

UM ESTUDO TEÓRICO E NUMÉRICO SOBRE
HIDROFÓLIO DIÉDRICO OPERANDO A NÚ-
MERO DE FROUDE ARBITRÁRIO

15/75

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

UM ESTUDO TEÓRICO E NUMÉRICO SOBRE HIDROFÓLIO
DIÉDRICO OPERANDO A NÚMERO DE FROUDE ARBITRÁRIO

ADERBAL SEBASTIÃO STUCHI
Eng^o. Mecânico

PROF. KAMAL A.R. ISMAIL (Ph.D.)
Orientador

Tese Apresentado no Departamento de Engenharia Térmica e de Fluidos para obtenção do título de Mestre na área de Hidrodinâmica.

- 1975 -

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
BIBLIOTECA DE ENGENHARIA

Dedico este trabalho
a minha esposa *ANGELA*
e as minhas filhas
DANIELA e FABIANA

A G R A D E C I M E N T O

Expresso meus agradecimentos a todos aqueles que colaboraram direta e indiretamente a realização deste trabalho. Especialmente ao Dr. K.A.R. ISMAIL pela proposição e orientação do trabalho, a Srta. Taka Ota pela datilografia esmerada, ao Sr. Hsieh Dah Huei pela realização dos desenhos, ao CPD pela colaboração inestimável e aos meus pais que proporcionaram-me tal oportunidade.

R E S U M O

Uma teoria tridimensional linearizada é desenvolvida para hidrofólio diédrico operando abaixo da superfície livre. Partindo de uma equação básica do potencial de velocidade, a equação do potencial de velocidade completo é obtida após a imposição das várias condições de contorno. Com o intuito de conseguir forma mais simples para a computação numérica, realizamos extensas manipulações sobre a equação do potencial de velocidade completo. Após estas manipulações, a equação do potencial de velocidade é usado para obtermos o campo de velocidades induzidas.

Os cálculos numéricos são efetuados usando o método da linha de sustentação refinada ou método da superfície de sustentação incompleta, no qual o hidrofólio é substituído por uma linha de singularidades ao longo da envergadura e a 1/4 de corda da borda de ataque, impondo que a inclinação das linhas de corrente a 3/4 de corda da borda de ataque seja igual a inclinação do fólio. Este método apresenta-se adequado para aspect ratio moderados e altos, com profundidades não muito pequenas. Devido as simplificações do método este não é válido para pequenos aspect ratio, e os resultados obtidos para fólio muito próximo da superfície livre discordam dos experimentais devido aos efeitos não lineares não serem considerados nesta análise.

Determina-se um número de Froude crítico para o qual a sustentação é máxima. Acima do valor crítico, aumentando o número de Froude a sustentação diminui, o mesmo ocorrendo quando diminuimos o número de Froude abaixo do valor crítico. Aumentando a profundidade de submergência a influência da superfície livre diminui, sendo esta influência tanto maior quanto menor o ângulo diédrico. Verificando-se que fólio de baixo aspect ratio são mais susceptíveis a influência da superfície livre que fólio de alto aspect ratio.

I N D I C E

	Página
RESUMO	i
ÍNDICE	ii
SIMBOLOGIA	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
INTRODUÇÃO	1
ANÁLISE DA LITERATURA	2
CAPÍTULO 1 - FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA	4
1.1. Considerações Básicas	4
1.2. Dedução da Equação do Potencial de velocidade ...	7
1.3. Casos Especiais do Potencial de Velocidade.....	16
CAPÍTULO 2 - SIMPLIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO DO POTENCIAL DE VELOCIDADE	17
2.1. Integração do Terceiro e Quarto Termos	17
2.2. Redução dos Limites de Integração	18
CAPÍTULO 3 - ÂNGULO DE ATAQUE INDUZIDO	21
3.1. Adimensionalização da Equação do ângulo de Ataque Induzido	24
CAPÍTULO 4 - MÉTODO NUMÉRICO	28
4.1. Considerações sobre o Método de Cálculo	32

	Página
CAPÍTULO 5 - FORÇAS HIDRODINÂMICAS E COEFICIENTES DE CAR <u>GA</u>	
GA	34
5.1. Coeficiente de Sustentação Local	34
5.2. Coeficiente de Sustentação Total	35
5.3. Arrasto Induzido	35
5.4. Programa	38
CAPÍTULO 6 - DISCUSSÕES	46
6.1. Efeito da variação do número de Froude	46
6.2. Efeito da Profundidade de Submergência	48
6.3. Efeito do ângulo diédrico	50
6.4. Efeito do Aspect Ratio	52
CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES	54
BIBLIOGRAFIA	56
APÊNDICE (A) - INTEGRAÇÃO EM θ DO TERCEIRO TERMO DO POTENCIAL DE VELOCIDADE	59
APÊNDICE (B) - REDUÇÃO DOS TERMOS DO POTENCIAL DE VELOCIDADE	70
APÊNDICE (C) - EQUAÇÃO DAS VELOCIDADES INDUZIDAS	78
FIGURAS	

SIMBOLOGIA

$A^*(K_0/k)$	função do K_0/k
A_m	coeficientes da séries de Fourier
a_i	polos internos ao contorno de integração
AR	relação envergadura-corda (s/c)
b	projeção da envergadura sobre o eixo z.
b_i	polos sobre o contorno de integração.
c	corda (dimensão do perfil na direção do fluxo).
$C(K_0/k)$	função de K_0/k .
C_{Di}	coeficiente de arrasto induzido.
C_{ℓ}	coeficiente de sustentação local.
C_L	coeficiente de sustentação total.
C_s	coeficiente de sucção.
F	número de Froude (U/\sqrt{gs}).
$F(Z)$	função complexa.
g	aceleração da gravidade.
$G(t, t'), G(\alpha, \alpha_0)$	função de t e t' ou de α e α_0
h, \bar{h}	profundidade de submergência ($\bar{h} = \frac{h}{s}$)
$H(t'), H(\alpha_0)$	função de t' ou de α_0
$I(t, t'), I(\alpha, \alpha_0)$	função de t e t' ou de α e α_0
J	funções de Bessel

k, \bar{k}	variáveis de integração
K_o	número de onda (g/U^2)
K^*	fator de arrasto induzido
$L(\alpha)$	sustentação seccional
L_t	sustentação total
m	número de pontos de controle, ou número de termos da série de Fourier.
m	cosseno diretor da normal ao perfil relativamente ao eixo y .
n	cosseno diretor da normal ao hidrofólio, em relação ao eixo z .
n	normal ao hidrofólio
p	pressão estática
$P(K_o/k)$	função do K_o/k
\vec{q}	vetor velocidade de perturbação
\vec{Q}	vetor velocidade total
r, R, R^*	distância entre pontos
R_1, R_2	funções de K_o/k
s	envergadura (dimensão do fôlio normal ao escoamento)
s	Domínio de integração
t	tempo
t, t'	posições ao longo da envergadura.
u	velocidade de perturbação na direção x .
U	velocidade do fluxo livre ou fôlio.

v	velocidade de perturbação na direção y .
V_n	velocidade induzida.
$V_1(z), V_2(z)$	funções complexas.
w	velocidade de perturbação na direção z .
\tilde{w}	distância entre pontos.
x, x', \bar{x}, \bar{x}'	abscissas ($\bar{x} = \frac{x}{c}$, $\bar{x}' = \frac{x'}{c}$).
x'_t	abscissa da borda de fuga.
y, y'	ordenadas.
z, z'	ordenadas.
Z	número complexo.
Z_1, Z_1', Z_2, Z_2'	zeros das funções.
α, α_0	posições angulares ao longo da envergadura.
α_g	ângulo de ataque geométrico.
α_i	ângulo de ataque induzido.
β	ângulo de inclinação do fôlio ou ângulo diédrico.
η	elevação da superfície livre.
θ	variável de integração angular.
ρ	massa específica do fluido.
Γ	distribuição de circulação.
ϕ	fase do número complexo.
$\phi, \phi(x, y, z)$	potencial de velocidade.
$\Delta\phi$	distribuição de singularidades.

LISTA DE FIGURAS

- Fig. 1 - Esquema do sistema de coordenada para o movimento do fôlio.
- Fig. 2 - Influência do grau do polinômio
- Fig. 3 - Influência do número de pontos de controle
- Fig. 4 - Efeito do número de Froude sobre a sustentação total.
- Fig. 5 - Efeito do número de Froude sobre a sustentação total.
- Fig. 6 - Efeito do número de Froude sobre a sustentação total.
- Fig. 7 - Efeito do número de Froude sobre a sustentação total.
- Fig. 8 - Efeito do número de Froude sobre a sustentação total.
- Fig. 9 -- Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.10 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.11 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.12 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.13 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.14 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.15 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.16 - Efeito do número de Froude sobre o arrasto induziido.
- Fig.17 - Efeito do número de Froude sobre o fator de arrasto induzido.
- Fig.18 - Efeito do número de Froude sobre o fator de arrasto induzido.
- Fig.19 - Efeito do número de Froude sobre o fator de arrasto induzido.

- Fig.20 - Efeito do número de Froude sobre o fator de arrasto induzido.
- Fig.21 - Efeito do número de Froude sobre o fator de arrasto induzido.
- Fig.22 - Variação da sustentação total com o ângulo de ataque.
- Fig.23 - Efeito da profundidade de submergência sobre a sustentação total e fator de arrasto induzido.
- Fig.24 - Efeito da profundidade de submergência sobre a sustentação total e fator de arrasto induzido.
- Fig.25 - Efeito da profundidade de submergência sobre a sustentação total e fator de arrasto induzido.
- Fig.26 - Efeito da profundidade de submergência sobre a sustentação total e fator de arrasto induzido.
- Fig.27 - Efeito de profundidade de submergência sobre a sustentação total e fator de arrasto induzido.
- Fig.28 - Efeito de profundidade de submergência sobre a sustentação total e fator de arrasto induzido.
- Fig.29 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.30 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.31 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.32 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.33 - Distribuição de carga do longo da envergadura.
- Fig.34 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.35 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.36 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.37 - Efeito da profundidade sobre a sustentação total
- Fig.38 - Efeito da profundidade de submergência sobre a sustentação total.
- Fig.39 - Efeito do ângulo diédrico sobre a sustentação total.
- Fig.40 - Efeito do ângulo diédrico sobre a sustentação total e fator de arrasto induzido.

- Fig.41 - Efeito do ângulo diédrico sobre a sustentação total e fator de arrasto induzido.
- Fig.42 - Efeito do ângulo diédrico sobre a sustentação total.
- Fig.43 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.44 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.45 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.46 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.47 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.48 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.49 - Efeito do ângulo diédrico sobre o fator de arrasto induzido.
- Fig.50 - Efeito do ângulo diédrico sobre o fator de arrasto induzido.
- Fig.51 - Efeito do ângulo diédrico sobre a sustentação total.
- Fig.52 - Efeito do aspect ratio sobre a sustentação total e fator de arrasto induzido.
- Fig.53 - Efeito do aspect ratio sobre a sustentação total e fator de arrasto induzido.
- Fig.54 - Efeito do aspect ratio sobre a sustentação total
- Fig.55 - Efeito do aspect ratio sobre o fator de arrasto induzido.
- Fig.56 - Efeito do aspect ratio sobre a sustentação total
- Fig.57 - Efeito do aspect ratio sobre a sustentação total
- Fig.58 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.59 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.
- Fig.60 - Distribuição de carga ao longo da envergadura.

INTRODUÇÃO

O problema do hidrofólio diédrico próximo a superfície livre é de extrema importância não somente do ponto de vista acadêmico, mas também devido a sua imediata utilidade e aplicação no campo da hidrodinâmica. Este estudo tem inúmeras aplicações, no projeto de leme para barcos a vela e navios, suportes de sistemas de hidrofólios, fólios ligando hidrofólios ao casco de barcos, problemas de interferência em túneis aerodinâmicos e tanques de prova, aletas estabilizadoras de navios de alta velocidade e de corpos operando abaixo da superfície da água.

A teoria que desenvolvemos para hidrofólio diédrico proporciona um modelo interessante para o casco de navios e de barcos a vela. Os cascos de barcos a vela, usualmente são projetos empiricamente ou baseados na experiência com barcos anteriormente projetados. Portanto usando a teoria tri-dimensional linearizada e uma técnica da superfície de sustentação completa, as forças sobre cascos podem ser determinadas se substituirmos os mesmos por uma placa plana de pequeno aspect ratio e pequeno ângulo de ataque.

Neste estudo apresentamos uma teoria tri-dimensional linearizada para hidrofólio diédrico de médio e alto aspect ratio, operando a número de Froude, profundidade e ângulo diédrico, arbitrários. Para obter as características hidrodinâmicas no capítulo 1, formulamos o problema, que consiste em determinar a equação do potencial de velocidade que satisfaça as diversas condições de contorno e equação de Laplace. A seguir, no capítulo 2 realizamos simplificações da equação do potencial de velocidade, onde integrais são avaliadas analiticamente e limites de integração são reduzidos. No capítulo 3 após determinarmos a equação do ângulo de ataque induzido, realizamos sua adimensionalização, no capítulo 4 tratamos do método numérico e considerações sobre o cálculo, sendo que no capítulo 5 determinamos a equação das forças hidrodinâmicas e coeficientes de carga. O capítulo 6 reserva-se a apresentação e discussões dos resultados, e no 7 as conclusões.

Maiores detalhes analíticos sobre os capítulos 2 e 3 são mostrados nos apêndices. A, B e C.

ANÁLISE DA LITERATURA

A maioria das investigações das propriedades de hidrofólios próximo a superfície livre tem sido experimentais, no entanto muitos trabalhos surgiram ultimamente cujas teorias são adequadas e precisas quanto ao tratamento da condição de contorno da superfície livre e condição de radiação.

Entre os primeiros trabalhos cuja teoria apresenta um tratamento adequado das condições de operação de fólhos próximo a superfície livre destacamos os devido a Wu (28), onde é desenvolvida uma teoria tri-dimensional linearizada para hidrofólio horizontal de alto aspect ratio, isto é, usando a teoria da linha de sustentação de Prandtl.

Anteriormente a estes, existem trabalhos apresentando teorias aproximadas, as quais não representam adequadamente o efeito da formação de ondas sobre as características dos hidrofólios.

Posteriormente, entre os trabalhos existentes que dão tratamento adequado das condições de operação de hidrofólios, destacam-se os devidos a T. Nishiyama (16 a 25) o qual dá uma abordagem ao problema do fólio de forma plana para várias situações relativamente a superfície livre, e K.A.R. Ismail (09) que aborda o problema de hidrofólios verticais usando os métodos da linha e superfície de sustentação.

Wu (28) partindo do potencial aerodinâmico e impondo a condição de contorno da superfície livre obtem o potencial de velocidade, e para que este satisfaça a condição de não propagação de ondas na frente do fólio adiciona um novo termo. T. Nishiyama (14 a 25) para obter esta solução única do potencial de velocidade, usa o conceito do coeficiente de viscosidade fictícia de Rayleigh, que após servir este propósito é colocada igual a zero na equação do potencial de velocidade completo. Por outro lado K.A.R. Ismail (09) para obter o potencial de velocidade utiliza funções de Green, sendo matematicamente mais elegante, e a se

guir para que o potencial de velocidade seja solução única adiciona um quarto termo que anula a elevação de ondas na frente do fôlio.

Relativamente a hidrofólio diédrico, a literatura nos apresenta o trabalho de T. Nishiyama (17), onde é desenvolvida uma teoria tri-dimensional linearizada usando o método da linha de sustentação de Prandtl. Analisando este trabalho nota-se a necessidade de uma nova teoria tri-dimensional para hidrofólio diédrico que seja válida para médios e altos aspect ratio, e que apresente resultados para vários ângulos diédricos, número de Froude e profundidade de submergência, pois a grande maioria dos resultados apresentados por Nishiyama (17) são para hidrofólios verticais, apesar de seu trabalho ter como objetivo hidrofólios diédricos.

I - FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMAI.1 - Considerações Básicas

Consideramos um hidrofólio de envergadura s com perfil e forma plana arbitrária, movendo-se com velocidade constante U imerso na água a profundidade \bar{h} , medida da extremidade superior da envergadura à superfície livre não perturbada.

Escolhendo o sistema de coordenadas fixo ao hidrofólio teremos fluxo permanente aproximando-se do mesmo com velocidade U . Tomaremos o eixo x paralelo e com mesma orientação do fluxo uniforme, eixo z orientado para cima, onde $z = 0$ representa a superfície livre não perturbada como mostra a figura 1.

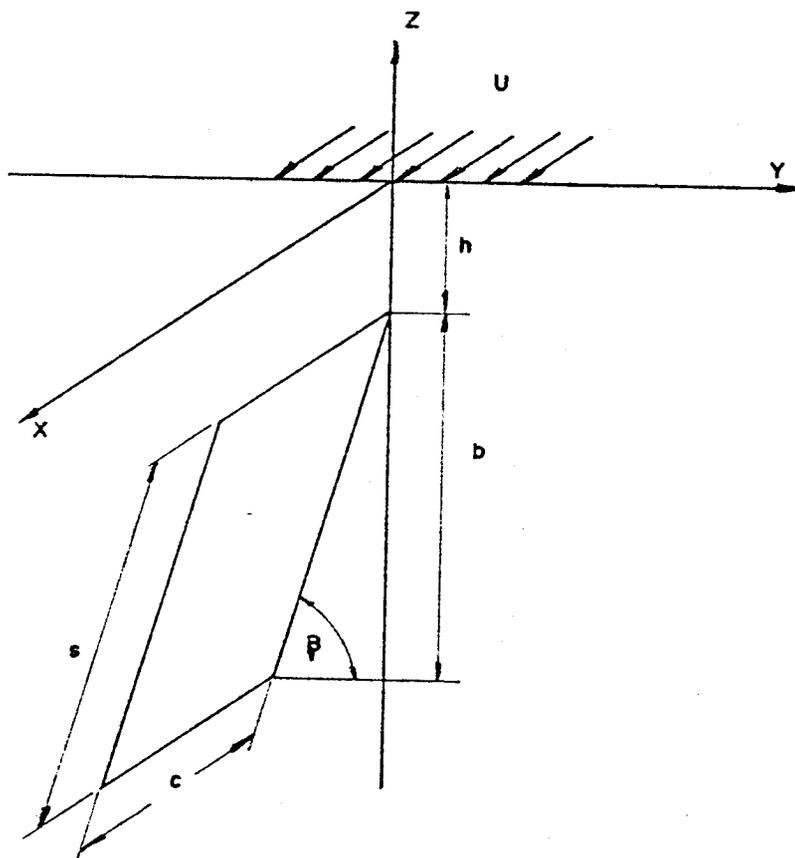


FIG. 1 ESQUEMA DO SISTEMA DE COORDENADAS PARA MOVIMENTO DO FOLIO.

Lembrando a equação da continuidade na forma geral

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} + \frac{\delta(\rho w)}{\delta z} = 0 \quad (1.1)$$

Considerando o líquido como incompressível e lembrando a escolha do sistema de coordenadas, a equação (1.1) transforma-se em

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0 \quad (1.2)$$

Outra consideração aceitável é a de fluido não viscoso, justificável por conhecer-se que para formas hidrodinâmicas e número de Reynolds razoavelmente alto a camada limite é pequena. Com esta consideração teremos escoamento irrotacional, isto é,

$$\frac{\delta w}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta z} = 0$$

$$\frac{\delta u}{\delta z} - \frac{\delta w}{\delta x} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y} = 0$$

A consideração do fluxo irrotacional resulta em um número de simplificações na teoria, as quais serão de grande utilidade, implicando na existência do potencial de velocidade de perturbação $\phi(x,y,z)$, tal que

$$\vec{q} = \text{grad } \phi(x,y,z) \quad (1.4)$$

A equação da continuidade e a irrotacionalidade nos levam a concluir que o potencial de velocidade de perturbação sa-

tisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 0 \quad (1.5)$$

e de sua solução o campo total de velocidades pode ser obtido como

$$\vec{Q} = U\vec{i} + \vec{q} \quad \text{onde } \vec{q} = g\vec{r}\vec{a}d\phi \quad (1.6)$$

e o campo de pressões pode ser determinado pela equação de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{Q} \cdot \vec{Q} + gz = cte \quad (1.7)$$

As condições de contorno na superfície livre são: a condição de pressão e a condição cinemática, em que as partículas sobre a superfície livre nela permanecem. A primeira é fornecida pela equação de Bernoulli, que poderá ser linearizada lembrando que $u, v, w \ll U$, assim a equação (1.7) nos dá

$$U \left(\frac{\delta \phi}{\delta x} \right)_{z=0} = -g\eta \quad (1.8)$$

onde η é a elevação da superfície livre.

Admitindo que a equação da superfície livre é dada por $z = \eta(x, y)$, e que as partículas sobre ela aí permanecem, temos

$$\frac{D}{Dt} (z - \eta(x, y)) = -u \frac{\delta \eta}{\delta x} - v \frac{\delta \eta}{\delta y} + w = 0 \quad (1.9)$$

que linearizada transforma-se em

$$U \frac{\delta \eta}{\delta x} = \left(\frac{\delta \phi}{\delta z} \right)_{z=0} \quad (1.10)$$

Eliminando η das equações (1.8) e (1.10) obtemos

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + K_0 \frac{\delta \phi}{\delta z} = 0 \quad (1.11)$$

que é a condição global de superfície livre, sendo $K_0 = g/U^2$ o número de onda.

O potencial de velocidades de perturbação que determina remos, além de ser solução de equação de Laplace e satisfazer a condição de contorno da superfície livre, deverá satisfazer a condição de grad $\phi \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow -\infty$, $\frac{\delta \phi}{\delta n} (n^+) = \frac{\delta \phi}{\delta n} (n^-)$, onde n^+ e n^- são normais dos dois lados da superfície do fôlio, e a condição de radiação, não propagação de ondas na frente do fôlio, que resulta em $\eta = - \frac{U}{g} \left(\frac{\delta \phi}{\delta x} \right)_{z=0}$ tender a zero quando $x \rightarrow -\infty$.

1.2 - Dedução da Equação do Potencial de Velocidade

De acordo com as considerações do item anterior, procuraremos a equação do potencial de velocidade que satisfaça as condições:

a) $\nabla^2 \phi = 0$

b) $\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + K_0 \frac{\delta \phi}{\delta z} = 0$ em $z = 0$

c) $\text{grad } \phi \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow -\infty$

d) $\frac{\delta\phi}{\delta n}(n^+) = \frac{\delta\phi}{\delta n}(n^-)$ onde n^+ e n^- dizem respeito

aos dois lados da superfície do fôlio, sendo n a normal.

e) $\eta = -\frac{U}{g} \left(\frac{\delta\phi}{\delta x} \right)_{z=0} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow -\infty$.

Considerando a descontinuidade da velocidade tangencial sobre o fôlio, substituiremos a forma plana do mesmo por uma distribuição de "doublet" de intensidade $\Delta\phi$ por unidade de área.

Inicialmente obteremos o termo do potencial considerando o escoamento infinito, sem a superfície livre. A seguir admitiremos uma forma básica para o potencial que satisfaça as condições enumeradas acima.

O potencial para uma distribuição de "doublet" em um escoamento infinito é

$$\phi_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_s \Delta\phi \frac{\delta\left(\frac{1}{R}\right)}{\delta n} ds \quad (1.12)$$

onde n é a normal a superfície do fôlio, sendo s a superfície e o "wake" correspondente. e $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}$.

Usando a forma integral de Fourier-Bessel, podemos escrever

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(z+z')^2 + r^2}} = \int_0^\infty \exp\left[-k|z+z'|\right] J_0(Kr) dK$$

onde $r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$ e z' é tomado em valor absoluto.

ou

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp \left[-k|z+z'| \right] e^{ik\bar{w}} d\theta dk \quad (1.13)$$

sendo $\bar{w} = (x-x') \cos\theta + (y-y') \sin\theta$ e $\theta = \text{arc tg} \left(\frac{y-y'}{x-x'} \right)$.

Substituindo a equação (1.13) em (1.12), obtemos

$$\phi_1 = - \frac{i}{4\pi^2} \int_s \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta\phi \left(m \sin\theta + i n \frac{z+z'}{|z+z'|} \right) k \exp \left[k(-|z+z'| + i\bar{w}) \right] d\theta dk ds \quad (1.14)$$

que representa o termo da equação do potencial de velocidade sem a presença da superfície livre, onde m e n são os cossenos diretores da normal a superfície relativo aos eixos y e z respectivamente.

Para a região $0 \geq z > -z$ procuraremos um potencial adicional que represente a presença da superfície livre, satisfazendo todas as condições enumeradas anteriormente.

Admitindo

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{4\pi^2} \int_s \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta\phi (m \sin\theta + i n) k \exp \left[k(-(z+z') + i\bar{w}) \right] d\theta dk ds \\ & + \int_s \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A^*(k, \theta) \exp \left[k(z + i\bar{w}) \right] d\theta dk ds \end{aligned} \quad (1.15)$$

e impondo a condição de contorno da superfície livre, condição (b), obtemos

$$A^*(k, \theta) = \frac{i}{4\pi^2} \Delta\phi (m\text{sen}\theta + in) \left(1 + \frac{2K_0}{k\cos^2\theta - K_0}\right) \exp(-kz') \quad (1.16)$$

que substituindo na equação (1.15) nos fornece

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{i}{4\pi^2} \int_s \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta\phi (m\text{sen}\theta + in) k \exp \left[k(-(z+z') + i\bar{w}) \right] d\theta dk ds \\ & + \frac{i}{4\pi^2} \int_s \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta\phi (m\text{sen}\theta + in) k \exp \left[k((z-z') + i\bar{w}) \right] d\theta dk ds \\ & + \frac{iK_0}{2\pi^2} \int_s \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta\phi (m\text{sen}\theta + in) \frac{k\sec^2\theta}{k - K_0\sec^2\theta} \exp \left[k((z-z') + i\bar{w}) \right] d\theta dk ds \end{aligned} \quad (1.17)$$

Outra condição de contorno que a equação do potencial de velocidade deve satisfazer é a condição c, isto é, quando $z \rightarrow -\infty$, $\phi \rightarrow 0$ (ou $\text{grad}\phi$). Para que o potencial satisfaça esta condição e seja válido em todo campo do fluxo devemos escrever

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{i}{4\pi^2} \int_s \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta\phi (m\text{sen}\theta + in \frac{z+z'}{|z+z'|}) k \exp \left[k(-|z+z'| + i\bar{w}) \right] d\theta dk ds \\ & + \frac{i}{4\pi^2} \int_s \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta\phi (m\text{sen}\theta + in) k \exp \left[k((z-z') + i\bar{w}) \right] d\theta dk ds \\ & + \frac{iK_0}{2\pi^2} \int_s \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta\phi (m\text{sen}\theta + in) \frac{k\sec^2\theta}{k - K_0\sec^2\theta} \exp \left[k((z-z') + i\bar{w}) \right] d\theta dk ds \end{aligned} \quad (1.18)$$

O primeiro termo da equação (1.18) representa o potencial de velocidade da distribuição de singularidades original, o segundo a imagem simétrica das singularidades originais relativa a superfície livre, e o terceiro é o potencial devido a distribuição de singularidades sobre a superfície livre, consequência da condição de contorno da mesma.

A equação (1.18) satisfaz todas as condições de contorno exceto a condição de radiação. Para satisfazer esta condição adicionaremos um termo de onda livre que satisfaça as condições satisfeitas pela equação (1.18).

Sendo elevação das ondas da superfície dado pela equação

$$\eta = - \frac{U}{g} \left(\frac{\delta \phi}{\delta x} \right)_{z=0} \quad (1.19)$$

da equação (1.18), obtemos

$$\eta = - \frac{K_0 U}{\pi^2 g} \int_s \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta \phi (m \sin \theta + i n) \frac{k^2 \sec \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \exp \left[k(-z' + i \tilde{w}) \right] d\theta dk ds \quad (1.19-a)$$

que tomando a parte real e mudando os limites de integração em θ , a equação (1.19-a) transforma-se em

$$\eta = - \frac{K_0 U}{\pi^2 g} \int_s \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \Delta \phi m \sin \theta \frac{k^2 \sec \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} \sin \left[k(x-x') \cos \theta \right] \cdot \sin \left[k(y-y') \sin \theta \right] \cdot \exp \left[-k z' \right] d\theta dk ds$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{K_o U}{\pi^2 g} \int_s \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \Delta\phi n \frac{k^2 \sec\theta}{k - K_o \sec^2\theta} \operatorname{sen} \left[k(x-x') \cos\theta \right] \cos \left[k(y-y') \operatorname{sen}\theta \right] \\
 & \quad \cdot \exp \left[-k z' \right] d\theta dk ds \quad (1.19-b)
 \end{aligned}$$

A integração em k pode ser obtida achando-se a parte real da integração complexa, tomando-se contornos correspondentes para $\bar{w} > 0$ e $\bar{w} < 0$. O valor assintótico atrás do hidrofólio

$$\begin{aligned}
 \eta = & - \frac{U K_o^3}{\pi g} \int_s \int_0^{\pi/2} \Delta\phi m \operatorname{sen}\theta \sec^5\theta \cos \left[K_o(x-x') \sec\theta \right] \cdot \\
 & \quad \cdot \operatorname{sen} \left[K_o(y-y') \sec^2\theta \operatorname{sen}\theta \right] \exp \left[-K_o \sec^2\theta z' \right] d\theta ds \\
 & - \frac{U K_o^3}{\pi g} \int_s \int_0^{\pi/2} \Delta\phi n \sec^5\theta \cos \left[K_o(x-x') \sec\theta \right] \cos \left[K_o(y-y') \sec^2\theta \operatorname{sen}\theta \right] \\
 & \quad \cdot \exp \left[-K_o \sec^2\theta z' \right] d\theta ds \quad (1.20-a)
 \end{aligned}$$

e na frente

$$\begin{aligned}
 \eta = & \frac{U K_o^3}{\pi g} \int_s \int_0^{\pi/2} \Delta\phi m \operatorname{sen}\theta \sec^5\theta \cos \left[K_o(x-x') \sec\theta \right] \\
 & \quad \cdot \operatorname{sen} \left[K_o(y-y') \sec^2\theta \operatorname{sen}\theta \right] \exp \left[-K_o \sec^2\theta z' \right] d\theta ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{UK_o^3}{\pi g} \int_s \int_0^{\pi/2} \Delta\phi \, n \sec^5\theta \cos \left[K_o(x-x') \sec\theta \right] \cos \left[K_o(y-y') \sec^2\theta \operatorname{sen}\theta \right] \\
 & \cdot \exp \left[-K_o \sec^2\theta \, z' \right] d\theta ds \qquad (1.20-b)
 \end{aligned}$$

As equações (1.20-a) e (1.20-b) indicam que o valor assintótico da elevação da superfície livre é uma função ímpar. Para que o potencial de velocidades seja solução única, isto é, satisfaça a condição de não propagação de ondas na frente do hidrofólio, devemos adicionar um termo de onda livre ao potencial de velocidades (1.18), baseado nas equações (1.20 - a,b). O valor da elevação relativo a onda livre na frente e atrás do fôlio é

$$\begin{aligned}
 \eta = & - \frac{UK_o^3}{\pi g} \int_s \int_0^{\pi/2} \Delta\phi \, m \operatorname{sen}\theta \sec^5\theta \cos \left[K_o(x-x') \sec\theta \right] \\
 & \cdot \operatorname{sen} \left[K_o(y-y') \sec^2\theta \operatorname{sen}\theta \right] \exp \left[-K_o \sec^2\theta \, z' \right] d\theta ds \\
 & - \frac{UK_o^3}{\pi g} \int_s \int_0^{\pi/2} \Delta\phi \, n \sec^5\theta \cos \left[K_o(x-x') \sec\theta \right] \cos \left[K_o(y-y') \sec^2\theta \operatorname{sen}\theta \right] \\
 & \cdot \exp \left[-K_o \sec^2\theta \, z' \right] d\theta ds \qquad (1.21)
 \end{aligned}$$

o qual cancela (1.20-b) e duplica (1.20-a)

Com a equação (1.21) obtemos.

$$\begin{aligned} \phi_4 = & + \frac{K_0^2}{\pi} \int_s \int_0^{\pi/2} \Delta\phi \, m \, \text{sen}\theta \, \text{sec}^4\theta \, \text{sen} \left[K_0 \, \text{sec}\theta (x-x') \right] \, \text{sen} \left[K_0 (y-y') \, \text{sec}^2\theta \, \text{sen}\theta \right] \\ & \cdot \exp \left[K_0 \, \text{sec}^2\theta (z-z') \right] \, d\theta \, ds \\ & + \frac{K_0^2}{\pi} \int_s \int_0^{\pi/2} \Delta\phi \, n \, \text{sec}^4\theta \, \text{sen} \left[K_0 \, \text{sec}\theta (x-x') \right] \, \cos \left[K_0 (y-y') \, \text{sec}^2\theta \, \text{sen}\theta \right] \\ & \cdot \exp \left[K_0 \, \text{sec}^2\theta (z-z') \right] \, d\theta \, ds \end{aligned} \quad (1.22)$$

Lembrando (1.13) e adicionando (1.22) a (1.18) obtemos a equação do potencial de velocidade completo.

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{4\pi} \int_s \Delta\phi \left[m(y-y') + n(z+z') \right] \frac{1}{R^3} \, ds - \frac{1}{4\pi} \int_s \Delta\phi \left[m(y-y') + n(z-z') \right] \frac{1}{R^{*3}} \, ds \\ & - \frac{K_0}{2\pi^2} \int_s \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta\phi \, m \, \text{sen}\theta \, \text{sec}^2\theta \, \cos \left[k(x-x') \cos\theta \right] \, \text{sen} \left[k(y-y') \, \text{sen}\theta \right] \\ & \cdot \frac{k \exp \left[k(z-z') \right]}{k - K_0 \, \text{sec}^2\theta} \, d\theta \, dk \, ds \end{aligned}$$

$$- \frac{K_0}{2\pi^2} \int_s \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta\phi \, n \, \sec^2\theta \cos \left[k(x-x') \cos\theta \right] \cos \left[k(y-y') \sin\theta \right] \cdot$$

$$\cdot \frac{k \exp \left[k(z-z') \right]}{k - k_0 \sec^2\theta} \, d\theta \, dk \, ds$$

$$+ \frac{K_0^2}{\pi} \int_s \int_0^{\pi/2} \Delta\phi \, m \, \sin\theta \sec^4\theta \sin \left[K_0(x-x') \sec\theta \right] \sin \left[K_0(y-y') \sin\theta \sec^2\theta \right]$$

$$\cdot \exp \left[K_0 \sec^2\theta (z-z') \right] \, d\theta \, ds$$

$$+ \frac{K_0^2}{\pi} \int_s \int_0^{\pi/2} \Delta\phi \, n \, \sec^4\theta \sin \left[K_0(x-x') \sin\theta \right] \cos \left[K_0(y-y') \sin\theta \sec^2\theta \right]$$

$$\cdot \exp \left[K_0 \sec^2\theta (z-z') \right] \, d\theta \, ds \quad (1.23)$$

onde $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}$

$$R^* = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

e $K_0 = g/U^2$

1-3 - Casos Especiais do Potencial de Velocidade

A equação do potencial de velocidade, apresenta-nos dois casos muito importantes quanto as condições de operação, isto é, quanto ao valor do número de Froude.

