

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**DESENVOLVIMENTO DE UMA METODOLOGIA PARA ANÁLISE DE
BIOENGENHARIA EM OSSOS COMPACTOS COM REMODELAGEM
SUPERFICIAL PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO 3D
EM MEIOS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICOS**

**Autor: Pedro Yoshito Noritomi
Orientador: Paulo Sollero**

08/2006

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**DESENVOLVIMENTO DE UMA METODOLOGIA PARA ANÁLISE DE
BIOENGENHARIA EM OSSOS COMPACTOS COM REMODELAGEM
SUPERFICIAL PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO 3D
EM MEIOS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICOS**

Autor: **Pedro Yoshito Noritomi**

Orientador: **Paulo Sollero**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2005
S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

N777d Noritomi, Pedro Yoshito
Desenvolvimento de uma metodologia para análise de bioengenharia em ossos compactos com remodelagem superficial pelo método dos elementos de contorno 3D em meios transversalmente isotrópicos / Pedro Yoshito Noritomi.-- Campinas, SP: [s.n.], 2005.

Orientador: Paulo Sollero
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Bioengenharia. 2. Ossos - Remodelagem. 3. Ossos - Crescimento. 4. Método de elementos de contorno. I. Sollero, Paulo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Development of a methodology for bioengineering analysis of compact bones with surface remodeling using 3D boundary element method in transversely isotropic media

Palavras-chave em Inglês: Bioengineering, Boundary elements, Surface bone remodeling, Transversely isotropic material

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Adrián Pablo Cisilino, Willian Dias Belangero, Euclides de Mesquita Neto e Sérgio Tonini Button

Data da defesa: 08/07/2005

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

TESE DE DOUTORADO

**Desenvolvimento de uma Metodologia para Análise de
Bioengenharia em Ossos Compactos com Remodelagem
Superficial pelo Método dos Elementos de Contorno 3D em
Meios Transversalmente Isotrópicos**

Autor: **Pedro Yoshito Noritomi**

Orientador: **Paulo Sollero**

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:

MM

Prof. Dr. Paulo Sollero, orientador
Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Prof. Dr. Adrián Pablo Cisilino
Universidade de Mar Del Plata, Argentina.

Prof. Dr. William Dias Belangero
Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Prof. Dr. Sérgio Tonini Button
Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Campinas, 8 de julho de 2005

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família, em especial meu pai, minha mãe e à Zilda.

Agradecimentos

Agradeço à CAPES e à Fapesp pelo apoio financeiro e ao Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, bem como ao Professor Doutor Paulo Sollero, pelo acolhimento e auxílio no desenvolvimento desta longa jornada.

Agradeço também a todos os amigos e colegas cuja convivência e apoio foram inestimáveis para a conclusão desse trabalho e sem os quais, muito da qualidade, seja das idéias ou da própria estética da apresentação não seriam as mesmas. Especial agradecimento ao Alex, Luiz e William, por seu gosto pela conversa e disposição em mantê-la por horas, na busca por um esclarecimento maior de idéias e conceitos. A Professor Ronaldo Carrion, agora integrante do quadro da UNESP *campus* de Sorocaba, pelo apoio e pelo auxílio no reforço dos conceitos de tenacidade e resistência (tanto na engenharia como na vida). Ainda no agradecimento aos amigos, não posso deixar de citar o Paulo Augusto, atualmente engenheiro da Embraer, pelas soluções oferecidas para malhas problemáticas no Patran[®], sem as quais não seria possível analisar as estruturas ósseas deste trabalho.

Entre os diversos colaboradores, é fundamental citar o Jorge Vicente e o Ailton Santa Bárbara do CenPRA, assim como o Bruno Cassaro e o Richard Gallo, pelo auxílio na obtenção das geometrias de ossos em STL, bem como o Professor Doutor William Dias Belangero do HC da UNICAMP, pelo empenho no esclarecimento de conceitos médicos e pela ajuda com as tomografias computadorizadas.

Finalmente, e mais importante que tudo, quero agradecer a Zilda, pelo apoio, atenção, carinho e amor, principalmente em face a todas as dificuldades impostas pelo trabalho ao longo caminho. Igualmente agradeço ao meu pai, por ter lido e corrigido o manuscrito do trabalho, além de sempre ter aconselhado este filho a seguir o seu caminho.

“O Senhor é meu pastor.
Nada me falta.
Em verdes pastagens me faz repousar;
para fontes tranqüilas me conduz,
e restaura minhas forças...
Diante de mim preparas a mesa,
à frente dos meus opressores;
unges minha cabeça com óleo
e minha taça transborda.
Sim, felicidade e amor me acompanham
todos os dias de minha vida.
Minha morada é a casa do Senhor,
por dias sem fim.”

Salmo 23

Resumo

Noritomi, Pedro Yoshito, *Desenvolvimento de uma Metodologia para Análise de Bioengenharia em Ossos Compactos com Remodelagem Superficial pelo Método dos Elementos de Contorno 3D em Meios Transversalmente Isotrópicos*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005. 132 p. Tese.

Este trabalho mostra o desenvolvimento de uma metodologia para análise de problemas de bioengenharia, aplicando modelagem numérica elastostática de tensões e deformações, baseada no método dos elementos de contorno com formulação 3D para meios transversalmente isotrópicos lineares, incluindo a capacidade de simulação do comportamento de remodelagem óssea superficial. A implementação do núcleo transversalmente isotrópico sobre a estrutura básica de análise por elementos de contorno 3D utilizou a solução fundamental proposta por Pan & Chou e revisada por Loloï, tendo exigido o cálculo adicional das soluções fundamentais de força de superfície a partir da derivação das soluções fundamentais de deslocamento. O modelo de remodelagem óssea superficial baseou-se na hipótese de estímulo biológico por campo de deformação, partindo de um modelo 2D, adaptado para o espaço 3D com o uso de deformações principais como grandezas de referência. As implementações foram testadas através de análises numéricas de problemas com solução analítica e validações com resultados de aplicações comerciais baseadas em elementos finitos, para problemas padrão de engenharia, bem como comparações com resultados da literatura para problemas de bioengenharia. A análise dos resultados mostrará que, tanto a metodologia quanto as implementações são funcionais, oferecendo uma base sólida para desenvolvimento e teste de novas soluções de bioengenharia.

Palavras Chave

Bioengenharia, Elementos de Contorno, Remodelagem Óssea Superficial, Material Transversalmente Isotrópico.

Abstract

Noritomi, Pedro Yoshito, *Development of a Methodology for Bioengineering Analysis of Compact Bones with Surface Remodeling Using 3D Boundary Element Method in Transversely Isotropic Media*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005. 132 p. Tese.

This work shows the development of a methodology to analyse bioengineering problems using elastostatic stress-strain numerical modeling based on a 3D transversely isotropic linear boundary element formulation including surface bone remodeling simulation capabilities. The transversely isotropic kernel implementation on the basic 3D boundary element analysis program used the fundamental solution proposed by Pan & Chou and revised by Loloï, with additional fundamental solutions for traction calculation made with the displacement fundamental solution derivatives. The surface bone remodeling model was based on a 2D strain field biological stimulus, extended to the 3D space by using the principal strain as reference values. The implementations were tested through numerical analysis of problems with analytical solution and validation with commercial finite elements applications for standard engineering problems, as well as comparison with literature data for bioengineering problems. The analysis of results will show that both, the methodology and the implementations are fully functional, offering a solid start for development and test of new bioengineering solutions.

Keywords

Bioengineering, Boundary Elements, Surface Bone Remodeling, Transversely Isotropic Material.

Sumário

Introdução.....	1
1.Considerações Iniciais.....	1
2.Motivação.....	6
3.Objetivo.....	8
Fundamentação Teórica.....	10
1.Caracterização do Material Ósseo e suas Estruturas.....	11
2.Métodos de Análise Numérica de Engenharia e o Método dos Elementos de Contorno.....	21
2.1.Solução Fundamental Isotrópica.....	27
2.2.Solução Fundamental Transversalmente Isotrópica.....	32
3.Particularidades da Aplicação em Bioengenharia.....	43
3.1.Remodelagem Óssea Superficial.....	48
Metodologia Proposta.....	54
1.Metodologia de Aquisição da Geometria Óssea.....	54
2.Metodologia Para Realização da Análise.....	65
Implementações Computacionais.....	69
1.Implementação da Solução Fundamental Transversalmente Isotrópica.....	69
2.Implementação da Remodelagem Óssea Superficial.....	75
Análise de Resultados e Discussão.....	87
1.Validação da Implementação da Solução Fundamental Transversalmente Isotrópica.....	87
2.Resultados Para o elemento triangular linear.....	95
3.Resultados da Remodelagem Óssea Superficial.....	96
4.Teste Qualitativo da Implementação Completa.....	104

Conclusão e Propostas Para Trabalhos Futuros.....	114
Bibliografia.....	119
Anexo 1.....	126
Anexo 2.....	128

Lista de Figuras

Figura 1. Hemácias falciformes entre hemácias saudáveis (Rocha, 2001).....	3
Figura 2. Formação de coágulos por afoçamento de células (Rocha, 2001).....	3
Figura 3. Distribuição do osso cortical e esponjoso em um osso longo (Benedito, 2005).....	12
Figura 4. Tipos de ossos e sua distribuição no esqueleto humano (Benedito, 2005).....	13
Figura 5. Ilustração do comportamento isotrópico, resposta igual em qualquer direção.....	28
Figura 6. Ilustração de um corpo com comportamento transversalmente isotrópico.....	32
Figura 7. Ilustração da orientação das fibras no osso cortical em um osso longo e a analogia com uma haste de madeira (Huiskes, 2000).....	33
Figura 8. Ilustração da remodelagem nodal em elementos sobre uma superfície.....	51
Figura 9. Vista dos tomos (b) e da seção óssea reconstruída (a) (Silva et al., 2002).....	57
Figura 10. Malha representativa STL (a) e malha de elementos de contorno (b).....	63
Figura 11. Fluxograma do módulo kerneltifs_10.m.....	72
Figura 12. Eixo local do material alinhado com o eixo de coordenadas global.....	74
Figura 13. Giro do problema.....	75
Figura 14. Fluxograma da inserção do módulo de remodelagem na estrutura principal.....	81
Figura 15. Fluxograma do módulo de remodelagem óssea superficial (remodelnodal.m).....	82
Figura 16. Configuração proposta para validação por Lolo, 2000.....	88
Figura 17. Modelo analisado pelo método dos elementos de contorno.....	92
Figura 18. Modelo analisado pelo método dos elementos finitos.....	93
Figura 19. Comparação do perfil de deslocamentos em X.....	93
Figura 20. Comparação do perfil de deslocamentos em Y.....	94
Figura 21. Comparação do perfil de deslocamentos em Z.....	94
Figura 22. Resultado de deslocamentos totais para o problema proposto por Kane, 1994.....	96
Figura 23. Hipótese de extração do modelo cilíndrico utilizado na remodelagem.....	97
Figura 24. Vista lateral do cilindro ósseo e suas condições de contorno.....	97
Figura 25. Primeira malha para o problema de remodelagem superficial.....	98
Figura 26. Remodelagem superficial após 14 iterações.....	99
Figura 27. Gráfico de progresso da remodelagem para a primeira malha.....	100
Figura 28. Segunda malha para remodelagem óssea superficial.....	101
Figura 29. Remodelagem superficial após 40 iterações.....	102
Figura 30. Gráfico de progresso de remodelagem para a segunda malha.....	103
Figura 31. Malha do úmero, em formato STL, gerada pelo CenPRA.....	105
Figura 32. Malha de elementos de contorno quadrilaterais de oito nós.....	105
Figura 33. Modelo carregado com condições de contorno.....	106
Figura 34. Resultados de deslocamentos na direção X com ampliação de 25 vezes.....	107
Figura 35. Resultados de deslocamentos na direção Y com ampliação de 25 vezes.....	107
Figura 36. Resultados de deslocamentos na direção Z com ampliação de 25 vezes.....	108

Figura 37. Geometria da mandíbula em malha com condições de contorno.....	110
Figura 38. Detalhe do corte do canal medular definido.....	110
Figura 39. Vista da saída do canal medular e campo de deslocamentos em X.....	111
Figura 40. Campo de deslocamentos em Y.....	111
Figura 41. Campo de deslocamentos em Z.....	112

Lista de Tabelas

Tabela 1. Funções e constantes para o caso de $v_1 \neq v_2$	41
Tabela 2. Funções e constantes para o caso de $v_1 = v_2$	41
Tabela 3. Funções e constantes para todos os casos com $n = 3$	42
Tabela 4. Propriedades dos materiais usadas no exemplo.....	88
Tabela 5. Resultados para o material 1.....	88
Tabela 6. Resultados para o material 2.....	89
Tabela 7. Resultados para o material 3.....	89
Tabela 8. Propriedades do material.....	91
Tabela 9. Comparativo de resultados.....	95

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A busca por novas tecnologias e avanços científicos tem caracterizado a História moderna da humanidade. Inovações e desenvolvimentos da tecnologia fazem parte do cotidiano dos noticiários e da vida de grande parte das pessoas. Novos aparelhos são criados e, com eles, novas comodidades, sequer imaginadas pelas gerações anteriores, passam a figurar entre os objetos de desejo da nova sociedade. Toda essa atividade de desenvolvimento e geração de novidades vem exercendo profunda influência sobre a relação entre seres humanos e deles com o meio ambiente que os cerca (*Etchebehere, 1998*).

Quando se fala em inovações, grande parte delas é conseqüência do surgimento de novas novas tecnologias. Entre os diversos ramos do conhecimento ligados à tecnologia, dois deles podem se destacar e são a Medicina e a Engenharia. A primeira procura oferecer novas maneiras de prevenir e recuperar a saúde e a condição de vida das pessoas enquanto a segunda busca desenvolver ferramentas, baseadas nas inovações, que ofereçam técnicas ou dispositivos que resultem em maior conforto e tranquilidade na vida cotidiana.

O desenvolvimento da medicina tem procurado aumentar a qualidade de vida, na medida em que apresenta alternativas para o tratamento de doenças debilitantes, e oferece

novas técnicas de prevenção ou mesmo restabelecimento para problemas anteriormente considerados definitivos. Assim, quando se pensa num passado não muito distante é possível se lembrar de que doenças atualmente tratáveis, anteriormente levavam a óbito com uma frequência praticamente absoluta. Da mesma forma, acidentes ou traumas que levassem a lesões graves nas estruturas do esqueleto humano eram de difícil recuperação que, não raramente, era insatisfatória, deixando o paciente com algum tipo de incapacitação permanente.

Uma doença que acompanhou o aumento na expectativa de vida das pessoas, o que vem ocorrendo nos novos tempos, é a osteoporose. Essa doença afeta principalmente mulheres, em idade pós-menopausa, mas também idosos de forma geral, e é caracterizada por um aumento acentuado na perda de cálcio, fruto de uma redução na capacidade de renovação da matriz mineral óssea (*Etchebehere, 1998*), geralmente ocasionada por desequilíbrios em hormônios que regulam ou auxiliam nesse processo.

Na osteoporose, a degradação da matriz mineral dos ossos, devido à perda de cálcio, se reflete na redução da resistência mecânica dos ossos, facilitando a ocorrência de fraturas, principalmente durante quedas e pequenos impactos, próprios da vida diária. Por se tratar de um organismo já debilitado pela doença, muitas vezes as fraturas podem exigir a utilização de dispositivos mecânicos protéticos para substituição do osso perdido em sua função, recuperando a mobilidade do paciente. Além disso, a população brasileira apresenta uma particularidade relativa a sua composição étnica. Por apresentar parcela significativa de sua população constituída de indivíduos afro-descendentes existe uma propensão maior à ocorrência da chamada doença falciforme (*Rocha, 2001*), que é uma doença genética que apresenta maior incidência entre indivíduos negros de origem africana.

A doença falciforme é ocasionada por uma alteração genética que leva a uma variação na forma das hemácias, como visto na Figura 1. Essa alteração faz com que hemácias de forma circular, mais adequadas ao transporte de oxigênio, estejam presentes em menor quantidade que outras com forma de foice, daí o termo falciforme. Essa variante no tipo de

hemácias apresenta menor capacidade de transporte de oxigênio, o que torna o indivíduo um anêmico crônico.

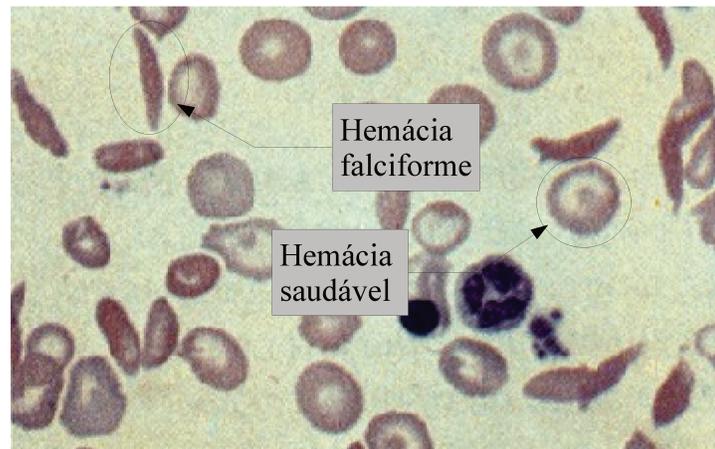


Figura 1. Hemácias falciformes entre hemácias saudáveis (Rocha, 2001).

No entanto, esse não é o único problema desse tipo de hemácia. A forma das hemácias favorece sua adesão às paredes dos vasos e artérias do corpo, Figura 2, levando ao surgimento de problemas circulatórios. Geralmente, o sintoma característico da presença desses problemas é dor difusa pelo corpo, causada pela privação da circulação.

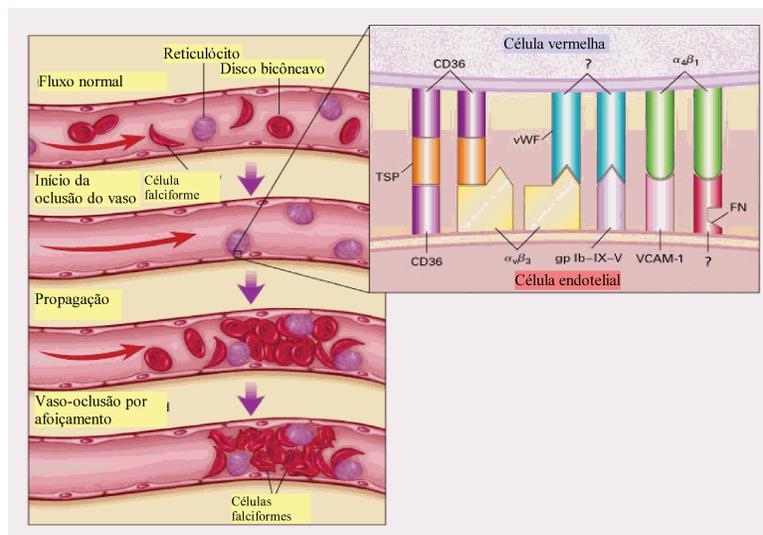


Figura 2. Formação de coágulos por afoijamento de células (Rocha, 2001).

A formação de hemácias falcilizadas pode ocorrer em qualquer região do sistema circulatório, no entanto, sua incidência é maior nos vasos de circulação terminais. Como se

sabe, ossos longos como o fêmur são grandes produtores de hemácias para o sangue pois possuem grandes cavidades medulares, abrigando grandes quantidades de medula, que fabricam esse tipo de célula. Todas as hemácias, produzidas no interior do fêmur, são liberadas para a circulação passando por artérias que se infiltram no osso até a medula e que também são responsáveis por levar oxigênio e nutrientes para as células ósseas responsáveis pela manutenção do osso, os osteoblastos, osteoclastos e osteócitos.

A obstrução dessas arteríolas e capilares, ocasionada pelas hemácias falciformes ou por outros problemas circulatórios, pode levar a déficit no fornecimento de nutrientes ou oxigênio para as células ósseas, o que pode ocasionar necrose na região adjacente aos capilares obstruídos. Necroses desse tipo podem ocorrer nas epífises de ossos longos, trazendo graves complicações, dado que eliminam o sistema de manutenção local do osso, representado por sua matriz viva. Como consequência, restando somente a matriz mineral, os danos passam a não mais serem reparados e se acumulam ao longo do tempo, podendo levar à destruição de articulações como aquela que existe entre o fêmur e a bacia. No caso necroses avasculares de cabeça de fêmur (*Rocha, 2001*) nas quais ocorre o colapso, destruindo a articulação entre o fêmur e a bacia, é necessária a utilização de dispositivos protéticos para a recuperação.

Dessa forma, seja por consequência da osteoporose, por doenças como a necrose avascular, ou por traumas originados em acidentes, especialmente aqueles envolvendo veículos automotores, existe a necessidade crescente de desenvolvimentos no projeto e melhoria de dispositivos protéticos, bem como no aperfeiçoamento de procedimentos médicos a fim de possibilitar a obtenção de melhores resultados. Sob esse enfoque, a bioengenharia, vem aumentando suas contribuições para a medicina. As abordagens são das mais variadas, desde a adaptação de tecnologias consagradas no uso cotidiano para o desenvolvimento de novos produtos e procedimentos de uso médico, até o desenvolvimento de novas tecnologias, exclusivas para as necessidades desse tipo de aplicação.

Tais desenvolvimentos apresentam grande importância, uma vez que fraturas

conseqüentes de osteoporose avançada, ou por necroses e degenerações da estrutura óssea em geral, podem necessitar de tecnologias de reforço e fixação mecânicas mais adaptadas, uma vez que a base óssea pode encontrar-se comprometida, necessitando de condições especiais para sua recuperação.

Em especial no ramo da ortopedia, a bioengenharia vem fornecendo novas tecnologias para a abordagem de problemas estruturais em ossos, permitindo analisá-los de maneira similar a estruturas mecânicas convencionais, mas adaptando os procedimentos para contemplar as características particulares presentes numa estrutura viva. Nesse contexto, a adoção de técnicas de engenharia na análise e no desenvolvimento de soluções para os complexos problemas de estruturas ósseas tem se mostrado um campo multidisciplinar, que necessita da contribuição de diversas especialidades a fim de levar a um resultado final satisfatório, que é a reabilitação do paciente.

Do ponto de vista da engenharia, estruturas ósseas podem ser vistas como partes mecânicas, responsáveis, em parte, pela forma e função do corpo. Para tanto, tais estruturas devem resistir a esforços ou carregamentos externos, mantendo suas formas, para que a integridade dos órgãos internos e do organismo como um todo seja mantida. Além disso, as estruturas ósseas devem resistir a esforços dinâmicos, uma vez que o ser vivo apresenta mobilidade.

Assim, de um ponto de vista fundamentalmente mecânico, estruturas ósseas são responsáveis, em parte, pelo suporte, seja estático ou em locomoção, e proteção do sistema biológico do qual fazem parte. Para que sejam capazes de exercer essas funções precisam dispor de um projeto adequado, que envolva formas e materiais capazes de realizar todas as funções.

Sob essas perspectivas, as estruturas ósseas respondem a estímulos bioquímicos e biomecânicos de maneira a oferecer ao organismo o melhor balanço possível entre suas funções principais, tais como a sustentação e a proteção, e demanda de energia e materiais

para sua manutenção. A unificação dessas duas perspectivas traz um vislumbre da complexidade presente nos seres vivos, que dispõe de uma estrutura cujo desenho foi concebido de modo a otimizar forma e função com o menor custo energético possível, oferecendo sustentação e proteção a todo o organismo vivo. Além disso, o material do qual essa estrutura é feita é capaz de responder a estímulos, sejam eles externos, biomecânicos, ou internos, bioquímicos, que levam à otimização de suas características ao longo da vida e de acordo com as condições às quais a estrutura é submetida. Ainda, como partes integrantes de um organismo vivo, as estruturas ósseas também são capazes de se regenerarem, uma característica não comum à maioria dos materiais de engenharia, recuperando o material de pequenos danos, tais como trincas e mesmo fraturas, desde que lhes seja dado o tempo e as condições necessárias para a recuperação.

Uma consequência dessa capacidade de se regenerar é que as estruturas ósseas estão em constante reconstrução e renovação, assim como todo o organismo vivo, o que envolve um fluxo contínuo de matéria (*Capra, 2003*). Essa característica possibilita, particularmente para a estrutura óssea, que sua geometria, sua forma, e as características do material que a compõe sejam otimizadas de maneira a resistirem às solicitações do uso diário, com um mínimo de material e peso envolvidos, o que significa menor custo energético para sua manutenção.

2. MOTIVAÇÃO

Tendo em mente os temas levantados nas considerações iniciais, é possível notar que abordar problemas ligados a estruturas ósseas e ao aparelho locomotor envolve particularidades que não estão presentes em aplicações cotidianas da engenharia, o que exige desenvolvimentos e adaptações dos procedimentos convencionais para contemplar os fenômenos característicos das aplicações de bioengenharia.

Apenas para dar uma idéia da extensão das necessidades, métodos de análise de engenharia necessitam de uma representação matemática da geometria a ser analisada para que, a partir dela, seja possível realizar estudos de caso para avaliar condições de contorno

consideradas mais adequadas para representar situações de interesse para o projeto. Basta observar as geometrias típicas de estruturas ósseas para notar que sua complexidade representa uma dificuldade inicial para representações matemáticas.

No entanto, essa não é a única dificuldade. Diferentemente de estruturas de engenharia, que são projetadas e desenvolvidas por engenheiros seguindo normas e utilizando ferramentas de desenho, e por isso apresentam uma padronização, facilitando sua representação por geometrias bem definidas, as estruturas ósseas foram desenvolvidas ao longo de gerações e ciclos adaptativos de evolução, tornando-as mais eficientes para exercerem suas funções, mas sem se aterem a normas ou padronizações.

Assim, geometrias típicas de estruturas ósseas dificilmente se enquadram em representações simplificadas por geometrias fundamentais matemáticas, o que torna praticamente inviável o desenvolvimento de um modelo geométrico matematicamente ajustado e que possa ser adaptado para qualquer estrutura óssea real, exigindo uma representação particular, obtida para cada pessoa.

Existem ainda as características particulares do material ósseo, tais como a regeneração e a remodelagem óssea superficial, que trazem complexidade adicional para a escolha ou desenvolvimento de um modelo matemático capaz de representá-lo no ambiente das simulações numéricas computacionais de engenharia.

Dessa forma, qualquer aplicação de bioengenharia, voltada para auxiliar os médicos na solução de problemas relacionados às estruturas ósseas, precisa ser capaz de enfrentar as complexidade intrínsecas a essa aplicação, que podem ser resumidas em:

- alta complexidade na geometria do problema a ser representado;
- alta complexidade na representação matemática do material ósseo;

- características não previstas, cuja consideração pode ser necessária para um resultado adequado;
- falta de generalidade, pois cada indivíduo apresenta uma estrutura óssea particular, com características próprias.

3. OBJETIVO

Considerando tais particularidades é proposto o desenvolvimento de uma ferramenta para análise numérica computacional de tensões e deformações em bioengenharia, baseada no método dos elementos de contorno, que:

- tenha seu código flexível, capaz de suportar alterações e adições necessárias para os testes de novos desenvolvimentos característicos da área de pesquisa à qual se pretende auxiliar;
- apresente uma interface gráfica amigável ao usuário, facilitando o uso em ambientes multidisciplinares;
- que tenha a capacidade imediata de realizar análises de engenharia envolvendo material ósseo;
- que seja capaz de incluir o fenômeno da remodelagem.

Além disso, é proposta uma metodologia que possibilite a realização desse tipo de análise em situações de aplicação real, o que significa utilizar geometrias obtidas de ossos reais. A metodologia foi desenvolvida a partir dos estágios iniciais de aquisição de dados, passando pelo tratamento dos mesmos e sua transformação em informação de entrada para o método numérico implementado, a análise de engenharia, até a disponibilização dos resultados obtidos para discussão multidisciplinar.

Estes são os desafios que guiarão os desenvolvimentos a serem mostrados no decorrer deste trabalho.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Com a finalidade de atender ao objetivo traçado e cientes das características levantadas nas considerações iniciais, uma fundamentação teórica diferenciada faz-se necessária para o cumprimento das etapas e a solução dos problemas típicos das aplicações em áreas multidisciplinares como a que ora se anuncia.

Dois grandes tópicos podem ser inicialmente identificados, caracterizando as duas principais áreas disciplinares envolvidas, quais sejam, a medicina e a engenharia. No entanto, seria inviável discutir com profundidade, num trabalho com ênfase em engenharia, todos os tópicos ou sequer aqueles fundamentais para a formação adequada sobre os temas médicos associados ao tratamento de doenças e correção de problemas relacionados às estruturas ósseas e ao aparelho locomotor. Da mesma forma, uma discussão mais aprofundada sobre métodos de engenharia, técnicas e tecnologias associadas para análise e solução de problemas estruturais generalizados e as adaptações necessárias para a sua aplicação a problemas de bioengenharia de estruturas ósseas seria por demais extensa e até certo ponto desnecessária.

Por outro lado, não é possível prosseguir com as discussões das dificuldades a serem enfrentadas, e das propostas para resolvê-las, sem um mínimo de fundamentação, tanto do lado médico quando da engenharia. Assim, aspectos introdutórios serão apresentados sem a

pretensão de fornecerem base conceitual completa, mas com a finalidade de criar uma uniformização na linguagem, oferecendo a engenheiros o essencial das terminologias médicas envolvidas e a médicos o essencial dos termos de engenharia. Além disso, conceitos fundamentais serão introduzidos isoladamente, sem maiores deduções, mas sempre acompanhados de bibliografia suficiente para aqueles interessados nos pormenores. Etapas essenciais para o desenvolvimento do projeto e hipóteses específicas serão detalhadamente explicadas em tópicos particulares.

Dessa forma, a fundamentação teórica será dividida em:

1. Caracterização do material ósseo e suas estruturas.
2. Métodos de análise numérica de engenharia e o método dos elementos de contorno.
3. Particularidades da aplicação em bioengenharia.

Ao final desses tópicos estará concluída a fundamentação teórica necessária às próximas etapas de implementação dos resultados das análises de engenharia, sua validação e a interpretação dos resultados obtidos.

1. CARACTERIZAÇÃO DO MATERIAL ÓSSEO E SUAS ESTRUTURAS

Do ponto de vista da medicina aquilo que se convencionou chamar de material ósseo é descrito como um tecido vivo, dinâmico, composto por células vivas e por material inerte, tipicamente fosfatos de cálcio e minerais, em constante interação. As células vivas são responsáveis pela construção, depositando ou retirando material de reforço da estrutura inerte de acordo com as necessidades impostas pelas solicitações, num processo chamado de deposição e reabsorção óssea.

Em organismos saudáveis, o ritmo de manutenção é constante, propiciando uma

reposição contínua dos minerais utilizados na estrutura óssea de todo o esqueleto. Esse procedimento permite a recuperação de micro-danos, representados por micro-trincas, antes que se inicie sua propagação e conseqüente nucleação de defeitos maiores e mais severos, capazes de levar à falha estrutural. Além disso, essa dinâmica também é responsável pela capacidade de adaptação da geometria dos ossos ao permitir sua constante remodelagem.

O osso pode ser decomposto, em termos didáticos, fundamentalmente em dois tipos distintos de acordo com o arranjo de suas estruturas internas, que são chamados de arranjo compacto e arranjo esponjoso. O arranjo compacto, também chamado de osso cortical, é caracterizado por uma densa aglomeração de fibras de colágeno fortemente reforçadas por material mineral, numa disposição bastante semelhante àquela encontrada em veios de madeira de árvores, Figura 3(c). O arranjo esponjoso, chamado de trabecular, apresenta uma estrutura menos densa, como uma rede tridimensional ou de treliças, as quais se interligam formando uma trama espacial com vazios que podem ser preenchidos com fluidos, Figura 3(b).

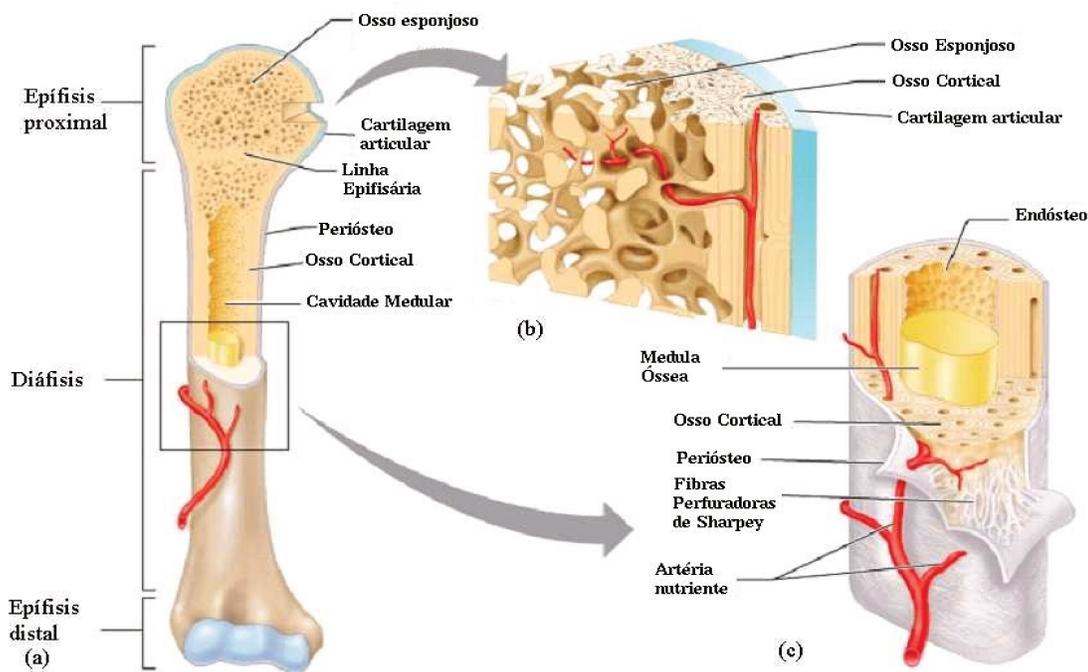


Figura 3. Distribuição do osso cortical e esponjoso em um osso longo (Benedito, 2005).

Como o principal responsável pela resistência mecânica do material ósseo é o reforço

mineral (*Wagner & Weiner, 1992, Rho et al., 1998*), os ossos corticais são os que apresentam a maior resistência mecânica, representando a maior parcela das estruturas ósseas responsáveis por suportar maiores carregamentos ou solicitações mecânicas.

Já o osso trabecular, por apresentar menor quantidade de material mineral, apresenta menor resistência mecânica, mas a estrutura de treliças tridimensionais, conjugada com a maior elasticidade das fibras de colágeno com pouco reforço mineral, dá para esse tipo de osso a capacidade de absorver impactos e vibrações que causariam danos ao osso cortical.

Dessa forma, em diversos ossos constituintes do esqueleto, encontra-se uma mistura dessas duas configurações como pode ser visto na Figura 3(a). Além de tipos diferente de estrutura interna, os ossos podem ser classificados de acordo com seu formato ou características morfológicas.

Existem diversos tipos de ossos na composição de um esqueleto humano completo, como pode ser visto na Figura 4.

