UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Síntese de Controladores H_∞ de Ordem Reduzida com Aplicação no Controle Ativo de Estruturas Flexíveis

Autor: **Fernando Sarracini Júnior**
Orientador: **Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa**

11-2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Síntese de Controladores H_∞ de Ordem Reduzida com Aplicação no Controle Ativo de Estruturas Flexíveis

Autor: **Fernando Sarracini Júnior**
Orientador: **Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2006
SP - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

	Sarracini Júnior, Fernando
Sa75s	Síntese de controladores $H\infty$ de ordem reduzida com aplicação no controle ativo de estruturas flexíveis /Fernando Sarracini Júnior. --Campinas, SP: [s.n.], 2006.
	Orientador: Alberto Luiz Serpa Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.
	1. Controle robusto. 2. Análise modal. 3. Vibração. I. Serpa, Alberto Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Synthesis of reduced order $H\infty$ controllers to the active control of flexible structures
Palavras-chave em Inglês: Fixed order controller, Robust $H\infty$ control, Linear matrix inequalities, Flexible structures
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: José Cláudio Geromel e Vicente Lopes Júnior
Data da defesa: 17/02/2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Síntese de Controladores H_∞ de Ordem Reduzida com Aplicação no Controle Ativo de Estruturas Flexíveis

Autor: **Fernando Sarracini Júnior**
Orientador: **Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, Presidente
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP

Prof. Dr. José Cláudio Geromel
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - UNICAMP

Prof. Dr. Vicente Lopes Júnior
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Campinas, 17 de fevereiro de 2006.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família e à minha namorada.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer inicialmente ao meu orientador Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa pela confiança, paciência e por ter compartilhado comigo seu conhecimento. Agradeço aos meus pais, minhas irmãs e meus avós, os quais deram todo o apoio necessário para que eu chegasse até aqui. Gostaria também de agradecer a minha namorada Karin por ter compreendido a importância deste projeto para mim e sempre ter me motivado a seguir em frente. Manifesto também meus sinceros agradecimentos aos professores e amigos do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP pelas discussões acerca dos problemas enfretados no decorrer deste trabalho.

“...tudo isso que eu consegui foi através de dedicação, perseverança
e muito desejo de atingir meus objetivos... muito desejo de vitória...
vitória na vida... não vitória como piloto... e a vocês todos que assistirem...
eu digo que... seja quem você for... seja qualquer posição que você
tenha na vida... do nível social altíssimo ao mais baixo... tenha sempre
como meta muita força... muita determinação... e sempre faça tudo
com muito amor e com muita fé em Deus... que um dia você chega lá...
de alguma maneira você chega lá...”

Ayrton Senna da Silva, tricampeão mundial de Fórmula 1.

Resumo

Sarracini Júnior, Fernando, *Síntese de Controladores H_∞ de Ordem Reduzida com Aplicação no Controle Ativo de Estruturas Flexíveis*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006, 123 p., Dissertação (Mestrado).

A implementação de controladores de ordem reduzida (fixa) demanda um menor esforço de processamento e consequentemente recursos de hardware menos sofisticados em relação à implementação de controladores de ordem completa. Este trabalho mostra que a implementação prática de controladores H_∞ de ordem fixa voltados para o controle de estruturas flexíveis é factível. A obtenção de tais controladores é um problema considerado difícil por ser não-convexo. Para contornar as dificuldades numéricas de obtenção dos controladores de ordem fixa, uma combinação do método Lagrangiano Aumentado com Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) é utilizada.

Uma estrutura de viga com engaste em uma de suas extremidades é modelada através do método de Elementos Finitos. Controladores H_∞ de ordem fixa e de ordem completa são projetados com base em um modelo matemático truncado. Incertezas de modelagem e a presença de modos próximos na região de frequência de interesse dificultam a obtenção de controladores que garantam a estabilidade e um desempenho satisfatório. Para contornar estas dificuldades, usa-se a técnica de controle robusto H_∞ e filtros de ponderação. Dessa forma, procura-se minimizar o efeito das incertezas e evitar que modos que não foram considerados durante a fase de projeto dos controladores não sejam excitados, garantido assim a não ocorrência do fenômeno denominado *spillover*.

Controladores H_∞ de ordem completa e ordem fixa são implementados na prática e os resultados experimentais são comparados com resultados simulados.

Palavras-Chave: Controlador de Ordem Fixa, Controle Robusto H_∞, Desigualdades Matriciais Lineares, Estruturas Flexíveis.

Abstract

Sarracini Júnior, Fernando, *Synthesis of Reduced Order H_∞ Controllers to the Active Control of Flexible Structures.* Campinas, Faculty of Mechanical Engineering, State University of Campinas, 2006, 123 p., Master's Degree.

The implementation of reduced (fixed) order controllers requires a smaller computational effort and, consequently, less advanced hardware resources in relation to the implementation of full order controllers. This work shows that the practical implementation of fixed order H_∞ controllers directed toward the control of flexible structures is viable. Obtaining such controllers is considered a difficult task for being a non-convex problem. To overcome the numerical difficulties of attainment of fixed order controllers, a combination of the Lagrangian method increased with Linear Matrix Inequalities (LMIs) is used.

A cantilever beam is modelled with the Finite Element Method. Fixed and full order controllers are designed based on a truncated mathematical model. Modelling uncertainties and the existence of near modes in the frequency range of interest make difficult the attainment of controllers that assure the stability and the performance of the system. To overcome this difficulty, the robust H_∞ control and weighing filters are used. In this way, it is desired to minimize the effect of uncertainties and avoid the excitement of non-modelled modes, assuring that the spillover phenomenon does not occur.

Full order and fixed order H_∞ controllers are implemented in the practice and the experimental results are compared with the simulated results.

Keywords: Fixed Order Controller, Robust H_∞ Control, Linear Matrix Inequalities, Flexible Structures.

Sumário

Lista de Figuras

Notação

Neste trabalho, as matrizes são representadas em letras maiúsculas com negrito, os vetores são representados em letras minúsculas com negrito e as letras minúsculas sem negrito são utilizadas para designar escalares.

A simbologia geral é:

- $\mathbf{A}^T$: matriz $\mathbf{A}$ transposta;
- $\mathbf{A}^*$: matriz $\mathbf{A}$ complexa conjugada-transposta;
- $\Re$, $\Re^k$, $\Re^{m \times n}$: conjunto dos números reais, dos vetores de ordem k reais, das matrizes de ordem $m \times n$ reais;
- $\mathcal{C}$: conjunto dos números complexos;
- $\lambda_i(\mathbf{A})$: autovalor λ_i da matriz $\mathbf{A}$;
- $\mathbf{A} > 0$: $\mathbf{A}$ é simétrica e positiva-definida, isto é, $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} > 0$, $\forall\ \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$;
- $\mathbf{A} \geq 0$: $\mathbf{A}$ é simétrica e positiva-semidefinida, isto é, $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} \geq 0$, $\forall\ \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$;
- $\mathbf{A} > \mathbf{B}$: $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são simétricas e $\mathbf{A} - \mathbf{B} > 0$;
- $\lambda_{max}(\mathbf{A})$: maior autovalor da matriz $\mathbf{A}$;
- $\lambda_{min}(\mathbf{A})$: menor autovalor da matriz $\mathbf{A}$;
- $\|\mathbf{V}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}^2} = \sqrt{tr(\mathbf{V}^T\mathbf{V})}$ representa a norma de Frobenius de uma dada matriz real $\mathbf{V}$ (é a raiz quadrada da soma da magnitude de todos os elementos ao quadrado desta matriz).

- $\sup_w \ f(w)$: supremo da função $f(w)$;

- $tr \ (\mathbf{A})$: traço da matriz simétrica $\mathbf{A}$. Corresponde ao somatório de todos os elementos da diagonal principal de $\mathbf{A}$;

- $\rho(\mathbf{A})$ é chamado de raio espectral da matriz $\mathbf{A}$ e refere-se ao maior autovalor de $\mathbf{A}$;

- $\|G(s)\|_2$: norma 2 da função de transferência $G(s)$, ou seja, $\|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |G(jw)|^2 dw}$;

- $\sigma(\mathbf{G}(s)) = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{G}^*\mathbf{G})}$ é um valor singular de $\mathbf{G}(s)$;

- $\|\mathbf{G}(s)\|_\infty$: norma infinito da matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$, ou seja, $\|\mathbf{G}(s)\|_\infty = max_w \, \sigma(\mathbf{G}(jw))$. Em outras palavras, a norma infinto de $\mathbf{G}(s)$ corresponde ao valor de pico do diagrama de valor singular de $\mathbf{G}(s)$;

- $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$: produto de Kroenecker entre as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, onde cada elemento de $\mathbf{A}$ é multiplicado pela matriz $\mathbf{B}$.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Este trabalho aborda o projeto de controladores H_∞ de ordem reduzida (fixa) voltados para o controle ativo de estruturas flexíveis. A ordem do controlador é pré-definida pelo projetista. Tais controladores são difíceis de serem projetados devido à presença de uma condição de *rank* que torna o problema não-convexo e numericamente difícil de ser tratado [4]. Para contornar esta dificuldade duas técnicas são combinadas: Lagrangiano Aumentado e Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). Alguns fatores que motivaram o uso do método Lagrangiano Aumentado foram:

- A facilidade de implementação computacional, já que um problema restrito é resolvido através da solução de sucessivos problemas irrestritos;
- A possibilidade de tratar restrições não-lineares, no caso, a restrição de *rank* que garante a existência do controlador de ordem reduzida;
- A possibilidade de usar pacotes de programação semidefinida atualmente disponíveis (LMI toolbox do MATLAB [30], LMITOOL [33], SeDuMi [71]) devido ao fato de apenas uma res- trição de *rank* ser transportada para a função Lagrangiana Aumentada e as demais restrições serem mantidas como LMIs;
- A verificação de resultados promissores apresentados em [4].

Usualmente, projetam-se controladores da mesma ordem da planta ou até maiores. Dessa forma, plantas de ordem elevada resultam em controladores de ordem também elevada. Na prática, às vezes se torna difícil implementar controladores de ordem completa em tempo real devido a limitações de hardware, pois atrasos de tempo de processamento podem inviabilizar uma determinada aplicação. Já a implementação de controladores de ordem reduzida se torna facilitada no sentido de que o esforço de processamento necessário para a implementação em tempo real é menor. Em outras palavras, não valeria a pena projetar um controlador de ordem completa e utilizar um microcomputador Pentium IV em uma dada aplicação se fosse possível projetar um controlador de ordem reduzida (ordem 2×2 ou 1×1 por exemplo) com desempenho satisfatório e utilizar um microcontrolador tal como um PIC (que é menor e mais acessível financeiramente).

Neste trabalho, filtros de ponderação são utilizados com a finalidade de tornar o controle mais efetivo e evitar que a malha fechada se torne instável devido à excitação de modos que não foram considerados durante a fase de projeto dos controladores. Tais filtros, quando inseridos no sistema, provocam um aumento na ordem deste. Com isso, é desejável a adoção de filtros de ordem baixa (primeira e segunda ordem), já que no projeto de controladores de ordem completa, o controlador possui a mesma ordem da planta aumentada (planta com os filtros de ponderação inclusos), ou seja, uma ordem maior que a ordem da planta a ser controlada. De outra forma, o projeto de controladores de ordem fixa possibilita a obtenção de controladores que não estão relacionados com a ordem da planta aumentada, já que a ordem do controlador é pré-definida pelo projetista.

O controle ativo de estruturas flexíveis é um campo de pesquisa atual e relevante, visto que incertezas presentes no modelo matemático em relação ao modelo real dificultam a obtenção de controladores que forneçam bom desempenho e garantam a estabilidade. Estruturas flexíveis podem ser encontradas atualmente em diversas áreas. Alguns exemplos são [8, 51]:

- Satélites e estações espaciais, que têm estruturas treliçadas de interface e painéis solares como apêndices flexíveis, e que constituem estruturas leves e pouco amortecidas;

- Veículos lançadores de satélites e aeronaves, onde, ao longo do tempo, a massa vem sendo reduzida com o uso de novos materiais para permitir um aumento na carga útil transportada;

- Mecanismos robóticos com menos massa, de forma a reduzir a potência de alimentação, e com movimentos mais rápidos e mais acurados para tarefas mais precisas.

Um ponto a ser destacado na realização deste trabalho consiste na utilização do método de Elementos Finitos na modelagem matemática de estruturas flexíveis. Na literatura é possível verificar uma grande quantidade de trabalhos relacionados ao controle de estruturas flexíveis nos quais o modelo matemático é obtido através de processos de identificação. No entanto, como uma determinada estrutura só pode ser identificada experimentalmente se ela tiver sido construída, a simulação da implementação de controladores para estruturas complexas na fase de projeto se torna infactível. Já com o emprego da técnica de Elementos Finitos é possível simular o uso de controladores para estruturas ainda não construídas.

1.2 Revisão da Literatura

1.2.1 Controladores de Ordem Fixa

A ordem do controlador padrão H_∞ é tipicamente tão alta quanto à ordem do modelo da planta que se deseja controlar. Tais controladores de ordem completa são às vezes difíceis de serem implementados devido a limitações de hardware (aplicações em tempo real são comprometidas por atrasos de tempo no sistema). Para contornar esta dificuldade, um controlador de baixa ordem que forneça uma redução satisfatória para a norma H_∞ de um dado sistema pode ser obtido por três caminhos:

- Redução da ordem do modelo seguido do projeto de um controlador baseado neste modelo reduzido [64];

- Projeto de um controlador de ordem completa seguido da redução da ordem do controlador [76];

- Projeto direto de um controlador de ordem fixa através da inclusão de restrições adicionais durante o processo de obtenção do controlador [3, 4].

Vários métodos para a obtenção de controladores de ordem fixa foram usados nos últimos anos, dentre os quais se pode citar:

- O método de *Frank e Wolfe*, também conhecido como algoritmo do gradiente condicional [2, 25]. Este algoritmo é testado e analisado na referência [59]. Apesar dos resultados promissores apresentados em [59], verifica-se que o algoritmo do gradiente condicional tem falhado em muitos problemas práticos. De forma geral, quando a falha deste algoritmo acontece, a região factível delimitada pelas LMIs é pequena e mal condicionada [4]. Uma análise mais detalhada das falhas do algoritmo do gradiente condicional para conjuntos poliedrais foi apresentada por Dunn em [24].

- O método algébrico de controle de covariância, onde o controlador desejado é parametrizado em termos de uma matriz que representa o limite superior para a covariância dos estados [42];

- O método de análise de desempenho robusto. Neste enfoque, o problema de síntese do controlador é reformulado como um problema de análise robusta, onde as variáveis do controlador são os parâmetros incertos [38];

- O método baseado em otimização convexa de matrizes polinomiais positivas e funções racionais estritamente positivo-reais [36].

Neste trabalho, é realizado o projeto de controladores robustos de ordem fixa baseado em um enfoque de otimização iniciado por Apkarian e Tuan [1, 2, 3, 4], o qual consiste em utilizar o método Lagrangiano Aumentado em conjunto com Desigualdades Matriciais Lineares.

1.2.2 Estruturas Flexíveis

Vários artigos já foram publicados desde o final da década de 80 com a finalidade de evidenciar a importância em se controlar estruturas flexíveis e testar a aplicação de tipos específicos de controladores. Dentre as técnicas implementadas é possível citar:

- O controle ótimo LQG [46, 13], que consiste no uso de um filtro de Kalman em conjunto com um Regulador Linear Quadrático (LQR). Um ponto fundamental no projeto de controladores LQG é a determinação dos pesos do índice de desempenho a ser minimizado quando da obtenção do Regulador Linear Quadrático. Uma escolha inadequada pode comprometer o desempenho do sistema em malha fechada [32];

- O controle robusto H_2 [48], onde se tem como objetivo a minimização da energia do sinal de saída. Segundo a referência [32], este tipo de controlador e também o controlador H_∞ (mencionado no próximo item) são mais adequados para tratar problemas de controle não-colocados.

- O controle robusto H_∞ [46, 52, 72, 70, 13, 48], onde se minimiza o distúrbio de pior caso.

- A técnica de controle robusto H_2/H_∞ misto [60], onde se tem uma combinação da técnica H_2 com a técnica H_∞.

- O *Sliding-Mode Control* [23], onde as equações do sistema a ser controlado são escritas como uma combinação de equações diferenciais com equações a diferenças.

- A técnica de Redes Neurais Artificiais [31], onde o controlador *aprende* a dinâmica da estrutura a ser controlada e gera um sinal de controle que garante sua estabilidade.

- A lógica fuzzy [28], onde o controlador consiste de um banco de regras e associações, definidas de acordo com a experiência do projetista.

- Algoritmos genéticos [45], onde se tem uma investigação paralela de várias áreas de um espaço de busca através da manipulação de uma população de indivíduos que são soluções codificadas do problema.

Do ponto de vista da modelagem matemática de estruturas flexíveis, é possível encontrar na literatura o emprego das seguintes técnicas:

- Método dos elementos finitos, onde a estrutura é discretizada em elementos interconectados por nós. Cada elemento apresenta a sua matriz de massa e a sua matriz de rigidez, a partir das quais é possível obter as matrizes de massa e rigidez para a estrutura como um todo. Com isso, é possível aplicar as condições de contorno e os carregamentos existentes em uma dada estrutura para a obtenção do modelo matemático [39, 46, 43];

- Composição de um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas a partir da obtenção de funções de tranferências de sistemas de uma única entrada e múltiplas saídas por interpolação dos dados experimentais utilizando o polinômio de Chebyshev [9, 10];

- Uso do modelo *Auto-Regressive eXogenous* (ARX) após a obtenção dos sinais de entrada/saída do sistema, onde os sinais de entrada são pseudo-randômicos binários [47, 28];

- *Eigensystem Realization Algorithm* (ERA), onde, a partir da resposta impulsiva do sistema, é possível modelar uma faixa de frequência e determinar a ordem do modelo matemático a ser obtido [73].

Neste trabalho, a modelagem matemática com elementos finitos de uma viga flexível foi realizada através de um algoritmo computacional adaptado a partir da referência [44].

1.3 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é realizar o controle de uma viga flexível utilizando controladores H_∞ de ordem fixa. O uso do método Lagrangiano Aumentado em conjunto com técnicas LMIs faz com que o problema de obtenção de controladores de ordem fixa possa ser linearizado e resolvido com o auxílio de algoritmos já implementados em aplicativos tais como MATLAB. A técnica de Elementos Finitos é utilizada com a finalidade de se modelar uma viga engastada em uma de suas extremidades.

Para o projeto dos controladores, o modelo é truncado e apenas 3 modos dentro da faixa de frequência de interesse são selecionados. Após o controlador ter sido obtido, realizam-se simulações em SIMULINK [68] com o modelo matemático contendo 7 modos (5 modos dentro da faixa de frequência de interesse e 2 modos fora). Vale ressaltar que estes 2 modos fora da faixa de frequência de interesse são mantidos no modelo matemático devido ao fato de que estes podem ser excitados e tornar o sistema em malha fechada instável (fenômeno denominado *spillover*), assim como pode acontecer na realidade.

No Laboratórico de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP foi montada uma bancada experimental com a finalidade de verificar na prática o comportamento dos controladores projetados e validar o modelo matemático obtido através do método de Elementos Finitos.

No total são testados 5 controladores, sendo 1 de ordem completa e 4 de ordem fixa. Todos os controladores são projetados utilizando-se filtros de ponderação, os quais são responsáveis por garantir principalmente que modos não-modelados não sejam excitados.

Para cada controlador testado, as funções de resposta em frequência para os sistemas sem controle e controlado são obtidas tanto com os resultados gerados em SIMULINK quanto com os resultados da implementação prática. Além disso, também para cada um dos controladores testados, resultados experimentais tais como a aceleração na extremidade não-engastada da viga e o sinal de controle são mostrados. Os resultados obtidos de simulação e experimentalmente são analisados e discutidos.

Em termos gerais, mostra-se que do ponto de vista prático é factível o projeto de controladores H_∞ de ordem fixa baseados em modelos matemáticos obtidos por Elementos Finitos.

1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho é organizado da forma que segue:

- O capítulo 1 é uma breve introdução ao conteúdo desta dissertação e procura apresentar cada capítulo de forma a proporcionar uma melhor compreensão do trabalho como um todo.

- O capítulo 2 demonstra uma forma de se obter o modelo de estados de estruturas flexíveis. Aborda-se o conceito de elementos finitos, onde elementos bidimensionais são adotados para representar os modelos estudados. Além disso, o amortecimento proporcional, tal qual adotado nos exemplos realizados, é abordado.

- O capítulo 3 apresenta o projeto H_∞ trazendo informações sobre a origem e os objetivos de um controle deste tipo, além de fornecer conceitos fundamentais para o entendimento desta teoria (tais como os conceitos de valor singular e norma H_∞).

- O capítulo 4 aborda o uso de filtros de ponderação quando do projeto de controladores robustos.

- O capítulo 5 traz informações sobre a técnica de otimização do Lagrangiano Aumentado, onde problemas restritos podem ser resolvidos através de sucessivos problemas irrestritos.

- O capítulo 6 fornece o desenvolvimento teórico para a obtenção de controladores H_∞ de ordem fixa.

- O capítulo 7 traz três exemplos de aplicação de controladores de ordem fixa. Uma viga engastada em uma de suas extremidades é modelada utilizando a técnica de Elementos Finitos. Controladores H_∞ de ordem completa e ordem fixa são projetados. Resultados simulados e experimentais são mostrados e analisados.

- O capítulo 8 traz a conclusão do trabalho como um todo, onde se procura destacar os principais resultados obtidos e as principais dificuldades encontradas.

- O apêndice A apresenta a dedução do modelo de estados de estruturas flexíveis.

- O apêndice B traz observações relevantes sobre o método de Elementos Finitos.

- O apêndice C fornece exemplos de cálculo da norma H_∞ de funções de transferência e de uma matriz de transferência.

- O apêndice D traz um exemplo de uso dos filtros de ponderação.

- O apêndice E traz um exemplo para a verificação da construção da função objetivo matricial a ser minimizada na obtenção de controladores de ordem fixa.

- O apêndice F traz um exemplo de derivação matricial onde a variável matricial é simétrica.

- O apêndice G fornece um exemplo de cálculo do gradiente e da hessiana da função objetivo a ser minimizada para a obtenção de controladores de ordem fixa.

Capítulo 2

Estruturas Flexíveis

2.1 Introdução

Estruturas são consideradas flexíveis quando a respectiva modelagem leva em conta suas propriedades elásticas ao invés de considerar a estrutura como um corpo rígido.

As estruturas flexíveis são caracterizadas por apresentarem frequências dos modos de vibração próximas entre si e modos levemente amortecidos [10]. Estas características se devem ao fato de tais estruturas serem esbeltas e apresentarem menor rigidez quando comparadas a estruturas menos flexíveis. Um exemplo de Função de Resposta em Frequência típica de uma estrutura flexível é mostrado na Figura 2.1.

Alguns exemplos de componentes que podem ser considerados como estruturas flexíveis são: grandes estruturas espaciais, hastes de equipamentos agrícolas de colheita mecanizada, hastes de equipamentos de movimentação de cargas, torres metálicas, entre outros.

A busca por estruturas mais leves e que suportam grandes esforços tende a resultar em estruturas cada vez mais flexíveis. Tais estruturas eventualmente precisam ser controladas para garantir um desempenho satisfatório com relação à minimização de vibrações indesejáveis que são quase sempre induzidas por fontes de difícil localização ou controle. No caso do controle ativo de grandes estruturas espaciais, pode-se citar como fontes de vibração os seguintes distúrbios: gradientes térmicos, pressão solar, gradientes de gravidade, forças aerodinâmicas devido a efeitos atmosféricos, colisões com meteoritos, além de distúrbios internos gerados por atuadores para reposicionamento da espaçonave [7].

O projeto de controladores para estruturas flexíveis pode apresentar as seguintes dificul-

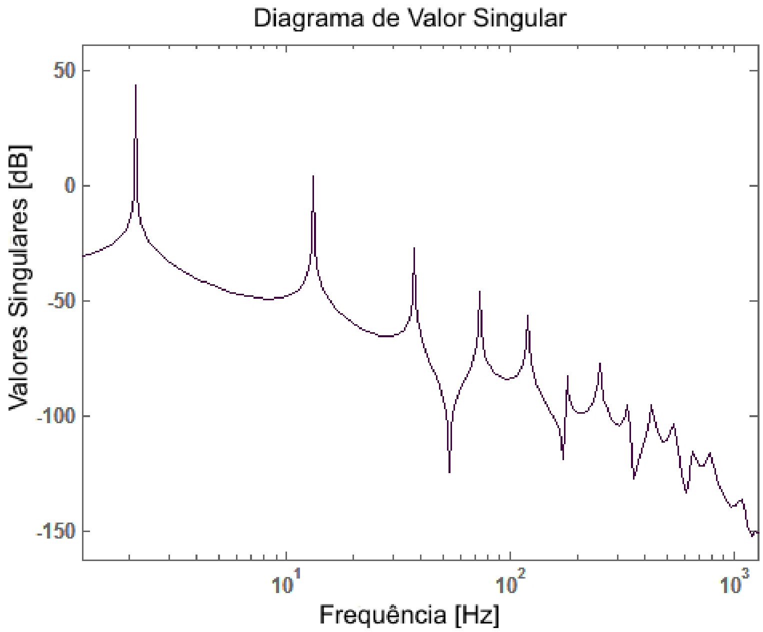

Figura 2.1: Função de Resposta em Frequência típica de uma estrutura flexível.

dades [8]:

- O hardware utilizado para a implementação do sistema de controle possui uma máxima frequência de amostragem limitada e pré-definida. Com isso, considera-se para a modelagem matemática, apenas os modos contidos na faixa de frequência que vai até a metade da máxima frequência de amostragem (teorema da amostragem de Nyquist) [67]. O sistema de controle é projetado para não atuar em frequências acima da máxima frequência considerada na modelagem matemática, porém, na realidade, modos desconsiderados podem ser excitados e o sistema controlado pode ficar instável. Este fenômeno é denominado *spillover* [6].

- Existem não-linearidades presentes no modelo real que são usualmente desconsideradas na fase de modelagem matemática da estrutura e podem comprometer significativamente o projeto do controlador. Um exemplo é a não-linearidade geométrica decorrente de grandes deslocamentos [77].

- Podem existir incertezas com relação aos parâmetros que caracterizam a estrutura, principalmente com relação ao fator de amortecimento, que muitas vezes é difícil de ser determinado devido a dificuldades no processo de identificação da estrutura.

- Os sensores podem apresentar um determinado nível de ruído de medição, o que pode ser considerado como uma fonte de incerteza para o sistema de controle.

- Na prática, os sensores e atuadores frequentemente não estarão fixados no mesmo ponto, o que caracteriza um sistema de controle não colocado. Tais sistemas de controle são mais sensíveis a distúrbios do que os sistemas onde o controle é colocado [40].

- O projeto de controladores robustos para assimilar incertezas de modelagem e atenuar distúrbios externos pode levar a resultados bastante conservadores com um desempenho não satisfatório.

A modelagem de estruturas flexíveis, em geral, é realizada através de processos de identificação experimental. No entanto, para a realização de uma identificação, é necessário que a estrutura seja construída na prática. Com isso, simulações de implementação de controladores em estruturas ainda inexistentes ficam comprometidas.

Neste trabalho, a determinação das matrizes de massa e de rigidez de estruturas flexíveis é realizada através do método dos Elementos Finitos. Além disso, a matriz de amortecimento é considerada proporcional às matrizes de massa e de rigidez (hipótese simplificadora de amortecimento proporcional). Com isso, é obtido o modelo de estados da respectiva estrutura flexível para o posterior projeto H_∞ de ordem fixa [21, 44].

2.2 Formulação do Modelo de Estados de Estruturas Flexíveis

Os sistemas de engenharia têm aumentado a sua complexidade principalmente devido à necessidade de realizar tarefas mais complexas e com requisitos mais exigentes de melhor desempenho. Sistemas complexos podem ter muitas entradas e muitas saídas e podem ser variantes no tempo. A necessidade de satisfazer requisitos cada vez mais rigorosos quanto ao desempenho de sistemas de controle e a facilidade de acesso aos computadores de grande porte ensejaram o desenvolvimento da teoria de controle moderno, iniciada por volta de

1960, como uma nova forma de analisar e projetar sistemas de controle complexos. Esta nova abordagem é baseada no conceito de variáveis de estados [69, 50].

A equação de movimento de uma estrutura pode ser escrita como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}. \tag{2.1}$$

Definindo o vetor de estados como $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T$, é possível escrever:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

onde:

- $\mathbf{M}$ é a matriz de massa;
- $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez;
- $\mathbf{D}$ é a matriz de amortecimento do sistema;
- $\mathbf{f}$ é o vetor das forças externas que atuam no sistema;
- $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade de ordem compatível;
- $\mathbf{q}$ é o vetor que contém os deslocamentos dos graus de liberdade do sistema.

Nos problemas de controle é interessante analisar o efeito de cada força de entrada individualmente. O vetor de forças externas $\mathbf{f}$ pode ser escrito em termos de uma base s_i tal como segue:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} f_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} f_2 + \ldots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} f_n = \sum_i^n s_i f_i. \tag{2.3}$$

Para uma componente específica i do vetor de forças externas, é possível escrever:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} s_i f_i = \mathbf{B} f_i, \tag{2.4}$$

onde:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} s_i. \tag{2.5}$$

Com isso, o modelo de estados de uma estrutura flexível pode ser escrito da seguinte forma [44]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}f_i, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}, \tag{2.7}$$

onde :

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}$;
- $\mathbf{C}$ é a matriz de saída do sistema;
- $\mathbf{y}$ é o vetor de saídas.

O apêndice A traz a dedução do modelo de estados descrito pelas equações (2.6) e (2.7).

2.3 Elemento Finito de Viga Bidimensional: Matrizes de Massa e de Rigidez

Neste trabalho, é adotado um elemento finito de viga bidimensional conforme ilustrado na Figura 2.2. Cada elemento apresenta dois nós e três graus de liberdade em cada nó (dois deslocamentos e uma rotação).

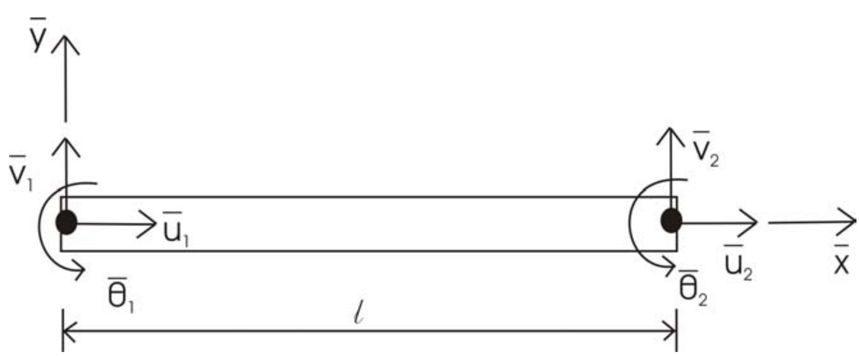

Figura 2.2: Elemento finito de viga bidimensional e seus graus de liberdade.

Os parâmetros que representam a densidade, a área da seção transversal, o momento de inércia da seção transversal, o módulo de elasticidade e o comprimento de cada elemento são designados, respectivamente, por ρ, A, I, E, l.

Utilizando-se um elemento de viga Hermitiana [44], as matrizes de rigidez e de massa, de um elemento finito, tomam a forma que segue:

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \frac{E}{l^3}\begin{bmatrix} Al^2 & 0 & 0 & -Al^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12I & 6Il & 0 & -12I & 6Il \\ 0 & 6Il & 4Il^2 & 0 & -6Il & 2Il^2 \\ -Al^2 & 0 & 0 & Al^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12I & -6Il & 0 & 12I & -6Il \\ 0 & 6Il & 2Il^2 & 0 & -6Il & 4Il^2 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{M}}^e = \rho Al\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 13/35 & (11/210)l & 0 & 9/70 & -(13/420)l \\ 0 & (11/210)l & (1/105)l^2 & 0 & (13/420)l & -(1/140)l^2 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 9/70 & (13/420)l & 0 & (13/35) & -(11/210)l \\ 0 & -(13/420)l^2 & -(1/140)l^2 & 0 & -(11/210)l & (1/105)l^2 \end{bmatrix}.$$

É comum o elemento finito estar inclinado com relação ao sistema de coordenadas global. Neste caso, as matrizes de massa e de rigidez de cada elemento finito requerem uma transformação de coordenadas (vide apêndice B).

Após a obtenção das matrizes de massa e de rigidez de cada elemento finito, é possível realizar a operação denominada *assembly*, a qual consiste em somar os elementos destas matrizes em posições adequadas. Posteriormente aplicam-se as condições de contorno, onde as linhas e as colunas dos graus de liberdade engastado são eliminadas, obtendo-se as matrizes de massa e de rigidez para a estrutura como um todo.

O apêndice B fornece mais informações sobre a utilização do método de Elementos Finitos neste trabalho.

2.4 Amortecimento Proporcional

O modelo de amortecimento proporcional é bastante adotado na análise de sistemas amortecidos, pois é particularmente de fácil aplicação e análise. Com o uso deste enfoque, os modos de vibração da estrutura analisada se tornam idênticos àqueles da versão do modelo sem amortecimento [27].

De fato, é possível derivar as propriedades modais de um sistema com amortecimento proporcional ao se analisar a versão não-amortecida e fazer correções para levar em conta o amortecimento [27].

O amortecimento proporcional é definido como:

$$\mathbf{D} = \eta\mathbf{K} + \alpha\mathbf{M}, \tag{2.8}$$

na qual a matriz de amortecimendo $\mathbf{D}$ é proporcional às matrizes de massa e de rigidez através dos coeficientes de proporcionalidade η e α, os quais podem ser estimados através de correlações com dados experimentais.

2.5 Programa de Elementos Finitos

Estudou-se um programa de Elementos Finitos em MATLAB apresentado em [44], onde são calculadas as matrizes de massa e de rigidez de uma viga bidimensional composta por elementos finitos bidimensionais.

Com isso, desenvolveu-se adaptações para este programa com o intuito de gerar, a partir das matrizes de massa e de rigidez, a matriz de amortecimento proporcional e o modelo de estados de uma estrutura flexível, ou seja, obter as expressões demonstradas em (2.6) e (2.7). A partir do modelo de estados de uma estrutura flexível é possível aplicar a teoria de controle robusto H_∞, obtendo-se controladores capazes de atenuar distúrbios e fornecer um desempenho satisfatório para o sistema em malha fechada.

Capítulo 3

O Projeto H_∞

3.1 Introdução: Origem e Objetivos

O projeto H_∞ pode ser empregado quando se deseja que um sistema mantenha um determinado desempenho em condições adversas tais como erros de modelagem e distúrbios externos [50]. Zames [75] foi quem primeiro formulou o problema de controle H_∞.

Em termos gerais deseja-se, através de um método de otimização no domínio da frequência, reduzir os efeitos de distúrbios externos e ruídos de sensores no processo tendo em vista o *pior caso*, ou seja, o valor de pico da função de resposta em frequência.

O termo H_∞ faz referência ao *espaço de Hardy*, onde as funções de transferência devem ser estáveis (pólos no semi-plano esquerdo do eixo imaginário) e próprias (grau do polinômio do numerador menor ou igual ao grau do polinômio do denominador), e o termo ∞ denota a norma H_∞ [67].

