizada $G_{x'x'}^*$ para $\theta = 30^\circ$ ao longo do eixo $x'$ ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) . . . . .	141
5.5	Componente normalizada $G_{z'x'}^* = G_{x'z'}^*$ para $\theta = 30^\circ$ ao longo do eixo $x'$ ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) . . . . .	142
5.6	Componente normalizada $G_{z'z'}^*$ para $\theta = 30^\circ$ ao longo do eixo $x'$ ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) . . . . .	142
5.7	Representação polar da componente normalizada $G_{x'x'}^*$ em função de $\theta$ em $\delta x' = 0,25; z' = 0$ para material anisotrópico ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) e material isotrópico. . . . .	144
5.8	Representação polar da componente normalizada $G_{z'x'}^* = G_{x'z'}^*$ em função de $\theta$ em $\delta x' = 0,25; z' = 0$ para material anisotrópico ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ). . . . .	145
5.9	Representação polar da componente normalizada $G_{z'z'}^*$ em função de $\theta$ em $\delta x' = 0,25; z' = 0$ para material anisotrópico ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) e material isotrópico. . . . .	146
5.10	Componente normalizada $u_{cx'}^*$ para $\theta = 30^\circ$ ao longo do eixo $x'$ devida a uma faixa de carga aplicada no interior do espaço completo ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) . . . . .	148
5.11	Componente normalizada $w_{cx'}^* = u_{cz'}^*$ para $\theta = 30^\circ$ ao longo do eixo $x'$ devida a uma faixa de carga aplicada no interior do espaço completo ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) . . . . .	148
5.12	Componente normalizada $w_{cz'}^*$ para $\theta = 30^\circ$ ao longo do eixo $x'$ devida a uma faixa de carga aplicada no interior do espaço completo ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) . . . . .	149
5.13	Deslocamento vertical normalizado $u_{cx'}^*$ ao longo de $z' = 0$ devido a uma faixa de carga uniforme aplicada na superfície do semi-espaço para $\theta = 0$ e $\theta = \pi/6$ . . . . .	151
5.14	Deslocamento vertical normalizado $w_{cx'}^*$ ao longo de $z' = 0$ devido a uma faixa de carga uniforme a uma faixa de carga uniforme aplicada na superfície do semi-espaço para $\theta = 0$ e $\theta = \pi/6$ . . . . .	151

5.15	Deslocamento horizontal normalizado $u_{cz'}^*$ ao longo de $z' = 0$ devido a uma faixa de carga uniforme a uma faixa de carga uniforme aplicada na superfície do semi-espço para $\theta = 0$ e $\theta = \pi/6$ . . . . .	152
5.16	Deslocamento vertical normalizado $w_{cz'}^*$ ao longo de $z' = 0$ devido a uma faixa de carga uniforme a uma faixa de carga uniforme aplicada na superfície do semi-espço para $\theta = 0$ e $\theta = \pi/6$ . . . . .	152
5.17	Tensões normalizadas $\sigma_{cx'z'x'}^*$ no interior do semi-espço para $n_1 = 1,5$ ; $n_3 = 0,8$ e $\theta = \pi/6$ . . . . .	153
5.18	Tensões normalizadas $\sigma_{cz'z'z'}^*$ no interior do semi-espço para $n_1 = 1,5$ ; $n_3 = 0,8$ e $\theta = \pi/6$ . . . . .	154
6.1	Problemas original e auxiliar para o Método Indireto . . . . .	159
6.2	Divisão do contorno em elementos . . . . .	170
6.3	Deslocamento horizontal normalizado $u_{cx}^*$ calculados pela função de influência (FI) e pelas formulações indireta (MEC-I) e direta (MEC-D) do MEC. . . . .	171
6.4	Deslocamentos cruzados normalizados $w_{cx}^* = -u_{cz}^*$ ao longo da superfície do semi-espço. . . . .	172
6.5	Deslocamento vertical normalizado $w_{cz}^*$ ao longo da superfície do semi-espço. . . . .	173
6.6	Sistemas de coordenadas global e local. . . . .	175
6.7	Linhas de carga aplicadas no elemento $j$ . . . . .	176
6.8	Tunel cilíndrico em meio elástico infinito . . . . .	181
6.9	Variação do deslocamento normalizado $u_n^*$ em $A$ com a frequência normalizada $a_0$ . . . . .	183
6.10	Deslocamentos normalizados $u_s^*$ ao longo do contorno do tunel ( $a_0 = 1$ ). . . . .	185
6.11	Deslocamentos normalizados $u_n^*$ ao longo do contorno do tunel ( $a_0 = 1$ ). . . . .	186
7.1	Fundação rígida apoiada sobre um meio semi-infinito . . . . .	190
7.2	Divisão da interface solo-fundação em elementos . . . . .	191
7.3	Deslocamentos do ponto de referência . . . . .	193
7.4	Equilíbrio das forças que agem sobre a fundação . . . . .	193
7.5	Tensões normalizadas $at_x/F_z$ e $at_z/F_z$ aplicadas pela fundação sujeita a uma carga vertical $F_z$ . . . . .	198
7.6	Tensões normalizadas $at_x/F_x$ e $at_z/F_x$ aplicadas pela fundação sujeita a uma carga horizontal $F_x$ . . . . .	199

7.7	Tensões normalizadas $a^2 t_x / M_y$ e $a^2 t_z / M_y$ aplicadas pela fundação sujeita a um momento $M_y$ . . . . .	200
7.8	Deslocamentos normalizados devidos a uma carga vertical $F_z$ ao longo da superfície do semi-espaço. . . . .	201
7.9	Deslocamentos normalizados devidos a uma carga horizontal $F_x$ ao longo da superfície do semi-espaço. . . . .	202
7.10	Deslocamentos normalizados devidos a um momento $M_y$ ao longo da superfície do semi-espaço. . . . .	203
7.11	Componente normalizada $N_{wz}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para $n_3 = 1$ . . . . .	205
7.12	Componente normalizada $N_{wz}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para $n_1 = 1$ . . . . .	206
7.13	Componente normalizada $N_{ux}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para $n_3 = 1$ . . . . .	207
7.14	Componente normalizada $N_{ux}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para $n_1 = 1$ . . . . .	208
7.15	Componente normalizada $N_{\varphi m}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para $n_3 = 1$ . . . . .	209
7.16	Componente normalizada $N_{\varphi m}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para $n_1 = 1$ . . . . .	210
7.17	Componente normalizada $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para $n_3 = 1$ . . . . .	211
7.18	Componente normalizada $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para $n_1 = 1$ . . . . .	212
7.19	Fundação rígida apoiada sobre uma camada elástica situada sobre uma base rígida . . . . .	213
7.20	Componente normalizada $N_{wz}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$ e $h/a = 4$ ). . . . .	215
7.21	Componente normalizada $N_{ux}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$ e $h/a = 4$ ). . . . .	216
7.22	Componente normalizada $N_{\varphi m}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$ e $h/a = 4$ ). . . . .	217
7.23	Componente normalizada $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$ e $h/a = 4$ ). . . . .	218

7.24	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente normalizada $N_{wz}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$ e $\nu = 0,1$ ). . . . .	220
7.25	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente normalizada $N_{ux}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$ e $\nu = 0,1$ ). . . . .	220
7.26	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente normalizada $N_{\varphi m}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$ e $\nu = 0,1$ ). . . . .	221
7.27	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente normalizada $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$ e $\nu = 0,1$ ). . . . .	222
7.28	Fundação rígida apoiada sobre o semi-espço com eixo de simetria elástica inclinado . . . . .	223
7.29	Componente normalizada $N_{wz}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada sobre semi-espço com eixo de simetria elástica do material inclinado . . . . .	225
7.30	Componente normalizada $N_{ux}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada sobre semi-espço com eixo de simetria elástica do material inclinado . . . . .	226
7.31	Componente normalizada $N_{\varphi m}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada sobre semi-espço com eixo de simetria elástica do material inclinado . . . . .	227
7.32	Componente normalizada $N_{wx}^* = N_{uz}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada sobre semi-espço com eixo de simetria elástica do material inclinado . . . . .	229
7.33	Componente normalizada $N_{wm}^* = N_{\varphi z}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada sobre semi-espço com eixo de simetria elástica do material inclinado . . . . .	230
7.34	Componente normalizada $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada sobre semi-espço com eixo de simetria elástica do material inclinado . . . . .	231
7.35	Fundação rígida embutida em um meio semi-infinito . . . . .	232
7.36	Problemas original e auxiliar . . . . .	232
7.37	Vetores $\mathbf{n}$ normais à superfície $\Gamma^*$ . . . . .	235
7.38	Deslocamentos ao longo da interface solo-fundação. . . . .	236

7.39	Componente normalizada $N_{wz}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito isotrópico . . .	244
7.40	Componente normalizada $N_{ux}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito isotrópico . . .	245
7.41	Componente normalizada $N_{\varphi m}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito isotrópico . . .	246
7.42	Componente normalizada $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito isotrópico . . . . .	247
7.43	Componente normalizada $N_{wz}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ). . . . .	248
7.44	Componente normalizada $N_{ux}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) . . . . .	249
7.45	Componente normalizada $N_{\varphi m}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) . . . . .	250
7.46	Componente normalizada $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) . . . . .	251
7.47	Estrutura rígida enterrada em um meio semi-infinito . . . . .	252
7.48	Problemas original e auxiliar para a análise da estrutura enterrada . . . . .	253
7.49	Componente normalizada $N_{wz}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito isotrópico . . .	255
7.50	Componente normalizada $N_{ux}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito isotrópico . . .	256
7.51	Componente normalizada $N_{\varphi m}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito isotrópico . . .	257
7.52	Componente normalizada $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito isotrópico . . . . .	258
7.53	Componente normalizada $N_{wz}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ). . . . .	259
7.54	Componente normalizada $N_{ux}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) . . . . .	260

7.55	Componente normalizada $N_{\varphi m}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) . . . . .	261
7.56	Componente normalizada $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$ da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) . . . . .	262
7.57	Partes $\Gamma_t, \Gamma_u$ e $\Gamma_r$ do contorno $\Gamma$ . . . . .	263
7.58	Deslocamentos $u_n^{(i)}$ e $u_s^{(i)}$ do elemento $i$ . . . . .	265
7.59	Tensões $t_n^{(j)}$ e $t_s^{(j)}$ que atuam no elemento $j$ . . . . .	267
7.60	Fundação rígida embutida em um meio semi-infinito . . . . .	269
7.61	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{wz}^*$ para fundação engastada ( $b/a = 1$ ) analisada através do MEC-D e do MSE. . . . .	271
7.62	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{ux}^*$ para fundação engastada ( $b/a = 1$ ) analisada através do MEC-D e do MSE. . . . .	271
7.63	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{\varphi m}^*$ para fundação engastada ( $b/a = 1$ ) analisada através do MEC-D e do MSE. . . . .	272
7.64	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$ para fundação engastada ( $b/a = 1$ ) analisada através do MEC-D e do MSE. . . . .	272
7.65	Galeria rígida enterrada em um meio infinito . . . . .	273
7.66	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{wz}^*$ para galeria em meio infinito analisada através do MEC-D e do MSE. . . . .	274
7.67	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{ux}^*$ para galeria em meio infinito analisada através do MEC-D e do MSE. . . . .	275
7.68	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{\varphi m}^*$ para galeria em meio infinito analisada através do MEC-D e do MSE. . . . .	275
7.69	Duas galerias rígidas enterradas em um meio infinito . . . . .	276
7.70	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{wz}^{*(1,1)}$ para duas galerias em meio infinito. . . . .	278
7.71	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{ux}^{*(1,1)}$ para duas galerias em meio infinito. . . . .	278
7.72	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{\varphi m}^{*(1,1)}$ para duas galerias em meio infinito. . . . .	279
7.73	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{wm}^{*(1,1)}$ para duas galerias em meio infinito. . . . .	279

7.74	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{wz}^{*(2,1)}$ para duas galerias em meio infinito.	280
7.75	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{ux}^{*(2,1)}$ para duas galerias em meio infinito.	280
7.76	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{\varphi m}^{*(2,1)}$ para duas galerias em meio infinito.	281
7.77	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{wm}^{*(2,1)}$ para duas galerias em meio infinito.	281
7.78	Túnel rígido de seção semi-circular em um meio infinito com eixo de simetria elástica inclinado . . . . .	282
7.79	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{wz}^*$ para túnel meio infinito. . . . .	284
7.80	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{ux}^*$ para túnel meio infinito. . . . .	284
7.81	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{\varphi m}^*$ para túnel meio infinito. . . . .	285
7.82	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{wx}^* = N_{uz}^*$ para túnel meio infinito. . . . .	285
7.83	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{wm}^* = N_{\varphi z}^*$ para túnel meio infinito. . . . .	286
7.84	Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$ para túnel meio infinito. . . . .	286

# Lista de Tabelas

4.1	Relação entre os tempos computacionais necessários para o cálculo dos deslocamentos através de integração das funções de Green e através de superposição de funções de influência	111
6.1	Deslocamentos normalizados $u_s^*$ e $u_n^*$ nos pontos $A$ , $B$ e $C$ para alguns valores de $N$ ( $a_0 = 1$ )	182
7.1	Componentes da matriz de flexibilidade normalizada $\mathbf{N}^*(\omega)$ para um material isotrópico ( $\nu = 0,4$ , $\nu = 0,01$ ) para vários números de elementos $N$ . ( $a_0 = 1$ .)	196
7.2	Componentes da matriz de flexibilidade normalizada $\mathbf{N}^*(\omega)$ para um material anisotrópico ( $c_{11}/c_{44} = 6$ , $n_1 = 1,5$ , $n_3 = 0,8$ , $\nu = 0,01$ ) para vários números de elementos $N$ . ( $a_0 = 1$ .)	196
7.3	Componentes da matriz de flexibilidade normalizada $\mathbf{N}^*(\omega)$ para fundação engastada com $b/a = 1$ , em um material isotrópico ( $\nu = 0,4$ , $\nu = 0,01$ ) para vários números de elementos $N$ . ( $a_0 = 0,5$ .)	240
7.4	Componentes da matriz de flexibilidade normalizada $\mathbf{N}^*(\omega)$ para fundação engastada com $b/a = 1$ , em um material isotrópico ( $\nu = 0,4$ , $\nu = 0,01$ ) para vários números de elementos $N$ . ( $a_0 = 1,0$ .)	241
7.5	Componentes da matriz de flexibilidade normalizada $\mathbf{N}^*(\omega)$ para fundação engastada com $b/a = 1$ , em um material isotrópico ( $\nu = 0,4$ , $\nu = 0,01$ ) para vários números de elementos $N$ . ( $a_0 = 1,5$ .)	241
7.6	Comparação entre os valores das componentes da matriz de flexibilidade obtidos pelo MSE e por Wang e Rajapakse para um material isotrópico ( $\nu = 0,25$ , $b/a = 0,25$ , $N_H = 16$ , $N_V = 2$ )	242
7.7	Comparação entre os valores das componentes da matriz de flexibilidade obtidos pelo MSE e por Wang e Rajapakse para um material isotrópico ( $\nu = 0,25$ , $b/a = 0,50$ , $N_H = 16$ , $N_V = 4$ )	242

- 7.8 Comparação entre os valores das componentes da matriz de flexibilidade obtidos pelo MSE e por Wang e Rajapakse para um material isotrópico ( $\nu = 0,25$ ,  $b/a = 1,0$ ,  $N_H = 16$ ,  $N_V = 8$ ) 242

# Simbologia

## • Letras latinas

<b>A</b>	matriz de influência dos deslocamentos
<i>A</i>	amplitude de onda
<i>a</i>	semi-largura
$a_0$	freqüência adimensional, equação (4.16)
<b>B</b>	matriz de influência das tensões
<i>B</i>	amplitude de onda
<i>b</i>	engastamento
<b>C</b>	matriz de compatibilidade cinemática
<i>C</i>	amplitude de onda
<i>C<sub>i</sub></i>	função co-seno integral
$c_{ijkl}$	tensor de elasticidade
$c_{ij}$	constantes elásticas
$\hat{c}_{ij}$	constantes elásticas equivalentes
$c_{ij}^*$	constantes elásticas complexas
$c'_{ij}$	constantes elásticas segundo o sistema inclinado
$\bar{c}'_{ij}$	constantes elásticas normalizadas
<b>D</b>	matriz de equilíbrio
<i>D</i>	amplitude de onda
<i>E</i>	módulo de elasticidade
$F_x, F_z$	forças externas
$F_s, F_n$	linhas de carga concentradas
<b>f</b>	vetor de forças externas
$f_i, i = 1, \dots, 4$	equação (5.22)
<b>G</b>	matriz de influência dos deslocamentos
<i>G</i>	módulo de cisalhamento
$G_{ij}$	funções de Green para os deslocamentos
$\tilde{G}_{ij}$	funções de Green transformadas
$G_{ij}^*$	funções de Green normalizadas
$\tilde{G}_{x0}, \tilde{G}_{z0}$	equações (3.97) e (3.98)

$g_i, i = 1, \dots, 4$	equação (5.22)
$\mathbf{H}$	matriz de influência das tensões
$H$	equação (5.41)
$H_c$	equação (4.11)
$H'_c$	equação (5.59)
$H_x, H_z$	equações (3.74)
$H_{x1}, H_{x2}$	equações (5.68)
$h$	altura
$h_1, h_2$	equações (3.123)
$h_i, i = 1, \dots, 4$	equação (5.22)
$\mathbf{I}$	matriz identidade
$I$	$z/ z $
$I_{1n}, I_{2n}$	equações (3.107)
$i$	$\sqrt{-1}$
$K_1, K_2, K'_1, K'_2$	equações (3.148)
$K_{x0}, K_{z0}$	equações (3.99)
$K_{ijk}$	equações (5.7)
$L_{ijk}$	equações (5.7)
$l$	comprimento do elemento
$M_y$	momento externo
$\mathbf{N}$	matriz de flexibilidade dinâmica
$\mathbf{N}^*$	matriz de flexibilidade dinâmica normalizada
$N$	número de elementos
$N_H$	número de elementos na face horizontal
$N_V$	número de elementos na face vertical
$\mathbf{n}$	vetor normal
$n$	$E/E_z$
$n_1, n_2, n_3$	índices de anisotropia, equações (2.31)
$O$	ponto de aplicação da carga externa
$p$	carga
$\bar{p}$	carga transformada
$p_0$	carga de referência
$Q$	equação (3.123)
$q$	carga fictícia
$q_0, q_1, q_2$	equações (4.19)
$\bar{q}_0, \bar{q}_1, \bar{q}_2$	equações (4.23)
$R, R'$	equações (3.148)
$R_c$	equação (4.8)
$R'_c$	equação (5.55)
$R_i$	equação (4.25)

$R_q$	equação (4.27)
<b>S</b>	matriz de influência das tensões
<b>T</b>	matriz de influência das tensões
$T_i, i = 1, \dots, 8$	equações (5.13)
<b>t</b>	vetor de tensões
$t$	tempo
<b>U</b>	matriz de influência dos deslocamentos
<b>u</b>	vetor de deslocamentos
$u_0$	vetor de deslocamentos da estrutura rígida
$u$	deslocamento horizontal
$u^*$	deslocamento normalizado, equações (4.14)
$u'$	deslocamento na direção $x'$
$u_0$	deslocamento horizontal da estrutura rígida
$\bar{u}$	deslocamento horizontal transformado
$u_n$	deslocamento normal
$u_s$	deslocamento tangente
$u_{cx}, u_{cz}$	funções de influência para carga uniforme
$u_{lx}, u_{lz}$	funções de influência para carga linear
$u_{qx}, u_{qz}$	funções de influência para carga quadrática
<b>V</b>	energia de deformação
$v$	deslocamento na direção $y$
$w$	deslocamento vertical
$w^*$	deslocamento normalizado, equações (4.14)
$w'$	deslocamento na direção $z'$
$w_0$	deslocamento vertical da estrutura rígida
$\bar{w}$	deslocamento vertical transformado
$w_{cx}, w_{cz}$	funções de influência para carga uniforme
$w_{lx}, w_{lz}$	funções de influência para carga linear
$w_{qx}, w_{qz}$	funções de influência para carga quadrática
$x, y, z$	sistema de coordenadas cartesiano
$x', z'$	sistema de coordenadas inclinado
$z'$	profundidade do ponto de aplicação da carga
$z_1, z_2$	equações (3.140)

• Letras gregas

$\alpha$	constante elástica adimensional, equações (3.6)
$\alpha_{ij}$	matriz de rotação
$\beta$	constante elástica adimensional, equações (3.6)
$\Gamma$	contorno do domínio do problema original
$\Gamma^*$	contorno do domínio do problema auxiliar
$\Gamma_f$	sub-contorno finito do domínio do problema auxiliar
$\gamma$	constante elástica adimensional, equação (3.12)
$\Delta_z$	diferença de altura
$\delta$	frequência normalizada, equação (3.7)
$\delta_D$	função delta de Dirac
$\epsilon_{ij}$	tensor de deformações
$\Phi$	equação (3.23)
$\varphi_0$	rotação da estrutura rígida
$\eta_i, i = 1, \dots, 6$	equação (3.38)
$\kappa$	constante elástica adimensional, equações (3.6)
$\lambda$	número de onda
$\bar{\lambda}$	constante de Lamé
$\bar{\mu}$	constante de Lamé
$\mu_i, i = 1, \dots, 6$	equação (3.88)
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\rho$	densidade de massa
$\sigma$	vetor de tensões
$\sigma_n$	tensão normal
$\sigma_s$	tensão tangencial
$\sigma_{ij}$	tensor de tensões
$\sigma_{ij}^*$	tensor de tensões normalizadas
$\bar{\sigma}_{ij}$	tensor de tensões transformadas
$\sigma_{ijx}, \sigma_{ijz}$	funções de Green para as tensões
$\sigma_{cijx}, \sigma_{cijz}$	funções de influência para carga uniforme
$\sigma_{lijx}, \sigma_{lijz}$	funções de influência para carga linear
$\sigma_{qijx}, \sigma_{qijz}$	funções de influência para carga quadrática
$\nu$	taxa de amortecimento interno
$\Omega$	domínio do problema original
$\Omega^*$	contorno do domínio do problema auxiliar
$\omega$	frequência circular
$\omega_1, \omega_2$	equações (3.83) e (3.85)
$\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$	equações (3.28) e (3.32)
$\omega_i', i = 1, \dots, 4$	equações (5.17)

$\xi_i$	raízes da equação característica
$\theta$	ângulo de inclinação
$\zeta$	número de onda adimensional
$\zeta_p, \zeta_R, \zeta_s$	pontos de singularidade

• **Abreviaturas**

MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEC-I	Método dos Elementos de Contorno Indireto
MEC-D	Método dos Elementos de Contorno Direto
MS	Método da Superposição
MSE	Método da Superposição Estendido

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Apresentação

A interação dinâmica entre o solo e estruturas rígidas ou flexíveis tem recebido crescente atenção dos pesquisadores nos últimos anos. Esta atenção se deve a dois fatores principais. Em primeiro lugar as crescentes exigências quanto aos níveis máximos de perturbação permitidos para as estruturas de suporte de equipamentos industriais que causem esforços dinâmicos, bem como para as imediações dessas estruturas, não mais permitem a utilização dos métodos empíricos empregados no passado e impõem a adoção de procedimentos com um maior embasamento teórico e analítico. Além disso, a disponibilização de computadores eletrônicos digitais cada vez mais poderosos tornou possível o desenvolvimento de soluções numéricas para problemas matematicamente mais complexos que de outra forma não poderiam ser analisados. Assim, foram desenvolvidas numerosas técnicas, cada vez mais sofisticadas, para a análise de fundações de máquinas visando fornecer ao projetista uma melhor compreensão dos fenômenos envolvidos e ferramentas de cálculo que conduzam a um projeto mais racional.

No entanto, são poucos os métodos desenvolvidos nesta área que consideram os possíveis efeitos da anisotropia do meio em que as estruturas estão colocadas. A anisotropia em relação à elasticidade do material não é uma ocorrência incomum, principalmente para materiais de origem geológica. Esta característica do meio elástico tem grande influência no comportamento das estruturas que se apoiam sobre ele. Assim a análise isotrópica pode ser considerada apenas como uma deficiente aproximação da realidade.

Esta lacuna existente na área da análise da interação dinâmica solo-estrutura se deve principalmente à complexidade das soluções analíticas necessárias para o tratamento numérico do problema. Embora a propagação

de ondas elásticas em meios anisotrópicos tenha sido estudada por vários pesquisadores da área da geofísica nos últimos 50 anos, soluções completas para o comportamento de meios anisotrópicos sob carregamentos dinâmicos, mesmo os mais simples, só se tornaram disponíveis recentemente, ainda que apenas para formas restritas de anisotropia elástica.

A forma mais encontrada de anisotropia em materiais geológicos é a chamada isotropia transversal ou anisotropia cruzada. Nesta forma de anisotropia há um plano no meio elástico, geralmente horizontal, em que o comportamento é isotrópico. O comportamento anisotrópico aparece apenas nas direções não contidas neste plano. Embora seja esta a forma mais simples de anisotropia é também a mais comum. Mesmo assim, a análise dos deslocamentos e tensões provocados em um meio com esta característica por cargas dinâmicas apresenta grandes desafios, tanto no sentido analítico quanto em relação aos procedimentos numéricos envolvidos.

Os carregamentos dinâmicos a que estão sujeitas estruturas de fundação e outras estruturas instaladas no solo são geralmente classificadas em cargas transientes e cargas harmônicas estacionárias. As cargas do primeiro tipo são caracterizadas por uma duração muito curta, tal como um impulso instantâneo. São exemplos deste tipo de carregamento as cargas aplicadas por prensas e martelos hidráulicos. As cargas harmônicas, por outro lado, apresentam uma variação cíclica no tempo expressas por funções harmônicas. São cargas aplicadas em geral por máquinas rotativas.

Da mesma forma, os deslocamentos e as tensões causados no meio elástico por cargas dinâmicas podem ser analisados como uma superposição de efeitos transientes que se extinguem com o tempo, e efeitos estacionários harmônicos no tempo. A análise dos efeitos estacionários é feita no domínio da frequência da excitação externa. Pode-se em muitos casos obter também uma solução para a resposta transiente a partir da análise no domínio da frequência [33].

Uma vasta categoria de problemas da engenharia estrutural é abrangida pelos chamados problemas planos. Neste tipo de problemas assume-se que as deformações (ou as tensões) ocorram apenas em direções contidas em um único plano. São exemplos desta classe de problemas a análise de estruturas de grande extensão como sapatas corridas e muros de arrimo. As soluções destes problemas apresentam um grau menor de dificuldade em relação ao problemas tridimensionais devido ao menor número de variáveis envolvidas. Embora a hipótese de estado plano possa parecer uma restrição muito forte, é surpreendente o número de casos que podem ser realisticamente analisados dessa forma. Além disso as soluções planas podem servir como ponto de partida para as soluções tridimensionais, mais abrangentes.

*As deduções desenvolvidas ao longo deste trabalho visam a análise, no domínio da frequência, do comportamento de meios elásticos transversal-*

*mente isotrópicos e de estruturas rígidas nele instaladas, no estado plano de deformação, quando submetidas a carregamentos dinâmicos harmônicos no tempo.*

## 1.2 Revisão bibliográfica

O desenvolvimento da análise de fundações de máquinas por métodos teóricos se deu a partir do trabalho de Reissner [70], ainda na década de 30, que desenvolveu uma solução analítica para o efeito de uma carga dinâmica circular vertical uniforme aplicada sobre um meio elástico semi-infinito. Esta solução foi obtida por integração da solução obtida anteriormente por Lamb [40] para o efeito de uma carga dinâmica concentrada aplicada sobre a superfície do semi-espço. Referências à utilização da solução de Reissner já aparecem na obra de Barkan [6], considerada uma das primeiras a tratar o projeto de fundações de máquinas de forma abrangente.

Posteriormente, já na década de 50, foram obtidas por Quinlan [63] e por Sung [80] soluções para outras formas de distribuição da carga dinâmica circular vertical, na tentativa de obter o comportamento de fundações rígidas e flexíveis. Foram analisadas, além da distribuição uniforme, a distribuição parabólica com intensidade máxima no centro e intensidade nula na borda do círculo de carga, e uma distribuição que tem intensidade mínima no centro e tende ao infinito na borda do círculo de carga. Esta última foi adotada como uma aproximação para a distribuição da carga sob uma fundação rígida e foi adotada a partir da solução estática. Baseado nestas soluções analíticas, Hsieh [36] desenvolveu o conceito de *amortecimento geométrico* que ocorre devido à dispersão da energia aplicada pela fundação no meio elástico por radiação. Desenvolveu também o processo de determinação do comportamento de uma fundação real a partir do comportamento de uma placa rígida sem massa apoiada sobre o meio elástico. O efeito de cargas dinâmicas horizontais e momentos aplicados sobre placas circulares foi analisado por outros autores seguindo este mesmo modelo [4, 15].

Observando que a distribuição de carga vertical adotada por Quinlan e por Sung para a fundação rígida não conduzia a uma distribuição de deslocamentos uniforme sob a fundação, Lysmer [44] desenvolveu um método que consiste em dividir a placa rígida em uma série de anéis circulares concêntricos de carga uniforme, superpondo o efeito de cada um deles e impondo a condição de mesmo deslocamento a todos, e a condição de equilíbrio em relação à carga aplicada sobre a placa. Este é considerado o primeiro de uma série de métodos classificados como *semi-analíticos* que, desde então, são empregados na obtenção de soluções para problemas cada vez mais complexos.

Seguindo este caminho foram sendo obtidas sucessivamente soluções para problemas de fundações do tipo “sapata corrida” apoiada sobre o semi-espaço [46], fundações retangulares apoiadas sobre o semi-espaço [87], fundações apoiadas sobre meios estratificados [30] e fundações embutidas no meio elástico [52, 54]. Revisões completas destas soluções foram apresentadas sucessivamente nos trabalhos de McNeil [48] e de Gazetas [33]; e nas obras de Richart, Woods e Hall [71] e de Das [24].

Estas soluções apresentam em comum o fato de utilizarem como ponto de partida uma solução analítica “exata” de uma problema mais simples, como uma carga unitária concentrada ou uniforme aplicada na superfície ou no interior do meio elástico. Através da superposição do efeito de várias dessas cargas multiplicadas por intensidades incógnitas e da imposição das condições de contorno (em deslocamento ou em tensão) chega-se a um sistema de equações cuja solução fornece essas intensidades de carga. O comportamento global da fundação pode então ser determinado pela superposição dos efeitos das cargas, agora com intensidades conhecidas. Vê-se que este esquema corresponde a uma implementação numérica aproximada do Método das Equações Integrais de Contorno. Esta implementação numérica pode então ser vista como uma das formas com que se apresenta o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

A utilização do Método dos Elementos de Contorno na elastodinâmica iniciou-se com o trabalho de Cruse e Rizzo [20] sobre a aplicação da formulação direta do MEC na solução de problemas gerais da elastodinâmica no domínio do tempo. A análise de problemas da interação solo-fundação pelo MEC, no entanto, foi iniciada por Dominguez [25]. A partir daí um grande número de artigos e livros foram publicados sobre a aplicação do MEC na elastodinâmica em geral [9, 11, 47, 26] e na análise de fundações rígidas ou flexíveis sob a ação de cargas dinâmicas [1, 37, 86, 66].

Ao mesmo tempo foram desenvolvidas aplicações do Método dos Elementos Finitos na análise da dinâmica das fundações. A principal dificuldade encontrada nessas aplicações se refere à necessidade de se interromper a discretização do meio elástico a alguma distância finita da fundação, o que cria uma fronteira para a propagação das ondas elásticas. Isto provoca uma reflexão destas ondas que assim voltam em direção à fundação, alterando o seu comportamento. Para se evitar esta reflexão foram tentadas a utilização de fronteiras absorventes [45] e elementos infinitos [21]. No entanto os resultados obtidos não foram completamente satisfatório.

Análises da dinâmica de fundações apoiadas em meios não isotrópicos só apareceram bem mais recentemente na literatura. Apesar de o fenômeno da propagação de ondas elásticas no meio elástico isotrópico já ser completamente conhecido desde o século passado, a partir do trabalho de Lord Rayleigh

[69], só a partir da década de 40 a propagação de ondas elásticas em meios anisotrópicos começou a ser investigada. O primeiro trabalho nesta área foi publicado por Carrier [16] que analisou a propagação de ondas num meio transversalmente isotrópico sujeito a uma restrição elástica. A restrição proposta por Carrier é dada por uma relação entre as suas constantes elásticas e faz com que no material o número de constantes elásticas independentes se reduza de 5 para apenas 4. Esta restrição era necessária para que as equações de movimento se desacoplassem e o fenômeno pudesse ser analisado pelos métodos utilizados para o material isotrópico. Pouco depois Stoneley [78] analisou a propagação de ondas em meios transversalmente isotrópicos sem esta restrição e verificou os tipos de ondas elásticas que se propagam nesses meios. Musgrave analisou os tipos de onda que se propagam num meio elástico com anisotropia geral [50] e, em particular, ondas em meios transversalmente isotrópicos [51]. Introduziu também o estudo das superfícies de propagação das ondas elásticas em meios anisotrópicos. Synge [81] analisou a existência de ondas de superfície (ondas de Rayleigh) em meios transversalmente isotrópicos e concluiu que estas ondas só podem ocorrer se a superfície livre for paralela ou perpendicular ao eixo de simetria elástica do material. Buchwald, em vários trabalhos [12, 13, 14], aprofundou os estudos desenvolvidos por Musgrave e por Synge e obteve expressões dos deslocamentos causados por um impulso aplicado no interior de um meio transversalmente isotrópico na forma de integrais de Fourier. Analisou também a existência de ondas Rayleigh de forma mais completa. Anderson [2] estudou a propagação de ondas elásticas no interior de meios transversalmente isotrópicos estratificados, analisando as ondas que se formam ao longo das interfaces entre camadas de materiais diferentes. As condições de existência de ondas de superfície em meios elásticos anisotrópicos em geral foram analisados nos trabalhos de Barnett & Lothe [10] e de Chadwick & Smith [17], já na década de 70. Foi demonstrado que as ondas de Rayleigh só se propagam em meios anisotrópicos sob condições especiais e apenas em certas direções.

Estes trabalhos tiveram grande importância na compreensão da mecânica da propagação de ondas elásticas em meios anisotrópicos. Porém, não foram utilizados diretamente na análise de fundações de máquinas. Esta utilização só começou a se tornar possível com o trabalho de Payton [55] que apresenta uma solução completa para os deslocamentos devidos a um impulso concentrado (funções de Green) aplicado no interior de um meio infinito transversalmente isotrópico, com a restrição de Carrier. Esta solução foi generalizada por Payton em um livro posterior [56] para materiais transversalmente isotrópicos sem a restrição de Carrier. Nesta obra é apresentada também uma solução para os deslocamentos causados por um impulso instantâneo aplicado na superfície do semi-espço elástico transversalmente isotrópico. As

funções de Green obtidas por Payton foram utilizadas por Kobayashi, Nishimura & Kishima [38] numa aplicação do Método dos Elementos de Contorno no domínio do tempo. Esta aplicação foi considerada pelos próprios autores como apenas uma tentativa inicial na aplicação do MEC na análise de problemas da elastodinâmica de meios transversalmente isotrópicos no domínio do tempo. No entanto, não surgiram mais trabalhos nesta linha de pesquisa.

No domínio da frequência, Kirkner [39] apresentou uma solução para o comportamento de um disco rígido apoiado sobre um semi-espço transversalmente isotrópico com a restrição de Carrier sob a ação de um carregamento vertical dinâmico. Na mesma linha, Gazetas [31, 32] analisou o comportamento de sapatas corridas rígidas apoiadas sobre o semi-espço e sobre uma camada elástica finita para materiais transversalmente isotrópicos com a restrição de Carrier. Waas [82] desenvolveu um método de análise para fundações rígidas apoiadas sobre meios transversalmente isotrópicos estratificados baseado no Método dos Elementos Finitos utilizando uma discretização do meio na direção vertical e empregando elementos infinitos na direção horizontal. Até o final da década passada estas eram as únicas soluções disponíveis para a análise de fundações de máquinas apoiadas sobre meios transversalmente isotrópicos.

Já na década de 90, Rajapakse e Wang publicaram uma série de trabalhos sobre o tratamento da interação dinâmica solo-estrutura para materiais transversalmente isotrópicos sem a restrição de Carrier. Foram obtidas soluções para os deslocamentos e tensões devidos a cargas aplicadas no interior de um semi-espço, no estado plano de deformação [67], para cargas axialmente simétricas [68], e para cargas aplicadas no interior de meios estratificados [85]. Estas soluções foram empregadas na análise de fundações rígidas embutidas no meio transversalmente isotrópico [83, 84] com a utilização da formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno.

### 1.3 Objetivos e organização do trabalho

Este trabalho visa desenvolver métodos de análise de fundações rígidas apoiadas em meios transversalmente isotrópicos no estado plano de deformação, seguindo a linha iniciada por Rajapakse e Wang. Para isto inicialmente são obtidas e analisadas funções de Green e funções de influência para várias condições de contorno. Estas soluções são então empregadas na análise do comportamento de fundações rígidas com a utilização das formulações direta e indireta do Método dos Elementos de Contorno. Dessa forma, desenvolve-se aqui uma extensão e um aperfeiçoamento das técnicas elaboradas naqueles trabalhos.

No Capítulo 2 é feita uma revisão sobre a teoria da elasticidade geral com uma especial atenção aos materiais transversalmente isotrópicos.

No capítulo 3 são deduzidas e analisadas funções de Green para linhas de carga concentradas aplicadas sobre a superfície de um semi-espaço, para linhas de carga aplicadas no interior de um espaço infinito, para linhas de carga aplicadas no interior de um semi-espaço e para linhas de carga aplicadas no interior de uma camada elástica.

No capítulo 4 são obtidas funções de influência para faixas de carga distribuídas para as mesmas condições analisadas no capítulo 3.

No capítulo 5 obtêm-se funções de Green e funções de influência para cargas dinâmicas aplicadas em meios elásticos transversalmente isotrópicos com eixo de simetria elástica inclinado.

No capítulo 6 são apresentadas as formulações direta e indireta do Método dos Elementos de Contorno para a análise geral de problemas da elasto-dinâmica plana para meios transversalmente isotrópicos.

No capítulo 7 as formulações direta e indireta do MEC são adaptadas para a análise de fundações e estruturas enterradas rígidas sob a ação de cargas dinâmicas.

Ao longo desses capítulos é também analisada a influência da anisotropia nos resultados obtidos em vários exemplos pela comparação com resultados obtidos para o caso isotrópico.

## Capítulo 2

# Elasticidade Geral

### 2.1 Apresentação

A formulação da teoria da elasticidade linear tem origem na constatação de que para muitos materiais as deformações provocadas por tensões aplicadas são proporcionais a estas; pelo menos dentro de certos limites. Este comportamento é expresso pela “Lei de Hooke Generalizada” que declara que as deformações sofridas por um sólido elástico são dadas por funções lineares homogêneas das tensões aplicadas sobre este mesmo sólido. Assim um material deste tipo pode ser caracterizado elasticamente pelas constantes dessas funções lineares.

Dependendo da estrutura do material, as propriedades elásticas podem variar ou não conforme o ponto tomado no interior do sólido. Nestes casos o material é considerado como não homogêneo ou como homogêneo (em relação à elasticidade) respectivamente. No primeiro caso, esta não homogeneidade pode ainda se manifestar de maneira contínua ou descontínua.

Outra característica importante da elasticidade é a relação entre as características elásticas nas infinitas direções que podem ser consideradas a partir de um certo ponto no interior do sólido. Nos materiais isotrópicos todas estas direções são elasticamente equivalentes, o que significa que as características elásticas são as mesmas em todas as direções.

Nos materiais anisotrópicos, por outro lado, nem todas as direções são elasticamente equivalentes. No caso mais extremo de anisotropia, não há qualquer equivalência elástica entre direções.

Neste capítulo serão analisados os vários tipos de anisotropia e sua caracterização em termos das funções tensão-deformação citadas acima. Em especial será analisada a isotropia transversal, que interessa diretamente a este trabalho, mostrando suas principais características e a forma como se

manifesta nos materiais de origem geológica.

## 2.2 Deformações e Tensões

O estado de deformação em um dado ponto de um sólido sob carregamento pode ser expresso em função do deslocamento deste ponto causado por este carregamento.

Se o deslocamento ocorrido for dado pelas suas componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$  segundo as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente, de um sistema de coordenadas cartesiano, então as deformações específicas serão:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Alternativamente, pode-se também expressar o estado de deformação por um *tensor* de segunda ordem simétrico  $\epsilon_{ij}$ . As componentes do tensor  $\epsilon_{ij}$  são dadas por:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = x, y, z \tag{2.2}$$

As expressões acima são válidas para pequenos deslocamentos, quando as parcelas de ordem superior podem ser desprezadas.

Quanto ao estado de tensões, também são necessárias seis componentes para a sua expressão. Estas componentes, segundo um sistema de coordenadas cartesiano são três tensões normais  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$ ; e três tensões cisalhantes  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ . Estas componentes do estado de tensão formam também um tensor simétrico  $\sigma_{ij}$ .

Os tensores  $\epsilon_{ij}$  e  $\sigma_{ij}$  podem ser representados por matrizes simétricas da

forma:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \\ \sigma_{ij} &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

## 2.3 Lei de Hooke generalizada

A lei de Hooke generalizada fornece uma relação entre as componentes do estado de tensão e aquelas do estado de deformação associado a este estado de tensão. Em sua forma mais genérica ela declara que cada uma das seis componentes do estado de tensão é função linear homogênea das seis componentes do estado de deformação.

Utilizando a notação indicial estas relações são expressas por [77, 28]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.4)$$

onde  $c_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem das constantes elásticas do material. Assim, haverá 81 constantes elásticas que relacionam um dado estado de deformação a um estado de tensão. No entanto o tensor  $c_{ijkl}$  deve satisfazer às condições de simetria dadas por [56]:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij} \quad (2.5)$$

o que significa que há apenas 21 constantes elásticas independentes.

A equação (2.4) pode também ser expressa também na forma [90, 41]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Os elementos  $c_{ijkl}$  da equação (2.4) são os mesmos  $c_{ij}$  da equação (2.6). Para se transformar os quatro índices de  $c_{ijkl}$  em dois índices de  $c_{ij}$  separam-se os índices  $ijkl$  em dois pares e substitui-se cada um desses pares por apenas um índice seguindo o seguinte esquema:

- (11) : 1

- (22) : 2
- (33) : 3
- (23) = (32) : 4
- (31) = (13) : 5
- (12) = (21) : 6

Haverá portanto um total de 36 constantes que caracterizam o comportamento elástico do material. No entanto, quando se admite que há uma função de energia potencial elástica igual à energia de deformação por unidade de volume do sólido deformado e que esta energia deve permanecer positiva, pode-se demonstrar [43] que  $c_{ij} = c_{ji}$ , ou seja, a matriz  $c$  dos coeficientes elásticos deve ser simétrica. Este fato reduz o número de constantes independentes para 21.

O número de constantes elásticas independentes pode ainda ser reduzido para 18 [41] ou mesmo para 15 [43] mesmo para o caso mais geral de anisotropia com a adoção de algumas hipóteses adicionais acerca da estrutura interna do material.

Outro fato importante a ser notado é que as constantes  $c_{ij}$  não são independentes do sistema de coordenadas adotado, mas devem ser transformadas quando esse sistema de coordenadas sofre uma rotação [41].

O número de constantes elásticas independentes entre si depende basicamente do número de direções elasticamente equivalentes que podem ser traçadas a partir de um ponto no interior do sólido em estudo. Para o caso mais geral de anisotropia visto aqui, não há quaisquer duas direções equivalentes. No entanto este é um caso raro, sendo bem mais comum que haja várias direções equivalentes, até o caso de completa isotropia, quando *todas* as direções são elasticamente equivalentes e há apenas duas constantes elásticas independentes para o material [41].

As direções elasticamente equivalentes são resultado de simetria na estrutura do material e portanto os vários tipos de anisotropia possíveis podem ser classificados conforme o tipo de simetria existente.

No caso de cristais simples, por exemplo, há um total de 32 casos de simetria estrutural possíveis. No entanto, do ponto de vista da elasticidade, há apenas 9 casos diferentes pois há vários casos de diferentes simetrias estruturais que resultam num mesmo caso de anisotropia elástica [43].

Para materiais formados por cristais, por outro lado, o grau de anisotropia depende da disposição destes cristais no interior do sólido. Assim, caso haja uma orientação preferencial na disposição desses cristais, haverá também

anisotropia enquanto que sólidos compostos por cristais orientados ao acaso, sem uma direção preferencial, apresentam um comportamento elástico próximo ao isotrópico.

Outros materiais não cristalinos, como por exemplo a madeira podem apresentar comportamento anisotrópico. Este comportamento provem do processo de formação do material que determina a sua estrutura interna.

No caso de materiais de origem geológica, como solos e rochas, muitas vezes o processo de formação conduz a uma orientação geral das partículas que os compõem, o que resulta num comportamento anisotrópico desses materiais.

A seguir são apresentados os tipos mais importantes de simetria elástica e a formulação da lei de Hooke generalizada para eles.

## 2.4 Simetria plana

Neste tipo de anisotropia há um plano que passa pelo ponto no interior do sólido em estudo que possui a seguinte propriedade: se duas direções são simétricas em relação a este plano, então estas direções são elasticamente equivalentes. A direção normal a este plano de simetria é chamada de *direção principal de elasticidade* e neste caso de simetria o material possui apenas uma direção principal. Esta propriedade implica em que tensões normais aplicadas no plano de simetria não produzem deformações de cisalhamento (distorção) fora deste plano [41].

Tomando-se o eixo  $z$  coincidente com a direção principal de elasticidade e os outros dois eixos no plano de simetria, pode-se deduzir que 8 das constantes elásticas devem ser nulas [41, 77]:

$$c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{46} = c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{56} = 0. \quad (2.7)$$

Assim, o número de constantes elásticas independentes fica reduzido a 13. Substituindo estes valores na equação (2.6) a matriz  $c_{ij}$  fica:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

## 2.5 Material ortotrópico

Neste caso de anisotropia há três planos de simetria perpendiculares entre si que passam pelo ponto no interior do sólido em estudo. Há portanto três direções principais de elasticidade no material ortotrópico. Neste tipo de material tensões normais  $\sigma_{ii}$  aplicadas em qualquer dos planos de simetria provocam apenas deformações normais  $\epsilon_{ii}$  [41].

Se for tomado um sistema de coordenadas cartesiano cujos três eixos coincidam com essas direções principais pode-se demonstrar que mais 4 constantes elásticas se anulam (além das oito anteriores) [41]:

$$c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{45} = 0. \quad (2.9)$$

A matriz  $c_{ij}$  dos coeficientes elásticos ficará então:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

e o número total de constantes elásticas independentes fica reduzido a 9.

As relações de elasticidade para um material ortotrópico podem também ser colocadas numa forma que utilize constantes elásticas comumente usadas na engenharia [41]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E_x} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_{yy} - \frac{\nu_{zx}}{E_z} \sigma_{zz} \\ \epsilon_{yy} &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_{xx} + \frac{1}{E_y} \sigma_{yy} - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \sigma_{zz} \\ \epsilon_{zz} &= -\frac{\nu_{xz}}{E_x} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_{yy} + \frac{1}{E_z} \sigma_{zz} \\ \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2G_{yz}} \sigma_{yz} \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2G_{xz}} \sigma_{xz} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2G_{xy}} \sigma_{xy} \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde  $E_i$  ( $i = x, y, z$ ) é o módulo de elasticidade (ou módulo de Young) na direção  $i$ , as constantes  $\nu_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) são os coeficientes de Poisson que

relacionam a deformação normal na direção  $j$  à deformação normal na direção  $i$  e as constantes  $G_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) são os módulos de cisalhamento no plano  $ij$ . Devido à simetria das relações de elasticidade, os coeficientes de Poisson  $\nu_{ij}$  devem satisfazer a [41]:

$$\begin{aligned} E_x \nu_{yx} &= E_y \nu_{xy} \\ E_y \nu_{zy} &= E_z \nu_{yz} \\ E_z \nu_{xz} &= E_x \nu_{zx} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Um exemplo de material que pode ser tomado como ortotrópico é a madeira. Neste caso um dos planos de simetria é normal às fibras da madeira; o segundo plano é paralelo aos anéis de crescimento e o terceiro plano de simetria é ortogonal aos dois primeiros [41].

## 2.6 Isotropia transversal

Neste tipo de simetria, também chamada de anisotropia cruzada ou anisotropia hexagonal, há um plano que passa pelo interior do sólido em estudo em que todas as direções contidas neste plano são elasticamente equivalentes entre si. Este plano é um *plano de isotropia* e, assim, há infinitas direções principais que passam pelo ponto; uma delas ortogonal ao plano de isotropia e as outras contidas neste plano.

Se for tomado o eixo  $z$  ortogonal ao plano de isotropia e os eixos  $x$  e  $y$  arbitrariamente contidos neste plano, o número de constantes elásticas independentes ficará reduzida a apenas 5 pois [41]:

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22} \\ c_{13} &= c_{23} \\ c_{44} &= c_{55} \\ c_{66} &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

A matriz dos coeficientes elásticos neste caso fica:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Os coeficientes  $c_{ij}$  podem também ser expressos por constantes elásticas comumente utilizadas em engenharia. Estas constantes relacionam as deformações às tensões pelas seguintes expressões [41]:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) - \frac{\nu_{zx}}{E_z}\sigma_{zz} \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{\nu_{zx}}{E_z}\sigma_{zz} \\
 \epsilon_{zz} &= -\frac{\nu_{zx}}{E_z}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{E_z}\sigma_{zz} \\
 \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2G_{xz}}\sigma_{yz} \\
 \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2G_{xz}}\sigma_{xz} \\
 \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2G}\sigma_{xy}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde:

- $E$  é o módulo de elasticidade na direção do plano de isotropia (plano  $xy$ ).
- $E_z$  é o módulo de elasticidade na direção normal ao plano de isotropia.
- $\nu$  é o coeficiente de Poisson que relaciona as deformações ocorridas em duas direções ortogonais contidas no plano de isotropia.
- $\nu_{zx}$  é o coeficiente de Poisson que relaciona a deformação na direção normal ao plano de isotropia à deformação numa direção contida neste plano.
- $G = E/2(1 + \nu)$  é o módulo de cisalhamento numa direção contida no plano de isotropia.
- $G_{xz}$  é o módulo de cisalhamento numa direção normal ao plano de isotropia.

Assim, os valores dos coeficientes  $c_{ij}$  resultam [41]:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= (E/a)(1 - n\nu_{zx}^2) \\
 c_{12} &= (E/a)(n\nu_{zx}^2 + \nu) \\
 c_{13} &= (E/a)\nu_{zx}(1 + \nu) \\
 c_{33} &= (E_z/a)(1 - \nu^2) \\
 c_{44} &= G_{xz}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde

$$\begin{aligned} n &= \frac{E}{E_z} \\ a &= (1 + \nu)(1 - \nu - 2n\nu_{zx}^2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Apesar de haver 5 constantes elásticas independentes no material transversalmente isotrópico, estas constantes não podem assumir valores irrestritos. Devido ao fato de que a energia potencial de deformação deve ser sempre positiva, as constantes  $c_{ij}$  devem obedecer às seguintes restrições [56]:

$$\begin{aligned} c_{11} &> |c_{12}| \\ c_{33}(c_{11} + c_{12}) &> 2c_{13}^2 \\ c_{44} &> 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Estas restrições resultam em [57]:

$$\begin{aligned} E, E_z, G_{xz} &> 0 \\ \nu &> -1 \\ n(1 - \nu) &> 2(\nu_{zx})^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

## 2.7 Material isotrópico

Finalmente, o material isotrópico é aquele em que todas as direções são elasticamente equivalentes entre si e são também direções principais. Apenas neste caso as constantes elásticas não dependem da orientação do sistema de coordenadas escolhido e, além disso [41]:

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{33} \\ c_{12} &= c_{13} \\ c_{44} &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Isto reduz o número de constantes elásticas independentes para apenas duas e a matriz  $c_{ij}$  fica:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Estes coeficientes, quando expressos em função das constantes elásticas comumente utilizadas na engenharia ficam [41]:

$$\begin{aligned} c_{11} &= E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ c_{12} &= E \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

## 2.8 Estados planos

Em muitos casos as características particulares da geometria do problema e dos carregamentos impostos conduzem a estados planos. Distiguem-se dois casos diferentes: o estado plano de deformação e o estado plano de tensão.

Para um estado plano de deformação  $\epsilon_{yy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{xy} = 0$ . Portanto as deformações ocorrem apenas no plano  $xz$ . Impondo-se esta hipótese para um material transversalmente isotrópico, as relações de elasticidade se simplificam para:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

ou seja, as relações de elasticidade se tornam independentes de  $c_{12}$ . Restam portanto, no estado plano de deformação, apenas quatro constantes elásticas independentes entre si.

Adotando-se a mesma hipótese de estado plano de deformação para um material ortotrópico pode-se verificar que as relações obtidas são as mesmas. Assim, neste caso o material transversalmente isotrópico não se distingue do material ortotrópico.

No estado plano de tensão  $\sigma_{yy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xy} = 0$ . Portanto não há tensões fora do plano  $xz$ . Adotando-se esta hipótese para um material transversalmente isotrópico as relações de elasticidade ficam:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} & c_{13} - \frac{c_{12}c_{13}}{c_{11}} & 0 \\ c_{13} - \frac{c_{12}c_{13}}{c_{11}} & c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Neste caso as relações de elasticidade não são independentes de  $c_{12}$ . No entanto, impondo-se a hipótese de estado plano de tensão nas equações (2.15) estas ficam:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{zx}}{E_z} \sigma_{zz}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{zz} &= \frac{1}{E_z} (-\nu_{zx}\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2G_{xz}}\sigma_{xz}\end{aligned}\quad (2.25)$$

Há portanto apenas quatro constantes elásticas independentes, já que as relações elásticas são independentes de  $\nu$ . Assim, pode-se reescrever a equação (2.24) na forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11} & \hat{c}_{13} & 0 \\ \hat{c}_{13} & \hat{c}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{c}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xz} \end{Bmatrix}\quad (2.26)$$

onde:

$$\begin{aligned}\hat{c}_{11} &= c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} = \frac{EE_z}{E_z - \nu_{zx}^2 E} \\ \hat{c}_{13} &= c_{13} - \frac{c_{12}c_{13}}{c_{11}} = \nu_{zx} \frac{EE_z}{E_z - \nu_{zx}^2 E} \\ \hat{c}_{33} &= c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} = \frac{E_z^2}{E_z - \nu_{zx}^2 E} \\ \hat{c}_{44} &= c_{44} = G_{xz}\end{aligned}\quad (2.27)$$

Dessa forma podem-se utilizar as mesmas soluções elásticas tanto para problemas no estado plano de tensão como para problemas no estado plano de deformação. Para isto adotam-se as constantes  $\hat{c}_{ij}$  ou  $c_{ij}$ . Além disso, impondo-se a hipótese de estado plano de tensão nas equações (2.11) obtêm-se os mesmos resultados para os materiais ortotrópicos. Assim, os materiais ortotrópicos e os materiais transversalmente isotrópicos não se distinguem também no estado plano de tensão.

## 2.9 Materiais viscoelásticos

Nos materiais viscoelásticos o estado de tensão é função não apenas do estado de deformação como também da evolução deste estado de deformação ao longo do tempo. Para problemas em que as tensões e as deformações são harmônicas no tempo ( $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)$  e  $\epsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \epsilon_{ij}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)$ ), quando analisados no domínio da frequência  $\omega$ , pode-se expressar as relações de elasticidade como [19]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^*(\omega) \epsilon_{kl}\quad (2.28)$$

onde  $c_{ijkl}^*(\omega)$  são constantes elásticas complexas dependentes da frequência dadas por:

$$c_{ijkl}^*(\omega) = c_{ijkl} (1 + i v_{ijkl}(\omega)) \quad (2.29)$$

Nesta equação a repetição dos índices  $i, j, k$  e  $l$  não indica soma.

Os coeficientes do tensor  $v_{ijkl}(\omega)$  representam a taxa de amortecimento interno do material. Este amortecimento é devido à energia dissipada internamente pelo atrito entre as partículas que compõem o material viscoelástico.

Há basicamente dois modelos de comportamento que se aplicam ao amortecimento. No modelo de amortecimento *viscoso* a taxa de amortecimento interna é diretamente proporcional à frequência  $\omega$ , enquanto que no modelo de amortecimento *histerético* esta taxa é constante [29, 47]. O modelo histerético é mais amplamente utilizado na análise de problemas dinâmicos estacionários no domínio da frequência, como os problemas analisados por este trabalho, por melhor representar o comportamento real dos materiais [29]. Assim, os coeficientes de  $v_{ijkl}$  são aqui tomados como constantes independentes da frequência  $\omega$ .

Da mesma forma que as constantes de  $c_{ijkl}$  podem ser expressos pela matriz simétrica  $c_{ij}$ , também os coeficientes de  $v_{ijkl}$  podem ser expressos pela matriz simétrica correspondente  $v_{ij}$ . Assim as relações tensão-deformação de um material viscoelástico são regidas pela matriz de elasticidade complexa  $c_{ij}^* = c_{ij} (1 + i v_{ij})$  (aqui, novamente, a repetição dos índices  $i$  e  $j$  não indica soma).

Para materiais transversalmente isotrópicos, que interessam diretamente a este trabalho, pode-se também expressar o amortecimento interno em relação às constantes elásticas utilizadas na engenharia, na forma:

$$\begin{aligned} E^* &= E (1 + i v_E) \\ E_z^* &= E_z (1 + i v_{E_z}) \\ \nu^* &= \nu (1 + i v_\nu) \\ \nu_{zx}^* &= \nu_{zx} (1 + i v_{\nu_{zx}}) \\ G_{xz}^* &= G_{xz} (1 + i v_{G_{xz}}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Se  $\nu_\nu$  e  $\nu_{\nu_{zx}}$  forem tomados como nulos e  $v_E = v_{E_z} = v$  então pelas equações (2.16) resulta que  $v_{11} = v_{12} = v_{13} = v$ . Pode-se ver, assim, que somente a adoção de taxas de amortecimento iguais  $v_{11} = v_{12} = v_{13}$  leva a valores nulos de  $\nu_\nu$  e  $\nu_{\nu_{zx}}$ . Isto é desejável, já que valores complexos para os coeficientes de Poisson  $\nu$  e  $\nu_{zx}$  são de difícil interpretação física. Esta hipótese será adotada no decorrer de todo este trabalho. Quanto a  $\nu_{G_{xz}}$ , este valor não tem relação com as outras taxas de amortecimento interno.

## 2.10 Índices de anisotropia

Muitas vezes é útil representar as características elásticas do material através de índices que mostrem o quanto seu comportamento se distancia do comportamento isotrópico. Em especial para materiais transversalmente isotrópicos é muito utilizado o valor de  $n = E/E_z$  como um índice de anisotropia.

No entanto, o valor de  $n$  apenas não é suficiente para mostrar o grau de anisotropia do material já que  $n = 1$  não significa necessariamente que o material é isotrópico. Como o material transversalmente isotrópico se caracteriza por 5 constantes elásticas independentes enquanto que o material isotrópico se caracteriza por apenas 2, são necessários ao menos 3 índices independentes para se mostrar o grau de anisotropia do material.

Uma proposta para estes índices é [2]:

$$\begin{aligned} n_1 &= c_{33}/c_{11} \\ n_2 &= (c_{11} - c_{12})/2c_{44} \\ n_3 &= (c_{11} - 2c_{44})/c_{13} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para o estado plano de deformação apenas  $n_1$  e  $n_3$  seriam necessários para descrever completamente a anisotropia do material.

## 2.11 Rotação de coordenadas

Como já citado anteriormente, as componentes da matriz das constantes elásticas do material  $c_{ij}$  não são independentes do sistema de coordenadas adotado. Apenas no caso da isotropia completa esta independência ocorre.

As direções adotadas para o sistema de coordenadas nos vários casos de simetria mostrados são aquelas que resultam numa maior simplificação de  $c_{ij}$ . Estas direções são as coincidentes com as direções principais do material [41].

Muitas vezes, no entanto, é necessária a expressão das constantes elásticas  $c'_{ij}$  segundo um sistema de coordenadas  $x'y'z'$  que apresenta uma rotação em relação ao sistema de coordenadas original  $xyz$ . Pode-se obter esta matriz executando-se uma operação de rotação do tensor  $c_{ijkl}$  [28]:

$$c'_{ijkl} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}c_{pqrs} \quad (2.32)$$

onde  $\alpha_{ij}$  é a matriz de rotação dada pelos co-senos dos ângulos entre a direção  $i'$  e a direção  $j$  para  $i, j = x, y, z$ .

Outra maneira de se obter as constantes elásticas  $c'_{ij}$  segundo o sistema  $x'y'z'$  é dada expressando-se a energia potencial de deformação  $V$  de um

elemento segundo os dois sistemas de coordenadas e em seguida identificandose em cada uma das expressões obtidas os termos correspondentes [41]. A energia potencial de deformação é dada por [77]:

$$V = \frac{1}{2} (\epsilon_{ji} \sigma_{ij}) = \frac{1}{2} (\epsilon_{ji} c_{ijkl} \epsilon_{kl}) \quad (2.33)$$

segundo qualquer sistema de coordenadas.

Para ilustrar este segundo processo, tome-se uma rotação  $\theta$  em torno da direção  $y$  para um estado plano de deformações de um material transversalmente isotrópico conforme mostrado na Figura 2.1. A direção  $z$  é coincidente com a direção de simetria do material e a direção  $z'$  apresenta um ângulo  $\theta$  em relação a ela.

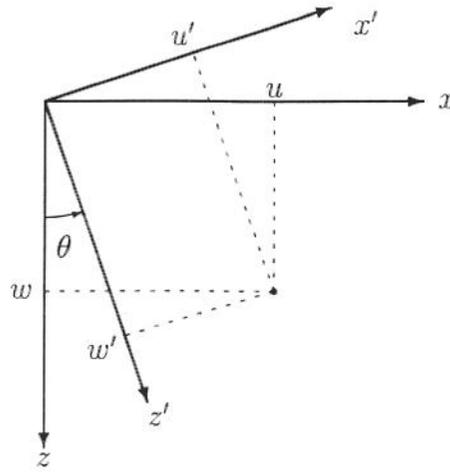


Figura 2.1: Rotação do sistema de coordenadas

No sistema de coordenadas  $x'z'$  as relações de elasticidade são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{z'z'} \\ \sigma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{13} & c'_{15} \\ c'_{13} & c'_{33} & c'_{35} \\ c'_{15} & c'_{35} & c'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'x'} \\ \epsilon_{z'z'} \\ 2\epsilon_{x'z'} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

onde  $\sigma_{i'j'}$  e  $\epsilon_{i'j'}$  são respectivamente as tensões e deformações no sistema  $x'z'$ . Aplicando-se a equação (2.33), a energia de deformação  $V$  neste sistema resulta:

$$V = \frac{1}{2} c'_{11} \epsilon_{x'x'}^2 + c'_{13} \epsilon_{x'x'} \epsilon_{z'z'} + 2c'_{15} \epsilon_{x'x'} \epsilon_{x'z'} + \frac{1}{2} c'_{33} \epsilon_{z'z'}^2 + 2c'_{35} \epsilon_{z'z'} \epsilon_{x'z'} + 2c'_{55} \epsilon_{x'z'}^2 \quad (2.35)$$

Por outro lado, no sistema de coordenadas  $xz$  esta mesma energia de deformação resulta:

$$V = \frac{1}{2}c_{11}\epsilon_{xx}^2 + c_{13}\epsilon_{xx}\epsilon_{zz} + \frac{1}{2}c_{33}\epsilon_{zz}^2 + 2c_{44}\epsilon_{xz}^2 \quad (2.36)$$

Os deslocamentos  $u'$  e  $w'$  nas direções  $x'$  e  $z'$  estão relacionados aos deslocamentos  $u$  e  $w$  nas direções  $x$  e  $z$  por:

$$\begin{aligned} u' &= u \cos \theta - w \sin \theta \\ w' &= u \sin \theta + w \cos \theta \end{aligned} \quad (2.37)$$

Pode-se então obter a relação entre as deformações nos dois sistemas de coordenadas utilizando-se a definição das deformações dada pelas equações (2.1):

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{x'x'} \cos^2 \theta + \epsilon_{z'z'} \sin^2 \theta + 2\epsilon_{x'z'} \sin \theta \cos \theta \\ \epsilon_{zz} &= \epsilon_{x'x'} \sin^2 \theta + \epsilon_{z'z'} \cos^2 \theta - 2\epsilon_{x'z'} \sin \theta \cos \theta \\ \epsilon_{xz} &= (-\epsilon_{x'x'} + \epsilon_{z'z'}) \sin \theta \cos \theta + \epsilon_{x'z'} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Substituindo as equações (2.38) na equação (2.36) a energia  $V$  resulta:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\epsilon_{x'x'}^2 \left[ c_{11} \cos^4 \theta + c_{33} \sin^4 \theta + 2(c_{13} + 2c_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] \\ &\quad + \epsilon_{x'x'}\epsilon_{z'z'} \left[ (c_{11} + c_{33} + 4c_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + c_{13} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \right] \\ &\quad + 2\epsilon_{x'x'}\epsilon_{x'z'} \left[ (c_{11} - c_{13} + 2c_{44}) \sin \theta \cos^3 \theta - (c_{33} - c_{13} + 2c_{44}) \sin^3 \theta \cos \theta \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\epsilon_{z'z'}^2 \left[ c_{11} \sin^4 \theta + c_{33} \cos^4 \theta + 2(c_{13} + 2c_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] \\ &\quad + 2\epsilon_{z'z'}\epsilon_{x'z'} \left[ (c_{11} - c_{13} + 2c_{44}) \sin^3 \theta \cos \theta - (c_{33} - c_{13} + 2c_{44}) \sin \theta \cos^3 \theta \right] \\ &\quad + 2\epsilon_{x'z'}^2 \left[ (c_{11} + c_{33} + 2c_{13}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + c_{44} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Comparando-se este resultado com a equação (2.35) pode-se concluir que:

$$\begin{aligned} c'_{11} &= c_{11} \cos^4 \theta + c_{33} \sin^4 \theta + 2(c_{13} + 2c_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ c'_{13} &= (c_{11} + c_{33} + 4c_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + c_{13} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ c'_{15} &= (c_{11} - c_{13} + 2c_{44}) \sin \theta \cos^3 \theta - (c_{33} - c_{13} + 2c_{44}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ c'_{33} &= c_{11} \sin^4 \theta + c_{33} \cos^4 \theta + 2(c_{13} + 2c_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ c'_{35} &= (c_{11} - c_{13} + 2c_{44}) \sin^3 \theta \cos \theta - (c_{33} - c_{13} + 2c_{44}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ c'_{55} &= (c_{11} + c_{33} + 2c_{13}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + c_{44} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Este resultado mostra que no sistema de coordenadas  $x'z'$  para um material transversalmente isotrópico no estado plano de deformação nenhuma das constantes elásticas  $c'_{ij}$  é nula (a não ser para  $\theta = k\pi/2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ). Isto significa que mesmo tensões normais  $\sigma_{i'j'}$  aplicadas no material segundo este sistema de coordenadas provocam deformação cisalhante  $\epsilon_{x'z'}$ . Para o caso de material isotrópico as constantes  $c_{ij}$  são dadas pela equação (2.21), ou seja,  $c_{11} = c_{33}$ ,  $c_{12} = c_{13}$  e  $c_{44} = (c_{11} - c_{12})/2$ . Substituindo-se estes valores nas equações (2.40) pode-se verificar que para o material isotrópico as constantes elásticas  $c_{ij}$  não se alteram com a aplicação de uma rotação  $\theta$  no sistema de coordenadas  $xz$ .

## 2.12 Solos e rochas

Exemplos típicos de materiais transversalmente isotrópicos são os de origem geológica, ou seja, solos e rochas. Vários tipos de solos e rochas apresentam comportamento transversalmente isotrópico devido ao processo de formação desses materiais. No caso de solos e rochas sedimentares por exemplo, a lenta deposição de partículas que ocorre na sua formação resulta numa estrutura de finas camadas horizontais. Essa estrutura se reflete num comportamento elástico onde o plano horizontal é um plano de isotropia e a direção vertical é uma direção principal elástica. Assim, esses materiais tipicamente exibem isotropia transversal.

Também em rochas metamórficas e em solos resultantes de alteração dessas rochas há muitas vezes uma direção predominante tomada pelas partículas que resulta num material transversalmente isotrópico. No entanto, essa direção nem sempre é horizontal o que implica numa orientação mais geral das direções principais de elasticidade nestes casos.

Outra causa reconhecida de anisotropia em solos é o adensamento anisotrópico em argilas. Este processo que se caracteriza pela diminuição do volume do material provocado pelo peso das camadas superiores provoca uma orientação preferencial das partículas da argila e a conseqüente anisotropia elástica. Em argilas fortemente pré-adensadas são encontrados valores de  $n = E/E_z$  de até 3 [5].

Em menor grau, também as areias apresentam comportamento anisotrópico. Neste caso a causa é a distribuição desigual nos contatos entre as partículas, entre as direções horizontal e vertical [18, 73]. O efeito deste fato nas constantes elásticas é um valor de  $n$  menor que a unidade, podendo mesmo chegar a 0,5.

A determinação das constantes elásticas em solos transversalmente isotrópicos em laboratório geralmente é feita utilizando-se o ensaio de compressão

triaxial executado sobre corpos de prova extraídos de uma amostra indeformada e talhados nas direções vertical, horizontal e inclinada (geralmente com 45° de inclinação) [75].

As constantes elásticas dos solos geralmente são dependentes do nível de deformação imposto, o que caracteriza um comportamento não linear. Para o caso de carregamentos dinâmicos, no entanto, este nível normalmente é bem menor que para cargas estáticas, o que, sob certas condições justifica a utilização do modelo elástico linear na análise de problemas dinâmicos. Assim são utilizados também ensaios dinâmicos de laboratório, em especial o ensaio de coluna ressonante [35, 53]. Neste caso pode-se também determinar o amortecimento interno do material [53].

Além dos ensaios de laboratório, utilizam-se também ensaios dinâmicos de campo, executados *in-situ*, para a determinação das constantes elásticas de solos [61]. Estes ensaios, conhecidos como ensaios *cross-hole* e ensaios *down-hole* são executados em furos de sondagem e medem a velocidade de ondas elásticas.

A utilização de ensaios dinâmicos de laboratório e de campo para a determinação de constantes elásticas de solos transversalmente isotrópicos é pouco encontrada na literatura ([3, 79]) e são reportados apenas na forma de diferenças observadas nas velocidades de propagação de ondas elásticas nas direções horizontal e vertical. No caso de ensaios de laboratório são reportados também os efeitos da anisotropia no amortecimento interno do material [74].

Para os materiais geológicos foram investigadas também as relações entre as constantes elásticas apresentadas por muitos deles. Na obra de Lekhnitskii [41] é relatada uma investigação sobre 47 tipos de rochas que concluiu que para 45 delas há uma relação entre o módulo de cisalhamento  $G_{xz}$  e as outras constantes elásticas dada por:

$$G_{xz} = \frac{EE_z}{E(1 + 2\nu_{zx}) + E_z} \quad (2.41)$$

Dessa forma, para estas rochas há então apenas 4 constantes elásticas independentes, e não 5 constantes. Esta relação, porém, é baseada apenas em medidas experimentais, não havendo qualquer suporte teórico para ela.

Outra relação entre as constantes elásticas de materiais com anisotropia cruzada foi proposta por Carrier [16]. Esta relação foi proposta em termos dos coeficientes  $c_{ij}$  da lei de Hooke generalizada na forma:

$$c_{44} = \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{11} + 2c_{13} + c_{33}} \quad (2.42)$$

Esta relação foi proposta apenas para que se pudesse chegar à solução de um problema de propagação de ondas elásticas num meio anisotrópico e não foi baseada em qualquer observação experimental ou modelo teórico. No entanto, há um trabalho [32] que sustenta que esta relação é *aproximadamente* válida para uma grande variedade de solos, o que justificaria o seu uso para problemas reais.

É interessante notar que a equação (2.42) pode também ser colocada em termos das constantes elásticas utilizadas na engenharia utilizando-se as equações (2.16). Esta relação é dada por:

$$G_{xz} = \frac{EE_z}{E(1 - \nu^2 + 2\nu_{zx} + 2\nu\nu_{zx}) + E_z - nE\nu_{zx}} \quad (2.43)$$

Embora esta expressão seja diferente da equação (2.41) é evidente a similaridade entre elas. Em especial, se forem desprezados na equação (2.43) os termos em que aparecem produtos de coeficientes de Poisson, pode-se perceber que então as expressões se igualam.

Outra relação importante pode ser obtida para solos saturados sob carregamento não drenado. Neste caso, se se considerar a água e os sólidos como incompressíveis, o material se manterá o seu volume inalterado após a deformação. Esta condição resulta em [57]:

$$\begin{aligned} \nu_{zx} &= \frac{1}{2} \\ \nu &= 1 - \frac{1}{2}n \end{aligned} \quad (2.44)$$

Neste caso o número de constantes elásticas independentes do material se reduz a apenas três.

## Capítulo 3

# Funções de Green para Meios Transversalmente Isotrópicos

### 3.1 Apresentação

A determinação de tensões e deslocamentos em meios contínuos com geometria arbitrária e sob carregamentos quaisquer é muitas vezes executada por processos numéricos baseados em métodos de equação integral de contorno. Estes métodos utilizam soluções algébricas ou soluções numéricas auxiliares de problemas mais simples em que cargas puntuais unitárias são aplicadas sobre meios contínuos de contorno simples, ou mesmo sem qualquer contorno. Estas soluções são conhecidas como funções de Green e soluções fundamentais e nelas cargas unitárias puntuais são aplicadas em cada uma das direções do sistema de coordenadas adotado, alternadamente.

*Neste capítulo são deduzidas funções de Green para cargas dinâmicas harmônicas no tempo, aplicadas sobre meios transversalmente isotrópicos, no estado plano de deformações. Assume-se comportamento dinâmico estacionário.*

Como estas funções são obtidas na forma de integrais, para as quais ainda não existem soluções analíticas fechadas, torna-se necessária a utilização de métodos de integração numérica na determinação de valores destas funções. Assim, são também analisadas as técnicas numéricas empregadas.

É também analisado o comportamento das funções de Green obtidas, em especial o comportamento no ponto de aplicação da carga concentrada, pois o conhecimento deste comportamento é importante na aplicação posterior destas funções em métodos numéricos como os citados.

As geometrias de contorno para as quais são deduzidas as funções de Green incluem os casos de carga aplicada sobre a superfície de um meio

semi-infinito (ou semi-espaço), carga aplicada no interior de um meio infinito (ou espaço completo), carga aplicada sobre uma camada finita apoiada sobre uma base rígida e carga aplicada no interior do semi-espaço.

Outros tipos de geometria de contorno e de aplicação da carga, tais como carga aplicada sobre um meio formado por um número arbitrário de camadas de diferentes características elásticas podem ser obtidas seguindo-se o mesmo caminho delineado neste trabalho e podem também ser encontradas nos trabalhos publicados por Rajapakse e Wang [67, 68, 83, 85]. A técnica aqui utilizada segue aproximadamente os mesmos passos utilizados nestes trabalhos. No entanto aqui o desenvolvimento das soluções são mais detalhados, é utilizada uma técnica numérica mais eficiente no cálculo das funções de Green obtidas. Além disso, é realizada uma análise cuidadosa do comportamento dessas funções de Green nos pontos próximos ao ponto de aplicação da carga. Esta análise não é encontrada nos trabalhos de Rajapakse e Wang ou em qualquer outro trabalho que seja conhecido deste autor.

## 3.2 Carga sobre semi-espaço

### 3.2.1 Definição do problema e equações gerais

Seja um meio homogêneo, elástico, semi-infinito, transversalmente isotrópico, com um sistema cartesiano de coordenadas  $(x, y, z)$  definido de tal forma que o eixo  $z$  é perpendicular à superfície externa do meio e ao mesmo tempo paralelo ao eixo de simetria do material, como mostrado na figura 3.1.

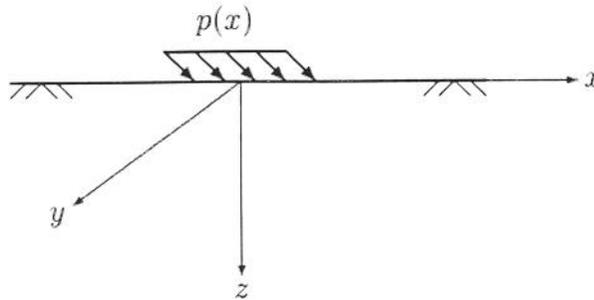


Figura 3.1: Carga sobre o semi-espaço elástico.

Sobre esta superfície externa é aplicada uma carga que varia no tempo  $t$  de forma harmônica:

$$p(t) = pe^{i\omega t}, \quad (3.1)$$

onde  $\omega$  é a frequência circular, e  $i = \sqrt{-1}$  é a unidade imaginária. Esta carga é constante na direção do eixo  $y$  e, assim, o estado de deformações é plano segundo o plano  $x, z$ .

As relações tensão-deformação para um material transversalmente isotrópico no estado plano de deformações são dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= c_{11}\epsilon_{xx} + c_{13}\epsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\epsilon_{xx} + c_{33}\epsilon_{zz} \\ \sigma_{xz} &= 2c_{44}\epsilon_{xz}\end{aligned}\quad (3.2)$$

onde  $c_{11}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{33}$  e  $c_{44}$  são constantes elásticas do material.

As equações de movimento para o caso plano em foco, na ausência de forças de corpo, são [56]:

$$\begin{aligned}c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ c_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (3.3)$$

onde

$$\begin{aligned}u(x, z, t) &= u(x, z)e^{i\omega t}, \\ w(x, z, t) &= w(x, z)e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (3.4)$$

são os deslocamentos segundo as direções  $x$  e  $z$  respectivamente e  $\rho$  é a densidade de massa do meio. Pode ser notado que as equações do movimento são independentes da constante  $c_{12}$  no caso de deformação plana.

Como os deslocamentos são harmônicos no tempo, os termos no lado direito das equações (3.3) podem ser substituídos por:

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\omega^2\rho ue^{i\omega t} \\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\omega^2\rho we^{i\omega t}\end{aligned}\quad (3.5)$$

Neste ponto introduz-se as constantes elásticas normalizadas adimensionais:

$$\begin{aligned}\alpha &= c_{33}/c_{44} \\ \beta &= c_{11}/c_{44} \\ \kappa &= (c_{13} + c_{44})/c_{44}\end{aligned}\quad (3.6)$$

Define-se também a frequência normalizada:

$$\delta^2 = \rho\omega^2/c_{44} \quad (3.7)$$

( $\delta$  tem a unidade de comprimento<sup>-1</sup>). Note-se que o valor  $\sqrt{c_{44}/\rho}$  é a velocidade de uma onda de cisalhamento na direção do eixo horizontal  $x$  ou do eixo vertical  $z$ . Em direções intermediárias, para um material transversalmente isotrópico, no plano  $xz$  não há ondas puramente compressivas nem puramente cisalhantes [2].

Utilizando as definições dadas, as equações (3.3) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= -\delta^2 u, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= -\delta^2 w. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Portanto, a solução do problema envolve a solução do sistema de equações diferenciais lineares e homogêneas em  $u$  e  $w$ , para as condições de contorno dadas (carga aplicada sobre o semi-espço).

### 3.2.2 Solução geral das equações diferenciais de movimento

Por serem lineares, as equações (3.8) podem ser reescritas na forma de uma equação matricial envolvendo operadores diferenciais na forma:

$$\begin{bmatrix} \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \delta^2 & \kappa \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \kappa \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \delta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

ou simplesmente:

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

onde  $\mathbf{L}$  é chamada *matriz dos coeficientes operacionais do sistema* [88].

Para que haja solução não trivial é necessário que o determinante dos coeficientes operacionais do sistema seja nulo, ou seja  $\det \mathbf{L}(\mathbf{u}) = 0$ . Portanto as equações (3.8) ficam desacopladas (mas linearmente dependentes) na forma:

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + (1 + \beta)\delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + \alpha)\delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \delta^4 u &= 0, \\ \beta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \gamma \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + (1 + \beta)\delta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1 + \alpha)\delta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \delta^4 w &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde

$$\gamma = 1 + \alpha\beta - \kappa^2 \quad (3.12)$$

Define-se a transformação integral de Fourier da coordenada  $x$  com respeito ao número de onda  $\lambda$  (com unidade de comprimento<sup>-1</sup>) como [76]:

$$\bar{f}(\lambda, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z) e^{-i\lambda x} dx \quad (3.13)$$

e a transformação inversa como:

$$f(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\lambda, z) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (3.14)$$

Aplicando esta transformação integral nas equações de movimento (3.8) resulta:

$$\begin{aligned} -\beta\lambda^2\bar{u} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2} + i\kappa\lambda\frac{\partial\bar{w}}{\partial z} + \delta^2\bar{u} &= 0, \\ -\lambda^2\bar{w} + \alpha\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial z^2} + i\kappa\lambda\frac{\partial\bar{u}}{\partial z} + \delta^2\bar{w} &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

que desacopladas ficam:

$$\beta\lambda^4\bar{u} + \alpha\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial z^4} - \gamma\lambda^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2} - (1 + \beta)\lambda^2\delta^2\bar{u} + (1 + \alpha)\delta^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial z^2} + \delta^4\bar{u} = 0 \quad (3.16)$$

$$\beta\lambda^4\bar{w} + \alpha\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial z^4} - \gamma\lambda^2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial z^2} - (1 + \beta)\lambda^2\delta^2\bar{w} + (1 + \alpha)\delta^2\frac{\partial\bar{w}}{\partial z^2} + \delta^4\bar{w} = 0. \quad (3.17)$$

Chamando  $\zeta = \lambda/\delta$  o número de onda normalizado (adimensional) e substituindo na equação (3.17) resulta:

$$\beta\zeta^4\delta^4\bar{w} + \alpha\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial z^4} - \gamma\zeta^2\delta^2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial z^2} - (1 + \beta)\zeta^2\delta^4\bar{w} + (1 + \alpha)\delta^2\frac{\partial\bar{w}}{\partial z^2} + \delta^4\bar{w} = 0. \quad (3.18)$$

Para a solução desta equação diferencial inicialmente supõe-se que  $\bar{w}$  tem a forma  $\bar{w} = e^{\delta\xi z}$  [88] e, assim, as derivadas parciais ficam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\bar{w}}{\partial z^2} &= \delta^2\xi^2 e^{\delta\xi z} \\ \frac{\partial^4\bar{w}}{\partial z^4} &= \delta^4\xi^4 e^{\delta\xi z} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Portanto, substituindo as equações (3.19) na equação (3.18) resulta,

$$\beta\zeta^4\delta^4 e^{\delta\xi z} + \alpha\delta^4\xi^4 e^{\delta\xi z} - \gamma\zeta^2\delta^4\xi^2 e^{\delta\xi z} - (1+\beta)\zeta^2\delta^4 e^{\delta\xi z} + (1+\alpha)\delta^4\xi^2 e^{\delta\xi z} + \delta^4 e^{\delta\xi z} = 0 \quad (3.20)$$

ou, como  $e^{\delta\xi z} \neq 0$ , pode-se escrever:

$$\alpha\xi^4 - (\gamma\zeta^2 - \alpha - 1)\xi^2 + [\beta\zeta^4 - (1+\beta)\zeta^2 + 1] = 0. \quad (3.21)$$

A Eq. 3.21 é uma equação do quarto grau em  $\xi$  (na verdade uma equação bi-quadrada) e tem as quatro raízes  $\pm\xi_1$  e  $\pm\xi_2$  que são dadas por:

$$\begin{aligned} \xi_1(\zeta) &= \frac{\sqrt{\gamma\zeta^2 - 1 - \alpha + \sqrt{\Phi}}}{\sqrt{2\alpha}}, \\ \xi_2(\zeta) &= \frac{\sqrt{\gamma\zeta^2 - 1 - \alpha - \sqrt{\Phi}}}{\sqrt{2\alpha}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde

$$\Phi(\zeta) = (\gamma\zeta^2 - 1 - \alpha)^2 - 4\alpha[\beta\zeta^4 - (1+\beta)\zeta^2 + 1]. \quad (3.23)$$

A solução da equação (3.18) para o deslocamento  $\bar{w}(\lambda, z)$ , portanto, será composta pela soma [88]:

$$\bar{w}(\lambda, z) = Ae^{-\delta\xi_1 z} + Be^{\delta\xi_1 z} + Ce^{-\delta\xi_2 z} + De^{\delta\xi_2 z}. \quad (3.24)$$

onde  $A(\zeta), B(\zeta), C(\zeta)$  e  $D(\zeta)$  são funções independentes de  $z$  a ser determinadas a partir das condições de contorno do problema. Estas funções são amplitudes de ondas que se propagam no interior do meio elástico transversalmente isotrópico. No estado plano de deformação, há apenas duas dessas ondas causadas por uma carga dinâmica aplicada [78]. No caso de material isotrópico estas são a onda de dilatação e a onda de cisalhamento. No caso anisotrópico, porém, em geral nenhuma delas é puramente compressional ou puramente distorcional [78]. Tomando-se as raízes  $\xi_1$  e  $\xi_2$  dadas por (3.22) de tal forma que  $\text{Re}(\xi_1, \xi_2) \geq 0$ , percebe-se pela equação (3.24) que haverá duas amplitudes exponencialmente decrescentes com  $z$  (dadas por  $A$  e  $C$ ) e duas amplitudes exponencialmente decrescentes com  $-z$  (dadas por  $B$  e  $D$ ). Isto significa que a solução se compõe de duas ondas se propagando no sentido positivo e duas se propagando no sentido negativo do eixo vertical  $z$ .

Repetindo o mesmo procedimento utilizado para se obter a equação (3.24), para  $\bar{u}(\lambda, z)$  na equação (3.16) obtém-se:

$$\bar{u}(\lambda, z) = A'e^{-\delta\xi_1 z} + B'e^{\delta\xi_1 z} + C'e^{-\delta\xi_2 z} + D'e^{\delta\xi_2 z}. \quad (3.25)$$

onde  $A'(\zeta), B'(\zeta), C'(\zeta)$  e  $D'(\zeta)$  são também funções (amplitudes de onda) dadas pelas condições de contorno.

As funções  $A, B, C$  e  $D$  guardam uma relação com as funções  $A', B', C'$  e  $D'$ . Substituindo os resultados dados pelas equações (3.24) e (3.25) nas equações (3.15) verifica-se que  $A$  e  $A'$  devem satisfazer à seguinte relação:

$$-\zeta^2 A + \alpha \xi_1^2 A - i \kappa \zeta \xi_1 A' + A = 0 \quad (3.26)$$

ou

$$A' = \bar{\omega}_1 A \quad (3.27)$$

onde

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\alpha \xi_1^2 - \zeta^2 + 1}{i \kappa \zeta \xi_1} \quad (3.28)$$

Da mesma forma:

$$B' = -\bar{\omega}_1 B; \quad (3.29)$$

$$C' = \bar{\omega}_2 C \quad (3.30)$$

e

$$D' = -\bar{\omega}_2 D. \quad (3.31)$$

onde

$$\bar{\omega}_2 = \frac{\alpha \xi_2^2 - \zeta^2 + 1}{i \kappa \zeta \xi_2} \quad (3.32)$$

Substituindo estes resultados na equação (3.25), o deslocamento  $\bar{u}(\lambda, z)$  fica:

$$\bar{u}(\lambda, z) = \bar{\omega}_1 A e^{-\delta \xi_1 z} - \bar{\omega}_1 B e^{\delta \xi_1 z} + \bar{\omega}_2 C e^{-\delta \xi_2 z} - \bar{\omega}_2 D e^{\delta \xi_2 z}. \quad (3.33)$$

Eliminam-se assim as amplitudes  $A', B', C'$  e  $D'$  da solução do problema restando como incógnitas a serem determinadas pelas condições de contorno apenas  $A, B, C$  e  $D$ .

As equações (3.24) e (3.33) fornecem uma solução geral para os deslocamentos transformados  $\bar{u}(\lambda, z)$  e  $\bar{w}(\lambda, z)$ . Para a solução do problema particular que está sendo analisado devem-se determinar as funções  $A(\zeta), B(\zeta), C(\zeta)$  e  $D(\zeta)$  a partir das condições de contorno dadas. Como estas condições de contorno são impostas neste caso em termos de tensões, são também necessárias as soluções referentes às tensões.

### 3.2.3 Solução para as tensões

As deformações  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{zz}$  e  $\epsilon_{xz}$  são dadas pelo tensor de deformações infinitesimais de Cauchy e expressas por:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (3.34)$$

Assim, substituindo as equações (3.34) nas equações (3.2) e aplicando a transformação integral de Fourier resulta uma equação constitutiva no domínio  $\lambda$ , em função dos deslocamentos transformados  $\bar{u}(\lambda, z)$  e  $\bar{w}(\lambda, z)$ . Esta equação é dada por:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx} &= c_{11}i\lambda\bar{u} + c_{13}\frac{\partial\bar{w}}{\partial z} \\ \bar{\sigma}_{zz} &= c_{13}i\lambda\bar{u} + c_{33}\frac{\partial\bar{w}}{\partial z} \\ \bar{\sigma}_{xz} &= c_{44}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z} + c_{44}i\lambda\bar{w}\end{aligned}\quad (3.35)$$

Normalizando estas equações em relação a  $c_{44}$  resultam as seguintes equações adimensionais:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\sigma}_{xx}}{c_{44}} &= i\zeta\delta\beta\bar{u} + (\kappa - 1)\frac{\partial\bar{w}}{\partial z} \\ \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{c_{44}} &= (\kappa - 1)i\zeta\delta\bar{u} + \alpha\frac{\partial\bar{w}}{\partial z} \\ \frac{\bar{\sigma}_{xz}}{c_{44}} &= \frac{\partial\bar{u}}{\partial z} + i\zeta\delta\bar{w}\end{aligned}\quad (3.36)$$

Substituindo as soluções para  $\bar{u}(\lambda, z)$  e  $\bar{w}(\lambda, z)$  dadas pelas equações (3.24) e (3.33) nas equações (3.36) obtêm-se

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx} &= \delta c_{44}(\eta_1 A e^{-\delta\xi_1 z} - \eta_1 B e^{\delta\xi_1 z} + \eta_2 C e^{-\delta\xi_2 z} - \eta_2 D e^{\delta\xi_2 z}) \\ \bar{\sigma}_{xz} &= \delta c_{44}(\eta_3 A e^{-\delta\xi_1 z} + \eta_3 B e^{\delta\xi_1 z} + \eta_4 C e^{-\delta\xi_2 z} + \eta_4 D e^{\delta\xi_2 z}) \\ \bar{\sigma}_{zz} &= \delta c_{44}(\eta_5 A e^{-\delta\xi_1 z} - \eta_5 B e^{\delta\xi_1 z} + \eta_6 C e^{-\delta\xi_2 z} - \eta_6 D e^{\delta\xi_2 z})\end{aligned}\quad (3.37)$$

onde  $\eta_1(\zeta)$ ,  $\eta_2(\zeta)$ ,  $\eta_3(\zeta)$ ,  $\eta_4(\zeta)$ ,  $\eta_5(\zeta)$  e  $\eta_6(\zeta)$  são dados, respectivamente, por:

$$\eta_1(\zeta) = i\zeta\beta\bar{\omega}_1 - \xi_1(\kappa - 1) = \frac{1}{\kappa\xi_1}[(\gamma - 1 + \kappa)\xi_1^2 + \beta(1 - \zeta^2)]$$

$$\begin{aligned}
\eta_2(\zeta) &= i\zeta\beta\bar{\omega}_2 - \xi_2(\kappa - 1) = \frac{1}{\kappa\xi_2}[(\gamma - 1 + \kappa)\xi_2^2 + \beta(1 - \zeta^2)] \\
\eta_3(\zeta) &= -\xi_1\bar{\omega}_1 + i\zeta = \frac{i}{\kappa\zeta}[(\alpha\xi_1^2 + 1) + (\kappa - 1)\zeta^2] \\
\eta_4(\zeta) &= -\xi_2\bar{\omega}_2 + i\zeta = \frac{i}{\kappa\zeta}[(\alpha\xi_2^2 + 1) + (\kappa - 1)\zeta^2] \\
\eta_5(\zeta) &= (\kappa - 1)i\zeta\bar{\omega}_1 - \alpha\xi_1 = \frac{1}{\kappa\xi_1}[(\kappa - 1)(1 - \zeta^2) - \alpha\xi_1^2] \\
\eta_6(\zeta) &= (\kappa - 1)i\zeta\bar{\omega}_2 - \alpha\xi_2 = \frac{1}{\kappa\xi_2}[(\kappa - 1)(1 - \zeta^2) - \alpha\xi_2^2] \quad (3.38)
\end{aligned}$$

As equações (3.37) em conjunto com as equações (3.24) e (3.33) fornecem a solução geral para o problema no domínio transformado  $\lambda$ . Para se obter a solução geral no domínio da variável  $x$  aplica-se a transformação inversa de Fourier expressa pela equação (3.14) nas soluções resultando:

$$\begin{aligned}
u(x, z) &= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\omega}_1 A e^{-\delta\xi_1 z} - \bar{\omega}_1 B e^{\delta\xi_1 z} + \bar{\omega}_2 C e^{-\delta\xi_2 z} - \bar{\omega}_2 D e^{\delta\xi_2 z}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
w(x, z) &= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A e^{-\delta\xi_1 z} + B e^{\delta\xi_1 z} + C e^{-\delta\xi_2 z} + D e^{\delta\xi_2 z}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
\sigma_{xx}(x, z) &= \frac{\delta^2 c_{44}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_1 A e^{-\delta\xi_1 z} - \eta_1 B e^{\delta\xi_1 z} + \eta_2 C e^{-\delta\xi_2 z} - \eta_2 D e^{\delta\xi_2 z}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
\sigma_{xz}(x, z) &= \frac{\delta^2 c_{44}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_3 A e^{-\delta\xi_1 z} + \eta_3 B e^{\delta\xi_1 z} + \eta_4 C e^{-\delta\xi_2 z} + \eta_4 D e^{\delta\xi_2 z}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
\sigma_{zz}(x, z) &= \frac{\delta^2 c_{44}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_5 A e^{-\delta\xi_1 z} - \eta_5 B e^{\delta\xi_1 z} + \eta_6 C e^{-\delta\xi_2 z} - \eta_6 D e^{\delta\xi_2 z}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Como as funções  $A(\zeta), B(\zeta), C(\zeta)$  e  $D(\zeta)$  são determinadas pelas condições de contorno, vê-se que são necessárias quatro condições de contorno diferentes para a determinação da solução do problema particular. Estas condições podem ser deslocamentos ou tensões ao longo do contorno do problema. Os problemas em que são impostas como condições as tensões ao longo do contorno são chamados de problemas de valor de contorno em tensão. Se as condições impostas são deslocamentos o problema é de valor de contorno em deslocamento. Nos problemas mistos a tensão é imposta ao longo de apenas uma parte do contorno e o deslocamento é imposto na parte restante.

### 3.2.4 Funções de Green para carga na superfície do semi-espço

#### Solução para uma carga qualquer

Funções de Green são funções que fornecem o deslocamento e o estado de tensão em um ponto qualquer do domínio do problema devidos uma carga unitária pontual aplicada em um ponto qualquer deste mesmo domínio. O efeito de cargas distribuídas pode ser obtido integrando-se o produto das funções de Green e a carga distribuída ao longo da superfície de aplicação desta carga. Para se poder obter o efeito de cargas atuantes em quaisquer direções são necessárias, em problemas planos, funções de Green para cargas aplicadas em duas direções diferentes. Em geral estas direções são tomadas coincidentes com os eixos do sistema de coordenadas adotado no problema.

Uma carga  $p(x)$  qualquer aplicada na superfície externa do semi-espço pode ser decomposta em duas componentes  $p_x(x)$  e  $p_z(x)$  nas direções dos eixos  $x$  e  $z$  respectivamente, como mostrado na figura 3.2.

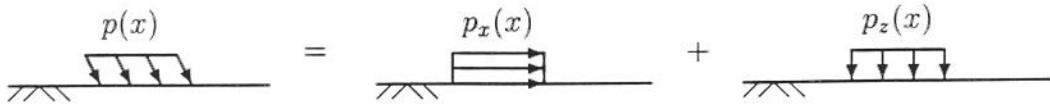


Figura 3.2: Decomposição da carga sobre o semi-espço.

Pode-se então aplicar cada uma dessas duas componentes separadamente e utilizar depois a superposição dos efeitos.

O problema analisado é caracterizado como um problema de valor de contorno em tensão pois ao longo do contorno (superfície superior) a tensão é imposta pela carga aplicada  $p(x)$ . As condições de equilíbrio ao longo da superfície  $z = 0$  impõem que:

$$\begin{aligned} p_x(x) &= \sigma_{xx}(x,0) n_x + \sigma_{xz}(x,0) n_z \\ p_z(x) &= \sigma_{zx}(x,0) n_x + \sigma_{zz}(x,0) n_z \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde  $\sigma_{xx}(x,0)$ ,  $\sigma_{zz}(x,0)$  e  $\sigma_{xz}(x,0) = \sigma_{zx}(x,0)$  são as componentes do tensor do estado de tensão ao longo de  $z = 0$  e  $n_x$  e  $n_z$  são as componentes horizontal e vertical, respectivamente, do vetor unitário  $\mathbf{n}$  normal à superfície de aplicação da carga. Na figura 3.3 estão mostradas as direções positivas das componentes das tensões e a direção de  $\mathbf{n} = (0, -1)$ . Assim, as condições de

equilíbrio ao longo de  $z = 0$  ficam:

$$\begin{aligned} p_x(x) &= -\sigma_{xz}(x,0) \\ p_z(x) &= -\sigma_{zz}(x,0) \end{aligned} \quad (3.41)$$

*Estas são as condições de contorno que devem ser impostas na solução do problema.*

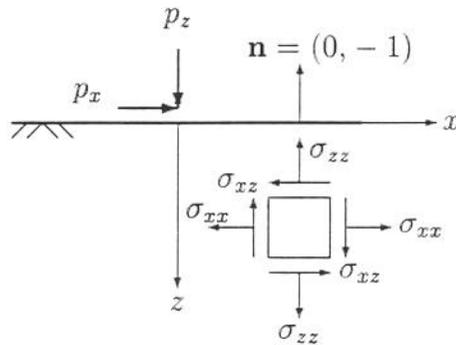


Figura 3.3: Convenção de sinais (positivos) para o estado de tensão.

A obtenção das funções de Green é dividida em dois problemas diferentes.

#### 1. Carga na direção $x$ :

Ao se aplicar  $p_x$  na superfície do semi-espaço as condições de contorno que devem ser obedecidas pelas tensões  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{zz}$  na superfície do semi-espaço  $z = 0$  são:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x,0) &= -p_x(x), \\ \sigma_{zz}(x,0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Aplicando a transformação de Fourier nessas condições de contorno fica-se com:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xz}(\lambda,0) &= -\bar{p}_x(\lambda), \\ \bar{\sigma}_{zz}(\lambda,0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Além dessas condições, as funções de Green devem satisfazer às condições de radiação quando  $z \rightarrow \infty$ . Isto significa que nas equações

(3.24) e (3.33) as funções  $B(\zeta), D(\zeta) \equiv 0$  se  $\xi_1$  e  $\xi_2$  forem escolhidos de tal forma que  $\text{Re}(\xi_1), \text{Re}(\xi_2) \geq 0$  [67]. Fisicamente isto significa que não há nenhuma onda elástica se propagando no sentido de  $-z$ , originadas em  $z \rightarrow \infty$ . Portanto a solução se compõe apenas das ondas que se originam na superfície superior  $z = 0$  e se propagam no sentido positivo do eixo vertical  $z$ .

Utilizando-se essas condições e as equações (3.37) para  $z = 0$  obtém-se:

$$\begin{aligned} A_x &= -\frac{\bar{p}_x}{c_{44}\delta} \frac{\eta_6}{\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5} \\ C_x &= \frac{\bar{p}_x}{c_{44}\delta} \frac{\eta_5}{\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5} \end{aligned} \quad (3.44)$$

## 2. Carga na direção $z$ :

Da mesma forma, ao se aplicar a componente  $p_z$  na superfície do semi-espaço, as condições de contorno são:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x,0) &= 0, \\ \sigma_{zz}(x,0) &= -p_z(x). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Aplicando-se a transformação de Fourier as condições de contorno (3.45) ficam:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xz}(\lambda,0) &= 0, \\ \bar{\sigma}_{zz}(\lambda,0) &= -\bar{p}_z(\lambda) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Essas condições, juntamente com as equações (3.37) para  $z = 0$  levam a:

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\bar{p}_z}{c_{44}\delta} \frac{\eta_4}{\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5}, \\ C_z &= -\frac{\bar{p}_z}{c_{44}\delta} \frac{\eta_3}{\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Os deslocamentos horizontais  $\bar{u}_i$  e verticais  $\bar{w}_i$ ;  $i = x, z$  devidos a uma carga aplicada na direção  $i$  ficam então:

$$\begin{aligned} \bar{u}_x(\lambda, z) &= -\frac{\bar{p}_x}{c_{44}\delta} \frac{1}{\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5} (\eta_6\bar{\omega}_1 e^{-\delta\xi_1 z} - \eta_5\bar{\omega}_2 e^{-\delta\xi_2 z}) \\ \bar{w}_x(\lambda, z) &= -\frac{\bar{p}_x}{c_{44}\delta} \frac{1}{\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5} (\eta_6 e^{-\delta\xi_1 z} - \eta_5 e^{-\delta\xi_2 z}) \\ \bar{u}_z(\lambda, z) &= \frac{\bar{p}_z}{c_{44}\delta} \frac{1}{\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5} (\eta_4\bar{\omega}_1 e^{-\delta\xi_1 z} - \eta_3\bar{\omega}_2 e^{-\delta\xi_2 z}) \\ \bar{w}_z(\lambda, z) &= \frac{\bar{p}_z}{c_{44}\delta} \frac{1}{\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5} (\eta_4 e^{-\delta\xi_1 z} - \eta_3 e^{-\delta\xi_2 z}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Em seguida aplica-se a transformação integral de Fourier inversa obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 u_x(x,z) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi c_{44}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_x}{R} (\eta_6 \bar{\omega}_1 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_5 \bar{\omega}_2 e^{-\delta \xi_2 z}) e^{i\delta \zeta x} d\zeta \\
 w_x(x,z) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi c_{44}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_x}{R} (\eta_6 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_5 e^{-\delta \xi_2 z}) e^{i\delta \zeta x} d\zeta \\
 u_z(x,z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi c_{44}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_z}{R} (\eta_4 \bar{\omega}_1 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 \bar{\omega}_2 e^{-\delta \xi_2 z}) e^{i\delta \zeta x} d\zeta \\
 w_z(x,z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi c_{44}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_z}{R} (\eta_4 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 e^{-\delta \xi_2 z}) e^{i\delta \zeta x} d\zeta \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

onde

$$R = \eta_3 \eta_6 - \eta_4 \eta_5 \quad (3.50)$$

As tensões podem ser determinadas da mesma forma e resultam:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xxx}(x,z) &= -\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_x}{R} (\eta_1 \eta_6 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_2 \eta_5 e^{-\delta \xi_2 z}) e^{i\delta \zeta x} d\zeta \\
 \sigma_{xzx}(x,z) &= -\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_x}{R} (\eta_3 \eta_6 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_4 \eta_5 e^{-\delta \xi_2 z}) e^{i\delta \zeta x} d\zeta \\
 \sigma_{zzx}(x,z) &= -\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_x}{R} \eta_5 \eta_6 (e^{-\delta \xi_1 z} - e^{-\delta \xi_2 z}) e^{i\delta \zeta x} d\zeta \\
 \sigma_{xxz}(x,z) &= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_z}{R} (\eta_1 \eta_4 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_2 \eta_3 e^{-\delta \xi_2 z}) e^{i\delta \zeta x} d\zeta \\
 \sigma_{xzz}(x,z) &= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_z}{R} \eta_3 \eta_4 (e^{-\delta \xi_1 z} - e^{-\delta \xi_2 z}) e^{i\delta \zeta x} d\zeta \\
 \sigma_{zzz}(x,z) &= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_z}{R} (\eta_4 \eta_5 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 \eta_6 e^{-\delta \xi_2 z}) e^{i\delta \zeta x} d\zeta \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

Nestas equações os dois primeiros índices de  $\sigma_{ijk}$  indicam a componente do tensor de tensões, enquanto que o terceiro índice indica a direção de aplicação da carga.

