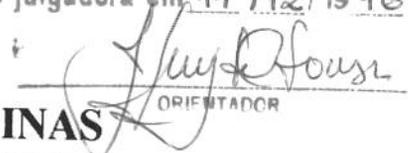


Este exemplar corresponde a redação final  
da tese defendida por José Eduardo  
de Lima Garcia e aprovada  
pela comissão julgadora em 19/11/1996

  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO**

Dissertação Apresentada à  
Faculdade de Engenharia Mecânica  
como Requisito Parcial à Obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

**Um Modelo Quase-Analítico para Simulação  
Tridimensional de Propagação de Fratura Hidráulica**

Autor: José Eduardo de Lima Garcia  
Orientador: José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa

Dezembro/96

G165m

30183/BC

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	G165m
V. Ea.	
TOMBO BC/	30183
PROC.	281/97
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	15/05/97
N.º CPD	

CM-00095255-9

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

G165m Garcia, Jose Eduardo de Lima  
Um modelo quase-analítico para simulação tridimensional de propagação de fratura hidráulica / Jose Eduardo de Lima Garcia.-Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Jose Luiz Antunes de Oliveira e Sousa.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

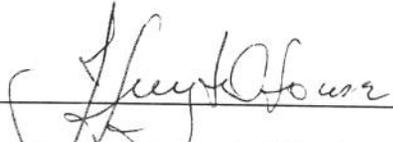
1. Fraturamento hidráulico. 2. Mecânica da fratura  
3. Engenharia do petróleo. 4. Simulação (Computadores). I. Sousa, Jose Luiz Antunes de Oliveira e. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

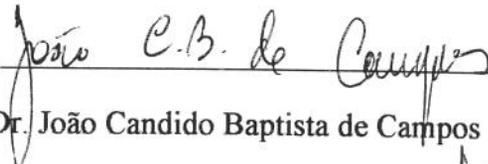
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO**

A dissertação “Um Modelo Quase-Analítico para Simulação Tridimensional de Propagação de Fratura Hidráulica”, elaborada por José Eduardo de Lima Garcia e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Subcomissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 19 de dezembro de 1996

Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa

  
\_\_\_\_\_  
Dr. João Candido Baptista de Campos

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira

Este trabalho é dedicado à minha esposa Lize,  
à nossa filha Thaís e aos meus pais, Manuel e Dalva.

## Agradecimentos

Gostaria de expressar meus agradecimentos à PETROBRÁS, por me propiciar esta oportunidade valiosa de um desenvolvimento técnico-científico, tão significativo, através de minha participação no programa de mestrado montado em parceria com a UNICAMP.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa, da UNICAMP, que através de discussões sempre bastante produtivas, e grandes doses de incentivos, viabilizou este trabalho.

Gostaria de agradecer também ao Prof. Dr. João Candido Baptista de Campos, da PETROBRÁS, pelo grande apoio técnico fornecido, inclusive quanto a redação final desta dissertação.

Ao Prof. Dr. Edmundo Capelas e a Profa. Cristina Cunha, da UNICAMP, por me direcionarem corretamente na busca de soluções para os vários problemas matemáticos enfrentados neste trabalho.

Ao Eng. Roberto Vinicius Barragan, da PETROBRÁS, que sempre me apoiou nas dificuldades com a linguagem de programação C++.

A minha esposa, Lize Cidreira Garcia, por ter suportado um transtorno bastante grande em sua vida profissional, para que eu pudesse participar deste programa de mestrado.

Aos colegas do mestrado, que tornaram este período de estudos muito mais agradável.

E finalmente, gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Sérgio Nascimento Bordalo, coordenador do programa de mestrado do Departamento de Engenharia de Petróleo, por garantir as excelentes condições de trabalho encontradas, e a todos os professores do departamento, com os quais tive contato, e que sempre se mostraram altamente capacitados.

# Resumo

## Um Modelo Quase-Analítico para Simulação Tridimensional de Propagação de Fratura Hidráulica

José Eduardo de Lima Garcia  
Universidade Estadual de Campinas

Vários simuladores tridimensionais de geometria de fraturas criadas hidraulicamente estão descritos na literatura. Entretanto, em sua grande maioria, requerem esforços computacionais que não são compatíveis com sua utilização comercial ou em tempo real. Para atenuar este problema, hipóteses simplificadoras são introduzidas, resultando os chamados modelos pseudo-tridimensionais de geometria de fratura. Vários desses modelos pseudo-tridimensionais foram analisados, com o objetivo de se entender suas hipóteses simplificadoras, suas aplicações e limitações de uso, e constam desta dissertação.

Esta dissertação descreve também o desenvolvimento de um modelo quase-analítico para simulação tridimensional de propagação de fraturas induzidas hidraulicamente, assumindo que a fratura é plana e elíptica. Expressões analíticas desenvolvidas por Shah e Kobayashi são usadas para a determinação das tensões, das deformações e dos fatores de intensidade de tensões. Estas expressões baseiam-se na hipótese que a pressão líquida interna à fratura pode ser representada por um polinômio de terceiro grau, como segue:

$$p(x, z) = P_{00} + P_{10}x + P_{01}z + P_{20}x^2 + P_{11}xz + P_{02}z^2 + P_{30}x^3 + P_{21}x^2z + P_{12}xz^2 + P_{03}z^3$$

Estas hipóteses simplificadoras também foram utilizadas por Palmer, Luiskutty, Boutéca e Rueda, embora com diferente número de termos do polinômio. O modelo aqui proposto é baseado no de Rueda, e permite a simulação de fraturas com contrastes simétricos de tensões horizontais confinantes, entre a zona de interesse e as zonas adjacentes. A qualidade dos resultados fica bastante prejudicada, quando se trabalha com contrastes assimétricos de tensões, necessitando o modelo novos desenvolvimentos para melhor tratar estas assimetrias.

No modelo proposto, um esquema diferente foi utilizado para a implementação do fluxo de fluido para a formação, perdido por filtração, inclusive no que se refere a perda inicial de filtrado (*spurt loss*). Apresentou-se também um esquema diferente para o cálculo da viscosidade aparente média, quando se está trabalhando com fluidos não-Newtonianos.

Dois critérios de propagação de fratura foram testados e comparados. Ambos utilizam aproximações para computar a propagação relativa entre pontos da borda da fratura, baseado nos fatores de intensidade de tensões. Buscou-se também aplicar um critério baseado na maximização da energia total liberada.

# Abstract

## A Quasi-Analytical Model for Three-Dimensional Analysis of Hydraulic Fracture Propagation in Reservoir Rocks

José Eduardo de Lima Garcia  
Universidade Estadual de Campinas

Several models for the development of a fully three-dimensional hydraulic fracturing simulator have been described in the literature. However, most of them result in systems that require computational efforts not compatible with the direct application in the field. In order to attenuate this problem, simplified assumptions are introduced, resulting in pseudo three-dimensional models that allow simulations in real time.

This dissertation describes the development of a model for numerical simulation of hydraulic fracture propagation, assuming that the fracture is planar and elliptical. Analytical expressions developed by Shah and Kobayashi are used for the determination of stresses, strains and stress intensity factors. These expressions assume that the net pressure in the fracture can be represented by a polynomial of third degree, as follows:

$$p(x, z) = P_{00} + P_{10}x + P_{01}z + P_{20}x^2 + P_{11}xz + P_{02}z^2 + P_{30}x^3 + P_{21}x^2z + P_{12}xz^2 + P_{03}z^3$$

The same basic assumption was also used by Palmer, Luiskutty, Boutéca and Rueda, although with different numbers of terms in the polynomial. The current model is based on Rueda's work, and allows the simulation of layers with confining stress contrasts that are not necessarily symmetric with respect to the horizontal axis of the ellipsis. The results' quality is poor when we do not have symmetrical confining stress contrasts.

Different schemes are tested for the implementation Carter's approach for the leakoff, and for the computation of average apparent viscosity when non-Newtonian fluids are considered.

Two different propagation criteria are tested and compared. Both of them use simplified approaches to compute the relative extensions among the points on the fracture front, based on the stress intensity factors. An attempt to apply an energy based criterion was performed. However, the implementation was discontinued due to difficulties in developing a reliable algorithm.

# Índice

<b>Agradecimentos</b> .....	<b>v</b>
<b>Resumo</b> .....	<b>vi</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>vii</b>
<b>Índice</b> .....	<b>viii</b>
<b>Lista de figuras</b> .....	<b>xi</b>
<b>Lista de tabelas</b> .....	<b>xiv</b>
<b>1. Introdução</b> .....	<b>1</b>
1.1. O fraturamento hidráulico .....	1
1.2. Objetivos .....	4
1.3. Forma de apresentação .....	5
<b>2. Os modelos pseudo tridimensionais de geometria de fratura</b> .....	<b>6</b>
2.1. Modelos baseados no estado plano de deformações .....	6
2.1.1. Modelo de Settari .....	6
2.1.2. Modelo de Morales .....	7
2.1.3. Modelo de Weng .....	8
2.2. Modelos baseados na fratura elíptica e carregamento descrito por polinômio .....	9
2.2.1. Modelo de Shah e Kobayashi .....	9
2.2.2. Modelo de Palmer .....	10
2.2.3. Modelo de Luiskutty .....	13
2.2.4. Modelo de Boutéca .....	13
2.2.5. Modelo de Rueda .....	14
2.3. Outro Modelo .....	14
2.3.1. Modelo de Meyer .....	14
2.4. Análise dos conceitos mais relevantes apresentados nos modelos .....	15
2.4.1. Estado plano de deformações .....	15
2.4.2. Fratura elíptica e carregamento descrito por polinômio .....	15
<b>3. As equações governantes</b> .....	<b>18</b>
3.1. Equação de fluxo de fluidos entre placas paralelas .....	18
3.2. Equação da continuidade .....	19
3.3. Equação para largura da fratura .....	21
3.4. Fator de intensidade de tensões para uma fratura elíptica num meio infinito .....	30
3.5. Equação do fluxo de fluidos por filtração .....	32
<b>4. Metodologia para solução</b> .....	<b>35</b>
4.1. Introdução .....	35
4.2. Formulação variacional .....	36
4.3. Formulação variacional para acoplamento das equações fundamentais .....	38

<b>5. A estrutura do programa computacional.....</b>	<b>43</b>
5.1. Um programa orientado a objetos e seu critério de validação.....	43
5.2. As integrais analíticas e as integrais numéricas.....	43
5.3. O algoritmo.....	45
5.4. O vetor {FLOSS}.....	47
5.4.1. O vetor {FILTR}.....	47
5.4.2. O vetor {SPURT}.....	51
5.5. O vetor {FLUX}.....	52
5.6. O critério de propagação.....	53
5.6.1. O deslocamento relativo dos pontos da borda da fratura.....	53
5.6.1.1. Deslocamento com contrastes simétricos de tensões.....	53
5.6.1.2. Deslocamento com contrastes assimétricos de tensões.....	55
5.6.2. O comportamento dos coeficientes $C_{ij}$ e $P_{ij}$ durante a propagação.....	56
5.6.2.1. Comportamento para contrastes simétricos de tensões.....	56
5.6.2.2. Comportamento para contrastes assimétricos de tensões.....	57
5.7. Geometria inicial de fratura.....	58
5.8. Viscosidade aparente média.....	59
5.9. Casos assimétricos quanto à litologia.....	60
<b>6. Validação do modelo.....</b>	<b>61</b>
6.1. Introdução.....	61
6.2. Fraturas radiais.....	62
6.3. Fraturas radiais e não radiais com perda inicial de filtrado.....	66
6.4. Fraturas com contrastes assimétricos de tensões.....	74
<b>7. Análise de sensibilidade.....</b>	<b>81</b>
7.1. Introdução.....	81
7.2. O efeito da viscosidade.....	82
7.3. O efeito da vazão de injeção.....	83
7.4. O efeito da espessura da zona de interesse.....	84
7.5. O efeito da tenacidade da rocha ao fraturamento.....	85
7.6. O efeito do coeficiente global de filtração.....	87
7.7. O efeito da perda inicial de filtrado.....	88
7.8. O efeito do módulo de elasticidade.....	89
7.9. O efeito dos contrastes de tensões.....	89
7.10. Um resumo do estudo da sensibilidade.....	89
<b>8. Conclusões e sugestões.....</b>	<b>91</b>
8.1. Conclusões.....	91
8.2. Sugestões.....	92
<b>Nomenclatura.....</b>	<b>94</b>
<b>Bibliografia.....</b>	<b>97</b>
<b>Apêndice I. Regra de Leibnitz generalizada.....</b>	<b>102</b>

<b>Apêndice II. Equação da largura da fratura do trabalho de Shah e Kobayashi .....</b>	<b>104</b>
<b>Apêndice III. Critério de propagação baseado na máxima taxa de liberação de energia .....</b>	<b>107</b>

## Lista de Figuras

Figura 1.1	Fratura hidráulica pressurizada.....	pg.02
Figura 2.1	Modelo de Settari.....	06
Figura 2.2	Modelo de Morales.....	08
Figura 2.3	Fratura elíptica em um meio infinito.....	09
Figura 2.4a	Representação do contraste de tensões simétrico.....	17
Figura 2.4b	Representação do contraste de tensões assimétrico.....	17
Figura 3.1	Volume de controle da equação da continuidade.....	20
Figura 3.2	A fratura elíptica plana de Shah e Kobayashi e o domínio de análise decorrente do eixo de simetria.....	22
Figura 3.3	Curva característica do experimento de filtração.....	32
Figura 3.4	Área de integração do <i>spurt loss</i> .....	34
Figura 5.1	Domínio de análise da fratura elíptica plana, após transformação conforme.....	44
Figura 5.2	Determinação do $\Delta t$ adequado para a propagação da fratura.....	45
Figura 5.3	Ajuste do tempo de início de contato rocha-fluido para o modelo Q3DFRAC, sem considerar perda de filtrado.....	48
Figura 5.4	Ajuste do tempo de início de contato rocha-fluido para o modelo HyFSys, sem considerar perda de filtrado.....	49
Figura 5.5	Ajuste do tempo de início de contato rocha-fluido para o modelo HyFSys, considerando perda de filtrado.....	49
Figura 5.6	Ajuste do tempo de início de contato rocha-fluido para o modelo Q3DFRAC, considerando perda de filtrado.....	49
Figura 5.7a	Ajuste do tempo de início de contato rocha-fluido para o fraturas elípticas, sem transformação conforme.....	50
Figura 5.7a	Ajuste do tempo de início de contato rocha-fluido para o fraturas elípticas, após transformação conforme.....	50
Figura 5.8	Delimitação da área de integração para cálculo do <i>spurt loss</i> .....	51
Figura 5.9	A geometria de fratura para situações de simetria ou assimetria entre a zona de interesse e as zonas adjacentes.....	53
Figura 5.10a	Comparação entre os critérios de propagação, Caso I (1) $\rightarrow$ equação (5.12), (2) $\rightarrow$ equação (5.4).....	54
Figura 5.10b	Comparação entre os critérios de propagação, Caso K (1) $\rightarrow$ equação (5.12), (2) $\rightarrow$ equação (5.4).....	54
Figura 5.11	Mudança no critério de propagação para contraste assimétrico de tensões.....	55

Figura 5.12	Resultado típico do critério de propagação.....	57
Figura 5.13	Comparação do raio da fratura para geometrias iniciais diferentes...	59
Figura 5.14	Um gráfico típico para a viscosidade aparente ( $\mu_{ap}$ ).....	60
Figura 6.1	Evolução do raio da fratura com o tempo, sem perda de filtrado .....	63
Figura 6.2	Evolução da pressão máxima com o tempo, sem perda de filtrado...	63
Figura 6.3	Evolução da abertura máxima da fratura com o tempo, sem perda de filtrado.....	64
Figura 6.4	Evolução do raio da fratura com o tempo, com perda de filtrado.....	64
Figura 6.5	Evolução da pressão máxima com o tempo, com perda de filtrado ..	65
Figura 6.6	Evolução da abertura máxima da fratura com o tempo, com perda de filtrado .....	65
Figura 6.7	Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso B.....	68
Figura 6.8	Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso E.....	69
Figura 6.9	Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso G .....	71
Figura 6.10	Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso H .....	72
Figura 6.11	Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso I.....	72
Figura 6.12	Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso J.....	73
Figura 6.13	Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso K .....	73
Figura 6.14	Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso L.....	74
Figura 6.15	Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC (1) 6,205 MPa; (3) 9,652 MPa.....	76
Figura 6.16	Resultados comparativos para o modelo Q3DFRAC, entre contrastes simétricos (2) e assimétricos (4) de tensões.....	77
Figura 6.17	Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, $C_{01}$ e $C_{03}$ constantes na propagação; (2) 7,928 MPa x 7,928 MPa; (5) 6,205 MPa x 9,652 MPa .....	78
Figura 6.18	Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC; (2) 7,928 MPa x 7,928 MPa; (6) 6,205 MPa x 9,652 MPa e $C_{ij}$ constantes na propagação .....	79
Figura 7.1	O efeito da viscosidade na geometria de fratura (0) $\mu_a = 75,17$ cP; (1) $\mu_a = 150,34$ cP; (2) $\mu_a = 7,52$ cP .....	82
Figura 7.2	O efeito da viscosidade na pressão (0) $\mu_a = 75,17$ cP; (1) $\mu_a = 150,34$ cP; (2) $\mu_a = 7,52$ cP .....	82
Figura 7.3	O efeito da vazão na geometria de fratura (0) $Q = 0,06625$ m <sup>3</sup> /s; (3) $Q = 0,099375$ m <sup>3</sup> /s; (4) $Q = 0,033125$ m <sup>3</sup> /s .....	83
Figura 7.4	O efeito da vazão na pressão (0) $Q = 0,06625$ m <sup>3</sup> /s; (3) $Q = 0,099375$ m <sup>3</sup> /s; (4) $Q = 0,033125$ m <sup>3</sup> /s .....	83
Figura 7.5	Efeito da espessura da zona de interesse na geometria da fratura (0) $2H_R = 18,8976$ m; (5) $2H_R = 28,3464$ m; (6) $2H_R = 9,4488$ m .....	85

Figura 7.6	Efeito da espessura da zona de interesse na pressão (0) $2H_R = 18,8976$ m; (5) $2H_R = 28,3464$ m; (6) $2H_R = 9,4488$ m ....	85
Figura 7.7	O efeito da tenacidade da rocha ao fraturamento na geometria de fratura (0) $K_{IC} = 5,412$ MPa $\sqrt{m}$ ; (3) $K_{IC} = 8,109$ MPa $\sqrt{m}$ ; (4) $K_{IC} = 2,703$ MPa $\sqrt{m}$ .....	86
Figura 7.8	O efeito do tenacidade da rocha ao fraturamento na pressão (0) $K_{IC} = 5,412$ MPa $\sqrt{m}$ ; (3) $K_{IC} = 8,109$ MPa $\sqrt{m}$ ; (4) $K_{IC} = 2,703$ MPa $\sqrt{m}$ .....	86
Figura 7.9	O efeito do coeficiente global de filtração na geometria de fratura (0) $C_L = 1,67235 \times 10^{-6}$ m/ $\sqrt{s}$ ; (9) $C_L = 2,5085 \times 10^{-6}$ m/ $\sqrt{s}$ ; (10) $C_L = 1,67235 \times 10^{-5}$ m/ $\sqrt{s}$ .....	87
Figura 7.10	O efeito do coeficiente global de filtração na pressão no poço (0) $C_L = 1,67235 \times 10^{-6}$ m/ $\sqrt{s}$ ; (9) $C_L = 2,5085 \times 10^{-6}$ m/ $\sqrt{s}$ ; (10) $C_L = 1,67235 \times 10^{-5}$ m/ $\sqrt{s}$ .....	88
Figura 7.11	O efeito da perda inicial de filtrado na geometria de fratura (0) $S_p = 1,4261 \times 10^{-5}$ m <sup>3</sup> /m <sup>2</sup> ; (11) $S_p = 1,4261 \times 10^{-4}$ m <sup>3</sup> /m <sup>2</sup> ; (12) $S_p = 7,1305 \times 10^{-6}$ m <sup>3</sup> /m <sup>2</sup> .....	88
Figura 7.12	O efeito da perda inicial de filtrado na pressão no poço (0) $S_p = 1,4261 \times 10^{-5}$ m <sup>3</sup> /m <sup>2</sup> ; (11) $S_p = 1,4261 \times 10^{-4}$ m <sup>3</sup> /m <sup>2</sup> ; (12) $S_p = 7,1305 \times 10^{-6}$ m <sup>3</sup> /m <sup>2</sup> .....	89
Figura III.1	Definição geométrica para a propagação de fratura .....	107
Figura III.2	Comparação entre os resultados esperados e os resultados encontrados para a energia total liberada .....	109

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1	Comparação dos resultados obtidos para perda de filtrado .....	51
Tabela 5.2	Comparação dos resultados obtidos para o vetor {SPURT} .....	52
Tabela 5.3	Porcentagem do volume total injetado no primeiro passo de propagação .....	58
Tabela 6.1	Dados de entrada para simulação de fraturas radiais .....	62
Tabela 6.2	Resultados da simulação para fraturas radiais, sem perda de filtrado .....	62
Tabela 6.3	Resultados da simulação para fraturas radiais, com perda de filtrado .....	64
Tabela 6.4	Dados de entrada para os casos de $E = 517,10$ MPa .....	66
Tabela 6.5	Resultados obtidos para os casos de $E = 517,10$ MPa .....	67
Tabela 6.6	Dados de entrada para os casos de $E = 5171,0$ MPa .....	69
Tabela 6.7	Resultados obtidos para os casos de $E = 5171,0$ MPa .....	70
Tabela 6.8	Dados de entrada para os casos de $E = 35770,39$ MPa .....	74
Tabela 6.9	Resultados obtidos para os casos de $E = 35770,39$ MPa, excluindo a assimetria dos contrastes de tensões para o modelo Q3DFRAC .....	75
Tabela 6.10	Dados de entrada para o caso 3 camadas .....	79
Tabela 6.11	Resultados obtidos para o caso 3 camadas .....	80
Tabela 7.1	Dados de entrada para os casos 0, 1, 2, 3, 4 .....	81
Tabela 7.2	Dados de entrada para os casos 0, 5, 6, 7, 8 .....	84
Tabela 7.3	Dados de entrada para os casos 0, 9, 10, 11, 12 .....	87
Tabela 7.4	Resumo do estudo de sensibilidade .....	90

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1. O fraturamento hidráulico

A primeira operação de fraturamento hidráulico de que se tem notícia na indústria do petróleo ocorreu no campo de gás de Hugoton, EUA, no poço de Kelper 1, em julho de 1947 [Clar49]. Desde então, a técnica de fraturamento hidráulico se difundiu intensamente na indústria do petróleo, podendo ser considerada como a técnica de estimulação mais utilizada atualmente.

O fraturamento hidráulico é uma técnica de estimulação bastante usual em rochas-reservatório com baixas permeabilidades. Consiste na injeção, a alta pressão e com ruptura da formação, de um fluido bastante viscoso, denominado fluido de fraturamento.

O bombeio contínuo deste fluido, com pressões superiores à tensão que tende a fechar a fratura, garante sua propagação. Para evitar que a fratura assim induzida se feche totalmente após cessar o diferencial de pressão aplicado, é adicionado ao fluido um agente de sustentação (normalmente areia selecionada). Como o fluido bombeado fornece excelente sustentação ao agente de sustentação, após o fechamento da fratura o mesmo ficará razoavelmente bem distribuído em toda a fratura criada, fornecendo assim um caminho preferencial de alta condutividade, o qual facilita o fluxo dos fluidos do reservatório para o poço ou vice-versa (aumento da produtividade ou da injetividade).

O fraturamento hidráulico, com pequenos volumes de fluido bombeados e sem agente de sustentação, pode ainda ser usado para se determinar as tensões *in situ* do reservatório e do coeficiente global de filtração do fluido de fraturamento, entre outros, através da análise dos dados de pressão versus tempo, tanto na propagação quanto no fechamento da fratura. Este pequeno fraturamento hidráulico para obtenção de informações é denominado *minifrac*, e é uma operação bastante usual que precede a execução dos fraturamentos hidráulicos principais (com agente de sustentação), caso estes parâmetros sejam desconhecidos ou cujas estimativas não sejam confiáveis. Nolte [Nolt86, Nolt90, Nolt93] tem focado seu trabalho na análise das pressões envolvidas num fraturamento hidráulico, extraído destes registros, além das tensões *in situ*, diversos parâmetros relevantes do processo (tais como, o comprimento de fratura executado, a diferença de tensões *in situ* existente entre a zona de interesse e as zonas adjacentes).

A figura 1.1 mostra uma fratura hidráulica pressurizada, plana, vertical, num meio poro-elástico infinito. Adotou-se a representação na posição vertical, por ser esta a situação mais frequente, apesar de a mesma poder ocorrer também na posição horizontal.

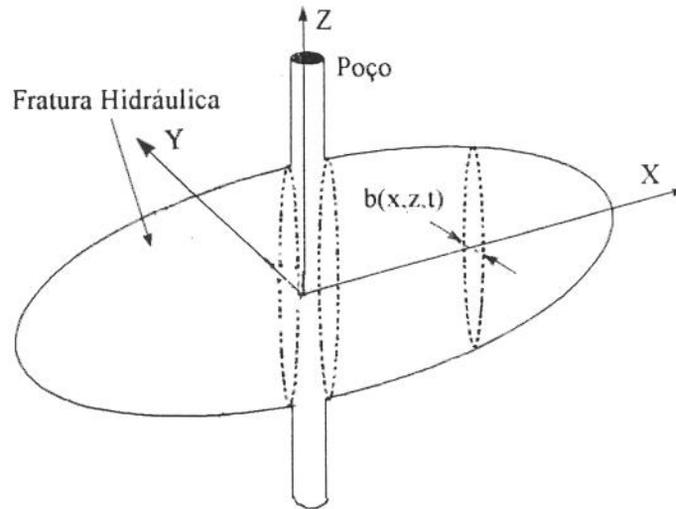


Figura 1.1 - Fratura Hidráulica Pressurizada

Uma revisão bastante detalhada do desenvolvimento desta técnica é apresentada por Mendelsohn [Mend84, Mend84b]. Mais recentemente, Economides [Econ89] editou um livro trazendo os diversos aspectos da estimulação de poços e Gidley [Gid189], uma monografia, mostrando os recentes avanços no fraturamento hidráulico, ambos utilizando a contribuição de diversos autores. Gidley também registra a estimativa de um total de 1,1 milhão de operações de fraturamento realizadas em todo o mundo até o ano de 1989, e que, cerca de 40% dos poços perfurados são estimulados através do fraturamento hidráulico.

O fraturamento hidráulico é um método bastante eficiente e muito utilizado, como os números acima podem atestar, para se viabilizar economicamente a produção de um poço de petróleo. Devido aos custos elevados desta operação, um estudo detalhado para sua otimização é altamente desejável. Pode-se entender um processo de otimização como sendo aquele onde são comparados diversos fraturamentos possíveis de serem executados e seus respectivos retornos financeiros, decorrentes do aumento de produtividade alcançado. Quanto maior o número de casos analisados, maior a probabilidade de se encontrar o melhor fraturamento a ser executado.

Para que este processo de otimização seja confiável é necessário que as modelagens das diversas fases do mesmo também o sejam, a saber, da geometria da fratura [Setta86], do deslocamento do agente de sustentação durante e após o término do bombeio, da condutividade de fratura conseguida (que é função do tipo, quantidade e distribuição do agente de sustentação utilizado) e, finalmente, da previsão de produção com o poço fraturado. São estas necessidades de se prever o comportamento, interpretar respostas e descrever um sistema que levam ao desenvolvimento de modelos que possam ser utilizados como uma ferramenta de interpretação e/ou previsão. Além de confiáveis, as modelagens descritas acima precisam ser computacionalmente eficientes, pois caso contrário, o processo de otimização com a comparação de diversas alternativas fica inviabilizado.

Neste contexto foram gerados vários modelos de geometria de fratura, os quais podem ser classificados em: bidimensionais, pseudo-tridimensionais e tridimensionais. A simulação da geometria de fratura hidráulicamente induzida requer solução simultânea

para a equação da continuidade, uma equação relacionando abertura da fratura com a distribuição de pressões e de tensões de confinamento e uma relação constitutiva descrevendo o fluxo de fluido na fratura.

A primeira e mais antiga classe, a dos modelos bidimensionais (2D), considera que existem camadas de rocha competentes acima e abaixo da formação a fraturar, de modo que a fratura fique limitada ao reservatório. Neste tipo de modelo a altura da fratura é um dado de entrada. O fluxo de fluidos é considerado somente na direção de propagação da fratura. Na resposta elástica da rocha à fratura hidráulica, considera-se o estado de plano de deformações, que em alguns modelos é utilizado para descrever a seção horizontal da fratura [Khri55, Geer69] e em outros, a seção vertical [Perk61, Nord72]. Nas situações práticas de campo, são estes os modelos mais utilizados.

Nos modelos tridimensionais (3D) com fraturas planas, a propagação vertical da fratura nas zonas adjacentes é considerada. O fluxo de fluidos se dá em duas direções,  $x$  e  $z$  (figura 1.1). A terceira direção ( $y$ ) é desconsiderada devido a diferença de ordem de grandeza nas dimensões envolvidas num fraturamento, ou seja, largura bastante pequena quando comparada com a altura e o comprimento da fratura. Quanto a resposta elástica da rocha, considera-se o seu aspecto tridimensional. Os modelos tridimensionais foram introduzidos com o trabalho de Clifton e Abou-Sayed [Clif79, Clif81]. Outros autores também discutem este mesmo problema [Lam86, Mori88, BenN90, Sous92, Ouya94].

Os modelos tridimensionais requerem um esforço computacional bastante elevado, para acoplar no tempo tanto o problema de mecânica dos fluidos quanto o problema de mecânica da fratura, prejudicando sua maior utilização comercial. No entanto, são imprescindíveis em situações complexas, tais como, contato óleo/água dentro da própria zona a ser fraturada, pequena intercalação de folhelho entre a zona a ser fraturada e a zona adjacente portadora de um fluido indesejável, entre outras. Os modelos tridimensionais têm grande importância, também, na validação dos modelos pseudo-tridimensionais, que por requererem menores esforços computacionais, são os mais utilizados nos simuladores comerciais.

Ainda dentro dos modelos tridimensionais podem ser encontrados aqueles que consideram a possibilidade de fraturas não planas, chamados tridimensionais *completos*. Sousa [Sous92] discute o processo de fraturamento não plano nas imediações do poço e o efeito gerado pela disposição arbitrária dos canhoneados em relação às tensões *in situ*, bem como o efeito da existência de microanulares entre o cimento e a formação fraturada.

Os modelos pseudo-tridimensionais (P3D) se propõem a modelar de forma mais realista, quando comparados com os modelos bidimensionais, o crescimento vertical da fratura. São menos precisos que os modelos tridimensionais, porém, os modelos P3D necessitam um esforço computacional bastante inferior aos 3D, o que viabiliza sua utilização comercial, tanto na otimização de um fraturamento hidráulico, quanto em tempo real de operação.

Os modelos pseudo tridimensionais atacam o crescimento vertical da fratura de diferentes maneiras, podendo ser divididos em três grupos: (1) quando utilizam a hipótese simplificadora de estado de deformação plano nas seções transversais da

fratura, utilizado por England [Engl63], cujos resultados são mais precisos para fraturas alongadas, onde o comprimento da fratura é algumas vezes maior que sua altura [Sett86, Adva85, Adva86, Adva90, Mora89, Weng91]; (2) quando se baseiam no trabalho de Shah [Shah71], o qual utiliza a hipótese de fratura elíptica no plano (x,z), com pressão interna na fratura expressa na forma de polinômio de terceiro grau em x e z [Palm83, Luis86, Bout87, Rued94]; (3) quando utiliza soluções fundamentais (solução para os modelos bidimensionais lineares e radiais) ponderadas para a determinação do crescimento vertical da fratura em situações intermediárias às fraturas idealmente contidas na zona de interesse (bidimensionais) e as sem qualquer contenção (*penny-shape*) [Meye89, Meye90].

Van Eekelen [VanE82] apresenta também um interessante trabalho sobre os fatores mais e menos importantes na contenção da propagação vertical de uma fratura, fornecendo expressões simplificadas para se relacionar a taxa de crescimento do comprimento da fratura com a taxa de crescimento da altura da fratura, podendo ser incluída no grupo (2) por adotar fratura elíptica, em acordo com o trabalho de Shah.

Obviamente os modelos tridimensionais, por terem um menor número de hipóteses simplificadoras, deveriam levar a resultados mais realistas. Esta dedução não é totalmente válida, pois este tipo de modelo necessita de uma quantidade de dados de entrada maior que os bidimensionais e, caso estes dados não estejam disponíveis, ou não sejam confiáveis, as respostas dos simuladores tridimensionais podem desviar-se significativamente da realidade. Alguns autores [Hold93, Rahi93] defendem, porém, a idéia de que para se compilar os dados para a simulação 3D é necessário um incremento de esforço que pode ser considerado marginal, quando comparado à compilação dos dados para os modelos 2D, sendo possível otimizar o fraturamento, num maior número de casos, com os modelos 3D.

Os modelos de geometria de fratura, para que tenham a confiabilidade desejada, devem se submeter a um processo de validação. Uma forma bastante usual de validação é a sua comparação com outros modelos de reconhecida aceitação na indústria do petróleo. Pode-se também recorrer aos experimentos laboratoriais, onde as condições de operação são muito mais controladas. E por último, mas não menos importante, pode-se recorrer à validação no campo, comparando-se o previsto com o realizado. Estas formas são complementares, e como não poderia deixar de ser, o ideal é que o modelo possa se submeter a todas as três formas de validação.

Meyer [Meye86] ressalta a importância de que os usuários tenham um bom entendimento das hipóteses assumidas, das aplicações e limitações de um modelo de geometria de fratura disponível. Hareland [Hare93] afirma que a aplicação do fraturamento hidráulico é complexa, as previsões de projeto raramente são atingidas, e que, portanto, o projeto de fraturamento requer bastante experiência do projetista, bem como análises extensivas, estudos e testes.

## 1.2. Objetivos

É objetivo desta dissertação analisar os diversos modelos pseudo-tridimensionais de geometria de fratura, entendendo suas hipóteses simplificadoras, suas aplicações e

limitações de uso. Um outro objetivo é a proposição de um novo modelo pseudo-tridimensional de geometria de fratura, melhorando alguns aspectos dos modelos já existentes.

Esta dissertação também se insere num contexto maior, que é a de consolidar, nos programas de mestrado e doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), uma linha de pesquisa, que privilegie a sinergia decorrente do trabalho de diversos autores numa mesma área de conhecimento.

Dentro desta perspectiva, este novo modelo de geometria de fratura pode servir de base para uma tese de doutorado, também em andamento na UNICAMP, que se propõe a melhorar as análises de pressões, desenvolvidas inicialmente por Nolte [Nolt86, Nolt90, Nolt93]. Settari [Sett86] registra que um modelo pseudo tridimensional que descreva mais realisticamente a geometria de fratura permite extrair muito mais informação dos dados de pressão coletados nos mini-fraturamentos e nos fraturamentos principais.

Também pode ser considerado como objetivo desta dissertação, adquirir uma maior capacitação técnica para utilização dos modelos de geometria de fratura disponíveis na indústria do petróleo.

### **1.3. Forma de apresentação**

Visando apresentar a dissertação numa sequência lógica, inicialmente são apresentados alguns modelos pseudo-tridimensionais, no capítulo 2.

No capítulo 3 são apresentadas as equações governantes do modelo proposto, tais como a equação do fluxo de fluidos entre placas paralelas, a equação da continuidade, a equação da largura da fratura, o critério de propagação da fratura e a equação da perda de filtrado.

No capítulo 4 apresenta-se a metodologia de solução empregada, mostrando a maneira como as equações do capítulo 3 se relacionam entre si. Utilizou-se a formulação variacional como metodologia de solução.

No capítulo 5 é apresentada a estrutura do programa computacional, fornecendo várias informações referentes as hipóteses simplificadoras utilizadas.

No capítulo 6 se encontram as discussões referentes a validação do modelo, e os seus resultados são comparados com os de diversos modelos existentes na literatura.

No capítulo 7 são apresentadas as análises de sensibilidade do modelo aos diversos dados de entrada mais críticos.

No capítulo 8 são apresentadas conclusões sobre o modelo proposto, bem como sugestões de novos estudos a serem realizados.

## CAPÍTULO 2

### OS MODELOS PSEUDO-TRIDIMENSIONAIS DE GEOMETRIA DE FRATURA

#### 2.1. Modelos baseados no estado plano de deformações

##### 2.1.1. Modelo de Settari

O modelo apresentado por Settari [Sett86] se baseia no acoplamento do modelo de Perkins e Kern [Perk61], posteriormente melhorado por Nordgreen (PKN) [Nord72], para descrever a propagação longitudinal da fratura, com o modelo de Khristianovich [Khri55], melhorado por Geerstma e DeKlerk [Geer69] e Daneshy [Dane73] (KGD), para descrever a propagação vertical da fratura (figura 2.1). O modelo PKN utiliza o conceito de estado plano de deformações para descrever suas seções transversais e o modelo KGD utiliza este mesmo conceito para descrever as seções horizontais, ou seja, planos ortogonais entre si. Como os dois modelos foram acoplados de forma a descrever fluxos ortogonais entre si, ou seja, a solução do tipo KGD sofreu rotação de 90 graus, o conceito de estado plano de deformações acaba sendo utilizado, de forma coincidente tanto pelo modelo PKN quanto para o modelo KGD, para os planos  $yz$ .

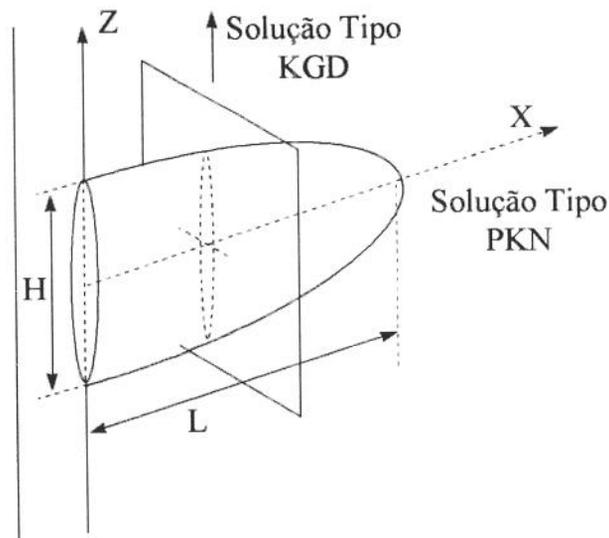


Figura 2.1. Modelo de Settari

Este modelo fornece melhores resultados, como consequência da hipótese do estado plano de deformações, quanto maior for a relação entre o comprimento da fratura e a sua altura. O autor justifica que esta limitação não é severa, pois no seu entender, uma parcela significativa dos fraturamentos é realizado com esta característica.

Weng [Weng91] destaca que o modelo de Settari geralmente superestima a altura de fratura, já que o modelo KGD, que descreve o fluxo vertical, fornece uma taxa de crescimento da altura da fratura proporcional a própria altura [VanE82], ou seja, o crescimento da altura é acelerado quando a fratura cresce de altura. Para situações de pequeno contraste de tensões, isto resulta em maiores alturas próximo ao poço, e menores alturas, distante do poço, quando comparados com os modelos 3D. Neste caso, o desacoplamento do fluxo bidimensional em dois unidimensionais não pode ser considerado uma boa aproximação.

No modelo de Settari, o componente dominante do fluxo ( $q$ ) está na direção da propagação longitudinal ( $x$ ), e pode ser relacionado com a lei de fluxo de fluidos em canais com larguras efetivas  $b(x,t)$  e gradientes de pressão  $\partial p/\partial x$ , da forma adotada pelo modelo PKN. A equação de conservação de massa deve ser satisfeita entre seções, devendo ser considerada ao lado da perda de filtrado para a formação, uma perda adicional relacionada com a propagação vertical da fratura  $\partial h/\partial t$ , que deve ser obtida de uma análise à parte para cada seção vertical. A maior novidade deste modelo consiste, justamente, nesta perda adicional de fluido relacionada com a propagação vertical e o acoplamento de dois modelos bidimensionais para se gerar um modelo pseudo-tridimensional.

### 2.1.2 Modelo de Morales

Morales [Mora89] utilizou também a hipótese do estado plano de deformações, com o fluxo de fluidos ocorrendo de forma dominante na direção longitudinal (razão entre comprimento e altura da fratura maior que 1). O modelo permite trabalhar com contrastes assimétricos de tensões entre as zonas de interesse e as zonas confinantes, e também diferentes módulos de elasticidade.

Para fraturas alongadas, a queda de pressão na direção longitudinal é muito maior que na direção vertical. Foi utilizada a equação de queda de pressão em dutos de seção elíptica, para fluxo unidimensional, de forma idêntica ao adotado para o modelo PKN.

Para evitar uma propagação vertical instável e não realista, quando a razão entre comprimento e altura da fratura se aproxima de 1, foi introduzido um gradiente de pressão vertical ( $g_v$ ), para definir a queda de pressão para o fluxo vertical:  $p(z) = p(x) + g_v z$ . A magnitude deste gradiente de pressão  $g_v$  é determinada através do gradiente de pressão para o fluxo lateral ( $g_H$ ) (isto é,  $g_v = \eta g_H$ , onde  $\eta$  é um fator dependente da taxa de crescimento da razão entre o comprimento e a altura da fratura).

Neste modelo, o carregamento em qualquer seção vertical é decomposto em quatro componentes (figura 2.2): pressão interna na fratura constante, contraste de tensões com a camada inferior, contraste de tensões com a camada superior e o gradiente líquido de pressão entre o fluido e a rocha. Pela resposta elástica da rocha, as aberturas da fratura e os fatores de intensidade de tensões, correspondentes à cada componente do carregamento, são encontradas separadamente e posteriormente adicionadas, aplicando-se o princípio da superposição. As expressões de abertura da fratura e do fator de intensidade de tensões são baseadas no trabalho de Tada [Tada73]. O critério de propagação vertical é baseado na igualdade entre o fator de intensidade de tensões e o

fator de intensidade de tensões crítico ( $K_{IC}$ ). A propagação longitudinal é obtida com incrementos constantes de comprimento de fratura, determinando-se os incrementos de tempo correspondentes, com o auxílio da equação do balanço de massa.

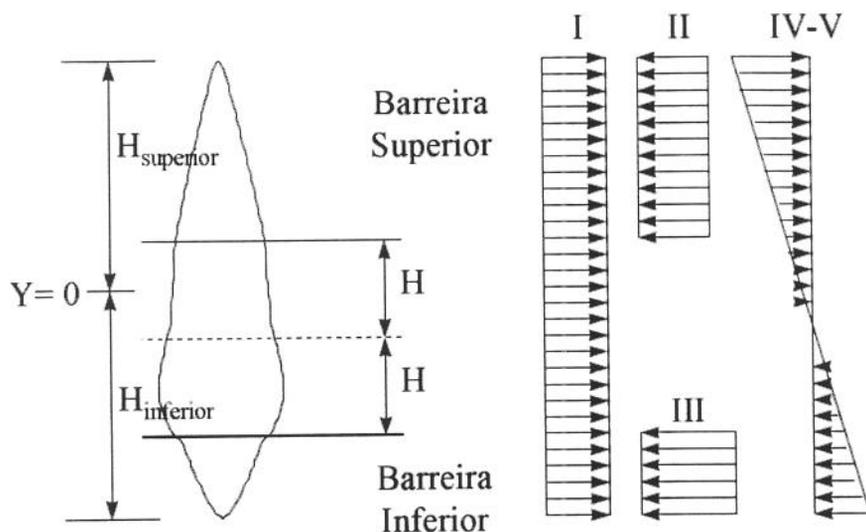


Figura 2.2. Modelo de Morales

A equação da conservação de massa é escrita de forma que a seção transversal é dividida em diversos segmentos de mesma altura ( $\Delta h$ ), sendo adotado valores médios de largura e perda de filtrado para cada segmento.