3.2 Conceitos Matemáticos

Valores singulares, σ_i, são as raízes quadradas positivas dos autovalores de $\mathbf{G}^*(jw)\mathbf{G}(jw)$, onde $\mathbf{G}^*(jw)$ é o complexo-conjugado transposto da matriz $\mathbf{G}(jw)$, isto é [69]:

$$\sigma_i(\mathbf{G}(s)) = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{G}^*(jw)\mathbf{G}(jw))}. \tag{3.1}$$

Para uma determinada frequência é obtido um valor numérico para o valor singular de uma determinada matriz. Com isso, pode-se gerar um gráfico com o conjunto de pontos obtidos quando se varia a frequência w. Este gráfico é denominado diagrama de valor singular.

A norma H_∞ se refere ao valor de pico no diagrama de valor singular [56]. No caso, a norma H_∞ da matriz $\mathbf{G}(s)$ é dada por:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty \triangleq sup_w \ \sigma(\mathbf{G}(jw)). \tag{3.2}$$

No caso em que se tem uma única entrada e uma única saída, adota-se o valor de pico no diagrama de Bode [58] da amplitude:

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq sup_w |G(jw)|. \tag{3.3}$$

O diagrama de valor singular de uma função de transferência (que pode ser considerada uma matriz 1×1) é idêntico ao diagrama de Bode de amplitude desta função de transferência.

No apêndice C são apresentados alguns exemplos de cálculo da norma H_∞.

3.3 Representação do Problema H_∞

Considere o diagrama de blocos apresentado na Figura 3.1 [67, 56, 26], onde:

- $\mathbf{w}$ é o vetor de entradas exógenas (distúrbios externos e ruídos de medições);
- $\mathbf{u}$ é o vetor de controle;
- $\mathbf{z}$ é o vetor de sinais que se deseja controlar e utilizado para medir o desempenho do sistema (exemplo: sinais de controle e estados);
- $\mathbf{y}$ é o vetor de sinais enviados ao controlador.

O projeto H_∞ aumenta a margem de estabilidade robusta de um determinado processo $\mathbf{P}(s)$, ou seja, aumenta a quantidade de incertezas que podem ser admitidas sem perda de estabilidade [30], pois, com a atuação do controlador H_∞, ocorre uma redução do pico da resposta em frequência entre a entrada de distúrbios e a saída de desempenho medida.

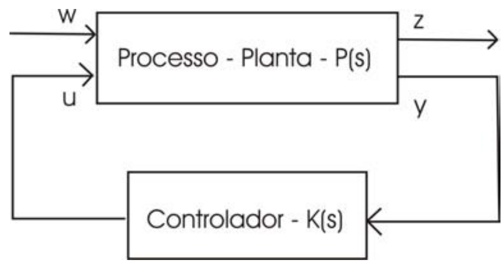

Figura 3.1: Esquema básico para o controle H_∞.

3.4 Formulação do Problema H_∞

Considerando o diagrama de blocos da Figura 3.1, tem-se o seguinte modelo de estados [34, 22]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}; && (3.4) \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}; && (3.5) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}. && (3.6) \end{aligned}$$

O sistema anterior pode ser representado de forma compacta por:

$$\mathbf{P} \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array}\right]. \tag{3.7}$$

Com isso, a matriz de transfência do sistema da Figura 3.1 pode ser representada da seguinte forma [56]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \mathbf{P}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

onde $\mathbf{P}_{11}$ é a função de transferência entre a entrada $\mathbf{w}$ e a saída $\mathbf{z}$, $\mathbf{P}_{12}$ é a função de transferência entre a entrada $\mathbf{u}$ e a saída $\mathbf{z}$, $\mathbf{P}_{21}$ é a função de transferência entre a entrada $\mathbf{w}$ e a saída $\mathbf{y}$ e $\mathbf{P}_{22}$ é a função de transferência entre a entrada $\mathbf{u}$ e a saída $\mathbf{y}$.

Portanto, tem-se que:

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{u}; \tag{3.9}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{22}\mathbf{u}; \tag{3.10}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(s)\mathbf{y}, \tag{3.11}$$

onde a equação (3.11) é a lei de controle.

Substituindo-se (3.11) em (3.10), obtém-se $\mathbf{y}$ em função de $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{22}\mathbf{K}\mathbf{y} \Rightarrow$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}\mathbf{K}) = \mathbf{P}_{21}\mathbf{w} \Rightarrow$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{21}\mathbf{w}. \tag{3.12}$$

Da mesma forma, substituindo-se (3.11) em (3.9), $\mathbf{z}$ fica em função de $\mathbf{w}$ e de $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{K}\mathbf{y}. \tag{3.13}$$

Com isso, a relação entre $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ do sistema em malha fechada pode ser obtida ao se substituir (3.12) em (3.13):

$$\mathbf{z} = [\mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{21}]\mathbf{w}. \tag{3.14}$$

A expressão (3.14) é chamada de transformação linear inferior e é tradicionalmente representada da forma que segue:

$$\mathbf{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K}) = \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{21}, \tag{3.15}$$

onde $\mathbf{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})$ é a matriz de transferência entre a entrada de distúrbios $\mathbf{w}$ e a saída de desempenho $\mathbf{z}$.

Afim de obter $\mathbf{P}(s)$ e $\mathbf{K}(s)$ para um caso específico, pode-se primeiro encontrar uma representação em diagrama de blocos equivalente à representação da Figura 3.1 e identificar os sinais $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{y}$. Seja como exemplo a configuração da Figura 3.2.

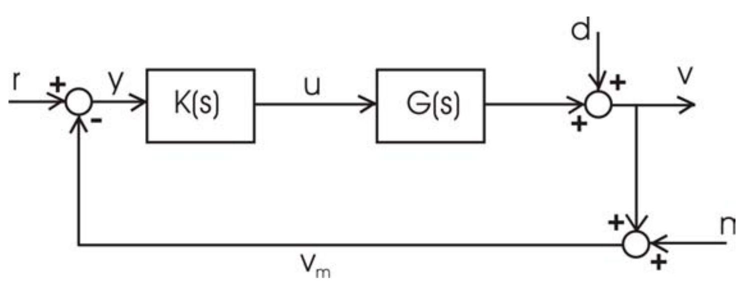

Figura 3.2: Exemplo de configuração de controle.

O primeiro passo para encontrar $\mathbf{P}(s)$ para a configuração de controle da Figura 3.2 é identificar os sinais de entrada e de saída para a planta, ou seja:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z} = \mathbf{e} = \mathbf{v} - \mathbf{r}; \quad \mathbf{y} = \mathbf{r} - \mathbf{v}_m = \mathbf{r} - \mathbf{v} - \mathbf{n}.$$

Nota-se que o sinal de desempenho desejado $\mathbf{z}$ é a diferença entre o sinal de entrada ($\mathbf{r}$) e o sinal de saída ($\mathbf{v}$), constituindo, dessa forma, um sinal de *erro*, o qual se deseja minimizar.

Com esta escolha de $\mathbf{y}$, o controlador tem apenas informação sobre o desvio $\mathbf{r} - \mathbf{v}_m$. Além disso, como $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{r}$, a performance é especificada em termos da saída real $\mathbf{v}$ e não em termos da saída medida $\mathbf{v}_m$. Portanto, o diagrama de blocos da Figura 3.2 permite escrever:

$$\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{r} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{r} = \mathbf{I}\mathbf{w}_1 - \mathbf{I}\mathbf{w}_2 + \mathbf{0}\mathbf{w}_3 + \mathbf{G}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{r} - \mathbf{v}_m = \mathbf{r} - \mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{d} - \mathbf{n} = -\mathbf{I}\mathbf{w}_1 + \mathbf{I}\mathbf{w}_2 - \mathbf{I}\mathbf{w}_3 - \mathbf{G}\mathbf{u}$$

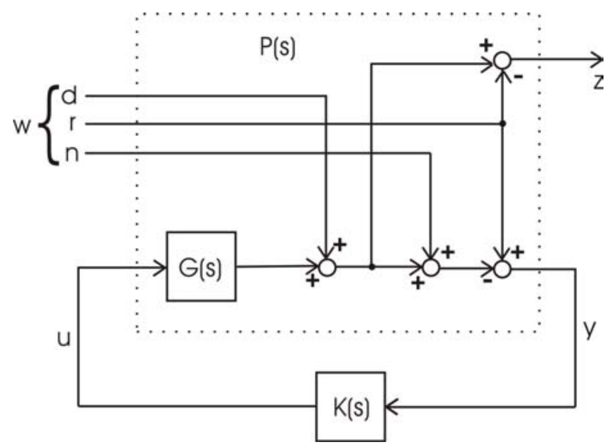

Figura 3.3: Representação equivalente ao da Figura 3.2.

A matriz de transferência de $\begin{bmatrix} \mathbf{w} & \mathbf{u} \end{bmatrix}^T$ a $\begin{bmatrix} \mathbf{z} & \mathbf{y} \end{bmatrix}^T$ é:

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{G}(s) \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & -\mathbf{G}(s) \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{G}(s) \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & -\mathbf{G}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

A Figura 3.3 mostra uma representação equivalente para a Figura 3.2 onde se tem um vetor de entradas $\mathbf{w}$ constituído por distúrbios ($\mathbf{d}$ e $\mathbf{n}$) e por uma entrada genérica $\mathbf{r}$. Como saída desse sistema, tem-se o sinal $\mathbf{z}$, o qual é definido como sendo o erro entre a entrada genérica $\mathbf{r}$ e a saída $\mathbf{v}$.

No projeto H_∞ deseja-se encontrar um controlador $\mathbf{K}(s)$ de modo a minimizar, tanto quanto possível, a norma H_∞ da matriz de transferência (3.15). Desse modo, o controlador ótimo H_∞ procura minimizar o valor de pico no diagrama de valor singular da matriz de transferência entre a entrada de distúrbios e a saída de desempenho, considerando a resposta em frequência respectiva [56, 67], ou seja:

$$min_w \; \|\mathbf{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})\|_\infty. \tag{3.18}$$

Um controlador sub-ótimo $\mathbf{K}(s)$ procura minimizar a norma H_∞ da matriz de transferência entre a entrada de distúrbios e a saída de desempenho, onde esta norma deve ser menor que um dado valor γ real e maior que zero [56, 67], ou seja:

$$\|\mathbf{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})\|_\infty < \gamma. \tag{3.19}$$

Na solução usual do problema H_∞ [67], assume-se um valor arbitrário para γ e a condição (3.19) é verificada. Caso esta condição esteja satisfeita, pode-se reduzir o valor de γ, resolver novamente o problema H_∞ e verificar a validade da restrição. Quando, para um determinado valor de γ (menor que o assumido no passo anterior dentro de uma precisão adotada), a restrição (3.19) deixar de ser satisfeita, diz-se que o γ ótimo foi encontrado, e consequentemente o controlador ótimo também.

Vale ressaltar que o problema H_∞ pode ser resolvido com o auxílio de duas equações de Riccati, cujas soluções são utilizadas para o cálculo do controlador H_∞. De posse do controlador, é possível verificar a norma H_∞ de malha fechada e comparar este valor com o valor de γ (para maiores detalhes consultar [34, 22]). Uma solução mais atual para o problema H_∞ pode ser obtida através de Desigualdades Matriciais Lineares (para maiores detalhes consultar [29]).

3.5 Breve Introdução a Desigualdades Matriciais Lineares

3.5.1 Origem e Objetivos

A história das desigualdades matriciais lineares de sistemas dinâmicos tem início por volta de 1890, quando a teoria de Lyapunov foi publicada. Esta teoria mostrou que a equação diferencial $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ é estável (isto é, todas as trajetórias convergem para zero) se e somente se existe uma matriz positivo-definida $\mathbf{P}$ tal que:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} < 0. \tag{3.20}$$

A desigualdade de Lyapunov (3.20) foi a primeira LMI utilizada para analisar a estabilidade de um sistema dinâmico [29, 16].

Lur'e, Postnikov e outros pesquisadores, por volta do ano de 1940 na antiga União Soviética, foram os primeiros a aplicar os métodos de Lyapunov a alguns problemas práticos específicos em engenharia de controle. As LMIs que resultaram foram resolvidas analiticamente. Naturalmente, isto limitou sua aplicação a sistemas de pequeno porte (segunda, terceira ordem).

Yakubovich, Popov, Kalman e outros pesquisadores, em torno de 1960, tiveram sucesso em reduzir a solução das LMIs que surgiram no problema de Lur'e para simples critérios gráficos, usando o que se chama de *Positive-Real (PR) Lemma*. Isto resultou no famoso critério de Popov, no critério de Tsypkin, e muitas outras variações. Com isso, algumas famílias de LMIs passaram a ter solução através de métodos gráficos.

A partir daí, o *PR Lemma* e suas extensões foram estudados intensamente, o que resultou na descoberta de sua relação com o critério do ganho pequeno (*small-gain criteria*) e com o controle ótimo quadrático.

Por volta de 1970, descobriu-se que a LMI que aparece no *PR Lemma* poderia ser resolvida não somente por meios gráficos, mas também através de uma certa equação algébrica de Riccati (ARE).

Willems, em 1971, formulou a LMI (3.21) e ressaltou que ela poderia ser resolvida estudando as soluções da ARE (3.22):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} & \mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{C} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.21}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - (\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{C}^T)\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{C}) + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{3.22}$$

Também em 1971, Willems sugeriu que algoritmos computacionais poderiam auxiliar na solução da LMI (3.21). Daí em diante as LMIs que surgiram da teoria de controle passaram a ser formuladas como problemas de otimização convexos.

Pyatnitskii e Skorodinskii reduziram o problema original de Lur'e (extendido ao caso de múltiplas não linearidades, pois o problema original admitia apenas uma não-linearidade) para um problema de otimização convexo envolvendo LMIs, que foi resolvido utilizando-se o algoritmo do elipsóide [16].

Karmarkar introduziu, em 1984, um algoritmo de programação linear que era bastante eficiente na prática, o que gerou vários estudos de métodos de ponto interior para programação linear.

Em 1988, Nesterov e Nemirovskii desenvolveram métodos de ponto interior que se aplicavam diretamente a problemas convexos envolvendo LMIs. Com isso, problemas que não apresentavam solução analítica passaram a ser resolvidos de forma muito satisfatória.

Com o grande desenvolvimento de computadores e o surgimento de algoritmos de otimização bastante eficientes para problemas convexos, as LMIs ganharam destaque e passaram a ser utilizadas com o objetivo de representar uma ampla variedade de problemas na área de controle [16].

3.5.2 Definição de Desigualdades Matriciais Lineares

Uma desigualdade matricial linear (LMI) apresenta a forma que segue [16, 30]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{F}_i > 0, \tag{3.23}$$

onde $\mathbf{x} \in \Re^m$ é a variável e as matrizes simétricas $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in \Re^{n \times n},\ i = 0, ..., m$ são dadas.

O símbolo de desigualdade em (3.23) significa que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é positivo-definida, ou seja, $\mathbf{u}^T\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{u} > 0$ para todo $\mathbf{u} \in R^n$ diferente de zero. A LMI (3.23) é uma restrição convexa em $\mathbf{x}$, isto é, o conjunto $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0\}$ é convexo. Embora a LMI (3.23) pareça possuir uma forma específica, ela pode representar uma ampla variedade de problemas de restrições convexas em $\mathbf{x}$. Em particular, desigualdades lineares, desigualdades quadráticas (convexas), desigualdades de normas matriciais, e restrições que surgem da teoria de controle, tais como desigualdades matriciais quadráticas convexas e de Lyapunov, geralmente podem ser colocadas na forma de uma LMI [16].

3.5.3 Complemento de Schur

Certas desigualdades não lineares podem ser convertidas para a forma LMI usando o complemento de Schur. A LMI que segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > 0, \tag{3.24}$$

onde $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})^T$, é equivalente a [16]:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T > 0. \tag{3.25}$$

Em outras palavras, o conjunto de desigualdades não lineares (3.25) pode ser representado como a LMI (3.24) [16].

3.5.4 Matrizes Como Variáveis

Frequentemente encontram-se problemas nos quais as variáveis são matrizes. Por exemplo, na desigualdade de Lyapunov (3.20), $\mathbf{A} \in \Re^{n\times n}$ é dada e $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ é a variável. Neste caso não se escreve a LMI explicitamente na forma $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0$ e torna-se claro que a matriz $\mathbf{P}$ é a variável [16, 30].

Um outro exemplo é a desigualdade matricial quadrática abaixo:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} + \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} < 0, \tag{3.26}$$

onde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$ são matrizes de dimensões apropriadas, e $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ é a variável. A desigualdade matricial (3.26) pode ser representada como em (3.27) usando o Complemento de Schur.

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{Q} & \mathbf{P}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{P} & \mathbf{R} \end{bmatrix} > 0. \tag{3.27}$$

Neste trabalho, as LMIs representam restrições do problema de otimização para a obtenção dos controladores H_∞, conforme será detalhado no capítulo 6.

Capítulo 4

Filtros de Ponderação

4.1 Introdução

Os filtros de ponderação são filtros que podem ser colocados tanto nas entradas quanto nas saídas do sistema a ser controlado no momento do projeto do controlador desejado. Cada filtro de ponderação utilizado possui uma finalidade específica como será melhor descrito a seguir.

Os filtros utilizados nas entradas do sistema têm o objetivo de fazer com que os sinais de entrada tenham uma composição espectral específica. Dessa forma, conhecendo-se o conteúdo em freqüência dos sinais exógenos, pode-se projetar um controlador com menor conservadorismo, pois os filtros de ponderação atuam de forma a justamente fazer com que o conhecimento prévio do comportamento dos sinais de entrada seja levado em consideração durante a fase de projeto do controlador. Em outras palavras, sabendo-se que um dado sinal de referência apresenta apenas componentes de baixa freqüência, a inclusão de um filtro passa-baixa possibilita que o sinal de controle para um sistema de rastreamento venha a apresentar apenas baixas freqüências, ao contrário do que aconteceria se o filtro de ponderação não fosse considerado.

Quando aplicados aos sinais de saída do sistema, os filtros de ponderação atuam de forma a fazer com que as funções de transferência de malha fechada apresentem um comportamento pré-definido. Sabendo-se que um dado distúrbio exógeno afeta com maior intensidade a saída de desempenho na baixa freqüência, pode-se incluir na fase de projeto do controlador um filtro de ponderação que provoque uma maior atenuação deste distúrbio justamente na baixa freqüência. Neste caso, o filtro de ponderação força uma conformação espectral da função de transferência de malha fechada entre o distúrbio e o sinal de desempenho, onde se verificará uma atenuação do espectro de baixa-frequência [56].

Na área de controle robusto de estruturas flexíveis, os modelos utilizados são comumente obtidos através do truncamento da composição espectral em uma dada faixa de freqüência. Com isso, desconsidera-se todos os modos de vibração pertencentes à faixa de freqüência que não é levada em consideração. Em outras palavras, tais modelos apresentam incerteza dinâmica. Nestes casos, é indesejado que o sinal de controle atue na faixa de freqüência que foi desconsiderada devido ao truncamento. Na prática, a excitação de modos que não foram considerados para o projeto do controlador é um fenômeno denominado *spillover* e pode tornar o sistema em malha fechada instável. Para contornar este problema, um filtro de ponderação é utilizado para conformar a composição espectral da função de transferência de malha fechada entre os distúrbios exógenos e o sinal de controle de forma a forçar a existência de sinal de controle apenas na faixa de freqüência desejada [69, 6, 8].

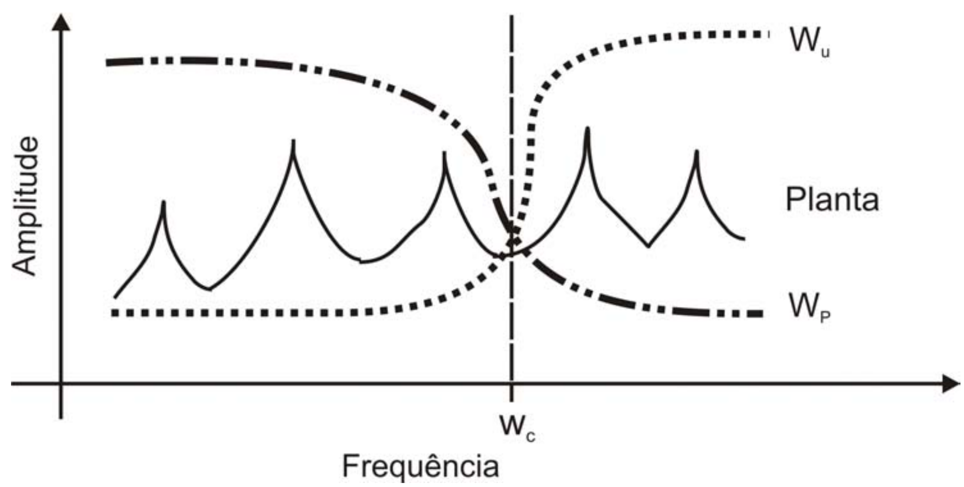

Figura 4.1: Esquema qualitativo de projeto dos filtros de ponderação a serem colocados na saída de desempenho ($\mathbf{W}_P$) e e na saída de controle ($\mathbf{W}_u$).

A Figura 4.1 mostra de forma qualitativa como os filtros colocados na saída de desempenho ($\mathbf{W}_P$) e na saída de controle ($\mathbf{W}_u$) devem ser projetados. Desejando-se que não exista sinal de controle acima da frequência w_c e que os distúrbios exógenos sejam atenuados com maior eficácia na faixa de frequência que vai até w_c, o filtro de ponderação $\mathbf{W}_u$ deve ser um passa-alta que pondera com maior intensidade a alta-frequência e o filtro de ponderação $\mathbf{W}_P$ deve ser um passa-baixa que pondera com maior intensidade a baixa-frequência. Em outras palavras, deseja-se atenuar distúrbios exógenos na faixa de frequência que vai até w_c e evitar o fenômeno de *spillover* que poderia ser ocasionado pela excitação de modos acima da frequência w_c.

Vale ressaltar que o sistema em malha aberta onde se tem a planta a ser controlada e os filtros de ponderação inclusos é denominado de planta aumentada.

A escolha dos filtros de ponderação exige um bom discernimento de engenharia e o resultado final do sistema controlado depende vitalmente de uma escolha adequada.

4.2 Obtenção do Modelo de Estados da Planta Aumentada

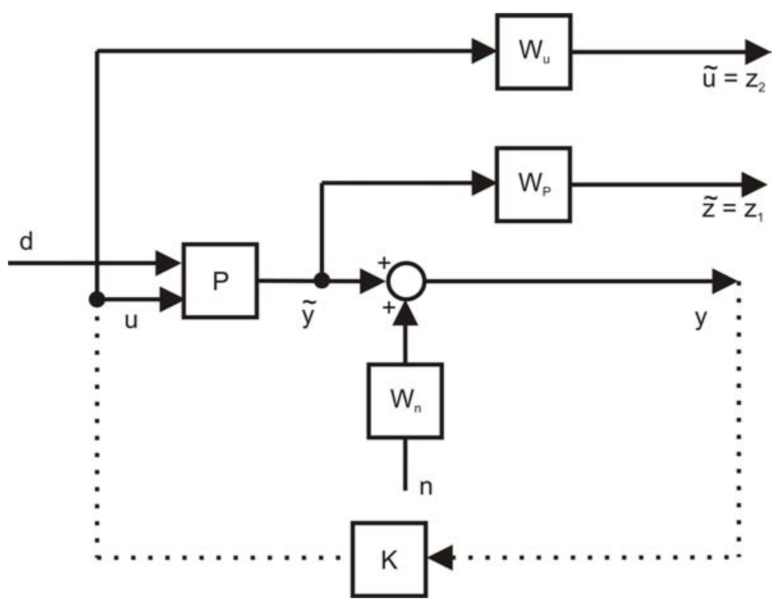

Figura 4.2: Diagrama de blocos do sistema com os filtros de ponderação $\mathbf{W}_P$, $\mathbf{W}_u$ e $\mathbf{W}_n$. A planta é dada por $\mathbf{P}$ e o controlador por $\mathbf{K}$.

Neste trabalho, são considerados os seguintes filtros de ponderação:

- $\mathbf{W}_u = \mathbf{C}_u(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_u)^{-1}\mathbf{B}_u$;

- $\mathbf{W}_P = \mathbf{C}_P(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_P)^{-1}\mathbf{B}_P$;

- $\mathbf{W}_n = \varepsilon$, onde $\varepsilon < 1$.

Os seguintes aspectos devem ser ressaltados:

- O filtro $\mathbf{W}_u$ é responsável por eliminar sinal de controle da faixa de frequência que não foi considerada no modelo do sistema;

- O filtro $\mathbf{W}_P$ é responsável por forçar uma maior atenuação do distúrbio na região de frequência em que este atua. Salienta-se que, no controle ativo de estruturas flexíveis, é comum a presença de distúrbios exógenos de frequência baixa (até 500 Hz);

- O filtro $\mathbf{W}_n$ é um ganho que multiplica o ruído de medição ($\mathbf{n}$), limitando sua amplitude. É usual considerar que o ruído de medição apresenta na prática uma amplitude máxima de até 10% da amplitude máxima do distúrbio exógeno [56].

O diagrama de blocos a ser utilizado neste trabalho, para a obtenção do controlador de ordem fixa, é da forma como mostrado na Figura 4.2, onde é possível verificar que:

- O modelo de estados da planta $\mathbf{P}$ é:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{d} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, \tag{4.1}$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_1\mathbf{d} + \mathbf{D}_2\mathbf{u}. \tag{4.2}$$

- O modelo de estados do filtro $\mathbf{W}_P$ é:

$$\dot{\mathbf{x}}_P = \mathbf{A}_P\mathbf{x}_P + \mathbf{B}_P\tilde{\mathbf{y}}, \tag{4.3}$$

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{C}_P\mathbf{x}_P + \mathbf{D}_P\tilde{\mathbf{y}}. \tag{4.4}$$

- O modelo de estados do filtro $\mathbf{W}_u$ é:

$$\dot{\mathbf{x}}_u = \mathbf{A}_u\mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u\mathbf{u}, \tag{4.5}$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{C}_u\mathbf{x}_u + \mathbf{D}_u\mathbf{u}. \tag{4.6}$$

- O sinal enviado ao controlador é:

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{W}_n\mathbf{n}. \tag{4.7}$$

É importante mencionar que, na literatura, é comum encontrar a utilização de filtros de ponderação bi-próprios (ordem do polinômio do numerador igual à ordem do polinômio do denominador) [69]. Daí justifica-se a existência das matrizes $\mathbf{D}_u$ e $\mathbf{D}_P$ dos modelos de estados dos filtros utilizados neste trabalho.

Utilizando (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7) o modelo de estados da planta aumentada pode ser definido como [69]:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_u \\ \dot{\mathbf{x}}_P \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_P\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_P\mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_u \\ \mathbf{B}_P\mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}; && (4.8) \\
\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_P\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_P \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_u & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_P\mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_P\mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_u \end{bmatrix} \mathbf{u}; && (4.9) \\
\mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{W}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} + \mathbf{D}_2\mathbf{u}. && (4.10)
\end{aligned}$$

Dessa forma, o modelo de estados da planta voltado para o problema H_∞ dado na forma das equações (3.4), (3.5) e (3.6) pode ser escrito em função das matrizes $\mathbf{A}^G$, $\mathbf{B}_1^G$, $\mathbf{B}_2^G$, $\mathbf{C}_1^G$, $\mathbf{C}_2^G$, $\mathbf{D}_{11}^G$, $\mathbf{D}_{12}^G$, $\mathbf{D}_{21}^G$ e $\mathbf{D}_{22}^G$ definidas como:

$$\mathbf{A}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_P\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_P \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1^G = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_P\mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2^G = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_u \\ \mathbf{B}_P\mathbf{D}_2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_1^G = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_P\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_P \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_u & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{11}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_P\mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{12}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_P\mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_u \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_2^G = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{21}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{W}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{22}^G = \mathbf{D}_2.$$

4.3 Obtenção das Matrizes de Transferência de Malha Aberta e Malha Fechada da Planta Aumentada

A partir da Figura 4.2, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{y}} &= \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_1\mathbf{d} + \mathbf{P}_2\mathbf{u}; && (4.11) \\
\tilde{\mathbf{z}} &= \mathbf{W}_P\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{W}_P(\mathbf{P}_1\mathbf{d} + \mathbf{P}_2\mathbf{u}); && (4.12) \\
\tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{W}_u\mathbf{u}; && (4.13) \\
\mathbf{y} &= \mathbf{W}_n\mathbf{n} + \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{W}_n\mathbf{n} + \mathbf{P}_1\mathbf{d} + \mathbf{P}_2\mathbf{u}, && (4.14)
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{P}_1$ é a matriz de transferência entre a entrada $\mathbf{d}$ e a saída $\tilde{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{P}_2$ é a matriz de transferência entre a entrada $\mathbf{u}$ e a saída $\tilde{\mathbf{y}}$.

Utilizando (4.12), (4.13) e (4.14), a matriz de transferência de malha aberta pode ser obtida:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_P\mathbf{P}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{W}_P\mathbf{P}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_u \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{W}_n & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Como $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{K}(\mathbf{W}_n\mathbf{n} + \tilde{\mathbf{y}})$, as expressões (4.13), (4.11) e (4.12) tornam-se respectivamente:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{W}_u\mathbf{K}(\mathbf{W}_n\mathbf{n} + \tilde{\mathbf{y}}), \tag{4.16}$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{P}_1\mathbf{d} + \mathbf{P}_2\mathbf{K}(\mathbf{W}_n\mathbf{n} + \tilde{\mathbf{y}}), \tag{4.17}$$

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{W}_P\mathbf{P}_1\mathbf{d} + \mathbf{W}_P\mathbf{P}_2\mathbf{K}(\mathbf{W}_n\mathbf{n} + \tilde{\mathbf{y}}). \tag{4.18}$$

Isolando-se $\tilde{\mathbf{y}}$ em (4.17), obtém-se $\tilde{\mathbf{y}}$ em função de $\mathbf{d}$ e de $\mathbf{n}$:

$$\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_1\mathbf{d} + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{K}\mathbf{W}_n\mathbf{n}. \tag{4.19}$$

Substituindo (4.19) em (4.18), é possível escrever $\tilde{\mathbf{z}}$ em função de $\mathbf{d}$ e de $\mathbf{n}$:

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{W}_P\mathbf{P}_1\mathbf{d} + \mathbf{W}_P\mathbf{P}_2\mathbf{K}\mathbf{W}_n\mathbf{n} + \mathbf{W}_P\mathbf{P}_2\mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}}, \tag{4.20}$$

$$\tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{W}_P\mathbf{P}_1 + \mathbf{W}_P\mathbf{P}_2\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_1)\mathbf{d} + (\mathbf{W}_P\mathbf{P}_2\mathbf{K}\mathbf{W}_n + \mathbf{W}_P\mathbf{P}_2\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{K}\mathbf{W}_n)\mathbf{n}. \tag{4.21}$$

A expressão (4.21) pode ser reescrita como:

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{W}_P(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_1)\mathbf{d} + \mathbf{W}_P\mathbf{P}_2\mathbf{K}(\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{K})\mathbf{W}_n\mathbf{n}. \tag{4.22}$$

Com a finalidade de escrever $\tilde{\mathbf{u}}$ em função de $\mathbf{d}$ e de $\mathbf{n}$, substitui-se (4.19) em (4.16):

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{W}_u\mathbf{K}\mathbf{W}_n\mathbf{n} + \mathbf{W}_u\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_1\mathbf{d} + \mathbf{W}_u\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{K}\mathbf{W}_n\mathbf{n}. \tag{4.23}$$

Reescrevendo (4.23), obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{W}_u\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_1\mathbf{d} + \mathbf{W}_u\mathbf{K}(\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{K})\mathbf{W}_n\mathbf{n}. \tag{4.24}$$

Para simplificar as expressões anteriormente determinadas, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{N}_3$ e $\mathbf{N}_4$ são definidos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_1 &= \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_1; && (4.25)\\
\mathbf{N}_2 &= \mathbf{P}_2\mathbf{K}(\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{K})\mathbf{W}_n; && (4.26)\\
\mathbf{N}_3 &= \mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_1; && (4.27)\\
\mathbf{N}_4 &= \mathbf{K}(\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{K})\mathbf{W}_n. && (4.28)
\end{aligned}$$

Utilizando (4.25), (4.26), (4.27) e (4.28), a matriz de transferência de malha fechada é escrita da forma que segue:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_P\mathbf{N}_1 & \mathbf{W}_P\mathbf{N}_2 \\ \mathbf{W}_u\mathbf{N}_3 & \mathbf{W}_u\mathbf{N}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

Através de (4.29) e analisando as entradas e saídas do diagrama de blocos apresentado na Figura 4.2, verifica-se que a matriz de transferência de malha fechada é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_P\mathbf{N}_1 & \mathbf{W}_P\mathbf{N}_2 \\ \mathbf{W}_u\mathbf{N}_3 & \mathbf{W}_u\mathbf{N}_4 \end{bmatrix}. \tag{4.30}$$

O problema de controle H_∞ sub-ótimo consiste em fazer com que a norma H_∞ da matriz de transferência de malha fechada seja menor que um dado valor γ, ou seja,

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{W}_P\mathbf{N}_1 & \mathbf{W}_P\mathbf{N}_2 \\ \mathbf{W}_u\mathbf{N}_3 & \mathbf{W}_u\mathbf{N}_4 \end{matrix} \right\|_\infty < \gamma. \tag{4.31}$$

Visualiza-se que, se (4.31) é satisfeita, então as seguintes relações também são satisfeitas [51, 69]:

$$\|\mathbf{W}_P\mathbf{N}_1\|_\infty < \gamma; \tag{4.32}$$

$$\|\mathbf{W}_P\mathbf{N}_2\|_\infty < \gamma; \tag{4.33}$$

$$\|\mathbf{W}_u\mathbf{N}_3\|_\infty < \gamma; \tag{4.34}$$

$$\|\mathbf{W}_u\mathbf{N}_4\|_\infty < \gamma. \tag{4.35}$$

Pegando-se como exemplo a expressão (4.34), verifica-se que a norma H_∞ de $\mathbf{W}_u$ vezes $\mathbf{N}_3$ deve ser menor que um dado valor escalar γ (uma linha contínua e horizontal no domínio da frequência). Se $\mathbf{W}_u$ é um filtro passa-alta, $\mathbf{N}_3$ deve apresentar a composição espectral de um filtro passa-baixa, já que o valor de pico de $\mathbf{W}_u$ vezes $\mathbf{N}_3$ no domínio da frequência não deve ultrapassar o valor de γ. Dessa forma, pode-se dizer que $\mathbf{N}_3$ é forçado a apresentar uma composição espectral inversa em relação à composição espectral do filtro $\mathbf{W}_u$.

Raciocínio análogo pode ser aplicado na análise das expressões (4.32), (4.33) e (4.35). Caso (4.32), (4.33), (4.34) e (4.35) sejam satisfeitas diz-se que a estabilidade robusta está garantida, pois a conformação espectral de $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{N}_3$ e $\mathbf{N}_4$ foi realizada com sucesso [69]. Vale ressaltar que por estabilidade robusta entende-se a estabilidade do sistema em malha fechada na presença de incertezas de modelagem.

Para um melhor entendimento do conteúdo deste capítulo, o apêndice D deste trabalho traz um exemplo de uso de filtros de ponderação.

Capítulo 5

O Método Lagrangiano Aumentado

5.1 Introdução

O método Lagrangiano Aumentado resolve um problema de otimização com restrições através da resolução de sucessivos problemas irrestritos, caracterizando-se pela facilidade com que sua implementação computacional pode ser realizada.

Tendo sido proposto de forma independente por Hestenes [37] e Powell [63] em 1969, o Lagrangiano Aumentado (também denominado de método dos Multiplicadores) envolve conceitos de métodos de penalidades e métodos duais (Lagrangianos duais) com o objetivo de eliminar algumas desvantagens associadas a estes métodos [49, 53].