1-3.1 - Quando K_0 for igual a zero, o que corresponde a número de Froude extremamente alto, a equação (1.23) reduz-se a

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_s \Delta\phi \left[m(y-y') + n(z+z') \right] \frac{1}{R^3} ds - \frac{1}{4\pi} \int \Delta\phi \left[m(y-y') + n(z-z') \right] \frac{1}{R^{*3}} ds \quad (1.24)$$

significando que para esta condição o hidrofólio operando abaixo da superfície livre pode ser substituído por uma distribuição de vórtices representando o fôlio original, mais sua imagem simétrica relativamente a superfície livre não perturbada, a qual funciona como um contorno livre.

1-3.2 - Quando K_0 for infinito, correspondendo a número de Froude muito pequeno, a equação (1.23) reduz-se a

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_s \Delta\phi \left[m(y-y') + n(z+z') \right] \frac{1}{R^3} ds + \frac{1}{4\pi} \int \Delta\phi \left[m(y-y') + n(z-z') \right] \frac{1}{R^{*3}} ds \quad (1.25)$$

entendendo-se que neste caso o hidrofólio pode ser substituído por uma distribuição de vórtices representativo do fôlio original, mais sua imagem especular relativamente a superfície livre não perturbada, a qual age como um contorno sólido.

2. SIMPLIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO DO POTENCIAL DE VELOCIDADE

Como visto anteriormente a equação (1.23) representa o potencial de velocidade para um fôlio operando abaixo da superfície livre, onde o primeiro termo é o potencial para um fôlio num escoamento infinito e o segundo é o potencial da imagem simétrica do fôlio relativamente a superfície livre. De acordo com a equação (1.24), o potencial com apenas os dois primeiros termos é o potencial de velocidade para um fôlio operando a alto número de Froude. Os demais termos da equação (1.23) resultaram do condição de contorno da superfície livre e da condição de radiação, sendo que o terceiro e quarto termos, juntamente com o segundo, representam as condições cinemática e dinâmica da superfície livre. O quinto e sexto são os termos de onda livre, sendo que cancelam a elevação de ondas na frente do fôlio e duplicam a elevação atrás.

2.1. Integração do Terceiro e Quarto Termos

Avaliando a integral em θ pelo método da integral de contorno, o terceiro e quarto termos da equação (1.23), como Apêndice (A), pode ser escrito

$$\phi_3 = - \frac{K_0}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^h \int_0^o \Delta\phi P(K_0/k) \cos(k(x-x')R_1) \sinh(k(y-y')R_2) \exp(k(z-z')) dk dz' dx'$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{K_0 \operatorname{ctg} \beta}{\pi} \int_0^{\infty} \int_h^{h+b} \int_0^{K_0} \Delta \phi \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1}} \cos(k(x-x')R_1) \cosh(k(y-y')R_2) \\
 & \exp(k(z-z')) dk dz' dx'
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

onde

$$\begin{aligned}
 C(K_0/k) &= \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1} \\
 A(K_0/k) &= 2 - \frac{2K_0}{k} + \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1} \\
 R_1 &= \frac{2 - A(K_0/k)}{2C(K_0/k)}
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

$$R_2 = \frac{A(K_0/k)}{2C(K_0/k)}$$

$$P(K_0/k) = \frac{A(K_0/k)}{C(K_0/k) \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1}}$$

2.2 - Redução dos Limites de Integração

Realizando a integração por partes em x' da equação do potencial de velocidade, equação (1.23), onde o terceiro e quarto termos são dados por (1.26), lembrando que $\Delta \phi$ na borda de ataque

é nulo e na esteira de vórtices é constante e igual ao valor na borda de fuga, isto é,

$$\Delta\phi(x'_t) = \int_0^{x'_t} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} dx'$$

$$\Delta\phi(x'=0) = 0$$

a equação do potencial de velocidade, como mostra o Apêndice (B) será

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{x'_t} \int_h^{(h+b)} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \left[1 + \frac{x-x'}{R} \right] \frac{(y-y') - (z+z') \operatorname{ctg}\beta}{(y-y')^2 + (z+z')^2} dz' dx'$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_0^{x'_t} \int_h^{(h+b)} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \left[1 + \frac{x-x'}{R^*} \right] \frac{(y-y') - (z-z') \operatorname{ctg}\beta}{(y-y')^2 + (z'-z)^2} dz dx'$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_0^{x'_t} \int_h^{(h+b)} \int_0^{K_0} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \left[1 + \operatorname{sen} \left[k(x-x') R_1 \right] \right] \operatorname{senh} \left[k(y-y') R_2 \right] \exp \left[k(z-z') \right]$$

$$dk dz' dx'$$

$$+ \frac{\operatorname{ctg}\beta}{2\pi} \int_0^{x'_t} \int_h^{(h+b)} \int_0^{K_0} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \frac{C(K_0/k)}{A(K_0/k)} \left[1 + \operatorname{sen} \left[k(x-x') R_1 \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \cosh \left[k(y-y') R_2 \right] \exp \left[k(z-z') \right] dk dz' dx' \\
 & + \frac{K_0}{\pi} \int_0^{x'_t} \int_h^{(h+b)} \int_0^{\pi/2} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \operatorname{sen} \theta \sec^3 \theta \left[1 - \cos \left[K_0(x-x') \sec \theta \right] \right] \\
 & \operatorname{sen} \left[K_0(y-y') \operatorname{sen} \theta \sec^2 \theta \right] \exp \left[K_0(z-z') \sec^2 \theta \right] d\theta dz' dx' \\
 & - \frac{K_0 \operatorname{ctg} \beta}{\pi} \int_0^{x'_t} \int_h^{(h+b)} \int_0^{\pi/2} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \sec^3 \theta \left[1 - \cos \left[K_0(x-x') \sec \theta \right] \right] \\
 & \cos \left[K_0(y-y') \operatorname{sen} \theta \sec^2 \theta \right] \exp \left[K_0(z-z') \sec^2 \theta \right] d\theta dz' dx' \quad (1.28)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2} \\
 R^* &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \\
 y' &= (-z'+h) \operatorname{ctg} \beta
 \end{aligned} \quad (1.29)$$

e R_1 , R_2 , $A(K_0/k)$ e $C(K_0/k)$ são dadas pelas equações (1.27).

3. ÂNGULO DE ATAQUE INDUZIDO

Com a equação do potencial de velocidade, equação (1.28), obtemos a velocidade induzida,

$$V_n = \frac{\delta\phi}{\delta y} \operatorname{sen}\beta - \frac{\delta\phi}{\delta z} \operatorname{cos}\beta \quad (1.30)$$

que somada vetorialmente com a velocidade do fluxo livre nos dá a velocidade efetiva do mesmo relativamente ao fôlio.

Como mostramos no Apêndice (C), após fazermos as seguintes substituições

$$\begin{aligned} z' &= t' \operatorname{sen}\beta + h \\ z &= -t \operatorname{sen}\beta - h \\ y' &= -t' \operatorname{cos}\beta \\ y &= -t \operatorname{cos}\beta \\ dz' &= dt' \operatorname{sen}\beta \end{aligned} \quad (1.31)$$

obtemos

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{x'} \int_0^s \frac{\delta}{\delta t'} \left[\frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \right] \left[1 + \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (t'-t)^2}}{x-x'} \right] \frac{1}{t'-t} dt' dx' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{x'} \int_0^s \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \frac{(x-x')H(t')}{R^{*3}[G(t,t')]} dt' dx' \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^s \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \left[1 + \frac{x-x'}{R^*} \right] \left[\frac{1}{G(t,t')} - \frac{2H(t')}{[G(t,t')]^2} \right] dt' dx'$$

$$- \frac{\text{sen}(2\beta)}{2\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^s \int_0^{K_0} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \left[1 + \text{sen} \left[k(x-x') R_1 \right] \right] \text{senh} \left[k(t't) \cos \beta R_2 \right]$$

$$\cdot k \exp \left[-k I(t,t') \right] dk dt' dx'$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^s \int_0^{K_0} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \left[\frac{R_2}{2} \text{sen}^2 \beta + \frac{A(K_0/k)}{C(K_0/k)} \cos^2 \beta \right] \left[1 + \text{sen} \left[k(x-x') R_1 \right] \right]$$

$$\cdot \cosh \left[k(t'-t) \cos \beta R_2 \right] k \exp \left[-k I(t',t) \right] dk dt' dx'$$

$$- \frac{K_0^2}{\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^s \int_0^{\pi/2} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \left[\text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta \right] \sec^5 \theta \left[1 - \cos \left[K_0(x-x') \sec \theta \right] \right]$$

$$\cdot \cos \left[K_0(t'-t) \cos \beta \text{sen} \theta \sec^2 \theta \right] \exp \left[-K_0 \sec^2 \theta I(t,t') \right] d\theta dt' dx'$$

(1.32)

onde

$$H(t') = \left[t' \operatorname{sen}(2\beta) + 2h \operatorname{cos}\beta \right]^2$$

$$G(t, t') = t'^2 + t^2 - 2tt' \operatorname{cos}(2\beta) + 4h(t+t') \operatorname{sen}\beta + 4h^2$$

$$I(t, t') = 2h + (t+t') \operatorname{sen}\beta \tag{1.33}$$

$$R^* = \sqrt{(x-x')^2 + G(t, t')}$$

Devido ao campo de velocidades induzidas teremos o ângulo de ataque induzido, o qual é obtido pela relação entre a velocidade induzida, dada pela equação (1.33), e a velocidade de fluxo livre. Deste modo obtemos

$$\alpha_i = \frac{1}{4\pi U} \int_0^{x'_t} \int_0^s \frac{\delta}{\delta t'} \left[\frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \right] \left[1 + \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (t'-t)^2}}{x-x'} \right] \frac{1}{t'-t} dt' dx'$$

$$+ \frac{1}{4\pi U} \int_0^{x'_t} \int_0^s \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \frac{(x-x') H(t')}{R^{*3} [G(t, t')]} dt' dx'$$

$$- \frac{1}{4\pi U} \int_0^{x'_t} \int_0^s \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \left[1 + \frac{x-x'}{R^*} \right] \left[\frac{1}{G(t, t')} - \frac{2H(t')}{[G(t, t')]^2} \right] dt' dx'$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\text{sen}(2\beta)}{2\pi U} \int_0^{x'_t} \int_0^s \int_0^{K_0} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \left[1 + \text{sen} \left[k(x-x')R_1 \right] \right] \text{senh} \left[k(t'-t) \cos \beta R_2 \right] \\
 & \quad \cdot k \exp \left[-k I(t, t') \right] dk dt' dx' \\
 & + \frac{1}{\pi U} \int_0^{x'_t} \int_0^s \int_0^{K_0} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \left[\frac{R_2}{2} \text{sen}^2 \beta + \frac{C(K_0/k)}{A(K_0/k)} \cos^2 \beta \right] \left[1 + \text{sen} \left[k(x-x')R_1 \right] \right] \\
 & \quad \cdot \cosh \left[k(t'-t) \cos \beta R_2 \right] k \exp \left[-k I(t, t') \right] dk dt' dx' \\
 & - \frac{K_0^2}{\pi U} \int_0^{x'_t} \int_0^s \int_0^{\pi/2} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \left[\text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta \right] \sec^5 \theta \left[1 - \cos \left[K_0(x-x') \sec \theta \right] \right] \\
 & \quad \cdot \cos \left[K_0(t'-t) \cos \beta \text{sen} \theta \sec^2 \theta \right] \exp \left[-K_0 \sec^2 \theta I(t, t') \right] d\theta dt' dx'
 \end{aligned}$$

(1.34)

3.1 - Adimensionalização da Equação do Ângulo de Ataque Induzido

Adimensionalizando as variáveis x, x' e t, t' respectivamente a corda \underline{c} e a envergadura \underline{s} de modo a obtermos

$$\begin{aligned}
 x &= \bar{x}c \\
 x' &= \bar{x}'c \\
 t &= \frac{s}{2}(1 - \cos\alpha) \\
 t' &= \frac{s}{2}(1 - \cos\alpha_0) \\
 dt' &= \frac{s}{2} \operatorname{sen}\alpha_0 \\
 AR &= \frac{s}{c} \quad \text{para } c \text{ constante} \\
 F &= \frac{U}{\sqrt{gs}} \quad \text{ou} \quad F^2 = \frac{1}{K_0^5} \quad \text{número de Froude} \\
 k &= \bar{k}K_0
 \end{aligned}
 \tag{1.35}$$

a equação (1.34) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= \frac{1}{2\pi Us} \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\delta}{\delta\alpha_0} \left[\frac{\delta\Delta\phi}{\delta\bar{x}'} \right] \left[1 + \frac{\sqrt{(\bar{x}-\bar{x}')^2 + (AR^2/4)(\cos\alpha - \cos\alpha_0)^2}}{x - x'} \right] \\
 &\quad \cdot \frac{1}{\cos\alpha - \cos\alpha_0} d\alpha_0 d\bar{x}' \\
 &+ \frac{AR^2}{8\pi Uc} \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\delta\Delta\phi}{\delta\bar{x}'} \frac{(\bar{x}-\bar{x}') H(\alpha_0)}{R^{*3} [G(\alpha_0)]} \operatorname{sen}\alpha_0 d\alpha_0 d\bar{x}'
 \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2\pi U s} \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\delta \Delta \phi}{\delta \bar{x}'} \left[1 + \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{R^*} \right] \left[\frac{1}{G(\alpha, \alpha_0)} - \frac{2 H(\alpha_0)}{[G(\alpha, \alpha_0)]^2} \right] \text{sen} \alpha_0 d\alpha_0 d\bar{x}'$$

$$- \frac{K_0 \text{sen}(2\beta)}{4\pi F^2 U} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^1 \frac{\delta \Delta \phi}{\delta \bar{x}'} \left[1 + \text{sen} \left[\frac{\bar{k}(\bar{x} - \bar{x}') R_1}{F^2 A R} \right] \right] \text{senh} \left[\frac{\bar{k}}{2F^2} \cos \beta (\cos \alpha - \cos \alpha_0) R_2 \right]$$

$$\cdot \bar{k} \exp \left[-\frac{\bar{k}}{2F^2} I(\alpha, \alpha_0) \right] \text{sen} \alpha_0 d\bar{k} d\alpha_0 d\bar{x}'$$

$$+ \frac{K_0}{2\pi F^2 U} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^1 \frac{\delta \Delta \phi}{\delta \bar{x}'} \left[\frac{R_2}{2} \text{sen}^2 \beta + \frac{C(1/\bar{k})}{A(1/\bar{k})} \cos^2 \beta \right] \left[1 + \text{sen} \left[\frac{\bar{k}(\bar{x} - \bar{x}') R_1}{F^2 A R} \right] \right]$$

$$\cdot \cosh \left[\frac{\bar{k}}{2F^2} \cos \beta (\cos \alpha - \cos \alpha_0) R_2 \right] \bar{k} \exp \left[-\frac{\bar{k}}{2F^2} I(\alpha, \alpha_0) \right] \text{sen} \alpha_0 d\bar{k} d\alpha_0 d\bar{x}'$$

$$- \frac{K_0}{2\pi F^2 U} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta \bar{x}'} \left[\text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta \right] \sec^5 \theta \left[1 - \cos \left[\frac{(\bar{x} - \bar{x}') \sec \theta}{F^2 A R} \right] \right]$$

$$\cdot \cos \left[\frac{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}{2F^2} \cos \beta \text{sen} \theta \sec^2 \theta \right] \exp \left[\frac{-\sec^2 \theta}{2F^2} I(\alpha, \alpha_0) \right]$$

$$\cdot \text{sen} \alpha_0 d\theta d\alpha_0 d\bar{x}'$$

(1.36)

onde

$$H(\alpha_0) = \left[(1 - \cos\alpha_0) \operatorname{sen}(2\beta) + 4\bar{h} \cos\beta \right]^2$$

$$G(\alpha, \alpha_0) = (1 - \cos\alpha_0)^2 + (1 - \cos\alpha)^2 - 2(1 - \cos\alpha)(1 - \cos\alpha_0) \cos(2\beta) \\ + 8\bar{h}(2 - \cos\alpha - \cos\alpha_0) \operatorname{sen}\beta + 16\bar{h}^2$$

$$R^* = \sqrt{(\bar{x} - \bar{x}')^2 + \frac{AR^2}{4} G(\alpha, \alpha_0)}$$

$$C(1/\bar{k}) = \sqrt{\left(\frac{2}{\bar{k}} - 1\right) - \sqrt{\left(\frac{2}{\bar{k}} - 1\right)^2 - 1}} \quad (1.37)$$

$$A(1/\bar{k}) = 2 - \frac{2}{\bar{k}} + \sqrt{\left(\frac{2}{\bar{k}} - 1\right)^2 - 1}$$

$$R_1 = \frac{2 - A(1/\bar{k})}{2C(1/\bar{k})}$$

$$R_2 = \frac{A(1/\bar{k})}{2C(1/\bar{k})}$$

$$I(\alpha, \alpha_0) = 4\bar{h} + (2 - \cos\alpha - \cos\alpha_0) \operatorname{sen}\beta$$

$$F = \frac{U}{\sqrt{gs}}$$

4. MÉTODO NUMÉRICO

Desde que não existe solução analítica para a equação (1.36), é tentada uma solução numérica. Para a solução numérica da equação (1.36) poderíamos adotar o método da linha de sustentação de Prandtl, no qual a equação do ângulo de ataque induzido seria simplificada considerando alto aspect ratio, implicando basicamente em substituir o fôlio por uma distribuição de vórtices ao longo da envergadura. Deste modo cada secção do fôlio seria tratado pela teoria bidimensional, onde o ângulo de ataque geométrico é substituído pelo ângulo de ataque efetivo devido a contribuição do campo de velocidades induzidas. Este método traria grandes simplificações da equação do ângulo de ataque induzido, tornando o cálculo numérico bastante simples, contudo para baixo aspect ratio e pequeno número de Froude tem-se verificado que sua precisão não é adequada.

Uma melhor representação do fôlio seria o método da superfície de sustentação, onde basicamente este é substituído por uma distribuição de vórtices ao longo da corda e da envergadura. Este método não traz grandes simplificações da equação (1.36), o que significa maior tempo de computação do que o método da linha de sustentação de Prandtl.

Com o intuito de termos menor tempo de computação que o exigido no método da superfície de sustentação, e melhor representação das condições de operação para o fôlio, que a apresentada pelo método da linha de sustentação de Prandtl, adotamos o método da linha de sustentação refinada ou método da superfície de sustentação incompleta. Onde na equação (1.36) fazemos $\bar{x} = 3/4$ e $\bar{x} = 1/4$, o que significa substituir o fôlio por uma distribuição de singularidades ao longo da envergadura, a um quarto de corda da borda de ataque, e impor que a inclinação das linhas de corrente a três quartos de corda da borda de ataque seja igual a do fôlio. Este método tem mostrado razoável precisão quando aplicado a hidrofólios, como mostra K.A.R. Ismail (08).

Sendo a inclinação das linhas de corrente igual ao ângulo de ataque geométrico, temos

$$\alpha_i = \alpha_g \quad (1.38)$$

e a distribuição de singularidades

$$\Gamma(\alpha_o) = \int_0^1 \frac{\delta\Delta\phi}{\delta\bar{x}'} d\bar{x}' \quad (1.39)$$

Feitas estas considerações a equação (1.36) transforma-se em

$$\alpha_g = \frac{1}{2\pi U_s} \int_0^\pi \frac{\delta\Gamma(\alpha_o)}{\delta\alpha_o} \left[1 + \sqrt{1 + AR^2 (\cos\alpha - \cos\alpha_o)^2} \right] \frac{1}{(\cos\alpha - \cos\alpha_o)} d\alpha_o$$

$$+ \frac{AR^2}{2\pi U_c} \int_0^\pi \Gamma(\alpha_o) \frac{H(\alpha_o)}{R^{*3} [G(\alpha, \alpha_o)]} \text{sen}\alpha_o d\alpha_o$$

$$- \frac{1}{2\pi U s} \int_0^\pi \Gamma(\alpha_0) \left[1 + \frac{1}{R^*} \right] \left[\frac{1}{G(\alpha, \alpha_0)} - \frac{2H(\alpha_0)}{[G(\alpha, \alpha_0)]^2} \right] \text{sen} \alpha_0 \, d\alpha_0$$

$$- \frac{K_0 \text{sen}(2\beta)}{4\pi F^2 U} \int_0^\pi \int_0^1 \Gamma(\alpha_0) \left[1 + \text{sen} \left[\frac{\bar{k} R_1}{2F^2 AR} \right] \right] \text{senh} \left[\frac{\bar{k}}{2F} \cos \beta (\cos \alpha - \cos \alpha_0) R_2 \right]$$

$$\cdot \bar{k} \exp \left[-\frac{\bar{k}}{2F^2} I(\alpha, \alpha_0) \right] \text{sen} \alpha_0 \, d\bar{k} \, d\alpha_0$$

$$+ \frac{K_0}{2\pi F^2 U} \int_0^\pi \int_0^1 \Gamma(\alpha_0) \left[\frac{R_2}{2} \text{sen}^2 \beta + \frac{C(1/\bar{k})}{A(1/\bar{k})} \cos^2 \beta \right] \left[1 + \text{sen} \left[\frac{\bar{k} R_1}{2F^2 AR} \right] \right]$$

$$\cosh \left[\frac{\bar{k}}{2F^2} \cos \beta (\cos \alpha - \cos \alpha_0) R_2 \right] \bar{k} \exp \left[-\frac{\bar{k}}{2F^2} I(\alpha, \alpha_0) \right]$$

$$\cdot \text{sen} \alpha_0 \, d\bar{k} \, d\alpha_0$$

$$- \frac{K_0}{2\pi F^2 U} \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \Gamma(\alpha_0) \left[\text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta \right] \sec^5 \theta \left[1 - \cos \left[\frac{\sec \theta}{2F^2 AR} \right] \right]$$

$$\cos \left[\frac{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}{2F^2} \cos \beta \text{sen} \theta \sec^2 \theta \right] \exp \left[-\frac{\bar{k}}{2F^2} I(\alpha, \alpha_0) \right]$$

$$\cdot \text{sen} \alpha_0 \, d\theta \, d\alpha_0$$

(1.40)

Assumindo para a distribuição de circulação, a série de Fourier

$$\Gamma(\alpha_0) = 2Us \sum_{m=1}^{\infty} A_m \text{sen}(m\alpha_0) \quad (1.41)$$

onde m número de pontos de controle e A_m incognitas, podemos escrever a equação final do ângulo de ataque

$$\alpha_g = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} A_m m \cos(m\alpha_0) \left[1 + \sqrt{1 + AR^2 (\cos\alpha - \cos\alpha_0)^2} \right] \frac{1}{\cos\alpha - \cos\alpha_0} d\alpha_0$$

$$+ \frac{AR^2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \text{sen}(m\alpha_0) \frac{H(\alpha_0)}{R^{*3} [G(\alpha, \alpha_0)]} \text{sen}\alpha_0 d\alpha_0$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \text{sen}(m\alpha_0) \left[1 + \frac{1}{R^*} \right] \left[\frac{1}{G(\alpha, \alpha_0)} - \frac{2H(\alpha_0)}{[G(\alpha, \alpha_0)]^2} \right] \text{sen}\alpha_0 d\alpha_0$$

$$- \frac{\text{sen}(2\beta)}{2\pi F^4} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \text{sen}(m\alpha_0) \left[1 + \text{sen} \left[\frac{\bar{k} R_1}{2F^2 AR} \right] \right] \text{senh} \left[\frac{\bar{k}}{2F^2} \cos\beta (\cos\alpha - \cos\alpha_0) R_2 \right]$$

$$\cdot \bar{k} \exp \left[- \frac{\bar{k}}{2F^2} l(\alpha, \alpha_0) \right] \text{sen}\alpha_0 d\bar{k} d\alpha_0$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\pi F^4} \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen}(m\alpha_0) \left[\frac{p}{2} \operatorname{sen}^2 \beta + \frac{c(1/\bar{k})}{A(1/\bar{k})} \cos^2 \beta \right] \left[1 + \operatorname{sen} \left[\frac{\bar{k} R_1}{2 F^2 A R} \right] \right] \\
 & \cdot \cosh \left[\frac{\bar{k}}{2 F^2} \cos \beta (\cos \alpha - \cos \alpha_0) R_2 \right] \bar{k} \exp \left[- \frac{\bar{k}}{2 F^2} I(\alpha, \alpha_0) \right] \operatorname{sen} \alpha_0 d\bar{k} d\alpha_0 \\
 & - \frac{1}{\pi F^4} \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen}(m\alpha_0) \left[\operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta \right] \sec^5 \theta \left[1 - \cos \left[\frac{e c \theta}{2 F^2 A R} \right] \right] \\
 & \cdot \cos \left[\frac{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}{2 F^2} \cos \beta \operatorname{sen} \theta \sec^2 \theta \right] \exp \left[- \frac{\sec^2 \theta}{2 F^2} I(\alpha, \alpha_0) \right] \\
 & \cdot \operatorname{sen} \alpha_0 d\theta d\alpha_0 \tag{1.42}
 \end{aligned}$$

onde $R^* = \sqrt{1 + AR^2 G(\alpha, \alpha_0)}$

e as demais funções são dadas pelas equações (1.37).

4.1. Considerações sobre o Método de Cálculo

Para determinarmos as incógnitas A_m da equação (1.42), escolhamos tantos pontos de controle quantas são as incógnitas, de maneira a obtermos um sistema de equações onde os coeficientes das incógnitas são obtidos por integração numérica.

Na obtenção dos coeficientes das incógnitas A_m , usamos o método de integração de Gauss, onde foram escolhidos polinômios de graus 7 ou 9, dependendo da posição do ponto de controle. Tendo como compromisso a precisão desejada, testamos o programa para diferentes graus do polinômio, chegando a conclusão que os graus 7 e 9 eram adequados, Fig. 2, pois para graus maiores a melhora na precisão implicaria em tempo de computação muito maior ao adotado.

O número de pontos de controle, $m=9$ que dividem o perfil em estações equiangularmente espaçadas, é adotado após testarmos outros valores e concluirmos que este é satisfatório quanto a precisão e tempo de computação. Na Fig. 3, temos a sustentação em função do aspect ratio para vários valores de m sendo que para $m > 9$ os valores começam a superpor-se aos obtidos com $m=7$ e $m=9$, e o tempo de computação torna-se relativamente maior.

5. FORÇAS HIDRODINÂMICAS E COEFICIENTES DE CARGA

Após obtermos os coeficientes da série de Fourier, coeficientes A_m da equação (1.42), o cálculo das forças e dos coeficientes de carga serão facilmente obtidos.

5.1. Coeficiente de sustentação local

Sendo a distribuição de circulação ao longo da envergadura dada pela equação

$$\Gamma(\alpha) = 2Us \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\alpha) \quad (1.41)$$

e o coeficiente de sustentação local é a

$$C_{\ell} = \frac{L(\alpha)}{\frac{1}{2} \rho U^2 c} \quad (1.43)$$

onde $L(\alpha) = \rho U \Gamma(\alpha)$ é a sustentação seccional, podemos escrever o coeficiente seccional como

$$C_{\ell} = 4AR \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\alpha) \quad (1.44)$$

onde $AR = \frac{s}{c}$ para c constante

5.2. Coefficiente de sustentação total

O coeficiente de sustentação total sendo

$$C_L = \frac{L_t}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} \quad (1.45)$$

onde $A = s \cdot c$ e $L_t = \frac{s}{2} \int_0^\pi \rho U^2 (\alpha) \sin \alpha d\alpha$

podemos escrever o coeficiente de sustentação total

$$C_L = \pi AR A_1 \quad (1.46)$$

onde A_1 é o primeiro coeficiente da série de Fourier,

5.3. Arrasto Induzido

O cálculo do arrasto induzido é baseado sobre a avaliação da força de sucção da borda de ataque, o qual é dado por

$$C_{Di} = C_L \alpha - C_S \quad (1.47)$$

onde C_S é o coeficiente de sucção da borda de ataque.

Pela teoria potencial bi-dimensional, temos

$$\frac{ds}{dt'} / \left(\frac{1}{2} \rho U^2 c \right) = \frac{C_L^2}{2\pi} \quad (1.48)$$

Substituindo na equação (1.44)

$$dt' = \frac{1}{2} s \operatorname{sen} \alpha d\alpha$$

e integrando chegamos a

$$C_S = \frac{16AR^2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^2 \frac{m^2}{4m^2 - 1} \quad (1.49)$$

Tendo o coeficiente de sucção C_S , o coeficiente de arrasto induzido pode ser facilmente obtido pela equação (1.47) e o fator de arrasto induzido pela expressão:

$$K^* = \pi AR \frac{C_{Di}}{C_L^2} \quad (1.50)$$

Para a determinação das forças e coeficientes de carga elaboramos o programa de computação na linguagem Fortran IV para o computador DC-PDP-10. Basicamente o programa consta em determinar as incógnitas A_m da equação (1.42), onde seus coeficientes são obtidos pelo método de integração de Gauss. Com número de pontos de controle $m=9$ e graus do polinômio de Gauss $NG=7$ ou 9 a integração ao longo da envergadura é realizada no programa

principal, e a integrações em \bar{k} e θ através das subrotinas XKINT e TINT, respectivamente. Após obtermos a matriz dos coeficientes das incognitas, estas são determinadas através do utilitário IBM, subrotina LLSQ.

Com as incognitas A_m , o coeficiente de sustentação distribuída (equação (1.44)), coeficiente de sustentação total (equação (1.46)), coeficiente de arrasto induzido (equação (1.47)) e fator de arrasto induzido (equação (1.50)) são finalmente determinados como mostra a listagem do programa.

