UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

Departamento de Mecânica Computacional

DIFERENÇAS FINITAS PARA MALHAS ARBITRÁRIAS (VIA SÉRIE DE TAYLOR)

Eng. Athail Rangel Pulino Filho

ESTE EXEMPLAR corresponde à REDAÇÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA POR ATHAIL RANGEL PULINO FILHO E APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA EM 02-6-89

Eduardo

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas - UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, Junho de 1989

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

Departamento de Mecânica Computacional

Tese de: Mestrado

Título da Tese: DIFERENÇAS FINITAS PARA MALHAS ARBITRÁRIAS
(via série de Taylor)

Autor: Athail Rangel Pulino Filho

Orientador: Prof. Dr. Fernando Iguti

Aprovada por

Prof. Dr. Fernando Iguti, presidente

Prof. Dr. José Roberto de F. Arruda

Prof. Dr. José Ricardo Figueiredo

Campinas, 2 de junho de 1989.

"A única coisa que todos temos em comum é que fazemos truques para nos obrigar a abandonar a busca. O antídoto é insistir, apesar de todos os obstáculos e desapontamentos."

J. Matus

Resumo

Este trabalho apresenta duas técnicas para obtenção de equações discretas de diferenças finitas para a solução numérica de problemas de valor de contorno e de auto-valor, bi-dimensionais, descritos por equações diferenciais parciais de ordem igual ou inferior a 2. As duas técnicas baseiam-se na expansão em série de Taylor da função solução do problema em estudo, diferindo apenas no número de pontos escolhidos para a montagem das moléculas (esquemas) de diferenças e no correspondente desenvolvimento algébrico para obtenção das equações discretas. A possibilidade de escolha arbitrária da localização dos pontos que compõem o domínio discreto de solução permite a elaboração de algoritmos para cálculo automático com a mesma versatilidade de algoritmos baseados no Método dos Elementos Finitos, quer no que se refere ao tratamento de contornos curvos, quer na possibilidade de adensamento da malha em regiões em que o gradiente da função solução varie muito rapidamente. São apresentados exemplos de aplicação em Condução de Calor em regime permanente, Torção livre de hastes retas e Vibração livre de membranas.

ABSTRACT

This work presents two procedures for obtaining discrete finite-difference equations for the numerical solution of two-dimensional second order boundary value and eigenvalue problems. These two procedures are based on the Taylor's series expansion of the solution function, and they differ from each other by the number of nodes of the difference scheme (star) and the corresponding algebraic derivation of the difference equations. A completely geometrically irregular array of nodal points opens the possibility for developing computational algorithms with the same flexibility as those based on the Finite Element Method for dealing with irregular boundaries and mesh refinement. Three example problems (Heat Conduction, Torsion of a Rod and Free Vibration of Flat Membranes) are presented.

CONTEÚDO

1. Introdução

1.1 - Generalidades 1

1.2 - Breve Resenha Histórica 2

1.3 - Objetivos 4

2. Diferenças Finitas para Malhas Irregulares

2.1 - Introdução 6

2.2 - Equações de diferenças para malha regular quadrada 7

2.2.1 - Moléculas regulares 8

2.2.2 - Moléculas irregulares e condições de contorno ... 9

2.3 - Operadores de 2ª ordem para malha arbitrária..... 11

2.4 - Moléculas irregulares de 6 pontos

2.4.1 - Pontos em Ω 14

2.4.2 - Moléculas no contorno 18

2.4.3 - Montagem e condic. de moléculas de 6 pontos 21

2.4.4 - O problema misto Neumann-Dirichlet 27

2.5 - Moléculas irregulares de 9 pontos

2.5.1 - Mínimos quadrados 28

2.5.2 - Mínimos quadrados com ponderação 29

2.5.3 - Moléculas no contorno 30

2.6 - Ordem de Convergência e estimativa de erro

2.6.1 - Ordem de convergência 31

2.6.2 - Acurácia de operadores discretos 34

2.6.3 - Uma estimativa do erro da solução aproximada 36

2.6.3.1 - Erro de discretização para moléculas de 6 ptos. 37

2.6.3.2 - Erro de discretização para moléculas de 9 ptos. 41

2.7 - Operadores de ordem superior a 2 42

3. Exemplos.

3.1 - Condução de calor 46

3.2 - Torção livre de hastes retas 52

3.3 - Vibração livre de membranas 56

4. Comentários e Conclusões 62

5. Referências bibliográficas 65

1 : INTRODUÇÃO.

1.1 - Generalidades.

O rápido desenvolvimento da tecnologia de computadores digitais tem possibilitado um grande crescimento da área de métodos numéricos. Problemas complexos, cuja solução era considerada impossível com as ferramentas anteriores ao computador, são agora rotineiramente resolvidos pela via numérica.

Parece pertencer ao senso comum a idéia de que há dois caminhos principais na busca de soluções numéricas para problemas contínuos de equilíbrio: a) técnicas variacionais usadas em conjunto com formulações de energia, e b) solução direta das equações diferenciais que governam o problema em estudo. A interligação entre os dois caminhos é evidenciada pela equivalência entre problemas de valor de contorno de equações diferenciais e problemas de cálculo de variações.

Dentre os enfoques variacionais destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF)[1], que experimentou grande desenvolvimento nas últimas duas décadas. A fascinação pelo MEF, causada por seu enorme sucesso e até mesmo por moda[10], resultou num relativo esquecimento de alguns outros métodos[2], especialmente o Método das Diferenças Finitas (MDF). Quando comparado com o MDF em sua versão clássica com malhas regulares[3,7,11], o Método dos Elementos

---

[1] Técnicas de Elementos Finitos podem também basear-se no método dos resíduos ponderados.

[2] Principalmente na área de Mecânica dos Sólidos.

Finitos provou ser mais eficiente no tratamento de condições de contorno, especialmente em domínios irregulares, e na possibilidade de adensamento das malhas de discretização em regiões em que o gradiente da solução varia muito rapidamente. Zienkiewicz observou[15] que uma das diferenças críticas entre as técnicas de elementos finitos e diferenças finitas, era a versatilidade das primeiras no tratamento de domínios irregulares.

1.2 - Breve resenha histórica.

Técnicas de diferenças finitas para malhas irregulares existem já há algum tempo. MacNeal[11] , em 1953, parece ter sido o primeiro a empregar malhas triangulares na solução de equações diferenciais de segunda ordem, estudando o fluxo de corrente em uma chapa metálica delgada. Usando analogia com circuitos elétricos, MacNeal desenvolveu uma formulação que permite associar uma área elementar a cada nó da malha discreta, com significado físico definido e, descrevendo exatamente o domínio em estudo.

Jensen, em 1972, foi, provavelmente, o primeiro a apresentar uma formulação geral de diferenças finitas para malhas irregulares, usando expansão em série de Taylor e discretização direta das equações diferenciais. Em lugar do esquema convencional (fig. 1.1a), Jensen usou uma molécula (ou estrela) de 6 pontos envolvendo um ponto central, para escrever operadores de diferenças de ordem igual ou inferior a 2 (Fig. 1.1.b).

A principal dificuldade da proposta de Jensen era o eventual mau

condicionamento da matriz de diferenças gerada para cada molécula.

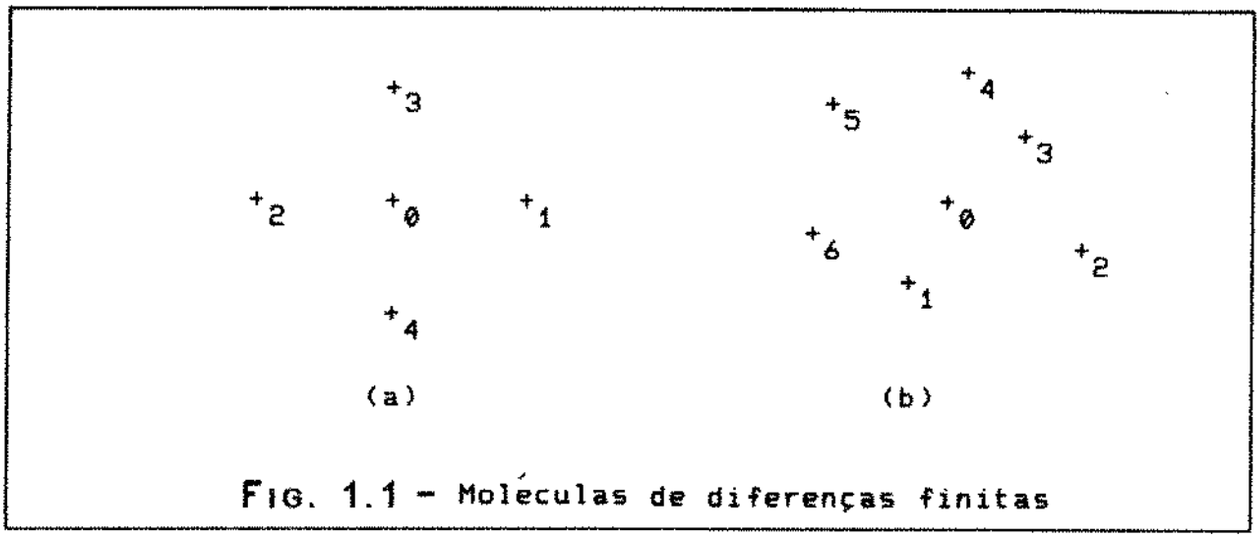

FIG. 1.1 - Moléculas de diferenças finitas

Muitos autores tentaram desenvolver procedimentos automáticos que evitassem esse mau condicionamento quando da escolha dos pontos envolvidos em cada molécula. Perrone e Kao[13] usaram uma molécula com pontos envolventes escolhidos segundo critérios de distância e posicionamento nos octantes referidos ao sistema de coordenadas (ver fig. 1.2).

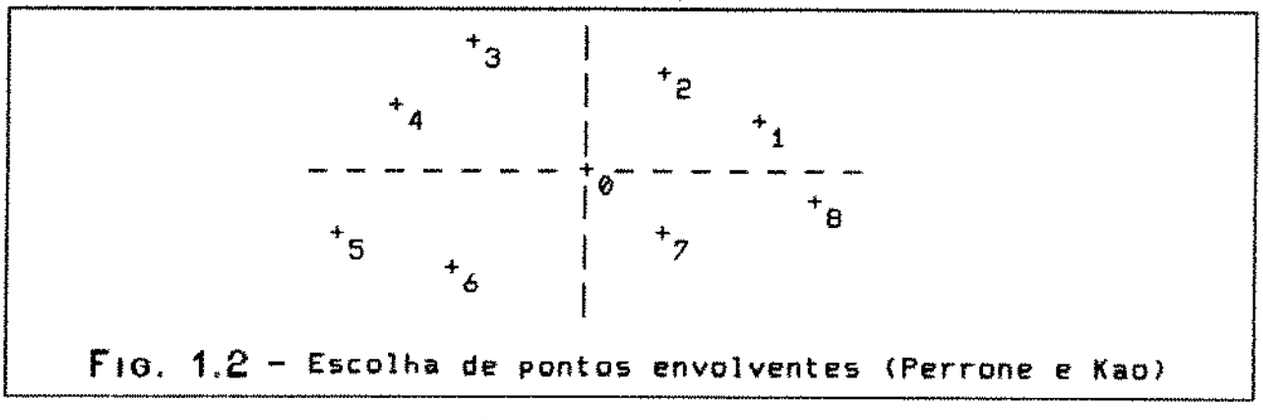

FIG. 1.2 - Escolha de pontos envolventes (Perrone e Kao)

Kurowski e Szmelter[10] sugeriram fazer uma triangularização de todo o domínio e montar as moléculas com os vértices de todos

os triângulos com um ponto em comum. Um enfoque diferente foi apresentado por Frei[4]. Usando o conceito de elementos finitos isoparamétricos, Frei introduziu o emprego de formas irregulares mapeadas em uma malha retangular regular, onde eram escritas as equações de diferenças. Em 1980, Gonçalves e Pamplona[5] apresentaram uma técnica bastante útil para o tratamento das condições de contorno, facilitando a elaboração de dados de entrada para programas de cálculo automático por computador.

Para evitar os problemas de condicionamento e singularidade da matriz de diferenças da proposta de Jensen e, ao mesmo tempo, reduzir o tempo computacional do método sugerido por Perrone e Kao, Liszka e Orkisz[10] propuseram minimizar o erro de truncamento da série de Taylor usando coeficientes de ponderação inversamente proporcionais à distância de cada ponto envolvente ao ponto central.

1.3 - Objetivos.

Este trabalho apresenta dois esquemas de diferenças finitas para malhas arbitrárias baseados na expansão em série de Taylor da função solução de problemas de valor de contorno. No Capítulo 2 descreve-se o método de obtenção das equações de diferenças para operadores diferenciais parciais de ordem igual ou inferior a 2, determina-se a ordem de convergência da solução aproximada em função do parâmetro de malha e apresenta-se, ainda, uma estimativa do erro da solução aproximada. O capítulo 3 apresenta alguns

exemplos de aplicação a problemas regidos por equações diferenciais parciais de segunda ordem. No Capítulo 4 discutem-se algumas vantagens e dificuldades das técnicas empregadas e algumas sugestões sobre outras aplicações em mecânica do contínuo.

2 : Diferenças Finitas para Malhas Irregulares.

2.1 - Introdução.

Seja $\phi(x,y)$ solução do problema

$$L(\phi) = p(x,y) \text{ em } \Omega \in \mathbb{E}^2 \tag{2.1}$$

$$\phi(x,y) = \bar{\phi}(x,y) \text{ em } \Gamma_1 \tag{2.2}$$

$$\phi_n(x,y) = \bar{\phi}_n(x,y) \text{ em } \Gamma_2 \tag{2.3}$$

onde

$$L(\phi) = \alpha_1\phi_x + \alpha_2\phi_y + \alpha_3\phi_{xx} + \alpha_4\phi_{xy} + \alpha_5\phi_{yy} \tag{2.4}$$

$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ é o contorno do domínio Ω (fig. 2.1)

$\bar{\phi}(x,y)$: valor conhecido de $\phi(x,y)$ em Γ_1

$\phi_n(x,y)$: derivada parcial de $\phi(x,y)$ na direção da normal externa ao contorno Γ de Ω

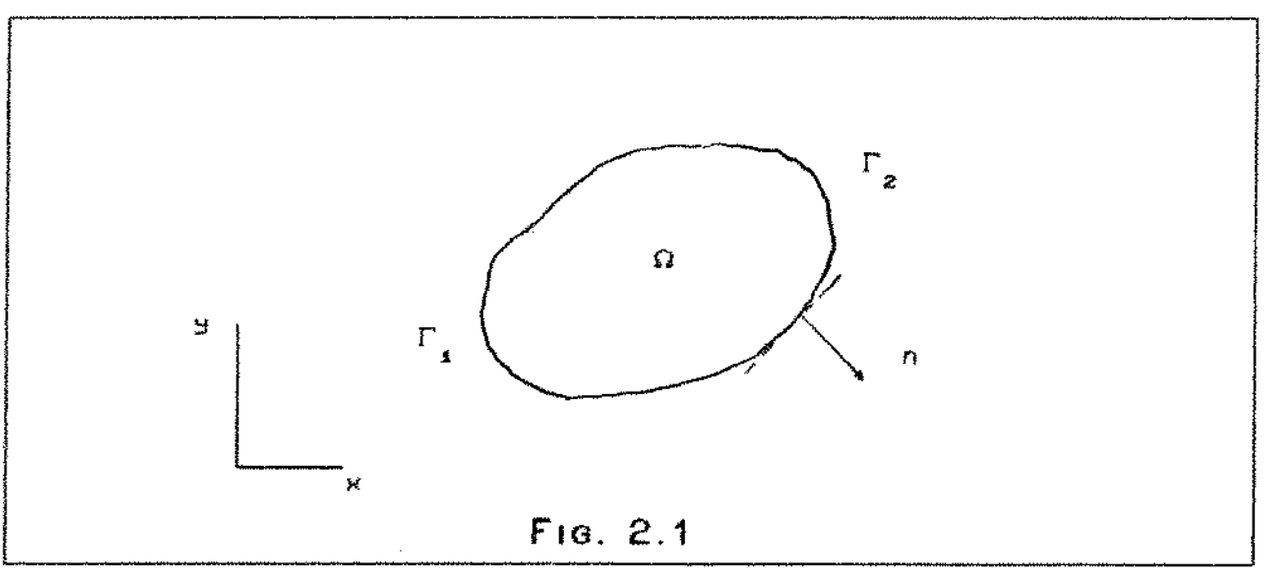

Fig. 2.1

$\bar{\phi}_n(x,y)$: valor conhecido de ϕ_n em Γ_2

ϕ_x , ϕ_y, ϕ_{xx} , ϕ_{xy}, ϕ_{yy} : derivadas parciais de $\phi(x,y)$.

$\alpha_i \in \mathbb{R}$; $(i = 1..5)$

$p(x,y)$: função de valor conhecido $\forall\ (x,y) \in \Omega$.

2.2 - Equações de diferenças para malha regular quadrada.

Pode-se obter uma aproximação das derivadas parciais[1] que compõem o operador L (eq. 2.4), trabalhando em um domínio discreto Ω_a cujos elementos são N pontos pertencentes a $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$, escolhidos de modo a coincidirem com os nós de uma malha regular quadrada, como indicado na fig. (2.2).