Com a introdução da Programação Quadrática Sequencial (cuja sigla em inglês é SQP) por volta de 1970 e o surgimento de métodos de ponto interior por volta de 1980, o interesse no método Lagrangiano Aumentado diminuiu de certa forma. Na década de 80 alguns autores propuseram combinar problemas SQP com funções Lagrangianas Aumentadas. Hoje, o método Lagrangiano Aumentado vem sendo utilizado de forma combinada com métodos de ponto interior, onde se torna possível lidar com restrições de igualdade não-lineares. A história do Lagrangiano Aumentado, do seu início até a década de 90, é apresentada em [19].

Nas seções seguintes são apresentados conceitos relacionados às condições de otimalidade, método de penalidades, métodos duais e o método do Lagrangiano Aumentado propriamente dito.

5.2 Condições de Kuhn-Tucker Associadas a um Problema Padrão

Seja o problema P_p de interesse:

$$P_p \begin{cases} minimizar\ f(\xi) \\ sujeito\ a : h_i(\xi) = 0, \quad i = 1, ..., l, \\ \qquad\qquad\quad v_j(\xi) \leq 0, \quad j = 1, ..., m, \end{cases}$$

onde as funções $f(\xi)$, $h_i(\xi)$ e $v_j(\xi)$ podem ser tanto lineares quanto não-lineares nas variáveis de otimização do vetor ξ.

As condições de Kuhn-Tucker (K.T.) associadas ao problema P_p são dadas em (5.1) e são condições necessárias para um dado ponto factível ξ ser solução ótima local deste problema:

$$\begin{gathered} \nabla f(\xi) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \nabla h_i(\xi) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla v_j(\xi) = 0, \\ \mu_j v_j(\xi) = \mathbf{0}, \\ \mu_j \geq 0, \end{gathered} \tag{5.1}$$

onde λ e μ são denominados multiplicadores de Lagrange e existe um conjunto ξ^*, λ^* e μ^* que satisfaz (5.1) representando uma solução ótima de P_p.

Informações mais detalhadas sobre as condições de K.T. podem ser encontradas em [14].

5.3 A Função Lagrangiana

Dado um problema de otimização não-linear denominado problema primal, existe um outro problema de otimização não-linear associado a ele denominado problema dual. Dentre as formulações de problemas duais propostas na literatura, a formulação Lagrangiana dual tem sido destacada devido ao fato de ser bastante utilizada na resolução de problemas não-lineares que podem ser tanto convexos quanto não-convexos [14].

A função Lagrangiana associada ao problema P_p é:

$$L(\xi, \lambda, \mu) = f(\xi) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i h_i(\xi) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j(\xi). \tag{5.2}$$

Em notação vetorial, a expressão (5.2) torna-se:

$$L(\xi, \lambda, \mu) = f(\xi) + \lambda^T \mathbf{h}(\xi) + \mu^T \mathbf{v}(\xi). \tag{5.3}$$

Condições equivalentes às condições de K.T. podem ser escritas baseadas na função Lagrangiana, isto é, condições necessárias para ξ ser um ótimo local de P_p é que sejam satisfeitas as condições [66]:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mu} \leq \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{0}, \quad \mu^T \mathbf{v}(\xi) = 0, \quad \mu_j \geq 0. \tag{5.4}$$

No caso em que o valor de ξ tal que $\frac{\partial L}{\partial \xi} = \mathbf{0}$ seja o mesmo valor que minimiza a função Lagrangiana, as condições (5.4) passam a ser suficientes para ξ ser a solução ótima global de P_p.

5.4 A Função Penalizada

A forma clássica dos métodos de penalidades é adicionar um termo de penalização à função objetivo $f(\xi)$ quando o ponto ξ é infactível e obter a solução ótima desta função penalizada por algum método de otimização irrestrita.

Seja a função penalizada $p(\xi)$ associada ao problema P_p:

$$p(\xi) = f(\xi) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} c_i (h_i(\xi))^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} c_j \left[v_j(\xi)\right]_+^2, \tag{5.5}$$

onde:

- $[a]_+$ corresponde ao valor 0 (zero) se $a < 0$ e, caso contrário, corresponde ao próprio a;
- c_i e c_j são os parâmetros de penalidade (valores escalares e positivos) denotados de forma genérica por $\mathbf{c}$.

A observação da equação (5.5) mostra que a função $f(\xi)$ é penalizada toda vez que ξ é infactível. O tipo quadrático de penalização mostrado é usual.

Os parâmetros de penalidade são associados a cada restrição e seu valor depende da iteração em questão. Observa-se que ξ tende para ξ^* à medida que os valores de $\mathbf{c}$ tendem para infinito. Salienta-se que aquelas restrições não violadas não são penalizadas, isto é, o parâmetro de penalidade só é aumentado para as restrições violadas. Ressalta-se que em alguns casos é utilizado um único parâmetro de penalidade para todas as restrições [4].

A escolha adequada dos valores dos parâmetros de penalidade, bem como a taxa de crescimento destes é adotada para cada problema particular e, em geral, estes valores só podem ser definidos por meio de testes com o próprio algoritmo e com o problema em questão.

Um dos problemas mais sérios dos métodos de penalidades é que, à medida que os valores de $\mathbf{c}$ crescem, o problema torna-se numericamente mal-condicionado, dificultando a resolução do problema irrestrito associado. Contudo, valores grandes de $\mathbf{c}$ tendem a tornar a função $p(\xi)$ mais convexa, o que pode representar uma vantagem numérico-computacional, havendo assim um problema de compromisso.

Demonstra-se, contudo, que a solução da otimização irrestrita $p(\xi)$ pode não representar a solução ótima de P_p, e em geral isto ocorre.

O mínimo da função $p(\xi)$ deve satisfazer a condição de mínimo irrestrito:

$$\nabla p(\xi) = \nabla f(\xi) + \sum_{i=1}^{l} c_i h_i(\xi) \nabla h_i(\xi) + \sum_{j=1}^{m} c_j \left[v_j(\xi) \right]_+ \nabla v_j(\xi) = \mathbf{0}. \tag{5.6}$$

Nota-se que, para $\xi = \xi^*$, $\left[v_j(\xi^*) \right]_+ = 0$ e $h_i(\xi^*) = 0$, implicando em:

$$\nabla p(\xi^*) = \nabla f(\xi^*) + 0 + 0. \tag{5.7}$$

Observa-se em (5.7) que para $\xi = \xi^*$, $\nabla p(\xi^*)$ não é necessariamente nulo. Portanto, o resultado obtido na otimização irrestrita de $p(\xi)$ não é necessariamente a solução ótima do problema P_p.

Maiores detalhes sobre os métodos de penalidades são fornecidos em [14].

5.5 O Lagrangiano Aumentado

A função Lagrangiana Aumentada pode ser vista como uma combinação da função penalizada e da função Lagrangiana, eliminando a necessidade dos parâmetros de penalidade atingirem valores muito elevados. Reduz-se, assim, o problema de mau condicionamento numérico associado aos métodos usuais de penalidades, pois o Método do Lagrangiano Aumentado possui a propriedade de que a solução ótima do problema P_p é também a solução do problema irrestrito associado, como mostrado a seguir.

Seja a função $\Phi_{\mathbf{c}}(\xi, \lambda, \mu)$ a função Lagrangiana Aumentada como definida a seguir:

$$\Phi_{\mathbf{c}}(\xi, \lambda, \mu) = f(\xi) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i h_i(\xi) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j(\xi) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l} c_i (h_i(\xi))^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} c_j \left[v_j(\xi)\right]_+^2 . \quad (5.8)$$

O gradiente da função Lagrangiana Aumentada com relação a ξ é:

$$\nabla\Phi_{\mathbf{c}}(\xi, \lambda, \mu) = \nabla f(\xi) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \nabla h_i(\xi) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla v_j(\xi) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} c_i (h_i(\xi)) \nabla h_i(\xi) + \sum_{j=1}^{m} c_j \left[v_j(\xi)\right]_+ \nabla v_j(\xi). \quad (5.9)$$

Seja $\xi{=}\xi^*$ a solução do problema P_p. Logo, $h_i(\xi^*) = 0$, $\left[v_j(\xi^*)\right]_+ = 0$ e $\nabla f(x^*) + {} + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \nabla h_i(\xi^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla v_j(\xi^*) = 0$, pois se deve satisfazer as condições de K.T.. Assim, tem-se que:

$$\nabla\Phi_{\mathbf{c}}(\xi^*, \lambda, \mu) = \mathbf{0}, \quad (5.10)$$

isto é, a solução do problema restrito P_p é também a solução da otimização irrestrita da função Lagrangiana Aumentada. Logo, ξ^* pode ser obtido por meio da otimização irrestrita de $\Phi_{\mathbf{c}}(\xi, \lambda, \mu)$.

O resultado obtido em (5.10) assume que as condições de K.T. são satisfeitas. Para que isso seja válido é necessário conhecer os multiplicadores de Lagrange associados ao ponto ótimo. Contudo, tanto o ponto ótimo como os multiplicadores são desconhecidos. É neste ponto que os conceitos de dualidade tornam-se importantes, pois uma maneira de encontrar ou pelo menos estimar os multiplicadores de Lagrange faz-se necessária.

O método Lagrangiano Aumentado utiliza, a cada iteração, uma estimativa para os multiplicadores de Lagrange. Existem algumas fórmulas já conhecidas para estimar estes multiplicadores e tais fórmulas têm a propriedade de que à medida que ξ aproxima-se de ξ^*, λ e μ aproximam-se de λ^* e μ^*. A fórmula usada neste trabalho é bastante simples e pode ser vista como uma decorrência direta das condições de K.T.. Através da equação (5.9) e utilizando a condição de gradiente nulo (ótimo irrestrito), obtém-se:

$$\nabla\Phi_{\mathbf{c}}(\xi,\lambda,\mu) = \nabla f(\xi) + \sum_{i=1}^{l}(\lambda_i + c_i h_i(\xi))\nabla h_i(\xi) + \sum_{j=1}^{m}(\mu_j + c_j\left[v_j(\xi)\right]_+)\nabla v_j(\xi) = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

Observando (5.11), pode-se dizer que para satisfazer as condições de K.T. os novos multiplicadores seriam:

$$\bar{\lambda}_i = \lambda_i + c_i h_i(\xi), \quad (5.12)$$

$$\bar{\mu}_j = \mu_j + c_j\left[v_j(\xi)\right]_+. \quad (5.13)$$

As equações (5.12) e (5.13) sugerem uma sequência para a atualização dos multiplicadores de Lagrange a cada iteração, e à medida que λ e μ se aproximam de λ^* e μ^*, ξ se aproxima de ξ^*. A sequência natural para a atualização dos multiplicadores, portanto, é do tipo:

$$\bar{\lambda}_i^{k+1} = \lambda_i^k + c_i h_i(\xi^k), \quad (5.14)$$

$$\bar{\mu}_j^{k+1} = \mu_j^k + c_j\left[v_j(\xi^k)\right]_+. \quad (5.15)$$

As sequências apresentadas em (5.14) e (5.15) podem ser interpretadas como uma sequência de maximização do problema dual associado segundo o método do gradiente, onde os multiplicadores de Lagrange representam as variáveis de otimização, as restrições representam o gradiente e os penalizadores podem ser relacionados ao passo [49].

Observa-se, deste modo, que o método Lagrangiano Aumentado combina os conceitos dos métodos de penalidades (pois a função objetivo é penalizada pela violação das restrições) e métodos duais pela estimativa dos multiplicadores de Lagrange a cada iteração, buscando resolver o problema dual associado.

5.6 Algoritmo do Método Lagrangiano Aumentado

O algoritmo do método Lagrangiano Aumentado pode ser esquematizado da forma que segue:

1. Dado o problema restrito da forma de P_p, definir os seguintes valores iniciais:

    - Ponto de partida: ξ^0;

- Multiplicadores de Lagrange de partida: λ^0 e μ^0;
- Parâmetros de penalidade de partida: c_i^0 e c_j^0;
- Taxa de crescimento do parâmetro de penalidade: ρ ($\rho > 1$);

2. Inicializar o contador de iterações: $k = 0$;

3. Montar a função Lagrangiana Aumentada:

$$\Phi_{\mathbf{c}}(\xi, \lambda, \mu) = f(\xi) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^k h_i(\xi) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^k v_j(\xi) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} c_i^k (h_i(\xi))^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} c_j^k \left[v_j(\xi)\right]_+^2;$$

4. Minimizar $\Phi_{\mathbf{c}}(\xi, \lambda, \mu)$ com relação a ξ usando algum método de minimização irrestrita obtendo o ponto ξ^{k+1};

5. Atualizar os multiplicadores de Lagrange e os parâmetros de penalidade segundo algum esquema. Neste trabalho adota-se:

   - Se $|h_i(\xi^k)| > \varepsilon_1$ então faça:

$$\begin{aligned} c_i^{k+1} &= \rho\, c_i^k, \\ \lambda_i^{k+1} &= \lambda_i^k + c_i^k h_i(\xi^k); \end{aligned}$$

   - Se $\left[v_j(\xi^k)\right]_+ > \varepsilon_1$ então faça:

$$\begin{aligned} c_j^{k+1} &= \rho\, c_j^k, \\ \mu_j^{k+1} &= \mu_j^k + c_j^k v_j(\xi^k); \end{aligned}$$

   Caso contrário, $\mu_j^{k+1} = 0$.

   Adotou-se $\varepsilon_1 = 10^{-7}$.

6. Verificar o critério de convergência adotado. Caso ocorreu a convergência, então a otimização pode ser finalizada e ξ^k é a solução. Caso não tenha ocorrido convergência, incrementa-se o contador de iterações e retorna-se ao passo 3.

É importante ressaltar que o Método do Lagrangiano Aumentado possui caráter bastante geral, sendo aplicado a problemas onde a função objetivo e as restrições podem ser funções não-lineares. Além disso, salienta-se o aspecto de que o esquema utilizado para a atualização dos parâmetros de penalidade e multiplicadores de Lagrange tem influência significativa no comportamento do método sob o aspecto de convergência.

Neste trabalho, o método Lagrangiano Aumentado foi utilizado com a finalidade de transportar para a função objetivo do problema de obtenção dos controladores de ordem fixa uma restrição de igualdade não-linear, permitindo uma linearização do problema para se usar as formulações LMIs. Tal procedimento é detalhado no próximo capítulo.

Capítulo 6

Controlador H_∞ de Ordem Fixa

6.1 Introdução

Este capítulo enfoca o projeto de controladores robustos de ordem fixa baseado em um ponto de vista de otimização iniciado por Apkarian e Tuan [4]. Neste enfoque, certos problemas de controle robusto podem ser resolvidos através de uma formulação baseada na minimização de uma função objetivo linear sujeita a restrições LMIs e com uma restrição não-convexa em termos de *rank*, tal como segue:

$$P_1 : \begin{cases} minimizar\ \mathbf{v}^T\xi \\ sujeito\ a : \end{cases}$$

$$\mathbf{G}(\xi) \leq 0, \tag{6.1}$$

$$rank\ (\Gamma(\xi)) = r, \tag{6.2}$$

para o qual ξ é o vetor de variáveis de decisão e $\mathbf{v}$ é um dado vetor que multiplica ξ e determina uma expressão linear a ser minimizada. A desigualdade (6.1) representa as restrições LMIs e a expressão (6.2) é a condição que especifica a ordem do controlador. Esta última restrição é uma função matricial não linear que torna o problema mais complicado e numericamente difícil de ser tratado [20].

Neste trabalho, a restrição de *rank* (6.2) é escrita como uma condição de inversão matricial que deve ser satisfeita para que o controlador de ordem reduzida exista. Esta restrição é incorporada dentro de uma função Lagrangiana Aumentada com um termo envolvendo parâmetros de penalidade definidos adequadamente e um termo associado aos multiplicadores de Lagrange. A função Lagrangiana Aumentada é minimizada sucessivamente sujeita a essas restrições LMIs, usando um seqüencial aumento dos parâmetros de penalidade e uma regra de atualização para os multiplicadores de Lagrange conforme apresentado no capítulo 5. As restrições LMIs, devido a sua estrutura especial, são tratadas explicitamente e não são incluídas na função Lagrangiana. Este procedimento é realizado neste trabalho com o auxílio de resolvedores de LMIs atualmente disponíveis (pacote para o tratamento de LMIs do aplicativo MATLAB [30]).

6.2 Síntese do Controlador H_∞ de Ordem Fixa

Seja o modelo de estados de uma planta invariante no tempo que segue:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, \quad \mathbf{A} \in \Re^{n\times n} \tag{6.3}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}, \tag{6.4}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}. \tag{6.5}$$

O modelo de estados do controlador dinâmico de ordem reduzida a ser obtido é definido como:

$$\dot{\mathbf{x}}_K = \mathbf{A}_K\mathbf{x}_K + \mathbf{B}_K\mathbf{y}, \quad \mathbf{A}_K \in \Re^{k\times k}, \quad k \le n, \tag{6.6}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_K\mathbf{x}_K + \mathbf{D}_K\mathbf{y}. \tag{6.7}$$

Dessa forma, a lei de controle é dada por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(s)\mathbf{y}, \quad \mathbf{K}(s) = \mathbf{C}_K(sI - \mathbf{A}_K)^{-1}\mathbf{B}_K + \mathbf{D}_K. \tag{6.8}$$

A partir do modelo de estados da planta e do modelo de estados do controlador, é possível obter o modelo de estados da malha fechada. Substituindo (6.5) em (6.7), obtém-se:

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}_K\mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{C}_K\mathbf{x}_K + \mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21}\mathbf{w}. \tag{6.9}$$

Substituindo (6.9) em (6.3), (6.5) em (6.6) e (6.9) em (6.4), obtém-se respectivamente:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2)\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_K\mathbf{x}_K + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21})\mathbf{w}; \tag{6.10}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_K = \mathbf{B}_K\mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{A}_K\mathbf{x}_K + \mathbf{B}_K\mathbf{D}_{21}\mathbf{w}; \tag{6.11}$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2)\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_K\mathbf{x}_K + (\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21})\mathbf{w}. \tag{6.12}$$

Utilizando (6.10), (6.11) e (6.12), o modelo de estados da malha fechada pode ser escrito como:

$$\dot{\mathbf{x}}_{cl} = \mathbf{A}_{cl}\mathbf{x}_{cl} + \mathbf{B}_{cl}\mathbf{w}, \quad (6.13)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_{cl}\mathbf{x}_{cl} + \mathbf{D}_{cl}\mathbf{w}, \quad (6.14)$$

onde:

$$\mathbf{x}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_k \\ \mathbf{B}_K\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_K \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_K\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{C}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}.$$

Com isso, a matriz de transferência de malha fechada entre $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ é definida como:

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(s)\mathbf{w}, \quad (6.16)$$

onde $\mathbf{T}(s) = \mathbf{C}_{cl}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl})^{-1}\mathbf{B}_{cl} + \mathbf{D}_{cl}$.

Antes de prosseguir, é importante ressaltar que a planta apresenta ordem n e o controlador ordem $k \leq n$.

Afim de garantir que o sistema em malha fechada seja estável, ou seja, para $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ todos os estados tendem a zero quando o tempo tende ao infinito, utiliza-se a condição de Lyapunov: $V(\mathbf{x}_{cl}) = \mathbf{x}_{cl}^T\mathbf{P}\mathbf{x}_{cl} > 0$ com $\dot{V}(\mathbf{x}_{cl}) = \dot{\mathbf{x}}_{cl}^T\mathbf{P}\mathbf{x}_{cl} + \mathbf{x}_{cl}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}_{cl} < 0$.

Como critério de desempenho do sistema em malha fechada, deseja-se limitar em um certo valor γ a norma H_∞ da matriz de transferência entre a entrada de distúrbios exógenos $\mathbf{w}$ e a saída de desempenhos $\mathbf{z}$, ou seja:

$$\|\mathbf{T}(s)\|_\infty < \gamma. \quad (6.17)$$

Utilizando (6.17), o problema H_∞ sub-ótimo pode ser escrito em função da energia dos sinais de saída e de entrada da forma como segue [18]:

$$\|\mathbf{T}(s)\|_\infty^2 = sup_w \ \sigma_{max}^2(\mathbf{T}(jw)) = sup_w \ \lambda_{max}(\mathbf{T}^*(jw)\mathbf{T}(jw)) = \quad (6.18)$$

$$= sup_w \ max_{\mathbf{w}\neq 0} \ \frac{\mathbf{w}^*(jw)\mathbf{T}^*(jw)\mathbf{T}(jw)\mathbf{w}(jw)}{\mathbf{w}^*(jw)\mathbf{w}(jw)} = \quad (6.19)$$

$$= sup_w \ max_{\mathbf{w}\neq 0}\frac{\|\mathbf{T}(jw)\mathbf{w}\|_2^2}{\|\mathbf{w}\|_2^2} \geq \frac{\|\mathbf{z}\|_2^2}{\|\mathbf{w}\|_2^2}$$

Vale salientar que a passagem da última expressão de (6.18) para (6.19) ocorre devido ao fato de que a seguinte equação característica deve ser satisfeita para uma solução não-trivial ($\mathbf{w} \neq 0$):

$$\mathbf{J}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} \;\Rightarrow\; \mathbf{w}^*\mathbf{J}\mathbf{w} = \mathbf{w}^*\lambda\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}^*\mathbf{w} \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{\mathbf{w}^*\mathbf{J}\mathbf{w}}{\mathbf{w}^*\mathbf{w}},$$

onde $\mathbf{J} = \mathbf{T}^*(jw)\mathbf{T}(jw)$.

Como $\frac{\|\mathbf{z}\|_2^2}{\|\mathbf{w}\|_2^2} \leq \|\mathbf{T}(s)\|_\infty^2$, de (6.17) tem-se:

$$\frac{\|\mathbf{z}\|_2^2}{\|\mathbf{w}\|_2^2} < \gamma^2 \Rightarrow \mathbf{z}(t)^T\mathbf{z}(t) < \gamma^2\mathbf{w}(t)^T\mathbf{w}(t). \tag{6.20}$$

Devido ao fato da soma de duas expressões negativas também resultar em uma expressão negativa, pode-se escrever a condição de estabilidade ($\dot{V}(\mathbf{x}_{cl}) < 0$) e a condição de desempenho ($\mathbf{z}^T\mathbf{z} - \gamma^2\mathbf{w}^T\mathbf{w} < 0$) em uma única expressão:

$$\dot{V}(\mathbf{x}_{cl}) + \mathbf{z}^T\mathbf{z} - \gamma^2\mathbf{w}^T\mathbf{w} < 0 \;\Rightarrow\; \dot{\mathbf{x}}_{cl}^T\mathbf{P}\mathbf{x}_{cl} + \mathbf{x}_{cl}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}_{cl} + \mathbf{z}^T\mathbf{z} - \gamma^2\mathbf{w}^T\mathbf{w} < 0. \tag{6.21}$$

Utilizando (6.13) e (6.14), substitui-se $\mathbf{z}$ e $\mathbf{x}_{cl}$ em (6.21) e obtém-se a seguinte expressão matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{cl}^T & \mathbf{w}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_{cl} + \mathbf{C}_{cl}^T\mathbf{C}_{cl} & \mathbf{P}\mathbf{B}_{cl} + \mathbf{C}_{cl}^T\mathbf{D}_{cl} \\ \mathbf{B}_{cl}^T\mathbf{P} + \mathbf{D}_{cl}^T\mathbf{C}_{cl} & -\gamma^2\mathbf{I} + \mathbf{D}_{cl}^T\mathbf{D}_{cl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{cl} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} < 0. \tag{6.22}$$

Sabe-se que uma dada matriz simétrica $\mathbf{J}$ é negativo-definida se e somente se $\mathbf{p}^T\mathbf{J}\mathbf{p} < 0$ para qualquer $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. Dessa forma, a partir de (6.22), pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_{cl} + \mathbf{C}_{cl}^T\mathbf{C}_{cl} & \mathbf{P}\mathbf{B}_{cl} + \mathbf{C}_{cl}^T\mathbf{D}_{cl} \\ \mathbf{B}_{cl}^T\mathbf{P} + \mathbf{D}_{cl}^T\mathbf{C}_{cl} & -\gamma^2\mathbf{I} + \mathbf{D}_{cl}^T\mathbf{D}_{cl} \end{bmatrix} < 0. \tag{6.23}$$

A equação (6.23) pode ser decomposta da forma que segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_{cl} & \mathbf{P}\mathbf{B}_{cl} \\ \mathbf{B}_{cl}^T\mathbf{P} & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cl}^T \\ \mathbf{D}_{cl}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cl} & \mathbf{D}_{cl} \end{bmatrix} < 0. \tag{6.24}$$

Aplicando o complemento de Schur em (6.24), obtém-se (6.25):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_{cl} & \mathbf{P}\mathbf{B}_{cl} & \mathbf{C}_{cl}^T \\ \mathbf{B}_{cl}^T\mathbf{P} & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{D}_{cl}^T \\ \mathbf{C}_{cl} & \mathbf{D}_{cl} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \tag{6.25}$$

Para tornar a restrição (6.25) linear, pode-se redefinir uma nova variável $\varrho = \gamma^2$ e resolver o problema em termos desta nova variável. Uma outra alternativa, a qual é utilizada neste trabalho, consiste em aplicar uma transformação de congruência onde (6.25) é pré e pós-multiplicada por $\begin{bmatrix} \gamma^{-1/2}\mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1/2}\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{1/2}\mathbf{I} \end{bmatrix}$ (vide [1, 3, 4]). Além disso, define-se $\mathbf{X} = \gamma^{-1}\mathbf{P} > 0$ e obtém-se finalmente as LMIs:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_{cl} & \mathbf{X}\mathbf{B}_{cl} & \mathbf{C}_{cl}^T \\ \mathbf{B}_{cl}^T\mathbf{X} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{cl}^T \\ \mathbf{C}_{cl} & \mathbf{D}_{cl} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad \mathbf{X} > 0. \tag{6.26}$$

A LMI (6.26) apresenta como incógnitas γ, $\mathbf{X}$ e as matrizes do modelo de estados do controlador ($\mathbf{A}_K$, $\mathbf{B}_K$, $\mathbf{C}_K$, $\mathbf{D}_K$) que se encontram dentro das matrizes do modelo de estados da malha fechada ($\mathbf{A}_{cl}$, $\mathbf{B}_{cl}$, $\mathbf{C}_{cl}$, $\mathbf{D}_{cl}$). Com isso, é interessante reescrever (6.26) de forma a tornar explícitas as matrizes do controlador dinâmico que se deseja obter. Com esta finalidade, as matrizes em (6.15) do modelo de estados da malha fechada podem ser reescritas como [1]:

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{I}_K & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \\ \mathbf{C}_K & \mathbf{D}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_K \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{6.27}$$

$$\mathbf{B}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{I}_K & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \\ \mathbf{C}_K & \mathbf{D}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}, \tag{6.28}$$

$$\mathbf{C}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \\ \mathbf{C}_K & \mathbf{D}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_K \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{6.29}$$

$$\mathbf{D}_{cl} = \mathbf{D}_{11} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \\ \mathbf{C}_K & \mathbf{D}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}, \tag{6.30}$$

onde $\mathbf{I}_K$ e $\mathbf{0}_K$ são, respectivamente, uma matriz identidade e uma matriz de zeros, ambas de ordem $k \times k$.

As matrizes (6.27), (6.28), (6.29) e (6.30) podem ser reescritas como:

$$\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_a\mathbf{K}_a\mathbf{C}_a, \tag{6.31}$$

$$\mathbf{B}_{cl} = \mathbf{B}_{1,a} + \mathbf{B}_a\mathbf{K}_a\mathbf{D}_{21,a} \tag{6.32}$$

$$\mathbf{C}_{cl} = \mathbf{C}_{1,a} + \mathbf{D}_{12,a}\mathbf{K}_a\mathbf{C}_a \tag{6.33}$$

$$\mathbf{D}_{cl} = \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12,a}\mathbf{K}_a\mathbf{D}_{21,a}, \tag{6.34}$$

com:

$$\mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \\ \mathbf{C}_K & \mathbf{D}_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{1,a} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{1,a} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{I}_K & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_K \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{12,a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{21,a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}.$$

Vale ressaltar que houve um aumento na ordem matricial para $n+k$ em $\mathbf{A}_a$ por exemplo.

Usando (6.31), (6.32), (6.33) e (6.34), a primeira desigualdade matricial de (6.26) pode ser reescrita como:

$$\Psi + \mathbf{Q}^T\mathbf{K}_a^T\mathbf{R}_X + \mathbf{R}_X^T\mathbf{K}_a\mathbf{Q} < 0, \tag{6.35}$$

onde:

$$\mathbf{R}_X = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_a^T\mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12,a}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_a & \mathbf{D}_{21,a} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$
$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_a & \mathbf{X}\mathbf{B}_{1,a} & \mathbf{C}_{1,a}^T \\ \mathbf{B}_{1,a}^T\mathbf{X} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_{1,a} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

É importante ressaltar que:

$$\mathbf{R}_X = \mathbf{R}\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

com $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_a^T & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12,a}^T \end{bmatrix}$.

Na sequência, é necessário introduzir o *Projection Lemma* [16] por este ser de fundamental importância no método de solução aqui proposto. O *Projection Lemma* diz que, dada uma matriz simétrica $\Psi \in \Re^{m\times m}$ e duas matrizes $\mathbf{R}_X$ e $\mathbf{Q}$ de dimensão de coluna m, o problema (6.35) é factível com relação à matriz $\mathbf{K}_a$ de dimensões compatíveis se e somente se

$$\mathbf{N}_{R_X}^T\Psi\mathbf{N}_{R_X} < 0, \quad \mathbf{N}_Q^T\Psi\mathbf{N}_Q < 0, \tag{6.37}$$

onde $\mathbf{N}_{R_X}$ e $\mathbf{N}_Q$ denotam bases arbitrárias do espaço nulo de $\mathbf{R}_X$ e $\mathbf{Q}$ respectivamente [29].

É importante salientar que (6.37) é obtida a partir de (6.35) devido ao fato de:

- $\mathbf{N}_{R_X}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{K}_a^T\mathbf{R}_X + \mathbf{R}_X^T\mathbf{K}_a\mathbf{Q})\mathbf{N}_{R_X} = \mathbf{0}$;
- $\mathbf{N}_Q^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{K}_a^T\mathbf{R}_X + \mathbf{R}_X^T\mathbf{K}_a\mathbf{Q})\mathbf{N}_Q = \mathbf{0}$.

É possível verificar que a expressão (6.35) é uma desigualdade não linear e apresenta as seguintes variáveis γ, $\mathbf{X}$, $\mathbf{A}_K$, $\mathbf{B}_K$, $\mathbf{C}_K$ e $\mathbf{D}_K$. Com o uso do *Projection Lemma*, as incógnitas referentes às matrizes do controlador dinâmico ($\mathbf{A}_K$, $\mathbf{B}_K$, $\mathbf{C}_K$, $\mathbf{D}_K$) são eliminadas do problema LMI em questão e as expressões em (6.37) (resultantes do *Projection Lemma*) são desigualdades matriciais lineares nas incógnitas restantes (γ e $\mathbf{X}$).

Afim de tornar explícita a variável matricial $\mathbf{X}$ na expressão da base do espaço nulo de $\mathbf{R}_X$, tem-se, a partir de (6.36), que:

$$\mathbf{N}_{R_X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{N}_R,$$

pois:

$$\mathbf{R}_X \mathbf{N}_{R_X} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{N}_R = \mathbf{R}\mathbf{N}_R = \mathbf{0}.$$

Utilizando o *Projection Lemma*, a existência de $\mathbf{K}_a$ em (6.35) é equivalente à existência de γ e $\mathbf{X} > 0$ tal que (6.38) e (6.39) sejam satisfeitas:

$$\mathbf{N}_Q^T \Psi \mathbf{N}_Q < 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{N}_Q^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_a & \mathbf{X}\mathbf{B}_{1,a} & \mathbf{C}_{1,a}^T \\ \mathbf{B}_{1,a}^T\mathbf{X} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_{1,a} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{N}_Q < 0, \tag{6.38}$$

$$\mathbf{N}_{R_X}^T \Psi \mathbf{N}_{R_X} < 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{N}_R^T \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}_a^T + \mathbf{A}_a\mathbf{X}^{-1} & \mathbf{B}_{1,a} & \mathbf{X}^{-1}\mathbf{C}_{1,a}^T \\ \mathbf{B}_{1,a}^T & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_{1,a}\mathbf{X}^{-1} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{N}_R < 0. \tag{6.39}$$

Como a expressão (6.39) é não-linear em $\mathbf{X}$, faz-se $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{Y} > 0 \in \Re^{(n+k)\times(n+k)}$ que pode ser escrita como $\mathbf{XY} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$. Utilizando (6.38) e (6.39), a síntese do controlador H_∞ de ordem fixa pode ser realizada após a obtenção das variáveis matriciais $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T$ do problema de otimização que segue [4, 29]:

$$P_2 : \begin{cases} \textit{minimizar } \gamma \\ \textit{sujeito a} : \end{cases}$$

$$h(\xi) = \mathbf{XY} - \mathbf{I} = \mathbf{0}, \tag{6.40}$$

$$\mathbf{N}_Q^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_a & \mathbf{X}\mathbf{B}_{1,a} & \mathbf{C}_{1,a}^T \\ \mathbf{B}_{1,a}^T\mathbf{X} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_{1,a} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{N}_Q < 0, \tag{6.41}$$

$$\mathbf{N}_R^T \begin{bmatrix} \mathbf{Y}\mathbf{A}_a^T + \mathbf{A}_a\mathbf{Y} & \mathbf{B}_{1,a} & \mathbf{Y}\mathbf{C}_{1,a}^T \\ \mathbf{B}_{1,a}^T & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_{1,a}\mathbf{Y} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{N}_R < 0, \tag{6.42}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \geq 0. \tag{6.43}$$

A LMI (6.43) é uma forma de impor através de uma única expressão que tanto $\mathbf{X}$ quanto $\mathbf{Y}$ são matrizes positivo-definidas, mantendo consistência com a restrição (6.40). Segundo a referência [4], a inclusão da LMI (6.43) também melhora a estabilidade do algoritmo de solução a ser apresentado na seção 6.3.

A expressão (6.40) é a condição de inversão matricial $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{XY} = \mathbf{I}$ que deve ser satisfeita para que as matrizes do modelo de estados do controlador de ordem fixa possam ser obtidas (o procedimento para a obtenção de tais matrizes é descrito no final desta seção). Esta expressão é uma restrição não-convexa, e, portanto, neste trabalho é inserida na função Lagrangiana Aumentada de forma a tornar o problema mais fácil de ser tratado numericamente. Afim de verificar a não-convexidade da restrição (6.40), a Figura 6.1 fornece a representação gráfica de $h(\xi)$ para o caso em que as variáveis matriciais $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ são de ordem 1×1. É possível verificar que a região gerada por $\mathbf{XY} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$ é não-convexa. O fato de $h(\xi)$ ser não-convexa, pode, portanto, ser generalizado para os casos em que $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ apresentam ordem maior que 1.