5.4. Programa

```

DIMENSION TG(15,15),GAUS(15,15),CL(20),CAR(5),BH(10)
DIMENSION C(20,20),B(20),A(400),D(20),X(20),FR(10)
DIMENSION IPIV(30),AUX(30)
COMMON/RIN/TG,GAUS,AR,BETA,F,PAI,HB
TG(4,1)=,9681602395
TG(4,2)=,8360311073
TG(4,3)=,6133714327
TG(4,4)=,3242534234
TG(4,5)=0,0
TG(4,6)=TG(4,4)
TG(4,7)=TG(4,3)
TG(4,8)=TG(4,2)
TG(4,9)=TG(4,1)
GAUS(4,1)=,0812743884
GAUS(4,2)=,1806481607
GAUS(4,3)=,2606106964
GAUS(4,4)=,3123470770
GAUS(4,5)=,3302393550
GAUS(4,6)=GAUS(4,4)
GAUS(4,7)=GAUS(4,3)
GAUS(4,8)=GAUS(4,2)
GAUS(4,9)=GAUS(4,1)
TG(1,1)=,9491079123
TG(1,2)=,7415311856
TG(1,3)=,4058451514
TG(1,4)=0,0
TG(1,5)=TG(1,3)
TG(1,6)=TG(1,2)
TG(1,7)=TG(1,1)
GAUS(1,1)=,1294849662
GAUS(1,2)=,2797053915
GAUS(1,3)=,3818300505
GAUS(1,4)=,4179591837
GAUS(1,5)=GAUS(1,3)
GAUS(1,6)=GAUS(1,2)
GAUS(1,7)=GAUS(1,1)
IW=3
IR=2
NC=9
PAI=3,141593
PAS=PAI/FLOAT(NC+1)
F=0,6
2 READ (IR,2) (FR(I),I=1,2)
  FORMAT (2F10,5)
3 READ (IR,3) (BH(J),J=1,7)
  FORMAT (7F10,5)
DO 444 MX=1,6
HB=BH(MX)
DO 99 IZ=1,2
AR=FR(IZ)
DO 333 MR=1,10
BETA=(10,*PAI/180,)*FLOAT(MR=1)
DO 6 M=1,NC

```

```
DO 6 NK=1,NC
CL(M)=0,0
IPIV(M)=0,0
AUX(M)=0,0
X(M)=0,0
B(M)=0,0
6 C(M,NK)=0,0
DO 10 IN=1,NC
T1=FLOAT(IN)*PI
IF (T1=.3) 88,88,89
89 IF (T1=2.8) 91,90,90
90 NS=3
K=4
NG=9
GO TO 21
88 NS=2
K=1
NG=7
GO TO 21
91 NS=1
K=4
NG=9
21 B(IN)=1.
NX=0
DO 10 N=1,NC
JJ=1
NX=N
A1=0,0
B1=T1
TN=N
CFO=2, *AR/(PI*SIN(BETA))
TERMO=CFO*SIN(TN*T1)
TERMO=0,0
15 AB1=.5*(A1+B1)
BA1=.5*(B1-A1)
SUMT=0,0
DO 20 I=1,NG
TO=AB1+BA1*IG(K,I)
CF1=1./PI
ZO=1.-COS(TO)
Z1=1.-COS(T1)
COSD=ZO-Z1
CER1=(AR*COSD)**2,
ER1=(1.+CER1)**.5
S1=CF1*TN*(1.+ER1)*COS(TN*TO)/COSD
C22=1./PI
C21=(AR**2,)/PI
SAL=SIN(TO)*SIN(TN*TO)
FAL=ZO**2,+Z1**2,-2,*Z1*ZO*COS(2,*BETA)+8,*HB*(ZO+Z1)*SIN(BETA)+16
4,*{HB**2,}
ER2=(1.+(AR**2,)*FAL)**.5
CN=(ZO*SIN(2,*BETA)+4,*HB*COS(BETA))**2,
CF22=1./FAL+2,*CN/(FAL**2,)
```

```

CF21=CN/FAL
S21=C21*SAL*CF21/(ER2**3.)
S22=C22*SAL*CF22*(1.+1./ER2)
S2=S21+S22
S1=S1
S2=S2
CALL TINT (T1,TO,N,SUM4)
CALL XKINT(T1,TO,N,SUM3)
ST=S1=S2+SUM3+SUM4
20 SUMT=SUMT+ST*GAUS(K,I)
C(IN,NX)=C(IN,NX)+SUMT*BA1
IF (JJ=1) 10,22,10
22 JJ=2
IF (NS=1) 34,34,36
34 K=4
NG=9
GO TO 39
36 IF (NS=3) 41,38,38
38 K=1
NG=7
GO TO 39
41 K=4
NG=9
39 A1=T1
B1=PAI
GO TO 15
10 C(IN,NX)=C(IN,NX)+TERMO
DO 30 MN=1,NC
DO 30 MI=1,NC
MK=MI+NC*(MN=1)
30 A(MK)=C(MI,MN)
EPS=1,0E=06
M=NC
N=M
L=1
CALL LLSQ (A,B,M ,N ,L,X,IPIV,EPS,IER,AUX)
WRITE (IW,37)
37 FORMAT (15X,21HCOEFICIENTES DA SERIE)
WRITE (IW,31) (X(I),I=1,NC)
31 FORMAT (5X,7(F10,5,2X))
NT=NC
DO 40 J=1,NT
FAS=PAI/FLOAT(NT+1)
T2=FLOAT(J)*FAS
CL(J)=0,0
CST=0,0
D(J)=,5*(1,-COS(T2))
DO 45 KJ=1,NC
RJ=KJ
CST=CST+(16,*AR**2.)*(X(KJ)*RJ)**2./((4,*RJ**2,-1,)*PAI)
45 CL(J)=CL(J)+4,*AR*X(KJ)*SIN(RJ*T2)
40 CONTINUE
WRITE (IW,47)

```

```

47  FORMAT (15X,23HSUSTENTACAO DISTRIBUIDA)
    WRITE (IW,31) (CL(J),J=1,NT)
    WRITE (IW,102)
102  FORMAT (20X,8HPOSICOES)
    WRITE (IW,31) (D(J),J=1,NT)
    CLT=AR*PAI*X(1)
    CDI=CLT=CST
    BKR=PAI*AR*CDI/(CLT**2.)
    WRITE (IW,103)
103  FORMAT (20X,17HSUSTENTACAO TOTAL,5X,3H=AR,9X,2HNC,7X,4HBETA,9X,2HH
5B,8X,1HF)
    BETA=10.*FLOAT(MR=1)
    WRITE (IW,104) CLT,AR,NC,BETA,HB,F
104  FORMAT (20X,2F12,5,7X,15,5X,F10,5,5X,F10,5,5X,F10,5)
    WRITE (IW,109)
109  FORMAT (20X,3HCST,5X,3HCDI,5X,3HKBR)
    WRITE (IW,110) CST,CDI,BKR
110  FORMAT (13X,F10,5,2X,F10,5,2X,F10,5)
    WRITE (IW,108)
108  FORMAT (/92H-----)
5-----)
333 CONTINUE
   99 CONTINUE
444 CONTINUE
    END

```

```

SUBROUTINE XKINT (T1,TO,N,SUM3)
DIMENSION TG(15,15),GAUS(15,15)
COMMON/RIN/TG,GAUS,AR,BETA,F,PAI,HB
K=1
NG=7
SUM3=0.0
IN=N
DO 13 M=1,NG
A2=0.0
B2=1.0
AB2=(A2+B2)*.5
BA2=(B2-A2)*.5
BKB=AB2+BA2*TG(K,M)
Z0=1.-COS(T0)
Z1=1.-COS(T1)
AIA=4.*HB+(Z0+Z1)*SIN(BETA)
CEX=BKB*AIA/(2.*F**2.)
DKB=2./BKB
CKB=DKB-1.
RKB=(CKB**2.-1.)**.5
CK=(CKB+RKB)**.5
AK=2.-DKB+RKB
R1=(2.-AK)/(2.*CK)
R2=AK/(2.*CK)
T1K=R2*(SIN(BETA))**2.+(2.*CK*(COS(BETA))**2.)/AK
COSD=Z0-Z1
CTH=(BKB*R2*COSD*COS(BETA))/(2.*F**2.)
CTH=CTH

```

```

CS=(BKB*R1)/(2,*AR*F**2,)
C31=1/(PAI*(F**4,))
C32=C31/2,
EXD=CTH=CEX
EXS=CTH+CEX
PES=.5*(EXP(EXD)-EXP(-EXS))
PEC=.5*(EXP(EXD)+EXP(-EXS))
SAL=SIN(TN*TO)*SIN(TO)
F31=SIN(BETA)*COS(BETA)
S32=C32*PEC*SAL*(1,+SIN(CS))*F1K*BKB
S31=C31*PES*SAL*F31*(1,+SIN(CS))*BKB
S31=S31
13 SUM3=SUM3=(S31+S32)*GAUS(K,M)
SUM3=SUM3*BA2
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE TINT (T1,TO,N,SUM4)
DIMENSION TG(15,15),GAUS(15,15)
COMMON/RIN/TG,GAUS,AR,BETA,F,PAI,HB
K=1
NG=7
SUM4=0,0
TN=N
DO 14 M=1,NG
A3=0,0
B3=.5*PAI
AB3=(A3+B3)*.5
BA3=(B3-A3)*.5
TET=AB3+BA3*TG(K,M)
Z1=1,-COS(T1)
Z0=1,-COS(TO)
AIA=4,*HB+(Z0+Z1)*SIN(BETA)
SEC=1,/COS(TET)
CEX=(AIA*SEC**2,)/(2,*(F**2,))
IF (CEX=75,.)20,21,21
21 S41=0,0
GO TO 14
20 EX=1,/EXP(CEX)
COSD=Z0-Z1
CCO=SEC/(2,*AR*F**2,)
AIT=(COSD*COS(BETA)*SIN(TET)*SEC**2,)/(2,*(F**2,))
C41=1/(PAI*F**4,))
SAL=SIN(TO)*SIN(TN*TO)
CT2=(SIN(BETA)*SIN(TET))**2,+(COS(BETA))**2,
S41=(SEC**5,)*C41*SAL*(=1,+COS(CCO))*COS(AIT)*EX*CT2
14 SUM4=SUM4+S41*GAUS(K,M)
SUM4=SUM4*BA3
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE LLSQ (A,B,M,N,L,X,IPIV,EPS,IER,AUX)
DIMENSION A(1),B(1),X(1),IPIV(1),AUX(1)
IF(M=N)30,1,1
1 PIV=0,
  IEND=0
  DO 4 K=1,N
    IPIV(K)=K
    H=0,
    IST=IEND+1
    IEND=IEND+M
    DO 2 I=IST,IEND
2 H=H+A(I)*A(I)
    AUX(K)=H
    IF(H=PIV)4,4,3
3 PIV=H
    KPIV=K
4 CONTINUE
    IF(PIV)31,31,5
5 SIG=SQRT(PIV)
    TOL=SIG*ABS(EPS)
    LM=L*M
    IST=M
    DO 21 K=1,N
      IST=IST+M+1
      IEND=IST+M=K
      I=KPIV=K
      IF(I)8,8,6
6 H=AUX(K)
      AUX(K)=AUX(KPIV)
      AUX(KPIV)=H
      ID=I*M
      DO 7 I=IST,IEND
        J=I+ID
        H=A(I)
        A(I)=A(J)
7 A(J)=H
8 IF(K=1)11,11,9
9 SIG=0,0
    DO 10 I=IST,IEND
10 SIG=SIG+A(I)*A(I)
    SIG=SQRT(SIG)
    IF(SIG-TOL)32,32,11
11 H=A(IST)
    IF(H)12,13,13
12 SIG==SIG
13 IPIV(KPIV)=IPIV(K)
    IPIV(K)=KPIV
    BETA=H+SIG
    A(IST)=BETA
    BETA=1./(SIG*BETA)
    J=N+K
    AUX(J)=SIG
    IF(K=N)14,19,19

```

```

14 PIV=0,0
   ID=0
   JST=K+1
   KPIV=JST
   DO 13 J=JST,N
   ID=ID+M
   H=0,0
   DO 15 I=IST,IEND
   II=I+ID
15 H=H+A(I)*A(II)
   H=BETA*H
   DO 16 I=IST,IEND
   II=I+ID
16 A(II)=A(II)-A(I)*H
   II=IST+ID
   H=AUX(J)=A(II)*A(II)
   AUX(J)=H
   IF(H=PIV)18,18,17
17 PIV=H
   KPIV=J
18 CONTINUE
19 DO 21 J=K,LM,M
   H=0,0
   IEND=J+M-K
   II=IST
   DO 20 I=J,IEND
   H=H+A(II)*B(I)
20 II=II+1
   H=BETA*H
   II=IST
   DO 21 I=J,IEND
   B(I)=B(I)-A(II)*H
21 II=II+1
   IER=0
   I=N
   LN=L*N
   PIV=1,0/AUX(2*N)
   DO 22 K=N,LN,N
   X(K)=PIV*B(I)
22 I=I+M
   IF(N=1)26,26,23
23 JST=(N-1)*M+N
   DO 25 J=2,N
   JST=JST-M-1
   K=N+N+1=J
   PIV=1,0/AUX(K)
   KST=K=N
   ID=IPIV(KST)=KST
   IST=2=J
   DO 25 K=1,L
   H=B(KST)
   IST=IST+N
   IEND=IST+J-2

```

```
II=JST
DO 24 I=IST,IEND
II=II+M
24 H=H-A(II)*X(I)
I=IST-1
II=I+ID
X(I)=X(II)
X(II)=PIV*H
25 KST=KST+M
26 IST=N+1
IEND=0
DO 29 J=1,L
IEND=IEND+M
H=0.0
IF(M=N)29,29,27
27 DO 28 I=IST,IEND
28 H=H+B(I)*B(I)
IST=IST+M
29 AUX(J)=H
RETURN
30 IER=2
RETURN
31 IER=-1
RETURN
32 IER=K-1
RETURN
END
```

6. DISCUSSÕES

6.1. Efeito da variação do número de Froude

A influência do número de Froude sobre a sustentação pode ser analisada considerando dois casos típicos, hidrofólios verticais e próximos da vertical, e hidrofólios horizontais e próximos da horizontal. No primeiro caso, Figs. 4,5 e 6, a medida que aumenta-se o número de Froude a sustentação atinge um ponto máximo, diminuindo em seguida, enquanto no segundo caso, Figs. 7 e 8, quando o número de Froude varia de 0.0 a 0.6, a sustentação total tem um valor mínimo e a seguir um máximo. Estes resultados podem ser explicados como consequência do sistema físico de imagem representado pela equação (1.23), onde o primeiro e segundo termos podem ser representados respectivamente pelo sistema de vórtices representativo do fólio original e sua imagem simétrica na superfície livre, enquanto os demais termos da equação (1.23) podem ser representados pela distribuição de vórtices sobre a superfície livre. Assim quando temos número de Froude infinito o sistema de imagem reduz-se ao sistema de vórtices originais mais a imagem de mesmo sentido na superfície livre, ou raciocinando em termos do número de ondas K_0 , teremos ondas de baixa amplitude e comprimento grande, o que aumenta a pressão do lado de sucção com consequente diminuição da sustentação. Para número de Froude zero, o sistema de imagem reduz-se aos vórtices originais mais a imagem própria na superfície livre, ou em termos do número de ondas K_0 , teremos este muito grande, significando ondas de alta amplitude, equações (1.20) e (1.21), e pequeno comprimento, implicando na diminuição da pressão do lado de sucção e consequente aumento da sustentação. Para número de Froude intermediário aos casos $F = 0$ e $F = \infty$ o aumento ou diminuição da sustentação depende da altura e forma das ondas na superfície, as quais variam com a posição relativa entre o fólio e a superfície livre. Esta influência ficaria mais clara se analisássemos, através das equações (1.20) e (1.21), a elevação da superfície livre para as diferentes condições de operação.

Maiores detalhes da influência do número de Froude so-

bre a sustentação, pode ser visto pela distribuição da sustentação ao longo da envergadura, valores estes resultantes da influência da superfície livre nas diferentes secções, ao longo da corda. Deste modo as Figs. 9, 10 e 11 mostram a influência do número de Froude sobre a sustentação distribuída para fôlio vertical, as Figs. 12 e 13 para fôlio próximo da vertical e as Figs. 14 e 15 para fôlios próximos da horizontal. Sendo que para fôlio vertical o efeito da superfície livre fica mais concentrado na região superior, implicando em maior sustentação para número de Froude pequeno e menor para número de Froude alto, sobre o mesmo fôlio. Já para fôlio próximo da horizontal e horizontal este efeito é maior e distribuído ao longo da envergadura. Através da Fig. 15 podemos notar a acentuada influência do número de Froude, sendo que para $F = 0.0$ a sustentação apresenta-se bem maior que $F = \infty$ ou $F = 0.6$, com concentração na extremidade próxima da superfície livre.

Quanto ao arrasto induzido, a influência do número de Froude é tal que para valores deste onde a sustentação total apresenta valor máximo ou mínimo teremos arrasto induzido mínimo ou máximo respectivamente, como mostra a Fig. 16. Estes resultados podem ser justificados, considerando que quando temos sustentação total máxima, esta é devida a alta sucção na borda de ataque a qual provoca valores maiores do coeficiente de sucção, diminuindo o valor do coeficiente de arrasto induzido, como nota-se pela equação (1.47). Do mesmo modo a variação do fator de arrasto induzido K^* em função do número de Froude para fôlio vertical (Figs. 17 e 18) e próximo da vertical, Fig. 19, podem ser justificados lembrando que estes são resultados das ondas formadas na superfície livre. Como consideramos na discussão dos valores da sustentação total, a forma destas ondas é dependente da posição relativa entre o fôlio e superfície livre, o que leva a termos variação do fator de arrasto induzido para fôlio horizontal e próximo da horizontal (Fig. 20 e 21), diferente dos valores para fôlio vertical e próximo da vertical, aliados aos valores do coeficiente de sucção.

Na Fig. 22 comparamos nossos resultados com os experimentais, observando-se razoável concordância quando temos fôlio

operando verticalmente.

6.2. Efeito da profundidade de submersão

Como notamos através dos resultados obtidos, os valores da sustentação total em função da profundidade para fôlio horizontal (Figs. 23 e 24) e próximo da horizontal (Figs. 25 e 26) é análogo a variação para fôlio vertical e próximo (Figs. 27 e 28). No entanto para fôlio horizontal e próximo da horizontal esta variação com a profundidade é mais acentuada que para fôlio vertical e próximo, sendo a sustentação, para $F = 0.0$, decrescente com o aumento da profundidade e para $F = \infty$ e $F = 0.6$ crescente. Tendo a ressaltar que para profundidades menores que 0.5 a influência da superfície livre é maior do que para maiores profundidades. Para profundidades maiores que 1.0 o valor da sustentação tende ao valor aerodinâmico, o que era previsto.

As variações da sustentação total com a profundidade, acima mencionados, são justificados se considerarmos o sistema físico de imagem representado pela equação (1.23). Para $F = \infty$ ($K_0 = 0.0$) a equação (1.23) fica reduzida aos dois primeiros termos que podem ser representados pelo sistema de vórtices representativos do fôlio mais a imagem destes de mesmo sentido na superfície livre, implicando na diminuição da sustentação ao diminuirmos a profundidade, pois a distância dos vórtices imagem relativamente aos originais diminuem, provocando aumento das pressões no lado de sucção. Para $F = 0.0$ ($K_0 = \infty$) a equação (1.23) reduz-se a equação (1.25) e esta pode ser representada pelo sistema de vórtices representativos do fôlio mais a imagem destes de sentido oposto na superfície livre, que ao diminuirmos a profundidade haverá maior interação entre os vórtices originais e imagem no sentido de aumentar a sustentação. Para número de Froude intermediário a equação (1.23) pode ser representada pelo sistema físico de imagem formado pelo sistema de vórtices representativos do fôlio, a imagem destes de mesmo sentido e distribuição de vórtices sobre a superfície livre. Deste modo ao diminuirmos a profundidade do fôlio, estaremos aumentando a interação entre vórtices originais, imagem e vórtices na superfície livre, que tem

como consequência o aumento ou diminuição da sustentação dependem do do valor do número de Froude intermediário.

Sendo a sustentação total resultado da ação da superfície livre nas diferentes secções do fôlio, pela distribuição de carga ao longo da envergadura podemos notar como se processa esta influência. Considerando $F = \infty$, para fôlio próximo da horizontal, Figs. 29 e 30, verificamos que quanto menor for a profundidade maior é o achatamento da distribuição de carga. Enquanto para inclinações maiores do fôlio, relativamente a superfície livre, Fig. 31, a mudança na distribuição de carga ao variarmos a profundidade é menos acentuada devido a menor parte do fôlio estar exposta a superfície livre. Quando temos $F = 0.0$ a diminuição da profundidade provoca distribuição maiores de carga, sendo os picos tanto maiores quanto menor a profundidade, como verifica-se nas Figs. 32, 33 e 34 (fôlio próximo da horizontal) e Fig. 35 (fôlio próximo da vertical). Notando-se que a variação da distribuição com a profundidade é significativa para fôlio horizontal e próximos da horizontal, e menores para fôlio vertical e próximo da vertical, o mesmo acontecendo para $F = 0.6$, Fig. 36.

Os valores obtidos para o fator de arrasto induzido K^* em função da profundidade de submergência, Figs. 23 a 28, podem ser justificadas se considerarmos a equação (1.47), e lembrarmos que o coeficiente de sucção, para um mesmo valor da sustentação total, poderá ser maior ou menor se o valor máximo da distribuição de carga ao longo da corda ocorrer a menor ou maior distância da borda de ataque. Assim para profundidades pequenas, $\bar{h} < 0.5$, a influência da superfície livre sobre o fator de arrasto induzido é maior do que para profundidades maiores que este valor. Sendo que para $F = \infty$ e $F = 0.6$ o fator de arrasto induzido diminui com o aumento da profundidade, ocorrendo o contrário para $F = 0.0$.

Na Fig. 37 comparamos os valores da sustentação em função da profundidade com resultados experimentais, verificando-se razoável concordância para profundidades não muito pequenas. As discrepâncias notadas para profundidades pequenas são justificadas pelas equações linearizadas que usamos, as quais não representam suficientemente as condições de operação para tais profundidades.

Se usarmos o método da superfície de sustentação, na qual o $f_{\bar{o}}$ lio é substituído por uma distribuição de vórtices ao longo da envergadura e da corda, esperamos que a concordância melhore.

Ao compararmos os valores da sustentação total em função da profundidade por nós obtidos, com valores obtidos por Milward, Fig. 38, nota-se razoável discordância. Esta discordância é motivada, por este autor usar o método da linha de sustentação para alto aspect ratio, o qual superestima a sustentação relativamente aos valores experimentais.

6.3. Efeito do ângulo diédrico

O efeito do ângulo diédrico sobre a sustentação total é resultado das diferentes elevações da superfície para cada ângulo. Assim para um determinado valor do número de Froude o comprimento de onda é fixo, mas a elevação da superfície livre é variável com o ângulo diédrico, como podemos notar pelas equações (1.20) e (1.21), onde $m = \sin\beta$ e $n = -\cos\beta$. Como mostra a Fig. 39, quanto menor o ângulo diédrico, maior é a influência da superfície livre, pois maior parte do perfil fica sujeito a esta influência. Considerando $F = \infty$, para ângulos variando entre 0 e 50 graus, a variação do coeficiente de sustentação é mais acentuada que para ângulos maiores, sendo a sustentação tanto menor quanto menor o ângulo de inclinação (Figs. 39 a 41), pois neste caso a elevação da superfície livre é pequena e o comprimento das ondas grande. Para $F = 0.0$ temos elevação da superfície livre grande com comprimento de onda pequeno, provocando sustentações totais tanto maior quanto menor o ângulo diédrico, ocorrendo variações maiores para $\beta < 50^{\circ}$ (Figs. 39 a 41). Pela Fig. 42, $F = 0.6$, verificamos que a variação da sustentação com o ângulo diédrico é menor que nos casos $F = 0.0$ e $F = \infty$.

A influência do ângulo diédrico sobre a sustentação total, torna-se mais evidente quando analisamos a distribuição de carga sobre a envergadura pelo fato da primeira ser consequência da influência da superfície livre sobre a distribuição de carga. Pelas Figs. 43 a 44, que nos fornecem a distribuição de carga

para $F = \infty$, verifica-se que o fato da variação da sustentação total ser maior para variações de β menor que 50 graus, é devido a redução da sustentação distribuída em maior parte do perfil, enquanto para ângulos maiores esta diminuição concentra-se na extremidade próxima a superfície livre. Para $F = 0.0$, Figs. 45 a 47, o motivo da sustentação total apresentar maiores variações para $\beta < 50^\circ$ é devido aos picos provocados pela superfície livre sobre a carga distribuída, sendo estes tanto maiores quanto menor β , enquanto para valores do $\beta > 50^\circ$ o efeito da superfície livre concentra-se em menor parte do fôlio, provocando menores sustentações totais, que para $\beta < 50^\circ$. As Figs. 46 e 47 nos mostram que quanto menor a profundidade maior é a influência de β . Para valores do número de Froude intermediário a $F = 0.0$ e $F = \infty$, Fig. 48, a influência do ângulo diédrico sobre a distribuição de carga é menor que para os casos limites ($F = 0.0$ e $F = \infty$).

Da variação da sustentação total e de sua posição relativamente a borda de ataque quando variamos o ângulo diédrico, poderíamos prever a variação do fator de arrasto induzido mostrado nas Figs. 40, 41, 49 e 50. Deste modo para $F = \infty$ (Figs. 40, 41 e 49) a medida que aumentamos o ângulo diédrico o fator de arrasto induzido diminui, pois o aumento da sucção relativamente a sustentação é maior. Para $F = 0.0$ (Figs. 40, 41 e 49) teremos o contrário, para ângulo pequeno teremos alto coeficiente de sucção provocado pela alta sustentação próxima a borda de ataque implicando em baixo valor de K^* , enquanto para ângulos maiores teremos baixo coeficiente de sucção e conseqüentemente maior valor de K^* . Sendo que para número de Froude intermediário a $F = 0.0$ e $F = \infty$ (Figs. 40, 41 e 50), a variação do fator de arrasto induzido pode ser analogamente justificada.

Na Fig. 51 temos a comparação dos nossos resultados com os resultados obtidos por Ashley, Windall e Landahl. Notando-se que para ângulos pequenos o nosso método subestima os valores da sustentação total, enquanto para ângulos maiores estes são superestimados relativamente ao método usado por Ashley, Windall e Landahl. Estes, estudando aerofólio diédrico próximo a uma superfície sólida, usam o método da superfície de sustentação não plana. Que consiste basicamente em substituir o aerofólio por uma

distribuição de vórtices ao longo da envergadura e corda, mais a imagem destes de sentido contrário relativamente a superfície sólida, o que representa melhor as condições de operação. Tal método se aplicado ao nosso problema traria grandes complicações devido aos termos adicionais representativos do efeito da superfície livre, daí o motivo de não o adotarmos aliados ao fato de os resultados apresentados pelo nosso método serem satisfatórios.

6.4. Efeito do Aspect Ratio

O efeito do aspect ratio pode ser explicado se considerarmos o sistema físico de imagem representado pela equação (1.23), onde o primeiro termo pode ser representado pelo sistema de vórtices representativos do fólio original e o segundo sua imagem na superfície livre não perturbada de mesmo sentido. Os demais termos podem ser interpretados como a distribuição de vórtices na superfície livre. Deste modo a medida que aumentamos o aspect ratio as perturbações do fluxo devido a superfície livre é maior na parte central, decrescendo na direção das extremidades do fólio. Assim para $F = \infty$, Figs. 52 e 53, a medida que aumentamos AR o efeito da superfície livre diminui, aumentando a sustentação, e para $F = 0.0$ este efeito manifesta-se no sentido de diminuir a sustentação com o aumento de AR, o mesmo acontecendo para valores do número de Froude intermediário a zero e infinito. Em particular para fólio vertical, Fig. 54, ao aumentarmos AR o valor da sustentação tende ao valor aerodinâmico, devido ao efeito da superfície livre concentrar-se na extremidade superior.

Pelo motivo da influência da superfície livre sobre a sustentação diminuir com o aumento de AR, esta influência sobre o arrasto induzido ou fator de arrasto induzido também diminuirá, como mostra as Figs. 52, 53 e 55. Sendo que para $F = \infty$ e $F = 0.6$, fólio horizontal, o fator de arrasto induzido diminui com o aumento de AR, ocorrendo o contrário para $F = 0.0$. Quando o fólio é vertical ou próximo, o fator de arrasto induzido diminui com o aumento de AR para qualquer valor de F devido a forma das on-

das da superfície propiciarem tal comportamento.

O efeito de AR é comparado com resultados experimentais extraídos de comunicações particulares recebidas por K.A.R. Ismail onde notamos razoável concordância, Figs. 56 e 57. A medida que o aspect ratio diminui a concordância com os resultados experimentais diminui, devido as simplificações do método não serem válidas quando o aspect ratio torna-se pequeno. Este fato fica mais claro quando comparamos a distribuição de carga com a obtida por Gumieiro, usando o método da superfície de sustentação, que é mais precisa, Figs. 58 e 59, e com a obtida por Millward, usando o método da linha de sustentação para alto aspect ratio, que é menos preciso que o método da linha de sustentação refinada Fig. 60.

7. CONCLUSÕES

As conclusões mais importantes deste estudo são:

1 - A variação da sustentação total com o número de Froude para fôlio vertical e próximo da vertical difere da variação para fôlio horizontal e próximo da horizontal. Sendo que para fôlio horizontal e próximo da horizontal a influência da superfície livre é maior que para fôlio vertical e próximo da vertical, existindo um número de Froude crítico onde a sustentação é máxima. Abaixo do valor crítico a diminuição do número de Froude diminui a sustentação, o mesmo ocorrendo quando aumentamos o número de Froude acima do valor crítico.

O fator de arrasto induzido com a variação do número de Froude, apresenta comportamento semelhante ao da sustentação total, exceto que para sustentação máxima ou mínima teremos respectivamente fator de arrasto induzido mínimo ou máximo.

2 - O efeito da profundidade de submergência é no sentido de aumentar ou diminuir a sustentação total. Para número de Froude pequeno, a medida que diminuimos a profundidade a sustentação aumenta, e para número de Froude alto esta diminui. Para profundidades pequenas e número de Froude baixo nota-se desvios razoáveis dos resultados experimentais, motivados pelas equações linearizadas e o método da linha de sustentação refinada não representam adequadamente estas condições de operação. No entanto estes resultados apresentam-se mais precisos que os obtidos por outros autores usando o método da linha de sustentação de Prandtl.

3 - Dependendo do ângulo diédrico teremos maior ou menor sustentação, ou fator de arrasto induzido. Assim para número de Froude pequeno, o aumento do ângulo diédrico leva a uma diminuição da sustentação total e aumento do fator de arrasto induzido. Para número de Froude alto, aumentando o ângulo diédrico tem-se um aumento da sustentação total e diminuição do fator de arrasto induzido.

4. Hidrofólios de pequeno aspect ratio são mais suscetíveis a influência da superfície livre. Sendo que para número de Froude alto, aumentando-se AR temos aumento de

$$\left. \frac{dC_L}{d\alpha} / \frac{dC_L}{d\alpha} \right)_{\bar{h}=\infty}$$

ocorrendo o contrário para número de Froude pequeno. Em particular para fôlio vertical a sustentação tende ao valor aerodinâmico quando AR aumenta, para qualquer valor do número de Froude. Verificando-se que para valores de AR moderados e altos o método usado apresenta resultados adequados, enquanto para valores de AR pequenos os resultados divergem dos experimentais.

BIBLIOGRAFIA

- (01) ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, A.I.. Handbook of Mathematical Functions. New York, Dover Publications, Inc., 1965.
- (02) ASHLEY, H. and LANDAHL, M.. Aerodynamics of Wings and Bodies. New York, Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1965.
- (03) ASHLEY, H., WINDALL, S. and LANDAHL, M.T.. New Direction in Lifting Surface Theory. AIAA Journal, 3; January 1965.
- (04) BISPLINGHOFF, R.L., ASHLEY, H., and HALFMAN, R.L.. Aeroelasticity. Massachusetts, Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1955.
- (05) BRESLIN, J.P.. "The Wave and Induced Drag of a Hydrofoil of Finite Span in Water of Limited Depth." J.Ship Res., 5: 15-21, 1961.
- (06) BRESLIN, J.P.. Application of Ship Wave Theory to the Hydrofoil of Finite Span. Stevens Inst. Tech., Note 380, 1956.
- (07) CHURCHILL, R.V.. Complex Variables and Applications. Tokio, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1948.
- (08) ISMAIL, K.A.R.. A critical Evaluation of Computational Methods Applied to Hydrofoil. XXVI Reunião Anual da SBPC, Recife, 1974.
- (09) ISMAIL, K.A.R.. Theoretical and Numerical Study of Surface Piercing Hydrofoils. XXVI Reunião Anual da SBPC, Recife, 1974.
- (10) ISMAIL, K.A.R., and AL-SHAIKH-ALI, K.. Unsteady Three Dimensional Source Below a Free Surface. Iraque, Mosul University - R 7303, May, 1973.
- (11) KAPLAN, P., BRESLIN, J.P., and JACOBS, W.R.. "Evaluation of the Theory for the Flow Pattern of Hydrofoil of Finite Span". Stevens Inst. Tech. - Rept. No. 561, 1955.
- (12) KIM, W.D.. On the Hydrofoil of Finite Aspect Ratio Moving at Finite Froude Number. Boring Sc. Res. Lab. Tech. Mem. - No. 38, 1965.
- (13) LAMB, H.. Hydrodynamics. New York, Dover Publications, Inc. Sixth Edition, 1945.

- (14) MILLWARD, A.. The Induced Drag of a vertical Hydrofoil. Ph.D. Thesis, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Southampton University, 1967.
- (15) MILNE-THOMSON, L.M.. Theoretical Aerodynamics. New York, Macmillan, 1966.
- (16) NISHIYAMA, T.. Lifting Line Theory of the Submerged Hydrofoil of Finite Span-Part 1. Journal of American Soc. of Naval Eng., August, 1959.
- (17) NISHIYAMA, T.. Lifting Line Theory of Submerged Hydrofoil of Finite Span - Part 2. Journal of American Soc. of Naval Eng. November, 1959.
- (18) NISHIYAMA, T.. Lifting Line Theory of Submerged Hydrofoil of Finite Span - Part 3, Journal of American Soc. of Naval Eng., 71: 153 - 158, 1960.
- (19) NISHIYAMA, T.. Lifting Line Theory of Submerged Hydrofoil of Finite Span - Part 4. Journal of American Soc. of Naval Eng., 71: 353 - 361, 1960.
- (20) NISHIYAMA, T.. Hydrodynamical Investigation on the Submerged Hydrofoil - Part 1. Journal of American Soc. of Naval Eng., August, 1958.
- (21) NISHIYAMA, T.. Hydrodynamical Investigation on the Submerged Hydrofoil - Part 2. Journal of American Soc. of Naval Eng., November, 1958.
- (22) NISHIYAMA, T.. Hydrodynamical Investigation of the Submerged Hydrofoil - Part 3. Journal of American Soc. of Naval Eng., February, 1959.
- (23) NISHIYAMA, T.. Experimental Investigation of the Effect of Submergence Depth Upon the Hydrofoil Section Characteristics. J.Soc. Naval Arch. Japan, 105: 7 - 21, 1959.
- (24) NISHIYAMA, T.. A Method for Obtaining profile form of the Submerged Hydrofoil with Prescribed Pressure Distribution. J.Soc. Naval Arch. Japan, 99: 1 - 6, 1956.
- (25) NISHIYAMA, T.. A Calculating Method for Characteristics of the Submerged Hydrofoil, J.Soc. Naval Arch. Japan, 102: 171 - 178, 1957.

- (26) STOKER, J.J.. Water Waves. New York, Interscience Publishers, Inc., 1957.
- (27) TIJONOV, A. and SAMARSKY, A.. Ecuaciones de la Fisica Matematica, Moscou, Editorial Mir, 1972.
- (28) WU, T.Y.. A Theory for Hydrofoils of Finite Span. J. Appl. Math. Mech., 24: 478 - 490, 1960.
- (29) YIH, C.. Fluid Mechanics. New York, McGraw-Hill Book Company, 1969.
- (30) YIH, C.. Advances in Applied Mechanics. New York and London, Academic Press, 1973.