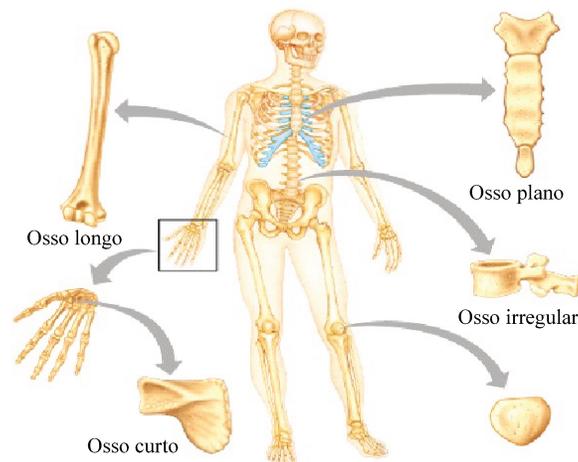


Figura 4. Tipos de ossos e sua distribuição no esqueleto humano (*Benedito, 2005*).

Cada tipo de osso apresenta características morfológicas distintas. Assim, ossos classificados como planos são aqueles que apresentam comprimento e largura mais expressivos que a espessura, sendo compostos prioritariamente por osso compacto ou

cortical, podendo apresentar o cavidade interna ou não.

Ossos curtos são aqueles que mostram comprimento, largura e espessura semelhantes, não apresentando espaço interno de cavidade medular.

Ossos irregulares são aqueles que não demonstram forma definida por proporções características, mas sim diversos detalhes, encaixes e pontos para ancoramento para tendões e músculos.

Finalmente, ossos classificados como longos, tais como o fêmur, a tíbia ou o úmero, apresentam formas com proporções que lembram a um paralelepípedo, com o comprimento superior às demais dimensões, além disso apresentam cavidade medular, Figura 3(a), sendo também os responsáveis por armazenar as maiores quantidades de medula óssea (Figura 3(c)) do corpo.

Do ponto de vista mecânico, ossos longos são os mais adequados para oferecer suporte para as alavancas de movimentação, motivo pelo qual podem ser encontrados no chamado esqueleto apendicular, em membros motores como braços e pernas. Sua forma alongada permite maximizar as forças aplicadas pelos músculos, além de oferecer pilares estáveis para a sustentação do restante do esqueleto.

Ossos longos, como o fêmur, sofrem elevadas solicitações mecânicas. Além disso, os carregamentos são diversos, tais como flexão, compressão e torção. Tais esforços raramente ocorrem isoladamente, o que faz com que a estrutura desses ossos deva ser capaz de suportar a conjugações desses carregamentos.

Graças a essas características e com alguma colaboração das tecnologias modernas, que aumentaram a velocidade de deslocamento dos seres humanos, ossos longos são um dos principais tipos afetados em acidentes. Fraturas de fêmur, tíbia, fíbula, rádio, úmero são freqüentes e podem apresentar gravidade variada, levando desde a incapacitação temporária

até a permanente da movimentação.

Por se tratar de ossos intensamente solicitados, a recuperação de lesões torna-se uma tarefa bastante difícil, dado que envolve a contenção dos movimentos com a finalidade de estabilizar a fratura e permitir a recuperação da mesma. Geralmente, os procedimentos de estabilização da fratura precisam de dispositivos de contenção. Essa contenção é oferecida por dispositivos mecânicos que podem ser tanto do tipo que é implantado diretamente no osso, como placas e parafusos, quanto do tipo utilizado externamente para facilitar sua remoção, como gesso ou fixadores externos, dependendo do caso.

Do ponto de vista mecânico, a caracterização do material ósseo deve seguir critérios semelhantes àqueles utilizados para a caracterizar materiais que sejam utilizados em aplicações convencionais de engenharia. Esse tipo de caracterização diz respeito ao comportamento do material quando solicitado a carregamentos e suas propriedades físicas associadas (*Natali & Meroi, 1989*). Esse procedimento é necessário para que seja possível representar o material por um modelo matemático previamente desenvolvido, tornando-o adequado para inserção em métodos de análise numérica.

No caso de materiais ósseos, mais especificamente com referência ao osso cortical, o levantamento do comportamento mecânico levou a uma representação inicial por um modelo de material completamente anisotrópico (*Bagge, 2000, Natali & Meroi, 1989*). No caso de análise de problemas estáticos, características visco-elásticas, também observadas em diversos ensaios mecânicos, podem ser relevadas, dado que tal propriedade é dependente do tempo.

No entanto, abordagens mais recentes (*Yoon & Cowin, 2001, Yoon et al., 2002*) têm demonstrado que, apesar de o levantamento de propriedades indicar um modelo de material completamente anisotrópico, a análise comparativa das diferenças entre os valores das propriedades obtidas e da anisotropia por elas expressa, permite uma simplificação para que seja utilizado um modelo de material transversalmente isotrópico sem prejuízo significativo

aos resultados obtidos, desde que o procedimento seja utilizado para osso cortical.

Abordagens típicas de engenharia costumam utilizar fartamente o modelo de material isotrópico para representar os materiais envolvidos nas análises, visto que os projetos costumam utilizar metais ou mesmo alguns tipos de polímeros que podem ser bem caracterizados por esse modelo matemático, o qual representa materiais com um mesmo comportamento, independentemente da direção na qual ocorre a solicitação. Assim, para um cilindro de alumínio, ou outro metal qualquer, pouco importa a direção na qual ocorre a solicitação, se na radial ou na longitudinal, o efeito será o mesmo e pode ser descrito em termos de um par de propriedades de engenharia que são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson.

Já um material que necessita de um modelo matemático transversalmente isotrópico, como é o proposto para o osso cortical, apresenta um comportamento substancialmente mais complexo. Nesse tipo de material é importante a direção na qual ocorre a solicitação em relação ao eixo de referência do material. No caso do material transversalmente isotrópico, existem dois comportamentos principais com relação à elasticidade, um que ocorre na longitudinal, ao longo do chamado eixo de referência do material, e outro na transversal a esse eixo, no chamado plano de isotropia transversal do material. Assim, existe um módulo de elasticidade na longitudinal e outro no plano de isotropia transversal; um coeficiente de Poisson que relaciona as deformações entre o plano de isotropia transversal e a direção longitudinal e outro que relaciona as deformações dentro do plano de isotropia transversal; e finalmente, um módulo de cisalhamento que define o cisalhamento entre o plano de isotropia transversal e a direção longitudinal. Assim, cinco propriedades são necessárias para definir a anisotropia de um material transversalmente isotrópico ao invés das duas necessárias para o isotrópico.

Um material de uso em engenharia, embora não tão frequentemente visto em análises computacionais, que necessita de um modelo matemático transversalmente isotrópico para sua representação é a madeira. Sua estrutura de longas fibras de celulose agrupadas em

feixes longitudinais, reforçadas e unidas entre si por uma resina natural chamada lignina, dá à madeira capacidade de resistir de maneira diferente quando solicitada na longitudinal ou na transversal. Isso porque na longitudinal, as estruturas responsáveis pela resistência mecânica são as fibras de celulose, altamente resistentes, já na transversal a resistência é dada, fundamentalmente, pela resina natural, que é menos resistente. Esse tipo de comportamento também pode ser visto nos ossos corticais, compostos por fibras longas de colágeno reforçadas por deposição de compostos minerais ao seu redor. Essa similaridade morfológica também levou ao estudo da utilização desse tipo de modelo matemático para representação de ossos corticais.

No entanto, assim como para a madeira, a obtenção das propriedades do osso como material de engenharia, seja para o modelo isotrópico ou transversalmente isotrópico, envolve o uso de amostras, chamadas de corpos de prova padronizados. Mas, diferentemente da madeira, que será utilizada em seu estado inerte, o osso estará vivo, o que dificulta a aquisição. A realização desse tipo de ensaio mecânico, através de amostras, requer que o osso seja retirado do organismo e preparado. Isso faz com que características presentes no material vivo sejam de difícil catalogação e quantificação. Fenômenos como a remodelagem óssea, seja ela superficial ou interna, presentes apenas no osso vivo, não podem ser quantificados através de ensaios convencionais de engenharia. Mesmo os valores obtidos para o comportamento mecânico definido nos ensaios podem ser substancialmente diferentes por serem obtidos fora do organismo.

Essa característica fez com que se tentasse obter algumas propriedades dos materiais ósseos a partir de experimentos *in-vitro* ou mesmo *in-vivo*, com cobaias ou por meio de técnicas alternativas (Zysset *et al.*, 1999). Esse tipo de técnica, não convencional para a engenharia, mostrou particularidades, tais como a difícil padronização, a qual é necessária para a generalização da aplicação dos resultados e sua caracterização como propriedades intrínsecas do material ósseo. Nesse tópico, mesmo resultados obtidos a partir de técnicas de ensaio mecânico padronizadas mostraram dificuldades em caracterizar precisamente propriedades do material ósseo que fossem intrínsecas.

Características como a variabilidade entre indivíduos, causada pela capacidade de adaptação do osso, e mesmo variabilidade intra-indivíduo, dependendo da localização física e do grau de solicitação da estrutura óssea da qual o material ósseo faz parte, são capazes de ocasionar grande variação nas propriedades obtidas a partir de ensaios mecânicos realizados com corpos de prova extraídos de ossos de indivíduos diferentes, ou do mesmo indivíduo, mas em idades diferentes e até do mesmo indivíduo, numa mesma idade, mas de locais diferentes da mesma estrutura óssea (*Judex et al., 1999*).

Além da variabilidade das propriedades mecânicas, o que aumenta a dificuldade de enquadramento do material ósseo a um modelo matemático de material, existem ainda as características típicas do osso, tais como a capacidade de se regenerar e remodelar. Diferentemente de um material convencional de engenharia, o qual é estático quanto ao acúmulo de danos, o osso é dinâmico, com células vivas, que são capazes de detectar o surgimento de danos microscópicos e repará-los localmente, por um processo de remodelagem constante, impedindo a propagação ou mesmo acumulação de danos.

Em materiais de engenharia, danos estruturais são conhecidos e esperados, sendo que o projeto do dispositivo procura antecipar a localização e severidade dos danos ao longo do tempo e compensar sua presença com reforços que possibilitem a manutenção da funcionalidade da estrutura. Já no caso do osso, a estrutura também está sujeita à ocorrência de danos, no entanto, a parte viva do osso encontra-se em constante atividade de manutenção, localizando e reparando a matriz mineral a fim de garantir sua integridade, num processo conhecido como regeneração. No caso do osso, esse processo regenerativo age inclusive em casos extremos, quando ocorre a fratura da estrutura óssea. Nesses casos, algum grau de imobilização faz-se necessário para que o processo de cura ocorra.

Além da regeneração, existe também a chamada remodelagem óssea superficial. Num processo de cura de uma fratura, a remodelagem superficial ocorre predominantemente durante a fase final (*Kargarnovin, 1994 e Benedito, 2005*), com a regeneração já em estágio avançado, após a formação do calo ósseo, alterando a matriz óssea reparada a fim de

adaptá-la para sua função. Entretanto, o processo de remodelagem superficial ocorre independentemente da regeneração, atuando inclusive sobre ossos saudáveis a fim de otimizar sua forma e função (*Bagge, 2000*).

A capacidade do osso de otimizar formas é diferente da regeneração pura e simples, dado que a estrutura não foi danificada, porém se baseia na mesma característica, qual seja, a existência de um estímulo que leva as células vivas do osso a se ativarem e agregarem ou removerem material da matriz mineral óssea. No caso de uma fratura, a matriz óssea cresce a partir de um processo inflamatório, originando material ósseo não otimizado, que necessitará de processo posterior de remodelagem para torná-lo mais adequado para exercer sua função em conjunto com a estrutura original. Já para o caso da remodelagem superficial, o crescimento ou reabsorção da matriz óssea ocorre no sentido de deslocar a superfície externa do osso, fazendo com que sua geometria se altere para uma forma ótima, o que leva a variações de volume.

As alterações de geometria ocasionadas pelo processo de remodelagem óssea caracterizam a chamada remodelagem superficial ou externa e são capazes de levar a alterações no perfil dos deslocamentos e deformações apresentados pelas estruturas ósseas, uma vez que ocasiona alterações nas formas geométricas sobre as quais atuam os esforços.

Do ponto de vista da engenharia, a caracterização da remodelagem óssea superficial é feita por meio de propriedades que indicam qual é o estímulo, do ponto de vista de efeitos de engenharia, e qual a taxa para movimentação das superfícies do osso que esse estímulo gera. Assim, um estímulo típico para a remodelagem óssea superficial é a deformação local na superfície do osso. Informações originada em clínica médica mostram que o material ósseo suporta tanto esforços de compressão quanto tração, no entanto, a necessidade de resistir prioritariamente a um ou outro tipo de esforço leva a diferentes configurações da estrutura interna dos ossos. Assim, ossos submetidos a níveis de compressão específicos apresentam aumento de volume, enquanto que quando submetidos a distensão podem apresentar redução de volume. Por exemplo, ossos de geometria aproximadamente tubular, quando submetidos a

compressão por flexão, evoluem para um quadro de deposição de material na face sob maior compressão e reabsorção na face sob distração, dando origem a um tubo de parede mais espessa na face sob compressão e mais fina na face sob distensão (*Martínez et al., 1996*).

Baseado nesse comportamento, *Sadegh et al., 1993; Cowin, 1993; Kargarnovin, 1994; Martínez et al., 1996*; entre outros propuseram modelos de remodelagem óssea superficial baseados no campo de deformações obtido por meio de análises numéricas de tensão e deformação na superfície do osso. Esses modelos utilizam a deformação de compressão como estímulo para a remodelagem, fixando valores a partir de resultados empíricos para os limites de início e fim do processo. Por dependerem de resultados empíricos, e dada a variabilidade intrínseca do material ósseo, os valores limites apresentam variação de uma aplicação para outra, no entanto, a estrutura do modelo de remodelagem mostra-se igual. É definido um patamar, marcado entre o valor mínimo e o máximo de deformação de compressão, dentro do qual o osso desfruta de equilíbrio, ou seja, não ocorre remodelagem. Acima do patamar, o que significa que ocorre uma deformação de compressão superior ao limite máximo, passa a ocorrer remodelagem superficial por deposição de material, aumentando o volume. Abaixo do patamar, ou seja, para deformações de compressão inferiores ao limite mínimo, ocorre remodelagem superficial por reabsorção, reduzindo o volume. Tanto o comportamento da remodelagem óssea superficial quanto o equacionamento a ser adotado serão explicitados no capítulo de implementação.

Além da remodelagem óssea superficial existe ainda a remodelagem óssea interna, caracterizada por promover alterações nas propriedades que definem o comportamento elástico do osso. Tipicamente essa abordagem é mais utilizada em conjunto com o método dos elementos finitos, do que aproveita a ocorrência de elementos finitos ao longo do domínio para implementar a variação de propriedades mecânicas no interior da geometria. A relação entre a alteração no valor das propriedades elásticas e as variações biológicas é feita através da densidade mineral local, assim, regiões que apresentem maior densidade mineral são associadas a maiores resistências mecânicas, enquanto regiões com menor densidade mineral são ligadas a menores resistências mecânicas.

Existem discussões relativas ao quanto a remodelagem óssea interna reflete a real condição da estrutura óssea, dado que o aumento na densidade mineral, via de regra, é devido à atividade biológica no interior da estrutura óssea, criando e destruindo trabéculas. Dessa forma, mesmo uma estrutura óssea compacta dispõe de uma estrutura de trabéculas, no entanto, para a formação dessas estruturas as trabéculas foram comprimidas e fundidas umas às outras, compactando-se numa única estrutura macroscópica. Isso pode ser justificado na Figura 3(b) através da transição progressiva que é visível do osso esponjoso, com trabeculado bastante difuso, para o osso cortical, compacto. Nessa representação não se visualiza uma fronteira nítida, distinguindo o osso esponjoso do cortical, ao contrário, há uma zona de transição pequena, na qual o trabeculado do osso esponjoso se comprime radicalmente até resultar no osso cortical.

Esse comportamento levou alguns estudiosos da remodelagem (*Sadegh et al., 1993*) a argumentarem que as alterações de propriedades do material ósseo apontadas pela remodelagem óssea interna podem ser vistas como fruto de uma remodelagem óssea superficial em larga escala, que ocorreria se considerássemos todas as superfícies livres do osso como superfícies de remodelagem. Essa teoria exigiria que fosse modelada a superfície de cada trabécula no interior do osso esponjoso em conjunto com todas as superfícies das demais estruturas internas do osso. Numa análise rápida é fácil notar que, para um osso que seja constituído de uma parte significativa de estrutura trabeculada a relação entre a área de superfície e o volume seria demasiado grande, gerando necessidades gigantescas de processamento para análise de um modelo de tais proporções.

2. MÉTODOS DE ANÁLISE NUMÉRICA DE ENGENHARIA E O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Métodos de análise numérica de engenharia são técnicas desenvolvidas para permitir a solução numérica de equacionamentos matemáticos complexos, os quais são desenvolvidos com a finalidade de modelar algum fenômeno específico. Dessa forma, uma equação como aquela que descreve o movimento de uma pedra, quando em queda livre, a partir de uma

determinada posição ou cota de altura, consiste em um modelo matemático da realidade.

Como modelo matemático, o equacionamento é capaz de, dadas as informações das condições iniciais, retornar as condições finais do problema, as quais podem ser verificadas experimentalmente através de validações experimentais. Esse procedimento de ajuste do modelo é necessário a fim de que a complexidade matemática seja refletida em resultados mais próximos do comportamento real.

No entanto, um modelo matemático sempre apresentará uma característica determinística associada ao seu equacionamento, o qual apresenta uma capacidade limitada de considerar fenômenos e variações nas condições iniciais do problema. Assim, ao lidar com modelos matemáticos, o engenheiro procura automaticamente simplificações e hipóteses que permitam encaixar as restrições características do modelo ao problema que se quer analisar.

No ramo de análise estrutural, o equacionamento utilizado procura modelar o comportamento de materiais quando submetidos a esforços específicos, determinando as tensões internas geradas em resposta às condições de contorno e o campo de deslocamentos induzido por essa distribuição de tensões. Para relacionar as tensões e deslocamentos com as condições iniciais de esforços aplicados e deslocamentos restritos, a resistência dos materiais conta com as chamadas equações de Navier para elasticidade (*Kane, 1994*), que podem ser vistas na equação 1.

$$\mu \cdot u_{i,jj} + (\mu + \lambda) \cdot u_{j,ji} + f_i = 0 \quad (1)$$

A equação 1 é uma representação na forma indicial de um conjunto de três equações diferenciais parciais de segunda ordem, para três deslocamento desconhecidos (u_i), um em cada uma das três direções do sistema cartesiano, sendo que μ e λ são as constantes de Lamé e f_i representa forças de corpo. O problema em utilizar essa equação para obter os deslocamentos é que elas são acopladas, o que significa que cada uma delas só pode ser

resolvida dispondo dos três valores de deslocamento, que são desconhecidos. Como não há possibilidade para isolar cada deslocamento, não é possível obter uma solução direta.

Assim, para resolver as equações de Navier é necessário antes desacoplá-las, de maneira que cada um dos deslocamentos possa ser obtido. Existe um bom número de técnicas matemáticas desenvolvidas para esse fim, mas nesse trabalho abordaremos somente a técnica utilizada por *Kane, 1994*, que é chamada de abordagem pelo vetor de Galerkin.

O desacoplamento das equações de Navier, utilizando o vetor de Galerkin, é obtido a partir da substituição das componentes do deslocamento por funções adequadas. No caso do método de Galerkin, a função substituta consiste na segunda derivada de um vetor específico chamado de vetor de Galerkin ou \mathbf{g} . Essa substituição é mostrada na equação 2.

$$2 \cdot \mu \cdot u_i = c \cdot g_{i,jj} - g_{j,ji} \quad (2)$$

Manipulando as constantes de Lamé, segundo mostra *Kane, 1994*, é possível reescrever a equação 1 em termos das derivadas segundas do vetor de deslocamentos, de μ , constante de Lamé que representa o módulo de cisalhamento G , e de ν , o coeficiente de Poisson.

$$\mu \cdot u_{i,jj} + \frac{\mu}{(1-2\nu)} \cdot u_{j,ji} + f_i = 0 \quad (3)$$

A equação 3 pode ser reescrita com a substituição das derivadas dos deslocamentos pelas derivadas da função em termos do vetor de Galerkin, dadas na equação 2.

$$\frac{c}{2} \cdot g_{i,kkj} + g_{k,kji} \cdot \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{c}{2 \cdot (1-2\nu)} - \frac{1}{2 \cdot (1-2\nu)} \right\} + f_i = 0 \quad (4)$$

A partir da equação 4 e da constatação de que $g_{k,kij} = g_{j,kki} = g_{k,kji}$ é verdade, torna-se possível obter a constante c como:

$$c = 2 \cdot (1 - 2\nu) \quad (5)$$

Substituindo a equação 5 na equação 2, é possível obter a equação 6.

$$2 \cdot \mu \cdot u_i = 2 \cdot (1 - 2\nu) \cdot g_{i,jj} - g_{j,ji} \quad (6)$$

Assim, a equação de equilíbrio em termos do vetor de Galerkin pode ser escrita como:

$$(1 - \nu) \cdot g_{i,kkj} + f_i = 0 \quad (7)$$

A equação de equilíbrio em termos do vetor de Galerkin, mostrada na equação 7, é uma equação diferencial parcial de quarta ordem completamente desacoplada, o que permite obter solução para cada uma das três componentes do vetor de Galerkin. Uma vez obtidas as soluções em termos do vetor de Galerkin, basta utilizar a equação 6 a fim de obter os valores de deslocamentos.

Utilizando a relação entre tensões e deformações da elasticidade para transformar os deslocamentos em tensões é possível, aplicando um tratamento similar àquele mostrado para o deslocamento, obter a forma desacoplada da equação de Navier para tensões (σ_{ij}). A dedução detalhada pode ser encontrada em *Kane, 1994*, e a equação final é mostrada em 8.

$$\sigma_{ij} = (1 - \nu) \cdot [g_{i,kkj} + g_{j,kki}] - g_{k,kij} + \nu \cdot \delta \cdot g_{l,lkk} \quad (8)$$

Dadas as equações desacopladas para deslocamentos e tensões é possível obter solução para os problemas de elasticidade, seja de forma analítica ou numérica.

Apesar de serem equações desacopladas, tanto a equação 7 quanto a equação 8 são do tipo diferencial parcial de quarta ordem, cuja solução analítica pode atingir um grau de complexidade bastante alto. Além disso, uma solução analítica para um determinado problema prático, geralmente é viável apenas para casos de geometrias e condições de contorno mais simples, e mesmo que seja obtida, seria particular para o problema analisado, o que significa que o equacionamento desenvolvido só poderia ser aplicado a casos similares

ao original, limitando sua utilização.

A fim de obter uma generalização na utilização do método, que permita obter solução a partir de um mesmo equacionamento básico para casos diversos e mais complexos que aqueles que dispõem de solução analítica, aplica-se o método de solução numérico, segundo o qual as equações diferenciais genéricas, válidas para qualquer geometria, são avaliadas numericamente para geometrias padronizadas simples e um resultado aproximado é obtido a partir de somas desses resultados parciais que, feitas de maneira adequada, compõem geometrias genéricas mais complexas. O grau de precisão do resultado pode ser verificado e sua validade garantida tanto por comparação com problemas que apresentem solução analítica quanto por validação a partir de resultados obtidos experimentalmente.

Dois métodos se destacam dentre os vários já desenvolvidos para tratamento numérico desse tipo de equacionamento, um é o método dos elementos finitos e o outro é o método dos elementos de contorno. Dado o enfoque do trabalho e os objetivos traçados, apenas o método dos elementos de contorno será explorado como método de solução numérica, visto que se adapta melhor a análises de fenômenos superficiais, como é o caso da remodelagem óssea. Apesar dessa vantagem inicial, decisiva para a escolha do método, a análise por elementos de contorno apresenta limitações que devem ser respeitadas a fim de garantir uma análise com resultados adequados.

Uma das limitações mais importantes refere-se ao tipo de geometria analisada. Por ser um método baseado em grandezas de contorno, com procedimentos de geração de malha e de integração que envolvem singularidades sobre o contorno, o método dos elementos de contorno não é adequado para tratar problema de geometrias esbeltas, ou seja, cuja relação entre o volume e a área da superfície seja favorável para a área, pois uma grande área superficial significa uma grande malha de elementos de contorno, carregando o sistema de equações para análise. Além disso, estruturas esbeltas são caracterizadas por proximidade entre superfícies, delimitando volumes pequenos, o que causa instabilidades matemáticas devido a características intrínsecas da solução integral envolvida.

No entanto, como o objetivo do trabalho é analisar estruturas ósseas responsáveis por elevada resistência mecânica, as geometrias envolvidas compõe-se, em sua maioria, de estruturas com volume expressivo quando comparado com a área superficial. Além disso, o elevado interesse em estudar o fenômeno da remodelagem óssea superficial a partir de uma simulação numérica computacional por modelo de engenharia teve grande influência na escolha final pelo método dos elementos de contorno.

O método dos elementos de contorno é um método integral, o que significa que trabalha transformando o equacionamento originalmente diferencial, mostrado nas equações de Navier em 7 e 8, em um equacionamento integral. Além disso, é um método que opera somente sobre o contorno, portanto, a equação integral final deve ser uma equação integral sobre o contorno do problema. Para tanto, o passo inicial é a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, como mostrado por *Kane, 1994*, sobre a equação 9, que é diferencial e expressa o equilíbrio de forças.

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0 \quad (9)$$

A aplicação do princípio dos trabalhos virtuais sobre a equação 9 resulta numa equação integral que relaciona o tensor de tensões, as forças de corpo e o vetor de forças de superfície:

$$\int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta e_{ij} d\Omega \quad (10)$$

Esta equação integral, descrita em função de deslocamentos δu_i e deformações δe_{ij} virtuais, do vetor de forças de superfície t_i , do tensor de tensões σ_{ij} e das forças de corpo f_i , pode ser submetida ao teorema da reciprocidade, de modo que as grandezas expressas em termos de trabalhos virtuais passem a ser descritas por grandezas equivalentes, mas agora relacionada a um problema descrito em um outro espaço, o que permite reescrever a equação 10 na forma da equação 11.

$$\int_{\Gamma} t_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(2)} d\Omega \quad (11)$$

Na equação 11 os super-escritos (1) e (2) representam respectivamente, o domínio real do problema, no qual se deseja obter a resposta, e o domínio especial, substituto da representação em termos de trabalhos virtuais. Sem prejuízo de generalidade, é possível escrever a equação simétrica de 11, que fica da forma:

$$\int_{\Gamma} t_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(1)} d\Omega \quad (12)$$

Como se pode notar, a menos dos super-escritos, o lado direito da equação 11 é semelhante ao lado direito da equação 12. De fato, abrindo o tensor de tensões na forma da elasticidade, em função da matriz de flexibilidade do material e do tensor de deformações, é possível demonstrar que ambas as equações são iguais.

$$\int_{\Gamma} t_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Omega \quad (13)$$

A identidade expressa na equação 13 é chamada de Teorema de Betti e apresenta integrais ao longo do contorno Γ e sobre o domínio Ω .

Finalmente, para transformar a identidade expressa pelo Teorema de Betti em uma equação integral de contorno é necessário obter uma solução que possa ser substituída para o domínio especial, expresso pelo super-escrito (2). Nesse caso, é imprescindível que a solução seja válida para um problema no domínio da mecânica dos sólidos e é interessante que seja analítica, de modo a não representar fonte de erro adicional para o resultado. Esse tipo de solução é chamada, na metodologia de elementos de contorno, de solução fundamental, e é definida para cada tipo de material que se deseja analisar.

2.1.SOLUÇÃO FUNDAMENTAL ISOTRÓPICA

No caso do modelo de material isotrópico, linear e elástico, trata-se de uma formulação

matemática bastante adequada para a descrição de grande parte dos materiais convencionais de utilização na engenharia mecânica. Materiais como o aço, alumínio e metais em geral, além de alguns tipos de polímeros têm seu comportamento bem representado em análises estáticas e lineares a partir desse modelo. O modelo matemático para o comportamento físico procura representar a resposta do material a solicitações. No caso do material isotrópico, a resposta do material é sempre a mesma, qualquer que seja a direção de aplicação da solicitação, o que pode ser visto na Figura 5.

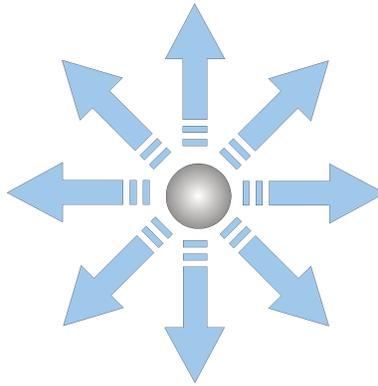


Figura 5. Ilustração do comportamento isotrópico, resposta igual em qualquer direção.

Para aplicação em elementos de contorno, existe uma solução fundamental analítica bem definida conhecida como solução de Kelvin, necessária para a implementação do modelo de material isotrópico em análises a partir desse método. A solução de Kelvin é representada pela resposta, na forma de um campo de deslocamentos e distribuição de tensões, de um meio infinito, isotrópico, linear e homogêneo, quando sujeito a um carregamento pontual e unitário. Essa solução analítica é expressa na forma de duas equações.

$$u_{ik} = \frac{P}{16 \cdot \mu \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \rho^{-1} \cdot \{(3 - 4\nu) \delta_{ik} + \rho_{,i} \rho_{,k}\} \quad (14)$$

$$\sigma_{ijk} = \frac{P \cdot (1 - 2\nu)}{8 \pi \cdot (1 - \nu)} \cdot \rho^{-2} \left\{ \delta_{ij} \cdot \rho_{,k} - \delta_{jk} \cdot \rho_{,i} - \delta_{ki} \cdot \rho_{,j} - \frac{3}{1 - 2\nu} \cdot \rho_{,i} \cdot \rho_{,j} \cdot \rho_{,k} \right\} \quad (15)$$

A equação 14 é chamada de solução fundamental de deslocamento e a equação 15 é chamada de solução fundamental de tensão. Para estas equações, P é o carregamento unitário, ρ é a distância do ponto de aplicação do carregamento (ponto fonte) até a coordenada de cálculo (ponto campo) e δ_{ij} é o chamado delta de Krönecker. Os sub-índices k agregados ao vetor de deslocamentos u_i e ao tensor de tensões σ_{ij} denotam a solução fundamental.

No entanto, a equação 13 é definida em termos do vetor de forças de superfície t_i , não do tensor de tensões, então é necessário aplicar a transformação de Cauchy, que relaciona o tensor de tensões com o vetor de forças de superfície através do vetor normal ao plano de análise. Assim, é possível obter diretamente a solução fundamental de forças de superfície como definido na equação 16.

$$t_{ik} = \frac{-P}{8\pi \cdot (1-\nu)} \cdot \rho^{-2} \left\{ \rho_{,j} \cdot n_j [(1-2\nu)\delta_{ki} + 3 \cdot \rho_{,i} \cdot \rho_{,k}] + (1-2\nu) \cdot [\rho_{,i} \cdot n_k - \rho_{,k} \cdot n_i] \right\} \quad (16)$$

Na equação 16, n_i é o vetor normal, que é definido como o vetor normal ao contorno no ponto em que se deseja calcular o vetor de forças de superfície.

Assim, substituindo as soluções fundamentais de deslocamentos e de forças de superfície, equações 14 e 16, no lugar das variáveis para o domínio especial do teorema de Betti, equação 13, é possível obter a equação 17.

$$\int_{\Gamma} t_i u_{ik} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i u_{ik} d\Omega = \int_{\Gamma} t_{ik} u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta_{ik}(x-d) u_i d\Omega \quad (17)$$

Na equação 17, a força de corpo f_i do domínio especial (2) foi substituída pelo delta de Dirac, que é a representação matemática da função de carregamento unitário. Isso permite que a integral de domínio seja avaliada, resultando na equação 23.

$$\int_{\Gamma} t_i u_{ik} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i u_{ik} d\Omega = \int_{\Gamma} t_{ik} u_i d\Gamma + c_{ik} u_i(d) \quad (18)$$

O valor símbolo c_{ik} na equação 18 varia de acordo com a posição d do ponto do carregamento concentrado, assim:

$$c_{ik} = \begin{cases} 0 \rightarrow d \text{ fora de } \Gamma \\ 1 \rightarrow d \text{ dentro de } \Gamma \end{cases}$$

Para o caso em que o ponto de carregamento está localizado sobre o contorno Γ , c_{ik} assume um valor intermediário, entre 0 e 1, de acordo com o ângulo descrito pelo contorno no ponto d .

Se assumirmos que as análises realizadas serão estáticas, é possível desconsiderar a integral de domínio Ω ligada às forças de corpo f_i , o que resulta em uma equação integral unicamente definida no contorno Γ .

$$\int_{\Gamma} t_i u_{ik} d\Gamma = \int_{\Gamma} t_{ik} u_i d\Gamma + c_{ik} u_i(d) \int \quad (19)$$

A equação 19 é chamada de identidade de Somigliana e representa a equação integral de contorno a ser utilizada para a solução numérica pelo método dos elementos de contorno quando o modelo de material é isotrópico, linear e elástico.

Assim, para resolver um problema de elasticidade da mecânica dos sólidos, que seja possa ser descrito pela equação de Navier e cujo domínio material apresente comportamento que possa ser modelado como isotrópico, é possível utilizar a equação 19 avaliada na geometria do problema e sujeita a condições de contorno adequadas. Isso significa que é necessário especificar matematicamente tanto a geometria do contorno quanto as condições às quais ela estará sujeita por ocasião da análise.

Os dados de entrada para resolver a equação 19 são as condições de contorno em termos de deslocamentos e forças de superfície, aplicadas sobre uma geometria matematicamente descritível, que delimite um domínio cujo comportamento seja isotrópico,

linear e elástico. As condições de contorno são valores numéricos, portanto, podem ser atribuídas de maneira a modelarem problemas físicos reais diretamente. Já a geometria deve ser descrita em termos de sua representação matemática, o que pode ser bastante complexo quando é necessário representar geometrias complexas, tais como aquelas observadas em estruturas de engenharia reais.

Dessa forma, para que seja possível utilizar a equação integral de contorno na solução de problemas que representem aplicações reais, é necessário um método que permita descrever geometrias complexas do ponto de vista matemático. Como a grande maioria das geometrias utilizadas em aplicações reais apresentam representação matemática demasiado complicada ou mesmo inexistente, é utilizado um método de aproximação dessas geometrias chamado de discretização por elementos de contorno.

Um elemento de contorno consiste em uma geometria simples, descrita por funções polinomiais, sobre a qual as integrais de contorno podem ser calculadas. Esses elementos são distribuídos sobre a superfície da geometria real de maneira a interpolar sua topologia. Via de regra, quanto mais densa for a malha de elementos, mais precisa será a representação da geometria real, principalmente no caso de geometrias complicadas.

A utilização de elementos de contorno implica no cálculo de um conjunto de integrais de contorno para cada um deles. Para que o cálculo reflita o sólido completo, e não cada elemento isoladamente, é necessário somar as contribuições de cada conjunto de integrais, o que é feito no cálculo matricial final, que engloba todos os elementos e as condições de contorno.