Para resolver completamente o problema, uma distribuição de pressão é assumida para uma forma de fratura inicial ou do passo anterior. Altura da fratura e abertura são computados para a distribuição de pressão assumida. O incremento de tempo é calculado iterativamente, satisfazendo a equação da conservação de massa. Uma nova distribuição de pressão é calculada e corrigida iterativamente até que um critério de convergência seja atendido entre as pressões assumidas e calculadas. Incrementa-se o comprimento de fratura, e todos os cálculos são repetidos até que todo o fluido de fraturamento seja bombeado.

### 2.1.3. Modelo de Weng

O modelo de Weng [Weng91] se propõe basicamente a encontrar uma melhor forma de desacoplar o fluxo bidimensional em dois unidimensionais, atacando assim o ponto falho detectado pelo autor no modelo de Settari. Ou seja, obtendo-se uma melhor representação do fluxo vertical, o modelo deve fornecer alturas de fraturas mais realistas. Com este objetivo, o fluxo bidimensional existente em cada seção é aproximado por um fluxo radial partindo de uma fonte virtual, cujo posicionamento é obtido tomando-se a fratura como aproximadamente elíptica, e garantindo que as linhas de fluxo sejam ortogonais às bordas da fratura.

## 2.2. Modelos baseados na fratura elíptica e carregamento descrito por polinômio

### 2.2.1. Modelo de Shah e Kobayashi

O trabalho de Shah e Kobayashi [Shah71] se baseia nas funções potenciais harmônicas propostas por Segedin [Sege67a, Sege67b], as quais podem ser utilizadas para resolver um problema elastoestático tridimensional. Usando estas funções potenciais, Segedin tratou o problema de uma fratura elíptica plana (figura 2.3) em um meio submetido a flexão pura.

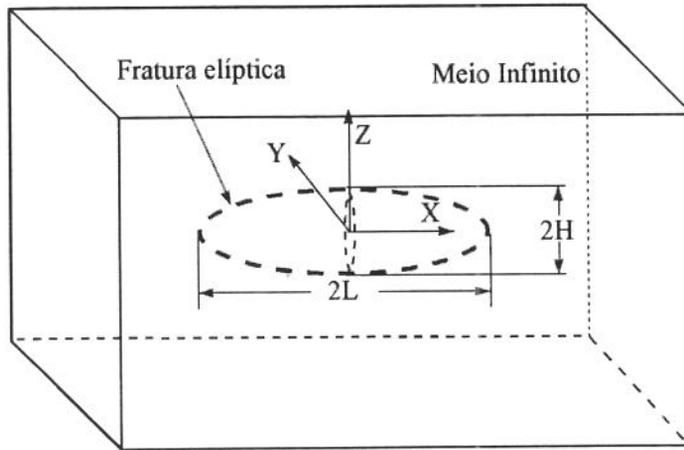


Figura 2.3 - Fratura elíptica em um meio infinito

Shah e Kobayashi apresentaram soluções analíticas exatas de fatores de intensidade de tensões para a mesma fratura elíptica plana estudada por Segedin (figura 2.3), submetida a uma distribuição de pressões em seu interior, descrita por um polinômio em  $x$  e  $z$ , na forma:

$$p(x, z) = P_{00}^n + P_{10}^n x + P_{01}^n z + P_{20}^n x^2 + P_{11}^n xz + P_{02}^n z^2 + P_{30}^n x^3 + P_{21}^n x^2 z + P_{12}^n xz^2 + P_{03}^n z^3 \quad (2.1)$$

sendo  $P_{ij}^n$  : coeficientes do polinômio de pressões líquidas (“ $n = nel$ ”)

Um caso particular deste carregamento é aquele em que todos os coeficiente  $P_{ij}^n$  são zero, exceto  $P_{00}^n$ , situação que foi estudada por Green e Sneddon [Gree50]. Os autores restringiram a análise ao polinômio de grau 3 ( $i+j \leq 3$ ), por dois motivos básicos: (1) por considerar bastante elevado o trabalho para se incluir maiores graus para o polinômio; (2) geralmente o número de incógnitas  $P_{ij}^n$  é limitado a 7, para precisão simples, e 11 para precisão dupla, e portanto a distribuição de pressões pode ser bem ajustada pelo método dos mínimos quadrados, sem flutuações entre os pontos ajustados.

A metodologia consiste em, conhecendo-se o carregamento interno a que a fratura está submetida ( $P_{ij}$ ), ou carregamento líquido,  $P_{ij}^n (= P_{ij} + \sigma_{ij})$ , que é dado pela soma entre a

distribuição de pressões no interior da fratura tendendo a abri-la,  $P_{ij}$ , e em sentido contrário, as tensões de confinamento tendendo a fechar a mesma,  $\sigma_{ij}$ , encontrar a função tensão harmônica  $\Phi$ , que descreve o estado de tensões no corpo analisado.

A função tensão harmônica é descrita como segue:

$$\Phi = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \Phi_{ij} = \Phi_{00} + \Phi_{10} + \Phi_{01} + \Phi_{20} + \Phi_{11} + \Phi_{02} + \Phi_{30} + \Phi_{21} + \Phi_{12} + \Phi_{03} \quad (2.2)$$

onde  $\Phi_{ij} = C_{ij} f_{ij}(L, H, x, z)$  (2.3)

e os coeficientes  $C_{ij}$  estão relacionados com os coeficientes  $P_{ij}^n$ , da distribuição de pressões, pela expressão:

$$[S]\{C_{ij}\} = \frac{1}{2G} \{P_{ij}^n\} \quad (2.4)$$

onde  $G$  : módulo de elasticidade ao cisalhamento  
 $[S]$  : matriz de correlação entre os coeficientes de pressão ( $P_{ij}^n$ ) e da função tensão harmônica  $\Phi$  ( $C_{ij}$ )

Ou seja, conhecendo-se a distribuição líquida de pressões na fratura elíptica plana (coeficientes  $P_{ij}^n$ ), é possível encontrar os coeficientes da função tensão harmônica (coeficientes  $C_{ij}$ ), com os quais se determinam as aberturas da fratura ( $b$ ), as componentes do estado de tensões ( $\sigma_{ij}$ ) e os fatores de intensidade de tensões modo I ( $K_I$ ).

O trabalho de Shah e Kobayashi, apesar de não ter sido originariamente desenvolvido para modelar um fraturamento hidráulico, serviu de base para alguns modelos de geometria de fratura [Palm83, Luis86, Bout87, Rued94] descritos a seguir.

### 2.2.2. Modelo de Palmer

Palmer [Palm83] apresenta na verdade dois modelos, denominados FL1 e FL2, cuja diferença se restringe na forma de representar as tensões de confinamento. O modelo é aplicável para fratura bastante alongadas, com a razão  $L/H > 5$ . Estes dois modelos poderiam estar agrupados com os modelos de Setttari, Morales e Weng, pois apesar de utilizarem um polinômio para descrever as pressões internas à fratura elíptica e para o cálculos dos fatores de intensidade de tensões, o cálculo da largura de fratura foi efetuado considerando a estado plano de deformações.

#### *Modelo FL1*

As hipóteses assumidas para o modelo FL1 são:

- fratura elíptica;
- tensões de confinamento simétricas em relação ao eixo  $x$ ;

- foi adotado o critério de propagação de fratura  $K_{II}|_{x=L} = K_{IH}|_{z=H} = K_{IC}$  para determinar os semi-eixos da elipse, L e H (o fator de intensidade de tensões crítico da zona de interesse,  $K_{Ic}$ , é adotado como sendo igual ao das zonas adjacentes);
- a descontinuidade das pressões líquidas no interior da fratura, decorrentes do contraste de tensões existente entre a zona de interesse ( $\sigma_1$ ) e as adjacentes ( $\sigma_2$ ), é representado na forma  $\sigma(z) = \sigma_1 + \sigma_2 z^2$ . Sendo  $H_R$  metade da espessura da zona de interesse que está sendo fraturada e H, metade da altura total da fratura no poço, tem-se para a variação de pressão no interior da fratura,  $p(x, z) = p(x) + P_{02} z^2$ , onde  $P_{02}$  é definido por:

$$P_{02} H^2 = -3(\sigma_2 - \sigma_1) \left(1 - \frac{H_R}{H}\right) \quad (2.5)$$

- o fluxo de fluidos é assumido unidimensional, com seção transversal horizontal elíptica de excentricidade tendendo a 1, utilizando-se também expressões aproximadas para a vazão e a viscosidade, em função da posição:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{16}{3\pi} \left(\frac{12}{b^2(x)}\right) \frac{q(x) \mu(x)}{b(x) h(x)} \quad (2.6)$$

onde  $\mu(x) = \mu_w (1 - x/L)$   
 $q(x) = q_w (1 - x/L)$

sendo  $\mu_w$  : viscosidade do fluido injetado, na boca da fratura [Pa.s]  
 $q_w$  : vazão volumétrica do fluido injetado, na boca da fratura [m<sup>3</sup>/s]  
 $b(x)$  : largura da fratura [m]  
 $L$  : comprimento de uma asa da fratura [m]  
 $h(x)$  : altura total da fratura, função da posição x [m]

A largura da fratura (b) é calculada para o estado plano de deformações [Engl63]. O autor alega ter escolhido esta opção, por considerá-la mais simples de ser calculada, do que a apresentada no trabalho de Shah e Kobayashi, resultando:

$$b(x) = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} h(x) p(x) \left\{ 1 + \frac{1}{24} \left[ \frac{P_{02} h^2(x)}{p(x)} \right] \right\} \quad (2.7)$$

onde  $E$  : módulo de elasticidade [Pa]  
 $\nu$  : coeficiente de Poisson

Da solução simultânea das equações 2.6 e 2.7 resulta uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, na forma:

$$dp(x)/dx = f[x, p(x)] \quad (2.8)$$

Esta equação pode ser resolvida, para p(x), pela técnica de Runge-Kutta de quarta ordem, quando h(x) é definido para uma fratura elíptica em sua seção transversal (plano y = 0),

$$h(x) = 2H\sqrt{1 - (x/L)^2} \quad (2.9)$$

e quando as condições de contorno são especificadas.

O método consiste em escolher o comprimento da fratura  $L$ , e então encontrar a altura da fratura no poço ( $2H$ ), e a pressão da ponta de fratura  $p(L)$ . Resolvendo a equação diferencial resulta  $p(x)$ , a qual é ajustada pelo método dos mínimos quadrados para a função  $p(x) = P_{00} + P_{20}x^2$ . Para parâmetros típicos, a forma quadrática é adequada, atesta o autor. Quando adicionada à variação vertical da tensão de confinamento, resulta:

$$p(x, z) = P_{00} + P_{20}x^2 + P_{02}z^2 \quad (2.10)$$

Esta distribuição de pressão é fornecida como dado de entrada para o cálculo analítico dos fatores de intensidade de tensões, fornecidos por Shah e Kobayashi. Se  $K_{II} \neq K_{IC}$  e  $K_{IH} \neq K_{IC}$ , um novo valor de  $H$  e  $p(L)$  é utilizado, e o processo iterativo continua até que  $K_{II} = K_{IC}$  e  $K_{IH} = K_{IC}$ . O modelo fornece a altura da fratura no poço ( $2H$ ) e a pressão de fundo, como função do comprimento de uma "asa" da fratura ( $L$ ).

### **Modelo FL2**

O autor registra que a limitação mais séria no modelo FL1 é provavelmente a forma assumida para a distribuição vertical de pressões  $p(x, z) = p(x) + P_{02}z^2$ , a qual é necessária para utilizar as análises de Shah e Kobayashi, ou seja, determinação dos fatores de intensidade de tensões. Além disso, para situações onde a altura da fratura é muito maior que a altura da zona de interesse, em função da variação quadrática em  $z$ ,  $\sigma_2$  será substancialmente maior que o seu valor real.

O modelo FL2 é similar ao FL1, exceto pela seguintes alterações:

- a distribuição de pressão líquida na direção vertical é alterada:

$$p(z) = \begin{cases} p - \sigma_1 & |z| < H_R \\ p - \sigma_2 & |z| > H_R \end{cases} \quad (2.11)$$

- a largura da fratura, baseado no estado plano de deformações, é recalculada
- o critério de propagação  $K_{II} = K_{IC}$  é substituído por  $p(L) \leq 0,206 \text{ MPa}$ , que basicamente pouco influência tem sobre os resultados
- mantém-se  $K_{IH} = K_{IC}$ , porém agora, não mais é possível utilizar os resultados de Shah e Kobayashi, e sim calcular o fator de intensidade de tensões como apresentado por Rice [Rice68].

O autor analisou a influência do contraste de tensões, da altura da zona de interesse ( $2H_R$ ), da alteração do módulo de elasticidade ( $E$ ), que por sua vez é adotado igual para a zona de interesse e as zonas adjacentes, e a alteração da tenacidade da rocha à fratura ( $K_I$ ).

Analisou situações onde a relação entre comprimento ( $L$ ) e a metade da altura da fratura ( $H$ ) é maior que cinco, que pode ser considerado como sendo sua maior limitação. O modelo não foi usado para explorar diferentes módulos de elasticidade ( $E$ ) entre a zona

de interesse e as zonas adjacentes, o que provavelmente alteraria o critério de propagação de fator de intensidade crítico de tensões para taxa máxima de liberação de energia. A perda de filtrado não foi considerada de forma explícita. Contrastes assimétricos de tensões também não foram analisados.

### 2.2.3. Modelo de Luiskutty

Trata-se de um modelo semi-analítico [Luis86], desenvolvido em co-autoria com Palmer, sendo este, o autor do modelo descrito anteriormente. Utiliza os mesmos conceitos desenvolvidos por Shah e Kobayashi. Trabalha com fratura elíptica e adota a função quadrática para descrever a distribuição das pressões no interior da fratura:

$$p(x, z) = P_{00} + P_{20}x^2 + P_{02}z^2 \quad (2.12)$$

Trata-se de um modelo de três camadas, com contrastes de tensões iguais, tanto em relação à camada confinante superior, quanto em relação à camada inferior. Diferentemente do modelo de Palmer, considera a perda de filtrado.

O cálculo da largura da fratura também segue os conceitos desenvolvidos por Shah e Kobayashi, e por este motivo, não utiliza mais o estado plano de deformações, como utilizado no modelo de Palmer. Por este motivo, este modelo foi testado com razões entre comprimento (L) e a metade da altura da fratura no poço (H) variando de 1,5 a 3,7 (situação encontrada para pequenos contrastes de tensões), diferente do modelo de Palmer, onde sua utilização se limitou para razões superiores a 5.

A equação para cálculo dos fatores de intensidade de tensões foi extraída do trabalho de Shah e Kobayashi.

Sua contribuição mais original se refere à maneira de considerar o fluxo bidimensional. Na região próxima ao poço, utiliza a solução fornecida por Muskat [Musk82], o qual considera uma fonte linear, numa região infinita. Longe do poço e próximo à fronteira da elipse, a solução adotada foi a encontrada por Prats [Prat61], que considera fonte puntual e fronteira elíptica com pressão constante. O autor registra ter encontrado erro máximo de 24% nos cálculos da altura e da pressão no poço, quando comparado com os resultados apresentados nos modelos 3D [Abou84].

Este modelo possui uma incoerência intrínseca nas suas hipóteses: se propõe a descrever a distribuição de pressões no interior da fratura como proposto por Shah e Kobayashi e ao mesmo tempo, para solução do fluxo de fluidos bidimensional utiliza os resultados de Prats, os quais foram obtidos considerando-se que a pressão em todo o contorno da elipse é constante.

### 2.2.4. Modelo de Boutéca

O modelo de Boutéca [Bout87] utiliza os conceitos desenvolvidos por Shah e Kobayashi para fratura plana elíptica, o que possibilita a determinação de expressões analíticas para a largura da fratura (b) e para os fatores de intensidade de tensões modo I ( $K_I$ ), e adota o seguinte polinômio para descrever a distribuição das pressões no interior da fratura:

$$p(x, z) = P_{00} + P_{01}z + P_{20}x^2 + P_{02}z^2 \quad (2.13)$$

Nesta expressão está presente o termo  $P_{01}z$ , que não havia anteriormente sido incluído nos modelos de Palmer e Luiskutty, e este termo se propõe a descrever alguma assimetria em relação ao eixo  $x$ .

As tensões de confinamento são aproximadas por um polinômio quadrático em  $z$ :

$$\sigma(x, z) = \sigma_{00} + \sigma_{01}z + \sigma_{02}z^2 \quad (2.14)$$

Trata-se novamente de um modelo de três camadas, com contrastes simétricos de tensões entre a camada de interesse e as camadas confinantes superior e inferior.

Considera a perda de filtrado, de acordo com os conceitos desenvolvidos por Carter [Howa57], na equação da conservação da massa, sendo que o fluxo de fluidos é considerado na sua forma bidimensional. Também assume que a variação da razão  $q/b^2$  tem influência mínima na distribuição final de pressão e portanto mantém esta razão constante.

Resumidamente, o modelo consiste em se resolver de forma acoplada: equação de equilíbrio, equação de mecânica dos fluidos e equação da conservação da massa. Acoplado a estas equações está o critério de propagação de fratura, baseado no fator de intensidade crítico de tensões. As incógnitas se referem as quatro constantes que descrevem a distribuição de pressões no interior da fratura.

### 2.2.5. Modelo de Rueda

O modelo de Rueda [Rued94] é muitíssimo similar ao de Boutéca, diferindo no número de termos incluídos no polinômio que descreve a distribuição de pressões no interior da fratura, a saber:

$$p(x, z) = P_{00} + P_{01}z + P_{20}x^2 + P_{02}z^2 + P_{21}x^2z + P_{03}z^3 \quad (2.15)$$

Os resultados deste modelo foram validados pela comparação com um número bastante expressivo de casos disponíveis na literatura. Foi inclusive comparado com um caso apresentado por Morales [Mora89], onde os contrastes de tensões são assimétricos, ou seja, o contraste de tensões entre a zona de interesse e a zona confinante superior é diferente daquele encontrado entre a zona de interesse e a zona confinante inferior.

## 2.3. Outro modelo

### 2.3.1. Modelo de Meyer

O modelo de Meyer [Meye86, 89] utiliza uma forma diferente de atacar o problema, quando comparado com os demais modelos. Meyer desenvolveu um modelo utilizando o método das integrais para resolver as equações governantes. O fluxo bidimensional foi implicitamente incorporado na integral pela ponderação das soluções fundamentais para uma fratura radial e para fraturas muito alongadas.

É aplicável para amplo limite de situações ( $1/3 < L/H < \infty$ ), permitindo a utilização de diferentes tensões de confinamento, tenacidade da rocha ao fraturamento e módulo de elasticidade. Nas suas hipóteses incluiu a perda de filtrado e a perda inicial de filtrado (*spurt loss*).

O critério de propagação é baseado no conceito do fator de intensidade de tensões crítico ( $K_{IC}$ ).

As equações diferenciais são simplificadas utilizando as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned}\alpha_L &\equiv \frac{t}{L(t)} \frac{dL(t)}{dt} \\ \alpha_a &\equiv \frac{t}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt} \\ \alpha_H &\equiv \frac{t}{H(t)} \frac{dH(t)}{dt} \\ \alpha_p &\equiv \frac{t}{p(t)} \frac{dp(t)}{dt}\end{aligned}\tag{2.16}$$

onde  $A(t)$  : área da fratura, que é função do tempo  $t$ .

Com estas mudanças de variáveis, ao invés de resolver simultaneamente um conjunto de equações diferenciais, calcula-se os parâmetros  $\alpha$  e então o comprimento, largura e altura são calculados para satisfazer as equações de momento e conservação de massa.

## 2.4. Análise dos conceitos mais relevantes apresentados nos modelos

### 2.4.1. Estado plano de deformações

Os modelos que utilizam esta hipótese, de uma forma geral, são mais precisos quanto mais alongadas forem as fraturas, o que já era esperado. Morales [Mora89] registra que os modelos 3D passam a exigir um esforço computacional muito elevado quando as fraturas se tornam muito alongadas, o que justificaria a utilização dos modelos P3D para estes casos. Obviamente, no limite, os modelos bidimensionais devem gerar resultados bastante satisfatórios, quando as fraturas estão bem confinadas.

Estes modelos permitem atacar situações onde os contrastes de tensões entre a zona de interesse e as zonas confinantes (acima e abaixo da zona de interesse) não sejam simétricos, que é uma característica que aumenta bastante a versatilidade dos modelos.

### 2.4.2. Fratura elíptica e carregamento descrito por polinômio

Os modelos baseados nos conceitos de Shah e Kobayashi [Shah71] resultam bastante ágeis, no que se refere aos esforços computacionais despendidos. A utilização de um polinômio para descrever a pressão líquida no interior da fratura, e a forma de se obter

os fatores de intensidade de tensões e as aberturas da fratura, simplificam uma das partes mais custosas de uma modelagem, que é justamente este acoplamento entre mecânica dos fluidos e a mecânica dos sólidos.

Traz consigo alguns inconvenientes que, pelos resultados apresentados pelos diversos autores, não se mostram críticos: especifica o formato da fratura como sendo elíptico no plano  $y = 0$ , trabalha com três camadas e adota módulo de elasticidade ( $E$ ) e coeficientes de Poisson ( $\nu$ ) únicos, tanto para a formação de interesse, quanto para as formações adjacentes. Rueda [Rued94] registra a utilização de seu modelo para contrastes assimétricos de tensões, porém não apresenta maiores detalhes sobre este procedimento.

Cronologicamente, observa-se que os diversos trabalhos passaram a utilizar mais termos para o polinômio que descreve o carregamento interno da fratura.

Inicialmente, o modelo de Palmer [Palm83] adotou o seguinte polinômio:

$$p(x, z) = P_{00} + P_{20}x^2 + P_{02}z^2 \quad (2.17)$$

Observa-se aqui a sua intenção de utilizar somente os componentes do polinômio que impliquem a simetria do problema em relação aos eixos  $x$  e  $z$ . Luiskutty [Luis86], que também trabalhava com Palmer, deu sua contribuição num novo modelo, porém mantendo o mesmo polinômio utilizado por Palmer.

Posteriormente, Boutéca [Bout87] incluiu mais um termo no polinômio, resultando:

$$p(x, z) = P_{00} + P_{01}z + P_{20}x^2 + P_{02}z^2 \quad (2.18)$$

Para justificar a inclusão do termo  $P_{01}z$  argumenta que outros modelos assim o fazem, aparentando ser consequência do gradiente de pressão resultante da diferença de densidade existente entre o fluido, que se encontra dentro da fratura, e a rocha que o circunda.

Rueda [Rued94] acrescentou mais dois termos a este polinômio, resultando:

$$p(x, z) = P_{00} + P_{01}z + P_{20}x^2 + P_{02}z^2 + P_{21}x^2z + P_{03}z^3 \quad (2.19)$$

Nenhuma explicação foi dada sobre a motivação da escolha do polinômio em questão. O termo de terceira potência em  $z$  se apresenta, analisando-se de uma forma simplista, coerente com o termo linear em  $z$ . Pode-se imaginar que a composição destes dois termos pode representar melhor a diferença de densidade entre o fluido e a rocha, bem como os contrastes assimétricos de tensões entre a zona de interesse e as camadas adjacentes. Não é fácil porém explicar o motivo da utilização do termo  $P_{21}x^2z$ .

Como já descrito, os polinômios utilizados pelos diversos autores para descrever a distribuição líquida de pressões no interior da fratura, são decorrentes da resultante entre a distribuição de pressões no interior da fratura, e as tensões horizontais existentes na rocha, que tendem ao fechamento da mesma. Para que a resultante seja na forma do polinômio apresentado, é necessário que as tensões externas sejam representadas também por este polinômio, ou por alguns termos deste polinômio.

A figura 2.4a mostra a representação de contrastes simétricos de tensões, da zona de interesse em relação as camadas adjacentes. A figura 2.4b apresenta o caso assimétrico. Pode-se observar que a representação possui suas deficiências, e que a representação também é função dos limites utilizados na aproximação do polinômio, pelo método dos mínimos quadrados.

Na representação 1, para os casos simétricos e assimétricos, utilizou-se os limites de +/- 5 vezes a altura do reservatório ( $-5 H_R, 5 H_R$ ), e na representação 2, +/- 2 vezes ( $-2 H_R, 2 H_R$ ).

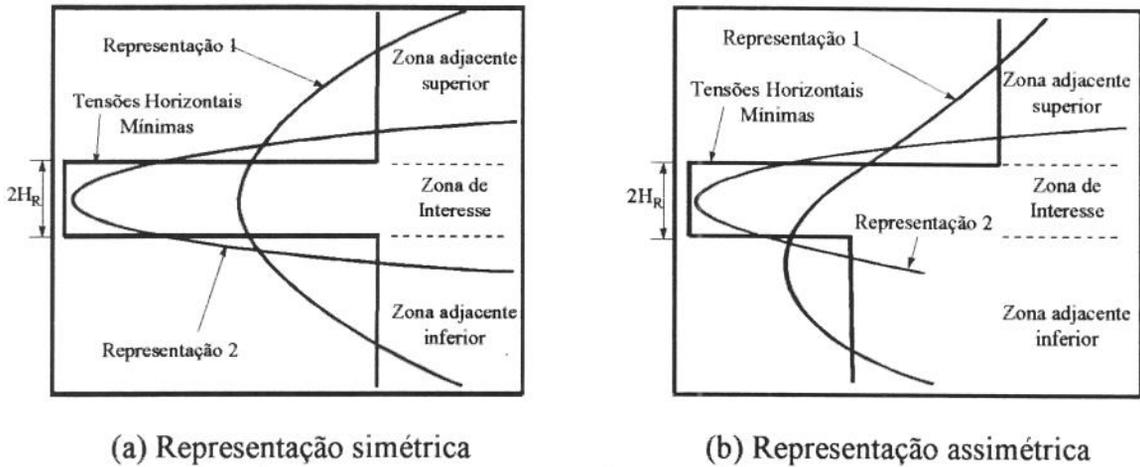


Figura 2.4 - Representação do contraste de tensões

A inclusão dos termos de quarta ordem em  $z$ , para uma melhor representação tanto da distribuição de pressões no interior da fratura, quando para a representação das tensões horizontais, ainda não foi utilizada por nenhum autor, por não fazer parte do trabalho original de Shah e Kobayashi [Shah71], cujos autores registraram o grande trabalho necessário para que estes termos fossem incluídos.

## CAPÍTULO 3

### AS EQUAÇÕES GOVERNANTES

#### 3.1. Equação do fluxo de fluidos entre placas paralelas

A equação do fluxo de fluidos entre placas paralelas relaciona a velocidade do fluido com o gradiente de pressão, sendo que as pressões envolvidas também estão relacionadas com a abertura da fratura. Num modelo de geometria de fratura, devido ao acoplamento existente, a equação de fluxo de fluidos e a equação da abertura da fratura devem ser resolvidas simultaneamente.

A equação para fluxo de fluidos não Newtonianos entre placas paralelas é dada por:

$$\nabla p = -\frac{\mu_{ap}}{k_f} \vec{v} \quad (3.1)$$

com 
$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{i}_z \quad (3.2)$$

$$\mu_{ap} = \frac{1}{3} \left( \frac{2n'+1}{n'} \right)^{n'} k' \left( \frac{2|v|}{b} \right)^{n'-1} \quad (3.3)$$

$$k_f = \frac{b^2}{12} \quad (3.4)$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i}_x + v_z \vec{i}_z \quad (3.5)$$

onde  $\mu_{ap}$  : viscosidade aparente do fluido de fraturamento [Pa.s]  
 $k_f$  : permeabilidade de um duto com paredes paralelas [m<sup>2</sup>]  
 $\vec{v}$  : velocidade do fluido de fraturamento [m/s]  
 $n'$  : índice de comportamento do fluido de potência  
 $k'$  : índice de consistência do fluido de potência [Pa.s<sup>n'</sup>]  
 $b$  : abertura da fratura (distância entre as placas paralelas) [m]

Observando-se uma fratura hidráulicamente induzida, constata-se facilmente que as paredes não são paralelas entre si, ou seja, não têm o formato de um paralelepípedo. Apesar desta constatação, a hipótese simplificadora utilizada no modelo é de que as paredes são paralelas entre si localmente, ponto a ponto. Ou seja, uma fratura composta por infinitas placas paralelas justapostas de dimensões bastante reduzidas pode resultar numa fratura com um formato qualquer, diferente do formato de um paralelepípedo.

Esta hipótese simplificadora é bem mais realista do que a de se adotar largura constante para toda a fratura, como utilizado por Carter [Howa57].

Uma outra forma de apresentar a viscosidade aparente, como função dos gradientes de pressões, e não mais como função do módulo da velocidade do fluido, é conseguida substituindo a equação 3.1 na equação 3.3:

$$\mu_{ap} = \left(\frac{k'}{3}\right)^{1/n'} \left(\frac{2n'+1}{n'}\right) \left(\frac{b \nabla p}{6}\right)^{\frac{n'-1}{n'}} \quad (3.6)$$

A equação 3.6 é mais simples de ser manuseada pelo simulador do que a equação 3.3, visto que o mesmo trabalha com pressões e aberturas da fratura, e não com a velocidade do fluido.

### 3.2. Equação da continuidade

O balanço de massa macroscópico para um dado volume de controle pode ser descrito da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de acumulação de massa} \\ \text{no volume de controle} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa líquida de massa que entra pela} \\ \text{superfície de controle para o referido} \\ \text{volume de controle} \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

Matematicamente, este balanço de massa pode ser expresso por [Rued94]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega = - \int_{\Gamma} \rho (\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (3.8)$$

- onde
- $\Omega$  : volume de controle [ $m^3$ ]
  - $\Gamma$  : superfície envolvendo o volume de controle [ $m^2$ ]
  - $\rho$  : massa específica do fluido [ $kg/m^3$ ]
  - $\vec{v}$  : velocidade do fluido [ $m/s$ ]
  - $\vec{w}$  : velocidade da superfície de controle [ $m/s$ ]
  - $\vec{v} - \vec{w}$  : velocidade do fluido através da superfície de controle (positivo, por convenção, saindo do volume de controle) [ $m/s$ ]
  - $\vec{n}$  : vetor normal à superfície de controle

O fluido de fraturamento pode ser considerado incompressível ( $\rho = \text{constante}$ ), sem introduzir erros significativos, com o que, o balanço de massa pode ser escrito na forma de balanço de volumes.

A equação da continuidade apresentada é genérica e pode ser aplicada a um volume de controle arbitrário. Portanto, o volume de controle pode ser escolhido como mostrado na figura 3.1, volume este que está circundado pelas superfícies laterais ( $\Gamma_1$ ) e pelas superfícies complementares ( $\Gamma_2$ ), onde as superfícies laterais ( $\Gamma_1$ ), por conveniência foram escolhidas coincidentes com as paredes da fratura, de onde resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} d\Omega = - \int_{\Gamma_1} (\vec{v}_1 - \vec{w}_1) \cdot \vec{n}_1 d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (\vec{v}_2 - \vec{w}_2) \cdot \vec{n}_2 d\Gamma \quad (3.9)$$

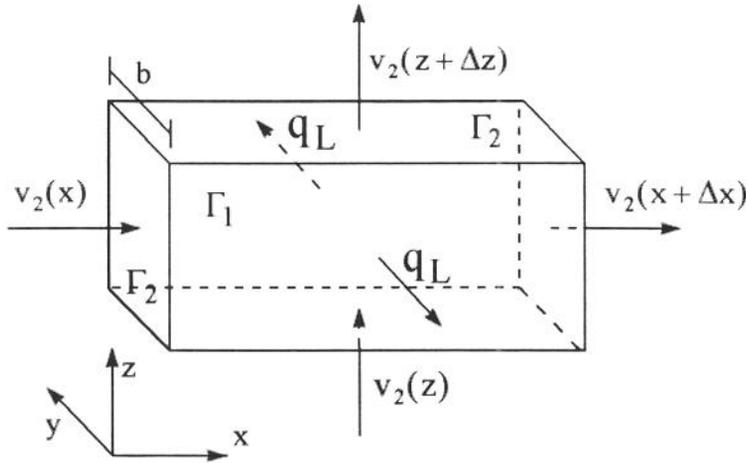


Figura 3.1 - Volume de controle da equação da continuidade

Como a fratura tem comprimento e altura bem superiores à sua largura, o fluxo de fluidos através da mesma pode ser considerado como sendo bidimensional, se processando entre paredes paralelas, para cada ponto analisado.

Algumas considerações e aproximações podem ser feitas sobre este volume de controle:

- as superfícies  $\Gamma_1$  podem ser aproximadas por paredes paralelas ( $\vec{n}_1 = \pm \vec{i}_y$ ), para pequenos volumes de controle;
- $\vec{v}_1 - \vec{w}_1$  é o vetor correspondente à velocidade de filtração ( $\vec{q}_L$ );
- a velocidade de filtração tem sentido normal à superfície filtrante  $\Gamma_1$  ( $q_L = \vec{q}_L \cdot \vec{n}_1$ );
- pode-se adotar a superfície complementar como estacionária ( $\vec{w}_2 = 0$  e  $\Gamma_2 = \text{constante}$ );
- $\Omega = \Gamma_1 b$  e  $d\Omega = \Gamma_1 db$

e conseqüentemente,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \Gamma_1 db = - \int_{\Gamma_1} q_L d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 d\Gamma \quad (3.10)$$

Considerando  $q_L$  constante em toda a área  $\Gamma_1$ , já que a mesma é infinitesimal, resulta

$$\Gamma_1 \left( \frac{\partial b}{\partial t} + q_L \right) = - \int_{\Gamma_2} \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 d\Gamma \quad (3.11)$$

Considerando-se a aproximação de que  $\vec{v}_2$  é perpendicular ao vetor  $\vec{n}_1$ , o lado direito da igualdade da equação 3.11 pode ser reescrito, incluindo-se esta superfície que possui contribuição nula, sem alterar o resultado da expressão. Estando disponível uma superfície fechada, pode-se aplicar o teorema da divergência, resultando:

$$-\Gamma_1 \left( \frac{\partial b}{\partial t} + q_L \right) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v}_2 d\Omega \quad (3.12)$$

Substituindo ( $d\Omega = \Gamma_1 db$ ) e resolvendo a integral acima, para um volume de controle infinitesimal, encontra-se a expressão final para a equação da continuidade:

$$-\left( \frac{\partial b}{\partial t} + q_L \right) = b \nabla \cdot \vec{v}_2 \quad (3.13)$$

onde  $\vec{v}_2 = v_x \vec{i}_x + v_z \vec{i}_z$

Utilizando-se a seguinte relação

$$b \nabla \cdot \left( \frac{k_f}{\mu_{ap}} \nabla p \right) = \nabla \cdot \left( b \frac{k_f}{\mu_{ap}} \nabla p \right) - \frac{k_f}{\mu_{ap}} \nabla p \cdot \nabla b \quad (3.14)$$

e desprezando-se o termo  $\nabla p \cdot \nabla b$ , já que tanto o gradiente de pressões quanto o gradiente de abertura da fratura são valores pequenos, chega-se a seguinte expressão para a equação da continuidade :

$$\nabla \cdot (b \vec{v}_2) = - \left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) \quad (3.15)$$

onde  $b$  : largura da fratura [m]

$q_L$  : velocidade do filtrado [m/s]

$\partial b / \partial t$  : variação da largura da fratura em relação ao tempo [m/s]

Pode-se também chamar  $\bar{q} = b \vec{v}_2$ , de onde resulta:

$$\nabla \cdot \bar{q} = - \left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) \quad (3.16)$$

### 3.3. Equação para largura da fratura

Shah e Kobayashi [Shah71] desenvolveram solução analítica para calcular o fator de intensidade de tensões, as tensões e as deformações para uma fratura elíptica plana, num meio infinito, homogêneo e isotrópico (figura 2.3), submetida a uma distribuição de pressões em seu interior, descrita por um polinômio em  $x$  e  $z$ , na forma:

$$p(x, z) = P_{00} + P_{10}x + P_{01}z + P_{20}x^2 + P_{11}xz + P_{02}z^2 + P_{30}x^3 + P_{21}x^2z + P_{12}xz^2 + P_{03}z^3 \quad (3.17)$$

Esta distribuição de pressões deve ser entendida como uma distribuição de pressões líquida interna à fratura, que é a resultante da soma das pressões internas à fratura ( $P_{ij}$ ) com a tensão de confinamento ( $\sigma_{ij}$ ), em sentido contrário, tendendo ao fechamento da mesma. Esta observação se torna relevante, quando é sabido que a teoria desenvolvida

por Shah e Kobayashi, foi adaptada para modelar fraturamentos hidráulicos, o que, provavelmente, não fazia parte dos objetivos dos autores.

Na figura 3.2 está apresentado, além da fratura elíptica, o domínio  $\Omega$  de análise para o simulador de geometria de fratura. Este domínio, correspondente a metade da elipse, decorre da hipótese de se considerar a fratura simétrica em relação ao poço.

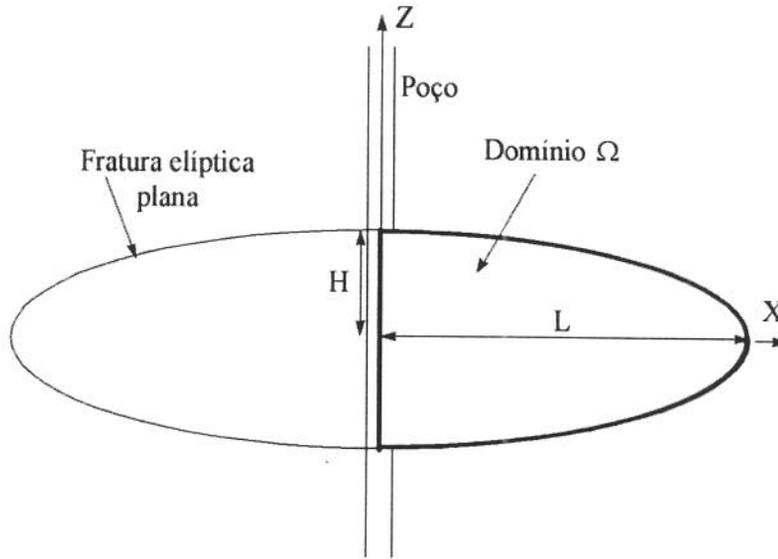


Figura 3.2 - A fratura elíptica plana de Shah e Kobayashi e o domínio de análise decorrente do eixo de simetria

Da teoria da elasticidade sabe-se que uma função potencial, para descrever corretamente um problema, necessita atender às condições de equilíbrio, de compatibilidade e às condições de contorno. Na ausência de forças de volume e tensões cisalhantes ( $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yz}$ ) no plano  $y = 0$ , as equações de Navier para o equilíbrio estático são satisfeitas por uma função harmônica  $\Phi$ , definida como segue:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.18)$$

As componentes cartesianas para o deslocamento (figura 2.3) são dados por [Kass66]:

$$u = y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + (1 - 2\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3.19)$$

$$v = y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (3.20)$$

$$w = y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + (1 - 2\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.21)$$

onde  $\nu$  : coeficiente de Poisson

As componentes cartesianas das tensões são dados por:

$$\sigma_{xx} = 2G \left( y \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \quad (3.22)$$

$$\sigma_{yy} = 2G \left( y \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \quad (3.23)$$

$$\sigma_{zz} = 2G \left( y \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2\nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \quad (3.24)$$

$$\tau_{xy} = 2Gy \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \quad (3.25)$$

$$\tau_{yz} = 2Gy \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2 \partial z} \quad (3.26)$$

$$\tau_{xz} = 2G \left[ y \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y \partial z} + (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right] \quad (3.27)$$

sendo  $G$  : módulo de elasticidade ao cisalhamento

A fronteira desta fratura elíptica plana, contida num meio elástico, é descrita por:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{L^2} + \frac{z^2}{H^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

A fratura é aberta pela aplicação de uma pressão interna,  $p(x,z)$ , simétrica ao plano  $y = 0$ . Em vista da simetria, este problema é equivalente a um sólido semi-infinito para  $y \geq 0$ , sujeito às seguintes condições de contorno:

$$\sigma_{yy} = -p(x, z) \quad \left( \frac{x^2}{L^2} + \frac{z^2}{H^2} < 1, y = 0 \right) \quad (3.29)$$

$$\nu = 0 \quad \left( \frac{x^2}{L^2} + \frac{z^2}{H^2} > 1, y = 0 \right) \quad (3.30)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \quad (y = 0) \quad (3.31)$$

mais a condição de que as tensões tendem a zero no infinito.

Usando (3.25) e (3.26), verifica-se que a condição  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$  no plano  $y = 0$  é satisfeita. Substituindo a equação (3.23) em (3.29) e a equação (3.20) em (3.30), tem-se:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{p(x, z)}{2G} \quad \left( \frac{x^2}{L^2} + \frac{z^2}{H^2} < 1, y = 0 \right) \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \left( \frac{x^2}{L^2} + \frac{z^2}{H^2} > 1, y = 0 \right) \quad (3.33)$$

Para resolver o problema de valor de contorno representado pelas equações (3.18), (3.32) e (3.33) para a fratura elíptica, um sistema de coordenadas elipsoidal  $(\lambda, \mu, \nu)$  é introduzido onde  $\lambda, \mu$  e  $\nu$  são as raízes para a equação em  $s$ :

$$\frac{x^2}{L^2 + s} + \frac{y^2}{s} + \frac{z^2}{H^2 + s} - 1 = 0 \quad (3.34)$$

As coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  em qualquer ponto podem ser expressas em termos de  $(\lambda, \mu, \nu)$  pelas seguintes relações:

$$L^2(L^2 - H^2) x^2 = (L^2 + \lambda)(L^2 + \mu)(L^2 + \nu) \quad (3.35)$$

$$L^2 H^2 y^2 = \lambda \mu \nu \quad (3.36)$$

$$H^2(H^2 - L^2) z^2 = (H^2 + \lambda)(H^2 + \mu)(H^2 + \nu) \quad (3.37)$$

onde  $\infty > \lambda \geq 0 \geq \mu \geq -H^2 \geq \nu \geq -L^2$ , para  $L > H$ .

No plano  $y = 0$ , a região interna à fratura elíptica  $(x^2/L^2 + z^2/H^2 < 1)$  é representada por  $\lambda = 0$  e a região externa à fratura elíptica  $(x^2/L^2 + z^2/H^2 > 1)$  é dada por  $\mu = 0$ .