A P Ê N D I C E A

INTEGRAÇÃO EM θ DO TERCEIRO TERMO DO POTENCIAL DE VELOCIDADE

Da equação (1.23), tomamos os termos

$$\phi_3 = - \frac{K_0}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_h^{(h+b)} \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta\phi \operatorname{sen}\theta \sec^2\theta \cos \left[k(x-x') \cos\theta \right] .$$

$$. \operatorname{sen} \left[k(y-y') \operatorname{sen}\theta \right] \frac{k \exp \left[k(z-z') \right]}{k - K_0 \sec^2\theta} d\theta dk dz' dx'$$

$$+ \frac{K_0 \operatorname{ctg} \beta}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_h^{(h+b)} \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta\phi \sec^2\theta \cos \left[k(x-x') \cos\theta \right] .$$

$$. \cos \left[k(y-y') \operatorname{sen}\theta \right] \frac{k \exp \left[k(z-z') \right]}{k - K_0 \sec^2\theta} d\theta dk dz' dx'$$

(A.1)

onde substituímos $n = -\cos\beta$, $m = \operatorname{sen}\beta$ e $ds = dz' dx' / \operatorname{sen}\beta$

Lembrando que o integrando é função par e mudando os limites de integração em θ , podemos escrever

$$\phi_3 = - \frac{K_0}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_h^{(h+b)} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \Delta\phi \cos\theta \csc^2\theta \cos \left[k(x-x') \operatorname{sen}\theta \right] \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sen} \left[k(y-y') \cos\theta \right] \frac{k \exp \left[k(z-z') \right]}{K - K_0 \csc^2\theta} d\theta dk dz' dx'$$

$$+ \frac{K_0 \operatorname{ctg}\beta}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_h^{(h+b)} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \Delta\phi \csc^2\theta \cos \left[k(x-x') \operatorname{sen}\theta \right] \cdot$$

$$\cdot \cos \left[k(y-y') \cos\theta \right] \frac{k \exp \left[k(z-z') \right]}{k - K_0 \csc^2\theta} d\theta dk dz' dx'$$

(A.2)

A.1 - Integração do Segundo Termo da Equação (A.2)

$$\phi_{32} = \frac{K_0 \operatorname{ctg}\beta}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_h^{(h+b)} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \Delta\phi \csc^2\theta \cos \left[k(x-x') \operatorname{sen}\theta \right] \cos \left[k(y-y') \cos\theta \right]$$

$$\frac{k \exp \left[k(z-z') \right]}{k - K_0 \csc^2\theta} d\theta dk dz' dx' \quad (A.3)$$

Após mudarmos a variável de integração θ para a variável complexa Z , tal que

$$Z = \exp(i\theta)$$

obtemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i} \frac{Z^2 - 1}{Z}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = -\frac{1}{4} \left(\frac{Z^2 - 1}{Z} \right)^2$$

$$\operatorname{cos}\theta = \frac{1}{2} \frac{Z^2 + 1}{Z}$$

e a equação (A.3) pode ser escrita como

$$\phi_{32} = \operatorname{Real} \left\{ + \frac{K_0 \operatorname{ctg}\beta}{\pi^2} \int_0^\infty \int_h^{(h+b)} \int_0^\infty \phi \Delta\phi i \frac{Z \cos[k(x-x')V_1(Z)] \cos[k(y-y')V_2(Z)]}{\left[Z^4 - 2Z^2 \left(1 - \frac{2K_0}{k} \right) + 1 \right]} \cdot \exp[k(z-z')] dZ dk dz' dx' \right\} \quad (\text{A-4})$$

onde

$$V_1(Z) = \frac{1}{2i} \frac{Z^2 - 1}{Z}$$

$$V_2(Z) = \frac{1}{2} \frac{Z^2 + 1}{Z}$$

Escolhendo o contorno de integração em Z como sendo a circunferência de raio unitário e centrada na origem, teremos diferentes polos de interesse para $k < K_0$ ou $k > K_0$. Assim dependendo dos valores assumidos para k, pelo teorema da integral de contorno de Cauchy, obteremos:

$$\oint F(Z) dz = 2\pi i \sum_{Z \rightarrow ai} \left\{ \text{Res } F(Z) \right\} + \pi i \sum_{Z \rightarrow bi} \left\{ \text{Res } F(Z) \right\} \quad (\text{A.5})$$

onde ai são os polos internos e bi os polos sobre o contorno de integração, sendo F(Z) o integrando da equação (A.4).

A.1.1 - Valor da integral para $k < K_0$

Para $k < K_0$ a equação (A.4) possui os seguintes polos

$$Z'_1 = i \sqrt{\left(\frac{2K_0}{k} - 1\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1}$$

$$Z''_1 = -Z'_1$$

$$Z'_2 = i \sqrt{\left(\frac{2K_0}{k} - 1\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1}$$

(A.6)

$$Z''_2 = -Z'_2$$

Sendo Z'_1 e Z''_1 polos internos ao contorno de integração e os demais externos, de acordo com a equação (A.5) obtemos

$$\phi_{32} = \frac{\text{ctg}\beta}{\pi} \int_0^\infty \int_h^{(h+b)K_0} \int_0^{K_0} \Delta\phi \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1}} \cos\left[k(x-x')R_1\right] \cosh\left[k(y-y')R_2\right] \cdot \exp\left[k(z-z')\right] dk dz' dx' \quad (\text{A.7})$$

onde

$$C(K_0/k) = \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1}$$

$$A(K_0/k) = 2 - \frac{2K_0}{k} + \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1}$$

$$R_1 = \frac{2 - A(K_0/k)}{2 C(K_0/k)}$$

$$R_2 = \frac{A(K_0/k)}{2 C(K_0/k)}$$

que é o valor da equação (A.3) para $k < K_0$

A.1.2 - Valor da Integral para $K > K_0$

Para $k > K_0$ a equação (A.4) apresenta os polos

$$Z'_1 = \exp \left[i(\phi/2 + n\pi) \right]$$

$$Z''_1 = -Z'_1$$

$$Z'_2 = \exp \left[-i(\phi/2 + n\pi) \right] \quad (A.8)$$

$$Z''_2 = -Z'_2$$

$$Z_3 = 1$$

$$Z'_3 = -1$$

onde

$$n = 0,1$$

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2}}{1 - \frac{2K_0}{k}} \right]$$

estando estes localizados sobre o contorno de integração, concluímos que para $k > K_0$ o valor da equação (A-3) é nulo, após usarmos a equação (A.5). Assim concluímos

$$\begin{aligned} \phi_{32} = & - \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\pi} \int_0^\infty \int_h^{(h+b)} \int_0^{K_0} \Delta \phi \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1}} \cos \left[k(x-x') R_1 \right] \cosh \left[k(y-y') R_2 \right] \\ & \cdot \exp \left[k(z-z') \right] dk dz' dx' \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde

$$C(K_0/k) = \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1}$$

$$A(K_0/k) = 2 - \frac{2K_0}{k} + \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1}$$

$$R_1 = \frac{2 - A(K_0/k)}{2 C(K_0/k)}$$

$$R_2 = \frac{A(K_0/k)}{2 C(K_0/k)}$$

A.2 - Integração do Primeiro Termo da Equação (A.2)

$$\begin{aligned} \phi_{31} = & - \frac{K_0}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_h^{(h+b)} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \Delta\phi \cdot \cos\theta \csc^2\theta \cos \left[k(x-x') \operatorname{sen}\theta \right] \\ & \cdot \operatorname{sen} \left[k(y-y') \cos\theta \frac{k \exp \left[k(z-z') \right]}{k - K_0 \csc^2\theta} d\theta dk dz' dx' \right. \end{aligned} \quad (A.10)$$

que após mudarmos a variável de integração θ para a complexa Z , análogo ao item A.1, obtemos

$$\begin{aligned} \phi_{31} = \operatorname{Real} \left\{ \frac{K_0}{\pi^2} \int_0^\infty \int_h^{(h+b)} \int_0^\infty \phi \Delta\phi \frac{2(Z^2+1) \cos \left[k(x-x') V_1(Z) \right] \operatorname{sen} \left[k(y-y') V_2(Z) \right]}{\left[Z^4 - 2Z^2 \left(1 - \frac{2K_0}{k} \right) + 1 \right]} \right. \\ \left. \cdot \exp \left[k(z-z') \right] dZ dk dz' dx' \right\} \end{aligned} \quad (A.11)$$

onde
$$V_1(Z) = \frac{1}{2i} \frac{Z^2 - 1}{Z}$$

$$V_2(Z) = \frac{1}{2} \frac{Z^2 + 1}{Z}$$

na qual a integral de linha será avaliada para $k < K_0$ e $k > K_0$, análogo ao procedimento anterior.

A.2.1 - Valor da integral para $k < K_0$

Para $k < K_0$ a equação (A.10) possui os polos dados pelas equações (A.6), sendo Z'_1 e Z''_1 os polos que contribuirão no valor da integral de acordo com a equação (A.5), obtendo portanto para $k < K_0$

$$\phi_{31} = - \frac{K_0}{2\pi} \int_0^\infty \int_h^{(h+b) \frac{K_0}{k}} \int_0^{K_0} \Delta\phi P(K_0/k) \cos \left[k(x-x') R_1 \right] \sinh \left[k(y-y') R_2 \right] \cdot \exp \left[k(z-z') \right] dk dz' dx' \quad (A.12)$$

onde

$$R_1 = \frac{2 - A(K_0/k)}{2 C(K_0/k)}$$

$$R_2 = \frac{A(K_0/k)}{2 C(K_0/k)} \qquad P(K_0/k) = \frac{A(K_0/k)}{C(K_0/k) \sqrt{(1 - \frac{2K_0}{k})^2 - 1}}$$

que é o valor da equação (A.10) para $k < K_0$.

A.2.2 - Valor da Integral para $k > K_0$

A equação (A.11) apresenta os mesmos polos de (A.4) e análogo ao Item (A.1.2), após manipulações algébricas concluímos que o seu valor para $k > K_0$ é nulo

A.3 - Valor Final do Terceiro Termo do Potencial de velocidade

De acordo com as equações (A.9) e (A.12) podemos escrever

$$\phi_3 = - \frac{K_0}{2\pi} \int_0^\infty \int_h^{(h+b) K_0} \int_0^{K_0} \Delta\phi P(K_0/k) \cos \left[k(x-x') R_1 \right] \sinh \left[k(y-y') R_2 \right] \cdot \exp \left[k(z-z') \right] dk dz' dx'$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{K_0 \operatorname{ctg} \beta}{\pi} \int_0^{\infty} \int_h^{(h+b)} \int_0^{K_0} \Delta \phi \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1}} \cos \left[k(x-x') R_1 \right] \cosh \left[k(y-y') R_2 \right] \\
 & \cdot \exp \left[k(z-z') \right] dk dz' dx' \quad (A.13)
 \end{aligned}$$

onde

$$c(K_0/k) = \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1}$$

$$A(K_0/k) = 2 - 2 \frac{K_0}{k} + \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1}$$

$$R_1 = \frac{2 - A(K_0/k)}{2 c(K_0/k)}$$

$$R_2 = \frac{A(K_0/k)}{2 c(K_0/k)}$$

$$P\left(\frac{K_0}{k}\right) = \frac{A(K_0/k)}{c(K_0/k) \sqrt{\left(1 - \frac{2K_0}{k}\right)^2 - 1}}$$

A P Ê N D I C E B

REDUÇÃO DOS TERMOS DO POTENCIAL DE VELOCIDADES

B.1 - Primeiro Termo

Da equação (1.23)

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi} \int_s \Delta\phi \left[m(y-y') + n(z+z') \right] \frac{1}{R} ds$$

ou

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_h^{(h+b)} \Delta\phi \left[m(y-y') + n(z+z') \right] \frac{1}{R^3} \frac{dz'}{\text{sen}\beta} dx' \quad (\text{B.1})$$

onde $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}$

Integrando por partes em relação x' obtemos

$$\phi_1 = - \frac{1}{4\pi} \int_h^{(h+b)} \left[\Delta\phi \frac{x-x'}{[(y-y')^2 + (z+z')^2] R} \right]_{x'=0}^{x'=\infty} \left[m(y-y') + n(z+z') \right] \frac{dz'}{\text{sen}\beta} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_h^{(h+b)} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \frac{(x-x') \left[m(y-y') + n(z+z') \right]}{[(y-y')^2 + (z+z')^2]} \cdot \frac{1}{R} \frac{dz'}{\text{sen}\beta} dx'$$

(B.2)

sendo

$$\Delta\phi (x' = 0) = 0$$

$$\Delta\phi (x' \rightarrow \infty) = \Delta\phi(x'_t) = \int_0^{x'_t} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} dx' \quad (B.3)$$

$$\lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{x - x'}{(y-y')^2 + (z+z')^2} \frac{1}{R} = - \frac{1}{(y-y')^2 + (z+z')^2}$$

$$n = - \cos\beta$$

$$m = \sin\beta$$

a equação (B.2), levando em conta que $\frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} = 0$ na esteira de vórtices, transforma-se em

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{x'_t} \int_h^{(h+b)} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \left[1 + \frac{x-x'}{R} \right] \frac{(y-y') - (z+z') \operatorname{ctg}\beta}{(y-y')^2 + (z+z')^2} dz' dx' \quad (A.4)$$

onde x'_t é a coordenada da borda de fuga.

B.2 - Segundo Termo

Da equação (1.23)

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi} \int_s \Delta\phi \left[m(y-y') + n(z-z') \right] \frac{1}{R^{*3}} ds$$

ou

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_h^{(h+b)} \Delta\phi \left[m(y-y') + n(z-z') \right] \frac{1}{R^{*3}} \frac{dz'}{\text{sen}\beta} dx' \quad (\text{B.5})$$

onde

$$R^* = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

Análogo ao item anterior obtemos

$$\phi_2 = - \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_h^{(h+b)} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \left[1 + \frac{x-x'}{R^*} \right] \frac{(y-y') - (z-z') \text{ctg}\beta}{(y-y')^2 + (z'-z)^2} dz' dx'$$

(B.6)

B.3 - Terceiro Termo

Da equação (A.13)

$$\phi_3 = - \frac{K_o}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^h \int_0^{h+b} \Delta\phi P(K_o/k) \cos \left[k(x-x') R_1 \right] \sinh \left[k(y-y') R_2 \right] \exp \left[k(z-z') \right] dk dz' dx'$$

$$+ \frac{K_o \operatorname{ctg} \beta}{\pi} \int_0^\infty \int_0^h \int_0^{h+b} \Delta\phi \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2K_o}{k}\right)^2 - 1}} \cos \left[k(x-x') R_1 \right] \cosh \left[k(y-y') R_2 \right] \exp \left[k(z-z') \right] dk dz' dx'$$

(A.13)

Tomando a integral

$$I_1 = \int_0^\infty \Delta\phi \cos \left[k(x-x') R_1 \right] dx'$$

e integrando por partes obtemos

$$I_1 = \Delta\phi \int_0^{x'} \cos \left[k(x-x'_o) R_1 \right] dx'_o \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \left[\int_0^{x'_t} \cos \left[k(x-x'_o) R_1 \right] dx'_o \right] dx'$$

ou

$$I_1 = \Delta\phi(x'_t) \int_0^{\infty} \cos k(x-x'_0)R_1 dx'_0 - \int_0^{x'_t} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \left[\int_0^{x'} \cos \left[k(x-x'_0)R_1 \right] dx'_0 \right] dx'$$

(B.7)

pois $\Delta\phi(x'_\ell) = 0$ e $\frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} = 0$ na esteira de vórtices.

Considerando

$$\int_0^{\infty} \cos \left[k(x-x'_0)R_1 \right] dx'_0 \text{ e fazendo as seguintes mudanças}$$

de variáveis

$$t = k(x-x'_0)R_1$$

$$dx'_0 = \frac{dt}{kR_1}$$

$$p = -t$$

obtemos

$$\int_0^{\infty} \cos \left[k(x-x'_0)R_1 \right] dx'_0 = \frac{1}{kR_1} \left[\int_0^{\infty} \cos p dp + \int_0^{kR_1 x} \cos t dt \right]$$

Substituindo o integrando do primeiro termo da equação

anterior pela seguinte série de Bessel

$$\cos p = J_0(p) - 2 J_2(p) + 2 J_4(p) - 2 J_6(p) + \dots$$

obtemos

$$\int_0^{\infty} \cos \left[k(x-x'_0) R_1 \right] dx' = \frac{1}{kR_1} \left[1 + \operatorname{sen}(kR_2 x) \right] \quad (\text{B.8})$$

Após substituirmos (B.8) em B.7) e lembrando que

$$\Delta \phi(x'_t) = \int_0^{x'_t} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} dx'$$

podemos escrever

$$I_1 = \frac{1}{kR_1} \int_0^{x'_t} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \left[1 + \operatorname{sen} \left[k(x-x') R_1 \right] \right] dx' \quad (\text{B.9})$$

Com a equação (B.9) a equação (A.13) transforma-se em:

$$\phi_3 = - \frac{1}{4\pi} \int_0^{x'_t} \int_h^{h+b} \int_0^{K_0} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \left[1 + \operatorname{sen} \left[k(x-x') R_1 \right] \right] \operatorname{senh} \left[k(y-y') R_2 \right] \exp \left[k(z-z') \right] dk dz' dx'$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\operatorname{ctg} \beta}{2\pi} \int_0^{x'} \int_0^{h+b} \int_0^{K_0} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \frac{C(K_0/k)}{A(K_0/k)} \left[1 + \operatorname{sen} \left[k(x-x') R_1 \right] \right] \\
 & \cosh \left[k(y-y') R_2 \right] \exp \left[k(z-z') \right] dk dz' dx' \quad (B.10)
 \end{aligned}$$

B.4.- Quarto Termo

Tomando os dois últimos termos da equação (1.23) e substituindo

$$m = \operatorname{sen} \beta$$

$$n = -\operatorname{cos} \beta$$

$$ds = dz (dx' / \operatorname{sen} \beta)$$

temos

$$\phi_4 = \frac{K_0^2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{h+b} \int_0^{\pi/2} \Delta \phi \operatorname{sen} \theta \sec^4 \theta \operatorname{sen} \left[k_0(x-x') \sec \theta \right]$$

$$\operatorname{sen} \left[K_0(y-y') \operatorname{sen} \theta \sec^2 \theta \right] \exp \left[K_0(z-z') \sec^2 \theta \right] d\theta dz' dx'$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{K_o^2 \operatorname{ctg} \beta}{\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^h \int_0^{\pi/2} \Delta \phi \sec^4 \theta \operatorname{sen} \left[K_o (x-x') \sec \theta \right] \\
 & \cos \left[K_o (y-y') \operatorname{sen} \theta \sec^2 \theta \right] \exp \left[K_o (z-z') \sec^2 \theta \right] d\theta dz' dx' \quad (B.11)
 \end{aligned}$$

Considerando

$$I_2 = \int_0^{x'_t} \Delta \phi \operatorname{sen} \left[K_o (x-x') \sec \theta \right] dx'$$

e procedendo de modo análogo ao item (B.3) obtemos

$$\begin{aligned}
 \phi_4 &= \frac{K_o}{\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^h \int_0^{\pi/2} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \operatorname{sen} \theta \sec^3 \theta \left\{ 1 - \cos \left[K_o (x-x') \sec \theta \right] \right\} \\
 & \operatorname{sen} \left[K_o (y-y') \operatorname{sen} \theta \sec^2 \theta \right] \exp \left[K_o (z-z') \sec^2 \theta \right] d\theta dz' dx' \\
 & - \frac{K_o \operatorname{ctg} \beta}{\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^h \int_0^{\pi/2} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \sec^3 \theta \left\{ 1 - \cos \left[K_o (x-x') \sec \theta \right] \right\} \\
 & \cos \left[K_o (y-y') \operatorname{sen} \theta \sec^2 \theta \right] \exp \left[K_o (z-z') \sec^2 \theta \right] d\theta dz' dx' \quad (B.12)
 \end{aligned}$$

A P E N D I C E C

EQUAÇÃO DAS VELOCIDADES INDUZIDAS

Da equação do potencial de velocidade (1.29), determinamos a velocidade induzida a qual é obtida por

$$V_n = \frac{\delta\phi}{\delta y} \text{sen}\beta - \frac{\delta\phi}{\delta z} \text{cos}\beta \quad (\text{C.1})$$

C.1. Velocidade Induzida pelo Primeiro Termo

Tomando o primeiro termo da equação (1.29) e derivando relativamente a y e z, substituindo na equação (C.1) e fazendo as seguintes mudanças de variáveis

$$z = -h - t\text{sen}\beta$$

$$z' = h + t\text{sen}\beta$$

$$y = t\text{cos}\beta$$

$$y' = t'\text{cos}\beta$$

(C.2)

obtemos

$$V_{n1} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^s \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \left[1 + \frac{x-x'}{R} \right] \frac{1}{(t'-t)^2} dt' dx' \quad (\text{C.3})$$

A equação anterior apresenta singularidade de segunda ordem em t , integrando por partes em t' reduzimos esta singularidade para a primeira, obtendo

$$V_{n1} = - \frac{1}{4\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^s \frac{\delta}{\delta t'} \left[\frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \right] \left[1 + \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (t'-t)^2}}{x-x'} \right] \frac{1}{t'-t} dt' dx' \quad (C.4)$$

C.2. Equação da Velocidade Induzida

Derivando os demais termos da equação (1.29), análogo ao item anterior, obtemos as velocidades induzidas que acrescentando a velocidade induzida pelo primeiro termo nos fornece:

$$\begin{aligned} V_n = & \frac{1}{4\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^s \frac{\delta}{\delta z'} \left[\frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \right] \left[1 + \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (t'-t)^2}}{x-x'} \right] \frac{1}{(t-t')} dt' dx' \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^s \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \frac{(x-x') H(t')}{R^{*3} [G(t, t')]} dt' dx' \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^s \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \left[1 + \frac{x-x'}{R^*} \right] \left[\frac{1}{G(t, t')} - \frac{2H(t')}{[G(t, t')]^2} \right] dt' dx' \\ & - \frac{\text{sen}(2\beta)}{4\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^s \int_0^{K_0} \frac{\delta \Delta \phi}{\delta x'} \left\{ 1 + \text{sen} \left[k(x-x') R_1 \right] \right\} \text{senh} \left[k(t-t') \cos \beta R_2 \right] \\ & \cdot k \exp \left[-k l(t, t') \right] dk dt' dx' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^s \int_0^{K_0} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \left[R_2 \operatorname{sen}^2\beta + \frac{2C(K_0/k)}{A(K_0/k)} \cos^2\beta \right] \left\{ 1 + \operatorname{sen} \left[k(x-x')R_1 \right] \right\} \\
 & \cdot \cosh \left[k(t'-t) \cos\beta R_2 \right] k \exp \left[-k l(t, t') \right] dk dt' dx' \\
 & - \frac{K_0^2}{\pi} \int_0^{x'_t} \int_0^s \int_0^{\pi/2} \frac{\delta\Delta\phi}{\delta x'} \left[\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta \right] \sec^5\theta \left\{ 1 - \cos \left[K_0(x-x') \sec\theta \right] \right\} \\
 & \cdot \cos \left[K_0(t'-t) \cos\beta \operatorname{sen}\theta \sec^2\theta \right] \exp \left[-K_0 \sec^2\theta l(t, t') \right] \\
 & \cdot d\theta dt' dx' \tag{C.5}
 \end{aligned}$$

onde

$$R^* = \sqrt{(x-x')^2 + G(t, t')}$$

$$H(t') = \left[t' \operatorname{sen}(2\beta) + 2h \cos\beta \right]^2$$

$$G(t, t') = t'^2 + t^2 - 2tt' \cos(2\beta) + 4h(t+t') \operatorname{sen}\beta + 4h^2$$

$$l(t, t') = 2h + (t+t') \operatorname{sen}\beta$$

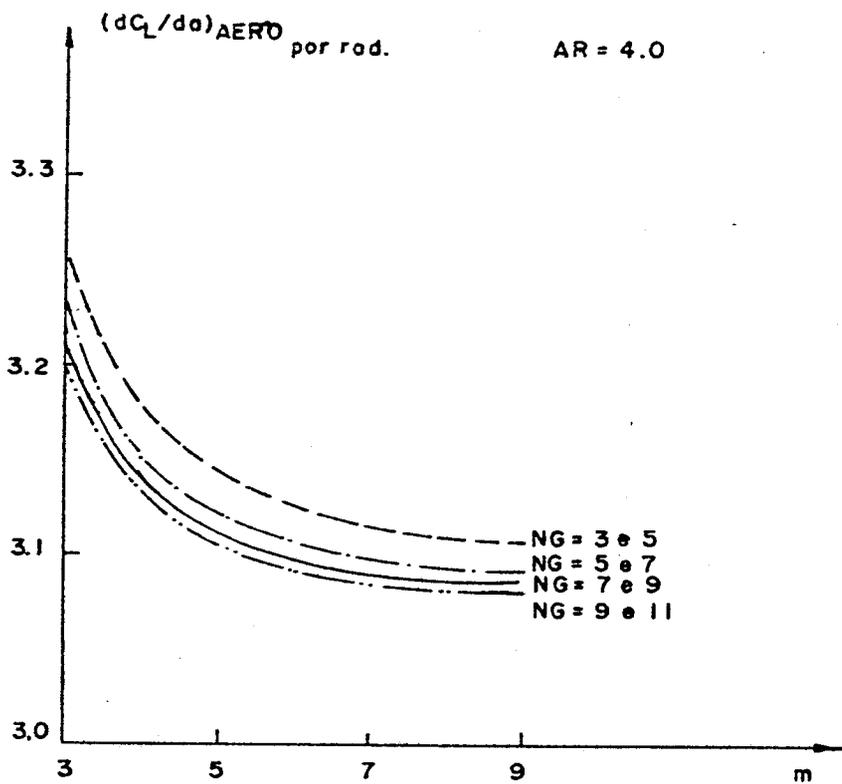


FIG. 2 INFLUENCIA DO GRAU DO POLINOMIO

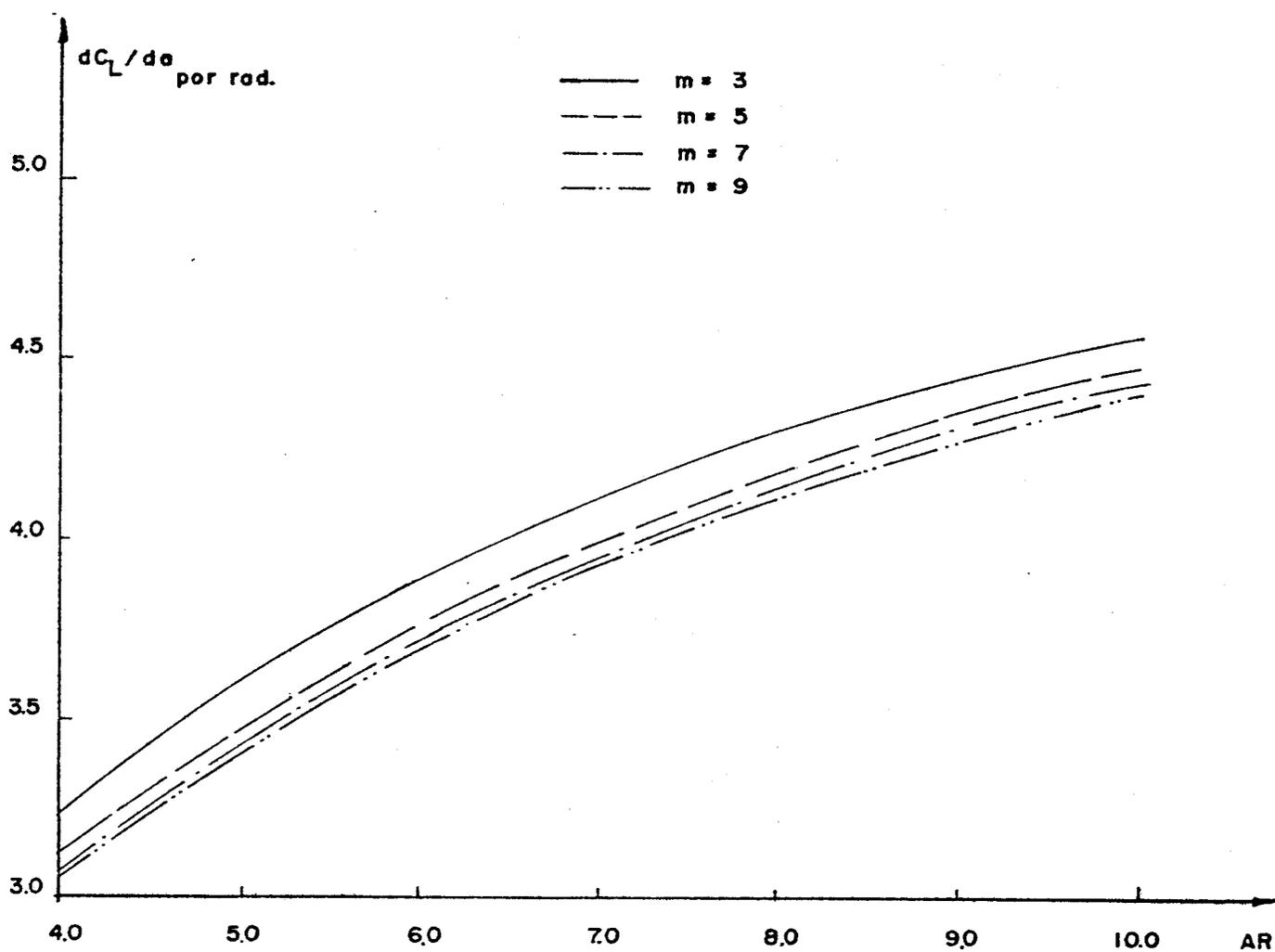
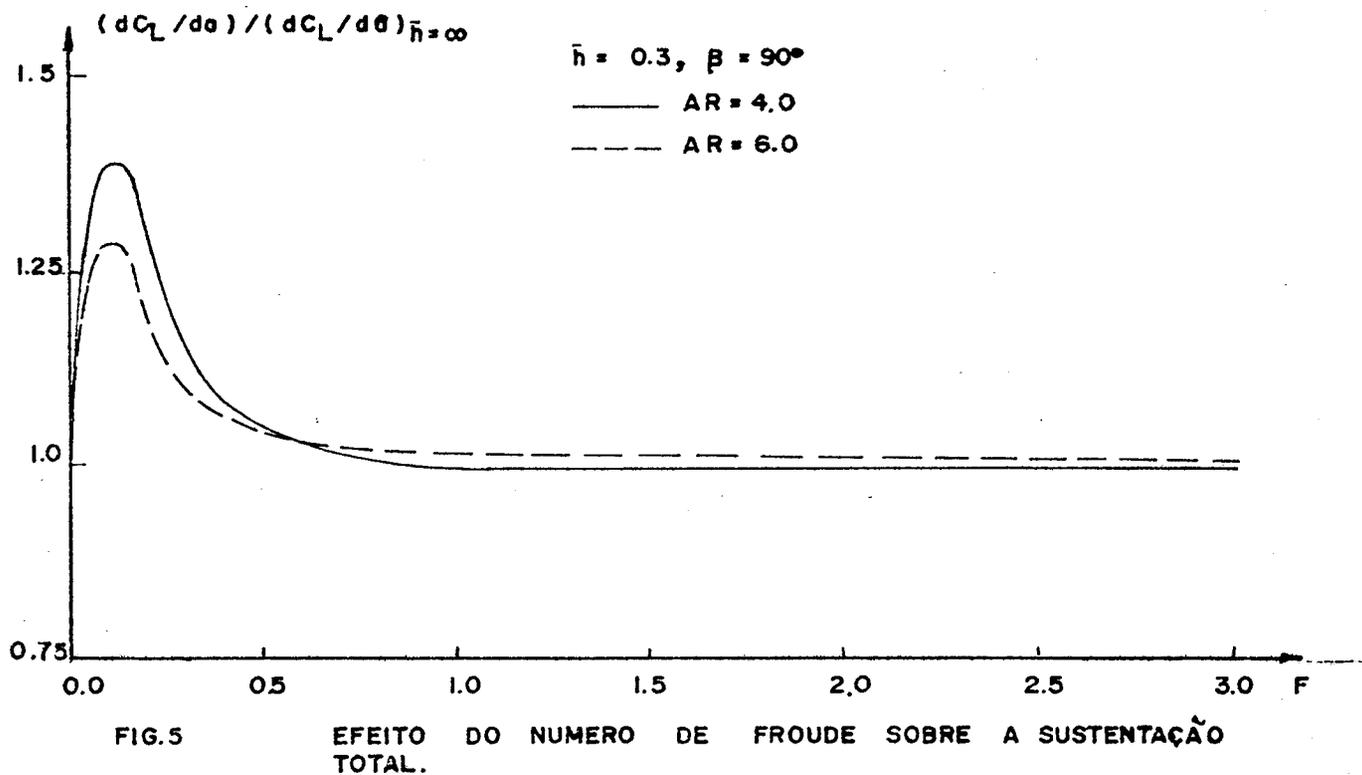
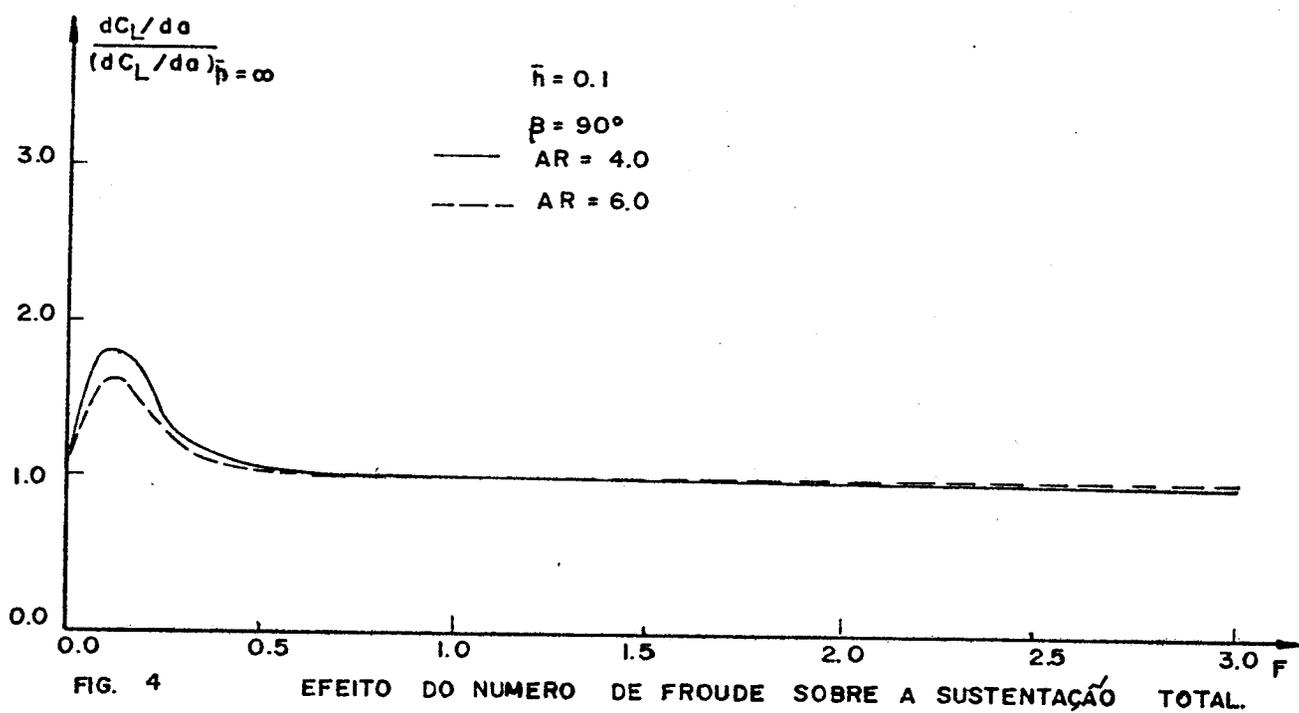


FIG. 3 INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE PONTOS DE CONTRÔLE



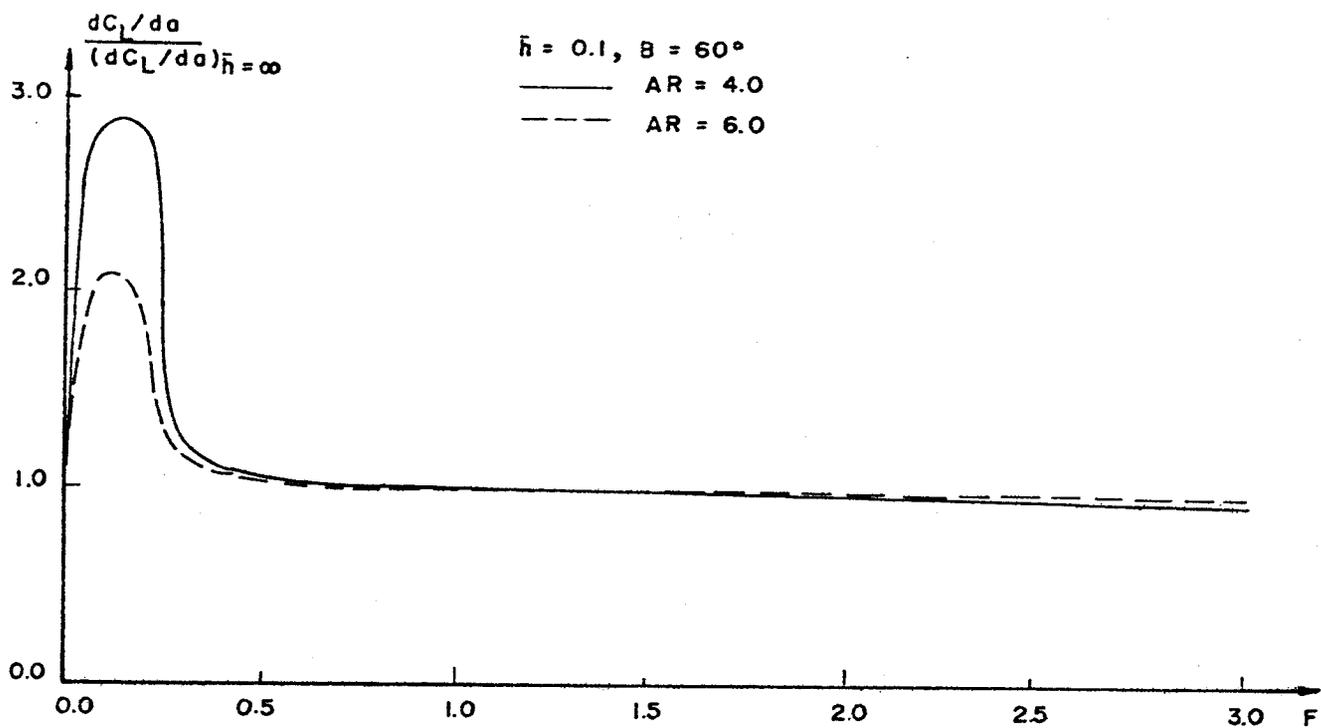


FIG. 6 EFEITO DO NUMERO DE FROUDE SOBRE A SUSTENTACAO TOTAL.