Dessa forma, com a aplicação da formulação integral de contorno sobre cada elemento de contorno é possível resolver a equação de Navier e obter uma resposta para o comportamento esperado de um determinado domínio quando submetido a condições de contorno específicas.

Note-se que para domínios diversos, com propriedades que não são representadas pela formulação isotrópica, é necessário desenvolver outra solução fundamental, a qual substitui a solução de Kelvin e é adequada ao novo domínio.

2.2.SOLUÇÃO FUNDAMENTAL TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICA

O modelo de material transversalmente isotrópico representa um comportamento de material mais complexo que aquele contemplado com o modelo isotrópico. Da mesma maneira que o modelo anterior, o modelo transversalmente isotrópico também serve para representar alguns materiais de uso em engenharia, tais como madeira e materiais mais modernos como determinados arranjos de compósitos laminados de fibra com matrizes poliméricas. O comportamento desse tipo de material é caracterizado por uma mesma resposta para uma solicitação aplicada em planos paralelos entre si e outra, se a mesma solicitação for aplicada na direção ortogonal a esses planos. Assim, o material é dito isotrópico por planos, apresentando uma direção de anisotropia, que é sempre a direção perpendicular aos planos isotrópicos, como pode ser visto na Figura 6.

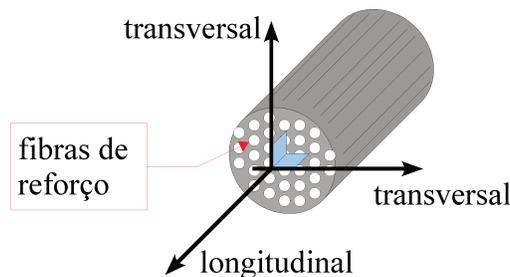


Figura 6. Ilustração de um corpo com comportamento transversalmente isotrópico.

No caso da bioengenharia aplicada a problemas ósseos, a estrutura interna das fibras de reforço do osso compacto, também conhecido como osso cortical, tem sido tradicionalmente representada de forma análoga à madeira, outra estrutura reforçada natural, ou mesmo em

materiais compósitos laminados. Todas essas estruturas apresentam uma orientação prioritária com fibras de reforço, garantido características de maior resistência mecânica na direção de sua orientação, e um meio razoavelmente contínuo, no qual as fibras estão envoltas e fixadas, que atribui resistência mecânica inferior na direção transversal às fibras. Essa configuração é bastante adequada, visto que maximiza o uso das características de resistência do material nas direções em que ela é necessária. Sua semelhança com a disposição dos veios da madeira pode ser vista na Figura 7.

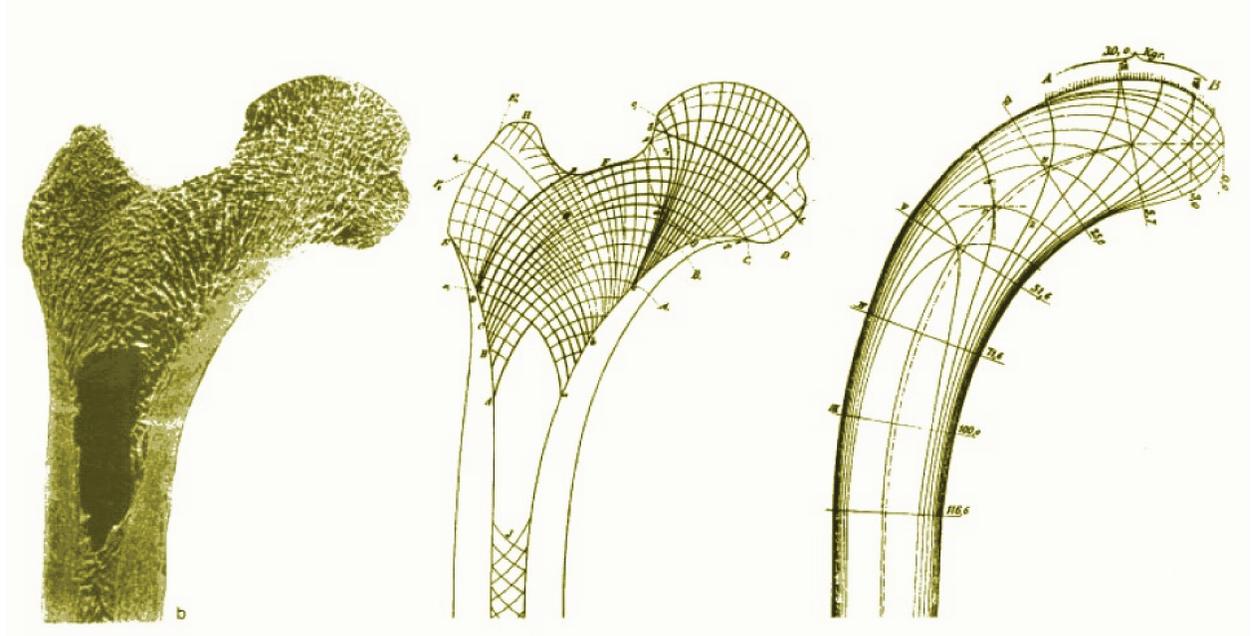


Figura 7. Ilustração da orientação das fibras no osso cortical em um osso longo e a analogia com uma haste de madeira (Huiskes, 2000).

Dessa forma, como materiais com característica transversalmente isotrópica apresentam comportamento distinto em relação aos isotrópicos, é necessário o uso de um modelo matemático alternativo, que seja capaz de representar o comportamento característico desse tipo de material. Para tanto, é necessário utilizar outro equacionamento para a chamada relação constitutiva do material, a qual associa o campo de tensões, induzido pelas solicitações impostas ao material, com o campo de deformações que constitui a resposta sobre a geometria do material.

Segundo *Lekhnitskii, 1963*, a aplicação da lei de Hooke generalizada a materiais

completamente anisotrópicos, após aplicada a notação de Rabinovich, resulta no conjunto de equações mostrado em 20, que pode ser definido como a relação constitutiva para materiais anisotrópicos.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E_{xx}} [\sigma_x - \nu_{yx} \sigma_y - \nu_{zx} \sigma_z + \eta_{yz,x} \tau_{yz} + \eta_{zx,x} \tau_{xz} + \eta_{xy,x} \tau_{xy}] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E_{yy}} [-\nu_{xy} \sigma_x + \sigma_y - \nu_{zy} \sigma_z + \eta_{yz,y} \tau_{yz} + \eta_{zx,y} \tau_{xz} + \eta_{xy,y} \tau_{xy}] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E_{zz}} [-\nu_{xz} \sigma_x - \nu_{yz} \sigma_y + \sigma_z + \eta_{yz,z} \tau_{yz} + \eta_{zx,z} \tau_{xz} + \eta_{xy,z} \tau_{xy}] \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{yz}} [\eta_{x,yz} \sigma_x + \eta_{y,yz} \sigma_y + \eta_{z,yz} \sigma_z + \tau_{yz} + \mu_{zx,yz} \tau_{xz} + \mu_{xy,yz} \tau_{xy}] \\
\gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{xz}} [\eta_{x,zx} \sigma_x + \eta_{y,zx} \sigma_y + \eta_{z,zx} \sigma_z + \mu_{yz,zx} \tau_{yz} + \tau_{xz} + \mu_{xy,zx} \tau_{xy}] \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} [\eta_{x,xy} \sigma_x + \eta_{y,xy} \sigma_y + \eta_{z,xy} \sigma_z + \mu_{yz,xy} \tau_{yz} + \mu_{zx,xy} \tau_{xz} + \tau_{xy}]
\end{aligned} \tag{20}$$

Nas equações da relação constitutiva mostradas em 20, E_{xx} , E_{yy} e E_{zz} são os módulos de Young; G_{yz} , G_{xz} e G_{xy} são os módulos de cisalhamento; ν_{yx} , ν_{zy} , ν_{zx} , ν_{xy} , ν_{yz} , ν_{zx} são os coeficientes de Poisson; $\mu_{zx,yz}$, $\mu_{xy,yz}$, ..., $\mu_{yz,xy}$ são os coeficientes de Chentsov; finalmente, $\eta_{yz,x}$, $\eta_{zx,x}$, ..., $\eta_{xy,z}$ são os coeficientes de influência mútua do primeiro tipo e $\eta_{x,yz}$, $\eta_{y,yz}$, ..., $\eta_{z,xy}$ são os coeficientes de influência mútua do segundo tipo. Esse conjunto de coeficientes perfaz um total de 36 propriedades elásticas, no entanto, podem ser expressas em termos de 21 propriedades elásticas independentes. Essas propriedades podem ser expressas, por sua vez, em termos das valores técnicos de engenharia, os quais se relacionam com as propriedades do material (*Lekhnitskii, 1963*).

O conjunto completo de equações, mostrado em 20, pode ser reduzido de acordo com as hipóteses adotadas para a formulação do modelo do material. No caso de um modelo para materiais transversalmente isotrópicos, surgem planos de simetria e um plano de isotropia adicionais, os quais permitem simplificar o equacionamento e reduzir a quantidade de propriedades elásticas, agrupando-as em termos de um número reduzido de propriedades do material transversalmente isotrópico.

A partir da aplicação de um procedimento semelhante ao utilizado para dedução da relação constitutiva para anisotropia completa, partindo da lei de Hooke generalizada e considerando os planos de simetria do material transversalmente isotrópica paralelos ao plano XY do sistema cartesiano global e o eixo de simetria do material alinhado como o eixo Z do sistema global, é possível deduzir um conjunto de equações para a relação constitutiva do material transversalmente isotrópico em termos das propriedades específicas desse tipo de material como mostrado nas equações 21.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) - \frac{\nu'}{E'} \cdot \sigma_z \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) - \frac{\nu'}{E'} \cdot \sigma_z \\
 \varepsilon_z &= \frac{\nu'}{E'} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E'} \cdot \sigma_z \\
 \gamma_{yz} &= \frac{1}{G'} \cdot \tau_{yz} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{1}{G'} \cdot \tau_{xz} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{xy}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Nas equações mostradas em 21, E e E' são os módulos de Young no plano de isotropia e na direção perpendicular a ele, respectivamente; G e G' são os módulos de cisalhamento para planos normais ao plano de isotropia e para planos paralelos a ele, respectivamente; finalmente, ν e ν' são os coeficientes de Poisson para o plano de isotropia e para planos perpendiculares a ele, respectivamente.

Seguindo o mesmo princípio utilizado para deduzir as soluções fundamentais isotrópicas, é possível deduzir soluções fundamentais para materiais de comportamento transversalmente isotrópico. Para tanto, é necessário resolver um problema similar ao de Kelvin, chamado de integral fundamental (*Pan & Chou, 1976*) para elasticidade tridimensional, mas agora em um meio transversalmente isotrópico, a fim de obter a solução analítica para uma força pontual.

$$K^{-1}_{ij}(\xi)=[C_{ikjm} \xi_k \xi_m]^{-1} \quad (22)$$

$$U^*_{ij}(x, y)=\frac{1}{8\pi^2|x-y|} \cdot \oint_{|\xi|=1} K^{-1}_{ij}(\xi) ds \quad (23)$$

A partir da equação 22 é possível calcular o deslocamento num ponto y qualquer, devido a uma força pontual aplicada em um ponto x genérico (Loloi, 2000). Essa resposta pode ser obtida em sua forma fechada para problemas isotrópicos, conhecida como solução de Kelvin, mas representada grandes dificuldades para problemas anisotrópicos. Assim, é comum na literatura a utilização de métodos de aproximação, tais como expansão em série, aproximação numérica direta ou separação da solução em partes isotrópica e anisotrópica (Távora, 2003, Loloi, 2000, Pan & Chou, 1976) para obter essa solução. No entanto, para um caso de anisotropia parcial existe uma solução fechada para o problema do carregamento concentrado descrito na equação 22, genericamente chamado de integral fundamental ou função de Green para elasticidade, que foi apresentada inicialmente por Pan & Chou, 1976 para o caso é o transversalmente isotrópico.

A solução fundamental fechada para o problema de um carregamento concentrado aplicado a um meio infinito transversalmente isotrópico foi apresentada, pela primeira vez, por Pan & Chou, 1976, tendo sido obtida por meio da introdução de funções potenciais que governam os deslocamentos no meio transversalmente isotrópico. Segundo Pan & Chou, 1976 o uso dessa abordagem potencial permitiu a obtenção de uma solução unificada, independente de condições relacionadas com as propriedades do material, como eram as soluções anteriores. Além disso, essa proposta resolveu um problema de singularidade presente em soluções enunciadas anteriormente, a qual ocorria quando a avaliação numérica da equação era feita sobre o eixo Z .

Posteriormente à sua publicação, a solução proposta por Pan & Chou, 1976 foi revisada, tendo sido reagrupada e apresentada numa forma mais adequada para implementação computacional por Loloi, 2000. Segundo Pan & Chou, 1976 são três os casos fundamentais a serem analisados, dependendo das propriedades do meio transversalmente

isotrópico, quanto à influência sobre a solução fundamental.

$$\tilde{C}_{13} - C_{13} - 2C_{66} > 0 \quad (24)$$

$$\tilde{C}_{13} - C_{13} - 2C_{66} = 0 \quad (25)$$

$$\tilde{C}_{13} - C_{13} - 2C_{66} < 0 \quad (26)$$

Nestas equações, C_{ij} representa a matriz das propriedades elásticas do material, enquanto \tilde{C}_{13} consiste numa combinação dessas propriedades.

Quando a combinação das propriedades elásticas satisfaz a equação 24 ou a equação 26, então existe algum grau de anisotropia e a solução fundamental é resolvida como transversalmente isotrópica a partir de uma solução unificada proposta por *Pan & Chou, 1976*, fruto da união da aplicação de técnicas de transformada de Fourier e de métodos de solução complexa. Já se as propriedades elásticas são tais que levam à situação dada pela equação 25, o material apresenta comportamento isotrópico e deve ser modelado por uma forma degenerada da solução transversalmente isotrópica proposta. É possível condensar as equações resultantes da solução para que sejam expressas em um mesmo conjunto, agrupando as diferenças originadas pelas propriedades do material em valores específicos.

$$\begin{aligned}
U_{13}^* &= \sum_{i=1}^2 \left[\nu_i A_i \frac{X_1}{R_i R_i^*} - \nu_i (A_i + B_i) \cdot \frac{X_1 z_i}{R_i^3} \right] \\
U_{23}^* &= \sum_{i=1}^2 \left[\nu_i A_i \frac{X_2}{R_i R_i^*} - \nu_i (A_i + B_i) \cdot \frac{X_2 z_i}{R_i^3} \right] \\
U_{33}^* &= \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{C_{11} B_i + C_{66} \nu_i^2 A_i}{C_{13} + C_{66}} \right) \cdot \frac{1}{R_i} - \frac{(A_i + B_i) \cdot \nu_i^2}{C_{13} + C_{66}} \cdot \left(\frac{C_{66} \rho^2 + C_{11} X_3^2}{R_i^3} \right) \right] \\
U_{11}^* &= \sum_{i=1}^2 \left[(A_i' - B_i') \cdot \left(\frac{\nu_i}{R_i} - \frac{\nu_i X_1^2}{R_i^3} \right) + 2 \cdot \nu_i B_i' \cdot \left(\frac{1}{R_i^*} - \frac{X_1^2}{R_i R_i^{*2}} \right) \right] + D \cdot \left[\frac{1}{R_3^*} - \frac{X_2^2}{R_3 R_3^{*2}} \right] \\
U_{21}^* &= \sum_{i=1}^2 \left[-\nu_i (A_i' - B_i') \cdot \frac{X_1 X_2}{R_i^3} - 2 \cdot \nu_i B_i' \cdot \frac{X_1 X_2}{R_i R_i^{*2}} \right] + D \cdot \frac{X_1 X_2}{R_3 R_3^{*2}} \\
U_{31}^* &= \sum_{i=1}^2 \left[-\nu_i^2 k_i (A_i' - B_i') \cdot \frac{X_1 z_i}{R_i^3} - \frac{C_{11} A_i' - C_{66} \nu_i^2 B_i'}{C_{13} + C_{66}} \cdot \frac{2X_1}{R_i R_i^{*2}} \right]
\end{aligned} \tag{27}$$

Nessas equações, expressas em 27, as constantes A_i , B_i , A_i' , B_i' , ν_i e D estão relacionadas às propriedades elásticas do material, dispostas no tensor C_{ijkl} , o qual pode ser convertido para a notação matricial C_{ij} pela regra de Voight (Barros, 1997 e Chen & Saleeb, 1994). Esse conjunto de equações foi retrabalhado por Loloi, 2000, o qual separou as equações originais em duas partes, uma delas dependente das variáveis do problema e outra relacionada exclusivamente com as propriedades do material, o que resultou num segundo conjunto de equações.

$$\begin{aligned}
U_{ij}^* &= \sum_{n=1}^3 \alpha_n^{(ij)} F_n^{(ij)} \rightarrow i, j=1,2 \\
U_{i3}^* &= \sum_{n=1}^3 \alpha_n^{(i3)} F_n^{(i3)} \rightarrow i, j=1,2,3 \\
U_{ji}^* &= U_{ij}^* \rightarrow i, j=1,2,3
\end{aligned} \tag{28}$$

Nas equações em 28, $\alpha_n^{(ij)}$ é uma constante que é obtida a partir de uma combinação dos valores das propriedades do material transversalmente isotrópico por um equacionamento específico. Já as funções $F_n^{(ij)}$ são dependentes de termos variáveis, pois necessitam de dados como as coordenadas dos nós, o tipo de elemento em integração entre outras para que possam ser calculadas. No artigo de Loloi, 2000 existem blocos de equações definidos por chaves de escolha, os quais possibilitam definir o cálculo dos $\alpha_n^{(ij)}$ e dos $F_n^{(ij)}$ de acordo com

restrições definidas pela relação entre as propriedades do material transversalmente isotrópico e a combinação de índices i e j com envolvidos no cálculo.

Além de reagrupar as equações mostradas em 27, elaboradas por *Pan & Chou, 1976*, a formulação revisada de *Loloi, 2000* propõe algumas correções de caráter matemático para remoção de singularidades adicionadas pela manipulação algébrica de *Pan & Chou, 1976*. Essa singularidade é distinta daquela característica das soluções fundamentais utilizadas em elementos de contorno e foi adicionada devido a uma necessidade de definição de novos parâmetros para cálculo de distâncias, envolvido no cálculo da solução fundamental. Além disso, é levantada uma questão relativa à ausência de uma variável no equacionamento original, a qual *Loloi, 2000* demonstra e propõe sua recolocação.

Uma análise inicial dos problemas expostos por *Loloi, 2000* mostrou a presença efetiva de uma singularidade na formulação proposta por *Pan & Chou, 1976*, a qual ocorre quando a formulação é testada em casos práticos. Essa singularidade existe para casos nos quais as coordenadas no eixo z do problema se aproximam de valores negativos a partir de uma localização inicialmente positiva. Isso é devido ao cálculo de um raio adicional, proposto na formulação original, que pode ser visto na equação 29.

$$R_i^* = R_i + z_i \rightarrow i=1,2,3 \quad (29)$$

O raio adicional (R_i^*) é fruto da soma de um raio original (R_i) com uma coordenada z ponderada por propriedades do material. Para compreensão da origem da singularidade é necessário ainda desdobrar os componentes da equação 29, que podem ser vistos nas equações 30.

$$\begin{aligned} R_i &= \sqrt{\rho^2 + z_i^2} \\ z_i &= \nu_i X_3 \end{aligned} \quad (30)$$

Observando as equações 30, quando ρ vai para zero, o que significa que o ponto está na origem do plano X_1X_2 , R_i se transforma na equação 31.

$$R_i = v_i \cdot |X_3| \quad (31)$$

Substituindo a equação 31 na equação 29, observa-se que, ao tender para valores negativos, a coordenada X_3 faz com que o valor da equação 29 tenda ao infinito, uma vez que são somadas parcelas iguais, a menos de um módulo. Para resolver esse problema de singularidade, adicionada pela manipulação da formulação proposta por *Pan & Chou, 1976* e não típica das soluções fundamentais, *Loloi, 2000* propõe a adição de um termo identificador do sinal sobre a coordenada X_3 . Essa manipulação mostrou-se realmente necessária e efetiva, resolvendo o problema da singularidade e originando a equação substituta daquela apresentada inicialmente por *Pan & Chou, 1976* na equação 29, que pode ser vista na equação 32.

$$R_i^* = R_i + \text{sign}(X_3) \cdot z_i \rightarrow i=1,2,3 \quad (32)$$

Quanto ao questionamento feito por *Loloi, 2000* relativo à falta de uma variável em um dos desenvolvimentos algébricos mostrados por *Pan & Chou, 1976*, verificações mais detalhadas, comparando ambas as formulações, demonstraram tratar-se de uma variável cujo valor específico para a situação de emprego é unitário. Assim, tanto a formulação original, proposta por *Pan & Chou, 1976*, quanto a retificação proposta por *Loloi, 2000* mostraram-se completamente equivalentes.

Dessa forma, por apresentar um desenvolvimento mais preciso, uma vez que trata de todas as singularidades presentes na formulação, e também por dispor o equacionamento proposto por *Pan & Chou, 1976* de uma maneira mais apropriada para a implementação numérica computacional, foi escolhida a solução fundamental transversalmente isotrópica apresentada por *Loloi, 2000* para implementação neste trabalho.

O conjunto de funções e constantes referido nas equações 28 é dado por *Loloi, 2000* na forma de tabelas de acordo com condições específicas, as quais estão ligadas às propriedades do material, a direção de avaliação da solução fundamental e ao estágio do cálculo de cada

equação, dado que existe um somatório que deve ser cumprido. Assim, as funções e constantes associadas são dispostas nas tabelas 1, 2 e 3.

Tabela 1. Funções e constantes para o caso de $\nu_1 \neq \nu_2$.

Funções	Constantes
$F_n^{(ij)} = \frac{\delta_{ij}}{R_n^*} - \frac{d_i d_j}{R_n R_n^{*2}}$	$\alpha_1^{(ij)} = -\alpha_2^{(ij)} = \frac{C_{66} - C_{33} \nu_n^2}{\nu_n H}$
$F_n^{(i3)} = \text{sign}(d_3) \cdot \frac{d_i}{R_n R_n^*}$	$\alpha_1^{(i3)} = -\alpha_2^{(i3)} = \frac{C_{13} + C_{66}}{H}$
$F_n^{(33)} = \frac{1}{R_n}$	$\alpha_1^{(33)} = -\alpha_2^{(33)} = \frac{C_{11} - C_{66} \nu_n^2}{\nu_n H}$

Tabela 2. Funções e constantes para o caso de $\nu_1 = \nu_2$.

Funções	Constantes
$F_1^{(ij)} = \frac{\delta_{ij}}{R_1} - \frac{d_i d_j}{R_1^3}$	$\alpha_1^{(ij)} = \frac{C_{66} \nu_1^2 - C_{11}}{\nu_1 M}$
$F_2^{(ij)} = \frac{\delta_{ij}}{R_1^*} - \frac{d_i d_j}{R_1 R_1^{*2}}$	$\alpha_2^{(ij)} = \frac{1}{4 \pi \nu_1 C_{66}}$
$F_1^{(i3)} = \frac{d_i d_3 \nu_1^2}{R_1^3}$	$\alpha_1^{(i3)} = \frac{\nu_1 (C_{13} + C_{66})}{M}$
$F_2^{(i3)} = 0$	$\alpha_2^{(i3)} = 0$
$F_1^{(33)} = \frac{1}{R_1}$	$\alpha_1^{(33)} = \frac{\nu_1 (C_{66} \nu_1^2 + C_{11})}{M}$
$F_2^{(33)} = \frac{d_3^2 \nu_1^4}{R_1^3}$	$\alpha_2^{(33)} = -\alpha_1^{(ij)}$

Tabela 3. Funções e constantes para todos os casos com $n = 3$.

Funções	Constantes
$F_3^{(11)} = \frac{1}{R_3^*} - \frac{d_2^2}{R_3 R_3^{*2}}$	$\alpha_3^{(ij)} = \frac{1}{4\pi\nu_3 C_{66}}$
$F_3^{(22)} = \frac{1}{R_3^*} - \frac{d_1^2}{R_3 R_3^{*2}}$	
$F_3^{(12)} = F_3^{(21)} = \frac{d_1 d_2}{R_3 R_3^{*2}}$	

Uma vez deduzida a solução fundamental de deslocamentos, é necessário ainda obter a solução fundamental de forças de superfície, a fim de completar as equações integrais de contorno e possibilitar uma solução única para o sistema de equações. Para isso, *Loloi, 2000* recomenda que seja feita a derivada das funções utilizadas para obter as soluções fundamentais de deslocamento, obtendo, assim, equações que possibilitarão calcular as deformações. A partir das deformações, seguindo a lei de Hooke generalizada, a qual relaciona tensão e deformação através das propriedades do material, é possível obter o tensor de tensões completo. Uma vez obtido o tensor de tensões, basta aplicar a normal adequada para obter a solução fundamental de força de superfície requerida. O roteiro como sugerido por *Loloi, 2000* é apresentado na seqüência de equações 33.

$$\varepsilon_{ijk}^* = \frac{1}{2} \cdot (U_{ik,j}^* + U_{jk,i}^*)$$

$$\varepsilon_{jik}^* = \varepsilon_{ijk}^*$$

$$\begin{pmatrix} S_{11k}^* \\ S_{22k}^* \\ S_{33k}^* \\ S_{12k}^* \\ S_{13k}^* \\ S_{23k}^* \end{pmatrix} = [C] \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11k}^* \\ \varepsilon_{22k}^* \\ \varepsilon_{33k}^* \\ \varepsilon_{12k}^* \\ \varepsilon_{13k}^* \\ \varepsilon_{23k}^* \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$S_{jik}^* = S_{ijk}^*$$

$$T_{ij}^* = S_{ikj}^* \cdot n_k$$

Dessa forma, a partir das soluções fundamentais para deslocamentos é possível obter as

soluções fundamentais para forças de superfície, muito embora a derivação consista numa etapa delicada, dado que existem diversas funções e diversos casos a serem respeitados, além do fato de que as derivadas devem, preferencialmente, serem obtidas de forma analítica, aumentando a complexidade matemática da implementação. No entanto, ao final desse processo, é possível prosseguir com a formulação integral de contorno e obter resultados de deslocamentos e forças de superfície para um problema definido.

3. PARTICULARIDADES DA APLICAÇÃO EM BIOENGENHARIA

Como visto na seção anterior, o desenvolvimento de um procedimento de solução matemática para problemas de engenharia envolve a capacidade de modelagem matemática. Isso significa que há necessidade de descrição matemática do fenômeno que se deseja estudar. Do ponto de vista da engenharia convencional, aquela que lida com problemas relacionados às estruturas vistas comumente, há diversos modelos bastante desenvolvidos, bem como os complementos necessários à solução dos problemas, de modo que os métodos implementados comercialmente já abrangem a grande maioria, se não todas as aplicações principais.

No entanto, como evidenciado anteriormente, a bioengenharia se caracteriza por ser uma nova frente de pesquisa, envolvendo não somente a engenharia, mas também a medicina e diversas outras áreas do conhecimento, numa abordagem fundamentalmente multidisciplinar. Assim, soluções para problemas convencionais de engenharia apresentam utilidade restrita na análise de problemas de bioengenharia, dado que os últimos apresentam características particulares, tornando sua análise um problema único.

Do ponto de vista da engenharia, a análise de uma estrutura intrincada ou de uma mais simples é fundamentalmente igual, desde que seja aplicado o mesmo material, o que significa utilizar o mesmo modelo para o comportamento do domínio. O que muda e pode trazer maior ou menor dificuldade é a representação da geometria e dos carregamentos que definem as condições de contorno, o que pode resultar em um campo de deslocamentos e tensões mais

ou menos complicado, além da condição da análise elástica, que pode levar em conta fenômenos mais ou menos complexos.

Já do ponto de vista da bioengenharia, a análise de duas estruturas ósseas, sejam elas pertencentes a uma mesma pessoa ou a pessoas distintas não pode ser considerada igual, ou mesmo semelhante. Tanto a geometria, quanto condições de contorno serão distintas em ambos os casos, mas o que ocorre com o material ósseo é que também o material será distinto. Assim, se a análise for conduzida em partes diferentes da estrutura óssea, dadas as características dinâmicas do tecido vivo, haverá um comportamento mecânico distinto, mesmo em se tratando, fundamentalmente, dos mesmos materiais constituintes. Além disso, fenômenos como a remodelagem e a regeneração podem alterar significativamente a resposta do osso a solicitações externas (*Richards et al., 1998*). Tendo em mente que tais mecanismos são biológicos e dependentes da individualidade de cada um, é possível concluir que a análise de cada ser, do ponto de vista da bioengenharia, precisa ser uma análise particular.

Ferramentas comerciais, usualmente utilizadas em aplicações de engenharia, apresentam grande capacidade de análise e dispõe de diversos modelos matemáticos previamente implementados, no entanto, via de regra, não são flexíveis o suficiente para oferecer a personalização necessária a aplicações em bioengenharia. Características individuais como a capacidade de remodelagem e regeneração, assim como o mecanismo prioritário para ocorrência de uma ou outra, podem necessitar de implementações de soluções particulares ou, na melhor das hipóteses, válidas para uma quantidade bastante limitada de pacientes, tornando comercialmente inviável sua inserção em ferramentas de uso comercial.

Por outro lado, a característica de pesquisa da maior parte das soluções existentes para modelagem matemática de problemas de bioengenharia, que implica em alterações constantes do código dos programas implementados e sua atualização, é dificultada com a utilização de ferramentas comerciais, principalmente devido à natureza proprietária desses códigos, o que impede que modificações sejam feitas sem o consentimento e mesmo o

auxílio de seus projetistas.

Apesar disso, análises de bioengenharia têm sido conduzidas utilizando ferramentas de uso comercial, via de regra, envolvem grandes simplificações e, de modo geral, com capacidade de analisar os efeitos de fenômenos biológicos de maneira limitada. Uma técnica bastante comum é a integração com módulos externos, os quais partem de resultados oferecidos pelas ferramentas de análise comercial para que seja executada uma análise complementar especialista de bioengenharia. Os resultados da análise de bioengenharia são, então, passados como condições iniciais para uma nova rodada da ferramenta comercial. Esse tipo de procedimento tem mostrado resultados interessantes, no entanto, ainda requerer uma grande quantidade de interferência do usuário, o que limita sua utilização em aplicações cotidianas ou mesmo na análise de problemas mais complexos e extensos, dado o grau de especialização necessário para conduzir as interferências necessárias.

Por outro lado, o uso de ferramentas comerciais, cujo desenvolvimento foi, e ainda é, baseado no principal público usuário desse tipo de ferramenta, que são os profissionais das áreas de engenharia, requer uma vasta preparação e compreensão dos termos técnicos envolvidos no linguajar diário dos engenheiros, o que não necessariamente é válido para usuários de outras especialidades. Além disso, conhecimentos mais aprofundados, relativos às limitações matemáticas e hipóteses envolvidas nas soluções utilizadas em cada aplicação da ferramenta são necessários a fim de evitar problemas de inadequação do modelo ao caso estudado. Tais restrições, transparentes quando se trata de aplicações fundamentalmente de engenharia, passam a ter suma importância quando estão envolvidos profissionais de áreas multidisciplinares.

Além das particularidades fenomenológicas, ligadas à fisiologia típica dos indivíduos, problemas de bioengenharia apresentam ainda uma dificuldade adicional, que normalmente passa despercebida quando se trata de problemas de engenharia. Na bioengenharia as geometrias não são projetadas, mas sim obtidas. Isso significa que não há um modelo geométrico computacional da geometria a ser analisada, como é o caso de praticamente a

totalidade dos problemas abordados na engenharia. No caso da bioengenharia há necessidade de obter a geometria diretamente a partir do indivíduo, um procedimento similar ao empregado em engenharia reversa.

Nas aplicações de engenharia, via de regra, o objetivo é testar alguma estrutura recém concebida, ou então analisar uma estrutura pré-existente quanto a uma nova condição, não contemplada durante o período de projeto. Em ambos os casos, a existência de uma representação geométrica computacional do modelo é bastante provável, sendo que quando é inexistente a dificuldade de obtê-la é mínima, dado que as estruturas projetadas por engenharia costumam utilizar de formas geométricas simples, ou composições de formas simples para formas geométricas mais complexas. No entanto, de forma geral, não há dificuldade em representá-las utilizando ferramentas de desenho auxiliado por computador (CAD).

Em casos extremos, nos quais o projeto é obra de um artesão, o qual utiliza formas artísticas para definir as geometrias da estrutura, existem procedimentos de engenharia reversa, os quais permitem obter a geometria diretamente a partir de sua apresentação real. Esse processo ocorre por aquisição de dados geométricos da estrutura real e codificação dos mesmos em um espaço tridimensional virtual, através de um programa de computador. Esse tipo de representação pode ser bastante preciso, dependendo, principalmente, do grau de precisão do aparelho de aquisição de dados.

No caso da bioengenharia, as geometrias não apresentam modelos previamente projetados, muito menos foram concebidas conscientemente com base em geometrias simples. As geometrias presentes em estruturas de bioengenharia se assemelham muito mais àquelas obtidas por artesãos, mas com uma característica adicional, que são particulares para cada indivíduo. É claro que há a possibilidade de representar geometricamente tais estruturas por modelos matemáticos, no entanto, sua representação seria, certamente, bastante complexa e mesmo assim aproximada, devendo haver um trabalho semelhante de modelagem geométrica para cada indivíduo.

Dessa forma, existe uma dificuldade intrínseca na análise de problemas de bioengenharia, que é a obtenção da geometria. Embora existam técnicas de engenharia, notadamente a engenharia reversa, que possibilitem a obtenção de geometrias exclusivas como essa, sua utilização em problemas de bioengenharia ainda não é bem documentada ou padronizada. Assim, procedimentos de digitalização, baseados em arquivos para prototipagem rápida, têm sido utilizados e aperfeiçoados para utilização como técnica de captura de geometrias em bioengenharia (*Béchet et al., 2002*).

Além disso, a adequada descrição do material ósseo, mesmo que utilizando um modelo matemático mais complexo, como o transversalmente isotrópico, permanece um problema, dadas as características de variabilidade do osso. Como visto anteriormente, o enquadramento do material ósseo como material de engenharia passa pela necessidade de uma padronização, por mínima que seja, a fim de possibilitar a definição de algumas propriedades que possam ser consideradas descritivas do material. Outra alternativa é a de considerar o osso como um material sem padronização, da mesma maneira que a proposta adotada para a geometria, considerando suas propriedades particulares para cada análise a ser realizada. Tal procedimento requer uma nova metodologia que possibilite obter propriedades para o osso a ser analisado exatamente como elas se apresentem no momento da análise, e que sejam adequadas aos modelos matemáticos previamente implementados.

