



**Jaime Hideo Izuka**

# **Modelo e Teste Experimental para o Controle de Vibração de Vigas Longas Deformadas**

77/13

**CAMPINAS  
2013**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

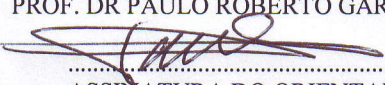
**JAIME HIDEO IZUKA**

# **Modelo e Teste Experimental para o Controle de Vibração de Vigas Longas Deformadas**

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica, na Área de Projeto Mecânico.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO  
FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO  
JAIME HIDEO IZUKA, E ORIENTADA PELO  
PROF. DR PAULO ROBERTO GARDEL KURKA

  
.....  
ASSINATURA DO ORIENTADOR

**CAMPINAS**

**2013**

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

Iz8m Izuka, Jaime Hideo, 1974-  
Modelo e teste experimental para o controle de vibração de vigas longas deformadas / Jaime Hideo Izuka. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Paulo Roberto Gardel Kurka.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Estruturas flexíveis. 2. Mecânica não-linear. 3. Vibração - Controle. 4. Análise modal. 5. Manipuladores (Mecanismo). I. Kurka, Paulo Roberto Gardel, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Model and experimental test for vibration control of long deformed beams

**Palavras-chave em inglês:**

Flexible structures

Nonlinear mechanics

Vibration - Control

Analysis modal

Manipulators (Mechanism)

**Área de concentração:** Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

**Titulação:** Doutor em Engenharia Mecânica

**Banca examinadora:**

Paulo Roberto Gardel Kurka [Orientador]

Niederauer Mastelari

Ely Carneiro de Paiva

João Antônio Pereira

Valdir Grassi Jr.

**Data de defesa:** 31-07-2013

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

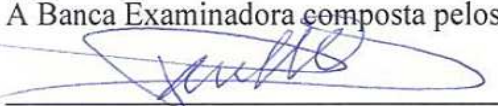
**TESE DE DOUTORADO**

**Modelo e Teste Experimental para o Controle  
de Vibração de Vigas Longas Deformadas**

Autor: **Jaime Hideo Izuka**

Orientador: **Paulo Roberto Gardel Kurka**

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:



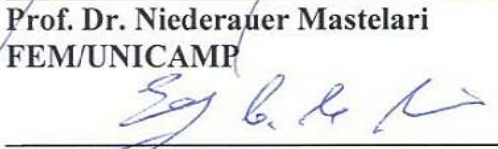
---

**Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka (Orientador)**  
FEM/UNICAMP



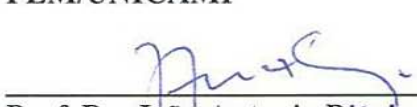
---

**Prof. Dr. Niederauer Mastelari**  
FEM/UNICAMP



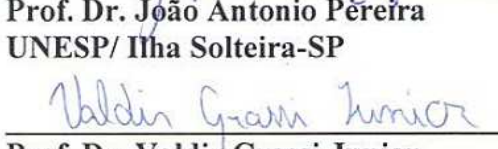
---

**Prof. Dr. Ely Carneiro de Paiva**  
FEM/UNICAMP



---

**Prof. Dr. João Antonio Pereira**  
UNESP/ Ilha Solteira-SP



---

**Prof. Dr. Valdir Grassi Junior**  
EESC/USP/ São Carlos

Campinas, 31 de julho de 2013.

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho aos meus pais Kangi e Sumiko, ao meu irmão Mauro e à minha esposa Juliana.

## **Agradecimentos**

Ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka, pela confiança em oferecer uma oportunidade para que eu pudesse vivenciar a experiência extraordinária do doutorado. Agradeço principalmente pelos conselhos, dedicação e paciência para a orientação da tese.

Ao professor Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt pelos conselhos e os sempre bem humorados cafés com o grupo no Laboratório.

Aos Professores Dr. Niederauer Mastelari, Dr. Ely Carneiro de Paiva, Dr. João Antonio Pereira e ao amigo e Prof. Dr. Valdir Grassi Jr. pelas valiosas contribuições para a tese.

À minha família pelo apoio e compreensão às minhas decisões pessoais e profissionais.

À Juliana, minha esposa e companheira de todos os momentos.

À minha família aqui em São Paulo, Sr. Yoshihiro, Sra Sayoko, Ilan, Geisa e Clóvis por me acolherem em todos esses finais de semana em São Paulo.

À tia Kyo pelo apoio e acolhimento desde o tempo do cursinho e até os dias de hoje.

Aos amigos Fabiano, Guilherme pelo companheirismo e exemplos de luta, aos amigos do laboratório Caio, Jorge, Carlos, Paola, Oscar, Darla, Alan, Luan, Pedro e Jaime.

Um agradecimento especial ao Thiago e a Ligya, pela recepção e ajuda em Pasadena.

Aos amigos Berangere, Chun Guang e William pelos cafés e companheirismo na Caltech.

Aos amigos Cristiano, Robertinho e Rallo, pela camaradagem.

Aos amigos Sr. Argélio, Sra Eliana e Maria Clara pela recepção e atenção sempre fundamentais.

Ao amigo Emerson pela recepção e grande ajuda aqui em Foz do Iguaçu e aos amigos do Laboratório do Parque Tecnológico Itaipu.

A Capes pelo fundamental apoio financeiro.

## Resumo

A utilização de braços manipuladores flexíveis em veículos de exploração foi o motivador deste trabalho. Estas estruturas têm como vantagens a sua massa reduzida e a capacidade de suportar grandes deformações sem que o limite de elasticidade seja excedido. O controle das vibrações de sua extremidade livre é essencial para uma aplicação prática. Neste contexto, este trabalho tem como objetivo a determinação de um modelo dinâmico para uma estrutura longa e flexível, visando o seu controle de vibração. A estrutura considerada possui seção variável, semelhante a uma viga telescópica. Considera-se ainda que a estrutura esteja sujeita a uma grande deformação causada pelas ações de tendão de tração, peso próprio e cargas concentradas. O modelo dinâmico consiste na adaptação de uma malha de elementos finitos de baixa ordem à configuração da linha de deformação estática da viga. A vibração a ser controlada consiste das pequenas oscilações que ocorrem em torno da posição de equilíbrio da viga deformada. O modelo dinâmico encontrado para a estrutura é utilizado no projeto de um controlador de vibrações, ativado por forças exercidas no tendão de tração, responsável pela deformação estática da própria viga. Comparações com a literatura, bem como resultados experimentais comprovam a validade do modelo empregado para a caracterização do sistema. Simulações numéricas mostram o sucesso de uso do modelo no projeto de um controlador ativo de vibrações.

*Palavras Chave:* estrutura flexível; mecânica não linear; vibração - controle; análise modal; manipuladores (mecanismo).

## Abstract

The use of flexible manipulator arms in exploration vehicles was the motivation of this work. The advantages of such structures are their light weight and the capability to withstand large displacements without exceeding their specified elastic limit. The control of vibrations of its free end is essential for a practical application. In this context, the objective of this study is to determine a dynamic model for a long and flexible structure, aiming its vibration control. The structure has a variable section, similar to a telescopic beam. Large deformation behavior of the structure is considered. Concentrated loads, self-weight of the structure and tendon traction are the loads applied to the structure. The model dynamics is described by a low order finite element mesh, which is adapted to the geometry defined by the static deformation of the beam. The vibrations to be controlled are the small oscillations about the equilibrium position of the deformed beam. The dynamic model found for the structure is applied to design an active vibration controller. The controller forces are applied through the tendon traction cables, which is also responsible for the static deformation of the beam itself. Comparison with literature as well as experimental results prove the validity of the model used to characterize the system. Numerical simulations show the success of using the model in the design of an active vibration controller.

*Key Words:* flexible structure, nonlinear mechanics; vibration – control; modal analysis; manipulator (mechanism).

## Lista de Ilustrações

|                                                                                                                                                                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1.1: Operação de um veículo de exploração planetário (Curiosity). Fonte:<br><a href="http://marsrovers.jpl.nasa.gov/newsroom/pressreleases">http://marsrovers.jpl.nasa.gov/newsroom/pressreleases</a> . ....                                      | 3  |
| Figura 1.2: Configurações de estruturas utilizadas em aplicações espaciais. Fonte: TIBERT, 2002.<br>.....                                                                                                                                                | 4  |
| Figura 1.3: Suportes de câmeras utilizadas em veículos terrestres. Fontes:<br><a href="http://www.militarysystems-tech.com">http://www.militarysystems-tech.com</a> , <a href="http://www.army-technology.com">http://www.army-technology.com</a> . .... | 5  |
| Figura 1.4: Estruturas formadas por barras articuladas e estrutura tensegrity. Fonte: Tibert, 2002. ....                                                                                                                                                 | 6  |
| Figura 1.5: Esboço do suporte para câmera. ....                                                                                                                                                                                                          | 8  |
| Figura 2.1: Viga engastada sujeita a uma força em sua extremidade. ....                                                                                                                                                                                  | 12 |
| Figura 2.2 : Viga tracionada por um cabo. Fonte: YAU (2010). ....                                                                                                                                                                                        | 14 |
| Figura 2.3 : Reprodução do resultado do campo de soluções do módulo da força no cabo. ....                                                                                                                                                               | 15 |
| Figura 2.4: Configurações de equilíbrio de uma viga engastada. Fonte: BATISTA E KOSEL,<br>2005. ....                                                                                                                                                     | 16 |
| Figura 2.5 : Modelo de uma tira de policarbonato. Fonte SANTILLAN, 2005. ....                                                                                                                                                                            | 19 |
| Figura 2.6 : Viga de policarbonato tracionada por um cabo. Fonte : HOLLAND, 2006. ....                                                                                                                                                                   | 20 |
| Figura 2.7 : Controle de vibração através de atuadores piezoelétricos. Fonte : NESTOROV e<br>TRAJKOV, 2010. ....                                                                                                                                         | 21 |
| Figura 3.1: Viga tracionada por um cabo inclinado. ....                                                                                                                                                                                                  | 25 |
| Figura 3.2: Ângulo da força de tração como função do comprimento do cabo. ....                                                                                                                                                                           | 29 |
| Figura 3.3: Viga sujeita a grandes deformações. ....                                                                                                                                                                                                     | 30 |
| Figura 3.4: Trecho 2-3 com os carregamentos de força concentrada, peso próprio e momento<br>externo. ....                                                                                                                                                | 31 |
| Figura 3.5: Diâmetro entre os trechos $x(s)$ e $x(L)$ . ....                                                                                                                                                                                             | 33 |
| Figura 3.6: Trecho 1-2 com os carregamentos de força concentrada, peso próprio e momento<br>externo. ....                                                                                                                                                | 35 |
| Figura 3.7: Diagrama de blocos da solução pelo método de <i>shooting</i> . ....                                                                                                                                                                          | 39 |
| Figura 3.8: Diagrama de blocos da solução pelo método de <i>shooting</i> . ....                                                                                                                                                                          | 40 |

|                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 3.9: Sistema de Coordenadas Global e Sistema de Coordenadas Local do Elemento. ....               | 42 |
| Figura 3.10: Diagrama de blocos do controle em realimentação de estados .....                            | 47 |
| Figura 4.1 Configuração do teste estático. ....                                                          | 53 |
| Figura 4.2 : Detalhe da fixação. ....                                                                    | 54 |
| Figura 4.3 : Três inclinações utilizadas para o teste estático. ....                                     | 55 |
| Figura 4.4: Configuração para o teste modal e posições usadas para excitar a peça. ....                  | 56 |
| Figura 4.5: Configurações utilizadas no teste dinâmico. ....                                             | 57 |
| Figura 5.1: Viga Defletida. ....                                                                         | 59 |
| Figura 5.2: Comparação dos resultados estáticos para diferentes configurações da viga<br>deformada. .... | 59 |
| Figura 5.3: Frequências naturais da vibração plana. ....                                                 | 60 |
| Figura 5.4: Frequências naturais da vibração 3D. ....                                                    | 61 |
| Figura 5.5: Ângulo de inclinação de 0° graus. ....                                                       | 62 |
| Figura 5.6: Ângulo de inclinação de 30° graus. ....                                                      | 63 |
| Figura 5.7: Ângulo de inclinação de 60° graus. ....                                                      | 63 |
| Figura 5.8: Ângulo de inclinação de 0° graus e ângulo de força variável. ....                            | 64 |
| Figura 5.9 : Resposta de aceleração livre para a excitação do primeiro/segundo modo de vibrar. ....      | 67 |
| Figura 5.10 : Resposta de aceleração livre para a excitação do terceiro/quarto modo de vibrar. ..        | 67 |
| Figura 5.11 : Resposta de aceleração livre para a excitação do nono/décimo modo de vibrar. ....          | 68 |
| Figura 5.12 : Resposta de aceleração livre para a excitação do primeiro/segundo modo de vibrar.<br>..... | 69 |
| Figura 5.13 : Resposta de aceleração livre para a excitação do terceiro/quarto modo de vibrar. ..        | 69 |
| Figura 5.14 : Resposta de aceleração livre para a excitação do quinto/sexto modo de vibrar. ....         | 70 |
| Figura 5.15 : Resposta de aceleração livre para a excitação do nono/décimo modo de vibrar. ....          | 70 |
| Figura 5.16 : Resposta de aceleração livre para a excitação do primeiro/segundo modo de vibrar.<br>..... | 71 |
| Figura 5.17 : Resposta de aceleração livre para a excitação do terceiro/quarto modo de vibrar. ..        | 72 |
| Figura 5.18 : Resposta de aceleração livre para a excitação do primeiro/segundo modo de vibrar.<br>..... | 73 |
| Figura 5.19 : Resposta de aceleração livre para a excitação do terceiro/quarto modo de vibrar. ..        | 74 |

|                                                                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 5.20 : Resposta de aceleração livre para a excitação do sétimo/oitavo modo de vibrar. ....                 | 74  |
| Figura 5.21 : Resposta de aceleração livre para a excitação do primeiro/segundo modo de vibrar. ....              | 75  |
| Figura 5.22 : Resposta de aceleração livre para a excitação do terceiro/quarto modo de vibrar. ..                 | 76  |
| Figura 5.23 : Resposta de aceleração livre para a excitação vertical (y) do terceiro modo. ....                   | 76  |
| Figura 5.24 : Resposta de aceleração livre para a excitação do sétimo/oitavo modo de vibrar. ....                 | 77  |
| Figura 5.25 : Resposta de aceleração livre para a excitação do nono/décimo modo de vibrar. ....                   | 77  |
| Figura 5.26 : Resposta de aceleração livre para a excitação do primeiro/segundo modo de vibrar. ....              | 78  |
| Figura 5.27 : Resposta de aceleração livre para a excitação do terceiro/quarto modo de vibrar. ..                 | 78  |
| Figura 5.28 : Resposta de aceleração livre para a excitação do quinto/sexta modo de vibrar. ....                  | 79  |
| Figura 5.29 : Resposta de aceleração livre para a excitação do sétimo/oitavo modo de vibrar. ....                 | 79  |
| Figura 5.30 : Resposta de aceleração livre para a excitação do sétimo/oitavo modo de vibrar. ....                 | 80  |
| Figura 5.31 : Resposta de aceleração livre para a excitação do nono/décimo modo de vibrar. ....                   | 80  |
| Figura 5.32 : a) Polos controlados e não controlados do sistema b) Polos do Observador .....                      | 83  |
| Figura 5.33: Magnitude do deslocamento da extremidade da viga para as situações controlada e não controlada. .... | 84  |
| Figura 5.34: Tensão do motor medido para a excitação impulso. ....                                                | 84  |
| Figura 5.35: Resposta do observador.....                                                                          | 85  |
| Figura 5.36 : Deslocamento da extremidade da viga para uma entrada randômica. ....                                | 85  |
| Figura 5.37 : Resposta do observador a uma entrada randômica. ....                                                | 86  |
| Figura B.1 : Primeiro e segundo modos de vibrar. ....                                                             | 99  |
| Figura B.2 : Terceiro e quarto modos de vibrar. ....                                                              | 99  |
| Figura B.3 : Quinto e sexto modos de vibrar. ....                                                                 | 100 |
| Figura B.4 : Sétimo e oitavo modos de vibrar. ....                                                                | 100 |
| Figura B.5 : Nono e décimo modos de vibrar. ....                                                                  | 101 |
| Figura B.6 : Configuração da peça deformada devido ao carregamento de 0,99N. ....                                 | 102 |
| Figura B.7 : Primeiro e segundo modos de vibrar. ....                                                             | 102 |
| Figura B.8 : Terceiro e quarto modos de vibrar. ....                                                              | 103 |
| Figura B.9 : Quinto e sexto modos de vibrar. ....                                                                 | 103 |

|                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura B.10 : Sétimo e oitavo modos de vibrar. ....                                 | 104 |
| Figura B.11 : Nono e décimo modos de vibrar. ....                                   | 104 |
| Figura B.12 : Configuração da peça deformada devido ao carregamento de 1,98 N. .... | 105 |
| Figura B.13 : Primeiro e segundo modos de vibrar. ....                              | 105 |
| Figura B.14 : Terceiro e quarto modos de vibrar. ....                               | 106 |
| Figura B.15 : Quinto e sexto modos de vibrar. ....                                  | 106 |
| Figura B.16 : Sétimo e oitavo modos de vibrar. ....                                 | 107 |
| Figura B.17 : Nono e décimo modos de vibrar. ....                                   | 107 |
| Figura B.18 : Configuração da peça deformada devido ao carregamento de 2,93 N. .... | 108 |
| Figura B.19 : Primeiro e segundo modos de vibrar. ....                              | 108 |
| Figura B.20 : Terceiro e quarto modos de vibrar. ....                               | 109 |
| Figura B.21 : Quinto e sexto modos de vibrar. ....                                  | 109 |
| Figura B.22 : Sétimo e oitavo modos de vibrar. ....                                 | 110 |
| Figura B.23 : Nono e décimo modos de vibrar. ....                                   | 110 |
| Figura B.24 : Configuração da peça deformada devido ao carregamento de 4,02 N. .... | 111 |
| Figura B.25 : Primeiro e segundo modos de vibrar. ....                              | 111 |
| Figura B.26 : Terceiro e quarto modos de vibrar. ....                               | 112 |
| Figura B.27 : Quinto e sexto modos de vibrar. ....                                  | 112 |
| Figura B.28 : Sétimo e oitavo modos de vibrar. ....                                 | 113 |
| Figura B.29 : Nono e décimo modos de vibrar. ....                                   | 113 |
| Figura B.30 : Configuração da peça deformada devido ao carregamento de 5,18 N. .... | 114 |
| Figura B.31 : Primeiro e segundo modos de vibrar. ....                              | 114 |
| Figura B.32 : Terceiro e quarto modos de vibrar. ....                               | 115 |
| Figura B.33 : Quinto e sexto modos de vibrar. ....                                  | 115 |
| Figura B.34 : Sétimo e oitavo modos de vibrar. ....                                 | 116 |
| Figura B.35 : Nono e décimo modos de vibrar. ....                                   | 116 |

## Lista de Tabelas

|                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 5.1 :Frequências naturais calculadas teoricamente pelo MEF.....                                                  | 65 |
| Tabela 5.2 : Frequências naturais obtidas experimentalmente. ....                                                       | 66 |
| Tabela 5.3 : Comparação das frequências naturais relativas aos quatro primeiros modos<br>experimentais e teóricas. .... | 81 |
| Tabela A.1Coordenadas obtidas estaticamente para uma inclinação de $0^{\circ}$ .....                                    | 97 |
| Tabela A.2Coordenadas obtidas estaticamente para uma inclinação de $30^{\circ}$ .....                                   | 97 |
| Tabela A.3Coordenadas obtidas estaticamente para uma inclinação de $60^{\circ}$ .....                                   | 98 |
| Tabela A.4: Coordenadas ao longo de peça, para diferentes carregamentos de tração do cabo. ...                          | 98 |

.....

## Lista de Abreviaturas e Siglas

### *Letras Latinas*

|                                                                                  |                     |
|----------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| $A$ - posição relativa a base da viga                                            | [m]                 |
| $a_x, a_y$ - coordenada horizontal e vertical da extremidade da viga             | [m]                 |
| $b_x, b_y$ - coordenada horizontal e vertical da extremidade da viga             | [m]                 |
| $B$ - posição relativa ao final da viga                                          | [m]                 |
| $b_n$ - amortecimento de torção do motor                                         | [mNs]               |
| $C$ - posição em um ponto qualquer na viga                                       |                     |
| $c$ - constante adimensional ( $c = -\frac{PL^2}{EI}$ )                          |                     |
| $\mathbf{D}$ - matriz de amortecimento                                           | [Ns/m]              |
| $D$ - diâmetro                                                                   | [m]                 |
| $E$ - módulo de elasticidade                                                     | [N/m <sup>2</sup> ] |
| $\mathbf{F}$ - vetor de forças externas aplicadas no modelo de elementos finitos | [N]                 |
| $F, F_d, F_a$ - forças de tração no cabo, distúrbio externo e de controle        | [N]                 |
| $\mathbf{G}, \mathbf{g}_i$ - Matriz e vetor de ganho do controlador              |                     |
| $g$ - aceleração gravitacional                                                   | [m/s <sup>2</sup> ] |
| $h_x, h_y$ - posição do suporte do cabo                                          | [m]                 |
| $\mathbf{I}_i$ - Matriz dos polos controlados                                    |                     |
| $I$ - momento de inércia de área                                                 | [m <sup>4</sup> ]   |

|                                                                                                  |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| $i$ – corrente da armadura                                                                       | $[A]$      |
| $J$ – Momento de Inércia                                                                         | $[m^2 kg]$ |
| $\mathbf{K}_e, \mathbf{k}_e$ – matriz de rigidez do elemento em coordenada global e local        | $[N/m]$    |
| $\mathbf{K}$ – matriz de rigidez da estrutura                                                    | $[N/m]$    |
| $k_b, k_t$ – constante do motor, $[\Omega A s]$ e constante da armadura                          | $[mNs/A]$  |
| $k_c$ – rigidez do cabo de tração                                                                | $[N/m]$    |
| $\mathbf{L}$ – matriz de rotação do sistema de coordenada local para global.                     |            |
| $L_a$ – indutância do motor                                                                      | $[H]$      |
| $L, L_c$ – comprimento total da viga, comprimento do cabo na condição não deformada              | $[m]$      |
| $\ell$ - comprimento do cabo na condição deformada                                               | $[m]$      |
| $\mathbf{M}_e, \bar{\mathbf{m}}_e$ – matriz de massa do element em coordenada global e local     | $[kg]$     |
| $\mathbf{M}$ – matriz de massa da estrutura                                                      | $[kg]$     |
| $M$ - torque                                                                                     | $[N.m]$    |
| $M_2, M_3$ - momento no ponto 2 e momento no ponto 3                                             | $[N.m]$    |
| $N$ – ordem do polinômio                                                                         |            |
| $P$ – força de tração no cabo                                                                    | $[N]$      |
| $q_i$ – grau de liberdade linear                                                                 | $[m]$      |
| $\mathbf{R}_e, \mathbf{r}_e$ – vetor que contém os graus de liberdade global e local do elemento | $[m]$      |
| $\mathbf{q}$ – graus de liberdade do modelo de elementos finitos                                 | $[m]$      |
| $R_a$ – Resistencia elétrica do motor                                                            | $[\Omega]$ |
| $r_i$ – grau de liberdade linear                                                                 | $[m]$      |
| $r_p$ – raio da polia de tração                                                                  | $[m]$      |

$s$  - comprimento do arco [m]

$\mathbf{T}$  - matriz de transformação de coordenadas - local para global

$\mathbf{u}$  - vetor de forças do atuador [N]

$u$  - taxa de comprimento de arco ( $u = \frac{s}{L}$ )

$\mathbf{V}, \bar{\mathbf{V}}$  - matrizes de autovetores completa e reduzida

$\hat{\mathbf{v}}$  - vetor de estados estimados [m]

$\mathbf{v}$  - vetor de estados da coordenada da estrutura de EF. [m]

$V_o$  - voltagem de entrada [V]

$\vartheta$  - posição angula do motor [Rd]

$\mathbf{w}$  - vetor de forças de distúrbio [N]

$x, x_B$  or  $X_B$  - coordenada horizontal da extremidade da viga [m]

$y, y_B$  or  $Y_B$  - coordenada vertical da extremidade da viga [m]

.....

### ***Letras Gregas***

$\alpha, \alpha_B, \psi$  - ângulo de curvatura da viga, ângulo de curvatura na extremidade [Rd]

$\beta$  - ângulo do cabo ou da força aplicada [Rd]

$\gamma$  - ângulo auxiliar ( $\gamma = \alpha + \beta$ , Rd)

$\lambda$  - matriz de autovalores [1/s]

$\phi, \phi_A, \phi_B, \phi_C$  - ângulos auxiliares ( $\phi = \arcsin \frac{\gamma}{2}$ )

$\Gamma, \kappa$  - Função do ângulo de curvatura da viga

$\mu_i$  – coeficiente da expansão polynomial

$\boldsymbol{\eta}$  - vetor de coordenadas modais do modelo de EF [m]

$\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$  – GDL angular [Rd]

$\rho$  – densidade [Kg/m<sup>3</sup>]

$\xi$  - variável de integração

$\boldsymbol{\zeta}$  – vetor de ganho do observador

.....

### *Abreviações*

**GDL** - grau de liberdade

**MEF** - método dos elementos finitos

### *Siglas*

**DPM** - Departamento de Projeto Mecânico

.....

# SUMÁRIO

|                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. INTRODUÇÃO .....                                                          | 1  |
| 1.1. Apresentação .....                                                      | 1  |
| 1.2. Estruturas retráteis.....                                               | 4  |
| 1.3. Proposta de trabalho.....                                               | 7  |
| 1.4. Objetivos .....                                                         | 9  |
| 1.5. Organização do texto .....                                              | 9  |
| 1.6. Cooperação Unicamp-Caltech/JPL.....                                     | 10 |
| 2. REVISÃO DA LITERATURA .....                                               | 11 |
| 2.1. Análise estática de elementos flexíveis.....                            | 11 |
| 2.2. Análise dinâmica de elementos flexíveis .....                           | 18 |
| 2.3. Representação no espaço modal e controle de estruturas flexíveis .....  | 20 |
| 2.4. Conclusões .....                                                        | 22 |
| 3. DESENVOLVIMENTO DE MODELOS .....                                          | 24 |
| 3.1. Modelo analítico de viga com seção transversal constante.....           | 24 |
| 3.2. Modelo de deflexão estática de viga com seção transversal variável..... | 29 |
| 3.2.1. Trecho 23 .....                                                       | 31 |
| 3.2.2. Trecho 12 .....                                                       | 34 |
| 3.3. Modelo de elemento finito da viga e cabo .....                          | 41 |
| 3.4. Auto problema e coordenada modal .....                                  | 44 |
| 3.5. Controle de vibrações.....                                              | 46 |
| 4. ANÁLISE EXPERIMENTAL .....                                                | 53 |

|                                                                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1. Teste estático.....                                                                                     | 53  |
| 4.2. Teste dinâmico .....                                                                                    | 55  |
| 4.3. Configuração do teste dinâmico .....                                                                    | 56  |
| 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES .....                                                                             | 58  |
| 5.1. Comparação com a literatura .....                                                                       | 58  |
| 5.2. Resultados estáticos na bancada do laboratório .....                                                    | 61  |
| 5.3. Resultados dinâmicos na bancada do laboratório .....                                                    | 65  |
| 5.4. Controle de vibração do modelo de vigas longas .....                                                    | 81  |
| 6. CONCLUSÕES .....                                                                                          | 87  |
| 6.1. Lista de publicações .....                                                                              | 90  |
| REFERÊNCIAS .....                                                                                            | 91  |
| A. ANEXO A – Resultados de Posição do Teste Experimental Estático. ....                                      | 97  |
| B. ANEXO B – Modos de Vibrar Teóricos. ....                                                                  | 99  |
| Modos de vibrar relativos a configuração inicial com acelerômetro na extremidade e força de tração nula..... | 99  |
| Modos de vibrar relativos a configuração como força de tração de 0,99N .....                                 | 102 |
| Modos de vibrar relativos a configuração como força de tração de 1,98N .....                                 | 105 |
| Modos de vibrar relativos a configuração como força de tração de 2,93N .....                                 | 108 |
| Modos de vibrar relativos a configuração como força de tração de 4,02N .....                                 | 111 |
| Modos de vibrar relativos a configuração como força de tração de 5,18N .....                                 | 114 |

# 1.INTRODUÇÃO

O estudo da modelagem e controle de estruturas longas e flexíveis é o tema deste trabalho de doutorado. Estas estruturas são bastante utilizadas na indústria espacial, onde massa é uma restrição evidente. O uso deste tipo de estrutura geralmente é restrito a aplicações em ambientes de baixa aceleração gravitacional, sendo amplamente usado em satélites. Veículos de exploração espacial, por sua vez, tendem a usar estruturas mais rígidas para que grandes oscilações não sejam transferidas de uma extremidade a outra da estrutura. Esta lacuna é foco da aplicação deste trabalho. Os conceitos para a aplicação em veículos de exploração espacial foram amplamente discutidos durante o estágio de doutorado, na Caltech / JPL, e serviram de base para o desenvolvimento desta tese.

## 1.1. Apresentação

A utilização de robôs móveis para pesquisa espacial é uma aplicação encontrada em veículos de exploração do solo de Marte, chamados de MER (*Mars Exploration Rovers*), tendo como exemplos: Pathfinder (1997), Spirit e Opportunity (2004). Missões mais complexas utilizando este mesmo tipo de robô estão previstas para os próximos anos, como a Mars Science Laboratory (JPL-MARS SCIENCE LABORATORY, 2009). O aumento da complexidade das missões e consequente exigência de veículos de exploração mais completos têm como justificativa a busca por evidência de algum tipo de vida, caracterização do clima e geologia e, finalmente, a preparação para a exploração humana em Marte (JPL – MARS EXPLORATION PROGRAM, 2009).

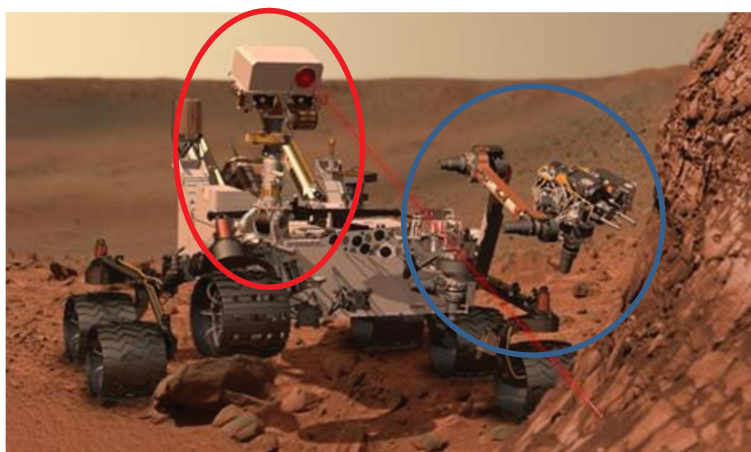
As informações enviadas pelos veículos Spirit e Opportunity vão desde fotos da paisagem marciana a imagens microscópicas e resultados de análise química e mineralógica de rochas do solo desse planeta. Segundo especialistas, estas informações se transformaram nas principais

descobertas em Ciências Planetárias nos últimos tempos (DE SOUZA FILHO, C.R, 2009). Desta forma o desenvolvimento de novos modelos e simulações para o aperfeiçoamento destes robôs é fundamental para a continuidade do sucesso alcançado pelos modelos atuais de veículos exploratórios.

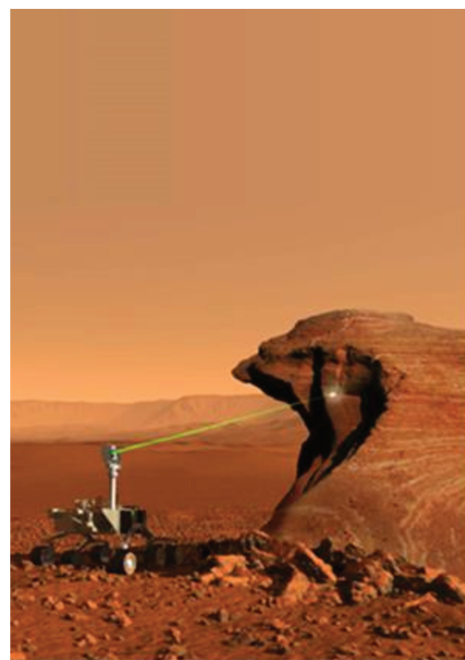
Estruturas longas, flexíveis e de baixo peso são frequentemente utilizados em veículos de exploração espacial (satélites), para uma variedade de aplicações em ambientes de baixa gravidade. Por outro lado, veículos de exploração planetária conhecidos como MER (*Mars Exploration Rover*), tendem a usar peças rígidas e curtas para coletar dados de interesse científico devido a ação gravitacional do planeta, bem como vistas panorâmicas sobre a paisagem. Estruturas semelhantes às utilizadas em aplicações de baixa gravidade serviriam como uma ferramenta mais eficiente de exploração planetária, proporcionando horizontes mais amplos de navegação e oferecendo a possibilidade de chegar a regiões de interesse científico de difícil acesso, como escarpas e declives do terreno. O posicionamento da extremidade de uma haste flexível pode ser conseguido por um mecanismo simples, tal como um cabo tracionado por uma polia presa a um motor. Os inconvenientes de uma estrutura longa e flexível, empregada no contexto da exploração planetária com um significativo campo gravitacional, são os grandes deslocamentos e os movimentos de vibração que precisam ser controlados durante a operação em tempo real. O modelo analítico da dinâmica da estrutura, necessário para uma estratégia de controle clássico para suprimir tais movimentos de vibração, não está disponível para o caso da configuração de uma viga longa curvada. A contribuição deste trabalho de doutorado está em um modelo que deve contemplar as grandes deformações estáticas para o posicionamento, bem como descrever o comportamento dinâmico de vibração.

Os vínculos de ligação rígidos das bases das câmeras, se por um lado são uma exigência do processo de obtenção de imagens estereoscópicas, por outro são limitadores da altura máxima de posicionamento das câmeras (Figura 1.1(a)). O aumento de altura das bases rígidas de posicionamento das câmeras, que permita obter um horizonte de observação mais distante, implica num grande aumento de peso e decorrente consumo de energia do veículo. Nesse sentido, o uso de bases flexíveis para as câmeras representa uma solução mais desejável, com menor custo

associado. A solução do problema de correlação estereoscópica das imagens nesse caso fica subordinada a capacidade de se conseguir determinar de forma precisa, em qualquer instante de tempo, o posicionamento relativo entre as bases flexíveis das câmeras. A determinação de tal posicionamento relativo pode ser feita através de medições inerciais do movimento das bases, o que traz associado um custo adicional ligado à energia peso, ou através de um modelo preciso de movimentação dinâmica dos suportes das câmeras.



a) Suporte câmera (vermelho) e manipulador (azul).



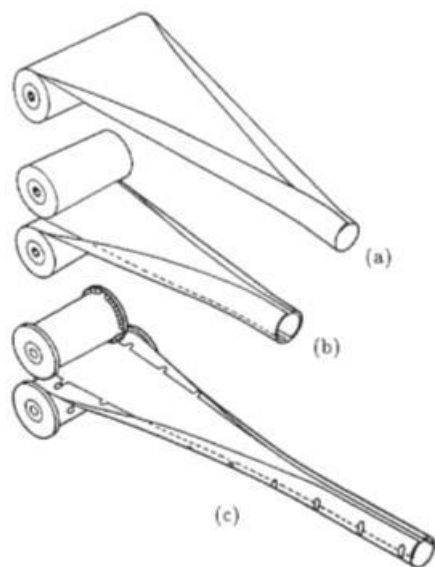
b) Análise de uma escarpa..

Figura 1.1: Operação de um veículo de exploração planetário (Curiosity). Fonte: <http://marsrovers.jpl.nasa.gov/newsroom/pressreleases>.

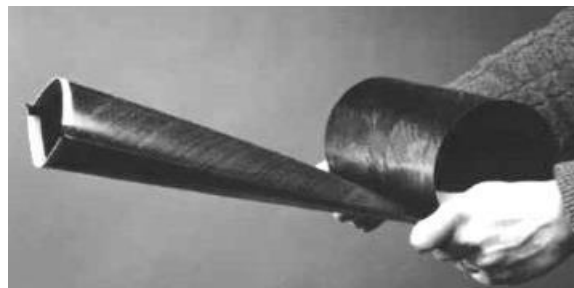
A utilização dos atuais manipuladores para a aquisição de fotos também apresenta uma limitação do envelope de trabalho. O limite da configuração estendida (1,9m) é justificada pela massa de 32kg da ferramenta instalada na extremidade do braço robótico (JPL – MARS EXPLORATION PROGRAM, 2009). Dessa forma, a análise de uma configuração geológica como uma escarpa (Figura 1.1 (b)) é comprometida uma vez que não se consegue aproximar as câmeras até essas regiões. A utilização de um suporte longo vai ao encontro com esta necessidade.

## 1.2. Estruturas retráteis

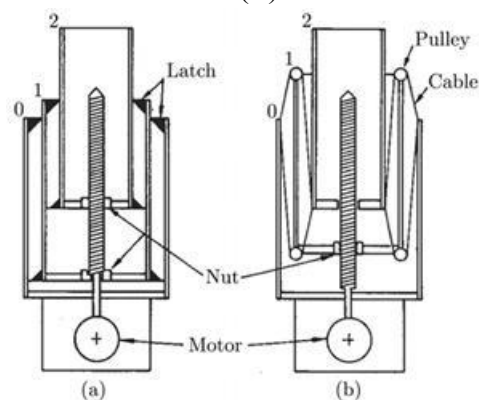
A apresentação de estruturas retráteis utilizadas em aplicações aeroespaciais é necessária para indicar as alternativas existentes e mostrar suas limitações de uso (PUIG, 2010 , TIBERT, 2002 e PELEGRINO, 2001). Uma estrutura retrátil (*deployable structure*) é formada por elementos montados que podem variar sua configuração para se chegar a uma determinada dimensão ou volume. Esta propriedade permite que a estrutura seja transformada de uma forma compacta para uma configuração expandida. Para a aplicação aeroespacial, estas estruturas apresentam como vantagem a economia de massa e volume, a forma compacta suporta as cargas de lançamento e a boa relação custo-benefício quando comparamos as dimensões da forma compacta e a precisão alcançada na forma expandida.