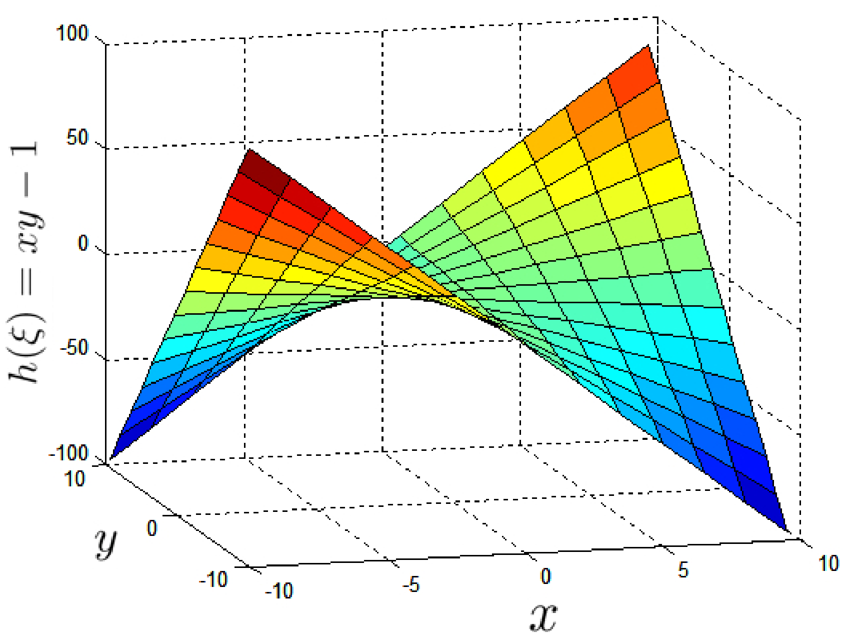

Figura 6.1: Representação gráfica da restrição $h(\xi) = xy - 1 = 0$.

Com isso, o problema de otimização em questão pode ser aproximado por uma série de novos problemas de otimização, cada um envolvendo a minimização de uma função Lagrangiana Aumentada sujeita às restrições LMIs (6.41), (6.42) e (6.43), ou seja,

$$P_3 : \begin{cases} \textit{minimizar} \;\; \Phi_c(\xi, \Lambda) = \gamma + \sum_{ij} \Lambda_{ij}(\mathbf{XY} - \mathbf{I})_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{ij} c_{ij}(\mathbf{XY} - \mathbf{I})^2_{ij} \\ \textit{sujeito a}: \;\; (6.41), \;\; (6.42), \;\; (6.43), \end{cases}$$

onde Λ_{ij} são os multiplicadores de lagrange e c_{ij} são os parâmetros de penalidade. É importante ressaltar que cada restrição contida em $\mathbf{XY} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$ possui o seu multiplicador de lagrange e o seu parâmetro de penalidade associado.

Devido ao fato de se poder utilizar algoritmos de programação semidefinida contidos em aplicativos tais como MATLAB, as restrições LMIs (6.41), (6.42) e (6.43) não foram transportadas para a função objetivo Φ_c.

Na forma matricial, a função objetivo de P_3 torna-se:

$$\Phi_c(\xi, \Lambda) = \gamma + Tr(\Lambda^T(\mathbf{XY} - \mathbf{I})) + \frac{1}{2}vec^T(\mathbf{XY} - \mathbf{I})\,\mathbf{C}\,vec(\mathbf{XY} - \mathbf{I}), \tag{6.44}$$

onde $\mathbf{C}$ é uma matriz diagonal de parâmetros de penalidade positivos e Λ é uma matriz de multiplicadores de Lagrange.

Para um melhor entendimento sobre a obtenção de (6.44), consultar o apêndice E deste trabalho.

Após a obtenção da variável matricial $\mathbf{X}$ e de γ do problema de otimização P_3, a construção do controlador de ordem fixa ocorre resolvendo o problema de factibilidade (6.35). As incógnitas neste problema de factibilidade são apenas as matrizes que definem o modelo de estados do controlador ($\mathbf{A}_K$, $\mathbf{B}_K$, $\mathbf{C}_K$, $\mathbf{D}_K$). Vale ressaltar que, devido à construção do controlador consistir em um problema de factibilidade, a solução não é única, sendo, portanto, possível obter mais de um controlador que satisfaça ao problema em questão. Neste trabalho, o comando *feasp* do MATLAB (que implementa o algoritmo projetivo de Nesterov e Nemirovski [54, 55]) foi utilizado para resolver este problema de factibilidade.

6.3 Algoritmo Utilizado na Síntese do Controlador H_∞ de Ordem Fixa

Baseando-se nas referências [3] e [4], o algoritmo aqui apresentado é dividido em 4 passos principais, os quais são detalhados a seguir.

Passo 1 - Fase Inicial

O algoritmo é inicializado através da determinação de um ponto factível das restrições LMIs (6.41), (6.42) e (6.43). Inicializa-se a matriz diagonal dos parâmetros de penalidade $\mathbf{C}^0$ com valores positivos maiores que zero (da ordem de $1e-6$ por exemplo) e a matriz dos multiplicadores de Lagrange Λ^0 como sendo uma matriz de zeros. São definidos os seguintes parâmetros: $\rho > 1$ e $\varepsilon > 0$. Valores utilizados neste trabalho são $\rho = 2.0$ e $\varepsilon = 0.00001$.

Passo 2 - Fase de Otimização

Para uma dada iteração m minimiza-se $\phi_{c^m}(\xi, \Lambda^m)$ sujeito às restrições LMIs (6.41), (6.42) e (6.43). Com isso, obtém-se ξ^{m+1}. Utiliza-se ξ^m (variáveis de decisão da iteração anterior) como um valor inicial para o processo de otimização deste passo. As ferramentas de otimização utilizadas neste passo serão melhor detalhadas na seção 6.4.

Passo 3 - Atualização do Parâmetro de Penalidade e dos Multiplicadores de Lagrange

A matriz dos multiplicadores de Lagrange Λ é atualizada com uma regra de atualização de primeira ordem. Para isto, realiza-se o seguinte procedimento:

Passo 3.1: A diagonal da matriz dos parâmetros de penalidade é vetorizada;

Passo 3.2: O vetor obtido no passo 3.1 é transformado em uma matriz cheia (vide exemplo que segue);

Passo 3.3: A matriz cheia obtida no passo 3.2 é utilizada para atualizar os multiplicadores de Lagrange.

Afim de tornar mais claro o entendimento da atualização dos multiplicadores de Lagrange, mostra-se um exemplo com a matriz dos parâmetros de penalidade $\mathbf{C}^m_{4\times4}$ na iteração m:

$$\mathbf{C}^m = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}$$

.

A diagonal vetorizada da matriz $\mathbf{C}^m$ é: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}^T$.

É possível obter uma matriz cheia $\mathbf{S}^m$ a partir de $\mathbf{v}$ da forma como segue:

$$\mathbf{S}^m = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Caso $\mathbf{v}$ fosse igual a $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 \end{bmatrix}^T$, obter-se-ia:

$$\mathbf{S}^m = \begin{bmatrix} c_1 & c_4 & c_7 \\ c_2 & c_5 & c_8 \\ c_3 & c_6 & c_9 \end{bmatrix}.$$

Com isso, a matriz dos multiplicadores de Lagrange pode ser atualizada como:

$$\Lambda^{m+1} = \Lambda^m + \mathbf{S}^m \circ (\mathbf{X}^{m+1}\mathbf{Y}^{m+1} - \mathbf{I}),$$

onde $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (A_{ij}B_{ij})$ denota o produto de Schur (ou Hadamard). Esta operação consiste em cada termo de $\mathbf{A}$ multiplicar o termo de mesma posição em $\mathbf{B}$. Seja o exemplo que segue:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_3b_3 \\ a_2b_2 & a_4b_4 \end{bmatrix}.$$

Esta regra de atualização é importante para a convergência do algoritmo Lagrangiano Aumentado [4]. Uma discussão mais detalhada sobre este critério de atualização pode ser encontrada em [57].

A atualização da matriz dos parâmetros de penalidade $\mathbf{C}$ ocorre da seguinte forma:

- cada termo da diagonal de $\mathbf{C}$ (cada parâmetro de penalidade) é atualizado separadamente e está associado a uma restrição diferente;

- um dado parâmetro de penalidade é multiplicado por ρ quando o valor na iteração atual da restrição com a qual este parâmetro de penalidade está associado for maior que ϵ (valor positivo da ordem de 10^{-8} por exemplo).

Este critério de atualização dos parâmetros de penalidade tem a finalidade de penalizar separadamente cada restrição de igualdade $(\mathbf{XY}-\mathbf{I})_{ij}=0$ e forçar sua factibibilidade ao final do processo de otimização do Lagrangiano Aumentado.

Em notação matemática, cada termo da diagonal c_{ij} da matriz dos parâmetros de penalidade $\mathbf{C}$ é atualizado através do critério que segue:

$$c_{ij}^{m+1} = \begin{cases} \rho c_{ij}^{m} \; se \; |(\mathbf{XY}-\mathbf{I})_{ij}^{m+1}| > \epsilon \\ c_{ij}^{m} \; se \; |(\mathbf{XY}-\mathbf{I})_{ij}^{m+1}| \leq \epsilon \end{cases} \tag{6.45}$$

Passo 4 - Critério de Convergência

Se $\|\mathbf{XY}-\mathbf{I}\|_F > \varepsilon$, faz-se $m = m+1$ e retorna-se ao Passo 2. Caso contrário, tenta-se construir o controlador H_∞ de ordem k. Se a construção falhar, o valor de ε adotado não foi suficientemente pequeno para satisfazer a condição de inversão matricial $\mathbf{X}^{-1}=\mathbf{Y}$. Neste caso, reduz-se o valor de ε (divide-se ε por um número positivo e maior que 1), faz-se $m=m+1$ e retorna-se para o passo 2.

6.4 Minimização da Função Lagrangiana Aumentada com Restrições LMIs Explícitas

Esta seção tem como objetivo mostrar as técnicas utilizadas no processo de minimização da função Lagrangiana Aumentada $\phi_{c^m}(\xi,\Lambda^m)$ sujeita à restrições LMIs (6.41), (6.42) e (6.43) para $\mathbf{C}^m$ e Λ^m fixos.

A seguir é realizada a linearização de $\phi_c(\xi,\Lambda)$ para que seja possível a utilização de algoritmos de otimização semidefinida já disponíveis em aplicativos tais como MATLAB, visto que tais algoritmos requerem que a função objetivo seja linear.

Seja ξ um ponto factível, a função $\phi_c(\xi,\Lambda)$ pode ser escrita como uma expansão em série de Taylor com termos até de segunda ordem da forma como segue:

$$\Pi_c(\xi,\Lambda) = \nabla\Phi_c(\xi,\Lambda)^T\mathbf{d}\xi + \frac{1}{2}\mathbf{d}\xi^T\mathbf{H}\mathbf{d}\xi, \tag{6.46}$$

onde $\mathbf{H}$ é a matriz hessiana de $\Phi_c(\xi, \Lambda)$. É importante ressaltar que o termo constante que deveria aparecer na série de Taylor (6.46) não afeta o problema de otimização e, portanto, foi desconsiderado na função aproximada Π_c.

Com isso, o problema P_3 pode ser reescrito como P_4 (denominado modelo tangente) onde ξ é um ponto factível (ponto da iteração passada) e a direção de descida $\mathbf{d}\xi$ é a incógnita deste problema de otimização:

$$P_4: \begin{cases} minimizar\ \Pi_c(\xi, \Lambda) = \nabla\Phi_c(\xi, \Lambda)^T \mathbf{d}\xi + \frac{1}{2}\mathbf{d}\xi^T \mathbf{H} \mathbf{d}\xi \\ sujeito\ a:\ \xi + \mathbf{d}\xi \in\ LMIs\ (6.41),\ (6.42),\ (6.43), \end{cases}$$

Afim de se determinar o gradiente de $\phi_c(\xi, \Lambda)$, a expressão (6.44) pode ser escrita como:

$$\Phi_c(\xi, \Lambda) = \Phi_1 + \Phi_2, \tag{6.47}$$

onde $\Phi_1 = \gamma + Tr(\Lambda^T(\mathbf{XY} - \mathbf{I}))$ e $\Phi_2 = \frac{1}{2}vec^T(\mathbf{XY} - \mathbf{I})\,\mathbf{C}\,vec(\mathbf{XY} - \mathbf{I})$.

Seja $\mathbf{E}$ uma matriz simétrica e $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes reais de dimensões compatíveis. As seguintes expressões de cálculo matricial são válidas [62]:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T, \tag{6.48}$$

$$\frac{\partial\ \mathbf{AEB}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial\ vec(\mathbf{AEB})}{\partial \mathbf{E}} = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A})\mathbf{T}, \tag{6.49}$$

$$\frac{\partial\ Tr(\mathbf{AEB})}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{T}^T vec(\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T), \tag{6.50}$$

onde $\mathbf{T}$ é a derivada da variável matricial $\mathbf{E}$ em relação aos próprios elementos de $\mathbf{E}$. A matriz $\mathbf{T}$ surge devido ao fato de $\mathbf{E}$ apresentar uma estrutura especial (ser simétrica). Dessa forma, $\mathbf{T}$ mapeia o triângulo inferior vetorizado de uma determinada matriz em sua completa representação vetorial.

Para maiores detalhes sobre a obtenção da matriz $\mathbf{T}$ e sobre o uso das expressões (6.48), (6.49) e (6.50), consultar o apêndice F deste trabalho.

Utilizando (6.48), (6.49) e (6.50), obtém-se:

$$\frac{\partial\ \Phi_1}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{T}^T vec(\Lambda \mathbf{Y}); \quad \frac{\partial\ \Phi_2}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{T}^T(\mathbf{Y} \otimes \mathbf{I})\,\mathbf{C}\,vec(\mathbf{XY} - \mathbf{I}); \tag{6.51}$$

$$\frac{\partial\ \Phi_1}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{T}^T vec(\mathbf{X}\Lambda); \quad \frac{\partial\ \Phi_2}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{T}^T (\mathbf{I} \otimes \mathbf{X})\, \mathbf{C}\, vec(\mathbf{XY} - \mathbf{I}); \tag{6.52}$$

$$\frac{\partial\ \Phi_1}{\partial \gamma} = 1; \quad \frac{\partial\ \Phi_2}{\partial \gamma} = 0. \tag{6.53}$$

Através de (6.51), (6.52) e (6.53), o cálculo do gradiente de $\Phi_c(\xi, \Lambda)$ é realizado da seguinte forma:

$$\nabla \Phi_c(\xi, \Lambda) = \nabla \Phi_1 + \nabla \Phi_2 = \begin{bmatrix} \partial \Phi_1 / \partial \mathbf{X} \\ \partial \Phi_1 / \partial \mathbf{Y} \\ \partial \Phi_1 / \partial \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial \Phi_2 / \partial \mathbf{X} \\ \partial \Phi_2 / \partial \mathbf{Y} \\ \partial \Phi_2 / \partial \gamma \end{bmatrix}. \tag{6.54}$$

Com isso, o vetor $\nabla \Phi_c(\xi, \Lambda)$ é calculado como:

$$\nabla \Phi_c(\xi, \Lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T vec(\Lambda \mathbf{Y}) + \mathbf{T}^T (\mathbf{Y} \otimes \mathbf{I})\, \mathbf{C}\, vec(\mathbf{XY} - \mathbf{I}) \\ \mathbf{T}^T vec(\mathbf{X}\Lambda) + \mathbf{T}^T (\mathbf{I} \otimes \mathbf{X})\, \mathbf{C}\, vec(\mathbf{XY} - \mathbf{I}) \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6.55}$$

É importante ressaltar que $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ ($\mathbf{C}$ é diagonal).

Afim de se determinar a hessiana de $\Phi_c(\xi, \Lambda)$, obtém-se, com base em (6.51), (6.52) e (6.53), as seguintes expressões:

$$\frac{\partial^2\ (\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial \mathbf{X}^2} = \mathbf{T}^T (\mathbf{Y} \otimes \mathbf{I})\, \mathbf{C}\, (\mathbf{Y} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{T}; \tag{6.56}$$

$$\frac{\partial^2\ (\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial \mathbf{X} \partial \mathbf{Y}} = \mathbf{T}^T [(\mathbf{I} \otimes \Lambda) + (\mathbf{Y} \otimes \mathbf{I})\, \mathbf{C}\, (\mathbf{I} \otimes \mathbf{X}) + (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{S} \circ (\mathbf{XY} - \mathbf{I})))] \mathbf{T}; \tag{6.57}$$

$$\frac{\partial^2\ (\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial \mathbf{Y}^2} = \mathbf{T}^T (\mathbf{I} \otimes \mathbf{X})\, \mathbf{C}\, (\mathbf{I} \otimes \mathbf{X}) \mathbf{T}; \tag{6.58}$$

$$\frac{\partial^2\ (\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial \mathbf{Y} \partial \mathbf{X}} = \mathbf{T}^T [(\Lambda^T \otimes \mathbf{I}) + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{X})\, \mathbf{C}\, (\mathbf{Y} \otimes \mathbf{I}) + (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{S} \circ (\mathbf{XY} - \mathbf{I}))^T)] \mathbf{T}; \tag{6.59}$$

$$\frac{\partial^2\ (\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial \mathbf{X} \partial \gamma} = \frac{\partial^2\ (\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial \mathbf{Y} \partial \gamma} = \mathbf{0}; \tag{6.60}$$

$$\frac{\partial^2\ (\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial \gamma^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\ (\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial \gamma \partial \mathbf{X}} = \frac{\partial^2\ (\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial \gamma \partial \mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \tag{6.61}$$

onde a matriz $\mathbf{S}$ é construída conforme detalhado na seção 6.3.

Com base em (6.56), (6.57), (6.58), (6.59), (6.60) e (6.61), a hessiana da função Lagrangiana Aumentada $\Phi_c(\xi, \Lambda)$ é escrita como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \partial^2 (\Phi_1 + \Phi_2) / \partial \mathbf{X}^2 & \partial^2 (\Phi_1 + \Phi_2) / \partial \mathbf{X} \partial \mathbf{Y} & \partial^2 (\Phi_1 + \Phi_2) / \partial \mathbf{X} \partial \gamma \\ \partial^2 (\Phi_1 + \Phi_2) / \partial \mathbf{Y} \partial \mathbf{X} & \partial^2 (\Phi_1 + \Phi_2) / \partial \mathbf{Y}^2 & \partial^2 (\Phi_1 + \Phi_2) / \partial \mathbf{Y} \partial \gamma \\ \partial^2 (\Phi_1 + \Phi_2) / \partial \gamma \partial \mathbf{X} & \partial^2 (\Phi_1 + \Phi_2) / \partial \gamma \partial \mathbf{Y} & \partial^2 (\Phi_1 + \Phi_2) / \partial \gamma^2 \end{bmatrix}. \tag{6.62}$$

Vide apêndice G deste trabalho para um exemplo de obtenção do gradiente e da hessiana de $\Phi_c(\xi, \Lambda)$.

Conforme mencionado anteriormente, a obtenção de controladores de ordem fixa é um problema não-convexo. Dessa forma, não se pode esperar que $\mathbf{H}$ seja positivo-definida. Para contornar tal dificuldade, utiliza-se neste trabalho a fatoração indefinida de Cholesky tal qual proposta em [17], onde uma nova regra de pivoteamento proposta por Ashcraft, Grimes e Lewis [5] é utilizada e torna o método mais eficiente. A fatoração indefinida de Cholesky consiste em fazer uma decomposição na forma $\mathbf{H} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}(\mathbf{D}+\mathbf{E})\mathbf{L}^T\mathbf{P}$, onde:

- $\mathbf{P}$ é uma matriz de permutação;
- $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior;
- $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal que conterá os autovalores da matriz hessiana;
- $\mathbf{E}$ é uma matriz diagonal que altera os autovalores negativos e nulos da matriz hessiana de forma a tornar esta positivo-definida.

Observando a função objetivo do problema P_4, verifica-se que esta é não-linear em $\mathbf{d}\xi$. Com a finalidade de obter um problema de otimização com uma função objetivo linear, utiliza-se a fatoração indefinida de Cholesky da matriz hessiana e aplica-se o complemento de Schur na função objetivo do problema P_4. Com isso, é possível obter uma Desigualdade Matricial Linear onde aparece uma nova variável t, ou seja,

$$t > \nabla\Phi_c(\xi, \Lambda)^T\mathbf{d}\xi + \frac{1}{2}\mathbf{d}\xi^T\mathbf{P}^T\mathbf{L}(\mathbf{D}+\mathbf{E})\mathbf{L}^T\mathbf{P}\mathbf{d}\xi$$

$$t - \nabla\Phi_c(\xi, \Lambda)^T\mathbf{d}\xi - \frac{1}{2}\mathbf{d}\xi^T\mathbf{P}^T\mathbf{L}(\mathbf{D}+\mathbf{E})\mathbf{L}^T\mathbf{P}\mathbf{d}\xi > 0,$$

e aplicando o complemento de Schur tem-se:

$$\begin{bmatrix} t - \nabla\Phi_c(\xi, \Lambda)^T\mathbf{d}\xi & \mathbf{d}\xi^T\mathbf{P}^T\mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T\mathbf{P}\mathbf{d}\xi & 2(\mathbf{D}+\mathbf{E})^{-1} \end{bmatrix} > 0. \tag{6.63}$$

Portanto, o problema P_4 pode ser reescrito como P_5, onde as variáveis de otimização são t e $\mathbf{d}\xi$:

$$P_5: \begin{cases} minimizar\ t \\ sujeito\ a: \begin{bmatrix} t - \nabla\Phi_c(\xi,\Lambda)^T\mathbf{d}\xi & \mathbf{d}\xi^T\mathbf{P}^T\mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T\mathbf{P}\mathbf{d}\xi & 2(\mathbf{D}+\mathbf{E})^{-1} \end{bmatrix} > 0; \\ \qquad\qquad \xi + \mathbf{d}\xi \in LMIs\ (6.41),\ (6.42),\ (6.43). \end{cases}$$

Vale salientar que, devido ao uso do complemento de Schur, a minimização de t implica na minimização de $\Pi_c(\xi,\Lambda)$.

O problema P_5 pode ser implementado em aplicativos tais como o MATLAB utilizando as rotinas de otimização semidefinida atualmente disponíveis [30].

Após a obtenção de uma direção de descida $\mathbf{d}\xi$ através da solução de P_5, realiza-se uma busca unidimensional afim de se determinar o passo ótimo a ser dado na direção de descida em questão. Em outras palavras, deseja-se determinar α de forma que o novo ponto $\xi+\alpha\,\mathbf{d}\xi$ esteja dentro da região factível e forneça a maior redução possível no valor da função $\Phi_c(\xi,\Lambda)$.

A busca unidimensional é realizada substituindo-se $\xi+\alpha\,\mathbf{d}\xi$ na função objetivo (6.44) com Λ e $\mathbf{C}$ fixos. Sejam $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{Y}_1$ e γ_1 provenientes do vetor conhecido ξ e $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{Y}_2$ e γ_2 provenientes do vetor de incógnitas $\mathbf{d}\xi$, a substituição de $\xi+\alpha\,\mathbf{d}\xi$ em (6.44) gera a seguinte a expressão:

$$\Phi_c(\xi+\alpha\,\mathbf{d}\xi,\Lambda) = \gamma_1 + \alpha\,\gamma_2 + Tr(\Lambda^T(\mathbf{F})) + \frac{1}{2}vec^T(\mathbf{F})\,\mathbf{C}\,vec(\mathbf{F}), \qquad (6.64)$$

onde $\mathbf{F} = (\mathbf{X}_1+\alpha\,\mathbf{X}_2)(\mathbf{Y}_1+\alpha\,\mathbf{Y}_2) - \mathbf{I}$.

Expandindo (6.64), obtém-se um polinômio de grau 4 em α:

$$\Phi_c(\xi+\alpha\ \mathbf{d}\xi,\Lambda) = a_4\alpha^4 + a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0, \qquad (6.65)$$

onde:

- $p_1 = vec(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1 - \mathbf{I})$, $p_2 = vec(\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_1 + \mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2)$ e $p_3 = vec(\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2)$;
- $a_4 = \frac{1}{2}(p_3^T\,\mathbf{C}\,p_3)$;
- $a_3 = \frac{1}{2}(p_3^T\,\mathbf{C}\,p_2 + p_2^T\,\mathbf{C}\,p_3)$;
- $a_2 = Tr(\Lambda^T\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2) + \frac{1}{2}(p_1^T\,\mathbf{C}\,p_3 + p_3^T\,\mathbf{C}\,p_1 + p_2^T\,\mathbf{C}\,p_2)$;
- $a_1 = \gamma_2 + Tr(\Lambda^T\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2 + \Lambda^T\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_1) + \frac{1}{2}(p_1^T\,\mathbf{C}\,p_2 + p_2^T\,\mathbf{C}\,p_1)$;
- $a_0 = \gamma_1 + Tr(\Lambda^T(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1 - \mathbf{I})) + \frac{1}{2}(p_1^T\,\mathbf{C}\,p_1)$.

Os valores de α que resultam em possíveis pontos de mínimo de $\Phi_c(\xi+\alpha\,\mathbf{d}\xi,\Lambda)$ são obtidos através das raízes da derivada de (6.65):

$$4a_4\alpha^3 + 3a_3\alpha^2 + 2a_2\alpha + a_1 = 0.$$

Todos os valores de α obtidos são testados e escolhe-se aquele que fornece o menor valor para $\Phi_c(\xi + \alpha\,\mathbf{d}\xi, \Lambda)$ dentro da região factível delimitada pelas LMIs (6.41), (6.42) e (6.43).

Capítulo 7

Resultados

Este capítulo traz resultados gerados através da obtenção e implementação de controladores de ordem fixa e de ordem completa. Os exemplos de aplicação 1 e 2 fornecem apenas resultados simulados. O exemplo de aplicação 3 fornece resultados simulados e experimentais.

7.1 Exemplo de Aplicação 1

Seja o modelo de estados proposto em [4] que segue:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & -1.5 & 0 & 0.0057 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & -0.6 & -0.0344 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ -0.852 & 0.29 & 0 & -0.014 & -0.29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.73 & 2.8289 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1000 \end{bmatrix}; \ \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.1146 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.16 & 0.8 \\ -19 & -3 \\ -0.0115 & -0.0087 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -139.0206 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -139.0206 \end{bmatrix}; \ \mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 142.8571 & 0 \\ 0 & 0 & 142.8571 \end{bmatrix}; \ \mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema original (sem controle) apresenta uma norma H_∞ de 32.10 dB. Deseja-se projetar um controlador H_∞ de primeira ordem que reduza o valor de pico da resposta em frequência do sistema original. Para isso, os seguintes parâmetros foram utilizados no algoritmo da seção 6.3:

$$\rho = 1.7, \quad \mathbf{C}^0 = 1e-8\,\mathbf{I}, \quad \Lambda^0 = \mathbf{0}, \quad \varepsilon = 1e-5,$$

onde $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade de dimensão $(n+k) \times (n+k)$.

A nova norma H_∞ obtida, após 38 iterações do Lagrangiano Aumentado, foi de 4.70 dB, ou seja, houve uma redução de 27.40 dB na norma H_∞ do sistema (vide Figura 7.1). Para efeitos de comparação, um controlador H_∞ de ordem completa, obtido através do comando *hinflmi* do MATLAB, fornece uma norma H_∞ de -1.24 dB.

É possível verificar na Figura 7.1 a presença de três curvas contínuas, as quais são justificadas devido ao fato de o sistema em malha fechada apresentar 3 entradas exógenas (um distúrbio e 2 ruídos de medição). Já a curva tracejada é única devido ao fato de o sistema em malha aberta apresentar uma única entrada exógena (1 distúrbio).

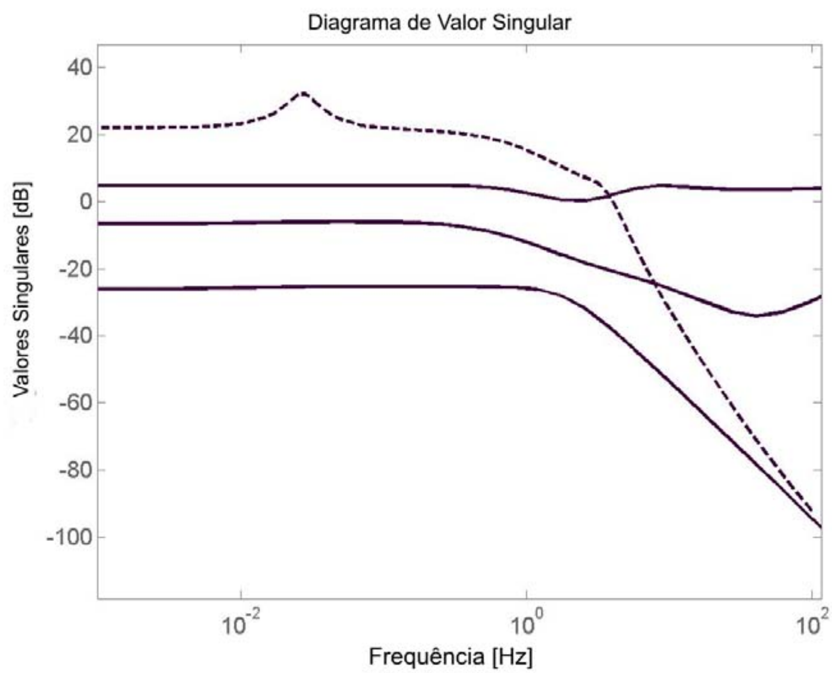

Figura 7.1: Diagrama de valor singular do sistema original (linha tracejada) e do sistema com o controlador H_∞ de primeira ordem (linha contínua).

O modelo de estados do controlador de primeira ordem obtido foi:

$$\mathbf{A}_K = \begin{bmatrix} -100.3347 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_K = \begin{bmatrix} -3.0688 & 5.7776 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_K = \begin{bmatrix} -15.7165 \\ -164.3474 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_K = \begin{bmatrix} 0.6833 & -0.8785 \\ 0.0096 & -0.4929 \end{bmatrix}.$$

A Figura 7.2 mostra a evolução nos valores de γ e $\|\mathbf{XY}-\mathbf{I}\|_F$.

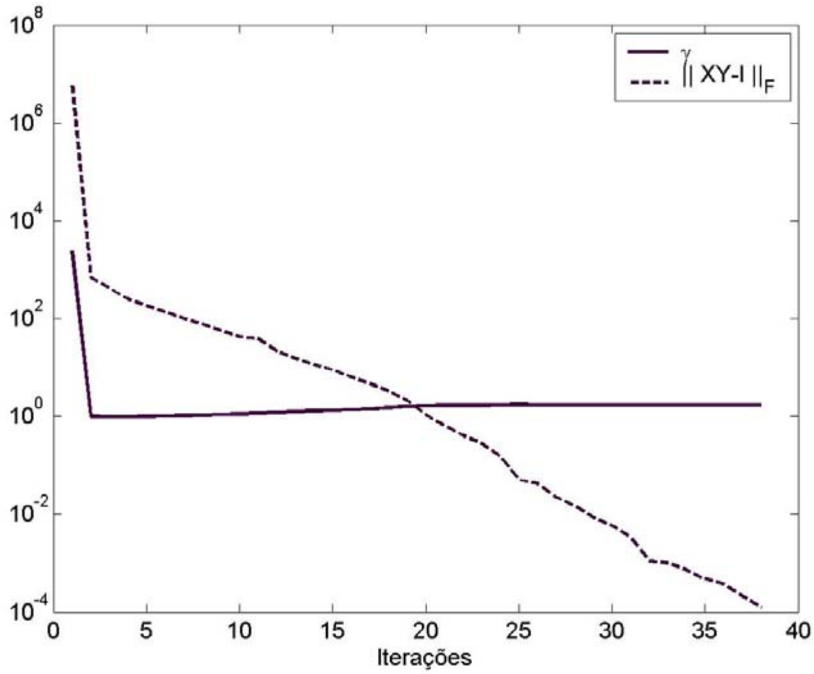

Figura 7.2: Valores de γ e $\|\mathbf{XY} - \mathbf{I}\|_F$ nas iterações do Lagrangiano Aumentado para o exemplo de aplicação 1.

Este exemplo de aplicação é também apresentado na referência [4], onde se obteve uma norma H_∞ de malha fechada de 5.21 dB.

7.2 Exemplo de Aplicação 2

Visualizando-se a Figura 7.3, o seguinte problema é proposto:

- a segunda massa (m_2) sofre um distúrbio externo;
- o sistema é controlado através da aplicação de uma força na primeira massa (m_1);
- as saídas desejadas são a posição da segunda massa e o sinal de controle;
- o sinal enviado ao controlador é a velocidade da segunda massa.

Adotam-se os seguintes valores para os parâmetros de massa e rigidez das molas:

- $m_1 = 0.8\ Kg$, $m_2 = 0.6\ Kg$, $k_1 = 352.0\ N/m$, $k_2 = 373.0\ N/m$.

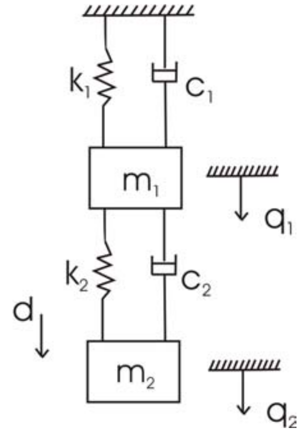

Figura 7.3: Massa-mola-amortecedor de dois graus de liberdade.

O vetor de forças externas e as matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento proporcional são:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}; \tag{7.1}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 725.0 & -373.0 \\ -373.0 & 373.0 \end{bmatrix}; \tag{7.2}$$

$$\mathbf{D} = 0.005\mathbf{M} + 0.001\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.7290 & -0.3730 \\ -0.3730 & 0.3760 \end{bmatrix}; \tag{7.3}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d. \tag{7.4}$$

O modelo de estados do sistema da Figura 7.3 é dado por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ -906.2500 & 466.2500 & -0.9113 & 0.4663 \\ 621.6667 & -621.6667 & 0.6217 & -0.6267 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{0.6} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{0.8} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

O sinal de controle foi adotado como sendo um dos sinais de desempenho com a finalidade de, além de tornar o problema não-singular, limitar sua amplitude. O valor de 0.01 incluído na segunda posição de $\mathbf{D}_{12}$ foi adotado para ponderar o sinal de controle e evitar que este apresente valores excessivos em amplitude.

Deseja-se projetar um controlador H_∞ de primeira ordem que reduza o valor de pico da resposta em frequência do sistema original (sem controle). Para isso, os seguintes parâmetros foram utilizados para o algoritmo apresentado na seção 6.3:

$$\rho = 1.7, \quad \mathbf{C}^0 = 10^{-10}\,\mathbf{I}, \quad \Lambda^0 = \mathbf{0}, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

O sistema original (sem controle) apresentou uma norma H_∞ de -9.30 dB. Utilizando o esquema de solução proposto neste trabalho, o controlador H_∞ de ordem fixa de primeira ordem obtido forneceu uma norma H_∞ de -31.30 dB para o sistema em malha fechada. Dessa forma, o controlador obtido reduziu em 22.00 dB o valor de pico no diagrama de valor singular do sistema em malha fechada (vide Figura 7.4). Apenas para efeitos de comparação, um controlador H_∞ de ordem completa fornece uma norma H_∞ de -36.40 dB.