Mas não apenas propriedades elastostáticas representam problemas para análises de tensão e deformação em estruturas ósseas, existem também diversas características exclusivas do material ósseo, muitas delas dependentes de sua matriz orgânica viva, que torna o osso um material singular. Análises mais refinadas e com real validade para utilizações práticas devem, obrigatoriamente, contemplar tais características e oferecer capacidade para uma simulação numérica computacional. Fenômenos como a remodelagem óssea superficial, que dão ao osso grande parte de sua capacidade de adaptação de forma para o cumprimento de novas funções ao longo do período de vida, são expoentes da influência dessas particularidades nos resultados de análises quando comparados a resultados obtidos em procedimentos reais.

Para tanto, é necessário mais que somente implementações de ferramentas computacionais com capacidade para descrever e modelar essas particularidades ligadas às estruturas ósseas. É necessário o desenvolvimento de uma metodologia de análise completa, capaz de capturar toda a informações necessária para a adequada representação, tanto das características geométricas quanto das particularidades das propriedades do material ósseo, de maneira a possibilitar conduzir uma análise realmente no domínio da bioengenharia, unindo os fenômenos biológicos com os modelos de engenharia.

3.1.REMODELAGEM ÓSSEA SUPERFICIAL

Na engenharia mecânica uma geometria pode ser otimizada sempre que a sua forma ou propriedades de resistência mecânica forem superiores àquilo que seja o necessário para resistir aos esforços previstos de utilização. Assim, uma asa de avião pode apresentar longarinas de reforço confeccionadas em perfis maciços ou perfurados e cumprir as mesmas funções, no entanto, aquela que apresentar perfis perfurados será mais leve, o que resultará em menor peso e menor consumo de combustível. Levando ao extremo, é possível otimizar um perfil para que apresente a menor área e volume possíveis e ainda continue oferecendo a resistência necessária. O problema desse tipo de procedimento é que restringe o campo de utilização da geometria, ou seja, enquanto uma asa com longarinas de perfil maciço pode suportar determinadas cargas imprevistas, uma asa com longarinas de perfil otimizado não oferece a mesma resistência, o que pode levar a falhas.

No corpo humano o fenômeno de remodelagem óssea ocorre seguindo princípios de otimização empíricos, os quais, teoricamente, apóiam-se na funcionalidade e na redução do gasto de energia com a manutenção das estruturas. Isso significa que a tendência do organismo é de eliminar material de onde ele não seja necessário, para que possa ser melhor aproveitado em regiões de maior solicitação. Do ponto de vista quantitativo, significa que ocorre alteração na densidade local mineral ao longo da estrutura óssea, de modo a que a resistência mecânica atingida seja suficiente para limitar as deformações a patamares que sejam seguros (*Stülpmner et al., 1997, Turner et al., 1997, Firoozbakhsh et al., 1992,*

Firoozbakhsh & Cowin, 1980), resultando em uma estrutura leve e resistente com propriedades otimizada para o histórico de solicitações às quais já foi submetida. A esse tipo de remodelagem dá-se o nome de remodelagem interna, pois resulta em alteração nas propriedades locais do material ósseo ao longo da estrutura.

Segundo *Stülpmner et al., 1997*, existe uma lei constitutiva que rege a evolução da densidade óssea de acordo com as deformações induzidas na estrutura óssea pelos carregamentos externos. De acordo com essa lei constitutiva, as deformações estimulam o aumento da densidade de material ósseo na estrutura óssea seguindo a equação 34.

$$\dot{\rho} = \dot{r} \cdot S_v \cdot \hat{\rho} \quad (34)$$

Nessa equação, $\dot{\rho}$ representa a evolução da densidade de material ósseo no tempo, S_v é a área específica, que funciona como um parâmetro para a porosidade do material, $\hat{\rho}$ é a densidade de tecido ósseo, e \dot{r} é a velocidade de remodelagem. De acordo com essa teoria, a velocidade de remodelagem depende de um parâmetro e , que é o erro remodelador.

O erro remodelador reflete a diferença entre o patamar de estímulo ótimo e o estímulo atual, lembrando que o estímulo é dado pela deformação presente na estrutura. Assim, o erro pode ser definido pela equação 35.

$$e = \left(\sum_{i=1}^N n_i (\bar{\varepsilon}_i - \varepsilon_{rem})^{m_i} \right)^{1/m_i}, \quad (35)$$

sendo que N é a quantidade total de carregamentos considerados, i representa o i ésimo carregamento, n_i é a quantidade de ciclos por dia do i ésimo carregamento, m_i é escalar positivo, ε_{rem} é o valor homeostático de deformação e $\bar{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}$.

Uma vez que se tenha calculado a evolução da densidade, existem fórmulas empíricas propostas que relacionam a densidade com o módulo de Young e o coeficiente de Poisson. Segundo *Stülpmner et al., 1997*, Jacobs propõe em seu trabalho de 1994 a relação mostrada

nas equações 36.

$$E = \begin{cases} 2014 \cdot \rho^{2,5} \rightarrow \rho \leq 1,2 \text{ g/cc} \\ 1763 \cdot \rho^{3,2} \rightarrow \rho \geq 1,2 \text{ g/cc} \end{cases} \text{ e } \nu = \begin{cases} 0,20 \rightarrow \rho \leq 1,2 \text{ g/cc} \\ 0,32 \rightarrow \rho \geq 1,2 \text{ g/cc} \end{cases} \quad (36)$$

Assim, é possível obter propriedades locais para o material ósseo, de maneira a tornar o modelo matemático mais próximo do comportamento mecânico observado na estrutura real.

Além dessa teoria de remodelagem interna, existem outras que propõe um modelo de elasticidade adaptativa, como a utilizada por *Tsili, 2000*, ou aquelas que analisam a remodelagem interna como um problema similar a uma otimização, como mostrado por *Bagge, 2000* ou *Weinans et al., 1992*, procedimento que envolve o uso de equações de otimização em termos de energias de deformação a serem minimizadas sob restrições condizentes com critérios biológicos empíricos. Além de procedimentos matemáticos baseados em modelos, existem outras abordagens, baseadas em imagens médicas, por exemplo (*Audenino et al., 1996*), que procuram oferecer ferramentas visuais para interpretação e análise do fenômeno da remodelagem óssea.

No entanto, há situações nas quais não basta alterar as propriedades do material ósseo para que seja atingida a melhor condição de resistência mecânica, é necessário alterar a configuração geométrica das estruturas ósseas envolvidas. Um exemplo típico desse tipo de fenômeno ocorre quando são utilizados implantes ortopédicos com roscas ou cavidades, que ficam em contato com o material ósseo. Nesses casos, para reduzir a concentração do campo de tensão e deformação induzido pelo implante no osso, é necessário aumentar a área de contato entre o implante e o osso, o que ocorre através da alteração da forma do osso ao redor do implante, de maneira a promover maior contato. Esse tipo de remodelagem é chamado de remodelagem superficial (*Sadegh et al., 1993*).

Na remodelagem superficial, assim como na interna, supõe-se que exista um nível de deformação de compressão máximo e mínimo aceitável para o osso. A extrapolação desses

valores leva a uma reação do organismo no sentido de tentar retornar os valores a patamares aceitáveis. No caso da remodelagem óssea superficial ocorre uma alteração na geometria superficial da estrutura óssea que leva a uma redução nos níveis de deformação. A alteração na geometria superficial da estrutura óssea pode ser prevista segundo uma regra que determina a velocidade de um ponto na superfície (*Sadegh et al., 1993*).

$$U = k \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (37)$$

Na equação 37, que representa um modelo matemático para a remodelagem óssea superficial, ε representa a deformação na direção tangente num ponto representativo da superfície da estrutura óssea, ε_0 é a chamada deformação de equilíbrio de remodelagem na mesma direção, k é uma constante negativa chamada de taxa de remodelagem, dada em mm/ciclo de tempo, e U é a velocidade do ponto na superfície da estrutura óssea. O processo de remodelagem superficial consiste na busca da combinação de parâmetros que leve a uma superfície cuja velocidade U seja nula.

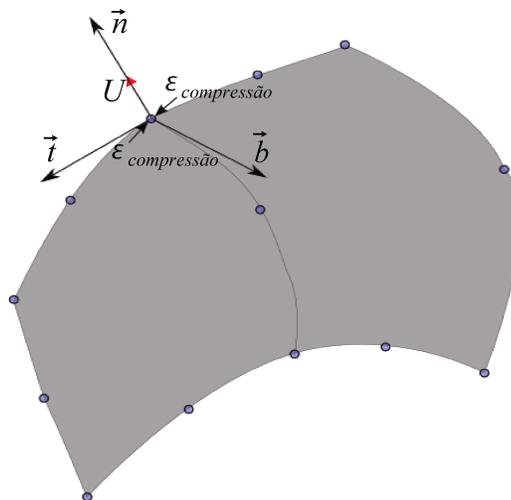


Figura 8. Ilustração da remodelagem nodal em elementos sobre uma superfície.

A Figura 8 mostra um exemplo do procedimento de remodelagem. Neste caso, existe um nó de referência da malha superficial sobre o qual será executado o processo de remodelagem óssea superficial. Para esse nó é definido um sistema de coordenadas local

tangente à superfície, sobre o qual é possível definir a deformação de compressão máxima para comparação com o valor de referência de acordo com a equação 37. Uma vez obtidos os valores de deformação, os cálculos resultam em um número que quantifica a movimentação do nó na direção normal à superfície devido à remodelagem, o que pode ser definido como crescimento ósseo. Portanto, é possível visualizar, na Figura 8, que o estímulo para a remodelagem superficial, de acordo com o modelo proposto por *Sadegh et al., 1993*, é a deformação de compressão que ocorre num plano tangente à superfície, enquanto que o fenômeno da movimentação do nó por remodelagem acontece seguindo a direção normal ao mesmo plano, caracterizando um crescimento ou aumento de material.

O procedimento recomendado por *Sadegh et al., 1993* para avaliação da remodelagem superficial seguindo o modelo de crescimento ósseo normal à superfície baseado em campo de deformações de referência é iterativo. Isso significa que, para cada ciclo de crescimento, é necessário executar uma análise elastostática completa, a qual proverá informações referentes ao campo de deslocamentos atual, possibilitando, assim, a obtenção do campo de deformações para os cálculos comparativos. Uma vez realizada a comparação e o processo de remodelagem óssea para definição quantitativa do crescimento da superfície a partir da movimentação de seus nós, é feita a atualização das coordenadas iniciais, gerando um novo conjunto de coordenadas completas para os nós após o processo de remodelagem. Esses novos dados são reintroduzidos como dados de entrada no procedimento de cálculo elastostático e uma nova solução é obtida, iniciando uma nova iteração.

Dado que o processo é iterativo, uma vez que o equacionamento de remodelagem óssea superficial depende de dados que são recalculados sobre atualizações providas pelo próprio sistema de remodelagem, existe uma discussão sobre a estabilidade do modelo matemático de remodelagem (*Harrigan & Hamilton, 1992*). Segundo *Harrigan & Hamilton, 1992*, a característica empírica da maior parte dos modelos matemáticos para remodelagem superficial dificulta a obtenção de equacionamento analítico consistente. Sem esse equacionamento, uma análise puramente matemática da estabilidade do modelo proposto apresenta dificuldades fundamentais. Assim, grande parte dos estudos de estabilidade são

feitos a partir de análises numéricas e comparações dos resultados com estudos de caso reais, alterando o modelo no intuito de torná-lo representativo da realidade.

É evidente que os dois modelos de remodelagem, interna e superficial, podem ocorrer simultaneamente, ora com predominância de um, ora de outro. No entanto, já foi observado que existem condições específicas que maximizam esses fenômenos no sentido de aumentar a densidade mineral óssea, melhor modelados pela remodelagem interna, assim como existem condições que levam o organismo a remodelar o osso, destruindo a estrutura e variando a massa de material ósseo de determinados locais, melhor representado pela remodelagem superficial. Identificar completamente essas condições, bem como prever sua ocorrência é uma área de interesse da bioengenharia.

Evidentemente existe uma interação entre os fenômenos de remodelagem óssea interna e superficial, visto que a maioria das estruturas ósseas reais apresenta tanto uma distribuição otimizada de propriedades de material, quanto soluções geométricas que, em conjunto com essas propriedades do material, levam a uma condição de máxima preservação com o melhor desempenho de função.

Além dos procedimentos de remodelagem óssea que procuram modelar o fenômeno do contínuo processo de adaptação e otimização das estruturas ósseas, existe uma outra característica, que envolve o uso de remodelagem óssea, que são os processo de cura ou regeneração óssea. Embora fundamentalmente diferentes do processo de remodelagem, dado que a regeneração e a cura ocorrem em resposta a um trauma, promovendo a recuperação de estruturas lesionadas a partir da síntese de novo tecido ósseo básico, os estágios finais desse processo são marcados por uma intensa atividade de remodelagem óssea (*Kargarnovin, 1994, Benedito, 2005*). Nessa última etapa, o calo ósseo, fruto do processo de regeneração, tem sua geometria e composição óssea alteradas a fim de transformar o osso imaturo em osso maduro, cuja estrutura interna, mineralização e geometria, recuperam a função anterior ao acidente. Esse processo pode levar tipicamente de um a quatro anos para sua conclusão (*Benedito, 2005*).

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA PROPOSTA

Com a finalidade de aplicar o método de análise numérica computacional dos elementos de contorno a problemas de bioengenharia voltados para análise estrutural de ossos, será proposta uma metodologia que viabilize o trabalho com representações geométricas o mais próximas possível das geometrias reais de estruturas ósseas. Além disso, essa metodologia contemplará o desenvolvimento de um procedimento de conversão e preparação da geometria adquirida para que possa ser analisada como estrutura mecânica, tanto do ponto de vista da descrição de carregamentos quanto das características do material ósseo envolvido. Finalmente, a metodologia levará aos resultados finais, nos quais será possível observar o comportamento gerado pelo modelo e, futuramente, compatibilizá-lo com o comportamento da estrutura real.

1. METODOLOGIA DE AQUISIÇÃO DA GEOMETRIA ÓSSEA

Como visto anteriormente, a geometria óssea é bastante irregular e particular, isso significa que oferece dificuldades tanto em sua descrição matemática, pois o modelo geométrico exigiria técnicas bastante avançadas para resultar numa descrição satisfatória, quanto na generalização dessa descrição, dado que o modelo geométrico, mesmo que desenvolvido satisfatoriamente para um indivíduo específico não necessariamente seria válido para outro indivíduo, não havendo sequer garantias de que haveria maneiras de

parametrizar o modelo para que se tornasse atualizável a partir de parâmetros característicos de indivíduos.

Apesar disso, existem projetos de padronização de geometrias ósseas para fins de pesquisa (*Cristofolini et al., 1996*). Tais projetos têm por finalidade compor um banco de dados o mais vasto possível, dispondo de geometrias ósseas das mais variadas, baseadas em um padrão de indivíduo a partir do qual é obtido o modelo geométrico e sobre o qual são refinadas as representações até atingir um grau de precisão satisfatório entre a representação e o objeto que se deseja representar. Apesar de envolver elevado grau de trabalho computacional, resultando em modelos geométricos de precisão bastante elevada, com flexibilidade para servirem a diversos propósitos, sejam eles a análise numérica computacional pelas mais diversas ferramentas disponíveis ou mesmo a construção protótipos reais a partir dos modelos representados, esse tipo de trabalho ainda reflete uma variedade limitada da população real.

No caso de populações com etnias predominantes, como é o caso de diversos países europeus, ou mesmo asiáticos, existe um apelo maior para esse tipo de padronização, visto que traços da etnia influenciam sobremaneira a capacidade de resposta do organismo e o tipo ou variedade de respostas possíveis, caracterizando a capacidade individual desse grupo de indivíduos para se adaptarem ao meio em que vivem. Essa predisposição genética permite supor que parcelas significativas de populações etnicamente iguais, vivendo sob a influência de um mesmo tipo de ambiente, apresentarão desenvolvimentos similares, resultando em soluções semelhantes. No caso de geometrias ósseas, essa hipótese permite oferecer uma padronização para as estruturas ósseas baseada nas estruturas de indivíduos considerados medianos na população, sendo que os extremos podem ser representados por alterações previsíveis em dimensões específicas e catalogadas na estrutura óssea padronizada.

No entanto, populações miscigenadas, que não apresentam uma etnia dominante, como é o caso da população brasileira, não são adequadas ao tipo de padronização que utiliza indivíduos singulares ou pequenos grupos como representantes suficientes para a maioria da

população. Mesmo que todos da população estejam sujeitos a estímulos semelhantes, sua carga genética e herança étnica oferece soluções distintas para grupos distintos. Ainda assim, no Brasil existem diversas realidades sociais, que se refletem no tipo de estímulo do ambiente ao qual os indivíduos estão sujeitos. Sob essa ótica, um indivíduo que pertença a uma determinada etnia, mas que viva numa região do País que seja mais abastada, economicamente, e que possa desfrutar dessa vantagem, estará sujeito a estímulos ambientais mais amenos, por dispor de uma série de comodidades oferecidas pela sociedade. Por outro lado, indivíduos da mesma etnia, que residam em uma região de tradição rural familiar e que não disponham de tantas comodidades como aquelas oferecidas em grandes centros, podem desenvolver características diferentes, principalmente no que diz respeito ao tipo e qualidade das estruturas ósseas.

Assim, se por um lado a padronização oferece uma facilidade por agrupar os indivíduos em categorias, permitindo o desenvolvimento de modelos que sejam representativos da população apenas com a necessidade de pequenas alterações controladas e conhecidas, por outro eles não são capazes de representar adequadamente populações diversificadas, dado que poderá existir uma grande variedade de soluções para um mesmo tipo de condição ambiental. No caso de geometrias ósseas, descrições simplificadas apresentam aplicação limitada, visto que grande parte da diferença no comportamento mecânico dessas estruturas reside em sua forma geométrica otimizada, que é formada pela resposta a estímulos que é específica de cada indivíduo.

Uma opção, no caso de populações diferenciadas como é a brasileira, é a aquisição da geometria óssea real de cada indivíduo utilizando métodos não invasivos. Para o caso de problemas que podem ser representados em duas dimensões, representações obtidas a partir da digitalização de radiografias podem ser aplicadas. No entanto, para caso de análise tridimensional, como é o objetivo deste trabalho, é necessário um método que seja capaz de recuperar a geometria tridimensional dos ossos.

Atualmente existem dois métodos mais freqüentemente utilizados com a finalidade de

obter imagens internas do corpo humano de forma não invasiva. O primeiro deles é o método baseado na tomografia computadorizada, o segundo é o método baseado na ressonância nuclear magnética.

O método da tomografia computadorizada utiliza tomógrafos de radiação X para obter imagens de fatias ou tomos transversais da seção do corpo que se deseja visualizar, Figura 9(b). Esses tomos são como vistas da seção cortada, na qual são visíveis os detalhes internos do corpo, mais nitidamente as estruturas duras, tais como ossos. O tomógrafo toma diversos tomos, igualmente espaçados entre si, os quais, empilhados, compõe a seção do corpo que se deseja visualizar. Posteriormente, tratamentos computacionais podem ser utilizados com a finalidade de interpolar as informações presentes nos tomos e construir superfícies tridimensionais, originando modelos tridimensionais, Figura 9(a).

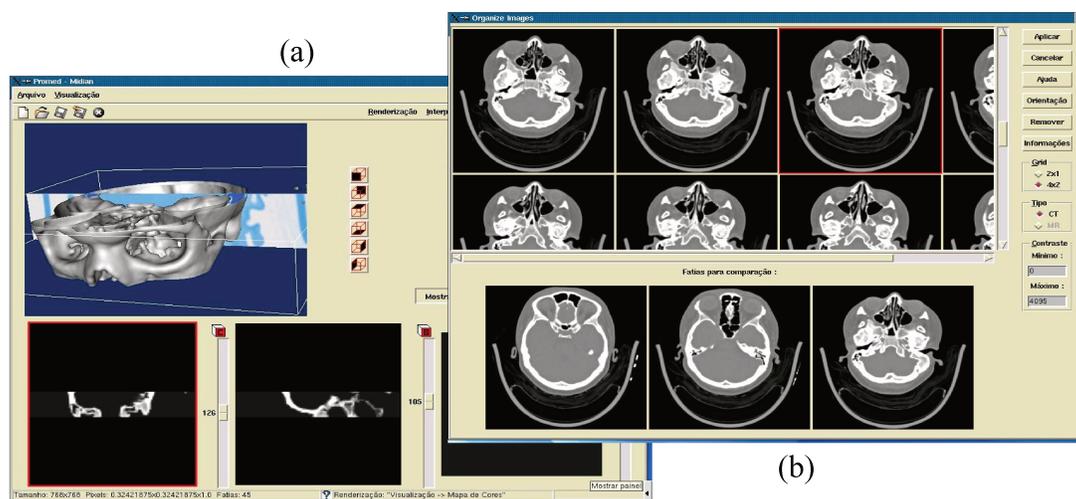


Figura 9. Vista dos tomos (b) e da seção óssea reconstruída (a) (Silva et al., 2002).

O método da tomografia computadorizada apresenta como principais características de interesse para este trabalho a obtenção de imagens bidimensionais de tomos, fatias, de estruturas internas do corpo, mais comumente de estruturas duras, tais como ossos. A definição de estruturas moles, como tecidos, também é possível, mas depende do uso de marcadores, chamados de contrastes, que sejam capazes de aderir às superfícies das estruturas moles para torná-las visíveis ao tomógrafo. Os tomos bidimensionais podem ser armazenados em arquivos digitais, os quais podem ser pós-processados para compor uma

representação tridimensional por cascas ou superfícies do sólido.

Já o método de ressonância nuclear magnética é baseado na resposta ressonante das moléculas de água, quando excitadas por um campo magnético de grande intensidade. Como é sabido, grande parte do corpo humano é composto de água, mesmo estruturas mais densas, como os ossos, apresentam frações significativas de líquidos, assim como órgãos internos e tecidos moles. O princípio da máquina de ressonância é excitar as moléculas de água e medir o resultado, detectando a presença desse componente químico e, por conseguinte, delineando órgãos e estruturas internas do corpo. Via de regra, imagens de ressonância nuclear magnética oferecem melhor qualidade na visualização de estruturas compostas por tecidos moles, embora também sejam igualmente precisas para estruturas duras. No entanto, dado o alto custo de operação desse tipo de máquina, exames desse tipo são solicitados prioritariamente para casos nos quais é necessário visualizar estruturas compostas de tecidos moles.

Dessa forma, o procedimento escolhido para partida do método de aquisição de dados geométricos de estruturas ósseas foi a tomografia computadorizada, dado que oferece elevada precisão para visualização de estruturas rígidas, custo viável e já vem sendo utilizado como ferramenta convencional para diagnósticos médicos. Além disso, grande parte dos equipamentos de tomografia já dispõe de algum tipo de saída para imagens digitais, o que permite a aplicação de ferramentas de pós-processamento, fundamentais para a obtenção dos modelos geométricos computacionais de acordo com as especificações necessárias para aplicações com ferramentas de análise numérica computacional.

Portanto, a parte inicial da metodologia, que é a aquisição dos dados referentes à geometria de ossos reais deve ser realizada por um dispositivo médico, um tomógrafo computadorizado. Para tanto, é necessária a participação de uma instituição que seja capaz de oferecer essas informações. No caso de aplicações reais, é bastante provável que todo o procedimento ocorra no interior de hospitais, o que torna a disposição de um tomógrafo uma necessidade de infra-estrutura. No entanto, para a finalidade de pesquisa, foi realizado um

convênio com o Hospital de Clínicas da Universidade Estadual de Campinas, envolvendo o Departamento de Traumatologia e Ortopedia para a aquisição dos dados do tomógrafo.

No entanto, apenas dispor dos dados de tomografia não garante a obtenção dos dados da geometria nas especificações necessárias para a aplicação definida. É necessário submeter esses dados a um pós-processamento que seja capaz de, inicialmente, transportar os dados de imagens do tomógrafo para um formato legível em computadores outros que não o do tomógrafo e, posteriormente, transformar os tomos bidimensionais em estruturas tridimensionais que sejam adequadas ao uso em ferramentas de análise computacional.

Imagens de tomografia, tais como estão disponíveis na saída digital do tomógrafo, não passam de dados de intensidade de cinza, o que significa que são conjuntos de pontos identificados por coordenadas cartesianas bidimensionais, os quais apresentam uma propriedade de tonalidade de cinza correspondente ao seu grau de opacidade ao raio X. Esse tipo de imagem oferece uma grade de pontos em tons de cinza, a qual, quando recomposta pelo sistema de imagens do tomógrafo, representa graficamente as estruturas, separadas entre moles e duras, de acordo com o tom de cinza que as compõe. Visualmente falando, a interpretação desse tipo de imagem é relativamente simples, no entanto, computacionalmente, consiste em um grande desafio, pois é necessário que cada ponto da imagem seja analisado e comparado a algum parâmetro, ou então seja submetido a algum algoritmo de maneira que o programa possa concluir se esse ponto faz parte de um volume mole, duro ou está na interface entre dois ou mais domínios.

A construção de um programa desse tipo seria um trabalho à parte e o uso de um programa externo em nada prejudicaria a metodologia desenvolvida. Assim, optou-se por utilizar o parque de programas disponível no Centro de Pesquisas Renato Archer (CenPRA), desenvolvido no projeto chamado PROMED, que desenvolve produtos e processos de prototipagem rápida para a área biomédica. Através da utilização do conjunto de programas disponíveis no CenPRA, foi possível importar as imagens digitais originadas em tomografias computadorizadas feitas no Hospital de Clínicas da Universidade Estadual de Campinas e

transformá-las em representações tridimensionais. O processo de conversão das imagens é de domínio do CenPRA e não será discutido neste trabalho, no entanto, algumas características fundamentais serão abordadas, pois mostraram grande influência sobre o modelo final gerado.

Inicialmente, foi necessário contatar o setor de processamento de imagens do Hospital de Clínicas da UNICAMP com a finalidade de exportar as imagens visualizadas no equipamento de tomografia para um formato que fosse compreendido por programas de tratamento de imagem. Esse procedimento é necessário, dado que a maioria dos tomógrafos dispõe de um sistema próprio de identificação e codificação de imagens e a conversão para um padrão é de fundamental importância para pós-processamentos. No caso, como seria utilizado o conjunto de programas do CenPRA, foi solicitada a conversão para o formato de trabalho dos aplicativos desta instituição, que é o formato DICOM (*Digital Imaging and Communications in Medicine*), um formato de imagens para uso em medicina. Originalmente, o conjunto de ferramentas desenvolvido pelo CenPRA visa a obtenção de uma representação tridimensional a partir de informações de tomografia computadorizada presentes em arquivos de imagens planas em formato DICOM, com a finalidade de geração de um protótipo rápido. Esse tipo de produto pode ser descrito como uma cópia física real de uma representação computadorizada de um sólido. Sem mais detalhes, o protótipo rápido é construído com um material polimérico, o qual pode ser depositado controladamente, camada sobre camada, reconstruindo o sólido por fatias. De um certo ponto de vista é o inverso da tomografia.

Para a construção do protótipo rápido é necessária uma máquina de prototipagem rápida, a qual necessita de um arquivo de entrada com as informações para deposição adequada do material a fim de que o resultado final seja uma representação física o mais fiel possível do modelo computacional. O arquivo de entrada padronizado para esse tipo de máquina é chamado de STL. Esse formato de arquivo contém dados que descrevem as superfícies que limitam o volume do sólido, oferecendo a informação da região dentro da qual o material deverá ser depositado.

Existem dois formatos de arquivos STL, um binário e outro ASCII. O formato binário costuma ser utilizado para o envio direto para a máquina de prototipagem, ou mesmo para o trânsito do arquivo durante as fase de edição, por ser um arquivo de tamanho menor. Já o formato ASCII, ou texto, apresenta um tamanho maior, o que diminui sua portabilidade, no entanto apresenta todas as informações em uma forma facilmente inteligível. Tanto um formato quanto o outro carregam exatamente o mesmo tipo de informação, que consiste na representação das superfícies dos volumes interpoladas por triângulos.

O processo de preparação da informação para prototipagem rápida consiste na transformação da representação geométrica da superfície real para um conjunto de superfícies triangulares simples, interpoladas de maneira a representar com grande precisão a superfície original. Assim, o arquivo STL descreve as coordenadas de um conjunto de triângulos calculados e construídos de maneira a oferecerem a melhor representação interpolada da superfície da geometria tridimensional real. Essa malha de triângulos é superficial, sendo que cada triângulo constitui uma pequena seção plana cuja localização e controle são otimizados para oferecer a melhor descrição possível da superfície original.

Do ponto de vista do procedimento de geração da malha STL, os controles do programa e suas opções sempre caminham no sentido de oferecerem a melhor malha do ponto de vista da representação da geometria da superfície envolvida. Dessa forma, se a superfície a ser descrita é composta por uma plano, limitado por arestas quadrilaterais, apenas dois triângulos são suficientes para uma descrição perfeita. Por outro lado, se a superfície é cilíndrica, serão necessários muitos triângulos para uma representação adequada e inúmeros para uma representação perfeita.

A malha STL obedece a algumas regras de formação, necessárias para possibilitar a descrição da superfície do sólido representado. A primeira característica é que a malha é composta sempre por triângulos compostos por três pontos, um em cada vértice, localizados no sistema de coordenadas cartesianas tridimensionais, os quais são conectados por três arestas lineares, formando o triângulo. A segunda característica é que cada triângulo é

descrito de modo que o vetor normal à superfície, definida pelo mesmo, aponte sempre para fora do sólido confinado, o que é obtido a partir da seqüência em que são conectados os nós de cada triângulo. Finalmente, a malha de triângulos é consistente, o que significa que não há triângulos soltos ou sobrepostos e que os vértices são coincidentes, não havendo casos de colocação de um vértice de um triângulo sobre a aresta de outro vizinho.

Do ponto de vista do método de análise computacional por elementos de contorno, a representação das superfícies por uma malha de triângulos é, a priori, algo bastante adequado, visto que uma malha de elementos de contorno triangulares pode ser descrita, grosseiramente, como uma malha de triângulos interpolando a superfície original do sólido a ser analisado. Porém, existem algumas distinções fundamentais, as quais tornam não recomendada a utilização direta, pura e simples da malha originada para a prototipagem rápida como malha de elementos de contorno.

Em primeiro lugar, uma malha de elementos de contorno obedece a diretrizes adicionais àquelas puramente de representação da geometria que se aplicam a malhas STL. Malhas de elementos de contorno devem também ser adequadas ao cálculo matemático, o que significa que sua geometria deve ser controlada, a fim de oferecer subsídio suficiente ao método de cálculo para que a um mínimo de precisão seja garantido. Tipicamente, malhas de elementos de contorno devem ser submetidas a algoritmos de controle de forma, os quais são responsáveis por garantir que os elementos gerados não apresentem distorção geométrica excessiva.

Observando uma malha STL, gerada para representar uma superfície plana como o tampo quadrado de uma mesa, apenas dois triângulos seriam necessários tanto para representar a face superior quanto as faces laterais, embora estas sejam bastante delgadas. No entanto, os triângulos da face lateral seriam bastante distorcidos se comparados aos da face superior, como pode ser visto na Figura 10(a), dado que uma das dimensões a ser representada é substancialmente maior que a outra. Já uma malha de elementos de contorno triangulares, representando a mesma geometria, apresentaria uma quantidade e disposição de

triângulos completamente diferente, como mostra a Figura 10(b).

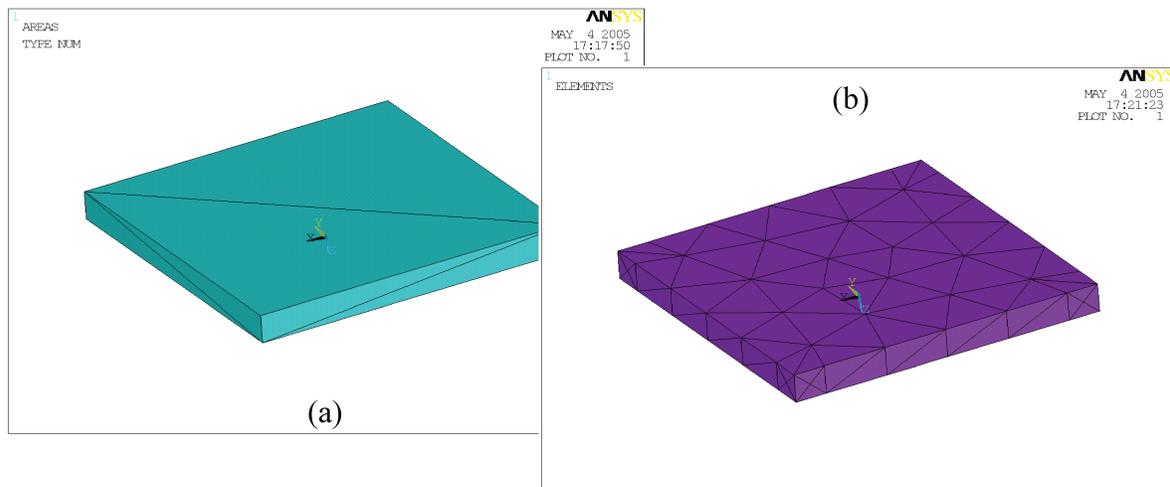


Figura 10. Malha representativa STL (a) e malha de elementos de contorno (b).

A diferença fundamental entre os triângulos nas malhas STL e de elementos de contorno está na qualidade geométrica ou distorção. Os triângulos da malha STL são entidades geométricas adequadas ao recobrimento de superfícies da maneira ótima, sem preocupações adicionais. Já os elementos triangulares de uma malha de elementos de contorno são entidades geométricas adequadas ao recobrimento de superfícies e ao fornecimento de dados geométricos a serem utilizados em procedimentos de cálculo de métodos de análise numérica de tensão e deformação, por isso contam com um controle de distorção refinado, que impede a formação de triângulos com ângulos de vértice radicais, ou mesmo a coexistência de triângulos vizinhos de dimensões discrepantes.

Além da diferença com relação ao controle de distorção geométrica dos triângulos da malha, existe outra divergência das malhas STL em relação a malhas de elementos de contorno. Nas malhas STL existe informação com relação à conectividade de cada triângulo, o que significa que há uma catalogação de quais nós compõe os vértices de cada triângulo e em que seqüência. No entanto, o arquivo STL é redundante, no sentido de que cada triângulo é descrito independentemente dos demais, cada qual com o seu conjunto de nós, não importando se triângulos vizinhos compartilham nós de mesma coordenada geométrica. Isso faz com que existam sobreposições nos nós da malha STL, além de tornar indireta a

informação de quais triângulos são vizinhos entre si. Numa malha de elementos de contorno, existe uma informação chamada de conectividade, que relaciona nós aos elementos dos quais fazem parte de maneira otimizada e sem redundâncias. Assim, cada nó corresponde a uma única coordenada no espaço e somente ele ocupa tal posição. Os elementos que apresentam seus vértices fixados sobre essa posição geométrica devem compartilhar o mesmo nó. Esse tipo de catalogação elimina a sobreposição de nós e faz com que seja possível definir quais elementos são vizinhos entre si, além de ser adequada às necessidades de cálculo dos métodos numéricos.