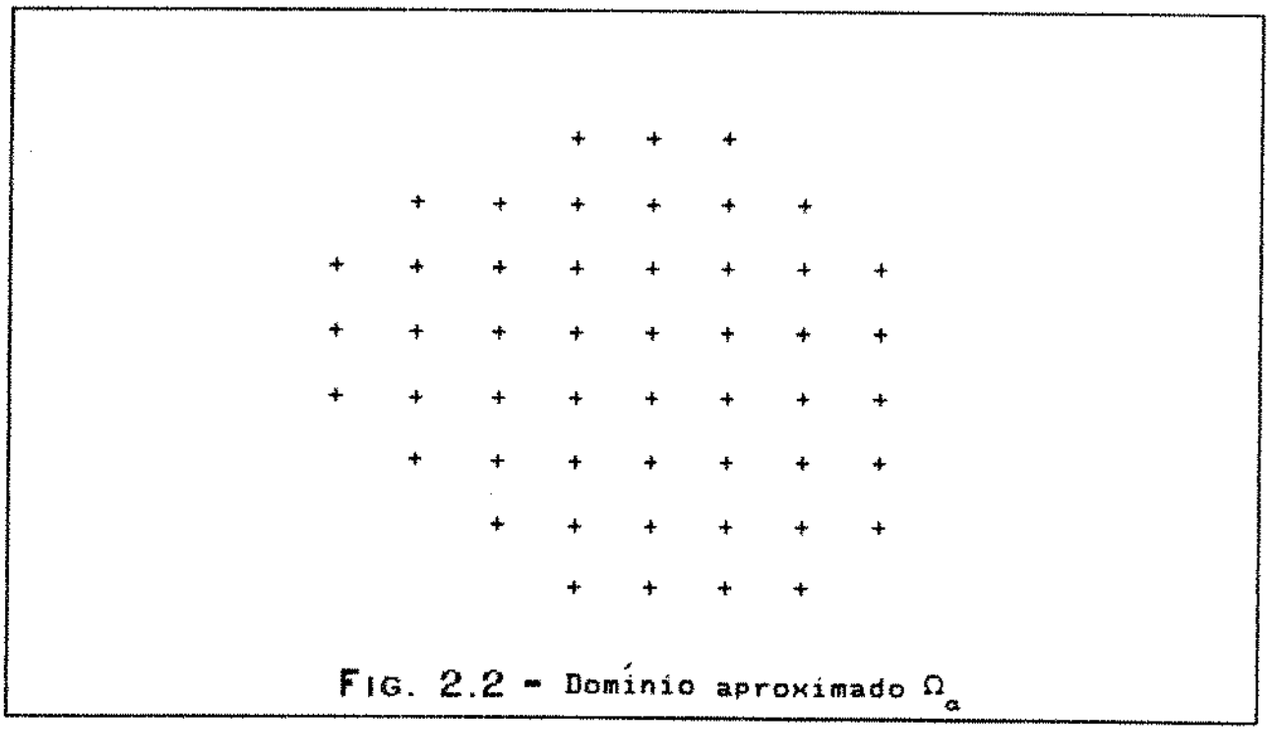

FIG. 2.2 - Domínio aproximado Ω_a

[1] Menos para a derivada mista, que exige pontos com Δx e Δy não nulos.

2.2.1 - Moléculas regulares.

Tomando um ponto 0 de Ω_α suficientemente distante de Γ de modo que seus quatro vizinhos imediatos existam (veja-se fig. 2.3), pode-se fazer a expansão em série de Taylor da função $\phi(x,y)$ para cada um dos quatro vizinhos, supondo conhecidos os valores de ϕ e de suas derivadas parciais até ordem dois no ponto 0.

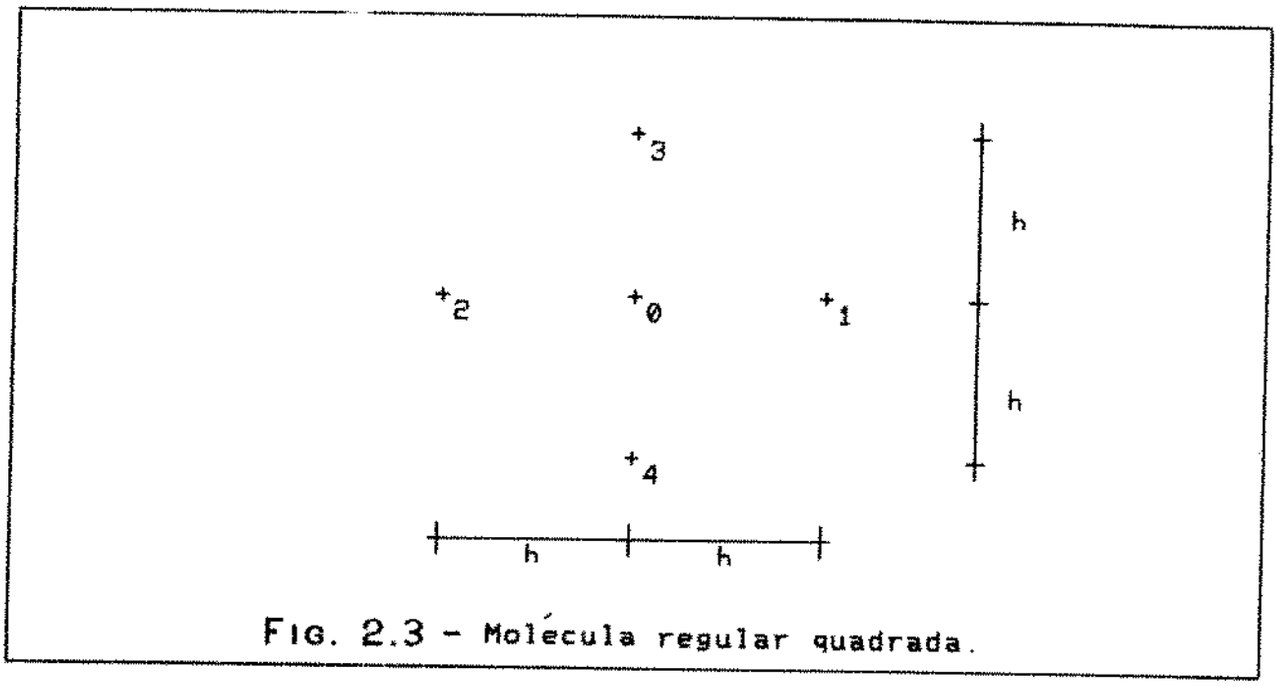

FIG. 2.3 - Molécula regular quadrada.

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \phi_0 + h(\phi_x)_0 + \tfrac{1}{2} h^2(\phi_{xx})_0 + r_1 \\
\phi_2 &= \phi_0 - h(\phi_x)_0 + \tfrac{1}{2} h^2(\phi_{xx})_0 + r_2 \\
\phi_3 &= \phi_0 + h(\phi_y)_0 + \tfrac{1}{2} h^2(\phi_{yy})_0 + r_3 \\
\phi_4 &= \phi_0 - h(\phi_y)_0 + \tfrac{1}{2} h^2(\phi_{yy})_0 + r_4
\end{aligned} \qquad (2.5)$$

onde $\phi_i (i = 0,\ldots,4)$ são os valores de $\phi(x,y)$ nos pontos 0,1,...4, respectivamente e, r_i $(i = 1,\ldots,4)$ os termos

resultantes do truncamento da série.

Se o operador L for, por exemplo, o Laplaciano ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$ na eq. 2.4), soma-se as 4 equações (2.5)

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0 = h^2 [(\phi_{xx})_0 + (\phi_{yy})_0] + r \qquad (2.6)$$

Para valores suficientemente pequenos de h[2,3] o termo r em (2.6) pode ser desprezado e

$$(\phi_{xx})_0 + (\phi_{yy})_0 \cong \frac{1}{h^2} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0) \qquad (2.7)$$

passa a ser a expressão aproximada do operador diferencial no ponto 0 .

2.2.2 - Moléculas irregulares e condições de contorno.

Quando o ponto central da molécula, 0, está próximo de Γ, um ou mais pontos vizinhos podem não existir ou pertencer a Γ (veja-se fig 2.4a). Se um ponto vizinho pertence a Γ e $\Gamma \equiv \Gamma_1$ (problema de Dirichlet) a condição de contorno é automáticamente introduzida, substituindo-se em (2.7) o valor conhecido de $\phi(x,y)$. Este é o caso, por exemplo, dos pontos 1 e 3 da molécula mostrada na fig. (2.4b).

Para corrigir a situação mostrada em (2.4a) (inexistência do ponto 2), pode-se montar uma molécula irregular como a da fig. (2.4c). Neste caso, as eqs. (2.5) passam a ser

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= \phi_0 + h(\phi_x)_0 + \tfrac{1}{2} h^2 (\phi_{xx})_0 + r_1 \\
\phi_2 &= \phi_0 - h_2(\phi_x)_0 + \tfrac{1}{2} h_2^2 (\phi_{xx})_0 + r_2 \\
\phi_3 &= \phi_0 + h(\phi_y)_0 + \tfrac{1}{2} h^2 (\phi_{yy})_0 + r_3 \\
\phi_4 &= \phi_0 - h_1(\phi_y)_0 + \tfrac{1}{2} h_1^2 (\phi_{yy})_0 + r_4
\end{aligned}
\qquad (2.8)
$$

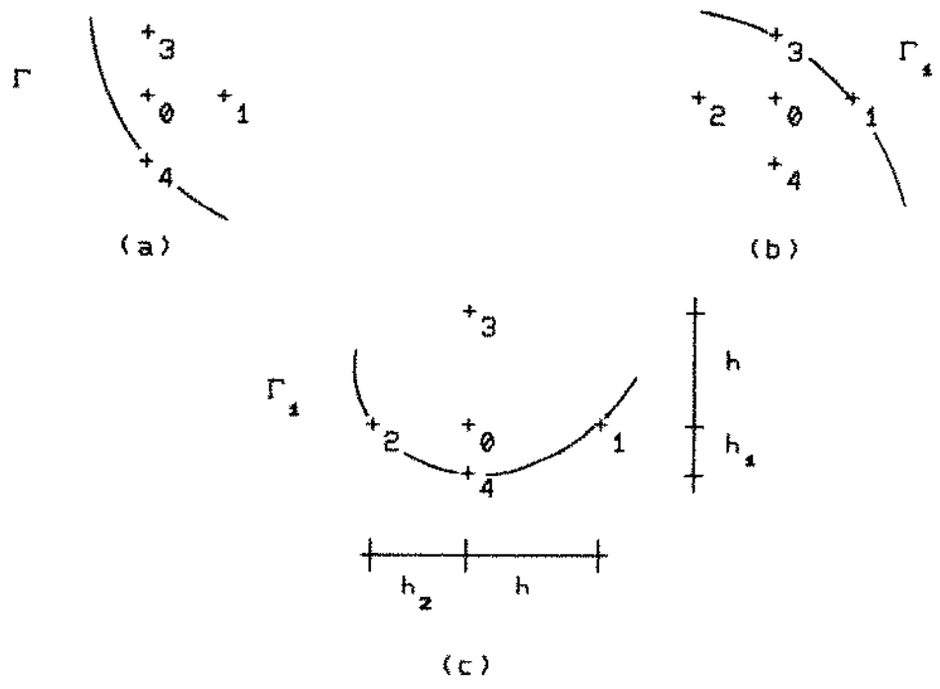

FIG. 2.4 – Moléculas irregulares em malha ortogonal.

Resolvendo as equações (2.8) em $(\phi_{xx})_0$ e $(\phi_{yy})_0$ e montando o Laplaciano[2], vem

$$
\nabla^2(\phi)_0 = 2\left[\frac{\phi_1}{h(h+h_2)} + \frac{\phi_2}{h_2(h_2+h)} + \frac{\phi_3}{h(h+h_1)} + \frac{\phi_4}{h_1(h_1+h)} \right] +
$$

$$
- 2\phi_0 \left(\frac{1}{hh_1} + \frac{1}{hh_2} \right) = 0 \qquad (2.9)
$$

---

[2] Veja-se Crandall[21], pp. 262 e 269.

Assim, para a molécula da fig. (2.4c) quando ϕ é conhecido no contorno (Dirichlet), os termos em ϕ_1 e ϕ_4 em (2.9) são conhecidos e passam para o 2º membro.

Quando o contorno Γ é do tipo Γ_2 (problema de Neumann), Crandall[2] e Forsythe[3] apresentam duas sugestões.

A primeira é acrescentar às equações (2.8) , para cada ponto no contorno, a condição válida em Γ_2

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_o = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_o (\cos\theta) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_o (\mathrm{sen}\theta) \qquad (2.10)$$

onde θ é o ângulo entre a normal externa ao contorno e o sentido positivo do eixo x . O sistema de equações resultante pode ser resolvido nas segundas derivadas de $\phi(x,y)$ em relação a x e y, que são as componentes do laplaciano.

A segunda alternativa consiste em, através de interpolação linear, estimar o valor de $\phi(x,y)$ em pontos de uma molécula regular centrada em 0 e escrever somente a eq. (2.10).

2.3 - Operadores de 2ª ordem para malha arbitrária.

A solução aproximada do problema (2.1) utilizando esquemas convencionais[3] de diferenças finitas perde em eficiência e versatilidade quando se apresentam algumas condições bastante comuns em aplicações práticas:

---

[3] Malhas regulares, em geral quadradas ou retangulares.

- se o contorno Γ é curvo, a aproximação de Ω com malhas regulares exige a escolha de pontos adicionais em Γ, fora da malha. Esses pontos podem ficar muito próximos de algum ponto regular, causando mau condicionamento da matriz dos coeficientes do sistema de equações algébricas lineares a ser resolvido;

- quando os valores das derivadas parciais de $\phi(x,y)$ apresentam variação acentuada em algum trecho do domínio Ω, o necessário adensamento da malha regular diminui a versatilidade dos programas para cálculo automático da solução aproximada;

- quando a direção da normal externa ao contorno Γ não coincide com uma das direções principais da malha regular, a imposição da condição de contorno (2.3) torna-se mais complicada.

A formulação baseada em malhas irregulares apresentada a seguir, parece mais adequada sempre que as citadas condições estejam presentes.

Dado um ponto $(x_o, y_o) \in \Omega$, pode-se determinar o valor de $\phi(x,y)$ em um ponto qualquer (x,y) de Ω se forem conhecidos os valores das derivadas parciais de ϕ no ponto (x_o, y_o), indicadas por $(\phi_x)_o$, $(\phi_y)_o$, $(\phi_{xx})_o$, $(\phi_{xy})_o$ e $(\phi_{yy})_o$, fazendo a expansão em série de Taylor de $\phi(x,y)$

$$\phi(x,y) = \phi(x_o,y_o) + (\phi_x)_o(x - x_o) + (\phi_y)_o(y - y_o) + \\ + \frac{1}{2}(\phi_{xx})_o(x - x_o)^2 + (\phi_{xy})_o(x - x_o)(y - y_o) + \\ + \frac{1}{2}(\phi_{yy})_o(y - y_o)^2 + r \qquad (2.11)$$

onde r é o resíduo resultante do truncamento da série no 6^{o} termo.

Tomando m pontos em Ω próximos ao ponto 0 (de coordenadas x_o, y_o), pretende-se representar o operador L em (2.1) através de uma expressão algébrica do tipo

$$L_h(\phi) = \sum_{i=1}^{m} A(0,i)(\phi_i - \phi_o) \qquad (2.12)$$

Escrevendo (2.11) para os m pontos "vizinhos" de 0 e colocando as m equações em forma matricial tem-se

$$(\phi) = (\phi_o) + [D](\partial\phi)_o + (r) \qquad (2.13)$$

ou, fazendo $(\Delta\phi) = (\phi) - (\phi_o)$,

$$(\Delta\phi) = [D](\partial\phi)_o + (r) \qquad (2.14)$$

Se os m pontos são suficientemente próximos de 0 ou guardam suficiente simetria em relação a 0, o termo (r) de (2.14) pode ser desprezado[4] e chega-se a

$$(\Delta\phi) = [D](\partial\phi)_o \qquad (2.15)$$

A matriz [D] contém os coeficientes das m expansões em série de Taylor que dependem das coordenadas dos m+1 pontos.[5]

Como o vetor $(\partial\phi)_o$ contem os valores das derivadas parciais

---

[4] uma vez que $f \to f_o$ quando $\Delta x, \Delta y \to 0$

[5] Ver forma explícita para m=5 na eq. (2.16).

de $\phi(x,y)$ que compõe o operador $\tilde{L}$ de (2.4), para escrevê-lo no ponto 0, basta resolver (2.15) em $(\theta\phi)_0$.

2.4 - Moléculas irregulares de 6 pontos.

2.4.1 - Pontos em Ω .

Tomando 5 pontos em Ω, (x_i, y_i), i= 1...5, a equação (2.15) toma a seguinte forma explícita:

$$\begin{bmatrix} (x_1-x_0) & (y_1-y_0) & \frac{1}{2}(x_1-x_0)^2 & (x_1-x_0)(y_1-y_0) & \frac{1}{2}(y_1-y_0)^2 \\ (x_2-x_0) & (y_2-y_0) & \frac{1}{2}(x_2-x_0)^2 & (x_2-x_0)(y_2-y_0) & \frac{1}{2}(y_2-y_0)^2 \\ (x_3-x_0) & (y_3-y_0) & \frac{1}{2}(x_3-x_0)^2 & (x_3-x_0)(y_3-y_0) & \frac{1}{2}(y_3-y_0)^2 \\ (x_4-x_0) & (y_4-y_0) & \frac{1}{2}(x_4-x_0)^2 & (x_4-x_0)(y_4-y_0) & \frac{1}{2}(y_4-y_0)^2 \\ (x_5-x_0) & (y_5-y_0) & \frac{1}{2}(x_5-x_0)^2 & (x_5-x_0)(y_5-y_0) & \frac{1}{2}(y_5-y_0)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_{xx} \\ \phi_{xy} \\ \phi_{yy} \end{bmatrix}_0 =$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_1 - \phi_0 \\ \phi_2 - \phi_0 \\ \phi_3 - \phi_0 \\ \phi_4 - \phi_0 \\ \phi_5 - \phi_0 \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

onde ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4, ϕ_5 sao os valores de $\phi(x,y)$ nos pontos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 de Ω .(ver fig. 2.5)

Se a posição relativa dos pontos que constituem a molécula for adequada[6], a matriz [D] resulta não-singular e pode-se

---

[6] Veja-se Cap. 2, item 2.4.2

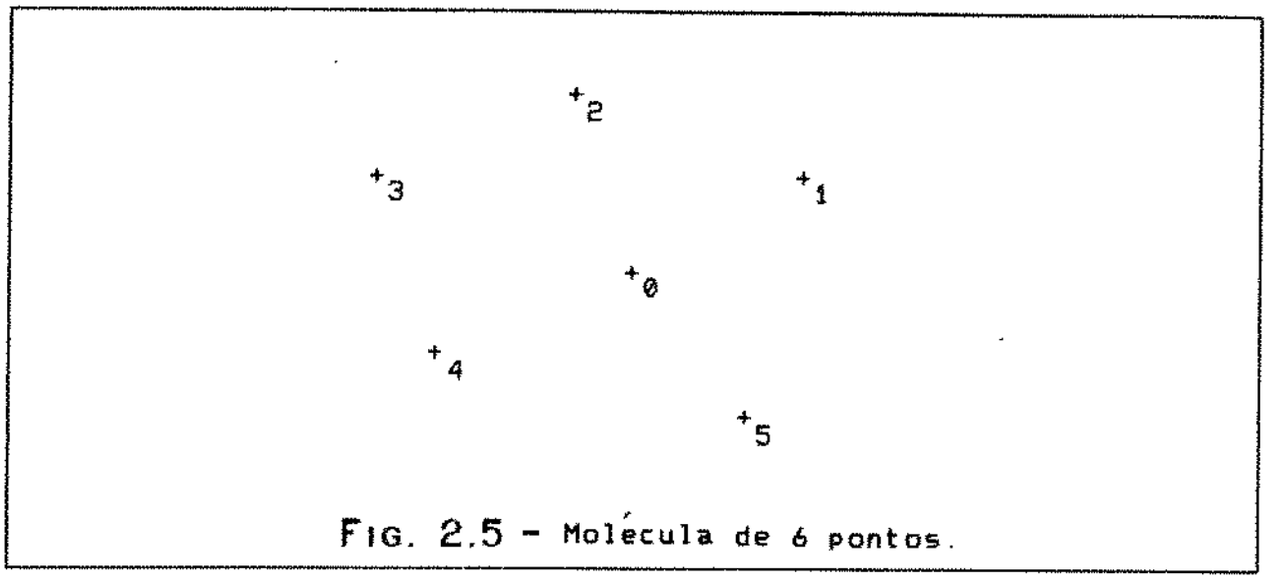

FIG. 2.5 - Molécula de 6 pontos.

então escrever:

$$[A](\Delta\phi) = (\partial\phi)_o \tag{2.17}$$

onde

$$[A] = [D]^{-1} \tag{2.18}$$

Explicitando (2.17), tem-se

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 - \phi_0 \\ \phi_2 - \phi_0 \\ \phi_3 - \phi_0 \\ \phi_4 - \phi_0 \\ \phi_5 - \phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_{xx} \\ \phi_{xy} \\ \phi_{yy} \end{bmatrix}_o \tag{2.19}$$

Assim, qualquer das derivadas parciais de (2.4) pode ser escrita no ponto (x_o, y_o) multiplicando-se a linha correspondente de [A] pelo vetor $(\Delta\phi)$. Por exemplo:

$$(\phi_{xx})_o = \sum_{i=1}^{5} (\phi_i - \phi_o)\, a_{2i} \qquad (2.20)$$

Tomando N pontos em Ω e trabalhando agora no domínio aproximado Ω_a , pode-se escrever (2.1) em cada um dos N pontos

$$\sum_{i=1}^{5} (\alpha_1 a_{1i} + \alpha_2 a_{2i} + \alpha_3 a_{3i} + \alpha_4 a_{4i} + \alpha_5 a_{5i})(\phi_i - \phi_o) = p(x_o, y_o) \qquad (2.21)$$

A repetição de (2.21) para os N pontos de Ω_a gera um sistema de equações algébricas lineares cuja solução fornece valores aproximados de $\phi(x,y)$ nos N pontos de Ω_a .