(A)STEM



(B) CMT



(C) Telescópica

Figura 1.2: Configurações de estruturas utilizadas em aplicações espaciais. Fonte: TIBERT, 2002.

Estruturas tubulares de parede fina foram as primeiras estruturas retráteis utilizadas na indústria espacial. Estas se utilizam da propriedade elástica de materiais como aço, ligas de cobre-berílio ou plásticos reforçados com fibras de carbono para retornar a forma tubular depois de expandidas e são divididas em dois tipos : STEM (*storable tubular extendible member*) e CMT (*collapsible tubular mast*). A estrutura STEM utiliza o mesmo princípio da trena, ou seja, é armazenada na forma de bobina e a configuração estendida se torna rígida devido a uma curvatura do seu perfil. Essa curvatura é maior que 360 graus, o que confere uma boa rigidez nas direções axial e flexional, mas não contribui para rigidez à torção (Figura 1.2-(A)-a). Através da combinação de duas estruturas STEM (Figura 1.2 (A) b), e inserindo nervuras ao longo da estrutura (Figura 1.2 (A) c), pode-se chegar a bobinas mais estreitas e aumentar a sua resistência a torção. A estrutura CTM é construída a partir de duas STEM coladas em suas bordas. Esta configuração contribui para o aumento da rigidez à torção (Figura 1.2 (B)).

Estruturas telescópicas consistem em uma série de tubos cilíndricos concêntricos que são armazenados de uma forma compacta. Os fatores limitantes, em termos de comprimento, estão relacionados com a espessura do tubo e a região onde os tubos se sobrepõem. Algumas formas de construção envolvem o uso de porca-fuso (Figura 1.2 (C) a) ou combinando porca-fuso e roletes com cabos (Figura 1.2 (C) b). Este tipo de estrutura é bastante comum como suporte de câmeras, por exemplo, em veículos de transmissão de TV ou torres de observação móveis (Figura 1.3).

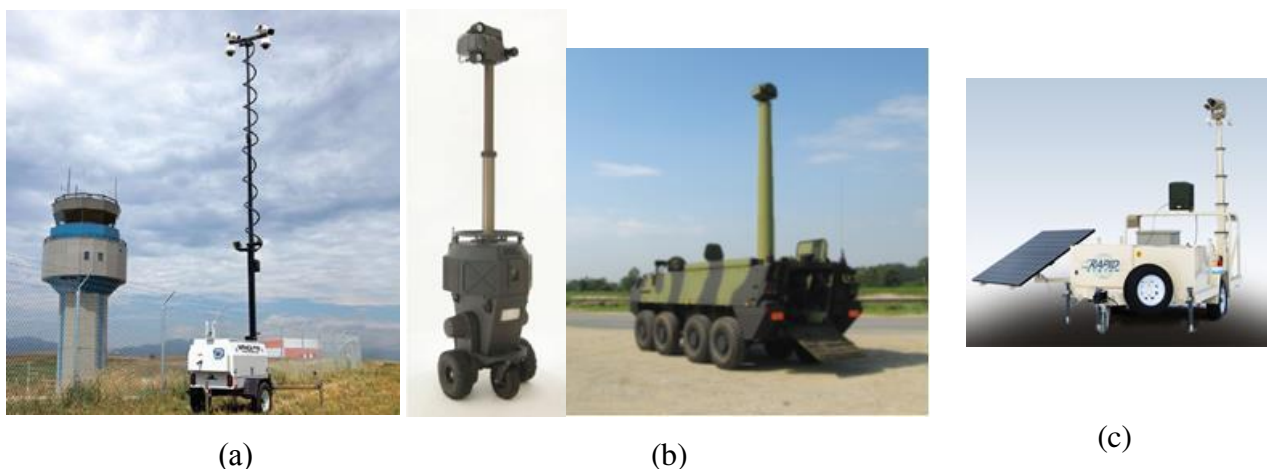


Figura 1.3: Suportes de câmeras utilizadas em veículos terrestres. Fontes: <http://www.militarysystems-tech.com>, <http://www.army-technology.com>.

Estruturas de barras articuladas são bastante utilizadas na indústria espacial e podem apresentar diversas configurações. As vantagens, em relação às configurações anteriores, são a maior rigidez e precisão. A barra de geometria variável (*variable geometry truss*) e a estrutura pantográfica enrijecida por cabos (Figura 1.4 (a)) são alguns exemplos desta configuração. Podemos citar também as estruturas CM (*coiable mast*), que são tipicamente de uso espacial. A forma estendida é alcançada a partir de um mecanismo de fuso. Estruturas do tipo *tensegrity* (Figura 1.4 (B)) são bastante interessantes do ponto de vista retrátil, uma vez que seus elementos são articulados.



a) Barras articuladas



b) Estrutura tensegrity

Figura 1.4: Estruturas formadas por barras articuladas e estrutura tensegrity. Fonte: Tibert, 2002.

As estruturas STEM, CMT, barras articuladas e *tensegrity*, apesar de consolidadas na aplicação espacial, não foram consideradas para o modelamento matemático. Procurou-se apresentar um modelo de viga com seção variável uniforme, o que possibilitou um estudo bastante aprofundado do problema. Este modelo teórico foi validado através de um protótipo funcional construído no Laboratório de Processamento de Sinais.

### 1.3. Proposta de trabalho

O conceito de projeto das estruturas mencionadas acima é baseado em ambientes de baixa aceleração gravitacional, e as aplicações atuais são voltadas para o uso em satélites. Veículos de exploração planetária como os MERS, por sua vez, utilizam suportes ou manipuladores curtos e rígidos para coletar dados, inclusive imagens panorâmicas do ambiente. O uso de braços manipuladores curtos, deve-se, em tal contexto, ao seu baixo peso embarcado e relativo baixo nível de vibração própria, devido a distúrbios dinâmicos durante a operação. Braços manipuladores telescópicos longos, embora sujeitos a maiores efeitos de vibrações próprias, consistem em instrumentos de exploração mais eficientes. A proximidade de um veículo de exploração com braços longos, na encosta de uma montanha ou falha geológica profunda, permite um maior alcance dos instrumentos de análise, que podem se aproximar com mais eficiência das regiões de interesse científico, conforme ilustrado na Figura 1.5 abaixo. A desvantagem de tais manipuladores longos são as vibrações, associadas a sua alta flexibilidade estrutural. Para a atenuação da vibração de operação de tais manipuladores, tornam-se necessárias estratégias eficientes de projeto e controle.

Uma forma simples e eficiente de controle de posicionamento de um manipulador longo e flexível é através da deformação de sua geometria por meio da ação de um tendão de tração. O tendão de tração pode ser empregado também para o controle de vibração da própria estrutura. A dificuldade para a construção de um controlador ativo de vibrações destes manipuladores deve-se a necessidade de obtenção de um modelo que represente de forma adequada o comportamento dinâmico da estrutura. Modelos de vigas longas com grandes deformações causadas por cabos, existentes na literatura, referem-se apenas ao comportamento de deformação estática de suas linhas de centro. Mesmo assim, os modelos encontrados são de vigas com seção transversal constante, tracionadas na extremidade e isentas de peso próprio ou cargas concentradas. O modelo dinâmico de tais vigas, por outro lado, pode ser obtido apenas na forma discreta de elementos finitos. Os modelos encontrados na literatura, da dinâmica de tais estruturas através do método de elementos finitos, baseiam-se em soluções iterativas de equilíbrio *quasi-static* para

determinação da posição deformada, seguido da solução para determinação dos modos e frequências naturais de vibração. Para que tais modelos representem de forma adequada o comportamento dinâmico das estruturas longas, torna-se necessário a adoção de um grande número de elementos finitos e de graus de liberdade de discretização.

Os trabalhos encontrados na literatura lidam o problema dinâmico como uma extensão do problema de equilíbrio não linear *quasi-static*. A solução de uma grande deflexão estática em consequência de um dado carregamento é realizada de forma iterativa através do método *shooting* (HOLLAND, 2006). A análise dinâmica do cálculo de autovalores e auto vetores do sistema é realizada sobre a configuração obtida pelo valor final de convergência da solução estática iterativa. Nessa perspectiva de análise dinâmica, necessita-se de um modelo que contenha inicialmente um elevado número de elementos finitos que permita a convergência das soluções estáticas não lineares, seguido pela análise dinâmica. No presente trabalho, o cálculo da geometria da viga deformada estaticamente é realizado de forma independente do modelo numérico de elementos finitos. Utiliza-se, portanto, uma malha com um pequeno número de elementos finitos, adaptada à geometria estática da viga deformada, fornecendo os modos e frequências de vibração do conjunto. Tal estratégia de modelagem representa uma contribuição original para a análise dinâmica de estruturas flexíveis longas. Modos e frequências de vibração selecionados são utilizados no projeto de um controlador ativo de vibrações da viga.

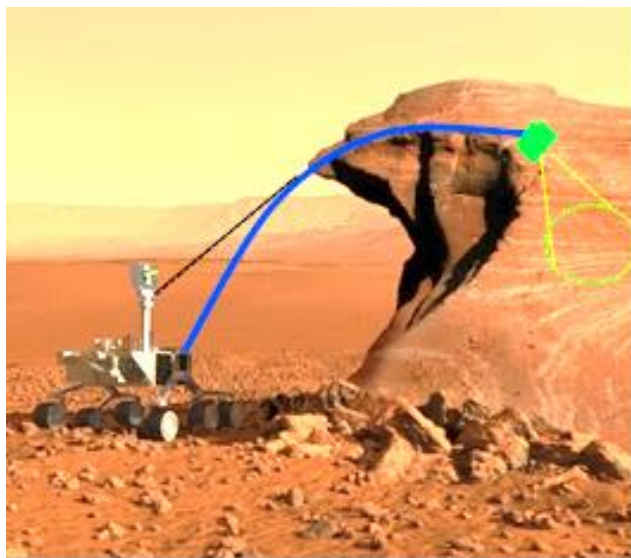


Figura 1.5: Esboço do suporte para câmera.

Nesse contexto, apresenta-se a seguir os objetivos do presente trabalho.

#### **1.4. Objetivos**

1. Determinação das curvas de deformação elástica de vigas longas com seção variável, sujeitas a cargas de tração por cabo, peso próprio e cargas concentradas.
2. Seleção e aplicação adequada de malha de elementos finitos para a obtenção do modelo dinâmico da viga longa em condições operacionais.
3. Definição da estratégia de controle para atenuação de vibrações da viga longa.
4. Validação experimental dos resultados de caracterização estática e dinâmica de viga longa deformada.
5. Apresentação de simulação numérica da validação do modelo de controle de vibrações.

#### **1.5. Organização do texto**

A revisão dos problemas de deformação estática e características dinâmicas de estruturas flexíveis são abordadas no capítulo 2. Inicialmente o problema da elástica é revisto, bem como os métodos de solução da equação diferencial que descreve o comportamento de uma estrutura submetida a grandes deformações estáticas. O problema de vibração considerando oscilações lineares em torno de uma configuração de equilíbrio é explicado, bem como as formas de controle modal utilizados no controle de vibrações em estruturas flexíveis.

O desenvolvimento de modelos é apresentado no capítulo 3. A formulação e as estratégias de solução das equações diferenciais que descrevem o modelo de estrutura proposto neste trabalho são descritos em detalhes. A formulação do método dos elementos finitos (MEF) para o

elemento de viga que representa a flexão (Euler-Bernoulli), tração e torção (Saint-Venant) é também apresentado. Ainda nesse capítulo são descritos o auto problema relativo ao modelamento pelo MEF, assim como a estratégia proposta de controle por alocação de polos.

As análises experimentais dos modelos estático e dinâmico são apresentadas no capítulo 4.

Os resultados numéricos e experimentais são comparados no capítulo 5.

Conclusões e propostas para continuidade do trabalho são apresentadas no capítulo 6.

## **1.6. Cooperação Unicamp-Caltech/JPL**

A proposta de estudar o comportamento de estruturas flexíveis originou da cooperação entre Unicamp e JPL/Caltech através do pesquisador Dr. Alberto Elfes. A partir desta proposta, foram originadas a dissertação de Paola Gonzales (2012) e a presente tese. O trabalho segue como tema de cooperação com o centro de pesquisa CSIRO – Austrália, onde atualmente se encontra o Dr. Alberto Elfes.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

A utilização de estruturas leves e flexíveis em manipuladores para aplicações espaciais é desejável devido à grande restrição de massa no lançamento de um foguete. Por outro lado, as dificuldades de se controlar as oscilações inerentes a uma aplicação em um veículo de exploração planetária têm restringido a sua aplicação prática. Os desafios de se modelar e controlar tal estrutura motivou uma revisão bibliográfica abrangente, como primeiro passo deste trabalho.

Verificou-se uma limitada bibliografia abordando o estudo destas estruturas para a aplicação específica em veículos de exploração espacial. Dessa forma, procurou-se estruturar a revisão bibliográfica em torno de três conceitos fundamentais: grandes deformações estáticas, a descrição do modelo dinâmico supondo pequenas vibrações em torno de uma configuração de equilíbrio e o controle ativo das vibrações.

### 2.1. Análise estática de elementos flexíveis

O histórico da análise estática de elementos flexíveis indica um número considerável de trabalhos voltados para a solução do problema “*elástica*” (FERTIS, 2006**Erro! Fonte de referência não encontrada.**, LEVIEN, 2009). O termo “*elástica*” se refere à forma exata da deflexão da curva elástica quando determinada a partir da equação diferencial que descreve um elemento flexível (TIMOSHENKO, 1961). A solução deste problema é obtida através de métodos analíticos ou numéricos. A análise dinâmica de elementos flexíveis está relacionada com o cálculo das suas frequências naturais de vibração e seus modos correspondentes (FERTIS, 2006). A vibração ocorre com relação à posição de equilíbrio estática, ou seja, uma grande deformação estática associada a pequenas vibrações em torno da posição de equilíbrio do elemento flexível.

A equação básica que relaciona a curvatura e o momento de flexão foi, na sua essência, derivada por James Bernoulli. Um erro na avaliação da constante de proporcionalidade foi posteriormente corrigido por Euler, que pode resolver vários problemas relacionados com a *elástica* (TIMOSHENKO, 1961). De acordo com a equação de Euler-Bernoulli, o momento de flexão em qualquer ponto da viga (Figura 2.1) é proporcional a mudança de curvatura causada pela ação de uma força (FRISCH –FAY,1962), ou seja:

$$\frac{M}{EI} = \frac{d\psi}{ds} \quad (1)$$

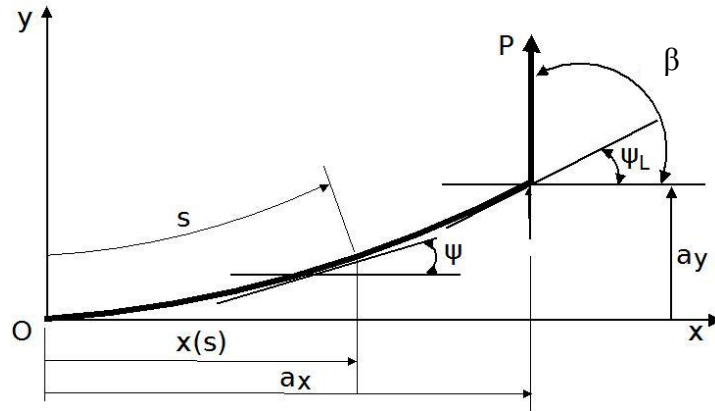


Figura 2.1: Viga engastada sujeita a uma força em sua extremidade.

Os métodos analíticos mais utilizados para solução deste problema incluem a série de potências e integrais elípticas completas e incompletas. Soluções analíticas através das integrais elípticas são restritas a vigas com seção e propriedades invariáveis e cargas pontuais (FRISCH – FAY,1961). Para casos mais gerais, é imprescindível utilizar métodos numéricos para a solução deste problema. Entre os métodos numéricos, podemos citar os métodos de Runge Kutta, (OHTSUKI, 2001, SHVARTSMAN 2007), *shooting* (HOLLAND, 2006), elementos finitos (HOWELL 2001) e *quasi-linearization finite difference* (Al-SADDER, 2006).

A solução analítica através de integrais elípticas é utilizada para vigas simples, com módulo de elasticidade e momento de inércia constante e com cargas concentradas. Para uma viga submetida a cargas axiais e laterais concentradas, a equação diferencial característica é da forma:

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = K\Gamma(\psi) \quad (2)$$

Sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{s=0} = \psi_0 \\ \left(\frac{d\psi}{ds}\right)_{s=L} = \left(\frac{M}{EI}\right)_{s=L} \end{array} \right. \quad (3)$$

Onde  $K$  é uma constante arbitrária e  $\Gamma(\psi)$  é uma combinação linear de senos e cossenos e  $s$  é a coordenada medida ao longo do comprimento da viga. A equação diferencial dada pela Eq. (2) é integrada através do método de integrais elípticas. As restrições relacionadas a este método são a dificuldade em desenvolver a solução analítica para carregamentos distribuídos bem como para elementos com rigidez variável.

O método de solução através de séries de potência é uma alternativa para se chegar a uma solução analítica de vigas submetidas a um carregamento distribuído. Para a solução da Eq. (2), precisamos expressar  $\psi$  como uma função de  $s$ , utilizando a serie de Maclaurin (FRISCH –FAY, 1962) :

$$\psi(s) = \psi(0) + s\psi'(0) + \frac{s^2}{2!}\psi''(0) + \frac{s^3}{3!}\psi'''(0) + \dots \quad (4)$$

A solução terá a forma de equações que dependem diretamente da carga, comprimento da viga e da rigidez a flexão (FRISCH –FAY, 1962). As restrições para o uso deste método estão associadas a vigas com módulo de elasticidade e momento de inércia variáveis, bem como

carregamentos de flexão que envolvam a integral de equações que sejam funções da grande deformação (FERTIS 2006).

Uma descrição mais detalhada da solução analítica de vigas submetidas a grandes deformações são encontrados na literatura, por exemplo, Frish- Fay (1962) e Timoshenko (1961). Yau (2010) apresenta uma abordagem analítica do problema de uma coluna estaiada submetida a grandes deflexões devido a pré-tensão de seu cabo, descrita na Figura 2.2. A posição da extremidade livre da coluna e o vetor da força aplicada pelo cabo são determinados analiticamente através das integrais elípticas e considerações geométricas. Esta abordagem analítica fornece resultados precisos e de uma forma eficiente uma vez que são derivados de uma solução fechada. O campo de soluções foi reproduzido em Matlab e está descrito na Figura 2.3. O campo de soluções é descrito pelas variáveis adimensionais  $h_a/l_a$ , que representa a distância do ponto de fixação inferior do cabo com relação ao comprimento total e a variável  $\beta/\pi$ , que representa a relação do ângulo da extremidade da viga. A variável  $kla/\pi$  representa o módulo da força aplicada.

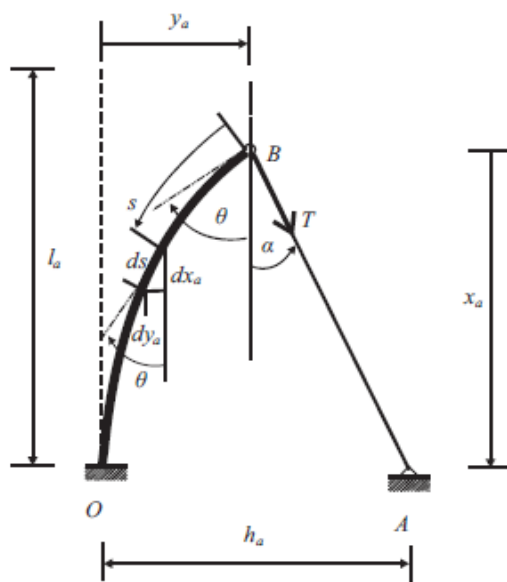


Figura 2.2 : Viga tracionada por um cabo. Fonte: YAU (2010)

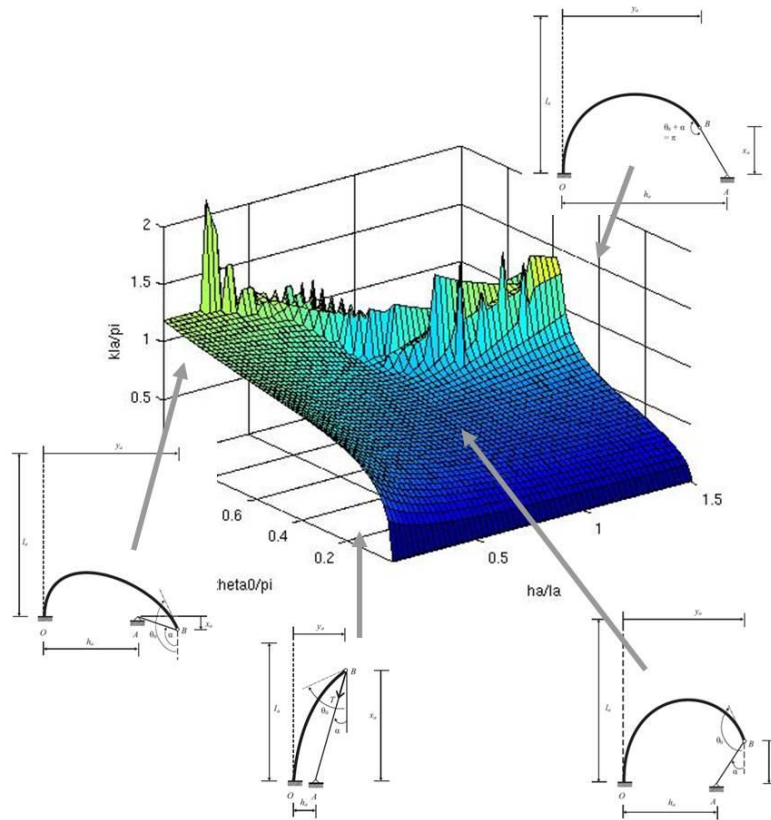


Figura 2.3 : Reprodução do resultado do campo de soluções do módulo da força no cabo.

Uma solução numérica para o problema de grandes deformações consiste em utilizar o método de *shooting* não linear. Este método consiste em converter as condições de contorno representadas na Eq (3), que definem um problema de valor de contorno (BVP em inglês), em um problema de valor inicial (IVP em inglês) (BANERJEE, 2008). A condição de contorno na extremidade  $s = L$  é substituída pela estimativa da primeira derivada na extremidade  $s = 0$ . Esta técnica é chamada de *shooting* por analogia ao processo de atingir objetos a um alvo estacionário (BURDEN, 2011). Definidas as condições iniciais, a equação diferencial é solucionada através do método de Runge-Kutta, ou outro método numérico mais conveniente. A partir da solução numérica do problema de valor inicial, conseguimos calcular um valor para a primeira derivada em  $s = L$ . A diferença entre este valor calculado e a condição de contorno original fornece o erro deste procedimento. O procedimento para minimizar o erro pode ser implementado, por exemplo, através do método de Newton-Raphson (BANERJEE, 2008).

O resultado da solução numérica pelo método de *shooting* depende de uma boa escolha da primeira derivada do ângulo em  $s = 0$ . A solução da equação (2) define a forma ou configuração de equilíbrio da viga. O trabalho de Batista e Kosel (2005) propõe encontrar todas as configurações de equilíbrio de uma viga sujeita a uma carga concentrada em sua extremidade, idêntica a Figura 2.1. Definindo a variável adimensional  $\omega = PL^2/EI$ , os autores apresentam as configurações possíveis para um dado valor de  $\omega$  e ângulo de carga  $\alpha$ . Os resultados são apresentados na Figura 2.4.

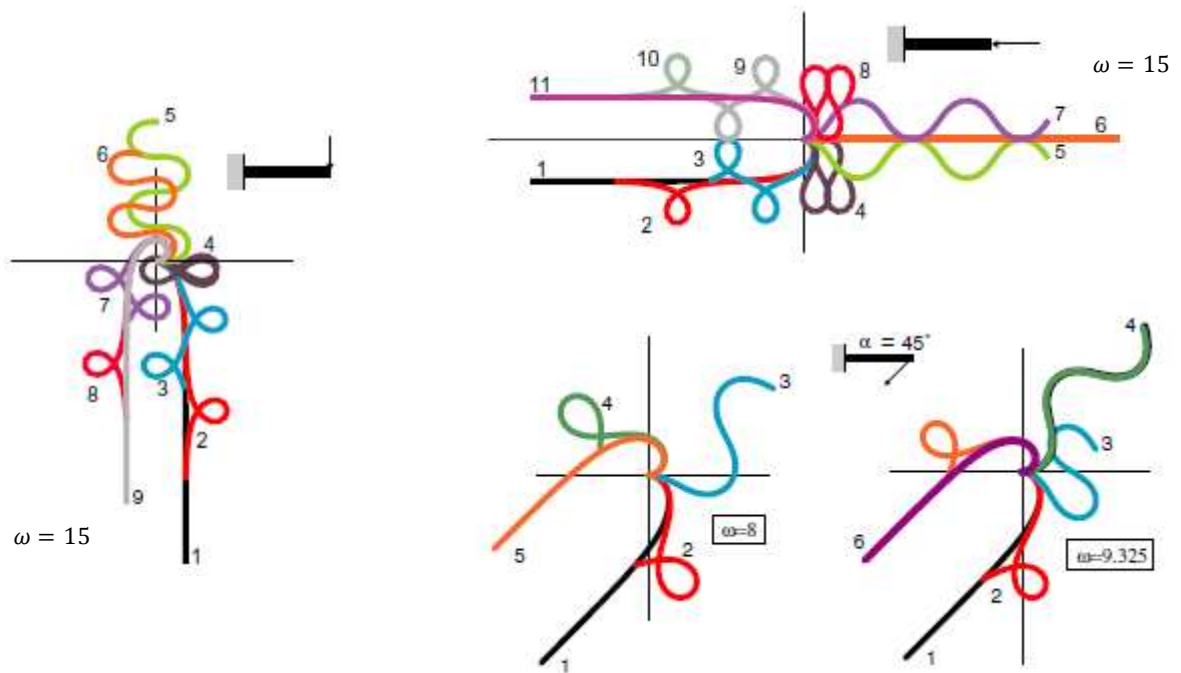


Figura 2.4: Configurações de equilíbrio de uma viga engastada. Fonte: BATISTA E KOSEL, 2005.

Belendez et al (2004) analisam o problema da viga submetida a grandes deformações de forma numérica e experimental. O método de *shooting* é utilizado para reduzir o problema de valor de contorno para uma forma de solução iterativa de um problema de valor inicial. O método de Runge Kutta é utilizado para integrar o problema de valor inicial. O problema de uma viga de seção circular variável é proposto por Ohtsuki (2001). A integração numérica de Runge-Kutta

Gill é utilizada para resolver a equação diferencial. Al-Sadder e Al-Rawi (2006) utilizam o método de diferenças finitas para integrar numericamente a equação diferencial do problema de uma viga em balanço sujeita a carregamentos contínuos e descontínuos. As secções das vigas estudadas não são uniformes. O método de *quasi-linearization* é utilizado para resolver as equações do problema. Este método se baseia em sucessivas correções dos termos não lineares destas equações.

Shvartsman (2006) resolve o problema de grandes deformações de uma viga em balanço sujeita a uma força seguidora. A viga é presa a uma mola espiral e o ângulo da força, com relação ao eixo da viga deformada, permanece constante. Para uma viga uniforme, com módulo de elasticidade e momento de inércia constante, a condição de contorno na extremidade livre da viga é substituída por uma condição de contorno na extremidade engastada. Assim, o problema de valor de contorno inicial é reduzido a um problema de valor inicial. Isto torna possível a solução direta do problema, sem a necessidade de iterações. O método de Runge Kutta foi utilizado para a integração numérica da equação diferencial. Batista e Kosel (2005) estudam a configuração de equilíbrio para vigas em balanço submetidas a uma força concentrada e com ângulo de aplicação constante. Os autores propõem um método para transformar a condição de contorno na extremidade livre em uma condição inicial. Ambos os métodos procuram acelerar o processo de integração da equação diferencial do problema, mas assumem uma viga uniforme.

A solução do problema da elástica de uma estrutura com seção transversal constante e cargas concentradas pode ser expressa através de uma solução fechada. Esta solução é desenvolvida expressando como variáveis do sistema as posições ao longo do comprimento da estrutura e o ângulo de curvatura da mesma. Assim, a equação diferencial de segunda ordem que expressa o comportamento não linear de grandes deformações pode ser trabalhada algebricamente até que seja possível expressá-la em termos da integral elíptica. Para geometrias mais complexas e com cargas distribuídas, não é possível encontrar uma solução fechada. Nestas situações, precisa-se resolver a equação diferencial de forma numérica.

## 2.2. Análise dinâmica de elementos flexíveis

Vibrações livres, em geral, ocorrem a partir da posição de equilíbrio estático de um corpo (FERTIS, 2006). Para corpos flexíveis, a posição de equilíbrio estático está associada a grandes amplitudes estáticas, e a equação diferencial de movimento que expressa a vibração livre do corpo se torna não linear. Se as amplitudes de vibração medidas a partir da posição de equilíbrio estática são pequenas, então as frequências de vibração livres são independentes da amplitude de vibração, mas elas dependem da amplitude estática que define a posição de equilíbrio estática. Caso as amplitudes de vibração sejam grandes, então as frequências livres de vibração irão depender das amplitudes estáticas e vibracionais.

A solução da equação diferencial geral para corpos flexíveis não pode ser resolvida através da separação das variáveis. Apesar de esta solução ser a mais realística, uma vez que engloba o caso de vibração com grandes amplitudes, ela se torna extremamente difícil para vibrações com frequências mais altas (FERTIS, 2006). Por outro lado, considerando que as vibrações ocorrem a partir da posição de equilíbrio estático e que as amplitudes das vibrações são pequenas, a complexidade do problema é reduzida e a solução da equação diferencial pode ser obtida através de métodos lineares de solução numérica, como diferenças finitas ou o método dos elementos finitos (FERTIS e AFONTA, 1993). O modelo do MEF pode incorporar a flexão e torção levando em conta os modelos de Euler-Bernoulli e Saint-Venant, respectivamente (SALLSTROM et al, 1996).

A linearização das amplitudes de vibração de um corpo sujeito a grandes deformações pode ser aplicada também a problemas dinâmicos de pós-flambagem. A vibração plana de uma tira de policarbonato flexionada na forma de uma gota é estudada por Santillan, Virgin e Plaut, 2005. O método de *shooting* é utilizado para obter a solução numérica do problema não linear de valor de contorno (grandes deformações estáticas) bem como a solução do problema linear de valor de contorno (vibração). Resultados experimentais confirmam a validade deste método. Os mesmos autores (SANTILLAN, S. T. VIRGIN, L. N. and PLAUT, R. H, 2006) apresentam também a

dinâmica de uma viga delgada submetida a uma deformação pós-flambada, considerando o seu peso próprio e presa a suportes inclinados e horizontais. A viga é modelada a partir da teoria da elástica e as frequências e modos são calculados considerando uma pequena oscilação em torno do equilíbrio. O modelamento de *risers* flexíveis para extração de petróleo utilizando a teoria da elástica é proposto por Santillan Virgin e Plaut, 2010. A configuração de equilíbrio é obtida através da solução numérica, por diferenças finitas, do problema de valor de contorno. A partir da configuração de equilíbrio, as características dinâmicas da estrutura (modos e frequências naturais) são calculadas considerando pequenas oscilações utilizando o método das diferenças finitas.

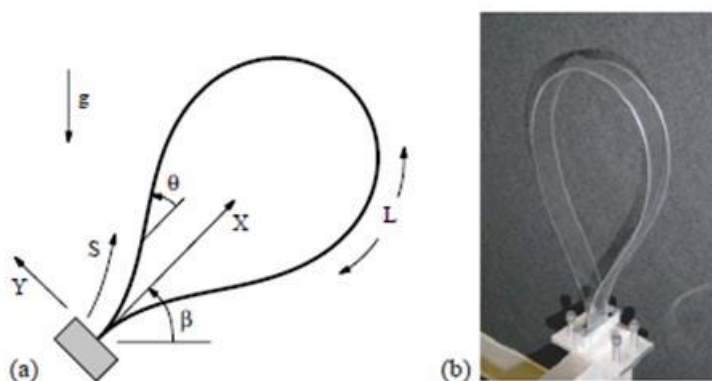


Figura 2.5 : Modelo de uma tira de policarbonato. Fonte SANTILLAN, 2005.

Os trabalhos de Holland et al, 2008 e 2006 apresentam uma análise de vibração de uma estrutura longa e flexível, com uma geometria curva mantida por um cabo tensionado. Nestes trabalhos, o autor estuda as configurações de equilíbrio calculadas para grandes deformações utilizando a teoria da elástica e oscilações de pequena amplitude em torno destas posições de equilíbrio. As soluções são obtidas através da integração numérica pelo método de *shooting*. Os resultados de vibração (autovalor) são comparados aos obtidos por um software comercial de MEF e resultados experimentais. Os elementos escolhidos pelo autor para discretizar a estrutura no software comercial são elementos de vigas de Timoshenko (B31-Abaqus), o que resultou em uma malha extremamente refinada (1000 elementos) para obter um resultado compatível com o

experimental. Por se tratar de uma estrutura esbelta, elementos de viga baseados na teoria de Euler Bernoulli seriam mais adequados para esta análise (ABAQUS Manual).

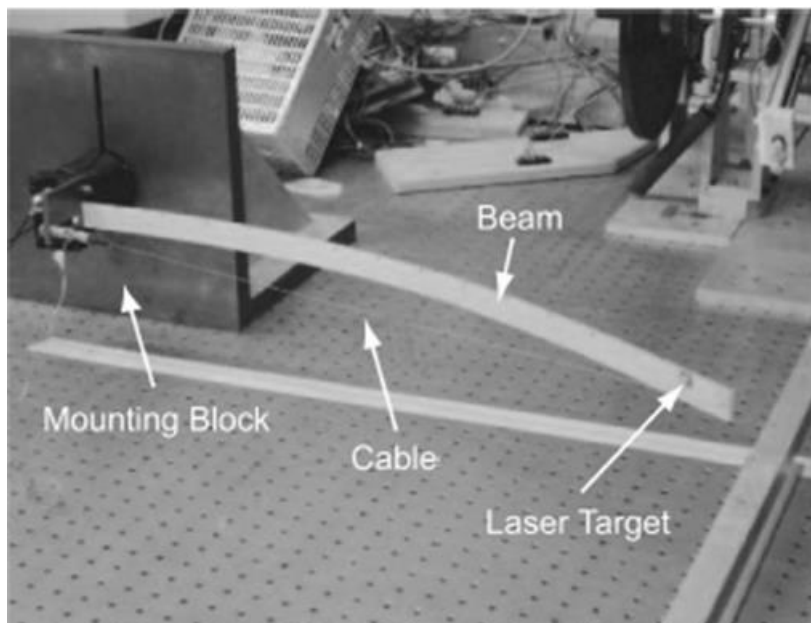


Figura 2.6 : Viga de policarbonato tracionada por um cabo. Fonte : HOLLAND, 2006.

### 2.3. Representação no espaço modal e controle de estruturas flexíveis

A representação de modelos estruturais lineares no domínio do tempo pode ser feita através de equações diferenciais lineares. Estas equações podem estar na forma de equação diferencial de segunda ordem ou na forma de equação diferencial de primeira ordem (representação no espaço de estado). No primeiro caso, os graus de liberdade da estrutura são utilizados na sua descrição dinâmica. No segundo caso, utilizam-se as variáveis de estado. Engenheiros estruturais preferem a representação da estrutura em GDL e através da equação diferencial de segunda ordem. Engenheiros de controle, por sua vez, utilizam o modelo no espaço de estado. A padronização em espaço de estado do modelo estrutural permite a aplicação das propriedades conhecidas de controle na dinâmica da estrutura.

Além da escolha da forma das equações, pode-se representar o modelo analítico em diferentes coordenadas. Dois sistemas de coordenadas se destacam, a nodal e a modal. Coordenadas nodais são definidas através de deslocamentos e velocidades nos nós da estrutura. Coordenadas modais, por sua vez, são definidas através dos modos de vibrar. A limitação no uso de coordenadas nodais no controle de vibrações de estruturas flexíveis está relacionada com número alto de GDL utilizados na discretização dos modelos. Modelos com muitos GDL causam dificuldades numéricas em análises dinâmicas. Como alternativa, podemos utilizar a representação em coordenadas modais e aplicar uma redução do modelo através do truncamento. Um modelo de ordem menor também é desejável do ponto de vista do projeto de controle (GAWRONSKI, 2004).



Figura 2.7 : Controle de vibração através de atuadores piezoelétricos. Fonte : NESTOROVÍ e TRAJKOV, 2010.

Trabalhos que envolvem o controle de vibração de estruturas longas e flexíveis, como aqueles encontrados em (NESTOROVÍ e TRAJKOV, 2010, ZHANG, 2008, OKUBO et al, 1998, MANJUNATH e BANDYOPADHYAY, 2006 e RODRIGUEZ et al, 2010) baseiam-se em modelos simples de vigas retas em balanço. Guo et al (2008) trabalham com estruturas flexíveis tensionadas por cabos (tendões). Guo et al (2008) afirmam que o desempenho de estratégias de controle LQR/LQG deterioram ou se tornam instáveis quando os modelos de estruturas complexas não são definidas com precisão. De Silva, 2007 também menciona que a técnica de

controle LQR apresenta sérias limitações por não atingir níveis específicos de amortecimento modal. Um método de controle modal capaz de alcançar tal objetivo, de acordo com Okubo *et al* (1998), Rodriguez *et al* (2010) e De Silva (2007), é a técnica de alocação de polos.