Dessa forma, para tornar arquivos STL úteis como fonte de dados para um método de análise numérica como o método dos elementos de contorno, faz-se necessário utilizar um procedimento desde a geração do arquivo original, nos programas vinculados à prototipagem rápida, a fim de criar uma malha mais adequada, nos moldes descritos anteriormente. Seguindo essas diretrizes, o procedimento adotado foi o de relaxar os controles de geração da malha STL para que permitissem desvios progressivamente superiores entre a malha gerada e a superfície original a ser representada. Uma das principais dificuldades enfrentadas nessa etapa foi a limitação dos programas geradores de malha STL, dado que o trabalho exigia características que se opunham ao objetivo original da criação das ferramentas implementadas. De outra maneira, a maioria absoluta das ferramentas disponíveis nos programas de geração de malha STL implementa formas otimizadas para gerar malhas com qualidade superior de representação da geometria original, sem qualquer controle sobre as formas dos triângulos gerados individualmente. Exigir que as mesmas ferramentas tomassem o caminho inverso, permitindo a geração de malhas com maiores desvios em relação à geometria original na tentativa de que apresentassem triângulos individualmente com maior qualidade geométrica mostrou-se um desafio.

Após grandes esforços da equipe do CenPRA e do uso extensivo de recursos dos programas disponíveis, muitos deles comerciais, constatou-se que seria impossível a obtenção de uma malha completamente adequada ao uso por uma ferramenta de análise numérica por elementos de contorno diretamente a partir da saída em formato STL. Assim,

mostrou-se necessária a utilização de uma ferramenta intermediária, capaz de extrair do arquivo STL a informação da malha de triângulos e trabalhar sobre ela para transformá-la numa malha de elementos de contorno com qualidade suficiente para a realização de análises. Além disso, não somente informações geométricas são suficientes para conduzir uma análise numérica computacional, também são necessárias informações referentes às condições de contorno, que devem ser aplicadas à malha de elementos de contorno gerada, as quais devem refletir o caso de estudo. O processo de aplicação dessas condições a uma geometria com o grau de complexidade de uma estrutura óssea não é trivial, exigindo a utilização de um sistema de pré-processamento capaz de realizar essa atividade.

2. METODOLOGIA PARA REALIZAÇÃO DA ANÁLISE

Uma vez que os dados relativos à geometria do problema estejam disponíveis na forma de arquivo STL, é necessário introduzi-la em alguma ferramenta que seja capaz de realizar alterações sobre a malha de triângulos com a finalidade de regularizá-la e aplicar as condições de contorno de interesse.

Diversas tentativas foram conduzidas com ferramentas de geração de malhas compatíveis com elementos de contorno comercialmente disponíveis, mas sem sucesso. O principal problema das ferramentas comerciais foi o arquivo STL. Por se tratar de um padrão industrial para prototipagem rápida, esse formato de arquivo é considerado um formato final, o que significa que não é visto como passível de edição, logo, se não necessita de edição, não há demanda para que exista um interpretador para leitura e importação do mesmo como arquivo de dados. Ferramentas CAD, criadas para projeto tridimensional e pré-processamento para ferramentas de análise numérica de engenharia, como o ProEngineer® em sua versão 2001, demonstraram capacidade de leitura desse formato, no entanto, sem capacidade de edição ou conversão, possibilitando somente a visualização da geometria de uma forma ilustrativa. Outras ferramentas como o Ansys®, especificamente desenvolvidas para análises numéricas de engenharia e que são capazes de gerar malhas sobre os sólidos computacionais das mais diversas origens, sequer contavam com a

capacidade de importação do formato STL.

Dentre as ferramentas comerciais testadas somente o MSC.Patran[®], pré-processador do núcleo de análise numérica de engenharia pelo método dos elementos finitos chamado MSC.Nastran[®], foi capaz de importar o formato STL e interpretá-lo diretamente como uma malha de elementos triangulares de casca, que é o similar em elementos finitos utilizado para representar elementos de contorno triangulares tridimensionais. Apesar disso, somente a construção direta da malha de elementos de superfície foi possível a partir da malha de triângulos STL, nenhuma informação adicional relativa à geometria original foi recuperada, o que tornou impossível realizar qualquer edição sobre a geometria analisada após a exportação e importação a partir do arquivo STL.

Apesar dessa limitação, a leitura da malha de triângulos como uma malha de elementos triangulares de superfície mostrou-se suficiente, dado que o MSC.Patran[®] dispõe, desde sua versão 2001, de um módulo capaz de gerar uma nova malha, com novos parâmetros de controle, sobre uma malha inicial qualquer. Essa funcionalidade permitiu que uma nova malha de elementos de contorno, de alta qualidade, fosse gerada sobre a malha de triângulos originais do arquivo STL. O procedimento é iniciado com a importação da malha de triângulos do arquivo STL e sua consolidação como uma malha de elementos triangulares de superfície, o que é feito através da compatibilização dos nós da malha e da geração das conectividade de acordo com o necessário para um método de análise numérica computacional.

Posteriormente, uma vez que a malha original está disponível, utiliza-se a funcionalidade de geração de malha sobre malha, comando *mesh-on-mesh*, indicando todos os elementos originais como base para o procedimento. Inicialmente, uma opção disponível de elementos para geração de uma nova malha é a de elementos triangulares de três nós, que são similares aos da malha STL, essa opção é interessante, pois uniformiza a distribuição original de pontos, oferecendo uma nuvem mais uniforme para a geração de novas malhas posteriores.

Uma vez gerada a malha de elementos triangulares, agora controlada e, por isso, com maior qualidade geométrica por elemento que a malha original do STL, é possível optar entre duas possibilidades, a primeira é conduzir a análise numérica de engenharia com a malha de elementos de contorno triangulares, uma segunda opção seria regerar a malha para obter elementos quadrilaterais. Os elementos dessa nova malha são chamados *Quad4*, pois dispõe de 4 nós, um em cada vértice do quadrilátero, sendo que a relação entre os nós é linear. Essa etapa é necessária para possibilitar o a alteração posterior dos elementos de superfície *Quad4* para os *Quad8*, com oito nós, equivalentes aos elementos de contorno quadrilaterais de oito nós, que são superiores aos elementos triangulares de três nós. Essa providência é interessante, principalmente em se tratando de problemas mais complexos, dado que os elementos quadrilaterais de oito nós podem ser mais adequados, principalmente por sua capacidade de descrever geometrias mais complicadas.

No entanto, o processo de reconstrução da malha com elementos quadrilaterais, como já foi mencionado, parte de uma malha inicialmente triangular. Mesmo realizando uma regeneração inicial, reconstruindo a malha de triângulos originária do arquivo STL com uma malha de elementos triangulares de melhor qualidade, a distribuição de pontos, juntamente com a complexidade da geometria óssea oferecem dificuldades para a geração de uma malha de elementos puramente quadrilaterais de quatro nós. Do ponto de vista dos programas comerciais, tal fato poderia não ser considerado um problema, visto que diversos métodos de análise numérica de uso comercial são capazes de lidar com elementos mistos em suas malhas. No entanto, para esta implementação de pesquisa, uma malha com elementos mistos constitui problema, dado que acrescenta um grau de generalidade ainda não implementado. Apesar de aumentar a facilidade no uso, esse tipo de generalização não aumenta a complexidade do método de solução, constituindo-se apenas em programação adicional. Dessa forma, na metodologia atual optou-se por utilizar uma malha composta unicamente por um tipo de elemento. Para uma análise inicial, sem considerar a remodelagem óssea, pode ser utilizada uma malha de elementos de contorno triangulares lineares, mais facilmente obtida com a restrição de unicidade do tipo de elemento, no entanto, para uma análise envolvendo remodelagem óssea superficial é interessante utilizar uma malha de elementos de

contorno quadrilaterais de oito nós, com funções biquadráticas, a qual apresenta maior capacidade para interpolação de geometrias complexas, características de estruturas ósseas.

Portanto, o produto final do procedimento de edição da malha de um osso qualquer é uma malha de elementos de contorno tridimensional, que pode ser composta por elementos do tipo triangular linear, ou quadrilateral de oito nós biquadrático. Tanto uma malha como a outra são obtidas a partir da importação de uma malha triangular para prototipagem rápida, a qual é reprocessada com a utilização de uma ferramenta comercial para geração de malhas de elementos de superfície, chamada MSC.Patran[®] 2003, utilizada neste trabalho. A malha gerada por esse aplicativo é, então, carregada com as condições de contorno prescritas para o estudo que se deseja realizar, o que é feito da maneira convencional, característica de aplicativos de pré-processamento. A saída dessas informações é feita através de um arquivo do MSC.Patran[®] 2003 em formato texto, chamado de *neutral file*, cuja estrutura pode ser vista no anexo 1.

Esse arquivo é, então, repassado para o programa de cálculo por elementos de contorno E-Con3D (Noritomi, 2000), que foi desenvolvido e aprimorado neste trabalho com a finalidade de possibilitar, entre outros quesitos, interações entre os aplicativos comerciais e as necessidades de um ambiente de pesquisa e desenvolvimento em bioengenharia. A leitura e tradução é feita com o auxílio de um código de interpretação desenvolvido como parte integrante deste trabalho de doutorado, cuja implementação em MatLab[®] pode ser vista no anexo 2.

Uma vez traduzido o arquivo gerado pelo MSC.Patran[®] 2003, estão disponíveis os dados de entrada da malha de elementos de contorno e das condições de contorno para o problema a ser analisado, somente informações relativas às propriedades do material ósseo ainda devem ser apresentadas. Todas essas informações devem constar em arquivos de acordo com a estrutura previamente definida durante o desenvolvimento da ferramenta de análise E-Con3D (Noritomi, 2000).

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTAÇÕES COMPUTACIONAIS

A implementação de um modelo de material transversalmente isotrópico para análise de tensões e deformações pelo método dos elementos de contorno foi baseada em uma solução fundamental transversalmente isotrópica inicialmente proposta por *Pan & Chou, 1976*. O desenvolvimento matemático dessa solução analítica é apresentado no referido artigo, que mostra uma formulação completa, porém, parcialmente desenvolvida, no sentido de que apenas a solução fundamental transversalmente isotrópica para deslocamento é apresentada explicitamente. Apesar de a obtenção da solução fundamental para forças de superfície consistir num passo fundamentalmente algébrico, requerendo a utilização de equacionamento com bases sólidas na mecânica dos sólidos, o desdobramento dessa solução fundamental, a partir da solução fundamental disponível para deslocamento, mostrou elevado grau de complexidade. Além disso, a apresentação fortemente matemática de ambas as soluções fundamentais representou grande complexidade para uma implementação numérica computacional consistente.

1. IMPLEMENTAÇÃO DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICA

A solução fundamental transversalmente isotrópica apresentada por *Loloi, 2000* consiste em uma das duas soluções fundamentais necessárias para a implementação do

método dos elementos de contorno para problemas elásticos e estáticos tridimensionais. A solução fundamental apresentada é a de deslocamentos, assim como aquela inicialmente deduzida por *Pan & Chou, 1976* que consiste em um tensor de terceira ordem, definido de acordo com as equações de somatório dadas nas equações 28, que por conveniência serão repetidas à seguir:

$$U_{ij}^* = \sum_{n=1}^3 \alpha_n^{(ij)} F_n^{(ij)} \rightarrow i, j=1,2$$

$$U_{i3}^* = \sum_{n=1}^3 \alpha_n^{(i3)} F_n^{(i3)} \rightarrow i, j=1,2,3$$

$$U_{ji}^* = U_{ij}^* \rightarrow i, j=1,2,3$$

Como pode ser visto, *Loloi, 2000* organizou as equações completas, inicialmente propostas por *Pan & Chou, 1976*, em conjuntos de constantes definidas em $\alpha_n^{(ij)}$ e funções que variam de acordo com as coordenadas do problema em $F_n^{(ij)}$. Essa abordagem mostrou-se bastante útil, principalmente levando em consideração a necessidade de realizar a derivação dos deslocamentos com a finalidade de obter o tensor de deformações e, a partir dele, o tensor de tensões e, finalmente, o vetor de soluções fundamentais de forças de superfície para o caso transversalmente isotrópico.

Verificando as tabela 1, 2 e 3 de funções e constantes elaboradas por *Loloi, 2000* é possível observar o ganho de velocidade de implementação, uma vez que a solução fundamental de deslocamentos já está arranjada de maneira a separar a parte composta por valores constantes, dependentes de propriedades do material, da parte composta por variáveis do problema. Essa separação mostrou-se de grande utilidade principalmente para o procedimento de derivação, uma vez que a parte constante pode ser desconsiderado do processo, simplificando a função final a ser derivada. Isso é interessante pois, do ponto de vista da implementação, quanto menor e mais simples for a função a ser derivada, melhor é o processo.

Assim, foi implementado um código intermediário, responsável por obter as derivadas de cada uma das funções, para dada uma das três direções envolvidas, dado que o problema é

tridimensional, considerando cada caso que também é válido para a escolha da função a ser utilizada na solução fundamental de deslocamento. Esse procedimento de derivação utilizou o núcleo de processamento simbólico do Matlab 6.5[®] e gerou um banco de dados de derivadas no formato de funções prontas para uso pelo código do programa implementado para a análise.

Apesar de conceitualmente simples, o procedimento de derivação demonstrou-se bastante complexo, dado que foi necessário recompor o somatório, que dá origem ao resultado final da solução fundamental de deslocamentos, para compor também as deformações a serem utilizadas no cálculo final. O problema enfrentado consistiu em definir as chaves corretas de escolha das derivadas adequadas em face das funções que entram no somatório para compor o resultado de deslocamentos, de modo que a soma dos resultados das derivadas das funções gere um resultado compatível com a solução fundamental de deslocamento à qual se relaciona. Também é importante destacar que cada solução fundamental de deslocamento tem, dado que o problema é tridimensional, três derivadas relacionadas que serão necessárias para definir as deformações associadas, logo, é possível observar a elevada quantidade de chaves de escolha e a conseqüente complexidade do processo de composição dos valores finais.

A função criada para retornar os valores das soluções fundamentais de força de superfície e de deslocamentos, de acordo com o solicitado pelo processo de integração para solução do problema de elementos de contorno tridimensional foi chamada de *kerneltifs_10.m*. Essa função consiste em um módulo, da mesma forma que a função que calcula a solução fundamental para problemas isotrópicos, portanto, suas entradas e saídas são compatíveis com o fluxo de dados original da implementação anterior do programa E-Con3D (Noritomi, 2000). O fluxograma dessa nova função pode ser visto na Figura 11.

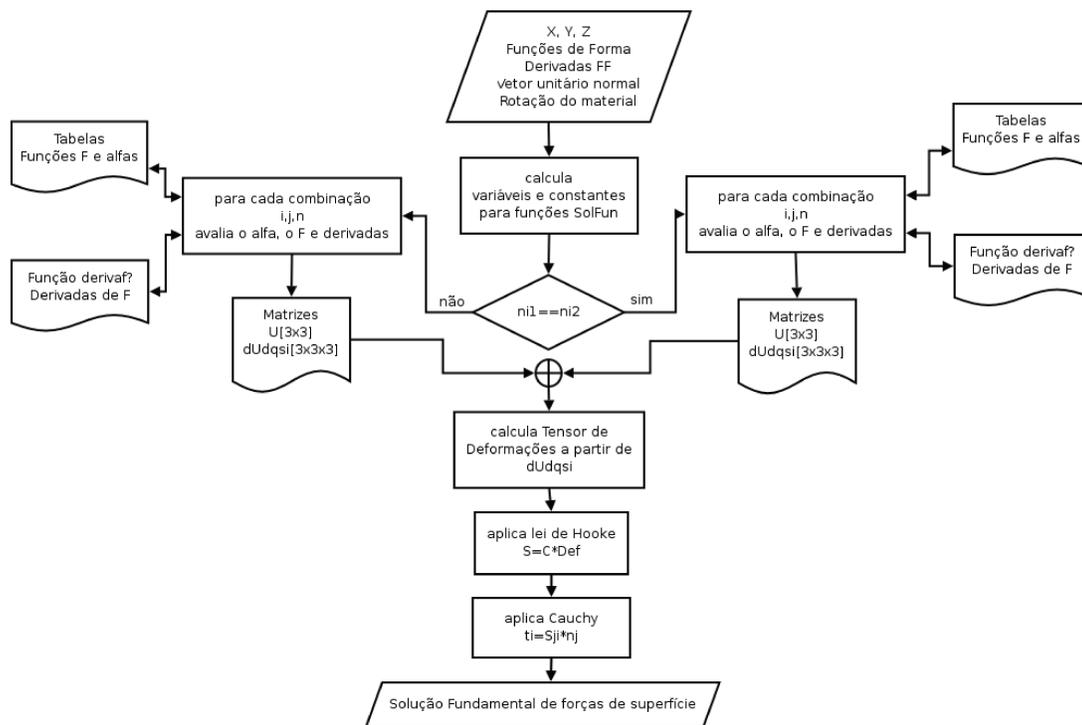


Figura 11. Fluxograma do módulo *kernel_tifs_10.m*.

Como pode ser visto no fluxograma da Figura 11, a obtenção e armazenamento ordenado das derivadas das funções que compõe a solução fundamental de deslocamentos não é suficiente para oferecer a solução fundamental de forças de superfície exigida. Para que isso seja alcançado ainda é necessário calcular deformações, tendo como base as derivadas dos deslocamentos, e o tensor de tensões.

Dessa forma, uma vez obtida a função completa para o deslocamento e suas derivadas com relação a dada uma das três direções do problema tridimensional, são calculadas as deformações relacionadas. Uma vez obtidas as deformações, é possível aplicar a relação constitutiva do material transversalmente isotrópico a fim de obter o tensor de tensões, o qual constitui a soluções fundamental de tensão. A partir desse tensor de tensões, aplicando a relação de Cauchy, são obtidas as forças de superfície de acordo com a normal de cada elemento. Essas forças de superfície são as soluções fundamentais de forças de superfície necessárias para completar o método dos elementos de contorno.

Há ainda um detalhe adicional quando se implementa uma solução para problemas com modelo de material anisotrópico, que é o caso do modelo transversalmente isotrópico, que é referente à direção de referência do modelo do material. No caso do modelo de material isotrópico, devido as restrições impostas pela própria hipótese original da formulação, a de que o modelo representará um material que apresenta o mesmo comportamento qualquer que seja a direção da sollicitação, não existe preocupação com a orientação do material na definição do problema. No entanto, para modelos de material anisotrópico, a hipótese original da formulação prevê comportamentos distintos em direções distintas, logo, há necessidade de definição da orientação do material.

No caso do modelo de material transversalmente isotrópico, somente uma direção é necessária, pois o modelo apresenta planos de isotropia, nos quais não existe direção preferencial, mas conta também com um eixo de anisotropia perpendicular aos planos de isotropia, sobre o qual há um comportamento distinto. Assim, é necessário definir a orientação desse eixo de anisotropia. Originalmente, existe uma direção de orientação definida, que é parte das hipóteses originais, utilizadas para a dedução do modelo, o que implica em que também estão presentes nas soluções fundamentais anteriormente implementadas. No entanto, há situações nas quais a análise de um problema exige a definição de uma nova orientação para o eixo de anisotropia do material transversalmente isotrópico a fim de torná-lo compatível com o material real ao qual representa.

Assim, a última etapa da implementação numérica dessa solução fundamental consistiu na aplicação de matrizes de transformação para rotação do eixo principal do material transversalmente isotrópico em relação aos eixos do sistema de coordenadas global. Originalmente, as soluções fundamentais foram deduzidas partindo da hipótese de que o eixo principal ou eixo de anisotropia do material transversalmente isotrópico é alinhado com o eixo z de coordenadas globais, como mostra a Figura 12. Esse pressuposto consiste numa simplificação, mas que não leva a uma perda de generalidade, uma vez que o material pode ter seu eixo principal girado a partir da aplicação de matrizes de transformação, baseadas em cossenos diretores.

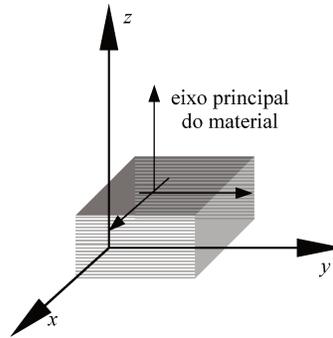


Figura 12. Eixo local do material alinhado com o eixo de coordenadas global.

As matrizes de transformação foram deduzidas a partir das projeções de versores no sistema de coordenadas girado sobre o sistema de coordenadas global. Existem diversas maneiras de construir a matriz final de transformação, no caso desse trabalho, por uma questão de clareza da implementação, cada um dos giros será dado de maneira independente, o que significa utilizar três matrizes de transformação, uma para cada giro sobre cada um dos eixos coordenados globais, como mostrado nas equações 38.

$$\begin{aligned}
 [T_x] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ 1 & -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\
 [T_y] &= \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \\
 [T_z] &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{38}$$

A rotação do eixo de orientação do material não deve ser feita atuando diretamente sobre a matriz de flexibilidade do material, uma vez que tal procedimento resultaria numa matriz diferente da transversalmente isotrópica, caracterizando um material anisotrópico generalizado. Dessa forma, a rotação deve ocorrer no problema, de maneira que o resultado seja equivalente ao giro do sistema coordenado do material.

Seguindo as necessidades específicas do método dos elementos de contorno, o giro implementado consistiu na aplicação das matrizes de transformação, enunciadas nas equações 38, de acordo com o necessário, de maneira a realizar rotações das condições de contorno e das coordenadas dos nós da malha do problema. Isso é equivalente a imaginar que o problema continua sendo descrito no sistema de coordenadas globais, ou seja, as propriedades do material transversalmente isotrópico continuam sendo definidas alinhadas com o sistema global, no entanto, efetuando o giro sobre as condições de contorno e nas coordenadas dos nós do problema. Configura-se, então, um novo problema girado em relação ao sistema global, logo, as propriedades do material encontram-se igualmente giradas, como pode ser visto na figura 13.

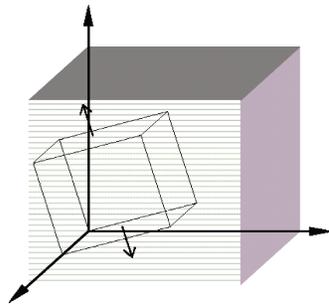


Figura 13. Giro do problema.

Uma vez realizado o giro nos dados de entrada, o problema passa a ser analisado da maneira convencional, como se tivesse sido definido originalmente como uma geometria desalinhada em relação aos eixos coordenados do sistema global. Após realizada a análise, deve-se aplicar a transformação inversa ao vetor de resposta, retornando os resultados para o sistema de coordenadas original. Isso faz com que o problema seja equivalente ao de uma geometria alinhada com o eixo de coordenadas global e cujo eixo do material encontra-se desalinhado.

2. IMPLEMENTAÇÃO DA REMODELAGEM ÓSSEA SUPERFICIAL

Como visto no capítulo de fundamentação teórica, existem diversos modelos matemáticos de remodelagem óssea, mesmo em se tratando somente da remodelagem óssea

superficial. De modo geral, esses modelos matemáticos apresentam como características comuns o uso de uma função do tipo comparação com um valor limite, a qual calcula uma diferença que é ajustada para as dimensões reais com o uso de um fator multiplicativo constante. Geralmente essa comparação é feita entre valores relacionados a grandezas de engenharia, tais como tensões ou deformações, sendo que a escolha dessa categoria de grandeza um dos fatores de diferenciação entre as abordagens dos modelos matemáticos de remodelagem óssea.

Neste trabalho foi escolhido o modelo matemático de remodelagem óssea superficial baseado na comparação entre valores de deformação local, portanto, é um método classificado como de remodelagem local, que representa a remodelagem como um fenômeno relacionado à capacidade de o material ósseo responder ao campo de deformações imposto de modo a redistribuí-lo uniformemente e em um patamar biologicamente ótimo. O método implementado neste trabalho é baseado naquele que foi enunciado por *Sadegh et al., 1993*, cuja formulação foi apresentada na equação 37, e numa variante de sua formulação que foi utilizada por *Martínez et al., 1996*, sendo que, em ambos os casos, a formulação matemática utilizada na literatura para o cálculo das deformações foi a de elementos de contorno para problemas bidimensionais.

O fato de analisar problemas bidimensionais trouxe características específicas para as implementações propostas em ambas as literaturas consultadas. Se nos concentrarmos somente no algoritmo proposto por *Sadegh et al., 1993*, dado que foi esse o núcleo da implementação desenvolvida neste trabalho, é possível notar particularidades fundamentais que distinguem as aplicações bidimensionais de outras tridimensionais. Inicialmente, por tratar-se de um problema bidimensional envolvendo remodelagem óssea superficial, a formulação proposta pela literatura lida somente com deformações tangentes ao contorno, o qual se resume a uma linha. Assim, existem apenas duas deformações em qualquer ponto do contorno, uma de tração ou compressão e outra de cisalhamento.

Para o modelo de remodelagem óssea superficial, somente as deformações de tração ou

compressão são consideradas, dado que experimentos apontam que o material ósseo não reage, quanto à remodelagem, a deformações de cisalhamento. Dessa forma, para aplicações bidimensionais de remodelagem óssea superficial, somente uma deformação é considerada e apenas esse parâmetro de análise de engenharia deve guiar o equacionamento. Essa característica faz com que seja suficiente determinar somente um valor limite para comparação de deformação, conforme indicado por *Sadegh et al., 1993*, que é a chamada deformação de equilíbrio de remodelagem, a qual consiste em um valor empírico de deformação de compressão sobre o osso que define o limiar sobre o qual o material inicia o processo de remodelagem superficial.

Já para aplicações tridimensionais, como é a proposta deste trabalho, existe uma superfície que define o contorno ao invés de apenas uma linha. Essa diferença fundamental faz com que existam cinco valores distintos de deformação em um ponto qualquer sobre o contorno, que são três deformações de tração ou compressão e duas de cisalhamento. Mesmo considerando os requerimentos da remodelagem óssea superficial, que trabalha somente com as deformações tangentes à superfície no ponto e que despreza a contribuição das deformações de cisalhamento, ainda assim existem duas deformações tangenciais de tração ou compressão que devem ser consideradas.

Em comparação com a aplicação bidimensional, nota-se a diferença na quantidade de valores limites requeridos. No caso bidimensional, apenas um bastava, mas para o caso tridimensional, as características da resposta do método apontam a necessidade de dois valores, um para cada direção tangencial definida em um ponto genérico no contorno. Essa necessidade vem por analogia direta com a aplicação bidimensional a partir da qual foi implementada a aplicação atual, qual seja, um valor de deformação relevante em um ponto do contorno exige um valor limite da mesma categoria para servir de comparação. Se a deformação obtida é do tipo compressão ou tração, o valor limite de comparação deve ser do mesmo tipo, como ocorre na implementação proposta na literatura.

A restrição à abordagem proposta para o problema bidimensional mostrou dificuldades

substanciais quando de sua aplicação na análise de problemas tridimensionais. A utilização de apenas um valor de deformação limite, aplicado a ambas as direções nas quais existem deformações tangenciais em um ponto qualquer da superfície de contorno mostrou-se uma abordagem ineficaz, além de, conceitualmente, inconsistente.

Do ponto de vista conceitual de mecânica do contínuo, a deformação é expressa por meio de um tensor, o que a caracteriza como uma grandeza física distinta daquelas vetoriais, comumente presentes nesse tipo de aplicação. Uma das características do tensor é que não pode ser transformado de acordo com regras vetoriais, ou mesmo operado por meio de operações aplicadas a vetores. Assim, tratar as duas componentes tangenciais do tensor de deformações como componentes de um vetor, supondo que a aplicação dos valores limites de deformação a cada uma delas possa ser equivalente à aplicação de um valor único ao tensor definido é conceitualmente não fundamentado.

Tendo isso em mente, é necessário retornar ao comportamento do osso real a fim de definir exatamente os motivos da utilização do valor limite como um valor de deformação de compressão. Na realidade, o que ocorre é que a observação levou a concluir que o osso responde a determinados níveis de compressão, iniciando o processo de remodelagem. Assim, valores de compressão superiores a um limite definido estimulam o osso a crescer e aumentar de volume, enquanto valores de compressão muito baixos, ou mesmo de tração, levam o osso a reabsorver, reduzindo seu volume. Assim, numa aplicação bidimensional, um único valor de deformação de compressão limite é utilizado como parâmetro para comparação com os valores de deformação de compressão obtidos no contorno, dado que é a esse estímulo que o modelo deve responder para simular a remodelagem desejada.

Em teorias de engenharia como a mecânica da fratura, também é de interesse utilizar valores limites de determinadas grandezas físicas, tais como tensões. Nesses casos, tensões limites são definidas para avaliar o início da propagação instável de trincas para materiais considerados frágeis. No entanto, existe uma definição mais precisa do tipo de tensão a ser considerada, de maneira a que possa ser aplicada de maneira genérica. No caso dos materiais

frágeis, seu comportamento na presença de trincas é fundamentalmente guiado, de maneira simplificada, pelas tensões chamadas de principais. Essas tensões são calculadas com base no tensor completo, pois a grandeza que quantificam é a que melhor reflete quantitativamente a influência do fenômeno físico sobre o comportamento do material.

Da mesma forma, é possível inferir uma grandeza equivalente para os problemas de remodelagem óssea superficial. Munidos do conceito empírico de que o fator dominante para que ocorra remodelagem óssea superficial é a existência de determinados níveis de deformação de compressão, é razoável propor uma grandeza equivalente, obtida a partir do tensor de deformações, que seja expressiva desse comportamento de compressão de um modo mais genérico, seja em problemas bi ou tridimensionais. No caso deste trabalho, as grandezas escolhidas foram as deformações equivalentes principais, equação 39, cujos valores refletem as máximas e mínimas deformações de tração ou compressão no ponto de avaliação, numa direção na qual não existem deformações de cisalhamento.

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad (39)$$

A convenção normalmente utilizada em engenharia diz que as deformações de tração são identificadas por valores positivos, enquanto as de compressão, por valores negativos. Dessa forma, ao serem escolhidos os valores negativos de deformação principal, serão obtidos os valores de mais alta compressão. Aplicando essa suposição com a finalidade de generalização do procedimento de remodelagem óssea proposto por *Sadegh et al., 1993*, devem ser feitas algumas observações.

Primeiramente, a abordagem mostrada na literatura mostra a escolha de um parâmetro de deformação normal do tensor de deformação tangente à superfície. Esse é um dado que reflete, quantitativamente, a compressão à qual o material ósseo está submetido e, dado que o problema é bidimensional, implica na máxima compressão. O valor de máxima compressão só pode ocorrer quando toda a deformação de cisalhamento for convertida em deformação normal, o que ocorre na chamada direção principal, na qual é possível obter os valores de

deformação principal. No caso de aplicações bidimensionais, o cisalhamento não pode ser considerado, logo, o valor da deformação normal é diretamente o único valor da deformação principal. No caso tridimensional, as deformações de cisalhamento podem existir, logo, existem deformações principais e se podem se apresentar aos pares, uma máxima e outra mínima. Dado que ambas as deformações principais podem ser negativas, o que significa compressão, ainda assim é necessário escolher um dos valores, então, o critério foi o de escolher o valor de máxima compressão, que é correspondente à mínima deformação principal.

Uma segunda observação é a de que o procedimento utilizando valores de deformação principais pode tem o potencial de ser aplicado tanto para problemas bidimensionais como tridimensionais, dado que envolve o uso de uma deformação equivalente, obtida a partir do tensor de deformações, e permite que se escolha a deformação de mais alta compressão. Assim, o procedimento adaptado para cálculo de remodelagem superficial utilizou a equação 37, tal como foi proposta por *Sadegh et al., 1993*, apenas trocando a deformação normal pela mínima deformação principal.

Além do procedimento utilizando a deformação principal mínima, foi implementado um segundo critério, baseado nas informações apresentadas por *Kargarnovin, 1994*, que propõe uma abordagem genérica, para aplicações de remodelagem óssea superficial a problemas bidimensionais e tridimensionais. Segundo o proposto, a equação que rege o fenômeno da remodelagem superficial permanece a mesma que foi implementada seguindo *Sadegh et al., 1993*, no entanto, ao invés de utilizar o parâmetro de deformação normal em um ponto tangente à superfície, ou a deformação principal mínima, *Kargarnovin, 1994* propõe utilizar o traço da matriz do tensor de deformações no ponto tangente. Em sua abordagem o autor afirma que a utilização do traço da matriz é justificada pois os três coeficientes para a taxa de remodelagem (k) da equação 37, que são obtidos por experimentos clínicos, podem ser considerados iguais para todas as direções na superfície do osso.

Com isso, o fluxograma do módulo implementado no programa principal E-Con3D fica como mostrado na Figura 14.

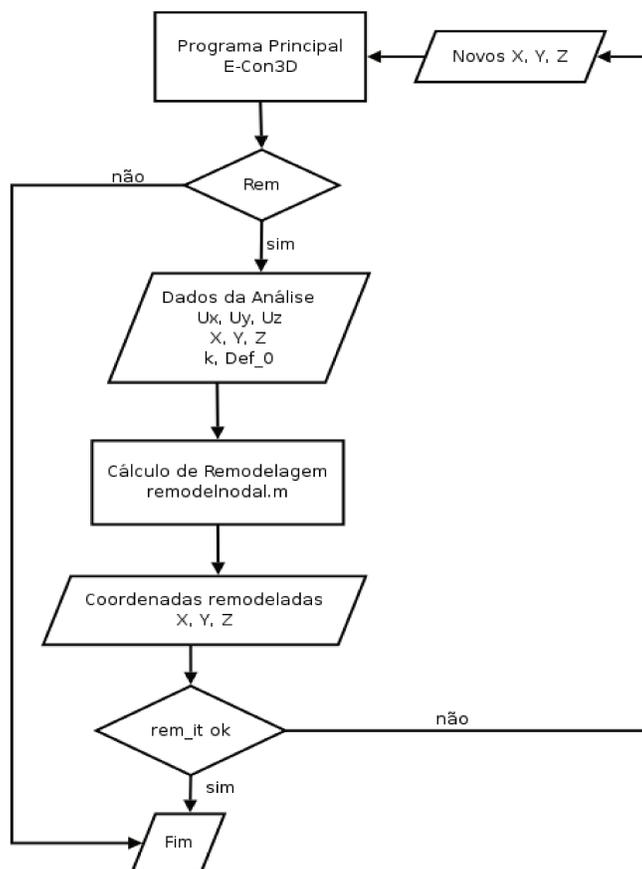


Figura 14. Fluxograma da inserção do módulo de remodelagem na estrutura principal.

O detalhamento do funcionamento do módulo de remodelagem óssea superficial pode ser visto no fluxograma da Figura 15.