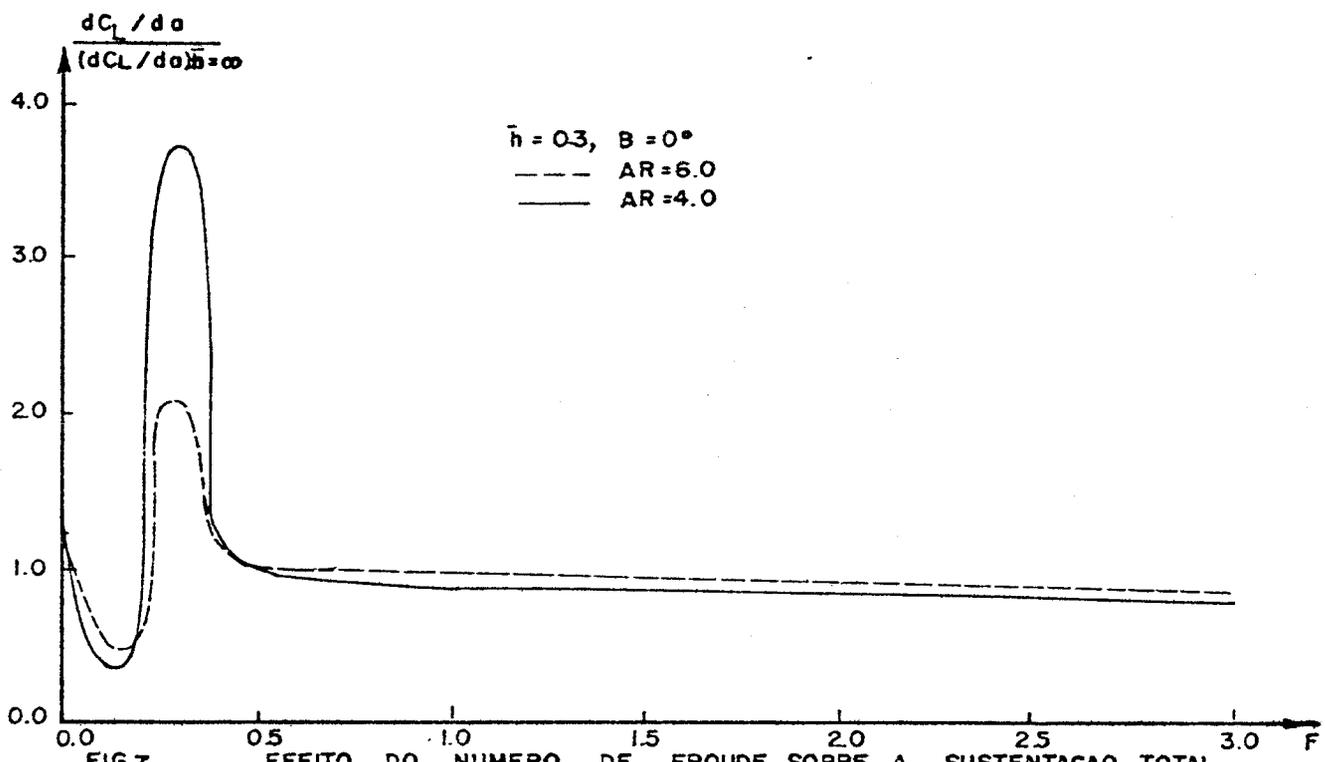
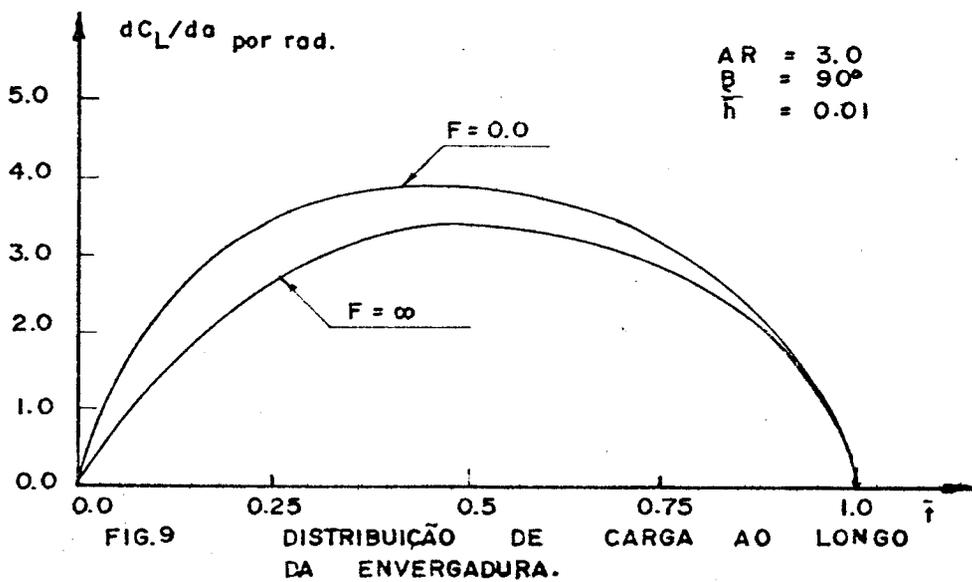
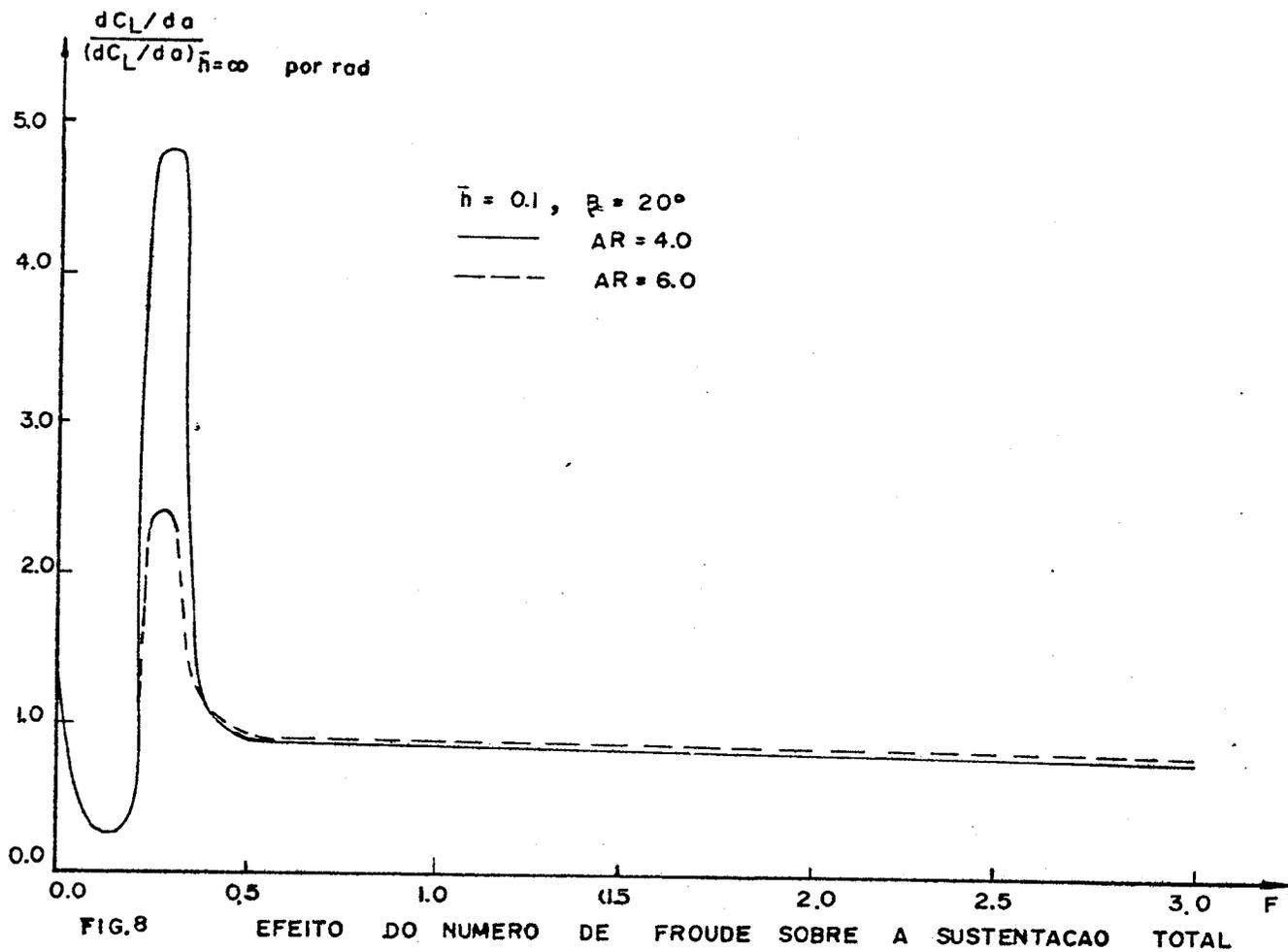


FIG. 7 EFEITO DO NUMERO DE FROUDE SOBRE A SUSTENTACAO TOTAL.



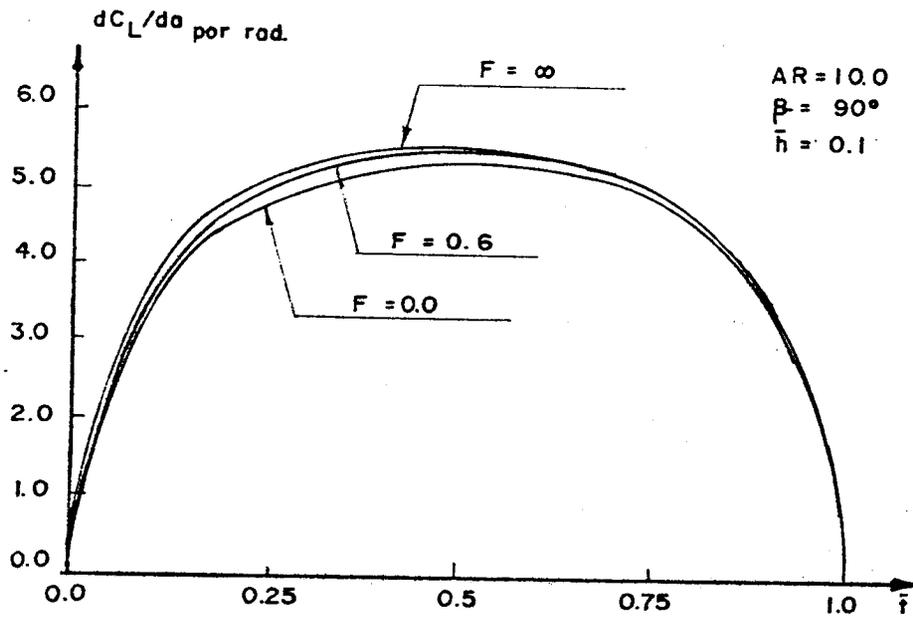


FIG.10 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADUA.

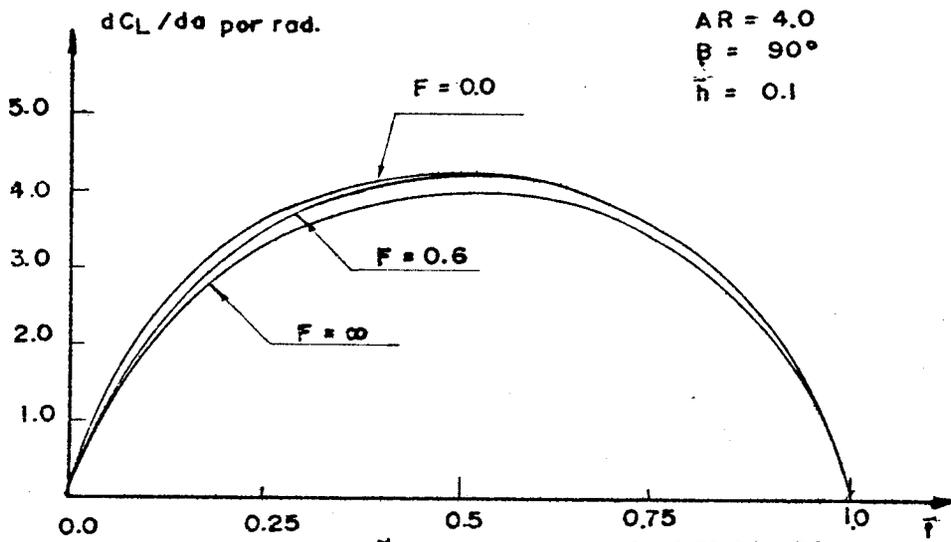


FIG.11 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

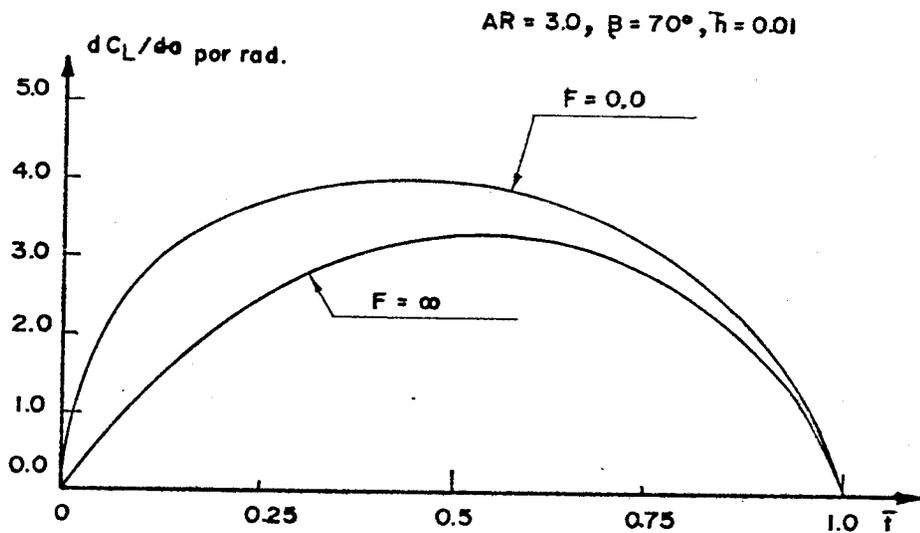


FIG.12 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

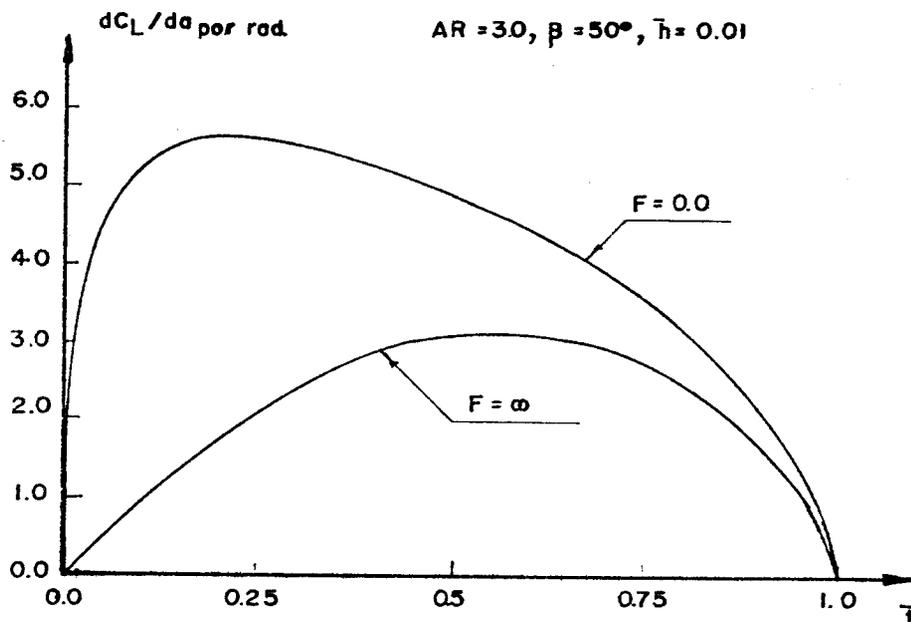


FIG.13 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA

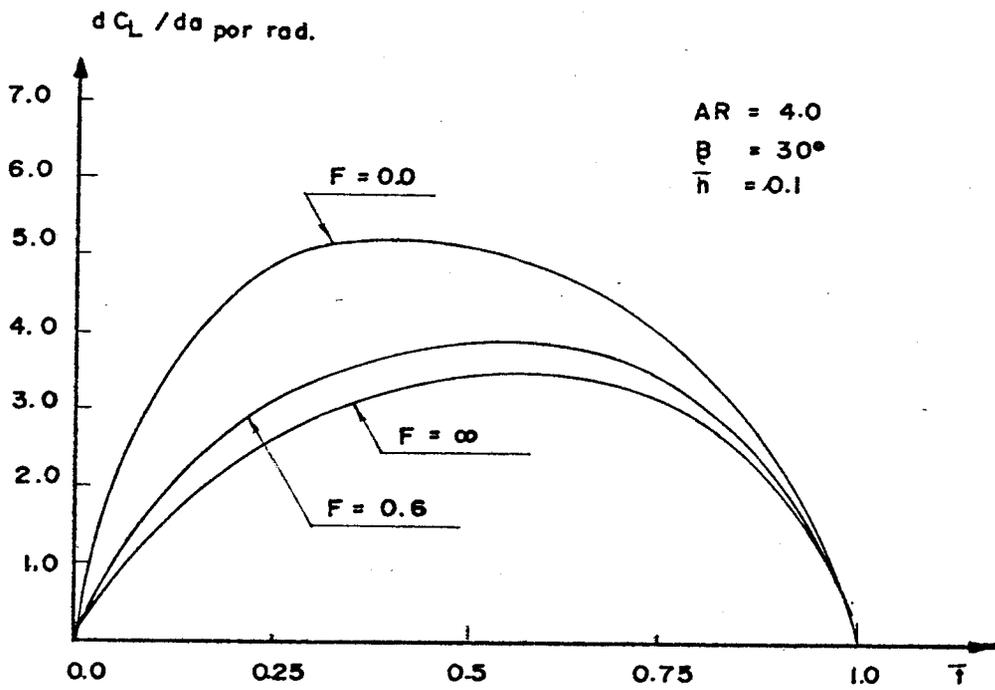


FIG.14 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

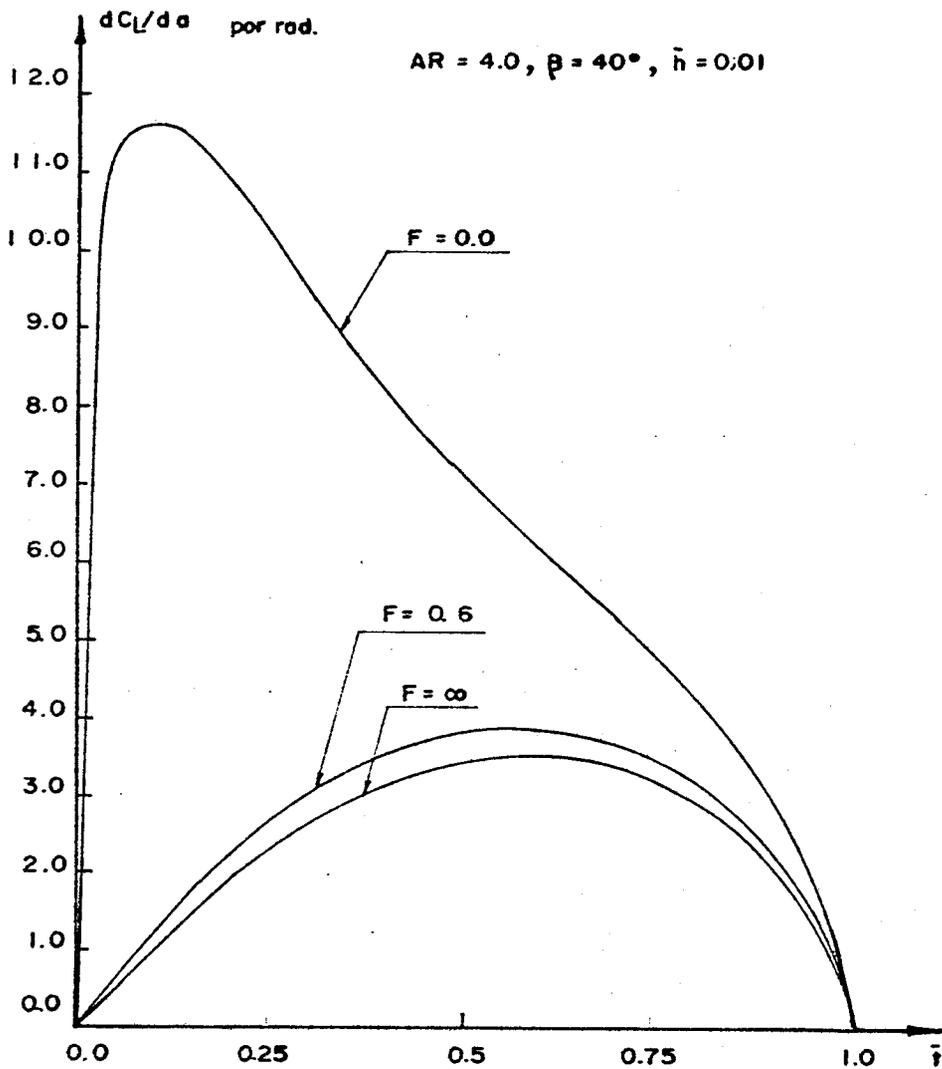


FIG.15 - DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

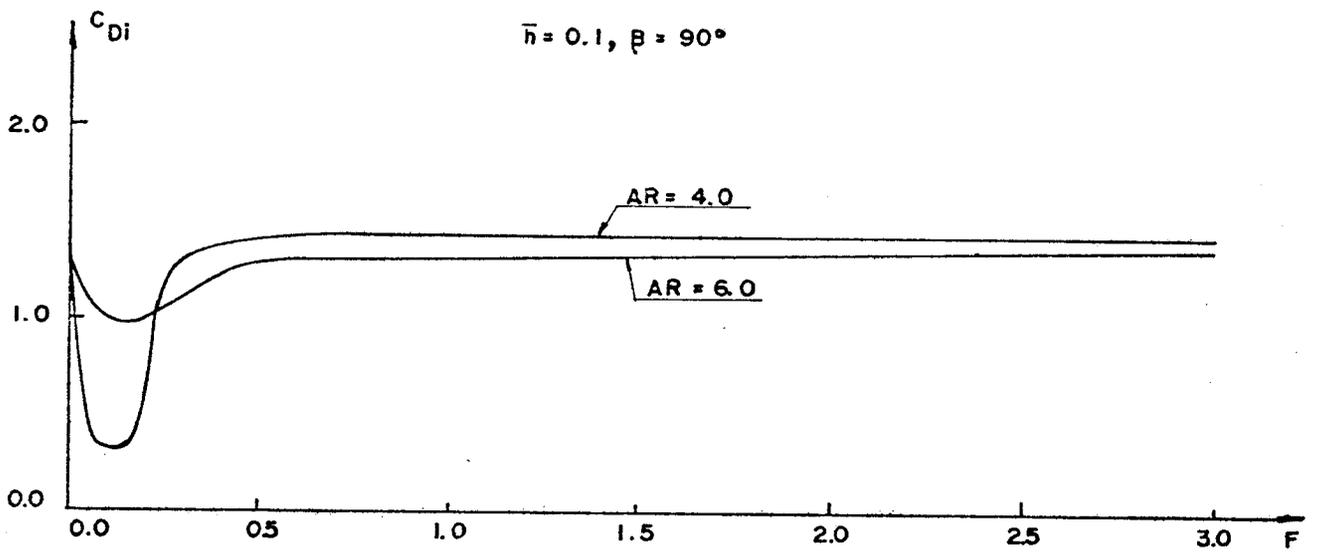


FIG.16 EFEITO DO NUMERO DE FROUDE SOBRE O ARRASTO INDUZIDO.

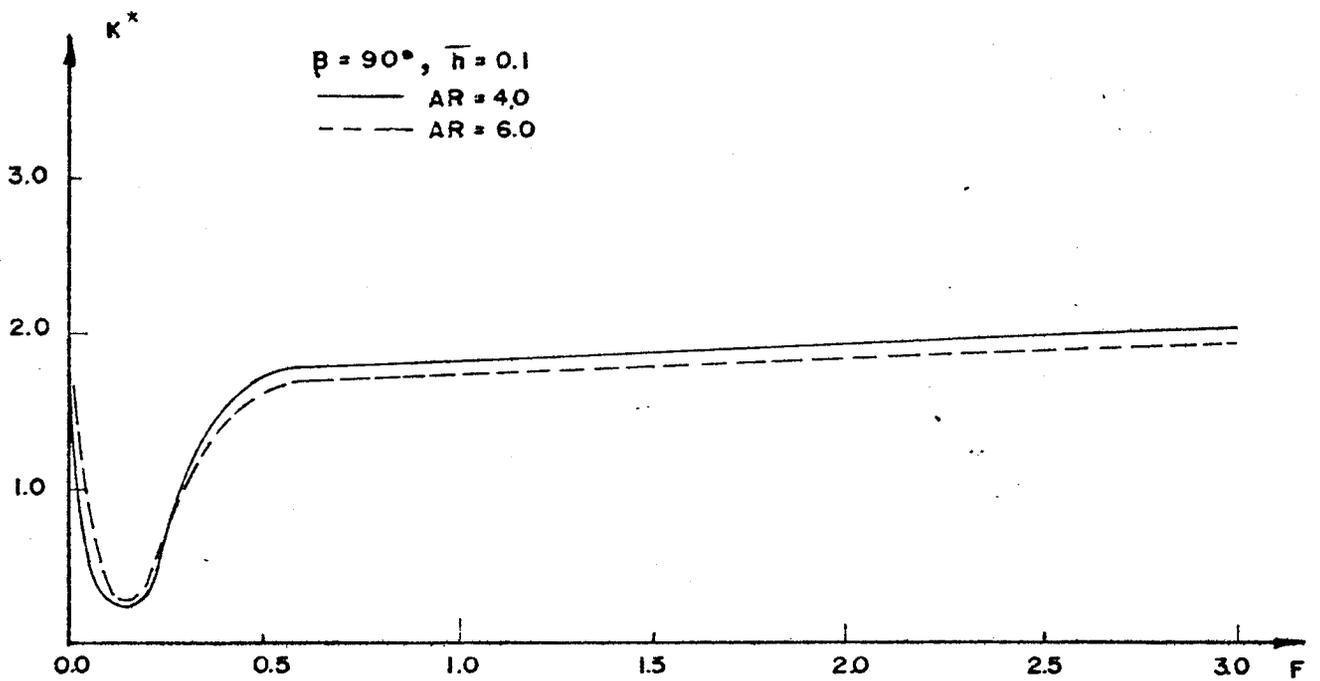
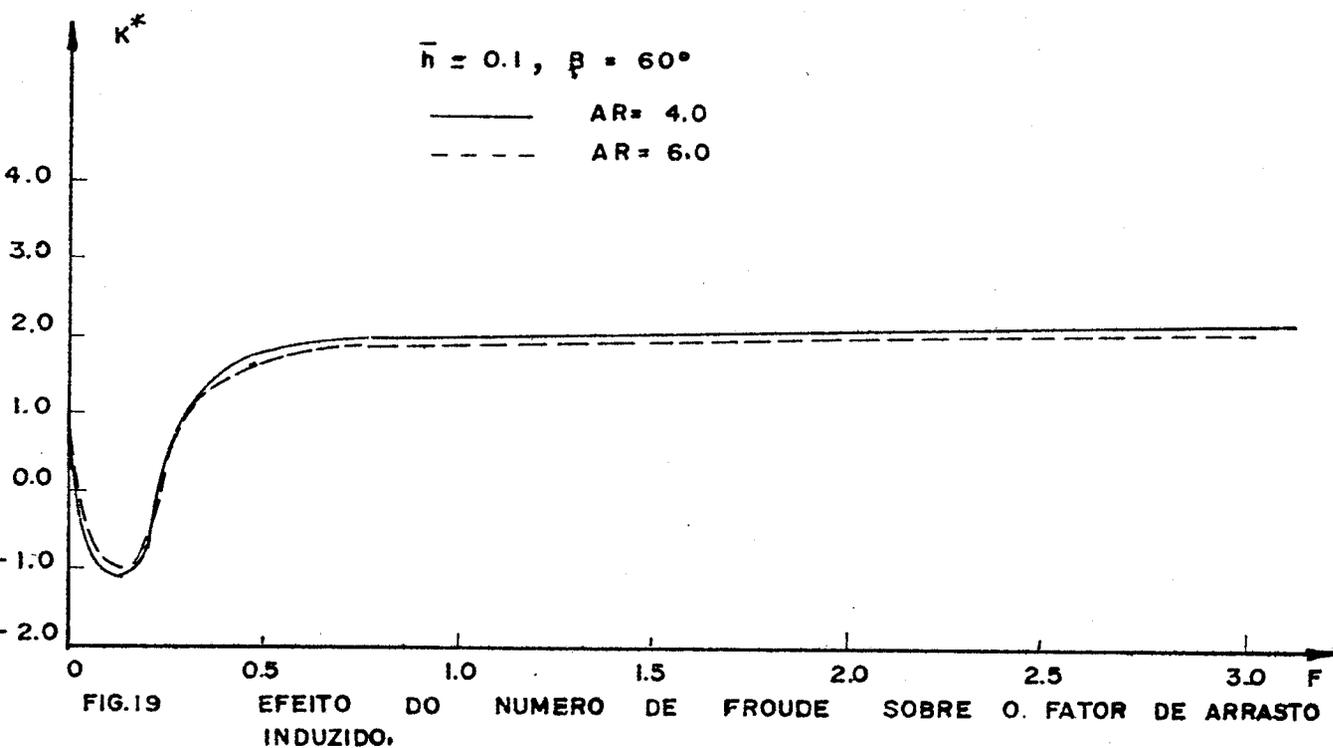
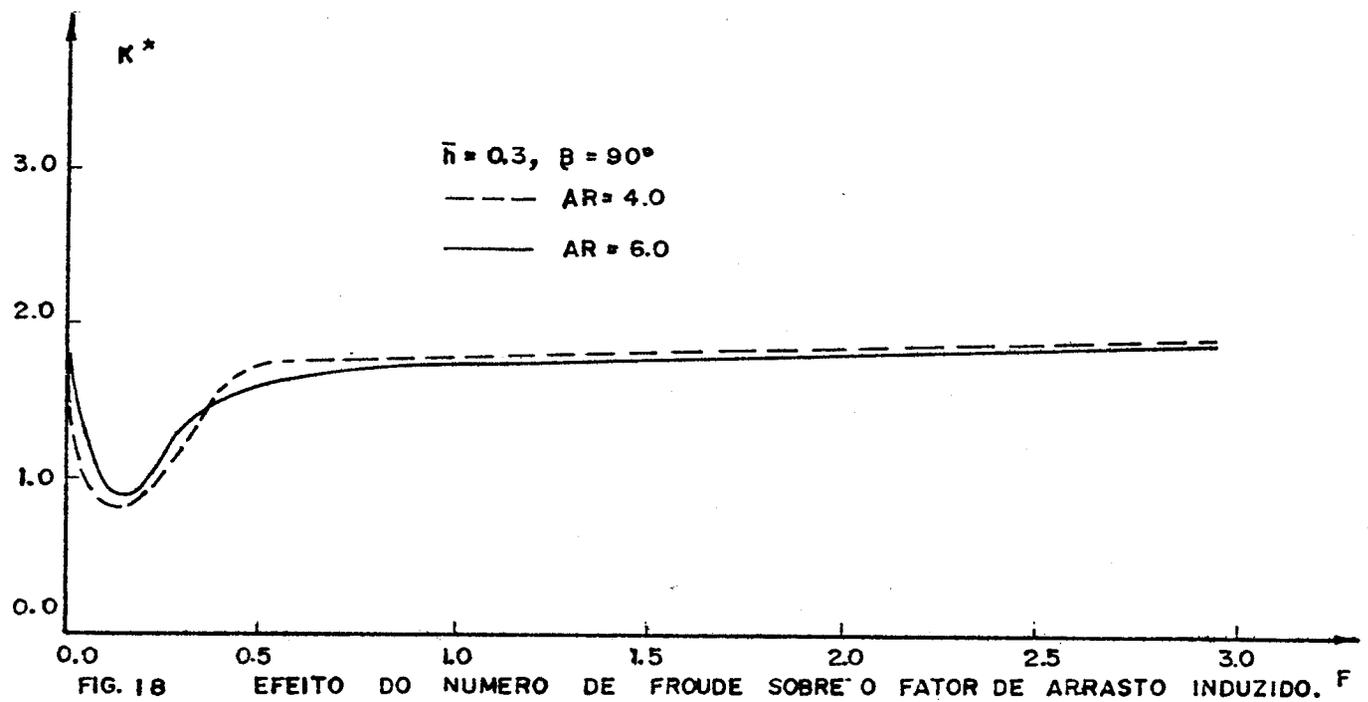


FIG.17 EFEITO DO NUMERO DE FROUDE SOBRE O FATOR DE ARRASTO INDUZIDO.