Segedin [Sege67a] mostrou que a função potencial  $V^{(n)}$ , dada por (3.38), é harmônica:

$$V^{(n)} = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w^n(s) ds}{\sqrt{Q(s)}} \quad (3.38)$$

$$\text{onde } w(s) = 1 - \frac{x^2}{L^2 + s} - \frac{y^2}{s} - \frac{z^2}{H^2 + s} \quad (3.39)$$

$$\text{e } Q(s) = s(L^2 + s)(H^2 + s) \quad (3.40)$$

sendo  $n$  um número inteiro positivo. Considerando que  $V^{(n)}$  é harmônica,  $V^{(n)}$  e as suas derivadas parciais com respeito a  $x$  e  $z$  satisfazem a equação de equilíbrio (3.18). Assim, uma função tensão harmônica generalizada,  $\Phi$ , pode ser representada por um polinômio  $V^{(n)}$  e suas derivadas:

$$\Phi = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q c_{ij} \frac{\partial^{i+j} V^{(i+j+1)}}{\partial x^i \partial z^j} \quad (3.41)$$

Esta função tensão harmônica possui duas propriedades especiais que são bastante úteis para satisfazer as condições de contorno (3.32 e 3.33). A derivada parcial de (3.41) com respeito a  $y$  pode ser escrita, utilizando-se (3.34) e (3.39), como:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2y \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \left[ (i+j+1)c_{ij} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial z^j} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w^{i+j}(s) ds}{s \sqrt{Q(s)}} \right] \quad (3.42)$$

$$\text{ou,} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2y \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \left[ (i+j+1)c_{ij} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{s \sqrt{Q(s)}} \frac{\partial^{i+j}(w^{i+j}(s))}{\partial x^i \partial z^j} ds \right] \quad (3.43)$$

Fica claro de (3.42) que no plano  $y = 0$  e fora da fratura elíptica, isto é  $\mu = 0$ , o deslocamento normal  $v$  é igual a zero e portanto satisfaz a condição de contorno (3.33). Mais adiante, será demonstrado que esta função harmônica também satisfaz a outra condição de contorno (3.32), a saber:

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{\lambda=0} = \frac{p(x, z)}{2G} = \frac{1}{2G} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q P_{ij}^n x^i z^j \quad (3.44)$$

onde  $P_{ij}^n$  é uma função linear de  $c_{ij}$ .

A função tensão harmônica  $\Phi$ , como representada por (3.41), envolve uma somatória dupla em termos de  $i$  e  $j$ , que no trabalho de Shah e Kobayashi ficou restrita a  $i+j \leq 3$ , como justificado anteriormente. A equação (3.41) resulta:

$$\Phi = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 c_{ij} \frac{\partial^{i+j} V^{(i+j+1)}}{\partial x^i \partial z^j} \quad i+j \leq 3 \quad (3.45)$$

ou,

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \Phi_{ij} = & \Phi_{00} + \Phi_{10} + \Phi_{01} + \Phi_{20} + \Phi_{11} + \\ & + \Phi_{02} + \Phi_{30} + \Phi_{21} + \Phi_{12} + \Phi_{03} \end{aligned} \quad (3.46)$$

De uma forma mais explícita, pode-se listar as seguintes expressões para as componentes da função tensão harmônica, onde  $C_{ij}$  difere por uma constante multiplicativa de  $c_{ij}$ :

$$\Phi_{00} = c_{00} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x} = C_{00} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w(s) ds}{\sqrt{Q(s)}} \quad (3.47a)$$

$$\Phi_{10} = c_{10} \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x} = C_{10} x \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w(s) ds}{(L^2 + s) \sqrt{Q(s)}} \quad (3.47b)$$

$$\Phi_{01} = c_{01} \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x} = C_{01} z \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w(s) ds}{(H^2 + s) \sqrt{Q(s)}} \quad (3.47c)$$

$$\Phi_{20} = c_{20} \frac{\partial^2 V^{(3)}}{\partial x^2} = C_{20} \left[ \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w^2(s) ds}{(L^2 + s)\sqrt{Q(s)}} - 4x^2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w(s) ds}{(L^2 + s)^2 \sqrt{Q(s)}} \right] \quad (3.47d)$$

$$\Phi_{11} = c_{11} \frac{\partial^2 V^{(3)}}{\partial x \partial z} = C_{11} \left[ \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w(s) ds}{(L^2 + s)(H^2 + s)\sqrt{Q(s)}} \right] \quad (3.47e)$$

$$\Phi_{02} = c_{02} \frac{\partial^2 V^{(3)}}{\partial z^2} = C_{02} \left[ \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w^2(s) ds}{(H^2 + s)\sqrt{Q(s)}} - 4z^2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w(s) ds}{(H^2 + s)^2 \sqrt{Q(s)}} \right] \quad (3.47f)$$

$$\Phi_{30} = c_{30} \frac{\partial^3 V^{(4)}}{\partial x^3} = C_{30} x \left[ 3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w^2(s) ds}{(L^2 + s)^2 \sqrt{Q(s)}} - 4x^2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w(s) ds}{(L^2 + s)^3 \sqrt{Q(s)}} \right] \quad (3.47g)$$

$$\Phi_{21} = c_{21} \frac{\partial^3 V^{(4)}}{\partial x^2 \partial z} = C_{21} z \left[ \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w^2(s) ds}{(L^2 + s)(H^2 + s)\sqrt{Q(s)}} - 4x^2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w(s) ds}{(L^2 + s)^2 (H^2 + s)\sqrt{Q(s)}} \right] \quad (3.47h)$$

$$\Phi_{12} = c_{12} \frac{\partial^3 V^{(4)}}{\partial x \partial z^2} = C_{21} x \left[ \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w^2(s) ds}{(L^2 + s)(H^2 + s)\sqrt{Q(s)}} - 4z^2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w(s) ds}{(L^2 + s)^2 (H^2 + s)\sqrt{Q(s)}} \right] \quad (3.47i)$$

$$\Phi_{03} = c_{03} \frac{\partial^3 V^{(4)}}{\partial z^3} = C_{03} z \left[ 3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w^2(s) ds}{(H^2 + s)^2 \sqrt{Q(s)}} - 4z^2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w(s) ds}{(H^2 + s)^3 \sqrt{Q(s)}} \right] \quad (3.47j)$$

Para que a função potencial  $\Phi$  seja conhecida, se faz necessário calcular as integrais elípticas apresentadas nas equações acima, e utilizar a condição de contorno descrita pela equação (3.32). Ou seja, conhecendo-se os coeficientes  $P_{ij}^n$  do polinômio que descreve a distribuição de pressões líquidas no interior da fratura, calcula-se os coeficientes  $C_{ij}$  que descrevem a função tensão harmônica  $\Phi$ , ou seja:

$$[S] \{C_{ij}\} = \frac{1}{2G} \{P_{ij}^n\} \quad (3.48)$$

onde

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{00} & 0 & 0 & S_{20a} & 0 & S_{02a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{30a} & 0 & S_{12a} & 0 \\ 0 & 0 & S_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{21a} & 0 & S_{03a} \\ 0 & 0 & 0 & S_{20b} & 0 & S_{02b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{20c} & 0 & S_{02c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{30b} & 0 & S_{12b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{21b} & 0 & S_{03b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{30c} & 0 & S_{12c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{21c} & 0 & S_{03c} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$S_{00} = \frac{4E(k)}{LH^2}$$

$$S_{10} = \frac{4}{L^3H^2k^2} [k'^2 K(k) - (1 - 2k^2)E(k)]$$

$$S_{01} = \frac{4}{LH^4k^2} [(1 + k^2)E(k) - k'^2 K(k)]$$

$$S_{20a} = \frac{8}{L^3H^2k^2} [k'^2 K(k) - (1 - 2k^2)E(k)]$$

$$S_{20b} = \frac{8}{L^5H^2k^2} [(3 - 8k^2 + 2k^{-2})E(k) - 2k'^2(2 + k^{-2})K(k)]$$

$$S_{20c} = \frac{8}{L^3H^4k^4} [k'^2(2 - k^2)K(k) - 2(k'^2 + k^4)E(k)]$$

$$S_{11} = \frac{-4}{L^7k^4k'^4} [k'^2(2 - k^2)K(k) - 2(k'^2 + k^4)E(k)]$$

$$S_{02a} = \frac{8}{LH^4k^2} [(1 + k^2)E(k) - k'^2 K(k)]$$

$$S_{02b} = \frac{8}{L^3H^4k^4} [k'^2(2 - k^2)K(k) - 2(k'^2 + k^4)E(k)]$$

$$S_{02c} = \frac{8}{L^3H^4k^4} [2(3k^2 - 1)K(k) + (3k^2 + (2 - 10k^2)k'^{-2})E(k)]$$

$$S_{30a} = \frac{8}{L^5H^2k^4} [2k'^2(2k^2 + 1)K(k) - (2 + 3k^2 - 8k^4)E(k)]$$

$$S_{30b} = \frac{8}{3L^7H^4k^6} [(8 + 9k^2 + 16k^4 - 48k^6)E(k) - (8 + 13k^2 + 24k^4)k'^2 K(k)]$$

$$S_{30c} = \frac{8}{L^5H^4k^6} [(8k^4k'^2 + 3k^2k'^2 + 2k^2 - 8)E(k) + (4k^2k'^2 + 5k'^2 + 3)k'^2 K(k)]$$

$$S_{21a} = \frac{8}{L^3H^4k^4} [-k'^2(2 - k^2)K(k) + 2(k'^2 + k^4)E(k)]$$

$$S_{21b} = \frac{8}{L^5H^4k^6} [(8k^4k'^2 + 3k^2k'^2 + 2k^2 - 8)E(k) + (4k^2k'^2 + 5k'^2 + 3)k'^2 K(k)]$$

$$S_{21c} = \frac{8}{3L^5H^4k^6} [(6k^4 - 3k^2 + 16 - 8k'^{-2})E(k) + (3k^2k'^2 + 12k^2 - 8)K(k)]$$

$$S_{12a} = \frac{8}{L^3 H^4 k^4} [2(k'^2 + k^4)E(k) - k'^2(2 - k^2)K(k)]$$

$$S_{12b} = \frac{8}{3L^5 H^4 k^6} [(4k^2 k'^2 + 5k'^2 + 3)k'^2 K(k) + (8k^4 k'^2 + 3k^2 k'^2 + 2k^2 - 8)E(k)]$$

$$S_{12c} = \frac{8}{L^5 H^4 k^6} [(3k^2 k'^2 + 12k'^2 - 8)K(k) + (6k^4 - 3k^2 + 16 - 8k'^2)E(k)]$$

$$S_{03a} = \frac{-8}{L^3 H^4 k^4} [2(3k^2 - 1)K(k) + (3k^2 + (2 - 10k^2)k'^2)E(k)]$$

$$S_{03b} = \frac{8}{L^5 H^4 k^6} [(3k^2 k'^2 + 12k'^2 - 8)K(k) + (6k^4 - 3k^2 + 16 - 8k'^2)E(k)]$$

$$S_{03c} = \frac{8}{3LH^8 k^6} [(16k^2 - 45k^2 k'^2 + 8)k'^2 K(k) - (48 - 40k'^2 - 88k^2 k'^2 + 15k^2 k'^4)E(k)]$$

sendo  $k^2 = \frac{L^2 - H^2}{L^2}$  (3.50)

$$k'^2 = \frac{H^2}{L^2},$$
 (3.51)

$E(k)$  a integral elíptica de segundo tipo e  $K(k)$ , a integral elíptica de primeiro tipo,

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 t)^{1/2} dt$$
 (3.52)

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-1/2} dt$$
 (3.53)

A equação analítica para a largura da fratura ( $b$ ), que é igual a duas vezes o deslocamento  $v$  na direção do eixo  $y$ , pode ser apresentada de duas formas diferentes e convenientes. A primeira forma é similar àquela utilizada para descrever a função tensão harmônica ( $\Phi$ ):

$$b = 2 \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 C_{ij} b_{ij} = 2 [C_{ij}] \{b_{ij}\} = \frac{1}{G} [P_{ij}^n] [[S]^{-1}]^T \{b_{ij}\} \quad i + j \leq 3$$
 (3.54a)

ou mais explicitamente,

$$b = 2(C_{00}b_{00} + C_{10}b_{10} + C_{01}b_{01} + C_{20}b_{20} + C_{11}b_{11} + C_{02}b_{02} + C_{30}b_{30} + C_{21}b_{21} + C_{12}b_{12} + C_{03}b_{03})$$
 (3.54b)

Em função da simetria existente para o problema de modelagem de uma fratura hidráulica, todos os termos que possuem a variável  $x$ , elevado a primeira ou terceira

potências, podem ser desprezados, e a largura da fratura passa a ser representada como segue:

$$b = 2(C_{00}b_{00} + C_{01}b_{01} + C_{20}b_{20} + C_{02}b_{02} + C_{21}b_{21} + C_{03}b_{03}) \quad (3.55)$$

onde,  $b_{00} = \xi$

$$b_{01} = \xi \frac{z}{H^2}$$

$$b_{20} = \xi \left[ \frac{4}{3L^2} \left( 1 - \frac{4x^2}{L^2} - \frac{z^2}{H^2} \right) \right]$$

$$b_{02} = \xi \left[ \frac{4}{3H^2} \left( 1 - \frac{x^2}{L^2} - \frac{4z^2}{H^2} \right) \right]$$

$$b_{21} = \xi \left[ \frac{4z}{3L^2H^2} - \frac{16x^2z}{3L^4H^2} - \left( \frac{2}{L^2H^4k^2} - \frac{2}{3L^2H^4} - \frac{2}{L^4H^2k^2} \right) z^3 \right]$$

$$b_{03} = \xi \left[ \frac{12z}{3H^4} - \frac{8z^3}{3H^6} - 3 \left( \frac{2}{L^2H^4k^2} - \frac{2}{3L^2H^4} - \frac{2}{L^4H^2k^2} \right) x^2z \right]$$

sendo  $\xi = \frac{8(1-\nu)}{LH} \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2} - \frac{z^2}{H^2}}$ .

Uma outra forma de apresentar a largura da fratura, buscando-se a semelhança com o polinômio que descreve a distribuição de pressões, é:

$$b = 2(B_{00} + B_{10}x + B_{01}z + B_{20}x^2 + B_{11}xz + B_{02}z^2 + B_{30}x^3 + B_{21}x^2z + B_{12}xz^2 + B_{03}z^3) \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2} - \frac{z^2}{H^2}} \quad (3.56)$$

Pelos mesmos motivos de simetria apresentados acima, a equação fica restrita a:

$$b = 2(B_{00} + B_{01}z + B_{20}x^2 + B_{02}z^2 + B_{21}x^2z + B_{03}z^3) \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2} - \frac{z^2}{H^2}} \quad (3.57)$$

onde  $B_{00} = \frac{8(1-\nu)}{LH} \left( C_{00} + \frac{4C_{20}}{3L^2} + \frac{4C_{02}}{3H^2} \right)$

$$B_{01} = \frac{8(1-\nu)}{LH} \left( \frac{C_{01}}{H^2} + \frac{4C_{21}}{3L^2H^2} + \frac{12C_{03}}{3H^4} \right)$$

$$B_{20} = \frac{8(1-\nu)}{LH} \left[ -\frac{4}{3L^2} \left( \frac{4C_{20}}{L^2} + \frac{C_{02}}{H^2} \right) \right]$$

$$B_{02} = \frac{8(1-\nu)}{LH} \left[ -\frac{4}{3H^2} \left( \frac{C_{20}}{L^2} + \frac{4C_{02}}{H^2} \right) \right]$$

$$B_{21} = \frac{8(1-\nu)}{LH} \left[ \frac{16C_{21}}{3L^2H^2} - 3C_{03} \left( \frac{2}{L^2H^4k^2} - \frac{2}{L^4H^2k^2} - \frac{2}{3L^2H^4} \right) \right]$$

$$B_{03} = \frac{8(1-\nu)}{LH} \left[ -\frac{8C_{03}}{H^6} - C_{21} \left( \frac{2}{L^2H^4k^2} - \frac{2}{3L^2H^4} - \frac{2}{L^4H^2k^2} \right) \right]$$

### 3.4. Fator de intensidade de tensões para uma fratura elíptica num meio infinito

Um dos critérios de propagação de fratura disponíveis na literatura se baseia na comparação do fator de intensidade de tensão modo I ( $K_I$ ) com a tenacidade do material ao fraturamento (ou fator de intensidade de tensões crítico  $K_{IC}$ ). Shah e Kobayashi apresentaram uma expressão analítica para o cálculo deste fator de intensidade de tensões ( $K_I$ ), para todos os pontos localizados na periferia da fratura elíptica.

Kassir [Kass66] mostrou que nas vizinhanças da periferia da fratura elíptica no plano  $y = 0$ , as coordenadas elípticas resultam:

$$\lambda = 2LHr(L^2\sin^2\theta + H^2\cos^2\theta)^{-1/2} \quad (3.58)$$

$$\mu = 0 \quad (3.59)$$

$$\nu = -(L^2\sin^2\theta + H^2\cos^2\theta) \quad (3.60)$$

onde  $r$  é a distância radial normal à extremidade da fratura no plano  $y = 0$ , e  $\theta$  é o ângulo da equação parametrizada da elipse

$$x = L \cos\theta \quad e \quad z = H \sin\theta \quad (3.61)$$

O fator de intensidade de tensões  $K_I$  é definido em termos da tensão normal,  $\sigma_{yy}$ , no plano  $y = 0$  como:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ (2\pi r)^{1/2} \sigma_{yy} \right] \quad (3.62)$$

Substituindo a equação (3.58) na equação (3.62) resulta:

$$K_I = \left( \frac{\pi}{LH} \right)^{1/2} (L^2\sin^2\theta + H^2\cos^2\theta)^{1/4} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ (\lambda)^{1/2} \sigma_{yy} \right]_{\mu=0} \quad (3.63)$$

O fator de intensidade de tensões derivado para cada componentes da função harmônica de tensões  $\Phi_{ij}$ , conforme apresentado por Shah e Kobayashi, está listado abaixo, com seu correspondente  $\Phi_{ij}$ :

$$\Phi_{00}: K_1 = \frac{8C_{00}G}{LH} \left( \frac{\pi}{LH} \right)^{1/2} (L^2 \sin^2 \theta + H^2 \cos^2 \theta)^{1/4} \quad (3.64a)$$

$$\Phi_{10}: K_1 = \frac{8C_{10}G \cos \theta}{L^2 H} \left( \frac{\pi}{LH} \right)^{1/2} (L^2 \sin^2 \theta + H^2 \cos^2 \theta)^{1/4} \quad (3.64b)$$

$$\Phi_{01}: K_1 = \frac{8C_{01}G \sin \theta}{LH^2} \left( \frac{\pi}{LH} \right)^{1/2} (L^2 \sin^2 \theta + H^2 \cos^2 \theta)^{1/4} \quad (3.64c)$$

$$\Phi_{20}: K_1 = -\frac{32C_{20}G \cos^2 \theta}{L^3 H} \left( \frac{\pi}{LH} \right)^{1/2} (L^2 \sin^2 \theta + H^2 \cos^2 \theta)^{1/4} \quad (3.64d)$$

$$\Phi_{11}: K_1 = \frac{8C_{11}G \cos \theta \sin \theta}{L^2 H^2} \left( \frac{\pi}{LH} \right)^{1/2} (L^2 \sin^2 \theta + H^2 \cos^2 \theta)^{1/4} \quad (3.64e)$$

$$\Phi_{02}: K_1 = -\frac{32C_{02}G \sin^2 \theta}{LH^3} \left( \frac{\pi}{LH} \right)^{1/2} (L^2 \sin^2 \theta + H^2 \cos^2 \theta)^{1/4} \quad (3.64f)$$

$$\Phi_{30}: K_1 = -\frac{32C_{30}G \cos^3 \theta}{L^4 H} \left( \frac{\pi}{LH} \right)^{1/2} (L^2 \sin^2 \theta + H^2 \cos^2 \theta)^{1/4} \quad (3.64g)$$

$$\Phi_{21}: K_1 = -\frac{32C_{21}G \cos^2 \theta \sin \theta}{L^3 H^2} \left( \frac{\pi}{LH} \right)^{1/2} (L^2 \sin^2 \theta + H^2 \cos^2 \theta)^{1/4} \quad (3.64h)$$

$$\Phi_{12}: K_1 = -\frac{32C_{12}G \cos \theta \sin^2 \theta}{L^2 H^3} \left( \frac{\pi}{LH} \right)^{1/2} (L^2 \sin^2 \theta + H^2 \cos^2 \theta)^{1/4} \quad (3.64i)$$

$$\Phi_{03}: K_1 = -\frac{32C_{03}G \sin^3 \theta}{LH^4} \left( \frac{\pi}{LH} \right)^{1/2} (L^2 \sin^2 \theta + H^2 \cos^2 \theta)^{1/4} \quad (3.64j)$$

O fator de intensidade de tensões para a função harmônica de tensões  $\Phi$ , para a distribuição de pressões descrita pelo polinômio em  $x$  e  $z$ , pode ser escrito simplesmente pela superposição das equações (3.64a) a (3.64j) como:

$$\begin{aligned} \Phi: K_1 = \frac{8G}{LH} \left( \frac{\pi}{LH} \right)^{1/2} (L^2 \sin^2 \theta + H^2 \cos^2 \theta)^{1/4} & \left( C_{00} + \frac{C_{10} \cos \theta}{L} + \right. \\ & + \frac{C_{01} \sin \theta}{H} - \frac{4C_{20} \cos^2 \theta}{L^2} + \frac{C_{11} \cos \theta \sin \theta}{LH} - \frac{4C_{02} \sin^2 \theta}{H^2} - \frac{4C_{30} \cos^3 \theta}{L^3} - \\ & \left. - \frac{4C_{21} \cos^2 \theta \sin \theta}{L^2 H} - \frac{4C_{12} \cos \theta \sin^2 \theta}{LH^2} - \frac{4C_{03} \sin^3 \theta}{H^3} \right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Os coeficientes  $C_{ij}$  são determinados pela equação (3.48), em função dos coeficientes  $P_{ij}^n$ . O fator de intensidade de tensões também pode ser apresentado para suas situações

particulares, ou seja  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  e  $\theta = -\pi/2$ , considerando-se a simetria existente com o poço ( $C_{10} = C_{30} = 0$ ):

$$K_{ll}|_{x=L} = \frac{8G}{LH} \left(\frac{\pi}{L}\right)^{1/2} \left(C_{00} - \frac{4C_{20}}{L^2}\right) \quad (3.66)$$

$$K_{lh}|_{z=H} = \frac{8G}{LH} \left(\frac{\pi}{H}\right)^{1/2} \left(C_{00} + \frac{C_{01}}{H} - \frac{4C_{02}}{H^2} - \frac{4C_{03}}{H^3}\right) \quad (3.67)$$

$$K_{lh}|_{z=-H} = \frac{8G}{LH} \left(\frac{\pi}{H}\right)^{1/2} \left(C_{00} - \frac{C_{01}}{H} - \frac{4C_{02}}{H^2} + \frac{4C_{03}}{H^3}\right) \quad (3.68)$$

### 3.5. Equação do fluxo de fluidos por filtração

A figura 3.3 apresenta uma curva característica de volume de filtrado versus a raiz quadrada do tempo (curva 1), obtida em experimentos laboratoriais. Como pode ser observado, a vazão de filtração, que vem a ser a derivada do volume de filtrado em relação ao tempo, é bastante elevada nos instantes iniciais, decrescendo rapidamente após a formação de um reboco na parede filtrante, reboco este que é decorrência da composição do fluido de fraturamento. Como o teste de filtração é realizado com área de filtração constante e o fluido é colocado em contato simultaneamente com toda a área de filtração, os valores obtidos de vazão de filtração podem ser divididos pela área filtrante, resultando a velocidade de filtração  $q_L$ , que por sua vez integra a equação da continuidade (equação 3.10).

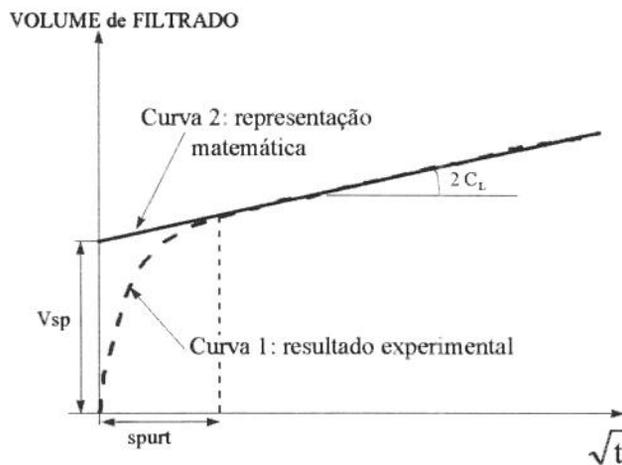


Figura 3.3 - Curva característica do experimento de filtração

A característica de formação de reboco pelo fluido de fraturamento é bastante importante, pois o objetivo maior é a criação de uma fratura hidráulica com as dimensões desejadas, utilizando-se o menor volume de fluido possível, para que a operação seja economicamente mais atrativa.

A curva 2 da figura 3.2 é a representação matemática do resultado experimental obtido. Alguns autores sugerem, para a maioria dos fluidos, a seguinte expressão para o volume de filtrado:

$$V_{\text{filtrado}} = V_{\text{sp}} + 2 C_L A_f \sqrt{t} \quad (3.69)$$

onde  $V_{\text{filtrado}}$  : volume de filtrado [m<sup>3</sup>]  
 $V_{\text{sp}}$  : volume de perda inicial de filtrado (*spurt loss*) [m<sup>3</sup>]  
 $C_L$  : coeficiente global de perda de filtrado, por superfície filtrante [m / √s]  
 $A_f$  : área de filtração [m<sup>2</sup>]  
 $t$  : tempo de filtração [s]

No caso de um fraturamento hidráulico, a curva apresentada na figura 3.2 é reproduzida em cada ponto da superfície filtrante existente nas paredes da fratura. Porém, cada ponto desta superfície vai ser contactada pelo fluido em tempos diferentes, de tal forma que a equação 3.69 necessita receber um termo adicional para representar este fato, como segue:

$$V_{\text{filtrado}} = V_{\text{sp}} + 2 C_L A_f \sqrt{t - \tau} \quad (3.70)$$

onde  $\tau$  : tempo de início do contato rocha fluido [s]  
 $t - \tau$  : tempo de filtração [s]  
 $t$  : instante de análise do volume filtrado [s]

Como estamos interessados na velocidade de filtração ( $q_L$ ), podemos derivar a equação 3.70 no tempo e dividir pela área de filtração  $A_f$ , resultando:

$$\frac{dV_{\text{filtrado}}/dt}{A_f} = \frac{C_L}{\sqrt{t - \tau}} \quad (3.71)$$

Como pode ser observado na figura 3.2, a equação 3.71 representa bem a velocidade de filtrado após o término da vazão de *spurt loss*, ou seja, a hipótese contida na equação, de que a perda inicial de filtrado (*spurt loss*) se dá instantaneamente, é fisicamente inadequada.

Para o modelo de fraturamento proposto, a equação 3.71 que descreve a velocidade de filtração é corrigida, adicionando-se a contribuição do *spurt loss* neste período inicial de filtração, resultando:

$$q_L = \frac{C_L}{\sqrt{t - \tau}} + \frac{S_p}{\Delta t} \quad (3.72)$$

onde  $S_p$  : *spurt loss* ( $=V_{\text{sp}}/A_f$ ) [m<sup>3</sup>/m<sup>2</sup>]  
 $\Delta t$  : tempo de influência do *spurt loss*, para cálculo de velocidade média [s]

A forma de apresentação do *spurt loss* contida na equação 3.72 é pouco usual. Para facilitar o seu reconhecimento, a mesma pode ser apresentada na sua forma integral, ou seja, trabalhando-se com vazões volumétricas de filtrado ( $Q_L$ ), ao invés de se trabalhar com as velocidades:

$$Q_L = \int_{\Omega} \frac{C_L}{\sqrt{t-\tau}} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{S_p}{\Delta t} d\Omega \quad (3.73)$$

O modelo de geometria de fratura considera um valor médio para a vazão de *spurt loss* no passo de propagação e a mesma ocorre somente na área existente entre a elipse anterior ( $L_a, H_a$ ) a propagação e a elipse posterior a propagação ( $L, H$ ) (equação 3.74 e figura 3.4):

$$Q_L = \int_{\Omega} \frac{C_L}{\sqrt{t-\tau}} d\Omega + S_p \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad (3.74)$$

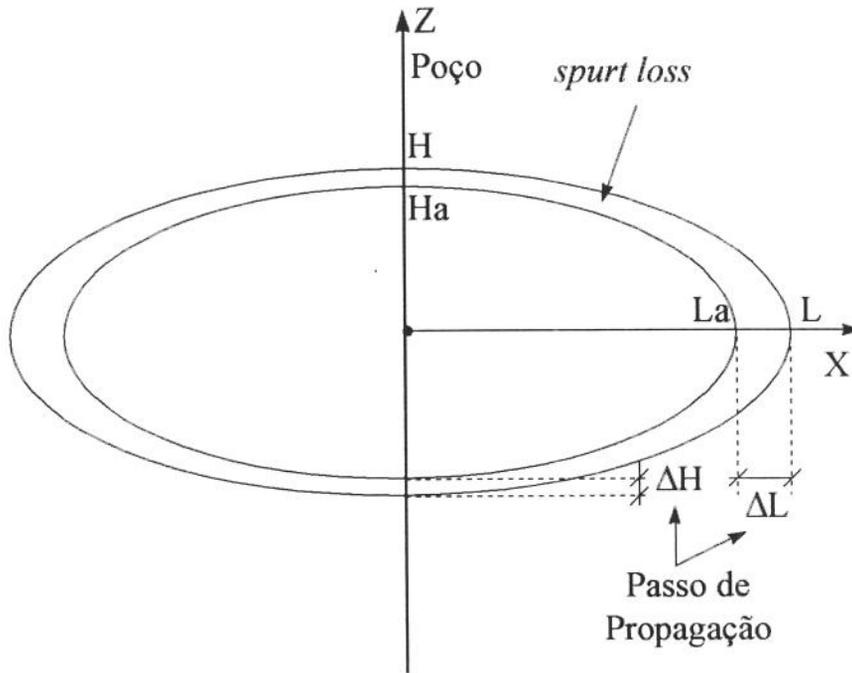


Figura 3.4 - Área de integração do *spurt loss*

Como os coeficientes global de filtração ( $C_L$ ) e de *spurt loss* ( $S_p$ ) são usualmente adotados por unidade de área filtrante aberta ao fluxo, a equação 3.74 deve ser multiplicada por 2, pois num fraturamento hidráulico, trabalha-se com duas paredes filtrantes, resultando:

$$Q_L = \int_{\Omega} \frac{2 C_L}{\sqrt{t-\tau}} d\Omega + 2 S_p \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad (3.75)$$

# CAPÍTULO 4

## METODOLOGIA PARA SOLUÇÃO

### 4.1. Introdução

O novo modelo proposto, denominado quase-analítico para simulação tridimensional (Q3DFRAC), baseia-se fundamentalmente nas soluções analíticas apresentadas por Shah e Kobayashi [Shah71].

O polinômio adotado para descrever a distribuição de pressões é o mesmo adotado por Rueda [Rued94]:

$$p(x, z) = P_{00} + P_{01}z + P_{20}x^2 + P_{02}z^2 + P_{21}x^2z + P_{03}z^3 \quad (4.1)$$

As diferenças com o modelo de Rueda são as seguintes:

- a forma como a perda de filtrado e a perda inicial de filtrado (*spurt loss*) são consideradas, mostrando inclusive a forma como o *spurt loss* é incluído na equação principal (equação 4.24);
- para resolver o sistema de equações não lineares (4.24), optou-se simplesmente por sua linearização, não sendo utilizado nem o método de Newton, nem o método da máxima descida, disponíveis na literatura [Cunh93];
- o critério de convergência para o vetor incógnita  $\{P_{ij}\}$  fez uso de integral, no domínio  $\Omega$ , do quadrado da diferença das pressões, entre dois passos consecutivos de iteração,  $n$  e  $n+1$  (equação 5.3a);

$$\left| \frac{\int_{\Omega} (P_{ij}^{n+1} x^i z^j - P_{ij}^n x^i z^j)^2 d\Omega}{\int_{\Omega} (P_{ij}^n x^i z^j)^2 d\Omega} \right| \leq 10^{-8}$$

- a forma de se calcular a viscosidade aparente média ( $\mu_a$ ) (equação 5.16), em cada passo de iteração, e o critério de convergência adotado (equação 5.3b);

$$|\mu_a^{n+1} - \mu_a^n| \leq 0,005$$

- no critério de propagação adotou-se  $\left| \frac{K_{IC} - K_I}{K_{IC}} \right| < 0,005$ , e não  $\left| \frac{K_{IC} - K_I}{K_{IC}} \right| < 0,05$ ;

- foi explicitado o critério de quanto a fratura deve se propagar em cada direção (equações 5.4 e 5.13), como função dos fatores de intensidade de tensões ( $K_{IL}$  e  $K_{IH}$ ), para o caso de contrastes simétricos de tensões;

$$L = L + \frac{K_{IL}^2}{K_{IL}^2 + K_{IH}^2} \Delta a \quad H = H + \frac{K_{IH}^2}{K_{IL}^2 + K_{IH}^2} \Delta a$$

- foi adotada geometria inicial de fratura com a relação  $H/L = 1$ , para melhorar o ajuste da curva do tempo de início de contato rocha-fluido (equação 5.9),

## 4.2. Formulação variacional

Substituindo a equação do fluxo de fluidos entre paredes paralelas (3.1) na equação da continuidade (3.15) tem-se:

$$\nabla \cdot \left( -\frac{b^3}{12\mu_{ap}} \nabla p \right) = -\left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) \quad (4.2)$$

Multiplicando-se a equação (4.2) por uma pressão de referência  $p^*$  e integrando-se sobre o domínio da fratura ( $\Omega$ ), a seguinte formulação variacional é obtida:

$$\int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \left( \frac{b^3}{12\mu_{ap}} \nabla p \right) d\Omega = \int_{\Omega} p^* \left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega \quad (4.3)$$

Aplicando-se o teorema da divergência para o lado esquerdo da igualdade, e sabendo-se que,

$$p^* \nabla \cdot \left( \frac{b^3}{12\mu_{ap}} \nabla p \right) = \nabla \cdot \left( p^* \frac{b^3}{12\mu_{ap}} \nabla p \right) - \frac{b^3}{12\mu_{ap}} \nabla p \cdot \nabla p^* \quad (4.4)$$

resulta, após passar todos os termos para o mesmo lado da igualdade:

$$\int_{\Omega} \frac{b^3}{12\mu_{ap}} (\nabla p^* \cdot \nabla p) d\Omega + \int_{\Omega} p^* \left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} p^* \left( \frac{b^3}{12\mu_{ap}} \nabla p \cdot \bar{n} \right) d\Gamma = 0 \quad (4.5)$$

ou 
$$\int_{\Omega} \frac{b^3}{12\mu_{ap}} (\nabla p^* \cdot \nabla p) d\Omega + \int_{\Omega} p^* \left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} p^* (\bar{q} \cdot \bar{n}) d\Gamma = 0 \quad (4.6)$$

Como a pressão  $p^*$  de referência é qualquer, pode-se adotá-la como sendo igual a  $p$ , de onde resulta, para o produto escalar:

$$\nabla p \cdot \nabla p = \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \quad (4.7)$$

O problema de se resolver a equação diferencial parcial (4.2) (problema de valor no contorno) é equivalente ao problema em cálculo variacional na minimização da integral, para a qual, a equação (4.6) é a equação de Euler-Lagrange [Kant64].

A equação (4.6) é a primeira variação da seguinte função, quando é adotado um valor médio ( $\mu_a$ ) para a viscosidade aparente ( $\mu_{ap}$ ):

$$I(p) = \frac{1}{2(12\mu_a)} \int_{\Omega} b^3 \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right) d\Omega + \int_{\Omega} p \left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} p (\bar{q} \cdot \bar{n}) d\Gamma \quad (4.8)$$

já que, do cálculo variacional tem-se

$$\delta I = \frac{d(I(p(x,z) + \alpha \eta(x,z)))}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{12\mu_a} \int_{\Omega} b^3 \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \eta \left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \eta (\bar{q} \cdot \bar{n}) d\Gamma = 0 \quad (4.9)$$

E como  $\eta(x,z)$  pode ser qualquer, adotando-se como sendo igual a  $p(x,z)$  é possível confirmar que a equação (4.8) é a primeira variação da equação (4.6), satisfazendo a seguinte condição de contorno [Kant64]:

$$\frac{b^3}{12\mu_a} \frac{\partial p}{\partial n} = -(\bar{q} \cdot \bar{n}) \quad (4.10)$$

Utilizando o método de Rayleigh e Ritz [Cook89] para encontrar uma solução para  $p(x,z)$ , na forma de um polinômio em  $x$  e  $z$ , apresentado na equação 4.1, tem-se

$$\nabla p \cdot \nabla p = (2P_{20}x + 2P_{21}xz)^2 + (P_{01} + 2P_{02}z + P_{21}x^2 + 3P_{03}z^2)^2 \quad (4.11)$$

que substituídos na equação (4.8) resulta

$$I(p) = \frac{1}{2(12\mu_a)} \int_{\Omega} b^3 \left( (2P_{20}x + 2P_{21}xz)^2 + (P_{01} + 2P_{02}z + 3P_{03}z^2)^2 \right) d\Omega + \int_{\Omega} (P_{00} + P_{01}z + P_{20}x^2 + P_{02}z^2 + P_{21}x^2z + P_{03}z^3) \left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} (P_{00} + P_{01}z + P_{20}x^2 + P_{02}z^2 + P_{21}x^2z + P_{03}z^3) (\bar{q} \cdot \bar{n}) d\Gamma \quad (4.12)$$

Para se determinar os coeficientes  $P_{ij}$ , que representam a solução para o problema descrito pela equação 4.8, procura-se determinar o mínimo desta equação, que deve representar a situação de menor energia potencial disponível no sistema. Desde que se pretende encontrar um mínimo da função (4.8), os coeficientes  $P_{ij}$  devem satisfazer o sistema de equações

$$\frac{\partial I}{\partial P_{ij}} = 0 \quad ij = 00, 01, 20, 02, 21, 03 \quad (4.13)$$

ou seja,

$$\frac{\partial I}{\partial P_{00}} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial P_{01}} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial P_{20}} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial P_{02}} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial P_{21}} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial P_{03}} = 0 \quad (4.13a)$$

de onde resulta

$$\frac{1}{12\mu_a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_{\Omega} b^3 d\Omega & 0 & 2 \int_{\Omega} b^3 z d\Omega & \int_{\Omega} b^3 x^2 d\Omega & 3 \int_{\Omega} b^3 z^2 d\Omega \\ 0 & 0 & 4 \int_{\Omega} b^3 x^2 d\Omega & 0 & 4 \int_{\Omega} b^3 x^2 z d\Omega & 0 \\ 0 & 2 \int_{\Omega} b^3 z d\Omega & 0 & 4 \int_{\Omega} b^3 z^2 d\Omega & 2 \int_{\Omega} b^3 x^2 z d\Omega & 6 \int_{\Omega} b^3 z^3 d\Omega \\ 0 & \int_{\Omega} b^3 x^2 d\Omega & 4 \int_{\Omega} b^3 x^2 z d\Omega & 2 \int_{\Omega} b^3 x^2 z d\Omega & \left( 4 \int_{\Omega} b^3 x^2 z^2 d\Omega + \int_{\Omega} b^3 x^4 d\Omega \right) & 3 \int_{\Omega} b^3 x^2 z^2 d\Omega \\ 0 & 3 \int_{\Omega} b^3 z^2 d\Omega & 0 & 6 \int_{\Omega} b^3 z^3 d\Omega & 3 \int_{\Omega} b^3 x^2 z^2 d\Omega & 9 \int_{\Omega} b^3 z^4 d\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{00} \\ P_{01} \\ P_{20} \\ P_{02} \\ P_{21} \\ P_{03} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\int_{\Omega} \left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ -\int_{\Omega} z \left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} z \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ -\int_{\Omega} x^2 \left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} x^2 \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ -\int_{\Omega} z^2 \left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} z^2 \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ -\int_{\Omega} x^2 z \left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} x^2 z \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ -\int_{\Omega} z^3 \left( q_L + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} z^3 \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

que pode ser representada, na sua forma compacta, como segue:

$$\frac{1}{12\mu_a} [K] \{P_{ij}\} = \{F\} \quad (4.14a)$$

### 4.3. Formulação variacional para o acoplamento das equações fundamentais

O sistema de equações (4.14) foi obtido pela aplicação do método variacional para a equação integral resultante do acoplamento da equação da continuidade com a equação do fluxo de fluidos entre placas paralelas. Este sistema é não linear pelo fato de que a matriz [K], que multiplica as incógnitas  $P_{ij}$ , também é função destas mesmas incógnitas, por possuir o termo referente a largura da fratura  $b(x,z)$  elevado a terceira potência, conforme teoria apresentada por Shah e Kobayashi.