É interessante observar que, se a malha for ortogonal quadrada (fig. 2.6), a matriz [D] pode ser escrita como

$$[D] = [B].[C] \qquad (2.22)$$

onde

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

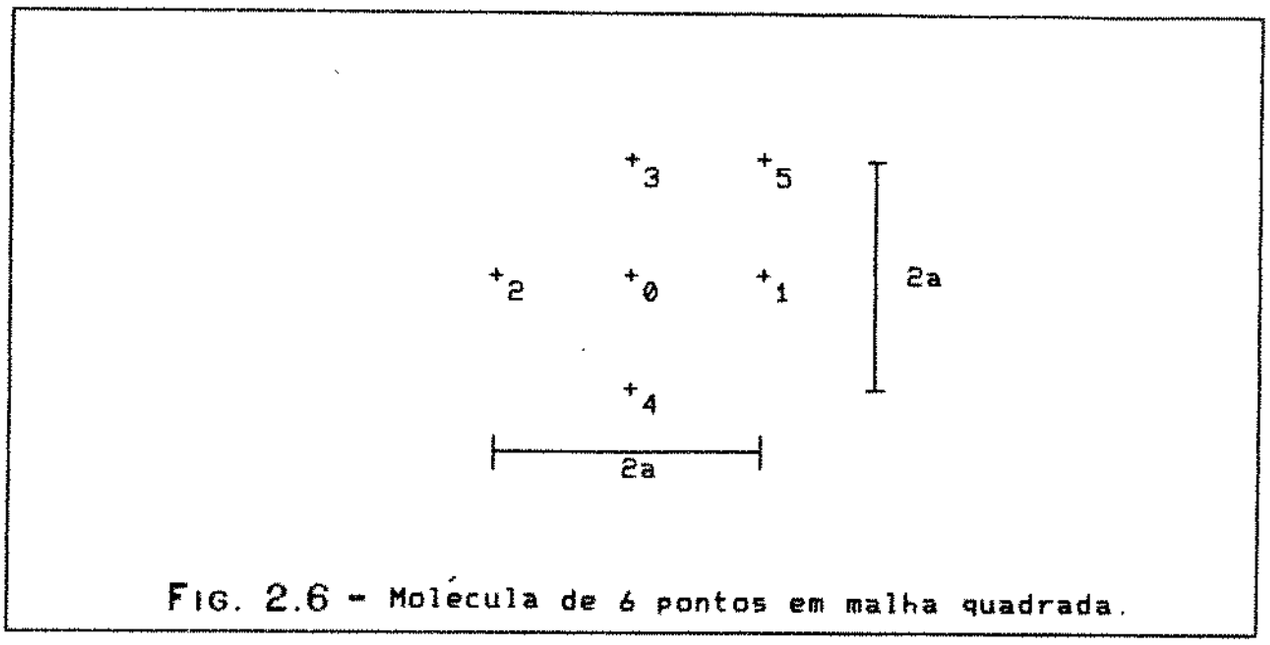

FIG. 2.6 - Molécula de 6 pontos em malha quadrada.

$$[C] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

Assim, $[A] = [D]^{-1} = [C]^{-1}[B]^{-1}$ passa a ser

$$[A] = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando esta matriz [A] em (2.17), pode-se escrever, por

exemplo:

$$(\phi_x)_o = (1/2a)\,(\phi_1 - \phi_2)$$
$$(\phi_{yy})_o = (1/a^2)\,(\phi_3 - 2\phi_o + \phi_4) \qquad (2.23)$$

Portanto, a molécula de 6 pontos aplicada a malhas regulares gera equações de diferenças idênticas àquelas do esquema convencional de diferença central[7].

2.4.2 - Moléculas no contorno.

Para problemas em que só exista o contorno Γ_1 (Dirichlet, p. exemplo), não há necessidade de moléculas em pontos no contorno, uma vez que a condição dada em (2.2) é imposta automàticamente quando os pontos de contorno participam das incidências das moléculas montadas em pontos internos. A equação (2.21) é escrita então somente em pontos de Ω_a que pertençam ao interior de Ω. Isto reduz a dimensão do sistema de equações algébricas. Para impor a condição de contorno válida em Γ_2 ou em problemas em que a derivada parcial de $\phi(x,y)$ relativamente à normal ao contorno seja uma variável com significado prático importante (fluxo de calor, p. exemplo), pode-se usar a formulação descrita a seguir.

As condições de contorno (2.2) e (2.3) são introduzidas reescrevendo (2.16) nos pontos de Ω_a que estejam em $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

---

[7] Menos para a derivada mista. Veja-se Perrone & Kao, 1975.

$$\begin{bmatrix} (x_1-x_0) & (y_1-y_0) & \frac{1}{2}(x_1-x_0)^2 & (x_1-x_0)(y_1-y_0) & \frac{1}{2}(y_1-y_0)^2 \\ (x_2-x_0) & (y_2-y_0) & \frac{1}{2}(x_2-x_0)^2 & (x_2-x_0)(y_2-y_0) & \frac{1}{2}(y_2-y_0)^2 \\ (x_3-x_0) & (y_3-y_0) & \frac{1}{2}(x_3-x_0)^2 & (x_3-x_0)(y_3-y_0) & \frac{1}{2}(y_3-y_0)^2 \\ (x_4-x_0) & (y_4-y_0) & \frac{1}{2}(x_4-x_0)^2 & (x_4-x_0)(y_4-y_0) & \frac{1}{2}(y_4-y_0)^2 \\ \ell & m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_{xx} \\ \phi_{xy} \\ \phi_{yy} \end{bmatrix}_0 =$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_1 - \phi_0 \\ \phi_2 - \phi_0 \\ \phi_3 - \phi_0 \\ \phi_4 - \phi_0 \\ \phi_n \end{bmatrix} \qquad (2.24)$$

A equação (2.24) é uma modificação de (2.16) em que a última linha de [D] foi substituída pela condição de contorno válida em Γ_2, dada pela eq. (2.3).

$$\phi_n(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \ell\phi_x + m\phi_y \qquad (2.25)$$

onde ℓ e m são os cossenos diretores do vetor normal unitário externo, no sistema de referência adotado (ver fig. 2.1). Desta forma, as moléculas para pontos de contorno são montadas com 4 pontos envolventes em lugar dos 5 usados em (2.17).

Sendo [D] não singular pode-se, a partir de (2.24), escrever novamente a equação (2.19), que passa a ter a seguinte forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 - \phi_0 \\ \phi_2 - \phi_0 \\ \phi_3 - \phi_0 \\ \phi_4 - \phi_0 \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_{xx} \\ \phi_{xy} \\ \phi_{yy} \end{bmatrix}_o \qquad (2.26)$$

A equação (2.1), escrita a partir de (2.26), para pontos de contorno, tem o seguinte aspecto:

$$\sum_{i=1}^{4} (\alpha_1 a_{1i} + \alpha_2 a_{2i} + \alpha_3 a_{3i} + \alpha_4 a_{4i} + \alpha_5 a_{5i})(\phi_i - \phi_o) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{5} \alpha_i a_{i5} \phi_n = p(x_o, y_o) \qquad (2.27)$$

Se o ponto central da molécula pertencer a Γ_1 o termo

$$-\sum_{i=1}^{4} (\alpha_1 a_{1i} + \alpha_2 a_{2i} + \alpha_3 a_{3i} + \alpha_4 a_{4i} + \alpha_5 a_{5i})\phi_o$$

é conhecido (ver eq. 2.2) e passa para o 2º membro, restando como incógnita principal o valor de ϕ_n. Se o ponto pertencer a Γ_2, o segundo termo do primeiro membro de (2.27) é conhecido, restando como incógnita principal o valor da função, ϕ_o.

Os quatro pontos escolhidos para montar a molécula no contorno devem estar dentro do domínio Ω. Isto provoca o desbalanceamento[8] da molécula. Para reduzir este desbalanceamento é sempre possível tomar, para cada ponto no contorno, um ponto

---

[8] Termo usado por Liszka, em [10]

virtual externo e escrever como equação adicional a condição (2.3) explicitada em (2.25). Este procedimento é particularmente eficiente em pontos de Γ_2. Desta modo, todas as moléculas passam a ter a mesma estrutura básica (6 pontos).

Uma outra objeção à formulação dada pela eq. (2.24) refere-se ao envolvimento, em um mesmo sistema de equações algébricas, de variáveis de natureza diferente, a saber, valores da função e de sua derivada normal. Dada a possível diferença na ordem de grandeza dos valores de ϕ e de suas derivadas, pode-se encontrar problemas numéricos na solução do sistema de equações. O uso de pontos virtuais externos a Ω evita esta situação.

2.4.3 - Montagem e condicionamento de moléculas de 6 pontos.

A escolha dos 5 pontos para montar uma molécula envolve 3 aspectos importantes, a saber:

a) distância entre os pontos - Se $\phi(x,y)$ é suficientemente regular, o resto correspondente ao truncamento da série de Taylor no 6º termo é limitado superiormente e tende a zero com os termos $(x - x_o)$ e $(y - y_o)$ e suas potências[8]. Assim, quanto menor a distância entre os pontos escolhidos para uma molécula, melhor será, teoricamente, a estimativa de $\phi(x,y)$ feita na eq. (2.11).

b) singularidade da matriz [D] - dependendo da posição relativa dos pontos envolventes, a matriz [D] da eq. (2.15) pode ser singular e o método torna-se inaplicável, uma vez que não se consegue escrever (2.15). Perrone e Kao[13] indicam situações em

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

que, seguramente, [D] é singular. A fig. (2.7) mostra algumas delas.

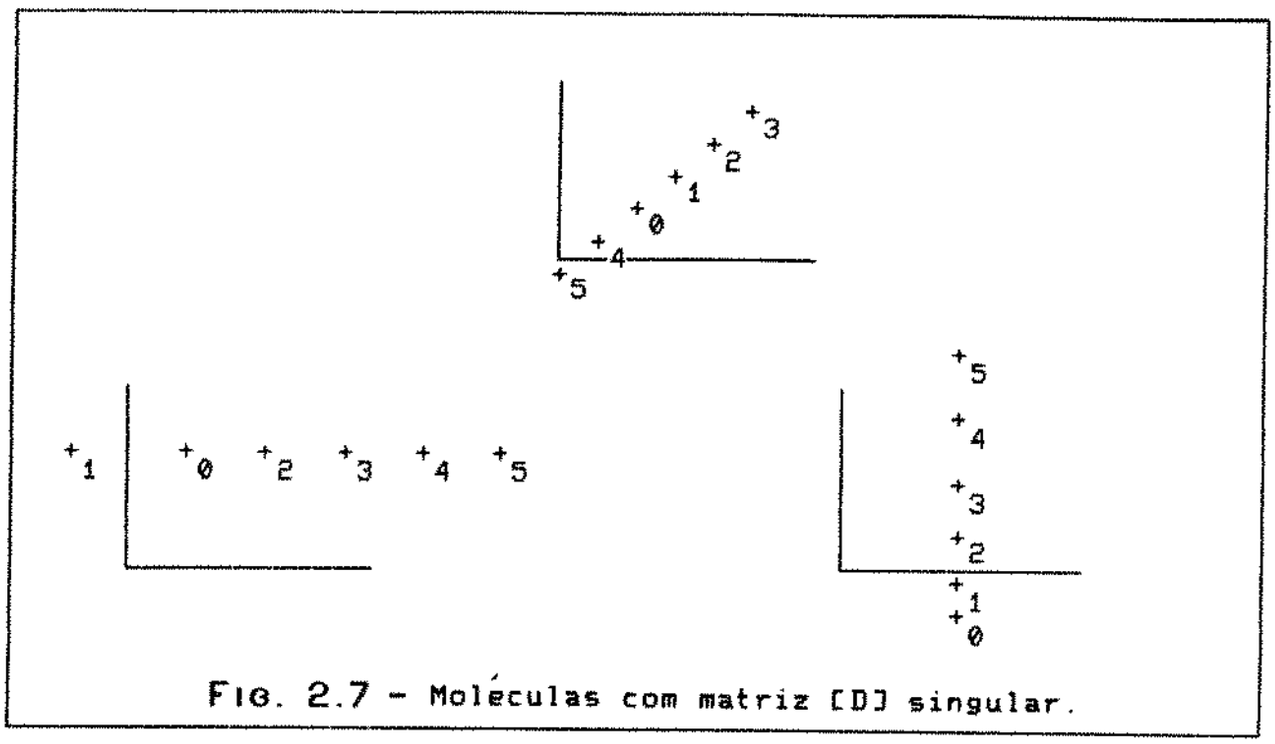

FIG. 2.7 - Moléculas com matriz [D] singular.

Além dos casos estudados em [13], pode-se afirmar que em pontos do contorno de Ω também terão matriz [D] singular moléculas que tenham 3 (ou mais) pontos situados em retas paralelas à reta suporte do vetor normal unitário (ver fig. 2.8).

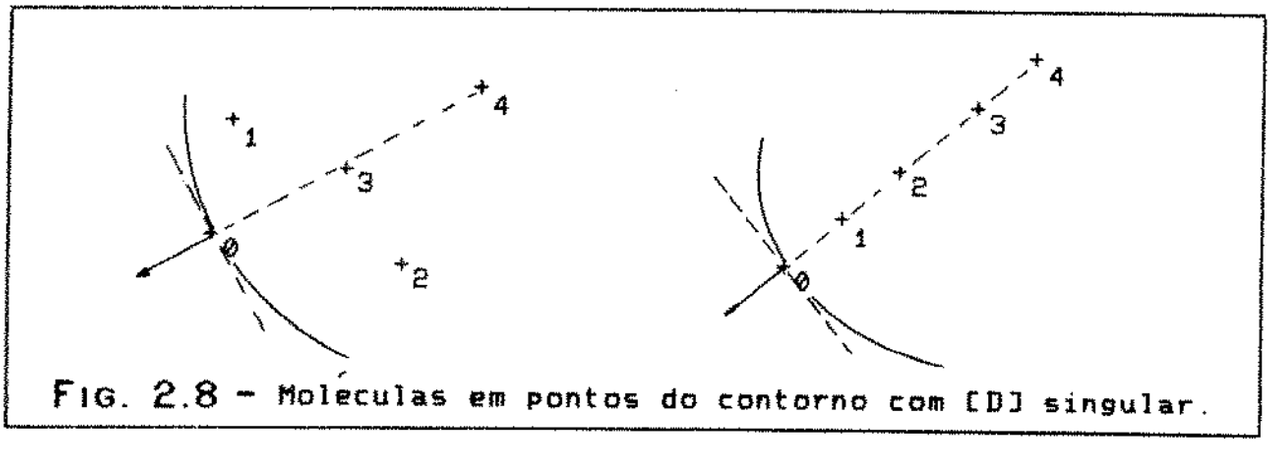

FIG. 2.8 - Moléculas em pontos do contorno com [D] singular.

Embora se possa evitar, à priori, a escolha de pontos para

uma molécula que impliquem na singularidade da matriz [D], o problema se resolve simplesmente substituindo um ou mais pontos de uma escolha infeliz.

c) condicionamento de [D] - a questão não é tão simples, no entanto, se [D] é não-singular mas mal condicionada. Estudos feitos por Godoy e outros[6,13] mostram que, como afirmado anteriormente, os valores obtidos para $\phi(x,y)$ a partir de moléculas com matrizes de diferenças mal condicionadas podem estar bem distantes dos reais[6]. Nos casos em que o método numérico é o único viável, ou seja, naqueles em que não há solução analítica conhecida, o mau condicionamento pode ser perigoso quando não há uma avaliação do erro cometido. O número de condição da matriz [D] passa, então, a desempenhar um papel importante na busca de soluções numèricamente aceitáveis.

Na solução do sistema

$$[D](\partial\phi) = (\Delta\phi)$$

em virtude de erros de truncamento e arredondamento, pode-se supor que, na verdade, esteja sendo resolvido o sistema

$$([D] + \delta[D])((\partial\phi) + \delta(\partial\phi)) = (\Delta\phi)$$

Desenvolvendo a expressão acima e desprezando os termos de 2ª ordem, tem-se

$$[D](\delta(\partial\phi)) = -(\delta[D])(\partial\phi)$$

ou,

$$(\delta[\partial\phi]) = -[D]^{-1}(\delta[D])(\partial\phi)$$

Tomando a norma membro a membro, vem

$$\|(\delta[\partial\phi])\| = \|[D]^{-1}(\delta[D])(\partial\phi)\| \leq \|[D]^{-1}\| \, \|(\delta[D])\| \, \|(\partial\phi)\|$$

Lembrando que o número de condição da matriz [D] é dado por [8]

$$C([D]) = \|[D]\| . \|[D]^{-1}\| \qquad (2.28)$$

onde $\|[D]\|$ pode ser, por exemplo[8]

$$\|[D]\| = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^{N} |d_{ij}|$$

chega-se a

$$\frac{\|(\delta[\partial\phi])\|}{\|(\partial\phi)\|} \leq C([D]) \frac{\|(\delta[D])\|}{\|[D]\|} \qquad (2.29)$$

ou seja, o número de condição C([D]) é o fator de magnificação de erros[9].

