



DIEGO RODRIGO MARTINS

# **Análise Dinâmica Não Linear de Sistema de Transmissão por Correia**

55/2013

CAMPINAS  
2013



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

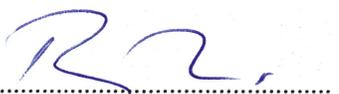
DIEGO RODRIGO MARTINS

# **Análise Dinâmica Não Linear de Sistema de Transmissão por Correia**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Robson Pederiva

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL  
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO DIEGO  
RODRIGO MARTINS, E ORIENTADO PELO PROF. DR.  
ROBSON PEDERIVA

  
.....  
ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS  
2013

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

M366a Martins, Diego Rodrigo, 1987-  
Análise dinâmica não linear de sistema de transmissão por correia / Diego Rodrigo Martins. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Robson Pederiva.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Correias e transmissão por correias. 2. Vibração. 3. Dinâmica. I. Pederiva, Robson, 1957-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Nonlinear dynamic analysis of belt drive system

**Palavras-chave em inglês:**

Belt drive

Vibrations

Dynamics

**Área de concentração:** Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

**Titulação:** Mestre em Engenharia Mecânica

**Banca examinadora:**

Robson Pederiva [Orientador]

Katia Lucchesi Cavalca Dedini

Valder Steffen Junior

**Data de defesa:** 26-07-2013

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO**

**Análise Dinâmica Não Linear de Sistema  
de Transmissão por Correia**

Autor: Diego Rodrigo Martins

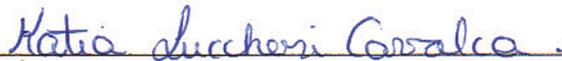
Orientador: Prof. Dr. Robson Pederiva

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



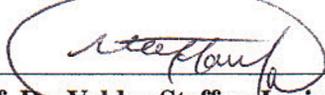
---

**Prof. Dr. Robson Pederiva, Presidente**  
**Universidade Estadual de Campinas**



---

**Profa. Dra. Katia Lucchesi Calvaca Dedini**  
**Universidade Estadual de Campinas**



---

**Prof. Dr. Valder Steffen Junior**  
**Universidade Federal de Uberlândia**

Campinas, 26 de julho de 2013.

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho a Deus e a minha família, que são o que tenho de mais importante em minha vida.

## **Agradecimentos**

Ao meu orientador Prof. Dr. Robson Pederiva, pela oportunidade de realização deste trabalho, pela amizade, confiança e constante ajuda nos momentos de dúvida.

A meus pais, Sônia e Antonio Carlos pelo constante apoio, dedicação e carinho, que moldaram meu caráter e sem os quais, não seria nada hoje.

A Michelle que tem me apoiado e incentivado sempre.

Aos colegas da FEM, Vinícius, Jakerson, Henrique, Marcus, André, Vitor e Clodoaldo, pelo companheirismo, pela ajuda e pelas valiosas discussões que muitas dúvidas ajudaram a sanar.

Aos técnicos e pessoal da oficina mecânica e eletrônica, sem os quais não seria possível a realização dos experimentos.

A MWM International Motores pelo apoio e financiamento do projeto.

## Resumo

MARTINS, Diego Rodrigo. Análise Dinâmica Não Linear de Sistema de Transmissão por Correia. 2013. 151p. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

O presente trabalho tem por objeto o estudo de sistemas de transmissão por correia serpentina com tensionador automático, que é uma aplicação automotiva utilizada em larga escala e cujo comportamento dinâmico apresenta grande influência sobre o funcionamento dos acessórios acionados pelo motor. O movimento do eixo de manivelas acionado pelo processo de combustão apresenta como característica a ocorrência de variações de velocidade e torque entregues aos acessórios pelo sistema de transmissão, contudo as flutuações de torque resultantes deste movimento são o principal mecanismo excitador do sistema de transmissão por correia. Níveis elevados de flutuação de torque podem aumentar o nível de tração dinâmica atuante na correia, fazendo com que esta venha a falhar devido à fadiga, ou produzir níveis de vibração torcional elevados nas polias dos acessórios, causando impacto direto em seus suportes. Através de modelos matemáticos é avaliado o comportamento do sistema de transmissão, considerando alguns fenômenos responsáveis por introduzir não linearidades neste. São avaliados, assim, os efeitos de tração inicial, frequências naturais, formas modais e respostas temporais do sistema.

Paralelamente é estudado o comportamento de um sistema de transmissão real através da uma investigação experimental. São identificados seus parâmetros lineares através de técnicas de Análise Modal, bem como efeitos de variação destes parâmetros em função da velocidade de operação do sistema. É avaliada a composição em frequência da resposta do sistema quando em operação e também são realizados testes para detecção de não linearidades no sistema.

*Palavras-chave:* Transmissão por Correia, Vibrações, Dinâmica, Tensionador.

## Abstract

MARTINS, Diego Rodrigo. Nonlinear Dynamic Analysis of Belt Drive System. 2013. 151p. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

The objective of the present work is the study of a tensioner loaded belt drive system, which is a recurrent automotive application used in large scale and whose dynamic behavior has great influence on the functioning of various components powered by engine. Crankshaft motion, powered by internal combustion process, presents as characteristic the occurrence of variations on speed and torque delivered to accessory by belt drive, torque fluctuation due to this motion is the main excitation mechanism to belt drive systems though. High levels of torque fluctuation can increase belt dynamic tension making it amenable to fault due to fatigue or produce high levels of torsional vibration on accessory pulleys which has direct impact on its support structure. By means of mathematical models, systems behavior is evaluated, taking into account phenomena responsible for introducing nonlinearities. Initial tractive tension, natural frequencies, modeshapes and time responses of the system are evaluated.

In parallel, it is studied the behavior of a real belt drive system through experimental investigation. Linear parameters are identified by Experimental Modal Analysis techniques, and its variation as function of system operating speed, as well. Frequency composition of system's response are evaluated and also are performed tests to detect nonlinearities.

*Keywords:* Belt Drive, Vibrations, Dynamics, Tensioner.

## Lista de Ilustrações

1.1	Motor com sistema de transmissão por correia serpentina. Disponível em: <a href="http://www.dieselpowermag.com/features/1207dp_july_2012_military_power_the_valanx/photo_03.html">http://www.dieselpowermag.com/features/1207dp_july_2012_military_power_the_valanx/photo_03.html</a> Acesso em: Abril de 2013 . . . . .	1
2.1	Sistema de transmissão por correia. . . . .	12
2.2	Perfis comuns em correias. a) Correia lisa; b) Correia em V; c) Correia poly-V. . . . .	13
2.3	Correia Serpentina em aplicação automotiva. . . . .	15
2.4	Transmissão por correia com ligação direta. . . . .	17
2.5	Identificação do ângulo de contato entre correia e polia. . . . .	17
2.6	Esquema de montagem com correia cruzada entre as polias. . . . .	18
2.7	Determinação do ângulo de contato entre correia e polia. . . . .	19
2.8	Transmissão com 3 polias. . . . .	20
2.9	Relações geométricas para uma montagem parcial. . . . .	20
2.10	Ângulos auxiliares $\alpha$ do tensionador. . . . .	23
2.11	Ângulos Auxiliares . . . . .	23
2.12	Ângulos auxiliares $\psi_1$ e $\psi_2$ . . . . .	24
2.13	Representação de um trecho da corda. . . . .	25
2.14	Representação das forças atuantes na porção $ds$ da corda. . . . .	26
2.15	Sistema puramente rotacional. . . . .	31
3.1	Sistema em estudo. . . . .	36
3.2	Componentes de deformação em porção infinitesimal do tramo. . . . .	38
3.3	Equilíbrio de forças no braço do tensionador. . . . .	51
3.4	Variação da tração nos tramos produzida pelas curvas do tensionador e de deformação. . . . .	55
4.1	Esquemática de sistema puramente rotacional. . . . .	57
4.2	Força de atrito seco no modelo torcional. . . . .	64
4.3	Curva do coeficiente de atrito com transição suavizada. . . . .	66
6.1	Representação geométrica do sistema simulado. . . . .	94
6.2	Curvas de variação de tração estática no sistema para 1000 rpm. . . . .	96
6.3	Curva obtida pela equação característica e raízes identificadas. . . . .	98
6.4	Formas modais identificadas para o sistema. . . . .	100

6.5	Variação das frequências naturais em função da velocidade de operação para tração de referência de 128,59N. . . . .	101
6.6	Variação das frequências naturais em função da velocidade de operação para tração de referência de 257,18N. . . . .	101
6.7	Receptância do sistema - excitação na polia 1 e resposta na polia 4. . . . .	104
6.8	Receptância do sistema - excitação na polia e resposta no tramo 2 em diferentes pontos. . . . .	105
6.9	Resposta temporal à condição inicial na coordenada $\xi_3$ . . . . .	107
6.10	Resposta temporal à condição inicial na coordenada $\xi_1$ . . . . .	108
6.11	Resposta linear apresentada pelos modos 1 e 2 sob excitação de baixa amplitude à 20Hz. . . . .	109
6.12	Resposta não linear do sistema sob excitação de baixa amplitude à 20Hz. . . . .	109
6.13	Representação do movimento dos tramos em suas coordenadas físicas. . . . .	110
6.14	Resposta temporal dos elementos discretos à excitação de 20Hz. . . . .	111
6.15	Resposta forçada do sistema com excitação de não linearidades. . . . .	112
6.16	Variação na tração dinâmica dos tramos. . . . .	113
6.17	Sistema excitado na segunda frequência natural com amplitude de 1Nm na polia 1. . . . .	114
6.18	Sistema excitado na segunda frequência natural com amplitude de 5Nm na polia 1. . . . .	115
6.19	Sistema excitado na segunda frequência natural com amplitude de 40Nm na polia 1. . . . .	115
6.20	Porções linear e não linear da tração dinâmica atuante no tramo 2 com sistema excitado à 62,18Hz em 40Nm de amplitude. . . . .	116
6.21	Formas modais apresentadas pelo sistema puramente rotacional. . . . .	117
6.22	Resposta Temporal do sistema completo à excitação de 40Nm em 30Hz. . . . .	118
6.23	Resposta Temporal do sistema puramente rotacional à excitação de 40Nm em 30Hz. . . . .	119
6.24	Resposta do tensionador à excitação de 40Nm em 30Hz na polia 1 sem efeito de atrito. . . . .	120
6.25	Resposta do tensionador à excitação de 40Nm em 30Hz na polia 1 sob efeito de atrito com baixa amplitude. . . . .	120
6.26	Respostas do tensionador à excitação de 40Nm em 30Hz na polia 1 sob efeito de força de atrito de 10N. . . . .	121
6.27	Respostas do tensionador à excitação de 40Nm em 30Hz na polia 1 sob efeito de força de atrito de 10N sem efeito de descontinuidade. . . . .	122
6.28	Composição em frequência da resposta do tensionador quando ocorre o fenômeno de <i>Stick-Slip</i> . . . . .	122
7.1	Montagem utilizada para a avaliação experimental. . . . .	123

7.2	Montagem utilizada para realização da AME. . . . .	125
7.3	Funções de Resposta em Frequência estimadas para o sistema. . . . .	126
7.4	Diagrama de Estabilização para o sistema utilizando método LSCE. . . . .	127
7.5	Índice MAC comparando os primeiros modos de vibrar obtidos pela Análise Modal. . . . .	130
7.6	Índice MAC de modos com maior desacoplamento. . . . .	131
7.7	Formas modais estimadas . . . . .	132
7.8	Espectro obtido para a condição de operação e harmônicos observados. . . . .	133
7.9	Vista em cascata para os espectros de velocidade obtidos em diferentes velocidades de operação para o sistema. . . . .	134
7.10	Perfil da seção transversal da correia utilizada . . . . .	134
7.11	Mapa de ordens obtido para o sinal de velocidades no tensionador. . . . .	135
7.12	Vista em cascata do mapa de ordens obtido para o sinal de velocidades no tensionador e possíveis curvas de frequências naturais. . . . .	136
7.13	Resposta à varredura em seno medida no tensionador. . . . .	137
7.14	FRFs do sistema obtidas por varredura senoidal com diferentes amplitudes de excitação. . . . .	138

## Lista de Tabelas

6.1	Dados físicos do sistema simulado. . . . .	93
6.2	Propriedades Geométricas Calculadas. . . . .	95
6.3	Comparação entre os valores de frequências naturais, em Hz, obtidos com os valores da literatura. . . . .	98
6.4	Comparação entre frequências naturais obtidas pelos sistemas acoplado e desacoplado. . . . .	103
7.1	Dados da instrumentação. . . . .	125
7.2	Frequências naturais e fatores de amortecimento para modelo de ordem 37. . . . .	128
7.3	Frequências naturais e fatores de amortecimento para modelo de ordem 37. . . . .	130

## Lista de Abreviaturas e Siglas

### *Letras Latinas*

$P_i$	Tração total em um tramo $i$	[N]
$P_{ti}$	Tração estática no tramo $i$	[N]
$P_{oi}$	Tração de operação no tramo $i$	[N]
$P_c$	Tração centrífuga na correia	[N]
$P_{di}$	Tração dinâmica no tramo $i$	[N]
$P_{diL}$	Porção linear da tração dinâmica no tramo $i$	[N]
$P_{diNL}$	Porção não linear da tração dinâmica no tramo $i$	[N]
$c$	Velocidade de operação do sistema	[m/s]
$c_i$	Velocidade de propagação de onda no tramo $i$	[m/s]
$r_i$	Raio da polia $i$	[m]
$t$	Variável de tempo	[s]
$x$	Variável espacial	[m]
$w_i$	Deslocamento transversal do tramo $i$	[m]
$u_i$	Deslocamento longitudinal do tramo $i$	[m]
$m$	Densidade linear da correia	[kg/m]
$E$	Módulo de Elasticidade da correia	[N/m <sup>2</sup> ]
$A$	Área da seção transversal da correia	[m <sup>2</sup> ]
$l_i$	Comprimento do tramo $i$	[m]
$l_T$	Comprimento total da correia	[m]
$J_i$	Momento de inércia do elemento discreto $i$	[kg m <sup>2</sup> ]
$m_i$	Massa equivalente do elemento $i$	[kg]
$M_i$	Torque externo total atuante no elemento $i$	[N m]
$M_{oi}$	Torque estático atuante no elemento $i$	[N m]
$M_{di}$	Torque dinâmico atuante no elemento $i$	[N m]

$F_{di}$	Força equivalente produzida pelo momento $M_{di}$	[N]
$k_r$	Constante da mola torcional do tensionador $i$	[N m/rad]
$k_i$	Rigidez equivalente no tramo $i$	[N/m]
$F_{at}$	Amplitude da força de atrito atuante	[N]
$T$	Torque equivalente produzido pela força de atrito $F_{at}$	[N m]
$f_{di}$	Frequência da força de excitação externa no elemento $i$	[Hz]
$s_r$	Polo obtido pela Análise Modal	
$S_r$	Termo de excitação externa na equação da coordenada generalizada real	
$T_r$	Termo de excitação externa na equação da coordenada generalizada imaginária	
$q_r(t)$	Coordenada generalizada de um modo $r$ do modelo rotacional	
$\bar{q}_r$	Amplitude da coordenada generalizada no espaço de configuração	
$[M]$	Matriz de massa para o modelo completo	
$[G]$	Matriz giroscópica para o modelo completo	
$[K]$	Matriz de rigidez para o modelo completo	
$[A]$	Matriz de massa generalizada para o modelo completo	
$[B]$	Matriz de rigidez generalizada para o modelo completo	
$\{W\}$	Vetor de deslocamentos para o modelo completo	
$\{Q\}$	Vetor de excitações para o modelo completo	
$\{X\}$	Vetor de excitações para o modelo completo no espaço de estados	
$\{U\}$	Vetor de estados para o modelo completo	
$\bar{U}_r$	Forma modal normalizada para o modelo completo	
$\bar{Y}_r$	Parte real da forma modal normalizada para o modelo completo	
$\bar{Z}_r$	Parte imaginária da forma modal normalizada para o modelo completo	
$[L]$	Matriz de autovalores para o modelo linear no espaço de configuração	
$\bar{w}_{ir}$	Forma modal do tramo $i$ no modo $r$	
$\bar{v}_{ir}^R$	Parte real da forma modal do tramo $i$ no modo $r$	
$\bar{v}_{ir}^I$	Parte imaginária da forma modal do tramo $i$ no modo $r$	
$[P]$	Matriz modal utilizada	
$[I]$	Matriz identidade	
$[H]$	Matriz bloco-diagonal com as frequências naturais obtidas	
$[A_D]$	Matriz dinâmica para determinação das frequências naturais	
$\{\hat{d}\}$	Vetor de deslocamentos para determinação das amplitudes das formas modais	
$\{V\}$	Vetor de coordenadas generalizadas para o modelo completo	

$\bar{a}_{ir}$	Amplitude normalizada da coordenada $i$ para a forma modal $r$	
$\hat{a}_{ir}$	Amplitude não normalizada da coordenada $i$ para a forma modal $r$	
$[M_{rot}]$	Matriz de massa para o modelo rotacional	
$[G_{rot}]$	Matriz giroscópica para o modelo rotacional	
$[K_{rot}]$	Matriz de rigidez para o modelo rotacional	
$[A_{rot}]$	Matriz de massa generalizada para o modelo rotacional	
$[B_{rot}]$	Matriz de rigidez generalizada para o modelo rotacional	
$\{U_{rot}\}$	Vetor de estados para o modelo rotacional	
$\{\hat{U}_{rot,r}\}$	Vetor modal para o modo $r$ não normalizado do modelo rotacional	
$\{F'_{rot}\}$	Vetor de excitações para o modelo rotacional no espaço de configuração	
$H_1$	Estimador para a Função de Resposta em Frequência do sistema	
$S_{ff}$	Autodensidade espectral do sinal $f$	
$S_{fx}$	Densidade espectral cruzada entre os sinais $f$ e $x$	
$A_{ir}$	Amplitude do grau de liberdade $i$ para o modo $r$ estimado experimentalmente	
$x_{ki}$	Posição de medição para Análise Modal no tramo $i$	
$f_{correia}$	Frequência de passagem da correia pelo sistema	[Hz]

### Letras Gregas

$\phi_i$	Ângulo de abraçamento para a polia $i$	[rad]
$\alpha_i$	Ângulo auxiliar entre o direção do tramo e a direção do braço do tensionador	[rad]
$\psi_i$	Ângulo auxiliar entre a direção do tramo e a direção perpendicular ao braço do tensionador	[rad]
$\theta_i$	Coordenada de variação angular para o elemento discreto $i$	[rad]
$\chi_i$	Coordenada de deflexão equivalente para o elemento discreto $i$	[m]
$\theta_{3r}$	Deflexão angular inicial do tensionador	[rad]
$\omega_r$	Frequência natural correspondente ao modo $r$ de vibrar	[Hz]
$\hat{\chi}_{ir}$	Amplitude não normalizada da coordenada rotacional $i$ para a forma modal $r$	
$\{\phi_r\}$	Forma modal normalizada no modo $r$ de vibrar do modelo rotacional	
$\delta_{rs}$	Função delta de Kronecker	
$\{\chi\}$	Vetor de deflexões para o modelo rotacional	
$\alpha_{jk}$	Receptância teórica do modelo para excitação em $k$ e resposta em $j$	

$\eta$	Constante de suporte
$\xi_r$	Coordenada generalizada modal real correspondente ao modo $r$ do modelo completo
$\eta_r$	Coordenada generalizada modal imaginária correspondente ao modo $r$ do modelo completo

---

### ***Subscritos***

$i, x$	Derivada parcial da coordenada de índice $i$ em relação à variável $x$
$i, t$	Derivada parcial da coordenada de índice $i$ em relação à variável $t$
$i, xx$	Derivada segunda da coordenada de índice $i$ em relação à variável $x$
$i, t$	Derivada segunda da coordenada de índice $i$ em relação à variável $t$
$i, xt$	Derivada parcial da coordenada de índice $i$ em relação às variáveis $x$ e $t$

---

### ***Abreviações***

**Máx** Máximo

---

### ***Siglas***

<b>RPM</b>	Rotações Por Minuto
<b>AME</b>	Análise Modal Experimental
<b>FRF</b>	Função de Resposta em Frequência
<b>FRI</b>	Função de Resposta ao Impulso
<b>FFT</b>	<i>Fast Fourier Transform</i>
<b>STFT</b>	<i>Short Time Fourier Transform</i>
<b>LSCE</b>	<i>Least Squares Complex Exponential</i>
<b>SIMO</b>	<i>Single Input Multiple Output</i>
<b>MAC</b>	<i>Modal Assurance Criterion</i>
<b>GDL</b>	Grau de Liberdade

# SUMÁRIO

<b>Lista de Ilustrações</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xix</b>
<b>Lista de Abreviaturas e Siglas</b>	<b>xxi</b>
<b>SUMÁRIO</b>	<b>xxv</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Revisão Bibliográfica . . . . .	3
1.2 Motivação . . . . .	9
<b>2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b>	<b>11</b>
2.1 Sistemas de Transmissão por Correia . . . . .	11
2.1.1 Correias Lisas ou Chatas . . . . .	12
2.1.2 Correias em V . . . . .	13
2.1.3 Correias Temporizadoras ou Sincronizadoras . . . . .	14
2.1.4 Aplicação Automotiva . . . . .	14
2.1.5 O Tensionador . . . . .	15
2.2 Aspectos Geométricos . . . . .	16
2.2.1 Ângulos de Abraçamento . . . . .	16
2.2.2 Ângulos Auxiliares . . . . .	22
2.3 Vibração transversal em uma corda . . . . .	24
2.3.1 Vibração transversal em uma corda em movimento . . . . .	28
2.3.2 Solução da equação da corda em translação . . . . .	28
2.4 Modelo Torcional Simplificado . . . . .	31
<b>3 MODELO MATEMÁTICO</b>	<b>35</b>
3.1 Equações de Movimento . . . . .	35
3.2 Equações de Equilíbrio . . . . .	47
3.3 Equações Lineares de Movimento . . . . .	49
3.4 Equilíbrio Estático no Sistema de Transmissão . . . . .	51

<b>4</b>	<b>SISTEMA PURAMENTE ROTACIONAL</b>	<b>57</b>
4.1	Equacionamento . . . . .	57
4.2	Análise Modal . . . . .	59
4.3	Efeito de Atrito Seco . . . . .	63
<b>5</b>	<b>ANÁLISE MODAL E RESPOSTA DO SISTEMA NÃO LINEAR</b>	<b>67</b>
5.1	Equacionamento . . . . .	67
5.2	Determinação das Frequências Naturais . . . . .	73
5.3	Normalização . . . . .	76
5.4	Receptância do Sistema . . . . .	77
5.5	Resposta Temporal do Sistema Não Linear . . . . .	82
<b>6</b>	<b>SIMULAÇÃO NUMÉRICA</b>	<b>93</b>
6.1	Estudo Estático . . . . .	94
6.2	Análise Modal Teórica . . . . .	97
6.3	Receptância do Sistema . . . . .	103
6.4	Resposta Temporal . . . . .	105
6.4.1	Resposta Livre do Sistema . . . . .	106
6.4.2	Resposta Forçada . . . . .	108
6.5	Estudo do Sistema Rotacional . . . . .	116
6.5.1	Análise Modal e Resposta Temporal . . . . .	116
6.5.2	Efeito do Atrito Seco no Tensionador . . . . .	119
<b>7</b>	<b>ESTUDO EXPERIMENTAL</b>	<b>123</b>
7.1	Análise Modal Experimental . . . . .	124
7.2	Análise em Operação . . . . .	131
7.3	Efeitos Não Lineares . . . . .	136
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>139</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>145</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Sistemas de transmissão por correia em aplicações automotivas são cada vez mais recorrentes, graças às suas vantagens como absorção de choques e vibrações produzidas por elementos como polias e tensionadores, além de assegurar a transmissão de potência com vida útil estendida, sem produzir impactos e níveis elevados de flutuação de torque nos acessórios, como ocorre com transmissões por correntes.

Em sistemas de transmissão com correia serpentina, conforme Figura 1.1, há a vantagem do acionamento de diversos acessórios apresentando diferentes condições de carregamento para operação.

O uso de tensionadores automáticos também tem crescido bastante nas aplicações automotivas atuais, uma vez que este componente garante o tracionamento da correia independentemente de ajustes periódicos. Isso devido a seu sistema de acionamento, através de elementos elásticos, como molas. Além de ter papel importante na atenuação de vibrações torcionais do sistema, graças não só à presença do elemento elástico, mas também ao elemento amortecedor utilizado.



Figura 1.1: Motor com sistema de transmissão por correia serpentina. Disponível em: [http://www.dieselpowermag.com/features/1207dp\\_july\\_2012\\_military\\_power\\_the\\_valanx/photo\\_03.html](http://www.dieselpowermag.com/features/1207dp_july_2012_military_power_the_valanx/photo_03.html) Acesso em: Abril de 2013

Neste tipo de aplicação são comuns como fontes de excitação as flutuações de torque induzi-

das principalmente na polia do virabrequim, que são geradas pela própria dinâmica do mecanismo de acionamento da árvore de manivelas através dos pistões. Seu movimento, além de produzir uma componente de torque constante que é necessária para o acionamento do veículo e é transmitida ao sistema de transmissão e diferencial, também produz uma componente dinâmica constituída de múltiplos harmônicos que acabam por ser transmitidos aos elementos ligados ao eixo de manivelas.

Estas flutuações de torque transmitidas pela polia motora do sistema para os demais acessórios do *front-end* do motor, além de acarretar níveis elevados de vibração torcional, também podem gerar flutuações no nível de tração da correia quando esta encontra-se em regime dinâmico. Níveis elevados de tração na correia (muito superiores aos níveis de projeto) podem induzir deformações plásticas na mesma e até desgaste prematuro devido à fadiga.

O estudo do sistema de transmissão por correias é proposto para a melhor compreensão dos fenômenos envolvidos na dinâmica deste tipo de sistema. Assim, busca-se a identificação de parâmetros críticos para o projeto do sistema e como estes são capazes de afetar a dinâmica e estabilidade do mesmo.

Dentre as fontes de problemas que são estudadas, serão investigadas, entre outras, as flutuações de torque produzidas nos acessórios da transmissão e seus efeitos nos demais elementos do sistema, os efeitos de diferentes trações iniciais na correia e a influência do atrito no braço do tensionador.

A investigação considera um sistema de transmissão por correia serpentina simplificado, com três polias, sendo uma a polia motora, outra a polia acionada e a terceira é ligada ao braço do tensionador automático, responsável pelo tracionamento da correia. Considera-se que o tensionador é acionado por uma mola torcional linear, e em um primeiro modelo matemático, é considerado amortecimento viscoso equivalente para cada forma modal do sistema.

Para a correia, além de sua translação no sistema, considera-se que podem ocorrer deformações infinitesimais ao longo de seu eixo longitudinal e também transversalmente ao seu comprimento. O deslocamento longitudinal é responsável por causar o acoplamento da correia com a vibração torcional que ocorre nas polias e os deslocamentos transversais, além de causar o fenômeno conhecido como *flutter* e é responsável por introduzir a não linearidade devido à elasticidade da correia. Propriedades de viscosidade da correia são desconsideradas no modelo.

A excitação do sistema pode ocorrer através de condições iniciais, como pequenos deslocamentos nos tramos ou deflexão no braço do tensionador, ou então pode-se considerar flutuações de torque introduzidas nas polias acionada ou motora.

É realizada a Análise Modal Teórica no sistema para a identificação das frequências naturais e formas modais para o caso linearizado, fornecendo assim, informações sobre ressonâncias primárias. Também é possível verificar a dependência dos parâmetros modais com a velocidade de operação do sistema, uma vez que o mesmo apresenta comportamento giroscópico e também a influência da tração atuante nos tramos com as frequências naturais.

Devido às não linearidades introduzidas pelas deformações infinitesimais que ocorrem nos tramos da correia, são esperados alguns fenômenos típicos de sistemas de múltiplos graus de liberdade com não linearidades cúbicas, como a ocorrência de ressonâncias secundárias, respostas com múltiplos harmônicos e frequências dependentes da amplitude de excitação, ressonâncias internas e possíveis instabilidades.

Foi construída uma bancada para condução de testes experimentais em um sistema de transmissão por correia prototípico, com características similares aos do modelo matemático implementado. Através de ensaios dinâmicos com medição dos níveis de vibração através de sensores, buscou-se identificar frequências naturais e fatores de amortecimento modais, além das respostas temporais para diferentes casos de excitação.

## **1.1 Revisão Bibliográfica**

Os primeiros desenvolvimentos no estudo de sistema de transmissão por correia avaliam seu equilíbrio estático, com relação à força de tração atuante nos tramos em função das condições de operação e a variação da tração ao longo do abraçamento das polias devido ao equilíbrio das forças de tração produzidas pelos tramos, a força centrífuga e a força de atrito entre correia e polia. Firbank (1970) em seu trabalho avalia a influência das deformações de cisalhamento que ocorrem na correia ao longo do abraçamento e sua importância na determinação do comportamento do sistema e sua capacidade de transmissão de potência, em contraste com a teoria clássica de *Creep* Elástico, que considera apenas as deformações longitudinais da correia e era utilizada até então.

Em relação ao equilíbrio da tração nos tramos quando em condição de operação, Mote Jr. (1965) propõe o equacionamento de um sistema de serra de fita, que é um mecanismo similar à transmissão por correia. De forma que, através de uma constante, chamada de constante de suporte, é possível determinar a tração de operação do elemento flexível a partir da tração inicial de referência do sistema (quando a velocidade de transporte é zero), simplesmente por se levar em conta a flexibilidade do suporte em uma das polias.

No mesmo trabalho, também são avaliadas as frequências naturais dos tramos do sistema e sua dependência com a velocidade de operação. Este modelo para os tramos considera que estes apresentam comportamento similar ao de cordas vibrando transversalmente e com movimento axial. A avaliação experimental deste sistema, bem como validação do modelo proposto, é apresentada por Mote Jr. e Naguleswaran (1966).

Um sistema de transmissão por correias já com a presença do tensionador automático (acionado por mola torcional) é apresentado por Ulsoy *et al.* (1985), onde os tramos são modelados por cordas vibrando transversalmente e com movimento longitudinal. Os efeitos de acoplamento geométrico que o tensionador produz no sistema são verificados, bem como os efeitos de instabilidade do tipo Mathieu, devido a excitações paramétricas e as condições de ressonância do sistema completo e da correia são verificadas numericamente através do método das diferenças finitas. Neste trabalho já é apontada a flutuação na força de tração atuante na correia como um dos mecanismos causadores de instabilidade, bem como ressonâncias da correia e tensionador e velocidades críticas.

Um modelo simplificado empregado para a descrição do comportamento da corda vibrante e que pode ser utilizado também na descrição do movimento dos tramos é o modelo de vibração na corda em translação apresentado por Sack (1954), onde é proposta uma solução analítica simplificada da equação homogênea do elemento, que descreve o comportamento espacial e temporal deste, quando sujeito a condições iniciais ou excitações harmônicas.

Verifica-se que o comportamento vibratório dos tramos tem grande influência na dinâmica do sistema, uma vez que efeitos não lineares provenientes de deformações infinitesimais podem produzir variações na tração atuante na correia. Estes efeitos foram inicialmente estudados nos modelos de vibração transversal de materiais em translação, podendo ser cordas ou vigas. Um modelo básico com o comportamento oscilatório não linear deste tipo de elemento é apresentado em Nayfeh e Mook (1979), onde soluções para a equação de movimento são determinadas através de métodos de perturbação.

Wickert e Mote (1990) fazem uma revisão sobre os modelos de corda e viga em translação e de vibração transversal com efeitos não lineares, onde as equações têm suas porções espaciais descritas através da discretização em formas modais. As soluções são expressas em formas fechadas através de funções de Green. Com isto é possível determinar a influência dos efeitos não lineares sobre as trações atuantes no elemento, além de se verificar a ocorrência de velocidades críticas de operação em que podem ocorrer instabilidades.

Com a evolução dos sistemas de transmissão e o maior uso de aplicações do tipo correia serpentina na indústria automobilística, a compreensão dos fenômenos envolvidos neste tipo de sistema passa a ser mandatória para o projeto e identificação de possíveis falhas induzidas tanto por níveis elevados de vibração quanto pelo desgaste do elemento flexível devido à fadiga.

Hawker (1991) realiza o estudo de sistemas de transmissão com múltiplas polias, considerando os efeitos de vibração transversal dos tramos na dinâmica do sistema. Através de um modelo simplificado, descreve a dinâmica rotacional dos componentes discretos, considerando tanto casos simplificados, onde há apenas polias, e até uma montagem onde há um tensionador automático, acionado por mola torcional. Paralelamente é utilizado um conjunto experimental com duas e três polias e usando ou não o tensionador automático para validar os modelos desenvolvidos.

Abrate (1992) faz uma revisão dos conceitos desenvolvidos e utilizados até então no estudo de sistemas de transmissão por correia, levando em conta os efeitos produzidos pela tração inicial aplicada à correia, a velocidade de transporte, efeitos da rigidez de flexão, e devido a grandes deslocamentos, além de investigar novamente a influência do suporte e sua rigidez sobre o sistema.

Um estudo mais complexo é desenvolvido por Beikmann (1992). Em seu trabalho é investigado o comportamento dinâmico de um sistema prototípico de transmissão por correia com tensionador automático, uma polia motora e uma polia acionada.

O trabalho desenvolve as equações não lineares dos elementos, levando em conta que este se encontra em operação a uma velocidade constante de giro. A análise estática é desenvolvida para determinação das trações de operação do sistema tanto por método iterativo quanto por método aproximado, onde é desenvolvido um modelo análogo ao proposto por Mote Jr. (1965) para determinar as trações a partir de constantes de suporte do sistema (BEIKMANN *et al.*, 1997).

Através das equações linearizadas para os tramos e os elementos discretos, é resolvido o pro-

blema de autovalor pela aplicação do método de Holzer, obtendo-se então as frequências naturais do sistema acoplado (BEIKMANN *et al.*, 1996a). O procedimento é iterativo e consiste da resolução de um sistema de equações algébricas. As formas modais são determinadas analogamente.

Em uma etapa final, as equações não lineares têm sua porção linear discretizada através da análise modal do sistema, e as porções não lineares das equações são tratadas como termos de excitação. A resposta temporal é obtida pela integração numérica das equações das coordenadas generalizadas modais do sistema (BEIKMANN *et al.*, 1996b). As respostas temporais são devido às excitações por flutuações de torque consideradas nos acessórios ou através de condições iniciais como deflexões nos tramos ou no tensionador.

São verificadas condições de ressonância interna do sistema provenientes do acoplamento modal devido à troca de energia entre diferentes modos em excitações harmônicas múltiplas das frequências naturais, fenômeno bastante discutido por Nayfeh e Mook (1979) e fundamental para determinação da estabilidade do sistema. Uma vez que as ressonâncias internas dependem fortemente das frequências naturais do sistema e como a combinação destas pode excitar parametricamente o mesmo.

A fim de verificar melhor os efeitos não lineares introduzidos pelos termos elásticos dos tramos em decorrência de grandes deslocamentos, Moon e Wickert (1997) propõem a solução temporal de um sistema simplificado apenas com duas polias ligadas diretamente. Através da técnica de discretização pelas formas modais, a determinação das soluções analíticas é realizada através de funções de Green e também pela aproximação pelo Método de Krylov, Bogoliubov e Mytropolsky. Estas respostas são comparadas com medições de vibração no tramo de um sistema de transmissão, realizadas através de um interferômetro a laser de Michelson. Nas respostas em frequência do sistema são identificados os fenômenos de salto na região próxima à ressonância devido à sua não linearidade.

Nos estudos relacionados à vibração em sistemas de transmissão por correia serpentina conduzidos até então, o tensionador automático era modelado apenas como um elemento que inseria uma rigidez torcional no sistema, o que não condiz com os sistemas reais utilizados. Para aumentar a estabilidade deste tipo de sistema e inserir amortecimento, reduzindo a vibração dos tramos e conseqüentemente a flutuação de tração, são utilizadas buchas no interior dos tensionadores que introduzem amortecimento através do atrito seco entre seus elementos internos.

Leamy (1998) em seu trabalho modela o sistema de transmissão por correia serpentina com tensionador considerando o atrito seco no pino de rotação do tensionador. Observa-se que apesar das vantagens como atenuação das vibrações torcionais, o atrito também introduz efeitos não lineares através do fenômeno de *stick-slip*, que acarreta respostas sub ou superharmônicas e possíveis ressonâncias secundárias, observadas matematicamente pela utilização do método do balanço harmônico incremental para a determinação da resposta temporal do sistema.

Um trabalho similar é proposto por Cheng e Zu (2003), onde é avaliada a influência de múltiplas excitações harmônicas no sistema com amortecimento por atrito de Coulomb no braço do tensionador. Sendo determinadas duas respostas analíticas possíveis para o sistema. Uma considerando o sistema sem parada (*nonstick*) e outra onde verifica-se ocorrência de *stick-slip*. A ocorrência ou não do *stick-slip* é fortemente relacionada à razão entre o torque estático produzido pela força de atrito e o torque externo excitando o sistema (RAO, 2009).

Zhang e Zu (1998a) apresentam um trabalho onde as propriedades viscoelásticas da correia, em um sistema de transmissão simples, são consideradas. As respostas temporais para as equações de movimento do sistema, apresentadas na forma autônoma, giroscópica e contínua são obtidas pela aplicação do Método das Múltiplas Escalas, considerando-se as não linearidades fracas. São avaliados também os casos de resposta forçada do sistema (ZHANG E ZU, 1998b).

Um estudo mais complexo avaliando a dinâmica de um sistema de transmissão por correia, similar ao proposto por Beikmann (1992), é apresentado por Zhang (1999). Neste trabalho, contudo, consideram-se os efeitos de atrito no braço do tensionador introduzidos por constantes de amortecimento viscoso equivalentes, determinados pela comparação entre os ciclos de histerese para o caso de atrito e amortecimento viscoso. Além, também, de considerar as propriedades viscoelásticas do envelope da correia, que introduzem uma nova fonte de amortecimento ao sistema. Em seu trabalho são avaliados diversos aspectos, como resposta livre e determinação das frequências naturais através de uma expressão em forma fechada (ZHANG E ZU, 1999). As respostas forçadas são obtidas para os casos harmônico e genérico através da aplicação do Método das Múltiplas Escalas direto, bem como a comparação destas respostas com as obtidas pela aplicação do Método das Múltiplas Escalas nas equações discretizadas pelo Método de Galerkin ou por superposição modal. Condições de estabilidade, excitações paramétricas, ressonâncias secundárias e ressonâncias internas (ZHANG E ZU, 2000) são identificadas para o sistema.

Os procedimentos utilizados até então para a integração das equações diferenciais

mostravam-se bastante custosos numericamente. Parker (2004) apresenta um método de discretização para as equações diferenciais do problema através do Método de Galerkin onde as condições de contorno que acoplam as equações são introduzidas pelo uso de multiplicadores de Lagrange. Com isso é possível resolver o problema de autovalor do sistema com menor esforço computacional. Além disso, também é estudada a sensibilidade da solução do problema de autovalor às variações dos parâmetros físicos.

Kong (2003) apresenta um modelo onde é considerado o efeito da rigidez de flexão nos tramos do sistema, o que insere o acoplamento linear entre as polias e os tramos em suas equações de movimento. As deflexões de equilíbrio são determinadas pela integração numérica das equações de equilíbrio estático do sistema por um *solver* de problemas de valor de contorno (KONG E PARKER, 2003). Tem-se então um novo problema de autovalor que é resolvido aplicando técnicas de discretização às equações de campo fornecendo informações sobre o acoplamento entre os elementos e a vibração do sistema (KONG E PARKER, 2004).

Zhu (2006) implementa os efeitos de atrito de Coulomb no braço do tensionador e os efeitos de uma polia de pista livre (*one way clutch*) em um sistema de transmissão por correia. Assim é possível verificar a eficácia deste tipo de sistema na redução de vibrações torcionais e instabilidades. A resposta não linear do sistema e suas consequências são determinadas pelo uso do Método de Balanço Harmônico.

Paralelamente, uma linha de pesquisa desenvolveu um modelo do sistema de transmissão através da aplicação do Método dos Elementos Finitos. Leamy e Wasfy (2001) desenvolvem um modelo onde os tramos do sistema são descritos por elementos de barra ou elementos de viga sujeitos ao efeito giroscópico do transporte e as polias são modeladas como restrições de deslocamento circular.

Efeitos do atrito na interface entre a polia e correia são modelados por uma relação com a taxa de fluência do material ao invés do modelo de Coulomb tradicional podendo, assim, descrever as regiões de adesão da correia na polia (LEAMY E WASFY, 2002a).

O modelo por elementos finitos é capaz de descrever a dinâmica do sistema quando em condição estacionária de operação e também em regime transiente da velocidade de transporte da correia (LEAMY E WASFY, 2002b). São considerados também elementos como polias de pista livre e sua influência na dinâmica do sistema. As respostas apresentam boa precisão quando comparadas às

respostas analíticas de sistemas estudados anteriormente.

Wasfy e Leamy (2002) também investigam os efeitos da rigidez de flexão sobre sistema de transmissão por correia pelo método dos elementos finitos considerando elementos de barra e viga, e as polias ou coroas modeladas por elementos de disco rígidos, obtendo-se boa concordância com os modelos analíticos e experimentos, além de verificar os efeitos de acoplamento geométrico no caso de correias sincronizadoras (WASFY E LEAMY, 2005).

## 1.2 Motivação

Como motivação para o desenvolvimento, busca-se o melhor entendimento dos fenômenos envolvidos na dinâmica de um sistema de transmissão por correia, que é um mecanismo fundamental e cada vez mais recorrente em diversas aplicações, mas com especial destaque para o setor automotivo, onde este tipo de sistema é utilizado no acionamento de um ou diversos acessórios na parte frontal do motor, ou *front-end*, como denominado na literatura técnica.

Nestas aplicações é recorrente a ocorrência de danos aos acessórios ou mesmo desgaste prematuro da correia devido à redução na capacidade de tração da mesma, em decorrência de escorregamentos entre correia e polias.

Outras causas de problemas conhecidas são as flutuações de torque nas polias dos acessórios que podem excitar o sistema de transmissão fazendo com que este passe por alguma região crítica de operação ou de ressonância, produzindo assim níveis elevados de vibração torcional nas polias.

As flutuações de torque, aliadas à dinâmica dos tramos e tensionador em um sistema de transmissão podem induzir devido ao acoplamento linear entre os elementos, e também por efeitos não lineares devido à elasticidade da correia e flutuações na força de tração atuante. Um aumento na tração atuante pode acelerar o processo de desgaste por fadiga ou mesmo ocasionar a fratura do componente.

Além disso, o mau funcionamento do sistema de transmissão por correia pode acarretar a ocorrência de ruídos indesejáveis como *squeal* ou ruído aerodinâmico produzido pela vibração transversal da correia (*flutter*).

Através da aplicação de um modelo matemático que descreve um sistema de transmissão com polias e um tensionador acionado por mola torcional, busca-se a determinação de parâmetros modais como frequências naturais e formas de vibrar do sistema, além da determinação de possíveis efeitos dinâmicos, como variações nas trações dos tramos e aumento nos níveis de vibração torcional nas polias dos acessórios, sejam como resposta linear às excitações aplicadas ou devido a efeitos não lineares introduzidos pela elasticidade da correia.

Como fontes de excitação são consideradas flutuações de torque harmônicas nas polias e braço do tensionador ou condições iniciais como deslocamentos nos tramos ou deflexões nas polias e tensionador.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 Sistemas de Transmissão por Correia

Sistemas de transmissão por correia consistem de uma aplicação típica da engenharia mecânica, utilizada em ocasiões onde é necessária a transmissão de potência ou movimento rotativo entre elementos que apresentam distância relativa entre si. Usualmente, através de polias acopladas a eixos em movimento, a potência é transmitida entre estas por meio de uma correia flexível, conforme Figura 2.1.