## 2.4. Conclusões

A revisão bibliográfica é um suporte à proposta de solução adotada neste trabalho. A solução de um caso geral do problema da elástica, combinando cargas distribuídas e concentradas, seção circular variável e submetida a diferentes condições de contorno é equacionado. A solução numérica é obtida através do método de *shooting*, implementado no software Matlab (bvp4c). Uma simplificação do problema, considerando apenas cargas concentradas e seção transversal constante permite chegar a uma solução fechada.

Neste trabalho, as características dinâmicas teóricas da estrutura são obtidas utilizando a descrição do modelo através do MEF. Assumindo pequenas oscilações em torno da configuração de equilíbrio, empregamos elementos lineares de viga-barra. Este método apresenta a vantagem de se obter as características modais (autovetor e autovalor) de forma direta a partir das matrizes de rigidez e massa. Os parâmetros modais obtidos são importantes para a etapa de controle de vibrações, como veremos a seguir.

A revisão da literatura mostra que a metodologia aplicada neste trabalho, considerando grandes deformações estáticas, pequenas oscilações em torno da configuração de equilíbrio e controle modal através da alocação de polos são aplicadas de forma independente. A contribuição está no fato de reunir estas três técnicas para o controle de vibração da estrutura. O atuador empregado para o controle de vibração é um motor elétrico DC, diferentemente dos trabalhos encontrados em literatura onde se utilizam atuadores piezo-elétricos.. Este trabalho de doutorado pretende contribuir no desenvolvimento de estruturas flexíveis reunindo estas três metodologias

em no projeto do suporte de câmeras. O desenvolvimento teórico é apresentado na próxima seção.

### 3. DESENVOLVIMENTO DE MODELOS

O desenvolvimento teórico dos modelos utilizados no problema de descrição do comportamento dinâmico de uma viga longa é apresentado neste capítulo. O modelo de deflexão estática é descrito em termos da equação diferencial e das condições de contorno presentes nas condições de operação de um manipulador composto por uma viga flexível longa. A solução analítica é descrita para o caso simplificado de uma viga com seção constante e submetida a uma força concentrada. Apresenta-se também a solução para o caso geral, de um modelo de viga com seção variável, submetida à tração de um cabo, carregamentos de peso distribuído e forças concentradas.

O método dos elementos finitos (MEF) aplicado ao caso de uma viga com deflexão estática inicial é apresentado. A matriz de rigidez obtida considera a flexão, tração e torção da estrutura. Define-se ainda, a partir do modelo de elementos finitos, o auto problema considerando as matrizes de massa e rigidez. A estratégia do controle modal com alocação de polos é apresentada na sequência.

#### 3.1. Modelo analítico de viga com seção transversal constante

A solução analítica para o problema de uma viga tracionada por um cabo é apresentado. O objetivo é comparar os resultados exatos desta solução com aqueles obtidos através da solução numérica descrita na seção 3.2. Além disso, pretende-se apresentar as dificuldades encontradas para este tipo de solução. O modelo de uma viga tracionada por um cabo é apresentado na Figura 3.1. O comprimento de arco  $s$  é medido a partir da base até o ponto C, a curvatura da viga é representada pelo ângulo  $\alpha$ , a força do cabo  $P$  está inclinada de um ângulo  $\beta$ . O comprimento total da viga é de  $L$  e a coordenada do suporte do cabo é de  $(h_x, h_y)$ . A posição da extremidade da viga é  $(x_B, y_B)$ . O ângulo da força  $P$  é a incógnita a ser determinada.

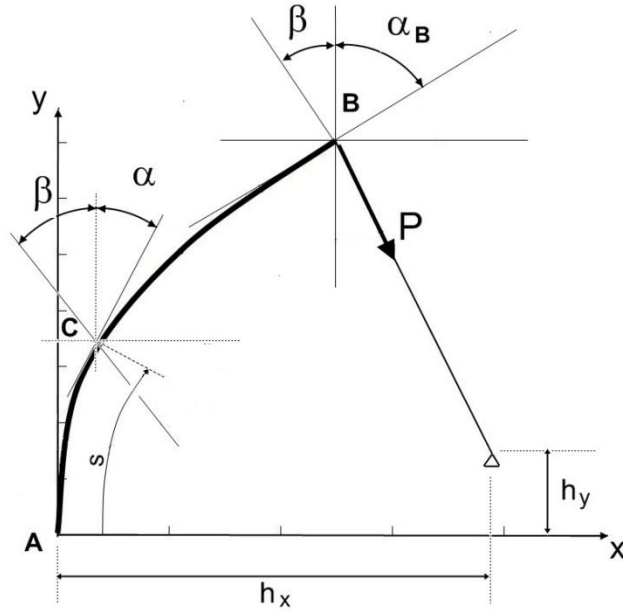


Figura 3.1: Viga tracionada por um cabo inclinado.

A viga é considerada homogênea, com seção transversal constante. O momento de flexão no ponto C da viga é proporcional à mudança da curvatura causada pelo carregamento. O equilíbrio de momento neste ponto é descrito por:

$$M = EI \frac{d\alpha}{ds} = -P \sin \beta (x_B - x) - P \cos \beta (y_B - y). \quad (5)$$

As variáveis  $u$  e  $\gamma$  são definidas como:

$$\left. \begin{aligned} u &= s/L \\ \gamma &= \alpha + \beta \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Diferenciando a Eq. (5) com relação ao comprimento de arco  $s$  e utilizando as variáveis definidas na Eq. (6), define-se a equação que representa este problema:

$$\frac{d^2\gamma}{du^2} + c * \sin(\gamma) = 0 \quad (7)$$

onde

$$c = -\frac{PL^2}{EI}. \quad (8)$$

As condições de contorno para a configuração apresentada na Figura 3.1 são dadas por:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{u=0} &= \frac{\pi}{2} + \beta \\ \left(\frac{d\gamma}{du}\right)_{u=1} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Parâmetros  $p$  e  $\phi$  são introduzidos para a manipulação da equação diferencial. O objetivo é chegar na forma padrão de integrais elípticas.

$$\left. \begin{aligned} p &= \sin\left(\frac{\alpha_B + \beta}{2}\right) \\ p * \sin\phi &= \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Seguindo as manipulações das variáveis, precisamos definir as relações entre  $ds$  e  $\gamma$ , bem como  $d\gamma$  e  $d\phi$  e finalmente, entre  $ds$  e  $d\phi$ . A primeira é determinada multiplicando a Eq. (7) por  $2d\gamma$  e integrando com relação a  $\gamma$ . A relação entre  $du$  e  $d\gamma$  pode ser expressa por:

$$du = \frac{1}{\sqrt{2c[\cos\gamma - \cos(\alpha_B + \beta)]}} d\gamma. \quad (11)$$

A relação entre  $d\gamma$  e  $d\phi$  é obtida derivando a Eq. (10) com relação a  $\phi$ .

$$d\gamma = \frac{2p\cos\phi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}} d\phi. \quad (12)$$

A partir das Eqs. (11) e (12) determinamos  $ds$ :

$$ds = \frac{1}{k\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}} d\phi \quad (13)$$

onde:

$$k = \frac{\sqrt{c}}{L} . \quad (14)$$

Após a manipulação algébrica, chegamos nas expressões das coordenadas  $x$  e  $y$  da viga, em termos das equações elípticas:

$$x = \frac{\cos\beta}{k} [-F(p, \phi_c) + F(p, \phi_A) + 2E(p, \phi_c) - 2E(p, \phi_A)] + \frac{2p\sin\beta}{k} (\cos(\phi_a) - \cos(\phi_c)), \quad (15)$$

e

$$y = \frac{2p\cos\beta}{k} (\cos(\phi_a) - \cos(\phi_c)) - \frac{\sin\beta}{k} [-F(p, \phi_c) + F(p, \phi_A) + 2E(p, \phi_c) - 2E(p, \phi_A)], \quad (16)$$

onde,

$$\left. \begin{aligned} \phi_A &= \arcsin\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi/2+\beta}{2}\right)}{p}\right) \\ \phi_B &= \frac{\pi}{2} \\ \phi_C &= \arcsin\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{p}\right) \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

$$F(p, \phi) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2\phi}} d\phi , \quad (18)$$

$$E(p, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \phi} d\phi, \quad (19)$$

Através das Eqs. (15) e (16) acima aplicada na extremidade (ponto B) , bem como a relação geométrica do ângulo  $\beta$  com a posição  $(h_x, h_y)$  da fixação do cabo, chegamos a expressão analítica que permite determinar o ângulo da força  $\beta$ .

$$\frac{h_x}{L} \sin \beta + \frac{h_y}{L} \cos \beta - \frac{2p \cos(\phi_A)}{F(p, \phi_c) - F(p, \phi_A)} = 0 \quad (20)$$

A solução da Equação (20) é obtida de forma iterativa, o que acarreta uma situação crítica para uma aplicação em tempo real. Este problema pode ser contornado através do uso de uma curva polinomial, que relacione o ângulo de tração  $\beta$  como uma função do comprimento do cabo de tração. Para fins de comparação (seção 5), utilizamos um resultado de literatura (HOLLAND, 2006) para levantar o gráfico que relaciona o ângulo da tração como função do comprimento do cabo (Figura 3.2). A expressão polinomial utilizada para representar esta curva é dada na Equação (21). Testes numéricos mostram que um polinômio de ordem 15 é suficiente para ajustar graficamente os resultados da Figura 3.2.

$$\beta = \sum_{i=0}^N \mu_i * \left(\frac{\ell}{L_c}\right)^i. \quad (21)$$

De forma prática, várias posições da viga são calculadas através da Eq. (20). Estes dados são armazenados na forma discreta de uma tabela. Com isso, para que estes dados tabelados possam ser utilizados para qualquer posição, é necessária uma rotina que faça a interpolação dos pontos para uma dada posição específica. A proposta da Eq. (21) é que esta solução das coordenadas dos pontos seja feita de forma contínua, ao invés de interpolar os resultados tabelados. Comparando os resultados de desempenho da interpolação com os resultados da função contínua descrita pela Eq. (21), verificou-se um ganho de processamento de 40 %

utilizando a função contínua (0,334s para interpolação e 0,231s para a função descrita pela Eq. (21).

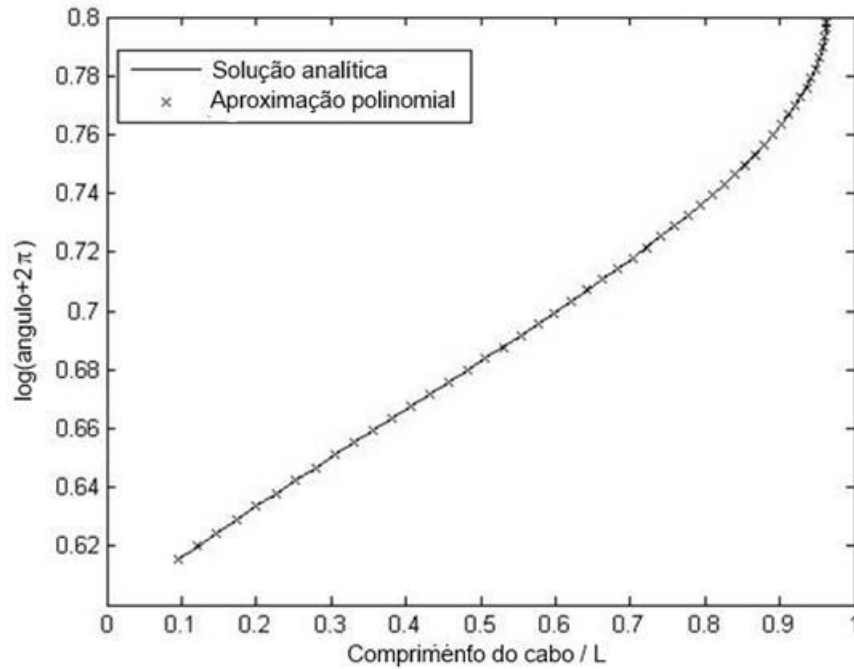


Figura 3.2: Ângulo da força de tração como função do comprimento do cabo.

### 3.2. Modelo de deflexão estática de viga com seção transversal variável

A geometria do modelo de viga utilizado para o equacionamento da equação diferencial não linear de uma viga com seção transversal circular variável sujeita a duas forças inclinadas, dois momentos e considerando o peso próprio é apresentado na Figura 3.3. Num caso prático, uma das forças inclinadas é atribuída a um cabo de tração da viga, e a outra corresponde a uma carga de peso concentrado na extremidade da viga. O método de solução consiste em determinar as equações diferenciais nos trechos  $\overline{12}$  e  $\overline{23}$ , que são os pontos de aplicação das forças. A inclinação da viga no ponto 2 é utilizada como condição de contorno para as duas equações

diferenciais. O ângulo  $\psi_2$  é o ângulo inicial para o trecho  $\overline{23}$ , bem como define o momento que o carregamento BC aplica neste ponto. Este ângulo é determinado iterativamente, a partir da solução numérica das duas equações diferenciais mencionadas.

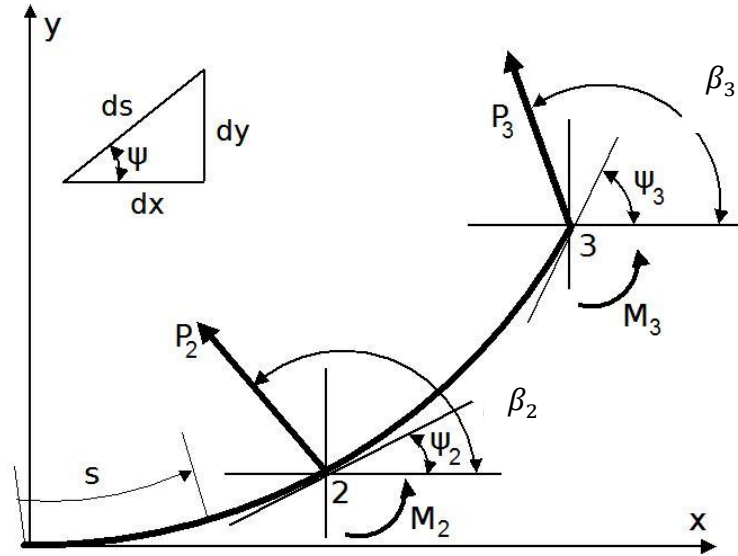


Figura 3.3: Viga sujeita a grandes deformações.

Todo o desenvolvimento desta seção é baseado na teoria de Euler Bernoulli, ou seja, o momento em qualquer ponto na viga é proporcional a mudança de curvatura causada pela ação do carregamento. Assim, temos que:

$$\frac{M}{EI} = \frac{d\psi}{ds} \quad (22)$$

onde:

$$\begin{cases} \sin \psi = \frac{dy}{ds} \\ \cos \psi = \frac{dx}{ds} \end{cases} \quad (23)$$

### 3.2.1. Trecho 23

A equação diferencial referente ao trecho 23 é apresentada nesta seção. O momento de flexão no ponto B, devido a força concentrada  $P_3$ , o peso próprio da viga  $w$  e o momento externo  $M_3$  é calculado por:

$$EI \frac{d\psi}{ds} = M_3 + P_3 \sin \beta_3 (b_x - x) - P_3 \cos \beta_3 (b_y - y) + \int_s^{L_2} w(x(\xi) - x(s)) d\xi. \quad (24)$$

O diâmetro e o momento de inércia neste trecho são calculados por:

$$D = \left(1 - \left(1 - \frac{D_3}{D_2}\right) \frac{s}{L_2}\right) D_2, \quad (25)$$

$$I = \left(1 - \left(1 - \frac{D_3}{D_2}\right) \frac{s}{L_2}\right)^4 I_2, \quad I_2 = \frac{\pi D_2^4}{64} \quad (26)$$

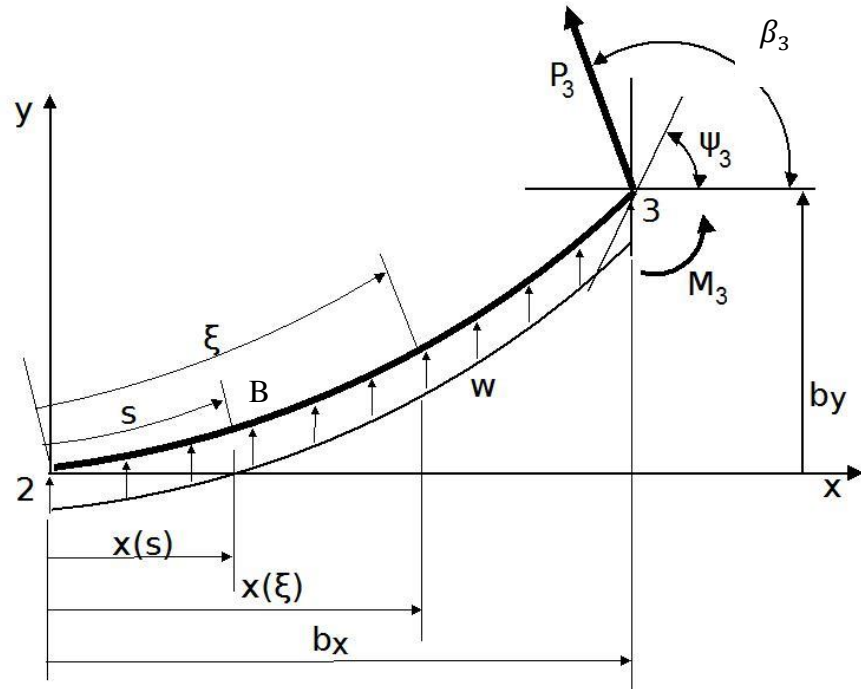


Figura 3.4: Trecho 23 com os carregamentos de força concentrada, peso próprio e momento externo.

Derivando a Eq. (22) com relação a variável  $s$ , tem-se para o lado esquerdo da equação:

$$\frac{d}{ds} \left( EI \frac{d\psi}{ds} \right) = \frac{EI_2}{L_2^2} (1 - \Delta D_2 u)^4 \left( \frac{d^2\psi}{du^2} - \frac{4\Delta D_2}{(1 - \Delta D_2 u)} \frac{D\psi}{du} \right) \quad (27)$$

onde

$$\Delta D_2 = \left( 1 - \frac{D_3}{D_2} \right), \quad (28)$$

a variável  $u$  é definida como:

$$u = \frac{s}{L_2}, \quad (29)$$

e suas derivadas como:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{ds} &= \frac{d\psi}{du} \frac{1}{L_2} \\ \frac{d}{ds} \left( \frac{d\psi}{ds} \right) &= \frac{d^2\psi}{du^2} \frac{1}{L_2^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Tem-se para o lado direito que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( M_3 + P_3 \sin \beta_3 (b_x - x) - P_3 \cos \beta_3 (b_y - y) + \int_s^{L_2} w(x(\xi) - x(s)) d\xi \right) \\ = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 \end{aligned} \quad (31)$$

Onde  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$  são definidos como:

$$\Gamma_1 = \frac{d}{ds} (M_3) = 0 \quad (32)$$

$$\Gamma_2 = \frac{d}{ds} \left( +P_3 \sin \beta_3 (b_x - x) - P_3 \cos \beta_3 (b_y - y) \right) \quad (33)$$

$$\Gamma_3 = \frac{d}{ds} \left( \int_s^{L_2} w(x(\xi) - x(s)) d\xi \right) \quad (34)$$

O peso distribuído  $w$  é função da coordenada  $\xi$  e da densidade  $\rho$ , e é definido por:

$$w = \rho \pi \frac{D^2(\xi)}{4} d(\xi) \quad (35)$$

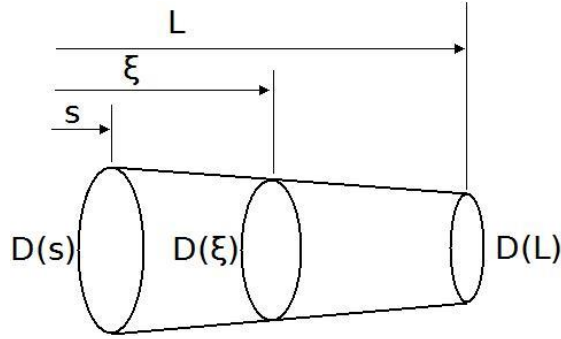


Figura 3.5: Diâmetro entre os trechos  $x(s)$  e  $x(L)$ .

Deriva-se a Eq (33), com relação à variável  $s$ , tendo como consequência que,

$$\Gamma_2 = -P_3 \sin(\beta_3 - \psi) . \quad (36)$$

Substituindo os valores das variáveis descritas pelas Eqs.(25) e (26) e derivando a Eq.(34), tem-se que:

$$\Gamma_3 = -\frac{\rho \pi g L_2}{12} \{D_2^2 + D_2 D_3 + D_3^2 - 3D_2^2 u + 3(D_2^2 - D_2 D_3)u^2 - (D_2^2 - 2D_2 D_3 + D_3^2)u^3\} \quad (37)$$

Assim, a equação diferencial que descreve o comportamento do trecho  $\overline{23}$  é descrito por:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\psi}{du^2} - \frac{4\Delta D_2}{(1 - \Delta D_2 u)} \frac{D\psi}{du} &= \frac{-P_3 L_2^2}{EI_2(1 - \Delta D_2 u)^4} \sin(\beta_3 - \psi) + \\
&\quad - \frac{\rho\pi g L_2^3}{12EI_2(1 - \Delta D_2 u)^4} (D_2^2 + D_2 D_3 + D_3^2) + \\
&\quad - \frac{\rho\pi g L_2^3}{12EI_2(1 - \Delta D_2 u)^4} \{-3D_2^2 u + 3(D_2^2 - D_2 D_3)u^2 - (D_2^2 - 2D_2 D_3 + D_3^2)u^3\}
\end{aligned} \tag{38}$$

Sujeita as seguintes condições de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{u=0} = \psi_2 \\ \left(\frac{d\psi}{ds}\right)_{u=1} = \frac{d\psi_3}{ds} = \frac{L_2}{EI_3} M_3 \end{array} \right. \tag{39}$$

### 3.2.2. Trecho 12

O momento de flexão no ponto A, devido a força concentrada  $P_2$ , o peso próprio da viga  $w$ , e momento externo  $M_3$  e o carregamento no trecho 23 é calculado por:

$$\begin{aligned}
EI \frac{d\psi}{ds} &= M_{bc} + P_3 \sin \beta_3 (a_x - x) - P_3 \cos \beta_3 (a_y - y) + P_2 \sin \beta_2 (a_x - x) + \\
&\quad - P_2 \cos \beta_2 (a_y - y) + \int_s^{L_1} w(x(\xi) - x(s)) d\xi.
\end{aligned} \tag{40}$$

O diâmetro e o momento de inércia neste ponto são calculados por:

$$D = \left(1 - \left(1 - \frac{D_2}{D_1}\right) \frac{s}{L_1}\right) D_1, \tag{41}$$

$$I = \left(1 - \left(1 - \frac{D_2}{D_1}\right) \frac{s}{L_1}\right)^4 I_1 \quad , \quad I_1 = \frac{\pi D_1^2}{64} \quad (42)$$

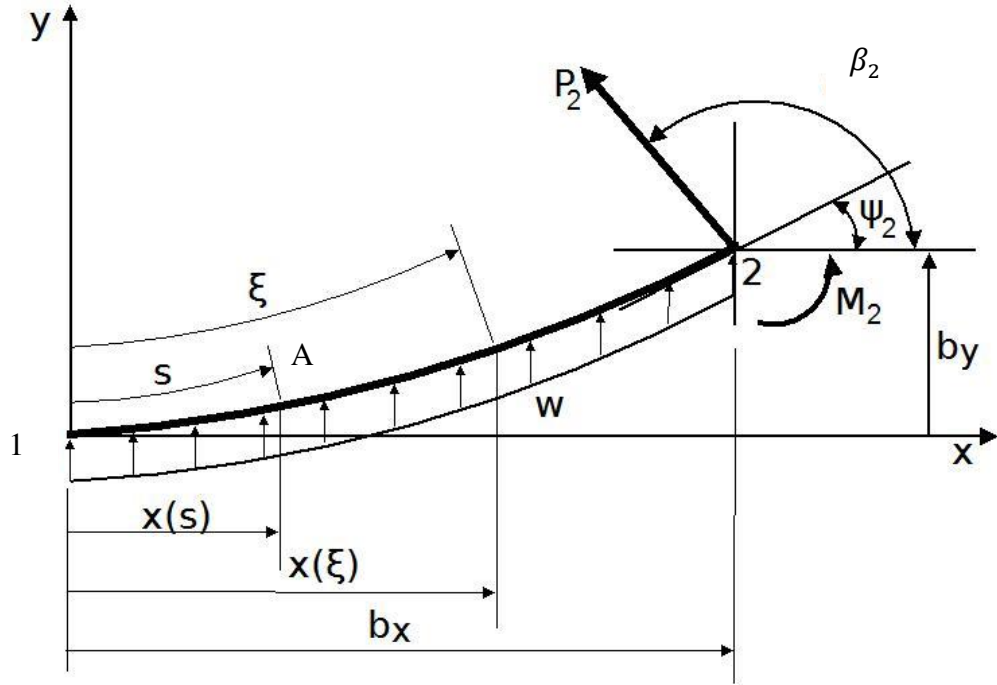


Figura 3.6: Trecho **12** com os carregamentos de força concentrada, peso próprio e momento externo.

Derivando a Eq. (40) com relação a variável  $s$ , temos para o lado esquerdo da equação:

$$\frac{d}{ds} \left( EI \frac{d\psi}{ds} \right) = \frac{EI_1}{L_1^2} (1 - \Delta D_1 u)^4 \left( \frac{d^2\psi}{du^2} - \frac{4\Delta D_1}{(1 - \Delta D_1 u)} \frac{d\psi}{du} \right). \quad (43)$$

onde

$$\Delta D_1 = \left(1 - \frac{D_2}{D_1}\right). \quad (44)$$

A variável  $u$  é definida como:

$$u = \frac{s}{L_1}, \quad (45)$$

e suas derivadas como:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{ds} &= \frac{d\psi}{du} \frac{1}{L_1}, \\ \frac{d}{ds} \left( \frac{d\psi}{ds} \right) &= \frac{d^2\psi}{du^2} \frac{1}{L_1^2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Tem-se para o lado direito:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( M_{bc} + P_3 \sin \beta_3 (a_x - x) - P_3 \cos \beta_3 (a_y - y) + P_2 \sin \beta_2 (a_x - x) \right. \\ \left. - P_2 \cos \beta_2 (a_y - y) + \int_s^{L_1} w(x(\xi) - x(s)) d\xi \right) = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6 \end{aligned} \quad (47)$$

onde  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_4$ ,  $\Gamma_5$  e  $\Gamma_6$  são definidos por:

$$\Gamma_3 = \frac{d}{ds} (M_{bc}) = 0, \quad (48)$$

$$\Gamma_4 = \frac{d}{ds} \left( P_3 \sin \beta_3 (a_x - x) - P_3 \cos \beta_3 (a_y - y) \right), \quad (49)$$

$$\Gamma_5 = \frac{d}{ds} \left( P_2 \sin \beta_2 (a_x - x) - P_2 \cos \beta_2 (a_y - y) \right), \quad (50)$$

$$\Gamma_6 = \frac{d}{ds} \left( \int_s^{L_1} w(x(\xi) - x(s)) d\xi \right). \quad (51)$$

Derivando as Eqs (49).(50) com relação à variável  $s$ , tem-se que:

$$\Gamma_4 = -P_3 \sin(\beta_3 - \psi) , \quad (52)$$

$$\Gamma_5 = -P_2 \sin(\beta_2 - \psi) , \quad (53)$$

Substituindo os valores das variáveis descritas pelas Eqs.(41) e (42) e derivando a Eq. (51), tem-se que:

$$\Gamma_6 = -\frac{\rho\pi g L_1}{12} \{D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2 - 3D_1^2 u + 3(D_1^2 - D_1 D_2)u^2 - (D_1^2 - 2D_1 D_2 + D_2^2)u^3\} \quad (54)$$

Assim, a equação diferencial que descreve o comportamento do trecho **12** é descrito por:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\psi}{du^2} - \frac{4\Delta D_1}{(1 - \Delta D_1 u)} \frac{d\psi}{du} = \\ & = \frac{-P_3 L_1^2}{EI_1 (1 - \Delta D_1 u)^4} \sin(\beta_3 - \psi) + \frac{-P_2 L_1^2}{EI_1 (1 - \Delta D_1 u)^4} \sin(\beta_2 - \psi) + \\ & \quad - \frac{\rho\pi g L_1^3}{12EI_1 (1 - \Delta D_1 u)^4} (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2) + \\ & \quad - \frac{\rho\pi g L_1^3}{12EI_1 (1 - \Delta D_1 u)^4} \{-3D_1^2 u + 3(D_1^2 - D_1 D_2)u^2 - (D_1^2 - 2D_1 D_2 + D_2^2)u^3\}, \end{aligned} \quad (55)$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{u=0} = \psi_0 \\ \left(\frac{d\psi}{ds}\right)_{u=1} = \frac{L_1}{EI_2} M_{23} \end{array} \right. \quad (56)$$

O ângulo  $\psi_0$  é o ângulo de inclinação na base da viga e o momento  $M_{23}$  é determinado por:

$$M_{23} = M_2 + M_3 + P_3 (\sin \beta_3 b_x + \cos \beta_3 b_y) + \int_0^{L_2} \rho g \frac{\pi D^2(\xi)}{4} x(\xi) d\xi \quad (57)$$

A solução das Eq. (38) e (55) são obtidas numericamente através do método de *shooting*. Quando assumimos uma viga de seção constante e carregamentos concentrados, a solução analítica pode ser obtida através das integrais elípticas.

Diagrama de blocos da solução do método de *shooting*.

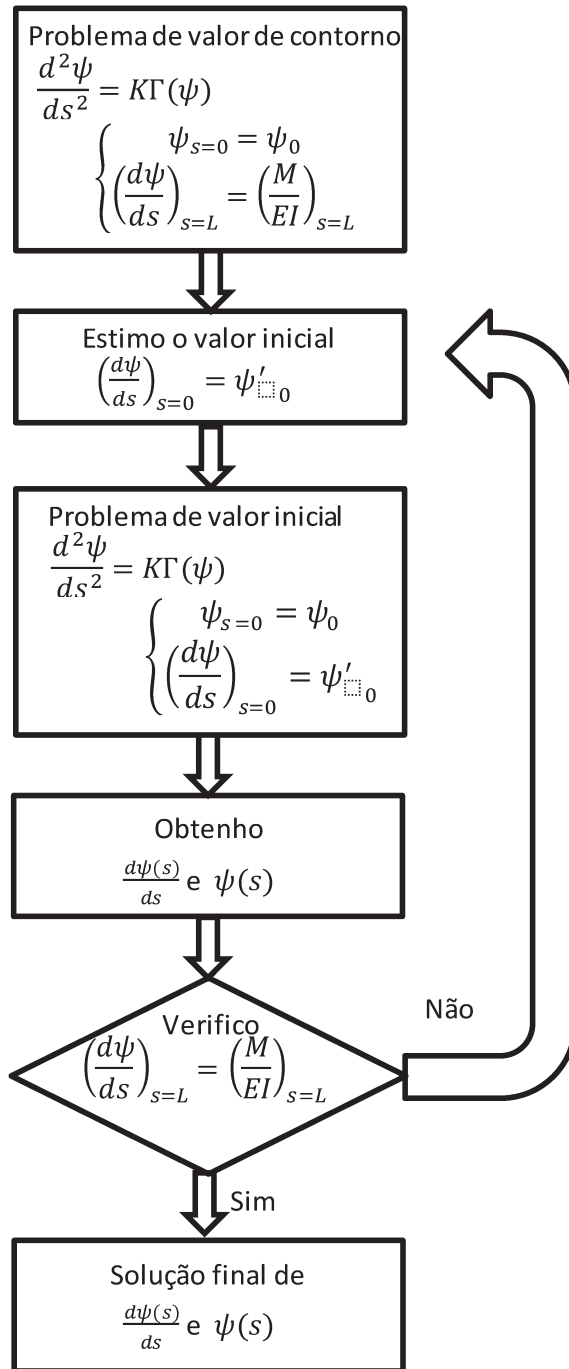


Figura 3.7: Diagrama de blocos da solução pelo método de *shooting*..

Diagrama de blocos da solução da viga..

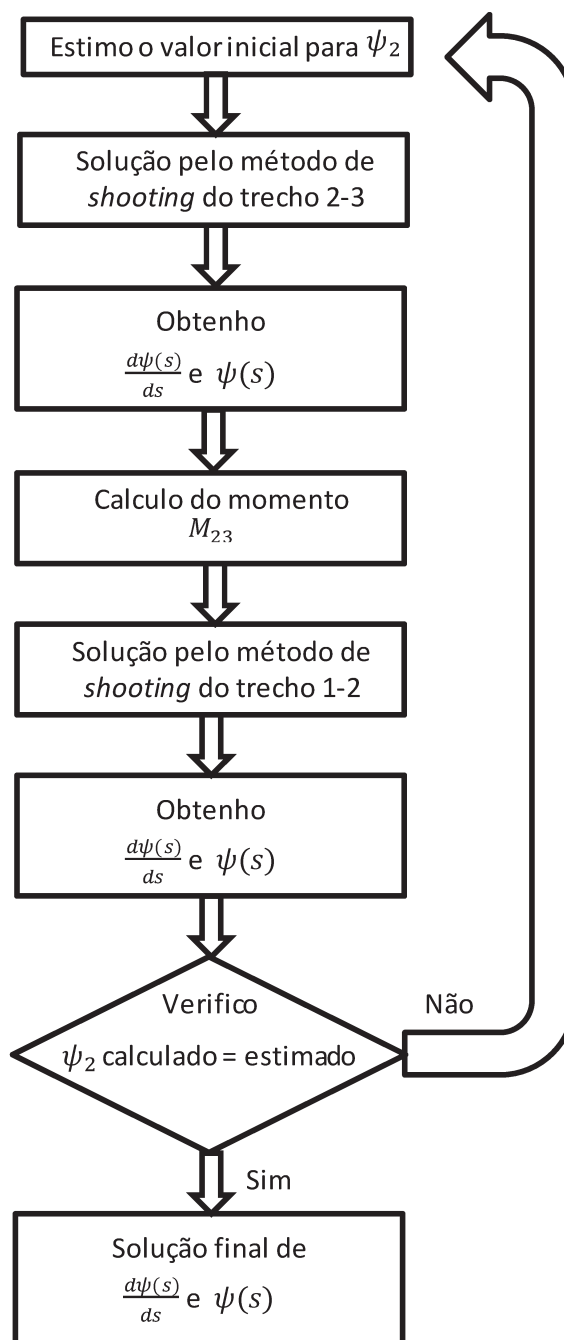


Figura 3.8: Diagrama de blocos da solução pelo método de *shooting*..

### 3.3. Modelo de elemento finito da viga e cabo

O modelo numérico utilizado para obter as características dinâmicas de vibração da estrutura é baseado nas matrizes de massa e rigidez obtidas através do MEF (PETYT, 2010). O elemento de viga 3D e os sistemas de coordenadas local e global são apresentados na Figura 3.9. O processo de obtenção do elemento de viga tridimensional assume que o centro de cisalhamento coincide com o centróide. Este elemento de viga é descrito através da combinação de elementos sujeitos a deformação axial, flexão e torção (PETYT, 2010, CRAIG e KURDILA, 2006, KWON e BANG, 1997, COOK et al, 1989). Podemos obter as matrizes elementares a partir das funções de energia cinética e de deformação. Em termos das coordenadas locais, as funções de energia são dadas por :

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A (\dot{r}^2 + \dot{q}^2 + \dot{o}^2) dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho I_x \dot{\theta}_x^2 dx \quad (58)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EA \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \left\{ EI_z \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right)^2 dx + EI_y \left( \frac{\partial^2 o}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx \\ + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} GJ \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx \quad (59)$$

As deformações nas direções axial, flexional e de torção são consideradas como desacopladas. Assim, elas podem ser tratadas separadamente (PETYT, 2010). As funções de deslocamento  $r$ ,  $q$ ,  $o$  e  $\theta_x$  são expressas, em termos da coordenada adimensional  $\xi = x/l$ , como:

$$\left. \begin{aligned} r &= \left[ \frac{1}{2}(1 + \xi_1 \xi) \quad \frac{1}{2}(1 + \xi_2 \xi) \right] \{r\}_e \\ q &= [N_1(\xi) \quad lN_2(\xi) \quad N_3(\xi) \quad lN_4(\xi)] \{q\}_e \\ o &= [N_1(\xi) \quad -lN_2(\xi) \quad N_3(\xi) \quad -lN_4(\xi)] \{o\}_e \\ \theta_x &= \left[ \frac{1}{2}(1 + \xi_1 \xi) \quad \frac{1}{2}(1 + \xi_2 \xi) \right] \{\theta_x\}_e \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

onde,

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \\ N_4(\xi) &= \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

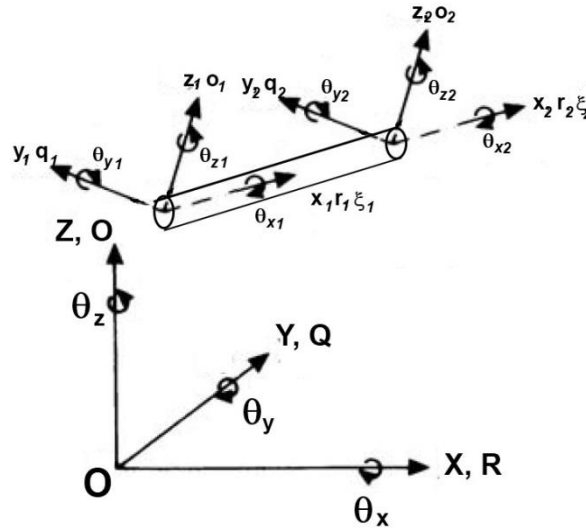


Figura 3.9: Sistema de Coordenadas Global e Sistema de Coordenadas Local do Elemento.