No caso da matriz de diferenças [D], observa-se que cada uma de suas linhas é gerada a partir das coordenadas de um dos pontos envolventes e do ponto central de uma molécula (ver eq. 2.15 e fig.

---

[9] Veja-se BATHE,K. J. & WILSON,E. L.,"Numerical Methods in FEA",Prentice Hall, 1976, pp. 209.

2.5). Desta forma, a posição dos pontos envolventes em relação ao ponto central é determinante no cálculo do número de condição. Para ilustrar a discussão sobre a forma ideal (ou aceitável) das moléculas, mostra-se, na fig. (2.9), algumas moléculas e seus respectivos números de condição, calculados usando (2.28).

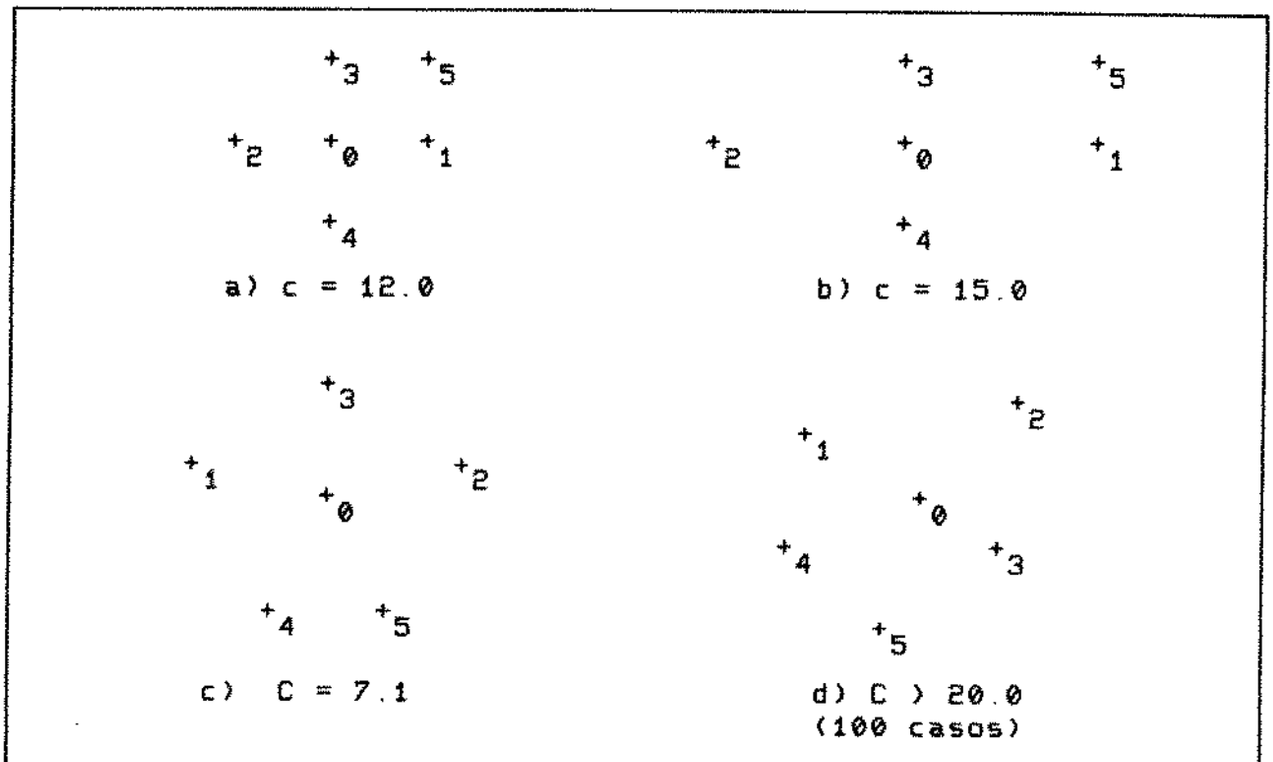

FIG. 2.9 - Número de condição de [D] para diferentes moléculas.

As moléculas a) e b) são montadas com nós de malhas regulares (1x1) e (2x1) respectivamente. A molécula c) é sugerida por Perrone e Kao[11a] (em um estudo isolado sobre o condicionamento da matriz de diferenças) e, finalmente, a molécula d) é montada com pontos envolventes escolhidos aleatoriamente na região $-1.0 \leq x \leq 1.0$ e $-1.0 \leq y \leq 1.0$. Pelos valores obtidos para C([D]) pode-se concluir que, em termos de condicionamento da matriz de

diferenças, a melhor escolha seria uma molécula com base pentagonal (caso c)).

Outros fatores, entretanto, devem ser levados em conta. Moléculas com forma de um pentágono regular exigem malhas que só são viáveis em regiões distantes do contorno do domínio em estudo. Pentágonos irregulares, por outro lado, deixam de ter bons números de condição (ver caso d)). Além disso, a possibilidade de operar com malhas irregulares não é, certamente, a única vantagem da formulação generalizada do método das diferenças finitas. A não necessidade de introdução de pontos virtuais (externos ao domínio) para imposição das condições de contorno e a maior facilidade de elaboração de programas para cálculo automático são, também, fatores bastante importantes. Com base nessas observações, os programas desenvolvidos para moléculas de 6 pontos seguem, neste trabalho, a seguinte metodologia:

- molécula básica montada em malha regular quadrada;

- adensamento da malha em sub-domínios de modo a melhorar os resultados numéricos em regiões em que o gradiente da função solução varia mais rapidamente;

- controle do valor de C([D]) em pontos do contorno ou em regiões em que a irregularidade da malha seja inevitável.

Os problemas de condicionamento e singularidade da matriz [D] deixam de ser preocupantes, entretanto, quando se toma mais que 5 pontos para compor uma molécula[10].

---

[10] Veja-se Cap. 2, ítem 2.5.

2.4.4 - O problema misto de Neumann-Dirichlet.

Uma das vantagens do MDF para malhas irregulares é o tratamento da região do contorno Γ em que se dá a transição da condição dada pela eq. (2.2) para a condição dada por (2.3). Existem pelo menos duas alternativas para essa situação. Uma delas é mostrada na fig. 2.10. O ponto de intersecção entre Γ_1 e Γ_2 é substituido por dois pontos: um pertencente a Γ_1 e outro a Γ_2. Tomando o cuidado de impedir que a molécula de um dos pontos tenha o outro como ponto envolvente (o que geraria uma linha de zeros na matriz [D] correspondente), pode-se representar melhor o que ocorre na região de transição.

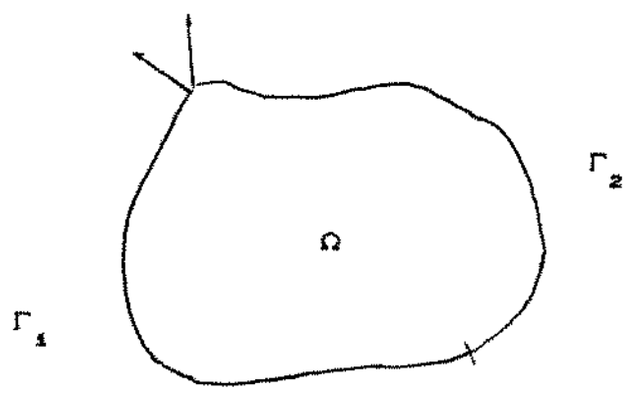

FIG. 2.10 - Duas moléculas no mesmo ponto (problema misto).

A outra possibilidade é usar a 4ª e 5ª linhas de [D] para introduzir, na mesma molécula, duas vezes a condição (2.3): uma para o ponto em Γ_1 e outra para o ponto em Γ_2. Esta alternativa não é recomendável, no entanto, porque piora o condicionamento da matriz de diferenças.

O artifício do ponto duplo pode também ser usado no caso de descontinuidade geométrica do contorno Γ (cantos retos ou oblíquos) com mesma condição de contorno dos dois lados da descontinuidade.

2.5 - Moléculas irregulares de 9 pontos.

2.5.1 - Mínimos quadrados.

Quando a malha é efetivamente irregular,[11] o mau condicionamento da matriz de diferenças [D] pode, com frequência, produzir soluções aproximadas piores que as obtidas por esquemas convencionais de diferenças finitas ou outros métodos numéricos (M.E.F., por exemplo). A acurácia[12] do operador discreto pode ser melhorada tomando-se m) 5 em (2.12). Para m = 8, por exemplo, a matriz [D] em (2.15) passa a ser retangular ($[D]_{8\times5}$) e o sistema não tem mais solução única. É possível então minimizar o erro

$$(e) = [D](\partial\phi)_o - (\Delta\phi) \qquad (2.30)$$

fazendo

$$\frac{\partial}{\partial\,(\partial\phi)_o^T}\,(e)^T(e) = 0.0 \qquad (2.31)$$

ou, levando (2.30) em (2.31),

---

[11] Cantos reentrantes ou rápida variação das derivadas de $\phi(x,y)$.

[12] Veja-se item 2.5.2

$$\frac{\partial}{\partial\,(\partial\phi)_o^T}([D](\partial\phi) - (\Delta\phi))^T([D](\partial\phi) - (\Delta\phi)) = 0.0 \qquad (2.32)$$

A derivada em (2.32) resulta:

$$([D]^T[D])^{-1}[D]^T(\Delta\phi) = (\partial\phi) \qquad (2.33)$$

É interessante observar que, neste caso, a matriz a ser invertida é simétrica, positiva definida, o que reduz o esforço computacional para escrever o operador discreto. A acurácia[13] do operador em (2.33) é, no entanto, menor que a do operador de 5 pontos de (2.17), quando a malha é regular.

2.5.2 - Mínimos quadrados com ponderação.

Cada um dos elementos do vetor (r) em (2.13) é, pelo menos de ordem h_i^3, onde

$$h_i = [(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2]^{1/2} \qquad (2.34)$$

É possível minimizar o erro fazendo uma ponderação inversamente proporcional ao cubo da distância de cada ponto ao centro da molécula[14], de modo a atribuir, na equação algébrica que descreve o operador aproximado, coeficientes menores aos pontos mais distantes. Assim, (2.33) modifica-se para

---

[13] Veja-se ítem 2.6.2

[14] E, portanto, à ordem de convergência do truncamento da série de Taylor.

$$([D]^T[E][D])^{-1}[D]^T[E](\Delta\phi) = (\partial\phi) \qquad (2.35)$$

que é obtida fazendo operar sobre a expressão do erro em (2.30) a matriz [E] dada por

$$[E]_{ij} = \begin{cases} 1/h_i^{\sigma} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

O operador discreto em (2.35) resulta bastante acurado quando comparado com o obtido com moléculas de 6 pontos.

2.5.3 - Moléculas no contorno.

Da mesma forma que para moléculas de 6 pontos, não é necessário escrever o operador discreto em pontos de contorno onde seja conhecido o valor da função ϕ (eq. 2.2). Para pontos em Γ_2 (eq. 2.3), não é recomendável o procedimento usado em (2.24), uma vez que a minimização do erro se faria a partir dos valores de variáveis de natureza diferente (ϕ e ϕ_n). Liszka e Orkisz[40] recomendam a adoção de um ponto virtual para cada ponto do contorno Γ_2, e o acréscimo de uma equação do tipo (2.3).

É também eficiente o emprego de moléculas de dois tipos diferentes, a saber: moléculas de 9 pontos no interior de Ω e moléculas de 4 pontos (eq. 2.24) em pontos do contorno. Com um pequeno trabalho computacional adicional, obtem-se, simultaneamente, os valores de ϕ e de sua derivada na direção normal a Γ.[15]

---

[15] Veja-se Cap. 3, exemplo 1.

2.6 - Ordem de convergência e estimativa de erro.

2.6.1 - Ordem de convergência.

Considerando um sistema de coordenadas com origem no ponto central de uma molécula de m pontos, pode-se escrever a expansão em série de Taylor para cada um dos m pontos como

$$\phi_i = \phi_o + (\phi_x)_o\, x_i + (\phi_y)_o\, y_i + \frac{1}{2}(\phi_{xx})_o\, x_i^2 + (\phi_{xy})_o\, x_i y_i + \\ + \frac{1}{2}(\phi_{yy})_o\, y_i^2 + r \qquad (2.36)$$

Fazendo

$$A(0,0) = \sum_{i=1}^{m} A(0,i) \qquad (2.37)$$

a expressão do operador aproximado em (2.12) pode ser reescrita como

$$L_h(\phi) = \sum_{i=0}^{m} A(0,i)\, \phi_i \qquad (2.38)$$

Levando (2.36) em (2.38), tem-se

$$L_h(\phi) = \beta_0\phi_o + \beta_1(\phi_x)_o + \beta_2(\phi_y)_o + \beta_3(\phi_{xx})_o + \\ + \beta_4(\phi_{xy})_o + \beta_5(\phi_{yy})_o + r \qquad (2.39)$$

onde

$$\beta_0 = \sum_{i=0}^{m} A(0,i) \quad ; \quad \beta_1 = \sum_{i=0}^{m} A(0,i)\, x_i$$

$$\beta_2 = \sum_{i=0}^{m} A(0,i)\, y_i \quad ; \quad \beta_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m} A(0,i)\, x_i^2 \qquad (2.40)$$

$$\beta_4 = \sum_{i=0}^{m} A(0,i)\, x_i y_i \quad ; \quad \beta_5 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m} A(0,i)\, y_i^2$$

Assim, para que $L_h(\phi)$ seja uma aproximação formal de $L(\phi)$, é suficiente[3] que

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 0 \\ \beta_i &= \alpha_i \ , \quad i = 1, \quad ,5 \end{aligned} \qquad (2.41)$$

Para estudar a relação entre $L_h(\phi)$ e $L(\phi)$ pode-se supor que as coordenadas dos m pontos envolventes sejam dadas por

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i h \\ y_i &= \eta_i h \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, m) \qquad (2.42)$$

isto é, que a posição relativa dos m pontos não mude e que a distância de cada um deles ao ponto central seja proporcional ao parâmetro h . Então, as equações (2.40) e (2.41) passam a ser

$$\sum_{i=0}^{m} \xi_i A(0,i) = \frac{\alpha_1}{h} \qquad \sum_{i=0}^{m} \xi_i \eta_i A(0,i) = \frac{\alpha_4}{h^2}$$

$$\sum_{i=0}^{m} \eta_i A(0,i) = \frac{\alpha_2}{h} \qquad \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2} \xi_i^2 A(0,i) = \frac{\alpha_3}{h^2} \qquad (2.43)$$

$$\sum_{i=0}^{m} \eta_i^2 A(0,i) = \frac{\alpha_5}{h^2}$$

Se o sistema (2.43) tiver solução única para um dado h, então terá solução única para qualquer valor de h[16].

Observa-se que para $h \to 0$, os termos $A(0,i)$ em (2.43) tendem a zero com $O(h^{-2})$. Se as equações (2.43) têm solução, então $L_h(\phi)$ e $L(\phi)$ diferem apenas por termos de ordem igual ou superior a 3 em x_i, y_i. Desta forma, pode-se concluir que

$$L_h(\phi) - L(\phi) = O(h^{-2})O(h^3) = O(h) \quad , \quad h \to 0 \qquad (2.44)$$

O segundo membro em (2.44) pode ser melhorado para $O(h^2)$ tomando-se mais termos na série de Taylor ou montando a molécula com pontos que guardem suficiente simetria em relação ao ponto central. Em malha regular quadrada, por exemplo, a molécula simétrica de 13 pontos mostrada na fig. (2.11),

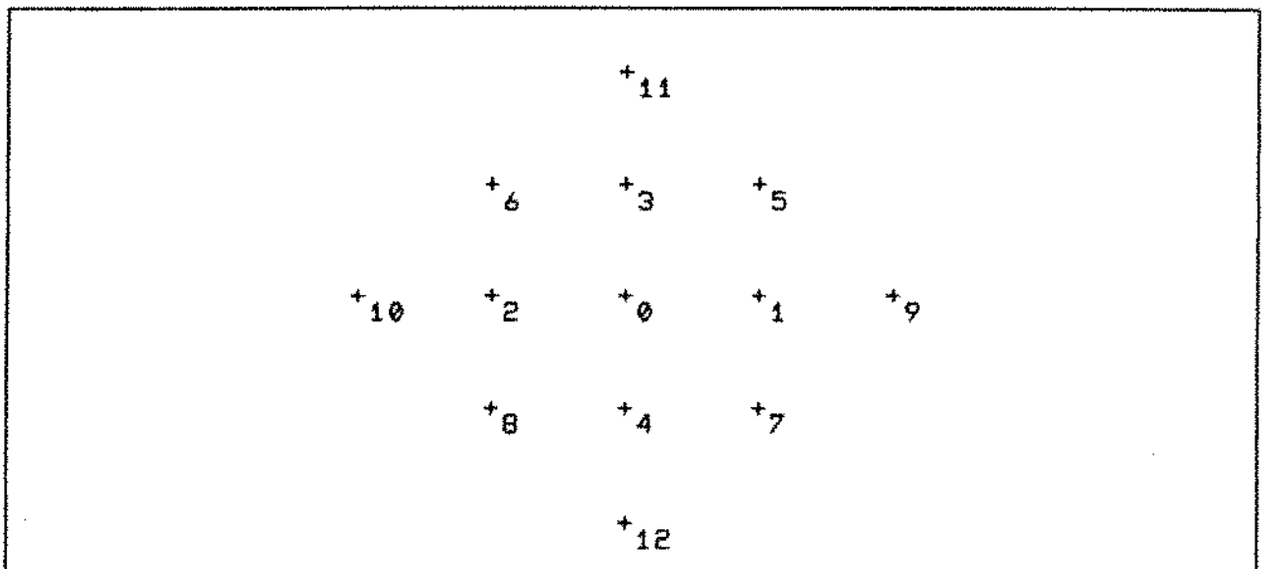

FIG. 2.11 - Molécula de 13 pontos para operador de 3ª ordem.

[16] Propriedade fundamental de sistemas lineares.

montada considerando os termos em derivadas de ordem 3 na série de Taylor, tem o somatório desses termos igual a zero.

2.6.2 - Acurácia de operadores discretos.