Esse tipo de componente, como definido em Shigley *et al.* (2008) pertence à classe conhecida como elementos mecânicos flexíveis, uma vez que apresentam um elemento de conexão com característica tipicamente elástica. Suas aplicações são das mais variadas, contemplando sistemas de transporte, em correias transportadoras, e acionamento de equipamentos diversos. Além de oferecer benefícios, como o custo reduzido de montagem e manutenção, e capacidade de absorção de choques e vibrações.

Em sua configuração mais simples são utilizadas duas polias, sendo uma responsável por acionar o sistema e outra que será movida pela potência transmitida, sendo as duas ligadas pela correia. A ligação pode se dar de diversas formas. Uma é a ligação direta, onde a correia circunda externamente as polias envolvidas.

É possível também uma configuração com a correia cruzada, onde a parte interna envolve uma polia e a parte externa envolve a outra polia, tornando possível a reversão no sentido de giro do eixo acionado em relação ao eixo motor. Contudo, este tipo de configuração só é possível em correias de pequena espessura. Correias em V não são adequadas, uma vez que uma polia seria acionada pelo perfil trapezoidal e a outra polia pela parte de trás da correia, e como a área de contato é reduzida nesta polia, a capacidade de transmissão seria comprometida.

Outra configuração também utilizada considera as polias fora do plano, podendo se criar um ângulo de até 90 graus entre os planos médios das polias. É uma aplicação adequada para acionamento de eixos não paralelos.

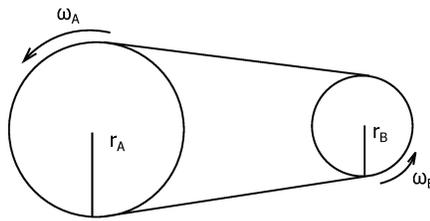


Figura 2.1: Sistema de transmissão por correia.

### 2.1.1 Correias Lisas ou Chatas

As correias lisas ou chatas são bastante comuns nos sistemas de transmissão. São constituídas tipicamente de um material elástico envolto por algum elastômero. Em sua maioria são utilizados cordoneis de nylon, raíom, algodão ou cabos metálicos revestidos em um envelope impregnado com borracha, uretano, ou outro polímero (modelos atuais têm utilizado um tipo de borracha sintética, chamada EPDM). Seu perfil típico é apresentado na Figura 2.2a.

Este tipo de correia é normalmente utilizado em aplicações onde se requer maior distância entre os centros das polias, apresentando elevada eficiência e devido à suas propriedades elásticas, é capaz de absorver vibrações, choques e reduzir o nível de ruído da aplicação.

Conforme exposto por Firbank (1970), as forças de atrito que ocorrem entre a correia e a polia geram uma mudança na tração da correia. Na interface, estas forças fazem com que a correia se distenda ou contraia, movendo-se em relação à superfície da polia. Esse movimento é causado por um fenômeno conhecido por *Creep* elástico, caracterizado por uma deformação associada ao atrito de deslizamento em contraste com o atrito estático com a superfície da polia.

Enfim, a ação da polia motora através da porção da correia em contato, é a responsável pela transmissão de potência no sistema, fazendo também com que a correia se mova mais lentamente em relação à velocidade superficial da polia, em decorrência do atrito.

O efeito do atrito devido à fricção na interface correia-polia, produz um gradiente na força de tração atuante na correia ao longo do arco de abraçamento com a polia, sendo que isso faz com que ocorra uma variação na velocidade de transporte da correia nesta região (produzindo uma diferença entre as velocidades das polias) e também é o fenômeno responsável pela transmissão de potência

entre os eixos.

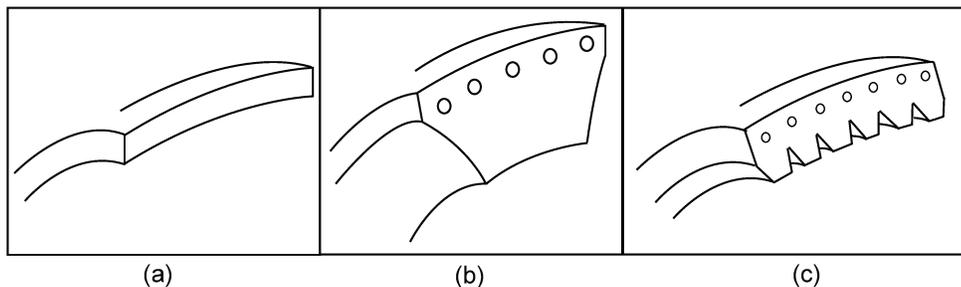


Figura 2.2: Perfís comuns em correias. a) Correia lisa; b) Correia em V; c) Correia poly-V.

### 2.1.2 Correias em V

Este tipo de correia apresenta algumas diferenças em relação às correias lisas. É uma correia mais espessa, apresentando seção transversal em formato trapezoidal, conforme Figura 2.2b. São fabricadas normalmente com cordoneis de algodão, nylon ou raioim revestidos por um envelope impregnado em elastômero.

As polias utilizadas com correias em V apresentam sulcos no formato de V onde ocorre o encaixe da correia, esta forma garante que haja maior área de contato, garantindo assim maior atrito na interface entre correia e polia e conseqüentemente, assegurando maior capacidade de torque entregue às polias.

Diferentemente das correias lisas, as correias em V são fabricadas em tamanhos específicos e não apresentam junções.

Devido à maior espessura, neste tipo de aplicação, a rigidez de flexão do material passa a ser considerável, interferindo na dinâmica do mecanismo, de forma que, apesar de este sistema ser capaz de transmitir torques maiores às polias, a capacidade de absorção de choques e vibrações é reduzida. As distâncias entre centro das polias utilizadas não podem ser elevadas e os raios apresentam um tamanho mínimo de acordo com a especificação da correia.

### 2.1.3 Correias Temporizadoras ou Sincronizadoras

Correias Temporizadoras ou Sincronizadoras são utilizadas em aplicações onde é necessária a sincronização entre as polias acionadas e a polia motora. Apresentam dentes, assim como suas polias que apresentam feixes ou dentes ao longo de sua periferia, onde se encaixam a correia. Normalmente são chamadas de polia dentada ou coroa.

Devido ao encaixe que ocorre na interface entre correia e polia, não ocorre deslizamento, o que garante que as velocidades em cada polia sejam proporcionais aos raios das mesmas, contudo, como desvantagem, verifica-se a ocorrência de flutuações de torque e tração devido ao efeito de acoplamento geométrico entre o dente da correia e o sulco correspondente na polia.

Em aplicações automotivas, são normalmente utilizadas no acionamento e controle dos eixos do comando de válvulas, sendo acionados pelo eixo do virabrequim e com uma razão de redução de 2:1. São bastante usados em substituição a outros componentes como correntes e engrenagens, com a vantagem de que são capazes de absorver possíveis impactos e efeitos de irregularidade do motor.

### 2.1.4 Aplicação Automotiva

Além do acionamento das árvores de cames do comando de válvulas, as transmissões por correia também se popularizaram por sua utilização para acionamento dos acessórios do chamado *front-end* do motor.

No passado ocorria a aplicação de diversas correias, sendo uma para o acionamento de cada acessório, sendo em sua maioria correias em V. Atualmente, contudo, em grande maioria das aplicações, uma única correia pode ser utilizada para transmitir potência para diversos acessórios presentes no motor, como bomba de água, alternador, bomba de direção hidráulica, compressor do ar condicionado, entre outros. Um exemplo é apresentado na Figura 2.3.

Nesta aplicação, é utilizada uma correia maior conhecida como correia serpentina que envolve as polias dos diversos componentes. Esta pode realizar o acionamento tanto pelo contato de seu lado estriado, quanto pela parte traseira da correia.

As correias utilizadas nesta aplicação são, normalmente, as que apresentam perfil chamado *poly-V*, *multirib* ou *multigroove*, exposto na Figura 2.2c. Estas correias, apesar de terem a espessura pouco maior que as correias lisas, apresentam maior área de contato com as polias que acionam, pois apresentam estrias ou feixes que aumentam a área de contato com as mesmas, garantindo assim menor chance de deslizamento e melhor transmissão de potência.

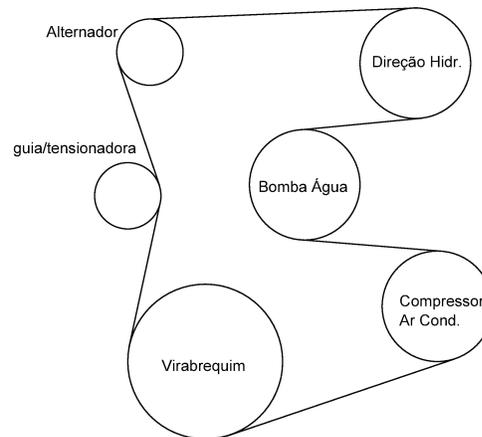


Figura 2.3: Correia Serpentina em aplicação automotiva.

### 2.1.5 O Tensionador

Como foi visto anteriormente, a tração inicial aplicada à correia é de fundamental importância para seu funcionamento adequado. Se uma correia não é tracionada corretamente, a mesma não é capaz de transmitir adequadamente o torque produzido pela polia motora. A força de atrito na interface entre correia e polia é reduzida podendo resultar em deslizamento da correia, que pode ocasionar, além da perda da capacidade de transmissão, o desgaste da correia, aquecimento das polias, possíveis incidências de choque nas polias e ocorrência de ruídos indesejáveis como o *squeal*.

Para assegurar o nível de tração adequado nas correias, existem diversos dispositivos utilizados, os mais comuns são as polias de tensionamento e os tensionadores.

As polias tensionadoras são montadas no sistema de forma que seu centro é ajustado até que a tração adequada seja aplicada à correia. Consiste de um processo mecânico estático, contudo, a deformação que a correia está sujeita em sua operação e o próprio desgaste dos componentes

pode fazer com que ocorra uma redução nesta tração atuante. Portanto, para esse tipo de sistema, são necessárias inspeções periódicas para verificação da tração aplicada e realização de possíveis manutenções.

Já os tensionadores podem ser dos seguintes tipos:

**Mecânicos:** Basicamente é utilizado um braço para posicionar uma polia de tracionamento, ao invés de se realizar o ajuste propriamente no centro de fixação da polia.

**Automáticos:** Neste caso são utilizados elementos elásticos como molas para aplicar uma carga sobre a correia e assim tracioná-la. Este sistema é conveniente uma vez que é capaz de compensar os efeitos de deformação que podem ocorrer na correia, além de serem capazes de absorver pequenas flutuações de torque nas polias acionadas. Apesar das vantagens, ainda requerem certa periodicidade de inspeção para assegurar que a tração aplicada é a de projeto.

Os tensionadores automáticos em geral utilizam algum elemento capaz de introduzir amortecimento ao sistema, minimizando os níveis de vibração torcional e transversal que podem ocorrer nos tramos devido às condições de operação ou flutuações de torque nos acessórios. O mecanismo de amortecimento mais comumente utilizado é o de atrito seco, onde uma bucha é colocada entre o rolamento e o pino de fixação do braço do tensionador, de forma que o atrito entre estes componentes produz o amortecimento necessário.

Outra alternativa também utilizada é o amortecedor hidráulico. Neste caso a mola do tensionador, que é linear fica na câmara de um pistão imerso em óleo ou fluido. Ao se movimentar o pistão faz com que fluido saia da câmara, produzindo um efeito de amortecimento viscoso.

## **2.2 Aspectos Geométricos**

### **2.2.1 Ângulos de Abraçamento**

Um fator importante para que um mecanismo de transmissão por correia serpentina seja adequadamente modelado é a geometria. Para isto, serão descritas algumas das possibilidades de montagem, algumas generalizações e suas consequências no sistema.

Como primeiro caso, considera-se um par de polias de raios distintos com uma correia perfeitamente tracionada e em ligação direta, conforme a Figura 2.4.

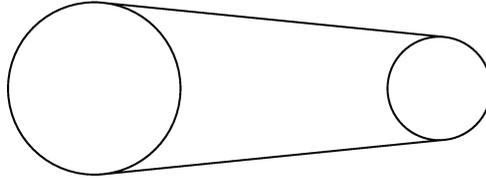


Figura 2.4: Transmissão por correia com ligação direta.

Neste tipo de configuração, e em outros possíveis, é adequada a identificação do ângulo de abraçamento, uma vez que esse valor é fundamental para a determinação das forças de tração atuantes e a influência do atrito na interface entre correia e polia. Para isso, considera-se a geometria na Figura 2.5. Para que seja determinado o ângulo  $\varphi_1$ , primeiro é traçada uma reta auxiliar, paralela ao tramo, saindo do centro da polia menor.

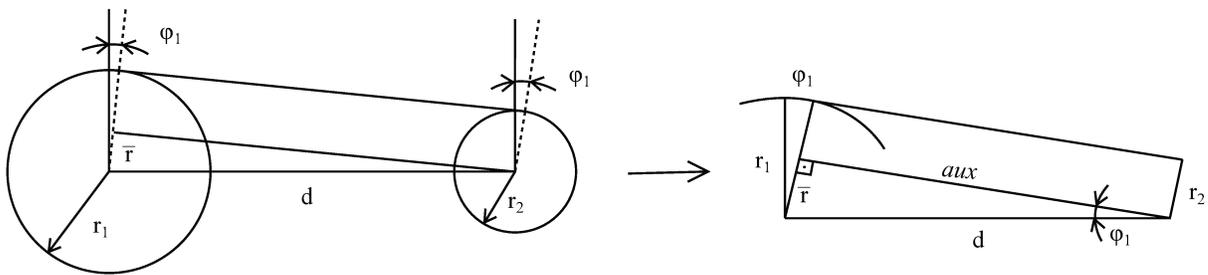


Figura 2.5: Identificação do ângulo de contato entre correia e polia.

A partir desta nova geometria, o ângulo de contato pode ser determinado pelas relações trigonométricas do triângulo retângulo formado e sabendo-se que  $\bar{r} = r_1 - r_2$

$$\sin \varphi_1 = \frac{\bar{r}}{d} \implies \varphi_1 = \sin^{-1} \left( \frac{r_1 - r_2}{d} \right) \quad (2.1)$$

Pode-se definir os ângulos de abraçamento das polias, como sendo:

$$\phi_1 = \pi + 2\varphi_1 = \pi + 2 \sin^{-1} \left( \frac{r_1 - r_2}{d} \right) \quad (2.2)$$

$$\phi_2 = \pi - 2\varphi_1 = \pi - 2 \sin^{-1} \left( \frac{r_1 - r_2}{d} \right) \quad (2.3)$$

Sendo  $\phi_1$  o ângulo de abraçamento para a polia maior e  $\phi_2$  o ângulo de abraçamento para a polia menor.

Pode-se agora analisar uma nova geometria de montagem, conforme dado na Figura 2.6. Este tipo de configuração é chamada de montagem cruzada e é comum em sistemas com correia lisa, onde não há elevado requerimento em torque transmitido e onde é necessário que a polia acionada gire em sentido reverso em relação à polia motora. Este tipo de montagem não é adequado para correias do tipo V ou que apresentem rigidez à flexão e torção consideráveis.

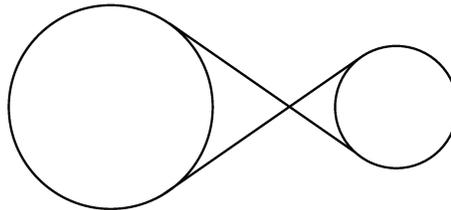


Figura 2.6: Esquema de montagem com correia cruzada entre as polias.

Para determinar o ângulo de abraçamento neste tipo de montagem, pode-se realizar procedimento similar ao utilizado para a ligação direta, traçando-se uma reta auxiliar, paralela ao tramo e saindo do centro da polia menor, conforme Figura 2.7. Tem-se, então, um novo triângulo retângulo, onde um dos catetos compreende agora a soma dos raios das polias e a hipotenusa é a distância entre os centros.

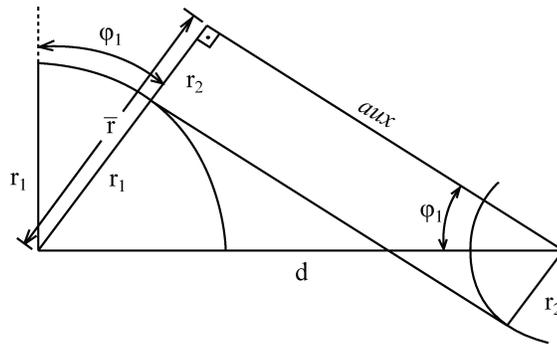


Figura 2.7: Determinação do ângulo de contato entre correia e polia.

O ângulo de contato  $\varphi_1$  será

$$\varphi_1 = \sin^{-1} \frac{\bar{r}}{d} = \sin^{-1} \left( \frac{r_1 + r_2}{d} \right) \quad (2.4)$$

e os ângulos de abraçamento das polias serão iguais, neste caso, valendo

$$\phi_1 = \phi_2 = \pi + 2 \sin^{-1} \left( \frac{r_1 + r_2}{d} \right) \quad (2.5)$$

Em um sistema multipolias, o tratamento é mais complexo. A análise para determinar os ângulos de abraçamento em cada polia deve considerar cada quadrante e posição geométrica das polias, além do tipo de ligação que ocorre entre as mesmas. Considerando uma montagem conforme a apresentada na Figura 2.8, onde são usadas três polias e como se pode observar, a polia 2 apresenta ângulo de abraçamento reduzido. Este tipo de aplicação é utilizada para aumentar o ângulo de abraçamento nas polias que realmente atuam no sistema, no caso, 1 e 3, sendo que a polia 2 pode ser apenas uma polia tensionadora ou uma guia. Com isso há um ganho na capacidade de transmissão de torque.

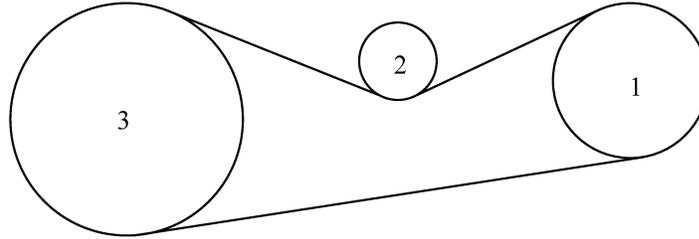


Figura 2.8: Transmissão com 3 polias.

Se for considerada uma montagem deste tipo, é necessário analisar as ligações entre as polias duas a duas, considerando a ligação e a inclinação da reta que une seus centros em relação um plano cartesiano de referência. A Figura 2.9 apresenta parte de um sistema de transmissão com apenas duas polias com ligação direta, mas inclinadas em relação ao referencial.

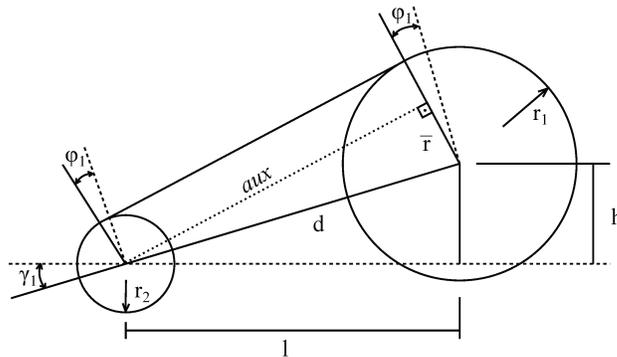


Figura 2.9: Relações geométricas para uma montagem parcial.

Considerando a polia maior, de raio  $r_1$ , pode-se determinar o ângulo de abraçamento em relação à metade superior da polia. Sejam as coordenadas dos centros das polias  $\vec{f}_1 = (x_1, y_1)$  e  $\vec{f}_2 = (x_2, y_2)$ , o ângulo de inclinação da linha que une os centros em relação à horizontal é

$$\gamma_1 = \tan^{-1} \left( \frac{h}{l} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \quad (2.6)$$

e o ângulo de contato é

$$\varphi_1 = \sin^{-1} \left( \frac{\bar{r}}{d} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}} \right) \quad (2.7)$$

Assim, o ângulo de abraçamento para meia polia será

$$\phi_{1\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \gamma_1 + \varphi_1 \quad (2.8)$$

Para o sistema com três polias, similar ao da Figura 2.8, pode-se considerar os seguintes ângulos:

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= \tan^{-1} \left( \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) & \varphi_{12} &= \sin^{-1} \left( \frac{r_1 + r_2}{d_{21}} \right) \\ \gamma_{13} &= \tan^{-1} \left( \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} \right) & \varphi_{13} &= \sin^{-1} \left( \frac{r_1 - r_3}{d_{13}} \right) \\ \gamma_{23} &= \tan^{-1} \left( \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} \right) & \varphi_{23} &= \sin^{-1} \left( \frac{r_2 + r_3}{d_{23}} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Finalmente, os ângulos de abraçamento serão:

### Polia 1

- Se  $r_1 > r_3$

$$\phi_1 = \left( \frac{\pi}{2} + \gamma_{12} + \varphi_{12} \right) + \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_{13} + \phi_{13} \right) \quad (2.10)$$

- Se  $r_1 < r_3$

$$\phi_1 = \left( \frac{\pi}{2} + \gamma_{12} + \varphi_{12} \right) + \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_{13} - \phi_{13} \right) \quad (2.11)$$

Se as polias são de mesmo tamanho, qualquer expressão é válida.

### Polia 2

$$\phi_2 = \varphi_{23} - \gamma_{23} + \varphi_{12} + \gamma_{12} \quad (2.12)$$

### Polia 3

- Se  $r_1 > r_4$

$$\phi_4 = \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_{23} + \varphi_{23} \right) + \left( \frac{\pi}{2} + \gamma_{13} - \varphi_{13} \right) \quad (2.13)$$

- Se  $r_1 < r_4$

$$\phi_4 = \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_{23} + \varphi_{23} \right) + \left( \frac{\pi}{2} + \gamma_{13} + \varphi_{13} \right) \quad (2.14)$$

Se as polias são de mesmo tamanho, qualquer expressão é válida.

## 2.2.2 Ângulos Auxiliares

No estudo de sistemas de transmissão com autotensionador é necessário, para a modelagem, definir espacialmente a orientação do braço do tensionador e também relacionar a posição e orientação espacial dos tramos em relação ao braço, para isto, faz-se uso de ângulos chamados de auxiliares, que correspondem aos ângulos entre as projeções dos tramos com o braço do tensionador e com a reta perpendicular à este.

Na Figura 2.10, os ângulos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  definem a inclinação do braço do tensionador com respeito à direção de cada tramo adjacente.

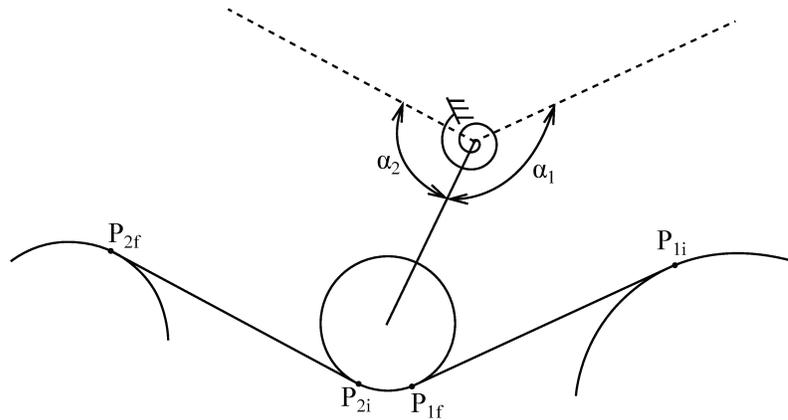


Figura 2.10: Ângulos auxiliares  $\alpha$  do tensionador.

Dados os pontos de início e término de cada tramo ( $\vec{P}_{1i}, \vec{P}_{1f}, \vec{P}_{2i}, \vec{P}_{2f}$ ), além dos pontos dos centros de rotação da polia 2 e do tensionador,  $\vec{f}_2 = (x_2, y_2)$  e  $\vec{f}_3 = (x_3, y_3)$ . Pode-se definir vetores para determinar os ângulos auxiliares.

$$\vec{v}_1 = \vec{P}_{1f} - \vec{P}_{1i} = (v_{1x}, v_{1y}) \quad (2.15)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{P}_{2f} - \vec{P}_{2i} = (v_{2x}, v_{2y}) \quad (2.16)$$

$$\vec{v}_T = \vec{f}_3 - \vec{f}_2 = (v_{Tx}, v_{Ty}) \quad (2.17)$$

Pela definição de produto escalar entre vetores, é possível determinar os ângulos auxiliares, considerando as situações presentes na Figura 2.11.

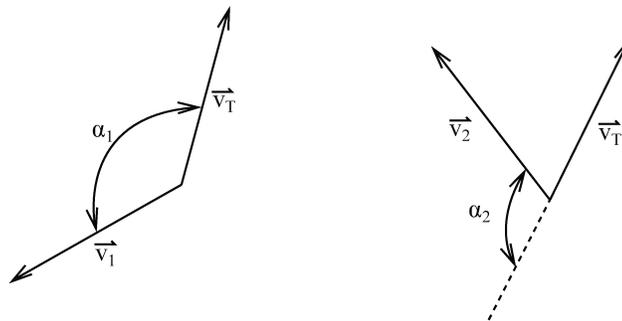


Figura 2.11: Ângulos Auxiliares

$$\alpha_1 = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_T}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_T|} \right) \quad (2.18)$$

$$\alpha_2 = \pi - \cos^{-1} \left( \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_T}{|\vec{v}_2| |\vec{v}_T|} \right) \quad (2.19)$$

Outro conjunto de ângulos auxiliares que pode ser determinado corresponde a  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , sendo estes os ângulos entre as retas dos tramos e a reta perpendicular ao braço do tensionador, conforme Figura 2.12.

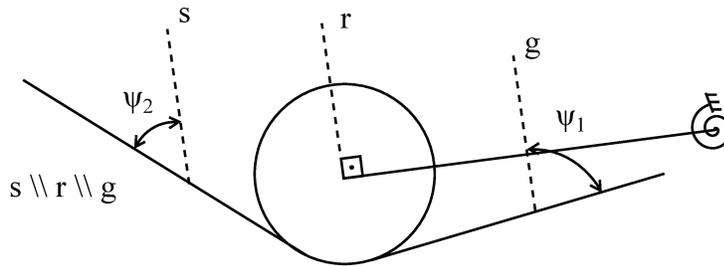


Figura 2.12: Ângulos auxiliares  $\psi_1$  e  $\psi_2$ .

De forma geral, para geometrias similares às da Figura 2.12, os ângulos auxiliares  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são dados por

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \quad (2.20)$$

$$\psi_2 = \frac{3\pi}{2} - \alpha_2 \quad (2.21)$$

### 2.3 Vibração transversal em uma corda

O estudo de sistemas de transmissão por correia, a partir do momento em que se passa a considerar os efeitos dinâmicos e a interação entre o movimento da correia com os demais elementos discretos, requer o uso de modelos mais complexos para tornar o modelo matemático o mais real possível. Diversos autores (Ulsoy *et al.* (1985), Beikmann (1992), Zhang (1999), Parker (2004), Kong (2003), entre outros) têm feito o uso de elementos contínuos para representar o movimento

próprio das correias e um dos modelos mais comuns é o da corda vibrando. Com isto, é possível verificar a vibração induzida na correia pelas variações em sua tração, além de poder verificar como este movimento da correia pode excitar os elementos discretos, como o tensionador.

Nesta seção será modelado o movimento da corda através do estudo cinético de uma porção infinitesimal desta. Para isto, considera-se que a corda não apresenta deslocamento horizontal, apenas vertical, e que a mesma é tracionada por uma força constante, no mesmo referencial que a corda se encontra.

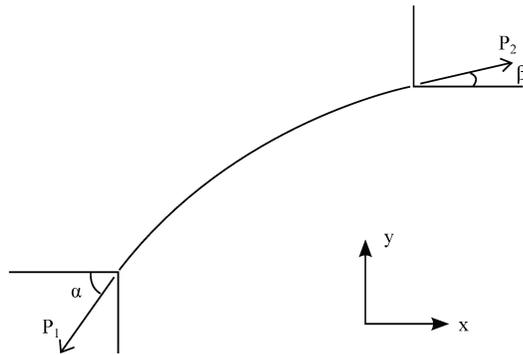


Figura 2.13: Representação de um trecho da corda.

Como pode-se observar na Figura 2.13, as forças de tração  $P_1$  e  $P_2$  atuam na corda na direção de seu comprimento, conforme a mesma se movimenta. Vamos impor que esta força de tração seja constante e igual à  $P$ , na direção horizontal da corda, uma vez que não há transporte de massa nesse sentido.

$$P_1 \cos \alpha = P_2 \cos \beta = P \quad (2.22)$$

As componentes verticais da tração apresentam variações que produzirão as alterações na inclinação da corda.

Como não há movimento na direção horizontal, apenas na vertical, consideramos que o somatório de forças em  $x$  é nulo. Resta então realizar a análise das componentes verticais em um diagrama de corpo livre. Consideremos uma porção infinitesimal  $ds$  da corda e as forças atuantes na mesma.

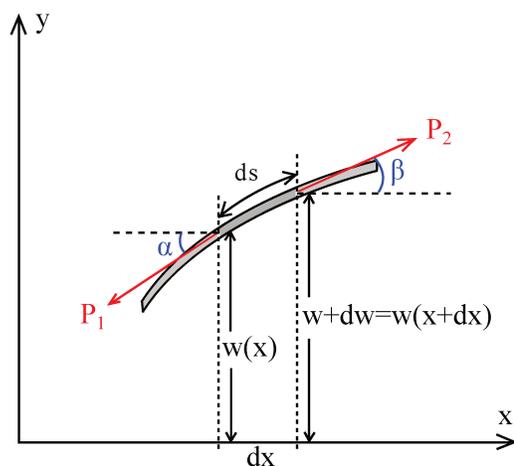


Figura 2.14: Representação das forças atuantes na porção  $ds$  da corda.

Segundo a Figura 2.14, teremos a seguinte relação:

$$\sum F_y = ma_y \quad (2.23)$$

$$- P_1 \sin \alpha + P_2 \sin \beta = ma_y = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

onde  $\rho$  é a densidade linear da corda.

Dividindo a Equação (2.24) por  $P$ , tem-se

$$\frac{P_2 \sin \beta}{P} - \frac{P_1 \sin \alpha}{P} = \frac{\rho dx}{P} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

Mas fazendo uso da relação (2.22),

$$\frac{P_2 \sin \beta}{P_2 \cos \beta} - \frac{P_1 \sin \alpha}{P_1 \cos \alpha} = \frac{\rho dx}{P} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.26)$$

Sabendo que

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \quad (2.27)$$

tem-se

$$\tan \beta = \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x+dx} = \frac{\partial w(x+dx)}{\partial x} = f(x+dx) \quad (2.28)$$

$$\tan \alpha = \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_x = \frac{\partial w(x)}{\partial x} = f(x) \quad (2.29)$$

Substituindo, fica-se então com

$$f(x+dx) - f(x) = \frac{\rho dx}{P} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.30)$$

$$\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{\rho}{P} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.31)$$

Como pode-se observar na Equação (2.31), a parte esquerda da equação apresenta explicitamente a definição da derivada de uma função  $f(x)$ , pode-se então substituir esta, obtendo

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\rho}{P} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.32)$$

Lembrando que foi realizada a substituição  $f(x) = \partial w(x)/\partial x$ , pode-se escrever

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.33)$$

Finalmente chegando à

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.34)$$

que é a equação diferencial unidimensional que governa o movimento da corda com oscilação transversal. Onde  $c = \sqrt{P/\rho}$  é a velocidade de propagação da onda transversal.

### 2.3.1 Vibração transversal em uma corda em movimento

Na seção anterior foi realizada a dedução da equação diferencial da corda quando a mesma apresenta uma força de tração constante ao longo de seu comprimento na direção horizontal. Nesta seção será realizada uma mudança de coordenadas, de forma a considerar que a corda apresenta uma translação na direção axial. A tração atuante ainda será constante no referencial móvel.

Sabe-se que em um referencial global a derivada temporal total de uma função  $g(x, y, z, t)$  pode ser expressa como

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (2.35)$$

Quando utiliza-se este tipo de derivada, a variação temporal computa também as possíveis mudanças de direção sofridas pela função, portanto, no caso unidimensional, para a corda, tem-se:

$$\frac{d^2w(x, t)}{dt^2} = c^2 \frac{\partial^2w(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.36)$$

com

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.37)$$

onde  $v$  é a velocidade de translação (constante) da corda. A equação se torna então:

$$\frac{\partial^2w(x, t)}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2w(x, t)}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2w(x, t)}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2w(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial^2w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2w}{\partial x \partial t} - (c^2 - v^2) \frac{\partial^2w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.39)$$

### 2.3.2 Solução da equação da corda em translação

Sack (1954) propôs uma resolução para um sistema que consiste de uma corda elástica flexível quando a mesma se encontra em translação e com suas extremidades sujeitas a condições de contorno fixas. É considerado também o tracionamento da corda através de uma tração atuante em

todo o seu comprimento.

A solução de Sack contempla a modelagem linear das vibrações transversais atuantes ao longo do comprimento da corda.

Algumas considerações são feitas para simplificação do problema:

1. A velocidade de movimento translacional da corda é  $v$ ,  $m$  é a massa por unidade de comprimento, ou densidade linear, e  $P$  é a tração aplicada na corda, constante.
2. As oscilações são consideradas suficientemente pequenas.
3. Gravidade, rigidez de flexão e viscosidade interna são desprezados.
4. O amortecimento é inicialmente desconsiderado.
5. A corda tem suas extremidades fixas por pinos suaves (condição livre-livre para reflexão da onda em propagação)

Como condições de contorno aplicadas tem-se que o deslocamento transversal em  $x = 0$  e  $x = L$  será  $w = 0$ , ou seja, não há deslocamento nas extremidades.

Considerando novamente a equação diferencial da corda:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - (c^2 - v^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.40)$$

ou em notação simplificada, pode-se expressar a derivada de uma função  $f$  em relação à uma variável  $x$  como  $f_{,x}$ . Tem-se então:

$$w_{,tt} + 2vw_{,xt} - (c^2 - v^2)w_{,xx} = 0 \quad (2.41)$$

Para resolver esta equação homogênea, considera-se que as variáveis temporal e espacial são independentes, de forma que pode ser usada a seguinte solução periódica:

$$w = \bar{w}(x)e^{\pm i\omega t} \quad (2.42)$$

Tem-se

$$-\omega^2 \bar{w} + i\omega 2v \frac{\partial}{\partial x} \bar{w} - (c^2 - v^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{w} = 0 \quad (2.43)$$

Supondo ainda que a porção espacial pode ser expressa por uma função  $\bar{w} = Ae^{\pm i\alpha x}$ , a substituição fornece

$$-\omega^2 Ae^{i\alpha x} - 2\omega\alpha v Ae^{i\alpha x} + (c^2 - v^2)\alpha^2 Ae^{i\alpha x} = 0 \quad (2.44)$$

A solução não trivial provém da resolução da equação quadrática em  $\alpha$ :

$$\omega^2 + 2\omega v\alpha - (c^2 - v^2)\alpha^2 = 0 \quad (2.45)$$

$$\alpha = \frac{-2\omega v \pm \sqrt{4\omega^2 v^2 + 4(c^2 - v^2)\omega^2}}{-2(c^2 - v^2)} = \frac{\omega v}{(c^2 - v^2)} \pm \frac{\omega c}{(c^2 - v^2)} = \frac{\omega}{v'} \pm \frac{\omega}{c'} \quad (2.46)$$

onde

$$v' = \frac{(c^2 - v^2)}{v} \quad c' = \frac{(c^2 - v^2)}{c} \quad (2.47)$$

Finalmente, a solução do sistema pode assumir a seguinte forma

$$w(x, t) = Ae^{i\omega t} \exp\left(i\frac{\omega x}{c'}\right) \exp\left(i\frac{\omega x}{v'}\right) + Be^{i\omega t} \exp\left(-i\frac{\omega x}{c'}\right) \exp\left(i\frac{\omega x}{v'}\right) + cc \quad (2.48)$$

ou

$$w(x, t) = Ce^{i\omega t} \sin\left(\frac{\omega x}{c'}\right) \exp\left(i\frac{\omega x}{v'}\right) + cc \quad (2.49)$$

onde  $cc$  representa a existência do conjugado complexo da exponencial, que é função da variável temporal.

Substituindo esta solução na equação diferencial da corda e aplicando as condições de con-

torno, pode-se determinar suas frequências naturais. Após as simplificações tem-se que as frequências naturais ocorrem quando o termo  $\sin\left(\frac{\omega x}{c'}\right)$  é nulo. Portanto,

$$\omega_n = \frac{n\pi c'}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.50)$$

## 2.4 Modelo Torcional Simplificado

Um modelo simplificado para o estudo de vibrações em sistema de transmissão por correia pode ser desenvolvido considerando-se apenas os graus de liberdade correspondentes à vibração rotacional nas polias. Este tipo de modelo é adequado para sistemas onde a inércia da correia é muito inferior às inércias das polias e o nível de vibração da correia é reduzido. De forma que a correia atua meramente como um elemento elástico e dissipativo no sistema.

Hawker (1991) apresenta um equacionamento simplificado levando em conta as possibilidades neste tipo de sistema.

Dado o sistema genérico apresentado na Figura 2.15, considera-se que os tramos da correia atuam no sistema como molas lineares, com módulo de elasticidade e área da seção transversal constantes  $EA$ . Há amortecimento viscoso nas correias, cujos coeficientes são dados por  $d_i$  e nas polias também pode ocorrer amortecimento viscoso equivalente, cujo coeficiente é definido como  $c_i$ . As inércias das polias são  $J_i$  e são aplicadas flutuações de torque  $M_{di}$  em cada polia.

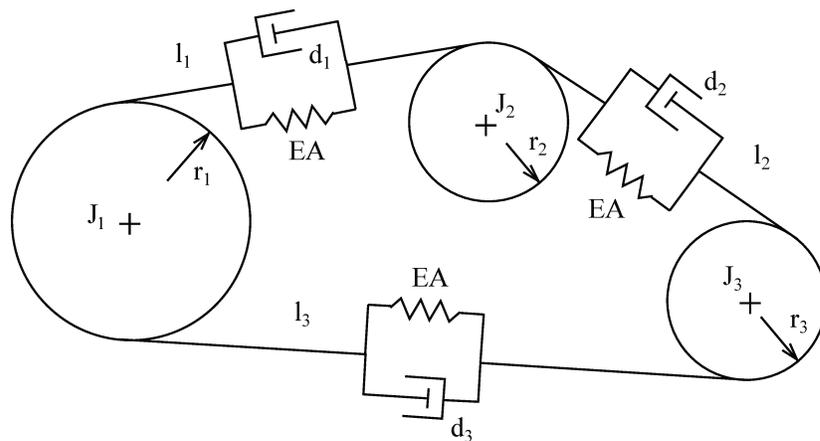


Figura 2.15: Sistema puramente rotacional.

Através da soma dos momentos atuantes em cada polia pelos diagramas de corpo livre, pode-se determinar as equações de movimento para as mesmas. Tem-se então:

$$J_1\ddot{\theta}_1 = -r_1k_1(r_1\theta_1 - r_2\theta_2) - r_1d_1(r_1\dot{\theta}_1 - r_2\dot{\theta}_2) + r_1k_3(r_3\theta_3 - r_1\theta_1) + r_1d_3(r_3\dot{\theta}_3 - r_1\dot{\theta}_1) + M_{d1} - c_1\dot{\theta}_1 \quad (2.51)$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 = -r_2k_2(r_2\theta_2 - r_3\theta_3) - r_2d_2(r_2\dot{\theta}_2 - r_3\dot{\theta}_3) + r_2k_1(r_1\theta_1 - r_2\theta_2) + r_2d_1(r_1\dot{\theta}_1 - r_2\dot{\theta}_2) + M_{d2} - c_2\dot{\theta}_2 \quad (2.52)$$

$$J_3\ddot{\theta}_3 = -r_3k_3(r_3\theta_3 - r_1\theta_1) - r_3d_3(r_3\dot{\theta}_3 - r_1\dot{\theta}_1) + r_3k_2(r_2\theta_2 - r_3\theta_3) + r_3d_2(r_2\dot{\theta}_2 - r_3\dot{\theta}_3) + M_{d3} - c_3\dot{\theta}_3 \quad (2.53)$$

onde  $k_i = EA/l_i$  é rigidez equivalente produzida por cada tramo  $i$ .

Esse sistema pode ser escrito na forma matricial

$$[M] \{\ddot{\theta}\} + [C] \{\dot{\theta}\} + [K] \{\theta\} = \{F\} \quad (2.54)$$

onde

$$[M] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} r_1^2(d_1 + d_3) + c_1 & -r_1r_2d_1 & -r_1r_3d_3 \\ -r_1r_2d_1 & r_2^2(d_1 + d_2) + c_2 & -r_2r_3d_2 \\ -r_1r_3d_3 & -r_2r_3d_2 & r_3^2(d_2 + d_3) + c_3 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} r_1^2(k_1 + k_3) & -r_1r_2k_1 & -r_1r_3k_3 \\ -r_1r_2k_1 & r_2^2(k_1 + k_2) & -r_2r_3k_2 \\ -r_1r_3k_3 & -r_2r_3k_2 & r_3^2(k_2 + k_3) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$\{F\} = \left\{ \begin{matrix} M_{d1} & M_{d2} & M_{d3} \end{matrix} \right\}^T \quad (2.58)$$

e o vetor com os ângulos de rotação é  $\{\theta\} = \left\{ \begin{matrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{matrix} \right\}^T$ .

A integração do sistema de equações (2.54) fornece a resposta temporal do sistema, dadas condições iniciais ou excitações externas.

Pode-se também determinar as frequências naturais do sistema de transmissão, considerando-se as equações do sistema livre e não amortecido. Utilizando uma solução do tipo  $\{\theta(t)\} = \{\hat{\theta}\} \exp(i\omega t)$  no sistema, tem-se:

$$-\omega^2 [M] \{\hat{\theta}\} \exp(i\omega t) + [K] \{\hat{\theta}\} \exp(i\omega t) = \{0\} \quad (2.59)$$

Eliminando as exponenciais, chega-se ao seguinte problema de autovalor

$$(-\omega^2 [M] - [K]) \{\hat{\theta}\} = \{0\} \quad (2.60)$$

Onde os autovalores  $-\omega^2$  fornecem as frequências naturais do sistema e o vetor  $\{\hat{\theta}\}$  fornece a forma modal para cada autovalor identificado.



### 3 MODELO MATEMÁTICO

Para realizar o estudo de um sistema de transmissão por correia serpentina será implementado um modelo matemático simplificado com o mínimo de elementos necessários e utilizados neste tipo de mecanismo. O modelo implementado é similar ao proposto por Beikmann (1992) e são feitas as seguintes considerações:

- O sistema opera em velocidade constante,  $c$ , da correia;
- A rigidez de flexão da correia é desprezível;
- As propriedades físicas da correia como módulo de elasticidade ( $E$ ), área transversal ( $A$ ) e massa específica por comprimento ( $m$ ) são constantes em toda a sua extensão;
- Não há amortecimento no sistema;
- Efeitos de atrito seco no tensionador são desconsiderados;
- São levados em conta efeitos de deformação infinitesimal nos tramos da correia;
- Não ocorre deslizamento na interface entre correia e polia;
- A tração da correia é uniforme ao longo do abraçamento;
- A tração é uniforme ao longo dos tramos;
- Efeitos de viscosidade não são considerados na correia.

#### 3.1 Equações de Movimento

A Figura 3.1 apresenta uma representação esquemática do sistema prototípico sendo modelado. Para determinar as equações de movimento do sistema, lança-se mão do método de Euler-Lagrange, assim, através da determinação das energias cinética e potencial para cada grau de liberdade considerado, e ainda levando-se em conta as excitações externas ao sistema, torna-se possível determinar as equações de movimento.