Analisando o lado direito da igualdade do sistema de equações acima, tem-se:

$$\{F\} = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} z q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} z^2 q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 z q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} z^3 q_L d\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} (\partial b / \partial t) d\Omega \\ \int_{\Omega} z (\partial b / \partial t) d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 (\partial b / \partial t) d\Omega \\ \int_{\Omega} z^2 (\partial b / \partial t) d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 z (\partial b / \partial t) d\Omega \\ \int_{\Omega} z^3 (\partial b / \partial t) d\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma} \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} z \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} x^2 \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} z^2 \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} x^2 z \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} z^3 \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Utilizando a regra de Leibnitz para derivadas de integrais duplas (apêndice I)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\phi_3}^{\phi_4} dz \int_{\phi_1}^{\phi_2} b(x, z, t) dx &= \int_{\phi_3}^{\phi_4} dz \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\partial}{\partial t} b(x, z, t) dx + \int_{\phi_3}^{\phi_4} b(\phi_2, z, t) \frac{d\phi_2}{dt} dz + \\ &- \int_{\phi_3}^{\phi_4} b(\phi_1, z, t) \frac{d\phi_1}{dt} dz + \frac{d\phi_4}{dt} \int_{\phi_1}^{\phi_2} b(x, \phi_4, t) dx - \frac{d\phi_3}{dt} \int_{\phi_1}^{\phi_2} b(x, \phi_3, t) dx \end{aligned} \quad (4.16)$$

no segundo termo do lado direito da igualdade da equação (4.15), considerando a aproximação de que os limites de integração  $\phi_{1,2,3,4}$  não são funções do tempo (equação 4.16a)

$$\int_{\phi_3}^{\phi_4} dz \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\partial}{\partial t} b(x, z, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\phi_3}^{\phi_4} dz \int_{\phi_1}^{\phi_2} b(x, z, t) dx \quad (4.16a)$$

e também utilizando a fórmula avançada para discretizar a derivada no tempo (equação 4.16b), resulta

$$\frac{d}{dt} B(t) = \frac{B(t)|_{t+\Delta t} - B(t)|_t}{\Delta t} \quad (4.16b)$$

$$\{F\} = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} z q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} z^2 q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 z q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} z^3 q_L d\Omega \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} \int_{\Omega} b_{t+\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} z b_{t+\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 b_{t+\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} z^2 b_{t+\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 z b_{t+\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} z^3 b_{t+\Delta t} d\Omega \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} \int_{\Omega} b_t d\Omega \\ \int_{\Omega} z b_t d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 b_t d\Omega \\ \int_{\Omega} z^2 b_t d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 z b_t d\Omega \\ \int_{\Omega} z^3 b_t d\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma} \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} z \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} x^2 \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} z^2 \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} x^2 z \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} z^3 \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

onde  $b_t$  : largura da fratura no instante de tempo  $t$   
 $b_{t+\Delta t}$  : largura da fratura no instante de tempo  $t+\Delta t$

que na sua forma compacta pode ser escrita, respectivamente, como segue:

$$\{F\} = \{FLOSS\} + \{STNEW\} + \{STOLD\} + \{FLUX\} \quad (4.17a)$$

$$\text{sendo } \{FLOSS\} = - \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} z q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} z^2 q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 z q_L d\Omega \\ \int_{\Omega} z^3 q_L d\Omega \end{Bmatrix}, \quad \{STNEW\} = - \frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} b_{t+\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} z b_{t+\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 b_{t+\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} z^2 b_{t+\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 z b_{t+\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} z^3 b_{t+\Delta t} d\Omega \end{Bmatrix}$$

$$\{STOLD\} = \frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} b_t d\Omega \\ \int_{\Omega} z b_t d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 b_t d\Omega \\ \int_{\Omega} z^2 b_t d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 z b_t d\Omega \\ \int_{\Omega} z^3 b_t d\Omega \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{FLUX\} = - \begin{Bmatrix} \int_{\Gamma} \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} z \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} x^2 \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} z^2 \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} x^2 z \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} z^3 \bar{q} \cdot \bar{n} d\Gamma \end{Bmatrix}$$

Como o vetor  $\{STNEW\}$  envolve a largura da fratura no nível de tempo  $t+\Delta t$ , que é o mesmo nível de tempo que se está procurando os coeficientes  $P_{ij}$  de pressão, é interessante reescrevê-la numa forma mais conveniente, utilizando-se a equação (3.55) para a largura da fratura e a equação (3.48) do trabalho de Shah e Kobayashi, que relaciona os coeficientes  $P_{ij}^n$  de pressão com os coeficientes  $C_{ij}$  da função tensão harmônica, que se apresenta na forma matricial como segue

$$\{STNEW\} = -\frac{1}{\Delta t G} \begin{bmatrix} \int_{\Omega} b_{00} d\Omega & \int_{\Omega} b_{01} d\Omega & \int_{\Omega} b_{20} d\Omega & \int_{\Omega} b_{02} d\Omega & \int_{\Omega} b_{21} d\Omega & \int_{\Omega} b_{03} d\Omega \\ \int_{\Omega} z b_{00} d\Omega & \int_{\Omega} z b_{01} d\Omega & \int_{\Omega} z b_{20} d\Omega & \int_{\Omega} z b_{02} d\Omega & \int_{\Omega} z b_{21} d\Omega & \int_{\Omega} z b_{03} d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 b_{00} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 b_{01} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 b_{20} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 b_{02} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 b_{21} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 b_{03} d\Omega \\ \int_{\Omega} z^2 b_{00} d\Omega & \int_{\Omega} z^2 b_{01} d\Omega & \int_{\Omega} z^2 b_{20} d\Omega & \int_{\Omega} z^2 b_{02} d\Omega & \int_{\Omega} z^2 b_{21} d\Omega & \int_{\Omega} z^2 b_{03} d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 z b_{00} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 z b_{01} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 z b_{20} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 z b_{02} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 z b_{21} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 z b_{03} d\Omega \\ \int_{\Omega} z^3 b_{00} d\Omega & \int_{\Omega} z^3 b_{01} d\Omega & \int_{\Omega} z^3 b_{20} d\Omega & \int_{\Omega} z^3 b_{02} d\Omega & \int_{\Omega} z^3 b_{21} d\Omega & \int_{\Omega} z^3 b_{03} d\Omega \end{bmatrix} \{S\}^{-1} \begin{Bmatrix} P_{00}^n \\ P_{01}^n \\ P_{20}^n \\ P_{02}^n \\ P_{21}^n \\ P_{03}^n \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

e adotando, por simplicidade,

$$[M] = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} \int_{\Omega} b_{00} d\Omega & \int_{\Omega} b_{01} d\Omega & \int_{\Omega} b_{20} d\Omega & \int_{\Omega} b_{02} d\Omega & \int_{\Omega} b_{21} d\Omega & \int_{\Omega} b_{03} d\Omega \\ \int_{\Omega} z b_{00} d\Omega & \int_{\Omega} z b_{01} d\Omega & \int_{\Omega} z b_{20} d\Omega & \int_{\Omega} z b_{02} d\Omega & \int_{\Omega} z b_{21} d\Omega & \int_{\Omega} z b_{03} d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 b_{00} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 b_{01} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 b_{20} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 b_{02} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 b_{21} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 b_{03} d\Omega \\ \int_{\Omega} z^2 b_{00} d\Omega & \int_{\Omega} z^2 b_{01} d\Omega & \int_{\Omega} z^2 b_{20} d\Omega & \int_{\Omega} z^2 b_{02} d\Omega & \int_{\Omega} z^2 b_{21} d\Omega & \int_{\Omega} z^2 b_{03} d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 z b_{00} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 z b_{01} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 z b_{20} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 z b_{02} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 z b_{21} d\Omega & \int_{\Omega} x^2 z b_{03} d\Omega \\ \int_{\Omega} z^3 b_{00} d\Omega & \int_{\Omega} z^3 b_{01} d\Omega & \int_{\Omega} z^3 b_{20} d\Omega & \int_{\Omega} z^3 b_{02} d\Omega & \int_{\Omega} z^3 b_{21} d\Omega & \int_{\Omega} z^3 b_{03} d\Omega \end{bmatrix} \{S\}^{-1} \quad (4.19)$$

$$\text{tem-se, } \{STNEW\} = -\frac{1}{\Delta t} [M] \{P_{ij}^n\}. \quad (4.18a)$$

Finalmente, utilizando as equações (4.14a), (4.17a) e (4.18a) tem-se

$$\frac{1}{12\mu_a} [K] \{P_{ij}\} = \{FLOSS\} - \frac{1}{\Delta t} [M] \{P_{ij}^n\} + \{STOLD\} + \{FLUX\} \quad (4.20)$$

A equação acima apresenta dois vetores incógnitas: o vetor dos coeficientes da distribuição de pressões interna à fratura  $\{P_{ij}\}$ , e, os coeficientes da pressão líquida interna à fratura  $\{P_{ij}^n\}$ , já que é a pressão líquida a responsável pela abertura da fratura. A relação entre os coeficientes do polinômio que descreve a distribuição de pressões interna a fratura e a líquida é dada por

$$P_{ij}^n = P_{ij} + \sigma_{ij} \quad (4.21)$$

Para que se possa utilizar as expressões desenvolvidas por Shah e Kobayashi, a pressão líquida deve ser descrita por um polinômio em x e z (equação 4.1), e para que isto seja viável, é necessário que a tensão de confinamento  $\sigma(x,z)$  também o seja. Portanto, a tensão de confinamento deve ser aproximada pelo seguinte polinômio

$$\sigma(x, z) = \sigma_{00} + \sigma_{01}z + \sigma_{20}x^2 + \sigma_{02}z^2 + \sigma_{21}x^2z + \sigma_{03}z^3 \quad (4.22)$$

Porém, é bastante razoável que a tensão de confinamento seja função somente da profundidade, o que implica que  $\sigma_{20} = \sigma_{21} = 0$ , resultando

$$\sigma(x, z) = \sigma_{00} + \sigma_{01}z + \sigma_{02}z^2 + \sigma_{03}z^3 \quad (4.23)$$

Cabe ressaltar que este polinômio se propõe a representar, da forma mais aproximada possível, a distribuição das tensões de confinamento com a profundidade. Nos trabalhos anteriores, os contrastes de tensões assimétricos ficavam piores representados por não incluírem o termo  $\sigma_{03}z^3$ . Como era de se esperar, a inclusão de termos de potência ainda maior tende a melhorar esta representação, e isto ainda não foi tentado pois o trabalho de Shah teria que ser complementado por esses novos termos, o que não foi incluído no escopo deste trabalho, devido à complexidade do trabalho analítico requerido.

O ajuste do polinômio pelo método dos mínimos quadrados, para representar a distribuição das tensões de confinamento, sofre influência dos limites escolhidos para esta representação, como já apresentado nas figuras 2.3.

Substituindo a equação 4.21 na equação 4.20 tem-se

$$\frac{1}{12\mu_a}[K]\{P_{ij}\} + \frac{1}{\Delta t}[M]\{P_{ij}\} = \{FLOSS\} - \frac{1}{\Delta t}[M]\{\sigma_{ij}\} + \{STOLD\} + \{FLUX\} \quad (4.24)$$

A equação (4.24) está na sua forma final, após o acoplamento da equação da continuidade, do fluxo de fluidos entre placas paralelas e da largura da fratura, atacando o problema na sua formulação variacional.

# CAPÍTULO 5

## A ESTRUTURA DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

### 5.1. Um programa orientado a objetos e seu critério de validação

Na implementação computacional foi utilizado o conceito de programação orientada a objetos, que se mostrou bastante adequado, por ser o código bastante extenso. Uma das grandes vantagens deste tipo de programação é a propriedade de encapsulamento, que pode ser definida como a modulação aplicada aos dados, combinando estruturas de registros com *procedures* e funções, chamados métodos, que manipulam os dados no registro, formando um novo tipo de dados chamado objeto. Utilizou-se a linguagem de programação C++, da Borland. O programa (ou projeto) é constituído de cerca de 2100 linhas de programação, distribuídos em 14 objetos.

Na validação do modelo, optou-se por compará-lo com os diversos modelos disponíveis na literatura, sendo que os resultados estão apresentados no próximo capítulo. Abou-Sayed [Abou84 e 84a] apresenta em seu trabalho diversos casos simulados, denominados de casos A, B, E, G, H, I, J, K, L, M, N e O. Estes resultados foram utilizados, para comparação, por quase todos os demais simuladores que vieram na sua sequência, e por este motivo, o modelo proposto também faz uso desses dados para comparação.

### 5.2. As integrais analíticas e as integrais numéricas

Este novo simulador de geometria de fratura, denominado quase-analítico (Q3DFRAC), utiliza expressões analíticas em parte significativa do programa computacional. Esta característica é consequência do trabalho de Shah e Kobayashi, que apresenta uma expressão analítica para o cálculo do fator de intensidade de tensões ( $K_I$ ) e também possibilita encontrar uma expressão analítica para a abertura da fratura ( $b$ ), conhecendo-se a distribuição de pressões ( $P_{ij}^n$ ) existentes no interior da mesma.

Utilizou-se nas integrações analíticas um *software* de tratamento matemático chamado "Mathematica". A não utilização deste *software* demandaria um tempo bastante grande para a solução das mesmas, já que, várias das integrais demandaram cerca de 2,5 horas de um microcomputador "Pentium 100 MHz - 16 MBytes RAM". Todas as integrais analíticas constantes no modelo foram checadas numericamente, tanto pelo próprio *software* "Mathematica" que possui a função "integração numérica", quanto por programas computacionais montados especialmente com este objetivo.

Foram encontradas expressões analíticas para os seguintes termos da equação principal (equação 4.24):

- matriz  $[K]$  (equações 4.14 e 4.14a);

- matriz [M] (equação 4.19).

Na montagem da matriz [S] (equação 3.49), do trabalho de Shah e Kobayashi, somente é utilizado processo numérico para os cálculos das integrais elípticas de segundo tipo E(k) (equação 3.52) e das integrais elípticas de primeiro tipo K(k) (equação 3.53). O domínio de análise destas integrais ( $\Omega$ ), como já citado anteriormente, é constituído de metade da elipse (figura 3.1), devido a existência de simetria com o poço.

Nos cálculos das integrais, tanto as analíticas (citadas acima), quanto as numéricas, optou-se por utilizar uma transformação conforme (figura 5.1), como segue:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ z &= r \frac{H}{L} \sin(\theta) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\text{com } \iint_{\Omega} f(x, z) dx dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^L f(r, \theta) \frac{H}{L} r dr d\theta \quad (5.2)$$

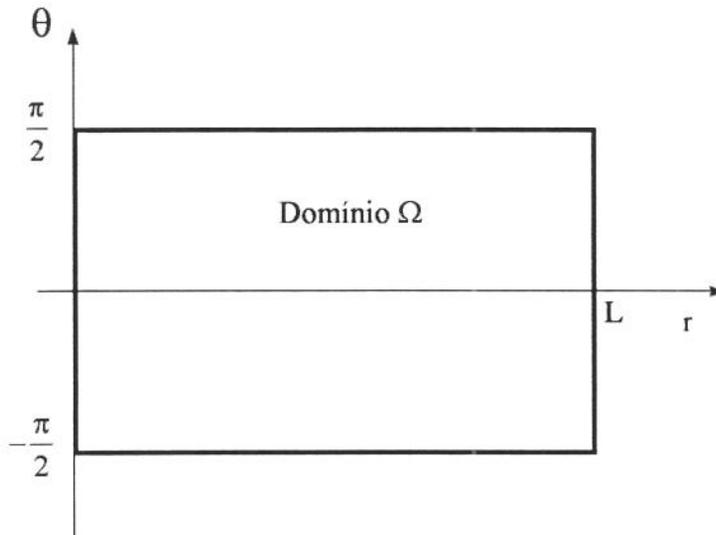


Figura 5.1 - Domínio de análise da fratura elíptica plana, após transformação conforme

As integrações analíticas foram viabilizadas com a transformação conforme, sem a qual, o *software* não conseguia resolvê-las. As integrais numéricas também foram bastante auxiliadas pela transformação conforme, por tornar o domínio retangular, e permitir espaçamentos regulares nos eixos de integração.

As integrações numéricas foram utilizadas na determinação:

- do vetor {FLOSS} (equação 4.17a);
- da soma dos quadrados das diferenças de pressões, calculadas no domínio  $\Omega$ , para duas iterações consecutivas, e que foi utilizado como critério de convergência para os coeficientes de pressão  $P_{ij}$  (equação 5.3a);
- da viscosidade aparente média ( $\mu_a$ ), calculada no domínio  $\Omega$ , em cada iteração, com o auxílio da equação (3.6), que comparada com o valor obtido na iteração anterior resultou num segundo critério de convergência (equações 5.16 e 5.3b).

Um grande atrativo do simulador proposto é o fato de demandar um esforço computacional bastante reduzido, quando comparado aos simuladores tridimensionais, já que faz uso de várias expressões analíticas.

Para melhorar a eficiência do simulador, vários aspectos foram considerados visando a diminuição do número de iterações necessárias para se atender aos critérios de convergência (coeficientes  $P_{ij}$ , viscosidade aparente média  $\mu_a$  e  $\Delta t$  (ou fator de intensidade de tensões  $K_I$ )). Vale ressaltar também que nenhum termo é recalculado no algoritmo desnecessariamente, ou seja, sem que sofra alguma alteração.

### 5.3. O algoritmo

O algoritmo basicamente se resume em escolher um incremento de tempo  $\Delta t_i$  (figura 5.2), onde após se verificar a convergência dos coeficientes da distribuição de pressões ( $P_{ij}$ ) e da viscosidade aparente média ( $\mu_a$ ), os fatores de intensidade de tensões resultantes ( $K_{IL}$  e  $K_{IH}$ ) (equações 3.66 e 3.67), para o caso simétrico de contraste de tensões, são comparados com a tenacidade da rocha ao fraturamento ( $K_{IC}$ ). Quando é encontrado um  $\Delta t$  que resulta num fator de intensidade de tensões igual ao crítico ( $K_{IL} = K_{IC}$  ou  $K_{IH} = K_{IC}$ ), a fratura é propagada e um novo passo é iniciado, com a determinação de um novo  $\Delta t$ .

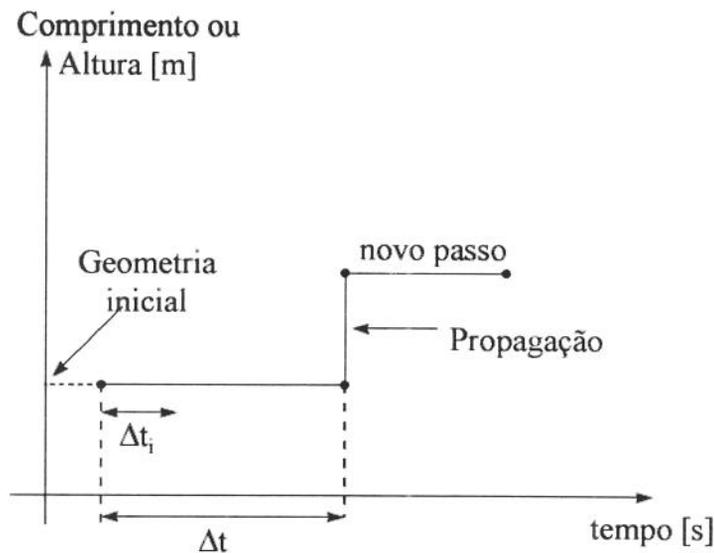


Figura 5.2 - Determinação do  $\Delta t$  adequado para a propagação da fratura

São os seguintes, os passos do algoritmo:

a) Determina-se o vetor  $\{\sigma_{ij}\}$ , que é função do contraste de tensões existente entre a zona de interesse e as zonas adjacentes (figuras 2.4a e 2.4b). No modelo proposto, utilizou-se um ajuste de curvas por minimização dos quadrados das diferenças, adotando-se um intervalo igual a 2 vezes a espessura da formação ( $-2 H_R, 2 H_R$ );

b) Adota-se uma geometria de fratura inicial (L,H), com uma pressão líquida interna constante, pressão esta que foi adotada de forma a gerar num fator de intensidade de tensões igual a 10% (dez por cento) do fator de intensidade de tensões crítico ( $K_{IC}$ ). É pelo

fato de a fratura inicial ter esta pressão interna uniforme, e consequentemente um determinado volume de fluido em seu interior, que o primeiro passo de iteração não parte do tempo  $t = 0$  (figura 5.2);

c) Adota-se um valor para  $\Delta t$ , e resolve-se a equação principal (equação 4.24 - rerepresentada abaixo), verificando-se primeiramente a convergência dos coeficientes da distribuição de pressões ( $P_{ij}$ ) e, em seguida, a convergência da viscosidade aparente média ( $\mu_a$ ). Para resolver a equação, a mesma é linearizada, ou seja, adota-se um valor inicial para o vetor incógnita  $\{P_{ij}\}$ , determina-se a matriz  $[K]$  e  $[M]$ , e volta-se a calcular o mesmo vetor incógnita  $\{P_{ij}\}$ , até a sua convergência.;

$$\frac{1}{12\mu_a}[K]\{P_{ij}\} + \frac{1}{\Delta t}[M]\{P_{ij}\} = \{FLOSS\} - \frac{1}{\Delta t}[M]\{\sigma_{ij}\} + \{STOLD\} + \{FLUX\} \quad (4.24)$$

O critério de convergência do vetor incógnita  $\{P_{ij}\}$  consiste em calcular a integral, no domínio  $\Omega$ , do quadrado da diferença da pressão, para dois passos de iteração consecutivos ( $n$  e  $n+1$ ), dividindo o resultado pela integral da pressão para o passo anterior ( $n$ ). Este resultado não deve ser superior a um limite de tolerância, que foi escolhido como  $10^{-8}$ :

$$\left| \frac{\int_{\Omega} (P_{ij}^{n+1} x^i z^j - P_{ij}^n x^i z^j)^2 d\Omega}{\int_{\Omega} (P_{ij}^n x^i z^j)^2 d\Omega} \right| \leq 10^{-8} \quad (5.3a)$$

O critério de convergência para a viscosidade aparente média  $\mu_a$  (equação 5.16) é computado entre dois passos de iteração consecutivos (equação 5.3b);

$$|\mu_a^{n+1} - \mu_a^n| \leq 0,005 \quad (5.3b)$$

d) Após obtida a convergência para os coeficientes da distribuição de pressões  $\{P_{ij}\}$  (equação 5.3a) e para a viscosidade aparente média  $\mu_a$  (equação 5.3b) na equação 4.23, determina-se os coeficientes da função tensão harmônica  $\{C_{ij}\}$  (equação 3.48) e os fatores de intensidade de tensões (equações 3.66 e 3.67). Verifica-se então o critério de propagação a seguir, aplicado para contrastes simétricos de tensões entre a zona de interesse e as zonas adjacentes (vide item 5.6):

$$\left| \frac{K_{IC} - K_{II}}{K_{IC}} \right| < 0,005 \quad \text{ou} \quad \left| \frac{K_{IC} - K_{III}}{K_{IC}} \right| < 0,005 \quad (5.3c)$$

d1) caso o critério de propagação não seja verificado, retorna-se ao passo "c", ou seja, adota-se um novo valor para  $\Delta t$  e repete-se o processo;

d2) caso o critério de propagação seja verificado, após registrar todos os dados necessários para controle do processo, propaga-se a fratura (incremento do comprimento e da altura da fratura) (equação 5.4 - caso simétrico de contraste de tensões), recalcula-se a situação final após a propagação (coeficientes  $C_{ij}$  e  $P_{ij}$ ) e retorna-se ao item "c", para o passo seguinte;

$$L = L + \frac{K_{II}^2}{K_{II}^2 + K_{IH}^2} \Delta a$$

$$H = H + \frac{K_{IH}^2}{K_{II}^2 + K_{IH}^2} \Delta a$$
(5.4)

Também como critério de propagação, busca-se um passo de propagação  $\Delta a$  que resulte, ao término da propagação, um fator de intensidade de tensões  $K_I$  inferior a 98% e superior a 90% do  $K_{IC}$ . Este procedimento garante que os passos de tempo  $\Delta t$ 's, obtidos através da equação 4.23, não sejam muito grandes, o que poderia resultar em perda de qualidade dos resultados, nem muito pequenos, implicando na necessidade de nova propagação sem qualquer nova injeção de fluido na fratura.

e) Verifica-se o critério de parada do programa, ou seja, compara-se o tempo total acumulado do fraturamento, até o passo atual, com o tempo total de tratamento previsto.

## 5.4. O vetor {FLOSS}

Substituindo a equação 3.72 (multiplicada por 2) na equação 4.17a tem-se:

$$\{FLOSS\} = \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} \frac{2 C_L}{\sqrt{t-\tau}} d\Omega \\ \int_{\Omega} z \frac{2 C_L}{\sqrt{t-\tau}} d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 \frac{2 C_L}{\sqrt{t-\tau}} d\Omega \\ \int_{\Omega} z^2 \frac{2 C_L}{\sqrt{t-\tau}} d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 z \frac{2 C_L}{\sqrt{t-\tau}} d\Omega \\ \int_{\Omega} z^3 \frac{2 C_L}{\sqrt{t-\tau}} d\Omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} \frac{2 S_P}{\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} z \frac{2 S_P}{\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 \frac{2 S_P}{\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} z^2 \frac{2 S_P}{\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} x^2 z \frac{2 S_P}{\Delta t} d\Omega \\ \int_{\Omega} z^3 \frac{2 S_P}{\Delta t} d\Omega \end{Bmatrix}$$
(5.5)

ou, na sua forma compacta,  $\{FLOSS\} = \{FILTR\} + \{SPURT\}$ .

### 5.4.1 O vetor perda de filtrado {FILTR}

Da equação (3.72) tem-se que:

- $C_L$  e  $S_P$  : são constantes conhecidas,  $[m/\sqrt{s}]$  e  $[m^3/m^2]$ ;
- $\Delta t$  : é a incógnita do problema [s];
- $\tau$  : é o tempo de início do contato rocha fluido [s];

t : inclui, implicitamente, a incógnita do problema  $\Delta t$ , na forma

$$\left( = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i + \Delta t \right) [s].$$

Explicando um pouco melhor, o tempo t é a soma de todos os  $\Delta t$ 's anteriores ao passo atual, representados na somatória, mais o passo atual  $\Delta t$ , que é a incógnita do problema.

Como pode ser observado, o tempo de início do contato rocha fluido ( $\tau$ ) é o elemento sobre o qual não foi apresentada qualquer metodologia de cálculo.

Analisando diversas simulações para o modelo proposto (Q3DFRAC), inicialmente sem a inclusão de filtrado, bem como, resultados disponíveis em literatura, tais como o HyFSys [Sous92], foi possível fazer um excelente ajuste com uma função do tipo

$$\tau(r) = c_1 r^{c_2} \tag{5.6}$$

como pode ser observado nas figuras 5.3 a 5.5, onde os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  são calculados dinamicamente, a cada passo de propagação.

Nestes casos, por se tratarem de fraturas radiais, existe uma simetria perfeita, e o ajuste encontrado para um determinado ângulo  $\theta$  se estende a todos os demais. Ou seja, com o ajuste proposto (equação 5.6) é possível se determinar o instante em que o fluido entra em contato com cada ponto da fratura, permitindo assim calcular a integral sobre todo o domínio  $\Omega$  (equação 5.5).

Após verificar este bom ajuste, a função proposta (equação 5.6) foi incorporada ao modelo, para permitir a simulação de fraturamentos com perda de filtrado. Novamente foi verificado o excelente ajuste conseguido (figura 5.6) para a função.

Nas figuras, as curvas denominadas “potência” se referem ao ajuste efetuado, estando as funções apresentadas no canto inferior direito.

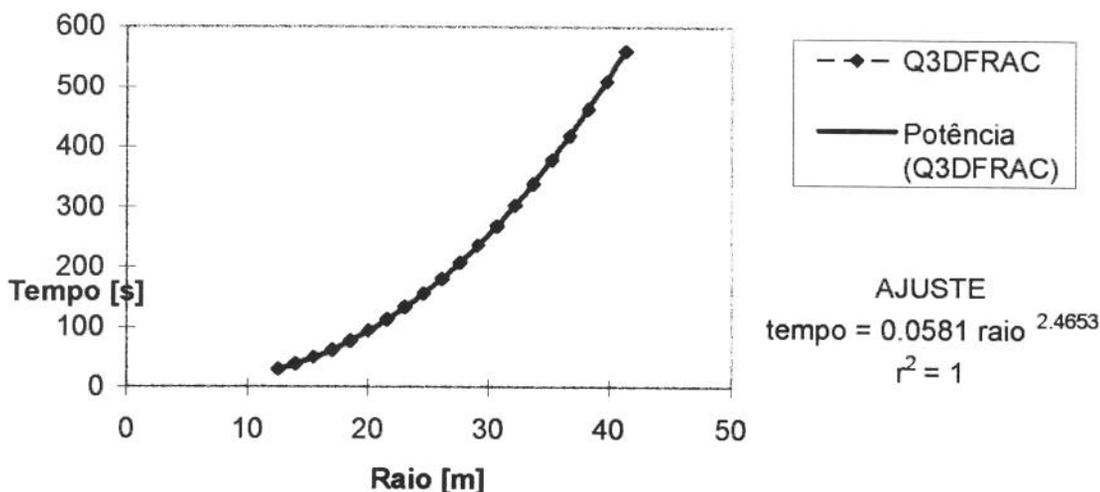


Figura 5.3 - Ajuste do tempo de início de contato rocha-fluido para o modelo Q3DFRAC, sem considerar perda de filtrado

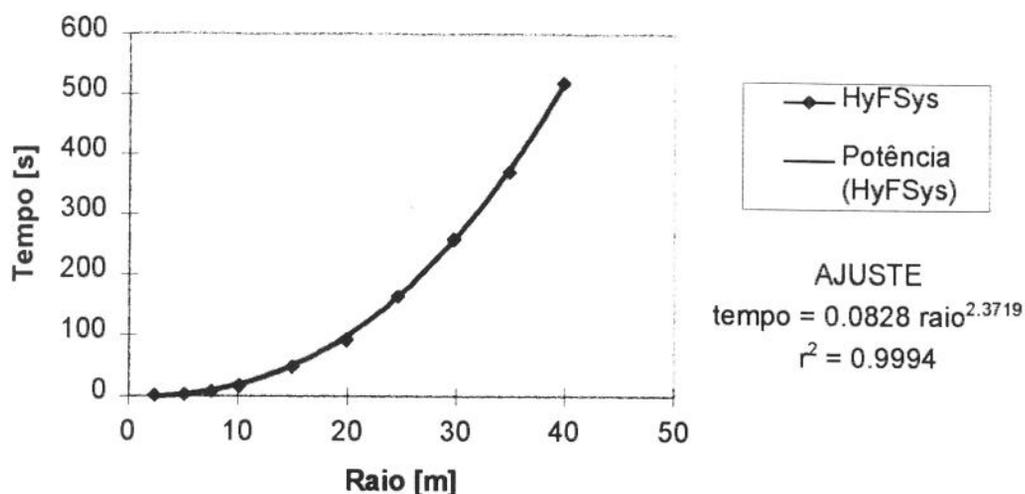


Figura 5.4 - Ajuste do tempo de início de contato rocha-fluido para o modelo HyFSys, sem considerar perda de filtrado

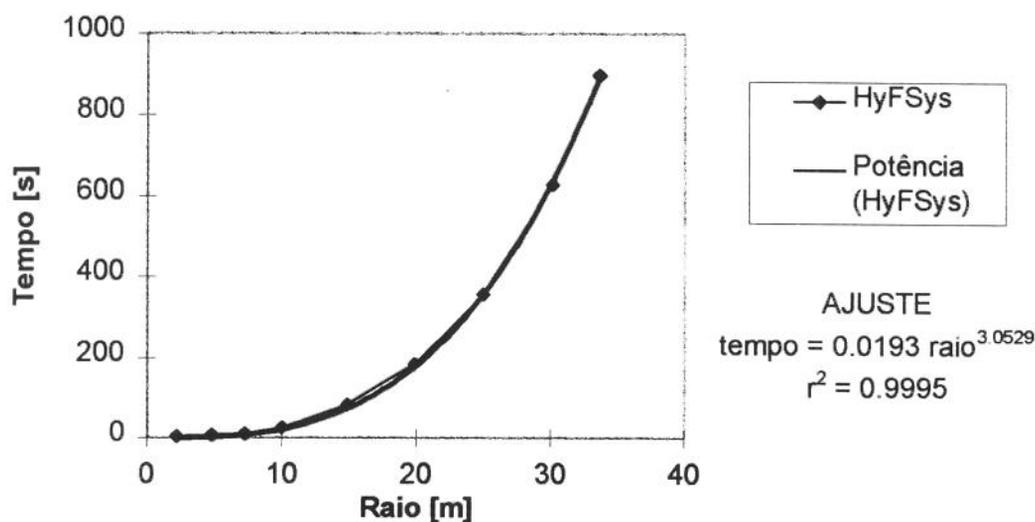


Figura 5.5 - Ajuste do tempo de início de contato rocha-fluido para o modelo HyFSys, considerando perda de filtrado

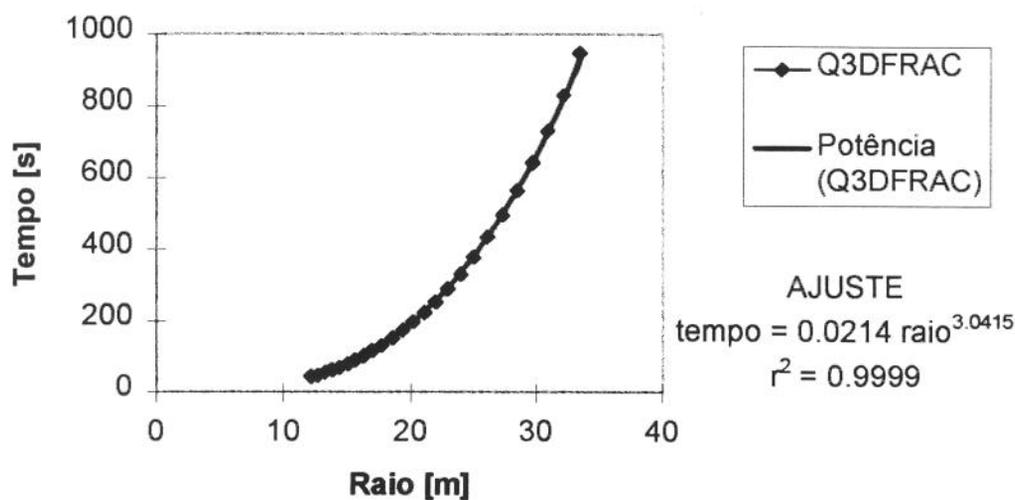


Figura 5.6 - Ajuste do tempo de início de contato rocha-fluido para o modelo Q3DFRAC, considerando perda de filtrado

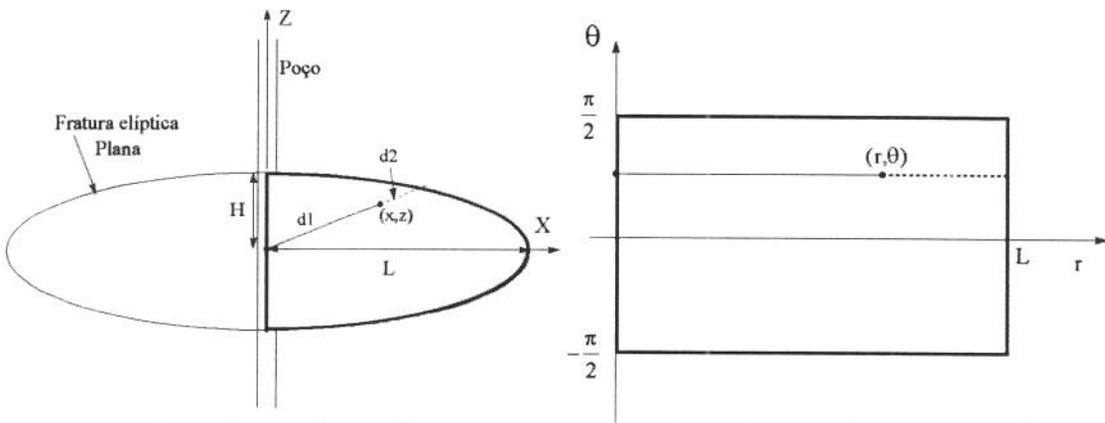
Como as fraturas radiais compõem somente uma parcela pouco significativa dos casos a serem modelados, estes conceitos foram estendidos para as fraturas elípticas. Ajustes similares à equação 5.6 foram agora efetuados tanto para o eixo x,  $\tau(L)$ , quanto para o eixo z,  $\tau(H)$ , resultando (figura 5.7a)

$$\tau(x) = c_1 x^{c_2} \quad \text{e} \quad \tau(z) = c_3 z^{c_4} \quad (5.7)$$

ou seja, conhecendo-se as dimensões L e H da fratura com o tempo, ou melhor, o tempo como função do comprimento e da altura da fratura,  $t(L)$  e  $t(H)$ , é possível determinar-se, a cada passo de propagação, os coeficientes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$ . Porém só a determinação destes coeficientes não é suficiente, pois diferentemente de fraturas radiais, em que a simetria é perfeita, nas fraturas elípticas é necessário encontrar uma expressão que represente o instante de início de contato rocha-fluido ( $\tau$ ) em todo o domínio  $\Omega$ .

Foi a seguinte a expressão adotada para o tempo de início de contato rocha-fluido ( $\tau$ ):

$$\tau(x, z) = \left( \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) c_1 \left( \frac{d_1}{d_1 + d_2} L \right)^{c_2} + \theta c_3 \left( \frac{d_1}{d_1 + d_2} H \right)^{c_4} \right) / \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.8)$$



a - sem transformação conforme

b- após transformação conforme

Figura 5.7 - Ajuste do tempo de início de contato rocha-fluido para o fraturas elípticas

onde, da transformação conforme (equação 5.1),

$$\theta = \arctan \left( \frac{z L}{x H} \right) \quad (5.8a)$$

ou, na sua forma, após a transformação conforme (figura 5.7b),

$$\tau(r, \theta) = \left( \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) c_1 r^{c_2} + \theta c_3 \left( r \frac{H}{L} \right)^{c_4} \right) / \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.9)$$

As expressões propostas apresentam duas grandes qualidades:

- reproduzem fielmente a fratura radial;
- nas fraturas elípticas, possuem ajuste perfeito nos eixos x e z, bem como no contorno da elipse.

Nas integrações numéricas presentes no vetor {FILTR} (equação 5.5), foi utilizada a fórmula Gaussiana de dois pontos. Num caso hipotético com  $L = 20$ ,  $H = 10$ ,  $c_1 = 2,5$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 10$ ,  $c_4 = 2$  e  $C_L = 1$ , a tabela 5.1 apresenta os resultados obtidos para a perda de filtrado, para diferentes valores de  $t$ , pelo simulador proposto e pelo software "Mathematica", demonstrando a boa qualidade dos resultados:

Tabela 5.1 - Comparação dos resultados obtidos para perda de filtrado

$t$	$\int \frac{2 C_L}{\sqrt{t-\tau}} d\Omega$ (Simulador)	$\int \frac{2 C_L}{\sqrt{t-\tau}} d\Omega$ ("Mathematica")
1010	35,90	35,94
1020	34,50	34,49
1050	31,83	31,82
1100	29,11	29,11

Foi testada também uma segunda expressão para o tempo de contato rocha-fluido ( $\tau$ ) (equação 5.10), com as mesmas duas qualidades citadas acima, a qual foi descartada por não apresentar resultados com diferenças significativas aos já apresentados (equação 5.9 e tabela 5.1):

$$\tau(r, \theta) = \sin^2(\theta) c_1 r^{c_2} + \cos^2(\theta) c_3 \left( r \frac{H}{L} \right)^{c_4} \quad (5.10)$$

#### 5.4.2. O vetor {SPURT}

No cálculo da parcela referente ao *spurt loss*, foi necessário encontrar uma expressão para o raio  $r_1$  (figuras 3.4 e 5.8) em função do ângulo  $\theta$ , que delimitasse a área de integração, ou seja, a área compreendida entre a elipse anterior a propagação ( $L_a, H_a$ ) e a elipse posterior a propagação ( $L, H$ ).

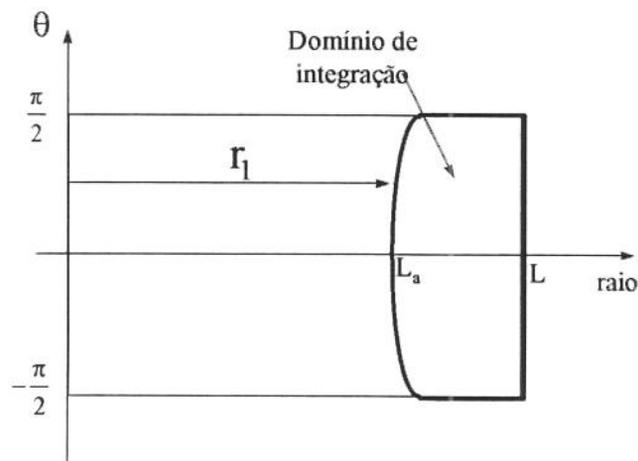


Figura 5.8 - Delimitação da área de integração para cálculo do *spurt loss*

A expressão para o raio é dada por:

$$r_1 = \frac{L L_a H_a}{\sqrt{((L H_a \cos(\theta))^2 + (H L_a \sin(\theta))^2)}} \quad (5.11)$$

Nos cálculos das integrais apresentadas no vetor {SPURT} da equação 5.5, utilizou-se inicialmente uma expressão analítica para a integração em relação ao eixo r, e, posteriormente, utilizou-se a integração numérica pelo método de Simpson, em relação ao eixo  $\theta$ .

Num caso hipotético com  $L_a = 30$ ,  $H_a = 15$ ,  $L = 32$ ,  $H = 16$ ,  $\Delta t = 1$  e  $SP = 1$ , a tabela 5.2 apresenta os resultados obtidos para o vetor {SPURT}, pelo simulador proposto e pelo software “Mathematica”, demonstrando a boa qualidade dos resultados. Os termos do vetor não apresentados (segundo, quinto e sexto) têm valor igual a zero, pois a fratura é simétrica em relação ao eixo dos x, e as integrais que possuem a variável z, elevada a primeira ou a terceira potências, resultam iguais a zero.

Tabela 5.2 - Comparação dos resultados obtidos para o vetor {SPURT}

	Simulador (C++)	“Mathematica”
$\int_{\Omega} \frac{2 SP}{\Delta t} d\Omega$	97,39	97,39
$\int_{\Omega} x^2 \frac{2 SP}{\Delta t} d\Omega$	46840	46844
$\int_{\Omega} z^2 \frac{2 SP}{\Delta t} d\Omega$	11710	11711

## 5.5. O vetor {FLUX}

Este vetor é responsável pelo controle da vazão que está entrando ou saindo do volume de controle  $\Omega$ , volume este que é circundado pela superfície de controle  $\Gamma$ . Em função do volume de controle escolhido, ou seja, metade da elipse, somente no poço existe a passagem de fluido pela superfície de controle.

Neste vetor foi utilizada a hipótese simplificadora de que todo o fluido é injetado por um único ponto, no centro da elipse, ou seja pelo ponto ( $x = 0$ ,  $z = 0$ ), de tal forma que somente o primeiro termo deste vetor é diferente de zero, e igual a metade da vazão total de bombeio do fraturamento, devido a simetria existente com o poço. Esta hipótese é decorrente da dificuldade de se calcular a distribuição correta da vazão de injeção em relação a altura da fratura aberta ao fluxo, no poço.

Esta hipótese, pelos resultados obtidos, aparentemente não introduz erros significativos no modelo. Esta hipótese seria inaceitável, se o objetivo do estudo estivesse relacionado aos fenômenos que ocorrem nas imediações do poço, como o estudo realizado por Sousa [Sous92].

## 5.6. O critério de propagação

### 5.6.1. O deslocamento relativo dos pontos da borda da fratura

O critério de propagação consiste em propagar a fratura quando o fator de intensidade de tensões  $K_I$  (equação 3.66) se iguala ao crítico  $K_{IC}$ , em algum ponto da periferia da fratura elíptica. Este é o critério que a maioria dos simuladores utiliza [Clif81, Abou84, Abou84a, Palm85 Luis86, Bout87, Hare93, Rued94], inclusive o modelo proposto neste trabalho.

Abou-Sayed [Abou84 e 84a] acrescenta que “a distância na qual a fratura se propaga é computada através da velocidade da borda da fratura e do tempo de propagação. A velocidade da fratura é obtida de considerações sobre balanço de volumes, nas zonas próximas à borda da fratura. O vetor de avanço é considerado na direção normal a borda da fratura.” Outros autores, tais como Boutéca [Bout87], Luiskutty [Luis86], Palmer [Palm85] e Rueda [Rued94], não registram o quanto cada ponto da borda da fratura deve se propagar.

#### 5.6.1.1. Deslocamentos com contrastes simétricos de tensões

Apesar da possibilidade de se calcular o fator de intensidade de tensões em toda a periferia da fratura (equação 3.65), o critério de propagação adotado no modelo, com contrastes simétricos de tensões ( $\sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_2 - \sigma_1$ ), ou seja, com  $\sigma_3 = \sigma_2$  (figura 5.9), utiliza somente os valores de  $K_I$  calculados em dois pontos principais (equações 3.66 e 3.67), para  $\theta = 0$  ( $x = L$ ) e  $\theta = \pi/2$  ( $z = H$ ).

A fratura é propagada, conforme já apresentado anteriormente (equações 5.4):

$$L = L + \frac{K_{II}^2}{K_{II}^2 + K_{IH}^2} \Delta a$$
$$H = H + \frac{K_{IH}^2}{K_{II}^2 + K_{IH}^2} \Delta a$$

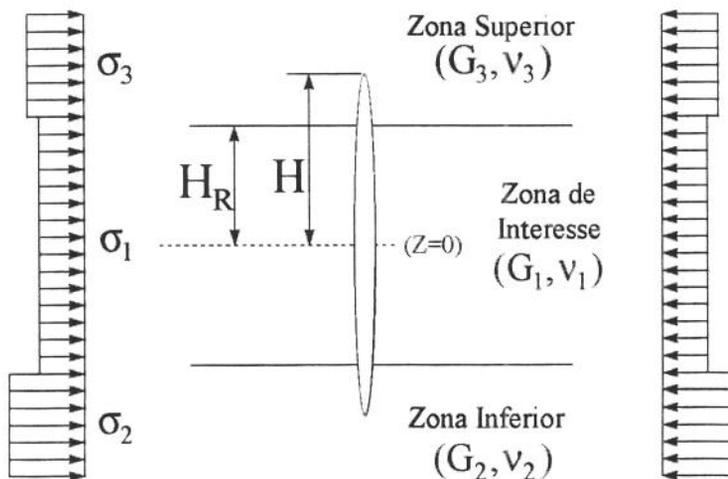


Figura 5.9 - A geometria de fratura para situações de simetria ou assimetria entre a zona de interesse e as zonas adjacentes

Neste critério observa-se que quanto maior o fator de intensidade, em um determinado ponto da fratura, maior será a propagação do mesmo, o que se apresenta fisicamente correto.