As matrizes de massa e rigidez são determinadas através da substituição das funções de forma Eq. (60) nas expressões da energia cinética e de deformação Eq. (58) e (59), respectivamente. A energia cinética é expressa, após a integração como :

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{r}\}_e^T [\bar{m}]_e \{\dot{r}\}_e \quad (62)$$

E a energia de deformação, após integrar:

$$U_e = \frac{1}{2} \{\dot{r}\}_e^T [\bar{k}]_e \{\dot{r}\}_e \quad (63)$$

onde,

$$\{r\}_e^T = [r_1 \quad q_1 \quad o_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad r_2 \quad q_2 \quad o_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2}] \quad (64)$$

As variáveis  $\bar{k}$  e  $\bar{m}$  são as matrizes de rigidez e massa do elemento no sistema de coordenadas locais. O vetor de coordenadas local  $\{r\}$  pode ser transformado no sistema de coordenadas global  $\{R\}$  através da relação:

$$\{r\} = [T]\{R\} \quad (65)$$

Onde a matriz de transformação de coordenadas T é definida como :

$$T = \begin{bmatrix} [L] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [L] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [L] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [L] \end{bmatrix} \quad (66)$$

E a matriz L é definida como :

$$L = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix} \quad (67)$$

As matrizes de rigidez e massa descritas no sistema de coordenadas global são :

$$\{K_e\} = [T]^T \{k_e\} [T] \quad (68)$$

$$\{M_e\} = [T]^T \{m_e\} [T] \quad (69)$$

O cabo é modelado como um elemento de barra e o mesmo procedimento é executado para calcular as matrizes de rigidez e massa. Modela-se o elemento de viga considerando apenas os deslocamentos axiais. As energias cinética e de deformação são definidas em função dos deslocamentos  $r$ . Definindo a coordenada  $u$  como função de  $\xi$ , e integrando a função de energia, podemos encontrar a rigidez e massa do elemento de barra no sistema de coordenadas local.

### 3.4. Auto problema e coordenada modal

O modelo de MEF definido no sistema de coordenada global é descrito através das matrizes de massa global  $M$  e matriz de rigidez global  $K$ . A representação deste modelo no espaço modal é necessária para a estratégia de controle modal adotada neste trabalho. A transformação de coordenadas do espaço nodal para o espaço modal é feita através dos autovetores obtidos através da solução do autoproblema ou problema do autovalor. Para o modelo descrito através das matrizes de massa  $M$  e rigidez  $K$ , o auto problema pode ser expresso por (CLOGH e PENZIEN, 2003).

$$[K - \omega^2 M]\phi = 0 \quad (70)$$

Uma outra forma de representar este problema é obtido pré-multiplicando a equação (70) pela inversa da matriz de massa  $M^{-1}$ , obtendo a forma

$$[M^{-1}K - \omega^2 I]\phi = 0 \quad (71)$$

A solução não trivial é obtida somente se a matriz  $[M^{-1}K - \omega^2 I]$  é singular ou :

$$\det[M^{-1}K - \omega^2 I] = 0 \quad (72)$$

A solução do auto problema é o conjunto dos N autovalores  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$ , onde N é o número de graus de liberdade. Estes autovalores têm um significado físico bem definido, eles contêm o (quadrado) da frequência angular associado com as massas individuais. Substituindo os autovalores na Eq. (71), obtemos o conjunto de amplitudes  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$  denominados autovetores. Cada autovalor tem um autovetor associado. Os autovetores expressam as formas de cada modo, ou em outras palavras, a forma geométrica de vibração para uma dada frequência de ressonância. As amplitudes dos autovetores não são expressas em coordenadas físicas e seus valores são normalizados, por exemplo, com relação ao grau de liberdade de maior amplitude.

A notação matricial é uma forma conveniente para prosseguirmos com o texto. Assim, a matriz dos autovalores (frequências naturais) é definida como:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{bmatrix} \quad (73)$$

e a matriz dos autovetores, ou matriz modal  $\Phi$  que contem os N autovetores da estrutura é definida como

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \dots & \phi_{n1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \dots & \phi_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{1n_d} & \phi_{2n_d} & \dots & \phi_{nn_d} \end{bmatrix} \quad (74)$$

onde  $\phi_{ij}$  é o j-ésimo deslocamento do i-ésimo modo.

Os autovetores são ortogonais entre si e diagonalizam as matrizes de massa  $M$  e rigidez  $K$ , obtendo as matrizes de massa modal  $M_m$  e rigidez modal  $K_m$ .

$$M_m = \Phi^T M \Phi \quad (75)$$

$$K_m = \Phi^T K \Phi \quad (76)$$

A mesma transformação pode ser aplicada a matriz de amortecimento  $D$ , obtendo assim a matriz de amortecimento modal  $D_m$ . Essa matriz de amortecimento modal nem sempre é diagonal. Para os casos onde a matriz de amortecimento pode ser transformada para a forma diagonal, dizemos que ela é proporcional. Matrizes de amortecimento modal proporcional são desejáveis de se obter e podem ser estimadas a partir de uma combinação linear entre as matrizes de massa e rigidez. Esta aproximação é justificada pelo fato da natureza do amortecimento ainda não ser exatamente conhecido. Uma matriz de amortecimento proporcional bastante utilizada é do tipo:

$$D = \alpha_1 K + \alpha_2 M \quad (77)$$

Onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são escalares positivos.

Modelos modais da estrutura são expressos em coordenadas modais. Utilizando a matriz modal, podemos definir uma nova variável  $q_m$ , denominada deslocamento modal. Esta nova variável satisfaz a seguinte relação:

$$q = \Phi q_m \quad (78)$$

O modelo da estrutura descrito nesta seção é utilizado na estratégia de controle descrito na seção 3.5.

### 3.5. Controle de vibrações

A descrição do controle de vibrações é baseado no trabalho de Paola Gonzales (2013). Um resumo da estratégia de controle modal é apresentado. Este controle é aplicado ao modelo teórico

proposto neste trabalho com o objetivo de atenuar as vibrações na extremidade de uma estrutura longa e flexível, deformada estaticamente e tensionada por um cabo. A estratégia de controle é baseada nas características modais da viga. O processo consiste em projetar as matrizes de massa e rigidez no sistema de coordenadas modais, e selecionar poucos modos para definir os parâmetros do ganho do controlador. O método possibilita também a alocação dos polos do sistema controlado para satisfazer os requisitos desejáveis da resposta dinâmica.

O diagrama de blocos do controle em realimentação de estados é apresentado na Figura 3.10. Um observador é implementado para estimar os estados do sistema para um dado instante. Neste trabalho, o observador são os deslocamentos vertical e horizontal da extremidade da estrutura, medidos indiretamente através da oscilação da força de tração do cabo que traciona a estrutura. Estas oscilações podem ser medidas através de extensômetros. A força de controle é aplicada à extremidade da estrutura por meio deste cabo, que por sua vez, faz parte de um mecanismo de carretel acoplado a um motor elétrico DC. Além do controle de vibrações, este mecanismo também fornece a tração estática necessária ao cabo para manter a estrutura deformada.

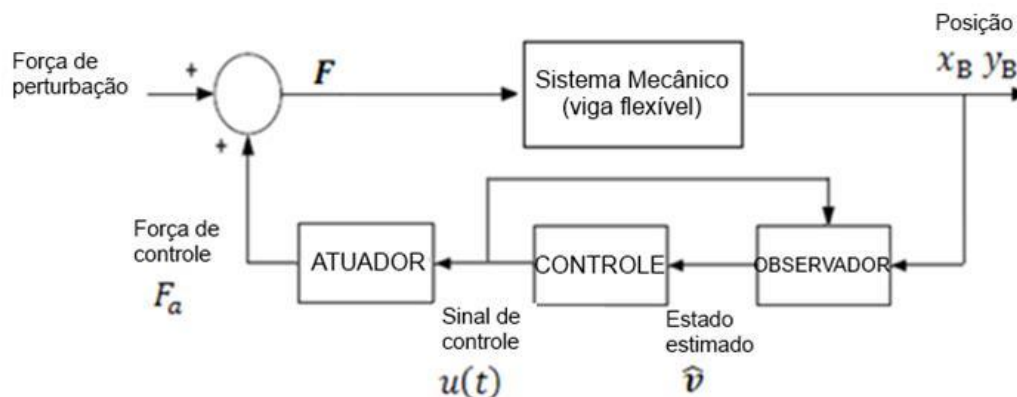


Figura 3.10: Diagrama de blocos do controle em realimentação de estados

O modelo dinâmico do mecanismo é dado pela seguinte equação constitutiva:

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-b_n}{J} & \frac{k_t}{J} \\ 0 & \frac{-k_b}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{bmatrix} \mathbf{r} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} V_o. \quad (79)$$

onde  $b_n$  é o amortecimento de torção do motor,  $k_t$  é a constante da armadura,  $k_b$  é a constante do motor,  $J$  é o momento de inércia rotacional,  $L_a$ ,  $R_a$  são a indutância e a resistência elétrica e  $V_o$  é a tensão de entrada do controle. A variável de estado do motor  $\mathbf{r}$  é definida como:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} \quad (80)$$

onde a posição angular é definida como  $\theta$ , a velocidade angular  $\dot{\theta}$  e a corrente de armadura  $i$ .

A força de controle do atuador, proporcional a posição angular do rotor é dado por:

$$F_a = \theta * r_p * k_c. \quad (81)$$

onde  $r_p$  é o raio do carretel que enrola e traciona o cabo,  $k_c$  é a rigidez do cabo.

A dinâmica do modelo de EF é expressa por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F} + \mathbf{w} \quad (82)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{b}_a \mathbf{A}_\beta F_a \quad (83)$$

onde  $\mathbf{q}(t)$  é o vetor de deslocamentos  $n \times 1$  no sistema global de coordenadas. O vetor  $\mathbf{F}$  contém a força de controle ( $F_a$ ) aplicado pelo cabo de tração, nas direções vertical e horizontal do GDL da extremidade da estrutura, projetada através do vetor  $\mathbf{A}_\beta^T = [\cos \beta \quad \sin \beta]$ .  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  são as matrizes de massa e rigidez, respectivamente. O vetor das forças de perturbação externa é representado por  $\mathbf{w}(t)$ . O modelo poderia também apresentar a matriz de amortecimento  $\mathbf{D}$ . A

simulação apresentada neste trabalho não leva em conta a ação de forças de amortecimento. A matriz  $\mathbf{b}_{a_{2 \times n}}^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  define os GDLs onde a força de controle é aplicada.

A robustez da estratégia de controle depende da controlabilidade dos modos escolhidos para o controle modal, assim como da resposta dinâmica da força de controle. A escolha dos modos a serem controlados podem ser baseados no fator de participação modal, definido como:

$$\text{MPF}_i = \frac{\psi_j^T \mathbf{M} \mathbf{e}_f}{\psi_j^T \mathbf{M} \psi_j} \quad (84)$$

onde  $\psi_j$  é o autovetor do sistema representado pela equação (82) e  $\mathbf{e}_f$  é um vetor coluna com zeros a menos das posições correspondentes aos GDL da força de controle. Nestas posições, os valores dos elementos  $\mathbf{e}_f$  são 1. Os modos selecionados para o controle modal são aqueles com o maior MPF. A resposta dinâmica das forças de controle, por outro lado, é uma limitação no uso dos modos com maior MPF. Caso a resposta dinâmica da força de controle não seja capaz de controlar o sistema com frequências altas, escolhidas pelo maior MPF, então apenas os modos com frequências compatíveis com as forças de controle serão utilizadas na estratégia de controle.

O projeto de controle que emprega a descrição modal da estrutura é chamado de controle modal. O controle modal apresenta bons resultados em sistemas onde apenas poucos modos da estrutura dominam a resposta (INMAN, 2006).

O modelo de espaço de estados da estrutura, cabo e motor é dado por:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{E}w(t) \quad (85)$$

E a equação de saída:

$$\begin{bmatrix} q_{Bx} \\ q_{By} \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{v} \quad (86)$$

onde :

$$\mathbf{A}_{2n+3 \times 2n+3} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}_a A_\beta k_c r_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-b_n}{J} & \frac{k_t}{J} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-k_b}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{2n+3 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{2n+3 \times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (87)$$

$$\mathbf{C}_{2 \times 2n+3} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{v}_{1 \times 2n+3}^T = [\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T \quad \mathbf{r}^T]. \quad (88)$$

O vetor de estados é definido por  $\mathbf{v}$ . As matrizes de definição do sistema, de entrada, de distúrbios e de saída são definidas por  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{C}$ . Os elementos não nulos de  $\mathbf{C}$  correspondem aos GDL horizontal e vertical da extremidade da estrutura,  $q_{Bx}$  e  $q_{By}$  respectivamente, e que são as variáveis de observação do controle. O sinal de entrada do controle, que é a força exercida pelo cabo ligado ao motor elétrico, é representado por  $u(t)$ .

O auto problema associado ao modelo de espaço de estado da planta é definido como:

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \boldsymbol{\lambda}, \quad (89)$$

onde  $\lambda$  (diagonal) e  $V$  são as matrizes contendo, respectivamente os autovalores e autovetores da matriz do sistema  $A$ . O vetor de coordenadas modais  $\eta$  está relacionado com o vetor de estados  $v$  da seguinte forma :  $v = V\eta$  . Substituindo esta expressão de  $v$  na equação (85), e pré-multiplicando pela inversa da matriz de autovetores, chega-se a representação modal do sistema dado por:

$$\dot{\eta} = \lambda\eta(t) + V^{-1}Bu(t) + V^{-1}Ew(t), \quad (90)$$

A saída em coordenadas modais é expressa por:

$$\begin{bmatrix} q_{Bx} \\ q_{By} \end{bmatrix} = CV\eta(t). \quad (91)$$

Modos com os maiores fatores de participação modal, e que também satisfazem os requisitos de controlabilidade, são escolhidos para representar a dinâmica da viga, cabo e motor. Ao levar em conta a dinâmica relativa ao modelo do motor na matriz da planta do sistema  $A$  causa a introdução de um autovalor nulo e um autovetor associado. O modelo reduzido no espaço modal contém os modos selecionados com os maiores fatores de participação modal e o modo associado com o autovalor nulo.

O método de alocação de polos é utilizado para calcular o ganho modal do controle. Este método garante a estabilidade do sistema através da alocação dos polos de malha fechada, associada com os modos escolhidos, no lado esquerdo do plano complexo de autovalores. As localizações dos polos do sistema controlado são definidos, neste trabalho, através do critério de tempo de estabilização da resposta. O vetor de ganhos do controlador  $g$  e a matriz de ganho do observador ,  $I$  , são calculados através da formulação de Akerman.

A projeção do vetor de ganho nas coordenadas do espaço de estado é calculada por:

$$\mathbf{G} = \mathbf{V}\mathbf{g}, \quad (92)$$

onde  $\mathbf{V}$  a matriz dos autovetores reduzida.

A matriz de ganho do observado, expressa em coordenadas do espaço de estado é:

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{l} \quad (93)$$

A entrada  $u(t)$  para o controle de realimentação de estado é calculado por:

$$u(t) = -\mathbf{G}\hat{\mathbf{v}}, \quad (94)$$

onde  $\hat{\mathbf{v}}$  é a variável de estado estimada.

O sistema de controle por realimentação é encontrado através da substituição da equação(94) na equação (85) e introduzindo o ganho do observador (93), assim como as variáveis de estado. A equação dinâmica do sistema controlado é dado por:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\hat{\mathbf{v}}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{G} \\ \mathbf{z}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G} - \mathbf{z}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{w}. \quad (95)$$

O sistema de controle descreve a situação onde a estrutura está inicialmente em repouso, em uma forma deformada particular. Então, devido a um distúrbio externo do estado inicial, as forças de controle agem no cabo de tração da estrutura para atenuar as vibrações da sua extremidade. Na próxima seção, os procedimentos experimentais são explicados.

## 4. ANÁLISE EXPERIMENTAL

Os testes desenvolvidos no laboratório de Processamento de Sinais e Análise de Sistemas Dinâmicos da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP são descritos neste capítulo. Os procedimentos são divididos em teste estático e teste dinâmico de vibração.

### 4.1. Teste estático

Uma viga longa com seção transversal variável, sujeita a carregamento de peso constante na extremidade, é fixada a uma base. As deflexões verticais são medidas a partir de uma referência no piso do laboratório, enquanto as medições horizontais utilizam a base da peça como referência. A montagem da peça, com suporte e estrutura de alumínio é mostrada na figura 4.1 abaixo.

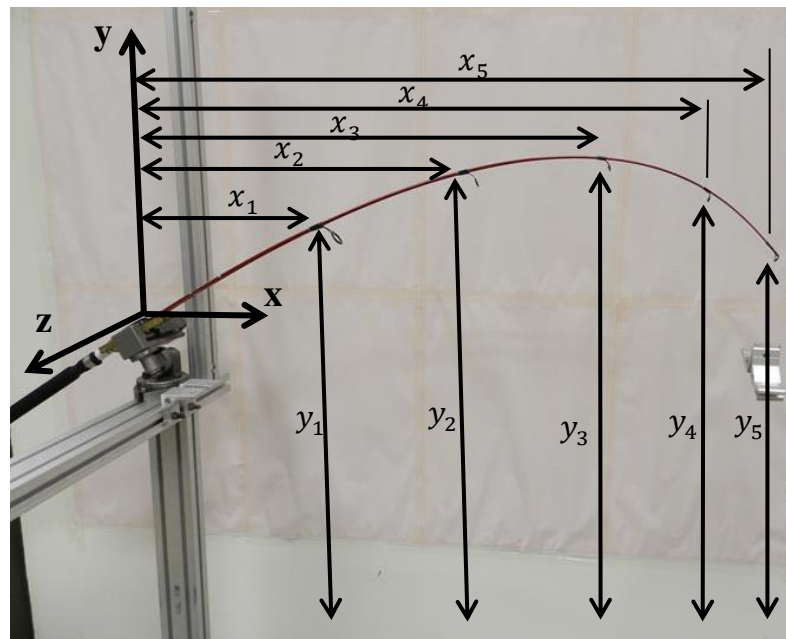


Figura 4.1 Configuração do teste estático.

As medições foram feitas através de uma fita métrica, ou seja, utilizando a técnica de medição por contato (BALLANTINE, 1999). Com relação às técnicas de medição sem contato, por exemplo por meio de câmeras, esta escolha se justifica pelo intervalo de medição, restrito a poucos metros, e a peça se encontra em uma situação estática, não necessitando de múltiplas medições distribuídas no tempo. O erro envolvido na medição foi de 5 mm, que é a metade da menor medida.



Figura 4.2 : Detalhe da fixação.

O teste estático tem como objetivo validar o modelo matemático representado pela solução numérica da equação diferencial, descrito na seção 3.2. O teste consiste em carregar a extremidade da viga com uma força peso conhecida e medir a deformação resultante. São testados 5 pesos cujos valores são: 0N, 0,99N, 1,98N, 2,93N, 4,02N e 5,18N . A viga é testada para três inclinações : 0°, 30° e 60° graus. A verificação dos ângulos é feita através das posições medidas na peça sem nenhum carregamento. A estrutura é carregada em seguida com diferentes pesos. Os resultados de comparação das medidas de deflexão estática com os valores preditos numericamente são apresentados na seção 5.2.

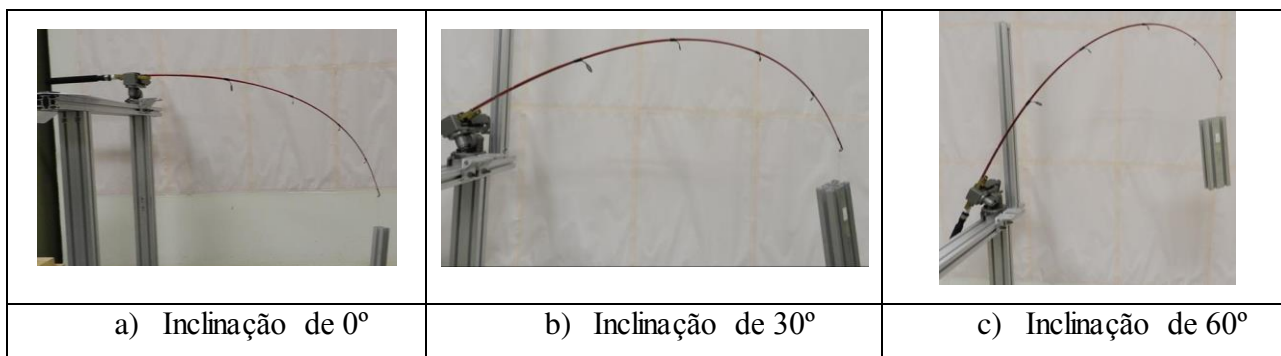


Figura 4.3 : Três inclinações utilizadas para o teste estático.

## 4.2. Teste dinâmico

O desenvolvimento teórico apresentado na seção 3.3 define o modelo dinâmico capaz de calcular e caracterizar a resposta do sistema a uma entrada conhecida. A validação deste modelo teórico é feito através da verificação prática de sua característica fundamental, descrita pelas frequências naturais. Métodos baseados na ressonância de uma estrutura são chamados de técnicas de análise modal ou teste de ressonância (INNMAN, 2006).

A resposta livre de uma estrutura é descrita através da combinação de seus diversos modos naturais de vibrar. Os modos de vibrar com as correspondentes frequências naturais representam uma propriedade de um sistema, e eles são únicos para um dado sistema (MEIROVITCH, 1986). Assim como a estrutura física, o auto problema definido pelas matrizes de massa e rigidez do modelo teórico determinam os autovetores e autovalores que correspondem aos modos e frequências naturais do sistema físico.

### 4.3. Configuração do teste dinâmico

Diferentes configurações da viga podem ser obtidas, tracionando a extremidade livre através de um cabo. Os valores da força de tração são os mesmos utilizados no primeiro teste estático. O ângulo da força de tração é definido através da posição da extremidade da peça e a fixação do cabo. Estas configurações deformadas são posteriormente utilizadas para a medição das frequências naturais no teste de vibração. O acelerômetro foi incluído na medição estática, uma vez que este sensor contribui com uma massa de 50 gramas na ponta da peça. O teste de vibração impõe a necessidade de incluir o sensor de aceleração. A configuração do experimento é apresentada na Figura 4.4.

Os primeiros modos são os mais evidentes, de maneira que, na prática, estes “dominam” a forma de vibrar da estrutura. Uma forma de se excitar os modos com maior frequência consiste em calculá-los teoricamente através do MEF e escolher a coordenada para aplicar uma excitação (impulso) baseando-se na respectiva forma de vibrar. Estes pontos são indicados na Figura 4.4 e correspondem às coordenadas com maior amplitude de vibração.

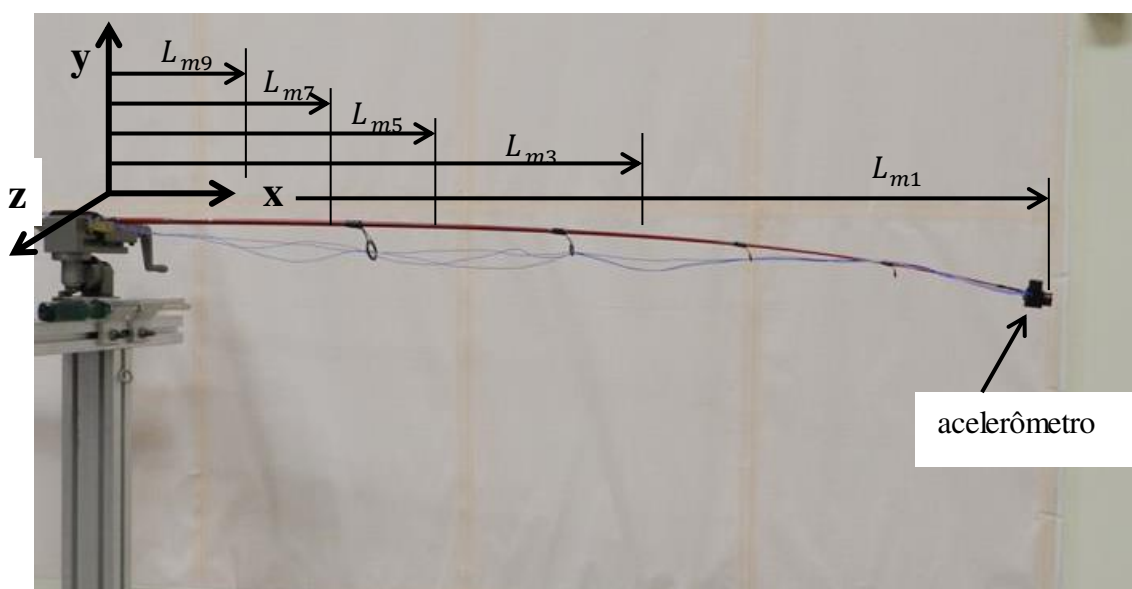
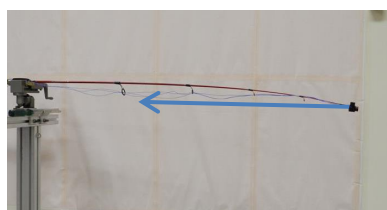
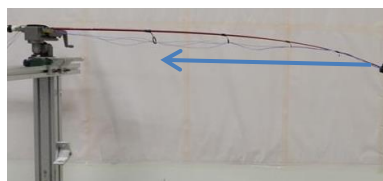


Figura 4.4: Configuração para o teste modal e posições usadas para excitar a peça.

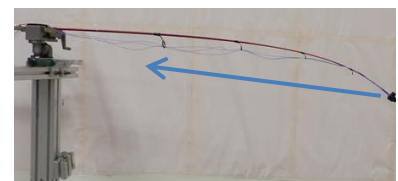
O teste de vibração é feito utilizando um acelerômetro triaxial. Os dados são amostrados através de uma placa da National Instruments e processados inicialmente no software Labview. Os dados de aceleração armazenados são finalmente processados e apresentados utilizando a biblioteca de processamento de sinais do programa Matlab.. Seis configurações são testadas e correspondem às deformações causadas por forças de tração de 0N, 0,99N, 1,98N, 2,93N, 4,02N e 5,18N e correspondem às configurações 1 a 6 indicadas na Figura 4.5, respectivamente.



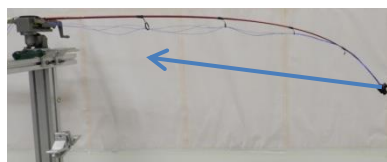
(a) Configuração 1 (0,0N)



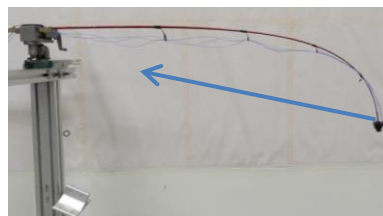
(b) Configuração 2  
(0,99N)



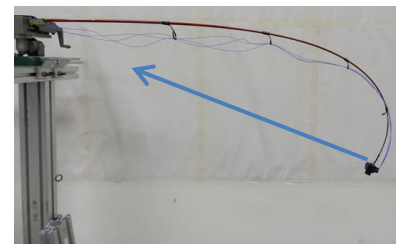
(c) Configuração 3  
(1,98N )



(d) Configuração 4  
(2,93N)



(e) Configuração 5  
(4,02N)



(f) Configuração 6  
(5,18N)

Figura 4.5: Configurações utilizadas no teste dinâmico.

Os resultados obtidos nesta etapa são utilizados como parâmetro de comparação e análise dos resultados numéricos calculados com base nos modelos teóricos. No próximo capítulo, estes resultados são apresentados e analisados.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, os resultados numéricos são comparados com resultados encontrados em literatura (HOLLAND, 2006), bem como os resultados experimentais obtidos através dos procedimentos descritos na seção 4. Ao final do capítulo, é apresentada a simulação numérica do controle modal aplicado ao modelo de viga tracionado por um cabo.

### 5.1. Comparação com a literatura

A metodologia para determinar as deformações estáticas de uma viga longa de seção transversal constante, tracionada por um cabo, utilizando as expressões polinomiais Eq. (21), é verificada nesta seção. Os resultados desta proposta de modelagem são comparados com as expressões analíticas descritas pelas Eq (15) e (16) e resultados experimentais obtidos por Holland (2006). O modelo da viga descrita no trabalho de Holland (2006) possui dimensões 762mm x 25,4mm x 4,8 mm. O material é o policarbonato, que apresenta um módulo de elasticidade de 1,656 *GPa* e uma densidade de 1120 *kg/m<sup>3</sup>*. A viga é presa em uma extremidade e tracionada por um cabo em outra. O cabo é modelado como um elemento de mola, de massa desprezível e rigidez de 11,67 *kN/m*. A coordenada de origem do cabo é dada por  $h_x = 12,7$  mm e  $h_y = 28,6$  mm. As cargas de tração e a deflexão na direção vertical Y são normalizadas pela carga crítica de flambagem e o comprimento total da viga, respectivamente. Através da variação da força de tração no cabo, a viga responde com uma configuração deformada. Os resultados para a deflexão da extremidade da estrutura são apresentados na Figura 5.2. As configurações da viga deformada estaticamente devido a variação da força de tração no cabo são apresentadas na Figura 5.1. A carga crítica de flambagem para uma viga em balanço é dada por (TIMOSHENKO e GERE, 1961):

$$P_{cr} = \pi^2 EI / L^2 \quad (96)$$

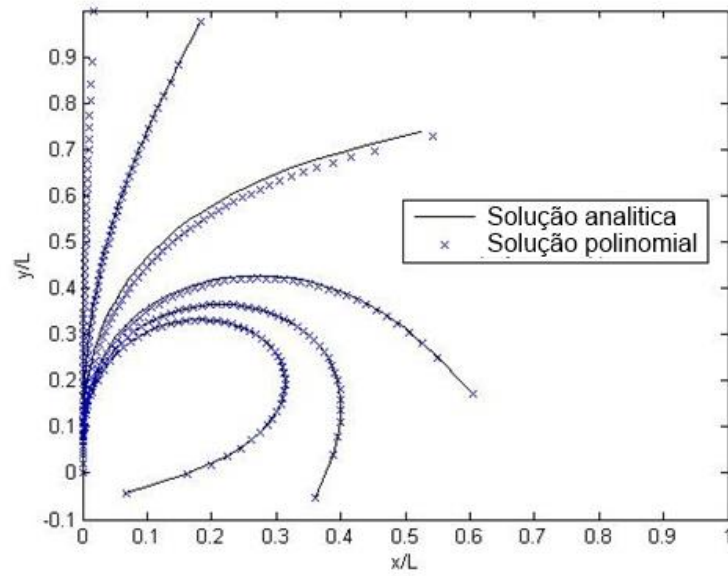


Figura 5.1: Viga Defletida.

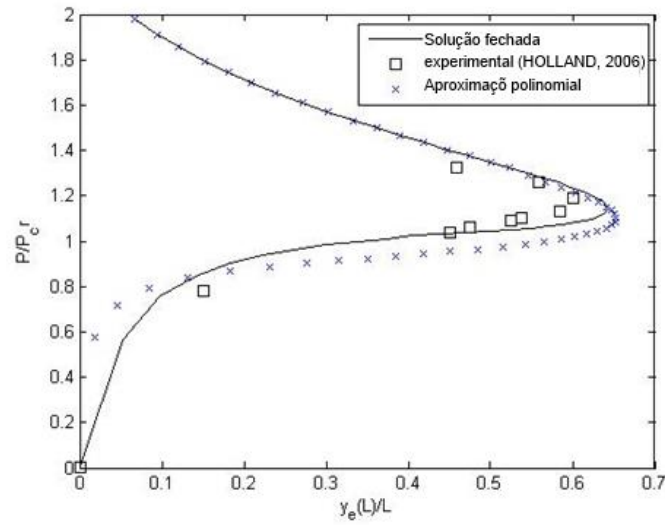


Figura 5.2: Comparação dos resultados estáticos para diferentes configurações da viga deformada.

As características dinâmicas da estrutura descrita através da modelagem pelo MEF é comparada com os resultados disponíveis em Holland (2006). A configuração geométrica obtida através da análise estática é utilizada como geometria base para os nós do modelo de MEF. Dois modelos geométricos são testados. O primeiro, obtido através da aproximação polinomial e o segundo, através do resultado analítico. Inicialmente utiliza-se um modelo plano, com 50 elementos de viga com 6 GDL. Os resultados das frequências obtidos através da solução do auto-problema da estrutura é apresentado na Figura 5.3. A frequência é normalizada com relação a primeira frequência natural da viga em balanço. As cargas são normalizadas com relação a carga de flambagem.

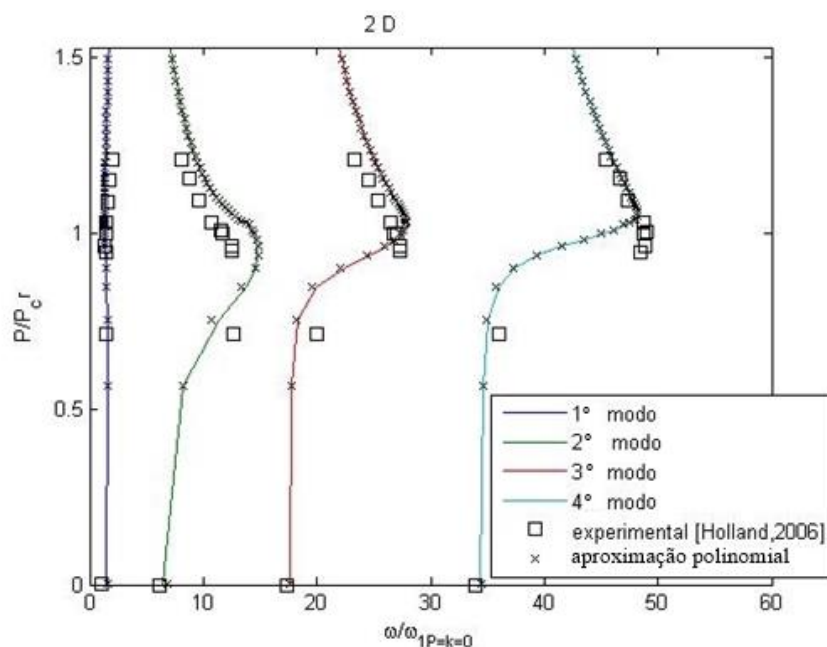


Figura 5.3: Frequências naturais da vibração plana.

A análise dinâmica do modelo completo 3D é apresentado a seguir. A modelagem é feita através de um elemento de viga com 12GDL. As configurações obtidas através do polinômio aproximado, bem com a configuração exata obtida através da solução analítica são comparadas. Os resultados são apresentados na Figura 5.4.

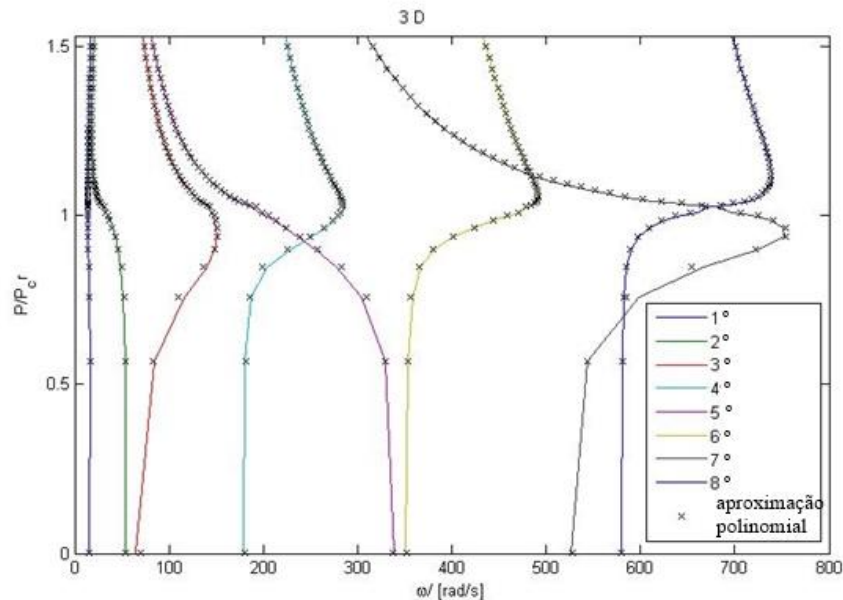


Figura 5.4: Frequências naturais da vibração 3D.

## 5.2. Resultados estáticos na bancada do laboratório

O modelamento de uma viga com seção de diâmetro variável, considerando o peso próprio e submetida a carregamentos variáveis é comparado com resultados experimentais. Os testes estão divididos em estático e dinâmico. Os testes estáticos foram comparados com os resultados teóricos para grandes deformações, enquanto os testes dinâmicos (de vibração), comparados com os resultados teóricos do problema de auto valor. A viga utilizada nos experimentos tem comprimento de 1,185 m, seção circular com diâmetro maior de 8,8 mm e diâmetro menor de 2,0 mm, material de fibra de vidro com módulo de elasticidade de 42 GPa e densidade de  $2,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . A coordenada do suporte do cabo é 0,045m (horizontal) e -0,115m (vertical). A rigidez do cabo de nylon é de 1 kN/m.

O teste estático tem como objetivo validar o modelo matemático representado pela solução numérica da equação diferencial. O teste consiste em carregar a extremidade da viga com uma

força peso conhecida e medir a deformação resultante. A viga é testada para diferentes inclinações. Os valores experimentais são comparados com os resultados numéricos. Os valores dos pesos são: 0,99N, 1,98N, 2,93N, 4,02N e 5,18N. As inclinações utilizadas são 0°, 30° e 60°. Os resultados comparativos são apresentados nas Figura 5.5 a Figura 5.7. Os valores medidos estão indicados nas Tabela A.1, Tabela A.2 e Tabela A.3.