Para o modelo em estudo, considera-se que as polias, além de girar em velocidade constante juntamente com a correia, apresentam também um grau de liberdade rotacional, para que os efeitos de vibração torcional sejam capturados. Analogamente, o tensionador, que sofre um momento em uma das extremidades devido à mola torcional, apresenta um grau de liberdade de rotação,  $\theta_3$ , que exprime seu movimento vibracional.

Os tramos são modelados como cordas em translação, podendo vibrar tanto na direção axial, quanto na direção transversal, conforme as coordenadas  $u_i$  e  $w_i$ , respectivamente, sendo que suas equações expressam um elemento contínuo, sendo função da posição no espaço,  $x$ , e do tempo.

Ao longo do abraçamento entre correia e polia, considera-se que não há movimento relativo e a distribuição da força de tração é uniforme e não há deslizamento.

Com essas considerações é possível iniciar o tratamento do sistema em estudo, observando que o sistema de equações resultantes será um sistema híbrido, apresentando equações em parâmetros concentrados e em parâmetros distribuídos.

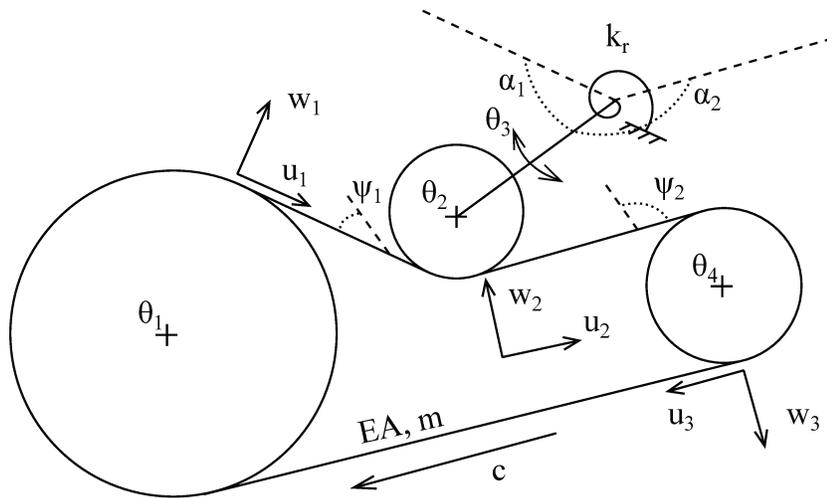


Figura 3.1: Sistema em estudo.

Pode-se definir as energias cinéticas dos elementos. Para os elementos discretos tem-se:

Polias:

$$T_i = \frac{1}{2} J_i \left( \frac{c}{r_i} + \theta_{i,t} \right)^2 \quad (3.1)$$

Tensionador:

$$T_t = \frac{1}{2} J_3 \theta_{3,t}^2 \quad (3.2)$$

Para determinar a energia cinética dos tramos, é necessário determinar as velocidades de cada coordenada. Considerando as derivadas totais:

$$\begin{aligned} \frac{dw_i(x, t)}{dt} &= \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial w_i}{\partial t} \\ &= cw_{i,x} + w_{i,t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

E analogamente para  $u_i(x, t)$ :

$$\frac{du_i(x, t)}{dt} = cu_{i,x} + u_{i,t} \quad (3.4)$$

A energia cinética para cada tramo será,

$$T_{tramo} = \int_0^{l_i} \frac{1}{2} m [(w_{i,t} + cw_{i,x})^2 + (u_{i,t} + cu_{i,x} + c)^2] dx_i \quad (3.5)$$

Finalmente, a energia cinética total do sistema é

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_1 \left( \frac{c}{r_1} + \theta_{1,t} \right)^2 + \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{c}{r_2} + \theta_{2,t} \right)^2 + \frac{1}{2} J_4 \left( \frac{c}{r_4} + \theta_{4,t} \right)^2 + \frac{1}{2} J_3 \theta_{3,t}^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{1}{2} m [(w_{i,t} + cw_{i,x})^2 + (u_{i,t} + cu_{i,x} + c)^2] dx_i \end{aligned} \quad (3.6)$$

Analisando agora a energia potencial, para a correia considera-se que seja possível a ocorrência de deformação estática, devido à tração de operação atuante e também deformações infinitesimais, decorrentes de efeitos dinâmicos. Considerando uma porção infinitesimal do tramo com comprimento  $dx$ , que sofre deslocamentos  $du$  e  $dw$  nas direções longitudinal e transversal, respec-

tivamente, conforme a Figura 3.2. Seu deslocamento total pode ser determinado segundo teorema de Pitágoras, conforme Equação (3.7).

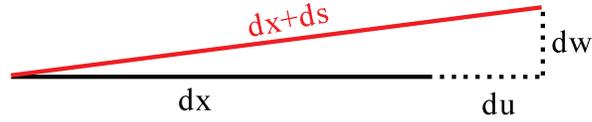


Figura 3.2: Componentes de deformação em porção infinitesimal do tramo.

$$ds + dx = [(dx + du)^2 + dw^2]^{1/2} \quad (3.7)$$

A deformação infinitesimal do tramo é dada pela razão entre o deslocamento  $ds$  e o comprimento inicial  $dx$ :

$$\epsilon_1 = \frac{ds}{dx} = \frac{[(dx + du)^2 + dw^2]^{1/2} - dx}{dx} \quad (3.8)$$

$$\epsilon_1 = \left[ \left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \right]^{1/2} - 1 \quad (3.9)$$

Em notação simplificada:

$$\epsilon_1 = [(1 + u_{,x})^2 + w_{,x}^2]^{1/2} - 1 \quad (3.10)$$

Para simplificar esta expressão pode-se utilizar uma expansão em série de Taylor. Para funções de mais de uma variável, a expansão assume a forma

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f(a)}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial f(b)}{\partial y} + \\ & + \frac{(x - a)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} + \frac{(y - b)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(b)}{\partial y^2} + \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aplicando então à função de deformação, tem-se as seguintes derivadas

$$\left. \frac{\partial \epsilon_1}{\partial u_{,x}} \right|_{u_{,x}=0} = [(1 + u_{,x})^2 + w_{,x}^2]^{-1/2} (1 + u_{,x}) \Big|_{u_{,x}=0} = (1 + w_{,x}^2)^{-1/2} \quad (3.12)$$

$$\left. \frac{\partial \epsilon_1}{\partial w_{,x}} \right|_{w_{,x}=0} = [(1 + u_{,x})^2 + w_{,x}^2]^{-1/2} w_{,x} \Big|_{w_{,x}=0} = 0 \quad (3.13)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial w_{,x}^2} \right|_{w_{,x}=0} = [(1 + u_{,x})^2 + w_{,x}^2]^{-3/2} w_{,x}^2 + [(1 + u_{,x})^2 + w_{,x}^2]^{-1/2} \Big|_{w_{,x}=0} = (1 + u_{,x})^{-1} \quad (3.14)$$

Finalmente, a expansão fica:

$$\epsilon_1 = \frac{u_{,x}}{(1 + w_{,x}^2)^{1/2}} + \frac{1}{2} \frac{w_{,x}^2}{(1 + u_{,x})} \quad (3.15)$$

Da resistência dos materiais, conforme Kurmyshev (2003), as variações dos deslocamentos, segundo a teoria de propagação de ondas em vigas e cordas, são muito pequenas, de forma que  $u_{,x} \ll 1$  e  $w_{,x} \ll 1$ . Como também é apresentado por Beikmann (1992) e Zhang (1999). Tem-se então que a deformação pode ser simplificada como

$$\epsilon_1 = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \quad (3.16)$$

que representa a deformação dinâmica do tramo da correia.

Para determinar a energia potencial do tramo, também é necessário levar em conta a contribuição da deformação estática da mesma, que ocorre devido à tração de operação na correia.

$$\epsilon_0 = \frac{P_o}{EA} \quad (3.17)$$

onde  $P_0$  é a força de tração de operação da correia que contempla termos devido à tração inicial e também devido à força centrífuga atuante no sistema.

Assim, conforme a definição da energia potencial para o sistema contínuo dada por Chen *et al.* (2007), a energia para o tramo fica

$$U_{tramo} = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \int_A E \epsilon^2 dA dx_i = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \int_A E (\epsilon_0 + \epsilon_1)^2 dA dx_i \quad (3.18)$$

$$U_{tramo} = \frac{EA}{2} \int_0^{l_i} \left( \frac{P_{oi}}{EA} + u_{i,x} + \frac{1}{2} w_{i,x}^2 \right)^2 dx_i \quad (3.19)$$

A energia potencial total do sistema, considerando que não ocorre deformação ao longo do arco do abraçamento com as polias, é dada por

$$U = \frac{1}{2}k_r(\theta_3 + \theta_{3r})^2 + \frac{EA}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \left( \frac{P_{oi}}{EA} + u_{i,x} + \frac{1}{2}w_{i,x}^2 \right)^2 dx_i \quad (3.20)$$

Onde  $\theta_3$  corresponde à vibração rotacional do braço do tensionador e  $\theta_{3r}$ , à variação estática no ângulo do tensionador e que garante o pré-tracionamento do sistema. Finalmente, é importante considerar o trabalho devido às forças e momentos externos atuando nas polias e braço do tensionador.

$$W = \sum_{i=1}^4 M_i \theta_i \quad (3.21)$$

Onde  $M_i$  é o momento externo atuante no elemento discreto  $i$ , e  $\theta_i$  representa o movimento virtual da coordenada para o grau de liberdade do elemento.

De posse destas relações é possível escrever o Lagrangeano do sistema e, a partir das equações de Euler-Lagrange, determinar as equações de movimento para cada grau de liberdade.

$$L = T - U + W \quad (3.22)$$

A equação de Euler-Lagrange para a variável de deslocamento transversal é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial L}{\partial w_{i,x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial w_{i,t}} = 0 \quad (3.23)$$

Calculando as derivadas para a equação de Euler-Lagrange temos:

$$\frac{\partial L}{\partial w_{i,x}} = \int_0^{l_i} m(cw_{i,t} + c^2w_{i,x})dx_i - EA \int_0^{l_i} \left( \frac{P_{oi}}{EA} + u_{i,x} + \frac{1}{2}w_{i,x}^2 \right) w_{i,x} dx_i \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dx_i} \frac{\partial L}{\partial w_{i,x}} = \int_0^{l_i} m(cw_{i,xt} + c^2w_{i,xx})dx_i - \left\{ \int_0^{l_i} \left[ EA \left( u_{i,x} + \frac{1}{2}w_{i,x}^2 \right) + P_{oi} \right] w_{i,x} dx_i \right\}_{,xi} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_{i,t}} = \int_0^{l_i} m(w_{i,t} + cw_{i,x})dx_i \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial w_{i,t}} = \int_0^{l_i} m(w_{i,tt} + cw_{i,xt})dx_i \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = 0 \quad (3.28)$$

Substituindo as derivadas na equação de Euler-Lagrange, temos:

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_i} m(w_{i,tt} + cw_{i,xt})dx_i + \int_0^{l_i} m(cw_{i,xt} + c^2w_{i,xx})dx_i - \\ & \left\{ \int_0^{l_i} \left[ EA \left( u_{i,x} + \frac{1}{2}w_{i,x}^2 \right) + P_{oi} \right] w_{i,x} dx_i \right\}_{,xi} = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Eliminando as integrais:

$$m(-w_{i,tt} - 2cw_{i,xt} - c^2w_{i,xx}) + \left\{ \left[ EA \left( u_{i,x} + \frac{1}{2}w_{i,x}^2 \right) + P_{oi} \right] w_{i,x} \right\}_{,x} = 0 \quad (3.30)$$

Para as variáveis de deslocamento longitudinal tem-se a seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial L}{\partial u_{i,x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u_{i,t}} = 0 \quad (3.31)$$

e as derivadas são

$$\frac{\partial L}{\partial u_{i,x}} = \int_0^{l_i} \frac{1}{2}m(2cu_{i,t} + 2c^2u_{i,x} + c^2)dx_i - EA \int_0^{l_i} \left( \frac{P_{oi}}{EA} + u_{i,x} + \frac{1}{2}w_{i,x}^2 \right) dx_i \quad (3.32)$$

$$\frac{d}{dx_i} \frac{\partial L}{\partial u_{i,x}} = \int_0^{l_i} m(cu_{i,xt} + c^2u_{i,xx})dx_i - EA \int_0^{l_i} \left( \frac{P_{oi}}{EA} + u_{i,x} + \frac{1}{2}w_{i,x}^2 \right)_{,x} dx_i \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_{i,t}} = \int_0^{l_i} \frac{1}{2}m(2u_{i,t} + 2cu_{i,x} + 2c)dx_i \quad (3.34)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u_{i,t}} = \int_0^{l_i} m(u_{i,tt} + cu_{i,xt})dx_i \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \quad (3.36)$$

Substituindo as derivadas na equação de Euler-Lagrange correspondente, temos:

$$\int_0^{l_i} m(-u_{i,tt} - 2cu_{i,xt} - c^2u_{i,xx})dx_i + EA \int_0^{l_i} \left( \frac{P_{oi}}{EA} + u_{i,x} + \frac{1}{2}w_{i,x}^2 \right) dx_i = 0 \quad (3.37)$$

Eliminando as integrais:

$$m(-u_{i,tt} - 2cu_{i,xt} - c^2u_{i,xx}) + \left[ P_{oi} + EA \left( u_{i,x} + \frac{1}{2}w_{i,x}^2 \right) \right]_{,x} = 0 \quad (3.38)$$

Beikmann (1992) e Zhang (1999) assumem que a propagação de ondas longitudinais apresenta velocidade muito superior em comparação com ondas transversais, e o transporte de massa no caso longitudinal é muito elevado em comparação com a inércia da correia, de forma que a esta pode ser desprezada nas equações de deslocamento longitudinal, ou seja,

$$\left[ P_{oi} + EA \left( u_{i,x} + \frac{1}{2}w_{i,x}^2 \right) \right]_{,x} = 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( u_{i,x} + \frac{1}{2}w_{i,x}^2 \right) = 0 \quad (3.40)$$

Integrando esta equação podemos utilizar a suposição de que a deformação se comporta de forma “quasi-estática”, ou seja, independente das coordenadas espaciais. Apresentando apenas variação temporal, conforme mostrado por Nayfeh e Mook (1979).

$$u_{i,x} + \frac{1}{2}w_{i,x}^2 = e(t) \quad (3.41)$$

onde  $e(t)$  é a constante de integração obtida e apresenta apenas dependência temporal, devido à premissa de alongação quasi-estática assumida.

$$u_{i,x} = e(t) - \frac{1}{2}w_{i,x}^2 \quad (3.42)$$

Integrando novamente em relação à  $x$ .

$$u_i = C(t) + e(t)x - \frac{1}{2} \int_0^x w_{i,x}^2 dx \quad (3.43)$$

Aplicando as condições de contorno para  $x = 0$  e  $x = l_i$ , temos:

$$u_i(0, t) = C(t), \quad x = 0 \quad (3.44)$$

$$u_i(l_i, t) = C(t) + e(t)l_i - \frac{1}{2} \int_0^{l_i} w_{i,x}^2 dx, \quad x = l_i \quad (3.45)$$

Determinamos então  $e(t)$ :

$$e(t) = \frac{1}{l_i} \left( u_i(l_i, t) - u_i(0, t) + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} w_{i,x}^2 dx \right) \quad (3.46)$$

Pode-se igualar as Equações (3.41) e (3.46).

$$w_{i,x} + \frac{1}{2} w_{i,x}^2 = \frac{1}{l_i} \left( u_i(l_i, t) - u_i(0, t) + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} w_{i,x}^2 dx \right) \quad (3.47)$$

Substituindo  $e(t)$  na Equação (3.30):

$$m(-w_{i,tt} - 2cw_{i,xt} - c^2w_{i,xx}) + \{[EAe(t) + P_{oi}]w_{i,x}\}_{,x} = 0 \quad (3.48)$$

Distribuindo a derivada em  $x$ :

$$m(-w_{i,tt} - 2cw_{i,xt} - c^2w_{i,xx}) + [EAe(t) + P_{oi}]w_{i,xx} = 0 \quad (3.49)$$

A derivada se aplica apenas ao termo externo, uma vez que  $e(t)$  não apresenta dependência

espacial. Logo,

$$m(-w_{i,tt} - 2cw_{i,xt} - c^2w_{i,xx}) + \left[ EA \frac{1}{l_i} \left( u_i(l_i, t) - u_i(0, t) + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} w_{i,x}^2 dx \right) + P_{oi} \right] w_{i,xx} = 0 \quad (3.50)$$

No capítulo anterior foi determinada a equação para o caso de uma corda vibrando. Na equação obtida, os termos que multiplicavam a segunda derivada do deslocamento em relação à coordenada espacial,  $w_{,xx}$ , correspondiam às forças de tração atuantes na corda. A equação presente apresenta novos termos multiplicando  $w_{,xx}$ , o que pode ser interpretado como a parcela dinâmica da força de tração atuante na correia, que surge devido às deformações infinitesimais nos tramos.

Pode-se definir a tração dinâmica como

$$P_{di}(t) = EA \frac{1}{l_i} \left( u_i(l_i, t) - u_i(0, t) + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} w_{i,x}^2 dx \right) \quad (3.51)$$

De posse da relação da tração dinâmica, pode-se reescrever as equações de campo para os tramos:

$$m(-w_{i,tt} - 2cw_{i,xt} - c^2w_{i,xx}) + (P_{di} + P_{oi})w_{i,xx} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.52)$$

$$u_{i,tt} + 2cu_{i,xt} + c^2u_{i,xx} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.53)$$

Para avaliar as equações para as polias serão usadas as equações de Euler-Lagrange considerando a influência das forças externas causadas pelos torques devidos aos tramos adjacentes. De forma que a equação de Euler-Lagrange para a polia 1 torna-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta_{1,t}} = \sum M_{ext} \quad (3.54)$$

As derivadas são:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = M_1 \quad (3.55)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta_{1,t}} = J_1 \theta_{1,tt} \quad (3.56)$$

e a soma dos torques externos devidos aos tramos 1 e 3:

$$\sum M_{ext} = (P_{o3} + P_{d3})r_1 - (P_{o1} + P_{d1})r_1 \quad (3.57)$$

A equação para a polia 1 se torna:

$$(P_{d1} + P_{o1})r_1 - (P_{d3} + P_{o3})r_1 + M_1 = J_1\theta_{1,tt} \quad (3.58)$$

E analogamente para as polias 2 e 4:

$$(P_{d2} + P_{o2})r_2 - (P_{d1} + P_{o1})r_2 + M_2 = J_2\theta_{2,tt} \quad (3.59)$$

$$(P_{d3} + P_{o3})r_4 - (P_{d2} + P_{o2})r_4 + M_4 = J_4\theta_{4,tt} \quad (3.60)$$

A determinação da equação de movimento para o tensionador apresenta maior grau de complexidade uma vez que este elemento pode se movimentar juntamente com as extremidades dos tramos com que faz interface. Além dos termos devido à energia cinética, potencial e momento externo aplicado diretamente no braço, também haverá momentos devido às trações nos tramos e ao fluxo de massa da correia ao redor da polia 2, que é capaz de produzir deslocamentos no braço do tensionador.

Ulsoy *et al.* (1985) em seu trabalho mostra que o tensionador, além de estar sujeito aos momentos devido as forças perpendiculares ao braço, também é sujeito à momentos de forças paralelas ao braço do tensionador, uma vez que se a porção do tramo que está em interface com a polia do tensionador apresentar qualquer inclinação em relação à posição estática, as forças paralelas à direção do braço são projetadas para a perpendicular.

Os momentos produzidos pelo tramo 1, devido às parcelas perpendicular e paralela são

$$T_{1per} = [mc^2 - (P_{d1} + P_{o1})] r_3 \sin(\alpha_1 + \theta_3) \quad (3.61)$$

$$T_{1par} = [mc^2 - (P_{d1} + P_{o1})] w_{1,x}(l_1)r_3 \cos(\alpha_1 + \theta_3) \quad (3.62)$$

e o Momento devido ao fluxo de massa é dado por

$$T_{1fluxo} = \frac{dM}{dt} r_3 \cos(\alpha_1 + \theta_3) \quad (3.63)$$

onde

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \rho \int_V c dV = \frac{d}{dt} \rho A \int_0^w c dw_1 = mc \frac{dw_1}{dt} = mcw_{1,t} \quad (3.64)$$

Sendo  $dM$  é o diferencial de massa da correia,  $\rho$ , sua densidade volumétrica,  $A$  a área transversal,  $m$  sua densidade linear e  $c$  a velocidade de operação da correia.

Logo, a soma dos momentos externos produzidos pelo tramo 1 fica

$$M_{tramo1} = [mcw_{1,t}(l_1) + (mc^2 - P_{d1} - P_{o1})w_{1,x}(l_1)] r_3 \cos(\theta_3 + \alpha_1) + (mc^2 - P_{d1} - P_{o1})r_3 \sin(\theta_3 + \alpha_1) \quad (3.65)$$

E, analogamente, a soma dos momentos produzidos pelo tramo 2 é

$$M_{tramo2} = [mcw_{2,t}(0) - (P_{d2} + P_{o2} - mc^2)w_{2,x}(0)] r_3 \cos(-\theta_3 + \alpha_2) + (-mc^2 + P_{d2} + P_{o2})r_3 \sin(-\theta_3 + \alpha_2) \quad (3.66)$$

Finalmente, a equação para o tensionador se torna:

$$J_3\theta_{3,tt} = [mcw_{1,t}(l_1) + (mc^2 - P_{d1} - P_{o1})w_{1,x}(l_1)] r_3 \cos(\theta_3 + \alpha_1) + (mc^2 - P_{d1} - P_{o1})r_3 \sin(\theta_3 + \alpha_1) + [mcw_{2,t}(0) - (P_{d2} + P_{o2} - mc^2)w_{2,x}(0)] r_3 \cos(-\theta_3 + \alpha_2) + (-mc^2 + P_{d2} + P_{o2})r_3 \sin(-\theta_3 + \alpha_2) + M_3 - k_3(\theta_3 + \theta_{3r}) \quad (3.67)$$

E as condições de contorno para o problema são:

$$\begin{aligned}
u_1(0, t) &= r_1\theta_1 & w_1(0, t) &= 0 \\
u_1(l_1, t) &= r_3\theta_3 \cos \psi_1 + r_2\theta_2 & w_1(l_1, t) &= r_3\theta_3 \sin \psi_1 \\
u_2(0, t) &= r_3\theta_3 \cos \psi_2 - r_2\theta_2 & w_2(0, t) &= r_3\theta_3 \sin \psi_2 \\
u_2(l_2, t) &= -r_4\theta_4 & w_2(l_2, t) &= 0 \\
u_3(0, t) &= r_4\theta_4 & w_3(0, t) &= 0 \\
u_3(l_3, t) &= r_1\theta_1 & w_3(l_3, t) &= 0
\end{aligned}$$

Como pode-se observar das equações obtidas, ocorre forte influência de não linearidades principalmente devido à força de tração dinâmica, que incorpora efeitos de elasticidade e alongamento infinitesimal aos tramos. Além disso, para os tramos, tem-se equações diferenciais parciais, que têm como variáveis independentes, o tempo e uma coordenada ao longo do comprimento do tramo. Devido a isto, não é possível realizar uma integração numérica direta, sendo necessário primeiramente eliminar a porção espacial das equações.

Para que sejam eliminadas as porções espaciais, pode-se recorrer a métodos de aproximação através de discretização espacial ou modal dos tramos, que resultaria em um novo conjunto de equações, dependentes apenas da variável temporal.

### 3.2 Equações de Equilíbrio

As equações obtidas na seção anterior representam o movimento vibratório não linear do sistema de transmissão em estudo, contudo estas podem ser simplificadas se for considerado que o sistema está em estado de equilíbrio e as oscilações ocorrem em relação à este estado, que é invariante no tempo. Assim, para que as equações de equilíbrio sejam determinadas, considera-se que as variáveis do problema não dependam do tempo, ou seja, suas derivadas temporais são nulas.

Para os tramos

$$(-mc^2 + P_{oi}) w_{i,xx} = 0 \quad (3.68)$$

$$w_i(x, t) = 0 \quad (3.69)$$

A Equação (3.69) apresenta a condição de equilíbrio para os tramos, ou seja, estes não apresentam qualquer deslocamento transversal, mantendo-se esticados.

Para determinar as equações das polias, considera-se que os torques externos,  $M_i$ , apresentam tanto uma componente estática quando uma componente dinâmica (que é função do tempo), do tipo  $M_i = M_{oi} + M_{di}(t)$ , onde  $M_{oi}$  é constante. Tem-se então

$$(P_{o1} - P_{o3}) r_1 + M_{o1} = 0 \quad (3.70)$$

$$(P_{o2} - P_{o1}) r_2 + M_{o2} = 0 \quad (3.71)$$

$$(P_{o3} - P_{o2}) r_4 + M_{o4} = 0 \quad (3.72)$$

e para o tensionador

$$(mc^2 - P_{o1}) r_3 \sin \alpha_1 + (P_{o2} - mc^2) r_3 \sin \alpha_2 - k_r \theta_{3r} = 0 \quad (3.73)$$

Nos termos em parênteses,  $mc^2$  representa a tração centrífuga presente na correia e  $P_{oi}$  é a tração de operação total para a condição de acionamento, de forma que a tração de operação compreende a tração centrífuga e a força de tracionamento estático  $P_{ti}$ .

$$P_{oi} = P_{ti} + mc^2 \quad (3.74)$$

A equação de equilíbrio para o tensionador fica

$$- P_{t1} r_3 \sin \alpha_1 + P_{t2} r_3 \sin \alpha_2 - k_r \theta_{3r} = 0 \quad (3.75)$$

As equações de equilíbrio obtidas podem ser utilizadas para simplificar as equações diferenciais não lineares. Substituindo-as nestas equações, as mesmas passam a descrever o movimento vibratório dos elementos em torno de zero.

Para o tensionador, considerando que  $\theta_3$  é pequeno, tem-se as seguintes relações trigonométricas

$$\sin(\alpha_1 + \theta_3) = \sin \alpha_1 + \theta_3 \cos \alpha_1$$

$$\cos(\alpha_1 + \theta_3) = \cos \alpha_1 - \theta_3 \sin \alpha_1$$

A equação do tensionador, com os termos estáticos eliminados e usando as relações trigonométricas, fica

$$\begin{aligned}
& [mcw_{1,t}(l_1) - P_{d1}w_{1,x}(l_1) - P_{t1}w_{1,x}(l_1)] (r_3 \cos \alpha_1 - r_3\theta_3 \sin \alpha_1) \\
& \quad - P_{d1}(r_3\theta_3 \cos \alpha_1 + r_3 \sin \alpha_1) + P_{d2}(r_3\theta_3 \cos \alpha_2 + r_3 \sin \alpha_2) \\
& + [mcw_{2,t}(0) - P_{d2}w_{2,x}(0) - P_{t2}w_{2,x}(0)] (r_3 \cos \alpha_2 + r_3\theta_3 \sin \alpha_2) \\
& \quad + M_{d3} - k_r\theta_3 - P_{t1}r_3\theta_3 \cos \alpha_1 + P_{t2}r_3\theta_3 \cos \alpha_2 = J_3\theta_{3,tt}
\end{aligned} \tag{3.76}$$

### 3.3 Equações Lineares de Movimento

Uma simplificação que pode ser usada para a análise prévia do sistema em estudo é a linearização, para isto, termos de alta ordem, com baixa representatividade para pequenas amplitudes, são desprezados, assim como funções não lineares. Substituindo também as equações de equilíbrio, tem-se para as polias

$$(P_{d1} - P_{d3}) r_1 + M_{d1} = J_1\theta_{1,tt} \tag{3.77}$$

$$(P_{d2} - P_{d1}) r_2 + M_{d2} = J_2\theta_{2,tt} \tag{3.78}$$

$$(P_{d3} - P_{d2}) r_4 + M_{d4} = J_4\theta_{4,tt} \tag{3.79}$$

E para o tensionador

$$\begin{aligned}
& [-P_{t1}w_{1,x}(l_1, t) + mcw_{1,t}(l_1, t)] r_3 \sin \psi_1 - P_{d1}r_3 \cos \psi_1 + \\
& -P_{t1}r_3\theta_3 \sin \psi_1 + [P_{t2}w_{2,x}(0, t) - mcw_{2,t}(0, t)] r_3 \sin \psi_2 + \\
& -P_{d2}r_3 \cos \psi_2 + P_{t2}r_3\theta_3 \sin \psi_2 + M_{d3} - k_r\theta_3 = J_3\theta_{3,tt}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

A tração dinâmica,  $P_{di}$ , pode ser linearizada nas equações dos elementos discretos, desprezando-se a integral  $\int_0^{l_i} w_{i,x}^2 dx$ . De forma que sobram apenas os termos que produzem o acoplamento linear entre os elementos do sistema. Considerando ainda as substituições de variáveis e parâmetros  $F_{di} = M_{di}/r_i$ ,  $m_i = J_i/r_i^2$ ,  $\chi_i = r_i\theta_i$  e  $k_i = EA/l_i$ .

$$P_{d1} = k_1[u_1(l_1, t) - u_1(0, t)] = k_1(\chi_3 \cos \psi_1 + \chi_2 - \chi_1) \tag{3.81}$$

$$P_{d2} = k_2(\chi_3 \cos \psi_2 + \chi_2 - \chi_1) \tag{3.82}$$

$$P_{d3} = k_3(\chi_1 - \chi_4) \quad (3.83)$$

Com a substituições de variáveis, as equações dos elementos discretos passam a descrever os deslocamentos lineares ou deflexão nas polias e braço do tensionador, devido às forças aplicadas ao invés de considerar os momentos.

As equações linearizadas se tornam:

$$m_1\chi_{1,tt} = F_{d1} + k_1(\chi_3 \cos \psi_1 + \chi_2 - \chi_1) - k_3(\chi_1 - \chi_4) \quad (3.84)$$

$$m_2\chi_{2,tt} = F_{d2} + k_2(\chi_3 \cos \psi_2 + \chi_2 - \chi_1) - k_1(\chi_3 \cos \psi_1 + \chi_2 - \chi_1) \quad (3.85)$$

$$m_4\chi_{4,tt} = F_{d4} + k_3(\chi_1 - \chi_4) - k_2(\chi_3 \cos \psi_2 + \chi_2 - \chi_1) \quad (3.86)$$

Para os tramos, tem-se

$$mw_{i,tt} + 2mcw_{i,xt} - P_{ti}w_{i,xx} = 0 \quad (3.87)$$

que é igual à equação da corda em translação resolvida no Capítulo anterior.

E finalmente, para o tensionador, tem-se:

$$\begin{aligned} m_3\chi_{3,tt} = & [-P_{t1}w_{1,x}(l_1, t) + mcw_{1,t}(l_1, t)] \sin \psi_1 + [P_{t2}w_{2,x}(0, t) - mcw_{2,t}(0, t)] \sin \psi_2 + \\ & - k_1(\chi_3 \cos \psi_1 + \chi_2 - \chi_1) \cos \psi_1 - k_2(\chi_3 \cos \psi_2 + \chi_2 - \chi_1) \cos \psi_2 + \\ & + F_{d3} - k_4\chi_3 \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde  $k_4 = k_s + k_{gr}$ , com

$$k_s = \frac{k_r}{r_3^2} \quad k_{gr} = \frac{1}{r_3} (P_{t1} \sin \psi_1 - P_{t2} \sin \psi_2)$$

### 3.4 Equilíbrio Estático no Sistema de Transmissão

No sistema de transmissão, quando a correia é montada, deve ser adequadamente tracionada, seja através de uma polia tensionadora ou de um tensionador automático. Em um sistema com autotensionador, este se ajusta à correia logo após a montagem, aplicando a tração necessária a esta e compensando as deformações iniciais que a correia sofre. Esta condição em que o sistema já está acomodado e em velocidade de rotação  $c = 0$  é chamado de estado ou condição de referência, onde a deflexão sofrida pelo braço do tensionador é  $\theta_{3r}$ .

A Figura 3.3 apresenta as forças atuantes na polia e tensionador, assim como os vetores correspondentes.

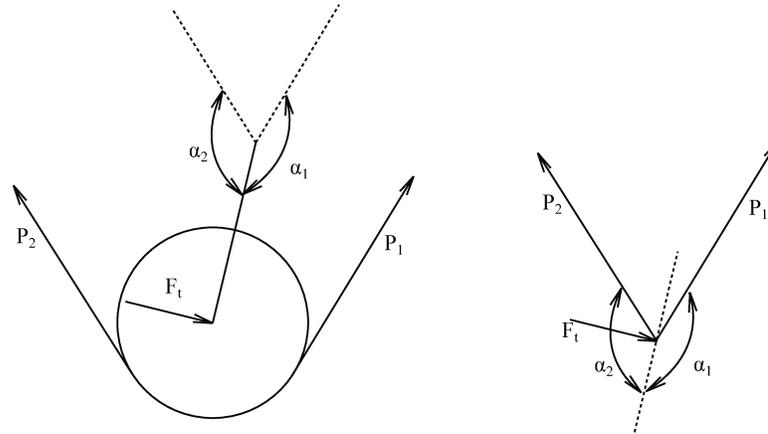


Figura 3.3: Equilíbrio de forças no braço do tensionador.

Quando encontra-se no estado de referência, a soma das forças atuantes nesse subsistema na direção da força aplicada pelo tensionador é

$$\sum F = F_t - P_2 \sin \alpha_2 + P_1 \sin \alpha_1 \quad (3.89)$$

No equilíbrio, tem-se que  $\sum F = 0$ , portanto

$$F_t = P_2 \sin \alpha_2 - P_1 \sin \alpha_1 \quad (3.90)$$

Como o sistema está parado, somente a força de tração estática está atuando no sistema, ou seja,  $P_i = P_{t_i}$  e a força aplicada pelo tensionador é proporcional à deflexão de sua mola torcional.

$$\frac{k_r \theta_{3r}}{r_3} = P_{t_2} \sin \alpha_2 - P_{t_1} \sin \alpha_1 \quad (3.91)$$

que é a mesma equação obtida no capítulo anterior quando considerado o equilíbrio do sistema.

Como o sistema está parado, não há torque transmitido para as polias e estas também não produzem nenhum torque resistivo, pode-se considerar então, que não há diferença entre as trações  $P_{t_1}$  e  $P_{t_2}$ , sendo estas iguais. Pode-se definir a tração de referência.

$$P_r = P_{t_1} = P_{t_2} \quad (3.92)$$

Substituindo na Equação (3.91), tem-se

$$\frac{k_r \theta_{3r}}{r_3} = P_r \sin \alpha_2 - P_r \sin \alpha_1 \quad (3.93)$$

$$P_r = \frac{k_r}{r_3} \frac{\theta_{3r}}{(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)} \quad (3.94)$$

que é a força de tração atuante na correia quando esta encontra-se na condição de referência.

Se o sistema é acionado, sua velocidade é  $c \neq 0$ , e passa a atuar nas polias e, conseqüentemente, na correia uma força centrífuga devido ao giro, aumentando a tração total atuante na correia. Com isto, a correia sofrerá uma deformação, aumentando seu comprimento total em  $\Delta L$ . Este aumento no comprimento, relaxará as forças que se equilibram no tensionador, fazendo com que este sofra uma deflexão para se reacomodar na correia, e conseqüentemente reduzindo a força de aplicação nesta.

Esta nova condição é chamada de condição de operação, uma vez que devido ao seu giro o mecanismo é capaz de transmitir potência. Neste caso, pode ocorrer a aplicação de torque externos

constantes dos acessórios sobre a correia, conforme as equações de equilíbrio para as polias.

$$(P_{o1} - P_{o3}) r_1 + M_{o1} = 0 \quad (3.95)$$

$$(P_{o2} - P_{o1}) r_2 + M_{o2} = 0 \quad (3.96)$$

$$(P_{o3} - P_{o2}) r_4 + M_{o4} = 0 \quad (3.97)$$

E as forças de tração atuantes nos tramos são chamadas de tração de operação  $P_{oi}$  e contemplam tanto a porção estática quanto a porção centrífuga das forças atuantes (BEIKMANN, 1992).

$$P_{oi} = P_{ti} + mc^2 \quad (3.98)$$

Estas novas trações atuantes na correia não podem ser calculadas diretamente por equações em formas explícitas, mas sim através de procedimentos iterativos, conforme proposto por Beikmann *et al.* (1997) ou por método aproximado conforme apresentado por Beikmann *et al.* (1997), Mote Jr. (1965) e Abrate (1992). Será apresentado aqui um procedimento gráfico alternativo, mas baseado nas equações de Beikmann.

Quando passa a atuar a força centrífuga  $P_c = mc^2$  sobre a correia, esta sofre uma elongação  $\Delta L_i$  e o braço do tensionador sofrerá uma deflexão  $\theta_{3i}$ , reacomodando o sistema. A nova força de tração estática no sistema pode ser estimada a partir da equação de equilíbrio do braço do tensionador.

$$- P_{t1} \sin \alpha_{1i} + P_{t2} \sin \alpha_{2i} = \frac{k_r}{r_3} (\theta_{3r} + \theta_{3i}) \quad (3.99)$$

onde  $\alpha_{1i}$  e  $\alpha_{2i}$  são os novos ângulos auxiliares avaliados para a nova geometria do sistema, definida por  $\theta_{3i}$ .

As forças  $P_{t1}$  e  $P_{t2}$  podem ser relacionadas pelas Equações (3.95), (3.96) e (3.97) que podem ser reescritas como

$$P_{t1} - P_{t3} + F_{o1} = 0 \quad (3.100)$$

$$P_{t2} - P_{t1} + F_{o2} = 0 \quad (3.101)$$

$$P_{t3} - P_{t2} + F_{o4} = 0 \quad (3.102)$$

através da substituição de (3.98).

Além disso, uma vez que o ângulo  $\theta_{3i}$  produz uma alteração na geometria do sistema, a elongação  $\Delta L_i$  avaliada pela geometria pode ser associada à deformação longitudinal da correia devido à variação na força de tração atuante. Por simplicidade, considera-se que a deformação ocorre apenas nos tramos enquanto nos abraçamentos, a correia permanece indeformada. Tem-se

$$\Delta L_i = \frac{1}{EA} [l_{1i}(P_{o1} - P_r) + l_{2i}(P_{o2} - P_r) + l_{3i}(P_{o3} - P_r)] \quad (3.103)$$

$$\Delta L_i = \frac{1}{EA} [l_{1i}(P_{t1} + mc^2 - P_r) + l_{2i}(P_{t2} + mc^2 - P_r) + l_{3i}(P_{t3} + mc^2 - P_r)] \quad (3.104)$$

Onde os  $l_{1i}$ ,  $l_{2i}$  e  $l_{3i}$  são os comprimentos dos tramos na nova configuração geométrica gerada por  $\theta_{3i}$ . Os termos  $P_{t1}$ ,  $P_{t2}$  e  $P_{t3}$  podem ser relacionados entre si pelas Equações (3.100), (3.101) e (3.102), logo:

$$\begin{aligned} \Delta L_i = \frac{1}{EA} [ & l_{1i}(P_{t1} + mc^2 - P_r) + l_{2i}(P_{t1} - F_{o2} + mc^2 - P_r) \\ & + l_{3i}(P_{t1} + F_{o1} + mc^2 - P_r)] \end{aligned} \quad (3.105)$$

Isolando  $P_{t1}$  em (3.105), tem-se uma expressão para a tração em um dos tramos, para um dado  $\theta_{3i}$ .

Para determinar a tração estática na correia em uma dada velocidade de operação, considera-se uma variação na posição do braço do tensionador através do cálculo de diversos  $\theta_{3i}$  e estima-se as forças de tração  $P_{t1}$  para cada nova configuração  $i$  calculada a partir da Equação (3.99) gerando uma curva de  $P_{t1}$  versus  $\theta_{3i}$ .

Uma segunda curva pode ser traçada se for realizado procedimento análogo, com a Equação (3.105). Neste caso a tração é estimada a partir da deformação longitudinal sofrida pela correia.

A condição de equilíbrio para o sistema será verificada quando a tração produzida pelo tensionador for igual à tração produzida pela deformação da correia. Assim, podendo ser estimada pelo ponto de intersecção entre as curvas calculadas, conforme a Figura 3.4.

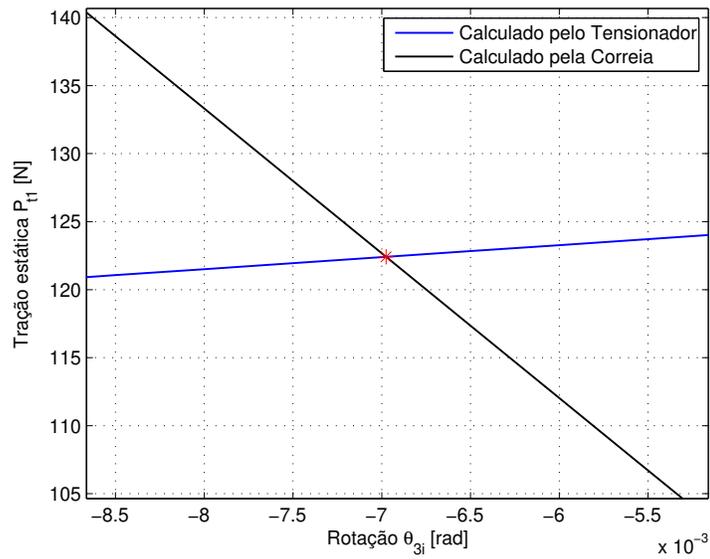


Figura 3.4: Variação da tração nos tramos produzida pelas curvas do tensionador e de deformação.

O caso apresentado na Figura 3.4, configura um sistema cuja tração de referência vale 128.59N, mas quando o sistema é acionado com velocidade de transporte de  $c = 27.92\text{m/s}$ , a tração estática é reduzida para 122.41N, a tração centrífuga vale 80.26N e a tração de operação é 202.67N.

A partir da tração estática obtida podem ser calculadas as trações de operação para os demais tramos.



## 4 SISTEMA PURAMENTE ROTACIONAL

Em alguns sistemas de transmissão por correias, é comum que as inércias rotacionais sejam muito elevadas em comparação com a inércia da correia. Nestes casos, pode-se modelar o sistema desprezando-se os efeitos inerciais da correia, de forma que esta atua simplesmente como um elemento elástico ligando as inércias rotacionais através de pontos tangenciais.

No presente capítulo é considerado um sistema onde os efeitos de vibração nos tramos da correia são desconsiderados, conforme apresentado no capítulo 3, e as equações são linearizadas. Contudo, no movimento ainda é capturado e o acoplamento produzido pelo tensionador com os demais elementos discretos do sistema.

A Figura 4.1 apresenta um esquema do modelo a ser tratado.

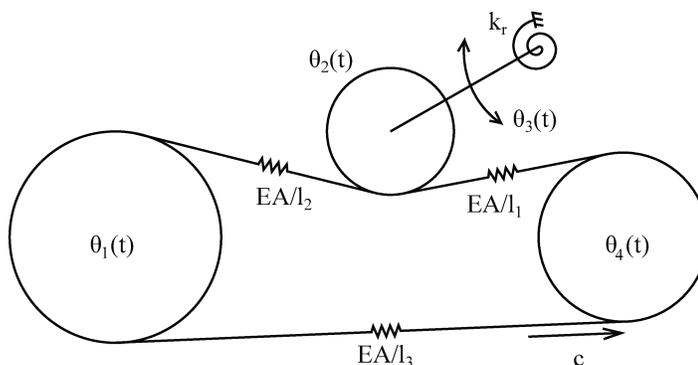


Figura 4.1: Esquemática de sistema puramente rotacional.

### 4.1 Equacionamento

Para determinar as equações de movimento para o sistema puramente rotacional, primeiramente, considera-se as equações linearizadas do sistema de transmissão, conforme Seção 3.3.