Uma outra maneira de se propagar a fratura, ainda considerando uma maior propagação para o ponto que apresenta um maior fator de intensidade de tensões, seria:

$$L = L + \frac{K_{II}}{K_{II} + K_{IH}} \Delta a$$

$$H = H + \frac{K_{IH}}{K_{II} + K_{IH}} \Delta a$$
(5.12)

As diferenças verificadas nestas duas formas de propagação (equações 5.4 e 5.12) se apresentaram pouco significativas para os resultados finais, nos diversos casos analisados. As figura 5.10a e 5.10b trazem dois exemplos das comparações realizadas (Casos I e K), apresentando as curvas de comprimento (L), pressão líquida máxima no poço (P), meia altura da fratura (H), percentagem do volume de fluido injetado perdido por filtração para a formação (% filt), abertura da fratura (b) e viscosidade aparente média (visc). O índice (1) se refere a propagação de acordo com a equação (5.12), e o índice (2), de acordo com a equação (5.4). O modelo utiliza a equação (5.4).

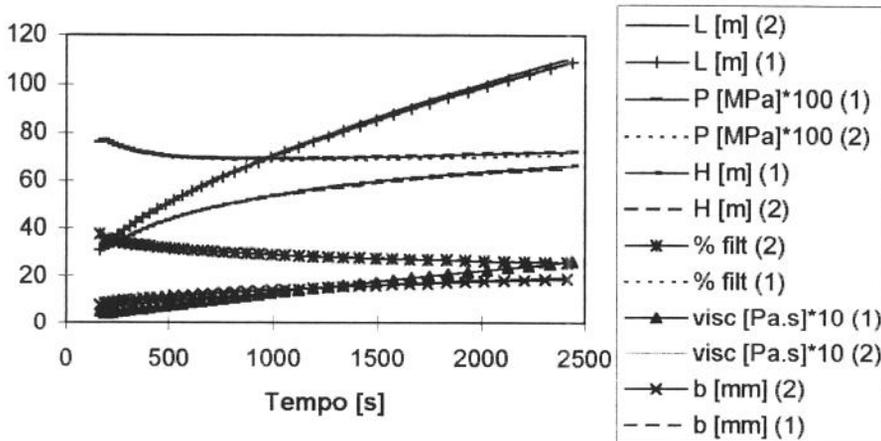


Figura 5.10a - Comparação entre os critérios de propagação, Caso I  
(1) → equação (5.12), (2) → equação (5.4)

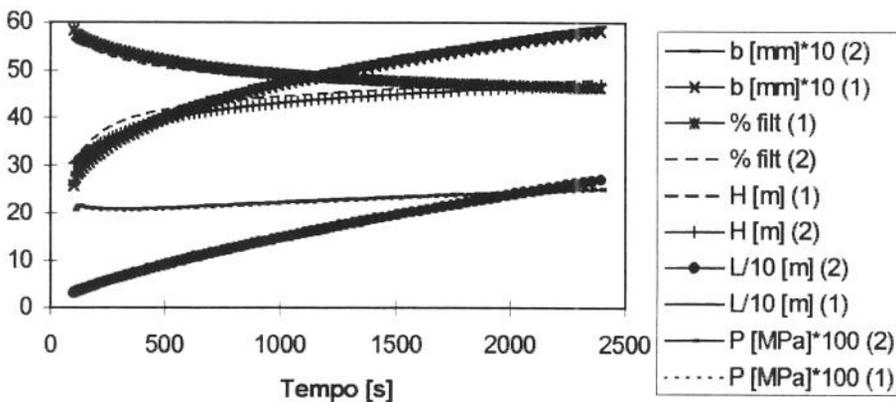


Figura 5.10b - Comparação entre os critérios de propagação, Caso K  
(1) → equação (5.12), (2) → equação (5.4)

Buscou-se implementar um critério de propagação baseado na maximização da energia total liberada, sendo que, nesta primeira tentativa, não foi possível encontrar um algoritmo adequado, em função das dificuldades numéricas enfrentadas. Este novo critério de propagação, não implementado, pode ser considerado termodinamicamente mais consistente, já que o sistema se acomodaria na condição de energia potencial mínima. Maiores detalhes do critério estão apresentados no apêndice III, para registro.

### 5.6.1.2. Deslocamentos com contrastes assimétricos de tensões

O modelo procurou tratar os casos com contrastes assimétricos de tensões (figura 5.9),  $\sigma_3 - \sigma_1 \neq \sigma_2 - \sigma_1$ , porém, as limitações observadas foram bastante severas.

Quando existe esta assimetria, o fator de intensidade de tensões  $K_I$  calculado para  $\theta = \pi/2$  (equação 3.67) é diferente daquele calculado para  $\theta = -\pi/2$  (equação 3.68). Disto resultaria propagações diferentes para estes dois pontos, e considerando a premissa de que a fratura deve ser elíptica, ocorreria um deslocamento do centro da mesma, após a propagação (figura 5.11), o que o modelo proposto não permite.

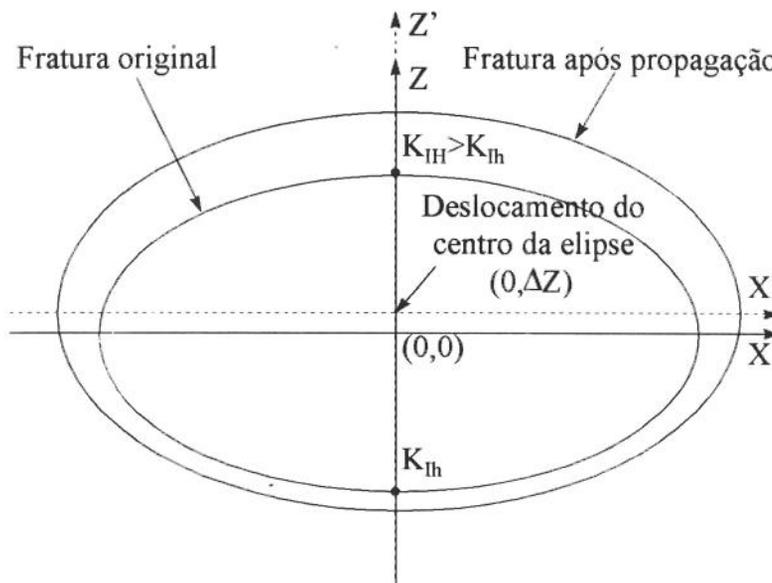


Figura 5.11 - Mudança no critério de propagação para contraste assimétrico de tensões

Este enfoque diferente, permitindo a movimentação do centro da elipse em relação a origem dos eixos xz ( $x = 0, z = 0$ ), necessita ser objeto de novos estudos, o que certamente deve aumentar a flexibilidade do modelo e a qualidade dos resultados obtidos, para os casos assimétricos de contrastes de tensões.

Portanto, no estágio atual de desenvolvimento de modelo proposto, alguns procedimentos podem ser adotados, para os casos assimétricos:

- manter o critério de propagação, como descrito na equação (5.4), e portanto, desconsiderar o fator de intensidade para  $\theta = -\pi/2$  (equação 3.68);
- calcular o fator de intensidade de tensões em  $\theta = \pi/2$  ( $K_{IH}$ ) e em  $\theta = -\pi/2$  ( $K_{Ih}$ ), determinar um valor médio, e aplicar a equação (5.4) modificada como segue:

$$L = L + \frac{K_{II}^2}{K_{II}^2 + K_{IH}^2} \Delta a \quad (5.13)$$

$$H = H + \frac{\bar{K}_{IH}^2}{K_{II}^2 + \bar{K}_{IH}^2} \Delta a \quad \text{com} \quad \bar{K}_{IH} = \frac{K_{IH} + K_{Ih}}{2}$$

- propagar a fratura em  $\theta = \pi/2$  e em  $\theta = -\pi/2$ , para posteriormente encontrar um valor médio propagado no eixo z:

$$L = L + \frac{K_{II}^2}{K_{II}^2 + K_{IH}^2} \Delta a$$

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H + \frac{K_{IH}^2}{K_{II}^2 + K_{IH}^2} \Delta a \\ H_2 &= H + \frac{K_{Ih}^2}{K_{II}^2 + K_{Ih}^2} \Delta a \end{aligned} \right\} H = \frac{H_1 + H_2}{2} \quad (5.14)$$

Testou-se o modelo com os dois critérios acima (equações 5.13 e 5.14), e não foram encontrados resultados satisfatórios, como será discutido no próximo capítulo.

### 5.6.2. O comportamento dos coeficientes $C_{ij}$ e $P_{ij}$ durante a propagação

Para complementar o critério de propagação, é necessário explicitar como os coeficientes  $C_{ij}$  (equação 3.48), e conseqüentemente os coeficientes  $P_{ij}$ , se comportam durante a propagação.

No critério adotado, a propagação ocorre de forma instantânea, sem perda de filtrado para a formação (figura 5.2). Desta hipótese simplificadora, resulta que o coeficiente  $C_{00}$  deve permanecer constante durante a propagação, já que o volume da fratura só é função deste coeficiente, como pode ser observado na equação a seguir:

$$\int_{\Omega} b \, d\Omega = \frac{16 C_{00} \pi (1 - \nu)}{3} \quad (5.15)$$

Resta definir ou descobrir o comportamentos dos demais coeficientes, durante a propagação:  $C_{01}$ ,  $C_{20}$ ,  $C_{02}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{03}$  (equações 3.66 e 3.67).

#### 5.6.2.1. Comportamento para contrastes simétricos de tensões

Para o caso de contrastes simétricos de tensões ( $\sigma_3 = \sigma_2$ ), entre a zona de interesse e as zonas adjacentes, tem-se  $P_{01} = P_{21} = P_{03} = 0$  durante todo o tratamento, e conseqüentemente  $C_{01} = C_{21} = C_{03} = 0$ . Resta portanto definir o comportamento dos coeficientes  $C_{20}$  e  $C_{02}$ , ou seja, o comportamento dos coeficiente  $P_{20}$  e  $P_{02}$ .

Vários foram os testes feitos para se determinar o comportamento dos coeficientes  $C_{20}$  e  $C_{02}$  durante a propagação. Utilizou-se inicialmente o critério que os coeficientes  $C_{20}$  e  $C_{02}$ , ao término da propagação, tinham seus valores iguais a zero, o que significa que ao término da propagação a pressão é uniforme no interior da fratura. Com este critério, as propagações eram enormes, para que, ao término da propagação, o fator de intensidade de

tensões calculado ficasse abaixo do crítico ( $<0,98 K_{IC}$ ), e geraram resultados bastante discrepantes daqueles encontrados na literatura. Fisicamente, a possibilidade de se encontrar pressões uniformes em toda a fratura, num instante qualquer durante a sua propagação, se apresenta bastante remota, com o que, tal critério foi abandonado.

Posteriormente, adotou-se os coeficientes  $C_{20}$  e  $C_{02}$  constantes durante a propagação, o que também se verificou inadequado, pois em algumas situações, com fraturas bastante alongadas ( $L \gg H$ ), a pressão ao término da propagação se apresentava crescente do interior para a extremidade da fratura, no eixo  $z$ , o que é fisicamente impossível. Verificou-se também que com este critério, em um dos casos apresentados no trabalho de Abou-Sayed (caso J), o fator de intensidade de tensões aumentava com a propagação, o que também se apresenta fisicamente inadequado. Consequentemente, este critério também foi abandonado.

Acabou-se por adotar as seguintes relações constantes na propagação:  $C_{20}/L^2$  e  $C_{02}/H^2$  (equações 3.66 e 3.67). Com esta hipótese, os problemas acima desapareceram. A figura 5.12 apresenta um resultado típico para o critério de propagação, ou seja, a curva (1) é a curva de pressão anterior à propagação, e a curva (2), aquela correspondente à situação após a propagação.

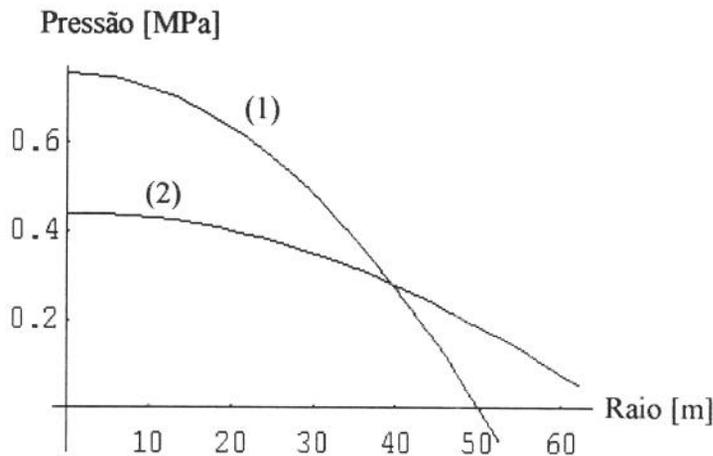


Figura 5.12 - Resultado típico do critério de propagação

### 5.6.2.2. Comportamento para contrastes assimétricos de tensões

Para o caso de contrastes assimétricos de tensões ( $\sigma_3 \neq \sigma_2$ ), entre a zona de interesse e as zonas adjacentes, os coeficientes  $C_{01}$ ,  $C_{21}$  e  $C_{03}$  não são mais iguais a zero.

Inicialmente, tentou-se um critério similar ao que foi adotado para o caso simétrico, ou seja, manteve-se constantes as seguintes relações na propagação:  $C_{01}/H$  e  $C_{21}/(L^2H)$  e  $C_{03}/H^3$ .

Para os casos assimétricos, a fácil convergência do processo iterativo, encontrada nos casos simétricos, não mais se verificou. Conforme discutido no capítulo 2, havia dúvidas sobre a necessidade de utilização do coeficiente  $P_{21}$  (equação 4.14), devido a existência dos coeficientes  $P_{20}$  e  $P_{01}$  que, aparentemente, cobriam as funções do  $P_{21}$ . O termo  $P_{21}x^2z$

do polinômio, nos testes realizados, também sempre se mostrou muito menor que os demais, e após a sua exclusão, a rápida convergência do processo iterativo foi restabelecida.

Restava então, explicitar o comportamento dos coeficiente  $C_{01}$  e  $C_{03}$ , durante a propagação. Testou-se inicialmente as seguintes relações como constantes na propagação:  $C_{01}/H$  e  $C_{03}/H^3$ . Ou seja, com o aumento de  $H$ ,  $C_{01}$  aumentava na mesma proporção e  $C_{03}$  aumentava na proporção de  $H^3$ . Buscou-se também uma solução híbrida, onde as relações  $C_{20}/L^2$  e  $C_{02}/H^2$  e os coeficientes  $C_{01}$  e  $C_{03}$  eram mantidos constantes. Os resultados obtidos foram bastante insatisfatórios, e serão discutidos no capítulo seguinte.

### 5.7. Geometria inicial de fratura

Abou-Sayed [Abou84a] sugeriu que a geometria inicial de fratura deveria ter a relação  $H/L = 2$ , para que o volume da fratura no primeiro passo não representasse uma parcela significativa do volume total a ser bombeado. Nas suas argumentações apresentou um caso onde este volume atingia 25 % (vinte e cinco) do volume, quando a relação  $H/L$  era igual a 1 (caso A).

Cabe ressaltar que essa análise foi feita para o caso onde o módulo de elasticidade é igual a 517 MPa, bastante inferior aos valores usuais encontrados para arenitos, o que faz com que seja possível injetar um grande volume de fluido, antes de se atingir o fator de intensidade crítico de tensões. Este mesmo fato não é verificado quando se trabalha com valores mais realistas de módulo de elasticidade.

A tabela 5.3 apresenta as porcentagens do volume total injetado no primeiro passo de propagação no modelo proposto (Q3DFRAC), que estão apresentados no próximo capítulo, para os casos apresentados por Abou-Sayed [Abou84]. A menos do caso H, onde o fator de intensidade de tensões é muitíssimo elevado para o respectivo módulo de elasticidade (exemplo meramente teórico), pode-se notar que estas porcentagens são suficientemente pequenas (inferiores a 8%) para não afetarem os resultados finais.

Tabela 5.3 - Porcentagem do volume total injetado no primeiro passo de propagação

Casos	A	E	G	H	I	J	K	L	M	N	O
% Inj.	6,9	4,4	4,4	22,9	6,9	7,9	4,3	6,8	1,0	0,6	1,3

Vários foram os testes efetuados para verificar a independência dos resultados finais as geometrias iniciais. Esta independência foi confirmada, como era de se esperar, quando os volumes referentes ao primeiro passo são suficientemente pequenos (normalmente, inferiores a 10%). A figura 5.13 apresenta um destes testes, para ilustração.

No modelo proposto foi adotada geometria inicial com  $H/L = 1$ . Este procedimento melhorou o ajuste das curvas do tempo de contato rocha-fluido utilizadas no cálculo do vetor {FLOSS}, mostrado anteriormente. Com  $H/L$  inicial = 2, nos passos iniciais somente havia propagação no eixo x, e o ajuste  $\tau(z)$  ficava bastante prejudicado. Apesar

de não terem sido utilizadas geometrias iniciais com relação  $H/L \neq 1$ , o modelo está apto a utilizá-las.

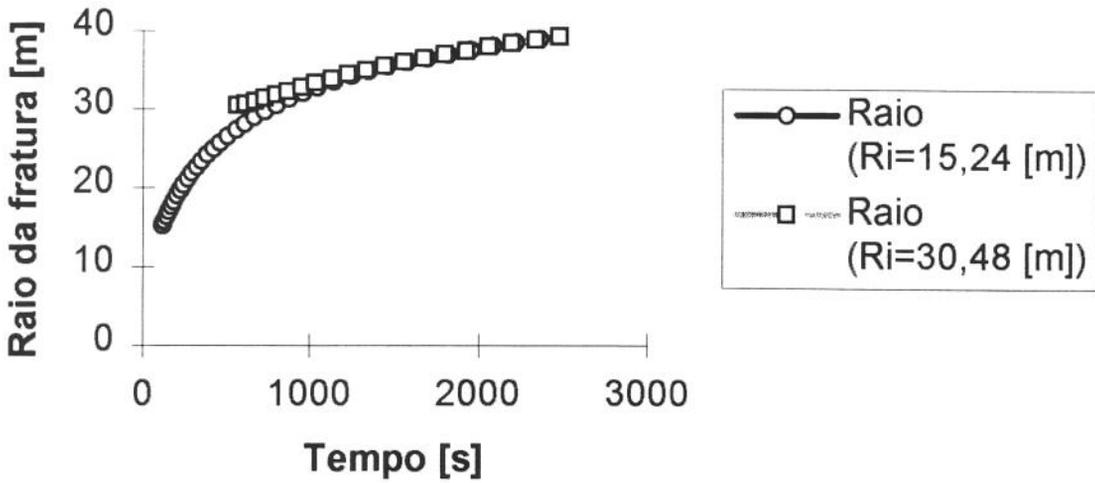


Figura 5.13- Comparação do raio da fratura para geometrias iniciais diferentes

## 5.8. Viscosidade aparente média

O modelo adota como hipótese simplificadora que a viscosidade aparente ( $\mu_{ap}$ ) (equação 3.3) é constante em cada passo de propagação, simplificando bastante a metodologia de solução (equações 4.6 e 4.8), já que a mesma pode sair para fora da integral ( $\mu_{ap} = \mu_a$ ). Considerar a viscosidade aparente constante, significa considerar que relação entre a velocidade de fluxo ( $v$ ) e a largura da fratura ( $b$ ) sofre pequenas alterações no domínio  $\Omega$ . Esta mesma hipótese simplificadora foi adotada por Boutéca [Bout87] e Rueda [Rued94].

Para analisar esta hipótese, buscou-se colocar em um gráfico (figura 5.14) a viscosidade aparente ( $\mu_{ap}$ ) em cada ponto do domínio  $\Omega$ , utilizando-se para isto a equação (3.6), já que os coeficientes da distribuição de pressões ( $P_{ij}$ ) (ou gradiente de pressões  $\nabla p$ ) e os respectivos coeficientes da função tensão harmônica ( $C_{ij}$ ) (ou largura  $b$ ), são as variáveis trabalhadas pelo simulador. O gráfico está apresentado após a transformação conforme, com  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ , e  $0 \leq r \leq L$ . Apesar de a figura 5.14 ser um caso particular ( $L = 34,65$ ,  $H = 22,65$ ,  $P_{00} = 169600$ ,  $P_{01} = 0$ ,  $P_{20} = -2,084$ ,  $P_{02} = -0,4035$ ,  $P_{21} = 0$ ,  $P_{03} = 0$ ,  $C_{00} = 1,328$ ,  $C_{01} = 0$ ,  $C_{20} = 2,687$ ,  $C_{02} = -0,2735$ ,  $C_{21} = 0$ ,  $C_{03} = 0$ ), o formato apresentado se verificou em todas as situações analisadas.

A figura apresenta variações significativas para a viscosidade aparente ( $\mu_{ap}$ ), quando a largura da fratura ( $b$ ) ou o gradiente de pressões ( $\nabla p$ ) tendem a zero (equação 3.6). Porém numa região bastante grande, a viscosidade quase que se mantém constante.

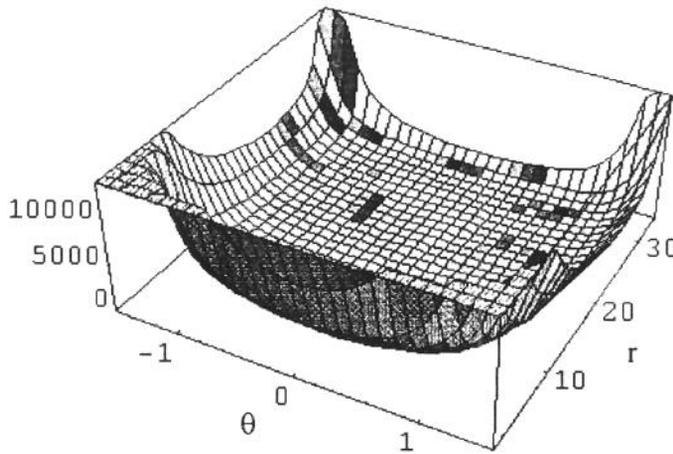


Figura 5.14 - Um gráfico típico para a viscosidade aparente ( $\mu_{ap}$ )

Como a viscosidade aparente ( $\mu_{ap}$ ) não é constante em todo o domínio  $\Omega$ , adotou-se no modelo um valor médio ( $\mu_a$ ), quando a viscosidade sai fora da integral (equação 4.8), como segue:

$$\mu_a = \frac{\int_{\Omega} \left(\frac{k'}{3}\right)^{1/n'} \left(\frac{2n'+1}{n'}\right) \left(\frac{b \nabla p}{6}\right)^{\frac{n'-1}{n'}} d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \quad (5.16)$$

## 5.9. Casos assimétricos quanto à litologia

Além dos severos problemas apresentados, quanto ao critério de propagação, para os casos com contrastes assimétricos de tensões, é necessário analisar a situação em que, apesar de existir simetria nos contrastes de tensões, não existe um único par de valores ( $G, \nu$ ) para descrever o comportamento das rochas (figura 5.9).

Como já citado anteriormente, o modelo proposto foi adaptado do trabalho de Shah e Kobayashi, que se propôs, originalmente, a analisar fraturas elípticas num meio homogêneo e isotrópico, na ausência de forças de volume e de tensões cisalhantes no plano  $y = 0$ , fornecendo uma expressão analítica para a determinação do fator de intensidade de tensões ( $K_I$ ). Conseqüentemente, todas as expressões analíticas apresentadas no trabalho de Shah e Kobayashi fazem uso de um único módulo de elasticidade ao cisalhamento ( $G$ ) e de um único coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), para descrever o comportamento do meio, não trabalhando, por exemplo, com um sistema de três camadas (figura 5.9), muito comum em fraturamentos hidráulicos. Como o simulador somente faz uso de um par de valores ( $G, \nu$ ), em seus dados de entrada, é necessário explicitar quais foram os valores utilizados, e que tipo de ponderação foi feita, para o caso onde se dispõe de diferentes valores para as camadas adjacentes e de interesse. Rueda [Rued94] apresenta os resultados de seu modelo (SAHFRAC) para os casos assimétricos, mas não explicita quais foram os dados de entrada fornecidos ao simulador.

# CAPÍTULO 6

## VALIDAÇÃO DO MODELO

### 6.1. Introdução

O critério de validação do modelo proposto (Q3DFRAC) se baseia na comparação de seus resultados com aqueles disponíveis na literatura. Nestas comparações, é de fundamental importância entender as hipóteses simplificadoras utilizadas pelos diversos simuladores e as suas limitações. Também é muito importante descrever a forma como os dados foram utilizados no simulador, já que alguns simuladores não comportam todos os dados de entrada disponíveis. Para exemplificar, o modelo que está sendo proposto não comporta receber mais do que um par de valores para o módulo de elasticidade ( $E$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), ou seja, mesmo que se disponha destes valores, distintos para as camadas de interesse e as adjacentes, é necessário fornecer um único par de valores ao simulador. Os valores fornecidos e a forma de ponderação utilizada devem ser registrados.

Warpinski [Warp93] publicou um estudo com a comparação de diversos simuladores quanto aos resultados obtidos para o comprimento, altura e largura da fratura, e a eficiência do fluido injetado. Trabalhou-se com seis situações diferentes: com fluido Newtoniano e altura da fratura constante (19 simuladores), com três camadas (9 simuladores) e com cinco camadas (9 simuladores); com fluido não Newtoniano e altura da fratura constante (15 simuladores), com três camadas (8 simuladores) e com cinco camadas (11 simuladores). No caso de fluido Newtoniano e três camadas verificou-se variações máximas de 170 % para o comprimento da fratura, de 210 % para a altura, de 390 % para a pressão e de 86 % para a largura. No caso de fluido de potência e três camadas verificou-se variação máxima de 264 % para o comprimento, de 81 % para a altura, de 42 % para a pressão e de 69 % para a largura. Estes valores estão aqui registrados para mostrar uma tese defendida pelos autores [Warp93]: “não se deve pensar em termos de melhor ou pior simulador, e sim no mais ou menos adequado para a situação analisada, bem como aquele com o qual são obtidos os melhores ajustes entre os valores simulados e os obtidos em campo.”

Em função destas ponderações, os modelos escolhidos para comparação com o modelo proposto foram aqueles que se baseiam no trabalho de Shah e Kobayashi (SAHFRAC [Rued94] e FRANK [Bout87]), ou que possuem boa reputação na comunidade científica (HYFRAC [Abou84]), ou que analisam fraturas radiais, bastante apropriadas às nossas comparações, por trabalharem com um único meio (HyFSys [Sous92], Settari [Sett82], Vandamme [Vand86] e Morales [Mora89]), ou ainda que são bastante utilizados na indústria do petróleo no Brasil (MEYER-II [Meye89]).

O modelo proposto pode simular fraturas radiais ( $L = H$ ) ou elípticas ( $L \neq H$ ), fluidos Newtonianos ( $n' = 1$ ) ou de potência ( $n' \neq 1$ ), com ou sem perda de filtrado ( $C_L$ ), com ou

sem perda inicial de filtrado ( $S_p$ ). Na implementação do modelo, e subsequente validação, foram incluídas, uma a uma, todas as características citadas acima.

## 6.2. Fraturas radiais

Inicialmente, implementou-se o simulador para fraturas radiais, fluidos Newtonianos, sem perda de filtrado e sem perda inicial de filtrado. Este procedimento foi adotado, visto que, quanto mais restrita é a situação analisada, menor é o número de hipóteses simplificadoras utilizadas, de tal forma que é possível checar a qualidade destas hipóteses. Um outro motivo de se adotar este procedimento é que Settari [Sett82], Vandamme [Vand86] e Sousa [Sous92] também analisaram esta situação, e portanto existiam resultados a serem comparados.

A tabela 6.1 apresenta os dados de entrada utilizados na simulação, sendo que no caso 1, não foi incluída a perda de filtrado, e no caso 2, foi. Considera-se no modelo, que a vazão total de injeção é distribuída igualmente nas duas “asas” da fratura, bem como é mantida constante durante toda a propagação da fratura.

Tabela 6.1 - Dados de entrada para simulação de fraturas radiais

<b>Rocha</b>	
Módulo de Elasticidade, E [MPa]	30.000,00
Coefficiente de Poisson, $\nu$	0,25
Tenacidade da rocha, $K_{IC}$ [ MPa $\sqrt{m}$ ]	10
<b>Fluido Newtoniano</b>	
Viscosidade, $\mu$ [mPa.s]	250,0
Coefficiente global de filtração, $C_L$ [ m / $\sqrt{s}$ ]	sem filtrado
caso 1:	0,000059
caso 2:	
Vazão total de injeção, Q [m <sup>3</sup> /s]	0,03

A tabela 6.2 apresenta os resultados finais dos simuladores. No raio final da fratura, o erro relativo está entre -0,1 % e 5 %, mostrando um bom ajuste com os demais simuladores, como pode ser observado na figura 6.1. Os resultados apresentados dos demais simuladores, foram obtidos através de digitalização dos mesmos.

Tabela 6.2 - Resultados da simulação para fraturas radiais, sem perda de filtrado

Caso	Modelo	Volume Total (m <sup>3</sup> )	Pressão Máxima Final (MPa)	Abertura Máx. Final (mm)	Raio (m)
1	HyFSys	15,60	1,93	5,20	39,81
	Settari	16,10	1,73	4,31	37,80
	Vandamme	15,40	2,00	5,69	39,84
	Q3DFRAC	15,30	1,56	4,76	39,79

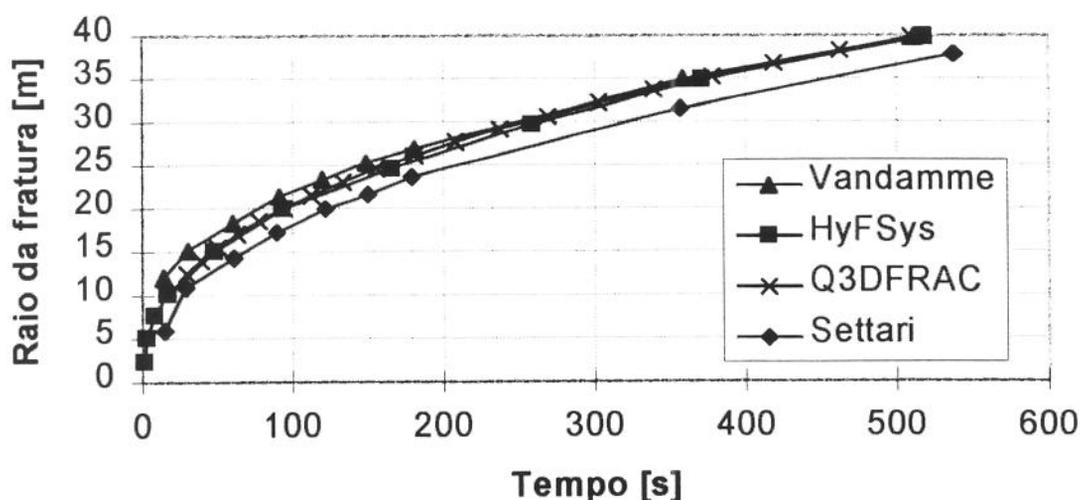


Figura 6.1 - Evolução do raio da fratura com o tempo, sem perda de filtrado

Na pressão líquida máxima final no poço, o erro relativo está entre -10 % e -22 %, ou seja, as pressões do modelo proposto sempre ficaram abaixo dos valores apresentados pelos demais simuladores. Porém, observando a figura 6.2, pode-se constatar que a forma geral acompanha os demais simuladores, o que já era esperado, ou seja, pressões decrescentes com o tempo de propagação.

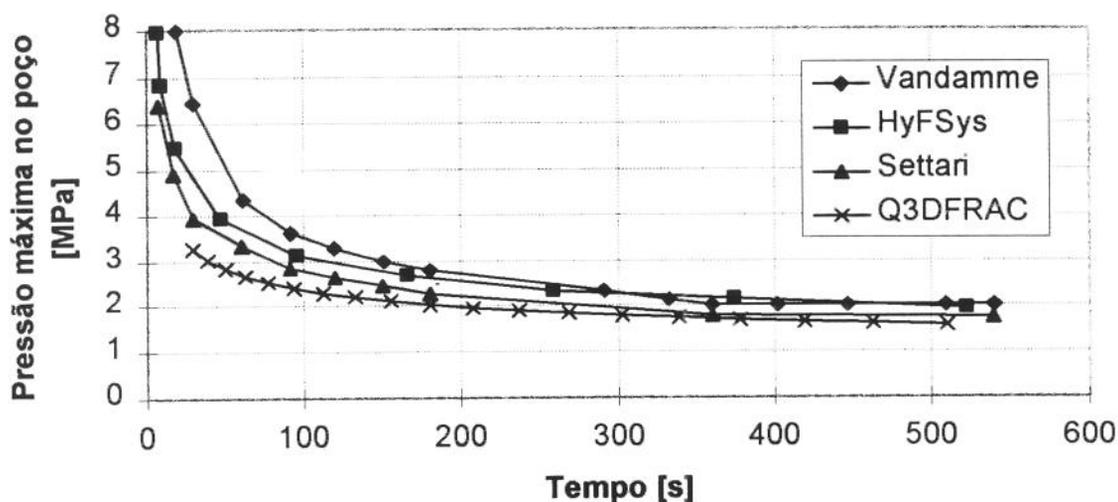


Figura 6.2 - Evolução da pressão máxima com o tempo, sem perda de filtrado

Quanto à abertura máxima final no poço, o erro relativo está entre -16 % e 10 %, como também pode ser observado na figura 6.3, e estes resultados foram considerados satisfatórios. Neste momento da implementação, considerou-se como satisfatória a hipótese simplificadora de se injetar o fluido somente por um ponto na fratura ( $x = 0$ ,  $z = 0$ ).

Passou-se a analisar, na sequência, a mesma fratura radial, agora com a inclusão da perda de filtrado ( $C_L$ ). Os resultados obtidos estão apresentados na tabela 6.3 e nas figuras 6.4, 6.5 e 6.6. Mais uma vez, os resultados apresentados dos demais simuladores foram obtidos através de digitalização.

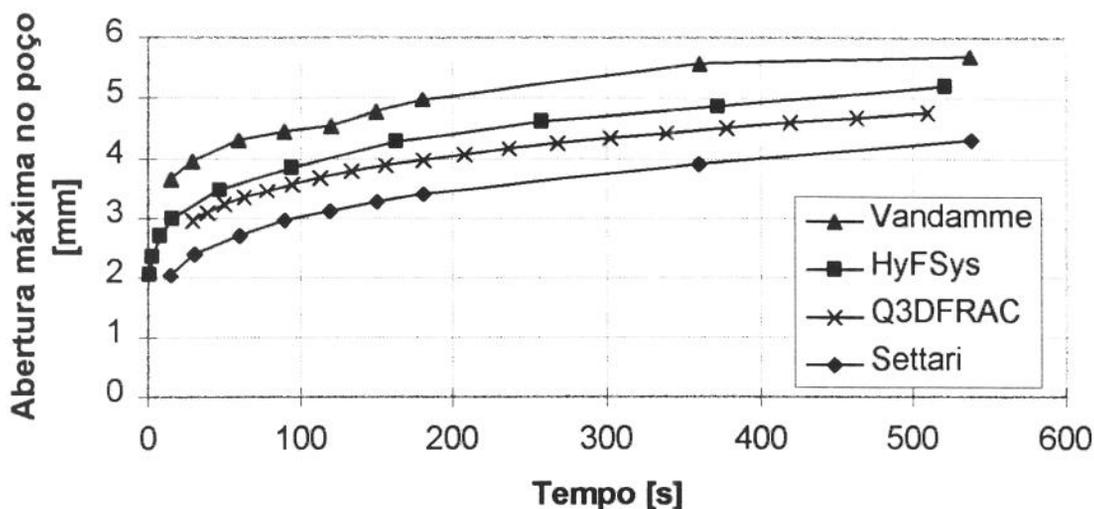


Figura 6.3 - Evolução da abertura máxima da fratura com o tempo, sem perda de filtrado

Tabela 6.3 - Resultados da simulação para fraturas radiais, com perda de filtrado

Caso	Modelo	Volume Total (m <sup>3</sup> )	Pressão Máxima Final (MPa)	Abertura Máx. Final (mm)	Raio (m)
2	HyFSys	26,90	2,18	4,83	33,68
	Morales	21,50	2,03	4,14	29,09
	Q3DFRAC	24,90	1,86	4,49	32,15

No raio final da fratura, o erro relativo está entre -10,5 % e 4,5 %, e como pode ser observado na figura 6.4, os resultados apresentam boa concordância. Estas diferenças estão elevadas, pois estão sendo comparadas fraturas com volumes totais injetados diferentes.

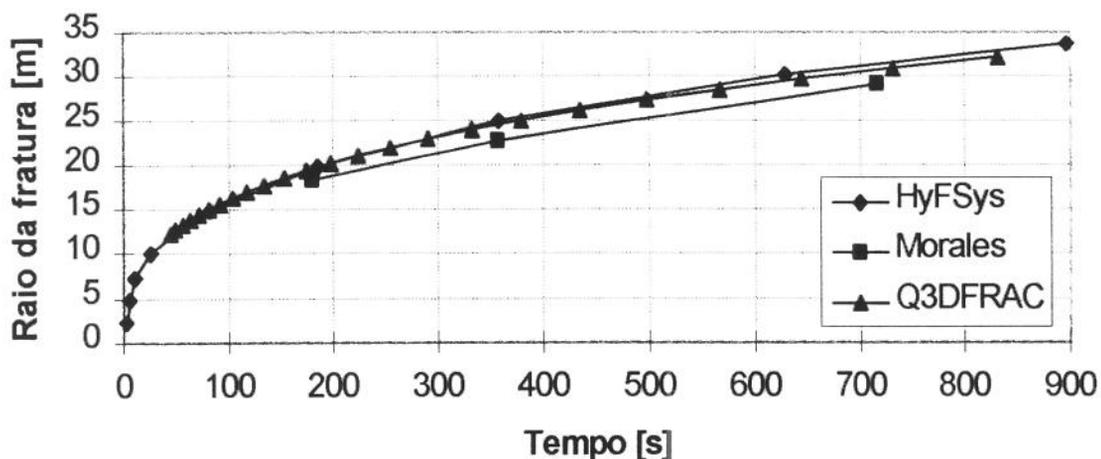


Figura 6.4 - Evolução do raio da fratura com o tempo, com perda de filtrado

Na pressão líquida máxima final no poço, o erro relativo observado está entre -8,4 % e -14,7 % (figura 6.5), confirmando o que já havia acontecido anteriormente. Não foi

possível detectar o motivo pelo qual estas pressões são menores que nos demais modelos, e em função dos bons resultados de abertura e raio da fratura, acabou-se por considerar satisfatórios estes resultados.

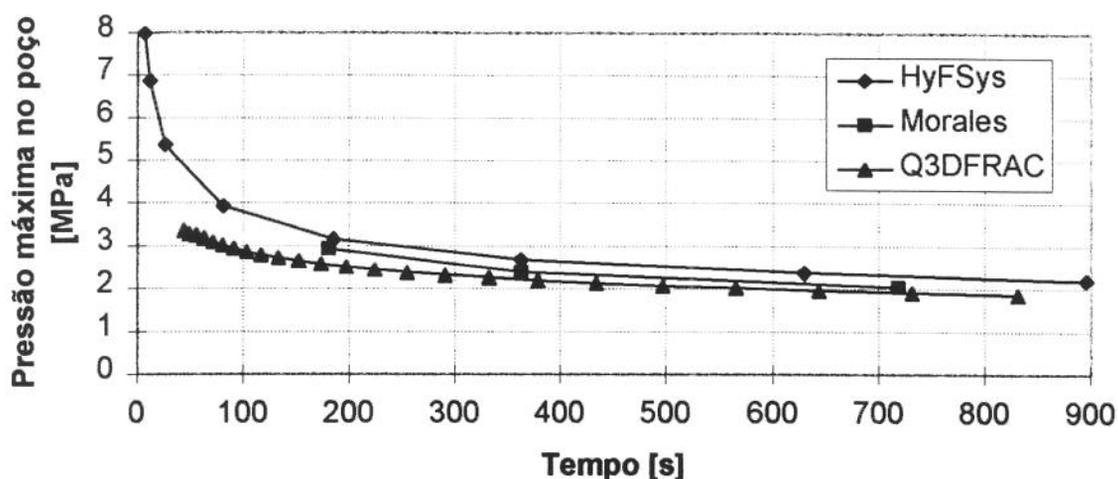


Figura 6.5 - Evolução da pressão máxima com o tempo, com perda de filtrado

A figura 6.6 apresenta os resultados para a abertura máxima da fratura no poço com o tempo, ficando o erro relativo final entre - 7,0 % e + 8,4 %, resultados considerados satisfatórios.

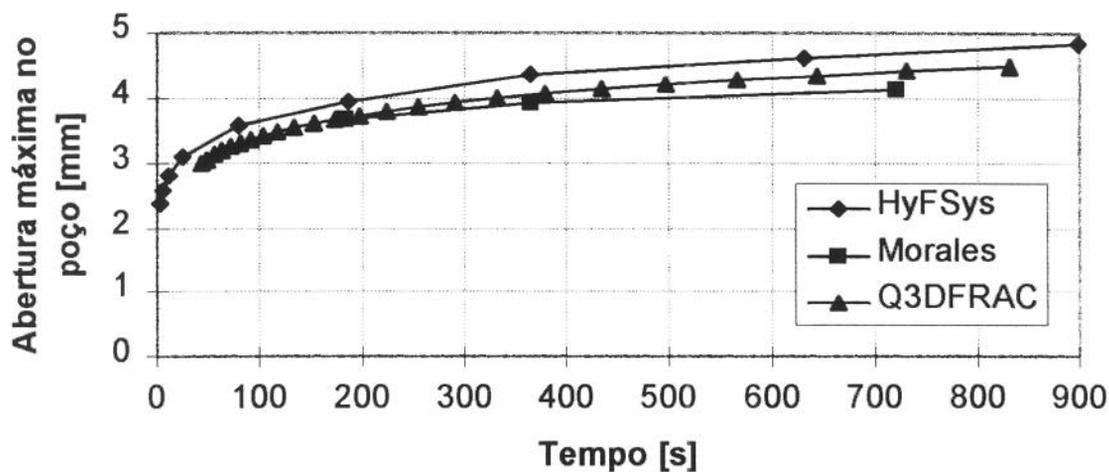


Figura 6.6 - Evolução da abertura máxima da fratura com o tempo, com perda de filtrado

Vários outros casos, apresentados no trabalho de Abou-Sayed [Abou84a], foram utilizados para comparação e validação do modelo, e estão apresentados a seguir. O simulador de Abou-Sayed é tridimensional, e os valores para o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são idênticos, tanto para a zona de interesse, quanto para as camadas adjacentes, similar ao modelo proposto. Este trabalho também foi utilizado para comparação por diversos autores, entre eles Boutéca [Bout87], Meyer [Meye89] e Rueda [Rued94]. Abou-Sayed apresentou os resultados da simulação de três faturas radiais (Casos B, G e H), com a inclusão da perda inicial de filtrado (*spurt loss*), o que o modelo ainda não havia considerado. Nesta dissertação, os resultados comparativos destas faturas radiais, com *spurt loss*, estão apresentados na seção seguinte.

### 6.3. Fraturas radiais e não radiais com perda inicial de filtrado

Abou-Sayed [Abou84a] dividiu os casos analisados em: baixos (casos B e E), moderados (casos G, H, I, J, K e L) e altos valores (casos M, N e O) de módulo de elasticidade. O caso A, não apresentado, utiliza somente geometria inicial diferente do caso B e os casos C, D e F, também não apresentados, utilizam gradientes de tensões, o que o modelo proposto não simula adequadamente.

A tabela 6.4 apresenta os dados de entrada para os exemplos com baixo módulo de elasticidade, e a tabela 6.5, os resultados obtidos para os diversos simuladores. O módulo de elasticidade empregado nestas simulações é bastante baixo, quando comparado com os valores usuais encontrados na indústria do petróleo, podendo ser encarado como teórico.