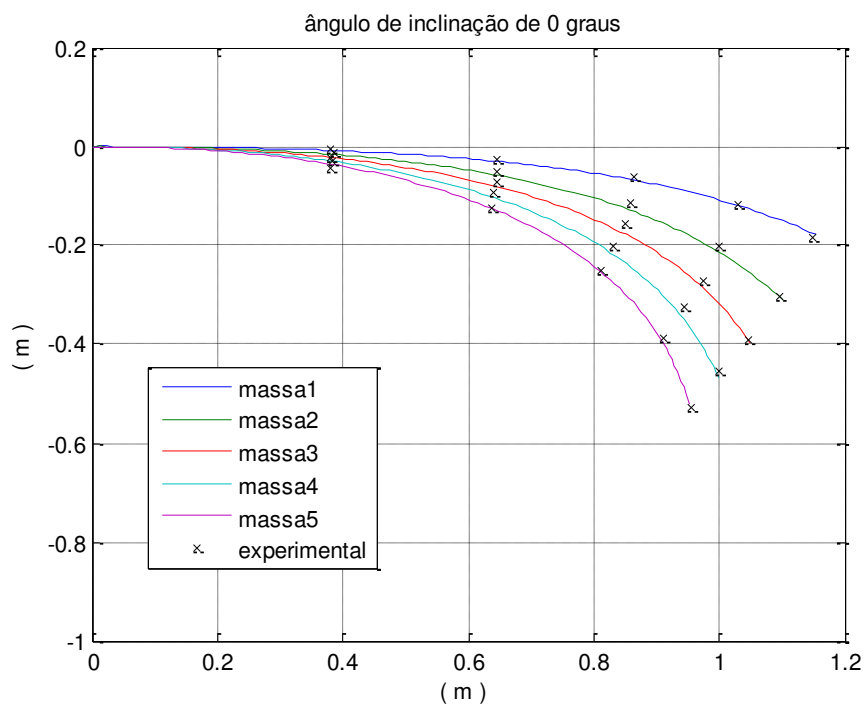


Figura 5.5: Ângulo de inclinação de 0° graus.

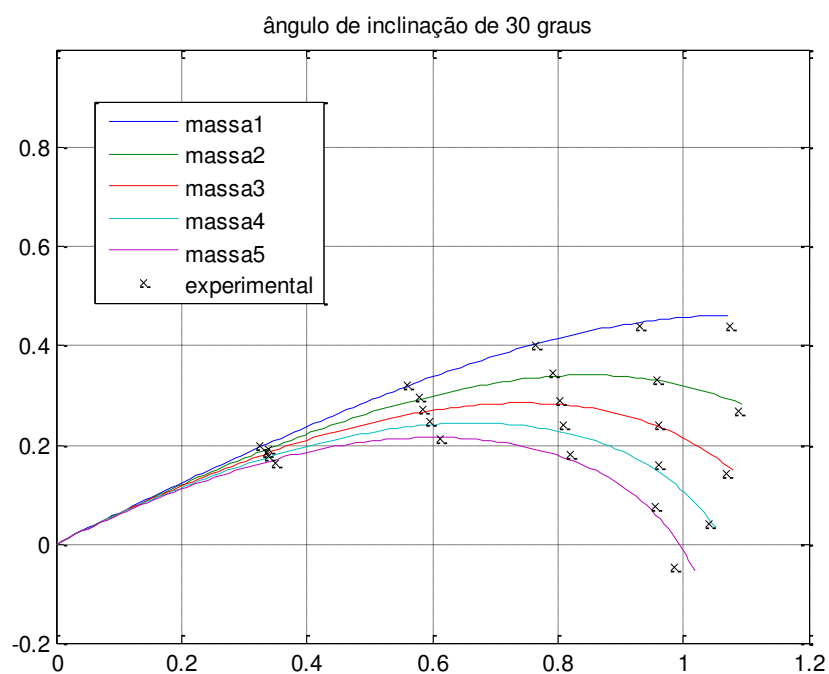


Figura 5.6: Ângulo de inclinação de 30° graus.

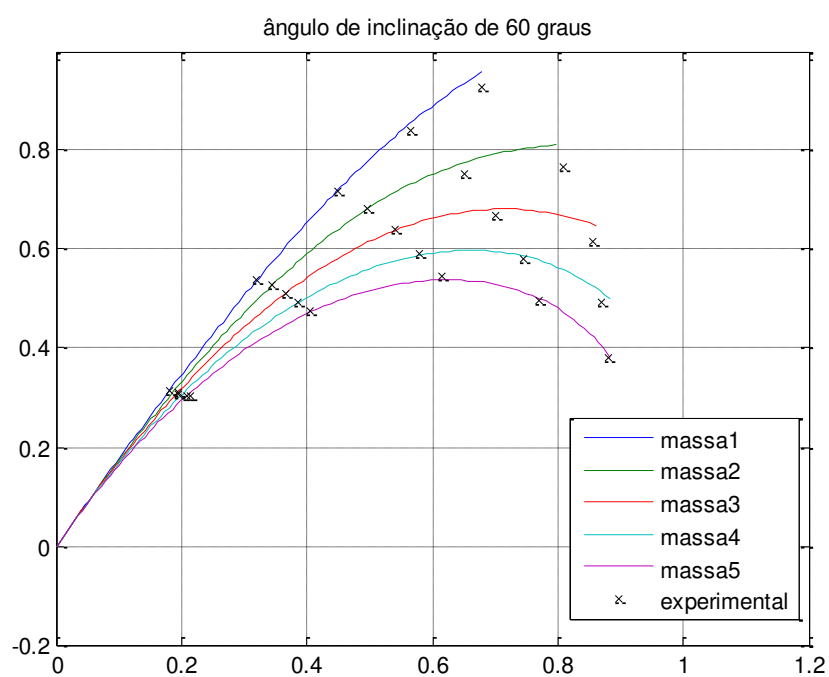


Figura 5.7: Ângulo de inclinação de 60° graus.

Um segundo teste consiste em verificar a configuração da viga, quando tracionada por um cabo fixado na posição 0,045m (horizontal) e -0,115m (vertical). As forças utilizadas para tracionar os cabos são : 0,99N, 1,98N, 2,93N, 4,02N e 5,18N. A direção da força aplicada na extremidade da viga é calculada através de uma rotina em Matlab. Esta direção é verificada através do ângulo de inclinação definidos pela base do suporte do cabo e a extremidade da viga. Posteriormente, estas configurações são utilizadas para a validação dos resultados de vibração. O resultado da comparação entre modelo teórico e dados experimentais está descrito na Figura 5.8. Os valores dos dados experimentais estão descritos na Tabela A.4.

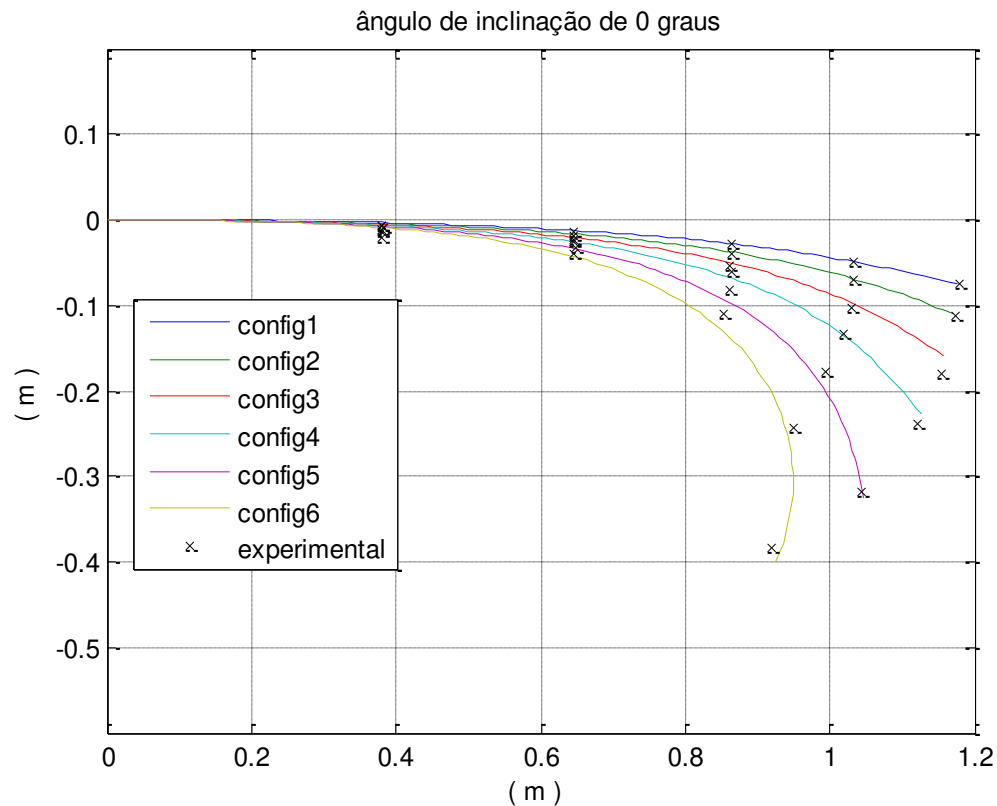


Figura 5.8: Ângulo de inclinação de 0° graus e ângulo de força variável.

### 5.3. Resultados dinâmicos na bancada do laboratório

A análise de vibração é feita através dos modelos teóricos obtidos pelo MEF. Para cada configuração deformada, apresentada na Figura 5.8, é gerado um modelo de EF, conforme descrito na seção 3.3. As frequências naturais teóricas são comparadas com os resultados experimentais, obtidos conforme descrito na seção 4. A Tabela 5.1 resume os resultados teóricos calculados através do MEF. Os dez primeiros modos são calculados. As configurações que correspondem às cargas de tração de 0N, 0,99N, 1,98N, 2,93N, 4,02N e 5,18N são nomeados de config1, config2,..., config6, respectivamente. Os resultados do modelo que descrevem a configuração devida apenas à massa do acelerômetro são apresentados na segunda coluna (config1).

Tabela 5.1 :Frequências naturais calculadas teoricamente pelo MEF.

| Modos     | Config1<br>(Hz) | Config2<br>(Hz) | Config3<br>(Hz) | Config4<br>(Hz) | Config5<br>(Hz) | Config6<br>(Hz) |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <b>1</b>  | 2,5             | 2,5             | 2,5             | 2,5             | 2,6             | 2,7             |
| <b>2</b>  | 2,5*            | 2,9*            | 3,2*            | 3,5*            | 3,7*            | 3,9*            |
| <b>3</b>  | 11,0*           | 11,1            | 11,0            | 10,8            | 10,3            | 9,7             |
| <b>4</b>  | 11,1            | 13,7*           | 16,2*           | 18,7*           | 20,0*           | 19,9*           |
| <b>5</b>  | 29,5*           | 29,6            | 29,4            | 28,9            | 27,6            | 26,2            |
| <b>6</b>  | 29,7            | 30,1*           | 30,9*           | 32,7*           | 35,3*           | 36,8*           |
| <b>7</b>  | 58,1*           | 58,0*           | 57,3*           | 55,7*           | 52,7*           | 49,4*           |
| <b>8</b>  | 58,4            | 58,3            | 58,0            | 57,4            | 55,7            | 53,4            |
| <b>9</b>  | 97,1*           | 96,8*           | 95,9*           | 94,0*           | 90,9*           | 87,6*           |
| <b>10</b> | 97,3            | 97,2            | 96,9            | 96,2            | 94,4            | 91,6            |

\* modos de vibrar no plano XY.

Um resumo dos resultados experimentais das frequências de cada modo de vibrar da peça, para cada configuração calculada teoricamente, é apresentado na Tabela 5.2. Os resultados obtidos de aceleração são discutidos para cada configuração da viga deformada. Detalhes da obtenção dos resultados foram apresentados na seção 4.2.

Tabela 5.2 : Frequências naturais obtidas experimentalmente.

| Modos     | Config1<br>(Hz) | Config2<br>(Hz) | Config3<br>(Hz) | Config4<br>(Hz) | Config5<br>(Hz) | Config6<br>(Hz) |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <b>1</b>  | 2.2             | 2,1             | 1,9             | 1,8             | 1,7             | 1,8             |
| <b>2</b>  | (i)             | 3,6*            | 3,9*            | 3,8*            | 3,8*            | 3,9*            |
| <b>3</b>  | 10.1            | 10,0            | 9,5             | 9,2             | 9,1             | 9,2             |
| <b>4</b>  | (ii)            | 12,0*           | 15,0*           | 17,4*           | 19,2*           | 18,6*           |
| <b>5</b>  | 27.3            | 26,6            | 25,5            | 25,7            | 24,6            | 24,7            |
| <b>6</b>  | (iii)           | (iii)           | (iii)           | (iii)           | (iii)           | 35.6*           |
| -         | -               | -               | -               | 23,1 *          | 21,7 *          | 22,5 *          |
| <b>7</b>  | 53.4            | 53,0            | 51,0            | 49,9            | 48,0            | 46              |
| <b>8</b>  | (iv)            | (iv)            | (iv)            | (iv)            | 52,0 *          | 51,5 *          |
| <b>09</b> | 90.4            | 90,5            | 90,0            | 87,3            | 85,6            | 82,6            |
| <b>10</b> | (v)             | (v)             | (v)             | (v)             | (v)             | (v)             |

\* modos de vibrar no plano XY.

- (i) – segundo e primeiro modos de vibrar são muito próximos.
- (ii) – quarto e terceiro modos de vibrar são muito próximos.
- (iii) – sexto e quinto modos de vibrar são muito próximos.
- (iv) – oitavo e sétimo modos de vibrar são muito próximos.
- (v) – décimo e nono modos de vibrar são muito próximos.

A configuração 1 é a primeira a ser analisada. A frequência de 2,2 Hz do primeiro modo de vibrar está claro na Figura 5.9. Este modo corresponde à vibração livre da estrutura no plano XY (oscilação vertical - Figura B.1), após um impulso vertical na extremidade livre do corpo ( $L_{m1}$  - Figura 4.4). Os dois primeiros modos apresentam a mesma frequência teórica e isto pode ser observado na resposta da estrutura. Para o terceiro modo de vibrar, a resposta da aceleração apresentada na Figura 5.10 indica uma frequência de 10,1Hz. Novamente, o quarto e o terceiro modos apresentam frequências oscilação próximas, como previsto teoricamente. A resposta foi obtida através de uma excitação na posição ( $L_{m2}$  - Figura 4.4). As frequências de vibrar do quinto ao décimo modo de vibrar são verificadas na resposta livre do corpo a uma excitação na posição  $L_{m9}$ , indicadas na Figura 5.11. Os valores de frequência de 27Hz, 54Hz e 90 Hz apresentam uma boa relação com os valores teóricos do quinto/sexto , sétimo/oitavo e nono/décimo modos de vibrar apresentados na Tabela 5.1.

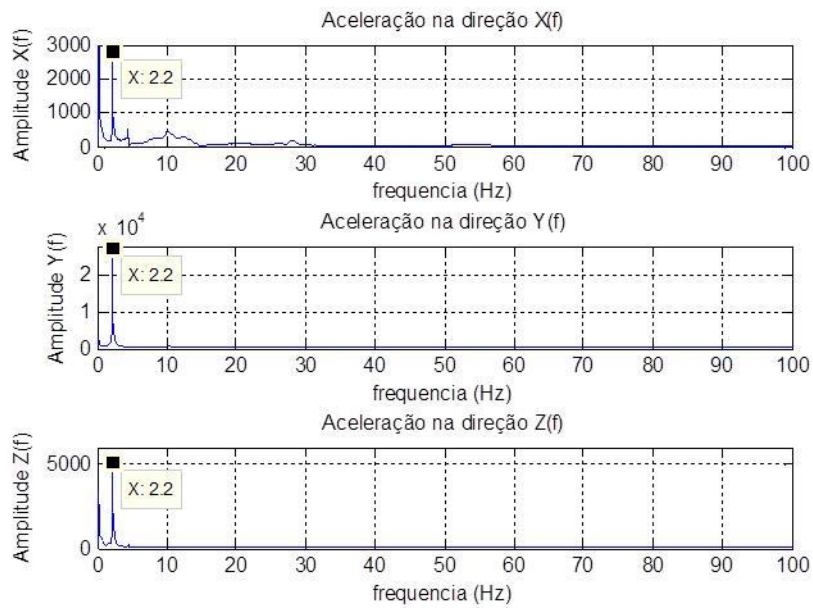


Figura 5.9 : Resposta de aceleração livre para a excitação do primeiro/segundo modo de vibrar.

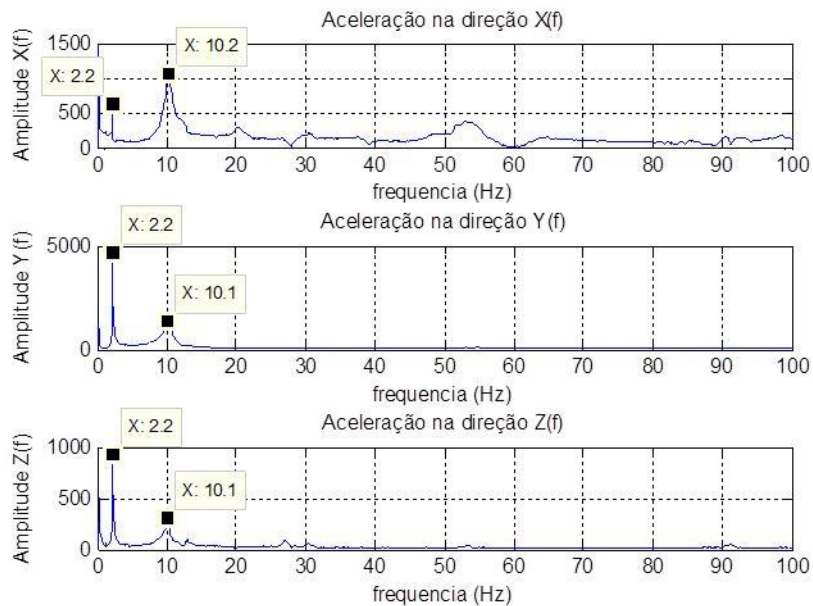


Figura 5.10 : Resposta de aceleração livre para a excitação do terceiro/quarto modo de vibrar.

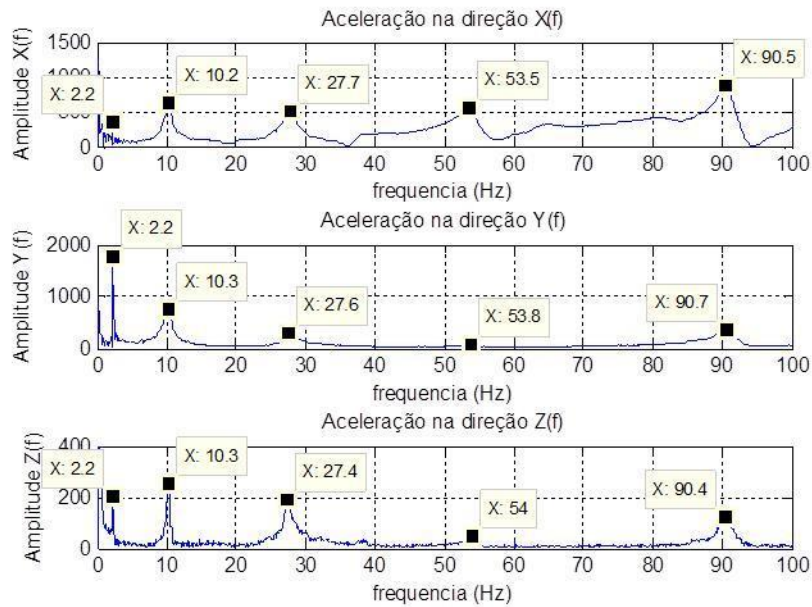


Figura 5.11 : Resposta de aceleração livre para a excitação do nono/décimo modo de vibrar.

A configuração 2, que corresponde à estrutura deformada devido a uma força de tração de 0,99N, é testada. Duas frequências diferentes são observadas após um impulso posição  $L_{m1}$ . A forma de vibrar teórica do primeiro modo apresenta uma oscilação no plano XZ, conforme Figura B.7. Esta oscilação é verificada através da aceleração medida no eixo Z - Figura 5.12, e apresenta uma frequência de 2,1 Hz. A aceleração com maior amplitude no eixo Y apresenta uma frequência de oscilação de 3,6Hz. Esta oscilação na direção Y indica que se trata do segundo modo de vibrar, conforme calculado teoricamente (Figura B.7). Uma excitação na posição  $L_{m3}$  faz com que a peça responda com acelerações na direção Z a uma frequência de 10 Hz e na direção Y, a 12Hz, como apresentado na Figura 5.13. Este comportamento é esperado teoricamente, e indicado nos modos 3 e 4 da Figura B.8. A frequência do quinto/sexto modos de vibrar é de 26,6Hz, conforme indicado na Figura 5.14. Como previsto teoricamente, as duas frequências são próximas e apenas esta frequência de 26,6Hz foi observada. As frequências do sétimo ao décimo modo são verificadas na Figura 5.15. Como as frequências do sétimo e oitavo modos estão próximas, assim como do nono e décimo modos, visualizamos apenas as frequências em torno de 54Hz e 90Hz.

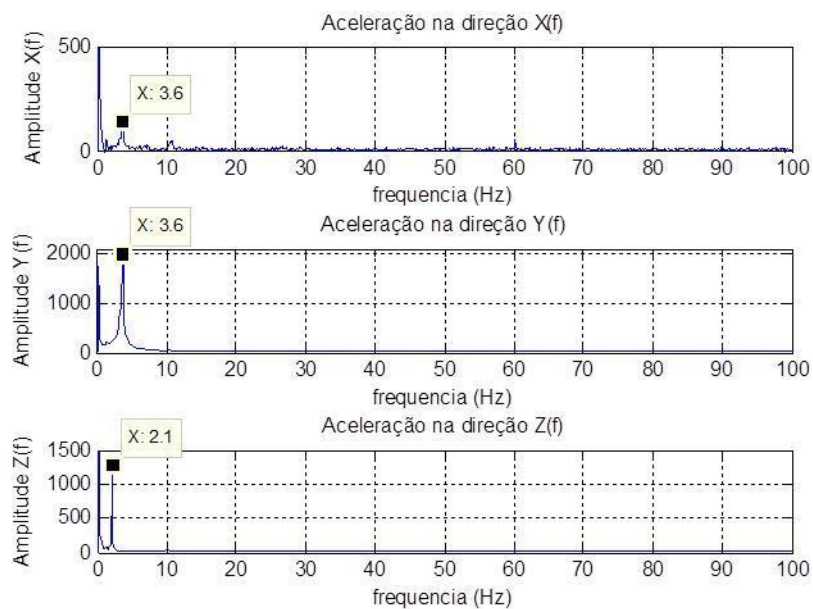


Figura 5.12 : Resposta de aceleração livre para a excitação do primeiro/segundo modo de vibrar.

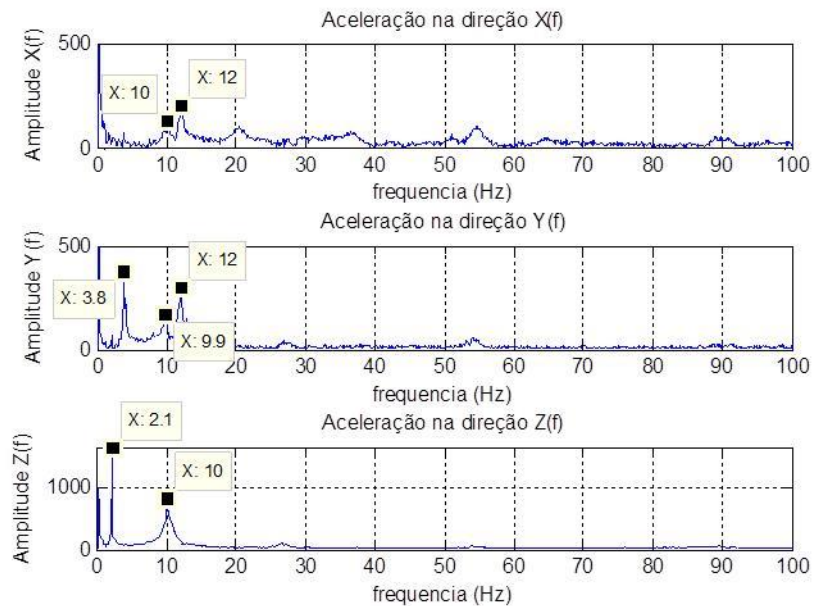


Figura 5.13 : Resposta de aceleração livre para a excitação do terceiro/quarto modo de vibrar.

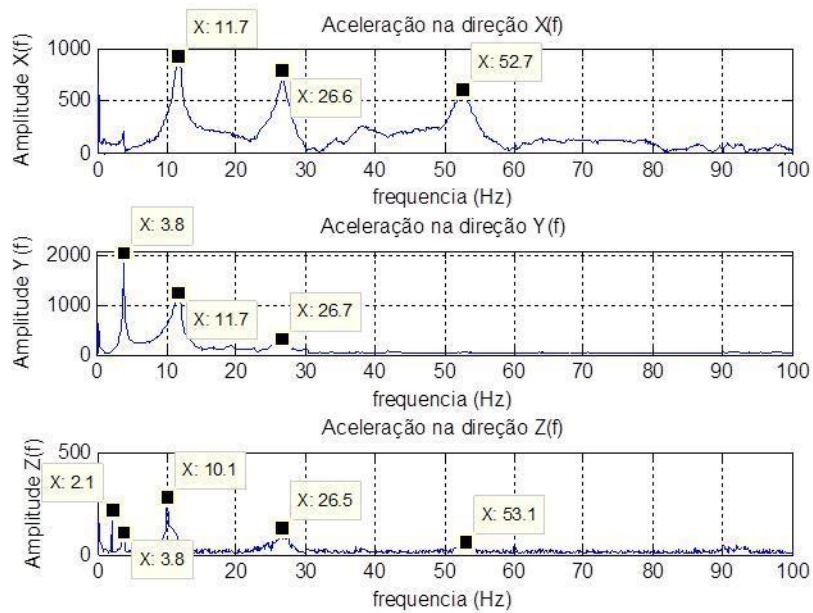


Figura 5.14 : Resposta de aceleração livre para a excitação do quinto/sexto modo de vibrar.

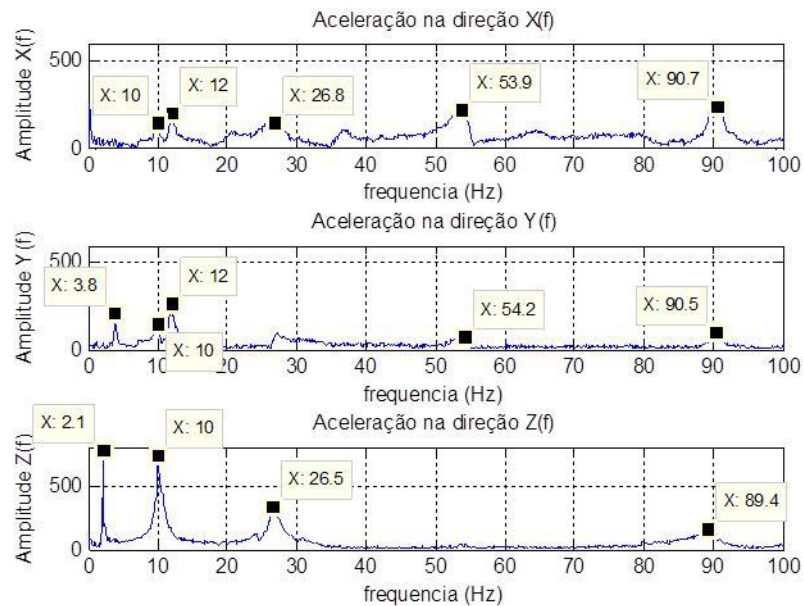


Figura 5.15 : Resposta de aceleração livre para a excitação do nono/décimo modo de vibrar.

A viga com a configuração 3 é inicialmente excitada com um impulso, na direção Z, em sua extremidade tracionada pelo cabo. A aceleração medida experimentalmente apresenta uma amplitude maior neste eixo, a uma frequência de 1,9Hz, conforme indicado na Figura 5.16. Esta frequência está relacionada ao primeiro modo de vibrar, que tem uma maior oscilação no eixo Z conforme resultado teórico apresentado na Figura B.13. A oscilação verificada na frequência de 3,9Hz ocorre plano XY, conforme verificado na Figura 5.17. Esta frequência está relacionada com o segundo modo de vibrar. A oscilação na frequência de 9,5Hz ocorre na direção do eixo Z e se relaciona ao terceiro modo de vibrar, enquanto a frequência de 15Hz ocorre no plano XY e se relaciona com o quarto modo de vibrar. As formas de vibrar teóricas podem ser verificadas na Figura B.14. As frequências relacionadas aos modos 5, 7 e 9 são próximas respectivamente aos modos 6, 8 e 10, conforme resultado teórico apresentado na Tabela 5.1. Assim, verificamos três frequências dominantes que são 25,5Hz, 51Hz e 90Hz, apresentados na Figura 5.17.

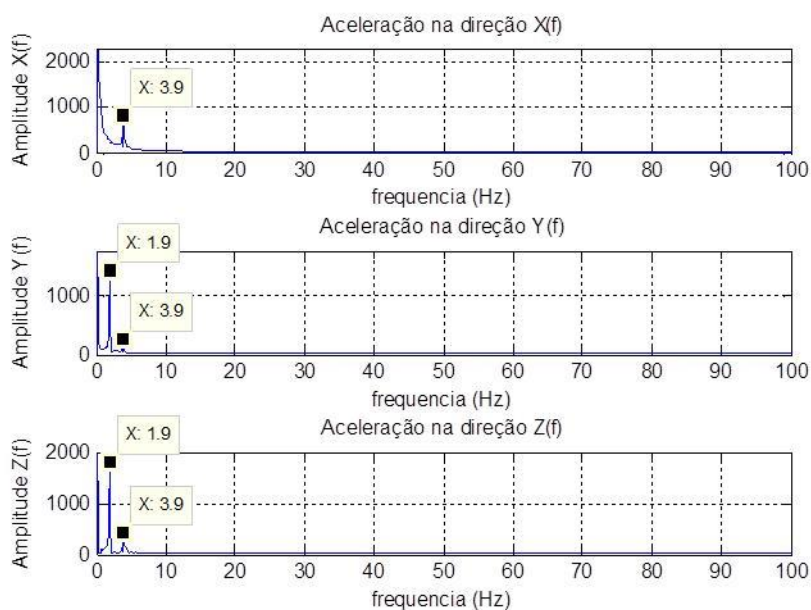


Figura 5.16 : Resposta de aceleração livre para a excitação do primeiro/segundo modo de vibrar.

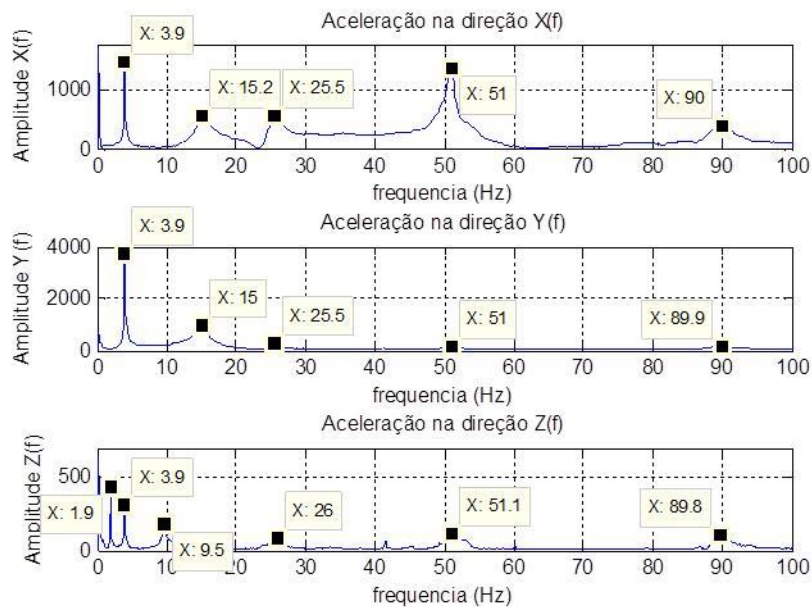


Figura 5.17 : Resposta de aceleração livre para a excitação do terceiro/quarto modo de vibrar.

O teste dinâmico da configuração 4 mostra as frequências de 1,8Hz para o primeiro modo e a frequência de 3,8 Hz para o segundo modo, indicadas na Figura 5.18. Os resultados teóricos apresentados na Tabela 5.1 confirmam estas frequências. As formas de vibrar teóricas representadas na Figura B.19 indicam que as amplitudes de vibração do primeiro modo ocorrem ao longo do eixo Z, enquanto o segundo modo, os descolamentos ocorrem no plano XY. O teste experimental mostra as frequências de 9,2Hz e 17,4Hz para a terceira e quarta frequência, respectivamente. Estes valores estão próximos aos obtidos teoricamente para a 3° e 4° frequências naturais, cujos modos indicam uma oscilação no eixo Z (Figura B.20) e no plano XY (Figura B.20), respectivamente. A oscilação de 25,7Hz, predominantemente no eixo Z conforme Figura 5.19, e próximo do valor teórico do quinto modo (Figura B.21), indica que se trata do quinto modo de vibrar. Para o sétimo e oitavo modos, e nono e décimo modos foram encontradas as frequências de 57,1Hz e 87,3Hz.

Para a frequência de 23,1Hz, predominantemente no eixo X, o modelo teórico não foi capaz de representar este modo de vibrar. A medida que a configuração vai se tornando mais “curva”, a

direção X medida pelo acelerômetro vai se aproximando da direção do cabo de tração. A resposta da aceleração observada na Figura 5.19 corresponde a uma excitação dada na posição  $L_{m1}$ , na direção X. Uma possível explicação seria a vibração devido ao cabo, ou mesmo a uma resposta da estrutura de alumínio utilizada como suporte.

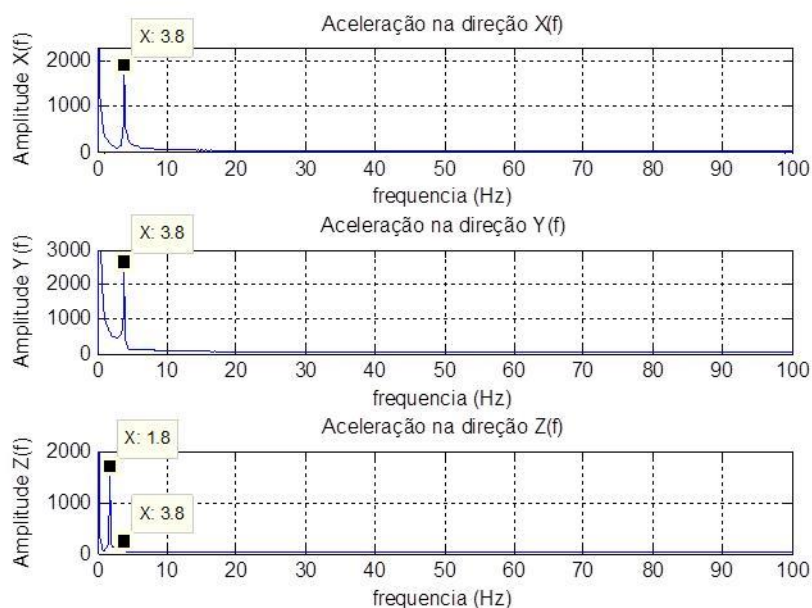


Figura 5.18 : Resposta de aceleração livre para a excitação do primeiro/segundo modo de vibrar.

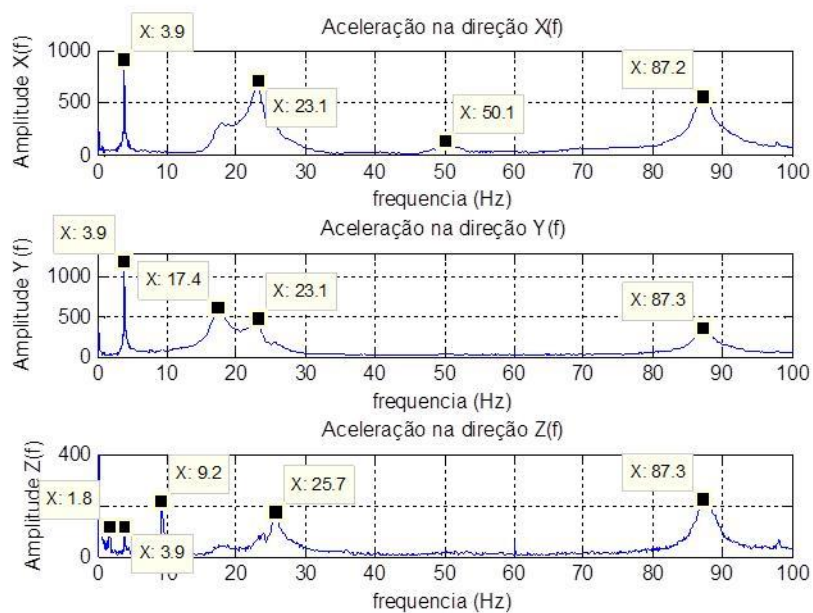


Figura 5.19 : Resposta de aceleração livre para a excitação do terceiro/quarto modo de vibrar.

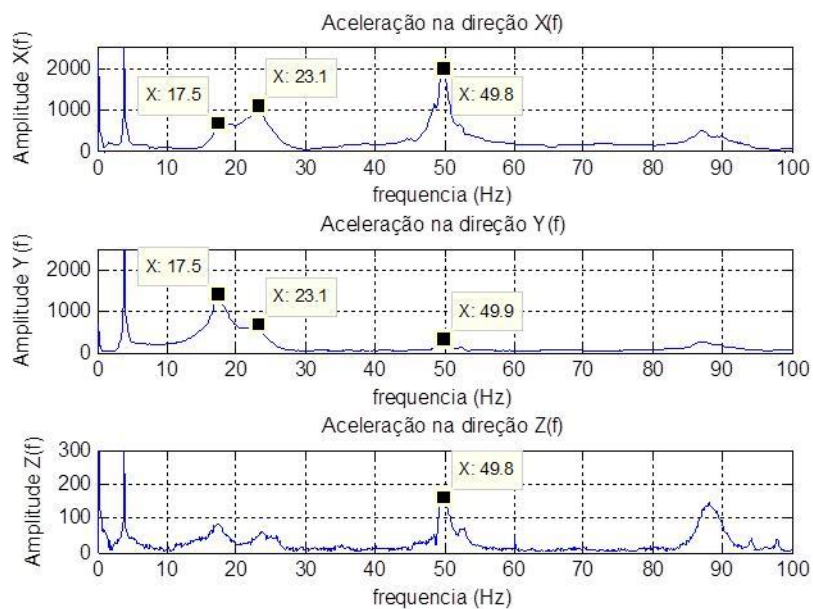


Figura 5.20 : Resposta de aceleração livre para a excitação do sétimo/oitavo modo de vibrar.