Uma forma de avaliar a acurácia de operadores discretos de diferenças finitas é aplicá-los à solução analítica conhecida do operador diferencial contínuo correspondente[17]. Por exemplo, seja

$$\Omega = (x,y \; ; \; -3 \leq x,y \leq 3)$$
$$\nabla^2\phi = 0 \quad \text{em } \Omega \quad ; \quad \phi = 50\text{sen}(\pi x/6) \text{ em } (x,3) \qquad (2.45)$$
$$\phi = 0 \quad \text{em} \quad (-3,y); \; (3,y); \; (x,-3)$$

cuja solução é dada por

$$\phi(x,y) = (50/\text{senh}\pi)\text{sen}(\pi x/6)\text{senh}(\pi y/6) \qquad (2.46)$$

A fig. (2.13) apresenta o resultado da aplicação de 3 operadores discretos sobre a solução dada pela equação (2.46), admitindo-se malha regular quadrada. As moléculas empregadas estão na fig. (2.12). O operador A é obtido da molécula de 6 pontos[18] que, para malha quadrada, coincide com o operador convencional de diferença central. O operador B corresponde à molécula de 9 pontos com minimização não ponderada e, finalmente, o operador C é obtido com minimização ponderada da molécula de 9 pontos.

---

[17] Veja-se Forsythe[9], pag. 296.

[18] Veja-se item 2.3

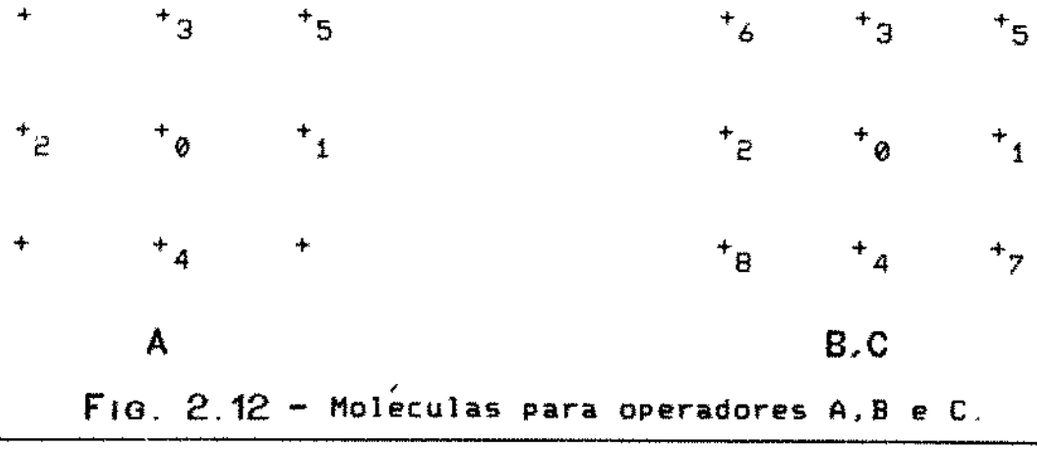

FIG. 2.12 - Moléculas para operadores A, B e C.

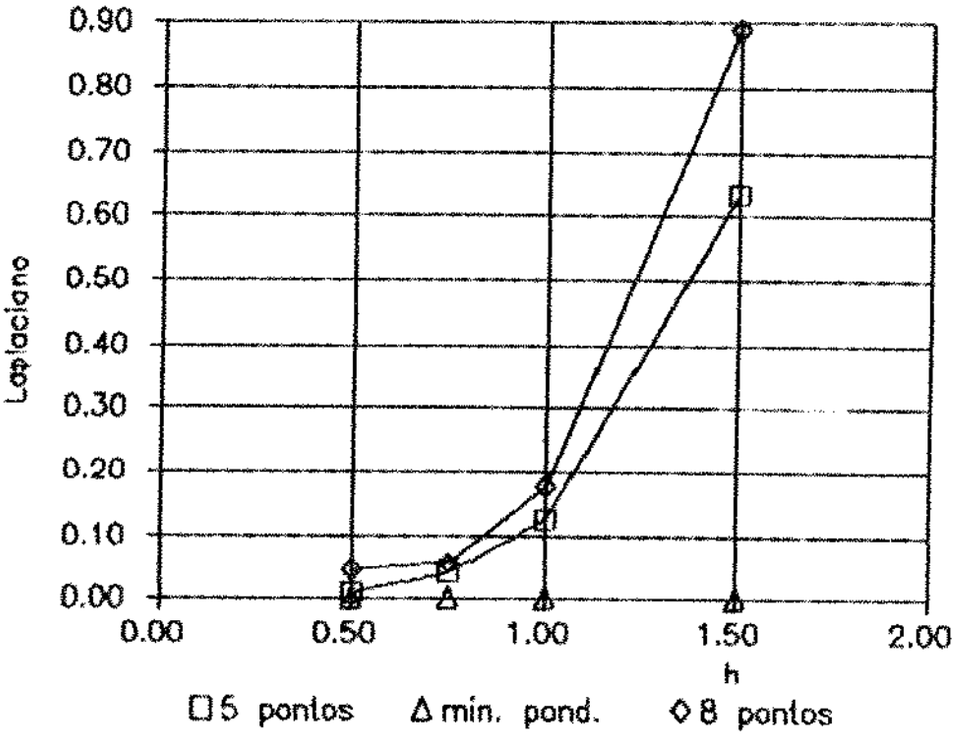

FIG. 2.13 - Acurácia dos operadores discretos A, B e C.

Embora os valores da fig. (2.13) refiram-se a moléculas em malha regular quadrada, é possível afirmar que o ganho em acurácia do operador C em malhas irregulares é semelhante ao mostrado na figura.

2.6.3 - Uma estimativa do erro da solução aproximada.

O emprego de métodos numéricos para encontrar soluções aproximadas para problemas de valor de contorno restringe-se, naturalmente, às situações em que não haja solução analítica conhecida. Quando o método aproximado é consistente e estável, sabe-se, à priori, que[8]

$$\begin{matrix} L_h(\phi_h) \rightarrow L(\phi) \\ \phi_h \rightarrow \phi \end{matrix} \qquad \text{se} \quad h \rightarrow 0 \qquad (2.47)$$

onde o índice h refere-se ao problema aproximado.

O erro cometido para um dado valor de h,

$$e = \phi_h - \phi \qquad (2.48)$$

deve ser decomposto em duas parcelas, a saber

$$e = e^d + e^a \qquad (2.49)$$

O termo e^d em (2.49) refere-se ao erro existente na

aproximação do operador original e a parcela e^a corresponde ao erro de arredondamento envolvido na solução do sistema de equações algébricas equivalente a $L_h(\phi)$. O parâmetro h, associado à densidade de discretização do domínio original contínuo, afeta as duas parcelas em (2.49) de maneira diversa. Enquanto e^d decresce com o decréscimo de h, quanto menor h maior será a dimensão do sistema de equações e maior, portanto, o termo e^a.

2.6.3.1 - Erro de discretização para moléculas de 6 pontos.

O erro cometido na aproximação do operador diferencial contínuo é solução do problema[19]

$$\begin{aligned} L(e^d) &= R \qquad \text{em } \Omega \\ e^d &= 0 \qquad \text{em } \Gamma \end{aligned} \tag{2.50}$$

onde R é uma medida da diferença $L_h(\phi) - L(\phi)$.

Se na passagem da eq. (2.13) para a eq. (2.17) for mantido o último termo, tem-se

$$[\partial\phi] = [A][\Delta\phi] - [A][r] \tag{2.51}$$

Assim, para o operador laplaciano de (2.45), por exemplo, resulta[19]

---

[19] Veja-se eq. (2.14).

$$\nabla^2\phi = \sum_{i=1}^{5}(a_{ai} + a_{bi})(\phi_i - \phi_o) - \sum_{i=1}^{5}(a_{ai} + a_{bi})r_i \qquad (2.52)$$

Os termos r_i em (2.52) podem ser avaliados, aproximadamente, como

$$r_i = \frac{(\Delta x_i)^3}{6}(\phi_{xxx})_o + \frac{(\Delta x_i)^2(\Delta y_i)}{2}(\phi_{xxy})_o +$$

$$\frac{(\Delta x_i)(\Delta y_i)^2}{2}(\phi_{xyy})_o + \frac{(\Delta y_i)^3}{6}(\phi_{yyy})_o + \frac{(\Delta x_i)^4}{24}(\phi_{xxxx})_o +$$

$$\frac{(\Delta x_i)^3(\Delta y_i)}{6}(\phi_{xxxy})_o + \frac{(\Delta x_i)^2(\Delta y_i)^2}{4}(\phi_{xxyy})_o +$$

$$\frac{(\Delta x_i)(\Delta y_i)^3}{6}(\phi_{xyyy})_o + \frac{(\Delta y_i)^4}{24}(\phi_{yyyy})_o \qquad (2.53)$$

e correspondem às parcelas imediatamente posteriores ao truncamento, em (2.11).

O 2º membro de (2.50) passa a ser

$$R = \sum_{i=1}^{5}(a_{ai} + a_{bi})\, r_i \qquad (2.54)$$

As derivadas parciais em (2.53) podem ser calculadas a partir da própria solução aproximada, com o emprego da equação (2.19)[2]. A inclusão dos termos de 4ª ordem deve-se ao fato de que para malha regular quadrada o somatório dos termos de 3ª ordem é nulo.

As figuras (2.14) e (2.15) mostram as soluções "exatas" estimadas para o problema descrito em (2.45) cotejadas com a solução analítica. Na fig. (2.14) a linha (x,3) e, na fig. (2.15),

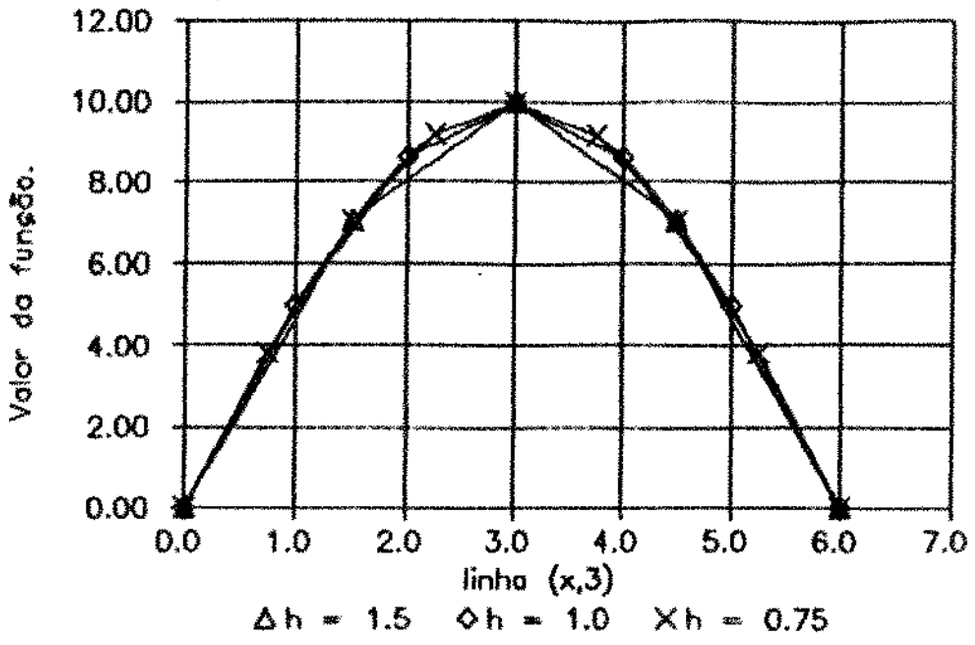

FIG. 2.14 - Erro da solução aproximada [linha (x,3)].

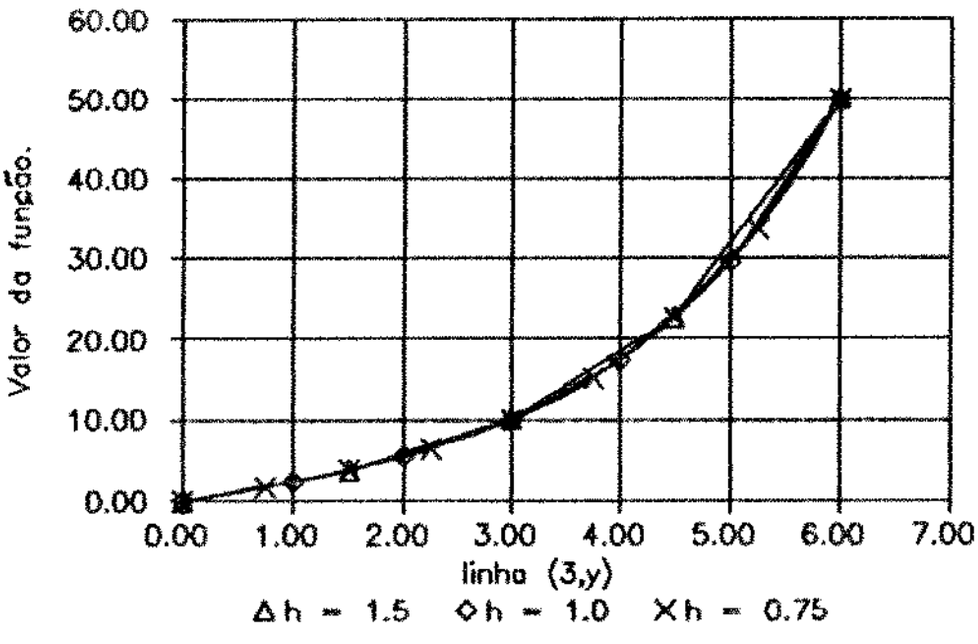

FIG. 2.15 - Erro da solução aproximada [linha (3,y)].

a linha (3,y). Em ambos os casos foi usada a molécula de 6 pontos no domínio e de 5 pontos no contorno.

A fig. 2.14b, abaixo, mostra os resultados numéricos para a linha (x,3) do problema (2.45), sem a consideração da estimativa de erro, comparados com a solução analítica (linha contínua no gráfico). Cotejando as figs. 2.14 e 2.14b pode-se observar que a consideração do erro aproxima a solução numérica da solução analítica mesmo para baixas densidades de discretização.

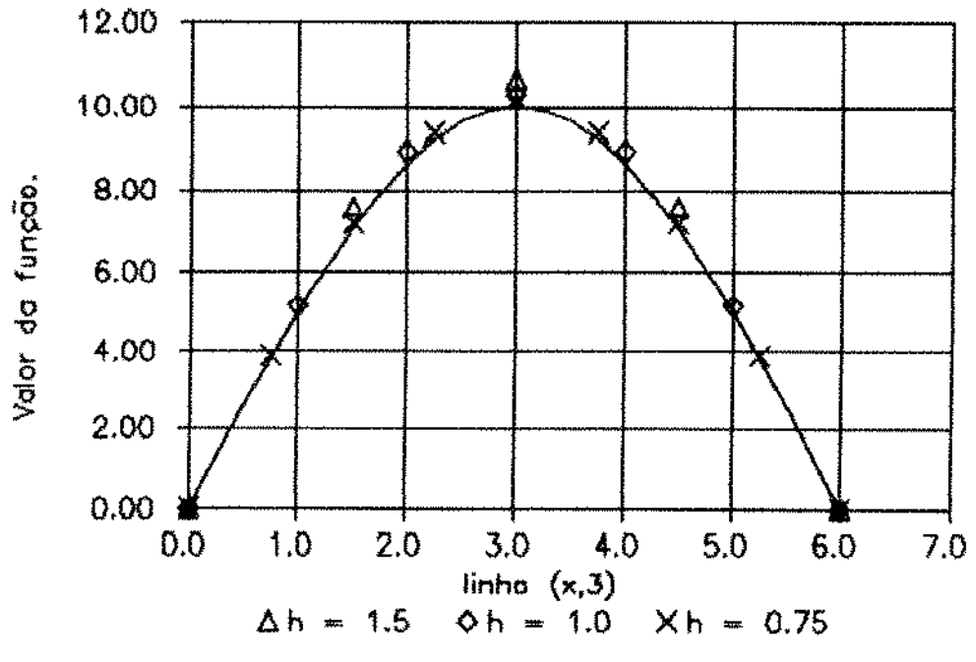

FIG. 2.14B - Solução aproximada sem consideração do erro.

É importante observar que, para a formulação aqui empregada na estimativa do erro de discretização, é necessário escrever a equação de diferenças também nos pontos do contorno, uma vez que o cálculo das derivadas de ordem 3 e 4 em (2.53) depende do

conhecimento das derivadas parciais de 2º ordem em todos os pontos.

2.6.3.2 - Erro de discretização para moléculas de 9 pontos.

Para moléculas de 9 pontos com minimização ponderada, pode-se obter uma expressão para o erro análoga àquela deduzida para moléculas de 6 pontos.

Partindo da equação (2.14), tem-se

$$(\Delta\phi) = [D](\partial\phi) + (r) \qquad (2.14)$$

$$[D](\partial\phi) = (\Delta\phi) - (r)$$

$$[D]^T[E][D](\partial\phi) = [D]^T[E]((\Delta\phi) - (r))$$

$$(\partial\phi) = ([D]^T[E][D])^{-1}[D]^T[E]((\Delta\phi) - (r)) \qquad (2.55)$$

Assim, para o laplaciano em (2.45), por exemplo, a expressão aproximada do erro de truncamento se escreve

$$R = \sum_{i=1}^{8} (a_{8i} + a_{5i})\, r_i \qquad (2.56)$$

onde r_i é dado em (2.53) e a matriz [A] vale

$$[A] = ([D]^T[E][D])^{-1}[D]^T[E] \qquad (2.57)$$

A estimativa de erro, ponto a ponto, é, novamente, solução do problema (2.50), sendo o 2º membro dado por (2.56).

A fig. (2.16) mostra a solução analítica do problema (2.45) para a linha (x,3), comparada com as soluções estimadas com h = 1.5 e h = 1.0. Os valores aproximados foram obtidos com a

formulação mista descrita no ítem (2.5.3), a saber: moléculas de 9 pontos no domínio e moléculas de 5 pontos no contorno.