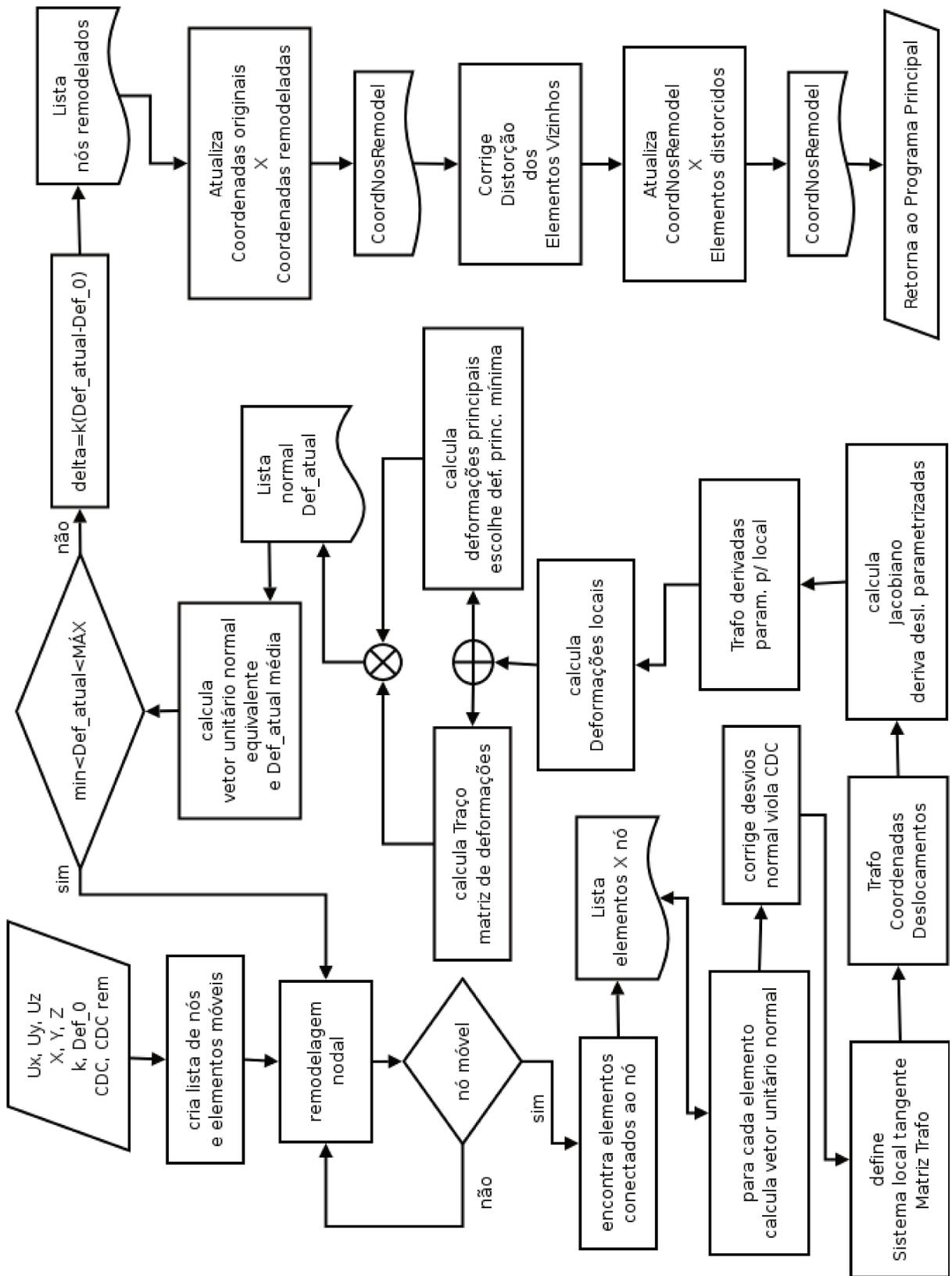


Figura 15. Fluxograma do módulo de remodelagem óssea superficial (remodelnodal.m).

Seguindo o fluxograma da Figura 15 é possível notar a lógica de funcionamento da função, bem como a implementação do modelo de remodelagem óssea superficial. Inicialmente, a função recebe, como dados de entrada, o campo de deslocamentos tridimensional, as coordenadas globais de todos os nós da malha, as listas de condições de contorno e restrições de movimentação de nós, e os valores de referência para o modelo de remodelagem óssea, que são a constante de remodelagem k e a deformação limite homeostática Def_0 .

Uma vez iniciada a função de remodelagem é criada uma lista de nós móveis e dos elementos a eles conectados. Essa lista é criada a partir de uma filtragem realizada sobre os nós da malha, removendo aqueles que estejam sob condição de contorno, que não devem se mover e aqueles que foram restritos manualmente quanto à movimentação pelo processo de remodelagem óssea. Em seguida, é iniciado o processo de remodelagem nodal, que consiste em mover os contornos nó a nó. Essa técnica foi implementada em detrimento da movimentação baseada em elementos, pois evita problemas de inconsistência com a movimentação do nó originados pelo compartilhamento de um mesmo nó com vários elementos.

Uma vez iniciado o processo de remodelagem nodal, para cada nó móvel são encontrados todos os elementos que compartilham o nó, criando-se uma conectividade restrita dos elementos ao nó em trabalho. Em seguida é calculado um vetor normal unitário sobre o nó com relação a cada elemento que o compartilha, o que é necessário pois o vetor normal sobre o nó é sempre referente ao elemento com o qual ele está conectado. No caso de uma malha, o nó pode estar conectado a diversos elementos, levando a variações na direção do vetor normal quando calculado para um elemento ou para outro. Essas pequenas variações devem ser somadas vetorialmente a fim de originar um vetor normal médio para os diversos elementos, o qual reflita a normal real da superfície no nó.

Após obter o vetor normal unitário ainda é necessário verificar se o mesmo não viola alguma condição de contorno, o que significa evitar que o vetor calculado tenha coordenadas apontando para uma direção restrita de movimentação, pois a o movimento de remodelagem ocorre na direção do vetor normal.

Uma vez definido e corrigido o vetor unitário normal são definidos o sistema de coordenadas local tangente e a matriz de transformação associada. Com base nessa matriz de transformação os deslocamentos globais são transformados para locais e, a partir do uso do Jacobiano e da transformação das derivadas dos deslocamentos em coordenadas locais, são calculadas as deformações locais, as quais são os parâmetros para o modelo de remodelagem adotado.

Com base nas deformações locais é possível calcular o traço da matriz de deformação ou as deformações principais. No caso desta implementação foi escolhido o procedimento de cálculo das deformações principais e uso da deformação principal mínima, dado que ela representa a máxima deformação de compressão sobre o nó, o que é apontado como o estímulo de maior interesse para uso no modelo de remodelagem implementado.

As deformações principais mínimas são catalogadas em uma lista e é calculado o vetor unitário normal equivalente, juntamente com uma deformação principal mínima equivalente para o nó, dado que também a deformação principal foi calculada com base nos elementos que compartilham o nó.

A deformação principal mínima equivalente é então verificada para definir se está no patamar de estabilidade, ou seja, entre os valores máximo e mínimo aceitáveis. Caso esteja fora do patamar é aplicado o modelo de remodelagem para cálculo da movimentação a ser aplicada sobre o nó. O vetor de movimentação é armazenado numa lista contendo os nós remodelados.

Quando todos os nós já tiverem passado pelo processo, a lista de nós remodelados é

utilizada para atualizar as coordenadas originais dos nós, gerando as coordenadas remodeladas. Essas coordenadas remodeladas são armazenadas numa nova variável, *CoordNosRemodel*, que será utilizada para verificar se há distorções demasiado grandes nos elementos vizinhos, provocadas pela movimentação da remodelagem.

Caso haja distorções significativas nos elementos vizinhos, as mesmas são corrigidas por um procedimento de realocação nodal interna ao elemento, na tentativa de manter seu Jacobiano estável, e as novas coordenadas nodais são atualizadas nas coordenadas remodeladas, gerando as coordenadas nodais remodeladas que retornam para o fluxo principal do programa como as novas coordenadas para uma nova análise elástica.

No fluxograma da Figura 15 é possível ainda destacar alguns detalhes de implementação necessários ao funcionamento adequado do procedimento de remodelagem óssea superficial. Primeiramente, o cálculo do vetor normal unitário, necessário para definição do sistema de coordenadas local fixado ao nó na superfície e utilizado como referência para o deslocamento do nó remodelado, deve ser corrigido quanto a desvios. O que ocorre é que, por envolver o uso de derivadas, o cálculo do vetor de unitário normal pode apresentar oscilações, o que significa que o vetor pode não representar exatamente a direção normal. Quando se executa uma análise simples, sem iterações, esse tipo de erro é pequeno e pode ser desprezado, no entanto, ao analisar um problema iterativamente, os erros se acumulam e podem levar a desvios significativos da normal. Esse desvio pode resultar em deslocamento do nó em violação às condições de contorno de restrição de deslocamento, o que precisa ser corrigido a fim de manter o problema bem colocado.

Além do problema com o vetor unitário normal, existe também um problema potencial com a matriz Jacobiana. Essa matriz é sensível a distorções geométricas do elemento, sendo que pode apresentar valores inconsistentes, e mesmo singulares, quando existe uma distorção geométrica muito grande no elemento. Como o procedimento de remodelagem óssea superficial promove a movimentação dos nós de suas coordenadas originais para novas coordenadas de acordo com critérios de otimização empíricos, é possível que essa

movimentação ocasione distorções na geometria dos elementos cujos nós foram movimentados, o que compreende tanto elementos sujeitos diretamente ao processo de remodelagem quanto elementos vizinhos, cujos nós possam ser compartilhados. Dessa forma, existe a necessidade de verificar e controlar a distorção dos elementos associados aos nós em remodelagem, o que é feito após a geração de cada nova lista de novas coordenadas nodais remodeladas.

O procedimento de verificação e correção consiste no controle das distâncias entre os nós constituintes do elemento, esse critério foi escolhido pois análises sem o uso de qualquer procedimento de correção de distorção geométrica apontaram, como principal motivo de instabilidade do Jacobiano, o posicionamento inadequado dos nós localizados no intermédio sobre as arestas dos elementos. Assim, a implementação do controle de distorção contou com o cálculo da distância entre os nós de cada vértice e o nó do meio da aresta entre eles. Sempre que a distância mostrou oscilações superiores a 40% da distância entre o nó do meio da aresta e qualquer um dos nós do vértice o sistema de correção foi ativado para deslocar o nó de volta a uma posição próxima à central.

A implementação desses controles também foi uma dificuldade adicionada, em grande parte, pela aplicação do método a problemas tridimensionais. O uso em problemas bidimensionais simplifica o cálculo do vetor normal, bem como diminui as possibilidades de distorção geométrica, tornando sua previsão mais simples e possibilitando a otimização apenas através do uso de malhas iniciais bem preparadas. Com a implementação dessas verificações e controles adicionais, o procedimento de remodelagem óssea tridimensional mostrou-se funcional e capaz de oferecer resultados compatíveis com aqueles demonstrados em literatura.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DE RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos a partir das implementações conduzidas durante o desenvolvimento do trabalho. Inicialmente, serão mostrados os resultados que validam e atestam o adequado funcionamento da implementação da solução fundamental transversalmente isotrópica. Posteriormente, serão mostrados resultados da implementação do elemento de contorno triangular linear e, finalmente, os resultados do procedimento de remodelagem óssea superficial integrado ao modelo de material transversalmente isotrópico.

1. VALIDAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICA

Inicialmente a validação foi realizada comparando resultados da implementação com aqueles oferecidos no artigo de *Loloi, 2000*. Essa abordagem inicial visou confirmar a correção e funcionalidade da implementação computacional realizada, visto que o procedimento completo não seguiu integralmente a proposta do artigo de *Loloi, 2000*, utilizando, fundamentalmente, o equacionamento proposto.

O problema proposto, Figura 16, consiste em uma geometria cúbica arbitrária, com comprimento de aresta L , sujeito a tensão de tração simples. A geometria encontra-se

alinhada com os planos ortogonais do sistema global. O plano de isotropia do material transversalmente isotrópico é paralelo ao plano X_1X_2 do sistema global, o que significa que está também alinhado com as faces superior e inferior da geometria proposta.

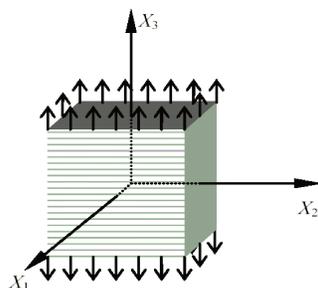


Figura 16. Configuração proposta para validação por *Loloi, 2000*.

A condição de contorno de tensão de tração uniaxial é aplicada nos três eixos globais, um a cada vez, para cada uma das três configurações de material propostas, Tabela 4.

Tabela 4. Propriedades dos materiais usadas no exemplo

Propriedades	Material 1 ($\nu_1 = \nu_2 = 1$)	Material 2 ($\nu_1 \neq \nu_2$)	Material 3 ($\nu_1 = \nu_2$)
C_{11}	36,00	49,40	49,40
C_{12}	23,00	34,60	34,60
C_{13}	23,00	9,70	9,70
C_{33}	36,00	38,10	38,10
C_{66}	6,50	14,20	16,84

A partir destes dados, os resultados para o material 1 da Tabela 4 podem ser vistos na Tabela 5.

Tabela 5. Resultados para o material 1.

u relativo	Lekhnitskii	solução Loloi	atual	erro
u_1/u_1^{exato}	1,0000000	1,0000003	0,9999996	0,004%
u_2/u_1^{exato}	-0,3898305	-0,3898306	-0,3898303	0,005%
u_3/u_1^{exato}	-0,3898305	-0,3898307	-0,3898303	0,005%
u_1/u_2^{exato}	-0,3898305	-0,3898307	-0,3898303	0,005%
u_2/u_2^{exato}	1,0000000	0,9999994	0,9999996	0,004%
u_3/u_2^{exato}	-0,3898305	-0,3898303	-0,3898303	0,005%
u_1/u_3^{exato}	-0,3898305	-0,3898306	-0,3898303	0,005%
u_2/u_3^{exato}	-0,3898305	-0,3898304	-0,3898303	0,005%
u_3/u_3^{exato}	1,0000000	1,0000001	0,9999996	0,004%

Na Tabela 5 a apresentação dos resultados segue o padrão estabelecido por *Loloi, 2000*, que consiste em mostrar os valores para os deslocamentos nas três coordenadas do sistema global ponderadas pelo valor exato do deslocamento ao longo da coordenada de solicitação. Assim, se o carregamento de tensão de tração uniaxial ocorrer ao longo do eixo X_1 , o denominador de u relativo será sempre u_1 . O valor exato do deslocamento utilizado no denominador de u relativo foi obtido a partir da solução analítica para o problema transversalmente isotrópico oferecida por *Lekhnitskii, 1963*. Da mesma forma que na tabela 5, as tabelas 6 e 7 mostram os mesmos tipos de resultado, mas para os materiais do tipo 2 e 3 da tabela 1.

Tabela 6. Resultados para o material 2.

u relativo	Lekhnitskii	solução Loloi	atual	erro
u_1/u_1^{exato}	1,0000000	0,9999999	1,0000009	0,009%
u_2/u_1^{exato}	-0,6846397	-0,6846397	-0,6846404	0,010%
u_3/u_1^{exato}	-0,0802886	-0,0802885	-0,0802886	0,000%
u_1/u_2^{exato}	-0,6846397	-0,6846395	-0,6846404	0,010%
u_2/u_2^{exato}	1,0000000	1,0000007	1,0000009	0,009%
u_3/u_2^{exato}	-0,0802886	-0,0802888	-0,0802886	0,000%
u_1/u_3^{exato}	-0,1154762	-0,1154761	-0,1154764	0,017%
u_2/u_3^{exato}	-0,1154762	-0,1154762	-0,1154764	0,017%
u_3/u_3^{exato}	1,0000000	0,9999994	0,9999993	0,007%

Tabela 7. Resultados para o material 3.

u relativo	Lekhnitskii	solução Loloi	atual	erro
u_1/u_1^{exato}	1,0000000	1,0000008	0,9999994	0,006%
u_2/u_1^{exato}	-0,6846397	-0,6846399	-0,6846391	0,009%
u_3/u_1^{exato}	-0,0802886	-0,0802887	-0,0802887	0,012%
u_1/u_2^{exato}	-0,6846397	-0,6846399	-0,6846391	0,009%
u_2/u_2^{exato}	1,0000000	1,0000005	0,9999994	0,006%
u_3/u_2^{exato}	-0,0802886	-0,0802886	-0,0802887	0,012%
u_1/u_3^{exato}	-0,1154762	-0,1154763	-0,1154761	0,009%
u_2/u_3^{exato}	-0,1154762	-0,1154760	-0,1154761	0,009%
u_3/u_3^{exato}	1,0000000	1,0000002	0,9999995	0,005%

O erro foi calculado seguindo o equacionamento mostrado em 40, sendo que *Lek* corresponde à resposta segundo *Lekhnitskii, 1963* e *Atual* é a resposta obtida com a implementação proposta.

$$erro [\%] = \frac{|(Lek - Atual)|}{|(Lek)|} \cdot 100 \quad (40)$$

Observando a coluna de erro das tabelas 5, 6 e 7 nota-se que os resultados da implementação atual, no programa E-Con3D, são suficientemente próximos daqueles obtidos por *Lekhnitskii, 1963*. Mesmo se comparado a *Loloi, 2000* em sua implementação, os resultados mostram-se bastante próximos, permitido concluir de que o modelo de material implementado no programa E-Con3D é compatível com aquele proposto por *Loloi, 2000*.

Além disso, os resultados obtidos foram comparados, por uma exigência da forma de apresentação dos resultados por *Loloi, 2000*, com a solução analítica para o problema da elasticidade transversalmente isotrópica apresentada por *Lekhnitskii, 1963*, tendo apresentado alto grau de concordância, fato que pode ser confirmado através dos quocientes muito próximos a 1 (um) nos resultados de *u* relativo em que se relacionava a resposta do programa com a analítica para a mesma direção.

É interessante notar que a análise dos erros, embora estes sejam bastante pequenos, é de interesse, dado que representam a qualidade da implementação numérica realizada, oferecendo um parâmetro quantitativo da diferença entre a resposta matemática analítica e a solução numérica, o que permite estimar a parcela do erro numérico pela implementação da solução e distingui-la dos demais erros introduzidos pelos processos de modelagem requeridos pela análise. Esse tipo de verificação é relevante principalmente para validação do algoritmo implementado, oferecendo maior segurança quanto ao seu emprego para problemas gerais.

Para verificar o funcionamento das transformações de coordenadas que promovem o giro no eixo de anisotropia de propriedades do material transversalmente isotrópico foi

analisado o problema padrão de um cubo de arestas unitárias, completamente engastado em uma das faces e tracionado com uma tensão uniforme unitária na face oposta ao engastamento. As propriedades do material transversalmente isotrópico foram utilizadas de acordo com a Tabela 8.

Tabela 8. Propriedades do material

Propriedade	valor
E_{xy}	2
E_z	4
ν_{xy}	0.28
ν_z	0.25
$G_{xz} = G_{yz}$	0.88
rotação em Y	45°

Foram utilizados valores genéricos com a finalidade de facilitar a visualização e a comparação dos resultados. Todos os valores podem ser considerados no mesmo sistema de unidades e a rotação do eixo de anisotropia das propriedades do material foi realizada sobre o eixo Y , seguindo o sentido positivo de giro. Originalmente o material é considerado alinhado ao plano cartesiano global, o que significa que o plano de isotropia XY é paralelo ao plano XY global e o eixo Z de anisotropia está alinhado com o eixo Z global.

Esse problema foi analisado com a implementação ora apresentada, sendo que o modelo contou uma malha de 6 (seis) elementos de contorno quadrilaterais biquadráticos, um para cada face, sujeitos à condição de contorno prescrita de engastamento em uma face e tracionamento unitário uniaxial na face oposta ao engastamento, como pode ser visto na Figura 17.

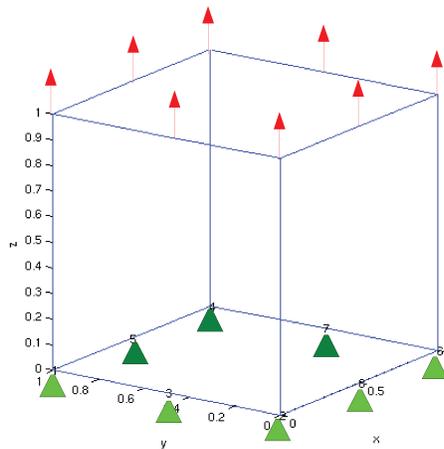


Figura 17. Modelo analisado pelo método dos elementos de contorno.

Para efetuar a comparação, um modelo idêntico foi analisado pelo método dos elementos finitos utilizando a ferramenta comercial Ansys[®], havendo apenas a alteração do tipo de malha, dado que o método dos elementos finitos utiliza uma malha de volume. Assim, ao invés de seis (6) elementos de superfície, foram utilizados vinte e sete (27) elementos de volume, solid95, que têm a forma geométrica de um cubo com 20 (vinte) nós . Essa escolha foi feita para facilitar a comparação, uma vez que os resultados nodais são bastante correspondentes e ofereceram uma melhor representação para a geometria deformada que outras malhas, menos refinadas, previamente testadas. A malha utilizada para análise pode ser vista na Figura 18.

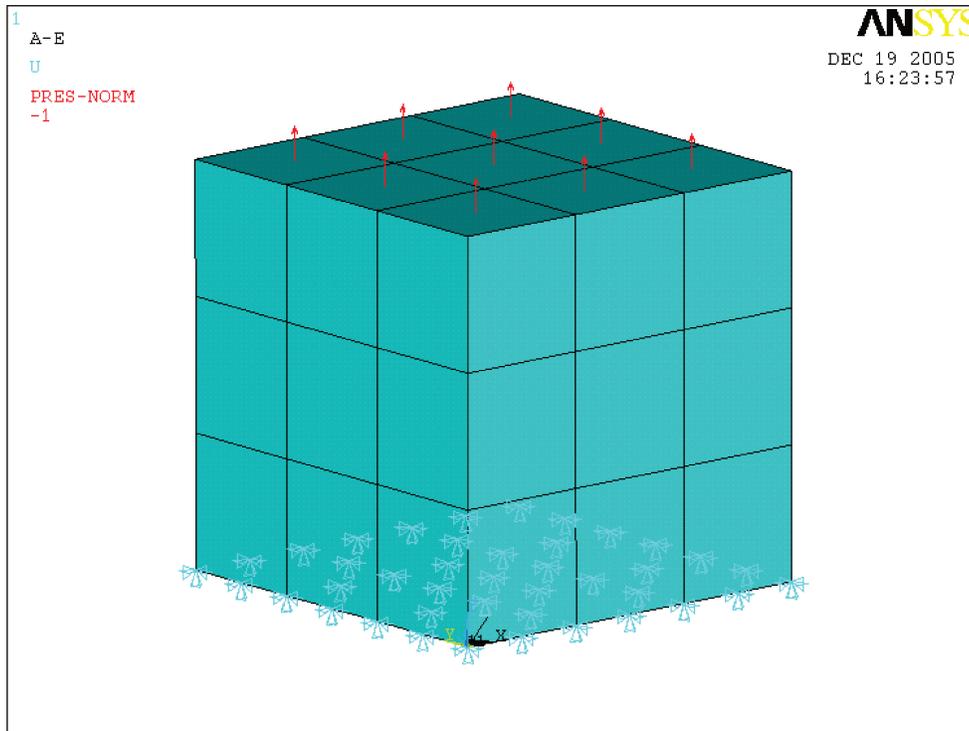


Figura 18. Modelo analisado pelo método dos elementos finitos.

O resultado comparativo das análises pode ser visto nas Figuras que seguem.

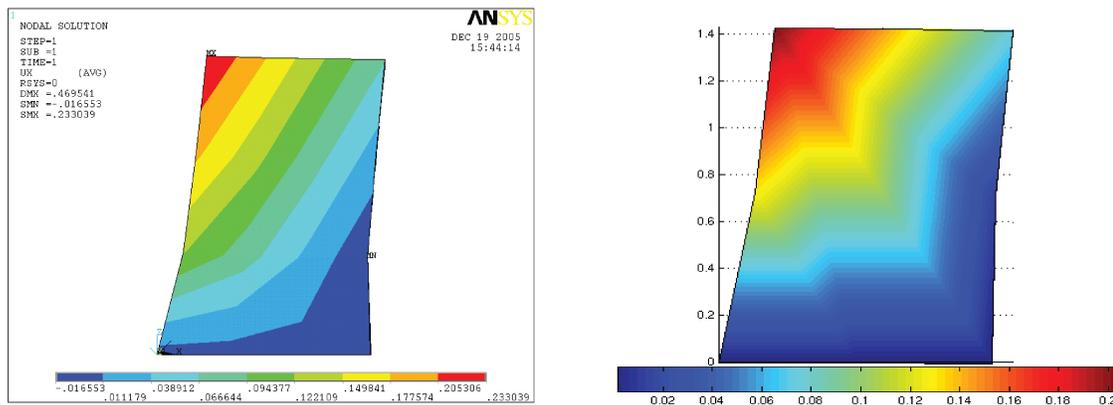


Figura 19. Comparação do perfil de deslocamentos em X.

Na Figura 19 é possível notar a semelhança entre os perfis de distribuição dos deslocamentos, com valores máximo de 0,204 para a implementação atual e 0,233 para a análise com o Ansys®.

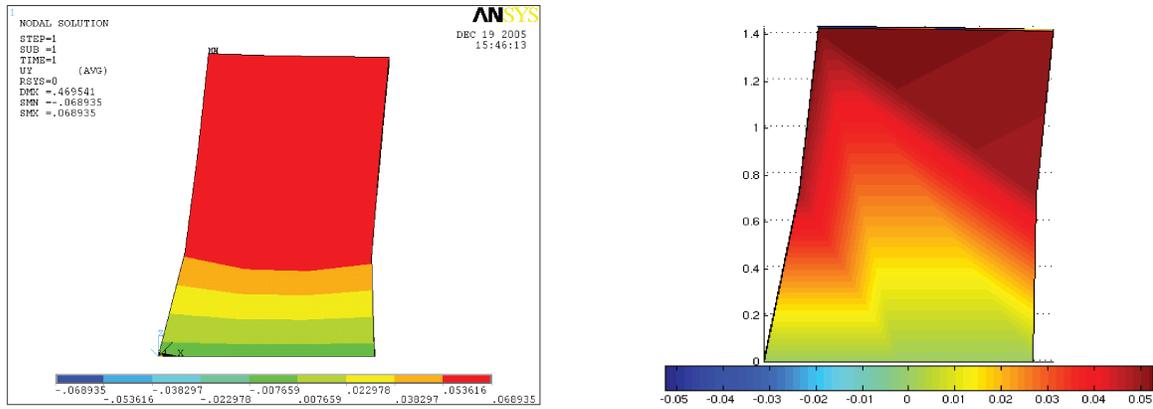


Figura 20. Comparação do perfil de deslocamentos em Y .

Na Figura 20 também é possível observar semelhança entre os perfis de distribuição de deslocamentos na direção Y , com valores máximos de 0,053 para a implementação e 0,069 para a análise com o Ansys®.

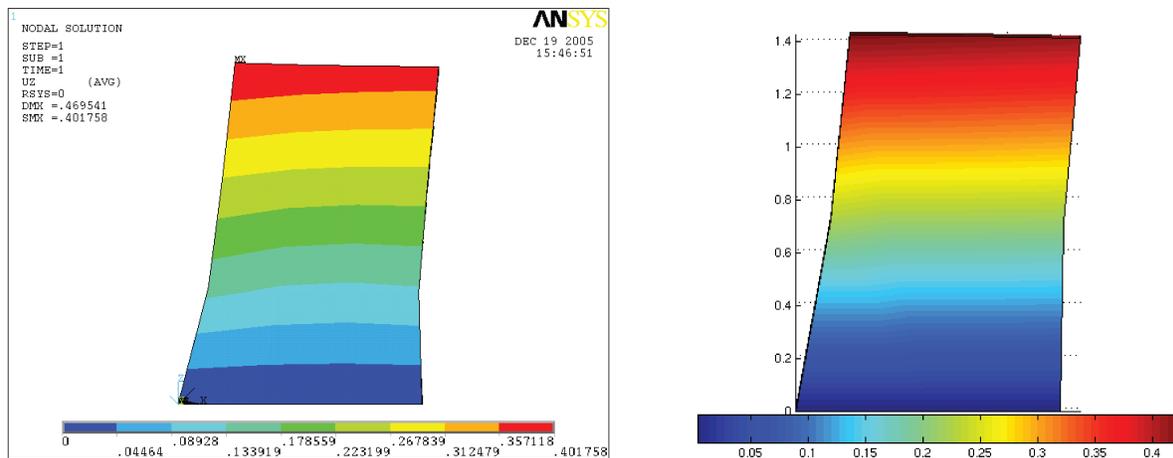


Figura 21. Comparação do perfil de deslocamentos em Z .

Novamente, na Figura 21 é possível observar semelhança nos perfis de deslocamentos ao longo de Z para ambos os resultados, sendo que o valor máximo de 0,426 foi obtido pela implementação e 0,402 com a análise feita pelo Ansys®.

Tabela 9. Comparativo de resultados

Resultado	E-Con3D	Ansys®	diferença %
U_x	0,204	0,233	12,446
U_y	0,053	0,069	23,188
U_z	0,426	0,402	5,633

A diferença percentual, mostrada na Tabela 9, foi calculada como a diferença positiva entre os valores de um mesmo resultado para ambos os métodos, com relação ao valor máximo entre eles. A diferença observada pode ser atribuída ao fato de a malha de elementos de contorno adotada ser muito pobre, contando com apenas um elemento por face do cubo, se assumirmos que a resposta de elementos finitos pode ser usada como referência. Outra fonte de erro pode estar no procedimento adotado para o giro das propriedades elásticas, dado que resultados preliminares, comparados com caso analítico, sem realização desse giro ofereceram respostas mais compatíveis.

2. RESULTADOS PARA O ELEMENTO TRIANGULAR LINEAR

O teste com o elemento triangular linear foi feito com base em um modelo proposto por *Kane, 1994*, originalmente para ser analisado utilizando elementos do tipo quadrilateral biquadráticos, no entanto, para fins de validação e teste da implementação oferecia os dados necessários. O problema proposto consiste em modelar um tubo de paredes espessas sujeito a pressão interna uniforme de 50 unidades de pressão, as dimensões básicas do problema são:

- raio interno do tubo: 4 unidades de comprimento;
- raio externo do tubo: 12 unidades de comprimento;
- espessura da fatia analisada: 1 unidade de comprimento.

O modelo pressupõe estado plano de deformações para analisar a fatia e simetria de um

quarto da geometria.

O resultado quanto aos deslocamentos totais pode ser visto na Figura 22.

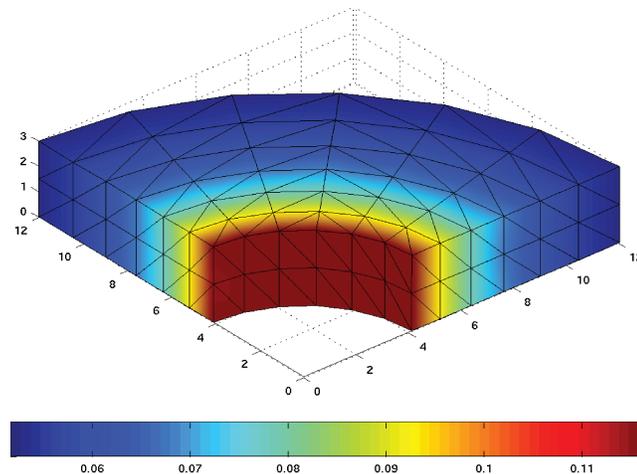


Figura 22. Resultado de deslocamentos totais para o problema proposto por *Kane, 1994*.

Segundo as tabelas de resultado disponíveis em *Kane, 1994*, o valor máximo do deslocamento ocorre na face interna do tubo e é de 0,1175 unidades de comprimento. O modelo analisado com a implementação atual, utilizando elementos de contorno do tipo triangular linear calculou o resultado de 0,1168 unidades de comprimento em posição geométrica idêntica, uma divergência de 0,6%.

3. RESULTADOS DA REMODELAGEM ÓSSEA SUPERFICIAL

A remodelagem óssea superficial foi implementada sobre um algoritmo baseado em deformações cuja formulação foi apresentada por *Sadegh et al., 1993*, assim, a primeira análise tentou reproduzir o problema proposto por ele em seu artigo, pois assim seria possível comparar os resultados e verificar o adequado funcionamento do procedimento implementado.

Dessa forma, o problema proposto consiste de um cilindro, composto por osso cortical

maciço, cujas dimensões são raio de 1mm e altura de 0,5 mm. A obtenção desse modelo poderia ter ocorrido como mostrado na Figura 23.

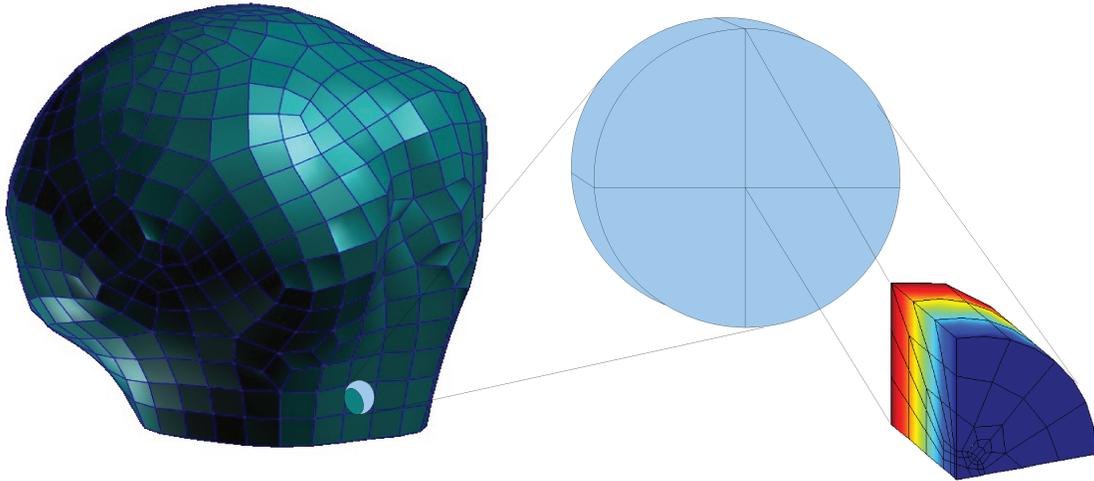


Figura 23. Hipótese de extração do modelo cilíndrico utilizado na remodelagem.

Esse cilindro ósseo encontra-se livre por todos os lados, carregado com pressão uniforme aplicada em toda a face cilíndrica e restrito por uma placa com furo central em uma de suas faces circulares, como mostra a Figura 24.

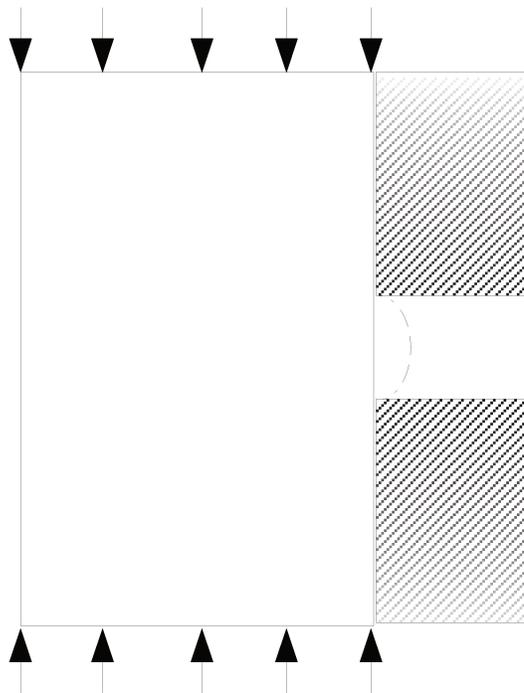


Figura 24. Vista lateral do cilindro ósseo e suas condições de contorno.