A configuração 5 apresenta a primeira frequência de 1,7Hz. Esta oscilação ocorre com maior intensidade no eixo Z e corresponde no primeiro modo de vibrar conforme resultado teórico apresentado na Figura B.25. A frequência de 3,8Hz se refere ao segundo modo de vibrar, e sua oscilação ocorre teoricamente no plano XY (Figura B.25). A oscilação de 9,1Hz, representada com uma aceleração de maior intensidade no eixo Z (Figura 5.22), corresponde ao terceiro modo de vibrar, conforme resultado teórico apresentado na Figura B.26. Para a oscilação de 19,2Hz, que ocorre com uma maior intensidade de aceleração no eixo Y, é próximo ao quarto modo teórico indicado na Figura B.26. A frequência de 24,6Hz, que ocorre com maior intensidade no eixo Z (Figura 5.22), é próxima ao quinto modo teórico apresentado na Figura B.27. As frequências de 48Hz e 52Hz observadas nas Figura 5.22 e Figura 5.25 correspondem aos modos 7 e 8 teóricos apresentados na Figura B.28. A frequência em torno de 86Hz corresponde aos modos 9 e 10.

Para a frequência de 21,5Hz, novamente o modelo teórico não conseguiu apresentar esta frequência. Este comportamento está relacionado com a frequência de 23,1Hz observada na configuração anterior.

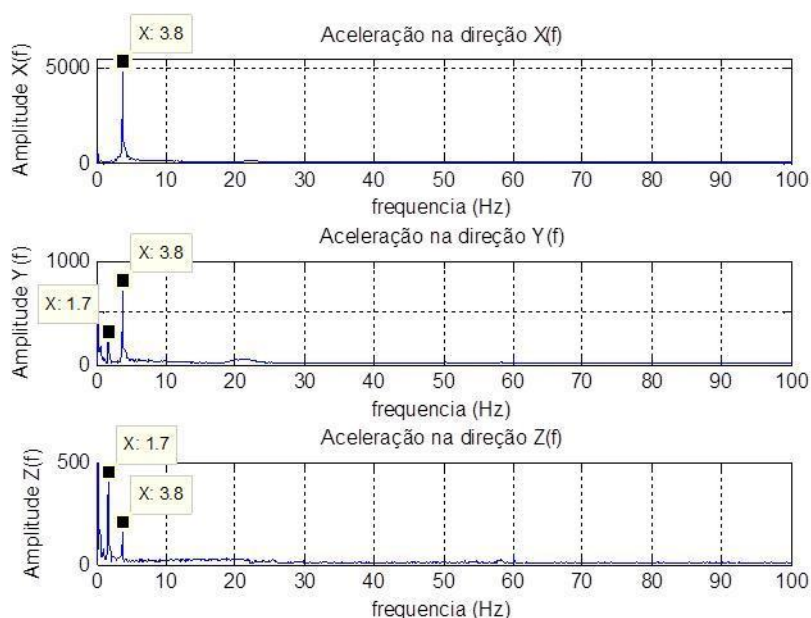


Figura 5.21 : Resposta de aceleração livre para a excitação do primeiro/segundo modo de vibrar.

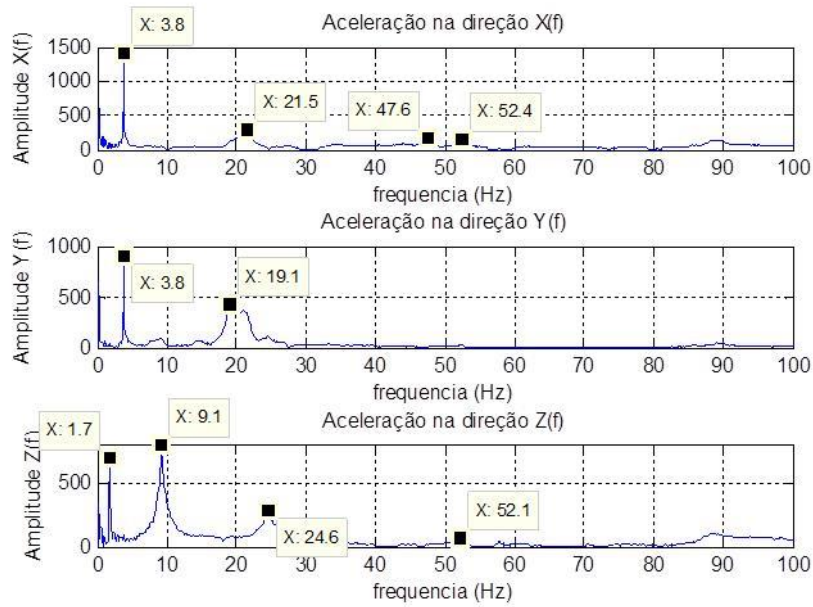


Figura 5.22 : Resposta de aceleração livre para a excitação do terceiro/quarto modo de vibrar.

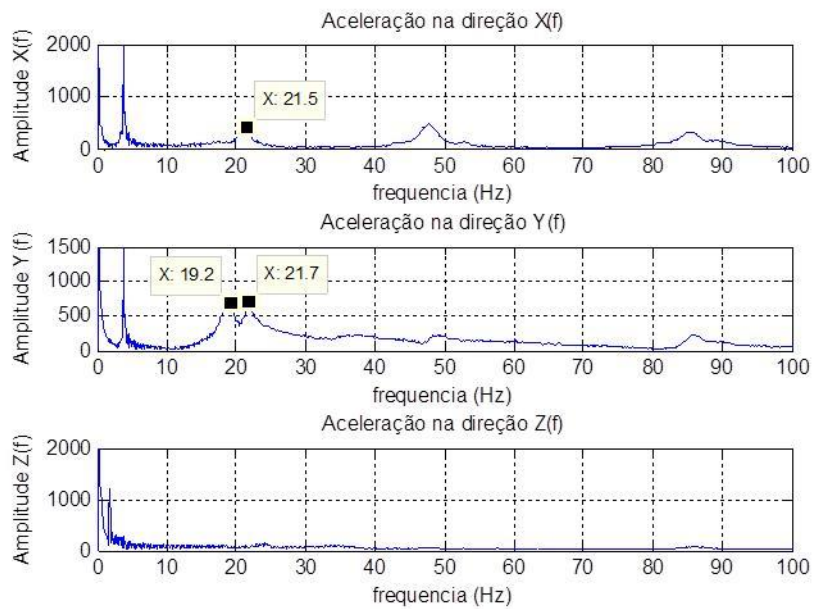


Figura 5.23 : Resposta de aceleração livre para a excitação vertical (y) do terceiro modo.

Figura 5.24 : Resposta de aceleração livre para a excitação do sétimo/oitavo modo de vibrar.

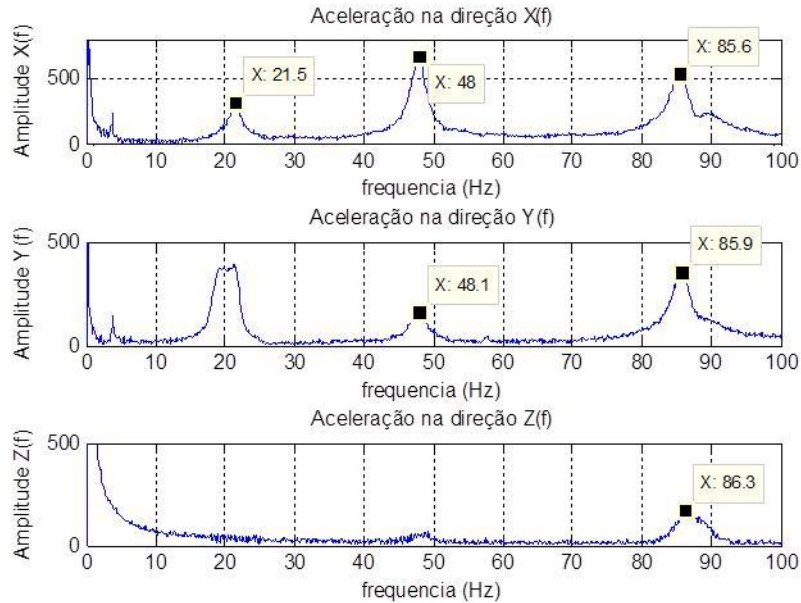


Figura 5.25 : Resposta de aceleração livre para a excitação do nono/décimo modo de vibrar.

A configuração 6 apresenta a primeira frequência de 1,8Hz. Esta oscilação ocorre com maior intensidade no eixo Z e corresponde ao primeiro modo de vibrar conforme resultado teórico apresentado na Figura B.31. Para a frequência de 3,9Hz, que ocorre no plano XY corresponde ao segundo modo de vibrar. A oscilação de 9,2Hz no eixo Z, verificada na Figura 5.27, corresponde ao terceiro modo de vibrar, conforme resultado teórico da Figura B.32. Para a oscilação de 18,6Hz, que ocorre no eixo Y, é próximo ao quarto modo teórico indicado na Figura B.32. A frequência de 24,7Hz, que ocorre no eixo Z (Figura 5.29), é próxima ao quinto modo teórico apresentado na Figura B.33. As frequências de 46Hz e 51Hz observadas nas Figura 5.29, Figura 5.30e Figura 5.31 correspondem aos modos 7 e 8 teóricos apresentados na Figura B.34. A frequência em torno de 83Hz corresponde aos modos 9 e 10. Para a frequência de 22,5Hz, observada na Figura 5.27 vale a mesma observação feita para a frequência de 23,1Hz observada nas configuração 4.

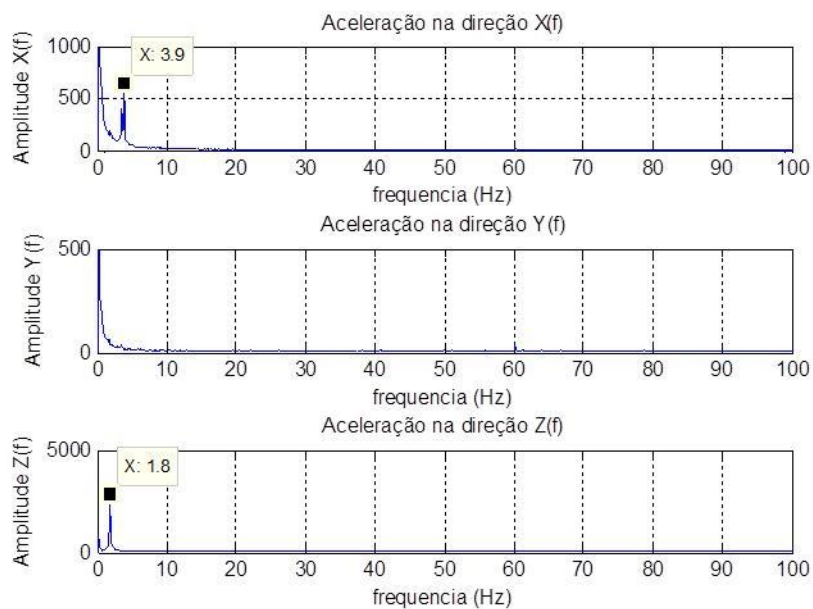


Figura 5.26 : Resposta de aceleração livre para a excitação do primeiro/segundo modo de vibrar.

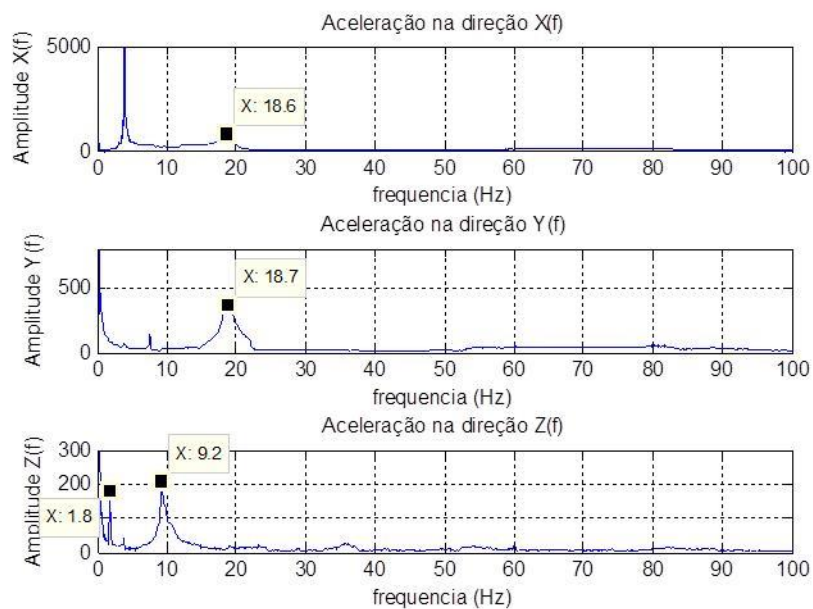


Figura 5.27 : Resposta de aceleração livre para a excitação do terceiro/quarto modo de vibrar.

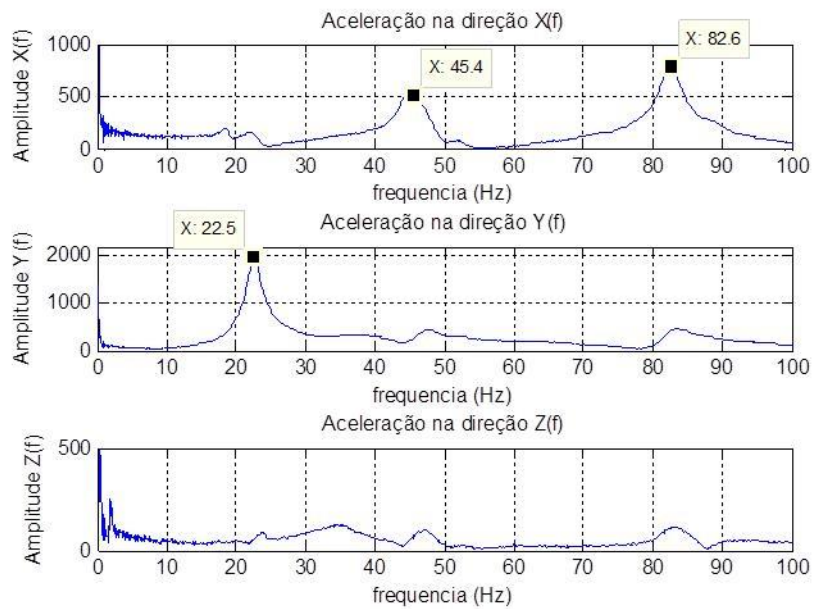


Figura 5.28 : Resposta de aceleração livre para a excitação do quinto/sexto modo de vibrar.

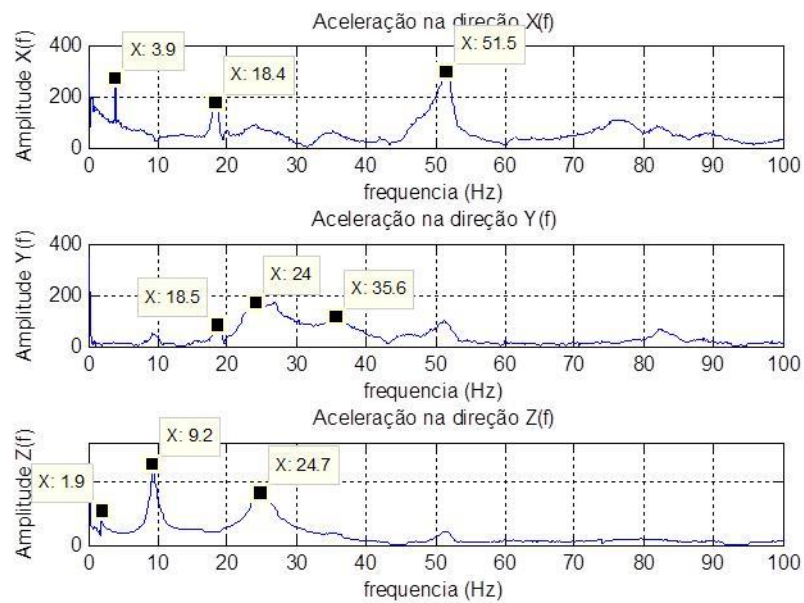


Figura 5.29 : Resposta de aceleração livre para a excitação do sétimo/oitavo modo de vibrar.

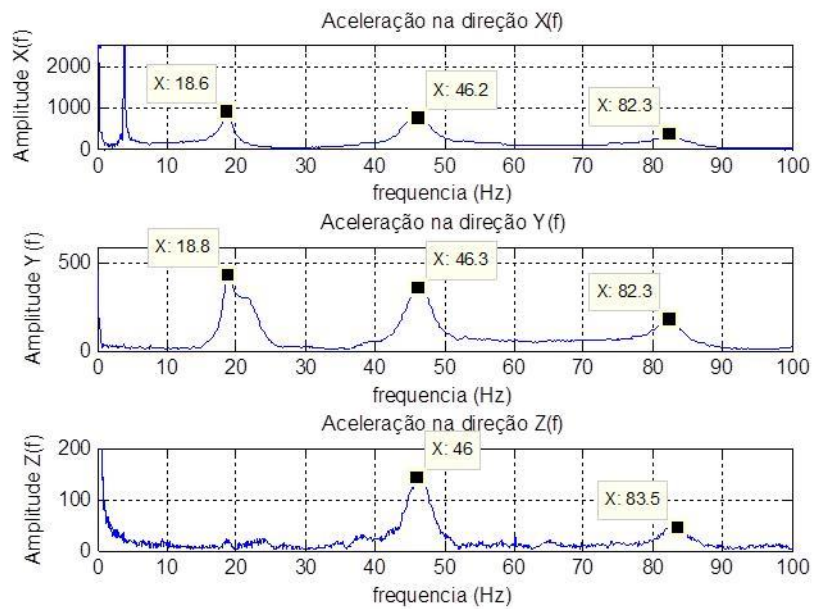


Figura 5.30 : Resposta de aceleração livre para a excitação do sétimo/oitavo modo de vibrar.

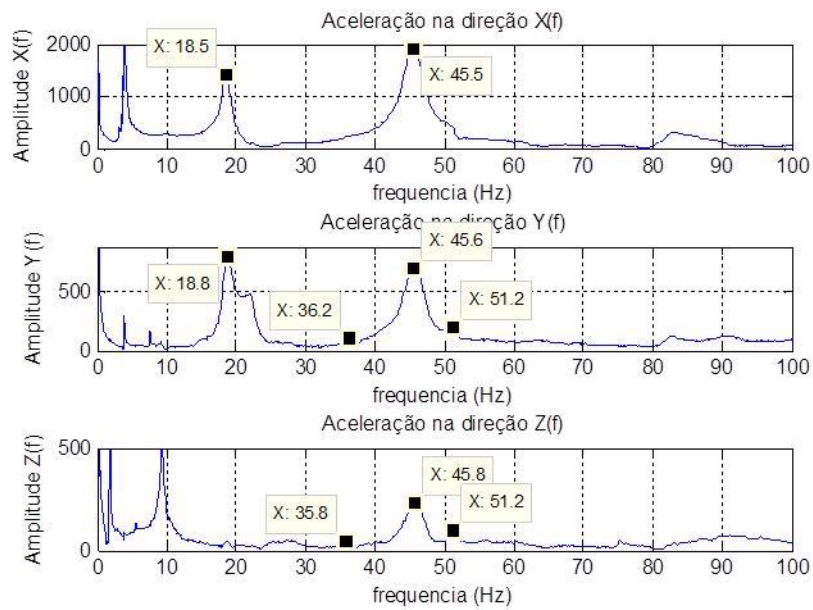


Figura 5.31 : Resposta de aceleração livre para a excitação do nono/décimo modo de vibrar.

Os primeiros modos utilizados para representar o comportamento dinâmico da estrutura no controle modal são apresentados na Tabela 5.3. As frequências teóricas são comparadas com as obtidas experimentalmente. Verifica-se uma boa correlação entre os valores, principalmente nas frequências relativas aos modos de vibrar no plano XY.

Tabela 5.3 : Comparação das frequências naturais relativas aos quatro primeiros modos experimentais e teóricas.

|   | Modos        | Config1<br>(Hz) | Config2<br>(Hz) | Config3<br>(Hz) | Config4<br>(Hz) | Config5<br>(Hz) | Config6<br>(Hz) |
|---|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | Experimental | 2,2             | 2,1             | 1,9             | 1,8             | 1,7             | 1,8             |
|   | Teórico      | 2,5             | 2,5             | 2,5             | 2,5             | 2,6             | 2,7             |
| 2 | Experimental | (i)             | 3,6*            | 3,9*            | 3,8*            | 3,8*            | 3,9*            |
|   | Teórico      | 2,5*            | 2,9*            | 3,2*            | 3,5*            | 3,7*            | 3,9*            |
| 3 | Experimental | 10,1            | 10,0            | 9,5             | 9,2             | 9,1             | 9,2             |
|   | Teórico      | 11,0*           | 11,1            | 11,0            | 10,8            | 10,3            | 9,7             |
| 4 | Experimental | (ii)            | 12,0*           | 15,0*           | 17,4*           | 19,2*           | 18,6*           |
|   | Teórico      | 11,1            | 13,7*           | 16,2*           | 18,7*           | 20,0*           | 19,9*           |

\* modos de vibrar no plano XY.

(i) – segundo e primeiro modos de vibrar são muito próximos.

(ii) – quarto e terceiro modos de vibrar são muito próximos.

#### 5.4. Controle de vibração do modelo de vigas longas

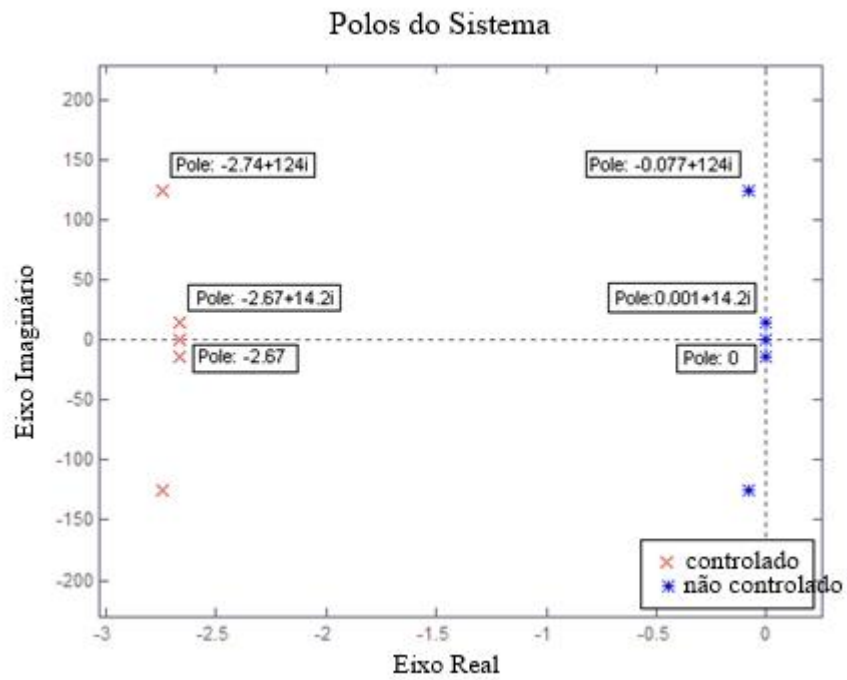
A estratégia de alocação de polos descritos na seção 3.5 é aplicada ao modelo dinâmico da viga. O controle das vibrações é feita por meio da atuação do motor sobre o cabo que traciona a estrutura, que por sua vez, também é responsável por manter a configuração deformada da

estrutura flexível. As variações de tensão mecânica observadas no cabo de tração são proporcionais ao deslocamento da vibração da ponta da viga. O sinal de controle é uma entrada adicional de tensão elétrica ao motor de tração. A estratégia de controle de alocação de polos impõe um tempo para estabilizar a vibração em até 2 segundos.

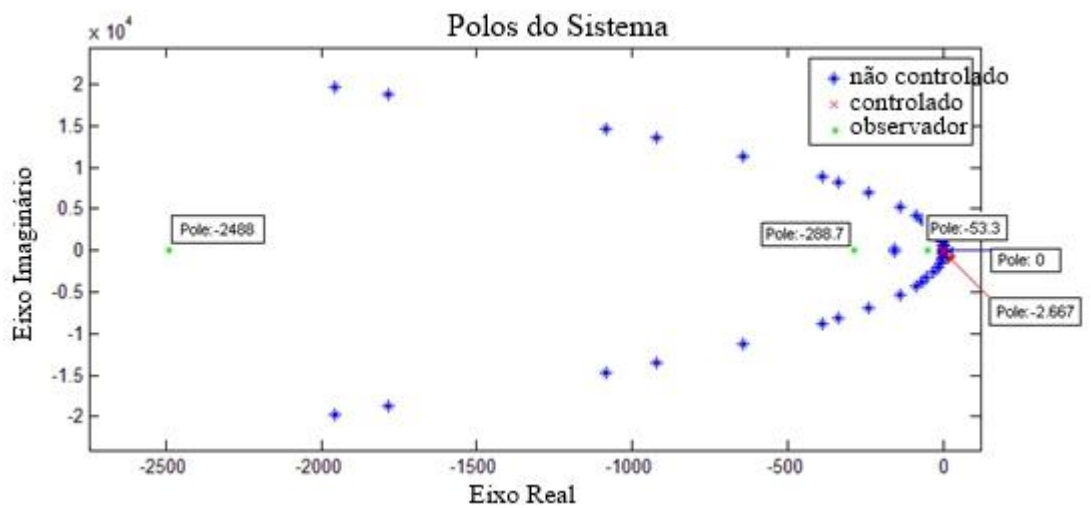
Uma força constante de  $7,11\text{ N}$  é aplicada através do cabo de tração, causando uma deformação estática na viga. A malha de elementos finitos é então adaptada à geometria deformada. A posição resultante da extremidade é  $x_B = 0.4557\text{ m}$  e  $y_B = 0.4648\text{ m}$ . O motor DC utilizado na simulação tem como características uma resistência de  $R_a = 1.09\ \Omega$ , indutância  $L_a = 3.42 \cdot 10^{-3}\text{ H}$ , constante de armadura  $K_t = 0.453\text{ Nm/A}$ , constante do motor  $K_b = 0.262$ , momento de inércia  $J = 8 \cdot 10^{-4}\text{ Nm}^2$  e amortecimento de torção do motor  $b_n = 1 \cdot 10^{-4}\text{ Nm/(rad.s)}$ .

A ordem do modelo reduzido para o controle de vibrações da viga é calculada, com base no fator de participação modal do modelo de estados completo que representa a dinâmica do sistema. Os parâmetros físicos assumidos nas simulações levaram a uma redução da ordem do modelo de controle para cinco, contendo o modo do sistema associado à frequência natural nula, e os modos complexos e conjugados complexos, associados às duas primeiras frequências naturais não-nulas.

Os polos característicos da estrutura sem controle assim como os polos modificados escolhidos, resultantes das condições de controle imposta (tempo de estabilização inferior a 2s), são mostrados Figura 5.33a. Os polos do observador são mostrados na Figura 5.32b.



(a)



(b)

Figura 5.32 : a) Polos controlados e não controlados do sistema b) Polos do Observador

Um impulso de força de  $10\text{ N}$ , representando uma perturbação externa, é aplicado nas direções negativas de  $x$  e  $y$ , na ponta da viga. A resposta da vibração resultante da extremidade da

viga, para a situação controlada e não controlada, é mostrada na Figura 5.33. O desempenho do observador e a tensão do motor DC são mostrados na Figura 5.34 e Figura 5.35, respectivamente.

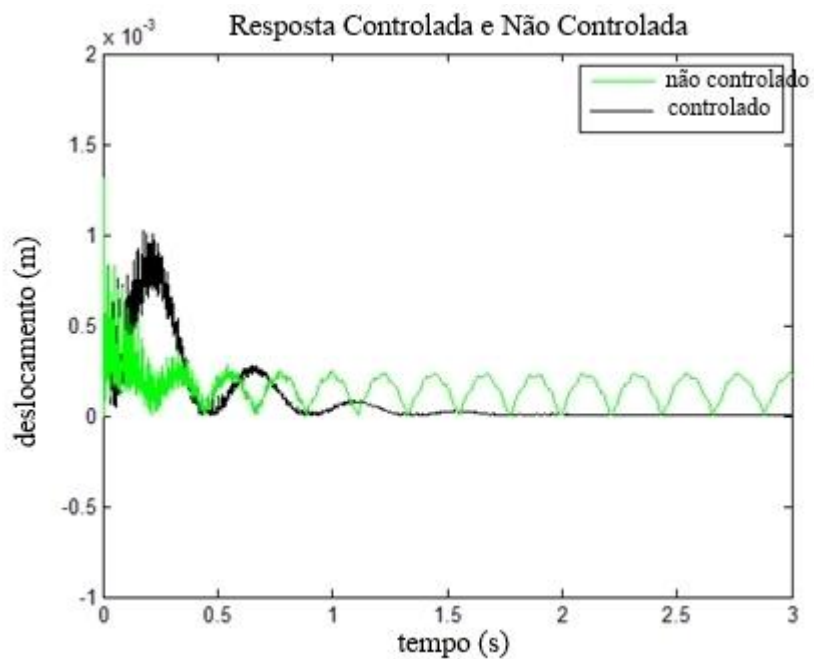


Figura 5.33: Magnitude do deslocamento da extremidade da viga para as situações controlada e não controlada.

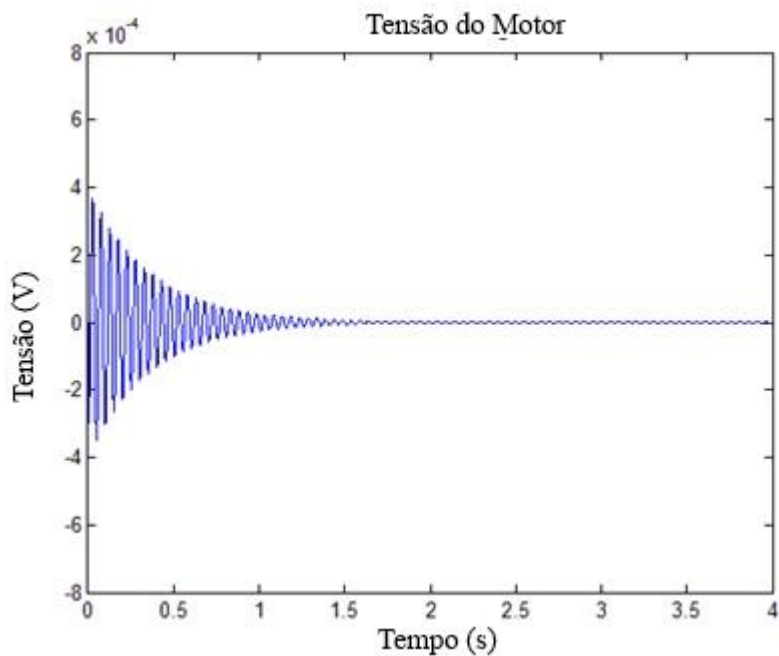


Figura 5.34: Tensão do motor medido para a excitação impulso.

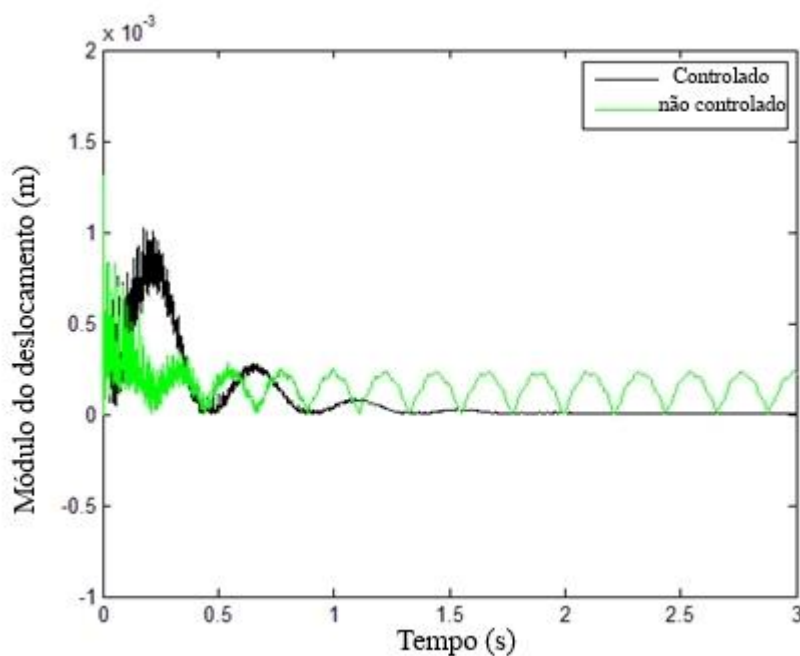


Figura 5.35: Resposta do observador

Um segundo teste consiste em aplicar uma força aleatória de  $1,5 \text{ N}$  ( $RMS$ ) na direção negativa nos eixos  $x$  e  $y$  na extremidade da viga. A resposta de vibração do sistema controlado e não controlado é apresentada na Figura 5.36. O controle ativo claramente atenua a oscilação. A resposta do observador é apresentada na Figura 5.37.

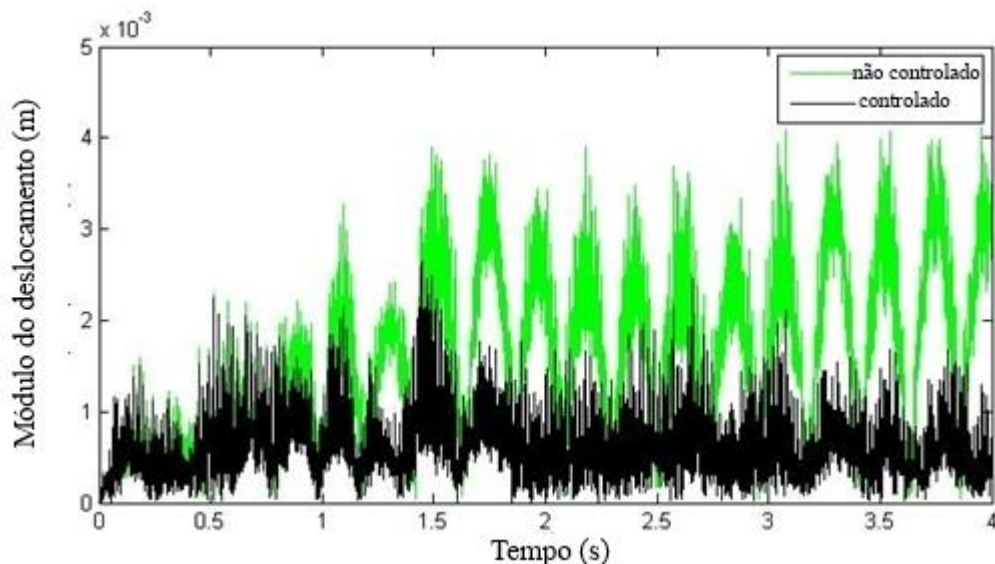


Figura 5.36 : Deslocamento da extremidade da viga para uma entrada randômica.

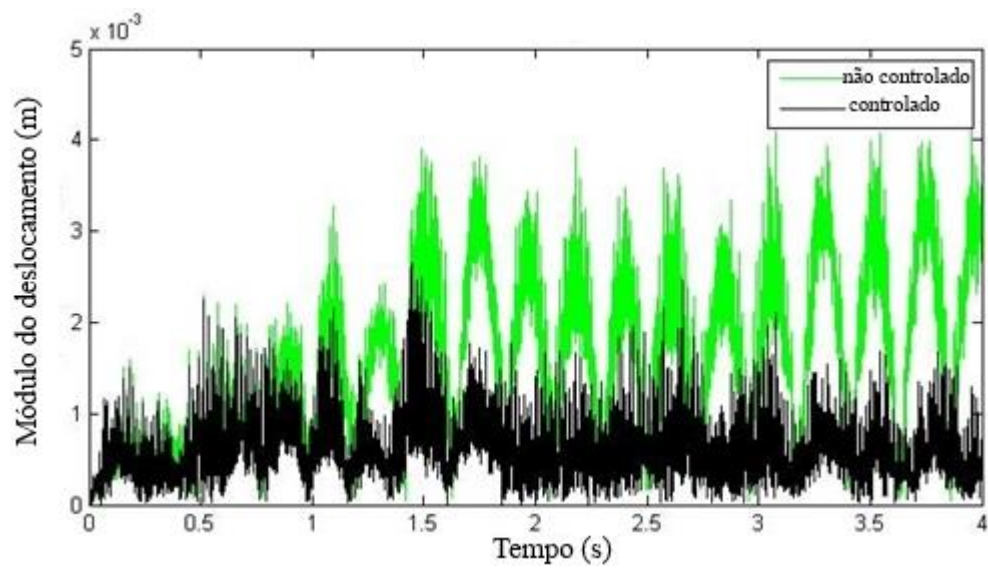


Figura 5.37 : Resposta do observador a uma entrada randômica.

## 6. CONCLUSÕES

O modelo teórico de uma viga com seção variável sujeita a cargas de tração, peso próprio e cargas concentradas é apresentado. O equacionamento é feito com base no problema da *elastica*, definido por Euler - Bernoulli. A equação diferencial obtida para este modelo é resolvido para um caso mais geral, através de uma solução numérica de *shooting*. Uma simplificação no modelo inicial, considerando uma seção uniforme e força concentrada permitiu se chegar a uma solução fechada.