Analogamente ao procedimento utilizado por Beikmann (1992), as inércias dos tramos da

correia são consideradas desprezíveis, de forma que as equações de campo se tornam

$$(P_{di} + P_{oi}) w_{i,xx} = 0 \quad (4.1)$$

Como as trações são constantes e não nulas,

$$w_{i,xx} = 0 \quad (4.2)$$

As trações dinâmicas também são linearizadas, ou seja, seus termos contendo a integral  $\int_0^{l_i} w_{i,x}^2 dx$  são desprezados, ficando então:

$$P_{d1} = k_1 (\chi_3 \cos \psi_1 + \chi_2 - \chi_1) \quad (4.3)$$

$$P_{d2} = k_2 (\chi_3 \cos \psi_2 + \chi_4 - \chi_2) \quad (4.4)$$

$$P_{d3} = k_3 (\chi_1 - \chi_4) \quad (4.5)$$

A equação do tensionador contempla termos envolvendo a derivada primeira do deslocamento transversal dos tramos 1 e 2 em relação à variável espacial. Para determinar essas derivadas, pode-se integrar a Equação (4.2) para os tramos envolvidos.

$$w_{i,x} = \int w_{i,xx} dx = C \quad (4.6)$$

onde C é uma constante de integração. Integrando novamente, tem-se

$$\int_0^{l_i} w_{i,x} dx = Cx|_0^{l_i} = Cl_i \quad (4.7)$$

mas

$$\int_0^{l_i} w_{i,x} dx = w_i(l_i) - w_i(0) \quad (4.8)$$

Combinando as Equações (4.7) e (4.8), tem-se uma aproximação para as derivadas dos deslocamentos dos tramos.

$$w_i(l_i) - w(0) = Cl_i \quad (4.9)$$

$$C = \frac{w_i(l_i) - w_i(0)}{l_i} \quad (4.10)$$

e da Equação (4.6), tem-se

$$w_{i,x} = \frac{w_i(l_i) - w_i(0)}{l_i} \quad (4.11)$$

Para os tramos 1 e 2, levando-se em conta as condições de contorno do problema, tem-se

$$w_{1,x} = \frac{w_1(l_1)}{l_1} = \frac{r_3 \theta_3 \sin \psi_1}{l_1} = \frac{\chi_3 \sin \psi_1}{l_1} \quad (4.12)$$

$$w_{2,x} = -\frac{w_2(0)}{l_2} = -\frac{\chi_3 \sin \psi_2}{l_2} \quad (4.13)$$

Substituindo esses dados nas equações lineares do sistema, tem-se, para as polias:

$$m_1 \chi_{1,tt} = F_{d1} + k_1(\chi_3 \cos \psi_1 + \chi_2 - \chi_1) - k_3(\chi_1 - \chi_4) \quad (4.14)$$

$$m_2 \chi_{2,tt} = F_{d2} + k_2(\chi_3 \cos \psi_2 + \chi_2 - \chi_1) - k_1(\chi_3 \cos \psi_1 + \chi_2 - \chi_1) \quad (4.15)$$

$$m_4 \chi_{4,tt} = F_{d4} + k_3(\chi_1 - \chi_4) - k_2(\chi_3 \cos \psi_2 + \chi_2 - \chi_1) \quad (4.16)$$

e para o tensionador:

$$\begin{aligned} m_3 \chi_{3,tt} = & \left( -P_{t1} \frac{\chi_3}{l_1} \sin \psi_1 + mc \dot{\chi}_3 \sin \psi_1 \right) \sin \psi_1 \\ & + \left( -mc \dot{\chi}_3 \sin \psi_2 - P_{t2} \frac{\chi_3}{l_2} \sin \psi_2 \right) \sin \psi_2 \\ & - k_1 (\chi_3 \cos \psi_1 + \chi_2 - \chi_1) \cos \psi_1 \\ & - k_2 (\chi_3 \cos \psi_2 + \chi_4 - \chi_2) \cos \psi_2 \\ & - k_4 \chi_3 + F_{d3} \end{aligned} \quad (4.17)$$

## 4.2 Análise Modal

A Análise Modal Teórica para este sistema simplificado contribui para a compreensão do sistema em si, uma vez que são identificadas suas frequências naturais e formas modais. Podendo ser utilizadas para a identificação das formas modais rotacionais no sistema acoplado com os tramos.

Para realizar este procedimento, é preciso escrever o sistema na forma matricial. Faz-se então:

$$[M_{rot}] \{\ddot{\chi}\} + [G_{rot}] \{\dot{\chi}\} + [K_{rot}] \{\chi\} = \{F\}$$

onde

$$[M_{rot}] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$[G_{rot}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mc(-\sin^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$[K_{rot}] = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_1 & -k_1 \cos \psi_1 & -k_3 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & k_1 \cos \psi_1 - k_2 \cos \psi_2 & -k_2 \\ -k_1 \cos \psi_1 & k_1 \cos \psi_1 - k_2 \cos \psi_2 & -k_{33rot} & k_2 \cos \psi_2 \\ -k_3 & -k_2 & k_2 \cos \psi_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

com

$$k_{33rot} = \frac{P_{t1}}{l_1} \sin^2 \psi_1 - \frac{P_{t2}}{l_2} \sin^2 \psi_2 + k_1 \cos^2 \psi_1 + k_2 \cos^2 \psi_2 + k_4$$

$$\{\chi\} = \left\{ \begin{matrix} \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 & \chi_4 \end{matrix} \right\} \quad (4.21)$$

e

$$\{F\} = \left\{ \begin{matrix} F_{d1} & F_{d2} & F_{d3} & F_{d4} \end{matrix} \right\} \quad (4.22)$$

Para avaliar os parâmetros modais do sistema, transforma-se sua equação matricial em um problema de autovalor. Toma-se então, a equação homogênea do sistema:

$$[M_{rot}] \{\ddot{\chi}\} + [G_{rot}] \{\dot{\chi}\} + [K_{rot}] \{\chi\} = \{0\}$$

Como esse sistema apresenta a matriz giroscópica  $[G_{rot}]$ , não pode ser resolvido no espaço de configuração. Considera-se então a transformação do problema para o espaço de estados. As

matrizes de massa e rigidez expandidas são:

$$[A_{rot}] = \begin{bmatrix} G_{rot} & M_{rot} \\ M_{rot} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [B_{rot}] = \begin{bmatrix} K_{rot} & 0 \\ 0 & -M_{rot} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

O novo sistema a ser avaliado é

$$[A_{rot}] \{ \dot{U}_{rot} \} + [B_{rot}] \{ U_{rot} \} = \{ 0 \} \quad (4.24)$$

onde  $\{ U_{rot} \} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\chi} \\ \chi \end{matrix} \right\}$ , é o vetor de estados do sistema.

Utilizando uma solução do tipo  $\{ U_{rot} \} = \{ \hat{U}_{rot} \} e^{\lambda t}$ , tem-se o seguinte problema de autovalor:

$$(\lambda [A_{rot}] + [B_{rot}]) \{ \hat{U}_{rot} \} = \{ 0 \} \quad (4.25)$$

Como o problema é oscilatório, cada autovalor  $\lambda_r$  corresponderá à um par complexo conjugado de frequências naturais  $\pm i\omega_r$ , que estará associado a um par de autovetores  $\{ \hat{U}_{rot_r} \}$ .

Este problema de autovalor pode ser facilmente avaliado pelos algoritmos de extração de autovalores.

A resolução do problema de autovalor para o caso particular do sistema puramente rotacional é de grande ajuda no estudo do sistema completo, uma vez que os modos e frequências naturais rotacionais de vibração do sistema completo tendem a ser muito próximos dos identificados no sistema puramente rotacional. Este fato contribui para a determinação do tipo de modo identificado, quando se analisa o sistema completo.

A resposta temporal do sistema pode ser avaliada pela integração direta das equações diferenciais das polias e tensionador, que diferentemente no caso com o sistema completo, não apresentam dependência espacial. Contudo, devido às condições de vínculo e restrições do problema, ocorre um modo de corpo rígido com maior intensidade sobrepondo a resposta vibratória do sistema.

Para eliminar o efeito de corpo rígido, determina-se a resposta através da superposição modal, eliminando, assim, o modo de vibrar correspondente à frequência zero.

Considerando a equação matricial do sistema no espaço de estados:

$$[A_{rot}] \left\{ \dot{U}_{rot}(t) \right\} + [B_{rot}] \left\{ \dot{U}_{rot}(t) \right\} = \{F'_{rot}\} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

e a resposta pode ser expressa em termos de uma superposição das formas de vibrar do sistema.

$$\{U_{rot}\} = \sum_{r=1}^n \{\phi_{rot_r}\} q_r(t) = [\phi_{rot}] \{q\} \quad (4.27)$$

onde  $q_r(t)$  é a coordenada generalizada correspondente ao modo de vibrar  $r$  e  $\{\phi_{rot_r}\}$  é modo de vibrar correspondente, normalizado pela matriz de massa generalizada do sistema.

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{U}_{rot_r} \right\}^T [A_{rot}] \left\{ \hat{U}_{rot_r} \right\} &= a_{rot_r} \\ \{\phi_{rot_r}\} &= \frac{1}{\sqrt{a_{rot_r}}} \left\{ \hat{U}_{rot_r} \right\} \end{aligned}$$

Substituindo a Equação (4.27) em (4.26), o sistema se torna

$$[A_{rot}] [\phi_{rot}] \{\dot{q}(t)\} + [B_{rot}] [\phi_{rot}] \{q(t)\} = \{F'_{rot}\} \quad (4.28)$$

Pré-multiplicando (4.28) pela matriz modal  $[\phi_{rot}]^T$ , tem-se

$$[\phi_{rot}]^T [A_{rot}] [\phi_{rot}] \{\dot{q}(t)\} + [\phi_{rot}]^T [B_{rot}] [\phi_{rot}] \{q(t)\} = [\phi_{rot}]^T \{F'_{rot}\} \quad (4.29)$$

e pelas propriedades de ortogonalidade ponderada

$$[I] \{\dot{q}(t)\} + [-\lambda] \{q(t)\} = [\phi_{rot}]^T \{F'_{rot}\} \quad (4.30)$$

Para cada modo de vibrar haverá uma equação, cuja solução fornece o comportamento temporal da coordenada generalizada.

$$\dot{q}_r(t) - \lambda_r q_r(t) = \{\phi_{rot_r}\}^T \{F'_{rot}\} \quad (4.31)$$

Como existem quatro graus de liberdade nesse sistema discreto, existem, também, quatro modos de vibrar, sendo o primeiro, correspondente à frequência zero. Para que a resposta correspondente à este modo não seja considerada na resposta total do sistema, basta desconsiderar o autovetor correspondente na matriz modal,  $\{\phi_{rot1}\}$ .

$$[\phi_{rot}] = \begin{bmatrix} \phi_{rot2} & \phi_{rot3} & \phi_{rot4} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

### 4.3 Efeito de Atrito Seco

Uma das vantagens do estudo do sistema puramente rotacional está relacionado às equações envolvidas em sua descrição. Neste caso as equações não apresentam dependência espacial, pois os efeitos que seriam produzidos pela vibração transversal dos tramos é desprezado. Com isto, torna-se possível a integração do problema independentemente da aplicação de recursos de discretização ou superposição modal, podendo ser simplesmente empregado algum integrador numérico para a determinação das respostas temporais.

Outra vantagem está relacionada à inclusão de diferentes formas de excitação do sistema, como forças externas com comportamento não necessariamente periódico ou linear.

Em sistemas de transmissão por correia com tensionador automático, é comum que exista uma bucha no mancal entre o pino e o braço móvel do tensionador responsável por induzir atrito entre estes componentes. Com isso é possível dissipar energia no movimento rotacional no braço do tensionador, evitando assim, possíveis instabilidades quando o sistema é excitado por torques de grande amplitude.

Segundo Rao (2009), se um torque de atrito constante,  $T$ , agir em um sistema torcional simples, sua equação de movimento assume a forma

$$J_0\ddot{\theta} + k_t\theta = \begin{cases} -T, & \dot{\theta} > 0 \\ T, & \dot{\theta} < 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

Esse tipo de força de amortecimento introduz ao sistema uma força externa similar à mostrada

na Figura 4.2.

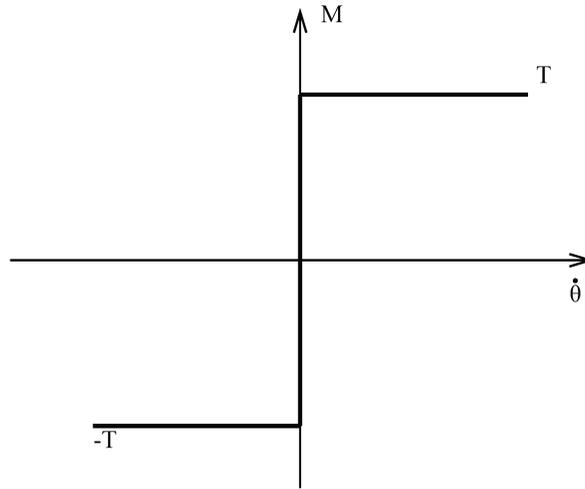


Figura 4.2: Força de atrito seco no modelo torcional.

A equação de movimento pode ser expressa em termos da função *signum*. Esta função apresenta o valor 1 para entradas positivas e -1 para entradas negativas.

$$J_0\ddot{\theta} + k_t\theta + T\text{sign}(\dot{\theta}) = M_{ext} \quad (4.34)$$

onde  $M_{ext}$  é o momento externo aplicado ao sistema.

De forma similar pode ser introduzida uma força no sistema puramente rotacional, que apresente as características de atrito seco. Esta força deve ser incluída na equação do tensionador e deve apresentar a seguinte característica:

$$F_{at} = \frac{T}{r_3}\text{sign}(\dot{\chi}_3) \quad (4.35)$$

onde  $T$  é o torque que o atrito aplica no tensionador.

Para introduzir a força de atrito no sistema, quando é considerada a resposta pela superposição

modal, basta descrever o comportamento de  $\dot{\chi}_3$  também em função da superposição modal.

$$\dot{\chi}_3(t) = \sum_{r=1}^n \phi_{7r} q_r(t) \quad (4.36)$$

O vetor de excitações quando considera-se a força de atrito e flutuações de torque aplicados pelas polias 1 e 4, fica

$$\{F\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{d1} \sin(2\pi f_{d1} t) \\ 0 \\ -\frac{T}{r_3} \text{sign}(\sum_{r=1}^n \phi_{7r} q_r(t)) \\ F_{d4} \sin(2\pi f_{d4} t) \end{array} \right\} \quad (4.37)$$

Este tipo de curva adotada para descrever o efeito de atrito seco corresponde ao modelo mais simples possível, onde os coeficientes de atrito estático e cinético são iguais, produzindo a mesma força. Além de que, quando as equações são integradas numericamente, é necessário que o integrador lide com a descontinuidade introduzida pela função *signum*, que nem sempre é possível, gerando instabilidades numéricas na resposta obtida.

Em alguns trabalhos onde é estudado o comportamento de sistemas com atrito, muitas vezes ao invés de se utilizar a curva de força descontínua, usam-se curvas de transição suave (contínuas) e que podem contemplar também efeitos de diferentes coeficientes de atrito estático e cinético.

Um modelo bastante adequado para descrever o problema de fricção entre corpos é apresentado por Kang *et al.* (2009), onde são utilizadas funções exponenciais para representar a transição entre as direções da força de atrito de forma suavizada. Aplicando seu modelo de força de atrito para o problema de transmissão com autotensionador, a expressão para a força de atrito ficaria

$$F_{at} = \frac{T}{r_3} \text{sign}(\dot{\chi}_3) (1 - e^{-d|\dot{\chi}_3|}) [\mu_k - (\mu_k - \mu_s) e^{-h|\dot{\chi}_3|}] = \frac{T}{r_3} \text{sign}(\dot{\chi}_3) \mu \quad (4.38)$$

onde  $\mu_k$  é o coeficiente de atrito cinético,  $\mu_s$  é o coeficiente de atrito estático,  $h$  e  $d$  são constantes que controlam a suavidade da curva na região de transição e sua continuidade.

A Figura 4.3 apresenta a curva característica para o coeficiente de atrito equivalente  $\mu$  com  $h = 1$  e  $d = 10$ .

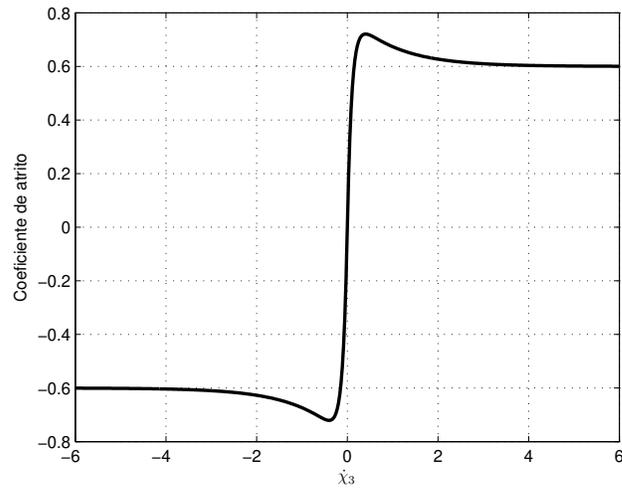


Figura 4.3: Curva do coeficiente de atrito com transição suavizada.

A utilização de curvas contínuas, como a expressa na Equação (4.38) é de grande utilidade, pois, além de descrever um comportamento mais próximo do comportamento real de um mecanismo sob essas condições, também garante que não ocorram descontinuidades e, consequentemente, instabilidades durante o processo de integração numérica.

## 5 ANÁLISE MODAL E RESPOSTA DO SISTEMA NÃO LINEAR

O estudo do comportamento dinâmico pode ser realizado por diversos procedimentos, como análise da resposta temporal do sistema, estudo da resposta em frequência, respostas livres e forçadas, entre outros. As equações diferenciais envolvidas apresentam não linearidades que dificilmente podem ser tratadas por métodos analíticos convencionais, além de que as equações dos tramos apresentam dependência espacial o que torna difícil sua integração numérica.

Nos trabalhos de Beikmann (1992) e Moon e Wickert (1997), para se contornar o problema relacionado à dependência espacial, é utilizada uma superposição modal, de forma que são consideradas as formas modais dentro de um intervalo em frequência específico para eliminar esta dependência espacial e determinar as respostas temporais. Já Parker (2004) e Kong (2003) utilizam o método de Galerkin, através de funções trigonométricas para eliminar a dependência espacial das equações.

No presente estudo será realizada uma Análise Modal Teórica, similar ao procedimento utilizado por Beikmann, para que não só seja possível a eliminação da dependência espacial das equações, mas também para melhor compreensão do comportamento vibratório do sistema, através da identificação de frequências naturais e formas modais.

### 5.1 Equacionamento

As equações de movimento linearizadas obtidas na Seção 3.3 descrevem o comportamento linear do sistema. Se for considerado o sistema livre (sem as excitações externas), pode-se escrever as equações na forma matricial.

$$[M] \{\ddot{W}\} + [G] \{\dot{W}\} + [K] \{W\} = \{0\} \quad (5.1)$$

onde

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 2mc \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2mc \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2mc \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -mc \sin \psi_1|_{l_1} & mc \sin \psi_2|_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

com

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -P_{t1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & -P_{t2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & -P_{t3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = \text{zeros}(2, 4)$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ P_{t1} \sin \psi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{l_1} & -P_{t2} \sin \psi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_1 & -k_1 \cos \psi_1 & -k_3 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & (k_1 \cos \psi_1 - k_2 \cos \psi_2) & -k_2 \\ -k_1 \cos \psi_1 & (k_1 \cos \psi_1 - k_2 \cos \psi_2) & k_{33} & k_2 \cos \psi_2 \\ -k_3 & -k_2 & k_2 \cos \psi_2 & k + k_3 \end{bmatrix}$$

sendo  $k_{33} = k_1 \cos^2 \psi_1 + k_2 \cos^2 \psi_2 + k_4$ .

O vetor de deslocamentos do sistema é dado por:

$$\{W\} = \left\{ w_1(x, t) \quad w_2(x, t) \quad w_3(x, t) \quad \chi_1(t) \quad \chi_2(t) \quad \chi_3(t) \quad \chi_4(t) \right\}^T \quad (5.5)$$

A matriz  $[K]$  é considerada simétrica, apesar de ter elementos fora de sua diagonal, pois quando se toma o produto interno  $\langle W, KW \rangle$  os termos em  $K_{11}$  são integrados por partes, fazendo com que os termos não-nulos em  $K_{12}$  sejam cancelados. Ocorre algo análogo em relação à anti-simetria da matriz  $[G]$ .

Para sistemas não amortecidos giroscópicos, pode-se utilizar o princípio de superposição modal, como exposto por Meirovitch (1974). Considerando o sistema de interesse, é preciso, inicialmente, reescrevê-lo na forma de espaço de estados, para que seja possível desacoplar as equações. Considera-se o vetor de estados

$$\{U\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{W} \\ W \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

As matrizes de massa e rigidez expandidas são

$$[A] = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [B] = \begin{bmatrix} G & K \\ -K & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

O sistema se torna

$$[A] \{\dot{U}\} + [B] \{U\} = \{0\} \quad (5.8)$$

Para resolver a Equação (5.8), busca-se soluções separáveis da forma  $\{U\} = \{\hat{U}\} \exp(\lambda t)$ , onde  $\lambda$  é um autovalor complexo e sua autofunção

$$\{\hat{U}\} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \hat{W} \\ \hat{W} \end{array} \right\} \quad (5.9)$$

também pode ser complexa.

$$\{\hat{W}\} = \left\{ \hat{w}_1(x) \quad \hat{w}_2(x) \quad \hat{w}_3(t) \quad \hat{\chi}_1 \quad \hat{\chi}_2 \quad \hat{\chi}_3 \quad \hat{\chi}_4 \right\}^T \quad (5.10)$$

Como o sistema de transmissão por correia apresenta comportamento giroscópico e conservativo, a autosolução para um modo  $r$  leva a um par de autovalores complexo conjugado  $\pm i\omega_r$  associado a um par de autofunções complexas conjugadas. As autofunções podem ser escritas na forma normalizada  $\bar{Y}_r$  e  $\bar{Z}_r$ , conforme

$$\bar{U}_r = \hat{Y}_r + i\hat{Z}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{Y}_r + i\bar{Z}_r) \quad (5.11)$$

Devido às propriedades de simetria das matrizes do problema e levando-se em conta a linearidade do sistema de equações, são válidas as relações de ortogonalidade ponderada apresentadas em (5.12), conforme mostrado em Beikmann (1992) e Zhang (1999).

$$\begin{aligned} \langle \bar{Y}_r, A\bar{Y}_s \rangle &= \delta_{rs} & \langle \bar{Z}_r, A\bar{Z}_s \rangle &= \delta_{rs} & \langle \bar{Z}_r, A\bar{Y}_s \rangle &= 0 \\ \langle \bar{Y}_r, B\bar{Y}_s \rangle &= 0 & \langle \bar{Z}_r, B\bar{Z}_s \rangle &= 0 & \langle \bar{Z}_r, B\bar{Y}_s \rangle &= \omega_s \delta_{rs} \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde  $\delta_{rs}$  é a função delta de Kronecker e  $\langle u, v \rangle$  define o produto interno entre as funções  $u$  e  $v$ .

As porções espaciais dos tramos podem ser escritas também na forma complexa, para um dado modo  $r$ , têm-se

$$\begin{aligned} \bar{w}_{1r} &= \bar{v}_{1r}^R + i\bar{v}_{1r}^I \\ \bar{w}_{2r} &= \bar{v}_{2r}^R + i\bar{v}_{2r}^I \\ \bar{w}_{3r} &= \bar{v}_{3r}^R + i\bar{v}_{3r}^I \end{aligned} \quad (5.13)$$

e

$$\{\bar{W}_r\} = \begin{Bmatrix} \bar{v}_{1r}^R + i\bar{v}_{1r}^I \\ \bar{v}_{2r}^R + i\bar{v}_{2r}^I \\ \bar{v}_{3r}^R + i\bar{v}_{3r}^I \\ \bar{a}_{4r} \\ \bar{a}_{5r} \\ \bar{a}_{6r} \\ \bar{a}_{7r} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda \{\bar{W}_r\} = \begin{Bmatrix} i\omega_r \bar{v}_{1r}^R - \omega_r \bar{v}_{1r}^I \\ i\omega_r \bar{v}_{2r}^R - \omega_r \bar{v}_{2r}^I \\ i\omega_r \bar{v}_{3r}^R - \omega_r \bar{v}_{3r}^I \\ i\omega_r \bar{a}_{4r} \\ i\omega_r \bar{a}_{5r} \\ i\omega_r \bar{a}_{6r} \\ i\omega_r \bar{a}_{7r} \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

onde  $\bar{a}_{ir}$  são as amplitudes das autofunções.

Sabendo que  $\lambda_r$  apresenta a forma complexa  $i\omega_r$ , pode-se escrever as componentes  $\{\bar{Y}_r\}$  e  $\{\bar{Z}_r\}$  de  $\{\bar{U}_r\}$ :

$$\{\bar{Y}_r\} = \begin{pmatrix} -\omega_r \bar{v}_{1r}^I \\ -\omega_r \bar{v}_{2r}^I \\ -\omega_r \bar{v}_{3r}^I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{v}_{1r}^R \\ \bar{v}_{2r}^R \\ \bar{v}_{3r}^R \\ \bar{a}_{4r} \\ \bar{a}_{5r} \\ \bar{a}_{6r} \\ \bar{a}_{7r} \end{pmatrix} \quad \{\bar{Z}_r\} = \begin{pmatrix} \omega_r \bar{v}_{1r}^R \\ \omega_r \bar{v}_{2r}^R \\ \omega_r \bar{v}_{3r}^R \\ \omega_r \bar{a}_{4r} \\ \omega_r \bar{a}_{5r} \\ \omega_r \bar{a}_{6r} \\ \omega_r \bar{a}_{7r} \\ \bar{v}_{1r}^I \\ \bar{v}_{2r}^I \\ \bar{v}_{3r}^I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Agora que os vetores  $\{\bar{Y}_r\}$  e  $\{\bar{Z}_r\}$  são conhecidos, pode-se escrever as expressões de ortogonalidade ponderada dadas por (5.12).

$$\begin{aligned} \langle \bar{Y}_r, A\bar{Y}_s \rangle &= \int_0^{l_1} (m\omega_r \omega_s \bar{v}_{1r}^I \bar{v}_{1s}^R - P_{t1} \bar{v}_{1r}^R \bar{v}_{1s,x}^R) dx \\ &+ \int_0^{l_2} (m\omega_r \omega_s \bar{v}_{2r}^I \bar{v}_{2s}^R - P_{t2} \bar{v}_{2r}^R \bar{v}_{2s,x}^R) dx \\ &+ \int_0^{l_3} (m\omega_r \omega_s \bar{v}_{3r}^I \bar{v}_{3s}^R - P_{t3} \bar{v}_{3r}^R \bar{v}_{3s,x}^R) dx + \bar{\chi}_r^T K_{22} \bar{\chi}_s \\ &+ \bar{a}_{6r} P_{t1} \sin \psi_1 \bar{v}_{1s,x}^R|_{l_1} - \bar{a}_{6r} P_{t2} \sin \psi_2 \bar{v}_{2s,x}^R|_0 = \delta_{rs} \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}
\langle \bar{Z}_r, B\bar{Y}_s \rangle &= \int_0^{l_1} (-2mc\omega_r\omega_s\bar{v}_{1r}^R\bar{v}_{1s,x}^I - P_{t1}\omega_r\bar{v}_{1r}^R\bar{v}_{1s,xx}^R) dx \\
&+ \int_0^{l_2} (-2mc\omega_r\omega_s\bar{v}_{2r}^R\bar{v}_{2s,x}^I - P_{t2}\omega_r\bar{v}_{2r}^R\bar{v}_{2s,xx}^R) dx \\
&+ \int_0^{l_3} (-2mc\omega_r\omega_s\bar{v}_{3r}^R\bar{v}_{3s,x}^I - P_{t3}\omega_r\bar{v}_{3r}^R\bar{v}_{3s,xx}^R) dx + \omega_r\bar{\chi}_r^T K_{22}\bar{\chi}_s \\
&+ \omega_r\bar{a}_{6r} (P_{t1} \sin \psi_1 \bar{v}_{1s,x}^R|_{l_1} - P_{t2} \sin \psi_2 \bar{v}_{2s,x}^R|_0) \\
&+ \int_0^{l_1} (-P_{t1}\omega_s\bar{v}_{1r}^I\bar{v}_{1s,xx}^I) dx + \int_0^{l_2} (-P_{t2}\omega_s\bar{v}_{2r}^I\bar{v}_{2s,xx}^I) dx \\
&+ \int_0^{l_3} (-P_{t3}\omega_s\bar{v}_{3r}^I\bar{v}_{3s,xx}^I) dx = \omega_s\delta_{rs}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

e assim por diante.

Para expressar as formas modais dos tramos podem ser utilizadas as soluções homogêneas do problema de vibração transversal em cordas em movimento, conforme expressas na Seção 2.3.

$$\begin{aligned}
\bar{w}_{ir}(x) = \bar{v}_{ir}(x) &= \bar{a}_{ir} \sin\left(\frac{\omega_r x}{c'_i}\right) \exp\left(i\frac{\omega_r x}{c'_{ai}}\right) \\
&= \bar{a}_{ir} \sin\left(\frac{\omega_r x}{c'_i}\right) \left[ \cos\left(\frac{\omega_r x}{c'_{ai}}\right) + i \sin\left(\frac{\omega_r x}{c'_{ai}}\right) \right]
\end{aligned} \tag{5.18}$$

A Equação (5.18) pode ser adequada para que se simplifique nas condições de contorno para cada tramo, tornando-se então

$$\bar{v}_{1r} = \bar{a}_{1r} \sin\left(\frac{\omega_r x}{c'_1}\right) \left\{ \cos\left[\frac{\omega_r(x-l_1)}{c'_a}\right] + i \sin\left[\frac{\omega_r(x-l_1)}{c'_a}\right] \right\} \tag{5.19}$$

$$\bar{v}_{2r} = \bar{a}_{2r} \sin\left[\frac{\omega_r(l_2-x)}{c'_2}\right] \left\{ \cos\left(\frac{\omega_r x}{c'_b}\right) + i \sin\left(\frac{\omega_r x}{c'_b}\right) \right\} \tag{5.20}$$

$$\bar{v}_{3r} = \bar{a}_{3r} \sin\left(\frac{\omega_r x}{c'_3}\right) \left[ \cos\left(\frac{\omega_r x}{c'_c}\right) + i \sin\left(\frac{\omega_r x}{c'_c}\right) \right] \tag{5.21}$$

onde

$$c'_1 = \frac{(c_1^2 - c^2)}{c_1} \quad \text{e} \quad c'_a = \frac{(c_1^2 - c^2)}{c} \tag{5.22}$$

sendo  $c$  a velocidade de transporte da correia e  $c_1 = \sqrt{P_{o1}/m}$ , a velocidade de propagação da onda transversal. A velocidade  $c'_a$  é definida por Sack (1954) como a velocidade de propagação de fase e

$c'_1$  é a velocidade média efetiva de onda.

## 5.2 Determinação das Frequências Naturais

O sistema em estudo é híbrido, apresentando equações de campo, que descrevem o movimento dos elementos contínuos e equações ordinárias, que descrevem o movimento dos elementos discretos. As matrizes de rigidez e giroscópica, além de apresentarem valores constantes, também possuem funções da variável  $x$  e operadores diferenciais. Devido à isto, não é possível aplicar métodos convencionais para determinação dos autovalores.

Para que seja possível cumprir esta tarefa é necessário trabalhar com as equações de campo inicialmente. Se forem utilizadas as soluções propostas por Sack (1954), e adaptadas ao problema, juntamente com as condições de contorno do problema, têm-se novas relações capazes de acoplar as variáveis contínuas e discretas tornando-as adequadas para o a identificação das frequências naturais pelo problema de autovalor (XIAO-JUN E LI-QUN, 2008).

Considerando-se inicialmente as equações com a solução das porções espaciais para os tramos, (5.19) e (5.20), e lembrando que a equação para o tramo 3 é desacoplada do sistema com tensionador (portanto não será considerada), têm-se as soluções periódicas para os tramos

$$w_1(x, t) = \hat{v}_1(x)e^{i\omega t} = \hat{a}_1 e^{i\omega t} \sin\left(\frac{\omega x}{c'_1}\right) \exp\left(i\frac{\omega(x-l_1)}{c'_a}\right) \quad (5.23)$$

$$w_2(x, t) = \hat{v}_2(x)e^{i\omega t} = \hat{a}_2 e^{i\omega t} \sin\left(\frac{\omega(l_2-x)}{c'_2}\right) \exp\left(i\frac{\omega x}{c'_b}\right) \quad (5.24)$$

As condições de contorno que acoplam o movimento dos tramos 1 e 2 com o tensionador são  $w_1(l_1, t) = \chi_3(t) \sin \psi_1$  e  $w_2(0, t) = \chi_3(t) \sin \psi_2$ .

Para determinação das frequências naturais, é preciso considerar que os elementos discretos também apresentam resposta periódica. Considera-se então a solução

$$\chi_i(t) = \hat{\chi}_i e^{i\omega t} \quad (5.25)$$

Substituindo as condições de contorno e (5.25) em (5.23) e (5.24), tem-se

$$\hat{v}_1(l_1) = \hat{a}_1 \sin\left(\frac{\omega l_1}{c'_1}\right) = \hat{\chi}_3 \sin \psi_1 \quad (5.26)$$

e

$$\hat{v}_2(0) = \hat{a}_2 \sin\left(\frac{\omega l_2}{c'_2}\right) = \hat{\chi}_3 \sin \psi_2 \quad (5.27)$$

Substituindo a solução (5.25) nas equações lineares das polias e tensionador e escrevendo-as na forma matricial juntamente com as relações (5.26) e (5.27), tem-se um sistema dinâmico na forma

$$[A_D] \{\hat{d}\} e^{i\omega t} = \{0\} \quad (5.28)$$

ou

$$[A_D] \{\hat{d}\} = \{0\} \quad (5.29)$$

onde

$$\{\hat{d}\} = \left\{ \hat{a}_1 \quad \hat{a}_2 \quad \hat{\chi}_1 \quad \hat{\chi}_2 \quad \hat{\chi}_3 \quad \hat{\chi}_4 \right\} \quad (5.30)$$

$$[A_D] = \begin{bmatrix} A_{D11} & A_{D12} \\ A_{D21} & A_{D22} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

sendo as submatrizes

$$A_{D11} = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\omega l_1}{c'_1}\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(\frac{\omega l_2}{c'_2}\right) \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$A_{D12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \psi_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$A_{D21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P_{t1} \frac{\omega}{c'_1} \cos\left(\frac{\omega l_1}{c'_1}\right) \sin \psi_1 & +P_{t2} \frac{\omega}{c'_2} \cos\left(\frac{\omega l_2}{c'_2}\right) \sin \psi_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$A_{D22} = \begin{bmatrix} -k_1 - k_3 + m_1 \omega^2 & k_1 & k_1 \cos \psi_1 & k_3 \\ k_1 & -k_2 - k_1 + m_2 \omega^2 & k_2 \cos \psi_2 - k_1 \cos \psi_1 & k_2 \\ k_1 \cos \psi_1 & -k_1 \cos \psi_1 + k_2 \cos \psi_2 & k_{33D} + m_3 \omega^2 & -k_2 \cos \psi_2 \\ k_3 & k_2 & -k_2 \cos \psi_2 & -k_3 - k_2 + m_4 \omega^2 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

com

$$k_{33D} = -k_1 \cos^2 \psi_1 - k_2 \cos^2 \psi_2 - k_4 \quad (5.36)$$

As frequências naturais são dadas pelas raízes da equação característica

$$\det [A_D] = 0 \quad (5.37)$$

que é função de  $\omega$ .

Uma vez obtidas as frequências naturais  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , é possível determinar as amplitudes relativas que constituem as formas modais pelo vetor  $\{\hat{d}\}$ . Para isto, substitui-se o valor da frequência natural  $\omega_r$ , correspondente ao modo  $r$ , que se deseja determinar, em  $[A_D]$ . Com isto, a matriz apresentará apenas elementos numéricos, sem dependência de variáveis, e o modo  $\{\hat{d}\}$ , correspondente ao modo  $\omega_r$ , pode ser determinado pela solução não trivial do novo sistema de equações.

$$[A_D]_{\omega=\omega_r} \{\hat{d}\} = \{0\} \quad (5.38)$$

Uma maneira de se obter a solução não trivial deste sistema é através da Decomposição em Valores Singulares de  $[A_D]_{\omega=\omega_r}$ . Com isso, tem-se:

$$[A_D]_{\omega=\omega_r} = [U] [\Sigma] [V]^T \quad (5.39)$$

A solução não trivial é dada pelo vetor de  $[V]$  correspondente ao menor valor singular da matriz diagonal  $[\Sigma]$  e será a forma modal do problema, ou seja,  $\{\hat{d}_r\} = \{V_j\}$ , onde  $\{V_j\}$  é o vetor correspondente  $j$ -ésimo elemento de  $[V]$ , relacionado ao menor valor singular não nulo,  $\sigma_j$ .

Com isso, pode-se relacionar os elementos do vetor  $\{\hat{d}_r\}$  às amplitudes das formas modais definidas no vetor de autofunções (5.11).

$$\hat{a}_{ir} = \hat{a}_i$$

para os tramos, e para as polias

$$\hat{a}_{jr} = \hat{\chi}_k, \quad j = 4 \dots 7, \quad k = 1 \dots 4$$

A equação do tramo 3 não apresenta acoplamento com o restante do sistema em sua porção linear. Portanto, o restante do mecanismo não interfere em suas frequências naturais e formas de vibrar. Sendo que suas frequências naturais podem ser obtidas pela expressão deduzida na Seção 2.3, correspondente ao caso de vibração transversal de corda em movimento axial.

$$\omega_{3r} = \frac{r\pi c_3'}{l_3}, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (5.40)$$

### 5.3 Normalização

Os valores  $\hat{a}_{jr}$  definem as amplitudes relativas dos graus de liberdade do problema para cada modo de vibrar, contudo estas não satisfazem as condições de ortogonalidade ponderada do sistema. Para isto é preciso que sejam normalizadas através da multiplicação de uma constante  $h$ , que pode ser definida a partir das propriedades em si, como dadas em (5.12) .

$$\bar{a}_{jr} = h\hat{a}_{jr} \quad (5.41)$$

Considerando uma das propriedades de ortogonalidade, dada na Equação (5.16), pode-se utilizar as formas modais com as amplitudes obtidas pelo vetor  $\{\hat{d}\}$ .

$$\begin{aligned} \langle \hat{Y}_r, A\hat{Y}_r \rangle &= \int_0^{l_1} (m\omega_r\omega_r\hat{v}_{1r}^I\hat{v}_{1r}^R - P_{t1}\hat{v}_{1r}^R\hat{v}_{1r,xx}^R) dx \\ &+ \int_0^{l_2} (m\omega_r\omega_r\hat{v}_{2r}^I\hat{v}_{2r}^R - P_{t2}\hat{v}_{2r}^R\hat{v}_{2r,xx}^R) dx \\ &+ \int_0^{l_3} (m\omega_r\omega_r\hat{v}_{3r}^I\hat{v}_{3r}^R - P_{t3}\hat{v}_{3r}^R\hat{v}_{3r,xx}^R) dx + \hat{\chi}_r^T K_{22}\hat{\chi}_s \\ &+ \hat{a}_{6r}P_{t1} \sin \psi_1 \hat{v}_{1r,x}^R|_{l_1} - \hat{a}_{6r}P_{t2} \sin \psi_2 \hat{v}_{2r,x}^R|_0 = \frac{1}{h^2} \end{aligned} \quad (5.42)$$

As formas modais para o modo  $r$  são normalizadas fazendo-se

$$\{\bar{Y}_r\} = h \{\hat{Y}_r\} = \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{Y}_r, A\hat{Y}_r \rangle}} \{\hat{Y}_r\} \quad (5.43)$$

e analogamente para  $\{\bar{Z}_r\}$ :

$$\{\bar{Z}_r\} = \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{Y}_r, A\hat{Y}_r \rangle}} \{\hat{Z}_r\} \quad (5.44)$$

A normalização pode ser testada, utilizando os vetores obtidos,  $\{\bar{Y}_r\}$  e  $\{\bar{Z}_r\}$ , nas relações de ortogonalidade (5.12), considerando o mesmo modo e diferentes modos de vibrar.

Para o terceiro tramo, tem-se um caso particular. Como este tramo tem sua equação desacoplada das demais, sua amplitude modal não é obtida conforme as demais, mas é escolhida aleatoriamente, supondo um valor  $\hat{a}_{3s}$ . Sua forma normalizada é obtida de forma análoga.

$$\bar{a}_{3s} = \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{Y}_s, A\hat{Y}_s \rangle}} \hat{a}_{3s} \quad (5.45)$$

onde  $s$  é a forma modal que contempla o movimento do tramo 3.

## 5.4 Receptância do Sistema

Ao avaliar o sistema linearmente é interessante determinar também a participação de cada forma modal na resposta total do sistema à determinadas excitações. Apesar de não considerar efeitos de não linearidades e troca de energia entre modos acoplados, através da receptância do sistema, pode-se determinar a parcela de participação de cada forma modal sobre a resposta vibratória linear do sistema estudado, quando este encontra-se sob excitações harmônicas.

Considerando então a equação matricial do sistema em análise na forma de estados, como definida anteriormente, tem-se

$$[A] \{\dot{U}\} + [B] \{U\} = \{F'\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad (5.46)$$

O vetor de estados  $\{U(t)\}$  pode ser expresso em termos de uma superposição modal

$$\{U(t)\} = \sum_{r=1}^n \{\bar{U}_r\} q_r(t) = \begin{bmatrix} \bar{U}_1 & \bar{U}_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) & q_2(t) & \cdots \end{Bmatrix}^T = [\bar{U}] \{q\} \quad (5.47)$$

onde  $\{\bar{U}_r\}$  é o vetor modal que representa o modo  $r$  de vibrar e  $q_r(t)$  é a coordenada generalizada modal correspondente.