O simulador proposto, nesta fase da implementação, passa a incluir a perda inicial de filtrado (*spurt loss*), o que ainda não havia sido considerado. Passa-se a considerar também os contrastes de tensões simétricos entre a zona de interesse e as zonas adjacentes ( $\sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_2 - \sigma_1$ ), o que faz com que a fratura deixe de ser radial, passando a ter o formato alongado.

Como já comentado anteriormente, a geometria inicial da fratura, que anterior a este modelo (Q3DFRAC), apresentava a relação  $H/L = 2$ , passa a utilizar a relação  $H/L = 1$ . Na alteração da relação, não foi o valor de H que foi dividido ao meio, e sim o valor de L que foi duplicado.

Tabela 6.4 - Dados de entrada para os casos de  $E = 517,10$  MPa

<b>(valores padrão são aqueles do caso B)</b>		
<b>Rocha</b>	<b>Caso B</b>	<b>Caso E</b>
Espessura da zona de interesse, $2H_R$ [m]	68,00	
Módulo de elasticidade, E [MPa]	517,10	
Coefficiente de Poisson, $\nu$	0,20	
Contraste de tensões [MPa]	0,00	0,69
Tenacidade, $K_{IC}$ [MPa $\sqrt{m}$ ]	1,10	
<b>Fluido</b>		
Vazão total de injeção, Q [m <sup>3</sup> /s]	0,106	
Volume total [m <sup>3</sup> ]	250,00	
Índice de comportamento, $n'$	0,39	
Índice de consistência, $k'$ [mPa.s <sup><math>n'</math></sup> ]	5745,60	
Spurt loss, SP [m <sup>3</sup> /m <sup>2</sup> ]	0,001019	
Coefficiente global de filtrado, CL [m / $\sqrt{s}$ ]	$6,394 \times 10^{-6}$	

Na tabela 6.5 tem-se o registro das pressões líquidas finais máximas no poço, as aberturas finais máximas das fraturas no poço, a perda inicial de filtrado (correspondente ao *spurt loss*), a perda total por filtração (inclui *spurt loss* e perda por filtração), os comprimentos e as meia alturas finais das fraturas.

A perda inicial de filtrado, que ainda não havia sido apresentada separadamente do filtrado total, passa a funcionar como mais um critério de verificação da qualidade dos resultados dos simuladores. Apesar de não terem sido apresentadas nos demais modelos, seu cálculo é bastante simples, bastando multiplicar a área total da fratura (a soma das duas faces nas duas “asas” da fratura) pelo coeficiente da perda inicial de filtrado ( $S_p$ ). Como o filtrado total inclui a perda inicial mais a perda por filtração, a perda inicial de filtrado deve ter valor inferior ao filtrado total. Em três casos distintos, discutidos adiante, foram verificadas perdas iniciais de filtrado superiores ao filtrado total, o que é inconsistente.

Tabela 6.5 - Resultados obtidos para os casos de  $E = 517,10$  MPa

Caso	Modelo	Volume Total (m <sup>3</sup> )	Pressão Máxima (MPa)	Abertura Máxima (mm)	Perda Inicial Filtrado (%)	Filtrado Total (%)	Comprimento (m)	Meia Altura (m)
B	Q3DFRAC	260,7	0,157	38,55	7,78	10,6	55,03	55,00
	SAHFRAC	258,8	0,180	41,91	7,26	11,0	57,57	50,99
	FRANK	254,0	0,150	37,34	8,08	9,8	57,70	55,59
	MFRAC-II		0,160	41,15			57,48	57,54
	HYFRAC	255,3	0,240	33,02	10,13	12,4	59,28	68,20
E	Q3DFRAC	248,0	0,238	43,86	7,48	10,6	74,13	39,12
	SAHFRAC	249,4	0,240	52,58	6,43	9,7	69,59	35,99
	FRANK	254,1	0,210	47,24	6,72	8,4	80,19	33,25
	MFRAC-II		0,240	48,77			70,89	34,55
	HYFRAC	257,2	0,230	50,04	5,54	7,4	58,09	38,36

Na tabela 6.5, caso B, o modelo Q3DFRAC apresenta comprimento e meia altura da fratura ligeiramente inferiores, enquanto a pressão, abertura e filtrado ficaram bastante coerentes com os obtidos pelo SAHFRAC, FRANK E MFRAC-II.

O modelo HYFRAC, no entanto, apresentou largura menor, comprimento, meia altura, perda inicial de filtrado e pressão maiores, o que se apresenta levemente inconsistente se comparados aos resultados do Q3DFRAC, pois uma maior perda inicial de filtrado apresentado pelo HYFRAC ocasionaria tanto o aumento de pressão, quanto a diminuição da abertura, justificando estas diferenças, porém ocasionaria também uma diminuição do comprimento da fratura, o que não se verificou. Não devem ser esquecidas as profundas diferenças entre os modelos SAHFRAC, FRANK e Q3DFRAC, que são pseudo-

tridimensionais e utilizam hipóteses simplificadoras mais restritivas, e o modelo HYFRAC, que é tridimensional, e utiliza hipóteses simplificadoras menos restritivas.

A figura 6.7 apresenta os resultados obtidos para o caso B.

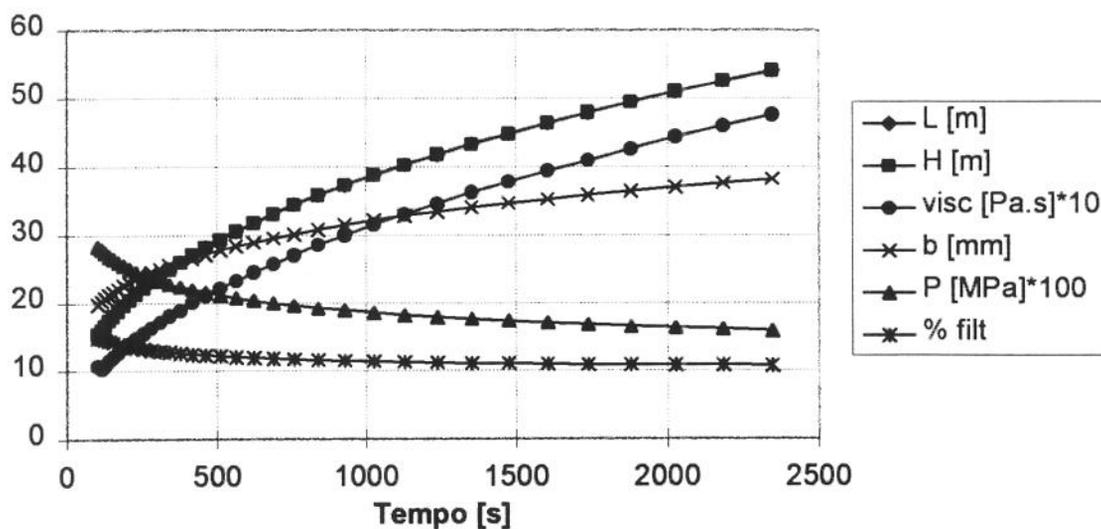


Figura 6.7 - Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso B

Foi incluída uma curva de viscosidade aparente média ( $\mu_a$ ), por ser um dado muito relevante no processo, e facilitar possíveis comparações futuras, já que a ausência destes dados na literatura se mostrou crítica, na tentativa de se determinar o quão diferente é o enfoque de cálculo utilizado neste modelo e discutido no capítulo anterior. A viscosidade aparente média apresentou, em todas as simulações feitas, esta mesma característica de ter seu valor crescente com o tempo.

A curva de viscosidade aparece multiplicada por 10, e a curva de pressão, por 100, para melhorar a qualidade de apresentação em um único gráfico. A curva do comprimento L e da meia altura H estão se sobrepondo, o que se apresenta adequado, já que estamos trabalhando com uma fratura radial.

O caso E, apresentado na tabela 6.4, é similar ao caso B, diferenciando pela existência de contrastes simétricos de tensões entre a zona de interesse e as zonas adjacentes. Isto faz com que a fratura se torne alongada.

Os resultados mostrados na tabela 6.5 se apresentaram razoavelmente consistentes com os resultados dos demais simuladores, com uma abertura máxima ligeiramente inferior. A figura 6.8 apresenta, no tempo, os resultados obtidos. Para aumentar a abertura da fratura, no modelo Q3DFRAC, seria necessário um aumento na viscosidade aparente média, que ocasionaria uma diminuição no comprimento e aumentaria a pressão, aproximando os resultados com os dos demais modelos, porém aumentaria também a altura da fratura, piorando seu resultado. Conseqüentemente, não ficou bem caracterizada a necessidade de alterar o cálculo da viscosidade aparente média.

A tabela 6.6 apresenta os dados de entrada para os exemplos com moderado módulo de elasticidade, e a tabela 6.7, os resultados obtidos para os diversos simuladores.

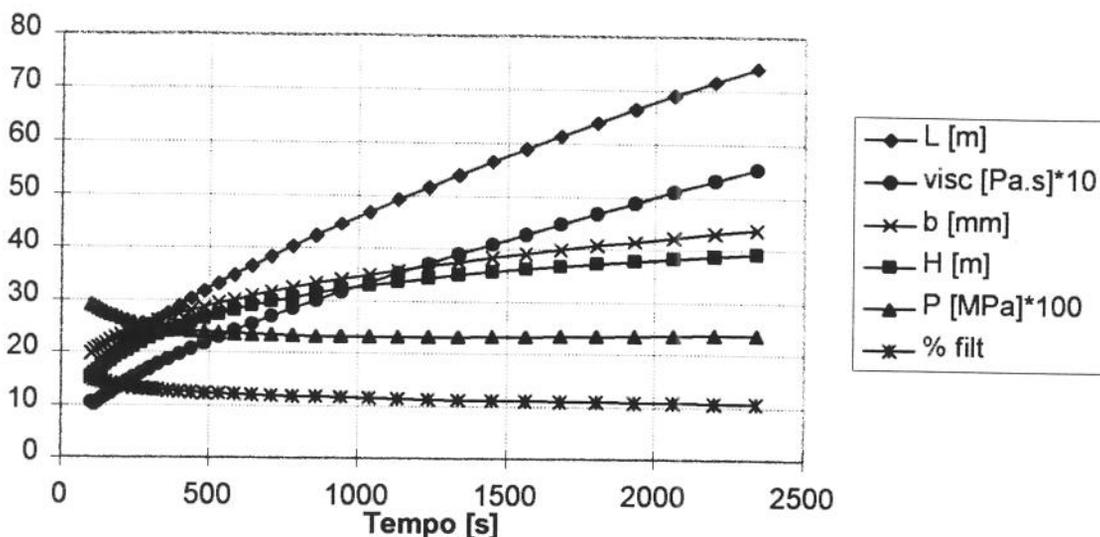


Figura 6.8 - Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso E

Nos casos de G a L, considerou-se o valor do módulo de elasticidade utilizado nos casos B e E multiplicado por 10. De forma similar utilizada para os casos B e E, os dados do caso G (tabela 6.6) servem de base para os casos H a L e somente são listados, para estes casos, os dados que sofreram alterações. Por exemplo, o caso H difere do caso G somente pela tenacidade da rocha, que foi multiplicada por 10.

Tabela 6.6 - Dados de entrada para os casos de E = 5171,0 MPa

(valores padrão são aqueles do caso G)							
Rocha	Casos →	G	H	I	J	K	L
Espessura da zona de interesse, $2H_R$ [m]		68,00					
Módulo de elasticidade, E [MPa]		5171,0					
Coeficiente de Poisson, $\nu$		0,20					
Contraste de tensões [MPa]		0,00		0,69	0,69	0,69	3,45
Tenacidade, $K_{IC}$ [MPa $\sqrt{m}$ ]		1,10	11,00				
<b>Fluido</b>							
Vazão total de injeção, Q [m <sup>3</sup> /s]		0,106					
Volume total [m <sup>3</sup> ]		250,00					
Índice de comportamento, $n'$		0,39			0,75	1,00	0,75
Índice de consistência, $k'$ [mPa.s <sup><math>n'</math></sup> ]		5745,6			3351,0	0,9576	3351,0
Spurt loss, $S_p$ [m <sup>3</sup> /m <sup>2</sup> ]		0,001019					
Coeficiente global de filtrado, $C_L$ [m / $\sqrt{s}$ ]		$6,394 \times 10^{-6}$					

A tabela 6.7 apresenta os resultados finais obtidos.

Tabela 6.7 - Resultados obtidos para os casos de  $E = 5171,0$  MPa

Caso	Modelo	Volume Total (m <sup>3</sup> )	Pressão Máxima (MPa)	Abertura Máxima (mm)	Perda Inicial Filtrado (%)	Filtrado Total (%)	Comprimento (m)	Meia Altura (m)
G	Q3DFRAC	248,7	0,464	14,79	20,58	29,1	89,43	89,43
	SAHFRAC	248,2	0,640	18,54	18,91	25,3	86,78	84,51
	FRANK	255,6	0,500	15,24	21,01	28,4	89,67	93,59
	MFRAC-II		0,390	14,48			99,82	99,79
	HYFRAC	253,4	0,380	12,70	22,64	25,9	87,45	102,50
H	Q3DFRAC	272,0	1,311	35,29	7,74	11,1	57,44	57,29
	SAHFRAC	275,2	1,320	35,81	7,46	11,5	57,58	55,70
	FRANK	274,5	1,270	34,29	8,02	10,3	57,70	59,60
	MFRAC-II		1,290	36,58			60,11	60,09
	HYFRAC	274,2	1,150	32,51	7,52	12,6	57,09	56,40
I	Q3DFRAC	255,8	0,707	18,87	17,98	25,6	110,29	65,17
	SAHFRAC	251,9	0,850	21,84	16,66	23,2	103,27	63,51
	FRANK	250,6	0,689	17,53	18,79	25,3	112,20	65,59
	MFRAC-II		0,600	19,05			117,59	60,44
	HYFRAC	249,6	0,630	19,05	25,48	20,0	130,09	76,40
J	Q3DFRAC	242,5	0,697	18,38	18,41	25,9	107,61	64,81
	SAHFRA)	234,0	0,850	21,34	16,62	16,6	99,00	61,40
	FRANK	242,2	0,760	18,80	17,89	23,9	100,19	67,59
	MFRAC-II		0,610	19,81			108,17	62,45
	HYFRAC	242,0	0,760	20,32	23,87	16,0	115,00	78,50
K	Q3DFRAC	241,5	0,248	5,84	32,51	45,8	261,90	46,84
	SAHFRAC	235,6	0,340	9,65	26,40	32,3	233,87	41,56
	FRANK							
	MFRAC-II		0,250	6,35			446,99	35,75
	HYFRAC	238,3	0,530	21,59	27,33	31,0	202,69	50,20
L	Q3DFRAC	254,5	1,092	21,83	16,36	23,2	150,87	43,12
	SAHFRAC	272,1	1,060	27,94	14,14	20,3	152,13	39,52
	FRANK	267,4	0,980	25,15	14,80	20,0	171,08	36,15
	MFRAC-II		1,040	23,62			145,08	36,74
	HYFRAC	268,6	0,950	22,86	11,81	17,0	134,69	36,80

O caso G resulta numa fratura radial, por não existir contrastes de tensões entre a zona de interesse e as zonas adjacentes. Os dados de entrada são os mesmos do caso A, exceção ao módulo de elasticidade que foi multiplicado por 10.

Como era de se esperar, a fratura apresentou abertura bem menor, com comprimento e altura bem maiores. Os resultados foram bastante consistentes com os resultados dos demais modelos.

A figura 6.9 apresenta os resultados, no tempo, do caso G.

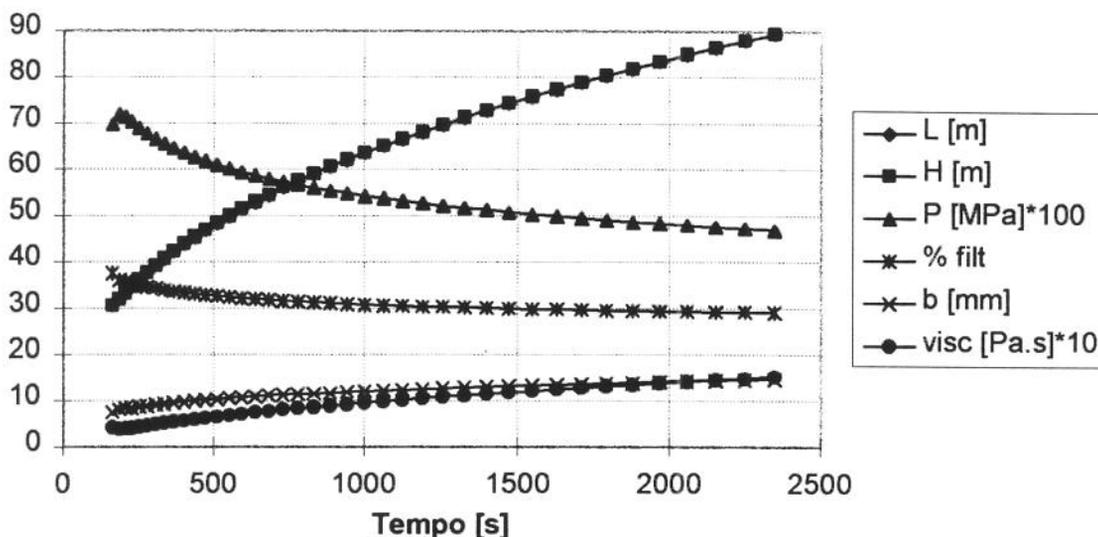


Figura 6.9 - Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso G

Para o caso H, adotou-se um valor para a tenacidade da rocha ao fraturamento 10 vezes maior que a do caso G. As pressões e aberturas se mostraram maiores, o comprimento e altura finais menores, e a perda inicial de filtrado significativamente menor, ou seja, todos os resultados obtidos se mostraram coerentes com o incremento da tenacidade da rocha. Os resultados comparativos entre os diversos modelos também se apresentaram coerentes.

A figura 6.10 apresenta os resultados, no tempo, do caso H.

Devido a tenacidade muitíssimo elevada para o respectivo módulo de elasticidade com que se está trabalhando, o tempo do primeiro passo de iteração, referente a geometria inicial de fratura resultou bastante elevado. Uma solução adequada seria a diminuição das dimensões da geometria inicial, o que não foi feito até para mostrar esta característica, e manter um mesmo padrão para todos os casos analisados.

No caso I, incluiu-se os contrastes simétricos de tensões, o que, similar ao caso E, resultou numa fratura alongada e não mais radial. Novamente, os valores obtidos pelo simulador proposto (Q3DFRAC) se apresentaram bastante coerentes com os valores dos demais modelos. A figura 6.11 apresenta, no tempo, os resultados obtidos com a simulação do caso I. Neste caso foi observada uma incoerência entre a perda de filtrado inicial no modelo HYFRAC e a perda de filtrado total, já que a perda inicial deveria ser inferior ao filtrado total.

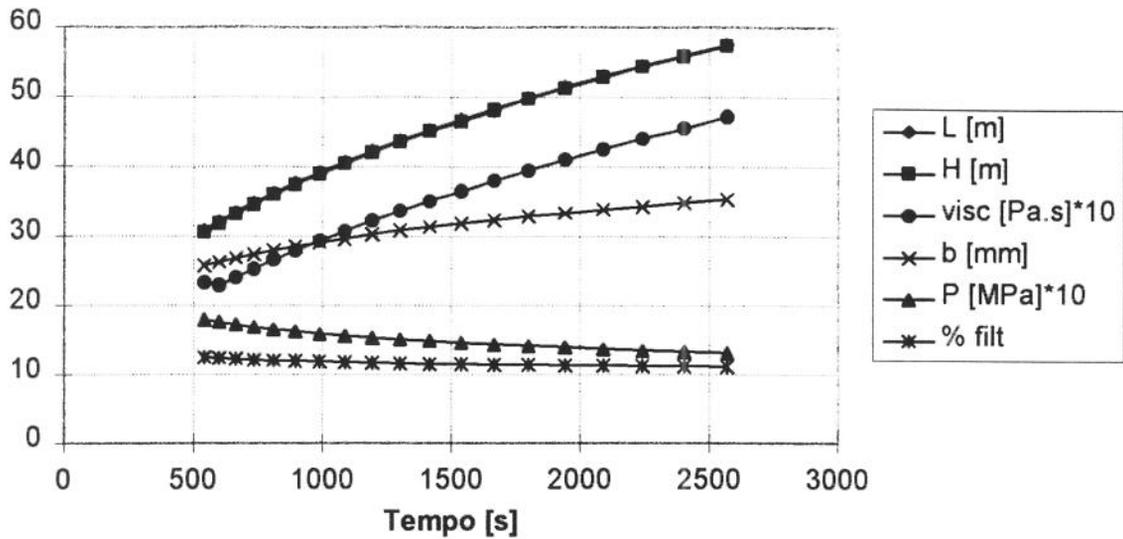


Figura 6.10 - Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso H

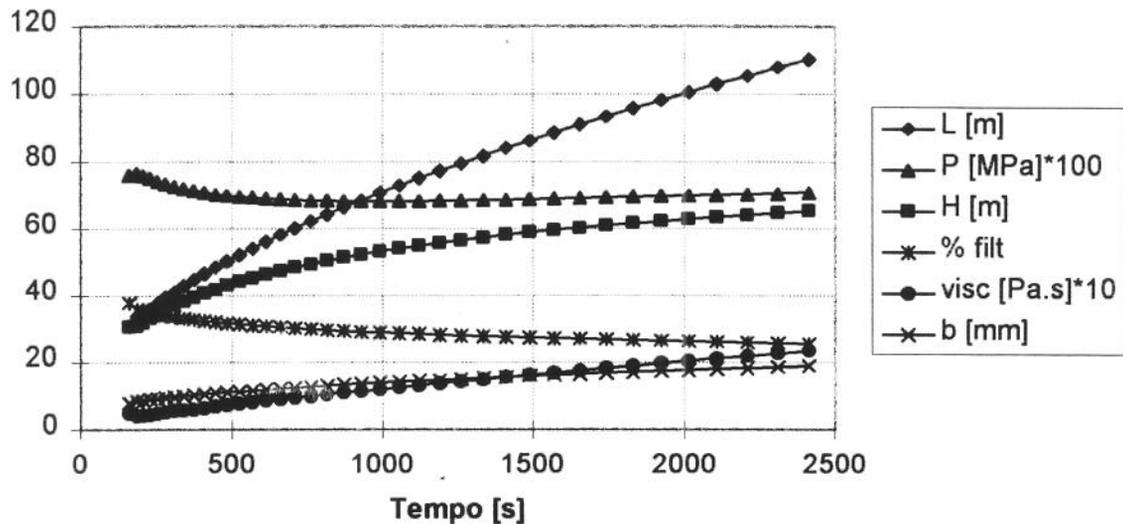


Figura 6.11 - Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso I

O caso J é similar ao caso I, alterando-se somente o tipo de fluido injetado. Os resultados também foram consistentes. Também foram observadas incoerências entre a perda de filtrado inicial e a perda de filtrado total, tanto no simulador SAHFRAC, quanto no simulador HYFRAC. A figura 6.12 apresenta, no tempo, os resultados obtidos com a simulação do caso J.

No caso K, mudou-se novamente o fluido, adotando um fluido Newtoniano, com viscosidade bastante inferior aos anteriores. Como era esperado, a abertura, a altura e as pressões ficaram menores, enquanto houve um aumento expressivo no comprimento da fratura. Foi o caso onde os resultados dos diversos modelos se mostraram mais díspares. O modelo proposto (Q3DFRAC) apresentou perda de filtrado inicial e total bem superiores aos demais modelos, e como consequência, abertura menor.

O modelo HYFRAC gerou aberturas e pressões muito superiores aos demais modelos, não sendo encontrado uma explicação para este fato. A figura 6.13 apresenta, no tempo, os resultados obtidos para a simulação do caso K. Não deixa de ser estranho que as

maiores discrepâncias tenham sido observadas com fluidos Newtonianos, onde os simuladores como o proposto (Q3DFRAC) não necessita de hipótese simplificadora para o cálculo da viscosidade aparente média. Apesar de ser fluido Newtoniano, sua viscosidade é muito baixa, se aproximando da viscosidade da água, que é um fluido não mais utilizado para fraturamentos hidráulicos. Causa até certa estranheza, que o trabalho de Boutéca (FRANK) não tenha relatado os resultados obtidos para este caso. Com os resultados obtidos, não é possível se obter qualquer conclusão.

Os casos M e O apresentados na seção seguinte, utilizam fluidos Newtonianos, e novas comparações serão efetuadas.

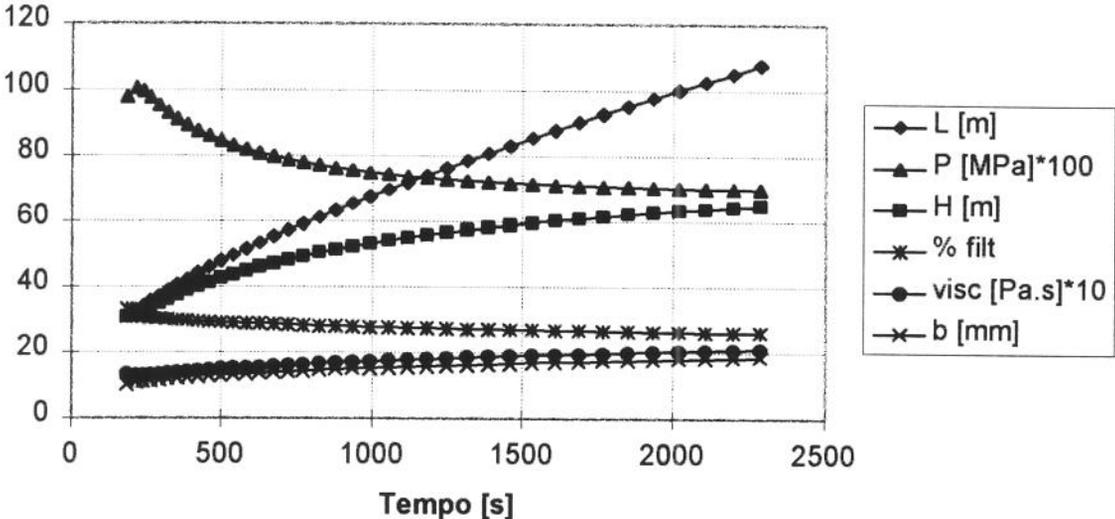


Figura 6.12 - Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso J

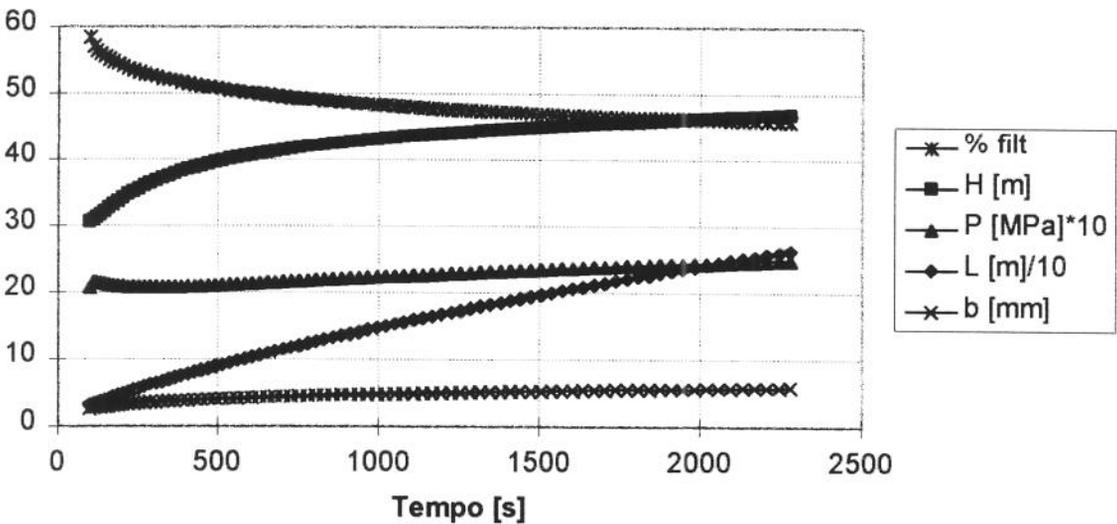


Figura 6.13 - Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso K

O caso L é idêntico ao J, com exceção dos contrastes de tensões que foram incrementados em cinco vezes. As fraturas resultantes possuem alturas menores, comprimento, abertura e pressões maiores. Este comportamento era esperado, pois restringindo o crescimento em altura da fratura, a abertura da fratura necessita crescer para dar passagem a mesma vazão de bombeio utilizada, e para tanto, acontece um conseqüente aumento de pressão. A figura 6.14 apresenta, no tempo, os resultados obtidos para o caso L.

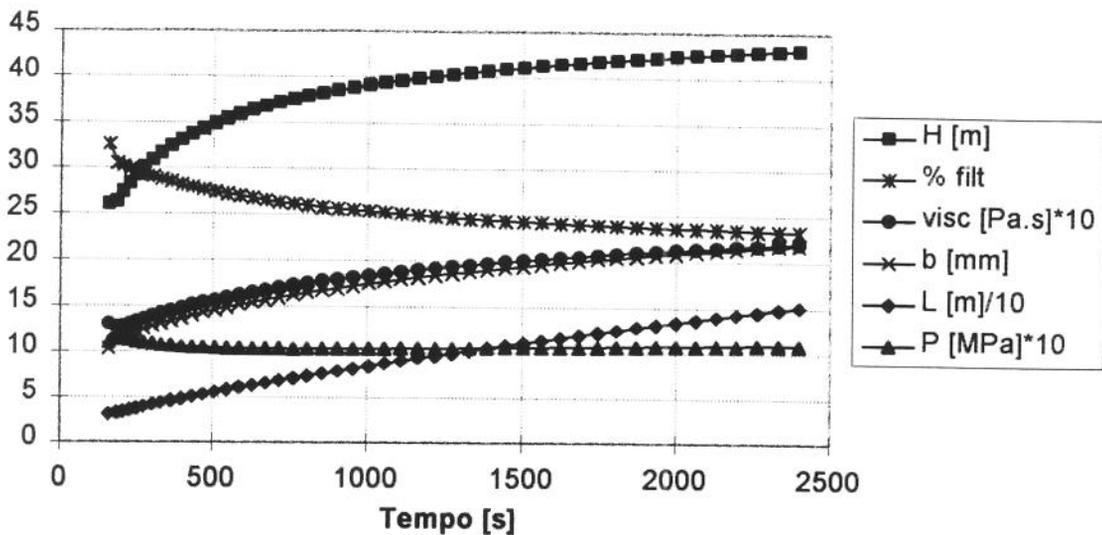


Figura 6.14 - Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC, caso L

#### 6.4. Fraturas com contrastes assimétricos de tensões

A tabela 6.8 apresenta os dados de entrada para os casos de elevado módulo de elasticidade do trabalho de Abou-Sayed [Abou84a].

Tabela 6.8 - Dados de entrada para os casos de  $E = 35770,39$  MPa

(valores padrão são aqueles do caso M)			
Rocha	Caso M	Caso N	Caso O
Espessura zona interesse, $2H_R$ [m]	18,90		
Módulo de elasticidade, $E$ [MPa]	35770,39		
Coefficiente de Poisson, $\nu$	0,29		
Contraste assimétrico de tensões [MPa]			
superior	6,20523		
inferior	9,65258		
Tenacidade, $K_{IC}$ [ $MPa\sqrt{m}$ ]	5,412		
Fluido			
Vazão total de injeção, $Q$ [ $m^3/s$ ]	0,06625		
Volume total [ $m^3$ ]	24,168	37,206	9,222
Índice de comportamento, $n'$	1,0	0,4	1,0
Índice de consistência, $k'$ [ $mPa.s^{n'}$ ]	75,1716	7182,00	0,9576
Spurt loss, $S_p$ [ $m^3/m^2$ ]	$1,4261 \times 10^{-5}$		
Coefficiente global de filtrado, $C_L$ [ $m / \sqrt{s}$ ]	$1,67235 \times 10^{-6}$		

Os contrastes assimétricos de tensões, como será demonstrado na sequência, se apresentaram de difícil solução, para o estágio de desenvolvimento em que se encontra o modelo proposto (Q3DFRAC).

Esta assimetria implica que o fator de intensidade de tensões para  $z = -H$  é diferente daquele encontrado em  $z = +H$  (equações 3.67 e 3.68), fazendo com que na propagação um dos pontos se deslocasse mais que o outro (figura 5.11). Somente a título de comparação, inicialmente foram simuladas três situações com contrastes simétricos de tensões “equivalentes” para cada um dos três casos assimétricos apresentados, (M, N e O). Os resultados obtidos estão na tabela 6.9.

Tabela 6.9 - Resultados obtidos para os casos de  $E = 35770,39$  MPa, excluindo a assimetria dos contrastes de tensões para o modelo Q3DFRAC

Caso	Modelo	Volume Total (m <sup>3</sup> )	Pressão Máxima (MPa)	Abertura Máxima (mm)	Perda Inicial Filtrado (%)	Filtrado Total (%)	Comprimento (m)	Meia Altura (m)
M	SAHFRAC	21,3	5,400	6,35	0,86	7,4	131,70	15,47
	MFRAC-II		5,010	5,59	0,88		136,09	15,20
	HYFRAC	21,2	5,830	7,87	0,81	7,3	119,91	16,02
	(1) Q3DFRAC	21,3	4,094	5,01	1,08	4,3	143,51	17,97
	(2) Q3DFRAC	21,4	4,480	5,09	1,06	4,3	152,17	16,68
	(3) Q3DFRAC	21,6	4,819	5,16	1,04	4,3	160,25	15,71
N	SAHFRAC	35,7	7,779	8,64	0,63	6,7	89,15	28,29
	MFRAC-II		5,890	8,38			136,40	20,80
	HYFRAC	37,2	6,584	8,64	0,76	6,7	134,69	23,39
	(1) Q3DFRAC	37,2	6,605	9,84	0,62	3,2	115,45	22,45
	(2) Q3DFRAC	37,1	7,230	10,08	0,61	3,1	120,83	20,91
	(3) Q3DFRAC	37,2	7,783	10,29	0,60	3,1	125,87	19,74
O	SAHFRAC	9,3	2,720	3,05	1,52	8,2	144,17	10,93
	MFRAC-II		2,550	2,54			158,50	10,00
	HYFRAC	9,3	2,910	2,79	1,37	8,4	114,60	12,45
	(1) Q3DFRAC	9,4	2,627	2,61	1,76	5,3	128,65	14,33
	(2) Q3DFRAC	9,5	2,888	2,67	1,72	5,3	137,14	13,33
	(3) Q3DFRAC	9,4	3,107	2,70	1,70	5,2	142,38	12,56
Contrastes simétricos de tensões adotados: (1) 6,205 MPa; (2) 7,928 MPa; (3) 9,652 MPa								

Na tabela 6.9, os resultados das simulações, apresentadas com o índice (1) para o modelo Q3DFRAC, foram obtidos com contrastes simétricos de tensões iguais a 6,205 MPa, ou seja alterou-se o valor do contraste de tensão inferior apresentado na tabela 6.8. Para o

índice (2) utilizou-se um valor médio dos contrastes de tensões  $[\sigma = (6,205 + 9,652) / 2]$  e para o índice (3), adotou-se o contraste de tensões inferior apresentado na tabela 6.8, para ambos os contrastes, superior e inferior. Como era esperado, para as simulações com maiores contrastes de tensões (3), menores foram as meia alturas, maiores os comprimentos, aberturas e pressões.

Esperava-se, num primeiro momento, que os resultados dos casos (1) e (3) envolvessem os resultados dos demais simuladores, o que não se verificou.

Para o caso M, todas as 3 simulações, resultaram pressões e aberturas inferiores aos resultados dos demais modelos, enquanto os comprimentos se apresentaram maiores. Para o simulador HYFRAC, que é verdadeiramente tridimensional, a situação assimétrica não apresenta maiores dificuldades de tratamento. O simulador SAHFRAC, por sua vez, que utiliza os mesmos conceitos adotados pelo simulador proposto Q3DFRAC, apresenta seus resultados razoavelmente coerentes com os outros dois modelos, porém, não apresenta explicações como estes resultados foram conseguidos. Na apresentação dos resultados de uma outra situação assimétrica, Rueda [Rued94] utiliza em gráficos as descrições “altura superior” e “altura inferior”. Poderia ser entendido, similar ao proposto por este autor, como a possibilidade de deslocamento do centro da elipse em relação a origem dos eixos, fato que Rueda não teceu qualquer consideração.

A figura 6.15 apresenta, no tempo, os resultados para o caso M, com contrastes simétricos de 6,205 MPa (1) e 9,652 MPa (3). Os resultados para contrastes de 7,928 MPa não foram apresentados, para que a figura não perdesse clareza.

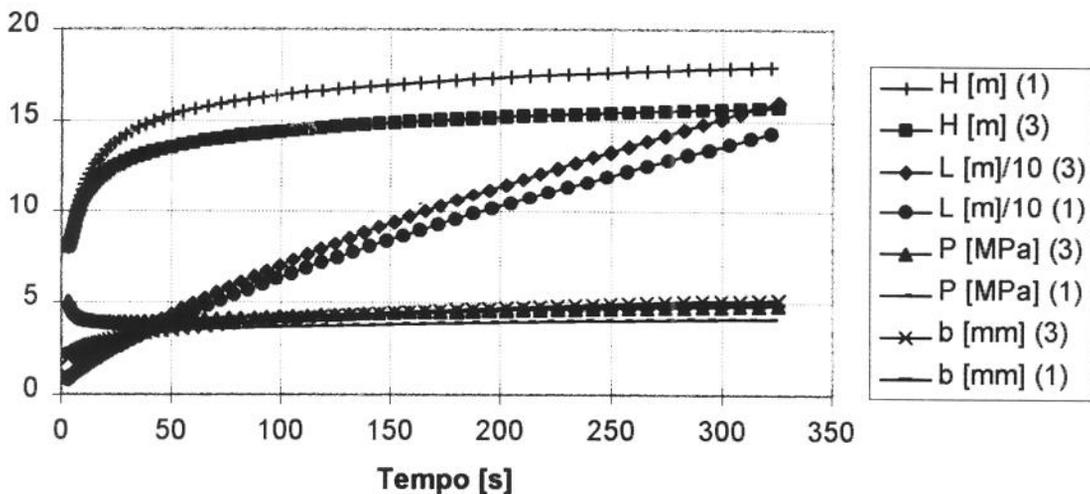


Figura 6.15 - Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC  
(1) 6,205 MPa; (3) 9,652 MPa

Para o caso N, os resultados se aproximaram bastante com os resultados dos demais modelos, sendo que neste caso utilizou-se um fluido de potência, e não mais o fluido Newtoniano do caso M. Somente a abertura se apresentou ligeiramente maior.

Os resultados obtidos para o caso O, também se apresentaram bastante coerentes com os resultados dos demais simuladores.

Com estes resultados obtidos, pode-se afirmar ser possível encontrar uma boa “estimativa” da fratura que pode ser executada, com contrastes de tensões assimétricos de tensões, utilizando representações simétricas. Quanto menor a assimetria, melhores devem ser os resultados.

Para situações onde a assimetria é pronunciada, ou se deseja resultados mais precisos por algum motivo especial, que pode ser, por exemplo, a existência de pequena espessura de zona confinante (folhelho) separando zona de água de zona de óleo, o simulador não se apresenta adequado.

Na sequência, buscou-se melhorar a simulação para estes contrastes de tensões assimétricos, apresentados na tabela 6.8.

Após a exclusão do coeficiente  $P_{21}$  (equação 4.14), devido a existência dos coeficientes  $P_{20}$  e  $P_{01}$  que, aparentemente, cobriam as funções do  $P_{21}$ , a pequena contribuição do termo  $P_{21}x^2z$  no polinômio que descreve a distribuição de pressões, bem como as dificuldades de convergência do processo iterativo quando o mesmo estava presente, tentou-se um critério similar ao que foi adotado para o caso simétrico, ou seja, manteve-se constantes as seguintes relações na propagação:  $C_{01}/H$ ,  $C_{20}/L^2$ ,  $C_{02}/H^2$  e  $C_{03}/H^3$ . Quanto ao deslocamento relativo dos pontos da borda da fratura, utilizou-se a equação 5.13.

A figura 6.16 apresenta os resultados obtidos, para o caso M apresentado na tabela 6.8, para contrastes simétricos de tensões 7,928 MPa (2), com  $C_{20}/L^2$ ,  $C_{02}/H^2$  constantes na propagação (vide 5.6.2.1), utilizado como base de comparação, e também para contrastes assimétricos de tensões 6,205 MPa x 9,652 MPa (4), com  $C_{01}/H$ ,  $C_{20}/L^2$ ,  $C_{02}/H^2$  e  $C_{03}/H^3$  constantes na propagação, ou seja buscando critérios similares para  $C_{01}$  e  $C_{03}$  daqueles utilizados para  $C_{20}$  e  $C_{02}$ .

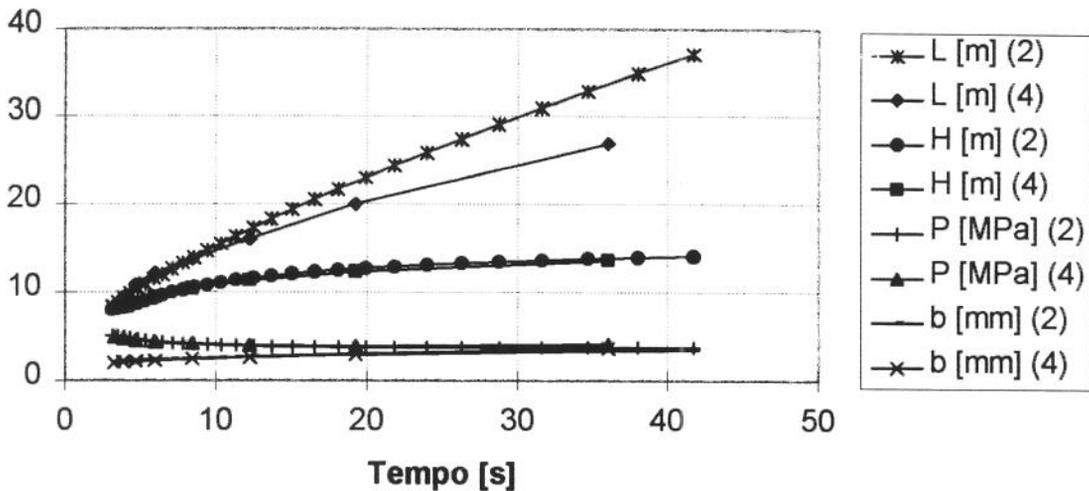


Figura 6.16 - Resultados comparativos para o modelo Q3DFRAC, entre contrastes simétricos (2) e assimétricos (4) de tensões

Os resultados obtidos para contrastes assimétricos (4) foram bastante insatisfatórios. Foi observado, devido a assimetria bastante pronunciada, comportamentos estranhos para os fatores de intensidade de tensões, em  $z = -H$  e  $z = +H$ . Caso o fator de intensidade de tensões máximo fosse limitado ao crítico ( $K_I = K_{IC}$ ), que é justamente o critério de

propagação adotado, a partir de um determinado passo, o menor dos valores ficava inferior a zero, o que significa que a fratura estaria se fechando. No caso mostrado na figura 6.16, para eliminar este fator de intensidade de tensões negativo, deixou-se injetar mais fluido, elevando o fator de intensidade de tensões acima do crítico em vários pontos da borda da fratura, sendo que este maior valor do fator de intensidade de tensões também apresentava tendência de crescimento ( $K_I \gg K_{IC}$ ). Pode-se observar na figura 6.16, que os espaçamentos entre os passos de iteração também apresentaram uma tendência de crescimento acentuado, similar ao fator de intensidade. Estes resultados foram considerados insatisfatórios, e foram abandonados.