A solução numérica da equação diferencial que descreve as grandes deformações da viga mostrou-se precisa e confiável. A equação diferencial de segunda ordem que representa este modelo não foi determinada de forma trivial. Procurou-se chegar a uma equação que pudesse ser implementada de forma direta no método de *shooting* e foi preciso algumas manipulações algébricas para que se chegasse à forma final da equação apresentada na seção 3.

A solução analítica, apesar de ser limitada a alguns casos particulares, representa uma importante ferramenta para a comparação com os resultados numéricos. Além disso, a sua forma fechada acelera o tempo de processamento. As dificuldades encontradas na solução analítica estão relacionadas às manipulações algébricas. A equação diferencial de segunda ordem deve ser descrita na forma da integral elíptica e isto é o fator que limita este tipo de solução para casos específicos de carga e seção da viga.

A representação da dinâmica através do modelo de EF linear trouxe a vantagem de se conseguir calcular os modos e frequências naturais de forma rápida e eficiente. Uma malha pouco refinada, com 50 elementos de viga foi suficiente para se chegar a resultados precisos, verificados experimentalmente. Para estratégias de controle de estruturas flexíveis, a obtenção destes modos é essencial. Uma vez que obtivemos os modos de vibrar, a implementação do controle ativo dos modos principais foi feita de forma coerente.

A simulação numérica da estratégia desenvolvida para o controle de vibrações mostra que a extremidade da viga pode ser convenientemente estabilizada, após a aplicação de uma força impulsiva, como ilustrado na Figura 5.33. A presença de forças de perturbação aleatória faz com que a estratégia de controle seja menos eficiente na tarefa de estabilizar as oscilações da extremidade da viga. Neste caso, o controle atenua os níveis de vibração para cerca de metade da intensidade das vibrações, quando comparado com a situação não controlada, como mostrado na Figura 5.36.

A validação experimental dos resultados dos modelos estáticos e dinâmicos da viga deformada mostra a validade da metodologia apresentada neste trabalho. Como esperado teoricamente, as diferentes configurações observadas para cada força de tração do cabo deram origem a deformações estáticas e a modos e frequências de vibrar distintas. Estes resultados teóricos são utilizados para a definição do modelo utilizado no controle de vibração.

Para a configuração 1 (força de tração de 0,0N), verificou-se teoricamente que para cada modo de vibrar no plano XY (vertical), existe um modo corresponde com a mesma frequência no plano lateral (XZ). A geometria simétrica da seção circular da viga e a posição de equilíbrio com uma curvatura pouco acentuada justificam tal comportamento. Este comportamento foi observado experimentalmente, através da comparação da resposta de vibração livre no domínio da frequência.

A configuração 2 (força de tração de 0,99N) apresenta uma mudança no padrão dos modos de vibrar. Os modos 1 e 2 apresentam frequências teóricas distintas, assim como os modos 3 e 4. Para o primeiro e o terceiro modos de vibrar, o modelo teórico prevê uma oscilação no plano XZ, com amplitude maior no eixo Z. O segundo e o quarto modos, por sua vez, apresentam uma oscilação maior no eixo Y. Estas quatro frequências são observadas experimentalmente. Os demais modos seguem um padrão semelhante ao observado na configuração 1, onde dois modos apresentam a frequências de vibração muito próximos e os modos de vibrar ocorrem em planos ortogonais. Os dados experimentais confirmam os valores destas frequências.

O comportamento das configurações 3 a 6 (forças de tração de 1,98N a 5,18N) apresentam um comportamento semelhante à configuração 2, no que diz respeito ao 1º, 2º, 3º e 4º modos e frequências de vibrar. Os modos 1 e 2 apresentam frequências distintas, assim como os modos 3 e 4. A medida que se aumenta a força de tração do cabo, os modos 5 e 6, 7 e 8 bem como os modos 9 e 10 apresentam frequências distintas. Os resultados experimentais da configuração 3 e 4 não foram capazes de confirmar este comportamento devido à pequena diferença entre os valores de frequência. Para a configuração 5, foi possível observar uma diferença de frequência entre os modos 7 e 8. O resultado experimental da configuração 6 mostra uma distinção das frequências entre modos 5 e 6 bem como entre os modos 7 e 8. Não foi possível encontrar a distinção entre as frequências relativas aos modos 9 e 10.

Este trabalho mostra que o modelamento de uma estrutura longa e flexível, combinando grandes deformações estáticas e considerando pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio está validado. Comparações com a literatura, bem como resultados experimentais comprovam esta afirmação.

A comparação dos resultados teóricos e experimentais indica que a estratégia de se obter uma expressão analítica aproximada para a linha de base deformação estática da viga, seguido da adaptação de um modelo de elementos finitos, é um meio eficiente para se obter uma descrição dinâmica da estrutura. Aplicação da estratégia de controle e simulações numéricas mostram que o modelo dinâmico obtido pode ser empregado com sucesso no controle ativo das vibrações.

Na continuidade do trabalho, espera-se implementar experimentalmente o sistema de controle de vibrações. O modelo de controle do atual trabalho baseia-se num motor de corrente contínua, porém, pode-se estender a estratégia de controle para um motor de passo, de forma a facilitar e agilizar a movimentação do tendão controlador. Uma segunda etapa da pesquisa consiste em utilizar um mecanismo do tipo *pan-tilt* para posicionamento da extremidade da viga e controle de vibração.

## **6.1. Lista de publicações**

Congresso:

Izuka, J., Gonzalez, P., Kurka, P. Low Order Finite Element Model of a Long, Tip Pulled, Flexible Beam. In 13º Congresso Pan-Americano de Mecânica Aplicada (PACAM XIII), Huston, 2013.

Technical note aceito para publicação na revista AIAA jornal. Autores: Kurka, P., Izuka, J., Gonzalez, P., Elfès, A., Burdick, J. Active Control of Vibrations of a Long, Tip Pulled Deflected Beam.

## REFERÊNCIAS

ABAQUS MANUAL, **Abaqus / Answers – Answers to Common ABAQUS Questions**,  
Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. RI, 1994.

Al-SADDER, S., and AL-RAWI, R. A. O., Finite difference scheme for large-deflection analysis of non-prismatic cantilever beams subjected to different types of continuous and discontinuous loadings, **Applied Mechanics**, Vol. 75, Issue. 8, 2006, pp. 459-473,

BAJRACHARYA, M., DICICCO, M., BACKES, P., NICKELS, K. Visual End-Effector Position Error Compensation of Planetary Robotics. **Journal of Field Robotics** 24 (5). pp.399-420, 2007.

BALLANTYNE, W. J. DISTANCE. In: Webster, J. G. **The Measurement, Instrumentation and Sensors Handbook on CD-ROM**. Boca Raton, FL, 1999. chap. 9.

MEIROVITCH, L., **Elements of Vibration Analysis** 2 ed. McGraw Hill, 1986

BANERJEE, A.; BHATTACHARYA, B.; MALLIK, A. K. Large deflection of cantilever beams with geometric non-linearity: Analytical and numerical approaches. **International Journal of Non-Linear Mechanics**. v.43, p. 366-376, 2008.

BATISTA, M.; KOSEL, F. Cantilever Beam Equilibrium Configurations. **International Journal of Solids and Structures**. v42, p. 4663-4672, 2005.

BELENDEZ, T.; PEREZ-POLO, M.; NEIPP, C.; BELENDEZ, A. Numerical and Experimental Analysis of Large Deflections of Cantilever Beams under a Combined Load. **Physica Scripta**. v. T118, p. 61-65, 2005.

BIESIADECKI, J.J., LEGER, C., MAIMONE, M. W. Tradeoffs Between Directed and Autonomous Driving on the Mars Exploration Rovers. **International Journal of Robotics Research**. Vol 26, n.1 pp.91-104 2007.

BIESIADECKI, J.J., LIEBERSBACH, R., MAIMONE, M. W. Mars Exploration Rover Mobility and IDD Downlink Analysis Tools. **SAIRAS Conference Proceedings**. Los Angeles, CA, Usa, 2008.

BURDEN, R.L.,; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. 9 ed. Boston, MA ;, Brooks/Cole, 2011. 872 pg.

CLOUGH, R. W. , PENZIEN, J., **Dynamics of Structures**, Computers & Structures, third ed., Berkley, 2003

COOK, R. D., MALKUS, D. S., and PLESHA, M. E., **Concepts and Applications of Finite Element Method**, 3rd ed., Johns Willey & Sons, 1989.

CRAIG, R. R., and KURDILA, A. J. **Fundamentals of Structural Dynamics**, 2sd ed., Wiley, 2006.

DE SILVA, CLARENCE W., **Vibration, Damping Control and Design**, CRC Press, NW, 2007.

DE SOUZA FILHO, C.R. Projeto de planetologia comparada revela descobertas sobre Marte. **Jornal da Unicamp**. ano XXIV – N° 448 .2009.  
[http://www.unicamp.br/unicamp/unicamp\\_hoje/ju/novembro2009/ju448\\_pag0607.php#](http://www.unicamp.br/unicamp/unicamp_hoje/ju/novembro2009/ju448_pag0607.php#)

FERTIS, DEMETER G. **Nonlinear Structural Engineering**. Berlin : Springer, 2006.

FERTIS, D.G., and AFONTA, A.O., Small Vibrations of Flexible Bars by Using the Finite Element Method with Equivalent Uniform Stiffness and Mass Methodology, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 163, Issue 2, 1993, pp. 343-358.

FRISCH -FAY, R. **Flexible Bars**. London Butterworths, 1962.

GAWRONSKI, WODEK K., **Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures**, Springer – Verlag , New York, 2004.

GOLBERG, S.B., MAIMONE, M.W., MATTHIES, L. Stereo Vision and Rover Navigation Software for Planetary Exploration. **IEEE Aerospace Conference Proceedings**. Montana, USA, 2002.

GUO, T., LU, Q., LI, J., PI force feedback control for large flexible structure vibration with active tendons, **Acta Mechanica Sinica**, p. 721-725, 2008.

HOLLAND, D.B., STANCIULESCU, I., VIRGIN, L.N., and PLAUT, R.H. Vibration and large deflection of cantilevered elastica compressed by angled cable, **AIAA Journal**, Vol. 44, 2006, pp.1468–1476.

HOLLAND, D.B., VIRGIN, L.N., and PLAUT, R.H. Large Deflection and Vibration of a Tapered Cantilever pulled at its tip by a Cable, **Journal of Sound and Vibration**, v. 310, 2008, pp.443–441.

HOWELL, LARRY L., **Compliant Mechanisms**, John Wiley & Sons, NY, 2001.

INMAN, D. J., **Vibration with Control**, Johns Willey & Sons, pp.198-201, 2006

JAHNE, B. **Digital Image Processing**. Germany: Springer, 2002.

JENNINGS, P. C., **An introduction to the Earthquake Response of Structures, International Geophysics**, v81, Part B, p. 1097-1125, 2003.

JPL - Jet Propulsion Laboratory / California Institute of Technology  
Mars Science Laboratory  
**<http://mars.jpl.nasa.gov/msl/mission/overview/>**

JPL - Jet Propulsion Laboratory / California Institute of Technology  
Mars Exploration Program  
Four Science Goals for Mars Exploration  
**<http://mars.jpl.nasa.gov/science/index.html>**

KWON, Y. W., and BANG, H., **The Finite Element Method using Matlab**, CRC Press, 1997.

LEVIEN, R. L. **From Spiral to Spline: Optimal Techniques in Interactive Curve Design**.  
2009. PHD Thesis, University of California, Berkeley. 2009.

NESTOROV, T., TRAJKOV, M., Active Control of Smart Structures – an Overall Approach,  
**Architecture and Civil Engineering**, p. 35-44, 2010.

MANJUNATH, T. C., BANDYOPADHYAY, B., Smart Control of Cantilevered Structures Using  
Output Feedback, **International Journal of Simulation**, p. 51-68, 2006.

OHTSUKI, A., Analysis of the Characteristics of Fishing Rods Based on the Large-Deformation  
Theory, **Materials and Science in Sports**, Edited by F.H. (Sam) Froes TMS (The Minerals,  
Metals & Materials Society), 2001 pp. 161-170.

OKUBO, H., ICHIKAWA, H., NISHIMURA, T., Structure and Controller Design for Vibration  
Control of Flexible Structures via Robust Pole Assignment, **IEEE**, p. 619-623, 1998.

OLSON, C.F.; L. MATTHIES, H.; SCHOPPERS, M. ; MAIMONE, M.W., Robust stereo ego-motion for long distance navigation. **Proc. IEEE Intl. Conf. Computer Vision and Pattern Recognition**, Hilton Head, SC, pp. 453-458, 2000.

PELLEGRINO, S., **Deployable Structures**, Springer, Italy, 2001.

PETYT, M., **Introduction to Finite Element Vibration Analysis**, 2nd ed., Cambridge University Press, New York, 2010.

PUIG, L., BARTON, A., and RANDO, N., A review on large deployable structures for astrophysics missions, **Acta Astronautica**, Vol. 67, Issues 1–2, Jul–Aug. 2010, pp. 12-26.

RODRIGUEZ, R., GALLARDO, J., OROZCO, H., Modal Control of a flexible Cantilevered Beam, **IEEE**, p. 660-665, 2010.

RAMOS, PAOLA GONZALEZ. **Controle de Vibração para uma viga flexível longa**. 2013. 62p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

SALLSTROM, J. H., POELAERT, D. H. L., and JANSSENS, F.L., Small displacements about equilibrium of a beam subjected to large static loads, **AIAA Journal**, Vol. 34, No.11, Nov. 1996, pp. 2384-2391.

SANTILLAN, S. T. VIRGIN, L. N. and PLAUT, R. H. Equilibria and Vibration of a heavy pinched loop, **J. of Sound and Vibration**, Vol. 288, Issues.1-2, Nov. 2005, pp.81-90.

SANTILLAN, S. T., VIRGIN, L. N. and PLAUT, R. H., Post-buckling and Vibration of Heavy Beam on Horizontal or Inclined Rigid Foundation, **J. of Applied Mechanics**. Vol. 73, Jul. 2006, pp. 664-671.

SANTILLAN, S. T., VIRGIN, L.N., PLAUT, R. H., **Static and Dynamic Behavior of Highly Deformed Risers and Pipelines**, J. Offshore Mech. Arct. Eng. Vol.132, No.2, 2010.

SHVARTSMAN, B.S., Large deflections of a cantilever beam subjected to a follower force, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 304, Issues 3-5, 2007, pp. 969-973.

TIBERT, G., **Deployable Tensegrity Structures for Space Applications,” Royal Institute of Technology**, Stockholm, 2002.

TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.M. **Theory of Elastic Stability**, 2sd ed., McGraw-Hill, 1961.

TIMOSHENKO, S.P. **History of Strength of Materials**. New York , McGraw-Hill, 1953.

TUNSTEL, E., MAIMONE, M., TREBI-OLLENNU, A., YEN, J. PETRAS, R., WILLSON, Mars Exploration Rover Mobility and Robotic Arm Operational Performance. **IEEE International Conference on System, Man and Cybernetics**. Vol 2, pp. 1807-1814. 2005.

YAU, J. D., Close-form solutions of large deflections for a guyed cantilever column pulled by an inclinations cable, **Journal of Marine Science and Technology**, Vol. 18, No. 1, 2010, pp. 130-136.

ZHANG, J., HE, L.; WANG, E.; GAO, R., LQR controller design for active vibration control of flexible structures, **IEEE**, Hebei, p. 127-132, 2008.

## A. ANEXO A – Resultados de Posição do Teste Experimental Estático.

Tabela A.1 Coordenadas obtidas estaticamente para uma inclinação de 0°.

| Tração           | Coord.      |       |       |       |       |       |
|------------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <b>0,99N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,380 | 0,647 | 0,865 | 1,029 | 1,150 |
|                  | <b>y(m)</b> | 0,913 | 0,893 | 0,855 | 0,800 | 0,735 |
| <b>1,98N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,385 | 0,647 | 0,859 | 1,000 | 1,097 |
|                  | <b>y(m)</b> | 0,904 | 0,866 | 0,805 | 0,716 | 0,613 |
| <b>2,93N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,380 | 0,646 | 0,850 | 0,976 | 1,047 |
|                  | <b>y(m)</b> | 0,896 | 0,845 | 0,762 | 0,647 | 0,528 |
| <b>4,02N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,384 | 0,640 | 0,830 | 0,943 | 1,000 |
|                  | <b>y(m)</b> | 0,888 | 0,825 | 0,715 | 0,593 | 0,465 |
| <b>5,18N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,380 | 0,637 | 0,812 | 0,910 | 0,955 |
|                  | <b>y(m)</b> | 0,874 | 0,795 | 0,668 | 0,529 | 0,390 |
|                  |             |       |       |       |       |       |
| <b>Sem Carga</b> | <b>x(m)</b> | 0,384 | 0,649 | 0,869 | 1,038 | 1,185 |
|                  | <b>y(m)</b> | 0,920 | 0,922 | 0,919 | 0,916 | 0,913 |

Tabela A.2 Coordenadas obtidas estaticamente para uma inclinação de 30°.

| Tração           | Coord.      |       |       |       |       |       |
|------------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <b>0,99N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,325 | 0,560 | 0,765 | 0,930 | 1,075 |
|                  | <b>y(m)</b> | 1,115 | 1,240 | 1,320 | 1,357 | 1,360 |
| <b>1,98N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,340 | 0,580 | 0,793 | 0,959 | 1,088 |
|                  | <b>y(m)</b> | 1,110 | 1,215 | 1,264 | 1,248 | 1,188 |
| <b>2,93N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,335 | 0,585 | 0,802 | 0,962 | 1,070 |
|                  | <b>y(m)</b> | 1,102 | 1,190 | 1,209 | 1,160 | 1,060 |
| <b>4,02N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,340 | 0,595 | 0,810 | 0,960 | 1,040 |
|                  | <b>y(m)</b> | 1,095 | 1,165 | 1,158 | 1,077 | 0,960 |
| <b>5,18N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,350 | 0,613 | 0,820 | 0,954 | 0,985 |
|                  | <b>y(m)</b> | 1,080 | 1,132 | 1,100 | 0,995 | 0,870 |
|                  |             |       |       |       |       |       |
| <b>Sem Carga</b> | <b>x(m)</b> | 0,322 | 0,545 | 0,730 | 0,880 | 1,005 |
|                  | <b>y(m)</b> | 1,125 | 1,265 | 1,380 | 1,465 | 1,540 |

Tabela A.3 Coordenadas obtidas estaticamente para uma inclinação de 60°.

| Tração           | Coord.      |       |       |       |       |       |
|------------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <b>0,99N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,180 | 0,320 | 0,450 | 0,565 | 0,660 |
|                  | <b>y(m)</b> | 1,232 | 1,458 | 1,635 | 1,760 | 1,845 |
| <b>1,98N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,195 | 0,345 | 0,495 | 0,650 | 0,790 |
|                  | <b>y(m)</b> | 1,230 | 1,445 | 1,600 | 1,670 | 1,685 |
| <b>2,93N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,195 | 0,365 | 0,540 | 0,700 | 0,835 |
|                  | <b>y(m)</b> | 1,225 | 1,430 | 1,557 | 1,588 | 1,535 |
| <b>4,02N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,210 | 0,385 | 0,580 | 0,745 | 0,850 |
|                  | <b>y(m)</b> | 1,220 | 1,410 | 1,510 | 1,500 | 1,410 |
| <b>5,18N</b>     | <b>x(m)</b> | 0,215 | 0,405 | 0,615 | 0,770 | 0,860 |
|                  | <b>y(m)</b> | 1,220 | 1,394 | 1,464 | 1,413 | 1,300 |
|                  |             |       |       |       |       |       |
| <b>Sem Carga</b> | <b>x(m)</b> | 0,180 | 0,305 | 0,405 | 0,490 | 0,580 |
|                  | <b>y(m)</b> | 1,235 | 1,468 | 1,658 | 1,805 | 1,930 |

Tabela A.4: Coordenadas ao longo de peça, para diferentes carregamentos de tração do cabo.

| Tração       | Coord.      |       |       |       |       |       |
|--------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <b>0,0N*</b> | <b>x(m)</b> | 0,380 | 0,647 | 0,865 | 1,033 | 1,180 |
|              | <b>y(m)</b> | 0,910 | 0,905 | 0,890 | 0,869 | 0,844 |
| <b>0,99N</b> | <b>x(m)</b> | 0,380 | 0,645 | 0,865 | 1,032 | 1,175 |
|              | <b>y(m)</b> | 0,910 | 0,900 | 0,879 | 0,848 | 0,805 |
| <b>1,98N</b> | <b>x(m)</b> | 0,380 | 0,645 | 0,862 | 1,029 | 1,155 |
|              | <b>y(m)</b> | 0,907 | 0,895 | 0,864 | 0,815 | 0,738 |
| <b>2,93N</b> | <b>x(m)</b> | 0,380 | 0,645 | 0,863 | 1,019 | 1,120 |
|              | <b>y(m)</b> | 0,897 | 0,893 | 0,858 | 0,785 | 0,680 |
| <b>4,02N</b> | <b>x(m)</b> | 0,383 | 0,649 | 0,860 | 0,994 | 1,045 |
|              | <b>y(m)</b> | 0,908 | 0,885 | 0,835 | 0,740 | 0,601 |
| <b>5,18N</b> | <b>x(m)</b> | 0,380 | 0,645 | 0,853 | 0,950 | 0,920 |
|              | <b>y(m)</b> | 0,905 | 0,879 | 0,808 | 0,675 | 0,535 |

\* Massa do acelerômetro na extremidade da peça.

## B. ANEXO B – Modos de Vibrar Teóricos.

**Modos de vibrar relativos a configuração inicial com acelerômetro na extremidade e força de tração nula**

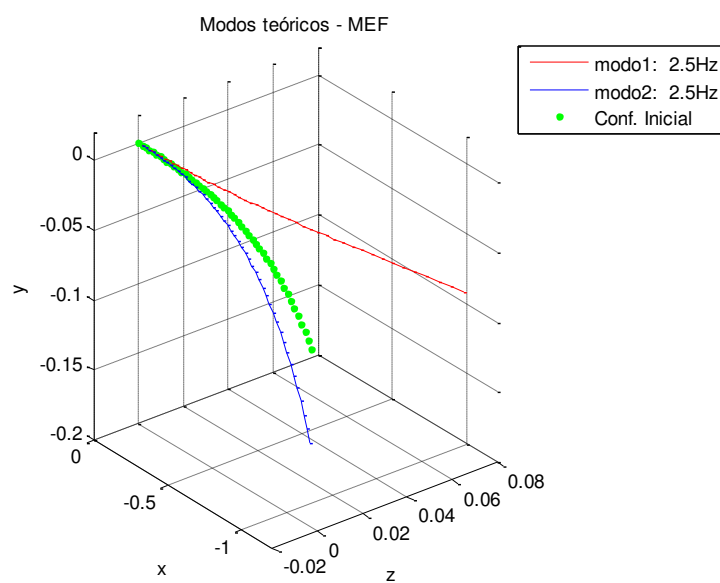


Figura B.1 : Primeiro e segundo modos de vibrar.

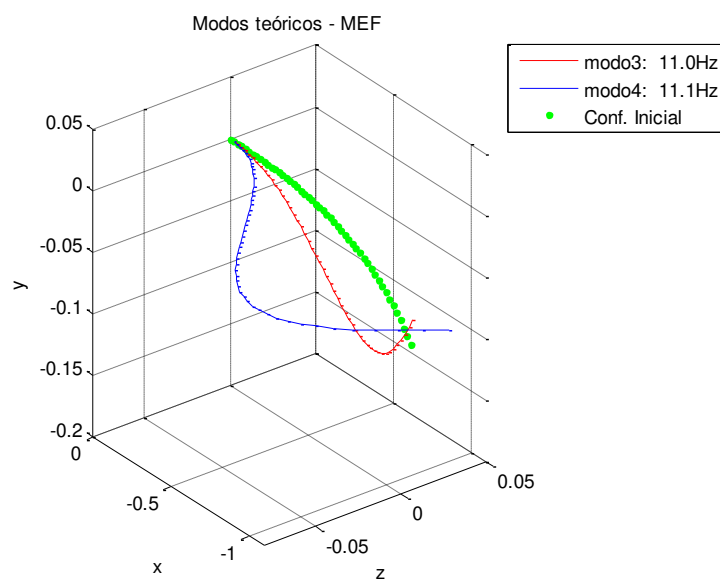


Figura B.2 : Terceiro e quarto modos de vibrar.

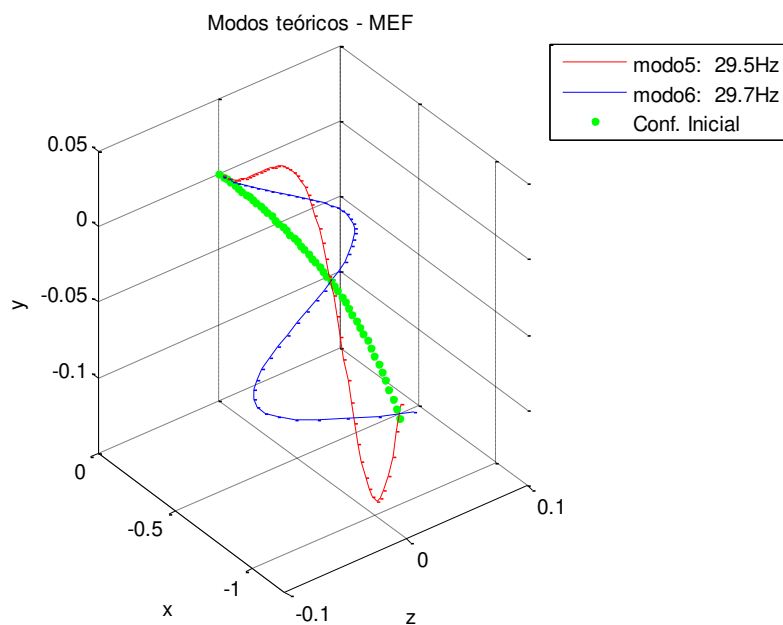


Figura B.3 : Quinto e sexto modos de vibrar.

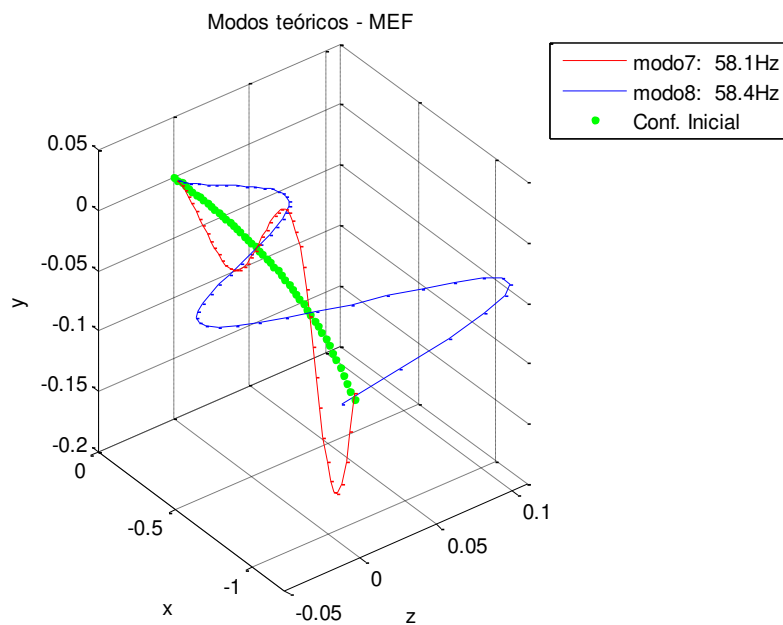


Figura B.4 : Sétimo e oitavo modos de vibrar.

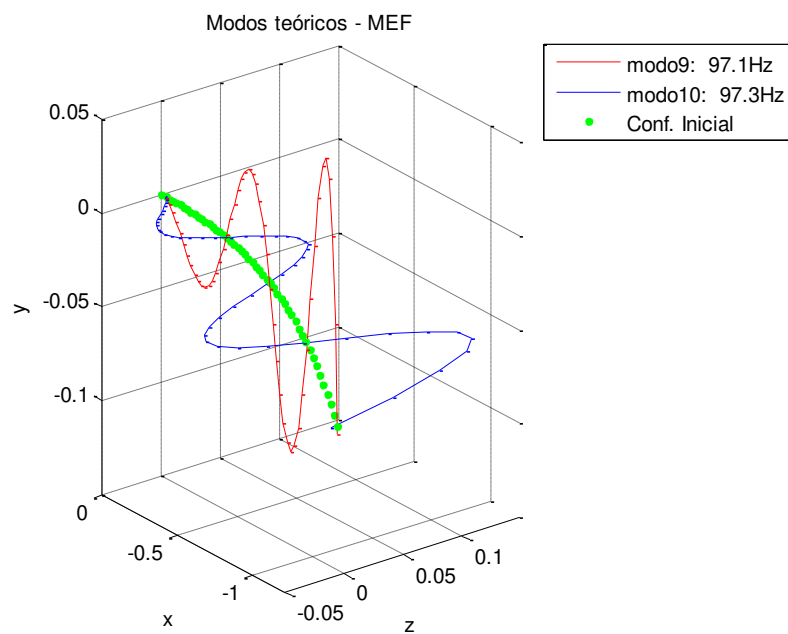


Figura B.5 : Nono e décimo modos de vibrar.

## Modos de vibrar relativos a configuração como força de tração de 0,99N



Figura B.6 : Configuração da peça deformada devido ao carregamento de 0,99N.

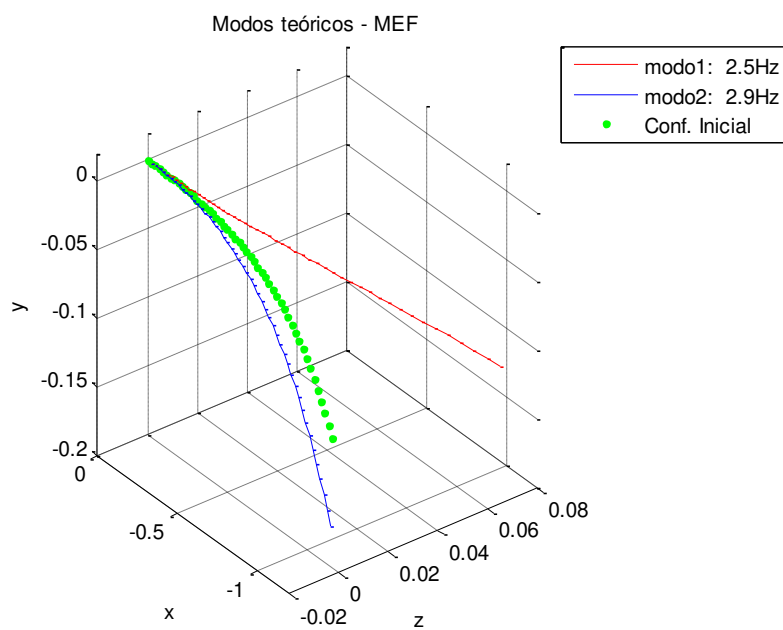


Figura B.7 : Primeiro e segundo modos de vibrar.

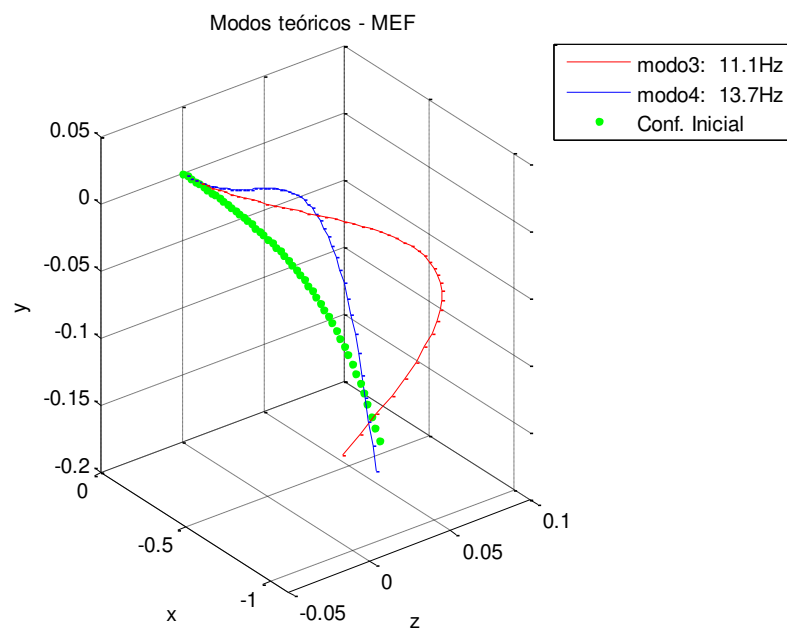


Figura B.8 : Terceiro e quarto modos de vibrar.

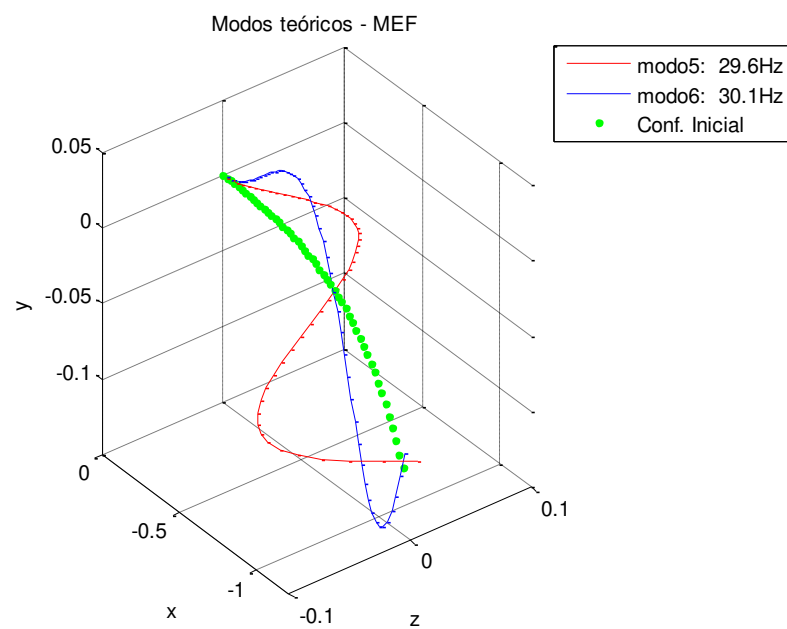


Figura B.9 : Quinto e sexto modos de vibrar.

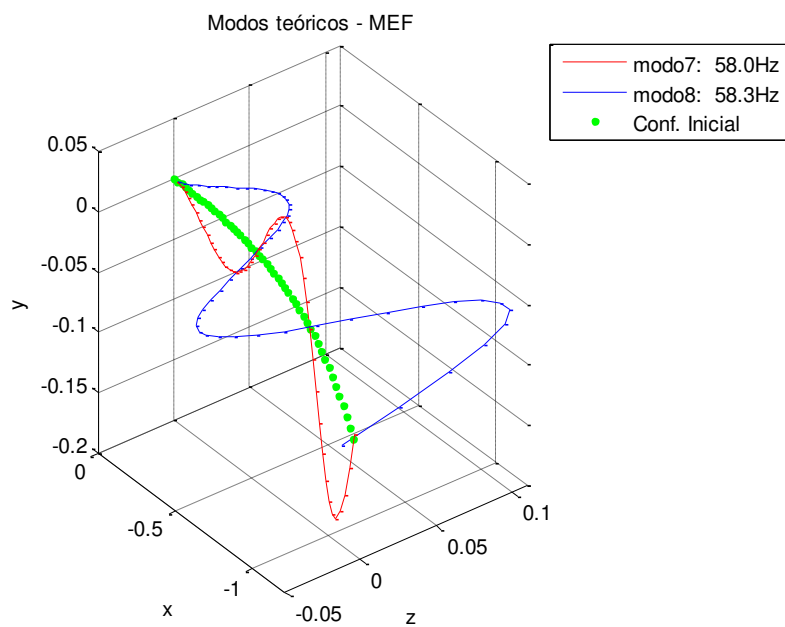


Figura B.10 : Sétimo e oitavo modos de vibrar.

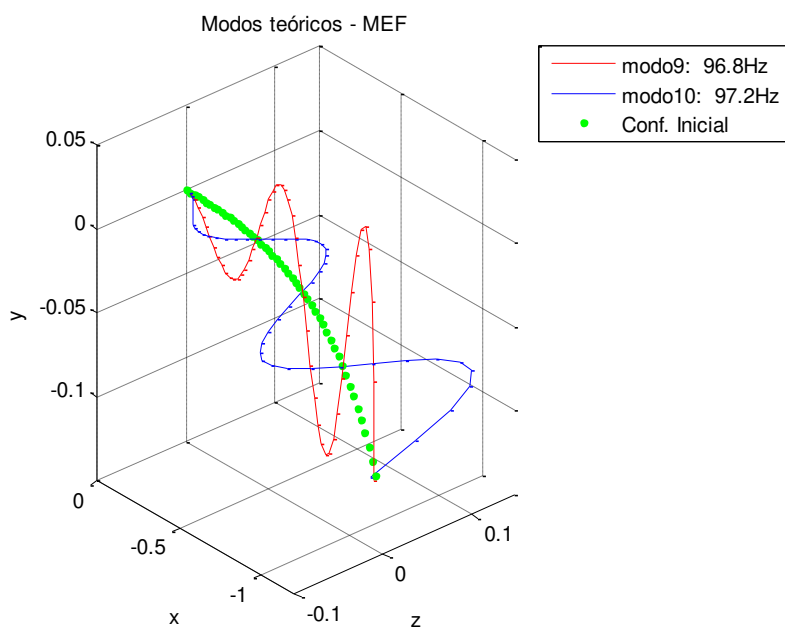


Figura B.11 : Nono e décimo modos de vibrar.