Como apresentando anteriormente,  $\{\bar{U}_r\}$  é um vetor complexo e pode ser representado pela composição das parcelas real e imaginária, já definidas.

$$\{\bar{U}_r\} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\{\bar{Y}_r\} + i \{\bar{Z}_r\}) \quad (5.48)$$

Substituindo então a Equação (5.47) da superposição modal na Equação (5.46), tem-se

$$[A] [\bar{U}] \{\dot{q}\} + [B] [\bar{U}] \{q\} = \{F'\} \quad (5.49)$$

A matriz  $[\bar{U}]$  é a matriz modal do sistema, fazendo o produto interno da Equação (5.49) com a matriz  $[\bar{U}]$ , tem-se

$$\langle \bar{U}, A\bar{U} \rangle \{\dot{q}\} + \langle \bar{U}, B\bar{U} \rangle \{q\} = \langle \bar{U}, F' \rangle \quad (5.50)$$

mas o vetor de excitações  $\{F'\}$  para o caso linearizado é

$$\{F'\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{d1} \\ F_{d2} \\ F_{d3} \\ F_{d4} \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

Então o termo de excitação na Equação (5.50) pode ser expresso como uma simples multiplicação matricial.

$$\langle \bar{U}, A\bar{U} \rangle \{\dot{q}\} + \langle \bar{U}, B\bar{U} \rangle \{q\} = [\bar{U}]^T \{F'\} \quad (5.52)$$

As propriedades de ortogonalidade ponderada foram definidas para as porções real e imaginária dos autovetores do sistema, mas é possível generalizar essas propriedades para a forma complexa do autovetor. Considerando a matriz  $[A]$ , tem-se

$$\begin{aligned}
\langle \bar{U}_r, A\bar{U}_s \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{Y}_r + i\bar{Z}_r), \frac{1}{\sqrt{2}} A (\bar{Y}_s + i\bar{Z}_s) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle \bar{Y}_r, A\bar{Y}_s \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{Y}_r, iA\bar{Z}_s \rangle + \frac{1}{2} \langle i\bar{Z}_r, A\bar{Y}_s \rangle + \frac{1}{2} \langle i\bar{Z}_r, iA\bar{Z}_s \rangle \\
&= \frac{1}{2} \delta_{rs} + 0 + 0 - i^2 \frac{1}{2} \delta_{rs} \\
\langle \bar{U}_r, A\bar{U}_s \rangle &= \delta_{rs}
\end{aligned} \tag{5.53}$$

e para a matriz  $[B]$ ,

$$\begin{aligned}
\langle \bar{U}_r, B\bar{U}_s \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{Y}_r + i\bar{Z}_r), \frac{1}{\sqrt{2}} B (\bar{Y}_s + i\bar{Z}_s) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle \bar{Y}_r, B\bar{Y}_s \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{Y}_r, iB\bar{Z}_s \rangle + \frac{1}{2} \langle i\bar{Z}_r, B\bar{Y}_s \rangle + \frac{1}{2} \langle i\bar{Z}_r, iB\bar{Z}_s \rangle \\
&= 0 - i\frac{1}{2}\omega_s\delta_{rs} - i\frac{1}{2}\omega_s\delta_{rs} + 0 \\
\langle \bar{U}_r, B\bar{U}_s \rangle &= -i\omega_s\delta_{rs}
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Considerando as propriedades obtidas conforme as Equações (5.53) e (5.54), a Equação (5.52) fica

$$[I] \{\dot{q}\} + [L] \{q\} = [\bar{U}]^T \{F'\} \tag{5.55}$$

onde a matriz  $[I]$  é uma matriz identidade e a matriz  $[L]$  é uma matriz diagonal com os autovalores, definida por  $[L] = \text{diag} \left\{ -i\omega_1 \quad -i\omega_2 \quad \dots \right\}$ .

Avaliando cada linha do sistema expresso na Equação (5.55), têm-se as equações para as coordenadas generalizadas de cada forma modal.

$$\dot{q}_r(t) - i\omega_r q_r(t) = \{\bar{U}_r\}^T \{F'\} = \{\bar{U}_r\}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \tag{5.56}$$

Conforme apresentado por Maia e Silva (1997), se o sistema é excitado por uma força harmô-

nica da forma

$$\{F\} = \{\bar{F}\} e^{i\omega t}$$

a resposta particular do sistema também será da forma

$$\{q(t)\} = \{\bar{q}\} e^{i\omega t}$$

tem-se então

$$\begin{aligned} i\omega\bar{q}_r e^{i\omega t} - i\omega_r\bar{q}_r e^{i\omega t} &= \{\bar{U}_r\}^T \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \bar{F} \end{array} \right\} e^{i\omega t} \\ (i\omega - i\omega_r)\bar{q}_r &= \{\bar{U}_r\}^T \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \bar{F} \end{array} \right\} \\ \bar{q}_r &= \left( \frac{1}{i\omega - i\omega_r} \right) \{\bar{U}_r\}^T \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \bar{F} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (5.57)$$

Substituindo a Equação (5.57) em (5.47),

$$\{U(t)\} = \sum_{r=1}^n \{\bar{U}_r\} \left( \frac{1}{i\omega - i\omega_r} \right) \{\bar{U}_r\}^T \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \bar{F} \end{array} \right\} e^{i\omega t} \quad (5.58)$$

O vetor de respostas do sistema, por sua vez, é

$$\{U(t)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{W}(t) \\ W(t) \end{array} \right\}$$

Considerando as respostas harmônicas à uma excitação harmônica,

$$\{U(t)\} = \left\{ \begin{array}{c} i\omega\bar{W} \\ \bar{W} \end{array} \right\} e^{i\omega t}$$

e a forma modal pode ser expressa como

$$\{\bar{U}_r\} = \left\{ \begin{array}{c} i\omega\phi_r \\ \phi_r \end{array} \right\} \quad (5.59)$$

A Equação (5.58) pode ser reescrita como

$$\begin{Bmatrix} i\omega \bar{W} \\ \bar{W} \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^n \begin{Bmatrix} i\omega \phi_r \\ \phi_r \end{Bmatrix} \left( \frac{1}{i\omega - i\omega_r} \right) \begin{Bmatrix} i\omega \phi_r \\ \phi_r \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F} \end{Bmatrix} \quad (5.60)$$

Considerando apenas a porção que descreve a resposta no espaço de configuração, tem-se

$$\{\bar{W}\} = \sum_{r=1}^n \{\phi_r\} \left( \frac{1}{i\omega - i\omega_r} \right) \{\phi_r\}^T \{\bar{F}\} \quad (5.61)$$

A receptância  $\alpha_{jk}$  é definida como a resposta em deslocamento na coordenada  $j$  devido à uma excitação na coordenada  $k$ , quando todas as demais excitações são nulas (MAIA E SILVA, 1997). De forma que a expressão para a receptância fica

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{W}_j}{\bar{F}_k} = \sum_{r=1}^n \left( \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{i\omega - i\omega_r} \right) \quad (5.62)$$

No sistema de transmissão por correia, conforme as equações que o descrevem, a excitação do sistema não pode ser realizada através das coordenadas dos tramos, mas apenas através de flutuações de torques nas polias e braço do tensionador. Contudo, é possível determinar a resposta na posição  $x_j$  de um tramo  $j$  em função de excitações aplicadas nas polias. A receptância é definida então para os índices de resposta  $j = 1, 2, \dots, 7$  e índices de entrada (ou excitação)  $k = 4, 5, 6, 7$ .

A expressão assume as seguintes formas:

### Resposta e excitação em elementos discretos

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \left( \frac{\bar{a}_{jr} \bar{a}_{kr}}{i\omega - i\omega_r} \right), \quad j = 4, 5, 6, 7 \quad k = 4, 5, 6, 7 \quad (5.63)$$

## Resposta em elemento contínuo e excitação em elemento discreto

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \left( \frac{\bar{v}_{jr}(x_j)\bar{a}_{kr}}{i\omega - i\omega_r} \right), \quad j = 1, 2, 3 \quad k = 4, 5, 6, 7 \quad (5.64)$$

e  $x_j$  é a posição ao longo do comprimento do tramo onde é determinada a curva de receptância.

A Equação (5.62) é similar à equação apresentada por Ewins (2000) para sistemas com múltiplos graus de liberdade e sem amortecimento, que é o mesmo caso abordado. Mas pode-se modificar a curva de receptância para que esta represente um sistema com amortecimento viscoso genérico, pela substituição de  $i\omega_r$  por  $s_r$ , que representa um polo do sistema.

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{W}_j}{\bar{F}_k} = \sum_{r=1}^n \left( \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{i\omega - s_r} \right) \quad (5.65)$$

Para o caso de amortecimento viscoso modal equivalente, os polos podem ser escritos como

$$s_r = -\zeta_r\omega_r + i\omega_r\sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad (5.66)$$

onde  $\omega_r$  é a frequência natural e  $\zeta_r$  é o fator de amortecimento modal correspondente.

## 5.5 Resposta Temporal do Sistema Não Linear

A determinação da resposta temporal de um sistema dinâmico é de fundamental importância para a melhor compreensão de seu funcionamento, representando seu comportamento em relação ao tempo, quando sujeito a condições iniciais ou excitações possíveis. Pode-se identificar condições de ressonância ou instabilidade e assim, auxiliar no projeto e diagnóstico de condições críticas ou que possam causar falhas no sistema em estudo.

O sistema que está sendo analisado, por ser não linear, além das propriedades relacionadas à sistemas lineares, como regiões de ressonância e comportamento periódico, apresenta também efeitos de não linearidade, como possíveis ressonâncias secundárias, instabilidades, resposta em múltiplos dos harmônicos de excitação, entre outros fenômenos.

O tratamento de sistemas não lineares, pode envolver funções complexas e procedimentos não triviais. Uma maneira de tratar esse tipo de problema, de modo razoavelmente simples é através da separação dos termos não lineares dos termos lineares nas equações de movimento. De forma que é realizada uma Análise Modal na porção linear das equações, enquanto os termos não lineares são tratados como excitações externas ao sistema (MOON E WICKERT, 1997).

Outra vantagem no uso da Análise Modal no tratamento deste sistema é que como este apresenta equações de campo, estas podem ser transformadas em equações diferenciais ordinárias, uma vez que se considera que a porção espacial das equações é descrita pela superposição das formas modais do sistema.

Considerando-se as equações de movimento não lineares do sistema conforme determinado na Seção 3.1, estas podem ser escritas na forma matricial:

$$[M] \left\{ \ddot{W} \right\} + [G] \left\{ \dot{W} \right\} + [K] \{W\} = \{Q\} \quad (5.67)$$

onde as matrizes  $[M]$ ,  $[G]$  e  $[K]$ , são as matrizes de massa, giroscópica e de rigidez do sistema linearizado, idênticas às apresentadas na Seção 5.1. Já o vetor  $\{Q\}$  é o vetor de excitação do sistema, apresentando tanto os termos devido às excitações e torques externos quanto os termos não lineares das equações diferenciais.

$$\{Q\} = \left\{ \begin{array}{c} P_{d1}w_{1,xx} \\ P_{d2}w_{2,xx} \\ P_{d3}w_{3,xx} \\ P_{d1NL} - P_{d3NL} + F_{d1} \\ P_{d2NL} - P_{d1NL} + F_{d2} \\ -P_{d1NL} \cos \psi_1 + P_{d2NL} \cos \psi_2 + F_{d3} \\ P_{d3NL} - P_{d2NL} + F_{d4} \end{array} \right\} \quad (5.68)$$

Onde considera-se que a força de tração dinâmica pode ser decomposta em uma porção linear,  $P_{diL}$  e uma porção não linear,  $P_{diNL}$ .

$$P_{di} = P_{diL} + P_{diNL} \quad (5.69)$$

com

$$P_{diL} = k_i (u_i(l_i, t) - u_i(0, t)) \quad (5.70)$$

$$P_{diNL} = \frac{k_i}{2} \int_0^{l_i} w_{i,x}^2 dx \quad (5.71)$$

O vetor  $\{W\}$ , corresponde ao vetor de deslocamentos, similar ao da Seção 5.1.

Reescrevendo o sistema na forma de estados, tem-se

$$[A] \{\dot{U}\} + [B] \{U\} = \{X\} \quad (5.72)$$

com  $\{X\}_{14 \times 1} = \left\{ \begin{matrix} Q \\ 0 \end{matrix} \right\}^T$  e as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  são as mesmas da Seção 5.1.

A Análise Modal Teórica das equações homogêneas prediz a existência de pares complexos conjugados de autovetores, com porções  $\bar{Y}_r$  e  $\bar{Z}_r$ , respectivamente, para cada modo  $r$ . Pode-se então criar uma matriz modal  $[P]$ , que contenha esses vetores.

$$[P] = \left[ \begin{array}{cc|cc|ccc} \bar{Y}_1 & \bar{Z}_1 & \bar{Y}_2 & \bar{Z}_2 & \cdots & \bar{Y}_n & \bar{Z}_n \end{array} \right] \quad (5.73)$$

E como os vetores  $\{\bar{Y}_r\}$  e  $\{\bar{Z}_r\}$  são normalizados em relação à matriz  $[A]$ , é válida a relação

$$\langle P, AP \rangle = [I] \quad (5.74)$$

onde  $[I]$  é a matriz identidade.

Uma vez que são conhecidas as formas modais do problema, o vetor de estados  $\{U\}$  pode ser aproximado por uma expansão finita de autofunções do tipo

$$\{U(t)\} \approx \sum_{r=1}^n \{ \xi_r(t) \{\bar{Y}_r\} + \eta_r(t) \{\bar{Z}_r\} \} = [P] \{V(t)\} \quad (5.75)$$

onde

$$\{V(t)\} = \left\{ \begin{matrix} \xi_1(t) & \eta_1(t) & \xi_2(t) & \eta_2(t) & \cdots & \xi_n(t) & \eta_n(t) \end{matrix} \right\}^T \quad (5.76)$$

é o vetor de coordenadas generalizadas modais.

Substituindo a expansão na equação de estados do sistema, tem-se

$$[A] [P] \left\{ \dot{V}(t) \right\} + [B] [P] \{V(t)\} = \{X(t)\} \quad (5.77)$$

e fazendo-se o produto interno da Equação (5.77) com a matriz modal  $[P]$ , tem-se

$$\langle P, AP \rangle \left\{ \dot{V}(t) \right\} + \langle P, BP \rangle \{V(t)\} = \langle P, X(t) \rangle \quad (5.78)$$

ou

$$[I] \left\{ \dot{V}(t) \right\} + [H] \{V(t)\} = \{R(t)\} \quad (5.79)$$

$[I]$  é a matriz identidade, já apresentada,  $[H]$  é uma matriz bloco-diagonal, que deriva das propriedades de ortogonalidade ponderadas do sistema, sendo do tipo

$$[H] = \langle P, BP \rangle = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \omega_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

O vetor de excitação deste novo sistema pode ser expresso por

$$\{R(t)\} = \left\{ S_1(t) \quad T_1(t) \quad S_2(t) \quad T_2(t) \quad \dots \quad S_n(t) \quad T_n(t) \right\}^T \quad (5.81)$$

com

$$\begin{aligned} S_r(t) &= \langle \bar{Y}_r, X(t) \rangle \\ T_r(t) &= \langle \bar{Z}_r, X(t) \rangle \end{aligned}$$

Este novo sistema dinâmico a ser tratado apresenta pares de equações acopladas entre si para cada modo de vibrar do sistema, na forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_r(t) - \omega_r \eta(t) &= S_r(t) \\ \dot{\eta}_r(t) + \omega_r \xi_r(t) &= T_r(t) \end{aligned} \quad (5.82)$$

Os termos de excitação, para cada modo  $r$  e realizando a multiplicação pela matriz  $[P]$ , assumem a seguinte forma

$$\begin{aligned}
S_r(t) = & -P_{d1}\omega_r \int_0^{l_1} w_{1,xx} \bar{v}_{1r}^I dx - P_{d2}\omega_r \int_0^{l_2} w_{2,xx} \bar{v}_{2r}^I dx \\
& -P_{d3}\omega_r \int_0^{l_3} w_{3,xx} \bar{v}_{3r}^I dx
\end{aligned} \tag{5.83}$$

$$\begin{aligned}
T_r(t) = & P_{d1}\omega_r \int_0^{l_1} w_{1,xx} \bar{v}_{1r}^R dx + P_{d2}\omega_r \int_0^{l_2} w_{2,xx} \bar{v}_{2r}^R dx + P_{d3}\omega_r \int_0^{l_3} w_{3,xx} \bar{v}_{3r}^R dx \\
& + (P_{d1NL} - P_{d3NL} + F_{d1}) \omega_r \bar{a}_{4r} + (P_{d2NL} - P_{d1NL} + F_{d2}) \omega_r \bar{a}_{5r} \\
& + (P_{d2NL} \cos \psi_2 - P_{d1NL} \cos \psi_1 + F_{d3}) \omega_r \bar{a}_{6r} \\
& + (P_{d3NL} - P_{d2NL} + F_{d4}) \omega_r \bar{a}_{7r}
\end{aligned} \tag{5.84}$$

Nestes termos de excitação externa, ocorrem as não linearidades envolvendo  $\int_0^{l_i} w_{i,x}^2 dx$ , que não podem ser avaliadas diretamente. Contudo, podem ser utilizadas expansões que levam em consideração as formas modais que ocorrem para os tramos. Temos então

$$w_i(x, t) \approx \sum_{r=1}^n (\xi_r \bar{v}_{ir}^R + \eta_r \bar{v}_{ir}^I) \tag{5.85}$$

Com este tipo de expansão, a porção espacial das equações dos tramos é eliminada também das forças de excitação, uma vez que considera-se que são representadas por suas formas modais  $\bar{v}_{ir}^R$  e  $\bar{v}_{ir}^I$ .

Beikmann *et al.* (1996b) em seu trabalho, considera que o sistema de transmissão por correias pode ser adequadamente representando por uma expansão com três modos de vibrar, e devido ao seu intervalo de operação, considera-se que modos com frequências mais altas não são excitados. No presente trabalho, será considerada uma expansão em cinco modos de vibrar, que representa um sistema mais detalhado, e que não requer grande esforço computacional para sua integração.

Considerando cinco modos de vibrar, a matriz modal do sistema assume a seguinte forma

$$[P] = \begin{bmatrix} -\omega_1 \bar{v}_{11}^I & \omega_1 \bar{v}_{11}^R & -\omega_2 \bar{v}_{12}^I & \omega_2 \bar{v}_{12}^R & 0 & 0 & -\omega_4 \bar{v}_{14}^I & \omega_4 \bar{v}_{14}^R & 0 & 0 \\ -\omega_1 \bar{v}_{21}^I & \omega_1 \bar{v}_{21}^R & -\omega_2 \bar{v}_{22}^I & \omega_2 \bar{v}_{22}^R & 0 & 0 & -\omega_4 \bar{v}_{24}^I & \omega_4 \bar{v}_{24}^R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_3 \bar{v}_{33}^I & \omega_3 \bar{v}_{33}^R & 0 & 0 & -\omega_5 \bar{v}_{35}^I & \omega_5 \bar{v}_{35}^R \\ 0 & \omega_1 \bar{a}_{41} & 0 & \omega_2 \bar{a}_{42} & 0 & 0 & 0 & \omega_4 \bar{a}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 \bar{a}_{51} & 0 & \omega_2 \bar{a}_{52} & 0 & 0 & 0 & \omega_4 \bar{a}_{54} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 \bar{a}_{61} & 0 & \omega_2 \bar{a}_{62} & 0 & 0 & 0 & \omega_4 \bar{a}_{64} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 \bar{a}_{71} & 0 & \omega_2 \bar{a}_{72} & 0 & 0 & 0 & \omega_4 \bar{a}_{74} & 0 & 0 \\ \bar{v}_{11}^R & \bar{v}_{11}^R & \bar{v}_{12}^R & \bar{v}_{12}^R & 0 & 0 & \bar{v}_{14}^R & \bar{v}_{14}^R & 0 & 0 \\ \bar{v}_{21}^R & \bar{v}_{21}^I & \bar{v}_{22}^R & \bar{v}_{22}^I & 0 & 0 & \bar{v}_{24}^R & \bar{v}_{24}^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{v}_{33}^R & \bar{v}_{33}^I & 0 & 0 & \bar{v}_{35}^R & \bar{v}_{35}^I \\ \bar{a}_{41} & 0 & \bar{a}_{42} & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{44} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{51} & 0 & \bar{a}_{52} & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{54} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{61} & 0 & \bar{a}_{62} & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{64} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{71} & 0 & \bar{a}_{72} & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{74} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

Na matriz expressa pela Equação (5.86), os vetores correspondentes aos modos 1, 2 e 4 descrevem o comportamento do subsistema acoplado com tensionador. Como pode-se ver, as amplitudes relativas dos GDL de cada modo estão distribuídas entre os tramos 1 e 2, as 3 polias e o tensionador.

Já os modos 3 e 5, correspondem à resposta exclusivamente do terceiro tramo e seus termos são apresentados independentes dos termos dos demais elementos, pois a equação diferencial do terceiro tramo é desacoplada do restante do sistema, em sua porção linear.

Considerando estes modos para a descrição do problema, a variável de deslocamento transversal do tramo 1 pode ser expressa, segundo sua expansão finita, como:

$$w_1 \approx \xi_1 \bar{v}_{11}^R + \eta_1 \bar{v}_{11}^I + \xi_2 \bar{v}_{12}^R + \eta_2 \bar{v}_{12}^I + \xi_4 \bar{v}_{14}^R + \eta_4 \bar{v}_{14}^I \quad (5.87)$$

A porção não linear da tração dinâmica para o tramo 1 ficará então

$$\begin{aligned}
\int_0^{l_1} w_{1,x}^2 dx &= \xi_1^2 E_{11111} + 2\xi_1\eta_1 E_{11112} + 2\xi_1\xi_2 E_{11121} + 2\xi_1\eta_2 E_{11122} + \\
&+ 2\xi_1\xi_4 E_{11141} + 2\xi_1\eta_4 E_{11142} + \eta_1^2 E_{11212} + 2\eta_1\xi_2 E_{11221} + \\
&+ 2\eta_1\eta_2 E_{11222} + 2\eta_1\xi_4 E_{11241} + 2\eta_1\eta_4 E_{11242} + \xi_2^2 E_{12121} + \\
&+ 2\xi_2\eta_2 E_{12122} + 2\xi_2\xi_4 E_{12141} + 2\xi_2\eta_4 E_{12142} + \\
&+ \xi_4^2 E_{14141} + 2\xi_4\eta_4 E_{14142} + \eta_4^2 E_{14242}
\end{aligned} \tag{5.88}$$

onde as constantes  $E_{ijklm}$  são resultado da integração entre as derivadas das formas modais, conforme:

$$E_{ijklm} = \int_0^{l_i} \bar{v}_{ij,x}^k \bar{v}_{il,x}^m dx \tag{5.89}$$

Sendo que  $i$  define a qual tramo a função pertence,  $j$  e  $l$ , correspondem ao número dos modos envolvidos e  $k$  e  $m$  definem se a função é real (1) ou imaginária (2). Para o segundo tramo a expressão é similar à do tramo 1, mas para o tramo 3, como este apresenta menos modos, tem-se:

$$w_3 \approx \xi_3 \bar{v}_{33}^R + \eta_3 \bar{v}_{33}^I + \xi_5 \bar{v}_{35}^R + \eta_5 \bar{v}_{35}^I \tag{5.90}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{l_3} w_{3,x}^2 dx &= \xi_3^2 E_{333131} + 2\xi_3\eta_3 E_{333132} + 2\xi_3\xi_5 E_{333151} + \\
&+ 2\xi_3\eta_5 E_{333152} + \eta_3^2 E_{33232} + 2\eta_3\xi_5 E_{33251} + \\
&+ 2\eta_3\eta_5 E_{33252} + \xi_5^2 E_{35151} + 2\xi_5\eta_5 E_{35152} + \\
&+ \eta_5^2 E_{35252}
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Os termos de excitação  $S_r$  e  $T_r$ , ao utilizar a expansão que descreve cada tramo, se tornam:

$$\begin{aligned}
S_1 &= -P_{d1}\omega_1 (\xi_1 C_{1111} + \eta_1 C_{1121} + \xi_2 C_{1211} + \eta_2 C_{1221} + \xi_4 C_{1411} + \eta_4 C_{1421}) + \\
&- P_{d2}\omega_1 (\xi_1 C_{2111} + \eta_1 C_{2121} + \xi_2 C_{2211} + \eta_2 C_{2221} + \xi_4 C_{2411} + \eta_4 C_{2421})
\end{aligned} \tag{5.92}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= -P_{d1}\omega_2 (\xi_1 C_{1112} + \eta_1 C_{1122} + \xi_2 C_{1212} + \eta_2 C_{1222} + \xi_4 C_{1412} + \eta_4 C_{1422}) + \\
&- P_{d2}\omega_2 (\xi_1 C_{2112} + \eta_1 C_{2122} + \xi_2 C_{2212} + \eta_2 C_{2222} + \xi_4 C_{2412} + \eta_4 C_{2422})
\end{aligned} \tag{5.93}$$

$$S_3 = -P_{d3}\omega_3 (\xi_3 C_{3313} + \eta_3 C_{3323} + \xi_5 C_{3513} + \eta_5 C_{3523}) \quad (5.94)$$

$$S_4 = -P_{d1}\omega_4 (\xi_1 C_{1114} + \eta_1 C_{1124} + \xi_2 C_{1214} + \eta_2 C_{1224} + \xi_4 C_{1414} + \eta_4 C_{1424}) + \\ -P_{d2}\omega_4 (\xi_1 C_{2114} + \eta_1 C_{2124} + \xi_2 C_{2214} + \eta_2 C_{2224} + \xi_4 C_{2414} + \eta_4 C_{2424}) \quad (5.95)$$

$$S_5 = -P_{d3}\omega_5 (\xi_3 C_{3315} + \eta_3 C_{3323} + \xi_5 C_{3515} + \eta_5 C_{3525}) \quad (5.96)$$

onde os coeficientes são definidos pela integral

$$C_{ijkl} = \int_0^{l_i} \bar{v}_{ij,xx}^k \bar{v}_{il}^I dx \quad (5.97)$$

Sendo que  $i$  corresponde ao número do tramo,  $j$ , ao número do modo do primeiro termo,  $k$ , indica se a função é real (1) ou imaginária (2) e  $l$  é o mesmo número do modo de  $S_r$ .

A excitação para a parte imaginária segue o mesmo princípio, apresentando a forma:

$$T_1 = P_{d1}\omega_1 (\xi_1 D_{1111} + \eta_1 D_{1121} + \xi_2 D_{1211} + \eta_2 D_{1221} + \xi_4 D_{1411} + \eta_4 D_{1421}) + \\ + P_{d2}\omega_1 (\xi_1 D_{2112} + \eta_1 D_{2121} + \xi_2 D_{2211} + \eta_2 D_{2221} + \xi_4 D_{2411} + \eta_4 D_{2421}) + \\ + (P_{d1NL} - P_{d3NL} + F_{d1}) \omega_1 \bar{a}_{41} + (P_{d2NL} - P_{d1NL} + F_{d2}) \omega_1 \bar{a}_{51} + \\ + (P_{d2NL} \cos \psi_2 - P_{d1NL} \cos \psi_1 + F_{d3}) \omega_1 \bar{a}_{61} + \\ + (P_{d3NL} - P_{d2NL} + F_{d4}) \omega_1 \bar{a}_{71} \quad (5.98)$$

$$T_2 = P_{d1}\omega_2 (\xi_1 D_{1112} + \eta_1 D_{1122} + \xi_2 D_{1212} + \eta_2 D_{1222} + \xi_4 D_{1412} + \eta_4 D_{1422}) + \\ + P_{d2}\omega_2 (\xi_1 D_{2112} + \eta_1 D_{2122} + \xi_2 D_{2212} + \eta_2 D_{2222} + \xi_4 D_{2412} + \eta_4 D_{2422}) + \\ + (P_{d1NL} - P_{d3NL} + F_{d1}) \omega_2 \bar{a}_{42} + (P_{d2NL} - P_{d1NL} + F_{d2}) \omega_2 \bar{a}_{52} + \\ + (P_{d2NL} \cos \psi_2 - P_{d1NL} \cos \psi_1 + F_{d3}) \omega_2 \bar{a}_{62} + \\ + (P_{d3NL} - P_{d2NL} + F_{d4}) \omega_2 \bar{a}_{72} \quad (5.99)$$

$$T_3 = P_{d3}\omega_3 (\xi_3 D_{3313} + \eta_3 D_{3323} + \xi_5 D_{3513} + \eta_5 D_{3523}) \quad (5.100)$$

$$\begin{aligned}
T_4 = & P_{d1}\omega_4 (\xi_1 D_{1114} + \eta_1 D_{1124} + \xi_2 D_{1214} + \eta_2 D_{1224} + \xi_4 D_{1414} + \eta_4 D_{1424}) + \\
& + P_{d2}\omega_4 (\xi_1 D_{2114} + \eta_1 D_{2124} + \xi_2 D_{2214} + \eta_2 D_{2224} + \xi_4 D_{2414} + \eta_4 D_{2424}) + \\
& + (P_{d1NL} - P_{d3NL} + F_{d1}) \omega_4 \bar{a}_{44} + (P_{d2NL} - P_{d1NL} + F_{d2}) \omega_4 \bar{a}_{54} + \\
& + (P_{d2NL} \cos \psi_2 - P_{d1NL} \cos \psi_1 + F_{d3}) \omega_4 \bar{a}_{64} + \\
& + (P_{d3NL} - P_{d2NL} + F_{d4}) \omega_4 \bar{a}_{74}
\end{aligned} \tag{5.101}$$

$$T_5 = P_{d3}\omega_5 (\xi_3 D_{3315} + \eta_3 D_{3325} + \xi_5 D_{3515} + \eta_5 D_{3525}) \tag{5.102}$$

Os coeficientes, neste caso são produzidos pela integral

$$D_{ijkl} = \int_0^{l_i} \bar{v}_{ij,xx}^k \bar{v}_{il}^R dx \tag{5.103}$$

onde os índices têm significados similares aos da constante  $C_{ijkl}$ .

As trações dinâmicas podem ser expressas como uma soma da porção linear com a não linear,  $P_{di} = P_{diL} + P_{diNL}$ , como já foi apresentado anteriormente. Desta forma, a porção não linear é expressa por

$$P_{diNL} = \frac{k_i}{2} \int_0^{l_i} w_{i,x}^2 dx \tag{5.104}$$

sendo que a integral, para cada tramo pode ser expressa por equações similares à (5.88) ou (5.91). Já a porção linear da tração é dada por:

$$P_{d1L} = k_1 (\xi_1 F_{11} + \xi_2 F_{12} + \xi_4 F_{14}) \tag{5.105}$$

$$P_{d2L} = k_2 (\xi_1 F_{21} + \xi_2 F_{22} + \xi_4 F_{24}) \tag{5.106}$$

$$P_{d3L} = k_3 (\xi_1 F_{31} + \xi_2 F_{32} + \xi_4 F_{34}) \tag{5.107}$$

sendo os coeficientes dados por

$$F_{11} = \bar{a}_{61} \cos \psi_1 + \bar{a}_{51} - \bar{a}_{41}$$

$$F_{12} = \bar{a}_{62} \cos \psi_1 + \bar{a}_{52} - \bar{a}_{42}$$

$$F_{14} = \bar{a}_{64} \cos \psi_1 + \bar{a}_{54} - \bar{a}_{44}$$

$$F_{21} = \bar{a}_{61} \cos \psi_2 + \bar{a}_{71} - \bar{a}_{51}$$

$$F_{22} = \bar{a}_{62} \cos \psi_2 + \bar{a}_{72} - \bar{a}_{52}$$

$$F_{24} = \bar{a}_{64} \cos \psi_2 + \bar{a}_{74} - \bar{a}_{54}$$

$$F_{31} = \bar{a}_{41} - \bar{a}_{71}$$

$$F_{32} = \bar{a}_{42} - \bar{a}_{72}$$

$$F_{34} = \bar{a}_{44} - \bar{a}_{74}$$

Finalmente, temos todas as funções presentes nas equações do problema. Dadas as Equações (5.82), considerando  $r = 1, \dots, 5$  e substituindo as excitações produzidas pelos termos dados em (5.92-5.96) e (5.98-5.102), além de considerar os termos presentes nas trações dinâmicas, pode-se considerar o amortecimento presente no sistema, através dos fatores de amortecimento modais,  $\zeta_r$ . Tem-se então o sistema

$$\dot{\xi}_r - \omega_r \eta_r = S_r - 2\omega_r \zeta_r \xi_r \quad (5.108)$$

$$\dot{\eta}_r + \omega_r \xi_r = T_r \quad (5.109)$$

com  $r = 1 \dots 5$ . Isto fornece um conjunto com dez equações diferenciais ordinárias acopladas que podem ser integradas numericamente, determinando, assim, as respostas temporais dos elementos do sistema através das coordenadas generalizadas. Estas podem, posteriormente, ser transformadas nas coordenadas físicas do problema.



## 6 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo, os modelos matemáticos desenvolvidos nas seções anteriores são implementados em um *software* de simulação computacional para verificação de seu comportamento, bem como o estudo da influência dos parâmetros físicos nas respostas do problema. Para isto, foi utilizado o *software* de simulação numérica Matlab® versão 7.1. As rotinas de cálculo foram implementadas modularmente, ou seja, pequenas subrotinas realizavam avaliações de parâmetros ou sequências de cálculos e eram chamadas dentro de uma rotina de cálculo principal.

Para avaliação das rotinas, as simulações serão baseadas em um modelo físico modelado e testado experimentalmente por Beikmann (1992), cujos resultados são bastante consolidados e validados, inclusive, por outros autores.

Os dados do sistema estudado são apresentados na Tabela 6.1 e a representação geométrica do sistema é apresentado na Figura 6.1.

Tabela 6.1: Dados físicos do sistema simulado.

Propriedade	Valor	Unidade	Propriedade	Valor	Unidade
Polia 1			Tensionador		
$J_1$	0,07248	kg.m <sup>2</sup>	$J_3$	0,001165	kg.m <sup>2</sup>
$r_1$	0,0889	m	$r_3$	0,097108	m
Coordenadas	(0,5525;0,0556)	m	Coordenadas	(0,2508;0,0635)	m
RPM	0	rpm	$\theta_{3r}$	0,1551	rad
Polia 2			$k_r$	54,37	N.m/rad
$J_2$	0,000239	kg.m <sup>2</sup>	Correia		
$r_2$	0,0452	m	$EA$	170000	N
Coordenadas	(0,3477;0,05715)	m	$m$	0,1029	kg/m
massa	0,302	kg			
Polia 4					
$J_4$	0,000239	kg.m <sup>2</sup>			
$r_4$	0,02697	m			
Coordenadas	(0;0)	m			

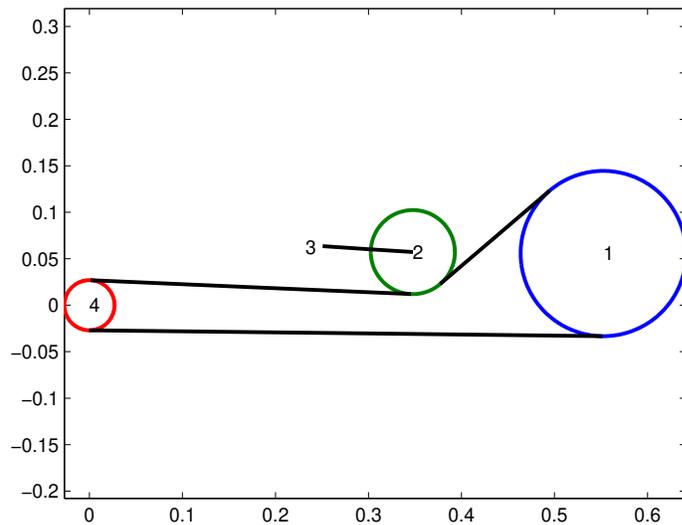


Figura 6.1: Representação geométrica do sistema simulado.

## 6.1 Estudo Estático

Com base nas informações geométricas do sistema analisado, pode-se determinar as propriedades geométricas, como ângulos de abraçamento, comprimentos dos tramos e ângulos auxiliares, para assim iniciar a avaliação estática do modelo.

Considerando os dados geométricos da Tabela 6.1, as demais propriedades geométricas, avaliadas conforme as relações apresentadas na Seção 2.2, são dadas na Tabela 6.2.

Tabela 6.2: Propriedades Geométricas Calculadas.

Ângulos de abraçamento (graus)		Comprimento dos tramos (m)	
$\phi_1$	221,125	$l_1$	0,1548
$\phi_2$	42,953	$l_2$	0,3449
$\phi_4$	181,828	$l_3$	0,5518
		$L_{Total}$	1,5141

Ângulos Auxiliares $\alpha$ (graus)		Ângulos Auxiliares $\psi$ (graus)	
$\alpha_1$	44,2176	$\psi_1$	45,7824
$\alpha_2$	178,7354	$\psi_2$	91,2646

Pelas equações de equilíbrio estático do sistema, ou seja, para o caso em que a velocidade de translação da correia é nula, este apresenta força de tração de referência  $P_r = 128,59\text{N}$ . Considerando a polia 1 como a polia motora e operando a 1000 rpm. Supõem-se que não haja torques externos aplicados pelos acessórios e desprezando as variações de tração produzidas pelo atrito entre correia e polia, a Figura 6.2 representa as curvas de Tração produzidas pelo cálculo de acordo com as expressões de deformação na correia e segundo a expressão de deflexão do tensionador (Seção 3.4), tem-se que a tração de operação total nos tramos será  $P_{oi} = 136,55\text{N}$ , a tração centrífuga vale  $P_c = 8,92\text{N}$  e subtraindo a tração centrífuga da tração total de operação, pode-se determinar a tração estática atuante, que no caso é  $P_{ti} = 127,90\text{N}$ , conforme Equação (3.98), e a deflexão esperada para o tensionador é de aproximadamente  $7,76 \times 10^{-4}\text{rad}$ .

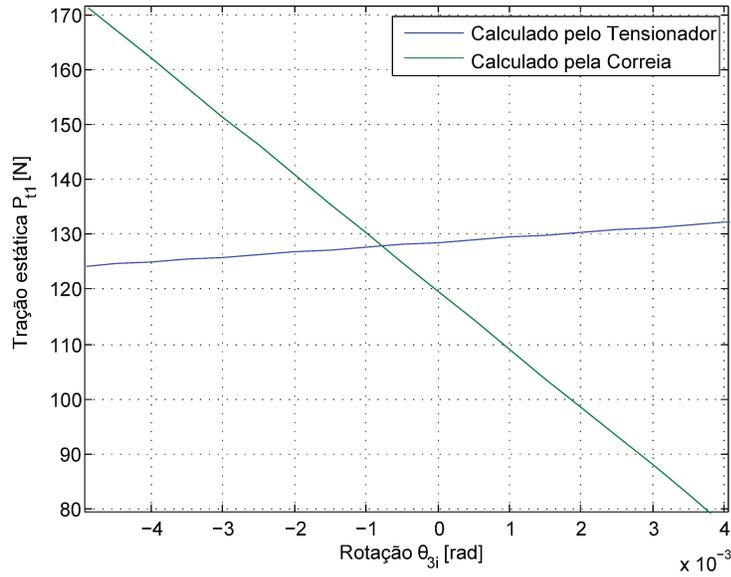


Figura 6.2: Curvas de variação de tração estática no sistema para 1000 rpm.

Como verificado pelos cálculos, quando o sistema encontra-se em condição de operação, passa a atuar uma força de tração centrífuga na correia, aumentando a força de tração total atuante. Contudo, a componente da tração estática devido à tração de referência é reduzida. Esse comportamento é observado para diferentes velocidades de operação sendo que conforme a velocidade de operação aumenta, a tração de operação aumenta continuamente, mas a componente estática desta tração reduz-se, compensada pela deformação na correia, como mostrado na Seção 3.4.

Um sistema de transmissão ideal é aquele capaz de manter o tracionamento na correia constante, independentemente da velocidade de operação ou da variação da carga atuante. Beikmann *et al.* (1997) e Mote Jr. (1965) estimam as forças de tração atuantes em sistemas de transmissão através de uma aproximação linear baseada na tração de referência do sistema e que leva em conta um fator chamado de constante de suporte, conforme a Equação (6.1).

$$P_{oi} \approx P_r + \eta mc^2 \quad (6.1)$$

e substituindo a Equação (3.98),  $P_{oi} = P_{ti} + mc^2$ , obtém-se

$$P_{ti} \approx P_r + (\eta - 1) mc^2 \quad (6.2)$$

A constante de suporte,  $\eta$ , consiste de um número entre zero e um, que relaciona a tração de operação com a tração de referência do sistema de acordo com a geometria e velocidade de operação, fornecendo também informações importantes sobre a eficácia da geometria e do projeto em manter a correia adequadamente tracionada (BEIKMANN, 1992). Em um sistema onde  $\eta = 1$ , a tração estática não varia conforme a velocidade de operação aumenta, ou seja, tem-se um sistema ideal que permanece tracionado sempre. Já se  $\eta = 0$ , verifica-se a situação equivalente às polias de centro fixo, onde o aumento na velocidade é inversamente proporcional à redução na tração, o que pode acarretar deslizamento e, conseqüentemente, perda na capacidade de transmissão de potência.

Em sistemas com polias de centro móvel, com mecanismos de peso morto ou acionados por mola, ou tensionadores, a constante de suporte vale  $0 < \eta < 1$ , sendo que, quanto mais próximo de 1, melhor a capacidade de manter o sistema tracionado.

No sistema avaliado, a constante de suporte vale aproximadamente  $\eta = 0,892$ , ou seja, é um sistema com boa capacidade de tracionamento.

## 6.2 Análise Modal Teórica

Com base nos dados físicos do problema, serão determinadas, a partir das equações apresentadas na Seção 3.3, as propriedades modais do sistema linearizado, como frequências naturais e formas modais. A determinação das frequências naturais é realizada conforme o método apresentado na Seção 5.2, onde as mesmas são definidas pelas raízes da Equação (5.37). Considerando o sistema em condição de referência, ou seja, com velocidade de transporte zero, o comportamento da equação característica é apresentado na Figura 6.3, a seguir.

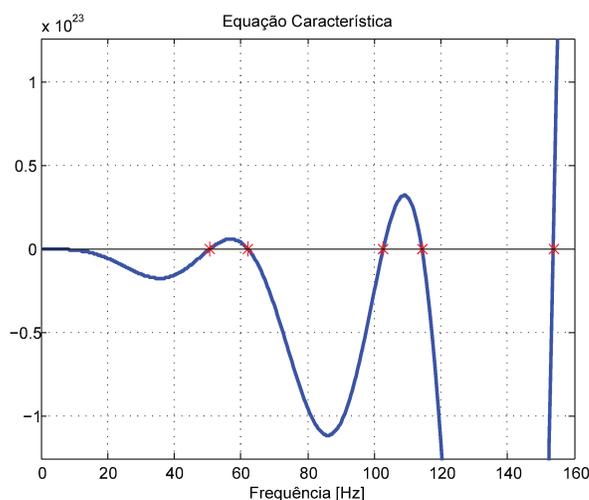


Figura 6.3: Curva obtida pela equação característica e raízes identificadas.

A Tabela 6.3 apresenta os valores das raízes da equação característica, que correspondem às frequências naturais da porção acoplada do sistema. Comparativamente tem-se os valores das frequências naturais obtidas por Beikmann *et al.* (1996a) em seu trabalho, através dos procedimentos numérico e experimental, e também os valores obtidos por Zhang e Zu (1999), determinados numericamente, considerando o mesmo sistema físico.

Tabela 6.3: Comparação entre os valores de frequências naturais, em Hz, obtidos com os valores da literatura.

Modo	Beikmann (Experimental)	Beikmann (Teórico)	Zhang (Teórico)	Presente Estudo	Tipo de modo
1	33,00	32,03	32,03	32,03	1º Tramo 3
2	51,75	50,52	50,53	50,52	1º Tramo 2
3	62,50	62,22	62,18	62,18	1º Rotacional
4	-	-	102,50	102,74	2º Tramo 2
5	-	-	114,19	114,42	1º Tramo 1
6	-	-	153,75	153,86	3º Tramo 2

A menor frequência natural apresentada é 32,03Hz e corresponde ao primeiro modo de vibrar do Tramo 3, que tem sua equação desacoplada do restante do mecanismo, de forma que pode ser obtida pela Equação (5.40),  $\pi c'_3/l_3$ . As demais frequências são dadas pelas raízes da equação

característica. Como pode-se observar pela Tabela 6.3, houve boa concordância entre os valores obtidos pelo método proposto para a identificação das frequências naturais e os procedimentos numéricos e experimental propostos por outros autores.

Para cada frequência natural identificada foi também obtida a forma modal correspondente. A Figura 6.4 apresenta a representação geométrica das formas modais obtidas para o sistema. Como pode-se observar, no caso deste sistema, as formas modais definidas majoritariamente pelo movimento dos tramos tendem a ser desacopladas do restante do sistema, enquanto que, no caso de modos rotacionais, como o que ocorre em 62,18Hz, estes tendem a apresentar acoplamento entre as formas rotacionais e as formas transversais dos tramos.

O sistema de transmissão por correia, quando se considera que opera em velocidade de rotação não nula, apresenta comportamento giroscópico, ou seja, podem ocorrer variações dos parâmetros modais do mesmo em decorrência das velocidades imprimidas no sistema. Além do efeito produzido pela força de tração centrífuga, que passa a atuar nos tramos da correia, produzindo variações em suas frequências naturais.