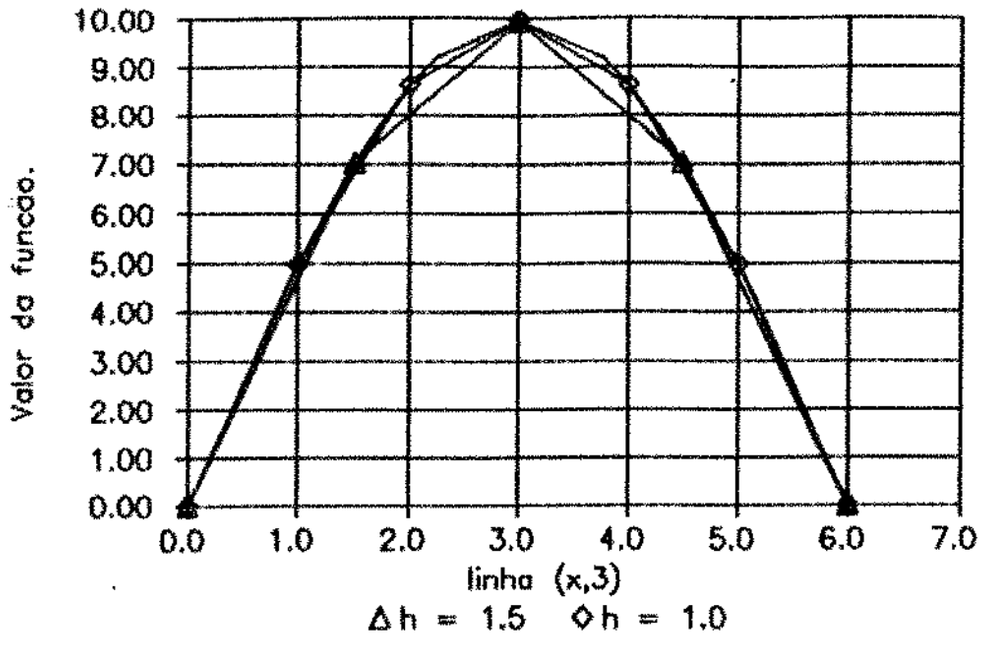

FIG. 2.16 - Estimativa de erro para molécula de 9 pontos.

2.7 - Operadores de ordem superior a 2.

O método de diferenças finitas para malhas irregulares pode ser empregado, com pequenas modificações, na obtenção de soluções numéricas de problemas regidos por equações diferenciais parciais de ordem superior a 2. Se na equação (2.11) forem considerados mais termos da série de Taylor (mais 4 para operadores de 3ª ordem e mais 9 para operadores de 4ª ordem), o vetor $(\partial\phi)$ de (2.13) passará a conter derivadas parciais de ordem maior que 2 cujo

valor numérico poderá, então[20], ser calculado. Por exemplo, para operadores de 3ª ordem, (2.11) passa a ser

$$\begin{aligned}\phi(x,y) = {} & \phi(x_o,y_o) + (\phi_x)_o(x - x_o) + (\phi_y)_o(y - y_o) + \\ & + \tfrac{1}{2}(\phi_{xx})_o(x - x_o)^2 + (\phi_{xy})(x - x_o)(y - y_o) + \\ & + \tfrac{1}{2}(\phi_{yy})_o(y - y_o)^2 + \tfrac{1}{6}(\phi_{xxx})_o(x - x_o)^3 + \\ & + \tfrac{1}{2}(\phi_{xxy})_o(x - x_o)^2(y - y_o) + \\ & + \tfrac{1}{2}(\phi_{xyy})_o(x - x_o)(y - y_o)^2 + \tfrac{1}{6}(\phi_{yyy})_o(y - y_o)^2 + r\end{aligned} \tag{2.58}$$

Surgem, porém, alguns problemas. Para operadores obtidos sem o processo de minimização, o mau condicionamento e mesmo a singularidade da matriz de diferenças [D], ocorrem com mais freqüência. A minimização ponderada elimina esse problema mas, em virtude do maior número de pontos usados para compor uma molécula, as moléculas próximas ao contorno passam a ser mais desbalanceadas. Além disso, a ordem da matriz a ser invertida cresce com o número de termos da série de Taylor considerados e o esforço computacional cresce com o cubo da ordem da matriz. Embora se possa sempre empregar moléculas-padrão[21], a quantidade de moléculas desse tipo diminui se a malha não for muito densa.

---

[20] Teoricamente.

[21] Arranjo fixo de m pontos em malha regular, com equação discreta conhecida, dispensando, assim, a inversão de [D].

A molécula de 13 pontos (m = 12) da figura (2.11) foi testada na solução do problema descrito pelas eqs. (2.45) e os resultados obtidos são menos precisos que os encontrados com a molécula de 8 pontos para operador de 2ª ordem.

Embora não tenham sido feitos testes que possibilitem conclusão mais segura, os resultados obtidos com a molécula de 3ª ordem permitem afirmar que, para um dado operador diferencial, é mais eficiente aumentar o número de pontos que compõem a molécula do que a ordem dos operadores envolvidos.

A fig. (2.18) mostra resultados obtidos para o problema descrito em (2.45) com os operadores (m = 8 ; 2ª ordem) e (m = 12 ; 3ª ordem).

É importante observar que vários autores[10,12,13,14] têm apresentado resultados satisfatórios para a solução de problemas regidos por equações diferenciais parciais de 4ª ordem (placas, flambagem de chapas). Apesar disso, parece mais interessante explorar o caminho da formulação variacional quando a ordem das derivadas envolvidas é superior a 2, uma vez que as derivadas parciais envolvidas no funcional associado são de ordem inferior (formulação fraca).

A acurácia do operador de 3ª ordem testado é menor do que a dos operadores de 2ª ordem. A fig. (2.17) mostra os resultados obtidos na aplicação do operador discreto sobre a solução analítica do problema (2.45), para o ponto x = y = 3.0.

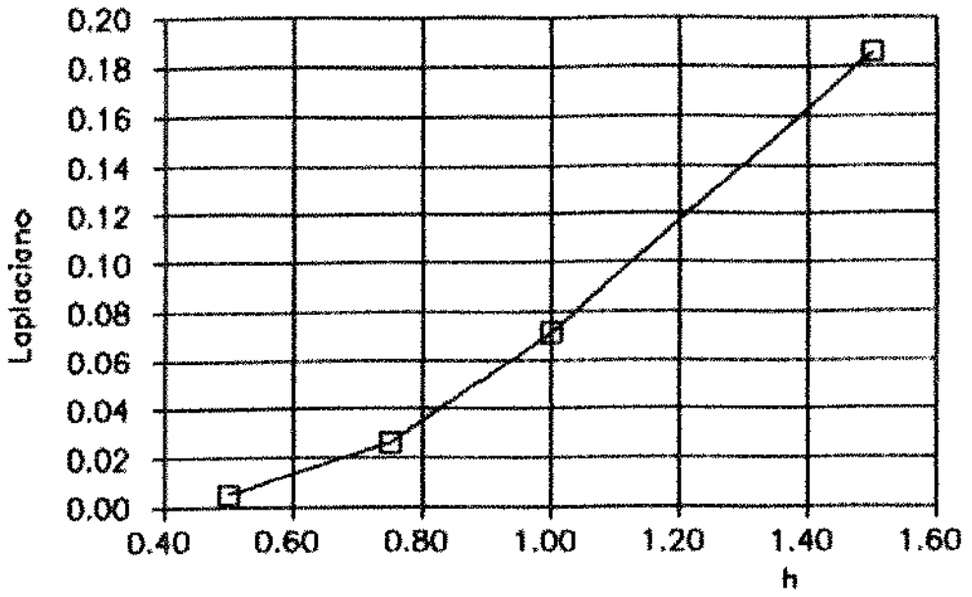

FIG. 2.17 - Acurácia de operadores de 3ª ordem.

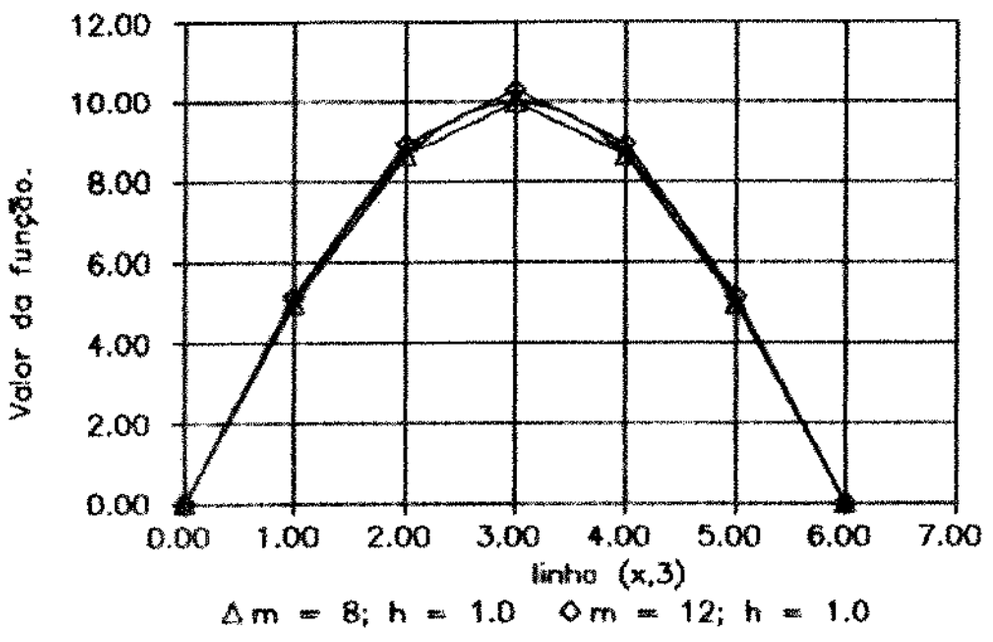

FIG. 2.18.

3 : EXEMPLOS.

3.1 - Condução de calor.

O problema de condução de calor em regime permanente, com condições de contorno estacionárias pode, simplificadamente, ser descrito por:

$$\alpha_2 T_{xx}(x,y) + \alpha_3 T_{yy}(x,y) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \in \mathbb{E}^2 \tag{3.1}$$

$$T(x,y) = \bar{T}(x,y) \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \tag{3.2}$$

$$T_n(x,y) = \bar{T}_n(x,y) \quad \text{em} \quad \Gamma_2 \tag{3.3}$$

e é um caso particular do problema dado em (2.1), (2.2) e (2.3), fazendo

$$T(x,y) \equiv \phi(x,y) \tag{3.4}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0 \tag{3.5}$$

$$p(x,y) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.6}$$

Assim, para pontos internos a Ω a equação (3.1), discretizada, toma a forma

$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha_2 a_{2i} + \alpha_3 a_{3i})(\phi_i - \phi_0) = 0 \tag{3.7}$$

Os índices dos coeficientes α_i em (3.7) acompanham os da equação (2.13) uma vez que (3.7) é uma simplificação de (2.13).

Em pontos sobre $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, usando moléculas de 5 pontos, a equação (3.1) passa a ser

$$\sum_{i=1}^{4}(\alpha_e a_{ei} + \alpha_o a_{oi})(\phi_i - \phi_o) + (\alpha_e a_{ee} + \alpha_o a_{oo})\phi_n \qquad (3.8)$$

que é uma simplificação de (2.21).

Desta forma, uma solução discreta, aproximada, do problema de condução de calor em domínio bi-dimensional, nas condições descritas, é obtida escrevendo-se (3.7) ou (3.8) para os N pontos de um domínio aproximado Ω_a .

Os programas para computador, elaborados para teste do método, têm a seguinte estrutura básica:

a) leitura de coordenadas e localização (Ω_a ou Γ) dos N pontos;

b) leitura dos valores no contorno;

c) leitura da composição de cada molécula (incidencia);

d) montagem e inversão da matriz de diferenças[1];

e) "escrever" a equação (3.7) ou (3.8);

f) armazenamento das 2 primeiras linhas da matriz $[A] = [D]^{-1}$

g) resolver o sistema N x N gerado em d);

h) calcular as primeiras derivadas parciais de T(x,y);

i) impressão dos resultados.

As etapas f) e h) permitem o cálculo das primeiras derivadas

---

[1] ou da matriz $([D]^T[E][E][D])$.

parciais de T(x,y) que estão relacionadas com o fluxo de calor no domínio Ω .

A fig. (3.1) mostra uma placa de pequena espessura submetida a um fluxo de calor gerado pelas condições de contorno indicadas. Para simplificar, tomou-se, em (3.1), $\alpha_x = \alpha_y = 1.0$.

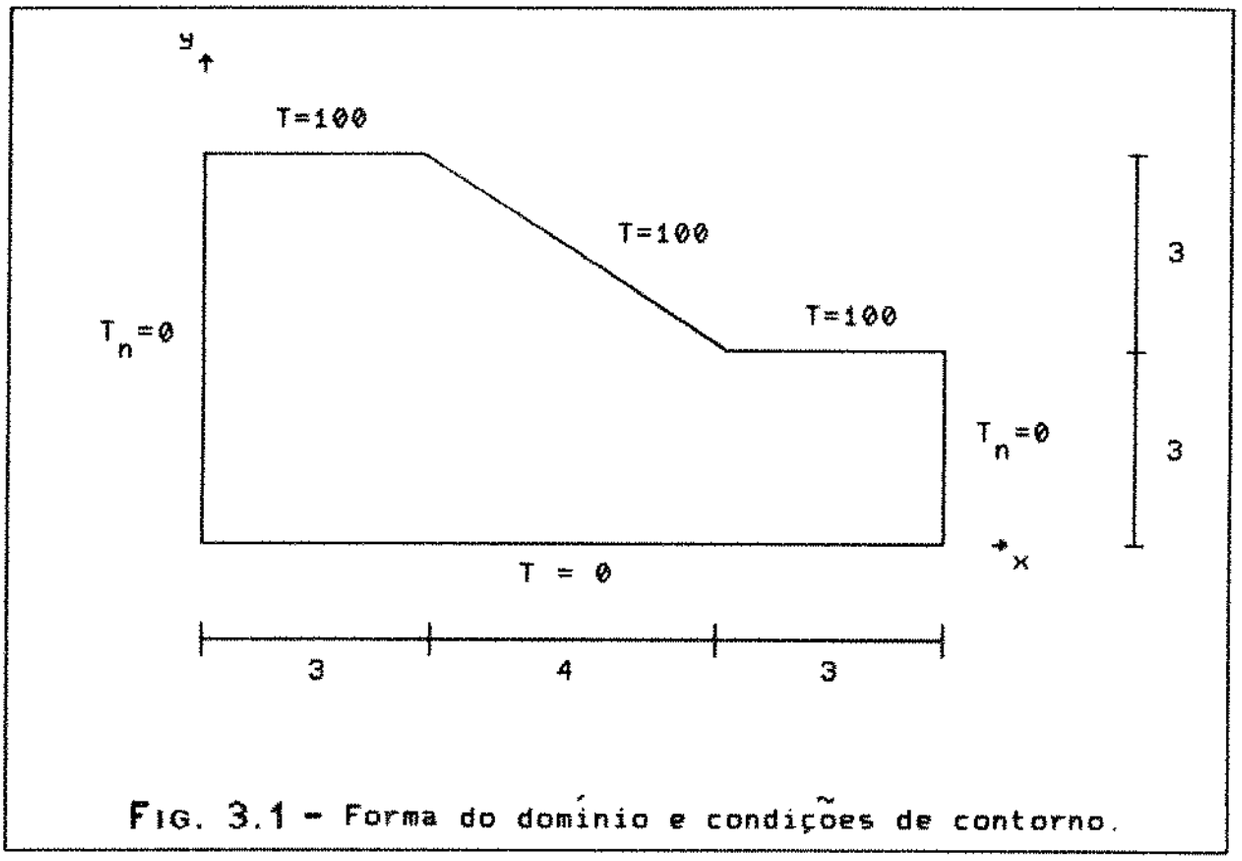

FIG. 3.1 - Forma do domínio e condições de contorno.

O problema foi resolvido usando:

a) moléculas de 6 pontos no domínio e 5 pontos no contorno;

b) moléculas de 8 pontos no domínio e 5 pontos no contorno;

c) elementos finitos CST.

A fig. (3.2) mostra a malha de discretização usada nas três alternativas.

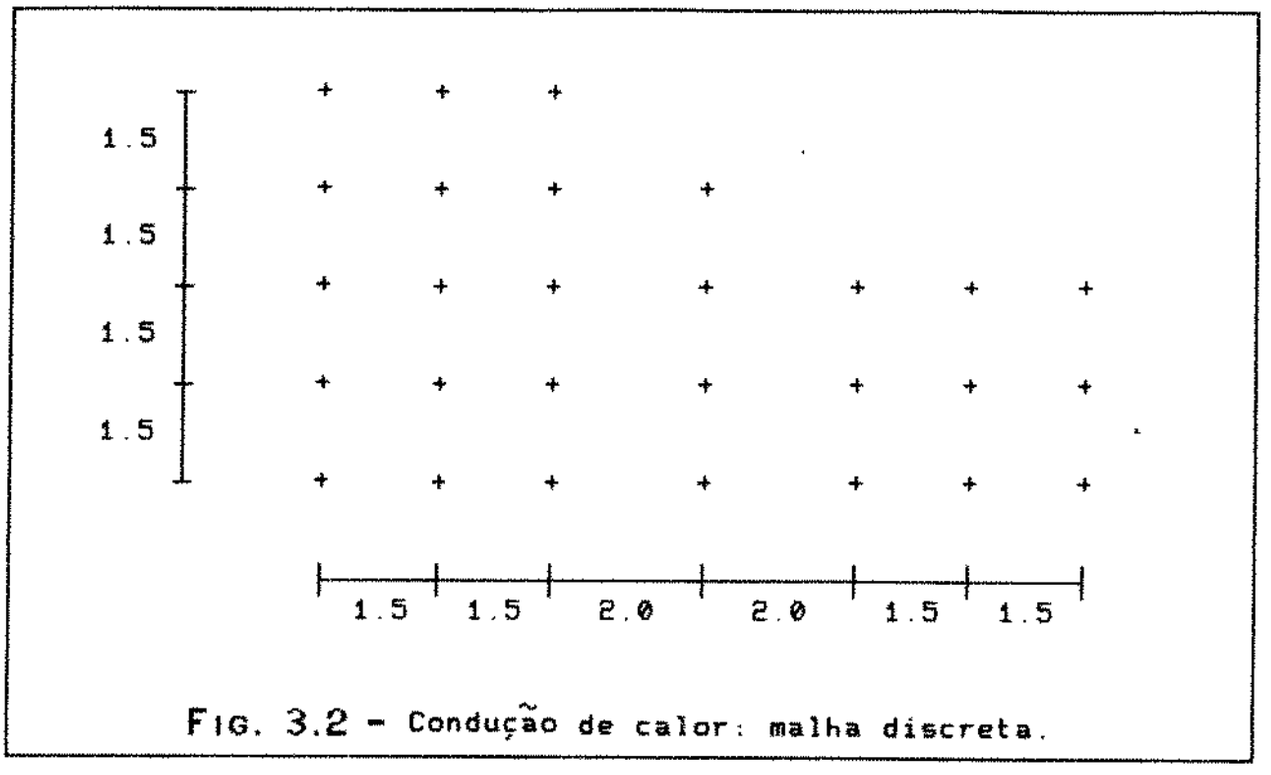

FIG. 3.2 - Condução de calor: malha discreta.

As figs. (3.3) e (3.4) mostram os resultados obtidos nas linhas (x,3) e (3,y), respectivamente.