### Funções de Green

Para se obterem as funções de Green para carga na superfície do semi-espaço são aplicadas na superfície linhas de carga unitárias nas direções  $x$  e  $z$  concentradas na origem ( $x = 0, z = 0$ ):

$$p_n(x) = \delta_D(x), \quad n = x, z \quad (3.52)$$

onde  $\delta_D(x)$  é a função generalizada delta de Dirac. A aplicação da transformação de Fourier resulta [76]:

$$\bar{p}_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad n = x, z \quad (3.53)$$

então as funções de Green serão:

$$\begin{aligned} G_{xx}(x, z) &= -\frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} (\eta_6 \bar{\omega}_1 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_5 \bar{\omega}_2 e^{-\delta \xi_2 z}) e^{i\delta \zeta x} d\zeta \\ G_{zx}(x, z) &= -\frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} (\eta_6 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_5 e^{-\delta \xi_2 z}) e^{i\delta \zeta x} d\zeta \\ G_{xz}(x, z) &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} (\eta_4 \bar{\omega}_1 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 \bar{\omega}_2 e^{-\delta \xi_2 z}) e^{i\delta \zeta x} d\zeta \\ G_{zz}(x, z) &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} (\eta_4 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 e^{-\delta \xi_2 z}) e^{i\delta \zeta x} d\zeta \end{aligned} \quad (3.54)$$

Observando-se que as funções envolvidas são pares ou ímpares em relação a  $\zeta$ , estas expressões podem ainda ser reescritas como:

$$\begin{aligned} G_{xx}(x, z) &= -\frac{1}{\pi c_{44}} \int_0^{\infty} \frac{1}{R} (\eta_6 \bar{\omega}_1 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_5 \bar{\omega}_2 e^{-\delta \xi_2 z}) \cos(\delta \zeta x) d\zeta \\ G_{zx}(x, z) &= -\frac{1}{\pi c_{44}} \int_0^{\infty} \frac{i}{R} (\eta_6 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_5 e^{-\delta \xi_2 z}) \text{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \\ G_{xz}(x, z) &= \frac{1}{\pi c_{44}} \int_0^{\infty} \frac{i}{R} (\eta_4 \bar{\omega}_1 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 \bar{\omega}_2 e^{-\delta \xi_2 z}) \text{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \\ G_{zz}(x, z) &= \frac{1}{\pi c_{44}} \int_0^{\infty} \frac{1}{R} (\eta_4 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 e^{-\delta \xi_2 z}) \cos(\delta \zeta x) d\zeta \end{aligned} \quad (3.55)$$

e as tensões ficarão:

$$\begin{aligned} \sigma_{xxx}(x, z) &= -\frac{\delta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{i}{R} (\eta_1 \eta_6 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_2 \eta_5 e^{-\delta \xi_2 z}) \text{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \\ \sigma_{zzx}(x, z) &= -\frac{\delta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{R} (\eta_3 \eta_6 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_4 \eta_5 e^{-\delta \xi_2 z}) \cos(\delta \zeta x) d\zeta \\ \sigma_{zxx}(x, z) &= -\frac{\delta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{i}{R} \eta_3 \eta_6 (e^{-\delta \xi_1 z} - e^{-\delta \xi_2 z}) \text{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \\ \sigma_{xxz}(x, z) &= \frac{\delta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{R} (\eta_1 \eta_4 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_2 \eta_3 e^{-\delta \xi_2 z}) \cos(\delta \zeta x) d\zeta \\ \sigma_{zzz}(x, z) &= \frac{\delta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{i}{R} \eta_3 \eta_4 (e^{-\delta \xi_1 z} - e^{-\delta \xi_2 z}) \text{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \\ \sigma_{zxx}(x, z) &= \frac{\delta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{R} (\eta_4 \eta_5 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 \eta_6 e^{-\delta \xi_2 z}) \cos(\delta \zeta x) d\zeta \end{aligned} \quad (3.56)$$

Pode-se verificar ainda que:

$$\eta_6 - \eta_5 = \bar{\omega}_1 \eta_4 - \bar{\omega}_2 \eta_3. \quad (3.57)$$

Utilizando-se este fato nas equações (3.55) pode-se verificar que ao longo da superfície do semi-espaço ( $z = 0$ ):

$$G_{zx}(x, z = 0) = -G_{xz}(x, z = 0). \quad (3.58)$$

Com as equações (3.55) e (3.56) pode-se determinar o deslocamento e o estado de tensões em qualquer ponto do interior do espaço semi-infinito transversalmente isotrópico devido a uma carga qualquer aplicada na superfície do semi-espaço. No entanto estas equações envolvem integrais que não possuem (ainda) solução analítica. Estas soluções só podem ser obtidas através de métodos numéricos de integração.

### 3.2.5 Determinação numérica das funções de Green

As integrais (impróprias) obtidas nos itens anteriores não possuem uma solução analítica conhecida e, portanto, sua determinação numérica deve ser feita por meio de processos numéricos aproximados.

Para isto, primeiramente deve ser analisado o comportamento dos integrandos ao longo da rota de integração. Observando-se as expressões obtidas para o caso de carga aplicada sobre o semi-espaço (equações (3.55) e (3.56)), pode-se perceber que os integrandos possuem singularidades para valores do número de onda normalizado  $\zeta$  onde  $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$  e para  $R = \eta_3 \eta_6 - \eta_4 \eta_5 = 0$ . As duas primeiras condições associadas às equações (3.22) levam à identificação de dois pontos de singularidade  $\zeta_p$  e  $\zeta_s$  dados por:

$$\begin{aligned} \zeta_p &= \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}} \\ \zeta_s &= \pm 1 \end{aligned} \quad (3.59)$$

A terceira condição ocorre para  $\zeta = \zeta_R$  quando [67]:

$$\left[ 2(1 - \kappa) \zeta^2 - \gamma \zeta^2 + \alpha \right] (1 - \zeta^2) - \alpha \xi_1 \xi_2 = 0 \quad (3.60)$$

Para materiais isotrópicos as constantes elásticas normalizadas são dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \gamma/2 = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) / \bar{\mu} \\ \kappa &= 1 + \bar{\lambda}/\bar{\mu} \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\mu}$  são as constantes de Lamé. Neste caso a equação (3.60) corresponde à obtida por Lamb [40].

Deve-se observar que a equação (3.60) tem uma raiz para  $\zeta = \pm 1$ . Este ponto corresponde a  $\zeta_s$  e já foi identificado pela condição de  $\xi_2 = 0$ . Há, no entanto, outra raiz para a equação (3.60) [78]. A determinação desta raiz só é possível através de métodos numéricos [67].

A ordem em que aparecem os pontos de singularidade  $\zeta_p$ ,  $\zeta_s$  e  $\zeta_R$  não é sempre a mesma. Se  $\beta > 1$  então pode-se perceber que  $\zeta_p$  aparece antes de  $\zeta_s$  no semi-eixo positivo de  $\zeta$ . Esta ordem será invertida caso  $\beta < 1$ . Quanto a  $\zeta_R$  esta análise não é tão simples devido à dificuldade na sua determinação. No entanto foi notado no decorrer deste trabalho que em geral  $|\zeta_R| > 1$ .

Para se evitar estes três pontos de singularidade há duas alternativas para a integração numérica. A primeira delas consiste em se considerar  $\zeta$  como uma variável complexa e efetuar a integração ao longo de uma rota especial no plano complexo que desvie dos pontos de singularidade [40]. Na segunda alternativa considera-se que o material apresenta algum amortecimento interno. Este amortecimento é introduzido considerando-se que as suas constantes elásticas são complexas, ou seja, apresentam uma parcela imaginária. Isto faz com que os pontos de singularidade se afastem do eixo real e a integração numérica pode ser efetuada.

A segunda alternativa é a mais utilizada, pois todo material possui alguma parcela de amortecimento interno. Este amortecimento é determinado experimentalmente para cada uma das constantes elásticas e, normalmente, é dependente da frequência como já foi visto no capítulo 2.

Neste trabalho foi adotado esta segunda alternativa e adotou-se uma taxa de amortecimento  $\nu$  constante que foi introduzida diretamente nas constantes normalizadas  $\alpha, \beta$  e  $\kappa$ . Foram então determinadas constantes normalizadas as complexas  $\alpha^*, \beta^*$  e  $\kappa^*$ . Estas constantes foram calculadas como:

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \alpha(1 + \nu i) \\ \beta^* &= \beta(1 + \nu i) \\ \kappa^* &= \kappa(1 + \nu i)\end{aligned}\tag{3.62}$$

Esta hipótese equivale a se adotar uma taxa de amortecimento  $\nu_{11} = \nu_{13} = \nu_{33} = \nu$  e  $\nu_{44} = 0$ . Como visto no capítulo 2, isto evita a ocorrência de coeficientes de Poisson complexos. Além disso, como a constante elástica  $c_{44}$  é utilizada em geral para a normalização de várias quantidades envolvidas, optou-se por manter esta constante como puramente real.

Com a adoção do amortecimento interno, os integrandos das funções de Green não mais apresentam singularidades ao longo do eixo real. Porém o seu

comportamento ainda é bastante irregular e deve ser conhecido com detalhe para que a integração numérica possa ser efetuada com eficiência.

Em primeiro lugar, nos pontos próximos aos pontos de singularidade (agora complexos) os integrandos apresentam extremos agudos, como pode ser visto na figura 3.4 que mostra gráficos que representam a variação da componente transformada e normalizada do tensor de Green  $\bar{G}_{zz}^* = \sqrt{2\pi}c_{44}\delta\bar{G}_{zz}$  em função de  $\zeta$  para  $z = 0$ . As curvas mostradas se referem a um material elástico transversalmente isotrópico com  $c_{11}/c_{44} = 6$ ;  $n_1 = 1,5$ ;  $n_3 = 0,8$  e  $\nu = 0,01$ . Para este material  $\zeta_p = 0,408$ ;  $\zeta_s = 1$  e  $\zeta_R = 1,047$ . Estes pontos estão anotados nos gráficos e pode-se notar o comportamento das curvas nestes pontos. A fim de se obter um resultado mais preciso na integração numérica deve-se subdividir a integral em trechos onde o comportamento do integrando é mais regular.

Outra dificuldade se deve à presença das parcelas  $\cos(\delta\zeta x)$  e  $\sin(\delta\zeta x)$  nos integrandos das funções de Green. Isto torna os integrandos fortemente oscilantes, principalmente para frequências mais elevadas ou para valores de  $x$  mais elevados. Assim, torna-se necessário que se utilize um método de integração que seja especialmente desenvolvido para esta situação, caso contrário será preciso utilizar um número muito elevado de pontos na integração numérica.

A estas dificuldades soma-se o fato de as integrais serem impróprias com respeito ao limite superior de integração. Num método numérico deve-se obviamente tratar apenas com valores finitos. Assim deve-se estabelecer um limite finito para a variável de integração  $\zeta$ . A estratégia mais simples consiste em interromper a integração quando a função a ser integrada atingir um valor suficientemente pequeno (em valor absoluto). Este método, no entanto, pode se tornar pouco eficiente se a função converge lentamente para zero. Métodos mais eficientes como o algoritmo  $\epsilon$  [89] e o método de Longman [42] recorrem a extrapolação de séries para se interromper a integração numérica em um valor de  $\zeta$  finito. Destes, o método de Longman já foi utilizado com sucesso [27] na determinação numérica de funções de Green na elastodinâmica.

Neste trabalho as integrações numéricas das funções de Green foram executadas utilizando-se algumas rotinas do pacote de integração numérica QUADPACK [58]. Estas rotinas utilizam métodos adaptativos de subdivisão do intervalo de integração para se obter a precisão desejada, o que torna a sua utilização muito conveniente. As oscilações dos integrandos são tratadas pelo método de Clenshaw-Curtis [22] que torna o processo praticamente insensível ao valor de  $\delta x$  [27]. Para o tratamento do limite superior de integração é utilizado o algoritmo  $\epsilon$  [89]. Este método também é empregado para se apressar a convergência no processo de subdivisão adaptativa do in-

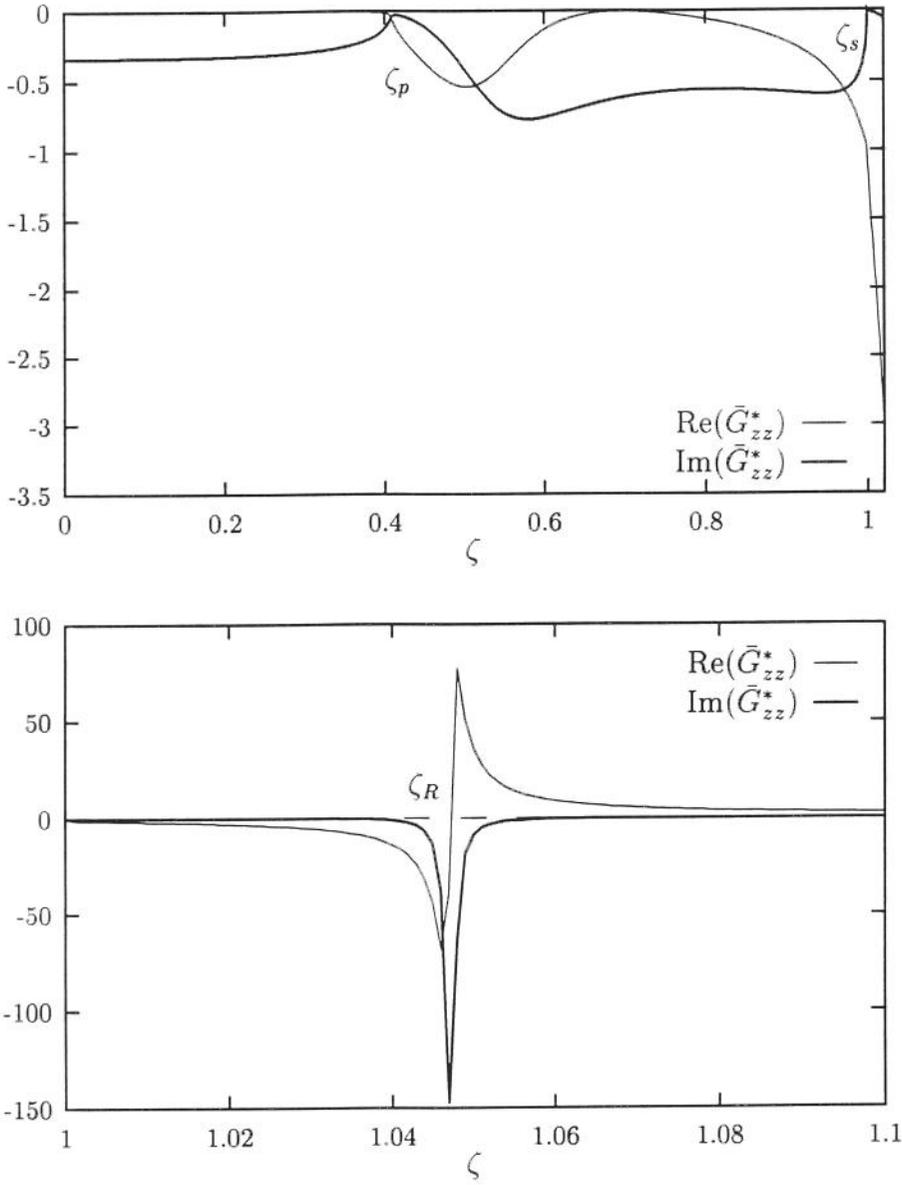


Figura 3.4: Variação função de Green transformada e normalizada  $\bar{G}_{zz}^*$  com o número de onda normalizado  $\zeta$ .

tervalo de integração e pode ser utilizado para casos onde há singularidade na função em algum dos extremos desse intervalo.

### 3.3 Espaço completo

#### 3.3.1 Cargas no interior do meio infinito

Para se determinar os deslocamentos e tensões provocados por uma carga aplicada no interior de um espaço completo, divide-se este em dois semi-espaços fictícios como mostrado na figura 3.5 definidos como:

- Meio 1:  $|x| < \infty$  e  $-\infty < z \leq 0$ .
- Meio 2:  $|x| < \infty$  e  $0 \leq z < \infty$ .

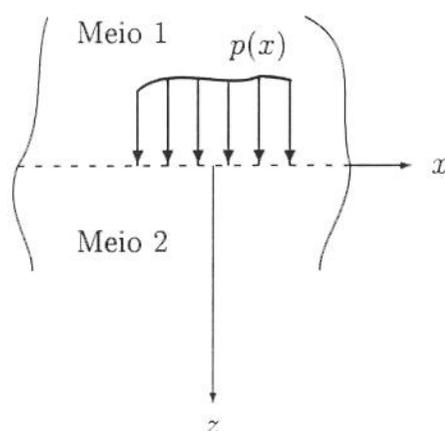


Figura 3.5: Carga aplicada no interior do espaço elástico infinito.

Para a determinação do efeito de uma carga genérica, com distribuição qualquer, emprega-se aqui um processo análogo ao desenvolvido no item anterior. Assim, é aplicada uma carga  $p(x)$  ao longo da interface entre os meios 1 e 2. Esta carga é, então, decomposta em duas componentes  $p_x(x)$  e  $p_z(z)$  que são aplicadas separadamente. Isto leva a dois problemas de valor de contorno em tensão que são analisados a seguir.

1. Carga horizontal:

Aplicando-se  $p_x(x)$  na interface dos dois semi-espacos ( $z = 0$ ), as seguintes condições de compatibilidade cinemática e de equilíbrio devem ser obedecidas pelos deslocamentos e pelas tensões ao longo de  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x,0) - u^{(2)}(x,0) &= 0 \\ w^{(1)}(x,0) - w^{(2)}(x,0) &= 0 \\ \sigma_{xz}^{(1)}(x,0) - \sigma_{xz}^{(2)}(x,0) &= p_x(x) \\ \sigma_{zz}^{(1)}(x,0) - \sigma_{zz}^{(2)}(x,0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Os índices superiores que aparecem nos deslocamentos e nas tensões indicam o meio a que se referem.

Aplicando-se a transformação de Fourier nas condições expressas pelas equações (3.63) resulta:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(1)}(\lambda,0) - \bar{u}^{(2)}(\lambda,0) &= 0 \\ \bar{w}^{(1)}(\lambda,0) - \bar{w}^{(2)}(\lambda,0) &= 0 \\ \bar{\sigma}_{xz}^{(1)}(\lambda,0) - \bar{\sigma}_{xz}^{(2)}(\lambda,0) &= \bar{p}_x(\lambda) \\ \bar{\sigma}_{zz}^{(1)}(\lambda,0) - \bar{\sigma}_{zz}^{(2)}(\lambda,0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Além dessas condições de contorno, as condições de irradiação no infinito implicam nas equações (3.24) e (3.33), para o meio 1 ( $z < 0$ ) em  $A^{(1)}(\zeta), C^{(1)}(\zeta) \equiv 0$ . Da mesma forma, para o meio 2 ( $z \geq 0$ )  $B^{(2)}(\zeta), D^{(2)}(\zeta) \equiv 0$ . Isto significa que no meio 1 as ondas se propagam apenas no sentido  $-z$  e no meio 2 apenas no sentido  $+z$ . Assim, torna-se desnecessária a utilização dos índices superiores para a indicação do meio a que se referem as componentes  $A, B, C$  e  $D$  não nulas.

Utilizando-se estas condições nas equações (3.24), (3.33) e (3.37) obtêm-se:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 A_x + \bar{\omega}_1 B_x + \bar{\omega}_2 C_x + \bar{\omega}_2 D_x &= 0 \\ A_x - B_x + C_x - D_x &= 0 \\ \eta_3 A_x - \eta_3 B_x + \eta_4 C_x - \eta_4 D_x &= -\frac{\bar{p}_x}{c_{44}\delta} \\ \eta_5 A_x + \eta_5 B_x + \eta_6 C_x + \eta_6 D_x &= 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde  $B_x$  e  $D_x$  referem-se ao meio 1 e  $A_x$  e  $C_x$  ao meio 2. O índice inferior em  $A_x, B_x, C_x$  e  $D_x$  indica a direção da carga aplicada.

Dessas expressões resulta então:

$$\begin{aligned} A_x(\zeta) &= D_x(\zeta) = -\frac{\bar{p}_x}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\eta_3 - \eta_4} \\ B_x(\zeta) &= C_x(\zeta) = \frac{\bar{p}_x}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\eta_3 - \eta_4} \end{aligned} \quad (3.66)$$

## 2. Carga vertical:

Por sua vez, a aplicação da componente  $p_z(x)$  em  $z = 0$  implica nas seguintes condições de compatibilidade cinemática e de equilíbrio:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x,0) - u^{(2)}(x,0) &= 0 \\ w^{(1)}(x,0) - w^{(2)}(x,0) &= 0 \\ \sigma_{xz}^{(1)}(x,0) - \sigma_{xz}^{(2)}(x,0) &= 0 \\ \sigma_{zz}^{(1)}(x,0) - \sigma_{zz}^{(2)}(x,0) &= p_z(x) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Estas condições impostas às equações (3.24), (3.33) e (3.37) levam ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 A_z + \bar{\omega}_1 B_z + \bar{\omega}_2 C_z + \bar{\omega}_2 D_z &= 0 \\ A_z - B_z + C_z - D_z &= 0 \\ \eta_3 A_z - \eta_3 B_z + \eta_4 C_z - \eta_4 D_z &= 0 \\ \eta_5 A_z + \eta_5 B_z + \eta_6 C_z + \eta_6 D_z &= -\frac{\bar{p}_z}{c_{44}\delta} \end{aligned} \quad (3.68)$$

que resulta, finalmente, em:

$$\begin{aligned} A_z(\zeta) &= B_z(\zeta) = \frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{\bar{\omega}_2}{\eta_6\bar{\omega}_1 - \eta_5\bar{\omega}_2} \\ C_z(\zeta) &= D_z(\zeta) = -\frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{\bar{\omega}_1}{\eta_6\bar{\omega}_1 - \eta_5\bar{\omega}_2} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Utilizando-se os resultados expressos pelas equações (3.66) e (3.69) nas equações (3.24) e (3.33) os deslocamentos transformados  $\bar{u}_i$  e  $\bar{w}_i$  devidos a uma carga aplicada na direção  $i = x, z$  para o meio 1 ficam:

$$\begin{aligned} \bar{u}_x^{(1)}(\lambda, z) &= -\frac{\bar{p}_x}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\eta_3 - \eta_4} (\bar{\omega}_1 e^{\delta\xi_1 z} - \bar{\omega}_2 e^{\delta\xi_2 z}) \\ \bar{w}_x^{(1)}(\lambda, z) &= \frac{\bar{p}_x}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\eta_3 - \eta_4} (e^{\delta\xi_1 z} - e^{\delta\xi_2 z}) \\ \bar{u}_z^{(1)}(\lambda, z) &= -\frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1 \eta_6 - \bar{\omega}_2 \eta_5} (e^{\delta\xi_1 z} - e^{\delta\xi_2 z}) \\ \bar{w}_z^{(1)}(\lambda, z) &= \frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\bar{\omega}_1 \eta_6 - \bar{\omega}_2 \eta_5} (\bar{\omega}_2 e^{\delta\xi_1 z} - \bar{\omega}_1 e^{\delta\xi_2 z}) \end{aligned} \quad (3.70)$$

enquanto que para o meio 2 os deslocamentos transformados ficam:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_x^{(2)}(\lambda, z) &= -\frac{\bar{p}_x}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\eta_3 - \eta_4} (\bar{\omega}_1 e^{-\delta\xi_1 z} - \bar{\omega}_2 e^{-\delta\xi_2 z}) \\
 \bar{w}_x^{(2)}(\lambda, z) &= -\frac{\bar{p}_x}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\eta_3 - \eta_4} (e^{-\delta\xi_1 z} - e^{-\delta\xi_2 z}) \\
 \bar{u}_z^{(2)}(\lambda, z) &= \frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1 \eta_6 - \bar{\omega}_2 \eta_5} (e^{-\delta\xi_1 z} - e^{-\delta\xi_2 z}) \\
 \bar{w}_z^{(2)}(\lambda, z) &= \frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\bar{\omega}_1 \eta_6 - \bar{\omega}_2 \eta_5} (\bar{\omega}_2 e^{-\delta\xi_1 z} - \bar{\omega}_1 e^{-\delta\xi_2 z}) \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

Pode-se unificar as equações (3.70) e (3.71) num único conjunto para os dois meios, abrangendo todo o espaço completo:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_x(\lambda, z) &= -\frac{\bar{p}_x}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\eta_3 - \eta_4} (\bar{\omega}_1 e^{-\delta\xi_1 |z|} - \bar{\omega}_2 e^{-\delta\xi_2 |z|}) \\
 \bar{w}_x(\lambda, z) &= -\frac{z}{|z|} \frac{\bar{p}_x}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\eta_3 - \eta_4} (e^{-\delta\xi_1 |z|} - e^{-\delta\xi_2 |z|}) \\
 \bar{u}_z(\lambda, z) &= \frac{z}{|z|} \frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1 \eta_6 - \bar{\omega}_2 \eta_5} (e^{-\delta\xi_1 |z|} - e^{-\delta\xi_2 |z|}) \\
 \bar{w}_z(\lambda, z) &= \frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\bar{\omega}_1 \eta_6 - \bar{\omega}_2 \eta_5} (\bar{\omega}_2 e^{-\delta\xi_1 |z|} - \bar{\omega}_1 e^{-\delta\xi_2 |z|}) \quad (3.72)
 \end{aligned}$$

Aplicando-se, então, a transformação integral de Fourier inversa, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, z) &= -\frac{1}{2c_{44}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_x}{H_x} (\bar{\omega}_1 e^{-\delta\xi_1 |z|} - \bar{\omega}_2 e^{-\delta\xi_2 |z|}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
 w_x(x, z) &= -\frac{I}{2c_{44}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_x}{H_x} (e^{-\delta\xi_1 |z|} - e^{-\delta\xi_2 |z|}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
 u_z(x, z) &= \frac{I}{2c_{44}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_z \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2}{H_z} (e^{-\delta\xi_1 |z|} - e^{-\delta\xi_2 |z|}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
 w_z(x, z) &= \frac{1}{2c_{44}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_z}{H_z} (\bar{\omega}_2 e^{-\delta\xi_1 z} - \bar{\omega}_1 e^{-\delta\xi_2 z}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{z}{|z|} \\
 H_x &= \eta_3 - \eta_4 = \frac{i}{\kappa\zeta} \alpha (\xi_1^2 - \xi_2^2) \\
 H_z &= \bar{\omega}_1 \eta_6 - \bar{\omega}_2 \eta_5 = \frac{\alpha(1 - \zeta^2)(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{i\kappa\zeta\xi_1\xi_2}. \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

O estado de tensão pode ser determinado da mesma forma, substituindo-se os resultados expressos pelas equações (3.66) e (3.69) nas equações (3.37) e resultam:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xxx}(x,z) &= -\frac{\delta}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_x}{H_x} (\eta_1 e^{-\delta\xi_1|z|} - \eta_2 e^{-\delta\xi_2|z|}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
 \sigma_{xxz}(x,z) &= -\frac{I\delta}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_x}{H_x} (\eta_3 e^{-\delta\xi_1|z|} - \eta_4 e^{-\delta\xi_2|z|}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
 \sigma_{zzx}(x,z) &= -\frac{\delta}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_x}{H_x} (\eta_5 e^{-\delta\xi_1|z|} - \eta_6 e^{-\delta\xi_2|z|}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
 \sigma_{xxz}(x,z) &= \frac{I\delta}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_z}{H_z} (\bar{\omega}_2 \eta_1 e^{-\delta\xi_1|z|} - \bar{\omega}_1 \eta_2 e^{-\delta\xi_2|z|}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
 \sigma_{xzz}(x,z) &= \frac{\delta}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_z}{H_z} (\bar{\omega}_2 \eta_3 e^{-\delta\xi_1|z|} - \bar{\omega}_1 \eta_4 e^{-\delta\xi_2|z|}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
 \sigma_{zzz}(x,z) &= \frac{I\delta}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_z}{H_z} (\bar{\omega}_2 \eta_5 e^{-\delta\xi_1|z|} - \bar{\omega}_1 \eta_6 e^{-\delta\xi_2|z|}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

As equações (3.73) e (3.75) fornecem os deslocamentos e o estado de tensão num ponto qualquer do espaço infinito elástico transversalmente isotrópico devidos a uma carga  $p(x)$  distribuída ao longo do plano horizontal.

### 3.3.2 Funções de Green

Para se obter as funções de Green aplicam-se linhas de carga unitárias concentradas na origem ( $x = 0, z = 0$ ):

$$p_n(x) = \delta_D(x), \quad n = x, z \quad (3.76)$$

a aplicação da transformação de Fourier resulta:

$$\bar{p}_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad n = x, z \quad (3.77)$$

então, substituindo-se  $\bar{p}_n$  nas equações (3.73) as funções de Green serão:

$$\begin{aligned}
 G_{xx}(x,z) &= -\frac{1}{4\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H_x} (\bar{\omega}_1 e^{-\delta\xi_1|z|} - \bar{\omega}_2 e^{-\delta\xi_2|z|}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
 G_{zz}(x,z) &= -\frac{I}{4\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H_x} (e^{-\delta\xi_1|z|} - e^{-\delta\xi_2|z|}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
 G_{xz}(x,z) &= \frac{I}{4\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2}{H_z} (e^{-\delta\xi_1|z|} - e^{-\delta\xi_2|z|}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \\
 G_{zz}(x,z) &= \frac{1}{4\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H_z} (\bar{\omega}_2 e^{-\delta\xi_1|z|} - \bar{\omega}_1 e^{-\delta\xi_2|z|}) e^{i\delta\zeta x} d\zeta \quad (3.78)
 \end{aligned}$$

Observando-se que as funções envolvidas são pares ou ímpares em relação à variável de integração  $\zeta$ , estas expressões podem ainda ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
 G_{xx}(x,z) &= -\frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{1}{H_x} (\bar{\omega}_1 e^{-\delta\xi_1|z|} - \bar{\omega}_2 e^{-\delta\xi_2|z|}) \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\
 G_{zx}(x,z) &= -\frac{I}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{i}{H_x} (e^{-\delta\xi_1|z|} - e^{-\delta\xi_2|z|}) \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
 G_{xz}(x,z) &= \frac{I}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{i\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2}{H_z} (e^{-\delta\xi_1|z|} - e^{-\delta\xi_2|z|}) \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
 G_{zz}(x,z) &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{1}{H_z} (\bar{\omega}_2 e^{-\delta\xi_1|z|} - \bar{\omega}_1 e^{-\delta\xi_2|z|}) \cos(\delta\zeta x) d\zeta \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

Do mesmo modo, substituindo-se o valor de  $p_n$  nas equações (3.75) os estados de tensão ficarão:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xxx}(x,z) &= -\frac{\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{i}{H_x} (\eta_1 e^{-\delta\xi_1|z|} - \eta_2 e^{-\delta\xi_2|z|}) \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
 \sigma_{zxx}(x,z) &= -\frac{I\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_x} (\eta_3 e^{-\delta\xi_1|z|} - \eta_4 e^{-\delta\xi_2|z|}) \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\
 \sigma_{zzx}(x,z) &= -\frac{\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{i}{H_x} (\eta_5 e^{-\delta\xi_1|z|} - \eta_6 e^{-\delta\xi_2|z|}) \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
 \sigma_{xxz}(x,z) &= \frac{I\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_z} (\bar{\omega}_2 \eta_1 e^{-\delta\xi_1|z|} - \bar{\omega}_1 \eta_2 e^{-\delta\xi_2|z|}) \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\
 \sigma_{xzz}(x,z) &= \frac{\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{i}{H_z} (\bar{\omega}_2 \eta_3 e^{-\delta\xi_1|z|} - \bar{\omega}_1 \eta_4 e^{-\delta\xi_2|z|}) \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
 \sigma_{zzz}(x,z) &= \frac{I\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_z} (\bar{\omega}_2 \eta_5 e^{-\delta\xi_1|z|} - \bar{\omega}_1 \eta_6 e^{-\delta\xi_2|z|}) \cos(\delta\zeta x) d\zeta. \quad (3.80)
 \end{aligned}$$

Os resultados expressos pelas equações (3.79) e (3.80) fornecem as funções de Green para os deslocamentos e para o estado de tensão num ponto qualquer do espaço infinito elástico transversalmente isotrópico devidos a linhas de carga concentradas unitárias aplicadas no seu interior. Uma observação importante é obtida da análise desses resultados: pode-se perceber que os deslocamentos são simétricos em relação ao ponto de aplicação da linha de carga, ou seja,  $G_{ij}(x,z) = G_{ij}(-x, -z)$ . Da mesma forma, as componentes da tensão são antisimétricas em relação ao ponto de aplicação da linha de carga:  $\sigma_{ijk}(x,z) = -\sigma_{ijk}(-x, -z)$ .

### 3.3.3 Formulação alternativa

Como se pode observar pela equação (3.74), um dos pontos em que  $H_z$  se anula é quando  $\zeta = 1$ . Isto representa uma singularidade nas expressões

das componentes da função de Green devidas ao carregamento  $p_z$ . Esta singularidade não é deslocada do eixo real de  $\zeta$  mesmo com a adoção de amortecimento interno para o material. Este fato dificulta a integração dessas componentes através de métodos numéricos.

Para contornar este problema recorre-se a uma formulação alternativa. Em primeiro lugar substitui-se as equações (3.24) e (3.25) na primeira das equações (3.15) ao invés de substituí-las na segunda das equações (3.15) como feito anteriormente.

Esta operação resulta em:

$$-\beta\zeta^2 A' + \xi_1^2 A' - i\kappa\zeta\xi_1 A + A' = 0 \quad (3.81)$$

ou

$$A = \omega_1 A' \quad (3.82)$$

onde

$$\omega_1 = \frac{\xi_1^2 - \beta\zeta^2 + 1}{i\kappa\zeta\xi_1} \quad (3.83)$$

Da mesma forma:

$$\begin{aligned} B &= -\omega_1 B', \\ C &= \omega_2 C', \\ D &= -\omega_2 D' \end{aligned} \quad (3.84)$$

onde

$$\omega_2 = \frac{\xi_2^2 - \beta\zeta^2 + 1}{i\kappa\zeta\xi_2} \quad (3.85)$$

Assim a solução da equação diferencial para os deslocamentos  $\bar{u}(\lambda, z)$  e  $\bar{w}(\lambda, z)$  ficam:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\lambda, z) &= A'e^{-\delta\xi_1 z} + B'e^{\delta\xi_1 z} + C'e^{-\delta\xi_2 z} + D'e^{\delta\xi_2 z}, \\ \bar{w}(\lambda, z) &= \omega_1 A'e^{-\delta\xi_1 z} - \omega_1 B'e^{\delta\xi_1 z} + \omega_2 C'e^{-\delta\xi_2 z} - \omega_2 D'e^{\delta\xi_2 z}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Dessa forma as tensões ficarão:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= \delta c_{44}(\mu_1 A'e^{-\delta\xi_1 z} + \mu_1 B'e^{\delta\xi_1 z} + \mu_2 C'e^{-\delta\xi_2 z} + \mu_2 D'e^{\delta\xi_2 z}), \\ \bar{\sigma}_{xz} &= \delta c_{44}(\mu_3 A'e^{-\delta\xi_1 z} - \mu_3 B'e^{\delta\xi_1 z} + \mu_4 C'e^{-\delta\xi_2 z} - \mu_4 D'e^{\delta\xi_2 z}), \\ \bar{\sigma}_{zz} &= \delta c_{44}(\mu_5 A'e^{-\delta\xi_1 z} + \mu_5 B'e^{\delta\xi_1 z} + \mu_6 C'e^{-\delta\xi_2 z} + \mu_6 D'e^{\delta\xi_2 z}), \end{aligned} \quad (3.87)$$

onde

$$\mu_1 = i\zeta\beta - \xi_1\omega_1(\kappa - 1)$$

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= i\zeta\beta - \xi_2\omega_2(\kappa - 1) \\
\mu_3 &= -\xi_1 + i\zeta\omega_1 \\
\mu_4 &= -\xi_2 + i\zeta\omega_2 \\
\mu_5 &= i\zeta(\kappa - 1) - \alpha\xi_1\omega_1 \\
\mu_6 &= i\zeta(\kappa - 1) - \alpha\xi_2\omega_2
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Impondo no espaço completo as condições de contorno para a carga aplicada na direção  $z$  e expressas pelas equações (3.67) obtem-se o sistema de equações:

$$\begin{aligned}
A'_z - B'_z + C'_z - D'_z &= 0 \\
\omega_1 A'_z + \omega_1 B'_z + \omega_2 C'_z + \omega_2 D'_z &= 0 \\
\mu_3 A'_z + \mu_3 B'_z + \mu_4 C'_z + \mu_4 D'_z &= 0 \\
\mu_5 A'_z - \mu_5 B'_z + \mu_6 C'_z - \mu_6 D'_z &= -\frac{\bar{p}_z}{c_{44}\delta}
\end{aligned} \tag{3.89}$$

que resulta em:

$$\begin{aligned}
A'_z(\zeta) = D'_z(\zeta) &= \frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\mu_6 - \mu_5} \\
B'_z(\zeta) = C'_z(\zeta) &= -\frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\mu_6 - \mu_5}
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Os deslocamentos transformados  $\bar{u}_z$  e  $\bar{w}_z$  devidos a  $p_z$  resultam, então:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_z(\lambda, z) &= \frac{z}{|z|} \frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\mu_6 - \mu_5} (e^{-\delta\xi_1|z|} - e^{-\delta\xi_2|z|}) \\
\bar{w}_z(\lambda, z) &= \frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{1}{\mu_6 - \mu_5} (\omega_1 e^{-\delta\xi_1|z|} - \omega_2 e^{-\delta\xi_2|z|})
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Mas,

$$\mu_6 - \mu_5 = \alpha(-\xi_2\omega_2 + \xi_1\omega_1) = \frac{\alpha(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{i\kappa\zeta} = -H_x, \tag{3.92}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
\bar{u}_z(\lambda, z) &= -\frac{z}{|z|} \frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{1}{H_x} (e^{-\delta\xi_1|z|} - e^{-\delta\xi_2|z|}) \\
\bar{w}_z(\lambda, z) &= -\frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{1}{H_x} (\omega_1 e^{-\delta\xi_1|z|} - \omega_2 e^{-\delta\xi_2|z|})
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Assim, pode-se utilizar  $H_x$  em lugar de  $H_z$  para se determinar as componentes das funções de Green para carga aplicada na direção vertical. Como

$H_x$  não se anula em  $\zeta = 1$  (quando se adota uma taxa de amortecimento interno para o material) é possível a integração numérica. Este caminho pode também ser adotado para a determinação do estado de tensões devido à carga vertical.

Comparando a componente  $\bar{u}_z$  das equações (3.93) com a componente  $\bar{w}_x$  das equações (3.72) percebe-se que são idênticas, a menos das componentes da carga  $\bar{p}_z$  e  $\bar{p}_x$ . Na obtenção das funções de Green,  $p_x$  e  $p_z$  são substituídos por linhas de carga unitárias. Como a aplicação da transformação integral sobre qualquer destas linhas de carga conduz ao mesmo valor, os resultados obtidos para  $G_{zx}$  e  $G_{xz}$  serão os mesmos. Isto demonstra que o tensor de Green para caso o caso de carga aplicada no interior do espaço infinito é simétrico.

Os deslocamentos e o estado de tensão devidos à uma linha de carga unitária aplicada na direção  $z$  são então obtidos pelo mesmo processo descrito no item anterior e resultam:

$$\begin{aligned} G_{xz}(x,z) &= -\frac{I}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{i}{H_x} (e^{-\delta\xi_1|z|} - e^{-\delta\xi_2|z|}) \operatorname{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\ G_{zz}(x,z) &= -\frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{1}{H_x} (\omega_1 e^{-\delta\xi_1|z|} - \omega_2 e^{-\delta\xi_2|z|}) \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\ \sigma_{xxz}(x,z) &= -\frac{I\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_x} (\mu_1 e^{-\delta\xi_1|z|} - \mu_2 e^{-\delta\xi_2|z|}) \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\ \sigma_{xzz}(x,z) &= -\frac{\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{i}{H_x} (\mu_3 e^{-\delta\xi_1|z|} - \mu_4 e^{-\delta\xi_2|z|}) \operatorname{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\ \sigma_{zzz}(x,z) &= -\frac{I\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_x} (\mu_5 e^{-\delta\xi_1|z|} - \mu_6 e^{-\delta\xi_2|z|}) \cos(\delta\zeta x) d\zeta \quad (3.94) \end{aligned}$$

Estes resultados devem ser utilizados em substituição às componentes devidas à carga horizontal expressas nas equações (3.79) e (3.80).

### 3.4 Comportamento das funções de Green na origem

O conhecimento do comportamento das funções de Green no ponto de aplicação da carga ( $x, z = 0$ ) é importante para a sua aplicação em métodos numéricos como o Método dos Elementos de Contorno.

As expressões de  $G_{xx}$  e de  $G_{zz}$  para o caso de carga aplicada no interior do espaço completo expressas pelas equações (3.79) para ( $x = 0, z = 0$ ) ficam:

$$G_{xx}(x = 0, z = 0) = -\frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2}{H_x} d\zeta$$

$$G_{zz}(x=0, z=0) = -\frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{\omega_1 - \omega_2}{H_x} d\zeta \quad (3.95)$$

As componentes  $G_{zx}$  e  $G_{xz}$  são nulas para este caso.

As expressões acima podem ainda ser reescritas como:

$$\begin{aligned} G_{xx}(0,0) &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \bar{G}_{x0} d\zeta \\ G_{zz}(0,0) &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \bar{G}_{z0} d\zeta \end{aligned} \quad (3.96)$$

onde

$$\bar{G}_{x0} = \frac{\zeta^2 - 1 + \alpha\xi_1\xi_2}{\alpha(\xi_1 + \xi_2)\xi_1\xi_2} \quad (3.97)$$

e

$$\bar{G}_{z0} = \frac{\beta\zeta^2 - 1 + \xi_1\xi_2}{\alpha(\xi_1 + \xi_2)\xi_1\xi_2}. \quad (3.98)$$

A fim de se analisar o comportamento de  $\bar{G}_{x0}$  e de  $\bar{G}_{z0}$  adotou-se um material transversalmente isotrópico com as características dadas por  $c_{11}/c_{44} = 6$ ;  $n_1 = 1,5$ ;  $n_3 = 0,8$  e  $\nu = 0,01$ . Para este material determinaram-se as curvas dos gráficos apresentados na figura 3.6. Estas curvas representam a variação de  $\bar{G}_{x0}^{-1}$  e de  $\bar{G}_{z0}^{-1}$  em função de  $\zeta$ .

Pode-se verificar que as curvas apresentadas se aproximam muito de retas, o que significa que para valores elevados de  $\zeta$  as equações de  $\bar{G}_{x0}$  e de  $\bar{G}_{z0}$  têm a forma aproximada por expressões do tipo  $(K\zeta)^{-1}$ . Estas retas podem ser obtidas pelos limites:

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{\zeta \bar{G}_{x0}} &= K_{x0} = \frac{\sqrt{\frac{2\sqrt{\alpha\beta+\gamma}}{\alpha}} \sqrt{\alpha\beta}}{1 + \sqrt{\alpha\beta}} \\ \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{\zeta \bar{G}_{z0}} &= K_{z0} = \frac{\alpha \sqrt{\frac{2\sqrt{\alpha\beta+\gamma}}{\alpha}} \sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta + \sqrt{\alpha\beta}} \end{aligned} \quad (3.99)$$

Para o material transversalmente isotrópico tomado como exemplo resulta  $K_{z0} = 2,086 + 7,7604 \times 10^{-3}i$  e  $K_{x0} = 1,7032 + 6,3363 \times 10^{-3}i$ .

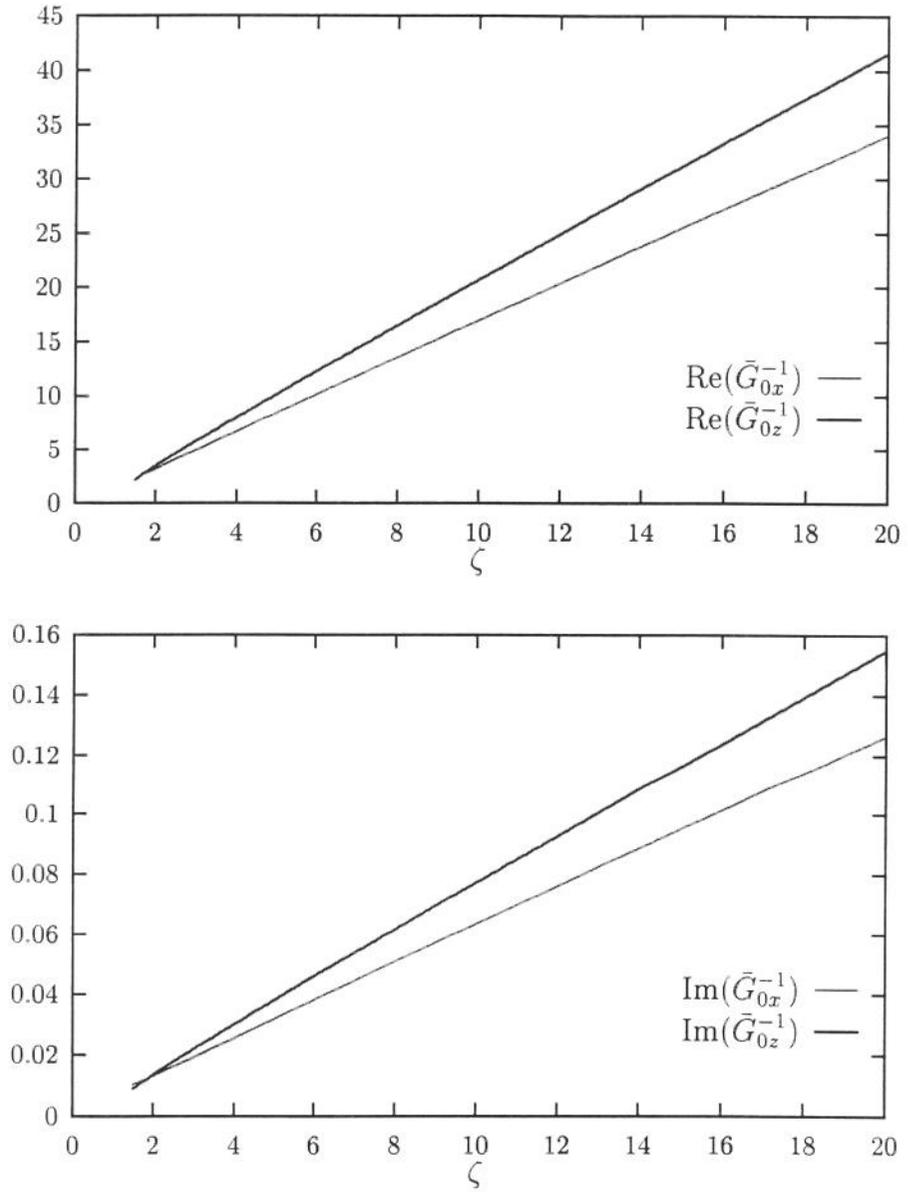
Verifica-se ainda que:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} (\bar{G}_{n0}^{-1} - \zeta K_{n0}) = 0; \quad n = x, z \quad (3.100)$$

ou seja, a reta de coeficiente angular  $K_{n0}$  é assíntota da função  $\bar{G}_{n0}^{-1}(\zeta)$ .

Isto significa que para qualquer valor  $\epsilon > 0$  existe um valor  $M$  tal que para todo  $\zeta > M$  se verifica:

$$\zeta K_{n0} - \epsilon < \bar{G}_{n0}^{-1}(\zeta) < \zeta K_{n0} + \epsilon; \quad n = x, z \quad (3.101)$$

Figura 3.6: Variação de  $\tilde{G}_{x0}^{-1}$  e  $\tilde{G}_{z0}^{-1}$  em função de  $\zeta$

ou ainda:

$$\frac{1}{\zeta K_{n0} + \epsilon} < \bar{G}_{n0}(\zeta) < \frac{1}{\zeta K_{n0} - \epsilon}; \quad n = x, z \quad (3.102)$$

Os valores das componentes  $G_{xx}$  e  $G_{zz}$  em  $x = 0, z = 0$  podem ser colocados como:

$$G_{nn}(0,0) = \frac{1}{2\pi c_{44}} \left( \int_0^M \bar{G}_{n0}(\zeta) d\zeta + \int_M^\infty \bar{G}_{n0}(\zeta) d\zeta \right); \quad n = x, z \quad (3.103)$$

Mas, de (3.102), a segunda integral nesta equação deve satisfazer:

$$\int_M^\infty \frac{1}{\zeta K_{n0} + \epsilon} d\zeta < \int_M^\infty \bar{G}_{n0}(\zeta) d\zeta < \int_M^\infty \frac{1}{\zeta K_{n0} - \epsilon} d\zeta; \quad n = x, z \quad (3.104)$$

Como as integrais impróprias dos extremos divergem, pode-se concluir que as componentes  $G_{xx}$  e  $G_{zz}$  da função de Green para o espaço completo possuem uma singularidade no ponto de aplicação da carga.

É necessário, também, conhecer o comportamento das componentes da função de Green para pontos próximos ao ponto de aplicação da carga para se determinar as características da singularidade identificada. Para isto, analisam-se as componentes  $G_{xx}$  e  $G_{zz}$  para os pontos ao longo do plano dado por  $z = 0$ . Neste caso as componentes serão dadas por:

$$\begin{aligned} G_{xx}(x,0) &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \bar{G}_{x0}(\zeta) \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\ G_{zz}(x,0) &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \bar{G}_{z0}(\zeta) \cos(\delta\zeta x) d\zeta. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Cada uma destas integrais podem ser divididas em duas, subdividindo-se o intervalo de integração em dois sub-intervalos conforme a equação (3.103), resultando:

$$G_{nn}(x,0) = \frac{1}{2\pi c_{44}} [I_{1n}(x) + I_{2n}(x)]; \quad n = x, z \quad (3.106)$$

onde:

$$\begin{aligned} I_{1n}(x) &= \int_0^M \bar{G}_{n0}(\zeta) \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\ I_{2n}(x) &= \int_M^\infty \bar{G}_{n0}(\zeta) \cos(\delta\zeta x) d\zeta; \quad n = x, z \end{aligned} \quad (3.107)$$

A primeira das integrais  $I_{1n}(x)$  tem valor finito. Além disso, ela está limitada por [76]:

$$|I_{1n}(x)| \leq |I_{1n}(0)| = \left| \int_0^M \bar{G}_{n0} d\zeta \right|; \quad n = x, z \quad (3.108)$$

O comportamento de  $G_{xx}$  e  $G_{zz}$  em pontos próximos ao ponto de aplicação da carga será dado portanto pelo comportamento da segunda integral  $I_{2n}(x)$ .

Da desigualdade:

$$\frac{1}{\zeta K_{n0} + \epsilon} < \frac{1}{\zeta K_{n0}} < \frac{1}{\zeta K_{n0} - \epsilon}; \quad n = x, z \quad (3.109)$$

e de (3.102) tem-se:

$$\left| \bar{G}_{n0}(\zeta) - \frac{1}{\zeta K_{n0}} \right| |\cos(\delta\zeta x)| \leq \frac{1}{\zeta K_{n0} - \epsilon} - \frac{1}{\zeta K_{n0} + \epsilon} \quad (3.110)$$

pois  $|\cos(\delta\zeta x)| \leq 1$ , e, portanto:

$$-\left( \frac{1}{\zeta K_{n0} - \epsilon} - \frac{1}{\zeta K_{n0} + \epsilon} \right) \leq \left( \bar{G}_{n0}(\zeta) \cos(\delta\zeta x) - \frac{1}{\zeta K_{n0}} \cos(\delta\zeta x) \right) \leq \frac{1}{\zeta K_{n0} - \epsilon} - \frac{1}{\zeta K_{n0} + \epsilon} \quad (3.111)$$

Integrando os termos dessa desigualdade de  $M$  até  $\infty$ :

$$\left| I_{2n}(x) - \int_M^\infty \frac{\cos(\delta\zeta x)}{\zeta K_{n0}} d\zeta \right| \leq \int_M^\infty \left( \frac{1}{\zeta K_{n0} - \epsilon} - \frac{1}{\zeta K_{n0} + \epsilon} \right) d\zeta \quad (3.112)$$

A integral do lado direito desta inequação (3.112) é  $t_{n0}$  dado por:

$$t_{n0} = \frac{1}{K_{n0}} \ln \left( \frac{K_{n0}M - \epsilon}{K_{n0}M + \epsilon} \right) \quad n = x, z \quad (3.113)$$

que é um valor finito. Portanto o comportamento de  $I_{n2}(x)$  acompanha o da integral da esquerda de (3.112). Por sua vez, esta integral pode ser obtida analiticamente e é dada por:

$$\int_M^\infty \frac{\cos(\delta\zeta x)}{\zeta K_{n0}} d\zeta = -\frac{\text{Ci}(\delta Mx)}{K_n} \quad (3.114)$$

onde  $\text{Ci}(\delta Mx)$  é a função co-seno integral de  $\delta Mx$ . A função  $\text{Ci}(s)$  é definida como [34]:

$$\text{Ci}(s) = -\int_s^\infty \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau \quad (3.115)$$

que também pode ser expressa como:

$$\text{Ci}(s) = \mathbf{C} + \log s + \int_0^s \frac{\cos \tau - 1}{\tau} d\tau \quad (3.116)$$

onde  $C = 0,577215664 \dots$  é a constante de Euler.

Pode-se perceber que quando  $x \rightarrow 0$  o co-seno integral  $\text{Ci}(\delta Mx) \rightarrow -\infty$  devido à presença da parcela  $\log(\delta Mx)$ . Assim, a integral  $I_{2n}(x)$  apresentará o mesmo comportamento para  $x \rightarrow 0$ . Dessa forma, conclui-se que a singularidade das componentes  $G_{xx}$  e  $G_{zz}$  da função de Green no ponto de aplicação da carga tem a característica de  $\log x$ . Esta característica significa que a função de Green apresenta uma singularidade fraca na origem e, portanto, podem-se efetuar integrações dessas funções ao longo de rotas que passem por este ponto.

Quanto ao estado de tensão, as componentes que não se anulam em  $(x = 0, z = 0)$  são  $\sigma_{xxz}$ ;  $\sigma_{xxz}$  e  $\sigma_{zzz}$ . As componentes  $\sigma_{xxz}$  e  $\sigma_{zzz}$  apresentam na origem uma descontinuidade dada por  $\delta_D(x)$ , pois esta é uma das condições de contorno do problema. Quanto à componente  $\sigma_{xxz}$ , ao longo do plano horizontal dado por  $z = 0$ , utilizando-se as equações (3.94) obtém-se:

$$\sigma_{xxz}(x, z = 0) = -\frac{\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\mu_1 - \mu_2}{H_x} \cos(\delta\zeta x) d\zeta \quad (3.117)$$

Esta equação pode ser simplificada resultando:

$$\sigma_{xxz}(x, z = 0) = -\frac{\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa - 1}{\alpha} \cos(\delta\zeta x) d\zeta = \frac{\kappa - 1}{\alpha} \delta_D(x) \quad (3.118)$$

ou seja, a componente  $\sigma_{xxz}$  também tem apresenta uma descontinuidade com a característica da função delta de Dirac no ponto de aplicação da carga.

Para as funções de Green do semi-espaco podem-se obter resultados semelhantes a estes e, portanto, elas também possuem o mesmo comportamento na origem.

### 3.5 Carga aplicada na superfície de uma camada sobre base rígida

Neste caso deseja-se determinar os deslocamentos e tensões provocados por uma carga harmônica aplicada na superfície superior de uma camada de material elástico transversalmente isotrópico apoiada sobre uma base rígida como por exemplo uma camada de solo apoiada sobre o maciço rochoso.

O meio elástico é dado, neste caso por  $|x| < \infty$  e  $0 \leq z \leq h$ , onde  $h$  é a espessura da camada elástica como mostrado na figura 3.7.

O processo para se obter as funções de Green é o mesmo utilizado nos casos anteriores. Aplicam-se separadamente cargas nas direções horizontal e vertical sobre a superfície da camada elástica e se determinam os deslocamentos e tensões causadas por estas cargas.

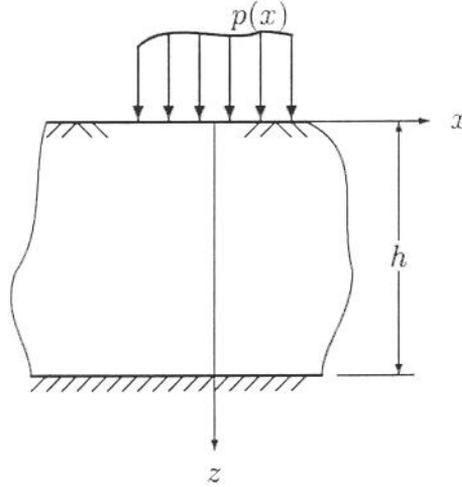


Figura 3.7: Carga sobre camada elástica apoiada sobre base rígida.

1. *Carga horizontal:*

Ao se aplicar uma carga horizontal  $p_x$  na superfície superior dessa camada as condições de contorno que devem ser obedecidas ao longo da superfície superior da camada e ao longo da interface entre a camada e a base rígida são:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz}(x, z = 0) &= -p_x(x), \\
 \sigma_{zz}(x, z = 0) &= 0, \\
 u(x, z = h) &= 0, \\
 w(x, z = h) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.119}$$

Isto caracteriza um problema de valor de contorno misto. Aplicando a transformação integral de Fourier sobre estas condições de contorno resulta:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{xz}(\lambda, 0) &= -\bar{p}_x(\lambda), \\
 \bar{\sigma}_{zz}(\lambda, 0) &= 0, \\
 \bar{u}(\lambda, h) &= 0, \\
 \bar{w}(\lambda, h) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.120}$$

Levando as condições expressas pelas equações (3.120) até as equações

(3.24), (3.33) e (3.37) obtem-se o sistema de equações:

$$\begin{aligned}
 \eta_3 A_x + \eta_3 B_x + \eta_4 C_x + \eta_4 D_x &= \frac{-\bar{p}_x}{c_{44}\delta}, \\
 \eta_5 A_x - \eta_5 B_x + \eta_6 C_x - \eta_6 D_x &= 0, \\
 \bar{\omega}_1 A_x e^{-\delta\xi_1 h} - \bar{\omega}_1 B_x e^{\delta\xi_2 h} + \bar{\omega}_2 C_x e^{-\delta\xi_2 h} - \bar{\omega}_2 D_x e^{\delta\xi_2 h} &= 0, \\
 A_x e^{-\delta\xi_1 h} + B_x e^{\delta\xi_2 h} + C_x e^{-\delta\xi_2 h} + D_x e^{\delta\xi_2 h} &= 0. \quad (3.121)
 \end{aligned}$$

A solução desse sistema de equações é:

$$\begin{aligned}
 A_x &= \frac{-\bar{p}_x - h_2^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_5 \bar{\omega}_2 - \eta_6 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}{c_{44}\delta Q} \\
 B_x &= \frac{-\bar{p}_x - h_1^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_5 \bar{\omega}_2 - h_1^2 h_2^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}{c_{44}\delta Q}, \\
 C_x &= \frac{-\bar{p}_x - h_1^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_6 \bar{\omega}_1 + \eta_5 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}{c_{44}\delta Q} \\
 D_x &= \frac{-\bar{p}_x - h_2^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_6 \bar{\omega}_1 + h_1^2 h_2^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}{c_{44}\delta Q}
 \end{aligned} \quad (3.122)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= e^{-\delta\xi_1 h}, \\
 h_2 &= e^{-\delta\xi_2 h}, \\
 Q &= -(h_1^2 + h_2^2)(\eta_4 \eta_5 + \eta_3 \eta_6)(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + \\
 &\quad (h_1^2 h_2^2 + 1)(\eta_4 \eta_5 - \eta_3 \eta_6)(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) + \\
 &\quad 4h_1 h_2 (\bar{\omega}_1 \eta_4 \eta_6 + \bar{\omega}_2 \eta_3 \eta_6)
 \end{aligned} \quad (3.123)$$

As amplitudes  $A_x$  e  $C_x$  se referem às ondas elásticas originadas diretamente pela carga  $p_x$  aplicada em  $z = 0$ , enquanto que as amplitudes  $B_x$  e  $D_x$  se referem às ondas refletidas pela superfície rígida em  $z = h$ .

## 2. Carga vertical:

Para a carga vertical  $p_z$  as condições de contorno a serem obedecidas ao longo da superfície superior da camada elástica e ao longo da interface entre a camada e a base rígida são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz}(x, z = 0) &= 0, \\
 \sigma_{zz}(x, z = 0) &= -p_z(x), \\
 u(x, z = h) &= 0, \\
 w(x, z = h) &= 0,
 \end{aligned} \quad (3.124)$$

que, da mesma forma que no caso de carga horizontal conduz ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} \eta_3 A_z + \eta_3 B_z + \eta_4 C_z + \eta_4 D_z &= 0, \\ \eta_5 A_z - \eta_5 B_z + \eta_6 C - \eta_6 D_z &= \frac{-\bar{p}_z}{c_{44}\delta}, \\ \bar{\omega}_1 A_z e^{-\delta\xi_1 h} - \bar{\omega}_1 B_z e^{\delta\xi_2 h} + \bar{\omega}_2 C_z e^{-\delta\xi_2 h} - \bar{\omega}_2 D_z e^{\delta\xi_2 h} &= 0, \\ A_z e^{-\delta\xi_1 h} + B_z e^{\delta\xi_2 h} + C_z e^{-\delta\xi_2 h} + D_z e^{\delta\xi_2 h} &= 0. \end{aligned} \quad (3.125)$$

A solução desse sistema é:

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{-\bar{p}_z - h_2^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_3 \bar{\omega}_2 + \eta_4 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}{c_{44}\delta Q} \\ B_z &= \frac{-\bar{p}_z h_1^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) - 2h_1 h_2 \eta_3 \bar{\omega}_2 - h_1^2 h_2^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}{c_{44}\delta Q} \\ C_z &= \frac{-\bar{p}_z - h_1^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_4 \bar{\omega}_1 - \eta_3 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}{c_{44}\delta Q} \\ D_z &= \frac{-\bar{p}_z h_2^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) - 2h_1 h_2 \eta_4 \bar{\omega}_1 + h_1^2 h_2^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}{c_{44}\delta Q} \end{aligned} \quad (3.126)$$

As soluções obtidas dos dois sistema de equações podem ser então utilizadas para se obter os deslocamentos e tensões no meio elástico através das equações (3.24), (3.33) e (3.37). Com a aplicação de linhas de carga unitárias horizontal e vertical as funções de Green são finalmente obtidas como nos casos anteriores. As expressões completas das funções de Green e das tensões provocadas por uma linha de carga unitária aplicada na superfície de uma camada elástica transversalmente isotrópica são dadas a seguir:

$$\begin{aligned} G_{xx} &= -\frac{1}{\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{1}{Q} \left\{ \bar{\omega}_1 \left[ -h_2^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_5 \bar{\omega}_2 - \eta_6 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta\xi_1 z} \right. \\ &\quad - \bar{\omega}_1 \left[ -h_1^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_5 \bar{\omega}_2 - h_1^2 h_2^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta\xi_1 z} \\ &\quad + \bar{\omega}_2 \left[ -h_1^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_6 \bar{\omega}_1 + \eta_5 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta\xi_2 z} \\ &\quad \left. - \bar{\omega}_2 \left[ -h_2^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_6 \bar{\omega}_1 + h_1^2 h_2^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta\xi_2 z} \right\} \\ &\quad \cos(\delta\zeta x) d\zeta \quad (3.127) \\ G_{zx} &= -\frac{1}{\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{i}{Q} \left\{ \left[ -h_2^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_5 \bar{\omega}_2 - \eta_6 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta\xi_1 z} \right. \\ &\quad \left. + \left[ -h_1^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_5 \bar{\omega}_2 - h_1^2 h_2^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta\xi_1 z} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ -h_1^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_6 \bar{\omega}_1 + \eta_5 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_2 z} \\
& + \left[ -h_2^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_6 \bar{\omega}_1 + h_1^2 h_2^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_2 z} \} \\
& \text{sen}(\delta \zeta x) d\zeta
\end{aligned} \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned}
G_{xz} &= -\frac{1}{\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{i}{Q} \left\{ \bar{\omega}_1 \left[ -h_2^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_3 \bar{\omega}_2 + \eta_4 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_1 z} \right. \\
& - \bar{\omega}_1 \left[ h_1^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) - 2h_1 h_2 \eta_3 \bar{\omega}_2 - h_1^2 h_2^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_1 z} \\
& + \bar{\omega}_2 \left[ -h_1^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_4 \bar{\omega}_1 - \eta_3 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_2 z} \\
& \left. - \bar{\omega}_2 \left[ h_2^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) - 2h_1 h_2 \eta_4 \bar{\omega}_1 + h_1^2 h_2^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_2 z} \right\} \\
& \text{sen}(\delta \zeta x) d\zeta
\end{aligned} \tag{3.129}$$

$$\begin{aligned}
G_{zz} &= -\frac{1}{\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{1}{Q} \left\{ \left[ -h_2^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_3 \bar{\omega}_2 + \eta_4 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_1 z} \right. \\
& + \left[ h_1^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) - 2h_1 h_2 \eta_3 \bar{\omega}_2 - h_1^2 h_2^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_1 z} \\
& + \left[ -h_1^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_4 \bar{\omega}_1 - \eta_3 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_2 z} \\
& \left. + \left[ h_2^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) - 2h_1 h_2 \eta_4 \bar{\omega}_1 + h_1^2 h_2^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_2 z} \right\} \\
& \cos(\delta \zeta x) d\zeta
\end{aligned} \tag{3.130}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xxx} &= -\frac{\delta}{\pi} \int_0^\infty \frac{i}{Q} \left\{ \eta_1 \left[ -h_2^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_5 \bar{\omega}_2 - \eta_6 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_1 z} \right. \\
& - \eta_1 \left[ -h_1^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_5 \bar{\omega}_2 - h_1^2 h_2^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_1 z} \\
& + \eta_2 \left[ -h_1^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_6 \bar{\omega}_1 + \eta_5 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_2 z} \\
& \left. - \eta_2 \left[ -h_2^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_6 \bar{\omega}_1 + h_1^2 h_2^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_2 z} \right\} \\
& \text{sen}(\delta \zeta x) d\zeta
\end{aligned} \tag{3.131}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xzx} &= -\frac{\delta}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{Q} \left\{ \eta_3 \left[ -h_2^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_5 \bar{\omega}_2 - \eta_6 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_1 z} \right. \\
& + \eta_3 \left[ -h_1^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_5 \bar{\omega}_2 - h_1^2 h_2^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_1 z} \\
& + \eta_4 \left[ -h_1^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_6 \bar{\omega}_1 + \eta_5 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_2 z} \\
& \left. + \eta_4 \left[ -h_2^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_6 \bar{\omega}_1 + h_1^2 h_2^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_2 z} \right\} \\
& \cos(\delta \zeta x) d\zeta
\end{aligned} \tag{3.132}$$

$$\sigma_{zzx} = -\frac{\delta}{\pi} \int_0^\infty \frac{i}{Q} \left\{ \eta_5 \left[ -h_2^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_5 \bar{\omega}_2 - \eta_6 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_1 z} \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\eta_5 \left[ -h_1^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_5 \bar{\omega}_2 - h_1^2 h_2^2 \eta_6 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_1 z} \\
& + \eta_6 \left[ -h_1^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_6 \bar{\omega}_1 + \eta_5 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_2 z} \\
& - \eta_6 \left[ -h_2^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_6 \bar{\omega}_1 + h_1^2 h_2^2 \eta_5 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_2 z} \} \\
& \text{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \tag{3.133}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xxz} &= \frac{\delta}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{Q} \left\{ \eta_1 \left[ -h_2^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_3 \bar{\omega}_2 + \eta_4 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_1 z} \right. \\
& - \eta_1 \left[ h_1^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) - 2h_1 h_2 \eta_3 \bar{\omega}_2 - h_1^2 h_2^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_1 z} \\
& + \eta_2 \left[ -h_1^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_4 \bar{\omega}_1 - \eta_3 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_2 z} \\
& \left. - \eta_2 \left[ h_2^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) - 2h_1 h_2 \eta_4 \bar{\omega}_1 + h_1^2 h_2^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_2 z} \right\} \\
& \text{cos}(\delta \zeta x) d\zeta \tag{3.134}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xxz} &= \frac{\delta}{\pi} \int_0^\infty \frac{i}{Q} \left\{ \eta_3 \left[ -h_2^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_3 \bar{\omega}_2 + \eta_4 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_1 z} \right. \\
& + \eta_3 \left[ h_1^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) - 2h_1 h_2 \eta_3 \bar{\omega}_2 - h_1^2 h_2^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_1 z} + \\
& \eta_4 \left[ -h_1^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_4 \bar{\omega}_1 - \eta_3 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_2 z} \\
& \left. + \eta_4 \left[ h_2^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) - 2h_1 h_2 \eta_4 \bar{\omega}_1 + h_1^2 h_2^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_2 z} \right\} \\
& \text{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \tag{3.135}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zzz} &= \frac{\delta}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{Q} \left\{ \eta_5 \left[ -h_2^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_3 \bar{\omega}_2 + \eta_4 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_1 z} \right. \\
& - \eta_5 \left[ h_1^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) - 2h_1 h_2 \eta_3 \bar{\omega}_2 - h_1^2 h_2^2 \eta_4 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_1 z} \\
& + \eta_6 \left[ -h_1^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + 2h_1 h_2 \eta_4 \bar{\omega}_1 - \eta_3 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{-\delta \xi_2 z} \\
& \left. - \eta_6 \left[ h_2^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) - 2h_1 h_2 \eta_4 \bar{\omega}_1 + h_1^2 h_2^2 \eta_3 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right] e^{\delta \xi_2 z} \right\} \\
& \text{cos}(\delta \zeta x) d\zeta \tag{3.136}
\end{aligned}$$

Pode-se observar que quando  $h \rightarrow \infty \Rightarrow h_1, h_2 \rightarrow 0$ . Neste caso, verifica-se facilmente que as funções de Green coincidem com as obtidas para carga aplicada na superfície do semi-espaço.

### 3.6 Carga aplicada no interior do semi-espaço

As funções de Green obtidas para o caso de carga aplicada na superfície do semi-espaço não podem ser aplicadas na solução de problemas onde as cargas são aplicadas no interior do meio semi-infinito. Quando a carga harmônica

está aplicada no interior do semi espaço a uma profundidade  $z'$  da superfície externa, como mostrado na figura 3.8, primeiramente divide-se o semi-espaço em dois meios fictícios:

- Meio 1:  $|x| < \infty$  e  $-z' \leq z < 0$ .
- Meio 2:  $|x| < \infty$  e  $0 \leq z < \infty$ .

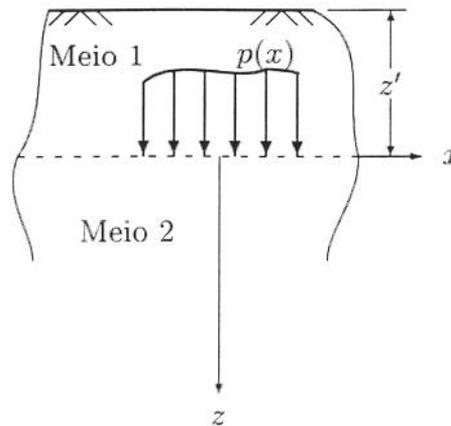


Figura 3.8: Carga no interior do semi-espaço elástico.

A seguir aplicam-se as componentes horizontal e vertical da carga separadamente na interface entre os dois meios fictícios.

1. *Carga horizontal:*

Aplicando-se  $p_x(x)$  na interface entre os dois meios ( $z = 0$ ) as condições de compatibilidade cinemática e de equilíbrio que devem ser satisfeitas pela solução do problema são:

$$\begin{aligned}
 u^{(1)}(x,0) - u^{(2)}(x,0) &= 0 \\
 w^{(1)}(x,0) - w^{(2)}(x,0) &= 0 \\
 \sigma_{xz}^{(1)}(x,0) - \sigma_{xz}^{(2)}(x,0) &= p_x(x) \\
 \sigma_{zz}^{(1)}(x,0) - \sigma_{zz}^{(2)}(x,0) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.137}$$

onde os índices superiores indicam a que meio se referem os deslocamentos e tensões.

Além dessas condições, a superfície livre do meio 1 ( $z = -z'$ ) impõe:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^{(2)}(x, -z') &= 0 \\ \sigma_{zz}^{(2)}(x, -z') &= 0\end{aligned}\quad (3.138)$$

As condições de irradiação no infinito impõem para o meio 2 implicam em  $B^{(2)} \equiv D^{(2)} \equiv 0$ . As seis funções restantes a serem determinadas são as amplitudes das ondas provenientes diretamente da carga no meio 1 ( $B^{(1)}$  e  $D^{(1)}$ ), das ondas refletidas pela superfície superior ( $A^{(1)}$  e  $C^{(1)}$ ) e as ondas provenientes diretamente da carga no meio 2 ( $A^{(2)}$  e  $C^{(2)}$ ).

Aplicando-se a transformação integral de Fourier sobre as condições de contorno expressas pelas equações (3.137) e (3.138) e substituindo o resultado obtido nas equações (3.24), (3.33) e (3.37) resulta o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1 A_x^{(1)} - \bar{\omega}_1 B_x^{(1)} + \bar{\omega}_2 C_x^{(1)} - \bar{\omega}_2 D_x^{(1)} - \bar{\omega}_1 A_x^{(2)} - \bar{\omega}_2 C_x^{(2)} &= 0 \\ A_x^{(1)} + B_x^{(1)} + C_x^{(1)} + D_x^{(1)} - A_x^{(2)} - C_x^{(2)} &= 0 \\ \eta_3 A_x^{(1)} + \eta_3 B_x^{(1)} + \eta_4 C_x^{(1)} + \eta_4 D_x^{(1)} - \eta_3 A_x^{(2)} - \eta_4 C_x^{(2)} &= \frac{\bar{p}_x}{c_{44}\delta} \\ \eta_5 A_x^{(1)} - \eta_5 B_x^{(1)} + \eta_6 C_x^{(1)} - \eta_6 D_x^{(1)} - \eta_5 A_x^{(2)} - \eta_6 C_x^{(2)} &= 0 \\ \eta_3 A_x^{(1)} z_1^{-1} + \eta_3 B_x^{(1)} z_1 + \eta_4 C_x^{(1)} z_2^{-1} + \eta_4 D_x^{(1)} z_2 &= 0 \\ \eta_5 A_x^{(1)} z_1^{-1} - \eta_5 B_x^{(1)} z_1 + \eta_6 C_x^{(1)} z_2^{-1} - \eta_6 D_x^{(1)} z_2 &= 0\end{aligned}\quad (3.139)$$

onde

$$\begin{aligned}z_1 &= e^{-\delta\xi_1 z'} \\ z_2 &= e^{-\delta\xi_2 z'}\end{aligned}\quad (3.140)$$

A solução do sistema de equações é:

$$\begin{aligned}A_x^{(1)} &= -\frac{\bar{p}_x}{2c_{44}\delta} \frac{z_1^2 (\eta_3\eta_6 + \eta_4\eta_5) - 2\eta_4\eta_6 z_1 z_2}{(\eta_3 - \eta_4) (\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5)} \\ B_x^{(1)} &= \frac{\bar{p}_x}{2c_{44}\delta} \frac{1}{(\eta_3 - \eta_4)} \\ C_x^{(1)} &= -\frac{\bar{p}_x}{2c_{44}\delta} \frac{z_2^2 (\eta_3\eta_6 + \eta_4\eta_5) - 2\eta_3\eta_5 z_1 z_2}{(\eta_3 - \eta_4) (\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5)} \\ D_x^{(1)} &= -\frac{\bar{p}_x}{2c_{44}\delta} \frac{1}{(\eta_3 - \eta_4)} \\ A_x^{(2)} &= -\frac{\bar{p}_x}{2c_{44}\delta} \frac{z_1^2 (\eta_3\eta_6 + \eta_4\eta_5) - 2\eta_4\eta_6 z_1 z_2 + \eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5}{(\eta_3 - \eta_4) (\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5)}\end{aligned}$$

$$C_x^{(2)} = -\frac{\bar{p}_x}{2c_{44}\delta} \frac{z_2^2 (\eta_6\eta_3 + \eta_4\eta_5) - 2\eta_3\eta_5 z_1 z_2 - \eta_6\eta_3 + \eta_4\eta_5}{(\eta_3 - \eta_4)(\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5)} \quad (3.141)$$

## 2. Carga vertical:

No caso de uma carga vertical  $p_z$  aplicada no interior do semi-espço, utilizando-se o mesmo processo indicado para a carga horizontal, obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 A_z^{(1)} - \bar{\omega}_1 B_z^{(1)} + \bar{\omega}_2 C_z^{(1)} - \bar{\omega}_2 D_z^{(1)} - \bar{\omega}_1 A_z^{(2)} - \bar{\omega}_2 C_z^{(2)} &= 0 \\ A_z^{(1)} + B_z^{(1)} + C_z^{(1)} + D_z^{(1)} - A_z^{(2)} - C_z^{(2)} &= 0 \\ \eta_3 A_z^{(1)} + \eta_3 B_z^{(1)} + \eta_4 C_z^{(1)} + \eta_4 D_z^{(1)} - \eta_3 A_z^{(2)} - \eta_4 C_z^{(2)} &= 0 \\ \eta_5 A_z^{(1)} - \eta_5 B_z^{(1)} + \eta_6 C_z^{(1)} - \eta_6 D_z^{(1)} - \eta_5 A_z^{(2)} - \eta_6 C_z^{(2)} &= \frac{\bar{p}_z}{c_{44}\delta} \\ \eta_3 A_z^{(1)} z_1^{-1} + \eta_3 B_z^{(1)} z_1 + \eta_4 C_z^{(1)} z_2^{-1} + \eta_4 D_z^{(1)} z_2 &= 0 \\ \eta_5 A_z^{(1)} z_1^{-1} - \eta_5 B_z^{(1)} z_1 + \eta_6 C_z^{(1)} z_2^{-1} - \eta_6 D_z^{(1)} z_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.142)$$

A solução é:

$$\begin{aligned} A_z^{(1)} &= -\frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{\omega_2 (\eta_4\eta_5 + \eta_3\eta_6) z_1^2 - 2\omega_1\eta_4\eta_6 z_1 z_2}{(\bar{\omega}_1\eta_6 - \bar{\omega}_2\eta_5)(\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5)} \\ B_z^{(1)} &= \frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{\bar{\omega}_2}{(\bar{\omega}_1\eta_6 - \bar{\omega}_2\eta_5)} \\ C_z^{(1)} &= -\frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{\omega_1 (\eta_4\eta_5 + \eta_3\eta_6) z_2^2 - 2\omega_2\eta_3\eta_5 z_1 z_2}{(\bar{\omega}_1\eta_6 - \bar{\omega}_2\eta_5)(\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5)} \\ D_z^{(1)} &= -\frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{\bar{\omega}_1}{(\bar{\omega}_1\eta_6 - \bar{\omega}_2\eta_5)} \\ A_z^{(2)} &= -\frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{\omega_2 (\eta_4\eta_5 z_1^2 + \eta_4\eta_5 + \eta_3\eta_6 z_1^2 - \eta_3\eta_6) - 2\omega_1\eta_6\eta_4 z_1 z_2}{(\bar{\omega}_1\eta_6 - \bar{\omega}_2\eta_5)(\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5)} \\ C_z^{(2)} &= -\frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{\omega_1 (\eta_4\eta_5 z_2^2 - \eta_4\eta_5 + \eta_3\eta_6 z_2^2 + \eta_6\eta_3) - 2\bar{\omega}_2\eta_3\eta_5 z_1 z_2}{(\bar{\omega}_1\eta_6 - \bar{\omega}_2\eta_5)(\eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5)} \end{aligned} \quad (3.143)$$

Note-se que nos denominadores dos resultados apresentados nas equações (3.143) aparece o termo  $H_z = \bar{\omega}_1\eta_6 - \bar{\omega}_2\eta_5$ . Este termo apresenta problemas para a integração numérica, como visto no item 3.3.3. Assim é necessário para a carga vertical utilizar a formulação alternativa descrita naquele item. Aplicando-se as condições de contorno nas equações (3.86) e (3.87) segundo

esta formulação alternativa resulta o sistema de equações:

$$\begin{aligned}
 A_z^{(1)} + B_z^{(1)} + C_z^{(1)} + D_z^{(1)} - A_z^{(2)} - C_z^{(2)} &= 0 \\
 \omega_1 A_z^{(1)} - \omega_1 B_z^{(1)} + \omega_2 C_z^{(1)} - \omega_2 D_z^{(1)} - \omega_1 A_z^{(2)} - \omega_2 C_z^{(2)} &= 0 \\
 \mu_3 A_z^{(1)} - \mu_3 B_z^{(1)} + \mu_4 C_z^{(1)} - \mu_4 D_z^{(1)} - \mu_3 A_z^{(2)} - \mu_4 C_z^{(2)} &= 0 \\
 \mu_5 A_z^{(1)} + \mu_5 B_z^{(1)} + \mu_6 C_z^{(1)} + \mu_6 D_z^{(1)} - \mu_5 A_z^{(2)} - \mu_6 C_z^{(2)} &= \frac{\bar{p}_z}{c_{44}\delta} \\
 \mu_3 A_z^{(1)} z_1^{-1} - \mu_3 B_z^{(1)} z_1 + \mu_4 C_z^{(1)} z_2^{-1} - \mu_4 D_z^{(1)} z_2 &= 0 \\
 \mu_5 A_z^{(1)} z_1^{-1} + \mu_5 B_z^{(1)} z_1 + \mu_6 C_z^{(1)} z_2^{-1} + \mu_6 D_z^{(1)} z_2 &= 0 \quad (3.144)
 \end{aligned}$$

A solução desse sistema de equações é:

$$\begin{aligned}
 A_z^{(1)} &= -\frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{(\mu_3\mu_6 + \mu_5\mu_4) z_1^2 - 2\mu_4\mu_6 z_1 z_2}{(\mu_6 - \mu_5)(\mu_3\mu_6 - \mu_4\mu_5)} \\
 B_z^{(1)} &= -\frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{1}{(\mu_6 - \mu_5)} \\
 C_z^{(1)} &= -\frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{(\mu_3\mu_6 + \mu_5\mu_4) z_2^2 - 2\mu_5\mu_3 z_1 z_2}{(\mu_6 - \mu_5)(\mu_3\mu_6 - \mu_4\mu_5)} \\
 D_z^{(1)} &= \frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{1}{(\mu_6 - \mu_5)} \\
 A_z^{(2)} &= -\frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{(\mu_3\mu_6 + \mu_5\mu_4) z_1^2 - 2\mu_4\mu_6 z_2 z_1 - \mu_3\mu_6 + \mu_4\mu_5}{(\mu_6 - \mu_5)(\mu_3\mu_6 - \mu_4\mu_5)} \\
 C_z^{(2)} &= -\frac{\bar{p}_z}{2c_{44}\delta} \frac{(\mu_3\mu_6 + \mu_5\mu_4) z_2^2 - 2\mu_5\mu_3 z_2 z_1 + \mu_3\mu_6 - \mu_4\mu_5}{(\mu_6 - \mu_5)(\mu_3\mu_6 - \mu_4\mu_5)} \quad (3.145)
 \end{aligned}$$

Para se obter as funções de Green, substitui-se os resultados expressos pelas equações (3.141) nas equações (3.24), (3.33) e (3.37) e os resultados apresentados nas equações (3.145) nas equações (3.86) e (3.87). Em seguida aplicam-se as linhas de carga unitárias concentradas nas direções horizontal e vertical e finalmente procede-se à transformação integral inversa de Fourier. Os resultados para os meios 1 e 2 podem ser unificados em:

$$\begin{aligned}
 G_{xx}(x,z) &= -\frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{1}{H_x} \left[ \bar{\omega}_1 \left( \frac{K_1}{R} e^{-\delta\xi_1 z} + e^{-\delta\xi_1 |z|} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \bar{\omega}_2 \left( \frac{K_2}{R} e^{-\delta\xi_2 z} - e^{-\delta\xi_2 |z|} \right) \right] \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\
 G_{zx}(x,z) &= -\frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{i}{H_x} \left[ \frac{K_1}{R} e^{-\delta\xi_1 z} + I e^{-\delta\xi_1 |z|} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{K_2}{R} e^{-\delta\xi_2 z} - I e^{-\delta\xi_2 |z|} \right] \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{xz}(x,z) &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{i}{H_x} \left[ \frac{K'_1}{R'} e^{-\delta\xi_1 z} - I e^{-\delta\xi_1|z|} + \right. \\
&\quad \left. \frac{K'_2}{R'} e^{-\delta\xi_2 z} + I e^{-\delta\xi_2|z|} \right] \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
G_{zz}(x,z) &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{1}{H_x} \left[ \bar{\omega}_1 \left( \frac{K'_1}{R'} e^{-\delta\xi_1 z} - e^{-\delta\xi_1|z|} \right) + \right. \\
&\quad \left. \bar{\omega}_2 \left( \frac{K'_2}{R'} e^{-\delta\xi_2 z} + e^{-\delta\xi_2|z|} \right) \right] \cos(\delta\zeta x) d\zeta \quad (3.146)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xxx}(x,z) &= -\frac{\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{i}{H_x} \left[ \eta_1 \left( \frac{K_1}{R} e^{-\delta\xi_1 z} + e^{-\delta\xi_1|z|} \right) + \right. \\
&\quad \left. \eta_2 \left( \frac{K_2}{R} e^{-\delta\xi_2 z} - e^{-\delta\xi_2|z|} \right) \right] \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
\sigma_{xzx}(x,z) &= -\frac{\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_x} \left[ \eta_3 \left( \frac{K_1}{R} e^{-\delta\xi_1 z} + I e^{-\delta\xi_1|z|} \right) + \right. \\
&\quad \left. \eta_4 \left( \frac{K_2}{R} e^{-\delta\xi_2 z} - I e^{-\delta\xi_2|z|} \right) \right] \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\
\sigma_{zzx}(x,z) &= -\frac{\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{i}{H_x} \left[ \eta_5 \left( \frac{K_1}{R} e^{-\delta\xi_1 z} + e^{-\delta\xi_1|z|} \right) + \right. \\
&\quad \left. \eta_6 \left( \frac{K_2}{R} e^{-\delta\xi_2 z} - e^{-\delta\xi_2|z|} \right) \right] \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
\sigma_{xxz}(x,z) &= \frac{\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_x} \left[ \mu_1 \left( \frac{K'_1}{R'} e^{-\delta\xi_1 z} - I e^{-\delta\xi_1|z|} \right) + \right. \\
&\quad \left. \mu_2 \left( \frac{K'_2}{R'} e^{-\delta\xi_2 z} + I e^{-\delta\xi_2|z|} \right) \right] \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\
\sigma_{xzz}(x,z) &= \frac{\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_x} \left[ \mu_3 \left( \frac{K'_1}{R'} e^{-\delta\xi_1 z} - e^{-\delta\xi_1|z|} \right) + \right. \\
&\quad \left. \mu_4 \left( \frac{K'_2}{R'} e^{-\delta\xi_2 z} + e^{-\delta\xi_2|z|} \right) \right] \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
\sigma_{zzz}(x,z) &= \frac{\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_x} \left[ \mu_5 \left( \frac{K'_1}{R'} e^{-\delta\xi_1 z} - I e^{-\delta\xi_1|z|} \right) + \right. \\
&\quad \left. \mu_5 \left( \frac{K'_2}{R'} e^{-\delta\xi_2 z} + I e^{-\delta\xi_2|z|} \right) \right] \cos(\delta\zeta x) d\zeta \quad (3.147)
\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
K_1 &= (\eta_3\eta_6 + \eta_4\eta_5) z_1^2 - 2\eta_4\eta_6 z_1 z_2 \\
K_2 &= (\eta_3\eta_6 + \eta_4\eta_5) z_2^2 - 2\eta_3\eta_5 z_1 z_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K'_1 &= (\mu_3\mu_6 + \mu_4\mu_5) z_1^2 - 2\mu_4\mu_6 z_1 z_2 \\
K'_2 &= (\mu_3\mu_6 + \mu_4\mu_5) z_2^2 - 2\mu_3\mu_5 z_1 z_2 \\
R &= \eta_3\eta_6 - \eta_4\eta_5 \\
R' &= \mu_3\mu_6 - \mu_4\mu_5
\end{aligned} \tag{3.148}$$

Deve-se notar que se pode obter as funções de Green para carga aplicada sobre a superfície do semi-espço elástico impondo-se  $z' = 0$ . Neste caso,  $z_1 = z_2 = 1$ . Substituindo-se estes valores nos resultados das equações (3.141) e (3.143) obtêm-se para  $A_x^{(2)}, C_x^{(2)}, A_z^{(2)}$  e  $C_z^{(2)}$  os mesmos resultados das equações (3.44) e (3.47).

Pode-se também obter as funções de Green para carga aplicada no interior do espaço infinito. Para isto impõe-se  $z' \rightarrow \infty$  o que implica em  $z_1 = z_2 = 0$ . Substituindo-se estes valores nos resultados das equações (3.141) e (3.143) obtêm-se  $A_x^{(1)} = C_x^{(1)} = A_z^{(1)} = C_z^{(1)} = 0$ . Para as outras constantes obtêm-se os mesmos resultados das equações (3.66) e (3.69).

Pode-se também perceber que as funções de Green obtidas para carga no interior do semi-espço podem ser vistas como uma soma das funções obtidas para carga no interior do espço completo com o efeito da ocorrência de uma superfície livre em  $z = -z'$ . Nas equações (3.146) e (3.147) estas duas parcelas podem ser claramente percebidas. As parcelas que indicam o efeito da superfície livre são aquelas multiplicadas por  $\exp(-\delta\xi_i z)$  e as parcelas da solução para o espço completo são as multiplicadas por  $\exp(-\delta\xi_i |z|)$ .

### 3.7 Comentários finais

Ao longo deste capítulo foram desenvolvidas soluções gerais para as equações diferenciais de movimento através da aplicação da transformação integral de Fourier sobre a variável espacial  $x$  e obtidas funções de Green para vários casos de condições de contorno diferentes. Foram também desenvolvidos métodos numéricos para a aplicação da transformação inversa de Fourier, necessária para se obter os resultados no domínio de  $x$ . A análise do comportamento das funções de Green para carga aplicada no interior de um espço elástico infinito para pontos próximos ao ponto de aplicação desta carga mostrou que estas funções apresentam uma singularidade no ponto de aplicação da linha de carga concentrada e que para os deslocamentos esta singularidade é do tipo logarítmica. Para as componentes das tensões, por outro lado, a singularidade tem a característica da função delta de Dirac.

Cabe notar que a aplicação da transformação integral de Fourier poderia ter sido feita na variável  $z$  ao invés de  $x$ . Neste caso a solução geral das equações diferenciais do movimento seria inteiramente similar às obtidas aqui,

apenas com a troca das constantes elásticas  $\alpha$  por  $\beta$  e vice-versa. No entanto esta solução poderia ser utilizada apenas na determinação das funções de Green para carga aplicada no interior de um meio elástico infinito, pois para todos os outros casos as condições de contorno são impostas ao longo de planos horizontais.

O efeito de cargas distribuídas ao longo de superfícies horizontais pode ser obtido por dois diferentes caminhos. Um desses caminhos, mais geral, consiste na integração das funções de Green multiplicadas pela distribuição da carga ao longo do seu plano de aplicação. A outra alternativa é se obter a transformada de Fourier da carga e utilizá-la em lugar da transformada da linha de carga concentrada na determinação de *funções de influência*, que são versões das funções de Green para cargas distribuídas. Este é o assunto tratado no próximo capítulo deste trabalho.

## Capítulo 4

# Cargas Distribuídas. Funções de Influência

### 4.1 Apresentação

No capítulo anterior foram desenvolvidas soluções para o deslocamento e tensões causadas num meio transversalmente isotrópico por uma linha de carga harmônica concentrada, pelas funções de Green. Para se obter o efeito de cargas distribuídas normalmente se efetua uma integração do efeito dessas funções de Green ponderada pela função que descreve a distribuição dessa carga, como ilustrado na figura 4.1.

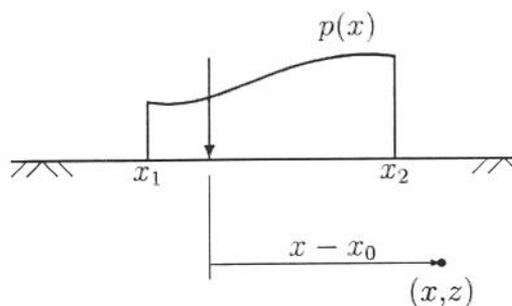


Figura 4.1: Integração da função de Green para a determinação do efeito de  $p(x)$

Para se determinar o efeito sobre um ponto de coordenadas  $(x, z)$  de uma carga com distribuição dada por  $p(x)$  entre os pontos  $x = x_1$  e  $x = x_2$

ao longo da superfície do semi-espaço elástico, por exemplo, executa-se a operação:

$$u_i(x, z) = \int_{x_1}^{x_2} G_{ij}(x - x_0, z) p_j(x_0) dx_0 \quad (4.1)$$

onde  $u_i$  é o deslocamento do ponto  $(x, z)$  na direção  $i$ ,  $G_{ij}$  é a componente da função de Green na direção  $i$  devido a uma linha de carga unitária aplicada na direção  $j$  e  $p_j$  é a componente na direção  $j$  da distribuição da carga  $p(x)$ . O mesmo procedimento pode ser utilizado para a determinação do estado de tensão no ponto  $(x, z)$ .

Esta técnica é empregada em geral por muitos processos baseados no método da equação integral de contorno. Nestes processos normalmente supõe-se um modelo de distribuição (constante, linear, quadrático, etc.) para as incógnitas do problema (tensões ou deslocamentos) ao longo dos elementos que compõem o seu contorno e estas distribuições são utilizadas em composição com as funções de Green. A vantagem desse processo é a sua generalidade pois pode-se executar esta operação com qualquer tipo de distribuição de carga ao longo de qualquer superfície.

As funções de Green obtidas, porém, são expressas por integrais infinitas que devem ser calculadas por processos de integração numéricos, como já vistos, e sua composição com uma distribuição de carga qualquer requer uma segunda integração numérica (agora no espaço), resultando dessa forma numa integração numérica dupla de alto custo computacional. Além desse fato, algumas das componentes das funções de Green apresentam uma singularidade no ponto de aplicação da linha de carga concentrada, como comprovado no capítulo anterior. Se o ponto  $(x, z)$  onde se pretende determinar o efeito da carga distribuída (ponto de observação) se encontra sob esta carga ( $x_1 \leq x \leq x_2; z = 0$ ), ou seja, dentro da rota de integração, a integral no espaço será imprópria pois deverá ser determinado um valor de  $G_{ij}(x - x_0 = 0, z = 0)$ . Mesmo sendo esta singularidade integrável, será preciso empregar processos numéricos especiais que demandarão um esforço computacional ainda maior.

Para se evitar estas dificuldades, neste item serão deduzidas *funções de influência* que fornecem o efeito de cargas distribuídas diretamente, sem que seja necessária a segunda integração mencionada acima. A limitação dessa abordagem se encontra no fato de que é necessária uma função de influência diferente para cada tipo de distribuição de carga. No entanto, é possível obter o efeito de uma grande variedade de distribuições simplesmente combinando-se um número reduzido de funções de influência. Em especial, para distribuições de carga representadas por polinômios de grau  $n$ , o seu efeito pode ser obtido pela superposição de  $n$  funções de influência.

## 4.2 Distribuição uniforme

### 4.2.1 Carga aplicada sobre o semi-espço.

O caso mais simples de carga distribuída é o do carregamento uniforme. Neste caso a carga dinâmica é aplicada numa faixa de largura  $2a$  centrada na origem do sistema de coordenadas distribuída com uma intensidade  $p_0$  constante entre  $x = -a$  e  $x = a$ .

Para se determinar o efeito deste tipo de carregamento decompõe-se  $p_0$  em suas componentes  $p_x$  e  $p_z$  nas direções horizontal e vertical respectivamente, como mostrado na figura 4.2. O efeito dessas duas componentes é obtido pelas funções de influência do carregamento constante.

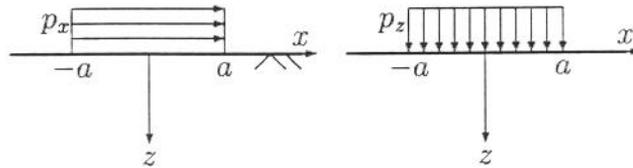


Figura 4.2: Componentes  $p_x$  e  $p_z$  da carga uniforme

Estas funções de influência são obtidas impondo-se nas condições de contorno do problema tensões unitárias nas direções horizontal e vertical. Para a carga horizontal unitária estas condições de contorno são dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}(x, z = 0) &= -1, |x| \leq a, \\ \sigma_{xz}(x, z = 0) &= 0, |x| > a, \\ \sigma_{zz}(x, z = 0) &= 0.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Para uma carga uniforme unitária aplicada na direção vertical as condições de contorno são dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}(x, z = 0) &= 0, \\ \sigma_{zz}(x, z = 0) &= -1, |x| \leq a, \\ \sigma_{zz}(x, z = 0) &= 0, |x| > a.\end{aligned}\tag{4.3}$$

A aplicação da transformação integral de Fourier sobre estas condições de contorno resulta para a carga na direção horizontal em:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xz}(\lambda, 0) &= -\frac{2 \operatorname{sen}(\lambda a)}{\sqrt{2\pi\lambda}}, \\ \bar{\sigma}_{zz}(\lambda, 0) &= 0\end{aligned}\tag{4.4}$$

e para a carga na direção vertical em:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xz}(\lambda, 0) &= 0, \\ \bar{\sigma}_{zz}(\lambda, 0) &= -\frac{2 \operatorname{sen}(\lambda a)}{\sqrt{2\pi\lambda}}.\end{aligned}\quad (4.5)$$

A aplicação dessas condições de contorno no problema da carga harmônica aplicada sobre a superfície do semi-espaco transversalmente isotrópico resulta nas seguintes funções de influência para os deslocamentos e tensões:

$$\begin{aligned}u_{cx}(x, z) &= -\frac{2}{\pi c_{44}\delta} \int_0^\infty \frac{1}{R_c} (\eta_6 \bar{\omega}_1 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_5 \bar{\omega}_2 e^{-\delta \xi_2 z}) \cos(\delta \zeta x) d\zeta \\ w_{cx}(x, z) &= -\frac{2i}{\pi c_{44}\delta} \int_0^\infty \frac{1}{R_c} (\eta_6 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_5 e^{-\delta \xi_2 z}) \operatorname{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \\ u_{cz}(x, z) &= \frac{2i}{\pi c_{44}\delta} \int_0^\infty \frac{1}{R_c} (\eta_4 \bar{\omega}_1 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 \bar{\omega}_2 e^{-\delta \xi_2 z}) \operatorname{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \\ w_{cz}(x, z) &= \frac{2}{\pi c_{44}\delta} \int_0^\infty \frac{1}{R_c} (\eta_4 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 e^{-\delta \xi_2 z}) \cos(\delta \zeta x) d\zeta\end{aligned}\quad (4.6)$$

e

$$\begin{aligned}\sigma_{cxxx}(x, z) &= -\frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{R_c} (\eta_1 \eta_6 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_2 \eta_5 e^{-\delta \xi_2 z}) \operatorname{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \\ \sigma_{cxzx}(x, z) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{R_c} (\eta_3 \eta_6 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_4 \eta_5 e^{-\delta \xi_2 z}) \cos(\delta \zeta x) d\zeta \\ \sigma_{czzx}(x, z) &= -\frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{R_c} \eta_5 \eta_6 (e^{-\delta \xi_1 z} - e^{-\delta \xi_2 z}) \operatorname{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \\ \sigma_{cxxxz}(x, z) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{R_c} (\eta_1 \eta_4 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_2 \eta_3 e^{-\delta \xi_2 z}) \cos(\delta \zeta x) d\zeta \\ \sigma_{cxzz}(x, z) &= \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{R_c} \eta_3 \eta_4 (e^{-\delta \xi_1 z} - e^{-\delta \xi_2 z}) \operatorname{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \\ \sigma_{czzz}(x, z) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{R_c} (\eta_4 \eta_5 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 \eta_6 e^{-\delta \xi_2 z}) \cos(\delta \zeta x) d\zeta\end{aligned}\quad (4.7)$$

onde

$$R_c = \frac{\zeta (\eta_3 \eta_6 - \eta_4 \eta_5)}{\operatorname{sen}(\delta \zeta a)} \quad (4.8)$$

O prefixo “c” que aparece à frente dos índices das componentes do deslocamento e do estado de tensão indica que as funções de influência se referem a uma carga dinâmica com distribuição uniforme (constante).

Da mesma forma que nas funções de Green (e por este motivo), pode-se aqui também demonstrar que  $u_{cz} = -w_{cx}$  para os pontos na superfície do

semi-espaço ( $z = 0$ ). Isto significa que para os pontos ao longo de  $z = 0$  (e apenas nestes pontos) o tensor de Green e, portanto, o tensor das funções de influência é antisimétrico. Vale lembrar que para o caso de carga aplicada no interior de um espaço infinito foi demonstrado no capítulo anterior que o tensor de Green é simétrico, ou seja,  $G_{zx} = G_{xz}$  para *todos* os pontos do espaço infinito.

### 4.2.2 Carga no interior do espaço completo.

A aplicação deste mesmo procedimento para o caso da faixa de carga uniforme aplicada no interior de um meio infinito (espaço completo) resulta nas seguintes funções de influência para os deslocamentos:

$$\begin{aligned} u_{cx}(x,z) &= -\frac{1}{\pi c_{44}\delta} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} (\bar{\omega}_1 e^{-\delta\xi_1|z|} - \bar{\omega}_2 e^{-\delta\xi_2|z|}) \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\ w_{cx}(x,z) &= -\frac{Ii}{\pi c_{44}\delta} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} (e^{-\delta\xi_1|z|} - e^{-\delta\xi_2|z|}) \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\ u_{cz}(x,z) &= -\frac{Ii}{\pi c_{44}\delta} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} (e^{-\delta\xi_1|z|} - e^{-\delta\xi_2|z|}) \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\ w_{cz}(x,z) &= -\frac{1}{\pi c_{44}\delta} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} (\omega_1 e^{-\delta\xi_1|z|} - \omega_2 e^{-\delta\xi_2|z|}) \cos(\delta\zeta x) d\zeta \quad (4.9) \end{aligned}$$

e as tensões ficarão:

$$\begin{aligned} \sigma_{cxxx}(x,z) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} (\eta_1 e^{-\delta\xi_1|z|} - \eta_2 e^{-\delta\xi_2|z|}) \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\ \sigma_{cxzx}(x,z) &= -\frac{I}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} (\eta_3 e^{-\delta\xi_1|z|} - \eta_4 e^{-\delta\xi_2|z|}) \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\ \sigma_{czzx}(x,z) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} (\eta_5 e^{-\delta\xi_1|z|} - \eta_6 e^{-\delta\xi_2|z|}) \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\ \sigma_{cxxx}(x,z) &= -\frac{I}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} (\mu_1 e^{-\delta\xi_1|z|} - \mu_2 e^{-\delta\xi_2|z|}) \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\ \sigma_{cxzz}(x,z) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} (\mu_3 e^{-\delta\xi_1|z|} - \mu_4 e^{-\delta\xi_2|z|}) \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\ \sigma_{czzz}(x,z) &= -\frac{I}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} (\mu_5 e^{-\delta\xi_1|z|} - \mu_6 e^{-\delta\xi_2|z|}) \cos(\delta\zeta x) d\zeta. \quad (4.10) \end{aligned}$$

onde

$$H_c = \frac{\zeta (\eta_3 - \eta_4)}{\text{sen}(\delta\zeta a)} \quad (4.11)$$

As equações (4.9) mostram que para o caso de uma carga distribuída uniforme aplicada no interior do meio elástico transversalmente isotrópico resulta  $u_{cz} = w_{cx}$  para qualquer ponto  $(x,z)$ .

### 4.2.3 Carga no interior do semi-espço

Utilizando-se o mesmo processo aplicado nos itens anteriores podem-se obter também as funções de influência correspondentes ao caso de carga aplicada no interior do semi-espço. São a seguir apresentadas as expressões das funções de influência de uma carga uniforme distribuída horizontalmente no interior de um semi-espço elástico transversalmente isotrópico:

$$\begin{aligned}
 u_{cx}(x,z) &= -\frac{1}{\pi c_{44}\delta} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} \left[ \bar{\omega}_1 \left( \frac{K_1}{R} e^{-\delta\xi_1 z} + e^{-\delta\xi_1|z|} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \bar{\omega}_2 \left( \frac{K_2}{R} e^{-\delta\xi_2 z} - e^{-\delta\xi_2|z|} \right) \right] \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\
 w_{cx}(x,z) &= -\frac{i}{\pi c_{44}\delta} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} \left[ \frac{K_1}{R} e^{-\delta\xi_1 z} + I e^{-\delta\xi_1|z|} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{K_2}{R} e^{-\delta\xi_2 z} - I e^{-\delta\xi_2|z|} \right] \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
 u_{cz}(x,z) &= \frac{i}{\pi c_{44}\delta} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} \left[ \frac{K'_1}{R'} e^{-\delta\xi_1 z} - I e^{-\delta\xi_1|z|} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{K'_2}{R'} e^{-\delta\xi_2 z} + I e^{-\delta\xi_2|z|} \right] \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
 w_{cz}(x,z) &= \frac{1}{\pi c_{44}\delta} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} \left[ \bar{\omega}_1 \left( \frac{K'_1}{R'} e^{-\delta\xi_1 z} - e^{-\delta\xi_1|z|} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \bar{\omega}_2 \left( \frac{K'_2}{R'} e^{-\delta\xi_2 z} + e^{-\delta\xi_2|z|} \right) \right] \cos(\delta\zeta x) d\zeta \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{cxxx}(x,z) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} \left[ \eta_1 \left( \frac{K_1}{R} e^{-\delta\xi_1 z} + e^{-\delta\xi_1|z|} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \eta_2 \left( \frac{K_2}{R} e^{-\delta\xi_2 z} - e^{-\delta\xi_2|z|} \right) \right] \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
 \sigma_{cxzz}(x,z) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} \left[ \eta_3 \left( \frac{K_1}{R} e^{-\delta\xi_1 z} + I e^{-\delta\xi_1|z|} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \eta_4 \left( \frac{K_2}{R} e^{-\delta\xi_2 z} + -I e^{-\delta\xi_2|z|} \right) \right] \cos(\delta\zeta x) d\zeta \\
 \sigma_{czzx}(x,z) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} \left[ \eta_5 \left( \frac{K_1}{R} e^{-\delta\xi_1 z} + e^{-\delta\xi_1|z|} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \eta_6 \left( \frac{K_2}{R} e^{-\delta\xi_2 z} - e^{-\delta\xi_2|z|} \right) \right] \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
 \sigma_{cxxx}(x,z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} \left[ \mu_1 \left( \frac{K'_1}{R'} e^{-\delta\xi_1 z} - I e^{-\delta\xi_1|z|} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{cxzz}(x,z) &= \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} \left[ \mu_3 \left( \frac{K'_1}{R'} e^{-\delta\xi_1 z} - e^{-\delta\xi_1 |z|} \right) + \right. \\
&\quad \left. \mu_4 \left( \frac{K'_2}{R'} e^{-\delta\xi_2 z} + e^{-\delta\xi_2 |z|} \right) \right] \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
\sigma_{czzz}(x,z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{H_c} \left[ \mu_5 \left( \frac{K'_1}{R'} e^{-\delta\xi_1 z} - I e^{-\delta\xi_1 |z|} \right) + \right. \\
&\quad \left. \mu_5 \left( \frac{K'_2}{R'} e^{-\delta\xi_2 z} + I e^{-\delta\xi_2 |z|} \right) \right] \cos(\delta\zeta x) d\zeta \quad (4.13)
\end{aligned}$$

As definições  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K'_1$ ,  $K'_2$ ,  $R$  e  $R'$  estão dadas no capítulo 3 pelas equações (3.148).