Juntamente a isto, é possível prever a ocorrência de alterações nas propriedades modais em situações de alteração da força de tração atuante na correia. Para sistemas com diferentes níveis de tracionamento na correia, pode-se esperar diferentes frequências naturais.

A Figura 6.5 ilustra o comportamento do sistema em estudo para diferentes velocidades de operação aplicadas na polia 1. Vale ressaltar que essas condições são válidas para os casos quasi-estacionários e não para transientes de velocidades. Neste primeiro caso é considerada a tração de referência atuante na correia sendo 128,59N, contudo se for considerada uma força de tração maior, de 257,18N, ocorre uma alteração nas curvas das frequências naturais, como pode ser observado na Figura 6.6.

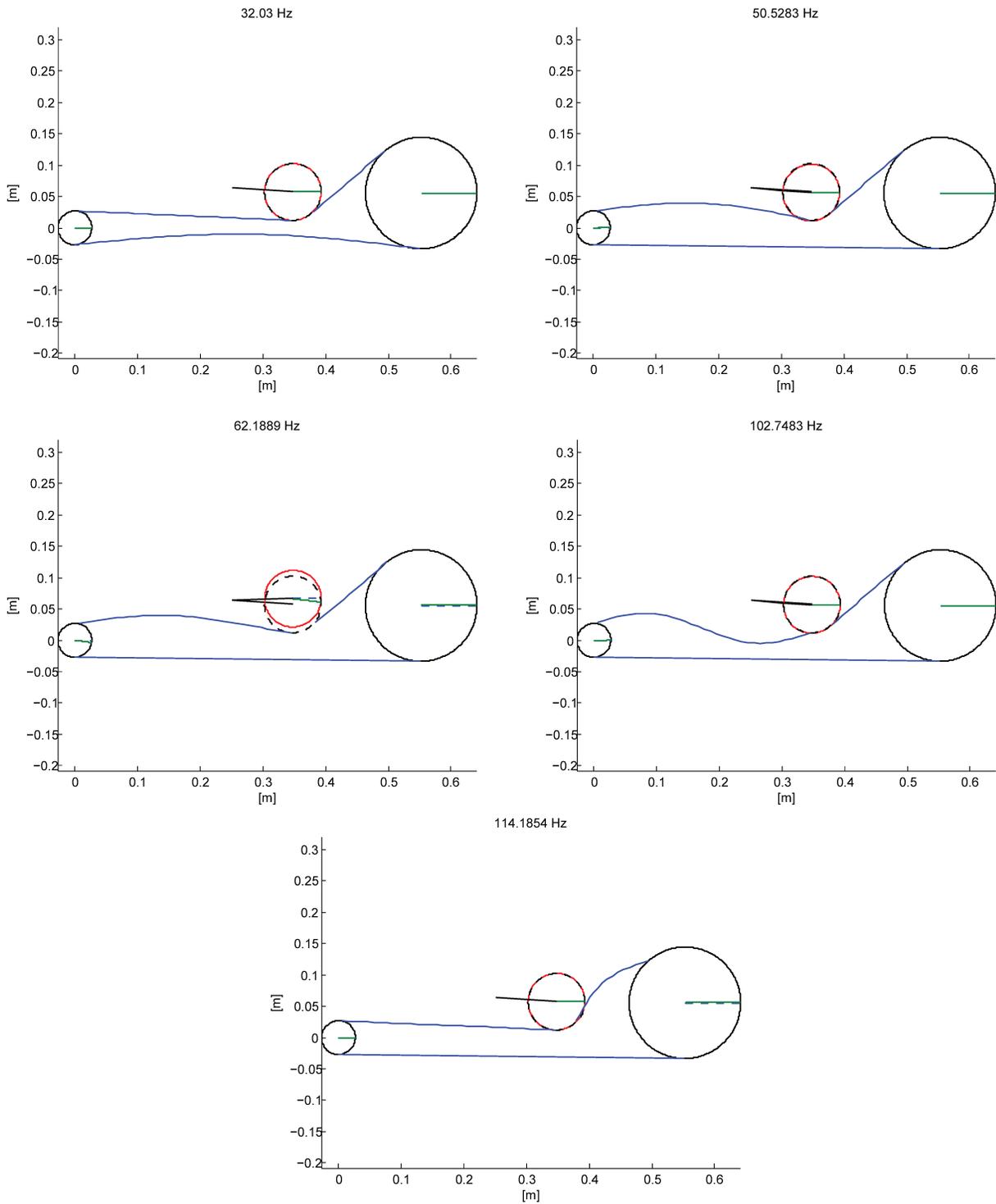


Figura 6.4: Formas modais identificadas para o sistema.

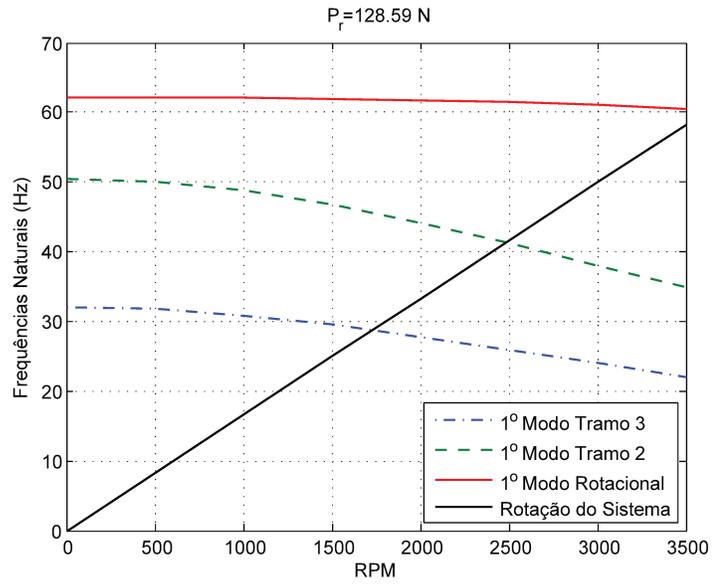


Figura 6.5: Variação das frequências naturais em função da velocidade de operação para tração de referência de 128,59N.

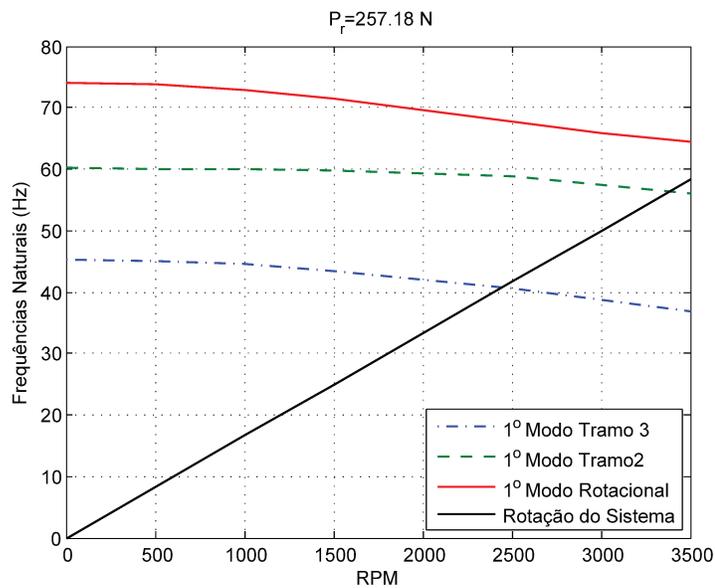


Figura 6.6: Variação das frequências naturais em função da velocidade de operação para tração de referência de 257,18N.

Como pode-se verificar pelas Figuras 6.5 e 6.6, as frequências naturais para cada modo do

sistema tendem a diminuir conforme a velocidade de operação do mesmo aumenta, em decorrência do efeito produzido pela matriz giroscópica. Ao passo que a variação da força de tração de referência aplicada no sistema em sua montagem produz efeito inverso. Quanto maior a força de tração inicial no sistema, maiores suas frequências naturais.

Observa-se que conforme aumenta-se a tração na correia, a taxa de variação das frequências naturais com a velocidade de operação tende a diminuir, além de que as frequências apresentam valores maiores em comparação com as verificadas no estado de referência.

Quando se considera que os subsistemas atuam desacopladamente, ou seja, quando se considera que a vibração transversal dos tramos é totalmente desacoplada da vibração rotacional do sistema e esta apresenta modos próprios, independentes daqueles apresentados pelos tramos, pode-se realizar uma nova análise. Para determinar as frequências naturais dadas exclusivamente pelos tramos, pode-se utilizar a expressão

$$\omega_{ir} = \frac{r\pi c'_i}{l_i}, \quad c'_i = \frac{c_i^2 - c^2}{c_i} \quad (6.3)$$

onde  $i$  expressa o número do tramo,  $r$  o número do modo e  $c_i = \sqrt{P_{oi}/m}$ .

As frequências da porção puramente rotacional são determinadas conforme o procedimento da Seção 4.2.

A Tabela 6.4 apresenta a comparação entre as frequências naturais do sistema quando suas equações são avaliadas acopladamente e as frequências naturais obtidas para o sistema com as contribuições desacopladas. Para a avaliação, foram consideradas as mesmas propriedades utilizadas anteriormente, conforme Tabela 6.3, e considerando velocidade de operação nula.

Tabela 6.4: Comparação entre frequências naturais obtidas pelos sistemas acoplado e desacoplado.

Modo	Frequências Naturais, em Hz.			Tipo de Modo
	Acoplado	Desacoplado	Desvio	
1	32,03	32,03	0,00	1º Tramo 3
2	50,52	51,25	0,73	1º Tramo 2
3	62,18	61,56	-0,62	1º Rotacional
4	102,74	102,49	-0,25	2º Tramo 2
5	114,42	114,18	-0,24	1º Tramo 1
6	153,86	153,74	-0,12	3º Tramo 2

### 6.3 Receptância do Sistema

Como foi apresentado na Seção 5.4, é de interesse a determinação da curva de receptância do sistema de transmissão por correia, pois assim é possível verificar a contribuição modal de cada modo de vibrar deste, seja um modo predominantemente transversal dos tramos ou um modo predominantemente rotacional.

O sistema é o mesmo estudado até então, mas são considerados nove modos de vibrar do sistema, sendo 2 correspondentes ao tramo 3, que é desacoplado e os demais 7 modos descrevem o comportamento da porção acoplada do subsistema com o tensionador.

Em um primeiro caso de estudo, a excitação é aplicada através da polia 1 e a resposta é obtida para a polia 4, que fornece a curva de índice  $\alpha_{47}(\omega)$ . São considerados também que todos os modos apresentam fatores de amortecimento modal 0,0005, para efeito de simulação. A Figura 6.7 apresenta a curva em discussão.

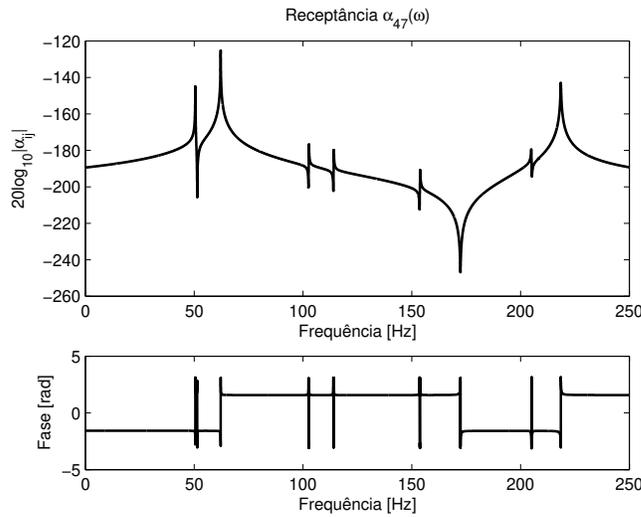


Figura 6.7: Receptância do sistema - excitação na polia 1 e resposta na polia 4.

Nas condições de excitação e observação estabelecidas, as frequências naturais que apresentem maiores respostas são 50,53Hz, 62,19Hz e 218,5Hz, sendo a primeira frequência correspondente a um modo de vibrar predominantemente transversal do tramo 2 e as outras frequências correspondem a modos de vibrar predominantemente rotacionais.

Como segundo caso, considera-se que a excitação é realizada pela polia 1 e as observações são feitas no tramo 2 em duas posições distintas, uma em  $x_{k2} = \frac{l_2}{2}$  e outra em  $x_{k2} = \frac{l_2}{5}$  (sendo  $l_2$  o comprimento total do segundo tramo). Os fatores de amortecimento usados no cálculo são os mesmos.

A Figura 6.8 apresenta as curvas de receptância para as condições mencionadas. Neste caso, a curva de receptância para a posição  $x_{k2} = \frac{l_2}{2}$  apresenta apenas 6 picos em frequências naturais. A resposta correspondente à frequência 102,7Hz, que é devido ao segundo modo de vibrar do tramo 2, tem amplitude consideravelmente inferior às amplitudes apresentadas nas demais frequências. Isso se deve ao fato de o ponto de medição considerado ser exatamente um ponto nodal do tramo, assim, alguns modos (múltiplos pares da frequência fundamental do primeiro modo do tramo 2) não podem ser observados, como ocorre também com a frequência de 205Hz, que sequer aparece.

Já para a resposta obtida na posição  $x_{k2} = \frac{l_2}{5}$ , todas as formas modais se manifestam, pois a resposta não é medida em pontos nodais.

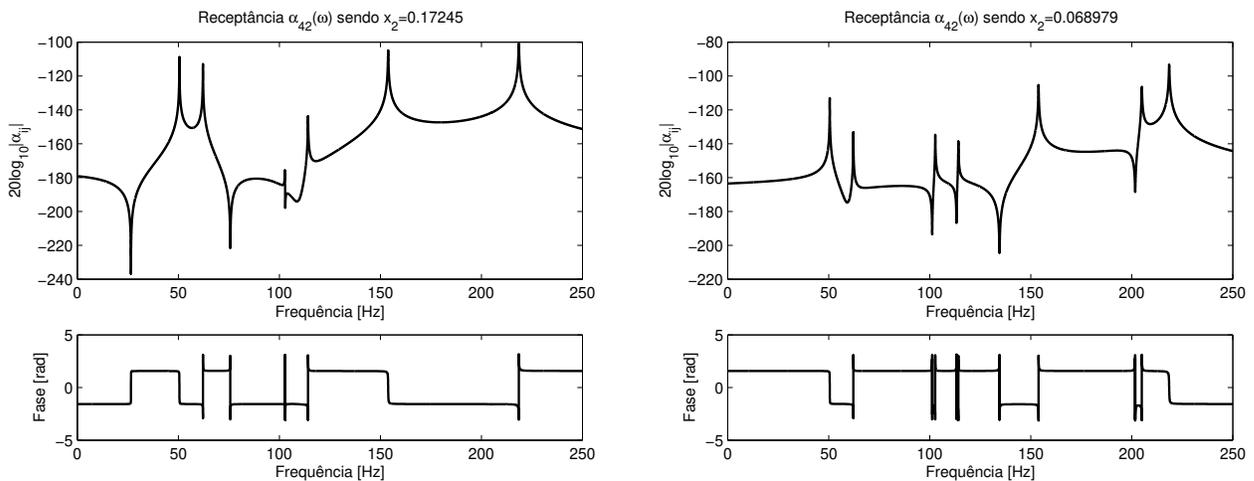


Figura 6.8: Receptância do sistema - excitação na polia e resposta no tramo 2 em diferentes pontos.

A influência de modos predominantemente rotacionais ou transversais é equilibrada, quando analisados os tramos. Suas respostas nas regiões de ressonância apresentam bom equilíbrio independentemente do tipo de modo predominante excitado em cada região. Contudo, quando são observadas as respostas nos elementos rotacionais (polias e tensionador), as frequências naturais que apresentam maiores amplitudes são as que representam modos predominantemente rotacionais e o primeiro modo transversal, independentemente de quais os graus de liberdade considerados.

O estudo das participações modais é de grande importância para a avaliação do sistema quando submetido a excitações de baixa amplitude. Contudo, para casos de alta amplitude de excitação, fenômenos não lineares podem se manifestar, alterando a contribuição de cada modo de vibrar e suas condições de acoplamento.

## 6.4 Resposta Temporal

Um fator importante para o estudo do comportamento dinâmico do sistema de transmissão por correia é sua resposta temporal. Através desta é possível verificar efeitos lineares do sistema, como acoplamento entre os graus de liberdade, periodicidade das respostas, efeitos produzidos por diferentes tipos de excitação do sistema e identificação de regiões de ressonância. Também é possível verificar efeitos produzidos por não linearidades. Estes efeitos tipicamente não podem ser

identificados através da Análise Modal, uma vez que esta técnica considera o sistema linearizado, então através das respostas temporais, espera-se determinar o comportamento não linear o sistema, o grau de interferência destes fenômenos no comportamento do mesmo e quais condições poderiam gerar fenômenos não lineares e causar instabilidades.

As respostas temporais do sistema são obtidas por integração numérica do sistema de equações diferenciais derivadas pela expansão em cinco modos apresentada na Seção 5.5. A integração numérica é realizada utilizando a rotina de integração 'ode45', disponível no *software* Matlab®, que realiza a integração no domínio temporal pelo Método de Runge-Kutta explícito de ordem 4/5. Como respostas têm-se o comportamento temporal das porções real e imaginária das coordenadas generalizadas modais,  $\xi_i$  e  $\eta_i$ , para cada modo de vibrar do sistema.

#### 6.4.1 Resposta Livre do Sistema

Em uma primeira etapa considera-se o sistema sob resposta livre, ou seja, excitações externas não são aplicadas e as respostas são obtidas pela imposição de condições iniciais às coordenadas generalizadas.

Para simulação considera-se que os fatores de amortecimento modais são  $\zeta_1 = 0,001$ ,  $\zeta_2 = 0,002$ ,  $\zeta_3 = 0,001$ ,  $\zeta_4 = 0,002$  e  $\zeta_5 = 0,002$ . Em um primeiro teste, aplica-se a condição inicial  $\xi_3 = 0,1$  enquanto as demais condições iniciais são nulas. Se fosse considerado o sistema linear, haveria apenas a resposta da coordenada  $\xi_3$ , contudo, o sistema considerado é acoplado, e verifica-se, conforme Figura 6.9 que o movimento de deslocamento transversal do tramo 3 proporcionado pela condição inicial dada em  $\xi_3$  é acoplado com as demais coordenadas generalizadas, excitando-as através da troca de energia entre os modos.

Como pode-se observar a coordenada com maior resposta é  $\xi_3$ , que foi excitada, contudo, verifica-se que a coordenada  $\xi_2$  também apresenta resposta elevada. Isso se deve ao fato de a razão entre as frequências naturais correspondentes à cada forma modal ser próxima de um valor inteiro, no caso, aproximadamente 2. Com isso o fenômeno de ressonância interna pode ser atingido, o que faz com que ocorra maior troca de energia entre os modos devido ao acoplamento modal produzido pelas não linearidades gerando, assim, o efeito de batimento na coordenada  $\xi_2$ .

A resposta da coordenadas  $\xi_5$  permanece nula, uma vez que esta não pode ser excitada se não há condições iniciais previamente aplicadas.

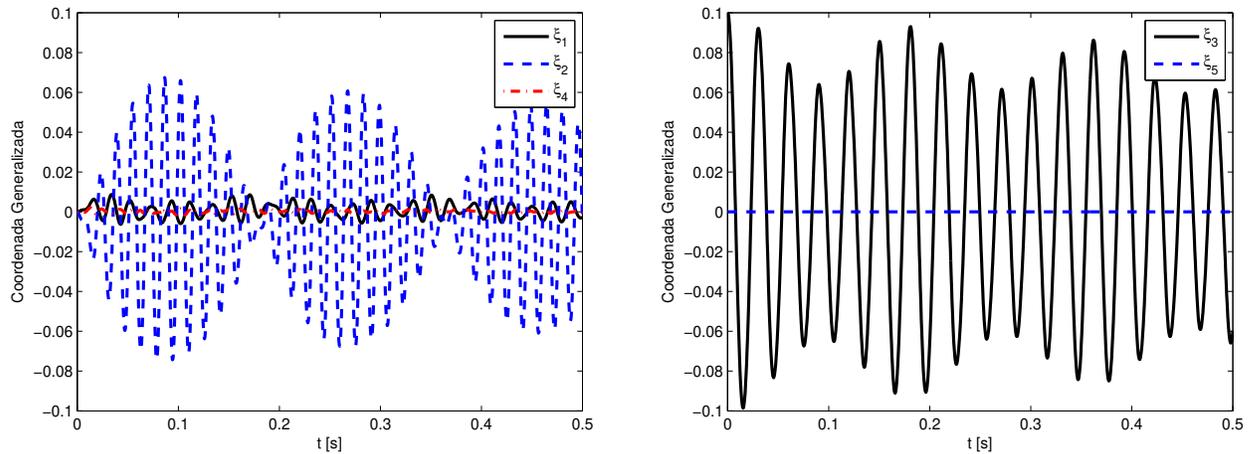


Figura 6.9: Resposta temporal à condição inicial na coordenada  $\xi_3$ .

Pode-se verificar pelas equações de movimento descritas pelas coordenadas generalizadas que, apesar de haver o acoplamento entre os modos de vibrar do sistema, este acoplamento é devido aos termos de excitação não lineares e em muitos casos só ocorre se houver alguma condição inicial previamente estabelecida em algum modo para que este seja excitado por outro.

Considerando o caso onde é aplicada uma condição inicial  $\xi_1 = 0, 1$ , enquanto as demais coordenadas têm valor nulo, e considerando ainda que os fatores de amortecimento são dez vezes maiores e as propriedades físicas são as mesmas, tem-se as respostas do sistema apresentadas na Figura 6.10. Como se pode observar, ocorre o acoplamento entre os modos 1, 2 e 4, sendo que a vibração no primeiro modo ainda é predominante, enquanto que os modos 3 e 5 não são, sequer, excitados por esta condição inicial.

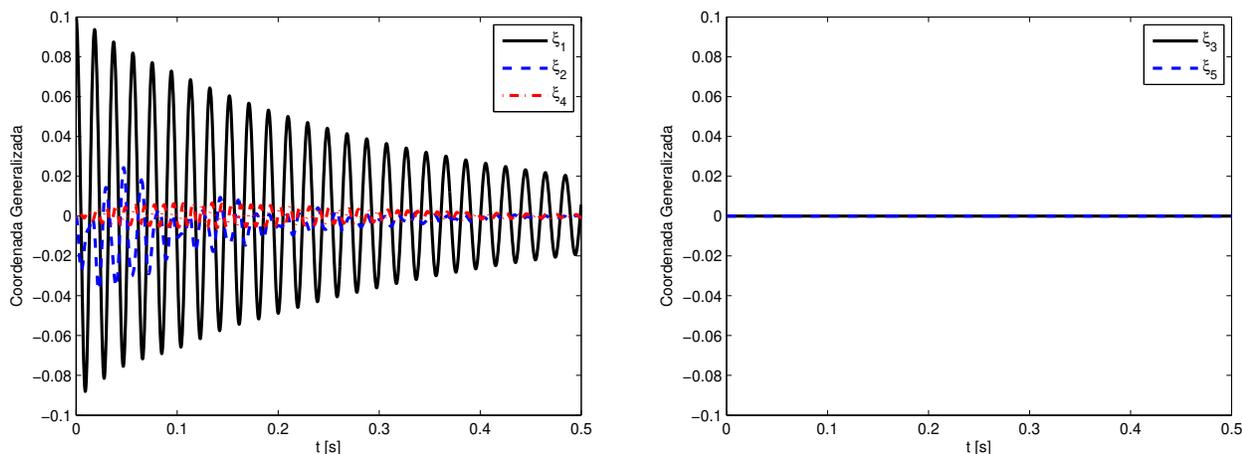


Figura 6.10: Resposta temporal à condição inicial na coordenada  $\xi_1$ .

## 6.4.2 Resposta Forçada

### Caso não ressonante e com baixa amplitude

A resposta forçada do sistema é obtida quando considera-se que existem momentos variáveis aplicados externamente nas polias dos acessórios ou no braço do tensionador. Em um primeiro caso, considera-se que há uma flutuação de torque harmônica sendo aplicada à polia 4, com amplitude de 0,1Nm e frequência de 20Hz. Esse valor de torque é considerado razoavelmente pequeno de forma que não ocorrem efeitos introduzidos por não linearidades e também não ocorrem ressonâncias no sistema. Para que os modos 3 e 5 também sejam excitados, considera-se as condições iniciais  $\xi_3 = 0,01$  e  $\xi_5 = 0,005$ . Os fatores de amortecimento são  $\zeta_1 = 0,01$ ,  $\zeta_2 = 0,02$ ,  $\zeta_3 = 0,01$ ,  $\zeta_4 = 0,02$  e  $\zeta_5 = 0,02$ .

Na Figura 6.11 são apresentadas as respostas das coordenadas generalizadas  $\xi_1$  e  $\xi_2$  do sistema linearizado. Como pode-se observar o modo 1 apresenta maiores amplitudes por apresentar maior energia e ter frequência mais próxima à da excitação e conseqüentemente, maior participação modal. Os modos de vibrar 3 e 5 não são excitados no caso linearizado.

Já no caso não linear tem-se o comportamento apresentado na Figura 6.12. Neste caso,

verifica-se que existem respostas de todos os modos de vibrar do sistema, uma vez que há o acoplamento pelas condições iniciais aplicadas em  $\xi_3$  e  $\xi_5$ . Verifica-se que as respostas dos modos 1 e 2 no caso não linear são similares as respostas obtidas para o sistema linearizados, o que indica que não ocorre acoplamento entre os modos, nem são excitadas as não linearidades do sistema.

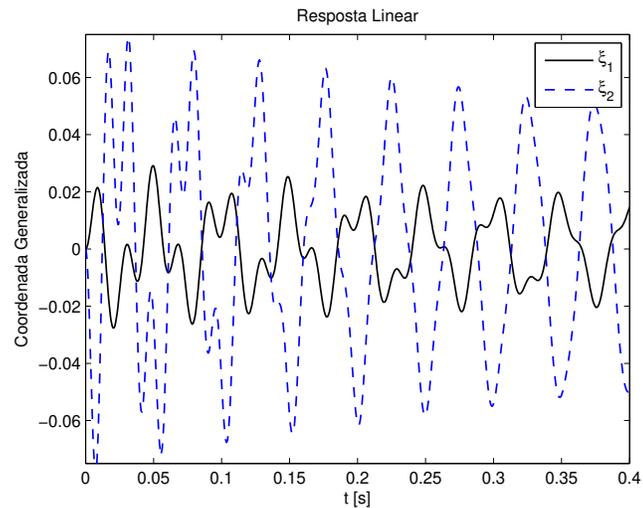


Figura 6.11: Resposta linear apresentada pelos modos 1 e 2 sob excitação de baixa amplitude à 20Hz.

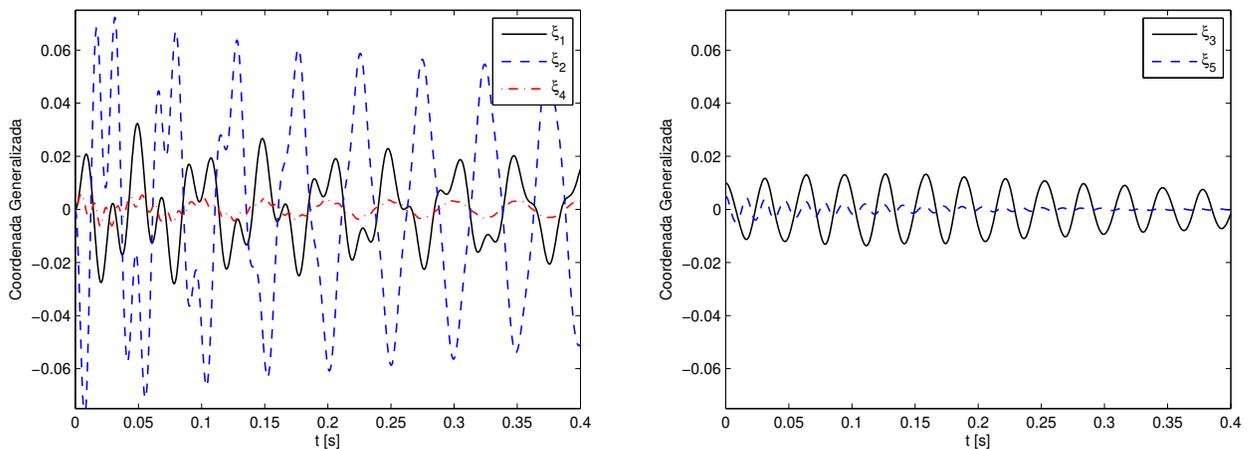


Figura 6.12: Resposta não linear do sistema sob excitação de baixa amplitude à 20Hz.

Ainda sob excitação de 20Hz a resposta física do sistema é apresentada na Figura 6.13 para

os tramos, onde é mostrado o nível de deslocamento em função do tempo e da coordenada espacial de cada tramo. Já a Figura 6.14 apresenta as respostas temporais das coordenadas físicas das polias e braço do tensionador.

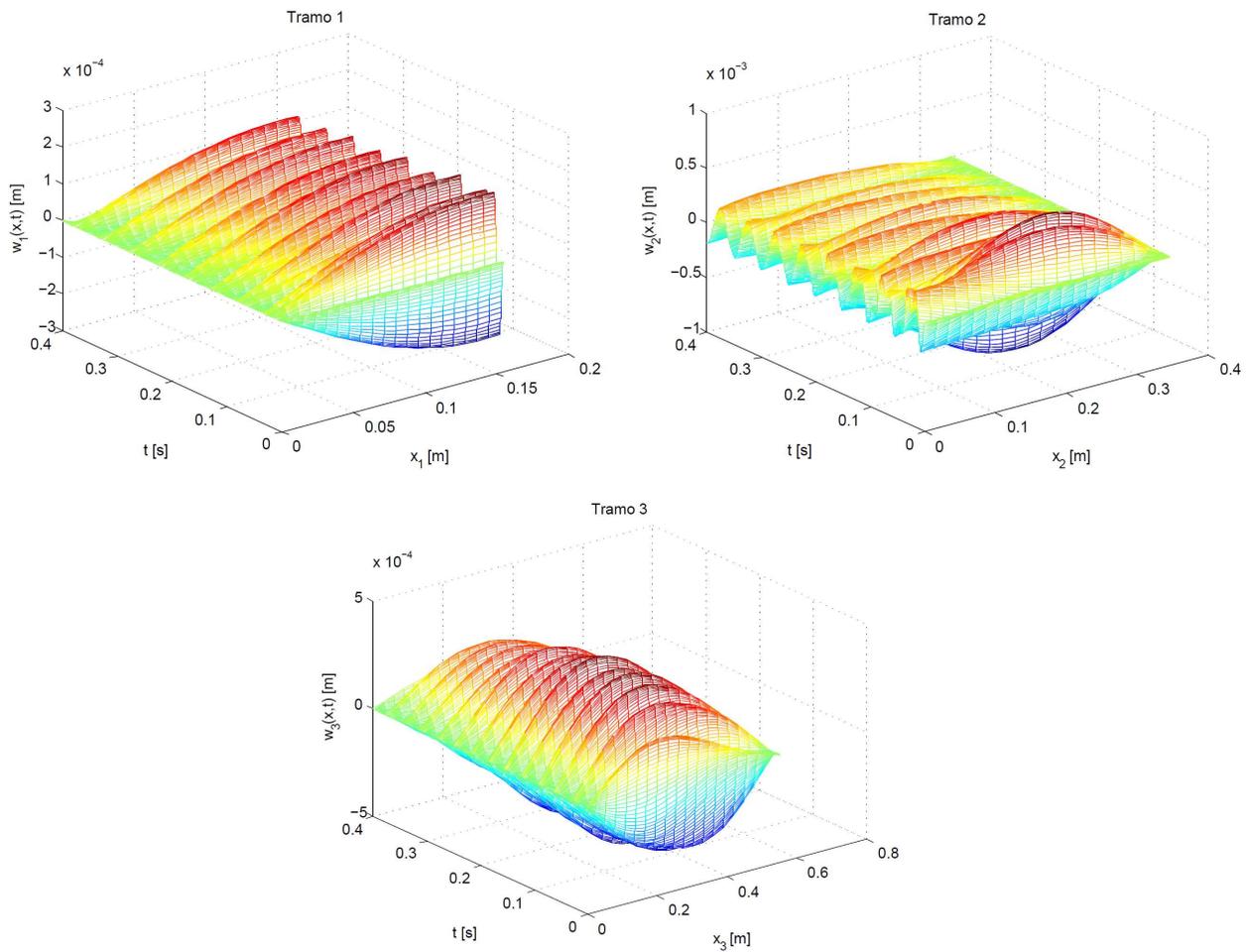


Figura 6.13: Representação do movimento dos tramos em suas coordenadas físicas.

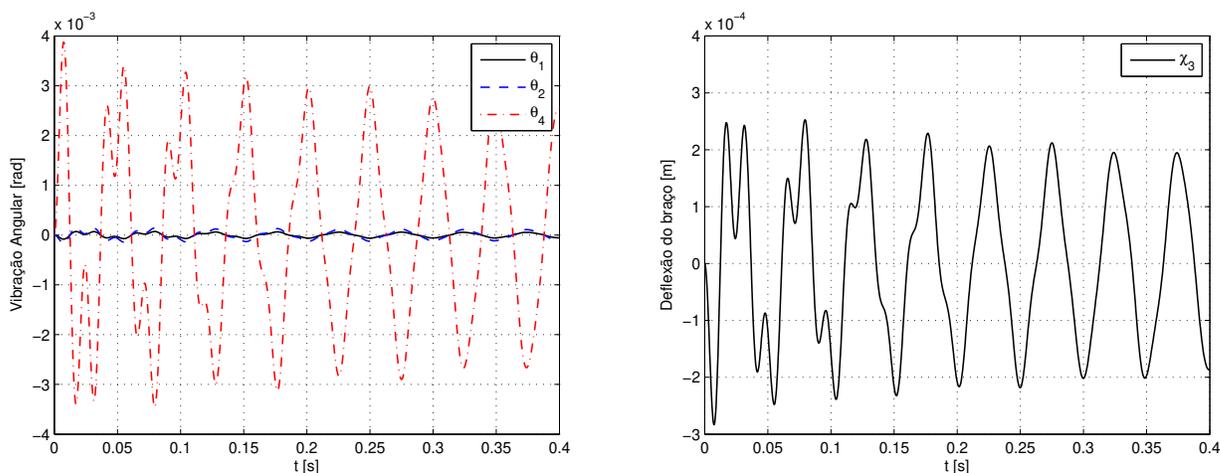


Figura 6.14: Resposta temporal dos elementos discretos à excitação de 20Hz.

Como pode-se verificar as respostas totais são compostas majoritariamente pelas contribuições dos modos de vibrar 1 e 2, apresentando um período transiente ao início e comportamento estacionário após 0,2s. Na Figura 6.13 observa-se que os tramos 2 e 3 chegam a apresentar formas de vibrar similares às formas modais obtidas na Análise Modal, contudo o tramo 1 não chega a apresentar nenhuma forma modal. Isto se deve ao fato de os modos considerados na expansão modal não contemplarem nenhuma forma modal do primeiro tramo, cuja primeira frequência natural é 114,42Hz.

### Caso não ressonante e com amplitude elevada

Para que sejam verificadas condições de vibração sob efeito das não linearidades introduzidas no sistema por grandes deformações dos tramos, pode-se aumentar a amplitude da flutuação de torque aplicada na polia 4. Considerando o torque com amplitude de 5Nm e ainda frequência de excitação de 20Hz, tem-se as respostas apresentadas na Figura 6.15. Nesta nova resposta, verifica-se, em contraste com a teoria linear, que ocorrem novas componentes em frequência na resposta para uma mesma frequência de excitação do sistema. Inicialmente o segundo modo é majoritariamente excitado, por se tratar de um modo predominantemente rotacional. Após alguns instantes, a resposta do terceiro modo também é amplificada, devido à troca de energia entre este e o segundo modo, caracterizando novamente o fenômeno de ressonância interna, que também leva a amplifica-

ção da resposta do quinto modo de vibrar em contraste com o observado no caso de excitação em baixa amplitude, pela Figura 6.12.

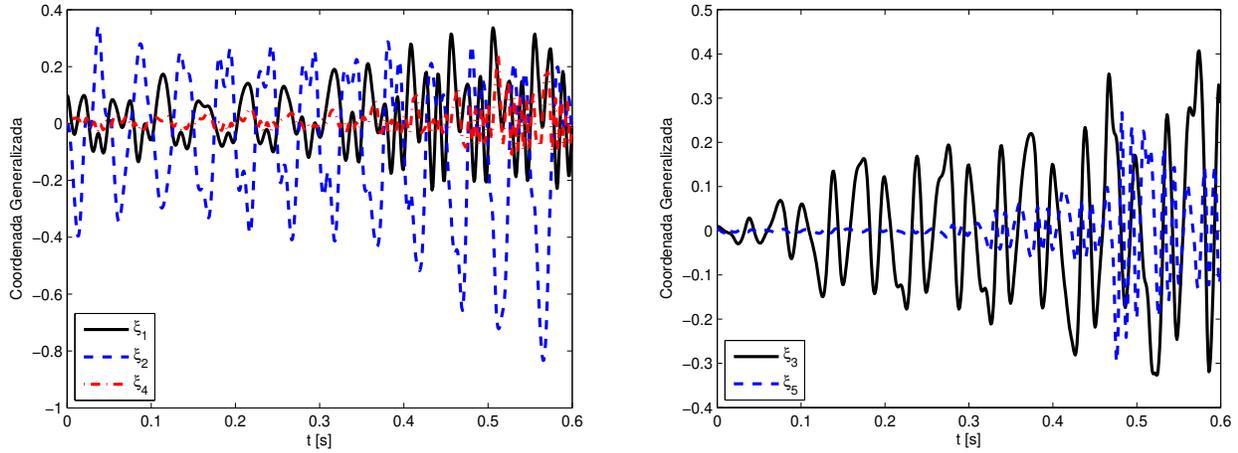


Figura 6.15: Resposta forçada do sistema com excitação de não linearidades.

As forças de tração atuantes nos tramos das correias também sofrem acréscimos produzidos pelo movimento vibratório e as deformações decorrentes do mesmo. A Figura 6.16 apresenta a flutuação do nível de tração dinâmica  $P_{di}$  para cada tramo em decorrência das parcelas linear e não linear de vibração.

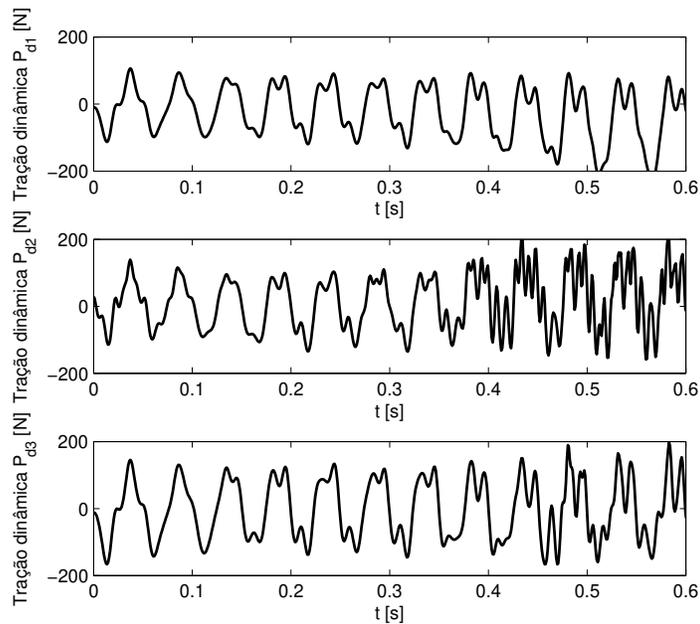


Figura 6.16: Variação na tração dinâmica dos tramos.

Nos casos avaliados a tração estática atuante na correia é de 128,59N e o efeito de flutuação na tração atingido dinamicamente em decorrência das flutuações de torque aplicadas em uma das polias chega a ser superior a 180N em alguns instantes.

Níveis elevados de variação na tração atuante podem comprometer o funcionamento do sistema, uma vez que este, por não estar adequadamente tracionado, pode perder sua capacidade de transmissão de potência, além de que níveis elevados de variação podem acelerar o processo de desgaste do elemento flexível e até levar a fratura por fadiga

### Caso ressonante e com baixa amplitude

O sistema de transmissão pode ser excitado à condição de ressonância, através da aplicação de uma flutuação de torque em uma das polias com frequência similar a uma das frequências naturais do sistema. Para simular esta condição, considera-se condições de amortecimento similares às utilizadas nos casos anteriores. O sistema é excitado por um torque na polia 1 à frequência de

62,18Hz, coincidente com a segunda frequência natural (primeiro modo rotacional), com amplitude de 1Nm. E para que os modos 3 e 5 também sejam excitados, considera-se as condições iniciais  $\xi_3 = 0,01$  e  $\xi_5 = 0,005$  enquanto as demais coordenadas generalizadas têm seus valores iniciais nulos.

A Figura 6.17 apresenta as respostas temporais apresentadas pelas coordenadas generalizadas sob as circunstâncias de excitações mencionadas. Como pode-se observar, a coordenada correspondente ao segundo modo apresenta o comportamento típico da ressonância amortecida, concordando com a teoria de vibrações lineares.

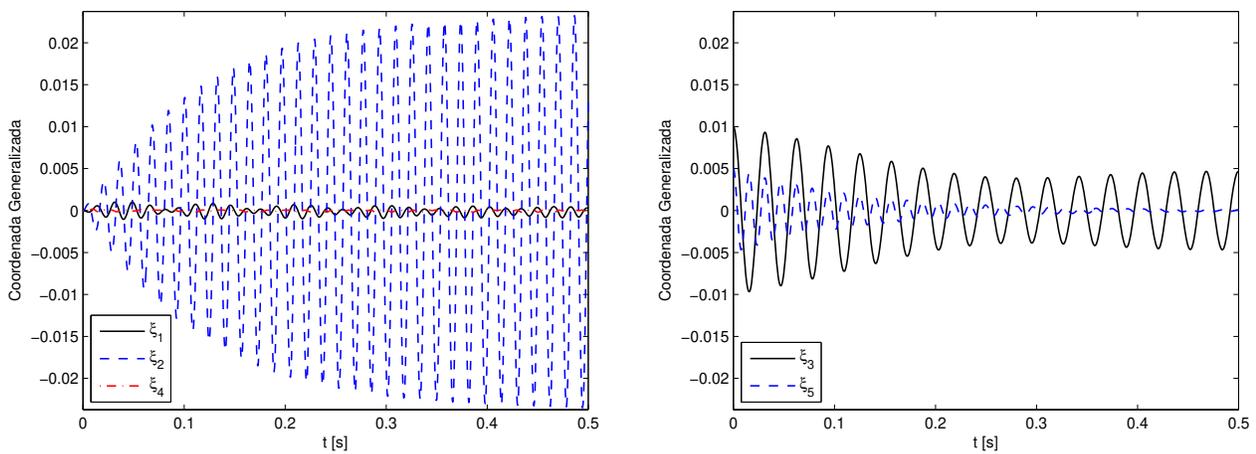


Figura 6.17: Sistema excitado na segunda frequência natural com amplitude de 1Nm na polia 1.

### Ressonância excitada em amplitude elevada

Similarmente ao verificado no caso anterior, se o sistema é excitado na segunda frequência natural (62.18Hz) na polia 1, porém com maior amplitude, de 5Nm, observa-se a ocorrência de troca de energia entre os modos, e a coordenada generalizada  $\xi_3$ , que a princípio não era excitada, tem sua resposta amplificada pela troca de energia com a coordenada  $\xi_2$ , que por sua vez já não apresenta o comportamento característico de ressonância, apesar de apresentar amplitudes elevadas de vibração. A Figura 6.18 apresenta o comportamento temporal das coordenadas generalizadas do sistema.