Para elementos finitos foram empregados 28 nós e 36 elementos (11 incógnitas).

Para os programas em diferenças finitas foram usados 32 nós, sendo 28 da malha da fig. (3.2) mais 4 duplos nas coordenadas (0,0); (10.0); (0,6) e (10,3), onde ocorre mudança brusca da condição válida em Γ_1 para a condição válida em Γ_2.

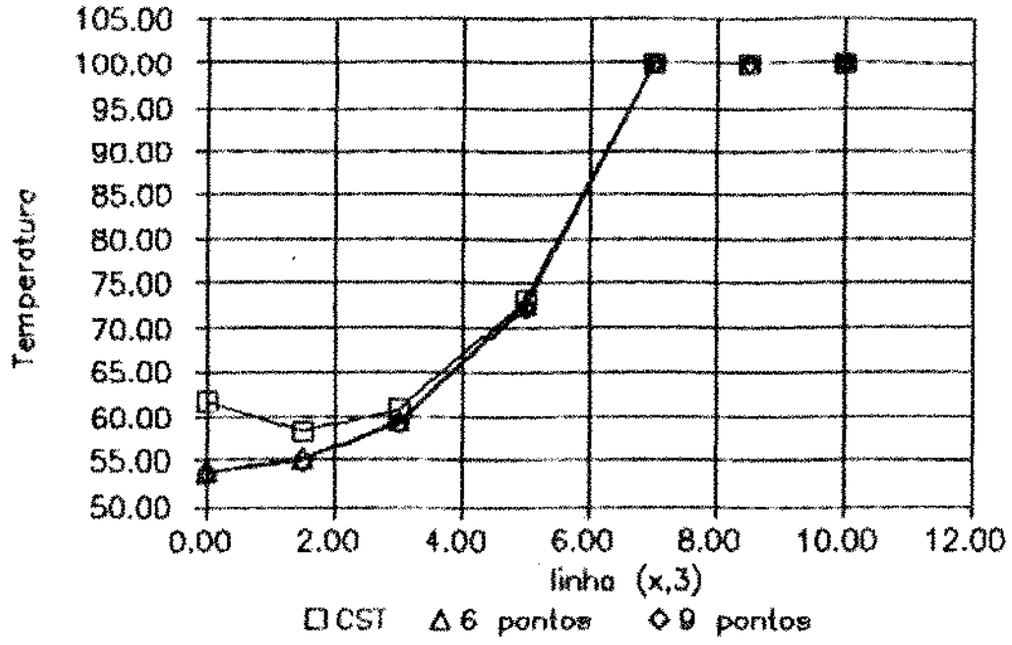

FIG. 3.3 - Condução de calor: linha (x,3).

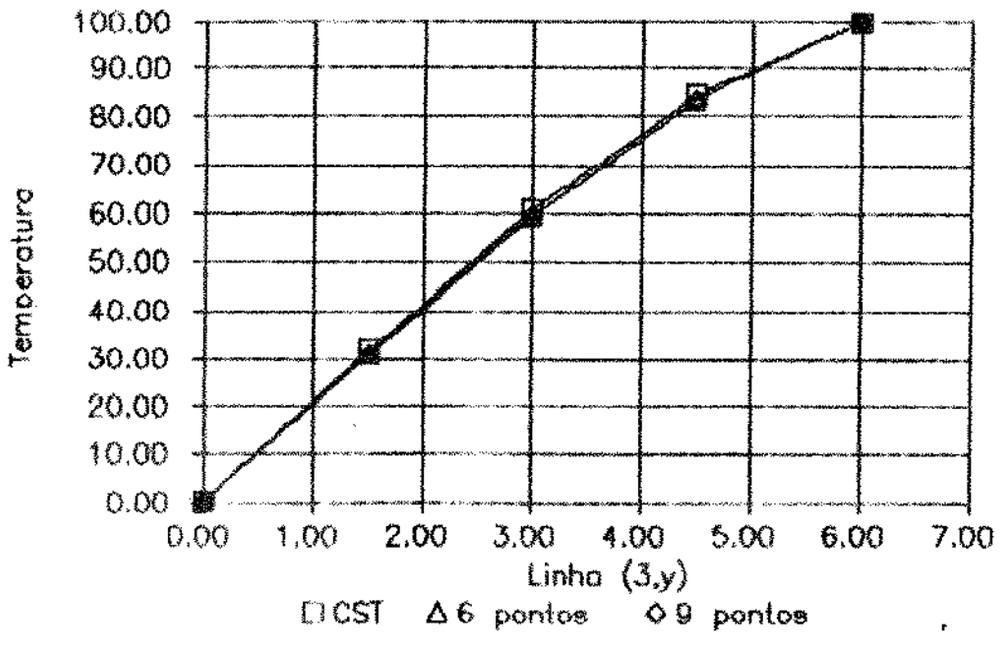

FIG. 3.4 - Condução de calor: linha (3,y).

Em virtude da discrepância entre os resultados obtidos com Elementos Finitos e Diferenças Finitas[2], a discretização por Elementos Finitos mostrada na fig. (3.2) foi adensada na região próxima às linhas (0,y) e (10,y). A fig. (3.5) mostra os novos resultados obtidos com Elementos Finitos, comparados com os já obtidos por Diferenças Finitas. Observa-se melhor concordância, confirmando os resultados encontrados com Diferenças Finitas.

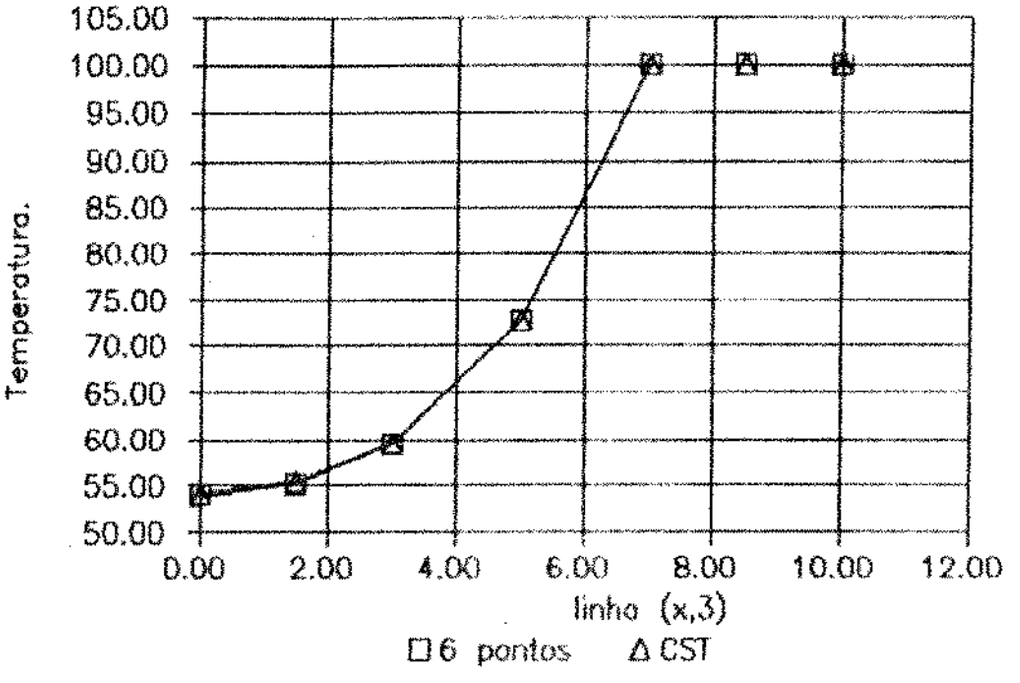

FIG. 3.5 - Adensamento da malha de Elementos Finitos.

[2] Fig. (3.3), 0<= x <=5.0

3.2 - Torção livre de hastes retas.

O estado de solicitação interna de uma barra prismática de diretriz reta, submetida a torcão livre produzida unicamente por conjugados aplicados nas suas extremidades, pode ser obtido resolvendo[3]

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi(x,y) &= -2G\theta \qquad \text{em } \Omega \\ \phi(x,y) &= 0 \qquad\qquad \text{em } \Gamma \end{aligned} \tag{3.9}$$

e fazendo

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Em (3.9), Ω é a seção transversal constante da barra e Γ seu contorno; $\phi(x,y)$ é chamada função tensão; G é o módulo de deformação transversal do material da haste e θ o ângulo de rotação da seção por unidade de comprimento da barra.

O problema (3.9) é, novamente, um caso particular de (2.1), (2.2) e (2.3), com

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0 \\ &p(x,y) = -2G\theta \end{aligned} \tag{3.11}$$

---

[3] Analogia de membrana.

Assim, os programas usados para o problema de condução de calor podem ser empregados na solução de (3.9), alterando-se apenas o valor do 2º membro em (3.7).

A fig. (3.6) mostra a seção transversal elíptica de uma haste reta de comprimento ℓ, submetida a $2G\theta = -1.59155$.

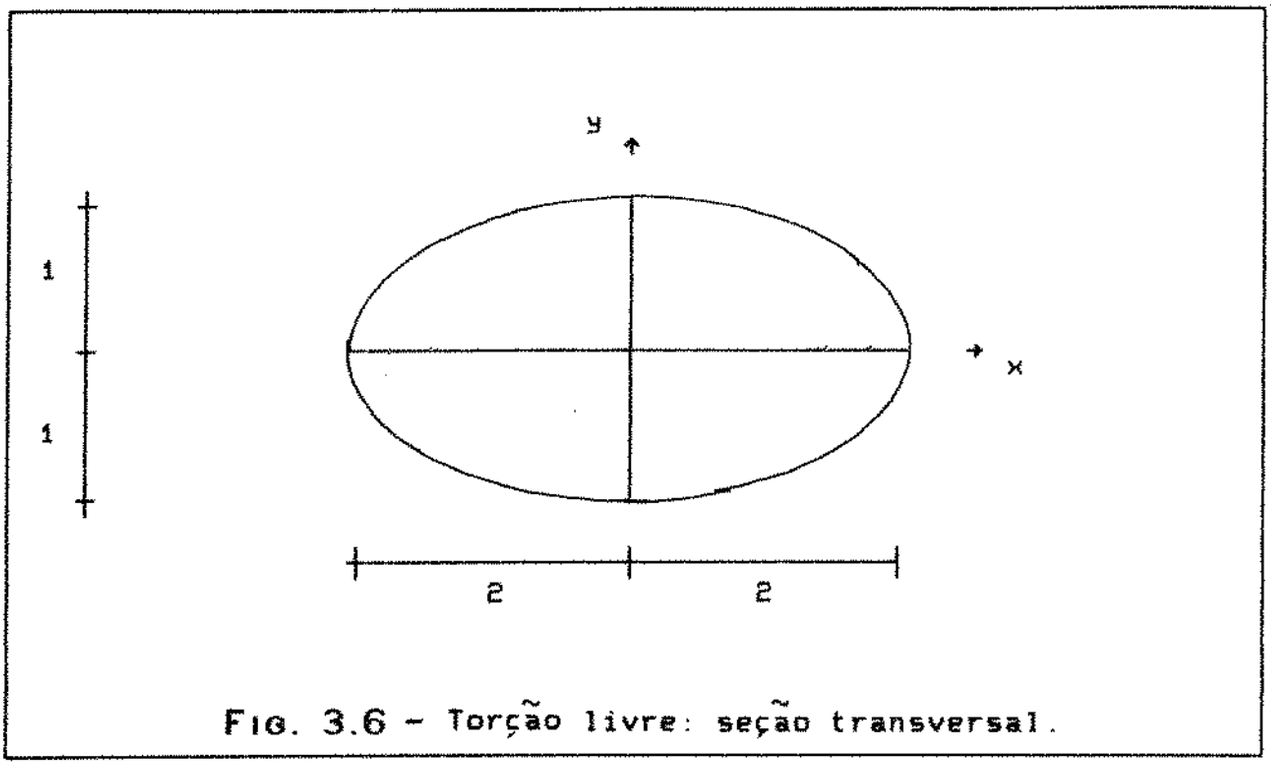

FIG. 3.6 - Torção livre: seção transversal.

Aproveitando a dupla simetria da seção, o problema discreto pode ser resolvido apenas para o quadrante superior direito (p. exemplo), introduzindo-se a condição de contorno adicional

$$\phi_n = 0 \quad \text{em} \quad \begin{matrix} (x,0);\ 0 \le x \le 2 \\ (0,y);\ 0 \le y \le 1 \end{matrix} \qquad (3.12)$$

A fig. (3.7) mostra a malha de discretização empregada.

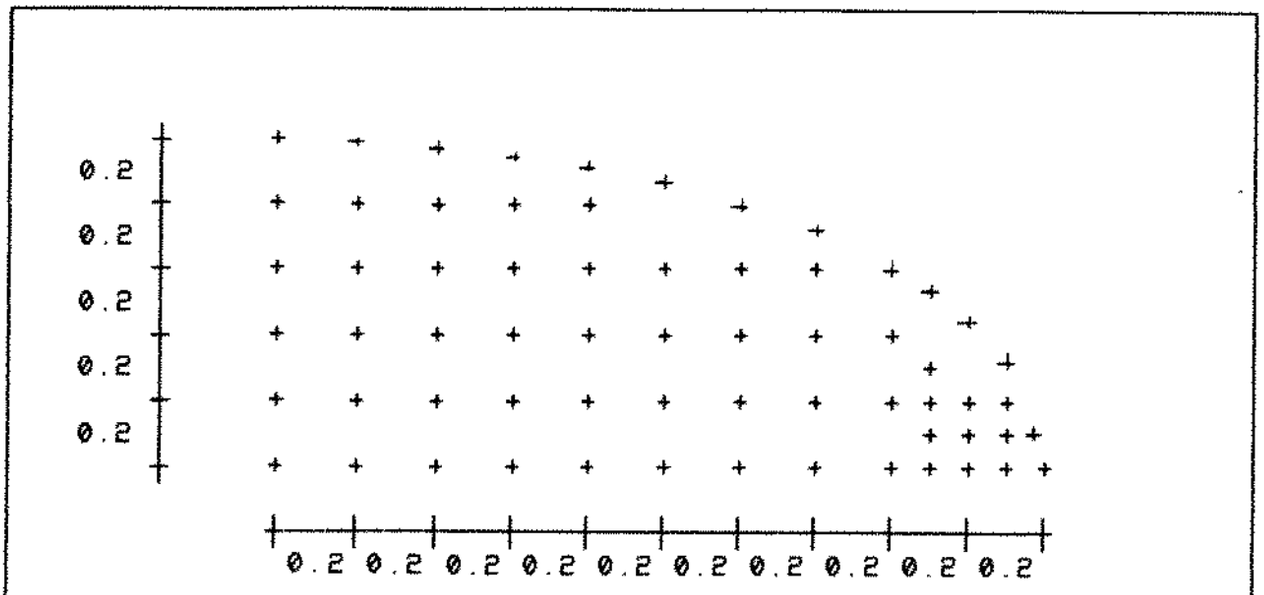

FIG. 3.7 – Torção: malha discreta.

Para este problema, as variáveis com interesse prático são as primeiras derivadas parciais de ϕ em relação a x e y, como indicado nas equações (3.10). Na fig. (3.8) estão os valores obtidos para τ_{yz} na linha (x,0), comparados com a solução analítica.

A fig. (3.9) mostra os resultados de $\phi(x,y)$ na linha (x,0) comparados, também, com a solução analítica.

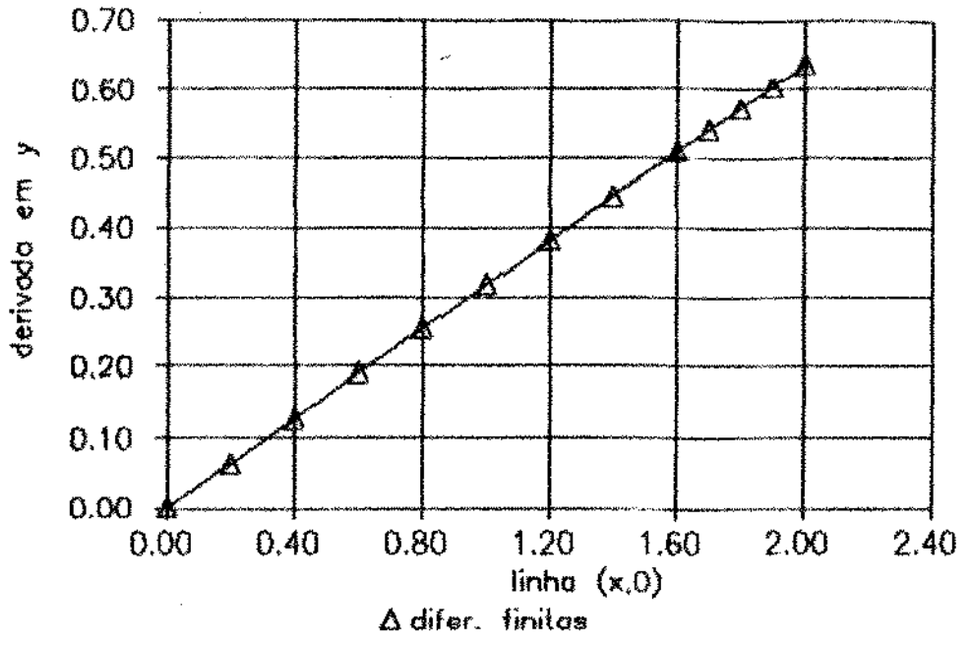

FIG. 3.8 - Valores de τ_{yz} na linha (x,0).

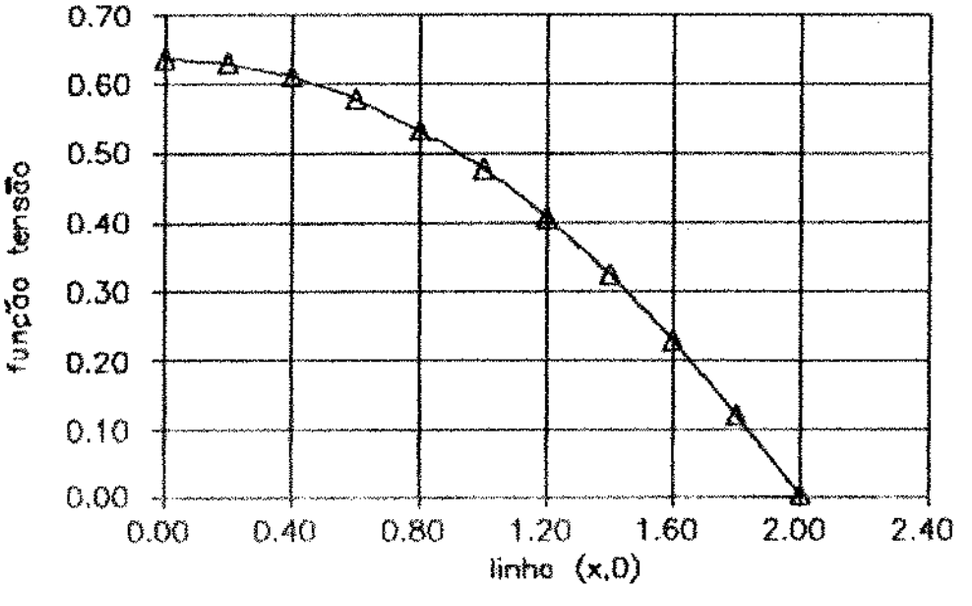

FIG. 3.9 - Valores de $\phi(x,y)$ na linha (x,0).