Para se obter as funções de influência para cargas na superfície do meio elástico basta fazer  $z' = 0$  o que implica em  $z_1 = z_2 = z'_1 = z'_2 = 1$ .

Muitas vezes é mais cômodo adotar-se a origem dos sistema de coordenadas na superfície superior do meio elástico. Neste caso basta substituir nas equações (4.12) e (4.13)  $z$  por  $z - z'$ .

## 4.3 Resultados numéricos

### 4.3.1 Carga aplicada na superfície do semi-espço.

A fim de se apreciar a influência da anisotropia sobre o comportamento do meio contínuo quando submetido a uma faixa de carga dinâmica com distribuição uniforme de intensidade  $p_0$ , bem como para comparar os resultados das expressões aqui deduzidas com os apresentados por outros autores, são mostrados neste tópico alguns gráficos com valores numéricos calculados. Neste processo de validação os resultados são comparados com valores obtidos pelo método desenvolvido por Mesquita e Romanini [49] para meios viscoelásticos isotrópicos e com valores obtidos pelo método desenvolvido por Rajapakse e Wang [67] para meios elásticos ortotrópicos. Este último método é similar ao aqui desenvolvido. A diferença está na forma da integração numérica. Enquanto que o método aqui proposto adota um amortecimento interno no material que faz com que os pontos de singularidade se afastem do eixo real do número de onda normalizado  $\zeta$ , o método proposto por Rajapakse e Wang realiza a integração numérica por um processo que trata a variável de integração  $\zeta$  como complexa e adotam uma rota de integração dentro do plano complexo que desvia dos polos de  $\zeta$ . Assim, para

que se possam comparar os resultados adota-se aqui uma taxa de amortecimento pequena que tenha pouca influência nos valores obtidos. Além disso, o processo implementado por Rajapakse e Wang simplesmente interrompe a integração numérica num valor finito de  $\zeta$  enquanto que o método aqui proposto utiliza extrapolação de séries.

Os deslocamentos apresentados estão normalizados sendo representados nos gráficos os valores adimensionais de  $u^*$  e  $w^*$  definidos como:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u c_{44}}{a p_0} \\ w^* &= \frac{w c_{44}}{a p_0} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Da mesma forma as tensões  $\sigma_{ij}$  estão normalizadas e nos gráficos estão apresentados os valores adimensionais de  $\sigma_{ij}^*$  definida como:

$$\sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{p_0} \quad (4.15)$$

A frequência circular  $\omega$  está também representada por uma frequência adimensional normalizada  $a_0$  definida por:

$$a_0 = a\delta = a\omega \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}} \quad (4.16)$$

Para se poder analisar o efeito da anisotropia, primeiramente foi tomado um material isotrópico com coeficiente de Poisson  $\nu = 0,4$ . As constantes elásticas para este material são:

$$\begin{aligned} c_{11}/c_{44} &= c_{33}/c_{44} = 6,0 \\ c_{12}/c_{44} &= c_{13}/c_{44} = 4,0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

A anisotropia é especificada então através dos índices  $n_1 = c_{33}/c_{11}$  e  $n_3 = (c_{11} - c_{44})/c_{13}$ , mantendo-se constante o valor de  $c_{11}$ . Na determinação dos valores numéricos foi adotado  $a_0 = 1$  e o amortecimento interno do material  $\nu = 0,01$ .

Nos gráficos das figuras 4.3 a 4.5 estão representados os deslocamentos normalizados horizontal e vertical ao longo da superfície do semi-espaco devidos a uma carga uniforme de intensidade  $p_0$  distribuída sobre esta superfície entre  $x = -a$  e  $x = a$ . Os deslocamentos foram calculados para valores do índice  $n_1 = 0,75; 1,00$  e  $1,50$  mantendo-se o índice  $n_3 = 1,00$ . As curvas correspondentes a  $n_1 = n_3 = 1$  representam o comportamento do material isotrópico.

Nos gráficos estão também mostrados com pontos valores dos deslocamentos calculados pelo método desenvolvido por Mesquita e Romanini [49] para meios isotrópicos e os calculados pelo método proposto por Rajapakse e Wang [67] para meios ortotrópicos.

Para o caso isotrópico pode-se notar a concordância entre os pontos que representam os resultados obtidos por ambos os métodos (de Mesquita e Romanini [49], e de Rajapakse e Wang [67]) e as curvas traçadas com os resultados obtidos pelo método aqui proposto. Para o caso anisotrópico, no entanto, há concordância entre os resultados obtidos pelo método de Rajapakse e Wang [67] e os resultados obtidos pelo método aqui proposto apenas para os valores de  $n_1 = 1,5$ . Para os valores de  $n_1 = 0,75$  há uma considerável diferença entre os resultados. Enquanto as curvas apresentam uma transição contínua de comportamento quando se alteram os índices de anisotropia, os resultados representados pelos pontos aparentam descontinuidade de comportamento. Isto sugere que o processo de integração numérica empregado por Rajapakse e Wang [67] tenha uma limitação quanto à faixa de materiais que podem ser analisados.

Analisando-se os deslocamentos pode-se verificar que o aumento de  $n_1$  provoca uma diminuição das amplitudes e um aumento nos comprimentos de onda. Isto é de se esperar pois está-se aumentando  $c_{33}$  que representa a rigidez na direção vertical e mantendo as outras constantes elásticas inalteradas. Isto se traduz num aumento global da rigidez do material. Pode-se perceber também que esta influência não é uniforme em todas as componentes dos deslocamentos. A parte real de  $u_{cx}^*$  na origem ( $x = z = 0$ ) não apresenta grande variação com  $n_1$ , enquanto que a parte real de  $w_{cz}^*$  na origem apresenta uma variação comparativamente maior. Este comportamento é também consequência do aumento de  $c_{33}$ .

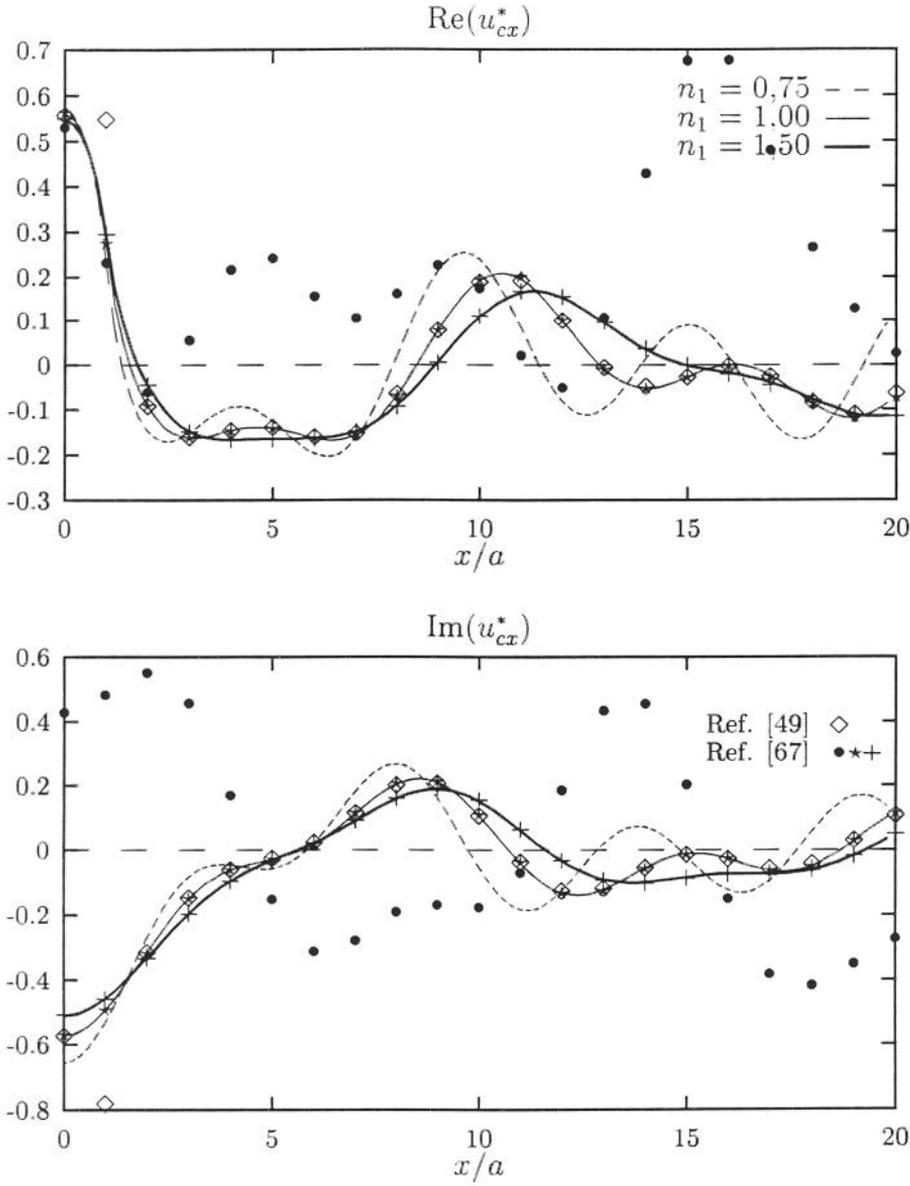


Figura 4.3: Deslocamento horizontal normalizado  $u_{cx}^*$  ao longo da superfície do semi-espço para  $n_3 = 1,00$ .

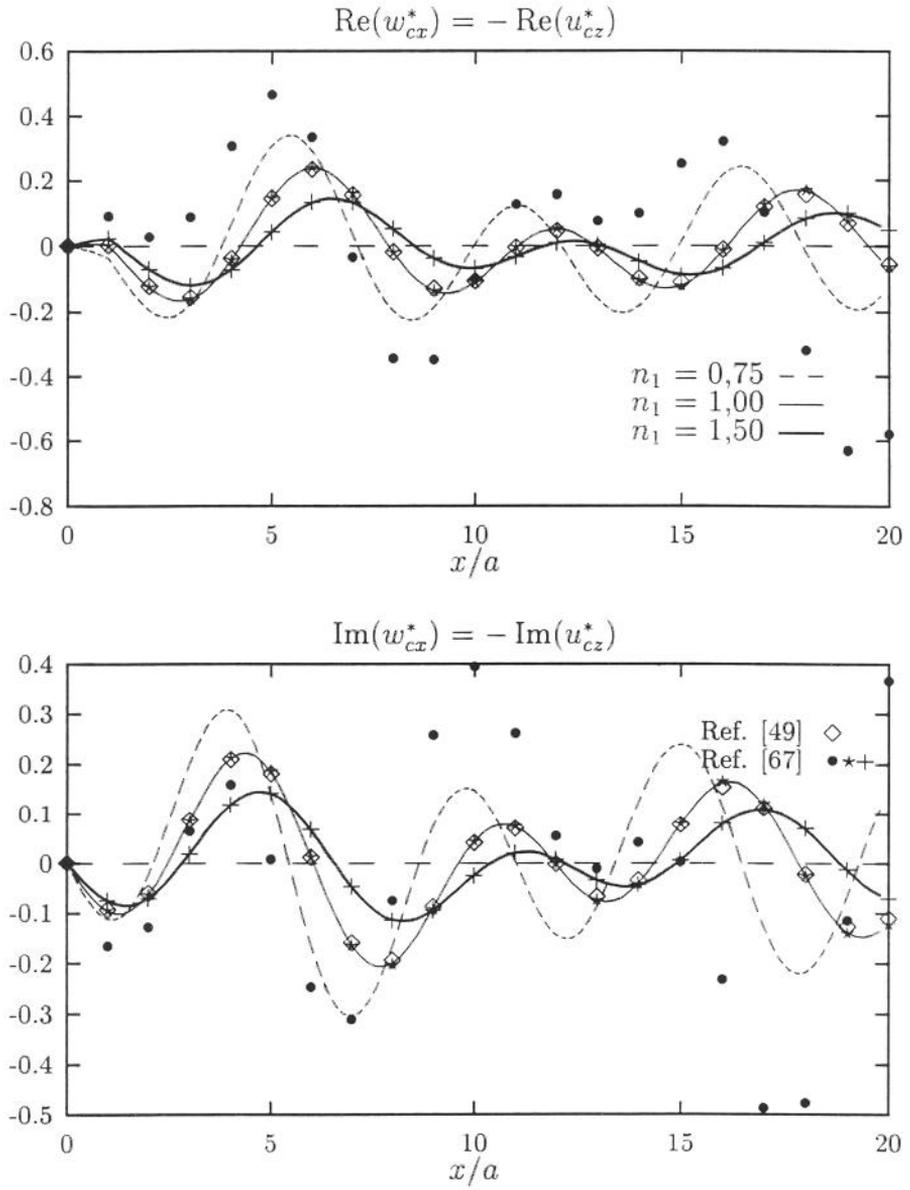


Figura 4.4: Deslocamentos normalizados  $w_{cx}^* = -u_{cz}^*$  ao longo da superfície do semi-espaco para  $n_3 = 1,00$ .

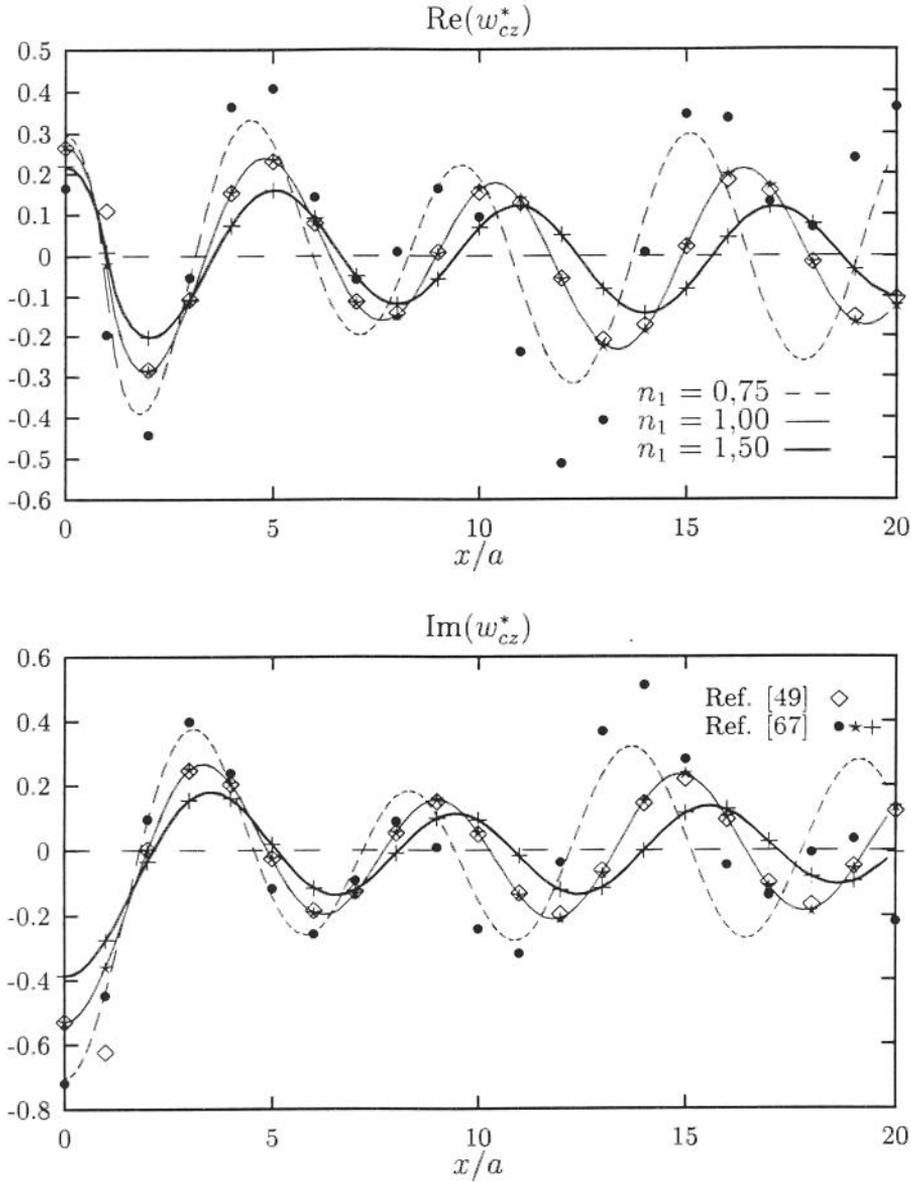


Figura 4.5: Deslocamento vertical normalizado  $w_{cz}^*$  ao longo da superfície do semi-espaço para  $n_3 = 1,00$ .

Para se analisar o efeito do índice  $n_3$  foram construídos os gráficos das figuras 4.6 a 4.8 onde estão representados os deslocamentos normalizados horizontal e vertical ao longo da superfície do semi-espaço para valores do índice  $n_3 = 0,80; 1,00$  e  $1,50$  mantendo-se o índice  $n_1 = 1,00$ .

Aqui novamente se repetem as observações feitas quanto à comparação entre os resultados obtidos pelo método aqui proposto e os métodos de Mesquita e Romanini [49] e de Rajapakse e Wang [67]. Há concordância entre os três processos de cálculo para o material isotrópico. Para o material anisotrópico a concordância ocorre apenas para  $n_3 = 1,5$ . Para o material com  $n_3 = 0,8$  a diferença entre os resultados obtidos pelo método de Rajapakse e Wang [67] e os resultados obtidos pelo método aqui proposto é bastante grande.

Pode-se verificar aqui também que a um aumento do índice  $n_3$  corresponde uma diminuição das amplitudes dos deslocamentos e um aumento nos comprimentos de onda. percebe-se uma grande similaridade entre estes gráficos e os das figuras 4.3 a 4.5. Porém agora ambos os valores da parte real de  $u_{cx}^*$  e de  $w_{cz}^*$  na origem parecem pouco afetados pelo valor de  $n_3$ .

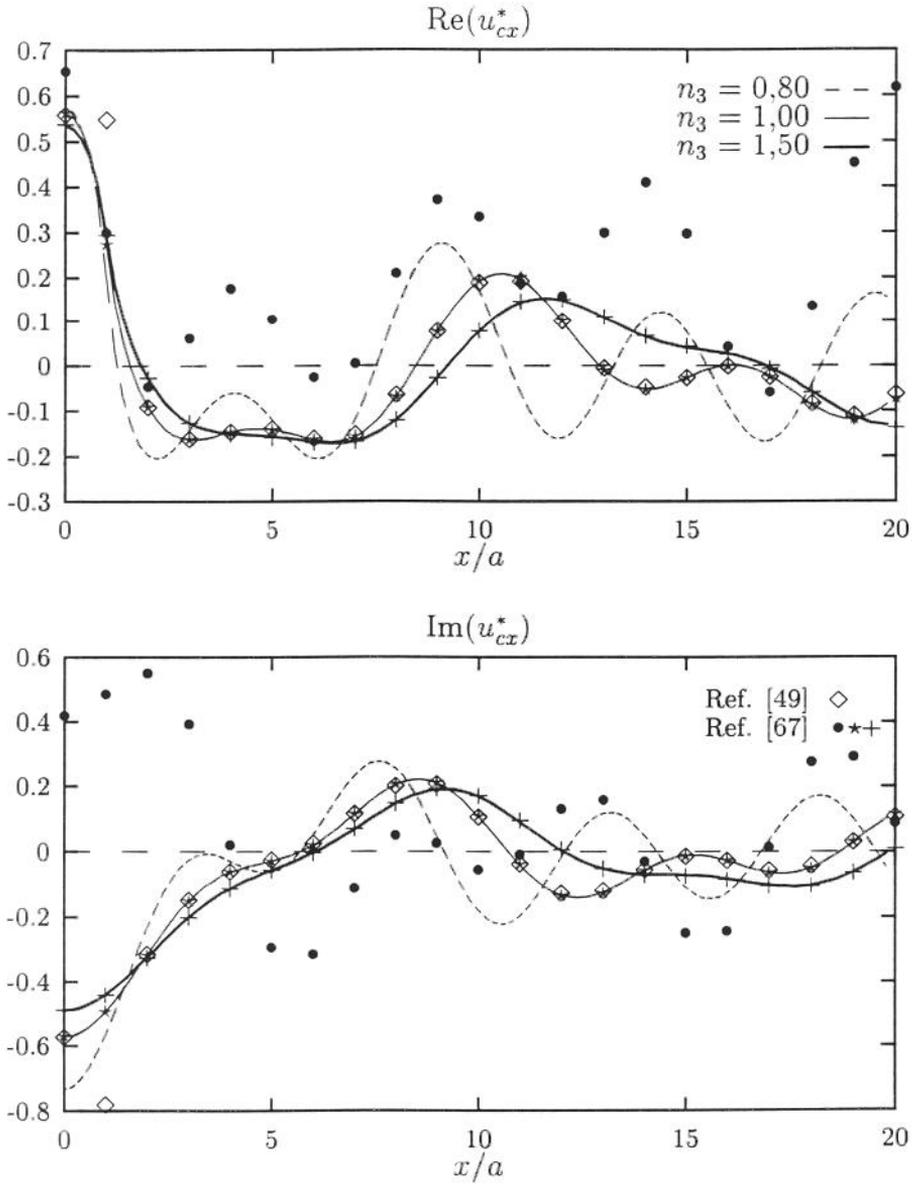


Figura 4.6: Deslocamento horizontal normalizado  $u_{cx}^*$  ao longo da superfície do semi-espaço para  $n_1 = 1,00$ .

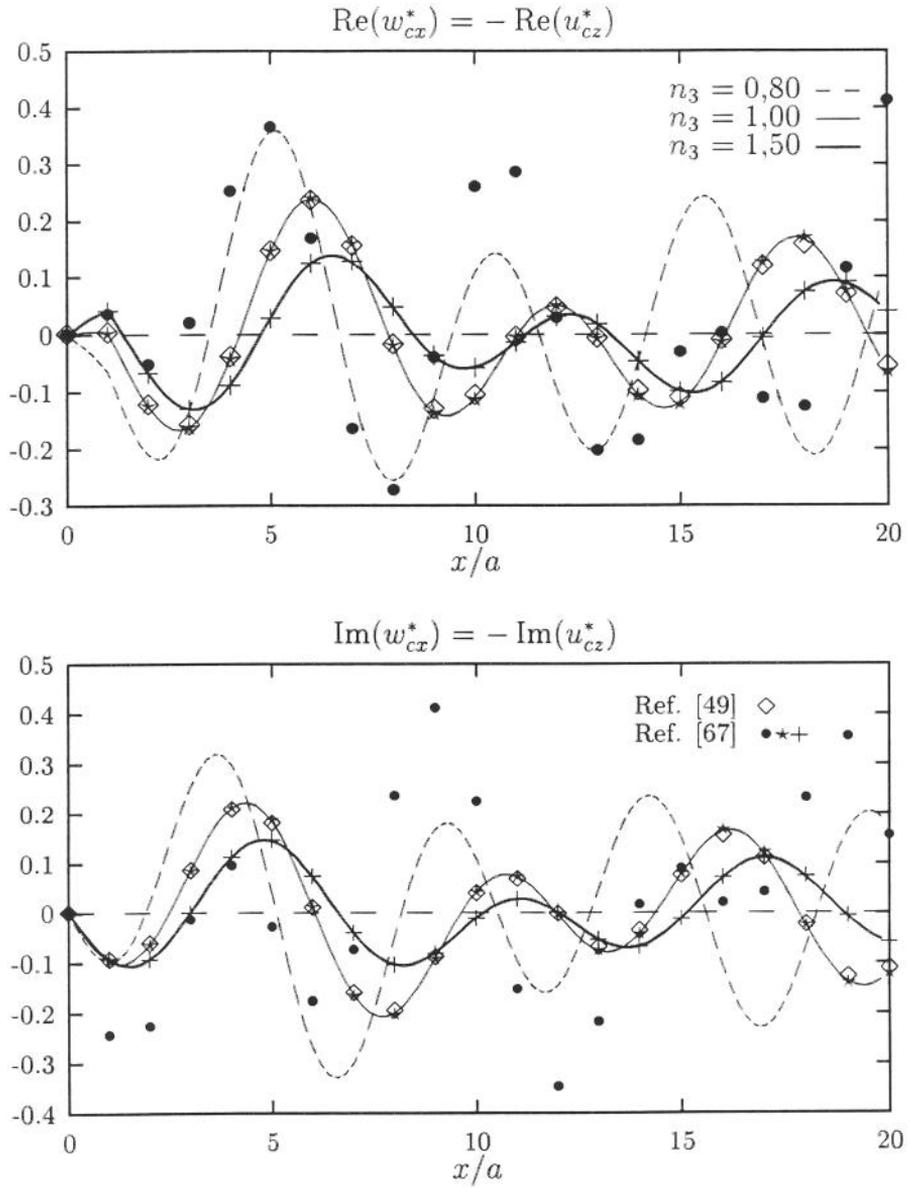


Figura 4.7: Deslocamentos normalizados  $w_{cx}^* = -u_{cz}^*$  ao longo da superfície do semi-espaço para  $n_1 = 1.00$ .

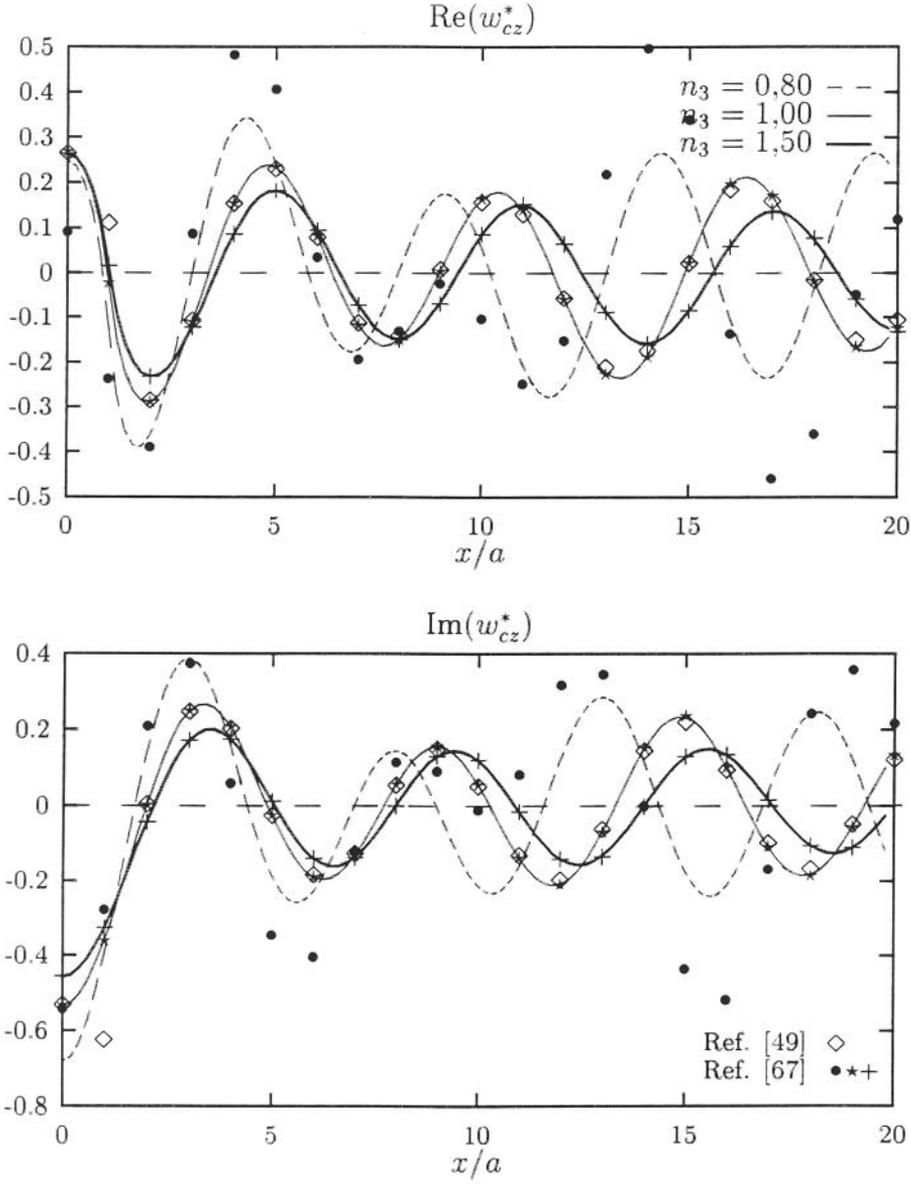


Figura 4.8: Deslocamento vertical normalizado  $w_{cz}^*$  ao longo da superfície do semi-espço para  $n_1 = 1,00$ .

Para se analisar as tensões provocadas pela carga distribuída na superfície do semi-espaço no interior do meio transversalmente isotrópico foram construídos os gráficos das figuras 4.9 e 4.10 que mostram as tensões normalizadas  $\sigma_{cxzx}^*$  e  $\sigma_{czzz}^*$  respectivamente ao longo do eixo  $z$ , para  $a_0 = 1$ . Além dessas, a única outra componente das tensões que não se anula ao longo de  $x = 0$  é  $\sigma_{cxzz}$ . Esta componente apresenta um comportamento similar ao de  $\sigma_{cxzx}$  e  $\sigma_{czzz}$ . Os gráficos da figura 4.9 mostram a influência do índice  $n_1$  nas tensões, enquanto que os gráficos da figura 4.10 mostram a influência do índice  $n_3$ . Pode-se aqui também verificar um aumento dos comprimentos de onda para um aumento tanto de  $n_1$  quanto de  $n_3$ . As amplitudes das tensões, por sua vez, não apresentam um comportamento tão constante. Para a tensão  $\sigma_{cxzx}^*$  um aumento de  $n_1$  ou de  $n_3$  implica numa diminuição das amplitudes, enquanto que para  $\sigma_{czzz}^*$  as amplitudes parecem aumentar quando os índices  $n_1$  e  $n_3$  se afastam da unidade.

Um detalhe que pode ser salientado é o comportamento de  $\sigma_{czzz}^*$  logo abaixo da superfície de aplicação da carga. Nota-se que há inicialmente um pequeno aumento em  $\sigma_{czzz}^*$  logo abaixo da superfície e logo após esta componente da tensão diminui com a profundidade. Como  $\sigma_{czzz}^*(0,0) = -1$  ocorre que logo abaixo da superfície de aplicação da carga vertical uniforme  $p_z$  a tensão vertical é ligeiramente superior (em valor absoluto) a ela. Este comportamento não ocorre com  $\sigma_{cxzx}^*$ . Logo abaixo da superfície de aplicação da carga já há uma diminuição do valor da tensão.

Nos gráficos das figuras 4.9 e 4.10 estão também representados por pontos resultados obtidos pelo método proposto por Rajapakse e Wang [67]. Observa-se nas tensões o mesmo comportamento notado nos deslocamentos. Os resultados são praticamente coincidentes nos dois métodos para o material isotrópico. Já no material anisotrópico esta coincidência se dá apenas para valores maiores de  $n_1$  e de  $n_3$ . Para  $n_1 = 0,75$  aparecem divergências entre os resultados do método de Rajapakse e Wang [67] e o método aqui desenvolvido, principalmente na parte imaginária de  $\sigma_{cxzx}^*$  e parte real de  $\sigma_{czzz}^*$ . Quando  $n_3 = 0,8$  este comportamento se repete.

Os gráficos das figuras 4.11 a 4.12 apresentam uma visão do comportamento das componentes  $\sigma_{cxzx}^*$  e  $\sigma_{czzz}^*$  no interior do semi-espaço através de uma representação tridimensional dos valores da parte real destas componentes para  $-3 \leq x/a \leq 3$  e  $0 \leq z/a \leq 2$ , para um material com  $n_1 = 1,5$  e  $n_3 = 0,8$ . A frequência normalizada aqui também é  $a_0 = 1$ . Pode-se observar que apesar de as duas componentes apresentarem o mesmo valor ao longo de  $z = 0$  (por imposição das condições de contorno) a distribuição destas tensões abaixo da superfície é bastante diferente nos dois casos. A componente  $\sigma_{cxzx}^*$  apresenta uma distribuição mais “espalhada” enquanto que a componente  $\sigma_{czzz}^*$  apresenta uma distribuição mais “concentrada” sob a carga.

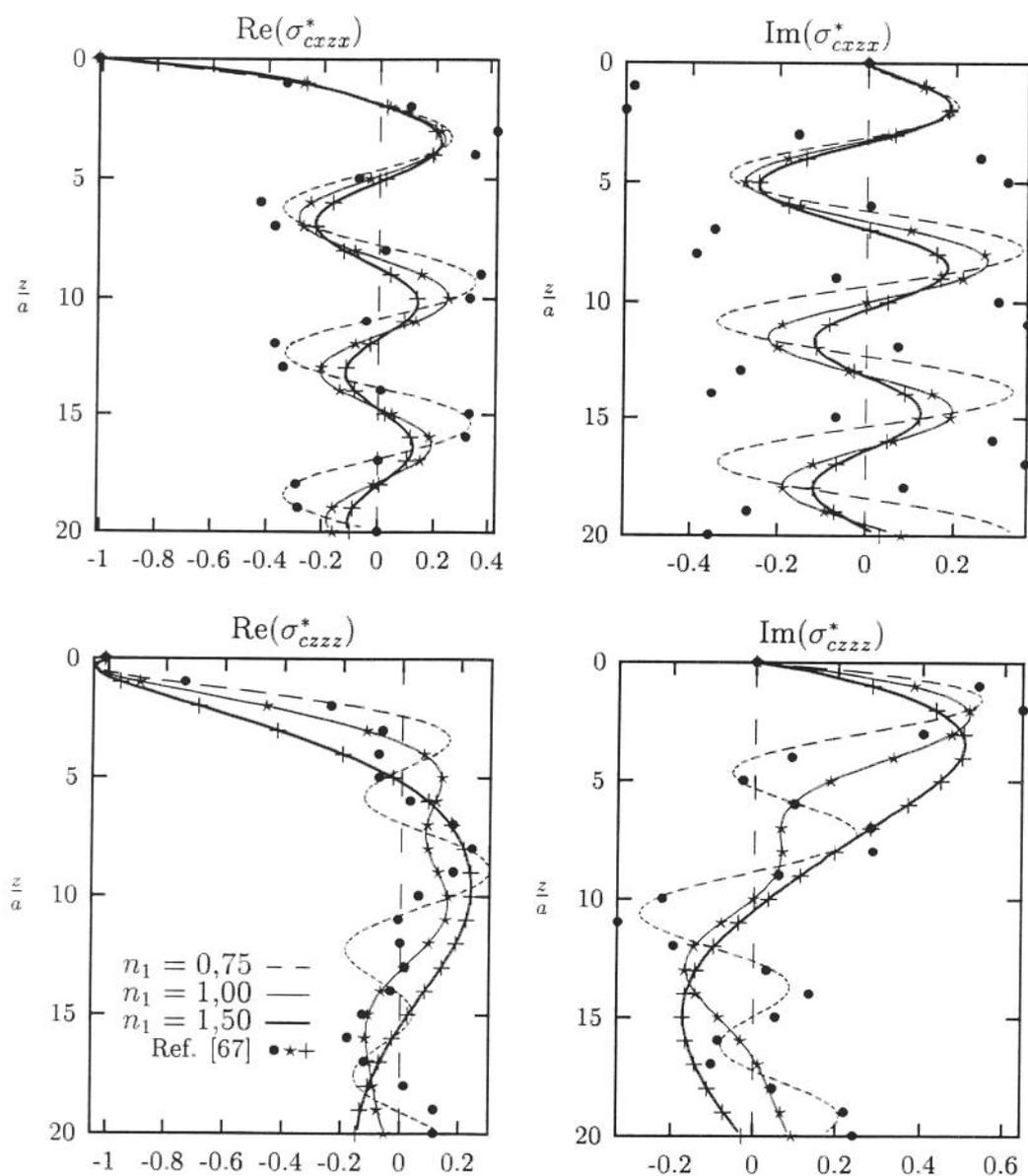


Figura 4.9: Tensões normalizadas  $\sigma_{cxzx}^*$  e  $\sigma_{czzz}^*$  ao longo do eixo  $z$  do semi-espaço para  $n_3 = 1,00$ .

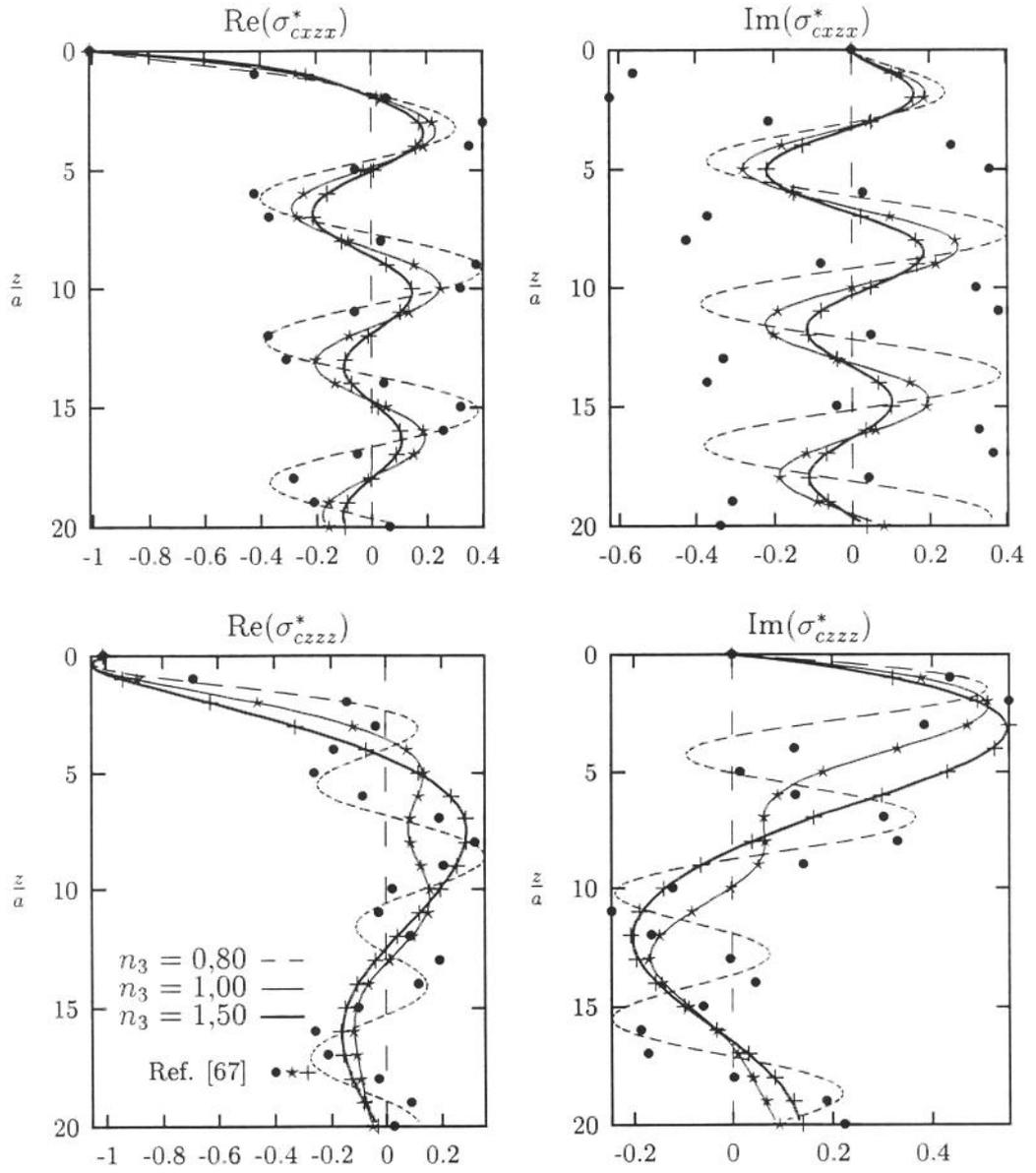


Figura 4.10: Tensões normalizadas  $\sigma_{cxzx}^*$  e  $\sigma_{czzz}^*$  ao longo do eixo  $z$  do semi-espaço para  $n_1 = 1,00$ .

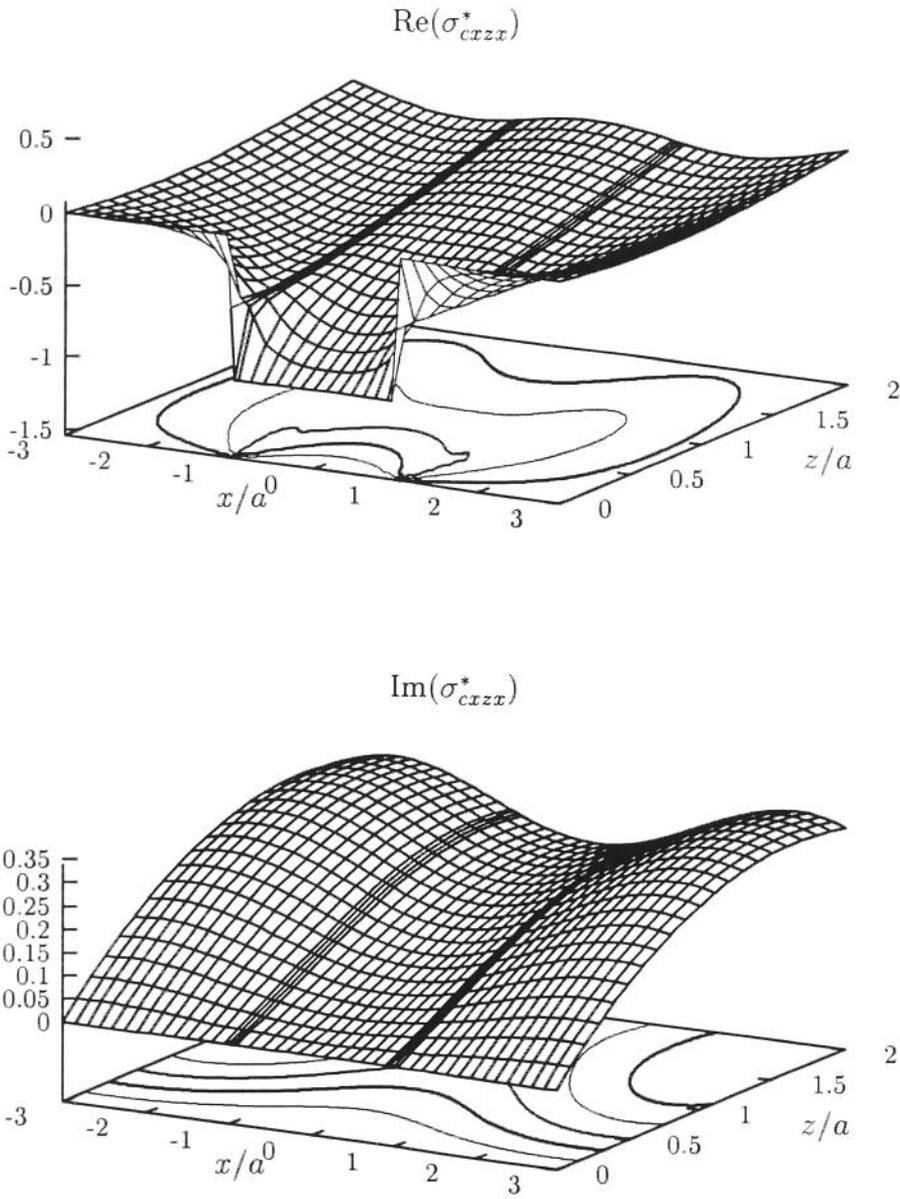


Figura 4.11: Tensões normalizadas  $\sigma_{czzx}^*$  no interior do semi-espaço para  $n_1 = 1,5$  e  $n_3 = 0,8$ .

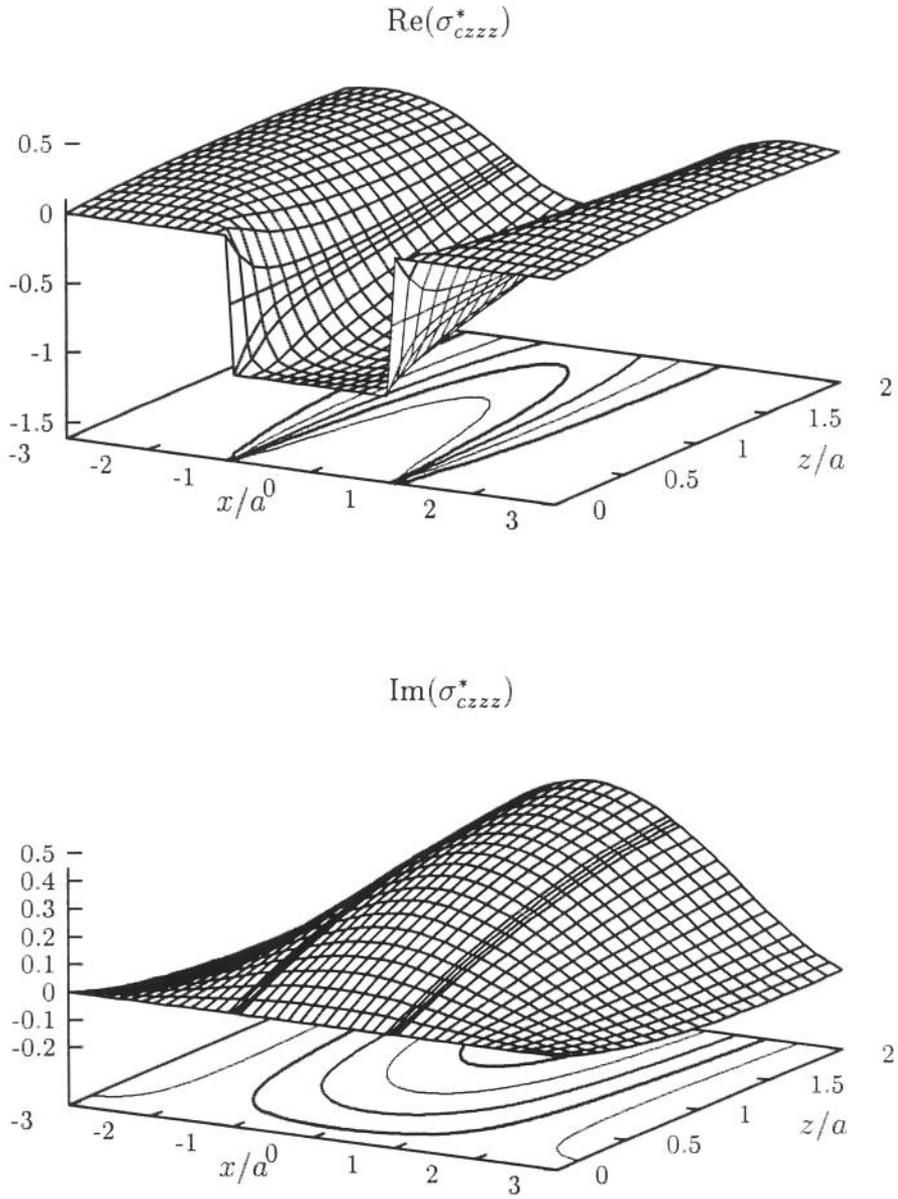


Figura 4.12: Tensões normalizadas  $\sigma_{czzz}^*$  no interior do semi-espço para  $n_1 = 1,5$  e  $n_3 = 0,8$ .

Os limites inferiores para a variação de  $n_1$  e de  $n_3$  foram escolhidos de tal forma que a constante  $\gamma = 1 + \alpha\beta - \kappa^2 > 0$ . Isto foi adotado pois foi notada uma descontinuidade na parte imaginária dos deslocamentos e das tensões quando se variam  $n_1$  e  $n_3$  de tal forma que  $\gamma$  se aproxima de zero. Este comportamento pode ser visto nos gráficos da figura 4.13 que mostra o deslocamento normalizado  $u_{cx}^*$  para valores de  $\gamma$  entre -0,6 e 0,6. Pode-se perceber a mudança brusca no comportamento da parte imaginária do deslocamento quando  $\gamma$  passa pelo zero. A parte real, por outro lado, não apresenta esta descontinuidade. Deve-se salientar que para o material isotrópico  $\gamma = 4(1 - \nu) / (1 - 2\nu) \geq 4$ , ou seja, o material isotrópico nunca apresenta este comportamento. Esta descontinuidade aparece também na parte imaginária das outras funções de influência dos deslocamentos e das tensões. Payton [56] também notou mudanças de comportamento do material transversalmente isotrópico influenciadas pela combinação de diferentes valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , tendo dividido este comportamento em cinco classes diferentes. No entanto, como naquele trabalho foi analisado o comportamento do material anisotrópico sob o efeito de cargas dinâmicas instantâneas, no domínio do tempo, é difícil estabelecer um paralelo entre os resultados obtidos por Payton e as observações feitas aqui.

Esta descontinuidade observada provavelmente está ligada a uma mudança brusca no comportamento das ondas elásticas que se propagam no interior do meio transversalmente isotrópico. São necessárias investigações adicionais para se esclarecer melhor as causas deste comportamento.

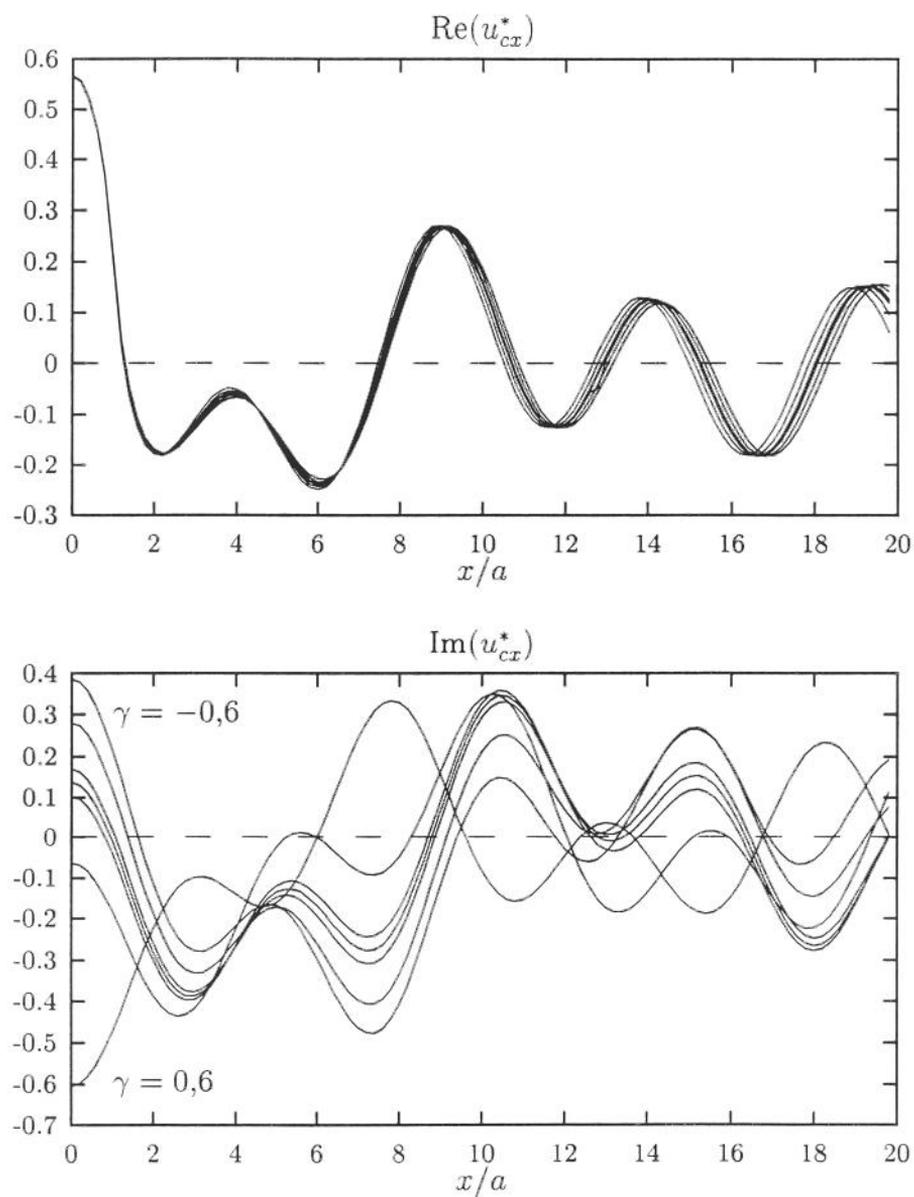


Figura 4.13: Deslocamento horizontal normalizado  $u_{cx}^*$  ao longo da superfície do semi-espaco para  $-0,6 \leq \gamma \leq 0,6$ .

### 4.3.2 Carga aplicada no interior do espaço completo.

Nas figuras 4.14 a 4.17 estão mostrados gráficos dos deslocamentos normalizados  $u_{cx}^*$  e  $w_{cz}^*$  ao longo de  $z = 0$  para uma carga harmônica uniforme aplicada no interior de um meio infinito (espaço completo) para a mesma variação de  $n_1$  e de  $n_3$  e para  $a_0 = 1$  ( $u_{cz}^* = w_{cx}^* = 0$  para  $z = 0$ ). Pode-se observar um comportamento semelhante ao observado para a carga aplicada sobre o semi-espaço.

Estão representados nas figuras 4.14 a 4.17 resultados obtidos pelo processo aqui apresentado e resultados de dois outros métodos. Estão mostrados deslocamentos obtidos por integração numérica da solução analítica fornecida por Manolis e Beskos [47] para linha de carga concentrada aplicada no interior de um meio elástico isotrópico infinito e deslocamentos obtidos pelo método de Rajapakse e Wang [67]. Pode-se perceber que para o caso isotrópico os três métodos fornecem resultados bastante próximos.

Para o caso anisotrópico, também aqui foram comparados os resultados com valores obtidos pelo método de Rajapakse e Wang [67]. As diferenças entre os resultados obtidos pelo processo aqui proposto e pelo método de Rajapakse e Wang já observadas se repetem também no caso de carga aplicada no interior de um meio infinito. As diferenças entre os resultados são bem mais acentuadas para a componente  $u_{cx}^*$  do que para  $w_{cz}^*$ . Para  $u_{cx}^*$  aparecem diferenças entre os resultados para todos os valores de  $n_1$  e  $n_3$ . Estas diferenças, no entanto, são mais acentuadas para  $n_1 = 0,75$  e  $n_3 = 0,8$ . Para os outros casos analisados as diferenças entre os resultados são bem menores. Quanto a  $w_{cz}^*$ , as diferenças observadas entre os resultados obtidos pelos dois métodos são bem menores, havendo uma virtual coincidência de valores para  $n_1 = 1,0$ ;  $n_1 = 1,5$ ;  $n_3 = 1,0$  e  $n_3 = 1,5$ . Para os valores de  $n_1 = 0,75$  e  $n_3 = 0,8$  aparecem diferenças visíveis, ainda que moderadas.

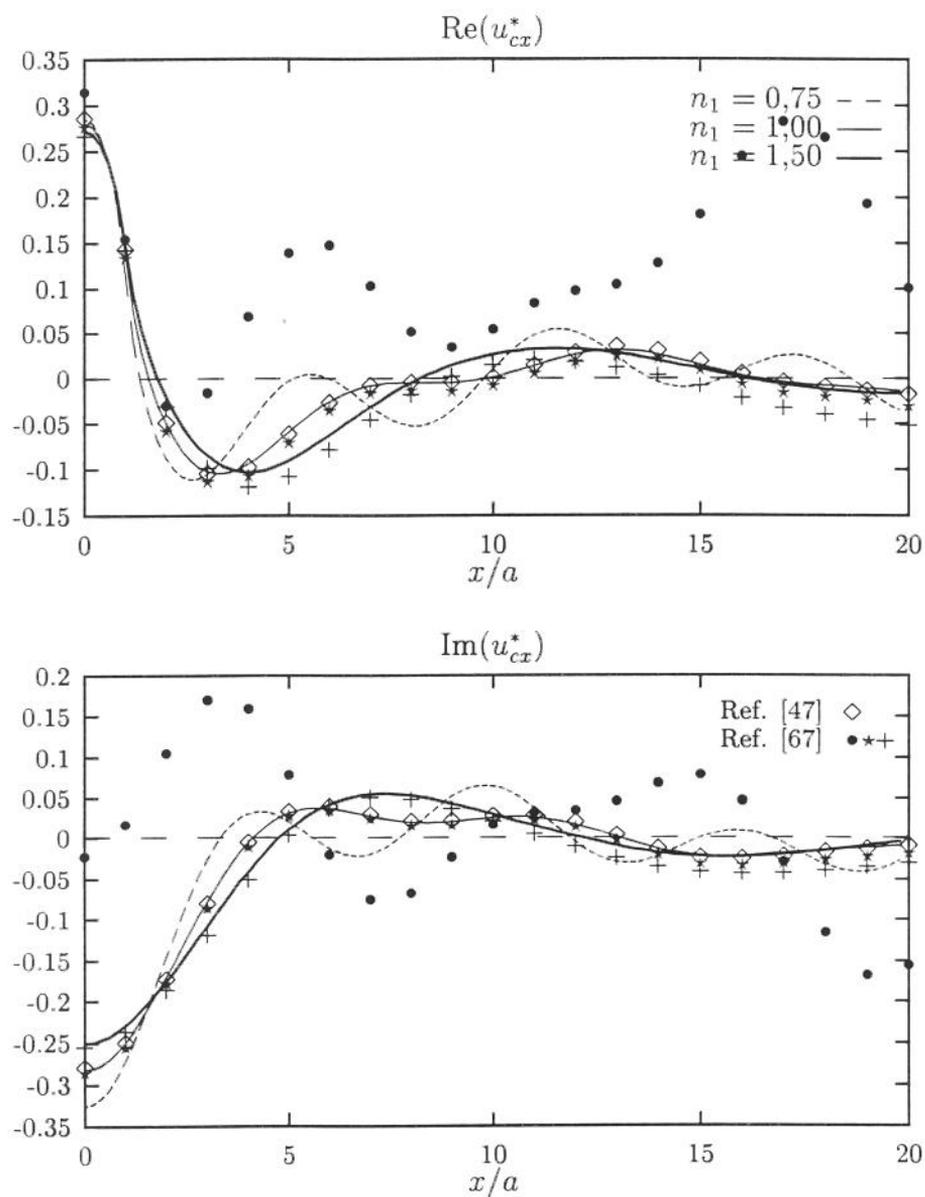


Figura 4.14: Deslocamento horizontal normalizado  $u_{cx}^*$  ao longo de  $z = 0$  (espaço completo) para  $n_3 = 1,00$ .

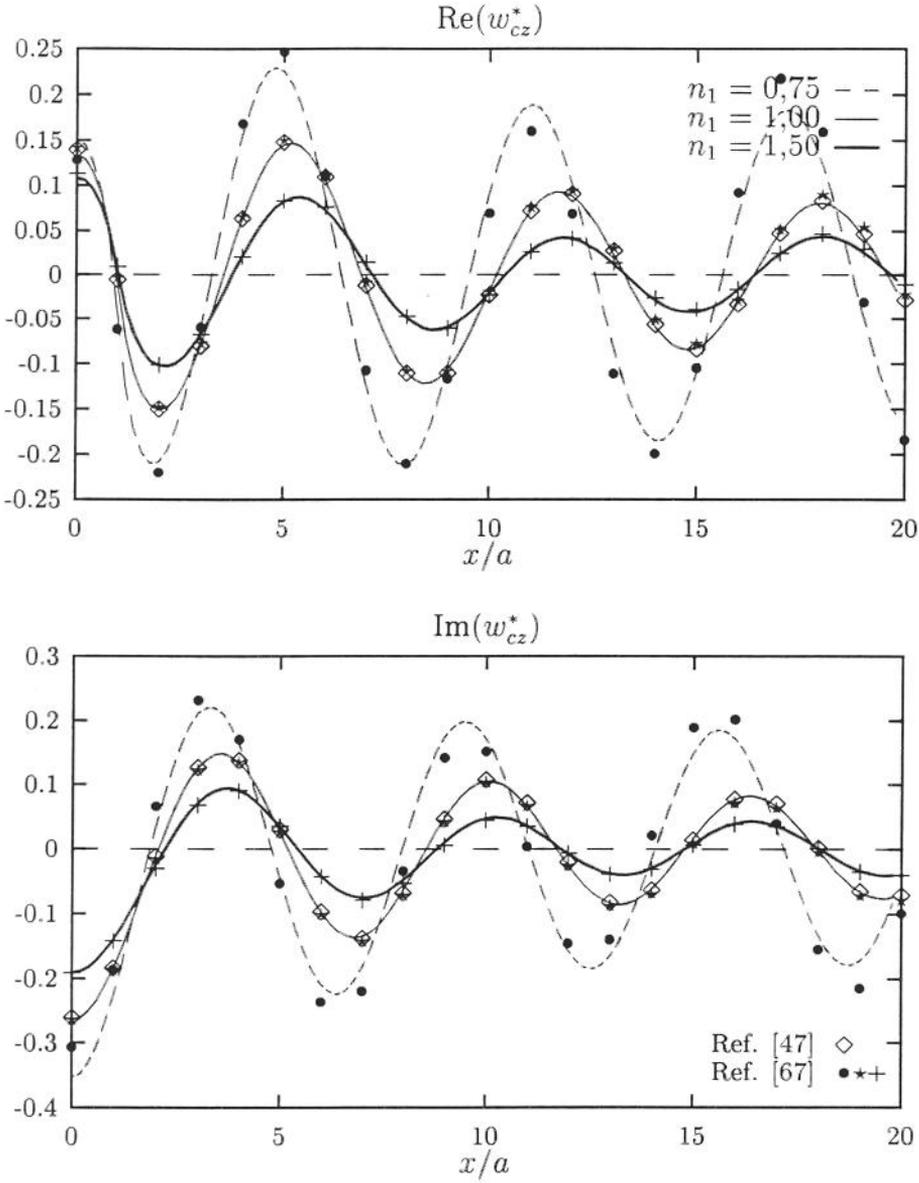


Figura 4.15: Deslocamento vertical normalizado  $w_{cz}^*$  ao longo de  $z = 0$  (espaço completo) para  $n_3 = 1,00$ .

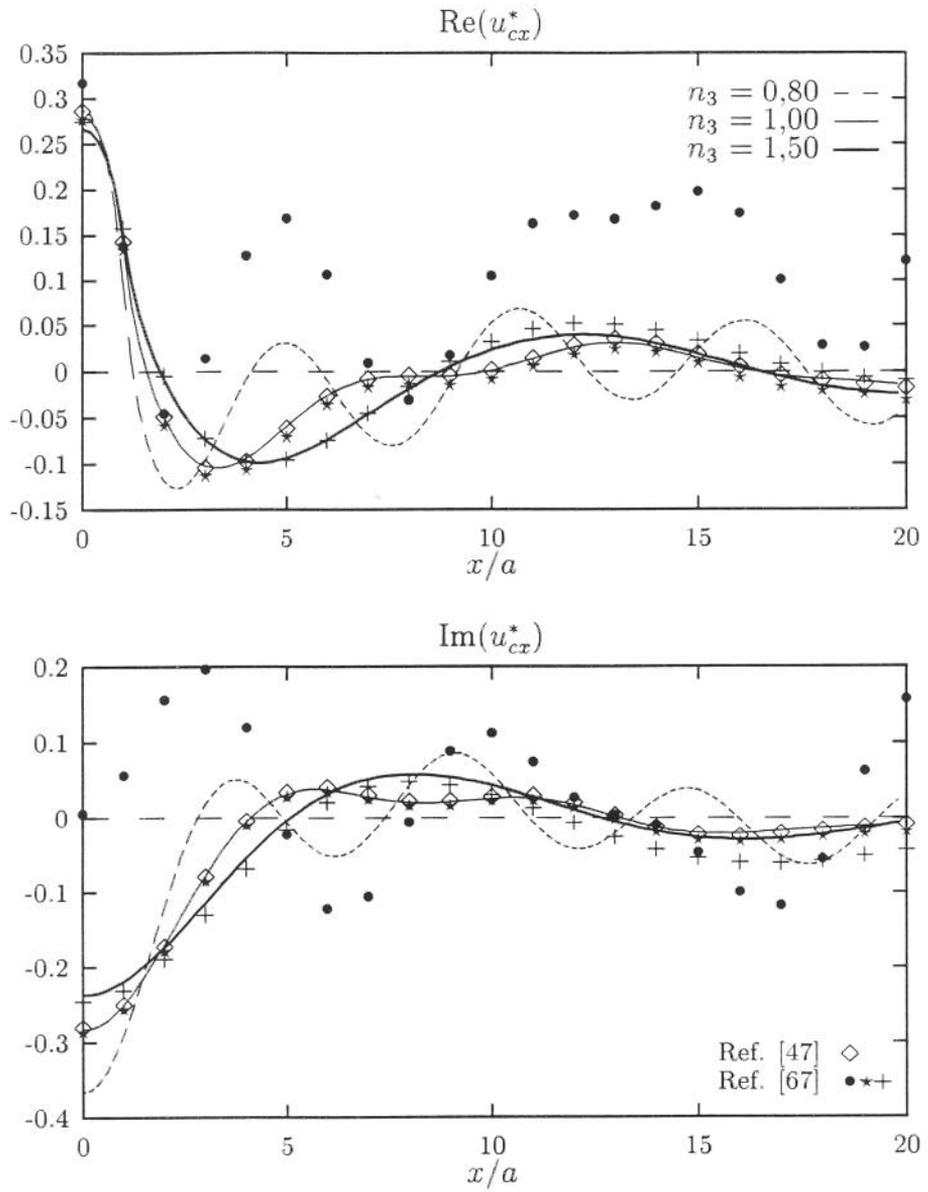


Figura 4.16: Deslocamento horizontal normalizado  $u_{cx}^*$  ao longo de  $z = 0$  (espaço completo) para  $n_1 = 1,00$ .

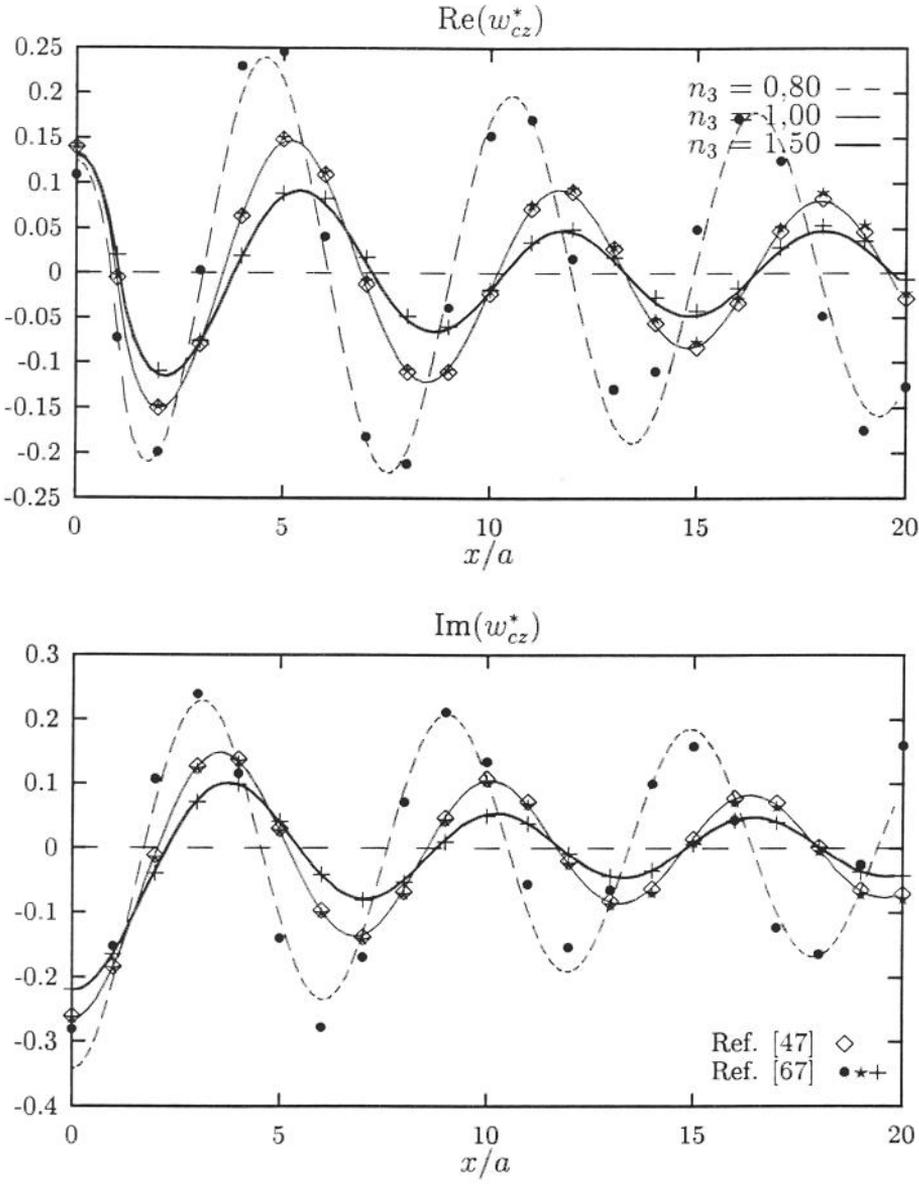


Figura 4.17: Deslocamento vertical normalizado  $w_{cz}^*$  ao longo de  $z = 0$  (espaço completo) para  $n_1 = 1,00$ .

### 4.3.3 Carga aplicada no interior do semi-espço.

Para se analisar o comportamento das funções de influência de carga com distribuição uniforme aplicada no interior de um semi-espço elástico transversalmente isotrópico foram traçados os gráficos das figuras 4.18 a 4.21. Estes gráficos representam os deslocamentos normalizados  $u_{cx}^*$ ,  $w_{cx}^*$ ,  $u_{cz}^*$ , e  $w_{cz}^*$  ao longo do plano  $z/a = 1$  para uma faixa de carga uniforme de largura  $2a$ , distribuída na direção horizontal, centrada em  $(x/a = 0, z/a = 1)$  (a origem do sistema de coordenadas  $xz$  foi adotada na superfície superior do semi-espço). São apresentados resultados referentes a dois materiais. Um deles isotrópico com  $\nu = 0,4$  e outro transversalmente isotrópico com  $c_{11}/c_{44} = 6$ ,  $n_1 = 1,5$  e  $n_3 = 0,8$ . Para os dois materiais é utilizada uma taxa de amortecimento interno  $\nu = 0,01$ . Os resultados se referem a uma frequência normalizada  $a_0 = 1$ .

A análise destes resultados mostra que para a componente  $u_{cx}^*$  (deslocamento horizontal devido à componente horizontal da carga) as curvas obtidas para os dois materiais são quase coincidentes. Isto se deve ao fato de que ambos têm o mesmo valor de rigidez horizontal expresso por  $c_{11}/c_{44}$ . Por outro lado as curvas que representam a variação da componente vertical  $w_{cz}^*$  devida à componente vertical da carga para os dois materiais mostra uma maior influência da anisotropia. O material anisotrópico apresenta menores amplitudes de deslocamento vertical e maiores comprimentos de onda. Isto se deve à maior rigidez deste material em relação ao material isotrópico com relação a  $c_{33}/c_{44}$ . Quanto às componentes “cruzadas”  $w_{cx}^*$  e  $u_{cz}^*$ , estas apresentam um comportamento intermediário. As amplitudes dos deslocamentos do material anisotrópico são apenas ligeiramente inferiores às amplitudes do material isotrópico e os comprimentos de onda também são ligeiramente maiores para o material anisotrópico.

Aqui também foram comparados os resultados obtidos com valores calculados com o método de Rajapakse e Wang [67]. Estes valores estão representados como pontos marcados nos gráficos com símbolos “\*” (caso isotrópico) e com símbolos “+” (caso anisotrópico). Pode-se verificar que a concordância entre os resultados obtidos pelos dois métodos é bastante boa. Não aparecem aqui as diferenças notadas nos outros casos de carga sobre a superfície do semi-espço e no interior do espço completo. Isto é devido ao fato de que aqui não estão apresentados resultados referentes a um material mais flexível, tal como o dado por  $n_1 = 1$  e  $n_3 = 0,8$  analisado naqueles itens. Para este material também surgem diferenças grandes entre os resultados obtidos pelos dois métodos.

A figura 4.22 apresenta gráficos que mostram a variação das componentes da tensão  $\sigma_{cxxx}^*$  e  $\sigma_{czzz}^*$  ao longo do eixo vertical  $z$ . No cálculo das curvas

apresentadas foram utilizados os mesmos materiais e os resultados se referem à mesma frequência  $a_0$  adotada no cálculo dos deslocamentos. O primeiro fato que se nota da análise desses gráficos é o salto unitário no valor de ambas as componentes (parte real) em  $z = 1$ . Esta é a profundidade de aplicação da carga uniforme e o salto corresponde ao valor da carga aplicada. Outro fato que se nota é a maior influência da anisotropia na componente  $\sigma_{czzz}^*$ . Isto tem a mesma causa citada na análise dos deslocamentos. Os dois materiais têm o mesmo valor de  $c_{11}/c_{44}$  e valores de  $c_{33}/c_{44}$  diferentes. O material anisotrópico analisado possui uma maior rigidez na direção vertical.

Nestes gráficos são também apresentados como pontos resultados calculados pelo método de Rajapakse e Wang [67]. Pode-se perceber a concordância entre os dois métodos para os dois materiais analisados.

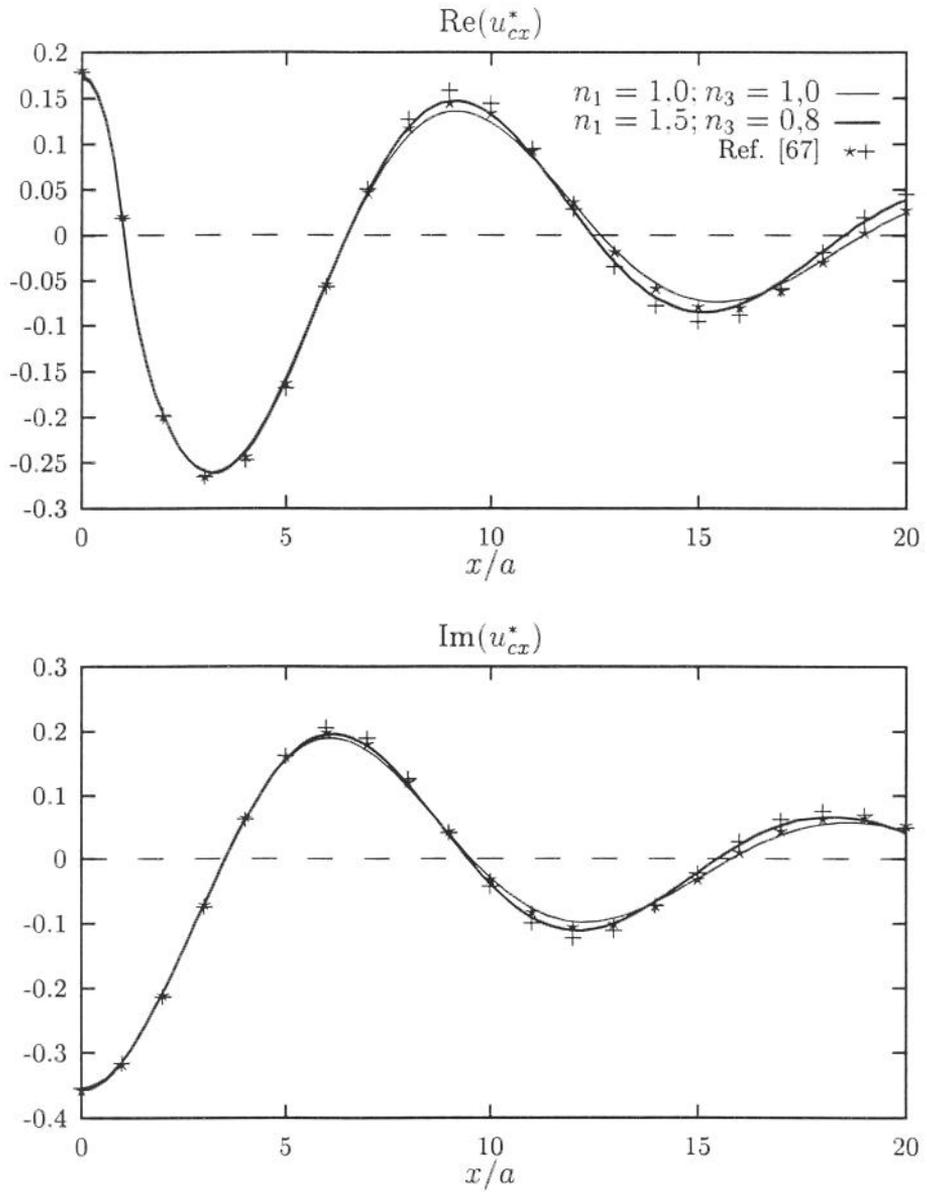


Figura 4.18: Deslocamento horizontal normalizado  $u_{cx}^*$  ao longo de  $z/a = 1$  para carga aplicada no interior do semi-espço.

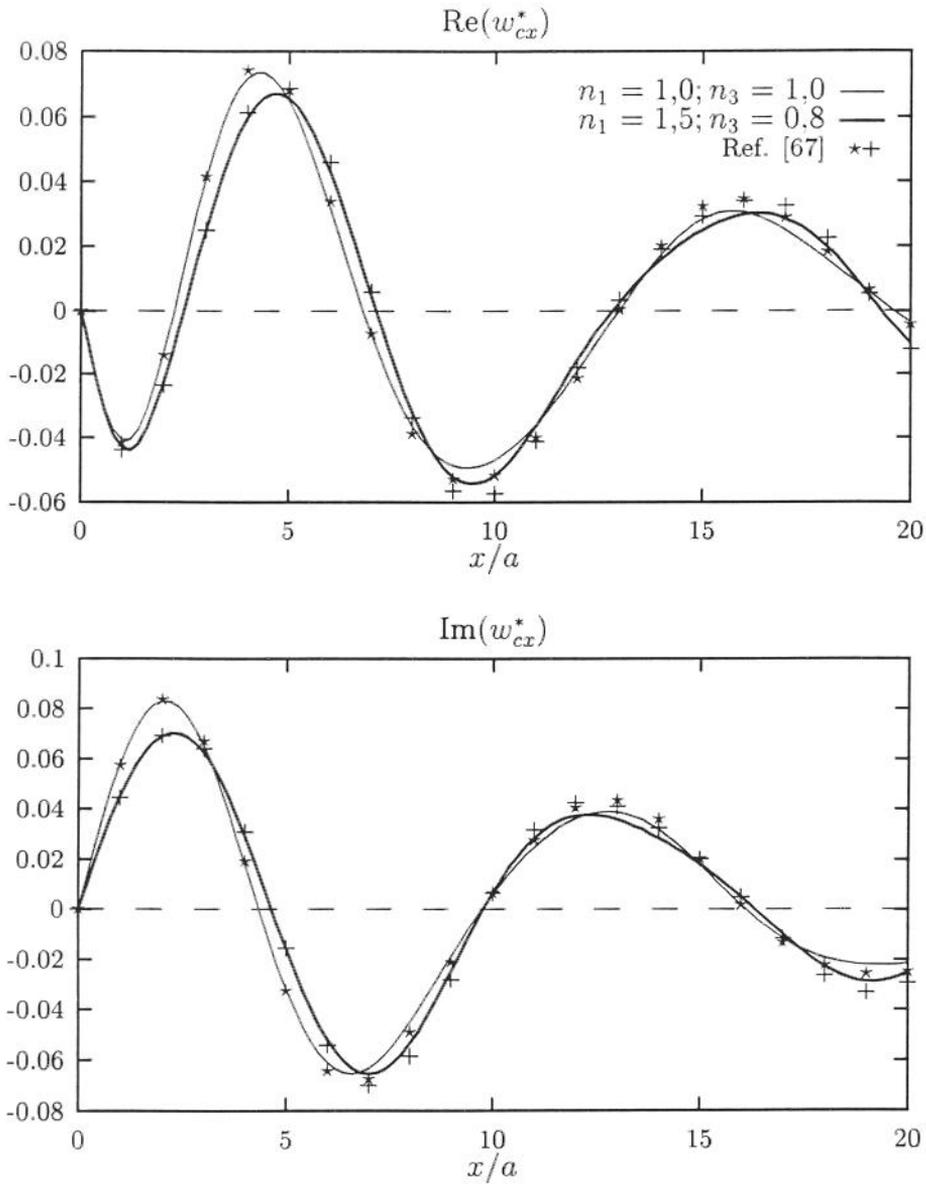


Figura 4.19: Deslocamento vertical normalizado  $w_{cx}^*$  ao longo de  $z/a = 1$  para carga aplicada no interior do semi-espaço.

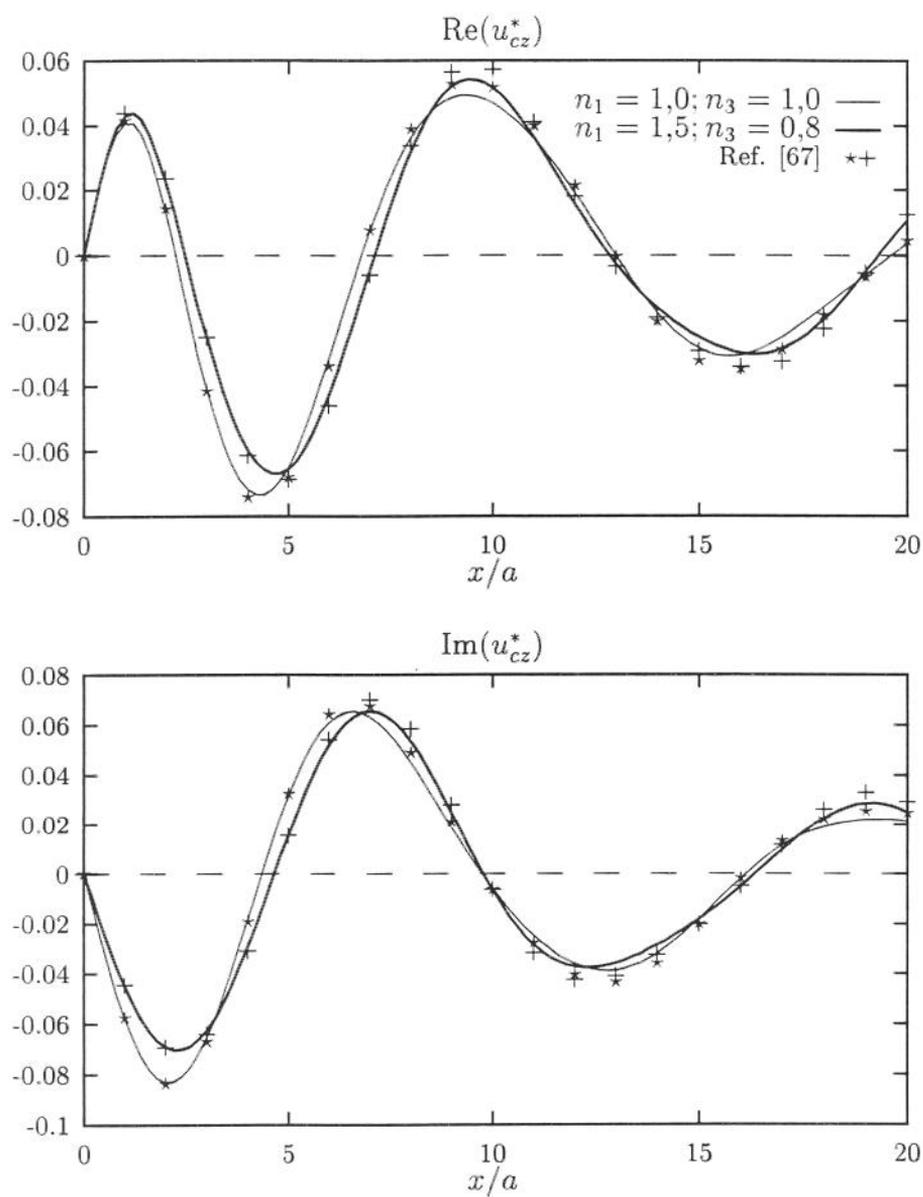


Figura 4.20: Deslocamento horizontal normalizado  $u_{cz}^*$  ao longo de  $z/a = 1$  para carga aplicada no interior do semi-espaco.

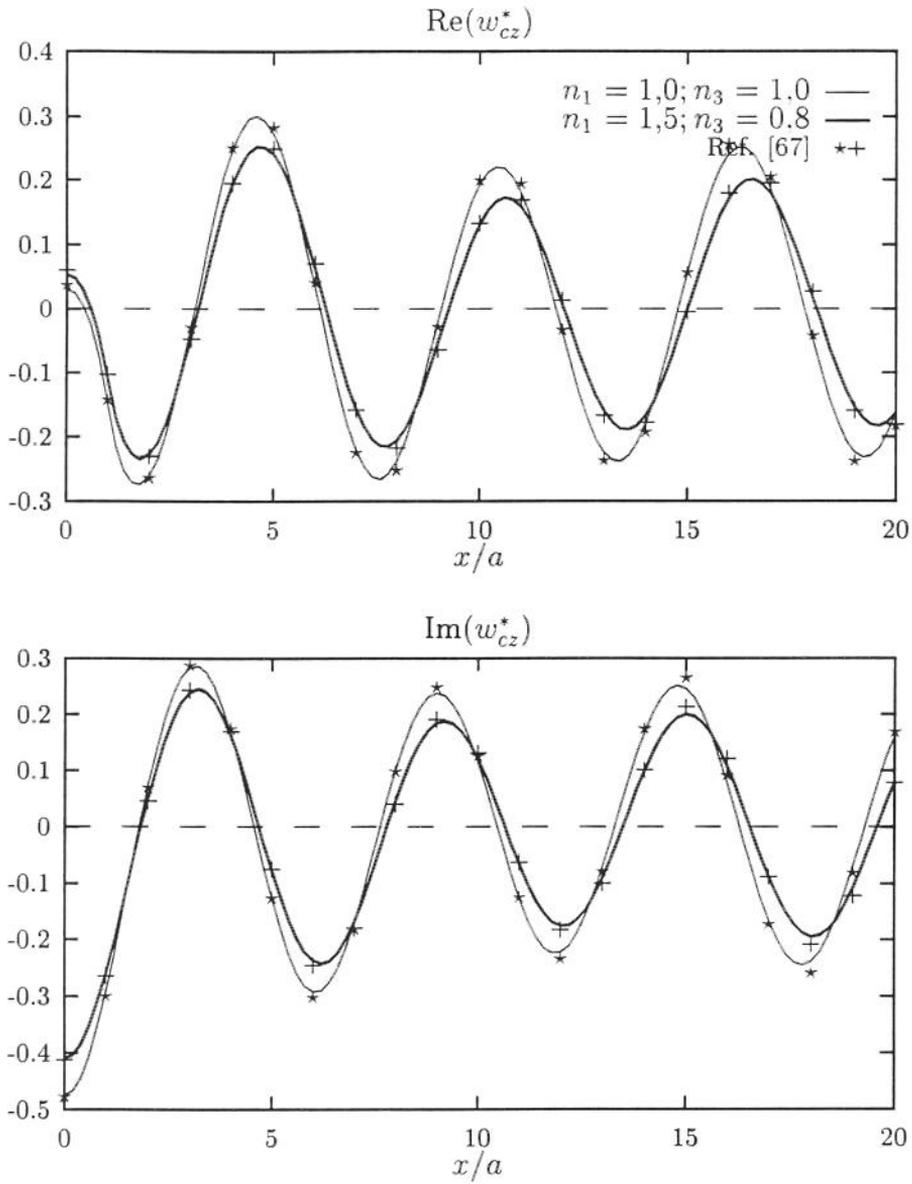


Figura 4.21: Deslocamento horizontal normalizado  $w_{cz}^*$  ao longo de  $z/a = 1$  para carga aplicada no interior do semi-espaço.

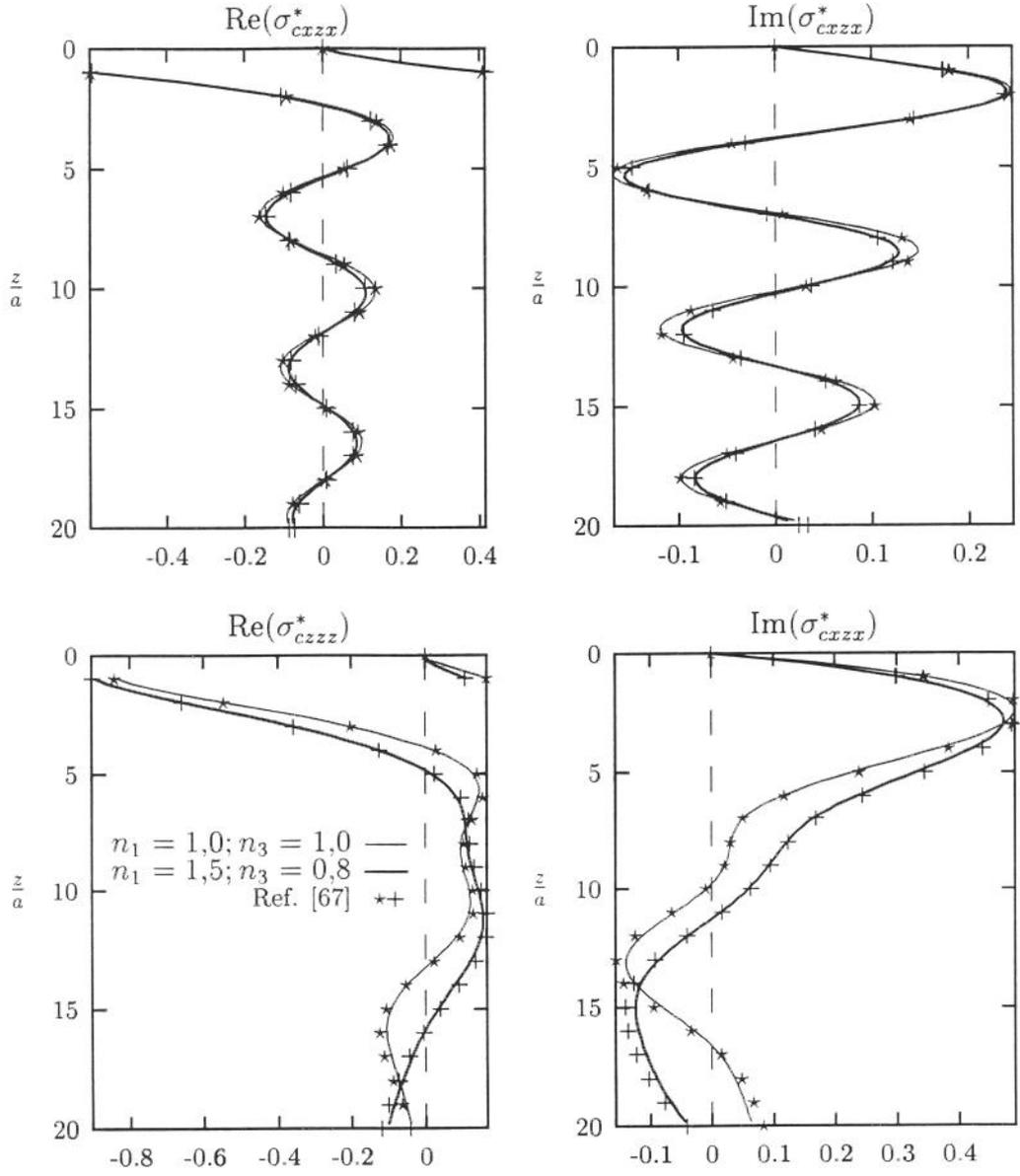


Figura 4.22: Tensões normalizadas  $\sigma_{cxxx}^*$  e  $\sigma_{czzz}^*$  ao longo do eixo  $z$  do semi-espaço para carga aplicada em  $z/a = 1$ .

## 4.4 Distribuição polinomial

O processo descrito no item anterior pode ser estendido para outros tipos de distribuição da carga [7]. Se esta carga apresentar uma distribuição representada por um polinômio de grau  $n$  da forma:

$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n \quad (4.18)$$

ao longo de uma faixa de largura  $2a$  então seu efeito pode ser determinado pela superposição de  $n$  funções de influência.

Para se determinar estas funções de influência propõem-se as seguintes distribuições unitárias de carga:

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1 \\ q_1(x) &= \frac{x}{a} \\ q_2(x) &= \frac{x^2}{a^2} \\ &\vdots \\ q_n(x) &= \frac{x^n}{a^n}, |x| \leq a \end{aligned} \quad (4.19)$$

Estas distribuições estão ilustradas na Figura 4.23.

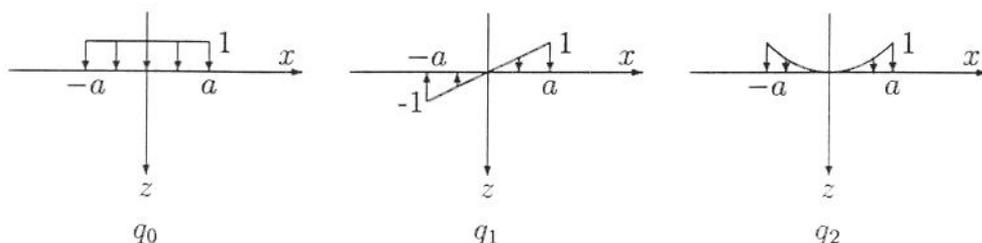


Figura 4.23: Distribuições unitárias  $q_i(x)$ .

Uma carga com distribuição quadrática, por exemplo, especificada pelas intensidades  $t_a$ ,  $t_b$  e  $t_c$  em  $x = -a$ ,  $x = 0$  e  $x = a$  conforme mostrado na Figura 4.24, pode ser expressa por uma função polinomial da forma:

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2; \quad -a \leq x \leq a \quad (4.20)$$

Fazendo  $p(-a) = t_a$ ,  $p(0) = t_b$  e  $p(a) = t_c$  obtém-se:

$$p(x) = \frac{x^2}{2a^2} (t_a - 2t_b + t_c) - \frac{x}{2a} (t_a - t_c) + t_b \quad (4.21)$$

Pode-se então expressar  $p(x)$  como:

$$p(x) = \frac{1}{2} [q_2(x) - q_1(x)] t_a + [q_0(x) - q_2(x)] t_b + \frac{1}{2} [q_2(x) + q_1(x)] t_c \quad (4.22)$$

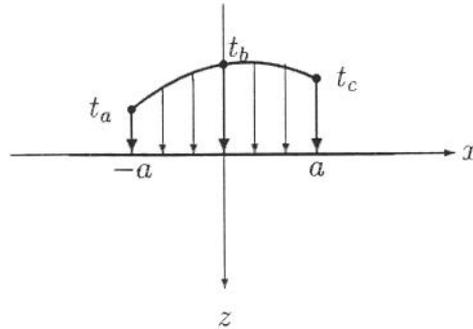


Figura 4.24: Exemplo de carga com distribuição quadrática

Assim, o efeito de  $p(x)$  pode ser determinado por uma combinação equivalente das funções de influência de  $q_i(x)$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Aplicando-se a transformação integral de Fourier em  $q_i(x)$  obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{q}_0(\lambda) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen } \lambda a}{\lambda} \\ \bar{q}_1(\lambda) &= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda a \cos \lambda a - \text{sen } \lambda a}{\lambda^2 a} \\ \bar{q}_2(\lambda) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\lambda^2 a^2 - 2) \text{sen } \lambda a + 2\lambda a \cos \lambda a}{\lambda^3 a^2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Pode-se verificar que  $\bar{q}_i(x)$  apresenta apenas a parte real não nula e é uma função par para  $i = 0, 2, \dots, 2k$  e  $\bar{q}_i(x)$  apresenta apenas a parte imaginária não nula e é uma função ímpar para  $i = 1, 3, \dots, 2k+1$ . Este fato é importante pois permite que se execute a transformação integral inversa utilizando-se apenas a parte positiva do eixo  $\zeta$ .

Para se obter as funções de influência das cargas, utilizam-se as equações (4.23) como condições de contorno, como mostrado no item anterior para  $q_0$ . Obtêm-se assim as seguintes funções de influência para o deslocamento devido a uma faixa de carga com as distribuições  $q_1$  e  $q_2$  aplicadas sobre o semi-espaco:

$$u_{lx}(x, z) = -\frac{2i}{\pi c_{44} \delta^2 a} \int_0^{\infty} \frac{1}{R_i} (\eta_6 \bar{\omega}_1 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_5 \bar{\omega}_2 e^{-\delta \xi_2 z}) \text{sen}(\delta \zeta x) d\zeta$$

$$\begin{aligned}
w_{lx}(x,z) &= \frac{2}{\pi c_{44} \delta^2 a} \int_0^\infty \frac{1}{R_l} (\eta_6 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_5 e^{-\delta \xi_2 z}) \cos(\delta \zeta x) d\zeta \\
w_{lz}(x,z) &= -\frac{2}{\pi c_{44} \delta^2 a} \int_0^\infty \frac{1}{R_l} (\eta_4 \bar{\omega}_1 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 \bar{\omega}_2 e^{-\delta \xi_2 z}) \cos(\delta \zeta x) d\zeta \\
w_{lx}(x,z) &= \frac{2i}{\pi c_{44} \delta^2 a} \int_0^\infty \frac{1}{R_l} (\eta_4 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 e^{-\delta \xi_2 z}) \operatorname{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \quad (4.24)
\end{aligned}$$

onde o prefixo  $l$  que aparece nos subíndices indica a distribuição linear do tipo  $q_1(x)$  da carga e:

$$R_l = \frac{\zeta^2 (\eta_3 \eta_6 - \eta_4 \eta_5)}{\delta a \zeta \cos \delta \zeta a - \operatorname{sen} \delta \zeta a} \quad (4.25)$$

e

$$\begin{aligned}
u_{qx}(x,z) &= -\frac{2}{\pi c_{44} \delta^3 a^2} \int_0^\infty \frac{1}{R_q} (\eta_6 \bar{\omega}_1 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_5 \bar{\omega}_2 e^{-\delta \xi_2 z}) \cos(\delta \zeta x) d\zeta \\
w_{qx}(x,z) &= -\frac{2i}{\pi c_{44} \delta a^2} \int_0^\infty \frac{1}{R_q} (\eta_6 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_5 e^{-\delta \xi_2 z}) \operatorname{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \\
u_{qz}(x,z) &= \frac{2i}{\pi c_{44} \delta a^2} \int_0^\infty \frac{1}{R_q} (\eta_4 \bar{\omega}_1 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 \bar{\omega}_2 e^{-\delta \xi_2 z}) \operatorname{sen}(\delta \zeta x) d\zeta \\
w_{qz}(x,z) &= \frac{2}{\pi c_{44} \delta a^2} \int_0^\infty \frac{1}{R_q} (\eta_4 e^{-\delta \xi_1 z} - \eta_3 e^{-\delta \xi_2 z}) \cos(\delta \zeta x) d\zeta \quad (4.26)
\end{aligned}$$

onde o prefixo  $q$  que aparece nos subíndices indica a distribuição quadrática do tipo  $q_2(x)$  da carga e:

$$R_q = \frac{\zeta^3 (\eta_3 \eta_6 - \eta_4 \eta_5)}{(\delta^2 \zeta^2 a^2 - 2) \operatorname{sen}(\delta \zeta a) + 2 \delta \zeta a \cos(\delta \zeta a)} \quad (4.27)$$

As funções de influência das tensões para este caso e as funções de influência dos deslocamentos e tensões de outros casos podem ser obtidos da mesma forma.

Este processo de se obter a influência de uma carga distribuída polinomial difere ligeiramente daquele utilizado comumente no método dos elementos de contorno. Utilizam-se normalmente *funções de forma* que assumem valor unitário num dos pontos onde a carga será determinada e valor nulo nos outros pontos. No entanto pode-se perceber pela equação (4.22) que as parcelas que multiplicam as componentes  $t_a$ ,  $t_b$  e  $t_c$  da carga são na verdade funções de forma de uma distribuição quadrática e, portanto, as funções de influência dessas funções de forma podem ser obtidas pela soma das funções de influência das distribuições  $q_i$  correspondentes. Em ambos os casos são necessárias 3 funções diferentes para representar a carga distribuída. Se fosse, porém, aplicada a transformação de Fourier diretamente sobre as funções

de forma, seriam obtidas funções transformadas com componentes pares e ímpares que deveriam ser separadamente utilizadas na transformação inversa, duplicando o esforço computacional necessário.

Para se demonstrar a viabilidade do processo descrito, tomou-se um exemplo de carregamento com distribuição quadrática com  $t_a = 3p_0/4$ ,  $t_b = p_0/2$  e  $t_c = p_0$  aplicado sobre a superfície do semi-espaço transversalmente isotrópico. As constantes elásticas do meio são  $c_{11}/c_{44} = 6$ ,  $n_1 = 1,2$  e  $n_3 = 0,9$ . Nas figuras 4.25 a 4.28 estão mostrados gráficos que representam os deslocamentos normalizados ao longo da superfície do semi-espaço devidos ao carregamento. As linhas contínuas e tracejadas representam a parte real e imaginária dos deslocamentos calculados pela combinação das funções de influência, como descrito acima, enquanto que os pontos marcados com símbolos representam os deslocamentos calculados através da integração das funções de Green ponderadas pelo carregamento. Para esta última integração foi utilizada também uma rotina numérica adaptativa do pacote QUADPACK [58].

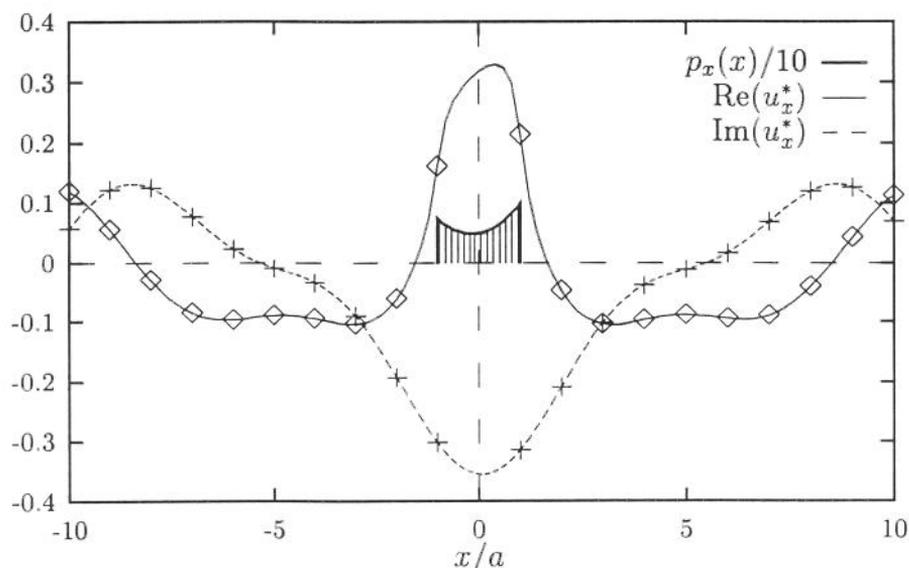


Figura 4.25: Deslocamento normalizado  $u_x^*$  ao longo de  $z = 0$  obtido pelas funções de influência (— e - -) e por integração das funções de Green ( $\diamond$  e +)

Pela análise dos resultados obtidos pode-se perceber uma completa concordância entre os dois processos de cálculo. A diferença entre eles fica restrita ao número de operações envolvidas no cálculo. Este número pode ser

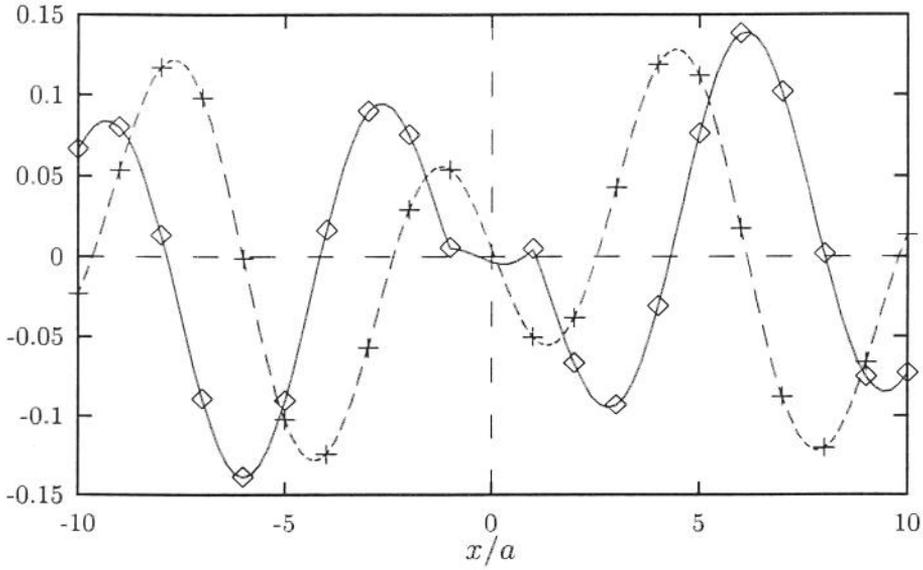


Figura 4.26: Deslocamento normalizado  $w_x^*$  ao longo de  $z = 0$  obtido pelas funções de influência (— e - -) e por integração das funções de Green ( $\diamond$  e +)

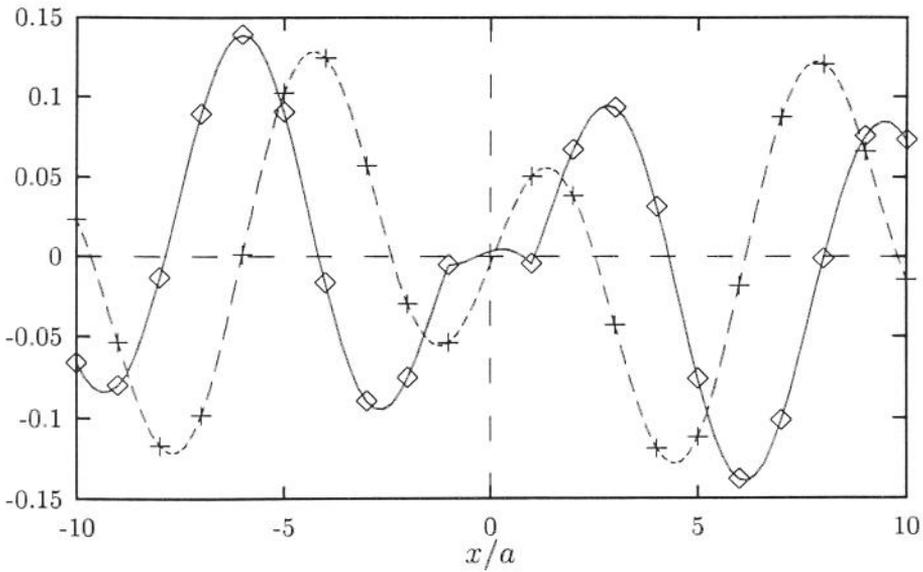


Figura 4.27: Deslocamento normalizado  $u_z^*$  ao longo de  $z = 0$  obtido pelas funções de influência (— e - -) e por integração das funções de Green ( $\diamond$  e +)

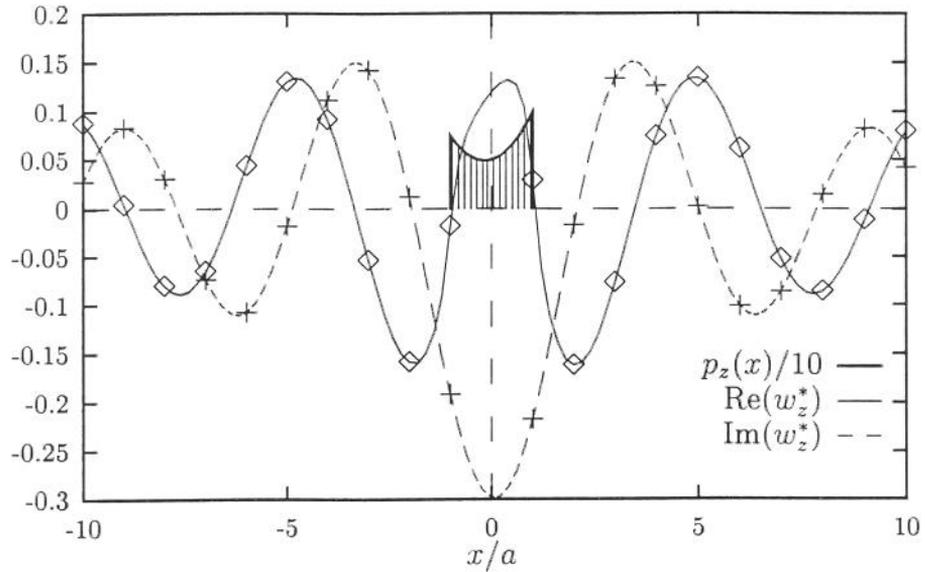


Figura 4.28: Deslocamento normalizado  $w_z^*$  ao longo de  $z = 0$  obtido pelas funções de influência (— e - -) e por integração das funções de Green (◇ e +)

analisado pela comparação entre os tempos dispendidos na determinação feita através de cada um desses processos.