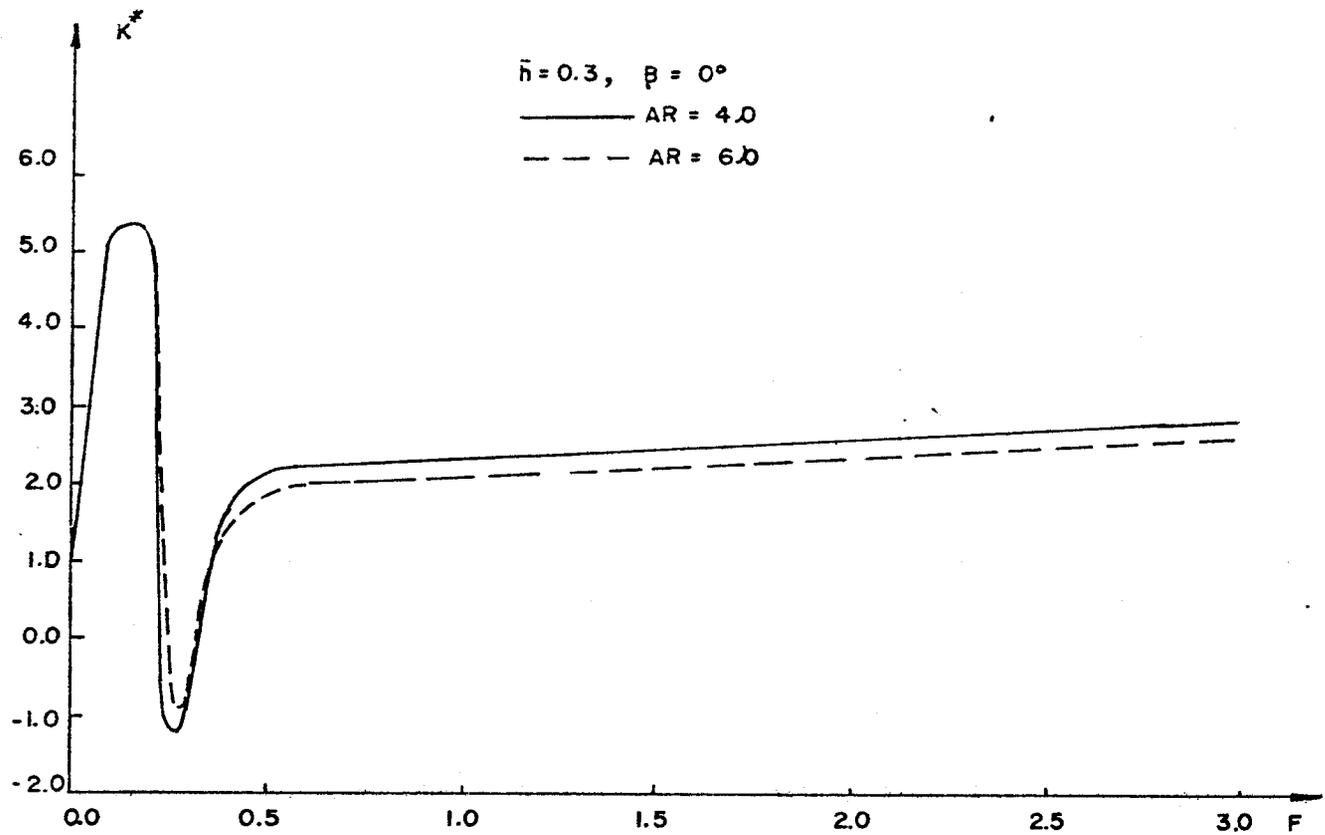


FIG. 20 EFEITO DO NUMERO DE FROUDE SOBRE O FATOR DE ARRASTO INDUZIDO.

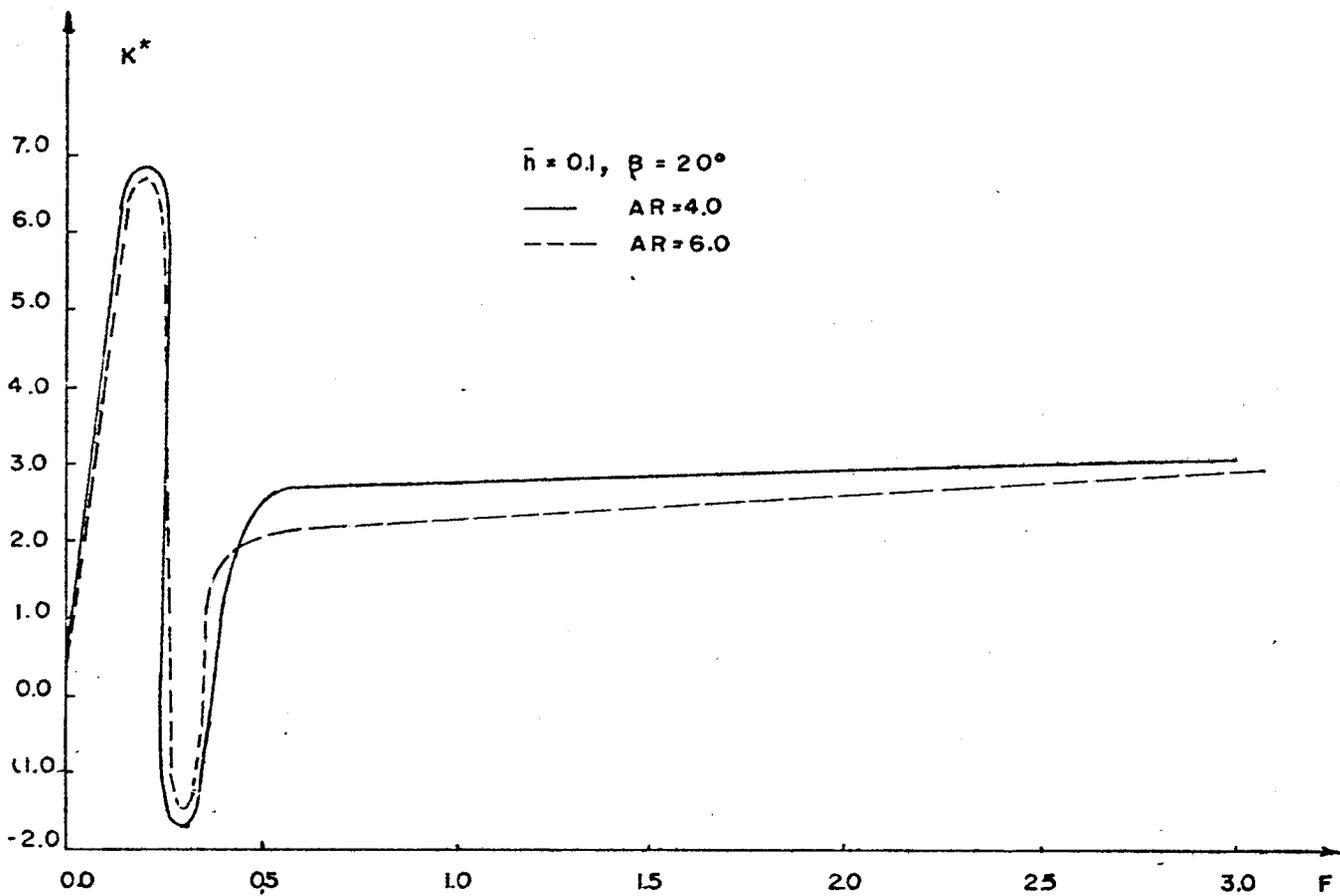


FIG. 21 EFEITO DO NUMERO DE FROUDE SOBRE O FATOR DE ARRASTO INDUZIDO.

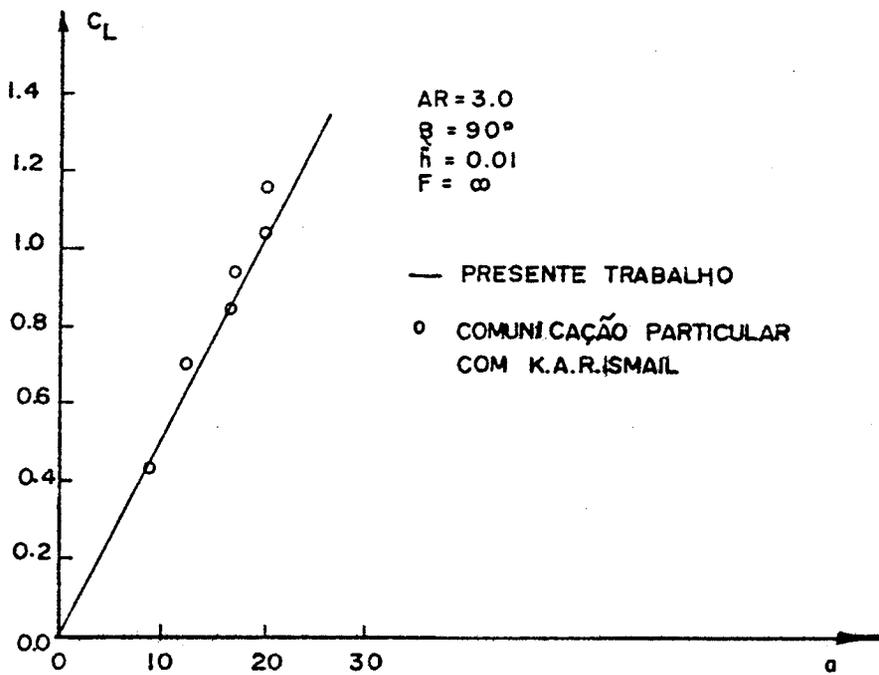


FIG.22 VARIAÇÃO DA SUSTENTAÇÃO TOTAL COM O ANGULO DE ATAQUE.

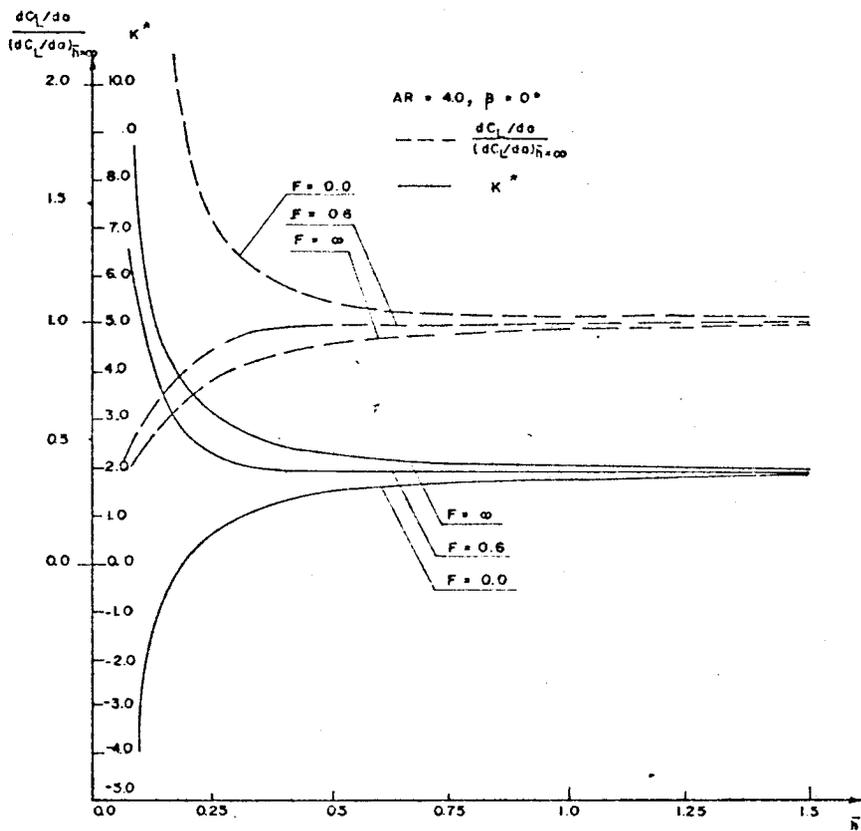


FIG.23 - EFEITO DA PROFUNDIDADE DE SUBMERCENCIA SOBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL E FATOR DE ARRASTO INDUZIDO.

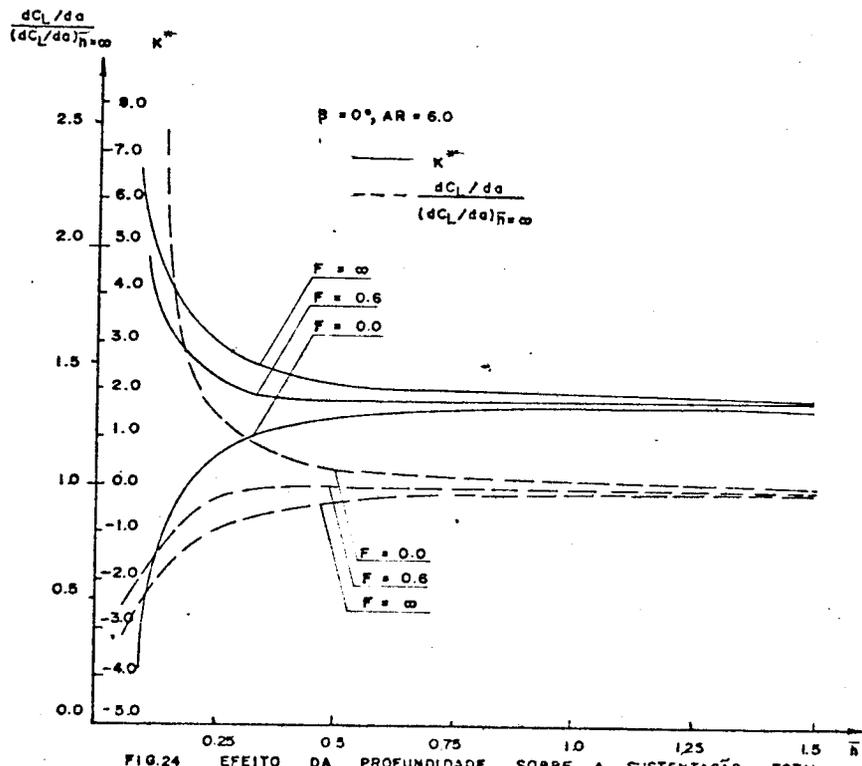


FIG.24 EFEITO DA PROFUNDIDADE SOBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL E FATOR DE ARRASTO.

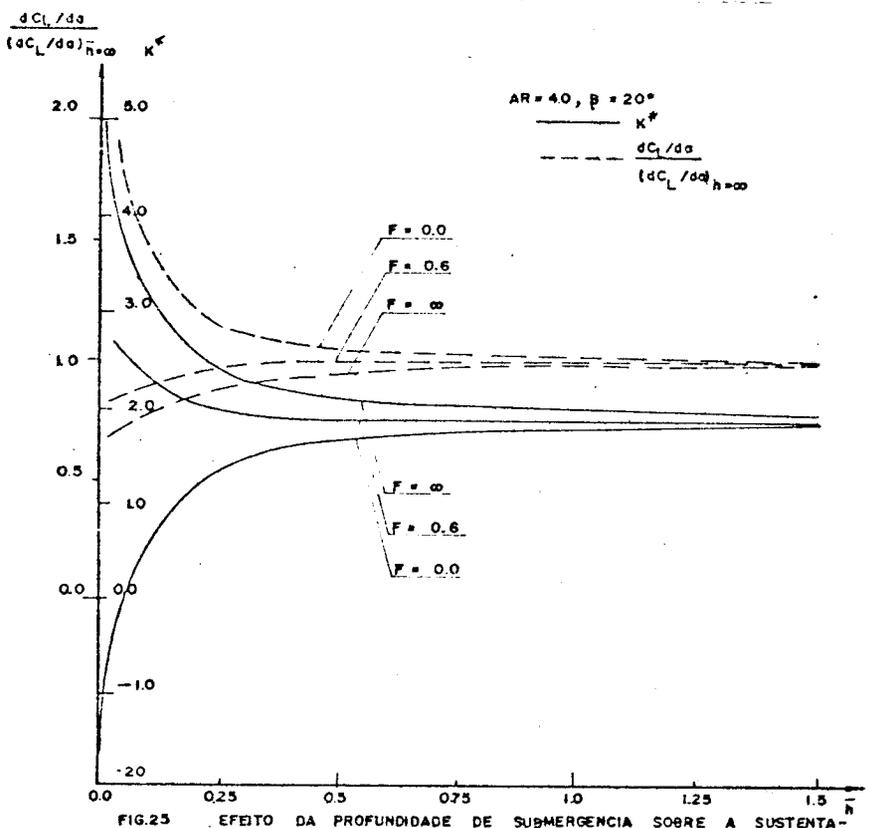


FIG.25 EFEITO DA PROFUNDIDADE DE SUBMERCENCIA SOBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL E FATOR DE ARRASTO INDUZIDO.

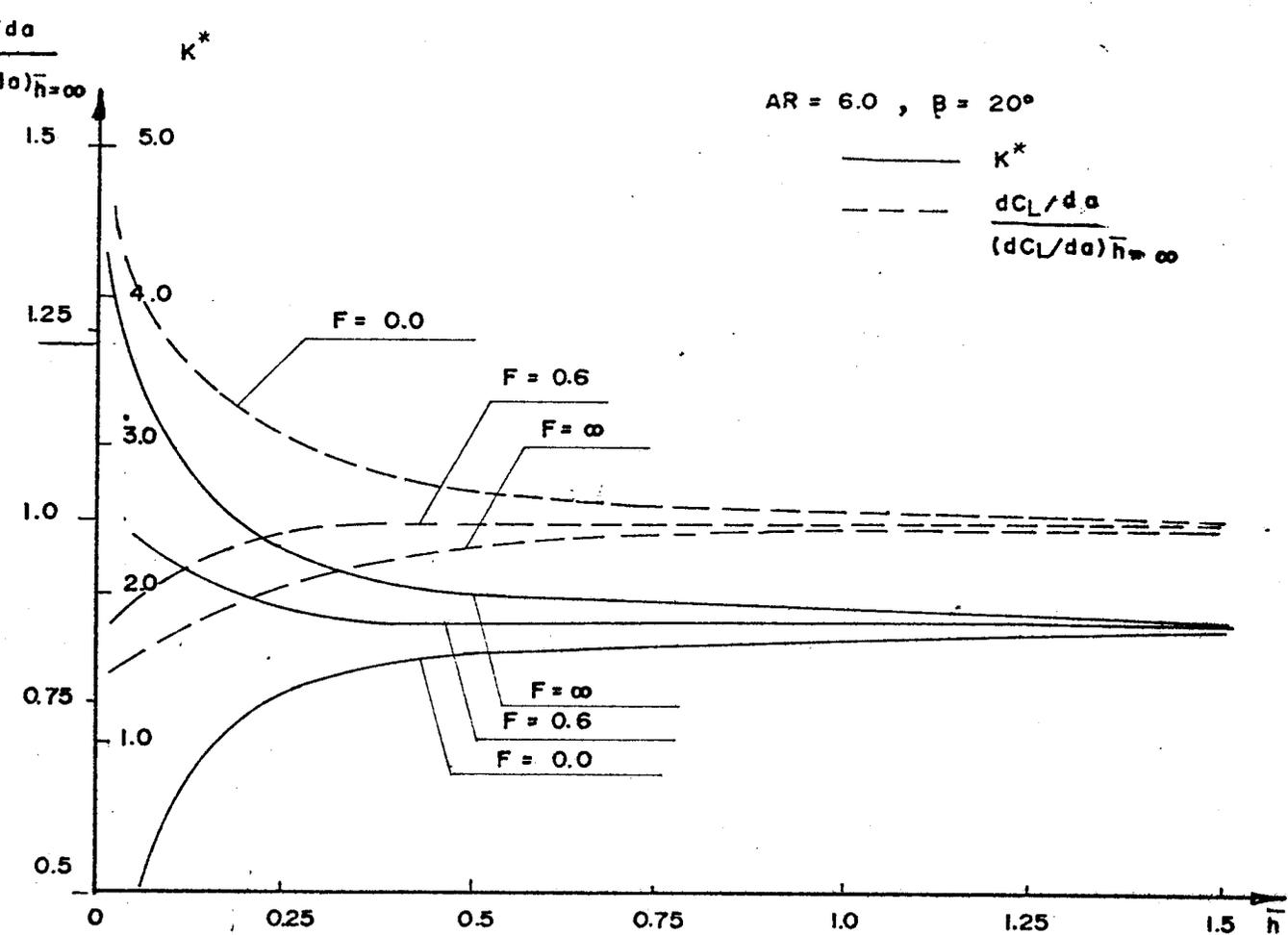


FIG.26 EFEITO DA PROFUNDIDADE DE SUBMERCENCIA SOBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL E FATOR DE ARRASTO INDUZIDO.

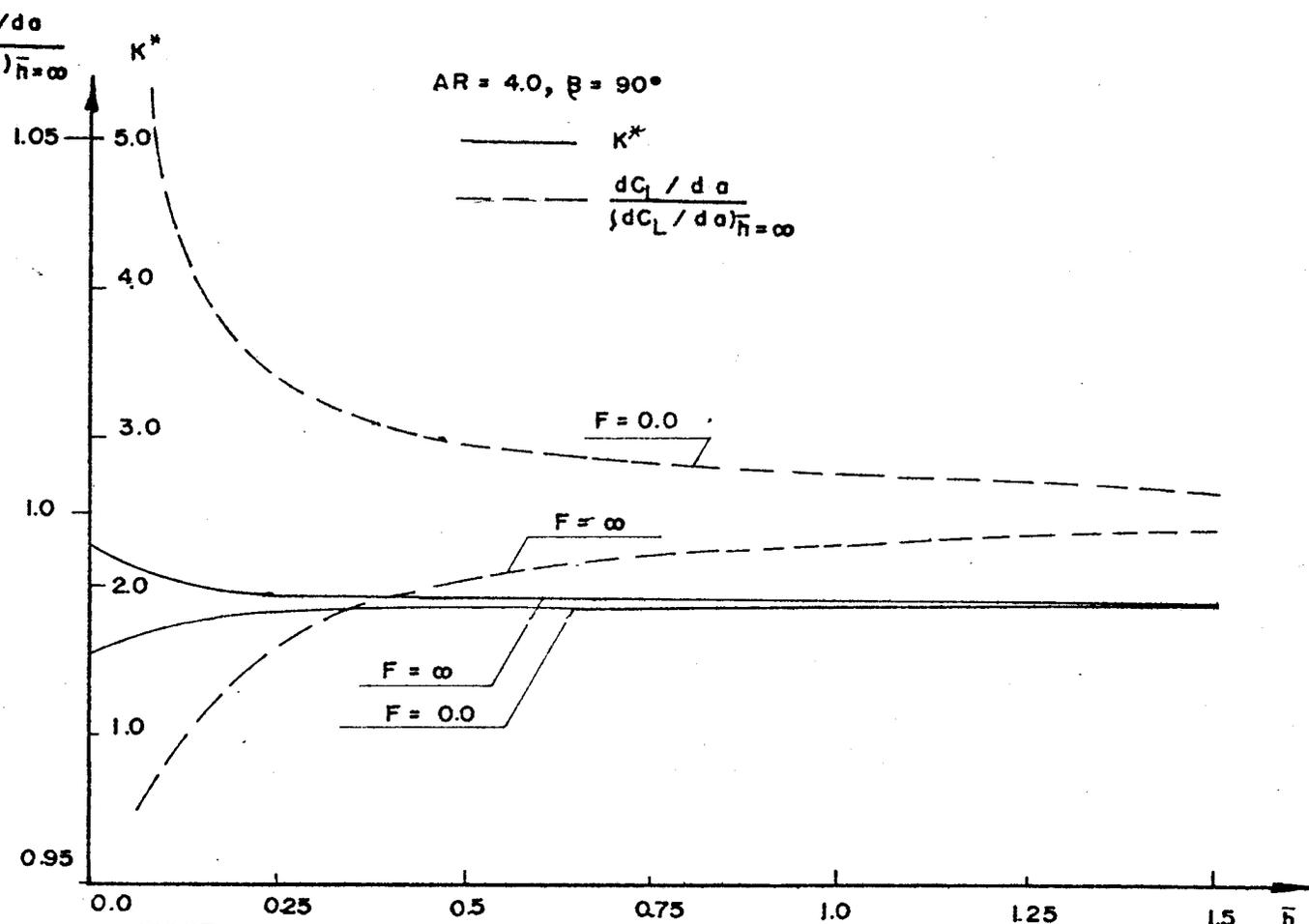


FIG.27 EFEITO DA PROFUNDIDADE DE SUBMERCENCIA SOBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL E FATOR DE ARRASTO INDUZIDO.

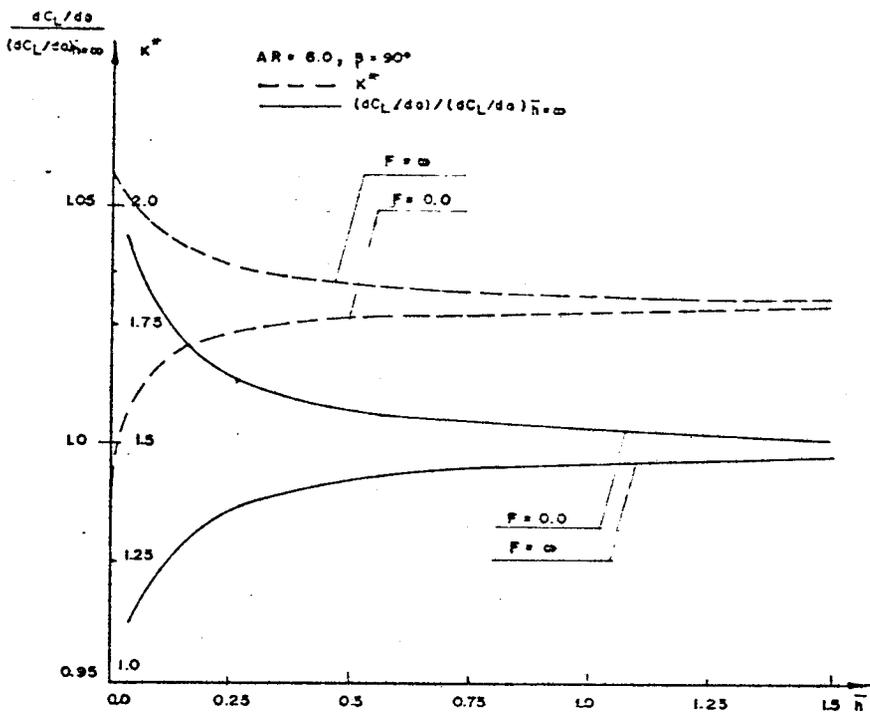


FIG.28 EFEITO DA PROFUNDIDADE DE SUBMERCENCIA SOBRE A SUSTENÇÃO TOTAL E FATOR DE ARRASTO INDUZIDO.