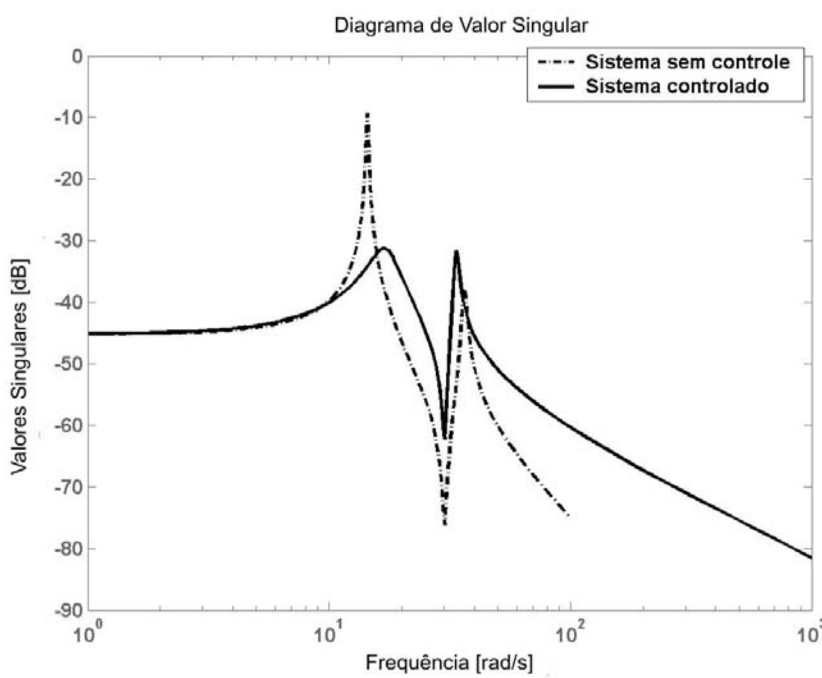

Figura 7.4: Diagrama de valor singular do sistema massa-mola-amortecedor sem controle (sistema original) e com o controlador H_∞ de primeira ordem.

O modelo de estados do controlador obtido foi:

$$\mathbf{A}_K = \left[\ -25.5903\ \right]; \quad \mathbf{B}_K = \left[\ 81.7789\ \right]; \quad \mathbf{C}_K = \left[\ -4.2654\ \right]; \quad \mathbf{D}_K = \left[\ 5.0210\ \right].$$

A Figura 7.5 mostra a evolução nos valores de γ, e $\|\mathbf{XY}-\mathbf{I}\|_F$. O maior parâmetro de penalidade obtido ao final do processo de otimização apresentou valor de 1.3796.

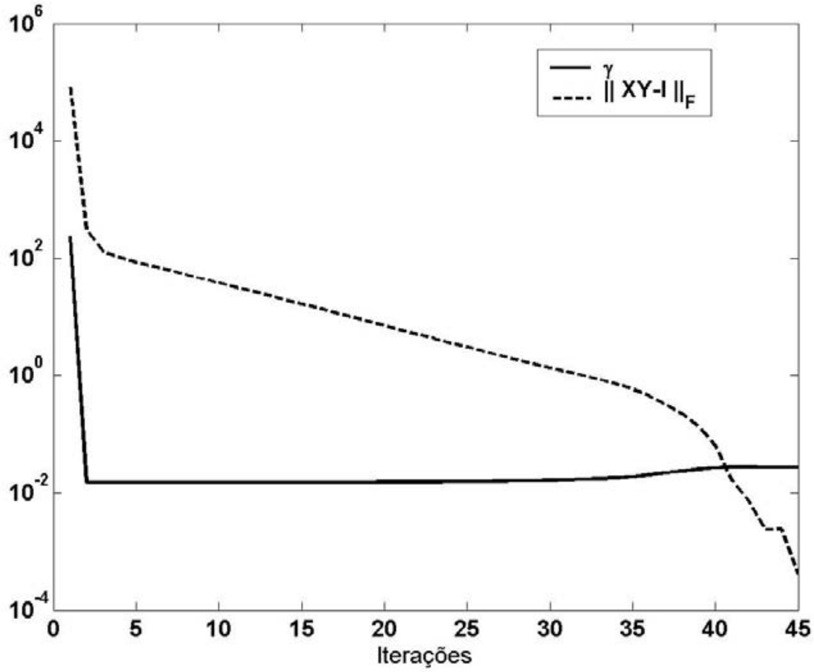

Figura 7.5: Valores de γ e $\|\mathbf{XY}-\mathbf{I}\|_F$ nas iterações do Lagrangiano Aumentado para o sistema massa-mola-amortecedor de 2 graus de liberdade.

A Figura 7.6 fornece a resposta temporal do sistema original e do sistema controlado a um distúrbio aleatório de média nula e desvio padrão unitário. É possível verificar que o controlador de primeira ordem foi capaz de atenuar o distúrbio.

A Figura 7.7 mostra o sinal de controle gerado quando da aplicação do distúrbio aleatório.

7.3 Exemplo de Aplicação 3

7.3.1 Introdução

Nesta seção é realizado o controle de uma viga engastada em uma de suas extremidades. São realizadas simulações computacionais e também a implementação prática através da montagem de uma bancada experimental (vide Figura 7.8).

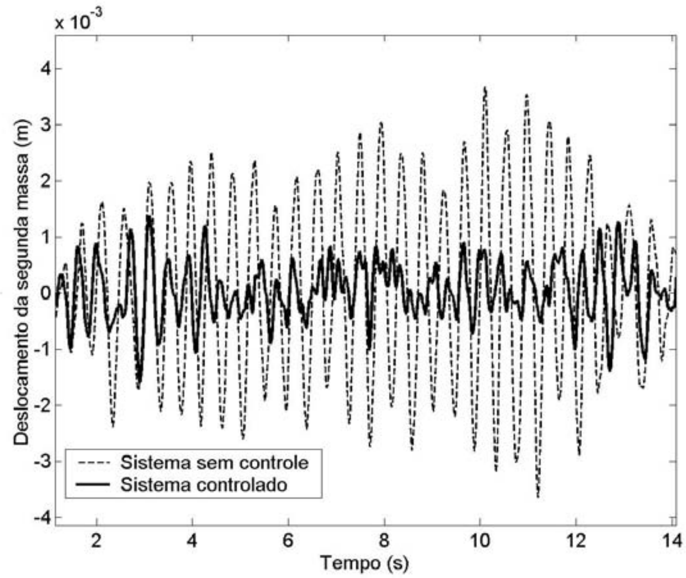

Figura 7.6: Sistema massa-mola-amortecedor de 2 graus de liberdade. Resposta dos sistemas original e controlado a um distúrbio aleatório de média zero e desvio padrão unitário.

Foram projetados 4 controladores H_∞ de ordem fixa e 1 controlador H_∞ de ordem completa com a finalidade de controlar a viga na faixa de frequência de 0 a 156 Hz.

O modelo matemático da viga foi obtido através da técnica de elementos finitos. Filtros de ponderação foram utilizados na fase de projeto dos controladores de ordem completa e de ordem fixa. Os controladores testados e apresentados neste capítulo se mostraram capazes de atenuar distúrbios externos na faixa de frequência de interesse e evitar o fenômeno de *spillover*.

7.3.2 Esquema de Controle e Bancada Experimental

Considerando o esquema apresentado na Figura 7.9, o controle da viga ocorre da seguinte forma:

- Adota-se a aceleração da extremidade não engastada (ponto C na Figura 7.9) como sendo a saída de desempenho do sistema e também o sinal enviado ao controlador;

- O sinal de controle atua na viga através de um grau de liberdade de rotação, ou seja, a viga é controlada através da aplicação de um momento (ponto A na Figura 7.9);

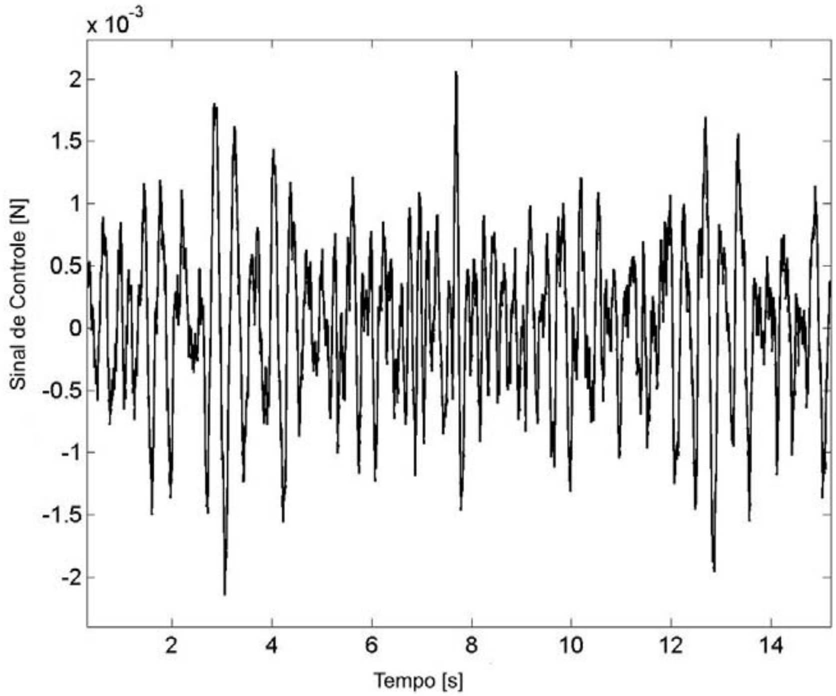

Figura 7.7: Sistema massa-mola-amortecedor de 2 graus de liberdade. Sinal de controle gerado devido ao controle do sistema quando da aplicação do distúrbio aleatório.

- O distúrbio externo, da mesma forma que a atuação de controle, é realizado através da aplicação de um momento (ponto B na Figura 7.9).

É importante ressaltar que este é um problema de controle não colocado, pois a informação enviada ao controlador é proveniente de um local diferente daquele no qual o sinal de controle está atuando.

A bancada experimental montada no Laboratório de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP é constituída por (vide Figura 7.10):

- 1 acelerômetro *PCB piezotronics* que possui a finalidade de medir a aceleração da viga na extremidade não engastada;

- 4 atuadores piezocerâmicos modelo QP10N fabricados pela *Quickpack*, sendo 1 par de atuadores responsáveis pela aplicação do sinal de controle e 1 par de atuadores responsáveis pela aplicação do distúrbio exógeno (vide Figura 7.11);

Figura 7.8: Bancada experimental para controle de viga engastada em uma das extremidades.

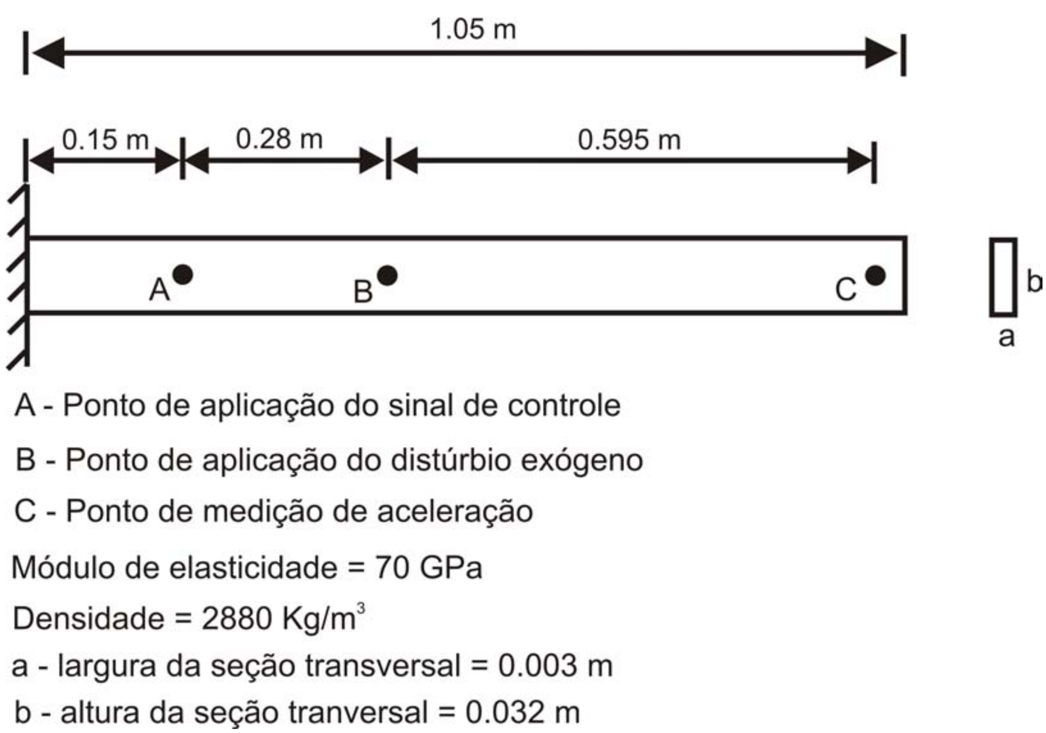

Figura 7.9: Esquema de controle da viga engastada em uma das extremidades.

- 3 filtros passa-baixa fabricados pela *Frequency Devices* modelo 900C/9L8B, sendo um deles com a finalidade de evitar *aliasing* do sinal enviado pelo acelerômetro e outros dois filtros utilizados com a finalidade de suavizar os sinais de atuação (sinal de controle e distúrbio externo) retirando harmônicas de alta frequência. Vale ressaltar que, devido ao fato de o sistema de aquisição de dados apresentar uma determinada frequência de amostragem, os sinais adquiridos dos sensores não devem apresentar harmônicas com frequência superior à metade da frequência de amostragem (teorema de Nyquist). Caso o teorema de Nyquist não seja satisfeito, ocorre o fenômeno de *aliasing*, o qual consiste no fato de componentes com frequência acima da metade da frequência de amostragem aparecerem como componentes de baixa frequência [67];

- 1 condicionador de sinal *PCB* modelo 482A05 dedicado ao acelerômetro utilizado;

- 2 amplificadores de potência modelo EL-1224 fabricados pela *Quickpack* e dedicados aos atuadores piezocerâmicos utilizados;

- 1 microcomputador com placas DSpace modelos DS2003 e DS2103 para a aquisição dos dados e geração do sinal de controle.

7.3.3 Modelo Obtido Através do Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos foi utilizado com o objetivo de se obter o modelo da estrutura para o posterior projeto dos controladores. A viga foi discretizada em 44 elementos finitos, obtendo-se 86 graus de liberdade, sendo 43 graus de liberdade de deslocamento transversal e 43 graus de liberdade de rotação. Ressalta-se que não estão sendo levados em consideração os graus de liberdade de deslocamento axial, já que estes apresentam modos em alta frequência e, portanto, fora da faixa de frequência de interesse.

Após a obtenção de um modelo matemático com 86 modos, o modelo foi truncado e apenas 3 modos dentro da faixa de frequência de interesse foram selecionados, os quais são localizados em 35.00 Hz, 71.20 Hz e 118.00 Hz. Este modelo reduzido caracteriza o modelo nominal para o projeto dos controladores.

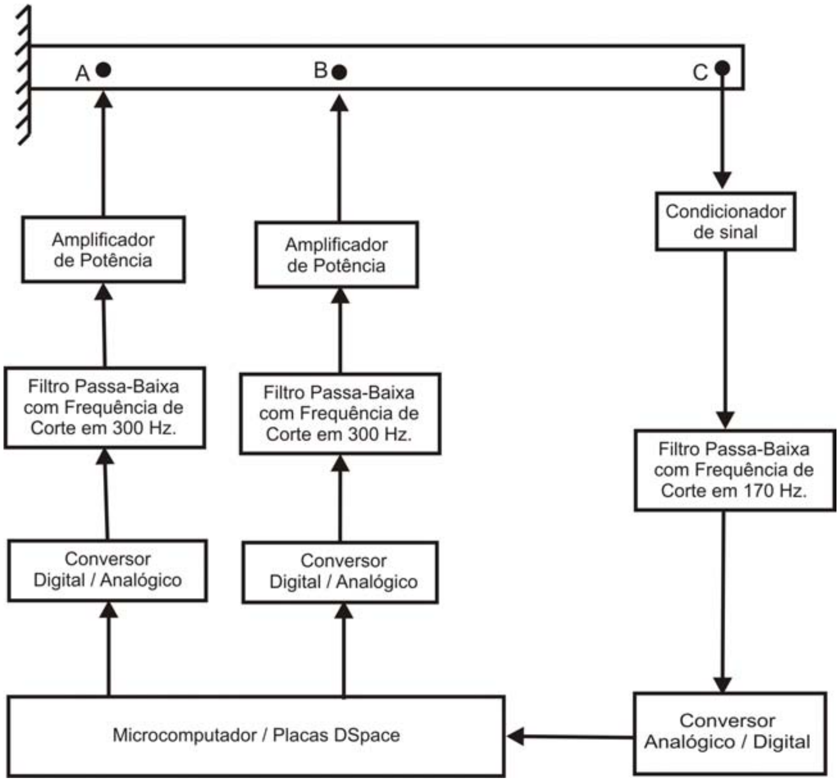

Figura 7.10: Montagem da bancada experimental.

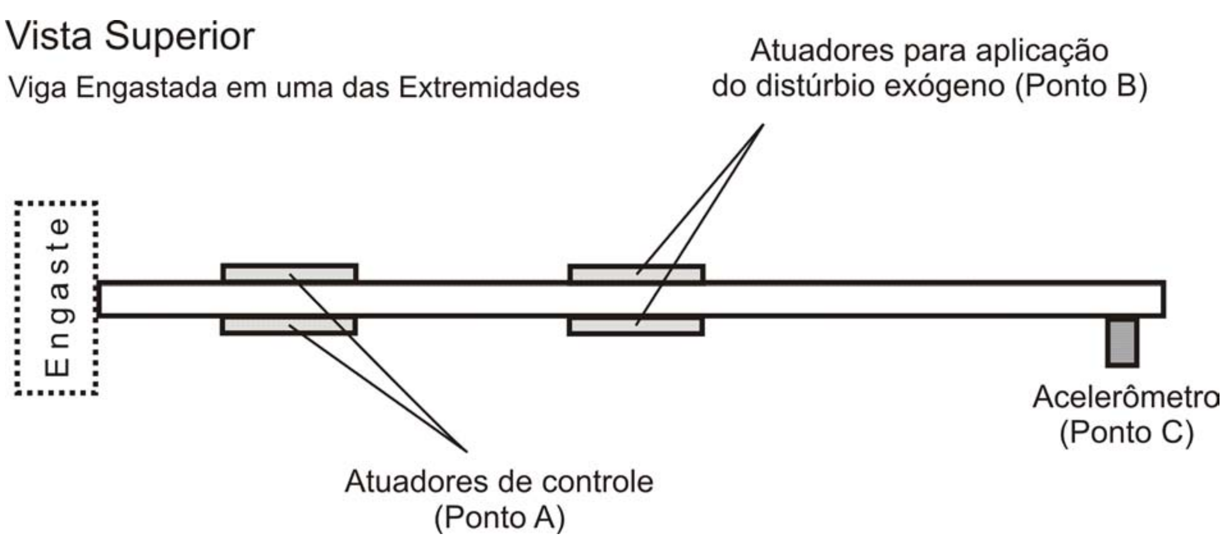

Figura 7.11: Vista superior da viga engastada em uma das extremidades para visualização do posicionamento dos atuadores piezocerâmicos utilizados.

A planta possui 2 entradas (2 pontos de atuação, sendo 1 de controle e 1 de distúrbio) e 1 saída (1 ponto de medição de aceleração). A planta real apresenta as seguintes incertezas em relação à planta nominal:

- Cada par de atuadores piezoelétricos não gera momento exatamente em seu centro.
- O acelerômetro colocado na extremidade não-engastada possui uma massa adicional a ser considerada.
- Os atuadores fixos na estrutura alteram seu amortecimento principalmente por possuírem cabos de alimentação que influenciam no movimento da viga.

Com base na Função de Resposta em Frequência real obtida para cada entrada em relação à saída, foi possível ajustar o modelo de elementos finitos da seguinte forma:

- Devido à presença do acelerômetro na extremidade não-engastada, incrementou-se em 7 gramas a massa dos dois últimos elementos da estrutura quando da modelagem por elementos finitos.
- Ajustou-se o fator de amortecimento de cada modo de acordo com o modelo obtido experimentalmente. O ajuste do fator de amortecimento de cada modo foi possível devido à diagonalização das matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento proporcional através da matriz modal.

Vale ressaltar que, mesmo após diversos esforços no sentido de tornar o modelo de elementos finitos o mais representativo possível da realidade, ainda existem incertezas com relação à planta real por motivos tais como:

- O engaste utilizado na prática não é ideal, diferentemente daquele adotado no modelo de elementos finitos;
- Não se sabe ao certo como a cola utilizada para a fixação dos atuadores interfere no amortecimento e na rigidez da planta;
- A base sobre a qual a viga está posicionada não pode ser considerada totalmente rígida.

O diagrama de bode da entrada de distúrbio para a saída de aceleração é mostrado na Figura 7.12 e o diagrama de bode da entrada de controle para a saída de aceleração é mostrado na Figura 7.13.

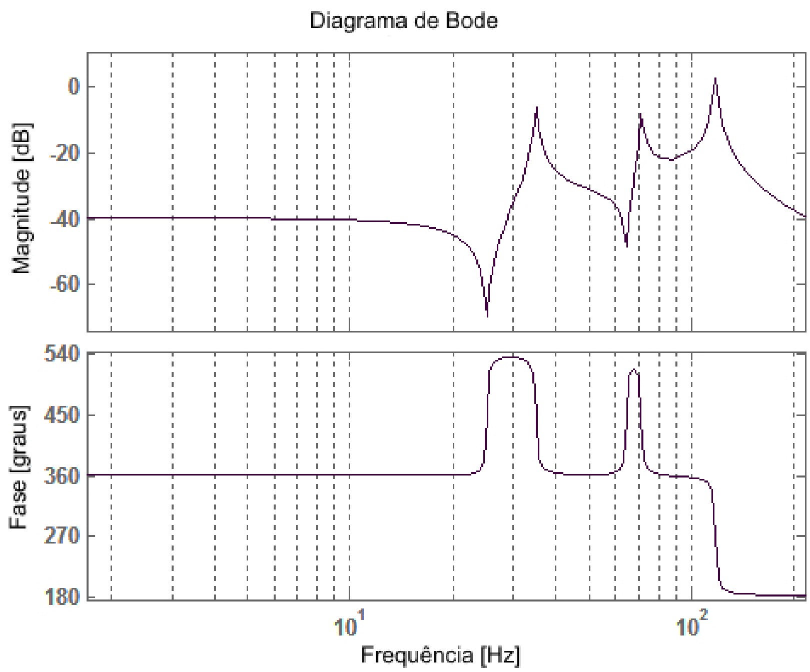

Figura 7.12: Diagrama de bode do modelo de elementos finitos obtido entre a entrada de distúrbio e a saída de aceleração.

Com base nas duas funções de transferência (uma função de transferência para cada entrada em relação à saída) obtidas através do método de elementos finitos, o modelo de estados da planta a ser utilizado para o projeto dos controladores H_∞ é dado por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7.7553 & 739.0529 & -11.7645 & 4.6212 & -6.0523 & -3.6922 \\ -739.0528 & -7.1246 & 5.5930 & -8.9343 & 3.1917 & 6.6329 \\ 11.6661 & 5.3851 & -5.5880 & 443.5596 & -6.8396 & -54.3618 \\ 4.3422 & 8.7964 & -443.5512 & -3.5335 & 52.7222 & 5.6962 \\ 5.8772 & 2.8763 & 0.8068 & -52.3059 & -1.8684 & -215.8087 \\ -3.5153 & -6.5455 & 54.0538 & -0.1951 & 215.7976 & -2.4064 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 3.4968 & 0 \\ 3.3299 & 0 \\ -1.4716 & 0 \\ -1.0779 & 0 \\ -1.1372 & 0 \\ 1.2284 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2.6433 \\ 2.4925 \\ -1.6170 \\ -1.3420 \\ -0.3726 \\ 0.5474 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 3.0996 & -2.9412 & 1.5460 & -1.2172 & 0.8462 & 0.9509 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} -0.1762e-011 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} -1.7251e-012 \\ 0.01 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 3.0996 & -2.9412 & 1.5460 & -1.2172 & 0.8462 & 0.9509 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} -1.7620e-012 & 0.01 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} -1.7251e-012 \end{bmatrix}.$$

Devido ao fato do uso de um acelerômetro na bancada experimental, o modelo de elementos finitos deve fornecer como saída para o controlador e como saída de desempenho um sinal de aceleração. A aceleração do grau de liberdade onde o acelerômetro foi posicionado foi determinada através da equação do movimento daquele grau de liberdade.

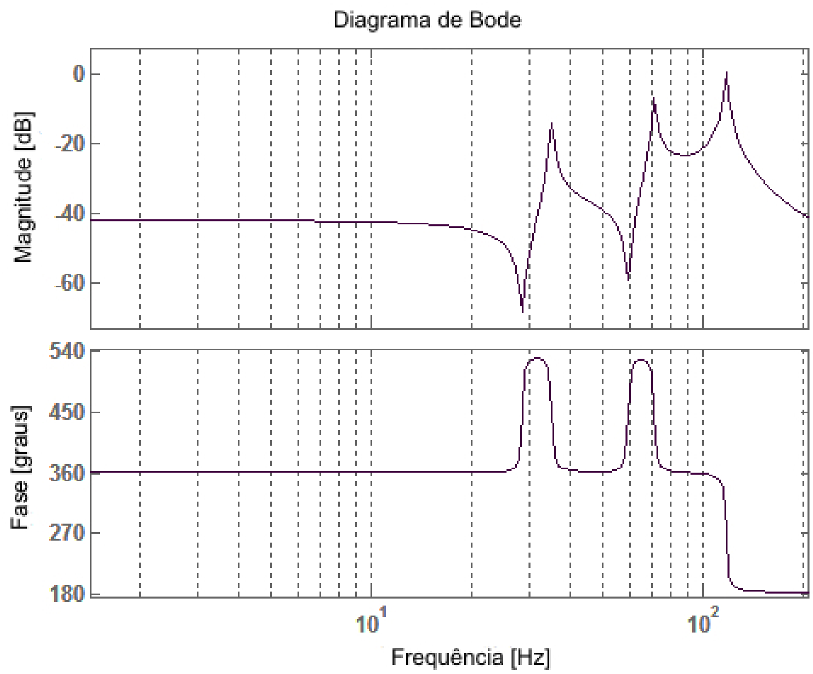

Figura 7.13: Diagrama de bode do modelo de elementos finitos obtido entre a entrada de controle e a saída de aceleração.

É importante salientar que, do ponto de vista físico, o sinal de controle foi adotado como sendo um dos sinais de desempenho com a finalidade de limitar sua amplitude. De forma iterativa, adotou-se o valor de 0.01 na segunda posição de $\mathbf{D}_{12}$ para ponderar o sinal de controle e evitar que este apresentasse valores em amplitude que levassem à saturação dos atuadores utilizados no experimento. Já do ponto de vista numérico-computacional, o sinal de controle foi adotado como sendo um dos sinais de desempenho com a finalidade de tornar o problema não-singular.

7.3.4 Simulação Computacional e Implementação Experimental

Todos os controladores utilizados na simulação e na implementação experimental foram obtidos no tempo contínuo e posteriormente discretizados através da transformação bilinear [67] (método de *tustin*) com um tempo de amostragem de 0.5 ms. Ressalta-se que o tempo de amostragem foi escolhido de forma a satisfazer o critério de Nyquist [58] (frequência de amostragem deve ser pelo menos 2 vezes superior à máxima frequência considerada no modelo do sistema a ser controlado).

O controlador H_∞ de ordem completa apresentado neste capítulo foi obtido através do uso do comando *hinflmi* do aplicativo MATLAB. Tal comando reproduz os procedimentos apresentados em [29] para a obtenção do controlador e utiliza um enfoque de solução por LMIs.

Os controladores de ordem fixa apresentados neste capítulo foram obtidos através da estratégia apresentada no capítulo 6. Os critérios de convergência e os parâmetros para a obtenção de todos os controladores de ordem fixa na solução dos problemas de minimização foram:

$$\rho = 1.5, \quad \mathbf{C}^0 = 1e-10\,\mathbf{I}, \quad \Lambda^0 = \mathbf{0}, \quad \varepsilon = 1e-3.$$

Para o projeto de todos os controladores (tanto os de ordem fixa quanto o de ordem completa), os mesmos filtros de ponderação foram utilizados (vide Figura 4.2), ou seja,

$$W_p = \frac{50s + 100000}{s + 100}, \quad W_u = \frac{400s + 40000}{s + 4000}, \quad W_n = 0.01.$$

Tais filtros de ponderação foram projetados iterativamente levando-se em consideração que:

- W_p deveria ser um filtro passa-baixa com o objetivo de atenuar distúrbios na faixa de frequência de interesse;
- W_u deveria ser um filtro passa-alta com o objetivo de eliminar o sinal de controle existente fora da faixa de frequência utilizada para o projeto dos controladores;
- W_n deveria ser um ganho escalar com o objetivo de escalonar o ruído de medição.

No intuito de prever os resultados a serem obtidos na prática, os controladores foram avaliados através do SIMULINK (vide Figura 7.16). A planta a ser controlada nas simulações é denominada planta real e possui 7 modos (vide Figuras 7.14 e 7.15). Os modos da planta real são localizados em 2.2 Hz, 12.5 Hz, 35.0 Hz, 71.2 Hz, 118.0 Hz, 176.0 Hz e 245.0 Hz. Ressalta-se que nas simulações adota-se um ruído de medição aleatório com média nula e desvio padrão unitário.

Vale ressaltar que, embora a planta real apresente o modo de 2.2 Hz (presente dentro da faixa de frequência de interesse), este não foi levado em consideração nas análises devido ao fato de o acelerômetro utilizado no experimento atuar em frequências acima de 10 Hz.

Tanto no SIMULINK como durante a implementação experimental, aplicou-se como entrada um sinal de *Schroeder* (com espectro em frequência de 0 a 156 Hz e período de 16.383 segundos) e se obteve a saída de desempenho tanto do sistema sem controle quanto do sistema controlado. Com isso, foi possível obter a Função de Resposta em Frequência para o sistema sem controle e para o sistema controlado e verificar a mudança de comportamento do sistema em malha fechada em relação ao sistema em malha aberta.

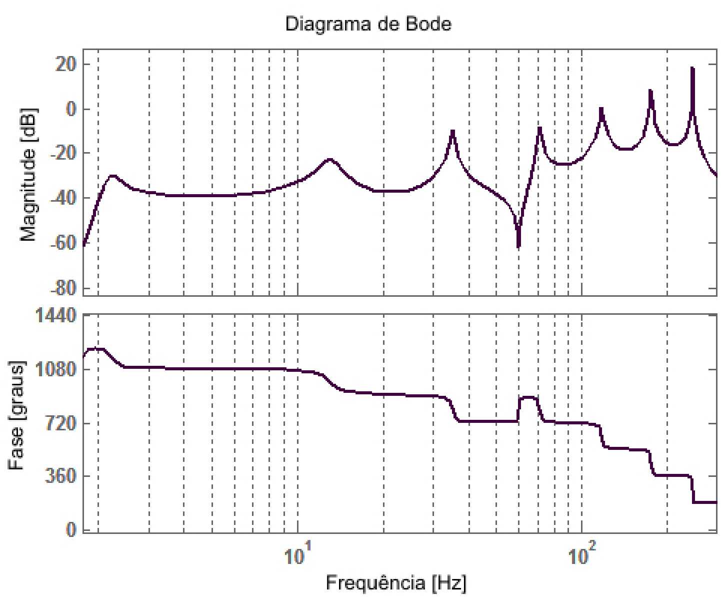

Figura 7.14: Diagrama de bode da planta real entre a entrada de distúrbio e a saída de aceleração com 7 modos.

São apresentados a seguir os resultados obtidos com cada controlador utilizado e posteriormente é apresentado uma tabela com o resumo dos resultados obtidos.

7.3.5 Controlador de Ordem Completa 8×8

Um controlador de ordem completa 8×8 foi projetado com base no modelo de elementos finitos contendo 3 modos e dois filtros de ponderação de primeira ordem foram utilizados.

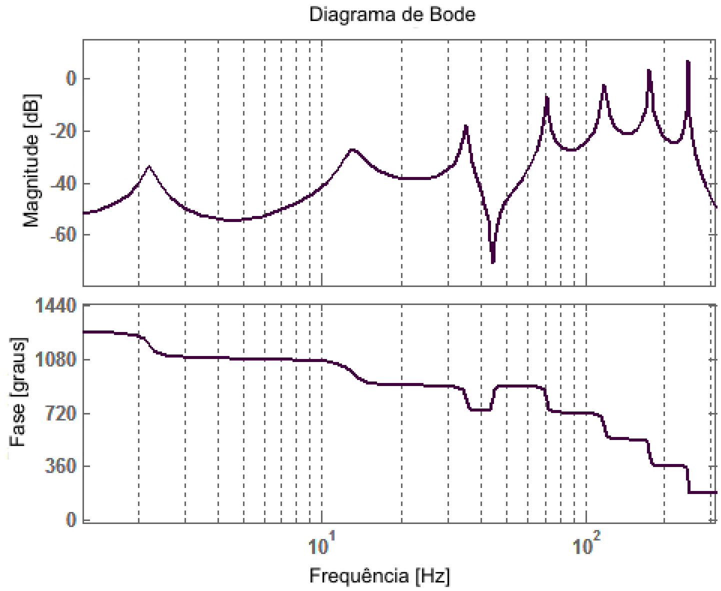

Figura 7.15: Diagrama de bode da planta real entre a entrada de controle e a saída de aceleração com 7 modos.

O modelo de estados do controlador obtido é:

$$\mathbf{A}_K = \begin{bmatrix} -3.1789 & 447.4708 & -0.0090 & 0.0646 & 0.0185 & -0.0010 & -0.0449 & -0.0189 \\ -447.5073 & -3.0862 & 0.0060 & -0.0357 & 0.0100 & -0.0037 & -0.0280 & -0.0146 \\ 0.0028 & -0.0021 & -89.2623 & -100.6153 & 102.7984 & 14.4661 & 854.1972 & -36.6044 \\ 0.0132 & 0.0256 & 5.0013 & -119.7109 & -98.7526 & 29.1691 & 394.4757 & 116.5444 \\ 0.0135 & -0.0061 & 0.7108 & 0.9473 & -23.7741 & -214.8641 & 51.2070 & 20.7852 \\ 0.0087 & -0.0055 & 1.3976 & -6.5734 & 198.1569 & 3.0551 & 60.4542 & 35.9050 \\ -0.0645 & 0.0360 & -4.2533 & 8.8387 & 123.8499 & -28.8360 & -347.3605 & 293.8773 \\ -0.0737 & 0.0416 & -7.2732 & 25.6223 & 138.9773 & -38.9327 & -820.9158 & -173.8892 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_K = \begin{bmatrix} 0.0080 \\ -0.0093 \\ -5.2404 \\ 60.3584 \\ -44.8241 \\ -47.5508 \\ 285.8644 \\ 300.4465 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_K = \begin{bmatrix} 1.6126e-005 & 1.0137e-005 & 3.7946 & 0.3604 & 0.0714 & 0.0168 & 0.8445 & -0.0268 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_K = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

A Figura 7.17 mostra a Função de Resposta em Frequência obtida no SIMULINK para o sistema sem controle e para o sistema controlado. A norma H_∞ foi minimizada de 1.00 dB para -7.85 dB.

A Figura 7.18 mostra a Função de Resposta em Frequência obtida experimentalmente para o sistema sem controle e para o sistema controlado. A norma H_∞ foi minimizada de 1.00 dB para -7.80 dB.

A Figura 7.19 traz em um dado período de tempo a aceleração na extremidade não engastada da viga para o sistema sem controle e para o sistema controlado quando da aplicação do sinal de *Schroeder*. Verifica-se que a aceleração da extremidade livre da viga foi atenuada.