A tabela 4.1 mostra o tempo relativo necessário para a determinação de cada uma das parcelas do deslocamento. Este tempo relativo é a razão entre o tempo computacional dispendido para o cálculo através da integração das funções de Green e o tempo dispendido pelo cálculo executado pela superposição das funções de influência.

Tabela 4.1: Relação entre os tempos computacionais necessários para o cálculo dos deslocamentos através de integração das funções de Green e através de superposição de funções de influência

$x/a$	1,0	2,0	5,0	10,0	20,0
	Tempo relativo				
$u_x^*$	31,3	5,8	6,0	5,5	5,9
$w_x^*$	5,5	5,9	6,2	5,5	5,7
$w_z^*$	31,9	5,5	5,9	5,9	5,8

Pode-se perceber que o cálculo feito pela integração das funções de Green exige um tempo em média seis vezes maior que o cálculo feito pelas funções de

influência, exceto pelas componentes  $u_x^*$  e  $w_z^*$  para  $x/a = 1$  quando o tempo necessário ultrapassa trinta vezes. Este tempo maior em  $x/a = 1$  se deve ao fato de que o ponto de observação se encontra na extremidade da rota de integração  $[-a, a]$ . As componentes  $G_{xx}$  e  $G_{zz}$  do tensor de Green apresentam uma singularidade no ponto de aplicação da carga, como visto no capítulo anterior. As rotinas de integração numérica do pacote Quadpack realizam esta integração utilizando um processo adaptativo que é capaz de lidar com problemas deste tipo desde que a integral imprópria seja convergente, como este caso. No entanto, elas são obrigadas a calcular a função em um número muito maior de pontos na região próxima a  $x/a = 1$  para se atingir a precisão requerida.

## 4.5 Cargas distribuídas no plano vertical

Uma limitação importante do uso do método apresentado até aqui é o fato de que só é possível obterem-se funções de influência para cargas distribuídas ao longo do eixo  $x$  (plano horizontal), mesmo para cargas aplicadas no interior do meio contínuo. No entanto muitas vezes é necessário determinar a influência de cargas distribuídas ao longo de outros planos, principalmente ao longo do plano vertical, no interior do meio elástico. Um exemplo é a análise de fundações enterradas.

Para o caso de carga aplicada no interior do meio infinito (espaço completo) é possível determinar as funções de influência de cargas distribuídas no plano vertical por um processo inteiramente similar ao já apresentado. Para isto aplica-se a transformação de Fourier na coordenada  $z$  desde o início. As expressões assim obtidas são completamente similares às aqui apresentadas apenas com a inversão da posição de  $\alpha$  com  $\beta$  e de  $x$  com  $z$ .

No caso de cargas distribuídas no interior do semi-espaço, porém, este método não pode ser aplicado pois o meio é semi-infinito e não infinito na direção  $z$ . Assim, nestes casos é necessária a integração da função de Green ao longo do plano de aplicação da carga.

Para este caso supõe-se inicialmente uma faixa de carga unitária com distribuição uniforme no plano vertical, de largura  $2a$ , centrada no ponto  $(0, z_0)$ , aplicada nas direções vertical e horizontal no interior do semi-espaço como mostrado na figura 4.29.

Neste caso as funções de influência para os deslocamentos serão dadas por:

$$u_{ci}(x, z) = \int_{z_0-a}^{z_0+a} G'_{xi}(x, z, z') dz'$$

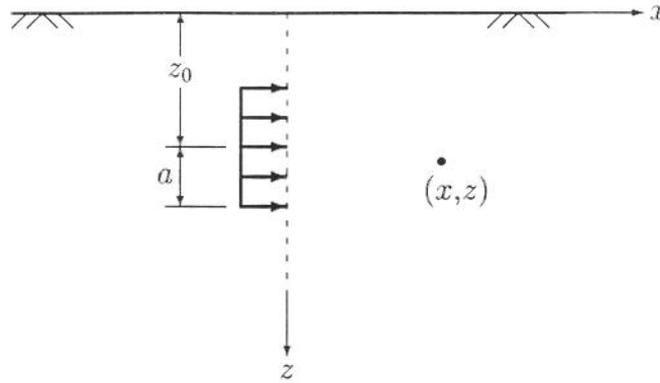


Figura 4.29: Carga uniforme distribuída na direção vertical no interior do semi-espaço

$$w_{ci}(x,z) = \int_{z_0-a}^{z_0+a} G'_{zi}(x,z,z') dz' \quad (4.28)$$

onde  $G'_{xi}$  e  $G'_{zi}$  são as funções de Green para os deslocamentos horizontal e vertical para carga aplicada no interior do semi-espaço na direção  $i = x, z$  a uma distância vertical  $z'$  da superfície. Aqui a origem do sistema de coordenadas foi tomado na superfície do semi-espaço, e não no ponto de aplicação da carga. Assim nas expressões das funções de Green deduzidas no capítulo anterior deve-se substituir  $z$  por  $z - z'$ .

As integrais em  $z'$  de (4.28) podem ser determinadas de forma explícita. Primeiramente separam-se das expressões das funções de Green a parcela de influência do meio infinito  $G_D$  e a parcela de influência da superfície livre  $G_R$ :

$$\begin{aligned} G'_{xi} &= G_{Dxi} + G_{Rxi} \\ G'_{zi} &= G_{Dzi} + G_{Rzi}; \quad i = x, z \end{aligned} \quad (4.29)$$

As expressões de  $G_D$  são as mesmas obtidas para linha de carga concentrada aplicada no interior de um meio infinito. Assim, a integração desta parcela resulta igual às funções de influência determinadas para uma faixa carga uniforme distribuída no plano vertical no interior de um meio infinito.

Restam então as integrais correspondentes às parcelas  $G_R$ . As parcelas  $G_R$  são dadas por:

$$G_{Rxx}(x,z,z') = -\frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{1}{H_x} \left( \bar{\omega}_1 \frac{K_1}{R} e^{-\delta\xi_1(z-z')} + \bar{\omega}_2 \frac{K_2}{R} e^{-\delta\xi_2(z-z')} \right) \cos(\delta\zeta x) d\zeta$$

$$\begin{aligned}
G_{Rzx}(x, z, z') &= -\frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{i}{H_x} \left( \frac{K_1}{R} e^{-\delta\xi_1(z-z')} + \frac{K_2}{R} e^{-\delta\xi_2(z-z')} \right) \\
&\quad \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
G_{Rxz}(x, z, z') &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{i}{H_x} \left( \frac{K'_1}{R'} e^{-\delta\xi_1(z-z')} + \frac{K'_2}{R'} e^{-\delta\xi_2(z-z')} \right) \\
&\quad \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
G_{Rzz}(x, z, z') &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \frac{1}{H_x} \left( \bar{\omega}_1 \frac{K'_1}{R'} e^{-\delta\xi_1(z-z')} + \bar{\omega}_2 \frac{K'_2}{R'} e^{-\delta\xi_2(z-z')} \right) \\
&\quad \text{cos}(\delta\zeta x) d\zeta \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Portanto o efeito da superfície livre  $u_R$  e  $w_R$  nas funções de influência será dado por:

$$\begin{aligned}
u_{Rx}(x, z) &= -\frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \int_{z_0-a}^{z_0+a} \frac{1}{H_x} \left( \bar{\omega}_1 \frac{K_1}{R} e^{-\delta\xi_1(z-z')} + \bar{\omega}_2 \frac{K_2}{R} e^{-\delta\xi_2(z-z')} \right) dz' \\
&\quad \text{cos}(\delta\zeta x) d\zeta \\
w_{Rx}(x, z) &= -\frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \int_{z_0-a}^{z_0+a} \frac{i}{H_x} \left( \frac{K_1}{R} e^{-\delta\xi_1(z-z')} + \frac{K_2}{R} e^{-\delta\xi_2(z-z')} \right) dz' \\
&\quad \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
u_{Rz}(x, z) &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \int_{z_0-a}^{z_0+a} \frac{i}{H_x} \left( \frac{K'_1}{R'} e^{-\delta\xi_1(z-z')} + \frac{K'_2}{R'} e^{-\delta\xi_2(z-z')} \right) dz' \\
&\quad \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta \\
w_{Rz}(x, z) &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_0^\infty \int_{z_0-a}^{z_0+a} \frac{1}{H_x} \left( \bar{\omega}_1 \frac{K'_1}{R'} e^{-\delta\xi_1(z-z')} + \bar{\omega}_2 \frac{K'_2}{R'} e^{-\delta\xi_2(z-z')} \right) dz' \\
&\quad \text{cos}(\delta\zeta x) d\zeta \tag{4.31}
\end{aligned}$$

As parcelas  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K'_1$  e  $K'_2$  dependem de  $z'$  e estão definidas no capítulo anterior. São aqui repetidas estas definições:

$$\begin{aligned}
K_1 &= (\eta_3\eta_6 + \eta_4\eta_5) e^{-2\delta\xi_1 z'} - 2\eta_4\eta_6 e^{-\delta(\xi_1+\xi_2)z'} \\
K_2 &= (\eta_3\eta_6 + \eta_4\eta_5) e^{-2\delta\xi_2 z'} - 2\eta_3\eta_5 e^{-\delta(\xi_1+\xi_2)z'} \\
K'_1 &= (\mu_3\mu_6 + \mu_4\mu_5) e^{-2\delta\xi_1 z'} - 2\mu_4\mu_6 e^{-\delta(\xi_1+\xi_2)z'} \\
K'_2 &= (\mu_3\mu_6 + \mu_4\mu_5) e^{-2\delta\xi_2 z'} - 2\mu_3\mu_5 e^{-\delta(\xi_1+\xi_2)z'} \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Como a integração em  $z'$  envolve apenas parcelas do tipo  $\exp(kz')$ , de fácil obtenção da solução analítica, é necessária apenas a integração numérica em  $\zeta$ . Este resultado é então somado às funções de influência de faixa de carga uniforme distribuída no plano vertical de um meio infinito.

Para as tensões o procedimento é o mesmo. Separa-se a influência da superfície livre, integra-se esta influência em  $z'$  e soma-se o resultado à solução

das funções de influência para carga distribuída no plano vertical no interior de um meio infinito.

A separação das funções de Green em duas parcelas apresenta algumas vantagens. Em primeiro lugar evita-se na integração analítica em  $z'$  os termos em que aparece  $|z - z'|$ . Na integração a função módulo deve ser desmembrada em duas, uma para a parte positiva e uma para a parte negativa, quando a coordenada  $z$  do ponto de observação se encontra entre as extremidades da faixa de carga. Isto equivale a uma subdivisão do intervalo de integração em dois subintervalos. Nestes casos o esforço computacional é duplicado pois haverá duas integrais numéricas a serem executadas. Além disso, quando a coordenada  $z$  do ponto de observação coincide com uma das extremidades podem surgir problemas de natureza numérica na decisão de se dividir ou não o intervalo de integração.

Outro problema evitado se refere às componentes  $\sigma_{xxx}$  e  $\sigma_{zzz}$  das funções de Green. Para uma carga aplicada no plano vertical estas são as componentes em que se impõem as condições de contorno no plano de aplicação da carga. Assim nas funções de influência para carga distribuída uniforme aplicada no plano vertical deve haver um salto unitário nestas componentes quando se atravessa o plano vertical em qualquer ponto entre os extremos da faixa de aplicação dessa carga. Como o domínio é simétrico em relação ao eixo vertical e a carga é aplicada ao longo deste eixo de simetria, este salto unitário se distribui igualmente entre os dois lados do plano de aplicação da carga. No entanto, as expressões das funções de Green dessas componentes mostra que ambas são nulas para  $x = 0$ . Ao se integrar estas expressões em  $z'$  as funções de influência também resultarão nulas para  $x = 0$ , o que está incorreto. A separação em duas parcelas evita este erro pois as funções de influência para carga aplicada no plano vertical no interior de um meio infinito reproduzem este salto unitário nas componentes  $\sigma_{xxx}$  e  $\sigma_{zzz}$ , e a influência da superfície livre nessas componentes é nula para  $x = 0$ .

Na figura 4.30 estão mostrados gráficos que representam a variação das componentes normalizadas  $\sigma_{cxxx}^*$  e  $\sigma_{czzz}^*$  ao longo do plano horizontal dado por  $z = a$  devidas a uma faixa vertical de carga, de largura  $2a$ , aplicada a uma profundidade  $z_0 = a$  no interior de um meio elástico semi-infinito. São apresentados resultados obtidos para um material isotrópico com  $\nu = 0,4$  e para um material transversalmente isotrópico com  $c_{11}/c_{44} = 6$ ;  $n_1 = 1,5$  e  $n_3 = 0,8$ . Para ambos os materiais é adotada uma taxa de amortecimento interno  $\nu = 0,01$ . Os resultados apresentados se referem a uma frequência  $a_0 = 1$ .

Pode-se verificar que a influência da anisotropia é maior em  $\sigma_{czzz}^*$ . Isto é devido à diferença na rigidez vertical entre os dois materiais. Pode-se também comprovar o salto unitário que ocorre para  $x = 0$ . Devido à simetria

do problema em relação ao eixo vertical as funções de influência para estas componentes da carga resultam ímpares.

Outro fato que se nota é o pequeno aumento em  $\sigma_{cxxx}^*$  nas proximidades da carga, repetindo o fato já notado na análise dos resultados das tensões provocadas por uma faixa horizontal de carga aplicada sobre o semi-espaço. Este aumento não é notado em  $\sigma_{cxzz}^*$  o que significa que esta componente se espalha mais ao se afastar da faixa de carga.

## 4.6 Considerações finais

Neste capítulo estão apresentados o desenvolvimento e os resultados de funções de influência de cargas distribuídas na superfície e no interior de meios elásticos transversalmente isotrópicos.

Para cargas distribuídas horizontalmente são obtidas funções de influência que podem reproduzir o efeito de carregamentos com distribuição polinomial através da superposição de efeito de cargas mais simples.

Para cargas distribuídas verticalmente são deduzidas funções de influência para distribuição uniforme de carga aplicada no interior do semi-espaço elástico. Pode-se também obter pelo mesmo processo funções de influência de cargas verticalmente distribuídas no interior de uma camada elástica apoiada sobre base rígida e para outros tipos de distribuição do carregamento.

Os resultados obtidos para carga uniforme distribuída horizontalmente são comparados com resultados obtidos por métodos desenvolvidos por Mesquita e Romanini [49] para materiais viscoelásticos isotrópicos e por Rajapakse e Wang [67] para materiais elásticos transversalmente isotrópicos. Para o caso de material isotrópico os resultados obtidos pelos três processos apresentam boa concordância. Para materiais anisotrópicos, porém, os resultados obtidos pelo método de Rajapakse e Wang [67] apresentam grandes diferenças em relação aos resultados obtidos pelo método aqui apresentado no caso de materiais com menor rigidez. Esta diferença aparentemente é causada pelo processo de integração numérica empregado no método de Rajapakse e Wang [67]. Para materiais transversalmente isotrópicos com maior rigidez, por outro lado, os resultados obtidos pelo método de Rajapakse e Wang [67] apresentam boa concordância com os resultados do método aqui proposto.

Para cargas distribuídas ao longo de outras direções quaisquer, além das direções horizontal e vertical, são necessárias deduções adicionais. Estas deduções, bem como resultados obtidos para estes casos, estão apresentados no capítulo seguinte.

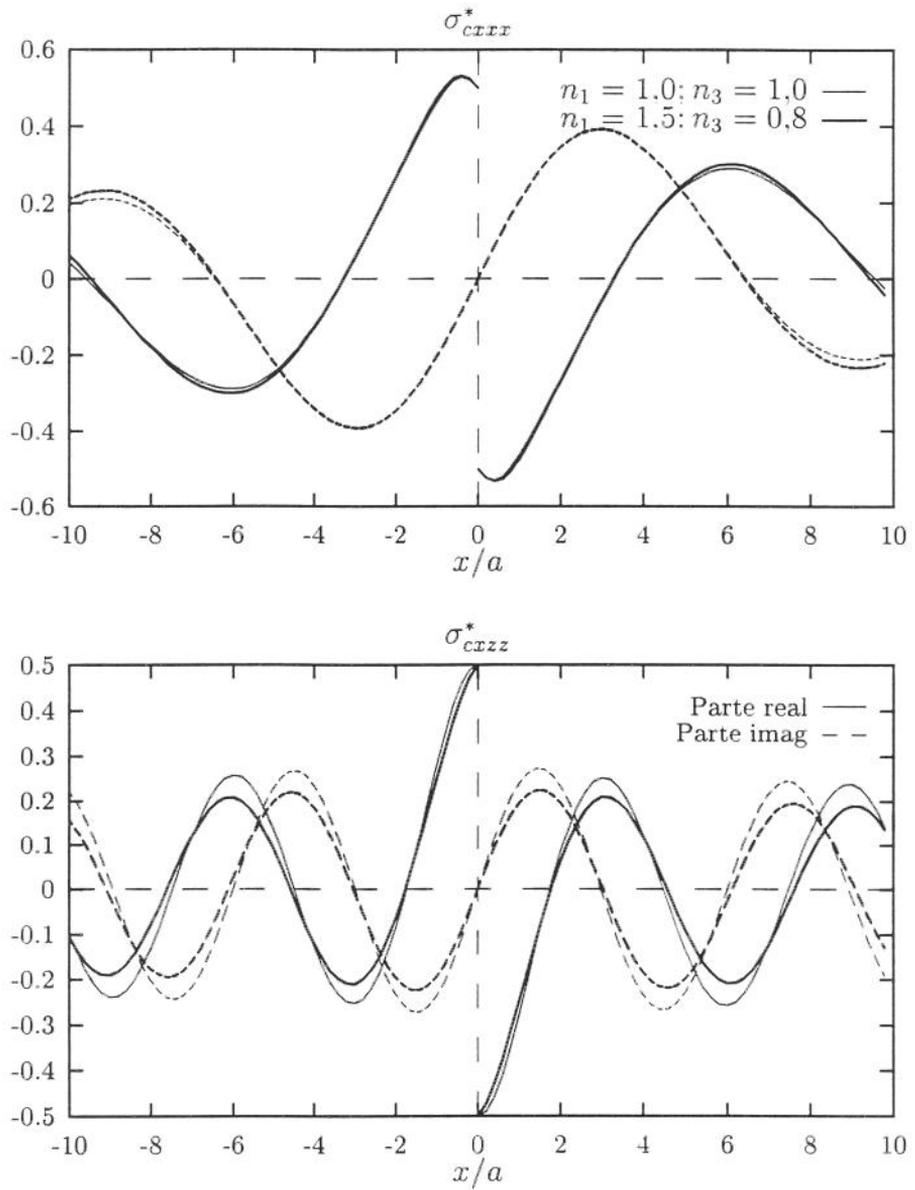


Figura 4.30: Tensões normalizadas  $\sigma_{cxxx}^*$  e  $\sigma_{cxzz}^*$  ao longo de  $z = a$  para faixa de carga uniforme distribuída verticalmente no interior de um meio semi-infinito.

## Capítulo 5

# Funções de Green para Meios com Eixo de Simetria Inclinado

### 5.1 Apresentação

Em geral, a análise do comportamento de meios elásticos ortotrópicos e transversalmente isotrópicos é feita adotando-se a hipótese inicial de que o eixo de simetria do material (no caso ortotrópico os eixos principais) coincide com um dos eixos do sistema de coordenadas adotado. São dois os motivos que levam à adoção dessa hipótese. Em primeiro lugar no caso de materiais de origem geológica a orientação do eixo de simetria é em geral vertical, sendo mais raros os casos em que a orientação é outra. Em segundo lugar, a consideração de um eixo de simetria inclinado torna o problema bem mais complexo, tanto do ponto de vista analítico como do numérico. A matriz das constantes elásticas de materiais anisotrópicos é dependente do sistema de coordenadas adotado para descrevê-la, como já visto, e para meios transversalmente isotrópicos uma rotação neste sistema de coordenadas resulta numa matriz  $c'_{ij}$  cheia, com todos os seus elementos diferentes de zero. Embora o número de constantes elásticas independentes entre si não se altere, em termos analíticos a complexidade do problema é equivalente ao de um caso mais geral de anisotropia.

No entanto, o desenvolvimento de soluções para funções de Green e funções de influência para casos em que o eixo de simetria do material não coincide com o sistema de coordenadas, tem interesse. Em primeiro lugar não é impossível que na natureza o meio se apresente com uma inclinação do eixo de simetria em relação à vertical. Isto é mais provável no caso de rochas metamórficas e de solos resultantes de alteração desse tipo de rochas. Mesmo para materiais sedimentares os processos geológicos podem levar a uma

inclinação das camadas. Além disso, para se obter funções de influência de cargas distribuídas ao longo de planos inclinados no interior de um meio infinito é útil a dedução de soluções gerais dos deslocamentos e das tensões para um sistema de coordenadas inclinado.

Neste capítulo são apresentadas as soluções gerais para os deslocamentos e para as tensões no interior de um meio transversalmente isotrópico e em seguida são desenvolvidas as soluções para as funções de Green e para as funções de influência para os casos de carga dinâmica harmônica aplicada na superfície de um espaço semi-infinito e de carga dinâmica harmônica aplicada no interior de um espaço infinito.

## 5.2 Equações gerais

Seja um meio elástico transversalmente isotrópico com eixo de simetria vertical paralelo à direção  $z$  de um sistema de coordenadas  $x, z$ . Deseja-se obter as equações gerais de movimento segundo um sistema de coordenadas  $x', z'$  obtido de uma rotação  $\theta$  do sistema de coordenadas original. Os deslocamentos  $u'$  e  $w'$  nas direções  $x'$  e  $z'$  podem ser expressos em função de  $u$  e  $w$  por (figura 5.1):

$$\begin{aligned} u' &= u \cos \theta - w \sin \theta \\ w' &= u \sin \theta + w \cos \theta \end{aligned} \quad (5.1)$$

portanto:

$$\begin{aligned} u &= u' \cos \theta + w' \sin \theta \\ w &= -u' \sin \theta + w' \cos \theta \end{aligned} \quad (5.2)$$

Assim o valor das derivadas parciais de segunda ordem de  $u$  e de  $w$  podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \cos^3 \theta + 2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial z'} \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \sin^2 \theta \cos \theta + \\ &\quad \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} \sin \theta \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x' \partial z'} \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \sin^3 \theta \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \sin^2 \theta \cos \theta - 2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial z'} \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \cos^3 \theta + \\ &\quad \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} \sin^3 \theta - 2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x' \partial z'} \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \sin \theta \cos^2 \theta \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial z'} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \theta - \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) \sin \theta \cos^2 \theta + \end{aligned}$$

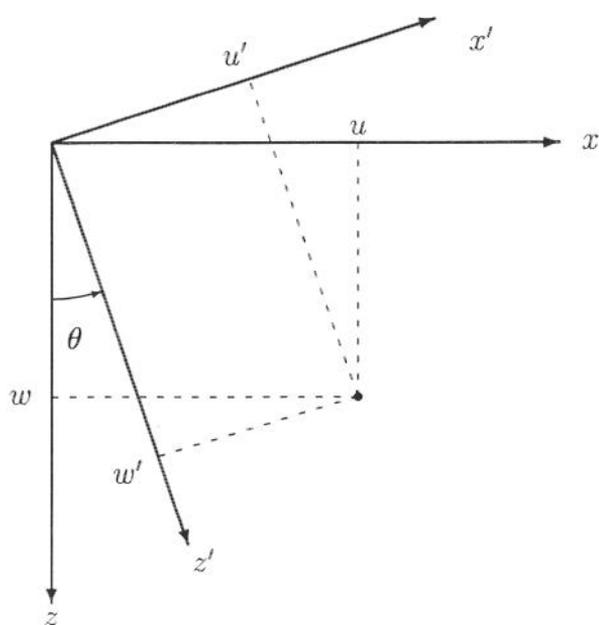


Figura 5.1: Rotação do sistema de coordenadas

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x' \partial z'} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta - \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \quad (5.3)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \sin \theta \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial z'} \sin^2 \theta \cos \theta - \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \sin^3 \theta + \\ &\quad \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} \cos^3 \theta + 2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x' \partial z'} \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \sin^2 \theta \cos \theta \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= -\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \sin^3 \theta + 2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial z'} \sin^2 \theta \cos \theta - \sin \theta \cos^2 \theta + \\ &\quad \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} \sin^2 \theta \cos \theta - 2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x' \partial z'} \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \cos^3 \theta \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= -(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta + \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta + \\ &\quad \frac{\partial^2 w'}{\partial x' \partial z'} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \theta - \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \right) \sin \theta \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (5.4)$$

Substituindo estes resultados nas equações diferenciais de movimento (3.8), estas ficam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} K_{u_{xx}} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial z'} K_{u_{xz}} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} K_{u_{zz}} + \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} K_{w_{xx}} + \frac{\partial^2 w'}{\partial x' \partial z'} K_{w_{xz}} + \\ \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} K_{w_{zz}} + \delta^2 (u' \cos \theta + w' \sin \theta) = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

e

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} L_{u_{xx}} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial z'} L_{u_{xz}} - \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} L_{u_{zz}} + \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} L_{w_{xx}} - \frac{\partial^2 w'}{\partial x' \partial z'} L_{w_{xz}} + \\ \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} L_{w_{zz}} + \delta^2 (-u' \sin \theta + w' \cos \theta) = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde

$$\begin{aligned} K_{u_{xx}} &= \beta \cos^3 \theta + (\kappa + 1) \sin^2 \theta \cos \theta \\ K_{u_{xz}} &= 2(\beta - 1) \sin \theta \cos^2 \theta - \kappa (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta \\ K_{u_{zz}} &= (\beta - \kappa) \sin^2 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta \\ K_{w_{xx}} &= (\beta - \kappa) \sin \theta \cos^2 \theta + \sin^3 \theta \\ K_{w_{xz}} &= 2(\beta - 1) \sin^2 \theta \cos \theta + \kappa (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \theta \\ K_{w_{zz}} &= \beta \sin^3 \theta + (\kappa + 1) \sin \theta \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (5.7)$$

e

$$\begin{aligned}
L_{u_{xx}} &= \alpha \sin^3 \theta + (\kappa + 1) \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta \\
L_{u_{xz}} &= 2(\alpha - 1) \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta + \kappa (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \cos \theta \\
L_{u_{zz}} &= (\alpha - \kappa) \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta \\
L_{w_{xx}} &= (\alpha - \kappa) \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta \\
L_{w_{xz}} &= 2(\alpha - 1) \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta - \kappa (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \operatorname{sen} \theta \\
L_{w_{zz}} &= \alpha \cos^3 \theta + (\kappa + 1) \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Aplicando a transformação integral de Fourier na coordenada  $x'$ , resulta:

$$\begin{aligned}
-\lambda^2 K_{u_{xx}} \bar{u}' + i\lambda K_{u_{xz}} \frac{\partial \bar{u}'}{\partial z'} + K_{u_{zz}} \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z'^2} - \lambda^2 K_{w_{xx}} \bar{w}' + i\lambda K_{w_{xz}} \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z'} + \\
K_{w_{zz}} \frac{\partial^2 \bar{w}'}{\partial z'^2} + \delta^2 (\bar{u}' \cos \theta + \bar{w}' \operatorname{sen} \theta) = 0
\end{aligned} \tag{5.9}$$

e

$$\begin{aligned}
\lambda^2 L_{u_{xx}} \bar{u}' + i\lambda L_{u_{xz}} \frac{\partial \bar{u}'}{\partial z'} - L_{u_{zz}} \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z'^2} - \lambda^2 L_{w_{xx}} \bar{w}' - i\lambda L_{w_{xz}} \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z'} + \\
L_{w_{zz}} \frac{\partial^2 \bar{w}'}{\partial z'^2} + \delta^2 (-\bar{u}' \operatorname{sen} \theta + \bar{w}' \cos \theta) = 0
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Estas equações podem ser desacopladas resultando (e lembrando que  $\zeta = \lambda/\delta$ ):

$$\begin{aligned}
\delta^4 (T_1 \zeta^4 - T_2 \zeta^2 + 1) \bar{u}' + i\delta^3 (T_3 \zeta^3 - T_4 \zeta) \frac{\partial \bar{u}'}{\partial z'} - \delta^2 (T_5 \zeta^2 - T_6) \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial z'^2} + \\
iT_7 \delta \zeta \frac{\partial^3 \bar{u}'}{\partial z'^3} + T_8 \frac{\partial^4 \bar{u}'}{\partial z'^4} = 0
\end{aligned} \tag{5.11}$$

e

$$\begin{aligned}
\delta^4 (T_1 \zeta^4 - T_2 \zeta^2 + 1) \bar{w}' + i\delta^3 (T_3 \zeta^3 - T_4 \zeta) \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z'} - \delta^2 (T_5 \zeta^2 - T_6) \frac{\partial^2 \bar{w}'}{\partial z'^2} + \\
iT_7 \delta \zeta \frac{\partial^3 \bar{w}'}{\partial z'^3} + T_8 \frac{\partial^4 \bar{w}'}{\partial z'^4} = 0
\end{aligned} \tag{5.12}$$

onde

$$T_1 = \frac{1}{8} [3(\alpha + \beta) + \gamma - 4(\alpha - \beta) \cos 2\theta + (\alpha + \beta - \gamma) \cos 4\theta]$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= 1 + \frac{1}{2} [\alpha + \beta - (\alpha - \beta) \cos 2\theta] \\
T_3 &= [\alpha - \beta - (\alpha + \beta - \gamma) \cos 2\theta] \operatorname{sen} 2\theta \\
T_4 &= (\alpha - \beta) \operatorname{sen} 2\theta \\
T_5 &= \frac{1}{4} [3(\alpha + \beta) + \gamma - 3(\alpha + \beta - \gamma) \cos 4\theta] \\
T_6 &= 1 + \frac{1}{2} [\alpha + \beta + (\alpha - \beta) \cos 2\theta] \\
T_7 &= [-\alpha + \beta - (\alpha + \beta - \gamma) \cos 2\theta] \operatorname{sen} 2\theta \\
T_8 &= \frac{1}{8} [3(\alpha + \beta) + \gamma + 4(\alpha - \beta) \cos 2\theta + (\alpha + \beta - \gamma) \cos 4\theta] \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Para  $\bar{w}'(\lambda, z)$  da forma  $\bar{w}' = e^{\delta\xi z'}$  a equação (5.11) fica:

$$\begin{aligned}
&\delta^4 (T_1 \zeta^4 - T_2 \zeta^2 + 1) e^{\delta\xi z'} + i\delta^4 \xi (T_3 \zeta^3 - T_4 \zeta) e^{\delta\xi z'} - \\
&\delta^4 \xi^2 (T_5 \zeta^2 - T_6) e^{\delta\xi z'} + iT_7 \delta^4 \zeta \xi^3 e^{\delta\xi z'} + T_8 \delta^4 \xi^4 e^{\delta\xi z'} = 0 \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Portanto:

$$T_1 \zeta^4 - T_2 \zeta^2 + 1 + i\xi (T_3 \zeta^3 - T_4 \zeta) - \xi^2 (T_5 \zeta^2 - T_6) + iT_7 \zeta \xi^3 + T_8 \xi^4 = 0 \quad (5.15)$$

A equação (5.15) é uma equação polinomial do quarto grau em  $\xi$  e portanto tem quatro raízes  $\xi_i, i = 1, \dots, 4$ . Assim os deslocamentos transformados  $\bar{w}'(\lambda, z')$  e  $\bar{u}'(\lambda, z')$  serão:

$$\begin{aligned}
\bar{w}'(\lambda, z') &= Ae^{\delta\xi_1 z'} + Be^{\delta\xi_2 z'} + Ce^{\delta\xi_3 z'} + De^{\delta\xi_4 z'} \\
\bar{u}'(\lambda, z') &= A\omega'_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B\omega'_2 e^{\delta\xi_2 z'} + C\omega'_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D\omega'_4 e^{\delta\xi_4 z'} \quad (5.16)
\end{aligned}$$

onde:

$$\omega'_i = \frac{\zeta^2 L_{wxx} + i\zeta L_{wzx} \xi_i - L_{wzz} \xi_i^2 - \cos \theta}{\zeta^2 L_{uux} + i\zeta L_{uux} \xi_i - L_{uzz} \xi_i^2 - \operatorname{sen} \theta}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (5.17)$$

As funções  $A(\zeta)$ ,  $B(\zeta)$ ,  $C(\zeta)$  e  $D(\zeta)$  são amplitudes de onda que devem ser determinadas pelas condições de contorno do problema. Como estas condições de contorno podem ser dadas em termos de deslocamentos ou em termos de tensões, são necessárias também soluções gerais para as tensões no interior do meio.

### 5.3 Tensões

As tensões  $\sigma_{i'j'}$  no sistema de coordenadas  $x'z'$  para o caso de deformação plana são dadas por:

$$\sigma_{x'x'} = c'_{11} \epsilon_{x'x'} + c'_{13} \epsilon_{z'z'} + 2c'_{15} \epsilon_{x'z'}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{z'z'} &= c'_{13}\epsilon_{x'x'} + c'_{33}\epsilon_{z'z'} + 2c'_{35}\epsilon_{x'z'} \\ \sigma_{x'z'} &= c'_{15}\epsilon_{x'x'} + c'_{35}\epsilon_{z'z'} + 2c'_{55}\epsilon_{x'z'}\end{aligned}\quad (5.18)$$

onde

$$\begin{aligned}\epsilon_{x'x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \epsilon_{z'z'} &= \frac{\partial w'}{\partial z'} \\ \epsilon_{x'z'} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \right)\end{aligned}\quad (5.19)$$

Utilizando-se as equações (2.40) deduzidas no capítulo 2, as constantes elásticas  $c'_{ij}$  segundo o sistema de coordenadas  $x'z'$  podem ser expressas como:

$$\begin{aligned}\bar{c}'_{11} &= \frac{c'_{11}}{c_{44}} = \beta \cos^4 \theta + \alpha \sin^4 \theta + 2(\kappa + 1) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{c}'_{13} &= \frac{c'_{13}}{c_{44}} = (\beta + \alpha - 4) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (\kappa - 1) (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{c}'_{15} &= \frac{c'_{15}}{c_{44}} = (\kappa + 1 - \alpha) \sin^3 \theta \cos \theta - (\kappa + 1 - \beta) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{c}'_{33} &= \frac{c'_{33}}{c_{44}} = \alpha \cos^4 \theta + \beta \sin^4 \theta + 2(\kappa + 1) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{c}'_{35} &= \frac{c'_{35}}{c_{44}} = (\kappa + 1 - \alpha) \sin \theta \cos^3 \theta - (\kappa + 1 - \beta) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{c}'_{55} &= \frac{c'_{55}}{c_{44}} = [\beta + \alpha - 2(\kappa - 1)] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2\end{aligned}\quad (5.20)$$

A aplicação da transformação integral de Fourier na coordenada  $x'$  nas equações (5.18) juntamente com as equações (5.16) resulta:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{x'x'} &= \delta c_{44} (f_1 A e^{\delta \xi_1 z'} + f_2 B e^{\delta \xi_2 z'} + f_3 C e^{\delta \xi_3 z'} + f_4 D e^{\delta \xi_4 z'}) \\ \bar{\sigma}_{z'z'} &= \delta c_{44} (g_1 A e^{\delta \xi_1 z'} + g_2 B e^{\delta \xi_2 z'} + g_3 C e^{\delta \xi_3 z'} + g_4 D e^{\delta \xi_4 z'}) \\ \bar{\sigma}_{x'z'} &= \delta c_{44} (h_1 A e^{\delta \xi_1 z'} + h_2 B e^{\delta \xi_2 z'} + h_3 C e^{\delta \xi_3 z'} + h_4 D e^{\delta \xi_4 z'})\end{aligned}\quad (5.21)$$

onde:

$$\begin{aligned}f_i &= i\zeta \bar{c}'_{11} \omega'_i + \bar{c}'_{13} \xi_i + \bar{c}'_{15} (i\zeta + \xi_i \omega_i) \\ g_i &= i\zeta \bar{c}'_{13} \omega'_i + \bar{c}'_{33} \xi_i + \bar{c}'_{35} (i\zeta + \xi_i \omega_i) \\ h_i &= i\zeta \bar{c}'_{15} \omega'_i + \bar{c}'_{35} \xi_i + \bar{c}'_{55} (i\zeta + \xi_i \omega_i), \quad i = 1, \dots, 4\end{aligned}\quad (5.22)$$

As equações (5.21) fornecem a solução geral no domínio transformado para o estado de tensões em um ponto qualquer no interior do meio elástico.

## 5.4 Funções de Green

### 5.4.1 Carga aplicada sobre o semi-espaço

Seja um meio semi-infinito elástico transversalmente isotrópico definido por:

$$|x'| < \infty, 0 \leq z' < \infty \quad (5.23)$$

O eixo de simetria do material apresenta uma inclinação  $\theta$  em relação à direção vertical  $z'$  normal à superfície do semi-espaço, conforme mostrado na figura 5.2. Sobre a superfície deste semi-espaço estão aplicadas linhas de carga dinâmicas harmônicas unitárias nas direções horizontal e vertical.

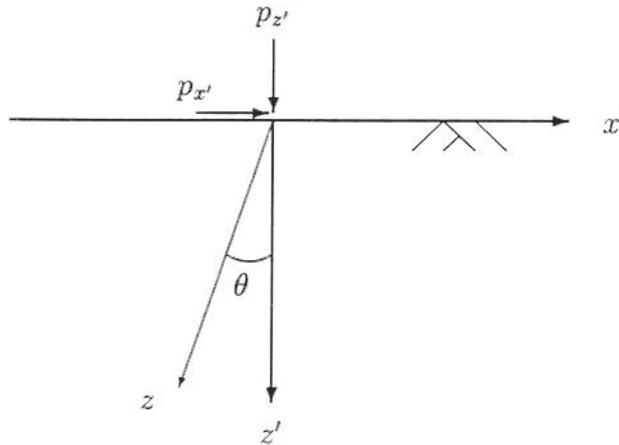


Figura 5.2: Carga aplicada sobre o semi-espaço com eixo de simetria inclinado

A solução do problema é separada em duas etapas. Uma para a carga  $p_{x'}$  e outra para a carga  $p_{z'}$ .

1. Carga na direção  $x'$ :

Para a carga aplicada na direção horizontal as condições de contorno a serem obedecidas são:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'z'}(x', z' = 0) &= -p_{x'}(x') \\ \sigma_{z'z'}(x', z' = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

A aplicação da transformação de Fourier na direção  $x'$  conduz às seguintes condições de contorno:

$$\bar{\sigma}_{x'z'}(\lambda, z' = 0) = -\bar{p}_{x'}(\lambda)$$

$$\bar{\sigma}_{z'z'}(\lambda, z' = 0) = 0 \quad (5.25)$$

Estas condições de contorno levam ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} h_1 A + h_2 B + h_3 C + h_4 D &= -\frac{\bar{p}_{x'}(\lambda)}{\delta c_{44}} \\ g_1 A + g_2 B + g_3 C + g_4 D &= 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Além dessas condições de contorno, os deslocamentos  $u'$  e  $w'$  devem satisfazer às condições de irradiação no infinito, ou seja:

$$\begin{aligned} \lim_{z' \rightarrow \infty} (Ae^{\delta\xi_1 z'} + Be^{\delta\xi_2 z'} + Ce^{\delta\xi_3 z'} + De^{\delta\xi_4 z'}) &= 0 \\ \lim_{z' \rightarrow \infty} (A\omega'_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B\omega'_2 e^{\delta\xi_2 z'} + C\omega'_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D\omega'_4 e^{\delta\xi_4 z'}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Esta condição expressa pelas equações (5.27) impõe que para qualquer dos valores  $\xi_i$  que tiver a parte real positiva, a função  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ou  $D$  respectiva deve ser nula.

No entanto, o problema poderia ter sido colocado como uma carga aplicada sobre o semi-espaço complementar dado por  $-\infty < z' \leq 0$ . Neste caso, então, estas condições deveriam também ser válidas para  $z' \rightarrow -\infty$ . Isto levaria à conclusão inversa sobre a parte real de  $\xi_i$ , ou seja, se  $\text{Re}(\xi_i) < 0$  então a função respectiva  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ou  $D$  deve ser nula. Dessa forma, a única possibilidade de se atender aos dois casos é que dois dos valores  $\xi_i, i = 1, 2$  têm a parte real menor ou igual a zero e os dois restantes têm a parte real maior ou igual a zero. Assim  $C$  e  $D$  devem ser nulos para que a condição de irradiação seja obedecida.

Esta conclusão é reforçada pela análise da estrutura da equação (5.15) que fornece as raízes  $\xi_i$ . Pode-se perceber, por simples substituição, que se  $\xi$  é uma das raízes de (5.15), então o oposto de seu conjugado  $-\bar{\xi}$  também o será, ou seja, as raízes  $\xi_i$  formam dois pares com componentes simétricas em relação ao eixo imaginário de  $\xi$ . Isto é válido quando as constantes  $T_i, i = 1, \dots, 8$  forem reais. Quando o material apresenta amortecimento interno, porém, as constantes  $T_i$  se tornam complexas. Mas, como este amortecimento se traduz por uma parcela imaginária *positiva* em  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\kappa$ , observa-se que as componentes desses pares se afastam na direção do eixo real quando aumenta o amortecimento interno do material.

O fato de as raízes  $\xi_i$  formarem pares com componentes de sinais opostos na sua parte real tem uma forte interpretação física. As funções

$A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são amplitudes de onda que se propagam no interior do meio elástico. Como há apenas dois tipos de ondas elásticas, mesmo no material anisotrópico, duas destas amplitudes devem se propagar no sentido de  $z'$  e duas no sentido de  $-z'$ . Isto só é possível se as raízes  $\xi_i$  forem dadas por pares com componentes de sinais opostos na sua parte real.

Retornando ao sistema de equações (5.26), a sua solução é dada por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\bar{p}_{x'}}{c_{44}\delta} \frac{g_2}{g_1 h_2 - g_2 h_1} \\ B &= -\frac{\bar{p}_{x'}}{c_{44}\delta} \frac{g_1}{g_1 h_2 - g_2 h_1} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Para se obterem as funções de Green aplica-se uma linha de carga concentrada expressa por  $p_{x'} = \delta_D(x')$ . A aplicação da transformação de Fourier resulta:

$$\bar{p}_{x'}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (5.29)$$

## 2. Carga na direção de $z'$ :

Para a carga na direção vertical  $p_{z'}$ , as condições de contorno são:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'z'}(x', z' = 0) &= 0 \\ \sigma_{z'z'}(x', z' = 0) &= -p_{z'}(x') \end{aligned} \quad (5.30)$$

o que leva ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} h_1 A + h_2 B &= 0 \\ g_1 A + g_2 B &= -\frac{\bar{p}_{z'}(\lambda)}{c_{44}\delta} \end{aligned} \quad (5.31)$$

A solução desse sistema de equações é:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\bar{p}_{z'}}{c_{44}\delta} \frac{h_2}{g_1 h_2 - g_2 h_1} \\ B &= \frac{\bar{p}_{z'}}{c_{44}\delta} \frac{h_1}{g_1 h_2 - g_2 h_1} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Para a carga  $p_{z'} = \delta(x')$  a aplicação da transformação de Fourier resulta:

$$\bar{p}_{z'}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (5.33)$$

Utilizando-se os resultados expressos pelas equações (5.28) e (5.32) nas expressões (5.16) dos deslocamentos e (5.21) das tensões transformados e aplicando-se a transformação integral inversa as funções de Green ficam:

$$\begin{aligned}
 G_{x'x'} &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g_1 h_2 - g_2 h_1} (g_2 \omega'_1 e^{\delta \xi_1 z'} - g_1 \omega'_2 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{i\delta \zeta x'} d\zeta \\
 G_{z'x'} &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g_1 h_2 - g_2 h_1} (g_2 e^{\delta \xi_1 z'} - g_1 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{i\delta \zeta x'} d\zeta \\
 G_{x'z'} &= -\frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g_1 h_2 - g_2 h_1} (h_2 \omega'_1 e^{\delta \xi_1 z'} - h_1 \omega'_2 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{i\delta \zeta x'} d\zeta \\
 G_{z'z'} &= -\frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g_1 h_2 - g_2 h_1} (h_2 e^{\delta \xi_1 z'} - h_1 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{i\delta \zeta x'} d\zeta \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

e as tensões:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x'x'x'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g_1 h_2 - g_2 h_1} (f_1 g_2 e^{\delta \xi_1 z'} - f_2 g_1 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{i\delta \zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{x'z'x'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g_1 h_2 - g_2 h_1} (h_1 g_2 e^{\delta \xi_1 z'} - h_2 g_1 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{i\delta \zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{z'z'x'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1 g_2}{g_1 h_2 - g_2 h_1} (e^{\delta \xi_1 z'} - e^{\delta \xi_2 z'}) e^{i\delta \zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{x'x'z'} &= -\frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g_1 h_2 - g_2 h_1} (f_1 h_2 e^{\delta \xi_1 z'} - f_2 h_1 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{i\delta \zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{x'z'z'} &= -\frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_1 h_2}{g_1 h_2 - g_2 h_1} (e^{\delta \xi_1 z'} - e^{\delta \xi_2 z'}) e^{i\delta \zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{z'z'z'} &= -\frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g_1 h_2 - g_2 h_1} (g_1 h_2 e^{\delta \xi_1 z'} - g_2 h_1 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{i\delta \zeta x'} d\zeta \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

As equações (5.34) e (5.35) fornecem os deslocamentos e o estado de tensões no interior de um meio elástico transversalmente isotrópico semi-infinito causados por uma linha de carga harmônica aplicada na superfície.

### 5.4.2 Carga aplicada no interior do espaço completo

Para analisar os deslocamentos e as tensões no interior de um meio infinito sob a ação de uma linha de carga harmônica divide-se este meio em dois meios semi-infinitos definidos por:

- Meio 1:  $|x'| < \infty$ ,  $-\infty < z' \leq 0$ .
- Meio 2:  $|x'| < \infty$ ,  $0 \leq z' < \infty$ .

O eixo de simetria  $z$  do material tem uma inclinação  $\theta$  com a direção  $z'$ .

1. Carga na direção  $x'$ :

Para uma linha de carga aplicada  $p_{x'}$  aplicada segundo a direção direção  $x'$  na interface entre os dois meios ( $z' = 0$ ) as condições de contorno do problema são dadas por:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x',0) - u^{(2)}(x',0) &= 0 \\ w^{(1)}(x',0) - w^{(2)}(x',0) &= 0 \\ \sigma_{x'z'}^{(1)}(x',0) - \sigma_{x'z'}^{(2)}(x',0) &= p_{x'}(x') \\ \sigma_{z'z'}^{(1)}(x',0) - \sigma_{z'z'}^{(2)}(x',0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Aplicando-se a transformação de Fourier nestas condições de contorno resulta:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(1)}(\lambda,0) - \bar{u}^{(2)}(\lambda,0) &= 0 \\ \bar{w}^{(1)}(\lambda,0) - \bar{w}^{(2)}(\lambda,0) &= 0 \\ \bar{\sigma}_{x'z'}^{(1)}(\lambda,0) - \bar{\sigma}_{x'z'}^{(2)}(\lambda,0) &= \bar{p}_{x'}(\lambda) \\ \bar{\sigma}_{z'z'}^{(1)}(\lambda,0) - \bar{\sigma}_{z'z'}^{(2)}(\lambda,0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

As condições de irradiação no infinito impõe que  $A^{(1)} = B^{(1)} = C^{(2)} = D^{(2)} = 0$  e assim as condições de contorno conduzem ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} A\omega'_1 + B\omega'_2 - C\omega'_3 - D\omega'_4 &= 0 \\ A + B - C - D &= 0 \\ h_1A + h_2B - h_3C - h_4D &= -\frac{\bar{p}_{x'}}{\delta c_{44}} \\ g_1A + g_2B - g_3C - g_4D &= 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Nestas equações  $A$  e  $B$  se referem ao meio 2 enquanto que  $C$  e  $D$  se referem ao meio 1. A solução do sistema de equações é dada por:

$$\Psi = \frac{\bar{p}_{x'}}{\delta c_{44}} \frac{\Psi_{x'}}{H}, \quad \Psi = A, B, C, D \quad (5.39)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{x'} &= -g_2\omega'_3 - \omega'_2g_4 + g_2\omega'_4 + \omega'_2g_3 - g_3\omega'_4 + \omega'_3g_4 \\ B_{x'} &= -\omega'_3g_4 - \omega'_1g_3 + \omega'_1g_4 + g_3\omega'_4 + g_1\omega'_3 - g_1\omega'_4 \\ C_{x'} &= g_2\omega'_4 - g_2\omega'_1 + \omega'_1g_4 - \omega'_2g_4 + \omega'_2g_1 - g_1\omega'_4 \\ D_{x'} &= g_2\omega'_1 - g_2\omega'_3 + g_1\omega'_3 - \omega'_1g_3 + \omega'_2g_3 - \omega'_2g_1 \end{aligned} \quad (5.40)$$

e

$$\begin{aligned}
H = & -g_2\omega'_3h_4 + \omega'_3h_2g_4 - \omega'_1g_3h_4 + g_2\omega'_1h_4 + \omega'_3g_2h_1 + \omega'_2h_1g_4 + \omega'_1g_3h_2 + \\
& g_2h_3\omega'_4 - h_3g_2\omega'_1 - g_2h_1\omega'_4 - h_2\omega'_1g_4 + h_3\omega'_1g_4 - h_3\omega'_2g_4 - h_1g_3\omega'_2 + \\
& h_1g_3\omega'_4 - h_2g_3\omega'_4 - \omega'_3h_1g_4 + \omega'_2g_3h_4 - g_1\omega'_3h_2 - g_1\omega'_2h_4 + g_1h_3\omega'_2 - \\
& g_1h_3\omega'_4 + g_1h_2\omega'_4 + g_1\omega'_3h_4
\end{aligned} \quad (5.41)$$

2. Carga na direção  $z'$ :

A aplicação de uma linha de carga  $p_{z'}$  na direção  $z'$ , por sua vez conduz ao sistema de equações:

$$\begin{aligned}
A\omega'_1 + B\omega'_2 - C\omega'_3 - D\omega'_4 &= 0 \\
A + B - C - D &= 0 \\
h_1A + h_2B - h_3C - h_4D &= 0 \\
g_1A + g_2B - g_3C - g_4D &= -\frac{\bar{p}_{z'}}{\delta c_{44}}
\end{aligned} \quad (5.42)$$

cuja solução é:

$$\Psi = \frac{\bar{p}_{z'}}{\delta c_{44}} \frac{\Psi_{z'}}{H}, \quad \Psi = A, B, C, D \quad (5.43)$$

onde

$$\begin{aligned}
A_{z'} &= h_3\omega'_4 - \omega'_3h_4 - h_2\omega'_4 + \omega'_2h_4 + \omega'_3h_2 - h_3\omega'_2 \\
B_{z'} &= h_1\omega'_4 - \omega'_3h_1 - \omega'_1h_4 - h_3\omega'_4 + \omega'_3h_4 + h_3\omega'_1 \\
C_{z'} &= -\omega'_1h_4 + h_2\omega'_1 - \omega'_2h_1 + h_1\omega'_4 - h_2\omega'_4 + \omega'_2h_4 \\
D_{z'} &= \omega'_3h_2 + \omega'_2h_1 - h_2\omega'_1 + h_3\omega'_1 - h_3\omega'_2 - \omega'_3h_1
\end{aligned} \quad (5.44)$$

Com estas soluções, e ainda lembrando que para uma linha de carga unitária aplicada na origem do sistema  $x'z'$ ,  $\bar{p}_{x'}(\lambda) = \bar{p}_{z'}(\lambda) = 1/\sqrt{2\pi}$ , pode-se obter as expressões das funções de Green e das tensões.

Para o meio 1 ( $z < 0$ ) as funções de Green são:

$$\begin{aligned}
G_{x'x'} &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( C_{x'}\omega'_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{x'}\omega'_4 e^{\delta\xi_4 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
G_{z'x'} &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( C_{x'} e^{\delta\xi_3 z'} + D_{x'} e^{\delta\xi_4 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
G_{x'z'} &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( C_{z'}\omega'_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{z'}\omega'_4 e^{\delta\xi_4 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
G_{z'z'} &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( C_{z'} e^{\delta\xi_3 z'} + D_{z'} e^{\delta\xi_4 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta
\end{aligned} \quad (5.45)$$

e as tensões são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x'x'x'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( C_{x'} f_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{x'} f_4 e^{\delta\xi_4 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{x'z'x'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( C_{x'} h_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{x'} h_4 e^{\delta\xi_4 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{z'z'x'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( C_{x'} g_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{x'} g_4 e^{\delta\xi_4 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{x'x'z'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( C_{z'} f_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{z'} f_4 e^{\delta\xi_4 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{x'z'z'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( C_{z'} h_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{z'} h_4 e^{\delta\xi_4 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{z'z'z'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( C_{z'} g_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{z'} g_4 e^{\delta\xi_4 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

Para o meio 2 ( $z \geq 0$ ) as funções de Green são:

$$\begin{aligned}
 G_{x'x'} &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( A_{x'} \omega'_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{x'} \omega'_2 e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 G_{z'x'} &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( A_{x'} e^{\delta\xi_1 z'} + B_{x'} e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 G_{x'z'} &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( A_{z'} \omega'_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{z'} \omega'_2 e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 G_{z'z'} &= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( A_{z'} e^{\delta\xi_1 z'} + B_{z'} e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \quad (5.47)
 \end{aligned}$$

e as tensões são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x'x'x'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( A_{x'} f_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{x'} f_2 e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{x'z'x'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( A_{x'} h_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{x'} h_2 e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{z'z'x'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( A_{x'} g_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{x'} g_2 e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{x'x'z'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( A_{z'} f_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{z'} f_2 e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{x'z'z'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( A_{z'} h_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{z'} h_2 e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{z'z'z'} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H} \left( A_{z'} g_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{z'} g_2 e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

Estas equações fornecem os deslocamentos e o estado de tensões no interior dos meios 1 e 2 devidos a uma linha de carga concentrada aplicada na

interface entre estes dois meios. Pode-se verificar que há continuidade nos deslocamentos para os pontos ao longo da interface  $z' = 0$ . Também o estado de tensões em  $x' = 0, z' = 0$  apresenta o salto devido à aplicação da linha de carga.

As funções de Green para carga aplicada no interior de um meio infinito com eixo de simetria inclinado podem também ser obtidos pela combinação das funções de Green desenvolvidas para o caso de eixo de simetria não inclinado. Os deslocamentos segundo o sistema de coordenadas  $x'z'$  podem ser expressos como uma rotação dos deslocamentos segundo o sistema  $xz$  paralelo às direções principais do material através das equações (5.1). Assim as funções de Green para o deslocamento também podem ser expressos por:

$$\begin{aligned} G_{x'x} &= G_{xx} \cos \theta - G_{zx} \sin \theta \\ G_{x'z} &= G_{xz} \cos \theta - G_{zz} \sin \theta \\ G_{z'x} &= G_{xx} \sin \theta + G_{zx} \cos \theta \\ G_{z'z} &= G_{xz} \sin \theta + G_{zz} \cos \theta \end{aligned} \quad (5.49)$$

As linhas de carga unitárias aplicadas nas direções  $x'$  e  $z'$  também podem ser expressas como combinações de linhas de carga unitárias aplicadas nas direções  $x$  e  $z$ . Portanto as funções de Green para o deslocamento nas direções  $x$  e  $z$  devido a cargas aplicadas nas direções  $x'$  e  $z'$  ficam:

$$\begin{aligned} G_{xx'} &= G_{xx} \cos \theta - G_{xz} \sin \theta \\ G_{zx'} &= G_{zx} \cos \theta - G_{zz} \sin \theta \\ G_{xz'} &= G_{xx} \sin \theta + G_{xz} \cos \theta \\ G_{zz'} &= G_{xz} \sin \theta + G_{zz} \cos \theta \end{aligned} \quad (5.50)$$

Aplicando a operação de rotação dos deslocamentos expressa pelas equações (5.49) nas equações (5.50) obtêm-se:

$$\begin{aligned} G_{x'x'} &= G_{xx} \cos^2 \theta - (G_{zx} + G_{xz}) \sin \theta \cos \theta + G_{zz} \sin^2 \theta \\ G_{z'x'} &= (G_{xx} - G_{zz}) \sin \theta \cos \theta + G_{zx} \cos^2 \theta - G_{xz} \sin^2 \theta \\ G_{x'z'} &= (G_{xx} - G_{zz}) \sin \theta \cos \theta - G_{zx} \sin^2 \theta + G_{xz} \cos^2 \theta \\ G_{z'z'} &= G_{xx} \sin^2 \theta + (G_{zx} + G_{xz}) \sin \theta \cos \theta + G_{zz} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (5.51)$$

Como as componentes das funções de Green para o deslocamento formam um tensor de segunda ordem, estas operações são equivalentes a uma rotação  $\theta$  neste tensor. Podem-se também obter, pelo mesmo processo, as expressões das funções de Green para o estado de tensão  $\sigma_{i'j'}$  devido a uma linha de carga aplicada na direção  $k'$  através de uma combinação das funções de Green deduzidas para um estado de tensão  $\sigma_{ij}$  devido a uma carga aplicada na

direção  $k$ . Para isto expressam-se, primeiramente, as componentes  $\sigma_{i'j'}$  devidas a uma linha de carga aplicada na direção  $k$  através de uma rotação do tensor  $\sigma_{ij}$ :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x'x'x} &= \sigma_{xxx} \cos^2 \theta - 2\sigma_{xxz} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{zzx} \sin^2 \theta \\
 \sigma_{z'x'x} &= (\sigma_{xxx} - \sigma_{zzx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xxz} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
 \sigma_{z'z'x} &= \sigma_{xxx} \sin^2 \theta + 2\sigma_{xxz} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{zzx} \cos^2 \theta \\
 \sigma_{x'x'z} &= \sigma_{xxz} \cos^2 \theta - 2\sigma_{zzz} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{zzz} \sin^2 \theta \\
 \sigma_{z'x'z} &= (\sigma_{xxz} - \sigma_{zzz}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xxz} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
 \sigma_{z'z'z} &= \sigma_{xxz} \sin^2 \theta + 2\sigma_{zzz} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{zzz} \cos^2 \theta
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

A seguir aplica-se em (5.52) a rotação nas direções de aplicação das linhas de carga utilizando-se as equações (5.50). Esta operação resulta em:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x'x'x'} &= \sigma_{xxx} \cos^3 \theta - (2\sigma_{xxz} + \sigma_{xxz}) \sin \theta \cos^2 \theta + \\
 &\quad (2\sigma_{zzx} + \sigma_{zzx}) \sin^2 \theta \cos \theta - \sigma_{zzz} \sin^3 \theta \\
 \sigma_{z'x'x'} &= (\sigma_{xxx} - \sigma_{zzx} - \sigma_{xxz}) \sin \theta \cos^2 \theta + \sigma_{xxz} \cos^3 \theta - \\
 &\quad (\sigma_{xxz} + \sigma_{xxz} - \sigma_{zzz}) \sin^2 \theta \cos \theta + \sigma_{xxz} \sin^3 \theta \\
 \sigma_{z'z'x'} &= (\sigma_{xxx} - 2\sigma_{xxz}) \sin^2 \theta \cos \theta + \sigma_{zzx} \cos^3 \theta + \\
 &\quad (2\sigma_{zzx} - \sigma_{zzz}) \sin \theta \cos^2 \theta - \sigma_{xxz} \sin^3 \theta \\
 \sigma_{x'x'z'} &= (\sigma_{xxx} - 2\sigma_{xxz}) \sin \theta \cos^2 \theta + \sigma_{zzx} \sin^3 \theta \\
 &\quad + (\sigma_{zzz} - 2\sigma_{xxz}) \sin^2 \theta \cos \theta + \sigma_{xxz} \cos^3 \theta \\
 \sigma_{z'x'z'} &= (\sigma_{xxx} - \sigma_{zzx} - \sigma_{xxz}) \sin^2 \theta \cos \theta - \sigma_{xxz} \sin^3 \theta + \\
 &\quad (\sigma_{xxz} + \sigma_{xxz} - \sigma_{zzz}) \sin \theta \cos^2 \theta + \sigma_{xxz} \cos^3 \theta \\
 \sigma_{z'z'z'} &= \sigma_{xxx} \sin^3 \theta + (2\sigma_{xxz} + \sigma_{xxz}) \sin^2 \theta \cos \theta + \\
 &\quad (2\sigma_{zzx} + \sigma_{zzx}) \sin \theta \cos^2 \theta + \sigma_{zzz} \cos^3 \theta
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

Como para o caso de carga aplicada no interior de um meio infinito  $G_{zx} = G_{xz}$ , pelas equações (5.51) verifica-se que também  $G_{z'x'} = G_{x'z'}$ . Além disso, todas as componentes  $G_{i'j'}$  são funções simétricas em relação ao ponto de aplicação da linha de carga, ou seja,  $G_{i'j'}(x', z') = G_{i'j'}(-x', -z')$ . Quanto às componentes das funções de Green para as tensões, pode-se verificar que são antisimétricas em relação ao ponto de aplicação da carga, ou seja  $\sigma_{i'j'k'}(x', z') = -\sigma_{i'j'k'}(-x', -z')$ .

Deve-se lembrar que estas relações são válidas apenas para o caso de linha de carga aplicada no interior de um meio elástico infinito (espaço-completo). Para o caso de carga aplicada sobre o semi-espaço estas relações não podem ser utilizadas pois as condições de contorno ao longo da superfície livre são especificadas em relação à coordenada  $x'$ .

## 5.5 Funções de influência

### 5.5.1 Carga aplicada sobre a superfície do semi-espaço

Podem-se obter as funções de influência de cargas distribuídas ao longo do plano  $x'$ , tanto para o caso de cargas dinâmicas aplicadas sobre o semi-espaço como para cargas dinâmicas aplicadas no interior de um meio infinito. Para isto é utilizado o mesmo processo descrito no capítulo anterior.

Para o caso de uma faixa carga uniforme de largura  $2a$ , centrada na origem  $x' = 0, z' = 0$ , aplicada sobre a superfície de um semi-espaço elástico transversalmente isotrópico com ângulo  $\theta$  entre o eixo de simetria do material e a direção  $z'$ , por exemplo, os deslocamentos  $u'$  e  $w'$  serão dados por:

$$\begin{aligned} u'_{cx'} &= \frac{1}{\pi c_{44} \delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R'_c} (g_2 \omega'_1 e^{\delta \xi_1 z'} - g_1 \omega'_2 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{-i \delta \zeta x'} d\zeta \\ w'_{cx'} &= \frac{1}{\pi c_{44} \delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R'_c} (g_2 e^{\delta \xi_1 z'} - g_1 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{-i \delta \zeta x'} d\zeta \\ u'_{cz'} &= -\frac{1}{\pi c_{44} \delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R'_c} (h_2 \omega'_1 e^{\delta \xi_1 z'} - h_1 \omega'_2 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{-i \delta \zeta x'} d\zeta \\ w'_{cz'} &= -\frac{1}{\pi c_{44} \delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R'_c} (h_2 e^{\delta \xi_1 z'} - h_1 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{-i \delta \zeta x'} d\zeta \end{aligned} \quad (5.54)$$

onde

$$R'_c = \frac{\zeta (g_1 h_2 - g_2 h_1)}{\text{sen}(\delta \zeta a)} \quad (5.55)$$

De maneira análoga podem-se obter as funções de influência para as tensões, para este caso:

$$\begin{aligned} \sigma_{cx'x'x'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R'_c} (f_1 g_2 e^{\delta \xi_1 z'} - f_2 g_1 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{-i \delta \zeta x'} d\zeta \\ \sigma_{cx'z'x'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R'_c} (h_1 g_2 e^{\delta \xi_1 z'} - h_2 g_1 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{-i \delta \zeta x'} d\zeta \\ \sigma_{cz'z'x'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1 g_2}{R'_c} (e^{\delta \xi_1 z'} - e^{\delta \xi_2 z'}) e^{-i \delta \zeta x'} d\zeta \\ \sigma_{cx'x'z'} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R'_c} (f_1 h_2 e^{\delta \xi_1 z'} - f_2 h_1 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{-i \delta \zeta x'} d\zeta \\ \sigma_{cx'z'z'} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_1 h_2}{R'_c} (e^{\delta \xi_1 z'} - e^{\delta \xi_2 z'}) e^{-i \delta \zeta x'} d\zeta \\ \sigma_{cz'z'z'} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R'_c} (g_1 h_2 e^{\delta \xi_1 z'} - g_2 h_1 e^{\delta \xi_2 z'}) e^{-i \delta \zeta x'} d\zeta \end{aligned} \quad (5.56)$$

As funções de influência de cargas com distribuição polinomial podem também ser obtidas pelo processo descrito no capítulo anterior.

### 5.5.2 Carga aplicada no interior do espaço completo

Da mesma forma, para o caso de carga aplicada no interior do espaço completo são obtidas as funções de influência de uma carga distribuída ao longo do plano  $x'$ .

Para uma faixa de carga harmônica uniforme com largura  $2a$  na direção  $x'$  centrada na origem do sistema de coordenadas  $x'z'$  no interior de um espaço infinito elástico transversalmente isotrópico, as funções de influência para os deslocamentos são dadas por:

$$\begin{aligned}
 z' &< 0 : \\
 u'_{cx'} &= \frac{1}{\pi c_{44}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} (C_{x'}\omega'_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{x'}\omega'_4 e^{\delta\xi_4 z'}) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 w'_{cx'} &= \frac{1}{\pi c_{44}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} (C_{x'}e^{\delta\xi_3 z'} + D_{x'}e^{\delta\xi_4 z'}) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 u'_{cz'} &= \frac{1}{\pi c_{44}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} (C_{z'}\omega'_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{z'}\omega'_4 e^{\delta\xi_4 z'}) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 w'_{cz'} &= \frac{1}{\pi c_{44}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} (C_{z'}e^{\delta\xi_3 z'} + D_{z'}e^{\delta\xi_4 z'}) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \quad (5.57)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z' &\geq 0 : \\
 u'_{cx'} &= \frac{1}{\pi c_{44}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} (A_{x'}\omega'_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{x'}\omega'_2 e^{\delta\xi_2 z'}) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 w'_{cx'} &= \frac{1}{\pi c_{44}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} (A_{x'}e^{\delta\xi_1 z'} + B_{x'}e^{\delta\xi_2 z'}) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 u'_{cz'} &= \frac{1}{\pi c_{44}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} (A_{z'}\omega'_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{z'}\omega'_2 e^{\delta\xi_2 z'}) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 w'_{cz'} &= \frac{1}{\pi c_{44}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} (A_{z'}e^{\delta\xi_1 z'} + B_{z'}e^{\delta\xi_2 z'}) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \quad (5.58)
 \end{aligned}$$

onde:

$$H'_c = \frac{\zeta H}{\text{sen}(\delta\zeta a)} \quad (5.59)$$

As funções de influência para as componentes do estado de tensões resultam:

$$\begin{aligned}
 z' &< 0 : \\
 \sigma_{cx'x'x'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} (C_{x'}f_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{x'}f_4 e^{\delta\xi_4 z'}) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
 \sigma_{cx'z'x'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} (C_{x'}h_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{x'}h_4 e^{\delta\xi_4 z'}) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{cz'z'x'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} \left( C_{x'} g_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{x'} g_4 e^{\delta\xi_4 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
\sigma_{cx'x'z'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} \left( C_{z'} f_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{z'} f_4 e^{\delta\xi_4 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
\sigma_{cx'z'z'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} \left( C_{z'} h_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{z'} h_4 e^{\delta\xi_4 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
\sigma_{cz'z'z'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} \left( C_{z'} g_3 e^{\delta\xi_3 z'} + D_{z'} g_4 e^{\delta\xi_4 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \quad (5.60)
\end{aligned}$$

$$z' \geq 0 :$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{cx'x'x'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} \left( A_{x'} f_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{x'} f_2 e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
\sigma_{cx'z'x'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} \left( A_{x'} h_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{x'} h_2 e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
\sigma_{cz'z'x'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} \left( A_{x'} g_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{x'} g_2 e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
\sigma_{cx'x'z'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} \left( A_{z'} f_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{z'} f_2 e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
\sigma_{cx'z'z'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} \left( A_{z'} h_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{z'} h_2 e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \\
\sigma_{cz'z'z'} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{H'_c} \left( A_{z'} g_1 e^{\delta\xi_1 z'} + B_{z'} g_2 e^{\delta\xi_2 z'} \right) e^{i\delta\zeta x'} d\zeta \quad (5.61)
\end{aligned}$$

As funções de influência de uma faixa de carga distribuída ao longo de  $x'$  também podem ser obtidas através de outro processo por integração das funções de Green expressas pelas equações (5.51) e (5.53). Assim, os deslocamentos devidos a uma faixa de carga unitária uniforme de largura  $2a$  podem ser obtidos de:

$$\begin{aligned}
u'_{cx'}(x', z') &= \cos^2 \theta \int_{x'+a}^{x'-a} G_{xx}(x'_0, z') dx'_0 + \sin^2 \theta \int_{x'+a}^{x'-a} G_{zz}(x'_0, z') dx'_0 - \\
&\quad \left[ \int_{x'+a}^{x'-a} G_{zx}(x'_0, z') dx'_0 + \int_{x'+a}^{x'-a} G_{xz}(x'_0, z') dx'_0 \right] \sin \theta \cos \theta \\
w'_{cx'}(x', z') &= \left[ \int_{x'+a}^{x'-a} G_{xx}(x'_0, z') dx'_0 - \int_{x'+a}^{x'-a} G_{zz}(x'_0, z') dx'_0 \right] \sin \theta \cos \theta + \\
&\quad \cos^2 \theta \int_{x'+a}^{x'-a} G_{zx}(x'_0, z') dx'_0 - \sin^2 \theta \int_{x'+a}^{x'-a} G_{xz}(x'_0, z') dx'_0 \\
u'_{cz'}(x', z') &= \left[ \int_{x'-a}^{x'+a} G_{xx}(x'_0, z') dx'_0 - \int_{x'-a}^{x'+a} G_{zz}(x'_0, z') dx'_0 \right] \sin \theta \cos \theta -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w'_{cz'}(x', z') &= \text{sen}^2 \theta \int_{x'+a}^{x'-a} G_{zx}(x'_0, z') dx'_0 + \text{cos}^2 \theta \int_{x'+a}^{x'-a} G_{xz}(x'_0, z') dx'_0 \\
 &+ \text{sen}^2 \theta \int_{x'+a}^{x'-a} G_{xx}(x'_0, z') dx'_0 + \text{cos}^2 \theta \int_{x'+a}^{x'-a} G_{zz}(x'_0, z') dx'_0 + \\
 &\left[ \int_{x'+a}^{x'-a} G_{zx}(x'_0, z') dx'_0 + \int_{x'+a}^{x'-a} G_{xz}(x'_0, z') dx'_0 \right] \text{sen} \theta \text{cos} \theta
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

Para se determinarem as integrais dessas equações, as coordenadas  $x'$  e  $z'$  devem ser expressas no sistema de coordenadas  $xz$ :

$$\begin{aligned}
 x &= x' \text{cos} \theta + z' \text{sen} \theta \\
 z &= -x' \text{sen} \theta + z' \text{sen} \theta
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

Assim, devem ser determinadas as integrais:

$$\int_{x'+a}^{x'-a} G_{ij}(x'_0, z') dx'_0 = \int_{-a}^a G_{ij}(x_s, z_s) ds; \quad i, j = x, z \tag{5.64}$$

trocando-se a variável  $x'_0$  por  $s = x' - x'_0$  e:

$$\begin{aligned}
 x_s &= (x' - s) \text{cos} \theta + z' \text{sen} \theta \\
 z_s &= -(x' - s) \text{sen} \theta + z' \text{sen} \theta
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

As definições de  $s$  e de  $x'_0$  podem ser melhor compreendidas pelo esquema apresentado na figura 5.3.

A solução dessas integrais é dada por:

$$\int_{-a}^a G_{ij}(x_s, z_s) ds = -\frac{1}{2\pi c_{44} \delta} (G_{ij1} + G_{ij2}) \Big|_{s=-a}^a \tag{5.66}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 G_{xx1} &= \int_0^\infty \zeta \text{cos} \theta \left( -\frac{\bar{\omega}_1}{H_{x1}} e^{-\delta \xi_1 |z_s|} + \frac{\bar{\omega}_2}{H_{x2}} e^{-\delta \xi_2 |z_s|} \right) \text{sen}(\delta \zeta x_s) d\zeta \\
 G_{xx2} &= I \int_0^\infty \text{sen} \theta \left( -\frac{\xi_1 \bar{\omega}_1}{H_{x1}} e^{-\delta \xi_1 |z_s|} + \frac{\xi_2 \bar{\omega}_2}{H_{x2}} e^{-\delta \xi_2 |z_s|} \right) \text{cos}(\delta \zeta x_s) d\zeta \\
 G_{zx1} &= G_{xz1} = I \int_0^\infty \zeta \text{cos} \theta \left( \frac{1}{H_{x1}} e^{-\delta \xi_1 |z_s|} - \frac{1}{H_{x2}} e^{-\delta \xi_2 |z_s|} \right) \text{cos}(\delta \zeta x_s) d\zeta \\
 G_{zx2} &= G_{xz2} = \int_0^\infty \text{sen} \theta \left( -\frac{\xi_1}{H_{x1}} e^{-\delta \xi_1 |z_s|} + \frac{\xi_2}{H_{x2}} e^{-\delta \xi_2 |z_s|} \right) \text{sen}(\delta \zeta x_s) d\zeta \\
 G_{zz1} &= \int_0^\infty \zeta \text{cos} \theta \left( -\frac{\omega_1}{H_{x1}} e^{-\delta \xi_1 |z_s|} + \frac{\omega_2}{H_{x2}} e^{-\delta \xi_2 |z_s|} \right) \text{sen}(\delta \zeta x_s) d\zeta \\
 G_{zz2} &= I \int_0^\infty \text{sen} \theta \left( -\frac{\xi_1 \omega_1}{H_{x1}} e^{-\delta \xi_1 |z_s|} + \frac{\xi_2 \omega_2}{H_{x2}} e^{-\delta \xi_2 |z_s|} \right) \text{cos}(\delta \zeta x_s) d\zeta
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

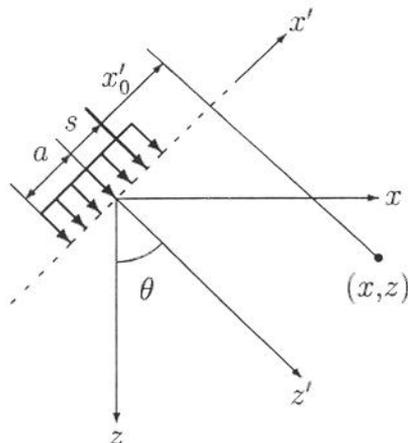


Figura 5.3: Integração das funções de Green  $G_{ij}$  ao longo de  $x'$ .

As funções  $H_{x1}$  e  $H_{x2}$  são dadas por:

$$\begin{aligned} H_{x1} &= H_x (\xi_1^2 \sin^2 \theta + \zeta^2 \cos^2 \theta) \\ H_{x2} &= H_x (\xi_2^2 \sin^2 \theta + \zeta^2 \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (5.68)$$

As expressões de  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\bar{\omega}_1$ ,  $\bar{\omega}_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $H_x$  estão dadas no capítulo 3.

As integrais expressas pelas equações (5.67) devem ser calculadas para  $s = -a$  e para  $s = a$ . Quando o ponto de observação tiver a coordenada  $z$  entre os extremos superior e inferior da faixa de carga, o intervalo de integração deve ser subdividido em dois. Isto se deve à presença dos termos  $|z_s|$  na solução. O intervalo de integração deve ser dividido de forma que  $z_s$  não mude de sinal dentro de cada subintervalo.

As soluções correspondentes ao estado de tensão provocado por uma faixa de carga uniforme distribuída ao longo de  $x'$  no interior do espaço completo podem ser obtidas pelo mesmo processo utilizando-se as equações (5.53).

## 5.6 Resultados numéricos

A determinação numérica das funções de Green e das funções de influência para os casos onde o eixo de simetria do material é inclinado apresenta dificuldades adicionais em relação aos casos em que este eixo de simetria coincide com algum dos eixos do sistema de coordenadas do problema.

Em primeiro lugar é necessária a determinação das raízes de um polinômio do quarto grau com parâmetros complexos para cada valor da variável de integração  $\zeta$ . Nos casos em que o eixo de simetria do material é vertical (ou horizontal) este polinômio se simplifica resultando numa equação bi-quadrada de solução muito mais fácil.

Equações polinomiais do quarto grau têm solução algébrica estabelecida (ver, por exemplo, [8]). No entanto esta solução além de computacionalmente trabalhosa deve ser adaptada para poder atender aos casos de parâmetros complexos. Além disso, esta solução analítica quando implementada numericamente apresenta problemas de precisão. Devido à estas dificuldades optou-se por um processo numérico iterativo baseado no método de Laguerre de determinação das raízes de um polinômio de qualquer grau [62]. Neste método a primeira raiz  $\xi_1$  é determinada por aproximações sucessivas e em seguida obtém-se um polinômio de ordem mais baixa dividindo-se o polinômio original por  $(\xi - \xi_1)$ . Repete-se o processo com este novo polinômio até que todas as raízes tenham sido determinadas. Para se aumentar a precisão cada uma das raízes encontradas é reavaliada utilizando-se o polinômio original.

Outra dificuldade encontrada no cálculo se deve ao fato de as funções de Green e de influência transformadas não serem mais pares ou ímpares (em relação a  $\zeta$ ). Isto faz com que a transformação inversa de Fourier deva ser efetuada através de integração ao longo de todo o eixo real e não mais apenas ao longo do semi-eixo positivo. Isto, somado ao fato de que se deve dividir as integrais em duas ( $e^{i\delta\zeta x'} = \cos \delta\zeta x' + i \sin \delta\zeta x'$ ) para se poder utilizar as rotinas de integração numérica, faz com que o esforço computacional exigido seja no mínimo quatro vezes maior que o esforço exigido pelos casos em que o eixo de simetria não é inclinado.

Para se avaliar a qualidade dos resultados obtidos pelas funções aqui desenvolvidas escolheu-se um material transversalmente isotrópico com  $c_{11}/c_{44} = 6$ ,  $n_1 = 1,5$ , e  $n_3 = 0,8$ . Adotou-se também o valor do fator de amortecimento interno  $\nu = 0,01$ .

Inicialmente analisam-se as funções de Green para o caso de carga dinâmica aplicada no interior de um meio infinito.

Nas figuras 5.4 a 5.6 estão traçados gráficos que mostram as componentes normalizadas  $G_{i'j'}^* = G_{i'j'} c_{44} / Q_0$  que representam o deslocamento na direção  $i'$  devido a uma linha de carga de intensidade  $Q_0$  aplicada na origem do sistema de coordenadas  $x'z'$ , na direção  $j'$ . Estes deslocamentos foram determinados para o material transversalmente isotrópico ao longo do eixo  $x'$  para o caso de  $\theta = 30^\circ$ . Nos gráficos as linhas contínua e interrompida representam as partes real e imaginária das componentes  $G_{i'j'}^*$  determinadas a partir das funções de Green desenvolvidas neste capítulo, enquanto que os pontos marcados com símbolos foram determinados pelas equações (5.51). Pode-se

verificar que ambas as formas de cálculo levam a resultados equivalentes. Nestes gráficos pode-se perceber claramente a singularidade nas funções de Green quando o ponto de observação se aproxima do ponto de aplicação da linha de carga.

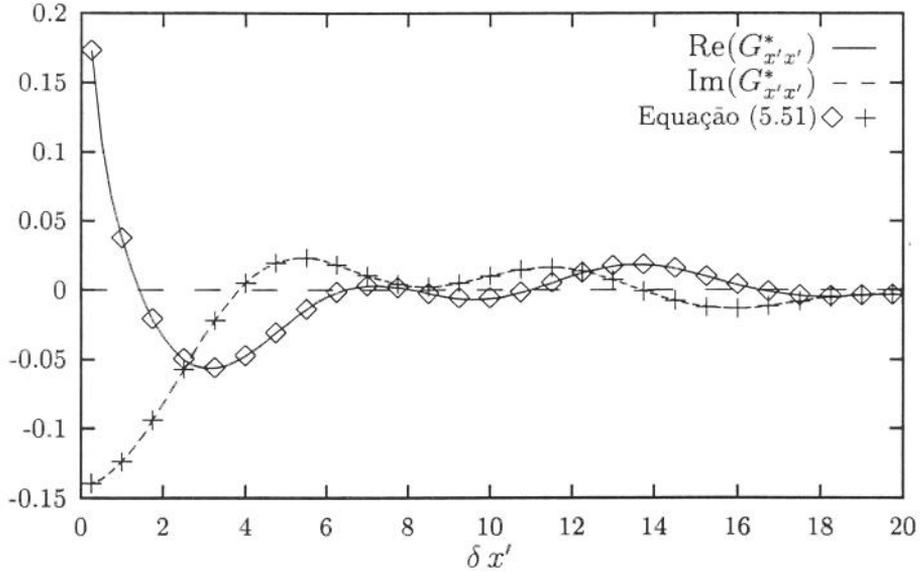


Figura 5.4: Componente normalizada  $G_{x'x'}^*$  para  $\theta = 30^\circ$  ao longo do eixo  $x'$  ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ )

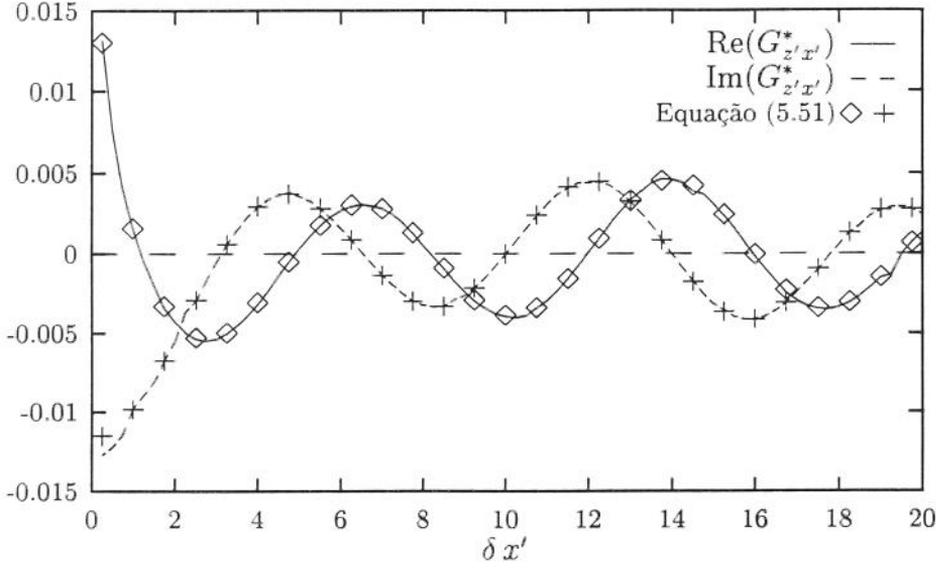


Figura 5.5: Componente normalizada  $G_{z'x'}^* = G_{x'z'}^*$  para  $\theta = 30^\circ$  ao longo do eixo  $x'$  ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ )

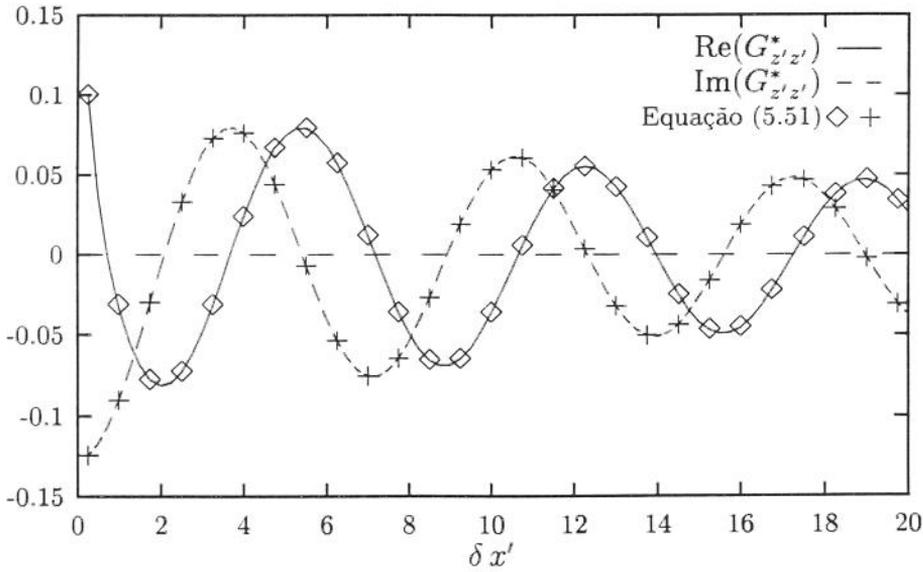


Figura 5.6: Componente normalizada  $G_{z'z'}^*$  para  $\theta = 30^\circ$  ao longo do eixo  $x'$  ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ )

Para se verificar o comportamento das funções de Green com a variação do ângulo  $\theta$  contruíram-se os gráficos das figuras 5.7 a 5.9 que mostram o valor das componentes normalizadas  $G_{i'j'}^*$ , determinadas para o mesmo material no ponto  $\delta x' = 0,25; z' = 0$  para  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ . Estes gráficos estão na forma polar onde o ângulo de rotação representa  $\theta$  e o raio as componentes normalizadas  $G_{i'j'}^*$ . Aqui também as linhas contínua e interrompida foram determinadas pelas funções de Green desenvolvidas neste capítulo e o pontos marcados foram calculados pelas equações (5.51). A concordância entre as duas formas de cálculo aqui também se mostra bastante boa.

Estão também marcados nestes gráficos os resultados obtidos para um material isotrópico com  $\nu = 0,4$  para as componentes  $G_{x'x'}^*$  e  $G_{z'z'}^*$ . As componentes  $G_{x'z'}^*$  e  $G_{z'x'}^*$  são nulas para o material isotrópico. Para este material, pode-se verificar que as componentes das funções de Green, como é de se esperar, não se alteram com  $\theta$ . Assim, as curvas obtidas nos gráficos polares para o material isotrópico formam arcos de circunferências. Para o material anisotrópico as curvas  $G_{x'x'}^*$  e  $G_{z'z'}^*$  formam arcos de elipse.

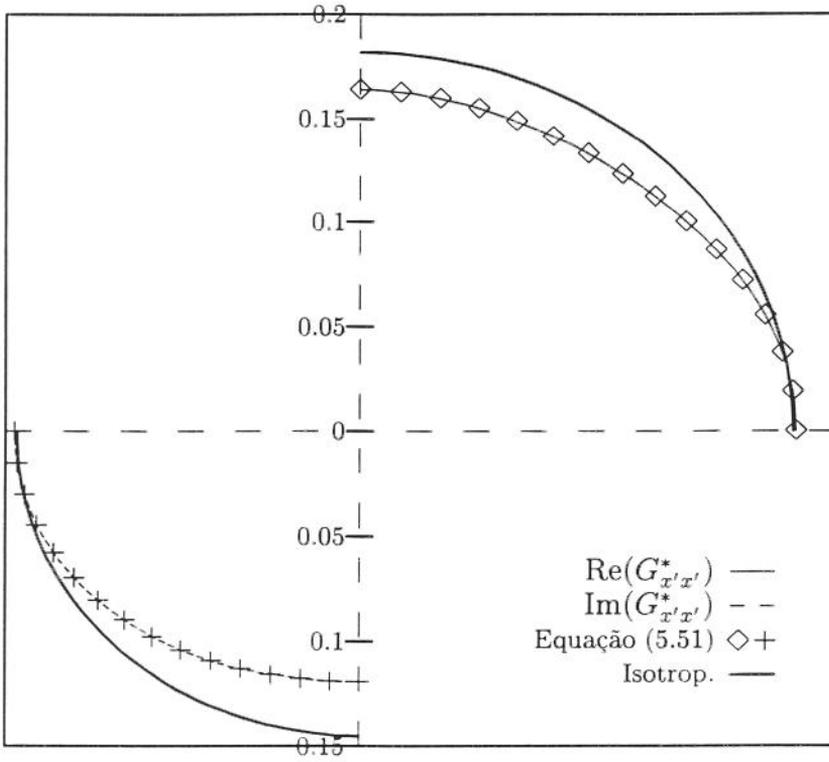


Figura 5.7: Representação polar da componente normalizada  $G_{x'x'}^*$  em função de  $\theta$  em  $\delta x' = 0,25; z' = 0$  para material anisotrópico ( $n_1 = 1,5, n_3 = 0,8$ ) e material isotrópico.

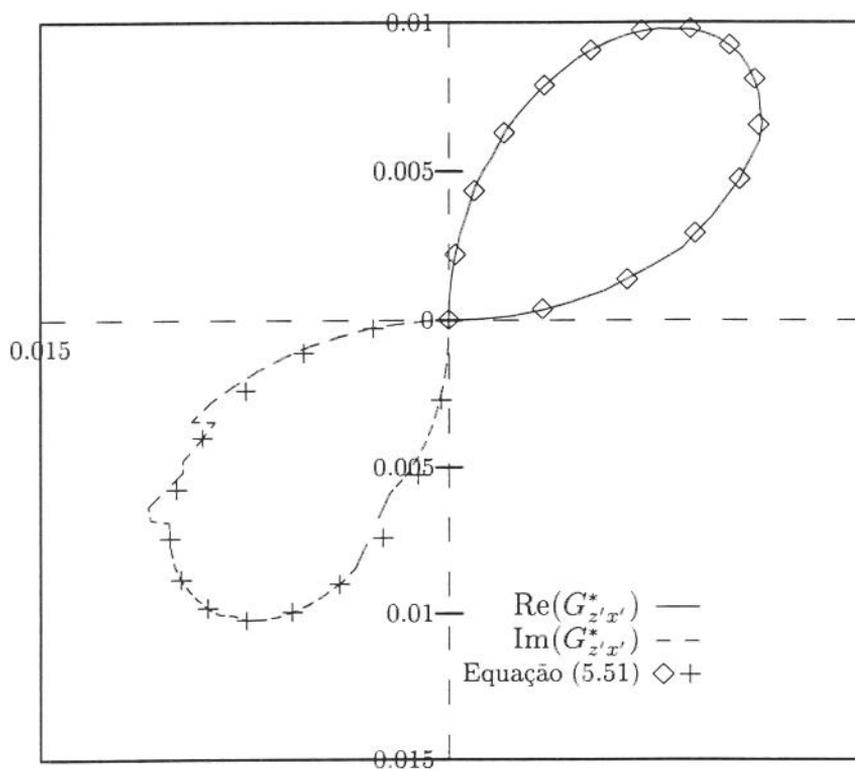


Figura 5.8: Representação polar da componente normalizada  $G_{z'x'}^* = G_{x'z'}^*$  em função de  $\theta$  em  $\delta x' = 0,25$ ;  $z' = 0$  para material anisotrópico ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ ).

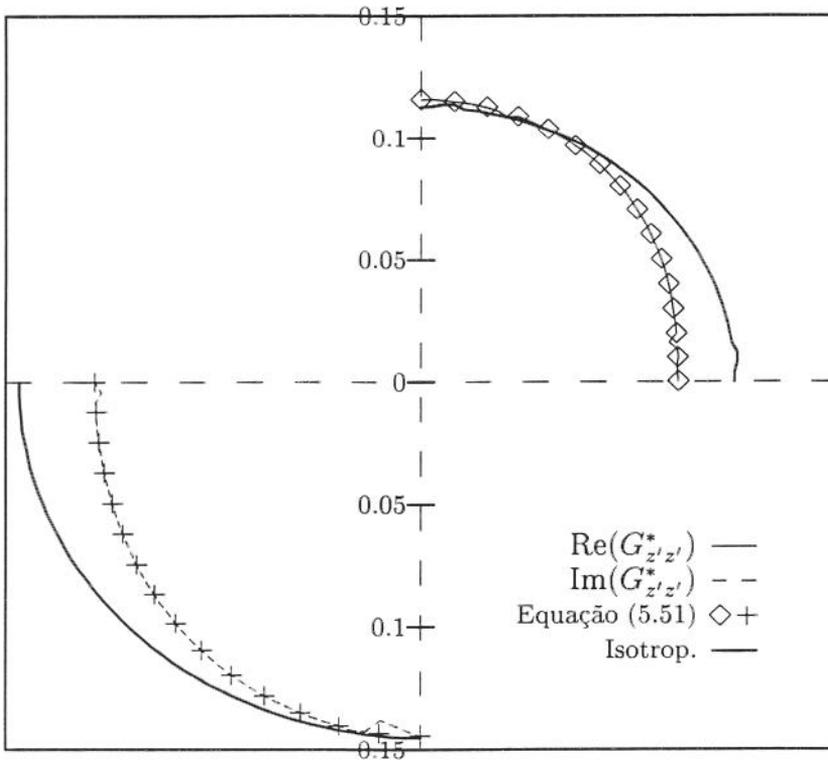


Figura 5.9: Representação polar da componente normalizada  $G_{z'z'}^*$  em função de  $\theta$  em  $\delta x' = 0,25$ ;  $z' = 0$  para material anisotrópico ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ ) e material isotrópico.

Para as funções de influência estão apresentados nas figuras 5.10 a 5.12 gráficos que mostram a variação das componentes normalizadas do deslocamento  $u'_{cx'}$ ,  $w'_{cx'} = u'_{cz'}$  e  $w'_{cz'}$  ao longo do eixo  $x'$  provocado por uma faixa de carga de largura  $2a$  com distribuição uniforme aplicada no interior do espaço completo ao longo da direção  $x'$ . O material analisado é transversalmente isotrópico com  $c_{11}/c_{44} = 4$ ,  $n_1 = 1,5$  e  $n_3 = 0,8$ . A taxa de amortecimento interno do material é  $\nu = 0,01$  e os resultados se referem a uma inclinação  $\theta = 30^\circ$  entre o eixo de simetria elástica do material e o eixo  $z'$ . A frequência normalizada utilizada na obtenção dos resultados é  $a_0 = 1$ .

Os resultados apresentados nos gráficos foram obtidos pelas funções de influência expressas pelas equações (5.57) e (5.58), deduzidas para carga aplicada ao longo de  $x'$  pelo método da transformação integral de Fourier aplicada nesta direção e pelas funções de influência obtidas por integração das funções de Green ao longo de  $x'$ , expressas pela equação (5.62). Pode-se verificar que os resultados são idênticos para os dois métodos.

As funções de influência obtidas por integração das funções de Green demandam um esforço computacional bem menor na sua determinação. Isto se deve ao fato de que as funções de Green utilizadas são as deduzidas no capítulo 3, obtidas pela transformação integral de Fourier aplicada na direção  $x$  ortogonal ao eixo de simetria elástica do material. Por outro lado, este método apresenta alguns inconvenientes. Em primeiro lugar há a necessidade de subdividir o intervalo de integração ao longo de  $x'$  em dois quando o ponto de observação tem a coordenada  $z$  entre os extremos da faixa de aplicação da carga distribuída. Isto pode provocar uma dificuldade numérica nos casos em que a coordenada  $z$  do ponto de observação coincide com a coordenada  $z$  de um dos extremos da faixa de carga. Além disso, algumas vezes aparecem também divergências entre os resultados quando a coordenada  $x$  do ponto de observação coincide com a coordenada  $x$  de uma das extremidades da faixa de carga. Isto se deve ao fato de que nesses casos  $x_s = 0$  nas integrais expressas pelas equações (5.67) para um dos extremos da integração ao longo de  $x'$ . Pode-se perceber que quando  $x_s = 0$  as integrais semi-infinitas em  $\zeta$  deixam de ser oscilantes e o procedimento de integração numérica se torna mais difícil.

Assim, sugere-se que sejam feitas mais pesquisa sobre estes pontos a fim se poder utilizar as funções de influência obtidas por este método em outras aplicações.

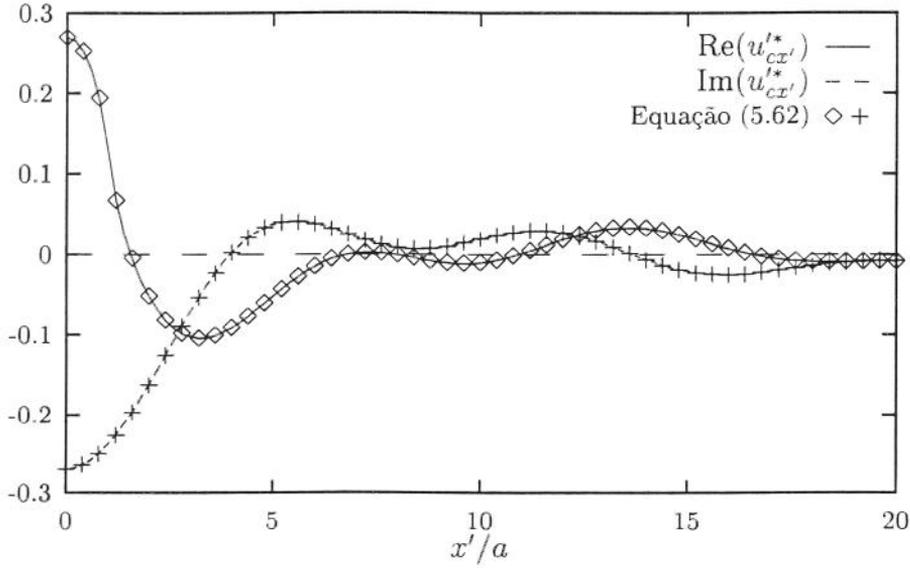


Figura 5.10: Componente normalizada  $u'_{cx'}$ , para  $\theta = 30^\circ$  ao longo do eixo  $x'$  devida a uma faixa de carga aplicada no interior do espaço completo ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ )

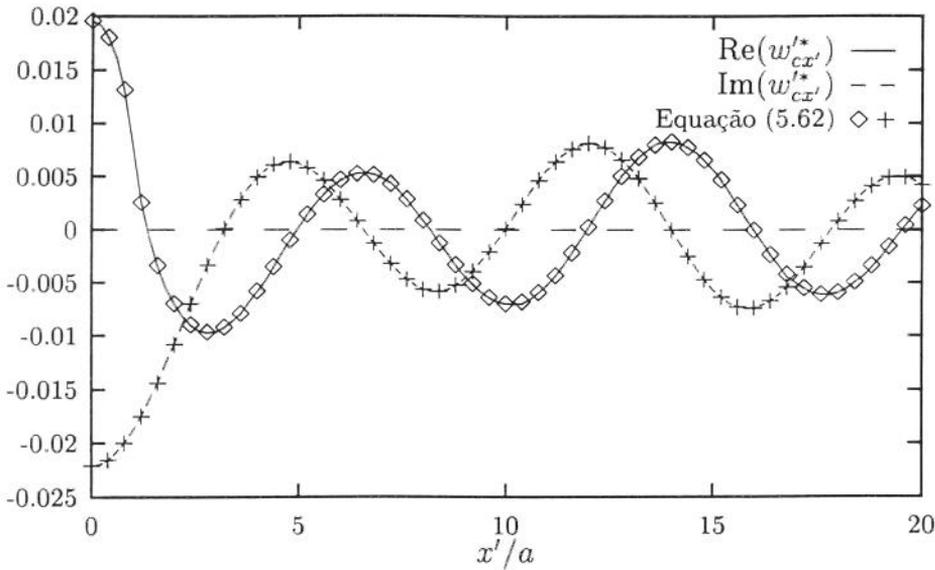


Figura 5.11: Componente normalizada  $w'_{cx'} = u'_{cz'}$ , para  $\theta = 30^\circ$  ao longo do eixo  $x'$  devida a uma faixa de carga aplicada no interior do espaço completo ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ )

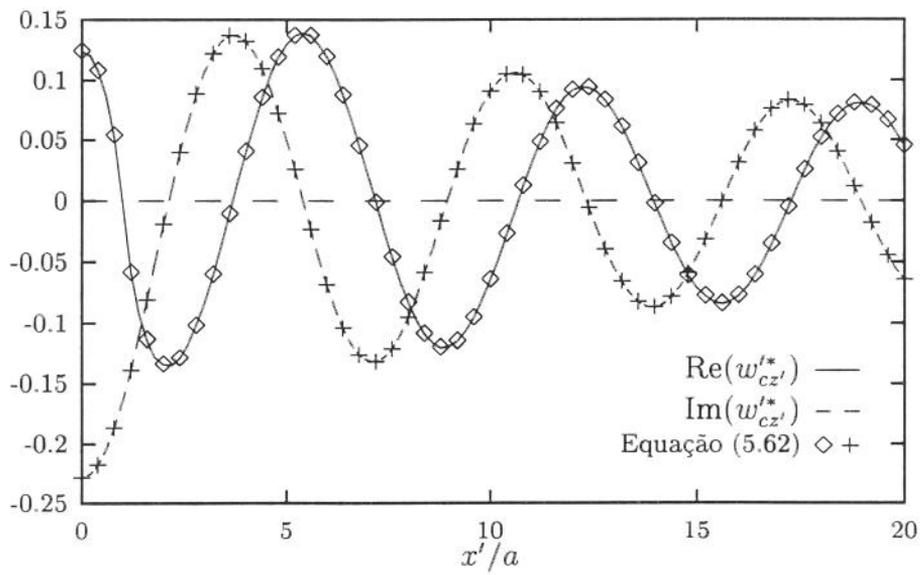


Figura 5.12: Componente normalizada  $w'_{cz'}$  para  $\theta = 30^\circ$  ao longo do eixo  $x'$  devida a uma faixa de carga aplicada no interior do espaço completo ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ )

A fim de se analisar o comportamento das funções de influência deduzidas para o semi-espaço, foram traçados os gráficos das figuras 5.13 a 5.16 que mostram os deslocamentos normalizados  $u^*$  e  $w^*$  ao longo da superfície de um meio semi-infinito transversalmente isotrópico cujo eixo de simetria apresenta uma inclinação  $\theta$ . Foram analisados os casos de  $\theta = 0$  e de  $\theta = 30^\circ$ . Estes deslocamentos são devidos a uma faixa de carga distribuída uniforme de largura  $2a$  centrada na origem do sistema de coordenadas  $x'z'$ , aplicada sobre a superfície do semi-espaço. O material analisado é o mesmo das outras análises, ou seja,  $c_{11}/c_{44} = 6$ ;  $n_1 = 1,5$ ;  $n_3 = 0,8$  e  $\nu = 0,01$ . A frequência normalizada utilizada no cálculo é  $a_0 = 1$ .

Pode-se verificar que a variação do ângulo de inclinação do eixo de simetria do material tem bastante influência no comportamento dos deslocamentos. Esta influência é mais acentuada nas componentes  $u'_{cz'}$  e  $w'_{cx'}$ . Estas componentes são nulas em  $x' = 0, z' = 0$  para  $\theta = 0$ . Quando ocorre a inclinação do eixo de simetria, no entanto, estas componentes deixam de ser nula na origem. Além disso, a propriedade de antisimetria do tensor das funções de Green ao longo da superfície do semi-espaço ( $G_{zx}(x,0) = -G_{xz}(x,0)$ ) só é válida quando  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi/2$ . Assim as funções de influência para faixa de carga uniforme também deixam de apresentar esta propriedade.

As componentes normalizadas  $\sigma^*_{cx'z'x'}$  e  $\sigma^*_{cz'z'z'}$  do estado de tensão provocado no interior do semi-espaço transversalmente isotrópico por uma faixa de carga uniforme aplicada sobre a superfície para  $\theta = 30^\circ$  estão representadas nos gráficos das figuras 5.17 a 5.18. Pode-se verificar que as condições de contorno impostas pela carga são reproduzidas nestes gráficos. Percebe-se também que a inclinação do eixo de simetria elástica do material tem pouca influência sobre estas componentes do estado de tensão quando se comparam estes resultados com os apresentados para o mesmo material no capítulo 4. Isto se deve ao fato de que estas tensões devem satisfazer às condições de contorno na superfície e estas condições não dependem de  $\theta$ . Assim o efeito da inclinação do eixo de simetria elástica só se faz sentir em pontos mais distantes da superfície do semi-espaço. Ocorre, porém, que as tensões diminuem quando se afasta da superfície do semi-espaço. Assim, o efeito da inclinação do eixo de simetria elástica sobre as tensões fica bastante reduzido.