A partir da geometria, foi gerada uma malha de elementos de contorno quadrilaterais de biquadráticos, dado que esse tipo de elemento apresenta melhores características para lidar com geometrias complexas e, supostamente, poderia auxiliar no processo de remodelagem superficial. Assim, a primeira malha pode ser vista na Figura 25.

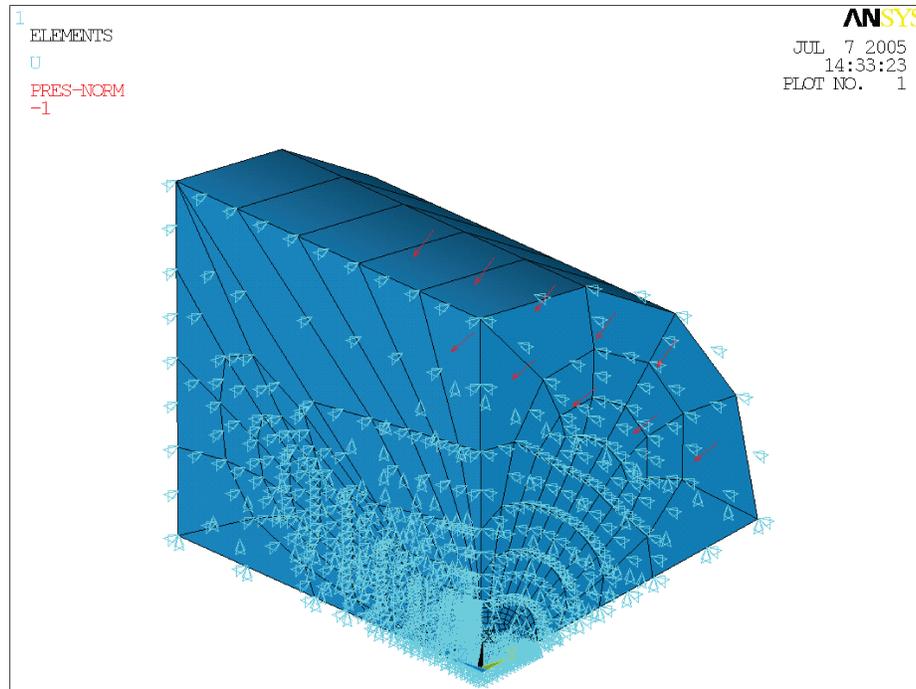


Figura 25. Primeira malha para o problema de remodelagem superficial.

Sobre a malha da Figura 25 foram aplicadas as condições de contorno de simetria, dado que foi feita a representação de somente um quarto do cilindro, e de pressão de compressão de 100 MPa, uniformemente distribuída sobre a face cilíndrica externa da geometria. Além disso, foi simulada a presença de um anteparo sobre uma das faces circulares do cilindro. Esse anteparo conta com um furo central através do qual o osso deve se remodelar até atingir o estado de equilíbrio.

Ao iniciar a análise com a malha proposta, foi obtido um perfil de remodelagem óssea superficial após 14 iterações como o mostrado na Figura 26.

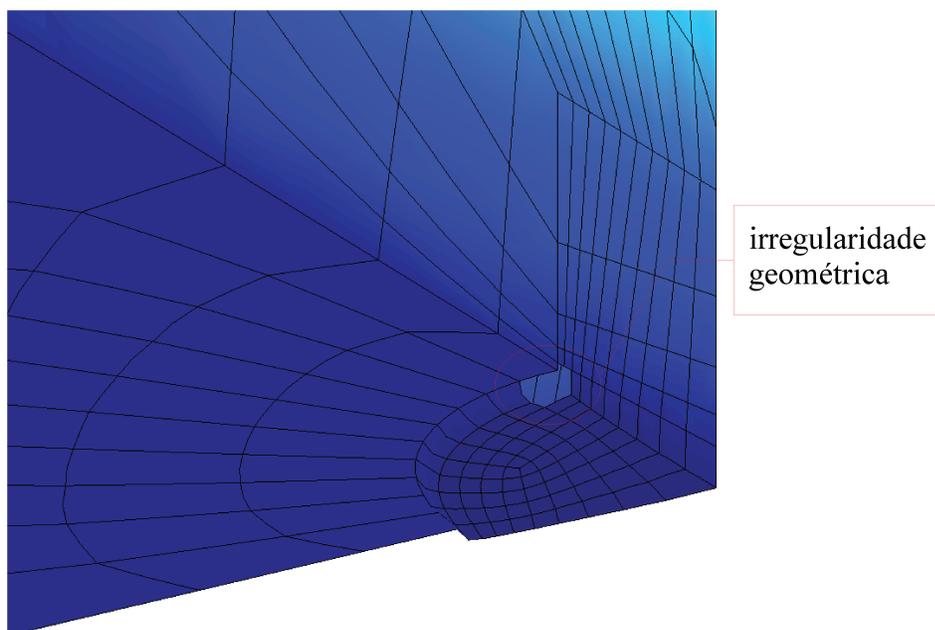


Figura 26. Remodelagem superficial após 14 iterações.

Ao observar a porção remodelada na Figura 26, que é a pequena projeção que se lança a partir do centro do cilindro, pode-se notar uma grande irregularidade na geometria dos elementos da malha nesta região. Ao prosseguir com o processo de remodelagem observou-se que essa irregularidade agravou-se, levando a uma inconsistência geométrica que acabou por inviabilizar a continuidade da análise por volta do passo 20, o que pode ser observado no gráfico de progresso da remodelagem, mostrado na Figura 27.

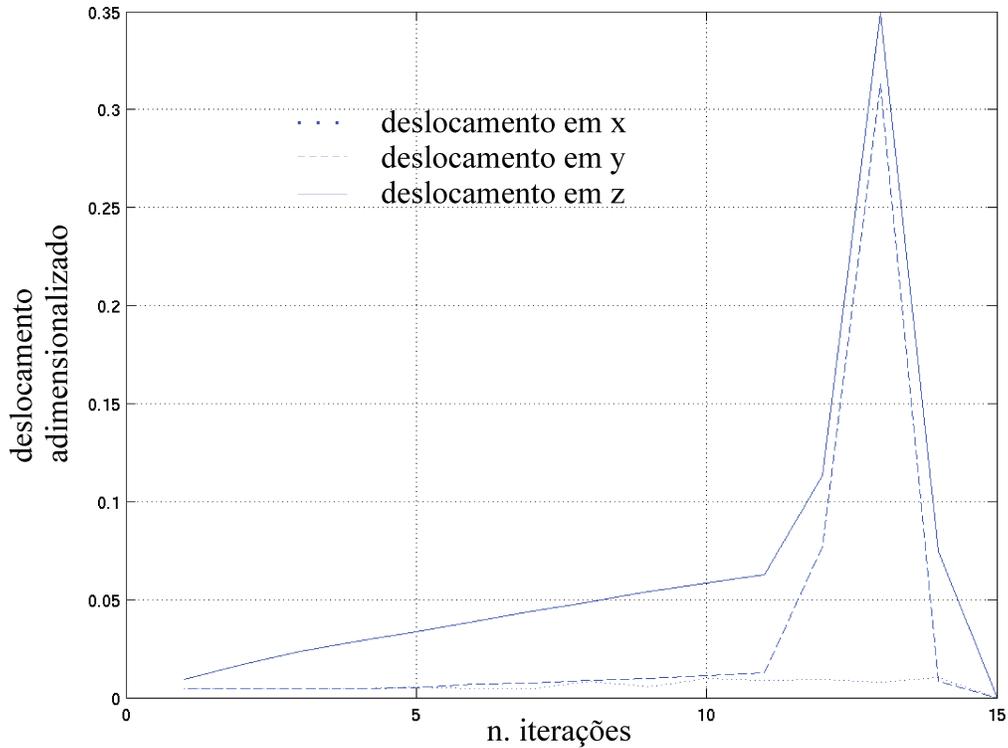


Figura 27. Gráfico de progresso da remodelagem para a primeira malha.

No gráfico da Figura 27 a linha contínua representa o deslocamento da superfície na direção Z , que é a prioritária, enquanto que as linhas tracejada e pontilhada representam os deslocamentos nas direções Y e X respectivamente. É interessante notar que os deslocamentos de Y e X surgem como patamares até a iteração 11, pois não há remodelagem ocorrendo nessas direções, sendo o patamar correspondente ao deslocamento originado pelo carregamento estático imposto. Ainda nessa figura é possível notar a queda abrupta dos deslocamentos na direção Z entre a iteração 14 e 15, ocasionado pela distorção excessiva da geometria, que levou a problemas no Jacobiano e ao surgimento de singularidades matemáticas.

A solução desse problema de distorção geométrica exigiu uma reconfiguração no código do processo de remodelagem com o acréscimo de chaves adicionais de verificação, como mostrado na implementação do procedimento de remodelagem. Assim, uma nova malha foi gerada para testar a nova configuração do programa e pode ser vista na Figura 28.

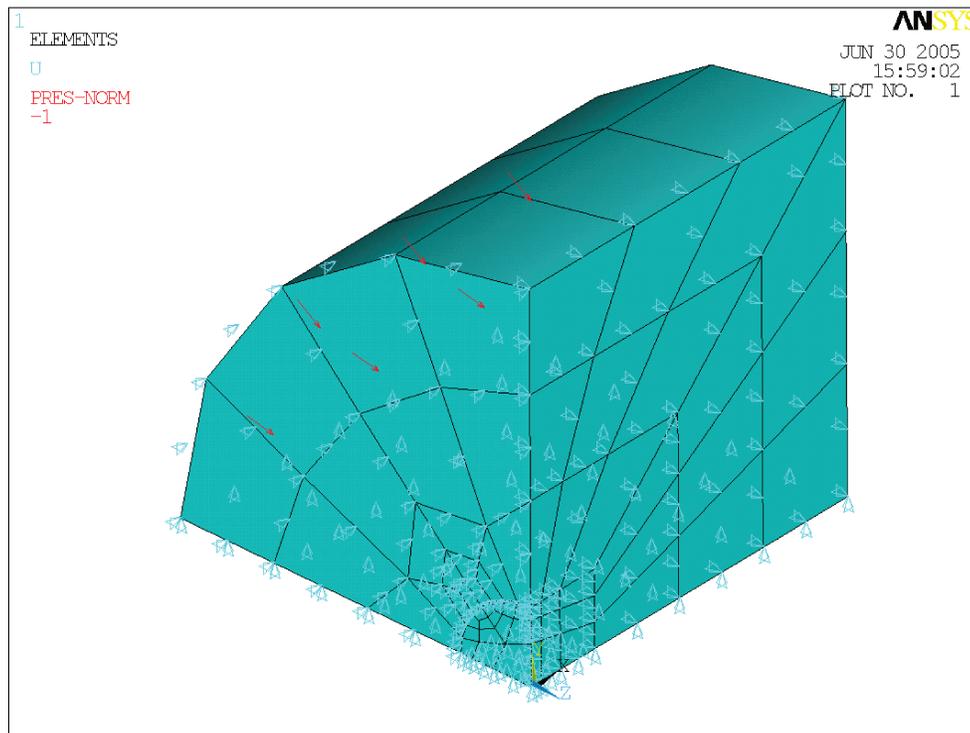


Figura 28. Segunda malha para remodelagem óssea superficial.

Na nova malha foram distribuídos elementos previamente distorcidos a fim de reduzir os problemas de distorção geométrica. Dessa forma, elementos próximos a regiões que mostraram grande distorção geométrica na análise com a primeira malha foram gerados com geometrias tais que, ao sofrerem as distorções, ainda mantivessem uma geometria aceitável. Os resultados de remodelagem com a segunda malha podem ser vistos na Figura 29.

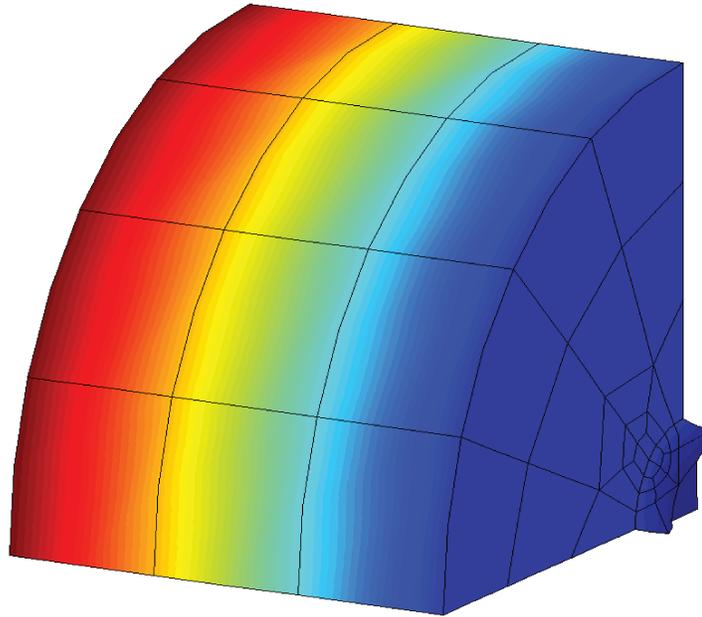


Figura 29. Remodelagem superficial após 40 iterações.

O mapa de cores pintado sobre a geometria deformada, na Figura 29, representa graficamente os valores de deslocamentos totais, sendo que a cor vermelha mais escura representa maiores deslocamentos e a azul mais escura representa menores deslocamentos. Assim, é possível notar que a face restrita e com um orifício central apresenta deslocamento uniforme, que é igual a zero, sendo que o orifício central se desloca para direções negativas, adotando uma cor azul mais escura.

Apesar de o mapa de cores demonstrar um deslocamento na superfície livre do orifício central, esse deslocamento não é causado especificamente pela ação do carregamento, mas sim por força da remodelagem superficial. Dessa forma, optou-se por chamar esse tipo exclusivo de deslocamento de movimentação da frente de remodelagem.

Embora estável e demonstrando estabilidade geométrica maior que a primeira malha, uma análise dos gráficos de progresso da remodelagem, Figura 30, mostrar ainda uma leve instabilidade do processo de remodelagem, o qual apresentou oscilações, evidenciando a ocorrência de remodelagem em direções não prioritárias.

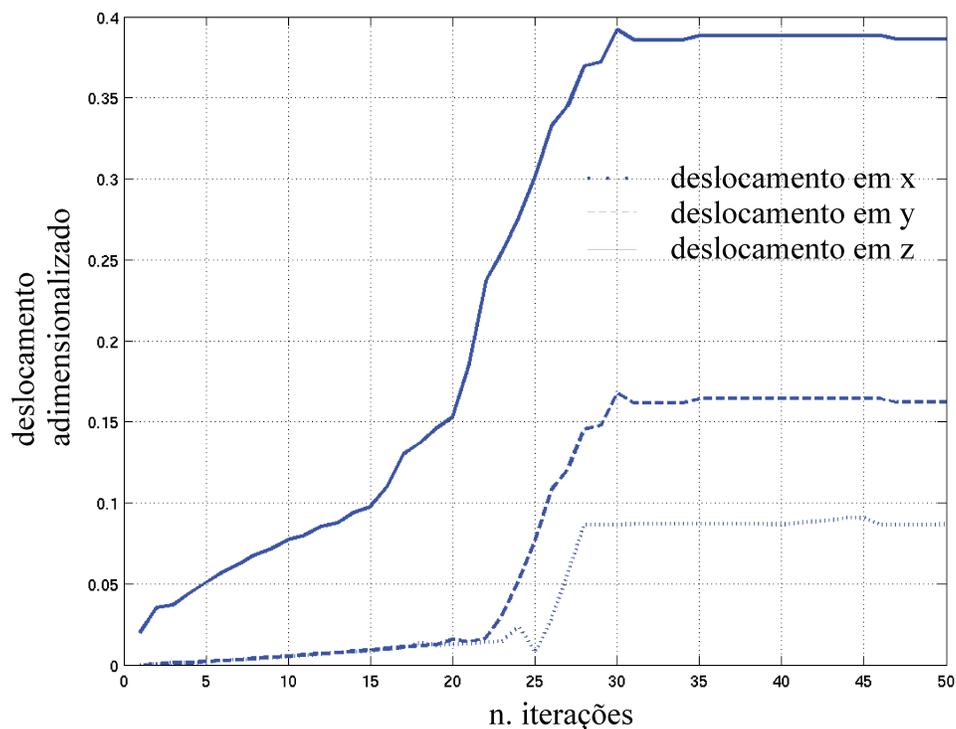


Figura 30. Gráfico de progresso de remodelagem para a segunda malha

Observando o gráfico da Figura 30 é possível observar o crescimento até a estabilização por volta da iteração 30, para a remodelagem superficial na direção Z, linha cheia. No entanto, a partir do passo 22 inicia-se um processo de remodelagem secundário, na direção Y e posteriormente, a partir do passo 25, em X. Essa tendência levou, com a continuidade do processo, a distorções elevadas no perfil da porção remodelada, no entanto, tais distorções não comprometeram a continuidade do processo de remodelagem, muito menos a obtenção do patamar de estabilização a partir do passo 31 para todas as direções, caracterizando o final do processo.

As distorções observadas podem ser atribuídas a instabilidades no processo de cálculo

numérico, principalmente devido à fragilidade do algoritmo de estabilização do Jacobiano, o qual apresenta capacidade limitada de correção, dado que foi implementado para resolver um tipo específico de distorção geométrica, de ocorrência mais crítica, sem a preocupação de resolver problemas genéricos.

Quanto ao valor atingido no patamar de estabilização, a aplicação atual mostrou uma remodelagem de 0,39 aproximadamente, compatível com os 0,40 originalmente mostrados no artigo de *Sadegh et al., 1993*. No entanto, deve-se notar que a aplicação atual trata o problema em três dimensões, enquanto aquela proposta por *Sadegh et al., 1993* faz uso de um procedimento de análise bidimensional.

4. TESTE QUALITATIVO DA IMPLEMENTAÇÃO COMPLETA

A fim de testar a metodologia de aquisição e análise de problemas de bioengenharia aplicada a estruturas de ossos, foi conduzido um procedimento completo, desde a aquisição das imagens dos tomos, passando pela geração de uma malha para prototipagem rápida, conversão para uma malha de elementos de contorno quadrilaterais de oito nós, até o carregamento das condições de contorno, aplicação das propriedades do material ósseo e realização da análise numérica computacional a partir do método dos elementos de contorno tridimensional com formulação de material transversalmente isotrópico.

A estrutura óssea escolhida foi o quarto proximal de um úmero, representando a articulação do ombro, cuja tomografia original foi repassada ao CenPRA, o qual retornou a malha de triângulos conforme mostrado na Figura 31.

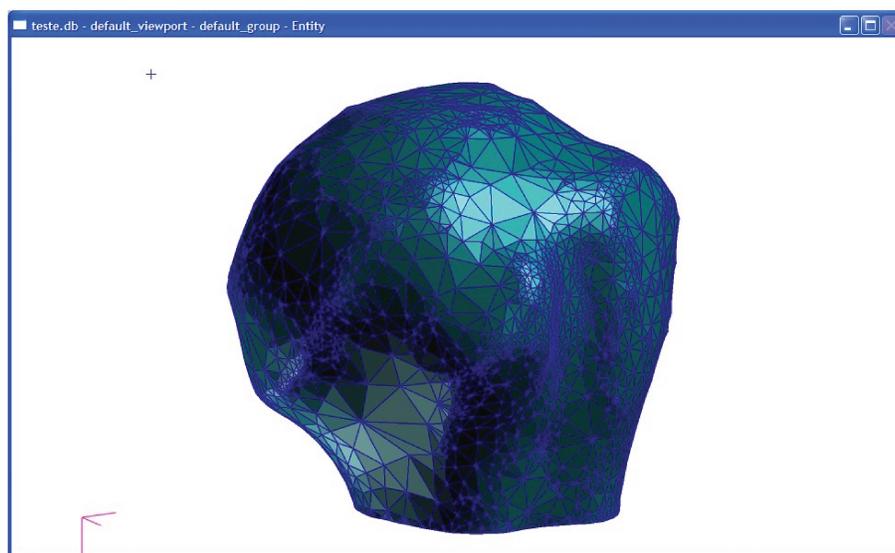


Figura 31. Malha do úmero, em formato STL, gerada pelo CenPRA.

Após retrabalho com as ferramentas da MSC.Patran[®], a malha para a análise numérica por elementos de contorno ficou como mostra a Figura 32.

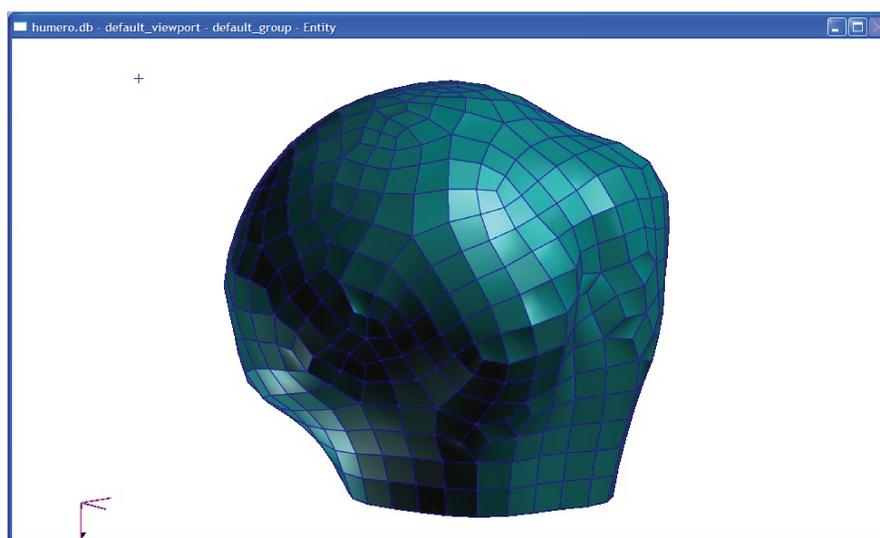


Figura 32. Malha de elementos de contorno quadrilaterais de oito nós.

Finalmente, o modelo completo para análise com a ferramenta E-Con3D, implementada nesse trabalho e as condições de contorno (CDC), podem ser vistos na Figura 33.

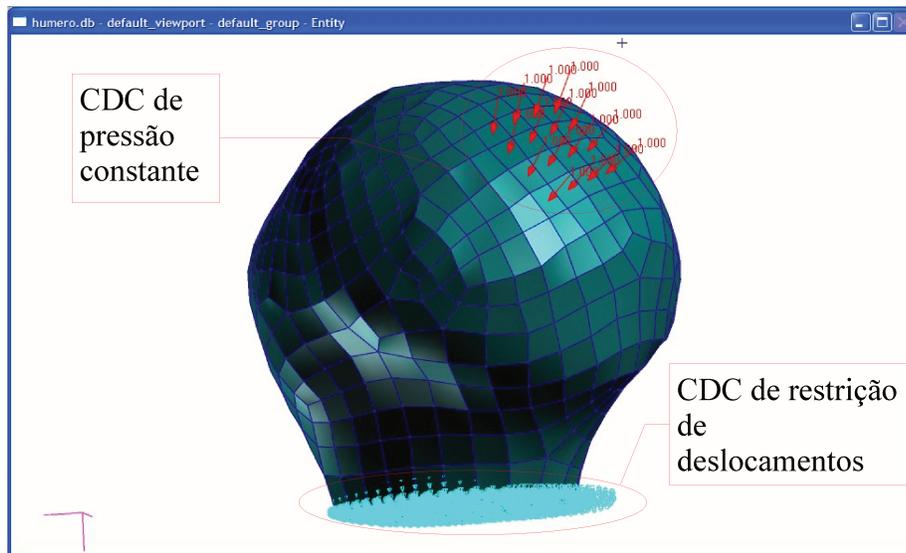


Figura 33. Modelo carregado com condições de contorno.

As condições de contorno foram aplicadas com a finalidade de demonstração das capacidades da ferramenta, portanto, não consistem em qualquer caso de estudo real. Para ilustração, foi aplicado engastamento total na base plana do modelo e uma pressão uniforme e constante de 1000 unidades de pressão na superfície semi-esférica.

As propriedades do material transversalmente isotrópico foram obtidas em *Yoon et al., 2002*:

- E_{xy} : $13,307 \times 10^3$ [MPa];
- E_z : $21,892 \times 10^3$ [MPa];
- G_{xy} : $5,053 \times 10^3$ [MPa];
- G_{xz} : $6,622 \times 10^3$ [MPa];
- ν_{xy} : 0,317;

- v_{xy} : 0,250;

O eixo do material foi considerado alinhado com o eixo global, o qual tem o plano XY paralelo à base plana do modelo, que encontra-se completamente engastada.

Os resultados dessa análise podem ser vistos nas Figuras 34, 35 e 36.

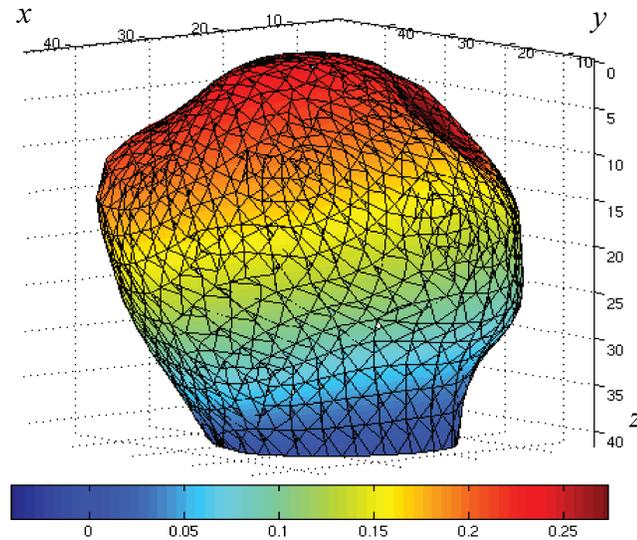


Figura 34. Resultados de deslocamentos na direção X com ampliação de 25 vezes.

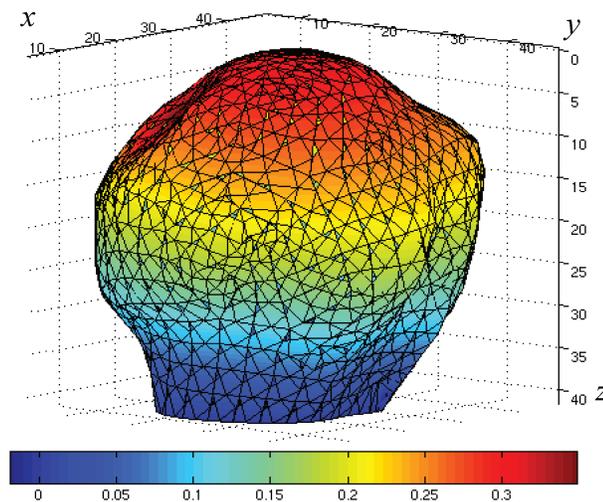


Figura 35. Resultados de deslocamentos na direção Y com ampliação de 25 vezes.

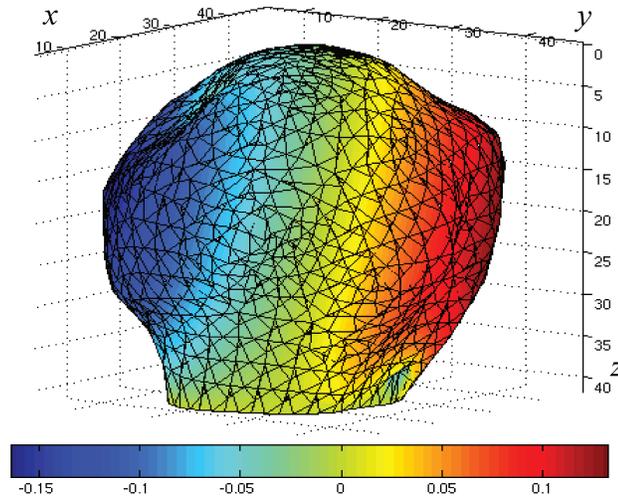


Figura 36. Resultados de deslocamentos na direção Z com ampliação de 25 vezes.

Os resultados obtidos na forma de mapa de cores referem-se ao perfil de deslocamentos em dada uma das direções do sistema de coordenadas global do problema, já a geometria sobre a qual o mapa é pintado apresenta a forma do deslocamento total. Assim, é possível observar um achatamento na superfície esférica sujeita ao carregamento, de acordo com o esperado, dada a condição de contorno imposta.

A análise do resultado dos deslocamentos ao longo do eixo Z , apresentada na Figura 36, mostra um comportamento interessante, indicando deslocamento na direção da aplicação da carga na região próxima ao local da aplicação, visível na coloração azul mais escura do mapa de cores, mas deslocamento no sentido oposto para a face oposta da geometria, indicado pela cor avermelhada no mapa de cores. Esse resultado pode ser interpretado como uma flexão da geometria devido ao pequeno braço-de-alavanca que existe entre a base engastada do modelo e a região semi-esférica da aplicação de carga. Por outro lado, pode ser um efeito da representação linear de um problema que deveria ser representado de forma não linear.

Os resultados nas direções X e Y , Figuras 34 e 35 respectivamente, mostram comportamentos bastante semelhantes de deslocamentos, mas distintos daqueles observados

na direção Z, Figura 36, evidenciando o funcionamento do modelo de material transversalmente isotrópico aplicado, que foi configurado com o plano de isotropia alinhado com o plano XY do sistema de coordenadas global, justificando parcialmente o comportamento similar nessas duas direções, e o eixo de anisotropia alinhado com o eixo Z global, justificando parcialmente o comportamento distinto nessa direção. Além disso a geometria semi-esférica desse tipo de osso e o alinhamento de seu eixo longitudinal com o eixo global Z, tornam a análise favorável para destacar essa característica transversalmente isotrópica.

Além disso, esta análise permitiu verificar a capacidade de importação de modelos com geometrias ósseas reais, obtidas a partir da metodologia proposta, com utilização do novo modelo de material implementado e aplicação de condições de contorno através do MSC.Patran[®], o que possibilitou testar também o módulo de importação completo, que transforma o MSC.Patran[®] num pré-processador para o programa implementado neste trabalho.

Além desse modelo, um outro foi analisado com vistas a testar qualitativamente a integração da remodelagem óssea superficial ao módulo de solução para problemas completos. Esse modelo consistiu de uma mandíbula, cortada ao meio, com canal medular definido. O modelo e as condições de contorno (CDC) aplicadas podem ser vistos nas Figuras 37 e 38.

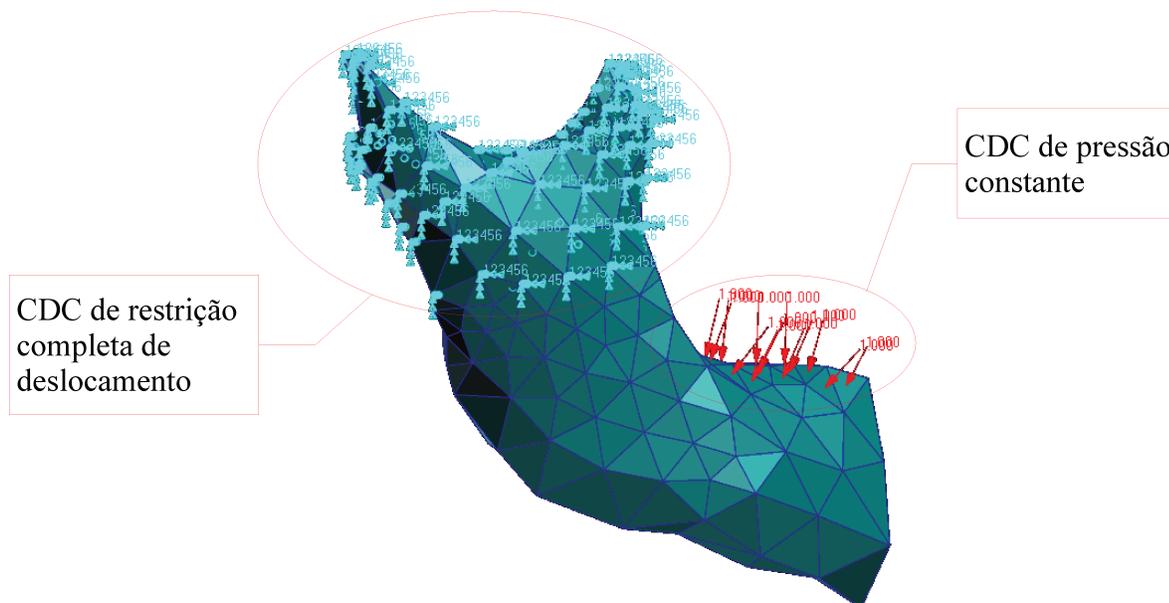


Figura 37. Geometria da mandíbula em malha com condições de contorno.

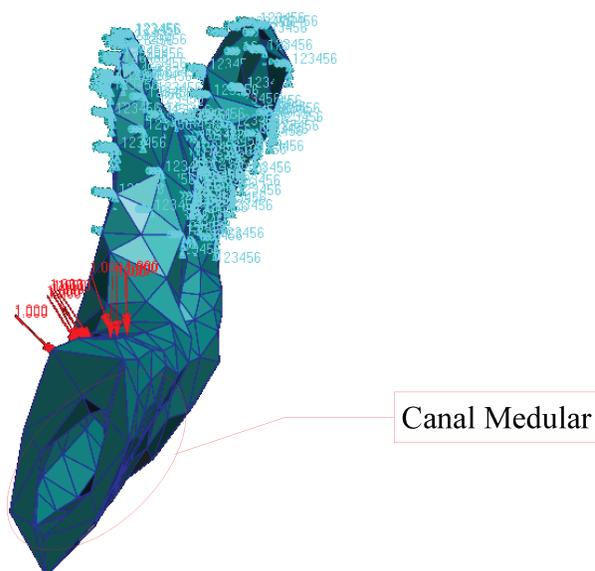


Figura 38. Detalhe do corte do canal medular definido.

A análise dessa mandíbula foi feita aplicando o modelo de material transversalmente isotrópico com propriedades médias de ossos corticais de 13,307 GPa e 21,892 GPa nas direções transversal e longitudinal respectivamente, as mesma utilizadas para o caso do úmero. O mecanismo de remodelagem óssea superficial foi ligado para fins de teste, no entanto, para simplificação, foi configurado para apenas um ciclo. Os resultados obtidos em termos de campo de deslocamentos tridimensionais podem ser vistos nas Figuras 39, 40, 41.