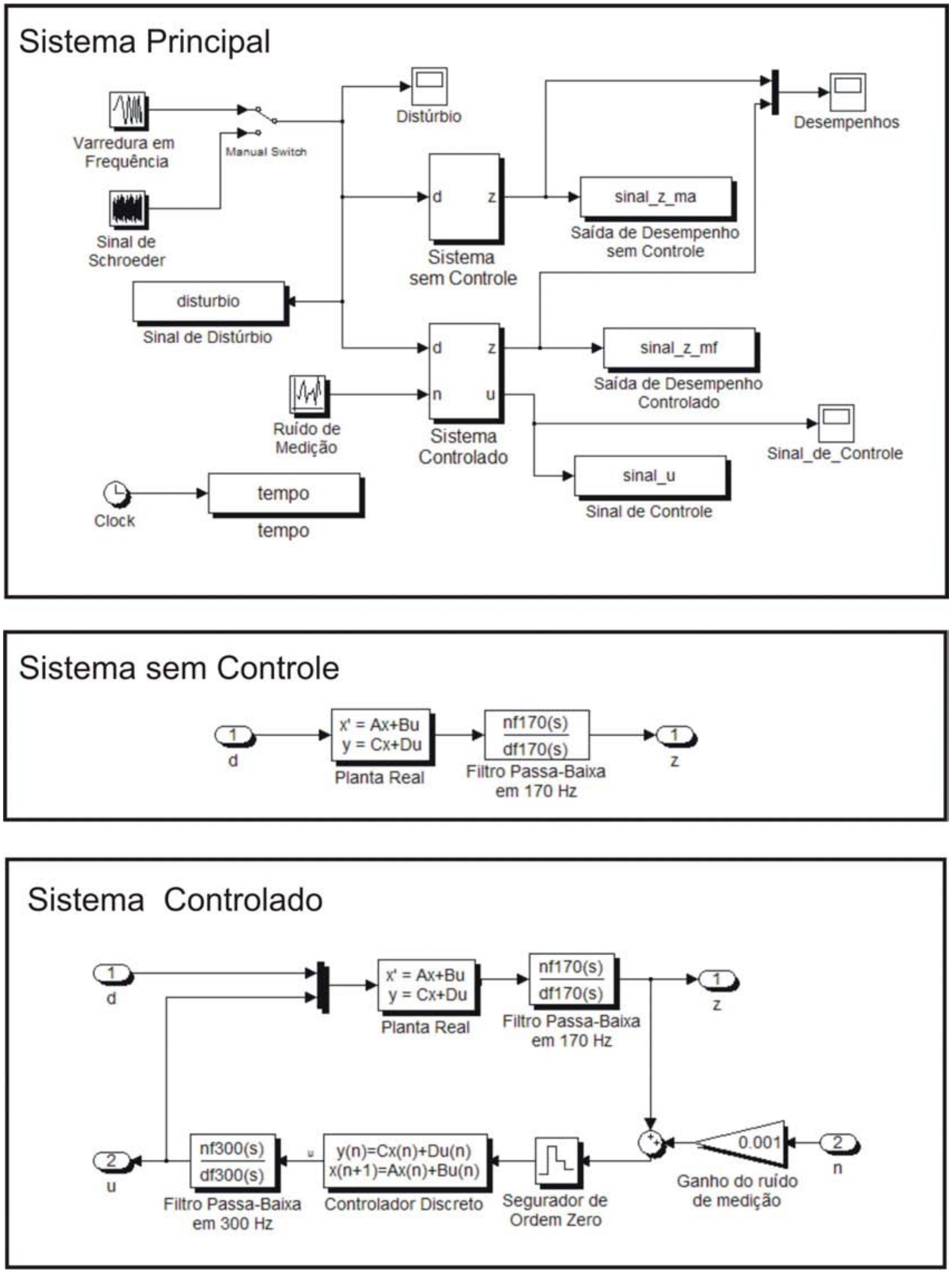

Figura 7.16: Esquema para simulação do sistema de controle no SIMULINK.

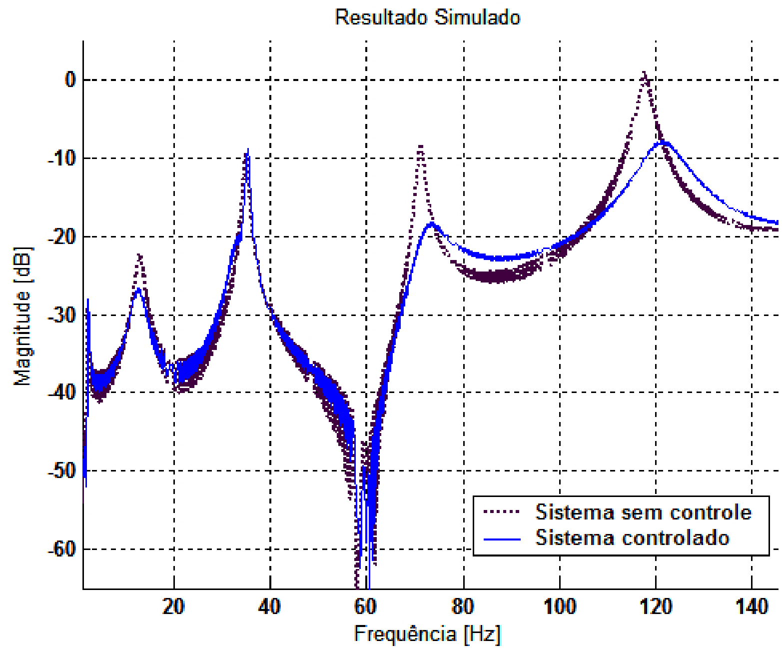

Figura 7.17: Função de Resposta em Frequência obtida no SIMULINK - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 8x8 (ordem completa).

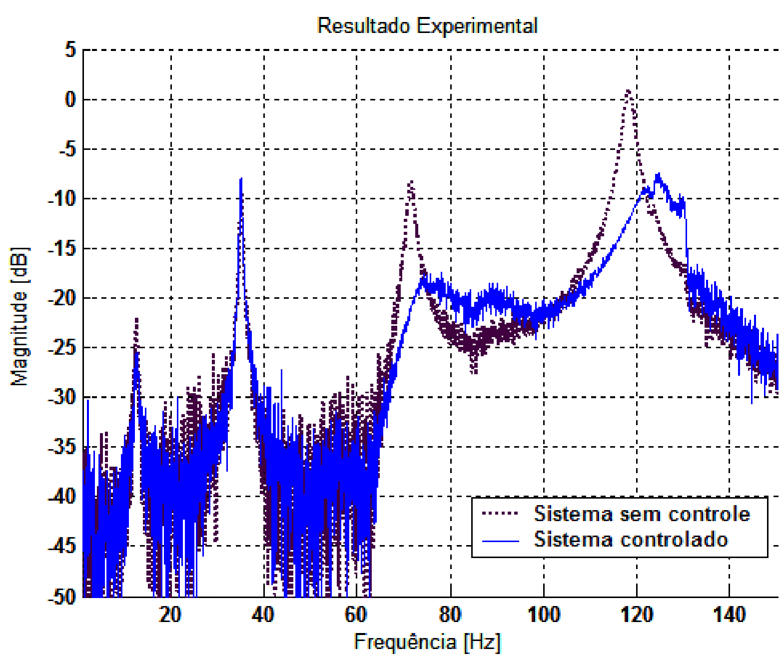

Figura 7.18: Função de Resposta em Frequência obtida experimentalmente - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 8x8 (ordem completa).

A Figura 7.20 mostra o sinal de controle gerado, onde se verifica que o sinal de controle apresentou um valor máximo em módulo de 2.6 V.

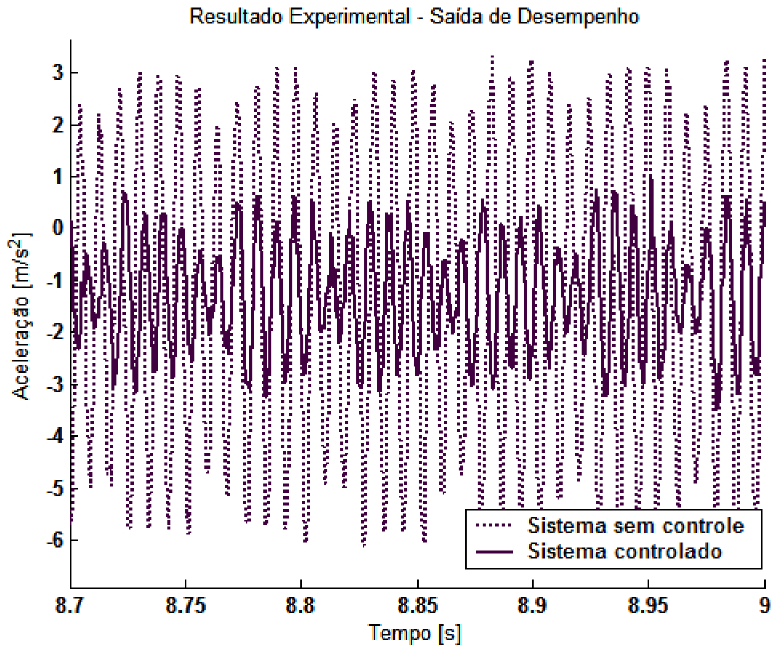

Figura 7.19: Aceleração da extremidade livre obtida experimentalmente - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 8x8 (ordem completa).

7.3.6 Controlador de Ordem Fixa 4×4

O modelo de estados de um controlador de ordem 4×4 obtido é:

$$\mathbf{A}_K = \begin{bmatrix} -211.2859 & -19.3699 & 46.8668 & 57.7668 \\ 81.9568 & -218.5316 & 88.4789 & -172.5508 \\ -523.6150 & -82.9906 & -399.3660 & -365.5594 \\ 663.5320 & 88.5084 & 377.8130 & 267.5952 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_K = \begin{bmatrix} -228.2972 \\ 428.5988 \\ 83.8517 \\ 132.3989 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_K = \begin{bmatrix} -50.4708 & -63.3408 & 56.5925 & 80.6813 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_K = \begin{bmatrix} 0.9913 \end{bmatrix}.$$

A Figura 7.21 mostra a Função de Resposta em Frequência obtida no SIMULINK para o sistema sem controle e para o sistema controlado. A norma H_∞ foi minimizada de 1.00 dB para -5.00 dB.

A Figura 7.22 mostra a Função de Resposta em Frequência obtida experimentalmente para o sistema sem controle e para o sistema controlado. A norma H_∞ foi minimizada de 1.00 dB para -5.90 dB.

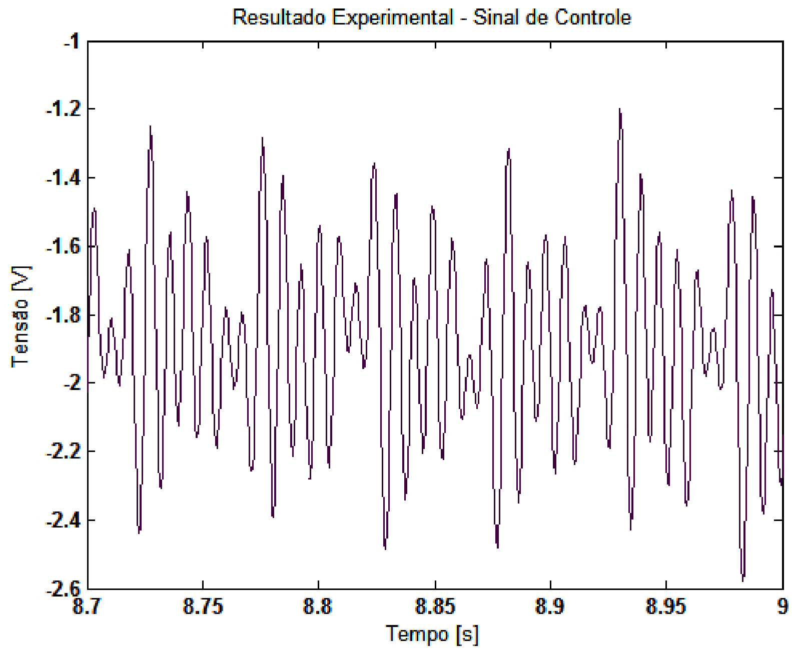

Figura 7.20: Sinal de controle obtido experimentalmente - Controlador de ordem 8x8 (ordem completa).

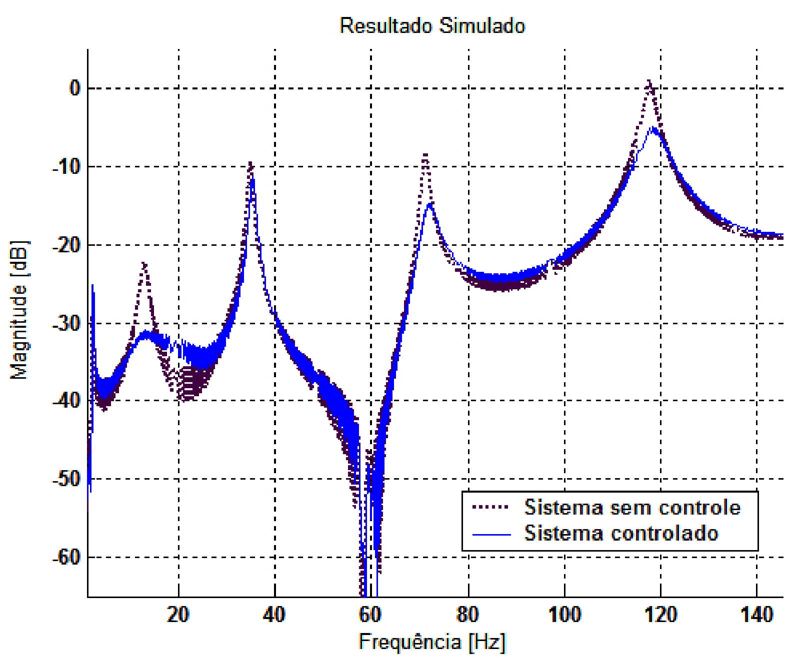

Figura 7.21: Função de Resposta em Frequência obtida no SIMULINK - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 4x4 (ordem fixa).

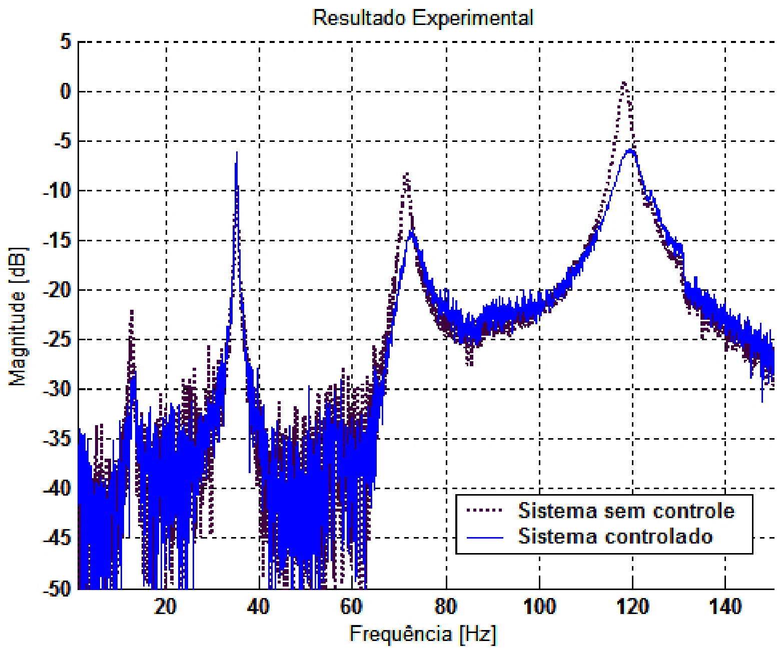

Figura 7.22: Função de Resposta em Frequência obtida experimentalmente - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 4x4 (ordem fixa).

A Figura 7.23 traz em um dado período de tempo a aceleração na extremidade não engastada da viga para o sistema sem controle e para o sistema controlado quando da aplicação do sinal de *Schroeder*. Verifica-se que a aceleração na extremidade livre da viga foi atenuada.

A Figura 7.24 mostra o sinal de controle gerado, onde se verifica um valor máximo em módulo de 4.4 V.

7.3.7 Controlador de Ordem Fixa 3×3

O modelo de estados de um controlador de ordem 3×3 obtido é:

$$\mathbf{A}_K = \begin{bmatrix} -117.0756 & -20.0127 & 10.5884 \\ -138.8801 & -53.6498 & 136.9063 \\ 141.6953 & -32.1255 & -142.3729 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_K = \begin{bmatrix} -220.2285 \\ -143.0709 \\ 28.2432 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_K = \begin{bmatrix} 7.7204 & -40.0622 & 19.1661 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_K = \begin{bmatrix} -8.1286 \end{bmatrix}.$$

A Figura 7.25 mostra a Função de Resposta em Frequência obtida no SIMULINK para o sistema sem controle e para o sistema controlado. A norma H_∞ foi minimizada de 1.00 dB para -6.30 dB.

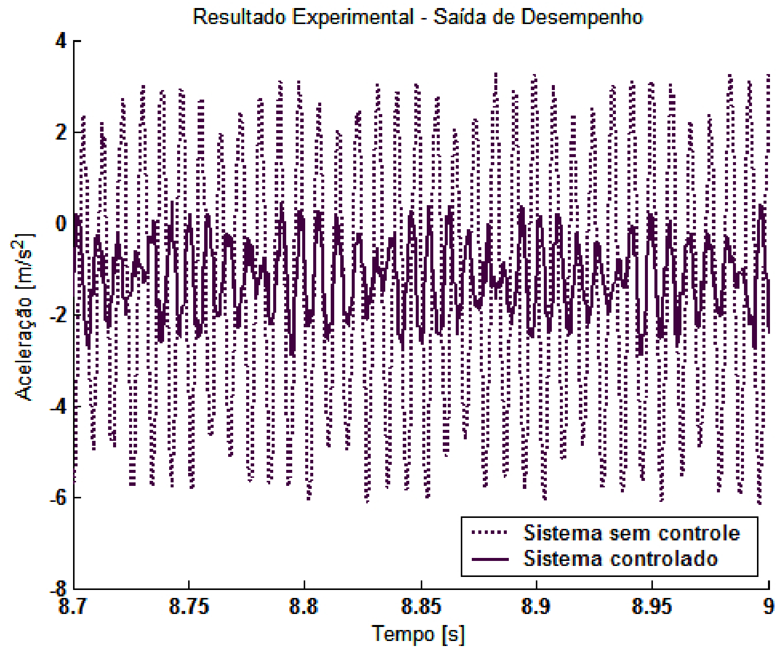

Figura 7.23: Aceleração da extremidade livre obtida experimentalmente - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 4x4 (ordem fixa).

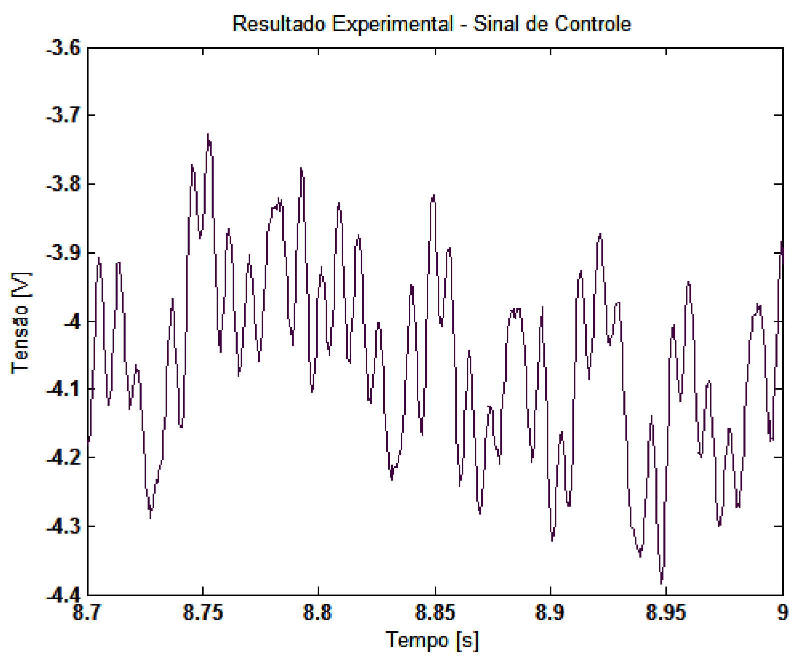

Figura 7.24: Sinal de controle obtido experimentalmente - Controlador de ordem 4x4 (ordem fixa).

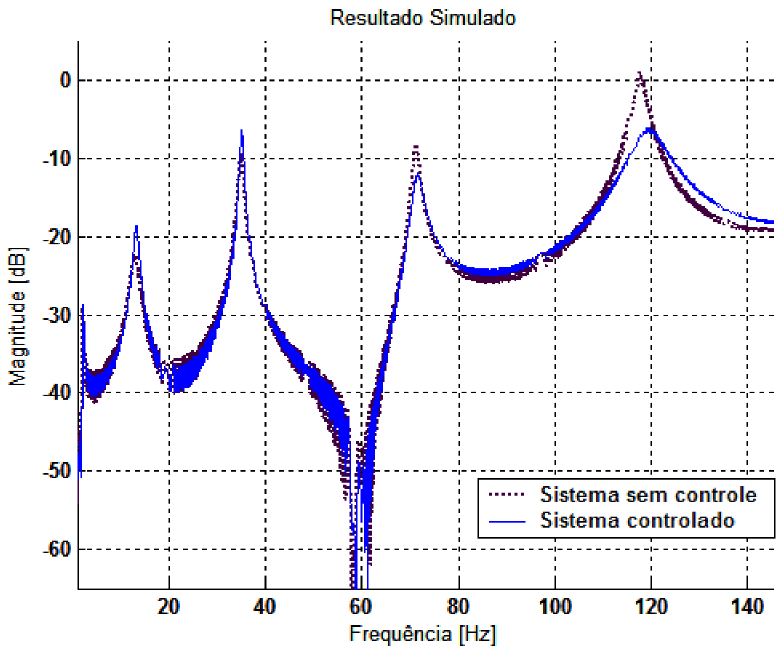

Figura 7.25: Função de Resposta em Frequência obtida no SIMULINK - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 3x3 (ordem fixa).

A Figura 7.26 mostra a Função de Resposta em Frequência obtida experimentalmente para o sistema sem controle e para o sistema controlado. A norma H_∞ foi minimizada de 1.00 dB para -7.60 dB.

A Figura 7.27 traz, em um dado período de tempo, a aceleração na extremidade não engastada da viga para o sistema sem controle e para o sistema controlado quando da aplicação do sinal de *Schroeder*. Verifica-se que a aceleração da extremidade livre da viga foi atenuada.

A Figura 7.28 mostra o sinal de controle gerado, onde se verifica um valor máximo em módulo de 0.56 V.

7.3.8 Controlador de Ordem Fixa 2×2

O modelo de estados de um controlador de ordem 2×2 obtido é:

$$\mathbf{A}_K = \begin{bmatrix} -101.2673 & 35.0768 \\ -1.0931 & -113.1115 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_K = \begin{bmatrix} 516.1587 \\ 371.5016 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_K = \begin{bmatrix} 0.4892 & 6.1644 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_K = \begin{bmatrix} -1.4653 \end{bmatrix}.$$

A Figura 7.29 mostra a Função de Resposta em Frequência obtida no SIMULINK para o

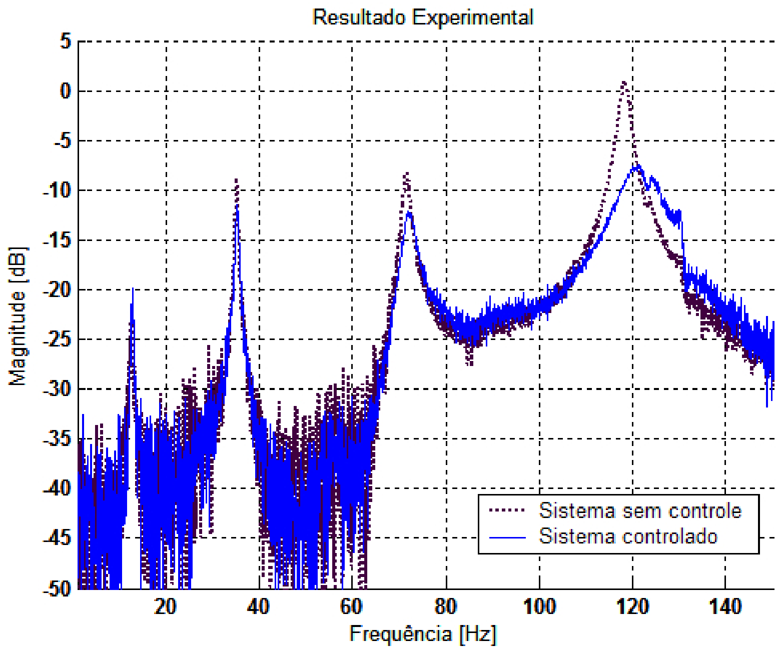

Figura 7.26: Função de Resposta em Frequência obtida experimentalmente - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 3x3 (ordem fixa).

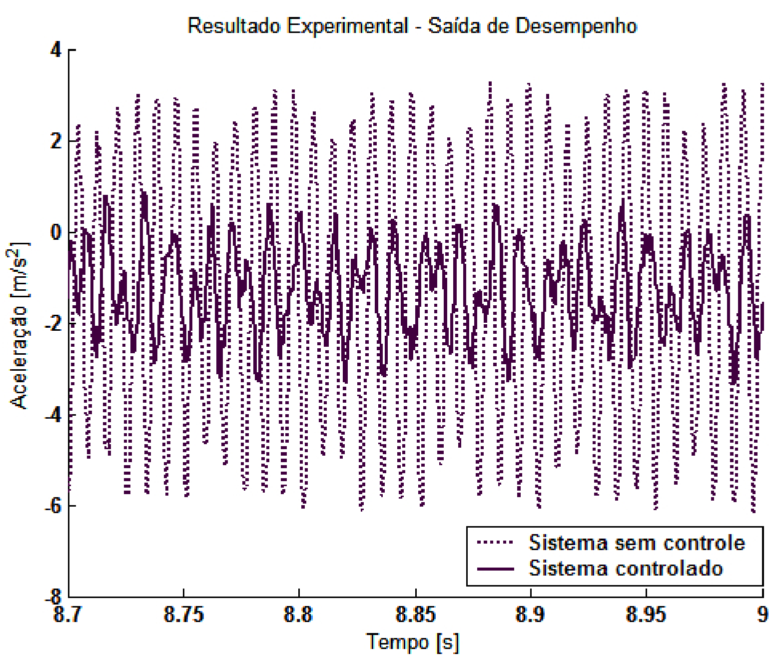

Figura 7.27: Aceleração da extremidade livre obtida experimentalmente - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 3x3 (ordem fixa).

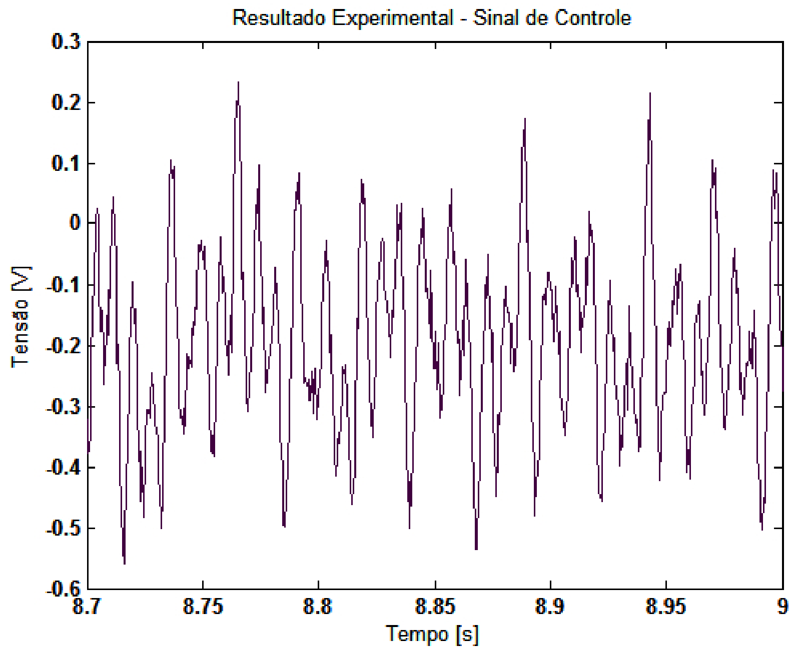

Figura 7.28: Sinal de controle obtido experimentalmente - Controlador de ordem 3x3 (ordem fixa).

sistema sem controle e para o sistema controlado. A norma H_∞ foi minimizada de 1.00 dB para -7.00 dB.

A Figura 7.30 mostra a Função de Resposta em Frequência obtida experimentalmente para o sistema sem controle e para o sistema controlado. A norma H_∞ foi minimizada de 1.00 dB para -9.15 dB.

A Figura 7.31 traz em um dado período de tempo a aceleração na extremidade não engastada da viga para o sistema sem controle e para o sistema controlado quando da aplicação do sinal de *Schroeder*. Verifica-se que a aceleração na extremidade livre da viga foi atenuada.

A Figura 7.32 mostra o sinal de controle gerado, onde se verifica um valor máximo em módulo de 1.62 V.

7.3.9 Controlador de Ordem Fixa 1×1

O modelo de estados de um controlador de ordem 1×1 obtido é:

$$\mathbf{A}_K = \left[\ -257.9154\ \right]; \quad \mathbf{B}_K = \left[\ 435.7875\ \right]; \quad \mathbf{C}_K = \left[\ 7.3239\ \right], \quad \mathbf{D}_K = \left[\ -3.2254\ \right].$$

A Figura 7.33 mostra a Função de Resposta em Frequência obtida no SIMULINK para o

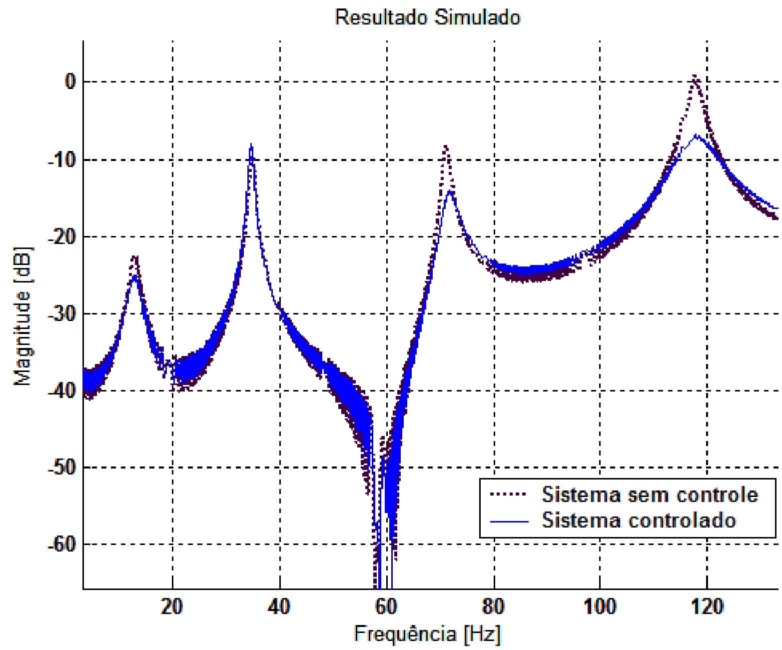

Figura 7.29: Função de Resposta em Frequência obtida no SIMULINK - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 2x2 (ordem fixa).

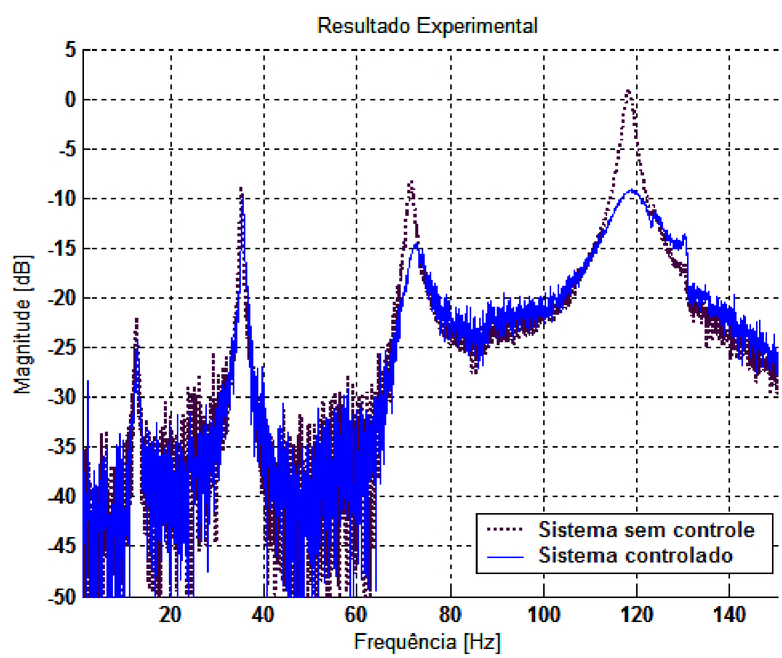

Figura 7.30: Função de Resposta em Frequência obtida experimentalmente - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 2x2 (ordem fixa).

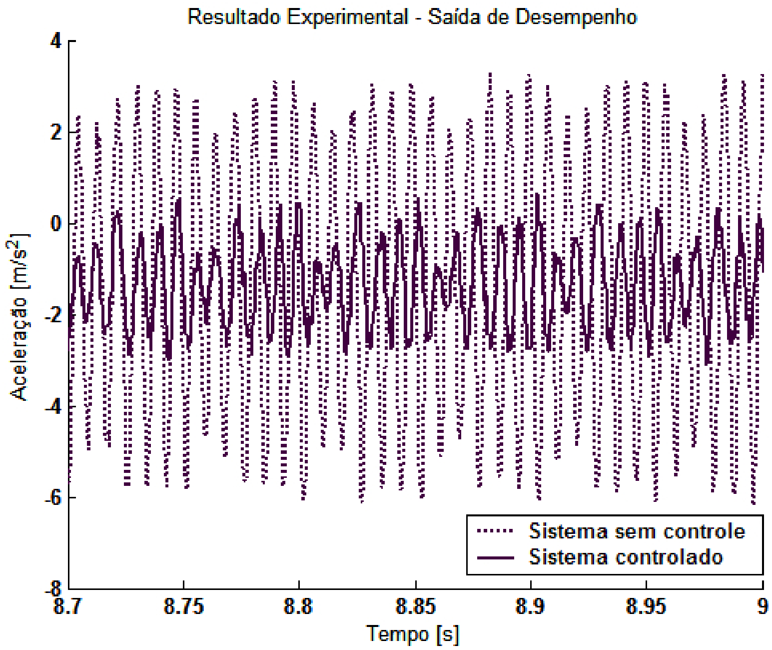

Figura 7.31: Aceleração da extremidade livre obtida experimentalmente - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 2x2 (ordem fixa).