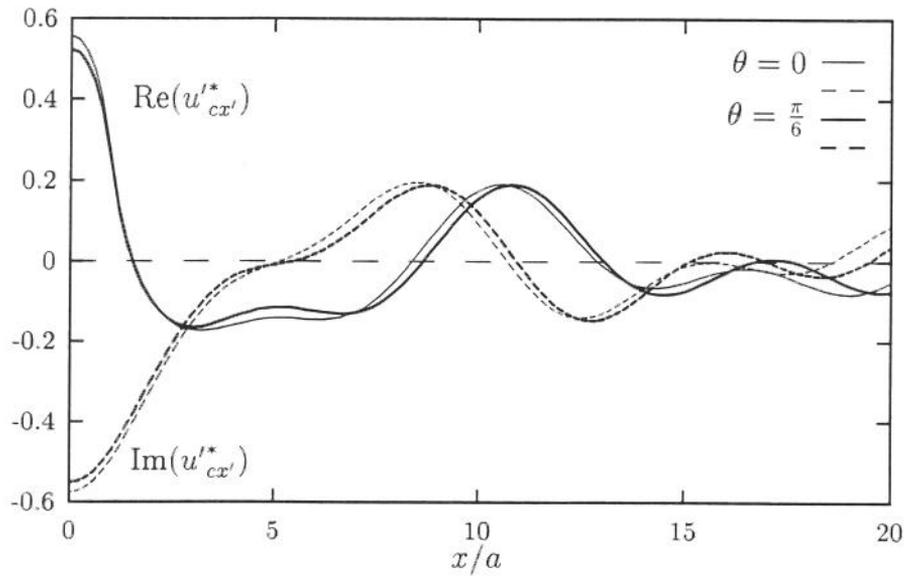


Figura 5.13: Deslocamento vertical normalizado  $u'_{cx'}$  ao longo de  $z' = 0$  devido a uma faixa de carga uniforme aplicada na superfície do semi-espço para  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi/6$ .

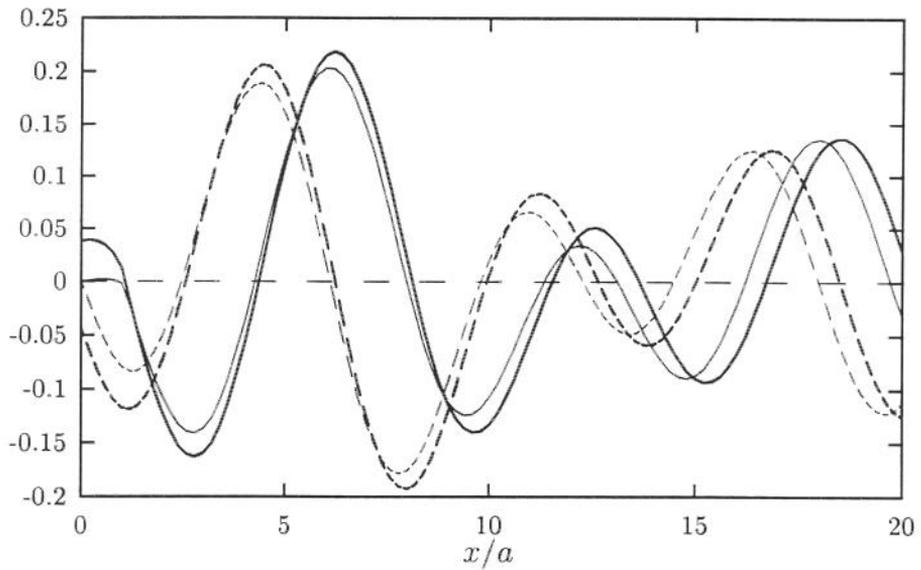


Figura 5.14: Deslocamento vertical normalizado  $w'_{cx'}$  ao longo de  $z' = 0$  devido a uma faixa de carga uniforme a uma faixa de carga uniforme aplicada na superfície do semi-espço para  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi/6$ .

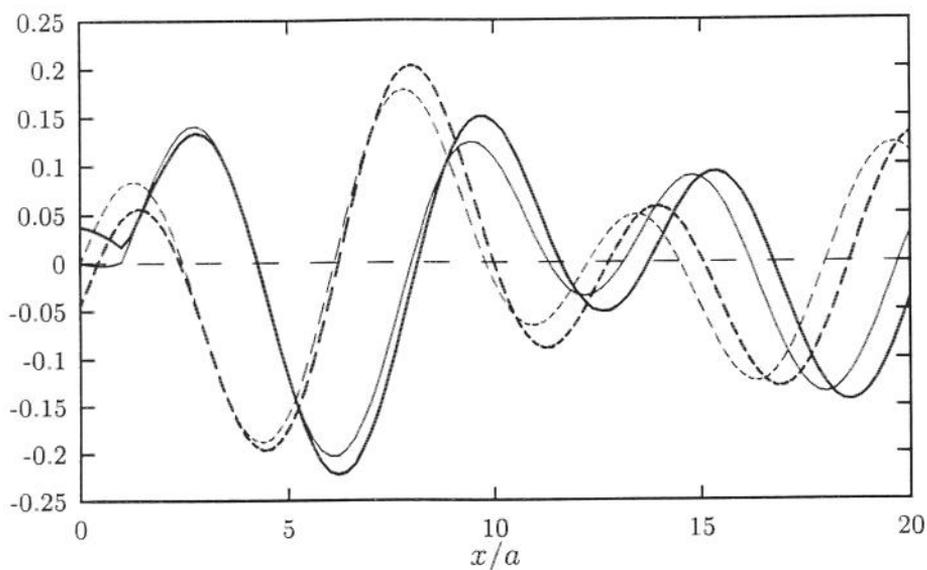


Figura 5.15: Deslocamento horizontal normalizado  $u'_{cz'}$  ao longo de  $z' = 0$  devido a uma faixa de carga uniforme a uma faixa de carga uniforme aplicada na superfície do semi-espço para  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi/6$ .

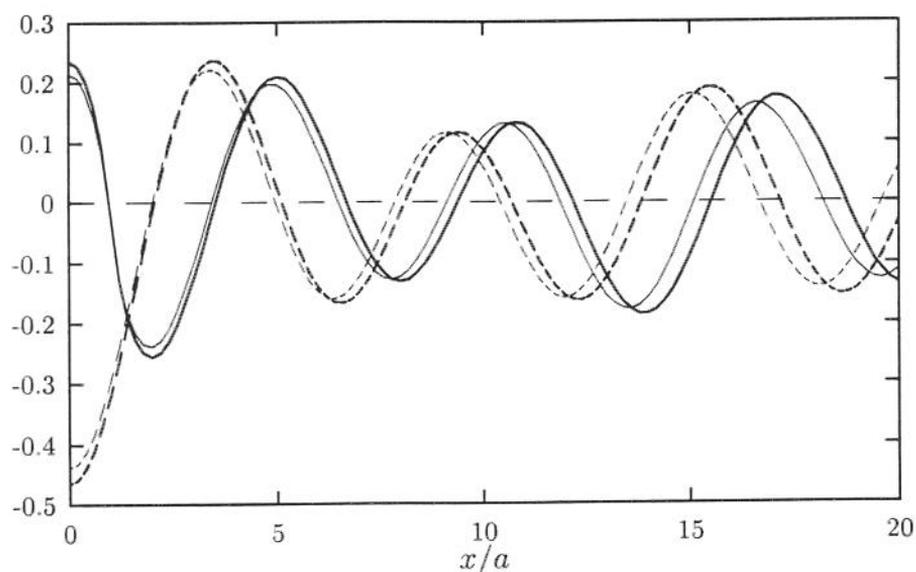


Figura 5.16: Deslocamento vertical normalizado  $w'_{cz'}$  ao longo de  $z' = 0$  devido a uma faixa de carga uniforme a uma faixa de carga uniforme aplicada na superfície do semi-espço para  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi/6$ .

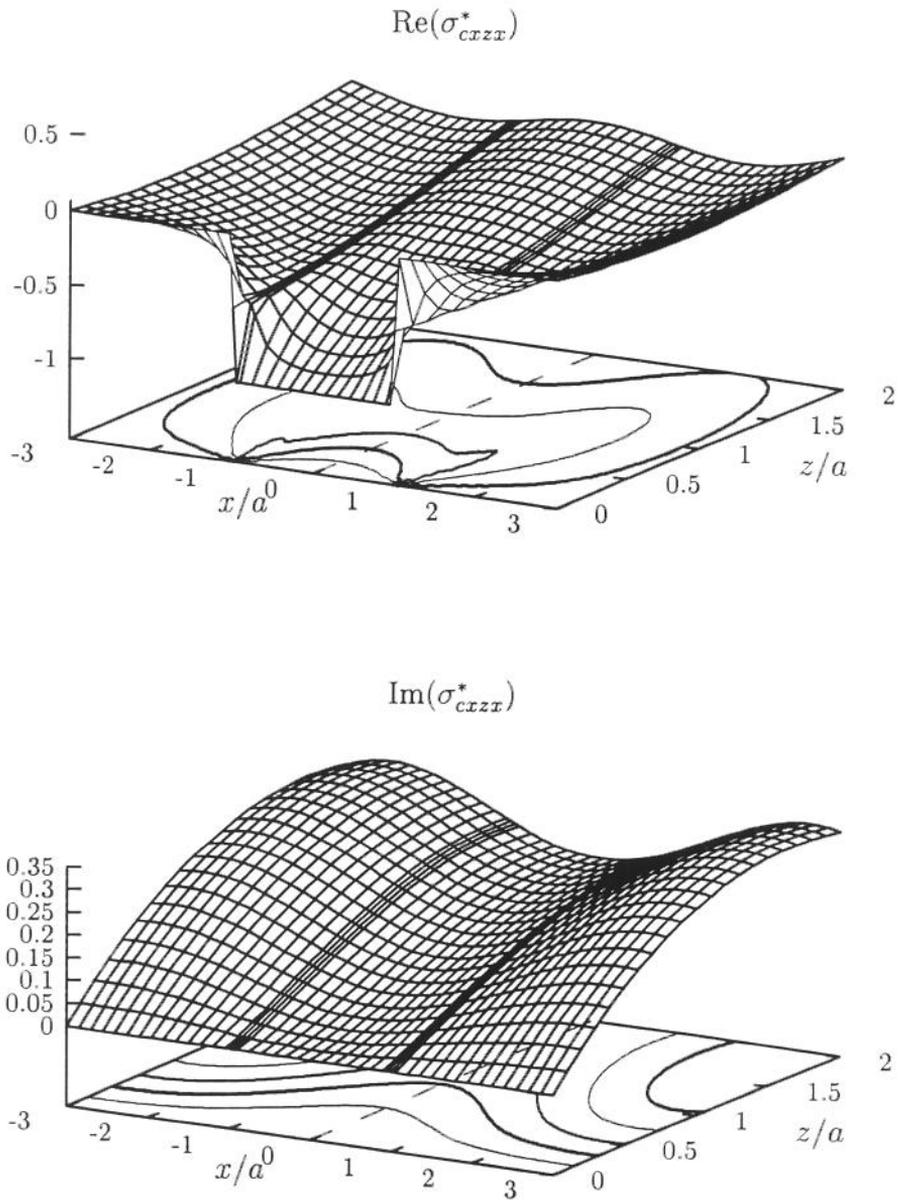


Figura 5.17: Tensões normalizadas  $\sigma_{cx'z't'}^*$  no interior do semi-espço para  $n_1 = 1,5$ ;  $n_3 = 0,8$  e  $\theta = \pi/6$ .

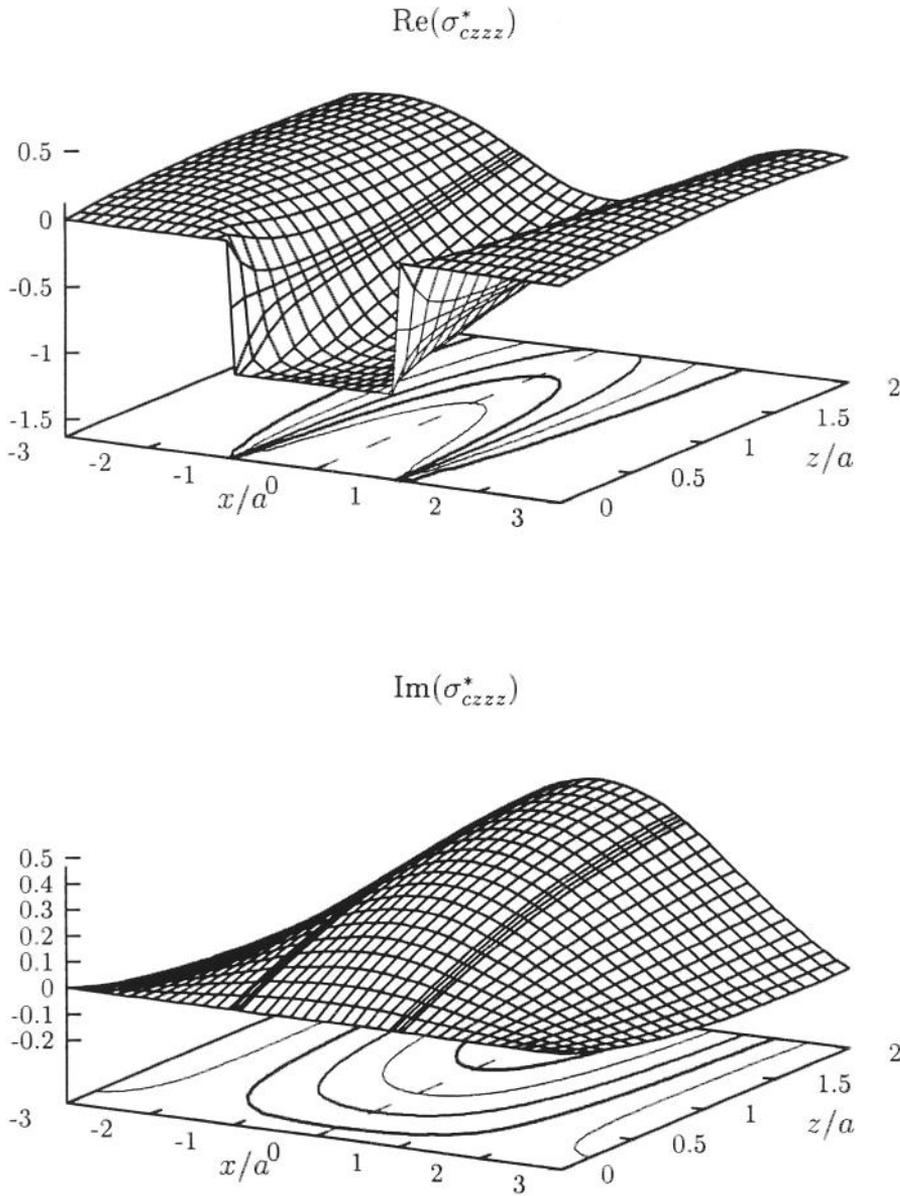


Figura 5.18: Tensões normalizadas  $\sigma_{cz'z'z'}^*$  no interior do semi-espaço para  $n_1 = 1,5$ ;  $n_3 = 0,8$  e  $\theta = \pi/6$ .

## 5.7 Considerações finais

Neste capítulo são deduzidas funções de Green e funções de influência de cargas dinâmicas harmônicas no tempo aplicadas sobre meios elásticos transversalmente isotrópicos cujo eixo de simetria elástica não coincide com qualquer dos eixos do sistema de coordenadas do problema.

As funções obtidas são consideravelmente mais complexas que as obtidas para os casos em que há a coincidência entre estes eixos, apresentadas nos capítulos 3 e 4. Além disso, a determinação numérica dessas funções demanda um esforço computacional bem maior. Assim, é desejável um esforço suplementar no sentido de se obter processos numéricos mais eficientes para o cálculo. Em especial merece um melhor tratamento a determinação das raízes do polinômio do quarto grau dado pela equação (5.15). Analisando-se o comportamento das raízes obtidas pelo método geral aqui utilizado talvez possa ser desenvolvido um método especializado mais eficiente.

Para o caso de cargas aplicadas no interior de um meio infinito é possível o cálculo das funções de Green, para linhas de carga concentradas, por uma simples composição das funções de Green deduzidas no capítulo 3. No entanto, para cargas distribuídas ao longo de um plano inclinado é necessária uma integração dessas funções de Green. Embora esta integração possa ser feita analiticamente surgem problemas numéricos na implementação computacional. Este é outro ponto que merece um estudo melhor.

Para cargas aplicadas sobre a superfície do semi espaço não há como utilizar as funções de Green obtidas no capítulo 3. Isto porque não há como aplicar a transformação integral de Fourier sobre o contorno do problema quando este não coincide com a direção da variável em que é aplicada a transformação.

Os resultados numéricos obtidos mostram que a inclinação do eixo de simetria elástica tem influência nos deslocamentos e tensões. Assim esta inclinação não pode ser ignorada quando se apresenta nos problemas reais.

## Capítulo 6

# Aplicação do Método dos Elementos de Contorno a Meios Transversalmente Isotrópicos

### 6.1 Apresentação

O Método dos Elementos de Contorno — MEC (*Boundary Element Method—BEM*) tem sido aplicado nas últimas décadas na análise de uma grande variedade de problemas na engenharia em áreas como eletrostática, transferência de calor, mecânica dos fluidos, elastoestática e elastodinâmica. Na área da elastodinâmica, em especial, tem recebido muita atenção nos últimos anos, sendo grandes os avanços experimentados por esta técnica nos tempos recentes.

Um dos grandes atrativos que caracterizam este método é a sua generalidade, que confere a ele a capacidade de resolver problemas em áreas tão diversas, bem como a maior eficiência (em relação a outros métodos como o Método dos Elementos Finitos) com que consegue resolver muitos desses problemas, principalmente aqueles que envolvem domínios ilimitados.

A eficiência do MEC se deve basicamente ao fato de ser uma implementação numérica do Método das Equações Integrais de Contorno, mais geral, que se baseia na solução de problemas contínuos a partir de suas condições de contorno, através da conversão das equações diferenciais que regem o problema em equações integrais de contorno. A consequência principal desta estratégia é que se torna necessária a discretização apenas do contorno do problema, em contraste com outros métodos que impõem uma discretização de todo o domínio.

A característica básica do MEC, em sua forma mais geral, é a utilização

de soluções fundamentais singulares como instrumento na construção das equações integrais de contorno do problema. Estas soluções fundamentais são funções de Green especiais em que as condições de contorno se restringem apenas ao ponto de singularidade. No caso da elastoestática e da elastodinâmica, as soluções fundamentais são as funções de Green para a carga aplicada no interior de um meio elástico infinito. É possível também construir soluções numéricas para o Método das Equações Integrais de Contorno utilizando como instrumento funções de Green deduzidas para condições de contorno mais restritas. Esta técnica em geral leva a métodos mais eficientes, embora restritos a um menor número de problemas [59].

Há dois grupos principais de formulações do MEC. O primeiro deles se baseia na determinação de quantidades (fontes) sem um significado físico específico que depois são utilizadas na determinação das incógnitas reais do problema. Esta formulação recebe o nome de Método Indireto. O segundo tipo de formulação, mais usado, é chamado de Método Direto. Nesta formulação, quantidades com claro sentido físico, como tensões e deslocamentos, são determinadas diretamente sem a necessidade de quantidades fictícias intermediárias.

Neste capítulo, inicialmente são apresentadas aplicações das duas formulações na solução de um problema simples de carga dinâmica harmônica aplicada sobre um semi-espço elástico transversalmente isotrópico. Os resultados obtidos por cada uma delas são então comparados com o resultado obtido pelas funções de Green e de influência desenvolvidos no capítulo 4. Em seguida é apresentada uma implementação mais completa do Método Direto juntamente com exemplos de aplicação. Não é do conhecimento deste autor implementação equivalente para a elastodinâmica de meios transversalmente isotrópicos.

A formulação aqui apresentada segue, em linhas gerais, um desenvolvimento semelhante ao apresentado por Crouch e Starfield [23] para problemas da elastostática.

## 6.2 Método Indireto

Para se colocar a formulação do Método Indireto é utilizado, como exemplo, o problema da determinação dos deslocamentos e das tensões devidos a uma faixa de carga dinâmica com distribuição uniforme  $p_0$ , de largura  $2a$ , aplicada sobre a superfície de um semi-espço elástico transversalmente isotrópico. A solução para este problema através de funções de influência foi mostrada no capítulo 4. O domínio  $\Omega$  do problema em questão é o espço semi-infinito dado por  $|x| < \infty, 0 \leq z < \infty$  e seu contorno  $\Gamma$  é a superfície superior do

semi-espaço dada por  $z = 0$ .

Toma-se, como domínio auxiliar  $\Omega^*$  o espaço infinito, sem qualquer contorno, e neste espaço traça-se uma superfície  $\Gamma^*$ , com a mesma geometria do contorno  $\Gamma$  do problema original. Sobre a superfície  $\Gamma^*$  é aplicada uma carga distribuída fictícia  $q(x)$  conforme mostrado na figura 6.1.

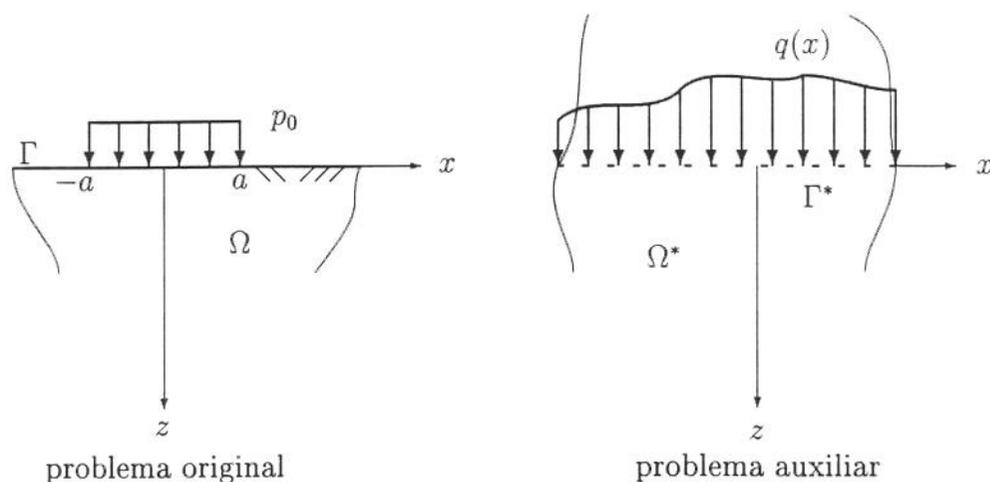


Figura 6.1: Problemas original e auxiliar para o Método Indireto

De acordo com as equações (3.41) do capítulo 3, as condições de contorno que caracterizam o problema original são:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}(x, z = 0) &= -p_x(x) \\ \sigma_{zz}(x, z = 0) &= -p_z(x)\end{aligned}\quad (6.1)$$

onde  $p_x$  e  $p_z$  são as componentes da carga aplicada nas direções horizontal e vertical, respectivamente e são dadas por:

$$\begin{aligned}p_n(x) &= p_{0n}, \quad |x| \leq a \\ p_n(x) &= 0, \quad |x| > a, \quad n = x, z.\end{aligned}\quad (6.2)$$

Por outro lado, os deslocamentos causados no domínio  $\Omega^*$  pela carga fictícia  $q(x)$  aplicada em  $\Gamma^*$  podem ser determinadas integrando-se as funções de Green desenvolvidas para o caso de carga aplicada no interior de um meio infinito (solução fundamental) ponderadas por  $q(x)$ :

$$u(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{xx}^*(x-s, z) q_x(x) ds + \int_{-\infty}^{\infty} G_{xz}^*(x-s, z) q_z(x) ds$$

$$w(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{zx}^*(x-s,z) q_x(x) ds + \int_{-\infty}^{\infty} G_{zz}^*(x-s,z) q_z(x) ds \quad (6.3)$$

onde  $q_x$  e  $q_z$  são as componentes de  $q(x)$ .

As tensões no domínio  $\Omega^*$  podem ser determinadas da mesma forma por:

$$\sigma_{ij}(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{ijx}^*(x-s,z) q_x(x) ds + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{ijz}^*(x-s,z) q_z(x) ds. \quad (6.4)$$

Para se resolver o problema original, deve-se inicialmente determinar a carga fictícia  $q(x)$  que causa na superfície  $\Gamma^*$  tensões iguais às impostas ao contorno  $\Gamma$  pelas equações (6.1). A carga  $q(x)$  assim determinada causa no domínio  $\Omega^*$  tensões e deslocamentos iguais aos provocados por  $p(x)$  no domínio  $\Omega$ .

A determinação de  $q(x)$  é feita pelo Método dos Elementos de Contorno dividindo-se o contorno  $\Gamma = \Gamma^*$  em  $N$  elementos  $\Gamma_k$  constituídos por segmentos de reta justapostos e adotando-se em cada um desses elementos um modelo aproximador para a distribuição de  $q(x)$ . A forma mais simples para este modelo aproximador é a distribuição uniforme, ou modelo constante. Assim, utilizando-se o modelo constante para todos os elementos, a carga  $q(x)$  é substituída por uma aproximação  $q^*(x)$  composta por  $N$  faixas de carga  $q_i$  uniformes aplicadas sobre os  $N$  elementos que compõem a superfície  $\Gamma^*$ . A precisão alcançada pelo método depende da capacidade de  $q^*(x)$  representar a carga fictícia  $q(x)$  em seus efeitos sobre o domínio  $\Omega^*$ . Esta capacidade, por sua vez, depende do comprimento  $2l^{(k)}$  de cada um dos elementos do contorno. Além disso, como no caso em estudo o contorno  $\Gamma$  é infinito, não é possível cobri-lo todo com elementos, sendo então necessário restringir a porção de  $\Gamma$  que será dividida em elementos a um sub-contorno finito  $\Gamma_f$  composto pela somatória dos  $N$  segmentos de reta ( $\Gamma_f = \sum_{k=1}^N \Gamma_k$ ). A precisão do método dependerá também da extensão de  $\Gamma_f$ .

Os deslocamentos e as tensões provocadas por  $q^*(x)$  em  $\Omega^*$  são dados por:

$$\begin{aligned} u(x,z) &= \sum_{k=1}^N \left( q_x^{(k)} \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} G_{xx}^*(x-x^{(k)}-s,z) ds + \right. \\ &\quad \left. q_z^{(k)} \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} G_{xz}^*(x-x^{(k)}-s,z) ds \right) \\ w(x,z) &= \sum_{k=1}^N \left( q_x^{(k)} \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} G_{zx}^*(x-x^{(k)}-s,z) ds + \right. \\ &\quad \left. q_z^{(k)} \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} G_{zz}^*(x-x^{(k)}-s,z) ds \right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

e

$$\sigma_{ij}(x,z) = \sum_{k=1}^N \left( q_x^{(k)} \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} \sigma_{ijx}^*(x - x^{(k)} - s, z) ds + q_z^{(k)} \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} \sigma_{ijz}^*(x - x^{(k)} - s, z) ds \right) \quad (6.6)$$

onde  $q_x^{(k)}$  e  $q_z^{(k)}$  são as componentes de  $q^*(x)$  no centro do elemento  $k$  e  $x^{(k)}$  é a coordenada horizontal deste ponto.

As integrais das funções de Green são dadas pelas funções de influência desenvolvidas no capítulo 4 para faixa de carga constante aplicada no interior de um meio infinito, resultando:

$$\begin{aligned} u(x,z) &= \sum_{k=1}^N \left( q_x^{(k)} u_{cx}^*(x - x^{(k)}, z) + q_z^{(k)} u_{cz}^*(x - x^{(k)}, z) \right) \\ w(x,z) &= \sum_{k=1}^N \left( q_x^{(k)} w_{cx}^*(x - x^{(k)}, z) + q_z^{(k)} w_{cz}^*(x - x^{(k)}, z) \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

e

$$\sigma_{ij}(x,z) = \sum_{k=1}^N \left( q_x^{(k)} \sigma_{cijx}^*(x - x^{(k)}, z) + q_z^{(k)} \sigma_{cijz}^*(x - x^{(k)}, z) \right) \quad (6.8)$$

onde  $u_{cx}^*$ ,  $w_{cx}^*$ , e  $\sigma_{cijx}^*$  são as funções de influência de uma faixa de carga unitária uniforme de largura  $2l^{(k)}$ .

A equação (6.8) pode ser utilizada para expressar as tensões no centro de cada um dos elementos do contorno. Impondo-se que  $\sigma_{xz}(x^{(k)}, 0)$  e  $\sigma_{zz}(x^{(k)}, 0)$ ,  $k = 1, \dots, N$  devem satisfazer às condições de contorno expressas pelas equações (6.1), resultam  $2N$  equações. Estas equações são utilizadas para se determinar o valor de  $q_x^{(k)}$  e  $q_z^{(k)}$ . Em forma matricial estas equações podem ser escritas como:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_{czzz}^{(1,1)} & \dots & \sigma_{czzz}^{(1,N)} & \sigma_{czzz}^{(1,1)} & \dots & \sigma_{czzz}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{czzz}^{(N,1)} & \dots & \sigma_{czzz}^{(N,N)} & \sigma_{czzz}^{(N,1)} & \dots & \sigma_{czzz}^{(N,N)} \\ \hline \sigma_{czzz}^{(1,1)} & \dots & \sigma_{czzz}^{(1,N)} & \sigma_{czzz}^{(1,1)} & \dots & \sigma_{czzz}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{czzz}^{(N,1)} & \dots & \sigma_{czzz}^{(N,N)} & \sigma_{czzz}^{(N,1)} & \dots & \sigma_{czzz}^{(N,N)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} q_x^{(1)} \\ \vdots \\ q_x^{(N)} \\ q_z^{(1)} \\ \vdots \\ q_z^{(N)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xz}^{(1)} \\ \vdots \\ \sigma_{xz}^{(N)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ \vdots \\ \sigma_{zz}^{(N)} \end{array} \right\} \quad (6.9)$$

onde  $\sigma_{cixx}^{(j,k)}$  e  $\sigma_{cizz}^{(j,k)}$  são as funções de influência para a tensão  $\sigma_{iz}$  devidas a uma faixa de carga constante de largura  $2l^{(k)}$  centrada em  $(x^{(k)}, 0)$  e calculada para o ponto  $(x^{(k)}, 0)$ , aplicadas nas direções horizontal e vertical, respectivamente. Os valores  $\sigma_{xz}^{(k)}$  e  $\sigma_{zz}^{(k)}$  são os valores das tensões impostas pelas condições de contorno no centro do elemento  $k$ .

O sistema de equações representado pela equação 6.9 pode ser escrito em forma compacta como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{cixx} & \mathbf{S}_{cixz} \\ \mathbf{S}_{cizz} & \mathbf{S}_{cizz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_x \\ \mathbf{q}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

ou simplesmente:

$$\mathbf{S} \mathbf{q} = \sigma \quad (6.11)$$

Após a solução do sistema de equações, os valores de  $q_x^{(k)}$  e  $q_z^{(k)}$  são utilizados para se determinar os deslocamentos e as tensões em qualquer ponto do domínio  $\Omega$ . Para se determinar os deslocamentos  $u$  e  $w$  no centro de cada elemento, por exemplo, utilizam-se as equações dadas em forma matricial por:

$$\begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(N)} \\ w^{(1)} \\ \vdots \\ w^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{cx}^{(1,1)} & \dots & u_{cx}^{(1,N)} & | & u_{cz}^{(1,1)} & \dots & u_{cz}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{cx}^{(N,1)} & \dots & u_{cx}^{(N,N)} & | & u_{cz}^{(N,1)} & \dots & u_{cz}^{(N,N)} \\ \hline w_{cx}^{(1,1)} & \dots & w_{cx}^{(1,N)} & | & w_{cz}^{(1,1)} & \dots & w_{cz}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{cx}^{(N,1)} & \dots & w_{cx}^{(N,N)} & | & w_{cz}^{(N,1)} & \dots & w_{cz}^{(N,N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x^{(1)} \\ \vdots \\ q_x^{(N)} \\ q_z^{(1)} \\ \vdots \\ q_z^{(N)} \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

onde  $u_{ci}^{(j,k)}$  e  $w_{ci}^{(j,k)}$  são as funções de influência dos deslocamentos  $u$  e  $w$  no centro do elemento  $j$  devidos a uma faixa de carga uniforme de largura  $2l^{(k)}$  aplicada na direção  $i$  no centro do elemento  $k$ . Na forma compacta estas equações ficam:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{cx} & \mathbf{U}_{cz} \\ \mathbf{W}_{cx} & \mathbf{W}_{cz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_x \\ \mathbf{q}_z \end{Bmatrix} \quad (6.13)$$

ou simplesmente:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{q} = \mathbf{U} \mathbf{S}^{-1} \sigma \quad (6.14)$$

O Método Indireto pode ser aplicado também a problemas com geometria e condições de contorno mais gerais. Nestes casos o contorno  $\Gamma$  compõe-se de duas partes  $\Gamma_t$  e  $\Gamma_u$ . Em  $\Gamma_t$  as condições de contorno impõem as tensões e em  $\Gamma_u$  os deslocamentos são impostos. Para se formar o sistema de equações são

utilizadas a equação (6.8) para os elementos que compõem  $\Gamma_t$  e as equações (6.7) para os elementos de  $\Gamma_u$ .

Outros tipos de modelos aproximadores podem ser empregados para  $q^*(x)$ . Normalmente estes modelos são do tipo polinomial como por exemplo o modelo linear ou o quadrático. Para o modelo linear,  $q^*(x)$  varia linearmente dentro de cada elemento e são necessários dois pontos em cada elemento para se especificar esta variação. Estes pontos normalmente são tomados nas extremidades de cada elemento. Para o modelo quadrático são tomados três pontos; geralmente as extremidades e o centro do elemento. Estes modelos aproximadores alcançam uma precisão maior com um menor número de elementos. No entanto a sua formulação é mais complexa e são necessárias funções de influência de cargas com distribuição linear e quadrática que demandam maior esforço computacional.

É interessante notar que para este problema em particular é possível determinar a carga fictícia  $q(x)$  de forma explícita sem recorrer à discretização do contorno. Para isto divide-se o problema em dois: um para a componente horizontal  $p_x(x)$  da carga aplicada e outro para a componente vertical  $p_z(x)$ .

#### 1. Carga horizontal $p_x(x)$ :

Ao se aplicar apenas a componente horizontal da carga externa sobre o semi-espaco as condições de contorno do problema, de acordo com as equações (6.1), ficam:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}(x,0) &= -p_x(x) \\ \sigma_{zz}(x,0) &= 0\end{aligned}\tag{6.15}$$

Estas condições de contorno, quando aplicadas na equação (6.4) resultam em:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{zxx}^*(x-s,0) q_{xx}(x) ds + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{zxx}^*(x-s,0) q_{zz}(x) ds &= -p_x(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{zzx}^*(x-s,0) q_{xx}(x) ds + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{zzx}^*(x-s,0) q_{zz}(x) ds &= 0\end{aligned}\tag{6.16}$$

onde  $q_{ij}(x)$  é a componente da carga fictícia  $q(x)$  na direção  $i = x, z$  devida à componente  $p_j(x)$  da carga externa aplicada.

As integrais que aparecem nas equações (6.16) são *convoluções* em  $x$  entre as funções de Green e a carga fictícia. Aplicando-se a transformação integral de Fourier sobre estas equações, as convoluções se convertem,

no domínio transformado, em simples produtos [76]. Assim, no domínio transformado as equações (6.16) ficam:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xxx}^*(\lambda,0) \bar{q}_{xx}(\lambda) + \bar{\sigma}_{xxx}^*(\lambda,0) \bar{q}_{zx}(\lambda) &= -\bar{p}_x(\lambda) \\ \bar{\sigma}_{zzx}^*(\lambda,0) \bar{q}_{xx}(\lambda) + \bar{\sigma}_{zzx}^*(\lambda,0) \bar{q}_{zx}(\lambda) &= 0\end{aligned}\quad (6.17)$$

A solução deste sistema de equações fornece as componentes  $\bar{q}_{xx}(\lambda)$  e  $\bar{q}_{zx}(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}\bar{q}_{xx}(\lambda) &= \bar{p}_x(\lambda) \frac{\bar{\sigma}_{zzz}^*(\lambda,0)}{\bar{\sigma}_{zzx}^*(\lambda,0) \bar{\sigma}_{xxx}^*(\lambda,0) - \bar{\sigma}_{xxx}^*(\lambda,0) \bar{\sigma}_{zzz}^*(\lambda,0)} \\ \bar{q}_{zx}(\lambda) &= -\bar{p}_x(\lambda) \frac{\bar{\sigma}_{zzx}^*(\lambda,0)}{\bar{\sigma}_{zzx}^*(\lambda,0) \bar{\sigma}_{xxx}^*(\lambda,0) - \bar{\sigma}_{xxx}^*(\lambda,0) \bar{\sigma}_{zzz}^*(\lambda,0)}\end{aligned}\quad (6.18)$$

Utilizando-se os resultados obtidos no capítulo 3 para as funções de Green deduzidas para uma linha de carga concentrada aplicada no interior de um meio infinito, as componentes da carga fictícia ficam:

$$\begin{aligned}\bar{q}_{xx}(\lambda) &= 2\sqrt{2\pi} \bar{p}_x(\lambda) \frac{H_x \bar{\omega}_2 \eta_1 - \bar{\omega}_1 \eta_2}{R \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1} \\ \bar{q}_{zx}(\lambda) &= -2\sqrt{2\pi} \bar{p}_x(\lambda) \frac{H_z \eta_5 - \eta_6}{R \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}\end{aligned}\quad (6.19)$$

Para a componente da carga  $p_x(x)$  dada pela equação (6.2) a componente transformada  $\bar{p}_x(\lambda)$  fica:

$$\bar{p}_x(\lambda) = p_{0x} \frac{2 \operatorname{sen}(\lambda a)}{\lambda \sqrt{2\pi}} \quad (6.20)$$

Portanto, a carga fictícia  $\bar{q}(\lambda)$  fica:

$$\begin{aligned}\bar{q}_{xx}(\lambda) &= p_{0x} \frac{4 \operatorname{sen}(\delta \zeta a)}{\delta \zeta} \frac{H_x \bar{\omega}_2 \eta_1 - \bar{\omega}_1 \eta_2}{R \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1} \\ \bar{q}_{zx}(\lambda) &= -p_{0x} \frac{4 \operatorname{sen}(\delta \zeta a)}{\delta \zeta} \frac{H_z \eta_5 - \eta_6}{R \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}\end{aligned}\quad (6.21)$$

Finalmente, aplicando-se a transformação integral de Fourier inversa chega-se a:

$$\begin{aligned}q_{xx}(x) &= \frac{8p_{0x}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\delta \zeta a)}{\zeta} \frac{H_x \bar{\omega}_2 \eta_1 - \bar{\omega}_1 \eta_2}{R \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1} \cos(\delta \zeta x) d\zeta \\ q_{zx}(x) &= -\frac{8ip_{0x}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\delta \zeta a)}{\zeta} \frac{H_z \eta_5 - \eta_6}{R \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1} \operatorname{sen}(\delta \zeta x) d\zeta\end{aligned}\quad (6.22)$$

2. Carga vertical  $p_z(x)$ :

Aplicando-se isoladamente a componente vertical  $p_z(x)$  da carga externa, as condições de contorno são:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}(x,0) &= 0 \\ \sigma_{zz}(x,z) &= -p_z(x)\end{aligned}\quad (6.23)$$

Estas condições de contorno, quando aplicadas na equação (6.4) resultam em:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xxx}^*(x-s,0) q_{xz}(x) ds + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xxx}^*(x-s,0) q_{zz}(x) ds &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{zzx}^*(x-s,0) q_{xz}(x) ds + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{zzz}^*(x-s,0) q_{zz}(x) ds &= -p_z(x)\end{aligned}\quad (6.24)$$

A aplicação da transformação integral de Fourier sobre estas equações conduz ao sistema de equações:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xxx}^*(\lambda,0) \bar{q}_{xz}(\lambda) + \bar{\sigma}_{xxx}^*(\lambda,0) \bar{q}_{zz}(\lambda) &= 0 \\ \bar{\sigma}_{zzx}^*(\lambda,0) \bar{q}_{xz}(\lambda) + \bar{\sigma}_{zzz}^*(\lambda,0) \bar{q}_{zz}(\lambda) &= -\bar{p}_z(\lambda)\end{aligned}\quad (6.25)$$

A solução deste sistema de equações fornece as componentes  $\bar{q}_{xz}(\lambda)$  e  $\bar{q}_{zz}(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}\bar{q}_{xz}(\lambda) &= -\bar{p}_z(\lambda) \frac{\bar{\sigma}_{xxx}^*(\lambda,0)}{\bar{\sigma}_{zzx}^*(\lambda,0) \bar{\sigma}_{xxx}^*(\lambda,0) - \bar{\sigma}_{xxx}^*(\lambda,0) \bar{\sigma}_{zzz}^*(\lambda,0)} \\ \bar{q}_{zz}(\lambda) &= \bar{p}_z(\lambda) \frac{\bar{\sigma}_{xxx}^*(\lambda,0)}{\bar{\sigma}_{zzx}^*(\lambda,0) \bar{\sigma}_{xxx}^*(\lambda,0) - \bar{\sigma}_{xxx}^*(\lambda,0) \bar{\sigma}_{zzz}^*(\lambda,0)}\end{aligned}\quad (6.26)$$

Substituindo-se nesta solução as expressões das funções de Green obtidas no capítulo 3 para uma linha de carga concentrada aplicada no interior de um meio infinito as componentes da carga fictícia ficam:

$$\begin{aligned}\bar{q}_{xz}(\lambda) &= -2\sqrt{2\pi} \bar{p}_z(\lambda) \frac{H_x \omega_2 \eta_3 - \omega_1 \eta_4}{R \omega_2 - \omega_1} \\ \bar{q}_{zz}(\lambda) &= 2\sqrt{2\pi} \bar{p}_z(\lambda) \frac{H_z \eta_3 - \eta_4}{R \omega_2 - \omega_1}\end{aligned}\quad (6.27)$$

Substituindo-se nestas equações o valor da carga transformada:

$$\bar{p}_z(\lambda) = p_{0z} \frac{2 \operatorname{sen}(\lambda a)}{\sqrt{2\pi} \lambda} \quad (6.28)$$

e aplicando-se a transformação integral inversa chega-se a:

$$q_{xz}(x) = -\frac{8ip_{0z}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(\delta\zeta a)}{\zeta} \frac{H_x}{R} \frac{\bar{\omega}_2\eta_3 - \bar{\omega}_1\eta_4}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1} \text{sen}(\delta\zeta x) d\zeta$$

$$q_{zz}(x) = \frac{8p_{0z}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(\delta\zeta a)}{\zeta} \frac{H_z}{R} \frac{\eta_3 - \eta_4}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1} \cos(\delta\zeta x) d\zeta \quad (6.29)$$

As equações (6.22) e (6.29) fornecem as componentes da carga fictícia que causa no interior do meio infinito os mesmos deslocamentos e tensões que uma faixa de carga uniforme de largura  $2a$  e magnitude  $p_0$  causa em um meio semi-infinito quando aplicada sobre a sua superfície externa. Esta dedução demonstra, para este caso em particular, a existência e a unicidade da solução. Uma análise mais aprofundada sobre estas equações pode também fornecer informações sobre o tamanho indicado para os elementos de contorno e a extensão da superfície que deve ser discretizada na solução numérica de problemas mais gerais que incluam superfícies livres.

### 6.3 Método Direto

A formulação direta do Método dos Elementos de Contorno baseia-se no teorema da reciprocidade elástica. Segundo este teorema o valor dos deslocamentos e das tensões em dois estados elastodinâmicos distintos, com contorno  $\Gamma$  e domínio  $\Omega$  iguais, estão relacionados por [47]:

$$\int_{\Gamma} \sigma u^* ds = \int_{\Gamma} \sigma^* u ds \quad (6.30)$$

onde  $u, u^*$  são os deslocamentos e  $\sigma, \sigma^*$  as tensões nos dois estados.

Para a aplicação deste método, seleciona-se como primeiro estado o problema que se deseja resolver (problema original) e como segundo estado um problema (problema auxiliar) cuja solução seja conhecida *solução de teste* [23].

Como solução de teste podem-se utilizar os deslocamentos e tensões causadas por uma linha de carga aplicada no interior de um meio infinito (solução fundamental) elástico transversalmente isotrópico. Para isto traça-se no interior do meio infinito  $\Omega^*$  uma superfície  $\Gamma^*$  igual ao contorno  $\Gamma$  do problema original e aplica-se a linha de carga concentrada em um ponto *externo* à porção de  $\Omega^*$  delimitada pelo contorno  $\Gamma^*$  [23]. Se do meio infinito  $\Omega^*$  for isolada esta porção (igual a  $\Omega$ ) as tensões causadas por esta linha de carga ao longo de  $\Gamma^*$  estarão em equilíbrio e portanto estas tensões e os deslocamentos que as acompanham serão uma solução para o problema auxiliar.

Como no Método Indireto, divide-se o contorno  $\Gamma$  em  $N$  segmentos de reta (quando  $\Gamma$  tiver extensão infinita seleciona-se uma porção finita  $\Gamma_f$  de  $\Gamma$ ). A seguir adota-se um modelo aproximador para as tensões e para os deslocamentos do problema original em cada elemento, sendo o modelo constante o mais simples.

Adotando-se o modelo constante para todos os elementos a equação (6.30) fica:

$$\sum_{k=1}^N \sigma^{(k)} \int_{\Gamma_k} u^* d\Gamma = \sum_{k=1}^N u^{(k)} \int_{\Gamma_k} \sigma^* d\Gamma \quad (6.31)$$

onde  $\sigma^{(k)}$  e  $u^{(k)}$  são as tensões e os deslocamentos no centro do elemento  $k$ . As tensões por sua vez são dadas por:

$$\sigma_i = (\sigma_{ix}n_x + \sigma_{iz}n_z), \quad i = x, z \quad (6.32)$$

onde  $n_x$  e  $n_z$  são as componentes do vetor normal  $\mathbf{n}$  ao contorno  $\Gamma$  em direção ao exterior de  $\Omega$ .

Para o problema em estudo (faixa de carga uniforme aplicada sobre o semi-espço) o vetor normal ao longo de todo o contorno  $\Gamma$  é dado por  $n_x = 0, n_z = -1$  e, assim, a equação (6.31) pode ser reescrita como:

$$\sum_{k=1}^N \left( \sigma_{xz}^{(k)} \int_{\Gamma_k} u^* d\Gamma + \sigma_{zz}^{(k)} \int_{\Gamma_k} w^* d\Gamma \right) = \sum_{k=1}^N \left( u^{(k)} \int_{\Gamma_k} \sigma_{xz}^* d\Gamma + w^{(k)} \int_{\Gamma_k} \sigma_{zz}^* d\Gamma \right) \quad (6.33)$$

Os valores de  $\sigma_{xz}^{(k)}$  e de  $\sigma_{zz}^{(k)}$  são impostos pelas condições de contorno e, portanto, há  $N$  valores do deslocamento  $u^{(k)}$  e  $N$  valores de  $w^{(k)}$  a ser determinados. São necessárias então  $2N$  soluções de teste diferentes para se obter um sistema de  $2N$  equações linearmente independentes.

As soluções de teste são obtidas levando-se o ponto de aplicação da linha de carga externa ao ponto médio de cada um dos  $N$  elementos do contorno e aplicando-se em cada um deles uma carga na direção horizontal e uma carga na direção vertical. As soluções são fornecidas então pelas funções de Green desenvolvidas para linha de carga aplicada no interior de um meio infinito. O sistema de equações resulta:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \left( \sigma_{xz}^{(k)} \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} G_{xi}^* (x + x^{(k)} - x^{(j)}, 0) dx + \right. \\ & \quad \left. \sigma_{zz}^{(k)} \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} G_{zi}^* (x + x^{(k)} - x^{(j)}, 0) dx \right) = \\ & \sum_{k=1}^N \left( u^{(k)} \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} \sigma_{xzi}^* (x + x^{(k)} - x^{(j)}, 0) dx + \right. \end{aligned}$$

$$w^{(k)} \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} \sigma_{zzi}^* (x + x^{(k)} x_k - x^{(j)}, 0) dx \Big),$$

$$i = x, z; \quad j = 1, \dots, N \quad (6.34)$$

onde  $G_{xi}^*$ ,  $G_{zi}^*$ ,  $\sigma_{xzi}^*$  e  $\sigma_{zzi}^*$  são as funções de Green determinadas para a linha de carga aplicada no centro do elemento  $j$

As integrais presentes na equação (6.34) podem ser substituídas pelas funções de influência desenvolvidas para uma faixa de carga uniforme aplicada no interior de um meio infinito, notando que:

$$G_{ij}^* (x, 0) = G_{ij}^* (-x, 0)$$

$$\sigma_{ijk}^* (x, 0) = -\sigma_{ijk}^* (-x, 0), \quad i, j, k = x, z \quad (6.35)$$

Portanto:

$$\int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} G_{xi}^* (x + x^{(k)} - x^{(j)}, 0) dx = \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} G_{xi}^* (x^{(j)} - x^{(k)} - x, 0) dx$$

$$\int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} G_{zi}^* (x + x^{(k)} - x^{(j)}, 0) dx = \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} G_{zi}^* (x^{(j)} - x^{(k)} - x, 0) dx$$

$$\int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} \sigma_{xzi}^* (x + x^{(k)} - x^{(j)}, 0) dx = - \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} \sigma_{xzi}^* (x^{(j)} - x^{(k)} - x, 0) dx$$

$$\int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} \sigma_{zzi}^* (x + x^{(k)} - x^{(j)}, 0) dx = - \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} \sigma_{zzi}^* (x^{(j)} - x^{(k)} - x, 0) dx \quad (6.36)$$

Repare-se que as integrais no segundo membro das equações (6.36) podem ser interpretadas como convoluções entre funções de Green e uma carga unitária distribuída uniformemente entre  $x^{(k)} - l^{(k)}$  e  $x^{(k)} + l^{(k)}$  e calculadas no ponto  $(x^{(j)}, 0)$ .

Assim o sistema de equações (6.34) fica:

$$\sum_{k=1}^N \left[ \sigma_{xz}^{(k)} u_{ci}^* (x^{(j)} - x^{(k)}, 0) + \sigma_{zz}^{(k)} w_{ci}^* (x^{(j)} - x^{(k)}, 0) \right] =$$

$$- \sum_{k=1}^N \left[ u^{(k)} \sigma_{cxzi}^* (x^{(j)} - x^{(k)}, 0) + w^{(k)} \sigma_{czzi}^* (x^{(j)} - x^{(k)}, 0) \right],$$

$$i = x, z; \quad j = 1, \dots, N \quad (6.37)$$

Em forma matricial, o sistema de equações pode ser escrito também como:

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 \sigma_{cxxx}^{(1,1)} & \dots & \sigma_{cxxx}^{(1,N)} & \sigma_{czzx}^{(1,1)} & \dots & \sigma_{czzx}^{(1,N)} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \sigma_{cxxx}^{(N,1)} & \dots & \sigma_{cxxx}^{(N,N)} & \sigma_{czzx}^{(N,1)} & \dots & \sigma_{czzx}^{(N,N)} \\
 \hline
 \sigma_{cxxx}^{(1,1)} & \dots & \sigma_{cxxx}^{(1,N)} & \sigma_{czzz}^{(1,1)} & \dots & \sigma_{czzz}^{(1,N)} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \sigma_{cxxx}^{(N,1)} & \dots & \sigma_{cxxx}^{(N,N)} & \sigma_{czzz}^{(N,1)} & \dots & \sigma_{czzz}^{(N,N)}
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(N)} \\ \hline w^{(1)} \\ \vdots \\ w^{(N)} \end{array} \right\} = \\
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 u_{cx}^{(1,1)} & \dots & u_{cx}^{(1,N)} & w_{cx}^{(1,1)} & \dots & w_{cx}^{(1,N)} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 u_{cx}^{(N,1)} & \dots & u_{cx}^{(N,N)} & w_{cx}^{(N,1)} & \dots & w_{cx}^{(N,N)} \\
 \hline
 u_{cz}^{(1,1)} & \dots & u_{cz}^{(1,N)} & w_{cz}^{(1,1)} & \dots & w_{cz}^{(1,N)} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 u_{cz}^{(N,1)} & \dots & u_{cz}^{(N,N)} & w_{cz}^{(N,1)} & \dots & w_{cz}^{(N,N)}
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xz}^{(1)} \\ \vdots \\ \sigma_{xz}^{(N)} \\ \hline \sigma_{zz}^{(1)} \\ \vdots \\ \sigma_{zz}^{(N)} \end{array} \right\} \quad (6.38)
 \end{array}$$

onde  $u_{cj}^{(k,l)}$ ,  $w_{cj}^{(k,l)}$  e  $\sigma_{cizj}^{(k,l)}$  são as funções de influência de uma faixa de carga uniforme de largura  $2l^{(k)}$  aplicada no interior de um meio elástico infinito na direção  $j$  no ponto  $(x^{(k)}, 0)$  e calculadas no ponto  $(x^{(j)}, 0)$ .

Em forma compacta o sistema de equações fica:

$$\begin{array}{c}
 - \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{S}_{cxxx} & \mathbf{S}_{czzx} \\ \mathbf{S}_{cxxx} & \mathbf{S}_{czzz} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{U}_{cx} & \mathbf{W}_{cx} \\ \mathbf{U}_{cz} & \mathbf{W}_{cz} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{t}_x \\ \mathbf{t}_z \end{array} \right\} \quad (6.39)
 \end{array}$$

ou simplesmente:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{t} \quad (6.40)$$

A solução do sistema de equações leva diretamente ao valor dos deslocamentos no centro de cada um dos elementos:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{t} \quad (6.41)$$

Os elementos da diagonal das matrizes  $\mathbf{S}_{cxxx}$  e  $\mathbf{S}_{czzz}$  (elementos da diagonal da matriz  $\mathbf{H}$ ) merecem uma observação especial. Como pode ser observado pelas equações (4.10) do capítulo 4, nas funções de influência há um salto unitário nas componentes  $\sigma_{cxxx}$  e  $\sigma_{czzz}$  ao longo da superfície de aplicação da faixa de carga uniforme. Como os elementos da diagonal são calculados nos pontos sob a faixa de carga ( $x^{(k)} = x^{(j)}$ ), deve-se tomar o limite:

$$\sigma_{cizi}^{(k,k)} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \sigma_{cizi}(0, z) = \frac{1}{2} \quad (6.42)$$

para estes elementos, ou seja, a carga deve se aproximar do ponto de observação pelo lado *externo* do problema.

Para a solução de problemas com geometria e condições de contorno mais gerais o contorno  $\Gamma$  é composto de duas partes. Em  $\Gamma_u$  os deslocamentos são impostos e em  $\Gamma_t$  as tensões são impostas. Assim, para se resolver o sistema de equações é preciso se reorganizar as colunas das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  de forma a manter todas as incógnitas no mesmo lado da equação.

## 6.4 Comparação entre os métodos

Para uma comparação entre os resultados obtidos pelas formulações indireta (MEC-I) e direta (MEC-D) do Método dos Elementos de Contorno tomou-se o problema original mostrado na figura 6.1 e de seu contorno  $\Gamma$  selecionou-se uma porção finita  $\Gamma_f$  dada por  $-5a \leq x \leq 5a$ . Esta porção finita foi então dividida em 25 elementos de igual comprimento como mostrado na figura 6.2. As características elásticas do material são dadas por  $c_{11}/c_{44} = 6$ ,  $n_1 = 1,5$  e  $n_3 = 0,8$ . A taxa de amortecimento adotada é  $\nu = 0,01$ .

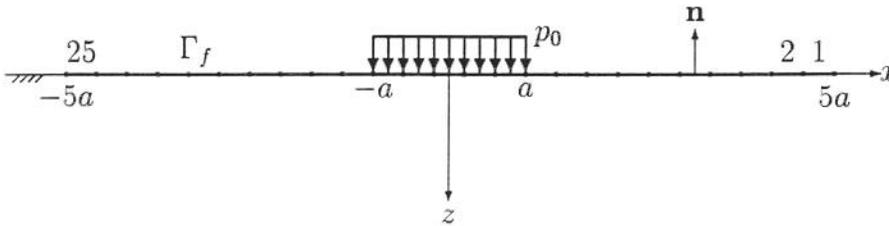


Figura 6.2: Divisão do contorno em elementos

Foi utilizado o modelo constante para todos os elementos e os deslocamentos normalizados  $u^* = uc_{44}/ap_0$  e  $w^* = wc_{44}/ap_0$  obtidos por cada um dos métodos ao longo de  $\Gamma_f$  estão mostrados nas figuras 6.3 a 6.5. São mostrados nessas figuras os deslocamentos devidos à carga aplicada nas direções horizontal e vertical para uma frequência normalizada  $a_0 = 1$ . Nas figuras estão também representados os deslocamentos obtidos pelas funções de influência (FI) desenvolvidas no capítulo 4 para o caso de faixa de carga uniforme aplicada sobre o semi-espaco transversalmente isotrópico.

Pela análise das figuras pode-se verificar que apesar de o modelo aproximador utilizado ser o mais simples e apesar de a discretização do contorno do problema ser relativamente grosseira, tanto em relação ao número de elementos quanto em relação à porção finita  $\Gamma_f$  do contorno tomada, a concordância

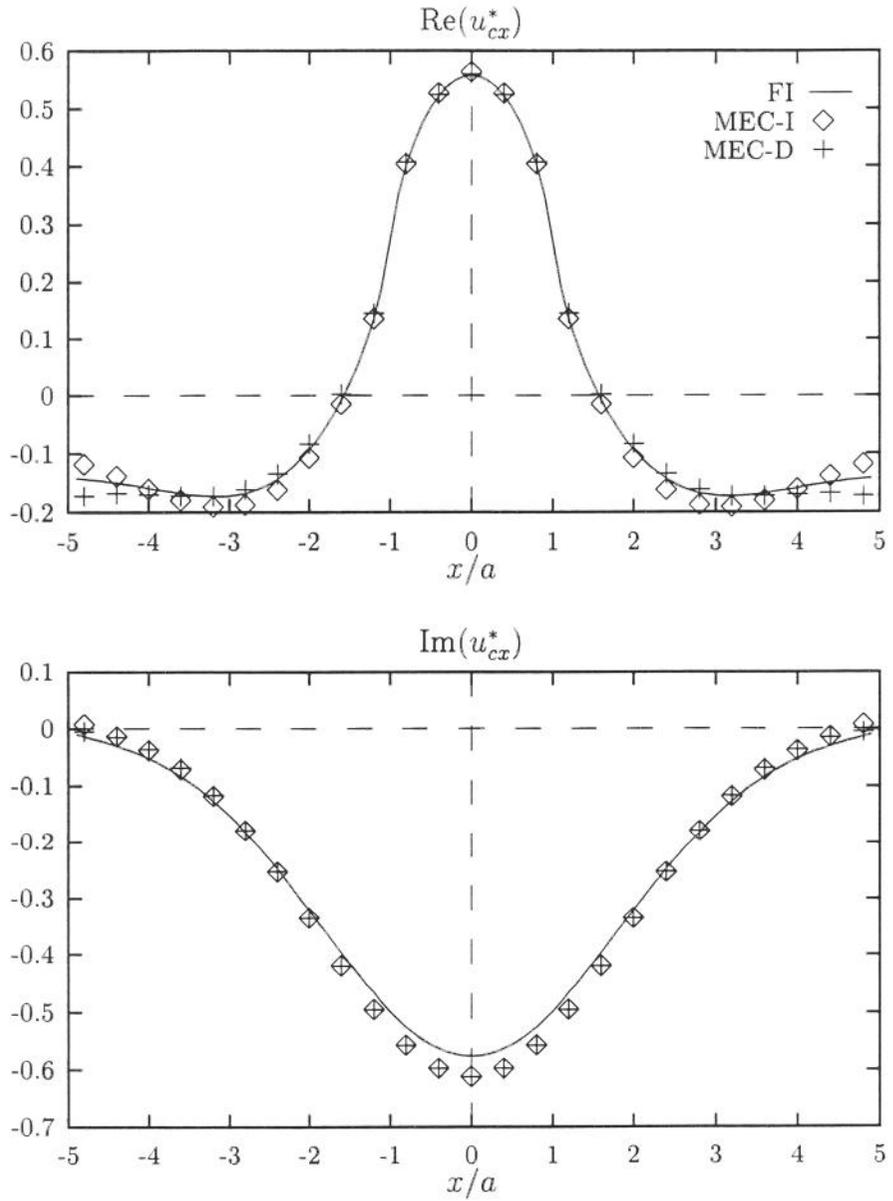


Figura 6.3: Deslocamento horizontal normalizado  $u_{cx}^*$  calculados pela função de influência (FI) e pelas formulações indireta (MEC-I) e direta (MEC-D) do MEC.

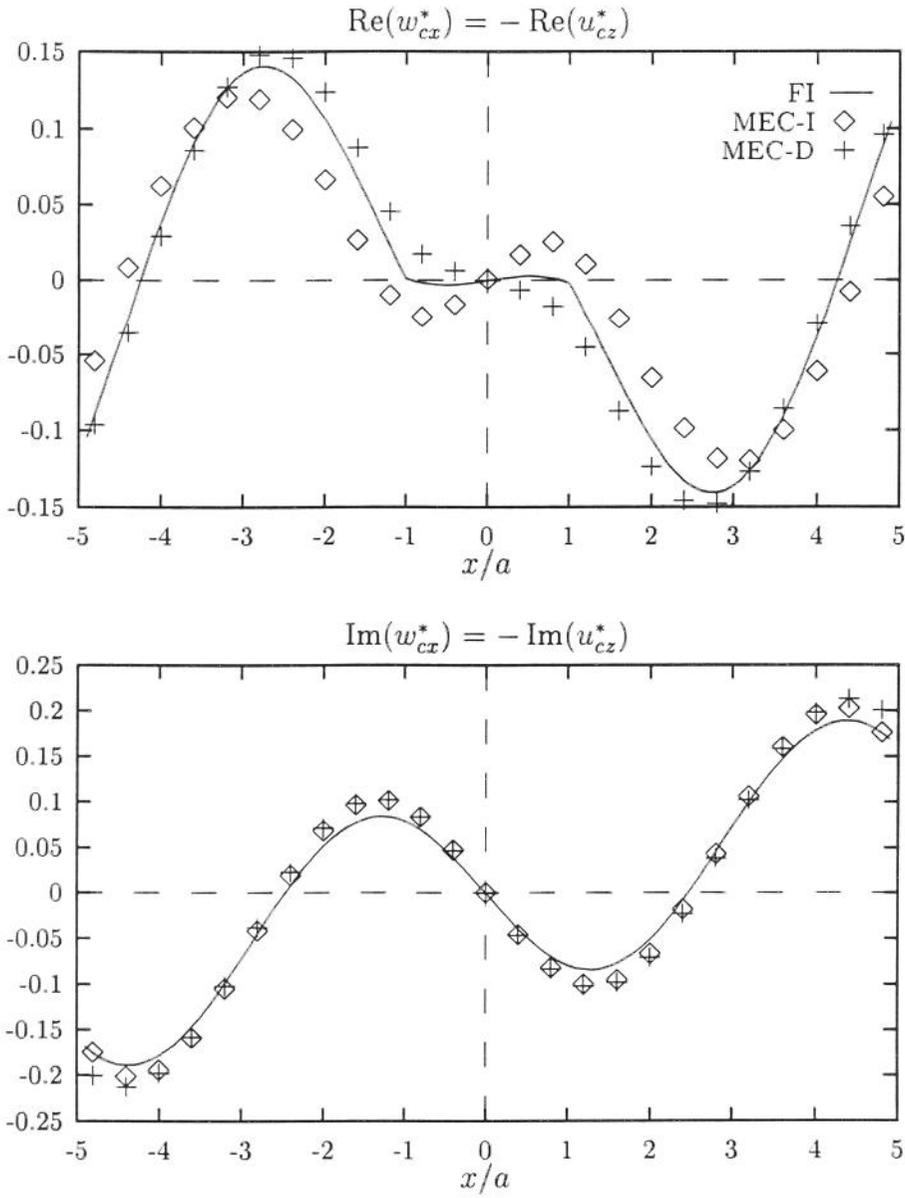


Figura 6.4: Deslocamentos cruzados normalizados  $w_{cx}^* = -u_{cz}^*$  ao longo da superfície do semi-espaco.

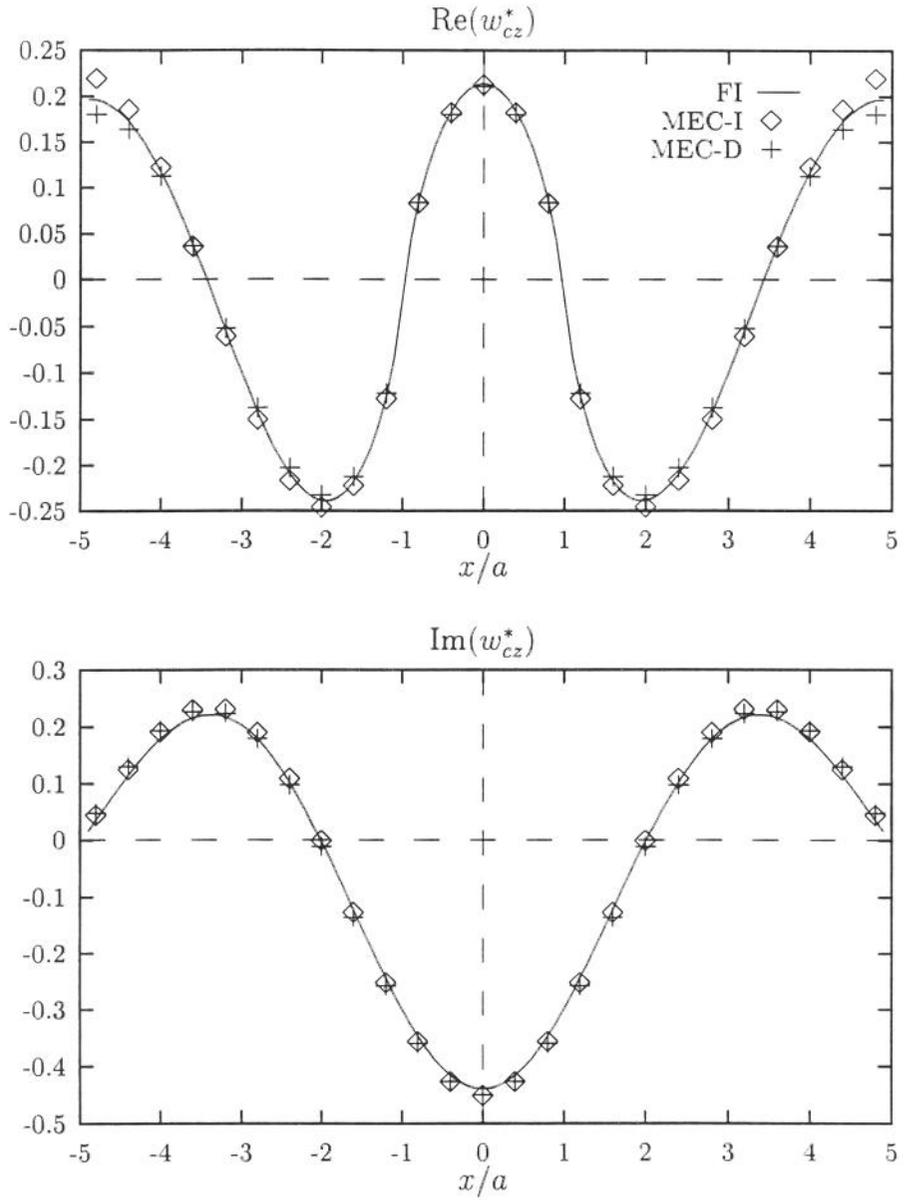


Figura 6.5: Deslocamento vertical normalizado  $w_{cz}^*$  ao longo da superfície do semi-espaço.

entre os resultados é bastante boa. Esta concordância, no entanto tende a diminuir quanto mais o ponto analisado se aproxima das bordas de  $\Gamma_f$ . Para o ponto central do contorno ( $x/a = 0$ ) há uma virtual coincidência nos resultados.

Para os deslocamentos cruzados ( $u_{cz}^*$  e  $w_{cx}^*$ ) porém, à primeira vista a concordância não é tão boa. Porém deve-se atentar para a ordem de grandeza desses deslocamentos em relação à outras componentes  $u_{cx}^*$  e  $w_{cz}^*$ . Como os deslocamentos cruzados são bem menores, as diferenças relativas entre os resultados obtidos pelas diferentes formas de cálculo tendem a ser maiores.

Outro aspecto interessante é a diferença observada entre os resultados obtidos pelas duas formulações do MEC, mesmo utilizando-se uma igual divisão de elementos e o mesmo modelo aproximador. Pelas deduções apresentadas nos itens anteriores pode-se verificar uma relação entre as matrizes  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  do método indireto e as matrizes  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{t}$  do método direto. Estas relações são:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -\mathbf{S}^T \\ \mathbf{G} &= \mathbf{U}^T \\ \mathbf{t} &= -\boldsymbol{\sigma}\end{aligned}\tag{6.43}$$

Assim, a solução através do método direto utilizando-se a notação do método indireto fica:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{S}^T]^{-1} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\sigma}\tag{6.44}$$

o que mostra a diferença em relação ao cálculo pelo método indireto expresso pela equação (6.14).

O cálculo pelas funções de influência situa-se em boa parte dos resultados entre as duas formulações do MEC. No entanto, não há indicadores suficientes para apontar qualquer um dos dois como superior em precisão.

## 6.5 MEC-D para condições de contorno gerais

As formulações apresentadas nos itens anteriores se aplicam apenas a um tipo restrito de geometria e condições de contorno. Foram apresentadas apenas para se introduzir o Método dos Elementos de Contorno nas formulações direta e indireta e analisar seus resultados quando aplicado a materiais transversalmente isotrópicos.

Para problemas com geometria e condições de contorno mais gerais é conveniente definir para cada ponto do contorno  $\Gamma$  um sistema local de coordenadas representadas pelos vetores  $s$  e  $n$  respectivamente tangente e normal ao contorno  $\Gamma$  no ponto considerado. O ângulo entre o sistema de coordenadas global  $x, z$  e o sistema local  $s, n$  é  $\theta$  como pode ser visto na figura 6.6.

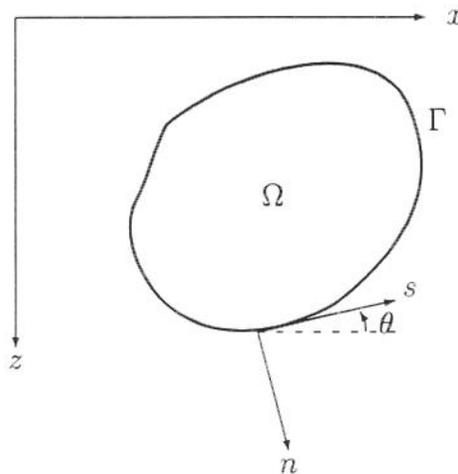


Figura 6.6: Sistemas de coordenadas global e local.

Utilizando-se o sistema local de coordenadas, pode-se reescrever a equação (6.30) do teorema da reciprocidade como:

$$\int_{\Gamma} (\sigma_s u_s^* + \sigma_n u_n^*) d\Gamma = \int_{\Gamma} (\sigma_s^* u_s + \sigma_n^* u_n) d\Gamma \quad (6.45)$$

onde os índices  $s$  e  $n$  se referem às componentes dos deslocamentos e das tensões nas direções tangente e normal, respectivamente.

Dividindo-se o contorno  $\Gamma$  em  $N$  elementos e aproximando-se as tensões os deslocamentos por valores constantes ao longo de cada um desses elementos, a equação (6.45) fica:

$$\sum_{k=1}^N \left( \sigma_s^{(k)} \int_{\Gamma_k} u_s^* d\Gamma + \sigma_n^{(k)} \int_{\Gamma_k} u_n^* d\Gamma \right) = \sum_{k=1}^N \left( u_s^{(k)} \int_{\Gamma_k} \sigma_s^* d\Gamma + u_n^{(k)} \int_{\Gamma_k} \sigma_n^* d\Gamma \right) \quad (6.46)$$

Obtêm-se  $2N$  soluções de teste aplicando-se  $N$  linhas de carga unitárias  $F_s^{(j)}$  e  $N$  linhas de carga unitárias  $F_n^{(j)}$ , nas direções tangencial e normal respectivamente, no ponto central de cada um dos  $N$  elementos  $j$  do contorno, como pode ser visto na figura 6.7.

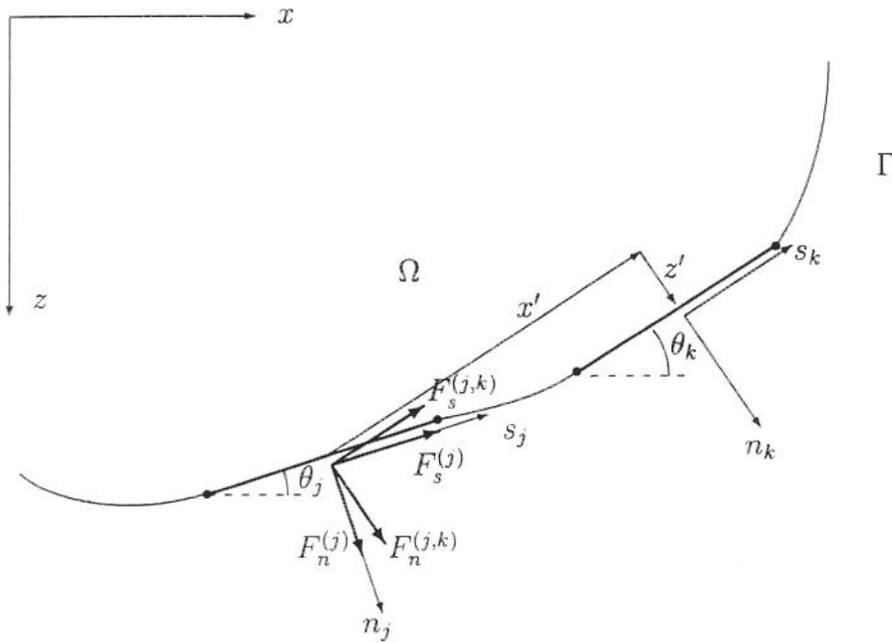


Figura 6.7: Linhas de carga aplicadas no elemento  $j$

Assim, a equação (6.46) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left( \sigma_s^{(k)} \int_{\Gamma_k} u_{ss}^{(j,k)} d\Gamma + \sigma_n^{(k)} \int_{\Gamma_k} u_{ns}^{(j,k)} d\Gamma \right) &= \sum_{k=1}^N \left( u_s^{(k)} \int_{\Gamma_k} \sigma_{ss}^{(j,k)} d\Gamma + u_n^{(k)} \int_{\Gamma_k} \sigma_{ns}^{(j,k)} d\Gamma \right) \\ \sum_{k=1}^N \left( \sigma_s^{(k)} \int_{\Gamma_k} u_{sn}^{(j,k)} d\Gamma + \sigma_n^{(k)} \int_{\Gamma_k} u_{nn}^{(j,k)} d\Gamma \right) &= \sum_{k=1}^N \left( u_s^{(k)} \int_{\Gamma_k} \sigma_{sn}^{(j,k)} d\Gamma + u_n^{(k)} \int_{\Gamma_k} \sigma_{nn}^{(j,k)} d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (6.47)$$

$j = 1, \dots, N$

onde  $u_{\alpha\beta}^{(j,k)}$  e  $\sigma_{\alpha\beta}^{(j,k)}$  são os deslocamentos e tensões na direção  $\alpha$  no problema auxiliar no centro do elemento  $k$  devido a uma linha de carga aplicada na direção  $\beta$  no centro do elemento  $j$ .

As linhas de carga  $F_s^{(j)}$  e  $F_n^{(j)}$  podem ser expressas pelas suas componentes  $F_s^{(j,k)}$  e  $F_n^{(j,k)}$  nas direções tangencial  $s_k$  e normal  $n_k$  ao elemento  $k$  por:

$$\begin{aligned} F_s^{(j)} &= F_s^{(j,k)} \cos(\theta_k - \theta_j) + F_n^{(j,k)} \sin(\theta_k - \theta_j) \\ F_n^{(j)} &= -F_s^{(j,k)} \sin(\theta_k - \theta_j) + F_n^{(j,k)} \cos(\theta_k - \theta_j) \end{aligned} \quad (6.48)$$

Portanto o efeito de  $F_s^{(j)}$  e de  $F_n^{(j)}$  também podem ser expressos como composição dos efeitos de  $F_s^{(j,k)}$  e de  $F_n^{(j,k)}$ .

Adotando-se um sistema de coordenadas  $x'z'$  com origem no centro do elemento  $j$  e paralelo às direções de  $s_k$  e  $n_k$ , os deslocamentos causados por  $F_s^{(j)}$  e por  $F_n^{(j)}$  ao longo do elemento  $k$  podem ser determinados por:

$$\begin{aligned} u_{ss}^{(j,k)} &= G_{x'x'}(x',z') \cos(\theta_k - \theta_j) + G_{x'z'}(x',z') \sin(\theta_k - \theta_j) \\ u_{ns}^{(j,k)} &= G_{z'x'}(x',z') \cos(\theta_k - \theta_j) + G_{z'z'}(x',z') \sin(\theta_k - \theta_j) \\ u_{sn}^{(j,k)} &= -G_{x'x'}(x',z') \sin(\theta_k - \theta_j) + G_{x'z'}(x',z') \cos(\theta_k - \theta_j) \\ u_{nn}^{(j,k)} &= -G_{z'x'}(x',z') \sin(\theta_k - \theta_j) + G_{z'z'}(x',z') \cos(\theta_k - \theta_j) \end{aligned} \quad (6.49)$$

onde  $G_{i'j'}(x',z')$  são as funções de Green do deslocamento na direção  $i'$  devido à uma linha de carga unitária aplicada na direção  $j'$  na origem do sistema  $x'z'$  no interior de um meio infinito elástico transversalmente isotrópico. O sistema de coordenadas  $x'z'$  tem uma inclinação  $\theta_k$  em relação ao sistema de coordenadas global  $xz$ . portanto as funções de Green a serem utilizadas são as deduzidas no capítulo 5 deste trabalho.

Da mesma forma, as tensões nas direções tangencial  $\sigma_s$  e normal  $\sigma_n$  ao longo do elemento  $k$  devidas às linhas de carga  $F_s^{(j)}$  e  $F_n^{(j)}$  são dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^{(j,k)} &= \sigma_{x'z'x'}(x',z') \cos(\theta_k - \theta_j) + \sigma_{x'z'z'}(x',z') \sin(\theta_k - \theta_j) \\ \sigma_{ns}^{(j,k)} &= \sigma_{z'z'x'}(x',z') \cos(\theta_k - \theta_j) + \sigma_{z'z'z'}(x',z') \sin(\theta_k - \theta_j) \\ \sigma_{sn}^{(j,k)} &= -\sigma_{x'z'x'}(x',z') \sin(\theta_k - \theta_j) + \sigma_{x'z'z'}(x',z') \cos(\theta_k - \theta_j) \\ \sigma_{nn}^{(j,k)} &= -\sigma_{z'z'x'}(x',z') \sin(\theta_k - \theta_j) + \sigma_{z'z'z'}(x',z') \cos(\theta_k - \theta_j) \end{aligned} \quad (6.50)$$

onde  $\sigma_{i'z'j'}(x',z')$  são as funções de Green da componente  $i'z'$  do estado de tensão devido à uma linha de carga unitária aplicada na direção  $j'$  no interior de um meio infinito elástico transversalmente isotrópico.

Substituindo-se os resultados das equações (6.49) e (6.50) na equação (6.47) obtém-se:

$$\sum_{k=1}^N \left[ \sigma_s^{(k)} \int_{\Gamma_k} G_{x'x'} \cos(\theta_k - \theta_j) + G_{x'z'} \sin(\theta_k - \theta_j) d\Gamma + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. \sigma_n^{(k)} \int_{\Gamma_k} G_{z'z'} \cos(\theta_k - \theta_j) + G_{z'z'} \sin(\theta_k - \theta_j) d\Gamma \right] = \\
& \sum_{k=1}^N \left[ u_s^{(k)} \int_{\Gamma_k} \sigma_{x'z'x'} \cos(\theta_k - \theta_j) + \sigma_{x'z'z'} \sin(\theta_k - \theta_j) d\Gamma + \right. \\
& \quad \left. u_n^{(k)} \int_{\Gamma_k} \sigma_{z'z'x'} \cos(\theta_k - \theta_j) + \sigma_{z'z'z'} \sin(\theta_k - \theta_j) d\Gamma \right] \\
& \sum_{k=1}^N \left[ \sigma_s^{(k)} \int_{\Gamma_k} -G_{x'x'} \sin(\theta_k - \theta_j) + G_{x'z'} \cos(\theta_k - \theta_j) d\Gamma + \right. \\
& \quad \left. \sigma_n^{(k)} \int_{\Gamma_k} -G_{z'x'} \sin(\theta_k - \theta_j) + G_{z'z'} \cos(\theta_k - \theta_j) d\Gamma \right] = \\
& \sum_{k=1}^N \left[ u_s^{(k)} \int_{\Gamma_k} -\sigma_{x'z'x'} \sin(\theta_k - \theta_j) + \sigma_{x'z'z'} \cos(\theta_k - \theta_j) d\Gamma + \right. \\
& \quad \left. u_n^{(k)} \int_{\Gamma_k} -\sigma_{z'z'x'} \sin(\theta_k - \theta_j) + \sigma_{z'z'z'} \cos(\theta_k - \theta_j) d\Gamma \right] \\
& j = 1, \dots, N \tag{6.51}
\end{aligned}$$

As integrais das equações (6.51) são executadas ao longo da direção  $x'$  e, assim, podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_k} G_{i'j'}(x', z') d\Gamma &= \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} G_{i'j'}(x' + s, z') ds \\
\int_{\Gamma_k} \sigma_{i'z'j'}(x', z') d\Gamma &= \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} \sigma_{i'z'j'}(x' + s, z') ds \tag{6.52}
\end{aligned}$$

Como as funções de Green para um meio infinito são simétricas (para os deslocamentos) ou antisimétricas (para as tensões) em relação ao ponto de aplicação da carga, estas integrais podem ainda ser expressas por:

$$\begin{aligned}
\int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} G_{i'j'}(x' + s, z') ds &= \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} G_{i'j'}(-x' - s, -z') ds \\
\int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} \sigma_{i'z'j'}(x' + s, z') ds &= - \int_{-l^{(k)}}^{l^{(k)}} \sigma_{i'z'j'}(-x' - s, -z') ds \tag{6.53}
\end{aligned}$$

As integrais do segundo membro destas equações podem ser interpretadas como convoluções das funções de Green com uma faixa de carga unitária com distribuição uniforme aplicada ao longo do elemento  $k$  e tendo como ponto de observação o centro do elemento  $j$ . Esta operação faz com que se possa utilizar as funções de influência deduzidas nos capítulos 4 e 5 em lugar das funções de Green. Isto torna desnecessária a integração numérica ou analítica das funções de Green ao longo do elemento  $k$ .

Assim, as integrais dos deslocamentos e das tensões ao longo do elemento  $k$  ficarão:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_k} u_{ss}^{(j,k)} ds &= u'_{cx'} \cos(\theta_k - \theta_j) + u'_{cz'} \sin(\theta_k - \theta_j) \\
 \int_{\Gamma_k} u_{ns}^{(j,k)} ds &= w'_{cx'} \cos(\theta_k - \theta_j) + w'_{cz'} \sin(\theta_k - \theta_j) \\
 \int_{\Gamma_k} u_{sn}^{(j,k)} ds &= -u'_{cx'} \sin(\theta_k - \theta_j) + u'_{cz'} \cos(\theta_k - \theta_j) \\
 \int_{\Gamma_k} u_{nn}^{(j,k)} ds &= -w'_{cx'} \sin(\theta_k - \theta_j) + w'_{cz'} \cos(\theta_k - \theta_j) \quad (6.54)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_k} \sigma_{ss}^{(j,k)} ds &= -\sigma_{cx'z'x'} \cos(\theta_k - \theta_j) - \sigma_{cx'z'z'} \sin(\theta_k - \theta_j) \\
 \int_{\Gamma_k} \sigma_{ns}^{(j,k)} ds &= -\sigma_{cz'z'x'} \cos(\theta_k - \theta_j) - \sigma_{cz'z'z'} \sin(\theta_k - \theta_j) \\
 \int_{\Gamma_k} \sigma_{sn}^{(j,k)} ds &= \sigma_{cx'z'x'} \sin(\theta_k - \theta_j) - \sigma_{cx'z'z'} \cos(\theta_k - \theta_j) \\
 \int_{\Gamma_k} \sigma_{nn}^{(j,k)} ds &= \sigma_{cz'z'x'} \sin(\theta_k - \theta_j) - \sigma_{cz'z'z'} \cos(\theta_k - \theta_j) \quad (6.55)
 \end{aligned}$$

onde  $u'_{cj'}$ ,  $w'_{cj'}$  e  $\sigma_{ci'zj'}$  são as funções de influência de uma faixa de carga uniforme aplicada no interior de um meio infinito distribuída na direção  $x'$  e aplicada na direção  $j'$ . Estas funções de influência são calculadas para o ponto de observação  $(-x', -z')$  dado por:

$$\begin{aligned}
 x' &= (x^{(k)} - x^{(j)}) \cos \theta_k - (x^{(k)} - x^{(j)}) \sin \theta_k \\
 z' &= (z^{(k)} - z^{(j)}) \sin \theta_k + (z^{(k)} - z^{(j)}) \cos \theta_k. \quad (6.56)
 \end{aligned}$$

onde  $x^{(k)}$ ,  $z^{(k)}$ ,  $x^{(j)}$  e  $z^{(j)}$  são as coordenadas segundo o sistema global  $xz$  dos pontos centrais dos elementos  $k$  e  $j$  respectivamente.

A equação (6.51) resulta, então:

$$\sum_{k=1}^N (\sigma_s^{(k)} B_{si}^{(j,k)} + \sigma_n^{(k)} B_{ni}^{(j,k)}) = \sum_{k=1}^N (u_s^{(k)} A_{si}^{(j,k)} + u_n^{(k)} A_{ni}^{(j,k)}) \quad (6.57)$$

$i = s, n; j = 1, \dots, N$

onde

$$\begin{aligned}
 B_{ss}^{(j,k)} &= u'_{cx'} \cos(\theta_k - \theta_j) + u'_{cz'} \sin(\theta_k - \theta_j) \\
 B_{ns}^{(j,k)} &= w'_{cx'} \cos(\theta_k - \theta_j) + w'_{cz'} \sin(\theta_k - \theta_j) \\
 B_{sn}^{(j,k)} &= -u'_{cx'} \sin(\theta_k - \theta_j) + u'_{cz'} \cos(\theta_k - \theta_j) \\
 B_{nn}^{(j,k)} &= -w'_{cx'} \sin(\theta_k - \theta_j) + w'_{cz'} \cos(\theta_k - \theta_j) \quad (6.58)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
A_{ss}^{(j,k)} &= -\sigma_{cx'z'x'} \cos(\theta_k - \theta_j) - \sigma_{cx'z'z'} \sin(\theta_k - \theta_j) \\
A_{ns}^{(j,k)} &= -\sigma_{cz'z'x'} \cos(\theta_k - \theta_j) - \sigma_{cz'z'z'} \sin(\theta_k - \theta_j) \\
A_{sn}^{(j,k)} &= \sigma_{cx'z'x'} \sin(\theta_k - \theta_j) - \sigma_{cx'z'z'} \cos(\theta_k - \theta_j) \\
A_{nn}^{(j,k)} &= \sigma_{cz'z'x'} \sin(\theta_k - \theta_j) - \sigma_{cz'z'z'} \cos(\theta_k - \theta_j)
\end{aligned} \tag{6.59}$$

Em forma matricial pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{cc|cc} A_{ss}^{(1,1)} & \dots & A_{ss}^{(1,N)} & A_{ns}^{(1,1)} & \dots & A_{ns}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ss}^{(N,1)} & \dots & A_{ss}^{(N,N)} & A_{ns}^{(N,1)} & \dots & A_{ns}^{(N,N)} \\ \hline A_{sn}^{(1,1)} & \dots & A_{sn}^{(1,N)} & A_{nn}^{(1,1)} & \dots & A_{nn}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{sn}^{(N,1)} & \dots & A_{sn}^{(N,N)} & A_{nn}^{(N,1)} & \dots & A_{nn}^{(N,N)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_s^{(1)} \\ \vdots \\ u_s^{(N)} \\ u_n^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(N)} \end{array} \right\} = \\
& \left[ \begin{array}{cc|cc} B_{ss}^{(1,1)} & \dots & B_{ss}^{(1,N)} & B_{ns}^{(1,1)} & \dots & B_{ns}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{ss}^{(N,1)} & \dots & B_{ss}^{(N,N)} & B_{ns}^{(N,1)} & \dots & B_{ns}^{(N,N)} \\ \hline B_{sn}^{(1,1)} & \dots & B_{sn}^{(1,N)} & B_{nn}^{(1,1)} & \dots & B_{nn}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{sn}^{(N,1)} & \dots & B_{sn}^{(N,N)} & B_{nn}^{(N,1)} & \dots & B_{nn}^{(N,N)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_s^{(1)} \\ \vdots \\ \sigma_s^{(N)} \\ \sigma_n^{(1)} \\ \vdots \\ \sigma_n^{(N)} \end{array} \right\} \tag{6.60}
\end{aligned}$$

ou, de forma compacta:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ss} & \mathbf{A}_{ns} \\ \mathbf{A}_{sn} & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ss} & \mathbf{B}_{ns} \\ \mathbf{B}_{sn} & \mathbf{B}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_s \\ \mathbf{t}_n \end{Bmatrix} \tag{6.61}$$

Os elementos das diagonais das matrizes  $\mathbf{A}_{ss}$  e  $\mathbf{A}_{nn}$  são dados por:

$$A_{ii}^{(k,k)} = -\lim_{z' \rightarrow 0^+} \sigma_{ci'z'i'}(0, z') = \frac{1}{2}, \quad i = s (= x'), n (= z'). \tag{6.62}$$

O sistema de equações (6.61) relaciona os valores de  $u_s$ ,  $u_n$ ,  $\sigma_s$  e  $\sigma_n$  em todos os elementos do contorno. Destes quatro valores, em cada um dos elementos dois são dados pelas condições de contorno e dois são incógnitos. Assim, as colunas das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são trocadas entre si para que as incógnitas fiquem todas do mesmo lado da equação. O sistema de equações lineares assim obtido pode então ser resolvido e o valor das incógnitas fica determinado.

## 6.6 Exemplo de aplicação

Como exemplo de aplicação analisou-se o problema mostrado na figura 6.8 de um tunel cilíndrico de raio  $a$  escavado num meio elástico infinito, submetido a uma pressão normal interna uniforme  $p_0$ .

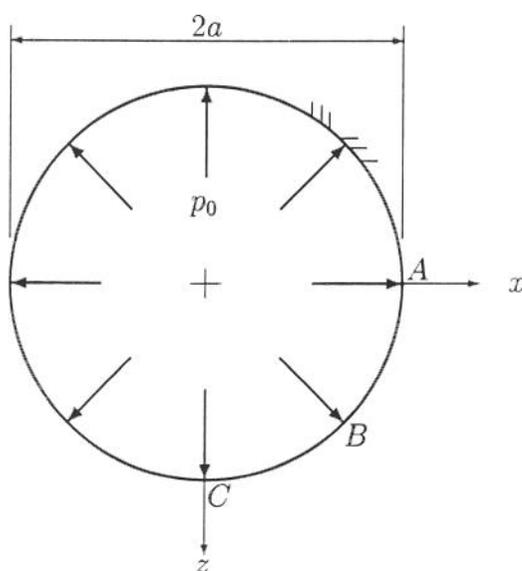


Figura 6.8: Tunel cilíndrico em meio elástico infinito

O contorno do problema foi dividido em  $N = 8, 16, 24$  e  $48$  segmentos de reta e foram obtidos os deslocamentos em um meio elástico isotrópico com coeficiente de Poisson  $\nu = 0,4$  e em um meio transversalmente isotrópico com  $c_{11}/c_{44} = 6$ ,  $n_1 = 1,5$  e  $n_3 = 0,8$ . Para ambos os materiais foi adotado um fator de amortecimento  $\nu = 0,01$ .

Na tabela 6.1 estão mostrados os valores obtidos para os deslocamentos normalizados tangencial  $u_s^* = u_s c_{44} / a p_0$  e normal  $u_n^* = u_n c_{44} / a p_0$  nos pontos  $A, B$  e  $C$  mostrados na figura 6.8 para um valor de frequência normalizada  $a_0 = a\delta = 1$ . Os valores de  $u_s$  para os pontos  $A$  e  $C$  não estão apresentados na tabela pois são nulos. Pode-se verificar pelos resultados obtidos que a convergência dos valores com o aumento do número de elementos é bastante boa. Para o material isotrópico a diferença entre os valores obtidos para  $N = 24$  e  $N = 48$  é quase nula na parte real e pequena na parte imaginária. Para o material anisotrópico este comportamento se repete inclusive para os valores de  $u_s^*$  no ponto  $B$ . Na tabela 6.1 está também apresentado o valor do

Tabela 6.1: Deslocamentos normalizados  $u_s^*$  e  $u_n^*$  nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  para alguns valores de  $N$  ( $a_0 = 1$ )

$N$	Ponto $A$	Ponto $B$		Ponto $C$	Material
	$u_n^* \times 10$	$u_s^* \times 10$	$u_n^* \times 10$	$u_n^* \times 10$	
8	3,91-6,29i	0	3,91-6,29i	3,91-6,29i	$n_1 = 1$ $n_3 = 1$
16	3,99-5,30i	0	3,99-5,30i	3,99-5,30i	
24	3,99-5,08i	0	3,99-5,08i	3,99-5,08i	
48	4,01-4,92i	0	4,00-4,92i	4,01-4,92i	
Anal.	4,00-4,77i	0	4,00-4,77i	4,00-4,77i	
8	4,16-6,47i	0,36-0,32i	3,79-6,07i	3,41-5,73i	$n_1 = 1,5$ $n_3 = 0,8$
16	4,22-5,42i	0,33-0,37i	3,88-5,01i	3,56-4,68i	
24	4,22-5,18i	0,33-0,38i	3,89-4,78i	3,57-4,45i	
48	4,24-4,93i	0,33-0,39i	3,89-4,54i	3,61-4,22i	

deslocamento  $u_n^*$  obtido pela solução analítica apresentada por Rajapakse e Senjuntichai [65] para material isotrópico. Pode-se verificar que os resultados obtidos apresentam boa concordância com o resultado analítico.

Na figura 6.9 está traçado um gráfico mostrando a variação do deslocamento normalizado  $u_n^*$  no ponto  $A$  em função de  $a_0$  para os dois materiais citados. Para a obtenção destes valores foi utilizado  $N = 48$ . Para o caso isotrópico a solução exata para o carregamento estático é  $u_n^* = 0,5$  [60]. Pode-se perceber que os valores de  $u_n^*$  para o material isotrópico tendem para o valor estático quando a frequência  $a_0$  tende a zero. Também para o caso isotrópico estão representados na figura 6.9 valores de  $u_n^*$  obtidos pela solução analítica de Rajapakse e Senjuntichai [65]. Os resultados obtidos pelo método aqui apresentado são bastante próximos desta solução analítica.

Os resultados do material anisotrópico acompanham aproximadamente os resultados do material isotrópico, mantendo-se ligeiramente acima destes (em valor absoluto) tanto na parte real quanto na imaginária. Caso se tivesse traçado as curvas correspondentes ao ponto  $C$ , ver-se-ia um comportamento oposto, com os resultados do material anisotrópico abaixo dos resultados do material isotrópico (de acordo com os resultados da tabela 6.1). Isto é devido ao fato de que a rigidez na direção vertical medida pela relação  $c_{33}/c_{44}$  é maior no material anisotrópico. Assim os deslocamentos na direção vertical são menores no material anisotrópico e isto causa um certo “alívio” na direção horizontal que faz com que nesta direção os deslocamentos sejam um pouco maiores do que no material isotrópico.

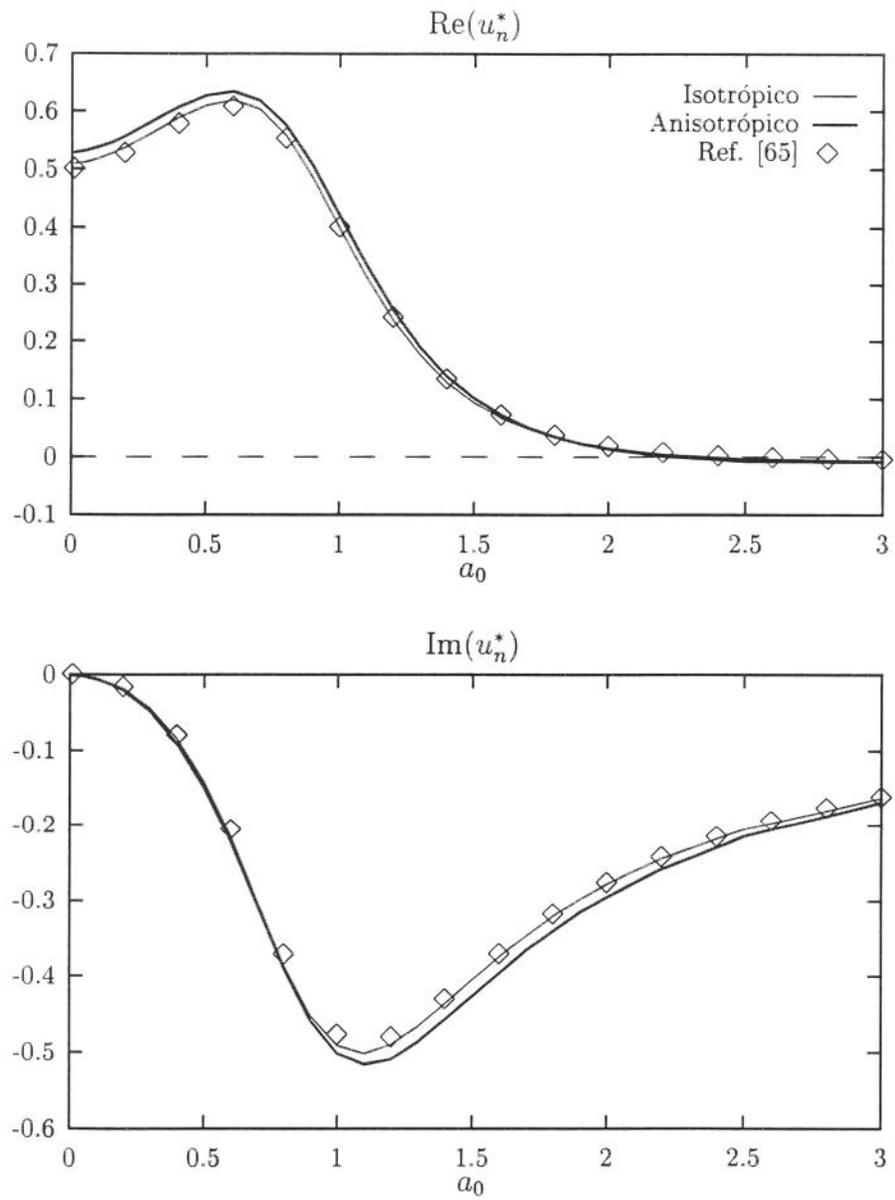


Figura 6.9: Variação do deslocamento normalizado  $u_n^*$  em  $A$  com a frequência normalizada  $a_0$ .

Nas figuras 6.10 e 6.11 estão mostrados os deslocamentos  $u_s^*$  e  $u_n^*$  ao longo do contorno da parede do túnel para  $a_0 = 1$ . Pode-se apreciar aí a influência da anisotropia no valor dos deslocamentos. Para o material anisotrópico os valores máximos (em valor absoluto) de  $u_s^*$  ocorrem no ponto  $B$  e nos pontos situados simetricamente a ele em relação aos eixos horizontal e vertical. Para o deslocamento normal  $u_n^*$  as maiores diferenças entre os resultados obtidos para os materiais isotrópico e anisotrópico ocorrem nos pontos  $A$  e  $C$  e nos pontos situados simetricamente a eles. Pode-se também verificar a capacidade do programa de cálculo desenvolvido em reproduzir nos resultados a simetria do problema.

## 6.7 Observações finais

Neste capítulo são apresentadas as duas formulações básicas do Método dos Elementos de Contorno e sua aplicação a problemas elastodinâmicos no domínio da frequência para materiais elásticos transversalmente isotrópicos no estado plano de deformação. Estas formulações podem também ser aplicadas a problemas no estado plano de tensão, bastando, para isto, uma alteração nos valores das constantes elásticas segundo as equações (2.27) do capítulo 2.

Para a formulação indireta (MEC-I) é analisada a aplicação do método a apenas um problema particular. No capítulo 7 são apresentadas outras aplicações desta formulação na interação do meio elástico com estruturas rígidas.

Para a formulação direta (MEC-D) são apresentadas a aplicação do método ao mesmo problema particular e também a aplicação a problemas mais gerais tanto com relação à geometria com em relação às condições de contorno. A extensão desta formulação para a análise da interação do meio elástico com estruturas rígidas também está apresentada no capítulo 7.

As duas formulações apresentadas apresentam pontos em comum. Ambas utilizam como problema auxiliar uma linha de carga concentrada no interior de um meio elástico infinito e, além disso, aplicam esta carga ao longo de um "contorno" traçado no interior do meio infinito com a mesma geometria do contorno do problema original. No entanto, nenhuma dessas duas características é comum a todas as formulações possíveis do Método dos Elementos de Contorno. Em primeiro lugar pode-se utilizar para o problema auxiliar domínios mais restritos do que o meio infinito. O caso mais comum é a utilização do semi-espaço como domínio auxiliar e as funções de Green deduzidas para carga aplicada sobre o semi-espaço ou em seu interior. Esta escolha apresenta a vantagem de dispensar a discretização da superfície livre.

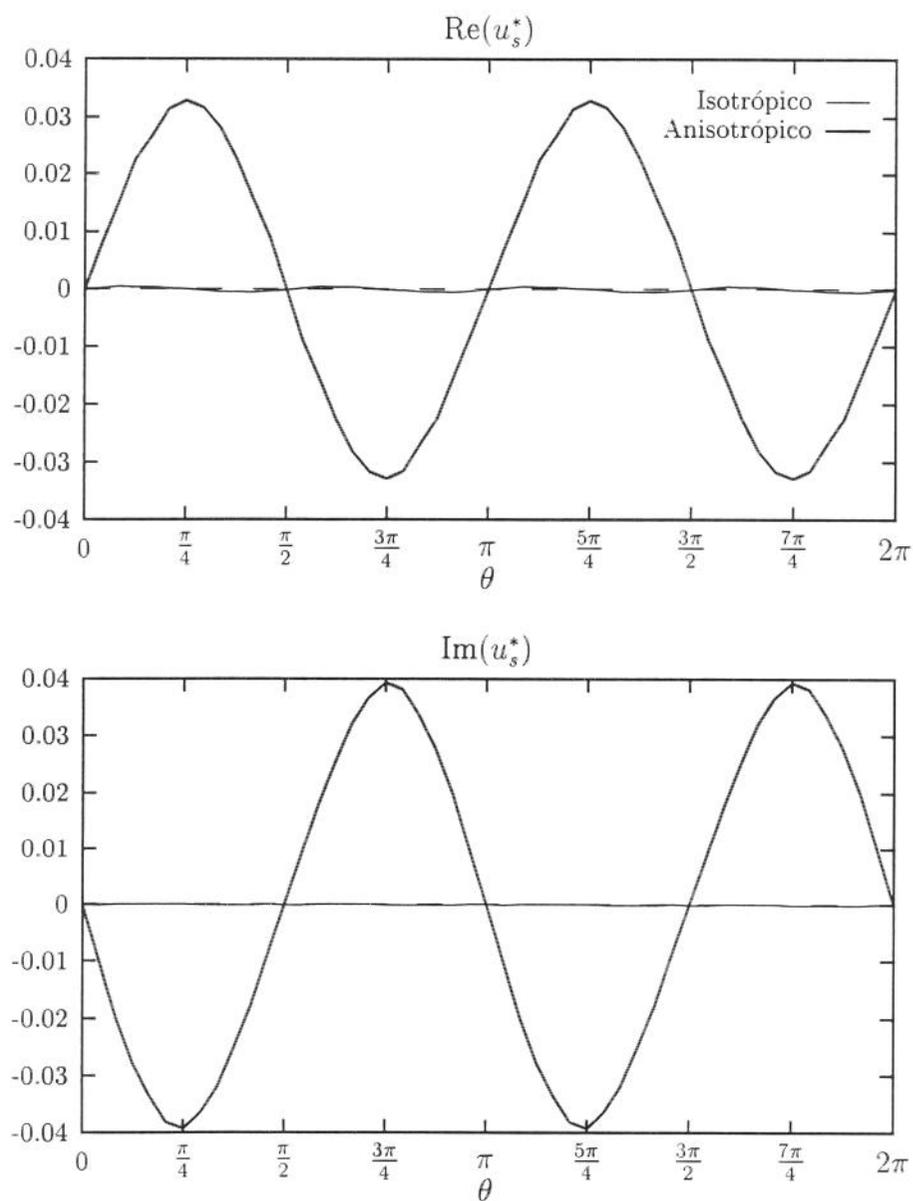


Figura 6.10: Deslocamentos normalizados  $u_s^*$  ao longo do contorno do tunel ( $a_0 = 1$ ).