Estudou-se na sequência, um critério de propagação com os coeficientes  $C_{01}$  e  $C_{03}$  constantes. A figura 6.17 apresenta os resultados obtidos, para o caso M apresentado na tabela 6.8, para contrastes simétricos de tensões 7,928 MPa (2), com  $C_{20}/L^2$ ,  $C_{02}/H^2$  constantes na propagação (vide 5.6.2.1), que é utilizado como base de comparação, e também para contrastes assimétricos de tensões 6,205 MPa x 9,652 MPa (5), com  $C_{01}$ ,  $C_{20}/L^2$ ,  $C_{02}/H^2$  e  $C_{03}$  constantes na propagação. Novamente os problemas enfrentados foram os mesmos, e o critério também abandonado.

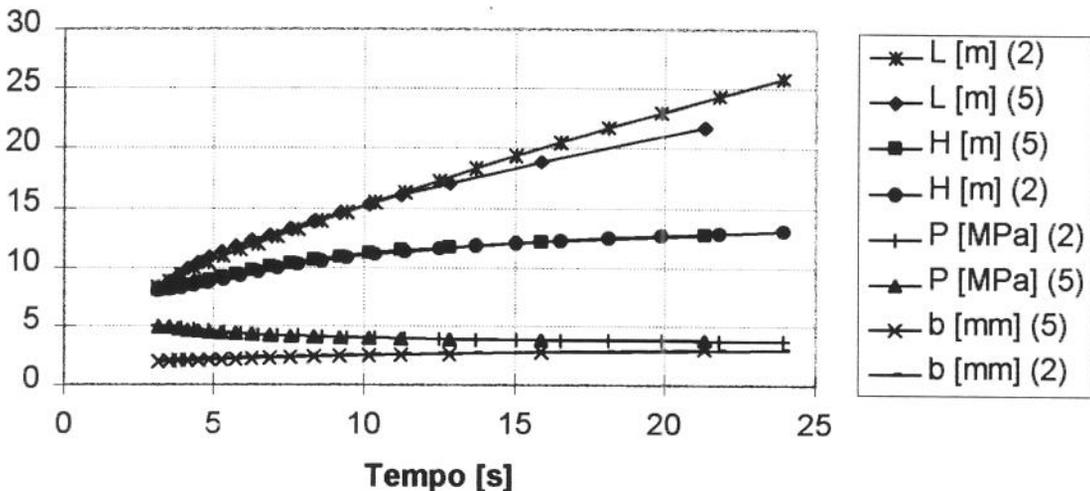


Figura 6.17 - Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC,  $C_{01}$  e  $C_{03}$  constantes na propagação; (2) 7,928 MPa x 7,928 MPa; (5) 6,205 MPa x 9,652 MPa

Estudou-se uma outra possibilidade, que já não se havia mostrado adequada para a situação mais simples, com contrastes simétricos de tensões, ou seja adotou-se todos os coeficientes  $C_{ij}$  constantes durante a propagação. A figura 6.18 apresenta os resultados obtidos, permanecendo os mesmos problemas.

Estes mesmos comportamentos para os coeficientes da função tensão harmônica  $C_{ij}$ , durante a propagação, foram analisados com o deslocamento relativo dado pela equação (5.14), também sem obter sucesso.

Com os testes efetuados, pode-se dizer que dos critérios analisados, nenhum apresenta os requisitos mínimos de qualidade, e portanto, demandam novos estudos para que os contrastes assimétricos de tensões possam ser adequadamente considerados.

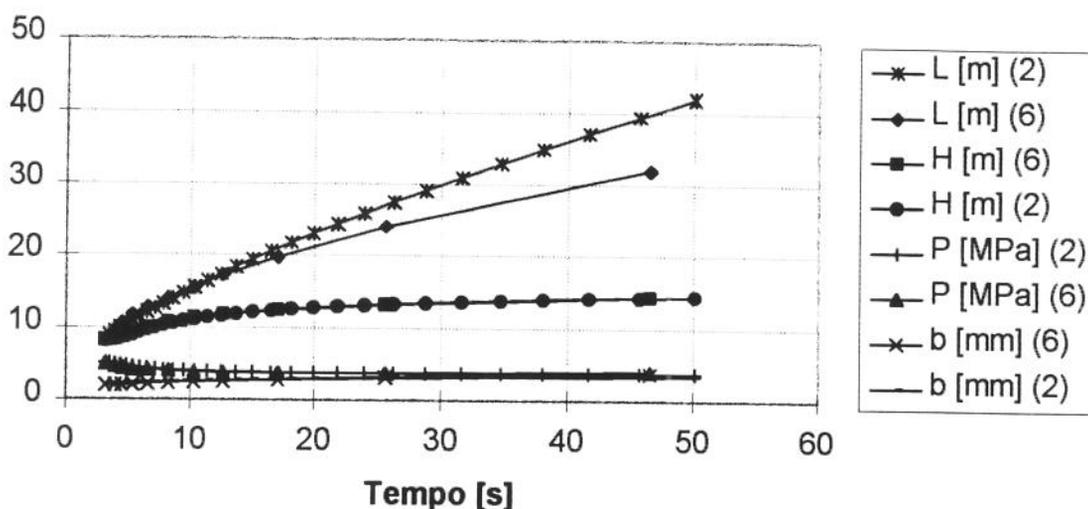


Figura 6.18 - Resultados obtidos para o modelo Q3DFRAC  
(2) 7,928 MPa x 7,928 MPa; (6) 6,205 MPa x 9,652 MPa e  $C_{ij}$  constantes na propagação

Warpinski [Warp93] apresenta duas novas situações assimétricas para análise: caso de três camadas e o caso de cinco camadas. Na sequência apresenta-se a análise comparativa do caso de três camadas. Existe neste caso pequena assimetria, no que se refere aos contrastes de tensões, e assimetria litológica significativa. Deve ser lembrado que o modelo proposto (Q3DFRAC) só comporta um único módulo de elasticidade e um único coeficiente de Poisson. A tabela 6.10 apresentam os dados de entrada.

Tabela 6.10 - Dados de entrada para o caso 3 camadas

Espessura [m]	Tensão Horizontal [MPa]	Coefficiente de Poisson	Módulo elasticidade [MPa]	Tenacidade [MPa.m <sup>1/2</sup> ]
54,86	49,30	0,30	44815,5	2,20
51,82	39,30	0,21	58604,9	2,20
94,49	50,68	0,29	37920,8	2,20
$S_p = 0$	$C_L = 9,837 \times 10^{-6} \text{ m/s}^{1/2}$	$n' = 0,5$	$k' = 2872,8 \text{ mPa.s}^{n'}$	
	$Q = 0,1325 \text{ m}^3/\text{s}$	$\text{Volume} = 1590 \text{ m}^3$		

Na simulação, utilizou-se coeficiente de Poisson igual a 0,21 e o módulo de elasticidade igual a 51710 MPa, ou seja uma média entre as diversas camadas. A pequena assimetria entre os contrastes de tensões (contraste superior igual a 11,38 MPa e inferior, igual a 10 MPa) também foi excluída, utilizando-se um valor médio (contrastos superior e inferior iguais a 10,69 MPa). Os resultados estão mostrados na tabela 6.11.

Tabela 6.11 - Resultados obtidos para o caso 3 camadas

Caso	Modelo	Volume Total (m <sup>3</sup> )	Pressão Máxima (MPa)	Abertura Máxima (mm)	Filtrado Total (%)	Comprimento (m)	Meia Altura (m)
3 camadas	Q3DFRAC	1580	7,58	19,27	29,10	852,3	51,80
	SAHFRAC	1584	9,35	23,87	23,7	622,3	65,29
	NSI	1588	6,93	17,02	32,0	1002,00	55,01
	TRIFRAC	1588	7,54	19,05	22,04	993,3	56,54
	ARCSTIM	1588	7,47	16,51	31,0	986,0	53,79

Os resultados do modelo Q3DFRAC se apresentam razoavelmente coerentes com os resultados dos modelos [Warp93] NSI, TRIFRAC e ARCSTIM. Os resultados se aproximariam ainda mais caso o módulo de elasticidade utilizado fosse o da camada central. Porém esta solução estaria indicando que as camadas adjacentes, com diferentes módulos de elasticidade, pouco influenciariam a geometria de fratura, o que não deve ser verdade, já que a altura total final dos modelos está em torno de 110 metros (2 vezes a meia altura), e a espessura da zona de interesse possui somente 39,30 metros.

# CAPÍTULO 7

## ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

### 7.1. Introdução

Este capítulo se propõe a apresentar, de forma sistematizada, uma análise de sensibilidade do modelo proposto (Q3DFRAC) em relação aos dados de entrada mais críticos. Analisa a sensibilidade quanto a variação da viscosidade do fluido empregado ( $\mu_a$ ), da vazão de injeção do tratamento (Q), da espessura da zona de interesse ( $2H_R$ ) para uma mesma vazão e volume por unidade de espessura, do fator de intensidade de tensões crítico ( $K_{IC}$ ), do coeficiente global de filtração ( $C_L$ ) e da perda inicial de filtrado ( $S_p$ ).

As tabelas 7.1, 7.2 e 7.3 apresentam os dados de entrada, sempre tomando como base os dados apresentados para o caso 0. Este caso 0, foi adaptado do caso M, apresentado no trabalho de Abou-Sayed [Abou84a], simplesmente excluindo a assimetria existente entre os contrastes de tensões.

Tabela 7.1 - Dados de entrada para os casos 0, 1, 2, 3, 4

(valores padrão são aqueles do caso 0)						
<b>Rocha</b>	<b>Casos →</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
Espessura zona interesse, $2H_R$ [m]		18,90				
Módulo de elasticidade, E [MPa]		35770,39				
Coeficiente de Poisson, $\nu$		0,29				
Contraste de tensões [MPa]		6,205				
Tenacidade, $K_{IC}$ [MPa $\sqrt{m}$ ]		5,406				
<b>Fluido</b>						
Vazão total de injeção, Q [m <sup>3</sup> /s]		0,06625			0,099375	0,033125
Volume total [m <sup>3</sup> ]		24,165				
$n'$		1,0				
$k'$ [mPa.s <sup>n'</sup> ]		75,17	150,3	7,517		
Spurt loss, $S_p$ [m <sup>3</sup> /m <sup>2</sup> ]		1,4261x10 <sup>-5</sup>				
Coeficiente global de filtrado, $C_L$ [m / $\sqrt{s}$ ]		1,6723x10 <sup>-6</sup>				

Um estudo de sensibilidade não se propõe a dizer qual a melhor solução, por exemplo, num processo de otimização de fraturamento hidráulico, e sim dizer quais são os caminhos disponíveis para resolver determinados problemas. O perfeito entendimento dos efeitos, na geometria final da fratura, decorrentes da mudança de cada parâmetro, auxilia bastante tanto o técnico que vai programar o fraturamento, quanto o técnico que vai executá-lo. Manteve-se os marcadores nos gráficos de pressão para informar o tamanho de cada passo de propagação, sendo os mesmos excluídos nos gráficos de geometria (comprimento, metade da altura e abertura) para melhorar a clareza.

### 7.2. O efeito da viscosidade

Como pode ser observado nos dados de entrada, o fluido é Newtoniano. No caso (1), a viscosidade ( $\mu_a$ ) foi multiplicada por 2, quando comparado aos dados do caso (0), e no caso (2), dividida por 10. As figuras 7.1 e 7.2 apresentam os resultados obtidos, no tempo.

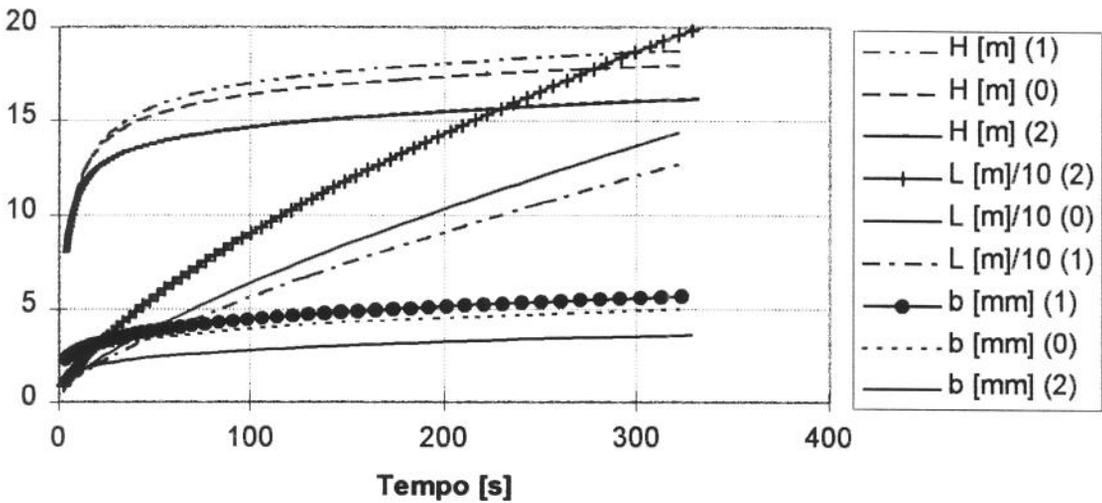


Figura 7.1- O efeito da viscosidade na geometria de fratura  
 (0)  $\mu_a = 75,17$  cP; (1)  $\mu_a = 150,34$  cP; (2)  $\mu_a = 7,52$  cP

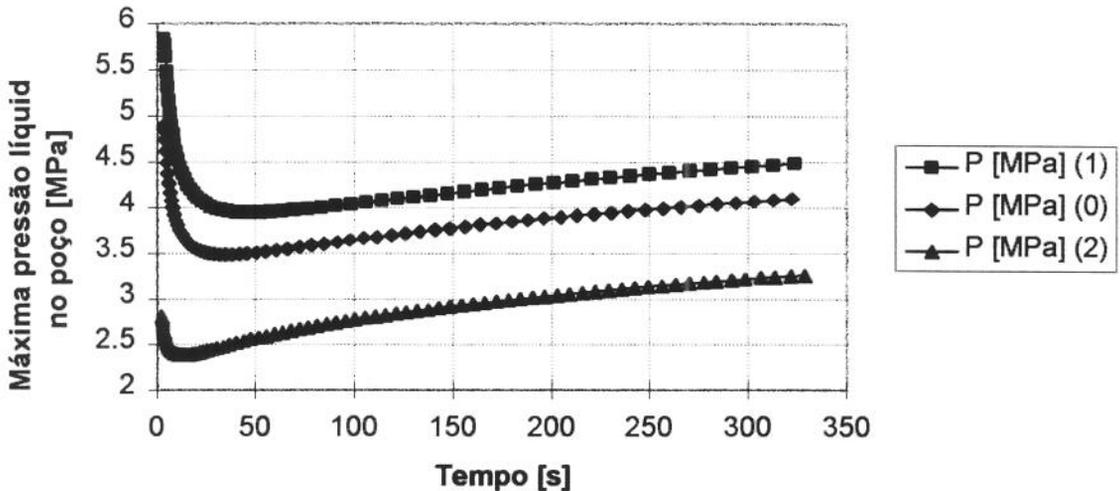


Figura 7.2- O efeito da viscosidade na pressão (0)  $\mu_a = 75,17$  cP; (1)  $\mu_a = 150,34$  cP; (2)  $\mu_a = 7,52$  cP

Como era esperado, um aumento na viscosidade do fluido ocasiona incremento da altura, da pressão e da abertura e diminuição dos comprimentos. Ou seja, caso a abertura da fratura não seja suficiente para a entrada de um agente de sustentação de determinado tamanho, é possível, através do aumento da viscosidade do fluido que está sendo injetado, atingir este objetivo. Existe uma outra maneira para aumentar a espessura da fratura que será mostrada no item seguinte.

### 7.3. O efeito da vazão de injeção

No caso (3), a vazão de injeção (Q) foi multiplicada por 1,5, quando comparada aos dados do caso (0), e no caso (4), dividida por 2. As figuras 7.3 e 7.4 apresentam os resultados obtidos com o tempo de injeção.

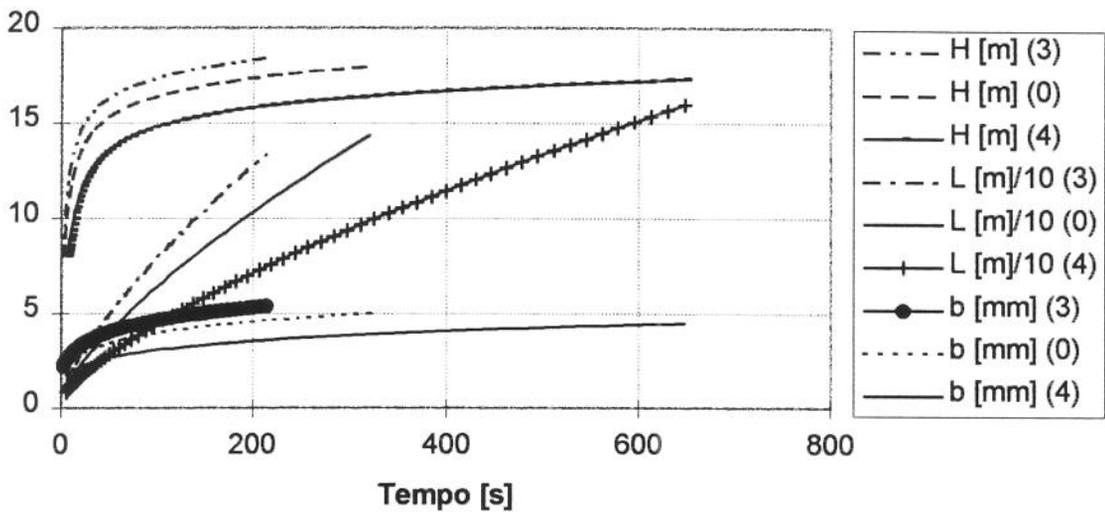


Figura 7.3- O efeito da vazão na geometria de fratura  
 (0)  $Q = 0,06625 \text{ m}^3/\text{s}$ ; (3)  $Q = 0,099375 \text{ m}^3/\text{s}$ ; (4)  $Q = 0,033125 \text{ m}^3/\text{s}$

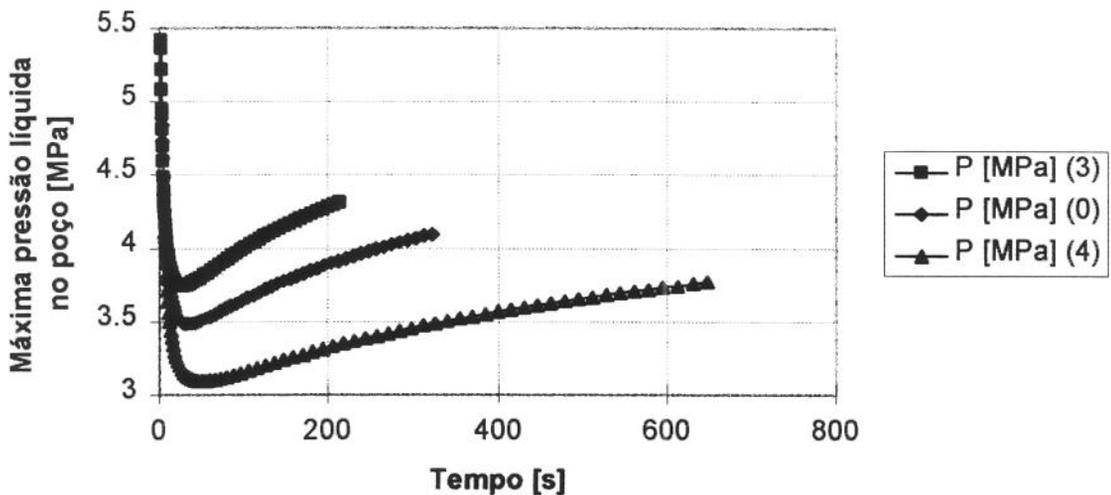


Figura 7.4- O efeito da vazão na pressão  
 (0)  $Q = 0,06625 \text{ m}^3/\text{s}$ ; (3)  $Q = 0,099375 \text{ m}^3/\text{s}$ ; (4)  $Q = 0,033125 \text{ m}^3/\text{s}$

Como o volume que está sendo bombeado permaneceu inalterado, uma maior vazão resulta num tempo menor de injeção. Um aumento na vazão de injeção ocasiona incrementos na altura, na abertura da fratura e na pressão de propagação e diminuição do comprimento da fratura.

A tabela 7.2 apresenta os dados de entrada utilizados nas próximas análises de sensibilidade.

Tabela 7.2 - Dados de entrada para os casos 0, 5, 6, 7, 8

(valores padrão são aqueles do caso 0)						
Rocha	Casos →	0	5	6	7	8
Espessura zona interesse, $2H_R$ [m]		18,90	28,35	9,45		
Módulo de elasticidade, E [MPa]		35770,39				
Coefficiente de Poisson, $\nu$		0,29				
Contraste de tensões [MPa]		6,20523				
Tenacidade, $K_{IC}$ [MPa $\sqrt{m}$ ]		5,406			8,109	2,703
<b>Fluido</b>						
Vazão total de injeção, Q [m <sup>3</sup> /s]		0,06625	0,099375	0,033125		
Volume total [m <sup>3</sup> ]		24,16	36,25	12,08		
$n'$		1,0				
$k'$ [mPa.s <sup><math>n'</math></sup> ]		75,1716				
Spurt loss, $S_p$ [m <sup>3</sup> /m <sup>2</sup> ]		1,4261x10 <sup>-5</sup>				
Coefficiente global de filtrado, $C_L$ [m / $\sqrt{s}$ ]		1,6723x10 <sup>-6</sup>				

#### 7.4. O efeito da espessura da zona de interesse

Nesta análise de sensibilidade, não se alterou somente a espessura da zona de interesse ( $2H_R$ ), pois o efeito seria equivalente ao de mudança da vazão. Buscou-se analisar uma situação mais realista, que é utilizar um mesmo volume e uma mesma vazão por unidade de espessura de zona de interesse. Ou seja, no caso (5), a espessura, o volume e a vazão foram multiplicados por 1,5, quando comparados ao caso (0), e no caso 6, divididos por 2. As figura 7.5 e 7.6 apresentam os resultados obtidos. Na figura 7.5 resolveu-se plotar não mais a altura da fratura, e sim a relação entre altura de fratura e altura da zona de interesse ( $H/H_R$ ), para se saber, em termos relativos, em qual situação a fratura vai avançar mais na zona adjacente.

Os comprimentos e aberturas pouca influência sofreram. Porém, quando a espessura da zona de interesse diminui, aumentam-se as pressões, e conseqüentemente, aumenta-se a percentagem de invasão da formação adjacente. Isto faz com que, quanto menos espessa

for a zona de interesse, percentualmente maiores devem ser as espessuras das camadas adjacentes confinantes.

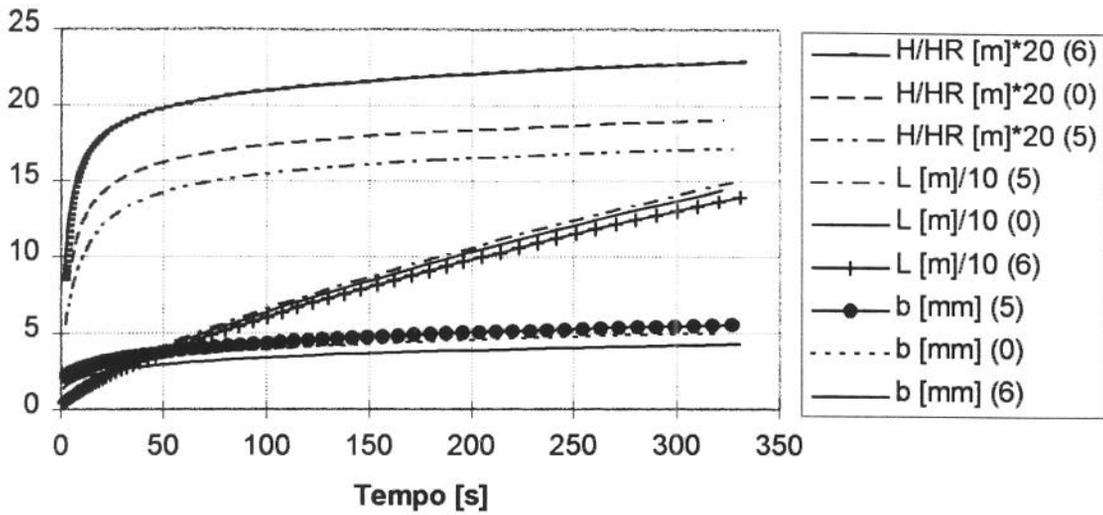


Figura 7.5 - Efeito da espessura da zona de interesse na geometria da fratura  
 (0)  $2H_R = 18,8976$  m; (5)  $2H_R = 28,3464$  m; (6)  $2H_R = 9,4488$  m

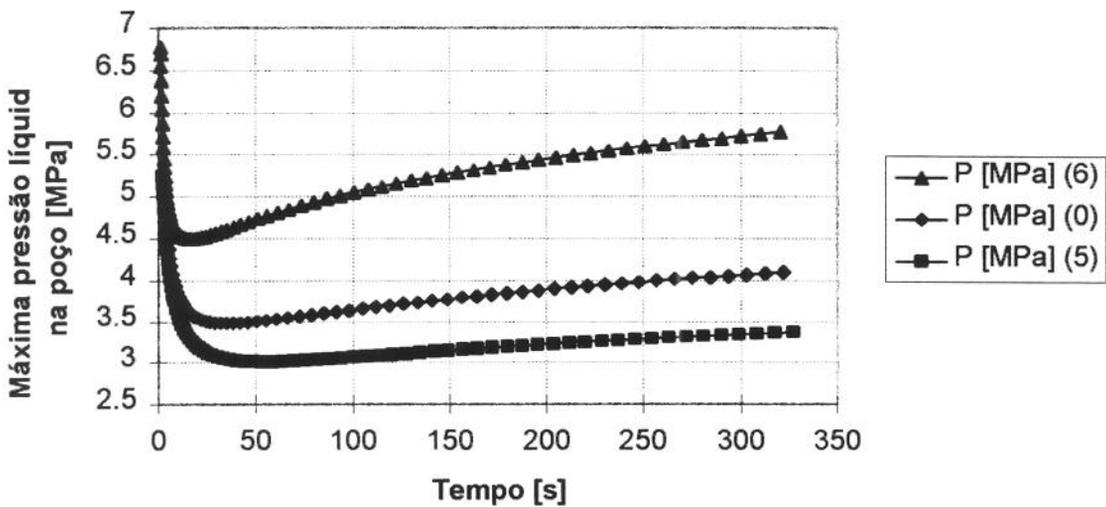


Figura 7.6 - Efeito da espessura da zona de interesse na pressão  
 (0)  $2H_R = 18,8976$  m; (5)  $2H_R = 28,3464$  m; (6)  $2H_R = 9,4488$  m

## 7.5. O efeito da tenacidade da rocha ao fraturamento

No caso (7), a tenacidade da rocha ao fraturamento ( $K_{IC}$ ) foi multiplicada por 1,5, quando comparada aos dados do caso (0), e no caso (8), dividida por 2. As figuras 7.7 e 7.8 apresentam os resultados obtidos com o tempo de injeção.

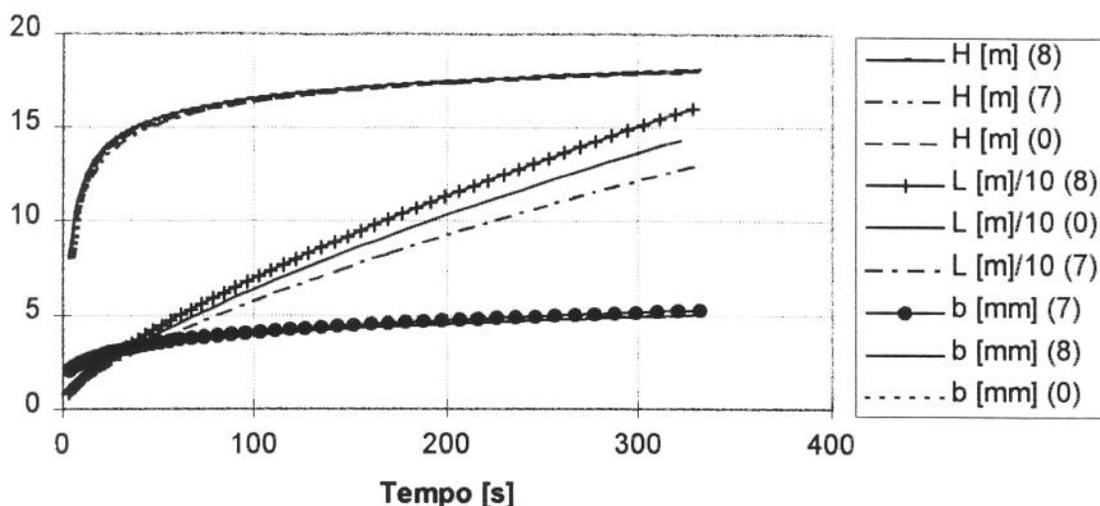


Figura 7.7 - O efeito da tenacidade da rocha ao fraturamento na geometria de fratura  
 (0)  $K_{IC} = 5,412 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  ; (7)  $K_{IC} = 8,109 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  ; (8)  $K_{IC} = 2,703 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$

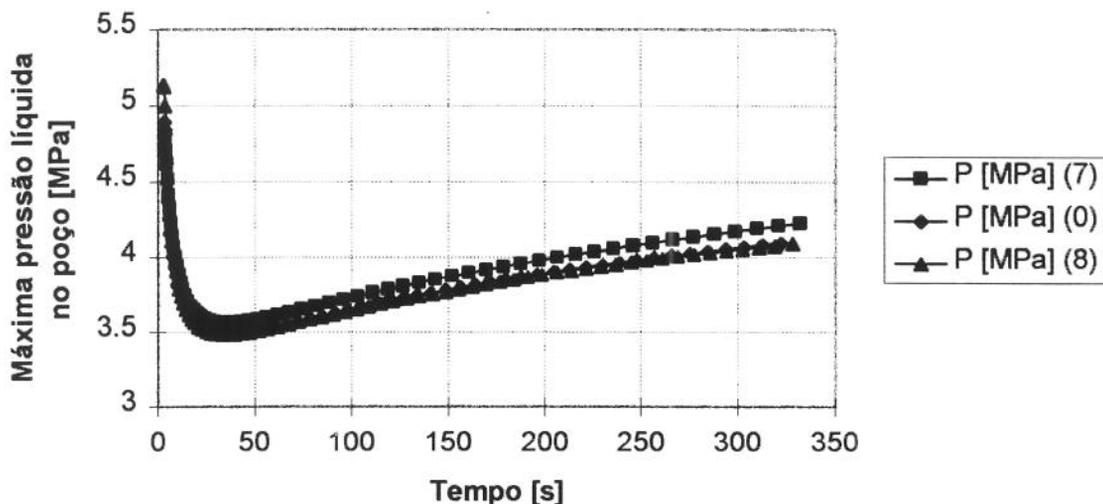


Figura 7.8 - O efeito da tenacidade da rocha ao fraturamento na pressão  
 (0)  $K_{IC} = 5,412 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  ; (7)  $K_{IC} = 8,109 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  ; (8)  $K_{IC} = 2,703 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$

Como pode ser observado nas figuras, o efeito mais pronunciado do aumento da tenacidade da rocha ao fraturamento é a consequente diminuição do comprimento da fratura. As pressões no poço (figura 7.8) quase que se mantiveram inalteradas, confirmando o que foi dito por Nolte [Nolt90], “que, para os valores normais de tenacidade da rocha ao fraturamento, o seu efeito é a décima parte do efeito correspondente à perda por fricção, e portanto, pequenas alterações não são perceptíveis na pressão no poço. Esta parcela seria significativa, se, em função da existência de uma porção *não molhada* na borda da fratura, a tenacidade aparente fosse multiplicada por dez”.

A tabela 7.3 apresenta os dados de entrada utilizados nas próximas análises de sensibilidade.

Tabela 7.3- Dados de entrada para os casos 0, 9, 10, 11, 12

(valores padrão são aqueles do caso 0)						
Rocha	Casos →	0	9	10	11	12
Espessura zona interesse, $2H_R$ [m]		18,90				
Módulo de elasticidade, E [MPa]		35770,39				
Coefficiente de Poisson, $\nu$		0,29				
Contraste de tensões [MPa]		6,20523				
Tenacidade, $K_{IC}$ [MPa $\sqrt{m}$ ]		5,406				
<b>Fluido</b>						
Vazão total de injeção, Q [m <sup>3</sup> /s]		0,06625				
Volume total [m <sup>3</sup> ]		24,165				
$n'$		1,0				
$k'$ [mPa.s <sup>n'</sup> ]		75,1716				
Spurt loss, $S_p$ [m <sup>3</sup> /m <sup>2</sup> ]		$1,4261 \times 10^{-5}$			$1,4261 \times 10^{-4}$	$7,1305 \times 10^{-6}$
Coefficiente global de filtrado, $C_L$ [m / $\sqrt{s}$ ]		$1,6723 \times 10^{-6}$	$8,3617 \times 10^{-6}$	$1,6723 \times 10^{-5}$		

## 7.6. O efeito do coeficiente global de filtração

No caso (9), o coeficiente global de filtração ( $C_L$ ) foi multiplicado por 5, quando comparado aos dados do caso (0), e no caso (10), multiplicado por 10. As figuras 7.9 e 7.10 apresentam os resultados obtidos com o tempo de injeção.

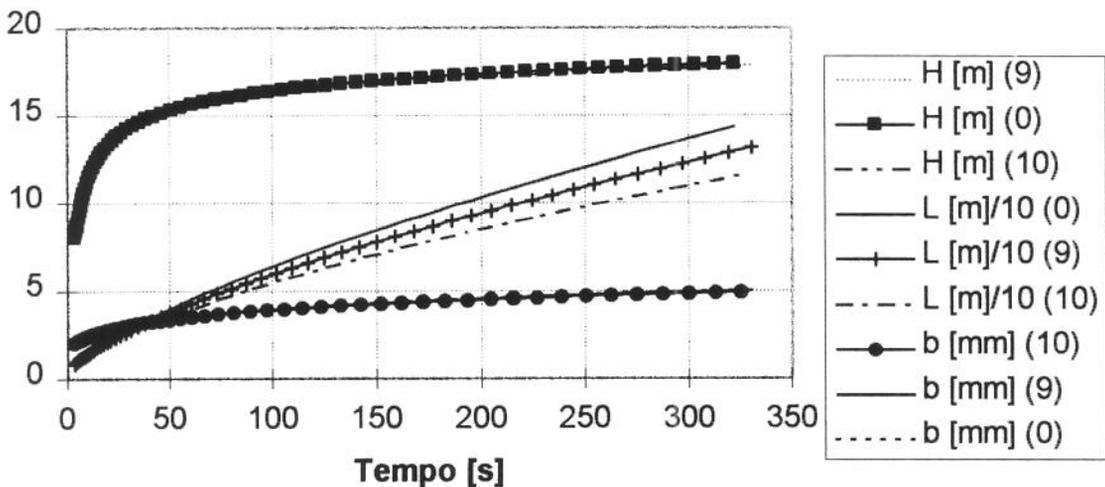


Figura 7.9 - O efeito do coeficiente global de filtração na geometria de fratura  
 (0)  $C_L = 1,67235 \times 10^{-6} \text{ m} / \sqrt{s}$ ; (9)  $C_L = 2,5085 \times 10^{-6} \text{ m} / \sqrt{s}$ ; (10)  $C_L = 1,67235 \times 10^{-5} \text{ m} / \sqrt{s}$

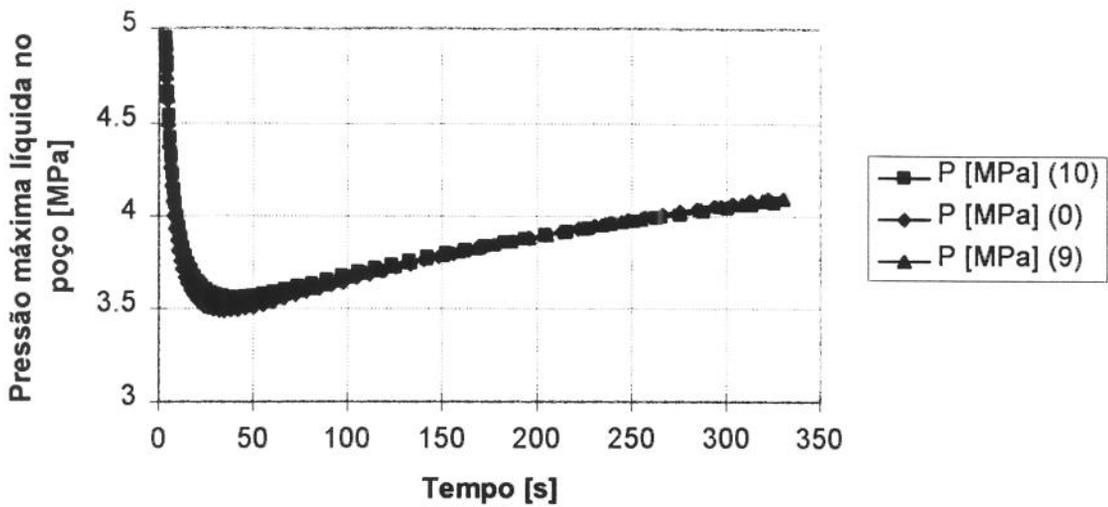


Figura 7.10 - O efeito do coeficiente global de filtração na pressão no poço  
 (0)  $C_L = 1,67235 \times 10^{-6} \text{ m}/\sqrt{s}$ ; (9)  $C_L = 2,5085 \times 10^{-6} \text{ m}/\sqrt{s}$ ; (10)  $C_L = 1,67235 \times 10^{-5} \text{ m}/\sqrt{s}$

O efeito do aumento do coeficiente global de filtração foi mais sentido na diminuição do comprimento da fratura. Poucos efeitos foram sentidos na pressão, abertura e altura da fratura. A altura sofre alguma diminuição quando os contrastes de tensões são muito baixos, e a pressão sofre pequenos acréscimos quando o incremento do coeficiente global de filtrado é muito pronunciado (20 a 30 vezes maior).

### 7.7. O efeito da perda inicial de filtrado

No caso (11), o coeficiente da perda inicial de filtrado ( $S_p$ ) foi multiplicado por 1,5, quando comparado ao caso (0), e no caso (10), dividido por 2. As figuras 7.11 e 7.12 apresentam os resultados obtidos com o tempo de injeção.

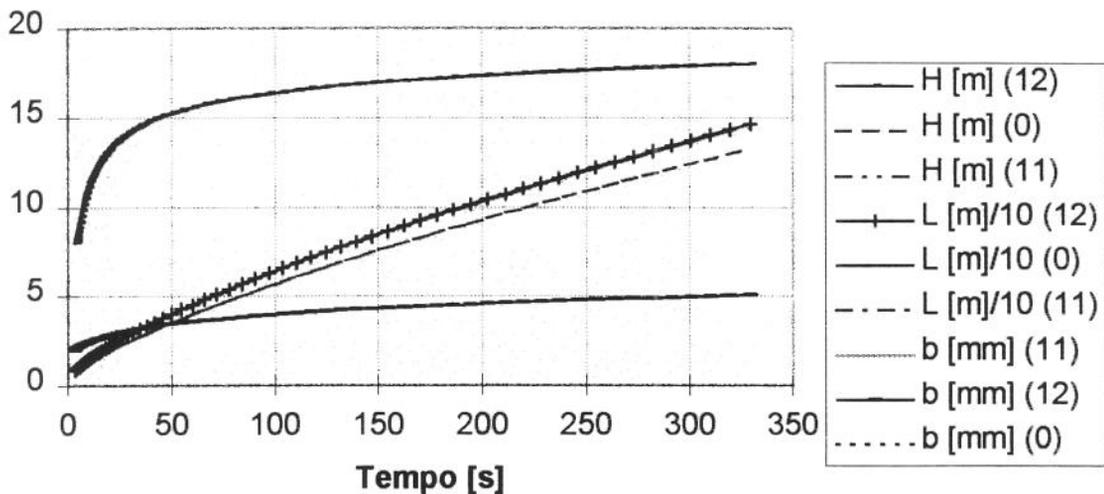


Figura 7.11 - O efeito da perda inicial de filtrado na geometria de fratura  
 (0)  $S_p = 1,4261 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{m}^2$ ; (11)  $S_p = 1,4261 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{m}^2$ ; (12)  $S_p = 7,1305 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{m}^2$

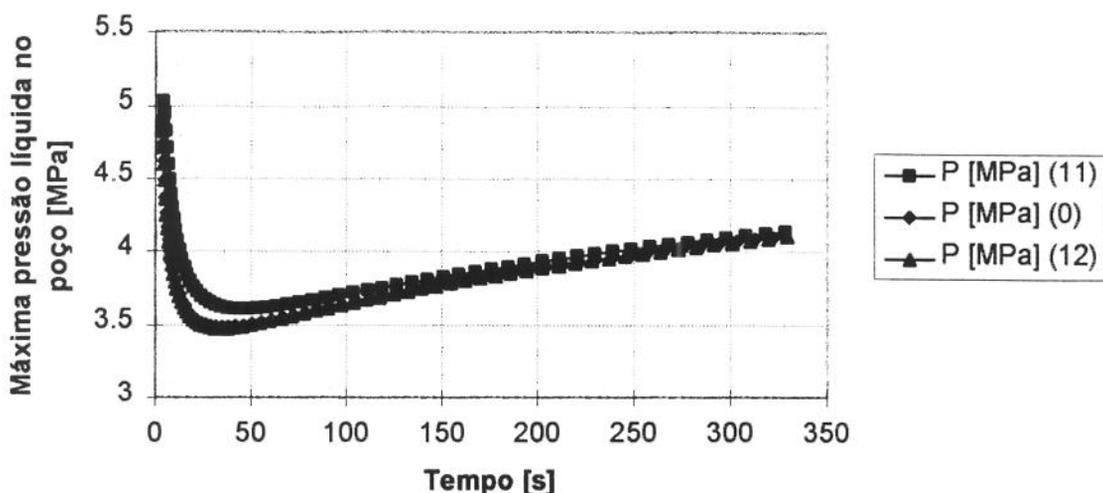


Figura 7.12 - O efeito da perda inicial de filtrado na pressão no poço  
 (0)  $S_p = 1,4261 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{m}^2$ ; (11)  $S_p = 1,4261 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{m}^2$ ; (12)  $S_p = 7,1305 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{m}^2$

De forma idêntica ao observado com o coeficiente global de filtrado, o efeito foi sentido no comprimento da fratura.

## 7.8. O efeito do módulo de elasticidade

Exemplos não serão aqui mostrados, pois pode-se fazer uso dos casos B e G do trabalho de Abou-Sayed [Abou84a]. O aumento do módulo de elasticidade (E) diminui a abertura e aumenta o comprimento e a altura da fratura, bem como aumenta também as pressões envolvidas.

## 7.9. O efeito dos contrastes de tensões

Novamente, pode-se fazer uso dos casos J e L do trabalho de Abou-Sayed. Maiores contrastes de tensões ( $\Delta\sigma$ ) ocasionam maiores comprimentos, aberturas e pressões e menores alturas.

## 7.10. Um resumo do estudo de sensibilidade

A tabela 7.4 apresenta um resumo de todas as análises realizadas neste capítulo, de uma forma que se possa utilizá-la para diagnóstico das situações encontradas.

O caractere  $\uparrow$  representa um aumento do parâmetro em questão, enquanto que o caráter  $\downarrow$  representa uma diminuição do mesmo.