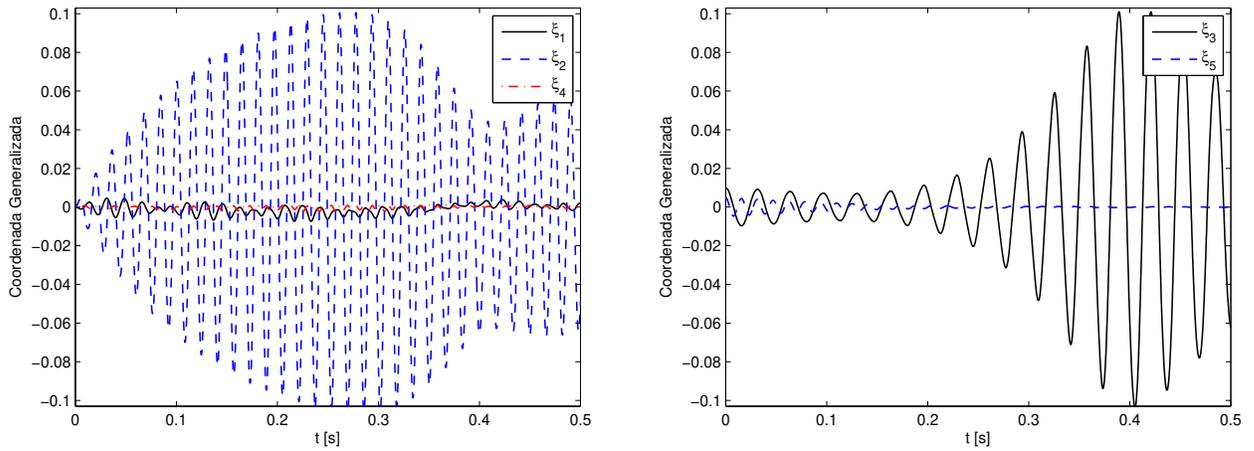


Figura 6.18: Sistema excitado na segunda frequência natural com amplitude de 5Nm na polia 1.

Como último teste para avaliar o sistema em condição de ressonância, considera-se ainda excitação em 62,18Hz, mas com amplitude de 40Nm, com isso a resposta observada é apresentada na Figura 6.19. Como pode-se observar, efeitos devido as não linearidades são intensificados, com a resposta perdendo a característica da resposta em ressonância e acentuando a característica de troca de energia entre os modos 2, 3 e 5.

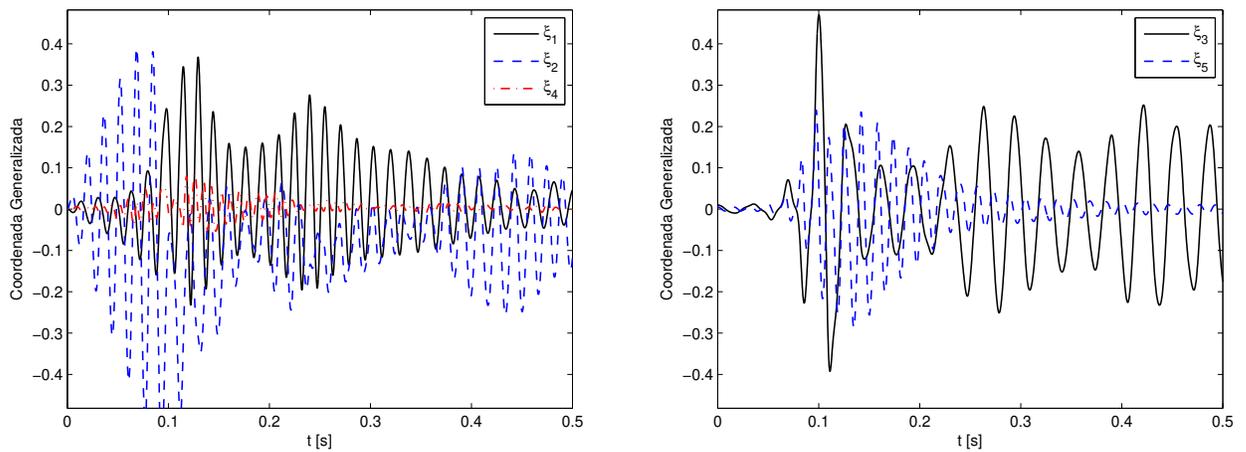


Figura 6.19: Sistema excitado na segunda frequência natural com amplitude de 40Nm na polia 1.

É interessante verificar que com amplitudes maiores, a influência das não linearidades sobre

a força de tração dinâmica tende a aumentar consideravelmente, como pode-se observar na Figura 6.20, elevando, de forma geral, a amplitude de flutuação de tração.

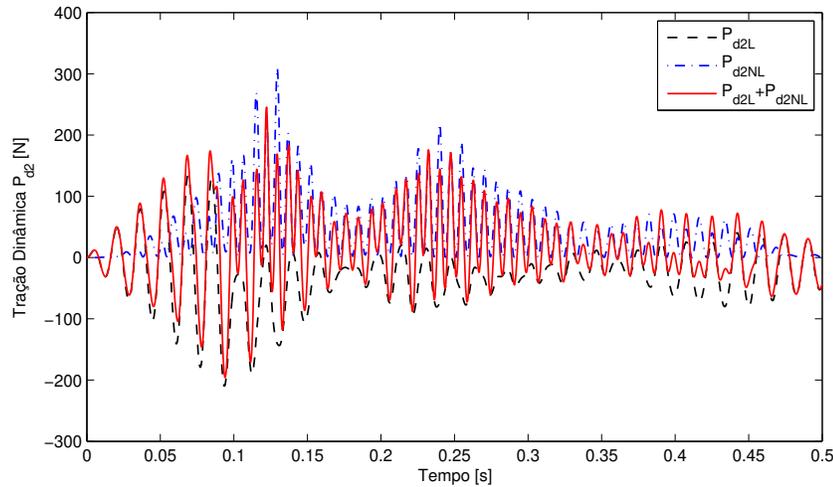


Figura 6.20: Porções linear e não linear da tração dinâmica atuante no tramo 2 com sistema excitado à 62,18Hz em 40Nm de amplitude.

## 6.5 Estudo do Sistema Rotacional

Um sistema mais simples, mas ainda bastante adequado para a descrição do movimento de sistemas de transmissão em geral é o sistema puramente rotacional, como descrito no Capítulo 4. Este caso é válido para montagens onde a inércia da correia é muito pequena em comparação com as inércias rotacionais das polias e tensionador.

### 6.5.1 Análise Modal e Resposta Temporal

Ao avaliar o comportamento vibratório deste sistema, observa-se a ocorrência de um modo de corpo rígido, cuja resposta se sobrepõe à resposta vibratória dos demais modos. Devido a isto, as respostas são determinadas a partir da sobreposição modal dos modos vibracionais, desconsiderando-se o modo de corpo rígido encontrado.

Na Figura 6.21 são apresentados os modos de vibrar do corpo já desprezando o modo de corpo rígido e considerando as mesmas condições de simulação especificadas para o caso do sistema completo, ou seja, mesma geometria, força de tração inicial e velocidade de operação nula. A primeira frequência não nula é 61,56Hz e representa um modo onde o movimento do tensionador é predominante, enquanto que para a frequência de 218,60Hz, é predominante o movimento da polia 4 e para o modo a 561,98Hz, é predominante o movimento da polia 2.

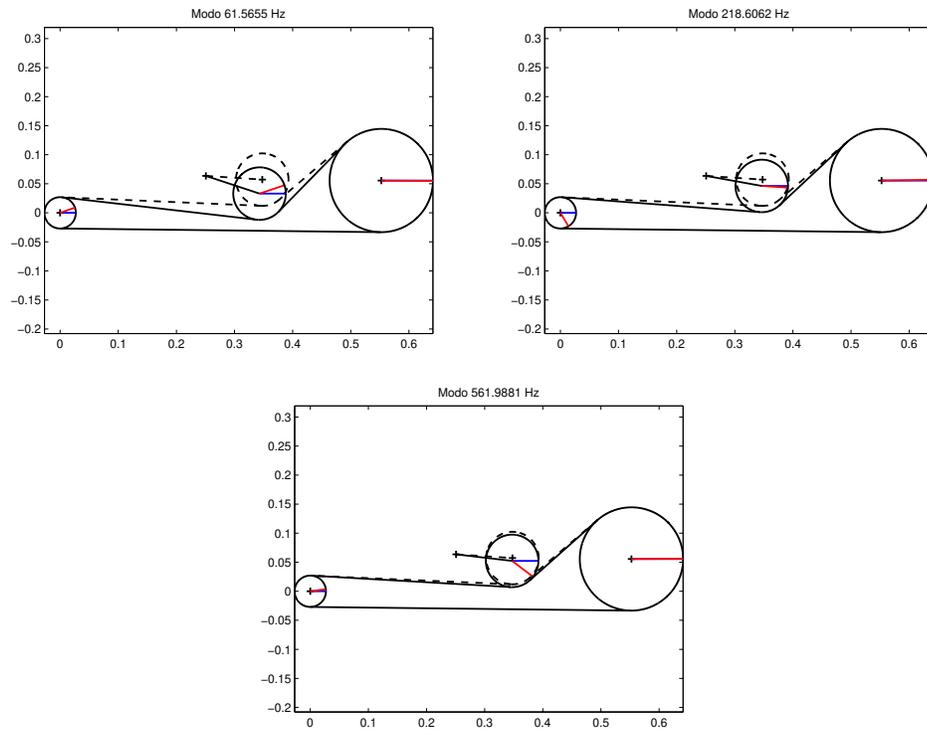


Figura 6.21: Formas modais apresentadas pelo sistema puramente rotacional.

Para verificar a diferença entre os comportamentos do sistema puramente rotacional e do sistema completo não linear, considera-se a resposta deste quando colocado sob uma excitação de flutuação de torque com amplitude de 40Nm em 30Hz e utiliza-se a mesma condição para excitar o sistema completo, mas utilizando apenas os modos rotacionais do sistema para realizar a expansão modal. Considera-se ainda fatores de amortecimento modais de 0,02 para os três modos de vibrar utilizados.

A Figura 6.22 apresenta a resposta do sistema completo não linear sob as condições de excitação já descritas. A resposta observada para a polia 4 apresenta níveis de vibração mais elevados,

uma vez que é o elemento que apresenta menor inércia no sistema e das formas modais utilizadas na expansão, o segundo modo rotacional é predominantemente governado pelo movimento desta polia.

Os níveis de flutuação de tração na correia, contudo, permanecem baixos, chegando a 28N para o terceiro tramo, 9N para o segundo tramo e 5N para o primeiro tramo.

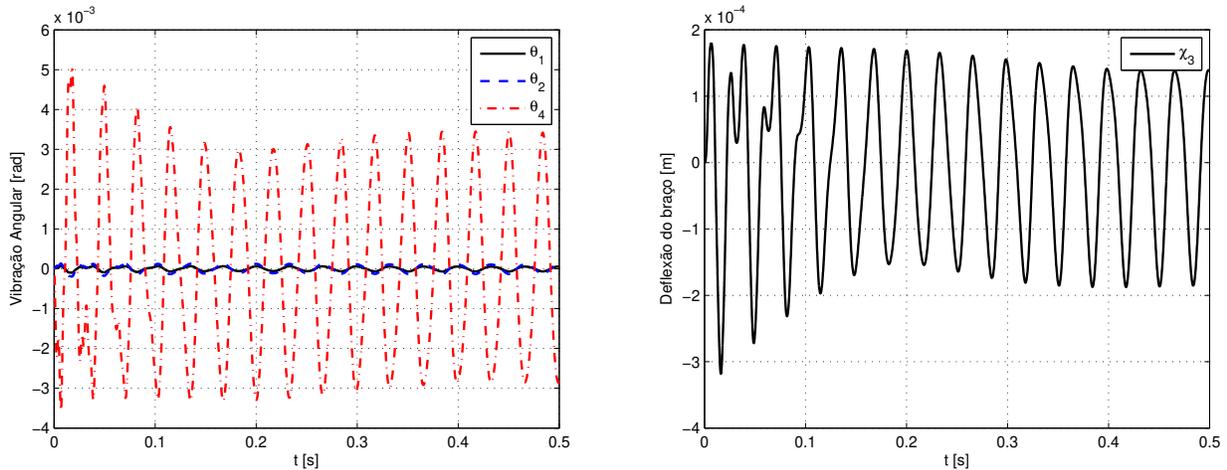


Figura 6.22: Resposta Temporal do sistema completo à excitação de 40Nm em 30Hz.

Já a Figura 6.23 apresenta a resposta do sistema puramente rotacional quando excitado sob as condições descritas. Observa-se que a resposta das polias 1 e 4 são levemente menores em amplitude que as respostas apresentadas pelo modelo do sistema completo. A polia 2 apresenta nível de vibração quase dez vezes maior que a resposta verificada no modelo completo e a deflexão do tensionador também é levemente maior.

Uma hipótese para o aumento na amplitude de vibração verificado para a polia 2 é que no modelo completo, a vibração transversal dos tramos adjacentes a esta polia compensava esse nível de vibração torcional, enquanto que no modelo rotacional não ocorre este acoplamento, uma vez que os tramos atuam como simples elementos elásticos na direção longitudinal (tangencial às polias).

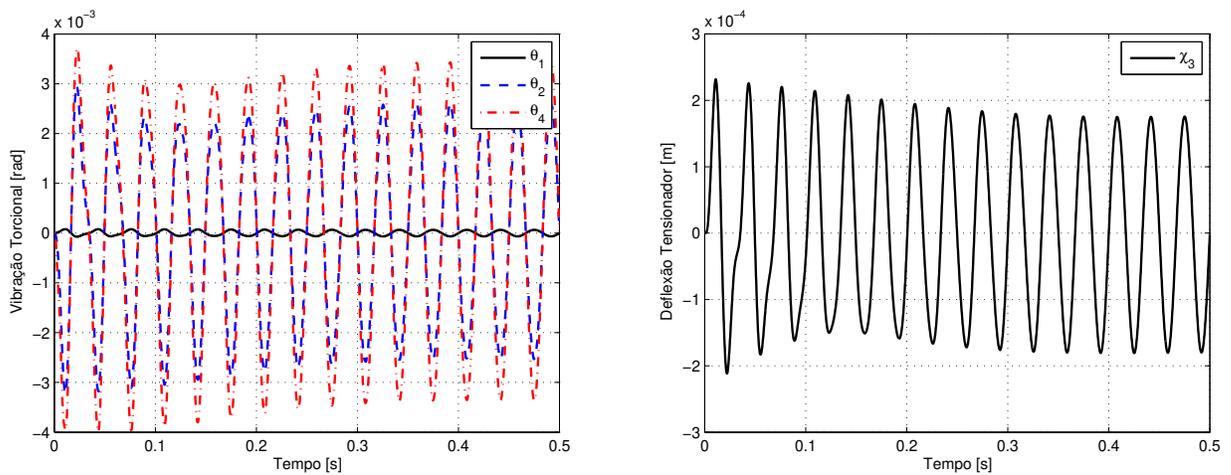


Figura 6.23: Resposta Temporal do sistema puramente rotacional à excitação de 40Nm em 30Hz.

### 6.5.2 Efeito do Atrito Seco no Tensionador

O efeito de atrito seco que não é considerado no modelo do sistema completo, mas tratado apenas como um efeito presente no fator de amortecimento modal, nesta seção é simulado com dois modelos para a força responsável por introduzir o atrito no sistema. No primeiro modelo, considera-se o modelo mais simples do atrito de Coulomb, onde o sentido da força é dada por uma função *signum*.

O modelo de resposta considera uma superposição modal com três modos, sendo que o modo de corpo rígido presente no sistema original é desconsiderado na superposição. O sistema é excitado por uma flutuação de torque com amplitude de 40Nm em 30Hz e a força de atrito que ocorre no sistema apresenta amplitude de  $F_{at} = 1\text{N}$ . A Figura 6.25 apresenta a resposta física do tensionador às condições aplicadas. Neste caso, como a força de atrito presente no sistema era reduzida, a resposta foi reduzida em amplitude similar ao efeito de um amortecimento viscoso proporcional, em contraste com a resposta na Figura 6.24 onde não há qualquer tipo de amortecimento ou atrito. O tempo de integração para o intervalo de tempo considerado foi de 0,37s, apresentando boa estabilidade numérica.

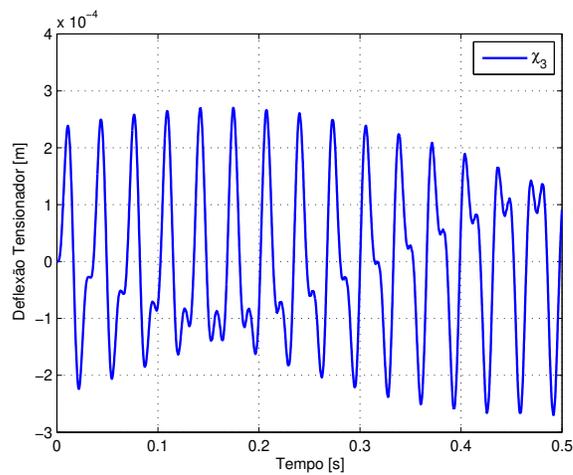


Figura 6.24: Resposta do tensionador à excitação de 40Nm em 30Hz na polia 1 sem efeito de atrito.

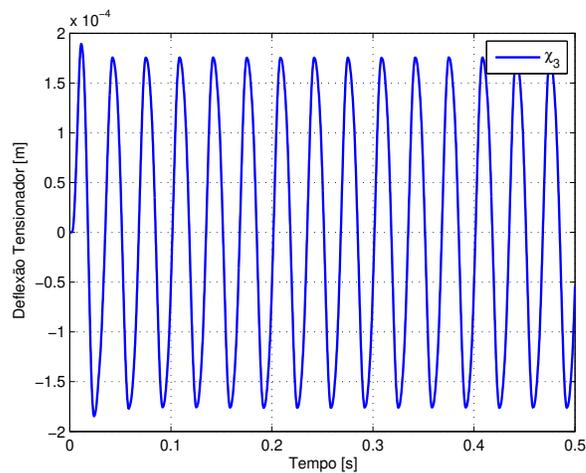


Figura 6.25: Resposta do tensionador à excitação de 40Nm em 30Hz na polia 1 sob efeito de atrito com baixa amplitude.

Em um próximo caso, é considerada a mesma força de excitação através da polia 1, mas a força de atrito tem amplitude de 10N. Neste caso, o tempo de integração aumenta e ocorre perda na estabilidade numérica da resposta em velocidade do tensionador. Para minimizar esses efeitos é utilizado o integrador numérico 'ode23' que baseia-se no método explícito de Runge-Kutta de ordens 2/3 e é mais adequado para problemas com maior margem de erro e rigidez numérica.

A Figura 6.26 apresenta as respostas em deslocamento e velocidade para esta condição de

simulação. De forma geral, observa-se a redução na amplitude da resposta imposta pela nova condição de amortecimento e também a ocorrência de patamares ou "achatamentos" nos picos da resposta em deslocamento.

Este tipo de fenômeno é caracterizado como *stick-slip*, ou seja, em algumas fases do movimento a força de atrito é muito superior à força exercida pela excitação, o que faz com que o tensionador trave e volte a mover-se novamente na direção contrária somente quando a excitação supera a amplitude do atrito. A curva de velocidade confirma o fenômeno pelos patamares de velocidade nula encontrados.

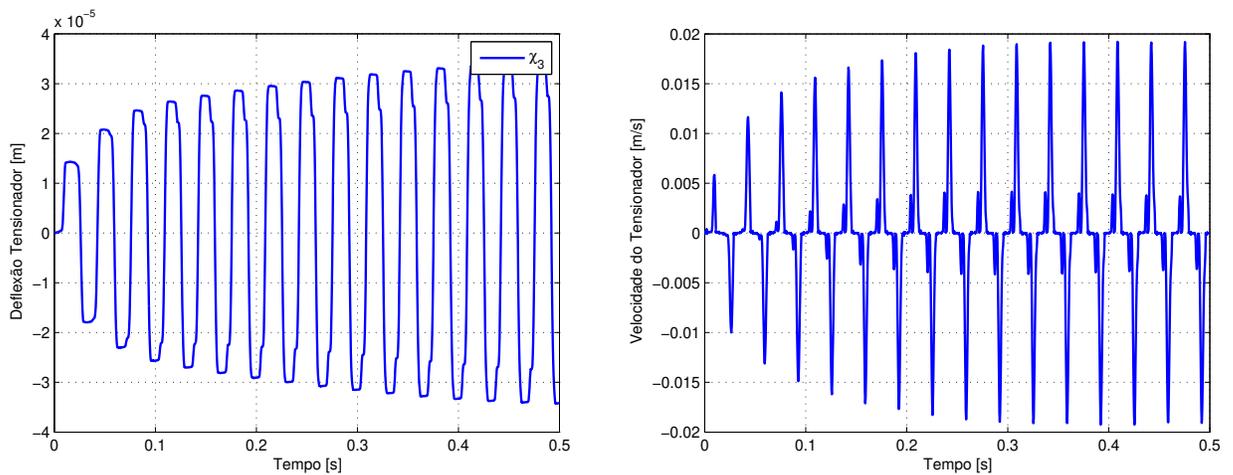


Figura 6.26: Respostas do tensionador à excitação de 40Nm em 30Hz na polia 1 sob efeito de força de atrito de 10N.

De forma similar, pode ser aplicado o modelo contínuo proposto por Kang *et al.* (2009) para descrever o efeito de atrito no braço do tensionador. A Figura 6.27 apresenta a resposta obtida para excitação aplicada pela polia 1 com amplitude de 40N à 30Hz e força de atrito com amplitude de 10N. Neste caso é possível integrar as equações diferenciais com a rotina 'ode45', melhorando a precisão numérica e sem grande esforço computacional, pois as descontinuidades são atenuadas pelo comportamento exponencial presente na força de atrito, segundo o novo modelo.

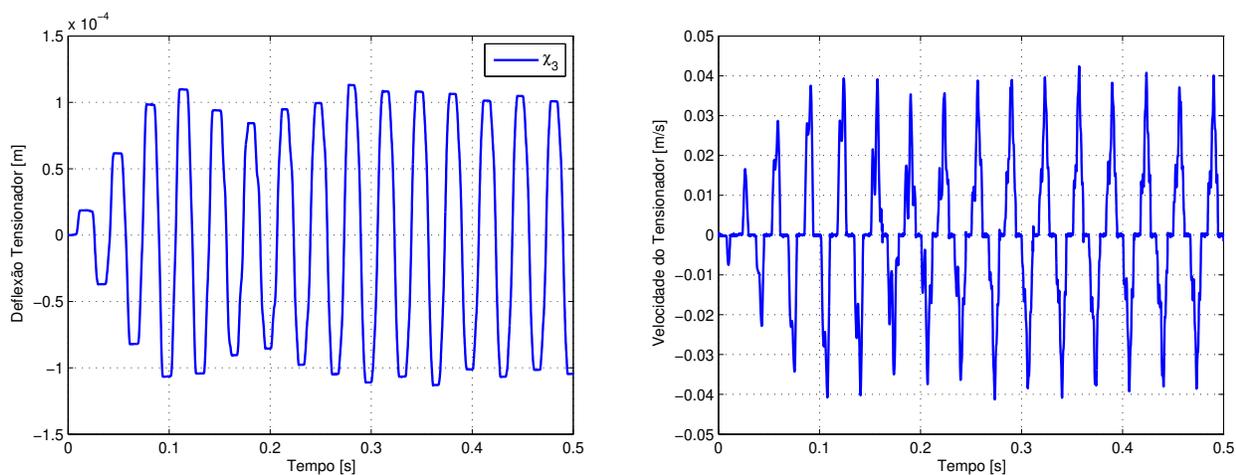


Figura 6.27: Respostas do tensionador à excitação de 40Nm em 30Hz na polia 1 sob efeito de força de atrito de 10N sem efeito de descontinuidade.

Como se pode observar, a resposta resultante apresenta maior amplitude, pois não ocorrem descontinuidades e a precisão numérica obtida na integração é maior. Novamente o fenômeno de *stick-slip* é observado pelas regiões de velocidade nula de vibração do tensionador. É interessante ressaltar que este tipo de comportamento, quando analisado no domínio da frequência corresponde à uma nova composição de harmônicos modulada pela frequência de excitação, como pode-se observar pela Figura 6.28.

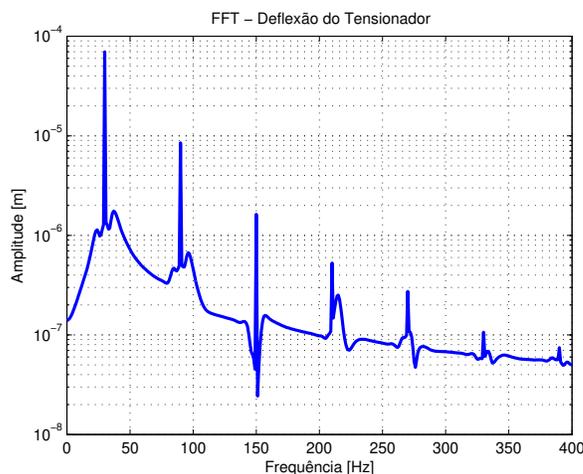


Figura 6.28: Composição em frequência da resposta do tensionador quando ocorre o fenômeno de *Stick-Slip*.

## 7 ESTUDO EXPERIMENTAL

Bem como o estudo teórico do sistema através do modelo matemático, é de grande importância a averiguação do comportamento do sistema de transmissão por correia em uma aplicação real. Com isso é possível verificar o comportamento do sistema e o quanto o modelo matemático é adequado para a descrição deste e se ocorrem fenômenos que não são descritos no modelo, mas são pertinentes à sua dinâmica.

Para conduzir uma avaliação experimental, foi construída uma bancada experimental, constituída de um *front-end* de motor automotivo muito similar ao estudado no modelo teórico, montado sobre uma bancada inercial para testes. O *front-end* possui uma polia correspondente à acionada pelo virabrequim, uma polia que aciona o alternador e um tensionador automático com mola torcional para tracionamento da correia, conforme mostrado na Figura 7.1.

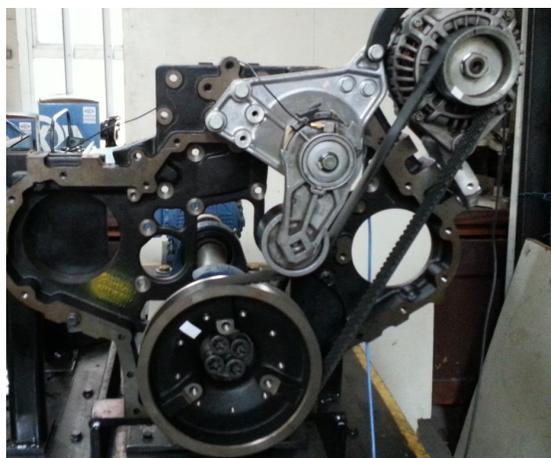


Figura 7.1: Montagem utilizada para a avaliação experimental.

A correia utilizada na montagem é de um elastômero, conhecido como EPDM, do tipo *poly-V* com perfil 8PK e 1325mm de comprimento e o tensionador é da marca Dayco, com rigidez torcional de 53,4Nm/rad. Nominalmente, o tensionador aplica uma tração estática de 448N na correia por uma deflexão inicial de 30°, mas, como há efeito de atrito seco no mesmo para aumentar o amortecimento do sistema, a tração estática real tende a ser inferior à nominal, quando o sistema não está operando.

O acionamento do sistema é realizado por um motor elétrico de 3hp ligado à polia do virabre-

quim por um eixo de aço robusto suportado por dois mancais de rolamento de cilindros autocompensadores, para assegurar melhor alinhamento do eixo e suporte da carga aplicada pela correia tracionada sobre a polia.

## 7.1 Análise Modal Experimental

Como primeiro passo no estudo do sistema de transmissão, é realizada uma Análise Modal Experimental (AME) para que os parâmetros modais do sistema linear sejam determinados. No procedimento de AME, o sistema em estudo é excitado por uma força ou torque conhecido em um ou vários de seus graus de liberdade e sua resposta a esta excitação em todos os seus graus de liberdade, ou ao menos nos necessários para que as formas modais de interesse sejam observáveis, são medidas. Com isso é possível determinar a Função de Resposta em Frequência (FRF) do sistema e, conseqüentemente, seu comportamento linear para casos de excitação em baixa amplitude.

Para realizar a AME, o sistema estudado foi excitado na polia 1 (virabrequim) por um *Shaker* eletromagnético utilizando ruído aleatório com largura de banda de 0Hz à 2000Hz. A escolha da excitação aleatória mostrou-se mais adequada, uma vez que o procedimento para processar as respostas geradas por este tipo de excitação produz uma linearização na estimação das FRFs (Ewins, 2000), eliminando não linearidades fracas que possam ocorrer.

As medições das respostas nas polias foram feitas utilizando acelerômetros fixados tangencialmente as polias com cera, enquanto que as respostas nos tramos foram medidas com sensor de proximidade. Como os sensores de proximidade só eram capazes de medir deslocamento de materiais metálicos, foram coladas tiras de papel alumínio sobre a correia, e os sensores foram calibrados para esta condição.

O esquema de montagem utilizado é apresentado na Figura 7.2. Como pode-se observar, o *Shaker* utilizado apresenta inércia elevada e foi suspenso por uma estrutura independente. Foi fixado por um *stinger* de forma a excitar tangencialmente o sistema através da polia 1. Para determinar a força de excitação aplicada, foi instalada uma célula de carga entre o *stinger* e o ponto de fixação na polia.

Os sinais medidos eram amplificados e filtrados em alta frequência por condicionadores de

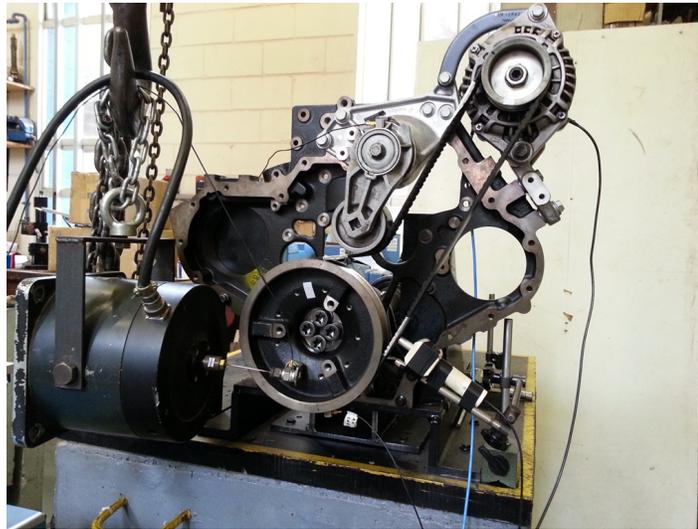


Figura 7.2: Montagem utilizada para realização da AME.

signal e então gravados através de uma placa de aquisição ligada a um computador. Os equipamentos utilizados são listados na Tabela 7.1.

Tabela 7.1: Dados da instrumentação.

Equipamento	Modelo	Marca	Sensibilidade
Célula de Carga	Type 8200	Bruel & Kjaer	3,8pC/N
Acelerômetro Monoaxial	Deltatron	Bruel & Kjaer	99,8mV/g
Acelerômetro Monoaxial	Deltatron	Bruel & Kjaer	100,4mV/g
Sensor de proximidade	-	-	5635,5mV/mm
<i>Shaker</i>	Type 4808	Bruel & Kjaer	
Condicionadores de Sinal	Nexus	Bruel & Kjaer	
Gerador de sinal aleatório	1361	General Radio Co.	
Amplificador de potência	Type 2706	Bruel & Kjaer	
Placa de Aquisição	NI-USB 6251	National Instruments	

Para determinar a FRF de cada sinal foi utilizado o estimador  $H_1$ , com base na razão entre as densidades espectrais cruzadas dos sinais de excitação e resposta.

$$H_1(\omega) = \frac{S_{fx}}{S_{ff}} \quad (7.1)$$

As FRFs dadas em deslocamento, obtidas para cada grau de liberdade são apresentadas na Figura

7.3. O intervalo em frequência de análise é limitado em 250Hz, pois após este valor a FRF perde coerência e as frequências que excitam o sistema em uma aplicação real encontram-se abaixo de 200Hz.

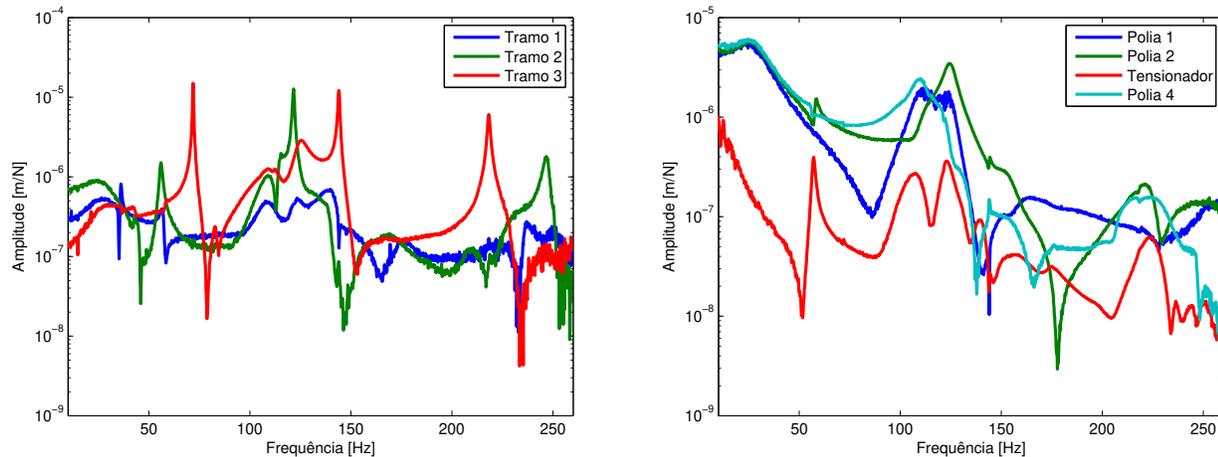


Figura 7.3: Funções de Resposta em Frequência estimadas para o sistema.

Para fazer a estimação dos parâmetros modais foi utilizado o Método da Exponencial Complexa com Mínimos Quadrados (LSCE). Esta consiste de uma técnica do tipo SIMO (*Single Input Multiple Output*), que considera os polos do sistema como parâmetros globais, sendo os mesmos para todas as FRFs, enquanto o resíduo e a participação modal de cada forma de vibrar são estimados para cada grau de liberdade em função dos polos obtidos previamente. O ajuste de curva é realizado no domínio temporal, através da Função de Resposta ao Impulso, obtida pela transformada inversa de Fourier das FRFs.

A Figura 7.4 apresenta o diagrama de estabilização obtido pela aplicação do método LSCE para diferentes ordens de modelo e ao fundo um indicador de ordem de modelo, conhecido como CMIF (*Complex Mode Indicator Function*), definido conforme Allemang e Brown (2006). Valores estáveis em frequência apresentam desvio menor que 0,05Hz e valores estáveis em amortecimento tem desvio no fator de amortecimento inferior a 0,05%.

Na ordem 37, é verificada boa estabilização dos parâmetros. Podemos então listar as frequências naturais e fatores de amortecimento para esta ordem.

Como pode ser observado pela Tabela 7.2, algumas das frequências naturais estimadas apre-

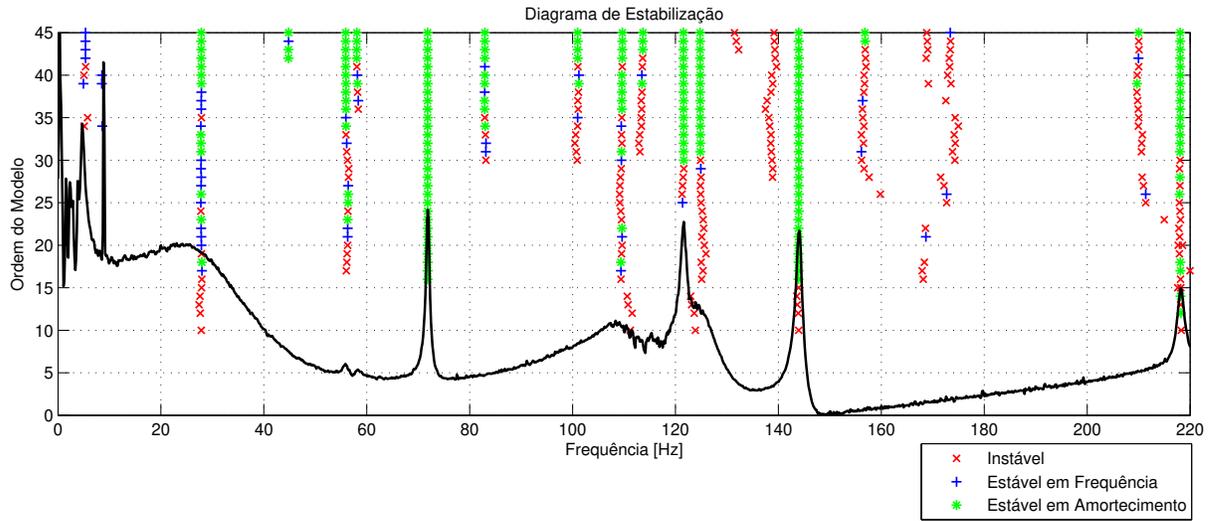


Figura 7.4: Diagrama de Estabilização para o sistema utilizando método LSCE.

sentam fatores de amortecimento bastante elevados, como é o caso das frequências em 27,86Hz, 55,95Hz, 82,91Hz e 109,58Hz, o que pode ser um primeiro indício de modo computacional. Algumas não apresentam estabilização adequada, como é o caso de 138,56Hz.

Uma forma para identificar as coerências entre as formas modais e se estas realmente são ortogonais entre si, condição primordial para a análise modal, é através do índice MAC, ou *Modal Assurance Criterion*. Este critério mede o desvio na correlação entre as amplitudes de cada grau de liberdade no sentido de mínimos quadrados (Ewins, 2000), valendo 1 quando ocorre menor correlação, ou seja os modos são ortogonais, e 0 quando os modos são linearmente dependentes.

$$\text{MAC}(A, X) = \frac{\left| \sum_{j=1}^n (\phi_X)_j (\phi_A)_j^* \right|^2}{\left( \sum_{j=1}^n (\phi_X)_j (\phi_X)_j^* \right) \left( \sum_{j=1}^n (\phi_A)_j (\phi_A)_j^* \right)} \quad (7.2)$$

As formas modais devem ser definidas anteriormente para que o índice MAC possa ser aplicado. As medições realizadas consideravam apenas um ponto ao longo de todo o comprimento dos tramos da correia. É necessário ajustar a amplitude do ponto medido para que represente a forma de vibrar total da correia. Para isto, podemos utilizar as formas modais, conforme definidas na Capítulo 5.

$$\bar{v}_{1r} = \bar{a}_{1r} \sin\left(\frac{\omega_r x}{c'_1}\right) \left\{ \cos\left[\frac{\omega_r(x-l_1)}{c'_a}\right] + i \sin\left[\frac{\omega_r(x-l_1)}{c'_a}\right] \right\} \quad (7.3)$$

Tabela 7.2: Frequências naturais e fatores de amortecimento para modelo de ordem 37.

Modo	Frequência Natural [Hz]	Fator de Amortecimento [%]
1	27,86	29,10
2	55,95	1,11
3	58,21	0,66
4	71,83	0,20
5	82,91	1,13
6	101,15	0,37
7	109,58	4,53
8	113,48	0,70
9	121,56	0,30
10	138,56	0,67
11	143,95	0,23

$$\bar{v}_{2r} = \bar{a}_{2r} \sin \left[ \frac{\omega_r (l_2 - x)}{c'_2} \right] \left\{ \cos \left( \frac{\omega_r x}{c'_b} \right) + i \sin \left( \frac{\omega_r x}{c'_b} \right) \right\} \quad (7.4)$$

$$\bar{v}_{3r} = \bar{a}_{3r} \sin \left( \frac{\omega_r x}{c'_3} \right) \left[ \cos \left( \frac{\omega_r x}{c'_c} \right) + i \sin \left( \frac{\omega_r x}{c'_c} \right) \right] \quad (7.5)$$

Considerando apenas a parte real destas funções e que as medições foram realizadas com o sistema parado, tem-se que  $c'_a, c'_b, c'_c \rightarrow \infty$  e as funções trigonométricas que contém estes termos se tornam 1. As amplitudes obtidas para cada tramo, correspondem às amplitudes nas posições  $x_{ki}$  ao longo do tramo. Portanto, para definir a amplitude da forma modal pode ser considerado

$$\bar{a}_{1r} = A_{1r} \left[ \sin \left( \frac{\omega_r x_{k1}}{c'_1} \right) \right]^{-1} \quad (7.6)$$

$$\bar{a}_{2r} = A_{2r} \left[ \sin \left( \frac{\omega_r (l_2 - x_{k2})}{c'_2} \right) \right]^{-1} \quad (7.7)$$

$$\bar{a}_{3r} = A_{3r} \left[ \sin \left( \frac{\omega_r x_{k3}}{c'_3} \right) \right]^{-1} \quad (7.8)$$

onde  $A_{ir}$  é a amplitude modal obtida na extração de parâmetros. Para as medições realizadas,  $x_{k1} = 0,0691\text{m}$ ,  $x_{k2} = 0,2195\text{m}$  e  $x_{k3} = 0,06\text{m}$ . O vetor para um modo  $r$  de vibrar pode ser

expresso como

$$\phi_r = \begin{Bmatrix} \bar{v}_{1r} \\ \bar{v}_{2r} \\ \bar{v}_{3r} \\ \bar{a}_{4r} \\ \bar{a}_{5r} \\ \bar{a}_{6r} \\ \bar{a}_{7r} \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$

Esse modo de vibrar apresenta termos com dependência espacial e não pode ser usado diretamente no índice MAC. Para contornar este problema, lança-se mão do produto interno, que será dado por

$$\begin{aligned} \langle \phi_r, \phi_s \rangle = & \int_0^{l_1} \bar{v}_{1r} \bar{v}_{1s}^* dx + \int_0^{l_2} \bar{v}_{2r} \bar{v}_{2s}^* dx + \int_0^{l_3} \bar{v}_{3r} \bar{v}_{3s}^* dx + \\ & + \bar{a}_{4r} \bar{a}_{4s}^* + \bar{a}_{5r} \bar{a}_{5s}^* + \bar{a}_{6r} \bar{a}_{6s}^* + \bar{a}_{7r} \bar{a}_{7s}^* \end{aligned} \quad (7.10)$$

O índice MAC se torna

$$\text{MAC}(X, A) = \frac{|\langle \phi_X, \phi_A \rangle|^2}{\langle \phi_X, \phi_X \rangle \langle \phi_A, \phi_A \rangle} \quad (7.11)$$

Fazendo uso do índice MAC conforme conceito apresentado na Eq. (7.11), pode-se estimar a ortogonalidade entre os modos de vibrar obtidos. A Figura 7.5 apresenta uma representação em barras para a comparação entre os modos.

Como pode ser observado, todos os modos apresentam MAC unitário quando comparados consigo mesmos, mas quando comparados com os demais, diversos deles apresentam MAC diferente de zero, o que indica acoplamento entre os modos, ou que o modelo utilizado para descrever o comportamento dos tramos não é adequado para descrever o comportamento do sistema real. Isso pode ocorrer devido à efeitos de rigidez de flexão que não são considerados no modelo matemático, mas podem ocorrer no sistema real e causariam este tipo de resultado.