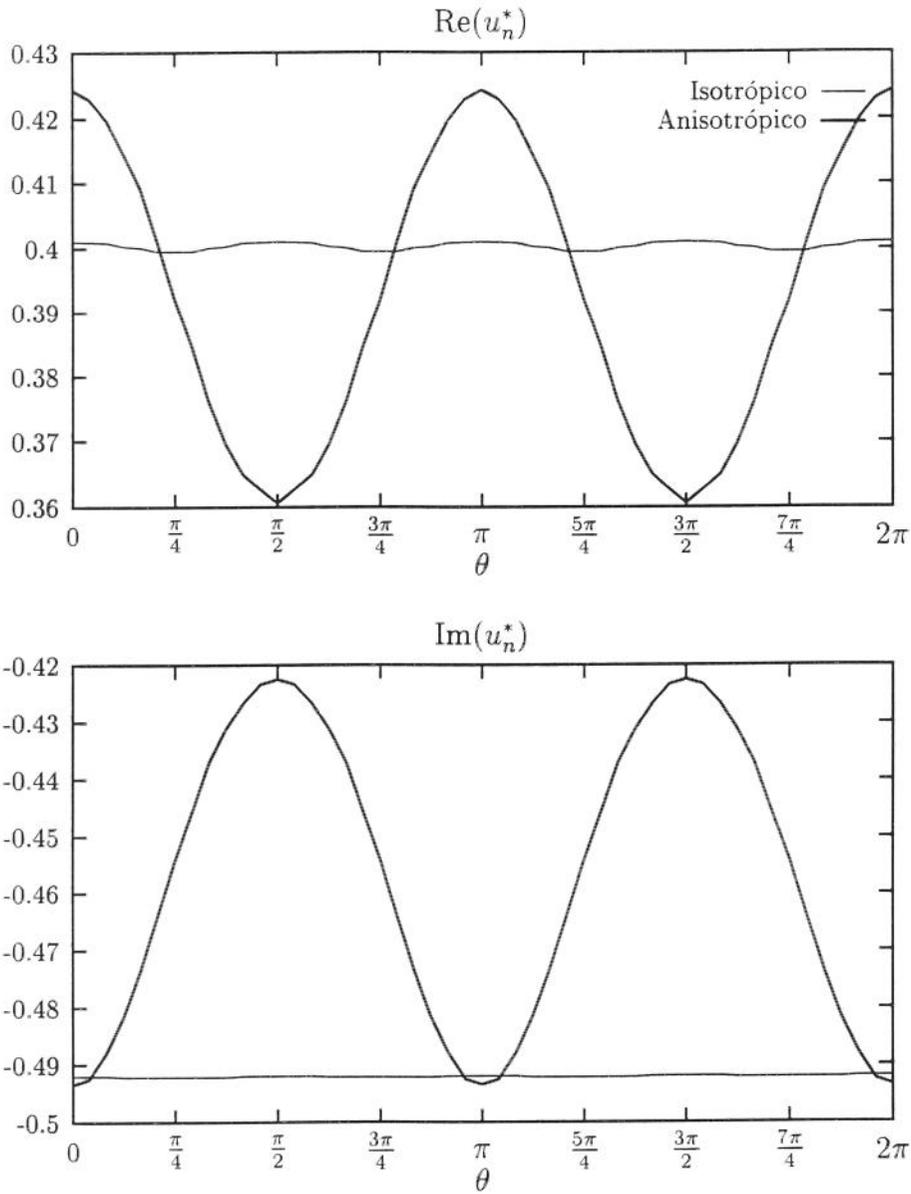


Figura 6.11: Deslocamentos normalizados  $u_n^*$  ao longo do contorno do tunnel ( $a_0 = 1$ ).

Porém, os problemas que podem ser analisados são também restringidos com esta escolha pois devem incluir uma superfície livre horizontal. No capítulo 7 são apresentadas formulações e exemplos que utilizam esta técnica na análise de problemas que incluem superfície livre horizontal.

Quanto ao contorno auxiliar traçado no interior do domínio auxiliar, é também possível a escolha de uma geometria diferente daquela do problema original. Em alguns métodos é adotado como contorno auxiliar, onde é aplicada a linha de carga concentrada, uma superfície externa ao contorno original [83, 64]. Como a linha de carga é aplicada sobre o contorno auxiliar e o seu efeito é determinado sobre o contorno original, esta escolha evita a singularidade das funções de Green no ponto de aplicação da carga. Entretanto, isto inclui no problema uma indeterminação quanto à posição mais adequada para esta superfície auxiliar. Na formulação aqui apresentada não aparecem problemas em relação à singularidade pois são utilizadas as funções de influência em lugar das funções de Green. Assim, torna-se possível a adoção de um contorno auxiliar igual ao contorno original do problema.

## Capítulo 7

# Análise de Estruturas Rígidas

### 7.1 Apresentação

A análise de fundações rígidas sujeitas a cargas dinâmicas harmônicas no tempo é uma das aplicações mais importantes das funções de Green e das funções de influência como as apresentadas neste trabalho. Normalmente se deseja determinar os deslocamentos que ocorrem na fundação e nas suas proximidades devidos a cargas dinâmicas aplicadas sobre estas fundações. Estas cargas dinâmicas são geradas normalmente por equipamentos industriais como máquinas rotativas.

Neste tipo de análise normalmente se determina a matriz de flexibilidade dinâmica  $N(\omega)$  para uma fundação rígida sem massa. Numa fase posterior da análise as massas da fundação e do equipamento apoiado sobre ela são incorporadas à análise, juntamente com a carga dinâmica aplicada [33].

O Método dos Elementos de Contorno é especialmente atrativo para o tratamento deste tipo de problema pois a condição de meio ilimitado já está considerada na solução fundamental utilizada, dispensando a adoção de um meio finito em substituição ao domínio original do problema.

Para o caso de uma fundação apoiada na superfície de um meio semi-infinito, o método de análise mais utilizado é o método da superposição que utiliza as funções de influência de carga distribuída aplicada na superfície do semi espaço.

Para casos mais complexos, como fundações rígidas semi-enterradas, ou mesmo túneis rígidos, são necessárias formulações mais gerais, em geral baseadas no Método dos Elementos de Contorno.

Neste capítulo é desenvolvida uma aplicação do método da superposição para fundações rígidas apoiadas sobre solos transversalmente isotrópicos. São analisados os casos de fundação sobre meio semi-infinito, sobre camada apoi-

ada sobre meio rígido e sobre semi-espço com eixo de simetria do material inclinado em relação à normal à superfície do semi-espço. Em seguida são desenvolvidas aplicações do Método dos Elementos de Contorno na análise de fundações rígidas semi-enterradas e de túneis em meios transversalmente isotrópicos.

## 7.2 Fundações na superfície - Método da superposição.

### 7.2.1 Colocação do problema

Considere-se uma fundação constituída por uma placa rígida, com largura  $2a$ , contínua na direção  $y$ , sem massa e apoiada sobre um meio transversalmente isotrópico semi-infinito como mostrado na figura 7.1.

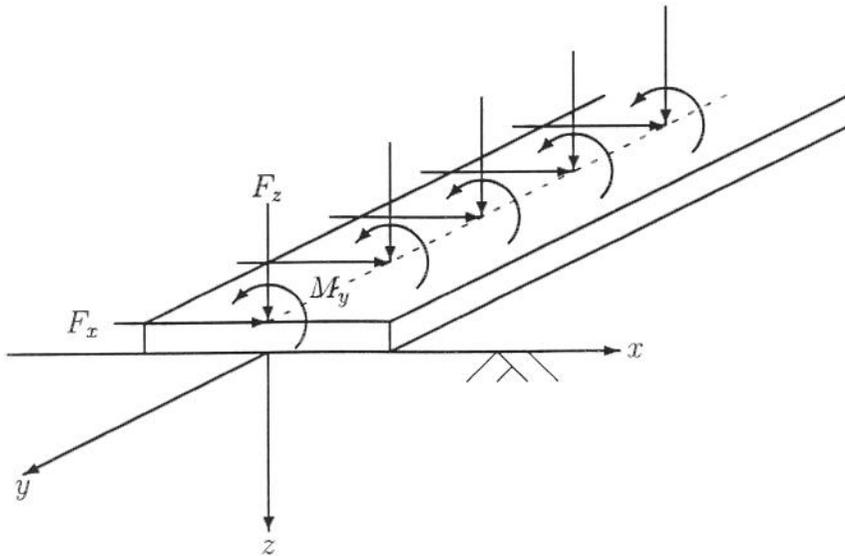


Figura 7.1: Fundação rígida apoiada sobre um meio semi-infinito

Esta placa está sujeita a um sistema de forças externas harmônicas no tempo que pode ser decomposto em uma linha de carga vertical  $F_z$ , uma linha de carga horizontal  $F_x$  e uma linha de momentos  $M_y$  uniformemente distribuídos ao longo de  $y$ . As deformações provocadas no meio semi-infinito

pela fundação sujeita a este sistema de forças ocorrem apenas no plano  $xz$  e portanto trata-se de um estado plano de deformações.

### 7.2.2 Funções de influência

Para se determinar os deslocamentos e as tensões provocados pela fundação, inicialmente divide-se a interface solo fundação em  $N$  elementos justapostos como mostrado na figura 7.2.

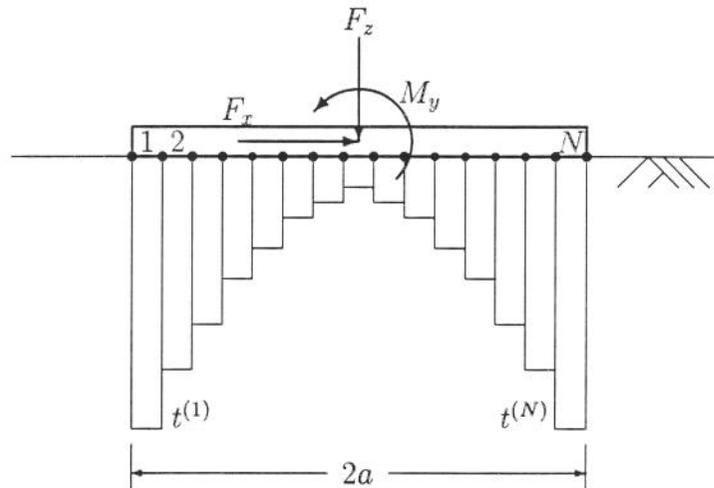


Figura 7.2: Divisão da interface solo-fundação em elementos

Assume-se, então, que cada um desses elementos aplica uma tensão uniforme (ao longo do elemento) dada por  $(t_x^{(i)}, t_z^{(i)})$   $i = 1, \dots, N$ .

Os deslocamentos horizontais  $u^{(i)}$  e verticais  $w^{(i)}$  que ocorrem no centro de cada elemento  $i$  podem ser calculados, então, por:

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= \sum_{j=1}^N (u_{cx}^{(i,j)} t_x^{(j)} + u_{cz}^{(i,j)} t_z^{(j)}) \\ w^{(i)} &= \sum_{j=1}^N (w_{cx}^{(i,j)} t_x^{(j)} + w_{cz}^{(i,j)} t_z^{(j)}) \end{aligned} \quad (7.1)$$

onde  $u_{cx}^{(i,j)}$ ,  $u_{cz}^{(i,j)}$ ,  $w_{cx}^{(i,j)}$  e  $w_{cz}^{(i,j)}$  são as funções de influência de uma carga uniforme aplicada no elemento  $j$  e calculadas no centro do elemento  $i$ . Estas

equações podem ser escritas de forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(N)} \\ w^{(1)} \\ \vdots \\ w^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{cx}^{(1,1)} & \dots & u_{cx}^{(1,N)} & | & u_{cz}^{(1,1)} & \dots & u_{cz}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{cx}^{(N,1)} & \dots & u_{cx}^{(N,N)} & | & u_{cz}^{(N,1)} & \dots & u_{cz}^{(N,N)} \\ \hline w_{cx}^{(1,1)} & \dots & w_{cx}^{(1,N)} & | & w_{cz}^{(1,1)} & \dots & w_{cz}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{cx}^{(N,1)} & \dots & w_{cx}^{(N,N)} & | & w_{cz}^{(N,1)} & \dots & w_{cz}^{(N,N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_x^{(1)} \\ \vdots \\ t_x^{(N)} \\ t_z^{(1)} \\ \vdots \\ t_z^{(N)} \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

ou simplesmente:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}\mathbf{t} \quad (7.3)$$

A matriz  $\mathbf{U}$  é chamada de matriz de influência dos deslocamentos do problema.

### 7.2.3 Compatibilidade cinemática

Os deslocamentos expressos pela equação (7.3) estão também restritos pela rigidez da fundação. Dessa forma, considerando a fundação como infinitamente rígida, os deslocamentos  $u^{(i)}$  e  $w^{(i)}$  estão condicionados por:

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= u_0 \\ w^{(i)} &= w_0 - x^{(i)}\varphi_0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

onde  $u_0$ ,  $w_0$  e  $\varphi_0$  são respectivamente os deslocamentos horizontal, vertical e o giro da fundação, considerando um ponto de referência qualquer, geralmente tomado no ponto médio da interface solo-fundação conforme mostrado na figura 7.3. Ainda  $x^{(i)}$  é a coordenada horizontal do centro do elemento  $i$  em relação ao ponto de referência (tomado aqui como origem do sistema de coordenadas  $xz$ ).

Em forma matricial as equações 7.4 podem ser escritas como:

$$\begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(N)} \\ w^{(1)} \\ \vdots \\ w^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -x^{(1)}/a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -x^{(N)}/a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ a\varphi_0 \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

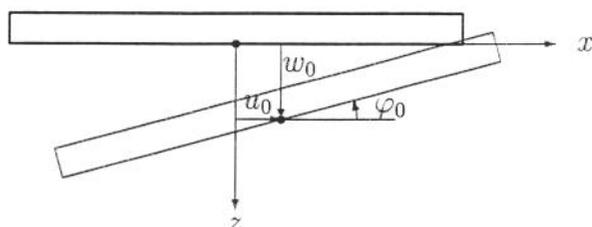


Figura 7.3: Deslocamentos do ponto de referência

ou simplesmente:

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{u}_0 \quad (7.6)$$

A matriz  $\mathbf{C}$  é chamada de matriz de compatibilidade cinemática do problema.

### 7.2.4 Equilíbrio

As tensões  $t_x^{(i)}$  e  $t_z^{(i)}$  atuantes no elemento  $i$  devem estar em equilíbrio com a carga externa aplicada na fundação. Dessa forma, de acordo com a figura 7.4, pode-se escrever:

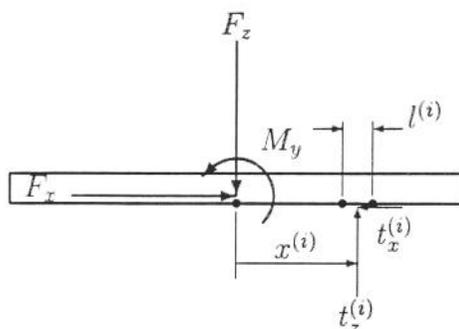


Figura 7.4: Equilíbrio das forças que agem sobre a fundação

$$F_z = \sum_{i=1}^N t_z^{(i)} l^{(i)}$$

$$F_x = \sum_{i=1}^N t_x^{(i)} l^{(i)}$$

$$M_y/a = \sum_{i=1}^N -t_z^{(i)} l^{(i)} x^{(i)} / a \quad (7.7)$$

onde  $l^{(i)}$  é o comprimento do elemento  $i$ . Em forma matricial estas equações ficam:

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y/a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & | & l^{(1)} & \dots & l^{(N)} \\ l^{(1)} & \dots & l^{(N)} & | & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & | & -l^{(1)}x^{(1)}/a & \dots & -l^{(N)}x^{(N)}/a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_x^{(1)} \\ \vdots \\ t_x^{(N)} \\ t_z^{(1)} \\ \vdots \\ t_z^{(N)} \end{Bmatrix} \quad (7.8)$$

ou, simplesmente:

$$\mathbf{f} = \mathbf{D}\mathbf{t} \quad (7.9)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  é chamada de matriz de equilíbrio do problema.

### 7.2.5 Sistema de equações final

As condições expressas pelas equações (7.2), (7.5) e (7.8) podem ser combinadas em um único sistema de equações dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

A solução deste sistema de equações fornece os deslocamentos do ponto de referência da fundação e as tensões aplicadas por ela sobre o solo. Com estas tensões pode-se ainda determinar os deslocamentos e as tensões em qualquer ponto do interior ou da superfície do semi-espaço.

Para se determinar a matriz de flexibilidade dinâmica  $\mathbf{N}(\omega)$  da fundação, aplicam-se separadamente  $F_x$ ,  $F_z$  e  $M_y/a$  unitários e determinam-se os valores dos deslocamentos  $u_0$ ,  $w_0$  e  $\varphi_0$  para cada um desses casos. Obtêm-se, então a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ a\varphi_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & N_{ux} & N_{um} \\ 0 & N_{\varphi x} & N_{\varphi m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y/a \end{Bmatrix} \quad (7.11)$$

Por esta relação pode-se perceber que há um acoplamento entre os deslocamentos  $u$  e  $\varphi$ , ou seja, a carga horizontal  $F_x$  provoca deslocamentos  $u$

e  $\varphi$ ; assim como o momento  $M_y$ . Já a carga vertical  $F_z$  provoca apenas deslocamento vertical  $w$ .

O Método da Superposição pode ser visto como uma aplicação da formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno que utiliza funções de influência desenvolvidas para cargas aplicadas sobre o meio semi-infinito. A particularidade desta aplicação está no fato de que distribuição de carga encontrada não é fictícia e sim real. Isto ocorre porque os domínios do problema original e do problema auxiliar são idênticos.

### 7.2.6 Resultados numéricos

Na aplicação do Método da Superposição é conveniente dividir a interface solo-fundação em elementos de igual comprimento. Dessa forma é necessária a determinação apenas da primeira linha de cada uma das quatro submatrizes que compõem a matriz de influência  $\mathbf{U}$ . Os elementos das outras linhas de  $\mathbf{U}$  situados nas diagonais das submatrizes e acima delas podem ser obtidos dos elementos da primeira linha por um processo de rotação na ordem dos elementos. Os elementos situados abaixo das diagonais podem ser obtidos a partir dos elementos situados acima utilizando-se as propriedades de simetria das funções de influência. Como a maior parte do tempo computacional é dispendido na determinação dos elementos de  $\mathbf{U}$ , esta estratégia proporciona uma grande economia de tempo de processamento.

Para se poder apreciar os resultados numéricos obtidos pelo Método da Superposição para materiais isotrópicos e anisotrópicos, primeiramente é feita uma análise de convergência variando-se o número de elementos  $N$  que compõe a interface solo-fundação. A tabela 7.1 mostra valores das componentes da matriz de flexibilidade normalizada (adimensional)  $\mathbf{N}^*(\omega) = c_{44} \mathbf{N}(\omega)$  para um material isotrópico que apresenta coeficiente de Poisson  $\nu = 0,4$  e coeficiente de amortecimento  $\nu = 0,01$ . Na determinação desses valores foi adotado o valor da frequência normalizada  $a_0 = 1$ .

Os resultados da tabela 7.1 mostram que há uma convergência mais rápida para a parte imaginária das componentes da matriz de flexibilidade quando comparada com a convergência da parte real. A comparação entre os valores das componentes mostra que a convergência é mais rápida para a componente  $N_{ux}$ . Além disso pode-se notar que  $N_{um} = N_{\varphi x}$  para todos os valores de  $N$ , como era de se esperar pelo teorema da reciprocidade de Betti.

A tabela 7.2 mostra valores das componentes da matriz de flexibilidade normalizada  $\mathbf{N}^*(\omega)$  para um material anisotrópico com  $c_{11}/c_{44} = 6$  e coeficientes de anisotropia  $n_1 = 1,5$  e  $n_3 = 0,8$ . Foi também adotado o coeficiente de amortecimento  $\nu = 0,01$  e o valor da frequência normalizada  $a_0 = 1$ .

A convergência dos valores das componentes da matriz de flexibilidade

Tabela 7.1: Componentes da matriz de flexibilidade normalizada  $N^*(\omega)$  para um material isotrópico ( $\nu = 0,4$ ,  $\nu = 0,01$ ) para vários números de elementos  $N$ . ( $a_0 = 1$ .)

$N$	$N_{ux}^*$	$N_{wz}^*$	$N_{\varphi m}^*$	$N_{um}^*$	$N_{\varphi x}^*$
4	0,233 -0,266i	0,0933 -0,224i	0,512 -0,176i	0,00403 +0,0467i	0,00403 +0,0467i
6	0,227 -0,264i	0,0884 -0,219i	0,469 -0,170i	0,00609 0,0405i	0,00609 0,0405i
8	0,224 -0,263i	0,0859 -0,217i	0,450 -0,168i	0,00702 +0,0429i	0,00702 +0,0429i
12	0,222 -0,262i	0,0834 -0,215i	0,432 -0,166i	0,00789 +0,0418i	0,00789 +0,0418i
16	0,220 -0,261i	0,0822 -0,214i	0,425 -0,165i	0,00832 +0,0413i	0,00832 +0,0413i
24	0,219 0,261i	0,0809 -0,213i	0,418 -0,164i	0,00873 +0,0409i	0,00873 +0,0409i

Tabela 7.2: Componentes da matriz de flexibilidade normalizada  $N^*(\omega)$  para um material anisotrópico ( $c_{11}/c_{44} = 6$ ,  $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ ,  $\nu = 0,01$ ) para vários números de elementos  $N$ . ( $a_0 = 1$ .)

$N$	$N_{ux}^*$	$N_{wz}^*$	$N_{\varphi m}^*$	$N_{um}^*$	$N_{\varphi x}^*$
4	0,236 -0,269i	0,0769 -0,185i	0,420 -0,141i	0,00393 +0,0387i	0,00393 +0,0387i
6	0,230 -0,266i	0,0728 -0,181i	0,385 -0,137i	0,00564 0,0366i	0,00564 0,0366i
8	0,227 -0,265i	0,0707 -0,179i	0,370 -0,136i	0,00642 +0,0356i	0,00642 +0,0356i
12	0,224 -0,264i	0,0687 -0,177i	0,356 -0,134i	0,00716 +0,0347i	0,00716 +0,0347i
16	0,222 -0,264i	0,0676 -0,176i	0,350 -0,133i	0,00750 +0,0343i	0,00750 +0,0343i
24	0,221 0,263i	0,0666 -0,175i	0,344 -0,133i	0,00784 +0,0339i	0,00784 +0,0339i

$N^*(\omega)$  para o caso de material anisotrópico tem características semelhantes à convergência das componentes da matriz de flexibilidade do caso isotrópico. Pode-se notar também a influência da anisotropia nas várias componentes. Enquanto que os valores de  $N_{ux}^*$  são pouco afetados pela anisotropia do material, as outras componentes sofrem uma influência bem mais acentuada.

As tensões que  $t_x$  e  $t_z$  que atuam na interface entre o solo e a fundação estão apresentadas nos gráficos das figuras 7.5 a 7.7. Nestes gráficos estão mostradas as tensões devidas a forças externas  $F_z$ ,  $F_x$  e  $M_y$  para o material isotrópico e para o material anisotrópico.

Pode-se notar que a influência da anisotropia é pequena nos valores de  $t_x$  e de  $t_z$ , sendo mais acentuada na tensão  $t_x$  devida à força vertical  $F_z$  e na tensão  $t_x$  devida ao momento externo  $M_y$ .

Nas figuras 7.8 a 7.10 estão traçados gráficos que mostram os deslocamentos normalizados ao longo da superfície do semi-espaço devidos às cargas  $F_z$ ,  $F_x$  e  $M_y$  aplicadas sobre a fundação rígida para um material isotrópico ( $\nu = 0,4$ ;  $\nu = 0,01$ ) e para um material anisotrópico ( $c_{11}/c_{44} = 6$ ;  $n_1 = 1,5$ ;  $n_3 = 0,8$ ;  $\nu = 0,01$ ). Pode-se notar que há uma diferença sensível nestes deslocamentos, sendo que o material anisotrópico aqui analisado apresenta em geral deslocamentos menores. Apenas os deslocamentos horizontais devidos à carga horizontal ( $u_x$ ) apresentam uma quase igualdade quando comparados os resultados obtidos para os dois materiais. Isto provavelmente se deve ao fato de que o valor da constante elástica  $c_{11}$  ser a mesma para ambos.

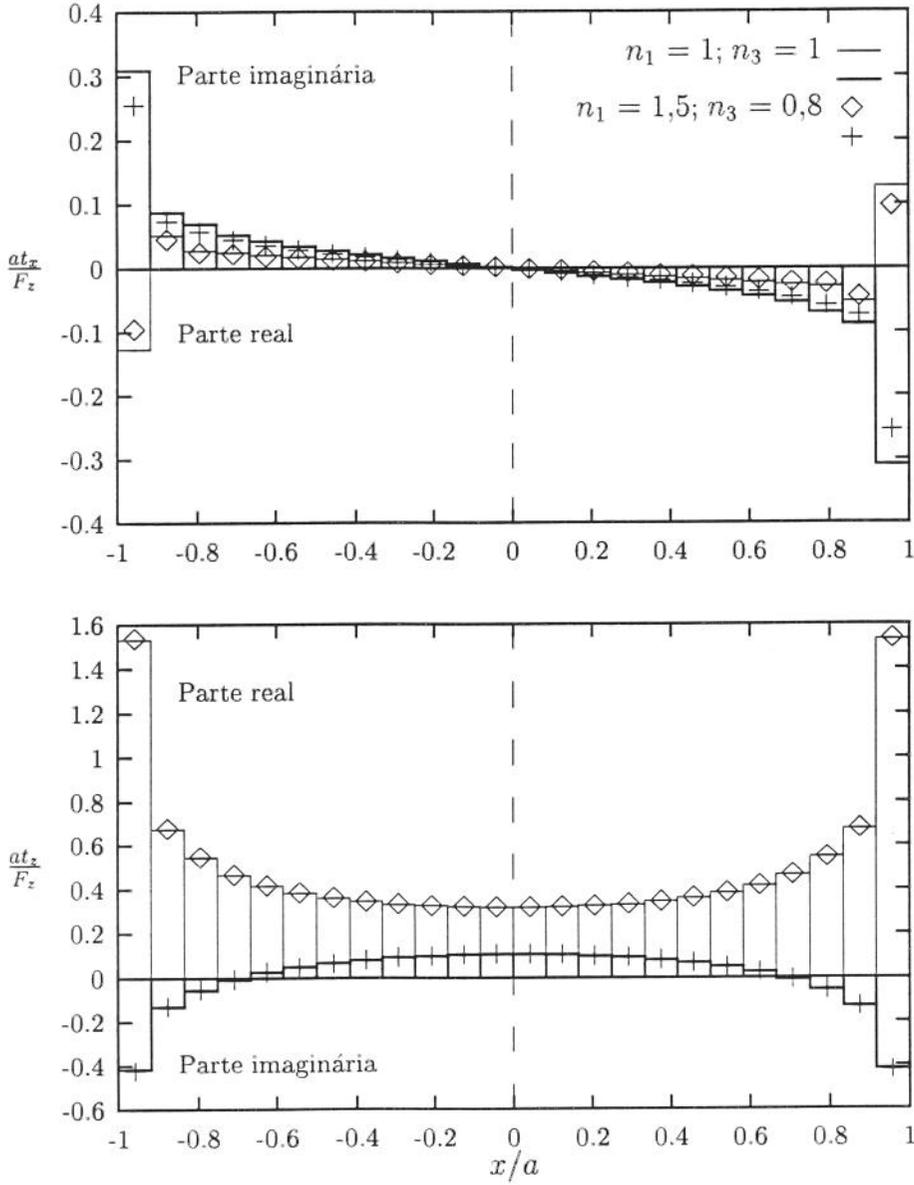


Figura 7.5: Tensões normalizadas  $at_x/F_z$  e  $at_z/F_z$  aplicadas pela fundação sujeita a uma carga vertical  $F_z$ .

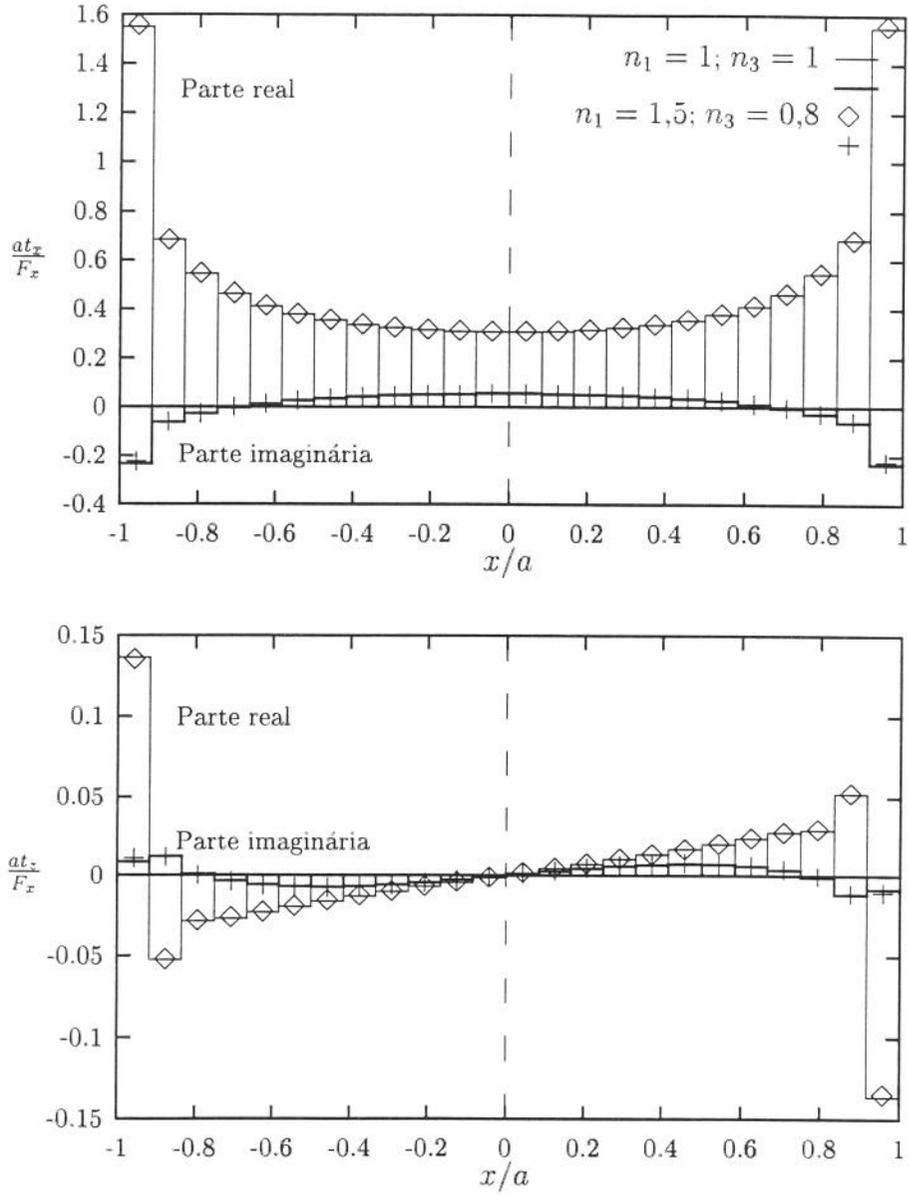


Figura 7.6: Tensões normalizadas  $at_x/F_x$  e  $at_z/F_x$  aplicadas pela fundação sujeita a uma carga horizontal  $F_x$ .

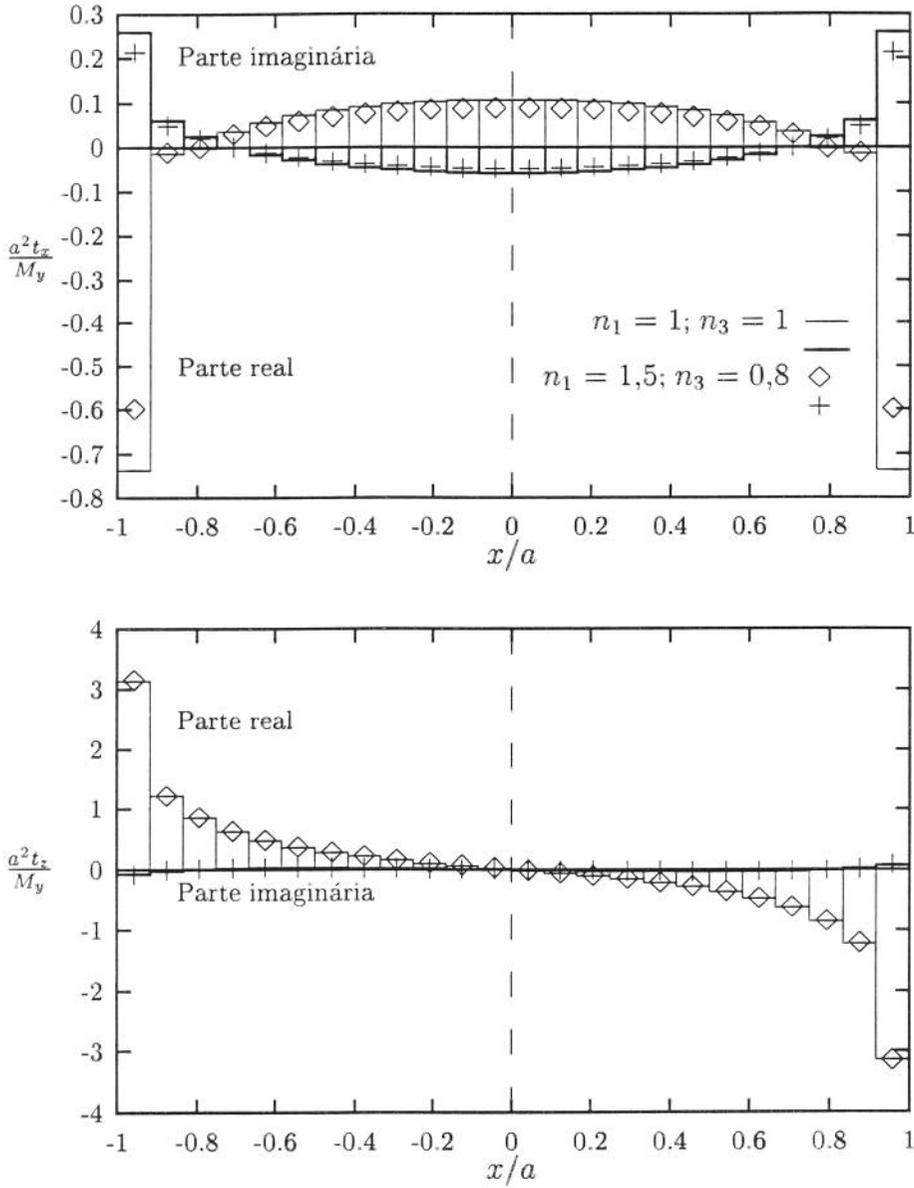


Figura 7.7: Tensões normalizadas  $a^2 t_x / M_y$  e  $a^2 t_z / M_y$  aplicadas pela fundação sujeita a um momento  $M_y$ .

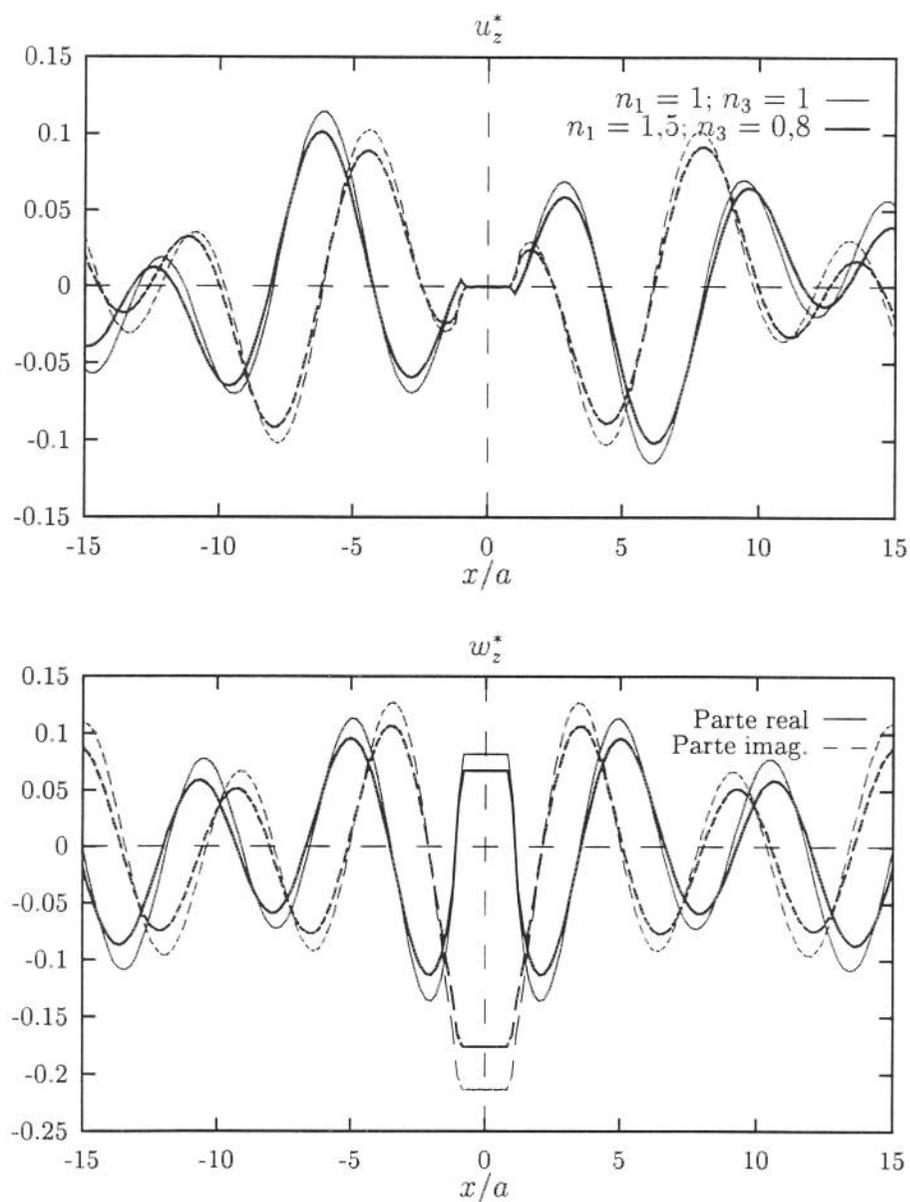


Figura 7.8: Deslocamentos normalizados devidos a uma carga vertical  $F_z$  ao longo da superfície do semi-espço.

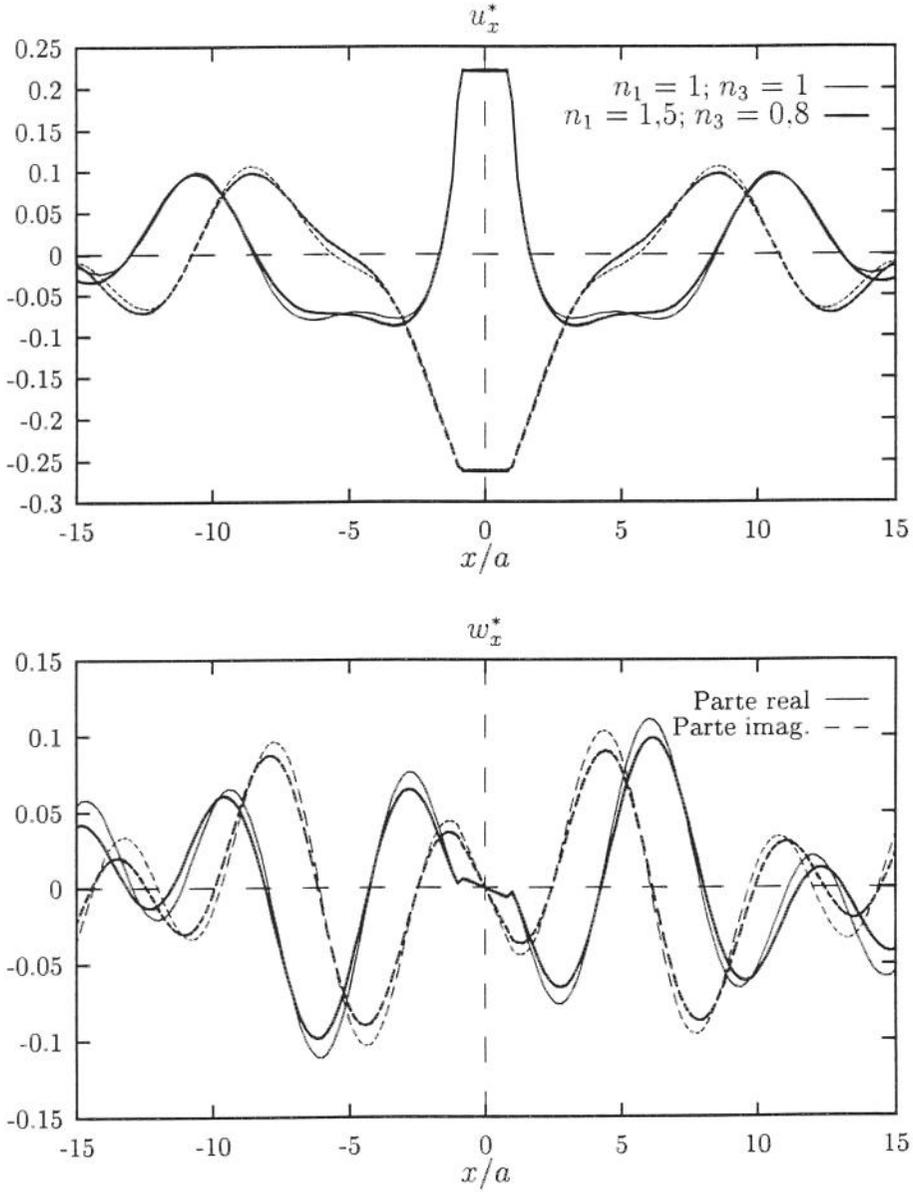


Figura 7.9: Deslocamentos normalizados devidos a uma carga horizontal  $F_x$  ao longo da superfície do semi-espço.

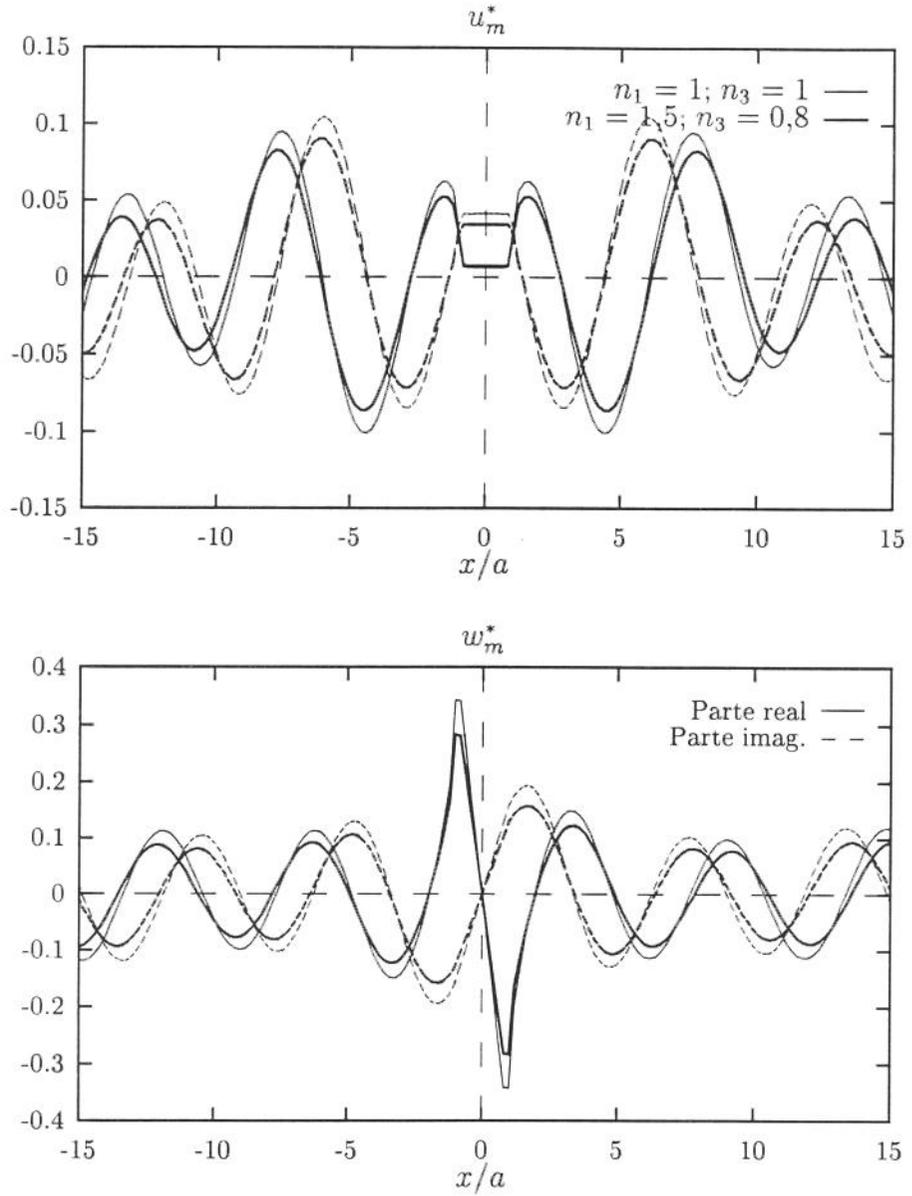


Figura 7.10: Deslocamentos normalizados devidos a um momento  $M_y$  ao longo da superfície do semi-espço.

Para se poder analisar o comportamento da matriz de flexibilidade com a variação da frequência de excitação das cargas externas foram traçados os gráficos apresentados nas figuras 7.11 a 7.18. Nestes gráficos estão traçadas curvas que representam a variação das componentes da matriz de flexibilidade normalizada  $N^*(\omega)$  com o valor da frequência normalizada  $a_0$ . Estes resultados foram obtidos utilizando-se uma discretização da interface solo-fundação em 16 elementos de igual comprimento. São apresentadas curvas para valores de  $n_1 = 0,75; 1$  e  $1,5$  e para valores de  $n_3 = 0,8; 1$  e  $1,5$ . Em todos os casos adotou-se  $c_{11}/c_{44} = 6$  e  $\nu = 0,01$ . Verifica-se que mantendo-se  $n_3 = 1$ , um aumento no valor de  $n_1$  provoca uma diminuição da flexibilidade do conjunto solo-fundação. Este efeito também pode ser notado com uma intensidade um pouco menor quando se fixa  $n_1 = 1$  e se aumenta o valor de  $n_3$ . As componentes  $N_{\varphi m}^*$  e  $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$  apresentam uma maior sensibilidade às variações de  $n_1$  e de  $n_3$ . Este comportamento é uma consequência do comportamento apresentado pelas funções de influência analisadas no capítulo 4.

Os pontos marcados nas figuras 7.11 a 7.18 foram obtidos pelo método da superposição implementado por Romanini [72] para fundações rígidas apoiadas sobre um semi-espaço viscoelástico isotrópico. Os resultados obtidos são praticamente coincidentes com os obtidos pelo método aqui apresentado no caso de material isotrópico.

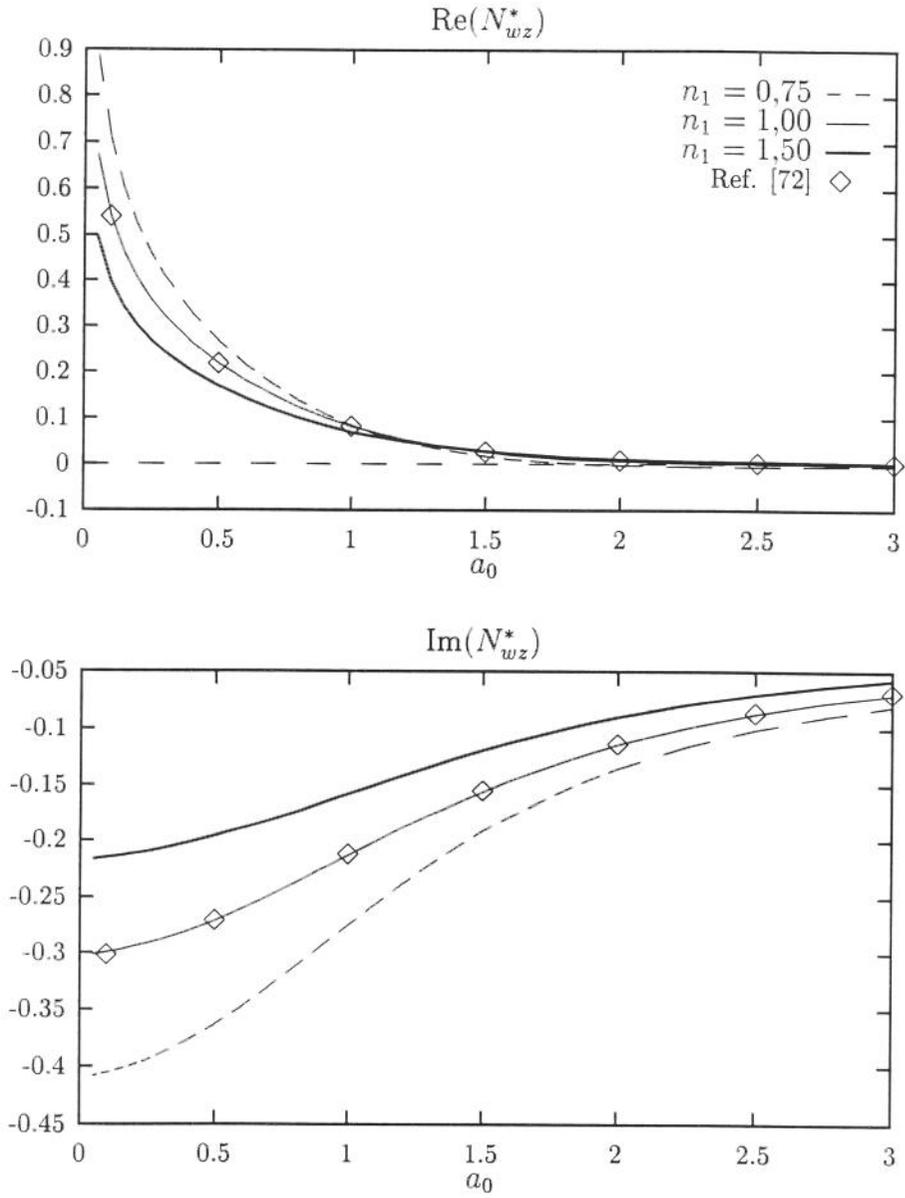


Figura 7.11: Componente normalizada  $N_{wz}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para  $n_3 = 1$ .

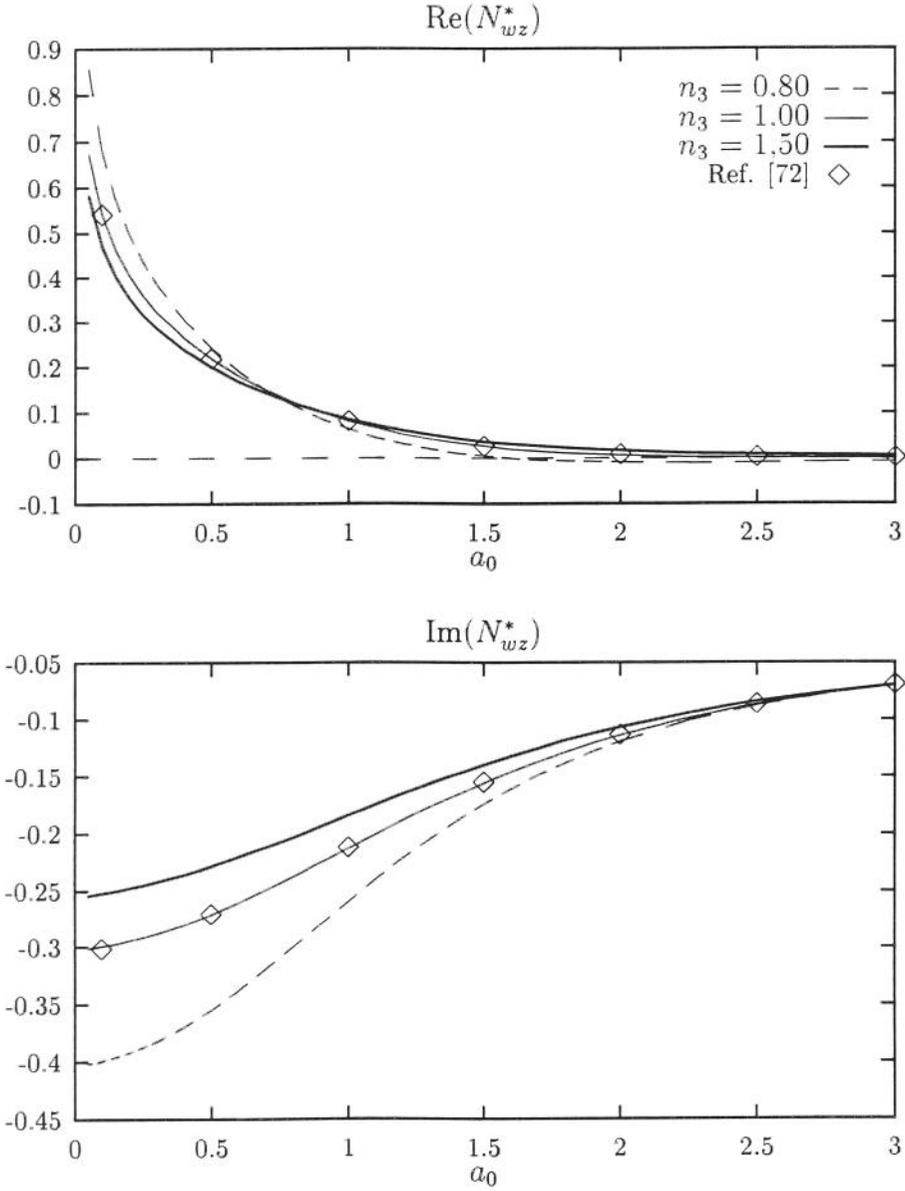


Figura 7.12: Componente normalizada  $N_{wz}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para  $n_1 = 1$ .

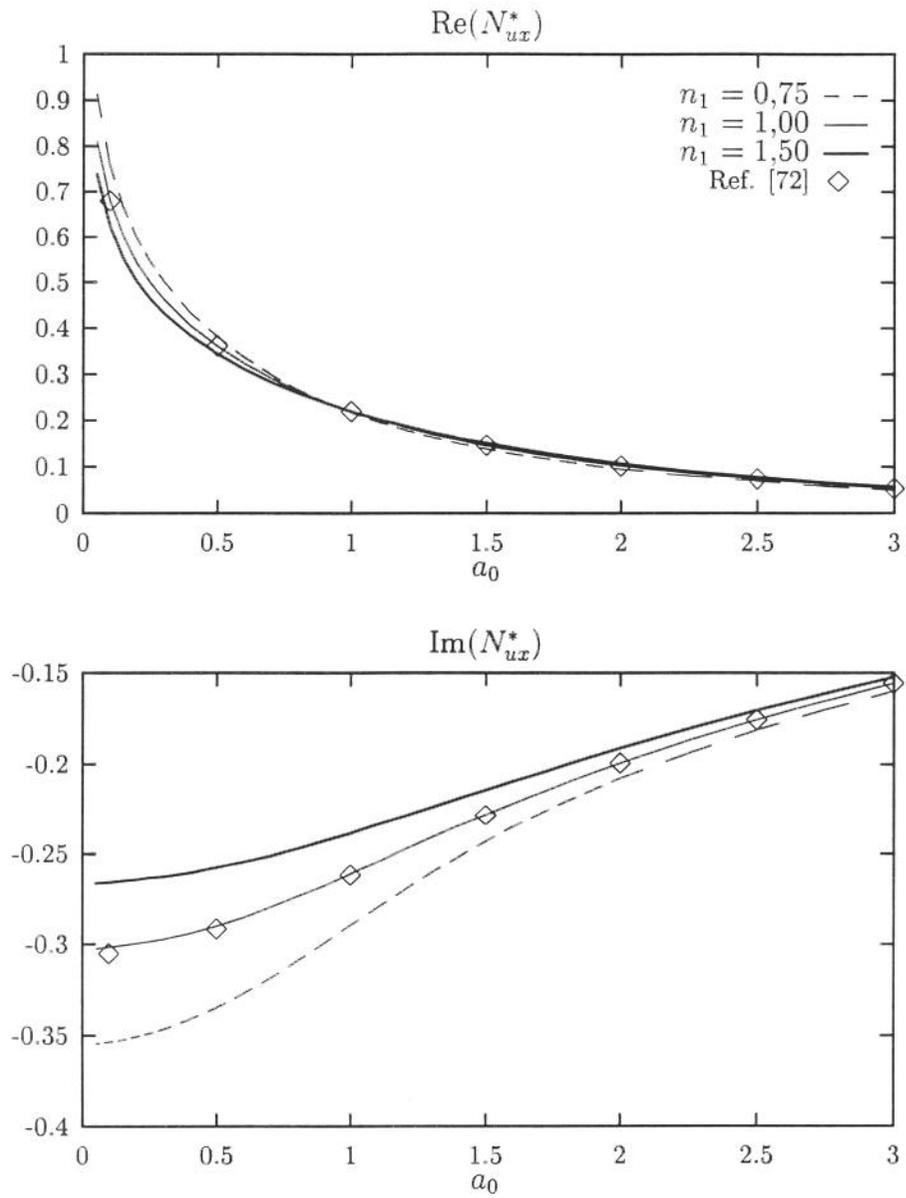


Figura 7.13: Componente normalizada  $N_{ux}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para  $n_3 = 1$ .

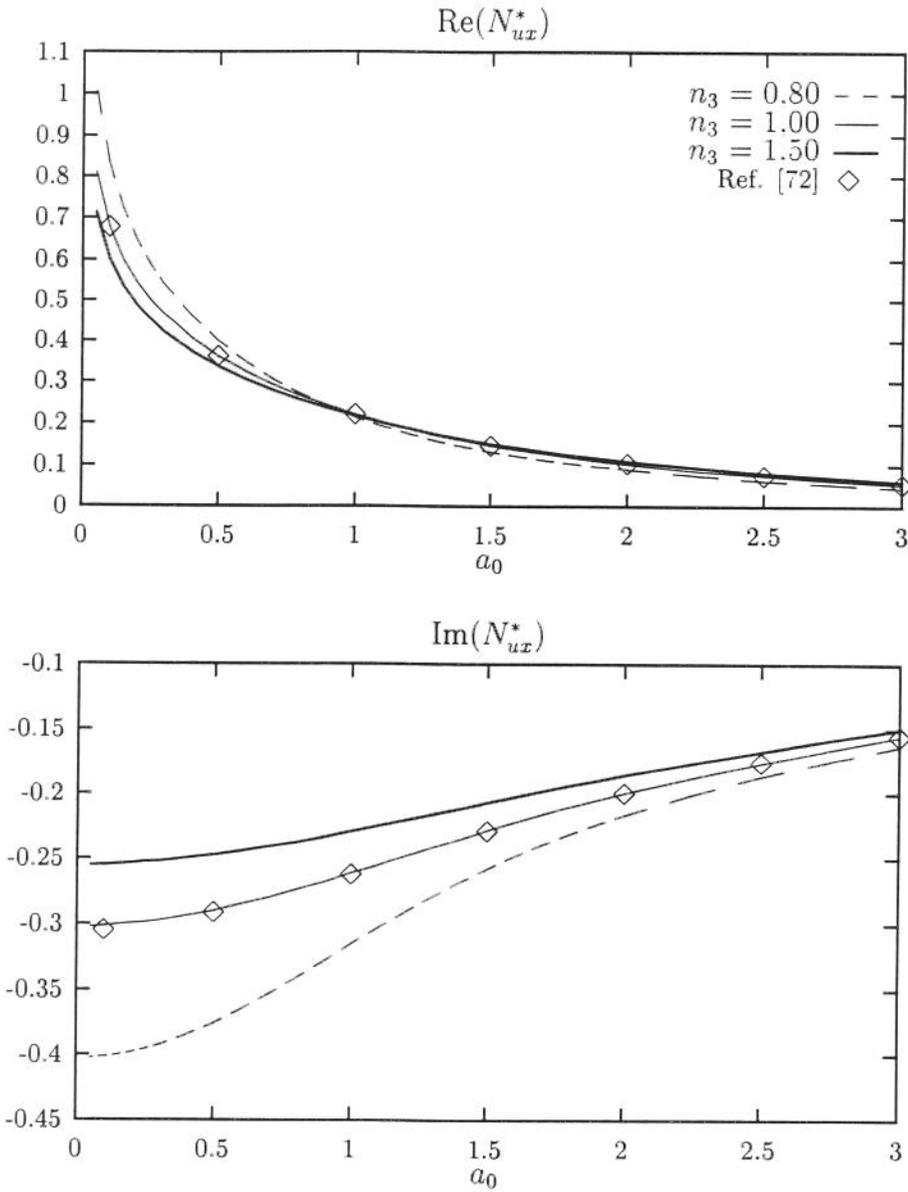


Figura 7.14: Componente normalizada  $N_{ux}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para  $n_1 = 1$ .

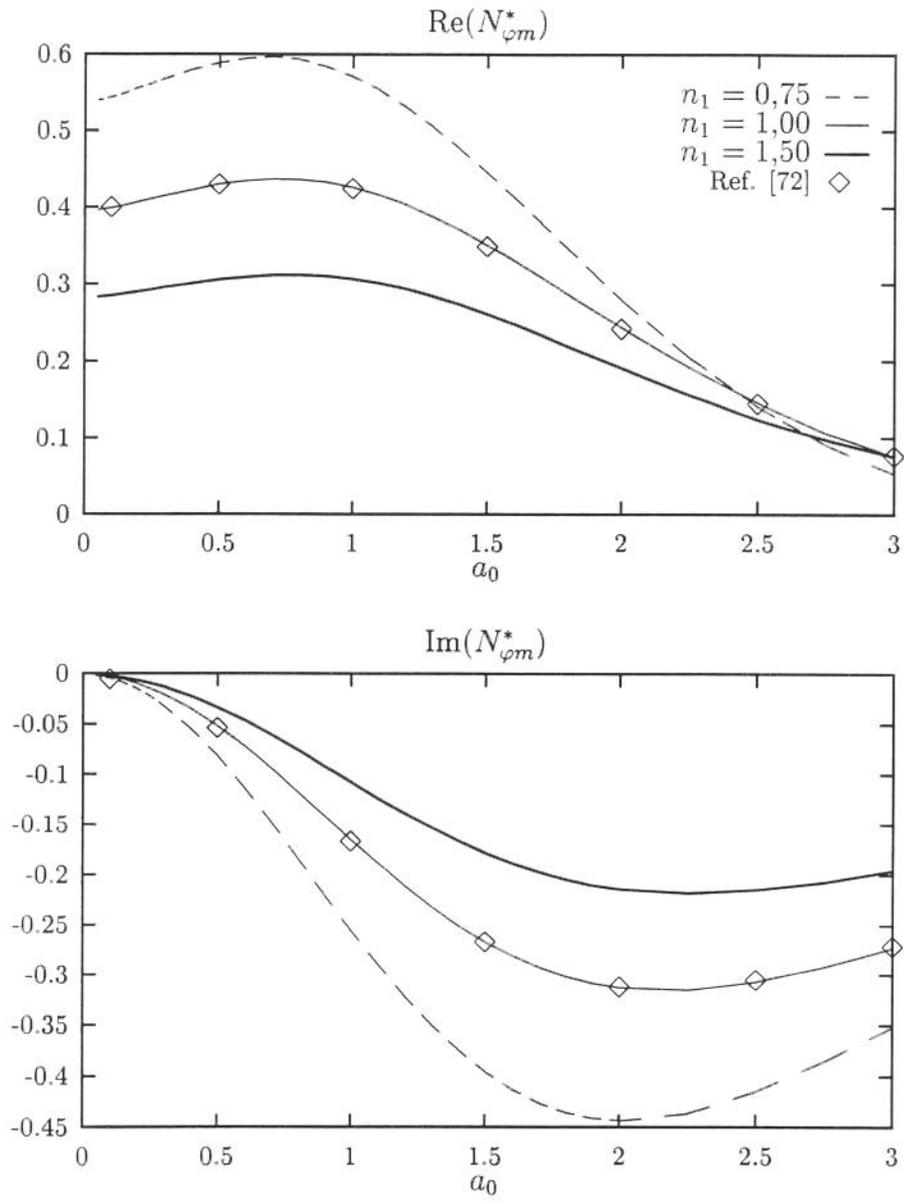


Figura 7.15: Componente normalizada  $N_{\varphi m}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para  $n_3 = 1$ .

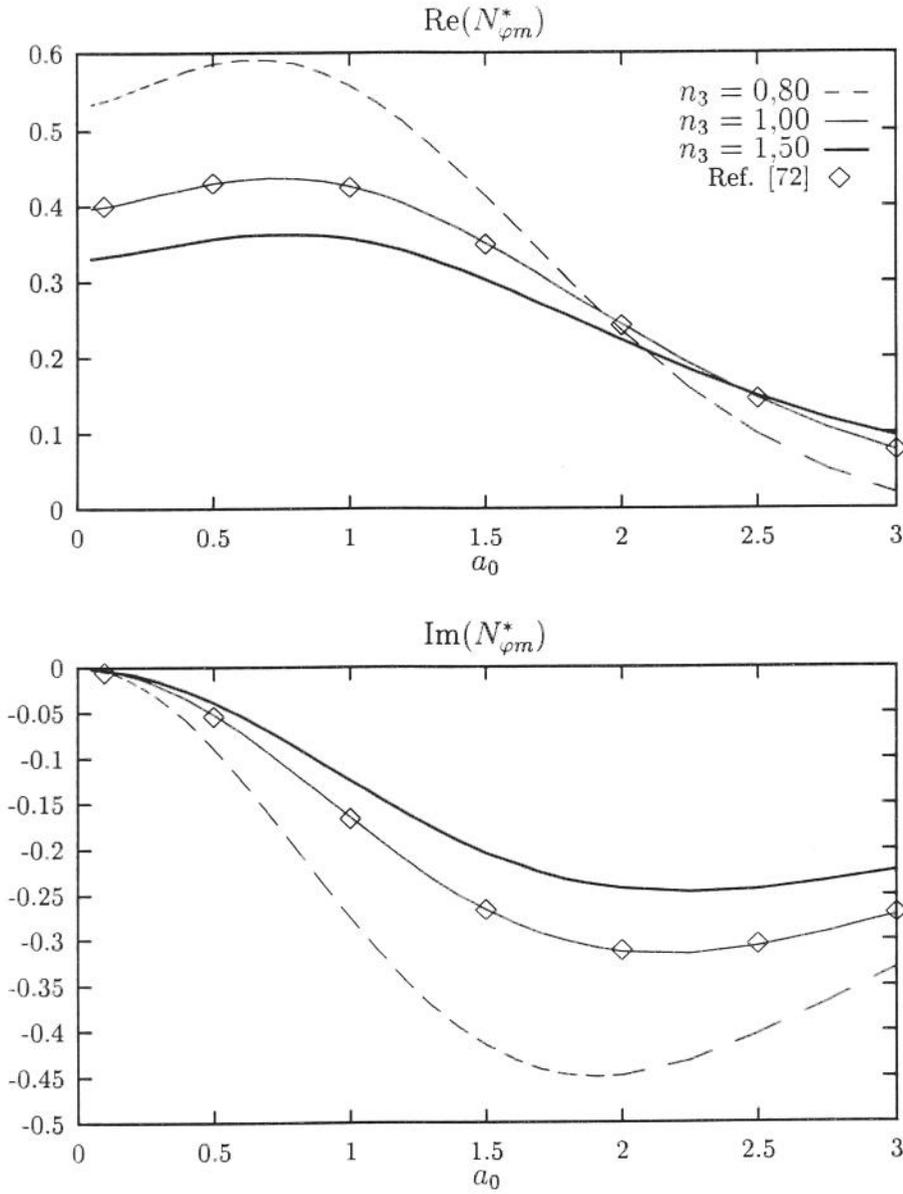


Figura 7.16: Componente normalizada  $N_{\varphi m}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para  $n_1 = 1$ .

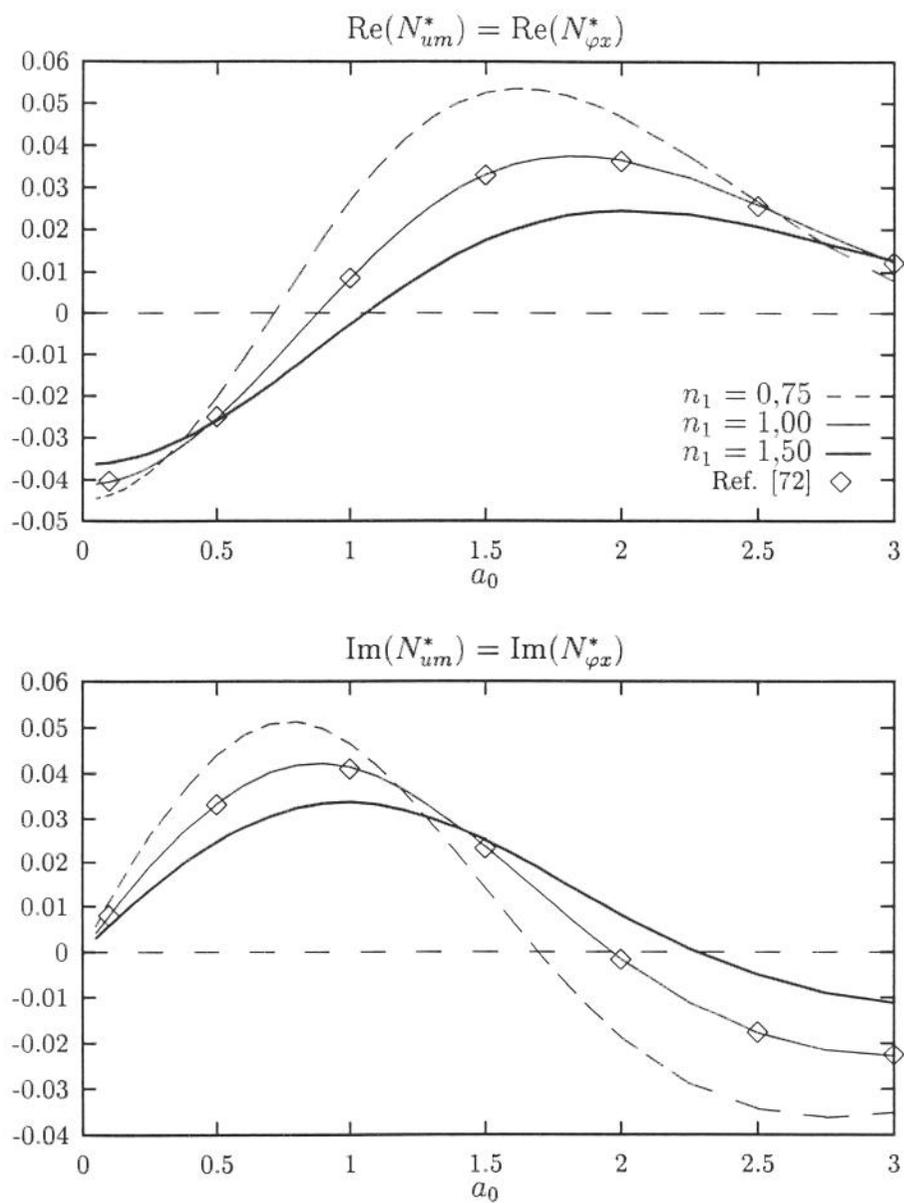


Figura 7.17: Componente normalizada  $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para  $n_3 = 1$ .

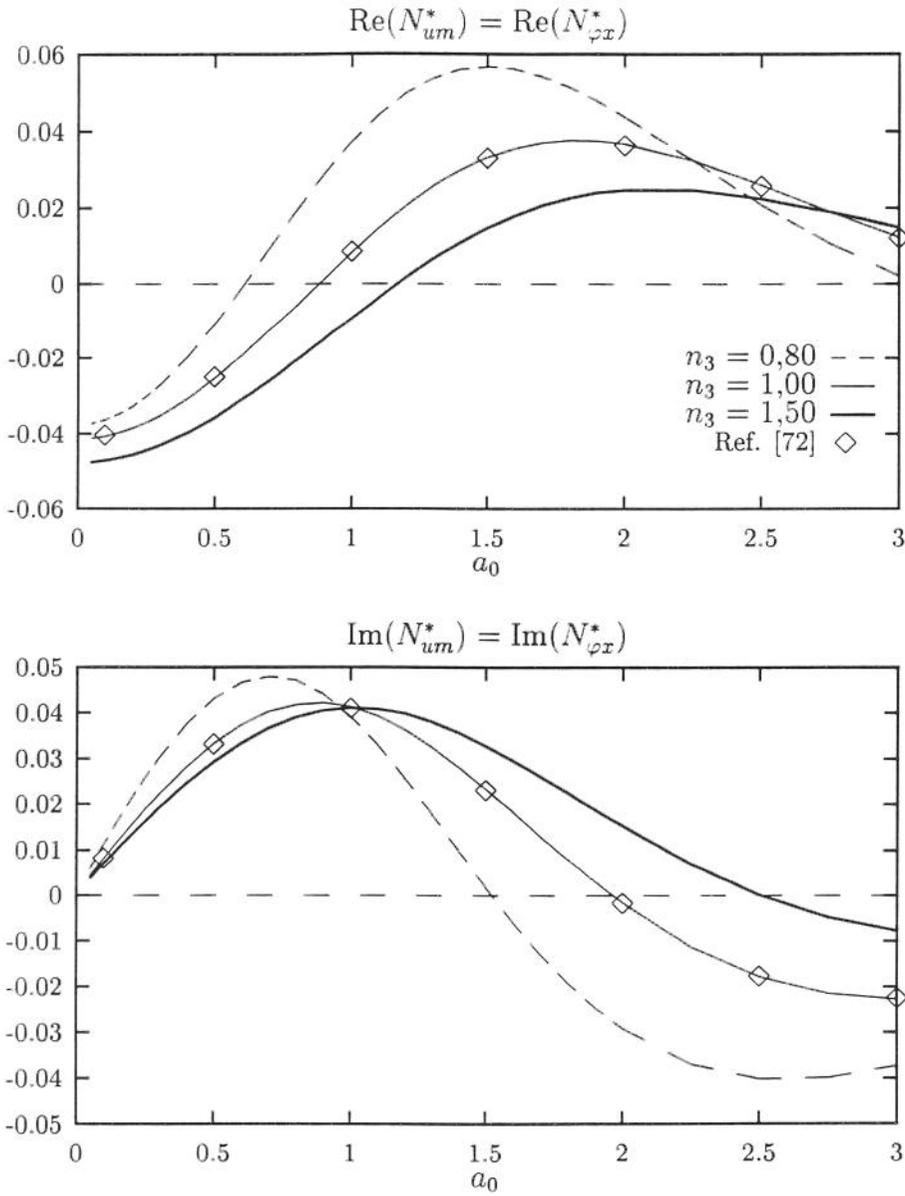


Figura 7.18: Componente normalizada  $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para  $n_1 = 1$ .

### 7.3 Fundações apoiadas sobre camada elástica situada sobre uma base rígida

Para se poder analisar o comportamento de fundações rígidas apoiadas sobre uma camada elástica de espessura  $h$  situada sobre uma base rígida (figura 7.19) pode-se utilizar também o Método da Superposição descrito nos itens anteriores. Neste caso no cálculo da matriz de influência dos deslocamentos  $U$  utilizam-se as funções de influência correspondentes a cargas distribuídas aplicadas sobre camada elástica transversalmente isotrópica apoiada sobre base rígida.

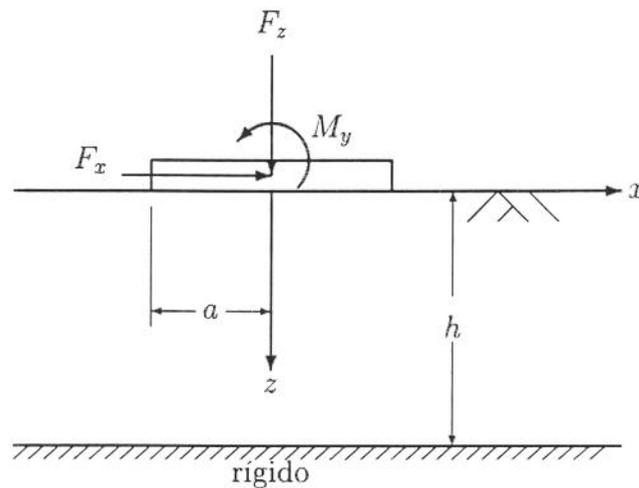


Figura 7.19: Fundação rígida apoiada sobre uma camada elástica situada sobre uma base rígida

A matriz de flexibilidade da fundação  $N(\omega)$  para este caso também tem a forma:

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ a\varphi_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & N_{ux} & N_{um} \\ 0 & N_{\varphi x} & N_{\varphi m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y/a \end{Bmatrix} \quad (7.12)$$

ou seja, há um acoplamento entre a carga externa  $F_x$  e a rotação da fundação  $\varphi_0$  assim como entre o momento  $M_y$  e o deslocamento horizontal  $u_0$ . Também se observa que as componentes de  $N$  que expressam este acoplamento são iguais entre si ( $N_{um} = N_{\varphi x}$ ).

O comportamento das componentes da matriz de flexibilidade normalizada  $N^*(\omega)$  em função da frequência normalizada  $a_0$  pode ser vista nos gráficos das figuras 7.20 a 7.23. Nestes gráficos estão representadas as componentes da matriz de flexibilidade para um material isotrópico ( $\nu = 0,4$ ) e para um material anisotrópico ( $c_{11}/c_{44} = 6$ ;  $n_1 = 1,5$ ;  $n_3 = 0,8$ ). Para ambos os materiais foi utilizada uma taxa de amortecimento  $\nu = 0,01$ . Foram analisados os casos em que a espessura da camada  $h = 2a$  e  $h = 4a$ .

Pela análise dos gráficos das figuras 7.20 a 7.23 pode-se notar o comportamento bastante irregular das curvas, com pontos de máximo e de mínimo muito agudos, tanto para o material isotrópico quanto para o material anisotrópico. Isto se deve à presença do horizonte rígido a uma pequena profundidade que provoca a reflexão das ondas elásticas que retornam então à fundação. Dessa forma, estes pontos correspondem aproximadamente às frequências naturais da camada elástica onde há ressonância entre a de excitação e as ondas elásticas refletidas. Este comportamento irregular torna-se menos acentuado para  $h/a = 4$ . A influência da anisotropia torna-se também, como se pode notar, um pouco mais acentuada com a maior a proximidade do horizonte rígido. Esta influência se traduz num deslocamento dos pontos de máximo e de mínimo em direção a frequências mais altas, juntamente com uma diminuição, em valor absoluto, dos valores da flexibilidade nestes pontos. Isto sugere que o material anisotrópico analisado tem maior rigidez que o material isotrópico. Com o aumento da espessura  $h$  o comportamento da fundação tende a se igualar ao comportamento da fundação apoiada sobre o semi-espaco elástico.

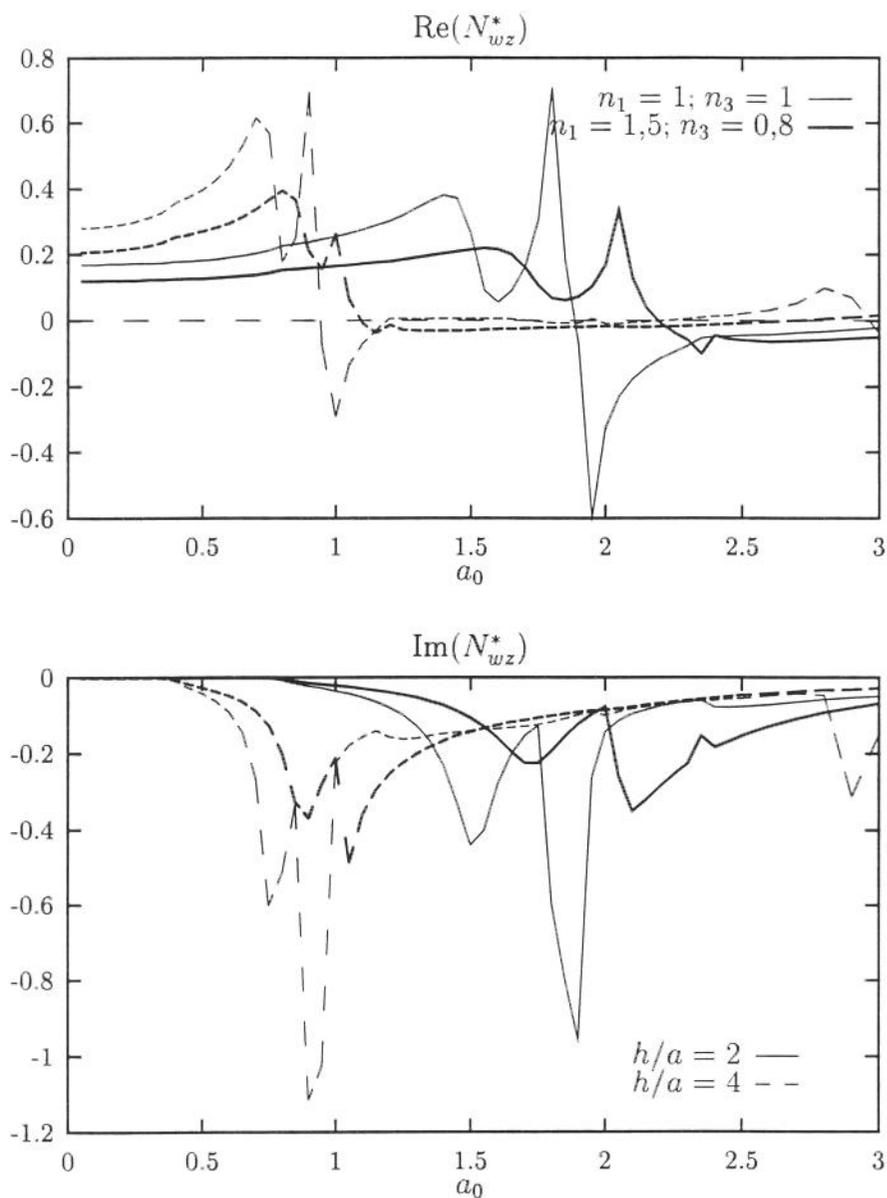


Figura 7.20: Componente normalizada  $N_{wz}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$  e  $h/a = 4$ ).

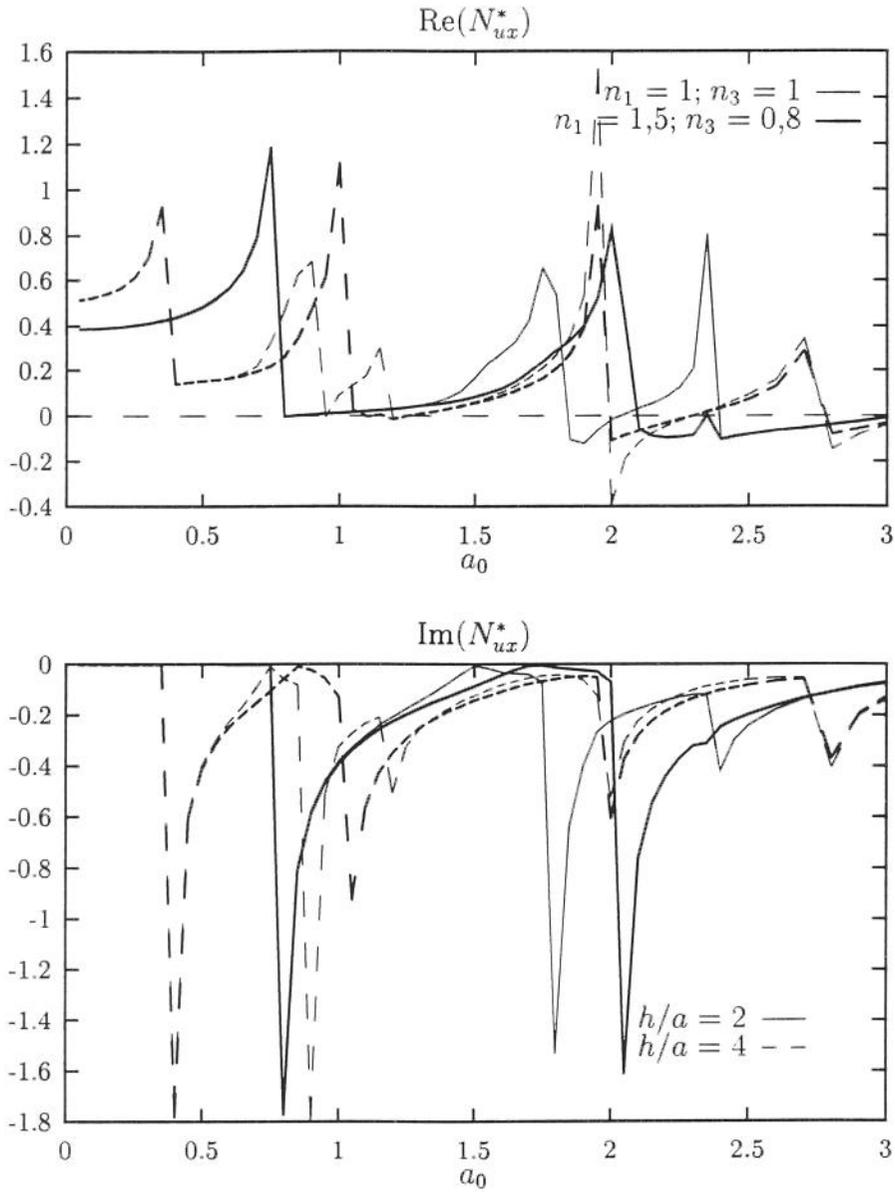


Figura 7.21: Componente normalizada  $N_{ux}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$  e  $h/a = 4$ ).

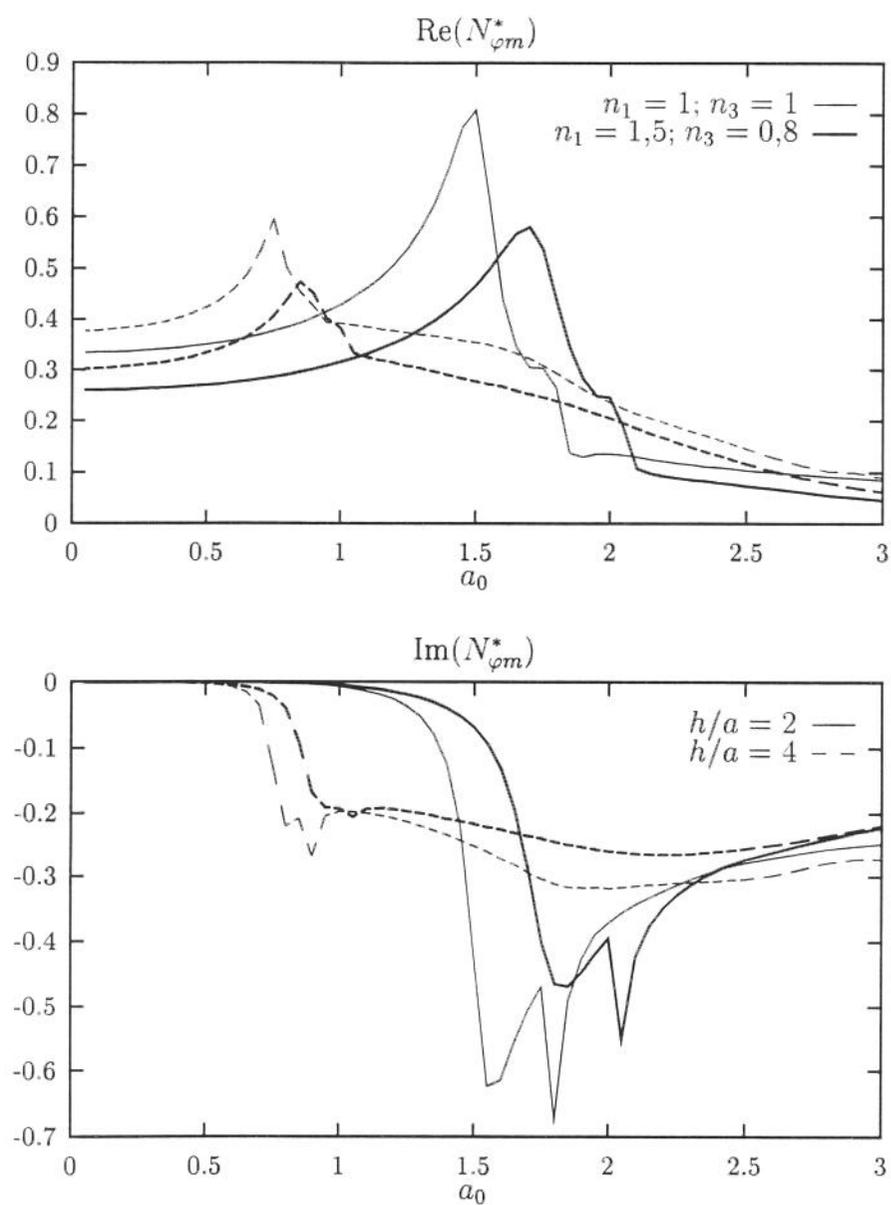


Figura 7.22: Componente normalizada  $N_{\varphi m}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$  e  $h/a = 4$ ).

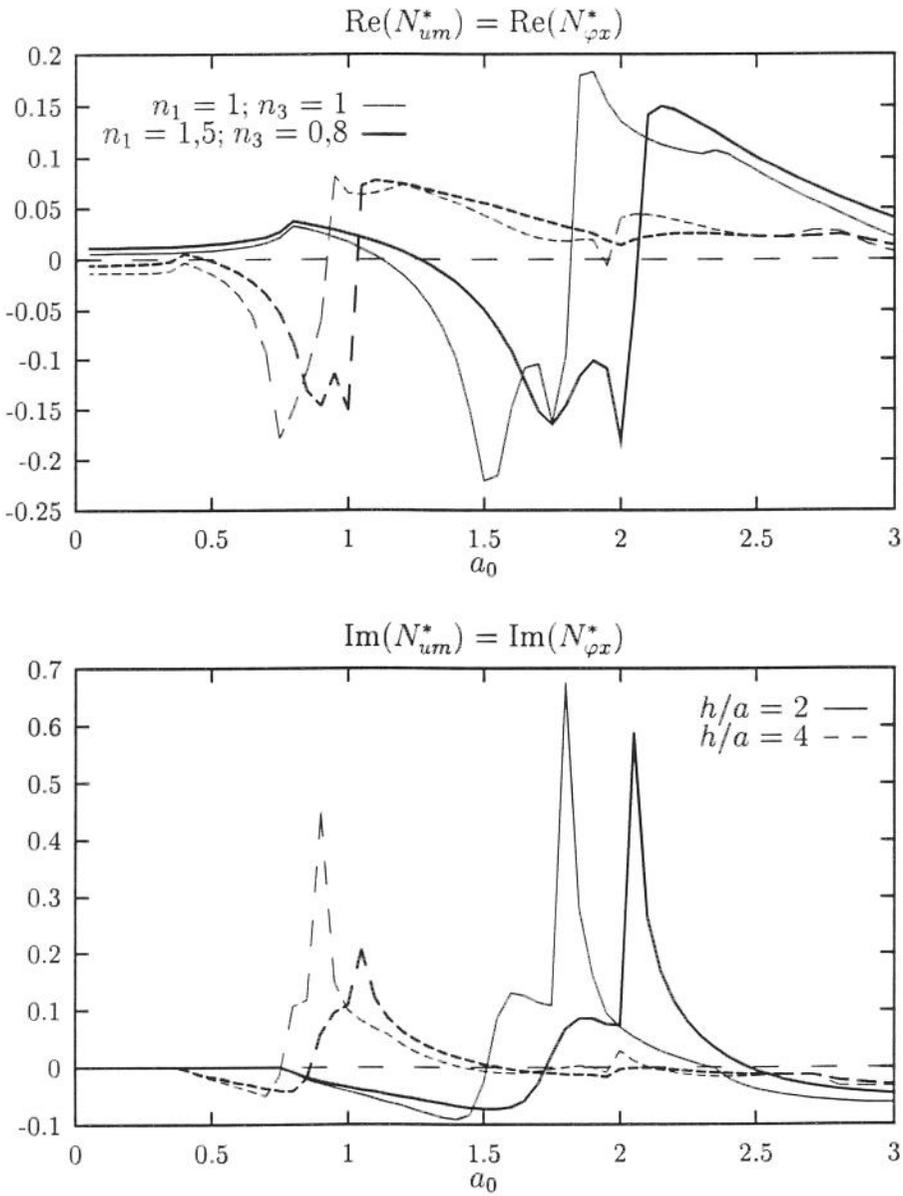


Figura 7.23: Componente normalizada  $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$  e  $h/a = 4$ ).

O parâmetro que parece indicar a rigidez do material é a constante elástica  $\gamma = 1 + \alpha\beta - \kappa^2$ . Para se verificar esta afirmação estão apresentados os gráficos das figuras 7.24 a 7.27. Nestes gráficos estão representados os valores das componentes da matriz de flexibilidade normalizada em função da frequência  $a_0$  para dois materiais com o mesmo valor de  $\gamma$ . Foi analisado um material isotrópico com  $\nu = 0,4$  e um material transversalmente isotrópico com  $c_{11}/c_{44} = 6$ ;  $n_1 = 1,31$  e  $n_3 = 0,8$ . O material isotrópico tem as mesmas características elásticas utilizadas nos casos anteriores. Apenas no material anisotrópico o valor de  $n_1$  foi reduzido ligeiramente para que a constante  $\gamma$  assumisse o mesmo valor ( $\gamma = 12$ ) para os dois materiais. Adicionalmente, a taxa de amortecimento dos dois materiais foi aumentada para  $\nu = 0,1$  para se poder analisar se efeito no comportamento das curvas, em especial nos pontos de máximos e de mínimos.

A análise destes gráficos mostra, em primeiro lugar, que a taxa de amortecimento tem grande influência nos valores das componentes da matriz de flexibilidade dinâmica; principalmente nos pontos de máximos e de mínimos tornando estes valores menores em módulo e tornando as curvas menos agudas nestes pontos. Quanto à influência de  $\gamma$ , realmente este fornece uma medida da rigidez do material pois aqui as curvas correspondentes aos dois materiais estão mais próximas entre si e as frequências de ressonância coincidem. No entanto, a influência da anisotropia ainda é notada, em especial na componente  $N_{wz}^*$ . Nas outras componentes a influência da anisotropia é comparativamente menor sendo que para a componente  $N_{ux}^*$  não há praticamente influência até  $a_0$  próximo de 1,5. A influência maior da anisotropia em  $N_{wz}^*$  pode ser explicada pelo fato de os dois materiais analisados terem valores iguais de rigidez horizontal ( $c_{11}/c_{44} = 6$  para ambos) e valores diferentes de rigidez vertical ( $c_{33}/c_{11} = 6$  para o material isotrópico e  $c_{33}/c_{44} = 7,83$  para o material anisotrópico).

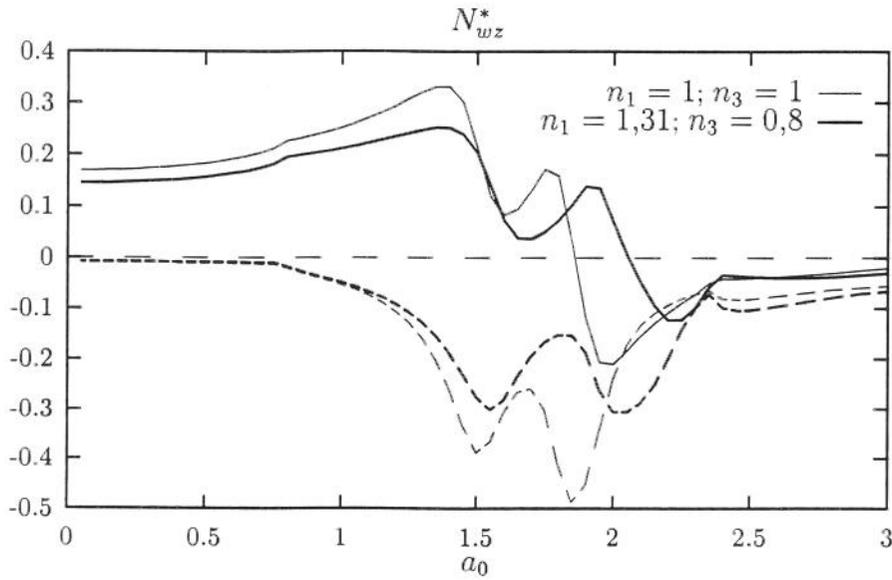


Figura 7.24: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente normalizada  $N_{wz}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$  e  $\nu = 0,1$ ).

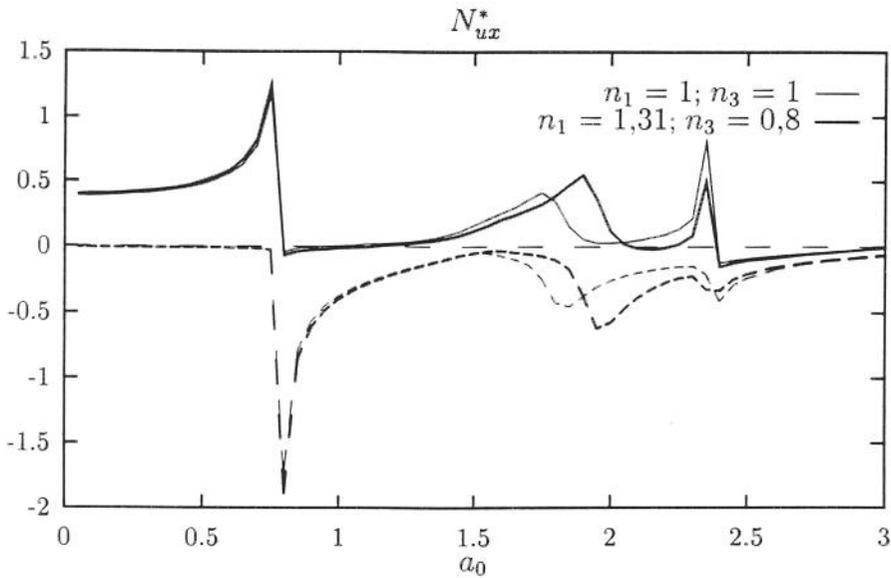


Figura 7.25: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente normalizada  $N_{ux}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$  e  $\nu = 0,1$ ).

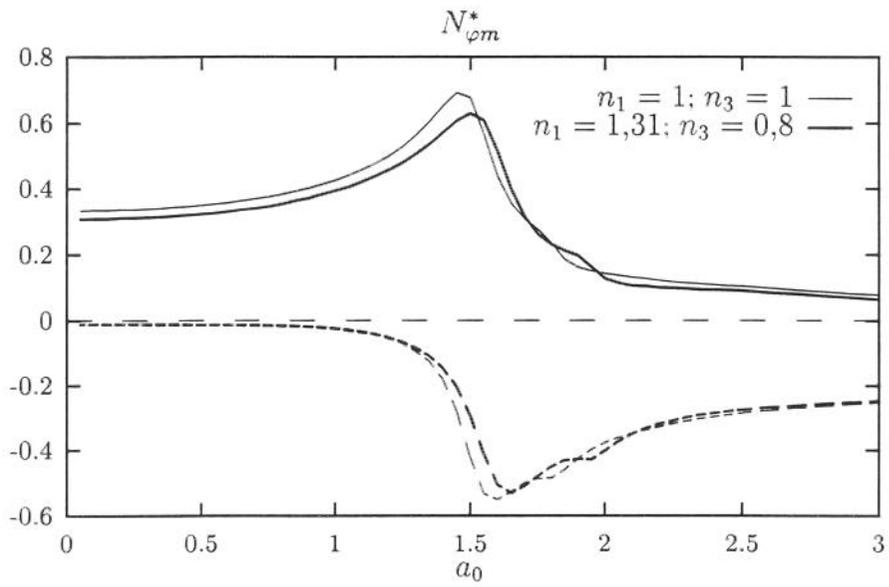


Figura 7.26: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente normalizada  $N_{\varphi m}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$  e  $\nu = 0,1$ ).

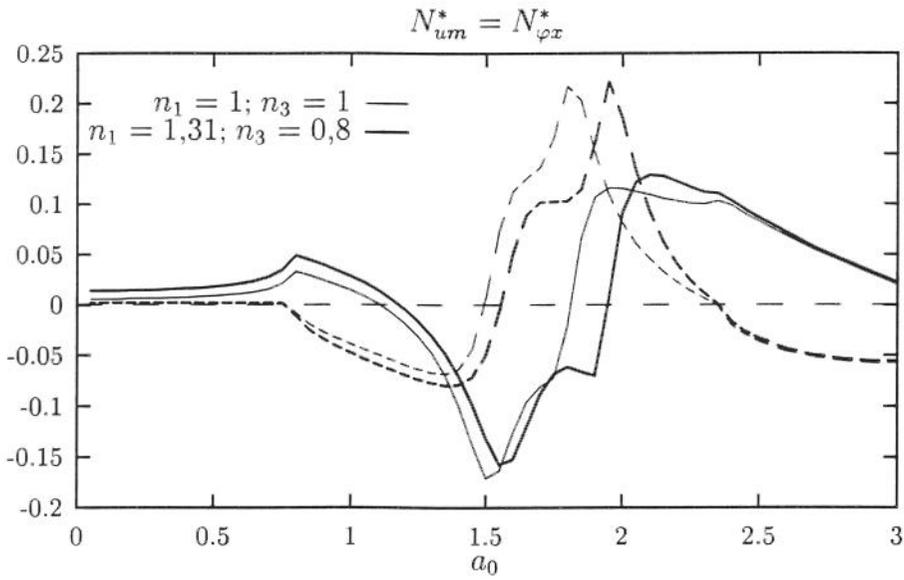


Figura 7.27: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente normalizada  $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada em camada sobre base rígida ( $h/a = 2$  e  $\nu = 0,1$ ).

## 7.4 Fundação apoiada sobre semi-espaco com eixo de simetria elástica inclinado

Outra possibilidade proporcionada pelo Método da Superposição é a análise do comportamento de fundações rígidas sujeitas a cargas dinâmicas externas e apoiadas sobre um material elástico transversalmente isotrópico cujo eixo de simetria (e plano de isotropia) não é coincidente com qualquer dos eixos do sistema de coordenadas geral do problema. Em outras palavras, o eixo de simetria elástica do material apresenta uma inclinação  $\theta$  em relação ao eixo vertical  $z$ , como pode ser visto na figura 7.28.

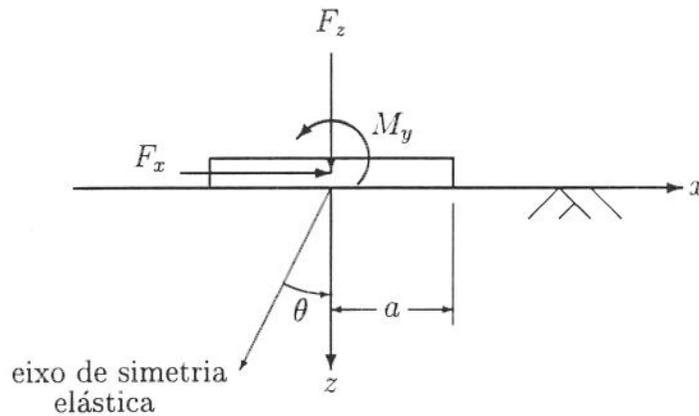


Figura 7.28: Fundação rígida apoiada sobre o semi-espaco com eixo de simetria elástica inclinado

Para a análise de fundações apoiadas sobre um semi-espaco com eixo de simetria elástica inclinado utilizam-se na determinação da matriz de influência dos deslocamentos  $\mathbf{U}$  as funções de influência desenvolvidas para carga distribuída uniforme aplicada sobre o meio semi-infinito transversalmente isotrópico com eixo de simetria do material inclinado.

A relação entre as componentes da carga externa  $F_z$ ,  $F_x$  e  $M_y$  e os deslocamentos do ponto de referência da fundação rígida  $w_0$ ,  $u_0$  e  $\varphi_0$  é dada, neste caso, por:

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ a\varphi_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{wz} & N_{wx} & N_{wm} \\ N_{uz} & N_{ux} & N_{um} \\ N_{\varphi z} & N_{\varphi x} & N_{\varphi m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y/a \end{Bmatrix} \quad (7.13)$$

ou seja, a matriz de flexibilidade dinâmica  $\mathbf{N}(\omega)$  deste tipo de problema

apresenta um acoplamento completo entre as componentes da carga externa e as componentes do deslocamento da fundação. No entanto, a matriz  $\mathbf{N}(\omega)$  deve ser simétrica como consequência do Teorema da Reciprocidade de Betti.

Na determinação numérica da matriz de influência dos deslocamentos, caso se adote uma discretização da interface solo-fundação com elementos de igual comprimento, é necessária a determinação pelas funções de influência apenas das primeiras e últimas linhas de cada uma das quatro submatrizes que compõem  $\mathbf{U}$ . Os elementos das outras linhas são determinados a partir destas por um processo de rotação. Os elementos situados nas diagonais das submatrizes e acima delas são determinados a partir dos elementos das primeiras linhas e os elementos situados abaixo dessas diagonais são determinados a partir dos elementos das últimas linhas. A determinação pelas funções de influência também das linhas inferiores das submatrizes de  $\mathbf{U}$  é necessária neste caso devido à ausência de simetria das funções de Green (e das funções de influência) em relação ao ponto de aplicação da carga, quando o eixo de simetria elástica é inclinado.

Nas figuras 7.29 a 7.34 estão apresentados gráficos que representam a variação das componentes da matriz de flexibilidade normalizada  $\mathbf{N}^*(\omega)$  com a frequência normalizada  $a_0$ . Estão traçadas nestes gráficos curvas para valores de  $\theta = \pi/12$  ( $15^\circ$ ),  $\pi/6$  ( $30^\circ$ ) e  $\pi/4$  ( $45^\circ$ ). As constantes elásticas do material são  $c_{11}/c_{44} = 6$ ,  $n_1 = 1,5$  e  $n_3 = 0,8$ . Foi adotada uma taxa de amortecimento interno  $\nu = 0,01$ .

Os resultados mostram que há uma influência não muito grande da inclinação  $\theta$  sobre as componentes da matriz de flexibilidade. Nos elementos da diagonal da matriz de flexibilidade as influências maiores da inclinação aparecem na parte imaginária de  $N_{wz}^*$  e de  $N_{ux}^*$  e na parte real de  $N_{\varphi m}^*$ . A parte imaginária desta última componente apresenta uma influência de  $\theta$  que aumenta com a frequência  $a_0$ .