Tabela 7.4 - Resumo do estudo de sensibilidade

	$L \uparrow$	$L \downarrow$	$H \uparrow$	$H \downarrow$	$b \uparrow$	$b \downarrow$	$p \uparrow$	$p \downarrow$
$\mu_a \uparrow$		⊗	⊗		⊗		⊗	
$\mu_a \downarrow$	⊗			⊗		⊗		⊗
$Q \uparrow$		⊗	⊗		⊗		⊗	
$Q \downarrow$	⊗			⊗		⊗		⊗
$H_R \uparrow$	⊗			⊗		⊗		⊗
$H_R \downarrow$		⊗	⊗		⊗		⊗	
$K_{ic} \uparrow$		⊗						
$K_{ic} \downarrow$	⊗							
$C_L \uparrow$		⊗						
$C_L \downarrow$	⊗							
$S_p \uparrow$		⊗					⊗	
$S_p \downarrow$	⊗							⊗
$E \uparrow$	⊗		⊗			⊗	⊗	
$E \downarrow$		⊗		⊗	⊗			⊗
$\Delta\sigma \uparrow$	⊗			⊗	⊗		⊗	
$\Delta\sigma \downarrow$		⊗	⊗			⊗		⊗

# CAPÍTULO 8

## CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 8.1. Conclusões

Esta dissertação analisou os diversos modelos pseudo-tridimensionais de geometria de fratura hidráulica existentes na literatura, discutiu suas limitações, e um novo modelo foi proposto. O modelo proposto, baseou-se fundamentalmente no modelo SAHFRAC [Rued94], o qual utiliza a base teórica desenvolvida por Shah e Kobayashi [Shah71], que consiste em apresentar, de forma analítica, expressões para o cálculo do fator de intensidade de tensões, das tensões e deformações para um corpo sólido contendo uma fratura elíptica plana.

Devido à existência destas expressões analíticas, o modelo despende um esforço computacional bastante reduzido, quando comparado com os modelos verdadeiramente tridimensionais. Os exemplos simulados por Abou-Sayed [Abou84a] e reproduzidos neste trabalho consumiram, cada um, cerca de cinco minutos no simulador proposto Q3DFRAC, utilizando um computador "Pentium 100 MHz - 16 MBytes RAM". Este mesmo desempenho foi obtido para a simulação das fraturas radiais apresentadas no trabalho de Sousa [Sous92], cuja simulação tridimensional podia consumir mais de 24 horas em uma Workstation DEC-5000, dependendo do grau de refinamento da malha empregada.

O modelo proposto (Q3DFRAC) trouxe mudanças significativas na forma como a perda de filtrado e a perda inicial de filtrado (*spurt loss*) são consideradas, quando comparadas ao modelo de Rueda [Rued94], mostrando inclusive a forma como o *spurt loss* é incluído na equação principal (equações 3.75 e 4.24).

Para resolver o sistema de equações não lineares (4.24), optou-se simplesmente por sua linearização, não sendo utilizado nem o método de Newton, nem o método da máxima descida, disponíveis na literatura [Cunh93]. A convergência do processo iterativo se mostrou bastante rápida, como o próprio tempo total de simulação pode confirmar.

Apresentou-se um novo enfoque para a cálculo da viscosidade aparente média ( $\mu_a$ ) do fluido (equação 5.16), que é calculada como sendo a integral da viscosidade aparente ( $\mu_{ap}$ ) calculada ponto a ponto, no domínio  $\Omega$ , dividido pela área do domínio (meia elipse). Rueda utiliza, em seu procedimento de cálculo, somente os dados de vazão, pressão e abertura ou fator de forma no poço ( $x = 0$ ).

Esta dissertação também confirmou que as expressões da largura da fratura, em função dos coeficientes da função tensão harmônica  $\Phi$  (equações 3.55 e 3.57), apresentadas primeiramente no trabalho de Rueda [Rued94] estão corretas. Shah não havia apresentado estas expressões, e, como todo o modelo se baseia nas mesmas, foi

considerado como sendo muito importante a verificação da exatidão das mesmas. Explicações detalhadas estão apresentadas no apêndice II.

Foi também explicitado o critério de quanto a fratura deve se propagar em cada direção (equações 5.4), como função dos fatores de intensidade de tensões, o que os demais autores não haviam feito.

Foi adotada geometria inicial de fratura com a relação  $H/L = 1$ , para melhorar o ajuste da curva do tempo de início de contato rocha-fluido, diferentemente do que vinha sendo utilizado pelos demais autores, que adotavam  $H/L = 2$ .

Na validação do modelo, vários foram os testes comparativos realizados com os modelos existentes na literatura. Os resultados demonstram a boa qualidade do modelo, para os casos em que se tem contrastes simétricos de tensões, entre a zona de interesse e as zonas adjacentes.

O modelo tentou abordar os casos assimétricos de contrastes de tensões, porém se mostrou bastante limitado. Apesar de o modelo de Rueda (SAHFRAC) apresentar os resultados para estes casos assimétricos, quase nenhuma explicação foi dada sobre a forma como isto foi feito.

Também surgiram algumas dificuldades quando se procurava simular fraturas para os casos em que se tem várias camadas, com módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson diferentes entre si. Como o modelo só permite a utilização de um único valor para o módulo de elasticidade e um único valor para o coeficiente de Poisson, algum tipo de ponderação necessita ser feita, aumentando a subjetividade na utilização dos dados de entrada.

Foi realizado um estudo de sensibilidade do modelo aos diversos parâmetros de entrada considerados mais relevantes. Este estudo (tabela 7.4) mostrou que o modelo proposto (Q3DFRAC) prediz corretamente o comportamento da geometria de fratura e da pressão de propagação, se comparado aos resultados disponíveis na literatura, para as alterações nos seguintes parâmetros: viscosidade aparente média, vazão de injeção, espessura da formação de interesse, fator de intensidade de tensões crítico, coeficiente global de filtração, coeficiente de perda inicial de filtrado, módulo de elasticidade e contrastes simétricos de tensões entre a zona de interesse e as zonas adjacentes.

## 8.2. Sugestões

A recomendação mais importante se refere à necessidade de se prosseguir os estudos, visando um melhor tratamento das possíveis assimetrias presentes nos dados de entrada, o que vai tornar o modelo muito mais poderoso. A possibilidade do deslocamento relativo entre o centro da elipse e a origem dos eixos, apresentada na figura 5.11, aparenta ser um caminho adequado para a eliminação desta limitação.

Testes mais completos precisam ser feitos para se encontrar uma regra confiável de ponderação, para os valores distintos do módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, para as diversas camadas envolvidas no fraturamento, já que o modelo somente utiliza um único par destes valores.

Este modelo pseudo-tridimensional também pode servir de base para melhorias nas análises de pressões, desenvolvidas por Nolte [Nolt90], e que tem como objetivo obter informações do ambiente que está sendo fraturado (contrastes de tensões, coeficiente global de filtração decorrente da interação rocha-fluido) e das geometrias de fratura executadas (comprimento, largura e altura).

## Nomenclatura

- A : área da fratura [ $m^2$ ]
- $\arctan( )$  : função arco-tangente [rd]
- b : largura da fratura [m]
- $b_{ij}$  : vetor dos coeficientes do polinômio que descreve largura da fratura (equação 3.55)
- $B_{ij}$  : vetor dos coeficientes do polinômio que descreve largura da fratura (equação 3.57)
- $C_{ij}$  : vetor dos coeficientes da função tensão harmônica
- $C_L$  : coeficiente global de perda de filtrado [ $m/\sqrt{s}$ ]
- $\cos( )$  : função co-seno
- d : derivada
- E : módulo de elasticidade linear [Pa]
- $E'$  : módulo de deformação plana ( $E' = E/(1-\nu^2)$ ) [Pa]
- $E(k)$  : integral elíptica completa de segundo tipo
- G : módulo de elasticidade ao cisalhamento [Pa]
- H : metade da altura da fratura no poço, em  $x = 0$  [m]
- $h(x)$  : metade da altura da fratura em função da posição [m]
- $H_R$  : metade da altura da rocha reservatório [m]
- $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$  : vetores unitários dos eixos cartesianos x, y e z, respectivamente
- $K_{IC}$  : fator de intensidade de tensões crítico, modo I [ $Pa\sqrt{m}$ ]
- $K_I$  : fator de intensidade de tensões, modo I [ $Pa\sqrt{m}$ ]
- $K_{IL}$  : fator de intensidade de tensões na fratura elíptica, modo I para  $x = L$  [ $Pa\sqrt{m}$ ]
- $K_{IH}$  : fator de intensidade de tensões na fratura elíptica, modo I para  $z = H$  [ $Pa\sqrt{m}$ ]
- $K_{Ih}$  : fator de intensidade de tensões na fratura elíptica, para  $z = -H$  [ $Pa\sqrt{m}$ ]
- $K(k)$  : integral elíptica completa de primeiro tipo
- k : módulo da integral elíptica ( $m = k^2$  e  $k'^2 = (L^2 - H^2)/L^2$ )
- $k'$  : módulo complementar da integral elíptica ( $k'^2 = H^2/L^2$  e  $k'^2 + k^2 = 1$ )
- $k^*$  : índice de consistência do fluido de fraturamento [ $Pa.s^n$ ]
- $k_f$  : permeabilidade de um duto de paredes paralelas [ $m^2$ ]

$L$	: comprimento de uma “asa” da fratura [m]
$m$	: parâmetro da integral elíptica
$n'$	: índice de comportamento do fluido de potência
$\vec{n}$	: vetor normal ao contorno da fratura elíptica, com sentido para o exterior
$p(x,z)$	: pressão dentro da fratura [Pa]
$P_{ij}$	: vetor coeficientes da distribuição de pressões no interior da fratura
$P_{ij}^n$	: vetor coeficientes da distribuição de pressões líquidas no interior da fratura
$Q$	: vazão volumétrica total de tratamento [ $m^3/s$ ]
$\bar{q}$	: vetor vazão volumétrica em uma “asa” da fratura por unidade de área [ $(m^3/s)/m^2$ ]
$q_L$	: velocidade de filtração do fluido de fraturamento para a formação [ $(m^3/s)/m^2$ ]
$r$	: distância radial normal à extremidade da fratura (equação 3.58) [m]
$r$	: distância radial após transformação conforme (equação 5.1) [m]
$S_p$	: coeficiente de perda inicial de filtrado [ $m^3/m^2$ ]
$\sin()$	: função seno
$t$	: tempo [s]
$\tan()$	: função tangente
$\vec{v}$	: velocidade [m/s]
$x$	: distância em relação ao poço [m]
$x,y,z$	: coordenadas cartesianas [m]

## Caracteres Gregos

$\Delta a$	: passo de propagação da fratura [m]
$\Phi$	: função tensão harmônica
$\Phi_{ij}$	: vetor dos coeficientes da função tensão harmônica
$\Gamma$	: superfície ou contorno da fratura elíptica
$\eta$	: eficiência volumétrica do fluido de fraturamento injetado [ $m^3/m^3$ ]
$\lambda, \mu, \nu$	: coordenadas elípticas
$\mu_a$	: viscosidade aparente média do fluido de fraturamento [Pa.s]
$\mu_{ap}$	: viscosidade aparente do fluido de fraturamento [Pa.s]
$\nu$	: coeficiente de Poisson
$\theta$	: ângulo da equação parametrizada da elipse [rd]
$\sigma$	: tensão de confinamento [Pa]
$\sigma_{ij}$	: vetor dos coeficientes da tensão de confinamento

- $\sigma_{zz}$  : tensão normal [Pa]
- $\tau$  : tempo de exposição ao fluido [s]
- $\tau_{xy}$  : tensão de cisalhamento [Pa]
- $\Omega$  : volume de controle da fratura elíptica

## Operadores Matemáticos

- : produto escalar
- $\Delta$  : variação
- $\Delta$  : operador Laplaciano em coordenadas cartesianas  $\left( = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$
- $\partial$  : derivada parcial
- $\nabla$  : operador gradiente em coordenadas cartesianas  $\left( = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{i}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{i}_z \right)$

## Subscrito

- f : fratura
- 0 : extremidade da fratura ou valor inicial
- L : perda de filtrado
- w : poço

## Símbolos

- { } : vetor coluna
- [ ] : vetor linha
- [ ] : matriz quadrada

## Bibliografia

- Abou84 Abou-Sayed, A.S.; Sinha, K.P.: "Evaluation of the Influence of In-Situ Reservoir Conditions on the Geometry of Hydraulic Fractures Using a 3-D Simulator: Part1- Technical Approach", SPE 12877, Unconventional Recovery Symposium, Pittsburgh, May 1984
- Abou84a Abou-Sayed, A.S.; Clifton, R.J.; Dougherty, R.L.; Morales, R.H.: "Evaluation of the Influence of In-Situ Reservoir Conditions on the Geometry of Hydraulic Fractures Using a 3-D Simulator: Part2- Case Studies", SPE 12878, Unconventional Recovery Symposium, Pittsburgh, May 1984
- Adva85 Advani, S.H.; et.al.: "Hydraulic Fracture Geometry Modeling, Prediction, and Comparison", SPE/DOE 13863, May 1985, SPE/DOE 1985 Low Permeability Gas Reservoirs, Colorado
- Adva86 Advani, S.H.; Lee, J.K.; Khattab, H.A.; Gurdogan, O.: "Fluid Flow and Structural Response Modeling Associated With the Mechanics Of Hydraulic Fracturing", SPEFE, June 1986, 309-318
- Adva90 Advani, S.H.; et.al.: "Three Dimensional Modeling of Hydraulic Fractures in Layered Media: Part I-Finite Element Formulations", SPEPE, May 1990, 133-141
- Bare62 Barenblatt, G.I.: "The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture", Advances of Applied Mechanics, Vol.7, eds., H.L.Dryden, et.al., Academic Press, 55-129, 1962
- BenN90 Ben Naceur, K.; et.al. : "Simulation of Fluid Flow in Hydraulic Fracturing: Implications for 3D Propagation", SPE 16032, May 1990
- Bout87 Boutéca, M.J.: "Hydraulic Fracturing Model Based on a Three-Dimensional Closed Form: Tests and Analysis of Fracture Geometry and Containment", SPE/DOE 16432, SPE/DOE Low Permeability Reservoirs Symposium, Denver, May 1987
- Byrd71 Byrd,P.F.; Friedman, M.D.: "Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists", Springer, New York, 1971
- Clar49 Clark, J.B.: "A Hydraulic Process for Increasing the Productivity of Wells", Trans.AIME, 186,1, 1949.
- Clif79 Clifton, R.J.; Abou-Sayed, A.S.: "On The Computation of the Three-Dimensional Geometry of Hydraulic Fractures", Paper SPE 7943, May 1979

- Clif81 Clifton, R.J.; Abou-Sayed, A.S.: "A Variational Approach to the Prediction of the Three-Dimensional Geometry of Hydraulic Fractures", SPE 9879, Low Permeability Symposium, Denver, May 1981
- Cook89 Cook, R.D.; Malkus, D.S.; Plesha, M.E.: "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, New York, 1989
- Cunh93 Cunha, C.; "Métodos Numéricos para as Engenharias e Ciências Aplicadas", Editora da Unicamp, 1993
- Dane73 Daneshy, A. A. : "On The Design of Vertical Hydraulic Fractures", JPT, 83-89, Jan.1973
- Econ89 Economides, M.J. e Nolte, K.G.: "Reservoir Stimulation"- 2nd Edition, Prentice Hall, 1989
- Engl63 England, A.H.; Green, A.E.: "Some Two-Dimensional Punch and Crack Problems in Classical Elasticity", Proceedings of the Camb.Phil.Soc., 489-500, 1963
- Fern98 Fernandes, P.D., Tese de Doutorado, UNICAMP, 1998 (comunicação privada)
- Geer69 Geerstma, J.; deKlerk, F.: "A Rapid Method of Predicting Width and Extent of Hydraulic Induced Fractures", JPT ,1571-81; Trans., AIME, 246, Dec.1969
- Gidl89 Gidley, J.G.; Holditch, S.A.: "Recent Advances in Hydraulic Fracturing", Monograph, vol.12, SPE, 1989.
- Gree50 Green, A.E.; Sneddon, I.N.: "The distribution of stress in the neighborhood of a flat elliptical crack in an elastic solid", Proc.Camb.Phil.Soc., 46, 159-163, 1950
- Hare93 Hareland, G.; et.al.: "Hydraulic Fracturing Design Otimization", SPE 26950, 1993 Eastern Regional Conference & Exhibition, Pittsburgh, 2-4 November 1993
- Hold93 Holditch, S.A.; Rahim, Z.: "Developing Data Sets for Three-Dimensional Fracture Propagation Models", SPE 26155, SPE Gas Technology Symposium, Calgary, 28-30 June, 1993
- Howa57 Howard, G.C.; Fast, C.R.: "Optimum Fluid Characteristics for Fracture Extension", Drilling and Production Practices API, 261-270, 1957
- Kant64 Kantorovich, L.V.; Krylov, V.I.: "Approximate Methods of Higher Analysis", Interscience Publishers, Inc- New York, 1964
- Kapl52 Kaplan, W.: "Advanced Calculus", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London, 1952

- Kass66 Kassir, M.K.; Sih, G.C.: "Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings", *Journal of Applied Mechanics*, 601-611, 1966
- Khri55 Khristianovich, S.A. and Zheltov, Y.P.: "Formation of Vertical Fractures by Means of Highly Viscous Liquid", *Proceedings of the Fourth World Pet. Congr., Rome (1955) Sec.II*, 579-86
- Lam86 Lam, K.Y.; et.al.: "A Complete Three-Dimensional Simulator for Analysis and Design of Hydraulic Fracturing", SPE 15266, *Unconventional Gas Technology Symposium of the Society of Petroleum Engineers held in Louisville, KY, May 18-21, 1986*.
- Luis86 Luiskutty, C.T.; Tomutsa, L.; Palmer, I.D.: "A Semi-analytical Model of Hydraulic Fracture Growth Through Weak Barriers", SPE 15012, *Permian Basin Oil & Gas Recovery Conference, Midland, TX, March 1986*
- Magn66 Magnus, W.; Oberhettinger, D; Soni, R.P.: "Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1966
- Mend84 Mendelsohn, D.A.: "A Review of Hydraulic Fracture Modeling-Part I: General Concepts, 2D Models, Motivation for 3D Modeling", *J.Energy Res.Tech.*, 106, 369-376, Sept 1984
- Mend84b Mendelsohn, D.A.: "A Review of Hydraulic Fracture Modeling- II: 3D Modeling and Vertical Growth in Layered Rock", *J.Energy Res.Tech.*, 106, 543-553, Dec 1984
- Meye86 Meyer, B.R.: "Design Formulae for 2-D and 3-D Vertical Hydraulic Fractures: Model Comparison and Parametric Studies", SPE 15240, *Unconventional Gas Technology Symposium of the Society of Petroleum Engineers, May 18-21, 1986*.
- Meye89 Meyer, B.R.: "Three-Dimensional Hydraulic Fracturing Simulation on Personal Computers: Theory and Comparison Studies", SPE 19329, *SPE Eastern Regional Meeting, Morgantown, October 24-27, 1989*
- Meye90 Meyer, B.R. et.al.: "Real-Time 3-D Hydraulic Fracturing Simulation: Theory and Field Case Studies", SPE 20658, *65th Annual Technical Conference and Exhibition of SPE, New Orleans, September 23-26, 1990*
- Mora89 Morale, R.H.: "Microcomputer Analysis of Hydraulic Fracture Behavior With a Pseudo-Three-Dimensional Simulator", *SPEPE*, February 1989, 69-74
- Mori88 Morita, N.; Whitfill, D.L.; Wahl, H.A.: "Stress-Intensity Factor and Fracture Cross-Sectional Shape Predictions From a Three-Dimensional Model For Hydraulically Induced Fractures", *JPT*, October 1988, 1329-1342

- Musk82 Muskat, M.: "The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media", IHRDC Publication - 1982
- Nolt86 Nolte, K.G.: "A General Analysis of Fracturing Pressure Decline With Application to Three Models", SPEFE, December 1986, 571-583
- Nolt90 Nolte, K.G.: "Fracturing Pressure Analysis: Deviations From Ideal Assumptions", SPE 20704, 65th Annual Technical Conference, New Orleans, September 1990, 839-854
- Nolt93 Nolte, K.G.; Mack, M.G.; Lie, W.L.: "A Systematic Method for Applying Fracturing Pressure Decline: Part I", SPE 25845, SPE Rocky Mountain Regional/Low Permeability Reservoirs Symposium, April 1993, 31-50
- Nord72 Nordgreen, R.P.: "Propagation of a Vertical Hydraulic Fracture", SPEJ, August 1972, 306-314
- Ouya94 Ouyang, S.: "Propagation of Hydraulically Induced Fractures With Proppant Transport", PhD Thesis, The University of Texas at Austin, May, 1994
- Palm85 Palmer, I.D.; Carrol Jr., H.B.: "Three-Dimensional Hydraulic Fracture Propagation in the Presence of Stress Variations", SPEJ, December 1983, 870-878
- Perk61 Perkins, T.K.; Kern, L.R.: "Widths of Hydraulic Fractures", JPT, September 1961, 937-949
- Prat61 Prats, M.: "Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior - Incompressible Fluid Case", SPEJ, pp.105-118 - 1961
- Rahi93 Rahim, Z.; et.al.: "Evaluation of Fracture Treatments Using a Layered Reservoir Description: Field Examples", SPE 26187, SPE Gas Technology Symposium, Calgary, 28-30 June, 1993
- Rice68 Rice, J.R.: "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", J. Appl. Mech. Am. Soc. Mech. Engrs, 1968, 35, 379-386
- Rued94 Rueda, J.I.; Rahim, Z.; Holditch, S.A.: "A Semi-Analytical Solution in Three-Dimensional Hydraulic Fracture Propagation in Multistress Media", SPE 27711, 1994 SPE Permian Basin Oil and Gas Recovery Conference, Texas, March 1994
- Sege67a Segedin, C.M.: "Some Three-dimensional Mixed Boundary Value Problems in Elasticity", University of Washington, Dep.of Aeronautics and Astronautics, Rep.No.67-3, 1967
- Sege67b Segedin, C.M.: "Thermoelastic Stresses due to uniform heat flow past rigid elliptic inclusions", University of Washington, Dep.of Aeronautics and Astronautics, Rep.No.67-5, 1967

- Sett82 Settari, A.; Cleary, M.P.: "Development and Testing of a Pseudo-Three-Dimensional Model of Hydraulic Fracture Geometry", SPE 10505, SPE Symposium on Reservoir Simulation of the SPE of AIME, New Orleans, 1982
- Sett84 Settari, Antonin; Cleary, Michael P.: "Three-Dimensional Simulation of Hydraulic Fracturing", JPT, July 1984, 1177-1190
- Shah71 Shah, R.C.; Kobayashi, A.S.; "Stress Intensity Factor for an Elliptical Crack under Arbitrary Normal Loading", Eng.Frac.Mech., Vol.3, (1971), 71-96
- Sned46 Sneddon, I.N.: "The Distribution of Stress in the Neighbourhood of a Crack in an Elastic Solid", Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 187, 1946, 229-260
- Sous92 Sousa, J.L.A.O.: "Three-Dimensional Simulation of Near-Wellbore Phenomena Related to Hydraulic Fracturing from a Perforated Wellbore", Tese de Doutorado, Cornell University, May 1992
- Tada73 Tada, H.; Paris, P.C.; Erwin, N.G.R.: "The Stress Analysis Handbook", All Research, Hellertown, PA, 1973
- Vand86 Vandamme, L.: "A Three-Dimensional Displacement Discontinuity Model for the Analysis of Hydraulically Propagated Fractures", PhD.Thesis, University of Toronto, 1986.
- vanE82 van Eekelen, H.A.M.: "Hydraulic Fracture Geometry: Fracture Containment in Layered Formations", SPEJ, June 1982, 341-349
- Veat86 Veatch, R.W.; Muschovidis, Z.A.: "An Overview of Recent Advances in Hydraulic Fracturing Technology", SPE 14085, SPE Intl.Meeting on Petroleum Engineering, Beijing, March 1986
- Warp93 Warpinski, N.R.; et.al.: "Comparison Study of Hydraulic Fracturing Models: Test Case-GRI Staged Field Experiment No.3", SPE 25890, SPE Rocky Mountain Regional/Low Permeability Reservoirs Symposium, Denver, April 12-14, 1993
- Weng91 Weng, X.: "Incorporation of 2D Fluid Flow Into a Pseudo-3D Hydraulic Fracturing Simulator", SPE 21849, SPE Rocky Mountain Regional Meeting and Low Permeability Reservoirs Symposium, Denver, April 15-17, 1991

# APÊNDICE I

## REGRA DE LEIBNITZ GENERALIZADA

### Regra de Leibnitz [Kap152]

Dada a função  $f(x,t)$  contínua e tendo derivada  $\partial f/\partial t$  em um domínio no plano  $xt$ , o qual inclui o retângulo  $a \leq x \leq b$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Então para  $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x,t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) dx \quad (I.1)$$

ou em outras palavras, derivada e integração podem ser intercambiadas

### Teorema

Seja a função  $f(x,t)$  contínua e tendo derivada  $\partial f/\partial t$  em um domínio no plano  $xt$ , que satisfaça a regra de Leibnitz acima. Em adição, sendo  $a(t)$  e  $b(t)$  definidas e tendo derivadas contínuas para  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Então para  $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t) dx = f[b(t), t]b'(t) - f[a(t), t]a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) dx \quad (I.2)$$

### Generalização do Teorema para Derivada Segunda

Seja a função  $f(x,t)$  contínua e tendo derivada  $\partial f/\partial t$  em um domínio no plano  $xt$ , que satisfaça a regra de Leibnitz acima. Em adição, sendo  $a(t)$  e  $b(t)$  definidas e tendo derivadas contínuas para  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Então para  $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t) dx &= \frac{d}{dt} \left[ f[b(t), t]b'(t) - f[a(t), t]a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) dx \right] = \\ &= f'(x,t)|_{x=b(t)} b'(t) - f'(x,t)|_{x=a(t)} a'(t) + f'[b(t), t]b'(t) + f[b(t), t]b''(t) - \\ &\quad - f'[a(t), t]a'(t) - f[a(t), t]a''(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) dx \end{aligned} \quad (I.3)$$

Somente para registro, observar a diferença dos seguintes termos, na expressão acima:

$$f'(x,t)|_{x=b(t)} \neq f'[b(t), t] \quad \text{e} \quad f'(x,t)|_{x=a(t)} \neq f'[a(t), t] \quad (I.4)$$

## Generalização do Teorema para Derivada de Integral Dupla

Seja a função  $f(x,z,t)$  contínua e tendo derivada  $\partial f/\partial t$  em um domínio  $xzt$ , que satisfaça a regra de Leibnitz acima. Em adição, sendo  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  e  $d(t)$  definidas e tendo derivadas contínuas para  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Então para  $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{c(t)}^{d(t)} dz \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, z, t) dx &= \int_{c(t)}^{d(t)} dz \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, z, t) dx + \int_{c(t)}^{d(t)} f[b(t), z, t] b'(t) dz - \\ &- \int_{c(t)}^{d(t)} f[a(t), z, t] a'(t) dz + d'(t) \int_{a(t)}^{b(t)} f[x, d(t), t] dx - c'(t) \int_{a(t)}^{b(t)} f[x, c(t), t] dx \end{aligned} \quad (I.5)$$

## APÊNDICE II

### EQUAÇÃO DA LARGURA DA FRATURA DO TRABALHO DE SHAH E KOBAYASHI [Shah71]

Na determinação das expressões analíticas para a abertura da fratura (b), apresentada nas equações (3.55) e (3.57), é necessário encontrar a derivada da função tensão harmônica  $\Phi$ , em relação a variável  $y$ , como apresentado na equação (3.20), já que a largura (b) é igual a duas vezes o deslocamento  $v$  (equação 3.20, reproduzida abaixo), na região interna à fratura elíptica, no plano  $y = 0$ ,

$$v = y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Como a fratura elíptica é formada pelo deslocamento dos pontos do plano  $y = 0$ , da região  $(x^2/L^2) + (z^2/H^2) < 1$ , o primeiro termo do lado direito da igualdade é igual a zero. Como citado anteriormente, a coordenada elipsoidal  $\lambda$  é igual a zero, no interior na fratura elíptica, no plano  $y = 0$ .

Sabendo que a função tensão harmônica  $\Phi$ , é dada pela equação (3.46),

$$\Phi = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \Phi_{ij} = \Phi_{00} + \Phi_{10} + \Phi_{01} + \Phi_{20} + \Phi_{11} + \\ + \Phi_{02} + \Phi_{30} + \Phi_{21} + \Phi_{12} + \Phi_{03}$$

e que as componentes  $\Phi_{ij}$  da função tensão harmônica estão apresentadas nas equações de (3.47a) a (3.47j), resta calcular suas derivadas, para  $\lambda = 0$  (interior da fratura).

Por simplicidade, será apresentado um procedimento completo para o cálculo da primeira derivada da componente  $\Phi_{00}$ , da função tensão harmônica  $\Phi$ , e que pode ser estendida para os demais termos.

Dado uma fratura elíptica plana, com semi-eixos (L,H) no plano  $xz$ , resultante do deslocamento dos pontos do plano  $y = 0$ , da região  $(x^2/L^2) + (z^2/H^2) < 1$ , Segedin [Sege67] apresentou uma função harmônica (equação 3.38), que faz uso de coordenadas elipsoidais ( $\lambda, \mu, \nu$ ), cujas relações com as coordenadas cartesianas estão apresentadas nas equações (3.35), (3.36) e (3.37).

Vários conceitos das integrais elípticas são utilizados, e duas referências podem ser consultadas para maiores esclarecimentos: Magnus, Oberhettinger e Soni [Magn66] e Byrd e Friedman [Byrd71].

A função elíptica Jacobiana  $\text{sn} u_1$  está relacionada com a variável elipsoidal  $\lambda$  por:

$$\operatorname{sn}^2 u_1 = \frac{L^2}{L^2 + \lambda} \quad (\text{II.1})$$

onde o módulo da integral elíptica  $k$ , e o módulo complementar  $k'$  são definidos como

$$k^2 = \frac{L^2 - H^2}{L^2} \quad (\text{II.2})$$

$$k'^2 = \frac{H^2}{L^2} \quad (\text{II.3})$$

As seguintes notações padrão são utilizadas:

$$\begin{aligned} \operatorname{tnu}_1 &= \frac{\operatorname{snu}_1}{\operatorname{cnu}_1}; & \operatorname{dcu}_1 &= \frac{d\operatorname{nu}_1}{\operatorname{cnu}_1}; & \operatorname{cdu}_1 &= \frac{\operatorname{cnu}_1}{d\operatorname{nu}_1}; \\ \operatorname{ndu}_1 &= \frac{1}{d\operatorname{nu}_1}; & \operatorname{ncu}_1 &= \frac{1}{\operatorname{cnu}_1}; & \operatorname{sdu}_1 &= \frac{\operatorname{snu}_1}{d\operatorname{nu}_1} \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

e duas das relações fundamentais para as funções Jacobianas são apresentadas a seguir

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1 \quad (\text{II.5})$$

$$k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1 \quad (\text{II.6})$$

Sabe-se também que:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{2y(L^2 + \lambda)(H^2 + \lambda)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} \quad (\text{II.7})$$

Conhecendo-se a expressão para  $\Phi_{00}$  (equação 3.47a),

$$\Phi_{00} = C_{00} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w(s) ds}{\sqrt{Q(s)}}$$

onde  $w(s) = 1 - \frac{x^2}{L^2 + s} - \frac{y^2}{s} - \frac{z^2}{H^2 + s}$

e  $Q(s) = s(L^2 + s)(H^2 + s)$

deve-se utilizar a regra de Leibnitz para o cálculo da derivada da integral (apêndice I), resultando

$$\left. \frac{\partial \Phi_{00}}{\partial y} \right|_{\lambda \rightarrow 0} = C_{00} \left[ \int_{\lambda}^{\infty} \left( \frac{-2y}{s} \right) \frac{ds}{\sqrt{Q(s)}} - \frac{w(\lambda)}{\sqrt{Q(\lambda)}} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right] \quad (\text{II.8})$$

Utilizando o resultado da integral apresentado no apêndice II do trabalho de Shah [Shah71], tem-se:

$$\left. \frac{\partial \Phi_{00}}{\partial y} \right|_{\lambda \rightarrow 0} = C_{00} \left[ (-2y) \frac{2}{LH^2} \left( -E(u_1) + \frac{snu_1}{cnu_1} dnu_1 \right) - \frac{w(\lambda)}{\sqrt{Q(\lambda)}} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right]_{\lambda \rightarrow 0} \quad (\text{II.9})$$

Substituindo (II.1) em (II.5) e (II.6), e tomando o limite de  $\lambda$  tendendo a zero, tem-se

$$\frac{snu_1}{cnu_1} dnu_1 = \frac{H}{\sqrt{\lambda}} \quad (\text{II.10})$$

Substituindo 3.39, 3.40 e II.10 em II.9 tem-se,

$$\left. \frac{\partial \Phi_{00}}{\partial y} \right|_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} = C_{00} \left[ \frac{4}{LH^2} \left( yE(u_1) - H \frac{y}{\sqrt{\lambda}} \right) - \left( 1 - \frac{x^2}{L^2 + \lambda} - \frac{z^2}{H^2 + \lambda} \right) \frac{2}{\sqrt{\mu\nu}} \frac{yLH}{\sqrt{\lambda\mu\nu}} + \right. \\ \left. + \frac{y^2}{\lambda} \frac{2}{\sqrt{\mu\nu}} \frac{yLH}{\sqrt{\lambda\mu\nu}} \right]_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \quad (\text{II.11})$$

Substituindo a equação (3.36), que relaciona as coordenadas elípticas e as coordenadas elipsoidais, em (II.11) resulta

$$\left. \frac{\partial \Phi_{00}}{\partial y} \right|_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} = C_{00} \left[ -\frac{2\sqrt{\mu\nu}}{L^2 H^2} - \left( 1 - \frac{x^2}{L^2 + \lambda} - \frac{z^2}{H^2 + \lambda} \right) \frac{2}{\sqrt{\mu\nu}} \right]_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \quad (\text{II.12})$$

Resolvendo, agora, o sistema de equações em  $\mu$  e  $\nu$ , para  $\lambda$  tendendo a zero, dado pelas equações (3.35), (3.36) e (3.37), e substituindo  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$  na equação (II.12), chega-se ao resultado final procurado:

$$\left. \frac{\partial \Phi_{00}}{\partial y} \right|_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} = -\frac{4C_{00}}{LH} \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2} - \frac{z^2}{H^2}} \quad (\text{II.13})$$

Como o contorno da fratura é formada pelo deslocamento dos pontos do plano  $y = 0$ , da região  $(x^2/L^2) + (z^2/H^2) < 1$ , e nas coordenadas elipsoidais a variável  $\lambda$  correspondente assume valor igual a zero, é muito importante nos procedimentos mostrados acima a eliminação da variável  $y$ , que possui relação com a variável  $\lambda$ , antes de se efetuar o limite para  $\lambda$  tendendo a zero, ou seja, somente quando a variável  $\lambda$  não mais vier acompanhada da variável  $y$ , ou vice versa, é que o limite deve ser tomado.

Este mesmo procedimento deve ser feito com as demais componentes da função tensão harmônica, de tal forma, que quando forem somadas suas derivadas, para  $\lambda$  tendendo a zero, chega-se a expressão da largura da fratura apresentada na equação (3.55), ou apresentada na sua forma equivalente dada pela equação (3.57).

## APÊNDICE III

### CRITÉRIO DE PROPAGAÇÃO BASEADO NA MÁXIMA TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA

Em geral, os critérios de propagação utilizados para se determinar a propagação de cada ponto da borda da fratura são simplificados. O mesmo acontece com o critério adotado no modelo proposto (Q3DFRAC), que está apresentado na equação 5.4, para contrastes simétricos de tensões.

Como citado no capítulo 5, estudou-se também um critério de propagação para fratura plana, baseado na maximização da energia potencial total durante a propagação da fratura.

Para o cálculo da energia potencial liberada na propagação ( $\Delta E$ ) (figura III.1), com contrastes simétricos de tensões, utiliza-se a seguinte equação:

$$\Delta E(a(s)) = \int_0^l ds \int_0^{a(s)} G(\alpha, s) d\alpha \quad (\text{III.1})$$

- onde  $G$  : taxa de liberação de energia, correspondente a  $K_I$   
 $s$  : coordenada sobre a borda da fratura, anterior à propagação  
 $l$  : comprimento da borda da fratura, anterior à propagação  
 $a(s)$  : extensão da propagação de cada ponto da fratura, de coordenada  $s$

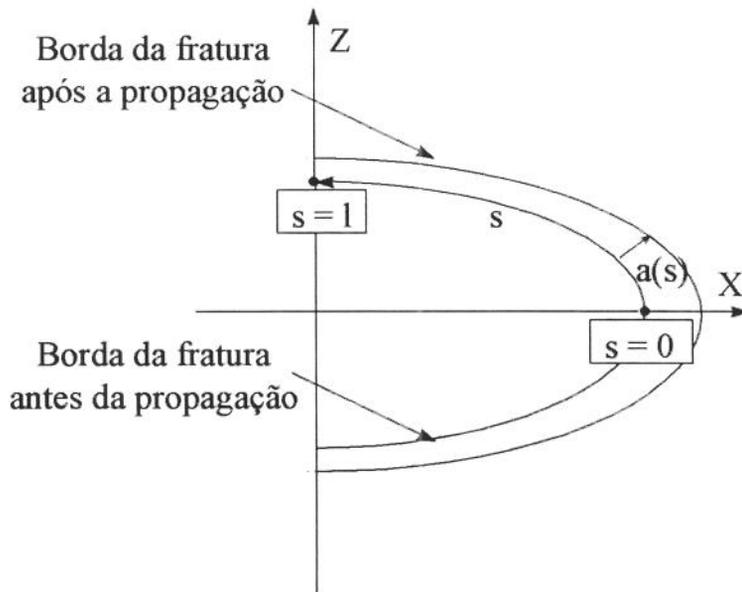


Figura III.1 - Definição geométrica para a propagação de fratura

sendo que, para o estado plano de deformações, tem-se que

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \quad (\text{III.2})$$

Como foi estabelecido um critério do comportamento dos coeficientes  $C_{ij}$ , da função tensão harmônica  $\Phi$  (item 5.6.2.1), durante a propagação, é possível calcular o fator de intensidade de tensões (equação 3.65) em cada ponto do domínio da integral apresentada na equação III.1.

Para encontrar um máximo desta função, é necessário comparar a energia liberada para as diversas geometrias finais possíveis, após a propagação, utilizando a restrição de que a área propagada deve ser a mesma para todos os casos comparados.

Para verificar a consistência do critério proposto, utilizou-se os coeficientes ( $C_{ij}$ ) da função tensão harmônica ( $\Phi$ ) obtidos num passo qualquer da propagação da fratura, dos casos analisados para validação do modelo, com o critério simplificado de propagação dado pela equação 5.4, e que está sendo utilizado pelo modelo proposto (Q3DFRAC). Pela boa qualidade dos resultados obtidos com o critério simplificado, aguardava-se resultados similares para o novo critério.

Para se encontrar o ponto de máximo, com a restrição de que a área propagada  $\Delta A$  deve ser constante em todos os casos, calcula-se três geometrias distintas possíveis:

- propagação máxima no eixo x e propagação igual a zero no eixo z;
- propagação zero no eixo x e propagação máxima no eixo z;
- e uma situação intermediária, com propagações iguais nos eixos x e z.

E com estas três geometrias distintas, três valores para a taxa de liberação de energia são encontrados com a equação III.1.

Para contrastes simétricos de tensões, como o modelo de baseia em fraturas elípticas, para uma dada área de propagação ( $\Delta A$ ), existe somente uma incógnita no problema, que é o deslocamento no eixo x ( $\Delta L$ ) ou no eixo z ( $\Delta H$ ), já que o deslocamento para  $z = H$  é igual ao deslocamento para  $z = -H$ . É por este motivo, que na figura III.1, a integral é efetuada somente no primeiro quadrante, devido à simetria existente. Escolhendo um dos deslocamentos como incógnita,  $\Delta L$  ou  $\Delta H$ , o outro deslocamento deixa de ser incógnita, pois é função do próprio deslocamento incógnita e da área de propagação.

Para o caso de contrastes assimétricos de tensões, novas considerações necessitam ser feitas.

Com os resultados obtidos da energia total liberada versus deslocamento no eixo x ( $\Delta L$ ), por exemplo, através de um ajuste com polinômio do segundo grau, é encontrado um ponto de máximo (figura III.2) entre o deslocamento máximo e deslocamento zero (resultado esperado). Com este ponto de máximo, descarta-se um dos deslocamentos e repete-se o processo até que não se encontre diferença significativa de deslocamento (tolerância) entre dois passos consecutivos.

Partindo da premissa que os resultados até então disponíveis do modelo Q3DFRAC, com o critério simplificado de propagação de fratura, estavam coerentes com aqueles disponíveis na literatura, esperava-se encontrar, com o novo critério, propagações similares às propagações já disponíveis, com o procedimento descrito no parágrafo anterior, o que não se verificou. Isto é, para encontrar propagações similares às que estavam disponíveis, seria necessário encontrar uma curva quadrática para ajuste da energia total liberada ( $\Delta E$ ) versus deslocamento (figura III.2) cujo máximo estivesse entre os dois extremos de propagação de  $\Delta L$ , ou seja entre  $\Delta L_{\max}$  e zero.

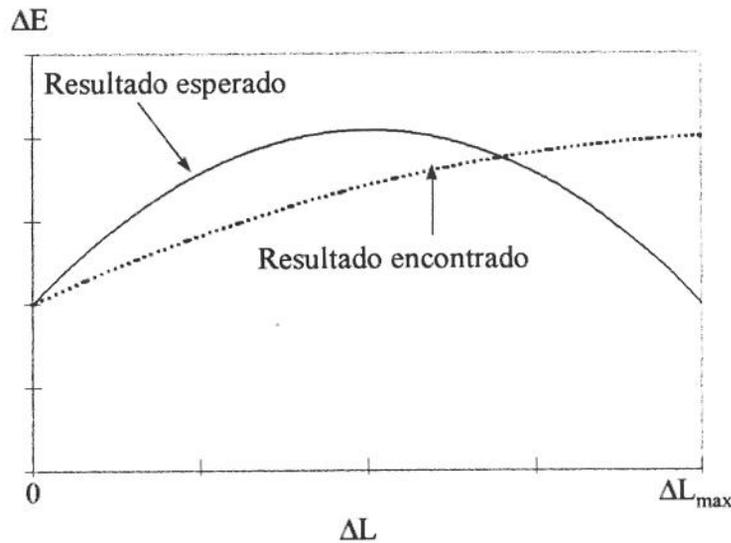


Figura III.2 - Comparação entre os resultados esperados e os resultados encontrados para a energia total liberada

O resultado encontrado (figura III.2), diferente do esperado, indica propagação máxima no eixo x ( $\Delta L = \Delta L_{\max}$ ), e propagação zero no eixo z ( $\Delta Z = 0$ ), o que foi considerado inadequado.

O resultado encontrado somente foi igual ao esperado para o caso específico de fratura radial. Neste caso, o ponto de máxima taxa de liberação de energia é encontrado quando as propagações nos eixos x e z são iguais, o que garante a propagação radial esperada.

Não foi pesquisado ainda se o problema está relacionado com o comportamento dos coeficientes  $C_{ij}$  da função tensão harmônica  $\Phi$  ou se o critério tem restrições devido ao formato elíptico imposto para a fratura.

Novos estudos precisam ser feitos sobre este critério de propagação.