## Modos de vibrar relativos a configuração como força de tração de 1,98N



Figura B.12 : Configuração da peça deformada devido ao carregamento de 1,98 N.

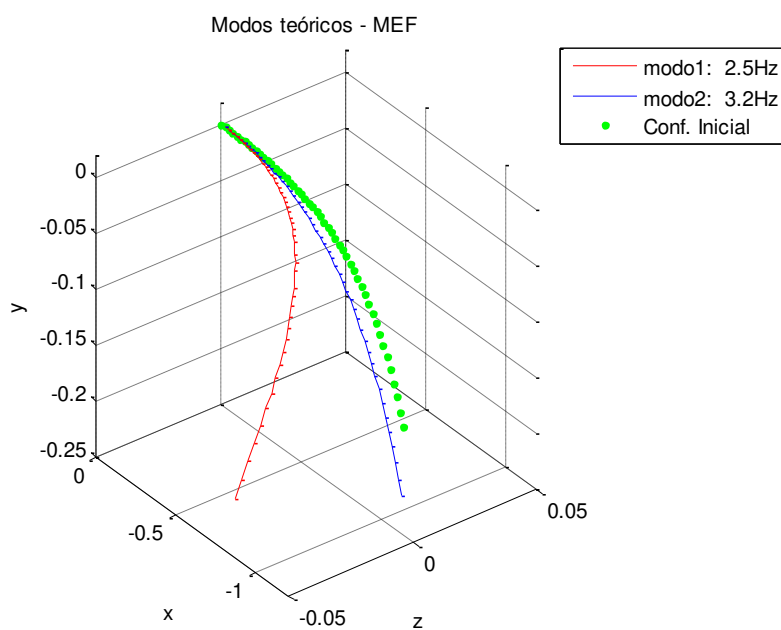


Figura B.13 : Primeiro e segundo modos de vibrar.

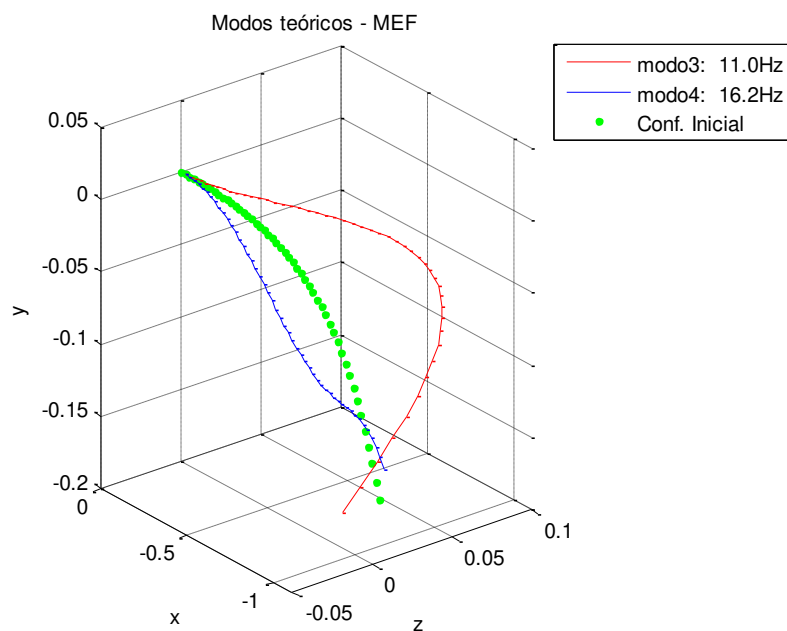


Figura B.14 : Terceiro e quarto modos de vibrar.

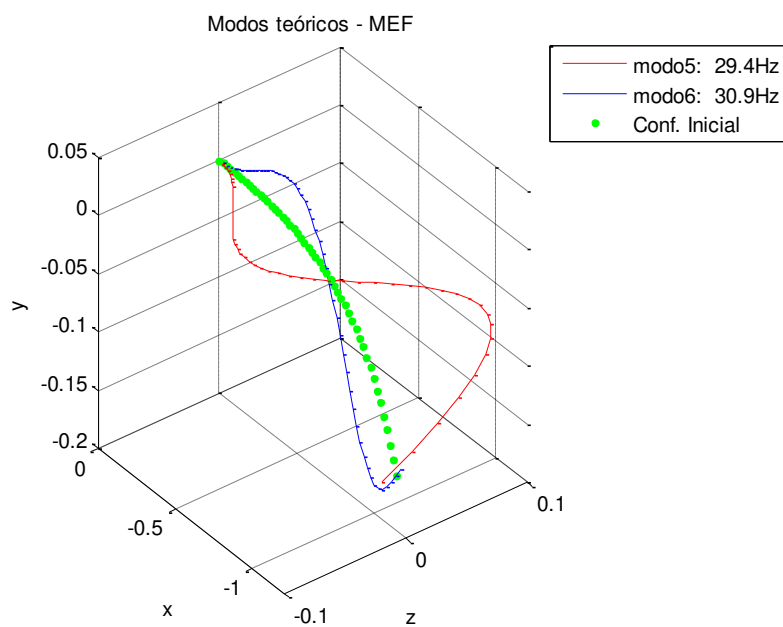


Figura B.15 : Quinto e sexto modos de vibrar.

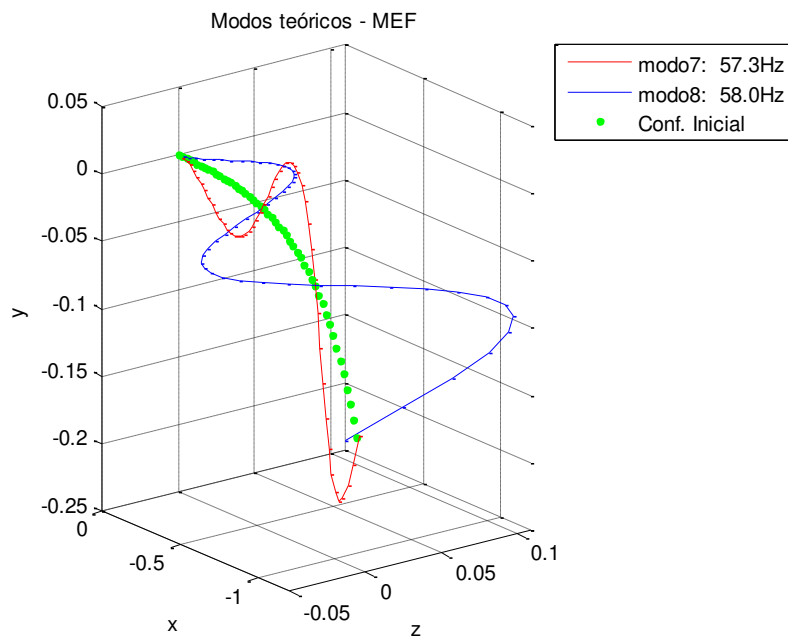


Figura B.16 : Sétimo e oitavo modos de vibrar.

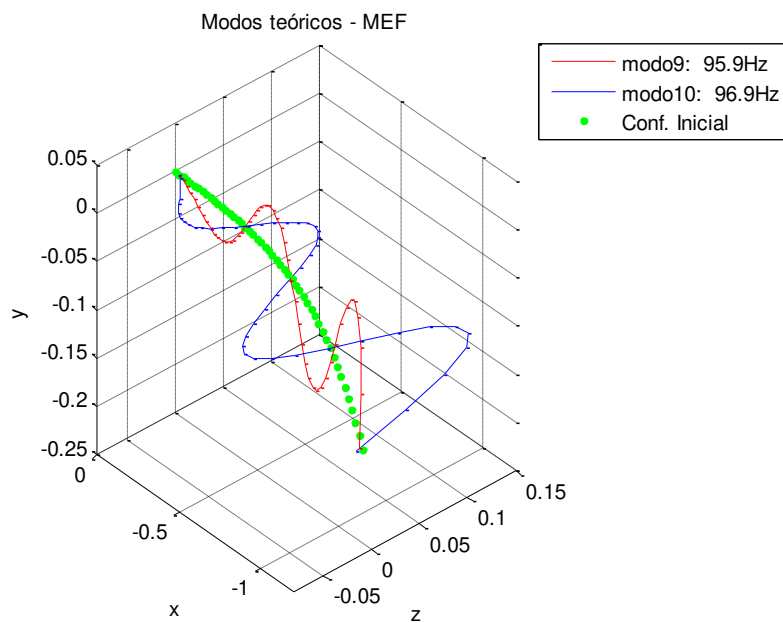


Figura B.17 : Nono e décimo modos de vibrar.

## Modos de vibrar relativos a configuração como força de tração de 2,93N

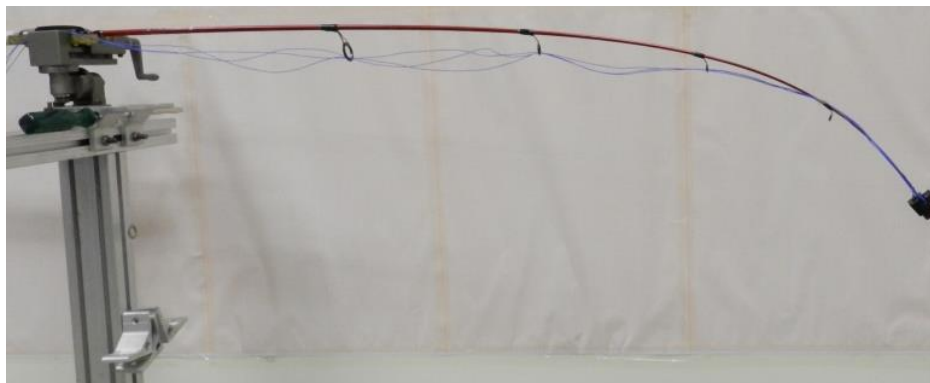


Figura B.18 : Configuração da peça deformada devido ao carregamento de 2,93 N.

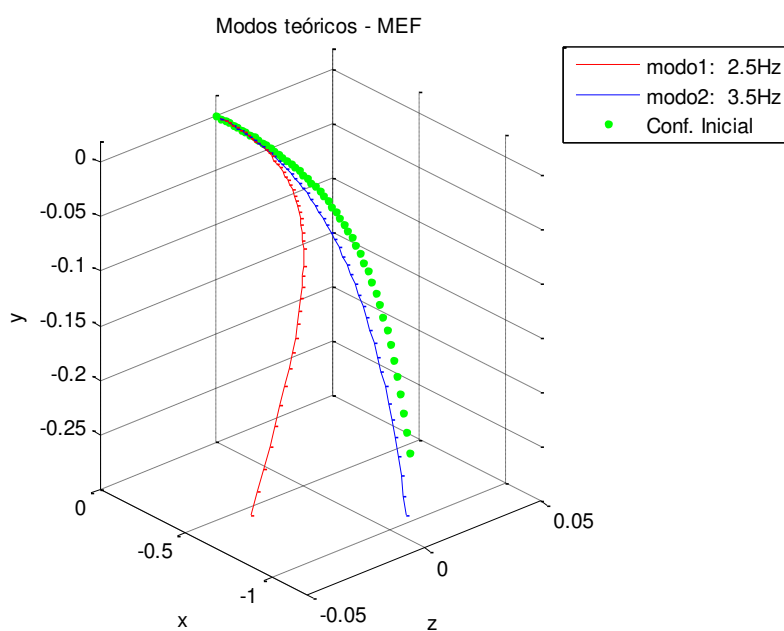


Figura B.19 : Primeiro e segundo modos de vibrar.

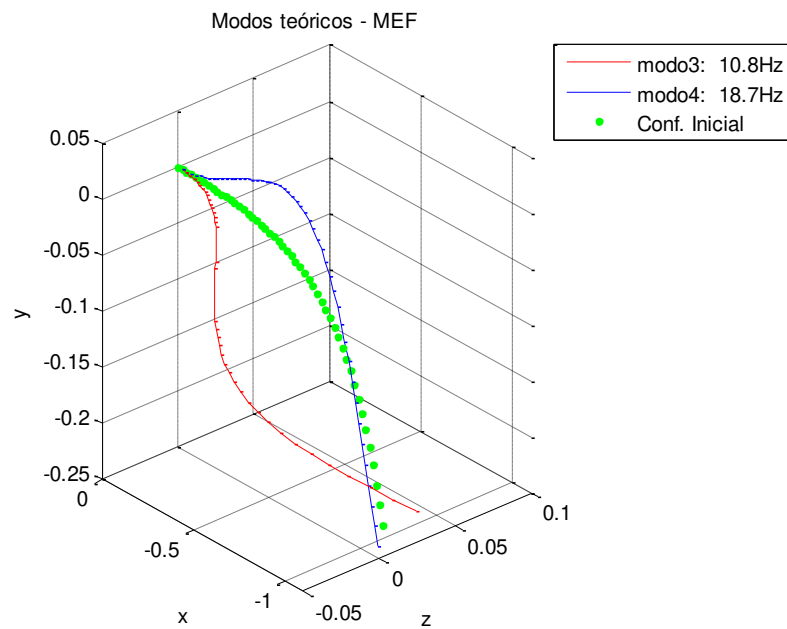


Figura B.20 : Terceiro e quarto modos de vibrar.

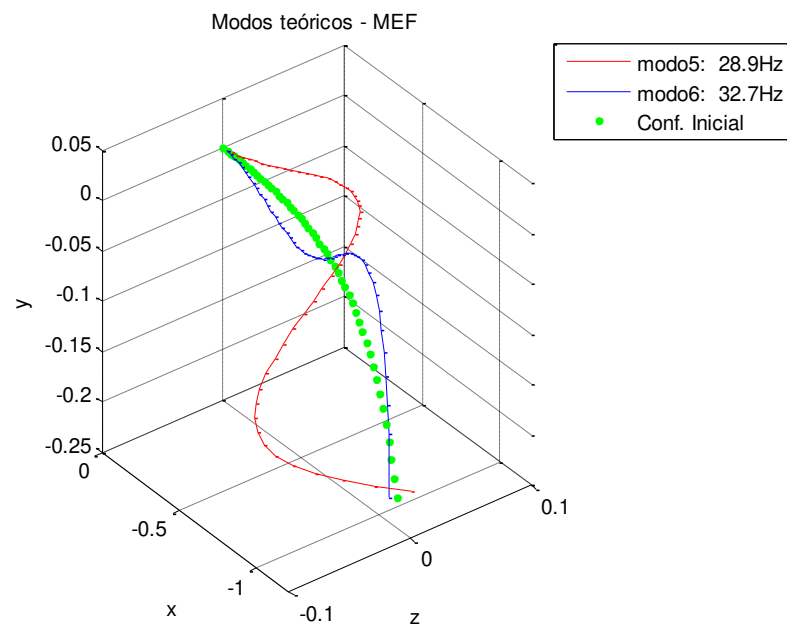


Figura B.21 : Quinto e sexto modos de vibrar.

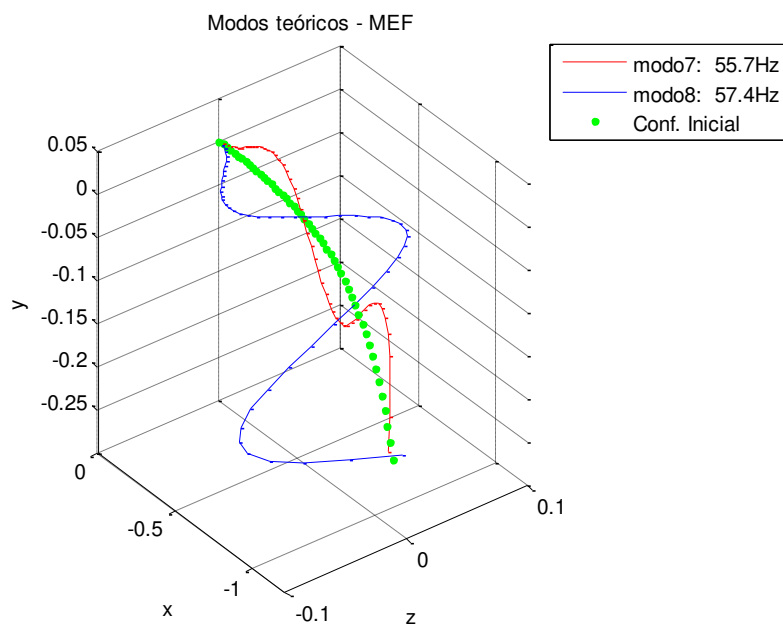


Figura B.22 : Sétimo e oitavo modos de vibrar.

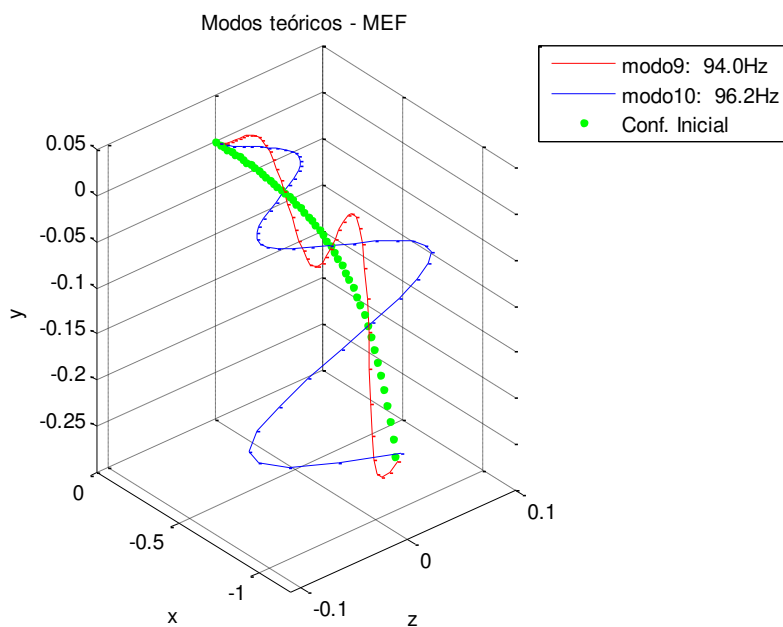


Figura B.23 : Nono e décimo modos de vibrar.

## Modos de vibrar relativos a configuração como força de tração de 4,02N

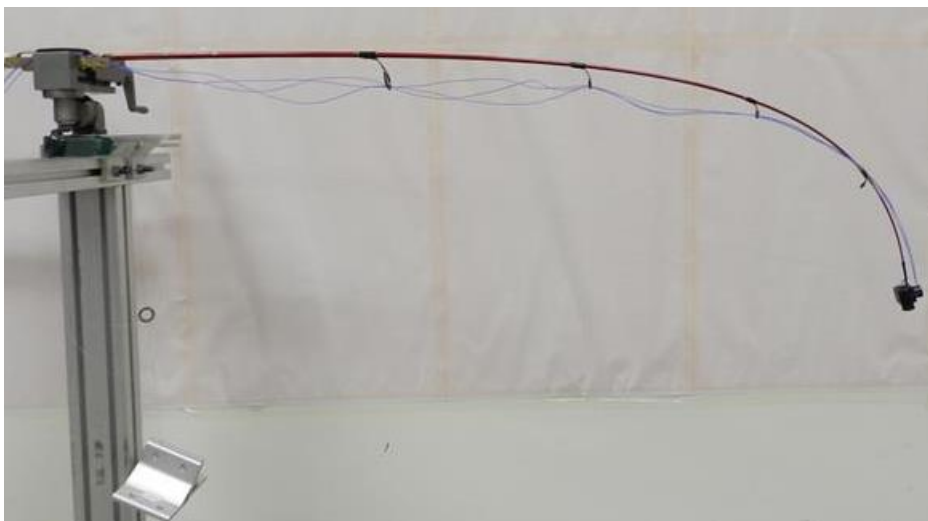


Figura B.24 : Configuração da peça deformada devido ao carregamento de 4,02 N.

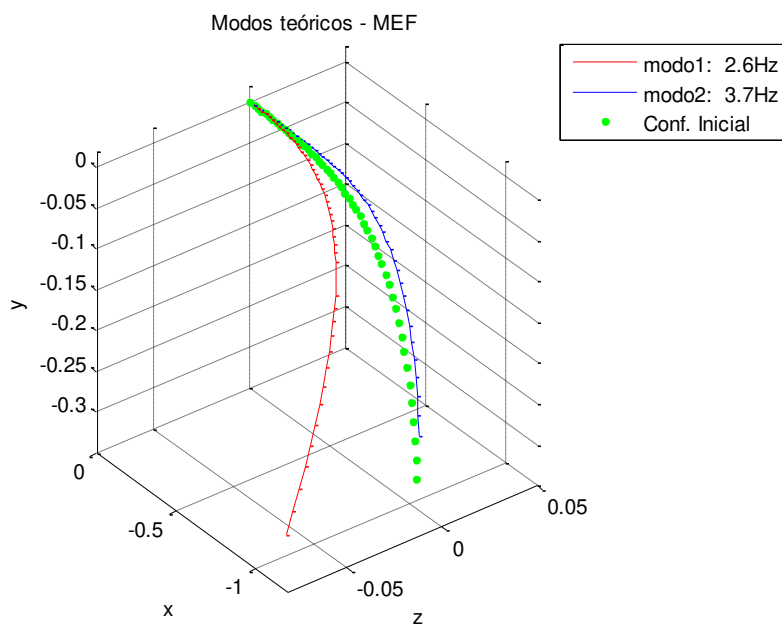


Figura B.25 : Primeiro e segundo modos de vibrar.

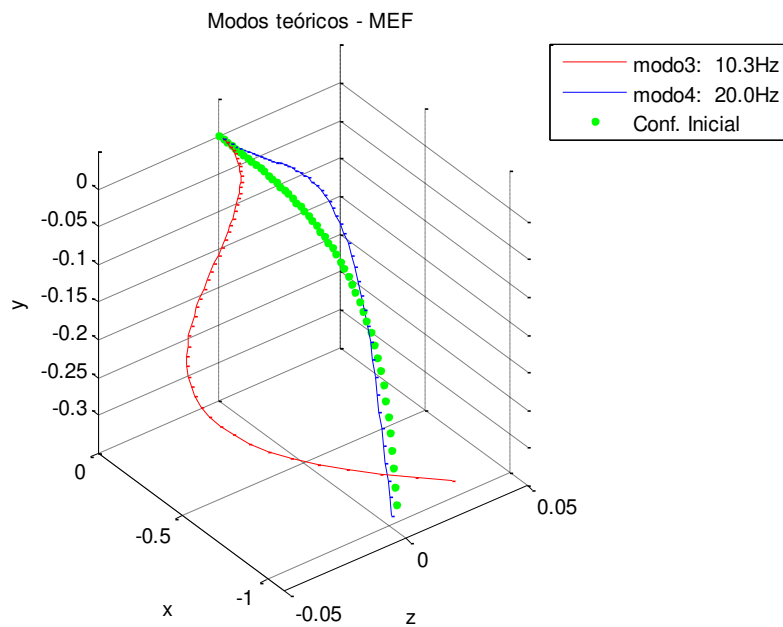


Figura B.26 : Terceiro e quarto modos de vibrar.

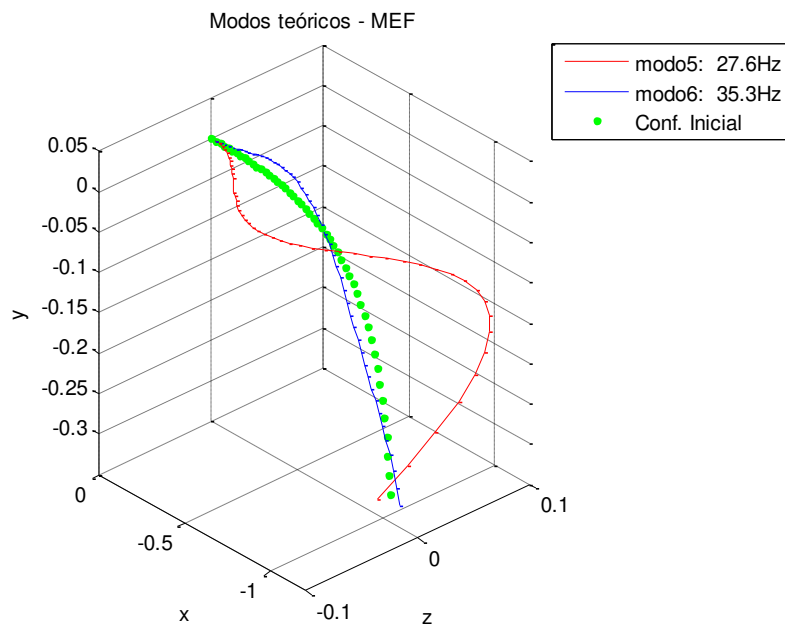


Figura B.27 : Quinto e sexto modos de vibrar.

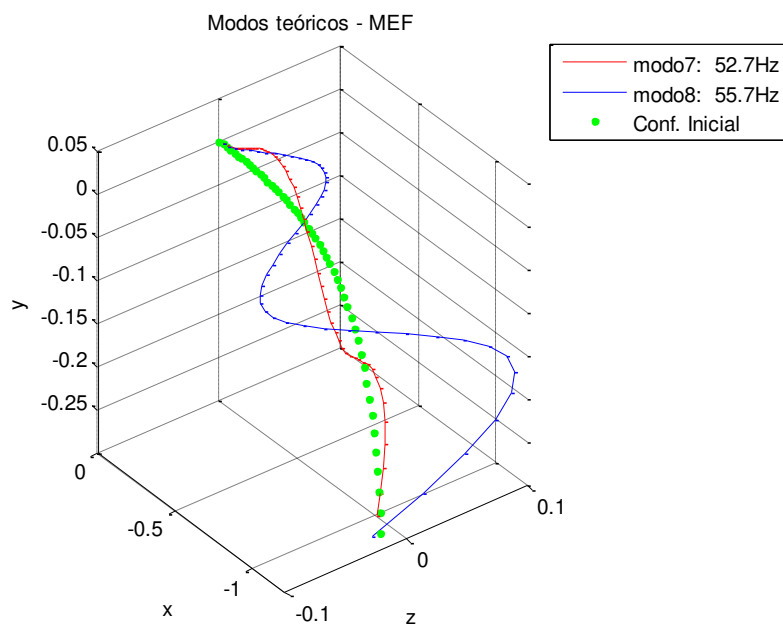


Figura B.28 : Sétimo e oitavo modos de vibrar.

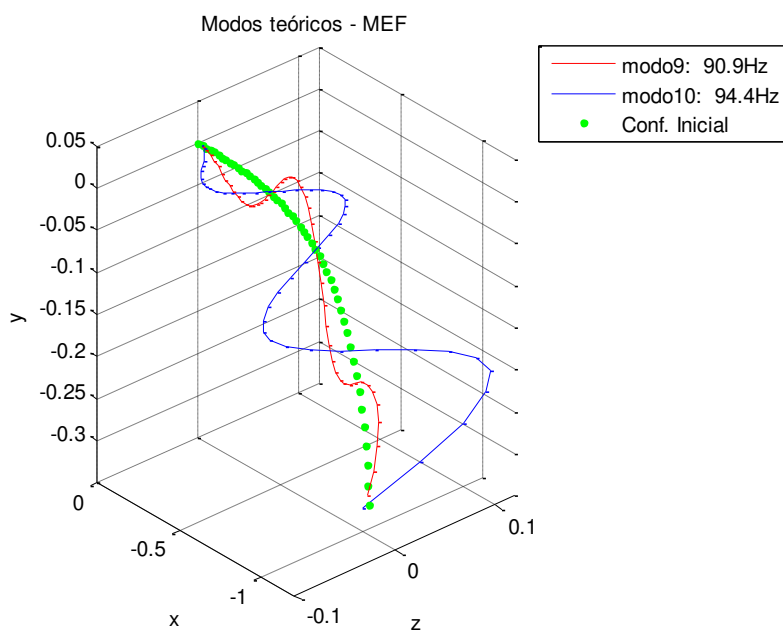


Figura B.29 : Nono e décimo modos de vibrar.

## Modos de vibrar relativos a configuração como força de tração de 5,18N

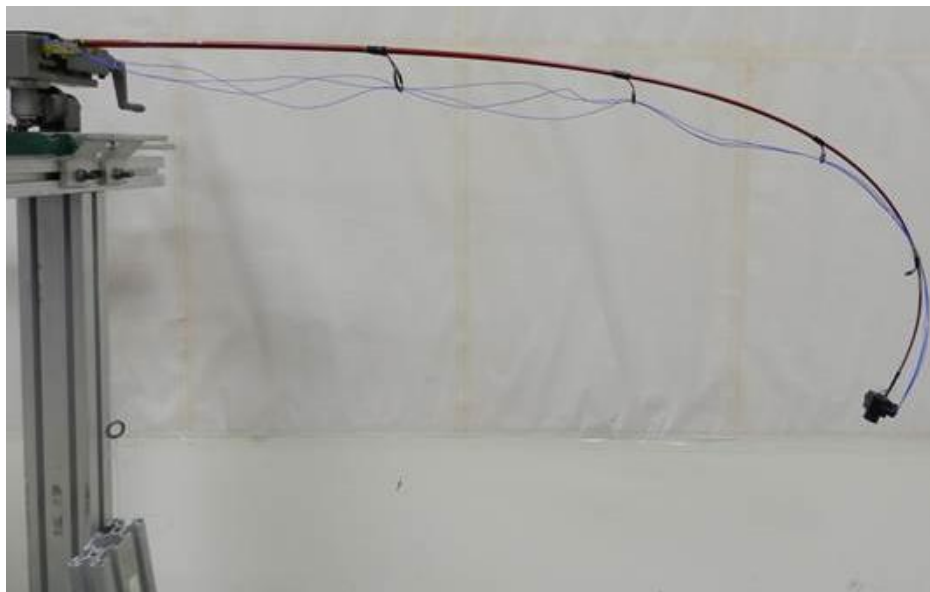


Figura B.30 : Configuração da peça deformada devido ao carregamento de 5,18 N.

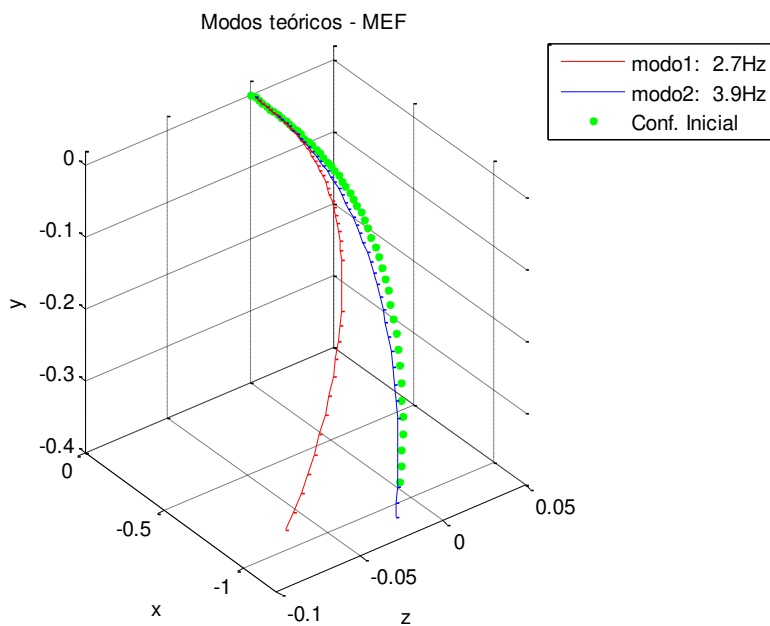


Figura B.31 : Primeiro e segundo modos de vibrar.

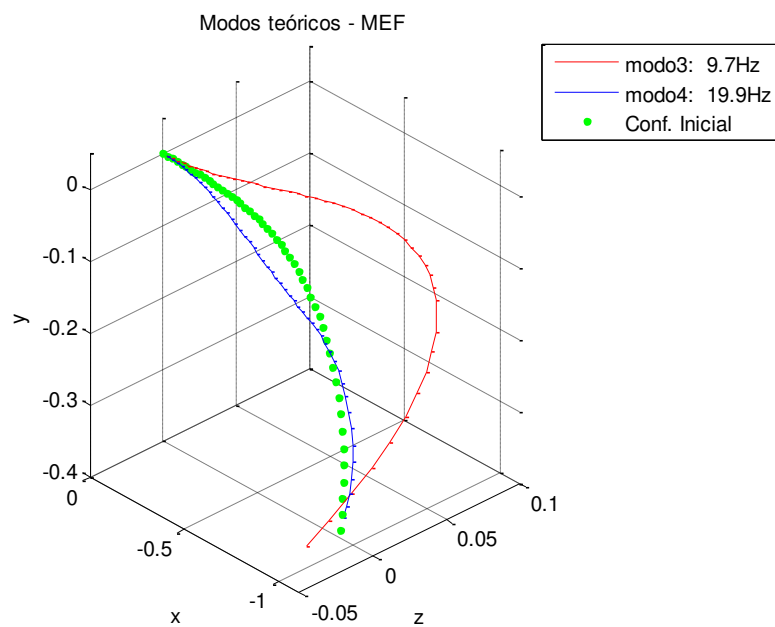


Figura B.32 : Terceiro e quarto modos de vibrar.

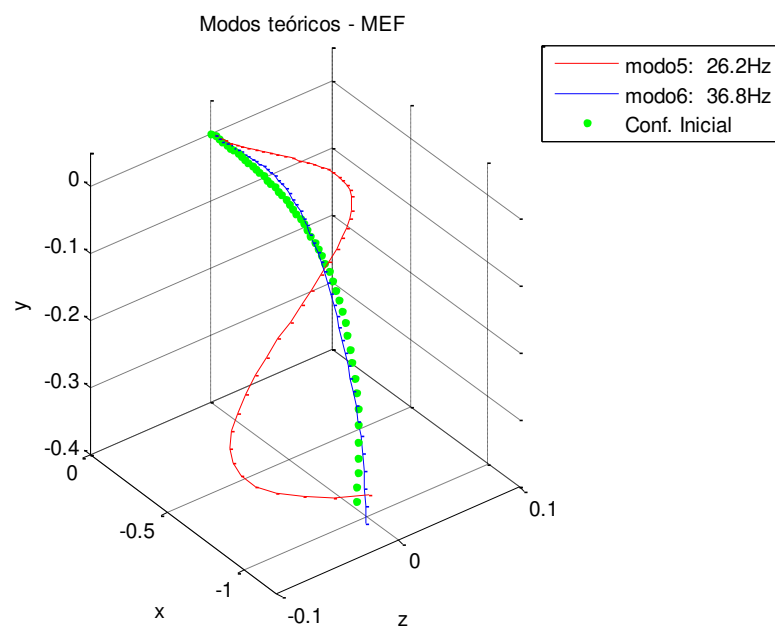


Figura B.33 : Quinto e sexto modos de vibrar.

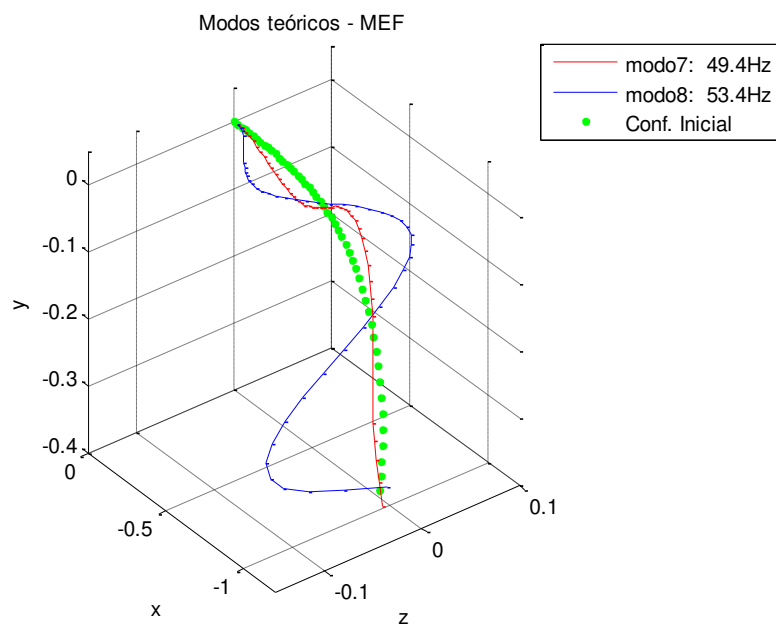


Figura B.34 : Sétimo e oitavo modos de vibrar.

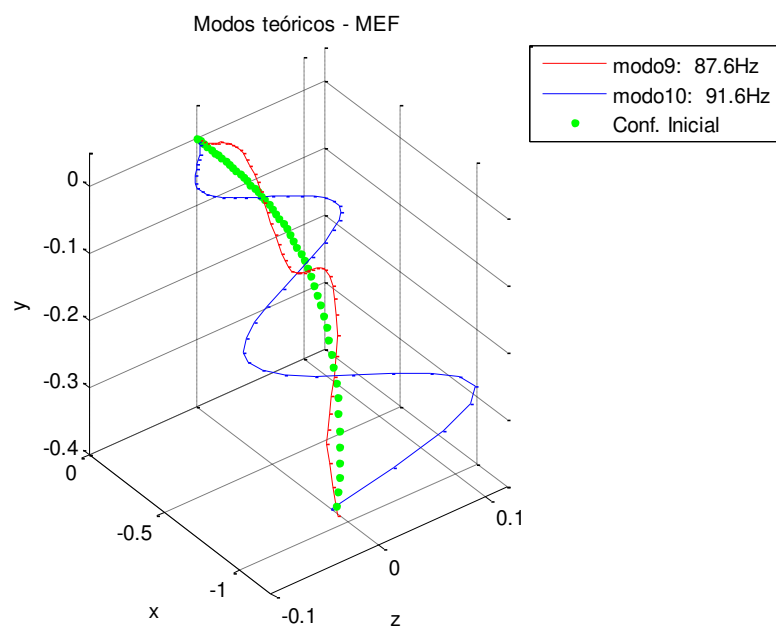


Figura B.35 : Nono e décimo modos de vibrar.