Quanto aos elementos de  $\mathbf{N}^*$  que expressam o acoplamento (elementos fora da diagonal) o seu comportamento é bastante variável. A componente  $N_{wx}^*$  apresenta uma variação bem maior quando se passa de  $\theta = \pi/12$  para  $\theta = \pi/6$  do que quando se passa de  $\theta = \pi/6$  para  $\theta = \pi/4$ . A componente  $N_{wm}^*$  se apresenta influenciada por  $\theta$  de uma forma cíclica com  $a_0$  e a componente  $N_{um}^*$  apresenta uma influência muito pequena da inclinação  $\theta$ .

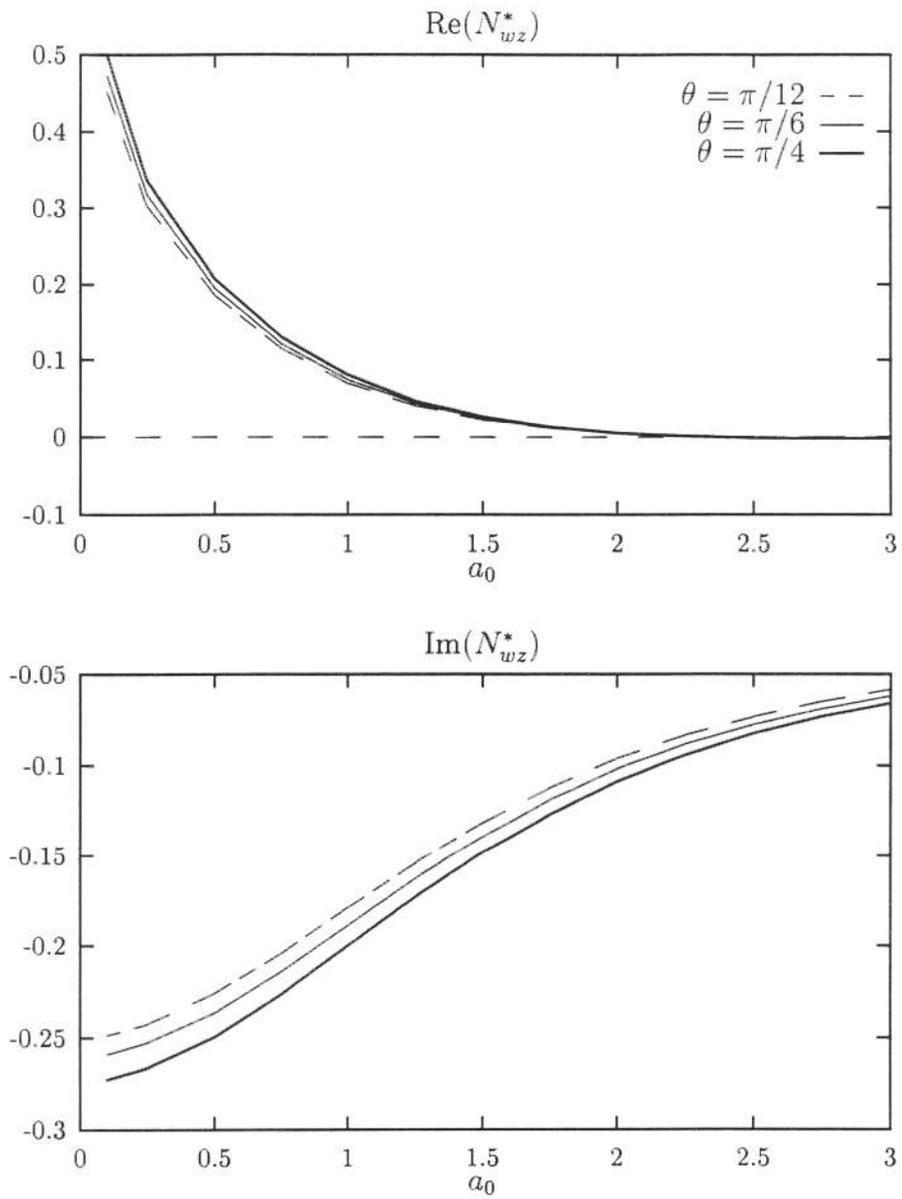


Figura 7.29: Componente normalizada  $N_{wz}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada sobre semi-espaco com eixo de simetria elástica do material inclinado

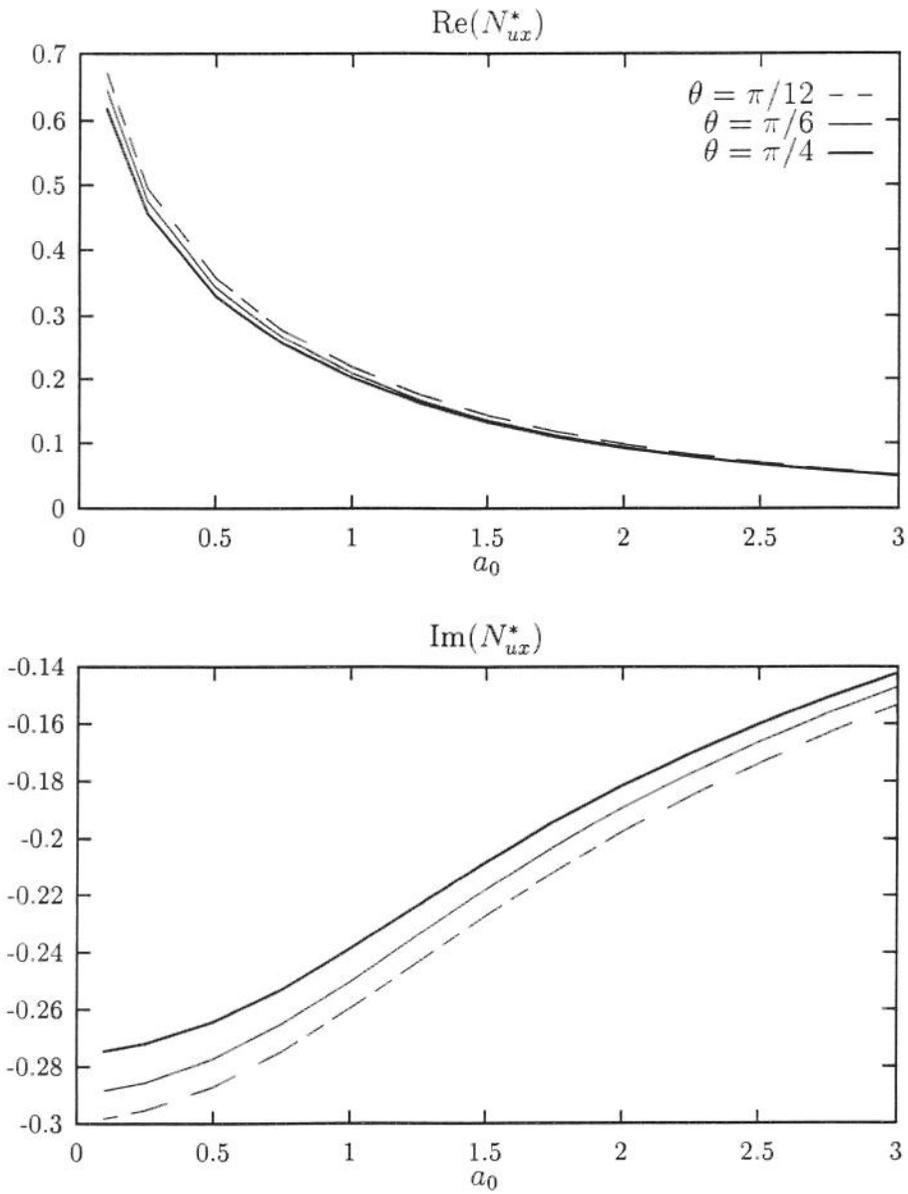


Figura 7.30: Componente normalizada  $N_{ux}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada sobre semi-espaco com eixo de simetria elástica do material inclinado

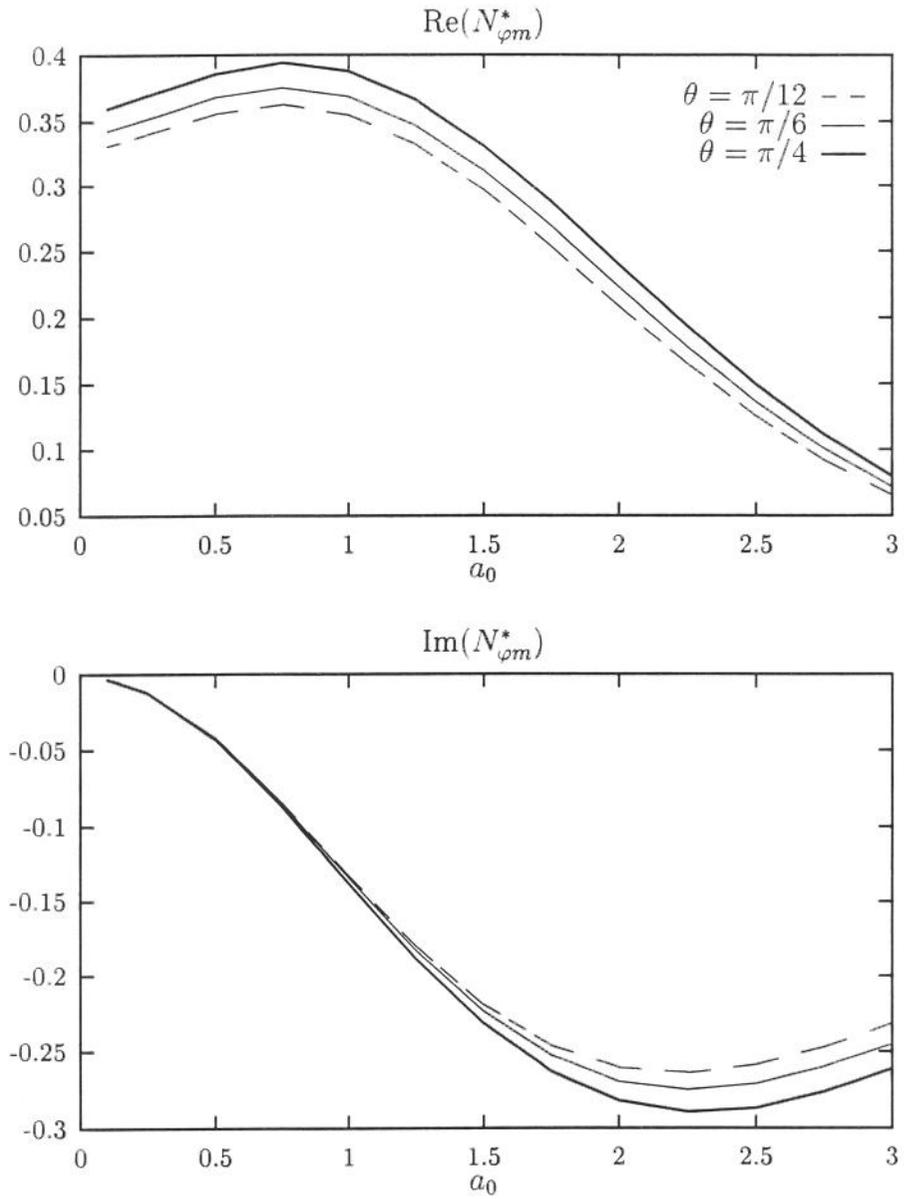


Figura 7.31: Componente normalizada  $N_{\varphi m}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada sobre semi-espaco com eixo de simetria elástica do material inclinado

## 7.5 Fundações semi-enterradas

### 7.5.1 Definição do problema

Uma configuração mais comumente encontrada na prática de projetos de fundações é representada por um bloco rígido parcialmente enterrado no solo. Para analisar este tipo de fundação propõe-se o problema constituído por uma estrutura rígida sem massa embutida num meio elástico semi-infinito transversalmente isotrópico como pode ser visto na figura 7.35. A estrutura tem comprimento infinito na direção  $y$  e está perfeitamente aderida ao meio elástico. Sobre esta estrutura estão aplicados carregamentos dinâmicos harmônicos no tempo que podem ser descritos pelas componentes vertical  $F_z$ , horizontal  $F_x$  e de momento  $M_y$  contínuos na direção  $y$  aplicados sobre o centro geométrico da seção.

Para o problema descrito deseja-se determinar a matriz de flexibilidade dinâmica  $\mathbf{N}(\omega)$  que relaciona as componentes do carregamento aos deslocamentos vertical  $w_0$ , horizontal  $u_0$  e giro  $\varphi_0$  globais da estrutura rígida, bem como deslocamentos e tensões em quaisquer outros pontos no interior do meio semi-infinito.

### 7.5.2 Aplicação da formulação indireta do MEC

Na solução do problema colocado propõe-se a utilização da formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno numa extensão do Método da Superposição empregado na análise de fundações apoiadas sobre a superfície de meios elásticos. Nesta aplicação são utilizadas as funções de influência desenvolvidas para cargas aplicadas no interior do semi-espaço elástico transversalmente isotrópico.

O domínio  $\Omega$  do problema original é caracterizado por um meio semi-infinito escavado na parte ocupada pela fundação. Sobre o contorno  $\Gamma$  do domínio  $\Omega$  estão aplicadas tensões  $t(\Gamma)$  que estão em equilíbrio com o sistema de forças externas e ao mesmo tempo provocam deslocamentos ao longo de  $\Gamma$  que são compatíveis com a rigidez da estrutura da fundação. Para a análise do problema original propõe-se um problema auxiliar mostrado na figura 7.36 caracterizado por um semi-espaço não escavado  $\Omega^*$ . Neste semi-espaço é delimitada uma superfície  $\Gamma^*$  geometricamente idêntica ao contorno  $\Gamma$  sobre a qual é aplicada uma tensão fictícia  $q(\Gamma^*)$ .

A tensão fictícia  $q(\Gamma^*)$  deve ser determinada de tal forma que os deslocamentos e tensões causados por ela ao longo de  $\Gamma^*$  satisfaçam às condições de compatibilidade cinemática e de equilíbrio, respectivamente. Deve-se enfatizar que as tensões  $t(\Gamma)$  e  $q(\Gamma^*)$  não são iguais pois os domínios  $\Omega$  e  $\Omega^*$  são

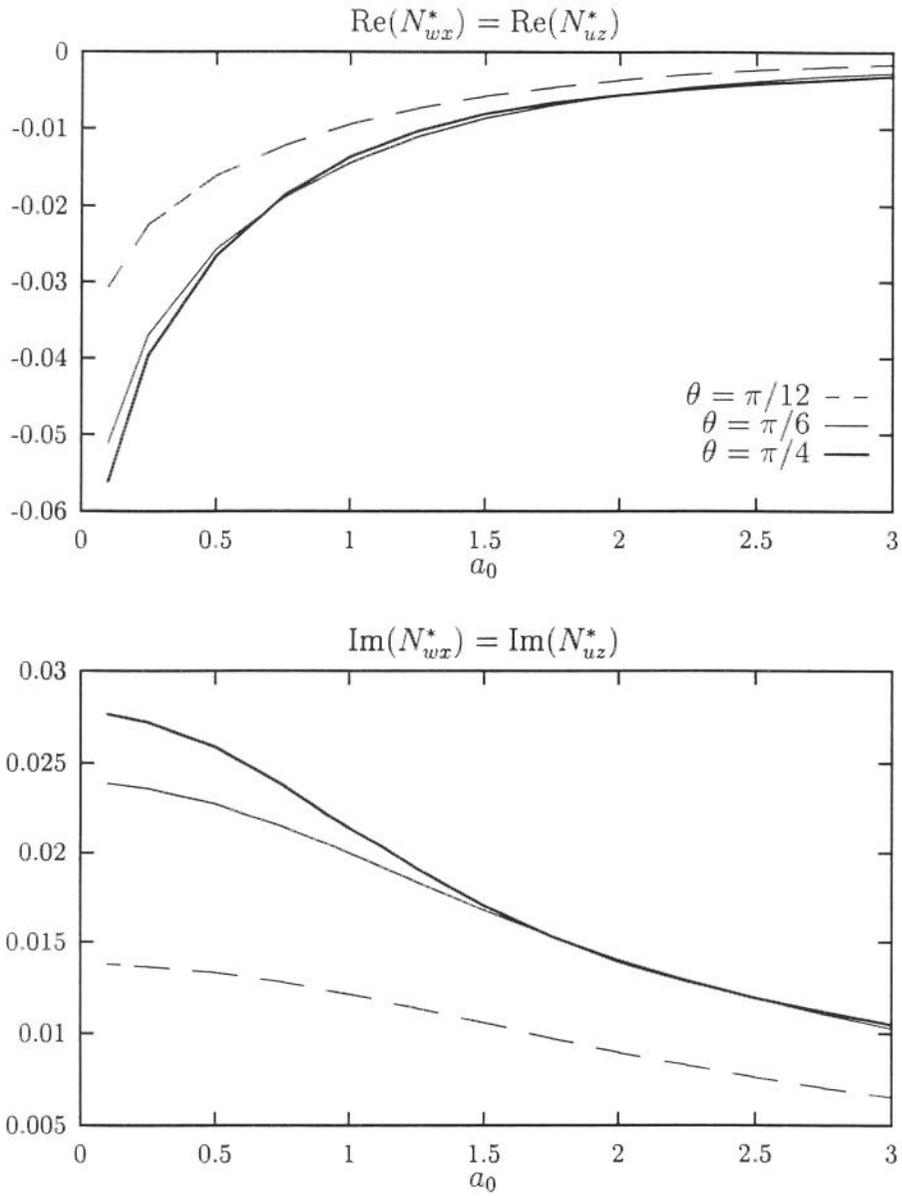


Figura 7.32: Componente normalizada  $N_{wx}^* = N_{uz}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada sobre semi-espço com eixo de simetria elástica do material inclinado

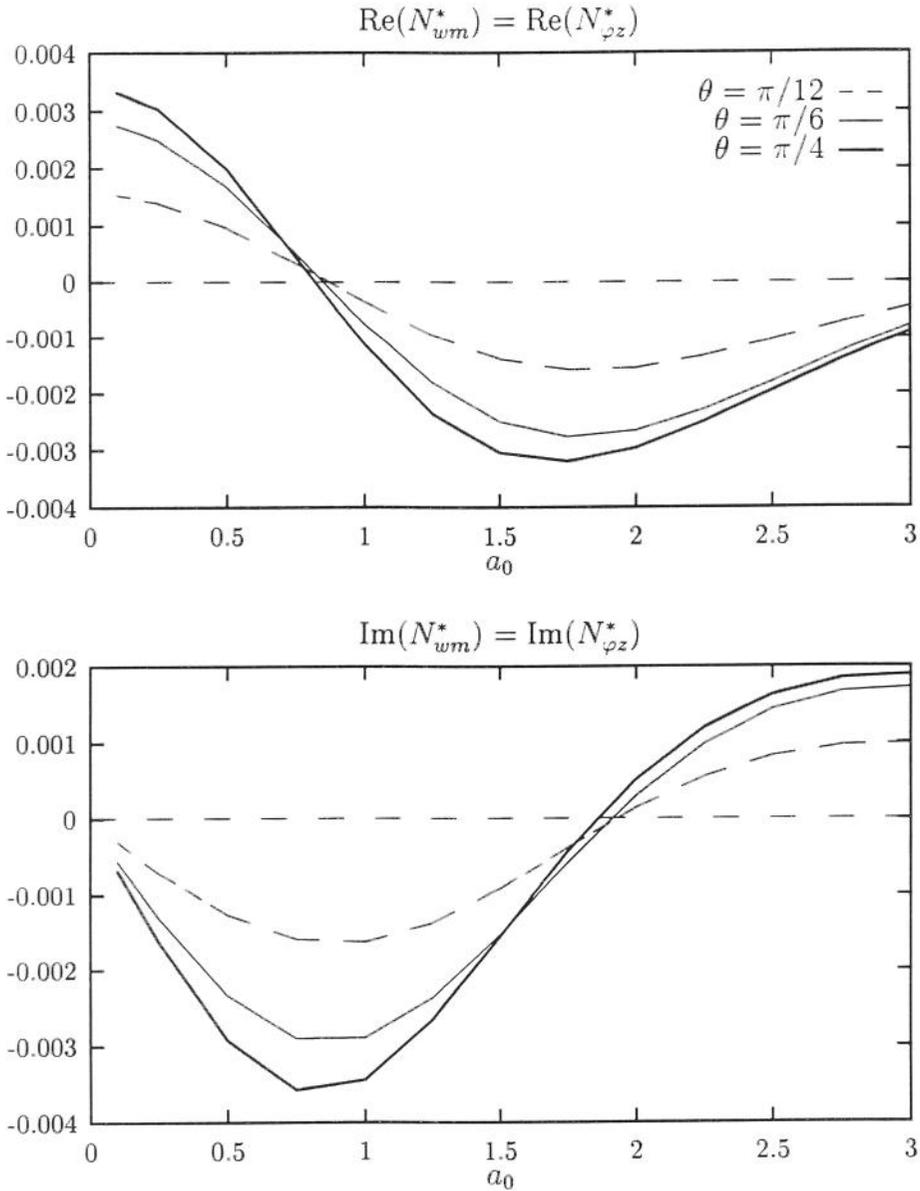


Figura 7.33: Componente normalizada  $N_{wm}^* = N_{\varphi z}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada sobre semi-espço com eixo de simetria elástica do material inclinado

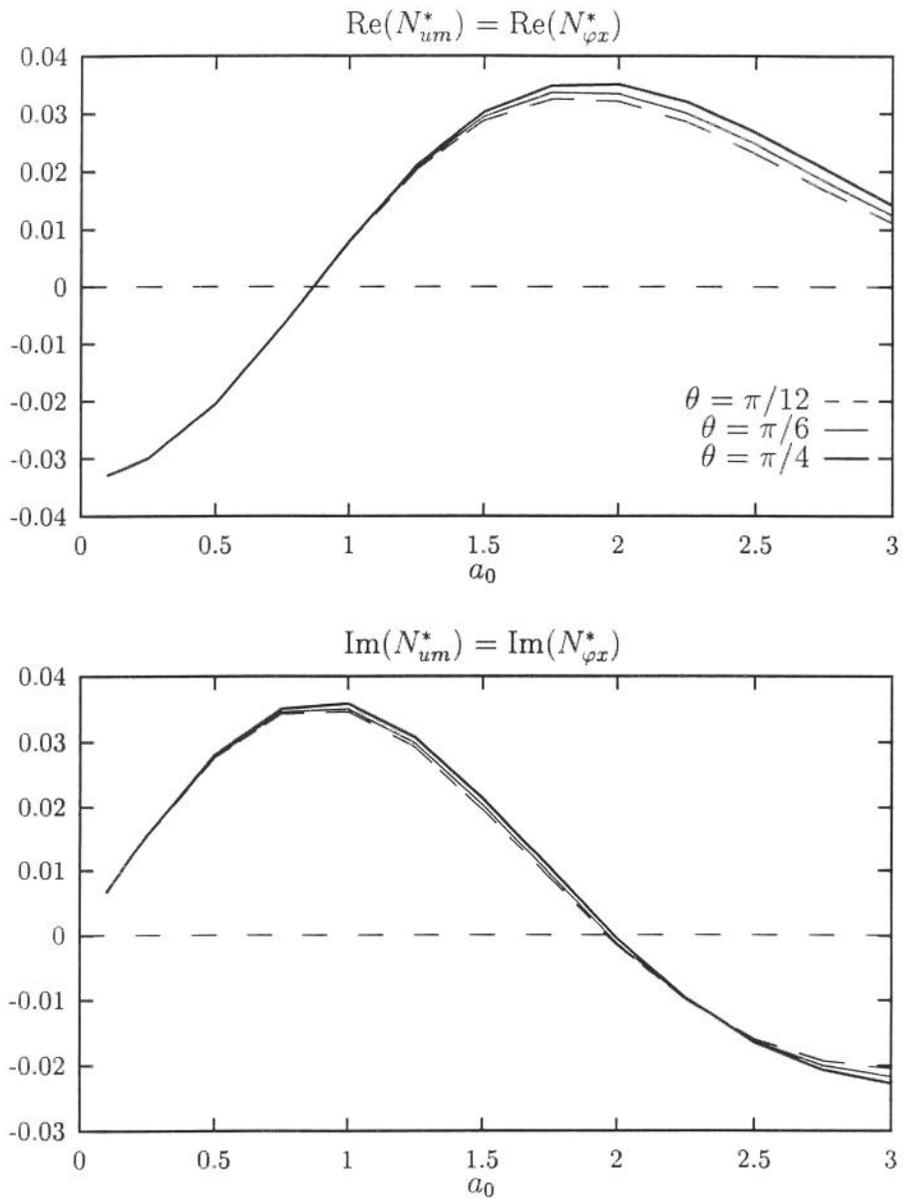


Figura 7.34: Componente normalizada  $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação apoiada sobre semi-espaço com eixo de simetria elástica do material inclinado

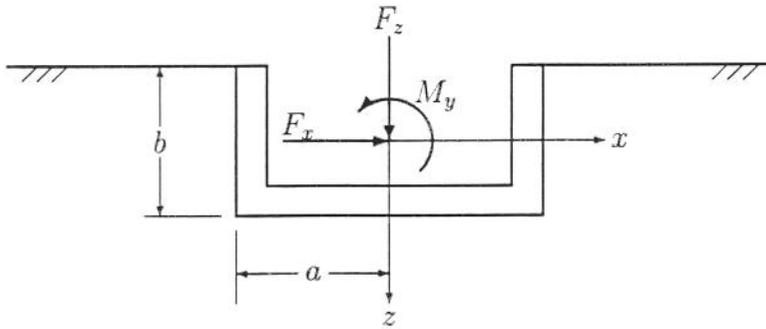


Figura 7.35: Fundação rígida embutida em um meio semi-infinito

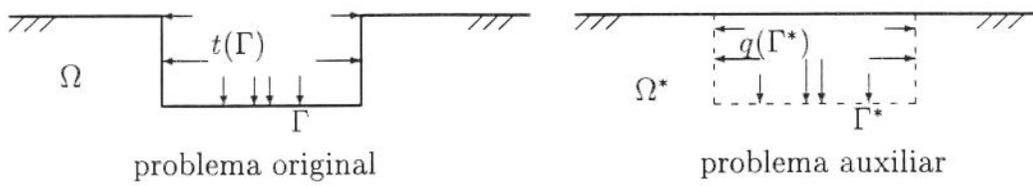


Figura 7.36: Problemas original e auxiliar

diferentes. As tensões são iguais apenas onde os contornos dos dois domínios coincidem. Isto ocorre na superfície externa à fundação onde tanto  $t(\Gamma)$  e  $q(\Gamma^*)$  são nulas. Neste ponto reside a principal vantagem de se empregar como problema auxiliar o meio semi-infinito em lugar do espaço completo como nas formulações mais gerais do MEC. Nestas formulações gerais a carga fictícia não é conhecida ao longo da superfície externa e deve ser determinada como parte da solução do problema.

O passo seguinte consiste em se dividir a porção de  $\Gamma^*$  onde  $q(\Gamma^*)$  não é nula (ao longo da interface solo-fundação) em  $N$  elementos justapostos e adotar uma função aproximadora para  $q$  ao longo de cada um desses elementos. A função aproximadora mais simples é representada pelo modelo constante. Assim assume-se que a carga fictícia seja constante ao longo de cada elemento do contorno  $\Gamma^*$ .

Este processo de cálculo pode então ser denominado Método da Superposição Estendido (MSE).

### 7.5.3 Matrizes de influência

Os deslocamentos horizontal  $u(\Gamma)$  e vertical  $w(\Gamma)$  ao longo da interface solo-fundação causados pela carga fictícia  $q(\Gamma^*)$  podem ser determinados pelas funções de influência desenvolvidas para cargas aplicadas no interior do semi-espaço. Para os pontos situados nos nós de cada um dos  $N$  elementos (na aproximação constante os nós são colocados no ponto médio dos elementos de contorno) estes deslocamentos são dados por:

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= \sum_{j=1}^N \left( u_{cx}^{(i,j)} q_x^{(j)} + u_{cz}^{(i,j)} q_z^{(j)} \right) \\ w^{(i)} &= \sum_{j=1}^N \left( w_{cx}^{(i,j)} q_x^{(j)} + w_{cz}^{(i,j)} q_z^{(j)} \right) \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (7.14)$$

onde  $u_{ck}^{(i,j)}$  e  $w_{ck}^{(i,j)}$  são as funções de influência dos deslocamentos no elemento  $i$  devidos a cargas uniformes aplicadas na direção  $k = x, z$  no elemento  $j$ . Repare-se que para os elementos  $j$  situados nas laterais da interface solo-fundação são utilizadas funções de influência de cargas uniformes distribuídas ao longo de superfícies verticais no interior do semi-espaço, enquanto que para os elementos situados na base são utilizadas as funções de influência desenvolvidas para cargas uniformes distribuídas ao longo de superfícies horizontais. Estas equações podem ser colocadas em forma matricial

resultando:

$$\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(N)} \\ w^{(1)} \\ \vdots \\ w^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_{cx}^{(1,1)} & \dots & u_{cx}^{(1,N)} & | & u_{cz}^{(1,1)} & \dots & u_{cz}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{cx}^{(N,1)} & \dots & u_{cx}^{(N,N)} & | & u_{cz}^{(N,1)} & \dots & u_{cz}^{(N,N)} \\ \hline w_{cx}^{(1,1)} & \dots & w_{cx}^{(1,N)} & | & w_{cz}^{(1,1)} & \dots & w_{cz}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{cx}^{(N,1)} & \dots & w_{cx}^{(N,N)} & | & w_{cz}^{(N,1)} & \dots & w_{cz}^{(N,N)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_x^{(1)} \\ \vdots \\ q_x^{(N)} \\ q_z^{(1)} \\ \vdots \\ q_z^{(N)} \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

ou simplesmente:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}\mathbf{q}. \quad (7.16)$$

Da mesma forma as tensões  $t_x(\Gamma)$  e  $t_z(\Gamma)$  são expressas em função da carga fictícia  $q(\Gamma^*)$ :

$$\begin{pmatrix} t_x^{(1)} \\ \vdots \\ t_x^{(N)} \\ t_z^{(1)} \\ \vdots \\ t_z^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{cxx}^{(1,1)} & \dots & t_{cxx}^{(1,N)} & | & t_{cxz}^{(1,1)} & \dots & t_{cxz}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{cxx}^{(N,1)} & \dots & t_{cxx}^{(N,N)} & | & t_{cxz}^{(N,1)} & \dots & t_{cxz}^{(N,N)} \\ \hline t_{czz}^{(1,1)} & \dots & t_{czz}^{(1,N)} & | & t_{czz}^{(1,1)} & \dots & t_{czz}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{czz}^{(N,1)} & \dots & t_{czz}^{(N,N)} & | & t_{czz}^{(N,1)} & \dots & t_{czz}^{(N,N)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_x^{(1)} \\ \vdots \\ q_x^{(N)} \\ q_z^{(1)} \\ \vdots \\ q_z^{(N)} \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

onde  $t_{cxk}^{(i,j)}$  e  $t_{czk}^{(i,j)}$ ,  $k = x, z$  são obtidas das funções de influência das tensões por:

$$\begin{aligned} t_{cxk}^{(i,j)} &= n_x^{(i)} \sigma_{cxzk}^{(i,j)} + n_z^{(i)} \sigma_{cxzk}^{(i,j)} \\ t_{czk}^{(i,j)} &= n_x^{(i)} \sigma_{czzk}^{(i,j)} + n_z^{(i)} \sigma_{czzk}^{(i,j)}, \quad k = x, z \end{aligned} \quad (7.18)$$

Nesta equação  $n_x^{(i)}$  e  $n_z^{(i)}$  são as componentes horizontal e vertical do vetor  $\mathbf{n}^{(i)}$  normal à superfície do elemento  $i$ . Para os elementos  $i$  situados na superfície lateral esquerda da interface solo-fundação  $\mathbf{n} = (1, 0)$ , conforme mostrado na figura 7.37. Para os elementos  $i$  situados na base  $\mathbf{n} = (0, -1)$  e para os elementos situados na face esquerda  $\mathbf{n} = (-1, 0)$ .

A equação (7.17) pode também ser escrita simplesmente como:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{q} \quad (7.19)$$

A matriz  $\mathbf{T}$  é chamada de matriz de influência das tensões.

Os elementos das diagonais das submatrizes que compõem  $\mathbf{T}$  merecem atenção especial. Isto porque as componentes  $\sigma_{cxzx}$  e  $\sigma_{czzz}$  das funções de

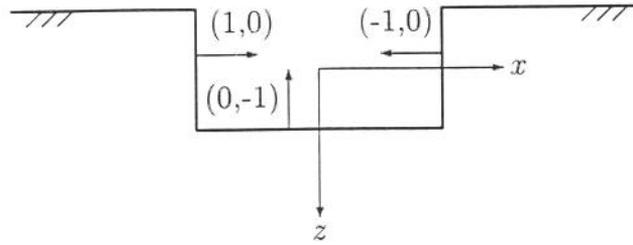


Figura 7.37: Vetores  $\mathbf{n}$  normais à superfície  $\Gamma^*$ .

influência para carga uniforme distribuída horizontalmente e as componentes  $\sigma_{cxx}$  e  $\sigma_{czz}$  das funções de influência para carga uniforme distribuída verticalmente apresentam um salto unitário nos pontos sob a carga distribuída. Assim, por exemplo, para um elemento  $i$  situado na base da fundação  $t_{cxx}^{(i,i)} = -\sigma_{cxx}^{(i,i)}$  e  $t_{czz}^{(i,i)} = -\sigma_{czz}^{(i,i)}$ . Estas duas componentes das funções de influência apresentam uma descontinuidade no ponto onde a carga é aplicada. Deve-se nestes casos tomar o limite da função de influência para o ponto de observação se aproximando do ponto da aplicação da carga vindo de dentro do domínio  $\Omega$ . Dessa forma para estes elementos  $t_{cxx}^{(i,i)} = -\lim_{z \rightarrow z^{(i)+} } \sigma_{czz}^{(i,i)}$  e  $t_{czz}^{(i,i)} = -\lim_{z \rightarrow z^{(i)+} } \sigma_{czz}^{(i,i)}$ . O valor de  $t_{cxx}^{(i,i)}$  e de  $t_{czz}^{(i,i)}$  dos elementos  $i$  situados na base dependem da profundidade de engastamento  $b$  da fundação (e também das constantes físicas do solo e da frequência). Para  $b = 0$  (fundação apoiada na superfície)  $t_{cxx}^{(i,i)} = t_{czz}^{(i,i)} = 1$ , enquanto que quando  $b \rightarrow \infty$ ,  $t_{cxx}^{(i,i)} = t_{czz}^{(i,i)} = 1/2$ . Este último resultado se deve ao fato de o caso de uma carga uniforme horizontal aplicada no interior de um meio infinito ser simétrico em relação ao eixo horizontal  $x$ . Dessa forma o salto unitário fica igualmente distribuído nos dois lados da superfície de aplicação da carga.

Para os elementos situados nas laterais da fundação esta última observação é válida sempre. O caso de uma carga uniforme distribuída ao longo de uma superfície vertical no interior de um meio elástico semi-infinito é simétrico em relação ao eixo vertical  $z$ . Assim para todos estes elementos  $t_{cxx}^{(i,i)} = t_{czz}^{(i,i)} = 1/2$ .

Para os termos  $t_{czz}^{(i,i)}$  e  $t_{cxx}^{(i,i)}$  da matriz de influência  $\mathbf{T}$  não ocorrem descontinuidades nas funções de influência envolvidas. Para os elementos situados na base da fundação estes termos são nulos, enquanto que para os elementos situados nas faces laterais seus valores dependem da profundidade do elemento.

### 7.5.4 Compatibilidade cinemática

Os deslocamentos  $u(\Gamma)$  e  $w(\Gamma)$  ao longo da interface solo-fundação devem satisfazer às condições de rigidez da estrutura. Assim, para qualquer elemento  $i$  os deslocamentos horizontal  $u^{(i)}$  e vertical  $w^{(i)}$  serão dados por (ver figura 7.37):

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= u_0 + \varphi_0 z^{(i)} \\ w^{(i)} &= w_0 - \varphi_0 x^{(i)} \end{aligned} \quad (7.20)$$

onde  $u_0$ ,  $w_0$  e  $\varphi_0$  são os deslocamentos horizontal, vertical e giro do ponto de referência da fundação, aqui tomado no centro geométrico da parte enterrada da fundação, e  $x^{(i)}$  e  $z^{(i)}$  são as coordenadas horizontal e vertical do centro do elemento  $i$  em relação a este ponto de referência, tomado como origem do sistema de coordenadas.

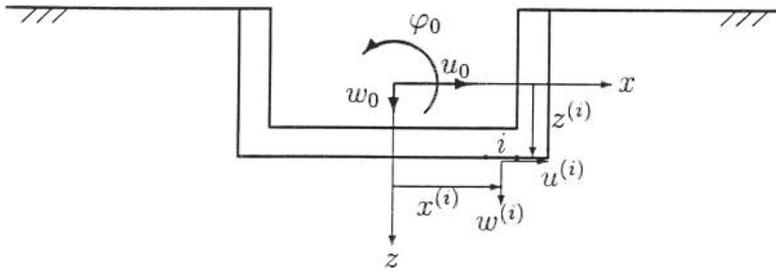


Figura 7.38: Deslocamentos ao longo da interface solo-fundação.

As equações (7.20) podem ser colocadas na forma matricial expressa por:

$$\begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(N)} \\ w^{(1)} \\ \vdots \\ w^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & z^{(1)}/a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & z^{(N)}/a \\ 1 & 0 & -x^{(1)}/a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -x^{(N)}/a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ a\varphi_0 \end{Bmatrix} \quad (7.21)$$

ou simplesmente:

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{u}_0 \quad (7.22)$$

### 7.5.5 Equilíbrio de forças

As tensões  $t(\Gamma)$  devem equilibrar o sistema de forças externas aplicadas sobre a fundação. Assim, considerando que  $t$  é constante ao longo de cada elemento  $j$ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{j=1}^N t_x^{(j)} l^{(j)} \\ F_z &= \sum_{j=1}^N t_z^{(j)} l^{(j)} \\ M_y &= \sum_{j=1}^N \left( t_x^{(j)} l^{(j)} z^{(j)} - t_z^{(j)} l^{(j)} x^{(j)} \right) \end{aligned} \quad (7.23)$$

onde  $l^{(j)}$  é o comprimento do elemento  $j$ . Estas equações podem ser colocadas na forma matricial:

$$\mathbf{f} = \mathbf{D}\mathbf{t} \quad (7.24)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y/a \end{Bmatrix} \\ \mathbf{D} &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & l^{(1)} & \dots & l^{(N)} \\ l^{(1)} & \dots & l^{(N)} & 0 & \dots & 0 \\ l^{(1)}z^{(1)}/a & \dots & l^{(N)}z^{(N)}/a & -l^{(1)}x^{(1)}/a & \dots & -l^{(N)}x^{(N)}/a \end{array} \right] \\ \mathbf{t} &= \begin{Bmatrix} t_x^{(1)} \\ \vdots \\ t_x^{(N)} \\ t_z^{(1)} \\ \vdots \\ t_z^{(N)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.25)$$

Vale a pena notar que aqui foi também necessária a adoção de uma função aproximadora, agora em relação à tensão  $t(\Gamma)$ . Assim para este tipo de problema são necessárias duas aproximações.

### 7.5.6 Sistema de equações global

As equações expressas pelos conjuntos (7.15), (7.17), (7.21) e (7.24) podem ser reunidas num único sistema de equações global. Para isto combinam-se

estes conjuntos em:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{q} - \mathbf{C}\mathbf{u}_0 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{DT}\mathbf{q} &= \mathbf{f} \end{aligned} \quad (7.26)$$

Estas equações são então reunidas em:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{DT} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (7.27)$$

A solução deste sistema fornece a carga fictícia  $t$  e os deslocamentos globais  $u_0$ ,  $w_0$  e  $\varphi_0$ . Com o valor da carga fictícia podem-se calcular os deslocamentos e tensões em qualquer ponto do domínio  $\Omega$ .

### 7.5.7 Matriz de flexibilidade

Para se obter a matriz de flexibilidade  $\mathbf{N}(\omega)$  do conjunto solo-fundação, impõem-se separadamente componentes unitárias para o carregamento externo e determina-se para cada uma dessas componentes o vetor de deslocamentos da estrutura  $\mathbf{u}_0$ . Obtem-se assim a relação:

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ a\varphi_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & N_{ux} & N_{um} \\ 0 & N_{\varphi x} & N_{\varphi m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y/a \end{Bmatrix} \quad (7.28)$$

É importante notar que o valor das componentes da matriz de flexibilidade depende do ponto de referência adotado na aplicação do carregamento e na determinação dos deslocamentos. Assim, caso se adote um ponto de referência  $O'$  deslocado  $\Delta_z$  na direção vertical em relação à referência original  $O$ , e em  $O'$  se aplicar o carregamento externo dado por  $F'_z$ ,  $F'_x$  e  $M'_y$ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} F_z &= F'_z \\ F_x &= F'_x \\ M_y &= M'_y + \Delta_z F'_x \end{aligned} \quad (7.29)$$

Além disso, os deslocamentos tomados em relação aos dois pontos de referência estão relacionados por:

$$\begin{aligned} w_0 &= w'_0 \\ u_0 &= u'_0 - \varphi'_0 \Delta_z \\ \varphi_0 &= \varphi'_0 \end{aligned} \quad (7.30)$$

Utilizando-se estas relações pode-se concluir que os deslocamentos tomados em relação a  $O'$  estão relacionados ao carregamento aplicado neste ponto por:

$$\begin{Bmatrix} w'_0 \\ u'_0 \\ a\varphi'_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N'_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & N'_{ux} & N'_{um} \\ 0 & N'_{\varphi x} & N'_{\varphi m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F'_z \\ F'_x \\ M'_y/a \end{Bmatrix} \quad (7.31)$$

onde:

$$\begin{aligned} N'_{wz} &= N_{wz} \\ N'_{ux} &= N_{ux} + \Delta_z (N_{um} + N_{\varphi x}) + \Delta_z^2 N_{\varphi m} \\ N'_{\varphi m} &= N_{\varphi m} \\ N'_{um} &= N_{um} + \Delta_z N_{\varphi m} \\ N'_{\varphi x} &= N_{\varphi x} + \Delta_z N_{\varphi m} \end{aligned} \quad (7.32)$$

Como para os termos de acoplamento  $N_{um} = N_{\varphi x}$ , também  $N'_{um} = N'_{\varphi x}$  para qualquer valor de  $\Delta_z$ . Além disso, pode-se deduzir que se  $N_{um}/N_{\varphi m}$  for real, haverá um valor de  $\Delta_z$  para o qual  $N'_{um}$  e  $N'_{\varphi x}$  se anulam, o que leva ao desacoplamento completo das relações entre as componentes da carga externa e as componentes do deslocamento da fundação.

### 7.5.8 Resultados numéricos

Para se verificar a convergência dos resultados obtidos com o MSE com o aumento na discretização da interface solo-fundação, toma-se como referência uma fundação rígida com razão de engastamento  $b/a = 1$ , apoiada em um meio elástico isotrópico com  $\nu = 0,4$  e  $\nu = 0,01$ . São analisados os resultados para os valores da frequência  $a_0 = 0,5; 1,0$  e  $1,5$ . A discretização é feita de tal forma que o comprimento dos elementos ao longo das faces laterais e ao longo da base da fundação seja igual para todos eles. Assim o número de elementos na base  $N_H$  é o dobro do número de elementos ao longo de cada face lateral  $N_V$ .

Nas tabelas 7.3 a 7.5 estão apresentados os valores numéricos das componentes da matriz de flexibilidade normalizada  $\mathbf{N}^*(\omega)$  em função da discretização adotada. Verifica-se que a convergência dos valores com o refinamento da discretização é mais rápido para a parte imaginária do que para a parte real das componentes da flexibilidade. Verifica-se também que as componentes vertical  $N^*_{wz}$  e horizontal  $N^*_{ux}$  apresentam uma convergência mais rápida que as outras componentes. As componentes do acoplamento  $N^*_{um}$  e  $N^*_{\varphi x}$  que teóricamente deveriam ser iguais entre si apresentam uma diferença que

Tabela 7.3: Componentes da matriz de flexibilidade normalizada  $N^*(\omega)$  para fundação engastada com  $b/a = 1$ , em um material isotrópico ( $\nu = 0,4$ ,  $\nu = 0,01$ ) para vários números de elementos  $N$ . ( $a_0 = 0,5$ .)

$N_H \times N_V$	$N_{wz}^*$	$N_{ux}^*$	$N_{\varphi m}^*$	$N_{um}^*$	$N_{\varphi x}^*$
$4 \times 2$	0,143 -0,243i	0,157 -0,228i	0,206 -0,0468i	-0,0315 +0,0201i	-0,0277 +0,0174i
$6 \times 3$	0,140 -0,240i	0,154 -0,226i	0,194 -0,0452i	-0,0293 +0,0193i	-0,0270 +0,0173i
$8 \times 4$	0,138 -0,239i	0,152 -0,224i	0,189 -0,0442i	-0,0282 +0,0177i	-0,0270 +0,0171i
$12 \times 6$	0,137 -0,236i	0,151 -0,223i	0,184 -0,0436i	-0,0274 +0,0180i	-0,0267 +0,0170i
$16 \times 8$	0,136 -0,236i	0,150 -0,221i	0,181 -0,0431i	-0,0271 +0,0171i	-0,0266 +0,0169i
$20 \times 10$	0,136 -0,235i	0,150 -0,221i	0,180 -0,0430i	-0,0270 +0,0174i	-0,0265 +0,0169i

diminui com o refinamento da discretização. Pode-se perceber que os resultados numéricos já são aceitáveis a partir da discretização  $8 \times 4$  e se tornam mais consistentes a partir da discretização  $12 \times 6$ .

Valores das componentes de  $N^*(\omega)$  obtidos pelo MSE para um material isotrópico com  $\nu = 0,25$  e  $\nu = 0,01$  estão apresentados nas tabelas 7.6 a 7.8 juntamente com resultados apresentados por Wang e Rajapakse [84]. Nestas tabelas estão apresentados valores obtidos para  $b/a = 0,25$ ;  $0,5$  e  $1$ ; e para  $a_0 = 0,5$ ;  $1,0$  e  $1,5$ . Os resultados apresentados no trabalho de Wang e Rajapakse [84] foram obtidos pela aplicação de uma formulação indireta do MEC em que uma série de cargas concentradas são aplicadas no interior do semi-espaco elástico ao longo de uma superfície auxiliar externa a  $\Gamma^*$  (interface solo-estrutura) e situada a uma pequena distância desta superfície. Da comparação entre os resultados obtidos pelos dois processos pode-se verificar que há uma boa concordância entre eles para os três valores de  $b/a$  e de  $a_0$  apresentados. Apenas as componentes do acoplamento  $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$  não apresentam boa concordância. Isto se deve principalmente à ordem de grandeza destas componentes que as tornam mais sensíveis às diferenças entre os métodos.

A fim de apreciar a influência do engastamento nos resultados obtidos pelo MSE na análise de fundações rígidas engastadas são tomados como

Tabela 7.4: Componentes da matriz de flexibilidade normalizada  $N^*(\omega)$  para fundação engastada com  $b/a = 1$ , em um material isotrópico ( $\nu = 0,4$ ,  $v = 0,01$ ) para vários números de elementos  $N$ . ( $a_0 = 1,0$ .)

$N_H \times N_V$	$N_{wz}^*$	$N_{ux}^*$	$N_{\varphi m}^*$	$N_{um}^*$	$N_{\varphi x}^*$
$4 \times 2$	0,0395 -0,161i	0,0623 -0,163i	0,170 -0,105i	-0,0218 +0,0198i	-0,0178 +0,0176i
$6 \times 3$	0,0384 -0,156i	0,0605 -0,161i	0,158 -0,0999i	-0,0198 +0,0181i	-0,0175 +0,0174i
$8 \times 4$	0,0378 -0,156i	0,0597 -0,159i	0,153 -0,0976i	-0,0190 +0,0174i	-0,0174 +0,0173i
$12 \times 6$	0,0373 -0,155i	0,0590 -0,158i	0,149 -0,0957i	-0,0182 +0,0172i	-0,0173 +0,0172i
$16 \times 8$	0,0372 -0,154i	0,0585 -0,157i	0,147 -0,0947i	-0,0179 +0,0171i	-0,0172 +0,0171i
$20 \times 10$	0,0370 -0,153i	0,0583 -0,157i	0,145 -0,0942i	-0,0177 +0,0171i	-0,0172 +0,0161i

Tabela 7.5: Componentes da matriz de flexibilidade normalizada  $N^*(\omega)$  para fundação engastada com  $b/a = 1$ , em um material isotrópico ( $\nu = 0,4$ ,  $v = 0,01$ ) para vários números de elementos  $N$ . ( $a_0 = 1,5$ .)

$N_H \times N_V$	$N_{wz}^*$	$N_{ux}^*$	$N_{\varphi m}^*$	$N_{um}^*$	$N_{\varphi x}^*$
$4 \times 2$	0,0111 -0,109i	0,0263 -0,122i	0,117 -0,124i	-0,0157 +0,0202i	-0,0118 +0,0165i
$6 \times 3$	0,0111 -0,107i	0,0253 -0,120i	0,108 -0,117i	-0,0143 +0,0180i	-0,0117 +0,0166i
$8 \times 4$	0,0111 -0,106i	0,0249 -0,118i	0,104 -0,114i	-0,0136 +0,0173i	-0,0116 +0,0166i
$12 \times 6$	0,0110 -0,105i	0,0245 -0,118i	0,101 -0,111i	-0,0128 +0,0169i	-0,0115 +0,0166i
$16 \times 8$	0,0110 -0,104i	0,0243 -0,117i	0,0989 -0,110i	-0,0124 +0,0167i	-0,0115 +0,0165i
$20 \times 10$	0,0110 -0,104i	0,0243 -0,117i	0,0980 -0,109i	-0,0124 +0,0166i	-0,0115 +0,0165i

Tabela 7.6: Comparação entre os valores das componentes da matriz de flexibilidade obtidos pelo MSE e por Wang e Rajapakse para um material isotrópico ( $\nu = 0,25$ ,  $b/a = 0,25$ ,  $N_H = 16$ ,  $N_V = 2$ )

$a_0$		$N_{wz}^*$	$N_{ux}^*$	$N_{\varphi m}^*$	$N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$
0,5	MSE	(0,24; -0,31)	(0,29; -0,32)	(0,39; -0,07)	(-0,06; 0,06)
	Ref. [84]	(0,22; -0,31)	(0,28; -0,31)	(0,39; -0,06)	(0,01; -0,04)
1,0	MSE	(0,09; -0,23)	(0,14; -0,25)	(0,36; -0,18)	(-0,02; 0,05)
	Ref. [84]	(0,09; -0,23)	(0,14; -0,24)	(0,35; -0,18)	(0,03; -0,03)
1,5	MSE	(0,04; -0,17)	(0,08; -0,20)	(0,27; -0,24)	(0,00; 0,04)
	Ref. [84]	(0,04; -0,17)	(0,09; -0,19)	(0,26; -0,24)	(0,03; 0,00)

Tabela 7.7: Comparação entre os valores das componentes da matriz de flexibilidade obtidos pelo MSE e por Wang e Rajapakse para um material isotrópico ( $\nu = 0,25$ ,  $b/a = 0,50$ ,  $N_H = 16$ ,  $N_V = 4$ )

$a_0$		$N_{wz}^*$	$N_{ux}^*$	$N_{\varphi m}^*$	$N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$
0,5	MSE	(0,21; -0,30)	(0,23; -0,29)	(0,31; -0,06)	(-0,05; 0,04)
	Ref. [84]	(0,19; -0,29)	(0,22; -0,27)	(0,30; -0,06)	(-0,03; -0,03)
1,0	MSE	(0,07; -0,21)	(0,11; -0,22)	(0,26; -0,15)	(-0,02; 0,04)
	Ref. [84]	(0,07; -0,21)	(0,11; -0,20)	(0,26; -0,14)	(-0,05; 0,00)
1,5	MSE	(0,03; -0,15)	(0,06; -0,17)	(0,19; -0,19)	(-0,01; 0,03)
	Ref. [84]	(0,03; -0,15)	(0,07; -0,16)	(0,18; -0,18)	(-0,04; 0,02)

Tabela 7.8: Comparação entre os valores das componentes da matriz de flexibilidade obtidos pelo MSE e por Wang e Rajapakse para um material isotrópico ( $\nu = 0,25$ ,  $b/a = 1,0$ ,  $N_H = 16$ ,  $N_V = 8$ )

$a_0$		$N_{wz}^*$	$N_{ux}^*$	$N_{\varphi m}^*$	$N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$
0,5	MSE	(0,16; -0,27)	(0,16; -0,26)	(0,20; -0,05)	(-0,04; 0,03)
	Ref. [84]	(0,15; -0,27)	(0,17; -0,23)	(0,19; -0,05)	(-0,06; -0,01)
1,0	MSE	(0,05; -0,18)	(0,07; -0,18)	(0,15; -0,10)	(-0,02; 0,03)
	Ref. [84]	(0,05; -0,18)	(0,08; -0,17)	(0,15; -0,10)	(-0,06; 0,02)
1,5	MSE	(0,02; -0,12)	(0,03; -0,13)	(0,10; -0,12)	(-0,01; 0,03)
	Ref. [84]	(0,02; -0,12)	(0,05; -0,13)	(0,11; -0,11)	(-0,04; 0,03)

exemplo fundações com razão de engastamento  $b/a$  variando entre  $b/a = 0$  (fundação na superfície) e  $b/a = 2$ . Nas figuras 7.39 a 7.42 estão mostrados gráficos onde são representadas as componentes da matriz de flexibilidade normalizada  $N^*$  em função da frequência normalizada  $a_0$ . Estão mostradas curvas pra razões de engastamento  $b/a = 0; 0,1; 0,5; 1$  e  $2$ . Os resultados para  $b/a = 0$  foram obtidos utilizando-se o Método da Superposição com 16 elementos de igual comprimento ao longo da interface solo-fundação. Para as outras curvas empregaram-se respectivamente 1, 2, 4 e 8 elementos de igual comprimento ao longo de cada face lateral da fundação e 8 elementos, também de igual comprimento, ao longo da base. Nestes gráficos estão representados os resultados correspondentes a um solo isotrópico com coeficiente de Poisson  $\nu = 0,4$  e taxa de amortecimento interno  $\nu = 0,01$ .

Os resultados obtidos mostram que o aumento na razão de engastamento  $b/a$  provoca uma diminuição nas amplitudes dos deslocamentos provocados pelo carregamento externo. Este efeito é mais acentuado na componente  $N_{\varphi m}$  e menos acentuado em  $N_{wz}$ . As curvas correspondentes a  $b/a = 0$  e  $b/a = 0,1$  se mostram bastante próximas indicando uma boa convergência entre os dois métodos de análise (MS e MSE). As componentes do acoplamento  $N_{um} = N_{\varphi x}$  diminuem (em valor absoluto) com o aumento de  $b/a$ . Deve-se lembrar que foi utilizado como ponto de referência para a aplicação da carga e para medida dos deslocamentos da fundação o centro geométrico da seção. Caso este ponto fosse localizado na superfície superior, haveria um crescimento nas componentes do acoplamento com o aumento de  $b/a$ .

Nas figuras 7.43 a 7.46 são apresentados gráficos que representam as componentes de  $N^*$  em função de  $a_0$  para as mesmas razões de engastamento  $b/a$ , mas agora para um solo transversalmente isotrópico com  $c_{11}/c_{44} = 6$ ;  $n_1 = 1,5$  e  $n_3 = 0,8$ . A taxa de amortecimento utilizada é a mesma do material isotrópico ( $\nu = 0,01$ ). Para estes gráficos pode-se fazer as mesmas observações feitas para o material isotrópico. Uma comparação do comportamento dos dois materiais revela, no entanto, que há alguma diferença entre eles, quanto à flexibilidade. Em geral as componentes da matriz de flexibilidade indicam menores amplitudes nos deslocamentos da fundação engastada no material anisotrópico aqui analisado quando comparados aos deslocamentos da fundação engastada no meio isotrópico. Apenas a componente horizontal  $N_{ux}$  se mostra praticamente idêntica nos dois casos. Isto se deve ao fato de que os dois materiais têm o mesmo valor de  $c_{11}/c_{44}$ .

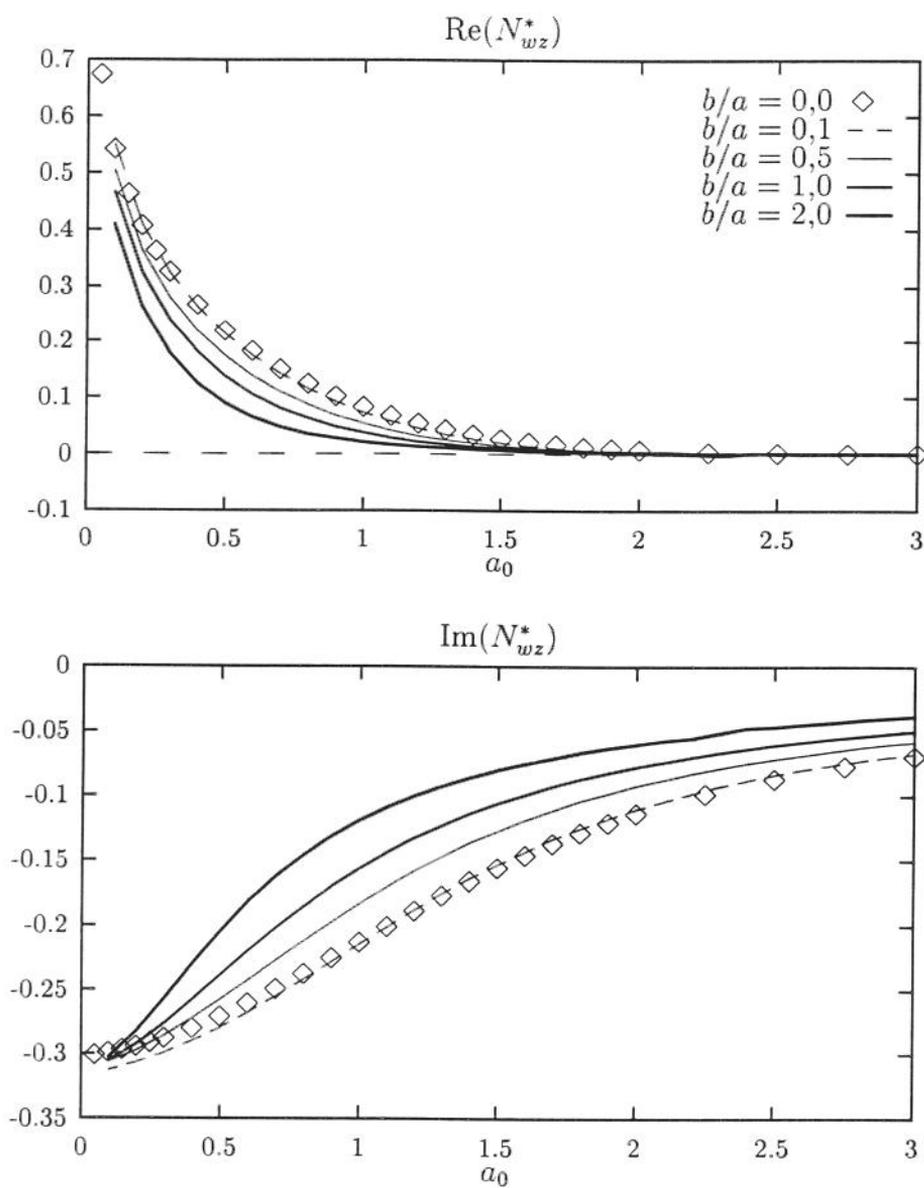


Figura 7.39: Componente normalizada  $N_{wz}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito isotrópico

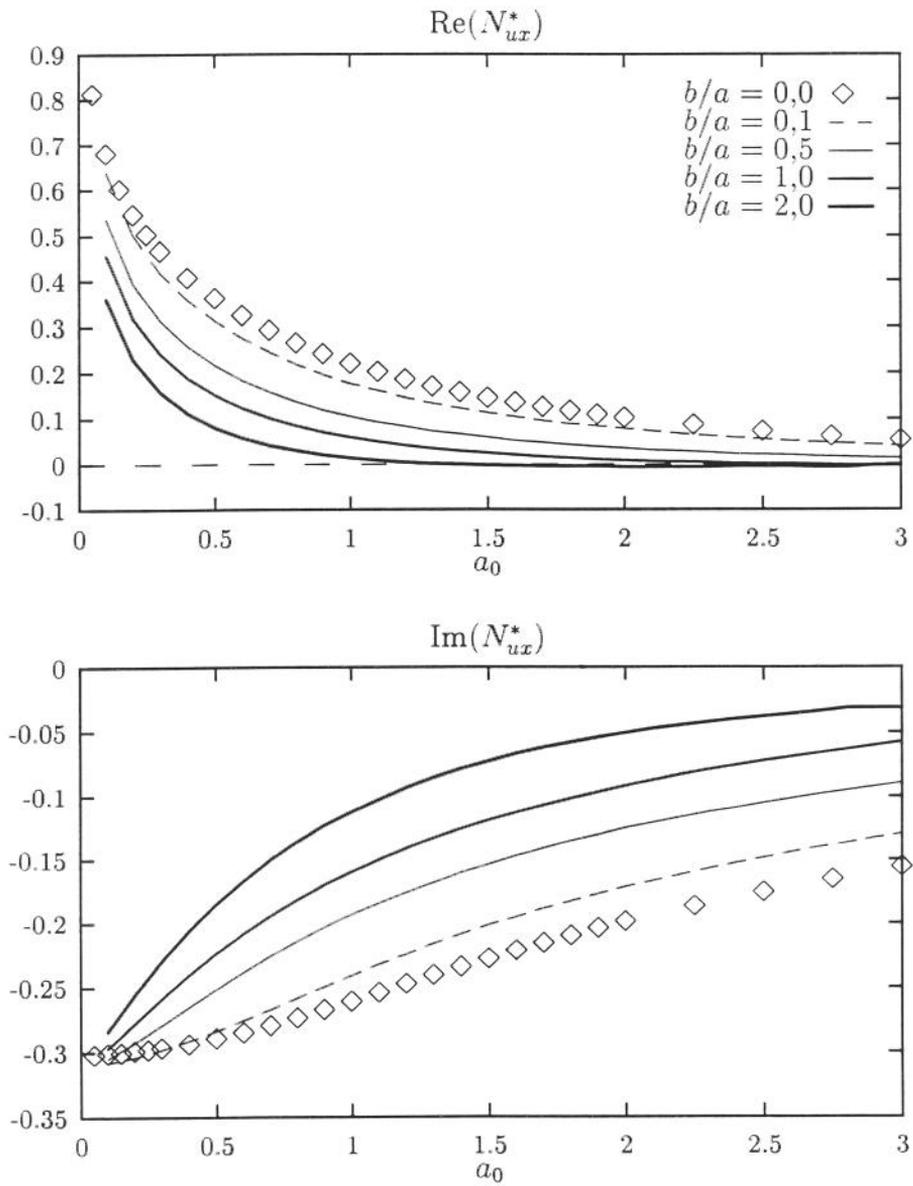


Figura 7.40: Componente normalizada  $N_{ux}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito isotrópico

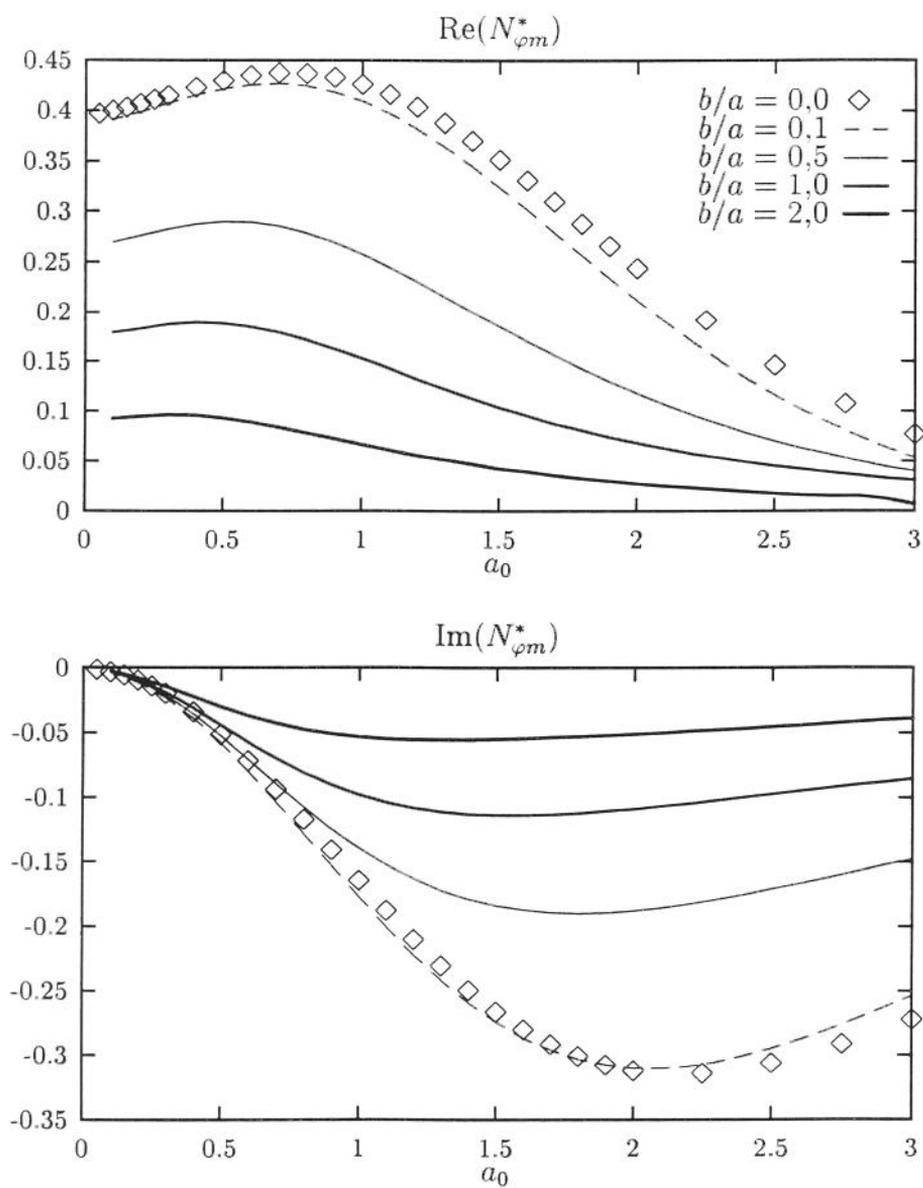


Figura 7.41: Componente normalizada  $N_{\varphi m}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito isotrópico

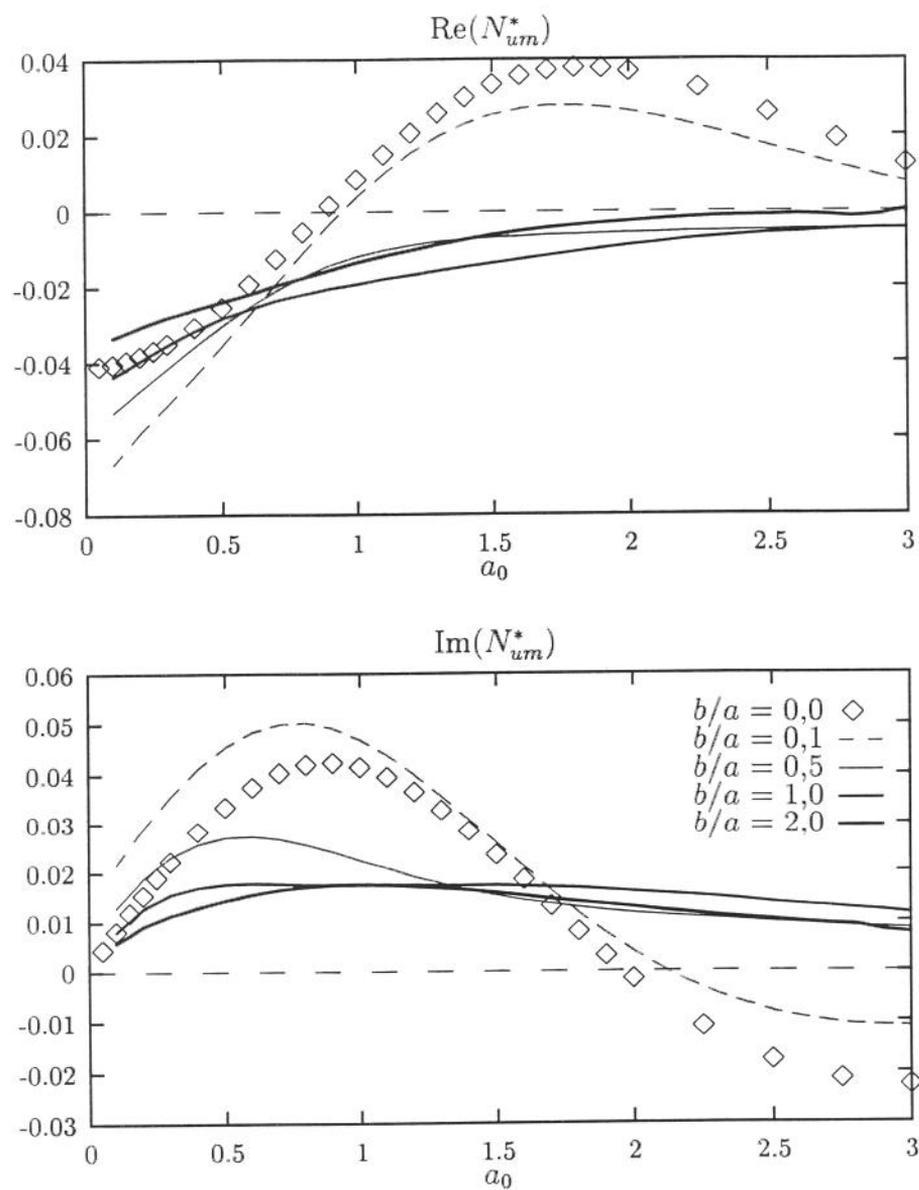


Figura 7.42: Componente normalizada  $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito isotrópico

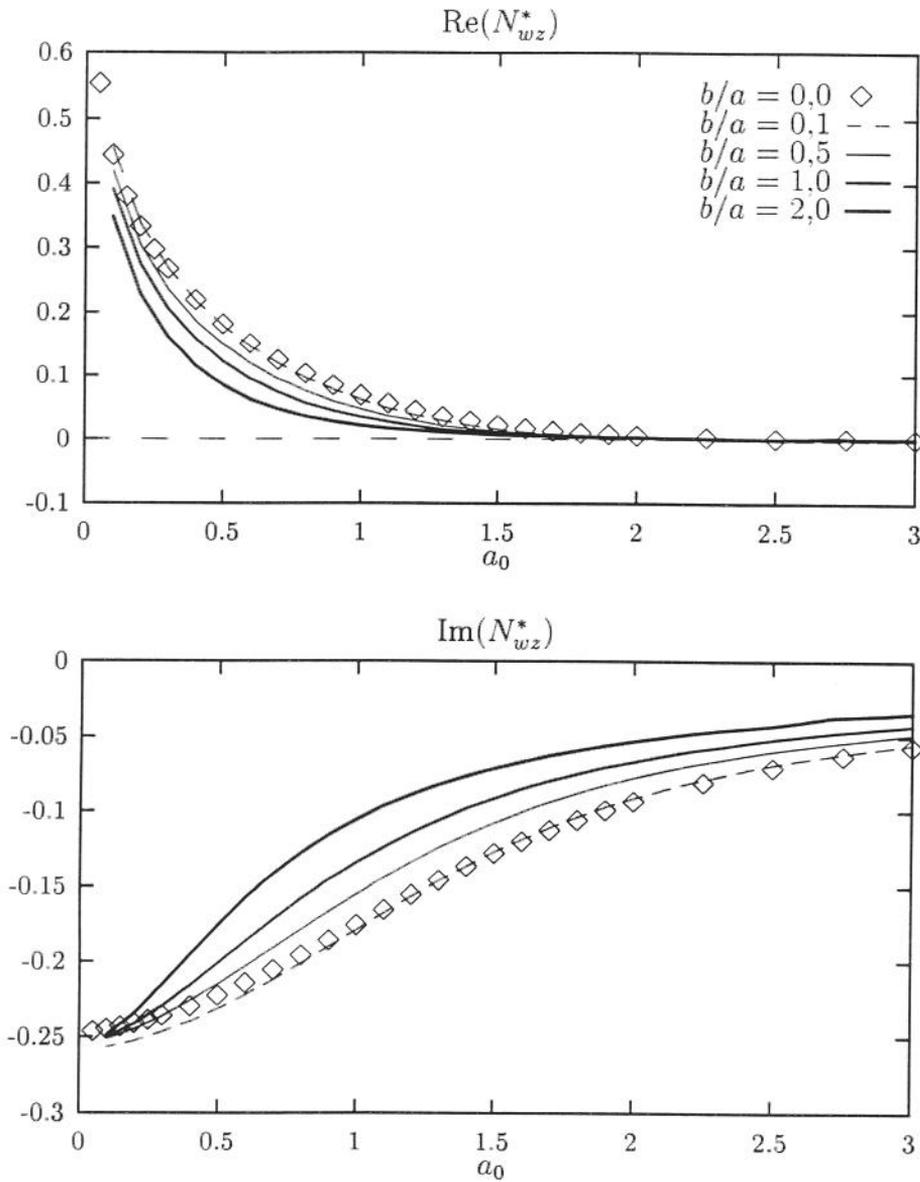


Figura 7.43: Componente normalizada  $N_{wz}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ ).

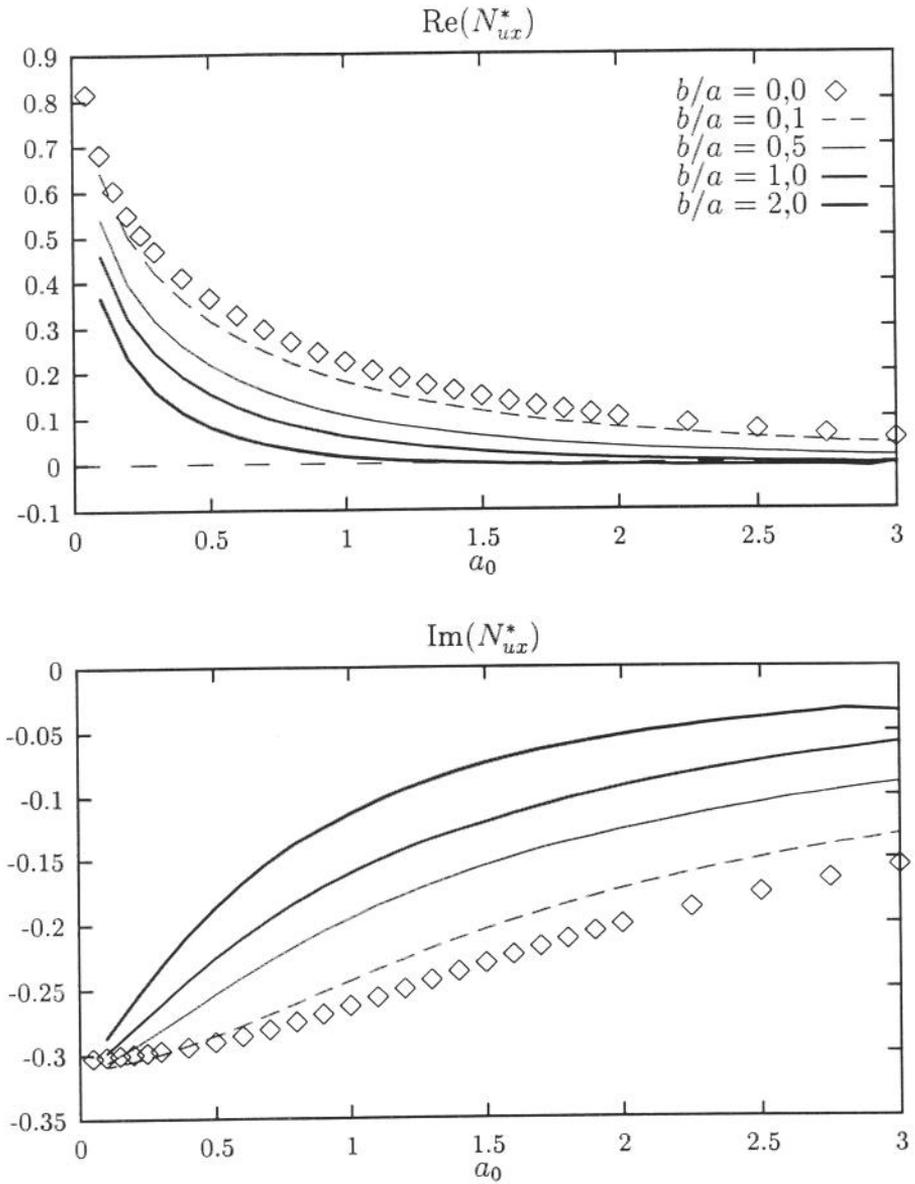


Figura 7.44: Componente normalizada  $N_{ux}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ )

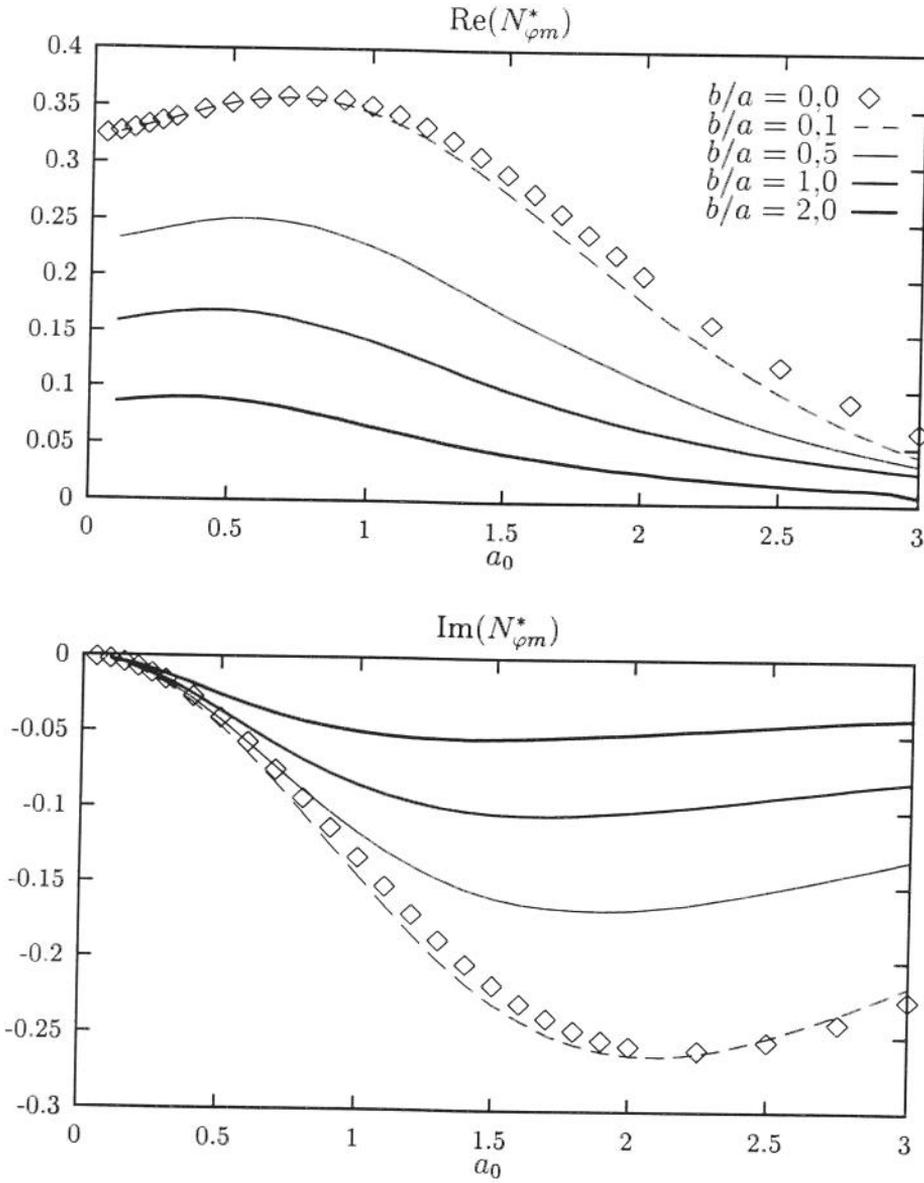


Figura 7.45: Componente normalizada  $N_{\varphi m}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ )

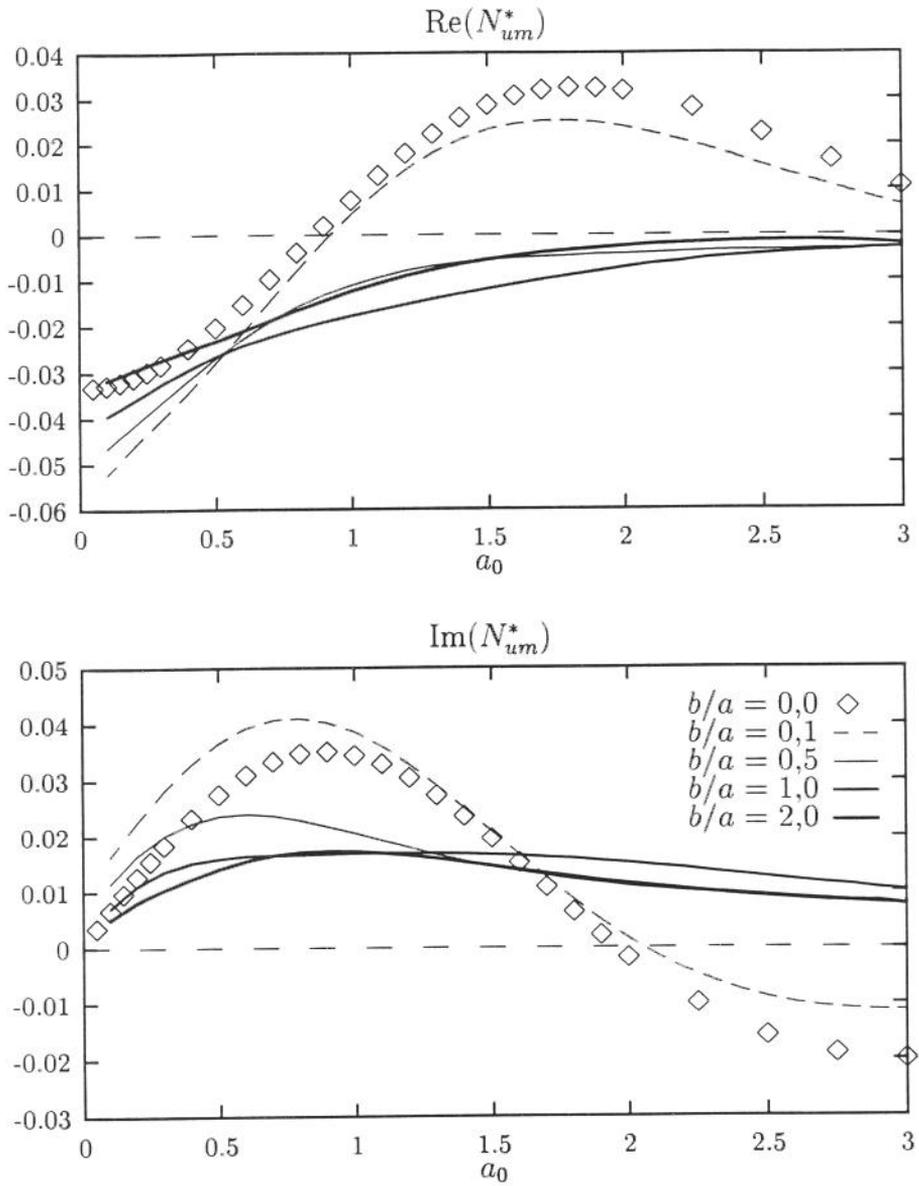


Figura 7.46: Componente normalizada  $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para fundação engastada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ )

### 7.6 Estruturas rígidas enterradas

O mesmo método apresentado no item anterior (MSE) pode ser utilizado na análise de estruturas rígidas de seção retangular enterradas num semi-espaco elástico transversalmente isotrópico sob a ação de cargas dinâmicas, como por exemplo túneis e galerias enterrados à pequena profundidade (ver figura 7.47).

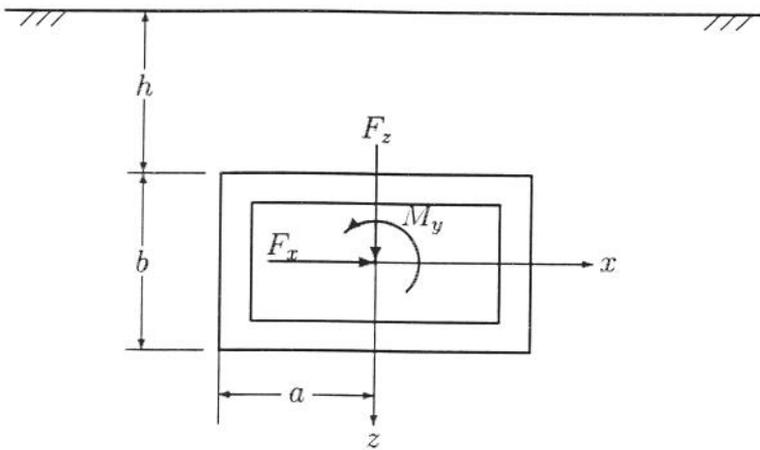


Figura 7.47: Estrutura rígida enterrada em um meio semi-infinito

Para este caso, além dos elementos nas laterais e na base da estrutura, adicionam-se elementos no topo. Para estes elementos o vetor normal  $\mathbf{n} = (0,1)$ . Na determinação das componentes das diagonais das submatrizes que compõem a matriz de influência das tensões  $\mathbf{T}$  para estes elementos deve-se tomar os limites  $t_{cxx}^{(i,i)} = \lim_{z \rightarrow z^{(i)-}} \sigma_{cxx}^{(i,i)}$  e  $t_{czz}^{(i,i)} = \lim_{z \rightarrow z^{(i)-}} \sigma_{czz}^{(i,i)}$ .

A figura 7.48 mostra esquemas do problema original e do problema auxiliar utilizado nesta aplicação da formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno para a solução deste tipo de problema.

O método de solução, então, segue os mesmos passos do processo empregado na solução de fundações semi-enterradas do item anterior.

A matriz de flexibilidade  $\mathbf{N}(\omega)$  deste tipo de estrutura também é dada por:

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ a\varphi_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & N_{ux} & N_{um} \\ 0 & N_{\varphi x} & N_{\varphi m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y/a \end{Bmatrix} \tag{7.33}$$

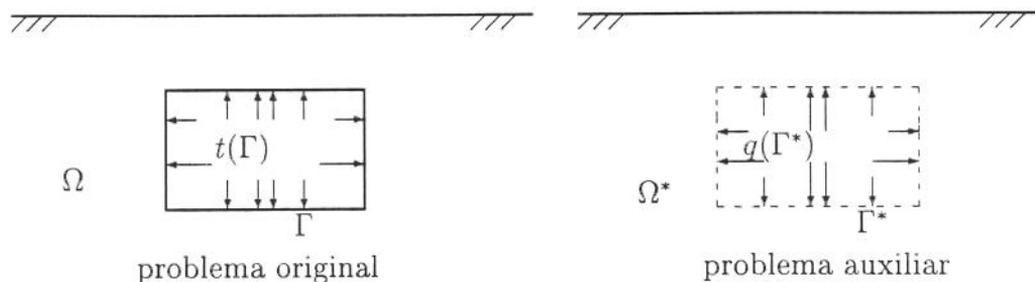


Figura 7.48: Problemas original e auxiliar para a análise da estrutura enterrada

para um ponto de referência adotado no centro geométrico da seção da estrutura.

Nas figuras 7.49 a 7.52 estão mostrados gráficos que representam a variação das componentes da matriz de flexibilidade normalizada  $N^*$  em função da frequência normalizada  $a_0$  para uma estrutura rígida de seção retangular com  $b/a = 1$  enterrada em um meio elástico isotrópico ( $\nu = 0,4$  e  $\nu = 0,01$ ). São apresentadas curvas correspondentes a valores de  $h/a = 0 ; 0,5; 1; 2; 5$  e  $h/a \rightarrow \infty$ . Os resultados referentes a  $h/a = 0$  foram obtidos pelo processo descrito no item anterior para fundações engastadas utilizando-se 4 elementos de igual comprimento nas faces laterais e 8 elementos, também de igual comprimento, ao longo da base da estrutura. Para as outras curvas foram utilizados 4 elementos nas faces laterais e 8 elementos ao longo do topo e da base da estrutura. Para o caso de  $h/a \rightarrow \infty$  foi também utilizado o método aqui descrito com a diferença de que as funções de influência empregadas no cálculo são as desenvolvidas para cargas aplicadas no interior do meio elástico infinito.

Pela análise dos gráficos observa-se que a transição das curvas de  $h/a = 0$  para  $h/a \rightarrow \infty$  se dá de uma forma bastante singular, variável com a frequência. À medida que  $h/a$  aumenta, as curvas passam a “ondular” em torno da curva de  $h/a \rightarrow \infty$ , exibindo estas ondulações períodos cada vez menores. Este comportamento talvez se deva às ondas refletidas pela superfície livre acima da estrutura. A diminuição do efeito destas ondas com a profundidade depende da taxa de amortecimento interno  $\nu$  do material. No caso analisado esta taxa é muito pequena, o que faz com que o efeito da superfície livre se faça sentir até profundidades maiores. O efeito de  $h/a$  é mais acentuado em  $N_{\varphi m}$  e menos acentuado em  $N_{wz}$ . À medida que aumenta a profundidade da estrutura as amplitudes dos deslocamentos di-

minuem. Quanto à componente do acoplamento  $N_{um} = N_{\varphi x}$ , esta diminui com a profundidade e torna-se nula quando  $h/a \rightarrow \infty$ .

Nas figuras 7.53 a 7.56 estão apresentados gráficos que mostram a variação das componentes de  $\mathbf{N}^*$  com  $a_0$  para uma estrutura rígida de seção retangular com as mesmas características que a anterior, apenas utilizando-se um solo transversalmente isotrópico com  $c_{11}/c_{44} = 6$ ,  $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$  e  $\nu = 0,01$ . Foi utilizada aqui a mesma discretização do contorno e o mesmo método de análise empregados no caso isotrópico. Pode-se verificar que o comportamento das componentes de  $\mathbf{N}^*$  para este caso é inteiramente similar ao caso anterior. O efeito da anisotropia se mostra quando se comparam as curvas e se percebe que, como no caso de fundações engastadas, as amplitudes dos deslocamentos são menores no material anisotrópico, com a exceção da componente  $N_{ux}$  que se mostra praticamente igual nos dois casos para qualquer valor de  $h/a$ . Aqui também a explicação para este comportamento é a mesma do item anterior, ou seja, os valores de  $c_{11}/c_{44}$  tanto para o material isotrópico quanto para o material anisotrópico analisado são os mesmos.

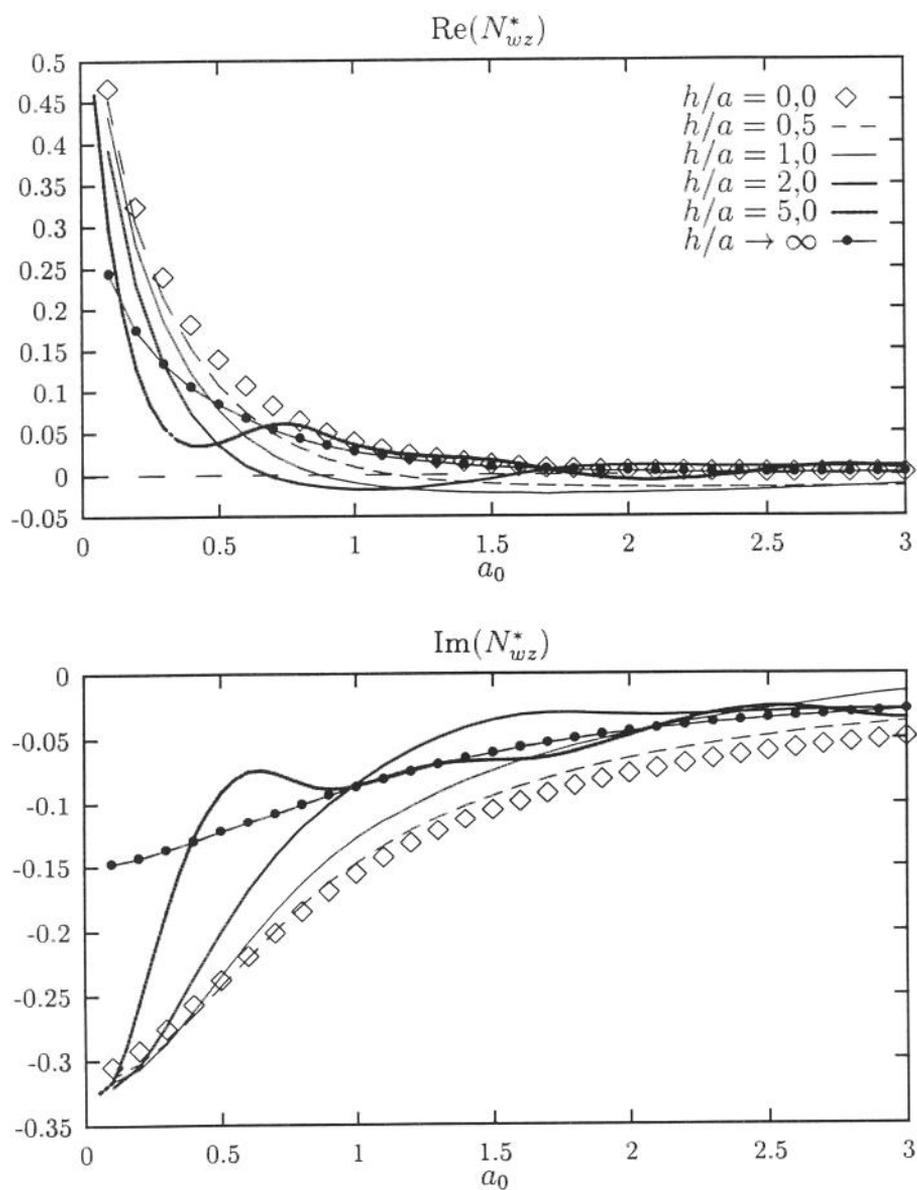


Figura 7.49: Componente normalizada  $N_{wz}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito isotrópico

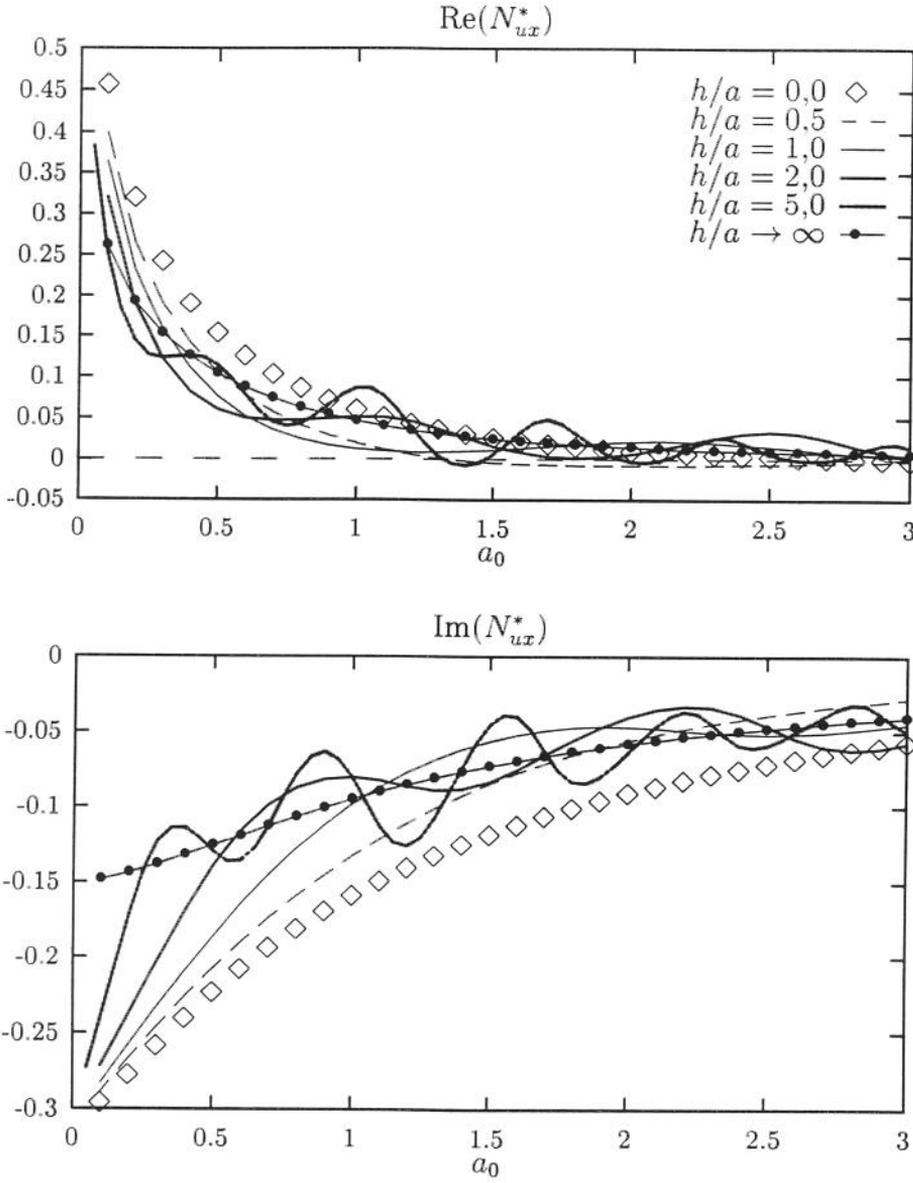


Figura 7.50: Componente normalizada  $N_{ux}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito isotrópico

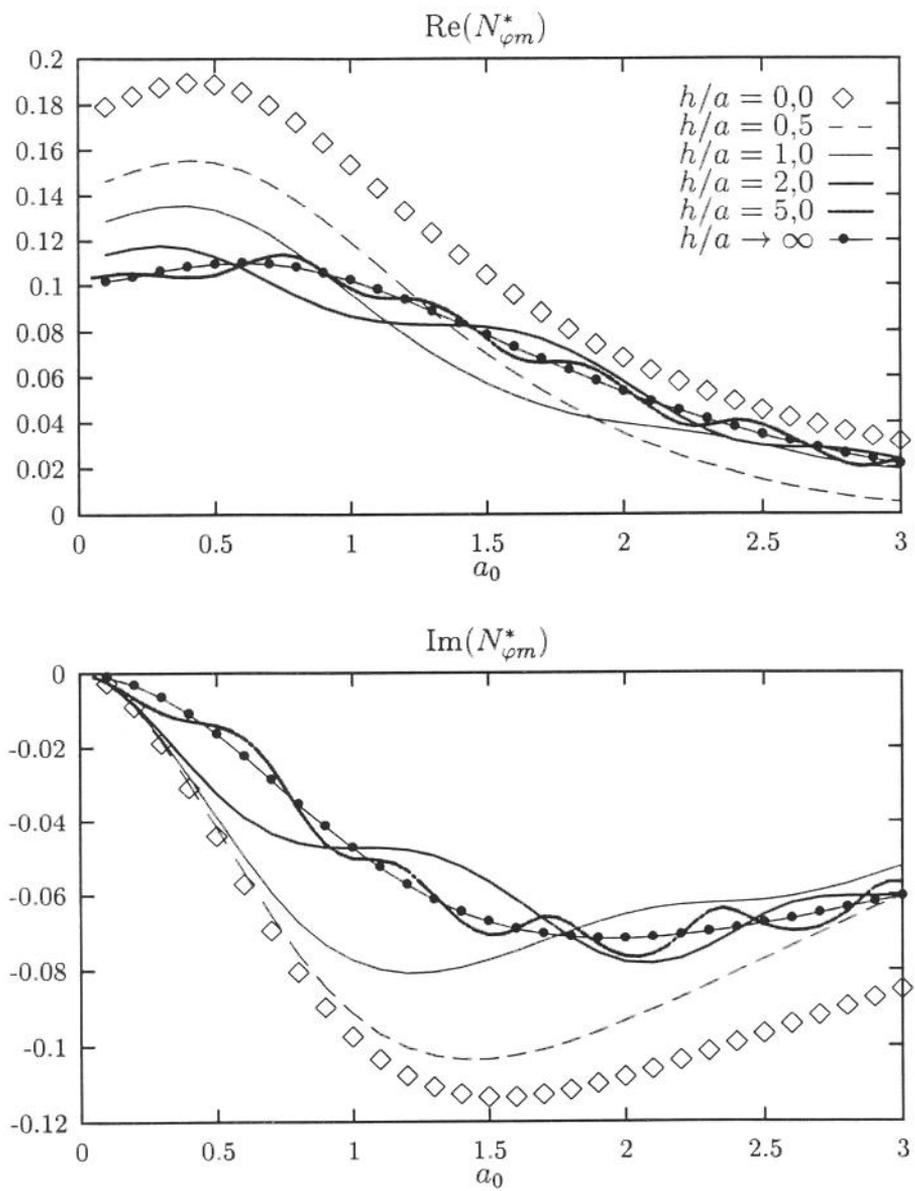


Figura 7.51: Componente normalizada  $N_{\varphi m}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito isotrópico

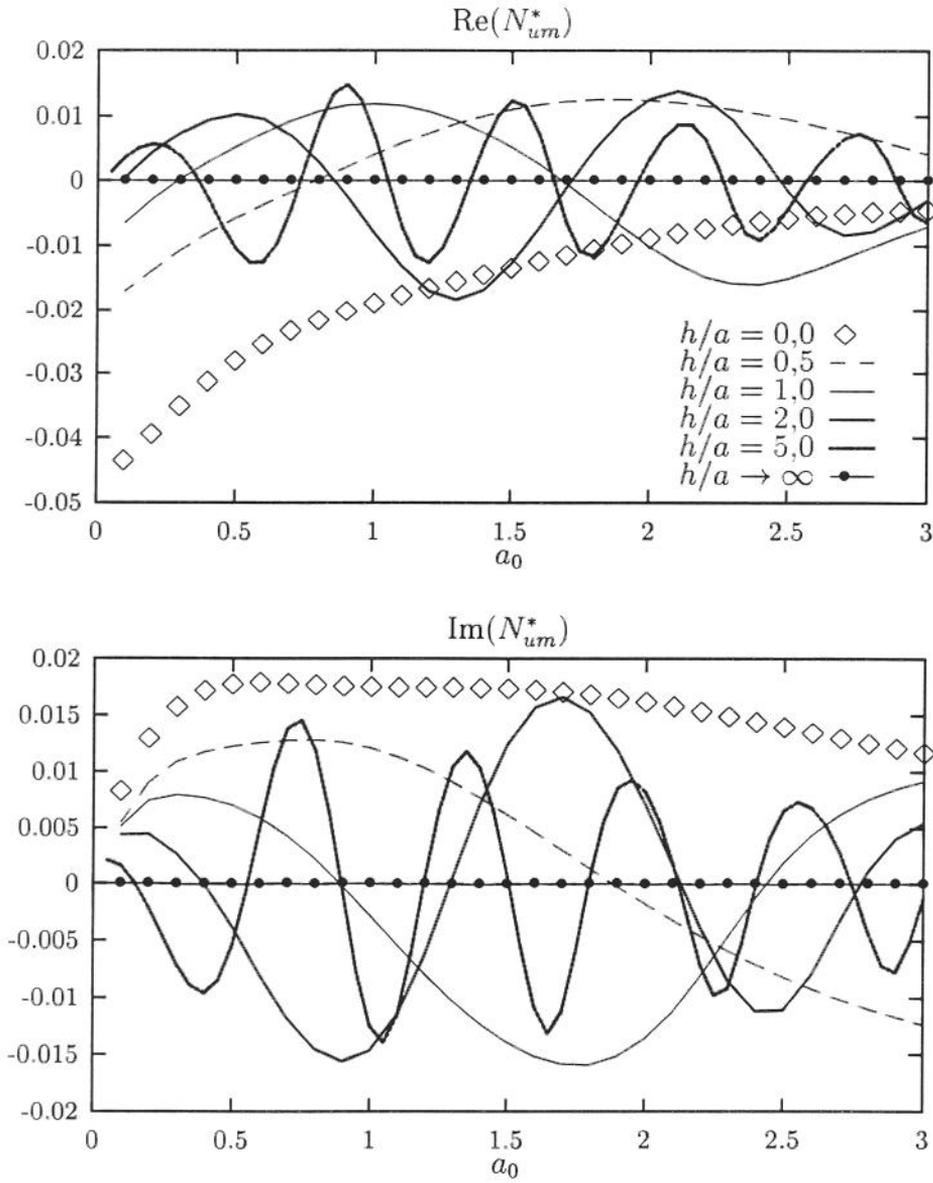


Figura 7.52: Componente normalizada  $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito isotrópico

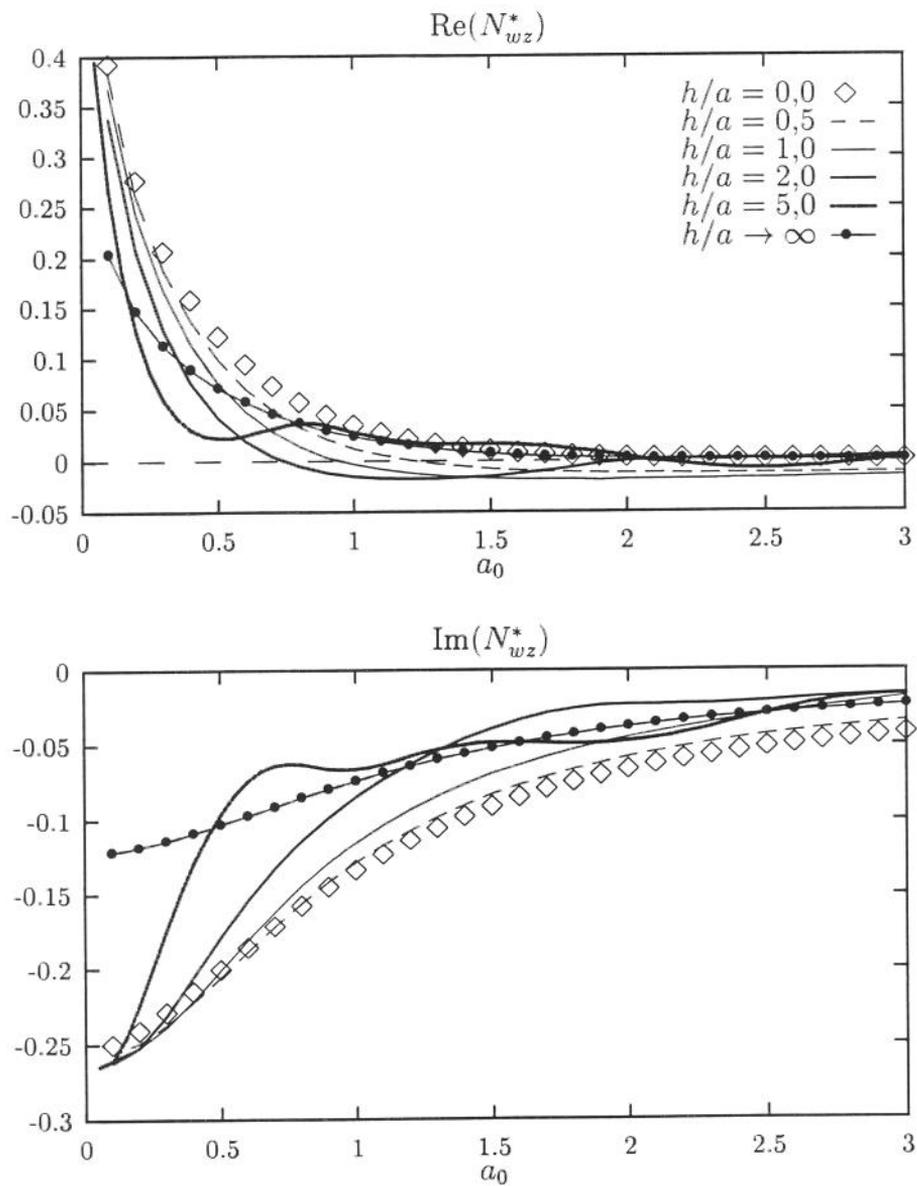


Figura 7.53: Componente normalizada  $N_{wz}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ ).