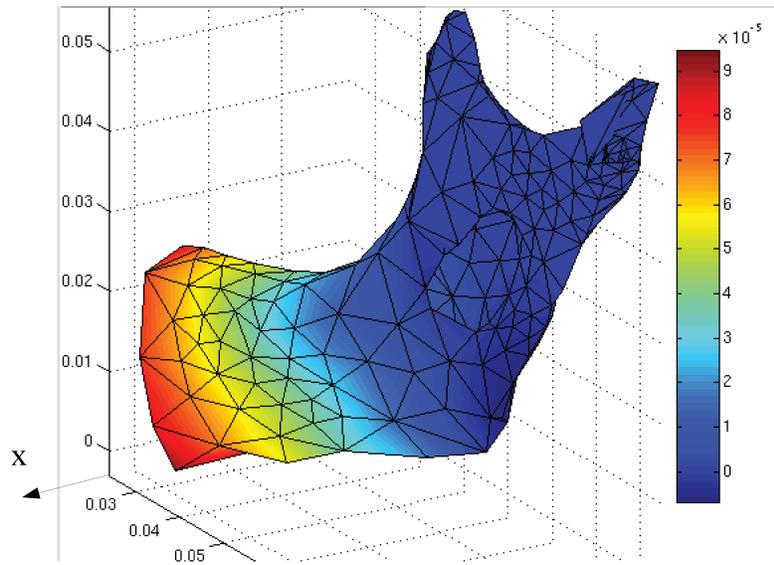


Figura 39. Vista da saída do canal medular e campo de deslocamentos em X .

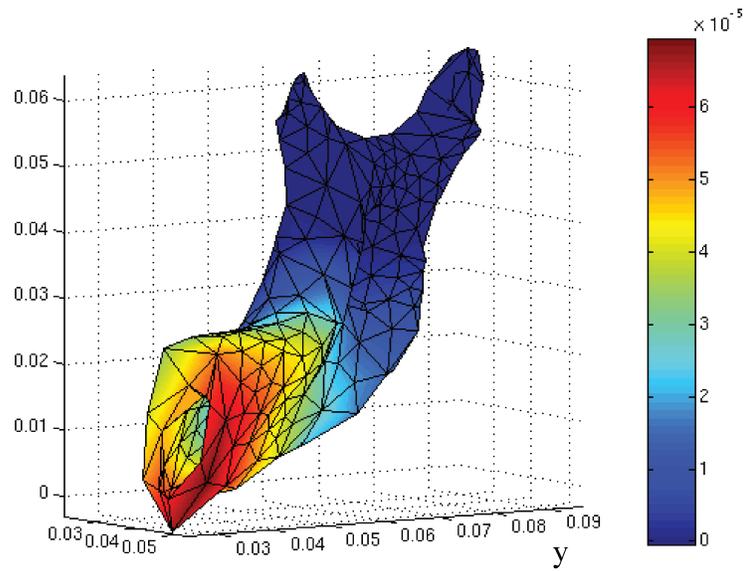


Figura 40. Campo de deslocamentos em Y .

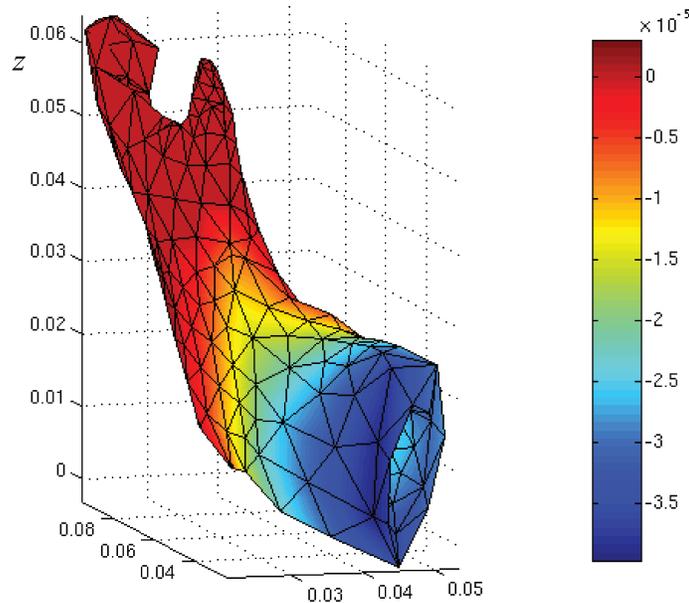


Figura 41. Campo de deslocamentos em Z.

Os resultados em deslocamento mostram o comportamento esperado de forma qualitativa, ou seja, deflexão no sentido negativo do eixo Z, referente ao deslocamento provocado na direção do carregamento. Além disso, pode ser notada uma rotação ao redor do canal mandibular, visível na forma de deslocamentos nas direções X e Y, que é esperada pois a região de aplicação do carregamento forma um pequeno braço de giro com relação ao eixo projetado da mandíbula.

Também é possível notar que existe um perfil de deslocamentos diferenciado no interior do canal medular, visível principalmente nas Figuras 40 e 41. Esse perfil de deslocamento diferenciado é interessante, pois serve como referência para a remodelagem óssea superficial. Pelo mapa de cores da Figura 41 é possível notar também que os valores de deslocamento ao longo do eixo Z são menores no interior do canal que na superfície externa da mandíbula. Essa diferença de deslocamentos pode gerar um comportamento de remodelagem que explique a maior espessura da camada óssea na parte superior do canal em relação à face inferior, como pode ser notado na Figura 38.

Observando os resultados das análises do úmero e da meia mandíbula é possível notar

que o programa implementado foi capaz de realizá-las contemplando tanto a complexidade das geometrias envolvidas, quanto utilizando o novo modelo de material implementado para comportamento transversalmente isotrópico. Além disso, o procedimento de remodelagem foi testado e não apresentou problemas, tendo sido restrito a um passo somente por razão da alta demanda de processamento.

O teste de remodelagem superficial com um o modelo de alta complexidade geométrica também foi descartado dado que a implementação já havia sido testada e validada com um modelo mais simples e a análise de um modelo com alta complexidade não traria qualquer comprovação adicional, além de não permitir a comparação dos resultados com uma base real, dado que não se dispõe de dados clínicos a respeito da remodelagem óssea superficial dessa mandíbula.

O modelo da mandíbula também permitiu testar a aplicação das alterações sobre o outro tipo de elemento previamente existente, que é o triangular linear de três nós. Esse elemento foi implementado por facilitar a modelagem de geometrias irregulares e de alta complexidade, oferecendo vantagens sobre o elemento quadrilateral de oito nós, que necessita de trabalho de geração de malha muito mais apurado.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

A partir dos resultados apresentados conclui-se que a implementação da solução fundamental transversalmente isotrópica é funcional e está completamente inserida na ferramenta de análise numérica para problemas de bioengenharia pelo método dos elementos de contorno proposta e desenvolvida neste trabalho. Tanto os resultados numéricos quanto o teste de funcionalidade, com a aplicação da solução a problemas diversos e que incluíram rotação das propriedades elásticas transversalmente isotrópicas e a comparação com um aplicativo comercial mostraram bons resultados e foram bem sucedidos.

A implementação da remodelagem óssea superficial, inserida e integrada ao módulo de análise tridimensional com a formulação para material transversalmente isotrópico em elementos de contorno, mostrou-se funcional, embora bastante dependente das qualidades da malha de elementos de contorno utilizada. Tanto o algoritmo utilizado, baseado na análise de campos de deformação, quanto os parâmetros utilizados como propriedades para remodelagem, que foram a deformação de equilíbrio de remodelagem e a taxa de remodelagem, mostraram-se suficientes para gerar um comportamento de remodelagem de acordo com o esperado e indicado por modelos presentes na literatura, muito embora tais modelos sejam referentes a aplicações bidimensionais e sem o uso do modelo de material transversalmente isotrópico.

A forte dependência do comportamento da remodelagem superficial em relação à geometria dos elementos da malha nas vizinhanças do local no qual ocorre a remodelagem foi um fator inesperado. Inicialmente, trabalhos que mostravam procedimentos de remodelagem superficial com resultados numéricos, acompanhados do perfil gráfico da geometria remodelada resultante não apontaram qualquer comentário relativo à influência da malha na qualidade ou estabilidade do processo, apontando apenas a combinação de propriedades de remodelagem como responsáveis pelos eventuais comportamentos instáveis da malha. Apesar desses comentários, praticamente não se encontra menção a problemas com a estabilidade do procedimento de remodelagem superficial baseado na análise de campos de deformação. Ainda é interessante notar que o material consultado durante o desenvolvimento deste trabalho mostrou somente aplicações bidimensionais e com modelos de material isotrópico envolvendo esse tipo de remodelagem, principalmente no que diz respeito àquelas que utilizaram o método dos elementos de contorno como base para o procedimento de análise e subsídio para a remodelagem.

O trabalho ora concluído conta não somente com uma estrutura sólida para análise tridimensional de geometrias quaisquer como também permite a utilização do modelo de material transversalmente isotrópico, melhor adaptado ao material ósseo, consistindo em substancial avanço em relação ao material pesquisado. Por causa disso, diferenças fundamentais entre as análises bidimensionais e tridimensionais podem ser apontadas como causadoras dos problemas de instabilidade do processo de remodelagem superficial, mesmo quando uma malha geometricamente mais adequada foi implementada.

Inicialmente, problemas bidimensionais apresentam somente dois valores de deformação na superfície, que se resume a uma linha, uma de tração ou compressão e outra de cisalhamento. Por se tratar de procedimento empírico, a obtenção dos valores das propriedades da remodelagem superficial pode ter sido guiada para adaptar-se ao processo implementado originalmente, que era bidimensional. Essa hipótese pode ser confirmada pela presença de apenas um valor com parâmetro de deformação de equilíbrio para a remodelagem superficial, o que se explica pelo fato de que o osso responde prioritariamente

a deformações de compressão, ignorando o cisalhamento para efeitos de remodelagem. Assim, como existem somente uma deformação possível de compressão na superfície para problemas bidimensionais, apenas um valor foi levantado.

No entanto, para problemas tridimensionais, existem cinco valores de deformação possíveis na superfície do problema, três trações ou compressões e dois cisalhamentos. Assumindo que, para o caso da remodelagem superficial óssea as deformações de interesse sejam apenas as de tração ou compressão, ainda temos três valores. Se considerarmos ainda que as deformações de interesse são somente aquelas que atuam diretamente na superfície, é possível descartar mais uma, o que deixa duas restantes, que são deformações de tração e compressão na direção tangente à superfície. Ainda que sejam duas, não se pode assumir que ambas sejam iguais, ou que possam ser comparadas a um mesmo parâmetro.

A solução adotada neste trabalho, de utilizar uma deformação equivalente, mostrou-se funcional. Ao adotar a deformação principal mínima como a máxima compressão total à qual a superfície está sujeita em um determinado ponto, foi escolhido um critério baseado nas características do fenômeno que se estava abordando e no comportamento catalogado do material ósseo. Embora a utilização das mesmas propriedades tanto para a remodelagem superficial bidimensional quanto para a tridimensional possa ser questionada, é possível argumentar que, para o caso bidimensional, tanto o valor da deformação de compressão quanto o valor da deformação principal mínima são equivalentes, portanto, trata-se da utilização simplificada da deformação principal mínima.

Finalmente, a metodologia de aquisição da geometria óssea, a partir dos arquivos de prototipagem rápida, revelou-se bastante funcional e uma ferramenta de utilidade incomparável. Dada a complexidade das geometrias envolvidas e o caráter exclusivo do ambiente de aplicação das mesmas, ou seja, no interior de pessoas vivas, era de fundamental importância para o desenvolvimento de uma ferramenta funcional para a bioengenharia, e para o público alvo desse tipo de aplicação, a disponibilidade de um meio de importação da informação fundamental para a realização de qualquer análise sobre estruturas ósseas, que é

a própria geometria dos ossos.

O procedimento de digitalização da estrutura óssea a partir de tomografia computadorizada já era bastante conhecido, principalmente no meio médico, no entanto, o caminho necessário, de conversão dos formatos de imagens do tomógrafo para imagens que pudessem ser lidas em um computador com sistemas adequados ao seu processamento, não era bem conhecido, nem por médicos ou por engenheiros. A transformação das imagens digitais dos tomos, exportadas do tomógrafo, para um sólido computacional com representação tridimensional já era um processo bem conhecido pelos engenheiros e equipes médicas que trabalhavam em conjunto com o CenPRA, no entanto, a geração de um arquivo de dados para análise numérica computacional a partir das ferramentas utilizadas para gerar arquivos para prototipagem rápida mostrou-se um desafio.

Apesar de todos os esforços, ainda foi necessário utilizar uma ferramenta comercial para retrabalhar a malha originalmente gerada com as ferramentas computacionais para prototipagem rápida. A grande funcionalidade necessária foi encontrada no MSC.Patran[®] em sua capacidade de gerar uma malha sobre outra pré-existente, uma vez que, para o tipo de modelo utilizado, não havia geometria original disponível. Mesmo necessitando de tão pouco, a utilização do MSC.Patran[®] foi bastante intensa, dado que o trabalho de geração de grandes malhas a partir de outras mostrou demandar razoável potencial computacional. Além disso, houve dificuldade adicional devido à necessidade de geração de malhas completamente quadrilaterais, o que foi resolvido graças a sugestões do pessoal da Embraer[®], em especial na pessoa do Engenheiro Paulo Augusto de Oliveira Martins. Essas dificuldades, bem como aquelas relacionadas às malhas para remodelagem óssea superficial apontaram para a necessidade do desenvolvimento de uma ferramenta especializada em geração de malhas para aplicações em bioengenharia.

O teste completo, que envolveu a utilização de um modelo de estrutura óssea real, adquirido com o auxílio de tomografia, o qual passou por todo o tratamento de imagens e recomposição em sólido tridimensional para prototipagem rápida, foi importado no

MSC.Patran® para retrabalho da malha e carregamento das condições de contorno e exportado para análise de tensões e deformações no programa implementado neste trabalho cujo resultado mostrou-se qualitativamente positivo. Esse procedimento demonstrou a correta concepção da metodologia desenvolvida, bem como a adequada integração entre as diversas áreas multidisciplinares envolvidas no projeto, desde o Hospital de Clínicas da UNICAMP até os sistemas de computação do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica.

Com base nos resultados e nas conclusões mencionadas, são propostas para trabalhos futuros:

- Validação dos resultados das análises com observações de casos clínicos.
- Melhoria da estabilidade do procedimento de remodelagem óssea superficial.
- Tradução do código para uma linguagem mais eficiente (tempo/processamento), com a finalidade de implementá-lo num formato para utilização prática.
- Definição dos parâmetros de interesse para geração de malhas otimizadas para remodelagem óssea superficial (gerador de malhas).

BIBLIOGRAFIA

- Audenino, A. L., Zanetti, E. M. & Calderale, P. M., 1996, Radiograph Processing for Quantitative Assessment of Bone Remodelling, Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Torino, Torino, Italy, Med. Eng. Phys., Elsevier Science Ltd., 5, pp. 382-389.
- Bagge, M., 2000, A model of bone adaption as an optimization process, Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, Building 404, DK-2800 Lyngby, Denmark, Journal of Biomechanics, Elsevier Science Ltd., 33, pp. 1349-1357.
- Barros, P. L. A., 1997, Elastodinâmica de Meios Transversalmente Isotrópicos: Funções de Green e o Método dos Elementos de Contorno na Análise da Interação Solo-estrutura, Departamento de Mecânica Computacional, Universidade Estadual de Campinas, Dissertação.
- Béchet, E., Cuilliere, J.-C & Trochu, F., 2002, Generation of a finite element MESH from sterolithography (STL) files, Centre de Recherches Appliquées Sur les Polymères (CRASP), Département de Génie Mécanique & Laboratoire de Productique, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal & Université du Québec, Canadá, Computer-Aided Design, Elsevier, 34, pp. 1-17.
- Benedito, M. J. G., 2005, Simulación Computacional de Procesos de Fractura y Consolidación Ósea: un Modelo Mecanobiológico de Regeneración Ósea, Centro Politécnico Superior de Zaragoza, Universidad de Zaragoza, Dissertação.

- Capra, F., 2003, *A Teia da Vida - Uma Nova Compreensão Científica dos Sistemas Vivos*, 8.a edição, Editora Cultrix.
- Chen, W. -F. & Saleeb, A. F., 1994, *Constitutive Equations for Engineering Materials*, Second Revised Edition, Elsevier.
- Cowin, S. C., 1993, *Bone Stress Adaption Models*, Department of Mechanical Engineering, The City College of the City University of New York, New York, NY 10031, *Journal of Biomechanical Engineering*, Transactions of the ASME, n/a, pp. 528-533.
- Cristofolini, L., Viceconti, M., Cappello, A. & Toni, A., 1996, *Mechanical Validation of Whole Bone Composite Femur Models*, Engineering Faculty & Biomaterials Technology Laboratory, University of Bologna & Rizzoli Orthopaedic Institute, Bologna, Italy, *J. Biomechanics*, Pergamon/Elsevier, 4, pp. 525-535.
- Etchebehere, E. C. S. C., 1998, *Recentes Avanços em Densitometria Óssea*, Grupo MN&D - Medicina Nuclear, Diagnóstico e Terapia e Serviço de Medicina Nuclear do Departamento de Radiologia, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, , *Jornal do Médico*, n/a, p. 7.
- Firoozbakhsh, K. & Cowin, S. C., 1980, *Devolution of Inhomogeneities in Bone Structure - Predictions of Adaptive Elasticity Theory*, College of Engineering & Department of Biomedical Engineering, Shiraz University & Tulane University, Shiraz, Iran & New Orleans, U.S.A., *Journal of Biomechanical Engineering*, Transactions of the ASME, n/a, pp. 287-293.
- Firoozbakhsh, K., Aleyaasin, M. & Moneim, M. S., 1992, *Evolution of Bone Inhomogeneity Around a Hole in an Orthotropic Plate of Bone: Theoretical Predictions*, Department of Orthopaedic and Rehabilitation, Medical Center & Department of Mechanical Engineering, The University of New Mexico & Sharif University of Technology,

Albuquerque, U.S.A & Tehran, Iran, J. Biomechanics, Pergamon Press, 5, pp. 387-394.

Harrigan, T. P. & Hamilton, J. J., 1992, An Analytical and Numerical Study of the Stability of Bone Remodelling Theories: Dependence on Microstructural Stimulus, Department of Orthopaedic Surgery, University of Missouri-Kansas City School of Medicine, 2301 Holmes, Kansas City, U.S.A., J. Biomechanics, Pergamon Press, 5, pp. 477-488.

Huiskes, R., 2000, If the Bone is the Answer, Then What is the Question?, Orthopaedic Research Laboratory, University of Nijmegen, United Kingdom, J. Anat., , 197, pp. 145-156.

Judex, S., Whiting, W. C. & Zernicke, R. F., 1999, Exercise-induced Bone Adaption: Considerations for Designing an Osteogenically Effective Exercise Program, McCaig Centre for Joint Injury and Arthritis Research and Department of Surgery and Mechanical Engineering, University of Calgary, Hospital Drive NW, Calgary, Alberta, Canada, International Journal of Industrial Ergonomics, Elsevier Science, 24, pp. 235-238.

Kane, J. H., 1994, Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics, n/a, Prentice-Hall, Inc..

Kargarnovin, M. H., 1994, Two and Three Dimensional Numerical Solution of Combined Internal and External Bone Remodelling, Mechanical Engineering Department, Sharif University of Technology, P.O.Box 11365-9567, Tehran, I.R. Iran, , Proceedings of 16th Annual International Conference of the IEEE, vol. 1, pp. 285-286.

Lekhnitskii, S. G., 1963, Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, English Translation, Holden-Day Inc..

Loloi, M., 2000, Boundary Integral Equation Solution of Three-dimensional Elastostatic

Problems in Transversely Isotropic Solids Using Closed-form Displacement Fundamental Solutions, Department of Mining and Metallurgical Engineering, Amir Kabir University of Technology (Tehran Polytechnic), 424 Hafez Avenue, Tehran, Iran, Int. J. Numer. Meth. Engng, John Wiley & Sons, Ltd., 48, pp. 823-842.

Martínez, M., Aliabadi, M. H. & Power, H., 1996, A Boundary Element Method for Analysis of Bone Remodelling, Wessex Institute of Technology, Ashurst Lodge, Ashurst, Southampton SO40 7AA, UK, Transaction on Modelling and Simulation, WIT Press, n/a, pp. n/a.

Natali, A. N. & Meroi, E. A., 1989, A review of the biomechanical properties of bone as a material, Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni, Università di Padova, Via F. Marzolo, 9 - 35131, Padova, Italy, Journal Biomed. Eng., Butterworth & Co Ltd., vol. 11, pp. 266-276.

Noritomi, P. Y., 2000, Desenvolvimento de um Programa Base em Elementos de Contorno para Aplicações a Análises Mecânicas Tridimensionais em Bioengenharia, Departamento de Mecânica Computacional, Universidade Estadual de Campinas, Dissertação.

Pan, Y. -C & Chou, T. -W, 1976, Point Force Solution for an Infinite Transversely Isotropic Solid, Department of Mechanics and Aerospace Engineering, University of Delaware, Newark, Del., Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 43, pp. 608-612.

Rho, J. -Y., Kuhn-Spearing, L. & Zioupos, P., 1998, Mechanical Properties and the Hierarchical Structure of Bone, Department of Biomedical Engineering, University of Memphis, Memphis, TN 38152, U.S.A., Medical Engineering and Physics, Elsevier Science, 20, pp. 92-102.

Richards, M., Goulet, J. A., Weiss, J. A., Waanders, N. A., Schaffler, M. B. & Goldstein, S. A., 1998, Bone Regeneration and Fracture Healing: Experience With Distraction Osteogenesis Model, Orthopaedic Research Laboratories, Health Center Ann Arbor, Orthopaedic Biomechanics Institute & Bone and Joint Center, University of Michigan & Henry Ford Hospital, Michigan, U.S.A, Clinical Orthopaedics and Related Research, Lippincott Williams & Wilkins, Inc., n/a, pp. S191-S204.

Rocha, H. H. A. G., 2001, <http://www.scinfo.org/Brazilppt/BrazilPatientInfo.htm>.

Sadegh, A. M., Luo, G. M. & Cowin, S. C., 1993, Bone Ingrowth: an Application of the Boundary Element Method to Bone Remodeling at the Implant Interface, Department of Mechanical Engineering, City College of the City University of New York, New York, NY 10031, U.S.A., J. Biomechanics, Pergamon Press Ltd., 2, pp. 167-182.

Silva, G. B. C., da Silva, J. V. L. & Barbara, A. S., 2002, Interface Gráfica para Tratamento de Imagens Médicas, Laboratório de Tecnologias para Desenvolvimento de Produtos LTDP, Centro de Pesquisa Renato Archer - CenPRA, Rod. D. Pedro I, km 143,6 Campinas SP 13082-120, IIV Jornada de Iniciação Científica do CenPRA - JICC'2002, PIBIC/CNPq/CenPRA, 1, pp. 1-4.

Stülpner, M. A., Reddy, B. D., Starke, G. R. & Spirakis, A., 1997, A Three-Dimensional Finite Analysis of Adaptive Remodelling in the Proximal Femur, Centre for Research in Computational and Applied Mechanics, University of Cape Town, Rondebosch, South Africa, Journal of Biomechanics, Elsevier, 10, pp. 1063-1066.

Távora, J. E. O., 2003, Análisis Tridimensional de Fisuras de Interfaz Utilizando el Método de los Elementos de Contorno, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Dissertação.

Tsili, M. C., 2000, Theoretical Solutions for Internal Bone Remodeling of Diaphyseal Shafts

Using Adaptive Elasticity Theory, Division of Applied Mathematics and Mechanics & Department of Mathematics, University of Ioannina, Ioannina, Greece, *Journal of Biomechanics*, Elsevier, 2, pp. 235-239.

Turner, C. H., Anne, V. & Pidaparti, R. M. V., 1997, A Uniform Strain Criterion for Trabecular Bone Adaption: Do Continuum-level Strain Gradients Drive Adaption?, Departments of Orthopaedic Surgery, Mechanical Engineering, Biomechanics and Biomaterials, Indiana University Medical Center and IUPUI, Indianápolis, U.S.A, *J. Biomechanics*, Elsevier Science Ltd., 6, pp. 555-563.

Wagner, H. D. & Weiner, S., 1992, On The Relation Between the Microstructure of Bone and its Mechanical Stiffness, Department of Materials and Interfaces and Structural Biology, The Weizmann Institute of Science, Rehovot 76100, Israel, *Journal of Biomechanics*, Pergamon Press Ltd., 11, vol. 25, pp. 1311-1320.

Weinans, H., Huiskes, R. & Grootenboer, H. J., 1992, The Behavior of Adaptive Bone-remodelling Simulation Models, Biomechanics Section, Institute of Orthopaedics & Department of Fundamental Mechanical Engineering, University of Nijmegen & University of Twente, Nijmegen, The Netherlands, *J. Biomechanics*, Pergamon Press, 12, pp. 1425-1441.

Yoon, Y. J. & Cowin, S. C., 2001, How to Estimate the Effective Isotropic and Transversely Isotropic Elastic Constants of Bone Tissues from Known Values of Their Orthotropic Elastic Constants, New York Center for Biomedical Engineering, School of Engineering The City College, 138th Street and Convent Avenue New York, NY 10031, , *ASME*, vol. 50, pp. 305-306.

Yoon, Y. J., Yang, G. & Cowin, S. C., 2002, Estimation of the Effective Transversely Isotropic Elastic Constants of a Material from Known Values of the Material's Orthotropic Elastic Constants, The New York Center for Biomedical Engineering and

The Department of Mechanical Engineering, The School of Engineering of The City College and The Graduate School of The City University of New York, New York, NY 10031, U.S.A., Biomechan Model Mechanobiol, Springer-Verlag, 1, pp. 83-93.

Zysset, P. K., Guo, X. E., Hoffler, C. E., Moore, K. E. & Goldstein, S. A., 1999, Elastic Modulus and Hardness of Cortical and Trabecular Bone Lamellae Measured by Nanoindentation in the Human Femur, Orthopaedic Research Laboratories, University of Michigan, ME-Ecublens, CH-1015 Lausanne, Switzerland, Journal of Biomechanics, Elsevier Science, 32, pp. 1005-1012.

ANEXO 1

```

25      0      0      1      0      0      0      0      0
P3/PATRAN Neutral File from: C:\Documents and Settings oritomi\My
Documents\Uni
26      0      0      1      1961      653      1      1      -1
18--05      14:50:47      3.0

```

Estrutura para coordenadas nodais:

```

1      1      0      2      0      0      0      0      0
1.335309982E+1 2.740800095E+1 4.174990082E+1
1G      6      0      0      000000
1      2      0      2      0      0      0      0      0
1.448470020E+1 3.029010010E+1 4.174990082E+1
1G      6      0      0      000000

```

Estrutura para elementos e conectividade:

```

2      1      4      2      0      0      0      0      0
      8      0      1      0 0.000000000E+00 0.000000000E+00
0.000000000E+00
      7      8      26      25      656      657      658      659
2      2      4      2      0      0      0      0      0
      8      0      1      0 0.000000000E+00 0.000000000E+00
0.000000000E+00
      8      9      27      26      660      661      662      657

```

Estrutura para condição de contorno de força de superfície:

```

6      442      2      2      0      0      0      0      0
11000100011110000 0
0.100000000E+01
6      443      2      2      0      0      0      0      0
11000100011110000 0
-0.100000000E+01

```

Estrutura para condição de contorno de deslocamento:

```

8      1      2      3      0      0      0      0      0
      0111111
0.000000000E+00 0.000000000E+00 0.000000000E+00 0.000000000E+00

```

```
0.000000000E+00
0.000000000E+00
8      2      2      3      0      0      0      0      0
      0111111
0.000000000E+00 0.000000000E+00 0.000000000E+00 0.000000000E+00
0.000000000E+00
0.000000000E+00
```

ANEXO 2

```
function Patran2Econ(ArqIN,CaminhoArqDados)
%*****
%*****
%** Sintaxe: Patran2Econ('NomeArq.out','Caminho do Arquivo de dados
do Patran\') **
%** read a Patran mesh in neutral file and converts it to E-Con3D
input mesh
%*****
%*****

fprintf('\n');
fprintf('Convertendo dados para o modelo %s\n',ArqIN);

%** abrindo arquivo para escrita das CDC de forca de superficie **
%fidout = fopen(strcat(CaminhoArqDados,'CDCTens.txt'),'w');

%** abrindo arquivo CDCSurf para leitura **
fidin = fopen(strcat(CaminhoArqDados,ArqIN));

%** iniciando leitura do arquivo de dados **
fseek(fidin,-1,'eof');
fim_arq = ftell(fidin) + 1;
frewind(fidin);

%** elimina cabecalho **
ReadLine = fgets(fidin);
ReadLine = fgets(fidin);
ReadLine = fgets(fidin);

%** le quantidade de nos e elementos da malha **
CodLine = str2num(ReadLine);
QNodes = CodLine(5);
QElem = CodLine(6);

%** faz leitura de coordenadas de nos e conectividade de elementos
da malha
ReadLine = fgets(fidin);
for n = 1:QNodes
```

```

        ReadLine = fgets(fidin);
        ReadLine = fgets(fidin);
        Nodes(n,:) = str2num(ReadLine);
        ReadLine = fgets(fidin);
end;
for e = 1:QElem
    ReadLine = fgets(fidin);
    ReadLine = fgets(fidin);
    ReadLine = fgets(fidin);
    Node2Elem(e,:) = str2num(ReadLine);
end;

CoordNos = Nodes;
NOEL = Node2Elem;

%** contador para quantidade de CDC de forca de superficie e
deslocamento **
count1 = 0;
count2 = 0;

while ftell(fidin) < fim_arq
    ReadLine = fgets(fidin);
    SearchLine = str2num(ReadLine);
    if size(SearchLine,1) ~= 0 & SearchLine(1) == 6

        %** procurando pelo primeiro numero de elemento **
        count1 = count1 + 1;
        CDCTraction(count1,1) = SearchLine(2);
        ReadLine = fgets(fidin);
        ReadLine = fgets(fidin);
        CDCTraction(count1,2) = str2num(ReadLine);
    end;
    if size(SearchLine,1) ~= 0 & SearchLine(1) == 8
        count2 = count2 + 1;
        CDCDisplac(count2,1) = SearchLine(2);
        ReadLine = fgets(fidin);
        CDCDisplac(count2,2) = str2num(ReadLine(9));
        CDCDisplac(count2,3) = str2num(ReadLine(10));
        CDCDisplac(count2,4) = str2num(ReadLine(11));
        ReadLine = fgets(fidin);
        CDCVal = str2num(ReadLine);
        CDCDisplac(count2,[5:(5 + size(CDCVal,2) - 1)]) = CDCVal;
    end;
end;
s = size(CDCTraction,1);
NormalPressure = CDCTraction(1,2);
sigXX = 0;

```

```

sigYY = 0;
sigZZ = 0;
sigXY = 0;
sigXZ = 0;
sigYZ = 0;

%** abrindo arquivo CDCTens.txt para escrita **
fidout = fopen(strcat(CaminhoArqDados,'CDCTens.txt'),'w','native');

%** salva arquivo de dados para CDC de forcas de superficie **
fprintf(fidout,'%1.0f  %-12.5e  %-12.5e  %-12.5e  %-12.5e  %-
12.5e  %-12.5e  %-
12.5e',s,NormalPressure,sigXX,sigYY,sigZZ,sigXY,sigXZ,sigYZ);
for idx = 1:s
    fprintf(fidout,'  %1.0f',CDCTraction(idx,1));
end;
fprintf(fidout,'\r');

%** fecha arquivos abertos na sessao **
fclose(fidin);
fclose(fidout);

for CDC = 1:3
    bak = Node2Elem;
    CDCRef = find(CDCDisplac(:,(CDC + 1)) == 1);
    for CDCNode = 1:size(CDCRef,1)
        for line = 1:size(Node2Elem,1)
            for col = 1:size(Node2Elem,2)
                if Node2Elem(line,col) ==
CDCDisplac(CDCRef(CDCNode),1)
                    Node2Elem(line,col) = 0;
                    break;
                end;
            end;
        end;
    end;
    ElemFound = find((sum(Node2Elem,2)) == 0);
    if size(ElemFound,1) ~= 0
        ElemCDCDispTemp([1:size(ElemFound,1)],1,CDC) = ElemFound;
        ElemCDCDispTemp(:,2,CDC) = CDC;
        ElemCDCDispTemp(:, [3:(3 + (size(NOEL,2)) - 1)],CDC) =
zeros(size(ElemCDCDispTemp,1),size(NOEL,2));
        end;
        Node2Elem = bak;
    end;

ElemCDCDisp = zeros(1);

```

```

idx = 0;
for index = 1:size(ElemCDCDispTemp,3)
    ElemCDCDisp([(idx + 1):(size(ElemCDCDispTemp(:, :, index),1) +
idx)], [1:size(ElemCDCDispTemp,2)]]) = ElemCDCDispTemp(:, :, index);
    idx = size(ElemCDCDisp,1);
end;

%** abrindo arquivo para escrita das CDC de deslocamento **
fidout = fopen(strcat(CaminhoArqDados, 'CDCDesl.txt'), 'w', 'native');
for idxlin = 1:size(ElemCDCDisp,1)
    fprintf(fidout, '%1.0f
%1.0f', ElemCDCDisp(idxlin,1), ElemCDCDisp(idxlin,2));
    for idxcol = 3:size(ElemCDCDisp,2)
        fprintf(fidout, '    %-12.5e', ElemCDCDisp(idxlin, idxcol));
    end;
    fprintf(fidout, '\n');
end;

fclose(fidout);

NNP = size(CoordNos,1);           %quantidade de nós do problema

for ii = 1:NNP
    X(ii) = CoordNos(ii,1);
    Y(ii) = CoordNos(ii,2);
    Z(ii) = CoordNos(ii,3);
end;

NEL = size(NOEL,1);             %quantidade de elementos da malha

n_nodes = size(CoordNos,1);
n_elements = size(NOEL,1);

%** abrindo arquivo 'modelo'.m para escrita **
fidout = fopen(strcat(CaminhoArqDados, ArqIN, '.m'), 'w', 'native');

%** escrevendo informacoes do modelo no arquivo .m **
fprintf(fidout, '\n');
fprintf(fidout, 'N_NOS = %1.0f\n', n_nodes);
fprintf(fidout, 'N_ELE = %1.0f\n', n_elements);
fprintf(fidout, '\n');
fprintf(fidout, 'NOS=[\n');
for idxlin = 1:n_nodes
    fprintf(fidout, '    %-12.5e    %-12.5e    %-
12.5e\n', CoordNos(idxlin,1), CoordNos(idxlin,2), CoordNos(idxlin,3));
end;

```

```

fprintf(fidout,']\n');
fprintf(fidout,'\n');
fprintf(fidout,'ELEMENTOS=[\n');
for idxlin = 1:n_elements
    for idxcol = 1:size(NOEL,2)
        fprintf(fidout,'    %-1.0f',NOEL(idxlin,idxcol));
    end;
    fprintf(fidout,'\n');
end;
fprintf(fidout,']');

save(strcat(CaminhoArqDados,'CoordNos.txt'),'CoordNos','-ascii','-double');
save(strcat(CaminhoArqDados,'NOEL.txt'),'NOEL','-ascii');

%** fecha todos os arquivos abertos **
fclose('all');

fprintf('Dados convertidos para o modelo %s no diretorio
%s\n',ArqIN,CaminhoArqDados);
fprintf('Diretorio dos arquivos -> %s\n',CaminhoArqDados);

```