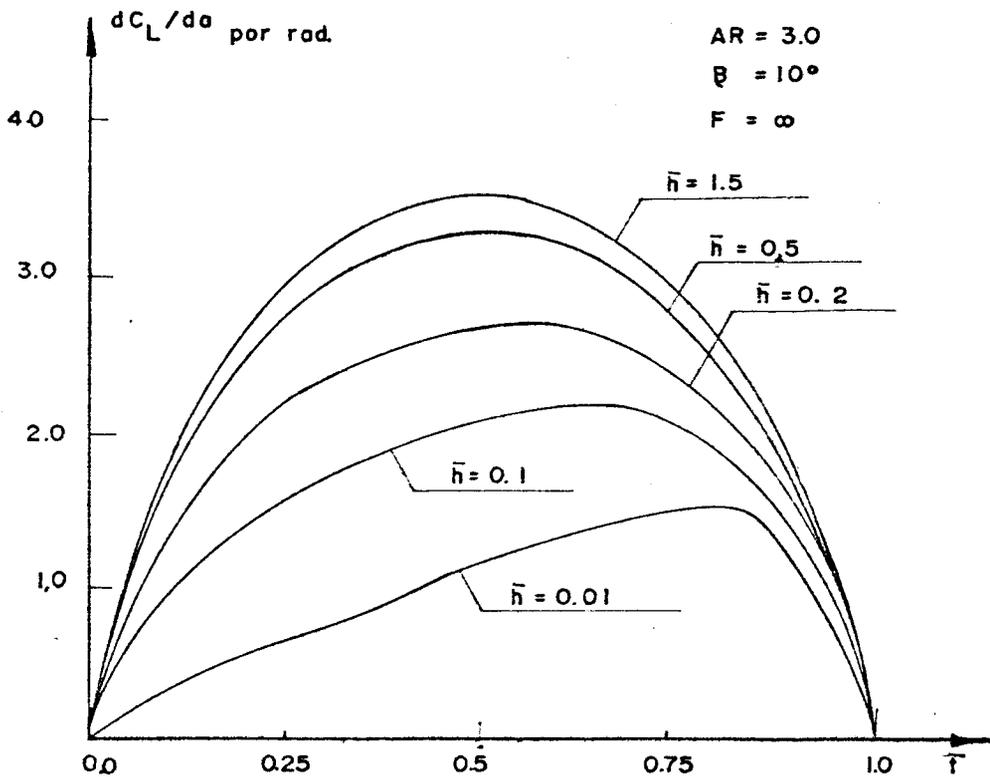


FIG.29 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

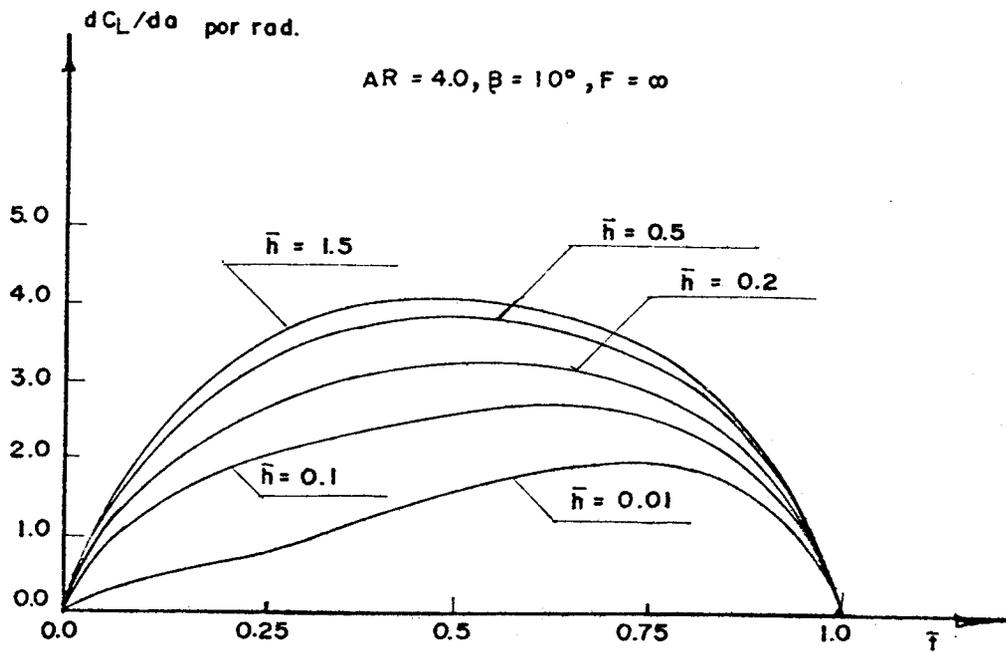


FIG.30 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

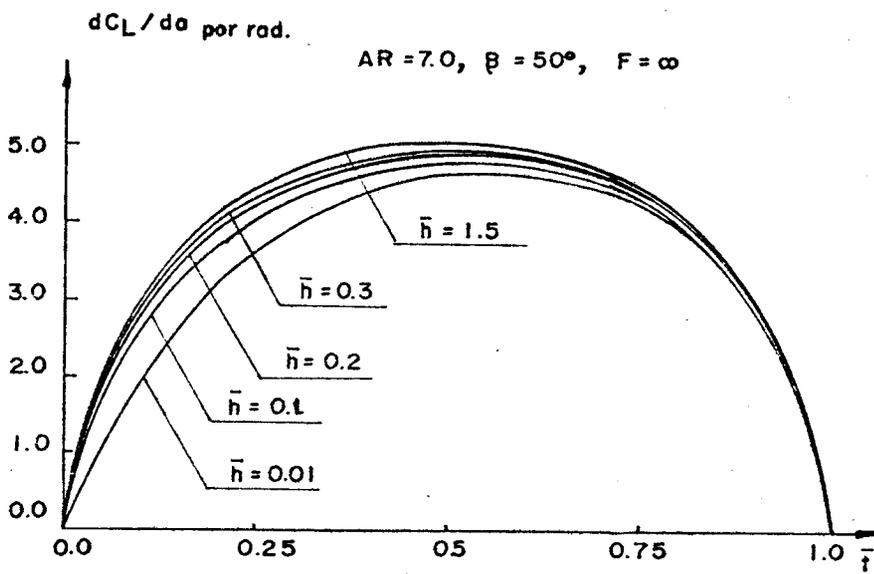


FIG.31 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

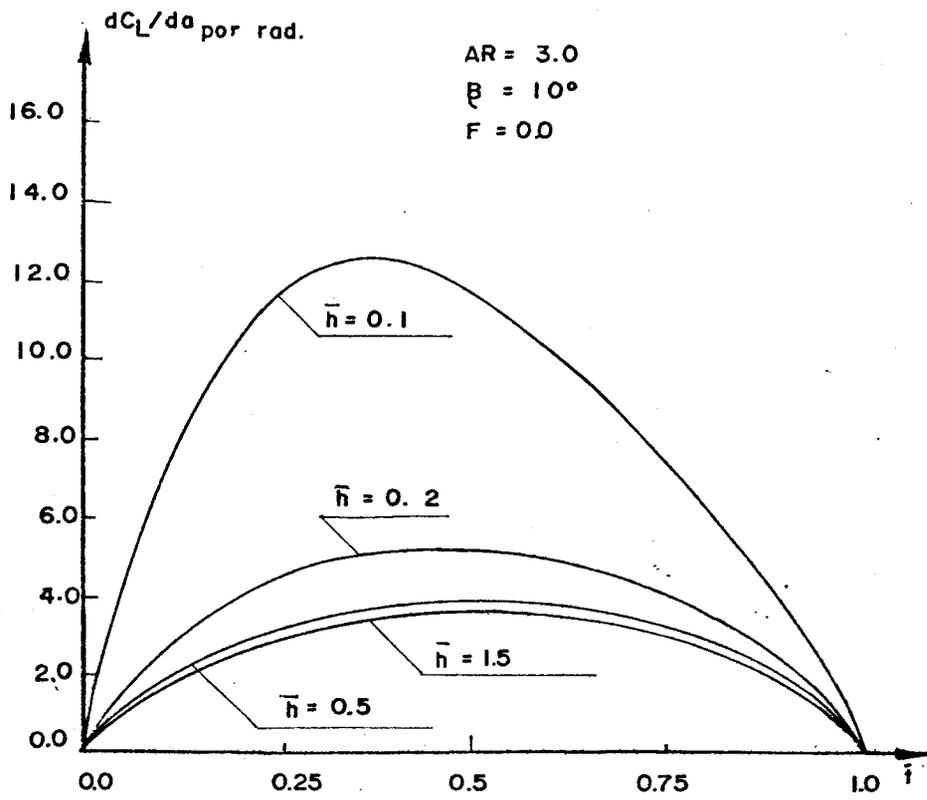


FIG.32 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

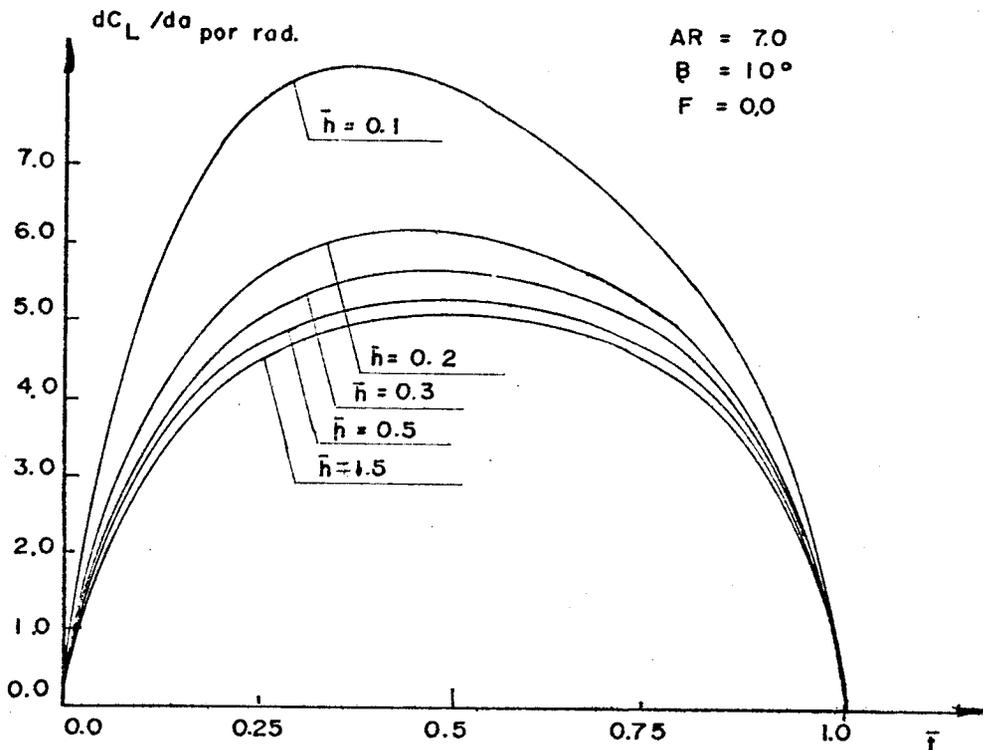


FIG.33 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

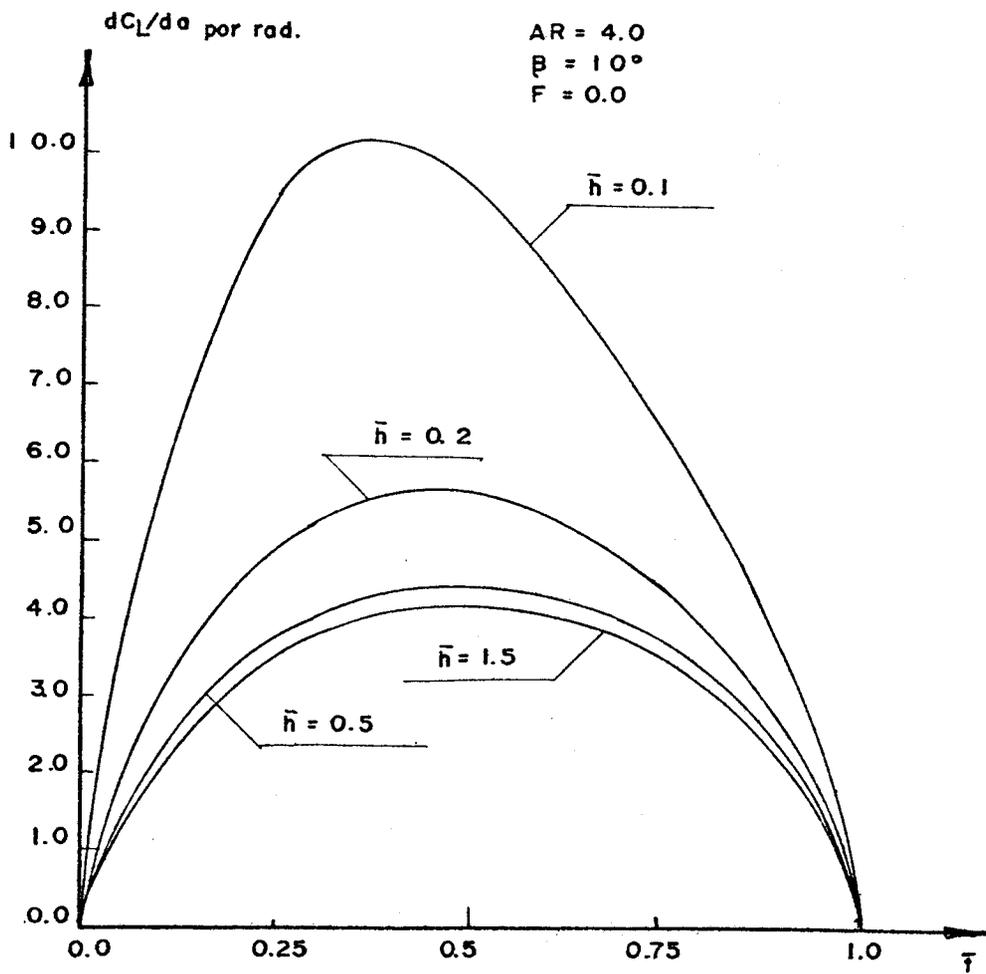


FIG.34 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

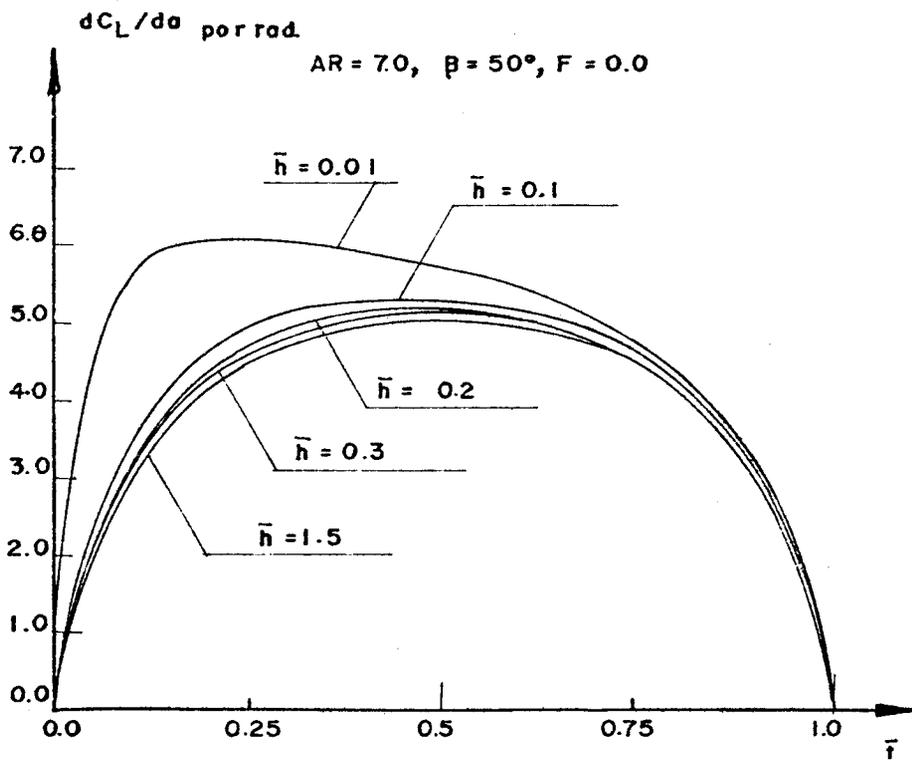


FIG.35 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

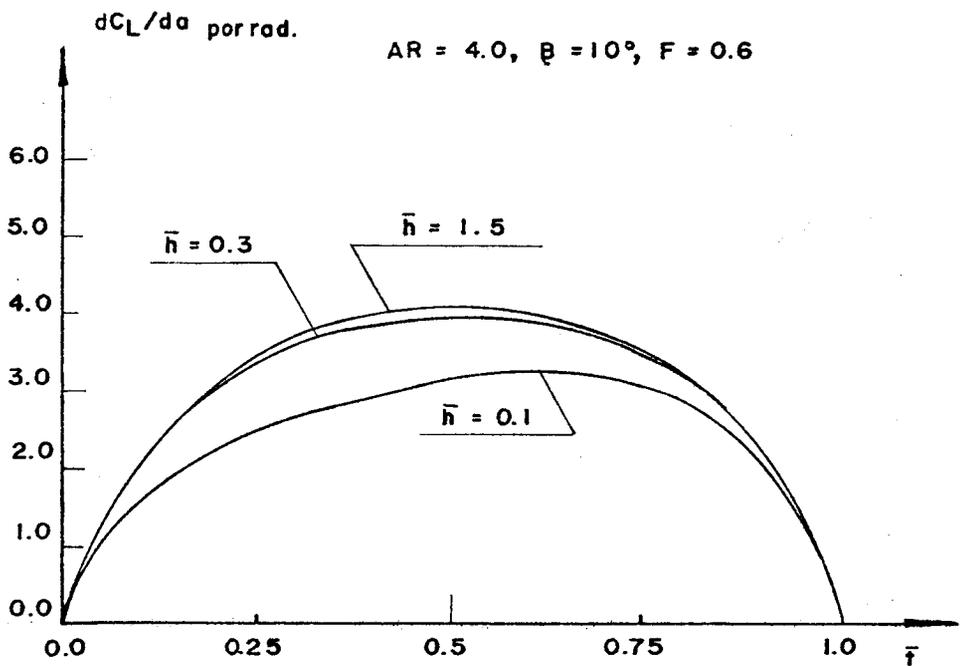


FIG.36 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA

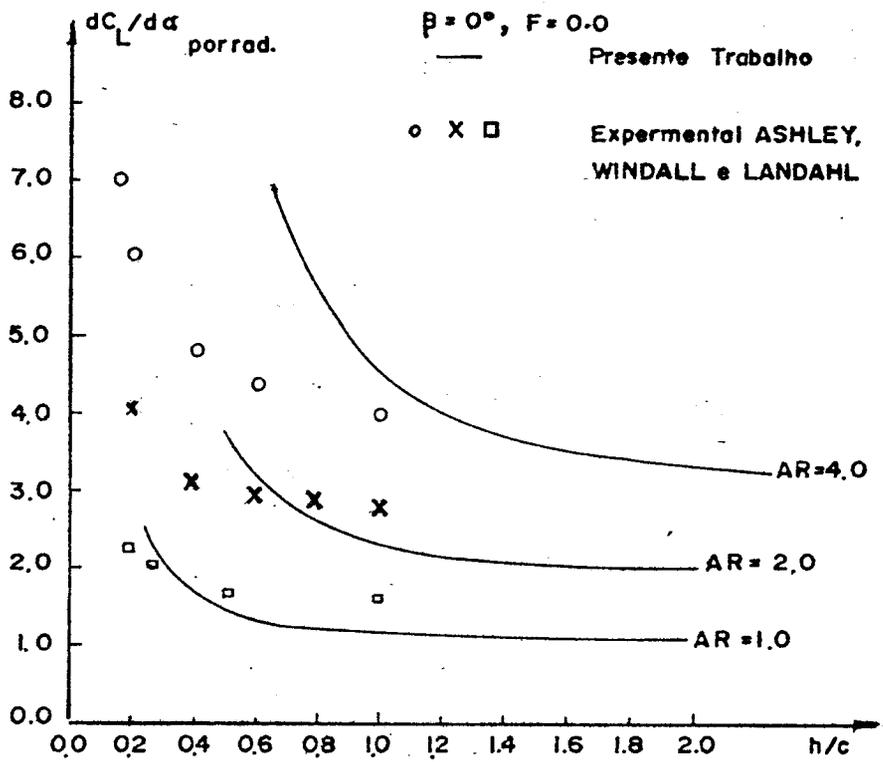


FIG.37 EFEITO DA PROFUNDIDADE SÔBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL

$\beta = 0$
 $F = 0.0$

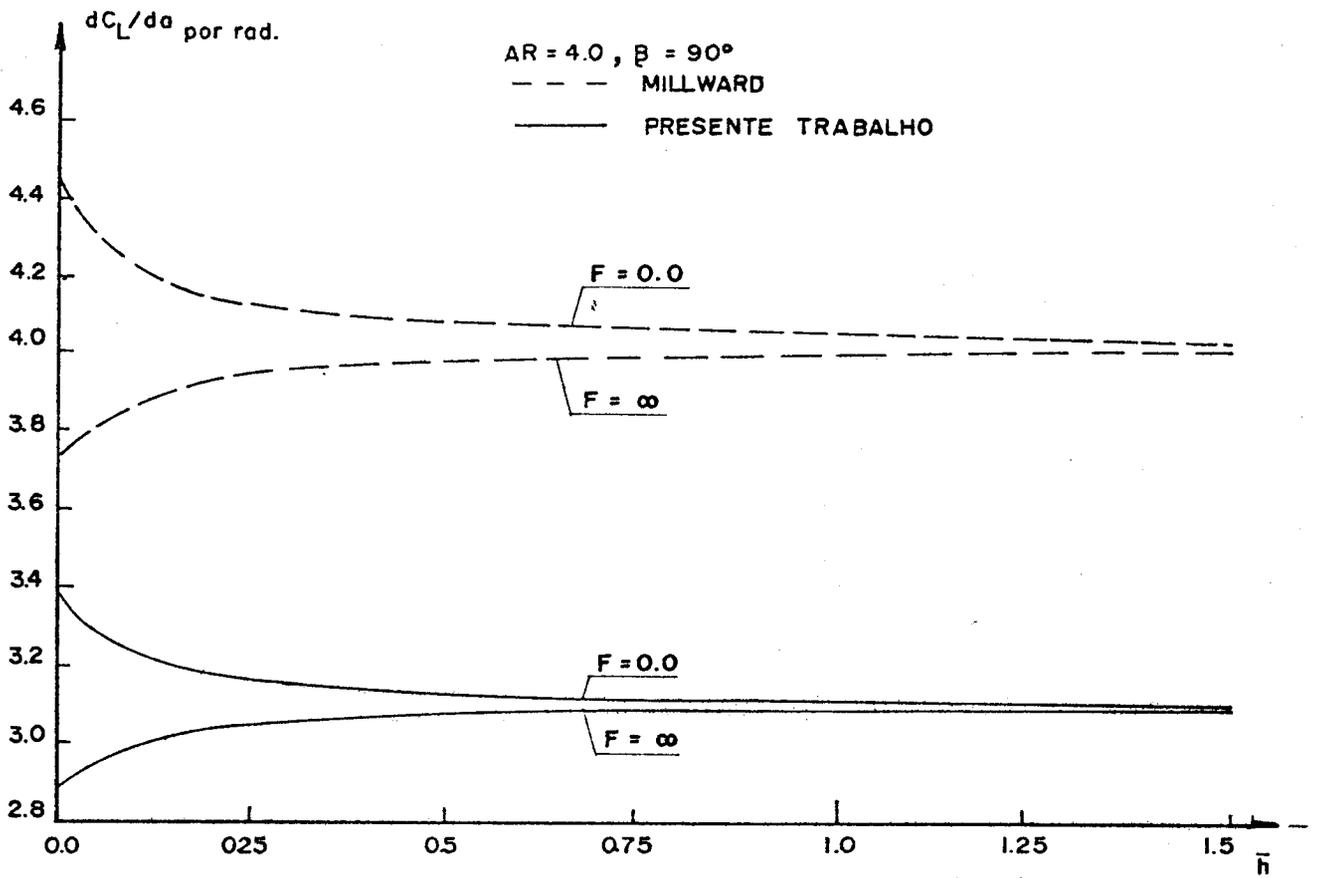


FIG. 38 - EFEITO DA PROFUNDIDADE DE SUBMERCENCIA SOBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL,

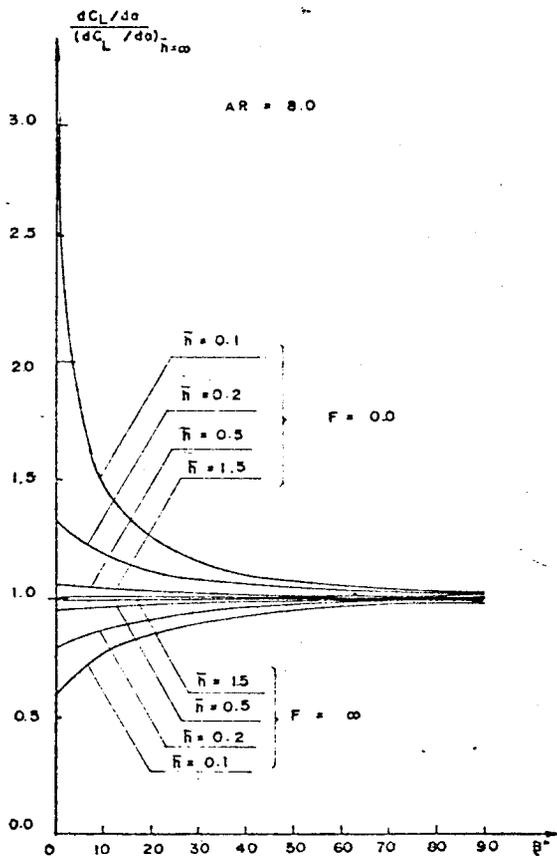


FIG. 39 - EFEITO DO ANGULO DIÉDRICO SOBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL

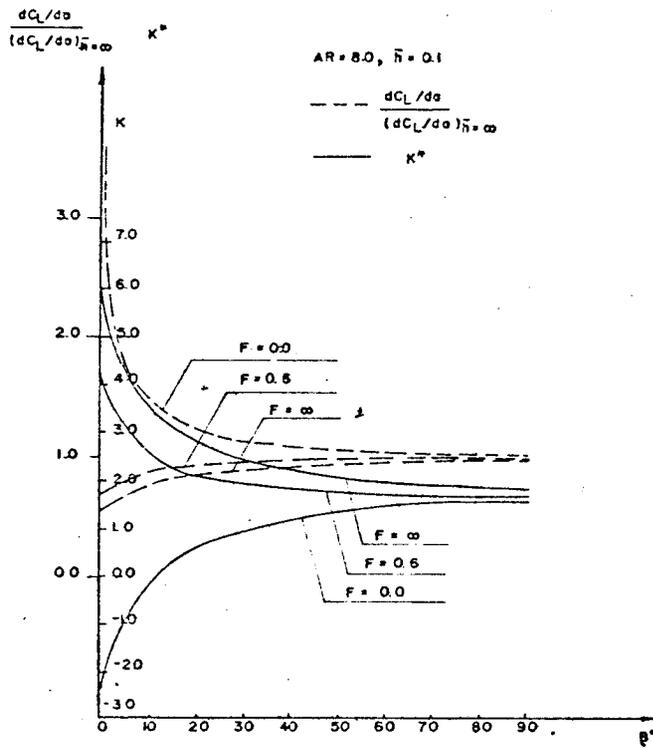


FIG. 40 EFEITO DO ANGULO DIEDRICO SOBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL E FATOR DE ARRASTO INDUZIDO

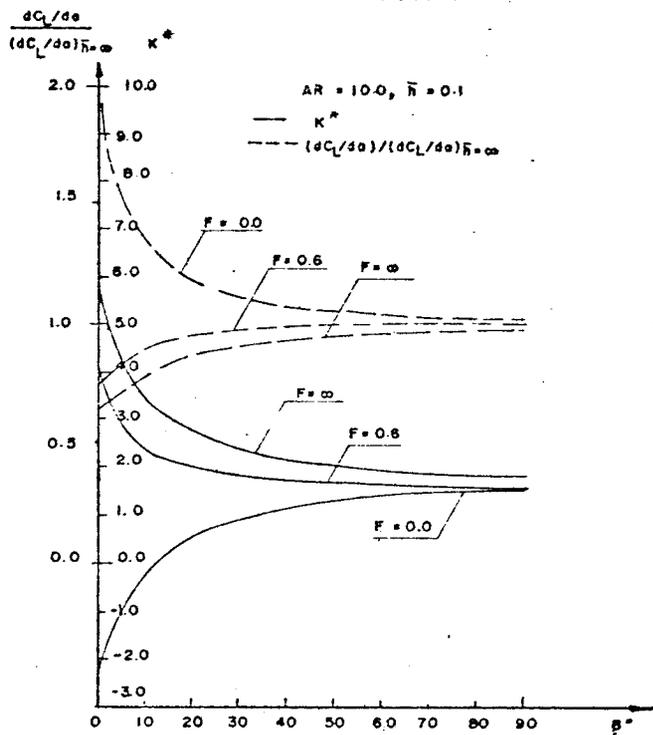


FIG. 41 EFEITO DO ANGULO DIEDRICO SOBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL E FATOR DE ARRASTO INDUZIDO.

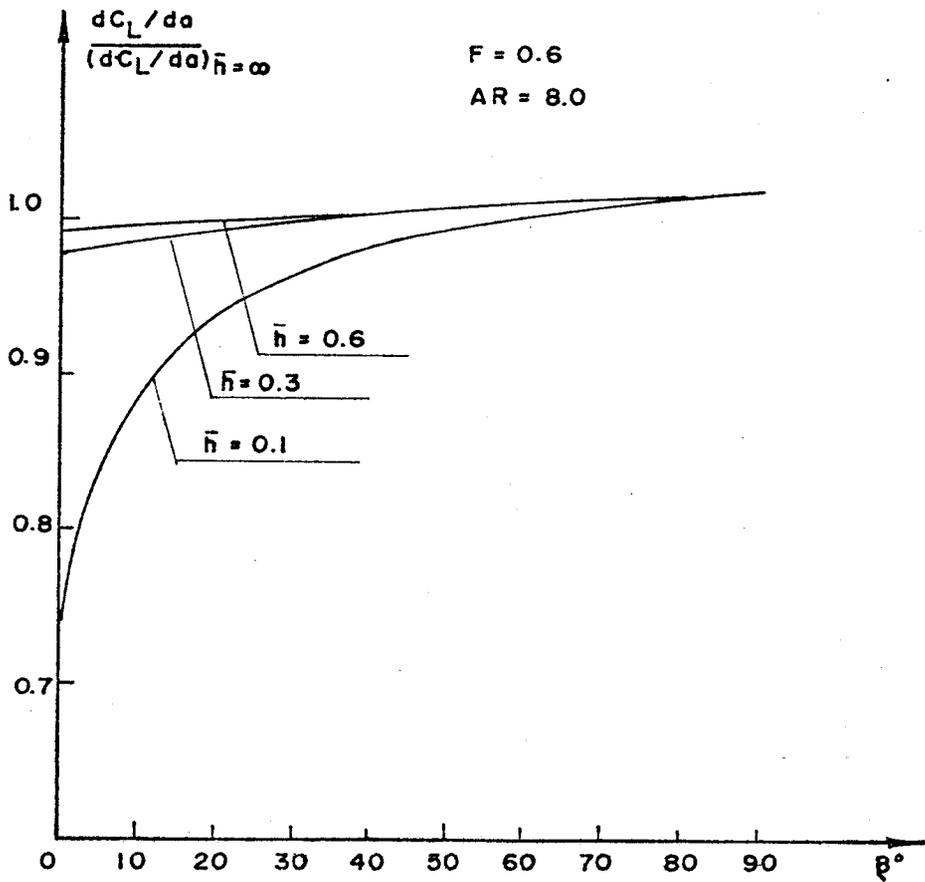


FIG.42 EFEITO DO ANGULO DIEDRICO SOBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL.