Alguns modos que representam acoplamento intenso podem ser desconsiderados, bem como modos com fatores de amortecimento muito elevado ou que apresentam forma modal distorcida. Tem-se então um conjunto de frequências naturais que pode ser utilizado para descrever o compor-

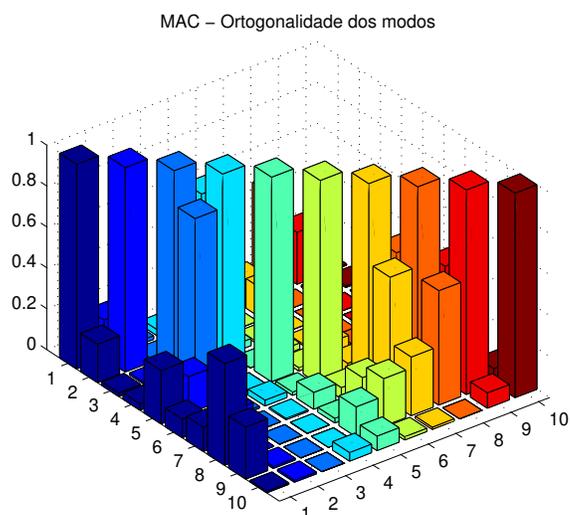


Figura 7.5: Índice MAC comparando os primeiros modos de vibrar obtidos pela Análise Modal.

tamento do sistema e que está de acordo com o modelo adotado, conforme apresentado na Tabela 7.3.

Tabela 7.3: Frequências naturais e fatores de amortecimento para modelo de ordem 37.

	Frequência Natural [Hz]	Fator de Amortecimento [%]	Tipo de Modo
1	58,21	0,66	Modo rotacional
2	71,83	0,20	1o Tramo 3
3	109,58	4,53	Possível modo rotacional
4	121,56	0,30	1o Tramo 2
5	143,95	0,23	2o Tramo 3

O índice MAC para este conjunto de frequências naturais é dado na Figura 7.6, bem como a representação gráfica de suas formas modais é apresentada na Figura 7.7.

O conjunto de parâmetros modais obtidos apresenta boa concordância com o modelo proposto, de forma que as formas modais podem extraídas, e juntamente com as frequências naturais e fatores de amortecimento, podem ser utilizadas para determinar a resposta temporal do sistema linearizado através de uma superposição modal.

Para descrever o comportamento do sistema não linear, estes dados podem ser substituídos na Eq. (5.78), juntamente com as propriedades elásticas da correia e tensionador. Assim, os termos

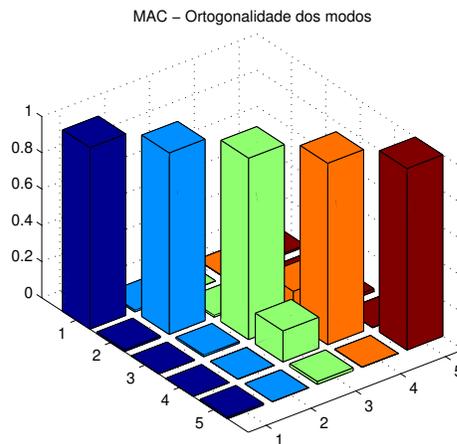


Figura 7.6: Índice MAC de modos com maior desacoplamento.

não lineares, que dependem da expansão modal e das trações dinâmicas e são aplicados como excitações ao sistema, podem ser incorporados e utilizados para descrever teoricamente a resposta do mesmo a partir de dados medidos.

## 7.2 Análise em Operação

Além de conhecer o comportamento do sistema quando este não apresenta movimento, é interessante determinar seu comportamento quando em operação. Para isto, a bancada experimental construída foi colocada em operação, sendo acionada pelo motor elétrico em velocidade constante e sua resposta foi medida com acelerômetro posicionado no braço do tensionador de forma a medir a vibração tangencial deste.

A Figura 7.8 apresenta a resposta em frequência obtida pela Transformada de Fourier do sinal de aceleração medido e integrado para velocidade. O sistema operava à velocidade de 753rpm, que corresponde à frequência de 12,55Hz. Observa-se que ocorrem bandas de frequência igualmente espaçadas de 6,05Hz, começando por 12,10Hz.

Estas frequências correspondem aos harmônicos da frequência de passagem da correia que

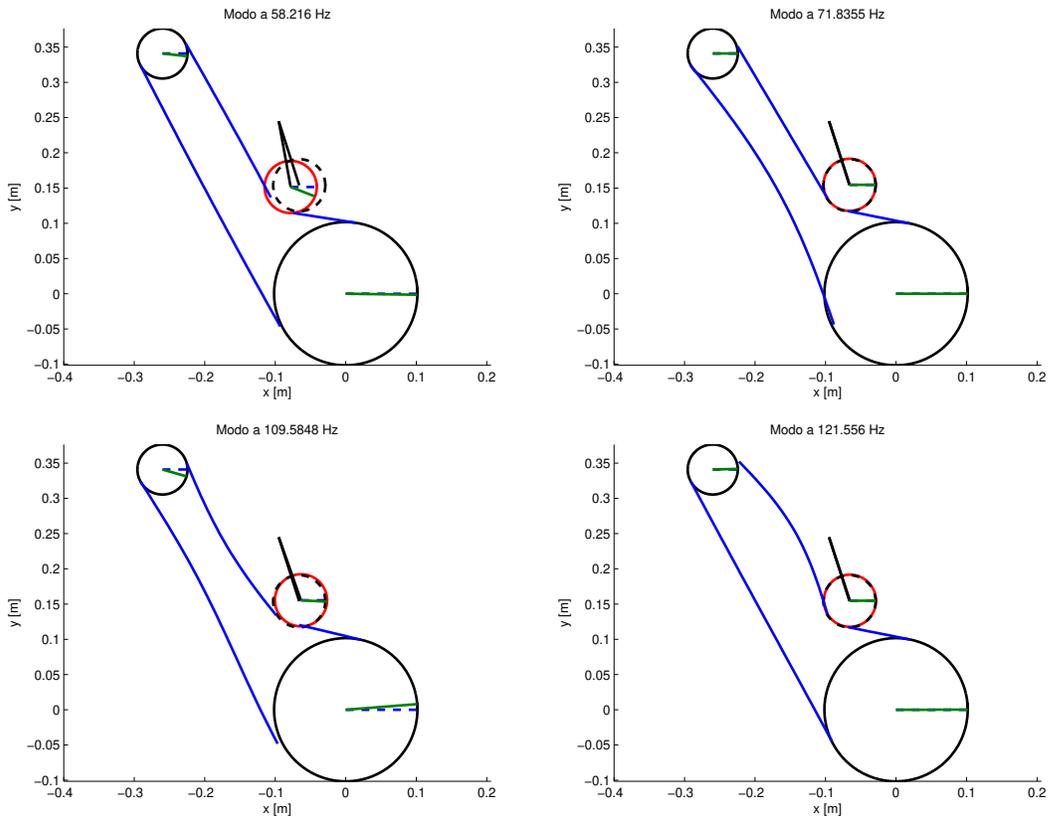


Figura 7.7: Formas modais estimadas

pode ser obtida pela expressão:

$$f_{correia} = \frac{c}{l_T} = \frac{2\pi RPM r_1}{60 l_T} \quad (7.12)$$

Para verificar se realmente se trata da frequência de passagem da correia e o efeito desta excitação sobre o sistema em estudo, foram realizadas medições estacionárias para velocidades de operação variando de aproximadamente 750rpm até 2000rpm em intervalos de 25rpm. Os auto-espectros obtidos foram organizados produzindo uma vista em cascata, apresentada na Figura 7.9, onde as principais ordens de excitação foram destacadas. As ordens em destaque correspondem realmente à excitações produzidas por harmônicos da frequência de passagem da correia em cada velocidade de operação.

A ocorrência de harmônicos da frequência da correia indica que o sistema esta sendo excitado múltiplas vezes a cada passagem da correia, possivelmente por discontinuidades, mudanças de

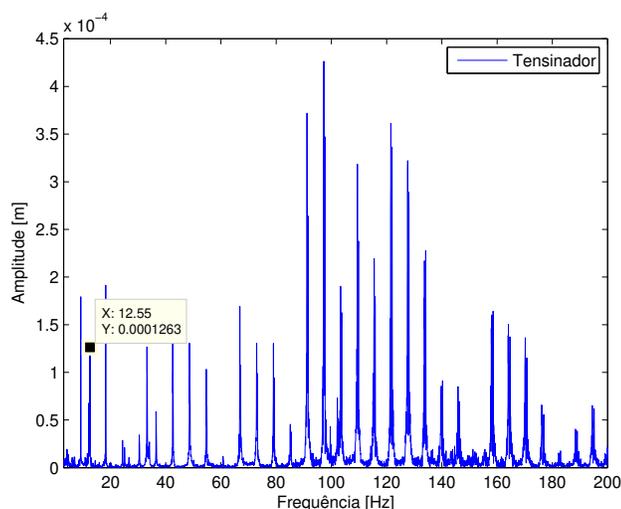


Figura 7.8: Espectro obtido para a condição de operação e harmônicos observados.

seção transversal ao longo do corpo da correia ou imperfeições nos cordoneis, como é destacado por Abrate (1992), que geram excitações que podem ser descritas como múltiplos harmônicos em uma série de Fourier. Kozhevnikov (1982) mostra em seu trabalho que efeitos da entrada e saída das junções em correias em V nas polias são capazes de excitar o sistema de acordo com a velocidade de operação deste. Wang e Mote Jr. (1987) apresentam trabalho similar onde são verificados os efeitos das excitações, na forma de impactos, causadas pelas soldas em serras de fita quando entram em contato com as polias do sistema.

A Figura 7.10 apresenta o perfil das seções transversais da correia utilizada no lado que entra em contato com as polias do virabrequim e alternador.

Como o sistema pode ser naturalmente excitado em seu processo de operação, pode-se utilizar deste fato para identificação das frequências naturais e seu comportamento para diferentes velocidades de operação. Para isto, o sistema foi instrumentado para medição da vibração tangencial no tensionador e foi realizada uma rampa de subida com o sistema partindo da velocidade 800rpm até 2000rpm, bem como a rampa de descida no mesmo intervalo. O alternador, acionado pelo sistema, apresentava em seus terminais de saída um sinal pulsante para cada revolução realizada, que pôde ser utilizado como tacômetro.

O sinal com os pulsos pôde ser transformado no perfil de velocidade desenvolvido na aceleração do sistema e com esta informação pode ser levantado uma mapa de ordens de excitação

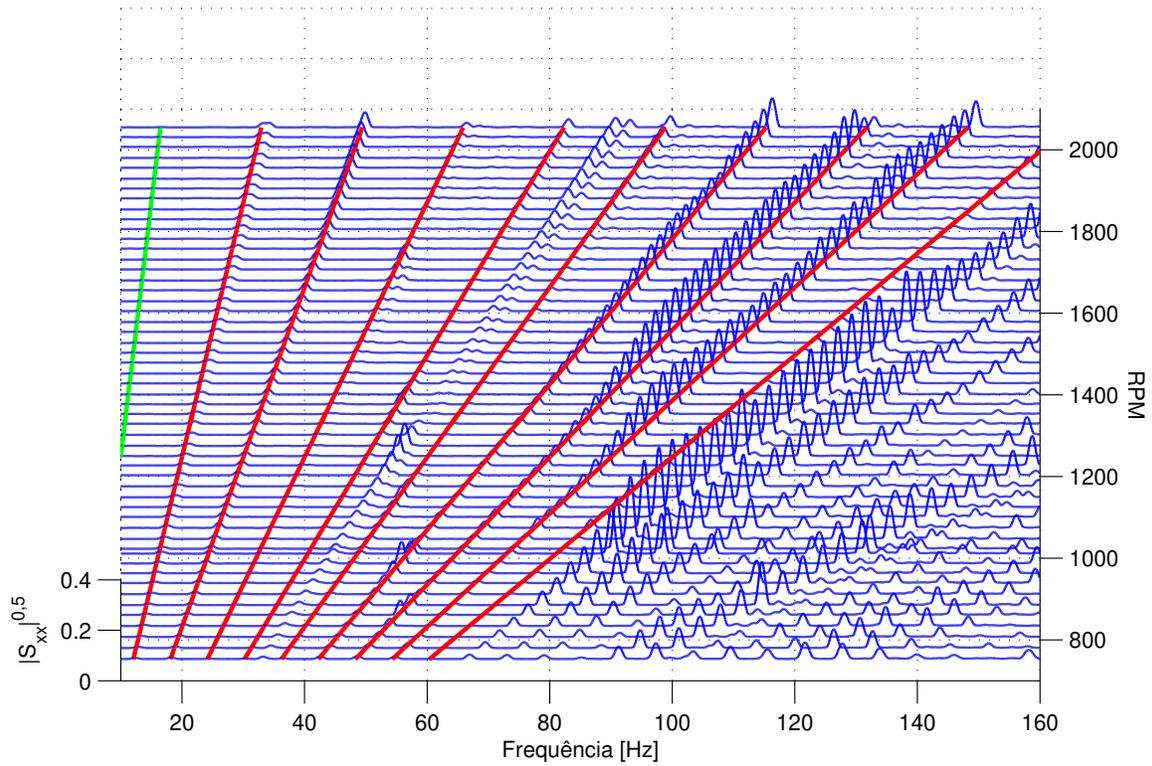


Figura 7.9: Vista em cascata para os espectros de velocidade obtidos em diferentes velocidades de operação para o sistema.

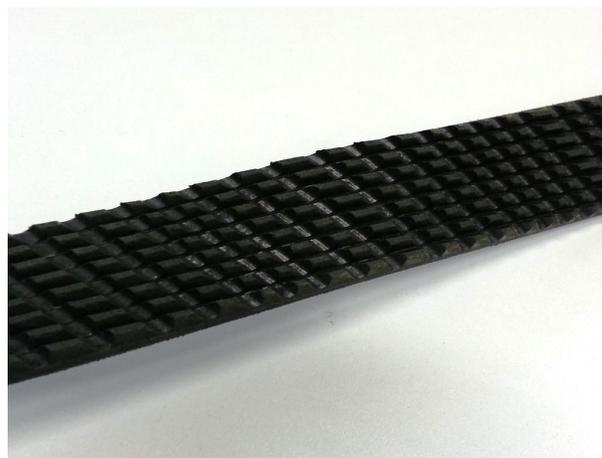


Figura 7.10: Perfil da seção transversal da correia utilizada

apresentando a amplitude do espectro de velocidades em função da rotação aplicada e da frequência da resposta.

Para criar o mapa de ordens, são utilizadas Transformadas de Fourier do tipo *Short Time* (STFT) que fornecem a composição espectral do sinal em pequenos intervalos de tempo, e cada espectro é relacionado à um valor médio de rotação para o intervalo de tempo correspondente, usado para calcular o espectro (Brandt, 2011). As Figuras 7.11 e 7.12 apresentam o mapa de ordens na forma de mapa de cores e em vista de cascata, bem como algumas frequências naturais identificadas, que são excitadas pelas harmônicas da frequência da correia em diferentes rotações.

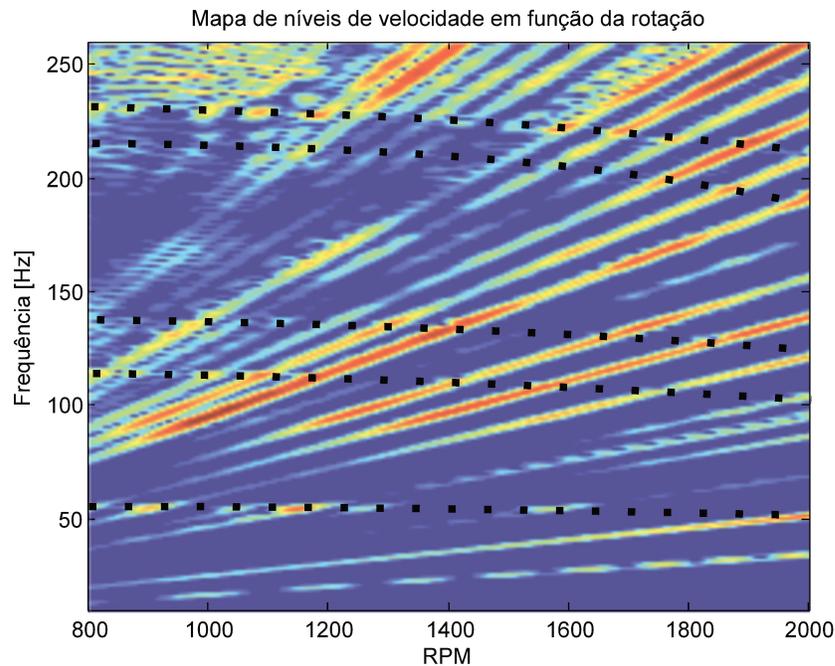


Figura 7.11: Mapa de ordens obtido para o sinal de velocidades no tensionador.

O primeiro modo, correspondente à 58,21Hz em velocidade zero (estimado pela análise modal), é identificado próximo de 56Hz em 900rpm. O primeiro e segundo modos de vibração transversal do segundo tramo também são observados, sendo que a dependência com a velocidade se dá pela proporção  $\omega_2 \propto c^{-2}$ , como é predito pela expressão da frequência natural para o caso em que os tramos estão desacoplados  $\omega_{2r} = \frac{n\pi c'_2}{l_2}$ .

São observadas frequências 141Hz e 247Hz próximo de 800rpm, indicando possíveis modos rotacionais ou com influência de rigidez de flexão da correia. Vale salientar que os modos do terceiro tramo não são identificados, uma vez que estas formas de vibrar não são observáveis através do grau de liberdade do tensionador, onde foi realizada a medição.

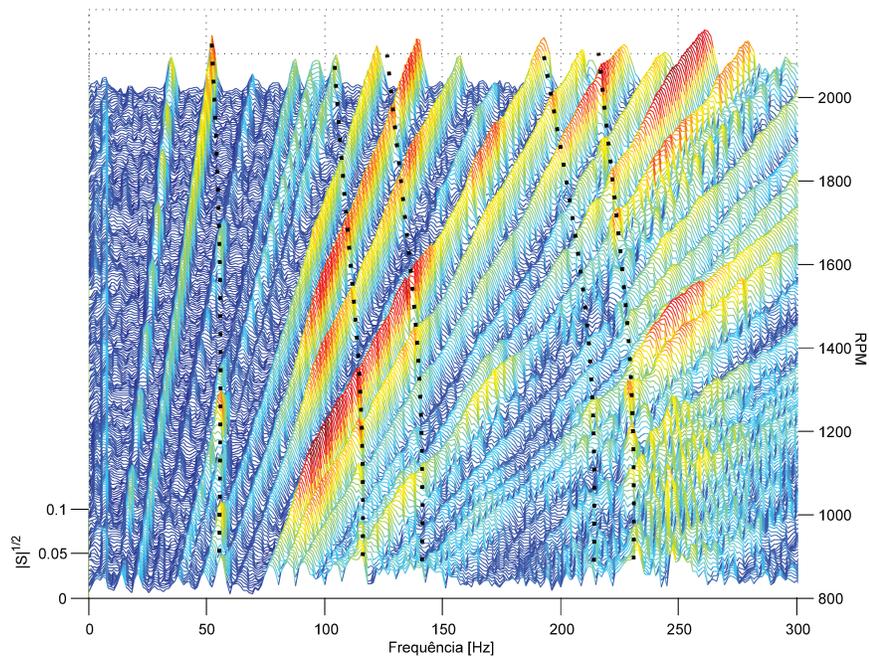


Figura 7.12: Vista em cascata do mapa de ordens obtido para o sinal de velocidades no tensionador e possíveis curvas de frequências naturais.

### 7.3 Efeitos Não Lineares

Na teoria utilizada para modelar o comportamento do sistema de transmissão por correia com autotensionador, alguns efeitos responsáveis pela introdução de não linearidades no sistema são abordados, como as elongações infinitesimais nos tramos, o acoplamento geométrico e efeitos de amortecimento por atrito seco no tensionador, que pode causar *stick-slip* e múltiplos harmônicos na resposta.

Alguns fenômenos, inclusive lineares são desconsiderados para simplificar o modelo matemático, mas seu comportamento é verificado quando um sistema real é analisado, como é o caso dos efeitos produzidos pela rigidez de flexão na correia, que induz momentos nas terminações dos tramos, como condições de contorno. Produzindo assim, novas condições de acoplamento e formas modais.

No sistema real esses fenômenos não podem ser identificados por procedimentos diretos, pois muitas vezes no tratamento de sinais, características transientes, que representam geralmente ma-

nifestações de não linearidades, são eliminadas por linearizações no processamento dos mesmos. Em outros casos não é possível detectar não linearidades como a dependência da composição em frequência da resposta da amplitude de excitação, pois os níveis de excitação necessários para excitá-las não pode ser atingido de forma simples, ou não se dispõem da instrumentação necessária para tal.

Na presente seção são realizados testes com o intuito de detectar possíveis representações de não linearidades no sistema avaliado, mas sem sua quantificação ou identificação de suas causas. Para isto o sistema é avaliado com velocidade de operação nula, sendo excitado por um *Shaker* eletromagnético fixado tangencialmente na polia motora e impondo excitação com perfil senoidal ao sistema. A frequência de excitação é variada ao longo da medição, aumentando de 40Hz à 100Hz e também diminuindo, gerando uma excitação do tipo *sine sweep*. A resposta é medida através de um acelerômetro fixado tangencialmente ao tensionador e pelo sensor de proximidade no tramo livre do sistema.

A excitação do tipo *sine sweep* é adequada para identificação de não linearidades, pois, em contraste com o processo utilizado para analisar excitação aleatória, não são realizadas linearizações na resposta. A Figura 7.13 apresenta a resposta obtida pela excitação por varredura em seno para a medição no tensionador. Como pode-se observar, os efeitos dos transientes não são eliminados e a resposta apresenta maior amplitude em 58,3Hz quando a frequência de excitação é crescente, contra 57,2Hz, quando é decrescente.

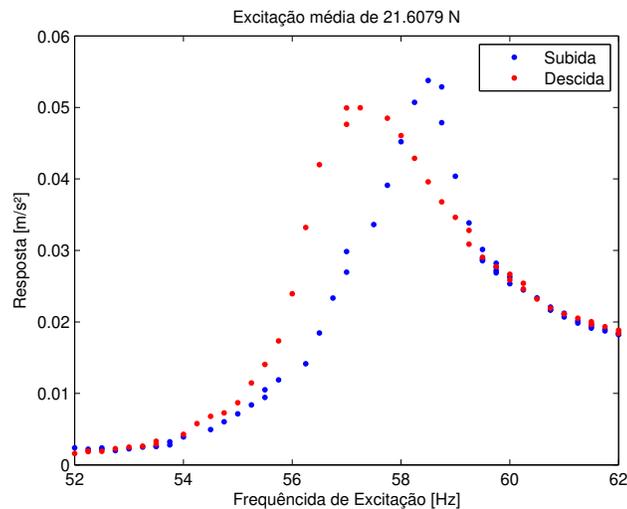


Figura 7.13: Resposta à varredura em seno medida no tensionador.

Não linearidades podem ser detectadas através das curvas da FRF estimada para o sinal. Segundo a teoria linear, as FRFs, que correspondem à razão entre a resposta do sistema pela excitação aplicada, dados na domínio da frequência, devem ser invariantes. Contudo, uma forma de detectar efeitos produzidos por não linearidades é avaliar a FRF do sistema para diferentes amplitudes de excitação. Se ocorrerem variações nas amplitudes da FRF nas regiões das ressonâncias, o sistema não é invariante à excitação, apresentando indícios de não linearidades.

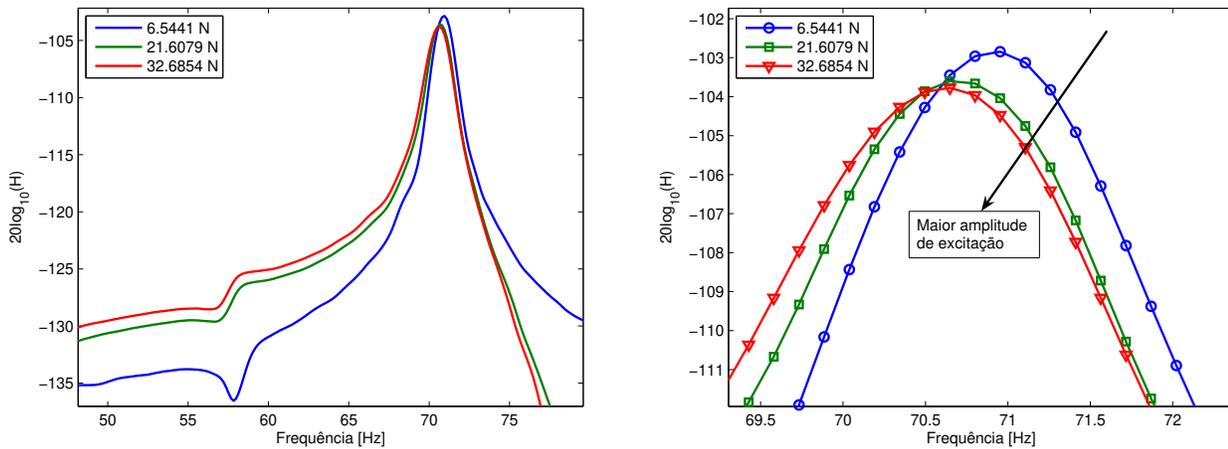


Figura 7.14: FRFs do sistema obtidas por varredura senoidal com diferentes amplitudes de excitação.

A Figura 7.14 apresenta as FRFs obtidas pelos estimadores  $H_1$  para os diferentes níveis de excitação utilizados, medidas no tramo livre. Como pode-se observar, com diferentes níveis de excitação, as FRFs apresentaram diferentes amplitudes e tal como mostrado por Ewins (2000), os picos de ressonância apresentaram variações, com menor amplitude quando o nível de excitação era maior, além de desvios na frequência de ressonância para cada amplitude de excitação.

## 8 CONCLUSÕES

A avaliação do comportamento dinâmico de um sistema de transmissão por correia com tensionador automático para aplicações automotivas foi realizada no presente estudo através de procedimentos teóricos e experimentais.

Foram utilizados dois modelos teóricos para avaliar o comportamento do mecanismo. Os elementos considerados eram duas polias, uma motora, correspondente à polia do virabrequim em uma aplicação real e a segunda, a polia do acessório acionado. Foi considerado um tensionador automático, acionado por uma mola torcional e com uma polia livre em sua extremidade que entrava em contato com a correia. O primeiro modelo considerava a dinâmica de todo o sistema, acoplando os movimentos de vibração torcional das polias e tensionador, juntamente com a vibração dos tramos da correia. Enquanto o segundo modelo contemplava apenas o movimento puramente rotacional do sistema, e os tramos atuavam como elementos elásticos.

No modelo teórico completo, foi obtido um conjunto híbrido de equações, sendo equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento dos tramos e equações diferenciais ordinárias que descrevem o comportamento dos elementos discretos. No sistema, o acoplamento entre o movimento dos tramos (avaliado na direção transversal) e o do tensionador era realizado pelas condições de contorno. Efeitos não lineares foram avaliados pela consideração da elongação infinitesimal dos tramos, que em situações de grandes variações, geravam termos cúbicos nas equações diferenciais e produziam o acoplamento entre as formas de vibrar do sistema.

Através da Análise Modal Teórica na porção linear das equações de movimento do sistema, foram avaliadas as frequências naturais e possíveis formas modais que o sistema poderia assumir. Uma metodologia para determinar as frequências naturais a partir das raízes do determinante de uma matriz dinâmica, com base nas equações do sistema, e onde, nas equações dos tramos eram substituídas as condições de contorno do sistema para que o acoplamento destas com o movimento do tensionador fosse capturado.

As formas modais foram obtidas pela solução não trivial da matriz dinâmica quando as frequências naturais eram substituídas nesta. E com essas informações foi possível avaliar as propriedades de ortogonalidade ponderada do sistema.

Tomando como base a teoria de Análise Modal, pôde ser obtida uma expressão para a Receptância do sistema com base no conjunto híbrido de equações. A partir disto, pôde ser avaliada a participação modal de cada forma de vibrar presente no sistema. Constatou-se pelas simulações computacionais, que os graus de liberdade correspondentes à vibração rotacional dos elementos discretos eram melhor excitadas por excitações também aplicadas aos elementos discretos. Modos de vibrar com movimento predominante dos tramos apresentaram menor participação modal e, apesar de haver acoplamento da vibração dos tramos com as polias, este era reduzido.

Para avaliar as respostas temporais do sistema, foi considerado que estas poderiam ser obtidas pelo princípio da superposição modal. Os termos não lineares foram tratados como excitações externas, o que permitiu a eliminação da porção espacial das equações dos tramos.

Na avaliação numérica foi considerada uma expansão com cinco modos de vibrar, sendo três modos correspondentes ao subsistema acoplado com o tensionador e dois modos correspondentes ao movimento do tramo livre. A resposta do tramo livre só pode ser determinada se já existe alguma condição inicial prévia aplicada as coordenadas generalizadas que descrevem seu movimento. Do contrário, o restante do sistema não pode excitá-lo, devido às condições de contorno consideradas.

O sistema é avaliado quando excitado por condições iniciais e também excitações externas produzidas por flutuações dinâmicas de torque nas polias, como ocorre em um mecanismo real, cuja principal fonte de excitação é flutuação de torque decorrente da irregularidade no movimento do virabrequim.

Para excitações de baixa amplitude, foi verificado que o sistema não linear se comporta de maneira muito próxima à do sistema linear e o acoplamento entre as formas modais é pequeno, mesmo em condições onde o sistema é excitado em alguma frequência natural, produzindo ressonância. Entretanto, quando a amplitude do torque de excitação é elevado, efeitos não lineares caracterizados pelas trações dinâmicas e que são proporcionais a inclinação dos tramos, se manifestam com maior intensidade, aumentando o acoplamento entre as formas de vibrar e inserindo novos harmônicos nas respostas do sistema.

É observado o fenômeno conhecido como Ressonância Interna, decorrente da troca de energia acentuada entre formas de vibrar do sistema, quando a razão entre as frequências naturais de dois modos de vibrar é aproximadamente um número racional. Observou-se que este fenômeno é capaz de produzir respostas elevadas ou batimentos, mesmo quando o sistema é excitado fora de alguma

frequência crítica, pois a resposta produzida por uma coordenada generalizada era capaz de excitar outra coordenada generalizada, devido ao acoplamento induzido pelas não linearidades.

Em paralelo, foi implementado um modelo que considerava apenas a porção rotacional das equações, o deslocamento transversal dos tramos não era considerado, sendo que estes atuavam apenas como elementos elásticos ligados as polias e ao tensionador. Este modelo, apesar de ser simplificado, apresentou uma boa descrição do sistema e possibilitou avaliar a resposta de modos de vibrar com frequências naturais mais altas, quando submetidos às excitações tipicamente esperadas.

Neste modelo simplificado, pôde ser inserido o efeito de amortecimento devido ao atrito seco, que normalmente é utilizado como mecanismo de amortecimento em tensionadores reais. Quando a excitação aplicada ao sistema era de ordem inferior à magnitude da força de atrito considerada, a resposta do tensionador mostrou-se da mesma ordem da precisão numérica do integrador usado, o que indica que o mesmo permaneceu imóvel, ou seja, a força de atrito foi capaz de travar o tensionador. Já quando a ordem de grandeza da excitação era superior à magnitude da força de atrito, observava-se comportamento similar ao produzido por amortecimento viscoso.

Um caso particular observado, foi o produzido quando a amplitude de excitação era de ordem de grandeza próxima à da força de atrito. Neste caso foi observado o fenômeno do *stick-slip*, onde o sistema apresentava resposta periódica, sendo que em alguns momentos o tensionador era capaz de mover-se, enquanto em outros, ocorria o travamento deste, o que resultava em respostas com característica senoidal mas com leves achatamentos em seus máximos e patamares de velocidade nula na resposta em velocidade. Este tipo de resposta, quando avaliado no domínio da frequência, pode ser caracterizado por uma frequência dominante e múltiplos harmônicos que surgem devido ao achatamento na forma de onda.

A fim de melhor compreender o comportamento do sistema de transmissão por correia e verificar se o modelo teórico utilizado era adequado para sua descrição, foi construída uma bancada experimental consistindo de um *front-end* automotivo, com duas polias e um tensionador automático. A polia corresponde ao virabrequim foi ligada à um motor elétrico e a polia do acessório acionava um alternador.

Foi realizada uma Análise Modal Experimental do sistema para determinar algumas de suas características lineares como frequências naturais, fatores de amortecimento e formas modais de vibrar. Devido às não linearidades presentes, as Funções de Resposta em Frequência estimadas

apresentaram coerência reduzida próximo às ressonâncias. Foram identificados fortes indícios de efeitos de rigidez de flexão na correia, tal como acoplamento entre as formas de vibrar do subsistema do tensionador e do tramo livre, fenômeno que não é esperado no modelo teórico utilizado.

Quando colocado em operação, em velocidade constante, pelo espectro dos sinais coletados, observavam-se, além da frequência de rotação, múltiplos harmônicos, igualmente espaçados, da frequência devido à passagem da correia, constituindo uma fonte natural de excitação para o sistema. Como verificado na literatura, este tipo de comportamento possivelmente é devido à imperfeições ou variações na seção transversal da correia e são diretamente proporcionais à velocidade de operação do sistema.

Uma vez que a operação do sistema era capaz de produzir esse tipo de excitação, foi possível avaliar os efeitos da velocidade de operação do mesmo sobre as frequências naturais. As excitações induzidas pela passagem da correia, produziam amplificações na resposta quando coincidiam com alguma frequência natural. Para verificar isto, foram realizados ensaios com rampas de aceleração e desaceleração do sistema, e através de medições sincronizadas de vibração e rotação, pôde ser traçado um mapa de ordens. Neste, algumas frequências naturais foram identificadas, bem como o decaimento destas em função do aumento da velocidade de operação, como era previsto na teoria.

Foi realizado um experimento para a detecção de não linearidades no sistema, consistindo da verificação da invariância das Funções de Resposta em Frequência do sistema para diferentes amplitudes de excitação. Pela teoria linear, espera-se que as FRFs sejam invariantes, mas foi verificado que estas, em regiões próximas às ressonâncias, apresentavam redução da amplitude e até desvio no valor das frequências naturais, conforme utilizava-se excitações com maior amplitude.

Enfim, foi constatado que há grande influência de não linearidades no sistema, como as devido à viscoelasticidade nos tramos, ou grandes deformações destes e também efeitos de atrito seco no tensionador. Alguns fatores apresentam grande contribuição para o comportamento dinâmico do sistema, como a geometria deste, o comprimento dos tramos e a orientação do braço do tensionador, que alteram as condições de acoplamento e as frequências naturais.

As frequências naturais do sistema apresentam grande dependência, no caso dos tramos, da tração aplicada à correia e do comprimento e densidade da mesma, além, é claro, da velocidade de operação do sistema que altera a tração centrífuga na correia. Os modos rotacionais por outro lado, dependem da inércia dos elementos discretos, da elasticidade da correia e da constante de mola do

tensionador.

Efeitos de atrito seco verificados no tensionador podem atuar no sistema tanto em condição estática quanto em condição dinâmica. Se a excitação atuante no sistema é inferior à amplitude do momento de atrito aplicado, o tensionador pode travar e isto pode gerar múltiplas posições de equilíbrio estático no tensionador, fator que altera a geometria do sistema e a tração aplicada na correia, e conseqüentemente, as frequências naturais dos tramos. Em casos onde a excitação é compatível com a força de atrito, deve-se atentar para condições que possam produzir *stick-slip* e assim, múltiplos harmônicos nas respostas. Este tipo de fenômeno normalmente é indesejável, pois sua composição em frequências pode excitar o sistema parametricamente, devido às não linearidades, gerando, assim, instabilidades.

O conhecimento prévio das frequências naturais do sistema pode ser de grande ajuda, pois contribui para minimizar a quantidade de frequências críticas no intervalo de operação do sistema além de ser fundamental para que condições de ressonância interna sejam evitadas, e assim, possíveis amplificações das respostas em intervalos de frequência onde estas não são esperadas.

Como sugestões para trabalhos futuros, pode-se citar:

- Considerar os efeitos de rigidez de flexão no modelo teórico;
- Considerar efeitos da rigidez do suporte das polias na dinâmica do sistema;
- Levantar em conta efeitos de excentricidade nas polias como fonte de excitação para o sistema de transmissão;
- Avaliar possíveis efeitos de viscoelasticidade e rigidez de torção na correia;
- Utilização de mecanismo para excitação do sistema por flutuação de torque com capacidade de excitar em frequências elevadas;
- Verificação da influência da elasticidade do eixo que aciona o sistema;
- Avaliar efeitos de diferentes materiais e perfis de correia;
- Otimização do desempenho do sistema de transmissão por correia;
- Avaliar efeito de excitações paramétricas induzidas pelo atrito seco no tensionador.



## REFERÊNCIAS

ABRATE, S. Vibrations of belts and belt drives. **Mechanism and machine theory**, v. 27, n. 6, 645–659, 1992.

ALLEMANG, R. e BROWN, D. A complete review of the complex mode indicator function (cmif) with applications. In **Proceedings of ISMA International Conference on Noise and Vibration Engineering, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium**. 2006.

BEIKMANN, R.; PERKINS, N. e ULSOY, A. Design and analysis of automotive serpentine belt drive systems for steady state performance. **Journal of Mechanical Design**, v. 119, 162, 1997.

BEIKMANN, Randall S. **Static and Dynamic Behavior of Serpentine Belt Drive Systems: Theory and Experiment**. 1992. Tese (Doutorado). The University of Michigan.

BEIKMANN, R.S.; PERKINS, N.C. e ULSOY, A.G. Free vibration of serpentine belt drive systems. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 118, 406–413, 1996a.

BEIKMANN, R.S.; PERKINS, N.C. e ULSOY, A.G. Nonlinear coupled vibration response of serpentine belt drive systems. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 118, 567–574, 1996b.

BRANDT, A. **Noise and Vibration Analysis: Signal Analysis and Experimental Procedures**. Wiley, 2011. ISBN 9780470978115.

CHEN, L.; ZHANG, W. e LIU, Y. Modeling of nonlinear oscillations for viscoelastic moving belt using generalized hamilton/s principle. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 129, 128, 2007.

CHENG, G. e ZU, J.W. Nonstick and stick-slip motion of a coulomb-damped belt drive system

subjected to multifrequency excitations. **Journal of Applied Mechanics**, v. 70, 871–884, 2003.

EWINS, D. **Modal testing: theory, practice, and application**. Mechanical engineering research studies: Engineering dynamics series. Research Studies Press, 2000. ISBN 9780863802188.

FIRBANK, T. Mechanics of the belt drive. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 12, n. 12, 1053 – 1063, 1970.

HAWKER, Larry Edward. **A Vibration Analysis of Automotive Serpentine Accessory Drive Systems**. 1991. Tese (Doutorado). University of Windsor.

KANG, J.; KROUSGRILL, C.M. e SADEGHI, F. Oscillation pattern of stick–slip vibrations. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 44, n. 7, 820–828, 2009.

KONG, Lingyuan. **Coupled Belt-Pulley Mechanics in Serpentine Belt Drives**. 2003. Tese (Doutorado). The Ohio State University.

KONG, L. e PARKER, R.G. Equilibrium and belt-pulley vibration coupling in serpentine belt drives. **Journal of Applied Mechanics**, v. 70, 739–750, 2003.

KONG, L. e PARKER, R.G. Coupled belt-pulley vibration in serpentine drives with belt bending stiffness. **Journal of Applied Mechanics**, v. 71, 109–119, 2004.

KOZHEVNIKOV, S. Vibration of a two-stage variable speed vee-belt drive. **Soviet Engineering Research**, v. 2, n. 5, 33–34, 1982.

KURMYSHEV, E. Transverse and longitudinal mode coupling in a free vibrating soft string. **Physics Letters A**, v. 310, n. 2-3, 148–160, 2003.

LEAMY, M. e WASFY, T. Dynamic finite element modeling of belt drives. In **Proceedings of DETC'01/VIB-21342, ASME 2001 Design Engineering Technical Conference**, pp. 9–12. 2001.

LEAMY, M. e WASFY, T. Analysis of belt-drive mechanics using a creep-rate-dependent friction law. **Journal of applied mechanics**, v. 69, n. 6, 763–771, 2002a.

LEAMY, Michael Joseph. **Influence of dry friction in the dynamic response of accessory belt drive systems**. 1998. p. 116–116 p. Tese (Doutorado). University of Michigan, United States – Michigan.

LEAMY, M.J. e WASFY, T.M. Transient and steady-state dynamic finite element modeling of belt-drives. **Journal of dynamic systems, measurement, and control**, v. 124, n. 4, 575–581, 2002b.

MAIA, N. e SILVA, J. **Theoretical and Experimental Modal Analysis**. Research Studies Press Limited, 1997. ISBN 9780471970675.

MEIROVITCH, L. **Computational Methods in Structural Dynamics**. Monographs and textbooks on mechanics of solids and fluids. Mechanics, Dynamical systems. Springer, 1974. ISBN 9789028605800.

MOON, J. e WICKERT, J.A. Non-linear vibration of power transmission belts. **Journal of Sound and Vibration**, v. 200, 419–431, 1997.

MOTE JR., C. A study of band saw vibrations. **Journal of the Franklin Institute**, v. 279, n. 6, 430 – 444, 1965.

MOTE JR., C.D. e NAGULESWARAN, S. Theoretical and experimental band saw vibrations. **Journal of Manufacturing Science and Engineering**, v. 88, 151–156, 1966.

NAYFEH, A.H. e MOOK, D.T. **Nonlinear oscillations**. John Wiley & Sons, Inc., 1979.

PARKER, R. Efficient eigensolution, dynamic response, and eigensensitivity of serpentine belt drives. **Journal of Sound and Vibration**, v. 270, n. 1-2, 15 – 38, 2004.

RAO, S. **Vibrações Mecânicas**. Pearson Prentice Hall, 2009. ISBN 9788576052005.

SACK, R.A. Transverse oscillations in travelling strings. **British Journal of Applied Physics**, v. 5, n. 6, 224, 1954.

SHIGLEY, J.; NISBETT, J. e BUDYNAS, R. **Shigley's mechanical engineering design**. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill, 2008. ISBN 9780073121932.

ULSOY, A.G.; WHITESELL, J.E. e HOOVEN, M.D. Design of belt-tensioner systems for dynamic stability. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design**, v. 107, 282–290, 1985.

WANG, K. e MOTE JR., C.D. Band/wheel system vibration under impulsive boundary excitation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 115, n. 2, 203 – 216, 1987.

WASFY, T.M. e LEAMY, M. Effect of bending stiffness on the dynamic and steady-state responses of belt-drives. ASME, 2002.

WASFY, T.M. e LEAMY, M.J. Dynamic modeling of synchronous belt-drives using an explicit finite element code. ASME, 2005.

WICKERT, J.A. e MOTE, JR., C.D. Classical vibration analysis of axially moving continua. **Journal of Applied Mechanics**, v. 57, 738–744, 1990.

XIAO-JUN, L. e LI-QUN, C. Modal analysis of coupled vibration of belt drive systems. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 29, n. 1, 9–13, 2008.

ZHANG, Lixin. **Dynamic Analysis of Viscoelastic Serpentine Belt Drive Systems**. 1999. Tese (Doutorado). University of Toronto.

ZHANG, L. e ZU, J. Non-linear vibrations of viscoelastic moving belts, part i: Free vibration

analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 216, n. 1, 75 – 91, 1998a.

ZHANG, L. e ZU, J. Non-linear vibrations of viscoelastic moving belts, part ii: Forced vibration analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 216, n. 1, 93 – 105, 1998b.

ZHANG, L. e ZU, J. Modal analysis of serpentine belt drive systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 222, n. 2, 259 – 279, 1999.

ZHANG, L. e ZU, J. One-to-one auto-parametric resonance in serpentine belt drive systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 232, n. 4, 783 – 806, 2000.

ZHU, Farong. **Non-Linear Dynamics of One-Way Clutches and Dry Friction Tensioners In Belt-Pulley Systems**. 2006. Dissertation. Graduate School of The Ohio State University.