3.3 - Vibração livre de membranas.

Os modos e frequências naturais de vibração de uma membrana podem ser obtidos determinando-se valores λ^k para os quais existam funções $\phi^k(x,y)$, não idênticamente nulas, tais que

$$\begin{aligned} -\nabla^2\phi^k(x,y) &= \lambda^k\phi^k(x,y) \quad \text{em } \Omega \\ \phi^k &= 0 \quad \text{em } \Gamma \end{aligned} \tag{3.13}$$

Uma solução discreta de (3.13) é obtida aproximando-se o laplaciano pela expressão geral dada na eq. (2.6). A forma aproximada de (3.13), no domínio aproximado Ω_a , passa a ser

$$\sum_{j=1}^{m} (a_{aj} + a_{5j})(\phi_j - \phi_o) = \lambda\ \phi_o \tag{3.14}$$

Escrevendo a equação (3.14) nos N pontos de Ω_a, gera-se um sistema homogêneo de equações algébricas lineares . Os auto-valores e auto-vetores da matriz de coeficientes desse sistema são[4] uma solução aproximada do problema (3.13).

Forsythe e Wasow[12] apresentam alguns experimentos com a membrana em L mostrada na fig. (3.10), usando o esquema convencional de diferença central. Com as discretizações mostradas na fig. (3.11) foram determinados os modos e frequências naturais. A fig. (3.12) mostra os resultados obtidos para os dois menores

---

[4] Veja-se Wilkinson,M. A.,"The Algebraic Eigenvalue Problem", Clarendon Press, Oxford, 1965.

auto-valores, comparados com os valores apresentados por Forsythe.

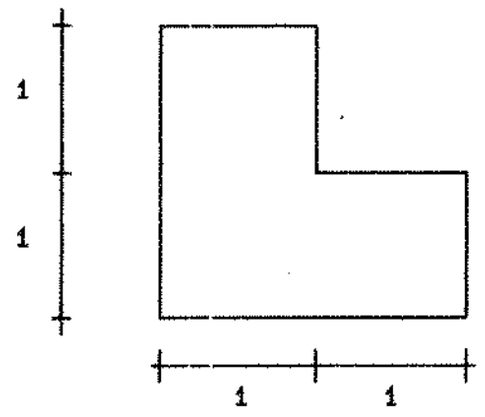

FIG. 3.10 - Membrana em L

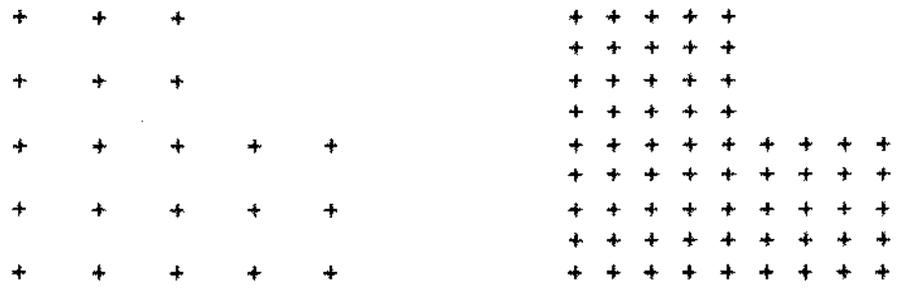

FIG. 3.11 - Membrana em L : malhas discretas.

h	este trabalho	Forsythe
0.5	-9.071798	-9.07180
0.25	-9.641425	-9.64143
0.5	-12.000000	-12.00000
0.25	-14.373403	-14.37340

FIG. 3.12 - Membrana em L : resultados.

A fig. (3.13) apresenta os 5 menores auto-valores (em valor absoluto), obtidos com h = 0.5 e h = 0.25.

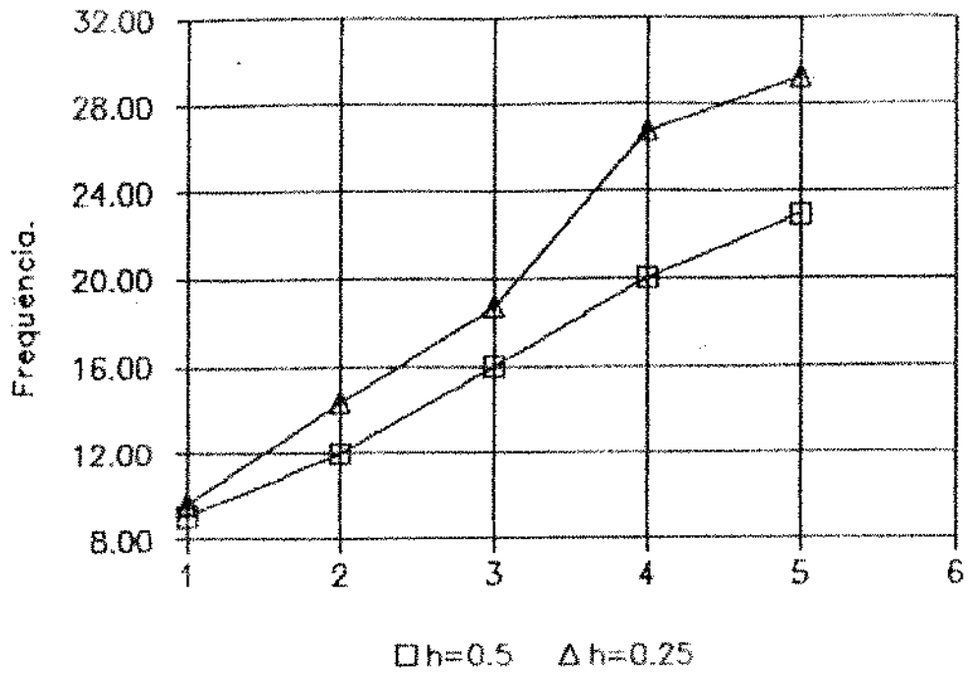

FIG. 3.13 - Membrana em L : auto-valores.

Para a membrana quadrada da fig. (3.14), usando malha regular e escrevendo o operador de (3.13) somente para pontos internos, a matriz de coeficientes do sistema (3.14) resulta simétrica[12]. As fig. (3.15) a (3.18) mostram alguns modos de vibração obtidos com esse procedimento.

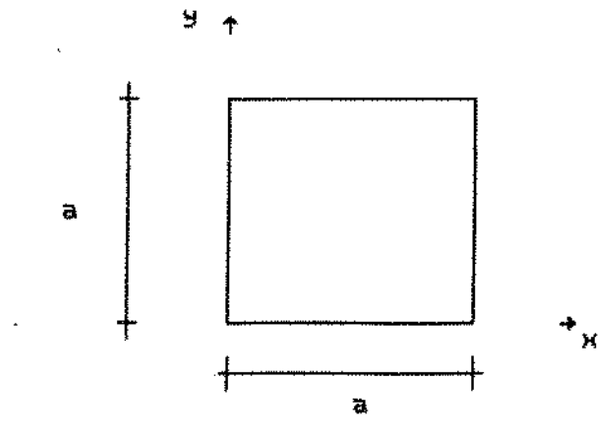

FIG. 3.14 - Membrana quadrada.

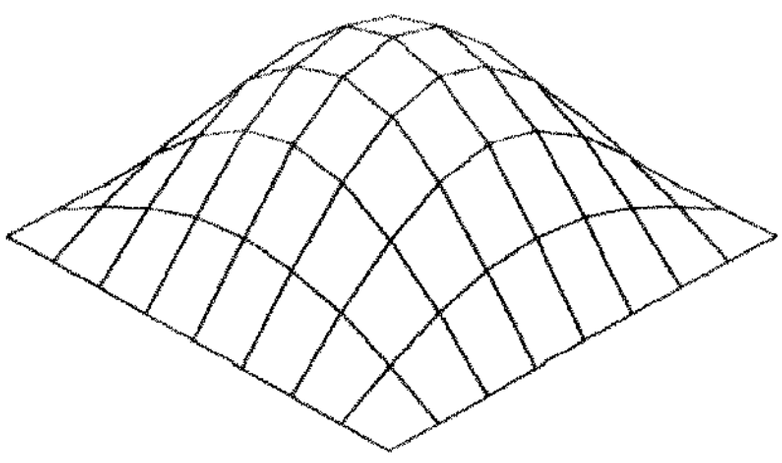

FIG. 3.15 - Membrana quadrada, $\lambda = -0.5413$

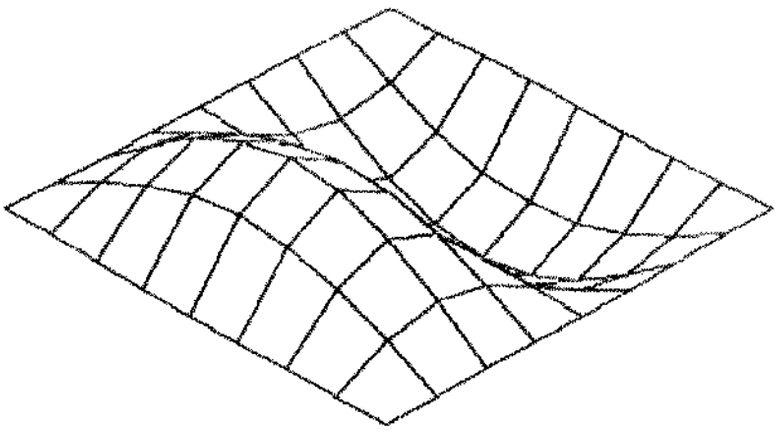

FIG. 3.16 - Membrana quadrada, $\lambda = -1.312$

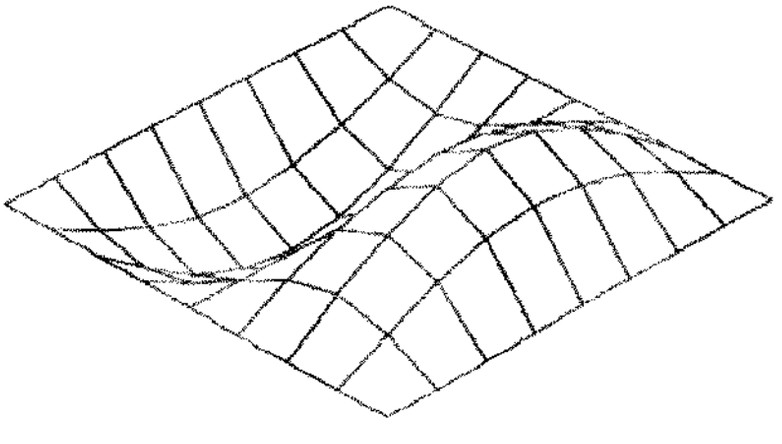

FIG. 3.17 - Membrana quadrada: $\lambda = -1.312$

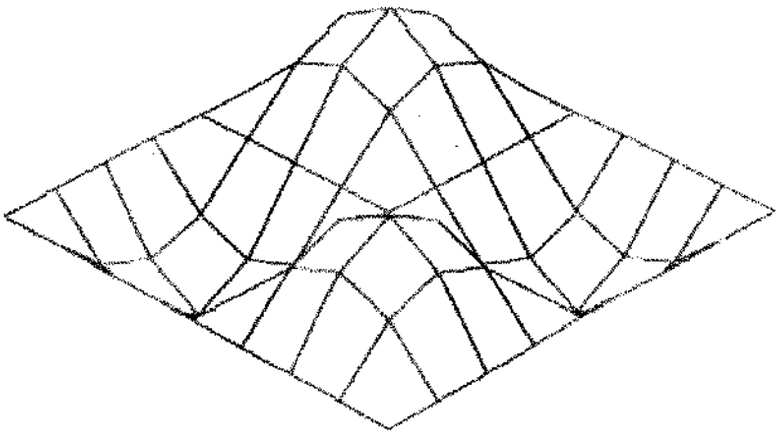

FIG. 3.18 - Membrana quadrada, $\lambda = -2.0828$

4. Comentários e Conclusões.

a) As duas técnicas apresentadas no Capítulo 2 para obtenção de equações discretas de diferenças finitas para operadores diferenciais parciais de segunda ordem mostraram-se, em geral, eficientes, quando aplicadas a problemas lineares relativamente simples.

b) Moléculas irregulares, montadas a partir de pontos arbitrariamente escolhidos, são menos acuradas[1] que aquelas construídas em malhas regulares (quadradas ou retangulares). É importante ressaltar, no entanto, que a possibilidade de escolha arbitrária da posição dos pontos que constituem o domínio discreto, não é um objetivo primordial. A facilidade no tratamento de contornos curvos e a possibilidade de adensamento localizado (ainda que regular), são características que permitem ganhos concretos na elaboração de algoritmos para obtenção de soluções numéricas.

c) Na elaboração dos programas para a solução dos exemplos apresentados no Capítulo 3, não houve qualquer preocupação com rotinas de pré e pós processamento (geração automática de malhas, análise de consistência, desenho da geometria e da solução). Na área de Elementos Finitos tem-se observado, mais recentemente, uma forte tendência no sentido de elaborar programas para computador

---

[1] No sentido de aproximação do operador diferencial contínuo, como indicado no ítem 2.5.2

estruturados em módulos de pré-processamento, análise e pós-processamento que operam de maneira recursiva. Rotinas de pós-processamento analisam uma solução numérica e acionam rotinas de pré-processamento que otimizam o domínio discreto, relocando nós, adensando a malha ou refinando a técnica de aproximação numérica, para que nova análise possa ser feita. Uma sugestão de continuidade deste trabalho é a anexação (ou adaptação) desses algoritmos às técnicas aqui descritas.

d) Alguns testes feitos com operadores de 4ª ordem (eq. bi-harmônica, p. exemplo), sugerem ser mais promissor tratar tais problemas com os mesmos operadores aqui descritos associados a formulações variacionais.

e) de posse de rotinas para a geração automática de malhas fica grandemente facilitada a modificação das técnicas aqui apresentadas para a solução de problemas tri-dimensionais.

f) Com apenas uma exceção[10], não se tem notícia da existência de pacotes comerciais baseados nas técnicas aqui apresentadas. O programa FIDAM, desenvolvido por Liszka e Orkisz, demonstra, entretanto, a viabilidade de tais pacotes. Se as técnicas se mostrarem eficientes na solução de problemas com não linearidade física e/ou geométrica, e na associação com métodos energéticos, abre-se uma possível linha de pesquisa e desenvolvimento.

g) A molécula de 6 pontos descrita em (2.4) foi empregada na solução do problema de difusão de calor (regime transiente)

apresentando bons resultados (estabilidade e convergência).

h) A inversão das matrizes [D] (m = 5) ou (D^TED) (m = 8) para obtenção das expressões algébricas que aproximam as derivadas parciais da função solução pode ser evitada quando se trabalha com malha regular quadrada[2], uma vez que é relativamente fácil obter-se expressões analíticas para os elementos da inversa. Para malhas arbitrárias, quando o cálculo de tais expressões torna-se extremamente complicado, parece promissor o emprego de programas baseados em inteligência artificial que permitem a obtenção da inversa analítica.

i) Lista-se a seguir alguns temas que podem dar continuidade ao presente trabalho:

- esquemas "adaptativos" de análise;
- problemas lineares regidos por equações diferenciais parciais de ordem superior a 2;
- problemas em regime transiente e fontes oscilatórias em regime permanente;
- não linearidade física e geométrica;
- formulação com elementos isoparamétricos;
- formulação variacional usando o esquema proposto por MacNeal[44].

[2] Veja-se pag. 16 e seguintes.

5. Referências Bibliográficas.

[1] - CHUNG,K.C. - "A Generalized Finite-Difference Method for Heat Transfer Problems of Irregular Geometries", Numerical Heat Transfer, vol. 4, pp 345-357, 1981.

[2] - CRANDALL,S.H. - "Engineering Analysis", McGraw-Hill, N. York, 1956.

[3] - FORSYTHE,G.E. e WASOW,W.R. - "Finite Difference Methods for Partial Differencial Equations", Wiley, N. York, 1960.

[4] - FREY,W.H. - "Flexible Finite-Difference Stencils from Iso-Parametric Finite Elements", Int. Journal Numer. Methods in Engineering, vol. 11, pp 1653-1665, 1977.

[5] - GONÇALVES,E.M. e PAMPLONA,D.C. - "Uma Nova Técnica de Discretização Numérica de Problemas de Contorno", II Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, pp 755-766, Curitiba, 1980.

[6] - GODOY,L.A. - "Ill-Conditioned Stars in The Finite Difference Method for Arbitrary Meshes", Computers & Structures, vol. 22, pp 469-473, 1986.

[7] - JENSEN,P.S. - "Finite Difference Technics for Variable Grids", Computers & Structures, vol. 2, pp 17-29, 1972.

[8] - KAPLAN,W. - "Advanced Calculus", Addison, Reading, 1952.

[9] - KELLY,D.W.; MILLS,R.J. e REISES,J.A. - "A Posteriori Error Estimates in the FEM, FDM and BEM", Int. Journal Numer. Meth. in Engineering, vol. 24, pp 1921-1939, 1987.

[10] - LISZKA,T. e ORKISZ,J. - "The Finite Difference Method at Arbitrary Irregular Grids an its Application in Applied Mechanics", Computers & Structures, vol. 11, pp 83-95, 1980.

[11] - MACNEAL,R.H. - "An Assymetrical Finite Difference Network", Quart. Appl. Mathematics", vol. 11, pp 295-310, 1953.

[12] - PAMPLONA,D.C. e FREIRE,M.A. - "Uma Nova Formulação do Método das Diferenças Finitas para a Equação Bi-harmônica com Malhas Irregulares Arbitrárias", COLLOQUIA '83, Santiago, 1983.

[13] - PERRONE,N. e KAO,R. - "A General Finite Difference Method for Arbitrary Meshes", Computers & Structures, vol. 5, pp 45-58, 1975.

[14] - SNELL,C.; VESEY,D.G. e MULLORD,P. - "The Application of a General Finite Difference Method to Some Boundary Value Problems", Computers & Structures, vol. 13, pp 547-552, 1981.

[15] - ZIENKIEWICZ,O.C. - "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, Londres, 1971.