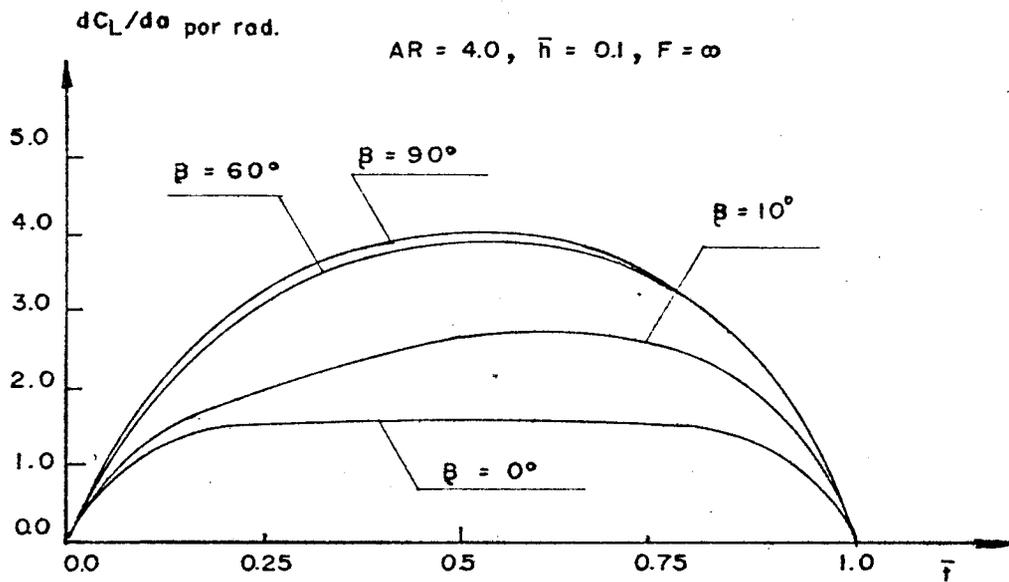


FIG.43 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

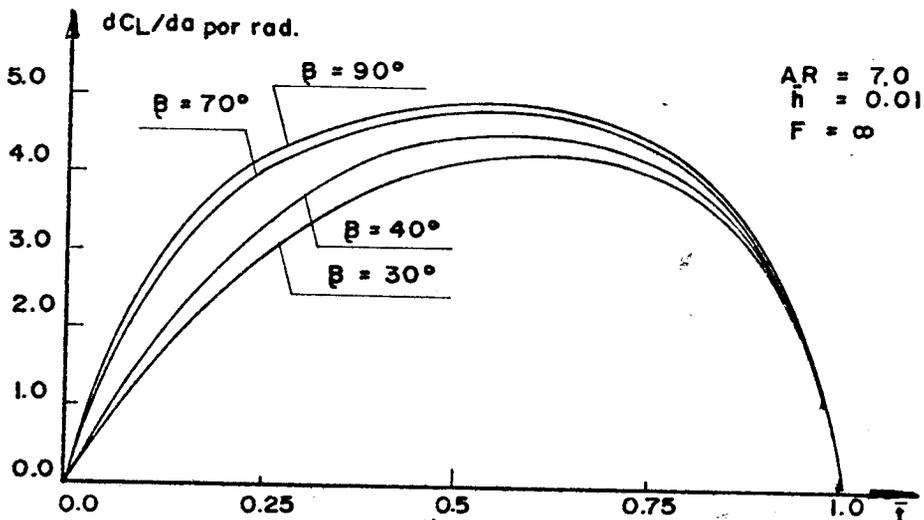


FIG.44 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

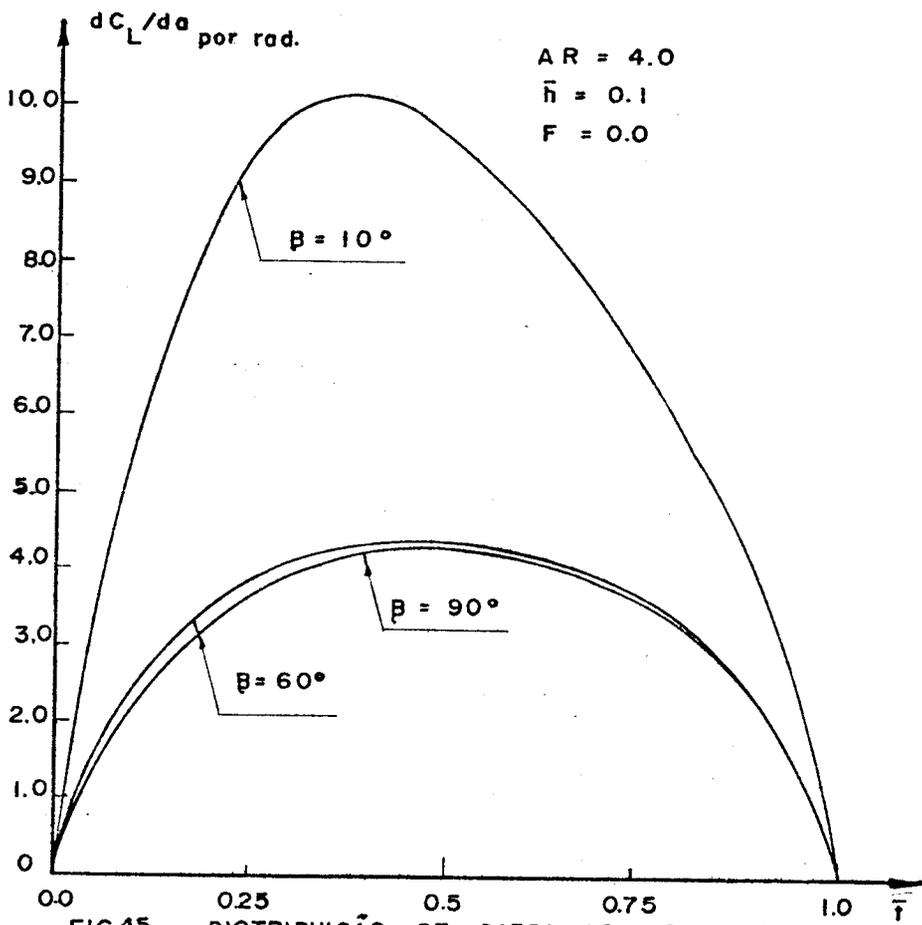


FIG.45 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

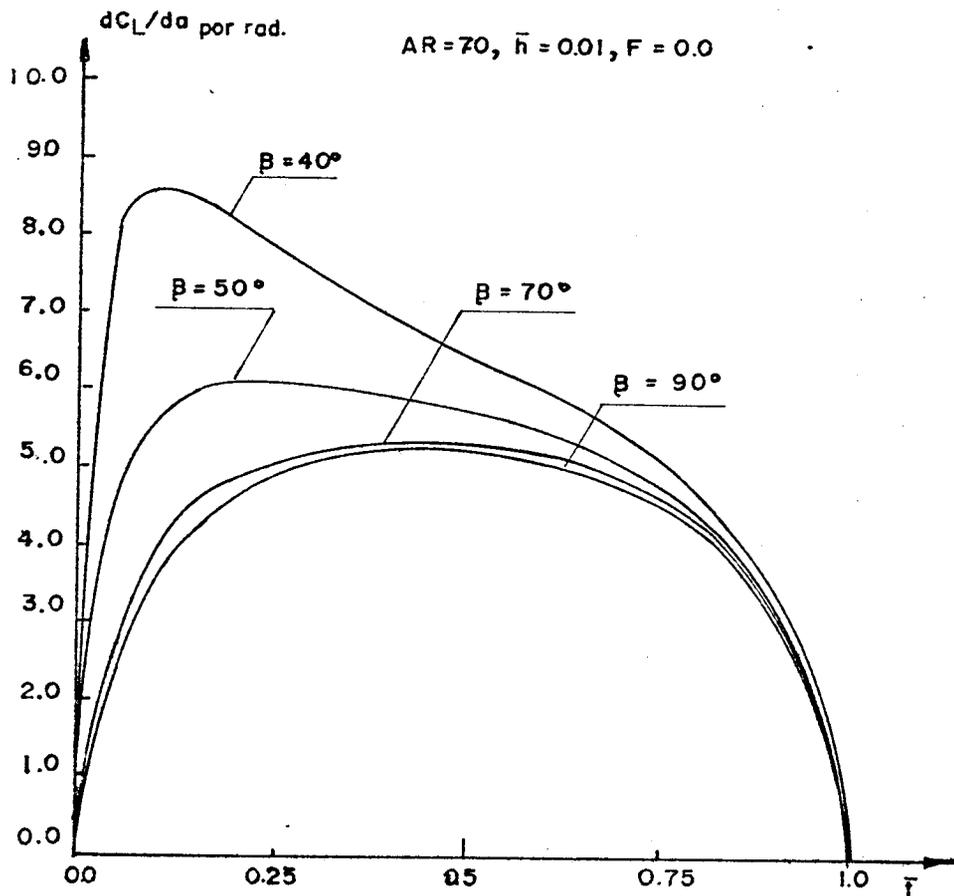


FIG.46 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

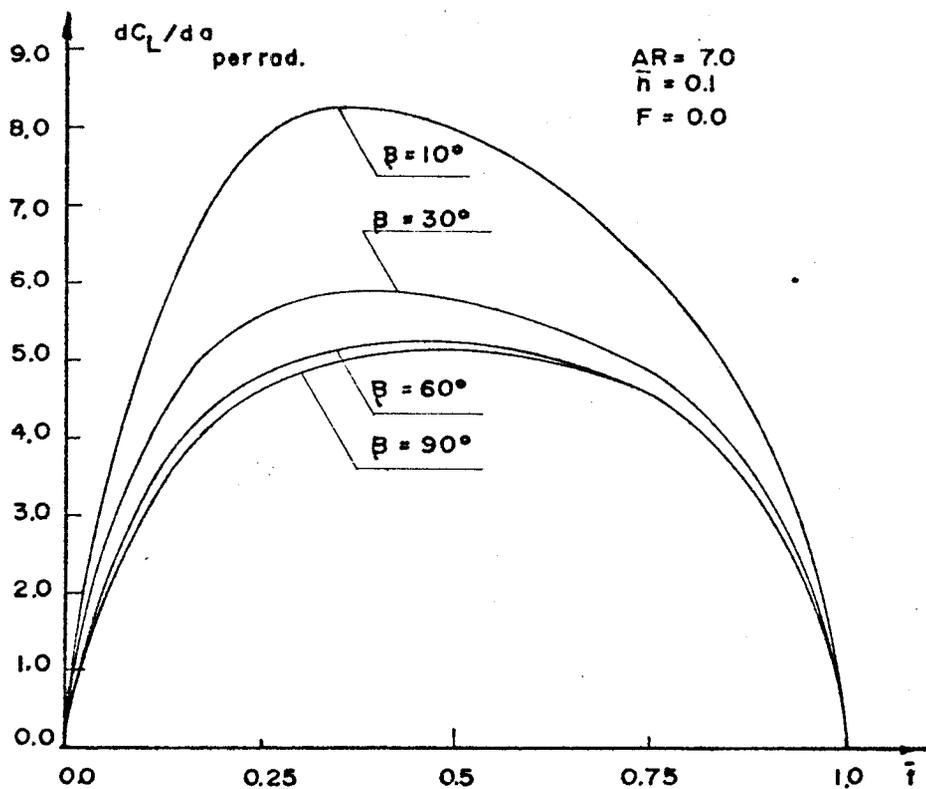


FIG.47 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA

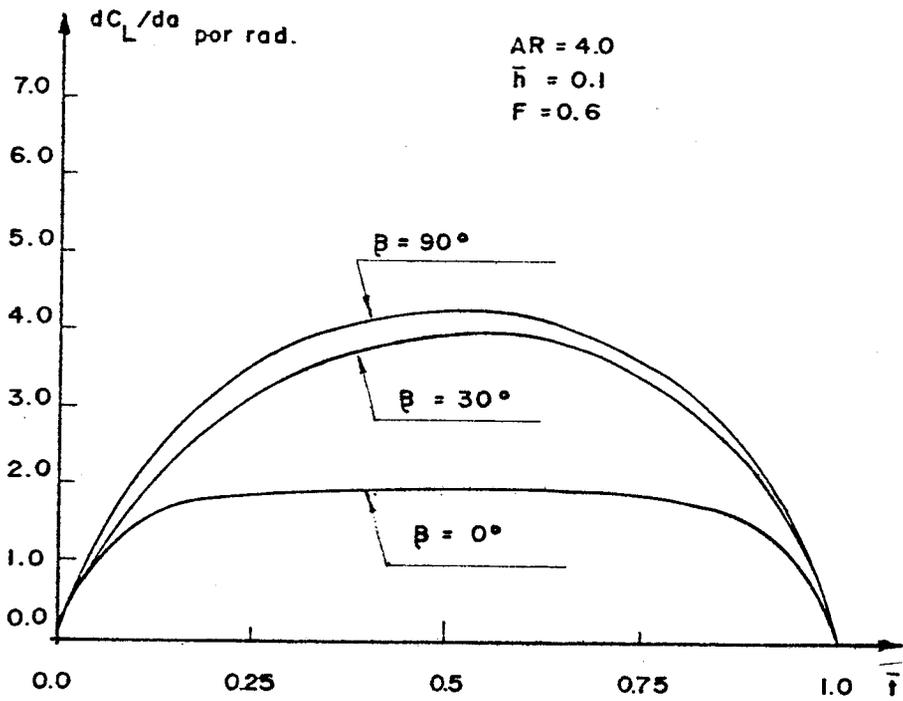


FIG. 48 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

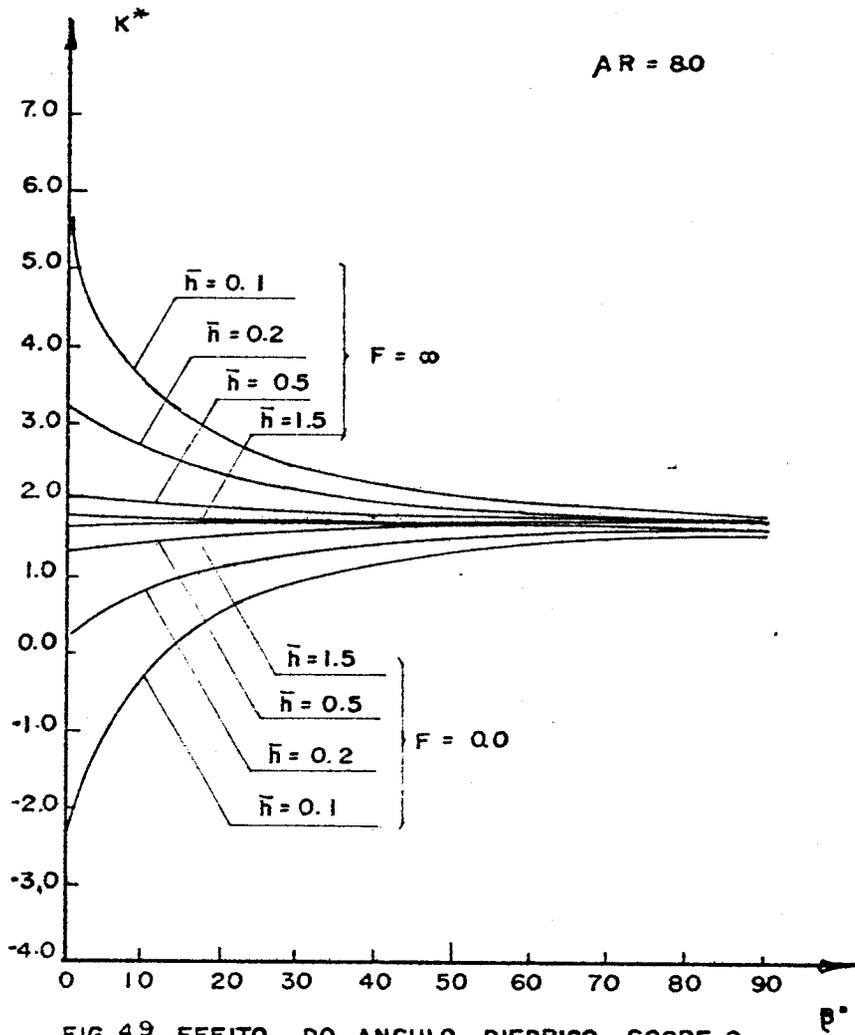


FIG. 49 EFEITO DO ANGULO DIEDRICO SOBRE O FATOR DE ARRASTO INDUZIDO.

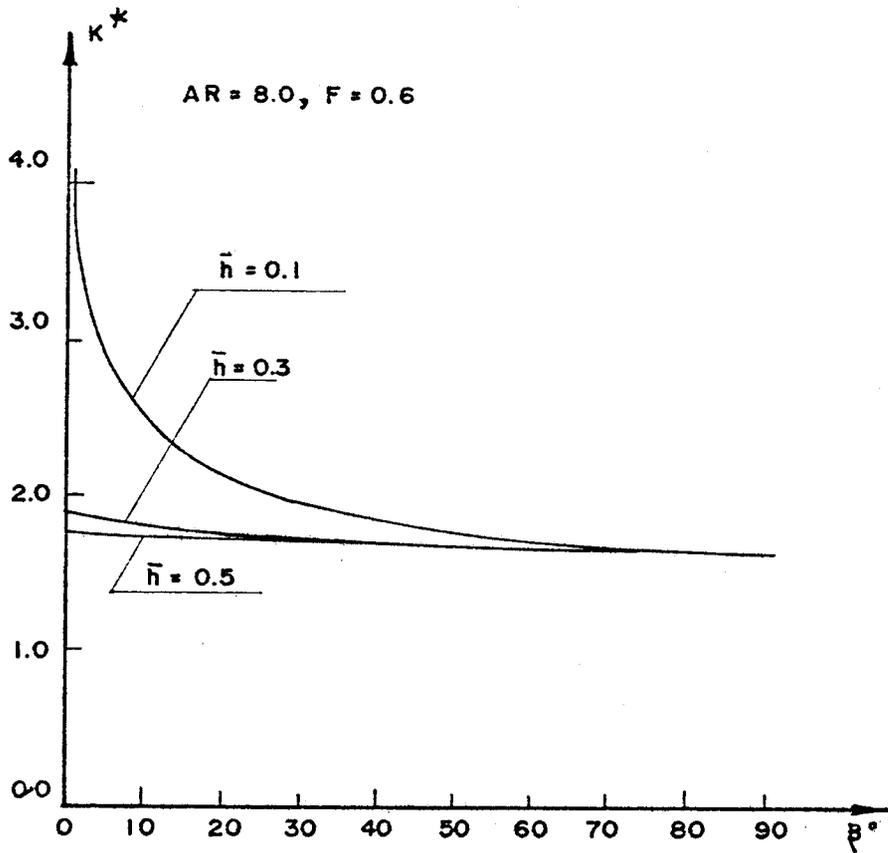


FIG. 50 EFEITO DO ANGULO DIEDRICO SOBRE O FATOR DE ARRASTO INDUZIDO.

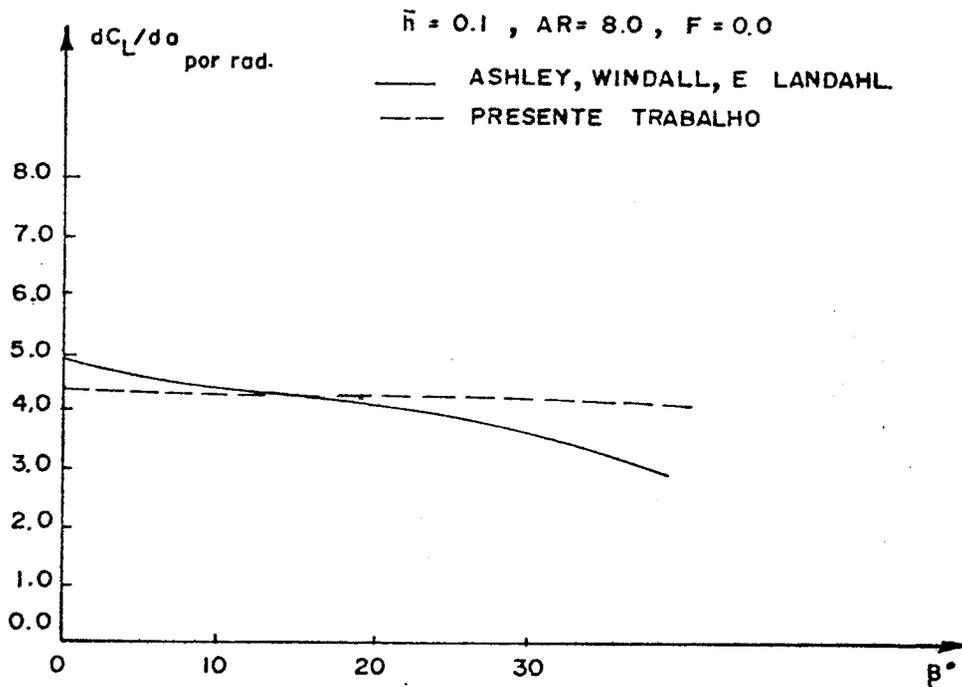


FIG. 51 EFEITO DO ANGULO DIÉDRICO SÔBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL.

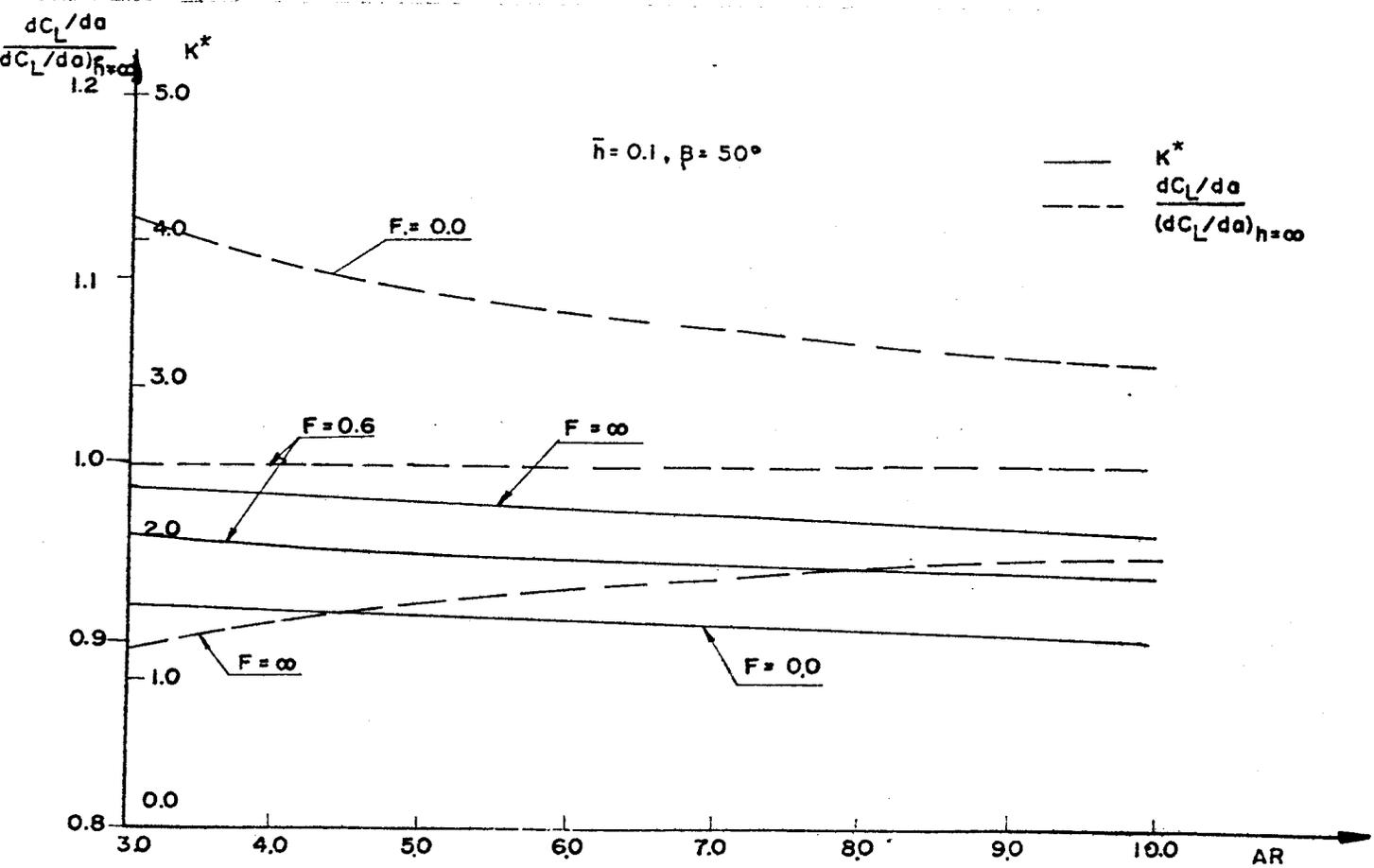


FIG. 52 EFEITO DO ASPECT RATIO SOBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL E FATOR DE ARRASTO INDUZIDO

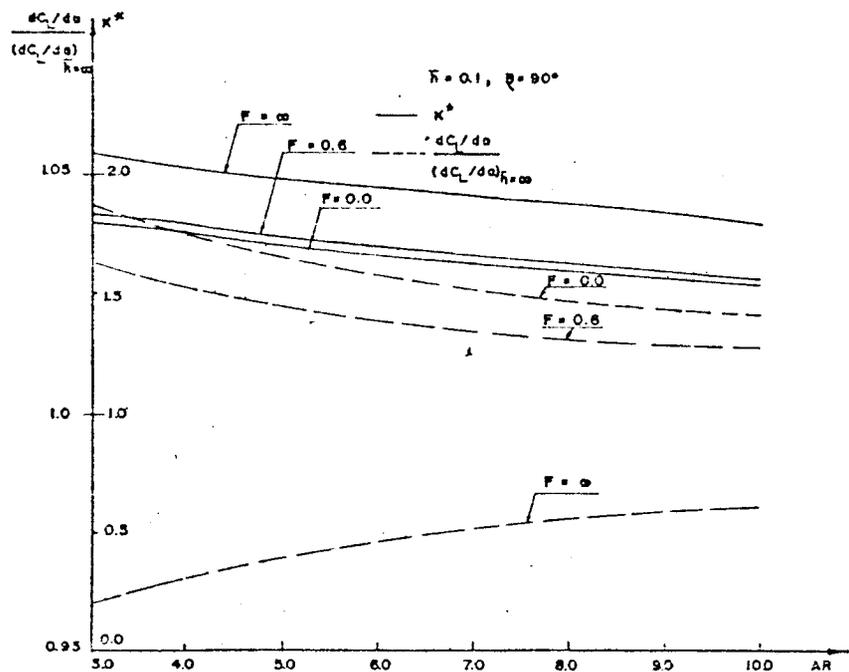


FIG. 53 EFEITO DO ASPECT RATIO SOBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL E FATOR DE ARRASTO INDUZIDO.

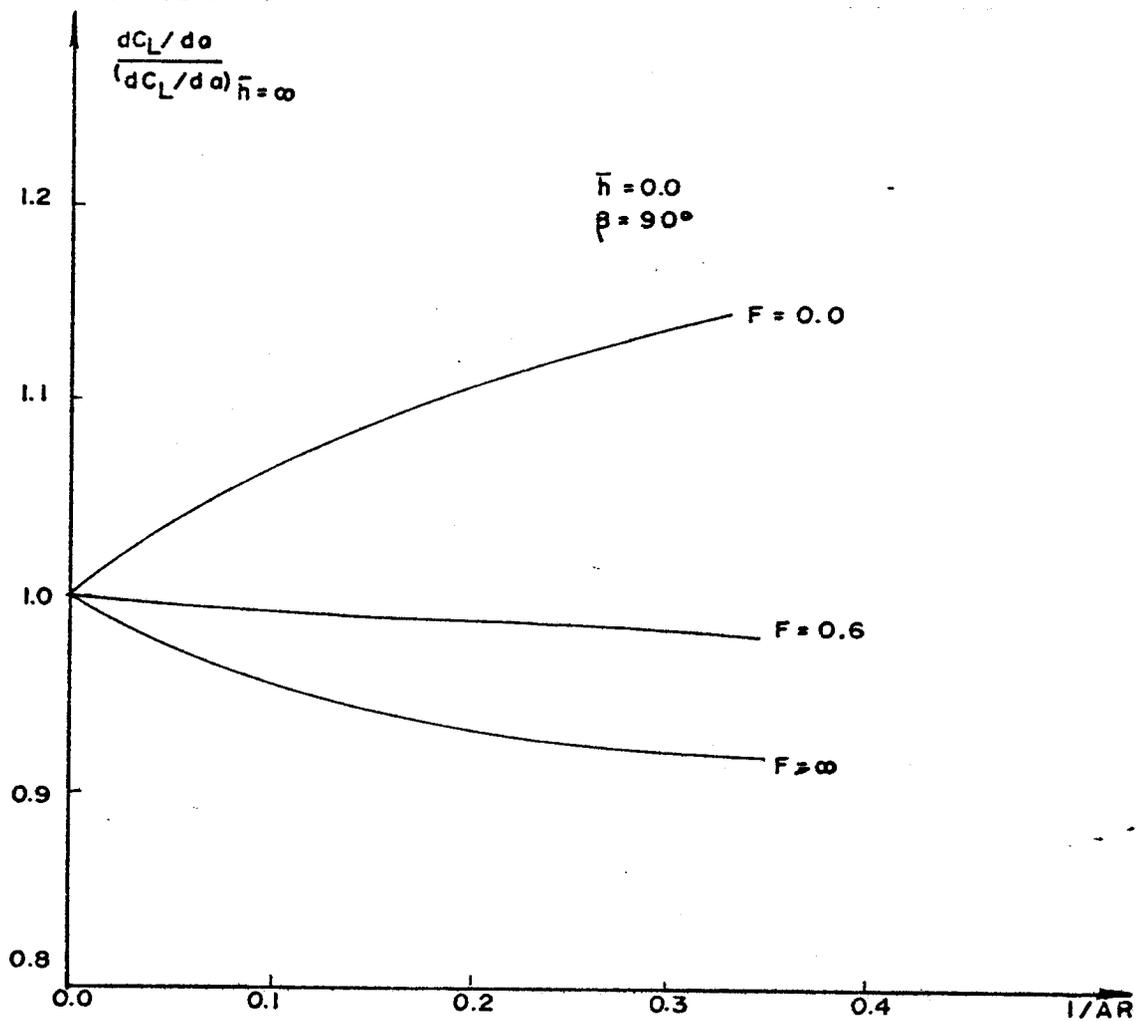


FIG. 54 EFEITO DO ASPECT RATIO SÔBRE A SUSTENTAÇÃO TOTAL.

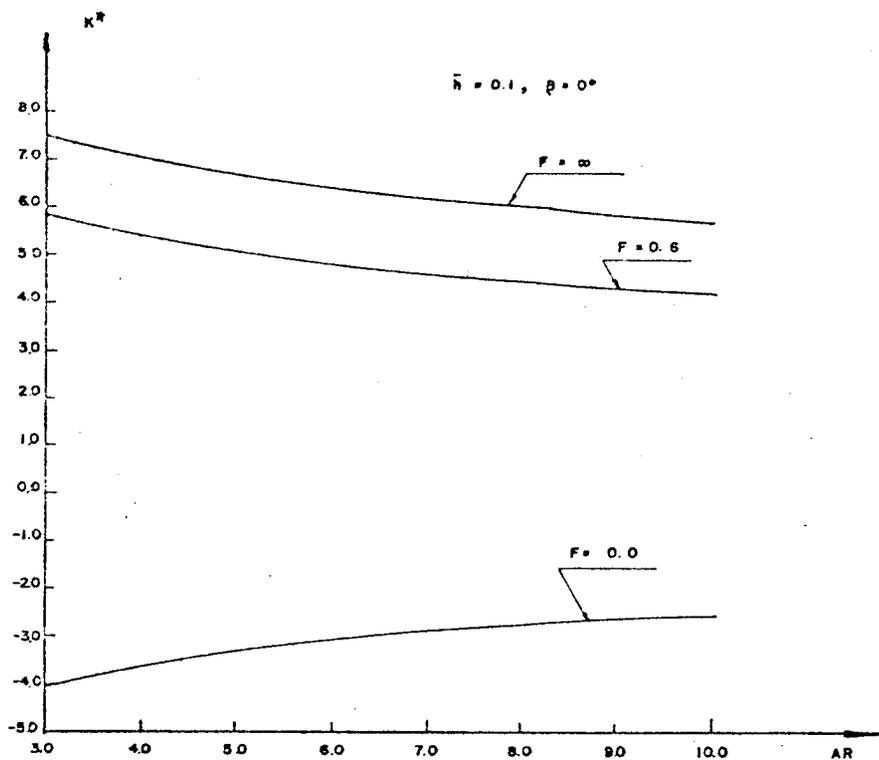
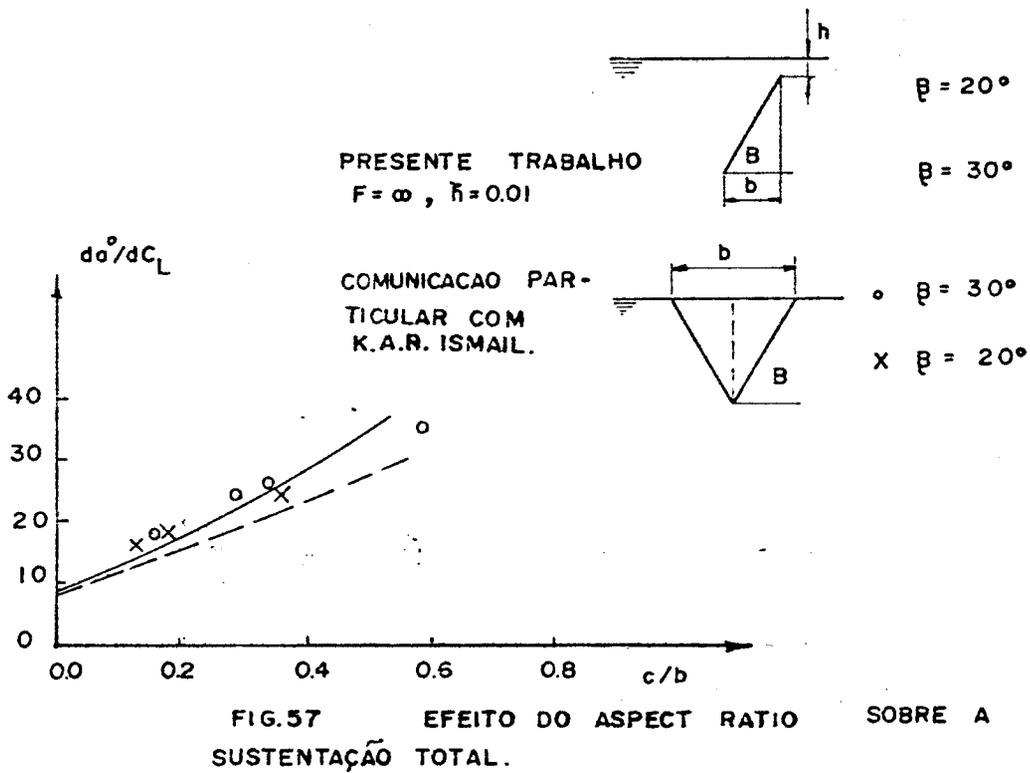
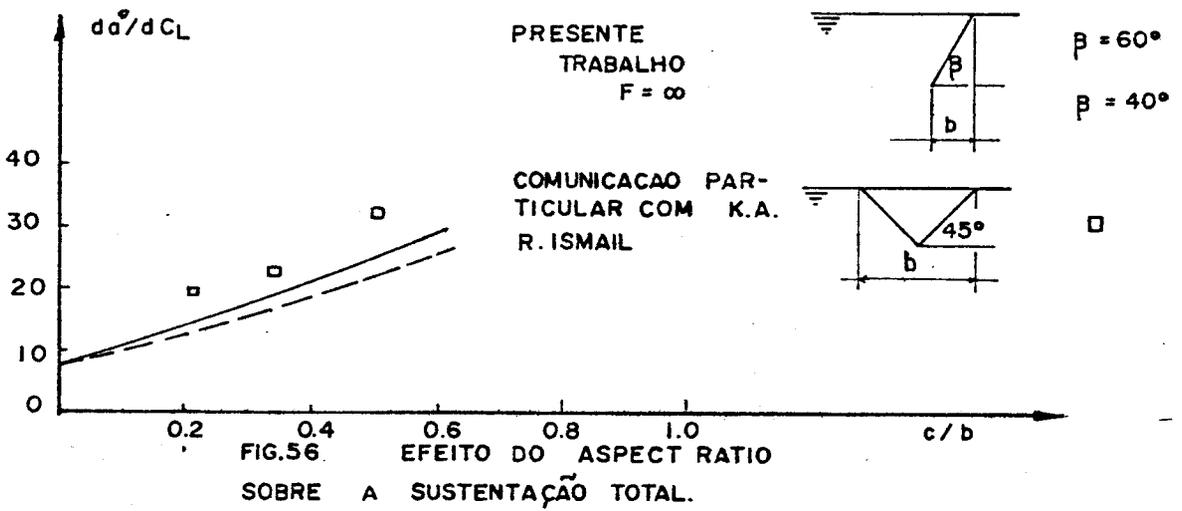


FIG. 55 EFEITO DO ASPECT RATIO SOBRE O FATOR DE ARRASTO INDUZIDO.



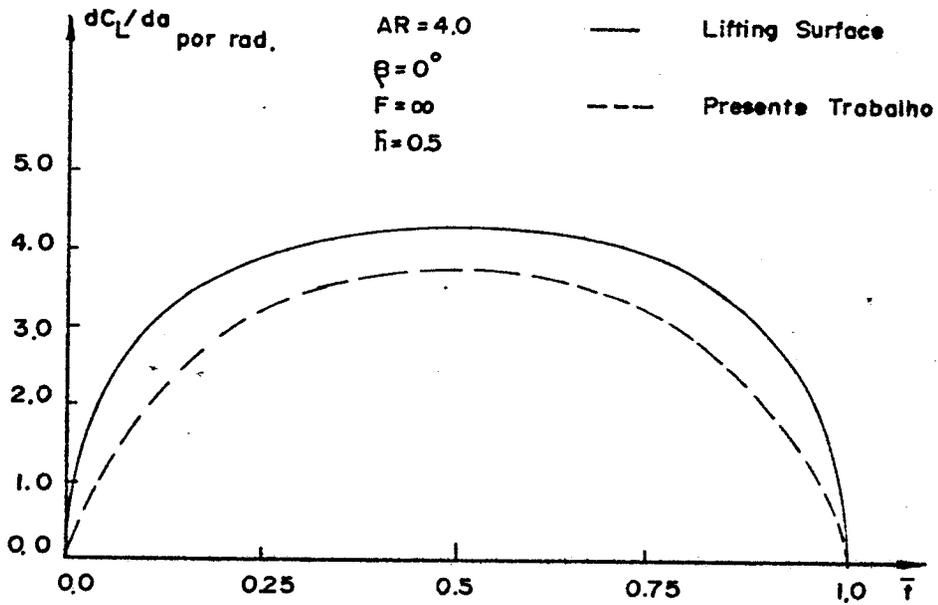


FIG. 58 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

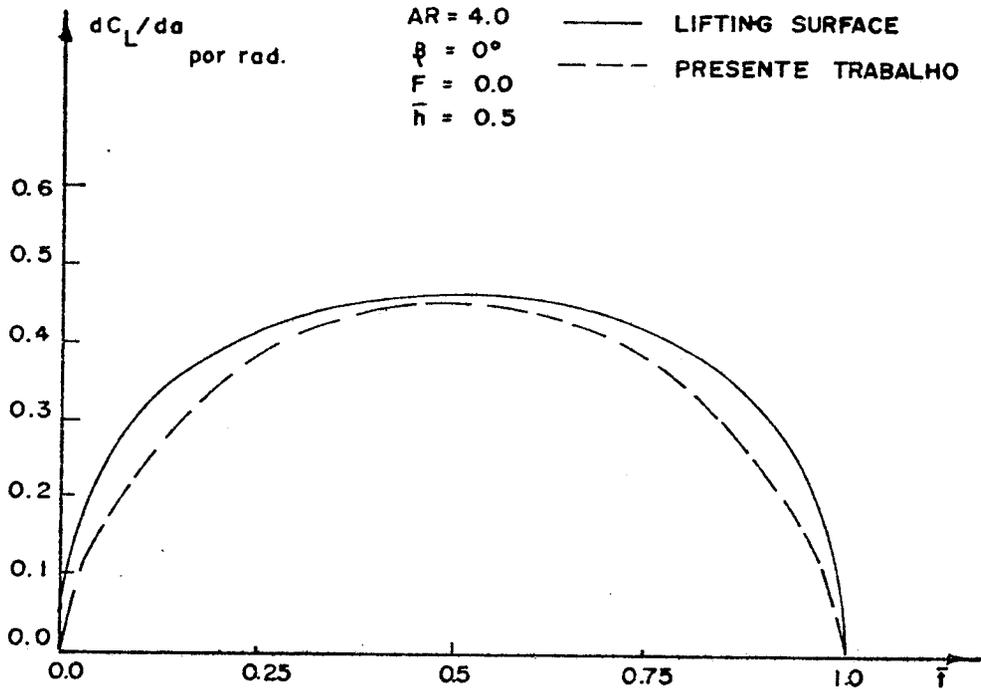


FIG. 59 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.

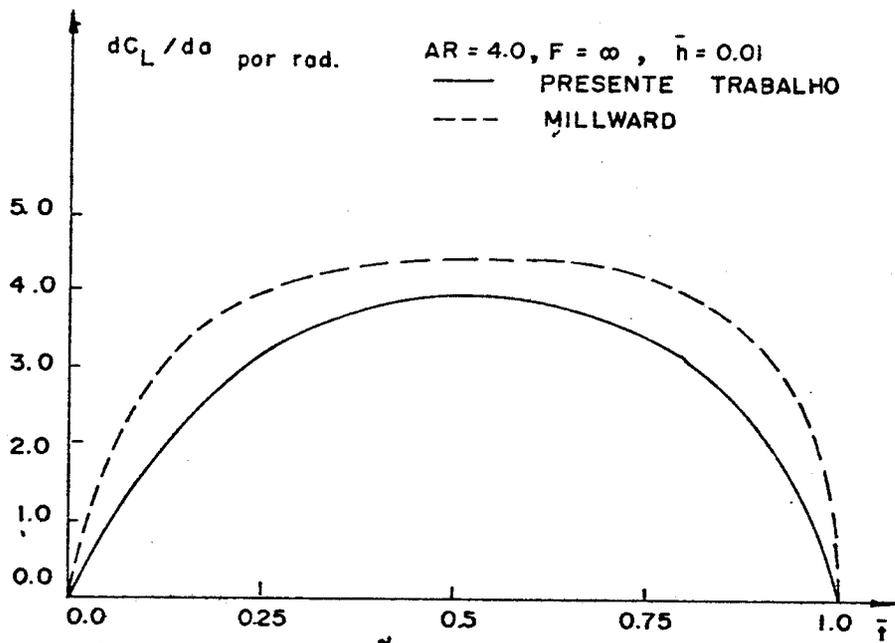


FIG.60 DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AO LONGO DA ENVERGADURA.