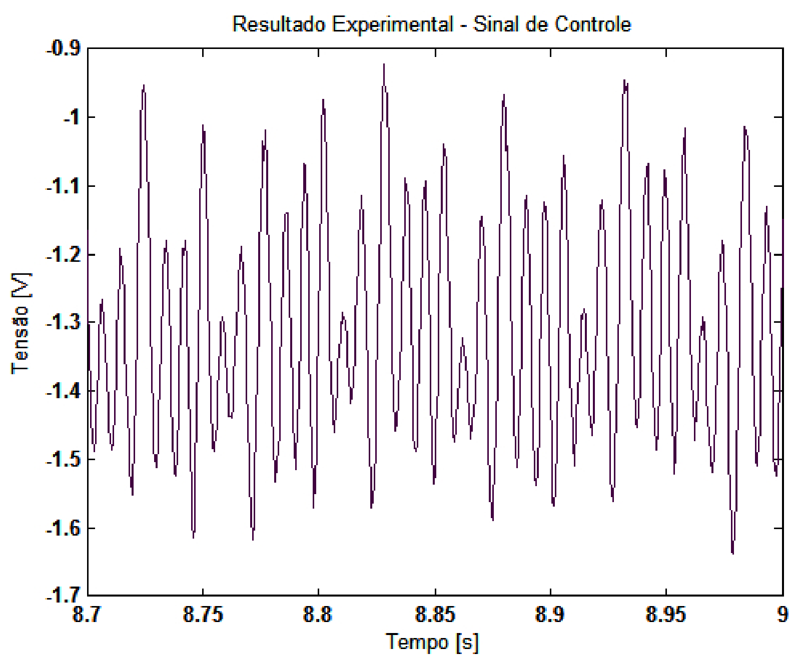

Figura 7.32: Sinal de controle obtido experimentalmente - Controlador de ordem 2x2 (ordem fixa).

sistema sem controle e para o sistema controlado. A norma H_∞ foi minimizada de 1.00 dB para -7.20 dB.

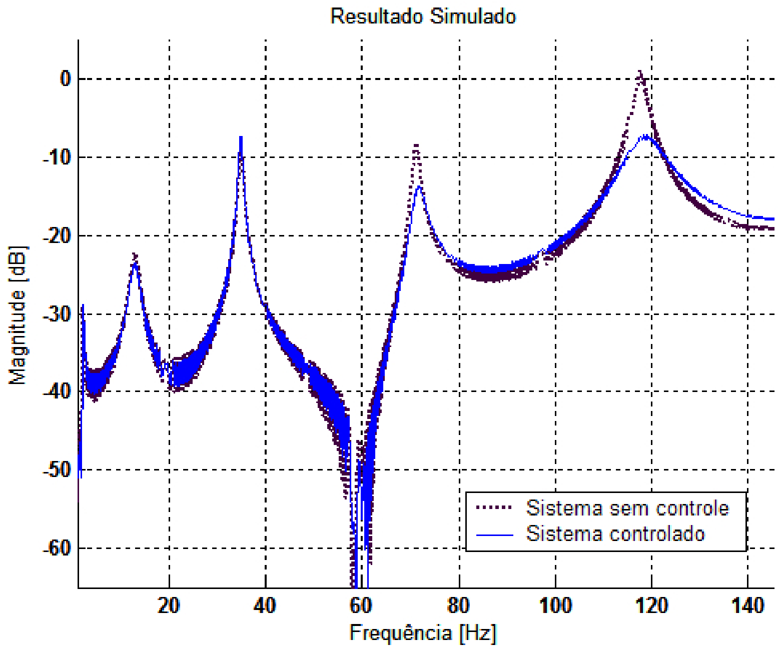

Figura 7.33: Função de Resposta em Frequência obtida no SIMULINK - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 1x1 (ordem fixa).

A Figura 7.34 mostra a Função de Resposta em Frequência obtida experimentalmente para o sistema sem controle e para o sistema controlado. A norma H_∞ foi minimizada de 1.00 dB para -9.20 dB.

A Figura 7.35 traz, em um dado período de tempo, a aceleração na extremidade não engastada da viga para o sistema sem controle e para o sistema controlado quando da aplicação do sinal de *Schroeder*. Verifica-se que a aceleração da extremidade livre da viga foi atenuada.

A Figura 7.36 mostra o sinal de controle gerado, onde se verifica um valor máximo em módulo de 0.85 V.

7.3.10 Resumo dos Resultados Obtidos no Controle da Viga

A Tabela 7.1 apresenta o módulo do esforço de controle máximo obtido experimentalmente e a atenuação da norma H_∞ obtida com cada controlador em simulação e também experimentalmente.

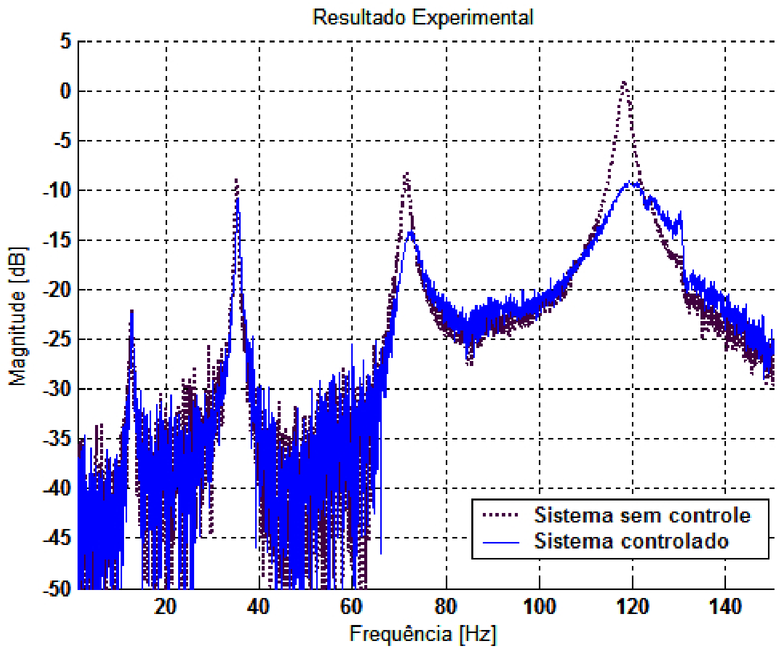

Figura 7.34: Função de Resposta em Frequência obtida experimentalmente - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 1x1 (ordem fixa).

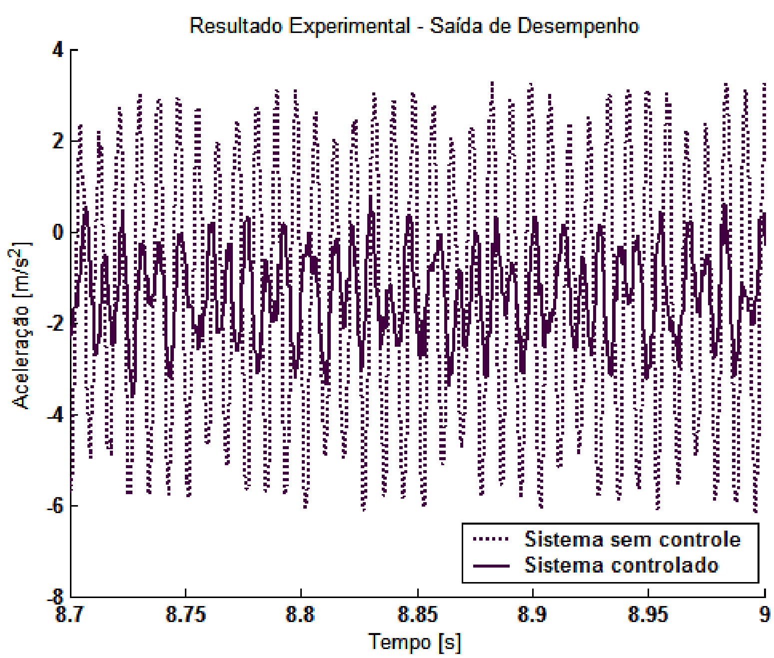

Figura 7.35: Aceleração da extremidade livre obtida experimentalmente - Sistema sem controle e sistema com controlador de ordem 1x1 (ordem fixa).

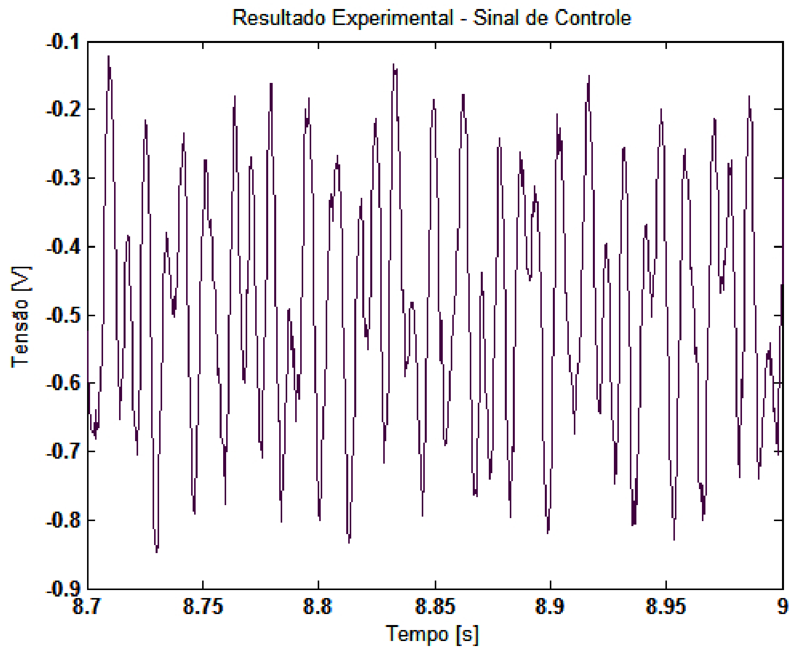

Figura 7.36: Sinal de controle obtido experimentalmente - Controlador de ordem 1x1 (ordem fixa).

Ordem do Controlador	Atenuação da norma H_∞ [dB]		Módulo do esforço de controle máximo [V]	
	Simulado	Experimental	Simulado	Experimental
1×1	8.2	10.2	0.97	0.85
2×2	8.0	10.1	1.03	1.62
3×3	7.3	8.6	1.55	0.56
4×4	6.0	6.9	3.10	4.40
8×8	8.8	8.8	1.17	2.60

Tabela 7.1: Atenuação da norma H_∞ e esforço de controle experimental máximo obtidos com cada controlador testado.

Através da Tabela 7.1, verifica-se que:

- A maior atenuação da norma H_∞ obtida em simulação foi com o uso do controlador de ordem 8×8, conforme esperado.

- A maior atenuação norma H_∞ obtida experimentalmente foi com o uso do controlador de ordem 1×1.

- A maior diferença entre os resultados simulado e experimental para a atenuação da norma H_∞ foi verificada quando do uso do controlador de ordem 2×2 (diferença de 2.1 dB).

- O maior esforço de controle obtido experimentalmente e em simulação foi verificado com o uso do controlador de ordem 4×4.

- O menor esforço de controle obtido experimentalmente foi verificado com o uso do controlador de ordem 3×3. Já em simulação, o menor esforço de controle foi obtido com o uso do controlador de ordem 1×1.

- Analisando apenas os resultados simulados, verifica-se que o controlador de ordem completa (8×8) apresentou a maior atenuação da norma H_∞. Tal fato já era esperado porque a obtenção de controladores de ordem completa é um problema convexo com solução única e global. Já no projeto de controladores de ordem reduzida, como não há garantias de que o ótimo encontrado seja global, ainda podem ser obtidos controladores que forneçam maiores atenuações. Isto explica os resultados simulados obtidos na Tabela 7.1 onde, por exemplo, o controlador de ordem 4×4 apresentou uma atenuação menor do que aquela obtida pelo controlador de ordem 1×1.

As diferenças encontradas entre os valores simulados e os valores experimentais podem ser explicadas devido ao fato de a planta existente na bancada experimental apresentar incertezas em relação à planta utilizada nas simulações computacionais.

Por fim, vale salientar que todos os controladores aqui apresentados foram efetivos no sentido de minimizar a norma H_∞ do sistema em malha fechada e evitar o fenômeno de *spillover*.

Capítulo 8

Conclusão

Este trabalho consistiu na obtenção de controladores H_∞ de ordem fixa voltados para o controle ativo de estruturas flexíveis.

O método de elementos finitos foi empregado para a obtenção do modelo de estados de estruturas flexíveis para a posterior aplicação da teoria de controle robusto. Realizou-se uma breve introdução sobre a teoria de controle robusto H_∞ e sobre o uso de filtros de ponderação. Além disso, o método Lagrangiano Aumentado foi apresentado e discutido.

A obtenção de controladores de ordem fixa apresenta a dificuldade de ser um problema não-convexo devido ao fato de que $\mathbf{X}^{-1}$ deve ser igual a $\mathbf{Y}$ para que exista um controlador de ordem $k < n$ [29]. Quando a ordem do controlador desejado é igual à ordem da planta ($k = n$), o problema se torna convexo. No problema de síntese do controlador H_∞, inclui-se a restrição de igualdade $\mathbf{XY} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$, que, junto com outras três restrições LMIs, caracterizam um problema de otimização cujo objetivo é minimizar a variável γ. É importante ressaltar que a restrição de igualdade nada mais é do que uma forma de forçar $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{Y}$. Para contornar a dificuldade de tratar a restrição de igualdade no problema de otimização, esta é incluída na função objetivo usando a técnica do Lagrangiano Aumentado. As restrições LMIs são mantidas explícitas no problema de otimização para que possam ser utilizados algoritmos de programação semidefinida atualmente disponíveis em aplicativos tais como o MATLAB.

Três exemplos de aplicação foram realizados com o intuito de tornar os assuntos discutidos mais claros e mostrar a eficácia da metodologia proposta.

A implementação experimental de 4 controladores H_∞ de ordem fixa e 1 de ordem completa foi realizada com sucesso para uma viga flexível. Os resultados práticos obtidos demonstraram que os controladores de ordem fixa 1×1 e 2×2 forneceram uma atenuação da norma H_∞ do sistema em malha fechada bastante satisfatória e até mesmo maior do que aquela obtida com o controlador de ordem completa. O modelo de elementos finitos utilizado para o projeto dos controladores e para a realização das simulações se mostrou válido no sentido de que os controladores obtidos funcionaram na prática e geraram resultados próximos aos encontrados em simulação. As incertezas existentes entre o modelo de elementos finitos e o modelo real foram responsáveis pelas diferenças encontradas entre os resultados simulados e os resultados experimentais. Apesar das incertezas, todos os controladores testados foram robustos o suficiente para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada durante a implementação prática.

De uma forma geral, os resultados numéricos apresentados demonstraram que o método aqui proposto pode ser aplicado com sucesso. No entanto, é importante ressaltar as principais dificuldades encontradas na realização deste trabalho:

- O resultado final do algoritmo de obtenção dos controladores de ordem fixa (valor de γ) varia de acordo com os critérios de parada adotados e de acordo com os parâmetros Λ^0, $\mathbf{C}^0$ e ρ adotados no método do Lagrangiano Aumentado. Dessa forma, existe uma certa subjetividade na solução do problema e a melhor solução é obtida de forma iterativa;

- O algoritmo para a obtenção dos controladores de ordem fixa contém um problema de programação semidefinida que deve ser resolvido para se encontrar uma direção de descida. Este problema pode envolver LMIs de dimensões grandes, o que acarreta um grande esforço computacional;

- A escolha de filtros de ponderação adequados foi uma tarefa iterativa um tanto quanto trabalhosa, já que os filtros adotados devem ser capazes de gerar controladores que garantam a estabilidade robusta e forneçam um desempenho satisfatório para o sistema em malha fechada;

- A montagem da bancada experimental consumiu um certo esforço devido à dificuldades tais como problemas de funcionamento de equipamentos, aterramento inadequado das instalações do laboratório, e outras.

Algumas propostas para trabalhos posteriores são:

- Melhoramento do algoritmo de obtenção de controladores de ordem fixa no sentido de minimizar a subjetividade existente na escolha dos parâmetros de penalidade e dos multiplicadores de lagrange do método Lagrangiano Aumentado;

- Aprimoramento na metodologia de escolha dos filtros de ponderação de forma que esta escolha não dependa exclusivamente da experiência do projetista, através da proposição de algum critério mais objetivo;

- Extensão da metodologia proposta neste trabalho para controladores H_2 e misto H_2/H_∞;

- Aplicação de controladores de ordem fixa no controle de outros tipos de estruturas tais como placas e treliças;

- Comparação do método deste trabalho com outros métodos de obtenção de controladores de ordem reduzida, como por exemplo o de [25].

Referências Bibliográficas

[1] Apkarian, P., Tuan, H. D., Concave Programming in Control Theory. *Journal of Global Optimization*, v. 15, pp. 343-370, 1999.

[2] Apkarian, P., Tuan, H. D., Robust Control via Concave Minimization - Local and Global Algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 45, pp. 299-305, 2000.

[3] Apkarian, P., Noll, D., Fares, B., An Augmented Lagrangian Method for a Class of LMI-Constrained Problems in Robust Control Theory. *Int. J. Control*, v. 74, pp. 348-360, 2001.

[4] Apkarian, P., Tuan, H. D., Noll, D., Fixed-order H_∞ Control Design via a Partially Augmented Lagrangian Method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 13, pp. 1137-1148, 2003.

[5] Ashcraft, C., Grimes, G., Lewis, J. G., Accurate Symmetric Indefinite Linear Equation Solvers, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, v. 20, n. 2, pp. 513-561, 1998.

[6] Balas, M., Feedback Control of Flexible Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 23, n. 4, pp. 673-679, Aug. 1978.

[7] Balas, M., Trends in Large Space Structure Control Theory: Fondest Hopes, Wildest Dreams. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 27, n. 3, pp. 522-535, Jun. 1982.

[8] Balas, G. J., *Robust Control of Flexible Structures: Theory and Experiments*. 1989. 165 p. PhD Thesis - California Institute of Technology, Pasadena, California, 1990.

[9] Balas, G. J., DOYLE, J. C., Identification of Flexible Structures for Robust Control. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 10, n. 4, pp. 51-58, Jun. 1990.

[10] Balas, G. J., DOYLE, J. C., Robustness and Performance Trade-offs in Control Design for Flexible Structures. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 2, n. 4, pp. 352-361, Dec. 1994.

[11] Balas, G. J. et al., *μ-Analysis and Synthesis Toolbox: User´s Guide*. version 3, Natick: The MathWorks Inc., 1993. 740 p.

[12] Banavar, R. N., H_∞ Control Synthesis for a Flexible Structure. In: *Proceedings of the Third IEEE Conference on Control Applications*, 1994, v. 2, pp. 1305-1309.

[13] Banavar, R.N., Dominic, P., An LQG/H_∞ Controller for a Flexible Manipulator. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 3, n. 4, pp. 409-416, Dec. 1995.

[14] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M., *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 2. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993. 638 p.

[15] Bertsekas, D. P., Multiplier Method: A Survey. Automatica, v. 12, pp. 133-145, 1976.

[16] Boyd, S. et al., *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: SIAM Studies In Applied Mathematics, 1994. 193 p.

[17] Cheng, S. H., Higham, N. J., A Modified Cholesky Algorithm Based on a Symmetric Indefinite Factorization. *SIAM J. on Matrix Analysis and Applications*, v. 19, pp. 256-268, 1998.

[18] Colaneri, P., Geromel, J. C., Locatelli, A., *Control Theory and Design: An RH_2 and RH_∞ Viewpoint*. Academic Press Inc., 1997. 378 p.

[19] Conn, A. R., Gould, N. I. M., Toint, P. L., A Globally Convergent Augmented Lagrangian Algorithm for Optimization with General Constraints and Simple Bounds. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 28, pp. 545-572, 1991.

[20] David, J., *Algorithms for Analysis and Design of Robust Controllers*. PhD Thesis - Department of Electrical Engineering, K.U. Leuven, Belgium, 1994.

[21] Desai, C. S., Abel, J. F., *Introduction To The Finite Element Method: A Numerical Method For Enginnering Analysis*. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1972. 477 p.

[22] Doyle, J. C. et al., State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, pp. 831-847, 1989.

[23] Drakunov, S. V., Ozguner, U., Vibration Suppression in Flexible Structures via the Sliding-Mode Control Approach. In: *Proceedings of the* 31^{st} *IEEE Conference on Decision and Control*, 1992, v. 2, pp. 1365-1366.

[24] Dunn, J. C., Convergence Rates for Conditional Gradients Sequences Generated by Implicit Step Length Rules, *SIAM J. on Control and Optimization*, v. 18, pp. 473-487, 1979.

[25] El Ghaoui, L. E., Oustry, F., Aitrami, M., A Cone Complementarity Linearization Algorithm for Static Output-Feedback and Related Problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, pp. 1171-1176, 1997.

[26] Eslami, M., *Theory of Sensitivity in Dynamic Systems, An Introduction*, Springer-Verlag, 1994.

[27] Ewins, D. J., *Modal Testing: Theory and Practice*. New York: Research Studies Press Ltd., 1984. 313 p.

[28] Forrai, A. et al., Fuzzy Logic Based Vibration Suppression Control of Flexible Structures. In: *Proceedings* 6^{th} *International Workshop on Advanced Motion Control*, 2000, pp. 378-383.

[29] Gahinet, P., Apkarian, P., A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, v. 4, pp. 421-448, 1994.

[30] Gahinet, P. et al., *LMI Control Toolbox User's Guide For Use With MATLAB*. version 1, Natick: The Mathworks Inc., 1995. 356 p.

[31] Gates, R. et al., Stabilization of Flexible Structures Using Artificial Neural Networks. In: *Proceedings of 1993 International Joint Conference on Neural Networks*, 1993, v. 2, Nagoya. p. 1817-1820.

[32] Gawronski, W. K., *Dynamics and Control of Structures: A Modal Approach*, Springer-Verlag, 1998. 231 p.

[33] Ghaoui, L., Nikoukhah, R., Delebecque, F., LMITOOL: a Package for LMI Optimization. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 1995. pp. 3096-3101.

[34] Glover, K., Doyle, J. C., State-Space Formulae for all Stabilizing Controllers that Satisfy an $H\infty$-norm Bound and Relations to Risk Sensitivity, *Systems and Control Letters*, v. 11, pp. 167-172, 1988.

[35] Hanselman, D., Littlefield, B., *MATLAB 5: Guia do Usuário*. Makron Books, 1997. 413 p.

[36] Henrion, D., LMI Optimization for Fixed-Order H_∞ Controller Design. In: *Proceedings of the* 42^{nd} *IEEE Conference on Decision and Control*, 2003, Maui. pp. 4646-4651.

[37] Hestenes, M. R., Multiplier and Gradient Methods. *J. Optim. Theory Appl.*, v. 4, pp. 303-320, 1969.

[38] Hol, C., Scherer, C., Fixed Order H_∞-Synthesis: Computing Optimal Values by Robust Performance Analysis. In: *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, 2004, Boston, Massachusetts. pp. 3285-3290.

[39] Hsieh, C. et al., Control of Large Flexible Structures: an experiment on the NASA Mini-Mast facility. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 11, n. 6, pp. 13-21, Oct. 1991.

[40] Inniss, C., Williams, T., Sensitivity of the Zeros of Flexible Structures to Sensor and Actuator Location. In: *Proceedings of the* 32^{nd} *IEEE Conference on Decision and Control*, 1993, v. 2, pp. 1402-1403.

[41] Ito, K., Kunisch, K., The Augmented Lagrangian Method for Equality and Inequality Constraints in Hilbert Spaces. *Mathematical Programming*, v. 46, pp. 341-360, 1990.

[42] Iwasaki, T., Skelton, R. E., All Fixed Order H_∞ Controllers: Observer-Based Structure and Covariance Bounds. *IEEE Trans. on Autom. Contr.*, v. 40, n. 3, March 1995.

[43] Karkoub, M., Balas, G.J., Tamma, K., Colocated and Noncolocated Control Design via $\mu-$Synthesis for Flexible Manipulators. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 1995, v. 5, pp. 3321-3325.

[44] Kwon Y. W., Bang H., *The Finite Element Method Using MATLAB*. 2. ed. CRC Press, 1997. 624 p.

[45] Kundu, S., Seto, K., Sugino, S., Genetic Algorithm Application to Vibration Control of Tall Flexible Structures. In: *Proceedings of the First IEEE International Workshop on Electronic Design, Test and Applications*, 2002. pp. 333-337.

[46] Lim, K. B., Maghami, P. G., Joshi, S. M., Comparison of Controller Designs for an Experimental Flexible Structure. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 12, n. 3, pp. 108-118, June 1992.

[47] Ljung, L., *System Identification: Theory for the Users*. New York: Prentice-Hall, 1995.

[48] Lublin, L., Athans, M., Experimental Comparison of H_2 and H_∞ Designs for a Flexible Structure. In: *Proceedings of the* 33^{rd} *IEEE Conference on Decision and Control*, 1994, v. 3, pp. 2910-2915.

[49] Luenberger, D. G., *Linear and Non Linear Programming*, Addison Wesley Publishers Ltd., 1984. 491 p.

[50] Maciejowski, J. M., *Multivariable Feedback Design*, Addison Wesley Publishers Ltd., 1989. 424 p.

[51] Moreira, F. J. O., *Um Controlador* H_∞ *de Banda Limitada para o Controle Ativo de Vibração Estrutural*. Tese de Doutorado. Departamento de Mecânica Computacional,

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

[52] Moser, A. N., Designing Controllers for Flexible Structures with H_∞/μ Synthesis. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 13, n. 2, pp. 79-89, April 1993.

[53] Murray, W., Analytical Expressions for Eigenvalues and Eigenvectors of the Hessian Matrices of Barrier and Penalty Functions. *J. Optim. Theory Appl.*, v. 7, pp. 189-196, 1971.

[54] Nemirovski, A., Gahinet, P., The Projective Method for Solving Linear Matrix Inequalities, *Proc. Amer. Contr. Conf.*, pp. 840-844, 1994.

[55] Nesterov, Yu, and A. Nemirovski, *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Applications*, SIAM Books, Philadelphia, 1994.

[56] Nóbrega, E. G. O., *Detecção Robusta de Falhas Usando Inequações Matriciais Lineares*, Tese de Livre Docência, Departamento de Mecânica Computacional, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 116 p.

[57] Noll, D., Torki, M., Apkarian, P., Partially Augmented Lagrangian Method for Matrix Inequality Constraints. *SIAM J. Optim.*, v. 15, n. 1, pp. 161-184, 2004.

[58] Ogata, K., *Engenharia de Controle Moderno*. 3. ed. LTC, 2000. 970 p.

[59] Oliveira, M. C., Geromel, J. C., Numerical Comparison of Output Feedback Design Methods, *in Proc. American Control Conf.*, Albuquerque, NM, 1997, pp. 72-76.

[60] Ozbay, H., Bachmann, G. R., H_2/H_∞ Controller Design for a 2-D Thin Airfoil Flutter Suppression. *AIAA J. Guidance, Contr., Dynamics*, v. 17, n. 4, pp. 722-728, July-Aug. 1994.

[61] Packard, A. et al., A Collection of Robust Control Problems Leading to LMI's. In: *Proceedings of the* 30^{th} *Conference on Decision and Control*, 1991. pp. 1245-1250.

[62] Petersen, K. B., Pedersen, M. S., *The Matrix Cookbook*, Technical University of Denmark, 2005. Disponível em: *http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/edoc_download.php/3274/pdf/imm3274.pdf* com acesso dia 02/05/2005.

[63] Powell, M. J. D., *A Method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems in Optimization*. London, New York: R. Fletcher, Academic Press, 1969.

[64] Sarracini Jr., F., Serpa, A. L., Reduced Model in H_∞ Vibration Control Using Linear Matrix Inequalities. In: *XI International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, 2005, Ouro Preto - MG. Proceedings of the XI DINAME, 2005.

[65] Serpa, A. L., *Otimização de Malhas de Elementos Finitos pelo Método da Realocação dos Nós na Elasticidade Linear*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Mecânica Computacional, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1991.

[66] Serpa, A. L., *Problema de Contato com Atrito Utilizando o Método Lagrangiano Aumentado*. Tese de Doutorado. Departamento de Mecânica Computacional, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

[67] Shahian, B., Hassul, M., *Control System Design using MATLAB*. New Jersey: Pretince-Hall, 1993. 503 p.

[68] *SIMULINK*: Simulation and Model-Based Design. The Mathworks, Inc., 2005. 711 p.

[69] Skogestad, S., Postlethwaite, I., *Multivariable Feedback Control, Analysis and Design*. John Wiley & Sons Ltd, 1996. 572 p.

[70] Smith, R. S., Cheng-Chih Chu, Fanson, J. L. The Design of H_∞ Controllers for an Experimental Non-collocated Flexible Structure Problem. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 2, n. 2, pp. 101-109, June 1994.

[71] Sturm, J. F., Using SeDuMi 1.0x, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. Manuscript, (available at http://www.unimass.nl/ sturm), August 1998.

[72] Szainer, M., Rotstein, H., Robust Controller Design for a Constrained Flexible Structure via Mixed L_∞/H_∞ Optimization. In: *First IEEE Conference on Control Applications*, v. 1, 1992. pp. 271-276.

[73] Yamaguchi, I., Kida, T., Kasai, T., Experimental Demonstration of LSS System Identification by Eigensystem Realization Algorithm, In: *Proceedings of the American Control Conference*, 1995, v. 1, pp. 407-411.

[74] Yamashita, H., A Globally Convergent Constrained Quasi-Newton Method with an Augmented Lagrangian Type Penalty Function. *Mathematical Programming*, v. 23, pp. 75-86, 1982.

[75] Zames, G., Feedback of Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Semi-Norms, and Approximate Inverses. *IEEE Trans. AC.*, v. 26, pp. 301-320, 1981.

[76] Zhou, K., Doyle, J. C., Glover, K., *Robust and Optimal Control*, New York: Prentice Hall, 1996. 596 p.

[77] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., *The Finite Element Method: Solid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity*, v. 2, Fourth Edition, McGRAW-HILL Book Company Europe, 1991. 807 p.

Apêndice A

Dedução do Modelo de Estados de Estruturas Flexíveis

Neste apêndice, é apresentado uma formulação em modelo de estados para sistemas dinâmicos regidos por equações de segunda ordem. O comportamento dinâmico de tais sistemas pode ser descrito pela seguinte expressão:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}, \tag{A.1}$$

onde:

- $\mathbf{M}$ é a matriz de massa do sistema;
- $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez do sistema;
- $\mathbf{D}$ é a matriz de amortecimento do sistema;
- $\mathbf{f}$ é o vetor das forças externas que atuam no sistema.

A expressão (A.1) pode ser reescrita como:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}. \tag{A.2}$$

Definindo o vetor de estados como $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$, o modelo de estados de uma estrutura flexível pode ser escrito como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,f_i, \tag{A.3}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}\,, \tag{A.4}$$

onde:

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}$;

- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} s_i$, onde s_i é uma base que seleciona uma dada componente i do vetor de forças externas $\mathbf{f}$;

- $\mathbf{C}$ é a matriz de saída do sistema;

- $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade de ordem compatível;

- $\mathbf{y}$ é o vetor de saídas.

Apêndice B

Observações sobre o Método de Elementos Finitos

O elemento finito pode estar inclinado com relação ao sistema de coordenadas global, como mostrado na figura B.1. Neste caso, as matrizes de rigidez e de massa de cada elemento requerem uma transformação de coordenadas. A relação entre os deslocamentos no sistema global (u_1, v_1 e θ_1) e no sistema local ($\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$ e $\bar{\theta}_1$) é dada pela equação que segue [44]:

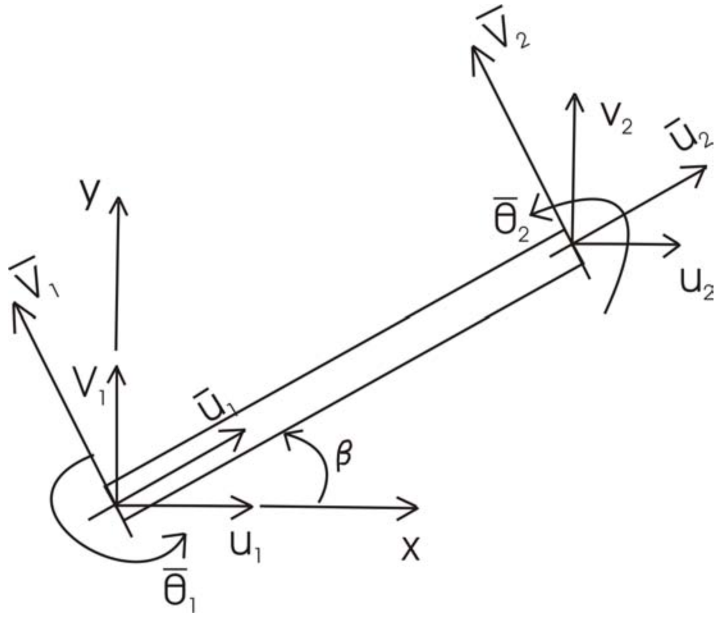

Figura B.1: Elemento inclinado com relação ao sistema global.

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\} = \mathbf{L} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\}, \tag{B.1}$$

onde:

- $\mathbf{d} = \left\{ \ u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2 \ \right\}^T$ representa o vetor de deslocamentos do elemento no sistema de coordenadas global;
- $\bar{\mathbf{d}} = \left\{ \ \bar{u}_1 \ \bar{v}_1 \ \bar{\theta}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{v}_2 \ \bar{\theta}_2 \ \right\}^T$ representa o vetor de deslocamentos do elemento no sistema de coordenadas local;
- β é o ângulo formado entre os sistemas local e global (vale lembrar que estão sendo considerados apenas problemas bidimensionais neste trabalho);
- $\mathbf{L}$ é a matriz de transformação, a qual relaciona o sistema local ao sistema global.

Em notação simplificada, a expressão (B.1) pode escrita como:

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{L}\mathbf{d}. \tag{B.2}$$

A energia de deformação de cada elemento no sistema de coordenadas local é dada por [21]:

$$\bar{U}_e = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{d}}. \tag{B.3}$$

Substituindo a expressão (B.2) na equação (B.3), pode-se escrever a energia de deformação de cada elemento no sistema global:

$$U_e = \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{L}^T \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{L}\mathbf{d}. \tag{B.4}$$

Comparando-se as expressões (B.3) e (B.4), verifica-se que a matriz de rigidez de cada elemento no sistema de coordenadas global pode ser escrita como segue [44]:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{L}^T \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{L}, \tag{B.5}$$

onde:

- $\mathbf{K}^e$ é a matriz de rigidez de um determinado elemento no sistema de coordenadas global;

- $\bar{\mathbf{K}}^e$ é a matriz de rigidez de um determinado elemento no sistema de coordenadas local.

A matriz de massa de cada elemento independe do sistema de coordenadas. Em outras palavras, a matriz de massa no sistema de coordenadas local é igual à matriz de massa no sistema de coordenadas global.

Após a obtenção das matrizes de massa e de rigidez de cada elemento finito, torna-se necessário gerar as matrizes de massa e de rigidez da estrutura como um todo. Isso é possível somando-se os elementos das matrizes em posições adequadas. Como exemplo, a figura B.2 mostra como as matrizes de massa e de rigidez, de uma estrutura formada apenas por dois elementos finitos, podem ser montadas. Esta operação é conhecida como *assembly* dos elementos [44, 21].