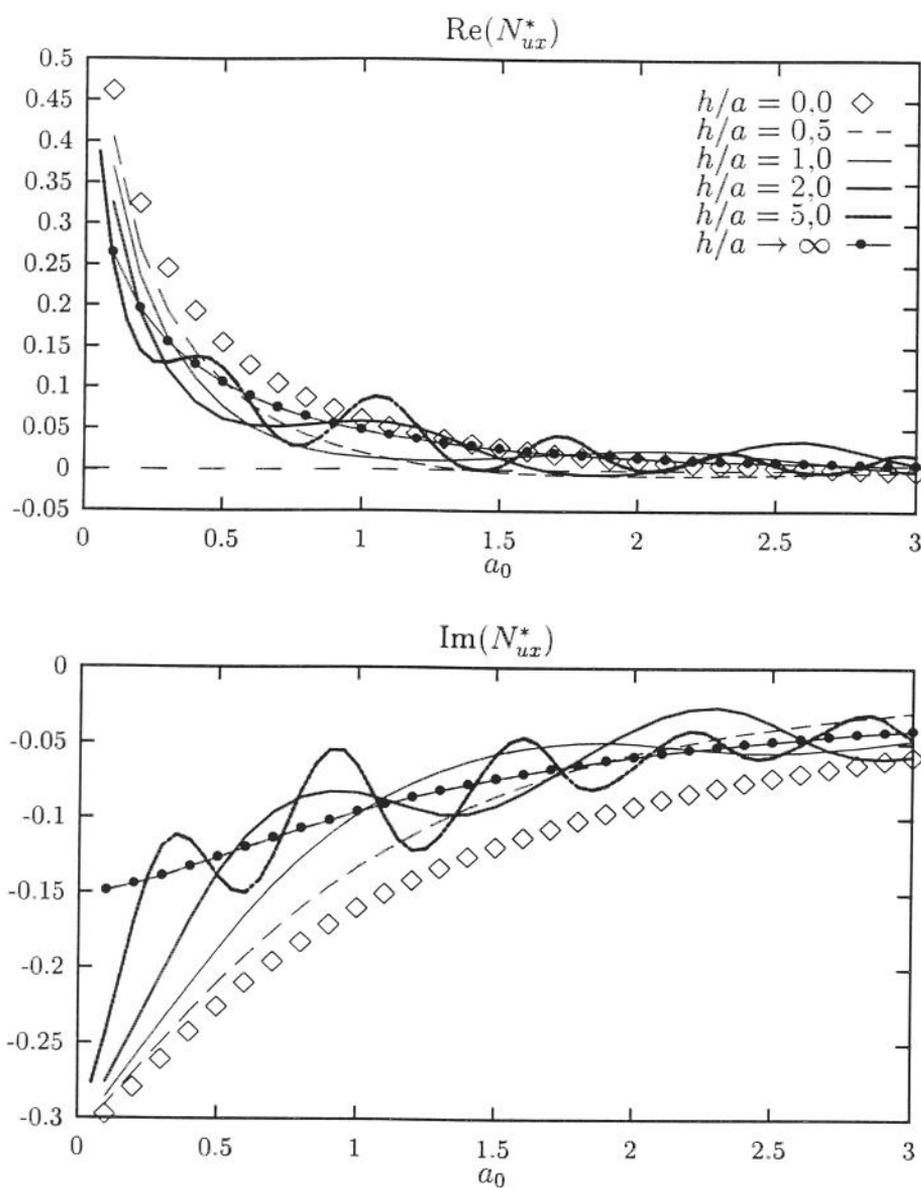


Figura 7.54: Componente normalizada  $N_{ux}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ )

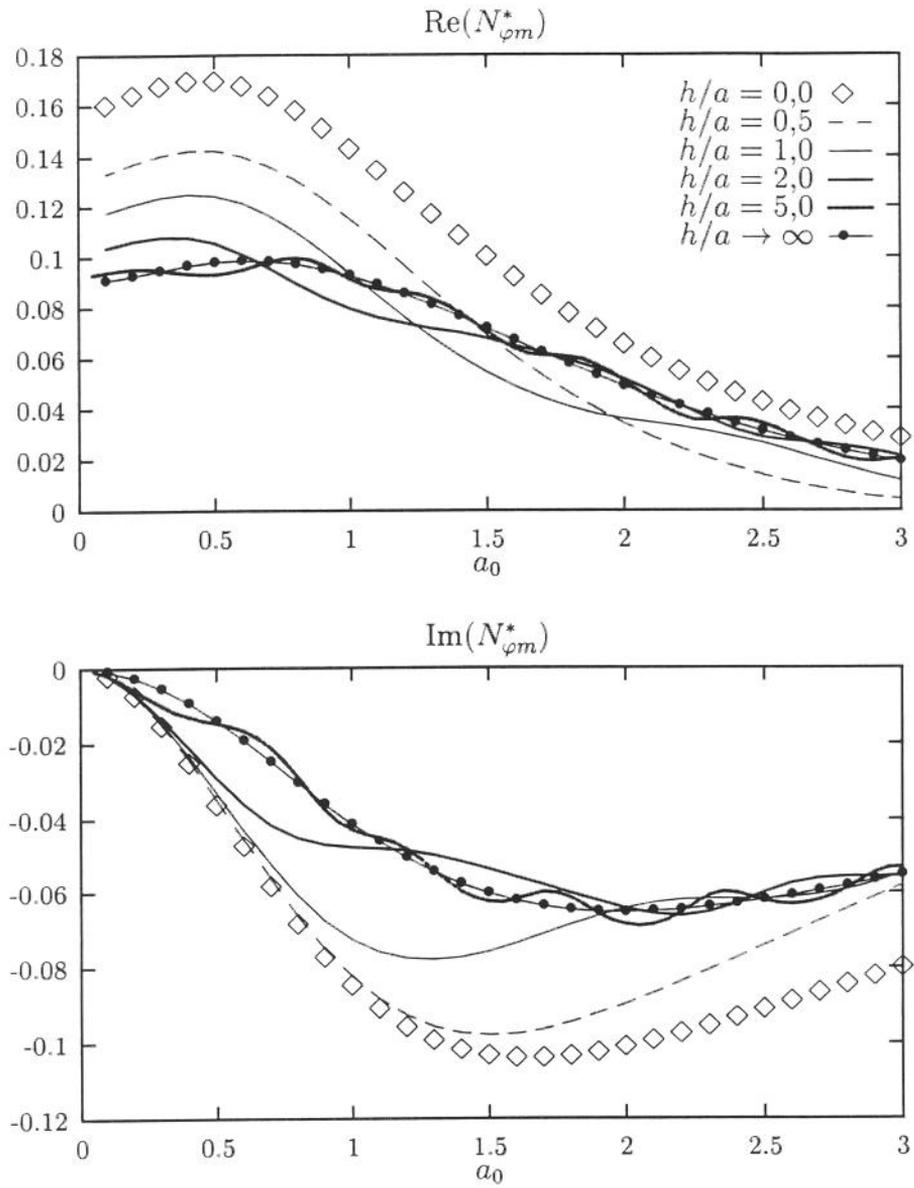


Figura 7.55: Componente normalizada  $N_{\varphi m}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ )

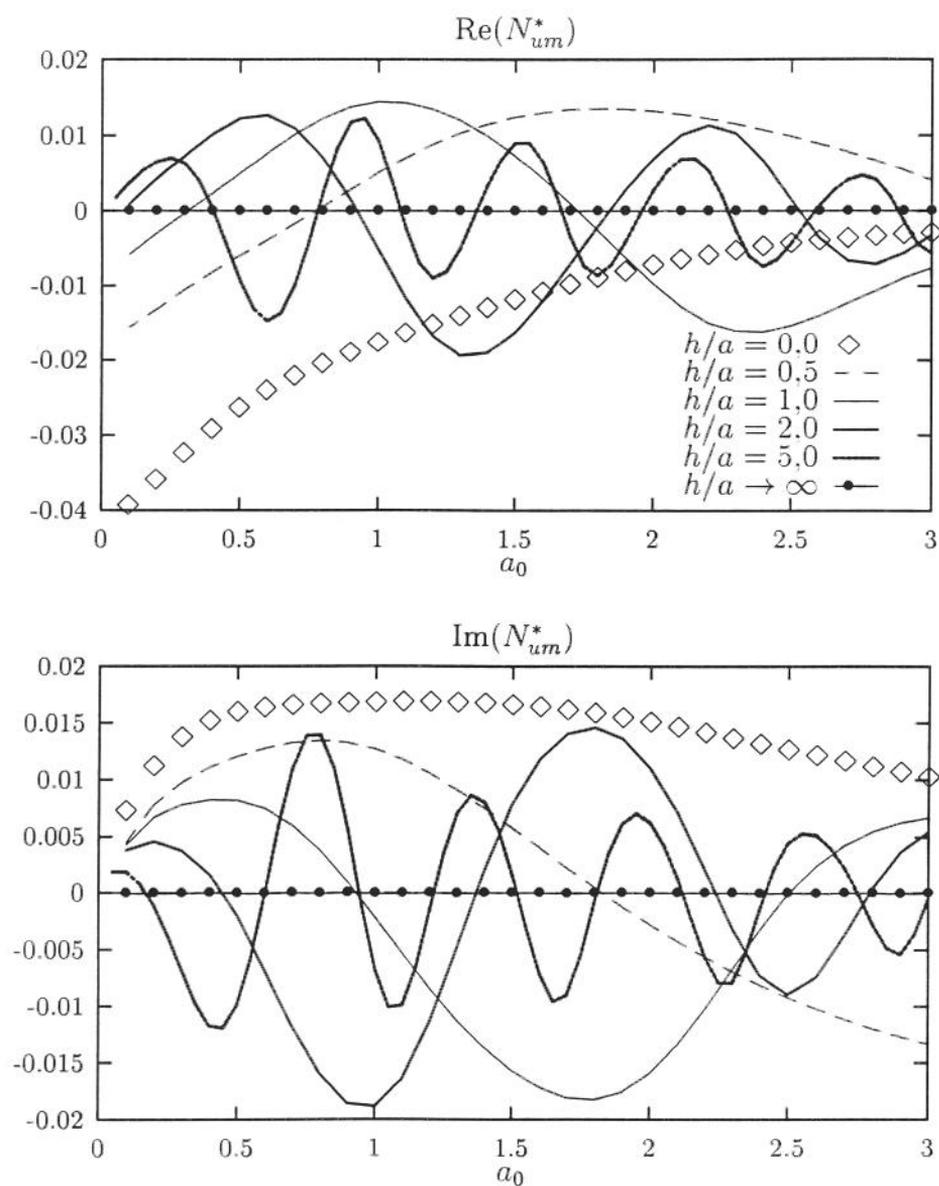


Figura 7.56: Componente normalizada  $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$  da matriz de flexibilidade dinâmica para estrutura enterrada em meio semi-infinito anisotrópico ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_3 = 0,8$ )

## 7.7 Utilização do MEC-D com estruturas rígidas

### 7.7.1 Definição do problema

Para a solução de problemas de valor de contorno que envolvam a interação de estruturas rígidas com meios elásticos, em que a geometria desta estrutura, ou a geometria do contorno do meio elástico tenham características mais gerais do que as descritas nos itens anteriores, deve-se recorrer a métodos de análise de caráter também mais geral. Um desses métodos pode ser obtido como um acoplamento da formulação direta do Método dos Elementos de Contorno descrito no capítulo anterior com a análise do equilíbrio de corpos rígidos.

Aqui deseja-se determinar tensões e deslocamentos em um domínio  $\Omega$  composto de um material elástico transversalmente isotrópico, devido a tensões e deslocamentos impostos ao longo do seu contorno  $\Gamma$ . O contorno  $\Gamma$  pode ser dividido em três partes (não necessariamente contínuas)  $\Gamma_t$ ,  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_r$ , conforme mostrado na figura 7.57.

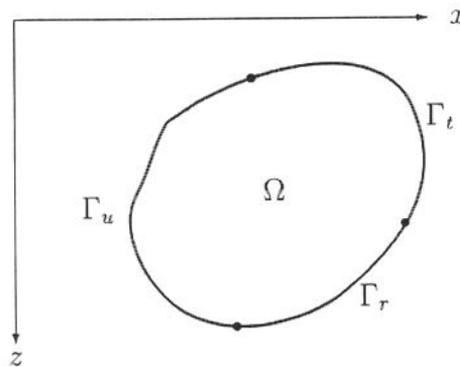


Figura 7.57: Partes  $\Gamma_t$ ,  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_r$  do contorno  $\Gamma$

Ao longo de  $\Gamma_t$  as tensões são impostas pelas condições de contorno e inicialmente conhecidas. Ao longo de  $\Gamma_u$  os deslocamentos são impostos. Ao longo de  $\Gamma_r$  os deslocamentos e tensões obedecem a condições de compatibilidade cinemática e de equilíbrio impostas por uma (ou mais) estrutura rígida sem massa sujeita a carregamentos externos.

### 7.7.2 Discretização

Cada uma das partes  $\Gamma_t$ ,  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_r$  do contorno  $\Gamma$  é dividida em elementos constituídos por segmentos retos e ao longo de cada elemento é adotada a função aproximadora constante para os deslocamentos  $u$  e para as tensões  $t$ . Da mesma forma que no capítulo 4 é adotado um sistema de coordenadas local  $n,s$  nas direções normal e tangencial de cada elemento. Dessa forma os deslocamentos  $u$  são expressos pelas suas componentes  $u_n$  e  $u_s$  e as tensões  $t$  são expressas pelas suas componentes  $t_n$  e  $t_s$  nas direções de  $n$  e de  $s$ . O número de elementos que formam cada uma das partes de  $\Gamma$  é  $N_t$ ,  $N_u$  e  $N_r$  de tal forma que o número total de elementos é  $N = N_t + N_u + N_r$ . São adotados nós em cada um dos elementos, situados no ponto central do elemento. As coordenadas de cada um desses nós em relação ao sistema de coordenadas global é  $x^{(i)}$  e  $z^{(i)}$ .

### 7.7.3 Matrizes de influência

Com esta discretização pode-se obter uma versão matricial da equação geral do teorema da reciprocidade dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{tt} & \mathbf{A}_{tu} & \mathbf{A}_{tr} \\ \mathbf{A}_{ut} & \mathbf{A}_{uu} & \mathbf{A}_{ur} \\ \mathbf{A}_{rt} & \mathbf{A}_{ru} & \mathbf{A}_{ru} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_u \\ \mathbf{u}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{tt} & \mathbf{B}_{tu} & \mathbf{B}_{tr} \\ \mathbf{B}_{ut} & \mathbf{B}_{uu} & \mathbf{B}_{ur} \\ \mathbf{B}_{rt} & \mathbf{B}_{ru} & \mathbf{B}_{ru} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_t \\ \mathbf{t}_u \\ \mathbf{t}_r \end{Bmatrix} \quad (7.34)$$

Os elementos  $\mathbf{A}_{ij}$  e  $\mathbf{B}_{ij}$  da equação acima são submatrizes que expressam a influência nas tensões e deslocamentos dos elementos do contorno  $\Gamma_j$  devidos a cargas aplicadas nos elementos do contorno  $\Gamma_i$ . Por sua vez os elementos  $\mathbf{u}_i$  e  $\mathbf{t}_i$  são subvetores que expressam os deslocamentos e tensões nos elementos do contorno  $\Gamma_i$ . As submatrizes  $\mathbf{A}_{ij}$  e  $\mathbf{B}_{ij}$  são determinadas pelo processo descrito no capítulo anterior, enquanto que  $\mathbf{t}_t$  e  $\mathbf{u}_u$  são impostos pelas condições de contorno.

Como  $\mathbf{t}_t$  e  $\mathbf{u}_u$  são conhecidos, é conveniente reescrever a equação (7.34) como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{tt} & -\mathbf{B}_{tu} & \mathbf{A}_{tr} \\ \mathbf{A}_{ut} & -\mathbf{B}_{uu} & \mathbf{A}_{ur} \\ \mathbf{A}_{rt} & -\mathbf{B}_{ru} & \mathbf{A}_{ru} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{t}_u \\ \mathbf{u}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{tt} & -\mathbf{A}_{tu} & \mathbf{B}_{tr} \\ \mathbf{B}_{ut} & -\mathbf{A}_{uu} & \mathbf{B}_{ur} \\ \mathbf{B}_{rt} & -\mathbf{A}_{ru} & \mathbf{B}_{ru} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_t \\ \mathbf{u}_u \\ \mathbf{t}_r \end{Bmatrix} \quad (7.35)$$

Dessa forma resta no segundo membro da equação como incógnita apenas o subvetor  $\mathbf{t}_r$ . Este é determinado impondo-se as condições de compatibilidade cinemática e de equilíbrio de forças.

### 7.7.4 Compatibilidade cinemática

Ao longo do contorno  $\Gamma_r$  os deslocamentos estão sujeitos a restrições de compatibilidade cinemática. Assim, como pode ser visto na figura 7.58, para cada elemento  $i$  desse contorno os deslocamentos  $u_n^{(i)}$  e  $u_s^{(i)}$  são dados por:

$$\begin{aligned} u_n^{(i)} &= w_0 \cos \theta^{(i)} + u_0 \sin \theta^{(i)} - \varphi_0 s_0^{(i)} \\ u_s^{(i)} &= -w_0 \sin \theta^{(i)} + u_0 \cos \theta^{(i)} + \varphi_0 n_0^{(i)} \end{aligned} \quad (7.36)$$

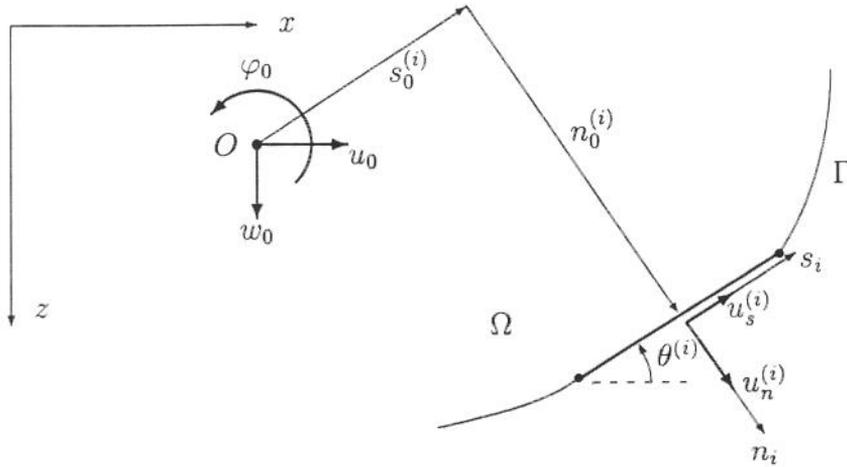


Figura 7.58: Deslocamentos  $u_n^{(i)}$  e  $u_s^{(i)}$  do elemento  $i$

Nas equações (7.36)  $w_0$ ,  $u_0$  e  $\varphi_0$  são os deslocamentos nas direções vertical, horizontal e giro globais dos elementos situados no contorno  $\Gamma_r$  em relação ao ponto de referência  $O$ . Além disso  $s_0^{(i)}$  e  $n_0^{(i)}$  são as coordenadas do nó do elemento  $i$  em relação ao ponto  $O$  segundo as direções  $s_i$  e  $n_i$  respectivamente, e são dadas por:

$$\begin{aligned} s_0^{(i)} &= (x^{(i)} - x_0) \cos \theta^{(i)} - (z^{(i)} - z_0) \sin \theta^{(i)} \\ n_0^{(i)} &= (x^{(i)} - x_0) \sin \theta^{(i)} + (z^{(i)} - z_0) \cos \theta^{(i)} \end{aligned} \quad (7.37)$$

Enumerando os elementos  $i$  ao longo de  $\Gamma_r$  de 1 a  $N_r$ , as equações (7.36)

podem ser escritos em forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} u_n^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(N_r)} \\ \hline u_s^{(1)} \\ \vdots \\ s_s^{(N_r)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta^{(1)} & \text{sen } \theta^{(1)} & -s_0^{(1)}/a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \theta^{(N_r)} & \text{sen } \theta^{(N_r)} & -s_0^{(N_r)}/a \\ \hline -\text{sen } \theta^{(1)} & \cos \theta^{(1)} & n_0^{(1)}/a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\text{sen } \theta^{(N_r)} & \cos \theta^{(N_r)} & n_0^{(N_r)}/a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ a\varphi_0 \end{Bmatrix} \quad (7.38)$$

onde  $a$  é uma dimensão característica qualquer da estrutura rígida. Esta equação pode também ser escrita simplesmente como:

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{C}\mathbf{u}_0 \quad (7.39)$$

Caso haja mais de uma estrutura rígida independente, haverá mais de um vetor  $\mathbf{u}_0$  e a matriz de compatibilidade  $\mathbf{C}$  deve, então ser determinada levando-se em conta o ponto de referência ao qual os deslocamentos do elemento  $i$  está vinculado.

Se, por exemplo, houver duas estruturas rígidas, dividem-se os elementos ao longo de  $\Gamma_r$  em dois grupos  $\Gamma_{r1}$  e  $\Gamma_{r2}$ , cada um deles restrito aos deslocamentos globais  $\mathbf{u}_{01}$  e  $\mathbf{u}_{02}$  de cada uma dessas estruturas. As equações de compatibilidade cinemática podem então ser escrita na forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{r1} \\ \mathbf{u}_{r2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{01} \\ \mathbf{u}_{02} \end{Bmatrix} \quad (7.40)$$

As matrizes de compatibilidade  $\mathbf{C}_1$  e  $\mathbf{C}_2$  são determinadas tomando-se para cada uma delas os pontos de referência  $O_1$  e  $O_2$  de cada uma das estruturas, respectivamente.

### 7.7.5 Equilíbrio

As tensões  $t_n^{(j)}$  e  $t_s^{(j)}$  nos elementos  $j$  ao longo do contorno  $\Gamma_r$  devem estar em equilíbrio com as forças externas  $F_z$ ,  $F_x$  e  $M_y$  aplicadas sobre a estrutura rígida, no ponto de referência  $O$  como mostrado na figura 7.59.

As condições de equilíbrio podem ser escritas como:

$$F_z = \sum_{j=1}^{N_r} (t_n^{(j)} \cos \theta^{(j)} - t_s^{(j)} \sin \theta^{(j)}) l^{(j)}$$

$$F_x = \sum_{j=1}^{N_r} (t_n^{(j)} \sin \theta^{(j)} + t_s^{(j)} \cos \theta^{(j)}) l^{(j)}$$

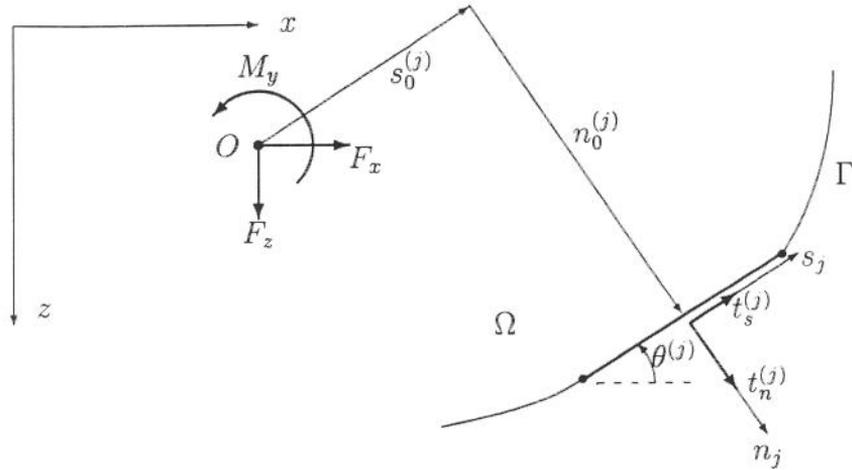


Figura 7.59: Tensões  $t_n^{(j)}$  e  $t_s^{(j)}$  que atuam no elemento  $j$

$$M_y = \sum_{j=1}^{N_r} \left( -t_n^{(j)} s_0^{(j)} + t_s^{(j)} n_0^{(j)} \right) l^{(j)} \quad (7.41)$$

onde  $l^{(j)}$  é o comprimento do elemento  $j$ .

Em forma matricial estas equações ficam:

$$\mathbf{f} = \mathbf{D} \mathbf{t}_r \quad (7.42)$$

onde

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y/a \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} l^{(1)} \cos \theta^{(1)} & \dots & l^{(N_r)} \cos \theta^{(N_r)} & -l^{(1)} \text{sen } \theta^{(1)} & \dots & -l^{(N_r)} \text{sen } \theta^{(N_r)} \\ l^{(1)} \text{sen } \theta^{(1)} & \dots & l^{(N_r)} \text{sen } \theta^{(N_r)} & l^{(1)} \cos \theta^{(1)} & \dots & l^{(N_r)} \cos \theta^{(N_r)} \\ -l^{(1)} s_0^{(1)}/a & \dots & -l^{(N_r)} s_0^{(N_r)}/a & l^{(1)} n_0^{(1)}/a & \dots & l^{(N_r)} n_0^{(N_r)}/a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_r = \begin{Bmatrix} t_n^{(1)} \\ \vdots \\ t_n^{(N_r)} \\ t_s^{(1)} \\ \vdots \\ t_s^{(N_r)} \end{Bmatrix} \quad (7.43)$$

No caso de haver mais de uma estrutura rígida interagindo com o meio elástico os  $N_r$  elementos do contorno  $\Gamma_r$  são separados em grupos com  $N_{r1}, N_{r2}, \dots$  elementos cada formando cada um destes grupos uma parcela  $\Gamma_{ri}$  de  $\Gamma_r$ . Uma matriz de equilíbrio  $\mathbf{D}_i$  é construída para cada desses grupos de elementos tomando-se como ponto de referência o ponto  $O_i$  onde é aplicado o carregamento externo atuante na estrutura  $i$ . As equações de equilíbrio podem então ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{r1} \\ \mathbf{t}_{r2} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (7.44)$$

onde os vetores  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots$  contêm as componentes da carga externa aplicada sobre cada uma das estruturas rígidas e os vetores  $\mathbf{t}_{r1}, \mathbf{t}_{r2}, \dots$  representam as tensões que atuam nos elementos situados na interface de cada uma dessas estruturas com o meio elástico.

### 7.7.6 Sistema de equações global

Utilizando-se a equação (7.36), a equação matricial (7.35) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{tt} & -\mathbf{B}_{tu} & \mathbf{A}_{tr}\mathbf{C} \\ \mathbf{A}_{ut} & -\mathbf{B}_{uu} & \mathbf{A}_{ur}\mathbf{C} \\ \mathbf{A}_{rt} & -\mathbf{B}_{ru} & \mathbf{A}_{uu}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{t}_u \\ \mathbf{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{tt} & -\mathbf{A}_{tu} & \mathbf{B}_{tr} \\ \mathbf{B}_{ut} & -\mathbf{A}_{uu} & \mathbf{B}_{ur} \\ \mathbf{B}_{rt} & -\mathbf{A}_{ru} & \mathbf{B}_{uu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_t \\ \mathbf{u}_u \\ \mathbf{t}_r \end{Bmatrix} \quad (7.45)$$

Esta equação pode ainda ser rearranjada e colocada na forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{tt} & -\mathbf{B}_{tu} & -\mathbf{B}_{tr} & \mathbf{A}_{tr}\mathbf{C} \\ \mathbf{A}_{ut} & -\mathbf{B}_{uu} & -\mathbf{B}_{ur} & \mathbf{A}_{ur}\mathbf{C} \\ \mathbf{A}_{rt} & -\mathbf{B}_{ru} & -\mathbf{B}_{uu} & \mathbf{A}_{uu}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{t}_u \\ \mathbf{t}_r \\ \mathbf{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{tt} & -\mathbf{A}_{tu} \\ \mathbf{B}_{ut} & -\mathbf{A}_{uu} \\ \mathbf{B}_{rt} & -\mathbf{A}_{ru} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_t \\ \mathbf{u}_u \end{Bmatrix} \quad (7.46)$$

Finalmente, utilizando-se a equação do equilíbrio de forças (7.42) a equação fica:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{tt} & -\mathbf{B}_{tu} & -\mathbf{B}_{tr} & \mathbf{A}_{tr}\mathbf{C} \\ \mathbf{A}_{ut} & -\mathbf{B}_{uu} & -\mathbf{B}_{ur} & \mathbf{A}_{ur}\mathbf{C} \\ \mathbf{A}_{rt} & -\mathbf{B}_{ru} & -\mathbf{B}_{uu} & \mathbf{A}_{uu}\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{t}_u \\ \mathbf{t}_r \\ \mathbf{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{tt} & -\mathbf{A}_{tu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{ut} & -\mathbf{A}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{rt} & -\mathbf{A}_{ru} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_t \\ \mathbf{u}_u \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (7.47)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

A solução deste sistema de equações fornece ao mesmo tempo as tensões nos elementos ao longo de  $\Gamma_u$  e de  $\Gamma_r$ , os deslocamentos ao longo de  $\Gamma_t$  e os deslocamentos  $w_0$ ,  $u_0$  e  $\varphi_0$  do(s) ponto(s) de referência da(s) estrutura(s) rígida(s). Os deslocamentos ao longo do contorno  $\Gamma_r$  (interface entre o meio elástico e a estrutura) são determinados pelas equações (7.36).

### 7.7.7 Exemplos de aplicação

#### Fundação rígida engastada

Como primeiro exemplo de aplicação do Método dos Elementos de Contorno na formulação direta acoplado à análise de estruturas rígidas para cargas dinâmicas propõe-se o problema esquematizado na figura 7.60. Trata-se de uma fundação rígida sem massa de seção retangular ( $b/a = 1$ ) engastada num meio semi-infinito elástico transversalmente isotrópico. Este problema já foi analisado pelo Método da Superposição Estendido (MSE) e a análise aqui feita serve como comparação.

A discretização utilizada ao longo da interface solo-fundação segue o mesmo padrão empregado nas análises feitas pelo MSE, com 4 elementos de igual comprimento ao longo de cada uma das faces laterais e 8 elementos de igual comprimento ao longo da base da estrutura rígida.

Como o método aqui proposto emprega funções de influência desenvolvidas para cargas aplicadas no interior do espaço elástico infinito (o domínio do problema auxiliar  $\Omega^*$  é irrestrito) é necessária a discretização em elementos da superfície livre não carregada para além da fundação. São empregados, ao longo desta superfície, 10 elementos de igual comprimento para cada lado da estrutura até uma distância correspondente a  $4a$  da borda desta.

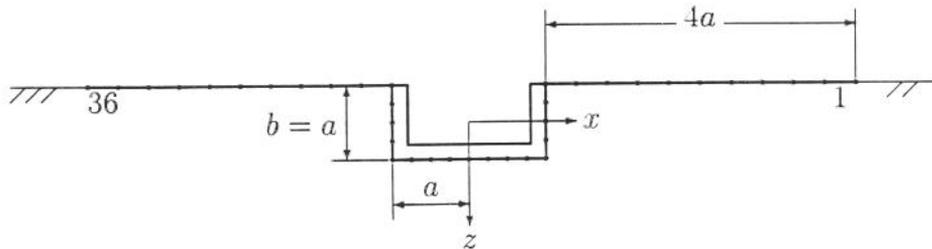


Figura 7.60: Fundação rígida embutida em um meio semi-infinito

Os resultados da análise para os casos de um material elástico isotrópico

com coeficiente de Poisson  $\nu = 0,4$  e taxa de amortecimento interno  $\nu = 0,01$  e de um material transversalmente isotrópico com  $c_{11}/c_{44} = 6$ ;  $n_1 = 1,5$ ;  $n_3 = 0,8$  e  $\nu = 0,01$  estão mostrados nas figuras 7.61 a 7.64 na forma de gráficos que mostram a variação das componentes da matriz de flexibilidade dinâmica normalizada  $\mathbf{N}^*$  em função da frequência normalizada  $a_0$ . Nestes gráficos estão também apresentados na forma de pontos os resultados da análise do mesmo problema pelo MSE. Pode-se verificar que os resultados obtidos pelos dois métodos de análise são praticamente coincidentes para as componentes  $N_{wz}$  e  $N_{ux}$  e apresentam uma diferença muito pequena para  $N_{\varphi m}$ . Para as componentes do acoplamento  $N_{um} = N_{\varphi x}$  os resultados da análise feita pelo MEC-D apresentam “saltos” em torno da curva obtida pelo MSE. Isto demonstra que a discretização necessária ao MEC-D da superfície externa não carregada não simula com exatidão o efeito da presença desta superfície. Para que estes resultados fossem melhores seria necessária uma discretização mais refinada, utilizando-se elementos de menor comprimento, e estendendo-se até uma maior distância da borda da fundação. Deve-se, no entanto, atentar para a ordem de grandeza dos valores da componente  $N_{um}$ . Como estes valores são muito reduzidos as diferenças nos resultados obtidos pelos dois métodos aparecem exageradas nos gráficos.

Um fato adicional que pode ser observado é a virtual coincidência entre os resultados obtidos para o material isotrópico e o material anisotrópico para a componente  $N_{ux}$  nas análises feitas por ambos os métodos. Este fato já foi notado em itens anteriores e se deve à igualdade da constante elástica  $c_{11}/c_{44}$  para os dois materiais.

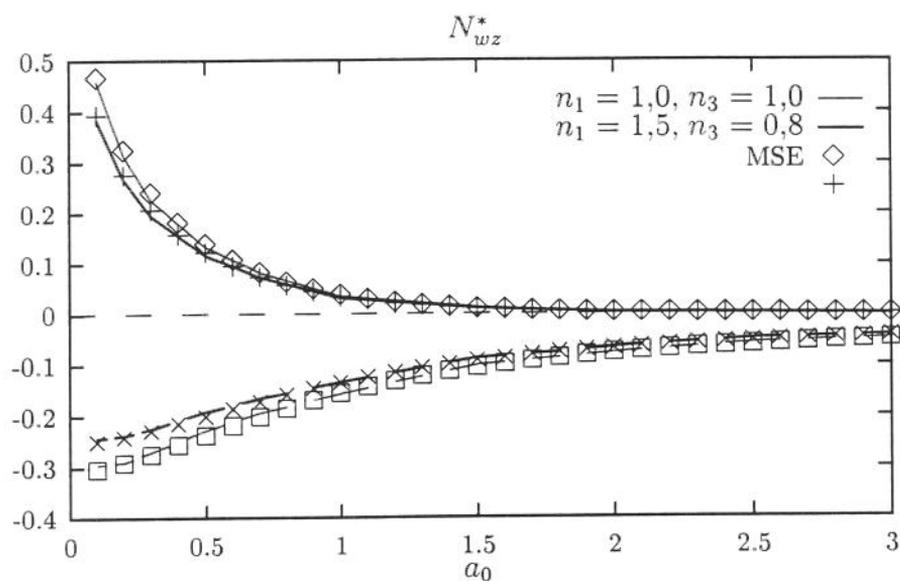


Figura 7.61: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{wz}^*$  para fundação engastada ( $b/a = 1$ ) analisada através do MEC-D e do MSE.

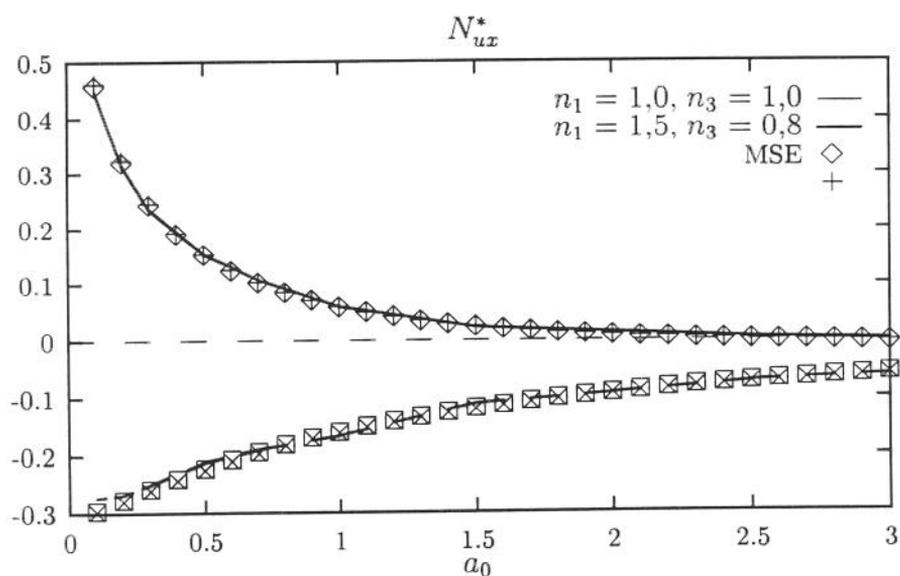


Figura 7.62: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{ux}^*$  para fundação engastada ( $b/a = 1$ ) analisada através do MEC-D e do MSE.

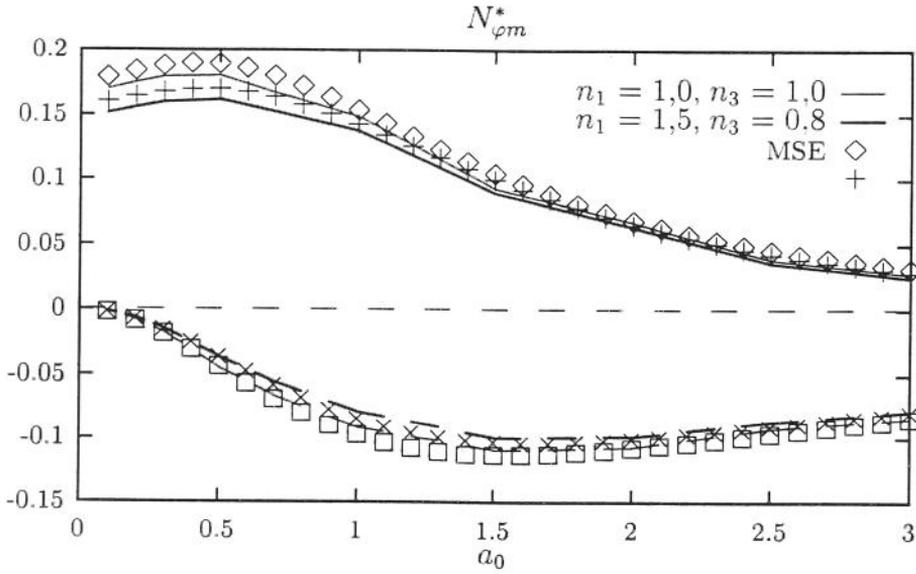


Figura 7.63: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{\varphi m}^*$  para fundação engastada ( $b/a = 1$ ) analisada através do MEC-D e do MSE.

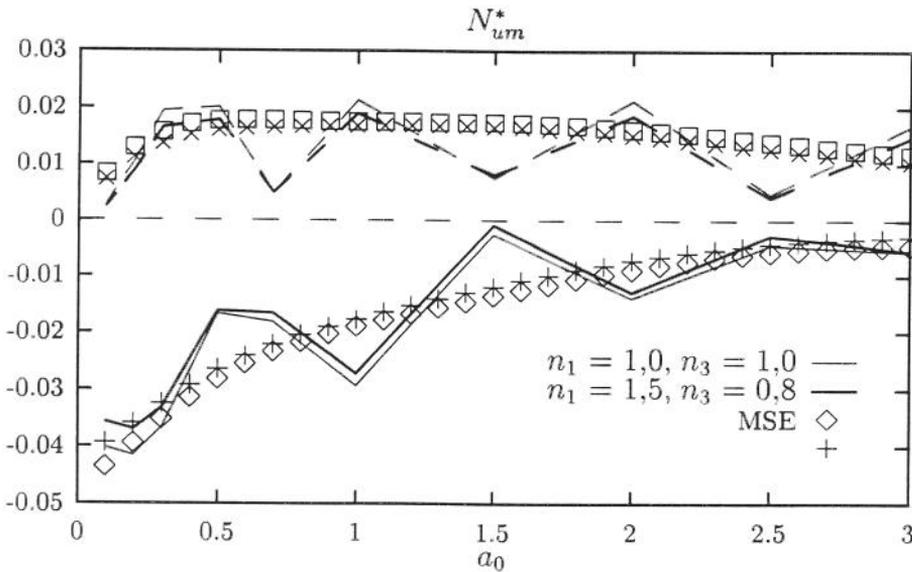


Figura 7.64: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$  para fundação engastada ( $b/a = 1$ ) analisada através do MEC-D e do MSE.

### Galeria rígida em meio elástico infinito

O segundo exemplo de aplicação proposto é uma galeria rígida de seção retangular com a relação entre a altura da seção e sua semi-largura  $b/a = 1$ , conforme pode ser visto na figura 7.65, em um meio elástico transversalmente isotrópico de extensão infinita. A carga dinâmica externa é aplicada no centro geométrico da seção e este ponto é também tomado como referência para os deslocamentos da estrutura. Neste caso a relação entre os deslocamentos e as componentes da carga externa é dada por:

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ a\varphi_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & N_{ux} & 0 \\ 0 & 0 & N_{\varphi m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y/a \end{Bmatrix} \quad (7.48)$$

ou seja, não há qualquer acoplamento entre as direções dos deslocamentos e as direções do carregamento. Isto se deve à simetria do problema tanto em relação ao eixo vertical quanto em relação ao eixo horizontal.

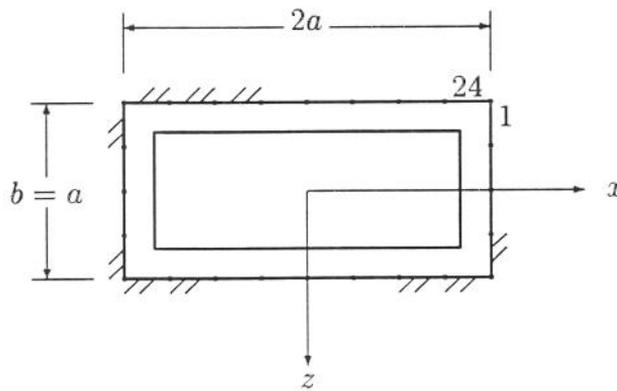


Figura 7.65: Galeria rígida enterrada em um meio infinito

A discretização adotada utiliza 8 elementos de igual comprimento ao longo da base e do topo da estrutura e 4 elementos, também de igual comprimento, ao longo de cada uma das faces laterais. São analisados problemas com dois materiais elásticos diferentes. Um material isotrópico com  $\nu = 0,4$  e  $\nu = 0,01$  e um material transversalmente isotrópico com  $c_{11}/c_{44} = 6$ ;  $n_1 = 1,5$ ;  $n_3 = 0,8$  e  $\nu = 0,01$ . Nas figuras 7.66 a 7.68 estão mostrados gráficos que representam a variação das componentes da matriz de flexibilidade dinâmica normalizada  $N^*$  em função de  $a_0$ , para os dois materiais.

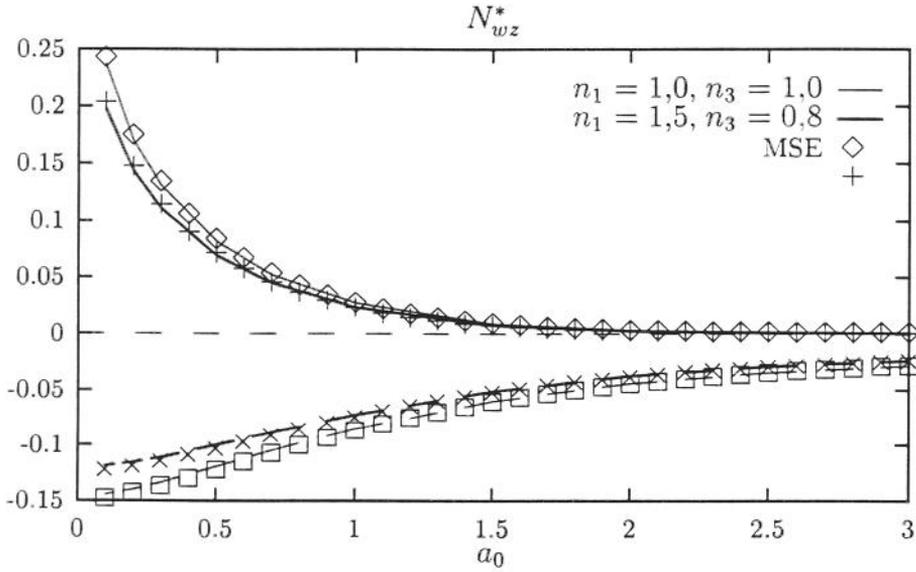


Figura 7.66: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{wz}^*$  para galeria em meio infinito analisada através do MEC-D e do MSE.

São também apresentados nestes gráficos resultados obtidos para o mesmo problema pelo Método da Superposição Modificado (MSE) para  $h/a \rightarrow \infty$ .

A análise dos resultados obtidos mostra que para as componentes  $N_{wz}$  e  $N_{ux}$  praticamente não há diferença nos resultados obtidos pelos dois métodos. Apenas para a componente  $N_{\varphi m}$  aparece uma pequena diferença entre os resultados.

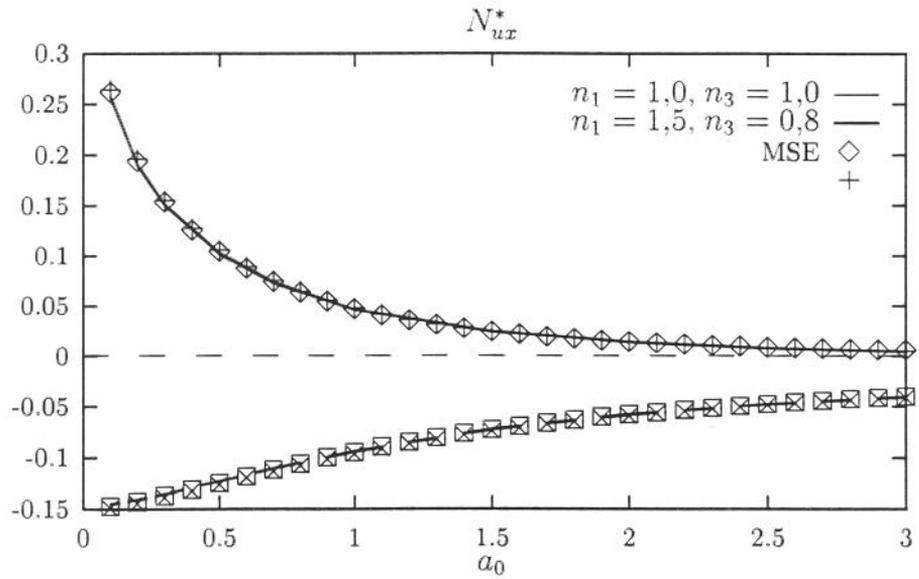


Figura 7.67: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{ux}^*$  para galeria em meio infinito analisada através do MEC-D e do MSE.

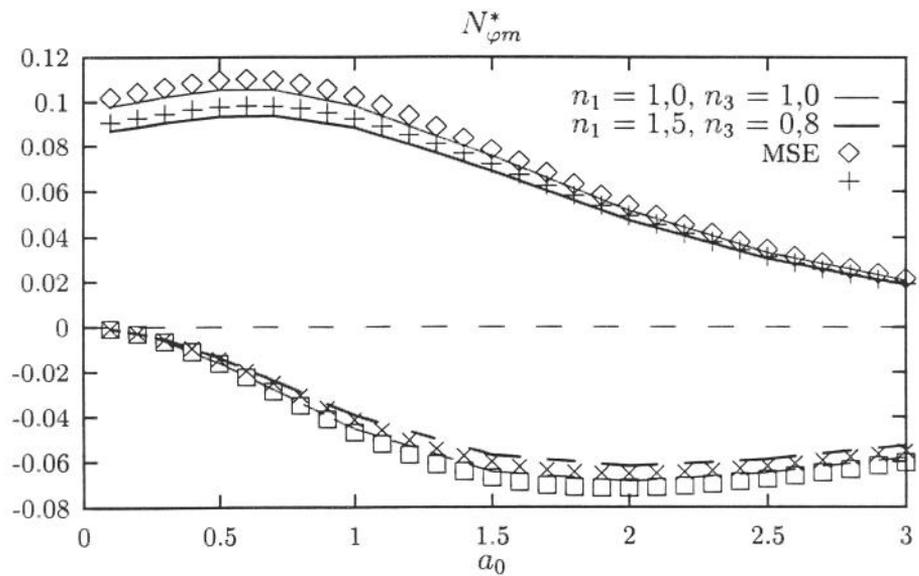


Figura 7.68: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{\varphi m}^*$  para galeria em meio infinito analisada através do MEC-D e do MSE.

### Duas Galerias rígidas em meio infinito

O problema analisado no item anterior pode ser estendido para um novo problema que envolve duas galerias de igual seção retangular dispostas lado a lado a uma distância horizontal igual à semi-largura das suas seções, como mostrados na figura 7.69, em um meio elástico infinito.

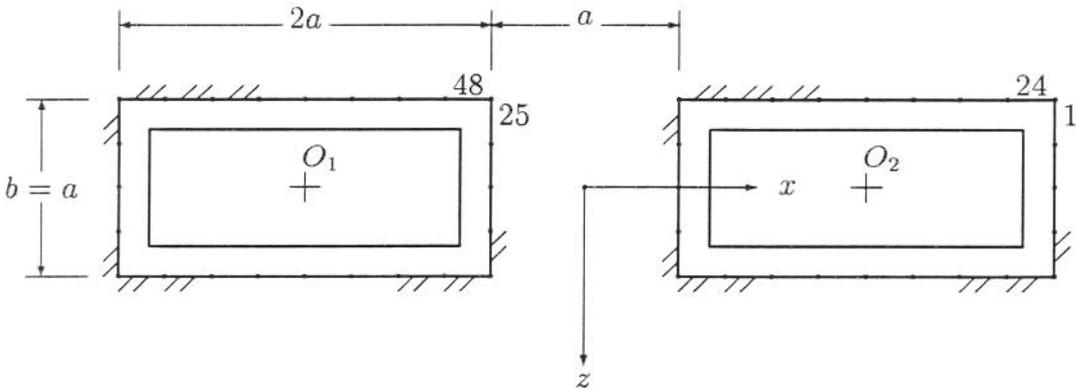


Figura 7.69: Duas galerias rígidas enterradas em um meio infinito

Neste problema procura-se determinar a mútua influência das duas galerias na matriz de flexibilidade dinâmica  $\mathbf{N}$  do conjunto. Esta matriz de flexibilidade é expressa pela relação:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^{(1)} \\ \mathbf{u}_0^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{(1,1)} & \mathbf{N}^{(1,2)} \\ \mathbf{N}^{(2,1)} & \mathbf{N}^{(2,2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{(1)} \\ \mathbf{f}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (7.49)$$

onde  $\mathbf{u}_0^{(1)}$  e  $\mathbf{u}_0^{(2)}$  são os vetores que contêm os deslocamentos das duas galerias em relação aos pontos de referência  $O_1$  e  $O_2$  localizados no centro geométrico de cada uma das seções;  $\mathbf{f}^{(1)}$  e  $\mathbf{f}^{(2)}$  são os vetores que contêm as componentes da carga externa aplicadas nestes pontos e as submatrizes  $\mathbf{N}^{(i,j)}$  representam a flexibilidade da estrutura  $i$  para a carga aplicada na estrutura  $j$ . Devido à simetria de cada uma das galerias em relação ao eixo  $x$ , não há acoplamento entre a componente horizontal da carga e os deslocamentos nas outras direções, e vice-versa. Assim as submatrizes  $\mathbf{N}^{(i,j)}$  têm a forma:

$$\mathbf{N}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} N_{wz}^{(i,j)} & 0 & N_{wm}^{(i,j)} \\ 0 & N_{ux}^{(i,j)} & 0 \\ N_{\varphi z}^{(i,j)} & 0 & N_{\varphi m}^{(i,j)} \end{bmatrix} \quad (7.50)$$

Além disso a simetria do conjunto em relação ao eixo  $z$  implica em:

$$\begin{aligned}
 N_{wz}^{(1,1)} &= N_{wz}^{(2,2)} \\
 N_{ux}^{(1,1)} &= N_{ux}^{(2,2)} \\
 N_{\varphi m}^{(1,1)} &= N_{\varphi m}^{(2,2)} \\
 N_{wm}^{(1,1)} &= -N_{wm}^{(2,2)} = N_{\varphi z}^{(1,1)} = -N_{\varphi z}^{(2,2)} \\
 N_{wz}^{(1,2)} &= N_{wz}^{(2,1)} \\
 N_{ux}^{(1,2)} &= N_{ux}^{(2,1)} \\
 N_{\varphi m}^{(1,2)} &= N_{\varphi m}^{(2,1)} \\
 N_{wm}^{(1,2)} &= N_{wm}^{(2,1)} = -N_{\varphi z}^{(1,2)} = -N_{\varphi z}^{(2,1)}
 \end{aligned} \tag{7.51}$$

Nas figuras 7.70 a 7.73 estão apresentados gráficos que representam a variação das componentes da matriz normalizada  $\mathbf{N}^{*(1,1)}$  em função de  $a_0$  para um material isotrópico com  $\nu = 0,4$  e  $\nu = 0,01$  e para um material transversalmente isotrópico com  $c_{11}/c_{44} = 6$ ;  $n_1 = 1,5$ ;  $n_3 = 0,8$  e  $\nu = 0,01$ . Pode-se notar que para a componente horizontal  $N_{ux}^{(1,1)}$  aqui também se repete o fato anteriormente notado quanto à proximidade dos resultados obtidos para os dois materiais. Para as componentes  $N_{wz}^{(1,1)}$  e  $N_{\varphi m}^{(1,1)}$  as amplitudes dos deslocamentos obtidos para o material anisotrópico são menores que as obtidas para o material isotrópico. Quanto à componente do acoplamento  $N_{wm}^{(1,1)}$ , os resultados obtidos mostram um comportamento bastante irregular, provavelmente devido ao número de elementos utilizados na discretização. Além disso ordem de grandeza destes resultados é muito pequena o que leva a um certo exagero nestas irregularidades quando colocadas no gráfico.

Nas figuras 7.74 a 7.77 estão apresentados gráficos que representam a variação das componentes da matriz normalizada  $\mathbf{N}^{*(2,1)}$  em função de  $a_0$ . Estas componentes mostram, embora em menor grau, a mesma influência da anisotropia notada nas componentes de  $\mathbf{N}^{*(1,1)}$ .

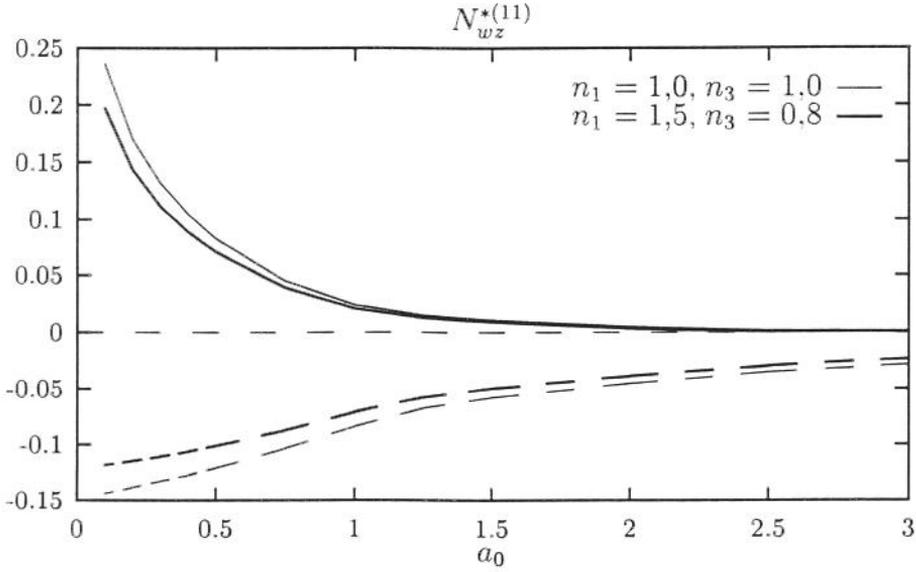


Figura 7.70: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{wz}^{*(1,1)}$  para duas galerias em meio infinito.

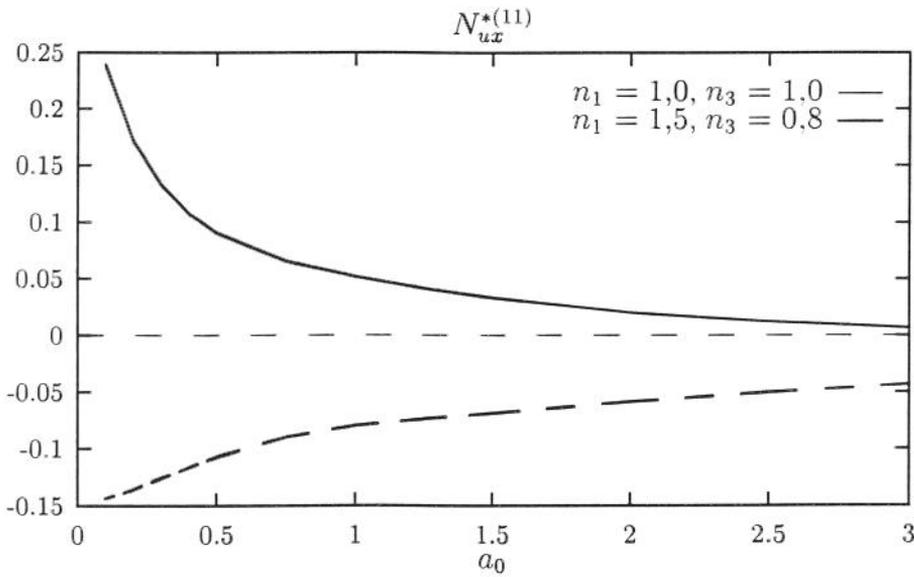


Figura 7.71: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{ux}^{*(1,1)}$  para duas galerias em meio infinito.

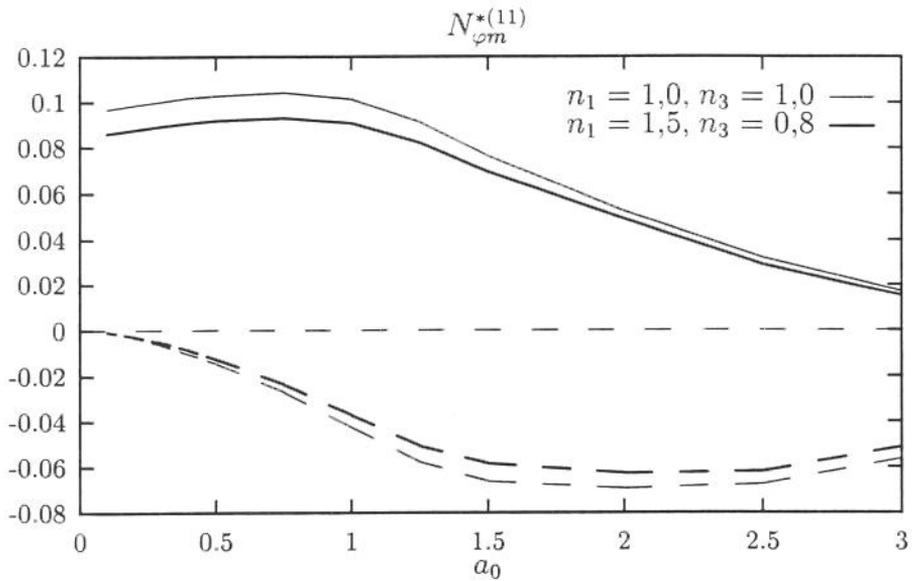


Figura 7.72: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{\varphi m}^{*(1,1)}$  para duas galerias em meio infinito.

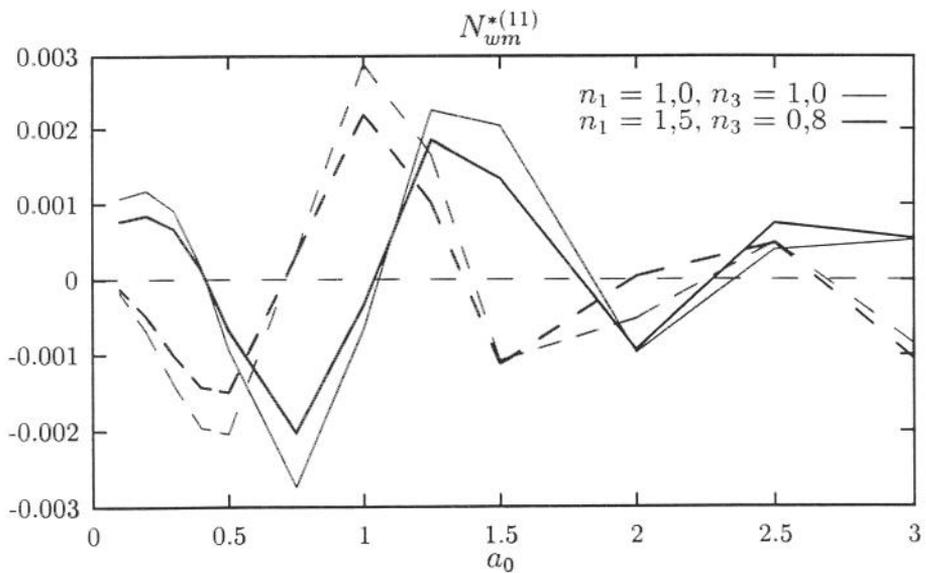


Figura 7.73: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{wm}^{*(1,1)}$  para duas galerias em meio infinito.

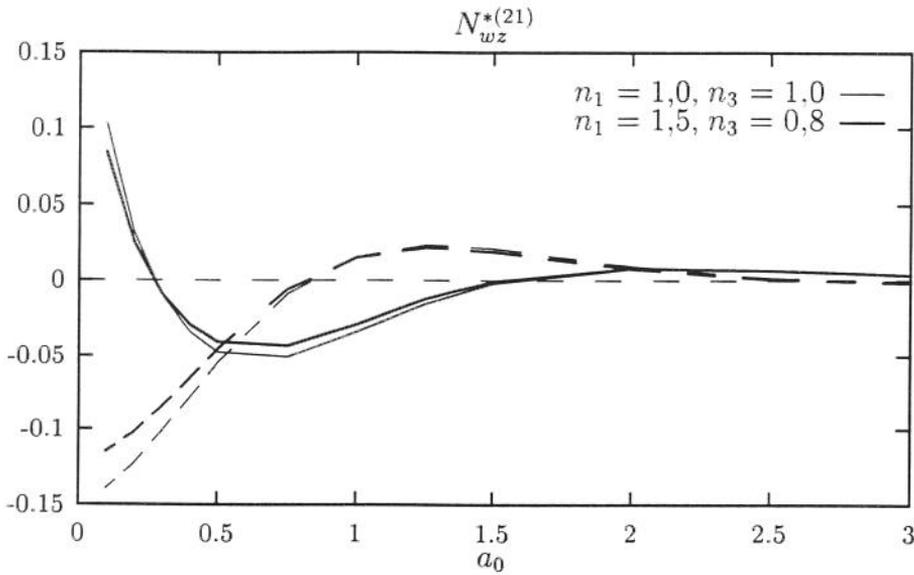


Figura 7.74: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{wz}^{*(2,1)}$  para duas galerias em meio infinito.

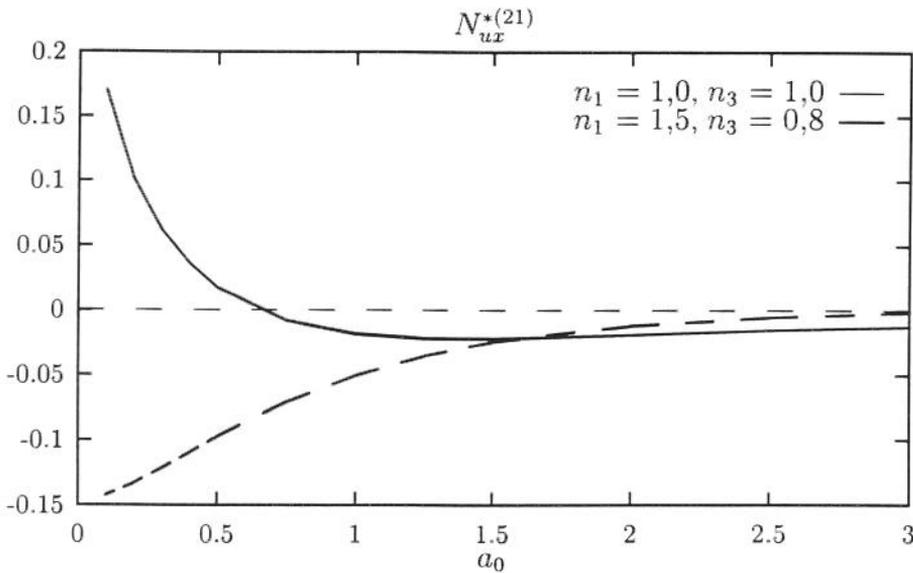


Figura 7.75: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{ux}^{*(2,1)}$  para duas galerias em meio infinito.

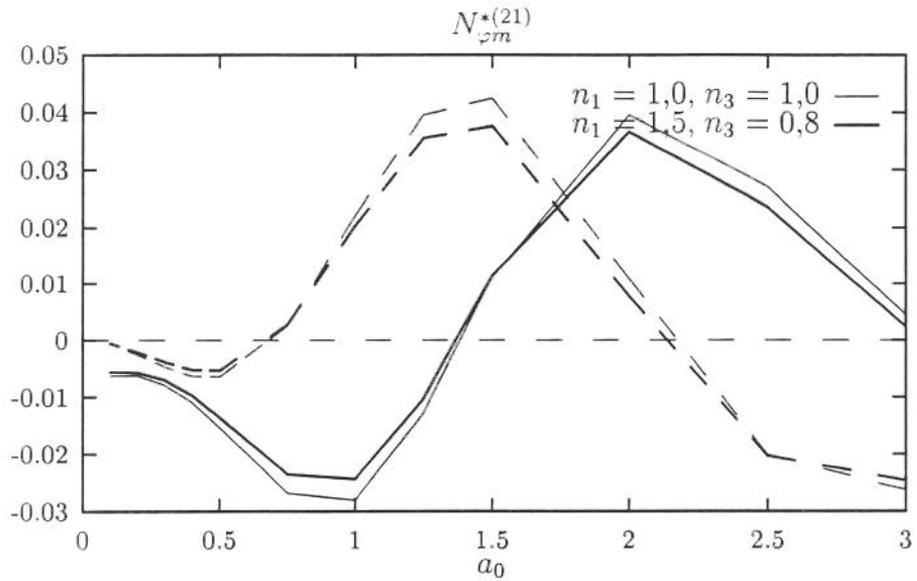


Figura 7.76: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{\varphi m}^{*(2,1)}$  para duas galerias em meio infinito.

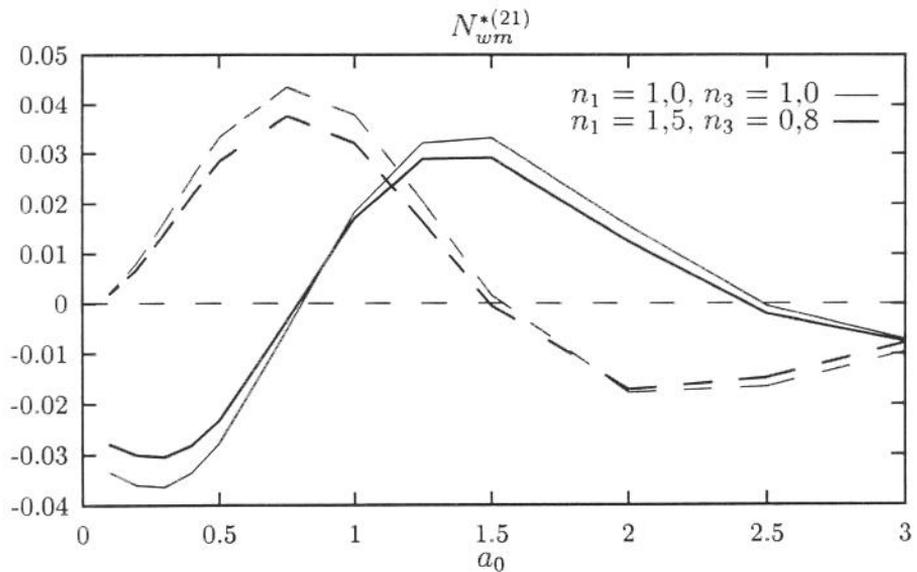


Figura 7.77: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{wm}^{*(2,1)}$  para duas galerias em meio infinito.

### Túnel de seção semi-circular

Como último exemplo de aplicação, propõe-se para análise um túnel rígido de seção semi-circular de raio  $a$  num meio elástico infinito como mostrado na figura 7.78. O meio elástico é transversalmente isotrópico e o eixo de simetria do material se apresenta inclinado de um ângulo  $\theta = 30^\circ$  em relação ao eixo vertical  $z$ . O ponto de referência para a medida dos deslocamentos e para a aplicação da carga externa é tomado no centro da base do túnel.

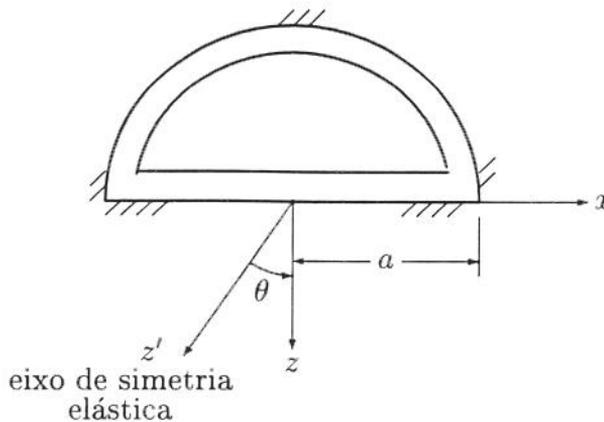


Figura 7.78: Túnel rígido de seção semi-circular em um meio infinito com eixo de simetria elástica inclinado

Para a análise deste problema são empregados 8 elementos de igual comprimento ao longo da base da estrutura e 25 elementos de igual comprimento ao longo da superfície circular. É adotado um sistema de coordenadas auxiliar paralelo às direções principais de simetria elástica do material e tanto as coordenadas dos elementos como as componentes da carga externa são referidas a este sistema de coordenadas. Com isto pode-se levar em conta a inclinação do eixo de simetria elástica do material na análise.

Os deslocamentos do ponto de referência estão relacionados às componentes da carga externa por:

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ a\varphi_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{wz} & N_{wx} & N_{wm} \\ N_{uz} & N_{ux} & N_{um} \\ N_{\varphi z} & N_{\varphi x} & N_{\varphi m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_y/a \end{Bmatrix}$$

ou seja, há acoplamento total entre as três componentes da carga e as três componentes do deslocamento. Isto se deve à ausência de simetria do pro-

blema. Apenas no caso de um material isotrópico haverá simetria em relação à direção vertical, levando a um desacoplamento das componentes verticais em relação às outras. No entanto a matriz de flexibilidade dinâmica continua simétrica, mesmo no caso anisotrópico.

Nas figuras 7.79 a 7.84 estão mostrados gráficos que representam as componentes da matriz de flexibilidade dinâmica normalizada  $N^*$  em função da frequência  $a_0$ . Estão apresentados nestes gráficos resultados obtidos para um material isotrópico com  $\nu = 0,4$  e  $\nu = 0,01$  e para um material transversalmente isotrópico com  $c_{11}/c_{44}$ ;  $n_1 = 1,5$ ;  $n_3 = 0,8$  e  $\nu = 0,01$ .

Os resultados obtidos para as componentes da diagonal de  $N^*$  mostram uma pequena influência da anisotropia tanto em  $N_{wz}$  como em  $N_{ux}$ . A presença de uma diferença entre as curvas referentes a  $N_{ux}$ , o que não ocorre nos outros exemplos analisados, se deve à inclinação do eixo de simetria elástica. A componente  $N_{\varphi m}$  apresenta uma influência um pouco mais acentuada da anisotropia. Em todos os casos as amplitudes dos deslocamentos se mostram menores para o material anisotrópico.

Quanto às componentes do acoplamento (fora da diagonal de  $N^*$ ),  $N_{wx}$  e  $N_{wm}$  são nulos para caso do material isotrópico e para o material anisotrópico estas componentes têm um valor não nulo, embora pequeno (em valor absoluto). Finalmente a componente  $N_{um}$  apresenta também uma pequena influência da anisotropia resultando em menores amplitudas dos deslocamentos para o material anisotrópico.

## 7.8 Observações finais

Neste capítulo são desenvolvidos vários métodos de análise da interação de estruturas rígidas sujeitas a cargas dinâmicas inseridas em um meio elástico transversalmente isotrópico. São apresentados o método da superposição, o método da superposição estendido, que é uma implementação da formulação indireta do MEC, e é também apresentada uma implementação da formulação direta do MEC para a análise da interação do meio elástico com estruturas rígidas. O ponto em comum de todos os métodos apresentados é a discretização do contorno em elementos retilíneos de comprimento aproximadamente constante e a utilização de funções de influência para cargas unitárias com distribuição uniforme. No entanto esta não é a única alternativa possível.

Em primeiro lugar, pode-se adotar uma estratégia de discretização que utilize elementos de menor comprimento nas regiões onde se presuma que as tensões apresentem uma maior variação. Esta estratégia provavelmente proporcionaria uma maior precisão com um menor número de elementos. O único inconveniente é que no método da superposição, para fundações

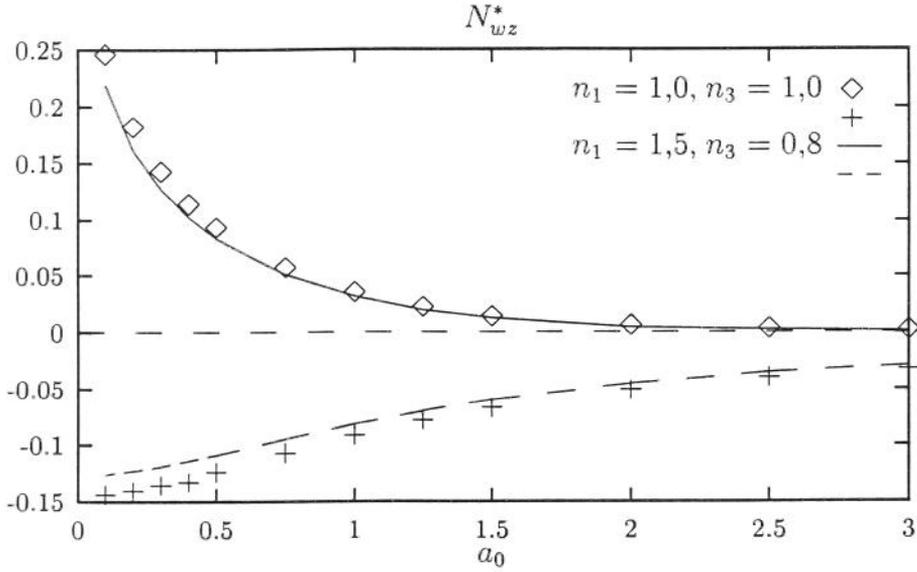


Figura 7.79: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{wz}^*$  para túnel meio infinito.

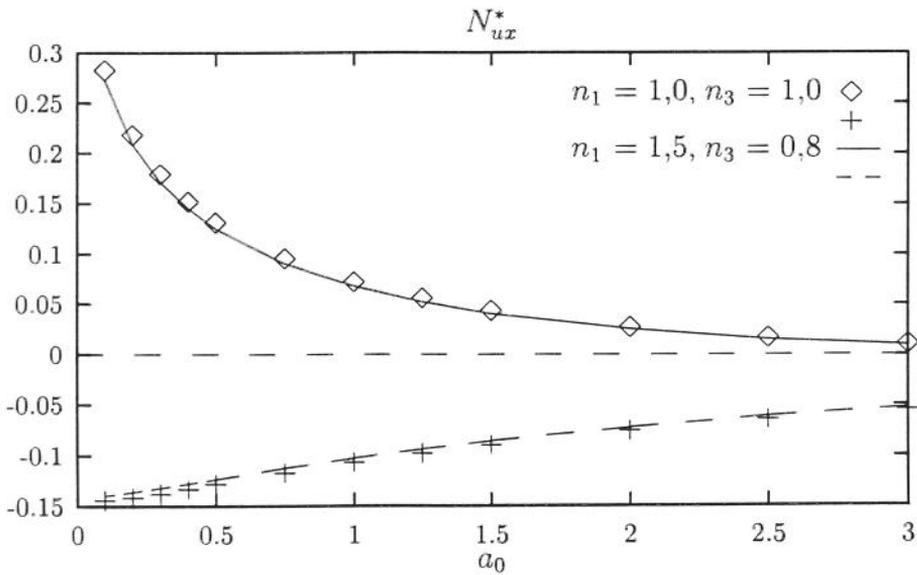


Figura 7.80: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{uz}^*$  para túnel meio infinito.

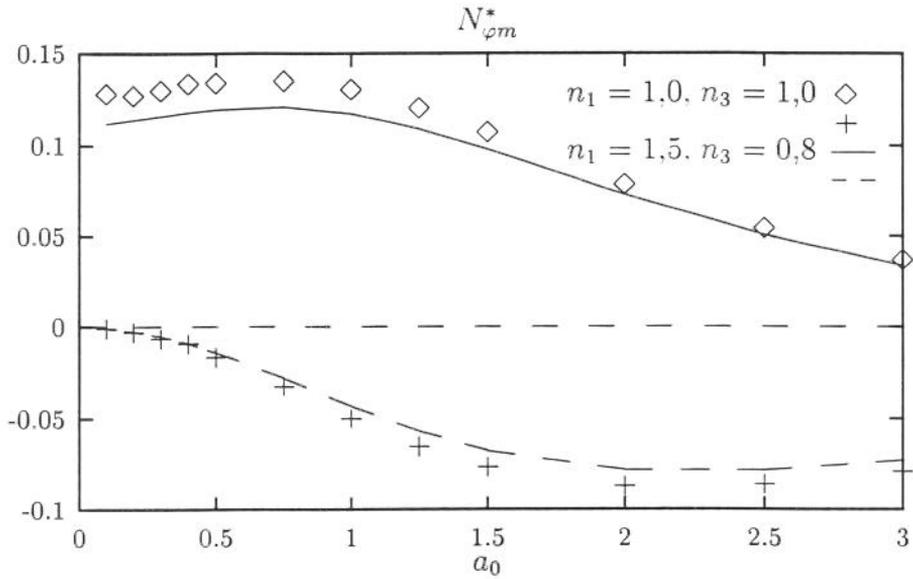


Figura 7.81: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{\varphi m}^*$  para túnel meio infinito.

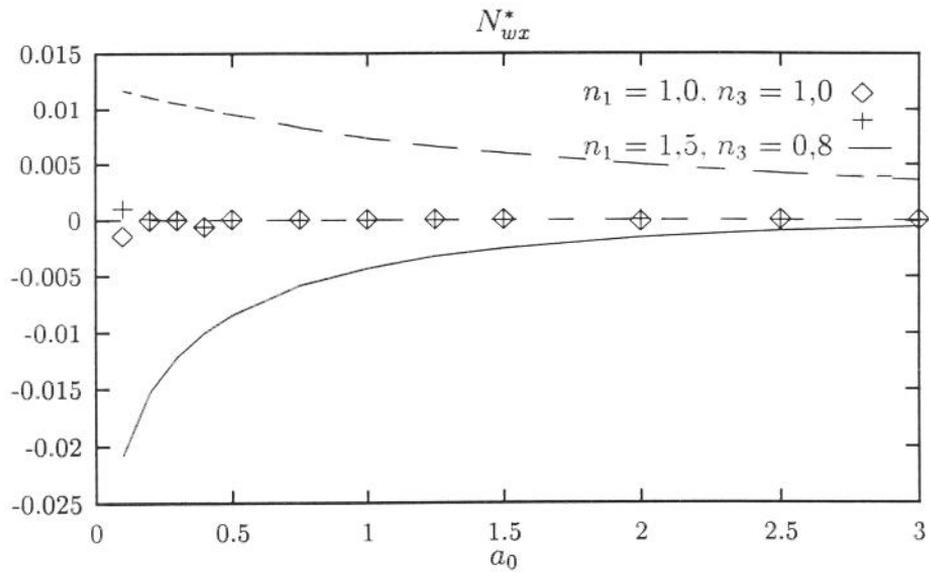


Figura 7.82: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{wx}^* = N_{uz}^*$  para túnel meio infinito.

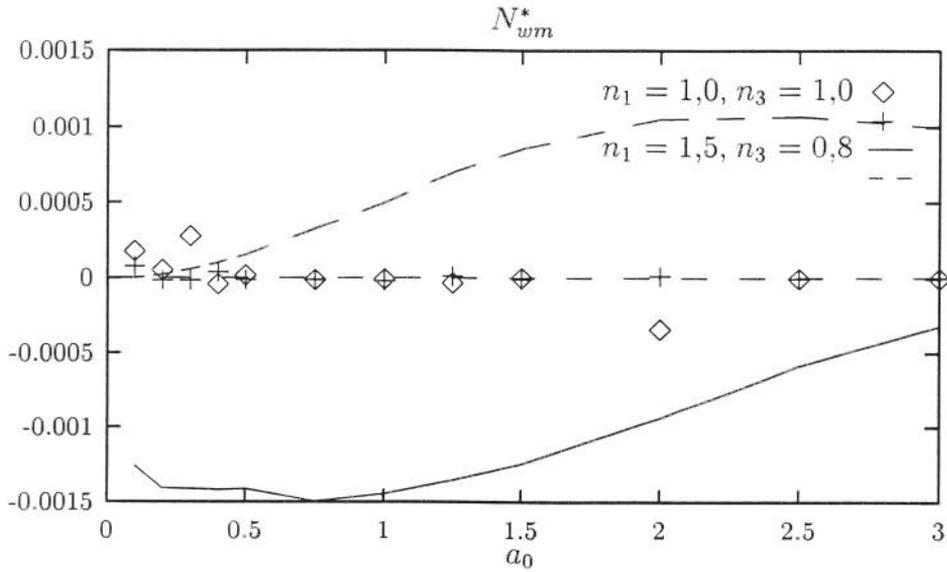


Figura 7.83: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{wm}^* = N_{\varphi z}^*$  para túnel meio infinito.

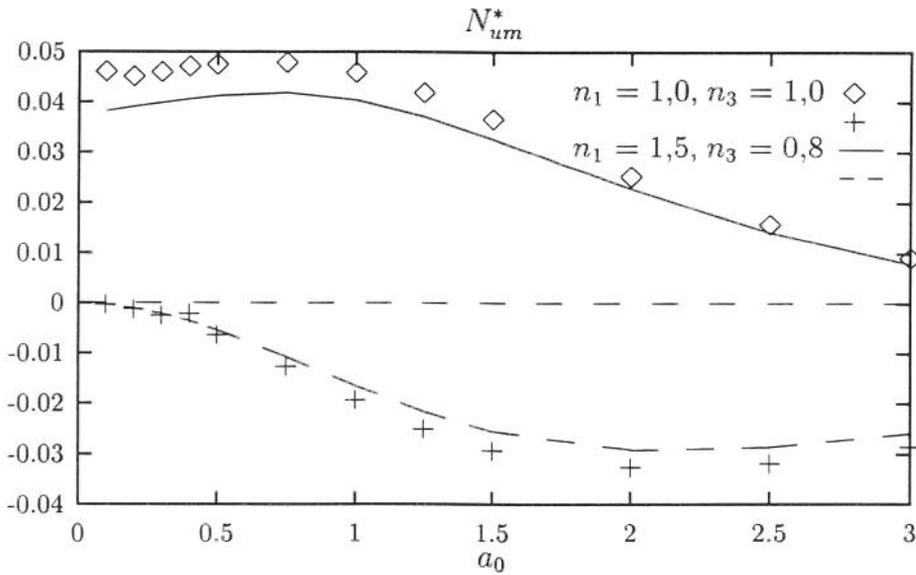


Figura 7.84: Partes real (linhas contínuas) e imaginária (linhas interrompidas) da componente  $N_{um}^* = N_{\varphi x}^*$  para túnel meio infinito.

apoiadas na superfície, seria necessária a determinação de todos os elementos da matriz de influência dos deslocamentos e não apenas os elementos da primeira linha. Neste caso provavelmente é melhor manter a discretização com elementos de igual comprimento. Nos outros métodos, como é sempre necessária a determinação de todos os elementos das matrizes de influência (ou, pelo menos, a metade deles) esta estratégia de discretização não implica em maior esforço computacional.

Quanto às funções de influência, poderiam ser implementados processos que utilizem como modelo aproximador a função linear ou mesmo a função quadrática. Neste caso seria possível a obtenção de uma precisão superior nos resultados com um menor número de elementos. No entanto, o esforço requerido no cálculo de funções de influência de ordem superior é também mais elevado e, provavelmente, só se justificaria na implementação geral do MEC em que são utilizadas as soluções para carga aplicada no interior de um meio infinito. Isto porque estas soluções são comparativamente mais simples que as do semi-espaço.

## Capítulo 8

# Conclusões e Perspectivas

Ao longo deste trabalho são formulados métodos de análise do comportamento de meios elásticos transversalmente isotrópicos no estado plano de deformação sob a ação de cargas dinâmicas harmônicas no tempo.

Na dedução destes métodos são apresentadas as formulações completas das funções de Green para várias configurações de contorno; desde o caso da carga aplicada sobre o semi-espaço elástico até o caso de carga aplicada no interior de uma camada elástica apoiada sobre uma base rígida. As soluções são obtidas na forma de integrais impróprias que necessitam de tratamento numérico. É apresentada também a formulação básica para o caso de carga aplicada no interior de uma camada elástica apoiada sobre o semi-espaço.

É apresentada uma análise teórica do comportamento dessas funções de Green no ponto de aplicação da carga e demonstra-se que tanto os deslocamentos como as tensões se tornam singulares neste ponto. Demonstra-se também que esta singularidade é integrável.

Para o cálculo das funções de Green os métodos de integração numérica fornecidos pelo pacote QUADPACK são aplicados com resultados satisfatórios.

A fim de se analisar os efeitos devidos a cargas distribuídas, são apresentadas as deduções das funções de influência para cargas com distribuição uniforme ao longo de faixas horizontais aplicadas tanto na superfície como no interior de meios elásticos transversalmente isotrópicos. Estas funções de influência se apresentam como uma extensão das funções de Green correspondentes. Pela análise dos resultados numéricos obtidos verifica-se que a anisotropia exerce uma grande influência no comportamento dos deslocamentos e das tensões provocadas pela carga. É proposto também um método de obtenção do efeito de cargas com distribuição polinomial com grau qualquer através da superposição de cargas com distribuição mais simples.

Para a análise do efeito da inclinação do eixo de simetria elástica é deduzida uma formulação para as funções de Green para o caso de carga aplicada

sobre um semi-espaço com eixo de simetria inclinado. Esta formulação é utilizada também para a obtenção das funções de influência de cargas distribuídas ao longo de faixas inclinadas no interior do espaço completo.

Como aplicação das soluções obtidas para funções de Green e funções de influência são propostas implementações do Método dos Elementos de Contorno nas versões direta e indireta utilizando as funções de influência de faixas de carga uniformes. Verifica-se que os resultados obtidos são comparáveis aos previstos pela teoria.

O trabalho se completa com a implementação de métodos de análise da interação de estruturas rígidas sob a ação de cargas dinâmicas com o meio elástico transversalmente isotrópico. Estes métodos são aplicados na análise de fundações apoiadas na superfície do semi-espaço, fundações na superfície de uma camada elástica apoiada sobre base rígida, fundações parcialmente engastadas no meio elástico e estruturas rígidas enterradas. São assim demonstradas a utilização das funções de Green e de influência na análise de todos estes problemas através da aplicação de diferentes implementações do Método dos Elementos de Contorno.

Como complementação e extensão desta tese, além dos pontos salientados no decorrer do texto, são propostas as seguintes linhas de trabalho:

- Desenvolvimento de métodos teóricos e computacionais mais eficientes para o cálculo das funções de influência. Um primeiro passo seria a adaptação das rotinas de integração numérica para efetuarem as integrações da parte real e imaginária simultaneamente. Deve-se também analisar melhor o comportamento das funções de Green na busca de estratégias mais apropriadas ou mesmo a dedução de novas formulações.
- Implementação das várias versões do MEC aqui analisadas para elementos de contorno com grau superior de aproximação como, por exemplo, elementos com aproximação linear ou quadrática.
- Extensão dos métodos de análise para a obtenção do comportamento de estruturas flexíveis apoiadas sobre meio transversalmente isotrópico. Esta extensão poderia analisar estruturas mais complexas.
- Dedução, implementação e utilização de funções de Green e de influência para o caso tridimensional, possibilitando assim a análise de outros tipos de fundações como por exemplo fundações retangulares e estacas.
- Obtenção e aplicação de funções de Green e de influência para cargas na forma de impulsos de aplicação instantânea, no domínio do tempo.

Com estas soluções o tratamento de problemas transientes pode ser feito diretamente no domínio do tempo tornando possível a análise de problemas não lineares.

## Bibliografia

- [1] ABASCAL, R. & DOMINGUEZ, J., "Vibrations of footings on zoned viscoelastic soils." *Journal of Engineering Mechanics*. ASCE, Vol. **112**(5), p. 433–447, 1986.
- [2] ANDERSON, D. L., "Elastic wave propagation in layered anisotropic media." *Journal of Geophysical Research*. Vol. **66**(9), p. 2953–2963, 1961.
- [3] FRANKLIN, A. G. & MATTSON P. A., "Directional variation of elastic wave velocities in oriented clay." *Clays and Clay Minerals*. Vol. **20**, p. 285–293, 1972.
- [4] ARNOLD, R. N., BYCROFT, G. N. & WARBURTON, G. B., "Forced vibrations of a body on an infinite elastic solid." *Journal of Applied Mechanics*. ASME. Vol. **22**, p. 391–406, 1955.
- [5] BARDEN, L., "Stresses and displacements in a cross-anisotropic soil." *Géotechnique*. Vol. **13**(3), p. 198–210, 1963.
- [6] BARKAN, D. D., *Dynamics of Bases and Foundations*. New York: McGraw-Hill, 1962.
- [7] BARROS, P. L. A. & MESQUITA, E. "Green or influence functions to model dynamic phenomena in orthotropic viscoelastic soils by the integral equation approach." IV Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Recife. *Anais ... Junho*, 1996.
- [8] BEYER, W. H., *Standard Mathematical Tables*. 28th Edition, Boca Raton, Florida: CRC-Press, 1987.
- [9] BREBBIA, C. A., *The Boundary Element Method for Engineers*. London: Pentech Press, 1978.
- [10] BARNETT, D. M. & LOTHE, J., "Consideration of the existence of surface wave (Rayleigh waves) solutions in anisotropic elastic crystals." *Journal of Physics. F: Metal Physics*. Vol. **4**, p. 671–686, 1974.

- [11] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F. & WROBEL, L. C., *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Berlin: Spriger-Verlag 1984.
- [12] BUCHWALD, V. T., "Elastic waves in anisotropic media." *Proceedings of the Royal Society*. Series A, Vol. **253**, p. 563–580, 1959.
- [13] BUCHWALD, V. T., "Rayleigh waves in transversely isotropic media." *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. Vol. **14**(3), p. 293–317, 1961.
- [14] BUCHWALD, V. T., "Rayleigh waves in anisotropic media." *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. Vol. **14**(4), p. 461–469, 1961.
- [15] BYCROFT, G. N., "Forced vibrations of a rigid plate on a semi-infinite elastic space and an elastic stratum." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. Series A, Vol. **248**, p. 327–342, 1956.
- [16] CARRIER, G. F., "The propagation of waves in orthotropic media." *Quarterly Applied Mathematics*. Vol. **4**(2), p. 160–165, 1946.
- [17] CHADWICK, P. & SMITH, G. D., "Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials." *Advances in Applied Mechanics*. Academic Press. Vol. **17**, p. 303–376, 1977.
- [18] CHEN, Y. C., ISHIBASHI, I. & JENKINS, J. T., "Dynamic shear modulus and fabric: part I, depositional and induced anisotropy." *Géotechnique*. Vol. **38**(1), p. 25–32, 1988.
- [19] CHRISTENSEN, R. M., *Theory of Viscoelasticity*. New York: Academic Press, 1982.
- [20] CRUSE, T. A. & RIZZO, F. J., "A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem." *International Journal of Mathematical Analysis Applications*. Vol. **22**, p. 244–259, 1968.
- [21] CHUHAN, Z. & CHONGBIN, Z., "Coupling method of finite and infinite elements for strip foundation wave problem." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. Vol. **15**, p. 839–851, 1987.
- [22] CLENSHAW, C. W. & CURTIS, A. R., "A method for numerical integration on an automatic computer." *Num. Math.* Vol. **2**, p. 197–202, 1960.

- [23] CROUCH, S. L. & STARFIELD, A. M., *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*. London: Geoge Allen & Unwin, 1983.
- [24] DAS, B. M., *Fundamentals of Soil Dynamics*. Elsevier, 1983.
- [25] DOMINGUEZ, J., *Dynamics Stiffness of Retangular Foundations*. Report R78-20, MIT, 1978.
- [26] DOMINGUEZ, J., *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications, 1993
- [27] DRAVINSKI, M. & MOSSESIAN, T. K., "On evaluation of the Green functions for harmonic line loads in a viscoelastic half space." *Int. J. Num. Meth. Eng.*. Vol. **26**, p. 823–841, 1988.
- [28] FREDERICK, D. & CHANG, T. S., *Continuum Mechanics*. Boston: Scientific Publishers, 1972.
- [29] GAUL, L., BOHLEN, S., KEMPLE, S., "Transient and forced oscillations of systems with constant hysteretic damping." *Mechanics Research Communications*. Vol. **12**, p. 187–201, 1985.
- [30] GAZETAS, G. & ROESSET, J. M., "Vertical vibration of machine foundations." *Journal of the Geotechnical Engineering Division*. ASCE. Vol. **12**, p. 1435–1454, 1979.
- [31] GAZETAS, G., "Dynamic compliance matrix of rigid strip footings bonded to a viscoelastic cross anisotropic halfspace." *Internationa Journal of Mechanical Science*. Vol. **23**(9), p. 547–559, 1981.
- [32] GAZETAS, G., "Strip foudations on a cross-anisotropic soil layer subjected to dynamic loading." *Géotechnique*. Vol. **31**(2), p. 161–179, 1981.
- [33] GAZETAS, G., "Analysis of machine foundation vibrations: state of the art." *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. Vol. **2**(1), p. 2–42, 1983.
- [34] GRADSHTEYN, I. S. & RYZHIK, I. M., *Table of Integrals, Series and Products*. New York: Academic Press, 1965.
- [35] HARDIN, B. O. & DRNEVICH, V. P., "Shear modulus and damping in soils: measurement and parameter effects." *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*. ASCE. Vol. **98**(6), p. 603–624, 1972.

- [36] HSIEH, T. K., "Foundation vibrations" *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. Vol. **22**, p. 211–226, 1962.
- [37] ISRAIL, A. S. M. & AHMAD, S., "Dynamic vertical compliance of strip foundations in layered soils." *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*. Vol. **8**, p. 933–950, 1989.
- [38] KOBAYASHI, S., NISHIMURA, N. & KISHIMA, T., "A BIE analysis of wave propagation in anisotropic media." *Boundary Elements VIII*. Berlin: Spriger-Verlag, p. 425–434, 1986.
- [39] KIRKNER, D. J., "Vibration of a rigid disk on a transversely isotropic elastic half space." *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. Vol. **6**, p. 293–306, 1982.
- [40] LAMB, H., "On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. Series A, Vol. 203, p. 1–42, 1904.
- [41] LEKHNITSKII, S. G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Moscow: Mir Publishers, 1981.
- [42] LONGMAN, I. M., "Note on a method for computing infinite integrals of oscillatory functions." *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*. Vol. **52**, p. 764–768, 1956.
- [43] LOVE, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Fourth Edition, New York: Dover Publications, 1944.
- [44] LYSMER, J., *Vertical Motions of Rigid Footings*. University of Michigan, Ann Arbor, 1965. Ph.D. Thesis.
- [45] LYSMER, J & KUHLEMEYER, R. L., "Finite dynamic model for infinite media." *Journal of Engineering Mechanics Division*. ASCE. Vol. **95**(4), p. 859–877, 1969.
- [46] LUCO, L. E. & WESTMAN, A. M., "Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic half-space." *Journal of Applied Mechanics*. ASME, Vol **39**, p. 527–537, 1972.
- [47] MANOLIS, G. D. & BESKOS, D. E., *Boundary Elements in Elastodynamics*. London: Unwin Hyman, 1988.

- [48] MCNEIL, R. L., "Machine foundations: The state of the art." VII International Conference of Soil Mechanics and Foundation Engineering, Mexico, *Proceedings of the Soil Dynamics Special Session*, 1969.
- [49] MESQUITA, E., ROMANINI, E., "Greens Function Versus Direct Boundary Element Scheme to Model the Dynamic Interaction of Foundations Resting on a Viscoelastic Layer over Bedrock", In: C.A. Brebbia, J.Dominguez, F.Paris (eds), *Proc. 14 BEM*, vol.2, 107-121, Seville, November, 1992.
- [50] MUSGRAVE, M. J. P., "On the propagation of elastic waves in aelotropic media: I. General principles." *Proceedings of the Royal Society. Series A*, Vol. **226**, p. 339-355, 1954.
- [51] MUSGRAVE, M. J. P., "On the propagation of elastic waves in aelotropic media: II. Media of hexagonal symmetry." *Proceedings of the Royal Society. Series A*, Vol. **226**, p. 356-366, 1954.
- [52] NOVAK, M. & BEREDUGO, Y., "Vertical vibrations of embedded footings." *Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering Division. ASCE*. Vol. **98**, p. 1291-1310, 1972.
- [53] NOVAK, M. & KIM, T. C., Resonant column technique for dynamic of cohesive soils. *Canadian Geotechnical Journal*. Vol. 18, p 448-455, 1981.
- [54] NOVAK, M. & SACHS, K., "Torsional and coupled vibrations of embedded footings." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. Vol. **2**, p. 11-33, 1973.
- [55] PAYTON, R. G., "Green's tensor for a constrained transversely isotropic elastic solid." *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. Vol. **28**(4), p. 473-481, 1975.
- [56] PAYTON, R. G., *Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media*. The Hague: Martinus Nijhoff, 1983.
- [57] PICKERING, D. J., "Anisotropic elastic parameters for soils." *Géotechnique*. **20**(3) p. 271-276, 1970.
- [58] PIESSENS, R.; DEDONCKER-KAPENGA E.; ÜBERHUBER, C. W. & KAHANER, D. K., *Quadpack. A Subroutine Package for Automatic Integration*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

- [59] PONTES, B. R., *Interação Dinâmica de Estruturas Bidimensionais com o Solo: Uma Comparação entre um Método Semi-Analítico e o Método dos Elementos de Contorno*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1992. Tese (Mestrado).
- [60] POULOS, H. G. & DAVIS, E. H., *Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics*. New York: Wiley, New York, 1974.
- [61] PRAKASH, S. & PURI, V. K., "Dynamic properties of soils from in-situ tests." *Journal of the Geotechnical Engineering Division*. ASCE. Vol. **107**(7), p. 943–963, 1981.
- [62] PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; FLANNERY, B. & VETTERLING, W. T., *Numerical Recipes in Pascal: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1989.
- [63] QUINLAN, P. M., "The elastic theory of soil dynamics." *Symposium on Dynamic Testing of Soils*. ASTM STP 156, p 3–34, 1953.
- [64] RAJAPAKSE, R. K. N. D. & GROSS, D., "Transient response of an orthotropic elastic medium with a cavity." *Wave Motion*. Elsevier, Vol. **21**, p. 231–252, 1995.
- [65] RAJAPAKSE, R. K. N. D. & SENJUNTICHAJ, T., "An indirect boundary integral equation method for poroelasticity." *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. Vol. **19**, p. 587–614, 1995.
- [66] RAJAPAKSE, R. K. N. D. & SHAH, A. H., "Impedances of embedded rigid strip foundations." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. Vol. **16**, p. 255–273, 1988.
- [67] RAJAPAKSE, R. N. K. D. & WANG, Y., "Elastodynamic Green's functions of orthotropic half plane." *Journal of Engineering Mechanics*. ASCE. Vol. **117**(3), p. 588–604, 1991.
- [68] RAJAPAKSE, R. N. K. D. & WANG, Y., "Green's functions for transversely isotropic elastic half space." *Journal of Engineering Mechanics*. ASCE. Vol. **119**(9), p. 1724–1746, 1993.
- [69] RAYLEIGH, Lord, "On waves propagated along the plane surface of an elastic solid" *Proceedings of London Mathematical Society*. Vol. **17**, p. 4–11, 1887.

- [70] REISSNER, E., "Stationäre, axialsymmetrische durch eine Schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes." *Ingenieur-Archiv*. Vol. 7(6), p. 381-396, 1936.
- [71] RICHART JR., F. E., WOODS, R. D. & HALL, J. R., *Vibration of Soil and Foundations*. Prentice-Hall, 1970.
- [72] ROMANINI, E., *Síntese de Funções de Influência e de Green para o Tratamento da Interação Dinâmica Solo-Estrutura Através de Equações Integrais de Contorno*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, 1995. Tese (Doutoramento).
- [73] ROWE, P. W., "The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact." *Proc. Royal Society*. Vol. 269, p. 500-527, 1962.
- [74] SAADA, A. S. & BIANCHINI, G. F., "The dynamic response of anisotropic clay." *Proc. Conf. Earthquake Eng. and Soil Dynamics*. Pasadena. Vol. 2, p. 777-801, 1978.
- [75] SILVEIRA, A. & SILVEIRA, E. B. S., "Elastic parameters for soils with cross-anisotropy." *Proc. VII Int. Conf. Soil Mech. Foud. Eng.* Moscow. Vol. 1, p 361-365, 1973.
- [76] SNEDDON, I. A., *The Use of Integral Transforms*. New York: McGraw Hill, 1972.
- [77] SOKOLNIKOFF, I. S., *Mathematical Theory of Elasticity*. Second Edition. New York: McGraw-Hill, 1956.
- [78] STONELEY, R., "The seismological implications of aelotropy in continental structures." *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society*, Geophysical Supplement. Vol. 5, p. 343-353, 1949.
- [79] SULLY, J. P. & CAMPANELLA, R. G., "Evaluation of in situ anisotropy from crosshole and downhole shear wave velocity measurements." *Geotechnique*. Vol. 45(2), p. 267-282, 1995.
- [80] SUNG, T. Y., "Vibrations in semi-infinite solids due to periodic surface loadings." *Symposium on Dynamic Testing of Soils*. ASTM STP 156, p 35-64, 1953.
- [81] SYNGE, J. L., "Elastic waves in anisotropic media." *Proceedings of the Royal Irish Academy*. Series A, Vol. 58, p. 323-334, 1956.

- [82] WAAS, G., RIGGS, H. R. & WERKLE, H., "Displacement solutions for dynamic loads in transversely-isotropic stratified media." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. Vol. **13**, p. 173–193, 1985.
- [83] WANG, Y., *Fundamental Solutions for Multi-Layered Transversely Isotropic Elastic Media and Boundary Element Applications*. University of Manitoba, Winnipeg, Canada, 1992. Ph.D. Thesis.
- [84] WANG, Y. & RAJAPAKSE, R. K. N. D., "Dynamics of rigid strip foundations embedded in orthotropic elastic soils." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. Vol. **20**, p. 927–947, 1991.
- [85] WANG, Y. & RAJAPAKSE, R. K. N. D., "Axisymmetric elastodynamic Green's functions of a layered transversely isotropic half space." *Boundary Elements XIV*. Berlin: Springer-Verlag. Vol. 2, p. 135–149, 1992
- [86] WOLF, J. P. & DARBRE, G. R., "Dynamic-stiffness matrix of soil by the boundary element method: embedded foundation." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. Vol. **12**, p. 401–416, 1984.
- [87] WONG, H. L. & LUCO, J. E., "Dynamic response of rigid foundations of arbitrary shape", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. Vol. **4**, p. 579–595, 1976.
- [88] WYLIE, C. R. & BARRETT, L. C., *Advanced Engineering Mathematics*. Fifth edition. New York: McGraw Hill, 1985.
- [89] WYNN, P., "On a device for computing the  $e_m(S_n)$  transformation." *MTAC*. Vol. **10**, p. 91–96, 1956.
- [90] VOIGT, W., *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig: Teubner, 1928.