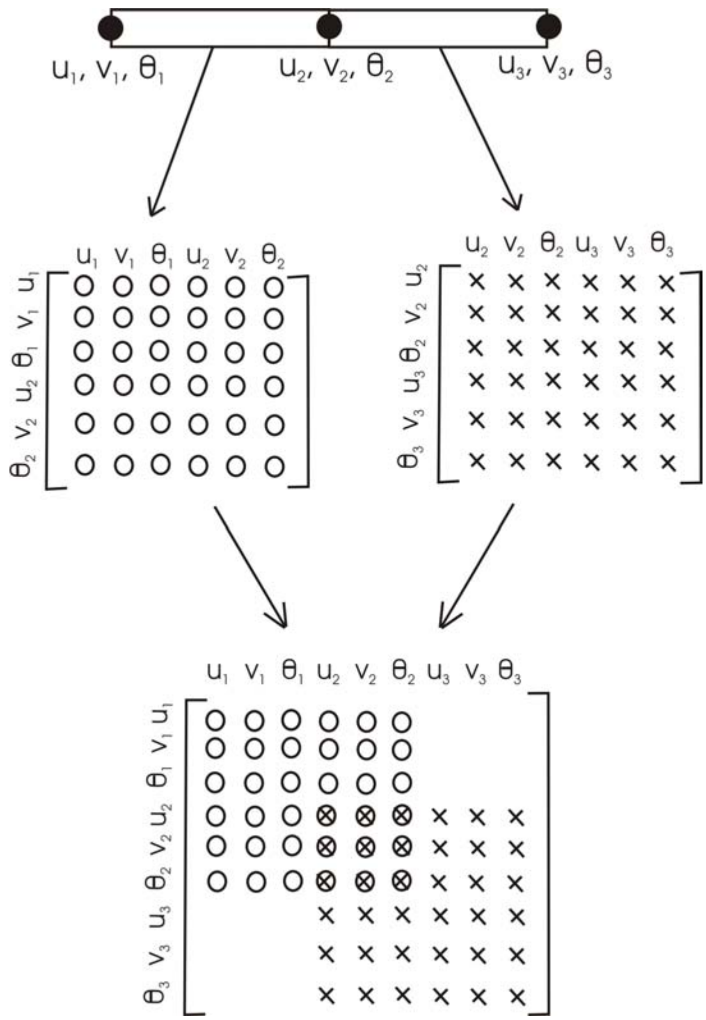

Figura B.2: Esquema de associação das matrizes de massa e de rigidez de cada elemento com a finalidade de gerar as matrizes de massa e de rigidez da estrutura como um todo (*assembly*).

Apêndice C

Exemplos de Cálculo da Norma H_∞

Como ilustração, apresentam-se dois exemplos de cálculo da norma H_∞ com funções de transferência:

$$1)\ \ \|e^{-Ts}\|_\infty = sup_w\ \sqrt{e^{-jwT}e^{jwT}} = 1;$$
$$2)\ \ \|\ \tfrac{1}{s+a}\ \|_\infty = sup_w\ \sqrt{\frac{1}{a+jw}\cdot\frac{1}{a-jw}} = sup_w\ \frac{1}{\sqrt{w^2+a^2}} = \frac{1}{a},$$

onde $a > 0$, $s = jw$ e $w = 0$ para o maior valor.

Apresenta-se agora um outro exemplo de cálculo da norma H_∞ com uma matriz de transferência, onde o conceito de valor singular é usado.

Seja uma matriz de transferência:

$$\mathbf{A}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Fazendo $s = jw$, tem-se:

$$\mathbf{A}(jw) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+jw} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+jw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-jw}{1+w^2} & 0 \\ 0 & \frac{1-jw}{1+w^2} \end{bmatrix}.$$

A matriz complexa conjugada transposta de $\mathbf{A}(jw)$ é: $\mathbf{A}^*(jw) = \begin{bmatrix} \frac{1+jw}{1+w^2} & 0 \\ 0 & \frac{1+jw}{1+w^2} \end{bmatrix}$.

Com isso, obtém-se um par de autovalores de $\mathbf{A}^*(jw)\mathbf{A}(jw)$ iguais a $\frac{1}{1+w^2}$, ou seja:

$$\sigma(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda(\mathbf{A}^*(jw)\mathbf{A}(jw))} = \sqrt{(\frac{1}{1+w^2})^2} = \frac{1}{1+w^2}.$$

Portanto, para $w = 0$ obtém-se o máximo valor singular possível:

$$\|\mathbf{A}(jw)\|_\infty = sup_w\ \sigma(\mathbf{A}(jw)) = \lim_{w\to 0}\frac{1}{1+w^2} = 1 = 0\ dB. \tag{C.1}$$

A figura C.1 mostra o diagrama de valor singular da matriz $\mathbf{A}(s)$, onde se verifica que a norma H_∞ (valor de pico neste diagrama) corresponde a 0 dB, conforme obtido em (C.1).

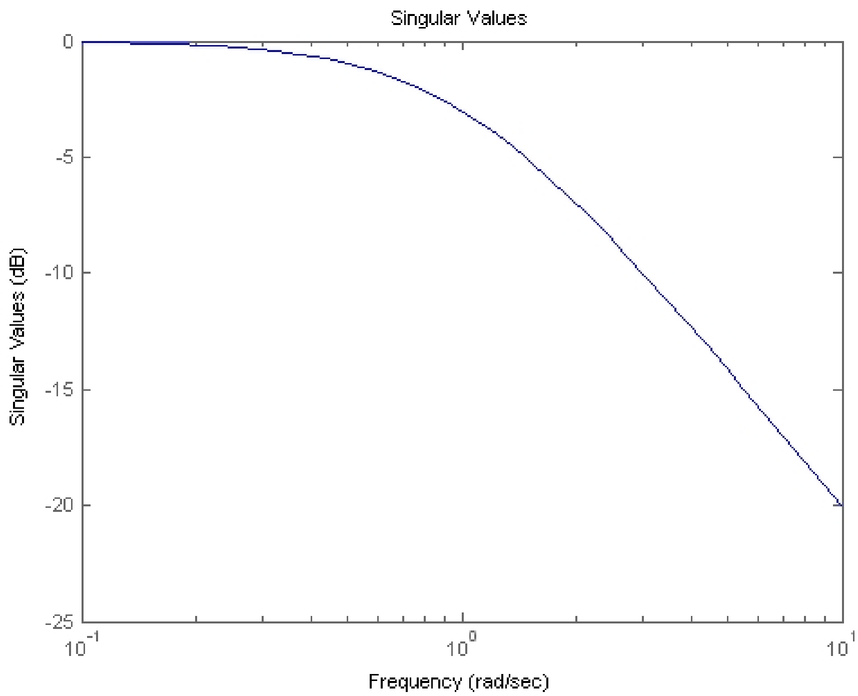

Figura C.1: Diagrama de valor singular da matriz $\mathbf{A}(s)$ gerado com o comando *sigma* do MATLAB.

Apêndice D

Exemplo de Uso de Filtros de Ponderação

Seja a planta nominal de um sistema massa-mola-amortecedor de 1 grau de liberdade que segue:

$$P_n(s) = \frac{4}{s^2 + 0.02s + 4}. \tag{D.1}$$

O modelo de estados de (D.1) voltado para o problema H_∞ pode ser escrito como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -0.02 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando o comando *hinflmi* do MATLAB é possível projetar um controlador H_∞ de ordem completa para este sistema. O controlador obtido é dado pela seguinte função de transferência:

$$K(s) = \frac{-124900s - 6965}{s^2 + 1355s + 19420}. \tag{D.2}$$

Através da Figura D.1, verifica-se que o controlador (D.2) minimizou o valor de pico no diagrama de valor singular da malha fechada com a planta nominal. A norma H_∞ foi reduzida de 40 dB para 0.391 dB.

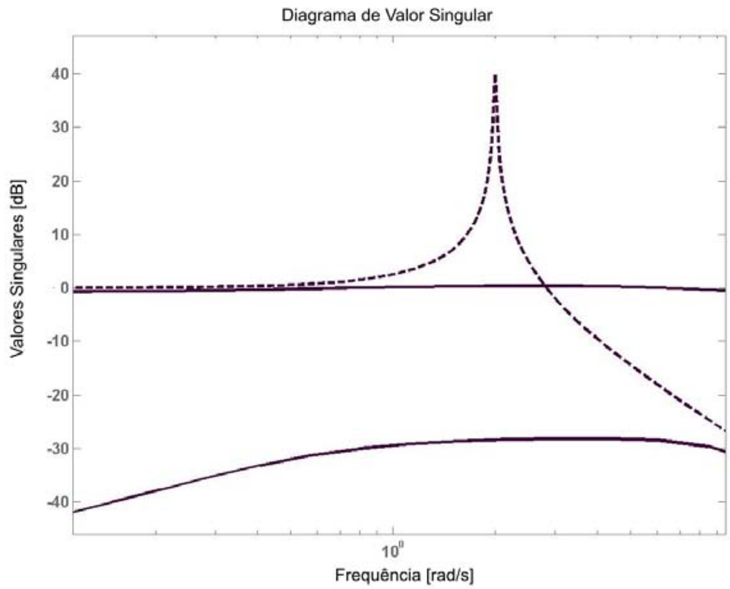

Figura D.1: Diagrama de valor singular do sistema nominal sem controle (linha tracejada) e do sistema nominal com o controlador H_∞ de ordem completa (linha contínua).

Considere que na prática, o sistema em questão apresente uma incerteza dinâmica multiplicativa da forma como segue:

$$I(s) = \frac{s^2 + 0.72s + 324}{s^2 + 0.3s + 225}. \tag{D.3}$$

Portanto, a planta real é escrita como:

$$P_r(s) = P_n(s)I(s) = \frac{4s^2 + 2.88s + 1296}{s^4 + 0.32s^3 + 229s^2 + 5.7s + 900}. \tag{D.4}$$

A Figura D.2 traz uma comparação entre o diagrama de Bode das plantas nominal e real. Verifica-se que a planta real apresenta um modo a mais que a planta nominal.

Quando o controlador (D.2) é colocado para controlar a planta real, verifica-se que o sistema em malha fechada se torna instável. Os pólos de malha fechada obtidos são:

$$\begin{array}{l} -1340.50 \\ -9.80 + 17.99i \\ -9.80 - 17.99i \\ +2.7 + 16.80i \\ +2.7 - 16.80i \\ -0.2 \end{array}$$

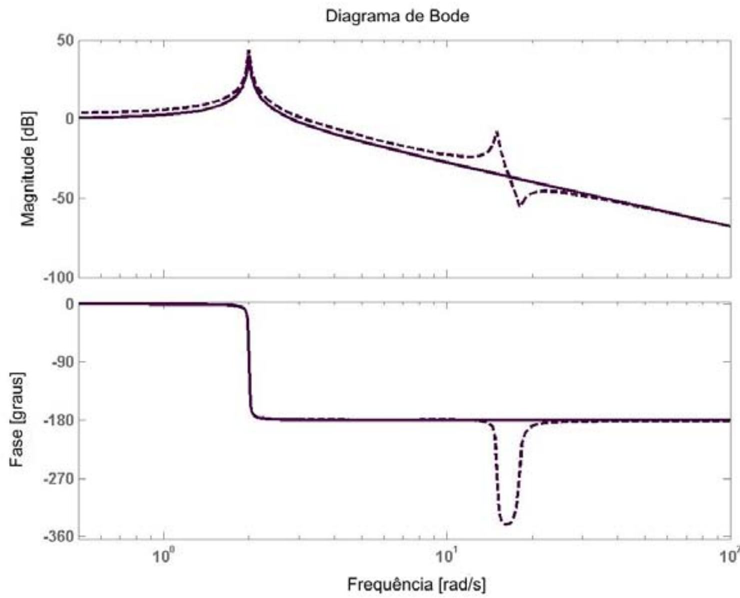

Figura D.2: Diagrama de bode da planta nominal (linha contínua) e da planta real (linha tracejada).

Com isso, é necessário realizar o projeto de um controlador H_∞ que seja capaz de controlar a planta real. Para isso, utiliza-se o esquema apresentado na Figura 4.2 onde se adota:

- $\mathbf{W}_P = \frac{0.0001s+0.1}{s+5}$;
- $\mathbf{W}_u = \frac{0.00001s+0.0001}{s+100}$;
- $\mathbf{W}_n = 0.01$.

Vale ressaltar que $\mathbf{W}_P$, $\mathbf{W}_u$ e $\mathbf{W}_n$ foram escolhidos por tentativa e erro de forma a assegurar a estabilidade robusta do sistema (expressões (4.32), (4.33), (4.34) e (4.35) são satisfeitas), evitando o fenômeno de *spillover*.

A planta aumentada tal qual descrita pelas expressões (4.8), (4.9) e (4.10) pode ser obtida:

$$\mathbf{A}^G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 0 \\ 0.3154 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1^G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2^G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.03 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_1^G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.3154 \\ 0 & 0 & -0.0300 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{11}^G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{12}^G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.00001 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_2^G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{21}^G = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{22}^G = 0.$$

Utilizando a planta aumentada e o comando *hinflmi* do MATLAB, obtém-se o seguinte controlador H_∞:

$$K_w(s) = \frac{-1327s^3 - 1.485e005s^2 - 1.853e006s - 1.029e007}{s^3 + 147.5s^2 + 5038s + 1403}. \tag{D.5}$$

Através das Figuras D.3 e D.4 é possível verificar a estabilidade robusta (expressões (4.32), (4.33), (4.34) e (4.35) são satisfeitas). Conforme se pode constatar, não existe intersecção entre $\gamma\mathbf{W}_P^{-1}$ e as curvas de $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$. Verifica-se também que não há intersecção entre $\gamma\mathbf{W}_u^{-1}$ e as curvas de $\mathbf{N}_3$ e $\mathbf{N}_4$. Dessa forma, diz-se que o controlador obtido é capaz de assegurar a estabilidade robusta.

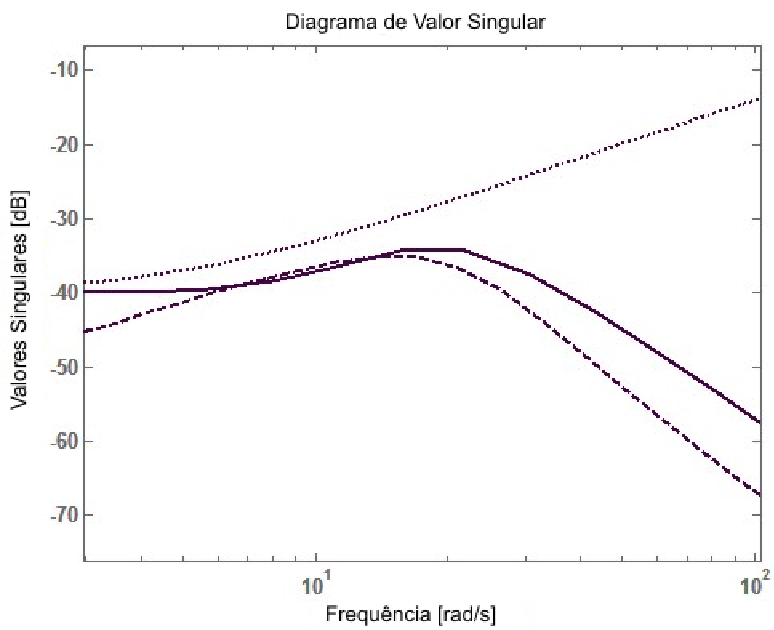

Figura D.3: $\gamma\mathbf{W}_P^{-1}$ (linha pontilhada), $\mathbf{N}_1$ (linha tracejada), $\mathbf{N}_2$ (linha contínua).

Quando o controlador (D.5) é colocado para controlar a planta real, os seguintes pólos são obtidos para a malha fechada:

$$\begin{array}{l} -96.4503 \\ -18.5501 + 66.0799i \\ -18.5501 - 66.0799i \\ -0.0960 + 18.4929i \\ -0.0960 - 18.4929i \\ -7.0313 + 6.0336i \\ -7.0313 - 6.0336i \end{array}$$

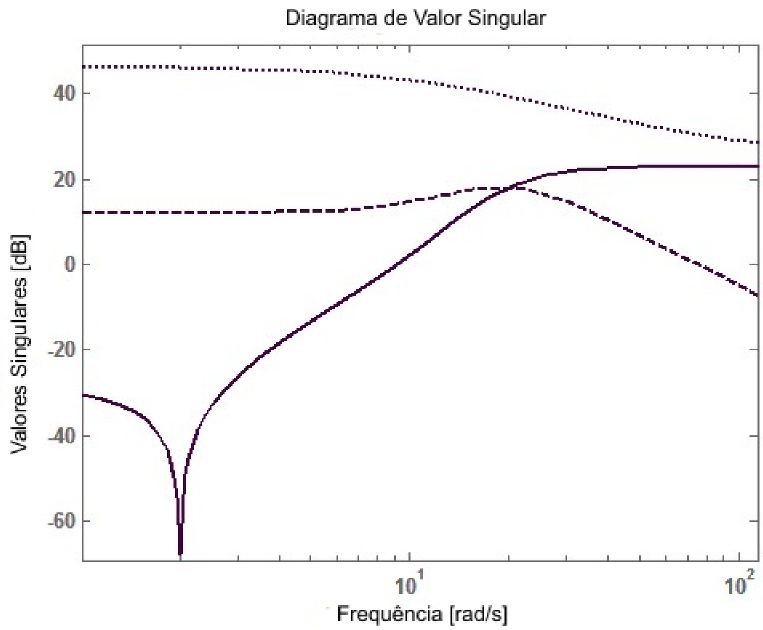

Figura D.4: $\gamma \mathbf{W}_u^{-1}$ (linha pontilhada), $\mathbf{N}_3$ (linha tracejada), $\mathbf{N}_4$ (linha contínua).

É possível verificar que todos os pólos de malha fechada estão no semi-plano esquerdo do plano complexo, e, portanto, a malha fechada é estável.

A Figura D.5 traz a resposta a um distúrbio aleatório gaussiano de média nula e desvio padrão unitário do sistema real sem controle e do sistema real controlado. Verifica-se que o distúrbio é atenuado devido ao controle.

Portanto, é possível verificar que, neste caso, o uso dos filtros de ponderação foi vital para a obtenção de um controlador H_∞ que estabilizasse o sistema em malha fechada com a planta real.

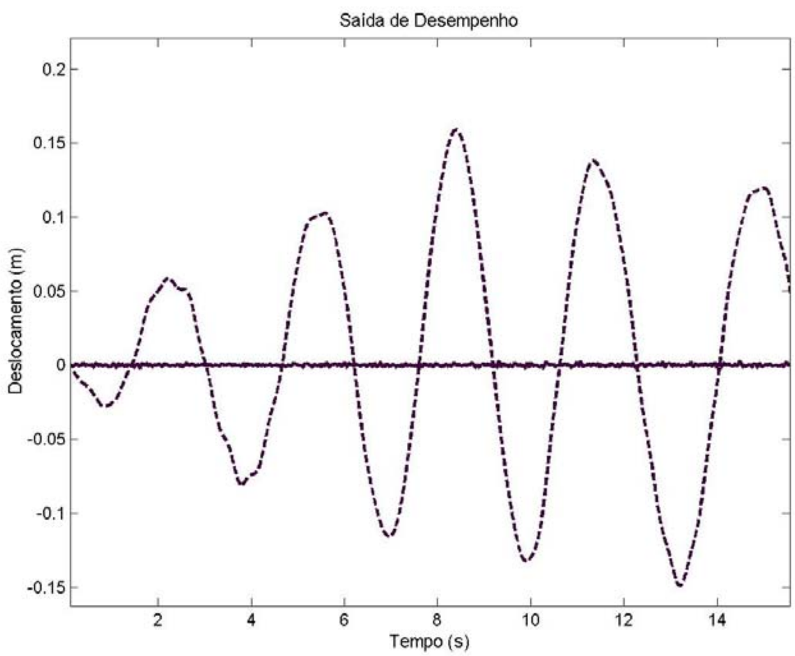

Figura D.5: Resposta do sistema real sem controle (linha tracejada) e do sistema real controlado (linha contínua).

Apêndice E

Verificação da Função Objetivo $\Phi_c(\mathbf{x}, \Lambda)$ na Forma Matricial

Afim de tornar mais compreensível a passagem de (6.2) para (6.44), realiza-se um exemplo onde:

$$\mathbf{XY} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} r_1 & r_3 \\ r_2 & r_4 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Com isso, os termos presentes em (6.44) podem ser encontrados:

$$\Lambda^T(\mathbf{XY} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 & \lambda_1 r_3 + \lambda_2 r_4 \\ \lambda_3 r_1 + \lambda_4 r_2 & \lambda_3 r_3 + \lambda_4 r_4 \end{bmatrix};$$

$$Tr(\Lambda^T(\mathbf{XY} - \mathbf{I})) = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3 + \lambda_4 r_4; \tag{E.1}$$

$$vec(\mathbf{XY} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix}^T;$$

$$vec^T(\mathbf{XY} - \mathbf{I})\,\mathbf{C}\,vec(\mathbf{XY} - \mathbf{I}) = c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + c_3 r_3^2 + c_4 r_4^2. \tag{E.2}$$

Verifica-se que, conforme esperado, os resultados obtidos em (E.1) e (E.2) são concordantes com o uso da expressão (6.44).

Apêndice F

Exemplo Numérico da Derivada de uma Matriz Simétrica

A derivada de uma matriz simétrica $\mathbf{E}$ em relação a seus próprios elementos é dada pela matriz $\mathbf{T}$, a qual mapeia o triângulo inferior vetorizado de uma determinada matriz em sua completa representação vetorial.

Tomando-se como exemplo a matriz de dimensão 2×2 simétrica $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, o triângulo inferior vetorizado de $\mathbf{U}$ é $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ e sua representação vetorial completa é $vec(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$. Dessa forma, deseja-se encontrar $\mathbf{T}$ tal que:

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Com isso, obtém-se:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{F.1}$$

Vale ressaltar que, caso a matriz $\mathbf{E}$ não apresentasse qualquer estrutura especial, $\mathbf{T}$ seria uma matriz identidade com a mesma dimensão de $\mathbf{E}$.

Afim de tornar mais clara a compreensão de (6.48), (6.49) e (6.50), a seguir são fornecidos exemplos de uso de tais fórmulas. Sejam:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{T}$ conforme definido em (F.1) (note que $\mathbf{E}$ apresenta dimensão 2×2).

Usando (6.48), calcula-se:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 10 \\ 6 & 3 & 8 & 4 \\ 9 & 15 & 12 & 20 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 15 \\ 4 & 6 & 8 & 12 \\ 2 & 10 & 4 & 20 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T,$$

onde $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ denota o produto de Kronecker entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, ou seja, cada elemento de $\mathbf{A}$ é multiplicado pela matriz $\mathbf{B}$.

Como exemplo de uso de (6.49), obtém-se o seguinte desenvolvimento:

$$\mathbf{AEB} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 & x_1 + 7x_2 + 10x_3 \\ 6x_1 + 17x_2 + 12x_3 & 3x_1 + 19x_2 + 20x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_3 \\ l_2 & l_4 \end{bmatrix}$$

$$vec(\mathbf{AEB}) = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{bmatrix}^T$$

$$\frac{\partial\ \mathbf{AEB}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial\ vec(\mathbf{AEB})}{\partial \mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \partial l_1/\partial x_1 & \partial l_1/\partial x_2 & \partial l_1/\partial x_3 \\ \partial l_2/\partial x_1 & \partial l_2/\partial x_2 & \partial l_2/\partial x_3 \\ \partial l_3/\partial x_1 & \partial l_3/\partial x_2 & \partial l_3/\partial x_3 \\ \partial l_4/\partial x_1 & \partial l_4/\partial x_2 & \partial l_4/\partial x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 6 & 17 & 12 \\ 1 & 7 & 10 \\ 3 & 19 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{(F.2)}$$

$$\frac{\partial\ \mathbf{AEB}}{\partial \mathbf{E}} = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A})\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 6 \\ 6 & 8 & 9 & 12 \\ 1 & 2 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 15 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 6 & 17 & 12 \\ 1 & 7 & 10 \\ 3 & 19 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{(F.3)}$$

Conforme esperado, verifica-se que (F.2) e (F.3) são iguais.

Para a expressão (6.50), faz-se:

$$Tr(\mathbf{AEB}) = 5x_1 + 26x_2 + 26x_3 = l_1 + l_4$$

$$\frac{\partial\ Tr(\mathbf{AEB})}{\partial \mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \partial(l_1 + l_4)/\partial x_1 \\ \partial(l_1 + l_4)/\partial x_2 \\ \partial(l_1 + l_4)/\partial x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \\ 26 \end{bmatrix} \quad \text{(F.4)}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 5 & 18 \\ 8 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\ Tr(\mathbf{AEB})}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{T}^T vec(\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 18 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \\ 26 \end{bmatrix} \quad \text{(F.5)}$$

Conforme esperado, verifica-se que (F.4) e (F.5) são iguais.

Apêndice G

Exemplo de Cálculo do Gradiente e da Hessiana de $\Phi_c(\mathbf{x}, \Lambda)$

Com a finalidade de tornar mais compreensível os desenvolvimentos para a obtenção do gradiente e da hessiana de $\Phi_c(\mathbf{x}, \Lambda)$, a seguir é realizado um exemplo onde se calcula $\partial(\Phi_1 + \Phi_2)/\partial\mathbf{X}$, $\partial^2(\Phi_1 + \Phi_2)/\partial\mathbf{X}^2$ e $\partial^2(\Phi_1 + \Phi_2)/\partial\mathbf{X}\partial\mathbf{Y}$.

Sejam:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{XY} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} x_1y_1 + x_2y_2 - 1 & x_1y_2 + x_2y_3 \\ x_2y_1 + x_3y_2 & x_2y_2 + x_3y_3 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_3 \\ r_2 & r_4 \end{bmatrix},$$

Logo, obtém-se:

$$\Phi_1 = \gamma + \lambda_1(x_1y_1 + x_2y_2) + \lambda_2(x_2y_1 + x_3y_2) + \lambda_3(x_1y_2 + x_2y_3) + \lambda_4(x_2y_2 + x_3y_3), \tag{G.1}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}(c_1r_1^2 + c_2r_2^2 + c_3r_3^2 + c_4r_4^2). \tag{G.2}$$

A derivada de (G.1) em relação à variável matricial $\mathbf{X}$ é:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \partial\Phi_1/\partial x_1 \\ \partial\Phi_1/\partial x_2 \\ \partial\Phi_1/\partial x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1y_1 + \lambda_3y_2 \\ \lambda_1y_2 + \lambda_2y_1 + \lambda_3y_3 + \lambda_4y_2 \\ \lambda_2y_2 + \lambda_4y_3 \end{bmatrix}. \tag{G.3}$$

Através da fórmula (6.50), obtém-se:

$$\Lambda\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \lambda_1 y_1 + \lambda_3 y_2 & \lambda_1 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ \lambda_2 y_1 + \lambda_4 y_2 & \lambda_2 y_2 + \lambda_4 y_3 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{T}^T vec(\Lambda\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 y_1 + \lambda_3 y_2 \\ \lambda_2 y_1 + \lambda_4 y_2 \\ \lambda_1 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ \lambda_2 y_2 + \lambda_4 y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 y_1 + \lambda_3 y_2 \\ \lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_2 \\ \lambda_2 y_2 + \lambda_4 y_3 \end{bmatrix}. \tag{G.4}$$

Conforme esperado, os resultados em (G.3) e (G.4) são iguais.

A derivada de (G.2) em relação à variável matricial $\mathbf{X}$ é:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \partial\Phi_2/\partial x_1 \\ \partial\Phi_2/\partial x_2 \\ \partial\Phi_2/\partial x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 r_1 y_1 + c_3 r_3 y_2 \\ c_1 r_1 y_2 + c_2 r_2 y_1 + c_3 r_3 y_3 + c_4 r_4 y_2 \\ c_2 r_2 y_2 + c_4 r_4 y_3 \end{bmatrix}. \tag{G.5}$$

Através da fórmula (6.49), obtém-se:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{T}^T (\mathbf{Y} \otimes \mathbf{I})\, \mathbf{C}\, vec(\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & 0 & y_2 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 & y_2 \\ y_2 & 0 & y_3 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 r_1 \\ c_2 r_2 \\ c_3 r_3 \\ c_4 r_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 r_1 y_1 + c_3 r_3 y_2 \\ c_1 r_1 y_2 + c_2 r_2 y_1 + c_3 r_3 y_3 + c_4 r_4 y_2 \\ c_2 r_2 y_2 + c_4 r_4 y_3 \end{bmatrix}. \tag{G.6}$$

Conforme esperado, os resultados em (G.5) e (G.6) são iguais.

Utilizando (G.4), calcula-se:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \mathbf{X}^2} = \mathbf{0},$$

pois (G.4) não depende da variável matricial $\mathbf{X}$.

A partir de (G.6), encontra-se:

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \mathbf{X}^2} = \begin{bmatrix} \partial^2\Phi_2/\partial x_1^2 & \partial^2\Phi_2/\partial x_1 x_2 & \partial^2\Phi_2/\partial x_1 x_3 \\ \partial^2\Phi_2/\partial x_2 x_1 & \partial^2\Phi_2/\partial x_2^2 & \partial^2\Phi_2/\partial x_2 x_3 \\ \partial^2\Phi_2/\partial x_3 x_1 & \partial^2\Phi_2/\partial x_3 x_2 & \partial^2\Phi_2/\partial x_3^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 y_1^2 + c_3 y_2^2 & c_1 y_1 y_2 + c_3 y_2 y_3 & 0 \\ c_1 y_1 y_2 + c_3 y_2 y_3 & c_2 y_1^2 + c_4 y_2^2 + c_1 y_2^2 + c_3 y_3^2 & c_2 y_1 y_2 + c_4 y_2 y_3 \\ 0 & c_2 y_1 y_2 + c_4 y_2 y_3 & c_2 y_2^2 + c_4 y_3^2 \end{bmatrix}. \tag{G.7}$$

O resultado (G.7) pode ser obtido através do uso de (6.56):

$$(\mathbf{Y}\otimes\mathbf{I})\mathbf{T} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 & 0 \\ 0 & y_2 & y_3 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2\ \Phi_2}{\partial \mathbf{X}^2} = \mathbf{T}^T(\mathbf{Y}\otimes\mathbf{I})\,\mathbf{C}\,(\mathbf{Y}\otimes\mathbf{I})\mathbf{T} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1y_1^2 + c_3y_2^2 & c_1y_1y_2 + c_3y_2y_3 & 0 \\ c_1y_1y_2 + c_3y_2y_3 & c_2y_1^2 + c_4y_2^2 + c_1y_2^2 + c_3y_3^2 & c_2y_1y_2 + c_4y_2y_3 \\ 0 & c_2y_1y_2 + c_4y_2y_3 & c_2y_2^2 + c_4y_3^2 \end{bmatrix}. \tag{G.8}$$

A partir de (G.4), calcula-se:

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\mathbf{X}\partial\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \partial^2\Phi_1/\partial x_1y_1 & \partial^2\Phi_2/\partial x_1y_2 & \partial^2\Phi_2/\partial x_1y_3 \\ \partial^2\Phi_1/\partial x_2y_1 & \partial^2\Phi_2/\partial x_2y_2 & \partial^2\Phi_2/\partial x_2y_3 \\ \partial^2\Phi_1/\partial x_3y_1 & \partial^2\Phi_2/\partial x_3y_2 & \partial^2\Phi_2/\partial x_3y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1+\lambda_4 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_4 \end{bmatrix}. \tag{G.9}$$

Com o uso de (6.57), obtém-se o mesmo resultado que em (G.9):

$$\mathbf{I}\otimes\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda_4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}^T(\mathbf{I}\otimes\Lambda)\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1+\lambda_4 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_4 \end{bmatrix} \tag{G.10}$$

A partir de (G.6), obtém-se:

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\mathbf{X}\partial\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \partial^2\Phi_2/\partial x_1y_1 & \partial^2\Phi_2/\partial x_1y_2 & \partial^2\Phi_2/\partial x_1y_3 \\ \partial^2\Phi_2/\partial x_2y_1 & \partial^2\Phi_2/\partial x_2y_2 & \partial^2\Phi_2/\partial x_2y_3 \\ \partial^2\Phi_2/\partial x_3y_1 & \partial^2\Phi_2/\partial x_3y_2 & \partial^2\Phi_2/\partial x_3y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_4 & h_7 \\ h_2 & h_5 & h_8 \\ h_3 & h_6 & h_9 \end{bmatrix}, \tag{G.11}$$

onde:

- $h_1 = c_1(2x_1y_1 + x_2y_2 - 1)$;
- $h_2 = c_1x_1y_2 + c_2(2x_2y_1 + x_3y_2)$;
- $h_3 = c_2x_2y_2$;

- $h_4 = c_1 x_2 y_1 + c_3(2x_1 y_2 + x_2 y_3)$;
- $h_5 = c_1(2x_2 y_2 + x_1 y_1 - 1) + c_2 x_3 y_1 + c_3 x_1 y_3 + c_4(2x_2 y_2 + x_3 y_3 - 1)$;
- $h_6 = c_2(2x_3 y_2 + x_2 y_1) + c_4 x_2 y_3$;
- $h_7 = c_3 x_2 y_2$;
- $h_8 = c_3(2x_2 y_3 + x_1 y_2) + c_4 x_3 y_2$;
- $h_9 = c_4(2x_3 y_3 + x_2 y_2 - 1)$.

Utilizando a expressão (6.57), encontra-se o mesmo resultado obtido em (G.11):

$$\mathbf{T}^T(\mathbf{Y} \otimes \mathbf{I})\,\mathbf{C}\,(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X})\mathbf{T} = \begin{bmatrix} e_1 & e_4 & e_7 \\ e_2 & e_5 & e_8 \\ e_3 & e_6 & e_9 \end{bmatrix},$$

onde:

- $e_1 = c_1 x_1 y_1$;
- $e_2 = c_1 x_1 y_2 + c_2 x_2 y_1$;
- $e_3 = c_2 x_2 y_2$;
- $e_4 = c_3 x_1 y_2 + c_1 x_2 y_1$;
- $e_5 = c_1 x_2 y_2 + c_2 x_3 y_1 + c_3 x_1 y_3 + c_4 x_2 y_2$;
- $e_6 = c_4 x_2 y_3 + c_2 x_3 y_2$;
- $e_7 = c_3 x_2 y_2$;
- $e_8 = c_3 x_2 y_3 + c_4 x_3 y_2$;
- $e_9 = c_4 x_3 y_3$.

E finalmente,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^T(\mathbf{I} \otimes (\mathbf{S} \circ (\mathbf{XY} - \mathbf{I})))\mathbf{T} = \begin{bmatrix} s_1 & s_4 & s_7 \\ s_2 & s_5 & s_8 \\ s_3 & s_6 & s_9 \end{bmatrix},$$

onde:

- $s_1 = c_1(x_1 y_1 + x_2 y_2 - 1) = c_1 r_1$;

- $s_2 = c_2(x_2 y_1 + x_3 y_2) = c_2 r_2$;

- $s_3 = 0$;

- $s_4 = c_3(x_1 y_2 + x_2 y_3) = c_3 r_3$;

- $s_5 = c_1(x_1 y_1 + x_2 y_2 - 1) + c_4(x_2 y_2 + x_3 y_3 - 1) = c_1 r_1 + c_4 r_4$;

- $s_6 = c_2(x_2 y_1 + x_3 y_2) = c_2 r_2$;

- $s_7 = 0$;

- $s_8 = c_3(x_1 y_2 + x_2 y_3) = c_3 r_3$;

- $s_9 = c_4(x_2 y_2 + x_3 y_3 - 1) c_4 r_4$.

$$\frac{\partial^2 \; \Phi_2}{\partial \mathbf{X} \partial \mathbf{Y}} = \mathbf{T}^T [(\mathbf{Y} \otimes \mathbf{I})\, \mathbf{C}\, (\mathbf{I} \otimes \mathbf{X}) + (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{S} \circ (\mathbf{XY} - \mathbf{I})))] \mathbf{T} = \begin{bmatrix} h_1 & h_4 & h_7 \\ h_2 & h_5 & h_8 \\ h_3 & h_6 & h_9 \end{bmatrix}, \qquad \text{(G.12)}$$

onde $h_i = e_i + s_i$.

Por analogia, a extensão do exemplo em questão para as demais componentes da matriz hessiana de $\Phi_c(\mathbf{x}, \Lambda)$ pode ser realizada sem grandes dificuldades.